

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191034

UNIVERSAL
LIBRARY

كتاب
الروضۃ الزهریة
فی
الاصول الجبریة

تألیف کرنیلوس فان دیک

برخصة مجلس معارف ولاية سورية الجليلة.

طُبِعَ ثَالِثَةً فِي الْمَطْبَعَةِ الْأَمِيرَكَانِيَّةِ فِي يَرُوثَ مِنْهُ ١٨٩١

بسم الله المبدى المعيد

الحمد لله الملك الوهاب الذي بيده الجبر والكسر والى المرجع والمآب . اما بعد
فيقول العبد الفقير الى عفوه تعالى كرنيلوس فان ذلك الاميركافى هذا كتاب في علم
الجبر الحسابي قد دلت فيه ما املته على بعض التلامذة في مدرسة عبيه احدى قرى
جبل لبنان سنة ١٨٤٨ للتاريخ المسيحي سالكا فيه مسلك بعض العلماء الاميركانيين .
ثم اضفت اليه زيادات اخرى من كتب بعض العلماء الفرنسيين والانكليزيين . وقد
اضمت الى هذه الطبعة الثالثة فصولاً وبعض المسائل والابصاحات والعمليات لم توضع
في الطبعة الاولى وبالله التوفيق

مقدمة

في العلوم التعليمية بالاجال

١ موضوع العلوم التعليمية الكم وهو كل ما يقبل الزيادة او الانقسام او القياس .
فكل من الخط والوزن والعدد والوقت كم . وليس كذلك الالوان والافعال العقلية
ونحوها

٢ جميع اقسام التعليمات مبني على الحساب والجبر والهندسة . اما الحساب فهو
علم الاعداد . ومعرفته ضرورية لمعرفة ما سواه من هذه العلوم . واما الجبر فهو طريق
للمعد بواسطة احرف وعلامات اخرى . ويقال للطبقة العليا منه حساب التمام والتفاضل .
وهو لا يدخل في كتب الجبر لسموه بل يقام علماً بنفسه . واما الهندسة فهي قسم من
التعليمات موضوعه المتدار وهو كم ذو امتداد اي كل ماله واحد من ثلاثة اشياء وهي
الطول والعرض والعنى ويقال لها الابعاد الثلاثة . ولذلك يكون كل من الخط والسطح
والجسم مقداراً دون الحركة فانها وان كانت كمياً لكنها لا تعد مقداراً اذ ليس لها شيء من
الابعاد المذكورة . واما حساب المثلاث وقطع الخروط فيها علمان تستعمل فيها القواعد

التعليمية لمعرفة المثلثات والمثلثات المحاصلة من قطع المخروط اي الهلجبي والهلجبي والمثلثولي

٣ التعاليم نوعان محضة وإضافية او منتزجة . اما المحضة فهي المختصة بالكليات المجردة عن المواد . واما الاضافية فهي استخدام قواعد تعليمية لمعرفة شيء من خصائص الهولي او لانعام شيء من المصالح اليومية كما في التجارة وعلم المساحة وعلم البصريات وعلم الهيئة ونحو ذلك

٤ ان للتعاليم المحضة منزلة على سائر العلوم من حيث وضوح قواعدها وقوة براهينها حتى ضرب بها المثل في الايضاح والتبيين ومن حيث كثرة استعمالها وازومها في المصالح والعلوم كافة وايضاً لسبب فعلها في ترويض القوى العقلية بتقويتها وتوسيعها . فان درسها يدرب العقل على الاتجاه بكل قواه نحو امير ما وعلى انحصاره في موضوع بدون ان يشتت . ويمنح حذاقة عظيمة في الكشف عن فساد او فسطة في برهان او قضية . ولذلك تنيد معرفتها جداً لكل واحد ولو كان غير منتقل الى ممارسة علمائها وحُبَّت من العلوم الرياضية

—o—

الفصل الاول

في الاشارات الجبرية والكميات السلبية والاوليات

٥ الجبر علم يُبحث فيه عن نسب الكميات باستعمال احرف وشاراتٍ أُخر . وله منزلة على علم الحساب بأن مسائله اعمُ ولانه يُستخدَم فيه الاحرف الجبرائية عوضاً عن الاعداد كبيرة كانت ام صغيرة . وايضاً لانه يُستخدَم فيه كميات مجهولة كانت معلومة . فالاحرف التي تنوب عن كميات عددية في الجبر ليس لها قيمة في نفسها ولكن تُفرض لها قيمة معلومة في كل مسألة على مُنتضى شروطها . وقد تكون تلك القيمة معلومة وقد تكون مجهولة كما ستري . فان كانت معلومة يوضع عوضاً عنها حرف من حروف الهجاء الأول كالاف والباء والياء وما يليها . وان كانت مجهولة تستعمل عوضاً عنها الحروف الاخيرة كالكاف واللام والميم وما يليها وهذا امرٌ عادي لا ضروري

٦ الجمع بدل عليه خط عرضي ينطعمه خط عمودي هكذا + والطرح بدل عليه خط عرضي فقط هكذا - فالكميات التي تنقسمها العلامة الاولى تُسمى ايجابية . والتي

تتقدمها الثانية بقال لها سلبية. والتي نتقدمها كلها تسمى ملتبسة. فلو وضع ت + ب
 - س كان المراد فضلة س وجميع ت وب وتقرأ ت مع ب الأ. س. وان
 وضع ت - ب لتزى ت مع او الأ. ب. والتي لا تتقدمها علامة تقدّر لها علامة
 ايجابية اي علامة الجمع. ولو وضع ت - ب او س - د لكان المراد فضلة
 ت وب او فضلة س ود بدون تعيين اي هو المطروح واي هو المأخوذ منه.
 وبذل على المساواة بين كميتين خطان عرضيان متوازيان هكذا = فلو وضع ت +
 ب = س - د لتزى جميع ت وب يعدل فضلة س ود. ومثال ذلك في
 الارقام الهندية $8 + 4 = 16 - 4 = 10 = 2 + 7 = 2 + 2 + 12$ ولو وضع
 ت < ب كان المراد ان كمية ت اعظم من كمية ب. وبالعكس ت > ب

٧ اذا تقدم كمية رقم هكذا ٣ ت او ٩ ل او ١٠ ك كان المراد تكرار
 الحرف مراراً فمثل الاحاد في ذلك الرقم. فيقرأ ثلاث مرات ت ونسع مرات ل
 وعشر مرات ك ويقال لذلك الرقم مسمى. وهكذا ل ن. و٤ م فيراد ثلث ن
 وثلاثة ارباع م. وان لم يتقدم كمية مسمى يقدّر لها واحد مسمى. فان ت مثلاً
 يراد يو ا ت. وقد يكون المسمى حرفاً هكذا م ك فيراد تكرار ك مراراً فمثل
 الاحاد في م اي ميم مرة. ولو قيل ٣ ت ب لكان ٣ ت مسمى ب. ولو
 قيل ٤ ك ل د لكان ٤ ك ل مسمى د وفس على ذلك

٨ الكمية المركبة هي التي ارتبطت اجزاؤها بعلامة الجمع او الطرح. مثالها س +
 د ور + س - ك و ٣ ت + ب. وما سواها بسيطة. مثالها ت ورك و ٣ م
 س ل. وان كانت لها جزآن سميت ثنائية مثل ت + ب وس - د وينال
 للاخيرة فضلية ايضاً. وان كان لها ثلاثة اجزاء يقال لها ثلاثية او ذات ثلاثة حدود.
 او اربعة فرباعية او ذات اربعة حدود. وهلم جرا. وان اريد معاملة عدة اجزاء من
 كمية مركبة معاملة واحدة يجب رسم خط فوقها او حصرها بين قوسين هكذا ت - د
 + س او (ت - د) + س فيراد اضافة س الى فضلة ت ود وهكذا
 ت + ب - س + د او (ت + ب) - (س + د) يراد بوطرح مجموع س
 ود من مجموع ت وب. وينال لحرف او لعدة احرف مرتبطة على ما تقدم عبارة
 جبرية

٩ يدل على الضرب خطان يتقاطعان هكذا X او نقطة بين المضروب
 والمضروب فيه. مثالة ت X ب او ت. ب فيقرأ ت في ب. وهكذا

١٢ مكفوءة كمية هو الخارج من قسمة واحد على تلك الكمية . فكفوءة ت . مثلاً
هو ت ومكفوءة ٤ هو ١/٤ ومكفوءة ت + ب هو ت + ب

١٣ الكمية السلبية هي التي يجب طرحها . ففي التجارة مثلاً يكون الربح ايجابياً
والخسارة سلبية . وإن كان صعود جسم عن سطح الارض ايجابياً يكون هبوطه سلبياً .
وإن كان جري مركب الى الشمال ايجابياً يكون جريه الى الجنوب سلبياً . وقد يكون
السلمي اكبر من الايجابي الذي يجب الطرح منه كما اذا كان راس مال تاجر ١٠٠٠
دينار والدين عليه ١٥٠٠ دينار

١٤ الاولوية قضية واضحة لا تقبل زيادة ابضاح . والاوليات التعليمية التي يُحتاج
اليها بالاكثري هذه

- ١ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٢ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٣ اذا ضُرِبَت اشياء متساوية في اشياء متساوية تكون الحواصل متساوية
- ٤ اذا قُسمَت اشياء متساوية على اشياء متساوية تكون الخواارج متساوية
- ٥ اذا أُضيفت كمية الى اخرى وطُرِحَت منها فالثانية لا تتغير
- ٦ اذا ضُرِبَت كمية في اخرى وانقسمت عليها فلا تتغير
- ٧ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية يكون من الاعظم المجموع

الاعظم

٨ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية يكون من الاعظم البقية

العظمى

٩ اذا ضُرِبَت اشياء متساوية في اشياء غير متساوية يكون من الاعظم الحاصل

الاعظم

١٠ اذا انقسمت اشياء غير متساوية على اشياء متساوية يكون من الاعظم الخارج

الاعظم

١١ الاشياء المتساوية لشيء واحد في متساوية بعضها لبعض

١٢ الكل اعظم من جزئه

الفصل الثاني

في الجمع

١٥ الجمع هو ربط كيات بواسطة علاماتها. فلو قيل ما هو مجتمع ت وب ون لنيل ت + ب + ن ولو قيل اصف فضلة ب وس الى د لنيل ب - س + د ولو قيل اصف فضلة ب وس الى فضلة ن ود لنيل ب - س + ن - د وقس على ذلك

١٦ متى كانت الكميات متشابهة تُجمع الى واحدة. مثالة ٢ ت + ٦ ب + ٤ ت + ٥ ب = ٧ ت + ١١ ب فلنا من ذلك القاعدة الاولى للجمع

متى كانت الكميات متشابهة والعلامات متشابهة فاجمع المسميات واكتب عن يسار المجمع الاحرف المشتركة واعطيه العلامة المشتركة. وهذه امثلة للعمل

٧ ب + كى	٢ كى	ب س
٨ ب + ٢ كى	٧ كى	٢ ب س
٢ ب + ٢ كى	كى	٩ ب س
٦ ب + ٥ كى	٢ كى	٢ ب س
٢٢ ب + ١١ كى		١٥ ب س

س د كى + ٢ م	رى + ٢ ت ب ح
٢ س د كى + م	٢ رى + ت ب ح
٥ س د كى + ٧ م	٦ رى + ٤ ت ب ح
٧ س د كى + ٨ م	٢ رى + ت ب ح
١٥ س د كى + ١٩ م	

ومبكلا اذا كانت العلامات سلبية. مثالة

٢-ب س	- ن ك	- ٢ ث ب	م
- ب س	- ٢ ن ك	- ٢ ث ب	م
- ٥ ب س	- ٢ ن ك	- ٧ ث ب	م
- ٩ ب س		- ١٠ ث ب	م

وهكذا لو كانت الكميات قوت متشابهة . مثالة

١٦ ب ^٢ د	+ ب س	- ٢ ب د س
- ٤ ب ^٢ د	- ٩ ب س	+ ٦ ب د س
- ٩ ب ^٢ د	+ ب س	+ ب د س
٢ ب ^٢ د	- ٧ ب	+ ٥ ب د س

١٧ لو قيل ما هو مجتمع ٦ ب وفضلة ٤ ب انيل ٤ ب - ٦ ب اي بسقط ٤ ب من ٦ ب ثم يضاف الى الفضلة ٦ ب وذلك كاضافة ٢ ب الى ٤ ب ولو قيل ما هو مجتمع ٧ ب و - ٢ ب لقيل ٧ ب - ٢ ب اي ٥ ب فلنا من ذلك

القاعدة الثانية للجمع . وهي منى كانت الكميات متشابهة والعلامات غير متشابهة فاطرح المسمى الاصغر من الاكبر واكتب عن يسار الباقي الاحرف المشتركة واعطه علامة المسمى الاكبر وهذه صورة العمل

٦+ ب	+ ٤ ب	٥ ب س	٢ ح م
- ٤ ب	- ٦ ب	- ٧ ب س	- ٩ ح م
+ ٢ ب		- ٢ ب س	- ٧ ح م

- دى ٦+	٢ ح - دك
٤ دى - م	٥ ح + دك
٢ دى + م	

١٨ الكيتان المتماثلان اذا كانت احدهما ايجابية والاخرى سلبية فنبنى احدهما الاخرى . مثالة ٦ ب - ٦ ب = . و ٢ ب - ١٨ = .

لنفرض كيتين أكبرهما ت وأصغرهما ب فيكون مجموعتهما $+ ب$ وفضلتهما $- ب$ ومجموع مجموعتهما وفضلتهما $٢ \pm$. أي ٢ ث ولنا من ذلك هذه القضية العامة أي

ان أضيف مجموع كيتين إلى فضلتهما يكون المجموع مضاعف أكبرهما

١٩ ان أريد جمع عدة من الكميات المتشابهة وكان بعضها إيجابياً وبعضها سلبياً فاجمع أولاً الإيجابية ثم السلبية حسب القاعدة الأولى (١٦) ثم افعل في المجموعين حسب القاعدة الثانية (١٧) فلو قبل اجمع $١٢ ب + ٦ ب + ٤ ب - ٥ ب - ٧ ب$ لقبل

$$١٢ ب + ٦ ب + ٤ ب = ٢٠ ب$$

$$٤ ب - ٥ ب - ٧ ب = - ١٦ ب$$

وحسب القاعدة الثانية يكون المجموع $- ٤ ب$

ولو قبل اجمع $٢ ك - ٢ ك + ٧ ك - ٤ ك - ٩ ك + ٧ ك$ لقبل $٦ ك - ٧ ك$

الاجزاء الإيجابية هي $٢ ك$ والسلبية $- ٤ ك$

$٢ ك$ $- ٧ ك$

$٤ ك$ $- ٩ ك$

$٧ ك$ $- ٦ ك$

والمجموع $١٦ ك$

و $١٦ ك - ٢٢ ك = - ٦ ك$

اجمع $٢ ت - ٦ ت + ٧ ت + ٢ ت - ٩ ت + ٨ ت$

$- ٤ ت$

اجمع $٢ ت ب م - ٦ ت ب م + ٧ ت ب م + ٢ ت ب م - ٩ ت ب م + ٨ ت ب م$

٢. اذا كانت الكميات غير متشابهة لا تُجمع إلا بكتابتها على التوالي مع علاماتها.

مثال $٤ ب - ٦ ي + ٢ ك + ١٧ ح - ٥ د + ٦$

وان كانت الكميات التي أريد جمعها بعضها متشابهة وبعضها غير متشابهة نكتب المتشابهة بعضها تحت بعض ثم نُجمع على ما تقدّم. فلو قبل اجمع $٢ ب س - ٦ د +$

٢ب-٢ى-٢ب س+ك-٢د+ب ع+٢د+ى+٢ك+ب لكانت صورة
العمل مكملا

$$\begin{aligned} & ٢ب س-٢د+٢ب-٢ى+ك+ب ع \\ & -٢ب س-٢د+ب+ى+٢ك \\ & +٢د \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{المجموع} = -٢د+٢ب-٢ى+٢ك+ب ع \\ & \text{اجمع ت ب م} -٢ك+ب م+ى-ك+٧+٥ك-٦ى+٩ \\ & \text{اجمع ت ب} +٨+س د-٢+٥ ت ب-٤م+٢ \\ & \text{اجمع ك} +٢ى-د ك+٧-ك-٨+ح م \\ & \text{اجمع م} +٢م-٦+٧ك+ى+٨+١٠ك-٩+٥ ت م \\ & \text{اجمع ت ح} +٦ى+د٧-١م+ك+٢ ت ح-٧د+١٧م-ك+ى \\ & \text{اجمع ت د} -ح+٨ك+ى-ت د+٥ ت د+ح-٧ك+ى \\ & \text{اجمع ت ب} -٢ ت ب+٢ ت ب-٢ ت ب+ك-ح+ى \\ & \text{اجمع ب} +٢ ب-٢ ت ك+٢ ت+٢ ب ك-ب+ى+ت \end{aligned}$$

—xox—

الفصل الثالث

في الطرح

٢١ الطرح اسقاط كمية من أخرى يُعرف الفضل بينهما
فلنفرض كمية ت+ب

اطرح منها +ب فيكون الباقي ت

اضف اليها -ب فتصيرت +ب-ب

وبالاولية الخامسة ت+ب-ب يعدل ت

اي طرح كمية ايجابية من عبارة جبرية هو كاضافة سلبية تعادل المطروحة اليها

ولو فرضت -ب

فان طرح منها -ب بقيت

وان اضيف اليها +ب صارت ت-ب+ب

ولكن ت - ب + ب يعدل ت

اي طرح كمية سلبية هو كإضافة ايجابية تعادلا . فان كان على احد دين فرفعة عنه فهو بمثابة اضافة مبلغ الدين الى رأس المال . ونرى من الامثلة المتقدمة ان طرح كمية ايجابية انما يتم بتغيير علامتها . فلنا من ذلك هذه القاعدة للطرح

ابدل علامات الكميات المطروحة من + الى - او عكسه ثم افعّل كما تقدّم في الجمع . وهذه امثلة للعل مع مشابهة العلامات اصلاً

من $28 +$ ب 16 ا 14 دت $28 -$ ب $16 -$ ا $14 -$ دت
اطرح $16 +$ ب 12 ا 6 دت $16 -$ ب $12 -$ ا $6 -$ دت
 $12 +$ ب 4 ا 8 دت $12 -$ ب $4 -$ ا $8 -$ دت

ففي هذه الامثلة يتوّم بدل العلامات الايجابية بالسلبية وبالعكس

٢٢ وهكذا متى تشابهت العلامات وكان المطروح اكبر من المطروح منه . مثاله

من $16 +$ ب 12 ا 6 دت $16 -$ ب $12 -$ ا $6 -$ دت
أطرح $28 +$ ب 16 ا 14 دت $28 -$ ب $16 -$ ا $14 -$ دت
 $12 -$ ب $4 -$ ا $8 -$ دت $12 +$ ب $4 +$ ا $8 +$ دت

وهكذا متى اختلفت العلامات . مثاله

من $28 +$ ب $16 +$ ا $14 +$ دت $28 -$ ب $16 -$ ا $14 -$ دت
اطرح $16 -$ ب $12 -$ ا $6 -$ دت $16 +$ ب $12 +$ ا $6 +$ دت
 $44 +$ ب 28 ا 20 دت $44 -$ ب $28 -$ ا $20 -$ دت

٢٣ امتحان الطرح في الجبر كما في الحساب اي باضافة الباقي الى المطروح .

فان وافق المجموع المطروح منه كان العمل صحيحاً والا فهو فاسد

تنبيه . عند الامتحان يجب اعادة العلامات الى اصلها . امثلة

من 2 كى - 1 ج 2 ب ك 3 ح - 1 حى - 2 ح
اطرح 3 كى + 7 ح 2 ح - 9 ب ك 5 حى - 7 ح
 2 كى - 8 ح 4 حى + 5 ح

من ن د - ٧ ب ي ٢ ت ب م - ك ي - ١٧ + ٤ ت ك
اطرح ٥ ن د - ب ي ٧ ت ب م + ٦ ك ي - ٢٠ - ت ك
١٠ ت ب م - ٧ ك ي

من ت ك + ٧ ب ٢ ت ح + ت ك ي
اطرح - ٤ ت ك + ١٥ ب - ٧ ت ح + ت ك ي
٥ ت ك - ٨ ب

٢٤ متى فُرِضَتْ عدة كميات متشابهة يجب جمعها أولاً ثم طرحها. مثالة

لو قيل من ت ب اطرح ٢ ت م + ت م + ٧ ت م + ٢ ت م + ٦ ت م ل قيل
ت ب - ١٩ ت م . ولو قيل من ي اطرح - ت - ت - ت - ت ل قيل ي
+ ت + ت + ت + ت = ي + ٤ ت . ولو قيل من ت ك - ب س + ٣ ت ك
+ ٧ ب س اطرح ٤ ب س - ٢ ت ك + ب س + ٤ ت ك ل قيل ٢ ت ك
+ ب س

من ت د + ٢ د س - ب ك اطرح ٣ ت د + ٧ ب ك - د س + ت د
٢٥ متى كانت الكميات غير متشابهة تطرح بكتابتها على التوالي بعد تبديل
علاماتها. فلو قيل من ٢ ت ب + ٨ م - ي + د ح اطرح ك - در + ٤ ح ي
- ب م ك ل قيل ٢ ت ب + ٨ م - ي + د ح - ك + در - ٤ ح ي + ب م ك

٢٦ اذا وُضِعَتْ علامة الطرح قدام كميات محصورة بين قوسين يجب عند رفع
القوسين تبديل علامات جميع الكميات المنخفضة. فلو وُضِعَ ت - (ب - س + د)
كان المراد ان ب - و - س + د يجب طرحها جميعاً من ت . ويتم العمل برفع
القوسين وتبديل العلامات فتصير ت - ب + س - د وهكذا

١٢ ت د + ت ك ي + د - (٧ ت د - ك ي + د + ح م - ر ي) = ٦ ت د +
٢ ك ي - ح م + ر ي

٧ ت ب س - ٨ + ٧ ك - (٢ ت ب س - ٨ - د ك + ر) = ٤ ت ب س
+ ٧ ك + د ك - ر

٢ ت د + ح - ٢ ي - (٧ ي + ٢ ح - م ك + ٤ ت د - ح ي - ت د) =
٦ ت م - د ي + ٨ - (١٦ د ي - ٨ - ت م - ي + ر) =

٧ ك ي - ٢ ك - ٥ - (٤ ح - ٣ ت ي + ٢ ك + ٢ ب) =
وبالعكس متى أريد حصر كميات بين قوسين . مثاله - م + ب - د ك + ٢ ح
فاذا انحصرت للطرح نصير - (م - ب + د ك - ٢ ح)

—x—

الفصل الرابع

في الصرب

٢٧ الضرب اما ان يكون في الصحيح وهو تكرار المضروب مراراً ثمائل الآحاد
الموجودة في المضروب فيه واما ان يكون في الكسر وهو اتخاذ جزء مفروض من المضروب
مراراً ثمائل اجزاء الواحد الموجودة في المضروب فيه . فان كان المضروب فيه واحداً
كان الحاصل مساوياً للمضروب فيه . وان كان أكثر من واحد كان الحاصل أكثر
من المضروب فيه . وان كان أقل من واحد كان الحاصل أقل من المضروب فيه

٢٨ لو فرض ان يُضرب ت في ب وفرضت للباء قيمة ثلاثة مثلاً لا تقتضى
اخذ ت ثلاث مرات اي ت + ت + ت = ٣ ت او ب ت فترى ان
الاحرف تُضرب بكتابتها متوالية بتوسط علامة الصرب او بدونها . فيكون ب في س
ب X س او ب س وهكذا تكاثرت الاحرف . ولا فرق في ترتيبها لان
س د م = د م س = م د س كما ان ٢ X ٢ X ٢ = ٢ X ٢ X ٢ = ٢ X ٢ X ٢
وان كان للاحرف سميات عددية يجب ضربها ايضاً ثم يوضع حاصلها قدام حاصل
الاحرف . مثاله ٢ ب X ٢ ب = ٦ ب ب

ا ضرب ٩ ت ب	١٢ ح ي	٢ د ح
في ٢ ك ي	٢ رك	م ي
٢٧ ب ت ك ي		٢ ح د م ي

ا ضرب ٦ ت د	٧ ب د ح	٣ ت ي
في ١٢ ح م ع	ك	٨ م ك
	٧ ب ح د ك	

ح ي	٢٦	اضرب ٢ ت ب
<u>٢٤</u>	<u>ك ٢</u>	<u>٤</u> في
٢٤ ح ي	٧٢ ك	١٢ ت ب

٢٩ اذا كان المضروب كمية مركبة يجب ضرب كل جزء منه في المضروب فيو.

