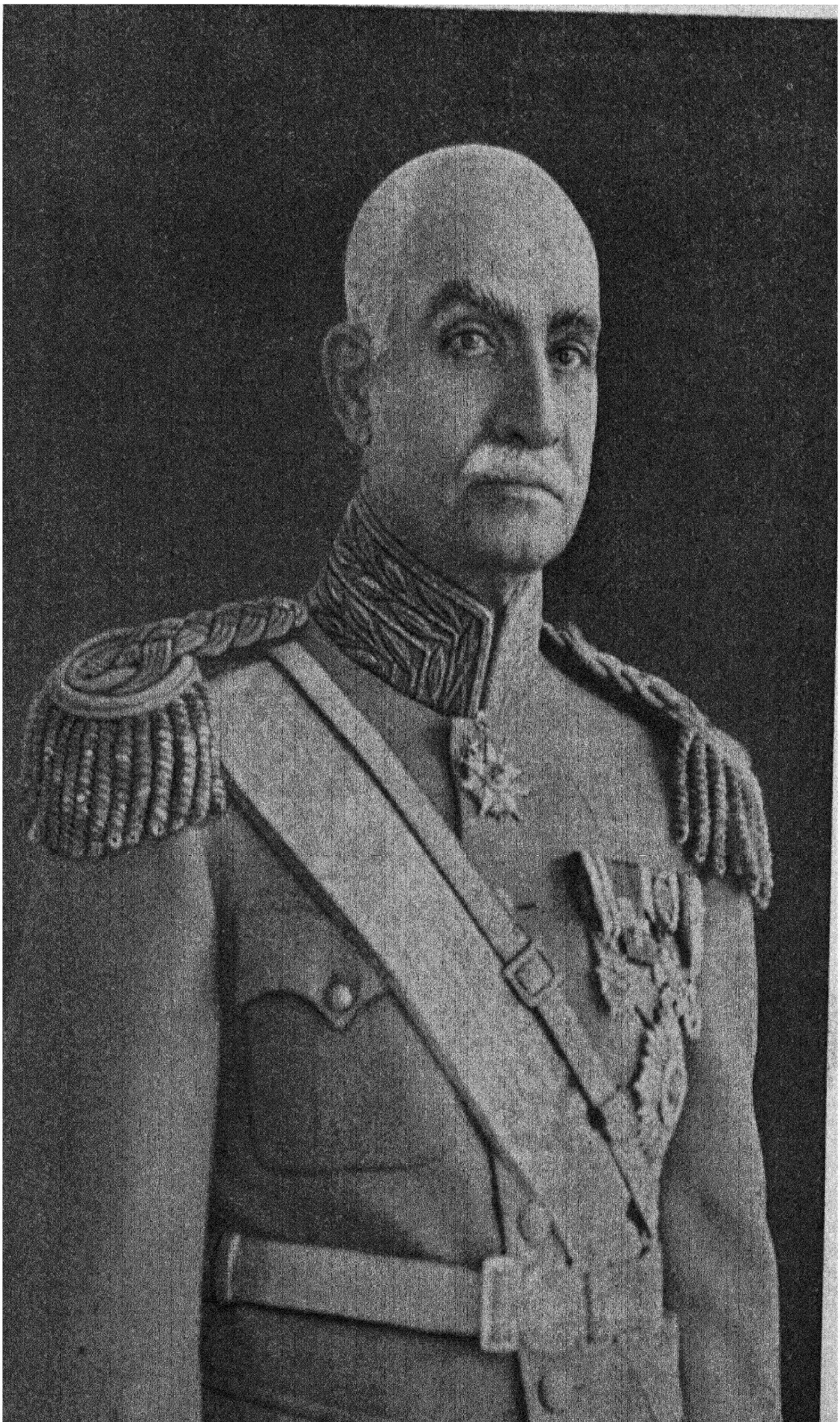
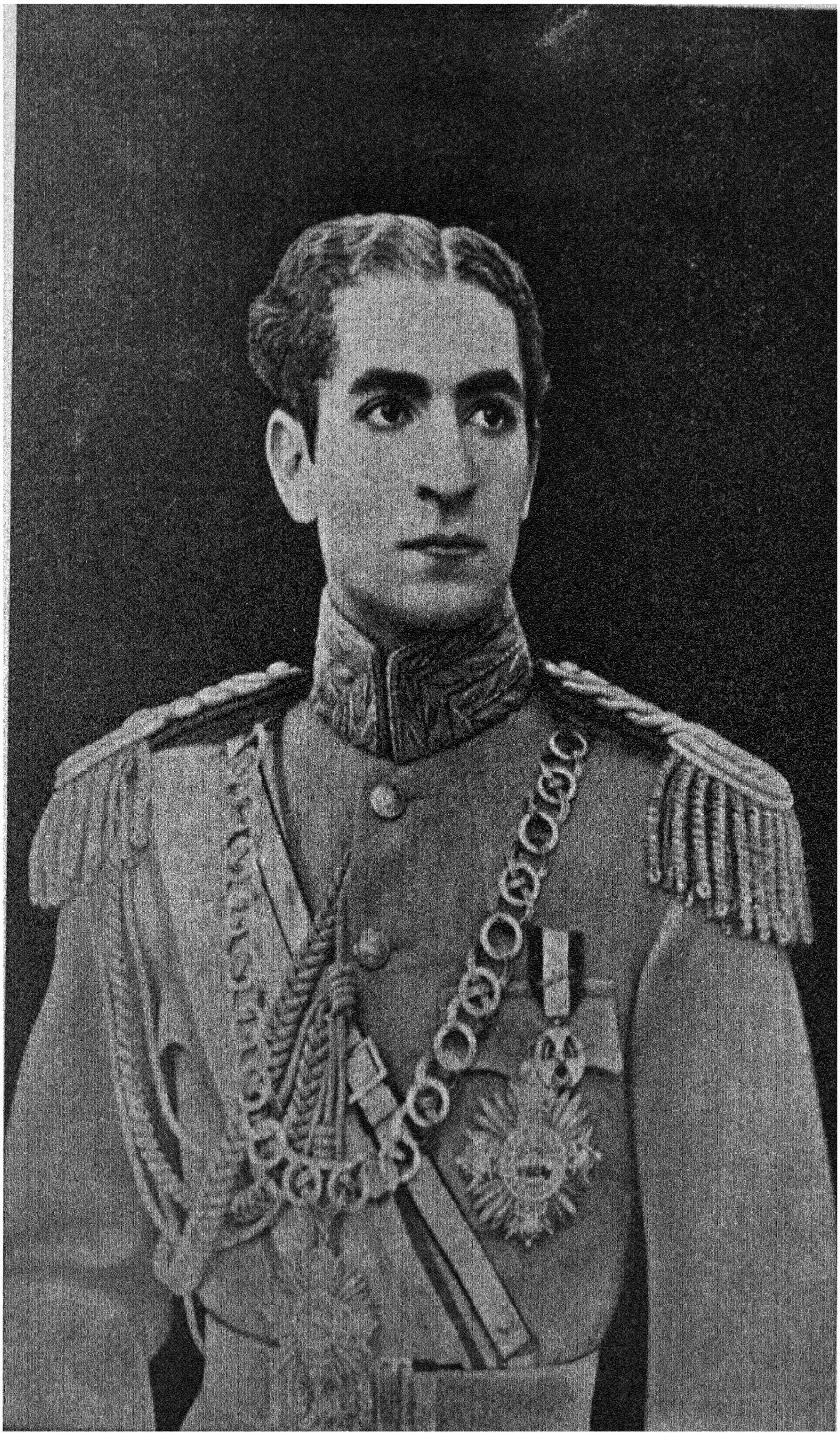
UNIVERSAL LIBRARY





توانا بود هر که دانا بود

وزارت فرهنگ

مثلثات

برای سال پنجم دبیرستانها

۱۳۲۰

چاپخانه ایران

آغاز

در این عصر خجسته که ارادهٔ خسروانهٔ شاهنشاه دانش‌پرور اعلیحضرت رضا شاه پهلوی و توجهات حکیمانهٔ والاحضرت همایون والاتیعهد بتوسعه و ترقی علوم و فنون و رفع هرگونه نقص و اختلاف در شئون اجتماعی کشور معطوف است، وزارت فرهنگ لازم دانست که برنامهٔ آموزشگاهها را با این منظور عالی کاملاً موافق نماید، ونخست باصلاح برنامهٔ تحصیلات متوسطه پرداخت، و چون اجراء برنامه بی اصلاح کتب درسی سودمند نبود در تاریخ ۲۷ مهرماه ۱۳۱۷ تصویب‌نامه از هیئت وزیران گذرانید که نگارش کتب دبیرستانی را برنسق واحد و داشتن شرایط لازم ایجاب میکرد، و بموجب آن هیئتی از استادان و دانشیاران و دبیران که پیشینهٔ تألیف و تدریس داشتند بنام کمیسیون تهیه و چاپ کتب برگزیده شد تا برای انجام این امر مقرراتی وضع کنند که همه کتب دبیرستانی بر طبق یک اسلوب مطلوب و موافق با اصول آموزش و پرورش نگارش یافته علاوه بر مواد علمی و ادبی مؤید خصال ملی و ملکات راسخه باشد که از عهد باستان سرشتهٔ نهاد ایرانیان بوده، مانند میهن‌پرستی و شاه‌دوستی

و راست گفتاری و درست کرداری و دیگر صفات و اخلاق نیکو که منظور اصلی از

هر تعلیم و تربیت میباشد .

سپس به پیشنهاد این کمیسیون تألیف کتاب درسی هر یک از مواد برنامه بچندتن

از کسانی که آزموده و شایستگی داشتند ارجاع شد .

اینک کتاب مثلثات برای سال پنجم دبیرستانها که تألیف آن به :

آقای محمد وحید مدیر کل وزارت فرهنگ

آقای تقی فاطمی استاد دانشگاه

واگذار شده بود از طرف وزارت فرهنگ منتشر میشود که در همه دبیرستانهای

پسران و دختران کشور منحصراً تدریس شود .

وزیر فرهنگ

بهمن میرزا قاجار

بخش نخست

مراجعه بدرس های پیش

۱- پیش از شروع برنامهٔ امسال دستورها و اتحادهای مهم مثلثاتی را که سال پیش خوانده ایم از نو یادآوری مینمائیم.

این دستورها را طوری باید آموخت که در بکار بردن آنها هیچ تردیدی نباشد و در هر مسئله بدانیم کدامیک از آنها باید بکار برده شود:

دستورها و اتحادهای مهم

دستور تبدیل یکه های کمان بیکدیگر (α اندازهٔ کمان بحسب رادیان - n و n' اندازهٔ آن بترتیب با زینه و گراد):

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{n}{180} = \frac{n'}{200} \qquad (1)$$

بستگی های میان پردازشهای مثلثاتی یک کمان (یا یک گوشه):

(۲) $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(۳) $$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(۴) $$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{tg\, x}$$

(۵) $$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

(۶) $$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

جدول خطهای مثلثاتی برخی از کمانها (یا گوشه ها)

A	$0°$ یا 0	$30°$ یا $\frac{\pi}{6}$	$45°$ یا $\frac{\pi}{4}$	$60°$ یا $\frac{\pi}{3}$	$90°$ یا $\frac{\pi}{2}$
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\, A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot A$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

اندازهٔ جبری کمانهائیکه سرِ آنها در A و تهِ آنها در M است :

(۷) $$\begin{cases} \overset{\frown}{AM} = \alpha + 2K\pi \\ \overset{\frown}{AM} = n^\circ + K \cdot 360^\circ \\ \overset{\frown}{AM} = n^g + K \cdot 400^g \end{cases}$$

(α رادیان و n زینه و n گراد اندازهٔ جبری یکی از کمانهای AM است
و k عدد درست)

اندازهٔ جبری گوشهٔ میان دو نیم خط یا دو آسه (ox پهلوی نخست و oy پهلوی دوم گوشه) :

$$\begin{cases} (ox\,,oy) = \widehat{xoy} = \alpha + 2K\pi \\ (ox\,,oy) = \widehat{xoy} = n^{\circ} + K\cdot 360^{\circ} \\ (ox\,,oy) = \widehat{xoy} = n^{g} + K\cdot 400^{g} \end{cases} \qquad (۷)$$

کمانهائی که یکی از پردازشهای مثلثاتی آنها داده شده است .

اگر داشته باشیم $\sin x = \sin\alpha$

یعنی اگر گوشه‌ای مانند α بشناسیم که سینوس آن برابر سینوس گوشهٔ x باشد خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2K\pi \\ \text{و یا} \\ x = \pi - \alpha + 2K\pi \end{cases} \qquad (۸)$$

اگر داشته باشیم $\cos x = \cos\alpha$

خواهیم داشت :

$$x = \pm\alpha + 2K\pi \qquad (۹)$$

اگر داشته باشیم $tg x = tg \alpha$

خواهیم داشت : $x = \alpha + K\pi$ (۱۰)

واگر داشته باشیم $\cot x = \cot \alpha$

خواهیم داشت : $x = \alpha + K\pi$ (۱۱)

یعنی بعبارت دیگر :

(۸) $$arc \sin(\sin\alpha) = \begin{cases} \alpha + 2K\pi \\ \pi - \alpha + 2K\pi \end{cases}$$

(۹) $$arc \cos(\cos\alpha) = \pm \alpha + 2K\pi$$

(۱۰) $$arc\ tg(tg\alpha) = \alpha + K\pi$$

(۱۱) $$arc \cot(\cot\alpha) = \alpha + K\pi$$

[$arc \sin(\sin\alpha)$ یعنی کمانی که سینوس آن برابر سینوس α است]

تبصره - غرض از $arc \sin a$ (A بزرگ) کمانیست α میان $-90°$ و $+90°$ که سینوس آن برابر a باشد :

(۸)' $$Arc \sin a = \alpha \qquad -90° < \alpha < +90°$$

همچنین $\operatorname{Arc} \cos a$ کمانیست میان ۰ و ۱۸۰ که سینوس متمم آن a باشد

$$0^\circ < \operatorname{Arc} \cos a < 180^\circ \qquad (9)$$

همچنین $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} a$ کمانی است میان -90° و $+90^\circ$ که تانژانت آن a باشد

$$-90^\circ < \operatorname{Arc} \operatorname{tg} a < +90^\circ \qquad (10)$$

همچنین $\operatorname{Arc} \cot a$ کمانی است میان ۰ و ۱۸۰ که تانژانت متمم آن a باشد

$$0^\circ < \operatorname{Arc} \cot a < 180^\circ \qquad (11)$$

بستگی میان خط های مثلثاتی برخی از کمانها (یا گوشه ها)

الف ـ کمانهای مکمّل ـ دو کمان مکمّل دارای یک سینوس میباشند ولی دیگر خط های مثلثاتی آنها قرینهٔ یکدیگرند:

$$(12)\quad \begin{cases} \sin(\pi - a) = \sin a. \\ \cos(\pi - a) = -\cos a \\ \operatorname{tg}(\pi - a) = -\operatorname{tg} a \\ \cot(\pi - a) = -\cot a \end{cases}$$

ب ـ کمانهای قرینه ـ دو کمان قرینه دارای یک سینوس متمم میباشند ولی دیگر

خط های مثلثاتی آنها عددهائی میباشند قرینه یکدیگر :

$$(۱۳)\quad \begin{cases} \sin(-a) = -\sin a \\ \cos(-a) = \cos a \\ tg(-a) = -tg\, a \\ \cot(-a) = -\cot x \end{cases}$$

ج ـ کمانهائی که تفاضل آنها برابر π است ـ تانژانت این کمانها و همچنین تانژانت متمم آنها یکی است ولی سینوس آنها قرینه یکدیگرند و همچنین سینوس متمم آنها :

$$(۱۴)\quad \begin{cases} \sin(x+\pi) = -\sin x \\ \cos(x+\pi) = -\cos x \\ tg(x+\pi) = tg\, x \\ \cot(x+\pi) = \cot x \end{cases}$$

د ـ کمانهای متمم ـ چنانکه از نام خط های مثلثاتی هم بر میآید داریم :

$$(۱۵)\quad \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{۲} - x) = \cos x \\ \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x \\ tg(\frac{\pi}{۲} - x) = \cot x \\ \cot(\frac{\pi}{۲} - x) = tg\, x \end{cases}$$

هـ- کمانهائی که تفاضل آنها برابر یک چهارم پیرامون است :

$$(۱۶)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \\ tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-tg\, x \end{cases}$$

خلاصه - بطور کلّی اگر x را بمضرب جفتی از $90°$ بیفزائیم یا از آن کم کنیم کمانی بدست میآید که خط های مثلثاتی آن همنام خط های مثلثاتی x میباشد - و اگر x را به مضرب تاقی از $90°$ بیفزائیم یا از آن کم کنیم خط های مثلثاتی کمان حاصل همنام خط های مثلثاتی متمّم x خواهد بود .

برای بدست آوردن نشانه کافی است x را میان $0°$ و $90°$ بگیریم و به بینیم آیا جای تهِ کمان حاصل روی چه بخشی از پیرامون دایره مثلثاتی است مثلاً بفرض اینکه x میان $0°$ و $90°$ باشد $270° - x$ کمانی است که تهِ آن در بخش سوم میافتد پس سینوس متمّم آن منفی است بنابرین :

$$\cos(270°-x)=\cos(3\times 90°-x)=-\sin x$$

همچنین

$$\sin(-180^\circ + x) = \sin(-2 \times 90^\circ + x) = -\sin x$$

پردازش های مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو کمان (یا دو گوشه)

(۱۷) $$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

(۱۸) $$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

(۱۹) $$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

(۲۰) $$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

(۲۱) $$tg(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$$

(۲۲) $$tg(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b}$$

پردازش های مثلثاتی یک کمان از روی پردازش های مثلثاتی نیمه آن

کمان - ($2a$ از روی a)

(۲۳) $$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

(۲۴) $$tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 - tg^2 a}$$

(۲۵) $$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

توان دوم سینوس و سینوس متمم یک کمان از روی سینوس متمم کمان دو برابر.

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad (26)$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad (27)$$

عبارت پردازش های مثلثاتی a بحسب $tg\frac{a}{2}$ گویا است:

$$\sin a = \frac{2\, tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \qquad (28)$$

$$\cos a = \frac{1-tg^2\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}} \qquad (29)$$

$$tg\, a = \frac{2\, tg\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}} \qquad (30)$$

گشایش سه برهای راست گوشه - C گوشهٔ راست c وتر a و b پهلوهای روبرو به گوشه های تند A و B

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (31)$$

$$A + B = 90^\circ \qquad (32)$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \qquad (33)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B \qquad (34)$$

$$tg\,A = \frac{a}{b} = \cot B \qquad (۳۵)$$

تصویرها - قضیّهٔ ۱ - تصویر راست گذر یک بُردار روی یک آسه برابر است با حاصل ضرب اندازهٔ جبری بردار در سینوس متمّم گوشهٔ میان آسه ایکه بُردار روی آن نشسته است و آسهٔ تصویر.

قضیّهٔ ۲ - تصویر برآیند دو (یا چند) بُردار روی یک آسه برابر است با حاصل جمع جبری تصویرهای آن دو (یا چند) بُردار روی همان آسه.

پرسش های سادهٔ شفاهی

۱- آیا $\sin 45°$ بزرگتر است یا $\frac{1}{2}\sin 90°$ ؟ $\sin 60°$

$2\sin 30°$ ؟ $\cos 30°$ یا $\frac{1}{2}\cos 60°$ ؟ $tg\frac{\pi}{6}$ یا $\cot\frac{\pi}{3}$ ؟

۲- بفرض اینکه $\sin a = \frac{1}{3}$ باشد حساب کنید $\cos a$ و $tg\,a$ را.

