

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_220511

UNIVERSAL
LIBRARY

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY.

Call No. 517.5/M 11 F Acq. No. 18465

Author Kaczmarsz.

Title Theorie der Orthogonalreihen 19

This book should be returned on or before the date last marked below.

MONOGR AFJE MÄTEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY.

S. BANACH. B. KNASTER. K. KURATOWSKI,
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI i H. STEINHAUS

TOM VI

THEORIE
DER
ORTHOGONALREIHEN

VON

STEFAN KACZMARZ
DOZENT AN DER UNIVERSITÄT LWÖW

UND

HUGO STEINH AUS
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LWÖW

Z SUBVENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ

W A R S Z A W A - L W Ö W 19 35

Alle Rechte vorbehalten.

P R I N T E D I N P O L A N D
DRUK M. GARASINSKI. WARSZAWA. BRACKA 20

VORWORT.

Die Theorie der Orthogonalreihen ist noch immer kein klassisches Kapitel der Analysis. Ihre geschichtlichen Quellen sind zweierlei. Die besser bekannte besteht aus den einzelnen Theorien der Fourier'schen, Legendre'schen, Bessel'schen und vieler anderen speziellen Reihen, an welchen das Gemeinsame zu erblicken es David Hilbert in den Anfangsjahren dieses Jahrhunderts vorbehalten blieb; die andere ist in den nun mehr als fünfzig Jahre zurückliegenden Untersuchungen skandinavischer Aktuare J. P. Gram, T. N. Thiele und ihrer Schüler zu finden. Sie haben sich das Ziel gesteckt, die in der Statistik auftretenden willkürlichen Funktionen vermittels geeigneter Orthogonalpolynome zu beherrschen. Die noch älteren Wronski'schen Versucht¹, das allgemeine Problem anzugreifen, blieben unverstanden und die Sturin-Liouville'sche Verallgemeinerung war an eine Klasse von Differentialgleichungen gebunden. Es darf also die skandinavische Schule als diejenige gelten, die als erste das Gemeinsame an allen Orthogonalreihen klar hervortreten ließ. 1. Fredholm ist aus dieser Schule hervorgegangen und seine Theorie der Integralgleichungen, von Hilbert ausgebildet, gab Erhardt Schmidt die Anregung zu seiner grundlegenden Arbeit über Orthogonalentwicklungen. Auf diese Weise haben am heutigen Wissen beide Quellen ihren Anteil.

Gegenwärtig sind die Orthogonalreihen, von allen physikalischen und statistischen Anwendungen abgesehen, ein wichtiges Werkzeug der reinen Mathematik. Sie sind ja nichts weniger als die analytische Geometrie des Funktionenraumes bei Zugrundelegung des rechtwinkligen (= orthogonalen) Achsensystems. Nur ist der Funktionenraum unendlich komplizierter und reichhaltiger als der euklidische Raum und es bieten sich in jenem Probleme, denen kein Analogon in diesem entspricht. Eine reelle Funktion ist ein „Punkt“; die „Distanz“ zweier Punkte im Funktionenraum gibt quadriert bereits ein Integral. Nun hat man die Wahl zwischen verschiedenen Inte-

gralbegriffen und es empfiehlt sich der Lebesgue'sche aus folgenden Gründen: zunächst ist er allgemein genug, um alle bekannten (nicht „zu großen“) Funktionen zu fassen, des ferneren verleiht er—bei der Definition der Distanz als Integral—dem Raum die Eigenschaft der Komplettheit (den üblichen Ausdruck „Vollständigkeit“ mußten wir uns für einen anderen Begriff vorbehalten); dies ermöglichte F. Riesz und E. Fischer den Hauptsatz der Theorie der Orthogonalreihen aufzustellen.

Diese Monographie behandelt die allgemeine Theorie der Orthogonalreihen einer Veränderlichen. Die Verfasser waren sich mit der Redaktion der Sammlung darüber einig, daß das Eingehen auf spezielle Orthogonalsysteme wohl den Umfang des Buches, nicht aber den Wert desselben in gleichem Maße vergrößern würde. So ist z.B. die Theorie der Bessel'schen Funktionen sowie der meisten aus der mathematischen Physik bekannten Systeme, als nicht in den Rahmen dieses Werkes passend, übergangen worden. Spezielle Orthogonalsysteme kommen wohl in diesem Buche vor, aber bloß als Beispiele. Unter den vielen schönen und wichtigen Dingen, die der Leser in diesem Buche nicht finden wird, möchten wir noch die Anwendungen auf die Theorie der Integralgleichungen erwähnen, sowie die von G. Szegő und anderen (Bochner, Bergmann, Zarankiewicz) ausgebildete Theorie der komplexen Orthogonalsysteme. Auf enzyklopädische Vollständigkeit hat also diese Monographie keinen Anspruch.

Der allgemeine Standpunkt kommt auch in der Wahl der Hilfsmittel zur Geltung. Selbstverständlich wird der Lebesgue'sche Integralbegriff als bekannt vorausgesetzt; wir durften das umsomehr tun, als das in dieser Sammlung erschienene gründliche Buch von S. Saks allen diesbezüglichen Wünschen nachkommen dürfte. Diejenigen Sätze der Integrationstheorie, die wir nicht als mathematisches Gemeingut betrachten konnten, haben wir im ersten Kapitel zusammengestellt. In demselben Kapitel haben wir alles Nötige aus der Theorie der Operationen—mit oder ohne Beweise—gebracht. Es handelt sich bloß um wenige Sätze, die wir besonders in den drei letzten Kapiteln unseres Buches anwenden: hier findet der Leser den Saks'schen Satz über Folgen von Operationen, sowie die Prinzipien, die einer von uns das „Resonanzprinzip“ und das „Prinzip der Kondensation der Singularitäten“ genannt hat; sie geben einen Überblick der möglichen singulären Funktionen und ihrer Verteilung im Funktionenraum. Näheres über die Theorie der linearen Operationen findet der Leser im Banach'schen Buche dieser

Sammlung. Wir haben es versucht, die Beweise der Operationstheorie möglichst kurz zu gestalten, wobei uns (besonders beim §8 des ersten Kapitels) Herr S. Mazur wesentlich geholfen hat. Verhältnismäßig wenig haben wir über Fourierreihen gebracht, weil in derselben Sammlung das neue Buch von A. Zygmund über diesen Gegenstand vorliegt.

An dieser Stelle möchten wir die Frage nach der Urheberschaft der in diesem Buche behandelten einzelnen Ergebnisse und Theorien erwähnen: es war nicht unsere Absicht jedesmal nach ihrem Ursprung zu forschen, und wir haben uns damit begnügt, nur gelegentlich Sätze und Beweise mit Namen zu versehen. Die uns zugänglichen Werke und Abhandlungen haben wir in der Bibliographie genannt, um dem Leser nähere Orientierung über spezielle Fragen zu ermöglichen; es ist aber nicht der Zweck dieser Bibliographie, Prioritätsfragen zu entscheiden. Infolgedessen können manche eigenen Resultate, die wir früher nicht publiziert hatten, hier nur an der Abwesenheit von Zitaten als solche erkannt werden. Es wäre aber verfehlt, alle zitatenlosen Ergebnisse den Verfassern zuzuschreiben, da viele allgemein bekannte Sätze der Analysis und der Funktionentheorie ebenfalls ohne Literaturnachweis gelassen wurden.

Das Buch besteht im Ganzen aus acht Kapiteln. Jedes Kapitel zerfällt in einige Paragraphen. Die eckig eingeklammerten dreistelligen Nummern am Rande geben durch ihre erste Ziffer das Kapitel, durch die zweite den Paragraphen an. So ist z. B. [394] ein Satz des lü-ten Kapitels und des 9-ten §. Es wird aber manchmal mit jenen Nummern eine Definition, eine Bemerkung oder bloß eine Formel bezeichnet. Findet der Leser eine Angabe wie II, 5, (25), so bedeutet die römische Zahl das Kapitel, die arabische den § und die rund eingeklammerte die Nummer der Formel im Kapitel.

Die Bibliographie besteht aus zwei Verzeichnissen. Das erste gibt eine Zusammenstellung der Abhandlungen in alphabetischer Ordnung; die zitierten Arbeiten sind durchgehend numeriert und die dem Titel folgenden eingeklammerten Nummern weisen auf die betreffende Stelle des Buches hin. Das zweite ist ein Gegen Schlüssel zum ersten: es ist nach den Klammernummern geordnet und gibt die zugehörigen Ordnungsnummern des ersten Verzeichnisses an. Einige Büchertitel gehen den Verzeichnissen voran. Auf diese Weise haben wir Fußnoten entbehren können.

Eine Zusammenstellung der Abkürzungen, Bezeichnungen und Symbole dient dazu, dem Leser über eventuelle terminologische Schwierigkeiten hinwegzuhelfen; es ist kein Verzeichnis der Definitionen, sondern bloß eine alphabetische Liste mit Bezugnahme auf die Stellen, wo die Auskunft im Buche zu suchen ist; mangels einer solchen wird eine kurze Erklärung gegeben.

Bei dem Korrekturlesen gewährten uns die Herren H. Auerbach, S. Mazur, L. Sternbach und A. Zygmund freundliche Hilfe; ihnen allen und besonders Herrn Zygmund verdanken wir auch manchen wertvollen inhaltlichen Ratschlag. Allen diesen Herren sprechen wir unseren aufrichtigen Dank aus.

Viele Rechnungen und Formeln im IV-ten Kapitel haben wir dem ausgezeichneten Hobson'schen Werke „Spherical and Ellipsoidal Harmonics“ entnommen.

Im nachstehenden Fehlerverzeichnis sind einige von uns nachträglich bemerkten Korrigenda angebracht.

Die Verfasser.

Lwów, im Oktober 1935.

FEHLERVERZEICHNIS.

Seite und Zeile von { oben unten :	statt:	lies:
2 ₃	$p < 2$	$p > 2$
15 ⁶	[131]	—
16 ⁷	—	[131]
25 ¹¹	vom Maße $\omega - \varepsilon$	vom Maße $> \omega - \varepsilon$
32 ⁸	Zahlensystem	Zahlensystem
70 ⁵	Einser	Einser
80 ₁₁	$\{f_i\}$	$\{f\}$
93 ₁	Subtraktion	Subtraktion
99 ¹²	zwei ersten	zwei
107 ₁₂	$ h < 1/3$	$ h < 1/3$
128 ¹³	(0,1 ein)	(0,1) ein
162 _n	$1/2\delta(t)$	$\frac{1}{2}\delta(t)$
193 ₁₀	$n_i(\overline{s_{n_i}}(t))$	$n_i(\overline{s_{n_i}}(t))$
196 ¹¹	$\ f\ < \varepsilon(f)$	$\ f\ < \varepsilon(f)$
274 ₁₁	$c_{n+1}(t)$	c_{n+1}
275 ₁₃	> 2	$= 1$

I. KAPITEL.

Vorkenntnisse.

Dieses Kapitel bringt gewisse Definitionen und Sätze, die wir im ganzen Buche brauchen werden. Von diesen Sätzen sollen einige bewiesen werden.

§ 1. Konvergenz und Summierbarkeit«

Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei unendliche Folgen und

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n;$$

dann ist folgende, nach Abel benannte Umformung oft nützlich:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p+1}. \quad [111]$$

Die Abel'sche Umformung kann auch so geschrieben werden:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} + s_{n+p} b_{n+p}. \quad [112]$$

In beiden Formeln darf s_k durch $s'_k = s_k + c$ ersetzt werden, wo c von k frei ist.

Es sei $q > 1$ und es bezeichne l_q die Menge aller Folgen $\{x_k\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q'} < \infty,$$

und q' die durch $1/q + 1/q' = 1$ erklärte Zahl.

Dann gilt der Landau'sche Satz: Ist für jede Folge $\{x_k\}$ in l^q [113]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

konvergent, so gehört $\{a_k\}$ zu $l^{q'}$ d. h. es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q'} < \infty.$$

Die Umkehrung dieses Satzes ist richtig und folgt fast unmittelbar aus der Hölder'schen Ungleichung

$$[114] \quad \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q'} \right)^{1/q'} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \right)^{1/q}.$$

Aus [113] folgt für den Fall, wo $\{a_k\}$ nicht zu $l^{q'}$ gehört, die Existenz einer Folge $\{y_k\}$ in l^q mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k = \infty$ und sogar mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k = +\infty$.

Beweis von [113]: Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{1/q'} = \infty$; man setze $s_n = \sum_{k=1}^n a_k^{1/q'}$; die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{1/q'}}{s_k^{\alpha}}$$

ist für $\alpha > 1$ konvergent, für $\alpha < 1$ divergent. Wählt man

$$x_k = \frac{a_k^{1/q'} \operatorname{sign} a_k}{s_k^{\alpha}}$$

und α gemäß $1/q < \alpha < 1$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{q'/q}}{s_k^{q\alpha}} < \infty,$$

da $q\alpha > 1$. Es sollte daher, nach Voraussetzung, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konvergieren; nun ist aber gliedweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^{1+q'/q}}{s_k^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^{q'}}{s_k^{\alpha}}$$

und letzte Reihe ist divergent wegen $\alpha < 1$.

Etwas tiefer liegt folgende Tatsache:

[115] *Es sei H das Produkt aller l^p , wo $p > 2$ (bzw. $p > q' > 1$). Ist dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für kein $\{x_k\}$ in H gegen $+\infty$ divergent, so gibt es ein p' mit $1 < p' < 2$ (bzw. $p' < q'$), so daß $\{a_k\}$ zu $l^{p'}$ gehört.*

Beweis (für $p < 2$; für $p > q$ analog): Die Nichtexistenz des behaupteten p' impliziert eine Folge $\{p'_n\}$ mit

$$2 > p'_n > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p'_n = 2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p'_n} = +\infty.$$

Auf Grund der aus [113] gefolgerten Bemerkung existiert für jedes n jetzt eine Folge $\{x_k^{(n)}\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^{(n)} = +\infty, \quad \{x_k^{(n)}\} \in l^{p_n}, \quad \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p'_n} = 1.$$

Wir dürfen nachträglich die Vorzeichen der $x_k^{(n)}$ so ändern, daß $a_k x_k^{(n)}$ nichtnegativ werde und die Beträge so normieren, daß die konvergenten Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^{p_n}$ die Summen $1/2^n$ erhalten. Jetzt bauen wir aus den $\{x_k^{(n)}\}$ eine einzige Folge $\{x_{k_i}\}$ auf. Wir setzen $n(k) = 1$ für $1 \leq k \leq k_1$, wo k_1 die kleinste natürliche Zahl ist mit

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{k_1} a_k x_k^{(1)} = 1,$$

ferner $n(k) = i+1$ für $k_i < k \leq k_{i+1}$, wo k_i die kleinste natürliche Zahl ist mit

$$(2) \quad \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} a_k x_k^{(i+1)} = 1, \quad k_{i+1} > k_i,$$

und definieren x_k als $x_k^{(n(k))}$. Es ist $(x_k) \in H$. Denn es sei $p > 2$; für $n > N$ ist $p_n' > p$ wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2$; ist dann, für $k > K$, $n(k) > N$, so hat man

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |x_k^{(n(k))}|^p \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} |x_k^{(n(k))}|^{p_{n(k)}} = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(k)}},$$

denn es ist $|x_k^{(n)}| \leq 1$ für alle n und k ; es folgt

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |x_k|^p \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} |x_k^{(n(k))}|^{p_{n(k)}} = \sum_{k=K+1}^{k_1} \frac{1}{2} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \frac{1}{2^2} + \dots + \sum_{k=k_{i-1}+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < 1,$$

also $\{x_k\} \in H$. Schreibt man jetzt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k^{(n(k))} = \sum_{k=1}^{k_1} a_k x_k^{(1)} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} a_k x_k^{(2)} + \dots$$

und beachtet (1) und (2), so folgt für die rechterhand stehende Reihe mit nichtnegativen Gliedern die Divergenz gegen $+\infty$, also

dasselbe für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{k_i}$ gegen die Voraussetzung.

Summierbarkeit. Ist eine Folge $\{s_k\}$ divergent, so kann es doch vorkommen, daß ihr durch ein anderes Verfahren als das gewöhnliche „lim“ eine Zahl zugeordnet werden kann als eine Art „Grenze“. Wir sagen dann, die Folge sei *limitierbar* nach diesem Verfahren.

Sind die s_k Teilsummen einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so heißt die Reihe *summierbar* nach diesem Verfahren.

Das wichtigste Verfahren ist dasjenige des *ersten arithmetischen Mittels*; es beruht darauf, daß man anstatt der ursprünglichen Folge $\{s_n\}$ die Folge $\{o_n\}$ der Mittelwerte

$$[116] \quad o_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

betrachtet und den gewöhnlichen Grenzwert dieser neuen Folge, $\lim_{n \rightarrow \infty} o_n$, als verallgemeinerte „Grenze“, der ursprünglichen Folge zuordnet. Jede konvergente Folge ist nach dem ersten arithmetischen Mittel limitierbar gegen den ursprünglichen Grenzwert, das Verfahren ist also, wie man zu sagen pflegt, *permanent*.

Selbstverständlich gibt es Folgen, die dem Verfahren des ersten arithmetischen Mittels widerstehen; dann können wir es mit Mitteln höherer Ordnung versuchen, wie sie Cesàro angegeben hat. Wir geben sie hier gleich in den für Reihen brauchbaren Formen:

Für jedes nichtnegative ganze n und jedes von $-1, -2, -3, \dots$ verschiedene r definieren wir

$$A_n^r = \binom{r+n}{n} = \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{n!} \quad \left(\sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)} \text{ für } n \rightarrow \infty \right).$$

Die zu summierende Reihe sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; wir sagen, daß sie (C,r)-*summierbar* gegen s sei, wenn die Folge $\{o_n^{(r)}\}$

$$[117] \quad o_n^{(r)} = \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^r a_k}{A_n^r}$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert s strebt. Für $r = 0$ erhalten wir die gewöhnliche Konvergenz, für $r = 1$ die Summierbarkeit mit dem ersten arithmetischen Mittel. Jedes (C, r)-Verfahren ist permanent; s kann als verallgemeinerte „Reihensumme“ gelten.

Ist $r_1 > r$, so ist auch (C, r_1) stärker als (C, r) , d. h. eine (C, r) -summierbare Reihe ist (C, r_1) -summierbar; die Verfahren sind miteinander *konsistent*, d. h. die beiden verallgemeinerten Reihensummen gleichen einander. Permanent, stärker als alle (C, r) und mit ihnen konsistent ist das Poisson'sche (Abersche) Verfahren (= Summationsmethode), welches der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ den Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ 0 < x < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \quad [118]$$

als „Summe“ zuordnet, falls er vorhanden ist.

Toeplitz'sche Summations-(Limitierungs-) Methoden.

$$B = \| b_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \dots)$$

sei eine unendliche Matrix; ist $\{s_k\}$ die zu limitierende Folge, so bilde man

$$B_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} s_k \quad (i = 1, 2, \dots);$$

ist nun B_i für jedes i vorhanden und $\lim_{i \rightarrow \infty} B_i = s$ desgleichen, so heißt $\{s_k\}$ B -limitierbar gegen s . B ist also ein Limitierungs-(Summations-)Verfahren (Methode). Ein solches Verfahren heißt *zeilenfinit*, wenn jede Zeile von B nur endlich viele von Null verschiedene Elemente enthält.

Damit ein Verfahren permanent sei, ist es notwendig und hinreichend, daß [119]

$$1^\circ \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} = 1,$$

$$2^\circ \quad \lim_{i \rightarrow \infty} b_{ik} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{ik}| < M$$

sei, wo die Konvergenz der Reihen 1° und 3° zu dem Inhalt der Bedingungen gehört und M von i frei ist.

Nur solchen Verfahren werden wir den Namen „Toeplitz'sche Summationsmethoden“ beilegen.

Die Cesäro'schen Mittel sind leicht als Toeplitz'sche Methoden zu erkennen. Um das Poisson'sche Verfahren zu einer solchen

Methode zu machen, genügt es den kontinuierlich gegen 1 strebenden Parameter x durch eine Folge $\{x_i\}$ mit $|x_i| < 1$, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 1$ zu ersetzen. (Wenn man für die so erhaltene Matrix B die drei Eigenschaften 1° 2° 3° verifiziert, so erhält man einen Beweis für den Abel'schen Satz über Potenzreihen). Näheres über Reihen findet man in dem Buche von Knopp.

Zum Schluß dieses § wollen wir noch zwei übliche Symbole erklären: Sind $\{x_n\}, \{y_n\}$ zwei Folgen, so bedeutet $x_n = O(y_n)$ so viel als $|x_n| \leq K |y_n|$ mit einem n -freien K , $x_n = o(y_n)$ so viel als $|x_n| < k_n |y_n|$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$.

§ 2. Einiges über Funktionen und Integrale.

Wir setzen die Kenntnis der wichtigsten Sätze der reellen Funktionentheorie und der Lebesgue'schen Integrationstheorie voraus; letztere ist mehrmals behandelt worden (vgl. z. B. das in dieser Sammlung erschienene Buch von S. Saks). Wir wollen jedoch einiges der Aufmerksamkeit des Lesers empfehlen.

- [121] Zwei Lusin'sche Sätze. Jede in $[0,1]$ erklärte, meßbare und fast überall (d. h. mit Ausschluß einer Nullmenge) endliche Funktion ist auf einer abgeschlossenen Menge stetig, die so gewählt werden kann, daß die Komplementärmenge dem Maße nach kleiner ist als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$.

Daraus folgt (da jede Menge in eine perfekte und höchstens abzählbare zerlegt werden kann, das Produkt aber von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen ist):

Ist $\{f_n(t)\}$ eine Folge von in $[0,1]$ erklärten, daselbst meßbaren und fast überall endlichen Funktionen, so gibt es eine perfekte t -Menge D , vom positiven Maß, auf welcher alle $f_n(t)$ stetig sind,

- [122] Der Weierstraß'sche Satz. Eine jede stetige Funktion läßt sich im endlichen abgeschlossenen Intervall durch ein Polynom beliebig genau approximieren. M. a. W.: Ist $f(t)$ in $[a,b]$ stetig und ist ε positiv, so gibt es ein natürliches n und ein Polynom $P_n(t)$ vom Grade n von der Eigenschaft

$$|f(t) - P_n(t)| < \varepsilon$$

in $[a,b]$. S. Bernstein beweist diesen Satz, indem er die in $[0,1]$ gleichmäßig geltende Grenzwertformel

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) t^p (1-t)^{n-p} = f(t)$$

aufstellt; da eine in a, b stetige Funktion $f(t)$ durch die Substitution $T = \frac{t-a}{b-a}$ in eine in $[0, 1]$ erklärte und stetige Funktion

von T übergeht, so genügt es die Formel (3) zu begründen. Diese Formel entspricht folgendem Spiel: Man teilt das Intervall $[0, 1]$ in den linken Teil $[0, t]$ und den rechten $[t, 1]$ und man wählt n -mal blindlings einen Punkt aus $[0, 1]$. Trifft man dabei p -mal ins linke Intervall, so soll der Gewinn $f(p/n)$ betragen. Die unter dem Jim-Zeichen stehende Summe (3) ist die mathematische Hoffnung eines solchen Spiels und es ist plausibel, daß sie für großes n gegen $f(t)$ strebt, denn der Erwartungswert des Bruches p/n ist nahe an t ; genauer gesagt, sind Werte dieses Bruches, die von t um mehr als $\frac{1}{\sqrt{n}}$ abweichen, insgesamt wenig wahrscheinlich. Streng ist folgender Landau'sche

Beweis von (3): Man setze $\binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p} = r_p$; es ist

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n r_p &= (t + (1-t))^n = 1, \\ \sum_{p=0}^n p r_p &= \sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p} = n t \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} t^q (1-t)^{n-1-q} = n t, \\ \sum_{p=0}^n p(p-1) r_p &= \sum_{p=2}^n p(p-1) \binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p} \\ &= n(n-1) t^2 \sum_{q=0}^{n-2} \binom{n-2}{q} t^q (1-t)^{n-2-q} = n(n-1) t^2, \\ \sum_{p=0}^n (p-nt)^2 r_p &= \sum_{p=0}^n (n^2 t^2 - (2nt-1)p + p(p-1)) r_p \\ &= n^2 t^2 - (2nt-1)nt + n(n-1)t^2 = nt(1-t). \end{aligned}$$

Es sei $|f(t)| \leq M$ in $[0, 1]$; es sei $\delta > 0$ und $\varepsilon(\delta) > 0$ und so, daß für $|t' - t''| \leq \varepsilon$

$$|f(t') - f(t'')| < \frac{\delta}{2} \quad (t', t'' \in [0, 1])$$

sei. Dann ist für $n > 1$ und $\frac{M}{\delta \varepsilon^2}$

$$\begin{aligned}
\left| f(t) - \sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right) r_p \right| &= \left| \sum_{p=0}^n \left(f(t) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right) r_p \right| = \sum_{|p-nt| \leq \varepsilon n} + \sum_{|p-nt| > \varepsilon n} \\
&\leq \frac{\delta}{2} \sum_{p=0}^n r_p + 2M \sum_{|p-nt| > \varepsilon n} r_p \leq \frac{\delta}{2} + \frac{2M}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{p=0}^n (p-nt)^2 r_p = \frac{\delta}{2} + \frac{2Mt(1-t)}{\varepsilon^2 n} \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{M}{2\varepsilon^2 n} < \delta, \quad \text{w. z. b. w.}
\end{aligned}$$

Konvergenz von Funktionenfolgen.

- [123] Der Egoroffsche Satz. $\{f_k(t)\}$ sei eine Folge von in a, b meßbar erklärten Funktionen, daselbst fast überall konvergent. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge E in a, b , deren Maß $|E|$ die Zahl $b - a - \varepsilon$ übertrifft, und so, daß $\{f_k(t)\}$ in E gleichmäßig konvergiert.

Bekanntlich kann eine Folge von meßbaren Funktionen, deren Beträge sämtlich unter einer integrierbaren Schranke liegen, unter dem $\lim$ -Zeichen integriert werden: war die Folge fast überall konvergent (im endlichen Intervall), so konvergieren die Integrale. Unter zusätzlichen Bedingungen gilt eine Art Umkehrung jenes Satzes, die uns die Konvergenz der Funktionenfolge sichert:

Sind sämtliche $f_k(t)$ integrierbar, $f_k(t) \leq f_{k+1}(t)$ fast überall in a, b , und

$$\int_a^b f_k(t) dt \leq C \quad (k) \quad (1)$$

(wo C k -frei), so existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$ fast überall in a, b .

Dieser Satz wird oft in der Form gebraucht:

- [124] Sind die Funktionen $g_k(t) \geq 0$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b g_k(t) dt < \infty,$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$ fast überall konvergent.

- [125] Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ fast überall in a, b , so ist

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t)|^p dt \geq \int_a^b |f(t)|^p dt \quad (p > 0).$$

(Dieser Satz ist auch gültig, wenn die Integrale links *nicht* existieren, denn dann verlangt die Ungleichung nichts (co > ... ist stets richtig); wenn sie aber existieren und die linke Seite endlich ist, so ist die Endlichkeit der rechten ein Teil der Behauptung).

Beweis: Nach [123] ist in E für $n > N$

$$|f_n(t)|^p \geq |f(t)|^p - \varepsilon,$$

da ja $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(t)|^p = |f(t)|^p$ f. ü.; es folgt

$$\int_a^b |f_n(t)|^p dt \geq \int_E |f_n(t)|^p dt \geq \int_E |f(t)|^p dt - \varepsilon(b-a).$$

Dabei ist $|E|$ von $b-a$ beliebig wenig verschieden; mit $|E| > b-a$ strebt aber $\int_E |f(t)|^p dt$ gegen $\int_a^b |f(t)|^p dt$, was

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t)|^p dt \geq \int_a^b |f(t)|^p dt - \varepsilon(b-a)$$

und — da ε beliebig — die Behauptung [125] zur Folge hat.

Unter der Voraussetzung des Satzes [125] folgt $\int_E |f(t)|^p dt \leq A$ aus $\int_E |f_n(t)|^p dt < A$; (diese Eigenschaft enthält aber ihrerseits die Behauptung jenes Satzes). Diese Bemerkung führt zum folgenden Ergebnis:

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ fast überall und existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein [126]

n - und E -freies (wohl aber $\int_E |f_n(t)|^p dt < \varepsilon$ ingiges) $n(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^p dt = 0.$$

für alle n gilt, sobald

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^p dt = 0.$$

Denn sei $|E| < n$ und E so, daß ([123]) $\{f_n(t)\}$ in CE (= Komplementärmenge von E) gleichmäßig konvergiere; dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{CE} |f(t) - f_n(t)|^p dt = 0$$

und, wegen $|\alpha + \beta|^p \leq 2^p (|\alpha|^p + |\beta|^p)$,

$$\int_E |f(t) - f_n(t)|^p dt \leq 2^p \left(\int_E |f(t)|^p dt + \int_E |f_n(t)|^p dt \right) \leq 2^p \cdot 2\varepsilon;$$

durch Addition folgt das Behauptete.

Schwarz'sche und Holder-Riesz'sche Ungleichung. Mit L^p ($p > 1$) werde die Klasse aller in a, b erklärten, meßbaren und mit p -ter Potenz des Betrages integrierbaren Funktionen bezeichnet. L^1 soll auch als L geschrieben werden dürfen. Ähnlich wie bei Folgen, spielt der zu p konjugierte Exponent p' eine wichtige Rolle; es ist $1/p + 1/p' = 1$; für $p = 2$ kommt $p' = 2$, für $p = -2$ wird $p' < 2$ und umgekehrt.

[127] Ist $f(t) \in L^p$, $g(t) \in L^{p'}$, so ist $f(t)g(t) \in L$ und

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'}.$$

Dieses ist das F. Riesz'sche Analogon zur Hölder'schen Ungleichung für Summen. Für $p = 2$ wird daraus die Schwarz'sche Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

[128] Liegen beide Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ in L^p , so gilt die Minkowski'sche Ungleichung

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Der (von F. Riesz vereinfachte) Beweis für [127] verläuft wie folgt:

Für $x \neq 0$ hat die Funktion $1/p \cdot x^p + 1/p' \cdot 1 - x$ ihr Minimum bei $x = 1$. Dieses Minimum ist 0, also gilt

$$x \leq \frac{1}{p} \cdot x^p + \frac{1}{p'} \quad (x \geq 0).$$

Setzt man $x = |\alpha| \cdot |\beta|^{p-1}$, so kommt (nach Multiplikation mit $|\beta|^{p'}$)

$$|\alpha \beta| \leq \frac{1}{p} |\alpha|^p + \frac{1}{p'} |\beta|^{p'};$$

hier substituiere man

$$x=f(t)/A, \quad \beta=g(t)/B,$$

wo A und B zur Abkürzung für die beiden Faktoren rechts in [127] geschrieben wurde, und integriere nach t von a bis b ; man erhält [127] (sogar verstärkt).

Beweis von [128]: Es genügt ihn für $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$ zu führen. Dann ist aber

$$\int_a^b f(t)+g(t)^p dt = \int_a^b f(t)+g(t)^{p-1} f(t) dt + \int_a^b f(t)+g(t)^{p-1} g(t) dt.$$

Wendet man hier für jeden Term rechts [127] an, so kommt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)+g(t)^p dt &\leq \left(\int_a^b f(t)+g(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_a^b f(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\int_a^b f(t)+g(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_a^b g(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

★

Dividiert man durch den rechts sichtbaren gemeinsamen Faktor, so erhält man [128]. —

Eine Art Umkehrung von [127] ist der

Satz: Existiert $\int_a^b f(t)g(t) dt$ für jedes g in $L^p(p>1)$, so gehört f

zu $L^{p'}$. Inhalt und Beweis erinnert an [113]. Wäre $\int_a^b |f(t)|^{p'} dt = \infty$, und bezeichnete E_n die durch $|f(t)| < n$ erklärte t -Menge, so wäre die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{E_n-E_{n-1}} |f(t)|^{p'} dt}{\left(\int_{E_n} |f(t)|^{p'} dt \right)^{\alpha}}$$

konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $0 < \alpha < 1$. Setzte man jetzt

$$g(t) = \frac{|f(t)|^{p'} \operatorname{sign} f(t)}{\left(\int_{E_n} |f(t)|^{p'} dt \right)^\alpha} \text{ für } t \in E_n - E_{n-1} \text{ und } 0 \text{ für } t \in E_0, \text{ so wäre}$$

für $1/p < \alpha < 1$

$$\int_a^b |g(t)|^p dt < \infty, \quad \int_a^b f(t) g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{E_n - E_{n-1}} |f(t)|^{p'} dt}{\left(\int_{E_n} |f(t)|^{p'} dt \right)^\alpha} = \infty,$$

gegen die Voraussetzung.

Ähnlich beweist man denselben Satz im Grenzfalle $p=1$, nur hat man dann $L^{p'}(p'=\infty)$ als die Klasse der f. ü. beschränkten Funktionen zu deuten. Der andere Grenzfall: $p=\infty$, $p'=1$ liefert bei derselben Lesart auch einen richtigen Satz. Auch das Analogon zu [115] ist richtig. —

[129] Gehört $f(t)$ zu L^p und bezeichnet man

$$k \int_a^{t+1, k} f(u) du \quad (f(u) = 0 \text{ für } u > b)$$

mit $f_k(t)$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - f_k(t)|^p dt = 0 \quad (p > 1).$$

Sei zunächst $f(t)$ beschränkt, $|f(t)| \leq M$; nach einem bekannten Satze hat die Funktion $\int_a^t f(u) du$ fast überall $f(t)$ zur Ableitung, somit ist $\{f_k(t)\}$ f. ü. gegen $f(t)$ konvergent. Nach dem Egoroff'schen Satze [123] ist also gleichmäßig $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$ für $t \in E$, $|E| - [b-a] - \varepsilon$. In CE ist aber $|f(t)| \leq M$ und $|f_k(t)| \leq M$ (wie überall) nicht größer als M und daher ist

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - f_k(t)|^p dt \leq 2^p M^p \varepsilon.$$

Jetzt werden wir einen Satz (von Fubini) über Doppelintegrale brauchen (dessen Beweis im Saks'schen Buche nachgelesen werden kann). Er lautet: Hat $\varphi(x, y)$ im Rechteck $0, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq R$ ein Doppelintegral, so existieren die Integrale

$$\int_0^a \varphi(x, y) dx, \quad \int_0^b \varphi(x, y) dy$$

für fast alle y , bzw. fast alle x , sind integrierbar und es ist

$$(4) \quad \int_0^a dx \int_0^b \varphi(x, y) dy = \int_0^b dy \int_0^a \varphi(x, y) dx = \int_R \varphi(x, y) dx dy.$$

Jetzt kehren wir zu [129] zurück. Es sei $f(t)$ nicht beschränkt; ist dann $g^{(M)}(t) = f(t)$, wenn $|f(t)| < M$ und $g^{(M)}(t) = 0$ für sonstige t , so ist (nach Weglassung des Index M in einigen Formeln

und Einführung eines zu f_k analogen g_k), $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - g^{(M)}(t)| dt = 0$,

also $\int_a^b |f(t) - g(t)| dt < \varepsilon$ für große M . Nun ist

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) - f_k(t)| dt &= \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + \int_a^b |g(t) - f_k(t)| dt \\ &< \varepsilon + \int_a^b |g - g_k| dt + \int_a^b |f_k - g_k| dt. \end{aligned}$$

★

Für $k > \sim$ strebt das vorletzte Integral gegen Null, da $g(t)$ beschränkt ist (wie f früher). Das letzte Integral ist aber

$$\begin{aligned} \int_a^b k \int_t^{t+k} |g(u) - f(u)| du dt &= k \int_a^b dt \int_t^{t+k} |g(u) - f(u)| du \\ &= k \int_a^b du \cdot |g(u) - f(u)| \int_a^{u-k} \varphi(u, t) dt, \end{aligned}$$

wobei der Fubinsche Satz (4) zur Anwendung kommt; φ ist 1 für $t \leq u - \frac{1}{k}$, sonst 0; es folgt

$$\int_a^b |f_k - g_k| dt < k \cdot \int_a^b du \cdot |f(u) - g(u)| \int_{u-\frac{1}{k}}^u dt < \varepsilon.$$

Damit ist [129] für $p = 1$ bewiesen; für $p > 1$ ist der Beweis ähnlich.

Dieser Satz zeigt, daß jede Funktion in L^p eine „durchschnittliche“ Grenze von stetigen Funktionen ist. Daraus leitet

man einen Satz ab, der Treppenfunktionen an Stelle von stetigen Funktionen verwendet. Treppenfunktionen sind streckenweise konstante Funktionen; dabei ist die Anzahl der Strecken, in welche $\cdot \cdot \cdot \mathbb{O}, b \cdot \cdot \cdot$ zerlegt wird, beliebig aber endlich. Ist die Teilung so fein, daß die Schwankung von $f_k(t)$ auf jeder Strecke kleiner als ε ist, und wählt man als Wert der Treppenfunktion (z. B.) den Wert von $f_k(t)$ im Mittelpunkt der Strecke, so ist die Treppenfunktion in ganz a, b von $f_k(t)$ um weniger als ε verschieden, was unsere Bemerkung rechtfertigt.

Teilt man das Intervall in eine endliche Anzahl von Strecken und ersetzt $f(t)$ auf jeder Strecke a, β durch den Mittelwert

$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$, so erhält man eine Treppenfunktion, die mit immer feiner werdenden Teilung gegen $f(t)$ nicht nur f. ü., sondern auch im Sinne von [129] strebt.

§ 3. Abstrakte Räume.

★

Nur einige wichtige Begriffe und Sätze über abstrakte Räume sollen hier besprochen werden. Genauer findet man in dem Banach'schen Buche dieser Sammlung.

Eine nichtleere Menge E nennen wir einen *metrischen Raum*, wenn jedem Elementepaar x, y von E eine nichtnegative Zahl (x, y) zugeordnet ist unter Beachtung der Bedingungen:

$$1^\circ \quad (x, x) = 0, \quad (x, y) > 0 \quad \text{für } x \neq y,$$

$$2^\circ \quad (x, y) = (y, x),$$

$$3^\circ \quad (x, z) < (x, y) + (y, z).$$

Diese Zahl nennt man *Distanz* von x und y . Eine Folge $\{x_n\}$ von E -Elementen heißt *konvergent*, wenn $\lim_{p, q \rightarrow \infty} (x_p, x_q) = 0$; sie heißt *konvergent gegen x* , wenn $\lim_{p \rightarrow \infty} (x_p, x_\infty) = 0$ gilt; x_∞ heißt dann

Grenze der Folge und man schreibt $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = x_\infty$ (Synonyma kommen auch vor, wie in der Theorie der Zahlenfolgen). Hat jede konvergente Folge einen Grenzwert (Cauchy'sches Postulat), so heißt E *komplett*.

Beispiele kompletter Räume.

1. Die Menge L der in a, b integrierbaren Funktionen, metrisiert durch die Festsetzung

$$(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt,$$

wobei $x=y$ mit $x(t) = y(t)$ f. ü. in a, b " gleichbedeutend sein soll.

2. Allgemeiner: Die Menge L^p der in a, b mit der p -ten Potenz des Betrages integrierbaren Funktionen mit der Metrik

$$(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (p \geq 1) \quad [131]$$

(und $x=y$ wie oben). Die *Komplettheit* dieser Räume ist folgendermaßen zu beweisen:

Es sei

$$(5) \quad \lim_{r, s \rightarrow \infty} \int_a^b |x_r(t) - x_s(t)|^p dt = 0 \quad (p \geq 1).$$

Es werde eine Folge $\{n_k\}$ von wachsenden Indizes bestimmt mit

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty;$$

nach [127] ist dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| dt$

konvergent; wegen [124] ist es auch die Reihe

$$x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$$

fast überall, und ihre Summe $x_{\infty}(t)$ gehört zu L^p nach [125]. Daraus folgt aber

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} (x_{\infty}, x_{n_h}) = 0.$$

Denn (5) erlaubt r so zu bestimmen, daß für $5 > r$

$$\left(\int_a^b |x_r(t) - x_s(t)|^p dt \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sei; bestimmt man das $\left(\int_E |x_r(t) - x_s(t)|^p dt \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}$, $|E| < \gamma$,

habe, so liefert [128] für alle $s > r$

$$\left(\int_E |x_s(t)|^p dt \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

sobald nur $E/\langle n \rangle$ ist. Setzt man $s = n_k$ ($n_k > r$), beachtet $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(t) = x_\infty(t)$ f. ü. und zieht [126] heran, so folgt (7). Daraus aber in Verbindung mit (5) ergibt sich bereits $\lim_{q \rightarrow \infty} (x_\infty, x_q) = 0$, wobei nochmals die Minkowski'sche Ungleichung [128] angewendet wird.

3. Die Menge M der wesentlich beschränkten Funktionen, d. h. solcher $x(t)$, für welche $|x(t)| < c$ f. ü. gilt, mit der Metrik $(x, y) =$ wesentliche obere Grenze von $|x(t) - y(t)|$ in a, b .

4. Die Menge C aller in a, b stetigen Funktionen; $(x, y) = \max |x(t) - y(t)|$. Dieser Raum ist komplett, denn eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen hat einen stetigen Grenzwert.

5. Sei $p(t)$ für $t \geq 0$ erklärt, $p(0) = 0$, rechtsseitig stetig, wachsend und unbeschränkt. Man setze

$$\varphi(u) = \int_0^u p(t) dt \quad \text{für } u \geq 0, \quad \varphi(-u) = \varphi(u).$$

Ist $p^{-1}(t)$ die zu $p(t)$ inverse Funktion, so sei

$$\psi(u) = \int_0^u p^{-1}(t) dt \quad \text{für } u \geq 0, \quad \psi(-u) = \psi(u).$$

Dann ist

$$uv \leq \varphi(u) + \psi(v).$$

L_φ sei die Menge der Funktionen $f(t)$ mit endlichem $\int_a^b \varphi(f(t)) dt$. Gibt es eine Konstante k mit

$$\varphi(2u) \leq k\varphi(u)$$

für große u , so ist L_φ ein metrischer kompletter Raum, wenn $(x, y) = \text{obere Grenze}_h \left| \int_a^b (x(t) - y(t)) h(t) dt \right|$, wo $h(t)$ der Bedingung $\int_a^b \psi(h(t)) dt \leq 1$ unterworfen ist.

Die Räume L^p ($p > 1$) erhält man, wenn man $p(t) = pt^{p-1}$ wählt ($t > 0$); dann ist $\varphi(u) = |u|^p$; die neue Distanz ist die alte, bis auf einen (nur von p abhängigen) Faktor.

6. Die uns bekannte Menge l^p aller Folgen $\{\xi_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$ ($p > 1$) ist metrisch und komplett, wenn die Distanz (x, y) für $x = \{\xi_n\}$, $y = \{\eta_n\}$ durch

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{1/p}$$

gegeben wird. (Wir lassen auch $p = 1$ zu und schreiben $l^1 = l$).

Ist eine Menge A in einem metrischen Raum E enthalten, so heißt der Punkt x von E ein *Häufungspunkt* von A , wenn es in A eine Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq x$ (n) und mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gibt.

Die Menge aller solcher x heißt die *Derivierte* von A und wird mit A' bezeichnet.

A heißt *geschlossen*, wenn $A' \subset A$; A heißt *offen*, wenn $E - A$ geschlossen ist; A heißt *insichdicht*, wenn $A' \subset A$ überalldicht, wenn $A + A' = E$, *nirgendsdicht*, wenn $A + A'$ keine Kugel enthält; eine *Kugel* ist die Menge aller x mit

$$(x, x_0) < p \quad (p > 0),$$

und x_0 ist der *Mittelpunkt*, p der *Radius* der Kugel.

Eine Summe von abzählbar-unendlichvielen, nirgendsdichten Mengen heißt *von der ersten Kategorie*; sonst ist eine Menge *von der zweiten Kategorie*. [133]

Eine kompletter metrischer Raum ist stets von der zweiten Kategorie (Hausdorff). [134]

Eine nichtleere Menge E heißt ein *vektorieller Raum*, wenn die Addition je zweier Elemente und die Multiplikation mit einer reellen Zahl stets ausführbar ist unter Wahrung der bekannten Regeln (Eindeutigkeit, Kommutativität, Assoziativität und Distributivität). [135]

Ist ein Raum metrisch, vektoriell und komplett, und erfüllt er außerdem die Bedingungen [136]

$$\begin{aligned} 1^\circ & \quad (x, y) = (x - y, \Theta), \\ 2^\circ & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \quad \text{impliziert} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n x = \Theta \quad (x), \\ 3^\circ & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \Theta \quad \text{impliziert} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p x_n = \Theta \quad (p), \end{aligned}$$

so heißt er vom *Typus F*.

Dabei ist 0 das Nullelement der Addition, $-y$ bedeutet $(-1) \cdot y$, $x - y$ bedeutet $x + (-y)$, kleine griechische Buchstaben bedeuten reelle Zahlen.

- [137] Man sagt, ein vektorieller Raum E sei *normiert* worden, wenn jedem Element $x \in E$ eine reelle Zahl $\|x\|$, die *Norm* von x , zugeordnet wurde und wenn dabei folgende Postulate erfüllt wurden:

$$1^\circ \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{für } x \neq \theta, \quad \|\theta\| = 0,$$

$$2^\circ \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$3^\circ \quad \|\rho x\| = |\rho| \cdot \|x\|.$$

- In diesem Falle kann man den Raum E metrisieren, indem man [138] $(x, y) = \|x - y\|$ setzt. Ist E außerdem *komplett*, so heißt er vom Typus B . Es ist leicht zu sehen, daß er dann auch vom Typus F ist.

Unsere Beispiele 1 bis 6 liefern Räume vom Typus B . Um zu sehen, wie in jedem Fall die Norm zu berechnen ist, bemerken wir, daß in 1, 2, 3, 5 die fast überall verschwindende Funktion das Nullelement vorstellt; in 4 tut es die identische Null und in 6 die Folge $\{0\}$. Damit ist bereits $\|x\|$ als $|(x, \theta)|$ gegeben.

- [139] Ein Raum heißt *separabel*, wenn er eine überalldichte abzählbare Teilmenge enthält. Die Räume L^p und C (z. B.) sind separabel.

§ 4. Operationen und Funktionale.

- E und E_1 seien nichtleere Mengen. Jedem Element x aus E werde ein bestimmtes Element $U(x)$ aus E_1 zugeordnet. Damit ist [141] in E eine *Operation* (U) erklärt worden. Sind die Elemente von E_1 Zahlen, so heißt die Operation ein *Funktional*. Sind beide Mengen, E und E_1 , metrische Räume, so heißt $U(x)$ in x *stetig*, [142] wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty$ ($x_n \in E$) stets $\lim_{n \rightarrow \infty} U(x_n) = U(x_\infty)$ zur Folge hat.

- Ist eine Folge $\{U_n\}$ von Operationen gegeben, deren Werte $U_n(x)$ zum metrischen Raum E_1 gehören, ebenso wie die Werte von [143] $U_\infty(x)$, so heißt $\{U_n\}$ *konvergent gegen U_∞ in x_0* , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x_0) = U_\infty(x_0)$ gilt. Sind E und E_1 vektoriell, so nennt man eine Operation $U(x)$ *additiv*, wenn

$$U(x + y) = U(x) + U(y) \quad (x, y \in E),$$

homogen, wenn

$$U(\tau x) = \tau U(x) \quad (x \in E, \tau \text{ reell}).$$

Ist sowohl E als E_1 vektoriell und metrisch, so heißt $U(x)$ *linear*, wenn sie additiv und stetig ist; die Homogenität ergibt sich [1441 von selbst.

Sehr wichtig ist der Banach'sche Satz: *Ist $U(x)$ additiv und* [1451 *impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} U(x_n) = y_{\infty}$ die Gleichheit $y_{\infty} = U(x_{\infty})$, so ist $U(x)$ linear* (vgl. das Banach'sche Buch dieser Sammlung).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine in einem B-Raum erklärte additive Operation $U(x)$ linear sei, ist die Existenz einer reellen Zahl $p > 0$ mit

$$(8) \quad \|U(x)\| \leq p \cdot \|x\| \quad (x).$$

Die kleinste Zahl p in (8) heißt die *Norm der Operation* $U(x)$; [146] ist sie μ , so schreibt man

$$\|U\| = \mu.$$

Die linearen Funktionale Θ in den B-Räumen 1, 2, 4 des § 3 [147] lassen eine kanonische Darstellung zu:

$$\text{in } L \text{ ist} \quad \Phi(x) = \int_a^b x(\tau) h(\tau) d\tau, \quad h \in M, \quad \|\Phi\| = \|h\|_M;$$

$$\text{in } L^p(p > 1) \text{ ist} \quad \Phi(x) = \int_a^b x(\tau) h(\tau) d\tau, \quad h \in L^{p'}, \quad \|\Phi\| = \|h\|_{L^{p'}};$$

$$\text{in } C \text{ ist} \quad \Phi(x) = \int_a^b x(\tau) dg, \quad g(\tau) \in V, \quad \|\Phi\| = \int_a^b |dg|.$$

Dabei ist M bereits früher (§ 3, 3.) erklärt worden; nach unseren früheren Festsetzungen ist $\|h\|_M =$ wesentliche obere Grenze von

$$|h(\tau)| \text{ in } [a, b], \quad \|h\|_{L^{p'}} = \left(\int_a^b |h(\tau)|^{p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}; \quad V \text{ ist ein neuer Raum:}$$

die Menge aller Funktionen $g(t)$ von beschränkter Schwankung in $[a, b]$.

Die Gestalt eines linearen Funktionalis in M ist nicht mehr so einfach.

§ 5. Resonanztheoreme.

Mit diesem Namen umfassen wir eine Klasse von Sätzen, wo aus der Unbeschränktheit einer Folge die Unbeschränktheit

einer anderen Folge abgeleitet wird; dabei wird aber ein variabler Bestandteil der ersten Folge durch einen fixen ersetzt. Der Satz [113] über Reihen ist ein Beispiel für dieses Prinzip; analoge Sätze über Integrale gehören auch hierher. Ihre gemeinsame Quelle ist folgendes Theorem:

- [151] $\{F_n(x)\}$ sei eine Folge von linearen Operationen, sämtlich in einem Raum E vom Typus B erklärt; der Gegenraum E_1 sei auch vom Typus B . Es bezeichne μ_n die Norm $\|F_n\|$ der Operation $F_n(x)$ (nach [146]), (die mit der Norm $\|F_n(x)\|$ des Gegenelementes $y_n = F_n(x)$ in E_1 nicht zu verwechseln ist). Ist dann $F \in E$ von der zweiten Kategorie (vgl. [133J]) und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(x)\| < \infty$$

für jedes x in F , so ist $\{\mu_n\}$ beschränkt.

Dieses Theorem läßt sich auch so wenden: Gibt es eine Folge $\{x_n\}$ mit $\|x_n\| < 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(x_n)\| = \infty$, so ist die Menge X jener x , für welche $\{\|F_n(x)\|\}$ beschränkt ist, von der ersten Kategorie in E . In dieser Gestalt ist der Resonanzcharakter des Theorems sichtbar, denn das variable x_n läßt sich durch ein fixes x so ersetzen, daß die Divergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(\dots)\| = \infty$ erhalten bleibt:

und zwar ist das gesuchte x der Komplementärmenge $E - X$ zu entnehmen, die nach [134] niemals leer ist.

Beweis von [151] in zweiter Form: Schreibt man

$$X = F_1 + F_2 + \dots,$$

wo F_i durch „ $\|F_n(x)\| < i$ für alle n “ erklärt ist, so ist F_i geschlossen, da alle $F_n(x)$ stetig sind. Wäre X von der zweiten Kategorie in E , so gäbe es ein F_i (wenigstens), welches nicht nirgendsdicht wäre; so ein F_i muß in einer gewissen Kugel K überalldicht sein und, da es geschlossen ist, diese Kugel enthalten. Ist nun x_0 der Mittelpunkt und ρ der Radius von K , so ist für $x = u - x_0$, $\|x\| \leq \rho$, u in K enthalten. Dann ist aber $\|F_n(x)\| \leq \|F_n(u)\| + \|F_n(x_0)\| \leq 2i$ für $\|x\| \leq \rho$. Nun war aber $\|x_n\| \leq 1$, also $\|F_n(x_n)\| \leq \rho$, was mit dem eben Bewiesenen

$$\|F_n(x_n)\| \leq \frac{2i}{\rho} \quad (n)$$

zur Folge hat, gegen die Voraussetzung.

Spezialfälle des Resonanztheorems [151] sind:

$$1^0 \text{ Ist } \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta |f_n(\tau)|^p d\tau = \infty \quad (p > 1), \text{ so gibt es ein } g(t) \quad [152]$$

in L^p mit

$$(9) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta f_n(\tau) g(\tau) d\tau = +\infty.$$

$$2^0 \text{ Ist } \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{ (wes. ob. Grenze von } |f_n(\tau)|) = \infty, \text{ so gibt es ein } [153]$$

$$g(\tau) \in L \text{ mit (9).}$$

$$3^0 \text{ Ist } \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta |f_n(\tau)| d\tau = \infty, \text{ so gibt es ein } g(\tau) \in C \text{ mit (9).} \quad [154]$$

In allen drei Fällen ist nämlich $F_n(x) = \int_a^\beta f_n(\tau) x(\tau) d\tau$ als die in $L^{p'}$, L , bzw. C erklärte lineare Operation (Funktional) zu wählen und als x_n die Funktion

$$1^0 \quad |f_n(\tau)|^{p-1} \cdot \text{sign } f_n(\tau) \cdot \left(\int_a^\beta |f_n(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p'} \quad (a \leq \tau \leq \beta),$$

2⁰ $\text{sign } f_n(\tau) \cdot \frac{1}{|W_n|}$ für $\tau \in W_n$, sonst 0; dabei ist W_n die τ -Menge, wo $|f_n(t)|$ die Hälfte seiner wesentlichen oberen Grenze übertrifft,

3⁰ eine stetige Funktion, die $\text{sign } f_n(t)$ im Sinne von [129] genügend nahe approximiert.

Man wird in allen drei Fällen $\limsup_{n \rightarrow \infty} |F_n(x_n)| = \infty$ erzielen und nicht nur die Existenz eines $g(T)$ der Behauptung (0) sondern—nach [151]—die Existenz einer g -Menge von der zweiten Kategorie, deren jedes Element $g(t)$ die Eigenschaft (9) aufweist, dartun.

Ein Lemma. Eine im Quadrat $a, \beta \dots a, \beta$ erklärte Funktion $f(t, w)$ sei daselbst integrierbar und die Funktion $h(\tau) = \int_a^\beta |f(\tau, w)| d\omega$ habe eine wesentliche obere Grenze $w < \infty$; ist $\varepsilon > 0$, so gibt es dann eine stetige Funktion $g(\quad)$ mit

$$|g(\omega)| \leq 1, \quad \text{wes. ob. Grenze von } \int_a^\beta f(\tau, \omega) g(\omega) d\omega > w - \varepsilon.$$

Beweis: Sei $\varepsilon_0 > 0$ und — gegen die Behauptung —
w. o. G. $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, \omega) g(\omega) d\omega \right| \leq (w - \varepsilon_0) \cdot \max |g(\omega)|$ für alle stetigen $g(\omega)$.

Ist $\{g_k(\omega)\}$ die Folge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten und E_k die durch

$$(10) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, \omega) g_k(\omega) d\omega \right| > (w - \varepsilon_0) \max |g_k(\omega)|$$

definierte τ -Menge, so ergibt sich $|E_k| = 0$ für alle k . Setzt man $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, so ist $|E| = 0$. Nun kann $\tau_0 \in CE$ so gewählt werden, daß

$$(11) \quad \infty > \int_{\alpha}^{\beta} |f(\tau_0, \omega)| d\omega > w - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

sei, der Definition von w gemäß. Nun gilt aber für $T = T_0$ das Gegenteil von (10) und wegen des Weierstraß'schen Approximationssatzes [122] folgt für alle stetigen $g(\omega)$

$$(12) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau_0, \omega) g(\omega) d\omega \right| < (w - \varepsilon_0) \max |g(\omega)|.$$

Approximiert man $\text{sign} f(\tau_0, \omega)$ nach der Vorschrift [129] durch eine stetige Funktion $g_0(\omega)$ hinreichend genau, so kommt

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau_0, \omega) [\text{sign} f(\tau_0, \omega) - g_0(\omega)] d\omega \right| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad |g_0(\omega)| \leq 1,$$

also — wegen (11) —

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau_0, \omega) g_0(\omega) d\omega > \int_{\alpha}^{\beta} |f(\tau_0, \omega)| d\omega - \frac{\varepsilon_0}{2} > w - \varepsilon_0,$$

gegen (12).

[155] Ein Satz über Integralfolgen: Sind sämtliche $f_k(t, w)$ in $<\alpha\beta$ $\alpha\beta$ integrierbar und sind die Funktionen

$$(13) \quad \int_{\alpha}^{\beta} |f_k(\tau, \omega)| d\omega$$

wohl wesentlich beschränkt in α , β , aber nicht gemeinsam wesentlich beschränkt, so gibt es eine stetige Funktion $g(w)$ mit

$$(14) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\text{w. o. G.} \int_{\alpha \leq \tau \leq \beta}^{\beta} f_k(\tau, w) g(w) d\omega \right) = +\infty.$$

Beweis: Der Satz gehört zum Ideenkreis des Resonanztheorems [151]. Die Operationen $F_n = \int_{\alpha}^{\beta} f_n(\tau, w) x(w) d\omega$ sind im Räume C der stetigen Funktionen $x(w)$ erklärt; der Gegenraum M ist derjenige der wesentlich beschränkten Funktionen. Der Inhalt des Lemmas ist aber nichts anderes, als daß die w. o. G. des Ausdruckes (13) die Norm der Operation $F_n(x)$ ist; die Folge der Normen ist daher unbeschränkt, woraus die Behauptung folgt. (Es folgt sogar, daß die Menge der g in C , für welche (14) nicht gilt, von der ersten Kategorie ist).

Jetzt wollen wir das Prinzip der Kondensation der Singularitäten formulieren:

E ist ein B -Raum; darin ist eine Doppel folge von linearen [156] Operationen erklärt $\{F_{pq}(X)\}$, so daß

$$(15) \quad \limsup_{q \rightarrow \infty} \|F_{pq}\| = \sim \quad (p = 1, 2, \dots);$$

dann ist eine Menge $X \subset E$ vorhanden (die von der zweiten Kategorie ist), deren Komplement $E - X$ von der ersten Kategorie ist, mit der Eigenschaft

$$(16) \quad \limsup_{q \rightarrow \infty} \|F_{pq}(x)\| = \sim \quad (p = 1, 2, \dots)$$

für jedes $x \in X$. (Die Gegenräume der Operationen F_{pq} dürfen mit p variieren).

Beweis: Auf Grund von [151] ist die Menge H_p jener x , für welche bei gegebenem p (16) nicht gilt, von der ersten Kategorie; so ist auch die Menge $\sum_{p=1}^{\infty} H_p$ und man hat $X = E - \sum_{p=1}^{\infty} H_p$ zu setzen.

Eine Variante von [156] erhält man, wenn man anstatt (15) [157] die Voraussetzung einführt, daß es zu jedem p ein x_p gibt, welches die Folge

$$(17) \quad q\{F_{pq}(x_p)\}$$

divergent macht. Dann lautet die

Behauptung: Es gibt ein p -freies x , welches für alle Folgen (17) dasselbe leistet und die Menge X solcher x ist von der zweiten, die Komplementärmenge $E - X$ von der ersten Kategorie.

Beweis: Es sei E_p die Menge aller x , die die einfache Folge $q\{F_{pq}(x)\}$ (p fest) zu einer konvergenten machen. E_p ist von der ersten Kategorie; im Falle (15) folgt dieses aus [151]; im Gegenfalle haben wir

$$(18) \quad \limsup_{q \rightarrow \infty} F_{pq} < x_p < \infty$$

und behaupten, daß E_p sogar nirgendsdicht ist. Denn wäre E_p überalldicht in einer Kugel K , und wäre $x \in K$, $\varepsilon > 0$, so gäbe es ein x' mit $x' \in K$, $|x - x'| < \frac{\varepsilon}{3\alpha_p}$, $x' \in E_p$. Dann hätten wir aber

*

$$|F_{pq}(x') - F_{pr}(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $q > qp$ $r > q$. Wegen (18) ist aber $|F_{pq}(x)| < \alpha_p x$ für große q und für alle x . Es folgt also für jedes $x \in K$ und für $q > q_x$, $r > q_x$

$$|F_{pq}(x) - F_{pr}(x)| < \varepsilon;$$

die so bewiesene Konvergenz überträgt sich wegen der Linearität von F_{pq} auf ganz E , gegen die Voraussetzung. In beiden Fällen ist daher E_p von der ersten Kategorie; desgleichen ist

$$\sum_{p=1}^{\infty} E_p = E - X, \text{ w. z. b. w.}$$

Jetzt kehren wir zu den einfachen Folgen zurück, um ein Herrn Saks zu verdankendes Resultat zu erreichen, welches das Resonanztheorem [151] in einem neuen Lichte zeigt, wenn der Gegenraum der Raum der meßbaren Funktionen, R , ist.

E sei wieder ein B-Raum, $t \in \alpha$, β eine reelle Variable. $F_{\alpha}(x)$ sei eine lineare Operation, deren Gegenraum R ist und zwar soll in R die Distanz als

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|u(\tau) - v(\tau)|}{1 + |u(\tau) - v(\tau)|} d\tau$$

definiert werden. Dann ist R vektoriell, metrisch und komplett. Es ist also $F_n(x) = u(x, \tau, n)$ und letztere Funktion wird für ein $x \in E$ und ein natürliches n eine meßbare Funktion $u(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$.

Ein Lemma. Voraussetzungen: 1° $\{F_n(X)\}$ ist eine Folge von [158] linearen Operationen, wie wir sie eben betrachtet haben. 2° E enthält einen Teil X von der zweiten Kategorie, so daß für jedes $x \in X$ die Ungleichung

$$(19) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |u(x, \tau, n)| < \infty$$

in einer t -Menge T_x gilt, deren Maß eine A -freie, positive Zahl φ übertrifft. Behauptung: Ist $0 < \varepsilon < \omega$, so gibt es in X, β eine A -freie t -Menge T vom Maße $w - \varepsilon$, so daß für jedes $x \in E$ fast überall in T die Ungleichung (19) statthat.

Beweis: Z sei die Gesamtheit von Punktmengen S , wobei eine T -Menge S als Summe von endlich vielen Intervallen α_n, β_n mit rationalen, in α, β gelegenen Endpunkten erklärt sein soll. Ist dann M die Gesamtheit aller meßbaren Punktmengen in α, β und die Distanz zweier Elemente von M als das Maß der nichtgemeinsamen Teile beider erklärt,

$$(A, B) = |A + B - AB| \quad (A \in M, B \in M),$$

so ist Z in M überalldicht. $\{S_n\}$ sei die Folge derjenigen S , deren Maß wenigstens $\omega - \varepsilon/2$ beträgt und $X_{l,m} \subset E$ die Menge der x , für welche die Ungleichungen $(n) |u(x, \tau, n)| < m$ für $\tau \in R(x)$ mit

$|S_l - S_l R_l| < \varepsilon/2$ gelten. Es ist $X \subset \bigcup_{l=1, m=1}^{\infty} X_{l,m}$, also ein $X_{l,m}$, von zweiter

Kategorie vorhanden; die $F_n(x)$ sind stetig, also $X_{l,m}$ abgeschlossen und eine Kugel K in $X_{l,m}$ enthalten. Bezeichnet man S_l mit $S^{(1)}$, $S^{(1)} R(x)$ mit $R^{(1)}(x)$, so gilt (19) für $x \in K$, also, wegen der Linearität, für $x \in E$, $\tau \in R^{(1)}(x)$. Jetzt wiederholt man denselben Schluß: $S^{(1)}$ tritt an Stelle von α, β , $\{S_n^{(1)}\}$ ist eine S -Folge mit $S_n^{(1)} \subset S^{(1)}$, $|S_n^{(1)}| > \omega - \varepsilon/2 - \varepsilon/4$; man erhält (19) für $x \in E$, $\tau \in R^{(2)}(x)$ und es ist

$S^{(2)} \subset S^{(1)}$, $R^{(1)} \subset S^{(1)}$, $R^{(2)} \subset S^{(2)}$, $|S^{(1)} - R^{(1)}| < \varepsilon/2$, $|S^{(2)} - R^{(2)}| < \varepsilon/4$ u. s. w.; es ist auch $|S^{(i)}| > \omega - \varepsilon$ für alle i . Setzt man $S^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} S^{(i)}$,

$R^\infty(x) = \limsup_{i \rightarrow \infty} R^{(i)}(x)$, so gilt (19) für $x \in E$, $\tau \in R^\infty(x)$ und S^∞ ist das T der Behauptung, denn $R^\infty \subset S^\infty$, $|S^\infty - R^\infty(x)| = 0$.

[159] **Der Saks'sche Satz:** *Unter den Voraussetzungen des Lemmas [158] existiert in $\langle \alpha, \beta \rangle$ eine Menge $\hat{T}$, so daß*

$$1^\circ \limsup_{n \rightarrow \infty} |u(x, \tau, n)| < \infty \text{ für jedes } x \text{ in } E \text{ für fast jedes } \tau \text{ in } \hat{T},$$

$2^\circ \limsup_{n \rightarrow \infty} |u(x, \tau, n)| = \infty$ fast überall in $\hat{CT}$ und zwar für jedes $x \in E$ mit Ausnahme von (höchstens) einer Menge erster Kategorie in E gilt.

Beweis: Sei ω_0 die obere Grenze der Zahlen ω , für welche es Mengen $X_\omega \subset E$ von der zweiten Kategorie gibt, so daß für $x \in X_\omega$ die Ungleichung 1° in einer Menge T_x vom Maße ω stattfindet. Nach [158] gibt es für jedes $p (= 1, 2, 3, \dots)$ ein $\hat{T}_p$ mit $|\hat{T}_p| \geq \omega_0 - 1/p$, so daß 1° für jedes $x \in E$ fast überall in $\hat{T}_p$ stattfindet. Setzt man $\hat{T} = \sum_{p=1}^{\infty} \hat{T}_p$, so ist $\hat{T}$ die im Texte der Behauptung genannte Menge. Um den Teil 2° zu begründen, nehmen wir an X sei von der zweiten Kategorie in E und 1° gelte für jedes $x \in X$ in einem Teil von $\hat{CT}$ mit positivem Maße. Dann wäre für $x \in X$ stets 1° in einer Menge T_x mit $|T_x| > \omega_0$ richtig (und zwar ist $T_x = \hat{T} + \text{ein Teil von } \hat{CT}$); da X von der zweiten Kategorie ist, so enthält es einen Teil X_0 von derselben Kategorie, so daß für $x \in X_0$ stets $|T_x| > \omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ ist, was gegen die Definition von ω_0 verstößt.

§ 6. Konvergenzarten.

Betrachten wir eine Folge $\{f_k(\tau)\}$ von meßbaren, in $\langle \alpha, \beta \rangle$ erklärten Funktionen. Die Konvergenz dieser Folge für ein $t = T_0$ im gewöhnlichen Sinne oder ihre Konvergenz schlechthin, d. h. für jedes t in $\langle \alpha, \beta \rangle$, bedarf keines Kommentars, ebenso wenig wie die gleichmäßige Konvergenz in $\langle \alpha, \beta \rangle$ oder einer anderen in $\langle \alpha, \beta \rangle$ enthaltenen t -Menge. Wir haben auch bereits von der Redensart Gebrauch gemacht, die Folge sei in $\langle \alpha, \beta \rangle$ (oder einer Menge $T \subset \langle \alpha, \beta \rangle$) *fast überall konvergent*, wenn die Konvergenzpunktmenge in $\langle \alpha, \beta \rangle$ (in T) das Maß $|\beta - \alpha|$ (bzw. $|T|$) aufweist.

Gehören die Funktionen f_k zu einem normierten Raum, so versteht man unter *starker Konvergenz* die Beziehung [161]

$$(20) \quad \lim_{k, q \rightarrow \infty} \|f_k(\tau) - f_q(\tau)\| = 0.$$

Handelt es sich um komplette Räume (vgl. § 3), so ist diese Beziehung mit

$$(21) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{\infty}(\tau) - f_k(\tau)\| = 0$$

äquivalent, wo $f(\tau)$ eine entsprechende, zum selben Raum gehörende Funktion (Grenzfunktion) ist. Wir schreiben manchmal, anstatt (21),

$$(22) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\tau) = f_{\infty}(\tau).$$

Die starke Konvergenz im Räume M (§ 3, Beispiel 3) ist mit der gleichmäßigen Konvergenz fast überall in α, β -gleichbedeutend. Dagegen ist die gewöhnliche und die starke Konvergenz auseinanderzuhalten und alle vier Fälle kommen vor.

Es sei

$$f_k(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{in } <0, \frac{2^k-1}{2^k}> \\ 2^k & \text{in } \left(\frac{2^k-1}{2^k}, 1\right) \\ 0 & \text{in } 1. \end{cases}$$

Man hat offensichtlich $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\tau) = 0$ ($0 < \tau < 1$), aber es gilt nicht $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\tau) = 0$ im Raume L , denn $\{f_k(\tau)\}$ ist nicht stark konvergent in L ; es ist nämlich für jedes $k (= 1, 2, \dots)$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_k(\tau) - f_q(\tau)| d\tau = 2,$$

gegen (20). Andererseits kann eine stark konvergente Folge sogar überall gewöhnlich divergent sein. Es gilt aber der Satz, daß **eine jede in $L^p(p > 1)$ stark konvergente Folge im Intervall α, β asymptotisch konvergiert.** Dieses bedeutet: Ist $\varepsilon > 0$ und E_k die durch $|f_k(\tau) - f_{\infty}(\tau)| \geq \varepsilon$ definierte τ -Menge, so ist $\lim_{k \rightarrow \infty} |E_k| = 0$. [162]

$f(\tau)$ ist dabei die „starke“ Grenze (die sich als die asymptotische herausstellt) und ε beliebig.

Jede asymptotisch konvergente Folge enthält eine fast überall konvergente Teilfolge. Daraus folgt, daß jede stark konvergente Folge eine fast überall konvergente Teilfolge enthält.

Schwache Konvergenz. Es sei $\{f_k(\tau)\}$ in L^p stark konvergent; dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |f_k(\tau) - f(\tau)|^p d\tau = 0,$$

woraus in Verbindung mit [127] für jedes $g(\tau) \in L^{p'} (1/p + 1/p' = 1)$

$$(23) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(\tau) g(\tau) d\tau = \int_a^b f(\tau) g(\tau) d\tau \quad (8)$$

folgt. Es kann nun vorkommen, daß eine Folge $\{f_k(\tau)\}$ die Eigenschaft (23) hat (mitunter ohne stark konvergent zu sein). Dann heißt sie schwach konvergent. Allgemein: Eine Folge $\{x_k\}$, deren [163] Glieder zum Räume E gehören, nennt man schwach konvergent (gegen x_∞), wenn für ein jedes lineare Funktional $\varphi(x)$ die Beziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x_\infty)$$

stattfindet. So ist z. B. eine Folge von integrierbaren Funktionen $\{f_k(t)\}$ in L schwach konvergent, wenn (23) für jedes $g(t) \in M$ gilt.

Denn jedes lineare Funktional in L hat die Gestalt $\varphi(x) = \int_a^b g(\tau) x(\tau) d\tau$

mit $g \in Af$, und umgekehrt ist jeder solche Ausdruck ein lineares Funktional in L (vgl. [147]). Man beweist auch (vgl. das Banach'sche Buch), daß in den Räumen $L^p (p > 1)$ die Konvergenz der linksseitigen Folge (23) für alle g aus $L^{p'} (L' \subset M)$ bereits die Existenz der „schwachen Grenze“ $f_\infty(\tau)$ verbürgt. Die Folge $\{\sin k\tau\} (0 < \tau < 2\pi)$ ist in $L^p (p > 1)$ schwach konvergent gegen Null, ohne eine fast überall konvergente Teilfolge zu enthalten; es liegt also die Sache anders als bei starker Konvergenz.

[164] Damit eine Folge $\{f_k(\tau)\}$ aus $L^p (p > 1)$ gegen $f_\infty(\tau)$ schwach konvergiere, ist

$$(k) \quad \int_a^b |f_k(\tau)|^p d\tau \leq \gamma, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(\omega) d\omega = \int_a^b f_\infty(\omega) d\omega \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta)$$

notwendig und hinreichend; dieses folgt leicht aus der Schlußbemerkung des § 2 und aus [152].

Der Begriff der schwachen Konvergenz läßt sich auch für Folgen von Funktionalen erklären: eine solche, $\{\varphi_n(x)\}$, heißt

schwach konvergent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) (= \varphi_\infty(x))$ für jedes $x \in E$ existiert. Hier gilt der Satz:

Sind die Normen der linearen Funktionale $\varphi_n(x)$ gemeinsam beschränkt, und der Raum E separabel ([139]), so enthält $\{\varphi_n(x)\}$ eine schwach konvergente Teilfolge. [165]

Beweis: Laut Voraussetzung gibt es in E eine überalldichte Folge $\{x_i\}$. Aus der Zahlenfolge $\{\varphi_n(x_1)\}$ läßt sich eine konvergente Teilfolge $\{\varphi_{n'_k}(x_1)\}$ herausgreifen; aus $\{\varphi_{n'_k}(x_2)\}$ eine konvergente Teilfolge $\{\varphi_{n''_k}(x_2)\}$ u. s. w. Die Diagonalfolge $\{\varphi_{n_k}^{(k)}(x)\}$ ist bereits für alle x_i konvergent. Nun ist aber — wegen $\|\varphi_n\| \leq K$ — (mit n - und x -freiem K) $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq K \|x - x_i\|$, was die Existenz von $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}^{(k)}(x)$ für alle $x \in E$ leicht folgern läßt. Dieser „lim“ ist ein additives und—infolge letzter Ungleichung—stetiges Funktional. Es ist daher $\varphi_\infty(x)$ linear, ein Korollar zu [165].

Eine Anwendung von [165] bietet der

Satz: Ist $\int_a^b |f_n(\tau)|^p d\tau < \gamma$ ($p > 1$) mit k -freiem γ , so enthält $\{f_n(\tau)\}$ [166]
eine in L^p schwach konvergente Teilfolge $\{f_{n_k}(\tau)\}$; im Falle $p = \infty$ lautet die Voraussetzung „ $|f_k(\tau)| < \gamma$ fast überall“ und dann enthält $\{f_n(\tau)\}$ bloß eine Teilfolge $\{f_{n_k}(\tau)\}$, welche für jedes $g(\tau) \in L$ die Konvergenz der Zahlenfolge $\int_a^b f_{n_k}(\tau) g(\tau) d\tau$ sichert.

Zunächst erinnern wir an die Treppenfunktionen am Schluß von § 2. Sie können offenbar so gewählt werden, daß die Konstanzintervalle rationale Endpunkte, die Konstanten selbst rationale Werte haben. Dieses zeigt, daß die Räume L^p bzw. L separabel sind. Zweitens ist, nach [147],

$$\int_a^b f_n(\tau) x(\tau) d\tau$$

für $x \in L^p$ bzw. $x \in L$ unter den Voraussetzungen [166] das lineare Funktional $\varphi_k(x)$ und die Normen $\| \cdot \|_{p^*}$ (vgl. [147]) gemeinsam beschränkt. [165] liefert also das Behauptete.

- [167] Unbedingte Konvergenz. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\tau)$ heißt *absolut* konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\tau)|$ konvergiert. Eine solche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\tau)$ hat die Eigenschaft bei jeder Umordnung der Terme konvergent zu bleiben und zwar gegen dieselbe Summe. Die Umkehrung ist auch richtig. Die Sache liegt nicht mehr so einfach, wenn man eine Reihe von Elementen eines B-Raumes hat, die daselbst, d. h. stark konvergiert. Hier ist das Analogon der absoluten Konvergenz, d. h. die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ nicht mehr notwendig (obwohl hinreichend), damit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ bei allen Umordnungen (und sogar zu derselben Summe) stark konvergiere. So ist z. B. die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos k\tau$$

mit $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$ ein Beispiel für $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ mit $x_k \in L^2$, wo nach einem späteren Satze die *unbedingte* Konvergenz, d. h. Konvergenz bei allen Umordnungen (nach der in L^2 gültigen Norm) stattfindet, obwohl die Rechnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 k\tau d\tau \right)^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| \sqrt{\pi}$$

für $Y_K = 1/k$ die absolute Divergenz liefert.

- [168] Ein Satz von Orlicz über unbedingte Konvergenz: *Damit eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, deren Terme zu einem B-Raum gehören, daselbst (d. h. der Norm nach) unabhängig von der Anordnung der Terme konvergiere, ist die Konvergenz einer jeden Teilreihe*

$$(24) \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$$

notwendig und hinreichend.

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine divergente Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zwei Folgen $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ mit $p_i < q_i < p_{i+1} < q_{i+1}$, so daß

$$\|\bar{s}_{q_i} - \bar{s}_{p_i}\| > \varepsilon,$$

WO s_n die n -te Partialsumme von $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ bedeutet. Wir können nun die Abschnitte $\bar{s}_{q_i} - \bar{s}_{p_i}$ in bezug auf die ursprünglichen Indizes der Terme x_k betrachten und eine Teilfolge ($i = v_1, v_2, \dots$) behalten, so daß die Indizes in jedem Abschnitt größer seien als in dem vorhergehenden. In jedem Abschnitt werde nun die ursprüngliche Reihenfolge der Terme hergestellt und die Abschnittsklammern aufgelöst: es entsteht eine divergente Teilreihe (24).

Sei (24) divergent und $s_p = \sum_{k=1}^p x_{n_k}$. Sei wieder $\varepsilon > 0$, $p_i < q_i < p_{i+1} < q_{i+1}$ und

$$\|\bar{s}_{q_i} - \bar{s}_{p_i}\| > \varepsilon \quad (i).$$

In der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ gibt es Terme, die zu den Abschnitten $(s_{q_i} - s_{p_i})$ gehören und (eventuell) andere. Wir ordnen $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ so um, daß wir die ersten Terme so gruppieren, wie sie in den Abschnitten stehen und (event.) zwischen je zwei Gruppen je einen anderen Term einschalten. So entsteht eine divergente Umordnung. Damit ist [168] in beiden Teilen bewiesen.

§ 7. Das Momentenproblem.

Die Zahlen

$$\mu_n = \int_a^b f(\tau) g_n(\tau) d\tau$$

heißen *Momente* der Funktion $f(t)$ in bezug auf die Folge $\{g_n(\tau)\}$. Das Momentenproblem besteht in der Angabe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine vorgegebene Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ eine Momentenfolge sei. Der Raum, in welchem $f(t)$ gesucht werden soll, ist hier ausschlaggebend.

Es sei $g_k(\tau) \in L^{p'} (p' > 1)$ bzw. $L (k = 1, 2, \dots)$.

Damit es in $L^p (p < \infty)$ bzw. M ein $f(t)$ gebe, dessen Norm $[171] \leq \gamma$ und dessen Momentenfolge $\{\mu_n\}$ sei, ist die Gültigkeit der Ungleichung

$$(25) \quad \left| \sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k \right| \leq \gamma \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(\tau) \right|^{p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\text{bzw.} \quad \left| \sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k \right| \leq \gamma \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(\tau) \right| d\tau$$

für alle endlichen Zahlensysteme $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ notwendig und hinreichend (F. Riesz, S. Banach).

Die Notwendigkeit ist sofort ersichtlich:

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k g_k(\tau) \right) f(\tau) d\tau \leq \gamma \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(\tau) \right|^{p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}$$

und ebenso im Grenzfalle $p' = 1$ (wegen [127J bzw. noch einfacher). Setzen wir voraus, (25) sei für alle Zahlensysteme $\xi_1, \dots, \xi_n$ erfüllt. Bei festem n und bei der Nebenbedingung

$$(26) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(\tau) \right|^{p'} d\tau = 1$$

*

für $\xi_1, \dots, \xi_n$ hat die Summe $\sum_{k=1}^n \mu_k \xi_k = U_n$ ein endliches Maximum des Betrages, da $|U_n| \leq \gamma$. Dieses Maximum findet man, indem man die Ableitungen von $|U_n|^{p'} - \lambda \int_{\alpha}^{\beta} |h_n(\tau)|^{p'-1} \text{sign } h_n(\tau) \cdot g_k(\tau) d\tau$ nach ξ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) gleich Null setzt; $h_n(t)$ ist zur Abkürzung anstatt $\sum_{k=1}^n \xi_k g_k(\tau)$ geschrieben worden;

$$\mu_k |U_n|^{p'-1} \text{sign } U_n - \lambda \int_{\alpha}^{\beta} |h_n(\tau)|^{p'-1} \text{sign } h_n(\tau) \cdot g_k(\tau) d\tau = 0 \quad (k).$$

Multipliziert man mit ξ_k und addiert, so kommt—wegen (26)— $|U_n|^{p'} = \gamma$. Ist also $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ die Maximumstelle, und setzt man diese ξ in $h_n(t)$ ein, so wird

$$(27) \quad \mu_k = \int_{\alpha}^{\beta} g_k(\tau) \phi_n(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad \phi_n(\tau) = |U_n|^{-1} |h_n(\tau)|^{p'-1} \text{sign } h_n(\tau).$$

Die Funktion $\phi_n(\tau)$ löst das Momentenproblem für $k = 1, 2, 3, \dots, n$; es ist ($p' > 1$) wegen (26)

$$\int_a^b |\phi_n(\tau)|^p d\tau = |U_n|^p \cdot \int_a^b |h_n(\tau)|^{p'} d\tau \leq \gamma^p,$$

d. h. $\|\phi_n\|_p \leq \gamma$. Im Grenzfalle $p' = 1$ ist $\phi_n(\tau) = U_n \operatorname{sign} h_n(\tau)$ und $\|\phi_n\|_M = |U_n| \leq \gamma$.

Da die Folge $\{\|\phi_n\|\}$ beschränkt ist, enthält $\{\phi_n(\tau)\}$ eine schwachkonvergente Teilfolge im Falle $p' > 1$; ihre Grenze $\phi_-(\tau)$ hat die Eigenschaften $\|\phi_-\| \leq \gamma$ und

$$p_h = \int_a^b g_h(\tau) \phi_-(\tau) d\tau \quad (k),$$

ist also das gesuchte $f(\tau)$ in L' . Im Grenzfalle $p' = 1$ konvergiert nach [166] die Folge $\left\{ \int_a^b \phi_n(\tau) g(\tau) d\tau \right\}$ für $g(\tau) \in L$ gegen $\int_a^b \phi_-(\tau) g(\tau) d\tau$; es ist dieses (t) das in M gesuchte $f(t)$.

§ 8. Die Umkehrung von Funktionaloperationen.

Eine Menge heißt *konvex*, wenn sie mit x_1, x_2 stets $tx_1 + (1-t)x_2$ ($0 \leq t \leq 1$) enthält. Ein konvexer Körper im Räume E ist eine konvexe, geschlossene Menge mit inneren Punkten. Ist der Nullpunkt Θ ein innerer Punkt des konvexen Körpers K , so ist die untere Grenze der Zahlen $p > 0$, für welche $1/p \cdot x$ zu K gehört, endlich und nichtnegativ. Sie definiert das *Minkowski'sche Funktional* von K , $z(x)$. Es ist leicht zu sehen:

1° Für innere x ist $z(x) < 1$, für x am Rande ist $z(x) = 1$;

2° $z(x+y) \leq z(x) + z(y)$;

3° $z(\tau x) = \tau z(x)$ für $\tau \geq 0$;

4° $z(x) \leq \gamma \|x\|$ mit x -freiem γ .

Ein Satz von Banach über die Erweiterung von Funktionalen (vgl. das Banach'sche Buch): E sei ein B -Raum, R ein linearer Teil von E ; $z(x)$ sei in E erklärt und habe die Eigenschaften 2° und 3°; $\varphi(x)$ sei additiv und homogen, in R erklärt und daselbst von $z(x)$ majorisiert [181]

$$(28) \quad \varphi(x) \leq z(x) \quad (x \in R).$$

Behauptung: $\varphi(x)$ läßt sich additiv und homogen auf ganz E unter Beibehaltung von (28) erweitern.

Der Beweis möge im zitierten Buche nachgelesen werden.

- [182] Ein Lemma: E sei ein B -Raum; K ein konvexer Körper in E ; 0 , der Nullpunkt von E , sei ein innerer, x_0 ein Randpunkt von K . Dann gibt es in E ein lineares Funktional $\varphi(x)$ mit $\varphi(x) \leq 1$ für $x \in K$, $\varphi(x_0) = 1$.

Beweis: $z(x)$ sei das Minkowski'sche Funktional von K , R sei die Gesamtheit der Punkte τx_0 mit beliebigem reellen τ (eine „Gerade“). Setzt man $\varphi(x) = \tau$ für $x = \tau x_0$, so hat man auf R ein additives und homogenes Funktional erklärt; es ist $\varphi(x) \leq z(x)$ für $x \in R$, denn $\varphi(\tau x_0) = \tau = z(\tau x_0)$ für $\tau > 0$, und für $\tau \leq 0$ ist $\varphi(x) = \varphi(\tau x_0) = \tau = -z(-\tau x_0) \leq z(\tau x_0) = z(x)$ (wegen 2°). Nach [181] läßt sich also $\varphi(x)$ auf ganz E erweitern, so daß (28) mit dem soeben definierten $z(x)$ erhalten und $\varphi(x)$ additiv und homogen bleibt. Wegen 4° ist $z(x) \leq \gamma \|x\|$, also $\varphi(x) \leq \gamma \|x\|$, also $|\varphi(x)| \leq \gamma \|x\|$ und $\varphi(x)$ erweist sich als linear. Es ist offenbar $\varphi(x_0) = 1$ und (wegen $\varphi(x) \leq z(x)$) $\varphi(x) \leq 1$ für $x \in K$, w. z. b. w.

Es sei $y = U(x)$ eine lineare Operation und der Raum der unabhängigen Variablen x ein β -Raum, ebenso wie der Gegenraum. Es bietet sich die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Operation den ganzen Gegenraum erschöpfe, d. h. damit die Gleichung $y = U(x)$ bei beliebigem y des Gegenraumes eine Auflösung nach x zulasse.

- [183] Eine solche Bedingung ist die Existenz eines positiven γ , so daß ein jedes lineare Funktional $F(y)$ im Gegenraume die Ungleichung erfülle

$$\|F(U(x))\| \geq \gamma \|F\|.$$

(Dabei steht links die Norm des Funktionals $F(U)$ (der Variablen x), welches durch die Substitution von $y=U(x)$ in $F(y)$ entsteht).