مثاله

ح ٢ + م	اضرب د ٢ + ك ي
<u>د ي</u>	<u>ب ٢</u> في
	٢ ب د + ٦ ب ك ي

ح ٢ + م + ٢ + د ر	اضرب ح ٢ + ل ١
<u>ب ٤</u>	<u>م ي</u> في
	٢ ح ل م ي + م ي

٣٠ اذا كان كل واحد من المضروب والمضروب فيو كمية مركبة يجب ضرب

كل جزء من الواحد في كل جزء من الآخر. مثاله

٤ ت ي + ٢ ب	اضرب ٢ ك + د
<u>٢ س + ر ك</u>	<u>٢ ح + م</u> في
	٦ ت ك + ٢ ت د + ٢ ح ك م + ح د م

١ + ت	اضرب
<u>٤ + ك ٢</u>	في
	٢ ت ك + ٢ ك + ٤ + ت ٢

اضرب ح ٢ + ٧ في د ٦ + ١

الجواب ١٢ د ح + ٤٢ د + ٢ ح + ٧

اضرب د ي + ر ك + ح في ٦ م + ٤ + ٧

اضرب ٧ + ٦ ب + ت د في ٢ ر + ٤ + ٢ ح

إذا كان في الحاصل كيات متشابهة يجب كتابتها بعضها تحت بعض ثم جمعا .
وهذه صورة العمل

اضرب ب + ت

في ب + ت

ب ب + ب ت

+ ب ت + ت ت

ب ب + ب ت + ت ت

اضرب ب + س + ٢

في ب + س + ٢

ب ب + ب س + ب ٢

+ ب س + س س + س ٢

+ ب ٢ + س ٢ + ٦

ب ب + ب س + س ٥ + ب س + س ٥ + س ٦

اضرب ت + ي + ١ في ب ٢ + ٢ ك + ٧

اضرب ٢ ت + د + ٤ في ٢ ت + د ٢ + ١

اضرب ب + س + د ٢ في ب ٢ + ٤ س + د ٧

اضرب ب ٢ + ٢ ك + ح في ت د ٢ ك

اضرب ٢ ت د ٢ ك + ب ٤ ح م ٥ ٦ س = ٢٦٠ ت ب ح م ي

اضرب ب ٤ د ٦ ك في ٢ ك + ١

الجواب ٤٨ ب د ك + ٢٤ ب د

٢١ لا ينبغي انهُ اذا ضرب ٤ خ ت يكون الحاصل ٤ ت واذا ضرب ٤ خ - ت

يجب تكرار - ت اربع مرات . او - ت - ت - ت - ت = - ٤ ت واذا

ضرب - ٤ خ ت يكون الحاصل + ت + ت + ت + ت = + ٤ ت ولكن

العلامة السلبية للاربعة تدل على وجوب الطرح وذلك يتم بتبديل العلامات فتصير

- ٤ ت واذا ضرب - ٤ خ - ت يكون الحاصل - ت - ت - ت - ت =

- ٤ ب ولكن يجب تبديل العلامة فتصير + ٤ ت ولنا من ذلك انهُ

ان ضرب + في + يكون الحاصل +
 وان ضرب - في - يكون الحاصل +
 وان ضرب + في - يكون الحاصل -
 وان ضرب - في + يكون الحاصل -

اي متى تشابهت علامات المضروب والمضروب فيه تكون علامة
 الحاصل ايجابية. ومتى اختلفت تكون علامته سلبية

اضرب ب - ٢ ت
 في ٦ ي
 ٢ ت - م
 ٣ ح + ك
 ٦ ب ي - ١٨ ا ت ي

اضرب ح - ٢ د - ٤
 في ٢ ا ي
 ٢ ت - ٢ د - ٤
 ٢ ح + ب
 ٢ ح ي - ٦ د ي - ٨ ا ي

اضرب ت + ب
 ب - ك
 ٢ د ي + ح ك + ٢
 م - ر - ت ب
 ب ت + ب ب - ت ك - ب ك

اضرب ٢ ح + ٢
 في ت د - ٦
 ٢ ت ح د + ٢ ت د - ١٨ ح - ١٨

اضرب ت - ٤ في ٢ ب - ٦ = ٢ ت ب - ١٢ ب - ٦ ت + ٢٤
 اضرب ٢ ت ي - ب في ٦ ك - ١ - ١٨ ا ت ك ي - ٦ ب ك - ٢
 ت ي + ب

اضرب ٢ د - ح ي - ٢ ك في ٤ ب - ٧
 اضرب ٢ ت د - ت ح - ٧ في ٤ د ي - ح ر
 اضرب ٢ ح ي + م - ١ في ٤ د - ٢ ك + ٢

٢٢ قد رأينا ان حاصل كيتين سلبيتين ايجابي. فان ضرب هذا الحاصل في كمية سلبية يكون الحاصل سلبياً. وان ضرب الحاصل الاخير في كمية سلبية يكون الحاصل ايجابياً. وعلى الاطلاق ان كان عدد الكميات السلبية وئراً يكون الحاصل سلبياً. وان كان شفعاً يكون الحاصل ايجابياً. اما الكميات الايجابية فحاصلها ايجابية ابداً

٢٣ قد يحدث في الضرب ان الكميات الايجابية والسلبية يفي بعضها بعضاً حتى نخرج من الحاصل برمتها. مثالة

اضرب ت - ب م + م ي

في ت + ب م - م ي

ت - ت ب - ب

ت + ب - ب - ب

ت ت - ب - ب

اضرب ت + ت ب + ب ب

في ت - ب

ت ت + ت ت ب + ت ب ب

ت - ت ب - ت ب ب - ب ب ب

ت ت ت - ب ب ب

٢٤ يكفي احياناً الدلالة على الضرب بعلائمه من دون انما هو حقيقة. فلو قيل

اضرب ت + ب + س في ح + م + ي لفيل (ت + ب + س) × (ح + م + ي)

٢٥ لنا ما تقدم ذكره هذه القاعدة العامة للضرب

اضرب جميع احرف المضروب ومسمياتها في جميع احرف المضروب

فيه ومسمياتها واجعل لكل جزء من الحاصل العلامة المطلوبة على

القاعدة السابقة ان العلامات المتشابهة يحصل منها ايجاب والخلفة

يحصل منها سلب. مثالة

- اضرب ت + ب - ٢ في ٤ ت - ٦ ب - ٤
 اضرب ٤ ت ب X ك ٢ X في ٢ م ي - ١ + ح
 اضرب (٧ ت ح - ي) X في ٤ ك X ٥ X د
 اضرب (٦ ت ب - ح د + ١ X ٢ في ٨ + ٤ ك - ١) X د
 اضرب ٢ ت ي + ي - ٤ + ح في (د + ك) X (ح + ي)
 اضرب ٦ ت ك - (٤ ح - د) في (ب + ١) X (ح + ١)
 اضرب ٧ ت ي - ١ + ح X (د - ك) في - (ر + ٢ - ٤ م)

الفصل الخامس

في القسمة

٢٦ القسمة طريقة لاستخراج عدد من آخر اذا ضرب في المقسوم عليه يحصل المقسوم. وقد يكون المقسوم والمقسوم عليه عددين وقد يكونان حروفاً. فلو قسّم ت ب د على ت لكان الخارج ب د لان ب د X ت = ت ب د

فنرى من ذلك انه متى وُجد المقسوم عليه بين اجزاء المقسوم نتم القسمة باخراج ذلك الجزء من الكمية. امثلة

اقسم س ك	د ح	درك	ح م ي	د ح ك ي
على س	د	در	ح م	د ي
الخارج ك		ك		ك ح

اقسم ت ب س د	ت ب ك ي	د ت ب
على ب	ت ك	ت
الخارج	ب ي	ت ب

اقسم ب ب ك	ت ت د د ك	ت ت م م ي
على ب	ت د	ت م ي
الخارج ب ك	ت د ك	

اقسم ت ت ت ك ك ح
 ى ى ى
 ت ت ك ك
 ى ى
 ت ك ح

وعلى الاطلاق مهما كانت اجزاء المقسوم يكون اخراج احدها كالقسمة عليه . مثاله

اقسم ت (ب + د) ت (ب + د) ت (ب + د)
 على ت ب + د ن + م ى
 الخارج ب + د ت ى

اقسم (ب + ك) (س + د) (ب + ى) X (د - ح) ك
 على ب + ك د - ح
 س + د (ب + ى) ك

٢٧ اذا كانت للكميات مسميات عددية يجب ان نُقسم ايضاً ثم يجمل الخارج فلام
 الخارج من قسمة الاحرف . مثاله

اقسم ٦ ت ب ١٦ د ك ى ٢٥ د ح ر ١٢ ك ى
 على ٢ ب ٤ د ك ٦ ح
 الخارج ٢ ت ٢٥ ر

اقسم ٢٤ د ر ك ٢٠ ح م
 على ٢٤
 الخارج د ر ك

٢٨ اذا ضربت كمية بسيطة في كمية مركبة تدخل البسيطة في كل جزء من
 الحاصل (٢٩) فيمكن فكهُ الى ضلعيه المضروب والمضروب فيه . مثاله

ت ب + ت د تنفك الى ت X (ب + د)
 ت ب + ت س + ت ح تنفك الى ت X (ب + س + ح)

ت م ح + ت م ك + ت م ي تنفك الى ت م $\times$ (ح + ك + ي)
 ٤ ت د + ٨ ح + ١٢ ا ت م + ٤ ت ي تنفك الى ٤ ت $\times$ (د + ٢ ح + ٣ ا + ي)

فان انتسبت الكمية على احد هذين الضامعين يكون الخارج الضلع الآخر. مثاله

(ت ب + ت د) $\div$ ت = ب + د و (ت ب + ت د) $\div$ (ب + د) = ت

اقسم	ب د ح + ب د ي	ت ت ح + ت ي
على	ب د	ت
	الخارج	ت ح + ي

اقسم	د ر ك + د ح ك + د ك ي	٦ ت ب + ١٢ ا ت س
على	د ك	٢ ت
		٢ ب + ٤ س

اقسم	١٠ ا د ر ي + ١٦ د	١٢ ح ك + ٨	٢٥ د م + ٤ ا د ك
على	٢ د	٤	٧ د
الخارج	٥ ر ي + ٨	٢ ح + ٢	

اقسم	ت ب + ت س + ت ح	ت م ح + ت م ك + ت م ي
على	ب + س + ح	ح + ك + ي
	الخارج	ت

اقسم	٤ ت ب + ٨ ت ي	ت ح م + ت ح ي
على	ب + ٢ ي	م + ي
	الخارج	٤ ت

٢٦ اذا كان كل من المنقسم والمنقسم عليه ايجابياً او سلبياً يكون الخارج ايجابياً .
 وان كان احدهما ايجابياً والآخر سلبياً يكون الخارج سلبياً . وذلك واضح مما تقدم ان
 حاصل الخارج في المنقسم عليه هو المنقسم نفسه (٢٦) فيكون

ت ب ÷ ب = ت لان ت × ب = ت ب
و- ت ب ÷ ب = - ت لان - ت × ب = - ت ب
وقس على ذلك

اقسم ت ب ك	٨ ت - ١٠ ا ت ي	٦ ت ك - ٦ ت ي
على - ت	- ٢ ت	٢ ت
الخارج - ب ك	- ٤ + ٥ ي	

اقسم ٦ ت م × ح
على - ٢ ت
- ٢ م × ح = ٢ ح م

٣. ان لم توجد احرف المنسوم عليه في المنسوم يدل على القسمة بكتابتها على هيئة كسر دارجي. مثاله كى ÷ ت = ك ت و د - ك ÷ ح = د - ك ح وان كان المنسوم كمية مركبة بوضع المنسوم عليه تحته جميعاً مرة واحدة او بكرر نحت كل جزء منه. مثاله ب ÷ س = ك ÷ س او ك ÷ س و ت ÷ ب = ٢ ÷ ب + ٢ ÷ ب او ٢ + ٢ لان نصف مجموع كيتين او اكثر يعدل مجموع انصافها. وكذلك ت - ب = ٢ ÷ ب او ٢ - ٢ لان نصف فصلة كيتين يعدل فصلة نصفيهما. وهكذا ت - ٢ = ٢ ÷ ب + ٢ ÷ ب = ٢ + ٢ وفس على ذلك

٤. اذا وجدت حروف مشتركة في المنسوم والمنسوم عليه تطرح منها. مثاله ت ب ÷ س = ت ك ح ك ÷ س و ك ح ك ÷ س = ت ح ٢ - ٢ ت ي = ٢ - ٢ ي وان وجد المنسوم عليه في بعض اجزاء المنسوم دون البعض نُقسم الأول كما تقدم وتكتب الآخر على هيئة كسر كما علمت. مثاله (ت ب + د) ÷ ت = ت ب ÷ ت + د ÷ ت = ب + د ت

اقسم د ك ي + رك - ح د	٢ ح + ت د - ك
على ك	ت
الخارج د ي + ر - ح ك	

اقسم $٢م + ٢ي$ على $٢م$
الخارج $٢م + ٢ي$

٤٢ الخارج من قسمة كمية على نفسها هو واحد ابداً . مثاله
ت = ١ و $٢ت = ٢$ و $٢ت = ٢$ و $٢ت = ٢$

اقسم $٢ت + ٢ك$ على $٢ك$
الخارج $٢ت + ٢ك$

اقسم $١٢ت + ١٢ي + ١٢ك - ١٨ب + ٢٤ب$ على $٦ب$
اقسم $١٦ت - ١٢ي + ٨ي - ٤ + ٢٠ت + ٢ك$ على ٤
اقسم $(٢٢ - ٢٢) \times (٢م + ٢ي) \times ك$ على $(٢٢ - ٢٢) \times (٢م + ٢ي)$
اقسم $٢٢ت - ٤ت + ٢ي - ٢ت$ على $٢٢ت - ٤ت - ٢ي - ٢ت$
اقسم $٢٢ت - ٢ي + ٢م - ٢ي - ٢ت$ على $٢٢ت - ٢ي - ٢م - ٢ي$
اقسم $٢٢ت - ٢٢ت + ٢٢ت - ٢٢ت$ على $٢٢ت - ٢٢ت$
اقسم $٢٢ت - ٢٢ت + ٢٢ت - ٢٢ت$ على $٢٢ت - ٢٢ت$
نبيه . اذا كان المقسوم عليه كمية مركبة سيأتي ذكره عند الكلام على العاد الأكبر

—xox—

الفصل السادس

في الكسور

٤٣ اذ كان كثير من خصائص الكسور يُعرف من علم الحساب اقتصرنا هنا على ما يتعلق منها بالاعمال الجبرية . فنقول

٤٤ قيمة الكسر هي الخارج من قسمة الصورة على الخارج . فقيمة $\frac{٢}{٢}$ هي ٢ وقيمة

٤٥ هي ت فقد وضع اذا انه ما تغير الكسر فان بقي هذا الخارج على حاله لم يتغير
 قيمة الكسر. مثاله $\frac{٤}{٢} = \frac{١}{٠} = \frac{٤}{٢} = \frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = \frac{٢}{١}$ واهل جراً لان
 الخارج من كل هذه الكسور انما هو اثنان

٤٥ اذا بقي مخرج كسر على حاله كان ضرب الصورة في كميته كضرب القيمة
 في تلك الكمية وقسمه الصورة كنسبة القيمة. مثاله $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$
 الى آخره. فالخارج هي ب ٢ ب ٢ ب ٢ ب ٢ الى آخره
 واذا بقيت صورة كسر على حاله ما ف ضرب المخرج في كميته هو كنسبة القيمة على تلك
 الكمية وقسمه المخرج كضرب القيمة. مثاله $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$
 فالخارج في ٤ ت ٢ ت ٨ ت ٢٤ ت

فترى ان قيمة الصورة كضرب المخرج وضرب الصورة كنسبة المخرج

٤٦ نرى ايضاً ما تقدم انه اذا ضربت الصورة والمخرج كلاهما في كميته واحدة ان
 انفسا على كميته واحدة لا يتغير قيمة الكسر. مثاله $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$
 $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$

٤٧ ان قيمة $\frac{٢}{٢}$ هي ت وقيمة $\frac{٢}{٢}$ هي - ت وى $\frac{٢}{٢} =$
 ي + ت وى - $\frac{٢}{٢} =$ - ت فترى ان قيمة الكسر تتغير من + الى -
 وبالعكس بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر كما
 حسبنا تقدم (٣٩) $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$ و - ت و - ت و - ت و - ت
 لكن $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$ و - ت و - ت و - ت و - ت

فترى ان قيمة الكسر تتغير من + الى - وعكسه بتبديل جميع علامات الصورة.
 اذا تغيرت علامات المخرج فلنا ايضاً كما تقدم $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$ و - ت و - ت
 فلنا ما تقدم هذه القضية العامة ان قيمة الكسر تتغير من + الى -
 او عكسه بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر او بتبديل جميع علامات
 الصورة. او جميع علامات المخرج

ثم ان $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$ وى - $\frac{٢}{٢} =$ - ت وى + ت اي اذا تغيرت
 العلامات من + الى - او عكس ذلك في موضعين من المواضع المذكورة سابقاً

نبذة في جمع الكسور

٥١ تجمّع الكسور بكتابتها على التوالي مع علاماتها حسبما تقدم في جمع الصحيح أو بقولها الى مخرج مشترك. ثم تجعل جميع العلامات المتقدمة عليها ايجابية . ثم تجمع الصور ويوضع المجموع فوق المخرج المشترك

تنبيه . عند تبديل العلامات يجب الاحتراس من تغيير قيمة الكسر (٤٧)

[illegible]

نبذة في طرح الكسور

٥٢ طرح الكسور غير علامة المطروح من + الى - او عكسه
ثم افعّل كما تقدّم في الجمع

تنبيه . نارةٌ يَجبُ تغيير علامة الصورة ونارةُ العلامة المتقدمة على الكمر كله لكي تكون هذه الاخيرة ايجابية

فلو قيل من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ لنيل $\frac{ت}{ب} - \frac{ح}{م}$ ثم بالتحويل الى مخرج مشترك

$$\frac{ت}{ب} - \frac{ح}{م} = \frac{ت م - ح ب}{ب م}$$

وبالجمع $\frac{ت م + ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

٥٢ نُطَرِّحُ الكسور ايضاً مثل الصحيح بكتابهم المتواليه بعد تبديل العلامة .
فلو قيل اطرح $\frac{ت}{ب} - \frac{ح}{م}$ من $\frac{ح}{م}$ لنيل $\frac{ح}{م} + \frac{ت}{ب}$
اما طرح الكسر من صحيح او عكسه فهو بان نجعل الصحيح مخرجاً هو واحد ثم نعمل
كما تقدم

من $\frac{ح}{م}$ اطرح $\frac{ت}{ب}$ الجواب $\frac{ح م - ت ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

نبرة في ضرب الكسور

٥٤ ضرب الكسور في الجبر كما في الحساب اي تضرب الصور بعضها في بعض
لايجاد صورة جديدة . والخارج بعضها في بعض لايجاد مخرج جديد . مثالة

$\frac{ب}{م} \times \frac{د}{س} = \frac{ب د}{م س}$ و $\frac{ت}{ب} \times \frac{ح}{م} = \frac{ت ح}{ب م}$

اضرب $\frac{ح}{م} \times \frac{ت}{ب}$ في $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت ح}{ب م}$

اضرب $\frac{ت}{ب}$ في $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت ح}{ب م}$

اضرب $\frac{ت}{ب}$ في $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت ح}{ب م}$

اضرب $\frac{ت}{ب}$ في $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت ح}{ب م}$

اضرب $\frac{ت}{ب}$ في $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ت ح}{ب م}$

٥٥ يُخَصَّرُ الضرب باخراج الكميات المتساوية من الصور والخارج فيستغنى

بذلك عن الاختزال بعد اتمام الضرب . مثاله لو قبل الضرب $\frac{ت}{ح}$ في $\frac{د}{ح}$ فلنا
ت في احدى الصور وأحد الخارج . ولذلك نستطاع منها فيبقى $\frac{د}{ح}$

$$\text{اضرب } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح} \text{ في } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح} \text{ في } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح}$$

$$\text{اضرب } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح} \text{ في } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح} \text{ في } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح}$$

$$\text{اضرب } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح} \text{ في } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح} \text{ في } \frac{ت}{ح} \text{ في } \frac{د}{ح}$$

وهكذا في الكسر والصحيح بضرب الصحيح في صورة الكسر . مثاله $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$
ور $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$
وت $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$

٥٦ الكسر بضرب في كمية تساوي مخرجه برفع المخرج . مثاله $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$
ت وت $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$
وهكذا اذا ضرب في ضلع من اضلاع المخرج برفع ذلك الضلع . مثاله $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$

٥٧ الكسر الاضافي هو كسر الكسر وهو الحاصل من ضرب كسرين او اكثر .
مثاله $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$ فيحول الكسر الاضافي الى بسيط بضرب
الصور والخارج حسبما تقدم

$$\text{حول } \frac{ت}{ح} \text{ الى كسر بسيط } \frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$$

$$\text{حول } \frac{ت}{ح} \text{ الى كسر بسيط } \frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$$

$$\text{حول } \frac{ت}{ح} \text{ الى كسر بسيط } \frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$$

فندى ان $\frac{ت}{ح} = \frac{ت}{ح}$ و $\frac{د}{ح} = \frac{د}{ح}$ و $\frac{ت}{ح} = \frac{ت}{ح}$ و $\frac{د}{ح} = \frac{د}{ح}$ وقس على ذلك

نبذة في قسمة الكسور

٥٨ لقسمة الكسور يقلب المقسوم عليه بان تجعل صورته مخرجاً
ومخرجه صورةً ثم يفعل كما في الضرب

فلو قبل اقسام $\frac{ت}{ح}$ على $\frac{د}{ح}$ لنيل $\frac{ت}{ح} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت \times د}{ح \times ح}$ وكيفية هذه القاعدة هي انه
اذا ضرب كسر في نفسه بعد قلبه يكون الحاصل واحداً ابداً . واذا ضربت كمية في واحد

لا تتغير فان ضرب المتسوم أولاً في المتسوم عليه بعد قلبه ثم في نفس المتسوم عليه يكون
الحاصل الاخير مساوياً للمتسوم. اما القسمة فهي استخراج كمية اذا ضربت في المتسوم
عليه حصل المتسوم. والكمية الحاصلة من ضرب المتسوم في المتسوم عليه بعد قلبه مستكملة
الشروط المذكورة. فالقاعدة اذاً صحيحة

$$\begin{aligned} & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } 4 \text{ } \frac{2}{3} \text{ الجواب } \frac{2}{12} \\ & \text{الامتحان } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{12} \\ & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } 4 \text{ } \frac{2}{3} \text{ الجواب } \frac{2}{12} \\ & \text{الامتحان } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{12} \\ & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } 4 \text{ } \frac{2}{3} \text{ الجواب } \frac{2}{12} \\ & \text{الامتحان } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{12} \\ & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } 4 \text{ } \frac{2}{3} \text{ الجواب } \frac{2}{12} \\ & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } 4 \text{ } \frac{2}{3} \text{ الجواب } \frac{2}{12} \\ & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } 4 \text{ } \frac{2}{3} \text{ الجواب } \frac{2}{12} \\ & \text{اقسم } \frac{2}{3} \text{ على } 4 \text{ } \frac{2}{3} \text{ الجواب } \frac{2}{12} \end{aligned}$$

الجواب ن

$$\begin{aligned} & ٥٩ \text{ يُقسم الكسر على صحيح بضرب المخرج في ذلك الصحيح . مثاله } \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{12} \\ & \text{لأن } \frac{2}{3} = 4 \times \frac{2}{12} \text{ وحسباً تقدمت } \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{12} \end{aligned}$$

٦٠ قد تقدم (١٢) ان مكفوء كمية هو الخارج من قسمة واحد على تلك
الكمية. فمكفوء $\frac{2}{3}$ هو $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ فيكون مكفوء كسر هو الكسر نفسه مقلوباً.
فمكفوء $\frac{2}{3}$ هو $\frac{3}{2}$ ومكفوء $\frac{1}{3}$ هو $\frac{3}{1}$ او 3 ومكفوء $\frac{1}{4}$ هو 4

٦١ قد يقع احياناً كسر في صورة كسر آخر. مثاله $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ وهذا الكسر يُنقل من
الصورة الى الخارج او بعكس ذلك بقلبه. ولا تتغير القيمة بذلك لان القسمة على كسر في
كالضرب في ذلك الكسر مقلوباً. وضرب الصورة كقسمة المخرج وقسمة الصورة كضرب
المخرج. ففي $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ بضرب $\frac{2}{3}$ في $\frac{5}{4}$ ولا تتغير القيمة ان قسمنا المخرج على $\frac{4}{5}$ اي
ضربناه في $\frac{5}{4}$ فاذا $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ وهكذا $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ و
 $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ وقس على ذلك

ثم ان هذا الكسر الواقع في الصورة يمكن ازالته لان ضرب الصورة هو ضرب القيمة.

ك $-7+7=7+7$ ولكن $7-7=0$ فيبقى ك $=7+9$ فوجدنا قيمة المجهولة
ك وهي $7+9$ اي ١٦

نفرض ايضاً ك + ب = ت

اطرح ب من الجانبين فتصير ك + ب - ب = ت - ب ولكن ب
- ب = ٠ فاذا ك = ت - ب

فندري ان العمل قد تم بنقل المعلومة من الجانب الواحد الى الآخر مع تبديل
علامتها وهذا العمل يقال له المتقابلة ولنا ما سبق هذه القاعدة

متى ارتبطت الكمية المجهولة مع كميات معلومة بعلامة الجمع او الطرح
فانقل المعلومات الى الجانب المتقابل وابدل علاماتها

مفروض ك + ب - م = ح - د

بالمقابلة ك = ح - د - ب + م

٦٤ متى وقعت كميات متشابهة على جانب واحد يجب جمعها حسب قواعد الجمع

فلو فرض ك + ٥ ب - ح = ٤ ب

بالمقابلة ك = ٤ ب - ٥ ب + ح

وبالجمع ك = ٢ ب + ح

اذا كانت المجهولة على الجانبين يجب نقلها الى جانب واحد

فلو فرض ك + ٢ ح = ح + د + ٢ ك

بالمقابلة ٢ ح - ح - د = ٢ ك - ك

وبالجمع ح - د = ك

٦٥ اذا وقعت كميات متساوية بعلامات متشابهة على الجانبين يمكن اخراجها

منها في الحال

فلو فرض ك + ٢ ح + د = ب + ٢ ح + ٧ د

اخرج ٢ ح من الجانبين

ك + د = ب + ٧ د

وبالمقابلة والجمع ك = ب + ٦ د

ولا فرق في ترتيب الكميات ولا في الجانب الذي تُنقل اليه . وإذا بُدلت جميع علامات الجانبين لا تتغير المعادلة . مثالة $ك - ب = د - ت$ بالمقابلة لنا $- د + ت = - ك + ب$ او $- ك + ب = - د + ت$ وإذا نُقل جميع الكميات الى الجانب الواحد يبقى الآخر صفراً . فلو قُرض $ك + ب = د$ فحينئذٍ $ك + ب - د = ٠$

وعلى ما تقدم نُحوّل هذه المعادلات

$$ت + ٢ - ك - ٨ = ب - ٤ - ك + ت$$

$$ي - ت - ب - ح = م - ت + ٢ - ي - ت - ب + ح$$

$$ح + ٢٠ + ٧ = ك - ٨ - ٦ - ح + ٦ - ك - د + ب$$

$$ب + ح + ٢١ - ٤ - ب + د = ١٢ - ٢ - ك - ٧ - ب + ح + د$$

٦٦ اما الضرب فيستعمل متى انقسمت الكمية المجهولة على معلومة كما في $ت = ب$

بضرب الجانبين في $ت$ فتصير $ك = ت$ ب

ولنا من ذلك هذه القاعدة

متى انقسمت المجهولة على معلومة فاضرب الجانبين في تلك المعلومة

ثم قابل واجمع كما تقدم

$$س - ك + ت = ب + د$$

$$اضرب الجانبين في س$$

$$ك + ت س = ب س + د س$$

$$وبالمقابلة$$

$$ك = ب س + د س - ت س$$

وهذا العمل يقال له الجبراي اعادة الكسر صحيحاً

$$مفروض$$

$$٢٠ = ٥ + \frac{٤ - ك}{٦}$$

$$بالجبر$$

$$ك - ٤ - ٢٠ = ٥ - ٢٠$$

$$بالمقابلة$$

$$ك = ٢٠ - ٤ + ١٢٠ = ١٤$$

$$مفروض$$

$$ح = د + \frac{ك}{ب}$$

$$بالجبر$$

$$ك + ت د + ب د = ح + ب ح$$

$$بالمقابلة$$

$$ك = ح + ب ح - ت د - ب د$$

ومكنا متى وقعت المجهولة في مخرج كسر يضرب الجانبان في ذلك المخرج

$$\text{مفروض} \quad ٨ = ٧ + \frac{٦}{١-ك}$$

$$\text{اضرب في } (١٠-ك) \quad ٨٠-٨ك = ٧٠-٧ك + ٦$$

$$\text{بالمقابلة والجمع} \quad ٤ = ك$$

$$٦٧ \text{ لو فرض } ك = \frac{٦}{١-ك} + \frac{٧}{١-ك}$$

$$\text{فالضرب في } ت \text{ نصير } ك = \frac{٦ت}{١-ك} + \frac{٧ت}{١-ك}$$

$$\text{وبالضرب في } ب \text{ نصير } ب ك = \frac{٦ت}{١-ك} + \frac{٧ت}{١-ك}$$

$$\text{وبالضرب في } س \text{ نصير } ب س ك = \frac{٦ت}{١-ك} + \frac{٧ت}{١-ك}$$

$$\text{او بالضرب في جميع الخارج دفعة واحدة نصير} \quad \frac{٦ت}{١-ك} + \frac{٧ت}{١-ك} = \frac{٦ت}{١-ك} + \frac{٧ت}{١-ك}$$

ثم باخراج الاحرف المتشابهة من الصور والخارج لنا كما في الاول $ب س ك = ت س د + ت ب ح$ ولنا من ذلك هذه القاعدة لازالة الكسور من معادلة اي لجبرها

اضرب كل صورة في جميع الخارج الاخرجهما

$$\text{مفروض} \quad ك = \frac{٦}{١-ك} + \frac{٧}{١-ك}$$

$$\text{بالجبر} \quad د ع م ك = ت ب ع م + ت د م ي - ت د ع ح$$

$$\text{مفروض} \quad \frac{٦}{١} + \frac{٤}{٥} + \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{بالجبر} \quad ٢٠ ك = ٤٠ + ٤٨ + ١٨٠$$