۳- این برابریها را ثابت کنید:

$$tg\,60° \cdot tg\,30° = \cot 30° \cdot tg\,60° = tg\,45°$$

$$tg\,60°\ \cos^2 45 = \cos 30°\ \sin 90°$$

$$tg\,x \cdot \cos x = \sin x$$

$$\cot x \cdot \sin x = \cos x$$

$$\frac{1 - tg^2 30^\circ}{1 + tg^2 30^\circ} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cos 0^\circ$$

$$(tg x + \cot x) \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \sin 90^\circ$$

۴- بفرض اینکه $A = 0^\circ$, $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$, $D = 60^\circ$

$E = 90^\circ$ باشد حاصل عبارت زیر چیست؟

$$(\sin B + \sin E)(\cos A + \cos D) - 4 \sin A (\cos C + \sin E)$$

۵- ته کمان x در چه بخشی از دایره است هرگاه

$\sin x$ و $\cos x$ هر دو منفی باشند؟

$\sin x$ مثبت و $\cos x$ منفی باشد؟

$tg x$ و $\cot x$ هر دو مثبت باشند؟

۶- آیا کمانی هست که تانژانت آن مثبت و تانژانت متمم آن منفی باشد؟

۷- از عددهای زیر

3 ؛ $-\frac{1}{3}$ ، a ، $-b$ ، ∞ ، 0 کدام میتواند برابر $\sin x$ باشد و کدام

برابر $\operatorname{tg} x$ ؟

۸- اندازهٔ کمانهای زیر چیست؟

$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$	$\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{3}$
$\operatorname{arc\,cos} 0$	$\operatorname{Arc\,cos} 0$
$\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\operatorname{Arc\,cos}\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\operatorname{arc\,sin} 0$	$\operatorname{Arc\,sin} 0$
$\operatorname{arc\,tg} 1$	$\operatorname{Arc\,tg} 1$
$\operatorname{arc\,cot}(-\sqrt{3})$	$\operatorname{Arc\,cot}(-\sqrt{3})$
$\operatorname{arc\,cos}\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{Arc\,cos}\frac{-\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{arc\,sin}\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{Arc\,sin}\frac{-\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{arc\,sin}\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{Arc\,sin}\frac{-\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{arc\,tg}(-1)$	$\operatorname{Arc\,tg}(-1)$

۹- برابر هریک از پردازشهای زیر را بگوئید:

$\cos(\operatorname{arc\,cos} x)$	$\sin(\operatorname{arc\,sin} x)$

$\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}\,x)$ $\qquad$ $\cot(\mathrm{arc\,cot}\,x)$

$\mathrm{tg}[\mathrm{arc}\cos(-1)]$ $\qquad$ $\cos(\mathrm{arc\,tg}\,\infty)$

$\cos(\mathrm{Arc}\sin 0)$ $\qquad$ $\cos(\mathrm{arc}\sin 0)$

$\sin(\mathrm{arc}\cos 1)$ $\qquad$ $\sin[\mathrm{arc\,tg}(-1)]$

۱۰ـ در چند دقیقه عقربک دقیقه شمار $\frac{3\pi}{2}$ ـ رادیان خواهد گشت؟

۱۱ـ در ۳۴ دقیقه و ۳۷٫۵ ثانیه عقربک ساعت شمار چه گوشه‌ای می‌پیماید؟

ورزش

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید:

$$\frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\sin x \qquad (1)$$

$$\frac{\cos a}{1+\sin a}+\frac{1+\sin a}{\cos a}=\frac{2}{\cos a} \qquad (2)$$

$$\frac{1+\cos a}{1-\cos a}=1+\frac{2\cos a(1+\cos a)}{\sin^2 a} \qquad (3)$$

$$\frac{\cot x}{\sin x}=\frac{\cos x}{1-\cos^2 x} \qquad (4)$$

$$\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x \qquad (5)$$

$$(1-\sin x)\left(\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x\right)=\cos x \qquad (6)$$

$$(1 - tg\,y)(1 - \cot y) = 2 - \frac{1}{\sin y \cos y} \qquad (۷)$$

$$\frac{tg\,x - \sin x}{\sin^3 x} \cdot \cos x = \frac{1}{1 + \cos x} \qquad (۸)$$

$$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2\sin^2 a \cdot \cos^2 a \qquad (۹)$$

$$(tg\,\alpha + \cot\alpha)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (۱۰)$$

$$\frac{\cos x \cdot tg\,x}{\sin^3 x}\ \sin x = \frac{\cos^2 x}{\quad} \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\cot a - tg\,x}{\cos a + \sin a} = \frac{\cos a - \sin a}{\cos a \cdot \sin a} \qquad (۱۲)$$

$$\left(\frac{\cos\alpha}{tg\,\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cot\alpha}\right)\sin\alpha \cdot \cos\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha) \qquad (۱۳)$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1}{\cos x} - tg\,x \qquad (۱۴)$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{\cos^{m-2} x} = \frac{1}{\cos^{m-2} x} \cdot tg^2 x \qquad (۱۵)$$

$$tg\,x - 3\cot x + tg\,x(1 + 3\cot^2 x) = 2\,tg\,x \qquad (۱۶)$$

$$\frac{a \cdot \sin a \cdot \cos x - b \sin x \cdot \cos x}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{(a - b)\,tg\,x}{a\,tg^2 x + b} \qquad (۱۷)$$

$$b - \frac{a(a\cos x - b \sin x)}{a \sin x + b \cos x} = \frac{a^2 + b^2}{a\,tg\,x + b} \qquad (۱۸)$$

$$\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - x + tg\,x = tg^2 x \qquad (۱۹)$$

پاسخهای همچندیهای زیر را که میان °۰ و °۳۶۰ میباشد بدست آورید:

(۲۰) $tg^2 x = 1$ [پاسخ : °۴۵ ، °۱۳۵ ، °۲۲۵ ، °۳۱۵]

(۲۱) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

(۲۲) $(tg^2 x - 3)(1 - 2\sin x) = 0$

(۲۳) $\sqrt{2}\, tgx \cdot \sin x - tgx = 0$

(۲۴) $\frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x = 1$

(۲۵) $2\sin^2 x + \sin x = 1$

(۲۶) $(4\sin^2 x - 3)(3\sin^2 x - 4) = 0$

(۲۷) $2\cos^2 x = 5(1 - \sin x)$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید :

(۲۸) $Arc\sin(2a\sqrt{1-a^2}) = 2Arc\sin a$

(راهنمائی : اگر $Arc\sin a$ را x بنامیم یعنی $\sin x = a$ باید ثابت کنیم که

$$Arc\sin(2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}) = 2x$$

و یا (چون دو کمان برابر دارای یک سینوس میباشند)

(۲۹) $2\sin x \cdot \sqrt{1-\sin^2 x} = \sin 2x$

(چون $-\frac{\pi}{2} \leq x = Arc\ sin\, a \leq +\frac{\pi}{2}$ پس: $\sqrt{1-sin^2x} = +cos\, x$ و باید ثابت کرد که

$sin\, 2x = 2\, sin\, x . cos\, x$ و این ثابت است

(۳۰) $$2\, arc\ cot\, x = arc\ tg\, \frac{2x}{x^2-1}$$

(۳۱) $$2\, Arc\ cos\, x = Arc\ sin\, 2x\sqrt{1-x^2}$$

(۳۲) $$Arc\ cot\, x = Arc\ cos\, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

(۳۳) $$arc\ sin\, x = arc\ sin\,(3x-4x^3)$$

$$x = Arc\ cos\, \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}$$

(۳۴) حساب کنید عبارت $Arc\ tg\, \frac{1}{2} + Arc\ tg\, \frac{1}{3}$ را

راهنمائی - اگر $Arc\ tg\, \frac{1}{2}$ و $Arc\ tg\, \frac{1}{3}$ را بترتیب α و β بنامیم برای حساب کردن $\alpha + \beta$ قبلاً تانژانت آنرا بدست میآوریم (زیرا $tg\,\alpha$ و $tg\,\beta$ داده شده است)

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha . tg\,\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

پس $$\alpha + \beta = Arc\ tg\, 1 = \frac{\pi}{4}$$

درستی برابریهای زیر را بررسی نمائید:

(۳۵) $$Arc\ tg\, \frac{1}{3} - Arc\ tg(-1) = Arc\ tg\, 2$$

$$\mathrm{Arc\,tg}(\sqrt{2}+1)-\mathrm{Arc\,tg}(-\sqrt{2}-1)=135^\circ \qquad (۳۶)$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{3}-\mathrm{Arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\mathrm{Arc\,tg}(-3\sqrt{3}) \qquad (۳۷)$$

$$\mathrm{Arc}\,\frac{a+b}{a-b}-\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{b+a}{b-a}=\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{b^2-a^2}{2ab} \qquad (۳۸)$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{-m^2}{n^2}\right)-\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{n^2}{m^2}=-\frac{\pi}{2} \qquad (۳۹)$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\,3-\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{-1}{3}=\frac{\pi}{2} \qquad (۴۰)$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}=2\,\mathrm{Arc\,sin}\,\frac{b}{a} \qquad (۴۱)$$

$$\mathrm{Arc\sin}\,x+\mathrm{Arc\,cos}\,y=\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}} \qquad (۴۲)$$

$$\mathrm{Arc\sin}\,x+\mathrm{Arc\,sin}\,y+\mathrm{Arc\,sin}\,z=\mathrm{Arc\,sin}\Big[x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} \qquad (۴۳)$$
$$+y\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)}+z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xyz\Big]$$

بفرض اینکه a و b دو گوشهٔ تند (یا دو کمان مثبت و کوچکتر از 90°) باشند در هر یک از حالت‌های زیر سینوس و سینوس متمم و تانژانت $a+b$ و $a-b$ را حساب کنید

$$\sin a=\frac{1}{3} \qquad \cos b=\frac{2}{3} \qquad (۴۴)$$

$$\sin a=\frac{3}{5} \qquad \cos b=\frac{5}{13} \qquad (۴۵)$$

$$\mathrm{tg}\,a=\frac{3}{4} \qquad \cot b=\frac{5}{3} \qquad (۴۶)$$

بفرض اینکه گوشه های a و b و $a+b$ تند باشند در هریک از حالتهای زیر سینوس وسینوس متمم و تانژانت a را حساب کنید:

(۴۷) $\sin b = \frac{1}{3}$ $\qquad \cos(a+b) = \frac{3}{4}$

(۴۸) $\sin b = \frac{1}{4}$ $\qquad \cos(a-b) = \frac{3}{4}$

(۴۹) سینوس °۱۲۰ را از روی خطهای مثلثاتی °۳۰ و °۹۰ حساب کنید

همچنین سینوس متمم °۱۳۵ را از روی خطهای مثلثاتی °۴۵ و °۱۸۰

عبارتهای زیر را بحسب خطهای مثلثاتی a بنویسید:

(۵۰) $\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad$ (۵۲) $\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

(۵۱) $tg\left(a+\frac{\pi}{3}\right)$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید:

(۵۲) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x$

(۵۳) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$

(۵۴) $\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y)\sin(x-y)=1-2\sin^2 y$

(۵۵) $$\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{(1+tg\,x)^2}{(1-tg\,x)^2}$$

$$\cos(x+y)\cos y - \cos(x+z)\cos z = \sin(x+z)\sin z - \sin(x+y)\sin y \qquad (۵۶)$$

(۵۷) خطهای مثلثاتی ۴۰° ۶۷′ را حساب کنید.

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید:

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = tg(45^\circ - x) \qquad (۵۸)$$

$$4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1-\cos^2 2x \qquad (۵۹)$$

$$\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x \qquad (۶۰)$$

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x \qquad (۶۱)$$

$$1-\sin 2x = (\sin x - \cos x)^2 \qquad (۶۲)$$

$$\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x} \qquad (۶۳)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 4\cos 2x \cdot \cot 4x \qquad (۶۴)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2\cot 2x \qquad (۶۵)$$

$$\sin 2x = \frac{2\cot x}{1+\cot^2 x} \qquad (۶۶)$$

$$\left(tg\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2}\right)\sin x = 2 \qquad (۶۷)$$

$$\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2 \operatorname{tg} x} = \cos^2 x$$ (٦٨)

$$\cot x - \operatorname{tg} x = 2 \cot 2x$$ (٦٩)

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$ (٧٠)

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{tg}^2 x$$ (٧١)

$$2 \sin x \cdot \cos^3 x + 2 \cos x \cdot \sin^3 x = \sin 2x$$ (٧٢)

$$4 (\cos^6 x + \sin^6 x) = 4 - \sin^2 2x$$ (٧٣)

بخش دوّم

جدولهای لگاریتمی خطهای مثلثاتی و راه بکار بردن آنها

۱ـ در آغاز کتاب مثلثات سال چهارم (شمارهٔ ۱۲) گفتیم که چون محاسبهٔ خطهای مثلثاتی همهٔ کمانها (یا گوشه‌ها) آسان نیست بنابرین جدولهائی ترتیب داده‌اند که از روی برخی از آنها (مانند جدول آخر کتاب نامبرده) خطهای مثلثاتی کمانها بدست میاید.

در برخی دیگر لگاریتم خطهای مثلثاتی کمانها نوشته شده است.

چون معمولاً محاسبه‌های مثلثاتی لگاریتم خطهای مثلثاتی بکار میرود بایستی بخوبی راه بکار بردن جدولهای لگاریتم خطهای مثلثاتی را فرا بگیریم.

۲ـ جدولهائی که معمولاً بکار برده میشود پنج پیکری است و در آن لگاریتم خطهای مثلثاتی کمانها یا گوشه‌های از ۰° تا ۹۰° را دقیقه بدقیقه با پنج پیکر دهگان نوشته‌اند.

بوسیلهٔ این جدولها میتوان دو مسئلهٔ زیر را گشود:

الف ـ کمانی در دست است و میخواهیم لگاریتم یکی از خطهای مثلثاتی آنرا بشناسیم

ب ـ لگاریتم یکی از خط های مثلثاتی کمان ناشناسی درست است و میخواهیم آن کمان را بشناسیم.

ما در ضمن گشودن این دو مسئله و از روی چند مثال عددی راه بکار بردن جدولهای لگاریتم پنج پیکری را نشان میدهیم:

۳ ـ جدولی که در صفحه های ۲۴ و ۲۵ ازین کتاب دیده میشود رونویسی است از دو صفحه از یک جدول لگاریتم پنج پیکری (جدول دوپوئی(۱) که برای نمونه آورده ایم. دشواری اختلافی که این نمونه با نسخهٔ اصلی دارد فارسی بودن آنست و بنابرین از راست بچپ نوشته شده است).

چنانکه می بینیم: بالای این دو صفحه شمارهٔ زینه (۲۷) نوشته شده و پائین آن زینه °52

در طرف راست صفحهٔ نخست ستونیست که در آن شماره دقیقه ها از بالا بپائین از ۰ تا ۳۰ نوشته شده

و در طرف راست صفحهٔ دوم » » » » » از بالا بپائین از ۳۰ تا ۶۰ نوشته شده

(۱) Dupuis

و نیز در طرف چپ صفحهٔ دوّم ستونیست که در آن شمارهٔ دقیقه ها از پائین ببالا از ۰ تا ۳۰ نوشته شده

" " " " " " نخست " " " " " " از ۳۰ تا ۶۰ " "

دقیقه های ستون سمت چپ هر صفحه با دقیقه های ستون سمت راست همان صفحه

دو بدو در یک سطر نوشته شده بطوریکه مجموع هر یک از دقیقه های یکی از ستونهای سمت

راست با دقیقهٔ روبروی آن در ستون سمت چپ برابر ۶۰ هست . بنابرین مجموع

زینهٔ بالای صفحه با یکی از دقیقه های ستون سمت راست آن صفحه مثلاً ۲۵ متمم مجموع

زینهٔ پائین صفحه است با دقیقهٔ ۳۵ از ستون سمت چپ

۳۷° ۲۵′ + ۵۲° ۳۵′ = ۹۰°

هرگاه گوشه یا کمان از ۴۵° کوچکتر باشد شمارهٔ زینه های آن در بالای صفحه و شمارهٔ دقیقه های

آن در نخستین ستون سمت راست صفحه (از بالا بپائین) نوشته شده و هرگاه از ۴۵

بزرگتر باشد شمارهٔ زینه های آن در پائین صفحه و دقیقه های آن در نخستین ستون سمت چپ

صفحه (از پائین ببالا) نوشته شده است .

لگاریتم خط های مثلثاتی کمانهای کوچکتر از ۴۵° در ستونهائیست که بالای

آنها نوشته شده است «سینوس» «تانژانت» «تانژانت متمم» و یا

۳۷

′	D	سینوس متمم	تانژانت متمم	D	تانژانت	D	سینوس	′
۶۰	۱۰	۱̄,۹۰۲۳۵	۰,۱۲۲۸۹	۲۷	۱̄,۸۷۷۱۱	۱۷	۱̄,۷۷۹۴۶	۰
۵۹	۹	۰۲۲۵	۲۲۶۲	۲۶	۷۷۳۸	۱۷	۷۹۶۳	۱
۵۸	۱۰	۰۲۱۶	۲۲۳۶	۲۶	۷۷۶۴	۱۷	۷۹۸۰	۲
۵۷	۹	۲۰۶	۲۲۱۰	۲۷	۷۷۹۰	۱۶	۷۹۹۷	۳
۵۶	۱۰	۰۱۹۷	۲۱۸۳	۲۶	۷۸۱۷	۱۷	۸۰۱۳	۴
۵۵	۹	۰۱۸۷	۲۱۵۷	۲۶	۷۸۴۳	۱۷	۸۰۳۰	۵
۵۴	۱۰	۱۷۸	۲۱۳۱	۲۶	۷۸۶۹	۱۶	۸۰۴۷	۶
۵۳	۹	۰۱۶۸	۲۱۰۵	۲۷	۷۸۹۵	۱۷	۸۰۶۳	۷
۵۲	۱۰	۰۱۵۹	۲۰۷۸	۲۶	۷۹۲۲	۱۷	۸۰۸۰	۸
۵۱	۱۰	۰۱۴۹	۲۰۵۲	۲۶	۷۹۴۸	۱۶	۸۰۹۷	۹
۵۰	۹	۰۱۳۹	۲۰۲۶	۲۶	۷۹۷۴	۱۷	۸۱۱۳	۱۰
۴۹	۱۰	۰۱۳۰	۲۰۰۰	۲۷	۸۰۰۰	۱۷	۸۱۳۰	۱۱
۴۸	۹	۰۱۲۰	۱۹۷۳	۲۶	۸۰۲۷	۱۶	۸۱۴۷	۱۲
۴۷	۱۰	۰۱۱۱	۱۹۴۷	۲۶	۸۰۵۳	۱۷	۸۱۶۳	۱۳
۴۶	۱۰	۰۱۰۱	۱۹۲۱	۲۶	۸۰۷۹	۱۷	۸۱۸۰	۱۴
۴۵	۹	۰۰۹۱	۱۸۹۵	۲۶	۸۱۰۵	۱۶	۸۱۹۷	۱۵
۴۴	۱۰	۰۰۸۲	۱۸۶۹	۲۷	۸۱۳۱	۱۷	۸۲۱۳	۱۶
۴۳	۹	۰۰۷۲	۱۸۴۲	۲۶	۸۱۵۸	۱۶	۸۲۳۰	۱۷
۴۲	۱۰	۰۰۶۳	۱۸۱۶	۲۶	۸۱۸۴	۱۷	۸۲۴۶	۱۸
۴۱	۱۰	۰۰۵۳	۱۷۹۰	۲۶	۸۲۱۰	۱۷	۸۲۶۳	۱۹
۴۰	۹	۰۴۳	۱۷۶۴	۲۶	۸۲۳۶	۱۶	۸۲۸۰	۲۰
۳۹	۱۰	۰۳۴	۱۷۳۸	۲۷	۸۲۶۲	۱۷	۸۲۹۶	۲۱
۳۸	۱۰	۰۲۴	۱۷۱۱	۲۶	۸۲۸۹	۱۶	۸۳۱۳	۲۲
۳۷	۹	۰۰۱۴	۱۶۸۵	۲۶	۸۳۱۵	۱۷	۸۳۲۹	۲۳
۳۶	۱۰	۱̄,۹۰۰۰۵	۱۶۵۹	۲۶	۸۳۴۱	۱۶	۸۳۴۶	۲۴
۳۵	۱۰	۱̄,۸۹۹۹۵	۱۶۳۳	۲۶	۸۳۶۷	۱۷	۸۳۶۲	۲۵
۳۴	۹	۹۹۸۵	۱۶۰۷	۲۷	۸۳۹۳	۱۶	۸۳۷۹	۲۶
۳۳	۱۰	۹۹۷۶	۱۵۸۰	۲۶	۸۴۲۰	۱۷	۸۳۹۵	۲۷
۳۲	۱۰	۹۹۶۶	۱۵۵۴	۲۶	۸۴۴۶	۱۶	۸۴۱۲	۲۸
۳۱	۹	۹۹۵۶	۱۵۲۸	۲۶	۸۴۷۲	۱۷	۸۴۲۸	۲۹
۳۰		۱̄,۸۹۹۴۷	۰,۱۱۵۰۲		۱̄,۸۸۴۹۸		۱̄,۷۸۴۴۵	۳۰
′		سینوس	تانژانت		تانژانت متمم		سینوس متمم	′