Die Bedingung ist notwendig. Denn sonst existiert eine Folge von Funktionalen $\{F_n\}$ mit $\|F_n\| = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(U(x))\| = 0$. Man setze

$$\|F_n(U(x))\| = \beta_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\beta_n + \frac{1}{n}}}, \quad G_n(y) = \alpha_n F_n(y).$$

Dann kommt

$$(29) \quad \|G_n\| = \alpha_n \|F_n\| = \alpha_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n\| = \infty,$$

$$\|G_n(U(x))\| = \alpha_n \|F_n(U(x))\| = \frac{\beta_n}{\sqrt{\beta_n + \frac{1}{n}}} \leq \sqrt{\beta_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n(U(x))\| = 0.$$

Es sei $y_0 = U(x_0)$; dann folgt

$$(30) \quad |G_n(y_0)| \leq \|x_0\| \cdot \|G_n(U(x))\|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(y_0) = 0.$$

Da (30) für jedes y_0 des Gegenraumes gelten soll, sieht die Eigenschaft (29) im Widerspruch gegen das Resonanztheorem [151].

Die Bedingung ist hinreichend. Zunächst werden wir zeigen, daß das Bild R_p der Kugel $\|x\| \leq \rho$, welches im Gegenraum vermöge der Operation $U(x)$ entsteht, selbst in einer Kugel $\|y\| \leq \sigma(\rho)$ überalldicht ist, d. h.: das zu R_p abgeschlossene R_p enthält diese Kugel.

Es ist nämlich R_p eine geschlossene, konvexe Menge mit dem Nullpunkt N als Symmetriezentrum. Enthielte R_p keine N -zentrische Kugel, so wäre eine Folge $\{y_n\}$ vorhanden mit

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0, \quad y_n \ni R_p \quad (n).$$

Die Distanz δ_n von y_n und R_p ist positiv. Jetzt bilde man die Summe aller Kugeln mit dem Radius $\delta_n/2$ (n fest), deren Mittelpunkte zu R_p gehören, und schließe diese Menge zu S_n ab. δ_n sei die größte Zahl mit $\delta_n y_n \in S_n$ und $z_n = \delta_n y_n$. Der Punkt z_n ist ein Randpunkt von S_n . Nach [182] existiert ein lineares Funktional φ_n mit $\varphi_n(z_n) = 1$, $\varphi_n(y) \leq 1$ für $y \in S_n$. Für $\|x\| \leq \rho$ ist $U(x) \in R_p$, also $U(x) \in S_n$; es folgt $\varphi_n(U(x)) \leq 1$, $\varphi_n(U(-x)) \leq 1$, also

$$|\varphi_n(U(x))| \leq 1 \quad (\|x\| \leq \rho).$$

Setzt man jetzt $\Phi_n(x) = \varphi_n(U(x))$, so wird $\|\Phi_n\| \leq 1/\rho$; die Voraussetzung liefert aber $\|\Phi_n\| \geq \gamma \|\varphi_n\|$, also $\|\varphi_n\| \leq 1/\rho\gamma$. Insbesondere ist

$$(32) \quad 1 = |\varphi_n(z_n)| \leq \|z_n\| \cdot \|\varphi_n\| \leq \frac{\|z_n\|}{\rho\gamma}, \quad \|z_n\| \geq \rho\gamma.$$

Nun ist aber wegen $y_n \ni R_p$ (vgl. (31)) $\delta_n \leq 1$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \|y_n\| = 0$, gegen (32). Es ist also R_p in einer Kugel $\|y\| \leq \sigma(\rho)$ überalldicht.

Sei nun y_0 ein Punkt der Kugel $\|y\| \leq \sigma(1)$. In dieser Kugel ist R_1 überalldicht, es gibt also ein $y_1 \in R_1$ mit $\|y_0 - y_1\| \leq \sigma(1/2)$. $R_{1/2}$ ist aber in der Kugel $\|y\| \leq \sigma(1/2)$ überalldicht, woraus ein $y_2 \in R_{1/2}$ mit $\|y_0 - y_1 - y_2\| \leq \sigma(1/4)$ resultiert, u. s. w.

$y_n \in R_{\frac{1}{2^{n-1}}}$ bedeutet aber $y_n = U(x_n)$ mit $\|x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$; setzt man

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

so wird — wegen der Linearität von $U(x)$ —

$$U(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} U(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y_0,$$

da $\|y_0 - y_1 - \dots - y_n\| \leq \sigma(1/2^n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(1/2^n) = 0$ (wegen der Stetigkeit von $U(x)$ für $x = 0$) ist. Für jedes y_0 der Kugel $\|y\| \leq \sigma(1)$ existiert also eine Wurzel x_0 der Gleichung $U(x) = y_0$; $U(x)$ ist aber homogen, also die Einschränkung $\|y_0\| \leq \sigma(1)$ unwesentlich. Damit ist der Satz [183] über die Umkehrbarkeit einer linearen Operation in beiden Teilen bewiesen.

II. KAPITEL.

Grundbegriffe.**§ 1. Orthogonalität.**

In der euklidischen dreidimensionalen Geometrie heißen zwei Vektoren orthogonal, wenn ihr skalares Produkt verschwindet. Sind x_1, x_2, x_3 die Komponenten des einen und y_1, y_2, y_3 die des anderen Vektors in bezug auf drei zueinander senkrechte Achsen, so ist das skalare Produkt

$$\sum_{i=1}^3 x_i y_i.$$

Eine analoge Definition gilt in n Dimensionen. Indem man diese Analogie weiter verfolgt und $x(t), y(t)$ als zwei Vektoren im Funktionenraume auffaßt, kommt man auf

$$(1) \quad \int_a^b x(t) y(t) dt$$

als Ausdruck des *skalaren Produktes* in einem solchen Räume. Ist das Integral (1) gleich Null, so sagt man, die Funktionen $x(t), y(t)$ seien zueinander *orthogonal* in a, b . Sind $x(t), y(t)$ [211] komplexwertig, und $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ die zu $x(t)$ bzw. $y(t)$ konjugierten Zahlen, so pflegt man

$$(2) \quad \int_a^b x(t) \bar{y}(t) dt = \int_a^b \bar{x}(t) y(t) dt$$

als skalares Produkt zu bezeichnen. Das skalare Produkt hängt jetzt von der Reihenfolge der Faktoren ab, soll es aber Null sein, so wird die Reihenfolge gleichgültig und wir können wieder von zwei zueinander orthogonalen Funktionen sprechen.

In einem dreidimensionalen euklidischen Räume gibt es bekanntlich drei zueinander senkrechte Richtungen, Dem entspricht die Tatsache, daß man drei verschiedene paarweise orthogonale Vektoren finden kann, aber nicht vier. Im n -dimensionalen Räume gibt es aus paarweise orthogonalen Vektoren bestehende n -tupel. Man kann vermuten, daß es im Funktionenraume, d. h. in dem abstrakten Räume, wo Funktionen die Rolle von Vektoren spielen, Systeme von unendlichvielen paarweise zueinander orthogonalen verschiedenen Vektoren geben wird. Um die Integrierbarkeit des Produktes $x(t)y(t)$ zu sichern, ist es am einfachsten die Lebesgue'sche Integrierbarkeit von $x(t)$ und $x^2(t)$ in α, b und dasselbe für $y(t)$ und $y^2(t)$ vorauszusetzen. Wir werden (vgl. I, §3) dann sagen, daß $x(t), y(t)$ zum Räume L^2 gehören. Diese Voraussetzung ist aber keineswegs notwendig. Man kann nämlich leicht eine unendliche Folge von Funktionen $\{\varphi_i(t)\}$ angeben, so daß die Integrale

$$\int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt$$

für $i \neq k$ stets existieren und gleich Null sein werden, ohne daß die Quadrate $\varphi_i^2(t)$ integrierbar wären.

Folgendes Beispiel ist mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung gewählt worden. Wir bauen eine unendliche Matrix $\{\alpha_{ik}\}$ aus lauter Einsen und Nullen auf:

$$\begin{array}{l} [212] \qquad \qquad \qquad 1101001000\dots \\ \qquad \qquad \qquad 1010100100\dots \\ (3) \qquad \qquad \qquad 0110010010\dots \\ \qquad \qquad \qquad 0001110001\dots \\ \qquad \qquad \qquad 0000001111\dots \\ \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Man erhält diese Matrix, indem man folgende „Kranichschwärme“ bildet:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & . & . \\ & 1 & 1 \end{array} \qquad (n = 1, 2, 3),$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ & . & . \\ & 1 & 1 \end{array}$$

d. h. Anordnungen von Einsen, die aus n Einsen in der Diagonale und aus ebensovielen Einsen in der nächsten Zeile darunter bestehen ($n=1,2,\dots$); besetzt man die punktierten Stellen mit Nullen, so entstehen Ziffernrechtecke; schiebt man sie aneinander und schreibt lauter Nullen als Verlängerung einer jeden Spalte, so entsteht die Matrix (3). So kommen in jeder Spalte genau zwei Einsen zu stehen; sie stehen in gewissen zwei Zeilen; schreibt man aber zwei beliebige Zeilen vor (z. B. die 2-te und 5-te), so gibt es genau eine Spalte (z. B. die 8-te), die die vorgeschriebenen zwei Zeilen in Einsen schneidet.

Sei I ein endliches Intervall $\langle a, b \rangle$ und $I_1, I_2, \dots$ Teilintervalle von I , so daß das $(n+1)$ te Teilintervall rechts an das n -te anschließt und das ganze I (mit Ausnahme des rechten Endpunktes) durch $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ erschöpft wird. Die Funktion $\varphi_n(t)$ werde in I wie folgt erklärt:

$$\varphi_n(t) = 0 \quad \text{für } t \in I_p, \quad \text{wenn } \alpha_{np} = 0,$$

$$\varphi_n(t) = 1/I_p \quad \text{für } t \in I_p, \quad \text{wenn } \alpha_{np} = 1$$

und wenn diese Eins im Schema (3) rechts und links von Nullen flankiert erscheint, oder wenn $n=1$. Sonst setzen wir (im Falle $\alpha_{np} = 1$) $\varphi_n(t) = -1/\sqrt{I_p}$ in der linken, $\varphi_n(t) = +1/\sqrt{I_p}$ in der rechten Hälfte von I_p . So hat z.B. $\varphi_3(t)$ die Werte

in I_1	in I_2	in I_3	in I_4	in I_5	in I_6	in $I_7 \dots$
0	$-\frac{1}{\sqrt{I_2}}, +\frac{1}{\sqrt{I_2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{I_3}}, +\frac{1}{\sqrt{I_3}}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{I_6}}$	0...

Es ist nun, wie ersichtlich,

$$(4) \quad \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = 0 \quad \text{für } i \neq k,$$

aber das Integral

$$\int_a^b \varphi_i^2(t) dt = \sum_j \int_{I_j} \left(\frac{1}{\sqrt{P_j}} \right)^2 dt = \sum_j 1$$

ist stets unendlich groß (P , bezeichnen diejenigen I , in welchen $\varphi_i \neq 0$).

Ein *Orthogonalsystem* („Ö“) nennen wir eine endliche oder unendliche Folge $\{\varphi_n(t)\}$ von Funktionen die paarweise zueinander orthogonal sind in einem endlichen oder unendlichen Intervall $\langle a, b \rangle$ [213]

Es soll also (4) für $i \neq k$ gelten. Ersetzt man in dieser Definition die Worte „Folge von Funktionen $\{\varphi_n(t)\}$ “ durch „Menge von Funktionen“, so hat man eine *Orthogonalmenge* definiert.

Wir werden Beispiele von unendlichen Orthogonalsystemen gleich kennen lernen. Im nächsten Kapitel werden wir aber zeigen, daß unendliche Orthogonalmengen (in L^2) stets abzählbar sind.

Keine Orthogonalmenge kann zwei nichtnegative Funktionen enthalten, die in einer Menge Z vom positiven Maße beide positiv wären. Sonst wäre

$$0 = \int_a^b f(t) g(t) dt \geq \int_Z f(t) g(t) dt > 0.$$

Nichtdestoweniger gibt es ein nichttriviales unendliches Orthogonalsystem aus lauter nichtnegativen Funktionen bestehend. Es sei $\varphi_n(t) = 0$ in $0, 1$ außerhalb von $1/2^n, 1/2^{n-1}$ und $\varphi_n(t) = 1$ im letzteren Intervall. Dann ist offensichtlich $\int_0^1 \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = 0$ für $m \neq n$ und $\varphi_n(t) \geq 0$ (n).

§ 2. Beispiele.

Ein Beispiel eines Orthogonalsystems in L^2 ist die Folge

$$[221] \quad \{\cos it\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Denn man hat für $i \neq k$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos it \cos kt dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos (i+k)t + \cos (i-k)t] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (i+k)t}{i+k} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (i-k)t}{i-k} \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung zeigt die Orthogonalität des Systems [221] in $0, 2\pi$ und in $0, 2$. Ähnliche Eigenschaften hat das System

$$[222] \quad \{\sin it\} \quad (i = 1, 2, \dots);$$

es ist für $i \neq k$

$$\int_0^\pi \sin it \sin kt dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos (i-k)t - \cos (i+k)t] dt = 0.$$

Hier ist die Orthogonalität in $[-\pi, 2\pi]$ und $[0, 2\pi]$ ebenfalls vorhanden.

Beide Systeme sind in $[\alpha, \beta]$, wo α, β beliebig ganz, und in keinem andern Intervall orthogonal. Hat man ein beliebiges Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$, so genügt es in den vorhergehenden Beispielen eine geeignete ganze lineare Substitution vorzunehmen: die Systeme

$$\left\{ \cos i\pi \frac{t-a}{b-a} \right\} \quad (i = 0, 1, \dots), \quad \left\{ \sin i\pi \frac{t-a}{b-a} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

sind in $[a, b]$ orthogonal.

Die Funktionenfolge

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots \quad [223]$$

heißt *das trigonometrische System*. Es ist orthogonal in $[0, 2\pi]$. Es ist nicht orthogonal in $[0, \pi]$, denn z. B.

$$\int_0^\pi \sin t \cdot \cos 2t \cdot dt = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

Um die Orthogonalität von [223] in $[0, 2\pi]$ zu zeigen, genügt es angesichts der Eigenschaften von [221] und [222] die Integrale

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin it \cdot dt, \quad \int_0^{2\pi} \sin it \cdot \cos kt \cdot dt$$

zu berechnen; das erste ist offenbar Null, das zweite gleich

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2it \, dt = - \left[\frac{1}{2} \frac{\cos 2it}{2i} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{für } i = k; \quad \text{für } i \neq k \text{ ist es}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(i+k)t - \sin(i-k)t] \, dt = - \left[\frac{1}{2} \frac{\cos(i+k)t}{i+k} - \frac{1}{2} \frac{\cos(i-k)t}{i-k} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. [224]
Eine solche Gleichung ist u. a.

$$(5) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda A(t) y(t) = 0,$$

wo λ ein reeller Parameter und $A(t) > 0$ eine stetige Funktion ist.

Man kann zeigen (etwa durch die Maximisierung von $\int_a^b A(t) y(t) \, dt$

unter den Nebenbedingungen $\int_a^b \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 dt = 1$, $y(a) = y(b) = 0$, daß es reelle Zahlen λ und zugehörige zweimalstetigdifferenzierbare $y(t)$ gibt, die (5) erfüllen und der Nebenbedingung $y(a) - y(b) = 0$ genügen, ohne identisch Null zu sein.

Sei nun λ_i , λ_k und $y_i(t)$, $y_k(t)$ die zugehörigen Lösungen. Es ist

$$(6) \quad y_i'(t) + \lambda_i A(t) y_i(t) = 0, \quad y_k''(t) + \lambda_k A(t) y_k(t) = 0,$$

$$y_i(a) = y_i(b) = 0, \quad y_k(a) = y_k(b) = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung (6) mit $y_k(t)$ die zweite mit $y_i(t)$ und subtrahiert, so kommt

$$(\lambda_i - \lambda_k) A(t) y_i(t) y_k(t) = \frac{d}{dt} [y_i(t) y_k'(t) - y_k(t) y_i'(t)]$$

und

$$(\lambda_i - \lambda_k) \int_a^b A(t) y_i(t) y_k(t) dt = [y_i(t) y_k'(t) - y_k(t) y_i'(t)]_a^b = 0;$$

wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ folgt

$$(7) \quad \int_a^b A(t) y_i(t) y_k(t) dt = \int_a^b \sqrt{A(t)} y_i(t) \cdot \sqrt{A(t)} y_k(t) dt = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die zu verschiedenen Parameterwerten λ zugehörigen zweimalstetigdifferenzierbaren, an beiden Intervallenden verschwindenden Lösungen $y_i(t)$ von (5) zu einem Orthogonalsystem $\{\sqrt{A(t)} y_i(t)\}$ Anlaß geben.

Das System [222] ist ein Spezialfall: man hat $a = 0$, $b = 1$, $A(t) = 1$ zu wählen; λ_k ist $= -k^2$ zu setzen. Das System [221] besteht ebenfalls aus Lösungen der Gleichung

$$y(t) - K^2 \cdot y(t) = 0,$$

die Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ sind aber nicht mehr erfüllt.

[225] Das Rademacher'sche System. Ein interessantes Beispiel eines Orthogonalsystems in $[0, 1]$ liefern die sog. Rademacher'schen Funktionen. Die k -te Rademacher'sche Funktion $r_k(t)$ ($k=1, 2, 3, \dots$) erhält man aus der dyadischen Entwicklung der Zahl t ($0 < t < 1$): steht an der k -ten Stelle die Ziffer 0, so setzt man $r_k(t) = 1$, ist die k -te Ziffer 1, so setzt man $r_k(t) = -1$, und

ist t eine Zahl, die zwei Entwicklungen mit verschiedener k -ten Ziffer zuläßt, oder Null, so setzt man $r_k(t) = 0$. Auf diese Weise zerfällt $[0, 1]$ in 2^k gleiche Teilintervalle; $r_k(t)$ ist im Innern eines jeden Teilintervalls abwechselnd $+1$ und -1 und in den Endpunkten 0 .

Das System [225] ist orthogonal. Sei nämlich $m > n$. Um das Integral

$$(8) \quad \int_0^1 r_m(t) r_n(t) dt$$

zu berechnen, nennen wir $I_1, I_2, \dots, I_{2^n}$ die 2^n Konstanzintervalle von $r_n(t)$. Es ist

$$(9) \quad \int_{I_k} r_m(t) r_n(t) dt = (-1)^{k+1} \int_{I_k} r_m(t) dt \quad (k=1, 2, \dots, 2^n).$$

Nun aber zerfällt I_k in 2^{m-n} gleiche Intervalle, in welchen $r_m(t)$ abwechselnd die Werte $+1$ und -1 annimmt; somit ist das Integral rechts in (9) Null, das linke ebenfalls und (8) ist Null

als Summe $\sum_{k=1}^{2^n} \int_{I_k} r_m(t) r_n(t) dt$.

Das System $\{r_k(t)\}$ hat die Eigenschaft $r_k(t)/r_l(t) = 1$ ($0 < t < 1$; $k = 1, 2, \dots$).

Würden wir $[0, 1]$ in 2^e gleiche Teile zerlegen und $p_h(t)$ abwechselnd $+1$ und -1 setzen, so würden wir kein Orthogonalsystem bekommen. Denn es ist (z. B.)

$$\begin{aligned} p_1(t) &= +1 & \text{in } (0, 1/2), & & p_1(t) &= -1 & \text{in } (1/2, 1), \\ p_3(t) &= +1 & \text{in } (0, 1/6), & & p_3(t) &= -1 & \text{in } (1/6, 2/6), \dots \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

$$\text{und } \int_0^1 p_1(t) p_3(t) dt = 1/6 - 1/6 + 1/6 + 1/6 - 1/6 + 1/6 = 1/3 \neq 0.$$

Führt man das Zeichen „sign“ ein, wo

$$\text{sign } \alpha = 1 \quad \text{für } \alpha > 0, \quad \text{sign } \alpha = -1 \quad \text{für } \alpha < 0, \quad \text{sign } 0 = 0,$$

so wird $p_k(t) = \text{sign}(\sin 2^k t)$. Wir nennen $\{p_k(t)\}$ „die stilisierte Sinusfolge“. Das System [225] ist mit $\{p_{2^k-1}(t)\}$, also mit $\{\text{sign}(\sin 2^k t)\}$ identisch.

Das Rademacher'sche System ist ein Spezialfall einer allgemeineren Klasse: $\varphi(t)$ habe die Periode 1 und es sei

$$(10) \quad \varphi(t) + \varphi(t + 1/2) = 0 \quad (t).$$

Man definiere: $\varphi_n(t) = \varphi(2^n t)$; war $\varphi \in L^2$, so ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein Orthogonalsystem. Denn für $m > n$ ist

$$\int_0^1 \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \frac{1}{2^n} \int_0^{2^n} \varphi(2^{m-n} u) \varphi(u) du = \int_0^1 \varphi(2^{m-n} u) \varphi(u) du,$$

wo von der Substitution $2^n t = u$ und von der Periodizität Gebrauch gemacht wurde. Zerlegt man das Integrationsintervall in $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$, so erhält man für das letzte Integral

$$\int_0^1 \varphi(2^{m-n} u) [\varphi(u) + \varphi(u + 1/2)] du,$$

und dieses verschwindet wegen (10).

Setzt man speziell $\varphi(t) = \sin(2t)$, so wird $\{\varphi_n(t)\}$ mit [225] identisch.

[226] Das Haar'sche System. Man definiere:

$$\begin{aligned} \chi_0^{(0)}(t) &= +1 && \text{in } [0, 1], \\ \chi_0^{(1)}(t) &= +1 && \text{in } [0, 1/2) \\ &= -1 && \text{in } [1/2, 1], \\ &= 0 && \text{in anderen Punkten,} \\ \chi_1^{(1)}(t) &= +\sqrt{2} && \text{in } [0, 1/4) \\ &= -\sqrt{2} && \text{in } [1/4, 1/2), \\ &= 0 && \text{in anderen Punkten,} \\ \chi_1^{(2)}(t) &= +\sqrt{2} && \text{in } [1/2, 3/4) \\ &= -\sqrt{2} && \text{in } [3/4, 1], \\ &= 0 && \text{in anderen Punkten,} \end{aligned}$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} \chi_n^{(1)}(0) &= +\sqrt{2^n}, & \chi_n^{(2^n)}(1) &= -\sqrt{2^n}, \\ \chi_n^{(k)}(t) &= +\sqrt{2^n} && \text{in } \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) \\ &= -\sqrt{2^n} && \text{in } \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right) \\ &= 0 && \text{sonst in } [0, 1]. \end{aligned}$$

Dabei durchläuft n die Zahlen $0, 1, 2, \dots$ und k die Zahlen $1, 2, \dots, 2^n$. Dieses von Alfred Haar konstruierte System $\{\gamma_n^{(k)}(t)\}$ ist orthogonal. Ist nämlich $j > k \geq 1$, so ist bereits das Produkt $\gamma_n^{(j)}(t) \cdot \gamma_n^{(k)}(t)$ identisch Null in $[0, 1]$. Ist aber $m > n$, so ist das Teilintervall, in welchem $\gamma_m^{(k)}(t) \neq 0$, gänzlich in einem Konstanzintervall der Funktion $\gamma_n^{(j)}(t)$ enthalten; es ist daher ($j \neq k$ oder $j = k$)

$$\int_0^1 \gamma_m^{(k)}(t) \gamma_n^{(j)}(t) dt = \lambda \int_{\frac{2^m}{2^{k+1}}}^{\frac{2^k}{2^{m+1}}} \gamma_m^{(k)}(t) dt = \lambda \left[\frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{m+1}} \right] = 0.$$

Da $\int_0^1 \gamma_0^{(0)}(t) \gamma_m^{(k)}(t) dt = 0$ ($k > 0$), so sind alle Fälle erschöpft.

§ 3. Vollständigkeit.

Eine Menge von Funktionen $\varphi(t)$ heißt im Intervall a, b [231] *vollständig* in bezug auf den Raum R , wenn jede Funktion $f(t) \in R$, für welche sämtliche Skalarprodukte

$$\int_a^b f(t) \varphi(t) dt \quad (?)$$

verschwinden, selbst ein Nullelement von R ist. M. a. W.: eine Funktionenmenge (oder ein Funktionensystem) ist *vollständig* in bezug auf R , wenn es in R außer dem Nullelement keine zu sämtlichen Funktionen der Menge (des Systems) orthogonale Funktion gibt. Die Funktionen $\varphi(t)$ brauchen nicht zu R zu gehören. Die φ -Menge könnte z. B. aus einer einzigen Funktion $\varphi(t)$ bestehen, die auf jeder Punktmenge vom positiven Maße in a, b nicht-meßbar wäre; eine solche φ -Menge wäre in bezug auf den Raum L aller in a, b integrierbaren Funktionen *vollständig*, denn nur die fast überall in a, b verschwindenden Funktionen liefern mit $\varphi(t)$ ein integrierbares Produkt. Doch wollen wir von nicht-meßbaren Funktionen absehen, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil angesagt wird.

Selbstverständlich braucht eine *vollständige* Menge weder orthogonal noch abzählbar zu sein. So ist z. B. die Menge aller zu L^2 gehörenden Funktionen *vollständig* in bezug auf den Raum L^2 , denn aus der Bedingung

$$\int_a^b \varphi(t) f(t) dt = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in L^2$$

folgt — da $\varphi = f$ gesetzt werden darf — $\int_a^b f^2(t) dt = 0$, also $f(t) = 0$ fast überall in $\langle a, b \rangle$.

[232] Andererseits ist es leicht ein abzählbares vollständiges System $\{\varphi(t), \text{ z. B. in bezug auf den Raum } C \text{ (aller in } \langle a, b \rangle \text{ stetigen Funktionen) zu bilden. Man teile } \langle a, b \rangle \text{ in } n \text{ gleiche Teile und definiere eine stetige Funktion, die in jedem Teilintervall linear verläuft. Das geometrische Bild ist ein gebrochen-geradliniger Zug. Wenn wir noch verlangen, daß die Ordinaten der } n+1 \text{ Ecken rational seien, so wird es nur abzählbar-unendlichviele solche Funktionen geben, denn die natürliche Zahl } n \text{ und die rationalen Zahlen } w_1, w_2, \dots, w_{n+1} \text{ als Ordinaten bestimmen eindeutig die Funktion.}$

Die Vollständigkeit dieses Systems $\{\varphi_k(t)\}$ läßt sich fast unmittelbar einsehen; es sei $f(t)$ stetig und $\epsilon > 0$; es ist leicht ein $\varphi_{k(\epsilon)}(t)$ mit $|f(t) - \varphi_{k(\epsilon)}(t)| < \epsilon$ in $\langle a, b \rangle$ zu bestimmen. Ist $f(t)$ zu allen $\varphi_k(t)$ orthogonal, so folgt

$$\left| \int_a^b f^2(t) dt \right| = \left| \int_a^b f(t) [f(t) - \varphi_{k(\epsilon)}(t)] dt \right| \leq |b-a| \cdot M \cdot \epsilon,$$

wo M das Maximum von $|f(t)|$ in $\langle a, b \rangle$ bedeutet; es ist also

$$\int_a^b f^2(t) dt = 0 \text{ und } f(t) = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

[233] Ein noch einfacheres Beispiel eines abzählbaren vollständigen Systems in bezug auf C und sogar auf L ist — für das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ — die Gesamtheit der Funktionen $\varphi^{(w)}(t)$, die in $\langle 0, w \rangle$ gleich 1, in $(w, 1)$ gleich Null sind; w ist dabei ein echter rationaler positiver Bruch. Es sei

$$f(t) \in L \quad \text{und} \quad F(w) = \int_0^1 f(t) \varphi^{(w)}(t) dt = \int_0^w f(t) dt = 0$$

für alle w obiger Art. $\int_a^w f(t) dt$ ist aber für allein in $\langle 0, 1 \rangle$ definiert und stetig, also ist $F(w) = 0$ in ganz $\langle 0, 1 \rangle$. Nach einem Hauptsatz der Lebesgue'schen Integrationslehre ist $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ fast überall in $\langle 0, 1 \rangle$, also $f(t) = 0$ f. ü.

Die Vollständigkeit der Systeme [221], [222], [223]. [234]
Wir beginnen mit [223]; wir zeigen zunächst, daß es inbezug auf C vollständig ist. Es sei

$$(11) \quad \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos nt}{\sin nt} dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

dann ist $\int_0^{2\pi} f(t) T_n(t) dt = 0$, wo $T_n(t)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom bedeutet. Ist $f(t)$ stetig und nicht identisch Null, etwa $f(t_0) \neq 0$, so ist entweder $f(t) > \epsilon > 0$ oder $f(t) < -\epsilon < 0$ im Intervall $t_0 - \delta, t_0 + \delta = I$. Der Ausdruck $p(t) = 1 + \cos(t - t_0) - \cos \delta$ ist > 1 in I und es ist $|p(t)| < 1$ außerhalb I . $T_n(t) = [p(t)]^n$ ist ein trigonometrisches Polynom und es ist

$$(12) \quad 0 = \int_0^{2\pi} f(t) T_n(t) dt = \int_I f(t) T_n(t) dt + \int_{C/I} f(t) T_n(t) dt.$$

Der zweite Integrand bleibt dem Betrage nach unter $|f(t)|$ und konvergiert gegen Null für $n > \sim$; das Integral hat also (vgl. [123-124]) den Grenzwert Null. Das erste Integral ist aber stets dem Betrage nach wenigstens gleich 2ϵ . Dieser Widerspruch mit (12) zeigt, daß $f(t)$ identisch verschwindet, w. z. b. w.

Das trigonometrische System ist aber auch vollständig inbezug auf L . Sei nämlich $f(t) \in L$, $F(t) = \int_0^t f(u) du$. Die Formel (11) ergibt $F(2\pi) = 0$; daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} F(t) \cos nt dt = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt = 0 \quad (n),$$

$$\int_0^{2\pi} F(t) \sin nt dt = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = 0 \quad (n).$$

Sei $\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt$; die beiden vorangehenden Formeln ergeben

$$\int_0^{2\pi} [F(t) - \alpha] \frac{\cos nt}{\sin nt} dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

also, wegen $[F(t) - \alpha] \in C$, $F(t) - \alpha = 0$. Es ist aber $F(0) = 0$, also $F(t) = 0$ und $f(t) = 0$ fast überall in $[0, 2\pi]$, w. z. b. w.

Dasselbe Verfahren zeigt, daß aus $f(t) \in L$ und daraus, daß

$$\int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos nt}{\sin nt} dt = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, \quad f(t) = \text{const. f. ü. folgt.}$$

Diese Bemerkung wenden wir bei [222] an. Es sei

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

man setze $f(\pi + t) = -f(\pi - t)$ ($0 < t < \pi$); es kommt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt &= \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \\ &= \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt - \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0. \end{aligned}$$

Die eben formulierte Bemerkung ergibt $f(t) = \text{const. f. ü.}$; es folgt $0 = \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = 2c \cdot f(t) = 0$ f. ü.

Es hat sich also das System $\{\sin it\}$ ($i = 1, 2, \dots$) in $[0, 1]$ in bezug auf L (also auch auf C) als vollständig erwiesen. Dasselbe gilt von [221] und der Beweis ist ähnlich ($f(+t) = f(-t)$).

[235] Die Vollständigkeit des Haar'schen Systems in $[0, 1]$ in bezug auf L . Es sei $f(t) \in L$ und $F(t) = \int_0^t f(u) \, du$; die Voraussetzung

$$(13) \quad \int_0^1 f(t) \gamma_n^{(k)}(t) \, dt = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, 2^n)$$

ergibt

$$F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) + F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) = 0,$$

wenn (13) unter Berufung auf [226] berechnet wird; es ist also

$$(14) \quad F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right) - 2F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) + F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = 0.$$

Für $n = 0$ resultiert daraus — geometrisch gesprochen — die Kollinearität der Punkte mit den Abszissen $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ der Kurve

$y = F(x)$. Aber für $n = 1$, $k = 1$ zeigt (14) die Kollinearität der Punkte $x = 0, 1/4, 1/2$ und für $n = 1$, $k = 2$, die Kollinearität der Punkte $x = 1/2, 3/4, 1$. Somit sind alle Punkte mit den Abszissen $h/2^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $h = 0, 1, \dots, 2^n$) kollinear. $F(x)$ ist stetig, also ist $F(t) = ct + d$. Nun enthält die Voraussetzung außer (13) noch:

$$\int_0^1 f(t) \chi_{\alpha}^{(n)}(t) dt = 0,$$

d. h. $F(1) - F(0) = 0$; es folgt $c = 0$, $F(t) = d$, und $f(t) = 0$ fast überall in $[0, 1]$.

Das System [225] ist mit dem Haar'schen verwandt, aber es [236] ist nicht vollständig. So ist z. B. die Funktion $f(t) = 1$ zu allen Rademacher'schen Funktionen orthogonal. Aber die Hinzunahme von $f(t) = 1$ zu dem System würde seine Vollständigkeit nicht herbeiführen. Denn alle Rademacher'schen Funktionen sind antisymmetrisch in bezug auf $t = 1/2$; ist also $f(t)$ eine beliebige in bezug auf $t = 1/2$ symmetrische Funktion, so ist ihr Produkt mit einer beliebigen Rademacher'schen Funktion antisymmetrisch und sein Integral über $[0, 1]$ Null. Damit noch die Funktion $f(t)$ zu der (adjungierten) 1 orthogonal sei, reicht es hin, daß ihr Integral über $[0, 1]$ verschwindet. Eine Funktion, die allen diesen Anforderungen genügt, ist z.B. $\cos 2\pi t$, aber auch $\cos 2\pi q t$ ($q = 1, 2, \dots$).

§ 4. Abgeschlossene, minimale und dichte Systeme. Normierung.

Ein Funktionensystem ist im Räume R abgeschlossen, wenn [241] man eine jede zu R gehörende Funktion mit Hilfe von ganzen linearen, endlichen Verbindungen der Funktionen des Systems beliebig annähern kann. Genauer gesagt ist das System S in bezug auf R abgeschlossen, wenn es zu jedem $f(t)$ in R und zu $\varepsilon > 0$ n Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ in S und n reelle Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_n$ gibt, so daß die Funktion

$$\Phi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t)$$

zu R gehört und die Eigenschaft

$$(15) \quad \|f(t) - \Phi(t)\|_R < \varepsilon$$

besitzt; $\|\cdot\|_R$ ist hier das Zeichen für die in R geltende Norm.

Ebenso wie die Vollständigkeit ist die Abgeschlossenheit eine Eigenschaft des Systems, die erst durch die Angabe des Raumes R festgelegt wird. Die Ungleichung (15) wird im Räume C als $\text{Max}_{a \leq t \leq b} |f(t) - \Phi(t)| < \varepsilon$ gelesen; nach dem Weierstraß'schen Satze [122] bilden also die sukzessiven Potenzen $1, t, t^2, \dots$ ein abzählbares, inbezug auf C abgeschlossenes System.

[242] Dieselbe Eigenschaft kommt einem von Herrn J. Schauder konstruierten System zu: Es sei $a < b$ und $\{w_i\}$ ($i > 2$) sei die Folge aller rationalen Zahlen des Intervalls (a, b) : $w_1 = a, w_2 = b, w_3 = \dots$

$\varphi_1(t)$ sei die durch die Bedingungen $\varphi_1(w_1) = 1, \varphi_1(w_2) = 0$ bestimmte ganze lineare Funktion; $\varphi_2(t)$ sei auch ganz-linear mit $\varphi_2(w_1) = 0, \varphi_2(w_2) = 1$. Für $n > 2$ werde a, b mittels $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ in $n-2$ Teilintervalle zerlegt und w_i, w_k sei dasjenige, welches w_n enthält. $\varphi_n(t)$ sei nun 0 außerhalb w_i, w_k , 0 in w_i und in w_k , 1 in w_n und ganz-linear in $w_i, w_n, \dots, w_n, w_k$. Damit ist eine Folge $\{\varphi_n(t)\}$ ($n=1, 2, \dots$) von in a, b stetigen Funktionen erklärt.

[243] Sei $f(t)$ stetig in a, b . Nach Herrn Schauder ist die Reihe

$$(16) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \quad \text{mit } c_1 = f(w_1), \quad c_2 = f(w_2), \dots$$

$$c_i = f(w_i) - \sum_{k=1}^{i-1} c_k \varphi_k(w_i) \quad (i > 2)$$

in a, b gleichmäßig zur Summe $f(t)$ konvergent.

Dies sieht man leicht ein: ist t die Abszisse, y die Ordinate, so ist das geometrische Bild von $y = s_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$ ein Polygonalzug, dessen $n-1$ Seiten Sehnen der Kurve $y=f(t)$ sind, und dessen n Ecken die wachsend geordneten Zahlen $w_1, w_2, \dots, w_n$ zu Abszissen haben. Ist $\varepsilon > 0$ und $\eta(\varepsilon) > 0$ so, daß $|t' - t''| < \eta$ $|f(t') - f(t'')| < \varepsilon$ in a, b impliziert, ferner $N(\eta)$ so groß, daß für $n > N$ das größte durch die geordneten $w_1, w_2, \dots, w_n$ gebildete Intervall kleiner als η sei, dann ist für $n > N(\eta(\varepsilon))$

$$(17) \quad |f(t) - s_n(t)| < \varepsilon$$

in a, b , denn der Abstand einer Sehne vom Bogen — in der y -Richtung gemessen — ist in jedem der $n-1$ Teilintervalle höch-

stens gleich der Oszillation der Funktion, also $< \varepsilon$, da die Intervalllänge unter n liegt. Es folgt aber aus (17) die angekündigte gleichmäßige Konvergenz der Reihe (16) zur Summe $f(t)$.

Das System [242] hat aber auch die Eigenschaft, daß die [244] Beziehung

$$(18) \quad f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

mit konstanten c_i nur dann statthaben kann, wenn die c_i die in (16) angegebenen Werte haben. Setzt man nämlich in (18) $t = w_1$ ein, so kommt $f(w_1) = c_1$, denn $\varphi_i(w_1) = 0$ für $i \neq 1$, $\varphi_1(w_1) = 1$. Ebenso erhält man $f(w_2) = c_2$. Setzt man $t = w_3$, so kommt, wegen $\varphi_3(w_3) = 1$ und $\varphi_{i,3}(w_3) = 0$, $f(w_3) = c_1 \varphi_1(w_3) + c_2 \varphi_2(w_3) + c_3$, also $c_3 = f(w_3) - \sum_{k=1}^2 c_k \varphi_k(w_3)$ und — durch leichte Induktion — die allgemeine Formel (16) für c_i ($i > 2$).

Das System [242] büßt keine von den eben bewiesenen Eigenschaften ein, wenn man endlich viele $\varphi_i(t)$ mit $i \geq 3$ fortläßt. Es hört aber auf abgeschlossen zu sein, wenn eine (oder beide) von den Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ fortgelassen wird. Ist z. B. $\varphi_1(t)$ gestrichen worden und wählt man $f(t) = 1$, so ist für eine beliebige lineare endliche Verbindung $\varphi(t)$ der übrigen $\varphi_i(t)$ $\varphi(a) = 0$, denn es ist $\varphi_n(a) = 0$ für $n > 1$. Es ist daher — für $\varepsilon < 1$ — stets

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - \varphi(t)| = |f(a) - \varphi(a)| = 1 > \varepsilon,$$

gegen (15).

Aus demselben Grunde ist das System [222] in $[0, r]$ inbezug auf C nicht abgeschlossen; hier sind alle Funktionen $\sin it$ für $t = 0$, $t = \text{Null}$. Nichtdestoweniger ist dasselbe System inbezug auf L in $[0, r]$ abgeschlossen, wie wir später sehen werden.

Integration abgeschlossener Systeme, $\{\varphi_n(t)\}$ sei [245] inbezug auf L abgeschlossen, $\psi_n(t)$ bezeichne $\int_a^t \varphi_n(u) du$. Dann ist das aus 1 und $\{\psi_n(t)\}$ bestehende System in $[a, b]$ abgeschlossen inbezug auf C .

Beweis: $\varphi(t)$ sei eine der Funktionen [242]; die Ableitung $\varphi'(t)$ ist streckenweise konstant und man hat

$$\int_a^t \varphi'(u) du = \varphi(t) - \varphi(a) \quad (a \leq t \leq b).$$

Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es nach Voraussetzung eine endliche lineare Verbindung $\Phi(t)$ der $\varphi_n(t)$ mit $\int_a^b |\varphi'(u) - \Phi(u)| du < \varepsilon$. Umsomehr gilt $\left| \int_a^t (\varphi'(u) - \Phi(u)) du \right| < \varepsilon$, also $\left| \varphi(t) - \varphi(a) - \int_a^t \Phi(u) du \right| < \varepsilon$ oder

$$(19) \quad \left| \varphi(t) - \psi'(t) \right| < \varepsilon \quad (a \leq t \leq b)$$

mit $\psi'(t) = \varphi(a) + \int_a^t \Phi(u) du = \varphi(a) \cdot 1 + c_1 \psi_1(t) + \dots + c_N \psi_N(t)$.

Somit ist gezeigt worden, daß man mit Hilfe von endlichen linearen Verbindungen der Funktionen 1, $\{\varphi_n(t)\}$ jede Schauder'sche Funktion $\varphi(t)$ gleichmäßig in a, b approximieren kann. Ist nun $f(t)$ stetig in a, b und hat $s_n(t)$ die Bedeutung wie im Beweise von [243], so ist bei entsprechendem n

$$\left| f(t) - s_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (a \leq t \leq b);$$

$s_n(t)$ besteht aus n Termen $c\varphi(t)$ und man kann einen jeden auf $\varepsilon/2n$ genau durch lineare, endliche Verbindungen von 1, $\{\varphi_n(t)\}$ annähern; die Summe dieser Verbindungen $\sigma(t)$ hat die Eigenschaft $\left| f(t) - \sigma(t) \right| < \varepsilon$ in a, b , wie die Behauptung [245] es verlangt.

Der eben angewendete Schluß ist vielfach nützlich. So haben wir z. B. im I-ten Kapitel (§ 2, Schlußbemerkung) ein Funktionensystem kennen gelernt, welches in bezug auf jeden Raum L^p ($p \geq 1$) abgeschlossen ist. Dieses System besteht aus allen streckenweise-konstanten Funktionen. Eine solche Funktion ist eine lineare Verbindung von noch einfacheren Funktionen, und zwar solchen, die in einem Teilintervall gleich 1, sonst gleich 0 sind. Um die Abgeschlossenheit eines Systems $\{f_n(t)\}$ in bezug auf L^p ($p \geq 1$) festzustellen, genügt es zu zeigen, daß eine jede Funktion der eben bezeichneten Art in L^p durch lineare Verbindungen der

$f_n(t)$ beliebig approximierbar ist (im Sinne der L^p -Norm). Denn die Eigenschaften [137] der Norm erlauben hier wie im Schlußteil des Beweises von [245] vorzugehen.

Ein in bezug auf R *dicht-abgeschlossenes System* ist ein solches, [247] welches (in bezug auf R) abgeschlossen bleibt, wenn man beliebig viele seiner Funktionen streicht, ohne es aber auf ein endliches System zu reduzieren. Ganz analog ist die Definition eines *dicht-vollständigen Systems*. Keines der bis jetzt von uns untersuchten Systeme ist dicht im obigen Sinne.

Ein Gegenstück zur Dichte ist die Minimalität. *Minimal-abgeschlossenen* ist ein System, welches nach Weglassung einer Funktion — welche es auch sei — die Abgeschlossenheit einbüßt (z. B. ist [223] ein solches System). Analog lautet die Definition eines *minimal-vollständigen Systems*. (Dichte Systeme hat Ch. Müntz angegeben (vgl. [361]); den Ausdruck „minimal“ finden wir bei S. Levin, doch in einem etwas abweichenden Sinne). [248]

Ist $\varphi(t)$ irgend ein Element eines normierten Raumes R und [249] ist $\|\varphi(t)\|_R \neq 0$, so läßt sich eine Konstante c aus der Bedingung

$$(20) \quad \|\varphi(t)\|_R = 1$$

berechnen: $c = \pm 1/\|\varphi(t)\|_R$. Soll c reell sein, so hat die Aufgabe genau zwei Lösungen. Ersetzt man $\varphi(t)$ durch $c\varphi(t)$, wo c eine Lösung ist, so sagt man, man habe $\varphi(t)$ *normiert*.

Soll z. B. $\sin n t$, $0 \leq t \leq 1$, im Räume L^2 normiert werden, so kommt

$$\|\sin n\pi t\|^2 = \int_0^1 \sin^2 n\pi t \cdot dt = \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 u \cdot du = 1/2,$$

$$\|\sin n\pi t\| = \pm \sqrt{1/2}, \quad c = \pm \sqrt{2}.$$

Das System $\{\pm \sqrt{2} \sin n\pi t\}$ besteht also aus lauter normierten Funktionen. Die Vorzeichen $\pm$ sind beliebig, es gibt also kontinuierlich-unendlichviele Normierungen eines unendlichen Systems.

Die Normierung kann die Merkmale der Abgeschlossenheit, der Vollständigkeit, der Orthogonalität, der Dichte und der Minimalität weder einführen noch beseitigen.

Das trigonometrische System [223] pflegt man in L^2 zu normieren; in C ist es bereits normiert. In L^2 ist das normierte trigonometrische System:

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \quad \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \quad \dots$$

Das System [224] ist nur bis auf konstante Faktoren bestimmt; wir können es also als normiert ansehen. Das System [225] (welchem wir den Namen des Herrn Rademacher beigelegt haben) ist in M , in L und in L^2 gleichzeitig normiert, das Haar'sche System [226] nur in L^2 . Das System [242] ist in C normiert; man sieht, daß es weder in L^2 noch in L normiert ist, doch könnte man es (z. B. in L^2) normieren, während z. B. das System [225] in C nicht zu normieren ist, da seine Elemente nicht zu C gehören. Doch werden wir künftighin unter *Normierung* die Normierung in L^2 verstehen, sobald nicht ausdrücklich anderes verlangt wird.

Es werde hier bemerkt, daß die Eigenschaften der Orthogonalität, der Vollständigkeit, der Abgeschlossenheit, der Normierung, der Dichte und Minimalität in den meisten Räumen (L , L^2 , M) nicht beeinflusst werden, wenn man die Funktionen in t -Mengen vom Maße Null abändert.

§ 5. Orthogonalreihen und Orthogonalentwicklungen.

[251] Ist $\{\varphi(t)\}$ ein abzählbares Orthogonalsystem, so heißt die Reihe

$$(22) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

eine *Orthogonalreihe*, c_i sind beliebige Konstanten. Als erster hat Euler eine Orthogonalreihe, und zwar eine trigonometrische Reihe verwendet; er benützte sie in der Theorie der Jupiter- und Saturnbewegung (im J. 1748). Eine trigonometrische Reihe ist eine Reihe (22), wenn für $\{\varphi_i(t)\}$ das System (21) gewählt wird. Da die Konstanten c_i zur Verfügung stehen, dürfen wir voraussetzen, daß $\{\varphi_i(t)\}$ in R normiert ist; das engt die Definition [251] nur insofern ein, daß kein $\varphi_i(t)$ ein Nullelement von R sein darf und daß alle $\varphi_i(t)$ zu R gehören.

Es sei $\{\varphi_i(t)\}$ ein abzählbar-unendliches, orthogonales, in L^2 normiertes System; der Einfachheit halber seien die $\varphi_i(t)$ in a, b stetig. Wir wollen annehmen, die Reihe (22) sei gleichmäßig konvergent und $f(t)$ sei ihre Summe. In diesem Falle ist die Bestimmung der Konstanten c_i unmittelbar: multipliziert man die Beziehung

$$(23) \quad f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

beiderseits mit $\varphi_k(t)$ und integriert beide Teile über a, b , indem man rechts unter dem Summenzeichen integriert, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz erlaubt ist, so kommt

$$\int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = c_k,$$

weil rechts alle Terme bis auf den k -ten infolge der Orthogonalität verschwinden und weil das k -te Integral infolge der Normierung gleich 1 ist. Es ist also

$$(24) \quad c_k = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt \quad (k=1, 2, \dots).$$

Für die Theorie der Orthogonalreihen ist es nun wesentlich die Koeffizienten c_k nach der Formel (24) zu berechnen: „à la Fourier“, wie man zu sagen pflegt. Ist also $\{\varphi_i(t)\}$ orthogonal und in L^2 normiert, so heißen die nach Formel (24) berechneten c_k , die Koeffizienten von $f(t)$ nach $\{\varphi_i(t)\}$, wobei von $f(t)$ nur verlangt wird, daß sämtliche Integrale (24) existieren. [252]

Setzt man diese Koeffizientenwerte in (22) ein, so nennt man die so entstandene Reihe die Entwicklung der Funktion $f(t)$ nach dem System $\{\varphi_i(t)\}$. Man schreibt dann [253]

$$(25) \quad f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t),$$

und es ist ein Hauptproblem der Theorie, ob und wann das Zeichen $=$ durch das Gleichheitszeichen zu ersetzen ist. Aber auch ohne dieses Problem gelöst zu haben, können wir oft die Formel (25) als eine nützliche „Darstellung“ von $f(t)$ verwenden.

Es werde hier gleich bemerkt, daß im Falle der sog. durchschnittlichen Konvergenz der Reihe (22) gegen $f(t)$, d. h. im Falle, wo die Partialsummen $s_n(t)$ die Beziehung [254]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = f(t)$$

in dem in [161] erklärten Sinne (vgl. I, (22)) im Räume L^2 erfüllen, die Koeffizienten c_k notwendig die Werte (24) annehmen. Denn es ist ($n > k$)

18465

$$\int_a^b \varphi_k(t) [f(t) - s_n(t)] dt = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt - c_k$$

und

$$\left| \int_a^b \varphi_k(t) [f(t) - s_n(t)] dt \right| \leq \left(\int_a^b \varphi_k^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f - s_n\|_L,$$

welcher Ausdruck voraussetzungsgemäß gegen Null strebt,

Ist das System $\{\varphi_i(t)\}$ nicht normiert, so liefert, bei sonstigen Voraussetzungen, dieselbe Überlegung Werte für c_k , die eine leichte

Modifizierung erfahren. Ist nämlich $\int_a^b \varphi_k^2(t) dt = \lambda_k > 0$, so ist das System

$$\left\{ \psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(t) \right\}$$

bereits normiert. Ist d_k der k -te Koeffizient von $f(t)$ nach $\{\psi_k(t)\}$, so kommt

$$d_k = \int_a^b f(t) \psi_k(t) dt = \int_a^b f(t) \cdot \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} dt = \frac{c_k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Die Entwicklung nach $\{\psi_k(t)\}$ lautet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \psi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \varphi_k(t)}{\lambda_k}.$$

[255] Wenn man also die Entwicklung nach $\{\varphi_i(t)\}$ bildet, indem man die Formel (24) für die Koeffizienten benützt, aber dann die k -te Funktion durch λ_k dividiert, so wird die Reihe Term für Term mit einer anderen identisch, die bereits eine Entwicklung nach einem normierten System $\{\varphi_i(t)\}$ darstellt.

Man berechne z. B. die Entwicklung von $|t|$ in — nach dem System $\{\cos it\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$):

$$\text{Es ist } \int_{-\pi}^{+\pi} 1^2 \cdot dt = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 it \cdot dt = \pi, \quad \text{also } \lambda_0 = 2\pi, \quad \lambda_i = \pi \quad (i=1, 2, \dots)$$

und

$$c_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} |t| \cdot dt = \pi^2, \quad c_i = \int_{-\pi}^{+\pi} |t| \cos it \cdot dt = \frac{2}{i^2} [(-1)^i - 1] \quad (i=1, 2, \dots);$$

die gesuchte Entwicklung ist also

$$|t| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos t - \frac{4}{9\pi} \cos 3t - \frac{4}{25\pi} \cos 5t - \dots$$

(Würden wir hier das Zeichen $\sim$ durch $=$ ersetzen dürfen, so würden wir, nach der Substitution $t = 0$, die Beziehung

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

bekommen).

Nicht jede Reihe der Gestalt (22) ist eine Entwicklung. [221] ist ein Orthogonalsystem; die Reihe

$$(26) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \cos nt$$

ist keine Entwicklung. Es ist hier $\lambda_0 = \pi$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \frac{\pi}{2}$.

Wäre nun $f(t) \in L$ eine Funktion, die (26) liefert, so käme

$$(27) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \cdot dt = 1 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad *$$

also

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) [\cos (n+2)t - \cos nt] dt = 0,$$

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin (n+1)t \cdot \sin t \cdot dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

also — wenn $\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin^2 t \cdot dt$ gesetzt wird —

$$\int_0^{\pi} [f(t) - \alpha] \sin t \cdot \sin nt \cdot dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Das System [222] ist aber ([234]) vollständig inbezug auf L ; es ist also $(f(t) - \alpha) \sin t = 0$ f. ü. in $0, >$, also $f(t) = \alpha$ f. ü. in $0, >$, was der Formel (27) widerspricht.

Dieser Weg zu den Formeln (24) ist, im Grunde genommen, der Euler-Fourier'sche (1748—1807). Einen besseren Einblick gewährt aber ein anderer, den die skandinavische Schule (Gram) gefunden hat.

§ 6. Das Problem der besten Approximation.

Es sei in a, b eine Funktion $f(t) \in L^2$ erklärt. Das System $\{\varphi_i(t)\}$ sei in L^2 orthogonal und normiert. Wir werden ein solches System als „ein ON“ bezeichnen. Man schreibe

$$(28) \quad s_n(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i(t)$$

und verlange, bei festem n , die Koeffizienten ξ_i so zu bestimmen, daß $s_n(t)$ im Räume L^2 so nahe als möglich an $f(t)$ zu liegen komme. M. a. W. verlangt man die Minimierung von

$$\|f(t) - s_n(t)\|^2 = \int_a^b |f(t) - s_n(t)|^2 dt$$

durch geeignete Wahl der ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Minimierung der quadratischen Form der Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$[261] \quad F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int_a^b |f(t) - \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i(t)|^2 dt = \int_a^b f^2(t) dt - 2 \sum_{i=1}^n c_i \xi_i + \sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

wo für die Skalarprodukte (24) c_k geschrieben und wo die Orthogonalität und Normierung bereits benutzt wurden. Eine leichte Umformung gibt

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int_a^b f^2(t) dt + \sum_{i=1}^n (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

Da von den drei Gliedern rechts nur der mittlere von den ξ_i abhängt, und zwar so, daß er stets nichtnegativ ist und den Wert Null nur für

$$(29) \quad \xi_1 = c_1, \quad \xi_2 = c_2, \quad \dots, \quad \xi_n = c_n$$

[262] annimmt, so ist gezeigt worden, daß die Form $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ein einziges, eigentliches, absolutes Minimum an der Stelle (29) aufweist; ihr Wert an dieser Stelle ist

$$(30) \quad F(c_1, c_2, \dots, c_n) = \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2,$$

wo die c_i durch (24) erklärt sind. Wir hatten aber stets

$$(31) \quad F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt \geq 0,$$

also auch $F(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0$; (30) ergibt daher

$$(32) \quad \int_a^b f^2(t) dt \geq \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

Wir haben also gezeigt, daß der Integralausdruck (31) seinen Minimalwert erreicht, wenn die Koeffizienten ε_i die Fonrierschen Werte d (24) annehmen. Wenn man also eine Funktion in eine Orthogonalreihe nach der Vorschrift des § 5 entwickelt, so liefert jede Partialsumme dieser Entwicklung die bestmögliche Approximation; dieses Optimum ist das einzige. (263]

Außerdem liefert die Ungleichung (32) im Falle unendlicher Systeme die sog. Besselsche Ungleichung [264]

$$(33) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt,$$

also u. a. die Konvergenz der Koeffizientenquadralsumme.

Eine wichtige Konsequenz der Hessel'sehen Ungleichung (33) ist [265]

$$(34) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0 \quad (f(t) \in L^2).$$

Es kann aus (33) auch abgelesen werden, daß $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$ keine Entwicklung einer zu L^2 gehörenden Funktion ist, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ divergiert. Ist aber $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$, so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$ stark konvergent, denn es ist ($m > n$) $s_m(t) - s_n(t) = \sqrt{\sum_{i=n+1}^m c_i^2}$, wenn $s_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$ gesetzt wird. [266]

Ist das normierte Orthogonalsystem $\{\varphi_i(t)\}$ in bezug auf L^2 abgeschlossen, so gilt [267]

$$(35) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = 0,$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Voraussetzung ein Zahlensystem $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mit

$$\left| f(t) - \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i(t) \right| < \sqrt[n]{\varepsilon},$$

es ist also $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < \varepsilon$ und umsomehr $F(c_1, c_2, \dots, c_n) < \varepsilon$, d. h.

$$\int_a^b [f(t) - s_m(t)]^2 dt < \varepsilon \text{ für } m \geq n, \text{ w. z. b. w.}$$

[268] Eine weitere Konsequenz der Besselschen Ungleichung (33) ist die Konvergenz fast überall der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \varphi_i^2(t)$$

unter der Voraussetzung $f(t) \in Z^2$. Es ist nämlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \int_a^b \varphi_i^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

nach [264] eine konvergente Reihe und aus [124] folgt die Behauptung.

[269] Die gliedweise integrierte Entwicklung einer $f(t) \in L^2$ ist gleichmäßig konvergent. Es ist nämlich

$$(36) \quad \left| \sum_{i=p}^q c_i \int_a^t \varphi_i(u) du \right| \leq \sqrt{\sum_{i=p}^q c_i^2} \left(\int_a^t \varphi_i(u) du \right)^2 \quad (a \leq t \leq b),$$

da aber die Integrale $\int_a^t \varphi_i(u) du$ Koeffizienten der Funktion $g(u)$ sind, die in a, t gleich 1, sonst 0 ist, so folgt aus (33) und (36)

$$\left| \sum_{i=p}^q c_i \int_a^t \varphi_i(u) du \right| \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\sum_{i=p}^q c_i^2} \quad (q > p),$$

und letzter Ausdruck strebt für $p \sim \infty$ unabhängig von t gegen Null.

III. KAPITEL.

Orthogonalreihen in V.

Das erste Problem der Theorie der Orthogonalreihen ist die Frage nach der Existenz der Orthogonalsysteme. Die Beispiele des II-ten Kapitels gewähren noch keinen Einblick in die „Freiheitsgrade“, über welche man beim Bauen von Orthogonalsystemen verfügt, obwohl ein jedes Beispiel durch bloße Änderung der Reihenfolge oder durch Vorzeichenänderung bereits zu unendlich vielen anderen führt. Wir betonen, daß alle Ausführungen dieses Kapitels den Raum L^2 zum Gegenstand haben, wenn nicht ausdrücklich anders vorausgesetzt wird. Andere Räume kommen im Kapitel VI zur Sprache.

§ 1. Orthogonalisierung.

Es seien $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ n in a, b erklärte Funktionen des Raumes L^2 . Es hat bereits im J. 1879 J. P. Gram in einer dänisch geschriebenen Arbeit die Frage nach einer Matrix

$$C = [c_{ik}] \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

aufgeworfen, die vermittels der linearen Substitution

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= c_{11}f_1(t) + \dots + c_{1n}f_n(t) \\ \varphi_2(t) &= c_{21}f_1(t) + \dots + c_{2n}f_n(t) \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(t) &= c_{n1}f_1(t) + \dots + c_{nn}f_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

zu einem normierten Orthogonalsystem $\{\varphi_i(t)\}$ führt.

Wir bemerken hier gleich, daß die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\{f_i\}$ eine notwendige Bedingung für die Existenz

von C ist. Wären nämlich, die Funktionen f_i linear abhängig, d. h. hätte man in a, b fast überall $\sum_{i=1}^n d_i f_i(t) = 0$ mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten d_i , so hätte man — nach einem bekannten Satze der Theorie der linearen Gleichungen — $\sum_{i=1}^n d_i \varphi_i(t) = 0$ für dieselben t -Werte, d. h. fast überall in a, b , und nicht alle d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) wären Null. Dies aber steht im Widerspruch zum folgenden Satz:

[311] Funktionen eines normierten Orthogonalsystems können keine endliche lineare Abhängigkeit eingehen.

In der Tat liefert eine Beziehung, wie

$$\sum_{i=1}^n d_i \varphi_i(t) = 0 \quad \text{f. ü.,}$$

nach Multiplikation mit $\varphi_k(t)$ und nach Integration über a, b

$$\sum_{i=1}^n d_i \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = 0, \quad \text{d. h. } d_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Gram hat folgendes Kriterium der linearen Unabhängigkeit angegeben:

[312] Damit die Funktionen $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ im obigen Sinne — linear unabhängig seien, ist die Bedingung $A_n \neq 0$ notwendig und hinreichend, wobei A_n die Determinante der Matrix // a_{ik} // bedeutet, deren Elemente als

$$(2) \quad a_{ik} = \int_a^b f_i(t) f_k(t) dt \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

definiert sind.

Der Beweis stützt sich auf die augenscheinliche Tatsache, daß A_n die Diskriminante der quadratischen Form

$$(3) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b [x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \dots + x_n f_n(t)]^2 dt$$

der n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist. Diese Form ist als Integral eines Quadrats stets nichtnegativ und verschwindet für ein anderes x System als $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, wenn dieses andere System die Summe $\sum_{i=1}^n x_i f_i(t)$ fast überall in a, b zu Null macht.

Null verschieden und alle C_{ik} und d_{ik} sind eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, daß die C_u positiv seien.

- [315] Ist nun K irgend ein Raum, so ist die Vollständigkeit des Systems $\{f_i\}$ in bezug auf K mit der Vollständigkeit von $\{\varphi_i\}$ in bezug auf K äquivalent. Denn ist $\|g\|_K = 0$ für ein $g(t) \in K$, sobald alle Integrale $\int_a^b g(t) f_k(t) dt$ ($k = 1, 2, \dots$) verschwinden, so muß auch $\|g\|_K$ Null sein, wenn $g(t)$ zu allen $\varphi_k(t)$ orthogonal ist, da ja aus

$$\int_a^b g(t) \varphi_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

vermöge (5), $\int_a^b g(t) f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) folgt. Der umgekehrte Schluß stützt sich auf (4).

- [316] Auch ist die Abgeschlossenheit von $\{f_i\}$ in bezug auf K mit derselben Eigenschaft von $\{\varphi_i\}$ äquivalent. Ist nämlich $g(t) \in K$ und gibt es zu $\varepsilon > 0$ Zahlen $a_1, \dots, a_n$ mit

$$(10) \quad \|g(t) - \sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\|_K < \varepsilon,$$

so führt die Substitution (5) auf

$$\|g(t) - \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i(t)\|_K < \varepsilon,$$

d. h. auf die Abgeschlossenheit von $\{\varphi_i\}$. Den umgekehrten Schluß liefert (4).

- [317] Ein Beispiel für die Orthogonalisierung. Es sei

$$a, b = -1, +1 \quad \text{und} \quad f_i(t) = t^{i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Es kommt

$$a_{ik} = \int_{-1}^{+1} t^{i+k-2} dt = \begin{cases} \frac{2}{i+k-1}, & \text{wenn } i+k \text{ gerade} \\ 0, & \text{wenn } i+k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist $\varphi_1(t) = 1/\sqrt{2}$ und $p_1^{(2)} = 0$, $p_2^{(2)} = 2$, also $\varphi_2(t) = \lambda^{(2)} \cdot 2t$; die Bedingung

$$4 (\lambda^{(2)})^2 \int_{-1}^{+1} t^2 dt = 1$$

gibt $\varphi_2(t) = \sqrt{3/2} t$. Das in dieser Weise erhaltene ON heißt das System der Legendre'schen Polynome.

wo $\{\varphi\}$ die Schmidt'schen Funktionen sind, und der Schluß (12) zeigt, daß $\|e_{ik}\|$ zeilenweise ON ist.

Die Matrizen $\|e_{ik}\| = E$ sind aus der euklidischen n -dimensionalen Koordinatengeometrie bekannt: ist $x_1, x_2, \dots, x_n$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem und $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein ebensolches (mit demselben Ursprung), so hat man

$$(13) \quad y_i = \sum_{k=1}^n e_{ik} x_k \quad (i=1, \dots, n),$$

und die Koeffizientenmatrix $E = \|e_{ik}\|$ ist zeilenweise normiert-orthogonal. Es ist leicht zu zeigen, daß dann

$$(14) \quad x_i = \sum_{k=1}^n e_{ki} y_k \quad (i=1, \dots, n),$$

(was aus der Bedeutung von e_{ik} als Cosinus des Winkels zwischen X_i und y_k ersichtlich ist). Es ist also die zu E inverse Substitution E^{-1} durch bloße Vertauschung der Zeilen mit den Spalten zu gewinnen. Da die Formel (14) dieselbe geometrische Bedeutung hat wie (13), muß E^{-1} als Substitutionsmatrix von (14) ebenfalls zeilenweise orthogonal und normiert sein. Infolgedessen ist E spaltenweise orthogonal und normiert.

Bekanntlich (Kronecker, Hermite, Cayley) lassen sich sämtliche Matrizen E erhalten, indem man für e_{ik} n^2 geeignete rationale Funktionen von $n(n-1)/2$ Parametern einführt und sodann diesen Parametern alle möglichen Werte erteilt.

Der Determinantenwert von E ist ± 1 ; setzt man nämlich (14) in (13) ein, so erhält man die identische Substitution. Es ist also

$$E E^{-1} = L,$$

wo L die Einheitsmatrix bedeutet. Für die Determinantenwerte folgt daraus $|E| \cdot |E^{-1}| = 1$; da E^{-1} durch Vertauschung von Zeilen und Spalten aus E gewonnen wurde, ist $|E^{-1}| = |E|^{-1}$, also $|E| = \pm 1$, w. z. b. w.

§ 2. Orthogonalisierung im längeren Intervall.

Das Problem der Orthogonalisierung eines Systems von linear unabhängigen, in a, b erklärten Funktionen $\{f_n\}$ kann man anders als im § 1 auffassen. Man kann nämlich fragen, ob man nicht etwa durch Erweiterung der $\{f_n\}$ auf ein über a, b

hinausragendes Intervall die Orthogonalität erreichen kann. Dieselbe Frage hat einen Sinn auch in dem Falle, wo $\{f_n\}$ bereits in $[a, b]$ orthogonal ist; die triviale Erweiterung „ $f_n(t) \equiv 0$ außerhalb $[a, b]$ “ hebt die Vollständigkeit auf; eine nichttriviale Erweiterung auf $[a, c]$ mit $a < b < c$ ist stets möglich, und zwar nur so, daß $\{f_n\}$ in $[b, c]$ orthogonal sei, wie aus der Formel

$$0 = \int_a^c f_i(t) f_k(t) dt = \int_a^b f_i(t) f_k(t) dt + \int_b^c f_i(t) f_k(t) dt$$

unmittelbar folgt; augenscheinlich darf $\{f_n\}$ in $[b, c]$ ein beliebiges 0 sein.

Ist $\{f_n(t)\}$ irgendein System von in $[a, b]$ erklärten Funktionen [321] aus L^2 , so lassen sich die $f_n(t)$ so in der Verlängerung $[b, c]$ von $[a, b]$ definieren, daß das System in $[a, c]$ orthogonal wird.

Wir erinnern an die Matrix CO in [212] (3). Jede Zeile von (T) wird zur Definition einer Funktion $f_n(t)$ benutzt. Man teile $[b, c]$ in Teilintervalle $\{I_k\}$ mittels einer Punktfolge, die wachsend gegen c konvergiert; ist ε_k , das k te Element der n ten Zeile von (7), so setze man

$$f_n(t) = 0 \quad \text{für } t \in I_k, \quad \text{wenn } \varepsilon_k = 0 \quad (n = 1),$$

$$f_n(t) = 1 \quad \text{für } t \in I_k, \quad \text{wenn } \varepsilon_k = 1,$$

$$f_n(t) = - \int_a^b f_n(u) f_p(u) du \cdot \frac{1}{\varepsilon_k} \quad \text{für } t \in I_k \quad (n > 1),$$

wenn $\varepsilon_k = 1$ und ε_k die p -te Einheit in der Zeile ist, wo $p < n$; ist ε_k eine der weiteren Einheiten und $t \in I_k$, so soll $f_n(t) = 1$ gelten.

Zunächst zeigen wir, daß $\int_a^c f_n^2(t) dt$ endlich ist. Es handelt sich bloß um $\int_a^b f_n^2(t) dt$. Aber in der n -ten Zeile von (T) gibt es nur endlichviele Einheiten mit $p < n$; das Integral über die entsprechenden I_k ist selbstverständlich endlich; in sonstigen I_k ist $f_n^2 \leq 1$, also ist $\int_a^c f_n^2(t) dt < \infty$.

Beweis der Orthogonalität: Für $n > 1$ und $p < n$ ist

$$\int_a^c f_n(t) f_p(t) dt = \int_a^b f_n(t) f_p(t) dt + \int_{I_{k(p)}} f_n(t) f_p(t) dt + \int_b^c f_n(t) f_p(t) dt,$$

wo $k(p)$ der Spaltenindex der p -ten Einheit der n -ten Zeile ist, D aber den nach Abzug von $I_{k(p)}$ bleibenden Rest von $\langle b, c \rangle$ bezeichnet. Die zwei ersten Integrale rechts heben sich auf vermöge der Definition von $f_n(t)$. Da in der n -ten und p -ten Zeile nur in der $k(p)$ -ten Spalte gleichzeitig Einsen stehen, ist unter $\int_D$ stets der eine oder der andere Faktor Null. Daher: $\int_a^c f_n(t) f_p(t) dt = 0$.

Will man das System [321] normieren und dividiert zu diesem Zwecke jedes $f_n(t)$ durch $\sqrt{\int_a^c f_n^2(t) dt}$, so ändern sich die $f_n(t)$ auch in $\langle a, b \rangle$. Es entsteht die Frage nach den Eigenschaften eines Systems $\{f_n(t)\}$ in $\langle a, b \rangle$, die eine Erweiterung zu einem ON in einem $\langle a, b \rangle$ umfassenden Intervall ermöglichen. I. Schur beantwortet sie, wie folgt:

[322] Ist $\{f_n(t)\}$ in $\langle a, b \rangle$ erklärt, $0 < a < b < 1$, $f_n \in L^2$, so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines ON $\{\varphi_n(t)\}$ in $\langle 0, 1 \rangle$ mit $\varphi_n(t) = f_n(t)$ in $\langle a, b \rangle$, daß das Maximum von

$$\int_a^b \left[\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i(t) \right]^2 dt$$

unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = 1$ gleich 1 sei.

Die Erweiterung eines Orthogonalsystems. Es sei $\{\psi_n(t)\}$ ein ON in $\langle a, b \rangle$; setzt man $\psi_n(t) = 0$ in $\langle b, c \rangle$ für alle n , so bekommt man ein unvollständiges System ($f(t) = 0$ in $\langle a, b \rangle$, $= 1$ in $\langle b, c \rangle$ ist zu allen φ in $\langle a, c \rangle$ orthogonal). Ist nun $\{Z_n(t)\}$ ein ON in $\langle b, c \rangle$ und setzt man

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \lambda \psi_n(t) & \text{für } t \in \langle a, b \rangle, \\ \varphi_n(t) &= \mu Z_n(t) & \text{für } t \in \langle b, c \rangle, \end{aligned}$$

mit $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, so ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON in $\langle a, c \rangle$.

Dieses System ist unvollständig. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} g_m(t) &= \mu \psi_m(t) & \text{für } t \in \langle a, b \rangle, \\ g_m(t) &= -\lambda Z_m(t) & \text{für } t \in \langle b, c \rangle, \end{aligned}$$

so kommt

$$\int_a^c g_m^2(t) dt = \mu^2 + \lambda^2 = 1,$$

und für $n \neq m$

$$\int_a^c \varphi_n(t) g_m(t) dt = \int_a^b \lambda \phi_n(t) \psi_m(t) dt + \int_b^c \mu \gamma_n(t) \gamma_m(t) dt = 0,$$

für $n = m$

$$\int_a^c \varphi_n(t) g_m(t) dt = \int_a^b \lambda \mu \phi_n^2(t) dt + \int_b^c (-\lambda \mu) \gamma_n^2(t) dt = 0,$$

also stets $\int_a^c \varphi_n(t) g_m(t) dt = 0$.

Kostitzin, dem man obige Bemerkung verdankt, wies darauf [323] hin, daß

$$\Phi_1, \mathfrak{G}_1, \Phi_2, \mathfrak{G}_2, \dots, \Phi_n, \mathfrak{G}_n, \dots$$

bereits ein ONV (d. h. ein orthogonales, normiertes und vollständiges System) in a, c ergibt, wenn (φ) und $\{Z\}$ vollständig ist.

Wir haben gesehen, daß die g zu den φ orthogonal sind; daß sie untereinander orthogonal sind, ist unmittelbar klar. Um die Vollständigkeit zu prüfen, setzen wir

$$\int_a^c h(t) \varphi_n(t) dt = 0, \quad \int_a^c h(t) g_n(t) dt = 0 \quad (n).$$

Es folgt

$$\lambda \int_a^b h \phi_n dt + \mu \int_b^c h \gamma_n dt = 0, \quad \mu \int_a^b h \phi_n dt - \lambda \int_b^c h \gamma_n dt = 0$$

und, wegen $\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{vmatrix} = -1$,

$$\int_a^b h(t) \phi_n(t) dt = 0, \quad \int_b^c h(t) \gamma_n(t) dt = 0$$

für alle n , also — infolge der Vollständigkeit von $\{\phi_n\}$ in a, b und von $\{\gamma_n\}$ in b, c — $h(t) = 0$ f. ü. in a, b und b, c , Dasselbe läßt sich für drei und mehr Intervalle (Mengen), ja sogar für Intervallfolgen durchführen.

Es sei A_p eine Folge von Intervallen (Punktmengen) mit [324] $A_p \times A_q = 0$ für $p \neq q$. Es sei $\{\varphi_{iq}(t)\}$ ($i = 1, 2, \dots$) ein ONV auf A_q . Es sei

$$\|\alpha_{pq}\| \quad (p, q = 1, 2, \dots)$$

eine unendliche Matrix, die zeilenweise orthogonal, normiert und vollständig ist; letzteres heißt, daß man zu $\|\alpha_{pq}\|$ keine Zeile hin-

zuschreiben kann, so daß die Matrix orthogonal und normiert bleibt. Wir bilden ein System $\{f_i^{(p)}\}$:

$$f_i^{(p)}(t) = \begin{cases} \alpha_{pi} \varphi_{i1}(t) & \text{für } t \in A_1 \\ \dots & \dots \\ \alpha_{pq} \varphi_{iq}(t) & \text{für } t \in A_q \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (i, p, q = 1, 2, \dots).$$

Das System $\{f_i^{(p)}(t)\}$ ($i, p = 1, 2, \dots$) ist ein ONV auf $\Sigma = \sum_{q=1}^{\infty} A_q$.

Orthogonalität: Es ist für $i \neq j$

$$\int_{\Sigma} f_i^{(p)}(t) f_j^{(n)}(t) dt = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} \alpha_{nq} \int_{A_q} \varphi_{iq}(t) \varphi_{jq}(t) dt = 0,$$

wegen der Orthogonalität von $\{\varphi_{iq}(t)\}$ auf A_q . Für $p \neq n$ ist

$$\int_{\Sigma} f_i^{(p)}(t) f_i^{(n)}(t) dt = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} \alpha_{nq} \int_{A_q} \varphi_{iq}^2(t) dt = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} \alpha_{nq} = 0,$$

wegen der Normiertheit von $\{\varphi_{iq}\}$ und der Orthogonalität von $\{\alpha_{pq}\}$.

★

Normiertheit: Es ist—wegen der Normiertheit von $\{\varphi_{iq}(t)\}$ und $\{\alpha_{pq}\}$ —

$$\int_{\Sigma} (f_i^{(p)}(t))^2 dt = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq}^2 \int_{A_q} \varphi_{iq}^2(t) dt = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq}^2 = 1.$$

Vollständigkeit: Es sei $g(t)$ in Σ erklärt, $g \in L^2$ und

$$\int_{\Sigma} g(t) f_i^{(p)}(t) dt = 0$$

für alle i und p . Man setze

$$g_{iq} = \int_{A_q} g(t) \varphi_{iq}(t) dt.$$

Es wird

$$0 = \int_{\Sigma} g(t) f_i^{(p)}(t) dt = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} g_{iq} \quad (p = 1, 2, \dots);$$

es folgt $g_{iq} = 0$ ($q = 1, 2, \dots$), da $\{\alpha_{pq}\}$ vollständig. Dieses gilt für alle i . Es ist also (bei festem q) $g_{iq} = 0$ ($i = 1, 2, \dots$). Die Vollständigkeit von $\{\varphi_{iq}(t)\}$ auf A_q ergibt $g(t) = 0$ f. ü. auf A_q , also auch auf Σ .

Obiges erlaubt uns ONV-Systeme für das Intervall $(0, \infty)$ zu bilden. Hat man nämlich ein ONV in $(0, 1)$ und nennt man es $\{\varphi_{ii}(t)\}$, so kann man $\{\varphi_{iq}(t)\}$ in $q = 1, q =$ vermittels

$$\varphi_{iq}(t) = \varphi_{ii}(t - q + 1)$$

erklären, $q=1, q$ mit A_q bezeichnen, eine beliebige ONV-Matrix $\{\alpha_{pq}\}$ wählen und die vorhergehende Theorie anwenden.

Wählt man z.B. als $\{\varphi_{ii}(t)\}$ das trigonometrische System für $(0, 1)$ und als $\{\alpha_{pq}\}$ die Matrix der identischen Substitution ($\alpha_{pp} = 1$, $\alpha_{pq} = 0$ für $p \neq q$), so kommt (II, § 4)

$$f_i^{(p)}(t) = \begin{cases} 2 \sin \pi i t & \text{für } p = 1 \text{ und } t \leq p \\ 0 & \text{für andere } t \end{cases} \quad (p, i = 1, 2, \dots).$$

Dieses System ist ein ONV in $(0, \infty)$. Laßt man für p die Werte $0, -1, -2, \dots$ zu, so erhält man ein ONV in $(-\infty, +\infty)$, und zwar das einfachste bekannte Beispiel.

In den Anwendungen (harmonische Analyse) braucht man manchmal Orthogonalentwicklungen in unendlichen Intervallen; dabei wird oft die Orthogonalität anders als üblich erklärt, und zwar als

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = 0 \quad (i \neq k, T > 0).$$

Prüfen wir z. B. das System $\{\cos it\}$ auf diese Orthogonalität hin. Es kommt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos it \cdot \cos kt \cdot dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{2} (\cos (i+k)t + \cos (i-k)t) dt \\ &= \frac{1}{4T} \left[\frac{\sin (i+k)t}{i+k} + \frac{\sin (i-k)t}{i-k} \right]_{-T}^T = \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{i+k} + \frac{1}{i-k} \right) \cdot 0. \end{aligned}$$

Dabei dürfen i, k beliebige reelle Zahlen sein; es ist also das System $\{\cos it\}$ (i = reell) in diesem speziellen Sinne in $(-\infty, +\infty)$ orthogonal und besteht aus c (= Kontinuum) verschiedenen Punktionen.

§ 3. Über die beste Approximation.

Ist $\{f_i(t)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ein beliebiges System und ist $\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$ [331J die beste Annäherung an $g(t)$ im Sinne der kleinsten Quadrate (II, § 6), so muß die Differenz

$$(15) \quad g(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) = h(t)$$

zu sämtlichen $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) orthogonal sein.

Beweis: Es seien die $f_i(t)$ linear unabhängig. Bilden wir nach Schmidt ([313]) ein ON-System $\{\varphi_i(t)\}$ und drücken $\{f_i(t)\}$ durch $\{\varphi_i(t)\}$ aus; (15) geht in

$$(16) \quad h(t) = g(t) = \sum_{i=1}^n d_i \varphi_i(t)$$

über. Da die Norm $\|h(t)\|$ minimal sein soll, muß nach II, § 6

$$d_i = \int_a^b g(t) \varphi_i(t) dt \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

sein, woraus wegen (16) $\int_a^b h(t) \varphi_i(t) dt = 0$ (i = 1, 2, ..., n)

★

$$\int_a^b h(t) f_i(t) dt = 0 \quad (9)$$

unmittelbar folgt, was wir

zur Folge hat, denn die f_i drücken sich linear durch die φ_i aus.

Wären die $f_i(t)$ linear abhängig, so wären darunter k linear unabhängige $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$ und die restlichen $(n-k)$ ließen sich linear durch jene ausdrücken; $\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$ wäre dann eine lineare

Verbindung von $f_i(t)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) und man hätte $\int_a^b h(t) f_j(t) dt = 0$

($j = 1, 2, \dots, k$), woraus $\int_a^b h(t) f_i(t) dt = 0$ auch für die restlichen f folgt.

[331] bringt die Frage nach dem Minimum der quadratischen Form

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b \left[g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right]^2 dt$$

auf die notwendigen Bedingungen

$$(17) \quad \int_a^b \left[g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right] f_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

oder—wenn $\int_a^b f_j(t) g(t) dt = g_i$ gesetzt wird — auf das Gleichungssystem

$$(18) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo a_{ik} in [312] (2) erklärt wurde. Verschwindet nicht die Gram'sche Determinante A_n , d. h. die Determinante der Matrix a_{ik} , so ist das System (18) eindeutig auflösbar. Wir bemerken aber, daß es auch im Falle $A_n = 0$ auflösbar ist. Denn sind $x, \mu, v, \dots$, nicht alle Null und

$$(19) \quad \lambda a_{ik} + \mu a_{jk} + \dots + \omega a_{wk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

eine der (sicher vorhandenen) linearen Relationen zwischen den Formen (18), so ist $L(t) = \lambda f_i(t) + \mu f_j(t) + \dots + \omega f_w(t)$ f. ü., weil ja (19)

$$\int_a^b f_k(t) L(t) dt = 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

zur Folge hat, und, wenn man hier $k = i, j, \dots, w$ setzt, mit $\lambda, \dots, \omega$ (1)

multipliziert und addiert, $\int_a^b L^2(t) dt = 0$ resultiert. Daraus folgt

$$\int_a^b L(t) g(t) dt = 0, \text{ also } \lambda g_i + \mu g_j + \dots + \omega g_w = 0, \text{ d. h. daß dieselbe}$$

lineare Beziehung, die laut (19) die i -te, j -te, ..., w -te Liueart'orm des Systems (18) verbindet, für die freien Glieder g gilt; dieses ist aber zur Lösbarkeit hinreichend (und notwendig).

Damit ist (18) als notwendige Bedingung für das Minimum [332] von $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ erkannt. Wir wollen zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle: $A_n \neq 0$, $A_n = 0$.

Im ersten Fall lassen sich die $f_1, f_2, \dots, f_n$ orthogonalisieren; es sei $\{\varphi_i(t)\}$ das so erhaltene ON. Setzt man in dem die Form $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definierenden Integral für $\{f_i(t)\}$ die Ausdrücke (5) ein, so wird

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^b \left[g(t) - \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i(t) \right]^2 dt = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

mit

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & y_1 = d_{11}x_1 + d_{21}x_2 + \dots + d_{n1}x_n, & x_1 = c_{11}y_1 + c_{21}y_2 + \dots + c_{n1}y_n, \\
 & y_2 = & d_{22}x_2 + \dots + d_{n2}x_n, & x_2 = & c_{22}y_2 + \dots + c_{n2}y_n, \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & y_n = & d_{nn}x_n, & x_n = & c_{nn}y_n.
 \end{aligned}$$

Es genügt also das Minimum der Form $P(y_1, y_2, \dots, y_n)$ zu bestimmen; dieses ist in [261] und [262] schon geschehen: es gibt genau eine Lösung $y_i = \int_a^b g(t) \varphi_i(t) dt$ ($i = 1, \dots, n$), von der man mit Hilfe von (20) zu den gesuchten x übergeht. Da es nur eine Lösung gibt, (18) aber eindeutig auflösbar ist, so ist (18) hinreichend.

Im zweiten Fall ist der Unterfall $f_i(t) = 0$ f. ü. ($i = 1, \dots, n$) trivial; alle Systeme $\{x_i\}$ lösen (18) und alle liefern $\int_a^b g^2(t) dt$ als Minimalwert. Es seien also $f_1(t), \dots, f_p(t)$ linear unabhängig ($1 < p < n$) und die restlichen $n-p$ Funktionen durch jene p ausdrückbar. Wir betrachten

$$\star \quad \tilde{F}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \int_a^b \left| g(t) - \sum_{i=1}^p x_i f_i(t) \right|^2 dt$$

und finden, wie oben, ein Minimalsystem $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p$ für $\tilde{F}$. Da $\sum_{i=1}^p x'_i f_i(t)$ auf die Gestalt $\sum_{i=1}^p x'_i f_i(t)$ (durch Ersetzung von $f_i(t)$ ($i = p+1, \dots, n$) durch lineare Ausdrücke in $f_1, \dots, f_p$), sich bringen läßt, liefert

$$(21) \quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p, 0, 0, \dots, 0$$

das gesuchte Minimum. Es ist bloß zu prüfen, ob andere Lösungen von (18) denselben Wert für $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wie (21) liefern. Das ist aber leicht einzusehen; sind $x_1, x_2, \dots, x'_n, x_1, x_2, \dots, x'_n$ zwei Lösungssysteme von (18), so ist

$$(22) \quad \sum_{i=1}^n x'_i f_i(t) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \quad \text{f. ü.},$$

denn schreibt man $x_i - x'_i = \xi_i$, so hat man

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = 0 \quad (i), \quad \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k = 0,$$

also ([312], (3))

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \xi_i f_i(t) \right)^2 dt = 0,$$

was (22) zur Folge hat.

Jetzt können wir das Minimum von F unmittelbar (ohne Orthogonalisierung) bestimmen. Das System (18) hat im Falle $A_n \neq 0$ als einziges Lösungssystem

$$(23) \quad x_k = \frac{A_n}{A_{nk}} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

wobei die Determinante A_n aus A_n gewonnen wird, indem man die k -te Spalte in A_n durch $g_1, g_2, \dots, g_n$ ersetzt. Nun gilt aber in (23) nach (17)

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int_a^b \left| g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right|^2 dt = \int_a^b \left| g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right|^2 dt \\ &= \int_a^b g(t) \left| g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right| dt = \int_a^b g^2(t) dt - \sum_{k=1}^n g_k x_k. \end{aligned}$$

Schreibt man hier $\int_a^b g^2(t) dt = g_0$, so kommt

$$\text{Min } F(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_0 - \frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^n g_k A_{nk} = \frac{1}{A_n} \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist nichts anderes, als die Gram'sche Determinante $G(f_0, f_1, \dots, f_n)$ des Funktionensystems $f_0(t), f_1(t)$, wo $f_0(t)$ für $g(t)$ geschrieben wurde; dieses führt zur Formel

$$\text{Min } F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{G(g, f_1, f_2, \dots, f_n)}{G(f_1, f_2, \dots, f_n)},$$

oder

$$\text{Min}_{\{x_i\}} \left| g(t) - \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right|^2 = \frac{G(g, f_1, f_2, \dots, f_n)}{G(f_1, f_2, \dots, f_n)}. \quad [333]$$

Damit haben wir einen Ausdruck für die beste Annäherung an eine gegebene Funktion in L^2 durch lineare Verbindung von n gegebenen, linear unabhängigen Funktionen.