٦٨ اذا كانت علامة كسرية وجب تبديلها بدون تغيير القيمة كما تقدم في

فصل الكسور (٤٧)

$$\text{مفروض} \quad \frac{٦-٢ح-٢ب}{٦+٢ح+٢ب} = \frac{٦-٢ح-٢ب}{٦+٢ح+٢ب}$$

$$\text{بتبديل العلامات} \quad \frac{٦-٢ح-٢ب}{٦+٢ح+٢ب} = \frac{٦-٢ح-٢ب}{٦+٢ح+٢ب}$$

$$\text{ثم بالجبر} \quad ت ر - د ر = ر س ك - ك ب ٢ + ح م ك + ٦ ك ن$$

٦٩ اما القسمة فتقبل بها المعادلات متى ضربت المجهولة في المعلومة وذلك بقسمة

جانب المعادلة على تلك المعلومة . فلو فرض $ك + ب - ح = د$

$$\text{فبالمقابلة نصير } ك = د - ب + ح \text{ وبالقسمة على } ك = \frac{د-ب+ح}{ك}$$

$$\text{مفروض} \quad ٢ ك = \frac{٦}{١-ك} + \frac{٧}{١-ك}$$

بالجبر $٢س ح ك = ت ح - س د + ٤ ب ح س$
 بالقسمة على $٢س ح ك = \frac{ت ح - س د + ٤ ب ح س}{٢س ح}$

مفروض $٢ ك - ب ك = ت - د$

حسب (٢٨) $(٢ - ب) \times ك = ت - د$

بالقسمة على $٢ - ب ك = \frac{ت - د}{٢ - ب}$

مفروض $ت ك + ك = ح - ٤$

بالقسمة على $١ + ت ك = \frac{ح - ٤}{١ + ت}$

مفروض $ك - \frac{ك - ب}{ح} = \frac{٤ + ت}{٤}$

بالجبر $٤ ح ك - ك - ٤ = ٤ ب + ت ح + ح د$

بالمقابلة والقسمة $ك = \frac{ت ح + ح د - ٤ ب}{٤ - ح}$

٧٠ إذا ضرب كل جزء من المعادلة في كمية يجب قسمة المعادلة عليها . وإذا انقسم كل جزء على كمية يجب ضرب المعادلة فيها . وهكذا نصير أبسط ما كانت وتسهل معاملتها حسبما تقدم

مفروض $ت ك + ٢ ت ب = ٦ ت د + ت$

بالقسمة على $١ + ٦ ت ب = ك + ٢$

بالمقابلة $ك = ٦ ت ب - ١ + ٢$

مفروض $\frac{١ + ك}{ك} = \frac{٦ - ح}{ك}$

بالضرب في $ك$ حسب (٤٨) $١ + ك = ٦ - ح$

بالمقابلة $ك = ٦ - ح - ١$

مفروض $ك (٦ + ت) - ت - ب = د \times (٦ + ت)$

بالقسمة على $٦ + ت ب = ١ - ك$

وبالمقابلة $ك = ١ + د$

٧١ إذا اقتضى كتابة مسألة على هيئة النسبة فتتحوّل تلك النسبة الى معادلة بأن تجعل حاصل الطرفين مساوياً لحاصل الوسطين كما عرفت في علم الحساب . فان قُرض $ت : ب :: س : د$ فإذا $ت د = ب س$ وإن قُرض $٢ : ٤ :: ٦ : ٨$

فحينئذ $٨ \times ٢ = ٦ \times ٤$ وهكذا ت ك : ب :: ح : د ثم ت د ك = ب ح س
وايضاً ت + ب : س :: ح - م : ي ثم ت ي + ب ي = ح س - م س

٧٢ نَحْوَلْ معادلة الى نسبة بـك الجانب الواحد الى ضلعين فيجعلان طرفين.
والجانب الآخر الى ضلعين فيجعلان وسطين. فلو فرض ت ب س = د ي ح فينتك
الجانب الاول الى ت X ب س او ت ب X س او ت س X ب وهكذا
ينتك الجانب الآخر الى د X ي ح او د ي X ح او د ح X ي
ولنا من ذلك عدة نسب اي ت : د :: ي : ح : ب : س وايضاً ت ب : د ي
:: ح : س او ت س : د ح :: ي : ب وفلم جراً لان هذه النسب كلها اذا انحوت
الى معادلات نصير ت ب س = د ي ح
فلو فرض ايضاً ت ك + ب ك = س د - س ح لانك الجانب الاول الى
ك X (ت + ب) والثاني الى س X (د - ح) ولنا ك : س :: د - ح : ت + ب
او د - ح : ك :: ت + ب : س وفلم جراً

امثلة

$$(١) \text{ مفروض } ٧ + \frac{٥}{٨} = ٦ + \frac{٢}{٤}$$

$$\text{بالجبر } ٢٤ ك + ٢٠ = ١٩٢ + ٢٢٤$$

$$\text{بالمقابلة والجمع } ٢٢ = ٤ ك$$

$$\text{بالتقسمة على } ٤ \text{ ك} = ٨$$

$$(٢) \text{ مفروض } ت + \frac{ك}{س} = ح + \frac{ك}{س}$$

$$\text{بالجبر ب س ك + ب ت ح س = ت س ك - ت ب ك + ت ب س د}$$

$$\text{بالمقابلة والتقسمة } ك = \frac{ت ب س د - ت ب ك + ت ب س ح}{ت س - ت ب + ت ب س}$$

$$(٣) \text{ مفروض } ١٢ - ٤٠ - ٦ - ك = ١٦ - ١٢٠ - ١٤ ك$$

$$(٤) \text{ " } \frac{١٩ - ك}{٢} + \frac{٢ - ك}{٢} = \frac{١٩ - ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٢}$$

$$(٥) \text{ " } ٢٠ = \frac{ك}{٤} + \frac{ك}{٢}$$

$$(٦) \text{ " } ٥ = ٤ - \frac{١ - ت}{٤}$$

$$(٧) \text{ " } ٨ = ٢ - \frac{٢}{٤}$$

$$(٨) \text{ " } ١ = \frac{٦ + ل}{٤ + ل}$$

$$= ل$$

$$\begin{aligned}
 (٩) \text{ مفروض } ك + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٣} &= ١١ \\
 = ك & \\
 (١٠) \text{ " } \frac{٧}{١٠} &= \frac{ك}{٤} - \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٣} \\
 = ك & \\
 (١١) \text{ " } \frac{٧ - ٢٨٤}{٥} &= \frac{٦ + ٥ - ك}{٤} \\
 = ك & \\
 (١٢) \text{ " } \frac{٢٧ - ك ١١}{٣} + ٥ &= \frac{٦ + ك ٢}{٥} \\
 = ك & \\
 (١٣) \text{ " } \frac{ك ٦ - ٤ - ١٨}{٣} &= \frac{٢ - ك ٤}{٣} \\
 = ك & \\
 (١٤) \text{ " } \frac{ك ٧ - ٩٧}{٣} + \frac{٥ - ك ٥}{٨} &= \frac{١١ - ك ٢}{١٦} + ٢١ \\
 = ك & \\
 (١٥) \text{ " } \frac{١}{١٢} - \frac{١٤ ك ٥}{٣} &= ٤ - \frac{ك ٤}{٤} \\
 = ك & \\
 (١٦) \text{ " } \frac{١ + ك ٢}{٣} &= \frac{٦ + ك ٤ + ١٦}{٥} + \frac{٥ + ك ٧}{٣} \\
 = ك & \\
 (١٧) \text{ " } \frac{١٤ + ك ٧}{٣} + \frac{٦ - ٥}{٣} &= \frac{٢ + ك ٤}{٣} - \frac{١٧ - ك ٢}{٥} \\
 = ك & \\
 (١٨) \text{ " } \frac{٤ - ك ٤}{٥} + \frac{٨ - ك ٦}{٧} - \frac{٢ - ٢٠}{٣} &= ٤ + \frac{٢ - ك ٢}{٥} - ٢ \\
 = ك & \\
 (١٩) \text{ " } \frac{٤ + ك ٢}{٣} &= \frac{١٢ - ك ٧}{٣} + \frac{٧ + ك ٦}{٩} \\
 = ك & \\
 (٢٠) \text{ " } ٤ : ٧ :: \frac{ك}{٤} : \frac{١٨}{٣} &
 \end{aligned}$$

عَلَيَّات

(١) سئل رجلٌ عن ثمن ساعته فقال ان ضُرب ثمنها في اربعة وأضيف الى المحاصل سبعون وطرح من المجموع خمسون يكون الباقي ٢٢٠ ديناراً. فكم ثمن الساعة افرض ثمن الساعة ك
 وإذا ضرب هذا الثمن في ٤ يصير ٤ ك
 ثم أضيف الى هذا المحاصل ٧٠ فيصير ٤ ك + ٧٠
 اطرح من المجموع ٥٠ فيصير ٤ ك + ٧٠ - ٥٠
 وهذا الباقي يعادل ٢٢٠ ديناراً اي ٤ ك + ٧٠ - ٥٠ = ٢٢٠
 ونحويل هذه المعادلة لنا ٥٠ =

فقد وجدنا ثمن الساعة خمسين ديناراً. ولا تمحان العمل نُوضَع قيمة المجهول عوضاً عن المجهول في المعادلة الاصلية فان كان الجانبان متساويين كان العمل صحيحاً والآ فلا. مثالة في المسئلة السابقة بالمعويض عن ك بخمسين نصير ٤ × ٥٠ + ٧٠ - ٥٠ = ٢٢٠ وهو صحيح

(٢) اي عدد اذا أضيف اليه نفسه ثم طُرح ٢٠ من المجموع يكون الباقي

ربع العدد

افرض العدد ك

ثم حسب شروط المسئلة $ك + \frac{ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٤}$

وبتحويل هذه المعادلة نصير $ك = ١٦$

والامتحان $١٦ + \frac{١٦}{٢} - ٢٠ = \frac{١٦}{٤}$

(٢) رجل قسم مبلغاً بين اولاده الثلاثة فاعطى الاول نصف المبلغ الالف دينار. والثاني ثلث المبلغ الالف ٨٠٠ دينار. والثالث ربع المبلغ الالف ٦٠٠ دينار. فكم كان المبلغ

اذا فرضنا ان المبلغ ك تكون الحصص $\frac{ك}{٢}$ و $\frac{ك}{٣}$ و $\frac{ك}{٤}$ و $٨٠٠ - \frac{ك}{٤} - \frac{ك}{٣} - \frac{ك}{٢} = ٦٠٠$ ومجتمع هذه الثلاث يعادل المبلغ اي $\frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} - ٢٤٠٠ = ك$ وبالتحويل $ك = ٢٨٨٠٠$

(٤) اقسام ٤٨ الى قسمين حتى ينقسم اكبرها على ٦ واصغرها على ٤ ويكون مجتمع الخارجين ٩

ان فرض الاصغر ك يكون الاكبر $٤٨ - ك$

وحسب شروط المسئلة $\frac{ك}{٤} + \frac{٤٨ - ك}{٦} = ٩$

وبالتحويل $ك = ١٢$ اصغرها و $٤٨ - ١٢ = ٣٦$ اكبرها

(٥) اتي عدد اذا اضيف اليه نصفه يكون المجموع اكثر من ٦٠ بنسبة العدد و ٦٥

افرض العدد ك فلنا $ك + \frac{ك}{٢} - ٦٥ = ٦٠ - ك$ $٥٠ = ك$

(٦) اقسام ٣٢ الى قسمين حتى ينقسم اصغرهما على ٦ واكبرها على ٥ ويكون مجتمع

الخارجين ٦

لفرض اصغرهما ك فيكون اكبرها $٣٢ - ك$

وبشروط المسئلة $\frac{ك}{٥} + \frac{٣٢ - ك}{٦} = ٦$

$ك = ١٢$ اصغرهما $٣٢ - ١٢ = ٢٠$ اكبرها

(٧) اقسام ٢٥ الى قسمين بحيث يكون اكبرها ٤٩ مرة اصغرها

لفرض الاصغر ك والاكبر $٢٥ - ك$ فلنا $٢٥ - ك = ٤٩ ك$

$ك = \frac{٢٥}{٥٠}$ اصغرها و $\frac{٢٥}{٥٠} \times ٤٩$ اكبرها

(٨) اقسام ٤٨ الى ٩ اقسام حتى يكون كل قسم اكبر من الذي قبله بنصف

ليكون القسم الاصغر ك

فيكون الثاني ك + $\frac{1}{2}$

والثالث ك + ١

والرابع ك + $\frac{1}{2}$ ١

وملم جراً ك + ٢

ك + $\frac{1}{2}$ ٢

ك + ٢

ك + $\frac{1}{2}$ ٢

ك + ٤

ك = $\frac{1}{2}$ ٢

مجموع هذه الاقسام ٩ ك + ١٨ = ٤٨

٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١

والاقسام ٩ ك + $\frac{1}{2}$ ٢ + ٢ ك + $\frac{1}{2}$ ١ + ٤ ك + $\frac{1}{2}$ ١ + ٥ ك + $\frac{1}{2}$ ١ + ٦ ك + $\frac{1}{2}$ ١ + ٦ ك + $\frac{1}{2}$ ١ + ٧ ك + $\frac{1}{2}$ ١ + ٨ ك + $\frac{1}{2}$ ١ + ٩ ك = ٤٨

تنبيه . نُحَلُّ هذه المسئلة ايضاً بقواعد السلسلة الحسابية على اسهل طريقة كما ستعلم

(١) اي عدد يُطْرَح واحد من مضاعفه ثم يضاعف الباقي ويُطْرَح منه ٢ ويُقسم

هنا الباقي على ٤ فيكون الخارج اقل من العدد بواحد

لنفرض العدد ك فيكون مضاعفه ٢ ك وان طُرِح منه واحد يكون ٢ ك - ١

ومضاعفه ٤ ك - ٢ ثم يُطْرَح ٢ فيكون ٤ ك - ٢ - ٢ اي ٤ ك - ٤ وبالقسمة

على ٤ يصير ك - ١ وهذا يعادل العدد الاً واحداً اي ك - ١ = ك - ١

فلنا ما يُسَمَّى معادلة ذاتية . وهذه المعادلة تدل على ان المجهول غير معين فيمكن

ان يفرض اي عدد شئت

(١٠) رجل اشترى اذرعاً من القاش . وكان ثمن كل ٥ اذرع ٧ غروش . ثم

باع ما اشتراه بثمن ١١ غرشاً لكل ٧ اذرع ورج ١٠٠ غرش فكم ذراعاً اشترى

لنفرض الاذرع ك و $\frac{1}{5}$ الغرش ثمن الذراع و $\frac{7}{10}$ ثمن الاذرع كلها ثم عند

البيع كان ثمن الذراع $\frac{11}{7}$ من الغرش و ثمن الجميع $\frac{11}{7}$ ك وفضلة الشراء والبيع ١٠٠ اي

$\frac{11}{7} ك - \frac{7}{10} ك = ١٠٠$ ٦ ك = ٢٥٠٠ ك = $\frac{1}{2} ٥٨٣$

(١١) اي عدد اذا اُضِف اليه ٧٢٠ وقُسم المجمع على ١٢٥ يعادل الخارج ٧٢٩٢

الجواب ١٢٨٠

مقصوماً على ٤٦٣

(١٢) تاجر تاجر في صنف من البضائع فرج او خسر . وفي صنف آخر ربح ٢٥٠ ديناراً . وفي صنف آخر خسر ٦٠ ديناراً . ورجح من الاصناف الثلاثة ٢٠٠ دينار فكم ربح او خسر في الاول

لنفرض المجهول ك فان حسبنا الربح + تكون الخسارة - فلنا $ك + ٢٥٠ - ٦٠ = ٢٠٠$ وبالمقابلة $ك = ٦٠ - ٢٠٠$

فكون الجواب سلبياً يدل على انه خسر في الاول
(١٣) سفينة سافرت الى الشمال ٤° ثم الى الجنوب ١٢° ثم الى الشمال ايضاً ١٧° ثم الى الجنوب ايضاً ١٩° وكان لها حينئذ ١١° من العرض الجنوبي فكم كان عرضها في الاول

لنفرض ك = العرض المطلوب . فان حسبنا الشمال + يكون الجنوب - ولنا $ك + ١٣ - ٤ - ١٧ + ١٩ = ١١$ ك . اي كانت على خط الاستواء

(١٤) اي عدد اذا انقسم على ١٢ يكون مجموع الخارج والمقسم والمقسم عليه ٦٤ لنفرض ك = العدد . فلنا $ك + ١٢ + \frac{ك}{١٢} = ٦٤$

وبالجبر والمقابلة والقسمه $ك = \frac{٦٢٤}{١٣} = ٤٨$

(١٥) رجل اشترى ١٢ ثوب قاش منها اثنان ايضاً وثلاثة سود وسبعة زرق بثمن ١٤٠ ديناراً . وثمن الثوب الاسود اكثر من ثمن الابيض دينارين وثلثين والازرق اكثر من ثمن الاسود ثلاثة دنائير فكم ثمن كل واحد منها

لنفرض ك = ثمن الابيض فيكون ثمن الثوبين ٢ ك و ثمن الاسود ك + ٢ فيكون ثمن الثلاثة ٢ ك + ٦ و ثمن الثوب الازرق ك + ٥ فيكون ثمن السبعة ٧ ك + ٣٥ والمجموع ١٢ ك + ٤١ فلنا $١٢ ك + ٤١ = ١٤٠$ ك = $\frac{١٤٠ - ٤١}{١٢} = ٨ \frac{١}{٤}$ ثمن الابيض

و $\frac{١}{٤} =$ ثمن الاسود و $\frac{١}{٤} + ١٢ =$ ثمن الازرق

(١٦) مبلغ انقسم بين اربعة وراث فكان للاول ٢٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٤}$ المبلغ . وللثاني ٢٤٠ زيادة عن $\frac{١}{٤}$ المبلغ . وللثالث ٣٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٤}$ المبلغ . وللرابع ٤٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٨}$ المبلغ فكم كان ذلك المبلغ الذي انقسم

الجواب ٤٨٠٠ ديناراً

(١٧) مطلوب عدد اقل من ٥٠٠ بمقدار زيادة خمس على ٤٠

الجواب ٤٥٠

(١٨) ما عددان فضلتهما ٤٠ ونسبة احدهما الى الآخر كسبة ٦ الى ٥

الجواب ٢٤٠ و ٢٠٠

(١٩) مزيج من النحاس والقصدير والرصاص كان فيه النصف الا ١٦ رطلاً نحاساً. والثلث الا ١٣ رطلاً قصديراً. وكان الرصاص اكثر من الربع باربعة ارطال. فكم رطلاً من كل صنف في ذلك المزيج

الجواب كان النحاس = ١٢٨ رطلاً. والقصدير = ٨٤ رطلاً. والرصاص =

٧٦ رطلاً

(٢٠) مركبان بينهما ١٨ ميلاً. والمتأخر منهما جرى ١٠ اميال في الساعة والمتقدم

٨ اميال فكم ميلاً يجري المتقدم قبل ان يلحقه المتأخر

الجواب ٧٢ ميلاً

(٢١) ما عددان مجموعهما سدس حاصلهما ونسبة احدهما الى الآخر كسبة ٢ الى ٣

الجواب ١٥ و ١٠

(٢٢) كلب وارنب بينهما ٥٠ قفزة. وكلما قفز الكلب ٣ قفزات قفز الارنب ٤

غير ان القفزين من الكلب تساويان ٣ قفزات من الارنب. فكم قفزة يقفز الكلب

قبل ان يدرك الارنب

الجواب ٢٠٠

(٢٣) ثلاثة شعراء مدحوا ملكاً. فجعل الملك جائزة الاول ٢٠٠ دينار. وجائزة

الثاني كالاول وثلث الثالث. وجائزة الثالث كجميع الجائزين الاولين. فكم مجموع

الجوائز الثلاث

الجواب ١٢٠٠ دينار

(٢٤) اي عدد نسبته الى ١٢ مع ثلاث مرات العدد كسبة ٩:٢

الجواب ٨

(٢٥) زورق تقدم عن مركب ١٢ ميلاً وجرى ٢ اميال كلما جرى المركب

٥ اميال. فكم ميلاً يجري المركب قبل ان يدرك الزورق

الجواب ٢٣ ١/٢ ميل

(٢٦) اي عدد فضله سدس وثمنه ٢٠

الجواب ٤٨٠

(٢٧) اقسام ٢٠٠٠ الى قسمين بحيث تكون نسبة احدهما الى الآخر ٧:٩

الجواب ١١٢٥ و ٨٧٥

(٢٨) اي عدد مجموع ثلثه وربعه وخمسه ٩٤

الجواب ١٢٠

(٢٩) بين زيد وعمر مسافة ٢٦٠ ميلاً فسا فراحى الثنيا. اما زيد فسا فكل

ساعة ١٠ اميال واما عمرو فثانية اميال في الساعة. فكم قطع كل واحد من المسافة

قبل ان الثنيا

الجواب زيد = ٢٠٠ ميل وعمر ١٦٠ ميلاً

(٣٠) رجل عاش ثلث عمره في القسطنطينية وربعه في دمشق والباقي وهو ٢٠

- سنة في مصرفكم سنة عاش
 (٢١) اي عدد فضلة ربع وخمسة ٩٦ الجواب ١٩٢٠
- (٢٢) عمود في بركة خمسة في الارض و $\frac{1}{7}$ منه في الماء و $\frac{1}{2}$ قدماً فوق الماء فكم
 قدماً طول العمود الجواب ٢٥ قدماً
- (٢٣) اي عدد اذا اضيف اليه ١٠ يكون $\frac{1}{10}$ المجموع ٦٦ الجواب ١٠٠
- (٢٤) بستان كان فيه $\frac{1}{4}$ الاشجار تفاحاً و $\frac{1}{10}$ كثرى والبقية وفي ٢٠ شجرة أكثر
 من ثمن الجميع سفرجل فكم شجرة في البستان الجواب ٨٠٠
- (٢٥) رجل اشترى ارطالاً من الخربثين ٩٤ غرشاً وشرب منها سبعة ارطال ثم
 باع ربع الباقي بعشرين غرشاً على سعر مشتراه فكم رطلاً اشترى الجواب ٤٧ رطلاً
- (٢٦) لزيد وعبيد ايراد واحد سنوياً. اما زيد فانفق كل سنة فوق ايراده مبلغاً
 يساوي $\frac{1}{7}$ الابراد. واما عبيد فانفق كل سنة $\frac{1}{4}$ ايراده. وبعد ١٠ سنين حصل عنده
 مبلغ يساوي المال الذي انكسر على زيد مع زيادة ١٦٠ ديناراً. فكم كان الابراد
 الجواب ٢٨٠ ديناراً
- (٢٧) رجل عاش ربع عمره يتولاً. ثم تزوج وبعد ذلك بمدة ٥ سنين أكثر من
 $\frac{1}{7}$ عمره وولد له ابن. ثم مات الابن قبل ايوه بمدة ٤ سنين وهو قد بلغ نصف عمرايوه.
 فكم سنة عاش الرجل الجواب ٨٤ سنة
- (٢٨) اي عدد مجموع $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{14}$ منه ٧٣ الجواب ٨٤
- (٢٩) رجل انفق ١٠٠ دينار أكثر من $\frac{1}{2}$ ايراده فبقي ٢٥ ديناراً أكثر من
 نصفه فكم كان الابراد الجواب ٤٥٠
- (٣٠) مقدار من البارود كان فيه الملح ١٠ ارطال أكثر من $\frac{1}{4}$ الجميع والكبريت
 $\frac{1}{2}$ رطل اقل من $\frac{1}{6}$ الجميع. والقلم اقل من $\frac{1}{7}$ الملح برطلين. فكم رطلاً كان البارود
 الجواب ٦٩ رطلاً
- (٣١) وعاء يسع ١٤٦ رطلاً امتلاً بمزيج من لبن وعسل وماء. وكان العسل
 أكثر من اللبن بخمسة عشر رطلاً والماء بقدرها جميعاً. فكم رطلاً كان فيه من كل صنف
 الجواب كان اللبن ٢٩ رطلاً والعسل ٤٤ والماء ٧٣
- (٣٢) اربعة اشخاص اشتركوا في شراء بستان ثمنه ٤٧٥٥ ديناراً. فدفع زيد من
 الثمن ثلاثة اضعاف ما دفعه عمرو. ودفع عبيد بقدر ما دفعوا كلاًها. ودفع عبد الله
 بقدر ما دفع زيد وعبيد معاً. فكم دفع كل واحد منهم

الجواب دفع زيد = ٩٥١ وعمره = ٢١٧ وعبيد = ١٢٦٨ وعبد الله

= ٢٢١٩

(٤٢) اقسام ٩٩ الى خمسة اقسام ويكون الاول اكثر من الثاني بثلاثة واقل من الثالث بعشرة واكثر من الرابع بتسعة واقل من الخامس بستة عشر

لنفرض ك = الاول ك - ٢ = الثاني ك + ١٠ = الثالث ك - ٩ =

الرابع ك + ١٦ = الخامس ٥ ك + ١٤ = ٩٩ ٥ ك = ٨٥ ك = ١٧

(٤٣) رجل قسم مالا بين اولاده الاربعة فاعطى الثالث ٥ غروش زيادة عن

الرابع. والثاني ١٢ غرشا زيادة عن الثالث. والاول ١٨ غرشا اكثر من الثاني

وكان الجميع ٦ غروش اكثر من سبعة اثنال حصة الرابع فكم كان المال

الجواب ١٥٢ غرشا

(٤٤) كان لرجل قطيعان من الغنم متساويين في عدد الرؤوس فباع من

القطيع الواحد ٢٩ راسا ومن الآخر ٩٢ راسا فكان الواحد مضاعف الاخر في العدد.