۵۲°

۲۷	
۱	۰,۴۵
۲	۰,۹۰
۳	۱,۳۵
۴	۱,۸۰
۵	۲,۲۵
۶	۲,۷۰
۷	۳,۱۵
۸	۳,۶۰
۹	۴,۰۵

۲۶	
۱	۰,۴۳
۲	۰,۸۷
۳	۱,۳۰
۴	۱,۷۳
۵	۲,۱۷
۶	۲,۶۰
۷	۳,۰۳
۸	۳,۴۷
۹	۳,۹۰

۱۷	
۱	۰,۲۸
۲	۰,۵۷
۳	۰,۸۵
۴	۱,۱۳
۵	۱,۴۲
۶	۱,۷۰
۷	۱,۹۸
۸	۲,۲۷
۹	۲,۵۵

۱۶	
۱	۰,۲۷
۲	۰,۵۳
۳	۰,۸۰
۴	۱,۰۷
۵	۱,۳۳
۶	۱,۶۰
۷	۱,۸۷
۸	۲,۱۳
۹	۲,۴۰

۳۷

′	سینوس	D	تانژانت	D	تانژانت متمم	سینوس متمم	D	′
۳۰	۱̄،۷۸۴۴۵	۱۶	۱̄،۸۸۴۹۸	۲۶	۰،۱۱۵۰۲	۱̄،۸۹۹۴۷	۱۰	۳۰
۳۱	۸۴۶۱	۱۷	۸۵۲۴	۲۶	۱۴۷۶	۹۹۳۷	۱۰	۲۹
۳۲	۸۴۷۸	۱۶	۸۵۵۰	۲۷	۱۴۵۰	۹۹۲۷	۹	۲۸
۳۳	۸۴۹۴	۱۶	۸۵۷۷	۲۶	۱۴۲۳	۹۹۱۸	۱۰	۲۷
۳۴	۸۵۱۰	۱۷	۸۶۰۳	۲۶	۱۳۹۷	۹۹۰۸	۱۰	۲۶
۳۵	۸۵۲۷	۱۶	۸۶۲۹	۲۶	۱۳۷۱	۹۸۹۸	۱۰	۲۵
۳۶	۸۵۴۳	۱۷	۸۶۵۵	۲۶	۱۳۴۵	۹۸۸۸	۹	۲۴
۳۷	۸۵۶۰	۱۶	۸۶۸۱	۲۶	۱۳۱۹	۹۸۷۹	۱۰	۲۳
۳۸	۸۵۷۶	۱۶	۸۷۰۷	۲۶	۱۲۹۳	۹۸۶۹	۱۰	۲۲
۳۹	۸۵۹۲	۱۷	۸۷۳۳	۲۶	۱۲۶۷	۹۸۵۹	۱۰	۲۱
۴۰	۸۶۰۹	۱۶	۸۷۵۹	۲۷	۱۲۴۱	۹۸۴۹	۹	۲۰
۴۱	۸۶۲۵	۱۷	۸۷۸۶	۲۶	۱۲۱۴	۹۸۴۰	۱۰	۱۹
۴۲	۸۶۴۲	۱۶	۸۸۱۲	۲۶	۱۱۹۸	۹۸۳۰	۱۰	۱۸
۴۳	۸۶۳۸	۱۶	۸۸۳۸	۲۶	۱۱۶۲	۹۸۲۰	۱۰	۱۷
۴۴	۸۶۷۴	۱۷	۸۸۶۴	۲۶	۱۱۳۶	۹۸۱۰	۹	۱۶
۴۵	۸۶۹۱	۱۶	۸۸۹۰	۲۶	۱۱۱۰	۹۸۰۱	۱۰	۱۵
۴۶	۸۷۰۷	۱۶	۸۹۱۶	۲۶	۱۰۸۴	۹۷۹۱	۱۰	۱۴
۴۷	۸۷۲۳	۱۶	۸۹۴۲	۲۶	۱۰۵۸	۹۷۸۱	۱۰	۱۳
۴۸	۸۷۳۹	۱۷	۸۹۶۸	۲۶	۱۰۳۲	۹۷۷۱		۱۲
۴۹	۸۷۵۶	۱۶	۸۹۹۳	۲۶	۱۰۰۶	۹۷۶۱	۹	۱۱
۵۰	۸۷۷۲	۱۶	۹۰۲۰	۲۶	۰۹۸۰	۹۷۵۲	۱۰	۱۰
۵۱	۸۷۸۸	۱۷	۹۰۴۶	۲۷	۰۹۵۴	۹۷۴۲	۱۰	۹
۵۲	۸۸۰۵	۱۶	۹۰۷۳	۲۶	۰۹۲۷	۹۷۳۲	۱۰	۸
۵۳	۸۸۲۱	۱۶	۹۰۹۹	۲۶	۰۹۰۱	۹۷۲۲	۱۰	۷
۵۴	۸۸۳۷	۱۶	۹۱۲۵	۲۶	۰۸۷۵	۹۷۱۲	۱۰	۶
۵۵	۸۸۵۳	۱۶	۹۱۵۱	۲۶	۰۸۴۹	۹۷۰۲	۹	۵
۵۶	۸۸۶۹	۱۷	۹۱[illegible]	۲۶	۰۸۲۳	۹۶۹۳	۱۰	۴
۵۷	۸۸۸۶	۱۶	۹۲۰۳	۲۶	۰۷۹۷	۹۶۸۳	۱۰	۳
۵۸	۸۹۰۲	۱۶	۹۲۲۹	۲۶	۰۷۷۱	۹۶۷۳	۱۰	۲
۵۹	۸۹۱۸	۱۶	۹۲۵۵	۲۶	۰۷۴۵	۹۶۶۳	۱۰	۱
۶۰	۱̄،۷۸۹۳۴		۱̄،۸۹۲۸۱		۰،۱۰۷۱۹	۱̄،۸۹۶۵۳		۰
′	سینوس متمم		تانژانت متمم		تانژانت	سینوس		′

۵۲°

۲۷	
۱	۰،۴۵
۲	۰،۹۰
۳	۱،۳۵
۴	۱،۸۰
۵	۲،۲۵
۶	۲،۷۰
۷	۳،۱۵
۸	۳،۶۰
۹	۴،۰۵

۲۶	
۱″	۰،۴۳
۲	۰،۸۷
۳	۱،۳۰
۴	۱،۷۳
۵	۲،۱۷
۶	۲،۶۰
۷	۳،۰۳
۸	۳،۴۷
۹	۳،۹۰

۱۷	
۱	۰،۲۸
۲	۰،۵۷
۳	۰،۸۵
۴	۱،۱۳
۵	۱،۴۲
۶	۱،۷۰
۷	۱،۹۸
۸	۲،۲۷
۹	۲،۵۵

۱۶	
۱″	۰،۲۷
۲	۰،۵۳
۳	۰،۸۰
۴	۱،۰۷
۵	۱،۳۳
۶	۱،۶۰
۷	۱،۸۷
۸	۲،۱۳
۹	۲،۴۰

«سینوس متمم» مثلا لگاریتم cos ۳۷° ۲۵′ درستونی نوشته شده است که بالای آن نوشته‌اند «سینوس متمم» و درین ستون عددیست روبرو به عدد ۲۵′ (از نخستین ستون راست):

log cos ۳۷° ۲۵′ = ۱̄,۸۹۹۹۵

همچنین لگاریتم خط های مثلثاتی کمانهای بزرگتر از ۴۵° درستونهائیست که زیر آنها «سینوس» «تانژانت» «تانژانت متمم» و یا «سینوس متمم» نوشته‌اند مثلاً لگاریتم sin ۵۲° ۳۵′ درستونی نوشته شده است که زیر آن نوشته‌اند «سینوس» و دراین ستون عددیست روبرو بعدد ۳۵′ (از نخستین ستون چپ):

log sin ۵۲° ۳۵′ = ۱̄,۸۹۹۹۵

(روشن است که باید cos ۳۷° ۲۵′ برابر sin ۵۲° ۳۵′ باشد زیرا ۵۲° ۳۵′ متمم ۳۷° ۲۵′ است).

اگر لگاریتم sin ۵۲° ۳۴′ را بخواهیم می‌بینیم روبرو به عدد ۳۴′ فقط چهار پیکر نوشته شده: ۹۹۷۶ و این بدین جهت است که لگاریتم سینوس ۵۲° ۳۴′ با لگاریتم سینوس گوشه های مجاور در دو پیکری که نوشته نشده برابر است

در این جا می بینیم لگاریتم سینوس ′۳۵ °۵۲ برابر با $\bar{1}$ر۸۹۹۹۵ و لگاریتم سینوس ′۳۰ °۵۲ عدد $\bar{1}$ر۸۹۹۴۷ است پس نتیجه میگیریم :

$$\log \sin 52^\circ 34' = \bar{1},89976$$

در سمت چپ ستون «سینوس» ستون باریکی هست D که در آن تفاضلهای میان دو لگاریتم سینوس پیاپی نوشته شده است .

و نیز در سمت چپ ستون «سینوس متمم» ستون باریکی است D که در آن تفاضل های میان دو لگاریتم سینوس متمم پیاپی نوشته شده ولی این ستون برای کمانهای کوچکتر از °۱۸ وجود ندارد زیرا برای این کمانها تفاضل دو لگاریتم سینوس متمم پیاپی از ۵ کمتر است و خود دیده میشود .

همچنین میان دو ستون «تانژانت» و «تانژانت متمم» ستون باریکی است D که در آن تفاضل دو لگاریتم تانژانت پیاپی و یا دو لگاریتم تانژانت متمم پیاپی نوشته شده .

تفاضل میان دو کمان تقریباً با تفاضل میان لگاریتمها متناسب است از این رو قبلاً جزءهای متناسب همه تفاضلها را برای ۱ ، ۲ ، ۳ ... : ۹۰ ثانیه حساب کرده در جای

نوشته اند (ولی چون برای کمانهای کوچکتر از ۶ زینه شماره تفاضلها را یادداشت جزء های متناسب برای این کمانها نوشته نشده در موقع لزوم باید خود حساب کنیم).

۴- الف - **مسئلهٔ نخست** - کمانی در دست است و میخواهیم لگاریتم یکی از خط های مثلثاتی آنرا بیابیم.

حالت نخست - کمان فقط شامل زینه و دقیقه است - درینصورت لگاریتم ناشناس عیناً در جدول یافت میشود چنانکه مثلاً درهمین نمونه میخوانیم

$$\log \sin 52^\circ\ 14' = \bar{1},89781$$

$$\log \cos 37^\circ\ 34' = \bar{1},89918$$

$$\log \mathrm{tg}\ 52^\circ\ 24' = 0,11345$$

$$\log \cot 37^\circ\ 17' = 0,11842$$

حالت دوم - کمان شامل ثانیه (و یا برخه ای از دقیقه) میباشد.

مثال ۱- میخواهیم لگاریتم سینوس $34''\ 47'\ 37^\circ$ را حساب کنیم.

لگاریتم سینوس $47'\ 37^\circ$ در جدول یافت میشود:

$$\log \sin 37^\circ\ 47' = \bar{1},78723$$

و تفاضل میان این لگاریتم و لگاریتم سینوس ′۴۸ °۳۷ برابر ۱۶ است یعنی ۱۶ صد هزارم

حال چون تفاضل کمانها تقریباً با تفاضل لگاریتمها متناسب است گوئیم هرگاه بر کمان ″۳۴ افزوده شود بر لگاریتم سینوس $\frac{۳۴}{۶۰} \times ۱۶$ یعنی ۹ افزوده میشود. جدول جزءهای متناسب که در حاشیه زیر عدد ۱۶ نوشته شده همین نتیجه را میدهد بدون اینکه لازم باشد $\frac{۳۴}{۱۶}$ را در ۱۶ ضرب کنیم:

در آنجا روبروی ثانیهٔ ۳ عدد ۰،۸ نوشته شده یعنی هرگاه بر کمان ۳ ثانیه افزوده شود بر لگاریتم سینوس آن ۰،۸ (از یک صد هزارم) افزوده میشود بنابرین هرگاه ″۳۰ افزوده شود بر لگاریتم ۸ صد هزارم افزوده میشود از طرف دیگر روبروی ″۴ عدد ۱،۰۷ را نوشته شده پس در ازاء ۳۴ ثانیه ۹،۰۷ = ۱،۰۷ + ۸ یا تقریباً ۹ بر لگاریتم افزوده خواهد شد.

صورت محاسبه را بطور خلاصه چنین نویسند:

$$\log\sin ۳۷^{\circ}\ ۴۷' = \bar{۱},۷۸۷۲۳$$

$$D = ۱۶$$

$$\underline{۳۴''} \qquad \underline{۹}$$

$$\log\sin ۳۷^{\circ}\ ۴۷'\ ۳۴'' = \bar{۱},۷۸۷۳۲$$

بهمین ترتیب لگاریتم تانژانت یک کمان بدست میآید مثلاً

$$\log tg\ ۵۲^{\circ}\ ۳۸'\ ۲۶'' = ۰،۱۱۷۲۳$$

مثال ۲- میخواهیم لگاریتم سینوس متمم ۳۴″ ۴۷′ ۳۷° را حساب کنیم.

میدانیم هرگاه کمان مثبت و از ۹۰° کوچکتر باشد سوی تغییرات آن وارونهٔ سوی تغییرات سینوس متمم آن است پس برای اینکه بر لگاریتمی که در جدول نوشته شده چیزی بیفزائیم (چون افزودن همیشه آسانتر از کم کردن است) نخست لگاریتم سینوس متمم ۴۸′ ۳۷° را در جدول می یابیم:

$$\log \cos\ ۳۷^{\circ}\ ۴۸' = \bar{۱}،۸۹۷۷۱$$

و چون تفاضل میان این لگاریتم و لگاریتم سینوس متمم ۴۷′ ۳۷° برابر ۱۰ است (یعنی ده سد هزارم) پس گوئیم هرگاه از کمان ۲۶″ کم شود بر لگاریتم سینوس متمم

$۱۰ \times \frac{۲۶}{۶۰} = ۴،۳۳$ و یا تقریباً ۴ سد هزارم افزوده خواهد شد.

$$\log \cos\ ۳۷^{\circ}\ ۴۸' = \bar{۱}،۸۹۷۷۱$$

$$\underline{\quad -۲۶'' \quad} \qquad \underline{\quad +۴ \quad} \qquad D = ۱۰$$

$$\log \cos\ ۲۷^{\circ}\ ۴۷'\ ۳۴'' = \bar{۱}،۸۹۷۷۵$$

بهمین ترتیب لگاریتم تانژانت متمم هر کمان بدست میآید : مثلاً برای بدست آوردن لگاریتم تانژانت متمم ″۲۶ ′۳۸ °۵۲ صورت عمل چنین است :

$$\log \cot 52^\circ\ 39' = \bar{1},88262$$

$D = 26$

$$\underline{-34} \qquad \underline{+15}$$

$$\log \cot 52^\circ\ 38'\ 26'' = \bar{1},88277$$

۵ ـ ب ـ مسئلهٔ دوم ـ لگاریتم یکی از خط های مثلثاتی کمان ناشناسی در دست است میخواهیم آن کمان را بشناسیم .

حالت نخست ـ لگاریتم عیناً در جدول هست . قبلاً باید در نظر داشت که

$$\log \sin 45^\circ = \log \cos 45^\circ = \bar{1},84949$$

$$\log \operatorname{tg} 45^\circ = \log \cot 45^\circ = 0$$

بنابرین اگر مثلاً بخواهیم کمانی را بیابیم که لگاریتم سینوس آن در دست است اگر این لگاریتم از $\bar{1},84949$ کوچکتر باشد کمان از °۴۵ کوچکتر خواهد بود و چنانکه پیش گفتیم لگاریتم سینوس آن در ستونیست که بالای آن «سینوس» نوشته شده شمارهٔ درجه های کمان بالای صفحه است و شمارهٔ دقیقه هایش در نخستین ستون سمت راست را

و رو برو به لگاریتم داده شده .

و اگر لگاریتمی که داریم از ۸۴۹۴۹ ر۱̄ بزرگتر باشد کمان از ۴۵° بزرگتر است . لگاریتم سینوس آن در ستونی است که زیر آن «سینوس» نوشته شده - شمارهٔ زینه های کمان در پائین صفحه است و شمارهٔ دقیقه هایش در نخستین ستون دست چپ رو برو به لگاریتم داده شده . مثال

۷۸۷۵۶ ر۱̄ = log sin ۳۷° ۴۹′

۹۰۲۰۶ ر۱̄ = log sin ۵۲° ۵۷′

همچنین اگر بخواهیم کمانی را بیابیم که لگاریتم سینوس متمم آن در دست باشد . اگر این لگاریتم از ۸۴۹۴۹ ر۱̄ بزرگتر باشد کمان از ۴۵° کوچکتر است و بعکس .

اگر لگاریتم تانژانت کمانی در دست باشد خود کمان از ۴۵° کوچکتر است یا بزرگتر بنا بر آنکه این لگاریتم کوچکتر از صفر و یا بزرگتر از آن باشد

و اگر لگاریتم تانژانت متمم در دست باشد خود کمان کوچکتر از ۴۵° یا بزرگتر از آن است بنا بر آنکه این لگاریتم بزرگتر از صفر و یا کوچکتر از صفر باشد . مثال :

۹۰۱۱۱ ر۱̄ = log cos ۳۷° ۱۲′

$$\bar{1},78625 = \log\cos 52^{\circ}\ 19'$$

$$\bar{1},89151 = \log tg\ 37^{\circ}\ 55'$$

$$0,10980 = \log tg\ 52^{\circ}\ 10'$$

$$\bar{1},87711 = \log\cot 37^{\circ}$$

$$0,12000 = \log\cot 52^{\circ}\ 49'$$

حالت دوم - لگاریتم داده شده در جدول نیست .

مثال ۱ - لگاریتم سینوس کمانی $\bar{1},78304$ است میخواهیم آن کمانرا بشناسیم.

این عدد در جدول در ستون « سینوس » نیست ولی نزدیکترین عددها به $\bar{1},78304$ که در این ستون بوده و کوچکتر از $\bar{1},78304$ باشد عدد $\bar{1},78296$ است که لگاریتم سینوس $37^{\circ}\ 21'$ میباشد . حال اگر عدد $\bar{1},78294$ را از $\bar{1},78304$ و از لگاریتم سینوس $37^{\circ}\ 22'$ کم کنیم بترتیب دو عدد ۱۰ و ۱۷ بدست میآید و گوئیم چون هرگاه بر کمان $1'$ یا $60''$ ثانیه افزوده شود بر لگاریتم سینوس آن ۱۷ صدهزارم افزوده میگردد پس هرگاه بر لگاریتم سینوس ۱۰ افزوده شود بر کمان $\frac{10}{17} \times 60$ ثانیه و یا تقریبا ۳۵ ثانیه افزوده خواهد شد - در اینجا هم میتوان همین نتیجه را

از روی جدول پاره‌های متناسب که زیر ۱۷ نوشته شده بدست آورد: چون
۱۰ از ۲٫۵۵ که روبروی ۹″ نوشته شده بزرگتر است ده یک آن یعنی ۱٫۰ را می
بینیم آیا نظیر افزایش چند ثانیه است ولی «۱» هم عیناً در جدول پاره‌های متناسب
یافت نمیشود و نزدیکترین عدد به «۱» عدد ۰٫۸۵ است که روبروی ۳″ نوشته شده
یعنی هرگاه ٫۸۵ بر لگاریتم افزوده شود برکمان ۳۰″ افزوده شود میماند ٫۱۵ را که باز عیناً
یافت نمیشود و نزدیکترین عددها به ٫۱۵ عدد ٫۱۴۲ است که روبروی ۵″ نوشته شده
میماند ۰٫۰۰۸ که چون از ۰٫۲۸ خیلی کوچکتر است از آن چشم میپوشیم پس چنین بر می‌آید:
هرگاه بر لگاریتم ۱۰ افزوده شود برکمان تقریباً ۳۵″ افزوده میشود:

log sin ۳۷° ۲۱′ ۳۵″ = ۱̄٫۷۸۳۰۴

صورت عمل چنین نوشته میشود:

log sin x = ۱̄٫۷۸۳۰۳

۱̄٫۷۸۲۹۴ ـــ ۳۷° ۲۱′

D = ۱۷

۱۰ ـــ ۳۵″

x = ۳۷° ۲۱′ ۳۵″

اگر لگاریتم تانژانت کمانی داده شود راه بدست آوردن کمان مانند بالا است. مثلاً می بینیم که:

۰٫۱۰۹۳۶ = log tg ۵۲° ۸′ ۲۰″

مثال ۲ - لگاریتم سینوس متمم کمانی ۱̄٫۸۹۹۸۰ است میخواهیم آن کمان را بشناسیم این عدد هم در جدول در ستون سینوس متمم عیناً یافت نمیشود ولی چون هرگاه کمان بزرگ شود از سینوس متمم آن کاسته میشود بنابرین در ستون سینوس متمم ها نزدیکترین عددی را به ۱̄٫۸۹۹۸۰ میابیم که از آن بزرگتر باشد و آن ۱̄٫۸۹۹۸۵ است که لگاریتم سینوس متمم ۳۷° ۲۶′ میباشد زیادی ۱̄٫۸۹۹۸۵ از ۱̄٫۸۹۹۸۰ و از لگاریتم سینوس متمم ۳۷° ۲۷′ بترتیب ۵ و ۹ است بنابرین گوئیم چون هرگاه بر کمان ۶۰″ افزوده شود از لگاریتم سینوس متمم آن ۹ کم میشود پس اگر از لگاریتم سینوس ۵ کم شود بر کمان $\frac{5}{9} \times 60$ یا تقریباً ۳۳″ افزوده خواهد شد بنابرین ۱̄٫۸۹۹۸۰ = log cos ۳۷° ۲۶′ ۳۳″ صورت عمل چنین نوشته میشود:

log cos x = ۱̄٫۸۹۹۸۰

۱̄٫۸۹۹۸۵   ۳۷° ۲۶′   D = ۹

−۵   + ۳۳″

x = ۳۷° ۲۶′ ۳۳″

بهمین ترتیب با داشتن لگاریتم تانژانت یک کمان آن کمانرا حساب میکنیم

ورزش

۱- پیدا کنید لگاریتم و کلگاریتم خط های مثلثاتی زیر را:

tg ۳۷° ۲۲′ ۱۲″   cos ۱۲° ۳۴′ ۱۶″

tg ۲۹° ۳۷′ ۸″   cot ۱۳° ۴۷′ ۵″

sin ۶۹° ۱۵′ ۴۴″   cos ۴۸° ۳۲′ ۲۴″

tg ۷۴° ۳۸′ ۲۲″   cot ۶۳° ۵۱′ ۴۲″

۲- کمان x را پیدا کنید بفرض اینکه

log cos x = ۱̄,۳۴۰۶۳   log sin x = ۱̄,۹۳۷۸۵

log cos x = ۲̄,۸۷۹۵۶   log sin x = ۱̄,۲۵۰۷۶

log tg x = ۰,۷۳۹۵۰   log cot x = ۰,۲۹۳۸۱

log tg x = ۱̄,۵۴۸۰۷   log cot x = ۲̄۹۵۹۹۷

۳- بکمک لگاریتم x را حساب کنید:

x = ۱,۵۹۰۸ × tg ۳۸° ۳۸′ ۴۰″

$$x = ۰/۰۰۵۳۲۱\overline{۶} \times \cot ۹۰^\circ\ ۱۱'\ ۲۵''$$

$$x = \frac{۷۹/۵۰۶}{\cos ۷۳^\circ\ ۲۹'\ ۲۷''}$$

$$x = \sqrt[۳]{۰/۸۳۰۵۸ \times \sin^{۲} ۲۹^\circ\ ۳۱'\ ۹''}$$

$$\sin x = \frac{۱۵/۰۷۵}{۲۱/۱۸۹}$$

$$tg\, x = \frac{۵۳/۲۹۵}{۲۴/۳۶۷}$$

$$\cos x = \frac{۱۳۱/۱۷}{۱۶۴/۱۹}$$

$$\cot x = \frac{۲/۰۵۸۳}{۱/۴۳۵۹}$$

بخش سوّم

الف - تبدیل مجموع دو خط مثلثاتی بحاصل ضرب و بعکس

۶ - تبدیل حاصل ضرب بمجموع - اگر دو طرف دو اتحاد (۱۹) و (۲۰) را بهم بیفزائیم یا ازهم کم کنیم بترتیب دو اتحاد زیر را خواهیم داشت :

$$(A) \quad \sin(a+b) + \sin(a-b) = ۲ \sin a . \cos b$$

$$(B) \quad \sin(a+b) - \sin(a-b) = ۲ \cos a . \sin b$$

همچنین اگر دو طرف دو اتحاد (۱۷) و (۱۸) را یکبار بهم بیفزائیم و یکبار ازهم کم کنیم دو اتحاد زیر بدست میآید :

$$(C) \quad \cos(a+b) + \cos(a-b) = ۲ \cos a . \cos b$$

$$(D) \quad \cos(a+b) - \cos(a-b) = ۲ \sin a . \sin b$$

ازروی این چهار اتحاد میتوان حاصل ضرب دو خط مثلثاتی (سینوس و سینوس متمم) را بمجموع یا تفاضل دو سینوس یا دو سینوس متمم مبدل نمود (کافی است این اتحادها را از راست بچپ بخوانیم)

مثلاً اگر بخواهیم حاصل ضرب $2\cos 15^\circ \cos 45^\circ$ و یا $\sqrt{2}\cos 15^\circ$ را
حساب کنیم بنا بر اتحاد (C) میتوان نوشت:

$$2\cos 15^\circ \cos 45^\circ = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

از آنجا

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ورزش

عبارت های زیر را به مجموع یا تفاضل متبدل نمائید:

(۱) $2\sin 30^\circ \cos 60^\circ$ (۲) $\sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{3\pi}{4}$

(۳) $\cos 60^\circ \cos 20^\circ$ (۴) $\sin 40^\circ \cos 20^\circ$

(۵) $\sin 40^\circ \sin 20^\circ$ (۶) $2\sin nx.\cos(n-1)x$

(۷) $\cos 5x.\cos 2x$ (۸) $\cos 4x \sin x$

(۹) اتحاد زیر را ثابت کنید

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

۱۰- $\sin 15^\circ$ و $\sin 75^\circ$ و $\cos 75^\circ$ را از روی تبدیل به مجموع حسا

کنید (همچنانکه در مثال بالا $\cos 15$ را حساب کردیم)

۷- تبدیل مجموع به حاصل ضرب - حال اگر $a+b$ و $a-b$ را بترتیب p و q بنامیم

$$a+b=p$$

$$a-b=q$$

خواهیم داشت:

$$a=\frac{p+q}{2}$$

$$b=\frac{p-q}{2}$$

بنابرین اتحادهای (A) ، (B) ، (C) ، (D) بترتیب چنین نوشته میشود:

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} \quad (26)$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \quad (27)$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} \quad (28)$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2} \quad (29)$$

از روی این اتحادها میتوان مجموع جبری دو خط مثلثاتی (دو سینوس یا دو سینوس

تمم) را به حاصل ضرب مبدل نمود . مثلاً

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75-15}{2}$$

$$= -2\sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= -2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تبصره - برای مبدل کردن مجموع جبری یک سینوس و یک سینوس متمم مثلاً

برای مبدل کردن $\sin x + \cos y$ بحاصل ضرب میتوان $\sin x$ را

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ نوشت ویا $\cos y$ را $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ پس

$$\sin x+\cos y = \sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-y}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+y}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos y = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x+y}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x-y}{2}$$

همچنین است راه تبدیل کردن $\sin x - \sin y$ و $\cos x \pm \sin y$

بحاصل ضرب

۸- تبدیل مجموع جبری دو تانژانت به حاصل ضرب - برای اینکه

مجموع جبری دو تانژانت را به حاصل ضرب مبدل نمائیم بترتیب چنین مینویسیم:

$$tg\,a \pm tg\,b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b}$$

یا

$$tg\,a \pm tg\,b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b} \qquad (۴۰)$$

میتوان گفت که طرف دوّم حاصل ضرب سه سازهٔ $\sin(a \pm b)$ و $\frac{1}{\cos a}$ و $\frac{1}{\cos b}$ است

مجموع جبری دو تانژانت متمم مانند مجموع جبری دو تانژانت تبدیل میشود

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \mp a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

تبصره - همچنانکه برای تبدیل کردن مجموع جبری یک سینوس و یک سینوس متمم گفته شد در مورد مجموع جبری یک تانژانت و یک تانژانت متمم نیز میتوان عمل نمود مثلاً

$$tg\,a + \cot b = tg\,a + tg\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \frac{\sin\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right)}{\cos a \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} + (a - b)\right]}{\cos a \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}$$

ولی در این جا آسانتر چنین است که $tg\,a + \cot b$ را نیز مانند $tg\,a + tg\,b$ تبدیل نمائیم:

$$tg\,a + \cot b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin a \sin b + \cos a \cos b}{\cos a \cdot \sin b} = \frac{\cos(a - b)}{\cos a \sin b}$$

ورزش

عبارتهای زیر را بصورت حاصل ضرب دو خط مثلثاتی بنویسید :

(۱) $\sin 15^\circ + \sin 35^\circ$

(۲) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

(۳) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$

(۴) $\sin 70^\circ - \sin 10^\circ$

(۵) $\sin 3x - \sin x$

(۶) $\sin 45^\circ + \cos 15^\circ$

(۷) $\cos 14^\circ - \cos 46^\circ$

(۸) $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$

(۹) $\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}$

(۱۰) $\cos 4a - \cos(-a)$

(۱۱) $\cos(n+1)x - \cos(n-1)x$

(۱۲) $\sin (n+1)\frac{\pi}{4} - \cos(n-3)\frac{\pi}{4}$

درستی برابریهای زیر را بررسی نمائید :

(۱۳) $\sin 80^\circ = \sin 40^\circ + \sin 20^\circ$

(۱۴) $\dfrac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 50^\circ} = \sqrt{3}$

(۱۵) $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = \cos 20^\circ$

درستی اتحادهای زیر را بررسی نمائید :

$$\frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin 2x - \sin 2y} = \frac{tg(x+y)}{tg(x-y)} \qquad (۱۶)$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{tg\,\frac{x+y}{2}}{tg\,\frac{x-y}{2}} \qquad (۱۷)$$

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = -\,tg\,\frac{x+y}{2}\cdot tg\,\frac{x-y}{2} \qquad (۱۸)$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = tg\,\frac{x+y}{2} \qquad (۱۹)$$

$$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 3x + \sin 5x} = tg\,x \qquad (۲۰)$$

$$\frac{\sin 7x + \sin x}{\cos 7x + \cos x} = tg\,4x \qquad (۲۱)$$

$$\sin(x+2y) - \sin(x-2y) = 4\cos x \cos y \sin y \qquad (۲۲)$$

$$\cos(2x-y) - \cos(2x+y) = 4\sin x \sin y \cos y \qquad (۲۳)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \qquad (۲۴)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right) = \cos a \qquad (۲۵)$$

$$\frac{\sin 7x + \sin 9x}{\cos 7x - \cos 9x} = \cot x \qquad (۲۶)$$

$$\frac{\sin(n-2)x + \sin nx}{\cos(n-2)x - \cos nx} = \cot x \qquad (۲۷)$$

$$\sin(90^\circ + a) - \sin(30^\circ + a) - \sin(30^\circ - a) = 0 \qquad (۲۸)$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x \qquad (۲۹)$$

(۳۰) $$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 4\cos x \cos 2x \cos 4x$$

(۳۱) $$\sin x + \sin y + \sin(x+y) = 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

(۳۲) $$\sin x + \sin y - \sin(x+y) = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$

(۳۳) $$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$$

$$= 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

(۳۴) $$\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$$

$$= 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$$

(۳۵) ثابت کنید که هرگاه $a+b+c = 180^\circ$ باشد داریم:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c - 1 = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2}$$

(۳۶) $$\frac{\cos 3x - \cos x}{\cos 3x + \cos x} = -\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x$$

(۳۷) $$\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 5x + \sin 3x} = \cot 4x \operatorname{tg} x$$

(۳۸) $$\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

(۳۹) $$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x \qquad (۴۰)$$

$$\cot 4x+\operatorname{tg} x=\frac{2\cos 3x}{\sin 5x+\sin 3x} \qquad (۴۱)$$

$$\cot x+\cot 2x=\frac{2\sin 3x}{\cos x-\cos 3x} \qquad (۴۲)$$

$$\operatorname{tg} 3x\cdot\operatorname{tg} 4x+1=\frac{2\cos x}{\cos x+\cos 7x} \qquad (۴۳)$$

$$1+\operatorname{tg} 2x\cdot\cot 3x=\frac{2\sin 5x}{\sin 5x+\sin x} \qquad (۴۴)$$

$$\cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x=\cos 5x \qquad (۴۵)$$

$$\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x=\cos 3x \qquad (۴۶)$$

$$\frac{\sin 2x+\sin x}{\cos 2x+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{3x}{2} \qquad (۴۷)$$

$$\frac{\sin x+2\sin 3x+\sin 5x}{\sin 3x+2\sin 5x+\sin 7x}=\frac{\sin 3x}{\sin 5x} \qquad (۴۸)$$

$$\frac{\cos x+\cos 11x}{\cos x-\cos 11x}=\cot 6x\cot 5x \qquad (۴۹)$$

$$\frac{\sin x+\cos 2x-1}{\cos x-\sin 2x}=\operatorname{tg} x \qquad (۵۰)$$

$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad (۵۱)$$

$$\frac{\cos 2x+\cos 7x}{\cos 3x+\cos 6x}+\frac{\cos 6x-\cos x}{\cos 5x-\cos 2x}=\frac{2\sin 4x}{\sin 3x} \qquad (۵۲)$$

$$\frac{\sin 10x+\sin 6x}{\sin 12x+\sin 4x}-\frac{\sin 5x-\sin x}{\sin 7x+\sin x}=\frac{2\sin 2x}{\sin 8x} \qquad (۵۳)$$

$$\frac{\cos 12x + \cos 6x}{\sin 14x - \sin 4x} + \frac{\sin 7x - \sin x}{\cos 9x + \cos x} = \frac{2\cos^2 x}{\sin 10x} \qquad (۵۴)$$

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = tg\, 2x \qquad (۵۵)$$

$$\frac{\sin(x+3y) + \sin(3x+y)}{\sin 2x + \sin 2y} = 2\cos(x+y) \qquad (۵۶)$$

$$\frac{\cos(x+3y) - \cos(3x+y)}{\cos 2y - \cos 2x} = 2\cos(x+y) \qquad (۵۷)$$

$$\cos x\, tg(y-x) + \sin x = \frac{\sin y}{\cos(y-x)} \qquad (۵۸)$$

$$\sin^2 4x \cdot \cos^3 3x \cos 4x - \sin^2 4x \cos^3 3x \sin 3x \qquad (۵۹)$$

$$= \sin^2 4x \cos^3 3x \cos 7x$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) \qquad (۶۰)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) \qquad (۶۱)$$

$$\sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2}\right) \qquad (۶۲)$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \qquad (۶۳)$$

پاسخ های چندینهای زیر را که میان ۰ و ۳۶۰ میباشد بدست آورید:

$$\sin 2x = \sin x \qquad (۶۴)$$

(پاسخ ها ۰ و ۶۰ و ۱۸۰ و ۳۰۰ و ۳۶۰)

$$\sin 2x = \cos x \qquad (۶۵)$$

$$\cos 2x = \cos x \qquad (66)$$

$$\cos 2x = \sin x \qquad (67)$$

$$\sin 3x + \sin x = \cos x \qquad (68)$$

$$\sin 5x - \sin x + \cos 4x + \cos 2x = 0 \qquad (69)$$

$$\sin 5x + 2\cos x + \sin 3x = 0 \qquad (70)$$

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \qquad (71)$$

$$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 0 \qquad (72)$$

$$\operatorname{tg} x - \cot x = \cot 2x \qquad (73)$$

$$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 \qquad (74)$$

$$\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1 \qquad (75)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x = 1 \qquad (76)$$

$$\sin \frac{x}{2} - \cos x = 1 \qquad (77)$$

ب - محاسبه پذیر نمودن مجموع چند خط مثلثاتی با لگاریتم

۹۰ - یکی از فایده های عمل تبدیل کردن حاصل جمع (یا تفاضل) های چند خط مثلثاتی بحاصل ضرب آسان نمودن محاسبه های عددی عبارتهای مثلثاتی است

مثلاً اگر بخواهیم عبارت

$$S = \cos 13^\circ - \cos 27^\circ$$

را بکمک جدول لگاریتم حساب کنیم اگر این عبارت بحاصل ضرب تبدیل نشده باشد باید نخست لگاریتم $\cos 13^\circ$ و لگاریتم $\cos 27^\circ$ را از روی جدول پیدا کنیم

$$\log \cos 13^\circ = \bar{1},98872$$

$$\log \cos 27^\circ = \bar{1},94988$$

سپس خود $\cos 13^\circ$ و $\cos 27^\circ$ را از روی جدول پیدا کرده از هم کم میکنیم تا S حساب شود:

$$S = \cos 13^\circ - \cos 27^\circ = 0,97436 - 0,89100 = 0,08336$$

ولی اگر نخست S را بحاصل ضرب تبدیل نمائیم:

$$S = -2 \sin \frac{13+27}{2} \sin \frac{13-17}{2} = 2 \sin 20^\circ \sin 7^\circ$$

خواهیم داشت:

$$\log S = \log ۲ + \log \sin ۲۰^\circ + \log \sin ۷^\circ$$

$$= ۰,۳۰۱۰۳ + \bar{۱},۵۳۴۰۵ + \bar{۱},۰۸۵۸۹$$

$$= \bar{۲},۹۲۰۹۷$$

و باین ترتیب کافی است ببینیم $\bar{۲},۹۲۰۹۷$ لگاریتم چه عددیست

$$\bar{۲},۹۲۰۹۷ = \log ۰,۰۸۳۳۶$$

$$S = ۰,۰۸۳۳۶$$

۱۰- هرگاه یک عبارت جبری S را طوری تبدیل نموده باشیم که عبارت تبدیل شده تنها دو عمل ضرب و تقسیم را دربرداشته باشد گوئیم S را محاسبه پذیر بالگاریتم نموده ایم. مثلا برای اینکه $tg\,a + tg\,b$ محاسبه پذیر بالگاریتم شود آن را بصورت $\frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$ درمیآوریم (دستور ۴۰):

$$\log(tg\,a + tg\,b) = \log \sin(a+b) + colog \cos a + colog \cos b$$

مثال ۱- میخواهیم $S = \sin a + ۲ \sin ۳a + \sin ۵a$ را بحاصل ضرب تبدیل کنیم

نخست مجموع $\sin a + \sin 5a$ را بحاصل ضرب تبدیل میکنیم. بترتیب خواهیم داشت:

$$S = (\sin a + \sin 5a) + 2\sin 3a$$

$$= 2\sin 3a \cos 2a + 2\sin 3a$$

$$= 2\sin 3a\,(1 + \cos 2a)$$

$$= 2\sin 3a \times 2\cos^2 a$$

$$= 4\sin 3a . \cos^2 a$$

مثال ۲-

$$S = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a$$

برای تبدیل نمودن S بحاصل ضرب بترتیب مینویسیم:

$$S = (\sin a + \sin 4a) + (\sin 2a + \sin 3a)$$

$$= 2\sin\frac{5a}{2}\cos\frac{3a}{2} + 2\sin\frac{5a}{2}\cos\frac{a}{2}$$

$$= 2\sin\frac{5a}{2}\left(\cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{5a}{2} \times 2\cos a \cos\frac{a}{2}$$

$$= 4\sin\frac{5a}{2}\cos a \cos\frac{a}{2}$$

تبصره - این دو مثال و از مثالهای زیر راه کلّی برای محاسبه پذیر نمودن عبارتی که شماره جمله های آن پیش از دو است بدست میآید : باید کوشش نمود که بتدریج از شماره جمله ها کم شود تا بیک برسد - برای این کار نخست مجموع جبری دو جمله از آن عبارت را مبدّل بحاصل ضرب میکنیم (با ورزش زیاد میتوان جمله ها را بطور شایسته باهم جور کرد) عبارتی بدست میآید که شماره جمله های آن کمتر از شماره جمله های عبارت نخست است - و بهمین ترتیب در عبارت تازه عمل میشود (اگر لازم باشد).

مثال ۲-

$$S = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$$

بترتیب داریم:

$$S = (\sin a + \sin b) + \left[\sin c - \sin(a+b+c)\right]$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{c-a-b-c}{2}\cos\frac{a+b+2c}{2}$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\left(\frac{a+b}{2}+c\right)$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2} - \cos\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]$$

$$= 2\sin\frac{a+b}{2} \times 2\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

$$= 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

ونیز

$$C = \cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$$

را بترتیب چنین تبدیل مینمائیم:

$$C = (\cos a + \cos b) + [\cos c + \cos(a+b+c)]$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\cos\left(\frac{a+b}{2}+c\right).\cos\frac{a+b}{2}$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2} + \cos\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]$$

$$= 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}$$

مثال ۴- میخواهیم عبارت $1+\sin a$ را محاسبه پذیر با لگاریتم نمائیم. با آنکه این عبارت بصورت مجموع جبری دو خط مثلثاتی نیست ولی اگر بجای ۱ بنویسیم $\sin\frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$1+\sin a = \sin\frac{\pi}{2} + \sin a$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

ولی $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}$ و $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$ متمم یکدیگرند بنابرین

$$\boxed{1+\sin a = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)}$$

ویا

$$\boxed{1+\sin a = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}$$

همچنین میتوان $1-\sin a$ و $1+\cos a$ و $1-\cos a$ رابصورت حاصل ضرب نوشت:

$$1-\sin a = \sin\frac{\pi}{2}-\sin a$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$$

درعبارت های $1+\cos a$ و $1-\cos a$ بجای ۱ میگذاریم $\cos 0$:

$$1+\cos a = \cos 0 + \cos a$$

$$= 2\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2} = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$1-\cos a = \cos 0 - \cos a$$

$$= 2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{a}{2} = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

این دو اتحاد همان اتحادهای (۲۶) و (۲۷) است.