Ist $f_{n+1}(t)$ durch $f_1(t), \dots, f_n(t)$ linear ausdrückbar, so läßt sich die Approximation durch Heranziehung von $f_{n+1}(t)$ nicht verbessern; würde nämlich das Minimum kleiner werden, so könnte man $f_{n+1}(t)$ durch den linearen Ausdruck ersetzen und das Minimum [333] verkleinern.

[334] Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Hinzunahme von $f_{n+1}(t)$ die Annäherung nicht beeinflusse, ist die Orthogonalität von $f_{n+1}(t)$ zu der Differenz

$$r(t) = g(t) - \sum_{k=1}^n x_k f_k(t),$$

(wo $\{x_k\}$ das Lösungssystem der Approximationsaufgäbe für n Funktionen $f_k(t)$ bedeutet).

Ist nämlich $\int_a^b r(t) f_{n+1}(t) dt = 0$, so ist

$$\int_a^b \{r(t) - \lambda f_{n+1}(t)\}^2 dt = \int_a^b r^2(t) dt + \lambda^2 \int_a^b f_{n+1}^2(t) dt \geq \int_a^b r^2(t) dt, \quad \text{d. h.}$$

$$\|g(t) - \sum_{k=1}^n x_k f_k(t) - \lambda f_{n+1}(t)\| \geq \|g(t) - \sum_{k=1}^n x_k f_k(t)\|.$$

Ist aber $\int_a^b r(t) f_{n+1}(t) dt \neq 0$, so ist $\int_a^b \{r(t) - \lambda f_{n+1}(t)\}^2 dt < \int_a^b r^2(t) dt$, wenn λ das Vorzeichen von $\int_a^b r(t) f_{n+1}(t) dt$ hat und

$$2|\lambda| \left| \int_a^b r(t) f_{n+1}(t) dt \right| > \lambda^2 \int_a^b f_{n+1}^2(t) dt, \quad |\lambda| < \frac{2 \left| \int_a^b r(t) f_{n+1}(t) dt \right|}{\int_a^b f_{n+1}^2(t) dt} \quad \text{ist.}$$

§ 4. Abzählbarkeit.

Eine normierte Orthogonalmenge in L^2 kann abzählbar-unendlich sein, wie wir an den Beispielen des II-ten Kapitels gesehen haben, es kann aber keine größere Mächtigkeit besitzen.

[341] M. a. W.: Ein ON in L^2 besteht aus höchstens abzählbar-unendlich-vielen Funktionen.

Beweis: Am Schluß von I, § 2 gaben wir ein abzählbares, in L^2 überalldichtes Funktionensystem an; bezeichnen wir es mit

$\{w_i(t)\}$. Ferner sei $\{\varphi(t)\}$ ein ON; sind $\varphi_\alpha(t)$, $\varphi_\beta(t)$ zwei verschiedene Elemente von $\{\varphi\}$, so ist

$$(24) \quad \|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = \int_a^b (\varphi_\alpha(t) - \varphi_\beta(t))^2 dt = 1/2.$$

Es sei $i(x)$ die kleinste natürliche Zahl mit

$$\|\varphi_\alpha - w_{i(x)}\| < \frac{1}{2}.$$

Für $\alpha \neq \beta$ (α, β sind Zeichen, keine Zahl $i(\alpha) \neq i(\beta)$), denn

sonst wäre $\|\varphi_\alpha - w_{i(\alpha)}\| < \frac{1}{2}$, $\|\varphi_\beta - w_{i(\alpha)}\| < \frac{1}{2}$, $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| < 1/2$

gegen (24). Die Funktion $i(a)$ bildet also die Menge $\{\alpha\}$ eindeutig auf einen Teil der natürlichen Zahlenreihe ab, woraus die Endlichkeit oder Abzählbarkeit der Menge $\{\alpha\}$ aller Indizes resultiert.

Es ist klar, daß jedes endliche O erweitert werden kann; zu den Funktionen $\varphi(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ braucht man nur ein unabhängiges $f(t)$ hinzuzufügen und aus den $n+1$ Funktionen durch Orthogonalisierung $\varphi_{n+1}(t)$ zu bilden.

Die Eigenschaft der Vollständigkeit oder der Abgeschlossenheit ist von Einfluß auf die Anzahl:

Ein vollständiges System ist stets unendlich. [342]

Besteht das System aus $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, kann man ein Polynom n -ten Grades $P(t)$

$$P(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$$

so bestimmen, daß

$$\int_a^b P(t) f_i(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sei; dieses führt auf n homogene Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, die man bekanntlich nichttrivial lösen kann; $P(t)$ ist dann nicht Null, und die Unvollständigkeit von $\{f\}$ erwiesen. [341J und [342] liefern das Resultat:

Ein ONV ist stets abzählbar-unendlich. [343]

Ein abgeschlossenes System (kurz: „A“) ist stets unendlich. [344]

Ist nämlich $\int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right]^2 dt < \epsilon$ für gewisse $\{c_i\}$, so liefert

das Häufungspunktverfahren ein $\{d_i\}$ mit

$$\int_a^b \left| f(t) - \sum_{i=1}^n d_i f_i(t) \right|^2 dt = 0,$$

also $f(t) = \sum_{i=1}^n d_i f_i(t)$ f. ü. Wählt man für $f(t)$ nacheinander $1, t, \dots, t^n$, so resultiert eine lineare Abhängigkeit der Potenzen $\{t^k\}$ ($k=0, 1, \dots, n$) untereinander, gegen einen elementaren Satz der Algebra.

[345J] Ein ONA ist stets abzählbar-unendlich.

Dieser Satz folgt aus [341] und [344].

Jetzt bringen wir Sätze, die vollständige oder abgeschlossene Systeme auf abzählbare reduzieren:

[346] Jedes abgeschlossene System enthält einen abzählbaren abgeschlossenen Teil.

Beweis: Sei $\{\omega_i(t)\}$ das in [341] so bezeichnete und $\{f_i(t)\}$ das gegebene, in bezug auf L^2 abgeschlossene System; wir bezeichnen mit $h(t)$ eine lineare Form $\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)$, wo die f_i beliebig aus $\{f\}$ zu wählen und die c_i beliebige Konstanten sind. Wir bilden das Schema

$$(25) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & h_{11} \\ & & & & & & h_{21}, \quad h_{22} \\ & & & & & & \dots \dots \dots \\ & & & & & & h_{p1}, \quad h_{p2}, \quad \dots, \quad h_{pp}, \end{array}$$

wo h_{pq} ($p, q = 1, 2, \dots$) ein $h(t)$ ist, welches die Ungleichung

$$|\omega_q - h_{pq}| < 1/p$$

erfüllt. Zu jedem Zahlenpaar p, q ($p \leq q$) gibt es ein h_{pq} , denn $\{f_i\}$ ist abgeschlossen. Ist n natürlich und $\varepsilon > 0$, so ist für $p > n$, $p > 1/\varepsilon$, $q = n$

$$|\omega_n - h_{pq}| < \varepsilon.$$

Betrachtet man jetzt bloß jene $f_i(t)$, die zum Bau der h_{pq} des Schemas (25) gebraucht wurden, so bilden sie einen höchstens abzählbaren Teil von $\{f\}$, denn (h_{pq}) ist abzählbar und jedes h_{pq} setzt sich aus endlichvielen f_i zusammen. Lineare Verbindungen der Elemente dieses Teiles $\{f_i\}$ nähern jedes $\omega_i(t)$ beliebig genau an. Da $\{\omega_i\}$ überalldicht ist, sind es jene linearen Verbindungen auch. $\{f_i\}$ ist also abgeschlossen; es ist höchstens abzählbar, also—laut [344] — abzählbar.

Jedes vollständige System enthält einen abzählbaren vollst an- [347]
digen Teil.

Beweis: Es sei $\{f\}$ in bezug auf L^2 vollständig. $\{f\}$ ist ein Teil von L^2 . L^2 ist aber separabel (vgl. [139]); es geht darum, zu zeigen, daß $\{f\}$ separabel ist; dies ist der Hauptpunkt des Beweises. Sei $\{g_i\}$ ein abzählbarer, überalldichter Teil von L^2 . Es sei δ_i die Distanz $(g_i, \{f\})$, d. h. die untere Grenze der Distanzen (g_i, f) für alle $f \in \{f\}$. Es gibt also ein f_i , so daß

$$\|g_i - f_i\| < \delta_i + 1/i.$$

Wir behaupten, daß die höchstens abzählbare Menge $\{f_i\}$ in $\{f\}$ überalldicht ist. Es sei nämlich f ein Element von $\{f\}$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein g_i mit $i > 3/\varepsilon$ und

$$\|f - g_i\| < \varepsilon/3;$$

infolgedessen ist $\delta_i < \varepsilon/3$; es folgt

$$\|g_i - f_i\| < \delta_i + 1/i < 2\varepsilon/3, \quad \text{also} \quad \|f - f_i\| < \varepsilon.$$

Jetzt zeigen wir, daß $\{f_i\}$ vollständig ist. Ist nämlich für ein $h(t) \in L^2$

$$(26) \quad \int_a^b h(t) f_i(t) dt = 0 \quad (I)$$

und $f(t)$ irgend eine Funktion aus $\{f\}$, so enthält, wie eben bewiesen, $\{f_i\}$ eine gegen $f(t)$ stark konvergente Folge und (26) liefert

$$\int_a^b h(t) f(t) dt = 0 \quad (II)$$

für alle $f \in \{f\}$; es ist also $h(t) = 0$ f. ü. Daher ist $\{f_i\}$ vollständig; da es höchstens abzählbar ist, so ist es nach [342] abzählbar und damit [347] bewiesen.

Dagegen braucht ein System von kontinuierlich-unendlich-vielen linear unabhängigen Funktionen nicht vollständig zu sein. Es sei S die Menge aller Funktionen aus L^2 im Intervall $[0, 1]$; definiert man jede Funktion in $(1, 2]$ als Null, so hat man ein Kontinuum von Funktionen in $[0, 2]$ erklärt. Dieses Kontinuum enthält einen Teil T von gleicher Mächtigkeit mit lauter linear-

unabhängigen Elementen. Setzt man $h(t) = 0$ in $< 0, 1$ - und $= 1$ in $(1, 2]$, so ist $h(t)$ zu allen Funktionen des Kontinuums T orthogonal und nicht Null f. ü.

§ 5. Vollständigkeit und Abgeschlossenheit.

In diesem § sollen einige Eigenschaften der vollständigen und der abgeschlossenen Systeme angegeben werden.

[351] *Ist ein System in $< a, b$ vollständig und ist $a < b' < b$, so ist es auch in $< a, b'$ vollständig.*

Diese Eigenschaft ist sofort ersichtlich, denn ist

$$\int_a^{b'} f(t) g(t) dt = 0 \quad (I)$$

für alle $f(t)$ des Systems und $g(t)$ nicht f. ü. Null in $< a, b'$, so kann man $g(t)$ in $[b', b]$ als Null erklären und man hat $\int_a^b f(t) g(t) dt = 0$ für dieses g und alle f des Systems. Die Unvollständigkeit in $< a, b'$ hat also die Unvollständigkeit in $< a, b$ zur Folge, w. z. b. w.

Aus dem Beweise sieht man auch, daß der umgekehrte Satz nicht gilt (so ist z.B. $\{\sin ix\}$ in $< 0, \pi$, aber nicht in $< \pi -$, vollständig). Analog zu [351] ist der Satz:

[352] *Ein in $< a, b$ abgeschlossenes System ist auch in $< a, b'$ abgeschlossen ($a < b' < b$). Es ist nämlich*

$$\int_a^{b'} \left| f(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right|^2 dt < \int_a^b \left| f(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right|^2 dt.$$

Vervollständigung von Systemen. Es ist trivial, daß jedes unvollständige System sich vervollständigen läßt; es genügt nämlich ein Beispiel eines vollständigen Systems zu haben und dieses hinzuzufügen. Nichttrivial ist aber:

[353] *Jedes ON läßt sich zu einem ONV erweitern durch Hinzunahme von geeigneten Funktionen.*

Beweis: $\{\varphi_i\}$ sei ON, aber nicht ONV. Die Menge $\{f\}$ aller normierten, zu sämtlichen φ_i orthogonalen Funktionen ist nicht leer. $\{\varphi_i\} + \{f\}$ ist bereits vollständig, wie unmittelbar ersichtlich, und enthält nach [347] einen vollständigen abzählbaren Teil T ; T enthält einen höchstens abzählbaren Teil $\{f_i\}$ von $\{f\}$ und ist daher in $\{\varphi_i\} + \{f_i\}$ enthalten; $\{\varphi_i\} + \{f_i\}$ ist also vollstän-

dig und abzählbar. Schreibt man $\{f_i\}$ als (endliche oder unendliche) Folge: $f_1, f_2, \dots$ und streicht sukzessive jedes f , welches von den vorhergehenden linear abhängig ist, so erhält man ein System $\{f_i\}$ von linear unabhängigen, normierten und zu allen φ_i orthogonalen Funktionen. $\{\varphi_i\} + \{f_i\}$ ist noch immer vollständig. Orthogonalisiert man $\{f_i\}$ und ist $\{\varphi_p\}$ das Ergebnis, so bildet $\{\varphi_i\} + \{\varphi_p\}$ ein durch Erweiterung von $\{\varphi_i\}$ gewonnenes ONV.

Eine wichtige Eigenschaft ist die Identität der Begriffe „vollständig“ und „abgeschlossen“ in bezug auf L^2 . Sie beruht auf zwei Sätzen, deren erster weniger tief liegt als der zweite.

Jedes abgeschlossene System ist vollständig. [354]

Beweis: Ein abgeschlossenes System $\{f\}$ enthält nach [346] einen abgeschlossenen abzählbaren Teil $\{f_i\}$. Ist $\{\varphi_i\}$ das aus $\{f_i\}$ durch Orthogonalisierung gewonnene ON, so ist $\{\varphi_i\}$ abgeschlossen. Es sei nun $\int_a^b g(t) f_i(t) dt = 0$ (i); es folgt $\int_a^b g(t) \varphi_i(t) dt = 0$ (i). Ist $s_n(t)$ die n-te Partialsumme der Orthogonalentwicklung von $g(t)$ nach $\{\varphi_i\}$ ([253]), so ist — wegen [267] —

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |g(t) - s_n(t)|^2 dt = 0.$$

Nun sind hier aber die Koeffizienten der Entwicklung Null, es verschwindet also $s_n(t)$ und es folgt $g(t) = 0$ f. ü.

Jedes vollständige System ist abgeschlossen. [355]

Beweis: Laut [347] enthält ein vollständiges System $\{f\}$ einen vollständigen abzählbaren Teil $\{f_i\}$. Daraus gewinnt man durch Orthogonalisierung ein ON $\{\varphi_i\}$, welches nach [315] ebenfalls vollständig ist. Wir werden zeigen, daß $\{\varphi_i\}$ abgeschlossen ist. Denn sonst gäbe es ein $g(t) \in L^2$ und ein $\alpha > 0$ mit

$$(27) \quad \int_a^b |g(t) - s_n(t)|^2 dt > \alpha \quad (n)$$

(wo $s_n(t)$ wie in [354] erklärt ist); schreibt man $c_i = \int_a^b g(t) \varphi_i(t) dt$, so ist nach [264]

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty,$$

also $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|s_m - s_n\| = 0$, d. h. $\{s_n(t)\}$ ist ([161]) stark konvergent; L^2 ist — wie wir in [131] gesehen haben — ein kompletter Raum, es gibt also ein $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)$ in L^2 ; man hat $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0$ und die Schwarz'sche Ungleichung gibt

$$\left| \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt - c_i \right| = \left| \int_a^b [f(t) - s_n(t)] \varphi_i(t) dt \right| \leq \|f - s_n\| \|\varphi_i\| = \|f - s_n\| > 0, \quad (n > i)$$

d. h.

$$(28) \quad \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt = c_i \quad (i).$$

Es folgt $\int_a^b [f(t) - g(t)] \varphi_i(t) dt = 0$ (i) und die Vollständigkeit von $\{\varphi_i\}$ liefert $f(t) = g(t)$ f. ü. Man darf also in (27) f für g schreiben und erhält $\|f - s_n\| > \sqrt{\alpha}$ für alle n , gegen das bewiesene $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0$. Das System $\{\varphi_i\}$ ist also abgeschlossen; so ist es auch $\{f_i\}$ ([316]) und somit $\{f\}$, w. z. b. w.

[355] ist tiefer als [354], denn 1° ist das Lemma [347] versteckter als [346], 2° ist die Eigenschaft [131], eine der wichtigsten in der Theorie des Raumes L^2 , die selbst einen nichttrivialen Beweis erfordert hat, für den Beweis von [355] wesentlich.

Der Beweis für [355] enthält die Begründung eines berühmten, ungefähr gleichzeitig von Friedrich Riesz und Ernst Fischer (1907) entdeckten Satzes:

[356] Ist $\{\varphi_i(t)\}$ orthogonal und normiert und $\{c_i\}$ eine Zahlenfolge von konvergenter Quadratsumme, so gibt es ein $f(t) \in L^2$, dessen Orthogonalentwicklung nach $\{\varphi_i(t)\}$ die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

liefert.

Denn [356] behauptet nichts anderes, als daß man unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ ein $f(t) \in L^2$ mit (28) finden kann, was wir im Beweise von [355] lesen können, wenn wir von der Entstehungsweise der C_i absehen, $s_n(t)$ als $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$ verstehen und mit (28) den Gedankengang abschließen.

Anwendungen. Das System $\{\sin it\}$ ist in 0 , nach [234] vollständig in bezug auf L^2 , es ist also nach [355] abgeschlossen in bezug auf L^2 . Daraus folgt aber die Abgeschlossenheit in bezug auf L . Denn für ein $f(t) \in L$ gibt es — nach [129] — ein $g(t) \in C$ mit

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ist $w_n(t)$ ein Sinuspolynom n ter Ordnung mit

$$\int_a^b |g(t) - w_n(t)|^2 dt < \frac{\epsilon^2}{4(b-a)},$$

so ist $\int_a^b |g(t) - w_n(t)| dt < \frac{\epsilon}{2}$, also $\int_a^b |f(t) - w_n(t)| dt < \epsilon$, w. z. b. w.

Ebenso erhält man die Abgeschlossenheit von $(\cos it)$ in 0 , in bezug auf L^2 und L .

Der Weierstraß'sche Satz [122] zeigt die Abgeschlossenheit der Polynome in bezug auf C ; obiger Schluß überträgt diese Eigenschaft auf L und L^2 . Daraus folgt nach [354] die Vollständigkeit der Polynome in bezug auf L^2 . Wir wollen nun, indem wir einen klassischen Lerch'schen Satz verschärfen, die Vollständigkeit in bezug auf L zeigen. Der Lerch'sche Satz lautet:

Ist $f(t)$ in $0, 1$ stetig und [357]

$$\int_0^1 f(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

so ist $f(t) = 0$.

In dieser Form haben wir eigentlich den Satz bereits bewiesen, denn ist W die Menge aller Polynome $w(t)$, so impliziert die Lerch'sche Voraussetzung, daß

$$\int_a^b f(t) w(t) dt = 0 \quad (w \in W)$$

und — da W in bezug auf L^2 , also umsomehr in bezug auf C vollständig — daß $f(t) = 0$ f. ü., d. h. daß $f(t) \equiv 0$ ist.

Es sei jetzt $f(t) \in L$ und $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0 \quad (n)$. Setzen wir [358]

$$F(t) = \int_0^t f(u) du;$$

es kommt

$$\int_0^1 f(t) t^n dt = \left[-F(t) t^n \right]_0^1 + \int_0^1 n F(t) t^{n-1} dt = n \int_0^1 F(t) t^{n-1} dt \quad (n \geq 1),$$

d. h. $\int_0^1 F(t) t^n dt = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), und der Lerch'sche Satz liefert $F(t) = 0$, woraus $f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = 0$ f. ü. folgt.

Der Satz [358] ist für ein beliebiges Intervall a, b gültig.

Ist nämlich $\int_a^b f(t) t^n dt = 0$ und setzt man $\frac{t-a}{b-a} = \tau$, $f(t) = \varphi(\tau)$,

so ist $\varphi(\tau) \in L$, wenn $f(t) \in L$, und wegen $\tau^n = \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^n$ ergibt die

Voraussetzung $\int_a^b f(t) \tau^n dt = 0$, d. h. $(b-a) \int_0^1 \varphi(\tau) \tau^n d\tau = 0$, woraus $\varphi(\tau) = 0$ f. ü. nach [358] und $f(t) = 0$ f. ü. resultiert. A fortiori ist W in a, b vollständig in bezug auf L .

[359] Die Orthogonalisierung der Potenzen $\{t^n\}$ in $-1, +1$ führt auf Legendre'sche Polynome [317]. Auf Grund des eben Bewiesenen und auf Grund des allgemeinen Satzes [315] bilden diese Polynome ein ONV; [355] zeigt, daß sie auch ein ONA bilden (was sich übrigens auch leicht aus [122] folgern läßt).

§ 6. Der Müntz'sche Satz.

Dieser Satz ist eine Vervollkommenung des Weierstraß'schen und des Lerch'schen Satzes. Allgemein gesprochen: in der Folge $\{t^n\}$ sind nicht alle Glieder nötig, um ein abgeschlossenes System zu erhalten. Genau formuliert lautet das Problem: Wie muß die Exponentenfolge $\{p_i\}$ beschaffen sein, damit das Funktionensystem $\{t^{p_i}\}$ in $0, 1$ in bezug auf L^2 abgeschlossen sei?

Zunächst darf man alle $p_i > -1/2$ voraussetzen; sonst wären bei der Annäherung an irgend eine Funktion in L^2 die (etwa vorhandenen) t^{p_i} ($p_i \leq -1/2$) stets mit Nullen als Koeffizienten zu versehen, damit die Summe $\sum c_i t^{p_i}$ zu L^2 gehöre; sie spielen also keine Rolle bei der Annäherung. Wir wenden die Formel [333] an, um die beste Annäherung an $g(t) = t^q$ ($q > -1/2$) mittels einer aus den n ersten t^{p_i} gebildeten Linearform zu berechnen. In dortigen Bezeichnungen ist jetzt

$$a_{ik} = \int_0^1 t^{p_i} t^{p_k} dt = \frac{1}{p_i + p_k + 1},$$

$$g_0 = \int_0^1 (t^q)^2 dt = \frac{1}{q + q + 1}, \quad g_i = \int_0^1 t^q \cdot t^{p_i} dt = \frac{1}{q + p_i + 1} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Ist also $w_n(t)$ die gesuchte Linearform, so wird

$$\|t^q - w_n(t)\| = \int_0^1 \frac{G(t^q, t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n})}{G(t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n})}$$

mit

$$G(t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{p_1 + p_1 + 1} & \frac{1}{p_1 + p_2 + 1} & \dots & \frac{1}{p_1 + p_n + 1} \\ \frac{1}{p_2 + p_1 + 1} & \frac{1}{p_2 + p_2 + 1} & \dots & \frac{1}{p_2 + p_n + 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{p_n + p_1 + 1} & \frac{1}{p_n + p_2 + 1} & \dots & \frac{1}{p_n + p_n + 1} \end{vmatrix}$$

$$G(t^q, t^{p_1}, \dots, t^{p_n}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{q + q + 1} & \frac{1}{q + p_1 + 1} & \dots & \frac{1}{q + p_n + 1} \\ \frac{1}{p_1 + q + 1} & \frac{1}{p_1 + p_1 + 1} & \dots & \frac{1}{p_1 + p_n + 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{p_n + q + 1} & \frac{1}{p_n + p_1 + 1} & \dots & \frac{1}{p_n + p_n + 1} \end{vmatrix}.$$

★

Zur Auswertung dieser Determinanten brauchen wir einen Cauchy'schen Satz über Determinanten der Form

$$D = \begin{vmatrix} 1 \\ p_i + q_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

nach welchem der Wert von D gleich

$$(29) \quad \frac{\prod_k (p_i - p_k) (q_i - q_k)}{\prod_{i, k=1, 1}^{n, n} (p_i + q_k)}$$

ist. Hier ist das Produkt im Nenner über alle n^2 Paare (i, k) von

(1,1) bis (n,n) erstreckt, während im Zähler der Vorbehalt $i > k$ die Anzahl der Faktoren vermindert.

Beweis des Cauchy'schen Satzes: Entwickelt man D und summiert alle Glieder, so sieht man, daß D eine rationale Funktion $(-z)$ -ten Grades der p_i, q_k ist, denn jedes $\frac{1}{p_i + q_k}$ hat den Grad -1 . Bringt man also D auf den (gemeinsamen) Nenner $\prod_{i,k=1}^{n,n} (p_i + q_k)$ vom Grade n^2 , so erhält der Zähler höchstens den Grad $n^2 - n$. Nun muß aber der Zähler für $p_i = p_k$ ($i \neq k$) und $q_i = q_k$ ($i \neq k$) verschwinden, denn dann sind zwei Zeilen (bzw. Spalten) von D miteinander identisch. Es muß also der Zähler alle Faktoren $p_i - p_k, q_i - q_k$ ($i \neq k$) enthalten, deren es $n^2 - n$ gibt. Diese Anzahl stimmt mit dem Grade des Zählers überein, es kann also bloß noch ein konstanter Faktor das Produkt $\prod_{i,k} (p_i - p_k) (q_i - q_k)$ multiplizieren. Man sieht aber, daß bei der Reduktion auf den

★ Nenner $\prod_{i,k=1}^{n,n} (p_i + q_k)$ das Zählerpolynom lauter Glieder mit -1 als Koeffizienten erhält. Es handelt sich also bloß um das Vorzeichen; nun ist aber D für $p_i = m^{i-1}, q_i = 1 - m^{i-1}$ (i) für große positive w -Werle nahe an 1 und (29) ebenfalls; demnach ist das Vorzeichen $+$ und D mit dem Bruch (29) als identisch erwiesen.

Wir können den Cauchy'schen Satz auf $G(t^p, t^{p^2}, \dots, t^{p^n})$ anwenden, indem wir $p_i = 1/2$ für p_i - und $p_k = 1/2$ für q_k einsetzen. Es kommt

$$G(t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n}) = \frac{\prod_{i,k} (p_i - p_k)^2}{\prod_{i,k=1}^{n,n} (p_i + p_k + 1)}$$

und ebenso

$$G(t^q, t^{q^2}, \dots, t^{q^n}) = \frac{\prod_{i,k} (p_i - p_k)^2 \cdot \prod_{i,k=1}^n (p_i - q)^2}{\prod_{i,k=1}^{n,n} (p_i + p_k + 1) \cdot \prod_{i,k=1}^n (p_i + q + 1)^2 \cdot (2q + 1)},$$

also

$$(30) \quad \|t^q - w_n(t)\|^2 = \frac{1}{2q+1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right)^2.$$

Damit das System $\{t^p\}$ inbezug auf L^2 abgeschlossen sei, muß — bei jedem $q > 0$ — der Ausdruck $\|t^q - w_n(t)\|$ beliebig klein gemacht werden können durch entsprechende Wahl von n und $t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n}$ aus $\{t^p\}$. Andererseits ist dieses hinreichend, denn die t^q ($q \geq 0$) bilden gewiß ein abgeschlossenes System und man kann wie beim Beweise von [245] schließen. Nach (30) verlangt diese notwendige und hinreichende Bedingung, daß das Exponentensystem $\{p\}$ zu jedem q eine Folge $\{p_i\}$ mit

$$(31) \quad \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right)^2 = 0$$

enthalte (dabei sind Produkte mit Nullfaktoren als konvergent anzusehen).

1° Hat $\{p\}$ einen Häufungspunkt/; im Endlichen und $p \geq 1/2$, so gibt es eine Folge $\{p_i\}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$; dann ist

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i - q}{p_i + q + 1} = \frac{p - q}{p + q + 1}$$

und, wegen $q \geq 0$, $p \geq 1/2$,

$$\left| \frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right| < 1,$$

woraus (31) folgt.

2° Ist $-1/2$ Häufungspunkt von $\{p\}$, so schreibe man

$$(32) \quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right)^2 = \frac{\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{p_i + 1/2}{q + 1/2} \right)^2}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{p_i + 1/2}{q + 1/2} \right)^2} \quad (\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = -1/2)$$

und unterscheide zwei Fälle:

$$\alpha) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |p_i + 1/2| < \infty, \quad \beta) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i + 1/2 = \infty.$$

Im Falle a) konvergiert das Zählerprodukt (32) gegen Null dann und nur dann, wenn ein Faktor verschwindet, d. h. wenn $q = p_i$ für ein i ist. Ist aber q von allen p_i verschieden, so ist der Grenzwert des Zählerproduktes positiv; da

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p_i + 1/2}{q + 1/2} \right)^2 < \infty,$$

so ist in diesem Falle für gewisse q und die betrachtete Folge $\{p_i\}$ das Kriterium (31) nicht erfüllt.

Im Falle β) ist, wegen $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = -1/2$, $p_i > -1/2$, von einem i an

$$0 < \frac{p_i + 1/2}{q + 1/2} < 1,$$

also das Zählerprodukt (wegen β)) gegen Null konvergent; das Nennerprodukt ist divergent gegen ∞ , also das Kriterium (31) erfüllt.

3^o Ist $\lim p_i = +\infty$ und $q \neq p_i$ (i), so schreibt man

$$(33) \quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right)^2 = \left(\frac{\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{q}{p_i} \right)}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{q+1}{p_i} \right)} \right)^2$$

und unterscheidet die Fälle

$$\alpha) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ p_i \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{p_i} < +\infty,$$

$$\beta) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ p_i \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Im Falle α) konvergiert das Zählerprodukt rechts in (33) gegen eine endliche von Null verschiedene Zahl und dasselbe gilt vom Nenner. Im Falle β) konvergiert der Zähler gegen Null, der Nenner divergiert gegen ∞ . Es ist also das Kriterium (31) im Falle α) nicht erfüllt, wohl aber im Falle β).

Das Gesagte ist im folgenden Satz enthalten:

[361] Damit das System $\{te\}$ ($0 < t < 1$) in bezug auf L^2 abgeschlossen sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Exponentenmenge $\{p\}$ eine Folge $\{p_i\}$ mit einem endlichen Grenzwert $p_\infty > -1/2$ enthalte, oder eine Folge $\{p_i\}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = -1/2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |p_i + 1/2| = \infty,$$

oder eine Folge $\{p_i\}$ mit

$$p_i \neq 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} p_i = +\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Um die Notwendigkeit einzusehen, beachte man, daß im Falle, wo $\{p\}$ keine Folge $\{p_i\}$ einer der drei im Satze genannten Arten enthält, $\{p\}$ nur endlich sein, oder aus einer Folge $\{p_i\}$ mit

$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = -1/2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |p_i + 1/2| < \infty$, oder aus einer Folge $\{p_i\}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = +\infty$ und $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i < +\infty$ ($p_i \neq 0$), oder — schließlich — aus zwei solchen elementfremden Folgen $\{p_i\}$ $\{q_i\}$ bestehen kann. Ist dann q von allen p_i, q_i verschieden und ist

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right)^2 = a, \quad \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{q_i - q}{q_i + q + 1} \right)^2 = b,$$

so ist stets $\|t^n - w_n(t)\| \geq \sqrt{a}/\sqrt{2q+1}$ bzw. $\sqrt{b}/\sqrt{2q+1}$ bzw. $\geq \sqrt{ab}/\sqrt{2q+1}$, wenn $\{p\}$ unendlich ist; ist $\{p\} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, so ist

$$\|t^n - w_n(t)\| \geq \frac{1}{\sqrt{2q+1}} \prod_{i=1}^n \left| \frac{p_i - q}{p_i + q + 1} \right|,$$

also hat in allen Fällen die Annäherung eine untere positive, effektiv bestimmte Grenze.

Beispiele. Ist $\{p_i\}$ die Folge aller (positiven) Primzahlen, so ist $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = +\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i = +\infty$; das System $\{t^{p_i}\}$ ist also abgeschlossen. Das System $\{t^{n/(n+1)}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) ist abgeschlossen, denn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Ebenso ist $\{t^n\}$ ein abgeschlossenes System. Diese beiden Systeme sind dicht-abgeschlossen im Sinne von [247], wie man sofort einsieht. Dagegen ist $\{t^{-1/2+1/n}\}$ abgeschlossen, aber nicht dicht-abgeschlossen, denn $\{t^{-1/2+1/n}\}$ ist überhaupt nicht mehr abgeschlossen.

[354J mit [361] geben ein Kriterium für die Vollständigkeit von $\{t^p\}$ in bezug auf ZA. Es kann also der Lerch'sche Satz in einer anderen Richtung als [358] verschärft werden:

Ist $f(t) \in L^2$ und

$$\int_0^1 f(t) \cdot t^p \cdot dt = 0 \quad (p), \quad [362$$

wo die Exponentenmenge $\{p\}$ dem Kriterium [361] genügt, so ist $f(t) = 0$ f. ü. (z.B. kann p alle Primzahlen durchlaufen).

Auch dieser Satz kann teilweise auf L ausgedehnt werden:

Ist $f(t) \in L$ und

$$\int_0^1 f(t) t^{p_i} dt = 0 \quad (i),$$

$$(34) \quad p_i > 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} p_i = +\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty,$$

so ist $f(t) = 0$ f. ü.

Man setze $F(t) = \int_t^1 f(u) du$; es folgt

$$\int_0^1 f(t) t^{p_i} dt = p_i \int_0^1 F(t) t^{p_i-1} dt = 0 \quad (i).$$

Nun ist aber $F(t) \in L^2$, $\lim_{i \rightarrow \infty} (p_i - 1) = +\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i - 1} = +\infty$

(wo $\sum'$ bedeutet, daß $p_i = 1$ gestrichen wurde), also ist nach [362] $F(t) = 0$ und $f(t) = 0$ f. ü.

[363] Es hat sich also das System $\{t^{p_i}\}$ bei den Voraussetzungen (34) als vollständig inbezug auf L herausgestellt. Dieses System ist inbezug auf L abgeschlossen, da es inbezug auf L^2 diese Eigenschaft besitzt (vgl. [356] Anw.). Nun aber hat (34) zur Folge:

$p_i - 1 > 0$ (von einem i_1 an), $\lim_{i \rightarrow \infty} (p_i - 1) = +\infty$, $\sum_{i=i_1}^{\infty} 1/p_i = \infty$, woraus für $\{t^{p_i-1}\}$ die Abgeschlossenheit inbezug auf L resultiert.

[364] Zieht man jetzt [245] heran, so folgt: Unter den Voraussetzungen

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = +\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty \quad (p_i \neq 0)$$

ist $\{t^{p_i}\}$ zusammen mit der Einheit ein inbezug auf C abgeschlossenes System. (Ist die Bedingung $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i = +\infty$ nicht erfüllt, so ist das System nicht einmal inbezug auf A^2 , also sicher nicht inbezug auf C abgeschlossen. Die Einheit ist auch notwendig; sonst könnte man keine in $t = 0$ von Null verschiedene Funktion gleichmäßig annähern, da alle t^{p_i} ($p_i > 0$) für $t = 0$ verschwinden).

[364] ist die Müntz'sche Verschärfung des Weierstraß'schen Satzes [122]: Für Folgen $\{p_i\}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = +\infty$ erweist sich die Divergenz von $\sum' 1/p_i$ zusammen mit $0 \in \{p_i\}$ als notwendig und hinreichend, um im Weierstraß'schen Satz mit den t^{p_i} -Potenzen allein auszukommen.

§ 7. Die Parseval'sche Gleichung.

Wir haben bereits im II-ten Kapitel die sogenannte Bessel'sche Ungleichung [264] abgeleitet:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt.$$

Hierin sind c_i die Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ nach einem ON $\{\varphi_i\}$. Im Falle eines ONA wird daraus die Parseval'sche Gleichung [371]

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \int_a^b f^2(t) dt.$$

Beweis: Ist $s_n(t)$ die Partialsumme $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$, so ist (II, 6, (30))

$$(36) \quad \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

Nach [267J] konvergiert für $n \sim$ das linkerhand in (3i) stehende Integral gegen Null, wenn $\{\varphi_i\}$ ein ONA ist; daraus folgt aber (35).

Für das trigonometrische System wurde (35) allgemein (d.h. für $f \in L^2$) von P. Fatou bewiesen, bevor noch der Riesz-Fischer'sche Satz bekannt war.

Die Gleichung (35) führt zu

$$(37) \quad \int_a^b f(t) g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n \quad [372]$$

(mit absoluter Konvergenz der rechtsstehenden Reihe), wenn $\{\varphi_i\}$ ein ONA ist und (II, 5, (25))

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(t).$$

Denn es gilt $f(t) \pm g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \pm d_n) \varphi_n(t)$, also nach (35)

$$\int_a^b (f(t) \pm g(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \pm d_n)^2,$$

woraus durch Subtraktion die Formel (37) folgt.

Geometrisch gesprochen gibt (35) die Länge des Vektors $f(t)$, ausgedrückt durch seine Komponenten in bezug auf das rechtwinklige Koordinatensystem $\{\varphi_i\}$; die Vektoren φ_i sind hier die Einheitsvektoren, die das Koordinatensystem definieren. (37) ist die Formel für das Skalarprodukt zweier Vektoren f, g .

Setzt man in (37) $f(t)$ für $g(t)$, so folgt (35) aus (37). Andererseits zeigt (36), daß aus (35)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = 0$$

folgt. Wenn wir noch [354] und [355] heranziehen, so folgt unmittelbar:

[373] Damit ein ON $\{\varphi_i(t)\}$ in bezug auf L^2 vollständig sei, ist eine jede der drei Bedingungen $1^\circ 2^\circ 3^\circ$ notwendig und hinreichend:

$1^\circ \{\varphi_i(t)\}$ ist abgeschlossen in bezug auf L^2 ;

$2^\circ \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \int_a^b f^2(t) dt$ für alle f in L^2 ;

$3^\circ \sum_{i=1}^{\infty} c_i d_i = \int_a^b f(t) g(t) dt$ für alle f, g in L^2 .

Die Bedingung 2° kann abgeschwächt werden: es genügt die Parseval'sche Gleichung für alle f eines vollständigen Systems $\{f\}$ vorauszusetzen. Die Notwendigkeit ist evident. Setzen wir voraus, 2° sei in der neuen Fassung richtig; $\{f\}$ ist vollständig, also abgeschlossen; ist $g \in L^2$, so gibt es zu $\epsilon > 0$ eine Linearform $\sum_{i=1}^n \gamma_i f_i(t)$ mit

$$\left\| g(t) - \sum_{i=1}^n \gamma_i f_i(t) \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nun aber folgt aus $2^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n(t)\| = 0$ für alle f , also auch

$$\|\gamma_i f_i(t) - \gamma_i s_{n_i}^{(i)}(t)\| < \frac{\epsilon}{2n} \quad \text{für } n_i > N_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

woraus

$$(38) \quad \left\| g(t) - \sum_{i=1}^n \gamma_i s_{n_i}^{(i)}(t) \right\| < \epsilon$$

resultiert. Dabei sind die $s^{(i)}(t)$ Partialsummen der Entwicklungen

von $f_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$) nach $\{\varphi_k(t)\}$ und $\sum_{i=1}^n \gamma_i s_{n_i}^{(f)}(t)$ eine Linearform in endlichvielen $\varphi_k(t)$; (38) zeigt, daß $\{\varphi_k(t)\}$ abgeschlossen, also auch vollständig ist, w. z. b. w.

Eine Folgerung aus dem Vorhergehenden sind die Sätze:

Eine (notwendige und) hinreichende Bedingung, damit ein ON $\{\Phi_k(t)\}$ vollständig sei, ist die Beziehung

$$\int_a^b t^{2n} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b t^n \varphi_k(t) dt \right)^2 \quad (n)$$

für alle $n (= 1, 2, \dots)$. Eine ebensolche Bedingung ist die Beziehung

$$\beta - \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_k(t) dt \right)^2 \quad (\alpha, \beta)$$

für alle α, β mit $a < \alpha < \beta < b$. Hier ist als das System $\{\varphi_k(t)\}$ im ersten Falle $\{t^n\}$, im zweiten die Gesamtheit der Funktionen $f(t)$, die $=1$ in α, β und $=0$ sonst in a, b , gewählt worden.

§ 8. Der Riesz-Fischer'sche Satz.

Wir haben diesen Satz bereits in [356] ausgesprochen und bewiesen. Hier wollen wir einen anderen Beweis bringen. [381]

Es sei $\{\varphi_i(t)\}$ ein ON, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$. Wir schreiben

$$\psi_i(t) = \int_a^t \varphi_i(u) du, \quad F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t)$$

und bemerken, daß die letztgeschriebene Reihe gleichmäßig konvergiert, wie aus dem Beweise von [269] sofort ersichtlich. Es ist also $F(t)$ vorhanden und stetig. Wir werden zeigen, daß $F(t)$ total-stetig ist. Schreibt man nämlich

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(t), \quad s_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t),$$

so ist

$$(39) \quad S'_n(t) = s_n(t) \text{ f. ü.,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = F(t) \text{ gleichmäßig.}$$

Ist nun E eine t -Menge, $Y(t)$ ihre charakteristische Funktion, so ist

$$\begin{aligned} \int_E |S'_n(t)| dt &= \int_E |s_n(t)| dt = \int_a^b |\gamma(t)| |s_n(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \gamma^2(t) dt \cdot \int_a^b s_n^2(t) dt \leq \int_a^b |E| \cdot \int_{i=1}^{\infty} c_i^2. \end{aligned}$$

Es ist also die Schwankung von $S_n(t)$ über einer Menge E zugleich mit $|E|$ beliebig klein, wie auch n gewählt werden mag. Damit ist aber die Totalstetigkeit von $F(t)$ bewiesen. Es hat also $F(t)$ fast überall eine Ableitung $f(t)$ und es ist $(S_n(a)=0, F(a)=0)$

$$(40) \quad F(t) = \int_a^t f(u) du.$$

Jetzt zeigen wir, daß $\{s_n(t)\}$ gegen $f(t)$ schwach konvergiert. Dazu ist, nach [164] mit $p=2$, notwendig und hinreichend:

$$\int_a^b |s_k(t)|^2 dt \leq \lambda \quad (\lambda \text{ frei von } k),$$

★

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^t s_k(u) du = \int_a^t f(u) du \quad (a \leq t \leq b).$$

Die erste Bedingung ist mit $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ erfüllt, die zweite mit (89) und (40) gleichbedeutend. Die Eigenschaft (23) des § 6 des 1-ten Kapitels, die einer schwachkonvergenten Folge zukommt ($P = P' = 2$), gibt

$$(41) \quad c_i = \int_a^b s_n(t) \varphi_i(t) dt \quad (n > i),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(t) \varphi_i(t) dt = \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt.$$

Da die schwache Grenze einer Folge in L^2 auch zu L^2 gehört, zeigt (41), daß wir eine Funktion $f(t)$ in L^2 gefunden haben, deren Entwicklung die vorgeschriebenen Koeffizienten $\{c_i\}$ aufweist. Das ist aber der Inhalt des Riesz-Fischer'schen Satzes.

Dieser Beweis erlaubt die Funktion $f(t)$ auf dem Umweg über die gleichmäßig konvergente Reihe für $F(t)$ wirklich zu bestimmen. Aber auch der erste Beweis entbehrt nicht dieses Vorzugs. Er stützt sich auf die starke Konvergenz der Folge $\{s_n(t)\}$

und auf das Cauchy'sche Postulat, d. h. auf die Eigenschaft von L^2 , die in [131] ausgesprochen und bewiesen wurde. Wegen

$$\|s_m - s_n\| = \left(\sum_{n+1}^m c_i^2 \right)^{1/2} \quad (m > n)$$

sind die zur Konstruktion einer im gewöhnlichen Sinne (f. ü.) konvergenten Teilfolge $\{s_{n_k}\}$ brauchbaren Indizes $\{n_k\}$ (die wir in [131] als vorhanden erwiesen) jetzt aus der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ zu finden:

Ist nämlich $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und

$$r_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2,$$

so bestimme man $n_1, n_2, \dots$ aus $r_{n_1} < \varepsilon_1^2, r_{n_2} < \varepsilon_2^2, \dots, r_{n_k} < \varepsilon_k^2, \dots$; es kommt

$$\|s_{n_2} - s_{n_1}\| < \varepsilon_1, \quad \|s_{n_3} - s_{n_2}\| < \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \|s_{n_{k+1}} - s_{n_k}\| < \varepsilon_k, \quad \dots$$

Nach [131] (wo $p = 2$ und s statt x gesetzt werde) wird dann $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}(t) = f(t)$ f. ü. und die gewöhnliche Grenze der Teilfolge ist mit der starken Grenze der ganzen Folge identisch.

Die Funktion $f(t)$, deren Existenz der Riesz-Fischer'sche Satz verbürgt und die in [381] und [382] eindeutig und übereinstimmend berechnet wurde, ist selbstverständlich die einzige Lösung des Problems, aus der Entwicklung die Funktion zu bestimmen, wenn das System $\{\varphi_i(t)\}$ vollständig ist. Ist es unvollständig, so gibt es nichtverschwindende Funktionen $g(t)$, deren Entwicklung nach $\{\varphi_i(t)\}$ lauter Nullen zu Koeffizienten hat. Dann hat aber $f(t) + g(t)$ dieselbe Entwicklung wie $f(t)$ und die Summe $f(t) + g(t)$ — wo $g(t)$ alle oben bezeichneten Funktionen durchläuft — liefert auch alle Funktionen mit der gegebenen Entwicklung. Unter ihnen zeichnet sich das in [381] und [382] gefundene $f(t)$ durch die kleinste Norm aus. Ist nämlich $g(t)$ orthogonal zu allen $\varphi_i(t)$, aber nicht f. ü. Null, so ist

$$\int_a^b s_n(t) g(t) dt = 0 \quad \text{in)}$$

und, da $f(t)$ als die schwache Grenze von $s_n(t)$ erkannt wurde,

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0,$$

also

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]^2 dt = \int_a^b f^2(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt > \int_a^b f^2(t) dt.$$

Wir haben in der Unizität des Riesz-Fischer'schen Problems eine Eigenschaft, die mit der Vollständigkeit, also auch mit den drei Bedingungen in [373] einzeln äquivalent ist.

Ein Beispiel. In

$$(42) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)}{i}$$

ist $c_i = 1/i$. Setzt man $\varepsilon_i = 1/i^2$, so hat man $n_1, n_2, \dots$, aus $r_{n_1} < 1/1^4$, $r_{n_2} < 1/2^4, \dots$ zu bestimmen, wo $r_{n_k} = \sum_{n_k+1}^{\infty} 1/i^2 < 1/n_k^4$. Es genügt also $1/n_k < 1/k^4$, d. h. $n_k > k^4$ zu verlangen. Es sind also z. B. die Partialsummen $s_k(t)$ einer Reihe wie (42) stets f. ü. konvergent gegen ein $f(t)$, dessen Entwicklung sie ist.

[383] *Der Riesz-Fischer'sche Satz schafft eine eindeutige Beziehung zwischen allen Funktionen aus L^2 und allen Zahlenfolgen von konvergenter Quadratsumme durch Vermittlung eines ONV.*

Es seien $\{\varphi_i\}, \{\psi_j\}$ zwei ONV; man setze

$$e_{ik} = \int_a^b \varphi_i(t) \psi_k(t) dt;$$

die Parseval'schen Formeln [371], [372] liefern

$$(43) \quad \sum_{k=1}^{\infty} e_{ik}^2 = \int_a^b \varphi_i^2(t) dt = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} e_{ik} e_{jk} = \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = 0,$$

und die Matrix

$$E = \|e_{ik}\|$$

erweist sich als zeilenweise normiert-orthogonal; sie ist aber auch zeilenweise vollständig: wäre sie es nicht (Df. [324]), und wäre

$\sum_{k=1}^{\infty} e_{0k}^2 = 1, \sum_{k=1}^{\infty} e_{0k} e_{ik} = 0 \quad (i=1, 2, \dots)$, so würde nach dem Riesz-

Fischer'schen Satze eine Funktion $\varphi_0(t)$ vorhanden sein, deren Entwicklung nach dem ONV $\{\varphi_k(t)\}$ $\{e_{ok}\}$ ZU Koeffizienten hätte; die Parseval'schen Formeln gäben dann

$$(44) \quad \int_a^b \varphi_0^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} e_{0k}^2 = 1,$$

$$\int_a^b \varphi_0(t) \varphi_i(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} e_{0k} e_{ik} = 0 \quad (i=1,2,\dots),$$

gegen die Voraussetzung der Vollständigkeit von $\{\varphi_i\}$. Dieselbe Überlegung zeigt, daß E auch spaltenweise ein ONV ist.

Wir können aber die Matrix E als gegeben annehmen; ist sie zeilenweise normiert-orthogonal und ist $\{\varphi_k(t)\}$ ein ÖNV, so kann jede Zeile als Koeffizientenfolge einer (eindeutig bestimmten) Funktion $\varphi_i(t)$ nach $\{\varphi_k(t)\}$ betrachtet werden; die Formeln (43) (nach Umstellung der zwei ersten Glieder) beweisen die Orthogonalität und Normiertheit von $\{\varphi_i(t)\}$; ebenso besagen die Formeln (44), daß $\{\varphi_i(t)\}$ im Falle der Zeilenvollständigkeit von E vollständig ist. Daraus folgt:

Damit die Matrix // e_{ik} // als Koeffizientenschema eines ON $\{\varphi_i\}$ nach einem ONV $\{\varphi_k\}$ betrachtet werden könne, ist die Orthogonalität und Normiertheit ihrer Zeilen notwendig und hinreichend. Damit dann noch $\{\varphi_i(t)\}$ vollständig sei, ist die Zeilenvollständigkeit der Matrix notwendig und hinreichend. [384]

In Verbindung mit dem Riesz Fischer'schen Satz steht die Frage, ob die Reihenfolge in einem ONV wesentlich ist. M. a. W.: Wenn $\{\varphi_i(t)\}$ ein ONV ist, $\{\varphi_{n_k}(t)\}$ eine Umordnung von $\{\varphi_n(t)\}$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ derselben Umordnung unterworfen wird, ob dann die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} \varphi_{n_k}(t)$$

Entwicklungen derselben Funktion sind?

Die bejahende Antwort ist leicht aus den Ausführungen [356] abzulesen. Es ist nämlich bloß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m c_{n_i} \varphi_{n_i}(t)$$

zu beweisen, denn die beiden starken Limites geben die gesuchten Funktionen. Nun ist aber — für genügend große m —

$$\left\| \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t) - \sum_{i=1}^m c_{n_i} \varphi_{n_i}(t) \right\| < \sqrt{\sum_{k=i(m)}^{\infty} c_k^2} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

wenn $i(m)$ den kleinsten Index bedeutet, für welchen $C_i Q_i$ in der Differenz nicht aufgehoben wird, denn $i(m)$ wächst mit m unbegrenzt.

[386] Wir haben auch ein Mittel gewonnen, nichttriviale lineare Operationen zu definieren; ist $\{X_i\}$ irgend eine beschränkte Zahlenfolge mit beschränkten Reziproken, sind $\{Q_i\}$, $\{\}$ zwei ONV und setzt man

$$x(\tau) \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(\tau), \quad y(\tau) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i c_i \psi_i(\tau),$$

so hat man eine Operation $y = U(x)$ definiert, indem man x nach $\{\Phi\}$ entwickelt, formell die $^\circ$ -Reihe bildet, und kraft des Riesz-Fischer'schen Satzes y bestimmt. Die Linearität ist klar und die Parseval'sche Gleichung gibt für $y_1 = U(x_1)$, $y_2 = U(x_2)$, $|\lambda_i| < \infty$, $\|y_1 - y_2\| < \lambda \|x_1 - x_2\|$, d. h. die Stetigkeit. Die Voraussetzung $|\lambda_i| < \infty$ wurde hier benutzt, um aus $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ auf $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 c_i^2 < \infty$ zu schließen; die Voraussetzung $1/|\lambda_i| < \mu$ genügt zur Umkehrung dieses Schlusses, so daß man eine eindeutige Operation $x = U_{-1}(y)$ erhält mit $\|x_1 - x_2\| < \mu \|y_1 - y_2\|$, also eine lineare Umkehrung von $y = U(x)$ in ganz L^2 .

Das wichtigste an dem Riesz-Fischer'schen Satze ist die eindeutige und stetige, lineare Zuordnung von L^2 und P . Diese Zuordnung erlaubt Probleme, die man in der Sprache der Funktionen formuliert hat, in solche der Analysis der unendlichvielen Variablen zu übersetzen. Hat man ein solches Problem einmal in der neuen Gestalt gelöst, so gestattet wieder der Riesz-Fischer'sche Satz die Antwort in der Originalsprache auszudrücken.

§ 9. Unendliche Intervalle.

Mit Ausnahme des Kostitzin'schen Satzes bezog sich alles bisher Gesagte auf endliche Intervalle. Unendliche Intervalle $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ oder $(-\infty, +\infty)$ können ebenfalls zur Konstruktion von ON-Systemen dienen; der Kürze halber betrachten wir bloß $(-\infty, +\infty)$,

Es soll nun $f(t) \in L^p$ ($p \geq 1$) soviel als $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{+n} |f(t)|^p dt < \infty$ bedeuten.

Infolgedessen ist es nicht mehr wahr, daß L^p in L^q für $p < q$ enthalten sein muß. Ist z. B. $f(t) = 1/n + 1$ in $[n, n+1)$ ($n = 0, 1, \dots$), $f(-t) = f(t)$, so ist $f(t) \in L^2$, aber nicht $f(t) \in L^1$. Es gibt auch Funktionen, die zu L^2 aber zu keinem L^p mit $p > 2$ gehören. Ist nämlich

$$\begin{aligned} a_k &> 0, & b_k &> 0 & (k), \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 &< \infty, & \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{2-\varepsilon} &= \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{k^2} &< \infty, & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{2+\varepsilon}}{k^2} &= \infty \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0$ und setzt man

$$f(t) = \begin{cases} a_n & \text{in } [n, n+1 - 1/n^2) \\ b_n & \text{in } [n+1 - 1/n^2, n+1) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

sonst aber $f(t) = 0$, so gehört $f(t)$ zu L^2 und zu keinem L^p mit $p > 2$.

Es sei $f(t) \in L^p$ und

13911

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } |t| < n \\ 0 & \text{für } |t| > n; \end{cases}$$

man bestätigt mühelos, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f_n(t)|^p dt = 0,$$

wie im endlichen Intervall. Die Hölder'sche und die Minkowski'sche Ungleichung gilt auch im unendlichen Intervall und die Definitionen der Orthogonalität, der Vollständigkeit und Abgeschlossenheit lassen sich infolgedessen ohne weiteres übertragen; dasselbe bezieht sich auf die Schmidt'sche Orthogonalisierung. Die Sätze des H-ten und III-ten Kapitels bleiben demnach richtig, insbesondere die Bessel'sche Ungleichung, die Parseval'sche Gleichung, der Riesz-Fischer'sche Satz und die Äquivalenz der L^2 -Vollständigkeit und Z^2 -Abgeschlossenheit.

Anders verhält es sich mit den Sätzen von Weierstraß, Lerch und Müntz ([122], [357], [358], [361], [362]); wir werden zeigen, daß

- [392] sie nicht mehr richtig bleiben. Es genügt dazu eine Funktion $f(t)$ anzugeben, die zu allen $L^p(p > 0)$ gehört und die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) t^n dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

aufweist ohne f. ü. Null zu sein.

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\log t} \sin(2\pi \log t) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

ist eine solche Funktion. Es ist nämlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \leq \int_0^{\infty} t^{-p \log t} dt < \infty,$$

da der Exponent $-p \log t$ für $t \rightarrow +0$ gegen $+$, für $t \rightarrow +\infty$ gegen $-$ strebt. Berechnen wir jetzt

$$I_n = \int_0^{\infty} t^{-\log t} \sin(2\pi \log t) \cdot t^n dt,$$

die Substitution $u = -\frac{n+1}{2} + \log t$ liefert:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u + \frac{n+1}{2})^2} \sin 2\pi \left(u + \frac{n+1}{2}\right) \cdot e^{(u + \frac{n+1}{2})^n} \cdot e^{u + \frac{n+1}{2}} du \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin 2\pi u du = 0, \end{aligned}$$

denn $\sin 2\pi u$ ist ungerade.

- [393] Nichtdestoweniger gibt es abzählbare Systeme in $(-\infty, +\infty)$, die in bezug auf $L^p(p \geq 1)$ vollständig sind. Ist $\{I_n\}$ die Folge aller Intervalle mit rationalen Endpunkten und $f_n(t)$ die charakteristische Funktion von I_n , so liefert die Voraussetzung $g(t) \in L^p(p \geq 1)$ in $(-\infty, +\infty)$: $g(t) \in L^p$ in I_n . Ist dann für alle $n (= 1, 2, \dots)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_n(t) dt = 0,$$

so folgt $\int_{I_n} g(t) dt = 0$ und $\int_I g(t) dt = 0$, wo I ein beliebiges endliches Intervall bedeutet. Infolgedessen ist

$$G(t) = \int_a^t g(u) du = 0, \quad g(t) = 0 \text{ f. ü.}$$

Es ist also $\{f_n(t)\}$ vollständig in $(-\infty, +\infty)$ in bezug auf L^p für alle $p \geq 1$.

IV. KAPITEL.

Beispiele.

§ 1. Legendre'sche Polynome.

Schreibt man die Laplace'sche partielle Differentialgleichung, d. h. die Gleichung des Newton'schen Potentials in Polarkoordinaten r, ϑ, φ und setzt für die Lösung die Gestalt $R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$ an, so ergibt sich für $\Theta(\vartheta)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung, die nach der Substitution $\cos \vartheta = t$ die Gestalt

$$\frac{d}{dt} \left\{ (1-t^2) \frac{d\Theta}{dt} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right\} \Theta(t) = 0$$

annimmt. m^2 ist hier eine Konstante, und zwar $= -\Phi''/\Phi$: letzter Ausdruck muß konstant sein, wenn $u = R\Theta\Phi$ $\Delta u = 0$ erfüllen soll. Für $m = 0$ erhält man

$$\frac{d}{dt} \left\{ (1-t^2) \frac{d\Theta}{dt} \right\} + n(n+1) \Theta(t) = 0.$$

Diese Differentialgleichung heißt die Legendre'sche. Für $n = 0, 1, 2, \dots$ lassen sich leicht zwei partikuläre Lösungen finden. Eine dieser Lösungen, ein Polynom n -ten Grades

[4111

$$(1) \quad P_n(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left\{ \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} + \dots \right\}$$

heißt das Legendre'sche Polynom n -ten Grades. Man hat

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, & P_1(t) &= t, & P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), & P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), & P_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t), \\ P_6(t) &= \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5), & & & & & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Das Polynom $P_n(t)$ löst die Differentialgleichung auch für komplexe t -Werte.

Der Satz von Rodrigues. Es ist

$$(2) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n,$$

was durch die Ausführung der Differentiation und Vergleichung mit (1) bestätigt wird.

Es ist für natürliche n und $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} t^k P_n(t) dt = 0.$$

Beweis: (2) und partielle Integration liefern

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} t^k P_n(t) dt &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} t^k \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n dt \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left[t^k \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n \right]_{-1}^{+1} - \frac{k}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} t^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n dt. \end{aligned}$$

Nun hat aber $(t^2 - 1)^n$ die Stellen $t = \pm 1$ als n -fache Nullstellen, also hat diese Stellen die $(n-1)$ -te Ableitung von $(t^2 - 1)^n$ zu (einfachen) Nullstellen. Setzt man die partielle Integration fort, so kommt als Wert des Integrals (3)

$$\frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (t^2 - 1)^n dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \left[\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} (t^2 - 1)^n \right]_{-1}^{+1} = 0,$$

denn $n - k - 1$ ist $\neq 0$ (und für $n - k - 1 = 0$ ist das Symbol $\frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}$ zu streichen). Die Formel (3) gibt unmittelbar

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} P_m(t) P_n(t) dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

denn für $m < n$ zerfällt das Integral (4) in Integrale (3) mit konstanten Faktoren.

Wir haben damit die Orthogonalität der Polynome $\{P_n(t)\}$ bewiesen. Für $m = n$ wird das Integral (4)

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int_{-1}^{+1} (P_n(t))^2 dt &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n dt \\
 &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^n \frac{d^{2n}(t^2 - 1)^n}{dt^{2n}} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^n dt \\
 &= 2 \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \int_0^1 u^n (1 - u)^n du = \frac{2}{2n + 1}.
 \end{aligned}$$

wobei zunächst n -mal partiell integriert, dann $2u$ für $1 - t$ geschrieben und das so erhaltene Integral wieder durch partielle Integration ausgewertet wurde.

Damit ist das System

[412]

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(t) \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

als ON in $-1, +1$ erkannt worden, was bereits Legendre entdeckt hat.

Die Legendre'schen Polynome sind abwechselnd gerade und ungerade Funktionen, wie aus (1) ersichtlich. Da ihr Grad genau ihrem Index gleicht, sind sie linear unabhängig. Schreibt man

$$\begin{aligned}
 (6) \quad &c_{10} P_0(t) = 1, \\
 &c_{20} P_0(t) + c_{22} P_2(t) = t^2, \\
 &c_{40} P_0(t) + c_{42} P_2(t) + c_{44} P_4(t) = t^4, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

so lassen sich die Koeffizienten c_{2i2k} ($k < i$) so bestimmen, daß die Gleichungen identisch gelten; man erreicht dies, indem man die Koeffizienten gleicher t -Potenzen beiderseits vergleicht und dann zunächst das der höchsten Potenz entsprechende c berechnet. Ebenso verfährt man mit den ungeraden Potenzen.

Die Berechnung der c läßt sich leicht durchführen und liefert

$$\begin{aligned}
 (7) \quad t^k = &\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \left\{ (2k+1) P_k(t) + (2k-3) \frac{2k+1}{2} P_{k-2}(t) \right. \\
 &\left. + (2k-7) \frac{(2k+1)(2k-1)}{2 \cdot 4} P_{k-4}(t) + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

eine Formel, die auch bereits Legendre bekannt war und deren Ableitung bei Hobson nachgelesen werden möge. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
1 &= P_0(t), & t &= P_1(t), & t^2 &= 2/3 P_2(t) + 1/3 P_0(t), \\
t^3 &= 2/5 P_3(t) + 3/5 P_1(t), & t^4 &= 8/35 P_4(t) + 4/7 P_2(t) + 1/5 P_0(t), \\
t^5 &= 8/63 P_5(t) + 4/9 P_3(t) + 3/7 P_1(t), \\
t^6 &= 16/231 P_6(t) + 24/77 P_4(t) + 10/21 P_2(t) + 1/7 P_0(t), & \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

[413] Vollständigkeit und Abgeschlossenheit. Auf Grund von [316] und (7) impliziert die Abgeschlossenheit der Polynome in L^2 dieselbe Eigenschaft für das System $\{P_n(t)\}$; daraus folgt ihre Vollständigkeit in bezug auf L^2 ([354]) und in bezug auf L ([358J]).

Die Methode der kleinsten Quadrate. In den Anwendungen der Mathematik kommt es oft vor, daß man eine Funktion $f(t)$ möglichst genau durch ein Polynom $W_n(t)$ gegebenen Grades n in a, b zu approximieren sucht. Eine lineare Substitution erlaubt $-1, +1$ statt a, b zu betrachten. Beurteilt man die Genauigkeit der Approximation nach der Größe des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} [f(t) - W_n(t)]^2 dt$$

und beachtet die eben bewiesene Tatsache, daß $W_n(t)$ als $\sum_{k=0}^n c_k P_k(t)$ darstellbar ist, so hat man die Grunrsche Aufgabe (vgl. III),

$$\int_{-1}^{+1} \left| f(t) - \sum_{k=0}^n c_k P_k(t) \right|^2 dt$$

durch Wahl der c_k zu minimisieren, die nach [412] eindeutig lösbar ist. Schreibt man

$$W_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^{+1} \frac{2}{2k+1} \cdot P_k(t) \int_{-1}^{+1} \frac{2k+1}{2} \cdot$$

so ist ([262])

$$\int_{-1}^{+1} \frac{2}{2k+1} \cdot c_k = \int_{-1}^{+1} f(t) P_k(t) \int_{-1}^{+1} \frac{2k+1}{2} dt,$$

also

$$(8) \quad c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) P_k(t) dt \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

(Die Formeln (1) und (8) erlauben auch die Berechnung der

Koeffizienten C_k auf die Berechnung der Momente $\int_{-1}^{+1} f(t) t^k dt$ zurückzuführen). (8) ist die Formel zur Bestimmung der Koeffizienten in der Orthogonalentwicklung

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(t),$$

d. h. der Entwicklung in eine Legendre'sche Reihe.

Ein Beispiel. Entwickelt man $(1 - 2th + h^2)^{-1/2}$ nach Potenzen von $(2t - h)h$:

$$\begin{aligned} & (1 - 2th + h^2)^{-1/2} = (1 - h(2t - h))^{-1/2} \\ & = 1 + \frac{1}{2}(2t - h)h + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2t - h)^2 h^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n - 1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}(2t - h)^n h^n + \dots, \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung

$$(9) \quad |h \cdot (2|t| + |h|)| < 1,$$

so wird die durch Ausführung der Potenzierung und Auflösung der Klammern entstandene Reihe bei jeder Anordnung gegen die ursprüngliche Summe konvergieren. Der Koeffizient von h^n beträgt

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left\{ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right\},$$

ist also gleich $P_n(t)$ (vgl. (1)). Ist nun $-1 < t < 1$ und $|h| < 1/3$, so ist (9) erfüllt, also gilt

$$(10) \quad (1 - 2th + h^2)^{-1/2} = P_0(t) + P_1(t)h + P_2(t)h^2 + \dots$$

sogar gleichmäßig in t und h . Die Gleichmäßigkeit genügt aber (vgl. [251] [252]), um in der Reihe rechterhand die Legendre'sche Entwicklung der linkerhand stehenden Funktion zu erkennen. Nach (8) folgt daraus

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t) dt}{\sqrt{1 - 2th + h^2}} = \frac{2h^n}{2n+1} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Die Entwicklung (10) gilt aber bei $|h| < 1$ für alle t des Intervalls $-1, +1$. Denn $(1 - 2th + h^2)^{-1/2}$, als Funktion der komplexen Variablen h betrachtet, hat nur $t \pm \sqrt{t^2 - 1}$ zu singulären Stellen; für ein reelles t des Intervalls $-1, +1$ liegen diese

Stellen auf dem Kreise $|h| = 1$; gilt also (10) für kleine h (vgl. (9)), so ist sie die Taylorentwicklung und als solche für $|h| < 1$ gültig.

[414] Jetzt gelangen wir leicht zur Rekurrenzrelation für Legendre'sche Polynome. Schreibt man $u(h, t)$ für $(1 - 2ht + h^2)^{-1/2}$, so wird

$$(ii) \quad (1 - 2ht + h^2) \frac{\partial u}{\partial h} + (h - t) u = 0;$$

substituiert man hier für $u(h, t)$ die Reihe (10), so wird der Koeffizient von h^{n-1} links in (11) gleich

$$nP_n - 2t(n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + P_{n-2} - tP_{n-1} \quad (n \geq 2);$$

er muß verschwinden, also ist

$$(12) \quad nP_n - (2n-1)tP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2).$$

Kennt man P_0 und P_1 , so kann man leicht alle P_n mittels (12) berechnen. (12) zeigt auch, daß die Nullstellen von $P_{n-1}(t)$, $(n \geq 2)$ diejenigen von $P_n(t)$ trennen.

Die Nullstellen von $P_n(t)$ sind sämtlich reell. Denn $(t^2 - 1)^n$ hat $t = \pm 1$ zu je n facher Nullstelle, woraus mit Hilfe von (2) zu erkennen ist, daß alle Nullstellen von $P_n(t)$ reell sind und im offenen Intervall $(-1, +1)$ liegen. Wir wollen zeigen, daß sie sämtlich verschieden sind.

[415] Die Legendre'sche Differentialgleichung

$$(13) \quad (1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0,$$

k -mal nach t differenziert, gibt

$$(14) \quad (1-t^2) \frac{d^{k+2}P_n(t)}{dt^{k+2}} - 2(k+1)t \frac{d^{k+1}P_n(t)}{dt^{k+1}} + (n-k)(n+k+1) \frac{d^k P_n(t)}{dt^k} = 0.$$

Wäre nun α eine mehrfache Nullstelle von $P_n(t)$, so hätte man

$$(15) \quad P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0;$$

(13) zeigt, daß dann auch $P_n''(\alpha) = 0$ wäre, (denn $1 - \alpha^2$ ist nicht Null, da die Nullstellen von P_n ins Innere von $-1, +1$ fallen). Setzt man in (14) für k die Zahlen $1, 2, \dots, n-2$ ein, so erhält man

$$(16) \quad P_n^{(n)}(\alpha) = 0, \dots, P_n^{(2)}(\alpha) = 0,$$

was im Widerspruch zur Tatsache steht, daß $\frac{d^n P_n(t)}{dt^n}$ eine von Null verschiedene Konstante ist.

Gauß hat die Nullstellen der Legendre'schen Polynome verwendet, um empirisch gegebene Funktionen zu integrieren. Betrachten wir beispielsweise den Verlauf der Temperatur während eines Tages. Wie sollen die Momente der Beobachtung gewählt werden, damit aus den Messungen die mittlere Tagestemperatur am zweckmäßigsten bestimmt werden könne, und welche Formel verbindet die mittlere Temperatur mit den beobachteten Daten? Es gab Formeln, um das Integral $\int_{-1}^{+1} f(t) dt$ aus n Werten $y_1, \dots, y_n$ von $f(t)$ zu berechnen, die n bestimmten t -Stellen in $-1, +1$ entsprechen, unter der Voraussetzung, daß $f(t)$ ein Polynom vom Grade $\leq n-1$ ist; diese Formeln sind in $y_1, \dots, y_n$ linear mit konstanten Koeffizienten $A_1, A_2, \dots, A_n$. Gauß hat aber entdeckt, daß die Nullstellen $a_1, a_2, \dots, a_n$ von $P_n(t)$ die Eigenschaft haben, daß es n (ein für alle Mal bestimmte) Konstanten A_i gibt ($i=1, 2, \dots, n$), die das Integral vermittels der Formel

$$(17) \quad \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(a_i)$$

zu berechnen gestatten, sobald der Grad des Polynoms $f(t)$ $2n-1$ nicht überschreitet. Somit kann die mittlere Tagestemperatur aus drei in geeigneten Zeitpunkten angestellten Beobachtungen berechnet werden, wenn die Temperatur, als Funktion der Zeit, genau genug durch ein Polynom fünften Grades dargestellt werden kann. (Die Kenntnis dieses Polynoms ist überflüssig).

Es seien nun $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Nullstellen von $P_n(t)$ und

$$P(t) = \prod_{i=1}^n (t - a_i),$$

$$\varphi(t) = P(t) \cdot \left\{ \frac{f(a_1)}{(t-a_1)P'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{(t-a_2)P'(a_2)} + \dots + \frac{f(a_n)}{(t-a_n)P'(a_n)} \right\}.$$

$\varphi(t)$ ist das bekannte Lagrange'sche Interpolationspolynom höchstens $(n-1)$ -ten Grades, welches mit $f(t)$ für $t = a_1, a_2, \dots, a_n$ übereinstimmt. Schreiben wir y_i für $f(a_i)$ und integrieren, so folgt

$$(18) \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i y_i,$$

wo die A_i von $f(t)$ unabhängig sind. Die Gleichung

$$(19) \quad \int_{-1}^{+1} f(t) dt = \int_{-1}^{+1} \varphi(t) dt$$

gilt aber, wenn $f(t)$ ein Polynom vom Grade $< 2n - 1$ ist. Es ist dann nämlich $f(t) - \varphi(t)$ durch $ll(t)$ teilbar; es folgt

$$\frac{f(t) - \varphi(t)}{ll(t)} = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$$

und

$$f(t) = \varphi(t) + ll(t) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k.$$

Damit (19) bei beliebigen c_k gelte, ist die Bedingung

$$(20) \quad \int_{-1}^{+1} t^k ll(t) dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

notwendig und hinreichend. Damit ist aber die Richtigkeit von (17) (durch Vermittlung von (19) und (18)) erwiesen, denn $ll(t)$ ist bis auf einen konstanten Faktor $P_n(t)$ und somit (20) mit (3) gleichbedeutend.

Die Formel für $\varphi(t)$ und (18) liefern für A_i den Wert

$$(21) \quad A_i = \int_{-1}^{+1} \frac{ll(t) dt}{ll'(a_i)(t - a_i)} = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t) dt}{P_n'(a_i)(t - a_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Die Zahlen a_i , A_i sind für jedes n einzeln zu berechnen:

$n = 1:$	$a_1 = 0;$	$A_1 = 2;$
$n = 2:$	$a_1 = -a_2 = 0.57735 \dots;$	$A_1 = A_2 = 1;$
$n = 3:$	$a_1 = -a_3 = 0.77460 \dots, a_2 = 0;$	$A_1 = A_3 = 5/9, A_2 = 8/9;$
$n = 4:$	$a_1 = -a_4 = 0.86114 \dots,$ $a_2 = -a_3 = 0.33998 \dots;$	$A_1 = A_4 = 0.34785,$ $A_2 = A_3 = 0.65215.$

In der Aufgabe der Temperaturbestimmung hat die Ablesung um $2^{\text{h}42^{\text{m}}}$, um 12^{h} und um $21^{\text{h}18^{\text{m}}}$ zu erfolgen; die mittlere Temperatur ist

$$T = 5/18 T_f + 4/9 T_m + 5/18 T_a.$$

T_f, T_m, T_a sind die Früh-, Mittag- und Abendtemperaturen;
 $0.7746 \times 12h = 9^h 18^m$, $12^h + 9^h 18^m = 21^h 18^m$, $12^h - 9^h 18^m = 2^h 42^m$;

$$T = 1/2 \int_{-1}^{+1} f(t) dt = 1/2 [A_1 f(a_1) + A_2 f(a_2) + A_3 f(a_3)].$$

§ 2. Tschebyscheffsche Polynome.

Tschebyscheff hat als erster (1854) die Frage aufgeworfen, unter allen Polynomen n -ten Grades mit 1 als höchstem Koeffizienten dasjenige zu finden, welches im Intervall $-1, +1$ das kleinste Maximum des absoluten Betrages aufweist. M. a. W. sind die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n$ aus der Bedingung

$$\text{Max}_{-1 \leq t \leq +1} \{t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n\} = \text{Minimum}$$

zu bestimmen. Er fand als Lösung die nach ihm benannten Polynome $T_n(t)$:

$$T_0(t) = 1, \quad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n(\arccos t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad [421]$$

Es ist $\cos n\vartheta = \cos^n \vartheta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \dots$,
 also, mit $t = \cos \vartheta$,

$$(22) \quad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ t^n - \binom{n}{2} t^{n-2} (1-t^2) + \binom{n}{4} t^{n-4} (1-t^2)^2 - \dots \right\}.$$

Der höchste Koeffizient in $T_n(t)$ ist $\frac{1}{2^{n-1}} \left\{ 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots \right\} = 1$,

wie es sein soll. Die Maxima von $|T_n|$ liegen an den Stellen, wo $\cos n(\arccos t) = \pm 1$ ist, d. h. an den Stellen

$$t = \cos 0, \cos \pi/n, \cos 2\pi/n, \dots, \cos \pi,$$

$|T_n(t)|$ ist in $-1, +1$ ständig $\leq 1/2^{n-1}$; an den Stellen $t_k = \cos k\pi/n$ ($k = 0, 1, \dots, n$) ist

$$(23) \quad T_n(t_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

und sonst in $-1, +1$ ist $|T_n(t)| < 1/2^{n-1}$.

So ist z. B. $T_3(t) = t^3 - 3/4 t$; es ist daher unter allen Geraden und Parabeln zweiten Grades $y = 3/4 x$ diejenige Linie, die von $y = x^3$ in $-1, +1$ die kleinste Abweichung aufweist. (Diese Abweichung ist $1/4$ und wird an 4 Stellen erreicht).

[422] Die Polynome (22) sind eine und zwar die einzige Lösung des Tschebyscheff'schen Problems. Sei nämlich

$$P_n(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$$

mit irgendwelchen a_i . Soll in $[-1, +1]$ $|P_n(t)| \leq 1/2^{n-1}$ sein, so folgt aus (23)

$$P_n(t_0) \leq T_n(t_0), \quad P_n(t_1) \geq T_n(t_1), \quad \dots$$

und die Differenz $R_n(t) = T_n(t) - P_n(t)$ ist abwechselnd > 0 , < 0 in $t_0, t_1, \dots, t_n$. Nun ist $R_n(t)$ von höchstens $(n-1)$ -tem Grade; wäre

$$(24) \quad R_n(t_0) > 0, \quad R_n(t_1) < 0, \quad R_n(t_2) > 0, \quad \dots,$$

so hätte $R_n(t)$ n Nullstellen, ein Widerspruch. Wäre z.B. $R_n(t_0) = 0$ und alles sonst wie in (24), so hatte man zwischen t_i und t_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n-1$) je eine Nullstelle und in t_0 eine weitere, zusammen n Nullstellen. Wäre $R_n(t_k) = 0$ und

$$R_n(t_{k-1}) > 0, \quad R_n(t_{k+1}) > 0 \quad (\text{gerades } k),$$

$$R_n(t_{k-1}) < 0, \quad R_n(t_{k+1}) < 0 \quad (\text{ungerades } k),$$

so müßte t_k eine zweifache Nullstelle sein, oder aber hätte R_n eine weitere Nullstelle in (t_{k-1}, t_{k+1}) . Es bleibt wieder die Anzahl der Nullstellen wenigstens n . Ebenso zeigt man im Falle

$$R_n(t_{k-1}) \neq 0, \quad R_n(t_k) = R_n(t_{k+1}) = \dots = R_n(t_{k+p-1}) = 0, \quad R_n(t_{k+p}) \neq 0,$$

($k \geq 1, k+p \leq n$), daß die Anzahl der Nullstellen in (t_{k-1}, t_{k+p}) wenigstens $p+1$ beträgt. Ist nämlich p gerade, so haben $R_n(t_{k-1})$ und $R_n(t_{k+p})$ verschiedene Vorzeichen, es muß also in (t_{k-1}, t_{k+p}) außer den p Nullstellen $t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+p-1}$ eine weitere vorhanden oder eine von den p Nullstellen mehrfach sein. Ist p ungerade, so haben $R_n(t_{k-1})$ und $R_n(t_{k+p})$ dasselbe Vorzeichen und es gilt ein analoger Schluß. In beiden Fällen liegen in (t_{k-1}, t_{k+p}) wenigstens $p+1$ Nullstellen, wie im Falle (24). Eine letzte Möglichkeit

$$R_n(t_{k-1}) \neq 0, \quad R_n(t_k) = R_n(t_{k+1}) = \dots = R_n(t_n) = 0$$

ergibt wieder in (t_k, t_n) wenigstens $n - k + 1$ Nullstellen, also so viel, wie im Falle (24) auf dieses Intervall entfällt. Es ist also $R_n(t)$ identisch Null. Es folgt daraus, daß die Ungleichung

$$|P_n(t)| = |t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n| \leq 1/2^{n-1}$$

bereits $P_n(t) = T_n(t)$ zur Folge hat. Da aber $T_n(t) < 1/2^{n-1}$, so folgt, daß ein Polynom $P_n(t)$, welches den Bedingungen von Tschebyscheff entspricht, dem Betrage nach $1/2^{n-1}$ nicht übertrifft. Es ist also [422] bewiesen und zwar in diesem Sinne, daß es genau eine Lösung gibt: (22).

Die Tschebyscheff'schen Polynome bilden kein Orthogonalsystem. Man hat aber

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} T_m(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{1}{2^{m+n-2}} \int_{-1}^{+1} \cos m(\arccos t) \cos n(\arccos t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2^{m+n-2}} \int_0^\pi \cos m\vartheta \cdot \cos n\vartheta \cdot d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0, \\ 2^{2n-1} & \text{für } m = n = 0, \end{cases} \\ \int_{-1}^{+1} T_m(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \pi \quad \text{für } m = n = 0. \end{aligned}$$

Es erweist sich also

[423]

$$(25) \quad \left\{ \frac{2^{n-1/2}}{\sqrt{\pi}} T_n(t) \right\} \quad (n \geq 1; -1 \leq t \leq 1)$$

als ein ON-System. Fügt man $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ hinzu, so wird das System vollständig.

In der Tat, der Grad von $T_n(t)$ ist genau n . Infolgedessen kann man sukzessive 1 durch T_0 , t durch T_1 und $1, t^2$ durch T_2 , $t, 1$ linear ausdrücken, also t^n linear durch $T_n, T_{n-1}, \dots, T_0$, woraus bereits die Vollständigkeit von $\{T_n\}$ resultiert. $\{T_n\}$ ist sogar in bezug auf L vollständig, da $\{t^n\}$ es ist. Wäre nun das System (25) (mit $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-t^2}}$) unvollständig in bezug auf L^2 , so hätte man

ein $\varphi(t) \in L^2$, $\varphi(t)$ nicht f. ü. Null, mit

$$\int_{-1}^{+1} T_n(t) \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ gehört aber zu L^2 ($-1 \leq t \leq 1$), also gehört $\psi(t) = \varphi(t)/\sqrt{1-t^2}$ zu L und es wäre $\psi(t)$ nicht f. ü. Null mit $\int_{-1}^{+1} T_n(t) \psi(t) dt = 0$ ($n = 0, 1, \dots$), gegen die bewiesene L -Vollständigkeit von $\{T_n\}$.

Entwicklung nach Tschebyscheff'schen Polynomen. Schreiben wir formell

$$(26) \quad \varphi(t) \sim c_0 T_0 + c_1 T_1 + c_2 T_2 + \dots,$$

so folgt nach [255] und [423]

$$c_k = \frac{2^{k-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (k \geq 1), \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Obiges ist so zu verstehen, daß die formelle Entwicklung durch beiderseitige Division mit $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ in eine Orthogonalentwicklung nach dem System $\{T_k(t)/\sqrt{1-t^2}\}$ übergeht. Setzt man $\psi(t) = \varphi(t)/\sqrt{1-t^2}$, so folgt (formell)

$$c_k \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{T_k^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{+1} \psi(t) \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

also

$$c_k \cdot \pi = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad c_0 \cdot \pi = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wir entwickeln z. B. $\arccos t$ in eine Tschebyscheff'sche Reihe, ist ($t = \cos i$)

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$c_k = \frac{2^{k-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\arccos t \cdot T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2^k}{\pi} \int_0^\pi \vartheta \cdot \cos k\vartheta d\vartheta$$

$$= -\frac{2^k}{k\pi} \int_0^\pi \sin k\vartheta d\vartheta = \frac{2^k}{k^2\pi} [(-1)^k - 1].$$

Man hat also

$$\arccos t \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} T_1(t) - \frac{16}{9\pi} T_3(t) - \dots$$

Allgemein: Die Koeffizienten der Entwicklung der Funktion $\varphi(t) = f(\arccos t)$ nach den Polynomen $\{T_k(t)\}$ sind bis auf den Faktor 2^{k-1} dieselben wie die Koeffizienten der Fourierentwicklung von $f(\vartheta)$ nach $\{\cos k\vartheta\}$. Ist nämlich (26) die Tschebyscheff'sche Entwicklung und substituiert man in den Formeln für $\{c_k\}$ $t = \cos \vartheta$, so folgt ($k > 1$)

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) d\vartheta, & c_k &= \frac{2^{2k-1}}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \frac{\cos k\vartheta}{2^{k-1}} d\vartheta \\
 (27) \qquad & & &= 2^{k-1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Wenn man nun in der Reihe (26) $t = \cos$ substituiert und von (27) und [421] Gebrauch macht, so entsteht die Reihe

$$1 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) d\vartheta + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\vartheta \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta,$$

d. i. die Cosinus-Entwicklung von $f(\cos \vartheta)$ in $\cos n\vartheta$.

Es wird also die Entwicklung von $\varphi(t)$ nach den Tschebyscheff'schen Polynomen $\{T_n(t)\}$ Glied für Glied mit der Entwicklung von $f(\cos \vartheta)$ in eine Cosinus-Reihe identisch, wenn man t durch $\cos \vartheta$ ersetzt und wenn $f(\cos \vartheta)$ die Funktion ist, die durch eben diese Substitution aus $\varphi(t)$ entsteht: $f(\cos \vartheta) = \varphi(\cos \vartheta)$. [424]

Damit wird aber die Theorie der Tschebyscheff'schen Reihen im wesentlichen auf die Theorie der Fourier-Reihen zurückgeführt.

Eine Rekurrenzformel für Tschebyscheff'sche Polynome. Es gilt bekanntlich für $|r| < 1$

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos \vartheta + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\vartheta;$$

setzt man $t = \cos \vartheta$, so folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{1-r^2}{1-2rt+r^2} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\arccos t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n 2^n T_n(t), \\
 1-r^2 &= (1-2rt+r^2) \sum_{n=0}^{\infty} r^n 2^n T_n(t),
 \end{aligned}$$

und der Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$(28) \qquad T_{n+1}(t) - tT_n(t) + 1/4 T_{n-1}(t) = 0.$$

Es ist $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ und daraus kann man mit Hilfe von (28) alle T_n berechnen.

Die Differentialgleichung für $T_n(t)$ resultiert aus der Differentialgleichung für $y = \cos n\vartheta$. Diese lautet:

$$\frac{d^2 y}{d\vartheta^2} + n^2 y = 0.$$

Es ist aber $y(\vartheta) = \cos n\vartheta = 2^{n-1} T_n(t)$, wo $t = \cos \vartheta$, und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_n(t)}{d\vartheta^2} &= \frac{d}{d\vartheta} \frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{dT_n}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{d\vartheta^2} \\ &= \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} \sin^2 \vartheta - \frac{dT_n}{dt} \cos \vartheta = \frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} (1 - t^2) - \frac{dT_n(t)}{dt} t. \end{aligned}$$

Es ist daher ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$(1 - t^2) T_n''(t) - t T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0,$$

wo die Striche die Differentiation nach t bedeuten.

§ 3. Das trigonometrische System.