فكم راسا في كل قطيع

(٤٦) ساع سعى خمسة ايام وقطع كل يوم ٦٠ ميلا. ثم تبعه آخر وقطع كل يوم

٧٥ ميلا ففي كم يوم يدرك الاول

(٤٧) كان عمر زيد مضاعف عمر عبيد. وعمر عبيد بقدر عمر عبد الله ثلاث

مرات. ومجموع اعمار الثلاثة ١٤٠ سنة فكم عمر كل واحد منهم

الجواب عمر زيد ٨٤ وعبيد ٤٢ وعبد الله ١٤

(٤٨) ثوبان قيمة الذراع من كليهما واحدة ولكن الواحد اطول من الآخر فبلغ

ثم الواحد ٥ دنانير والآخر ٦ ١/٢ دينار. فان اضيف الى كل واحد منهما ١٠ اذرع

كانت نسبة الواحد الى الآخر :: ٦٠ : ٥ مطلوب طول كل ثوب

الجواب ٢٠ و ٢٦ ذراعا

(٤٩) تاجران راس مال الواحد منها كراس مال الآخر. وفي السنة الاولى ربح

احدهما زيد ٤٠ دينارا وخسر احدهما عبيد ٤٠ دينارا. وفي السنة الثانية خسر زيد

١/٢ ما كان له في نهاية السنة الاولى وربح عبيد ٤٠ دينارا اقل من مضاعف ما خسره

زيد. وكان لعبيد حينئذ مضاعف ما كان لزيد فكم كان راس المال

الجواب ٢٢٠ دينارا

(٥٠) اي عدد اذا اضيف الى ٣٦ ثم الى ٥٢ تكون نسبة المجمع الاول الى الثاني

المجواب ١٢

٤:٣::

(٥١) رجل اشترى جملاً وفرساً وحملاً بثلاث مئة وستين ديناراً . وكان ثمن الفرس مضاعف ثمن الحمار وثمان الجمل مضاعف ثمن الفرس والحمار كليهما . فإذا كان ثمن كل واحد من الثلاثة

المجواب ثمن الجمل = ٢٤٠ والفرس = ٨٠ والحمار = ٤٠ ديناراً

(٥٢) انا ١٠ مثلاً آخراً ثم رشح منه ثلث ما فيه ثم اخذ منه ٢١ رطلاً وبقي نصف

مل . انا ١٠ فكم رطلاً كان فيه اولاً

(٥٣) رجل كان له ستة بنين كل واحد منهم اكبر من الذي يليه بربع سنين وعمر الاكبر ثلاثة اضعاف عمر الاصغر . فما هو عمر كل واحد منهم

المجواب ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ ٢٦ ٣٠

(٥٤) اقسام ٤٩ الى قسمين وتكون نسبة الاكبر مع ستة الى الاصغر الا ١١ كنسبة

المجواب ٣٠ = الاكبر ١٩ = الاصغر

٣:٩

(٥٥) ما عددان نسبة اصغرها الى الاكبر ٣:٢ وان اضيف اليها ٤ تكون

المجواب ١٦ و ٢٤

النسبة ٧:٥::

(٥٦) رجل اشترى زقّين من الخمر مملوءين احدهما يسع مل والآخر ثلاث مرّات

فاخذ من كل واحد اربعة ارطال وبقي في الواحد قدر ما بقي في الآخر اربعة امثال فكم

المجواب ١٢ و ٢٦

رطلاً كان فيها

(٥٧) اقسام ٦٨ الى قسمين وتكون فضلة اكبرها ٨٤ بقدر ثلاث مرّات فضلة

المجواب ٤٢ و ٢٦

اصغرها و ٤٠

(٥٨) اربعة اماكن على ترتيب ب ت ث ج وبين ب وج ٢٤ ميلاً ونسبة بُعد

ب عن ت الى بعد ث عن ج ٣:٢:: واذا اضيف ربع بعد ب عن ت الى

نصف بُعد ث عن ج يكون المجموع ثلاث مرّات بعد ت عن ث مطلوب بعد

كل واحد عن الآخر

المجواب من ب الى ت = ١٢ من ت الى ث = ٤ من ث الى ج = ١٨

(٥٩) اقسام ٢٦ الى ٢ اقسام بحيث يكون نصف الاول $\frac{1}{2}$ والثاني $\frac{1}{4}$

المجواب ٨ و ١٢ و ١٦

الثالث متساوية

(٦٠) تاجر عاش ثلاث سنين على ٥٠ ديناراً كل سنة . وفي نهاية كل سنة

اضاف الى ما بقي من ماله مبلغاً يساوي ثلث تلك البقية . وعند نهاية المدة المذكورة كان

راس ماله قد تضاعف فكم كان راس المال الجواب ٧٤٠ ديناراً

(٦١) قائد جيش بعد وقعت أنكسر فيها وجد نصف جيشه و ٢٦٠٠ نفر يصلحون

لوقعة أخرى و ١/٢ الجيش و ٦٠٠ نفر مجارح . والبقية أي ١/٢ الجميع قتلى فكم كان

عدد الجيش أولاً الجواب ٢٤٠٠٠

(٦٢) رجل استأجر فاعلاً لمدة ٤٨ يوماً على شرط أن يعطيه كل يوم اشتغل

٢٤ درهماً أما لكل يوم بطالة فيدفع الفاعل ١٢ درهماً ثمن طعامه وعند نهاية المدة المشار

إليها أي ٤٨ يوماً حق للفاعل ٥٠٤ دراهم . مطلوب عدة أيام الشغل وعدة أيام البطالة

(٦٣) رجل استأجر فاعلاً ن يوماً لكل يوم الشغل اعطاه ب درهماً ولكل

يوم البطالة دفع ت درهماً ثمن طعامه وعند نهاية المدة أي ن يوماً حق له ح

درهماً . مطلوب أيام الشغل وأيام البطالة

$$\text{افرض ك = أيام الشغل} \quad \frac{ح + ت}{ب + ت} = ك$$



الفصل الثامن

في القوات والترقية

٧٢ إذا ضربت كمية في نفسها سُي المحاصل قوة . مثالة $٢ \times ٢ = ٤$ أي مربع

اثنين أو مال اثنين أو القوة الثانية من اثنين و $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$ أي مكعب اثنين أو

القوة الثالثة من اثنين و $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$ أي مال مال اثنين أو القوة الرابعة

من اثنين وت $٢ \times ٢ = ٤$ مربع ت أو مال ت أو قوة ت الثانية وقس على ذلك .

والكمية الأصلية التي بتكرار ضربها حصلت القوة هي جذر تلك القوة ويقال لها الجذر

المالي والمربع والثاني أو الجذر الكمي والثالث أو الرابع أو الخامس بالنسبة إلى القوة .

فائنان مثلاً هو جذر أربعة المالي أو المربع أو الثاني لأن $٢ \times ٢ = ٤$ وهو جذر ثمانية

الكمي أو الثالث لأن $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$ وجذر ١٦ الرابع لأن $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$

وقس على ذلك

٧٤ يدل على القوات رقم صغير عن يسار الكمية مرتفع عنها قليلاً . مثالة ت^٢

و ب^٢ وس^٢ ويقال لهذا الرقم دليل القوة . وإن لم يكن للكمية دليل يُقدر لها واحدٌ

دليلاً . فان ت^١ = ت أي قوة ت الأولى . وإذا انحصرت كمية وُضع لها دليل

مثل (ك + ب - س) ^٢ اوت + م + ن | فبراد ان الكمية كلها يجب ترفيقها الى القوة المدلول عليها . وقد يكون الدليل حرفاً متى كانت القوة مجهولة . مثل ب^٢ اي القوة النونية من ب

تنبيه . يجب ان يميز بين المسببات والدلائل . فان ٤ مثلاً يراد بهات + ت
+ ت + ت اما ت فإيراد بهات X ت X ت X ت

[illegible]

نبذة في الترقية

٧٦ اذا اردت ترقية كمية الى قوة مفروضة فاضربها في نفسها مراراً تماثل
 الاحاد في دليل القوة المفروضة . فتقوت الرابعة هي $X \times X \times X \times X = X^4$
 وقوة X السادسة $= X \times X \times X \times X \times X \times X = X^6$ وهكذا في الكمية المضلعة مثل X^3
 فان مربعها $(X^3)^2 = X^6$ لان $X^3 \times X^3 = X^6$ وب $X^3 \times X^3 = X^6$ وب $X^3 \times X^3 = X^6$
 فترى في كل كمية مضلعة او ذات اجزاء ان قوة حاصل الاجزاء تعادل حاصل قوتها.
 وهكذا $(X^3)^2 = X^6$ و $(X^4)^3 = X^{12}$ و $(X^5)^4 = X^{20}$ وقوة X^3 الرابعة
 هي $(X^3)^4 = X^{12}$ او $X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 = X^{12}$ او $X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 = X^{12}$
 وقوة X^3 النونية هي $(X^3)^9 = X^{27}$ او $X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 = X^{27}$
 او $(X^3)^9 = X^{27}$ او $X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 \times X^3 = X^{27}$

٧٧ الكمية المركبة اي المرتبطة اجزاؤها بعلامات الجمع او الطرح تترقى بضرب اجزاها حسب قواعد الضرب . مثالا

(ت+ب)^١ = ت + ب اي القوة الاولى

ت + ب

ت + ت + ب

ت + ب + ب

(ت + ب)^٢ = ت + ت + ب + ب = القوة الثانية

ت + ب

ت + ت + ت + ب + ب + ب

ت + ب + ب + ب + ب + ب

(ت + ب)^٣ = ت + ت + ت + ب + ب + ب + ب + ب = القوة الثالثة

ت + ب

ت + ت + ت + ت + ب + ب + ب + ب + ب + ب

ت + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب

(ت + ب)^٤ = ت + ت + ت + ت + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب + ب = القوة الرابعة

وهكذا الى آية قوة فُرِضَتْ

مربع ت - ب هوت^٢ - ت^٢ + ب + ب

مكعب ت + ا هوت^٣ + ت^٣ + ت^٢ + ب + ب + ب + ا

مربع ت + ب + ح هوت^٢ + ت^٢ + ب + ب + ت^٢ + ح + ب + ب + ا + ح

ما هو مكعب ت + د + د + د

ما هي القوة الرابعة من ب + ب

ما هي القوة الخامسة من ك + ا

ما هي القوة السادسة من ا - ب

٧٨ مربعات الكميات الثنائية والفضلية كثيرة الوقوع في الاعمال الجبرية

فيجب على المتعلم ان يعرف كيفية ترييها معرفة جيدة . فاذا رُبَعنا ت + ب وت -

ب لنا

(ت + ب) × (س + د) |^١ أو ت + ب |^٢ × س + د |^٣ لان حاصل مربعي كميتين يعدل مربع حاصلها (٧٦) ومتى انبسطت كمية محصورة ترفع عنها القوسان او المخطط. فان (ت + ب) |^١ اذا انبسطت نصيرت |^٢ + |^٣ ت ب + ب |^٤

٨٠ اذا كان الجذر ايجابياً تكون القوت ايجابية واذا كان سلبياً تكون القوت الشفعية ايجابية والوترية سلبية كما ينضع ما قيل سابقاً في فعل الضرب (٢٢) مثالة

القوة الثانية من - ت هي	+ ت ^١
الـ " الثالثة	- ت ^٢
الـ " الرابعة	+ ت ^٤
الـ " الخامسة	- ت ^٥ الى آخره

اي كل قوّة وترية لها علامة جذرها وكل قوّة شفعية هي ايجابية ان كان جذرها سلبياً او ايجابياً

٨١ كل قوّة تترقى الى قوّة اعلى بضرب دليلها في دليل القوة المفروضة مثالة كعب ت |^٢ = ت |^٢ × |^٢ = ت |^٤ لان ت |^٢ = ت |^٢ وكعب ت هو ت |^٣ × ت |^٣ = ت |^٦ = ت |^٢ × ت |^٢ × ت |^٢ = ت |^٦ اي القوة السادسة من ت والقوة الثالثة من ت |^٢

القوة الرابعة من ت ^٢ = ت ^٢ × ^٢ × ^٢ = ت ^٨ ب ^٨	
الـ " الثالثة من ت ^٢ = ت ^٢ × ^٢ = ت ^٤ ك ^٤	
الـ " الرابعة من ت ^٢ × ^٢ × ^٢ = ت ^٦ ك ^٦ د ^٦	
الـ " الخامسة من (ت + ب) ^٢ = (ت + ب) ^٢	
الـ " التوتية من ت ^٢ = ت ^٢	
الـ " التوتية من (ك - ي) ^٢ = (ك - ي) ^٢	
(ت + ب ^٢) ^٢ = ت ^٢ + ت ^٢ + ب ^٢ + ب ^٢	
ت ^٢ × ب ^٢ ^٢ = ت ^٢ + ب ^٢	
(ت ^٢ ب ^٢) ^٢ = ت ^٢ ب ^٢ ح ^٢	

وهكلا في التواتر التي دلتها سلبية . مثاله القوة الثالثة من $ت = ت^3 = ت^3 \times ت^3$
 $ت = (٧٥)^3$

القوة الرابعة من $ت = ت^4 = ت^4 \times ت^4 = ت^4 \times ت^4$
 مكعب $ت = ت^3 = ت^3 \times ت^3$
 مربع $ت = ت^2 = ت^2 \times ت^2$
 القوة النونية من $ت = ت^5 = ت^5 \times ت^5$

٨٢ متى كانت العلامة المتقدمة على نفس الكمية سلبية يجب ان تجعل ايجابية كلما صار الدليل شفعاً حسباً تقدم (٨٠) مثاله مربع $ت - ت^2 + ت^3$ ومكعب $ت^4 = ت^4 - ت^3 + ت^2 - ت$ ومربع $ت^5 = ت^5 - ت^4 + ت^3 - ت^2 + ت$
 والقوة النونية من $ت^6 = ت^6 - ت^5 + ت^4 - ت^3 + ت^2 - ت$ متى كانت ن دالة على عدد شفع و $ت^7 = ت^7 - ت^6 + ت^5 - ت^4 + ت^3 - ت^2 + ت$ متى دلت على عدد وتر

٨٣ الكسر يترقى بنزقة صورته ومخرجه معاً . فمربع $ت = ت^2$ لان $ت \times ت = ت^2$
 القوة الثانية من $ت = ت^2$ وقوته الثالثة $ت^3 = ت^3$ وقوته النونية $ت^5 = ت^5$
 مكعب $ت = ت^3 = ت^3 \times ت^3 = ت^3 \times ت^3$
 القوة النونية من $ت = ت^5 = ت^5 \times ت^5 = ت^5 \times ت^5$
 مربع $ت = ت^2 = ت^2 \times ت^2 = ت^2 \times ت^2$
 مكعب $ت = ت^3 = ت^3 \times ت^3 = ت^3 \times ت^3$

ومن امثلة الكميات الثنائية التي احد جزئيهما كسر هذه

$\frac{1}{2} - ك$	$\frac{1}{2} + ك$
$\frac{1}{2} - ك$	$\frac{1}{2} + ك$
$\frac{1}{2} - ك$	$\frac{1}{2} + ك$
$\frac{1}{2} + ك$	$\frac{1}{2} + ك$
$\frac{1}{2} - ك$	$\frac{1}{2} + ك$
$\frac{1}{2} - ك$	$\frac{1}{2} + ك$

$$\begin{aligned} \text{مربع ت} + \frac{٢}{٤} &= \frac{٢}{٤} + \frac{٤}{٤} + \frac{٢}{٤} \\ \text{مربع ك} + \frac{٢}{٤} &= \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} \\ \text{مربع ل} - \frac{٢}{٤} &= \frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} \end{aligned}$$

٨٤ قد علمت آنفاً (٦١) ان المسمى الكسري يمكن نقله من صورة كسري الى مخرج او عكسه . واذا راجعنا ما قيل في القوات المكنوة (٧٥) نرى ان اي ضلع كان يمكن نقله من الصورة الى المخرج او عكسه اذا تغيرت علامة دليله . مثاله في $\frac{\text{ت ك}}{\text{ي}}$ يمكن نقل الكاف الى المخرج بدون تغيير قيمة الكسر اذا جعلت علامة دليلها ايجابية . لان $\frac{\text{ت ك}}{\text{ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ي}} \times \frac{\text{ك}}{١} = \frac{\text{ت}}{\text{ي}} \times \frac{١}{\text{ك}} = \frac{\text{ت}}{\text{ك ي}}$ وفي $\frac{\text{ت}}{\text{ب ي}}$ ننقل الياء الى الصورة لان $\frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} \times \frac{١}{\text{ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} \times \frac{١}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب ي}}$ وهكذا $\frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} \times \frac{١}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب ي}}$ وت $\frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب ي}}$

وهكذا اذا كانت العلامة في الصورة ايجابية وفي المخرج سلبية مثاله $\frac{\text{ت ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت ك}}{\text{ب ي}} \times \frac{\text{ي}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت ك}}{\text{ب ي}}$ لان $\frac{\text{ت ك}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت ك}}{\text{ب ي}} \times \frac{\text{ي}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت ك}}{\text{ب ي}}$ هو مكنوه ك^٢ اي ك^٢ = $\frac{\text{ك}}{\text{ب ي}}$ = $\frac{\text{ك}}{\text{ب ي}}$ = $\frac{\text{ك}}{\text{ب ي}}$

فاذا يمكن ان يرفع مخرج كسر بالكلية وان يجعل الصورة واحداً بدون تغيير قيمة العبارة . مثاله $\frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} \times \frac{\text{ب ي}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت ب ي}}{\text{ب ي ب ي}} = \frac{\text{ت ب ي}}{\text{ب ي ب ي}}$ اوت $\frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} \times \frac{\text{ب ي}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت ب ي}}{\text{ب ي ب ي}} = \frac{\text{ت ب ي}}{\text{ب ي ب ي}}$ اوس $\frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب ي}} \times \frac{\text{ب ي}}{\text{ب ي}} = \frac{\text{ت ب ي}}{\text{ب ي ب ي}} = \frac{\text{ت ب ي}}{\text{ب ي ب ي}}$

نبذة في جمع القوات وطرحها

٨٥ نجمع القوات بكتابتها متوالية مع علاماتها . فمجمع ت^٢ وب^٢ هو ت^٢ + ب^٢ ومجمع ت^٢ - ب^٢ وح^٢ - د^٢ هو ت^٢ - ب^٢ + ح^٢ - د^٢ واذا كانت الاحرف والقوات متشابهة نجمع سمياتها او نطرح حسب قواعد

المجمع (١٦ و ١٧) مثاله

مجمع ٢ ت^٢ و ٣ ت^٢ هو ٥ ت^٢

٣ ت ^٢ ي	٢ ب	٣ ك ي
٧ ت ^٢ ي	٦ ب	٣ ك ي
٤ ت ^٢ ي		٥ ك ي

المجمع

اضرب $ك^٢ + ك^٢ ي + ك ي^٢ + ي^٢ ك - ي$ الجواب $ك^٤ - ي^٤$
 اضرب $ك^٤ ك ي + ك ي^٢ ك - ك$
 اضرب $ك^٢ ك + ك - ك^٢ ك^٥ + ك + ١$

ومكنا ان كانت الدلائل سليمة. مثاله

$ت^٢ خ^٢ ت^٢ = ت^٢ و ي^٢ خ^٢ و ي^٢ = ت^٢ و ت^٢ خ^٢ ت^٢ = ت^٢ و ي^٢ خ^٢ ي^٢ = ي^٢$
 $وت^٢ خ^٢ ت^٢ = ت^٢ وت^٢ خ^٢ ت^٢ = ت^٢ و ي^٢ خ^٢ ي^٢ = ي^٢$

٨٩ اذا ضربت $ت + ب$ في $ت - ب$ يكون المحاصل $ت^٢ - ب^٢$ فلنأمن ذلك قضية عامة وهي

حاصل مجموع كيتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعيهما

$(ت - ي) \times (ت + ي) = ت^٢ - ي^٢$
 $(ت^٢ - ي^٢) \times (ت^٢ + ي^٢) = ت^٤ - ي^٤$
 $(ت^٤ - ي^٤) \times (ت^٤ + ي^٤) = ت^٨ - ي^٨$ الى آخره

نبذة في قسمة القنات

٩٠ نُقسم القنات مثل ما سولاهما من الكليات. اي بان يُخرج من المتسوم كمية تماثل المتسوم عليه او بكتابتها على هيئة كسر دارجي. مثاله

$ت^٢ ب + ب^٢ = ت^٢ او \frac{ت^٢ ب}{ب}$
 اقسام $٩ ت^٢ ي$ $١٢ ب^٢ ك$
 على $- ٣ ت^٢$ $٢ ب^٢$
 الخارج $- ٢ ي$ $ب + ٢ ي$

اقسم $د \times (ت - ح + ي)$
 على $(ت - ح + ي)$
 الخارج $د$

٩١ القسمة عكس الضرب . وعلى ذلك نقسم قوات جذر واحد بطرح دليل

المقسوم عليه من دليل المقسوم . مثالة

$$\begin{array}{r} \text{ت}^{\circ} \div \text{ت}^{\circ} = \text{ت}^{\circ} \text{ لان } \text{ت}^{\circ} = \frac{\text{ت}^{\circ} \text{ت}^{\circ} \text{ت}^{\circ} \text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ} \text{ت}^{\circ} \text{ت}^{\circ} \text{ت}^{\circ}} \\ \text{ت}^{\circ} = \text{وي}^{\circ} \div \text{وي}^{\circ} = \text{وي}^{\circ} \text{ وت}^{\circ} = \text{وي}^{\circ} \div \text{وي}^{\circ} = \text{وي}^{\circ} \text{ وت}^{\circ} = \text{وي}^{\circ} \div \text{وي}^{\circ} = \text{وي}^{\circ} \\ \text{اقسم} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \\ \text{على} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \\ \text{الحاج} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \quad \text{وي}^{\circ} \end{array}$$

وهكذا ان كانت الدلائل سلبية . مثالة

$$\begin{array}{r} \text{ت}^{\circ} \div \text{ت}^{\circ} = \text{ت}^{\circ} \text{ و} - \text{ك}^{\circ} \div \text{ك}^{\circ} = - \text{ك}^{\circ} \text{ ح}^{\circ} \div \text{ح}^{\circ} = \text{ح}^{\circ} \text{ ح}^{\circ} \div \text{ح}^{\circ} = \text{ح}^{\circ} \\ \text{وت}^{\circ} \div \text{ت}^{\circ} = \text{ت}^{\circ} \text{ ب}^{\circ} \div \text{ب}^{\circ} = \text{ب}^{\circ} \text{ ب}^{\circ} \div \text{ب}^{\circ} = \text{ب}^{\circ} \text{ ب}^{\circ} \div \text{ب}^{\circ} = \text{ب}^{\circ} \\ \text{ت}^{\circ} \div \text{ت}^{\circ} = \text{ت}^{\circ} \text{ و} (\text{ت}^{\circ} + \text{وي}^{\circ}) \div (\text{ت}^{\circ} + \text{وي}^{\circ}) = (\text{ت}^{\circ} + \text{وي}^{\circ}) \\ (\text{ب}^{\circ} + \text{ك}^{\circ}) \div (\text{ب}^{\circ} + \text{ك}^{\circ}) = (\text{ب}^{\circ} + \text{ك}^{\circ}) \end{array}$$

امثلة

$$\begin{array}{r} \text{اختزل} \quad \frac{\text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} \\ \text{اختزل} \quad \frac{\text{ك}^{\circ}}{\text{ك}^{\circ}} \\ \text{اختزل} \quad \frac{\text{ت}^{\circ} + \text{وي}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} \\ \text{اختزل} \quad \frac{\text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} - \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ}} \\ \text{فبالنسبة على} \quad \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} \text{ تصير} \quad \frac{\text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} - \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ} + \text{ت}^{\circ} \text{وي}^{\circ}} \\ \text{حوّل} \quad \frac{\text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} \text{ و} \frac{\text{وي}^{\circ}}{\text{وي}^{\circ}} \text{ الى مخرج مشترك} \\ \text{ت}^{\circ} \times \text{ت}^{\circ} = \text{ت}^{\circ} = \text{الصورة الاولى} \\ \text{ت}^{\circ} \times \text{ت}^{\circ} = \text{ت}^{\circ} = \text{الصورة الثانية} \\ \text{ت}^{\circ} \times \text{ت}^{\circ} = \text{ت}^{\circ} = \text{المخرج المشترك} \\ \text{فيكون الجواب} \quad \frac{\text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} \text{ و} \frac{\text{وي}^{\circ}}{\text{وي}^{\circ}} \\ \text{حوّل} \quad \frac{\text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} \text{ و} \frac{\text{وي}^{\circ}}{\text{وي}^{\circ}} \text{ الى مخرج مشترك} \\ \text{الجواب} \quad \frac{\text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} \text{ و} \frac{\text{وي}^{\circ}}{\text{وي}^{\circ}} \text{ و} \frac{\text{وي}^{\circ}}{\text{وي}^{\circ}} \\ \text{اضرب} \quad \frac{\text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} \text{ في} \quad \frac{\text{وي}^{\circ}}{\text{وي}^{\circ}} \text{ الجواب} \quad \frac{\text{ت}^{\circ}}{\text{ت}^{\circ}} = \frac{\text{وي}^{\circ}}{\text{وي}^{\circ}} \end{array}$$

الثانية. كل جذر كمية ايجابية شفعي ملتبس الثالثة. الجذر الشفعي لكمية سلبية مستحيل

اما الاولى فواضحة مما تقدم (٨٠) واما الثانية فلأن الكمية الايجابية تحصل من + او من - X - على حدٍ سوى. فـ جذر ت^١ هو + ت او - ت فيوضع للجذر علامتان للدلالة على الالتباس هكذا + ٣٦ ب و - ٣٦ ك ويرفع هذا الالتباس متى حصلت القوة من ضرب كميات معروفة علاماتها. واما الثالثة فلأنه لا يمكن استخراج جذر شفعي لكمية سلبية. فـ جذر - ت^١ ليس هو + ت ولا - ت لان + ت X + ت = + ت^٢ و - ت X - ت = + ت^٢ فـ ت^١ فـ الجذر الشفعي لكمية سلبية كمية وهمية او محالية. ولكن قد تستعمل هذه الكميات الوهمية في الاعمال الجبرية لانها ببعض المعاملات تصير ممكنة. مثالة ٦٠ - ت X ٦٠ - ت = - ت^٢ وهي ممكنة. ويجب هنا ان يعتبر في الجذور الوهمية ان علامة السلب واقعة تحت علامة الجذر كما مثلنا. ولكن - ٦٠ - ت X - ٦٠ - ت = ٦٠ - ت^٢ ومن فوائد هذه الكميات الوهمية ايضا الدلالة على فساد مسئلة. فلو قيل اقم ١٤ الى قسمين حاصلهما ٦٠ قيل ليكن احدهما ك والاخر ١٤ - ك فلنا ك X (١٤ - ك) = ٦٠ اي ١٤ ك - ك^٢ = ٦٠

وتحويل هذه المعادلة حسب القواعد الآتية لنا ك^٢ + ٧ - ١١ ك وهذه كمية وهمية غير ممكنة. فالمسئلة فاسدة اي لا يمكن انقسام ١٤ الى قسمين حاصلهما ٦٠ وقس على ذلك

١٠٣ كيفية تجذير الكميات المركبة سيأتي الكلام عليها في بعض الفصول الآتية. واما هنا فلا ننظر الا الى كيفية استعمال الجذر المالى لمربعات الكميات الثنائية والفضلية وهذه المربعات لا يكون لها اكثر من ثلاثة اجزاء كما رأينا (٧٨) مثالها ت^١ + ت^٢ ب + ب^٢ وفي الفضلية ت^١ - ت^٢ ب + ب^٢ فحيثما رأينا كمية مثل هذه جزآن منها قوتان نامتان والاخر حاصل جذري هاتين القوتين علما انها مربع كمية ثنائية او فضلية. ولنا لاستعمال جنرها هذه القاعدة

خذ جذر الجزء الاول والثالث واربطها بعلامة الجزء الاوسط

فلو قيل ما هو جذر ك^٢ + ٢ ك + ١ انبل جذر الجزء الاول اي ٢ ك^٢ = ك

وجذر الجزء الثالث اي واحد = ١ وعلامة الجزء الاوسط في + فاذا الجذر ك + ١

$$\text{جذر ك}^2 - ٢\text{ك} + ١ = \text{ك} - ١$$

$$\text{جذر ث}^2 + \text{ت} + \frac{١}{٤} = \text{ت} + \frac{١}{٤}$$

$$\text{جذر ث}^2 + \text{ت} + \frac{١}{٤} = \text{ت} + \frac{١}{٤}$$

$$\text{جذر ث}^2 + \text{ت} + \text{ب} + \frac{٢}{٤} = \text{ت} + \frac{٢}{٤}$$

$$\text{جذر ث}^2 + \text{ت} + \frac{٢\text{ب}}{٤} + \frac{١}{٤} = \text{ت} + \frac{١}{٤}$$

١٠٤ كل جذر لا يمكن ان يُدَلَّ عليه تمامًا بالاعداد يقال له اصم. مثاله ٢٦
فهذا لا يمكن الوصول اليه تمامًا وهو بالكسر العشري ٥٦١٢١٤٢١٤١ تقريبًا. وكل
جذر ليس اصم فهو منطوق ولكن في ما يأتي تُطلَق هذه اللفظة على كل كمية ليس لها علامة
الجذر ولا دليل كسري

نبذة في تحويل الجذور

١٠٥ أولاً اذا اردت تحويل كمية منطقة الى هيئة كمية جذرية
فَرِّقْها الى قُوَّةٍ من اسم الجذر المفروض ثم اجعل لها علامة الجذر مع دليله

فلو قيل حوّل ت الى هيئة الجذر النوني لفيل قُوَّتُها النونية = ت ثم انها بوضع
علامة الجذر والدليل نصير $\sqrt[٦]{ت}$ فقد تحوّلت الى هيئة كمية جذرية بدون تغيير قيمتها
لان $\sqrt[٦]{ت} = \sqrt[٥]{ت} = ت$

حوّل ٤ الى هيئة الجذر الكمي الجواب $\sqrt[٦]{٦٤}$ او $\sqrt[٤]{٦٤}$

حوّل ٣ الى هيئة الجذر الرابع الجواب $\sqrt[٤]{٨١}$

حوّل $\frac{١}{٢}\text{ت}$ الى هيئة الجذر المالى الجواب $(\frac{١}{٢}\text{ت})^{\frac{١}{٢}}$

حوّل $٢ \times ت - ك$ الى هيئة الجذر الكمي الجواب $\sqrt[٦]{٢٧ \times ت - ك}$

حوّل ت^2 الى هيئة الجذر الكمي الجواب $\sqrt[٦]{٢}$

حوّل ت الى هيئة الجذر النوني

١٠٦ ثانياً لكي نحوّل كميات دلائلها مختلفة الى دلائل مشتركة بدون تغيير القيمة

(١) حوّل الدلائل الى مخرج مشترك

- (٢) رَقِّ كل كمية الى القوة المدلول عليها بصورة دليلها بعد تحويله
(٣) اجعل للجميع علامة الجذر المدلول عليه بالخارج المشترك