تبصره - مانند مثال بالا هرگاه در عبارتی عددهائی مانند $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\sqrt{3}$ باشد میتوان برای تبدیل کردن آن عبارت این عددها را بصورت خط‌های مثلثاتی نوشت:

مثال ۵ - برای محاسبه پذیر نمودن $\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}$ میتوان بجای ۱ آنها $tg\,\frac{\pi}{4}$ نوشت:

$$\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}=\frac{tg\,\frac{\pi}{4}+tg\,a}{tg\,\frac{\pi}{4}-tg\,a}$$

و بنابدستور (۴۰)

$$=\frac{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos\frac{\pi}{4}.\cos a}}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}{\cos\frac{\pi}{4}.\cos a}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-a\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}$$

$$=tg\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$$

میتوان این نتیجه را بترتیب زیر زودتر بدست آورد:

$$\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}=\frac{tg\,\frac{\pi}{4}+tg\,a}{1-1\times tg\,a}=\frac{tg\,\frac{\pi}{4}+tg\,a}{1-tg\,\frac{\pi}{4}\,tg\,a}=tg\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$$

همچنین خواهیم یافت:

$$\frac{1-tg\,a}{1+tg\,a}=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\,a}{1+tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\,a}=tg\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

مثال ۶-

$$S=\sin a+\sin 2a+\sin 3a$$

بترتیب داریم:

$$S=(\sin a+\sin 3a)+\sin 2a$$

$$=2\sin 2a\cos a+\sin 2a$$

حال با اینکه $\sin 2a$ را سازه میگیریم بترتیب خواهیم داشت:

$$S=\sin 2a(2\cos a+1)=2\sin 2a\left(\cos a+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sin 2a\left(\cos a+\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\sin 2a\cdot\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

و یا در جمله دوم بجای $\sin 2a$ میگذاریم $2\sin a\cdot\cos a$ و خواهیم داشت:

$$S=2\sin 2a\cos a+2\sin a\cdot\cos a$$

$$=2\cos a(\sin 2a+\sin a)=4\cos a\cdot\sin\frac{3a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}$$

مثال ۷- تبدیل عبارت $A=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

بجای $\sqrt{3}$ میتوان $tg\frac{\pi}{3}$ گذاشت :

$$A=\sin x+tg\frac{\pi}{3}\cdot\cos x$$

$$=\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

$$=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

تبصره - بطور کلی هر عدد جبری را میتوان بصورت محیط مثلثاتی نوشت : اگر قدر مطلق آن از (۱) کوچکتر باشد میتوان آن عدد را سینوس یا سینوس متمم یا تانژانت و یا تانژانت متمم کمانی گرفت. و برابر با تانژانت یا تانژانت متمم کمانی خواهد بود هرگاه قدر مطلقش بزرگتر از (۱) باشد (در هر دو حالت میتوان آن کمان را از روی جدول بدست آورد).

مثال ۸ - میخواهیم $\frac{1}{2}+\cos x$ را محاسبه پذیر با لگاریتم نمائیم.

- عدد $\frac{1}{2}$ را میتوان سینوس متمم کمانی گرفت که آنرا α مینامیم

بنابرین : ($\alpha = 12^{\circ}\ 22'\ 27''$)

$$\frac{1}{2} + \cos x = \cos\alpha + \cos x$$

$$= 2\cos\frac{\alpha + x}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}$$

پس اگر x بازنیه اندازه گرفته شده باشد خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2} + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + 8^\circ\ 44'\ 42''\!,5\right)\cos\left(\frac{x}{2} - 8^\circ\ 44'\ 42''\!,5\right)$$

۱۱- تبدیل عبارت کلی $a\sin x + b\cos x$ به حاصل ضرب عبارت

(مثال ۷) صورت مخصوصی است ازین عبارت کلی $\sin x + \sqrt{3}\cos x$ که در آن a برابر (۱) و b برابر $\sqrt{3}$ میباشد . چنانکه دیدیم راه تبدیل نمودن آن این بود که $\sqrt{3}$ را تانژانت $\frac{\pi}{3}$ بگیریم (میتوان نیز بجای $\sqrt{3}$ تانژانت متمم $\frac{\pi}{6}$ گذاشت) .

همین راه را برای تبدیل نمودن هر عبارتی که بصورت $a\sin x + b\cos x$ باشد بکار میبریم . برای اینکار نخست آنرا چنین مینویسیم :

$$a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right)$$

و چون میتوانیم همیشه کمانی مانند φ بدست آوریم که تانژانت آن برابر عدد جبری $\frac{b}{a}$ باشد

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}$$

پس میتوان عبارت بالا را چنین نوشت :

$$a\sin x + b\cos x = a(\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x)$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi}(\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x)$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi}\sin(x+\varphi)$$

که عبارتیست محاسبه پذیر بالگاریتم .

φ در این عبارت یکی از کمانهائی است که تانژانت آن عدد $\frac{b}{a}$ است و از روی جدول بدست میآید .

مثال ـ میخواهیم عبارت $A = 2\sin x - 3\cos x$ را که در آن x برابر $31^\circ\, 43'$ است بالگاریتم حساب کنیم ـ نخست ۲ را سازه میگیریم:

$$A = 2\left(\sin x - \frac{3}{2}\cos x\right)$$

حال از روی جدول کمانی φ پیدا میکنیم که تانژانت آن $-\frac{3}{2}$ باشد

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{2}$$

[$\varphi = K\cdot 180^\circ - (56^\circ\, 18'\, 29'')$ و میتوان آنرا $-(56^\circ\, 18'\, 29'')$ گرفت].

$$A = \frac{2 \sin (x + \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{2 \sin (31^\circ\, 43' - 56^\circ\, 18'\, 29'')}{\cos 56^\circ\, 18'\, 29''}$$

$$= -\frac{2 \sin 24^\circ\, 35'\, 29''}{\cos 56^\circ\, 18'\, 29''}$$

A منفی است نخست $-A$ را حساب می کنیم :

$$\log(-A) = \log 2 + \log \sin 24^\circ\, 35'\, 29'' + \operatorname{colog} \cos 56^\circ\, 18'\, 29''$$

$$= 0{,}30103 + \bar{1}{,}61925 + 0{,}25592$$

$$= 0{,}17620$$

$$-A = 1{,}5004$$

$$A = -1{,}5004$$

تبصره - برای تبدیل نمودن $a \sin x + b \cos x$ میتوان نیز b را سازه گرفت وبجای $\frac{a}{b}$ تانژانت کانی α گذاشت

$$a \sin x + b \cos x = b \left(\frac{a}{b} \sin x + \cos x \right)$$

$$= \frac{b}{\cos \alpha} (\sin \alpha \sin x + \cos \alpha \cos x)$$

$$= \frac{b \cos (x - \alpha)}{\cos \alpha}$$

و نیز چنانکه در پیش اشاره شد میتوان $\frac{b}{a}$ یا $\frac{a}{b}$ را برابر با تانژانت متمم کمانی گرفت

مثلاً اگر $\frac{b}{a}$ را تانژانت متمم β بنامیم خواهیم داشت :

$$a(\sin x + \frac{b}{a}\cos x) = a(\sin x + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cos x)$$

$$= \frac{a\cos(x-\beta)}{\sin\beta}$$

(این β متمم آن φ است)

۱۲- تبدیل $a^2 + b^2$ بحاصل ضرب - هرگاه عبارتی بصورت $a^2 + b^2$ باشد و بخواهیم آنرا محاسبه پذیر بالگاریتم نمائیم نخست آنرا چنین مینویسیم :

$$a^2 + b^2 = a^2(1 + \frac{b^2}{a^2})$$

و چون میتوان همیشه کمانی φ (میان 0 و $\frac{\pi}{2}$) بدست آورد که تانژانت آن برابر $\left|\frac{b}{a}\right|$ باشد

$$tg\,\varphi = \left|\frac{b}{a}\right|$$

پس خواهیم داشت :

$$a^2 + b^2 = a^2(1 + tg^2\varphi)$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2\varphi} = \left(\frac{|a|}{\cos\varphi}\right)^2$$

$$\log tg\,\varphi = \log|b| + \operatorname{colog}|a|$$

$$\log(a^2 + b^2) = 2(\log|a| + \operatorname{colog}\cos\varphi)$$

تبصره - اگر در عبارت $a^2 + b^2$ جمله بزرگتر را سازه بگیریم و اگر فرض کنیم این جمله بزرگتر a^2 باشد در اینصورت $\frac{b^2}{a^2}$ از (۱) کوچکتر است و میتوان آنرا برابر بسینوس متمم کمانی α گرفت $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

وخواهیم داشت :

$$a^2+b^2 = a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = a^2(1+\cos\alpha)$$

$$= 2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\log\cos\alpha = 2(\log|a| + \operatorname{colog}|b|)$$

$$\log(a^2+b^2) = \log 2 + 2\left(\log\cos\frac{\alpha}{2} + \log|a|\right)$$

مثال - میخواهیم $S = \cos^2 116^\circ\, 24' + \sin^2 43^\circ\, 36'$ را حساب کنیم.

راه نخست :

$$S = \sin^2 43^\circ\, 36' \left(1 + \frac{\cos^2 116^\circ\, 24'}{\sin^2 43^\circ\, 36'}\right)$$

$$tg\,\varphi = \left|\frac{\cos 116^\circ\, 24'}{\sin 43^\circ\, 36'}\right|$$

$$S = \frac{\sin^2 43^\circ\, 36'}{\cos^2\varphi}$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log |\cos 116^\circ\ 24'| + \operatorname{colog} \sin 43^\circ\ 36'$$

$$= \log \sin 26^\circ\ 24' + \operatorname{colog} \sin 43^\circ\ 36'$$

$$= \bar{1},64800 + 0,16139$$

$$= \bar{1},80939$$

$$\varphi = 32^\circ\ 48'\ 43''$$

$$\log \cos \varphi = \bar{1},92451$$

$$\log S = 2\,(\log \sin 43^\circ\ 36' + \operatorname{colog} \cos \varphi)$$

$$= 2\,(\bar{1},83861 + 0,07549)$$

$$= 2 \times \bar{1},91410 = \bar{1},82820$$

$$S = 0,67328$$

راه دوّم - $\cos 116^\circ\ 24'$ برابر است با $-\sin 26^\circ\ 24'$ -

پس $\cos^2 116^\circ\ 24'$ 〃 〃 〃 $\sin^2 26^\circ\ 24'$

حال چون $\sin 26^\circ\ 24'$ از $\sin 43^\circ\ 36'$ کوچکتر است

چنین مینویسیم :

$$S = \sin^2 43^\circ\ 36'\ (1 + \cos\alpha)$$

که در آن

$$\cos\alpha = \frac{\sin^2 26^\circ\ 24'}{\sin^2 43^\circ\ 36'}$$

پس

$$S = 2\sin^2 43^\circ\ 36' \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\log\cos\alpha = 2\,(\log\sin 26^\circ\ 24' + \operatorname{colog}\sin 43^\circ\ 36')$$

$$= 2 \times \bar{1},80939$$

$$= \bar{1},61878$$

$$\alpha = 65^\circ\ 26'\ 11''$$

$$\frac{\alpha}{2} = 32^\circ\ 43'\ 6''$$

$$\log S = \log 2 + 2\,(\log\sin 43^\circ\ 36' + \log\cos 32^\circ\ 43'\ 36'')$$

$$= 0,30103 + 2\,(\bar{1},83861 + \bar{1},92497)$$

$$= 0,30103 + 2 \times \bar{1},76358 = \bar{1},82819$$

$$S = 0,67322$$

تبصره - اختلاف میان دو نتیجه از آنجا است که تقریباً هیچیک از لگاریتمهائی
که در جدول پنج پیکری یافت میشود درست نیست و هر لگاریتم با یک سدهزارم تقریب

نوشته شده است :

۱۳- تبدیل $b^2 - a^2$. هرگاه عبارتی بصورت $a^2 - b^2$ باشد و بخواهیم آنرا محاسبه پذیر بالگارتم نمائیم اگر a^2 از b^2 بزرگتر باشد مینویسیم :

$$a^2 - b^2 = a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$

و میتوانیم $\frac{b}{a}$ را سینوس (یا سینوس متمم) کمانی φ بگیریم

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\varphi = \frac{b}{a}$$

و خواهیم داشت :

$$a^2 - b^2 = a^2(1 - \sin^2\varphi) = a^2\cdot\cos^2\varphi$$

$$\log(a^2 - b^2) = 2(\log|a| + \log\cos\varphi)$$

و اگر a^2 کوچکتر از b^2 باشد نخست $a^2 - b^2$ را حساب میکنیم که مثبت است :

$$b^2 - a^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

و $\frac{a}{b}$ را میتوان برابر سینوس (یا سینوس متمم) کمانی α گرفت :

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin\alpha = \frac{a}{b}$$

بنابرین

$$b^2 - a^2 = b^2(1 - \sin^2\alpha) = b^2\cos^2\alpha$$

$$\log\left[-(a^2 - b^2)\right] = 2(\log|b| + \log\cos\alpha)$$

ورزش

بفرض آنکه α برابر $15^\circ\ 35'\ 26''$ باشد حساب کنید عبارتهای زیر را:

(۱) $$\frac{2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1}$$

(۲) $$\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$$

(۳) $$\frac{1{,}873}{\sqrt{1 + (1{,}873)^2\cos^2\alpha}}$$

(۴) $$\cos 3\alpha - \cos 2\alpha + \cos\alpha$$

(۵) $$\sqrt[3]{\frac{\sin^2 3\alpha + \cot^2 2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

(۶) $$\cos\alpha + \sin\alpha$$

(۷) $$5\cos\alpha - 3\sin\alpha$$

بخش چهارم

بستگی های میان گوشه ها و پهلوهای یک سه بر
گشایش سه برهای غیر راست گوشه

در کتاب مثلثات سال چهارم (صفحهٔ ۴۰ ببعد) دیدیم که میان پهلوها و گوشه های یک سه بر راست گوشه بستگی هائی هست (بستگی های ۳۱ تا ۳۵ از همین کتاب) و در ضمن چهار مثال دیدیم که از روی آن بستگی ها میتوان سه بر را (در حالتهای ساده) گشود.

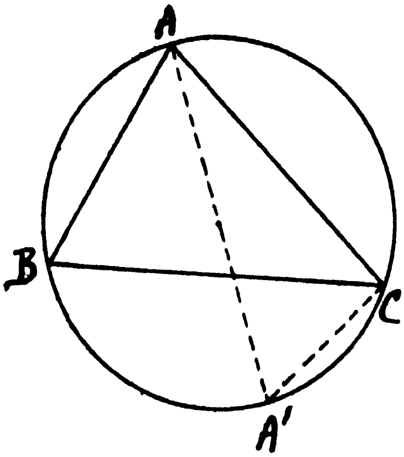
اینک میخواهیم بستگی هائی میان گوشه ها و پهلوهای یک سه بر غیر راست گوشه یافته از روی آن به گشایش سه برها بپردازیم.

این بستگی ها را بشکل چند قضیه بیان می کنیم:

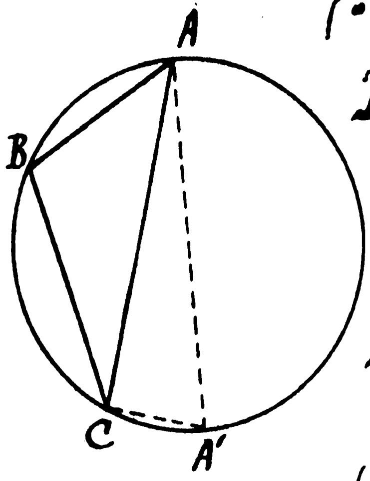
۱۴ـ قضیهٔ ۱ـ قضیهٔ سینوس ها ـ درازای پهلوهای هر سه بر متناسب است با سینوس گوشه های روبروی آن پهلوها و نسبت درازای هر پهلو به سینوس گوشهٔ روبروی آن برابر است با درازای میان بُر دائرهٔ محیطی سه بر:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (41)$$

برای ثابت کردن قضیّهٔ دایره محیطی سه بر را کشیده و مثلاً میان بری را که از A میگذرد میکشیم تا پیرامون دایره را در نقطهٔ دیگری مانند A' تلاقی کند. در سه بر راست گوشهٔ ACA' (C گوشهٔ راست)



(الف)



(ب)

AA' برابر $2R$ و AC برابر b و گوشهٔ A' یا برابر $\hat{B}$ است (اگر $\hat{B}$ تند باشد مانند شکل الف) و یا مکمّل $\hat{B}$ است (اگر $\hat{B}$ باز باشد مانند شکل ب)

در هر دو حالت $\qquad \sin B = \sin C\hat{A'}A$

حال در این سه بر راست گوشه داریم:

$$AC = b = 2R \sin C\hat{A'}A = 2R \sin B$$

و یا
$$\frac{b}{\sin B} = 2R$$

و بهمین روال از سه بر $AA'B$ بدست میآید:

$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

وهمچنین مثلاً از کشیدن میانبر BB' بستگی $\frac{a}{\sin A} = 2R$ نمایانده میشود

تبصره ۱ـ از روی قضیهٔ سینوس ها دو بستگی میان پهلو ها و گوشه های یک سه بر بدست آمد و در هندسه دیده ایم که میان گوشه ها هم یک بستگی هست :

$$A + B + C = 180^\circ$$

پس همیشه سه بستگی میان پهلو ها و گوشه های هر سه بر موجود است و بنابرین هرگاه سه جزء از ۶ جزء اصلی یک سه گوشه را داشته باشیم (که دست کم یکی پهلو باشد) میتوان سه جزء دیگر آنرا از روی این سه بستگی حساب کرد (یعنی سه بر را گشود) چنانکه در هندسه هم دیده ایم که با داشتن سه جزء (که دست کم یکی پهلو باشد) میتوان درحالت کلی سه گوشه را کشیده جزء های ناشناس را اندازه گرفت .

تبصره ۲ـ روشن است که بستگیهای بالا برای یک سه براست گوشه هم درست است :

اگر $\hat{A}$ را گوشه راست بگیریم بستگی های بالا بصورت بستگیهای (۳۲) (۳۳) و (۳۴) درمیآید .

۱۵- از روی قضیهٔ سینوس ها هرگاه

۱- از سه بری یک پهلو و دو گوشه را بشناسیم یا هرگاه

۲- از سه بری دو پهلو و گوشهٔ روبروی یکی از آن دو را بشناسیم میتوان آن

سه بر را گشود :

حالت نخست - از سه بری پهلوی a و دو گوشهٔ A و B را میشناسیم

گشایش سه بر - گوشهٔ C از روی دستور

$$C = 180 - (A + B)$$

بدست میآید .

برای یافتن پهلوهای b و c بستگی های سینوس ها (بستگی های ۴۱) را بکار

میبریم:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

در تناسب نخست b ناشناس است و سه جزء دیگر را می شناسیم و از تناسب دوم

هم تنها c را نمی شناسیم - بنابرین از روی این دو تناسب میتوان b و c را (و بکمک

لگاریتم) بدست آورد:

$$\log b = \log a + \operatorname{colog} \sin A + \log \sin B$$

$$\log c = \log a + \operatorname{colog} \sin A + \log \sin C$$

مثال $a =$ ۳۵۲٫۷۵ متر $\hat{A} =$ ۶۳° ۱۷′ ۳۰″ و $\hat{B} =$ ۵۲° ۲۴′ ۲۵″

میخواهیم $\hat{C}$ و b و c را حساب کنیم.

گشایش مسئله باید به ترتیبی انجام شود که در صفحهٔ ۷۴ نوشته شده.

ورزش

سه برهای زیر را بگشایید.

(۱) $a =$ ۳۳٫۲۲۶ متر و $B =$ ۴۹° ۱۵′ و $C =$ ۶۲° ۱۷′ ۳۴″

(۲) $b =$ ۰٫۱۷۶۹ و $C =$ ۷۵° ۱۶′ ۲۰″ و $A =$ ۵۰° ۲۲′ ۱۵″

(۳) $c =$ ۱۸۷۵۶ و $A =$ ۴۹° ۱۸′ ۲۰″ و $B =$ ۶۸° ۱۸′ ۱۶″

حالت دوم - از سه بری دو پهلوی a و b و گوشهٔ A (روبرو به a) را می‌شناسیم.