Dieses System ist uns bereits bekannt. In $\langle -\pi, \pi \rangle$ bilden die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

ein ON-System. Dieses System ist aus akustischen Untersuchungen entstanden. Die physikalische These, daß jede Schwingung eine Summe von harmonischen Schwingungen vorstellt, würde mathematisch bedeuten, daß eine beliebige Funktion in eine Fourierreihe entwickelbar ist. Eine Fourierreihe heißt die Entwicklung

$$f(t) \sim a_0 + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \dots$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k \geq 1),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \, dt \quad (b_0 = 0),$$

(also eine Orthogonalentwicklung in Sinne von [255]).

Schreibt man

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

so kommt

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) [1/2 + \cos(u-t) + \cos 2(u-t) + \dots + \cos n(u-t)] \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \cdot \frac{\sin(n+1/2)(u-t)}{2 \sin \frac{u-t}{2}} \, du. \end{aligned}$$

Die letzte Formel ist der Ausgangspunkt der Theorie der Fourierreihen. Es folgt aus ihr insbesondere:

Ist $|f(u)|$ in $u_0 - \pi, u_0 + \pi$ integrierbar und ist daselbst auch [431]

$$\frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}$$

integrierbar, wenn man die ursprünglich in $u_0 - \pi, u_0 + \pi$ definierte meßbare Funktion $f(u)$ periodisch darüber hinaus fortsetzt, so ist die Fourierentwicklung von $f(u)$ in $u = u_0$ gegen $f(u_0)$ konvergent.

Die Fejer'sche Methode. Wir haben die Formel

$$\frac{1}{2} + \cos \vartheta + \dots + \cos n\vartheta = \frac{\sin (n + 1/2) \vartheta}{2 \sin 1/2 \vartheta}$$

benutzt. Summiert man abermals, so kommt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{\sin (k + 1/2) \vartheta}{2 \sin 1/2 \vartheta} &= \frac{1}{2 \sin \vartheta/2} \sum_{k=0}^n \frac{\cos (k + 1) \vartheta - \cos k\vartheta}{2 \sin \vartheta/2} \\ &= \frac{1 - \cos (n + 1) \vartheta}{4 \sin^2 \vartheta/2} = 1/2 \left(\frac{\sin (n + 1/2) \vartheta}{\sin \vartheta/2} \right)^2. \end{aligned}$$

Für die Fourier'schen Reihen folgt daraus

$$\begin{aligned} s_0(t) + s_1(t) + \dots + s_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \sum_{k=0}^n \frac{\sin (k + 1/2) (t - u)}{2 \sin (t - u)/2} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \left(\frac{\sin (n + 1/2) (t - u)}{\sin (t - u)/2} \right)^2 du, \end{aligned}$$

oder aber

$$\sigma_n(t) = \frac{s_0(t) + s_1(t) + \dots + s_n(t)}{n + 1} = \frac{1}{2(n + 1)\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) \left(\frac{\sin (n + 1/2) (t - u)}{\sin (t - u)/2} \right)^2 du.$$

Für $f(u) = \text{const.} = f(t)$ ist $s_0(t) = s_1(t) = \dots = s_n(t) = f(t)$, also $\sigma_n(t) = f(t)$; man hat also stets

$$(29) \quad f(t) - \sigma_n(t) = \frac{1}{2(n + 1)\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(u)] \left(\frac{\sin (n + 1/2) (t - u)}{\sin (t - u)/2} \right)^2 du;$$

($f(t)$ wird als periodisch vorausgesetzt).

Bezeichnet man den Integranden mit $\Phi(t, u)$, so soll für $0 < \varepsilon \pi$

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\pi} \Phi(t, u) du = 0$$

fürs erste bewiesen werden; es ist in der Tat $\frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t+\varepsilon}^{t+\pi} \Phi(t, u) du$

$\frac{1}{2(n+1)\pi} \left\{ \pi \cdot \frac{|f(t)|}{\sin^2 \varepsilon/2} + \frac{1}{\sin^2 \varepsilon/2} \int_0^\pi |f(u)| du \right\}$. Ebenso beweist man

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\pi}^{t-\varepsilon} \Phi(t, u) du = 0.$$

Es bleibt noch der Grenzwert von $\frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Phi(t, u) du$ für $n \rightarrow \infty$ zu berechnen. Ist $f(u)$ für $u=t$ stetig und ε so klein, daß

$$\mu_1 \leq f(t) - f(u) \leq \mu_2$$

*

für $|t-u| \leq \varepsilon$ mit endlichen μ_1, μ_2 gelte, so ist der betrachtete Ausdruck in den Grenzen

$$\frac{\mu_1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du, \quad \frac{\mu_2}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du$$

gelegen. Nun ist aber

$$\frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\pi}^{t-\varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t+\varepsilon}^{t+\pi} = 0,$$

somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(\frac{\sin(n+1)/2(t-u)}{\sin(t-u)/2} \right)^2 du = 1,$$

also

$$(32) \quad \begin{aligned} \mu_1 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Phi(t, u) du \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Phi(t, u) du \leq \mu_2. \end{aligned}$$

Ist also u_1 die untere, u_2 die obere Grenze von $f(t) - f(u)$ in $\langle t - \varepsilon, t + \varepsilon \rangle$, so sind $\liminf$ und $\limsup$ von $f(t) - o_n(t)$ für $n >$ wegen (29), (30), (31) und (32) zwischen eben diesen Grenzen gelegen. Da $f(t) - o_n(t)$ von ε frei ist, $u_1(\varepsilon)$ und $u_2(\varepsilon)$ aber mit ε beliebig klein werden, so folgt

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} o_n(t_0) = f(t_0)$$

für jede integrable Funktion $f(t)$ an jeder Stetigkeitsstelle t_0 .

Der Satz (33) läßt sich verschärfen: *Die Beziehung $\lim o_n(t) = f(t)$ [432] gilt nämlich in ganz $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig, wenn $f(t)$ in diesem Intervall stetig und $f(\pi) = f(-\pi)$ ist.* Denn die Abschätzung von (30) läßt sich gleichmäßig einrichten, indem man $|f(t)|$ durch das Maximum von $|f(t)|$ ersetzt. Die beiden Grenzen μ_1, μ_2 in (32) von $f(t) - f(u)$ in $t - \varepsilon < u < t + \varepsilon$ können durch die Wahl von ε allein beliebig nahe aneinander gebracht werden, denn f ist in $(-\infty, \infty)$ gleichmäßig stetig, wenn man es periodisch fortsetzt. Diese Verschärfung heißt der Fejér'sche Satz.

Die Vollständigkeit und Abgeschlossenheit des [433] trigonometrischen Systems. Der Fejér'sche Satz hat die Abgeschlossenheit des trigonometrischen Systems in bezug auf CP d. h. auf den Raum der in $[-\pi, \pi]$ stetigperiodischen Funktionen zur Folge. Diese Funktionen sind aber überalldicht in ZA . Dazu genügt es zu zeigen, daß sie in C im Sinne der L^2 -Norm überalldicht sind. Ist aber $f(t)$ stetig und ändert man $f(t)$ in $[-\pi, -\pi + \varepsilon]$, so daß die neue Funktion $f_\varepsilon(t)$ in $-\pi$ den Wert $f(\pi)$ annimmt, in $-\pi + \varepsilon$ den Wert $f(-\pi + \varepsilon)$, in $[-\pi, -\pi + \varepsilon]$ linear verläuft und sonst mit $f(t)$ übereinstimmt, so wird

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f_\varepsilon(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{-\pi + \varepsilon} (f(t) - f_\varepsilon(t))^2 dt < 4M^2\varepsilon,$$

wo $M = \max |f(t)|$. Es ist also $\|f - f_\varepsilon\|_2$ mit ε beliebig klein und $f_\varepsilon \in CP$, w. z. b. w.

Damit ist aber auch die Vollständigkeit in bezug auf L^2 bewiesen worden. In [234J] haben wir gesehen, daß das trigonometrische System in bezug auf L ebenfalls vollständig ist. (Daraus kann wieder die Vollständigkeit in bezug auf L^2 die L^2 - und L -Abgeschlossenheit nach den Sätzen des III-ten Kapitels (§ 5 u. 7) abgeleitet werden).

Näheres über das trigonometrische System findet man in dem Zygmund'schen Buche (Bd.V dieser Sammlung).

§ 4. Das Haar'sche System.

In seiner Doktordissertation (1910) hatte sich Alfred Haar zur Aufgabe gestellt, ein Orthogonalsystem zu konstruieren, welches für eine beliebige stetige Funktion eine konvergente Entwicklung liefert. Seit Du Bois-Reymond (1876) weiß man, daß diese Eigenschaft dem trigonometrischen System nicht zukommt; sie fehlt auch bei den aus der mathematischen Physik bekannten Systemen. Das (bereits in [226J beschriebene) Haar'sche System ist ein ONV, wie wir schon wissen. Wir werden zeigen, daß die Entwicklung einer stetigen Funktion nach dem System [226] gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.

Es seien $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8$ acht beliebige Zahlen, $\chi_0^{(0)}, \chi_0^{(1)}, \chi_1^{(1)}, \chi_1^{(2)}, \chi_2^{(1)}, \chi_2^{(2)}, \chi_2^{(3)}, \chi_2^{(4)}$ die acht ersten Haar'schen Funktionen. Wir suchen acht Zahlen c_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), so daß die Summe

$$(34) \quad s(t) = \sum_{i=1}^8 c_i \chi_i(t)$$

(wo χ die acht Haar'schen Funktionen durchläuft) in den offenen Intervallen $(k-1/8, k/8)$ ($k = 1, 2, \dots, 8$) konstant und gleich d_k ($k=1, 2, \dots, 8$) sei. Diese Aufgabe führt auf das Gleichungssystem (Punkte bedeuten Nullen):

$$(35) \quad \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + c_3\sqrt{2} + & . & + c_5\sqrt{4} + & . & + & . & + & . & = d_1 \\ c_1 + c_2 + c_3\sqrt{2} + & . & - c_5\sqrt{4} + & . & + & . & + & . & = d_2 \\ c_1 + c_2 - c_3\sqrt{2} + & . & + & . & + c_6\sqrt{4} + & . & + & . & = d_3 \\ c_1 + c_2 - c_3\sqrt{2} + & . & + & . & - c_6\sqrt{4} + & . & + & . & = d_4 \\ c_1 - c_2 + & . & + c_4\sqrt{2} + & . & + & . & + c_7\sqrt{4} + & . & = d_5 \\ c_1 - c_2 + & . & + c_4\sqrt{2} + & . & + & . & - c_7\sqrt{4} + & . & = d_6 \\ c_1 - c_2 + & . & - c_4\sqrt{2} + & . & + & . & + & . & + c_8\sqrt{4} = d_7 \\ c_1 - c_2 + & . & - c_4\sqrt{2} + & . & + & . & + & . & - c_8\sqrt{4} = d_8. \end{array}$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, die vierte von der dritten, die sechste von der fünften und die achte von der siebenten, so bekommt man c_3, c_6, c_7, c_8 . Setzt man die gefundenen Werte ein und subtrahiert die dritte Gleichung von der zweiten und die siebente von der sechsten, so erhält man c_3 und c_4 ; dann

liefert die vierte und fünfte Gleichung c_1 und c_2 . Hätten wir, anstatt acht, 2^p Zahlen d_i , so könnten wir ebenso 2^p Koeffizienten c_i eindeutig bestimmen derart, daß die Summe $\sum_1^{2^p} c_i \chi_i$ in jedem der 2^p gleichen Teilintervalle einen konstanten Wert d_k annähme.

Ist n keine Potenz 2^p , so lassen sich die betreffenden Gleichungen ebenso auflösen; die Konstanzintervalle sind nicht mehr alle gleich. Nimmt man z.B. zu der Summe (34) ein neuntes Glied $c_9 Z(t)$ hinzu, so wird das erste Intervall $(0, 1/8)$ in zwei gespalten, wo $Z(t)$ abwechselnd positiv und negativ ist; die erste Gleichung (35) muß durch zwei ersetzt werden mit d_1, d_9 als rechten Seiten und mit der neuen Unbekannten c_9 , die durch Subtraktion der zwei Gleichungen berechnet werden kann. Setzt man dann für f , den berechneten Wert ein und bringt es auf die rechte Seite, so erhält man zweimal dieselbe Gleichung mit d als rechter Seite. Man hat dann also wieder ein System von 8 Gleichungen, genau wie (35).

Es sei nun $f(t)$ in $0, 1$ stetig und $s_n(t)$ die n te Partialsumme ihrer Entwicklung, $\{c_j\}$ die Koeffizienten folge. Da $s_n(t)$ in den n Teilintervallen konstant ist, und — wie wir wissen — die Gram'sche Minimuneigenschaft besitzt, so muß $s_n(t)$ in Jedem Teilintervall $7\}$ gleich $f(\xi_j)$ sein ($j = 1, 2, \dots, r_i$), wo ξ_j ein Punkt des (abgeschlossenen) Teilintervalls $7\}$ ist. Sonst könnten wir nämlich — nach der eben gelösten Aufgabe — die c_i so abändern, daß das neue $\bar{s}_n(t)$ in dem Teilintervall $7\}$ den Wert $f(\xi_j)$ annähme, ohne von $s_n(t)$ in anderen Teilintervallen abzuweichen; war also früher $s_n(t)$ in $7\}$ größer (kleiner) als $f(t)$, so wird jetzt das

Integral $\int_0^1 (\bar{s}_n(t) - f(t))^2 dt$ kleiner als $\int_0^1 (s_n(t) - f(t))^2 dt$ werden, was

gegen die Minimuneigenschaft des ursprünglichen $s_n(t)$ verstößt. Daraus folgt aber, daß das Maximum von $|f(t) - s_n(t)|$ in $0, 1$ die Oszillation von $f(t)$ in den Teilintervallen $7\}$ nicht übertrifft. Wir haben zwar die Unstetigkeitsstellen von $s_n(t)$ nicht beachtet, da aber der Wert von $s_n(t)$ an einer solchen Stelle zwischen den beiderseitigen Grenzwerten liegt, so wird durch Zulassung dieser Stellen das Maximum von $|f(t) - s_n(t)|$ nicht vergrößert. Damit ist die Beziehung

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = \tilde{f}(t)$$

gleichmäßig in $0, 1$ für die Haar'sche Entwicklung der stetigen Funktion $f(t)$ bewiesen.

Es sei jetzt $f(t) \in L$. Die Partialsummen $s_n(t)$ sind — wie früher — Treppenfunktionen, d.h. konstant in gewissen Teilintervallen $\{T\}$. Die Koeffizienten $c = \int_0^1 f(t) \chi_T(t) dt$ hängen nur von den Mittelwerten der Funktion $f(t)$ in den beiden Intervallen, wo $f(t)$ von Null verschieden ist, ab. Ersetzt man also $f(t)$ durch eine Treppenfunktion $f^*(t)$, die in jedem der Teilintervalle T , die zur Definition der n ersten Haar'schen Funktionen nötig waren, gleich dem Mittelwert von $f(t)$ über das entsprechende T ist, so wird $f^*(t)$ dieselbe Partialsumme $s_n(t)$ liefern. Wir haben aber bereits gesehen (für den Fall $f \in L^2$ — und f^* gehört ja zu Z^2 !), daß $s_n(t)$ ($n \rightarrow \infty$) diejenige Treppen-Funktion ist, welche das Gram'sche Minimum unter allen zum betrachteten Intervallsystem gehörigen Treppenfunktionen liefert. Offenbar ist aber $f^*(t)$ selbst eine solche und $\|f^*(t) - s_n(t)\| = 0$, also ist $s_n(t) = f^*(t)$. Es ist daher im Innern eines jeden Intervalls $s_n(t)$ gleich dem Mittelwert von $f(t)$. Es gilt also (von den dyadisch-endlichen t_0 abgesehen) (36) an jeder Stelle $t = t_a$, wo das unbestimmte Integral von $f(t)$ zur Ableitung $f'(t_0)$ hat, dies ist aber fast überall der Fall. Damit haben wir

[442] *gezeigt, daß die Haar'sche Entwicklung einer integrierbaren Funktion f.u. gegen diese konvergiert.*

Damit ist aber die Vollständigkeit in bezug auf L gesichert. Denn ist $f(t)$ zu sämtlichen $y(t)$ orthogonal, so ist $s_n(t) = 0$ und daraus folgt $f(t) = 0$ f. ü.

Teilt man das Intervall $[0, 1]$ nach einem anderen (als dem dyadischen) Prinzip ein, sogar ohne die Gleichheit der Teilintervalle zu verlangen, jedoch so, daß die Teilpunkte überalldicht zu liegen kommen, so erhält man analoge Systeme, welche die Konvergenz- und Vollständigkeitseigenschaften des Haar'schen Systems besitzen.

[443] Das Franklin'sche System. Die Haar'schen Funktionen sind unstetig; die Frage, ob ein Orthogonalsystem vorhanden ist, welches aus lauter stetigen Funktionen besteht und einer jeden stetigen Funktion eine gleichmäßig konvergente Entwicklung (mit der entwickelten Funktion als Summe) zuordnet, hat Ph. Franklin gelöst. Wir gelangen zu seinem Ergebnis auf einem unbeträchtlich abweichenden Wege.

Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ das Schauder'sche System [242]; es besteht aus lauter stetigen, in $[a, b]$ erklärten Funktionen und ist in bezug

auf C abgeschlossen ([243]). $\{\varphi_n\}$ sei das durch Orthogonalisierung von $\{\varphi_n\}$ gewonnene System; wir werden zeigen, daß $\{\varphi_n\}$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Es sei $g(t)$ eine beliebige lineare Verbindung der n ersten φ ; $g(t)$ ist gleichzeitig eine lineare Verbindung der n ersten φ , es ist also eine stetige Funktion, deren Bild ein Polygonzug ist, mit n Ecken, die den Stellen $t = w_1 - a, w_2 = b, w_3, \dots, w_n$ entsprechen. Durch entsprechende Wahl der Koeffizienten kann man jeden solchen Polygonzug darstellen, d.h. die Ordinaten an den n Stellen $\{w_i\}$ können beliebig vorgeschrieben werden (vgl. [243]); ist $\sum_{i=1}^n d_i \varphi_i(t)$ die gesuchte Verbindung, so führen die Orthogonalisierungsformeln zu $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(t) = g(t)$.

Es sei $f(t)$ stetig und

$$(37) \quad |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon \quad \text{für } |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon).$$

Wir wollen $J_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - g(t))^2 dt$ abschätzen für den Fall, wenn t_1, t_2 in demselben Linearitätsintervall von $g(t)$ liegen und $|t_1 - t_2| = d < \delta(\varepsilon)$ ist. Ist $l(t)$ ganz-linear und $l(t_1) = f(t_1), l(t_2) = f(t_2)$, so hat man

$$(38) \quad |f(t) - g(t)| > |l(t) - g(t)| - \varepsilon \quad \text{in } t_1, t_2,$$

denn (37) hat $|f(t) - l(t)| < \varepsilon$ in t_1, t_2 zur Folge. Das Bild von $l(t) - g(t)$ ist dort eine Gerade, deren Ordinatenbeträge in t_1, t_2 die Werte $h_1 = |f(t_1) - g(t_1)|, h_2 = |f(t_2) - g(t_2)|$ annehmen. Je nachdem diese Gerade die t -Achse schneidet oder nicht, gilt in

$$(39) \quad \int_{t_1}^{t_2} (|l(t) - g(t)| - \varepsilon)^2 dt = \frac{d}{3(h_1 + h_2)} [(h_1 - \varepsilon)^3 + (h_2 - \varepsilon)^3]$$

das obere oder das untere Vorzeichen. Da $|f - g| - \varepsilon$ negativ sein kann, dann aber absolut kleiner als ε ist, so folgt aus (88)

$$(40) \quad J_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - g(t))^2 dt > \int_{t_1}^{t_2} (|l(t) - g(t)| - \varepsilon)^2 dt - \varepsilon^2 d.$$

Wir setzen nun $\max(h_1, h_2) > 5\varepsilon$ voraus und substituieren in (40) die untere Formel (39); wir bemerken, daß man für $\alpha > \beta \geq 0, \alpha > 4\varepsilon, 5(\alpha^3 + \beta^3) \geq (\alpha + \beta + 2\varepsilon)(\alpha^2 + \beta^2)$ hat; ist $\alpha = h_1 - \varepsilon, \beta = h_2 - \varepsilon$ und $h_1 \geq h_2$, so wird

$$\frac{(h_1 - \varepsilon)^3 + (h_2 - \varepsilon)^3}{h_1 + h_2} \geq \frac{(h_1 - \varepsilon)^2 + (h_2 - \varepsilon)^2}{5},$$

also

$$(41) \quad J_{12} > \frac{d}{15} ((h_1 - \varepsilon)^2 + (h_2 - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 d) > \frac{d}{15} (\max(h_1, h_2) - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 d.$$

Dies gilt auch für $h_1 < h_2$ und für das obere Vorzeichen in (39).

Es sei nun $n > 2$ und $s_n(t)$ die n -te Partialsumme der Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\psi_n\}$, M die größte unter den Zahlen $h_i = |f(w_i) - s_n(w_i)|$ ($i = 1, 2, \dots, n$); es sei etwa $h_j = M$ und $M > 7\varepsilon$. Unter den links von w_j gelegenen w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mit $w_i < 7\varepsilon$ sei w_p das an w_j nächstgelegene; sollte es solche w_i nicht geben, so sei $w_p = w_1 = a$; analog werde w_q ($> w_j$; evt. $= w_2 = b$) definiert. Mit $v_p, v_{p+1}, \dots, v_q$ seien die in $[w_p, w_q]$ gelegenen wachsend geordneten w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet ($v_p = w_p < v_{p+1} < \dots < v_{q-1} < v_q = w_q$). Ferner sei $\sigma_n(t)$ eine Hilfsfunktion, die außerhalb von $[w_p, w_q]$ gleich $s_n(t)$, in $[w_p, w_q]$ aber durch einen Polygonzug mit

$$\begin{aligned} * \quad \sigma_n(w_p) &= s_n(w_p), & \sigma_n(w_q) &= s_n(w_q), \\ \sigma_n(w_i) &= f(w_i) & \text{für } w_p < w_i < w_q \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

gegeben ist. Wird in (41) $s_n(t)$ für $g(t)$ gesetzt und sukzessive $v_k, v_{k+1}, \dots, v_{q-1}$ für $t_1, t_2, \dots$, so kommt

$$\begin{aligned} (42) \quad J(s_n) &= \int_{w_p}^{w_q} (f(t) - s_n(t))^2 dt = \sum_{k=p}^{q-1} \int_{v_k}^{v_{k+1}} (f(t) - s_n(t))^2 dt \\ &\geq \frac{d_1 + d_2}{15} (M - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 (d_1 + d_2) + \frac{(w_q - w_p - d_1 - d_2)}{15} \cdot (6\varepsilon)^2 - (w_q - w_p - d_1 - d_2)^2 \varepsilon^2, \end{aligned}$$

wo d_1, d_2 die Längen der in W_j angrenzenden Teilintervalle bedeuten. Andererseits ist

$$(43) \quad J(\sigma_n) = \int_{w_p}^{w_q} (f(t) - \sigma_n(t))^2 dt \leq (w_q - w_p) \varepsilon^2 + (d_3 + d_4) (8\varepsilon)^2,$$

wo d_3, d_4 die Länge des ersten, bzw. letzten der in Frage kommenden Teilintervalle bezeichnet; a_n ist aber eine lineare Verbindung von $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ (Beweis von [243]), also von $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n0}$ (nach [313]); [263] gibt also

$$J(s_n) - J(\sigma_n) = \int_a^b (f(t) - s_n(t))^2 dt - \int_a^b (f(t) - \sigma_n(t))^2 dt < 0,$$

was mit (42) und (43) zu

$$\frac{d_1 + d_2}{15} (M - \epsilon)^2 \leq (w_q - w_p) (2 - 36/15) + \frac{d_1 + d_2}{15} \cdot 36 \epsilon^2 + 64 (d_1 + d_2) \epsilon^2,$$

d. h. zu

$$\frac{(M - \epsilon)^2}{15} \leq \frac{36}{15} \epsilon^2 + 64 p \epsilon^2$$

führt, wo p eine n -freie Zahl ist, die alle Längenverhältnisse der durch $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ erklärten Teilintervalle übertrifft; nach der Bemerkung auf S. 51 braucht das Schauder'sche System nicht alle φ_n zu enthalten, wenn nur die benutzten w überalldicht in $[a, b]$ zu liegen kommen; dies zeigt die Existenz von p und man erhält

$$M \leq (1 + \sqrt{36 + 15 \times 64p}) \epsilon,$$

was den Beweis abschließt.

§ 5. Das Rademacher'sche System.

Dieses (bereits in [225] angegebene) System ist unvollständig (vgl. [236]). Es gehört zur wichtigen Klasse der sog. lakunären Systeme, welche in Kapitel VII besprochen werden. Es besitzt eine interessante Eigenschaft:

Sind $j < k < l < m < \dots < p < q$ natürliche Zahlen und $\{r_n(t)\}$ [451] die Rademacher'schen Funktionen, so ist

$$\int_a^b r_j(t) r_k(t) \dots r_p(t) r_q(t) dt = 0,$$

mit Ausnahme des Falles, wo der Integrand aus einer geraden Anzahl von Faktoren mit

$$j = k, \quad l = m, \quad \dots, \quad p = q$$

besteht; dann ist das Integral gleich Eins.

Der Ausnahmefall ist leicht zu erledigen, denn es sind dann $r_j^2(t), r_k^2(t), \dots, r_p^2(t)$ sämtlich f. ü. gleich 1. Sonst kann man alle Paare mit gleichen Indizes streichen, denn sie liefern den Faktor 1 f. ü., und es bleiben unter dem Integralzeichen Funktionen mit verschiedenen Indizes ($j' < k' < \dots < p' < q'$) übrig.

Das Produkt $r_{p'}(t) \cdot r_{p''}(t) \dots r_{p^{(p')}}(t)$ hat $2^{p'}$ Konstanzintervalle (von der Länge $1/2^{p'}$), in welche $-0, 1$ zerfällt. Ein jedes dieser Konstanzintervalle J zerfällt in $2^{q'-p'}$ gleiche Teile, innerhalb deren $r_{q'}(t)$ abwechselnd $+1, -1$ ist. Infolgedessen zerfällt

$$\int_0^1 r_{p'}(t) r_{p''}(t) \dots r_{p^{(p')}}(t) r_{q'}(t) dt$$

in $2^{p'}$ Summanden: $\text{const.} \int_J r_{q'}(t) dt$, und jeder Summand ist Null wegen $\int_J r_{q'}(t) dt = 0$.

T452] Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, so ist

$$(44) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$$

fast überall konvergent in $-0, 1$ (Rademacher).

[453] Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, so ist (44) fast überall divergent in $-0, 1$ (Kolmogoroff).

Beweis von [452]: Sind $s_n(t)$ die Partialsummen von (44) und $f(t)$ die nach dem Riesz-Fischer'schen Satze [356J in L^2 vorhandene Funktion mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (f(t) - s_n(t))^2 dt = 0$, so hat man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) - s_n(t))^2 dt = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta \in [-0, 1],$$

also auch

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) - s_n(t)) dt = 0.$$

Ist (α_k, β_k) ein Konstanzintervall für $r_k(t)$, also auch für $s_k(t)$, so ist $\int_{\alpha_k}^{\beta_k} (s_n(t) - s_k(t)) dt = 0$ für $n > k$, also — wegen (45) —

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t) dt = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} s_k(t) dt.$$

Ist $t_0 \neq p/2^q$ (p, q ganzzahlig) und ist $\frac{d}{dt} \int_0^t f(u) du$ für $t = t_0$ vorhanden, $\alpha_k < t_0 < \beta_k$, so folgt

$$s_k(t_0) = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} s_k(t) dt = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t) dt,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(t_0) = \left(\frac{d}{dt} \int_0^t f(u) du \right)_{t=t_0},$$

also ist letzter Limes f. ü. in $0 < t < 1$ vorhanden, w. z. b. w.

Ein anderer Beweis stützt sich auf die Identität

$$r_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} [\gamma_n^{(1)}(t) + \gamma_n^{(2)}(t) + \dots + \gamma_n^{(2^{n-1})}(t)],$$

wo $\{Z\}$ das in [226] definierte Haar'sche System ist. Setzt man

$$c_n^{(i)} = \frac{a_n}{\sqrt{2^{n-1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}), \text{ so wird } \sum_{i=1}^{2^{n-1}} (c_n^{(i)})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \text{ also}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n^{(1)} \gamma_n^{(1)}(t) + \dots + c_n^{(2^{n-1})} \gamma_n^{(2^{n-1})}(t)],$$

und rechts steht — laut [356] — die Entwicklung einer Funktion aus L^2 nach $\{Z\}$, wenn wir von den Klammern absehen; da die letzteren die Konvergenz nicht stören, ist nach [442] die Reihe rechts, also auch (44) f. ü. konvergent.

Beweis von [453]: Wir gehen indirekt vor und setzen voraus, (44) wäre in einer t -Menge von positivem Maße konvergent. Dann ist diese Reihe in einer Menge E mit $|E| > 0$ gleichmäßig konvergent. Es gibt also ein M mit

$$|s_{n+p}(t) - s_n(t)| < M \quad (t \in E)$$

für alle natürlichen n, p . Dies ergibt

$$\int_E (s_{n+p}(t) - s_n(t))^2 dt < M^2 |E|,$$

oder

$$(46) \quad M^2 |E| > \int_E \left(\sum_{n=1}^{n+p} a_n r_n(t) \right)^2 dt = |E| \cdot \sum_{n=1}^{n+p} a_n^2 + 2 \sum_{n+1 \leq i < k \leq n+p} a_i a_k \int_E r_i(t) r_k(t) dt.$$

Nun ist aber $\{r_k(t)\}$ ein multiplikatives System, d. h. ein System [454] von der Eigenschaft [451]; infolgedessen ist das System $\{r_i(t) r_k(t)\}$ aller Produkte ($i < k$) orthogonal und normiert. Die Bessel'sche Ungleichung [264] liefert also für $n > N(E)$

$$\sum_{n+1 \leq i < k \leq n+p} \left| \int_E r_i(t) r_k(t) dt \right|^2 < \frac{|E|^2}{9},$$

(denn links steht die Summe der Koeffizientenquadrate der charakteristischen Funktion von E), was die Doppelsumme in (46) durch

$$\frac{|E|}{3} \cdot \sqrt{\sum_{i,k} (a_i a_k)^2} < \frac{|E|}{3} \cdot \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2$$

zu majorisieren erlaubt. Es folgt

$$M^2 |E| > |E| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2 - \frac{2|E|}{3} \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2$$

und — wegen $|E| \neq 0$ —

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2 < 3M^2$$

für $n > N(E)$, wie groß auch p sei; dies ist mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ gleichbedeutend.

[455]

Probabilistische Deutung. Die Rademacher'sche Funktion $r_1(t)$ ist in $(0, 1/2)$ gleich $+1$, in $(1/2, 1)$ gleich -1 . Wenn wir aus $(0, 1)$ ein t blindlings wählen, indem wir gleichen Teilintervallen gleiche Chancen zuordnen, so wird die Wahrscheinlichkeit für ein t mit $r_1(t) = +1$ ebenso groß, wie die Wahrscheinlichkeit für ein t mit $r_1(t) = -1$. Beide Wahrscheinlichkeiten sind $1/2$. Setzen wir — allgemeiner und genauer — fest, $|E|$ sei die Wahrscheinlichkeit in $[0, 1]$ einen Punkt aus E anzutreffen ($E \subset [0, 1]$). Betrachten wir die n ersten Rademacher'schen Funktionen $r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)$; sie sind unabhängig voneinander im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung; m. a. W.: ist es bekannt, daß $r_i(t)$ den Wert 1 hat, so ist die Wahrscheinlichkeit des Wertes 1 für $r_k(t)$ ($k \neq i$) noch immer $1/2$, also so groß, wie wenn nichts über t bekannt wäre. Man kann leicht feststellen, daß von den 2^n Kombinationen $r_1(t) = \pm 1, r_2(t) = \pm 1, \dots, r_n(t) = \pm 1$ der Vorzeichen $\pm$ eine jede in einer t -Menge vom Maße $1/2^n$ realisiert wird. Dies erlaubt, alle Probleme des Kopf-Wappen-Spiels um den Einsatz 1 in der Sprache der Rademacher'schen Funktionen zu formulieren, wenn es sich um n Würfe handelt. So ist z. B. die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für einen der Spieler in den n ersten Würfeln mindestens den Gesamtgewinn a zu

erzielen **mit** der Bestimmung des Maßes der durch die Ungleichung

$$r_1(t) + r_2(t) + \dots + r_n(t) \approx a \quad \text{in } 0, 1$$

definierten t -Menge identisch.

Will man unendlichlange Partien behandeln, so genügt es das Postulat über die Addition der Wahrscheinlichkeiten auf unendliche Summen auszudehnen und ein geeignetes „Vollständigkeitspostulat“ hinzuzufügen. Da die Lebesgue'sche Maßtheorie analoge Postulate erfüllt, wird der Parallelismus zwischen den Rademacher'schen Funktionen und der Theorie des Kopf-Wappen-Spiels erhalten bleiben. So ist z.B. der Cantelli'sche Satz, daß der mittlere Gewinn (Einsatz = 1) mit der Wahrscheinlichkeit 1 gegen 0 strebt, mit der Behauptung

$$(47) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k(t) = 0 \quad \text{f. ü. in } 0, 1$$

gleichwertig.

In obiger Deutung nehmen andererseits die Sätze [452] und [453] folgende Gestalt an:

Sind in $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ die c_n gegeben und werden die Vorzeichen $\pm$ nacheinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit für + und — gelost, so ist die Wahrscheinlichkeit eine konvergente Reihe zu erhalten im Falle $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ gleich 1, sonst 0.

Unsere Deutung des Cantelli'schen Satzes ist nichts anderes als der Borel'sche Satz über die Verteilung der Nullen und Einsen in dyadischen Entwicklungen reeller Zahlen. Dieser Satz besagt, daß — mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null — alle Zahlen $t(0 < t < 1)$ die gleiche Frequenz von Nullen und Einsen aufweisen, d.h. daß das Verhältnis der Anzahl der Nullen zu der Anzahl der Einsen an den n ersten Stellen mit $n \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt, was mit (47) übereinstimmt. Alle drei Sätze: Borel's, Cantelli's und (47) sind ohne Rechnung miteinander äquivalent, so daß ein aufmerksamer Leser des Borel'schen Satzes den (viel später bewiesenen) Cantelli'schen Satz hätte finden können. Dagegen ist der Bernoulli'sche Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung schwächer als (47). Interpretiert man ihn als eine Eigenschaft des Systems $\{r_k(t)\}$, so liefert er nicht (47), sondern bloß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{as } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k(t) = 0,$$

wo „lim as“ den in [162] definierten asymptotischen Grenzwert bedeutet.

Spätere Verschärfungen des Satzes (47) (Khintchin, 1924) lassen sich ebenfalls als Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, also als Verlängerung der Linie Bernoulli-Cantelli deuten.

Die probabilistische Deutung des Systems $\{r_k(t)\}$ erlaubt einige Eigenschaften dieses Systems vorauszusehen. Da man zum Kopf-Wappen-Spiel an Stelle der n ersten ebensogut irgendwelche n verschiedene Funktionen $r_{p_1}(t), \dots, r_{p_n}(t)$ heranziehen kann, ist das Rademacher-Kolmogoroff'sche Resultat [452] [453] auf

$$(48) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_{p_i}(t)$$

auszudehnen: Diese Reihe ist a. f. ü. konvergent bzw. divergent, je nachdem $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ oder $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \infty$ gilt.

Wir gewinnen auch das Resultat, daß das Integral

$$\int_0^1 f(t)^p dt$$

(und sogar $\int_0^1 \varphi(f(t)) dt$ mit beliebigem φ) von der Wahl der Indizes $\{p_i\}$ in

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_{p_i}(t)$$

unabhängig ist, also nur von $\{c_i\}$ abhängt.

Dieselbe Überlegung ergibt, daß die Konvergenz der Reihe (44), sowie die der Reihe (48), bei jeder Anordnung der Glieder f. ü. erhalten bleibt, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$, und dasselbe gilt für die Divergenz, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \infty$ ist. So ist z. B. die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i(t)}{i}$$

f. ü. absolut divergent, doch bei jeder Anordnung f. ü. konvergent.

Die Khintchin'sche Ungleichung. Für spätere Verwendung brauchen wir eine Ungleichung, die vom Rademacher'schen System erfüllt wird:

$$\text{Ist } s_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k r_k(t), \text{ so ist für } p > 0 \quad [456]$$

$$\int_0^1 |s_n(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{2} + 1\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Beweis: Sei zunächst $p = 2$, i natürlich. Dann ist

$$\int_0^1 s_n^2(t) dt = \sum \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_j!} \cdot a_{n_1}^{\alpha_1} a_{n_2}^{\alpha_2} \dots a_{n_j}^{\alpha_j} \cdot \int_0^1 r_{n_1}^{\alpha_1}(t) \dots r_{n_j}^{\alpha_j}(t) dt,$$

wobei die Summe über alle ganzen positiven Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_j$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ mit $n_k \leq n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j = 2i$, erstreckt wird. Nach [451] ist die Summe gleich

$$\sum \frac{(2\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + 2\beta_j)!}{(2\beta_1)! (2\beta_2)! \dots (2\beta_j)!} a_{n_1}^{2\beta_1} a_{n_2}^{2\beta_2} \dots a_{n_j}^{2\beta_j},$$

wo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$ ganze positive Zahlen mit der Summe i bedeuten. Nun ist aber

$$\sum \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_j)!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_j!} a_{n_1}^{2\beta_1} a_{n_2}^{2\beta_2} \dots a_{n_j}^{2\beta_j} = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^i,$$

also

$$\int_0^1 |s_n(t)|^{2i} dt \leq c \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^i.$$

Die Konstante c ist das Maximum von

$$\frac{(2\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + 2\beta_j)!}{(2\beta_1)! (2\beta_2)! \dots (2\beta_j)!} \cdot \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_j)!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_j!} = \frac{(2i)! \beta_1! \dots \beta_j!}{i! (2\beta_1)! \dots (2\beta_j)!} \leq \frac{(2i)!}{i! 2^i} = i^i.$$

Jetzt sei $2i - 2 < p < 2i$. Da $\left(\int_0^1 f(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ mit p wächst, wie aus [127] ersichtlich, so folgt

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |s_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 |s_n(t)|^{2i} dt\right)^{\frac{1}{2i}} \leq i^{\frac{1}{2}} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{p}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Schreibt man in [456] $s_m(t) - s_n(t)$ statt $s_n(t)$ und $\sum_{k=m+1}^n a_k^2$ statt $\sum_{k=1}^n a_k^2$,

so sieht man, daß die Bedingung $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ bereits die starke

Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t)$ mit dem Exponenten $p > 0$ gegen eine Funktion $f(t) \in L^p$ für alle p impliziert; diese Funktion ist f. ü. gleich der gewöhnlichen Summe der Reihe.

[457] Für $p = 1$ hat man

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 8 \int_0^1 |s_n(t)| dt;$$

dies folgt aus der Hölder'schen Ungleichung ($p = 3/2$, $p' = 3$)

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \int_0^1 s_n^2(t) dt \leq \left(\int_0^1 |s_n(t)| dt \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\int_0^1 |s_n(t)|^3 dt \right)^{\frac{1}{3}}$$

und aus der unter [456] für ganze i mitbewiesenen Ungleichung

$$\int_0^1 |s_n(t)|^{2i} dt \leq i! \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^i$$

mit $i = 2$; beide liefern

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 4 \left(\int_0^1 |s_n(t)| dt \right)^{\frac{2}{3}},$$

was mit der Behauptung äquivalent ist.

§ 6. Das Walsh'sche System.

Die Rademacher'schen Funktionen sind mit den Haar'schen durch die Beziehung

$$r_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} [\gamma_n^{(1)}(t) + \gamma_n^{(2)}(t) + \dots + \gamma_n^{(2^{n-1})}(t)] \quad (n \geq 1)$$

[461] verbanden, wie bereits bemerkt wurde. Ein anderes System erhält man aus $\{Z\}$, indem man setzt:

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \gamma_0(t), & \phi_1(t) &= \gamma_1^{(1)}(t), \\ \sqrt{2} \phi_2^{(1)}(t) &= \gamma_2^{(1)}(t) + \gamma_2^{(2)}(t), & & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}, \\ \sqrt{2} \phi_2^{(2)}(t) &= \gamma_2^{(1)}(t) - \gamma_2^{(2)}(t) \end{aligned}$$

Wenn man jede Zeile des Vorzeichenschemas zweimal schreibt, so erhält man 4 Zeilen; wenn man jede dieser Zeilen zu 4 Elementen ergänzt, indem man sie einmal durch gleiche und ein zweites Mal durch entgegengesetzte Vorzeichen ergänzt, so entsteht

$$\begin{array}{cccc}
 + & + & + & + \\
 + & + & - & - \\
 + & - & + & - \\
 + & - & - & +.
 \end{array}$$

Dieses neue Schema soll als Vorzeichenregel in den Formeln

$$\sqrt{4} \psi_i^{(i)} = + \gamma_i^{(1)}(t) \pm \gamma_i^{(2)}(t) \pm \gamma_i^{(3)}(t) \pm \gamma_i^{(4)}(t) \quad (i=1,2,3,4)$$

zur Definition der 4 Funktionen $\psi_i^{(i)}(t)$ dienen.

Analog werden alle $\{\psi_n^{(i)}\}$ durch $\{\gamma_n^{(i)}\}$ ausgedrückt. Das Koeffizientenschema ist eine symmetrische, orthogonale und normierte Matrix. Infolgedessen dient dieselbe Matrix, um die $\{\gamma_n^{(i)}\}$ durch die $\{\psi_n^{(i)}\}$ auszudrücken. Nun war aber $\{Z\}$ ein orthogonales, normiertes und (inbezug auf L^2 und L) vollständiges System, es hat also $\{\varphi\}$ [462] dieselben Eigenschaften.

Sei $f(t) \in L$; $p_n(t)$, $h_n(t)$ seien die Partialsummen der Entwicklungen von $f(t)$ nach $\{\psi\}$ bzw. $\{\gamma\}$; es ist [463]

$$(49) \quad p_{2^n}(t) = h_{2^n}(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Beweis: Ist $\|c_{ik}\|$ ($i, k=1, 2, \dots, 2^{q-1}$; $q \geq 2$) die in [461] erklärte Matrix, welche die Funktionen $\psi_q^{(i)}(t)$ ($i=1, 2, \dots, 2^{q-1}$) durch $\gamma_q^{(k)}(t)$ ($k=1, 2, \dots, 2^{q-1}$) auszudrücken gestattet, ist ferner

$$a_i = \int_0^1 f(t) \psi_q^{(i)}(t) dt, \quad b_k = \int_0^1 f(t) \gamma_q^{(k)}(t) dt,$$

so kommt

$$p_{2^q}(t) - p_{2^{q-1}}(t) = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} a_i \psi_q^{(i)}(t), \quad h_{2^q}(t) - h_{2^{q-1}}(t) = \sum_{k=1}^{2^{q-1}} b_k \gamma_q^{(k)}(t).$$

Drückt man in der ersten Summe φ durch Z aus, so kommt

$$p_{2^q}(t) - p_{2^{q-1}}(t) = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} a_i \sum_{k=1}^{2^{q-1}} c_{ik} \gamma_q^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{2^{q-1}} \left(\gamma_q^{(k)}(t) \sum_{i=1}^{2^{q-1}} a_i c_{ik} \right).$$

Nun ist aber $\|c_{ik}\|$ gleichzeitig die inverse Matrix, also

$$b_k = \int_0^1 f(t) \gamma_q^{(k)}(t) dt = \int_0^1 f(t) \sum_{i=1}^{2^{q-1}} c_{ik} \psi_q^{(i)}(t) dt = \sum_{i=1}^{2^{q-1}} c_{ik} a_i$$

und

$$(50) \quad p_{2^q}(t) - p_{2^{q-1}}(t) = \sum_{k=1}^{2^{q-1}} \gamma_q^{(k)}(t) b_k = h_{2^q}(t) - h_{2^{q-1}}(t) \quad (q \geq 2).$$

Wir hatten aber $\psi_0 = \chi_0$, $\psi_1 = \chi_1^{(1)}$, also ist (49) für $n = 0$, $n = 1$ richtig, was mit (50) die Gültigkeit von (49) für alle n bewirkt.

Das Interessante an dem System $\{\psi\}$ ist, daß es eine natürliche Vervollständigung des Rademacher'sehen Systems leistet, denn ein Teil von $\{\psi\}$, und $\sum w\{\psi_n^{(l)}(t)\}$, ist mit $\{r_n(t)\}$ ($n \geq 1$) identisch, wie die Anfangsformel dieses § lehrt.

§ 7. Das System $\{\psi_n(t)\}$.

Probabilistische Probleme, wie die in [455] erwähnten, lassen folgende Frage als natürlich erscheinen:

Reelle Zahlen $\{c_n\}$ seien gegeben; sie seien die Längen der ebenen Vektoren

$$w_n = c_n e^{i\vartheta_n} \quad (l = 1, \dots, N-1),$$

deren Argumente ϑ_n aus () 2. gelöst werden. Welches ist die

Wahrscheinlichkeit der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$?

Sind alle Teile von $[0, 2\pi]$ gleich wahrscheinlich und setzt man $\vartheta_n(t) = 2\pi\gamma_n(t)$, so kann man — im Sinne von [455] — die Frage auf die folgende zurückführen: Man bestimme das Maß der Konvergenzpunktmenge von

$$(51) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \vartheta_n(t)},$$

wo den Funktionen $\vartheta_n(t)$ folgende Eigenschaften zukommen sollen:

1° Jedes $\vartheta_n(t)$ ist in $[0, 1]$ erklärt und nimmt daselbst Werte aus $[0, 1]$ an, und zwar so, daß jede meßbare ϑ -Menge aus $[0, 1]$ einer maßgleichen t -Menge des Intervalls $0 \leq t \leq 1$ entspricht;

2° Die Funktionen $\vartheta_n(t)$ sind voneinander im probabilistischen Sinne unabhängig, d. h. ist G_1 eine durch $F_1(\vartheta_{\alpha_1}(t), \vartheta_{\beta_1}(t), \dots, \vartheta_{\mu_1}(t)) \in I_1$ erklärte t -Menge, G_2 eine durch $F_2(\vartheta_{\alpha_2}(t), \vartheta_{\beta_2}(t), \dots, \vartheta_{\nu_2}(t)) \in I_2$ erklärte t -Menge, wo F_1, F_2 beliebige meßbare Funktionen und I_1, I_2 beliebige meßbare Mengen, aber sämtliche Indizes $\alpha_1, \beta_1, \dots, \mu_1$ von sämtlichen $\alpha_2, \beta_2, \dots, \nu_2$ verschieden sind, so ist $|G_1 \cdot G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

Um solche Funktionen zu erhalten, spalten wir die natürliche Zahlenfolge in unendlichviele Teilfolgen, z. B:

1	3	6	10	15	.	.	.
2	5	9	14	20	.	.	.
4	8	13	19	26	.	.	.
7	12	18	25	33	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

Ist nun $0, \tau_1 \tau_2 \dots$ die dyadische unendliche Entwicklung der Zahl t , so sei

$$\vartheta_1(t) = 0, \tau_1 \tau_3 \tau_6 \tau_{10} \dots$$

$$\vartheta_2(t) = 0, \tau_2 \tau_5 \tau_9 \tau_{14} \dots$$

$$\vartheta_3(t) = 0, \tau_4 \tau_7 \tau_{13} \tau_{19} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Hier sind die Indizes der $I_n(t)$ definierenden dyadischen Entwicklung der n -ten Zeile des Schemas entnommen. Auf diese Weise haben wir eine Abbildung der Strecke $0 \leq t \leq 1$ auf den „Würfel“ $\{0 \leq \vartheta_n \leq 1\}$ ($n = 1, 2, \dots$) definiert; sieht man von den dyadisch-endlichen t und I ab, so ist diese Abbildung eineindeutig.

Beweisen wir 1° für $I_1(t)$. Es sei $\vartheta_1 \in (p/2^q, (p+1)/2^q)$; die ersten q Ziffern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$ sind damit fixiert (und umgekehrt entspricht diesen Ziffern das Innere oder ein Endpunkt dieses Intervalls); die entsprechenden t sind also Dualbrüche der Form

$$t = 0, \varepsilon_1 \square \varepsilon_2 \square \square \varepsilon_3 \square \square \square \varepsilon_4 \square \dots \square \varepsilon_q \square \dots;$$

die leeren Stellen sind beliebig mit 0 oder 1 zu besetzen (aber nicht alle mit 0). Die auf diese Weise entstandene t Menge besteht aus $2^{q(q-1)/2}$ gleichen Intervallen mit $1/2^q$ als Gesamtlänge. Das Intervall für ϑ hatte aber dieselbe Länge. 1° ist also im Falle einer aus Intervallen bestehenden oder einer Nullmenge für ϑ_1 bewiesen. Daraus folgt 1° für alle meßbaren ϑ_1 -Mengen und ähnlich

für $\vartheta_n(t)$. 2° ist im einfachsten Falle, wo G_1 durch $\vartheta_{\alpha_1}(t) \in \left(\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}\right)$,

G_2 durch $\vartheta_{\alpha_2}(t) \in \left(\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}\right)$ gegeben wird, leicht einzusehen: 1° lehrt, daß

in diesem Falle $|G_1| = 1/2^q$, $|G_2| = 1/2^s$ und $G_1 G_2$ ist diejenige t -Menge,

die durch beide Bedingungen $\vartheta_{\alpha_1}(t) \in \left(\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}\right)$, $\vartheta_{\alpha_2}(t) \in \left(\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}\right)$

erklärt ist, d. h. es ist die Menge der Dualbrüche t , in welchen

gewisse $q + s$ Stellen fixiert wurden; wir haben aber gesehen, daß das Maß einer solchen Menge $1/2^{q+s}$ beträgt, d. h. gleich $|\mathcal{G}_1| \cdot |\mathcal{G}_2|$ ist. Der allgemeine Fall läßt sich auf den Spezialfall reduzieren, indem man zunächst bemerkt, daß „Quader“ des Raumes $(\vartheta_{\alpha_1}, \vartheta_{\beta_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1})$ auf t -Mengen abgebildet werden, deren Maß gleich dem Kantenprodukt ist; das Produkt zweier Quader in $(\vartheta_{\alpha_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1})$ und in $(\vartheta_{\alpha_2}, \vartheta_{\beta_2}, \dots, \vartheta_{\mu_2})$ ist ein Quader in $(\vartheta_{\alpha_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1}, \vartheta_{\alpha_2}, \dots, \vartheta_{\mu_2})$ und die Kanten des neuen Quaders liegen auf den Kanten beider Komponenten. Damit ist 2° für Quader bewiesen. Sind nun F_1, F_2 meßbar, so definiert $F_1 \in F_2$ in Räume $(\vartheta_{\alpha_1}, \vartheta_{\beta_1}, \dots, \vartheta_{\mu_1})$ Menge, die man mit Quadern auf Lebesgue'sche Art ausmißt, was schließlich 2° ergibt.

Jetzt führen wir (vgl. (51))

$$\Theta_n(t) = e^{2\pi i \vartheta_n(t)} \quad (n),$$

also komplexwertige Funktionen der reellen Variablen t ein.

[471] Dieses System ist orthogonal, normiert und multiplikativ (der Inhalt dieser Aussage erhellt aus der Behauptung [474]). Unser Beweis dafür erfordert folgendes Lemma:

[472] Sind $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \dots, \vartheta_n(t)$ die Koordinaten eines beweglichen Punktes, $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$ ein n -dimensionaler euklidischer Raum und t die Zeit, so verläuft die Bewegung „nach dem Maxwell'schen Prinzip“ (Hilbert'sche Bezeichnung), d. h. der Punkt verbleibt in je zwei Teilen des Würfels $\{0 \leq \vartheta_n \leq 1\}$ (n) von gleichem Volumen gleich lange. M. a. W.: die durch $\{\vartheta_n(t)\}$ definierte Bewegung ist „quasi-ergodisch“.

Dieses Lemma haben wir aber bereits bei dem Beweise von (51) 2° mitbewiesen; dabei sind als „Teile“ des Würfels beliebige meßbare Mengen zu betrachten und „Volumen“ als n -dimensionales Maß zu verstehen.

[473] Eine unmittelbare Konsequenz von [472] ist die „Gleichheit des Raum- und Zeitmittels“ für eine beliebige integrierbare Funktion $F(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)$:

$$(52) \quad \int_0^1 \dots \int_0^1 F(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_n = \int_0^1 F(\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_n(t)) dt.$$

Es ist nämlich im Falle, wo F die charakteristische Funktion einer Menge $M \subset \{0 \leq \vartheta_k \leq 1\}$ ist, das n -fache Integral gleich $|M|$,

das einfache aber gleich dem Maße des t -Bildes von M , also — nach [472] — auch gleich $|M|$. Die Erweiterung auf alle F bietet keine Schwierigkeiten. (Hilbert benutzt die Formel (52) als Postulat für die Phasenbahn, um die kinetische Theorie der Materie ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung zu begründen).

Diese — an sich interessanten — Hilfsmittel haben uns vom Beweise von [471] abgelenkt. Wir haben zu zeigen, daß das [474] Integral

$$(53) \quad \int_0^1 \Theta_{m_1}(t) \bar{\Theta}_{n_1}(t) \Theta_{m_2}(t) \bar{\Theta}_{n_2}(t) \dots \Theta_{m_q}(t) \bar{\Theta}_{n_q}(t) dt$$

mit $m_1 < m_2 < \dots < m_q$, $n_1 < n_2 < \dots < n_q$ im Falle $m_i = n_i$ ($i = 1, 2, \dots, q$) den Wert 1, sonst den Wert 0 annimmt.

Der Integrand in (53) ist (nach [471] Def.)

$$e^{2\pi i (\vartheta_{m_1} - \vartheta_{n_1} + \vartheta_{m_2} - \vartheta_{n_2} + \dots + \vartheta_{m_q} - \vartheta_{n_q})},$$

also ist das Integral (53) nach (52) gleich

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i (\vartheta_{m_1} - \vartheta_{n_1} + \dots + \vartheta_{m_q} - \vartheta_{n_q})} d\vartheta_{m_1} d\vartheta_{n_1} \dots d\vartheta_{m_q} d\vartheta_{n_q},$$

d.h. gleich 1, wenn sich alle Variablen im Exponenten aufheben, sonst 0.

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Theta_n(t)$ f.ü. konvergent, [475] sonst f.ü. divergent.

Dieser Satz entscheidet die am Anfang dieses § gestellte Frage. Sein zweiter Teil läßt sich genau so beweisen, wie [453], denn die in [451] formulierte Eigenschaft des Rademacher'schen Systems kommt — als Eigenschaft des Integrals (53) — dem System $\{\Theta_n(t)\}$ zu. Für den ersten Teil sei $f(t)$ die nach dem Riesz-Fischer'schen Satze existierende starke Grenze der Partialsummen $s_n(t)$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Theta_k(t)$; es ist dann

$$(54) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) - s_m(t)) dt = 0 \quad (0 < \alpha < \beta < 1).$$

Sei $\alpha = \frac{p}{n}$, $\beta = \frac{p+1}{n}$, $q = \frac{n(n+1)}{2}$, p ganz und $0 \leq p < 2^q$;

wir behaupten, daß das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} \Theta_m(t) dt$ für $m > n$ verschwindet.

Es wird nämlich das Intervall $p/2^q < t < (p+1)/2^q$ auf gewisse Mengen $\{\vartheta_1\}, \{\vartheta_2\}, \dots, \{\vartheta_n\}$ mittels $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_n(t)$ abgebildet, aber das mittels $\vartheta_m(t)$ erhaltene Bild erfüllt $(0, 1)$, denn die ersten q Ziffern von t kommen bei der Definition von $\vartheta_m(t)$ ($m > n$) nicht vor; nach [473] ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Theta_m(t) dt = \int_{\{\vartheta_1\}} d\vartheta_1 \int_{\{\vartheta_2\}} d\vartheta_2 \dots \int_{\{\vartheta_n\}} d\vartheta_n \int_0^1 d\vartheta_{n+1} \dots \int_0^1 e^{2\pi i \vartheta_m} d\vartheta_m = 0.$$

Jetzt gibt (54)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} s_n(t) dt.$$

★ Ist nun $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $t \in (\alpha, \beta)$, so hat man $|\vartheta_k(t) - \vartheta_k(t_0)| < 1/2^{n-k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), also

$$|\Theta_k(t) - \Theta_k(t_0)| < \frac{4\pi}{2^{n-k}} \quad (k),$$

und daher,

$$2^n \int_{\alpha}^{\beta} s_n(t) dt - s_n(t_0) < 4\pi \left(\frac{c_1}{2^{n-1}} + \frac{c_2}{2^{n-2}} + \dots + \frac{c_n}{1} \right) = b_n.$$

Damit haben wir aber die Beziehung

$$2^n \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - s_n(t_0) < b_n$$

erhalten, wo offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ gilt, der Ausdruck $2^n \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ aber, wegen $\alpha < t_0 < \alpha + 1/2^q = \beta$, mit $n \rightarrow \infty$ für fast alle t_0 gegen $f(t_0)$ strebt.

Eine Umordnung der $\Theta_n(t)$ beeinträchtigt den Satz [475] nicht; man kann auch unendlichviele Θ_n fortlassen, wenn man nur unendlichviele beibehält. Eine Umordnung der Reihe (51) ändert ihr Konvergenzverhalten nur in einer Nullmenge; ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n|^2 < \infty$,

so beeinflussen obige Änderungen den Wert von $\int_0^1 f(t) t^p dt$ ($p > 0$) nicht. Sämtliche Resultate gelten auch für komplexe c_n .

Das System $\{\phi_n(t)\}$ ist unvollständig; z.B. ist die Funktion $e^{it\phi_1(t)}$ zu sämtlichen Funktionen des Systems orthogonal, wie aus [474] zu entnehmen ist. Eine natürliche Vervollständigung, wie im Falle des Rademacher'schen Systems, hat B. Jessen angegeben.

§ 8. Unendliches Intervall.

Viele Eigenschaften der Orthogonalsysteme sind ohne weiteres im unendlichen Intervall zu erklären. So ist z. B. das System $\{e^{-nt}\}$ in $(0, \infty)$ in bezug auf L vollständig. Es sei nämlich

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0 \quad (f \in L) \quad (n);$$

es folgt

$$\int_0^1 f(-\log u) u^{n-1} du = 0 \quad (n),$$

also, nach [358], $f(-\log u) = 0$ f. ü. in $(0, 1)$ d.h. $f(t) = 0$ f. ü. in $(0, \infty)$. Diese Überlegung ist gültig, wenn $f(-\log u)/u$ in

$(0, 1)$ zu L gehört. Wenn wir aber die Existenz von $\int_0^{\infty} f(t) dt$ voraussetzen (was wir getan haben), so ist

$$\int_0^1 \frac{f(-\log u)}{u} du < \infty,$$

denn es ist $\int_0^N f(t) dt = - \int_1^N f(-\log u) \frac{du}{u}$, woraus für $N \rightarrow +\infty$ das Behauptete folgt.

Es gibt auch Systeme, die in $(-\infty, +\infty)$ vollständig sind.

Die Orthogonalisierung bietet keine Schwierigkeiten, wenn die Funktionen in $(-\infty, +\infty)$ zu L^2 gehören.

Ein klassisches Beispiel sind die Laguerre'schen Polynome. Sie entstehen, wenn man Polynome $P_n(t)$ n -ten Grades von der Eigenschaft [481]

$$\int_0^{\infty} P_n(t) e^{-t} t^k dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

sucht. Systematisch geht man so vor, daß man $(t, u) = e^{i u/(l-u)}$ nach Potenzen von u entwickelt; zunächst ist

$$\psi(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \cdot \frac{u^k}{(1-u)^{k+1}}$$

für alle t und alle $u \neq 1$. Für $|u| < 1$ und alle t kann man den zweiten Faktor durch eine Potenzreihe ersetzen:

$$\begin{aligned} \psi(t, u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k t^k}{k!} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k+1) \dots (k+m)}{m!} u^m \right] u^k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k t^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} u^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k!} t^k \right\} u^n, \end{aligned}$$

wobei die absolute Konvergenz die Vertauschung der Reihenfolge der Summation rechtfertigt. Es kommt schließlich

$$(55) \quad \psi(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} u^n$$

mit $L_n(t) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} t^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1) \dots (k+1) t^k$
 = (nach der Leibniz'schen Regel) $e^{t^n} \frac{d^n (t^n e^{-t})}{dt^n}$.

Der letzte Ausdruck kann als Definition von $L_n(t)$ angesehen werden. Es ist

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1) \dots (n-k+1) t^{n-k} \\ &= (-1)^n \left[t^n - \frac{n^2}{1!} t^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} t^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right]. \end{aligned}$$

Z. B.:

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = -t + 1, \quad L_2(t) = t^2 - 4t + 2,$$

$$L_3(t) = -t^3 + 9t^2 - 18t + 6, \quad L_4(t) = t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24, \quad \text{u. s. w.}$$

[482] Die Funktionen

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{-t/2} L_{n-1}(t)}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

bilden in $(0, \infty)$ ein ON-System. Es ist nämlich für $m < n$

$$\int_0^{\infty} \varphi_{m+1}(t) \varphi_{n+1}(t) dt = \frac{1}{m! n!} \int_0^{\infty} e^{-t} L_m(t) L_n(t) dt = \sum_{k=0}^m \gamma_k \int_0^{\infty} e^{-t} t^k L_n(t) dt,$$

und man hat zunächst für $k < n$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^k L_n(t) dt = 0 \quad (n > 0)$$

zu zeigen. Das Integral ist aber gleich

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} t^k e^t \frac{d^n(t^n e^{-t})}{dt^n} dt &= \int_0^{\infty} t^k \frac{d^n(t^n e^{-t})}{dt^n} dt = -k \int_0^{\infty} t^{k-1} \frac{d^{n-1}(t^n e^{-t})}{dt^{n-1}} dt \\ &= (-1)^k k! \left[\frac{d^{n-k-1}(t^n e^{-t})}{dt^{n-k-1}} \right]_0^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Es werde nun $\int_0^{\infty} \varphi_n^2(t) dt$ berechnet; es ist gleich

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{(n-1)!} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-t} L_{n-1}^2(t) dt &= \frac{1}{(n-1)!^2} \int_0^{\infty} e^t \left[\frac{d^{n-1}(t^{n-1} e^{-t})}{dt^{n-1}} \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!^2} \int_0^{\infty} (-1)^{n-1} \left[t^{n-1} - \frac{(n-1)^2}{1!} t^{n-2} + \dots \right] \frac{d^{n-1}(t^{n-1} e^{-t})}{dt^{n-1}} dt \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!^2} \int_0^{\infty} t^{n-1} \frac{d^{n-1}(t^{n-1} e^{-t})}{dt^{n-1}} dt = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!^2} \cdot (n-1)! \int_0^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{(n-1)! (n-1)!}{(n-1)!^2} = 1. \end{aligned}$$

Nicht die $\varphi_n(t)$, sondern die $L_n(t)$ werden *Laguerre'sche Polynome* genannt. Die Funktion $\psi(t, u)$ erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$(1-u)^2 \frac{\partial^2 \psi(t, u)}{\partial u^2} = (1-u-t) \psi(t, u),$$

also ist (vgl. (55))

$$(1-u)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(t)}{(n-1)!} u^{n-1} = (1-u-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} u^n,$$

was durch Koeffizientenvergleichung zu

$$L_{n+1}(t) - (2n+1-t) L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0 \quad (n \geq 1)$$

führt.

Das System $\{L_n(t)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) ist in jedem endlichen Intervall abgeschlossen und vollständig in bezug auf L^2 (und L). Denn es ist $L_n(t)$ genau n -ten Grades und die Potenzen $t^{0,1,2}, \dots, t_n$ lassen sich durch $L_0, L_1, \dots, L_n$ linear ausdrücken.

[483] Die Laguerre'schen Funktionen $\{\varphi_n(t)\}$ bilden in $[0, \infty)$ ein in bezug auf L^2 vollständiges System.

Beweis: Es sei $f(t) \in L^2$ und

$$\int_0^\infty f(t) \varphi_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

d. h.

$$\int_0^\infty f(t) e^{-t/2} L_{n-1}(t) dt = 0 \quad (n)$$

oder

$$(56) \quad \int_0^\infty g(t) t^k dt = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

wenn $g(t) = f(t) \cdot e^{-t/2}$ gesetzt wird. $g(t)$ ist aber in $[0, \infty)$ integrierbar, denn es ist $f(t) \in L^2$, $e^{-t/2} \in L^2$ in diesem Intervall; wir wollen aus $g(t) \in L$ und (56) $g(t) = 0$ f. ü. in $[0, \infty)$ ableiten, was den Beweis abschließt.

Zu diesem Zwecke werde $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$ gesetzt; $F(s)$

existiert für $s > 0$. Setzt man noch $c_n = \int_0^\infty e^{-t/2} t^n dt$, so wird

$$c_n = 2nc_{n-1} = 2^{n+1}n!,$$

was zur Begründung der Formel

$$(57) \quad F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-st)^n}{n!} g(t) dt \quad (|s| < 1/4)$$

dienen soll. Es ist nämlich die in (57) benutzte Vertauschung der Integration und Summation erlaubt, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_0^\infty |g(t)| t^n dt$ absolut konvergiert; nach der Schwarz'schen Ungleichung ist aber

$$\int_0^\infty |g(t)| t^n dt \leq \text{const.} \sqrt{c_{2n}}$$

und der Konvergenzradius ist mindestens

$$1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{c_n}{n!}} = \frac{1}{4} \right].$$

Aus (56) und (57) folgt $F(s) = 0$ für $0 < s < 1/4$, d. h. für $s > 0$, denn $F(s)$ ist für $s > 0$ regulär.

$$F(s) = \int_0^1 u^{s-1} g(-\log u) du = 0 \quad (s > 0)$$

und [358] gehen

$$g(-\log u) = 0 \quad \text{f. ü. in } (0, 1), \quad \text{d. h.} \quad g(t) = 0 \quad \text{f. ü. in } (0, \infty).$$

Hermite'sche Polynome. Differenziert man sukzessive die Funktion

$$\varphi^{(0)}(t) = e^{-t^2}$$

und bezeichnet mit $\varphi^{(n)}(t)$ die n -te Ableitung von $\varphi^{(0)}(t)$ so kommt

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t) &= -2t \varphi^{(0)}(t), & \varphi^{(2)}(t) &= (4t^2 - 2) \varphi^{(0)}(t), \\ \varphi^{(3)}(t) &= -(8t^3 - 12t) \varphi^{(0)}(t), & & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Die Polynome

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t, \quad \dots,$$

allgemein

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n (e^{-t^2})}{dt^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad [484]$$

heißen die *Hermite** sehen. Sie erfüllen die Sturm-Liouville'sche Differentialgleichung

$$- \frac{d^2 H_n(t)}{dt^2} - 2t \frac{dH_n(t)}{dt} + 2n H_n(t) = 0.$$

Setzt man

$$(58) \quad \psi_n(t) = H_n(t) e^{-t^2/2},$$

so ist $\{\psi_n(t)\}$ in $(-\infty, +\infty)$ ein Orthogonalsystem. Es ist nämlich ($n > m$)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) \psi_m(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) \varphi^{(0)}(t) dt \\
&= H_m(t) (-1)^n \varphi^{(n-1)}(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(t) \varphi^{(n-1)}(t) dt \\
&= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(t) \varphi^{(n-1)}(t) dt = (-1)^{m+n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(m+1)}(t) \varphi^{(n-m-1)}(t) dt = 0,
\end{aligned}$$

denn $H_m^{(m+1)}(t) = 0$. Man hat ferner $\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_n(t))^2 dt = 2^n \cdot n! \sqrt{\pi}$. Infolgedessen ist (§255)

$$(59) \quad f(t) \sim c_0 \psi_0(t) + c_1 \psi_1(t) + \dots$$

mit

$$c_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_k(t) dt \quad (k)$$

*

die formelle Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\psi_k\}$, wenn die Integrale existieren. Im Kapitel VIII wird die Vollständigkeit des Systems $\{\psi_k\}$ bewiesen werden. In den „Frekvensflader og Korrelation“ sind die sechs ersten $H_n(t)$ in Schritten von 0.01 zehnstellig bis $t = 400$ von Jörgensen tabuliert worden.

Folgende Umstände haben die Verbreitung der Hermite'schen Polynome in der Statistik begünstigt:

1° Das Intervall $(-\infty, +\infty)$ ist überall dort, wo von vornherein alle Werte möglich sind, der natürliche Variabilitätsbereich.

2° Die Funktion $\psi^{(0)}(t) = e^{-t^2/2}$ ist mit der Gauß'schen Verteilungsfunktion identisch; demzufolge liefert bereits das erste Glied der Reihe (59) eine gute Annäherung in zahlreichen Fällen einer nahezu normalen Verteilung eines Merkmals.

3° Die Berechnung der Koeffizienten c_k führt auf die Ermittlung der Momente $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) t^k dt$ der Funktion $g(t) = e^{-t^2/2} f(t)$; die dazu nötigen Rechenschemata und Tafeln sind seit langer Zeit vorhanden.

4° Man kennt kein rechnerisch einfacheres Orthogonalsystem für das unendliche Intervall.

Eine rein theoretische Begründung der Anwendbarkeit der Hermite'schen Polynome in der Statistik gibt es unseres Wissens nicht.

Der Nutzen einer Entwicklung beruht darauf, daß eine lange Zahlenreihe $\{f(t)\}$ im Wesentlichen durch einige charakteristische Zahlen (etwa $c_1, c_2, \dots, c_n$) ersetzt wird; anstatt einer unübersichtlichen Funktionstafel erhält man einen geschlossenen Ausdruck (bis auf den Faktor e^{-t^2} ein Polynom), was die Lösung aller einschlägigen Aufgaben erleichtert.

§ 9. Vollständige Systeme.

Um vollständige Orthogonalsysteme zu bilden, genügt es vollständige Systeme zu finden, die man dann orthogonalisiert. Man kann nun aber leicht vollständige Systeme erhalten, wenn man einen Gedanken von O. Szász verallgemeinert; es zeigt sich, daß die meisten analytischen Funktionen zu solchen Systemen Anlaß geben.

Sei $F(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen z , regulär in einem Gebiete, welches das Stück $0 < r < (r > 0)$ der reellen Achse enthält. Es soll ferner $F(z)$ auf diesem Stück reelle Werte annehmen und die Potenzreihe

$$(60) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

soll so häufig von Null verschiedene Koeffizienten a_{n_j} ($n_j \geq 1$) aufweisen, daß die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j$ divergiere.

Es sei $\{s_v\}$ eine reelle Zahlenfolge mit $s_v \geq 0$ (v), $\lim_{v \rightarrow \infty} s_v = s_{\infty}$; [491] s sei endlich und von allen s_v verschieden, b eine positive Zahl mit $bs_{\infty} \leq r$. Unter diesen Voraussetzungen ist das System

$$\{\varphi_v(t) = F(s_v t)\} \quad (v \geq N)$$

(für ein geeignetes N) im Intervall $0 \leq t \leq b$ erklärt und daselbst inbezug auf L vollständig.

Beweis: $\rho(>0)$ sei der Konvergenzradius von (60) und $|sb| < \rho$. Die Entwicklung

$$F(st) = a_0 + a_1 st + a_2 s^2 t^2 + \dots$$

gilt bei festem s in $0 \leq t \leq b$. Ist $f(t)$ in $0, b$ integrierbar, so ist

$$(61) \quad G(s) = \int_0^b F(st) f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k s^k$$

mit

$$(62) \quad b_k = \int_0^b t^k f(t) dt$$

jedenfalls im Kreise $sb < p$ eine gültige Darstellung. Nun ist aber $G(s)$ — wie aus der Integraldarstellung (61) ersichtlich — für reelle s von 0 bis einschließlich s_∞ regulär, wegen $bs_\infty < r$. Infolgedessen gehört s_v für $v > N$ zu dem $[0, s_\infty]$ umfassenden Regularitätsgebiet von $G(s)$ und $G(s_v)$ ist für diese s_v erklärt; dabei sei N so bestimmt, daß bs_v für $v > N$ ein regulärer Punkt von $F(z)$ sei; es ist also $\varphi_v(t)$ für $v > N$ in $[0, b]$ bestimmt (und analytisch-regulär). Sei nun

$$G(s_v) = 0 \quad (v > N),$$

Wegen $s_v \rightarrow s_\infty$, $s_v \neq s_\infty$ folgt daraus $G(s) = 0$ in $[0, s_\infty]$, also

$$a_k b_k = 0 \quad (k)$$

und — wegen $a_{n_j} \neq 0$ —

$$b_{n_j} = 0 \quad (j);$$

(62) und der Müntz-Lerch'sche Satz [363] geben (unter Beachtung der Voraussetzung $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j < \infty$) — () f. ü. in $[0, b]$. Die Formel $G(s_v) = 0$ bedeutet aber nichts anderes als $\int_0^b f(t) \varphi_v(t) dt = 0$, also hat letzte Gleichung (für alle $v > N$) $f(t) = 0$ f. ü. zur Folge, w.z.b.w.

Die Bedingung $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j < \infty$ ist wesentlich, denn sonst existiert nach [361] in L^2 (sogar in C) *einf*(t) nicht f. ü. $= 0$, für welches alle b_{n_j} in (62) verschwinden. Giß) ist dann identisch Null, also $\int_0^b \varphi_v(t) f(t) dt = 0$ für alle $v > N$, d.h. $f(t)$ ist zu allen $\varphi_v(t)$ orthogonal.

Man verifiziert sofort, daß ein beliebiges unendliches Teilsystem von $\{\varphi_v(t)\}$ alle Voraussetzungen von [491] erfüllt. Infolgedessen ist es vollständig. M.a.W.: $\{\varphi_v(t)\}$ ist ein dicht-vollständiges System nach der Definition [247]. (Es ist also auch — in bezug auf L^2 — dicht-abgeschlossen).

Das Szász'sche Beispiel für $\{\varphi_v\}$ ist

$$(63) \quad \{(1 + s_v t)^{-1}\},$$

wo $0 < s_v < 1$, $\lim_{v \rightarrow \infty} s_v = \alpha < 1$, $s_v \neq \alpha$.

Ist nun σ reell und von $0, 1, 2, \dots$ verschieden, so ist (63) in $0 \leq t \leq 1$ ein vollständiges System. In der Tat, $F(z) = (1+z)^2$ ist für $|z| < 1$ regulär, die Strecke $\cdot 0, \alpha \cdot$ liegt in jenem Kreise, und alle Koeffizienten von $F(z)$ sind von Null verschieden. (Zugleich sieht man den Grund für den Ausschluß von $\sigma = 0, 1, 2, \dots$). Sei z. B. $\sigma = -1$, $s_\nu = 1/\nu$, $\alpha = 0$; der Szász'sche Satz zeigt die Vollständigkeit von $\{1/(\nu+t)\}$ in $\cdot 0, 1 \cdot$.

Die Funktionen $\sin z$, $\sin^2 z$, $\log(1+z)$ erfüllen die Voraussetzungen für $F(z)$; r kann beliebig gewählt werden. Infolgedessen ($s_\nu = 1/\nu$) sind die Systeme

$$\{\sin(t/\nu)\}, \quad \{\sin^2(t/\nu)\}, \quad \{\log(1+t/\nu)\}$$

in jedem Intervall $\cdot 0, b \cdot$ ($b > 0$) vollständig, also auch in jedem Intervall $\alpha \leq t \leq \beta$ mit $\alpha > 0$. Es ist $\log(1+t/\nu) = \log(t+\nu) - \log \nu$, also ist das System

$$1, \quad \log(t+1), \quad \log(t+2), \quad \dots$$

in $\cdot \alpha, \beta \cdot$ vollständig.

Die nach [491] gebildeten Systeme werden zu inbezug auf C [492] abgeschlossenen Systemen, wenn die 1 hinzugefügt wird.

Beweis: $F'(z)$ hat alle Eigenschaften von $F(z)$, die für [491] von Belang sind. Infolgedessen ist $\{\varphi_j'(t)\}$ ein vollständiges System inbezug auf L^2 (und L). Es ist demnach inbezug auf L^2 abgeschlossen, also auch inbezug auf L abgeschlossen. Ist $k (= 0, 1, 2, \dots)$ gegeben und $\varepsilon > 0$, so seien n , $c_1, c_2, \dots, c_n$ der (erfüllbaren) Ungleichung

$$\int_0^b |t^k - c_1 \varphi_1'(t) - \dots - c_n \varphi_n'(t)| dt < \varepsilon$$

gemäß gewählt, die für $0 \leq u \leq b$

$$\left| \int_0^u [t^k - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j'(t)] dt \right| < \varepsilon$$

zur Folge hat; es kommt

$$\left| \frac{u^{k+1}}{k+1} - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(u) + \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(0) \right| < \varepsilon \quad (0 \leq u \leq b),$$

also ist eine gleichmäßige Approximation von u^{k+1} durch ganz-lineare Verbindungen von $1, \varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u), \dots$ möglich. Da u^{k+1}

($k=0, 1, 2, \dots$) alle Potenzen liefert und u° auch (durch 1) approximierbar ist, so sind nach [122] alle stetigen Funktionen gleichmäßig approximierbar, w. z. b. w.

Der Fall $s_v \rightarrow \infty$. Bis jetzt konnten wir die Frage, ob z.B. $\{\cos \sqrt{n}t\}$ in $[0, 2\pi]$ vollständig sei, nicht beantworten. Die (positive) Lösung ist erst im folgenden Satz enthalten:

[493] Sei $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ eine ganze reguläre Funktion von der Ordnung ρ ; a_{n_j} ($j=1, 2, \dots$) seien ihre von Null verschiedenen Koeffizienten (mit Ausnahme von a_0) und es sei $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j = \infty$; a_0 und a_{n_j} seien sämtlich reell. Ist $\varepsilon > 0$, $s_v \neq 0$ und

$$(64) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{|s_v|^{\rho+\varepsilon}} = \infty,$$

so ist $\{\varphi_v(t) = F(s_v t)\}$ in $[\alpha, \beta]$ in bezug auf L vollständig.

Beweis: Sei $f(t) \in L$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) und

$$G(s) = \int_{\alpha}^{\beta} F(st) f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k s^k$$

(ähnlich wie in (60), (61) u. (62), mit $[\alpha, \beta]$ statt $[0, b]$). $G(s)$ ist ganz und (c, δ, γ konstant)

$$(65) \quad |G(s)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| \cdot \max_{\alpha \leq st \leq \beta} e^{\gamma |st|^{\rho+\varepsilon}} dt \leq c \cdot e^{\delta |s|^{\rho+\varepsilon}}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Ist nun

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi_v(t) dt = 0 \quad (v), \quad (v),$$

so ist $G(s_v) = 0$ ($v=1, 2, \dots$); die $\{s_v\}$ bilden einen Teil der Nullstellenfolge von $G(s)$. Nach (65) ist aber $G(s)$ höchstens von der Ordnung ρ , also ist $\rho + \varepsilon$ — nach einem bekannten Satze — ein konvergenzerzeugender Exponent für die reziproken Beträge der Nullstellen von $G(s)$, wenn $G(s)$ nicht identisch verschwindet. Dies verstößt aber gegen (64). Somit ist $G(s) \equiv 0$ und der Beweis endet genau so, wie derjenige von [491]. (Im Falle $\{\cos \sqrt{n}t\}$ ist $\rho = 1$, $n_j = 2j$, $\varepsilon \leq 1$).

V. KAPITEL.

Konvergenz und Summierbarkeit.

Die Untersuchungen dieses Kapitels gelten für Z^2 , wo nicht ausdrücklich andere Räume genannt werden.

§ 1. Konvergenz der Orthogonalreihen.

Es ist leicht eine durchweg divergente Orthogonalreihe anzugeben; so ist z. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nt$ für alle t divergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nt$ für alle mit π inkommensurablen t , also f. ü. divergent. Dies ist kein Ausnahmefall, denn es gilt der

Satz: Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein beschränktes ON (d. h. $|\varphi_n(t)| \leq \alpha$ f. ü. mit t - und n -freiem α), so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ eine notwendige Bedingung für die Konvergenz f. ü. der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$. [511]

Beweis: Es sei $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon > 0$ und $\alpha^2 \varepsilon < \varepsilon$. Es gibt eine Menge E , wo die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ konvergiert, mit $|CE| < \varepsilon$. Es ist also in E $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \varphi_n(t) = 0$ und nach dem Egoroff'schen Satze [123] dürfen wir annehmen, daß dies gleichmäßig gilt. Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 \int_E \varphi_n^2(t) dt = 0,$$

da aber

$$\int_E \varphi_n^2(t) dt = \int_a^b \varphi_n^2(t) dt - \int_{CE} \varphi_n^2(t) dt > 1 - \alpha^2 \varepsilon > 1 - \varepsilon,$$

so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, w. z. b. w.

Untersuchen wir jetzt, ob es für jedes ON divergente Reihen
[512] mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gibt. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß unter

den Voraussetzungen von [511] $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)$ in einer positiven Menge divergiert. Sonst wäre nämlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^2(t) = 0$ f. ü., also $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n^2(t) dt = 0$, gegen die N-Eigenschaft. Desgleichen:

[513] Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein ONV, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü.

Es sei nämlich E die Konvergenzmenge der obigen Reihe, $|E| > 0$, $F \subset E$, $|F| > 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) < \infty$ in F . Ferner sei $G \subset F$, $0 < |G| < 1/4\pi$ und $g(t)$ die charakteristische Funktion von G . Die Bessel'sche Ungleichung [264] liefert für die Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ von $g(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_a^b g^2(t) dt = |G| < 1/4\pi$$

und die Schwarz'sche Ungleichung gibt für $t \in F$

$$(1) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \right| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)} < \sqrt{1/4\pi} \cdot \infty = 1/2.$$

Die Vollständigkeit hat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |g(t) - s_n(t)|^2 dt = 0$, wo $s_n(t) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t)$, also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = g(t)$ f. ü. in G zur Folge, denn es existiert

dieser Limes nach (1) (mit $\sum_{n=1}^{\infty}$). Es ist daher $s_n(t) > 1/2$ für $t \in G^*$, $n > n(t)$, wo G^* ein maßgleicher Teil von G ist; dies ist aber ein Widerspruch mit (1).

[514] Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein ONV, bzw. ein System wie in [511], so gibt es eine Folge $\{a_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und mit

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$$

f. ü., bzw. in einer Menge von positivem Maße.

Wir berufen uns hier auf [513], bzw. [512]. Im ersten Fall ist $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü., also nach dem Egoroff'schen Satze [123] ist

diese Reihe in $[a, b]$, von einer Menge M mit beliebig kleinem Maße abgesehen, gleichmäßig divergent, d. h., es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\text{w. u. G. } \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t) \right] = \infty.$$

Es gibt daher eine Menge $E_k \subset [a, b]$ mit $|E_k| < 1/k$ und mit $\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{w. u. G. } s_n(t)] = \infty$, wo $s_n(t)$ die Partialsumme von $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t)$ bedeutet. Setzt man $a_{kn}^2 = 1/\text{w. u. G. } s_n(t)$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{kn} = 0$ und die Reihe

(2) in E_k als Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(t)}{s_n(t)}$ divergent. Ist nun $a_n = a_{k,n}$

für $n_i < n \leq n_{i+1}$, wobei $\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} a_{k,n}^2 \varphi_n^2(t) > 1$ in $F_i \subset E_k$, $|F_i| > |E_k| - 1/i^2$, $|a_{k,n}| < 1/i$, so entsteht die Behauptung.

Im zweiten Fall genügt es $\{a_n\}$ (mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) so zu wählen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$ sei. Wäre nämlich die Reihe in (2) f. ü. konvergent, so hätte sie in einer positiven Menge M eine beschränkte Summe und man hätte (vgl. [123]) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_M \varphi_n^2(t) dt < \infty$; nun kann man aber, wie beim Beweise von [511], $\int_E \varphi_n^2(t) dt > 1 - \varepsilon > 0$ (mit n -freiem ε) zeigen, was $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, gegen unsere Wahl, zur Folge hätte.

Jetzt sind wir in der Lage, die unmittelbar vor [512] gestellte Frage zu beantworten:

Unter den Voraussetzungen von [514] existiert eine Folge $\{b_n\}$ [515] mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ derart, daß

$$(3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(t) \right| = \infty$$

f. ü., bzw. in einer positiven Menge gilt.

Beweis: $\{a_n\}$ sei die in (2) (erste Lesart) vorkommende Folge; es sei $b_n = \varepsilon_n a_n$ mit $\varepsilon_n^2 = 1$. Wäre für eine jede $\{\varepsilon_n\}$ -Wahl der linksseitige Ausdruck (3) in einer positiven t -Menge A_4 endlich, so hätte man

$$(4) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(u) \varphi_k(t) \right| < \infty$$

für fast alle u und $t \in M(u)$; $r_k(u)$ ist hier die k -te Rademacher'sche Funktion. Wegen $|M(u)| > 0$ ist die ebene Menge derjenigen (t, u) -Punkte in $[a, b] \times [0, 1]$, welche (4) erfüllen, von positivem ebenem Maße. Wendet man auf die charakteristische Funktion dieser Menge den Fubini'schen Satz über Doppelintegrale (I, § 2, Schluß) an, so kommt man auf eine positive t -Menge T derart, daß für $t_0 \in T$ die Gerade $t = t_0$ stets jene ebene Menge in einer linearen, in bezug auf u positiven Menge $U(t_0)$ schneidet. Es ist daher, für $t = t_0$, (4) für $u \in U$ richtig, wo $|U(t_0)| > 0$; [453] ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \varphi_k^2(t_0) < \infty \quad (t_0 \in T),$$

was, wegen $|T| > 0$, mit der ersten Lesart von (2) unverträglich ist. Es gibt also eine ε_n -Folge, welche (3) f. ü. realisiert; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ hat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ zur Folge und damit ist [515] in erster Lesart bewiesen; die zweite wird ganz analog behandelt.

Es sei wieder $\{\varphi_n(t)\}$ ein ONV. Nach [513] ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü., also (wegen $I \subset I^2$) $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(t)| = \infty$ f. ü. Soll also

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$$

in einer positiven Menge absolut konvergieren, so muß $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ sein.

[516] Mehr kann man nur für spezielle Systeme aussagen. Folgt aus der Konvergenz von (5) in einer positiven Menge $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, so sagen wir, $\{\varphi_n\}$ habe die Eigenschaft C. Soll die Konvergenz f. ü. vorausgesetzt werden, um $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ folgern zu dürfen, so heißt diese Eigenschaft c. Folgt aus der absoluten Konvergenz von (5) in einer positiven bzw. in einer mit $[a, b]$ maßgleichen Menge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, so sagt man, $\{\varphi_n\}$ habe die Eigenschaft D, beziehungsweise d.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft C ist [517]

$$(6) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E |\varphi_n(t)| dt > 0$$

für alle positiven E ; dasselbe gilt von D.