مثاله لو قيل حَوِّل ت^١ ب^١ الى دليل مشترك لنيل $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ بالتحويل الى مخرج مشترك $= \frac{1}{12}$ و $\frac{2}{12}$ ثم بترقية ت الى القوة المدلول عليها بصورة الدليل تصبح ت^٢ وهكذا ب تصبح ب^٢ والجذر دليله $\frac{1}{12}$ فلنا ت^٢ ب^٢ وب^٢ ا^٢ والقيمة لم تتغير لان ت^٢ ا^٢ = ت^١ ا^١ وهكذا ب^٢ ا^٢ = ب^١ ا^١ = ب^١ ا^١

حَوِّل ت^٢ ب^٢ ك^٢ الى دليل مشترك الجواب ت^٢ ا^٢ و (ب^٢ ك^٢)

حَوِّل ت^٢ وب^٢ الى دليل مشترك الجواب ت^٢ ا^٢ وب^٢

حَوِّل ك^٢ وى^٢ الى دليل مشترك الجواب ك^٢ ا^٢ وى^٢

حَوِّل ت^٢ و^٢ الى دليل مشترك الجواب ت^٢ ا^٢ و^٢

حَوِّل (ت + ب) و (ك - ي) الى دليل مشترك الجواب (ت + ب) ا^٢

و (ك - ي) ا^٢

حَوِّل ت^٢ وب^٢ الى دليل مشترك

حَوِّل ك^٢ و^٢ الى دليل مشترك

١٠٧ لاجل تحويل كمية الى ذات دليل مفروض اقسام دليلها على الدليل المفروض واكتب الخارج عن يسار الكمية ثم اجعل فوق الكل الدليل المعروض

فلو قيل حَوِّل ت^١ الى دليل لنيل $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ فلنا ت^٢ ا^٢

حَوِّل ت^٢ وك^٢ الى دليل لنيل $\frac{1}{2}$ الجواب (ت^٢) ا^٢ و (ك^٢) ا^٢

حَوِّل ت^٢ و^٢ الى دليل لنيل $\frac{1}{2}$ الجواب (ت^٢) ا^٢ و (٢) ا^٢

١٠٨ لاجل اخراج بعض كمية من تحت علامة الجذر حل الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر وخذ جذر هذا الضلع واكتبه

قدام الضلع الآخر وعلامة الجذر بينهما. وهذه القاعدة مبنية على ما تقدم
(١٠٠) من ان جذر حاصل كيتين يعدل حاصل جذريهما . وان لم
يمكن حل الكمية الى ضلعين احدها قوة تامة من اسم الجذر فلا يمكن
اخراج شيء منها من تحت علامة الجذر

فلو قيل اخرج بعض $\sqrt{18}$ من تحت علامة الجذر لثقل $\sqrt{8}$ ينقل الى ضلعين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{4}$
واحدها قوة تامة من اسم الجذر اي $\sqrt{4} = 2$ مربع 2 خذ جذر $2 = 4$ فلنا $\sqrt{2} \sqrt{4} = 2$ وعلى
هذه الكيفية نفحول هذه الامثلة

$$\sqrt{18} = \sqrt{2} \sqrt{9} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{2} \sqrt{9} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{4} \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

١٠٩ ثم بعكس هذا العمل يدخل مسي كية جذرية تحت علامة الجذر اي يترقى
الى قوة من اسم الجذر ثم يضرب في الاجزاء الواقعة تحت علامة الجذر

$$\sqrt{18} = \sqrt{2} \sqrt{9} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

نبذة في جمع الجذور وطرحها

١١٠ نجمع الجذور كغيرها من الكميات بكتابتها متواليّة مع علاماتها فيجتمع

٢٠ و ٢٠ هـ ٢٠ + ٢٠ ب وان تشابهت الكميات والدلائل فاجمع المسميات
واكتب الاجزاء الجذرية عن يسار المجموع . مثاله

$$٢٠٢ + ٢٠٢ = ٢٠٥$$

٢٠٥	٢ (ك + ح) ١	٢ ٢٠٢ ي
- ٢٠٢	٤ (ك + ح) ١	٢٠٢ ي
-----	٧ (ك + ح) ١	المجموع ٢ ٢٠٢ ي

٢٠٢ - ح	٥ ب ح ١
٢٠٢ - ح	٧ ب ح ١
-----	-----
(٢٠٢ - ح) × (٢٠٢ - ح)	

١١١ بعض الاحيان يقتضي اخراج بعض الكميات من تحت علامة الجذر لكي
تُجمع . مثاله ٢٠٢ + ٢٠٢ = ٢٠٥ باخراج بعضها من تحت علامة الجذر = ٢٠٢ =

الجواب ٢٠٢ + ٢٠٢ = ٢٠٦	اجمع ٢٠٢ و ٢٠٢ ب
الجواب ٢٠٢ + ٢٠٢ = (٢٠٢ + ٢٠٢)	اجمع ٢٠٢ و ٢٠٢ ك
	٢٠٢ ×

اجمع (٢٠٢ ي) و (٢٠٢ ي) الجواب (٢٠٢ + ٢٠٢) × ي
اجمع ٢٠٢ و ٢٠٢

ثم اذا اختلفت الكميات الجذرية او كانت دلائلها غير متشابهة فلا تُجمع الا
بكتابتها متواليه . مثاله مجموع ٢٠٢ و ٢٠٢ = ٢٠٢ + ٢٠٢ ومجموع ٢٠٢
و ٢٠٢ = ٢٠٢ + ٢٠٢

١١٢ اما طرح الجذور فهو مثل جمعها غير انه يجب تبديل علامة المطروح كما
علمت في فصل الطرح البسيط

ت ضرب ت (ب + ك) ٢	ت ٢ ٢	ت ٢ ٢
في ي (ب - ك) ٢	ب ٢ ح ي	ب ٢ ٢
المحصل ت ي (ب - ك) ٢	ت ب ٢ ٢ = ت ب ك	
ت ضرب ت ك ٢	ك ٢ ٢	
في ب ي ٢	ي ٢ ٢	
المحصل	٢ ك ي	

١١٧ متى ارتبطت الاجزاء المنطقية بالجذرية بواسطة علامة الجمع او الطرح يجب ان يُضْرَبَ كل جزء من المضروب في كل جزء من المضروب فيه

$$\begin{aligned}
 & \text{ت} + \text{ب} \\
 & \text{س} + \text{د} \\
 & \text{ت س} + \text{س ب} \\
 & \text{ت د} + \text{ب د} \\
 & \text{ت س} + \text{س ب} + \text{ت د} + \text{ب د}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ت} + \text{ب} + \text{س} + \text{د} = \text{ت} + \text{ب} + \text{س} + \text{د} + \text{ت ر} + \text{ري} \\
 & \text{اضرب} \text{ت} \text{ في} \text{ب} \quad \text{الجواب} \text{ت ب} \\
 & \text{اضرب} \text{ب} \text{ في} \text{س} \quad \text{الجواب} \text{ب س} \\
 & \text{اضرب} \text{س} \text{ في} \text{د} \quad \text{الجواب} \text{س د} \\
 & \text{اضرب} \text{ت} \text{ في} \text{د} \quad \text{الجواب} \text{ت د} \\
 & \text{اضرب} \text{ب} \text{ في} \text{د} \quad \text{الجواب} \text{ب د} \\
 & \text{اضرب} \text{ت} \text{ في} \text{س} \quad \text{الجواب} \text{ت س}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{اضرب} \text{ت} (\text{ت} - \text{ك}) \text{ في} (\text{س} - \text{د}) \times (\text{ت} - \text{ك}) \\
 & \text{الجواب} (\text{ت س} - \text{ت د} - \text{ت ك} - \text{س د})
 \end{aligned}$$

نبذة في قسمة الجذور

١١٨ بَدَلْ عَلَى قسمة الجذور بكتابتها على هيئة كسري درجي. مثاله

المخرج من قسمة ثبات على مـب = $\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$ او بوضع علامة واحدة للصورة والمخرج.

مثالة $\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$

واذا كان جذر المقسوم والمقسوم عليه من اسم واحد ثم القسمة كما في غيرها وبوضع المخرج تحت علامة الجذر المشترك . مثالة

$$\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}} \text{ على } \frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}} = \frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}} \text{ و } \frac{\text{كـي}}{\text{ي}} \text{ على } \frac{\text{كـي}}{\text{ي}} = \frac{\text{كـي}}{\text{ي}} \text{ على } \frac{\text{كـي}}{\text{ي}} = \frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$$

اقسم	$\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$	$\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$
على	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$
المخرج	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$

اقسم	$\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$
على	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$
المخرج	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$

١١٢ نقسم جذور كمية واحدة بطرح دليل المقسوم عليه من دليل المقسوم .
مثالة $\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}} + \frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}} = \frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$

اقسم	$\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$	$\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$
على	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$
المخرج	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$

اقسم	$\frac{\text{ثبات}}{\text{مـب}}$
على	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$
المخرج	$\frac{\text{كـي}}{\text{ي}}$

وممكننا في قسمة الجذور على القوت أو عكسها . مثاله $ت^{\frac{1}{2}} + ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}}$
 $ت^{\frac{1}{2}} + ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}}$

١٢٠ بعد تحويل الجذور الى دليل مشترك ان كان لما مسميات منطقة نُقسم أولاً
 ويوضع الخارج قدام الخارج من قسمة الجذور . مثاله $ت^{\frac{1}{2}} + ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}}$
 س $ت^{\frac{1}{2}}$

اقسم	٢٤ ك	٢٤ ك	٢٤ ك
على	٦	٦	٦
الخارج	٤ ك	٤ ك	٤ ك

اقسم	ب	ب	ب
على	ب	ب	ب
الخارج	ب	ب	ب

$ت^{\frac{1}{2}} (ك^{\frac{1}{2}}) + ت^{\frac{1}{2}} (ك^{\frac{1}{2}}) = ت^{\frac{1}{2}} (ك^{\frac{1}{2}}) = ت^{\frac{1}{2}} (ك^{\frac{1}{2}})$
 $ت^{\frac{1}{2}} (ك^{\frac{1}{2}}) = ت^{\frac{1}{2}} (ك^{\frac{1}{2}})$

اقسم	٢	٢	٢
اقسم	١٠	١٠	١٠
اقسم	١٠	١٠	١٠
اقسم	٨	٨	٨
اقسم	٢	٢	٢
اقسم	١٦	١٦	١٦

نبذة في ترقية الجذور

١٢١ الجذور تترقى مثل القوت اي بضرب دلائلها في دليل القوة المفروضة
 مثاله مربع $ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}}$ والقوة النونية من $ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}}$ والقوة
 الخامسة من $ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}}$ او بالتحويل الى دليل مشترك $(ت^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = ت^{\frac{1}{10}}$

$$\frac{6}{120} = \frac{5 \times 6}{5 + 120} = \frac{6}{125}$$

$$= \frac{(26-)(1-26-26) \times 8}{(26-)(1-26-26)(1+26+26)} = \frac{8}{1+26+26}$$

$$26 \quad 2+26 \quad 2-4$$

حوّل $\frac{1}{26}$ الى كسرٍ مخرجهُ منطّق

حوّل $\frac{26}{26} - \frac{26}{26} + \frac{26}{26}$ الى كسرٍ مخرجهُ منطّق

١٢٧ نرى ما نقدّم ان استخراج جذر كمية صّاء كسراً يسهل بتحويل الصورة الى المخرج الى كمية منطّقة. فلا يلزم حينئذٍ سوى استخراج جذر احدها اذ يكون الآخر منطّقاً.

مثاله جذر ث المالّي $\frac{26}{26} = \frac{26}{26} = \frac{26}{26}$ او $\frac{26}{26}$

$$\frac{26}{26} = \frac{26 \times 26}{26 \times 26} = \frac{26}{26} = \frac{26}{26} = \frac{26}{26}$$

امثلة

- (١) ما هو الجذر الرابع من ٨١ ت
- (٢) ما هو الجذر السادس من (ت + ب) ٢
- (٣) ما هو الجذر الثوني من (ك - ي) ١
- (٤) ما هو الجذر الكمي من - ١٢٥ ت ك
- (٥) ما هو الجذر المالّي من $\frac{4}{9} \frac{2}{3} \frac{1}{4}$ ت
- (٦) ما هو الجذر الخامس من $\frac{24}{343} \frac{1}{27} \frac{1}{8}$ ت ك
- (٧) ما هو الجذر المالّي من ك - ٦ ب ك + ٩ ب
- (٨) ما هو الجذر المالّي من ت + ث + ي + ٤
- (٩) حوّل ت ك الى هيئة الجذر السادس

- (١٠) حَوْل - ٢ الى هيئة الجذر الكمي
- (١١) حَوْل ثاوت الى دليل مشترك
- (١٢) حَوْل ١٤ و ١٥ الى دليل مشترك
- (١٣) حَوْل ثاوب الى دليل
- (١٤) حَوْل ٢٣ و ٢٤ الى دليل
- (١٥) اخرج بعض ٢٤٦ من تحت علامة الجذر
- (١٦) اخرج بعض ٢٤ - ٢٣ من تحت علامة الجذر
- (١٧) ما هو مجموع ١٦٣ و ٢٤٣ و ٢٤٣ و ٢٤٣
- (١٨) ما هو مجموع ١٦٣ و ٢٤٣
- (١٩) اضرب ٨ في ١٨ في ٥ في ٤
- (٢٠) اضرب ٢ + ٢ في ٢ - ٢
- (٢١) اضرب ت (ت + ٢) ب (ت - ٢) ب (ت - ٢)
- (٢٢) اضرب ٢ (ت + ٢) ب (ت + ٢) ب (ت + ٢)
- (٢٣) اقسم ٢٤٦ على ٢٣
- (٢٤) اقسم ٢٤٦ على ٢٣
- (٢٥) اقسم ٢٤٦ على ٢٣
- (٢٦) اقسم ٢٤٦ على ٢٣
- (٢٧) ما هو مكعب ١٧
- (٢٨) ما هو مربع ٥ + ٢
- (٢٩) ما هي القوة الرابعة من ١/٢
- (٣٠) ما هو مكعب ٢ - ٢
- (٣١) بماذا نصير ٢ الى منطقة
- (٣٢) بماذا نصير ٥ - ٢ الى منطقة
- (٣٣) حَوْل ٢ الى مخرج منطقي
- (٣٤) حَوْل ٢ الى مخرج منطقي

مثال ١: ت + ب (ت س + ب س + ت د + د ب + د ك) س + د + ت + ك

$$\begin{array}{r} \text{ت س + ب س} \\ \hline \text{ت د + د ب} \\ \text{ت د + د ب} \\ \hline \text{ك} \end{array}$$

مثال ١٠: د - ح (ت د - ت ح + ب د - ب ح + ي (ت + ب + د - ح ي

$$\begin{array}{r} \text{ت د - ت ح} \\ \hline \text{ب د - ب ح} \\ \text{ب د - ب ح} \\ \hline \text{ي} \end{array}$$

(١١) اقسام ٦ ت + ك + ٢ ك - ٢ ت ب - ب ي + ٢ ت س + س ي + ح
 الخارج ٢ ك - ب س + س ح
 على ٢ ت + ي

(١٢) اقسام ٢ ت ب - ٢ ت + ٢ ت ب - ب ٦ - ت ٤ + ب ٢ + ٢ ت على ب - ٢
 الخارج ٢ ت + ٢ ت - ٤ + ب ٢

(١٣) ت (ت + ب) ت س + س ب + ت ب + د ب + د (س + ب)
 ت س + س ب

$$\begin{array}{r} \text{ت ب + د ب} \\ \hline \text{ت ب + د ب} \\ \hline \end{array}$$

(١٤) اقسام ت + ب + ت ر + ر ي على ت + ب
 الخارج ١ + ر

(١٥) اقسام ٢ ك - ٢ ت ك + ٢ ت ك - ت على ك - ت

(١٦) اقسام ٢ ي - ١ ي + ٢ ي - ٢ ي - ١٧ على ي - ٨

(١٧) اقسام ٢ ك - ١ على ك - ١

(١٨) اقسام ٤ ك - ٩ ك + ٦ ك - ٢ على ٢ ك + ٢ ك - ١

(١٩) اقسام ٤ ت + ٤ ت ب + ٢ ب على ٢ ت + ب

(٢٠) اقسام ك^١ - ت^٢ ك^٣ - ت^٤ على ك^٥ - ت^٦ ك^٧ + ت^٨

١٢١ اذا انقسمت فضلة قوتين على فضلة كميتهما الاصليتين يخرج من ذلك سلسلة قوات

مثالة (ي^١ - ت^٢) + (ي^٣ - ت^٤) = ي^٥ + ت^٦

(ي^١ - ت^٢) + (ي^٣ - ت^٤) = ي^٥ + ت^٦ + ي^٧ + ت^٨

(ي^١ - ت^٢) + (ي^٣ - ت^٤) = ي^٥ + ت^٦ + ي^٧ + ت^٨ + ي^٩ + ت^{١٠}

(ي^١ - ت^٢) + (ي^٣ - ت^٤) = ي^٥ + ت^٦ + ي^٧ + ت^٨ + ي^٩ + ت^{١٠} + ي^{١١} + ت^{١٢}

وذلك يبرهن بالضرب

وهكذا يبرهن ان فضلة قوات كمييتين اذا كان دليلها عدد شفع يمكن قسمتها على مجتمع الكمييتين

مثالة (ي^١ - ت^٢) + (ي^٣ + ت^٤) = ي^٥ - ت^٦

و (ي^١ - ت^٢) + (ي^٣ + ت^٤) = ي^٥ - ت^٦ + ي^٧ + ت^٨ - ي^٩ - ت^{١٠}

و (ي^١ - ت^٢) + (ي^٣ + ت^٤) = ي^٥ - ت^٦ + ي^٧ + ت^٨ - ي^٩ - ت^{١٠} + ي^{١١} + ت^{١٢}

- ت^{١٣}

ومجتمع قوتين من كمييتين ان كان الدليل وترًا يُنقسم على مجتمع الكمييتين

مثالة (ي^١ + ت^٢) + (ي^٣ + ت^٤) = ي^٥ - ت^٦ + ي^٧ + ت^٨

(ي^١ + ت^٢) + (ي^٣ + ت^٤) = ي^٥ + ت^٦ + ي^٧ + ت^٨ - ي^٩ - ت^{١٠} + ي^{١١} + ت^{١٢}

(ي^١ + ت^٢) + (ي^٣ + ت^٤) = ي^٥ + ت^٦ + ي^٧ + ت^٨ - ي^٩ - ت^{١٠} + ي^{١١} + ت^{١٢} - ي^{١٣} - ت^{١٤}

ت^{١٥} + ي^{١٦}

في العاد الأكبر للكميتين

١٢٢ لكي نجد العاد الأكبر اقسام احدى الكمييتين على الاخرى والمقسوم عليه على

الباقى ثم المقسوم عليه الثاني على الباقي الثاني ولم جراً الى ان لا يبقى شيء فيكون المقسوم

عليه الاخير العاد الأكبر. وان أريد العاد الأكبر لثلاث كميات يجب اخذه لاثنتين

منها ثم العاد الأكبر بين الثالثة والعاد الأكبر الأول وهكذا نعددت الكميات

١٢٣ في اخذ العاد الأكبر لكميات مركبة يجب احياناً تنقيص المقسوم عليه ان

زيادة المنقسم. ويمكن ذلك بدون تغيير العاد الأكبر اذا ضرب او انقسم احدهما على كمية لا ينقسم عليها الاخر وليس فيها جزء ينقسم عليه الاخر. مثاله العاد الأكبر بين
 ت ب و ت س هـ وت وان ضربت احدهما في د فيكون العاد الأكبر بين
 ت ب د و ت س هـ وت ايضا. وان فرض ت ب و ت س د يكون العاد
 الأكبر بينهما ت ايضا. واذا انقسم ت س د على د يبقى ت س فيكون ت العاد
 الأكبر بينهما كما كان. وبحسب ذلك يمكن تسهيل العمل في اخذ العاد الأكبر بقسمة
 المنقسم عليه على كمية ليست بمنقسم عليه للمنقسم او ضرب المنقسم في كمية لا تعد المنقسم
 عليه

مثال اول ما هو العاد الأكبر بين ٦ ت + ١١ ت ك + ٢ ك و ٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك
 وهذه صورة العمل

$$\begin{array}{r} ٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك \\ ٦ ت + ١١ ت ك + ٢ ك \\ \hline ٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك \end{array}$$

اقسم على ٢ ك

$$\begin{array}{r} ٢ ت + ٢ ك \\ ٦ ت + ١١ ت ك + ٢ ك \\ \hline ٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ ت - ٢ ك \\ ٢ ت + ٢ ك \\ \hline ٢ ت - ٢ ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ ت - ٢ ك \\ ٢ ت + ٢ ك \\ \hline ٢ ت - ٢ ك \end{array}$$

فالعاد الأكبر بين ٢ ت + ٢ ك

$$\begin{array}{r} ٢ ت + ٢ ك \\ ٢ ت + ٢ ك \\ \hline ٢ ت + ٢ ك \end{array}$$

المجواب ك + ب

$$\begin{array}{r} ٢ ت + ٢ ك \\ ٢ ت + ٢ ك \\ \hline ٢ ت + ٢ ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ ت + ٢ ك \\ ٢ ت + ٢ ك \\ \hline ٢ ت + ٢ ك \end{array}$$

المجواب ك - ٨

$$\begin{array}{r} ٢ ت + ٢ ك \\ ٢ ت + ٢ ك \\ \hline ٢ ت + ٢ ك \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ٢ ت + ٢ ك \\ ٢ ت + ٢ ك \\ \hline ٢ ت + ٢ ك \end{array}$$

- ٧ ما هو العا د الأكبر بين ك^٢ - ١ وكى + ى الجواب ك + ١
 ٨ ما هو العا د الأكبر بين ت^٢ - ت ب - ٢ ب^٢ وت^٢ - ٣ ت ب + ٢ ب^٢
 ٩ ما هو العا د الأكبر بين ت^٤ - ك^٢ وت^٢ - ت^٢ ك + ت^٢ ك - ك^٢
 ١٠ ما هو العا د الأكبر بين ت^٢ - ت ب^٢ وت^٢ + ٢ ت ب + ب^٢
 بفتح ما نندم

- (١) ان فضلة قوتين شعبيتين من اسم واحد تنقسم على مجتمع جذريهما
 (٢) مجتمع قوتين وزرعتين من اسم واحد ينقسم على مجتمع جذريهما
 وعلى هذه القواعد تحل عبارات جبرية كثيرة الى اضلاعها
 وقد يكون احد الاضلاع من اسم واحد او ذا جزء واحد . مثالة ت ب + ت س
 فالامر ظاهر ان احد ضلعها ت والآخر ب + س وقد يكون كلا الضلعين كمية ثنائية
 مثالة ت^٢ + ٢ ت ب + ب^٢ فالامر ظاهر ان ضلعها هما (ت + ب) × (ت + ب)
 (٣) ما ضلعا ت ب^٢ س + ٥ ت ب^٢ + ت ب^٢ س فالامر ظاهر ان
 ت وب^٢ ضلع من كل جزء فيكون الضلعان ت ب^٢ (س + ٥ ب س)
 (٤) ما ضلعا ٢٥ ت^٢ - ٣٠ ت^٢ ب + ١٥ ت^٢ ب^٢

- الجواب ٥ ت^٢ (٥ ت^٢ - ٦ ت ب + ٢ ب^٢)
 (٥) ما ضلعا ٢ ت^٢ ب + ٩ ت^٢ س + ١٨ ت^٢ كى

- الجواب ٢ ت^٢ (ب + ٣ س + ٦ كى)
 (٦) ما ضلعا ٨ ت^٢ س ك - ١٨ ت س ك^٢ + ٢ ت س^٢ س^٢ - ٣٠ ت^٢ س^٢ ك
 الجواب ٢ ت س (٤ ت ك - ٩ ك^٢ + س^٢ س^٢ - ١٥ ت س^٢ ك)
 (٧) ما ضلعا ٢٤ ت^٢ ب^٢ س ك - ٣٠ ت^٢ ب^٢ س^٢ كى + ٢٦ ت^٢ ب^٢ س د
 ٦ ت ب س

- الجواب ٦ ت ب س (٤ ت ب ك - ٥ ت^٢ ب^٢ س^٢ كى + ٦ ت^٢ ب^٢ د + ١)
 (٨) ما ضلعا ت^٢ - ٢ ت ب + ب^٢ الجواب (ت - ب) × (ت - ب)
 (٩) ما ضلعا ٦٤ ت^٢ ب^٢ س^٢ - ٤٨ ت ب^٢ س^٢ د + ٩ س^٢ د^٢
 الجواب (٨ ت ب س - ٢ س د) × (٨ ت ب س - ٢ س د)
 (١٠) ما ضلعا ١^٢ - ب^٢ الجواب (١ + ب) × (١ - ب)
 (١١) ما ضلعا ١٦ ت^٢ س^٢ - ٩ د^٢

- الجواب (٤ ت س + ٢ د) × (٤ ت س - ٢ د)

- (١٣) حل ت - ب الى اربعة اضلاع
 (١٤) حل ٨ ت - ٨ ب الى ثلاثة اضلاع
 (١٤) حل ٢٧ + ١ ب الى ضلعها
 (١٥) حل ٨ ت + ٢٧ ب الى ضلعها
 (١٦) حل ن + ٢ ن + ن الى ثلاثة اضلاع
 (١٧) حل ت ك - ك الى ثلاثة اضلاع

—•—

الفصل الحادي عشر

في ترقية الكميات الثنائية وبسطها

١٣٤ قد رأينا سابقاً كيفية ترقية الكميات بالضرب غير انه اذا كانت القوة المطلوبة عالية يطول بها العمل جداً . وقد اخترع الفيلسوف اسحق نيوتن قاعدة مختصرة لترقية الكميات الثنائية ولشدة اعتبارها عند علماء هذا الفن ننشوها على قبره في كنيسة وستمنستر في لندن

- ١٣٥ اذا ضربت كمية مثل ت + ب في نفسها فلنا هذه القوات
 (ت + ب) = ت^٢ + ٢ ت ب + ب^٢
 (ت + ب) = ت^٣ + ٣ ت^٢ ب + ٣ ت ب^٢ + ب^٣
 (ت + ب) = ت^٤ + ٤ ت^٣ ب + ٦ ت^٢ ب^٢ + ٤ ت ب^٣ + ب^٤
 (ت + ب) = ت^٥ + ٥ ت^٤ ب + ١٠ ت^٣ ب^٢ + ١٠ ت^٢ ب^٣ + ٥ ت ب^٤ + ب^٥

فترى من ذلك ان الدلائل جارية على اسلوب واحد ابداً . اي ان دليل ت في الجزء الاول ودليل ب في الجزء الاخير يعدل دليل اسم القوة المفروضة . وان دلائل ت يهبط واحداً في كل جزء . وان دلائل ب تعلق واحداً في كل جزء بعد الاول
 واذا قطعنا النظر عن المسميات نرى ما سبق ان دلائل اية قوة فُرِضَتْ من كمية ثنائية تعدل اسم القوة المفروضة في الجزء الاول والاخير وان دلائل الاصلية يهبط ودلائل التابعة تعلق واحداً في كل جزء

تنبيه . يراد بالاصلية الجزء الأول من الكمية الثنائية وبالتابعة الجزء الثاني . مثاله
في ت + ب سُمِّيت ت الاصلية وب التابعة

ثم ان قيل ما هي القوة الثامنة من ت + ب بقطع النظر عن المسميات فالجواب
ت^١ + ت^٢ + ب + ت^٣ + ت^٤ + ت^٥ + ت^٦ + ت^٧ + ب^٨

ثم يرى عدد الاجزاء أكثر من الأحاد في اسم القوة بواحد ابداً . اي في المربع
ثلاثة اجزاء وفي المكعب اربعة وفي القوة الرابعة خمسة وفي الخامسة ستة وهلم جرا