گشایش - گوشهٔ B از دستور

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \quad \text{و یا} \quad \sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

بدست میآید:

$$\log \sin B=\log b+\log \sin A+\operatorname{colog} a$$

پس از B گوشهٔ C بدست میآید

$$C=180^\circ-(A+B)$$

سپس c از روی

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

$$\log c=\log a+\log \sin C+\operatorname{colog} \sin A$$

مثال

$$A=38^\circ\ 15'\ 27'' \ ;\ b=18{,}706\ ;\ a=12{,}323$$

$$\log b=1{,}27203$$

$$\log \sin A=\bar{1}{,}79183$$

$$\underline{\operatorname{colog} a}=\underline{\bar{2}{,}90752}$$

$$\log \sin B=\bar{1}{,}97128$$

$$B=69^\circ\ 25'\ 36''$$

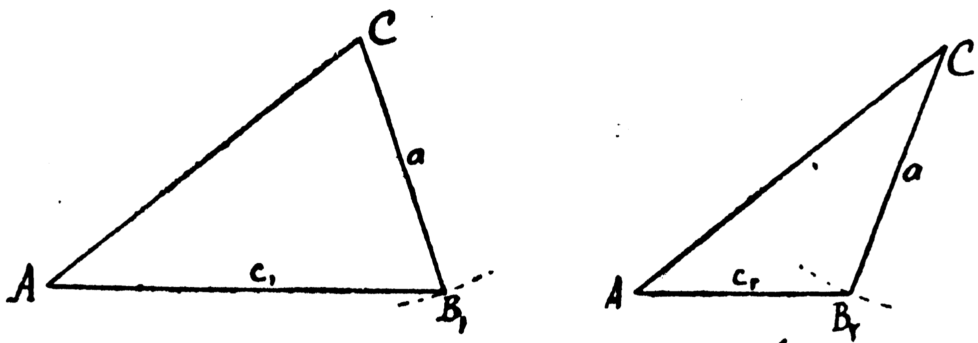
ولی B که از روی لگاریتم «سینوس» بدست میآید میتواند دارای دو مقدار باشد:

$$B_1 = 69^\circ\ 25'\ 36''$$

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 110^\circ\ 34'\ 24''$$

(B_1 و B_2 هردو دارای یک سینوس و بنابرین دارای یک لگاریتم سینوس میباشند)

حال برای اینکه ببینیم آیا B_1 و B_2 هردو پاسخ میباشند یا یکی از آنها کافی است درنظر داشته باشیم (هندسه سال دوم شماره ۱۸۶) که هرگاه گوشه داده شده تند باشد و پهلوی روبروی آن (a) کوچکتر از پهلوی دیگر (c) شاید مسئله دارای دو پاسخ باشد یعنی شاید با آنچه داریم بتوانیم دو سه بر کشیم - پس اینجا هم B_1 پاسخ است و هم B_2 و بنابرین C هم دارای دو مقدار C_1 و C_2 و c نیز دارای دو مقدار c_1 و c_2 خواهد بود (شکل)



گشایش و ترتیب آن درصفحه ۷۵ نوشته شده است

حالت نخست ـ گشایش سه بری که یک پهلو و دو گوشهٔ آن داده شده

داشته‌ها:
a = ۳۵۲٫۷۵ متر
A = ۶۳° ۱۷′ ۳۰″
B = ۵۲° ۳۴′ ۲۵″

دستورها:
$$C = 180^\circ - (A + B)$$
$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

پاسخ:
b = ۳۱۳٫۵۹ متر
c = ۳۵۵٫۴۳ متر
C = ۶۴° ۸′ ۵″

محاسبه‌های فرعی

$A + B$ = ۱۱۵° ۵۱′ ۵۵″ — C = ۶۴° ۸′ ۵″

۳۵۲۷ ۵۴۷۴۱ (D = ۱۲)
۵ ۶
$\log a$ = ۲٫۵۴۷۴۷

۶۳° ۱۷′ ۱̄٫۹۵۰۹۷ (D = ۶)
۳۰″ ۳
$\log \sin A$ = ۱̄٫۹۵۱۰۰
$\text{colog} \sin A$ = ۰٫۰۴۹۰۰

۵۲° ۳۴′ ۱̄٫۸۹۹۸۵ (D = ۱۰)
۲۵″ ۴
$\log \sin B$ = ۱̄٫۸۹۹۸۹

۶۴° ۸′ ۱̄٫۹۵۴۱۵
۵″ ۵ (D = ۶)
$\log \sin C$ = ۱̄٫۹۵۴۱۶

محاسبه‌های اصلی

محاسبهٔ b

۲٫۵۴۷۴۷
۱̄٫۸۹۹۸۹
۰٫۰۴۹۰۰
$\log b$ = ۲٫۴۹۶۳۶

۴۹۶۲۴ ۳۱۳۵ (D = ۱۴)
۱۲ ۹
b = ۳۱۳٫۵۹

محاسبهٔ c

۲٫۵۴۷۴۷
۱̄٫۹۵۴۱۶
۰٫۰۴۹۰۰
$\log c$ = ۲٫۵۵۰۶۳

۵۵۰۶۰ ۳۵۵۳ (D = ۱۲)
۳ ۲۵
c = ۳۵۵٫۴۳

حالت دوّم: گشایش سه بری که دو پهلو و گوشهٔ روبروی یکی از آن دو داده شده .

داشته‌ها: $a =$ ۱۲٫۳۷۳ متر ، $b =$ ۱۸٫۷۰۶ متر ، $A =$ ۳۸° ۱۵′ ۲۲″

دستورها:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$C = 180° - (A + B)$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

پاسخ:

$B_1 =$ ۶۹° ۲۵′ ۳۶″
$C_1 =$ ۷۲° ۱۸′ ۵۷″
$c_1 =$ ۱۹٫۰۳۸ متر

$B_2 =$ ۱۱۰° ۳۴′ ۲۴″
$C_2 =$ ۳۱° ۱۰′ ۹″
$c_2 =$ ۱۰٫۳۴۲ متر

محاسبه های فرعی	محاسبه های اصلی
(D=۳۵) ۱۲۳۷ ؛ ۳ ؛ ۰۹۲۳۷ ؛ ۱۰۵ $\log a =$ ۱٫۰۹۲۴۸ $\operatorname{colog} a =$ $\bar{2}$٫۹۰۷۵۲	**محاسبهٔ B** ۱٫۲۷۲۰۳ $\bar{1}$٫۷۹۱۸۳ $\bar{2}$٫۹۰۷۵۲ $\log \sin B =$ $\bar{1}$٫۹۷۱۳۸ ۹۷۱۳۵ ؛ ۶۹° ۲۵′ (D = ۵) ۳ ؛ ۳۶″ $B_1 =$ ۶۹° ۲۵′ ۳۶″ $B_2 =$ ۱۱۰° ۳۴′ ۲۴″
(D=۳۲) ۱۸۷۰ ؛ ۶ ؛ ۲۷۱۸۴ ؛ ۱۹۲ $\log b =$ ۱٫۲۷۲۰۳	**C_1 و C_2** $A + B_1 =$ ۱۰۷° ۴۱′ ۳″ $A + B_2 =$ ۱۴۸° ۴۹′ ۵۱″
۳۸° ۱۵′ ؛ $\bar{1}$٫۷۹۱۷۶ (D=۱۶) ۲۰″ ؛ ۵۳ ۷ ؛ ۱۸۷ $\log \sin A =$ $\bar{1}$٫۷۹۱۸۳ $\operatorname{colog} \sin A =$ ۰٫۲۰۸۱۷	**محاسبهٔ c_1** ۱٫۰۹۲۴۸ $\bar{1}$٫۹۷۸۹۸ ۰٫۲۰۸۱۷ $\log c_1 =$ ۱٫۲۷۹۶۳ ۹۴۴ ؛ ۱۹٫۰۳ (D = ۲۳) ۱۹ ؛ ۸ $c_1 =$ ۱۹٫۰۳۸
(D=۴) ۷۲° ۱۸′ ؛ $\bar{1}$٫۹۷۸۹۴ ۵۷″ ؛ ۴ $\log \sin C_1 =$ $\bar{1}$٫۹۷۸۹۸	**محاسبهٔ c_2** ۱٫۰۹۲۴۸ $\bar{1}$٫۷۱۳۹۶ ۰٫۲۰۸۱۷ $\log c_2 =$ ۱٫۰۱۴۶۱
(D=۲۱) ۳۱° ۱۰′ ؛ $\bar{1}$٫۷۱۳۹۳ ۹″ ؛ ۳ $\log \sin C_2 =$ $\bar{1}$٫۷۱۳۹۶	
(D=۴۲) ۰۱۴۵۲ ؛ ۱۰۳۴ ۹ ؛ ۲ $c_2 =$ ۱۰٫۳۴۲	

تبصره - در هر مثال عددی بهتر این است که پیش از گشایش مثلثاتی کوشش کنیم سه بر ناشناس را از راه هندسی بگشائیم از این رو دست کم میتوان پی برد با اینکه مسئله گشایش پذیر هست یا نیست و یا اینکه چند پاسخ خواهد داشت - و اگر گشایش هندسی با دقت باشد میتوان درستی محاسبه های مثلثاتی را نیز از روی آن بررسی نمود.

ورزش

سه برهای زیر را بگشائید :

(۱) a = ۶٫۱۷۵۶ b = ۸٫۲۱۹۳ A = ۳۰° ۲۵′ ۳۰

(۲) b = ۱٫۱۵۶ c = ۶٫۳۱۲ B = ۳۰°

(۳) b = ۱۰٫۷۳ a = ۲۷٫۸۰ B = ۴۰° ۵′

(۴) a = ۶۳٫۹۵۲ c = ۷۵٫۷۶ C = ۱۱° ۳′

(۵) a = ۷۰ b = ۶۵ B = ۱۰°

۱۶- قضیه ۲ - در هر سه بر نسبت مجموع دو پهلو به تفاضل آنها برابر است با نسبت تانژانت نیمهٔ مجموع گوشه های روبرو به آن پهلوها به نیمهٔ تانژانت تفاضل همان دو گوشه یعنی :

$$
(۴۲)\quad
\begin{cases}
\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{tg\,\dfrac{A-B}{۲}}{tg\,\dfrac{A+B}{۲}} \\[2em]
\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{tg\,\dfrac{B-C}{۲}}{tg\,\dfrac{B+C}{۲}} \\[2em]
\dfrac{c-a}{c+a} = \dfrac{tg\,\dfrac{C-A}{۲}}{tg\,\dfrac{C+A}{۲}}
\end{cases}
$$

برای نمایاندن درستی تناسب نخست تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

را بکار میبریم:

از روی این تناسب بترتیب خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\frac{a-b}{a+b} &= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} \\
&= \frac{۲\sin\frac{A-B}{۲}\cdot\cos\frac{A+B}{۲}}{۲\sin\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}} \\
&= tg\,\frac{A-B}{۲}\,\cot\frac{A+B}{۲} \\
&= \frac{tg\,\frac{A-B}{۲}}{tg\,\frac{A+B}{۲}}
\end{aligned}
$$

۱۷- هرگاه از سه بری دو پهلو و گوشهٔ میان آن دو پهلو را بشناسیم

میتوان از روی قضیّهٔ ۲ جزءهای ناشناس آن سه بر را (بکمک لگاریتم) حساب نمود

(حالت سوّم گشایش سه برها):

مثلاً اگر a و b و گوشهٔ C را بشناسیم گشایش سه بر بترتیب زیر خواهد بود

(از دو پهلوی داده شده آن را که بزرگتر است a مینامیم بنابرین A نیز از B

بزرگتر است):

نخست A و B را حساب میکنیم - چون C داده میشود پس $B + A$ را میشناسیم:

$$A + B = 180^\circ - C$$

$A - B$ هم از روی قضیّهٔ ۲ بدست میآید:

$$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot tg\,\frac{A+B}{2}$$

در این همچندی میتوان بجای $tg\,\frac{A+B}{2}$ برابرش $\cot\frac{C}{2}$ را نهاد زیرا

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

پس

$$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

هر دو طرف این همچندی بنا بفرض مثبت است و میتوان از آن لگاریتم گرفت

$$\log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \log(a-b) + \operatorname{colog}(a+b) + \log \cot \frac{C}{2}$$

وقتی که بدین ترتیب $\frac{A-B}{2}$ را حساب کردیم گوشه‌های A و B بدست میآید

اگر مثلاً $\frac{A-B}{2}$ برابر α باشد از روی

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\frac{A-B}{2} = \alpha$$

خواهیم داشت:

$$A = 90^\circ - \frac{C}{2} + \alpha$$

$$B = 90^\circ - \frac{C}{2} - \alpha$$

سپس c از روی قضیهٔ سینوس‌ها حساب میشود مثلاً

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

مثال $a =$ ۴۷٫۶۰۳ متر $b =$ ۳۸٫۷۴۸ متر $C =$ ۱۰۷° ۲۲' ۲۴"

گشایش و ترتیب آن در صفحهٔ ۸۸ نوشته شده است .

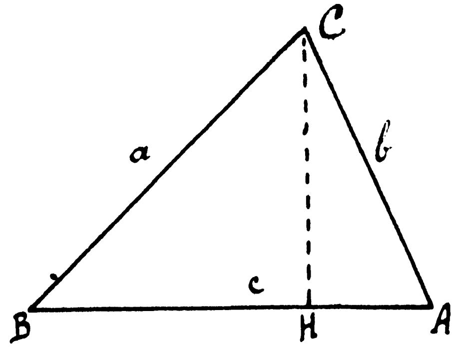
ورزش

سه برهای زیر را بگشائید:

(۱) $a =$ ۷۱۴٫۷۵ و $b =$ ۲۹۴٫۵۳ ، $C =$ ۶۴° ۵۴' ۳۰"

(۲) صح $= ۷۵٫۸۰$ ، $۱۱۵٫۷۵ = c$ ، $۴۰^\circ\ ۳۷'\ ۲۰'' = A$

۱۸ - قضیهٔ ۳ - قضیهٔ سینوس متمم ها - در هندسه دیده ایم که هرگاه گوشهٔ

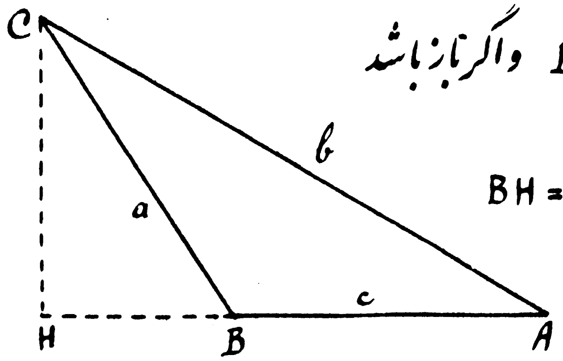


B تند باشد

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2c.BH$$

و هرگاه $\widehat{B}$ باز باشد

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2c.BH$$



ولی اگر $\widehat{B}$ تند باشد $BH = a\cos B$ واگر باز باشد

$$BH = a\cos\widehat{CBH} = a\cos(180^\circ - B) = -a\cos B$$

بنابرین خواه B تند باشد یا باز

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$$

وهمین روال :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

یعنی در هر سه بر توان دوم هر یک از پهلوها (خواه گوشهٔ روبروی آن تند باشد خواه باز) برابر است با مجموع توانهای دوم دو پهلوی دیگر منهای

دو برابر حاصل ضرب آن دو پهلو در سینوس متمم گوشه میان آن دو.

۱۹- هرگاه سه پهلوی یک سه بر را بشناسیم میتوان از روی قضیه سینوس متمم ها سه بر را گشود یعنی گوشه های آنرا حساب کرد (حالت چهارم گشایش سه برها):

اگر a و b و c پهلوهای سه بر را بشناسیم گوشه A مثلاً از دستور

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

حساب میشود:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

و همچنین گوشه های دیگر.

عیب این دستور این است که عبارت طرف دوم آن محاسبه پذیر با لگاریتم نیست ولی میتوان بترتیب زیر گوشه ها را بکمک لگاریتم محاسبه نمود:

چون

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

پس

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

حال اگر $a + b + c$ یعنی درازای پیرامون سه بر را $2p$ بنامیم خواهیم داشت:

$$a+b+c=2p$$

$$a-b+c=2p-2b=2(p-b)$$

$$a+b-c=2p-2c=2(p-c)$$

وهمچنین $-a+b+c=2p-2a=2(p-a)$

پس

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

وبهمین ترتیب خواهیم دید که

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=\frac{2p(p-a)}{bc}$$

وهمچنین $\sin^2\frac{B}{2}$ و $\cos^2\frac{B}{2}$ ، $\sin^2\frac{C}{2}$ و $\cos^2\frac{C}{2}$ بدست میآید پس با درنظر گرفتن اینکه $\frac{A}{2}$ و $\frac{B}{2}$ و $\frac{C}{2}$ هرسه تند میباشند خواهیم داشت :

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{A}{2}&=+\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\end{aligned}\right.$$

$$(۴۴)\quad \begin{cases} \cos\frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{B}{۲} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \\ \cos\frac{C}{۲} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{cases}$$

ازروی هریک ازین دستورها میتوان گوشه ها را بکمک لگاریتم حساب کرد مثلاً

$$\log\sin\frac{A}{۲} = \frac{۱}{۲}\left[\log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} b + \operatorname{colog} c\right]$$

ورزش - چه گوشه ایست که لگاریتم سینوس آن $\bar{۱},۹۹۹۸۳$ است ؟

لگاریتم سینوس متمم آن $\bar{۱},۹۹۹۹۰$ است ؟

لگاریتم تانژانت آن $۱,۵۵۰۵۹$ است ؟

ازروی این ورزش می بینیم که محاسبهٔ یک گوشه بکمک لگاریتم تانژانت و تانژانت متمم آن دقیق تر از محاسبهٔ همان گوشه بکمک لگاریتم سینوس آن و یا سینوس متمم آنست

بنابرین بهتر این است که $tg\frac{A}{۲}$ و $tg\frac{B}{۲}$ و $tg\frac{C}{۲}$ را حساب کنیم و برای این کار کافی است که دو طرف هریک از دستورهای (۴۳) را بر دو طرف نظیر آن از دستورهای (۴۴) بخش نمائیم :

$$(۴۵)\quad \begin{cases} tg\,\dfrac{A}{۲} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ tg\,\dfrac{B}{۲} = \sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ tg\,\dfrac{C}{۲} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$$

بعلاوه اگر از نظر محاسبهٔ گوشه‌ها دستورهای (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) را با هم بسنجیم می‌بینیم اگر بخواهیم گوشه‌ها را به کمک دستورهای (۴۳) بدست آوریم باید شش لگاریتم حساب کنیم:

لگاریتم‌های a و b و c و $p-a$ و $p-b$ و $p-c$

واگر بخواهیم دستورهای (۴۴) را بکار بریم علاوه بر این شش لگاریتم $\log p$ را باید نیز بگیریم.

ولی با دستورهای (۴۵) داشتن چهار لگاریتم (لگاریتم‌های p و $p-a$ و $p-b$ و $p-c$) کافیست.

اگر $\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ را r بنامیم

$$(۴۶)\qquad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

دستورهای (۴۵) چنین نوشته میشود:

$$(۴۷)\quad \begin{cases} tg\,\dfrac{A}{۲} = \dfrac{r}{p-a} \\ tg\,\dfrac{B}{۲} = \dfrac{r}{p-b} \\ tg\,\dfrac{C}{۲} = \dfrac{r}{p-c} \end{cases}$$

پس برای آسان نمودن محاسبه گوشه ها نخست $\log r$ را حساب میکنیم

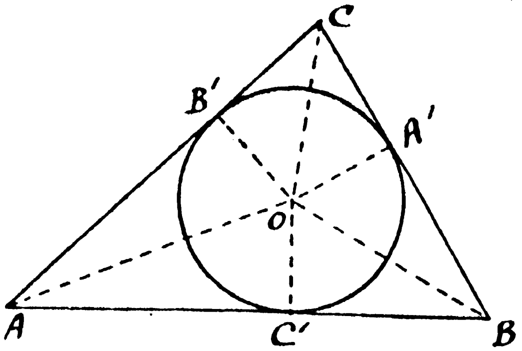
$$\log r = \frac{1}{2}\left[\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)+\operatorname{colog} p\right]$$

وسپس خواهیم داشت :

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-a)$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-b)$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-c)$$



تبصره - هرگاه دایره محاطی سه بر ABC را بکشیم و مرکز آن را O ونقطه های تماس آنرا با پهلوهای BC و CA و AB بترتیب A' و B' و C' بنامیم بآسانی می بینیم که

$$AB' = AC' = p - a$$

$$BC' = BA' = p - b$$

$$CA' = CB' = p - c$$

پس مثلاً درسه بر راست گوشه AOB' که گوشه $O\hat{A}B'$ برابر $\frac{A}{2}$ است خواهیم داشت :

$$tg\,\frac{A}{2} = \frac{OB'}{p-a}$$

که در آن OB' پرتو دایره محاطی است. از سنجیدن این بستگی با بستگی نخست از دستورهای (۴۷)

چنین برمی‌آید که r همان پرتو دایره محاطی سه بر است.

مثال. مطلوبست گشایش سه بری که پهلوهای آن داده میشود:

$a = ۳۷۶۳٫۴۵$ $\quad b = ۴۳۹۲٫۸۷$ $\quad c = ۵۰۶۹٫۹$

گشایش و ترتیب آن در صفحه ۸۹ نوشته شده است.