Hinlänglichkeit: Es sei $|E| > 0$ und (5) für $t \in E$ konvergent. Nach Egoroff [123] enthält E einen Teil E_1 mit $|E_1| > |E| - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) derart, daß $a_n \varphi_n(t)$ in E_1 gleichmäßig gegen Null strebt, woraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \int_{E_1} |\varphi_n(t)| dt = 0,$$

also, wegen (6), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ resultiert. Es ist also (6) für C hinreichend.

Für D ist der Beweis ähnlich: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \varphi_n(t)|$ ist in E_1 gleichmäßig konvergent, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{E_1} |\varphi_n(t)| dt$$

konvergent; wegen $\int_{E_1} |\varphi_n(t)| dt > \alpha > 0$ (mit n -freiem α) ist aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{E_1} |\varphi_n(t)| dt < \infty.$$

Notwendigkeit: Wäre (6) nicht erfüllt, also ein E mit $|E| > 0$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E |\varphi_n(t)| dt = 0$ vorhanden, so könnte man eine Folge $\{n_k\}$ mit

$$\int_E |\varphi_{n_k}(t)| dt < \frac{1}{k^3} \quad (k)$$

bestimmen. Man setze nun $a_{n_k} = k$, $a_n = 0$ für $n \neq n_k$. Dann ist

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \varphi_n(t)| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k} \varphi_{n_k}(t)|$ in E f. ü. konvergent, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |a_{n_k}| \cdot |\varphi_{n_k}(t)| dt < \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Hier ist aber $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, also weder C noch D vorhanden.

Damit haben wir [517] bewiesen.

[518] Folgerung: C und D sind äquivalent. Für das trigonometrische System hat C bereits Cantor erkannt; D ist erst von Denjoy und Lusin bewiesen worden.

[519] Analog verläuft der Beweis des Satzes: Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft c (oder d) ist das Vorhandensein eines $\varepsilon > 0$, so daß

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E |\varphi_n(t)| dt > 0$$

für alle E mit $|CE| < \varepsilon$ statthat.

Bemerkung. Nach [511] ist c für beschränkte ON erfüllt, es kommt also, nach [519], solchen Systemen auch d zu. Die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist daher für die absolute Konvergenz f. ü. der betreffenden Orthogonalreihe (5) notwendig; sie ist offenbar — wegen $|\varphi_n(t)| < \alpha$ — auch hinreichend.

§ 2. Konvergenz von Orthogonalentwicklungen.

Die Sätze des § 1 betreffen Orthogonalreihen; die Voraussetzung, eine Reihe sei eine Entwicklung, wird dort nicht eingeführt. Jetzt werde diese Voraussetzung gemacht und zunächst die Konvergenz in einem Punkte untersucht. Sie hängt nicht nur von der Funktion, die entwickelt wird, sondern auch von dem System ab.

In diesen Untersuchungen kommen gewisse Begriffe und Bezeichnungen vor, die wir hier voranstellen wollen. Es sei

$$(7) \quad f(t) \sim \sum_{k=1}^{(\infty)} a_k \varphi_k(t).$$

Die n -te Partialsumme der rechtsstehenden Entwicklung werde mit $s_n(f; t)$ oder kurz mit $s_n(t)$ bezeichnet. (7) ist mit $a_k = \int_a^b f(u) \varphi_k(u) du$ gleichbedeutend, es ist daher

$$(8) \quad s_n(t) = \int_a^b K_n(t, u) f(u) du$$

mit

$$(9) \quad K_n(t, u) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u).$$

Die Funktion

$$(10) \quad L_n(t) = \int_a^b |K_n(t, u)| du$$

heißt die n -te Lebesgue'sche Funktion des Systems $\{\varphi_n\}$. $K_n(t, u)$ [521] heißt der n -te Kern des Systems $\{\varphi_n\}$. (9) und (10) spielen in der Konvergenztheorie eine wichtige Rolle.

Ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(t_0) = +\infty,$$

[522]

so gibt es eine stetige Funktion $f(t)$ mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(f; t_0) = +\infty.$$

Es ist nämlich $s_n(f; t_0) = \int_a^b K_n(t_0, u) f(u) du$ und [154] verbürgt die Existenz der fraglichen Funktion $f(t)$. (Im Falle des trigonometrischen Systems ist $\log u = O(L_n(t))$ für beliebiges t , was die Existenz von Fourierreihen stetiger Funktionen zur Folge hat, die an einer gegebenen Stelle t_n divergieren). Die Bedingung $L_n(t_0) = O(1)$ ist also notwendig und hinreichend, damit $s_n(f; t_0) = O(1)$ sei für alle stetigen $f(t)$; dies folgt unmittelbar aus (8), (10) und [522].

Für den ganzen Raum L^2 reicht diese Bedingung nicht mehr aus, wie aus dem folgenden Satz ersichtlich (wo nicht einmal etwas über die Lebesgue'schen Funktionen vorausgesetzt wird):

Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein ONV, so gibt es für fast jedes t_0 ein $f(t) \in L^2$ [523] mit an der Stelle t_0 divergenter Entwicklung.

Beweis: Nach [513] ist $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t)$ f. ü. divergent; es sei $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t_0) = \infty$; nach [113] gibt es ein $\{a_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t_0) = +\infty$, also mehr, als zu beweisen war.

Ein verwandter Satz für beschränkte ON ist leicht aus [514] zu gewinnen. Wir können dieses Resultat verschärfen, indem wir den Raum M anstatt L^2 einführen. Dazu dient folgender

Mercer'sche Satz für ON-Systeme: Ist $\{\varphi_n(t)\}$ in $[a, b]$ [524] unter einer n -freien Schranke gelegen, so gilt für alle $f(t) \in L$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt = 0.$$

Beweis. Für $\epsilon > 0$ ist $f(t) = \bar{f}(t) + f_\epsilon(t)$ mit beschränktem $\bar{f}(t)$ und mit $\int_a^b |f_\epsilon(t)| dt < \epsilon$; es ist

$$\int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt = \int_a^b \bar{f}(t) \varphi_n(t) dt + \int_a^b f_\epsilon(t) \varphi_n(t) dt.$$

Das erste Integral rechts strebt gegen Null nach [264]; ist α eine obere Schranke aller $|\varphi_n(t)|$, so erreicht der Betrag des zweiten Integrals höchstens $\alpha\epsilon$, es ist also $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt \right| \leq \alpha\epsilon$.

[525] Unter der Voraussetzung von [524] gibt es ein positives E derart, daß für ein beliebiges $t_0 \in E$ eine beschränkte Funktion vorhanden ist, deren Entwicklung an der Stelle t_0 divergiert.

Beweis. E sei die Menge aller t , für welche $\varphi_n(t)$ nicht gegen Null konvergiert. Nach dem Beweis von [512] ist $|E| > 0$. Es sei $t_0 \in E$; wäre die Entwicklung einer jeden beschränkten Funktion $f(t)$ in t_0 konvergent, so wäre ein endlicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K_n(t_0, u) f(u) du$$

für alle beschränkten f vorhanden. Nach [163] gäbe es dann ein $g(u) \in L$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K_n(t_0, u) f(u) du = \int_a^b g(u) f(u) du \quad (f);$$

$g(u)$ ist nichts anderes als die schwache Grenze von $\{K_n(t_0, u)\}$. Man wähle $f(t) = \varphi_p(t)$. Es folgt

$$\varphi_p(t_0) = \int_a^b g(u) \varphi_p(u) du;$$

für $p \rightarrow \infty$ konvergiert das Integral nach [524] gegen Null und $\varphi_p(t_0)$ nicht.

Bemerkung. Läßt man die Voraussetzungen [523] und [524] fallen, so kann man ein System finden, welches jedem $f(t) \in L$ eine durchweg konvergente Entwicklung zuordnet.

Ein derartiges System ist z. B. $\{\varphi_n(t) = \sqrt{2^{n+1}} \text{ in } (1/2^{n+1}, 1/2^n),$
sonst 0}; es ist ON aber nicht V. Es ist hier stets für $p > n$,
 $t \in (1/2^{n+1}, 1/2^n)$

$$s_p(f; t) = a_n \sqrt{2^{n+1}},$$

also ist $\{s_p\}$ konvergent für $t \in (0, 1)$ (aber auch für $t = 0$, $t = 1$).
Dagegen bleibt [525] richtig, wenn man die Voraussetzung der
Vollständigkeit in bezug auf L^2 einführt. Unser Beispiel zeigt auch,
daß ohne diese Voraussetzung [513] nicht gilt.

Gleichmäßige Konvergenz. Jetzt wollen wir die Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz einer Orthogonalentwicklung im ganzen Intervall betrachten.

Es sei $\{\varphi_n\}$ ein ON. Folgende zwei Bedingungen sind für die gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung einer jeden stetigen Funktion gegen diese Funktion im ganzen Definitionsintervall a, b notwendig und hinreichend: [526]

1° Jede stetige Funktion kann in a, b durch entsprechende Linearformen der $\{\varphi_n\}$ gleichmäßig approximiert werden;

2° Die Lebesgue'schen Funktionen des Systems sind in a, b gemeinsam beschränkt.

1° ist notwendig, denn $s_n(f; t)$ sind die approximierenden Linearformen für $f(t)$. Wäre 2° nicht erfüllt, so hätte man eine Indexfolge $\{n_i\}$ und eine Punktfolge $\{t_i\}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} L_{n_i}(t_i) = +\infty$; nach [154] würde dann eine stetige Funktion $f(t)$ mit

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \int_a^b K_{n_i}(t_i, u) f(u) du = +\infty,$$

d. h. mit $\limsup s_{n_i}(f; t_i) = +\infty$ vorhanden sein, was gegen die gleichmäßige Konvergenz verstößt.

Sei jetzt 1° und 2° erfüllt. Es sei $|L_n(t)| < \lambda$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $w_k(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_k \varphi_k(t)$ mit $|f(t) - w_k(t)| < \varepsilon/2\lambda$ in a, b ; für $m > k$, $n > k$ ist

$$s_m(w_k; t) = s_n(w_k; t) = w_k(t);$$

es ist ferner (wir unterdrücken t in $s_{\dots}(\dots; t)$)

$$s_m(f) - s_n(f) = s_m(f - w_k) - s_n(f - w_k),$$

also — wegen (8) —

$$|s_m(f) - s_n(f)| \leq \left| \int_a^b K_m(t, u) [f(u) - w_k(u)] du \right| \\ + \left| \int_a^b K_n(t, u) [f(u) - w_k(u)] du \right|,$$

was mit $|L_n(t)| < \lambda$

$$|s_m(f) - s_n(f)| < 2\lambda \cdot \epsilon/2\lambda = \epsilon$$

liefert. Die gleichmäßige Konvergenz von $\{s_n(t)\}$ ist bewiesen. Nach [246] und [373] hat aber 1° die Vollständigkeit von $\{\varphi_n\}$ in bezug auf L^2 zur Folge; es muß also $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = f(t)$ sein.

Bemerkung, [526] zeigt, daß die Lebesgue'schen Funktionen des Haar'schen und des Franklin'schen Systems gemeinsam beschränkt sind.

Setzt man für $\{\varphi_n\}$ die Stetigkeit voraus und ersetzt 2° durch 3° $s_n(f; t) = O(1)$ für alle stetigen $f(t)$,

so gelangt man zu einem Teilintervall von a, b , wo die Entwicklungen sämtlicher stetigen Funktionen gleichmäßig gegen diese konvergieren. Es genügt nämlich ein a_1, b_1 in a, b zu finden, wo $\{L_n(t)\}$ gemeinsam beschränkt ist und den Beweis von [526] fast wörtlich zu wiederholen. Ist aber ein solches a_1, b_1 nicht vorhanden, so gibt es einen Punkt t_1 in (a, b) und einen Index n_1 mit $L_{n_1}(t_1) > 1$; dann ist $L_{n_1}(t) > 1$ in einer Umgebung I_1 von t_1 . In I_1 liegt im Innern ein t_2 mit $L_{n_1}(t_2) > 2$, u. s. w. Ist t_0 ein Punkt des Produktes aller I_k , so ist

$$L_{n_k}(t_0) > k \tag{k},$$

was aber nach [522] der Annahme 3° widerspricht.

Die eben gefundenen Teilintervalle der gleichmäßigen Konvergenz liegen überalldicht in a, b .

Wesentlich-gleichmäßige Konvergenz. Ist eine Funktion bloß beschränkt, so können wir nicht verlangen, daß ihre Entwicklung gleichmäßig konvergiere, denn für stetige ON ist die Reihensumme stetig. Hier ist die wesentlich-gleichmäßige Konvergenz am Platze. Dieser Begriff wurde seinerzeit unzweckmäßig definiert, bevor der Egoroff'sche Satz [123] allgemein bekannt war, der die damalige Definition als mit der Konvergenz f. ü. identisch erwies. Die richtige Definition lautet:

Eine Funktionenfolge heißt wesentlich-gleichmäßig konvergent [527] in a, b , wenn sie nach Ausschluß einer Menge vom Maße Null gleichmäßig konvergiert.

Ist nun die Entwicklung einer jeden beschränkten Funktion wesentlich-gleichmäßig konvergent?

Die Antwort ist für jedes Orthogonalsystem negativ. [528]

Der Beweis soll nur für L^2 -vollständige Systeme geführt werden. Nach [121] sind alle $\varphi_n(t)$ auf einer perfekten, positiven Menge P stetig. t_0 sei ein Punkt von P , wo P (beiderseits) die Dichte 1 hat. $f(t)$ sei $\equiv 1$ für $t < t_0$ und $\equiv 0$ für $t > t_0$. Ist die Entwicklung von $f(t)$ wesentlich-gleichmäßig konvergent, also in $P - Q$ gleichmäßig konvergent, wo $|Q| = 0$, so ist die Summe der Reihe auf $P - Q$ stetig. Diese Summe ist f. ü. gleich $f(t)$ (nach der Konstruktion [382]), $f(t)$ hat aber eine Unstetigkeit in t_0 , die durch Entfernung einer Nullmenge nicht behoben werden kann.

Sind die $L_n(t)$ nicht gemeinsam wesentlich-beschränkt, so liefert [155] eine stetige Funktion mit nicht wesentlich-gleichmäßig konvergenter Entwicklung.

§ 3. Konvergenz fast überall.

Bis jetzt konnten wir nicht behaupten, daß es Entwicklungen mit positiver Divergenzmenge gibt; die Sätze der vorigen §§ geben höchstens überalldicht liegende Divergenzpunkte. Folgendes Beispiel ist also nötig, um zu zeigen, daß die Konvergenz f. ü. keine selbstverständliche Erscheinung bildet:

Es gibt ein ONV und ein $f(t) \in L$ mit fast überall divergenter Entwicklung. [531]

Es sei $\varphi_1(t) = 1$ in $0, 1$, $\varphi_2(0) = \varphi_2(1/2) = 2$; $\varphi_2(t)$ sei in $0, 1/2$ symmetrisch in bezug auf $t = 1/4$; es sei ferner $2 \cdot \varphi_2(t) \geq 1/2$, $\int_0^{1/2} \varphi_2^2(t) dt = 1/2$; ein solches $\varphi_2(t)$ ist vorhanden und kann stetig gewählt werden; in $(1/2, 1)$ sei $\varphi_2(t) = -\varphi_2(t - 1/2)$. Dann ist

$$\int_0^1 \varphi_2^2(t) dt = 1, \quad \int_0^1 \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt = 0, \quad 1/2 \leq |\varphi_2(t)| \leq 2.$$

Allgemein: $0, 1$ werde in 2^{n-1} gleiche abwechselnd geschlossene und offene Intervalle geteilt; $\varphi_n(t)$ sei stetig in $0, 2^{1-n}$, symmetrisch in bezug auf $t = 2^{-n}$, $\varphi_n(0) = \varphi_n(2^{1-n}) = n$; $\varphi_n(t) \geq 1/2$,

$\int_0^{2^{1-n}} \varphi_n^2 dt = 2^{1-n}$; im nächsten Intervall soll das Bild der Funktion φ_n an der t -Achse gespiegelt werden, im übernächsten dasselbe wie in $[0, 2^{1-n}]$ sein, u. s. w. abwechselnd (also $\varphi_n(1) = -n$). Es folgt

$$\int_0^1 \varphi_n^2(t) dt = 1, \quad \int_0^1 \varphi_i(t) \varphi_n(t) dt = 0, \quad 1/2 \leq |\varphi_n(t)| \leq n \quad (i < n),$$

wobei die Orthogonalität eine Folge der Verteilung der in bezug auf die Vorzeichen verschiedenen, sonst aber kongruenten Funktionsbilder ist. Es ist $\max_n |\varphi_n(t)| = n$; nach [153] gibt es ein $f(t) \in L$ mit

$$(11) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) \varphi_n(t) dt = +\infty.$$

$\{\varphi_n(t)\}$ werde zu einem ONV $\{\psi_n(t)\}$ ergänzt ([353]); (11) liefert $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, wenn

$$a_n = \int_0^1 f(t) \psi_n(t) dt$$

geschrieben wird. Nun ist aber $|\varphi_n(t)| > 1/2$, also, für jedes t ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n \psi_n(t)| = \infty,$$

d.h. mehr als [531] verlangt. (Die Eigenschaft V wurde hier nur in bezug auf M bewiesen; sie in bezug auf L zu beweisen reicht [353] nicht hin).

Dasselbe Beispiel setzt eine Schranke einer eventuellen Erweiterung des Mercer'schen Satzes [524].

Das Problem der Konvergenz durchweg hat keinen Sinn für allgemeine ON, weil ja stets die Werte der Funktionen in einer Nullmenge so abgeändert werden können, daß in dieser Menge Divergenz resultiert; dazu genügt es, daß unendlich viele Koeffizienten von Null verschieden seien. Natürlich ist nur die Frage nach der Konvergenz fast überall. Hier beschränken wir uns auf L^2 und fragen zunächst, ob es eine f. ü. konvergente Teilfolge von $\{s_n(f; t)\}$ gibt. Der Riesz-Fischer'sche Satz [356] und die Konstruktion [382] geben eine positive Antwort auf diese Frage mit dem Vorbehalt, daß die Indizes $\{n_i\}$ nicht ein für allemal (d.h. für alle Funktionen $f(t)$) bestimmt werden sollen. Doch kann die Dichte jener Indexfolge verstärkt werden:

Die Zahlen $v(n)$ mögen mit n gegen $+\infty$ wachsen; es sei [532]

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 v(n) < \infty$. Ferner sei $\{n_k\}$ eine Indexfolge mit

$$(12) \quad k \leq v(n_k) < k+1;$$

dann ist die Folge $\{s_{n_k}(t)\}$, d. h. $\left\{ \sum_{i=1}^{n_k} a_i \varphi_i(t) \right\}$ f. ü. konvergent.

Beweis: $f(t)$ sei die Funktion mit

$$\int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 = r_n, \quad \text{also} \quad \int_a^b [f(t) - s_{n_k}(t)]^2 dt = r_{n_k}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k}$ ist konvergent, denn [111] und (12) geben

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} (r_{n_k} - r_{n_{k+1}}) k + \lim_{k \rightarrow \infty} k r_{n_{k+1}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 v(i).$$

Nach [124] ist also $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b [f(t) - s_{n_k}(t)]^2 dt < \infty$ f. ü., was $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{n_k}(t) = f(t)$ f. ü. zur Folge hat.

Die Konstruktion [382] lieferte bloß $k^2 \leq v(n_k) < (k+1)^2$. Eine weitere Verschärfung wird sich als eine Folgerung aus [535] ergeben.

Zusätzliche Annahmen erlauben generelle Indexfolgen zu bestimmen: eine solche Voraussetzung ist z. B. die (C,1)-Summierbarkeit:

Ist die Entwicklung einer Funktion $f(t) \in L^2$ nach dem ON $\{\varphi_n\}$ [533] f. ü. (C,1)-summierbar, so ist die Folge

$$\{s_{2^k}(f, t)\}$$

f. ü. konvergent. Hier ist $\{n_k = 2^k\}$ die generelle Indexfolge.

Es sei $\sigma_n(t) = 1/n [s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_n(t)]$; $\{\sigma_n(t)\}$ ist voraussetzungsgemäß f. ü. konvergent; man hat sukzessive

$$s_n(t) - \sigma_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k (k-1) \varphi_k(t),$$

$$\int_a^b [s_{2^n}(t) - \sigma_{2^n}(t)]^2 dt = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{2^n} a_k^2 (k-1)^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [s_{2^n}(t) - \sigma_{2^n}(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{2^n} a_k^2 (k-1)^2 \right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 (k-1)^2 \sum_{n=\log_2 k}^{\infty} \frac{1}{4^n} \right) < \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (k-1)^2 \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{2}{k} \right)^2 \leq \frac{16}{3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty;$$

dies mit [124] zeigt die Konvergenz f. ü. der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [s_2^n(t) - \tau_2^n(t)]^2,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_2^n(t) - \tau_2^n(t)) = 0$ f. ü., woraus die Behauptung [533] unmittelbar hervorgeht.

Ein analoger Satz für andere Summationsmethoden kommt später ([574]) vor.

Jetzt wollen wir die volle Folge $\{s_n(t)\}$ ins Auge fassen. Damit sie f. ü. konvergiere, reicht nach [532] die Bedingung $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2 < \infty$ hin, denn dann darf $v(n) = n$ und demnach in (12) $n_k = k$ gesetzt werden. Weyl, Hobson und Plancherel haben diese Bedingung immer weiter abgeschwächt; Rademacher und Menchoff haben unabhängig voneinander die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 k,$$

eine nicht mehr verbesserungsfähige Bedingung entdeckt.

[534] Ein Hilfsatz: $\{\varphi_k(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sei ON; es existiert eine Funktion $\delta(t) \geq 0$ und eine Konstante z , mit

$$1^\circ \quad \left| \sum_{k=1}^j a_k \varphi_k(t) \right| \leq \delta(t) \quad \text{für } 1 \leq j \leq n \quad (n > 1),$$

$$2^\circ \quad \int_a^b \delta^2(t) dt \leq z \log^2 n \sum_{k=1}^n a_k^2;$$

$\delta(t)$ hängt von den φ und den a ab, dagegen ist z eine absolute Konstante, also nicht einmal von der Anzahl n abhängig ($z = (6 \log_2 e)^2$ ist z. B. ein zulässiger Wert).

Beweis: Sei zunächst $n = 2^r$, r ganzzahlig. Schreibt man $\gamma(t)$ für $1/2 \delta(t)$, so genügt

$$\left| \sum_{k=1}^j a_k \varphi_k(t) \right| \leq \gamma(t),$$

um 1° zu haben. Zerlegen wir das Intervall $(0, n)$ in zwei gleiche Teile $(0, 2^{r-1})$, $(2^{r-1}, 2^r)$; wenn wir jeden dieser Teile wieder in zwei gleiche zerlegen, so haben wir eine zweite Zerlegung von $(0, n)$ (in vier Teile) definiert; wenn wir bis zur r -ten Zerlegung gelangen, so ist 1 die Länge der Teile. Ist $0 < j < n$, so ist $(0, j)$ eine Vereinigung von höchstens r punktfremden Teilen, deren jeder

zu einer anderen Zerlegung gehört, wie man aus der dyadischen Darstellung von j abliest; ist $j = n$, so ist $(0, j)$ selbst als („nullte“) Zerlegung zu betrachten.

Das Intervall (i, j) sei ein Symbol für die Summe $\sum_{k=i+1}^j a_k \varphi_k(t)$.

Es ist $s_j(t) = \sum_{q=0}^r p_q(t)$; dabei sind die $p_q(t)$ Summen, deren Symbole die eben beschriebene Darstellung von $S_j(t) = (0, j)$ liefern; $p_q(t)$ entspricht der q -ten Zerlegung; manchen q wird dabei 0 als $p_q(t)$ zugeordnet. Die Schwarz'sche Ungleichung führt zu

$$s_j^2(t) \leq r \sum_{q=0}^r p_q^2(t)$$

und — a fortiori — zu

$$s_j^2(t) \leq r \sum_{q=0}^r A_q,$$

wo A_q die Summe der Quadrate aller $p_q(t)$ bezeichnet, die — bei festem q — aus $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)$ zu gewinnen sind. Schreibt man

$$\gamma^2(t) = r \sum_{q=0}^r A_q,$$

so folgt $s_j^2(t) \leq \gamma^2(t)$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b \gamma^2(t) dt &= r \sum_{q=0}^r \int_a^b A_q(t) dt = r \sum_{q=0}^r (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ &\leq (r+1)^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 = \left(\frac{r+1}{\log n} \right)^2 \cdot \log^2 n \cdot \sum_{k=1}^n a_k^2 = \left(\frac{r+1}{r} \right)^2 (\log_2 e)^2 \cdot \log^2 n \cdot \sum_{k=1}^n a_k^2. \end{aligned}$$

Dies gilt im Falle $n = 2^r$. Ist aber $2^r < n < 2^{r+1}$, so ergänzen wir das System $\{\varphi\}$ durch $\varphi_{n+1}(t), \dots, \varphi_{2^{r+1}}(t)$ und setzen $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{2^{r+1}} = 0$. Das zu diesem neuen $\{\varphi\}$ - und $\{a\}$ -System zugehörige $\gamma(t)$ ist sicherlich für das ursprüngliche System ausreichend, wenn wir nur 1^0 verlangen; es ist aber, nach dem eben Bewiesenen,

$$\int_a^b \gamma^2(t) dt \leq (r+2)^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 = \left(\frac{r+2}{\log n} \right)^2 \cdot \log^2 n \cdot \sum_{k=1}^n a_k^2;$$

es ist ferner

$$\left(\frac{r+2}{\log n} \right)^2 < (\log_2 e)^2 \cdot \left(\frac{r+2}{r} \right)^2 < 9 (\log_2 e)^2,$$

also in beiden Fällen

$$\int_a^b \vartheta^2(t) dt = 4 \int_a^b \gamma^2(t) dt \leq 36 (\log_2 e)^2 \cdot \log^2 n \cdot \sum_{k=1}^n a_k^2$$

und hiermit $x = (61 \log_2 e)^2$ als eine in 2° stets ausreichende Konstante erkannt.

Es werde bemerkt, daß die Reihenfolge der φ und a wohl $\hat{\sigma}(t)$, nicht aber x beeinflussen kann.

[534] setzt uns instand beweisen zu können:

$$[535J] \quad \text{Ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty, \text{ so ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \text{ f.ü. konvergent.}$$

Wir können nämlich [532] mit $v(n) = \log_2 n$ anwenden; es resultiert die Konvergenz f. ü. von $\{s_{2^k}(t)\}$ und es bleibt bloß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [s_n(t) - s_{2^k}(t)] = 0 \quad \text{f. ü.}$$

für $2^k < n < 2^{k+1}$ zu zeigen; [534] lehrt aber, daß

$$(13) \quad |s_n(t) - s_{2^k}(t)| \leq \hat{\sigma}_k(t)$$

mit

$$\int_a^b \hat{\sigma}_k^2(t) dt \leq x (\log 2^k)^2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i^2$$

ist; daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \hat{\sigma}_k^2(t) dt \leq x \cdot \log^2 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i^2 \right) \leq x \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \log^2 i < \infty$$

und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_k(t) = 0$ f.ü.; (13) liefert jetzt das Verlangte.

Folgerungen. 1° Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \varphi_n(t)}{\log n}$ ist f. ü. konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$; nach einem Kronecker'schen Satz ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \cdot \sum_{i=2}^n a_i \varphi_i(t) = 0 \quad \text{f. ü.},$$

d.h. $s_n(t) = o(\log n)$ f.ü.

2° [532J] gestattet jetzt folgende Verschärfung: $\{s_{n_k}(t)\}$ ist f.ü. konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_{n_k} \log k}{k^{\frac{1}{2}}}$ konvergiert (vgl. Beweis von [532]). Denn die letzte Bedingung ist mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k+1}^2 + a_{n_k+2}^2 + \dots + a_{n_{k+1}}^2) \log^2 k < \infty$$

äquivalent; man konstruiere ein ON $\{\Phi_k(t)\}$, indem man

$$\Phi_k(t) = \frac{\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i \varphi_i(t)}{\left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2 \right)^{1/2}} = \frac{1}{b_k} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i \varphi_i$$

setzt (der Divisor b_k soll gleich 1 gesetzt werden, wenn der Radikand verschwindet); wendet man jetzt [535] auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Phi_k(t)$ an, so kommt die Verschärfung zustande.

3° [535] erlaubt die Größenordnung der Partialsummen einer Orthogonalreihe abzuschätzen und zwar ohne — wie in 1° — vorauszusetzen, die Reihe sei eine Entwicklung. Es ist nämlich stets

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1+\varepsilon}} < \infty \quad (\varepsilon > 0);$$

wird

$$c_n = \frac{a_n}{\log n \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2+\varepsilon}} \quad (n > 1) \quad *$$

gesetzt, so wird [535] auf $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$ anwendbar; die letzte Reihe konvergiert f. ü., also gilt nach dem Kronecker'schen Satz

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) = o \left(\log n \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2+\varepsilon} \right) \quad \text{f. ü.}$$

Für $a_n = 1$ (n) führt der gleiche Gedanke zu einem schärferen Resultat, wenn man $c_n = n^{-1}(\log n)^{-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0, n > 1$) wählt; man erhält

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) = o \left(n^{1/2} (\log n)^{1+\varepsilon} \right).$$

(Man kann noch etwas weiter vordringen, wenn man geeignete $\{c_n\}$ heranzieht).

In [535] ist die Voraussetzung die schwächste unter allen jener Art. Dies soll durch Gegenbeispiele gezeigt werden; ihre Konstruktion beginnen wir mit folgendem

[536] Lemma: Es gibt für jedes $p (p = 1, 2, \dots)$ ein System $\{f_{p,m}(t)\}$ ($m = 1, 2, \dots, 2p$) orthogonal in $[0, 5]$ und so beschaffen, daß

$$1^\circ \int_0^5 f_{p,m}^2(t) dt < \frac{z_1}{p}, \quad 2^\circ f_{p,m}(t) + f_{p,m+1}(t) + \dots + f_{p,2p-1}(t) > z_2 \log p,$$

wobei 2° für alle $t \in [1, 2]$ gilt, m in 2° von t abhängt, dagegen z_1 und z_2 absolute Konstanten sind.

Es sei für $t \in [0, 4]$

$$f_{p,m}(t) = \frac{1}{k-p-m-1/2}, \quad \text{wo } t \in \left(\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}\right) \quad k=1, 2, \dots, 4p, m=1, \dots, 2p;$$

es folgt

$$(14) \quad \int_0^4 f_{p,m}^2(t) dt = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{(k-p-m-1/2)^2} < 2 \cdot \frac{4}{p} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = \frac{\pi^2}{p};$$

für $m > n$ hat man

$$\begin{aligned} J_{m,n} &= \int_0^4 f_{p,m}(t) f_{p,n}(t) dt = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{k-p-m-1/2} \cdot \frac{1}{k-p-n-1/2} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{m-n} \sum_{k=1}^{4p} \left(\frac{1}{k-p-m-1/2} - \frac{1}{k-p-n-1/2} \right) \\ &= \frac{1}{p(m-n)} \left[\sum_{j=1}^{3p} \frac{1}{p-m-j-1/2} - \sum_{j=1}^{3p} \frac{1}{p-n-j-1/2} \right] \\ &= \frac{1}{p(m-n)} \left[\sum_{j=1}^{p-n} \frac{1}{p-m-j-1/2} - \sum_{j=m+1}^{3p-n} \frac{1}{p-n-j-1/2} \right], \\ (15) \quad |J_{m,n}| &\leq \frac{1}{p(m-n)} \cdot \left[\frac{m-n}{p+n+1/2} + \frac{m-n}{3p-m+1/2} \right] \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p+1/2} + \frac{1}{p+1/2} \right) < \frac{2}{p^2}. \end{aligned}$$

Jetzt sollen die $\{f\}$ in [4, 5] erklärt werden, so daß sich in $[0, 5]$ Orthogonalität einstellt. Die „Kranichschwärme“ [321] helfen uns jetzt. Wir teilen [4, 5] in soviel gleiche Teile, als es Zahlenpaare $\{m, n\}$ mit $2p > m > n$ gibt, d. h. in $s = p(2p-1)$ Teile. Wir setzen

$$(16) \quad f_{p,m}(t) = \sqrt{s} \cdot |\alpha_{mj}| \quad \text{mit} \quad \alpha_{mj} = \int_0^4 f_{p,m}(t) \cdot f_{p,j}(t) dt \quad (j=1, 2, \dots, m-1),$$

in den Teilintervallen, die den Einsen der ersten Gruppe im Schwarm entsprechen; in denjenigen, die den alleinstehenden Einsen zugeordnet sind, sei

$$(17) \quad f_{p,m}(t) = -\sqrt{s} \cdot [a_{mj}] \cdot \text{sign } z_{mj} \quad (j = m+1, m+2, \dots, 2p),$$

in allen anderen Punkten sei $f_{p,m}(t) = 0$.

$\{f\}$ ist jetzt orthogonal in $[0, 5]$; 1° ist erfüllt, denn (14), (15), (16) und (17) ergeben

$$\begin{aligned} \int_0^5 f_{p,m}^2(t) dt &= \int_0^1 + \int_1^5 \leq \frac{\pi^2}{p} + \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj}^2 + \sum_{j=m+1}^{2p} z_{mj}^2 \\ &\leq \frac{\pi^2}{p} + \frac{2}{p^2} (m-1 + 2p-m) \leq \frac{14}{p}. \end{aligned}$$

2° ist noch zu prüfen. Es sei $t \in [1, 2]$, z. B. $t \in [1 + \frac{m-1}{p}, 1 + \frac{m}{p})$ ($m < p+1$); alsdann ist

$$f_{p,m}(t) + f_{p,m+1}(t) + \dots + f_{p,2p-1}(t) = \frac{1}{-1/2} + \frac{1}{-1-1/2} + \dots + \frac{1}{-(2p-1-m) \cdot 1/2}$$

und

$$\sum_{i=m}^{2p-1} f_{p,i}(t) > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2p-m} > \log p \quad (p > 1).$$

Im Falle $p = 1$ ist der abzuschätzende Betrag wenigstens 1, so daß 2° mit $z_2 = 1$ stets gilt.

Jetzt gehen wir daran, zu zeigen, daß die Ersetzung des Faktors $(\log n)^2$ in [535] durch eine Funktion $w(n)$ von schwächerem Wachstum zu einem Gegenbeispiel Anlaß gibt:

Ist $0 < w(n) = o(\log^2 n)$, $w(n) < w(n+1)$, so gibt es ein ON [537] $\{\varphi_n(t)\}$ und eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty, \quad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \text{ durchweg divergent,}$$

wie zuerst Menchoff festgestellt hat.

Wir konstruieren zunächst eine Folge $\{P_k\}$ mit

$$1) \quad P_1 = 0, \quad 2) \quad 1 + 2(p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}) < p_k \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$(18) \quad 3) \quad \frac{w(n)}{(\log n)^2} < \frac{1}{k^2} \quad \text{für } n \geq p_k.$$

Die Glieder der gesuchten Reihe 2° werden in Gruppen G_k eingeteilt werden, und zwar sollen die Glieder vom Index n zu G_k gehören, wenn $N_{k-1} < n \leq N_k$, wo $N_0 = 0$ und $N_k = 1 + 2(p_1 + p_2 + \dots + p_k)$

die neue Folge $\{N_k\}$ definieren. Es ist offenbar $N_1=1$, $N_k-N_{k-1}=2p_k$ für $k \geq 2$ und, wegen 2), $N_{k-1} < p_k$, also $N_k < 3p_k$ ($k \geq 2$). Jetzt sollen die Glieder $\phi_k(t) = a_k \varphi_k(t)$ sukzessive aufgebaut werden. Es sei $\phi_1(t) = 1$ in $0, 1$. Weitere $\phi(t)$ werden mit Hilfe der $\{f_{p,m}\}$ aus [536] konstruiert, indem man t ganzzahlig transformiert und ϕ in den Teilintervallen von $0, 1$ verschiedenen f gleichsetzt. Dies mag bis zu den Gliedern der Gruppe G_k einschließlich geschehen sein. Da alle gewonnenen ϕ streckenweise konstant sind, so gibt es eine endliche Einteilung von $0, 1$ in $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, so daß alle jene ϕ in jedem Intervall Δ konstant sind.

Seien Δ'_i und Δ''_i die beiden Hälften von Δ_i . Die Funktion $\phi_n(t)$, aus der Gruppe G_{k+1} , werde jetzt erklärt: $n - N_k$ heiße m ; es ist $0 < m \leq 2p_{k+1}$; $h_{p,m}(t, P)$ bezeichne die Funktion, die man in $\alpha, \beta \rightarrow P$ erhält, wenn man in $f_{p,m}(u)$ das Intervall $0 < u \leq 5$ ganzzahlig auf $\alpha < t < \beta$ transformiert; es ist $\int_{\alpha}^{\beta} h_{p,m}^2(t, P) dt = (\beta - \alpha) \int_0^5 f_{p,m}^2(t) dt$;

es sei nun

$$(19) \quad \phi_n(t) = \pm \frac{h_{p_{k+1}, m}(t, \Delta)}{\log p_{k+1}} \quad \text{in} \quad \begin{array}{l} \Delta = \Delta'_i \text{ (oberes Vorzeichen)} \\ \Delta = \Delta''_i \text{ (unteres Vorzeichen)} \end{array} \quad (i).$$

$\{\phi_n(t)\}$ ist ein Orthogonalsystem. Gehört nämlich ϕ_r zu einer anderen Gruppe als ϕ_s und $r > s$, so ist in allen Δ der ϕ_r enthaltenden Gruppe ϕ_s konstant, aber das Integral von $\phi_r(t)$ über ein solches Δ Null, wie (19) zeigt. Ist $\phi_r \in G_k$, $\phi_s \in G_k$, so ist

$$\int_0^1 \phi_r(t) \phi_s(t) dt = \sum_i \left(\int_{\Delta'_i} \phi_r \phi_s dt + \int_{\Delta''_i} \phi_r \phi_s dt \right),$$

aber

$$\int_{\Delta'_i} \phi_r(t) \phi_s(t) dt = \frac{1}{\log^2 p_k} \int_{\Delta'_i} h_{p_k, m_r}(t) h_{p_k, m_s}(t) dt = 0,$$

wegen der Orthogonalität der f in [536] und desgleichen für Δ''_i .

Jetzt möge die Eigenschaft [537] 1° bei der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t)$ nachgewiesen werden. Es ist $\int_0^1 \phi_1^2(t) dt = 1$ und für $n > 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_n^2(t) dt &= \sum_i \frac{1}{\log^2 p_k} \left[\int_{\mathcal{A}_i'} h_{p_k, m}^2(t) dt + \int_{\mathcal{A}_i''} h_{p_k, m}^2(t) dt \right] \\ &= \sum_i \frac{|\mathcal{A}_i|}{\log^2 p_k} \int_0^1 f_{p_k, m}^2(t) dt < \frac{z_1}{p_k \log^2 p_k} \end{aligned}$$

(nach [536] 1^o). $\varphi_n(t)$ ist normiert, also ist in $\psi_n(t) = a_n \varphi_n(t)$ ($n \geq 1$)

$$a_n^2 = \int_0^1 \psi_n^2(t) dt < \frac{z_1}{p_k \log^2 p_k},$$

und, wegen $p_{k-1} < N_{k-1} < n < N_k$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 w(n) &< z_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{N_k - N_{k-1}}{p_k \log^2 p_k} w(N_k) \\ &= 2z_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 p_k} \cdot \frac{w(N_k)}{\log^2 N_k} \cdot \log^2 N_k < 2z_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log^2 N_k}{(k-1)^2 \log^2 p_k}, \end{aligned}$$

wobei (18) und die darauffolgenden Ungleichungen zur Anwendung gelangen; u. a. war auch $N_k < 3p_k$ ($k \geq 2$), also ist (mit geeignetem z_2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 w(n) < z_2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2} < \infty, \text{ w. z. b. w.}$$

*

[537] 2^o bleibt zu beweisen. Die Gliedergruppe G_k von $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)$ stammt von den $f_{p, m}(t)$ mit festem p ; es ist nämlich in $\mathcal{A}_i'$

$$\psi_n(t) = \frac{h_{p, m}(t, \mathcal{A}_i')}{\log p}$$

mit $m = n - N_{k-1}$, $p = p_k$; nach [536] 2^o gibt es ein Teilintervall von $\mathcal{A}_i'$ von der Länge $|\mathcal{A}_i'|/5$, wo $m(t)$, also auch $n(t)$, der Ungleichung

$$(20) \quad |\psi_n(t) + \psi_{n+1}(t) + \dots + \psi_{n+r}(t)| > z_2$$

gemäß bestimmbar ist; $n+r = N_{k-1} + 2p - 1$ definiert r . Ähnlich ist es in $\mathcal{A}_i''$. Demnach gilt (20) in E_k vom Maß $1/5$.

E sei $= \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k$, d. h. $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k + E_{k+1} + \dots)$. Wir behaupten die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t)$ in E . Denn jedes $t \in E$ gehört zu unendlich vielen E_k , also ist Ungleichung (20) für unendlich viele n realisiert.

Das Maß von E ist 1; man hat nämlich:

$$|E| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k + E_{k+1} + \dots|,$$

andererseits ist $|C(E_k + E_{k+1})| = |CE_k \cdot CE_{k+1}| = (1 - 1/5)^2$, denn CE_k besteht aus endlich vielen Intervallen und es wird daraus CE_{k+1} , indem von jedem Intervall nur $4/5$ übrig bleibt. Es folgt $|E_k + E_{k+1}| = 1 - (4/5)^2$, $|E_k + E_{k+1} + \dots + E_{k+s}| = 1 - (4/5)^{s+1}$, also

$$|E| = \lim_{s \rightarrow \infty} (1 - (4/5)^s) = 1.$$

In CE , welches das Maß Null hat, sollen jetzt die $\varphi_n(t)$ abgeändert werden, so daß $\psi_n(t) = 1$ in CE sei. Dadurch wird weder die Orthogonalität noch die Normierung gestört und die Divergenz in $[0, 1]$ erreicht. Es ist leicht aus $[0, 1]$ ein beliebiges $[a, b]$ zu machen; desgleichen bietet die Vervollständigung von $\{\varphi_n\}$ keine Schwierigkeit. —

Es gibt beschränkte ON $\{\varphi_n\}$ und entsprechende $\{a_n\}$, $w(n)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty$, $0 < w(n) = o(\log n)$ und durchweg divergentem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$. Doch ist es nicht bekannt, ob für beschränkte ON die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log n$ bereits die Konvergenz f. ü. der Orthogonalreihe sichert.

§ 4. Unbedingte Konvergenz.

[535] verbürgt die Konvergenz einer Orthogonalreihe; der Satz sagt aber nichts darüber aus, wie sich die Reihe nach einer Umordnung der Glieder verhalten wird. Wann ist aber eine Reihe bei jeder Anordnung konvergent, von einer Nullmenge abgesehen (die mit der Anordnung variieren darf)?

Da genügt eine ein wenig stärkere Bedingung:

[541] *Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = +\infty$, $w(n) \leq w(n+1)$, und eine wachsende Indexfolge $\{n_k\}$, sowie eine Konstante $\varkappa'$ mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w(n_k)} < \infty, \quad \log n_{k+1} < \varkappa' \log n_k \quad (k)$$

vorhanden; die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) \log^2 n$$

hat die Konvergenz f. ü. der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau_n(t)$ bei jeder Anordnung zur Folge.

Beweis: $n = g(s)$ sei die Funktion, welche die Umordnung definiert, d. h. $\sum_{s=1}^{\infty} a_{g(s)} \tau_{g(s)}(t)$ sei die neue Anordnung von (5). H_k sei die Menge der natürlichen s mit $n_{k-1} < s \leq n_k$ ($n_0 = 0$). G_k sei $g(H_k)$, d. h. die aus den Zahlen

$$g(n_{k-1} + 1), g(n_{k-1} + 2), \dots, g(n_k)$$

bestehende Menge; diese Zahlen sollen — unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge — mit

$$g_1(k), g_2(k), \dots, g_{r_k}(k)$$

bezeichnet werden; $r_k = n_k - n_{k-1}$. [534] liefert für $1 \leq n \leq m \leq r_k$

$$\left| \sum_{i=n}^m a_{g_i} \tau_{g_i}(t) \right| \leq \delta_k(t) \quad \text{mit} \quad \int_a^b \delta_k^2(t) dt \leq x \log^2 r_k \cdot \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^2.$$

Nach Voraussetzung ist also

$$\begin{aligned} w(n_{k-1}) \int_a^b \delta_k^2(t) dt &\leq x w(n_{k-1}) \cdot x^2 \log^2 n_{k-1} \cdot \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^2 \\ &\leq x_1 \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i^2 w(i) \log^2 i. \end{aligned}$$

Für $1 \leq n = m = r_k$ ist

$$w(n_{k-1}) \int_a^b \delta_k^2(t) dt \leq x_1 a_{n_k}^2 w(n_k) \log^2 n_k.$$

Summiert man beiderseits, so kommt

$$\sum_{k=1}^{\infty} w(n_{k-1}) \int_a^b \delta_k^2(t) dt \leq x_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) \log^2 n,$$

was die Konvergenz f. ü. von

$$(21) \quad \sum_{k=1}^{\infty} w(n_{k-1}) \delta_k^2(t)$$

bewirkt. Sei t_0 ein Konvergenzpunkt der letzten Reihe, $\varepsilon > 0$,

so, daß $\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{w(n_k)} < \epsilon^2$, N so, daß für $m > n > N$ die Zahlen $g(s)$ ($n \leq s \leq m$) zu den Gruppen G_k mit $k > j$ gehören; dann ist

$$\left| \sum_{s=n}^m a_{g(s)} \varphi_{g(s)}(t_0) \right| \leq \sum_{k=j}^{\infty} \delta_k(t_0) \leq \sqrt{\sum_{k=j}^{\infty} \delta_k^2(t_0)} \leq \sqrt{\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{w(n_k)}} \leq \epsilon p_{j-1},$$

wo p_v den v -ten Rest der Reihe (21) bezeichnet. Damit ist die Konvergenz f. ü. der ungeordneten Reihe begründet worden.

Als Anwendung bekommen wir den Satz:

[542] Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\epsilon} < \infty$ für ein positives $\epsilon < 2$, so ist die Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ f. ü. konvergent und zwar bei jeder Anordnung.

Man ordnet $\{a_n\}$ in eine nichtwachsende Folge $\{a_{n(s)}\}$ um, deduziert aus $\sum_{s=1}^{\infty} |a_{n(s)}|^{2-\epsilon} < \infty$ $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot |a_{n(s)}|^{2-\epsilon} = 0$, daraus $a_{n(s)}^2 < s^{-2/\epsilon}$ für große s , also

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{n(s)}^2 (\log s)^2 (\log \log s)^{1+\epsilon} < \infty;$$

hier hat $w(n) = (\log \log n)^{1+\epsilon}$ die Eigenschaften der Voraussetzung von [541] (z. B. mit $n_k = 2^{2^k}$), was den Beweis abschließt.

Es möge noch ein Satz über unbedingte Konvergenz angegeben werden:

[543] Ist $w(t)$ mit t gegen $+\infty$ wachsend, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/w(n) < \infty$ und

$$(22) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w[\log |\log |a_n||] \log^2 |a_n| < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ f. ü. (unbedingt) konvergent.

(22) bleibt bei jeder Umordnung der Reihe bestehen. Wir können also voraussetzen, $\{a_n\}$ sei nichtwachsend. Auch die Annahme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$ schadet nicht der Allgemeinheit. G_n sei die Gesamtheit der a_m mit $1/n > |a_m|^2 \geq 1/(n+1)$ und $A(m) = w(\log \log \sqrt{n})$ für $a_m \in G_n$. Dann ist $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 A(m) \log^2 m < \infty$, denn es gilt (22) und

$$w(\log |\log |a_m||) \gg w(\log \log \sqrt{n}) = A(m),$$

$$\log^2 m \leq 4 \log^2 n \leq 16 \log^2 |a_m|,$$

da in G_n höchstens n Elemente vorkommen ($\sum a_n^2 = 1$), was $m \leq 1 + 2 + \dots + n \leq n^2$ impliziert. Auf diese Weise sind die zu [541] erforderlichen Bedingungen realisiert: $A(m)$ wächst gegen

$+\infty$, $\log_2 \log_2 \sqrt{n_k} = k$ gibt $\sum_{k=1}^{\infty} 1/A(n_k) < \infty$ (wegen $\sum 1/w(n) < \infty$)

und $\log n_{k+1} = 2 \log n_k$. Es ist daher die umgeordnete, also auch die ursprüngliche Reihe f. ü. unbedingt konvergent.

§ 5. Die Bedeutung der Lebesgue'schen Funktionen für die Konvergenz.

Die Ausführungen der §§ 3 und 4 über Konvergenz betreffen allgemeine ON. Will man schärfere Ergebnisse erlangen, so muß man die Systeme spezialisieren. Eine Eigenschaft, welche mehr oder weniger scharfe Konvergenzsätze zeitigt, ist die Größenordnung der Lebesgue'schen Funktion $L_n(t)$. Bevor über diese etwas vorausgesetzt wird, möge eine allgemeingültige Abschätzung vorgenommen werden:

Für jedes ON ist $L_n(t) = o(\sqrt[n]{n (\log n)^{1+\varepsilon}})$ f. ü. für jedes $\varepsilon > 0$. [551]

Dies hat als Grund die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\varepsilon}} \int_a^b \varphi_n^2(t) dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\varepsilon}}.$$

Es ist nämlich dann (nach [124]) auch $\sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n^2(t)/n (\log n)^{1+\varepsilon}$ f. ü. konvergent, also auch (nach dem oft benutzten Kronecker'schen Satz)

$$(23) \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t) = o(n \log^{1+\varepsilon} n) \quad \text{f. ü.}$$

Die Schwarz'sche Ungleichung gibt aber $L_n^2(t) \leq (b-a) \int_a^b K_n^2(t, u) du = (b-a) \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t)$, was mit (23) zu [551] führt.

Ist ein ON beschränkt, so ist sogar $L_n(t) = O(\sqrt{n})$, denn

[552]

$$L_n^2(t) \leq (b-a) \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t) \leq A^2(b-a) n$$

gilt f.ü., wegen $\log_n(t) < A$ f.ü. (ri). Dies ist die beste Abschätzung, weil das Rademacher'sche System genau diese Größenordnung liefert. [552] läßt eine Variante zu: man kann die Beschränktheit des ON durch die Bedingung $L_n(t) = \text{const.}$ ersetzen. Dann ist nämlich

$$L_n(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_n(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_a^b |K_n(t, u)| du dt,$$

also

$$L_n^2(t) = \int_a^b \int_a^b K_n^2(t, u) dt du = n.$$

Um zu anderen Konvergenzkriterien zu gelangen, brauchen wir den

[553] **Hilfssatz:** $F(\xi, \eta, t)$ sei in den Variablen ξ, η symmetrisch und für jedes in a, b integrierbare $\lambda(\xi, \eta) = t$ integrierbar in a, b ; $\lambda(\xi, \eta)$ sei $= \min\{\lambda(\xi), \lambda(\eta)\}$; Behauptung:

$$\left| \int_a^b \int_a^b F(\xi, \eta, \lambda(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right| \leq 2 \int_a^b d\eta \int_a^b |F(\xi, \eta, \lambda(\eta))| d\xi.$$

Beweis. Das Quadrat a, b werde in zwei Mengen M_1, M_2 zerlegt:

$$M_1 = E\{\lambda(\xi) \leq \lambda(\eta)\}, \quad M_2 = E\{\lambda(\xi) > \lambda(\eta)\};$$

offenbar ist $\lambda(\xi, \eta) = \lambda(\xi)$ in M_1 , $\lambda(\xi, \eta) = \lambda(\eta)$ in M_2 . Demnach:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \int_a^b F(\xi, \eta, \lambda(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right| &\leq \int_{M_1} |F(\xi, \eta, \lambda(\xi))| d\xi d\eta + \int_{M_2} |F(\xi, \eta, \lambda(\eta))| d\xi d\eta \\ &\leq \int_a^b \int_a^b [|F(\xi, \eta, \lambda(\xi))| + |F(\xi, \eta, \lambda(\eta))|] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Im letzten Integral darf $F(\xi, \eta, \lambda(\xi))$ durch $F(\eta, \xi, \lambda(\xi))$ ersetzt werden; tut man es und vertauscht ξ und η , so kommt

$$\left| \int_a^b \int_a^b F(\xi, \eta, \lambda(\xi, \eta)) d\xi d\eta \right| \leq 2 \int_a^b d\eta \int_a^b |F(\xi, \eta, \lambda(\eta))| d\xi.$$

[554] Ist $\omega(n)$ positiv und nichtabnehmend, $L_n(t) \leq \omega^2(n)$ in einer t -Menge E , $f(t) \in L^2$, $s_n(t)$ die Partialsumme der Entwicklung von $f(t)$, so ist

$$s_n(t) = O(\omega(n))$$

fast überall in E .

Beweis: $s_n(t) = \int_a^b f(u) K_n(t, u) du$; sei

$$v_n(t) = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{s_k(t)}{w(k)} = \frac{s_p(t)}{w(p)}, \quad p=p(t, n).$$

$\{v_n(t)\}$ ist nichtabnehmend; wir werden zeigen, daß $J_n = \int_E v_n(t) dt$ einem Grenzwert zustrebt, um hieraus — auf Grund von [124] — die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t)$ f. ü. in E zu folgern.

$$J_n = \int_E dt \int_a^b \frac{f(u) K_p(t, u)}{w(p)} du = \int_a^b du \cdot f(u) \int_E \frac{K_p(t, u)}{w(p)} dt,$$

und, wegen [127],

$$J_n^2 \leq \int_a^b f^2(u) du \cdot \int_a^b \left[\int_E \frac{K_p(t, u)}{w(p)} dt \right]^2 du.$$

Der zweite Faktor rechts ist aber, wenn $p(t, n) = q$ geschrieben wird,

$$(24) \int_a^b du \left[\int_E \frac{K_p(t, u)}{w(p)} dt \int_E \frac{K_q(t_1, u)}{w(q)} dt_1 \right] = \int_E \int_E \int_a^b \frac{K_p(t, u) K_q(t_1, u)}{w(p) w(q)} du dt dt_1.$$

Die Orthogonalität gibt

$$\int_a^b K_p(t, u) K_q(t_1, u) du = K_r(t, t_1) \quad \text{mit } r = \min(p, q).$$

Infolgedessen ist das Integral (24) höchstens gleich

$$\int_E \int_E \frac{|K_r(t, t_1)|}{w^2(r)} dt dt_1,$$

dieses Integral aber übertrifft nicht — nach [553] —

$$2 \int_E dt_1 \int_E \frac{|K_q(t, t_1)|}{w^2(q)} dt \leq 2\pi |E|.$$

Damit ist der Beweis zu Ende. Ist $L_n(t)$ beschränkt in E , so ist $s_n(t)$ f. ü. in E beschränkt, wie ersichtlich.

Ist $w(n)$ positiv und gegen $+\infty$ wachsend, $L_n(t) \leq \pi w^2(n)$ in [555]

E und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w^2(n) < \infty$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ f. ü. in E konvergent.

Beweis. Wählt man $\{n_k\}$ gemäß $k \leq \omega^2(n_k) < k+1$ für $k > \omega^2(1) - 1$, so wird $\{s_{n_k}(t)\}$ laut Annahme und [532] f.ü. konvergent. Es bleibt also $\lim (s_n(t) - s_{n_k}(t)) = 0$ f.ü. in E für $n_k < n < n_{k+1}$ zu zeigen. Wird $\{c_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, $c_{n+1} \geq c_n > 0$, und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) c_n < \infty$$

bestimmt und $b_n = a_n \omega(n) c_n$ gesetzt, so folgt nach [111]

$$s_n(t) - s_{n_k}(t) = \sum_{i=n_k+1}^n b_i \varphi_i(t) \frac{1}{c_i \omega(i)} = \sum_{i=n_k+1}^n \left(\sum_{j=1}^i b_j \varphi_j(t) \right) \left(\frac{1}{c_i \omega(i)} - \frac{1}{c_{i+1} \omega(i+1)} \right) \\ - \frac{1}{c_{n_k+1} \omega(n_k+1)} \sum_{j=1}^{n_k} b_j \varphi_j(t) + \frac{1}{c_{n+1} \omega(n+1)} \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(t).$$

Nach [554] ist $\left| \sum_{j=1}^i b_j \varphi_j(t) \right| < \alpha(t) \omega(i)$ f.ü. in E , also

$$|s_n(t) - s_{n_k}(t)| < \alpha(t) \omega(n_{k+1}) \left[\frac{1}{c_{n_k} \omega(n_k)} - \frac{1}{c_{n+1} \omega(n+1)} \right] + \frac{\alpha(t) \omega(n_k)}{c_{n_k} \omega(n_k)} \\ + \frac{\alpha(t) \omega(n)}{c_n \omega(n)} \leq \alpha(t) \sqrt{k+2} \left[\frac{1}{c_{n_k} \sqrt{k}} - \frac{1}{c_{n+1} \sqrt{k+2}} \right] + \frac{2\alpha(t)}{c_{n_k}},$$

wo das rechte Glied unabhängig von n gegen Null strebt.

Bemerkung. Unter der Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = +\infty$ mit [554] ist nach [555] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \varphi_n(t)}{\omega(n)}$ f.ü. in E konvergent; daraus folgt (Satz von Kronecker)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) = o(\omega(n)) \text{ f.ü. in } E,$$

also eine schärfere Variante von [554] (die aber ohne $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = +\infty$ falsch wäre). Ein noch einfacheres Raisonement gibt den

[556] **Satz:** $L_n(t) \leq \alpha$ in E und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ haben die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ f.ü. in E zur Folge.

Dann ist nämlich eine Folge $\{\omega(n)\}$ mit den Eigenschaften [555] bestimmbar und jener Satz anwendbar.

[555] ergibt für das trigonometrische System die Bedingung $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \log k < \infty$ als hinreichend für die Konvergenz von

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ f. ü., denn die Lebesgue'schen Konstanten haben hier die Größenordnung $\log n$, also ist $|\log(n+1)|$ ein passendes $w(n)$.

§ 6. Allgemeines über Konvergenz.

Wir betrachten in diesem § beliebige Systeme und untersuchen das Konvergenzverhalten der Entwicklungen von Funktionen einer gegebenen Klasse. $s_n(f; t) = \int_a^b K_n(t, u) f(u) du$ ist eine lineare Operation im Raume X , der mit der betrachteten Funktionenklasse identisch ist (z. B. $X=L$, $X=L^2$, u. s. w.). Setzt man $s_n(f; t) = F_n(f)$ und wendet [159] an, so sieht man, daß einem jeden System ON $\{\varphi_n\}$ [561] und dem Raume X eine Menge $T \subset a, b$ entspricht, so daß

$$1^\circ \limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n(f; t)| < \infty \quad \text{f. ü. in } T \quad \text{für jedes } f \in X,$$

$$2^\circ \limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n(f; t)| = \infty \quad \text{f. ü. in } CT \quad \text{für jedes } f \in X \quad \text{mit}$$

Ausnahme eines (event. leeren) Teiles von X von erster Kategorie,

T kann vom Maße Null sein, wie es bei dem trigonometrischen System für $X=L$ der Fall ist. Es existiert nämlich ein Kolmogoroffsches Beispiel einer integrierbaren Funktion, deren Fourierentwicklung überall unbeschränkt divergiert, so daß 2° überall in $(0, 2\pi)$ für dieses besondere $f \in L$ gilt. In diesem Falle lehrt [561], daß die „meisten“ integrierbaren Funktionen die Eigenschaft des Kolmogoroffschen Beispiels teilen. Dagegen hat T das Maß 1, wenn $\{\varphi_n\}$ das Haar'sche System ist und $X=L$.

T kann ein beliebiges Maß haben: wählt man z.B. ein $\{\varphi_n\}$, welches in einer Hälfte des Intervalls mit dem (auf diese Hälfte reduzierten) Haar'schen, in der zweiten mit dem (reduzierten) trigonometrischen System identisch ist, so hat T , für $X=L$, die Hälfte der Intervalllänge als Maß.

Ist $X=L^2$, so ist die Entwicklung einer beliebigen Funktion aus L^2 f. ü. in T konvergent; dies folgt aus 1° , wenn man ähnlich wie beim Beweise von [556] verfährt.

[562] Ist $\{\varphi_n\}$ in bezug auf X abgeschlossen und T die t -Menge des Satzes [561], so ist die Entwicklung einer jeden Funktion $f(t) \in X$ nach $\{\varphi_n\}$ f.ü. in T gegen $f(t)$ konvergent.

Beweis: Nach [561] haben die linearen Operationen $s_n(f; t)$ die dort mit 1^o bezeichnete Eigenschaft, es sind also die Voraussetzungen des Lemmas [158] erfüllt, wenn man die Bedingung $\omega > 0$ fallen läßt; die damaligen T_n , $x(\tau)$, $u(\dots n)$ heißen jetzt T , $f(t)$, $s_n(\dots)$. Wir brauchen hier nicht die Behauptung des Lemmas, sondern den Gedankengang des Beweises. Darnach gibt es eine Zahlenfolge $\{m_p\}$, eine Folge $\{K_p\}$ von Kugeln in X und eine Folge von t -Mengen $R^{(p)}(f)$, so daß für $f \in K_p$, $t \in R^{(p)}(f)$

$$|s_n(f; t)| \leq m_p$$

für alle n gilt; es ist $R^{(p)}(f) \subset T$ und $|T - R^{(p)}(f)| < \delta_p$ mit $\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p = 0$. Ist p_p der Radius von K_p , $f_0 \in X$, $\|f_0\| \leq p_p/pm_p$ und z_p der Mittelpunkt von K_p , so liegt $z_p + pm_p f_0 = y_p$ in K_p , also ist

$$|s_n(pm_p f_0; t)| \leq |s_n(z_p; t)| + m_p \leq 2m_p$$

und $|s_n(f_0; t)| \leq 2/p$ für $t \in R^{(p)}(z_p) \times R^{(p)}(y_p) \subset R^{(p)}$. Nach Voraussetzung gibt es Linearformen $l_i(t)$ in den φ_n mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f - l_i\| = 0$, wenn f gegeben ist; wählt man $i(p)$ so, daß $\|f - l_{i(p)}\| \leq p_p/pm_p$ sei, so ist

$$|s_n(f; t) - s_n(l_{i(p)}; t)| \leq 2/p$$

für $t \in R^{(p)}$ und alle n , also — für große n —

$$|s_n(f; t) - l_{i(p)}(t)| \leq 2/p$$

für $t \in R^{(p)}$. Die Folge $\{l_i(t)\}$ enthält eine f.ü. in a, b gegen $f(t)$ konvergente Teilfolge $\{l_i(t)\}$; betrachtet man diese anstatt $\{l_i\}$ und bezeichnet $\limsup_{p \rightarrow \infty} R^{(p)}$ mit R^∞ , so ist $|T - R^\infty| = 0$ und die letzte Ungleichung liefert in R^∞ , d.h. f.ü. in T , $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f; t) = f(t)$.

Zufallsartige Vorzeichen. Ist $\{r_n(t)\}$ das Rademacher'sche System [225] und betrachtet man in

$$(25) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) r_n(u)$$

die $a_n \varphi_n(t)$ als Koeffizienten, so ist (25) nach [452] für fast alle u des Intervalls $\cdot 0,1 \cdot$ konvergent, sobald $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t)$ konvergiert.

Dies ist aber für fast alle t in $\cdot a, b \cdot$ der Fall, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, denn es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n^2 \varphi_n^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

und daher [124] anwendbar. Sei E die im Rechteck $0 < u < 1$, $a \leq t \leq b$ gelegene ebene Menge der (t, u) -Punkte, die durch die Konvergenz von (25) erklärt ist. Wendet man auf die charakteristische Funktion $F(u, t)$ von E den Fubini'schen Satz an, so kommt

$$\int_a^b dt \left\{ \int_0^1 F(u, t) du \right\} = \int_0^1 du \left\{ \int_a^b F(u, t) dt \right\}.$$

Nun ist aber links $F(u, t) = 1$ für fast alle u und dies für fast alle t richtig, also ist $b-a$ der Wert des Doppelintegrals. Da $F(u, t)$ nur die Werte 0,1 annimmt, so muß $F(u, t)$ für fast alle t Eins sein und zwar bei fast allen u , sonst stände rechts weniger als $b-a$. Damit ist gezeigt, daß die Reihe (25) bei fast allen u die Eigenschaft hat f. ü. in $a < t < b$ zu konvergieren.

Erinnern wir uns jetzt an die probabilistische Deutung der $\{r_n(t)\}$ in [4551], so können wir sagen:

Für ein ON $\{\varphi_n\}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ ist die Reihe [563]

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \varphi_n(t)$$

mit der Wahrscheinlichkeit 1 f. u. in $\cdot a, b \cdot$ konvergent, wenn die Vorzeichen $\pm$ zufallsartig und gleichwahrscheinlich bestimmt werden.

Ein Gegenstück dazu ist der

Satz: Ist $\{\varphi_n\}$ ON und $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_a^b \varphi_n^2(t) dt > 0$ für alle positiven [5641]

$H \subset \cdot a, b \cdot$, so ist im Falle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$ die Reihe (26) mit der Wahrscheinlichkeit 1 f. ü. in $\cdot a, b \cdot$ divergent.

Beweis: Wäre $|H| > 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) < \infty$ in H , so wäre nach [123]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_{H^*} \varphi_n^2(t) dt < \infty, \quad |H^*| > 0,$$

für ein gewisses $H^* \subset H$. Daraus läßt die Voraussetzung auf $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ schließen. Es ist also in unserem Falle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü. in a, b . Wendet man jetzt [453] an und erklärt E als die (ebene) Divergenzmenge von (25), so kann man fast wörtlich den mit der Definition von E beginnenden zweiten Teil des Beweises von [563] wiederholen.

Divergenz. Hier ist der zweite Teil von [561] wichtig, der die Existenz von f. ü. in CTdivergenten Entwicklungen sichert. Auch das Prinzip der Kondensation der Singularitäten bringt neue Ergebnisse:

[565] *Ist $\{\varphi_n\}$ ein ON und $\{t_p\}$ eine Punktfolge ($t_p \in a, b$), so daß jedem t_p ein $f_p(t) \in R$ mit einer für $t = t_p$ divergenten Entwicklung entspricht, so gibt es ein $f(t) \in R$, dessen Entwicklung in allen t_p divergiert.*

Definiert man nämlich $F_{pq}(f) = s_q(f; t_p)$ für $f \in R$ und wendet [157] bzw. [156] an, je nachdem, ob $f_p(t)$ für $t = t_p$ bloß Divergenz oder unbeschränkte Divergenz der Entwicklung aufweist, so erhält man [565], sogar mit einer Spezialisierung des Divergenzcharakters in der Behauptung. [157] liefert auch den

[566] **Satz:** *Gibt es eine Intervallfolge $\{\alpha_p, \beta_p\}$ und eine zugehörige Funktionenfolge $\{f_p(t)\}$ ($f_p \in L$), so daß für alle p*

$$(27) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} |s_n(f_p; t)| dt = \infty$$

gilt, so kann man in (27) $f_p(t)$ durch eine geeignete p -freie Funktion $f(t) \in L$ ersetzen.

Man braucht bloß $F_{pq}(f)$ in [157] als $\int_{\alpha_p}^{\beta_p} s_q(f; t) dt$ zu definieren. [566] läßt sich insbesondere auf Fourierreihen anwenden; man erreicht sogar sämtliche α, β in (27).

Das Prinzip der Verdichtung der Singularitäten führt bloß zu abzählbaren Divergenzmengen. in gewissen Fällen kann die Mächtigkeit des Kontinuums nachgewiesen werden:

Gibt es zu jedem $t_0 \in \alpha, \beta$ eine stetige Funktion, deren Entwicklung in t_0 divergiert, so gibt es eine stetige Funktion, deren Entwicklung eine Divergenzmenge von der zweiten Kategorie, also von der Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. [567]

Beweis: Nach [121] sind alle $\varphi_n(t)$ gleichzeitig in einer positiven, perfekten Menge D stetig. Sei A die Menge der $t \in D$, zu welchen es stetige Funktionen mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n(t)| = \infty$ gibt. Ist A in D überalldicht, so können wir, nach [565], eine stetige Funktion mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n(f; t)| = \infty$ in Z finden, wobei $Z \subset A$ und überalldicht in D ist. Dieselbe Beziehung gilt aber auch in einer Menge $Z^* \supset Z$, die von der zweiten Kategorie ist, also die Mächtigkeit c hat.

Es sei nämlich $F_{n,m} = E[|s_n(f; t)| < m] \times D$, $F_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{m,n}$; die $F_{m,n}$ sind abgeschlossen, denn die $\varphi_n(t)$ sind auf D stetig, also ist F_m abgeschlossen. $\sum_{m=1}^{\infty} F_m$ ist von der ersten Kategorie in D , sonst wäre ein F_m von der zweiten, also in $\alpha, \beta \subset \times D$ überalldicht ($\alpha, \beta \subset \subset \alpha, \beta$) und damit (weil abgeschlossen) mit dem Teil $\alpha, \beta \subset \times D$ des (perfekten) D identisch; in diesem Teil wäre $|s_n(f; t)| < m$ für alle n , was der Eigenschaft von Z , überalldicht in D zu sein, widerspricht. $\sum_{m=1}^{\infty} F_m$ ist also von der ersten, daher die komplementäre Menge $Z^* = D - \sum_{m=1}^{\infty} F_m$ von der zweiten Kategorie; in Z^* gilt aber offenbar $\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n(f; t)| = \infty$.

Ist aber A nicht überalldicht in D , so gibt es einen Teil $\alpha, \beta \subset \times D$ von D , in welchem die Partialsummen der Entwicklungen aller stetigen Funktionen beschränkte Folgen bilden. Es sei $\{g_n(t)\}$ im Raume C (der stetigen Funktionen) überalldicht. Wäre für ein jedes $g_n(t)$ die Divergenzmenge von der ersten Kategorie in D , so gäbe es ein $t_0 \in \alpha, \beta \subset \times D$ als Konvergenzpunkt für alle $g_n(t)$. t_0 wäre aber ein Konvergenzpunkt für sämtliche stetigen Funktionen, gegen die Voraussetzung. Denn die Partial-

summen $s_n(f; t_0)$ ($f \in C$) sind beschränkt, also [151] mit $F_n(f) = s_n(f; t_0)$ anwendbar und $\|s_n(f; t_0)\| \leq M \|f\|$. Daraus folgt

$$\|s_n(f; t_0) - s_n(g_k; t_0)\| \leq M \|f - g_k\| < \varepsilon$$

für entsprechende k , was den Konvergenzcharakter von t_0 für $f(t)$ beweist. Es gibt also ein $g_n(t)$ mit einer Divergenzmenge zweiter Kategorie in D .

§ 7. Allgemeine Summationsmethoden.

Es gibt fast überall divergente Entwicklungen, wie wir in [537] gesehen haben; diese Tatsache läßt die Heranziehung linearer Summationsmethoden als erwünscht erscheinen. Sie sind oft leistungsfähig und nur im Falle einer gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergenten Reihe von vornherein wirkungslos, doch kann die letzte Erscheinung für Funktionen aus L^2 nur in Nullmengen auftreten, da $s_n(t)$ gegen die entwickelte Funktion $f(t)$ stark, also auch asymptotisch konvergiert (vgl. [162]). Die Existenz einer Summationsmethode, die allen Entwicklungen aus L^2 gerecht wäre, ist demnach nicht ohne weiteres abzuweisen. Wir werden aber zeigen, daß eine solche Behauptung unzutreffend wäre.

Die Mehrzahl der bisherigen Sätze dieses Kapitels gilt auch für Summationsmethoden; die Beweise bleiben oft fast unverändert, wir werden also bloß die Sätze angeben. So nimmt [515] jetzt die Gestalt an: *Einem jeden ON $\{\varphi_n\}$, welches beschränkt oder inbezug auf L^2 vollständig ist, entspricht eine Folge $\{b_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ und mit*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(t)\| = \infty$$

f.ü. (bzw. in einer positiven Menge), wobei $\sigma_n(t)$ das Resultat der Substitution von $\{s_k(t)\}$ in die n -te Zeile der zeilenfiniten, linearen Summationsmethode T bedeutet.

Es möge hinzugefügt werden, daß $\{b_n\}$ von T nicht abhängt. Ist

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk} s_k(t), \quad T_n(t, u) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{nk} K_k(t, u),$$

so kann man schreiben:

$$\sigma_n(t) = \int_a^b T_n(t, u) f(u) du.$$

Dann gilt, analog zu [522]:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |T_n(t_0, u)| du = \infty \quad [572]$$

impliziert die Existenz einer stetigen Funktion $f(t)$ mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f; t_0) = +\infty.$$

Für jede Summationsmethode T gilt das Analogon zu [523] und für zeilenfinite T das Analogon zu [525]. Ferner:

Damit die Entwicklung einer jeden stetigen Funktion nach dem ON $\{\varphi_n\}$ gleichmäßig gegen diese Funktion T -summierbar sei, ist die Abgeschlossenheit von $\{\varphi_n\}$ in bezug auf C und die Ungleichung [573]

$$\int_a^b |T_n(t, u)| du \leq z$$

(mit n - und t -freiem z) notwendig und hinreichend.

Für die Summierbarkeit f. ü. gilt eine Erweiterung von [533]:

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ f. ü. T -summierbar, so ist $\{s_{n_i}(t)\}$ für geeignete $\{n_i\}$ f. ü. konvergent. [574]

Beweis: $\{\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} s_k(t)\}$ ist f. ü. konvergent (mit $b_{i,k}$ bezeichnen wir die Elemente von T). Es sind ferner die drei Bedingungen 1° 2° 3° aus [119] erfüllt. Ist $J_n = \int_a^b [s_n(t) - \sigma_n(t)]^2 dt$, so genügt es $\{n_i\}$ so zu bestimmen, daß $\sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i}$ konvergent sei. Es ist aber

$$\begin{aligned} s_n(t) - \sigma_n(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t) \{1 - b_{n,k} - b_{n,k+1} - \dots\} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \varphi_k(t) [b_{n,k} + b_{n,k+1} + \dots], \end{aligned}$$

also, wenn man $\sum_{j=k}^{\infty} b_{n,j}$ mit $B_{n,k}$ bezeichnet,

$$J_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 (1 - B_{n,k})^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 B_{n,k}^2.$$

Wird $\sum_{j=k}^{\infty} b_{n,j} = S_{n,k}$ gesetzt und die Differenz $1 - S_{n,k} - B_{n,k}$ mit R_n bezeichnet, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ nach [119] 1°. Jetzt soll $\{n_i\}$ rekurrent erklärt werden:

α) es sei $|R_{n_i}| < 1/i$,

β) für $l < n_{i-1}$ ($n_0 = 0$) sei $|S_{n_{i-1}+l}| < 1/i$ ([119] 2°),

γ) für $l > n_i$ sei $|1 - S_{n_{i-1}+l}| < 1/(i-1)$ ([119] 1°).

Dann ist

$$(28) \quad \sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} a_k^2 (S_{n_i, k} + R_{n_i})^2 + \sum_{n_{j+1}}^{\infty} a_k^2 B_{n_i, k}^2 \right\} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 [(S_{n_j, k} + R_{n_j})^2 + (S_{n_{j+1}, k} + R_{n_{j+1}})^2 + \dots] + \sum_{k=n_{i-1}+1}^{\infty} a_k^2 [B_{n_i, k}^2 + B_{n_{i+1}, k}^2 + \dots + B_{n_l, k}^2],$$

wo n_j und n_l von k abhängen und wo j und l durch

$$n_{j-1} < k \leq n_j, \quad n_l < k \leq n_{l+1}$$

gegeben sind. Von den zwei Summen rechts in (28) ist die erste, nach [119] 3° und β), nicht größer als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[(M+1)^2 + \frac{4}{(j+1)^2} + \frac{4}{(j+2)^2} + \dots \right] < \text{const.} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

die zweite, nach α) und γ), nicht größer als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{4}{1^2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{4}{(l-1)^2} + M^2 \right) < \text{const.} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2,$$

also $\sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i} < \infty$.

[575] Wenn eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ bei allen Anordnungen sich als f.ü. T-summierbar erweist, so ist sie f.ü. konvergent.

Beweis: Es werde $\{p_i\}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{p_i}| < \infty$ gewählt; die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i} \varphi_{p_i}(t)$ ist nach [542] f.ü. konvergent. Nach [574] ist $\{S_{n_i}(t)\}$ f.ü. konvergent. Jetzt ordnen wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ so um, daß die Stellen n_i sukzessive mit den Gliedern dieser Reihe besetzt werden; die Glieder $a_{p_i} \varphi_{p_i}(t)$ werden zunächst weggelassen und kommen dann sukzessive auf die unbesetzten Stellen. Es ist klar, daß die Partialsummen der neuen Reihe mit den Indizes n_i f.ü. konvergieren. Bezeichnet man sie mit $S'_{n_i}(t)$, und mit $S''_{n_i}(t)$ die

Partialsummen der Reihe, die aus der letzten durch Nullsetzung der Glieder mit den Indizes n_i entsteht, so ist die Folge $\{s''_{n_i}(t)\}$ auch f. ü.

konvergent, denn $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i} z_{p_i}(t)$ ist f. ü. konvergent. Dies hat die Konvergenz f. ü. von $\{s'_{n_i}(t) - s''_{n_i}(t)\}$ zur Folge; d. h., die ursprüngliche Reihe konvergiert f. ü. nach Nullsetzung der Glieder mit den Indizes p_i , also ist die ursprüngliche Reihe (4) selbst f. ü. konvergent.

Der Satz [575] läßt sich kurz so fassen: *eine f. ü. unbedingt summierbare Orthogonalreihe ist f. u. unbedingt konvergent*. Es folgt daraus, daß nicht jede Orthogonalmenge eine wirksame Summationsmethode besitzt; hätte nämlich die Orthogonalmenge, welcher das Beispiel [5371] entnommen war, eine f. ü. wirkende Summationsmethode, so wäre die Reihe dieses Beispiels f. ü. unbedingt summierbar, also f. ü. konvergent, was sie nicht ist. Umsoweniger gibt es eine universelle Summationsmethode. Es gibt nicht einmal eine Methode, die eine, bis auf eine Nullmenge feste, positive Konvergenzmenge liefert. Man kann sogar zu jeder Summationsmethode eine Orthogonalentwicklung finden, die nach dieser Methode überall divergiert. Dagegen existiert für jede Folge $\{a_n\}$

mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ eine vom ON unabhängige, wirksame T -Methode.

Auf Grund von [532] gibt es dann nämlich eine Folge $\{n_j\}$ so, daß $\{s_{n_j}(t)\}$ f. ü. konvergiert. Das ist eben die gesuchte Methode: T ist durch $[b_{i,k}]$ gegeben, wo $b_{j,n_j} = 1$, alle anderen $b_{i,k}$ Null sind.

Wenn wir uns mit starker Konvergenz begnügen, so ist jede Methode gut. Wir hatten nämlich [576]

$$J_n = \int_a^b (s_n(t) - \sigma_n(t))^2 dt = \sum_{k=1}^n a_k^2 (1 - B_{n,k})^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 B_{n,k}^2,$$

also, nach den Toeplitz'schen Bedingungen,

$$J_n < \sum_{k=1}^n a_k^2 (S_{n,k} + R_n)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 M^2.$$

Hier ist offenbar Null die Grenze der zweiten Summe; die erste werde in $\sum_{k=1}^m$ und $\sum_{k=m+1}^n$ zerlegt ($1 < m < n$) und zuerst m so ge-

wählt, daß $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k^2 < \varepsilon$, dann aber $n (> m)$ so, daß $|S_{n,k} + R_n| < \varepsilon$ für $k = 1, 2, \dots, m$ sei; J_n hat demnach Null als Grenze, also konvergiert $\{\sigma_n(t)\}$ stark.

Die allgemeinen Ausführungen des § 6 über Konvergenz lassen sich sinngemäß auf die Toeplitz'schen Methoden übertragen. So ist z. B. ein Analogon zu [564] richtig, welches zu zeigen erlaubt, daß „fast alle“ Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

keine Fourierreihen in bezug auf L sind, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ divergiert, denn sie sind mit der Wahrscheinlichkeit 1 f.ü. (C,1)-nichtsummierbar. Das Prinzip der Kondensation der Singularitäten liefert aber einen neuen Satz:

[577] *Gibt es zu jeder Methode T_p ($p = 1, 2, \dots$) eine Funktion $f_p(t)$ im Raume R , die für $t = t_0$ eine nicht T_p -summierbare Entwicklung liefert, so gibt es eine p -freie Funktion in R , deren Entwicklung im Punkte t_0 allen T_p widersteht.*

§ 8. Cesàro'sche Mittelwerte.

Will man in der Übertragung der Konvergenzsätze auf Summationsmethoden weiter vordringen, so muß man die letzteren spezialisieren. Wir beschränken uns hier auf Cesàro'sche Mittelwerte, obwohl die Analogien auch andere Methoden, wie z. B. die Riesz'schen typischen Mittel, umfassen.

Aus [117] folgt für $a_0 = 0$

$$\sigma_n^{(r)}(t) := \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{(r)} a_k \varphi_k(t) \quad \text{mit } A_n^{(r)} = \binom{r+n}{n},$$

wo $\sigma_n^{(r)}(t)$ das Cesàro'sche Mittel r -ter Ordnung ($r \neq -1, -2, -3, \dots$) vom Index n für die Reihe (4) bedeutet. Es werde

$$\delta_n^{(r)}(t) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (\sigma_k^{(r)}(t) - \sigma_{k-1}^{(r)}(t))^2$$

[581] gesetzt. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^{(r)}(t) = 0$ für $r > 1/2$ fast überall.

Beweis:

$$\begin{aligned}\sigma_k^{(r)} - \sigma_k^{(r-1)} &= \frac{1}{A_k' A_k'^{-1}} \sum_{j=1}^k (A_{k-j}' A_k'^{-1} - A_{k-j}' A_k') a_j \varphi_j(t) \\ &= \frac{1}{A_k' A_k'^{-1}} \sum_{j=1}^k (-j/r A_{k-j}' A_k'^{-1}) a_j \varphi_j(t),\end{aligned}$$

also

$$\int_a^b (\sigma_k^{(r)}(t) - \sigma_k^{(r-1)}(t))^2 dt = \frac{1}{r^2 (A_k')^2} \sum_{j=1}^k j^2 a_j^2 (A_k'^{-1})^2$$

und

$$\begin{aligned}\int_a^b \partial_{2^n}^r(t) dt &= \frac{1}{r^2 (2^n+1)} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{(A_j')^2} \sum_{k=j}^{2^n} j^2 a_j^2 (A_k'^{-1})^2 \\ &= \frac{1}{r^2 (2^n+1)} \sum_{j=1}^{2^n} j^2 a_j^2 \sum_{k=j}^{2^n} \left(\frac{A_k'^{-1}}{A_j'} \right)^2.\end{aligned}$$

Es ist aber $A_n' \sim \frac{R^n}{\Gamma(r+1)}$, also übertrifft die innere Summe nicht

$$\sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{A_k'^{-1}}{A_j'} \right)^2 = \sum_{k=j}^{2^j} + \sum_{k=2^{j+1}}^{\infty} \leq \frac{Z_1}{(A_j')^2} \sum_{k=0}^j (A_k'^{-1})^2 + Z_2 \sum_{2^{j+1}}^{\infty} \frac{k^{2r-2}}{k^{2r}} ,$$

was wiederum $(r > 1/2)$ höchstens

$$\frac{Z_2}{(A_j')^2} \sum_{k=0}^j A_k'^{2r-2} + \frac{Z_1}{j} \leq \frac{Z_3}{j}$$

betragen kann. So kommt

$$\int_a^b \partial_{2^n}^r(t) dt \leq \frac{Z_6}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} j a_j^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \partial_{2^n}^r(t) dt \leq Z_6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} j a_j^2 \leq Z_7 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty.$$

Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_{2^n}^r(t) = 0$ f. ü.; für $2^n < k < 2^{n+1}$ ist $0 < \partial_k^r < 2 \partial_{2^n}^r$, also ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \partial_k^r(t) = 0$ f. ü., w. z. b. w.

Daraus der Schluß:

Ist eine Orthogonalreihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ in E gegen $s(t)$ [582] (C, r) -summierbar, $r > 1/2$, so gilt f. ü. in E

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [s(t) - \sigma_1^{(r-1)}(t)]^2 + [s(t) - \sigma_2^{(r-1)}(t)]^2 + \dots + [s(t) - \sigma_n^{(r-1)}(t)]^2 = 0$$

und

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[s(t) - \sigma_1^{(r-1)}(t)]^2 + [s(t) - \sigma_2^{(r-1)}(t)]^2 + \dots + [s(t) - \sigma_n^{(r-1)}(t)]^2}{n} = 0.$$

Es genügt (30) zu begründen, denn die Schwarz'sche Ungleichung liefert dann (29). Nun ist aber

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [s(t) - \sigma_k^{(r-1)}(t)]^2 &= \sum_{k=1}^n [(\tau_k^{(r-1)}(t) - \sigma_k^{(r)}(t)) + (\sigma_k^{(r)}(t) - s(t))]^2 \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n [\tau_k^{(r-1)}(t) - \sigma_k^{(r)}(t)]^2 + 2 \sum_{k=1}^n [\sigma_k^{(r)}(t) - s(t)]^2 \end{aligned}$$

und die vorletzte Summe ist $o(n)$ nach [581], die letzte, nach der Voraussetzung, ebenfalls $o(n)$ f. ü.