١٢٦ ثم لكي نجد المسميات اذا نظرنا الى القوات المتقدمة (١٢٥) نرى
مسميات المربع
 $٢ = ٤ = ١ \quad ٢ \quad ١$
ومسميات المكعب
 $٢ = ٨ = ١ \quad ٢ \quad ٢ \quad ١$
ومسميات القوة الرابعة
 $٢ = ١٦ = ١ \quad ٤ \quad ٦ \quad ٤ \quad ١$
ومسميات القوة الخامسة
 $٢ = ٣٢ = ١ \quad ٥ \quad ١٠ \quad ١٠ \quad ٥ \quad ١$

فنرى ان مسمى الجزء الأول هو واحد ابداً . وان مسمى الجزء الثاني يعدل دليل
القوة المفروضة . ومن ثم اذا ضرب مسمى جزء في دليل الكمية الاصلية وانقسم المحاصل
على دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء الذي يتلوه
واذا نظرنا الى المسميات المذكورة آنفاً نرى انها ولا تزيد الى حد معلوم ثم يهبط
كما زادت فتكون متساوية في الجزء الأول والاخير وفي الثاني والذي قبل الاخير
وفي الثالث والذي قبل ما قبل الاخير . فاذا عرفنا مسميات نصف الاجزاء نعرف
منها مسميات البقية

وفي اية قوة فُرِضَتْ من كمية ثنائية مثل ت + ب يعدل مجتمع المسميات تلك
القوة من اثنين كما ترى قبيل هذا

١٢٧ ان النضايا الماضي ذكرها قد انحصرت في نظرية واحدة نسي النظرية
الثنائية . وهي

انه في كل قوة من كمية ثنائية يكون دليل الاصلية مساوياً لاسم
القوة . ومن ثم يهبط واحداً في كل جزء . ودليل التابعة يبتدئ بواحد

في الجزء الثاني. ومن ثمَّ يعلو واحداً في كل جزء
 مسمى الجزء الاول واحدٌ ومسمى الجزء الثاني يعدل دليل القوة
 المفروضة . ومن ثمَّ اذا ضرب مسمى جزء في دليل الاصلية وانقسم على
 دليل التابعة + ا يكون من ذلك مسمى الجزء التالي له
 وتكتب هذه النظرية في عبارة جبرية هكذا

$$(ت + ب) = ت + ن \times ت - ا + ب + ن \times ن - ا - ت - ب \text{ الى آخره}$$

مثال اول ما في القوة السادسة من ك + ي
 الجواب ك^٦ + ٦ ك^٥ ي + ١٥ ك^٤ ي^٢ + ٢٠ ك^٣ ي^٣ + ١٥ ك^٢ ي^٤ + ٦ ك^١ ي^٥ + ي^٦
 ٢ (د + ح) = د^٥ + ٥ د^٤ ح + ١٠ د^٣ ح^٢ + ١٠ د^٢ ح^٣ + ٥ د^١ ح^٤ + ح^٥
 ٣ ما في القوة الخامسة من ك + ي^٢

بوضع ت عوضاً عن ك^٢ ووضع ب عوضاً عن ي^٢ لنا
 (ت + ب) = ت^٥ + ٥ ت^٤ ب + ١٠ ت^٣ ب^٢ + ١٠ ت^٢ ب^٣ + ٥ ت^١ ب^٤ + ب^٥

ثم بترجيع ك^٢ و ي^٢ عوضاً عن ت وب لنا
 ك^{١٠} + ١٥ ك^٨ ي + ٩٠ ك^٦ ي^٢ + ٢٧٠ ك^٤ ي^٣ + ٤٠٥ ك^٢ ي^٤ + ٢٤٣ ي^٥
 ٤ ما في القوة السادسة من ك + ي
 الجواب ٧٢٩ ك^٦ + ٢٩١٦ ك^٥ ي + ٤٨٦٠ ك^٤ ي^٢ + ٤٢٢٠ ك^٣ ي^٣ + ٢١٦٠ ك^٢ ي^٤ + ٥٧٦ ك^١ ي^٥ + ي^٦

١٢٨ الكمية الفضلية تترقى كالاجايبية غير ان علاماتها تتغير فان (ت - ب)^٢
 = ت^٢ - ٢ ت ب + ب^٢

و (ت - ب)^٣ = ت^٣ - ٣ ت^٢ ب + ٣ ت ب^٢ - ب^٣
 و (ت - ب)^٤ = ت^٤ - ٤ ت^٣ ب + ٦ ت^٢ ب^٢ - ٤ ت ب^٣ + ب^٤

فندري ان كل جزء يقع في قوة وترية من الكمية التابعة تكون علامته سلبية .
 القوة السادسة من ك - ي = ك^٦ - ٦ ك^٥ ي + ١٥ ك^٤ ي^٢ - ٢٠ ك^٣ ي^٣ + ١٥ ك^٢ ي^٤ - ٦ ك^١ ي^٥ + ي^٦

١٢٩ منى كان احد جزئى كيمية ثنائية واحداً يمكن تركه الا من الجزء الاول او
الاخير لان كل قوة من واحد واحد وضرب كيمية في واحد لا يغيرها شيئاً . مثالة

$$1 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 + 2^3 = 2(1 + 2)$$

وذلك = ك^٢ + ك^٢ + ك^٢ + ١

فلا داعي الى كتابة الواحد الآخر حفظ الدليل لاجل معرفة المسميات. وليس لها لزومٌ ايضاً من هذا القبيل لاننا نعرف الدليل من كون مجموع الدليلين في كل جزء يعدل اسم النوع المفروضة

مثال (۱-۷) $1 - 7 + 10 - 20 + 10 - 7 + 1 = 1(1 - 7 + 10 - 20 + 10 - 7 + 1)$

نرى مما سبق ان العبارة الدالة على قوة الجزء الاول من جذرها واحد هي بسيطة جداً. فاذا تحولت ثنائية الى اخرى الجزء الاول منها واحد يمكن الدلالة على كل قوة منها بالعبارة المذكورة. مثالة $ت + ك = (١ + \frac{ك}{ت})$ او $ت + ك = ت \times (١ + \frac{ك}{ت})$ فاذا

(ث + ك) = ث × (ك + ١) وبالبسط نصير

ث^٢ × (١ + ث^٢ + ث^٤) وقس على ذلك

١٤٠ متى كان دليل قوة مفروضة من ثنائية صحيحاً إيجابياً تنتهي السلسلة حسباً
نقدّم. ومتى كان دليل القوة المفروضة سلبية لا تنتهي السلسلة بل يمكن الاستمرار فيها
إلى غير نهاية. مثل كثير من الكسور العشرية. مثاله لو قبل أبسط $(\frac{1}{10})$ أو
(١٠) لفيل ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠ - ٣١ - ٣٢ - ٣٣ - ٣٤ - ٣٥ - ٣٦ - ٣٧ - ٣٨ - ٣٩ - ٤٠ - ٤١ - ٤٢ - ٤٣ - ٤٤ - ٤٥ - ٤٦ - ٤٧ - ٤٨ - ٤٩ - ٥٠ - ٥١ - ٥٢ - ٥٣ - ٥٤ - ٥٥ - ٥٦ - ٥٧ - ٥٨ - ٥٩ - ٦٠ - ٦١ - ٦٢ - ٦٣ - ٦٤ - ٦٥ - ٦٦ - ٦٧ - ٦٨ - ٦٩ - ٧٠ - ٧١ - ٧٢ - ٧٣ - ٧٤ - ٧٥ - ٧٦ - ٧٧ - ٧٨ - ٧٩ - ٨٠ - ٨١ - ٨٢ - ٨٣ - ٨٤ - ٨٥ - ٨٦ - ٨٧ - ٨٨ - ٨٩ - ٩٠ - ٩١ - ٩٢ - ٩٣ - ٩٤ - ٩٥ - ٩٦ - ٩٧ - ٩٨ - ٩٩ - ١٠٠ - ١٠١ - ١٠٢ - ١٠٣ - ١٠٤ - ١٠٥ - ١٠٦ - ١٠٧ - ١٠٨ - ١٠٩ - ١١٠ - ١١١ - ١١٢ - ١١٣ - ١١٤ - ١١٥ - ١١٦ - ١١٧ - ١١٨ - ١١٩ - ١٢٠ - ١٢١ - ١٢٢ - ١٢٣ - ١٢٤ - ١٢٥ - ١٢٦ - ١٢٧ - ١٢٨ - ١٢٩ - ١٣٠ - ١٣١ - ١٣٢ - ١٣٣ - ١٣٤ - ١٣٥ - ١٣٦ - ١٣٧ - ١٣٨ - ١٣٩ - ١٤٠ - ١٤١ - ١٤٢ - ١٤٣ - ١٤٤ - ١٤٥ - ١٤٦ - ١٤٧ - ١٤٨ - ١٤٩ - ١٥٠ - ١٥١ - ١٥٢ - ١٥٣ - ١٥٤ - ١٥٥ - ١٥٦ - ١٥٧ - ١٥٨ - ١٥٩ - ١٦٠ - ١٦١ - ١٦٢ - ١٦٣ - ١٦٤ - ١٦٥ - ١٦٦ - ١٦٧ - ١٦٨ - ١٦٩ - ١٧٠ - ١٧١ - ١٧٢ - ١٧٣ - ١٧٤ - ١٧٥ - ١٧٦ - ١٧٧ - ١٧٨ - ١٧٩ - ١٨٠ - ١٨١ - ١٨٢ - ١٨٣ - ١٨٤ - ١٨٥ - ١٨٦ - ١٨٧ - ١٨٨ - ١٨٩ - ١٩٠ - ١٩١ - ١٩٢ - ١٩٣ - ١٩٤ - ١٩٥ - ١٩٦ - ١٩٧ - ١٩٨ - ١٩٩ - ٢٠٠ - ٢٠١ - ٢٠٢ - ٢٠٣ - ٢٠٤ - ٢٠٥ - ٢٠٦ - ٢٠٧ - ٢٠٨ - ٢٠٩ - ٢١٠ - ٢١١ - ٢١٢ - ٢١٣ - ٢١٤ - ٢١٥ - ٢١٦ - ٢١٧ - ٢١٨ - ٢١٩ - ٢٢٠ - ٢٢١ - ٢٢٢ - ٢٢٣ - ٢٢٤ - ٢٢٥ - ٢٢٦ - ٢٢٧ - ٢٢٨ - ٢٢٩ - ٢٣٠ - ٢٣١ - ٢٣٢ - ٢٣٣ - ٢٣٤ - ٢٣٥ - ٢٣٦ - ٢٣٧ - ٢٣٨ - ٢٣٩ - ٢٤٠ - ٢٤١ - ٢٤٢ - ٢٤٣ - ٢٤٤ - ٢٤٥ - ٢٤٦ - ٢٤٧ - ٢٤٨ - ٢٤٩ - ٢٥٠ - ٢٥١ - ٢٥٢ - ٢٥٣ - ٢٥٤ - ٢٥٥ - ٢٥٦ - ٢٥٧ - ٢٥٨ - ٢٥٩ - ٢٦٠ - ٢٦١ - ٢٦٢ - ٢٦٣ - ٢٦٤ - ٢٦٥ - ٢٦٦ - ٢٦٧ - ٢٦٨ - ٢٦٩ - ٢٧٠ - ٢٧١ - ٢٧٢ - ٢٧٣ - ٢٧٤ - ٢٧٥ - ٢٧٦ - ٢٧٧ - ٢٧٨ - ٢٧٩ - ٢٨٠ - ٢٨١ - ٢٨٢ - ٢٨٣ - ٢٨٤ - ٢٨٥ - ٢٨٦ - ٢٨٧ - ٢٨٨ - ٢٨٩ - ٢٩٠ - ٢٩١ - ٢٩٢ - ٢٩٣ - ٢٩٤ - ٢٩٥ - ٢٩٦ - ٢٩٧ - ٢٩٨ - ٢٩٩ - ٣٠٠ - ٣٠١ - ٣٠٢ - ٣٠٣ - ٣٠٤ - ٣٠٥ - ٣٠٦ - ٣٠٧ - ٣٠٨ - ٣٠٩ - ٣١٠ - ٣١١ - ٣١٢ - ٣١٣ - ٣١٤ - ٣١٥ - ٣١٦ - ٣١٧ - ٣١٨ - ٣١٩ - ٣٢٠ - ٣٢١ - ٣٢٢ - ٣٢٣ - ٣٢٤ - ٣٢٥ - ٣٢٦ - ٣٢٧ - ٣٢٨ - ٣٢٩ - ٣٣٠ - ٣٣١ - ٣٣٢ - ٣٣٣ - ٣٣٤ - ٣٣٥ - ٣٣٦ - ٣٣٧ - ٣٣٨ - ٣٣٩ - ٣٤٠ - ٣٤١ - ٣٤٢ - ٣٤٣ - ٣٤٤ - ٣٤٥ - ٣٤٦ - ٣٤٧ - ٣٤٨ - ٣٤٩ - ٣٥٠ - ٣٥١ - ٣٥٢ - ٣٥٣ - ٣٥٤ - ٣٥٥ - ٣٥٦ - ٣٥٧ - ٣٥٨ - ٣٥٩ - ٣٦٠ - ٣٦١ - ٣٦٢ - ٣٦٣ - ٣٦٤ - ٣٦٥ - ٣٦٦ - ٣٦٧ - ٣٦٨ - ٣٦٩ - ٣٧٠ - ٣٧١ - ٣٧٢ - ٣٧٣ - ٣٧٤ - ٣٧٥ - ٣٧٦ - ٣٧٧ - ٣٧٨ - ٣٧٩ - ٣٨٠ - ٣٨١ - ٣٨٢ - ٣٨٣ - ٣٨٤ - ٣٨٥ - ٣٨٦ - ٣٨٧ - ٣٨٨ - ٣٨٩ - ٣٩٠ - ٣٩١ - ٣٩٢ - ٣٩٣ - ٣٩٤ - ٣٩٥ - ٣٩٦ - ٣٩٧ - ٣٩٨ - ٣٩٩ - ٤٠٠ - ٤٠١ - ٤٠٢ - ٤٠٣ - ٤٠٤ - ٤٠٥ - ٤٠٦ - ٤٠٧ - ٤٠٨ - ٤٠٩ - ٤١٠ - ٤١١ - ٤١٢ - ٤١٣ - ٤١٤ - ٤١٥ - ٤١٦ - ٤١٧ - ٤١٨ - ٤١٩ - ٤٢٠ - ٤٢١ - ٤٢٢ - ٤٢٣ - ٤٢٤ - ٤٢٥ - ٤٢٦ - ٤٢٧ - ٤٢٨ - ٤٢٩ - ٤٣٠ - ٤٣١ - ٤٣٢ - ٤٣٣ - ٤٣٤ - ٤٣٥ - ٤٣٦ - ٤٣٧ - ٤٣٨ - ٤٣٩ - ٤٤٠ - ٤٤١ - ٤٤٢ - ٤٤٣ - ٤٤٤ - ٤٤٥ - ٤٤٦ - ٤٤٧ - ٤٤٨ - ٤٤٩ - ٤٥٠ - ٤٥١ - ٤٥٢ - ٤٥٣ - ٤٥٤ - ٤٥٥ - ٤٥٦ - ٤٥٧ - ٤٥٨ - ٤٥٩ - ٤٦٠ - ٤٦١ - ٤٦٢ - ٤٦٣ - ٤٦٤ - ٤٦٥ - ٤٦٦ - ٤٦٧ - ٤٦٨ - ٤٦٩ - ٤٧٠ - ٤٧١ - ٤٧٢ - ٤٧٣ - ٤٧٤ - ٤٧٥ - ٤٧٦ - ٤٧٧ - ٤٧٨ - ٤٧٩ - ٤٨٠ - ٤٨١ - ٤٨٢ - ٤٨٣ - ٤٨٤ - ٤٨٥ - ٤٨٦ - ٤٨٧ - ٤٨٨ - ٤٨٩ - ٤٩٠ - ٤٩١ - ٤٩٢ - ٤٩٣ - ٤٩٤ - ٤٩٥ - ٤٩٦ - ٤٩٧ - ٤٩٨ - ٤٩٩ - ٥٠٠ - ٥٠١ - ٥٠٢ - ٥٠٣ - ٥٠٤ - ٥٠٥ - ٥٠٦ - ٥٠٧ - ٥٠٨ - ٥٠٩ - ٥١٠ - ٥١١ - ٥١٢ - ٥١٣ - ٥١٤ - ٥١٥ - ٥١٦ - ٥١٧ - ٥١٨ - ٥١٩ - ٥٢٠ - ٥٢١ - ٥٢٢ - ٥٢٣ - ٥٢٤ - ٥٢٥ - ٥٢٦ - ٥٢

١٤١ ثم ان النظرية الثنائية تنيد جداً في تجذير الثنائيات لانها تدل على الجذر كما تدل على القوة غير ان دليل القوة صحيح ودليل الجذر كسر مثاله (ت + ب) فان كانت ن عوضاً عن ٢ مثلاً تكون العبارة دالة على قوة وان كانت عوضاً عن ٢/١ مثلاً تكون جذراً

إذا انبسط جذر بواسطة النظرية الثنائية فالسلسلة لا تنتهي لأن السلسلة انما تنتهي عند ما يصير دليل الاصلية صفراً حتى تنفد المسلمات . والكسر لا يمكن ان ينتهي الى صفر بطرح واحد منه على التوالي . فان كان الدليل في الجزء الاول $\frac{1}{2}$ يكون في الثاني

$\frac{1}{2} - 1 = 1 - \frac{1}{2}$ وفي الثالث $\frac{1}{2} - 1 = 1 - \frac{1}{2}$ وفي الرابع $\frac{2}{2} - 1 = 1 - \frac{2}{2}$
 مثاله لو قبل ما هو الجذر المائي من ت + ب اي (ت + ب) لقبل ت + $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ ت + ب - $\frac{1}{8}$ ت + $\frac{1}{2}$ ب + $\frac{1}{16}$ ت + $\frac{1}{2}$ ب الخ

مثال اول ابط (ت + ك) بوضع ب عوضاً عن ت نصير (ب + ك) $\frac{1}{2}$
 وبسطها = ب + $\frac{1}{2}$ ب + ك - $\frac{1}{8}$ ب + ك + $\frac{1}{8}$ ب + ك - $\frac{10}{288}$ ب + ك الخ
 الى آخره

$$\text{وذاك} = \text{ب} + \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{ك} - \frac{1}{8} \text{ب} + \frac{10}{288} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{ك} \text{ الخ}$$

ثم يترجع ت عوضاً عن ب نصير

$$\text{ت} + \frac{1}{2} \text{ت} - \frac{1}{8} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} - \frac{10}{288} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} \text{ الخ}$$

٢ ابط (١ + ك) $\frac{1}{2}$

$$\text{الجواب} 1 + \frac{1}{2} \text{ت} - \frac{1}{8} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} - \frac{10}{288} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} \text{ الخ}$$

٣ ابط $\frac{1}{2}$ اي (١ + ١) $\frac{1}{2}$

$$\text{الجواب} 1 + \frac{1}{2} \text{ت} - \frac{1}{8} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} - \frac{10}{288} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} \text{ الخ}$$

٤ ابط (ت + ك) $\frac{1}{2}$ او ت $\frac{1}{2}$ X (١ + ك) $\frac{1}{2}$

$$\text{الجواب} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ت} - \frac{1}{8} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} - \frac{10}{288} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ك} \text{ الخ}$$

٥ ابط (ت + ب) $\frac{1}{2}$ او ت $\frac{1}{2}$ X (١ + ب) $\frac{1}{2}$

$$\text{الجواب} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ت} - \frac{1}{8} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ب} - \frac{10}{288} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ب} \text{ الخ}$$

٦ ابط (ت - ب) $\frac{1}{2}$

$$\text{الجواب} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ت} - \frac{1}{8} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ب} - \frac{10}{288} \text{ت} + \frac{1}{2} \text{ب} \text{ الخ}$$

٧ ابط (ت + ك) $\frac{1}{2}$ ٨ ابط (١ - ك) $\frac{1}{2}$

٩ ابط (١ + ك) $\frac{1}{2}$ ١٠ ابط (ت + ك) $\frac{1}{2}$

١٤٢ ثم ان النظرية الثانية تستعمل في كميات لما اكثر من جزئين بالتعويض

عن الاجزاء حتى نقول الى جزئين. ثم عند ترجيع المعوض عنها تبسط التي كان لها

دلائل بمنزلة ما هو مكسب ت + ب + س. عوض عن ب + س واجعل

ح = ب + س فتكون العبارة ت + ح و (ت + ح) = ت + $\frac{1}{2}$ ت + $\frac{1}{2}$ ت + ح = ت + ح

+ ح ثم يترجع قيمة ح لنا (ت + ب + س) = ت + $\frac{1}{2}$ ت + $\frac{1}{2}$ ت + ح X (ب + س) +

ت X (ب + س) + $\frac{1}{2}$ (ب + س) ثم ترقى ب + س حسباً تقدّم

أمثلة

١ ما هي القوة الثامنة من (ت + ب)

الجواب ت^٨ + ب^٧ + ج^٦ + د^٥ + هـ^٤ + ز^٣ + ح^٢ + ط^١

٣ ما هي القوة السابعة من ت - ب

۲ اوسط $\frac{1}{n-1}$ او $(n-1)$ ت^۱

الجواب ١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ت^٥ الخ

۴ ابط ت ح ب او ح X (ت - ب) ۱

الجواب ح $\times \left(\frac{1}{\text{ت}} + \frac{\text{ب}}{\text{ت}} + \frac{\text{ب}}{\text{ت}} + \frac{\text{ب}}{\text{ت}} \right)$ الخ

او $(\frac{C}{N} + \frac{C}{N} + \frac{C}{N} + \frac{C}{N})$ الخ

۵. اَبسط (ت^۲ + ب^۲)^۱

الجواب ت + $\frac{٢}{٢٢} - \frac{٤}{٢٨} + \frac{٦}{١٦}$ الخ

٦ اَبسط (ث + ی) ٤-

الح جواب $\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{10}{n^3} - \frac{20}{n^4} + \frac{35}{n^5} - \frac{48}{n^6} + \frac{56}{n^7} - \frac{56}{n^8} + \frac{48}{n^9} - \frac{35}{n^{10}} + \frac{20}{n^{11}} - \frac{10}{n^{12}} + \frac{4}{n^{13}} - \frac{1}{n^{14}}$

٧ اِبط (س + ك) $\frac{1}{4}$

الجواب س $\times (1 + \frac{2}{18} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18})$ الخ

۸. ابط $\frac{d}{dx} (x^2 + 1) = 2x$ اود $x^2 + 1 = 1$

الجواب د $\times (1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{1}{48} + \frac{1}{96} - \frac{1}{192} + \frac{1}{384} - \frac{1}{768} + \frac{1}{1536} - \frac{1}{3072} + \frac{1}{6144} - \frac{1}{12288} + \frac{1}{24576} - \frac{1}{49152} + \frac{1}{98304} - \frac{1}{196608} + \frac{1}{393216} - \frac{1}{786432} + \frac{1}{1572864} - \frac{1}{3145728} + \frac{1}{6291456} - \frac{1}{12582912} + \frac{1}{25165824} - \frac{1}{50331648} + \frac{1}{100663296} - \frac{1}{201326592} + \frac{1}{402653184} - \frac{1}{805306368} + \frac{1}{1610612736} - \frac{1}{3221225472} + \frac{1}{6442450944} - \frac{1}{12884901888} + \frac{1}{25769803776} - \frac{1}{51539607552} + \frac{1}{103079215104} - \frac{1}{206158430208} + \frac{1}{412316860416} - \frac{1}{824633720832} + \frac{1}{1649267441664} - \frac{1}{3298534883328} + \frac{1}{6597069766656} - \frac{1}{13194139533312} + \frac{1}{26388279066624} - \frac{1}{52776558133248} + \frac{1}{105553116266496} - \frac{1}{211106232532992} + \frac{1}{422212465065984} - \frac{1}{844424930131968} + \frac{1}{1688849860263936} - \frac{1}{3377699720527872} + \frac{1}{6755399441055744} - \frac{1}{13510798882111488} + \frac{1}{27021597764222976} - \frac{1}{54043195528445952} + \frac{1}{108086391056891904} - \frac{1}{216172782113783808} + \frac{1}{432345564227567616} - \frac{1}{864691128455135232} + \frac{1}{1729382256910270464} - \frac{1}{3458764513820540928} + \frac{1}{6917529027641081856} - \frac{1}{13835058055282163712} + \frac{1}{27670116110564327424} - \frac{1}{55340232221128654848} + \frac{1}{110680464442257309696} - \frac{1}{221360928884514619392} + \frac{1}{442721857769029238784} - \frac{1}{885443715538058477568} + \frac{1}{1770887431076116955136} - \frac{1}{3541774862152233910272} + \frac{1}{7083549724304467820544} - \frac{1}{14167099448608935641088} + \frac{1}{28334198897217871282176} - \frac{1}{56668397794435742564352} + \frac{1}{113336795588871485128704} - \frac{1}{226673591177742970257408} + \frac{1}{453347182355485940514816} - \frac{1}{906694364710971881029632} + \frac{1}{1813388729421943762059264} - \frac{1}{3626777458843887524118528} + \frac{1}{7253554917687775048237056} - \frac{1}{14507109835375550096474112} + \frac{1}{29014219670751100192948224} - \frac{1}{58028439341502200385896448} + \frac{1}{116056878683004400771792896} - \frac{1}{232113757366008801543585792} + \frac{1}{464227514732017603087171584} - \frac{1}{928455029464035206174343168} + \frac{1}{1856910058928070412348686336} - \frac{1}{3713820117856140824697372672} + \frac{1}{7427640235712281649394745344} - \frac{1}{14855280471424563298789490688} + \frac{1}{29710560942849126597578981376} - \frac{1}{59421121885698253195157962752} + \frac{1}{118842243771396506390315925504} - \frac{1}{237684487542793012780631851008} + \frac{1}{475368975085586025561263702016} - \frac{1}{950737950171172051122527404032} + \frac{1}{1901475900342344102245054808064} - \frac{1}{3802951800684688204490109616128} + \frac{1}{7605903601369376408980219232256} - \frac{1}{15211807202738752817960438464512} + \frac{1}{30423614405477505635920876929024} - \frac{1}{60847228810955011271841753858048} + \frac{1}{121694457621910022543683507716096} - \frac{1}{243388915243820045087367015432192} + \frac{1}{486777830487640090174734030864384} - \frac{1}{973555660975280180349468061728768} + \frac{1}{1947111321950560360698936123457536} - \frac{1}{3894222643901120721397872246915072} + \frac{1}{7788445287802241442795744493830144} - \frac{1}{15576890575604482885591488987660288} + \frac{1}{31153781151208965771182977975320576} - \frac{1}{62307562302417931542365955950641152} + \frac{1}{124615124604835863084731911901282304} - \frac{1}{249230249209671726169463823802564608} + \frac{1}{498460498419343452338927647605129216} - \frac{1}{996920996838686904677855295210258432} + \frac{1}{1993841993677373809355710590420516864} - \frac{1}{3987683987354747618711421180841033728} + \frac{1}{7975367974709495237422842361682067456} - \frac{1}{15950735949418990474845684723364134912} + \frac{1}{31901471898837980949691369446728269824} - \frac{1}{63802943797675961899382738893456539648} + \frac{1}{127605887595351923798765477786913079296} - \frac{1}{255211775190703847597530955573826158592} + \frac{1}{510423550381407695195061911147652317184} - \frac{1}{1020847100762815390390123822295304634368} + \frac{1}{2041694201525630780780247644590609268736} - \frac{1}{4083388403051261561560495289181218537472} + \frac{1}{8166776806102523123120990578362437074944} - \frac{1}{16333553612205046246241981156724874149888} + \frac{1}{32667107224410092492483962313449748299776} - \frac{1}{65334214448820184984967924626899496599552} + \frac{1}{130668428897640369969935849253798993199104} - \frac{1}{261336857795280739939871698507597986398208} + \frac{1}{522673715590561479879743397015195972796416} - \frac{1}{1045347431181122959759486794030391945592832} + \frac{1}{2090694862362245919518973588060783891185664} - \frac{1}{4181389724724491839037947176121567782371328} + \frac{1$