ورزش

سه برهای زیر را بگشایید:

(۱) $a = ۷۳٫۸۵۹$ $\quad b = ۶۸٫۰۲۵$ $\quad c = ۵۳٫۷۶۳$

(۲) $a = ۱٫۰۷۸۰$ $\quad b = ۰٫۹۶۷۳$ $\quad c = ۱٫۲۸۳۲$

(۳) $a = ۴$ $\quad b = ۵$ $\quad c = ۶$

۲۰. خلاصه. ما باید راه گشایش سه برها را در چهار حالت ساده بیاموزیم:

نخست. اگر یک پهلو و دو گوشه از سه بر را بشناسیم

دوم. اگر دو پهلو و گوشه روبرو بیکی از آن دو را (حالت ابهام)

سوّم - دو پهلو و گوشهٔ میان آن دو را.

چهارم - اگر سه پهلو را بشناسیم.

چنانکه دیدیم:

در دو حالت نخست و دوّم گشایش سه بر از روی قضیّهٔ سینوس ها انجام میشود

در حالت سوّم گوشه ها را نخست از روی قضیهٔ ۲ صفحهٔ ۷۶ و سپس پهلوی سوم را از روی

قضیّهٔ سینوسها حساب می کنیم.

در حالت چهارم دستورهای (۴۶) و (۴۷) را بکار میبریم.

تبصره - هرگاه اندازهٔ جزءهای داده شده عددهائی ساده باشد در دو حالت

سوّم و چهارم نخست قضیه سینوس متمم ها را بکار میبریم و سپس (اگر لازم باشد) قضیّهٔ

سینوسها را.

پهنهٔ سه برها

۲۱ - الف - سه بر راست گوشه - اگر گوشهٔ راست را C بنامیم میدانیم

که S پهنهٔ سه بر راست گوشه چنین است:

$$S = \frac{1}{2} ab$$

حالت سوم ـ گشایش سه بری که دو پهلو و گوشه میان آنها داده شده.

داشته‌ها: $a =$ ۴۷,۶۰۳ متر ، $b =$ ۳۸,۷۴۸ متر ، $C =$ ۱۰۷° ۲۲′ ۲۴″

دستورها:

$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$

$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

پاسخ: $A =$ ۴۰° ۳۷′ ۲۴″ ، $B =$ ۳۲° ۱۲″ ، $c =$ ۶۹,۷۷۸ متر

محاسبه‌های اصلی

محاسبه $\frac{A-B}{2}$ و A و B

۰,۹۴۷۱۹
۲̄,۰۶۳۷۳
۱̄,۸۶۶۲۵
$\log tg\,\frac{A-B}{2} =$ ۲̄,۸۷۷۱۷

(D=۱۶۹) ۲̄,۸۷۶۱۶ ۴° ۱۸′
۱۰۱ ۳۶″

$\frac{A-B}{2} =$ ۴° ۱۸′ ۳۶″
$\frac{A+B}{2} =$ ۳۶° ۱۸′ ۴۸″
$A =$ ۴۰° ۳۷′ ۲۴″
$B =$ ۳۲° ۱۲″

محاسبه c

۱,۶۷۷۶۴
۱̄,۹۷۹۷۲
۰,۱۸۶۳۶
$\log c =$ ۱,۸۴۳۷۲

(D=۶) ۸۴۳۶۷ ۶۹۷۷
۵ ۸
$c =$ ۶۹,۷۷۸

محاسبه‌های فرعی

$a - b =$ ۸,۸۵۵
$\log(a-b) =$ ۰,۹۴۷۱۹

$a + b =$ ۸۶,۳۵۱
(D=۷) ۱۶۳۵ ۱ ۹۳۶۲۶ ۷
$\log(a+b) =$ ۱,۹۳۶۲۷
$\operatorname{colog}(a+b) =$ ۲̄,۰۶۳۷۳

$\frac{C}{2} =$ ۵۳° ۴۱′ ۱۲″
۵۳° ۴۲′ ۱̄,۸۶۶۰۳
(D=۲۷) −۴۰ +۱۸
−۸ ۲۲
$\log\cot\frac{C}{2} =$ ۱̄,۸۶۶۲۵

(D=۹) ۴۷۶۰ ۶۷۷۶۱
۳ ۲۷
$\log a =$ ۱,۶۷۷۶۴

$180^\circ - C = A + B =$ ۷۲° ۳۷′ ۳۶″
(D=۴) ۷۲° ۳۷′ ۱̄,۹۷۹۷۰
۳۶″ ۲
$\log\sin C =$ ۱̄,۹۷۹۷۲

۴۰° ۳۷′ ۱̄,۸۱۳۵۸
(D=۱۴) ۲۰ ۴۷
۴ ۹۳
$\log\sin A =$ ۱̄,۸۱۳۶۴
$\operatorname{colog}\sin A =$ ۰,۱۸۶۳۶

حالت چهارم - گشایش سه بری که پهلوهای آن داده شده :

داشته‌ها:

متر ۳۷۶۳٫۴۵ = a
متر ۴۴۹۲٫۸۷ = b
متر ۵۰۶۹٫۹۰ = c

۱۴۲۲۶٫۲۲ = $2p$
۶۶۱۳٫۱۱ = p
۲۸۴۹٫۶۶ = $p-a$
۲۲۲۰٫۲۴ = $p-b$
۱۵۴۳٫۲۱ = $p-c$
۶۶۱۳٫۱۱ = p

دستورها:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$

$$tg\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$$

$$tg\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

پاسخ:

$A=$ ۴۶° ۱۱′ ۸″
$B=$ ۵۷° ۲۲′ ۵۲″
$C=$ ۷۶° ۲۵′ ۵۰″
۱۷۹° ۵۹′ ۵۰″

محاسبه‌های اصلی	محاسبه‌های فرعی
محاسبه $\frac{A}{2}$ ۳٫۰۸۴۶۰ ۴̄٫۵۴۵۲۱ $\log tg\frac{A}{2}=$ ۱̄٫۶۲۹۸۱ ۱̄٫۶۲۹۶۱ ۲۳° ۵′ ۲۰ ۴۴′ (D=۳۵) $\frac{A}{2}=$ ۲۳° ۵′ ۴۴′	۶۶۱۳ ۸۲۰۴۰ ۱ ۶ ۱ ۶ (D=۶) $\log p=$ ۳٫۸۲۰۴۱ $\operatorname{colog} p=$ ۴̄٫۱۷۹۵۹ ۲۸۴۹ ۴۵۴۶۹ ۶ ۹ ۶ ۹ (D=۱۵) $\log(p-a)=$ ۳٫۴۵۴۷۹ $\operatorname{colog}(p-a)=$ ۴̄٫۵۴۵۲۱
محاسبه $\frac{B}{2}$ ۳٫۰۸۴۶۰ ۴̄٫۶۵۳۶۰ $\log tg\frac{B}{2}=$ ۱̄٫۷۳۸۲۰ ۱̄٫۷۳۸۰۷ ۲۸° ۴۱′ ۱۳ ۲۶′ (D=۳۰) $\frac{B}{2}=$ ۲۸° ۴۱′ ۲۶′	۲۲۲۰ ۳۴۶۳۵ ۲ ۴ ۴ ۸ (D=۲۰) $\log(p-b)=$ ۳٫۳۴۶۴۰ $\operatorname{colog}(p-b)=$ ۴̄٫۶۵۳۶۰ ۱۵۴۳ ۱۸۸۴۷ ۲ ۵۶ ۱ ۲۸ (D=۲۸) $\log(p-c)=$ ۳٫۱۸۸۴۳ $\operatorname{colog}(p-c)=$ ۴̄٫۸۱۱۵۷
محاسبه $\frac{C}{2}$ ۳٫۰۸۴۶۰ ۴̄٫۸۱۱۵۷ $\log tg\frac{C}{2}=$ ۱̄٫۸۹۶۱۷ ۱̄٫۸۹۵۹۳ ۳۸° ۱۲′ ۲۴ ۵۵′ (D=۲۶) $\frac{C}{2}=$ ۳۸° ۱۲′ ۵۵′	۳٫۴۵۴۷۹ ۳٫۳۴۶۴۰ ۳٫۱۸۸۴۳ ۴̄٫۱۷۹۵۹ $2\log r=$ ۶٫۱۶۹۲۱ $\log r=$ ۳٫۰۸۴۶۰

پس اگر دو پهلوی گوشه راست را بشناسیم (حالت نخست از گشایش سه برهای راست گوشه) همین دستور را بکار میبریم.

و اگر وتر c و یک گوشه مثلاً A را بشناسیم (حالت دوم) کافی است در دستور بالا بجای a و b بترتیب $c \sin A$ و $c \cos A$ بگذاریم.

$$s = \frac{1}{2} c^2 \sin A \cos A$$

$$= \frac{1}{4} c^2 \sin 2A$$

و اگر یکی از دو پهلوی گوشه راست مثلا a و یکی از دو گوشه تند مثلاً B بشناسیم (حالت سوم) کافیست در دستور $s = \frac{ab}{2}$ بجای b برابرش $a \operatorname{tg} B$ را بگذاریم:

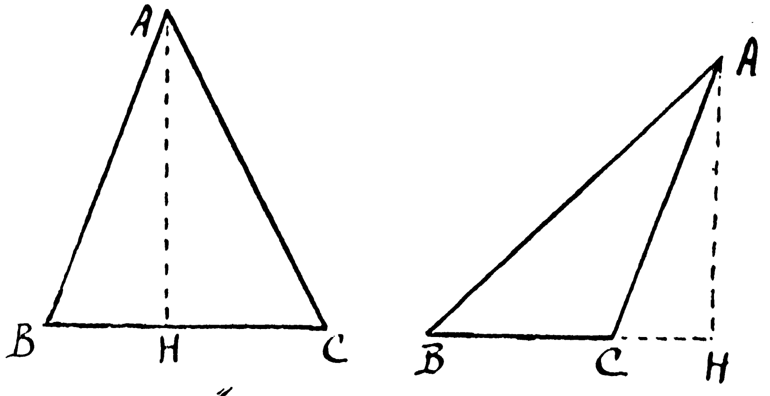
$$s = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} B$$

و اگر وتر و یکی از دو پهلوی گوشه راست مثلا b را بشناسیم بجای a میگذاریم $\sqrt{(c+b)(c-b)}$:

$$s = \frac{1}{2} b \sqrt{(c+b)(c-b)}$$

۲۲ - ب - پهنه سه برهای غیر راست گوشه - میدانیم پهنه سه بر ABC

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} a \cdot h$$ (شکل)



ولی h برابر است با $c \sin B$ و یا $b \sin C$ (خواه گوشهٔ B یا C تند باشد یا باز) پس

$$\left\{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ac \sin B \\ &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ S &= \frac{1}{2} bc \sin A \end{aligned}\right. \qquad (۲۸)$$

و همچنین

یعنی پهنهٔ هر سه بر برابر است با نیمهٔ حاصل ضرب درازای دو پهلوی آن در سینوس گوشهٔ میان آن دو پهلو.

این دستور را بکار میبریم هرگاه از سه بر دو پهلو و گوشهٔ میان آنها را بشناسیم (حالت سوم گشایش سه برها).

اگر دو گوشه و یک پهلو از سه بر (مثلاً a و A و B) را بشناسیم (حالت نخست

کافیست در دستور $s = \frac{1}{2} ac \sin B$ بجای c برابرش $\frac{a \sin C}{\sin A}$ را بگذاریم:

$$s = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin C \sin B}{\sin A} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin (A+B) \sin B}{\sin A}$$

اگر سه پهلوی a و b و c از یک سه بر را بشناسیم نخست مثلاً در دستور $s = \frac{1}{2} ab \sin C$ بجای C برابرش $2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$ را گذارده سپس بجای $\sin \frac{C}{2}$ و $\cos \frac{C}{2}$ برابرهای آنها را بحسب پهلوها میگذاریم (دستورهای ۴۳ و ۴۴):

$$s = \frac{1}{2} ab \sin C = ab \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= ab \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \times \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

و یا

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (49)$$

اگر دو پهلو و گوشه روبروی یکی از آن دو مثلاً a و b و A را بشناسیم (حالت دوم) نخست باید جزءهای ناشناس سه بر را بدست آورد و سپس مثلاً وقتی که C بدست آمد دستور $s = \frac{1}{2} ab \sin C$ را بکار برد. میتوان نیز پس از بدست آوردن c دستور (۴۹) را بکار برد

تبصره ـ میتوان دستور (۴۹) را بآسانی از راه هندسی بدست آورد:

در شکل شماره ۱۹ پهنه سه بر ABC برابر است با مجموع پهنه سه برهای AOB و BOC و COA

$$= \frac{AB \times OC'}{2} + \frac{BC \times OA'}{2} + \frac{CA \times OB'}{2}$$

$$= \frac{c \times r}{2} + \frac{a \times r}{2} + \frac{b \times r}{2}$$

$$= \frac{r.(a+b+c)}{2} = rp$$

$$= p.\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

ورزش ـ حساب کنید پهنه سه برهای ورزشهای پیش را (هر چهار حالت گشایش سه برها).

ورزش

۱ حساب کنید پهنه همروبری (متوازی الاضلاعی را) که دو پهلوی آن a و b و گوشه میان آنها C میباشد

۲ ـ پهنه یک سه گوشه متساوی الساقین $\frac{100}{\sqrt{3}}$ متر مربع و قاعده آن ۲۰ متر است حساب

کنید گوشه های آنرا.

۳- حساب کنید پرتو دایره محاطی سه گوشه ای را که پهلو های آن ۴ و ۵ و ۶ میباشد.

۴- زمینی است بشکل سه گوشه که یکی از پهلو های آن ۵۰۰ متر و دو گوشه مجاور بدان پهلو بترتیب ۵۴° و ۷۰° میباشد - این زمین چند هکتار است؟

۵- زمینی است بشکل سه گوشه ABC که پهلو های آن a = ۱۲٫۵۰ متر b = یک کیلومتر c = ۱٫۵ کیلومتر میباشد حساب کنید گوشه C و پهنه زمین را.

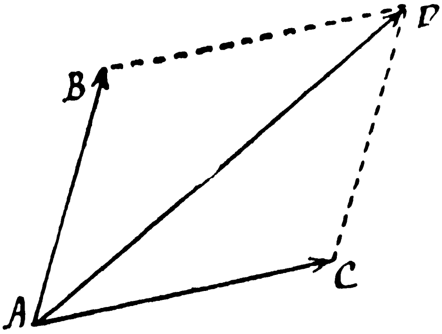
۶- دو نقطه A و B در دو طرف دریاچه ای میباشند و میخواهیم دوری آنها را از همدیگر اندازه بگیریم - برای اینکار نقطه ای C می گزینیم بقسمی که بشود دوری آنرا از A و B اندازه گرفت:

AC = ۹۲٫۵ BC = ۸۳٫۲۵

گوشه میان CA و CB را هم اندازه میگیریم: $\widehat{ACB}$ = ۳۸ ۴۷° حساب کنید AB را.

۷- بر نقطه ای دو نیرو (قوه) وارد شده یکی برابر ۷ کیلوگرم و دیگری که با نیروی نخست گوشه ۳۸° میسازد برابر ۵ کیلوگرم میباشد. پیدا کنید اندازه و راستای برآیند این دو نیرو را.

معمولاً یک نیرو را بوسیلهٔ برداری نمایش میدهند که راستا و سو و اندازه‌اش همان راستا و سو و اندازهٔ نیرو باشد - در فیزیک ثابت میشود



که هرگاه دو بردار $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ نمایش دو نیروی وارد بر A باشند اثر این دو نیرو برابر اثر تنها نیرویی است که بوسیلهٔ برآیند $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ نموده میشود و میدانیم این برآیند $\overrightarrow{AD}$ است.

۸ - دو نیرو بر یک نقطه وارد میشوند و باهم گوشهٔ ۶۰° میسازند. یکی از آن دو نیرو دو کیلو و برآیند آن دو سه کیلو است - نیروی دیگر را حساب کنید.

۹ - برای یافتن دوری دو نقطهٔ A و B از هم یک خطی از A به نقطه‌ای C کشیده و AC و گوشه‌های $C\hat{A}B$ و $A\hat{C}B$ را اندازه گرفته‌ایم: $AC = ۲۵۰$ متر $C\hat{A}B = ۶۱°\ ۲۰'$ و $A\hat{C}B = ۵۵°\ ۱۲'$ حساب کنید AB را.

۱۰ - از زیر پلی راه راستی افقی میگذرد - از روی این پل دو سنگ کیلومترشمار پیاپی (که در یک طرف پل میباشند) دیده میشود: آنکه به پل نزدیکتر است با گوشهٔ نشیب ۵۴° ۲۷′ و آنکه دورتر است با گوشهٔ نشیب ۵° ۳۴′ (برای تعریف گوشهٔ نشیب کتاب مثلثات چهارم صفحهٔ ۴۸ را ببینید) حساب کنید بلندی پل را از راه.

۱۱ - برای یافتن بلندی یک بالن نگهبانی گوشه فراز یکی از نقطه های آن C را از دو نقطه A و B که هر دو در دست میباشند - اندازه گرفته ایم - A و B و C هر سه در یک سطح شاغولی میباشند - گوشه فراز C از A ۷° ۳۰' و از B که ۳۰۰۰ متر به خط شاغول C نزدیکتر است گوشه فراز C ۱۲° ۲۰' میباشد - حساب کنید بلندی بالون را

۱۲ - طرف شمالی شیروانی بامی به شیب ۴۰° و به درازای ۵ متر است و طرف جنوبی آن به درازای ۷ متر است - پهنای بام را از شمال بجنوب حساب کنید .

۱۳ - دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه ای واقعند و میخواهیم دوری آنها را از همدیگر اندازه بگیریم - برای این کار در همان طرفی که A واقع است و ۵۰۰ متر دور از آن نقطه‌ای C گرفته ایم و دو گوشه $\widehat{CAB}$ و $\widehat{ACB}$ را اندازه گرفته ایم : $\widehat{CAB} =$ ۵۲° ۲۵' و $\widehat{ACB} =$ ۶۸° ۵۰' حساب کنید AB را .

۱۴ - سرسرایست به شیب ۳۷° و بدرازای ۹ متر که برای نشستن بالای آن در طرف دیگر آن نردبانی به درازای شش متر و نیم نهاده اند - شیب نردبان را حساب کنید

۱۵ - بر نقطه‌ای دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ وارد میشود - گوشه میان آنها ۴۳° ۲' و اندازه $\vec{F}_1$ دو کیلو بوده برآیند آنها که برابر ۳٫۳۵۰ کیلو میباشد با $\vec{F}_1$ گوشه ۲۱° ۳' میسازد حساب کنید

اندازه نیروی $\vec{F}$ را.

۱۶- دو نقطهٔ A و B در دو طرف تپه‌ای واقعند و میخواهیم دوری آنها را از همدیگر اندازه بگیریم

برای این کار از نقطه‌ای مانند C گوشهٔ $\widehat{ACB}$ و درازاهای AC و BC را اندازه گرفته‌ایم: $\widehat{ACB} = 115° 25'$

و $AC =$ ۳۷٫۷۰ متر و $BC =$ ۸۵٫۶۷ متر حساب کنید AB را.

۱۷- برای اینکه دوری دو قایق A و B را از همدیگر حساب کنیم از نقطهٔ C که در کنار دریاچه میباشد

گوشهٔ $\widehat{ACB}$ را اندازه گرفته‌ایم: $\widehat{ACB} = 34° 40'$ و میدانیم اگر در نقطهٔ C تفنگی خالی کنند صدای آن

آن پس از $1\frac{1}{2}$ ثانیه در A و پس از دو ثانیه در B شنیده میشود. حساب کنید AB را در صورتیکه بدانیم تندی

صدا ۳۳۹ متر در ثانیه میباشد.

۱۸- در یک همروبر (متوازی‌الاضلاع) درازای یکی از پهلوها ۴٫۵ سانتیمتر و درازای یکی از دو گوشه‌بر

(قطر) ۹۳ میلی‌متر است و گوشهٔ میان دو گوشه‌بر (گوشه‌ایکه روبرو به پهلوی داده شده است) $25° 35'$

میباشد حساب کنید درازای پهلو و میان‌بر دیگر را. مسئله چند جواب دارد؟

۱۹- دو نفر که شش کیلومتر از همدیگر دورند روبروی هم ایستاده‌اند بالونی را که با آنها در یک هامن شاغولی است

بگوشه‌های فراز $62°$ و $37°$ می‌بینند حساب کنید بلندی بالون و دوری آن را از هر یک از این دو نفر.

۲۰- زمینی است بشکل سه‌گوشهٔ ABC بطوریکه $a =$ ۵۰٫۴۳ متر و $b =$ ۳۰٫۳۲ متر و

$\hat{C} = 10°$ ۶ ۵ ارزش این زمین را حساب کنید در صورتیکه بدانیم هر گزآن ۱۰۰۰ ریال بیرزد (مسئله صفحه ۴ از مثلثات کلاس چهارم).