[583] Der Hilfsatz [581] führt auch zu der Erkenntnis, daß in L^2 alle (C, r) ($r > 0$) untereinander und mit dem Poisson-Abel'schen Verfahren [118] gleichwertig sind. Zunächst werde die Konvergenz f. ü. von

$$(31) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n (\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t))^2$$

gezeigt (σ_n bedeutet $(1 + 1/n) \sigma_n^{(1)}$). Es genügt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_a^b (\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t))^2 dt < \infty$$

zu beweisen. Es ist ($n > 1$) in der Tat

$$\begin{aligned} \int_a^b (\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t))^2 dt &= \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(t) (k-1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n} a_n \varphi_n(t) \right|^2 dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \frac{(k-1)^2}{n^2(n-1)^2} + \frac{a_n^2}{n^2}, \end{aligned}$$

$$n \int_a^b (\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t))^2 dt \leq \frac{1}{(n-1)^2 n} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 a_k^2 + \frac{a_n^2}{n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \int_a^b (\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t))^2 dt \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 n} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 a_k^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}.$$

Die letzte Reihe ist konvergent; die vorletzte ist gleich

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \left(\frac{1}{k^3} + \frac{1}{(k+1)^3} + \dots \right) < \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad \text{Jetzt ziehen wir den Satz}$$

über Zahlenreihen heran, nach welchem die Poisson'sche Limitierbarkeit einer Folge das Gleiche für die Folge der ersten Mittelwerte $(C, 1)$ impliziert. Ist also eine Orthogonalreihe aus L^2 in E nach

Poisson summierbar, so ist in E die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t))$ nach demselben Verfahren summierbar. Dies aber in Verbindung mit der Konvergenz von (31) ergibt (nach einem reihentheoretischen Satz) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n(t) - \sigma_{n-1}(t))$; diese Reihe ist also f. ü. in E konvergent, daher ist die Orthogonalreihe f. ü. in E (C,1)-summierbar. Da die Umkehrung seit Frobenius bekannt ist, so ist die Gleichwertigkeit des Poisson'schen und des (C,1)-Verfahrens erwiesen und zu [583] fehlt bloß der

Satz: Ist eine Orthogonalreihe aus L^2 in E nach Poisson summierbar und $\alpha > 0$, so ist sie f. ü. in E (C, α)-summierbar. [584]

Beweis: Wir beginnen mit der Feststellung, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\sigma_k^{(r)})^2 = 0 \quad (r > -1/2) \quad \text{für } \varepsilon > 0$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(r+1/2+\varepsilon)} = 0$ zur Folge hat. In der Tat, setzt man $\sigma_n^{(\alpha)} = t_n^{(\alpha)} / A_n^\alpha$, so

ist $t_n^{(r+1/2+\varepsilon)} = \sum_{k=1}^n t_k^{(r)} A_{n-k}^{-1/2+\varepsilon} = \sum_{k=1}^n \tau_k^{(r)} A_k^r A_{n-k}^{-1/2+\varepsilon}$ eine Konsequenz der Erklärung [117] und demnach

$$\begin{aligned} |t_n^{(r+1/2+\varepsilon)}| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (\sigma_k^{(r)})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (A_k^r A_{n-k}^{-1/2+\varepsilon})^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (\sigma_k^{(r)})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n A_k^{2r} A_{n-k}^{-1+2\varepsilon}} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (\sigma_k^{(r)})^2} \cdot \sqrt{A_n^{2r+2\varepsilon}} = o(n^r) \cdot O(n^{r+1/2+\varepsilon}) = o(n^{r+1/2+\varepsilon}), \end{aligned}$$

wie behauptet wurde.

Unter der Voraussetzung [584] ist aber die Reihe in E (C,1)-summierbar, also gilt [582] mit $r=1$ in (30), d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\tau_k^{(0)}(t) - s(t))^2 = 0$ f. ü. in E . Hier können wir aber $\tau_k^{(0)}(t) - s(t)$ als die Partialsummen der Reihe $[a_1 \varphi_1(t) - s(t)] + a_2 \varphi_2(t) + \dots$ deuten und die Anfangsbemerkung dieses Beweises mit $r=0$ benutzen. Sie ergibt f. ü. in E

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\tau_n^{(1/2+\varepsilon)}(t) - s(t)\} = 0$$

und erlaubt [582] nochmals, jetzt mit $r=1/2+\varepsilon$, anzuwenden, mit dem Ergebnis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\sigma_k^{(1,1)}(t) - s(t))^2 = 0;$$

die erwähnte Bemerkung läßt daraus auf $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n^{(2,1)}(t) - s(t)) = 0$ f. ü. in E schließen, womit [584] und [583] endgültig bewiesen sind. Hierbei wurde das Resultat von O. Hölder, daß die Poisson'sche Methode stärker als jedes (C, r) ($r > 0$) ist, als bekannt vorausgesetzt.

Die Untersuchungen über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen mit Cesàro'schen Mitteln können nunmehr auf $(C, 1)$ beschränkt werden. Hier kann ein einfaches Kriterium angegeben werden:

[585] *Soll eine Orthogonalreihe aus L^2 f. ü. $(C, 1)$ -summierbar sein, so muß die Folge $\{s_n(t)\}$ f. ü. konvergieren, und diese Bedingung ist auch hinreichend.*

Beweis: Nur die Hinlänglichkeit ist neu, denn die Notwendigkeit der Bedingung bildet den Inhalt von [533].

Setzen wir also $\{s_n(t)\}$ als f. ü. konvergent voraus. Der Schlußsatz des Beweises von [533] (welcher die damalige Voraussetzung nicht benutzt) liefert jetzt die Konvergenz von $\{\sigma_n(t)\}$ f. ü. Betrachten wir $\sigma_k(t) - \sigma_{2^n}(t)$ für $2^n < k < 2^{n+1}$; es ist

$$\sigma_k(t) - \sigma_{2^n}(t) = \sum_{i=2^n}^{k-1} (\sigma_{i+1}(t) - \sigma_i(t)),$$

also

$$(\sigma_k(t) - \sigma_{2^n}(t))^2 \leq \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} i (\sigma_{i+1}(t) - \sigma_i(t))^2 \leq \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{i} \leq \frac{3}{2} \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} i (\sigma_{i+1}(t) - \sigma_i(t))^2.$$

Nun war aber die Reihe (31) f. ü. konvergent, also konvergiert der letztgeschriebene Ausdruck f. ü. gegen 0 und damit ist $\{\sigma_k(t)\}$ als f. ü. konvergent erkannt.

[586] *Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 (\log \log n)^3$ hat für die entsprechende Orthogonalreihe die $(C, 1)$ -Summierbarkeit f. ü. zur Folge.*

Nach [585] genügt es die Konvergenz f. ü. von $\{s_n(t)\}$ zu beweisen. Voraussetzungsgemäß ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2^{n+1}}^2 + \dots + a_{2^{n+1}-1}^2) (\log n)^3 < \infty,$$

da die Annahme von 2 als Logarithmenbasis nichts ändert. Hier ist also die Folgerung 2° aus [535] mit $n_k = 2^k$ anwendbar und liefert die Konvergenz f. ü. von $\{s_n(t)\}$.

Das erreichte Resultat ist, in demselben Sinne wie beidergewöhnlichen Konvergenz, endgültig. Ist nämlich $0 < v(n) = o[(\log \log n)^2]$, [587]

$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = +\infty$, $v(n)$ nichtabnehmend und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 v(n) < \infty$, so gibt es eine Orthogonalreihe

$$(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(t),$$

die in keinem Punkte von $0, 1 \in (C,1)$ -summierbar ist.

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ die im Gegenbeispiel [537] auftretende Reihe, mit $w(n) = v(2^n)$. Diese Reihe hat, wie wir damals gesehen haben, die Eigenschaften: $\alpha)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty$, $\beta)$ es gibt eine Folge $\{n_k\}$ mit $n_{k+1} < n_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), so daß für jedes t aus $0, 1 \in$ ein $m(t)$ mit

$$\left| \sum_{i=m}^{n_{k+1}} a_i \varphi_i(t) \right| > z, \quad n_{k+1} < m(t) < n_k$$

bestimmbar ist, wenn k vorgegeben wird; dabei ist z von k und t unabhängig. Von $w(n)$ wurde damals $w(n) = o(\log^2 n)$ verlangt, was durch unsere Annahme $w(n) = v(2^n)$ erfüllt ist. Setzt man nun

$$\psi_{2^n}(t) = \varphi_n(t), \quad b_{2^n} = a_n \quad \text{für} \quad n_{k+1} < n < n_k - 1,$$

und definiert die anderen $\psi(t)$ als (sukzessive) gleich den noch freien φ_{n_k} und die anderen b als Null, so wird $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 v(n) < \infty$ als Konsequenz von $\alpha)$ und die Folge $\{s_{2^n}(t)\}$ für (32) durchweg divergent; das Kriterium [585] impliziert jetzt die Behauptung [587].

Die Kriterien für unbedingte Konvergenz lassen sich insofern nicht übertragen, als die unbedingte Summierbarkeit mit der unbedingten Konvergenz äquivalent ist ([575]), es käme also nichts Neues heraus. Dagegen hat das letzte Divergenzbeispiel ein Analogon, indem zu jeder Summationsmethode eine nirgends summierbare Orthogonalreihe vorhanden ist. Hier ist die Folge $\{s_{n!}(t)\}$ zu betrachten, die für eine T-Methode laut [574] dieselbe Rolle spielt, wie $\{s_{2^n}(t)\}$ für (C,1).

§ 9. Lebesgue'sche Funktionen und Summierbarkeit,

Für die (C,1)-Summierbarkeit sind gewisse zu den in [521] untersuchten Funktionen analog definierte Ausdrücke von Belang. Schreibt man

$$K_n^{(1)}(t, u) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u) \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \quad L_n^{(1)}(t) = \int_a^b K_n^{(1)}(t, u) du,$$

so ist $\sigma_n(t) = \int_a^b f(u) K_n^{(1)}(t, u) du$ der erste Mittelwert vom Index n für die Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\varphi_k(t)\}$. Analog zu [554] ist

[591] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t)/w(n)$ f. ü. in E vorhanden, wenn $w(n) > 0$ nicht abnimmt und wenn $L_n^{(1)}(t) \sim z \cdot w(n)$ (mit t - und n -freiem z) in E gilt.

Der Beweis ist eine Modifikation des Beweises von [554]: J_n wird als $\int_E dt \int_a^b \frac{f(u) K_n^{(1)}(t, u)}{w(p)} du$ definiert, was unmittelbar zu

$$J_n^2 \leq A \int_E \int_E \frac{1}{w(p)w(q)} \sum_{k=1}^j \varphi_k(t_1) \varphi_k(t) \left(1 - \frac{k-1}{p}\right) \left(1 - \frac{k-1}{q}\right) dt dt_1$$

führt. Die Summe rechts wird zweimal der Abel'schen Umformung [111] unterworfen; es kommt

$$\sum_{k=1}^j K_k(t, t_1) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2k-1}{pq}\right) = \sum_{k=1}^j k K_k^{(1)}(t, t_1) \frac{2}{pq} + j K_j^{(1)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{2j+1}{pq}\right),$$

also

$$\begin{aligned} J_n^2 &\leq A \int_E \int_E \frac{dt dt_1}{w^2(j)} \left\{ \frac{2}{j^2} \sum_{k=1}^j k |K_k^{(1)}(t, t_1)| + |K_j^{(1)}(t, t_1)| \right\} \\ &\leq 4Az \int_E \frac{dt}{w^2(p)} \left[\frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^p k w^2(k) + w^2(p) \right] \leq 8Az \cdot E, \end{aligned}$$

und weiter verläuft der Beweis, wie früher.

Obiges bildet die Grundlage für den

[592] **Satz:** Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = +\infty$, $L_n^{(1)}(t) \leq w(n)$, $w(n)$ nichtabnehmend

und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w^2(n) < \infty$, so ist (5) f. ü. (C,1)-summierbar.

Wie aus [532] ersichtlich, ist $\{s_{n_k}(t)\}$ f. ü. konvergent, wenn $k \leq w^2(n_k) < k+1$. Betrachten wir die Differenz

$$(33) \quad \sigma_p(t) - s_{n_k}(t) = \sum_{i=1}^{n_k} a_i \varphi_i(t) \frac{t-1}{p} + \sum_{i=n_k+1}^p a_i \varphi_i(t) \left[1 - \frac{t-1}{p} \right],$$

wo $n_k \leq p < n_{k+1}$. Die zweite Summe ist nach [111] gleich

$$(34) \quad \frac{1}{w(n_k)} \sum_{i=n_k+1}^p a_i \varphi_i(t) w(n_k) \left(1 - \frac{t-1}{p} \right) \\ = -\frac{1}{w(n_k)} \left[\frac{1}{p} \sum_{i=n_k+1}^p \tilde{s}_i(t) - s_{n_k}(t) \left(1 - \frac{n_k}{p} \right) + s_p(t) \cdot 0 \right],$$

wo $\{\tilde{s}_i(t)\}$ die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} w(n_i) a_i \varphi_i(t)$ mit $n_j \leq i < n_{j+1}$ bezeichnet. Die Konvergenz von $\{s_{n_k}(t)\}$ hat $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{s}_{n_k}(t)/w(n_k) = 0$ zur Folge. Wegen (34) und

$$\frac{1}{p} \sum_{i=n_k+1}^p \tilde{s}_i(t) = \tau_p(t) - n_k \tau_{n_k}(t) \cdot \frac{1}{p}$$

ist die zweite Summe (33) dem Betrage nach höchstens gleich

$$\tau_p(t)/w(n_k) + \tau_{n_k}(t)/w(n_k) + s_{n_k}(t)/w(n_k),$$

was, nach dem eben Gesagten, gegen Null strebt.

Die erste Summe (33), ebenfalls nach [111] umgeformt, liefert

$$(35) \quad \frac{1}{p} \left[\sum_{i=1}^{n_k} n_i (s_{n_k}(t) - \tau_{n_i}(t)) \left(\frac{1}{w(n_i)} - \frac{1}{w(n_{i+1})} \right) \right. \\ \left. + n_k (s_{n_k}(t) - \tau_{n_k}(t)) \frac{1}{w(n_{k+1})} \right].$$

Die Annahme $\tau_i \neq w(n_i)$, $w(n_{i+1}) \neq 0$ zeigt, daß (35) höchstens

$$\sum_{i=1}^{n_k} n_i |s_{n_i}(t) - \tau_{n_i}(t)| \cdot \frac{1}{i} + \frac{s_{n_k}(t) - \tau_{n_k}(t)}{w(n_k)}$$

beträgt. Auf diese Weise erhalten wir für $n_k < p < n_{k+1}$

$$\tau_p(t) - s_{n_k}(t) = \frac{\tau_p(t)}{w(n_k)} \leq \frac{2}{w(n_k)} (\tau_{n_k}(t) + s_{n_k}(t)) + \sum_{i=1}^k n_i |s_{n_i}(t) - \tau_{n_i}(t)| \cdot \frac{1}{i},$$

hier strebt, wie gesagt, $\tau_p(t)/w(n_k)$ gegen Null; es genügt also zu zeigen, daß die p -freie rechte Seite gegen Null konvergiert, um die Konvergenz von $\{s_n(t)\}$ darzutun. Für die zwei ersten Glieder ist dies bereits bekannt; die Ungleichung

$$\int_a^b t^{-1/2} |s_{n_i}(t) - \bar{\sigma}_{n_i}(t)| dt \leq t^{-1/2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 w^2(j)}$$

beweist die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} |s_{n_i}(t) - \bar{\sigma}_{n_i}(t)| t^{-1/2}$, also strebt, nach dem Kronecker'schen Satze, auch das letzte Glied gegen Null.

[593] Für $L_n^{(1)}(t) = O(1)$ liefert eine jede Funktion aus L^2 eine f. ü. $(C,1)$ - (also auch (C,ε) -) summierbare Entwicklung ($\varepsilon > 0$). Den Beweis dafür erbringt man nach bereits genügend erläutelter Art.

Analoge Sätze gelten auch für $L_n^{(r)}(t) = O(w(n))$ oder $= O(1)$, wo $L_n^{(r)}(t)$ die Lebesgue'schen Funktionen für die (C,r) -Methode bezeichnen ($r = 2, 3, \dots$).

VI. KAPITEL.

Orthogonalreihen in anderen Räumen.

Im IIIten Kapitel haben wir die Orthogonalentwicklungen von Funktionen aus L^2 besprochen; jetzt wollen wir andere Räume untersuchen, insbesondere die Räume L^p ($p \geq 1$), M und C (vgl. die Definitionen in I, § 3). Die Buchstaben Q , R , u. s. w. sollen hier stets einen dieser Räume bezeichnen. Viele Sätze dieses Kapitels gelten auch für die Räume L_{φ} des 5.ten Beispiels S. 16 (I, § 3), doch gehen wir darauf nicht näher ein. Damit die Koeffizienten

$a_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$ existieren, muß von dem ON $\{\varphi_n\}$ vorausgesetzt

werden, daß seine Funktionen φ_n zu dem *konjugierten* Raum gehören; zu L^p ($p > 1$) ist $L^{p'}$ ($1/p' + 1/p = 1$), zu L aber M konjugiert. Gehört f zu M , C oder L^p mit $p > 2$, so genügt es $\varphi_n \in L^2$ vorauszusetzen; letztere Annahme wird stets stillschweigend gemacht, sobald von einem ON die Rede ist.

§ 1. Vollständigkeit.

Wir wissen bereits ([315]), daß das aus einem in bezug auf R vollständigen System $\{f_n\}$ erhaltene Orthogonalsystem auch selbst in bezug auf R vollständig ist.

Ist die Menge $\{f\}$ vollständig in bezug auf R , so enthält sie [611] eine abzählbare Teilmenge, die ebenfalls in bezug auf R vollständig ist.

Der Beweis von [347] ist nicht mehr genügend, denn im Falle $R = L$ gehören die $\{f\}$ zu M und dieser Raum ist nicht separabel. Wir geben hier einen anderen Beweis, gültig für separable R ; im Falle $R=M$ bleibt aber der Beweis [347] anwendbar.

Es sei $\{g_n\}$ überalldicht in R , z_k ein Punkt des k -dimensionalen Raumes mit

$$(1) \quad \int_a^b f(t) g_1(t) dt, \int_a^b f(t) g_2(t) dt, \dots, \int_a^b f(t) g_k(t) dt$$

als Koordinaten und Z_k die Menge aller z_k mit $f \in \{f\}$. Es gibt dann ein abzählbares $\Omega_k \subset \{f\}$ so, daß für $f \in \Omega_k$ der Bildpunkt (1) eine überalldichte Teilmenge von Z_k durchläuft, denn Z_k ist als Teilmenge des k -dimensionalen kartesischen Raumes separabel.

Die Menge $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ ist abzählbar. Nun aber gibt es jetzt zu jedem $f \in \{f\}$ eine Folge $\{f^{(k)}\}$ mit

$$f^{(k)} \in \Omega_k \subset \Omega, \quad \left| \int_a^b f^{(k)}(t) g_i(t) dt - \int_a^b f(t) g_i(t) dt \right| < \frac{1}{k}, \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Es ist also, wenn $\|f\| < z(f)$ angenommen wird (was die Allgemeinheit nicht schmälert), $\{f^{(k)}\}$ gegen f schwach konvergent.

Gilt also $\int_a^b \varphi(t) f(t) dt = 0$ für alle $f^{(k)} \in \Omega$, so ist

$$\int_a^b \varphi(t) f(t) dt = 0$$

für alle $f \in \{f\}$, also ist Ω vollständig in bezug auf R , w. z. b. w.

Wir können daher stets voraussetzen, daß ein in bezug auf einen Raum vollständiges System abzählbar ist.

Es bietet sich die Frage, ob die Vollständigkeit in bezug auf einen Raum etwa die Vollständigkeit in bezug auf einen anderen impliziert. Hier ist es leicht zu zeigen:

[612] Ist $\{\varphi_n\}$ in bezug auf R vollständig und $Q \subset R$, so ist $\{\varphi_n\}$ vollständig in bezug auf Q .

Denn $f \in Q$ impliziert $f \in R$; ist also f nicht Null, $f \in Q$ und zu allen φ_n orthogonal, so entsteht ein Widerspruch gegen die Voraussetzung. Dagegen gilt für alle $R \neq L$ der Satz:

[613] Es gibt in bezug auf R vollständige ON-Systeme, die in bezug auf jeden Raum $Q \subset R$, $Q \neq R$ unvollständig sind.

Wir wollen [613] für den Fall $R = C$ beweisen. Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ ONV in bezug auf L ; das trigonometrische System hat z.B. diese Eigenschaften.

Es sei $0 \neq f(t) \in M$, $f(t) \ni C$; $f(t)$ gehört somit zu jedem Q , das C umfaßt, ohne gleich C zu sein (vgl. 1, 3). Da $\{\phi_n\}$ in bezug auf L vollständig ist, muß (wenigstens) ein Koeffizient $\int_a^b f(t) \phi_n(t) dt$ ($n=1, 2, \dots$) von Null verschieden sein; wir können $\{\phi_n\}$ so ungeordnet annehmen, daß es der erste ist. Ist also $\{x_n\}$ jene Koeffizientenfolge und setzt man

$$(2) \quad g_n(t) = x_n \phi_1(t) + \dots + x_1 \phi_n(t) \quad (n=2, 3, \dots),$$

so ist $\{g_n(t)\}$ in bezug auf Q unvollständig, wenn $Q \subsetneq C$, $Q \neq C$, denn es gilt

$$\int_a^b g_n(t) f(t) dt = x_n x_1 + x_1 x_n = 0.$$

$\{g_n(t)\}$ ist aber vollständig in bezug auf C . Es sei nämlich $h(t) \in C$ und

$$(3) \quad \int_a^b h(t) g_n(t) dt = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Ist dann $\int_a^b h(t) \phi_1(t) dt = 0$, so folgt aus $x_1 \neq 0$ mit (2) und (3)

$\int_a^b h(t) \phi_n(t) dt = 0$ für $n=1, 2, \dots$, also, wegen der V-Eigenschaft

von $\{\phi_n\}$, $h(t) = 0$; ist aber $\int_a^b h(t) \phi_1(t) dt = x_1 \neq 0$, so ist wegen

(2) und (3) $\int_a^b h(t) \phi_n(t) dt = \frac{\beta_1}{\alpha_1} x_n$ für $n=2$, also für $n=1$, und

daher $h(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} f(t)$, was wegen $\beta_1, \alpha_1 \neq 0$, $h(t) \in C$, $f(t) \ni C$ einen

Widerspruch liefert. Es hat also (3) $h(t) = 0$ zur Folge und wenn man $\{g_n\}$ orthogonalisiert, so erhält man das System der Behauptung [613J für den Fall $R = C$ und ähnlich für andere R . Gleichzeitig sehen wir, daß das erhaltene System nach Adjunktion von $f(t)$ vollständig in bezug auf L wird, denn $y f(t)$ (Y konstant) sind die einzigen Funktionen in L , die zu allen $g_n(t)$ orthogonal sind.

Hier werde bemerkt, daß ON-Systeme, die in bezug auf C , nicht aber auf L^2 , vollständig sind, nach Angabe entsprechender Koeffizienten bereits eine stetige Funktion der Entwicklung eindeutig zuzuordnen, ohne aber die Existenz einer anderen (unstetigen) Funktion aus L^2 auszuschließen, welche dieselbe Entwicklung liefern würde. Aus diesem Grunde ist die paradoxe Erscheinung durchaus mö-

glich, daß die Entwicklung einer stetigen Funktion wohl konvergieren, als Summe aber jene andere (unstetige) Funktion haben kann. Denn ein System der hier bezeichneten Art wird erst nach Adjunktion wenigstens einer geeigneten Funktion $\gamma(t)$ aus L^2 in bezug auf L^2 vollständig; nur die zu der adjungierten Funktion orthogonalen stetigen Funktionen können eine „richtige“ Entwicklung beanspruchen; ist aber $\{f_n\} \subset C$ und ein V in bezug auf L^2 , so ist nach [373] wenigstens eine der Funktionen $f_n(t)$ zu $\gamma(t)$ nicht orthogonal; diese kann (im Konvergenzfall) nur eine „falsche“ Summe liefern.

Analog zu [353] gilt:

- [614] *Ein ON $\subset R$ läßt sich stets in bezug auf R in R vervollständigen. Selbstverständlich wird $R \subset L^2$ vorausgesetzt. Andererseits,*
 [615] *läßt sich ein ON $\subset R \subset Q$ nicht immer in R so vervollständigen, daß die Vollständigkeit auch in Q bestehe. Z. B. läßt sich das System des Satzes [613] nicht durch stetige Funktionen in bezug auf M vervollständigen.*

§ 2. Abgeschlossenheit.

Wir wollen hier die Annahme der Abgeschlossenheit von $\{f_n\}$ in bezug auf R so verstehen, daß $f_n \in R$; nur für $R = C$ reicht die Voraussetzung $|\varphi_n(t)| < M_n$ f. ü. (n) hin, um der Annahme von A einen nichttrivialen Sinn zu sichern.

Wie ist ein ONA in bezug auf R beschaffen? Der Satz [316] gilt selbstverständlich. Der Satz [346] hat ein Analogon (im Inhalt und Beweis):

- [621] *Jedes System A in bezug auf R ($R = L^p$, $p \geq 1$, $R = C$) enthält einen abzählbaren Teil von derselben Eigenschaft. Diesem stellt sich entgegen:*
 [622] *Kein abzählbares System ist in bezug auf M abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ A in bezug auf M . Zu $f(t) \in M$ gibt es ein

$$w_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \quad \text{mit w. o. G. } |f(t) - w_n(t)| < 1/4.$$

Es sei nun $f_{\xi}(t) = 1$ für $a \leq t \leq \xi$, $f_{\xi}(t) = 0$ für $\xi < t \leq b$ ($a < \xi < b$); es gibt ein $w_n(t, \xi)$ mit

$$|1 - w_n(t, \xi)| < 1/4 \quad (t \leq \xi), \quad |w_n(t, \xi)| < 1/4 \quad (t > \xi)$$

f. ü. in $[a, b]$, wir können also sagen, $w_n(t, \xi)$ habe für $t = \xi$ einen Sprung von der Höhe $\sim 1/2$.

Es ist also zu jedem ξ ein n und ein System $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (mit entsprechenden $c_1, c_2, \dots, c_n$), vorhanden, so daß $w_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$ an der Stelle $t = \xi$ einen Sprung von der Höhe $\sim 1/2$ aufweist. Da die Systeme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine abzählbare Menge bilden, gibt es unter ihnen wenigstens ein System, welches zu allen ξ einer positiven Menge Ξ gehört. Die Funktionen

$$w(t, \xi) = c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_p \varphi_p(t)$$

(wo die c_i von ξ abhängen) haben alle für $\xi \in \Xi$ einen Sprung von der Höhe $\sim 1/2$. Infolgedessen hat $\int_a^t w(t, \xi) dt$ keine Ableitung für

$t = \xi$. Es muß also eine der Funktionen $\int_a^t \varphi_i(t) dt$ ($i = 1, 2, \dots, p$) für $t = \xi$ ableitungslos sein. Nun aber haben diese Funktionen alle f. ü. eine Ableitung, was gegen $|\Xi| > 0$ verstößt.

Wir bemerken daß [622] die Separabilität von M ausschließt.

Die Beziehungen verschiedener Räume zueinander sind hinsichtlich der Abgeschlossenheit nicht die gleichen wie hinsichtlich der Vollständigkeit:

Ist $\{\varphi_n\}$ A inbezug auf R und $Q \supset R$, $Q \not\subset M$, so ist $\{\varphi_n\}$ A inbezug auf Q . [623]

Beweis: Es sei $Q = L^q$ ($q \geq 1$), $f(t) \in Q$. Nach [129] gibt es eine stetige Funktion $g(t)$ mit $\|f - g\|_q < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$); die Voraussetzung ergibt die Existenz eines $w_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$ mit $\|g - w_n\|_R < \varepsilon$, also auch mit $\|g - w_n\|_q < \varepsilon$, was $\|f - w_n\|_q < 2\varepsilon$ zur Folge hat.

Bevor wir ein Gegenstück zu [613] suchen, müssen wir das Verhältnis der Eigenschaften A und V zueinander aufklären.

Vollständigkeit und Abgeschlossenheit. In L^2 waren diese beiden Eigenschaften äquivalent, wie die Parseval'sche Formel [371] folgern ließ. Diese Äquivalenz hört auf in umfassenderen Räumen, denn auf Grund von [613] gibt es Orthogonalsysteme, die vollständig inbezug auf L^2 , jedoch unvollständig inbezug auf alle erweiterten Räume sind; solche Systeme sind inbe-

zug auf L^2 abgeschlossen, also auch in bezug auf alle erweiterten Räume abgeschlossen und unvollständig. Es gilt aber der

- [624] **Satz:** Jedes in bezug auf $R = L^p$ ($1 < p < \infty$) oder $R = C$ abgeschlossene System $\{\varphi_n\}$ ist in bezug auf den konjugierten Raum $R' = L^{p'}$ ($L^{p'} = M$) bzw. L vollständig.

Ist nämlich $g(t) \in L^{p'}$ bzw. $g(t) \in L$ und $\int_a^b g(t) \varphi_n(t) dt = 0$ (n), $f(t)$ eine trigonometrische Funktion, $\{\omega_n(t)\}$ eine in R gegen $f(t)$ stark konvergente Folge von φ_n -Polynomen, so ist

$$\int_a^b g(t) [f(t) - \omega_n(t)] dt = \int_a^b g(t) f(t) dt - \int_a^b g(t) \omega_n(t) dt,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \omega_n(t) dt = \int_a^b g(t) f(t) dt;$$

da

$$\int_a^b g(t) \omega_n(t) dt = 0, \text{ so ist } \int_a^b g(t) f(t) dt = 0,$$

also, nach [234], $g(t) = 0$ f. ü., w. z. b. w.

Obiger Satz ist eine Verallgemeinerung von [354]; eine analoge Verallgemeinerung von [355] bietet der

- [625] **Satz:** Jedes in bezug auf L^p ($1 < p < \infty$) vollständige System ist in bezug auf den konjugierten Raum $L^{p'}$ abgeschlossen.

Wäre nämlich $\{\varphi_n\}$ in bezug auf $L^{p'}$ ($p' = 1$) nicht abgeschlossen, so wäre ein $f(t) \in L^{p'}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(4) \quad \int_a^b f(t) - \sum_{k=1}^n d_k \varphi_k(t) dt > \varepsilon$$

für alle n und $\{d_k\}$ vorhanden. Wir bilden jetzt das System $\{f_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$f_0 = f, \quad f_1 = \varphi_1, \quad f_2 = \varphi_2, \quad \dots$$

und wenden [171] an: soll es ein $g(t) \in L^p$ mit $\int_a^b f_k(t) g(t) dt = c_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) geben, so muß eine Konstante γ vorhanden sein, die der Ungleichung

$$(5) \quad \sum_{k=0}^n |c_k| \leq \gamma \left[\int_a^b \sum_{k=0}^n |f_k(t)|^{p'} dt \right]^{1/p'}$$

für alle $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ (und alle n) genügt, und diese Bedingung ist auch hinreichend. Wählt man $c_0 = 1$, $c_k = 0$ ($k > 1$), so läuft diese Bedingung auf

$$\|p_0\|^{p'} = \gamma^{p'} \int_a^b \sum_{k=0}^n p_k f_k(t) dt,$$

d. h. auf

$$\frac{1}{\gamma^{p'}} \int_a^b f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{p_0} \varphi_k(t) dt \quad (p_0 \neq 0)$$

hinaus. Sie ist aber wegen (4) für $\gamma = (1 \pm \varepsilon)^{1/p'}$ erfüllt, also ist (5) für $p_0 \neq 0$ und (ohne weiteres) für $p_0 = 0$ erfüllt, somit ein von Null verschiedenes, zu allen φ_n orthogonales $g(t) \in L^{p'}$ vorhanden.

Das trigonometrische System ist vollständig inbezug auf $\bar{L}$ und nicht abgeschlossen inbezug auf C , denn alle seine Funktionen haben 2π als Periode und somit können die trigonometrischen Polynome keine stetige Funktion, die in 0 und 2π verschiedene Werte annimmt, gleichmäßig annähern.

Die Vermutung, jedes inbezug auf C vollständige System sei inbezug auf L abgeschlossen, wäre irrig; nach [624] genügt es nämlich ein ON-System, vollständig inbezug auf C und unvollständig inbezug auf AT , als Gegenbeispiel zu nehmen; solche Systeme gibt es nach [61*]).

Jetzt sind wir in der Lage zu beweisen:

Zu jedem $R (= L^p, 1 < p < \infty)$ gibt es ein Orthogonalsystem, [626] welches wohl inbezug auf R , doch inbezug auf kein $Q \subsetneq R$ abgeschlossen ist.

Sei nämlich ein System inbezug auf R' (den zu R konjugierten Raum) vollständig, und unvollständig inbezug auf jeden R' umfassenden Raum; solche Systeme gibt es nach [613]. Dieses System ist nach [625J] abgeschlossen inbezug auf R , doch kann es nicht inbezug auf Q abgeschlossen sein, denn sonst wäre es nach [624] inbezug auf $Q' \supset R'$ vollständig.

Aus dem in diesem Abschnitt Gesagten ergibt sich folgendes Schema:

$$e[AL^p, \sim VL^p, M_n] \quad (1 < p < 2),$$

$$AL^p \supset VL^{p'} \supset VL^p \supset AL^{p'} \quad (p > 2),$$

$$VL^p \supset AL^{p'} \supset AL^p \quad (1 < p < 2),$$

$$e[VL^p, \sim AL^p]: AL^{p'} \sim AL^p \supset VL^{p'} \quad (p > 2),$$

(wo „e“ als „es gibt“, „ $\supset$ “ als „impliziert“, „ $\sim^a$ “ als „nicht“ zu lesen ist). So heißt z.B. die erste Zeile, daß es in bezug auf L^p abgeschlossene unvollständige Systeme gibt (die aus beschränkten Funktionen bestehen), wenn $1 < p < 2$.

Wenn man zusätzliche Annahmen über das O-System einführt, so sichert u. U. die Abgeschlossenheit in bezug auf L^p die Vollständigkeit in bezug auf denselben Raum. Es genügt z.B. anzunehmen, jede Funktion in L^p lasse sich in L^p durch die Partialsummen ihrer Entwicklung approximieren. Denn in diesem Falle gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |g(t) - s_n(t)|^p dt = 0$$

für $g(t) \in L^p$, $s_n(t) = \int_a^b g(u) \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u) du$. Ist also $\int_a^b g(t) \varphi_k(t) dt = 0$ (k),

so folgt $\int_a^b |g(t)|^p dt = 0$, $g(t) = 0$ f. ü. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung der in L^2 bestehenden Beziehungen angesehen werden, die dort in der Parseval'schen Formel [371J] zusammengefaßt wurden.

Wir bemerken, daß die Abgeschlossenheit eines Systems mit der Approximierbarkeit aller Polynome äquivalent ist und ferner, daß

$$[627] \lim_{n \rightarrow \infty} c_{nk} = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt \text{ aus } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - w_k\|_R = 0 \text{ mit } w_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{nk} \varphi_k(t) \text{ resultiert.}$$

§ 3. Verallgemeinerung des Riesz-Fischer'schen Satzes.

Im § 2 haben wir gesehen ([624] [625]), daß die Äquivalenz der Abgeschlossenheit und Vollständigkeit in allgemeinen Räumen bestehen bleibt, wenn man zwei zueinander konjugierte Räume betrachtet (nur im Falle L^2 sind beide Räume identisch).

Ein anderer grundlegender Satz ist der Riesz-Fischer'sche. Ein rein äußerliches Analogon dieses Satzes, das etwa aus der

Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ auf die Existenz von $f(t) \in L^p$ mit $\{a_n\}$ als Koeffizienten schließen ließe, ist sofort zu widerlegen, denn für $p > 2$ wäre $f(t) \in L^p \subset L^2$, also $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ und dies ist kei-

neswegs eine Konsequenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$. Es zeigt sich, daß der Riesz-Fischer'sche Satz in zwei Teile zu trennen ist, deren jeder einen anderen Raum betrifft. Dies haben für das trigonometrische System W. H. Young und F. Hausdorff, für Orthogonalsysteme im allgemeinen F. Riesz geleistet.

Ist $\{\varphi_n(t)\}$ f. l. und M n-frei, so gilt bei $1/p + 1/p' = 1$: [631]

1° $f(t) \in L^p$ ($1 < p < 2$) impliziert

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{p'} \right)^{1/p'} \leq M^{2/p} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

2° $\{a_k\} \in l^p$ ($1 < p < 2$) impliziert

$$\left(\int_a^b |f(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leq M^{2/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \right)^{1/p}.$$

Dabei ist $\{\varphi_n\}$ das ON-System, nach welchem die Koeffizienten a_k von $f(t)$ in 1° berechnet werden, und $f(t)$ in 2° ist eine entsprechend gewählte Funktion mit $\{a_k\}$ als Koeffizienten. Der Sinn von 1° ist also, daß die Endlichkeit von $\|\varphi\|_p$ bereits die Endlichkeit von $\| \{a_k\} \|_p$ zur Folge hat; 2° bedeutet, daß die Endlichkeit von $\| \{a_k\} \|_p$ diejenige von $\|f\|_{p'}$ impliziert; es wird eben die Existenz eines $f \in L^{p'}$ mit $\{a_k\}$ als Koeffizienten behauptet; in beiden Fällen sind die im L^p bzw. in $L^{p'}$ geltenden Normen gemeint. Man sieht, daß der in der Prämisse auftretende Exponent p den konjugierten Exponenten p' nicht übertrifft. Beide Teile von [631] gelten in den Grenzfällen $p = 1$, d. h. $p' = \infty$, wenn $\|f\|_{\infty}$ als w. o. G. von $f(t)$ und $\| \{a_k\} \|_{\infty}$ als das größte $|a_k|$ gedeutet wird.

Beweis von 1°: Wir betrachten zunächst ein natürliches r und alle $f(t) \in L^p$ deren Koeffizienten die Bedingung

$$(6) \quad \sum_{k=1}^r a_k^{p'} = 1$$

erfüllen. Wir suchen das Minimum von

$$(7) \quad \int_a^b |f(t)|^p dt$$

unter der Bedingung (6). Es sei λ die untere Grenze von (7) unter dieser Bedingung und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t)|^p dt = \lambda, \quad \sum_{k=1}^r |a_k^{(n)}|^{p'} = 1,$$

d.h. $\{f_n\}$ die minimisierende Folge, $\{a_k^{(n)}\}$ die Koeffizientenfolge von f_n . Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit $\{f_n\}$ eine in L^p schwach konvergente Teilfolge der ursprünglichen $\{f_n\}$; nach [166] ist eine solche vorhanden; es sei f die schwache Grenze von $\{f_n\}$ und $\{a_k\}$ die Koeffizientenfolge von $f(t)$. Wir haben dann (nach einem bereits in 1, §7, S. 33 verwendeten Schluß)

$$\int_a^b |f(t)|^p dt = \lambda \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) \varphi_k(t) dt = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt \quad (k);$$

(die letztere Beziehung gehört zur Definition der schwachen Konvergenz für beliebige $\varphi_k(t) \in L^p$; schreibt man $\text{sign } f(t) \cdot |f(t)|^{p-1}$ anstatt $\varphi_k(t)$ so resultiert die Ungleichung). Wir haben also

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k$, daher $\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'} = 1$, und infolgedessen

$$(8) \quad \int_a^b |f(t)|^p dt = \lambda.$$

Damit ist auch $\lambda > 0$ bewiesen; wir wollen aber darüber hinaus zeigen, daß $\lambda = \lambda(r)$ einem positiven Grenzwert für $r \rightarrow \infty$ zustrebt. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die Ungleichung

$$(9) \quad \int_a^b |f(t)|^p dt \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'} \right)^{p'} \geq \int_a^b |f(t)|^p dt,$$

die wir unter der Nebenbedingung (6) soeben bewiesen haben, auch ohne diese gültig bleibt, denn für $f(t) \in L^p$ erfüllt die Funktion

$f(t) \cdot \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \psi(t)$ die Nebenbedingung (6); schreibt man ψ

anstatt f in (7), so wird die Ungleichung, welche die Integrale (7) und (8) verband, mit (9) gleichbedeutend. Nun sehen wir aber, daß das linksstehende Glied von (9) für $f(t) = \psi(t)$ sein Minimum erreicht, denn dann gilt das Gleichheitszeichen, weil der Nenner den Wert 1 annimmt. Setzt man also

$$f(t) = \bar{f}(t) + \eta h(t) \quad (h(t) \in L^p),$$

so ist $n=0$ eine Minimumstelle, es muß also die Ableitung nach

η_i für $\eta_i = 0$ verschwinden. Sind $\{h_k\}$ die Koeffizienten von $h(t)$, so ist $a_k = \bar{a}_k + \eta_i h_k$ und die Ableitung beträgt für $\eta_i = 0$

$$\int_a^b |\bar{f}(t)|^{p-1} \operatorname{sign} \bar{f}(t) \cdot h(t) dt = \int_a^b |f(t)|^p dt \cdot \sum_{k=1}^r \bar{a}_k^{p'-1} h_k \operatorname{sign} \bar{a}_k (= 0).$$

Bezeichnet man $|f(t)|^{p-1} \operatorname{sign} f(t)$ mit $F(t)$ und setzt $h(t)$ sukzessive gleich $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$, so kommt

$$(10) \quad c_k = \int_a^b F(t) \varphi_k(t) dt = \int_a^b |f(t)|^p dt \cdot \bar{a}_k^{p'-1} \operatorname{sign} a_k \quad (k=1, 2, \dots, r);$$

setzt man aber $\varphi_k(t)$ für $h(t)$ mit $k > r$, so wird

$$c_k = \int_a^b F(t) \varphi_k(t) dt = 0 \quad (k=r+1, r+2, \dots).$$

Dies führt, wenn man für $h(t)$ alle event. zu $\{\varphi_n\}$ orthogonalen Funktionen setzt, zu

$$F(t) = \sum_{k=1}^r c_k \varphi_k(t)$$

mit den Werten (10) für $\{c_k\}$. Die Parseval'sche Beziehung gibt

$$\int_a^b F^2(t) dt = \int_a^b |f(t)|^{2p-2} dt = \sum_{k=1}^r c_k^2,$$

also

$$(11) \quad \int_a^b |f(t)|^{2p-2} dt \leq \lambda^2 \cdot \sum_{k=1}^r |a_k|^{2p'-2}.$$

Jetzt führen wir die Exponenten $p_1 = 2/(3-p)$ und $p'_1 = p_1/(p_1-1) = 2/(p-1)$ ein; es wird

$$p_1 = \tau p + (1-\tau)(2p-2) \quad \text{für } \tau = 2(2-p)/(3-p).$$

Die Hölder'sche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t)|^{p_1} dt &= \int_a^b |f(t)|^{\tau p} \cdot |f(t)|^{(1-\tau)(2p-2)} dt \\ &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\tau} \cdot \left(\int_a^b |f(t)|^{2p-2} dt \right)^{1-\tau} \end{aligned}$$

und, mit Rücksicht auf (8) und (11),

$$\int_a^b |f(t)|^{p_1} dt \leq \lambda^{2(1-\tau)} \cdot \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{2p'-2} \right)^{1-\tau},$$

also

$$\int_a^b |f(t)|^{p_1} dt \left(\sum_{k=1}^r |\bar{a}_k|^{2p' \cdot 2} \right)^{1-\tau} \leq \lambda^{2-\tau}.$$

Nun war aber $2p' - 2 = p'_1$, $\tau = 2(2-p)/(3-p)$, so daß wir zu

$$(12) \quad \int_a^b |f(t)|^{p_1} dt \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'_1} \right)^{p_1/p'_1} \leq \lambda^{p_1}$$

gelangen. Bezeichnen wir allgemein mit $\Lambda(p)$ das Minimum von

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \left(\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'} \right)^{p/p'} \quad \text{für } f \in L^p,$$

so folgt aus (12) ohne weiteres

$$\Lambda(p_1) \leq [\Lambda(p)]^{p_1} \quad \text{oder} \quad [\Lambda(p_1)]^{1/p_1} \leq \Lambda(p).$$

Definiert man also $\{p_j\}$ durch $p_0 = p$, $p_{j+1} = 2/(3-p_j)$, so kommt sukzessive

$$* \quad [\Lambda(p_2)]^{1/p_2} \leq \Lambda(p_1), \quad [\Lambda(p_2)]^{1/p_1 p_2} \leq \Lambda(p), \quad \dots, \\ (13) \quad \Lambda(p)^{-1} \geq [\Lambda(p_j)]^{1/p_1 p_2 \dots p_j} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Jetzt schätzen wir $\Lambda(p)$ ab: es war

$$a_k = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt \quad (k),$$

also $|a_k| \leq M \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot (b-a)^{1/p'} = M \Lambda(p)^{1/p} (b-a)^{1/p'}$, da aber

$\sum_{k=1}^r |a_k|^{p'} = 1$, so folgt $r M^{p'} [\Lambda(p)]^{p'/p} (b-a)^{1/p'} \geq 1$ und

$$(14) \quad \Lambda(p) \geq \frac{1}{r^{p/p'} (b-a)^{p/p'} M^p} = \frac{1}{r^{p-1} (b-a)^{p-1} M^p}.$$

Andererseits ist aber $(2-p_j)/(2-p_{j+1}) = 1/p_{j+1}$, also $1/p_1 p_2 \dots p_j = (2-p)/(2-p_j)$ und dies mit (13) und (14) ergibt

$$\Lambda(p)^{-1} \leq 1/r^{(2-p)(p_j-1)(2-p_j)} M^{(2-p)p_j(2-p_j)} (b-a)^{(2-p)(p_j-1)(2-p_j)}.$$

Jetzt ist noch $\lim_{j \rightarrow \infty} p_j$ zu finden. Es war $p_{j+1} = 2/(p_j-1) = 2(p'_j-1)$, also $p'_{j+1} = 2^j(p'_j-1)$, also $\lim_{j \rightarrow \infty} p'_j = \infty$, $\lim_{j \rightarrow \infty} p_j = 1$, so daß schließlich

$$A(p) \leq \frac{1}{M^{2-p}}$$

resultiert. Die letztere untere Schranke für $A(p)$ hängt von r nicht ab und infolgedessen gilt

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq \left(\sum_{k=1}^r a_k^{1/p'} \right)^{p/p'} \frac{1}{M^{2-p}}$$

für alle r , womit der Beweis von 1° beendet ist.

Beweis von 2°: Jetzt sei $\{a_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{1/p} < \infty$ gegeben.

Wir betrachten

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)$$

und eine willkürliche Funktion $g(t) \in L^p$ mit $\{b_k\}$ als Koeffizienten. Es ist dann

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) f_n(t) dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^{1/p} \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^{1/p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq M^{(2-p)/p} \left| \int_a^b |g(t)|^p dt \cdot \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right|^{1/p}, \end{aligned} \quad *$$

wobei 1° benutzt wurde. Wählen wir nun für $g(t)$ die Funktion $|f_n(t)|^{p'-1} \text{sign } f_n(t)$, so erhalten wir

$$(15) \quad \left(\int_a^b |f_n(t)|^{p'} dt \right)^{1-1/p'} \leq M^{(2-p)/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Wir können demnach aus $\{f_n\}$ eine in L^p gegen eine Funktion $f(t) \in L^{p'}$ schwach konvergente Folge herausgreifen, für welche die Ungleichung

$$\left(\int_a^b |f(t)|^{p'} dt \right)^{1-1/p'} \leq M^{(2-p)/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}$$

als Konsequenz von (15) und die Beziehungen

$$\int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) \varphi_k(t) dt = a_k \quad (k)$$

als Eigenschaft der schwachen Konvergenz gelten.

Es ist also die Existenz der in 2° behaupteten Funktion $f(t) \in L^p$ bewiesen; wenn das System $\{\varphi_n\}$ in bezug auf L^p unvollständig ist, so gibt es andere Funktionen mit $\{a_k\}$ als Koeffizienten, doch brauchen sie nicht mehr die Ungleichung 2° zu erfüllen.

Die Vertauschung von p und p' in 1° oder 2° würde zu falschen Aussagen führen. Auf die Frage nach entsprechenden Gegenbeispielen kommen wir in § 6 zurück. Hier gehört auch die Frage nach der Rolle der Voraussetzung $|\varphi_n(t)| \leq A$ in [631]. Man kann zeigen, daß es beim Hausdorff-Riesz'schen Satze nicht genügt, die Funktionen $\varphi_n(t)$ einzeln als beschränkt vorauszusetzen. Das Haar'sche System [226] ist hier ein Gegenbeispiel. Betrachten wir nämlich die Gruppe $\{\varphi_k^{(l)}\} = 1, 2, \dots, 2^n$, die aus 2^n Funktionen besteht, und setzen $a_k = (1/2^n)^{1/2-1/p'}$ für $k = 2^n + l - 1$, sonst $a_k = 0$. Dann ist für $p < 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right)^{1-p/2} < \infty.$$

* Andererseits sei $s_m(t) = \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(t)$, $\varphi_k = \varphi_n^{(l)}$ für $k = 2^n + l$; es ist

$$\int_0^1 |s_m(t)|^{p'} dt = \sum_{n=1}^N \int_{J_n} \left(\frac{1}{2^n} \right)^{1-1/p'} \cdot 2^{n/2} dt,$$

wenn N die Anzahl der Funktionen derjenigen Gruppe bezeichnet, zu welcher $\varphi_m(t)$ gehört und J_n das vorletzte Teilintervall von der Länge $1/2^n$. Die Summe beträgt $\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = N$ und daher ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 |s_m(t)|^{p'} dt = \infty.$$

Unsere Reihe ist demnach keine Entwicklung einer Funktion aus L^p , wie wir dem später zu beweisenden Satz [641] entnehmen. Somit ist 2° (mit einem endlichen M) nicht erfüllt. Wenn wir aber den Beweis von 2° prüfen, so sehen wir, daß er bloß die Eigenschaft 1° und $\varphi_n \in L^{p'}(n)$ benutzt. In unserem Beispiel ist also auch 1° hinfällig.

Es ist auch leicht festzustellen, daß 2° für vollständige Systeme mit $\lim_{n \rightarrow \infty} w. o. G. |\varphi_n(t)| = \infty$ mit keinem endlichen M für alle v ($1 < p < 2$) gültig sein kann. Setzt man nämlich $a_k = 0$ für

$k \neq n_0$, $a_{n_0} = 1$, so ist $\varphi_{n_0}(t)$ das einzige $f(t) \in L^p$ mit $\{a_k\}$ als Koeffizientenfolge. Nun ist $\lim_{n \rightarrow \infty} p' = +\infty$ für $\lim_{n \rightarrow \infty} p = 1$, also der Grenzwert von

wert von $\left(\int_a^b f(t)^{p'} dt \right)^{1/p'}$ gleich w. o. G. $\varphi_{n_0}(t)$. Rechts steht aber in $2^0 M^{2/p'}$ mit M als Grenzwert. Schreibt man n anstatt n_0 und läßt es wachsen ($n = 1, 2, \dots$), so ergibt die eben bewiesene Ungleichung w. o. G. $\varphi_n(t) \leq M(n)$ einen Widerspruch mit der anfänglichen Annahme.

Der Satz von Paley. Wir haben bereits erwähnt, daß ein zu [631] analoger Schluß „vom großen Exponenten ($q > 2$) auf den kleinen Exponenten (q' ; $1/q' + 1/q = 1$)“ versagt. M.a.W. leistet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^q < \infty$ noch keine Gewähr für die Existenz eines $f(t) \in L^{q'}$ mit $\{a_n\}$ als Koeffizientenfolge. Es bietet sich die Frage nach stärkeren Bedingungen, etwa von der Gestalt

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^q n^\alpha < \infty \quad (\alpha > 0). \quad *$$

Ist $q > 2$ und $\alpha > q - 2$, so impliziert (16) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{q'}$ also, nach [631], die Existenz eines $f(t) \in L^{q'} \subseteq L^q$ mit $\{a_n\}$ als Koeffizientenfolge. (Für gewisse $\alpha < q - 2$ könnte (16) mit $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$, $f(t) \in L^{q'}$ erfüllt sein). Jetzt untersuchen wir $\alpha = q - 2$. Es zeigt sich, daß dann $f(t)$ sogar zu L^q gehört. Hier ist aber die Bemerkung einzuschalten, daß eine Umordnung des Orthogonalsystems $\{\varphi_n\}$ mit einer entsprechenden Umordnung von $\{a_n\}$ die Existenz von $f(t)$ nicht beeinträchtigen kann, wohl aber die Konvergenz von (16). Es ist nun leicht zu sehen, daß eine Summe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \hat{\varphi}_n$ mit $x_n \geq 0$, $\hat{\varphi}_n \geq 0$ am größten wird, wenn beide Folgen $\{x_n\}$, $\{\hat{\varphi}_n\}$ nichtfallend oder beide nichtwachsend angeordnet werden; sie wird am kleinsten, wenn eine Folge nichtwachsend, die andere nichtfallend angeordnet wird. Ist nun $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, so läßt sich $\{a_n\}$ nichtwachsend anordnen; die Folge $\{n^\alpha\}$ ist stets monoton. Dies erleichtert das Verständnis des Satzes:

[632] Es sei $\{\varphi_n\}$ ein ON mit $|\varphi_n| \leq M$ f. ü.

1° $f(t) \in L^p$ ($1 < p \leq 2$) impliziert $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p k^{p-2} \leq A_p \int_a^b |f(t)|^p dt$

mit f-freiem A_p , wo $\{a_k\}$ die Folge der nichtwachsend geordneten Beträge der Koeffizienten von f bezeichnet;

2° $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q k^{q-2} < \infty$ ($q \geq 2$) impliziert die Existenz von $f(t) \in L^q$

mit a_k als Koeffizienten und mit $\int_a^b |f(t)|^q dt \leq A_q \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q k^{q-2}$, wo A_q von $\{a_k\}$ nicht abhängt und letztere Folge in der Voraussetzung und Behauptung den Beträgen nach nichtwachsend angeordnet wurde.

Es ist die Ungleichung 1° a fortiori erfüllt, wenn die $|a_k|$ ihre ursprüngliche Reihenfolge behalten, und man darf auch in 2° in der Voraussetzung und Behauptung den Vorbehalt der Monotonie fallen lassen, wie aus den dem Satze [632] vorgeschickten Bemerkungen folgt.

Beweis: Wir beginnen mit 2° für $q=4,5,6,\dots$ Es ist für $q>2$

$$(17) \quad \sum_1^j a_k^2 \leq \left(\sum_1^j |a_k|^q k^{q-2} \right)^{2/q} \left(\sum_1^j \frac{1}{k^2} \right)^{2/q},$$

also $\sum_1^{\infty} a_k^2 < \infty$, was die Existenz von $f \in L^2$ mit

$$a_k = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt \quad (k)$$

impliziert. Um $f \in L^q$ zu zeigen, genügt es nach [125], wenn man z. B. für $m_\nu = 2^\nu - 1$

$$\int_a^b |s_{m_\nu}(t)|^q dt \leq A_q \sum_{k=1}^{m_\nu} |a_k|^q k^{q-2}$$

beweist. Zu diesem Zwecke werde

$$\Phi_\nu(t) = \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} a_k \varphi_k(t), \quad C_\nu = \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} |a_k|^q k^{q-2}$$

gesetzt; dann ist

$$\begin{aligned} J_n &= \int_a^b |s_{m_n}(t)|^q dt = \int_a^b \left| \sum_{\nu=1}^n \Phi_\nu(t) \right|^q dt \\ &\leq \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \dots \sum_{\nu_q=1}^n \int_a^b |\Phi_{\nu_1}(t) \Phi_{\nu_2}(t) \dots \Phi_{\nu_q}(t)| dt. \end{aligned}$$

Jetzt brauchen wir die Ungleichung

$$(18) \quad \int_a^b |\Phi_\mu(t) \Phi_\nu(t)|^{q/2} dt \leq M^{q-2} C_\mu^{1/2} C_\nu^{1/2} 2^{-1/2|\nu-\mu|}$$

für $q > 4$. Links steht hier höchstens

$$\begin{aligned} & \max |\Phi_\mu(t)|^{q/2} \cdot |\Phi_\nu(t)|^{q/2-2} \cdot \int_a^b \Phi_\nu^2(t) dt \\ & \leq M^{q-2} \left(\sum_{2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1} |a_k| \right)^{q/2} \left(\sum_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |a_k| \right)^{q/2-2} \sum_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} a_k^2; \end{aligned}$$

aus (17) folgt

$$\sum_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} a_k^2 \leq C_\nu^{2/q} \frac{1}{(2^{\nu-1})^{1-2/q}},$$

und die Hölder'sche Ungleichung [114] liefert

$$\sum |a_k| \leq \left(\sum |a_k|^q k^{q-2} \right)^{1/q} \left(\sum \frac{1}{k^{q-2}} \right)^{1-1/q};$$

da aber

$$\sum_{2^{k-1}}^{2^k-1} 1/k^{q-1} \leq 2^{k-1}/2^{q-1} (k-1) = 2^{q-1} \quad (\lambda > 0 \text{ ganzzahlig}),$$

so übertrifft die linke Seite in (18) nicht

$$M^{q-2} \cdot C_\mu^{1/2} C_\nu^{1/2-2/q} \cdot 2^{(\mu-1)/2} \cdot 2^{(\nu-1)(1/2-2/q)} \cdot C_\nu^{2/q} \cdot 2^{-(\nu-1)(1-2/q)},$$

was für $\nu \geq \mu$ der rechten Seite gleichkommt. (Die Ungleichung (18) bleibt für $2 < q < 4$ richtig, wenn man $1/2|\nu-\mu|$ im Exponenten durch $1/2|\nu-\mu| \cdot |q/2-1|$ ersetzt; wir brauchen diese Erweiterung nicht). Wir wollen (18) auf J_n anwenden; es kommt dann

$$(19) \quad |\Phi_{v_1} \Phi_{v_2} \dots \Phi_{v_q}| = |(\Phi_{v_1} \Phi_{v_2}) (\Phi_{v_1} \Phi_{v_3}) \dots (\Phi_{v_{q-1}} \Phi_{v_q})|^{1/(q-1)},$$

wo rechts $Q = \frac{1}{2} q(q-1)$ Produkte $\Phi_a \Phi_b$ auftreten. Die Hölder'sche Ungleichung erlaubt nun die Verallgemeinerung

$$\int_a^b |f_1(t) f_2(t) \dots f_r(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f_1(t)|^{p_1} dt \right)^{1/p_1} \dots \left(\int_a^b |f_r(t)|^{p_r} dt \right)^{1/p_r}$$

mit $1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \dots + 1/\lambda_q = 1$, was mit (19) und $\lambda_i = 1/Q$ (i) zu

$$\int_a^b |\Phi_{\nu_1}(t) \dots \Phi_{\nu_q}(t)| dt \leq \prod_{i,j=1}^q \left\{ \int_a^b |\Phi_{\nu_i}(t) \Phi_{\nu_j}(t)|^{q_i} dt \right\}^{1/Q}$$

und — wegen (18) — zu

$$\begin{aligned} \int_a^b |\Phi_{\nu_1}(t) \dots \Phi_{\nu_q}(t)| dt &\leq M^{q-2} \prod_{i,j=1}^q C_{\nu_i}^{1/2Q} C_{\nu_j}^{1/2Q} 2^{-\nu_i - \nu_j - 2Q} \\ &= M^{q-2} \prod_{i=1}^q C_{\nu_i}^{1/q} \left\{ \prod_{j=1}^q 2^{-\nu_i - \nu_j - 1Q} \right\} \end{aligned}$$

führt. Wenn wir dies in der Ungleichung für J_n substituieren und eine Verallgemeinerung der Hölder'schen Ungleichung für Summen mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = q$ anwenden, so kommt

$$J_n \leq M^{q-2} \prod_{i=1}^q \left\{ \sum_{\nu_1=1}^n \sum_{\nu_2=1}^n \dots \sum_{\nu_q=1}^n C_{\nu_i} \prod_{j=1}^q 2^{-\nu_i - \nu_j - (2q-2)} \right\}^{1/q}.$$

*

Die q -fache Summe überschreitet nicht

$$\sum_{i=1}^n C_i \cdot \left(\sum_{\nu=1}^n 2^{-\nu - (2q-2)} \right)^{q-1} = B \sum_{\nu=1}^n C_\nu,$$

also

$$J_n \leq B M^{q-2} \sum_{\nu=1}^n C_\nu = A_q \sum_{\nu=1}^\infty C_\nu.$$

Wir haben also den Satz für $q = 4, 5, \dots$ bewiesen und für $q = 2$ ist er evident. Es sei jetzt $q > 2$, sonst beliebig. Ist

$$f \sim \sum_{i=1}^\infty a_i \tau_i, \quad f_n \sim \sum_{i=1}^n a_i \tau_i(t),$$

$$S_k(f_n) \sim \sum_{k=1}^n a_k \cdot k^{p-n}, \quad J_k(f_n) = \int_a^b |f_n(t)|^p dt,$$

$$\lambda_p^n(n) = o. G. \frac{S_p(f_n)}{J_p(f)}, \quad \nu_p^q(n) = o. G. \frac{J_q(f_n)}{S_q(f_n)} \quad (p < 2 \leq q),$$

so gibt dieselbe Überlegung, welche in [631] beim Beweise von (10) benutzt wurde, folgendes: ist f_n diejenige Funktion, welche $\nu_p^q(n)$ liefert, so ist

$$\int_a^b |f_n(t)|^{q-1} \operatorname{sign} f_n(t) \cdot \tau_k(t) dt = \nu_p^q(n) \cdot a_k^{q-1} \cdot \operatorname{sign} a_k \cdot k^{q-2} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Es sei

$$g(t) = |f_n(t)|^{q-1} \operatorname{sign} f_n(t), \quad b_k = |a_k|^q(n) \cdot |a_k|^{q-1} \operatorname{sign} a_k \cdot k^{q-2};$$

nach der Definition von $\lambda_p(n)$ haben wir

$$\sum_{k=1}^n |b_k|^p k^{p-2} \leq \lambda_p^p(n) \int_a^b |g(t)|^p dt,$$

oder

$$|a_k|^{pq}(n) \sum_{k=1}^n |a_k|^{(q-1)p} k^{(q-1)p-2} \leq \lambda_p^p(n) \int_a^b |f_n(t)|^{p(q-1)} dt.$$

Ist nun $p(q-1) > 2$, so erhalten wir

$$|a_k|^{pq}(n) \leq \lambda_p^p(n) |a_k|^{p(q-1)}(n).$$

Es ist aber leicht $\lambda_p(n) \leq \mu_{p'}(n)$ festzustellen, denn für $f \in L^p$,

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t), \quad h_n(t) = \sum_{k=1}^n |a_k|^{p-1} k^{p-2} \operatorname{sign} a_k \cdot \varphi_k(t)$$

gilt

$$\int_a^b f(t) h_n(t) dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |h_n(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \mu_{p'}(n) \cdot S_p^{1/p'}(h_n) \cdot J_p^{1/p}(f),$$

$$\int_a^b f(t) h_n(t) dt = \sum_{k=1}^n |a_k|^p k^{p-2} = S_p(f_n) = S_{p'}(h_n),$$

also

$$S_p(f_n) \leq \mu_{p'}(n) \cdot S_p^{1/p'}(f_n) \cdot J_p^{1/p}(f),$$

was die fragliche Ungleichung impliziert. Wir dürfen demnach schreiben:

$$\mu_q(n) \leq \mu_{p'}^q(n) \cdot \mu_{p(q-1)}^q(n).$$

Es sei nun $\alpha + \beta = 2$. Setzen wir $p' = \alpha$, $p(q-1) = \beta$, so ist $q = 1 + \frac{2}{\beta}(\alpha-1)/\alpha$, also $\beta \leq q \leq \alpha$. Ist $\mu_\alpha(n) < K$, $\mu_\beta(n) < K$, so gibt es ein q mit $\mu_q(n) < K$. Andererseits ist für $q_i \geq 2$, $q_i \rightarrow q$ $\mu_q(n) \leq \lim \mu_{q_i}(n)$, denn

$$\frac{J_q(f_n)}{S_q(f_n)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{J_{q_i}(f_n)}{S_{q_i}(f_n)} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{q_i}^q(n).$$

Es folgt, daß die Gesamtheit der q zwischen c und $c+2$, für welche $\mu_q^q(n) \leq \max\{A_c, A_{c+2}\}$ gilt, überalldicht und abgeschlossen ist, also $\mu_q^q(n) \leq \max\{A_c, A_{c+2}\}$ $\lambda_p(n) \leq \mu_{p'}(n)$ alle q umfaßt. Damit ist 2" bewiesen. Die Ungleichung $\lambda_p(n) \leq \mu_{p'}(n)$ ist aber gleichbedeutend mit 1°, so daß [632] vollständig begründet wurde.

Bemerkungen. 1° Wenn $\{a_n\}$ beide Bedingungen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p'} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p n^{p-2} < \infty$ erfüllt ($p < 2$), so braucht es noch nicht die Koeffizientenfolge einer Funktion aus L^p zu sein. So ist z. B. die lakunäre trigonometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n t}{\sqrt{n}}$ keine Entwicklung, nicht einmal die Entwicklung einer Funktion aus L (vgl. VII, § 4).

2° Das Beispiel, welches die Behauptungen [631] für das Haar'sche System als ungültig erkennen ließ, ist zugleich ein Gegenbeispiel für die Behauptungen [632] für jenes System. Es folgt nämlich eine schwächere Abart von [631] aus [632] (vgl. das Zygmund'sche Buch).

3° In [632] ist $p-2$ durch keinen absolut kleineren Exponenten ersetzbar. Es habe nämlich $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n k^{-1/p'-\alpha} \cos nt$ zu Koeffizienten, $2\alpha > 1 - 2/p'$. Es gehört nämlich $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \cos nt$ zu L^p für alle

$1/p' < \beta < 1/2$, es gilt jedoch hier $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p k^{p-2+\epsilon} = \infty$ für $\epsilon = 1 - p(1-\beta)$. Ebenso wenig kann $a_k = 1/\sqrt{k}$ die Koeffizientenfolge eines $f \in L^q$ mit $q \geq 2$ vorstellen, obwohl $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q k^{q-2-\epsilon} < \infty$ für $\epsilon > q/2 - 1$ erfüllt ist. Nichtdestoweniger ist nach [114] und [631] die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t)$ die Entwicklung einer zu allen L^p mit $1 < p < \infty$ gehörenden Funktion, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\alpha k^{\alpha-1}$ für ein $\alpha \geq 1$ konvergiert.

§ 4. Bedingungen dafür, daß eine Reihe eine Entwicklung sei.

Wir gehen jetzt dazu über, notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, damit eine Orthogonalreihe eine Orthogonalentwicklung sei. Die bis jetzt angegebenen Bedingungen waren für L^p -Räume ($p < 2$) notwendig, für L^q -Räume, $q > 2$, hinreichend. Jetzt wollen wir die Reihen selbst, nicht bloß ihre Koeffizienten, betrachten und zwar unter gewissen zusätzlichen Annahmen. Es bezeichne T eine Summationsmethode mit der zeilenfiniten Matrix

$$\begin{array}{ccccccc}
 b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n_1} & & & \\
 b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2n_2} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 b_{k1} & b_{k2} & \dots & \dots & \dots & b_{kn_k} & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}$$

Wir betrachten die T-Transformierten der Kerne des Systems,

$$K_i(s, t) = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} \left(\sum_{j=1}^k \varphi_j(s) \varphi_j(t) \right).$$

Die T-Transformierten der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t)$ sind

$$\tau_i(t) = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} s_k(t).$$

Die *zusätzlichen Annahmen* seien:

$$1^\circ \quad |\tau_n(t)| < M_n \quad f. \ddot{u}., \quad 2^\circ \quad \int_a^b |K_i(s, t)| ds < A \quad f. \ddot{u}.,$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ [641] die Entwicklung eines $f \in L^p$ ($1 < p < \infty$) sei, ist — unter obigen Annahmen — die Existenz einer Konstanten α mit

$$(20) \quad \|\tau_n(t)\|_p < \alpha.$$

Hinlänglichkeit: Nach [165] existiert wegen (20) eine gegen ein $f(t) \in L^p$ schwach konvergente Teilfolge $\{\tau_{n_k}(t)\}$, d. h. es ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \tau_{n_k}(t) \varphi_k(t) dt = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots);$$

berücksichtigt man die Toeplitz'schen Beziehungen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_{k1} + b_{k2} + \dots + b_{kn_k}) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_{ik} = 0,$$

so folgt $a_k = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt$, w. z. b. w.

Notwendigkeit: Es sei $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$, $f(t) \in L^p$. Dann

ist $\tau_n(t) = \int_a^b f(s) K_n(s, t) ds$. Die Hölder'sche Ungleichung liefert

$$\left| \sigma_n(t) \right| \leq \left[\int_a^b |K_n(s, t)| |f(s)|^p ds \right]^{1/p} \cdot \left[\int_a^b |K_n(s, t)| ds \right]^{1/p'},$$

$$\int_a^b |\sigma_n(t)|^p dt \leq \int_a^b dt \left[\int_a^b |K_n(s, t)| |f(s)|^p ds \right] \cdot A^{p/p'}.$$

und die Vertauschung der Integrationsfolge gibt

$$\int_a^b |\sigma_n(t)|^p dt \leq A^{1+p/p'} \int_a^b |f(t)|^p dt, \quad \text{d. h.} \quad |\sigma_n(t)| \leq z.$$

Ein analoger Satz gilt in Räume M :

[642] *Bei denselben Annahmen ist die Bedingung w. o. G. $|\sigma_n(t)| \leq z$ (d. h. $|\sigma_n(t)|_M \leq z$) notwendig und hinreichend dafür, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau_n(t)$ die Entwicklung einer beschränkten Funktion sei.*

Die Hinlänglichkeit läßt sich wie beim letzten Satz beweisen; der Notwendigkeitsbeweis verläuft, wie folgt: es sei $|f(t)| \leq \beta$; dann ist

$$|\sigma_n(t)| = \left| \int_a^b f(u) K_n(t, u) du \right| \leq A \cdot \beta,$$

w. z. b. w.

Hier werde bemerkt, daß die Annahme 2° notwendig ist, wenn die Ungleichung $|\sigma_n|_M \leq \beta$ für alle beschränkten Funktionen erfüllt sein soll. Denn die Verneinung von 2° führt nach [155] zu einer stetigen Funktion $g(t)$ mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{w. o. G.} \int_a^b |K_n(t, u)| g(u) du = +\infty,$$

was mit $|\sigma_n|_M \leq z$ ($f \in M$) unvereinbar ist.

Es bleiben noch die Räume der stetigen Funktionen und der integrierbaren Funktionen (C und L) zu besprechen. In keinem von beiden sind die Bedingungen $|\sigma_n(t)| \leq z$ hinreichend; dies ist leicht an dem trigonometrischen System zu sehen, wo die ersten arithmetischen Mittel eine T -Methode mit 2° liefern und wo z. B. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt$ die Bedingung $|\sigma_n(t)| \leq z$ erfüllt, ohne eine Entwicklung zu sein (S. 57). Für C ist die Begründung noch einfacher, denn die Bedingung $|\sigma_n| \leq z$ ist hier für M und C die gleiche;

da sie für M notwendig ist, kann sie nicht für die engere Klasse C hinreichend sein.

Bemerkungen. Für das Haar'sche und das FrankliiVsehe System ([226] und [443]) sind die Annahmen 1° und 2°, die dem Satz [641] vorangehen, mit der Matrix der identischen Substitution

als T erfüllt; es ist $\int_0^1 \sum_{k=1}^n \tau_k(s) \tau_k(t) dt \sim z$, wie wir aus [526] erkennen. Für das trigonometrische System ist $\sigma_n(t) = \frac{1}{n} (s_1(t) + \dots + s_n(t))$, wie bereits erwähnt. Begnügt man sich mit einem Raume L'' , so kann die Annahme 1° durch $\tau_n \in L''$ ersetzt werden und die Annahme, daß T zeilenfinit ist, dadurch, daß $K_n(s, t)$ als Funktion von t zu L'' gehört.

Jetzt geben wir eine Bedingung an, die für alle L'' (einschließlich $p=1$) gilt, aber in M versagt, weil es in diesem Raume keine abgeschlossenen Systeme gibt:

Unter den Annahmen 1° und 2° ist

[643]

$$(21) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m(t) = \tau_n(t) \quad p = 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß eine Orthogonalreihe die Entwicklung einer Funktion aus L'' ($1 \leq p < \infty$) sei.

Die Hinlänglichkeit resultiert aus der Existenz einer starken Grenze f , d. h. einer Funktion in L'' mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(t) = f(t) \quad p = 0$,

woraus unmittelbar $a_k := \int_0^1 f(t) \tau_k(t) dt$ folgt.

Um die Notwendigkeit darzutun, bemerken wir zunächst, daß der Beweis von [641] die Ungleichung $|\tau_n[f]| \leq \tau_n[f]$ (auch für $p=1$) impliziert, also auch

$$(22) \quad |\tau_n[f]| = \tau_n[g] \leq \tau_n[f + g]$$

Es sei jetzt $\{g_k(t)\}$ eine gegen $f(t)$ stark konvergente Folge von beschränkten Funktionen, wie z.B. die in [129] konstruierten. Gelingt es $\lim_{m \rightarrow \infty} |\tau_m[g] - \tau_n[g]| = 0$ für diese g_k zu zeigen, so folgt (21) für $f(t)$, denn es ist $|\tau_m[f] - \tau_n[f]| \leq |\tau_m[f] - \tau_m[g_k]| + |\tau_m[g_k] - \tau_n[g_k]| + |\tau_n[g_k] - \tau_n[f]|$ und (22) erlaubt das erste und dritte Glied rechts abzuschätzen. Es sei $g_k(t) = h(t)$; $h(t)$ ist beschränkt, also $h \in L^2$ und

$$\lim_{m \geq n \rightarrow \infty} \int_a^b |\sigma_m[h] - \sigma_n[h]|^2 dt = 0,$$

was aus der Bessel'schen Ungleichung und den charakteristischen Eigenschaften der T -Methoden sofort folgt. Es kommt ($\delta > 0$)

$$\int_a^b (\sigma_m - \tau_n)^2 dt < \delta^{2+p}$$

für genügend große m und n , es ist also $|\tau_m(t) - \tau_n(t)| > \delta$ bloß auf einer t -Menge E vom Maße $\ll \delta^p$. Daraus folgt

$$\|\sigma_m - \tau_n\|_p = \left(\int_a^b |\sigma_m - \tau_n|^p dt \right)^{1/p} = \left(\int_E + \int_{\bar{E}} \right) \leq (2^p \delta^p A^p |E| + \delta^p (b-a))^{1/p},$$

wenn $|h(t)| \leq \beta$. Es ergibt sich schließlich

$$\|\sigma_m - \tau_n\|_p \leq ((2\beta A\delta)^p + (b-a)\delta^p)^{1/p} = \delta((2\beta A)^p + (b-a))^{1/p}.$$

★ Ebenso wie früher für M , können wir zeigen, daß die Annahme 2° für L wesentlich ist. Wäre sie nämlich nicht erfüllt, so wäre ([155]) eine beschränkte Funktion $h(t)$ vorhanden mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\tau_n(t)| = \infty$ in einer positiven Menge; dann wäre aber ([153])

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \tau_n[h] f(t) dt = +\infty \quad \text{für ein geeignetes } f \in L \text{ und, wegen}$$

$$(23) \quad \int_a^b \tau_n[h] f(t) dt = \int_a^b \tau_n[f] h(t) dt,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \tau_n[f] h(t) dt = +\infty, \quad \text{was ([127]) } \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\tau_n[f]| dt = \infty$$

ergibt und $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\tau_m[f] - \tau_n[f]\|_L = 0$ ausschließt. Dagegen ist 2° für L^p -Räume mit $p > 1$ nicht mehr notwendig, denn es hat z. B. das trigonometrische System die Eigenschaft

$$\lim_{m \geq n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |s_m(t) - s_n(t)|^p dt = 0,$$

obwohl

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u) du > \lambda \log n$$

mit t - und u -freiem, positivem λ gilt.

Ohne 2°, aber mit 1°, können wir zeigen:

Die Eigenschaften

[644]

$$(24) \quad \lim_{m \geq n \rightarrow \infty} \|\sigma_m[f] - \sigma_n[f]\|_p = 0 \quad \text{für alle } f \in L^p$$

$$(25) \quad \lim_{m \geq n \rightarrow \infty} \|\tau_m[f] - \tau_n[f]\|_{p'} = 0 \quad \text{für alle } f \in L^{p'}$$

sind äquivalent ($1 < p < \infty$).

Beweis: (24) hat die Konvergenz von $\left\{ \int_a^b \tau_n[f] g(t) dt \right\}$ für $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ zur Folge, also — wegen (23) — die Konvergenz von $\left\{ \int_a^b \tau_n[g] f(t) dt \right\}$. Es ist demnach die Folge $\{\tau_n[g]\}$ im Raume $L^{p'}$ schwach konvergent, also ist nach [152] $\|\tau_n[g]\|_{p'} \leq z'$ (mit n -freiem z') und (nach [151]) $\|\tau_n[g]\|_{p'} \leq z \|g\|_{p'}$; die letzte Ungleichung setzt uns in die Lage weiter wie beim Beweise von [643] zu verfahren, um (25) zu erhalten. Ebenso folgt (24) aus (25).

Im Falle des Raumes C ist die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz von $\{\tau_n(t)\}$ wie leicht ersichtlich, hinreichend, jedoch nicht notwendig. So ist z. B. $\{\tau_n(t)\}$ für das trigonometrische System [223] nicht gleichmäßig konvergent, wenn die stetige Funktion, die man entwickelt, an den Stellen 0 und 2π verschiedene Werte annimmt.

Das allgemeine Riesz-Fischer'sche Problem. Die Bedingungen dafür, daß eine Folge $\{a_n\}$ im Falle eines allgemeinen Orthogonalsystems eine Koeffizientenfolge sei, sehen ganz anders aus. Diese Frage wollen wir gleich allgemeiner fassen: Eine Funktionenfolge $\{f_n\}$ und eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ sind gegeben; welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung $f(t)$ des unendlichen Gleichungssystems

$$\int_a^b f(t) f_n(t) dt = a_n \quad (i)?$$

In dieser Form haben wir das Momentenproblem des i -ten Kapitels (§ 7) wieder vor uns. Der dort bewiesene Satz [171] liefert, als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\{a_n\}$ [645] die Koeffizientenfolge einer Funktion $f(t) \in L^p$ ($p > 1$) oder $f(t) \in M$ sei,

$$\sum_{k=1}^n a_k \xi_k \leq \gamma \left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'},$$

bzw.

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \xi_k \right| \leq \gamma \int_a^b \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t) dt$$

für alle endlichen Zahlensysteme $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Hier wird $\varphi_k(t) \in L^{p'}$ bzw. $\varphi_k(t) \in M$ vorausgesetzt, eine Annahme, welche die Existenz von $\int_a^b f(t) \varphi_k(t) dt$ (k) sichert.

Polare Bedingungen. Kehren wir jetzt zu den Annahmen zurück, die wir am Anfang dieses § gemacht haben, d.h. zu den Ungleichungen 1°, 2°, die dem Satz [641] vorangehen. Wir können dann, wie wir gesehen haben, notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, damit eine Orthogonalreihe eine Entwicklung in bezug auf einen Raum sei. Diese Bedingungen betreffen die $\pi_n(t)$, d. h. die T-Transformierten der Partialsummen. [645] zeigt einen anderen Typus von Bedingungen. Einen dritten Typus stellt folgender Satz vor:

[646] *Unter den Annahmen 1° und 2° besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ die Entwicklung einer Funktion aus L^p ($p > 1$), L , bzw. M sei, in der T-Summierbarkeit der Reihe*

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$$

für alle Koeffizientenfolgen $\{g_n\}$ von Funktionen $g(t)$ aus dem konjugierten Raum $L^{p'}$, bzw. M , bzw. L .

Notwendigkeit: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ sei die Entwicklung von $f(t) \in L^p$ ($p > 1$); es folgt für $g(t) \in L^{p'}$ (bzw. für $g(t) \in M$)

$$T_i = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} \sum_{j=1}^k a_j g_j = \int_a^b \gamma_i[f, t] g(t) dt$$

und

$$T_i - T_j = \int_a^b (\gamma_i[f, t] - \gamma_j[f, t]) g(t) dt;$$

[127] gibt für $p > 1$

$$(27) \quad |T_i - T_j| \leq \left(\int_a^b |\tau_i - \tau_j|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'},$$

und die starke Konvergenz von $\{\tau_n|f; t\}$ bewirkt die Konvergenz der rechten Seite gegen Null. Es ist demnach $\{T_i\}$ konvergent, d.h. (26) T -summierbar. Für $p = 1$ tritt an Stelle von (27) die Ungleichung

$$|T_i - T_j| \leq \text{w.o.G. } |g(t)| \cdot \int_a^b |\tau_i - \tau_j| dt$$

und es wird dann ganz analog weiter geschlossen.

Im Falle $f(t) \in M$ benutzt man die Identität

$$T_i = \int_a^b \tau_i |f; t| g(t) dt = \int_a^b \tau_i |g; t| f(t) dt$$

und wiederholt obige Schlüsse, indem man $g(t) \in L$ beachtet.

Hinlänglichkeit: Die T -Summierbarkeit von (2i), d.h. die Konvergenz von $\{T_i\}$, wo

$$(28) \quad T_i = \int_a^b \tau_i(t) g(t) dt, \quad \tau_i(t) = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} \sum_{j=1}^k a_j \tau_j(t),$$

impliziert die schwache Konvergenz von $\{o_i(t)\}$ in L^p ($p \geq 1$). Die schwache Grenze $f(t) \in L^p$ dieser Folge hat die Eigenschaft

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b \tau_i(t) g(t) dt = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

für alle $g \in L^{p'}$ (bzw. $g \in M$); für $g(t) = \tau_j(t)$ folgt daraus

$$\int_a^b f(t) \tau_j(t) dt = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b \tau_i(t) \tau_j(t) dt = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} a_j = a_j.$$

Es bleibt noch der Fall $p = \infty$ d.h. $L^p = M$. Dann ist $\{T_i\}$ in (28) für alle $g \in L$ konvergent, also ist nach (153) $o_i(t)$ was bereits die Existenz einer beschränkten Funktion mit der Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau_n(t)$ verbürgt.

Der Beweis der Hinlänglichkeit geht also ohne die Annahmen 1° und 2°. Aus diesem Beweise ersehen wir die Beziehung

$$\lim_{l \rightarrow \infty} T_l = \int_a^b f(t) g(t) dt;$$

es ist aber nicht gesagt, daß $f(t)$ in dieser Formel diejenige Funktion $\bar{f}(t)$ ist, die uns die Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ gegeben hat. Es kann sehr wohl $\bar{f}(t) \neq f(t)$ sein, wenn $\{\varphi_n\}$ in bezug auf den f -Raum nicht abgeschlossen ist.

§ 5. Multiplikatoren.

- A und B seien zwei Funktionenräume, $\{\varphi_n\}$ ein ON-System.
 [651] Wenn die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft hat, jede Koeffizientenfolge $\{\alpha_n\}$, die einer Funktion $f(t) \in A$ nach $\{\varphi_n\}$ zukommt, in eine Koeffizientenfolge $\{\beta_n = \lambda_n \alpha_n\}$ einer Funktion $g(t) \in B$ zu verwandeln, so heißt $\{\lambda_n\}$ ein *Multiplikator* der Klasse (A, B), in Zeichen:

$$\{\lambda_n\} \in (A, B).$$

Dieser Begriff trat zuerst beim trigonometrischen System auf; bei beliebigen $\{\varphi_n\}$ hat als erster M. Riesz die Frage nach den Multiplikatoren angegriffen. Es sind hier zwei Fragenkomplexe zu unterscheiden. Der erste besteht in den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine Folge $\{\lambda_n\}$ zu (A, B) gehöre; diese Probleme werden wesentlich erleichtert, wenn man ein spezielles $\{\varphi_n\}$ untersucht; der zweite betrifft ebenfalls die Charakterisierung der Klassen (A, B), doch ist diese nicht selbständig, sondern durch die Beziehungen zwischen den verschiedenen Klassen (A, B) vermittelt. Einige von diesen Beziehungen, wie $(L, L^2) \subset (M, L^2)$ oder $(L, C) \subset (L, M)$, sind trivial. Ebenso ist im ersten Komplex die Beschränktheit von $\{\lambda_n\}$ als notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_n\} \in (L^2, L^2)$ eine unmittelbare Folge des Riesz-Fischer'schen Satzes.

Wir fangen mit dem zweiten Fragenkomplex an.

- [652] Ein Lemma *Es sei* 1° $\{\lambda_n\} \in (A, B)$, 2° $\{\varphi_n\}$ ON und V in bezug auf B, $\varphi_n \in B$, 3° $f(t) \in A$, $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n$, $g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \varphi_n$;
Behauptung: $g = U(f)$ ist eine lineare Operation.

Beweis: Nach [144] ist bloß die Stetigkeit von $U(f)$ zu beweisen und nach [145] genügt dazu die Feststellung, daß aus

$$(29) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_A = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|U(f_k) - g\|_B = 0$$

die Gleichung $h = U(f)$ folgt. Nun ist aber

$$(30) \quad U(f_k) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^{(k)} \varphi_n(t), \quad \text{wenn } f_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} \varphi_n(t);$$

die zweite Beziehung (29) liefert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b U(f_k) \varphi_n(t) dt = \int_a^b h(t) \varphi_n(t) dt,$$

also nach (30)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_n \alpha_n^{(k)} = \int_a^b h(t) \varphi_n(t) dt \quad (u),$$

und daraus — nach der ersten Beziehung (29) —

$$\lambda_n x_n = \int_a^b h(t) \varphi_n(t) dt.$$

Die Entwicklung von $U(f)$ ist demnach mit derjenigen von $h(t)$ identisch und die Vollständigkeitsannahme läßt $h(t) = U(f)$ folgern, w. z. b. w.

Unter den Voraussetzungen 1° und 2° von [652] ist $\{\lambda_n\}$ ein Multiplikator von (B', A') , wenn man mit A' bzw. B' die Räume der in A bzw. B erklärten linearen Funktionale bezeichnet. [653]

Definition. Ist $F(x)$ ein Funktional, so nennt man $\sum_{n=1}^{\infty} x_n F(\varphi_n)$ die Entwicklung dieses Funktionals nach $\{\varphi_n\}$ und $\{F(\varphi_n)\}$ heißt die Koeffizientenfolge dieser Entwicklung. Diese Koeffizienten sind Zahlen; setzt man für x_n die Werte $\int_a^b x(t) \varphi_n(t) dt$ ein, so gibt die Reihe formell den Wert von $F(x)$ als Summe, wie man durch Anwendung des Operators F auf die Gleichung $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n(t)$ verifiziert.

Beweis von [653]: Es sei $F(x)$ ein lineares Funktional in B , d. h. $F \in B'$. Die Operation $g = U(f)$ ist nach [652] linear und $g \in B$ für $f \in A$, also ist $F(U(f)) = \Phi(f)$ ein in A erklärtes, lineares Funktional. $F_n = F(\varphi_n)$ sind die Koeffizienten des Funktionals $F(x)$ nach $\{\varphi_n\}$ und nach der Definition von $U(f)$ ist $U(\varphi_n) = \lambda_n \varphi_n(t)$, also $\Phi(\varphi_n) = F(U(\varphi_n)) = F(\lambda_n \varphi_n) = \lambda_n F(\varphi_n) = \lambda_n F_n$.

Bezeichnet man mit Φ_n die Koeffizienten von $\Phi(f)$ nach $\{\varphi_n\}$, so kommt $\Phi_n = \Phi(\varphi_n) = \lambda_n F_n$, womit $\{\lambda_n\} \in (B', A')$ bewiesen ist.