٩ ما هي القوة الخامسة من (ت^١ + ح^٢)

١٠ ما هي القوة الرابعة من ت + ب + ك

۱۱ ايسط (ت - ك) ۱

۱۳. ايسط (۱-۱) ی

١٣ ايسط (ت-ك) ١

۱۴ اِسطح (ت - ی) ۱۵

الفصل الثاني عشر

في تجذير الكميات المركبة

١٤٣ فاعلة. رتب الكميات على موجب قوت احد حروفها حتى تكون العليا اولاً. وهكذا على التوالي. ثم خذ جذر الجزء الاول فيكون لك الجزء الاول من الجذر المطلوب. ورق ذلك الجزء الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحه من الكمية نفسها ثم نزل الجزء الثاني واقسمه على الجذر الذي اخذته بعد ترفيقه الى قوة دليلها اقل من دليل الجذر المطلوب بواحد واضربه في دليل الجذر المطلوب فيكون الخارج الجزء الثاني من الجذر. ثم ورق الجزءين من الجذر الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحها من الكمية الاصلية واقسم كما تقدم. وهذه صورة العمل

ما هو الجذر الكمي من

$$٢٠ + ٣٠ - ٤٠ - ١١ + ٦ + ٢ + ١٢ - ٨ - (٢ + ٢ - ٢)$$

$$٢٠ - ٣٠ - ٤٠ - ١١ + ٦ + ٢ + ١٢ - ٨ - (٢ + ٢ - ٢)$$

$$٢٠ + ٣٠ + ٤٠ + ١١ - ٦ - ٢ - ١٢ + ٨ - (٢ + ٢ - ٢)$$

$$٢٠ - ٣٠ - ٤٠ - ١١ + ٦ + ٢ + ١٢ - ٨ - (٢ + ٢ - ٢)$$

$$٢٠ + ٣٠ - ٤٠ - ١١ - ٦ - ٢ + ١٢ + ٨ - (٢ + ٢ - ٢)$$

لا نحتاج الى انزال اكثر من جزء واحد من الجذر لان القسمة تجري على جزء واحد

منه فقط

٢ ما هو الجذر الرابع من

$$٢٠ + ٨ + ٢ + ٢٤ + ٢ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢)$$

$$٢٠ + ٨ + ٢ + ٢٤ + ٢ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢)$$

$$٢٠ + ٨ + ٢ + ٢٤ + ٢ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢)$$

٢ ما هو الجذر الخامس من $ت^٥ + ٥ ت^٤ ب + ١٠ ت^٣ ب^٢ + ١٠ ت^٢ ب^٣ + ٥ ت ب^٤ + ب^٥$
 الجواب $ت + ب$
 ٤ ما هو الجذر الكهبي من $ت^٦ - ٦ ت^٥ ب + ١٢ ت^٤ ب^٢ - ٨ ت^٣ ب^٣$
 الجواب $ت - ب$
 ٥ ما هو الجذر المالي من

$$\begin{array}{r} ٤ ت^٤ - ١٢ ت^٣ ب + ١٢ ت^٢ ب^٢ - ٤ ت ب^٣ + ب^٤ \\ \underline{٤ ت^٤ - ١٢ ت^٣ ب} \\ ١٢ ت^٢ ب^٢ - ٤ ت ب^٣ + ب^٤ \\ \underline{١٢ ت^٢ ب^٢ - ١٢ ت^٢ ب^٢ + ٤ ت ب^٣} \\ ٤ ت ب^٣ + ب^٤ \\ \underline{٤ ت ب^٣ + ١٢ ت ب^٣ - ١٢ ت ب^٣ + ٤ ت ب^٣} \\ ٤ ت ب^٣ + ١٢ ت ب^٣ - ١٢ ت ب^٣ + ٤ ت ب^٣ \end{array}$$

هنا كانت القوة التي هي اقل واحداً من اسم الجذر القوة الاولى فلم تُرَقَّ ت قبل
 القسمة عليها

١٤٤ الجذر المالي يؤخذ غالباً على موجب قاعدة كقاعدة علم الحساب لذلك
 وهي ان ترتب الكمية حسب قوت احد احرفها . ثم تأخذ جذر الجزء الاول للجزء الاول
 من الجذر المطلوب وتطرح قوته من الكمية نفسها . ثم تنزل جزءين آخرين وتقسم على
 مضاعف الجذر الموجود وتضيف الخارج الى الجذر والى المقسوم عليه . ثم تضرب المقسوم
 عليه في الجزء الاخير من الجذر الموجود وتطرح الحاصل من المقسوم ثم تنزل جزءين
 آخرين وتكرر العمل على هذا الاسلوب الى نهايته
 مثال اول ما هو الجذر المالي من

$$\begin{array}{r} ٢ ت^٢ + ٢ ت ب + ٢ ت س + ٢ س^٢ + ٢ س + ٢ \\ \underline{٢ ت^٢ + ٢ ت ب + ٢ ت س} \\ ٢ س^٢ + ٢ س + ٢ \\ \underline{٢ س^٢ + ٢ س + ٢} \\ ٢ س^٢ + ٢ س + ٢ \end{array}$$

٢ ما هو الجذر المالي من

$$\begin{array}{r} ١ - ٤ ب + ٤ ب^٢ - ٢ ي + ٤ ب ي - ٢ ي^٢ + ٢ ي + ٢ ي^٢ - ٢ ي^٢ + ٢ ي^٢ \\ \underline{١ - ٤ ب + ٤ ب^٢ - ٢ ي + ٤ ب ي - ٢ ي^٢} \\ ٢ ي^٢ - ٢ ي^٢ + ٢ ي^٢ \\ \underline{٢ ي^٢ - ٢ ي^٢ + ٢ ي^٢} \\ ٢ ي^٢ - ٢ ي^٢ + ٢ ي^٢ \end{array}$$

- ٣ ما هو الجذر المالي من $٦ - ٢ + ٣ + ٤ - ٢ + ٢$ ت
 الجواب $٢ - ٢ + ٢ + ٢$ ت
 ٤ ما هو الجذر المالي من $٤ + ٢ + ٤ - ٢ + ٤ - ٢ + ٨ - ٢$ ب
 الجواب $٢ + ٢ - ٢$ ب

يسهل العمل احياناً بجل دليل الجذر الى جزئين

$$٢ \times ٢ = ٤ \text{ وت } ٢ \times ٢ = ٤$$

اي ان الجذر الرابع = الجذر المالي من الجذر المالي

والجذر السادس = الجذر المالي من الجذر الكعي

والجذر الثامن = الجذر المالي من الجذر الرابع

- ١ ما هو الجذر المالي من $٤ - ٤ + ٦ - ٢ + ٤ - ١$ ك
 ٢ ما هو الجذر الكعي من $٦ - ٦ + ١٥ - ٤ - ٢٠ + ١٥ - ١$ ك
 $٦ - ١ + ١$

- ٣ ما هو الجذر المالي من $٤ - ٤ + ١٢ - ٢ + ٦ - ٩$ ك
 ٤ ما هو الجذر الرابع من $١٦ - ٩٦ + ٢١٦ - ٢١٦ + ٢١٦ - ٢١٦$ ك
 ت $٨١ + ٢١$ ك

- ٥ ما هو الجذر الخامس من $٥ + ٥ + ١٠ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١$ ك
 ٦ ما هو الجذر السادس من $٦ - ٦ + ١٥ + ١٥ - ٢٠ - ٢٠ + ٢٠$ ب
 $١٥ + ٢٠ - ٢٠ + ٢٠ + ٢٠$ ب

في جذور كميات ثنائية صاء

١٤٥ نلزم احياناً الدلالة على الجذر المالي من كمية على صورة $٢ + ٢ - ٢ + ٢$ التي
 تسمى ثنائية او فضلية صاء بواسطة مجتمع اخرين صاوين او فضلتهما ونستدل على عبارة
 جبرية لهذه الدلالة من هذه القضايا الثلاث

الاولى ان جذر صحيح لا يمكن ان يتركب من جزئين احدهما منطوق والاخر صام
 فان كان ممكناً فلنفرض

$$٢ = ٢ + ٢ \text{ فنزيع الجانبيين نصير}$$

$$٢ = ٢ + ٢ \text{ ك } ٢ + ٢$$

وبالتحويل $٢ = ٢ - ٢$ وهي منطقة وذاك خلاف المفروض

الثانية انه في كل معادلة على صورة $ك + م = ت + ب$ تكون الاجزاء المنطقية على الجانبين متساوية والصماء كذلك فان لم تكن $ك = ت$ لنفرض $ك = ت + ل$

ثم بالتعويض $ت + ل + م = ت + ب$ وبالمقابلة $ل + م = ب$ اي يكون $ب$ مركبا من جزءين احدهما منطقي والاخر اصم وقد تبين ان ذلك لا يمكن وهكذا يبرهن انه في المعادلة $ك - م = ت - ب$ تكون الاجزاء المنطقية على الجانبين متساوية والصماء كذلك

الثالثة اذا فرض $م + ب = ك + م$ يكون $م - ب = ك - م$ لانه بتربيع الاولى تبصر $ت + ب = ك + م$ وحسب القضية الثانية $ت = ك + م$

$$و ب = ك + م$$

$$\text{بالطرح } ت - ب = ك - م$$

$$\text{بالتعدير } م - ب = ك - م$$

١٤٦ ثم لننظر في كيفية استخراج عبارة دالة على جذر كمية ثنائية او فضلية صماء

ما سبق

$$\text{ولنفرض } م + ب = ك + م$$

$$\text{اذا } م - ب = ك - م$$

$$\text{بتربيع الجانبين فيها لنا } ت + ب = ك + م$$

$$\text{و } ت - ب = ك - م$$

$$\text{بجمعها والقسمة على } ٢ \text{ } ت = ك + م$$

$$\text{بضرب الاولين } م - ب = ك - م$$

$$\text{بجمع هاتين } ت + م - ب = ك - م$$

$$\text{و } ك = \frac{ت + م - ب}{٢}$$

$$\text{بطرحها } ت - م - ب = ك - م$$

$$\text{م = } \frac{ت - م - ب}{٢}$$

$$\text{وقد فُرض ان } \sqrt{ك + ح} = \sqrt{ب + ح}$$

$$\text{و } \sqrt{ك - ح} = \sqrt{ب - ح}$$

$$\text{اذا } \sqrt{ب + ح} = \sqrt{\frac{ب + ح}{٢}} + \sqrt{\frac{ب - ح}{٢}} = \sqrt{\frac{ب + ح + ب - ح}{٢}}$$

$$\text{و } \sqrt{ب - ح} = \sqrt{\frac{ب + ح}{٢}} - \sqrt{\frac{ب - ح}{٢}} = \sqrt{\frac{ب + ح - ب + ح}{٢}}$$

ثم بوضع د عوضاً عن $\sqrt{ب - ح}$ تصير

$$(١) \sqrt{ب + ح} = \sqrt{\frac{ب + ح}{٢}} + \sqrt{\frac{ب - ح}{٢}}$$

$$(٢) \sqrt{ب - ح} = \sqrt{\frac{ب + ح}{٢}} - \sqrt{\frac{ب - ح}{٢}}$$

مثال اول ما هو الجذر المالى من $\sqrt{٢٢ + ٢}$

$$\text{هنا } ٢ = ح \quad ٩ = ب \quad \sqrt{٢٢ + ٢} = \sqrt{ب + ح} \quad ٨ = ب \quad ٩ = ح \quad ٨ - ٩ = ب - ح$$

$$٨ = ٨$$

$$\text{اذا } ٨ + \sqrt{٢٢} = \sqrt{\frac{٨ + ٢٢}{٢}} + \sqrt{\frac{٨ - ٢٢}{٢}} = \sqrt{\frac{٣٠}{٢}} + \sqrt{\frac{-١٤}{٢}}$$

الجواب $\sqrt{٢٢} + ٢$

٢ ما هو الجذر المالى من $\sqrt{١١ + ٦}$

الجواب $\sqrt{١١} - ٥$

٢ ما هو الجذر المالى من $\sqrt{٦ - ٢٥}$

الجواب $\sqrt{٢٢} + ٢$

٤ ما هو الجذر المالى من $\sqrt{٧ + ٤٢}$

الجواب $\sqrt{٢٥} - \sqrt{٢٢}$

٥ ما هو الجذر المالى من $\sqrt{٧ - ١٠٢}$

في استخراج جذور الاعداد

الاعداد الطبيعية الى عشرة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

مربعاتها ١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥ ٣٦ ٤٩ ٦٤ ٨١ ١٠٠

مربعاتها

مربع عدد ذي منزلة واحدة لا يكون فيه منزلة اعلى من منزلة العشرات فاذا طلب جذر عدد دون المئة فانظر الى صف المربعات والعدد فوقه هو جذره وان وقع العدد المطلوب جذره بين عددين من اعداد صف المربعات يكون جذره ما بين العددين اللذين فوقها . مثالة لو قيل ما هو جذر ٥٥ لنبيل ٥٥ واقع بين ٤٩ و ٦٤ فيكون جذره ما بين ٧ و ٨ اي اكثر من ٧ واقل من ٨ و ٩١ واقع بين ٨١ و ١٠٠ وجذره اكثر من ٩ واقل من ١٠

ثم لجعل الآحاد في الصف الأول عشرات بوضع صفر عن يمينها نصير

١٠٠ ٩٠ ٨٠ ٧٠ ٦٠ ٥٠ ٤٠ ٣٠ ٢٠ ١٠

والمربعات ١٠٠٠٠ ٨١٠٠ ٦٤٠٠ ٤٩٠٠ ٣٦٠٠ ٢٥٠٠ ١٦٠٠ ٩٠٠ ٤٠٠ ١٠٠

فترى ان مربع عدد ذي متزلين لا تكون منزلة دون منزلة المئات. ولنا ان نحسب كل عدد مركباً من مجموع آحاده مع عشراته فان فرضنا عدداً ن وعشرات

$$١ \text{ وآحاده } ب \text{ لنا } ن = ١ + ب$$

$$\text{بالتريع } ن^٢ = ١^٢ + ٢ب + ب^٢$$

اي مربع عدد يعدل مربع عشراته مع مضاعف حاصل العشرات في الآحاد مع مربع الآحاد

$$\text{مثالة } ٧٨ = ٧٠ + ٨$$

$$\text{و } ٧٨^٢ = (٧٠)^٢ + ٨ \times ٧٠ \times ٢ + (٨)^٢ = ٤٩٠٠ + ١١٢٠ + ٦٤ = ٦٠٨٤$$

ثم نستخرج جذر ٦٠٨٤

هذا العدد أكثر من متزلين فيكون جذره أكثر من منزلة واحدة ولكنك ا دون منازل ١٠٠٠ الذي هو مربع ١٠٠ فيكون في الجذر متزلين فقط اي آحاد وعشرات

$$٦٠٨٤$$

فربع العشرات يكون في المتزلين عن اليسار ولنصلها بوضع نقطة فوق الآحاد ثم فوق المئات وهذه الاقسام المركبة من متزلين متزلين سُميت محطات فالخطوة ٦٠ واقعة بين المربعين ٤٩ و ٦٤ فيكون ٧ الجذر المطلوب مع بعض الآحاد فلنضع ٧ عن يمين العدد المطلوب جذره وإطرح مربعة

$$٦٠٨٤ / ٧٨$$

$$٤٩$$

$$٧ + ٢ = ١٤٨ \mid ١١٨٤$$

$$١١٨٤$$

٤٩ من ٦٠ فيبقى ١١ وننزل الخطوة الاخرى

فيصير ١١٨٤ وهو مضاعف حاصل العشرات

في الآحاد مع مربع الآحاد كما تقدم ولكن

اذا ضرب عشرات في آحاد لا يكون الحاصل

دون العشرات فالامر ظاهر ان المتزلة الاولى

٤ لا يكون جزءاً من حاصل الآحاد في العشرات فلا بد ان يوجد ذلك الحاصل في

١١٨ فلنضاعف العشرات اي ٢ × ٧ = ١٤ واقسم ١١٨ على ١٤ فيخرج ٨ فهو عدد

آحاد الجذر او عدد أكبر من الجذر وهذا الخارج لا يمكن ان يكون اصغر من اللازم لانه

على الأقل يعدل مضاعف حاصل العشرات في الآحاد ولكنه قد يكون أكبر من اللازم ولاستعلام ذلك ضع ٨ عن يمين ١٤ وعن يمين ٧ في الخارج ثم بالضرب لنا (١) مربع الآحاد (٢) مضاعف حاصل العشرات في الآحاد وبالطرح لا يبقى شيء فيكون ٧٨ الجذر المطلوب . وفي هذه المعاملة طارحنا من العدد المفروض ٦٠٨٤

(١) مربع ٧ عشرات أي مربع ٧٠

(٢) مضاعف حاصل ٨ × ٧٠

(٣) مربع ٨ وهذه الاجزاء الثلاثة التي تألف منها مربع ٧٨ وعلى هذه الكيفية

نستخرج مربع ٥٦٨٢١٤٤٤

$$\begin{array}{r}
 ٥٦٨٢١٤٤٤ \overline{) ٧٥٢٨} \\
 ٤٩ \\
 ١٤٥ \overline{) ٧٨٢} \\
 \underline{٧٢٥} \\
 ١٥٠٢ \overline{) ٥٧١٤} \\
 \underline{٤٥٠٩} \\
 ١٥٠٦٨ \overline{) ١٢٠٥٤٤} \\
 \underline{١٢٠٥٤٤} \\
 \dots\dots
 \end{array}$$

فلما ما تقدم هذه القاعدة لاستخراج جذور الاعلاد المربعة

(١) اقسام العدد الى محطات في كل محطة منزلتين بوضع نقطة

فوق منزلة الآحاد أولاً ثم المئات الخ وربما تكون في المحطة عن اليسار منزلة واحدة فقط

(٢) استعلم المربع الأكبر التام في المحطة عن اليسار واكتب جذره في الخارج كما في القسمة واطرح مربعة من المحطة الاولى والى الباقي نزل المحطة التالية فذلك مقسوم ثان

(٣) ضاعف الجذر الذي وجدته وضعه عن يسار المقسوم في

موضع المقسوم عليه في القسمة وانظر كم مرة يدخل في المقسوم بعد قطع الرقم الأول منه عن اليمين واكتب في الخارج عن يمين المقسوم عليه ايضاً

(٤) اضرب هذا المقسوم عليه كله في الرقم الاخير من الخارج واطرح الحاصل من المقسوم ونزل الى الباقي المحطة التالية فهو مقسوم ثالث

(٥) ضاعف الجذر الموجود واجعله مقسوماً عليه وافعل كما تقدم الى ان تبقى كل المحطات

ان لم تبقى بقية بعد تنزيل المحطة الاخيرة والطرح من المقسوم الاخير يكون العدد مربعاً تاماً وان بقيت بقية فهو غير تام فلو قيل ما هو جذر ١٦٨ ل قيل ١٢ للربع التام منه والباقي ٢٤ اي ١٦٨ ليس مربعاً تاماً وان قيل من اين علمت ان ١٢ هو جذر اكبر مربع في ١٦٨ قلت لان فضلة مربعي عددين متوالين يعدل مضاعف اصغر العددين + ١

لنفرض ١ = اصغرها

١ + ١ = اكبرها

$$1 + 1^2 + 1^2 = (1 + 1)^2$$

$$1^2 = 1^2$$

$$1 + 1^2 \quad \text{الفضلة}$$

فالجذر لا يزيد واحداً ان لم تكن الفضلة مضاعف ذلك الجذر مع ١ او اكثر و ١٢ × ٢ + ١ = ٢٥ والفضلة ٢٤ فلا يمكن ان يكون الجذر الصحيح اكثر من ١٢ وهذه القاعدة تنفذ في استعمال مربعات اعداد متوالية بطريقة اسهل من ضربها في نفسها

مثاله لنا (٦٥١)² = ٤٢٣٨٠١ مطلوب مربع ٦٥٢ فهذه صورة العمل

$$٤٢٣٨٠١ = (٦٥١)^2$$

$$١٢٠٢ = ٦٥١ \times ٢ +$$

$$١ = ١ +$$

$$(٦٥٢)^2 = ٤٢٥١٠٤$$

$$١٢٠٤ = ٦٥٢ \times ٢ +$$

$$١ = ١ +$$

$$(٦٥٣)^2 = ٤٢٦٤٠٩$$

فيه عدة المنازل في الجذر تعدل عدة المحطات في الجذور ابداً

امثلة

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| (١) ما هو جذر ٧٢٢٥ | (٢) ما هو جذر ١٧٦٨٩ |
| (٣) ما هو جذر ٩٩٤٠٠٩ | (٤) ما هو جذر ٨٥٦٧٨٩٧٣ |
| (٥) ما هو جذر ٦٧٨١٢٦٧٥ | (٦) ما هو جذر ٣٧٩٣٤٠١ |
| (٧) ما هو جذر ٣٦٦١٠٩٧٠٤٩ | (٨) ما هو جذر ٩١٨٧٤١٦٧٣٧٠٤ |

لاجل استخراج جذر كسر استخرج جذر الصورة ثم جذر المخرج او حوله الى كسر عشري واقسم الكسور الى محطات مبتدئا من منزلة العشرات واجر العمل حتى يخرج الجذر او يقرب اليه بما يكفي . واذا كان المربع صحيحاً ولكنه ليس مربعاً تاماً فاضف اليه اصفاراً بمنزلة كسر عشري . مثاله لو قبل استخرج جذر ٧ بحيث لا يفضل اكثر من $\frac{1}{100}$

$$٧٠٠ \dots = ٧ \times (١٠٠)^2$$

$$٧٠٠ \dots \mid ٣٦٤$$

٤

$$\begin{array}{r} ٤٦ \overline{) ٣٠٠} \\ \underline{٢٧٦} \\ ٢٤٠٠ \\ \underline{٢٠٩٦} \\ ٣٠٤ \end{array}$$

الباقى ٣٠٤

ضع اربعة اصفار عن يمين السبعة واقسمها الى محطات مبتدئا من منزلة العشرات واجر العمل كما تقدم فالجواب ٣٦٤ وذلك بفرق عن جذر ٧ باقل من $\frac{1}{100}$ لانه لا يخلل ان توضع ٥ عوضاً عن ٤ في الجواب

- (٢) ما هو جذر $\overline{٢٩}٢$ الى اقل من $\frac{1}{100}$ الجواب ٥٢٨
 (٣) ما هو جذر $\overline{٢٢٧}٢$ الى اقل من $\frac{1}{10000}$ الجواب ١٥٢٠٦٦٥
 تنبيه . عدة الاصفار المضافة الى الجذور هي مضاعف عدة المنازل في كسور الجواب
 ما تقدم نضع طريقة مختصرة لاستخراج جذر عدد مخلوط . مثاله لو قيل ما هو جذر
 ٢٤٢٥ لفيل هذا العدد المختلط $= \frac{٢٤٢٥}{10000}$ اما ١٠٠٠ فليس مربع تام ولكنه يُجَمَل
 تاماً بضرب الصورة والمخرج في ١٠ فيصير $\frac{٢٤٢٥٠}{100000} = \frac{٢٤٢٥٠}{100000}$ وجذر الصورة الى اقرب
 صحيح $= ١٨٥$ اي $\frac{185}{100} = ١٨٥$ ولجل زيادة التدقيق اصف الى المخرج اصفاراً
 تعادل عدة منازل الكسور المطلوبة في الجواب

امثلة

- (١) ما هو جذر $\overline{٢٢٧١٢٤٧}٢$ الى اقل من ٠.٠١
 (٢) ما هو جذر $\overline{٢١٢٠٣٧}٢$ الى اقل من ٠.٠١
 (٣) ما هو جذر $\overline{٢٠١٠٠١}٢$ الى اقل من ٠.٢٠٠٠٠٠١

في استخراج جذور الاعداد المكعبة

$$\begin{aligned} 1 &= 1 && \text{مكعب} \\ 100 &= 10 && " \\ 1000 &= 100 && " \\ 1000000 &= 1000 && " \end{aligned}$$

اي الجذر المكعب لعدد ذي منازل بين منزلة واحدة وثلاث منازل فيه رقم واحد اي
 منزلة واحدة ولعدد منازل بين ٤ و ٦ في جذره الكمي رقام اي منزلتان ولعدد منازل
 بين ٧ و ٩ في جذره الكمي ثلاثة ارقام الخ واذا وضعنا الاعداد الطبيعية كما علمنا في
 ابضاج كيفية استخراج الجذر المالي فلنا

جذور ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠
 كموب ١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ ٢١٦ ٣٤٣ ٥١٢ ٧٢٩ ١٠٠٠
 فلو طلب جذر الكعب لعدد اقل من ١٠٠٠ انظرت الى صف الكعوب فلا بد

ان يكون الجذر فوق احدها او بين اثنين من صف الجذور وان كان العدد أكثر من ١٠٠٠ يكون جذره الكعب أكثر من ١٠ اي يكون فيه آحاد معلومة وعشرات معلومة

لنفرض العدد ن ولنفرض عشرائه = ١ وآحاده = ب فلنا
 $n = ١٠٠٠ + ١٠٠ + ١٠ + ١$ ون $n = ١٠٠٠ + ١٠٠ + ١٠ + ١$ ب

اي مكعب عدد يعدل مكعب عشرائه مع ثلاثة امثال الحاصل من ضرب مربع عشرائه في آحاده مع ثلاثة امثال حاصل عشرائه في مربع آحاده مع مكعب آحاده
 مثالة

$$١٠٢٨٢٢ = ٢٧ + ٢(٧) \times ٤٠ \times ٢ + ٧ \times ٢(٤٠) \times ٢ + ٢(٤٠) = ٢(٤٧)$$

فلنعكس العمل ولنستخرج كعب

$$\begin{array}{r} ١٢١٦٧ \\ ١٢١٦٧ \end{array} | ٢٢$$

٨

$$\begin{array}{r} ٢(٢٠) \times ٢ = ١٢٠٠ \\ ٢٠ \times ٢ \times ٢ \quad ١٨٠ \\ ٢ \quad ٩ \end{array} | \begin{array}{r} ٤١٦٧ \\ \\ ٤١٦٧ \\ ١٢٨٩ \end{array} \quad \begin{array}{r} ١٢٨٩ \end{array}$$

فلنا هذه القاعدة لاستخراج جذر مكعب

(١) قطع العدد محطات في كل محطة ثلاثة ارقام مبتدئاً من اليمين
 وربما تكون المحطة الاخيرة عن اليسار اقل من ثلاثة ارقام
 (٢) استعلم المكعب الاكبر في المحطة الاولى عن اليسار واكتبه في الخارج كما في القسمة واطرح مكعبه من المحطة ونزل محطة ثانية لاجل مقسوم ثان

(٣) ضع صفراً عن يمين الجذر الذي وجدته واضرب مربعه في ٢ واجعل الحاصل مقسوماً عليه وانظر كم مرة يدخل في المقسوم الثاني

وأكتب ذلك في الخارج عن يمين الرقم الأول: رُبِّع الرقم الأخير واضرب
بالمربع الرقم الأول بعد وضع صفر عن يمينه ثم رُبِّع الرقم أيضاً واجمع
الحواصل الثلاثة فان دخل في المقسوم بما يماثل الرقم الأخير كان والّا
فنقص ذلك الرقم واحداً

(٤) اضرب المقسوم عليه الذي وجدته في الرقم الأخير من الجذر
واطرح المحاصل من المقسوم وإلى الباقي نزل المحطة الثالثة لاجل مقسوم
ثالث

(٥) اضرب مربع كل الجذر الذي وجدته في ٢٠٠ لاجل مقسوم
عليه ثالث وامتنح كما تقدم كم مرة يدخل في المقسوم وهكذا إلى النهاية