۲۱- برآیند دو نیروی برابر هم ۵ کیلو و گوشهٔ میان آن دو نیرو ۲۸´ ۶۴ است اندازهٔ هر یک از آنها چیست؟

۲۲- میخواهیم دوری دو نقطهٔ A و B را از همدیگر بیابیم چون از A نقطهٔ B دیده نمیشود روی یک خط راستی که از A میگذرد دو نقطهٔ C و D گرفته ایم هر دو در یک طرف A بطوریکه بتوان از آنجاها B را دید و بقسمی که $AC = 45$ متر و $AD = 155$ متر $\hat{DCB} = 27' \ 69°$ و $\hat{CDB} = 24' \ 51°$ حساب کنید AB را

۲۳- برآیند دو نیروی سه و پنج کیلوگرامی هفت کیلوگرم است حساب کنید گوشهٔ میان دو نیرو را

۲۴- سه دایره دو بدو بهم مماسند و پرتو آنها برابر ۲ و ۵ و ۶ سانتیمتر - گوشه های میان خطهای مرکزهای این دایره ها را حساب کنید.

۲۵- گوشه برهای یک همر و بر بدرازای ۷ و ۸ سانتیمتر بوده گوشهٔ میان آندو ۵۰ ۴۸ است حساب کنید پهلوهای همر و بر را.

۲۶- برای اندازه گرفتن فاصلهٔ دو نقطه A و B که در دو طرف ساختمانی میباشند نقطهٔ ای

C گرفته CA و CB و گوشه $\widehat{ACB}$ را اندازه گرفته ایم: CA = ۱۷٫۸۳۰ متر و CB = ۱۴٫۹۲۵ متر

و $\widehat{CAB}$ = ۴۵° ۲۴' حساب کنید AB را.

۲۷- در کنار دریاچه ای برجی است به بلندی ۴۵ متر و دو قایق A و B در دریاچه میباشند که میخواهیم فاصله آنها را از یکدیگر حساب کنیم. برای این کار گوشه نشیب دو قایق را از سر برج اندازه می گیریم یکی ۹° و دیگری ۱۲° است. و نیز از C پای برج گوشه افقی $\widehat{ACB}$ را اندازه میگیریم $\widehat{ACB}$ = ۴۲° حساب AB را.

۲۸- مجسمه ای به بلندی سه متر روی پایه ای به بلندی چهار متر نصب است - از چه نقطه مجسمه و پایه بیک گوشه دیده میشوند؟

۲۹- از دو نقطه A و B که در کنار رودخانه و در یکطرف آن میباشند نقطه ای C را که در کنار دیگر رودخانه است می بینیم. با فرض اینکه دوری A از B دویست متر باشد و گوشه هائیکه پرتو (شعاع بصری) C از A و از B با AB میسازند بترتیب ۳۰° ۶' و ۳۰° ۴۵' باشد حساب کنید پهنای رودخانه را.

۳۰- در کنار یک رودخانه تپه ایست و در بالای تپه برجی به بلندی ۳۰ متر بنا شده - از نقطه ای که در کنار دیگر رودخانه و روبروی برج است گوشه های فرازای پای برج و سر آن بترتیب ۴۰° ۲۵' و

۲۰′ ۲۹° میباشد حساب کنید پهنای رودخانه را .

۳۱ - هواپیمائی روی یک خط راست حرکت میکند و روی زمین دو نقطه A و B درست زیر این خط راست و بفاصله ۱۰۰۰ متر از همدیگر قرار دارند - در یک لحظه گوشه فراز هواپیما از دو نقطه A و B بترتیب ۸۰° و ۱۸° و درست پس از ۱۵ ثانیه بترتیب ۲۰° و ۵۲° میباشد حساب کنید تندی هواپیما را بحسب کیلومتر در ساعت .

۳۲ - در ساعتی از روز که سایه درختی ده متری چهارده متر میباشد چه اندازه خواهد بود سایه یک تکه چوب دو متری که ده زینه از شاغول بسمت خورشید کج است ؟

۳۳ - زمینی داریم سه گوشه که دو بر آن به دو خیابان است یکی بدرازای ۴۳٫۵ متر و دیگری ۵۱٫۷۵ متر - دو خیابان با هم گوشه ۷۰° میسازند و هر متر مربع این زمین ۳۰۰ ریال ارزش دارد - حساب کنید اگر ۵۰۰۰ ریال داشته باشیم و بخواهیم باز هم از همین زمین بخریم چه اندازه میتوان بر ۴۳٫۵ متری را زیاد نمود بدون دست زدن به بر ۵۱٫۷۵ متری .

۳۴ - پیرامون سه گوشه ای ۷۰ متر و بلندی A از پهلوی BC (ارتفاع وارد از A بر BC) ۲۵ متر و گوشه B برابر ۳۲° ۴۷′ است حساب کنید BC را .

۳۵ - شخصی که ۱٫۷۵ متر بلندی دارد و کنار دریاچه ای ایستاده است ساختمانی را به گوشه

فراز ۴۴° ۲۰′ وتصویر آن ساختمان را گوشه نشیب ۶° ۳۰′ می بینند. بلندی ساختمان را حساب کنید

۳۶ - شخصی به بلندی ۱٫۸۰ متر روی برجی به بلندی ۱۵ متر ایستاده و میخواهد پهنای دریاچه ای را که نزدیک برج است اندازه بگیرد برای این کار گوشه نشیب نزدیکترین و دورترین نقطه های دریاچه را (هر دو نقطه با چشم ببینده در یک هامن شاغولی میباشد) اندازه میگیرد به ترتیب ۳۵° ۳۰′ و ۱۲° ۲۵′ است حساب کنید پهنای دریاچه را.

۳۷ - زمینی است بشکل چهار گوشه ABCD که سه پهلوی آن را می شناسیم BC = ۷۳٫۷۰ متر CD = ۶۲٫۶۵ متر DA = ۳۵٫۴۷ متر ولی AB را نتوانسته ایم اندازه بگیریم گوشه های DAC و CBD را نیز داریم $\widehat{DAC}$ = ۲۱° ۲۳′ و $\widehat{CBD}$ = ۴۳° ۳۴′ حساب کنید AB را.

۳۸ - میخواهیم ۵۰۰ متر مربع از زمینی را که دو بر آن به خیابانست بخریم یکی از دو بر مجاور خیابان ۶۱ متر و گوشه میان دو خیابان ۸۰° است حساب کنید درازای بری را که در خیابان دیگر است بنا بر آنکه بخواهیم زمینی را که میخریم سه گوشه باشد.

۳۹ - از سه بری a و c و A − B را می شناسیم آن سه بر را بگشایید

a = ۳۱۶٫۷۳ ، c = ۲۹۱٫۵۴ ، A − B = ۳۴° ۱۷′ ۱۵″

۴۰- از یک زنخی (ذوزنقه) دو قاعده AB و CD و دو گوشهٔ A و B داده میشود حساب کنید دو پهلوی دیگر را.

AB = ۶۵٫۳۵۲ متر   CD = ۴۷٫۶۸۰ متر

A = ۳۵° ۴۳′ ۳۷″   B = ۴۴° ۱۷′ ۶۳″

۴۱- دو پهلوی یک همروبر (متوازی الاضلاع) ۵۶۷ میلی متر و ۴۳ سانتیمتر و گوشهٔ میان آن دو پهلو ۴۹° ۵۴′ میباشد- حساب کنید درازای گوشه‌بُر (قطر) های همروبر را.

۴۲- برای حساب کردن پهنهٔ زمینی که بشکل چهاربر ABCD است گوشه‌برهای آن AC و BD را کشیده‌ایم تا در O برخورد نمایند و OA و OB و OC و OD و گوشهٔ AOB را اندازه گرفته‌ایم بترتیب چنین است ۱۷ متر و ۲۲ متر و ۱۶ متر و ۱۴ متر و ۳۰′ ۱۱۰° حساب کنید پهنهٔ این زمین را.

۴۳- از ایستگاهی دو ترن در یک آن بیرون میرود- یکی بسوی شمال و با تندی ساعتی ۴۵ کیلومتر و دیگری بسوی ۴۹° شمال خاوری با تندی ساعتی ۵۵ کیلومتر- حساب کنید فاصلهٔ دو ترن را پس از یکساعت و نیم.

۴۴- میخواهیم دوری دو نقطهٔ A و B را از یک نقطهٔ C اندازه بگیریم ولی چون

میان C و دو نقطهٔ A و B رودخانه ایست چنین کرده‌ایم: AD را برابر ۸۰ متر در راستای CA و BE را برابر ۱۳۰ متر در راستای CB گرفته اندازه‌های AB و BD و DE را نیز معین کرده‌ایم: AB = ۱۴۷٫۵۰ متر BD = ۱۶۰٫۷۵ متر DE = ۲۵۱٫۳۰ متر CA و CB را حساب کنید.

۴۵ - گوشهٔ فراز کوهی از نقطهٔ A ۴۷° است ولی اگر روی راه راستی که شیب آن ۳۲° است ۱۰۰۰ متر بسوی کوه برویم تا به B برسیم گوشهٔ فراز کوه از B ۷۷° است. بلندی سر کوه را از A حساب کنید.

۴۶ - گوشهٔ فراز بالونی از نقطه‌ای A که در جنوب آن است ۴۷° ۱۸′ ۳۰″ و از نقطهٔ B که بفاصلهٔ ۳۳۵٫۷ متر از A و در خاور آنست ۴۱° ۱۴′ میباشد. بلندی بالون را حساب کنید.

۴۷ - هرگاه پهلوهای یک سه‌بر a و b و c بترتیب سه جمله از یک فرایاز (تصاعد) حسابی باشند خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

۴۸ - سایهٔ چوب باریکی که با افق گوشهٔ ۲۵° میسازد در هنگامی که خورشید ۳۷° بالای افق است (بفرض اینکه چوب و مرکز خورشید در یک هامن شاغولی باشند) ۸٫۷۵ متر میباشد. حساب کنید درازای چوب را.

۴۹ - سایهٔ درختی که در دامنهٔ تپه ایست به شیب ۱۸° - هنگامیکه این سایه در روی خط بزرگترین شیب دامنه افتاده - ۳۲ متر است حساب کنید بلندی درخت را بفرض اینکه در آن هنگام گوشهٔ فراز خورشید ۴۲° باشد .

۵۰ - اگر جادهٔ تهران به اصفهان را شمالی جنوبی بگیریم در قسمتی از راه که اطراف آن دشتی است افقی دو دهکده در دو طرف جاده واقع است که میخواهیم بدون بیرون شدن از راه دوری آندو را از همدیگر بیابیم برای این کار در دو نقطه از راه دو ساختمان A و B از این دو دهکده را نشان می کنیم . از نقطه نخست (مثلا کیلومتر ۳۵۰) A در ۳۵° جنوب باختری و B در ۶۷° جنوب خاوری دیده میشود و از نقطهٔ دوم (کیلومتر ۳۷۰) A در ۴۵° شمال باختری و B در ۲۷° شمال خاوری . حساب کنید فاصلهٔ A را .

۵۱ - از بالونی که در بلندی ۱۵۰۰ متر است نقطه ای از زمین بگوشهٔ نشیب ۴۰′ ۲۷° دیده میشود و اگر همین بالون با تندی یکنواخت شاغولی بالا رود و پس از ۷ دقیقه همان نقطه با گوشهٔ نشیب ۴۵° ۱۸′ دیده خواهد شد حساب کنید تندی بالا رفتن بالون را بحسب کیلومتر در ساعت .

۵۲ - مجسمه ای به بلندی ۳٫۵ متر روی ستونی نصب است و پای آن ستون شخصی به بلندی ۱٫۷۵ متر ایستاده است - از یک نقطهٔ O که با پای ستون در یک هامن افقی است مجسمه

و آن شخص سر و بیک گوشه دیده میشوند بلندی ستون را حساب کنید. میدانیم ۵ سی متر از پای ستون دور است.

۵۳ - برای یافتن بلندی قلهٔ یک کوه خطی (مبنائی) میگیریم AB افقی و شمالی جنوبی. از A که در شمال است قلهٔ کوه در ۱۲° خاور شمالی و با گوشهٔ فراز ۲۷° ۳۵' دیده میشود و از B در ۴۹° ۳۰' شمال خاوری بلندی قلهٔ کوه از AB چقدر است؟

۵۴ - از بلندترین نقطه های یک کشتی که ۱۸ متر بالای آب است روشنائی یک فانوس دریائی تا ۳۵ کیلومتری آن دیده میشود حساب کنید بلندی فانوس دریائی را بفرض اینکه زمین گردی و پرتو آن ۶۳۶۶ کیلومتر باشد.

بخش پنجم

بکار بُردن مُثلثات در نقشه برداری

۲۳- از روی ورزش های پیش (از صفحه ۹۳ تا ۱۰۵) دیده میشود که بآسانی میتوان دوری دو نقطه را از همدیگر و یا بلندی یک برج یا کوه و یا پهنای یک رودخانه را حساب کرد:

اگر میان دو نقطه A و B مانعی (مانند دریاچه، رودخانه یا تپه) باشد بطوریکه نتوانیم AB را مستقیماً اندازه بگیریم راه عمل چنانست که در ورزش های ۶ ، ۹ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۲۲ ، ۲۵ و ۲۷ گفته شده.

و اگر به هیچکدام از دو نقطه A و B دسترسی نداشته باشیم (مثل اینکه بخواهیم از یکطرف رودخانه فاصلهٔ دو نقطه ای را که در طرف دیگر آنند اندازه بگیریم) مانند ورزشهای ۱۷ ، ۲۷ ، ۴۴ و ۵۰ عمل خواهیم نمود.

برای اندازه گرفتن بلندی یک برج اگر بتوانیم بپای برج برسیم راه عمل مانند ورزش های ۱۰ ، ۱۱ ، ۳۵ ، ۴۹ ، ۵۲ ، ۵۴ است.

و اگر نتوانیم بپای برج برسیم (چنانکه در مورد قلهٔ کوه هم نمی توان بپای آن رسید)،

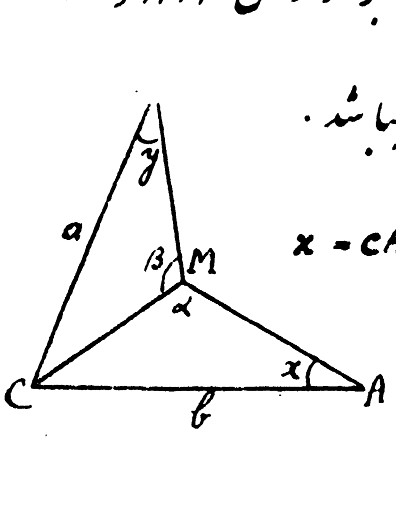
مانند ورزش های ۱۹ ، ۴۵ ، ۵۳ عمل خواهیم نمود.

راه یافتن پهنای رودخانه از ورزش های ۲۹ ، ۳۰ ، ۲۶ بدست میآید.

۲۴ - مسئلهٔ نقشه - برای کشیدن نقشهٔ یک زمین میتوان براه زیر عمل نمود:

نخست سه نقطهٔ A و B و C از آن زمین را برمیگزینند بطوریکه بتوان CA و CB و گوشهٔ ACB را اندازه گرفت. بدین ترتیب جای A و B و C نسبت بیکدیگر (در روی نقشه معین میشود (روشن است که فاصله ها عیناً روی نقشه برده نمی شود و هر نقشه مقیاسی دارد).

حال اگر بخواهند جای نقطه ای M را روی نقشه معین کنند با گوشه یاب گوشه های AMC و CMB را اندازه میگیرند و از آن رو با کمک دستورهای مثلثاتی اندازهٔ AM و BM و CM را حساب می کنند: در روی نقشه نقطهٔ M نقطهٔ برخورد سه دایره است که اندازهٔ پرتوهای آنها برابر اندازه های AM و BM و CM و مرکز آنها بترتیب A و B و C میباشد.



برای محاسبه می بینیم اگر بتوانیم گوشه های $x = CAM$ و $y = CBM$ را حساب کنیم در هر یک از سه گوشه های

AMC و BMC دو گوشه و یک پهلو شناخته خواهد شد بنا بر این پهلوهای AM و BM و CM را از روی قضیه سینوسها حساب خواهیم کرد (حالت نخست اگشایش سه برها)

اگر CA و CB و ACB را بترتیب b و a و C و $\widehat{AMC}$ و $\widehat{CMB}$ را α و β بنامیم برای محاسبه x و y نخست داریم:

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + C) \qquad (S)$$

سپس در سه گوشه های AMC و CMB بترتیب دو بستگی زیر

$$\frac{\sin x}{CM} = \frac{\sin \alpha}{b}$$

$$\frac{\sin y}{CM} = \frac{\sin \beta}{a}$$

و از روی این دو بستگی چنین برمیآید.

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}$$

و یا

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{a \sin \alpha + b \sin \beta}$$

و یا

$$(D) \qquad \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{a \sin \alpha + b \sin \beta} \cdot \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$$

از دو همچندی (S) و (D) x و y حساب میشود.

تبصره - برای اینکه طرف دوم همچندی (D) محاسبه پذیر با لگاریتم شود
بفرض اینکه $b \sin \beta < a \sin \alpha$ باشد میتوان $\frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha}$ را برابر کسینوس
متمم گوشه‌ای φ گرفت

$$\frac{b \sin \beta}{a \sin \alpha} = \cos \varphi$$

خواهیم داشت :

$$\frac{a \sin \alpha - b \sin \beta}{a \sin \alpha + b \sin \beta} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = tg^2 \frac{\varphi}{2}$$

و بنابراین (D) نوشته میشود :

$$tg \frac{x - y}{2} = tg^2 \frac{\varphi}{2} \cdot tg \frac{x + y}{2}$$

خط محمد افضلی

غلط‌نامه

درست	نادرست	سطر	صفحه
Arc sina	arc sina	۱۲	٤
(۱ + sinx)	۱-sinx)	۱٤	۱۳
۱	$\overline{\text{Cos}^{۲}\ x}$	٥	۱٤
$\frac{۱}{m}$ Cos a	$\frac{۱}{۲}$ Cos a	۹	»
sinx	sina	۱۱	»
b +	b −	۱۲	»
۳arc sinx	arc sinx	٦	۱٦
٤ ab	۲ ab	۳	۱۷
$a^{۲}$ — ۲$b^{۲}$	$a^{۲}$ — $b^{۲}$	٦	»
$\text{Cos}^{۲}\ \frac{x}{۲}$	$\text{Cos}^{۲}\ x$	۱	۲۰
٤ — ۳$\sin^{۲}$ ۲x	٤ $\sin^{۲}$ ۲x	٦	۲۰
۳۳	۳٤	۸	۲۸
D = ۲۷	D = ۲٦	٤	۳۱
Cosx	Cosy	۸	٤٤
sin $\frac{y}{۲}$	Cos $\frac{y}{۲}$	۳	٤٥
(۳٦)	(۲٦)	۱۰	٤۰
(۳۷)	(۲۷)	۱۱	»
(۳۸)	(۲۸)	۱۲	»
(۳۹)	(۲۹)	۱۳	»

صفحه	سطر	نادرست	درست
٦٤	۱	(۱ + cos α	(۱ + cos α)
۲۰	٤	بررا	سه بررا
۲٦	۸		٣,١٥٦ = b
۲۷	۱۱	sinb	sin B
۹۳	٤	در طرف چپ نشانهٔ = باید s نوشت	
۹٤	۱۳ ــ ۱٤	با نیروی نخست گوشهٔ °۳۸	
۱۰٤	۹	A	AB
۱۰٥	۱۰	متر	متری

کتب خانہ
جامعۂ عثمانیہ

۱۔ اراکین مجلس اعلیٰ، مجلس رفقاء، مجلس انتظامی
مجالس تعلیمات و نصاب پانچ کتابیں ایک وقت اپنے پاس رکھ سکیں گے۔

۲۔ اساتذۂ جامعۂ عثمانیہ و کلیات ملحقہ و گزیٹیڈ عہدہ داران جامعہ
اور اراکین دار الترجمہ دس کتابیں ایک وقت اپنے پاس رکھ سکیں گے۔

۳۔ طلبائے ایم۔ اے، ایل ایل بی و تحقیقاتی جماعتوں کے
طلبہ تین کتابیں اور دیگر طلبہ دو کتابیں اپنے پاس رکھ سکیں گے۔

۴۔ مدت مقررہ پر کتابیں واپس نہ ہوں تو طلبہ سے بحساب
ایک آنہ یومیہ فی کتاب وصول کیا جائیگا۔

۵۔ بشرط موقع کتابیں مکرر جاری کی جا سکیں گی مگر اس غرض کے
لئے کتب خانہ میں کتاب کا لانا لازم ہے۔

۶۔ کتابیں گم یا خراب ہو جائیں تو مستعیر پر ذمہ داری
عائد ہوگی۔

۷۔ کتابوں پر کسی قسم کا نشان بنایا یا لکھا نہ
جائے۔

۸۔ قلمی نسخے و حوالے کی کتابیں
جاری نہ کی جا سکیں گی۔ فقط