Wir bemerken nun, daß für $A = L^p$ ($1 \leq p < \infty$) $A' = L^{p'}$ ist ($L^{p'}$ ist für $p' = \infty$ als M zu lesen). Dies ist so zu verstehen, daß ein lineares Funktional $H(f)$ in A nach [147] als $\int_a^b h(t)f(t) dt$ mit $h \in L^{p'}$ geschrieben werden kann und die Koeffizienten $H_n = H(\varphi_n)$ gleich $\int_a^b h(t)\varphi_n(t) dt$, d. h. gleich den Koeffizienten von $h(t)$ nach $\{\varphi_n\}$ sind. Dagegen ist für $A = M$ (oder $A = C$) $A' \supset L$. Diese Bemerkungen und Satz [653] erlauben die Identität einiger Klassen (A, B) abzuleiten.

[654] *Es sei $\{\varphi_n\}$ ein ON, $\varphi_n \in M$, $\{\varphi_n\}$ vollständig in bezug auf L' , $r = \min(p', q)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$; dann ist*

$$(L^p, L^q) = (L^{p'}, L^{q'}).$$

Hier ist zu beweisen, daß $\{\lambda_n\} \in (L^{p'}, L^{q'})$ die Beziehung $\{\lambda_n\} \in (L^p, L^q)$ impliziert und umgekehrt. Das erste ist eine Folge von [653], das zweite ebenfalls, denn die Vollständigkeit von $\{\varphi_n\}$ in bezug auf L' bewirkt die Vollständigkeit in bezug auf $L^{p'}$ und $L^{q'}$.

Korollar. $(L^p, L^p) = (L^{p'}, L^{p'})$ ($1 \leq p < \infty$).

Folgender Grenzfall ist in [654] nicht enthalten:

[655] *Ist $\{\varphi_n\}$ ONV in bezug auf L und beschränkt, so hat man $(L^p, L) = (M, L^{p'})$ für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: $\{\lambda_n\} \in (L^p, L)$ impliziert nach [653] $\{\lambda_n\} \in (M, L^{p'})$. [653] genügt aber nicht für den umgekehrten Schluß, weil man hier mit dem Fall $A = M$ zu tun hat, und auf $\{\lambda_n\} \in (L^p, L)$ schließen will, während man mit der vorhergehenden Bemerkung bloß $\{\lambda_n\} \in (B', A')$ mit $A' \supset L$ erreicht.

Es sei $\{\lambda_n\} \in (M, L^{p'})$ und $f(t) \in L^p$ ($p \geq 1$). Nach [652] ist die Operation $g(t) = U[h(t)]$, $h \in M$, $g \in L^{p'}$ linear, also ([146]) $\|g\|_{p'} \leq \|h\|_M$. Es folgt

$$\left| \int_a^b g(t)f(t) dt \right| \leq \|h\|_M \|f\|_p.$$

Insbesondere hat man für das Polynom $w_k(t) = \sum_{i=1}^{m(k)} c_i^{(k)} \varphi_i(t)$

$$(31) \quad \left\| \int_a^b U(h) w_k(t) dt \right\| = \left\| \int_a^b U(w_k) h(t) dt \right\| \leq \alpha \|h\|_M \|w_k\|_p.$$

$\{\varphi_n\}$ ist in bezug auf L , also auch in bezug auf L^p vollständig und es ist ([625]) eine Folge $\{w_k(t)\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - w_k\|_p = 0$ vorhanden;

dies und (31) ergeben die Konvergenz von $\left\{ \int_a^b U(w_k) h(t) dt \right\}$ für alle $h \in M$. Nach [163] gibt es ein $f(t) \in L$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b U(w_k) h(t) dt = \int_a^b f(t) h(t) dt \quad (h);$$

setzt man hier $h(t) = \varphi_n(t)$, so kommt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b U(w_k) \varphi_n(t) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \lambda_n \varphi_n(t) w_k(t) dt = \lambda_n \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt, \end{aligned}$$

womit $\{\lambda_n\} \in (L^p, L)$ gezeigt ist. Analog wird der in der Behauptung [655] enthaltene Grenzfall $(L, L) = (M, M)$ behandelt.

Jetzt gehen wir zu solchen Klassen (A, B) über, wo der eine Raum mit C identisch ist.

Es sei $\varphi_n \in L^p$ und $\{\varphi_n\}$ ONV in bezug auf L^p ; alsdann ist [656]

$$(C, L^p) = (M, L^p) \quad (p > 1).$$

Die Relation $(M, L^p) \subset (C, L^p)$ ist klar; es bleibt $(C, L^p) \subset (M, L^p)$ zu zeigen. Es sei $\{\lambda_n\} \in (C, L^p)$, $f(t) \in C$, $U(f) \in L^p$ und $h(t) \in M$; $\{f_n(t)\}$ bestehe aus stetigen Funktionen und sei f. u. gegen $h(t)$ konvergent, so daß $\|f_n\|_C \leq \|h\|_M$ für alle n gelte (vgl. [129]). $U(f)$ ist linear, es ist also $\|U(f_n)\|_p \leq \alpha \|h\|_M$. Nach [165] enthält $\{U(f_n)\}$ eine schwach konvergente Teilfolge, die wir ebenfalls mit $\{U(f_n)\}$ bezeichnen wollen und die ein $g(t) \in L^p$ als schwache Grenze besitzt. Es gilt demnach für jede Funktion φ aus L^p , insbesondere für $\varphi(t) = \varphi_n(t)$, die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b U(f_n) \varphi(t) dt = \int_a^b g(t) \varphi(t) dt \quad (h).$$

Andererseits ist wegen $f_n(t) \rightarrow h(t)$ f. u.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b U(f_n) \varphi_k(t) dt = \lambda_k \int_a^b h(t) \varphi_k(t) dt,$$

also $\lambda_k \int_a^b h(t) \varphi_k(t) dt = \int_a^b g(t) \varphi_k(t) dt$ (k), was $\{\lambda_n\} \in (M, L^p)$ begründet.

Bemerkung. $(C, M) = (M, C)$ ist unrichtig, denn $\{1\}$ gehört zu (C, M) ohne zu (M, C) zu gehören. Ebensovienig darf man $(C, L) = (M, L)$ schreiben, wofür das trigonometrische System ein Gegenbeispiel liefert.

[657] Ist aber $\{\varphi_n\}$ ON abgeschlossen in bezug auf C und sind alle $\varphi_n \in C$, so hat man $(C, C) = (M, M)$.

Der Beweis für $(C, C) \subset (M, M)$ ist dem Beweise von [656] analog; man hat nur zu beachten, daß die schwache Grenze von $U(f_n)$ jetzt ein $g(t) \in M$ ist; $(M, M) \subset (C, C)$ wird aber folgendermaßen bewiesen: ist $f(t) \in M$, so ist die Operation $U(f)$ in M linear, nach [652]; die Abgeschlossenheit in bezug auf C liefert für $h(t) \in C$ eine Polynomfolge $\{w_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - h\|_C = 0$, was $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U(w_n) - U(h)\|_M = 0$ impliziert, also ist $U(h)$ als Grenze einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen stetig, w. z. b. w.

[658] Unter den Voraussetzungen: $\{\varphi_n\}$ ON, $\varphi_n \in C$, $\{\varphi_n\}$ A in bezug auf L^p , ist $(L^p, M) = (L^p, C)$ ($p \geq 1$).

Beweis: Es genügt $(L^p, M) \subset (L^p, C)$ zu zeigen. Es sei $\{\lambda_n\} \in (L^p, M)$, $f(t) \in L^p$ und $U(f)$ die in [652] definierte Operation, die $f(t)$ in eine beschränkte Funktion $g(t) = U(f)$ verwandelt. Die Abgeschlossenheit liefert eine Polynomfolge $\{w_n\}$ mit f als starker Grenze. Die Stetigkeit von $U(f)$ gibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U(w_n) - U(w_m)\|_M = 0,$$

es ist also die aus den stetigen Funktionen $g_n(t) = U(w_n)$ bestehende Folge gleichmäßig konvergent und daher $U(f)$ eine stetige Funktion von t . Nach [624] ist aber $\{\varphi_n\}$ V in bezug auf M , also $U(f)$ eindeutig erklärt.

Bemerkung. In den Sätzen dieses § darf die Bedingung der Vollständigkeit durch die Annahme ersetzt werden, daß die einer Toeplitz'schen Methode entsprechenden Lebesgue'schen Funktionen f. ü. 0(1) sind.

§ 6. Weiteres über Multiplikatoren.

Wir gehen zum ersten Problemkomplex des §5 über, um einige Eigenschaften der Klassen an sich zu behandeln. Wir wollen hier zunächst den Begriff des Multiplikators erweitern:

Es seien $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ zwei ON; wir setzen voraus, daß für $x \in A$, [661]
 $y \in B$ die Integrale $\int_a^b x(t) \varphi_n(t) dt$, $\int_a^b y(t) \psi_n(t) dt$ stets existieren; es
 habe $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft, die Entwicklung einer jeden Funktion
 $x(t) \in A$ nach $\{\varphi_n\}$ in die Entwicklung einer Funktion $y(t) \in B$
 nach $\{\psi_n\}$ zu verwandeln; wir sagen dann, $\{\lambda_n\}$ gehöre zur Klasse
 $(A\varphi, B\psi)$. Dann gilt der

Satz: Voraussetzungen: 1° $\{\psi_n\}$ ist vollständig inbezug [662]
 auf B , 2° $\psi_n \in B(n)$, 3° $\varphi_n \in A(n)$, 4° $\{\lambda_n\} \in (A\varphi, B\psi)$, 5° die Zahlen
 a_{ik} sind beliebig (reell).

Behauptung: Die Konvergenz von $x_n = \sum_{k=1}^{h_n} a_{nk} \varphi_k(t)$ nach der
 A -Norm impliziert die Konvergenz von $y_n = \sum_{k=1}^{h_n} \lambda_k a_{nk} \psi_k(t)$ nach der
 B -Norm.

Wie in [652], beruht der Beweis darauf, daß der Operation
 $y = U(x)$ (die wegen 1° eindeutig ist) die Stetigkeit zukommt.
 Ist also x_∞ die starke Grenze von $\{x_n\}$ und $y_\infty = U(x_\infty)$, so ist
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_\infty\|_B = 0$. (Der besondere Fall $x_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)$ möge vom
 Leser ausdrücklich formuliert werden).

Setzt man (wie in [662]) $\{\psi_n\} \vee$ inbezug auf B , und außerdem [663]
 $\{\varphi_n\} \wedge$ inbezug auf A voraus, so folgt aus der Behauptung [662]

$$\{\lambda_n\} \in (A\varphi, B\psi).$$

Beweis: Es sei $x_\infty \in A$; es gibt $(\{\varphi_n\} \wedge A)$ eine Matrix
 $\|a_{ik}\|$, so daß $x_n = \sum_{k=1}^{h_n} a_{nk} \varphi_k(t)$ stark gegen x_∞ konvergiert. Setzt
 man $y_n = U(x_n)$, $y_\infty = U(x_\infty)$, so konvergiert $\{y_n\}$ stark (= nach der
 B -Norm) gegen y_∞ . Man hat zu zeigen, daß die Entwicklung
 von $y_\infty(t)$ nach $\{\psi_n\}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k \psi_k(t)$ ist, wo man mit c_k die Integrale

$\int_a^b x_n(t) \varphi_k(t) dt$ bezeichnet. Nun ist aber $c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) \varphi_k(t) dt$,
 $\int_a^b y_n(t) \psi_k(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b y_n(t) \psi_k(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k \int_a^b x_n(t) \varphi_k(t) dt = \lambda_k c_k$, w. z. b. w.

[664] Es sei $\{\varphi_n\}$ ON und A in bezug auf A, $\{\psi_n\}$ ON und V in bezug auf B; die notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_n\} \in (A\varphi, B\psi)$ ist die Existenz eines n - und ξ -freien γ derart, daß die Ungleichung

$$(32) \quad \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \psi_k(t) \right\|_B \leq \gamma \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t) \right\|_A$$

für alle endlichen Zahlensysteme $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ stattfindende.

Beweis: Die Notwendigkeit folgt aus [662], weil die Operation $y = U(x)$ stetig ist. Setzen wir nun (32) voraus und es sei $x_n(t) \sim \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)$, $x_n \in A$. Es sei ferner $x_n = \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} \varphi_k(t)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Setzt man in (32) $a_{nk} = a_{mk}$ für ξ_k , so strebt für $n, m \rightarrow \infty$ die rechte Seite gegen Null, also auch die linke. Daraus mit [663] folgt $\{\lambda_n\} \in (A\varphi, B\psi)$.

Der Satz [664] gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_n\} \in (A, B)$ an, wenn wir darin $\varphi_n = \psi_n$ annehmen. Andere Bedingungen sind in den nunmehr folgenden Sätzen enthalten.

[665] Ist $\{\varphi_n\}$ ON und jedes φ_n beschränkt, so ist die Ungleichung

$$(33) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \varphi_i^2(t) \leq \lambda$$
(n)

mit einem n - und t -freien λ notwendig und hinreichend für $\{\lambda_i\} \in (L, L^2)$.

Beweis: Es sei $\{\lambda_k\} \in (L, L^2)$, $f(t) \sim \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)$, $f(t) \in L$; soll dann $\{\lambda_k c_k\}$ die Koeffizientenfolge einer Funktion aus L^2 sein, so muß nach [171] für alle $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ die Ungleichung

$$(34) \quad \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k \xi_k \right\| \leq \text{const.} \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}$$

stattfinden. Hier ist die linke Seite gleich

$$(35) \quad \left\| \int_a^b f(t) \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \varphi_k(t) dt \right\|$$

Ist nun $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^n \xi_k^2 < \infty$ festgelegt, so ist

$$(36) \quad F_n(f) = \int_a^b f(t) \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \varphi_k(t) dt$$

das allgemeine Glied einer Folge von Funktionalen, deren Normen ([151]) gemeinsam beschränkt sind, wie aus (34) und (35) ersichtlich;

nach [147] muß also w. o. G. $\sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \varphi_k(t) \leq \mu$ sein, mit einem n -freien μ . Andererseits ist

$$\left\{ U_n(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \varphi_k(t) \right\}$$

eine Folge von linearen Operationen, wo $x = \{x_i\}$ zum Räume l^2 gehört, und M der Gegenraum ist. Nach [151] sind die $[U_n]$ unter einer n -freien Schranke gelegen. Wenn es uns also die Ungleichung

$$\|U_n\| \leq \omega_n = \text{w. o. G.} \int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \varphi_i^2(t) dt$$

zu zeigen gelingt, so haben wir die Notwendigkeit von (33) dargetan. *

Es gibt nun eine positive t -Menge E mit $\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \varphi_i^2(t) dt > \omega_n - \varepsilon$; nach [121] kann man ein positives $E_0 \subset E$ finden, worauf alle $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) stetig sind. Es sei $t_0 \in E_0$ ein Punkt von der Dichte 1 für E_0 . Dann ist für

$$\xi_i = \lambda_i \varphi_i(t_0) \left/ \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \varphi_i^2(t_0)} \right.$$

die Summe $\sum_{i=1}^n \xi_i^2$ gleich 1, und

$$U_n(x)_{t=t_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \varphi_i^2(t_0)},$$

also $\|U_n(x)\| \geq \omega_n - 2\varepsilon$ in einer positiven t -Menge (da t_0 ein Stetigkeitspunkt und Dichtepunkt ist). Es folgt $\|U_n(x)\| \geq \omega_n - 2\varepsilon$, also $\|U_n\| \geq \omega_n$, w. z. b. w.

Setzen wir jetzt voraus, (33) sei erfüllt. Dann ist

$$\|U_n(x)\| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2},$$

also

$$|F_n(f)| \leq \sqrt{\pi} \int_a^b |f(t)| dt \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}.$$

Damit ist aber (wegen (36) und (35)) (34) mit einer ξ - und n -freien Konstanten erfüllt, und die (hinreichende) Bedingung [171] ergibt die Existenz eines $g(t)$ mit

$$\int_a^b g(t) \varphi_n(t) dt = \lambda_n c_n \quad (n),$$

d. h. die Hinlänglichkeit von (33).

Sind die φ_n *gemeinsam* beschränkt, so folgt aus [665] unmittelbar $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$ als notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_i\} \in (L, L^2)$ (die Notwendigkeit erhält man durch Integration von (33)). Dieselbe Annahme führt für $1 < p < 2$ zu $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$ als einer notwendigen aber nicht hinreichenden Bedingung für $\{\lambda_i\} \in (L, L^p)$.

[666] *Hat $\{\varphi_n\}$ die in [665] vorausgesetzten Eigenschaften und ist es außerdem vollständig inbezug auf M , so ist $L_n(t) \leq \alpha$ f. u. (α n - und t -frei) eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\{\lambda_n\} \in (M, M)$ ($L_n(t)$ ist die Lebesgue'sche Funktion; vgl. [521]), wo $\{\lambda_n\}$ eine monotone, konvergente Folge bezeichnet.*

Beweis: Es sei $h(t) \in M$, $h(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} h_i \varphi_i(t)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i h_i \varphi_i(t) \sim g(t) \in M$.

Ist $h(t)$ fest, so kann $g(t) = U(x)$ (mit $x = \{\lambda_i\}$) als eine lineare Operation angesehen werden, die jedem x eine beschränkte Funktion zuordnet. Diese Zuordnung ist eindeutig, denn $\{\varphi_n\}$ ist vollständig. Die x -Menge kann nämlich durch die Normierung

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| + \max_{(n)} |\lambda_n|$$

zu einem B -Raum gemacht werden (wenn x eine Folge von beschränkter Schwankung bedeutet, d. h. eine Folge, für welche der oben erklärte Ausdruck $\|x\|$ endlich ist).

Nach [146] haben wir $\|U(x)\| \leq \mu \|x\|$. Wählt man $x = \{\lambda_i\}$ mit $\lambda_i = 1$ für $i \leq n$, $\lambda_i = 0$ für $i > n$, so wird

$$\|x\| = 2, \quad \|U(x)\| = \text{w. o. G.} \left| \sum_{a \leq i \leq b} h_i \varphi_i(t) \right| \leq 2\mu \quad \text{für } h(t) \in M$$

und μ von h (nicht von n) abhängig. Da nun

$$U(x) = \int_a^b h(u) \sum_{k=1}^n \varphi_k(u) \varphi_k(t) du,$$

so ist nach [155]

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(u) \varphi_k(t) \right| du \leq \alpha,$$

was die Notwendigkeit der Bedingung erweist. Die Hinlänglichkeit ist unmittelbar, denn es ist

$$\sum_{k=1}^n h_k \lambda_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^n s_k(t) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) + s_n(t) \lambda_{n+1} \text{ mit } s_k(t) = \sum_{i=1}^n h_i \varphi_i(t),$$

also ist nach [642]

$$\text{w. o. G. } \left| \sum_{k=1}^n h_k \lambda_k \varphi_k(t) \right| \leq \alpha \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k - \lambda_{k+1}| + |\lambda_{n+1}| \right).$$

§ 7. Singulare Entwicklungen und singulare Funktionen.

Bei der Diskussion der Sätze [631] und [632], welche in zwei verschiedenen Richtungen den Riesz-Fischer'schen Satz verallgemeinern, haben wir bemerkt, daß die Umkehrungen jener Sätze nicht gelten, d.h., daß es Orthogonalsysteme gibt, für welche diese Umkehrungen versagen. Wir sprechen dann von einer *Singularität* des Systems und lassen dabei die in den erwähnten Sätzen vorkommende Annahme der gemeinsamen Beschränktheit fallen.

Definitionen. Ein ON $\{\varphi_n\}$ hat die *schwache Hardy-Littlewood'sche Singularität* h_p ($p \neq 2$), wenn es eine Folge $\{c_n\}$ mit

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$ gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$ keine Entwicklung einer Funktion aus L^p ist; dabei ist $1 < p < \infty$; im Falle $p=1$ tritt an Stelle von $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$ die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$; im Falle $p = \infty$ ist p' als 1 und L^p als M zu lesen.

Ein ON $\{\varphi_n\}$ hat die *starke Hardy-Littlewood'sche Singularität* H_p , wenn es eine Folge $\{c_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q < \infty$ für alle $q > \min(2, p')$ gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$ keine Entwicklung einer Funktion aus L^p ist; dabei ist $1 < p < \infty$; im Falle $p=1$ ist $p' = \infty$, im Falle $p = \infty$ ist p' als 1 und L^p als M zu lesen.

Vermittels lakunärer Reihen (vgl. VII) kann man zeigen, daß das trigonometrische System die Singularitäten h_p für $1 < p < 2$ besitzt. Die Singularität h_2 kommt offenbar nie vor und h_p mit $p > 2$ ist bei beschränkten Systemen unmöglich. Das Haar'sche System besitzt die Singularität h_p für $2 < p < \infty$, wie wir gesehen haben. Die Singularität H_p kann bei beschränkten Systemen vorkommen, sogar mit $p = 2$.

Obige Singularitäten knüpfen an den ersten Teil des Satzes (631) an und beziehen sich auf die Existenz von Reihen mit bestimmten Konvergenzeigenschaften. Man erhält eine zweite Gruppe von Singularitäten, wenn man den zweiten Teil des erwähnten Satzes hervorhebt und Funktionen von bestimmten Eigenschaften sucht.

[672] Ein ON $\{\varphi_n\}$ weist die *schwache Carleman'sche Singularität* c_p ($p \neq 2$) auf, wenn es eine Funktion $f(t) \in L^p$ gibt, deren Koeffizienten $\{f_n\}$ die Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^{p'} = \infty$ haben. Für $p = \infty$ ist L^p als M , p' als 1 zu verstehen, für $p = 1$ ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n| = \infty$ die verlangte Eigenschaft der Koeffizienten.

Ein ON $\{\varphi_n\}$ hat die *starke Carleman'sche Singularität* C_p , wenn für ein gewisses $f(t) \in L^p$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^q$ für alle q mit $0 < q < \max(2, p')$ divergiert.

Bevor wir die Singularitäten beider Arten näher betrachten, wollen wir ihre gegenseitigen Beziehungen beleuchten. Dazu dient uns folgendes

[673] **Lemma:** *Voraussetzungen:* $\{\varphi_n\}$ ist ein ON, vollständig inbezug auf Q , $\varphi_n \in Q$; P , der Raum der Koeffizientenfolgen $x = \{c_k\}$ sei vom Typus F (vgl. [136]) und habe die Eigenschaften:

1^a $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(n)}, x) = 0$ impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} = c_k$ für alle k (hier ist $x^{(n)} \in P$, $x^{(n)} = \{c_k^{(n)}\}$ gemeint);

2^a eine Folge wie $(c_1, c_2, \dots, c_r, 0, 0, \dots)$ gehört stets zu P ;

3^a $\lim_{r \rightarrow \infty} (c_1, c_2, \dots, c_r, 0, 0, \dots) = \{c_n\}$.

Behauptung: Ist jedes $x \in P$ eine Koeffizientenfolge eines $f \in Q$ nach $\{\varphi_n\}$, so ist

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) \right\|_Q = 0.$$

Beweis: Setzt man $f(t) = U(x)$, so ist die Operation U additiv, wie ersichtlich. Diese Operation ist stetig; es konvergiere nämlich $x^{(n)} = \{c_k^{(n)}\}$ gegen $x^{(0)} = \{c_k^{(0)}\}$; nach 1° folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} U(x^{(n)}) = y^{(0)}$, daß die Koeffizienten von $y^{(0)}$ die Zahlen $c_k^{(0)}$ sind; die Vollständigkeit ergibt $y^{(0)} = U(x^{(0)})$, also ist nach [145] $U(x)$ stetig. Es sei nun

$$x^{(n)} = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0, 0, \dots);$$

nach 3° ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \{c_k\} = x$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} U(x^{(n)}) = U(x)$, d. h. (37), w. z. b. w.

Dieses Lemma gestattet folgenden Satz zu begründen:

Die Singularitäten h_p und c_p sind äquivalent, wenn $\{\varphi_n\}$ vollständig in bezug auf L^p , $\varphi_n \in L^p$ und $1 < p < \infty$ ist. [674]

Es sei zunächst $1 < p < \infty$ und $\{\varphi_n\}$ habe die Singularität h_p ; es existiert demnach eine Folge $\{c_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$, ohne eine Koeffizientenfolge eines $f(t) \in L^p$ zu sein. Infolgedessen gibt es nach [646] eine Funktion $g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(t) \in L^{p'}$ mit divergenter Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n$; es muß also $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{p'} = \infty$ sein, womit das Vorkommen der Singularität c_p bewiesen ist. Der Beweis benutzt nur die Eigenschaften $\varphi_n \in L^p$, $\varphi_n \in L^{p'} (n)$ des ON.

Jetzt habe $\{\varphi_n\}$ die Singularität c_p , nicht aber h_p ; es ist dann jede Folge $\{c_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} < \infty$ die Koeffizientenfolge eines $f(t) \in L^p$. Nach dem Lemma [673] mit $Q = L^p$ gilt also (37). Wählt man irgend ein $g(t) \in L^{p'}$ und bezeichnet mit $s_n(t)$ die Partialsummen $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)$, mit g_k die Koeffizienten von g , so ist

$$\sum_{k=1}^n c_k g_k = \int_a^b s_n(t) g(t) dt,$$

also

$$\sum_{k=1}^n c_k g_k - \int_a^b f(t) g(t) dt \leq \|g\|_{p'} \|f - s_n\|_p,$$

was die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$ für alle $\{c_n\} \in \ell^{p'}$ sichert; nach [113] impliziert das letztere $\{g_n\} \in \ell^p$, schließt also die Singularität $c_{p'}$ aus. Damit ist für $1 < p < \infty$ [674] in beiden Teilen bewiesen. Die Grenzfälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind analog zu behandeln; man benutze den Umstand, daß die nullkonvergenten Folgen einen F -Raum mit $(\{a_n\}, \{b_n\}) = \max_{1 \leq k < \infty} |a_k - b_k|$ bilden.

[675] *Unter den Voraussetzungen wie in [674] sind die Singularitäten H_p und $C_{p'}$ äquivalent.*

Beweis: Es sei wieder $1 < p < \infty$ und H_p komme dem System $\{\varphi_n\}$ zu, d. h. es sei $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q < \infty$ für $q > \min(2, p')$ und $\{c_n\}$ keine Koeffizientenfolge für L^p . $C_{p'}$ sei nicht realisierbar, also zu jedem $g(t) \in L^{p'}$ eine Zahl $\alpha < \max(2, p) = \min(2, p')$ mit $\sum |g_n|^\alpha < \infty$ vorhanden. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n$ für alle $g \in L^{p'}$ konvergent, d. h. $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$ nach [646] die Entwicklung eines $f(t) \in L^p$, gegen die Annahme. Umgekehrt: kommt H_p dem System $\{\varphi_n\}$ nicht zu, d. h. ist, für jedes $\{c_i\}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^q < \infty$ für $q > \min(2, p')$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(t) \sim f(t) \in L^p$, so ist die Formel (37) anwendbar, denn die Menge aller $\{c_i\}$ ist ein F -Raum, wenn man die Distanz zweier Folgen $x = \{c_k\}$, $y = \{d_k\}$ als

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x - y|_n}{1 + |x - y|_n}$$

mit

$$|x - y|_n = \left(\sum_{k=1}^n |c_k - d_k|^{r_n} \right)^{1/r_n}, \quad r_n = \min(2, p') + 1/n$$

erklärt. Tatsächlich gilt dann $(x, y) = (x - y, \theta)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n x, \theta) = 0$ für $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$ (wegen $(\tau_n x, \theta) \leq |\tau_n| \cdot (x, \theta)$ für $|\tau_n| < 1$) und $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau x_k = \theta$ für $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \theta$, denn für $|\tau| \leq 1$ ist

$$(\tau x_k, \theta) \leq |\tau| \cdot (x_k, \theta),$$

und für $|\tau| > 1$ ist

$$(\tau x_k, \theta) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\tau| \cdot (x_k, \theta)_n}{1 + (x_k, \theta)_n} = |\tau| \cdot (x_k, \theta);$$

der Raum ist auch komplett, also ein F -Raum.

(37) mit $Q = L^p$ liefert die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i$ für die Koeffizientenfolge $\{g_i\}$ einer beliebig in $L^{p'}$ gewählten Funktion $g(t)$; diese Konvergenz findet für alle $\{c_i\} \in l^q$ statt ($q > \min(2, p')$), also ist nach [115] $\sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^{\alpha} < \infty$ für ein gewisses $\alpha(g) < \max(2, p)$, d. h. $C_{p'}$ nicht vorhanden. Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ gestatten eine analoge Behandlung.

Bis jetzt haben wir in diesem § die Vollständigkeit des ON inbezug auf L^p vorausgesetzt. Wenn wir statt dessen die $\varphi_n(t)$ einzeln als beschränkt annehmen und eine Summationsmethode $\{b_{ik}\}$ ($k = 1, 2, \dots, n_i$) mit der Eigenschaft

$$\int_a^b |K_i(t, u)| du < \nu \quad \left(K_i(t, u) = \sum_{k=1}^{n_i} b_{ik} \sum_{j=1}^{n_k} \varphi_j(t) \varphi_j(u) \right) \quad (i)$$

wählen, so bleiben die Behauptungen richtig und die Beweise werden einfacher, weil sie auf [646] u. f. geslützt werden können.

Bevor wir an die Frage nach der Existenz der Singularitäten herantreten, ist folgender Hilfssatz zu beweisen:

Es sei $\{f_n(t)\}$ eine Folge integrierbarer Funktionen und $\{n_i\}$ [676] bezeichne irgend eine Folge von Indizes; die Ungleichung

$$(38) \quad \int_a^b |f_{n_i}(t) + f_{n_j}(t) + \dots + f_{n_j}(t)| dt < \nu$$

sei mit einem $\{n_i\}$ - und j -freien ν erfüllt. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t) < \infty$ f. u.

Bezeichnet $\{r_n(u)\}$ das Rademacher'sche System, so folgt aus (38)

$$(39) \quad \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(t) r_k(u) dt < 2\nu.$$

Nun gilt aber für $l_{r_n}(u)$ die erste Ungleichung [457]

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 8 \int_0^1 \sum_{k=1}^n c_k r_k(u) du,$$

welche mit (39) für $c_k = f_k(t)$ beiderseits integriert

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n f_k^2(t)} dt < 8 \int_0^1 du \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(t) r_k(u) dt < 16\nu$$

ergibt. Jetzt führt [124] unmittelbar zu der Behauptung.

[677] Ein beschränktes oder in bezug auf L^2 vollständiges ON besitzt stets die Singularität c_∞ .

Es sei nämlich $|\varphi_n(t)| < \gamma$, $\{c_k\}$ beschränkt und divergent; es ist dann $\{c_k\}$ nach dem Mercer'schen Satze [524] keine Koeffizientenfolge einer Funktion $f(t) \in L$. Infolgedessen gibt es nach [646] eine Funktion $g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t) \in M$, mit divergenter Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k$; es muß also $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$ divergieren, worin eben c_∞ besteht.

Im Falle, wo $\{\varphi_n\}$ in bezug auf L^2 die Eigenschaft V hat, ist der Hilfssatz [676] nötig. Es ist dann nach [513] $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$ f. ü., also die Behauptung [676] nicht erfüllt und infolgedessen (38) zu verneinen. Dies führt zu einer Folge $\{n_i\}$ mit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{i=1}^k \varphi_{n_i}(t) dt = \infty,$$

also — nach [154] — zu einer stetigen Funktion $h(t)$ (mit $\{h_n\}$ als Koeffizientenfolge) von der Eigenschaft

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k h_{n_i} = +\infty,$$

was $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n| = \infty$, also c_∞ impliziert.

[678] Ein beschränktes ON besitzt stets die Singularitäten c_p für alle $p > 2$.

Wäre für jedes $f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t) \in L^p$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p$ konvergent, so könnte man eine Reihe $\sum_{k=1}^n |d_k|^p < \infty$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty$ wählen und man hätte $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k c_k| < \infty$ für alle $f \in L^p$, also — wieder nach [154] —

$$\int_a^b \left| \sum_{i=1}^j d_{n_i} \varphi_{n_i}(t) \right| dt < p,$$

was nach [676] $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(t) < \infty$ f. ü. ergibt. Letztgeschriebene Reihe

ist in E gleichmäßig konvergent, wobei nach [123] die Komplementärmenge CE dem Maße nach kleiner als ε angenommen werden darf. Wählt man ε so, daß

$$\int_E \varphi_n^2(t) dt > \frac{1}{2} \quad (n)$$

sei (vgl. [611]), so kommt

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < 2 \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \int_E \varphi_k^2(t) dt = 2 \int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \varphi_k^2(t) \right) dt < \infty,$$

also ein Widerspruch.

In der obigen Beweisführung können wir $f(t) \in C$ statt $f(t) \in L^p$ annehmen. Es gibt also nach [678] für jedes $q > 2$ ein $f_q(t) \in C$, $f_q(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(q)} \varphi_k(t)$, so daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(q)}|^q = \infty.$$

Wenden wir [156] an, mit $x \in C$, $x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$ und $F_{\alpha, \beta}(x) = (c_1, c_2, \dots, c_p)$, $F_{\alpha, \beta}(x) \in l^{2-1/\alpha}$, so bekommen wir den Satz:

Für ein beschränktes ON ist die Bestimmung einer stetigen [679]
Funktion $g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^q = \infty$ für jedes $q < 2$ möglich.

Umsomehr besitzen solche Systeme die Singularität C_p für $p > 2$.

§ 8. Die Singularitäten K_p und L_p .

Die Singularitäten des § 7 sind Gegenbeispiele für die Umkehrungen der Sätze vom Typus [631]. Nun sind die Umkehrungen des Satzes [632] ebenfalls unrichtig. Diese Tatsache rechtfertigt folgende

Definitionen: Ein ON-System besitzt die Singularität l_p [681] ($1 \leq p < \infty$), wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |c_n|^p$ gibt, ohne daß die Folge $\{c_n\}$ eine Koeffizientenfolge einer Funktion aus L^p sei. Wenn man in dieser Bedingung den in der Reihe auftretenden Exponenten p durch jedes $q < \max(2, p)$, $q > 0$, ersetzen darf, so heißt die Singularität 1_p ($1 \leq p < \infty$). Die Singularität l_2 ist unmöglich, wie der Riesz-Fischer'sche Satz lehrt. Dagegen besitzt jedes ON die Singularität L_2 : es genügt $c_n = 1/\sqrt{n}$ zu setzen.

- [682] Ein ON besitzt die *Singularität* k_p ($1 \leq p < \infty$), wenn es eine Funktion $f(t) \in L^p$ gibt, deren Koeffizienten c_n die Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} |c_n|^{p'} = \infty$ aufweisen; es besitzt die *Singularität* K_p ($1 \leq p \leq \infty$), wenn man in dieser Reihe den Exponenten p durch jedes $q > \min(2, p)$ ersetzen darf. Man sieht sogleich die Unmöglichkeit von k_2 ; die Singularität K_2 kommt in jedem ON-System vor, wie das Beispiel $c_n = n^{-1/2} \log^{-1}(n+1)$ zeigt. (K_{∞} hat einen bestimmten Sinn, denn $q > \min(2, \infty)$ heißt soviel als $q > 2$ und L^{∞} ist als M zu lesen).

Die neuen Singularitäten sind (wie diejenigen des § 7) miteinander verknüpft. Es gelten folgende Äquivalenzen:

- [683] Ist $\{\varphi_n\}$ ein ON, vollständig inbezug auf L^p , und $\varphi_n \in L^{p'}$ (n), so sind l_p und $k_{p'}$ miteinander äquivalent ($p > 1$).

Es sei nämlich $k_{p'}$ nicht vorhanden, also für jedes $f(t) \in L^{p'}$, $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$, die Beziehung

$$(40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} n^{p'-2} < \infty$$

erfüllt. Ist dann $\{d_n\}$ irgend eine Folge mit

$$(41) \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n |c_n| n^{p-2} < \infty,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n d_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} n^{p'-2} \right)^{1/p'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^p n^{p-2} \right)^{1/p}$$

absolut konvergent. Es bewirkt also (41) die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ für alle $f(t) \in L^{p'}$; daher ist $\{d_n\}$ nach [646] die Koeffizientenfolge einer Funktion $g(t) \in L^p$ und damit l_p ausgeschlossen. l_p impliziert daher $k_{p'}$.

Es sei jetzt $k_{p'}$, d. h. eine Funktion $f(t) \in L^{p'}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{p'} n^{p'-2} = \infty$ vorhanden. Betrachten wir die Gesamtheit der Folgen $\{d_n\} = x$, die (41) erfüllen. Definiert man $\|x\|$ als $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^p n^{p-2} \right)^{1/p}$, so wird diese Gesamtheit zu einem Raum X vom Typus B . Ist $g(t) \in L^p$

eine Funktion mit $\{d_n\}$ als Koeffizientenfolge, so hat man nach dem Lemma [673], wenn 1_p nicht vorhanden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| g(t) - \sum_{n=1}^n d_k \varphi_k(t) \right|^p dt = 0.$$

Daraus folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ für alle $x \in X$. Wählen wir aber

$$d_n = |c_n|^{p'-1} n^{p'-1} \operatorname{sign} c_n,$$

so ist (41) erfüllt und dennoch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ divergent. Damit ist gezeigt, daß dieser Folge $\{d_n\}$ kein $g(t) \in L^p$ entsprechen kann, also die Singularität 1_p als vorhanden erwiesen.

Unter den Voraussetzungen von [(3831 sind L_p und K_p , miteinander äquivalent. [684]

Der Beweis dafür ist eine fast wörtliche Wiederholung des Beweises für [675] mit der Änderung, daß jetzt die Entfernung zweier Elemente $x = [a_k]$, $y = [b_{kl}]$ als

$$(x, y) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(x, y)_n}{1 + (x, y)_n} \quad \text{mit} \quad (x, y)_n = \left(\sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^{1/n} k^{n-2} \right)^{1/n} \quad (n=3, 4, \dots)$$

definiert wird.

[683] und [684] gelten bei der Voraussetzung der Beschränktheit [685] der Lebesgue'schen Funktionen für eine bestimmte Summationsmethode auch ohne Vollständigkeit,

Wenden wir uns jetzt zur Frage nach der Existenz der Singularitäten k_p und K_p .

Ein beschränktes ON besitzt stets die Singularität k_p für jedes $p > 2$. [686] P

Ist nämlich (40) und (41) für zwei Folgen $\{c_n\}$ und $\{d_n\}$ erfüllt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ absolut konvergent. Ist aber $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$, was für $p > 1$ mit (40) verträglich ist, so resultiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$$

in einer positiven t -Menge; nach dem Lemma [676] muß also für eine Folge $\{n_i\}$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{i=1}^k c_{n_i} \varphi_{n_i}(t) dt = \infty$$

sein. Nach [154] gibt es dann eine stetige Funktion $g(t)$ (mit $\{g_n\}$ als Koeffizienten) mit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sum_{i=1}^k c_{n_i} \varphi_{n_i}(t) dt = +\infty,$$

d. h. mit $\sum_{i=1}^{\infty} g_{n_i} c_{n_i} = +\infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n c_n| = \infty$; damit ist aber gezeigt, daß die $\{g_n\}$ -Folge nicht für $\{d_n\}$ in (41) eingesetzt werden darf, w. z. b. w.

Das Kondensationsprinzip [156], zusammen mit [686], führt, wie in [679], zum Ergebnis:

[687] *Ein beschränktes ON besitzt stets die Singularität K_{∞} , also auch K_p , für $p > 2$.*

§ 9. Majoranten und Divergenzfaktoren.

Die Sätze dieses Kapitels erlauben nicht immer zu entscheiden, ob eine Folge $\{a_n\}$ als Koeffizientenfolge einer Funktion in einem Raume auftreten kann. Hier sollen hinreichende Bedingungen erörtert werden, und zwar folgender Art:

[691] Ist für $|a_n| \leq d_n$ ($n=1, 2, \dots$) stets $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge für L^q , so heißt die Folge $\{d_n\}$ eine *Majorante* für L^q ; sie ist offenbar nicht nur von q sondern auch vom Orthogonalsystem abhängig; wir verlangen ferner $d_n \geq 0$ (n).

[692] *Damit $\{d_n\}$ eine Majorante für L^q sei ($1 \leq q \leq \infty$), ist (bei einem Inbezug auf L^q vollständigen ON und $\varphi_n \in L^q$) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n$ für sämtliche Koeffizientenfolgen $\{c_n\}$ der Funktionen $f(t) \in L^{q'}$ notwendig und hinreichend.*

Hinlänglichkeit: Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n$ bewirkt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n d_n$ für $|\lambda_n| < \alpha$; diese Konvergenz findet statt für alle $f(t) \in L^{q'}$ ($f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$), also ist $\{\lambda_n d_n\}$ eine Koeffizientenfolge für L^q (nach [646]), w. z. b. w.

Notwendigkeit: Ist $\{d_n\}$ eine Majorante, so ist $\{\lambda_n d_n\}$ für $|\lambda_n| < \alpha$ die Koeffizientenfolge eines $g(t) \in L^q$. Damit ist aber eine additive Operation $g(t) = U(x)$ im Raume L^q aller beschränkten Folgen $\{\lambda_n\} = x$ eindeutig erklärt; dieser Raum ist vom Typus B , wenn man $\|x\|$ als o. G. $|\lambda_n|$ definiert, aber bei der Bestimmung der oberen Grenze diejenigen λ_j streicht, für welche d_j verschwindet. Nach [673] ist $U(x)$ stetig. Es gilt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k d_k \varphi_k(t) dt = 0,$$

und daraus folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n d_n$ für alle $f(t) \in L^q$; setzt man $\lambda_n = \text{sign } c_n$, so ergibt sich $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n < \infty$, w. z. b. w.

Das Majorantenproblem erweist sich damit als eng mit dem Problem der *Divergenzfaktoren* verknüpft: diesen Namen legen wir [693] den Gliedern einer Folge $\{d_n\}$ ($d_n \geq 0$) bei, wenn es im Raume R ein $f(t)$ gibt, dessen Koeffizienten $\{c_n\}$ die Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} c_n |d_n| = \infty$ zukommt. Dies ist eine Verallgemeinerung der Singularität c. ($R = M, d_n = 1$).

Der Satz [692] läßt sich jetzt so fassen: Damit $\{d_n\}$ eine Majorante für P sei, ist es notwendig und hinreichend, daß $\{d_n\}$ keine Divergenzfaktorenfolge für den zu P konjugierten Raum P' sei. Diese Bemerkung führt zu neuen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Majoranten,

Es sei $1 < p < \infty$, $\varphi_n \in L^p$, $\{\varphi_n\}$ ON und V in bezug auf L^p ; damit $\{d_n\}$ eine Majorante für L^p sei, ist das Erfülltsein der Ungleichung [694]

$$(42) \quad \int_a^b \left| \sum_{i=1}^m d_{n_i} \varphi_{n_i}(t) \right|^p dt < z \quad (m)$$

für alle Indexfolgen $\{n_i\}$ (mit einem $[n_i]$ und m -freien z) notwendig und hinreichend. (Für $p = \infty$ ist links statt des Integrals die w. o. G. des Inte gründen zu schreiben).

Beweis: Wir wissen bereits, daß die Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| d_n < \infty$ für alle $f \in L^{p'}$, wo $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$, notwendig und hinreichend ist. Daraus folgt

$$\left| \int_a^b f(t) \sum_{i=1}^n d_i \varphi_i(t) dt \right| < \alpha \quad (n),$$

also, nach [152] bzw. [154],

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left| \sum_{i=1}^m d_i \varphi_i(t) \right|^p dt < \infty$$

(mit entsprechender Lesart für $p = \infty$). Dies gilt für jede Folge $\{d_n\}$, womit die Notwendigkeit von (42) erwiesen ist. Die Hinlänglichkeit ist ersichtlich, denn (42) bewirkt

$$\left| \sum_{i=1}^m c_{ni} d_{ni} \right| \leq \alpha \|f\|.$$

Im Räume L^p ist die Bedingung (42) mit der unbedingten starken Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(t)$ äquivalent, wie der Satz [168] lehrt. Es ist leicht festzustellen, daß im Raume M dieselbe Be-

[695] dingung mit $\sum_{n=1}^{\infty} d_n |\varphi_n(t)| < \alpha$ f. ü. gleichbedeutend ist. Sind die φ_n gemeinsam beschränkt, so kommt $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ für M , $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$ für L als charakteristische Eigenschaft der Majoranten. Die Hinlänglichkeit der letzten Eigenschaft folgt aus dem Riesz-Fischer'schen Satze [356], die Notwendigkeit daraus, daß [694] und [676] die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(t)$ f. ü. und für gemeinsam beschränkte φ_n die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$ ergeben.

[696] Als Anwendung zeigen wir, daß für jedes ON, welches aus beschränkten Funktionen besteht und in bezug auf L vollständig ist, eine nullkonvergente Folge $\{a_n\}$ existiert, ohne eine Koeffizientenfolge für L zu sein. Denn nach [513] gibt es ein $\{d_n\}$ mit $d_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$

und $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$. Nach [676] kann die Bedingung des Satzes [694] nicht erfüllt sein, $\{d_n\}$ ist demnach keine Majorante, also ist ein $\{a_n\}$ mit $|a_n| < d_n$ vorhanden, so beschaffen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ keinem $f(t)$ aus L entspricht.

VII. KAPITEL.

Lakunäre Reihen.

§ 1. Lakunäre Systeme.

Das Rademacher'sche System $\{r_n(t)\}$ [225] besitzt unter anderen merkwürdigen Eigenschaften auch die folgende:

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ und wenn $f(t)$ die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ [711] bezeichnet (die sicher f. ü. konvergiert), so ist $f(t) \in L^p$ für alle p ($1 \leq p < \infty$).

Dies ist eine Folgerung aus der Ungleichung [456]

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^p dt \leq \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2$$

unter Benutzung von [125]. Das Rademacher'sche System verdankt jene Eigenschaft seiner Unvollständigkeit, die aber (selbstverständlich) allein dazu nicht ausreicht. In diesem Kapitel kommen ON-Systeme zur Sprache, welche eben diese Eigenschaft besitzen.

Führen wir allgemeinere Definitionen ein:

Ein ON-System $\{\varphi_n\}$ heißt *lakunär von der Ordnung p* ($p > 2$) [712] und wird mit S_p bezeichnet, wenn $\varphi_n L^p$ und wenn für $\{a_n\} e L^2$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ (die dann mit R_p bezeichnet wird) stets eine Funktion $f(t) \in L^p$ im Sinne der starken Konvergenz in L^2 darstellt. Die Reihe heißt dann auch *lakunär von der Ordnung p* . Mit S und R werden Systeme bzw. Reihen bezeichnet, die für alle p , $2 < p < \infty$, S_p bzw. R_p sind.

[713] Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit $\{\varphi_n(t)\}$ ein S_p sei, besteht in der Existenz eines n - und a -freien u_p mit

$$(1) \quad \left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq u_p \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

Die Hinlänglichkeit ist leicht zu sehen, denn aus (1) folgt

$$\left(\int_a^b |s_n(t) - s_m(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq u_p \sqrt[p]{\sum_{k=m+1}^n a_k^2},$$

also ist für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ die Folge $\{s_n(t)\}$ in L^p stark konvergent gegen eine Funktion $f(t) \in L^p$.

Für die Notwendigkeit bemerken wir, daß jedes ONS_p eine additive Operation $y = U(x)$ definiert, wenn man $\{a_n\}$ mit x ($x \in l^2$) und $f(t)$ mit y ($y \in L^p$) bezeichnet. Es bezeichnet also y dasjenige der Folge $\{a_n\}$ nach [712] entsprechende $f(t)$, dessen Koeffizienten nach dem System $\{\psi_n\}$, welches mit $\{\varphi_n\}$ zusammen ein ONV bildet, sämtlich Null sind. (Ein derartiges $\{\psi_n\}$ existiert nach [353]).

Um die Stetigkeit von $U(x)$ zu zeigen, betrachten wir eine Folge $\{x_k\}$ mit $x_k = \{a_n^{(k)}\}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty}$. Es sei $U(x_k) = y_k$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_{\infty}$. Nach [145] haben wir $y_{\infty} = U(x_{\infty})$ zu beweisen. Nun ist aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b y_k(t) \varphi_n(t) dt = \int_a^b y_{\infty}(t) \varphi_n(t) dt \quad (II),$$

d. h. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^{(k)} = a_n^*$, wenn $\{a_n^*\}$ die Koeffizientenfolge von $y_{\infty}(t)$ nach $\{\varphi_n\}$ bezeichnet. Andererseits ist wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^{(k)} = a_n^{(\infty)} \quad (III),$$

wo $x_{\infty} = \{a_n^{(\infty)}\}$. Es ist also $a_n^* = a_n^{(\infty)}$, d. h. die Koeffizienten von y_{∞} und $U(x_{\infty})$ nach $\{\varphi_n\}$ stimmen überein. Bezeichnet man mit b (mit entsprechenden Indizes) die Koeffizienten nach $\{\psi\}$, so ist $b_n^{(k)} = 0$ (für alle endlichen n, k) also $b_n^* = 0$ (n); $b_n^{(\infty)}$ ist aber Null als Koeffizient von $U(x_{\infty})$, wie oben bemerkt wurde. Wir haben also übereinstimmende Koeffizienten in bezug auf ein ONV; daher ist $y_{\infty} = U(x_{\infty})$. $U(x)$ ist demnach linear, also

$$\|y\|_p \leq \|x\|_p,$$

was für $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ als (1) geschrieben werden kann.

Korollar. Eine lakunäre Reihe ist stets stark konvergent.

Es sei $\{\varphi_n\}$ ein ONS_p; dann gilt [714]

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\|_p \leq \|u_p\|^{p-2} \int_a^b \left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right\| dt,$$

wo u_p dieselbe Konstante wie in [713] bezeichnet.

Es sei nämlich $q = p - 1 > 1$; es kommt

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right)^2 dt = \int_a^b |s_n(t)|^{1/q'} \cdot |s_n(t)|^{1/q} dt,$$

also, nach [127] und [713],

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^2 &\leq \left(\int_a^b |s_n(t)| dt \right)^{1/q'} \cdot \left(\int_a^b |s_n(t)|^p dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_a^b |s_n(t)| dt \right)^{1/q'} \cdot \left(\|u_p\| \left\| \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\|^{1/p} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1-1/2q} \leq \|u_p\|^{1/q} \cdot \left(\int_a^b |s_n(t)|^p dt \right)^{1/q'},$$

woraus der Satz, wegen $1 - 1/2q = 1/2q'$, unmittelbar hervorgeht.

Setzt man

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \int_a^b f(t) \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) dt,$$

so kommt

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_a^b |s_n(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

und (1) liefert den

Satz: Es sei $\{\varphi_n\}$ ein ONS_p; dann gilt für jedes $f(t) \in L^{p'}$ [715]

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\|_p \leq \|u_p\| \left(\int_a^b |f(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

(Hier ist $f(t)$ irgend eine Funktion mit $f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t)$ und $\|u_p\|$ die Konstante aus [713]).

[716] Es zeigt sich, daß die Entwicklung einer beliebigen Funktion $f(t) \in L^{p'}$ ($p' < 2$) einer Funktion $f(t) \in L^2$ entspricht, welche, nach [712], zu If gehört; daraus geht aber die *Unvollständigkeit der Systeme S_p inbezug auf L^p* hervor.

In der Tat, die Vollständigkeit würde die Abgeschlossenheit inbezug auf L^p bewirken ([625]) und man hätte eine Folge $\{w_n(t)\}$ von Linearformen in φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) mit $f(t)$ als starker Grenze. Nun ist aber nach [715]

$$\int_a^b [\bar{f}(t) - w_n(t)]^2 dt \leq p_p^2 \left(\int_a^b |f(t) - w_n(t)|^{p'} dt \right)^{\frac{2}{p'}}$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t) = \bar{f}(t)$ in L^2 , was mit $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t) = f(t)$ in $L^{p'}$ in Widerspruch steht, wenn $f(t)$ außerhalb L^2 gewählt wurde.

[715] läßt sich folgendermaßen umkehren:

[717] *Hat ein ON $\{\varphi_n\}$ für ein gewisses q ($1 < q < 2$) und jedes $f(t) \in L^q$ die Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, wo $\{a_k\}$ die Koeffizientenfolge von $f(t)$ bedeutet, so ist es lakunär von der Ordnung q' .*

Es ist zu zeigen, daß es zu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$ stets ein $g(t) \in L^{q'}$ mit $g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(t)$ gibt. Auf Grund von [646] genügt es die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ für sämtliche $\{a_k\} \in L^q$ (d. h. sämtliche Koeffizientenfolgen von Funktionen aus L^q) zu beweisen. Diese findet aber statt, denn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist nach Voraussetzung konvergent.

§ 2. Vorhandensein von lakunären Systemen.

Wir haben die einfachsten Eigenschaften der lakunären Systeme kennen gelernt, deren Vertreter das System [225] ist, welches sich sogar als S , herausgestellt hat. Gibt es aber sonst lakunäre Systeme?

Hier ist folgendes Ergebnis von Wichtigkeit:

[721] *Es sei $2 < p < \infty$, $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON und $\{\|\varphi_n\|_p\}$ beschränkt. Dann gibt es eine Indizesfolge $\{n_k\}$ so beschaffen, daß $\{\varphi_{n_k}(t)\}$ lakunär von der Ordnung p ist.*

Dem Beweise schicken wir folgendes Lemma voraus: Es gibt [722] Konstanten $\alpha(p)$, $\beta(p)$ so, daß für alle $f(t) \in L^p$, $g(t) \in L^p$, $p > 2$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt &\leq \int_a^b |f(t)|^p dt + p \int_a^b |f(t)|^{p-2} f(t) g(t) dt \\ &+ \alpha \int_a^b |g(t)|^p dt + \beta \sum_{i=2}^{Ep} \int_a^b |f(t)|^{p-i} |g(t)|^i dt \end{aligned}$$

gilt. Diese Ungleichung ist eine unmittelbare Konsequenz der arithmetischen Ungleichung

$$|u + v|^p \leq |u|^p + p |v|^{p-2} uv + \alpha |v|^p + \sum_{i=2}^{Ep} \binom{p}{i} |u|^{p-i} |v|^i,$$

die man folgendermaßen ableiten kann: Man setzt

$$\omega(z) = \frac{|1 + z|^p - \left(1 + pz + \sum_{i=2}^{Ep} \binom{p}{i} z^i\right)}{|z|^p};$$

$\omega(z)$ bleibt für $|z| \rightarrow \infty$ beschränkt; für $z \rightarrow 0$ strebt $\omega(z)$ gegen Null, wie man aus der binomischen Formel für $|1 + z|^p$ abliest. Demnach gibt es eine Konstante α mit $|\omega(z)| \leq \alpha$ für alle z , also umsomehr mit

$$|1 + z|^p \leq 1 + pz + \sum_{i=2}^{Ep} \binom{p}{i} z^i + \alpha |z|^p;$$

setzt man b/a für z ein, so erhält man die verlangte Ungleichung.

Jetzt können wir an den Beweis von [721] gehen. Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ reelle Zahlen. Man setze

$$(2) \quad f_n(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) = \int_a^b \left| \sum_{i=1}^r \gamma_i \varphi_i(t) \right|^{p-2} \cdot \sum_{i=1}^r \gamma_i \varphi_i(t) \cdot \varphi_n(t) dt$$

und nehme $\sum_{i=1}^r \gamma_i^2 \leq 1$ an; dann strebt f_n mit $1/n$ gegen Null und zwar gleichmäßig für alle Zahlensysteme $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$, welche obige Annahme erfüllen. Sonst hätte man nämlich ein $\varepsilon > 0$, eine Indexfolge $\{n_k\}$ und eine Folge $\{(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \dots, \gamma_r^{(k)})\}$ mit $f_{n_k}(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \dots, \gamma_r^{(k)}) \geq \varepsilon$. Wegen $|\gamma_i| \leq 1$ gäbe es eine Teilfolge (die keine neue Bezeichnung erhält) $\{(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \dots, \gamma_r^{(k)})\}$ mit dem Grenzpunkt $(\gamma_1^{(\infty)}, \gamma_2^{(\infty)}, \dots, \gamma_r^{(\infty)})$. In diesem Punkte wäre $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$, also $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = 0$, ein Widerspruch.

Es sei also $|f_n| \leq 1/r$ für $n > s(r)$. Es sei ferner $r_1 = 1$, $r_{n+1} = \max(1 + r_n, s(r_n))$ (also $r_n \geq n$); wir behaupten, $\{\varphi_{r_n}(t)\}$ sei lakunär von der Ordnung p . Es werde $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{r_i}(t)$ mit $s_n(t)$ bezeichnet und $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < 1$ angenommen. Nach [722] ist

$$(3) \quad J_{n+1} = \int_a^b |s_{n+1}(t)|^p dt \leq \int_a^b |s_n(t)|^p dt + p a_{n+1} \int_a^b |s_n(t)|^{p-2} s_n(t) \varphi_{r_{n+1}}(t) dt \\ + \alpha |a_{n+1}|^p \int_a^b |\varphi_{r_{n+1}}(t)|^p dt + \beta \sum_{j=2}^{p-1} |a_{n+1}|^j \int_a^b |s_n(t)|^{p-j} |\varphi_{r_{n+1}}(t)|^j dt.$$

Nun ist $r_n \geq n$, $\int_a^b |\varphi_n(t)|^p dt \leq \nu^p$, $|a_{n+1}|^j \leq |a_{n+1}|^2$ für $2 \leq j < p$, also, nach Anwendung von [127] auf das letzte Glied von (3), $J_{n+1} \leq J_n(1 + \beta p \nu^p a_{n+1}^2) + a_{n+1}^2(\alpha \nu^p + \beta p \nu^p) + p \frac{|a_{n+1}|}{n} = J_n(1 + \beta_n) + a_n$ (die Unterscheidung $J_n > 1$, $J_n < 1$ liefert zwei Glieder mit β). Es folgt

$$J_{n+1} \leq (1 + \beta_n) (1 + \beta_{n-1}) \dots (1 + \beta_1) \left(J_1 + \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

und die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ liefert eine n -freie und $\{a_n\}$ -freie Zahl λ mit $J_n < \lambda$.

Damit ist aber für alle $\{a_n\}$ die Bedingung (1) des Satzes [713] erwiesen, also ist $\{\varphi_{r_n}(t)\} S_p$, wie behauptet.

Eine Konsequenz von [721] ist der Satz:

[723] *Aus einem beschränkten ON läßt sich stets ein S_{∞} herausgreifen.*

Beweis: Es sei $\{\varphi_n\}$ das betrachtete ON, $\{\varphi_{r_n}(t)\}$ das auf Grund von [721] vorhandene lakunäre System von der Ordnung 3. Man schreibe $\varphi_n^{(1)}$ für φ_{r_n} und bezeichne das in $\{\varphi_n^{(1)}\}$ enthaltene S_1 mit $\{\varphi_n^{(2)}\}$; führt man so fort, so entstehen unendlichviele Folgen $\{\varphi_n^{(k)}\}$ ($k=1, 2, \dots$); dabei ist $\{\varphi_n^{(k)}(t)\}$ ein ONS_{k+2} . Die Diagonalfolge $\{\varphi_k^{(k)}(t)\}$ ist (abgesehen von endlichvielen Gliedern) in jeder von jenen Folgen enthalten; schreibt man ψ_n für $\varphi_n^{(n)}$, so ist $\{\psi_n(t)\}$ ein ONS_{k+2} für $k=1, 2, \dots$, also das gesuchte ONS_{∞} .

[723] gilt auch für solche ON, die, ohne beschränkt zu sein, die Bedingung $\|\varphi_n(t)\|_p < \nu(p)$ (mit einem n -freien ν) für alle n oder nur für eine unendliche Teilfolge $\{n_k\}$ erfüllen.

§ 3. Weitere Eigenschaften der lakunären Systeme.

In § 1 und § 2 haben wir uns mit der Existenz und mit den charakteristischen Eigenschaften der lakunären Systeme beschäftigt. Jetzt gehen wir zu dem Problem über, wie die Koeffizienten einer Funktion nach einem lakunären System beschaffen sind. Wir wissen bereits auf Grund von [715], daß die Koeffizienten eines $f(t) \in L^p$ nach einem ONS_p -System eine konvergente Quadratsumme haben; daraus folgt:

Ist $\{\tau_n(t)\}$ ein S_∞ , $q > 1$, $f(t) \in L^q$, $f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_k(t)$, so ist [731]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Dieser Satz läßt sich nicht auf $q=1$ erweitern, wie wir später ([743]) sehen werden. Aus [712] und [731] folgt für Systeme ONS_∞ , [732] daß jede Funktion $f(t) \in L^q$ ($q > 1$), die „in der Ebene des Systems liegt“, d. h. deren Koeffizienten nach den zur Vervollständigung des Systems nötigen Funktionen sämtlich verschwinden, mit jedem $p > 0$ integrierbar ist. Dieser Satz bleibt ([741]) auch für $q = 1$ unter gewissen Einschränkungen richtig.

[731] läßt sich auch so ausdrücken: Ist das aus einem $\text{ON}\{\varphi_n\}$ herausgegriffene Teilsystem $\{\varphi_{n_k}\}$ ein S , so ist für $f(t) \in L^q$ ($q > 1$) stets $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 < \infty$.

Bei den lakunären Systemen spielt die Reihenfolge keine Rolle; ein lakunäres System bleibt lakunär von derselben Ordnung, wenn man die Reihenfolge seiner Glieder beliebig ändert. [733]

Beweis: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau_n(t)$ ein R_p ; nach [713] ist die Teilfolge eines S_p ebenfalls ein S_p , also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \tau_{n_k}(t)$ ein R_p und, nach dem Korollar zu [713], stark konvergent in L^p . Damit erweisen sich alle herausgegriffenen Reihen als stark konvergent, also muß nach [168] die ursprüngliche Reihe unbedingt konvergieren. Es ist also die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \tau_n^*(t)$ in L^p stark konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ war. Daher ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tau_n^*(t)$ für $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ stets stark konvergent (denn es gibt dann zu $\{b_n\}$ ein $\{a_n\}$ mit $a_n^* = b_n$, und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$). Dies beweist eben, daß $\{\tau_n^*\}$ ein S_p ist.

Banach'sche Äquivalenzen. Lakunäre Systeme weisen u.a. gewisse Eigenschaften auf, die untereinander und mit der Eigenschaft lakunär zu sein äquivalent sind; wir können sogar zwei solche Gruppen äquivalenter Eigenschaften angeben; sie zeigen die einschlägigen Probleme in einem neuen Lichte und eröffnen einen Weg zu den Singularitäten.

I. Gruppe. Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON mit folgenden Einschränkungen: 1° alle $\varphi_n(t)$ sind beschränkt, 2° das System ist abgeschlossen inbezug auf L , 3° die laut 2° vorhandenen Linearformen $w_m(t)$, welche eine gegebene Funktion $f(t) \in L$ in L stark approximieren, können so gewählt werden, daß sie diejenigen $\varphi_n(t)$, zu welchen $f(t)$ orthogonal ist, nicht enthalten (2° und 3° bewirken bereits die Vollständigkeit inbezug auf L); $\{\psi_k(t)\}$ sei eine Teilfolge von $\{\varphi_n(t)\}$, d.h. es sei $\psi_k(t) = \varphi_{n_k}(t)$.

[734] *Unter diesen Annahmen sind die drei folgenden Aussagen paarweise äquivalent:*

α) Die Koeffizienten einer jeden integrierbaren Funktion nach $\{\psi_k\}$ haben eine endliche Quadratsumme, wenn die Funktion in der ψ -Ebene liegt.

β) Zu jeder Folge $\{a_k\}$ mit $\sum_k a_k^2 < \infty$ gibt es eine stetige Funktion, deren Koeffizienten nach $\{\psi_k\}$ die a_k sind.

γ) Es gibt ein von m unabhängiges μ , so daß die Ungleichung

$$(4) \quad \int_a^b \left| \sum_{n=1}^m c_n^2 \right| \leq \mu \int_a^b \left| \sum_{n=1}^m c_n \psi_n(t) \right| dt \quad (m)$$

für alle $c_1, c_2, \dots, c_m$ gilt.

Beweis: (4) sei erfüllt. $f(t)$ sei integrierbar und „in der ψ -Ebene gelegen“, d.h. die Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\varphi_n\}$ sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$; nach Voraussetzung 2° und 3° gibt es Linearformen

$$(5) \quad w_m(t) = \sum_{n=1}^m c_n^{(m)} \varphi_n(t)$$

mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - w_m(t)| dt = 0$. Nach (4) und (5) ist

$$\sqrt{\sum_{n=1}^m (c_n^{(m)})^2} \leq \mu \int_a^b |w_m(t)| dt$$

und — da wegen [627] $\lim_{m \rightarrow \infty} c_n^{(m)} = a_n$ ist —

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \leq \mu \int_a^b |f(t)| dt;$$

es folgt also $\alpha)$ aus $\gamma)$.

Jetzt sei $\alpha)$ erfüllt. Es sei $w(t)$ irgend eine Form von der Gestalt (5) mit der Nebenbedingung

$$(6) \quad \int_a^b |w(t)| dt = 1;$$

wir wollen 7) oder die damit äquivalente Ungleichung

$$\int_a^b w^2(t) dt \leq \mu$$

ableiten. Wäre sie falsch, so könnte man aus $\{w\}$ eine Folge $\{w_i\}$ mit

$$(7) \quad \|\omega_{i+1}\|_2 > i^2, \quad \omega_i = \sum_{n=1}^{m_i} c_n \phi_n(t) \quad (i)$$

herausgreifen derart, daß $\omega_{i+1} = \sum_{n=1}^{m_{i+1}} c_n \phi_n(t)$ wäre. (Im Gegenfalle

wäre ein $l = k$ vorhanden, mit $\sqrt{\sum_{n=1}^p c_n^2} < k^2 \int_a^b \left| \sum_{n=1}^p c_n \phi_n(t) \right| dt$ für $p > m > m_k$; da aber, nach 2°, $|\phi_n| < \alpha$ ($n = 1, 2, \dots, m_k$), so ist für jedes $w(t) = \sum_{n=1}^p c_n \phi_n(t)$, $\|w\|_1 = 1$,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^p c_n^2} \leq \alpha m_k + k^2(1 + \alpha m_k) = \mu,$$

also die Aussage $\gamma)$ erfüllt). Dann wäre, wegen (6), die Orthogonal-

reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \omega_i(t)$ gegen ein $g(t) \in L$ stark in L konvergent; man hätte

aber $g(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(t)$ mit $b_n = \frac{1}{i^2} \int_a^b \omega_i(t) \phi_n(t) dt$ für $m_{i-1} < n < m_i$, also, wegen (7),

$$\sum_1^{\infty} b_n^2 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{i^2} \|\omega_i\|_2^2 \geq \sum_1^{\infty} \frac{1}{i^2} = \infty,$$

was gegen α) verstößt. Damit ist die Äquivalenz von α) und 7) bewiesen.

Um die Äquivalenz von β) und 7) zu zeigen, definieren wir eine Operation $y = U(x)$ — wo $x \in C$ (= der Raum stetiger Funktionen), $y \in l^2$ — durch

$$(8) \quad y_i = \{y_i\}, \quad y_i = \int_a^b x(t) \psi_i(t) dt \quad (i).$$

Diese Operation ist linear. Nach [183] ist für die Auflösbarkeit von $y = U(x)$ bei jedem $y \in l^2$ die Existenz einer positiven Konstanten μ mit

$$(9) \quad \|Y(U(x))\| \geq \mu \|Y\|_p \quad (Y)$$

notwendig und hinreichend; dabei ist Y das Symbol eines beliebigen linearen Funktionals in l^2 ; links ist die Norm des zusammengesetzten Funktionals YU , rechts diejenige von Y gemeint. Da

nun ein lineares Funktional in l^2 die Gestalt $\sum_1^{\infty} c_i y_i = Y(y)$ mit $\sum_1^{\infty} c_i^2 < \infty$ hat, so ist $\|Y\| = \left(\sum_1^{\infty} c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Ferner ist wegen (8)

$$Y(U(x)) = \sum_1^{\infty} c_i y_i = \sum_1^{\infty} c_i \int_a^b x(t) \psi_i(t) dt = \int_a^b x(t) \sum_1^{\infty} c_i \psi_i(t) dt,$$

also nach [147]

$$Y(U(x)) = \int_a^b \sum_1^{\infty} c_i \psi_i(t) dt.$$

Es kann also (9) als

$$(10) \quad \left| \int_a^b \sum_1^m c_i \psi_i(t) dt \right| \geq \mu \sqrt{\sum_1^m c_i^2}$$

geschrieben werden für alle Folgen $\{C_i\}$ mit endlichvielen von Null verschiedenen Gliedern. Somit folgt 7) aus β). Umgekehrt folgt β) aus γ), denn (10) impliziert den Fall $m = \infty$, also (9), und die Auflösbarkeit von $y = U(x)$.

Nach [714] gilt 7) für jedes $ONS_p\{\varphi_n\}$. Wenn also $\{\varphi_n\}$ die Voraussetzungen 1°, 2°, 3° von [734] erfüllt und $\{\psi_n\}$ eine Teilfolge von $\{\varphi_n\}$ ist, so gelten auch α) und β) für $\{\varphi_n\}$. Daraus können

wir schließen, daß jedes ON $\{\varphi_n\}$, welches ein lakunäres System, d.h. ein S_p enthält, die Singularität C_p ja sogar eine stärkere aufweist:

Es gibt positive ε_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ und eine stetige Funktion [735]

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \text{ mit}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon_n} = \infty.$$

Beweis: Wir wählen eine Folge positiver Zahlen $\{\beta_k\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \infty$ derart, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\beta_k}$ für alle $\beta \in (0, 1)$ divergiert.

Setzt man dann $\gamma_k = \frac{2}{\beta_k + 1}$, so ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$ und es gibt eine Folge $\{c_k\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{2-\gamma_k} = \infty.$$

Ist nun $\{\varphi_{n_k}(t) = \psi_k(t)\}$ das lakunäre Teilsystem von $\{\varphi_n\}$, so gibt es nach [734] eine stetige Funktion $f(t)$ mit

$$c_k = \int_a^b f(t) \psi_k(t) dt;$$

ist also $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$, so hat man für eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \quad \varepsilon_{n_k} = \gamma_k,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2-\varepsilon_n} > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{2-\gamma_k} = \infty.$$

Selbstverständlich ist der Beweis für die Singularität C_p und C_{∞} noch einfacher, denn es tritt $\varepsilon > 0$ an Stelle von ε_n .

IL Gruppe. Es sei $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON und: 1° alle $f_n(t)$ gemeinsam beschränkt, 2° jede beschränkte Funktion als gewöhnlicher Grenzwert einer f. ü. konvergenten Folge von Linearformen der $\varphi_n(t)$ darstellbar, 3° die laut 2° vorhandenen Linearformen $w_n(t)$, die gegen eine gegebene Funktion $f(t) \in M$ f. ü. konvergieren, so bestimmbar, daß sie gemeinsam beschränkt sind und die zu $f(t)$ orthogonalen $\varphi_n(t)$ nicht enthalten; $\{\varphi_k(t)\}$ sei eine Teilfolge von $\{\varphi_n(t)\}$.

[736] Unter diesen Annahmen sind die drei folgenden Aussagen paarweise äquivalent:

α) Die Koeffizienten jeder beschränkten Funktion nach $\{\psi_k\}$ bilden eine absolut konvergente Reihe, wenn die Funktion in der ψ -Ebene liegt.

β) Zu jeder Folge $[a_k]$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ gibt es eine integrierbare Funktion, deren Koeffizienten nach $\{\psi_k\}$ die a_k sind.

γ) Es gibt ein von m unabhängiges μ , so daß die Ungleichung

$$(11) \quad \sum_{n=1}^m |c_n| \leq \mu \cdot \text{w. o. G.} \left| \sum_{n=1}^m c_n \psi_n(t) \right| \quad (m)$$

für alle $c_1, c_2, \dots, c_m$ gilt.

Beweis: (11) sei erfüllt, $f(t)$ sei beschränkt und „in der ψ -Ebene gelegen“; die Entwicklung von $f(t)$ nach $\{\tau_n\}$ sei also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(t)$. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $\{w_m(t)\}$ mit den Eigenschaften 2° und 3°. Ist

$$(12) \quad w_m(t) = \sum_{n=1}^m c_n^{(m)} \psi_n(t),$$

so kommt wegen (11) und 3°

$$\sum_{n=1}^m |c_n^{(m)}| \leq \mu \cdot \text{w. o. G.} \cdot w_m(t) \leq \mu \lambda$$

und, da nach [627] $\lim_{m \rightarrow \infty} c_n^{(m)} = a_n$ ist,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \mu \lambda.$$

So folgt α) aus γ). Die Umkehrung ist ebenfalls in Anlehnung an den Beweis von [734] unter sinngemäßer Änderung der Normen zu beweisen.

Jetzt haben wir noch die Äquivalenz von β) und γ) zu zeigen. Wir definieren eine Operation $y = U(x)$, mit L als Raum der unabhängigen Variablen x und mit l^∞ (= der Raum aller Folgen $\{y_i\}$ mit $y_i \rightarrow 0$) als Gegenraum, durch

$$y = \{y_i\}, \quad y_i = \int_a^b x(t) \psi_i(t) dt \quad (i).$$

Damit diese lineare Operation $y = U(x)$ für jedes $y \in \mathcal{L}^\infty$ eine Lösung $x \in L$ zulasse, ist wieder — nach [183] — eine Bedingung der Gestalt (9) notwendig und hinreichend. Ihr Sinn ist aber ein

anderer: ein lineares Funktional in $\mathcal{L}^\infty$ hat die Form $Y(y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$, also ist $\|Y\| = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|$; es ist zwar wieder

$$Y(U(x)) = \int_a^b x(t) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t) dt,$$

aber nach [147]

$$\|Y(U(x))\| = \text{w. o. G.} \left\| \sum_{a \leq t \leq b} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(t) \right\|,$$

denn $Y\{U(x)\}$ ist jetzt eine in L erklärte Operation. Die Ungleichung (9) ergibt also als Analogon zu (10)

$$\text{w. o. G.} \left\| \sum_{i=1}^m c_i \psi_i(t) \right\| \geq \mu \sum_{i=1}^m |c_i| \quad (\mu > 0)$$

und der Beweis wird ähnlich wie derjenige von [734] abgeschlossen.

Man kann auch daran ähnliche Bemerkungen wie dort knüpfen, doch ist es über y) nicht bekannt, ob es jedem ONS, zukommt. Die Äquivalenz von β) und ν) zeigt, daß in diesem Falle eine Erweiterung von [731] auf $q = 1$ unstatthaft wäre, ja es ist sogar für jedes System $\{\varphi_n\}$, welches den Annahmen der II-ten Gruppe genügt und ein Teilsystem $\{\varphi_k\}$ von der Eigenschaft r) besitzt, folgende Singularität vorhanden:

Es gibt ein $\{\lambda_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ und eine integrierbare Funktion [737]

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \quad \text{mit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{1/\lambda_n} = \infty.$$

Beweis: Wir wählen positive Zahlen μ_k mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty$

derart, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_k^{1/\lambda_k}$ für alle $\vartheta \in (0, 1)$ divergiert. Es gibt dann eine Folge $\{c_k\}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{1/\mu_k} = \infty.$$

Ist $f(t)$ die nach der Äquivalenz $\beta) = \nu)$ aus [736] vorhandene integrierbare Funktion mit

$$c_k = \int_a^b f(t) \psi_k(t) dt, \quad f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad c_k = a_{n_k},$$

so gilt für eine Folge $\{\lambda_n\}$ mit $\lambda_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$, $\lambda_{n_k} = \mu_k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\lambda_n} > \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{\mu_k} = \infty.$$

Die Bestimmung von $\{\mu_k\}$ als $\{\log \log(k+2)\}$ ist ausreichend; $\{c_k\}$ kann dann als $\{1/\log(k+1)\}$ gewählt werden; diese Wahl genügt auch für die schwächere Singularität mit $\lambda_n = \lambda > 0$.

§ 4. Anwendungen.

Das Rademacher'sche System $\{r_n(t)\}$ ist lakunär; es ist S, wie wir am Anfang dieses Kapitels gesehen haben. Infolgedessen erfüllt dieses System die Ungleichung der Behauptung [714], wie wir es bereits in [457] bestätigt finden. Nun ist aber das Rademacher'sche System ein Teilsystem des in [461] erklärten Walshsehen Systems; nach [468] haben die dort erklärten Teilsummen $p_2^n(t)$, die wir mit $w_n(t)$ bezeichnen können, diejenigen Eigenschaften, die wir als „Annahmen“⁴ dem Satz [734] vorausschickten. Es ist also jener Satz anwendbar und ergibt für jede integrierbare, in der r -Ebene gelegene Funktion $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Ebenso sind die für die Äquivalenzen [736] ausreichenden Annahmen der II-ten Gruppe erfüllt (mit denselben $w_n(t)$), also bilden die Koeffizienten a_n eines $f(t) \in M$ (f aus der r -Ebene) stets eine absolut konvergente Reihe.

Eine trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k t + b_k \sin n_k t)$$

ist für genügend stark wachsende Folgen $\{n_k\}$ (z. B. für $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$) ebenfalls lakunär, worüber man näheres im Zygmund'schen Buche dieser Sammlung lesen kann. Das interessante System [471] besitzt auch diese Eigenschaft.

Das System $\{r_n(t)\}$ ([225]) mag uns jetzt dazu dienen, zu stärkeren Ergebnissen als [563] zu gelangen. Und zwar:

Es sei $\int_a^b |g_n(u)|^p du < \gamma$ für alle n , $p > 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$; dann ist [741]
für fast alle t die Reihe

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(u) r_n(t)$$

f.ü. in $\langle a, b \rangle$ gegen eine Funktion $G(u)$ e L^p konvergent.

Beweis: Es ist nach Voraussetzung $\int_a^b |g_n(u)|^p du$, also auch $\int_a^b g_n^2(u) du$ beschränkt, daher $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 g_n^2(u)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 |g_n(u)|^p$ nach [124] für fast alle u des Intervalls $\langle a, b \rangle$ konvergent. Ist also u_0 ein derartiges u , so konvergiert nach [452]

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(u_0) r_n(t)$$

f.ü. in $\langle 0, 1 \rangle$. Bezeichnet man mit $s_n(u, t)$ die *nie* Partialsumme von (13), so liefert die Khintchin'sche Ungleichung [456]

$$\int_a^b |s_n(u, t)|^p dt \leq z \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 g_k^2(u) \right)^{\frac{p}{2}},$$

wo z nur von p abhängt; die Hölder'sche Ungleichung [114] gibt aber

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 g_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=1}^n a_k^2 |g_k|^p,$$

also ist

$$(15) \quad \int_0^1 |s_n(u_0, t)|^p dt \leq z \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 |g_k(u_0)|^p.$$

Bezeichnet man mit $s(u_0, t)$ die Summe von (14), so ist nach [125] und (15)

$$\int_0^1 |s(u_0, t)|^p dt \leq z \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 |g_k(u_0)|^p.$$

Schreibt man hier u statt u_0 und integriert beiderseits nach u , so kommt

$$\int_a^b du \int_0^1 |s(u, t)|^p dt \leq z \gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

also auch (nach Vertauschung der Integrationsfolge)

$$\int_0^1 dt \int_a^b |s_{-}(u, t)|^p du < \infty,$$

was die behauptete Endlichkeit von $\int_a^b |s_{-}(u, t)|^p du$ für fast alle t ergibt.

Dasselbe Resultat läßt sich folgendermaßen probabilistisch deuten (vgl. [455]): unter den Voraussetzungen von [741] hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n g_n(u)$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 eine Summe, die zu L^p gehört.

Der Satz [741] bleibt richtig, wenn die Zahlen a_n und die [742] Funktionen $g_n(u)$ komplexe Werte annehmen. So ist z.B. für

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad |z| = 1, \quad G_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n r_n(t), \quad t = \sqrt{-1}$$

$$\int_0^{2\pi} |G(e^{iu})|^p du < \infty \quad (p > 2)$$

für fast alle t . In diesem Satze ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n r_n(t)$ für $|z|=1$ f.ü. in $0, 1$ mitgemeint. Wir überlassen dem Leser die probabilistische Deutung dieser, sowie die Formulierung analoger Sätze mit den Funktionen des Satzes [471] an Stelle von $\{r_n(t)\}$. Weitere Anwendungen auf die analytischen Funktionen findet man in einer gemeinsamen Arbeit von Paley und Zygmund.

Die Funktionen $r_n(t)$ dienen u.a. dazu, die Wahrscheinlichkeit für die Konvergenz (oder Divergenz) von Reihen zu bestimmen, deren Glieder mit zufallsartigen Vorzeichen $\pm$ versehen werden. Wenn wir nun eine Reihe haben und es dem Zufall überlassen (mit gleicher Wahrscheinlichkeit für beide Fälle), ob wir ein Glied streichen oder stehen lassen, so sind an Stelle von $r_n(t)$ die Funktionen $v_n(t) = 1/2 + \sqrt{2} r_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) zu benutzen.

[743] Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(t)$$

in einer positiven t -Menge $(C, 1)$ -summierbar sei, besteht in der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und der $(C, 1)$ -Summierbarkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Hinlänglichkeit ergibt sich aus der Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$$

und [452]. Diese Darstellung zeigt auch, daß die Notwendigkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ bereits die Notwendigkeit der ganzen Bedingung impliziert. Es sei also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Bezeichnen wir mit $\{\tau_n\}$, $\{\tau_n\}$

die Folgen der arithmetischen Mittelwerte der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$. $\{n_k\}$ und $\{n'_k\}$ seien Indizesfolgen und zwar durch die Ungleichung $\tau_{n_k} > 0$, bzw. $\tau_{n'_k} < 0$ definiert. Da unendlichviele a_n von Null verschieden sind, ist wenigstens eine der beiden Folgen unendlich; es sei z. B. $\{n_k\}$ unendlich. Aus [564] (vgl. auch die Bemerkungen nach [576]) folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\tau_{n_k}(t)| = \infty$$

★

in einer t -Menge E mit $|E| = 1$. Es ist $E = E_1 + E_2$ mit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k}(t) = +\infty \quad \text{für } t \in E_1, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k}(t) = -\infty \quad \text{für } t \in E_2.$$

Ist nun T diejenige t -Menge, für welche (16) $(C,1)$ -summierbar ist, so ist wenigstens eine der beiden Mengen TE_1 , TE_2 positiv; sie heiße F . F hat in einem gewissen Intervall $(p/2^q, p+1/2^q)$ eine relative Dichte $> 1/2$; ist F das Spiegelbild von F in bezug auf den Mittelpunkt des erwähnten Intervalls, so ist FF positiv. In jedem $t \in FF$ gilt nun

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k}(t) = +\infty, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \tau_{n_k}(t) = -\infty,$$

(denn die $r_n(t)$ sind von einem n an ungerade in bezug auf den besagten Mittelpunkt). Es ist also in einem positiven Teil von T

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\tau_{n_k} + \tau_{n_k}) = +\infty,$$

ein Widerspruch.

Bemerkung. Derselbe Satz und Beweis gilt für alle Toeplitz'schen Summationsmethoden.

[744] **Satz.** Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \infty$. Streicht man in der trigonometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\vartheta)$$

zufallsartig die Glieder, so erhält man mit der Wahrscheinlichkeit 1 eine nichtfourier'sche Reihe.

Beweis: Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(\vartheta) = \infty$ für fast alle ϑ , also ist—für solche ϑ —die Reihe

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\vartheta) v_n(t)$$

f. ü. in $0 \leq t \leq 1$ nicht $(C, 1)$ -summierbar, wie [743] lehrt. Infolgedessen ist für fast alle t die Reihe (17) nicht $(C, 1)$ -summierbar f. ü. in $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, also — für fast alle t — keine Fourierreihe in bezug auf ϑ , w. z. b. w.

VIII. KAPITEL.

Biorthogonale Systeme und Orthogonalpolynome.

Dieses Kapitel hat einige oft gebrauchten Erweiterungen des Begriffes *Orthogonalsystem* zum Gegenstand.

§ 1. Biorthogonale Systeme.

Die Orthogonalität ist ein mit dem Räume L^2 verknüpfter Begriff; es ist natürlich, von den Funktionen $\varphi_n(t)$ die Zugehörigkeit zu L^2 zu verlangen, wenn man das Produktintegral bilden will. Eine Verallgemeinerung auf andere Räume ist naheliegend:

Man betrachte einen Raum R , ein System $|x_\alpha|$ von Elementen dieses Raumes und ein mit $|x_\alpha|$ gleichmächtiges System $|U_\alpha|$ von in R erklärten linearen Funktionalen. Wir nennen das System $\{x_\alpha, U_\alpha\}$ *biorthogonal* und *normiert* (kurz BN), wenn

[811]

$$(B) \quad U_\alpha(x_\beta) = 0 \quad \alpha \neq \beta$$

bzw.

$$(N) \quad U_\alpha(x_\alpha) = 1 \quad (\alpha)$$

gilt. (Man beachte, daß obige Normierung nichts über die Normen von U_α und x_α aussagt).

Entwicklung eines $x \in R$ nach dem BN $\{x_\alpha, U_\alpha\}$ heißt die Reihe

$$(1) \quad x \sim \sum_{\alpha=1}^{\infty} x_\alpha U_\alpha(x).$$

Diese Schreibweise hat als stillschweigende Voraussetzung, daß die Indizes α natürliche Zahlen sind, d.h. daß $|x_\alpha|$ abzählbar oder endlich ist. Wir zeigen nun:

Ist R separabel, so ist ein BN höchstens abzählbar.

[812]

Es sei $\{x_\alpha, U_\alpha\}$ ein BN. Die Annahme $\|U_\alpha\| = 1$ schränkt die Allgemeinheit nicht ein. Dann ist aber

$$1 = U_\alpha(x_\alpha - x_\beta) \leq \|x_\alpha - x_\beta\|$$

und man führt den Beweis genau so zu Ende, wie denjenigen von [341].

- [1813] Es ist auch die lineare Unabhängigkeit der x_n untereinander und der U_n untereinander leicht beweisbar. Hat man nämlich $\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i = \theta$, so ist

$$U_k(\theta) = U_k\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i\right) = \gamma_k \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

also $\gamma_k = 0$ für alle $k < n$. Ähnlich beweist man den zweiten Teil.

- [814] Ein BN heißt vollständig (kurz V), wenn $[U_n]$ vollständig ist, m.a.W., wenn es in R kein x mit $\|x\| > 0$, $U_n(x) = o(n)$ gibt.

- [815] Wenn die Entwicklung eines x nach einem BNV stark in R konvergiert, so ist x ihre starke Summe. Es ist nämlich dann

$$U_n\left(x - \sum_{i=1}^n x_i U_i(x)\right) = 0 \quad (n),$$

also

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i U_i(x).$$

- [816] Die Vollständigkeit eines BN ist weder von derselben Eigenschaft des $\{x_n\}$ bedingt, noch ist das Umgekehrte der Fall. Es sei z. B. $\{\varphi_n(t)\}$ ein ON, V inbezug auf L^2 ; setzt man

$$\psi_n(t) = \varphi_1(t) + \varphi_{n-1}(t); \quad \gamma_n(t) = \varphi_{n+1}(t) \quad (n),$$

so kommt

$$\int_a^b \psi_n(t) \gamma_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m; \end{cases}$$

nun ist aber $\{\psi_n(t)\}$ vollständig, denn aus

$$\int_a^b f(t) \psi_n(t) dt = 0$$

folgt

$$\int_a^b f(t) \varphi_1(t) dt = - \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt,$$

was mit Rücksicht auf $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt = 0$

$$\int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt = 0 \quad (n),$$

also $f(t) = 0$ f. ü. ergibt. Andererseits ist $\{\chi_n(t)\}$ unvollständig, denn $\varphi_1(t)$ ist zu allen $\chi_n(t)$ orthogonal. Wählt man einmal $\phi_n(t)$ als x_n und $\int_a^b \chi_n(t) x(t) dt$ als $U_n(x)$, das andere Mal $\chi_n(t)$ als x_n und $\int_a^b \phi_n(t) x(t) dt$ als $U_n(x)$, so ist das BN $\{x_n, U_n\}$ im ersten Fall unvollständig, im zweiten vollständig, $\{x_n\}$ im ersten Fall vollständig, im zweiten nicht.

Minimale Systeme. Es sei $\{x_n\}$ eine aus Elementen von R bestehende Folge und $X \subset R$ die Menge derjenigen x , welche sich durch Linearformen der x_n approximieren lassen; es ist also $x_0 \in X$ dann und nur dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n und $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ mit

$$\|x_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - \dots - \gamma_n x_n\|_R < \varepsilon$$

vorhanden sind; wir sagen dann, x_0 sei für die x_n zugänglich.

Das System $\{x_n\}$ heißt nun *minimal*, wenn die Beseitigung [817] eines x_k stets eine Verminderung von X verursacht. Diese Definition ist eine Verallgemeinerung von [248]. Es ist darnach jedes ON minimal, dagegen z. B. $\{t^n\}$ nicht, wie aus dem Müntz'sehen Satze [361] ersichtlich. Ein endliches System von linear unabhängigen Funktionen ist stets minimal.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Minimalität [818] *von $\{x_n\}$ ist das Nichtvorkommen von x_k in X_k ; dabei bezeichnet X_k das dem System $\{x_n\}$ ($n \neq k$) entsprechende X und die Bedingung hat für alle k erfüllt zu sein. (M. a. W. soll kein x_k für die übrigen x_n zugänglich sein).*

Die Notwendigkeit ist klar, denn aus $x_k \in X_k$ folgt die Zugänglichkeit von x_k für $\{x_{n \neq k}\}$, also aller $x \in X$, und $X_k = X$. Die Hinlänglichkeit liegt auf der Hand, denn $x_k \in X$, also läßt $x_k \ni X_k$ die Verminderung erkennen.

Kehren wir nun zu den biorthogonalen Systemen zurück. Setzen wir bis auf weiteres voraus, die Glieder der Folge $\{x_n\}$ seien in L^p ($1 \leq p < \infty$) enthalten. Dann ist $\{U_n\}$ von der Gestalt

$$U_n(x) = \int_a^b y_n(t) x(t) dt$$

mit $y_n \in L^{p'}$ (bzw. $y_n \in M$) und man sieht, wie man die Rollen von x_n und y_n gegebenenfalls vertauschen kann.

Wir werden—der Kürze halber—solche Biorthogonalsysteme mit $\{x_n, y_n\}$ bezeichnen. Es bedeutet also die Definition [811] nichts anderes als

$$(2) \quad \int_a^b x_i(t) y_k(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k, \end{cases}$$

und die Entwicklung (1) nimmt die Gestalt

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k(t) \quad \text{mit } c_k = \int_a^b x(t) y_k(t) dt$$

an.

[819] Die Minimalität von $\{x_n\}$ ist notwendig und hinreichend, damit man im konjugierten Raum Elemente y_n finden kann, die mit den gegebenen x_n ein BN $\{x_n, y_n\}$ bilden.

Obiger Satz ist allgemein, d. h. für Systeme [811] gültig; wir beschränken uns auf $R = L^p$ ($1 \leq p < \infty$), d. h. auf den Wortlaut [819]. Wir führen den Beweis für $p = 1$, der Fall $p > 1$ erfordert keine wesentliche Ergänzung.

Notwendigkeit: Wäre z. B. x_1 zugänglich, so hätte man

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_1 \quad \text{mit } z_n = \sum_{k=2}^n \gamma_k^{(n)} x_k$$

und geeigneten $\gamma_k^{(n)}$. Dann wäre aber, nach (2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b y_1(t) z_n(t) dt = \int_a^b x_1(t) y_1(t) dt = 1$$

und

$$\int_a^b y_1(t) z_n(t) dt = \sum_{k=2}^n \gamma_k^{(n)} \int_a^b y_1(t) x_k(t) dt = 0 \quad (n).$$

Hinlänglichkeit: Man hat die Existenz eines $\{y_k(t)\}$ mit den Eigenschaften (2) zu zeigen. Es sei zunächst $k = 1$. Wir haben also das Momentenproblem

$$\int_a^b x_i(t) y_1(t) dt = u_i$$

mit $u_1 = 1$, $u_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots$) zu lösen. Nach [171] genügt es, die Ungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i \right| \leq \gamma \int_a^b \left| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i(t) \right| dt$$

mit einem n -freien γ für alle endlichen Zahlensysteme $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ als gültig nachzuweisen. Setzt man z_n für $-\sum_{i=2}^n \xi_i x_i$, so ist

$$(4) \quad \gamma \int_a^b |\xi_1 x_1(t) - z_n(t)| dt \leq \xi_1$$

die zu beweisende Ungleichung. Nun sollte aber $\{x_n\}$ minimal sein, also gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$, welches der Approximation von x_1 durch Linearformen der übrigen x eine untere Schranke setzt (vgl. [818]); $\gamma = 1/\varepsilon_1$ ist daher in (4) eine passende Konstante. Damit ist die Existenz von $y_1(t)$ und (ähnlich) aller $y_k(t)$ bewiesen.

Wenn die Funktionen $x_n(t)$ zu L^2 gehören, dann ist — nach [333] — die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(x, x_1, x_2, \dots, x_n)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0$$

für $x \in X$ notwendig und hinreichend. Dies führt zu dem Ergebnis:

Bezeichnet A_n die Gram'sche Determinante (vgl. [312]) des Systems $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, d. h. die Determinante mit den Elementen

$a_{ik} = \int_a^b x_i(t) x_k(t) dt$, und $A_n^{(i)}$ die zu a_{ii} gehörende Unterdeterminante von A_n , so ist die Existenz von n -freien $\gamma^{(i)}$ mit

$$(5) \quad \frac{A_n^{(i)}}{A_n} < \gamma^{(i)} \quad (n, i)$$

für die Minimalität von $\{x_n\}$ charakteristisch.

§ 2. Biorthogonalisierung.

Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein System aus L^p ($p > 1$) und sind die φ_n untereinander linear unabhängig, so lassen sie sich in ein minimales System linear transformieren, so daß — nach [817] — die Bildung eines BN möglich wird. Die Transformation kann nach einem dem Schmidt'schen ähnlichen Verfahren bestimmt werden. Es dient dazu folgendes [821]

[822] Lemma: $\{\varphi_k\}$ sei ein endliches System ($k = 1, 2, \dots, n$), sonst wie in [821]; es gibt dann ein $y(t)$ mit

$$\int_a^b y(t) \varphi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{für } k = n. \end{cases}$$

Dieses Lemma kann aus [171] gefolgert werden, wenn es uns gelingt, die Unzugänglichkeit von $\varphi_n(t)$ für die übrigen φ zu zeigen. Nun aber führt die gegenteilige Annahme zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b |\varphi_n(t) - \gamma_1^{(r)} \varphi_1(t) - \gamma_2^{(r)} \varphi_2(t) - \dots - \gamma_{n-1}^{(r)} \varphi_{n-1}(t)| dt = 0$$

mit geeigneten $\gamma_k^{(r)}$; dividiert man durch den absolut größten Koeffizienten $\gamma_k^{(r)}$, und bezeichnet die neuen Koeffizienten ebenfalls mit $\gamma_k^{(r)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), so werden alle $|\gamma_k^{(r)}|$ beschränkt (< 1). Eine Folge $\{\gamma_k^{(r)}\}$ enthält unendlich viele Einsen; das Häufungspunktverfahren liefert also

$$\int_a^b |\gamma_n^{(\infty)} \varphi_n(t) - \gamma_1^{(\infty)} \varphi_1(t) - \dots - \gamma_{n-1}^{(\infty)} \varphi_{n-1}(t)| dt = 0,$$

mit $\gamma_n^{(\infty)} = 1$, was der linearen Unabhängigkeit widerspricht; sind die $|\gamma_k^{(r)}|$ von vornherein beschränkt, so ist die Division überflüssig.

Jetzt gehen wir an die Konstruktion des BN. Wir setzen $x_1(t) = \varphi_1(t)$, wählen $y_1(t)$ der Bedingung

$$\int_a^b x_1(t) y_1(t) dt = 1$$

gemäß, sonst beliebig; setzen ferner

$$x_2(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) \quad \text{mit} \quad \alpha_1 + \alpha_2 \int_a^b \varphi_2(t) y_1(t) dt = 0,$$

und bestimmen $y_2(t)$ aus

$$\int_a^b y_2(t) \varphi_1(t) dt = 0, \quad \int_a^b y_2(t) x_2(t) dt = 1,$$

wobei vom Lemma [822] Gebrauch gemacht wird. Allgemein: es sei

$$x_n = \beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 + \dots + \beta_n \varphi_n$$

mit

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \sum_{k=1}^n \beta_k \int_a^b \varphi_k(t) y_i(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\
 \text{und} \quad & \int_a^b y_n(t) \varphi_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\
 (7) \quad & \int_a^b y_n(t) \varphi_n(t) dt = 1/\beta_n \quad (n).
 \end{aligned}$$

(Hier ist die Annahme $\beta_n \neq 0$ zulässig, denn die $n-1$ Gleichungen (6) mit n Unbekannten β_k sind homogen).

Es bietet sich die Frage, ob zu einem minimalen System $\{x_n(t) \mid$ mehr als ein System $\{y_n(t)\}$ gehört, das mit ihm ein BN bildet.

Es ist nun klar, daß $\{x_n\}$ minimal sein kann, ohne vollständig zu sein (jedes unvollständige ON ist ein Beispiel dafür); ist dann $g(t) \neq 0$ und zu allen $x_n(t)$ orthogonal, so ist gleichzeitig mit $\{x_n, y_n\}$ auch $\{x_n, y_n + g\}$ ein BN.

Andererseits ist diese Erscheinung bei einem vollständigen $\{x_n\}$ unmöglich, denn sind $\{x_n, y_n\}$, $\{x_n, z_n\}$ zwei BN, so ist $y_k - z_k$ zu allen $x_n(t)$ orthogonal, also Null. Nichtdestoweniger braucht das BN selbst nicht vollständig zu sein, wie aus § 1 erhellt.

Es gibt selbstverständlich auch vollständige BN: ein solches ist z.B. $\{x_n, x_n\}$, wenn $\{x_n\}$ ein ONV ist. *

§ 3. Biorthogonalentwicklungen.

Es sei $\{x_n, y_n\}$ ein BN, $x_n \in L^p$, $y_n \in L^{p'}$ ($1 < p < \infty$, $L^{p'} = M$); einer Funktion $f(t) \in L^p$ wird die Entwicklung

$$(8) \quad f(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i(t) \quad \text{mit} \quad \xi_i := \int_a^b f(t) y_i(t) dt \quad (i)$$

zugeordnet und, analog, einer Funktion $g(t) \in L^{p'}$ (bzw. $g(t) \in M$) die Entwicklung

$$(9) \quad g(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i y_i(t) \quad \text{mit} \quad \eta_i := \int_a^b g(t) x_i(t) dt \quad (i).$$

Die Entwicklung (8) ist—nach [811], (1) u. (2)—eine *Biorthogonalentwicklung*, ebenso wie (9), nur wird einmal nach $\{x_n, y_n\}$ das andere Mal nach $\{y_n, x_n\}$ entwickelt. Gehört $f(t)$ gleichzeitig zu L^p und $L^{p'}$, so hat es zwei Entwicklungen. Die Entwicklungen (8) und (9) heißen *konjugiert* zueinander; wir nennen auch die Systeme $\{x_n, y_n\}$ und $\{y_n, x_n\}$ zueinander konjugiert.

- [831] Ist die Entwicklung einer Funktion $f(t) \in L^p$ nach dem BN $\{x_n, Y_n\}$ schwach konvergent, so ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$$

für jedes $g(t) \in L^{p'}$ (bzw. $g(t) \in M$) konvergent.

Es sei nämlich $\bar{f}(t)$ die schwache Summe von (8); man hat für $g \in L^{p'}$ (bzw. $g \in M$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sum_{i=1}^n \xi_i x_i(t) dt = \int_a^b g(t) \bar{f}(t) dt,$$

woraus nach (8) und (9)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i = \int_a^b g(t) \bar{f}(t) dt$$

folgt.

- [832] Ist die Entwicklung eines jeden $f(t) \in L^p$ ($p > 1$) schwach konvergent, so ist die konjugierte Entwicklung für jedes $g(t) \in L^{p'}$ stark konvergent.

Beweis: Wir setzen

$$s_n(g) = \sum_{i=1}^n \eta_i y_i(t);$$

nach [831] und laut Voraussetzung ist die Folge $\{s_n(g)\}$ schwach konvergent, da

$$\int_a^b f(t) s_n(g) dt = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i.$$

Es hat also nach [164] $\|s_n(g)\|_{p'}$ eine n -freie obere Schranke; dies ist für alle $g(t) \in L^{p'}$ der Fall, also kann [151] auf die Folge der linearen Operationen $\{s_n(g)\}$ angewendet werden, mit dem Ergebnis, daß die Operationsnormen eine beschränkte Folge $\{\mu_n\}$ bilden. Ist μ größer als alle μ_n , so kommt

$$(10) \quad \|s_n(g)\|_{p'} \leq \mu \|g\|_{p'} \quad (n, g).$$

Schreibt man $\bar{g}(t)$ für die schwache Grenze von $s_n(g)$, so wird $s_n(\bar{g}) = s_n(g)$, da ja

$$\bar{\eta}_i = \int_a^b \bar{g}(t) x_i(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(t) x_i(t) dt = \eta_i.$$

Wüßte man nun, daß $\bar{g}$ für die $s_n(g)$ zugänglich ist, und wäre $\{a_n\}$ die entsprechende Folge von Linearformen

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} s_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{g} - \sigma_n\| = 0,$$

so könnte man in (10) für g die Differenz $\bar{g} - \sigma_n$ einsetzen und bekäme

$$\|s_n(\bar{g} - \sigma_n)\| \leq \mu \|\bar{g} - \sigma_n\|, \quad \text{also} \quad \|s_n(g) - \sigma_n\| \leq \mu \|\bar{g} - \sigma_n\|,$$

und schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(g) - \sigma_n\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(g) - \bar{g}\| = 0,$$

was der Behauptung gleichkommt.

Die Zugänglichkeit von $\bar{g}(t)$ ergibt sich aber aus folgender Überlegung: Die schwache Konvergenz bewirkt die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b s_k(t) \varphi(t) dt = \int_a^b \bar{g}(t) \varphi(t) dt \quad (\varphi) \quad *$$

und diese zeigt ihrerseits die Unlösbarkeit des Momentenproblems

$$\int_a^b s_k(t) \varphi(t) dt = 0 \quad (k), \quad \int_a^b \bar{g}(t) \varphi(t) dt = 1$$

(mit $\varphi(t)$ als der Unbekannten). Es kann daher das Kriterium I, §7, (25) für alle Zahlensysteme $\{\xi_i\}$ nicht erfüllt sein, es muß also — wie groß auch y sei — die Ungleichung

$$|\xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 0 + \dots + \xi_n \cdot 0| < \gamma \left\| \xi_1 \bar{g} + \sum_{k=2}^n \xi_k s_k \right\|$$

für gewisse $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ durch ihr Gegenteil

$$\left\| \xi_1 \bar{g} + \sum_{k=2}^n \xi_k s_k \right\| < \frac{1}{\gamma} \cdot |\xi_1|$$

ersetzt werden, was nach Division mit ξ_1 die behauptete Zugänglichkeit erweist.

Aus [832] folgt unmittelbar, daß unter denselben Annahmen die Entwicklung eines jeden $f(t) \in L^p$ ($p > 1$) stark konvergiert: man braucht bloß zu beachten, daß die konjugierte Entwicklung a fortiori schwach konvergiert, und [832] auf das konjugierte BN anzuwenden.

Der Grenzfall $p = 1$ von [832] lautet:

- [833] Ist die Entwicklung (8) eines jeden $f(t) \in L$ schwach konvergent, so ist die Entwicklung (9) eines jeden $g(t) \in M$ f.ü. beschränkt.

Denn $\{s_n(g)\}$ ist schwach konvergent, also $\|s_n\|_M \leq \alpha$ (n -frei) und w. o. G. $\|s_n\| \leq \alpha$. Und umgekehrt:

- [834] Ist die Entwicklung (9) eines jeden $g(t) \in M$ f.ü. beschränkt und $\{x_n(t)\}$ vollständig in bezug auf M , so ist die Entwicklung (8) eines $f(t) \in L$ stets gegen $f(t)$ stark konvergent.

Beweis: Es ist

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \tau_i \right| \leq \int_a^b |f(t)| \cdot \left| \sum_{i=1}^n \tau_i y_i(t) \right| dt,$$

also, nach Voraussetzung, der linksseitige Ausdruck unter einer n -freien Schranke gelegen. Nun ist aber

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \tau_i = \int_a^b r_n(f) g(t) dt,$$

wenn $r_n(f)$ die n -te Partialsumme von (8) bezeichnet, also nach [154] auch $\|r_n(f)\|_L$ unterhalb einer n -freien Schranke $\mu(f)$. $\{r_n(f)\}$ ist aber eine Folge von linearen Operationen; wir können hier [151] (mit $F = E = L$) anwenden und erhalten die Beschränktheit der Operationsnormen: $\|r_n\| < \mu$; μ ist n - und f -frei. Es gilt daher

$$\|r_n(f)\|_L \leq \mu \|f\|_L \quad (n, f).$$

Die Vollständigkeit von $\{x_n\}$ in bezug auf M bewirkt die Abgeschlossenheit in bezug auf L ; es sei also

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = f \quad \text{mit} \quad \rho_n = \sum_{k=1}^n \hat{\rho}_{nk} x_k,$$

d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \rho_n\|_L = 0$; es kommt wegen $\|r_n(f - \rho_n)\|_L \leq \mu \|f - \rho_n\|_L$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n(f) - r_n(\rho_n)\|_L = 0,$$

und wegen $r_n(\rho_n) = \rho_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n(f) - \rho_n\|_L = 0,$$

was mit (11) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(f) = f$ ergibt.

Aus beiden letzten Sätzen folgt für $BN[x_n, y_n]$ mit in bezug auf M vollständigen $\{x_n\}$, daß die schwache Konvergenz von (8)

für sämtliche $f \in L$ bereits die starke Konvergenz für diese Funktionenklasse sichert.

Es bleibe nicht unerwähnt, daß einige Sätze des VI-en Kapitels über Multiplikatoren sich sinngemäß auf Biorthogonalsysteme übertragen lassen.

§ 4. Biorthogonalentwicklungen in L^2 .

Es sei $x_i(t) \in L^2$, $y_i(t) \in L^2$ für alle i und $\{x_i, y_i\}$ sei ein BN. Dann hat jedes $f(t) \in L^2$ zwei Entwicklungen: (8) und (9), denn man darf $g(t) = f(t)$ wählen. Man würde aber fehlgehen, wenn man etwa die Konvergenz von $\sum_{i=1}^n \gamma_i^2$ (oder $\sum_{i=1}^n \xi_i^2$) vermutete; diese ist nicht einmal dann notwendig, wenn die Quadratintegrale von $x_i(t)$ eine i -freie obere Schranke besitzen. Wir können vielmehr zeigen, daß das [816] als Beispiel begleitende BN für ein gewisses $f \in L^2$ [841] allen γ_i den Wert 1 erteilt. Es sei nämlich $\{\varphi_i\}$ ein ONV in bezug auf L^2 , $x_i = \varphi_1 + \varphi_{i+1}$; nach [171] genügt es die Ungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^n \gamma_i \xi_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right| \leq \left(\int_a^b \left| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i(t) \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

für alle $n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nachzuweisen. Nun ist aber in der Tat

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i(t) \right|^2 dt &= \int_a^b \left| \varphi_1(t) \sum_{i=1}^n \xi_i + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_{i+1}(t) \right|^2 dt \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^2 \end{aligned}$$

und die Quadratintegrale der $X_i(t)$ haben alle den Wert 2.

Aus [832] ersieht man, daß die schwache (und a fortiori die starke) Konvergenz aller Entwicklungen (8) die starke Konvergenz aller konjugierten, also beider Entwicklungen zeitigt.

Bezeichnet man in diesem Falle wieder mit $r_n(t)$ und $s_n(t)$ die Partialsummen der beiden Entwicklungen (8) und (9), mit $f(t)$ bzw. $\bar{g}(t)$ ihre starken Summen, so kommt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - r_n(t)) (\bar{g}(t) - s_n(t)) dt = 0,$$

also

$$(12) \quad \int_a^b \bar{f}(t) \bar{g}(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \gamma_i.$$

Ist das BN und das zu ihm konjugierte System vollständig, so kann man [815] anwenden und (12) zu

$$(13) \quad \int_a^b f(t) g(t) dt = \sum_{i=1}^{n_{\infty}} \xi_i \eta_i$$

verstärken (im Falle $f(t) = g(t)$ erhält man

$$\int_a^b f^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i,$$

ein Seitenstück zu der Parseval'schen Beziehung).

Wir werden die eben gemachte Annahme mit BNVV andeuten und für solche Systeme die drei Grenzwertbeziehungen

$$1^{\circ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - r_n(t))^2 dt = 0,$$

$$2^{\circ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (g(t) - s_n(t))^2 dt = 0,$$

$$3^{\circ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - r_n(t)) (g(t) - s_n(t)) dt = 0$$

näher erörtern.

Zunächst werde bemerkt, daß jede von den Beziehungen 1° , 2° bereits 3° zur Folge hat, denn

$$\begin{aligned} & \int_a^b (f(t) - r_n(t)) (g(t) - s_n(t)) dt \\ &= \int_a^b (f(t) - r_n(t)) g(t) dt - \int_a^b (f(t) - r_n(t)) s_n(t) dt; \end{aligned}$$

das erste Integral rechts strebt gegen Null wegen 1° , während das zweite gleich

$$\int_a^b f(t) s_n(t) dt - \int_a^b r_n(t) s_n(t) dt = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i - \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i,$$

also gleich Null ist; ebenso wird 3° aus 2° abgeleitet.

Ferner werde an [832] erinnert, demzufolge die Erfüllung von 1° (bzw. 2°) für alle f (bzw. g) die Richtigkeit von 2° (bzw. 1°) für alle g (bzw. f) zur Folge hat.

Wir können aber auch aus 3° auf 1° (und ebenso auf 2°) schließen. Genauer: ist 3° für alle f und alle g erfüllt, so ist 1° für alle f und 2° für alle g gültig. In der Tat, die Voraussetzung impliziert die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \tau_i$ und umsomehr die Beschränktheit der Partialsummen jener Reihe; dieselben lassen sich als

$$\int_a^b r_n(f; t) g(t) dt$$

schreiben; diese Schreibweise deutet die Abhängigkeit des r_n von f an. Vermöge [152] ist also $\|r_n(f; t)\|_{L^2}$ unter einer n -freien Schranke gelegen, woraus, genau wie beim Beweise von [834],

$$\|r_n(f; t)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2},$$

folgt, nur ist jetzt L^2 der betrachtete Raum. Sonst ist aber der Beweis auch weiter wie jener zu führen und ergibt 1° . Aus dem Gesagten folgt unmittelbar:

Sind $\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \tau_i \right|$ für alle f und g unter einer n -freien Schranke [842] gelegen, so hat das betreffende BNVV die Eigenschaften $1^\circ, 2^\circ$ und 3° .

Konstruieren wir jetzt folgendes BNVV: Es sei $(\varphi_i(t))$ ein ONV; es werde

$$x_i(t) = \varphi_i(t) - \varphi_{i+1}(t), \quad y^i(t) = \sum_{k=i}^i \varphi_k(t)$$

gesetzt. Daß dem System $\{x_i, y_i\}$ beide V zukommen, ist ohne weiteres sichtbar, denn

$$\int_a^b f(t) x_i(t) dt = 0 \quad (I)$$

führt zu

$$\int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt = \int_a^b f(t) \varphi_{i+1}(t) dt \quad (II),$$

also wegen [265] zu

$$(14) \quad \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt = 0 \quad (I),$$

d. h. zu $f(t) = 0$ f. ü.; ist aber $\int_a^b f(t) y_i(t) dt = 0$ für alle i , so kommt

$$\int_a^b f(t) \varphi_1(t) dt = 0, \quad \int_a^b f(t) (y_{i+1}(t) - y_i(t)) dt = 0,$$

also noch einmal (14) und $f(t) = 0$ f. ü.

[843] Für dieses BNVV existieren vier Funktionen $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$ mit

$\alpha)$	1° richtig,	2° richtig	(f_1) ,
$\beta)$	1° richtig,	2° falsch	(f_2) ,
$\gamma)$	1° falsch,	2° richtig	(f_3) ,
$\delta)$	1° falsch,	2° falsch	(f_4) .

Es sei nämlich $f(t) \in L^2$; die Koeffizienten ξ_i, η_i lassen sich durch die

$$c_i = \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt$$

als $\xi_i = c_1 + c_2 + \dots + c_i$, $\eta_i = c_i - c_{i+1}$ ausdrücken, was den Beziehungen 1° und 2° die Gestalt

$$(1^\circ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) + \varphi_{n+1}(t) \sum_{i=1}^n c_i \right]^2 dt = 0,$$

$$(2^\circ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) + c_{n+1}(t) \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \right]^2 dt = 0$$

verleiht. Wegen [373] ergeben sich daraus, als charakteristische Bedingungen für 1°, bzw. 2°

$$1_0 \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 0, \quad 2_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n c_{n+1}^2 = 0.$$

Nun können wir aber $\{c_i\}$ beliebig vorschreiben, wenn nur auf die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ geachtet wird. Wir wählen also viererlei $\{c_i\}$:

$$(a) \quad |c_{n+1}| \leq |c_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0;$$

es gilt 1₀ und 2₀.

$$(b) \quad c_i = (-1)^i / i \quad \text{für } i \neq 10^k + 1, \quad i \geq 2 \quad (k \text{ ganzzahlig}),$$

$$c_i = (-1)^{k/k} \quad \text{für } i = 10^k + 1, \quad c_1 = - \sum_{i=2}^{\infty} c_i;$$

1₀ gilt, 2₀ nicht, denn es ist $n c_{n+1}^2 = 10^k / k^2$ für $n = 10^k$.

$$(\gamma) \quad c_i = 1/i \log(i+1);$$

1₀ gilt nicht, 2₀ ja.

$$(\delta) \quad c_i = 1/i \text{ für } i \neq 10^k + 1, \quad c_i = 1/k \text{ für } i = 10^k + 1;$$

hier gilt weder 1₀ noch 2₀.

In allen vier Beispielen ist $\{c_i\} \in l^2$, so daß die in [843] angesagten Funktionen tatsächlich existieren.

Im Falle δ) (und nur in diesem) kann man noch die Unterfälle

$$\delta_1) \quad \int_a^b (f - r_n)(f - s_n) dt > 0, \quad \delta_2) \quad \text{„}\delta_1) \text{ falsch“}$$

unterscheiden. Unser Beispiel δ) entspricht nun dem Unterfall δ_2), denn

$$\begin{aligned} (15) \quad \int_a^b (f(t) - r_n(t))(f(t) - s_n(t)) dt &= \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \\ &= \int_a^b f^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 + c_{n+1} \sum_{i=1}^n c_i, \end{aligned}$$

also ist für die Folge δ), wegen

$$c_{n+1} \sum_{i=1}^n c_i \geq 1/k \log 10^k > 2,$$

Null als Grenzwert von (15) ausgeschlossen. Um den Unterfall δ_1) zu erhalten, genügt es in δ) $c_i = 1/k^2$ (anstatt $= 1/k$) für $i = 10^k + 1$ zu setzen.

Die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ ist — wie wir bereits bemerkt haben — für 1^o, wie auch für 2^o, notwendig; hier geben wir noch eine andere Bedingung:

Die Konvergenz der Folge

[844]

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_i \xi_k \alpha_{ik} \quad \text{mit} \quad \alpha_{ik} = \int_a^b x_i(t) x_k(t) dt$$

bzw. der Folge

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_i \eta_k \beta_{ik} \quad \text{mit} \quad \beta_{ik} = \int_a^b y_i(t) y_k(t) dt$$

ist für die starke Konvergenz der Entwicklung (8) bzw. (9) nach dem BN $\{x_n, y_n\}$ notwendig.

Wir haben nämlich

$$\sum_{i=m+1}^n \sum_{k=m+1}^n \xi_i \xi_k \alpha_{ik} = \sum_{i=m+1}^n \xi_i \int_a^b x_i(t) [s_n(t) - s_m(t)] dt = \int_a^b [s_n(t) - s_m(t)]^2 dt,$$

$$\sum_{i=m+1}^n \sum_{k=1}^m \xi_i \xi_k \alpha_{ik} = \int_a^b [s_n(t) - s_m(t)] s_m(t) dt = \sum_{i=1}^m \sum_{k=m+1}^n \xi_i \xi_k \alpha_{ik},$$

woraus der Satz für die erste Lesart folgt; ähnlich beweist man die zweite Lesart.

§ 5. Relativ-orthogonale Systeme,

Ein Funktionensystem $\{\varphi_n(t)\}$ mit einer Funktion $w(t) > 0$, die ihm die Eigenschaft

$$(16) \quad \int_a^b w(t) \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \quad (n, m)$$

verleiht, gibt zu einem BN Anlaß, und zwar ist dann $\{\varphi_n(t), w(t) \varphi_n(t)\}$ ein BN. Man könnte auch $\psi_n(t) = \sqrt{w(t)} \varphi_n(t)$ einführen und $\{\psi_n(t)\}$, also ein ON, betrachten; indessen bilden die Systeme $\{\varphi_n\}$ in anbeacht einer ihnen angepaßten Definition der Abgeschlossenheit und Vollständigkeit (vgl. [871], [872]) eine Klasse für sich; wir [851] wollen sie als die *relativ zu $w(t)$ orthogonalen Systeme* (kurz RO) bezeichnen. (Führt man die Variable s mittels

$$s = \int_a^t w(t) dt = v(t)$$

ein, so bilden die Funktionen $\Phi_n(s) = \varphi_n[v^{-1}(s)]$ in $0, v(b)$ ein gewöhnliches ON).

[852] Unter den RO verdienen die *relativ-orthogonalen Polynome* besondere Beachtung; damit werden Polynome $\varphi_n(t)$ gemeint, deren Grad stets dem Index gleicht und die relativ zu einem $w(t)$ (im endlichen oder unendlichen Intervall) orthogonale Systeme darstellen (kurz ROP); n nimmt die Werte $0, 1, 2, \dots$ an.

[853] Zu einem jeden in a, b integrierbaren $w(t) \geq 0$ gibt es stets ein bis auf die Faktoren ± 1 eindeutig bestimmtes ROP-System.

Beweis: (16) ($n \neq m$) ist jetzt gleichbedeutend mit

$$(17) \quad \int_a^b w(t) \varphi_n(t) t^k dt = 0 \quad (k < n; n = 1, 2, \dots).$$

Setzt man $\varphi_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, so gibt (17)

$$(18) \quad a_n \lambda_k + a_{n-1} \lambda_{k+1} + \dots + a_1 \lambda_{n+k-1} + \lambda_{n+k} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

mit $\lambda_i = \int_a^b w(t) t^i dt$ (i) als das zur Bestimmung der a_k ($k=1, 2, \dots, n$)

dienende Gleichungssystem (im Falle eines unendlichen Intervalls muß die Existenz der λ_i einzeln vorausgesetzt werden). Die Determinante von (18) ist die Diskriminante der quadratischen Form in h

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{i+j} h_i h_j = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n-1} h_i t^i \right]^2 w(t) dt,$$

und als solche positiv. Damit ist die eindeutige Bestimmbarkeit der a_k ($k=1, 2, \dots, n$) dargetan und die Bedingung der Normiertheit gibt a_0 .

Beispiele.

1. $w(t) = 1$, $a, b = -1, 1$ liefert die Legendre'schen Polynome [411] und

2. $w(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, $a, b = -1, 1$ führt zu Tschebyscheff'schen Polynomen [421].

3. Allgemeiner: $w(t) = (1+t)^\alpha (1-t)^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a, b = -1, 1$ liefert

$$\varphi_n(t) = (1+t)^{1-\alpha} (1-t)^{1-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1+t)^{\alpha+\beta-1} (1-t)^{\alpha+\beta-1}],$$

also die Jacobi'schen Polynome, die u.a. 1. und 2. als Sonderfälle umfassen.

4. $w(t) = t^{\alpha-1} e^{-ht}$, $\alpha > 0$, $h > 0$, $a, b = (0, \infty)$ gibt die Laguerre'schen Polynome [481] und

5. $w(t) = e^{-ht}$, $h > 0$, $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ die Hermite'schen Polynome [484].

6. Für ein gegebenes $w(t)$ können noch andere RO erhalten werden: 1° indem man nach Schmidt [313] das System

$$\{\sqrt{w(t)} t^{k+\alpha}\} \quad (k > 0 \text{ fest}, n=0, 1, \dots)$$

orthogonalisiert, so daß

$$\{\sqrt{w(t)} t^k \phi_n(t)\}$$

mit Polynomen $\phi_n(t)$ n -ten Grades entsteht (ist k nicht ganzzahlig, so ist das entsprechende RO kein ROP relativ zu w); 2° indem

man $\{\sqrt{w(t)} t^{k_n}\}$ mit $k_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n = \infty$ orthogonalisiert, wobei die letzte Bedingung die Vollständigkeit sichert.

§ 6. Eigenschaften der relativ-orthogonalen Polynome.

Wir machen den Ansatz

$$(19) \quad \alpha_{n+1} \varphi_{n+2}(t) = (t + \beta_{n+2}) \varphi_{n+1}(t) + P(t) \quad (n)$$

mit einem Polynom $P(t)$ von höchstens n -tem Grade. Da nach (17)

$$(20) \quad \int_a^b w(t) \varphi_n(t) G(t) dt = 0$$

für jedes Polynom $G(t)$ vom Grade $< k$ statthat, so folgt aus (19)

$$\int_a^b P(t) G(t) w(t) dt = 0$$

für alle Polynome $G(t)$, deren Grad $n-1$ nicht übertrifft. Daraus ergibt sich, da (17) eindeutig lösbar ist, $P(t) = \alpha \varphi_n(t)$; (19) multipliziert mit $w(t) \varphi_n(t)$ und integriert ergibt

$$\int_a^b w(t) t \varphi_{n+1}(t) \varphi_n(t) dt + \alpha = 0,$$

also

$$\alpha = - \int_a^b w(t) t \varphi_{n+1}(t) \varphi_n(t) dt.$$

Andererseits liefert die Multiplikation mit $w(t) \varphi_{n+2}(t)$ und Integration

$$\alpha_{n+1} = \int_a^b w(t) t \varphi_{n+2}(t) \varphi_{n+1}(t) dt,$$

d. h. $\alpha = -\alpha_n$. Wir gewinnen damit die *rekurrente Beziehung*

$$[861] \quad \alpha_{n+1} \varphi_{n+2}(t) = (t + \beta_{n+2}) \varphi_{n+1}(t) - \alpha_n \varphi_n(t) \quad (n = -1, 0, 1, \dots)$$

(wo $\varphi_{-1}(t)$ die identische Null bezeichnet) und die *Christoffel-Darboux'sche Identität*

$$[862] \quad K_n(t, u) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) \varphi_i(u) = \frac{p_n}{p_{n+1}} \frac{\varphi_{n+1}(t) \varphi_n(u) - \varphi_n(t) \varphi_{n+1}(u)}{t - u}$$

mit p_n als Koeffizienten von t^n in $\varphi_n(t)$ ($p_n > 0$).

Beweis von [862]: Die Beziehung [861] multipliziert mit $t^n w(t)$ und integriert liefert

$$0 = \int_a^b w(t) \varphi_{n+1}(t) t^{n+1} dt - x_n \int_a^b w(t) \varphi_n(t) t^n dt;$$

da nun

$$\int_a^b w(t) \varphi_n(t) p_n t^n dt = \int_a^b w(t) \varphi_n^2(t) dt = 1,$$

so ist

$$\int_a^b w(t) \varphi_n(t) t^n dt = \frac{1}{p_n}, \quad \text{also} \quad x_n = \frac{1}{p_{n+1}}, \quad x_n = \frac{p_n}{p_{n+1}};$$

multipliziert man also [861] mit $\varphi_{n+1}(u)$, so kommt

$$(21) \quad \frac{p_{n+1}}{p_{n+2}} \varphi_{n+2}(t) \varphi_{n+1}(u) + \frac{p_n}{p_{n+1}} \varphi_n(t) \varphi_{n+1}(u) = (t + \beta_{n+2}) \varphi_{n+1}(t) \varphi_{n+1}(u)$$

und die Vertauschung von t und u liefert eine analoge Beziehung, die von (21) subtrahiert

$$(22) \quad \varphi_{n+1}(u) \varphi_{n+1}(t) (t - u) \\ = \frac{p_{n+1}}{p_{n+2}} (\varphi_{n+2}(t) \varphi_{n+1}(u) - \varphi_{n+2}(u) \varphi_{n+1}(t)) - \frac{p_n}{p_{n+1}} (\varphi_n(t) \varphi_{n+1}(u) - \varphi_{n+1}(u) \varphi_n(t))$$

ergibt. Jetzt braucht man bloß (22) über $n = -1, 0, 1, \dots, m-1$ zu summieren, um [862] (mit $n = m$) zu erhalten.

Die Nullstellen des Polynoms $\varphi_n(t)$ sind sämtlich reell, einfach [863] und in (a, b) enthalten.

Es sei nämlich m die Anzahl der Zeichenwechsel von $\varphi_n(t)$ in (a, b) und $t_1, t_2, \dots, t_m$ die betreffenden Stellen. Wir setzen

$$G(t) = \begin{cases} (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_m) & \text{für } m > 0, \\ 1 & \text{für } m = 0; \end{cases}$$

dann ist

$$(23) \quad \int_a^b w(t) \varphi_n(t) G(t) dt \neq 0,$$

denn der Integrand erleidet keinen Zeichenwechsel; (20) und (23) zeigen, daß der Grad m von $0(t)$ wenigstens n beträgt, w. z. b. w.

§ 7. Vollständigkeit und Abgeschlossenheit.

- [871] Ein System $\{\varphi(t)\}$ von Polynomen heißt *vollständig* in bezug auf L^p ($p > 1$), wenn

$$\int_a^b w(t) f(t) \varphi(t) dt = 0 \quad (\varphi)$$

- [872] und die Integrierbarkeit von $|f(t)|^p w(t)$ das Verschwinden von $f(t)$ f.ü. bewirkt; es heißt *abgeschlossen* (in bezug auf L^p), wenn es zu jeder Funktion $f(t)$ mit integrierbarem $|f(t)|^p w(t)$ eine Folge von Linearformen

$$L_n(t) = a_{n0} \varphi_0(t) + a_{n1} \varphi_1(t) + \dots + a_{nn} \varphi_n(t)$$

gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b w(t) |f(t) - L_n(t)|^p dt = 0.$$

Eine mehrmals benutzte Schlußweise erlaubt uns aus der Vollständigkeit in bezug auf L^p die Abgeschlossenheit in bezug auf L^p ($1/p + 1/p' = 1$) zu folgern. Es genügt daher Kriterien für die Vollständigkeit aufzustellen. Es sei bemerkt, daß die Bedingung $w(t) \neq 0$ f.ü. unumgänglich ist, denn sonst ist die charakteristische Funktion der durch $w(t) = 0$ erklärten t -Menge von Null verschieden und zu allen φ relativ-orthogonal.

- [873] Das Intervall (a, b) sei endlich und $w(t) > 0$ f.ü. in (a, b) ; dann ist das System $\{\varphi_n(t)\}$ der relativ-orthogonalen Polynome vollständig in bezug auf L .

Es genügt aus $\int_a^b w(t) f(t) t^k dt = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) $f(t) = 0$ f.ü.

abzuleiten. Nun ist aber $w(t)f(t) \in L$ und folglich, nach [358], $w(t)f(t) = 0$ f.ü. und $f(t) = 0$ f.ü., w.z. b.w.

Daraus folgt die Abgeschlossenheit der ROP in bezug auf L^p ($p > 1$). Das unendliche Intervall bietet insofern Schwierigkeiten, als hier der Müntz'sche Satz versagt. Wir können hier bloß eine hinreichende Bedingung angeben, die z.B. für Laguerre'sche und Hermite'sche Polynome erfüllt ist:

- [874] Es sei $v(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |t|^\xi dt$, $1/p' + 1/p = 1$; die Beziehungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} v(np')^{1/np'} = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) dt < \infty$$

sind für die Vollständigkeit von $\{\varphi_n(t)\}$ in bezug auf L^p ($p > 1$) hinreichend.

Beweis: Es sei $w(t) |f(t)|^p \in L$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |f(t)|^p dt = \alpha^p$.
Dann ist

$$(24) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) f(t) t^k dt \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |t|^{p'k} dt \right)^{1/p'} \\ = \alpha^{1/p'} (p'k).$$

Es werde

$$(25) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) f(t) t^k dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

vorausgesetzt. Die Funktion

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} w(t) f(t) dt \quad (i = \sqrt{-1})$$

existiert wegen $\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |f(t)| dt \leq \alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) dt \right)^{1/p}$. Wir wollen die
Reihendarstellung

$$(26) \quad F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) t^n f(t) dt$$

begründen. Dazu genügt es

$$(27) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u|^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) |t|^n |f(t)| dt \sim$$

zu zeigen. Nun hat aber der Koeffizient c_n von $|u|^n$ in (27) nach
[114] die Eigenschaft

$$(0 < \epsilon) c_n \sim \frac{1}{n!} \alpha v(np)^{1/p'}$$

also, nach der Voraussetzung [874], die Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = 0$,
welche die beständige Konvergenz von (26) sichert. (25) und (26)
geben jetzt $F(u) = 0$. Gelingt es uns daraus $w(t) f(t) = 0$ f. d.
abzuleiten, so wird der Beweis erbracht sein.

Es sei also $\varphi(t) \in L$ in $(-\infty, +\infty)$; es ist dann, wie wir ge-
sehen haben,

$$(28) \quad F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} \varphi(t) dt$$

für sämtliche u vorhanden und wir nennen diese Funktion die
Fourier'sche Transformierte von $\varphi(t)$. Wir haben also zu zeigen, daß
 $F(u) = 0$ das Verschwinden von $\varphi(t)$ f. d. bewirkt.

Beweis von [875]: 1° Es sei

$$g_{a,b}(t) = \begin{cases} 2a - |t-b| & \text{für } |t-b| \leq 2a \\ 0 & \text{für } |t-b| \geq 2a; \end{cases}$$

es sei ferner $f(t)$ in jedem endlichen Intervall integrierbar und

$$(29) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_{a,b}(t) dt = 0$$

für alle a, b ; dann ist $f(t) = 0$ f. ü. Denn führt man

$$h_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < a \\ 0 & \text{für } |t| \geq a \end{cases}$$

ein, so wird

$$g_{a,b}(t) = \int_{b/2-a}^{b/2+a} h_a(t-b/2-u) du,$$

und (29) geht in

$$(30) \quad 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{b/2-a}^{b/2+a} h_a(t-b/2-u) du dt = \int_{b/2-a}^{b/2+a} du \int_{b/2-a}^{b/2+a+u-a} f(t) dt = \int_{b/2-a}^{b/2+a} \int_{b/2-a}^{b/2+a} f(u+t) du dt$$

über. $f(t_0) \neq 0$ impliziert $f(t+u) \neq 0$ auf der Geraden $t+u=t_0$; wäre also $f(t) \neq 0$ auf einer positiven t -Menge, so wäre $f(t+u) \neq 0$ auf einer ebenen Menge von positivem Maße, was gegen die Tatsache verstößt, daß das letzte Doppelintegral (30), über ein beliebiges Quadrat erstreckt, verschwindet.

2° Führen wir nun die in $(-\infty, +\infty)$ integrierbare Funktion

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2 \sin au}{u} \right)^2 e^{-ibu}$$

ein. Wir werden zeigen, daß $g_{a,b}(t)$ die Fourier'sche Transformierte von $G(u)$ ist. In der Tat haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{itu} du &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2 \sin au}{u} \right)^2 e^{iu(t-b)} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(a - (t-b)/2)u + \sin^2(a + (t-b)/2)u - 2 \sin^2(t-b)u/2}{u^2} du \\ &\quad + \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 au \sin(t-b)u}{u^2} du. \end{aligned}$$

Das zweite Integral rechterhand verschwindet wegen $\sin(-t) = -\sin t$; unter Anwendung der Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin au}{u} \right)^2 du = \pi |a|$$

erhält man also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{iut} du = \left| a - \frac{t-b}{2} \right| + \left| a + \frac{t-b}{2} - 2 \right| \frac{t-b}{2} = g_{a,b}(t).$$

3° Um [875] zu zeigen, genügt es nach 1° zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,b}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) F(u) du$$

zu gelangen (vgl. (28)). Es ist aber

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,b}(t) \varphi(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot dt \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{iut} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \cdot du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) F(u) du. \end{aligned}$$

Damit sind [875] und [874] endgültig bewiesen.

Die Vollständigkeit der Orthogonalpolynome in $(0, \infty)$ gewinnt man wie die eben bewiesenen Sätze, denn man hat bloß $w(t)=0$ für $t < 0$ zu setzen. In diesem Falle ist aber ein einfacherer Beweis möglich. Es sei nämlich

$$(31) \quad \int_0^{\infty} w(t) f(t) t^k dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots; w(t) | f(t)|^p \in L; p > 1),$$

$$(32) \quad F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ut} w(t) f(t) dt.$$

Das Integral (32) existiert: es ist ja vermöge $e^{-ut} < 1$ für $u > 0$

$$|F(u)| \leq \left(\int_0^{\infty} w(t) |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^{\infty} w(t) dt \right)^{1/p'}.$$

Setzt man

$$(33) \quad c_n = \int_0^{\infty} w(t) t^n dt$$

und ist

$$(34) \quad \frac{1}{n} (c_{np'})^{1/p'} = o(1),$$

so wird

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{-ut}{n!} \right)^n w(t) f(t) dt < \infty,$$

also

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n w(t) f(t) dt.$$

Die Voraussetzung (31) liefert $F(u) = 0$ für sämtliche $u \geq 0$; andererseits gibt die Substitution $e^{-t} = \tau$ in (32)

$$(0 \Rightarrow) F(u) = \int_1^0 \tau^u w(\log \tau) f(\log \tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

also ist nach [358] $w(\log \tau) f(\log \tau) = 0$ f. ü., d. h. $f(t) = 0$ f. ü. Damit ist aber gezeigt:

[876] Ist $w(t)$ in $(0, \infty)$ integrierbar und haben die in (33) erklärten c_n die Eigenschaft (34), so ist das relativ zu $w(t)$ orthogonale Polynomsystem in bezug auf L^p ($p > 1$) vollständig.

Obige Annahmen über $w(t)$ sind für die Vollständigkeit keineswegs notwendig. Andererseits führt nicht jede in $(0, \infty)$ integrierbare Funktion $w(t)$ zu einem vollständigen ROP; wir wissen ja ([392]), daß $\{t^n\}$ in $(0, \infty)$ in bezug auf L unvollständig ist.

§ 8. Entwicklungen nach relativ-orthogonalen Polynomen.

[881] Entwicklung von $f(t)$ nach einem ROP $\{\varphi_n(t)\}$ heißt die Reihe

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad \text{wo} \quad a_n = \int_a^b w(t) f(t) t^n dt \quad (n).$$

$$[882] \quad \int_a^b w(t) f^2(t) dt < \infty \quad \text{impliziert} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Es ist nämlich auf Grund der Definition von $\{\varphi_n\}$ als ROP:

$$0 < \int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t) \right]^2 w(t) dt = \int_a^b w(t) f^2(t) dt - \sum_{i=0}^n a_i^2.$$

[883] Unter allen Polynomen $G_n(t)$ n -ten Grades erteilt das Polynom

$\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t)$ dem Integral

$$\int_a^b [f(t) - G_n(t)]^2 w(t) dt$$

den kleinsten Wert.

Es ist nämlich $G_n(t) = \sum_{i=0}^n \gamma_i \varphi_i(t)$ für jedes n und man hat das Minimum von

$$\int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=0}^n \gamma_i \varphi_i(t) \right]^2 w(t) dt$$

durch geeignete Wahl der γ_i zu realisieren, was — ebenso wie in [262] — $\gamma_i = a_i$ (für alle i) ergibt.

Auf Grund der in § 7 befindlichen Betrachtung über Vollständigkeit und Abgeschlossenheit folgt aus [883] für ROPV

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t) \right]^2 w(t) dt = 0, \quad [884]$$

wenn die Voraussetzung von [882] erfüllt ist.

Unter denselben Voraussetzungen wie [884] gilt

$$\int_a^b w(t) f^2(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2. \quad [885]$$

Konvergenz. Die Partialsummen der Entwicklung [881] gestatten die Darstellung

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(t) \\ &= \int_a^b w(u) f(u) \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(u) du = \int_a^b w(u) f(u) K_n(t, u) du. \end{aligned}$$

Bemerken wir, daß

$$\int_a^b w(u) K_n(t, u) du = 1 \quad \text{f. ü.}$$

ist; in der Tat, für $f(t) \equiv 1$, ist $a_n = 0$ ($n > 0$) und $a_0 = \int_a^b w(u) \varphi_0(u) du$,

also $a_0 \varphi_0(t) = \int_a^b w(u) \varphi_0^2(u) du = 1$, denn $\varphi_0(t) = \text{const.}$ Demnach

$$f(t) = \int_a^b w(u) f(t) K_n(t, u) du,$$

also

$$(35) \quad s_n(t) - f(t) = \int_a^b w(u) [f(u) - f(t)] K_n(t, u) du.$$

Die Formel [862] für den Kern $K_n(t, u)$ bringt (35) auf die Gestalt

$$s_n(t) - f(t) = \frac{p_n}{p_{n+1}} \int_a^b w(u) [f(u) - f(t)] \frac{\varphi_{n+1}(t) \varphi_n(u) - \varphi_n(t) \varphi_{n+1}(u)}{t - u} du.$$

Ist $p_n = O(p_{n+1})$, so kann man ähnliche Konvergenzkriterien wie in der Theorie der Fourierreihen aufstellen, z. B.:

[886] Die Ungleichungen

$$|\varphi_n(t_0)| \leq \alpha, \quad \int_a^b w(t) \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right)^2 dt < \infty$$

(mit n -freiem α) bedingen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t_0) = f(t_0),$$

denn der Ausdruck

$$\int_a^b w(u) \frac{f(u) - f(t_0)}{u - t_0} \varphi_n(u) du$$

konvergiert gegen Null für $n \rightarrow \infty$, als n -ter Koeffizient der Entwicklung von $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ nach $\{\varphi_n\}$. Dieser Satz ist z. B. auf das Legendre'sche System in jedem inneren Punkte von $(-1, +1)$ anwendbar.

ABKÜRZUNGEN, BEZEICHNUNGEN, SYMBOLE

(m_q^n bedeutet: m -te Seite, q^n -te Zeile von ^{oben}unten).

- A [344] 79₃
 Abel'sches Verfahren 5⁵
 abgeschlossen [241] 49₁₁, [872] 280⁶
 absolut konvergent [167] 30²
 additiv 18,
 „a la Fourier" 55¹¹
 antisymmetrisch inbezug auf a :
 $f(a+t) = -f(a-t)(t)$
 asymptotisch [162] 27₇
- B [811] 261,₁
 Banach'sche Äquivalenzen 250¹
 Bessel'sche Ungleichung [264] } 59^u
 biorthogonal [81] 261₁₁
 Biorthogonalentwicklung 267₆
 B-limitierbar 5₁₅
 BN [811] 261₁₁
 BNV: vgl. BN, V
 BNVV 272⁷
 Borel'scher Satz 129₁₃
 B-Raum [138] 18¹¹
- C [516] 152,
 C 16¹⁰
 c [516] 152₄
 Cantelli'scher Salz 129¹⁰
 Cauchy'sches Postulat 14₅
 Cauchy'scher Satz 87₅
 CE 9₃
 Cesàro'sche Mittel 4₁₃
 charakteristisch: notwendig und hinreichend
 Christoffel-Darboux'sehe Identität
 [862] 278₄
 C_p [672] 232₁₆
 c_p [672] 232¹⁴
 (C, r)-summierbar 4₆
- D [516] 152₂
 d [516] 152₁
 Derivierte 17⁹
 dicht-abgeschlossen [247] 53⁴
 dicht-vollständig [247] 53⁷
 Distanz 14₁₀
 Divergenzfaktoren [693] 241¹²
- e 202¹
 Entwicklung [253] 55₁₄, 223₁₂, [811] 261₆,
 [881] 284¹⁴
 erste Kategorie (von der) [133] 17₁₅
 erstes arithmetisches Mittel 4⁷
- F-Raum 17,
 fast überall 6¹⁸
 fast Oberall konvergent 26₂
 Fourier'sehe Transformierte 281₂
 Franklin'sches System (4431122₂),
 frei von k: unabhängig von k
 Fubini'scher Satz 12₁
 Funktional 18₁₁
 f. ü.: fast überall, s. d.
- geschlossen [132] 17¹¹
 Gram'sehe Determinante 62₂,
 Gram'sches Kriterium [312] 62₁₃
 Grenze 14₇
 „Grenze" [116] 4¹²
- Haar'sches System [226] 44¹¹
 Häufungspunkt 17⁷
 Hermite'sche Polynome 143₇, 11
 homogen 18₂
 H_p [671] 231₅
 h_v [671] 231₁₁

in der Ebene d. Systems gelegen 249¹³
 insichdicht [132] 17¹²

Koeffizient [252] 55¹⁴, 22₁₁

komplett 14₄

konjugierte Entwicklung 267₂

konjugierter Exponent 10⁸

konjugierter Raum 195¹¹

konsistent 5³

konvergent 14,, [143] 18₆

konvex 33¹²

K_p [682] 238³

k_p [682] 238¹

„Kranichschwirme“ 38₆

Kugelig [132] 17¹⁴

L 14₂

l 17⁵

l^∞ 254_{3i}

Lagrange'sche Polynome 141,

lakunar [712] 243₃₇

Legendre'sche Polynome [317] 66₁

Lerch'scher Satz [357] 85₁₂

Lim 27⁹

lim; lim inf

$\limsup$

lim as 130²

limitierbar 4¹

linear [144] 19²

L_p [681] 237₄

l_p 16811237₈

L_p 10⁵

l_p 1₈

M 16⁷

Majorante [691] 240₁₁

max: Maximum

metrischer Raum 14₁₆

min: Minimum

minimal [817] 263⁹

minimal-abgeschlossen [248] 53¹⁰

minimal-vollständig [248] 53¹⁴

Minkowski'sches Funktional 33₁₄

Minkowski'sche Ungleichung [128] 10₁₀

Mittelpunkt einer Kugel [132] 17¹⁶

Moment 31,,

multiplikativ [454] 127₄

Multiplikator 222¹¹

N 58⁴

nirgendsdicht [132] 17¹³

Aoz-m [137] 18⁵,

einer Operation [146] 19¹⁴

normiert [137] 18⁴ 53,, [811] 261₁₁

Normierung 54¹³

Nullmenge: Menge vom Maße Null

0 [213] 39₃

0 6⁸

o 6⁹

offen [132] 17¹¹

o. ü.: obere Grenze

ON: vgl. 0, N

ONA: vgl. 0, N, A

ONV: vgl. 0, N, V

ONSp: vgl. 0, N, Sp;

Operation [141] 18,,

orthogonal 37₃

Orthogonalmenge [214] 40³

Orthogonalreihe [251] 54₁₄

Orthogonalsystem [213] 39,

Oszillation: Differenz zwischen der
 oberen und unteren Grenze

permanent 4¹⁵

Poisson'sches Verfahren:

Abersches Verfahren, s. d.

positive Menge:

Menge von positivem Maß

probabilistisch: wahrscheinlichkeits-
 theoretisch

„quasi-ergodisch“ 136₁₁

Rademacher'sches System [225] 42⁶

Radius einer Kugel [132] 17¹⁶

„Reihensumme“ 4₁

relativ-orthogonale Polynome [852] 276₁₀

relativ-orthogonale Systeme [851] 276¹⁵

RO: relativ-orthogonale Systeme, s. d.

ROP: relativ-orthogonale Polynome, s. d.

ROPV: vgl. ROP, V

R_∞ : vgl. lakunar

R_∞ [712] 243₃

Schauder'sches System [242] 50⁷
 Schmidt'sche Methode [313] 63₈
 schwache Carleman'sehe Singularität:
 vgl. c_p
 schwache Grenze:
 vgl. schwach konvergent
 schwache Hardy-Littlewood'sehe Singularität: vgl. hp
 schwach konvergent [163] 28⁹
 Schwankung: Oszillation, s. d.
 separabel [139] 18₁₇
 sign 43₈
 skalares Produkt 37₁₀
 starke Carleman'sehe Singularität:
 vgl. Cp
 starke Hardy-Littlewood'sehe Singularität: vgl. p
 S_p: vgl. lakunär
 starke Konvergenz [161] 27²
 stärker 5¹
 stetig [142] 18₁₀
 stilisierte Sinusfolge 43₆
 summierbar 4⁵
 Symmetriezentrum von R: ein a, so daß
 (a+x) e R stets (a-x) e R impliziert
 S 1712] 243₃

Treppenfunktion 14²
 trigonometrisches System [223] 41¹²
 T-summierbar: vgl. summierbar
 Typus B (vom): vgl. B-Raum
 Typus F (vom): vgl. F-Raum
 unbedingte Konvergenz [107] 30₁₃
 überalldicht [132] 17¹²
 V 71⁹, [814] 262¹⁰
 V 19₈
 vektorieller Raum 1135] 17₁₄
 vollständig 45¹¹, [814] 262¹⁰, [871] 280²
 wesentlich beschränkt 16⁷
 wesentliche obere Grenze: das kleinste
 Y wofür $f(t) \leq Y$ f. u.
 wesentliche untere Grenze: das größte
 Y wofür $f(t) \geq Y$ f. u.
 w.o.G.: wesentliche obere Grenze, s.d.
 w.u. G.: wesentliche untere Grenze, s.d.
 Zeilenfinit 5₁₃
 zeilenweise normiert 67¹⁴
 zeilenweise orthogonal 67¹³
 zeilenweise vollständig 71,
 zugänglich 2G¹³
 zweite Kategorie (von der) 1133] 17₁₅

$a \in A$: a gehört zu der Menge A (ist
 ein Element von A)
 $a \notin A$: a gehört nicht zu A
 $\supset 202^1$
 $A \subset B$: A ist Teilmenge von B
 $A' 17^{10}$
 $\{a_n\}$: $a_1, a_2, a_3, \dots$
 $\{a_{ik}\}$: Matrix mit Elementen a_{ik}
 $\overline{a, b}$: Strecke $a < t < b$
 (a, b) : Strecke $a < t < b$
 $(A, B) 222^{11}$
 $|a| < \infty$: a ist endlich
 $c 73_8$
 $\Theta 18^1$

$|F| 8_7$
 E_p das größte ganze γ wofür $\gamma \leq p$
 $q\{F_{pq}\}$: Folge $\{F_{pq}\}$ mit q als Index
 (k) : für alle k einer k-Menge
 $p^{-1}(t) 16_{13}$
 $(x, y) 14_{11}$
 $x - y 18^2$
 $\|x\|$: vgl. Norm
 $\| \cdot \|_R 49_1$
 $\int_a^b |dg|$: Schwankung von $g(t)$
 über a, b
 $\alpha, \beta \dots \alpha, \beta 21_5$
 $\sim 202^1$

BIBLIOGRAPHIE.

1. **Batiach S.** *Théorie des Opérations linéaires*. Monografie Matematyczne I, Warszawa, 1932.
2. **Hardy G. H., Littlewood J. E. and Pölya G.** *Inequalities*. Cambridge, 1934.
3. **Hilb E. - Szász O.** *Allgemeine Reihenentwicklungen*. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II 3, Teil C.
4. **Hobson E. W.** *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge, 1931.
5. **Knopp K.** *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlin, 1922.
6. **Saks S.** *Théorie de l'intégrale*. Monografie Matematyczne II, Warszawa, 1933.
7. **Shohat J.** *Théorie générale des polynômes Orthogonaux de Tehebichef*. Mémorial des Sciences math. LXVI, Paris, 1934.
8. **Zygmund A.** *Trigonometrical Series*. Monografie Matematyczne V, Warszawa—Lwów, 1935.

ABHANDLUNGEN.

Abkürzungen: **Ann. M.** = Annals of Mathematics.—**B. A. M. S.** = Bulletin of the American Math. Soc.—**B. A. P.** = Bulletin International de l'Académie Polonaise, Classe A de Sciences math. et nat., Cracovie.—**B. S. M.** = Bulletin de Sciences mathém.—**B. S. M. F.** = Bulletin de la Société math. de France.—**C. R.** = Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.—**F. M.** = Fundamenta Mathematicae.—**G. I. A.** = Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari.—**J. L. M. S.** = Journal of the London Mathem. Soc.—**J. f. M.** = Journal für die reine und angewandte Mathematik.—**M. A.** = Mathematische Annalen.—**M. Z.** = Math. Zeitschrift.—**P. L. M. S.** = Proceedings of the London Math. Soc.—**R. L.** = Rendiconti della Reale Accadenia dei Lincei, Roma.—**R. P.** = Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.—**S. M.** = Studia Mathematica.—**T. A. M. S.** = Transactions of the American Math. Society.

1. **Abramseco N.** Les polynômes orthogonaux. Ann. Fac. Sc. Un. Toulouse 24 (1932) 67-87.
2. **Agnew R. P.** On doubly orthogonal series. P. L. M. S. 2, 33 (1932) 420-434.
3. **Banach S.** An example of an orthogonal development. P. L. M. S. 2, 21 (1922) 95-96. [613].
4. — Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales. C. R. 180 (1925) 1637—1640.
5. — Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires. B. S. M. 2, 50 (1926) 1—12. [562].
6. — Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen. S. M. 2 (1930) 207—220. [734-737].
7. — Sur les séries lacunaires. B. A. P. (1933) 149-154. [721—723] [732].
8. **Banach S.-Saks S.** Sur la convergence forte dans les champs LP . S. M. 2 (1930) 51-57. [721].
9. **Banach S. - Steinhaus H.** Sur le principe de la condensation de singularités. F. M. 9 (1927) 50-61. [151] [156] [157] [565-566] [577].
10. **Bergmann St.** Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen nach Orthogonalfunktionen. M. A. 86 (1922) 238—271.

- //. **Berry A. C.** The Fourier transform identity theorem. *Ann. M.* 2, 32 (1931) 227-232. [875].
12. **Birnbaum Z. W. - Orlicz W.** Verallgemeinerung konjugierter Potenzen. *S. M.* 3 (1931) 1-67.
13. **Bochner S.** Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. *M. Z.* 14 (1922) 180-207.
14. **Borgen S.** Über (C, 1)-Summierbarkeit von Reihen orthogonaler Funktionen. *M. A.* 98 (1928) 125-150. [582] [5861].
15. **Caccioppoli R.** Sull' approssimazione per polinomi delle funzioni definite in campi illimitati. *G. I. A.* 3 (1932) 364-375. [874] [8761].
16. **Chen Kien Kwong.** On the System of normalized orthogonal functions. *Tōhoku Math. Journ.* 30 (1928) 1-9.
17. — On the series of orthogonal functions. *Proc. Imp. Ac. Japon.* 4 (1928) 36-37. [551].
18. — On the conditions for the completeness of the System of orthogonal functions. *Jap. Journ. of Math.* 6 (1929) 81-87. [373].
19. — On the theorem of Zygmund in the theory of the series of orthogonal functions. *Tōhoku Math. Journ.* 30 (1929) 472-475.
20. **Chokhate J.** Sur la sommation de certaines séries de fonctions orthogonales. *C. R.* 188 (1924) 1475-1478.
21. **Fichtenholz G.** Sur la notion de la fermeture des systèmes de fonctions. *R. P.* 50 (1926) 385-398. [613].
22. **Fischer E.** Sur la convergence en moyenne. *C. R.* 144 (1907) 1022-1024, 1148-1150. [354-356] [383].
23. **Franklin Ph.** A set of continuous orthogonal functions. *M. A.* 100 (1928) 522-529. [443].
24. **Gagaeff B.** Sur l'unicité du Système de fonctions orthogonales invariant relativement à la dérivation. *C. R.* 188 (1929) 222-225.
25. — Über Sturm-Liouvillesche Reihen mit Lücken. *J. f. M.* 166 (1932) 204-207.
26. **Gram J. P.** On Rækkendviklinger besternede ved Hjaelp of de mindste Kvadraters Methode. Kopenhagen 1879. [312].
27. — Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate. *J. f. M.* 94 (1883) 41-73. [233] [261-2031] [332, 333] [883].
28. **Haar A.** Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *M. A.* 69 (1910) 331-371 und 71 (1912) 38-53. [226] [235] [141-442] [522] [526].
29. — Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme. *M. Z.* 31 (1929) 128-137.
30. — Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme. *M. Z.* 31 (1930) 769-798.
31. **Hermite Ch.** Sur un nouveau développement en série de fonctions. *C. R.* 58 (1864) 93-100 und 266-273. [484].
32. **Hilbert D.** Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 5. Mitt. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1906) 439-480. [267] [371] [372].
33. **Hille E. - Tamarkin J. D.** On the summability of Fourier series II. *Ann. M.* 2, 34 (1931) 329-318. [644].
34. **Hobson E. W.** On the convergence of series of orthogonal functions. *P. L. M. S.* 2, 12 (1913) 297-308. [535].
35. **Jerosch F. - Weyl H.** Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten. *M. A.* 66 (1909) 67-80. [535].
36. **Kaczmarz S.** Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen. *M. Z.* 23 (1925) 263-270. [583-584].
37. — Über die Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *M. A.* 96 (1925) 148-151. [585].
38. — Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen. *M. Z.* 26 (1927) 99-105. [586-587].
39. — Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux. *S. M.* 1 (1929) 87-121. [532] [551-556] [575] [591].
40. — Über ein Orthogonalsystem. *Comptes Rendus du I Congrès d. math. des pays slaves, Warszawa* (1929) 189-192. [461-463].

41. — Sur les multiplicateurs des séries orthogonales. S. M. 4 (1933) 21-26. [652-656] [658].
42. — Notes on orthogonal series I, II. S. M. 5 (1935) 24—28, 103—106. [536] [574] [592-593].
43. **Kaczmarz S. - Steinhaus H.** Le Système orthogonal de M. Rademacher. S. M. 2 (1930) 231-247. [461—463] [711].
44. **Khinchine J.** Über dyadische Brüche. M. Z. 18 (1923) 109-116 [456].
45. **Khinchine J. - Kolmogoroff A.** Über die Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt wurden. Rec. math. de Moscou 32 (1925) 668-677. [452-453].
46. **Kolmogoroff A.** Une contribution à l'étude de la convergence des series de Fourier. F. M. 5 (1924) 96-97. [533].
47. — Sur la convergence des series de polynomes orthogonaux. C. Rend. Ac. Sc. U. R. S. S. 1 (1934) 291-294.
- Kolmogoroff A - Khinchine J.** Siehe 45.
48. **Kolmogoroff A. - Menchoff D.** Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. M. Z. 26 (1927) 432-441.
49. **Kostitzin V.** Quelques remarques sur les systèmes complets de fonctions orthogonales. C. R. 156 (1913) 292-295. [323-324].
50. **Laguerre E.** Sur l'intégrale $\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$. B. S. M. F. 7 (1879) 72-81. [481].
51. **Lauriceila G.** Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali. R. L. 5, 21 (1912) 675-685. [353] [373].
52. — Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. R. P. 29 (1910) 155-163. [354-355].
53. **Legendre A. M.** Recherches sur l'attraction des spheroides homogenes, Mém. math. phys. pres. à l'Ac. Sc. 10 (1785) 411-434. [411-412] [354 — 355].
54. **Lerch.** O hlavní vetě theorie funkcí vytvorujících. Rozpravy Ceske Akad. v Praze 1 (1892) 1-7. [357].
55. **Levin S.** Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundene Eigenschaften von Funktionenfolgen. M. Z. 32 (1930) 491—511. [818-819] [844].
56. **Mc Coy M. H.** Note on the existence of a positive function orthogonal to a given set of functions B. A. M. S. 36 (1930). [878-882].
57. **Mazur S.** Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. S. M. 4 (1933) 70-84 [182].
58. **Mazur S. - Orlicz W.** Zur Theorie der linearen metrischen Räume. Voraussichtlich S. M. 6. [183].
59. **Menchoff D.** Sur les series de fonctions orthogonales I. F. M. 4 (1923) 82—105. [535-537], II. F. M. 8 (1926) 56 — 108. [586 — 587], III. F. M. 10 (1927) 375-420. [542].
60. — Sur la sommation des series de fonctions orthogonales. C. R. 180 (1925) 2011-2013. [586].
- Menchoff D. - Kolmogoroff A.** Siehe 48.
61. **Müntz Ch.** Über den Approximationssatz von Weierstrass „Schwarz Festschrift« (1914) 303—312. [361-364].
62. — Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation. M. Z. 21 (1924) 96-110. [247].
63. **Orlicz W.** Zur Theorie der Orthogonalreihen. B. A. P. (1927) 81 — 115. [512-513] [517-519] [523] [541-543].
64. — Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen. I. S. M. 1 (1929) 1-39. [613] [641-643] [646] [657] [666] [673—675], II. S. M. 1 (1929) 241-255. [692] [694], III. B. A. P. (1932) 229—238, [676—679] [695-696].
65. — Einige Bemerkungen über die Divergenzpunktmengen von Orthogonalentwicklungen. S. M. 2 (1930) 72-86. [525] [567].
66. — Einige Bemerkungen über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen. S. M. 2 (1930) 87-90. [528].

67. — Konjugierte Exponentenfolgen. S. M. 3 (1931) 200-211.
 68. ~ Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen. S. M. 4 (1933) 27-32. [514-515] [571].
Orlicz W. - Birnbaum Z. W. Siehe 12.
Orlicz W. - Mazur S. Siehe 58.
 69. **Paley R. E. A. C.** Some theorems on orthogonal functions. S. M. 3 (1931) 226-238. [632].
 70. — Note on a theorem of Kolmogoroff and Menchoff. M. Z. 37 (1933) 669-673.
 71. — A remarkable system of orthogonal functions. P. L. M. S. 34 (1932) 241-279. [461-463].
 72. **Paley R. E. A. C. - Zygmund A.** On some series of functions (1). Proe. Cambr. Ph. Soc. 26 (1930) 337—357. [451] [456] [563-564] [711] [741]. (2). Proe. Cambr. Ph. Soc. 26 (1930) 458-474. [471] [473] [474 - 475] [742-743].
 73. **Pell A.** Biorthogonal Systems of functions. T. A. M. S. 12 (1911) 135-164.
 74. **Plancherel M.** Sätze über Systeme beschränkter Orthogonalfunktionen. M. A. 68 (1910) 270-278. [511].
 75. Sur la convergence des series de fonctions orthogonales. C. R. 157 (1913) 539-542. [535].
 76. **Plessner A.** Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen. «d. f. M. 155 (1925) 15-25. [553].
 77. **Rademacher H.** Einige Satze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. M. A. 87(1922) 112-138 [225] [236] [322] [452] [532] [534 - 535] [551-552].
 78. **Riesz F.** Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. C. R. 141 (1907) 615-619, 734—736. [266] [356].
 79. — Über orthogonale Funktionensysteme. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1907) 116-122. [266] [356] [381] [383].
 80. — Sur les ensembles de fonctions. C. R. 143 (1906) 738-711. [34t].
 81. — Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel. M. Z. 18 (1923) 117-124. [631]
 82. **Riesz M.** Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. Acta Math. 49 (1926) 465-497. [654].
 83. **Saks S.** On some functionals. T. A. M. S. 35(1933) 549-556. [158] [159] [561].
 Saks S.-Banach S. Siehe 8.
 84. **Saks S. - Tamarkin J. D.** On a theorem of Hahn-Steinhaus. Ann. M. 2, 34 (1933) 595 601. [155].
 85. **Sansone G.** Sulla convergenza parziale degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. R. L. 6, 13 (1931) 842-847.
 86. — Sülle serie lacunari di polinomi di Legendre. Ann. Sc. norm. sup. Pisa 2, 2 (1933) 289-296.
 87. **Schauder J.** Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. M. Z. 26 (1927) 47-65. [242-244].
 88. — Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems. M. Z. 28 (1928) 317-320.
 89. **Schmidt E.** Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Diss. Göttingen 1905. M. A. 63 (1907) 433—476. [261-264] [311] [313-314] [331] [353].
 90. **Severini C.** Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali. R. P. 36 (1913) 177—202 [269] [353] [354-355] [373].
 91. — Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali I. R. L. 30 (1921) 92-95. [1. 129-132. [353].
 92. — Sulla convergenza delle serie dei funzioni ortogonali. R. L. 6, 2 (1925) 470-475, 542-548, 3 (1926) 13-18.
 93. **Sestini G.** Un teorema sugli sviluppi in serie lacunari di funzioni di Sturm-Liouville. Ist. Lomb. Rend. 2, 66 (1933) 481—490.
 94. — Sülle serie lacunari di polinomi di Legendre. Ist. Lomb. Rend. 2, 66 (1933) 689-696.

95. **Steinhaus H.** An example of a thoroughly divergent orthogonal development. *P. L. M. S.* 2, 20 (1920) 123-126. [531].
96. — Sur les développements orthogonaux. *B. A. P.* (1926) 11 — 39 [115] [526] [573] [646].
97. — Zur Konvergenzfrage bei dem Rademacherachen Orthogonal-system. *Rec. math. de Moscou* (1928) 39—42.
98. — Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie de series orthogonales. *S. M.* 1 (1929) 191 200. [662-664].
99. — Sur la probabilité de la convergence de series. *S. M.* 2 (1930) 21-39. [471] [474-475].
100. — Sur les suites complètes. *S. M.* 4 (1933) 142-145. [491—492].
101. — Przykłady rozwinięć biortogonalnych. *Mathesis Polska* 9 (1934) 33-40. [816] [843].
- Steinhaus H. - Banach S.** Siehe 9.
- Steinhaus H. - Kaczmarz S.** Siehe 43.
102. **Stieltjes Th. J.** Recherches sur les fractions continues. *Ann. Fac. Sc. Toulouse* 8 (1894) 1-122. [392].
103. **Stone M. H.** Three theorems on normal orthogonal sets. *B. A. M. S.* 31 (1925) 17-21.
104. — A note on the theory of idfinite series. *Ann. M.* 2, 32 (1931) 233-238. [517-519].
105. **Szász O.** Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen. *M. A.* 77 (1916) 482-496. [361—363].
106. — Über die Approximation stetiger Funktionen durch gegebene Funktionenfolgen. *M. A.* 104 (1931) 155-160. [491].
107. **Takahashi Tatsuo.** Note on the system of the orthogonal functions. *Proc. Imp. Ac. Jap.* 10 (1934) 541-543. [526].
- Tamarkin J. D. - Hille E.** Siehe 33.
- Tamarkin J. D. - Saks S.** Siehe 84.
108. **Toeplitz O.** Über lineare Mittelbildungen. *Prace mat.-fiz.* 22 (1911) 113-119. [119].
109. **Tchebycheff P.** Theorie des mecanismes. *Mem. pres. à l'Ac. Imp. d. Sc. de St. Petersbourg.* 7 (1854) 539-568. [421—423].
110. **Verblunsky S.** Some theorems on generalized Fourier constants. *P. L. M. S.* 2, 37 (1934) 33-62. [457].
111. **Vitali G.** Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali. *R. L.* 5, 30 (1921) 498-501.
112. **Walsh J. L.** A closed set of normal orthogonal functions. *Am. Journ. Math.* 55 (1923) 5-24. [461-462].
113. — A property of Haar's system of orthogonal functions. *M. A.* 90 (1923) 38 45.
114. **Weyl H.** Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonal-funktionen fortschreiten. *M. A.* 67 (1909) 225-245. [535].
- Weyl H. - Jerosch F.** Siehe 35.
115. **Zarankiewicz K.** Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. *Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.* 14 (1934) 97-104.
116. **Zygmund A.** Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz. *M. Z.* 25 (1926) 297-298. [583-584].
117. — Remarque sur la sommabilité des series de fonctions orthogonales. *B. A. P.* (1926) 185-191. [583-584].
118. — Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la theorie des series de fonctions orthogonales. *F. M.* 10 (1927) 356-362. [581-584].
119. — Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales. *B. A. P.* (1917) 295-308.
120. — Un theoremesur les series orthogonales. *S. M.* 2 (1930) 181—182. [582].
121. — O zachowaniu się pewnych szeregów funkcyjnych. *Mathesis Polska* 8 (1933) 76-87.
- Zygmund A. - Paley R. E. A. C.** Siehe 72.

ZITATENNACHWEIS.

(Die eckig eingeklammerten Zahlen bezeichnen die Stelle dieses Buches, die klammerlosen geben die Nummer des Zitats in der Bibliographie an, die rund eingeklammerten die Seite des zitierten Buches).

[113]	2(120)	[236]	77	[453]	45
[114]	2(36)	[242—244]	87	[456]	45, 72
[115]	96	[261-263]	27, 89	[457]	110
[119]	108	[264]	89	[461-462]	40, 43, 71, 112
[121]	6(44)	[266]	78, 79	[463]	40, 43, 71
[123]	6(43)	[267]	32	[471]	72, 99
[124]	6(63)	[269]	90	[473]	72
[125]	6(84)	[311]	89	[474-475]	72, 99
[127]	2(140)	[312]	26	[481]	50
[128]	2(146)	[313—314]	89	[484]	31
[134]	1(14)	[322]	77	[491]	100, 106
[144]	1(23)	[323-324]	49	[492]	100
[145]	1(41)	[331]	89	[511]	74
[146]	1(54)	[332-333]	27	[512—513]	63
[147]	1(59-65)	[341]	80	[514-515]	68
[151]	1(80) 9	[353]	51, 89, 90, 91	[517-519]	63, 104
[155]	84	[354-355]	22, 52, 90	[522]	28
[156]	1(81), 9	[356]	22, 78, 79	[523]	63
[157]	1(24), 9	[357]	54	[525]	65
[158]	83	[361-364]	61, 105	[526]	28, 96, 107
[159]	83	[371—372]	32	[528]	66
[164]	1(135)	[373]	18, 51, 90	[531]	95
[165]	1(123)	[381]	79	[532]	39, 77
[166]	1(130)	[383]	22, 79	[533]	46
[168]	1(240)	[392]	102	[534]	77
[171]	1(74—75)	[411-412]	53	[535]	34, 35, 59, 75, 77, 114
[181]	1(29)	[414-415]	53	[536-537]	42, 59
[182]	57	[421—423]	109	[541]	63
[183]	1(146), 58	[431]	8(21)	[542]	59, 63
[225]	77	[432-433]	8(45—47)	[543]	50, 63
[226]	28	[441-442]	28	[551]	17, 39, 77
[233]	27	[443]	23	[552]	39, 77
[234]	8(8)	[451]	72	[553]	30, 76
[235]	28	[452]	45, 77	[554-556]	39

[561] 83	[613] 3, 21, 64	[723] 7
[562] 5	[624-625] 1(58)	[732] 7
[563-564] 72	[631] 81	[734-737] 6
[565-566] 9	[632] 69, 8(206, 208)	[741—743] 72
[567] 65	[641-643] 64	[815] 1(106)
[571] 68	[644] 33	[816] 101
[573] 96	[646] 64, 96	[818-819] 55
[574] 42	[652-656] 41	[831—834] 1(107-110)
[575] 3P	[657] 64	[843] 101
[577] 9	[658] 41	[844] 55
[581] 118	[662-664] 98	[853] 7(8)
[582] 14, 118, 120	[666] 64	[861] 7(24)
[583—584] 36, 116, 117, 118	[673-675] 64	[862] 7(25)
[585] 37	[676—679] 64	[863] 7(8)
[586] 14, 38, 59, 60	[692] 64	[874] 15
[587] 38, 59	[694-696] 64	[875] 77
[591] 39	[711] 43, 72	[876] 15
[592-593] 42	[721] 7	[883] 27.
[611] 1(124)	(722) 7, 8	

INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
VORWORT.	.III
FEHLERVERZEICHNIS.	.VI
I. KAPITEL. Vorkenntnisse [111—183].	1-36
§ 1. Konvergenz und Summierbarkeit [111—119]	.1-6
§ 2. Einiges über Funktionen und Integrale [121—129]	.6—14
§ 3. Abstrakte Räume [131—139]	.14-18
§ 4. Operationen und Funktionale [141—147]	.18-19
§ 5. Resonanztheoreme [151—159]	.19—26
§ 6. Konvergenzarten [161—168]	.26-31
§ 7. Das Momentenproblem [171]	.31—33
§ 8. Die Umkehrung von Funktionaloperatoren [181—183]	33—36
II. KAPITEL. Grundbegriffe [211-269]	37-60
§ 1. Orthogonalität [211—214]	.37-40
§ 2. Beispiele [221-226]	.40-45
§ 3. Vollständigkeit [231—236]	.45-49
§ 4. Abgeschlossene, minimale und dichte Systeme. Normierung [241-249].	.49-54
§ 5. Orthogonalreihen und Orthogonalentwicklungen [251—255].	.54—57
§ 6. Das Problem der besten Approximation [261—269]	.58-60
III. KAPITEL. Orthogonalreihen in L^2 [311-393]	61-102
§ 1. Orthogonalisierung [311-318]	.61-68
§ 2. Orthogonalisierung im längeren Intervall [321—324]	.68—73
§ 3. Über die beste Approximation [331-334]	.73-78
§ 4. Abzählbarkeit [341-347]	.78-82
§ 5. Vollständigkeit und Abgeschlossenheit [351-359]	.82—86
§ 6. Der Müntz'sche Satz [361-364]	.86-92
§ 7. Die Parseval'sche Gleichung [371-373]	.93-95
§ 8. Der Riesz-Fischer'sche Satz [381—386]	.95—100
§ 9. Unendliche Intervalle [391-393]	.100-102
IV. KAPITEL. Beispiele [411-493]	103—148
§ 1. Legendre'sche Polynome [411-415]	.103-111
§ 2. Tschebyscheff'sche Polynome [421-424]	.111—116
§ 3. Das trigonometrische System [431—433]	.116-119
§ 4. Das Haar'sche System [441-443]	.120-125
§ 5. Das Rademacher'sche System [451-457]	.125-132
§ 6. Das Walsh'sche System [461-463]	.132-134
§ 7. Das System $\{Q_n(t)\}$ [471-475]	.134-139
§ 8. Unendliches Intervall [481-484]	.139-145
§ 9. Vollständige Systeme [491-493]	.145-148

V. KAPITEL. Konvergenz und Summierbarkeit [511-593] . . .	149-194
§ 1. Konvergenz der Orthogonalreihen [511-519]	149-154
§ 2. Konvergenz von Orthogonalentwicklungen [521-528]	154-159
§ 3. Konvergenz fast überall [531-537].	159-170
§ 4. Unbedingte Konvergenz [541-543].	170-173
§ 5. Die Bedeutung der Lebesgue'schen Funktionen für die Konvergenz [551-556].	173-177
§ 6. Allgemeines über Konvergenz [561-567]	177-182
§ 7. Allgemeine Summationsmethoden [571-577]	182-186
§ 8. Cesàro'sche Mittelwerte [581-587]	186-191
§ 9. Lebesgue'sche Funktionen und Summierbarkeit (591-593) . . .	192-194
VI. KAPITEL. Orthogonalreihen in anderen Räumen [611-696] . . .	195-242
§ 1. Vollständigkeit [611-615]	195-198
§ 2. Abgeschlossenheit [621-627]	198-202
§ 3. Verallgemeinerung des Riesz-Fischer'schen Satzes [681-6321] . .	202-214
§ 4. Bedingungen dafür, daß eine Reihe eine Entwicklung sei [641-646].	214-222
§ 5. Multiplikatoren [651-658].	222-226
§ 6. Weiteres über Multiplikatoren [661-666]	227-231
§ 7. Singuläre Entwicklungen und singuläre Funktionen [671-679] . .	231-237
§ 8. Die Singularitäten K_p und L_p [681-687]	237-240
§ 9. Majoranten und Divergenzfaktoren [691-696]	240-242
VII. KAPITEL. Lakunäre Reihen [711-744]	243-260
§ 1. Lakunäre Systeme [711-716]	243-245
§ 2. Vorhandensein von lakunären Systemen [721-723]	245-249
§ 3. Weitere Eigenschaften der lakunären Systeme [731-7571] . . .	249-256
§ 4. Anwendungen [741-744].	256-260
VIII. KAPITEL. Biorthogonale Systeme und Orthogonalpolynome [811-886]	261-286
§ 1. Biorthogonale Systeme [811-819]	261-265
§ 2. Biorthogonalisierung [821-822]	265-267
§ 3. Biorthogonalentwicklungen [831-834]	267-271
§ 4. Biorthogonalentwicklungen in L^2 [841-844]	271-276
§ 5. Relativ-orthogonale Systeme [851-853]	276-278
§ 6. Eigenschaften der relativ-orthogonalen Polynome [861-863] . .	278-279
§ 7. Vollständigkeit und Abgeschlossenheit [871-876].	280-284
§ 8. Entwicklungen nach relativ-orthogonalen Polynomen [881-886] .	284-286
ABKÜRZUNGEN, BEZEICHNUNGEN, SYMBOLE	287-289
BIBLIOGRAPHIE	290-294
ZITATENNACHWEIS	295-296