امثلة

الجواب ٢٦٤

ما هو $\sqrt[4]{٤٨٢٢٨٥٤٤}$

الجواب ٧٨ والباقي ٨٦٩٧

ما هو $\sqrt[4]{٤٨٢٢٤٩}$

الجواب ٢٢٠٦٨

ما هو $\sqrt[4]{٢٢٩٧٣٤٠٢١٨٤٣٢}$

ما هو $\sqrt[4]{١١}$

ما هو $\sqrt[4]{٤}$

في استخراج اي جذر فُرض لعدد مفروض

لنفرس ن عدداً ولنفرس عشراته ١ = وآحادهُ = ب فلنا

ن = (١ + ب) = ١ + ن + ١٠ ن + ١٠٠ ن + ١٠٠٠ ن + ١٠٠٠٠ ن + الخ كما علمت

في كيفية بسط كمية ثنائية

اي العدد المفروض يعدل قوة ن لعشرات + ن مرة حاصل القوة ن - ١

للعشرات في الآحاد + الخ

فلنا هذه القاعدة لاستخراج الجذر النوني لاية كيمت فُرضت

(١) قطع العدد محطات ارقامها تعادل الآحاد في دليل الجذر

المطلوب واستعلم أكبر جذر في المحطة الاولى من اسم الدليل المفروض

(٢) رَقِّ ذلك الجذر الى القوة المفروضة واطرح الحاصل من المحطة الاولى ونزل الرقم الاول من المحطة الثانية واجعل الكل مقسوماً ثانياً
(٣) رَقِّ الجذر الذي وجدته الى قوة ن - ١ واضربها في ن وانظر كم مرة تدخل في المقسوم الثاني واكتب ذلك في الخارج
(٤) رَقِّ العدد الذي في الخارج كله الى قوة ن واطرح الحاصل من المحطتين عن اليسار وافعل كما تقدم الى النهاية

مثاله لو قيل ما هو الجذر الرابع من ٥٣١٤٤١

$$٥٣١٤٤١ \mid ٢٧$$

$$٤٢ = ١٦$$

$$٤ \times ٢٣ = ٩٢ \mid ٢٧١$$

$$٤٢٧ = ٥٣١٤٤١$$

(٢) ما هو الجذر الخامس من ٢٣٥٥٤٤٢٢

$$٢٣٥٥٤٤٢٢ \mid ٢٢$$

$$٢٠ = ٢٤٢$$

$$٥ \times ٤٢ = ٢١٠ \mid ٢٢٥$$

$$٢٢٢ = ٢٣٥٥٤٤٢٢$$

اذا كان دليل الجذر المطلوب عدداً مضلعاً يستخرج الجذر باستخراج الجذر المدلول عليه بالضع الاول ثم المدلول عليه بالآخر. مثاله لو قيل ما هو الجذر الخامس لثلاث مائة وستين فاستخرج اولاً الجذر المكسب ثم الجذر الرابع. والجذر الرابع يستخرج باستخراج الجذر المربع ثم جذر ذلك الجذر المربع والجذر السادس يستخرج باستخراج الجذر المكسب ثم الجذر المربع والجذر الثامن يستخرج باستخراج الجذر المربع ثلاث مرات متتابعة اي $\sqrt[8]{ب} = \sqrt[4]{ب} = \sqrt[2]{ب}$ والجذر السادس عشر يستخرج باستخراج الجذر المربع اربع مرات متتابعة

الفصل الثالث عشر

في حل المعادلات بالترقية والتجدير

نبذة في الترقية

١٤٧ لو فرض $\sqrt{ك} = ت$ لكان بتربيع جانبي هذه المعادلة $ك = ت^2$ اي ان وقعت الكمية المجهولة تحت علامة الجذر نحل المعادلة بترقية جانبها الى فوق من اسم ذلك الجذر

تنبيه . قبل الترقية ينبغي مقابلة المعادلة حتى تكون الكميات المنطقية وحدها على جانب واحد والجذرية وحدها على الجانب الآخر

$٩ = ٤ + \sqrt{ك}$	فلنفرض هذه المعادلة
$٥ = ٤ - ٩ = \sqrt{ك}$	ثم بالمقابلة
$٣٥ = ٢٥ = ك$	بترقية الجانبين
$ت + \sqrt{ك} = ب - د$	مفروض
$\sqrt{ك} = ب - د - ت$	بالمقابلة
$ك = (د + ب - ت)^2$	بالترقية
$٤ = ١ + \sqrt{ك}$	مفروض
$٦٤ = ١ + ك$	بترقية الجانبين الى القوة الثالثة
$٦٣ = ك$	وبالمقابلة
$\sqrt{٢٤ + ٤} = \sqrt{٤ - ك}$	مفروض
$١٢ = ٦ + ٨ = \sqrt{٤ - ك}$	بالتجدير
$\sqrt{١} = \sqrt{٤ - ك}$	بالمقابلة والتقسمة على ٦
$٤ + \frac{٢٥}{٣٦} = ك$	بالترقية
$\frac{٢٥}{٣٦} = ٤ - ك$	ثم $ك = ٤ + \frac{٢٥}{٣٦}$
$\frac{٢٥}{٣٦} = ٤ - ك$	مفروض
$\frac{٢٥}{٣٦} = ٤ - ك$	

بالجبر $\bar{ت} + \bar{ك} = ٢ + د$
 بالمقابلة $\bar{ك} = ٢ + د - \bar{ت}$
 بالترقية $\bar{ك} = (٢ + د - \bar{ت})$

وعلى هذا النسق نحل هذه الامثلة الآتية

$$\frac{٢٦١}{١٠٠} = \bar{ك} \quad ٦ = \frac{٤}{٥} - \bar{ك} \quad ٢ + \bar{ك} = \frac{٤}{٥} - ٦$$

$$٢٠ = \bar{ك} \quad ٨ = \frac{١}{٥} \bar{ك} \quad ٨ = \frac{١}{٥} \bar{ك}$$

$$١٢ = \bar{ك} \quad ٧ = ٤ + \frac{١}{٢} (٢ + \bar{ك}) \quad ٧ = ٤ + \frac{١}{٢} (٢ + \bar{ك})$$

$$٤ = \bar{ك} \quad \bar{ك} \quad ٢ = \bar{ك} + ١٢ \quad \bar{ك} \quad ٢ = \bar{ك} + ١٢$$

$$\frac{٢٥}{١٦} = \bar{ك} \quad \bar{ك} - \bar{ت} = \frac{١}{٢} - \bar{ك} \quad \bar{ك} - \bar{ت} = \frac{١}{٢} - \bar{ك}$$

$$\frac{٩}{٢٠} = \bar{ك} \quad \bar{ك} + ٢ = \bar{ك} + ٢ \quad \bar{ك} + ٢ = \bar{ك} + ٢$$

$$\frac{١}{٢ - \bar{ت}} = \bar{ك} \quad \bar{ك} - \bar{ت} = \frac{١}{٢} \quad \bar{ك} - \bar{ت} = \frac{١}{٢}$$

$$٤ = \bar{ك} \quad \frac{٢٨ + \bar{ك}}{٦ + \bar{ك}} = \frac{٢٨ + \bar{ك}}{٤ + \bar{ك}} \quad \frac{٢٨ + \bar{ك}}{٦ + \bar{ك}} = \frac{٢٨ + \bar{ك}}{٤ + \bar{ك}}$$

$$\frac{١}{٢} = \bar{ك} \quad \bar{ك} + \bar{ت} = \bar{ك} + \bar{ت} \quad \bar{ك} + \bar{ت} = \bar{ك} + \bar{ت}$$

$$\bar{ك} = \bar{ت} \quad \frac{٢}{\bar{ك}} = \frac{٢}{\bar{ك}} \quad \frac{٢}{\bar{ك}} = \frac{٢}{\bar{ك}}$$

$$\bar{ك} = \bar{ت} \quad \bar{ك} + \bar{ت} = \bar{ك} + \bar{ت} \quad \bar{ك} + \bar{ت} = \bar{ك} + \bar{ت}$$

$$\bar{ك} = \bar{ت} \quad \frac{٤}{\bar{ك} + \bar{ت}} = \frac{٤}{\bar{ك} + \bar{ت}} \quad \frac{٤}{\bar{ك} + \bar{ت}} = \frac{٤}{\bar{ك} + \bar{ت}}$$

$$٨١ = \bar{ك} \quad \bar{ك} - ١٦ = \bar{ك} - ١٦ \quad \bar{ك} - ١٦ = \bar{ك} - ١٦$$

$$١٦ = \bar{ك} \quad ١ + \bar{ك} = ١ + \bar{ك} \quad ١ + \bar{ك} = ١ + \bar{ك}$$

$$٦ = \bar{ك} \quad \frac{١ - \bar{ك}}{٦ + \bar{ك}} = \frac{١ - \bar{ك}}{٦ + \bar{ك}} \quad \frac{١ - \bar{ك}}{٦ + \bar{ك}} = \frac{١ - \bar{ك}}{٦ + \bar{ك}}$$

$$\frac{\bar{ك} - \bar{ت}}{\bar{ك}} = \bar{ك} \quad \bar{ك} + \bar{ت} = \bar{ك} + \bar{ت} \quad \bar{ك} + \bar{ت} = \bar{ك} + \bar{ت}$$

نبذة

في حل المعادلات بالتجذير

١٤٨ لو فرض $ك = ١٦$ فان تجذّر الجانبان نصير $ك = ٤$
اي ان كانت الكمية المجهولة قوةً تغلّ المعادلة بتجذير الجانبيين

(١) مفروض $٧ = ٨ - ك$

بالمقابلة $ك = ١$ وبالتجذير $ك = ١$

فالجواب ملتبس لان $١ = ٢ + ٧$ و $١ = ٢ - ٧$

مفروض $٥ = ك - ٢٠$ $ك = ٢٥$

بالمقابلة والقسمة $ك = ١٦$

بالتجذير $ك = ٤$

(٢) مفروض $ث + ك = ح - د$
بالتجذير والمقابلة والقسمة $ك = ١$

وبالتجذير $ك = ١$

مفروض $ث + د = ١٠ - ك$

بالمقابلة والقسمة $ك = ١$

بالتجذير $ك = ١$

١٤٩ متى كانت المجهولة قوةً تحت علامة الجذر تغلّ المعادلة بالترقية والتجذير

(٣) مفروض $٤ = ك$

بالترقية $ك = ١٦$

بالتجذير $ك = ٨$

(٤) مفروض $ك = ٢ - ح - د$

بالترقية $ك = ٢ - ح - د$

بالمقابلة $ك = ٢ - ح - د$

بالتجذير $ك = ٢ - ح - د$

(٥) مفروض $ك = ٢(٢ - ح - د)$

بتحويل النسبة الى معادلة $ه = ك$ = ٨٠٠٠٠٠

بالقسمة $ك = ١٦٠٠٠٠$ بالتعذيب $ك = ٤٠٠ +$

نتيبه . عند تعذيب ١٦٠٠٠٠ لا نعلم هل الجذر ايجائي ام سلمي ولكن حسب شروط المسئلة كان رجحا فحسبه ايجائيا . وقس على ذلك نظيره

(٤) سئل كم ميلا الى المكان الثلاثي . فأجيب انه اذا طُرِح ٩٦ من مربع البعد يبقى ٤٨ فكم كانت المسافة

بالشروط $ك - ٩٦ = ٤٨$ $ك = ١٤٤$ $ك = ١٢$

(٥) اي عدد ينقسم ثلاثة امثال مربعه على ٤ ويطرح ١٢ من الخارج فيبقى ١٨٠

بالشروط $\frac{ك}{٤} - ١٢ = ١٨٠$ $ك = ١٦$

(٦) اي عدد يُطرح ربع مربعه من ٨ فيبقى ٤

(٧) اي عدد ين نسبة مجتمعهما الى اكبرها كنسبة ١٠ الى ٧ واذا ضُرب مجتمعهما

في اصغرها كان المحاصل ٢٧٠

لنفرض مجتمعهما = ١٠ ك فيكون الاكبر ٧ ك والا صغر ٢ ك والعددان ٢١ و ٩

(٨) اي عدد ين نسبة فضلتهما الى اكبرها كنسبة ٩:٢ وفضله مربعيهما ١٢٨

المجواب ١٨ و ١٤

(٩) اقسام ١٨ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الآخر كنسبة

١٦:٢٥

ليكن ك الاكبر فيكون ١٨ - ك الا صغر وك : (١٨ - ك) = ١٦:٢٥

وبالتحويل الى معادلة $ك = ١٦$ $ك = ٢٥$ (١٨ - ك)

وبالتعذيب $ك = ٥$ (١٨ - ك) $ك = ١٠$

(١٠) اي عدد يُضرب نصفه في ثلثه فيكون المحاصل ٢٤

(١١) اي عدد اذا اُضيف اليه وطرح منه ٥ وضُرب المجمع في الفضله يكون

المحاصل ٩٦

(١٢) اقسام ١٤ الى قسمين بحيث تكون نسبة الخارج من قسمة اكبرها على اصغرها

الى الخارج من قسمة اصغرها على اكبرها كنسبة ١٦:٩

(١٣) اي عدد ين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٥:٤ ومجموع كعيها ٥١٠٢

افرض الاكبر ه ك والا صغر ٤ ك . فيكون الجواب ١٥ و ١٢

(١٤) ثلاثة شركاء فسموا ارباعهم فكان الخارج من قسمة حصة الاول على ٧ بمائل الخارج من قسمة حصة الثاني على ٣ والخارج من قسمة حصة الثاني على ١٧ بمائل الخارج من قسمة حصة الثالث على ٥ وان ضربت حصة الاول في حصة الثاني وحصة الثاني في حصة الثالث وحصة الثالث في حصة الاول يكون مجموع الحواصل $٢٨٣٠ \frac{١}{٢}$ فكم حصة كل واحد

لنفرض حصة الاول ك فلنا $٧:٣::ك: \frac{٢}{٧}ك =$ حصة الثاني و $١٧:٥::\frac{٢}{٧}ك: \frac{٢}{١١٩}ك =$ حصة الثالث

والاول في الثاني اي $ك \times \frac{٢}{٧} = \frac{٢}{٧}ك$

والثاني في الثالث اي $\frac{٢}{٧}ك \times \frac{٢}{١١٩} = \frac{٢}{٨٢٣}ك$

والثالث في الاول اي $ك \times \frac{٢}{١١٩} = \frac{٢}{١١٩}ك$

ثم بالتحويل الى مخرج مشترك والمجمع $\frac{٢٥٠٧}{٨٢٣}ك =$

فلنا $\frac{٢٥٠٧}{٨٢٣}ك = ٣٨٣٠ \frac{١}{٢} = ك$

فالاول $٧٩ \frac{١}{٢} =$ والثاني $٢٤ =$ والثالث ١٠

(١٥) بعض التجار اشتركوا في ارسال عامل الى مصر واعطاه كل واحد منهم من الدنانير عشرة امثال عدد الشركاء . وكانت عمالة العامل في المئة من الدنانير ضعف عدد الشركاء . فان ضرب $\frac{١}{١٠٠}$ من ربحه في $\frac{٢}{١٠٠}$ بمائل الحاصل عدد الشركاء فكم كانت الشركاء

ليكن عدد الشركاء ك فيكون المال الذي بيد العامل $١٠ك$ ورجب العامل على كل ١٠٠ دينار $= ٢ك$ وعلى $١٠ك$ يكون ربحه $\frac{٢}{١٠٠}ك$ ويكون $\frac{١}{١٠٠}$ من هذا الربح $\frac{٢}{١٠٠}ك$ و $\frac{٢}{١٠٠}ك \times \frac{٢}{١٠٠} = \frac{٢}{٤٠٠٠}ك = \frac{٢}{٢٢٥}ك$ فلنا $\frac{٢}{٢٢٥}ك = ٢٢٥ك = ك$

(١٦) اي عدد اذا اضيف اليه ٢٠ وطرح منه ١٠ يكون مربع المجمع مع مضاعف مربع الفضلة ١٧٤٧٥ الجواب ٧٥

(١٧) اي عددان نسبة احدهما الى الاخر كنسبة $٥:٣$ ومجموع مربعيهما ١٦٦٦

الجواب ٢١ و ٢٥

(١٨) سافر زيد وعمر وكل واحد من بلد قاصدين ان يتلاقيا في مكان . ولما التقيا كان زيد قد قطع من المسافة ١٨ ميلاً زيادة عن عمرو . وفي سبيلها كان زيد

قد قطع مسافة عمرو في $10\frac{1}{4}$ يوم. وكان عمرو قد قطع مسافة زيد في ٢٨ يوماً.
فكم كان البعد بين البلدين

لنفرض ك = المسافة التي قطعها زيد

وك - ١٨ = التي قطعها عمرو

فيكون $\frac{ك}{10\frac{1}{4}} = \frac{ك-18}{٢٨}$ = سفر زيد اليومي

و $\frac{ك}{28} =$ سفر عمرو اليومي

ولنا ك : ك - ١٨ :: $\frac{18-ك}{10\frac{1}{4}}$: $\frac{ك}{28}$

ك = ٧٢ = مسافة زيد . والبعد = ١٢٦ ميلاً

(١١) اي عدد ين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ٨ : ٥ وحاصلها ٢٦٠

الجواب ٢٤ و ١٥

(٢٠) رجل اشترى ثوبين مجتمعهما ٢٦ ذراعاً . وكان ثمن الذراع من كل واحد
من الدراهم بقدر عدد اذرعهِ . ونسبة ثمن الواحد الى ثمن الآخر :: ٤ : ١ فكم ذراعاً
كان كل ثوب

الجواب ٢٤ و ١٢

(٢١) اي عدد ين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ٣ : ٢ ونسبة فضلة قوتيهما الرابعتين

الجواب ٦ و ٤

الى مجتمع كميهما كنسبة ٣٦ : ٧

(٢٢) بعض السياح توافقوا في السفر . ومع كل واحد منهم قدر ما مع الآخر من
الدراهم ولكل واحد من الخُدّام انفاق بقدر عدد السياح . والدراهم التي مع كل واحد
من السياح مضاعف عدد الخُدّام ومجموع الكل ٢٤٥٦ درهماً فكم كان عدد السياح

الجواب ١٢

(٢٣) طلب ملك من مقاطعة رجالاً للحرب فارسلت كل قرية انفاقاً بعدد

قرى تلك المقاطعة اربع مرات . واذ لم يرض الملك بذلك ارسلت كل قرية ثلاثة انفان
ايضاً فكانت نسبة العدد كلاً بعد هذه الزيادة الى عدد المرسلين اولاً كنسبة ١٧ : ١٦
فكم قرية في تلك المقاطعة

العملية التاسعة السابقة خصوصية فلنجعلها هنا عامة

(٢٤) اقسام كمية ١ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الآخر

كنسبة ب الى س

لنفرض ك = قسماً واحداً ١ - ك = القسم الآخر

بشروط المسئلة ك : (١ - ك) :: ب : س

$$س ك = ب (١ - ك)$$

$$س ك = ب + ب (١ - ك)$$

$$\text{ايجاباً} \quad \frac{س ك}{س + ب} = ك \quad \text{و} \quad \frac{ب (١ - ك)}{س + ب} = ١ - ك$$

$$\text{سلباً} \quad \frac{س ك}{س - ب} = ك \quad \text{و} \quad \frac{ب (١ - ك)}{س - ب} = ١ - ك$$

اذا كان ب = س يكون القسمان متساويين وكل واحد = ١/٢ اذا اخذنا

$$\frac{س ك}{س - ب} = \frac{ب (١ - ك)}{س - ب} = ك$$

وذلك عبارة عن غير المتناهي كما ستري في محلواي المخرج موجود في الصورة الى ما لانهاية وكذلك القسم الثاني اي

$$\frac{س ك}{س - ب} = \frac{ب (١ - ك)}{س - ب} = ١ - ك$$

وذلك ايضا عبارة عما لانهاية والقسمان

$$١ = \frac{ب (١ - ك)}{س - ب} = \frac{س ك}{س - ب} - \frac{ب (١ - ك)}{س - ب}$$

استخدام هذه العبارة في حل مسائل الفلسفة الطبيعية

من مبادئ الفلسفة الطبيعية ان النور والجاذبية يتلآن بالنسبة الى مربع البعد

اما الجاذبية بين جسمين فهي بالنسبة الى جرمها وبالقلب كمرجع البعد بينها واما

النور فبالنسبة الى جرم النور وبالقلب كمرجع البعد

مسئلة . لنفرض جرم الارض ٧٥ مرة جرم القمر والمسافة بينهما ٢٠ مرة قطر

الارض . فلي اي بعد تكون جاذبية الجرم الواحد مثل جاذبية الجرم الآخر

لنفرض جرم القمر = س وجرم الارض = ب والبعد بينهما = ١ والبعد عن

مركز الارض المطلوب = ك فيكون القسم الاخر من البعد بينها ١ - ك وبالمسئلة

$$ك : (١ - ك) :: ب : س$$

$$\text{وكما تقدم} \quad \frac{س ك}{س + ب} = ك \quad \text{و} \quad \frac{ب (١ - ك)}{س + ب} = ١ - ك$$

بالمسئلة

$$٢٠ = ا \quad ب = ٧٥ = س \quad ١ = ك$$

$$ك = \frac{٢٠ \sqrt{٧٥}}{١ + \sqrt{٧٥}} = ٢٦.٩ \text{ تقريباً} \quad و ا - ك = ١ - ٢٦.٩ \text{ تقريباً} \quad \text{ملا اذا اخذنا}$$

القيمة الايجابية ثم اذا اخذنا القيمة السلبية لنا

$$ك = \frac{١ - \sqrt{٧٥}}{١ - \sqrt{٧٥}} = ١ - ك = \frac{١ - \sqrt{٧٥}}{١ - \sqrt{٧٥}}$$

$$ك = \frac{٢٠ \sqrt{٧٥}}{١ - \sqrt{٧٥}} = ٢٢٩.٩ = ١ - ك = - ٢٢٩.٩ \text{ تقريباً}$$

وهذه القيمة السلبية تدل على وجوب اتخاذ البعد الى الجهة المتقابلة للجهة الاولى اي انه على مسافة ابعد من القمر عن الارض بما يماثل ٢٢٩ قطر الارض تكون جاذبية الارض والقمر لجرم في تلك النقطة متساويتين

مسئلة . على اية مسافة من الارض تكون جاذبية الارض ١٦ مرة جاذبية القمر

$$\text{جاذبية الارض } \frac{ب}{ا} \text{ وجاذبية القمر في تلك النقطة } = \frac{س}{(ك-١)}$$

$$\text{بالمسئلة } \frac{ب}{ا} = \frac{١٦ س}{(ك-١)}$$

$$\frac{ب}{ا} = \frac{٤ س}{١ - ك} \text{ بالتجذير}$$

$$\text{بالتجبر } ا - ب = ك - ٤ س = ٤ س - ك$$

$$\text{بالقيمة الايجابية } ك = \frac{١ - ب}{٤ س + ب} = ٢٠.٥ \text{ تقريباً}$$

$$\text{بالقيمة السلبية } ك = \frac{١ - ب}{٤ س - ب} = ٥٥.٧ \text{ تقريباً}$$

اي ابعد من القمر عن الارض بما يماثل قطر الارض ٥٥.٧ مرة

لاجل كيفية استعمال هذه العبارة لاستعلام نور جرمين النسبي انظر اصول الهيئة

الفصل الرابع عشر

في معادلات ممتزجة من الدرجة الثانية

١٥٠ تنقسم المعادلات الى اقسام شتى باعتبار قوة الحرف الدال على الكمية

المجهولة

الاول معادلات من الدرجة الاولى وهي ما ليس فيها سوى القوة الاولى من المجهولة. مثالها $ك = ت + ب$ وتسمى ايضا معادلات بسيطة وقد تقدم ذكرها الثاني معادلات من الدرجة الثانية وهي ما كانت القوة العليا فيها من المجهولة مالا. ويقال لها ايضا معادلات مربعة. فان لم يكن فيها غير تلك القوة من المجهولة فهي المحضة وقد مضى ذكرها. مثالها $ك^2 = ت - ر$ وان كان فيها القوة الثانية والاولى من المجهولة فهي الممتزجة. مثالها $ك^2 + ب = ك = د$

الثالث معادلات من الدرجة الثالثة وهي ما كانت فيها القوة العليا من المجهولة كمكبا. وهي ايضا اما محضة مثل $ك^3 = ب - س$ واما ممتزجة مثل $ك^3 + ت = ك^2 + ب = ح$ وقس على ذلك معادلات الدرجة الرابعة والخامسة ولم تجر

١٥١ قد رأينا في ما تقدم ان المعادلة المربعة المحضة نخضع بالتجزير جانبيها. وممكننا ايضا الممتزجة اذا كان الجانب الذي فيه المجهولة برعبا تاما. مثالها

$ك^2 + ت = ك + ب = ح$ فهذه المعادلة نخضع بالتجزير لان جانبيها الاول مربع كمية ثنائية. وحسبنا تقدم (١٠٣) لنا بالتجزير $ك + ت = ب + ح$ وبالمقابلة $ك = ب + ح - ت$

١٥٢ مرارا كثيرة يحدث ان الجانب الذي فيه المجهولة لا يكون برعبا تاما مثل $ك^2 + ت = ك = ب$ فلو عرفنا الجزء الناقص من الجانب الاول لكي يصير برعبا تاما واضفناه الى الجانبين لمجئنا المعادلة محضة بالتجزير كما تقدم (٧٨) فما ان الجزء الثاني هو مضاعف حاصل الجزوين يكون $ك^2 + ت = ك$ في المعادلة المذكورة مضاعف حاصل جزوي الكمية التي نحن في طلبها وتكون الكمية $ك + ت$ ومربعها $ك^2 + ت^2 + ك + ت$ اي الجزء الناقص هو مربع نصف مسي القوة الدنيا من

المجهول . ولنا من ذلك قاعدة لاتمام تربيع معادلة مربعة ممتزجة وهي ان يؤخذ مربع نصف مسي القوة الدنيا من المجهول ويضاف الى جانبي المعادلة

فلو فرض $ك' + ف - ك = د$ لكان لنا حسب تقدم

$$ك' + ف - ك + ١/٤ ف' = د + ١/٤ ف'$$

$$ك' + ١/٢ ف' = د + ١/٤ ف'$$

$$ك' + ١/٢ ف' = د + ١/٤ ف'$$

وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة ممتزجة . فلو فرض $ك' - ٦ = ك = ٧$ فلتنا حسب هذه العبارة $ك' = ٣ + ١ + ٧ = ١١$ او $٧ - ١ = ٦$

نتبيه . اكل معادلة مربعة محضة كانت او ممتزجة فبنتان لان الجذر الشنعي ملتبس (١٠٢) وهذا الجذر هو نفس قيمة المجهول في كل معادلة مربعة محضة . مثالة $ك' = ٦٤$ $ك' = ٦٤$ $ك' = ٦٤$ $ك' = ٦٤$ ولكن في الممتزجة لابد من اضافة شيء الى هذا الجذر او طرح شيء منه كما رأينا . ونرى القيمين تارة ايجابيتين وتارة احدهما ايجابية والاخرى سلبية . مثال ذلك

$$ك' + ٨ = ك = ٢٠$$

$$ك' + ٤ = ١٠$$

$$١٠ - ٤ = ٦$$

$$١٠ - ٤ = ٦$$

١٠٢ قبل انمام التربيع يجب مقابلة المعادلة حتى تكون المجهولات وحدها على جانب واحد والمعلومات على الجانب الآخر . ويجب ايضا ازالة الكسور والقسم على مسي القوة العليا للمجهول . ولا يضاج كل ذلك قد وضعنا هذه الامثلة

$$(١) \text{ مفروض } ك' + ٦ = ك = ب$$

$$\text{باتمام التربيع } ك' + ٦ = ك + ٩ = ٩ + ب$$

$$\text{بالتجذير } ك' + ٣ = ٣ + ب$$

$$\text{وبالمقابلة } ك' - ٣ = ٣ - ب$$

$$(٢) \text{ مفروض } ك' - ٨ = ك = ح$$

باتمام التريع $ك - ٨ ب + ١٦ = ١٦ ب + ح$

بالتجذير $ك - ٤ ب = ١٦ ب + ح$

بالمقابلة $ك + ٤ ب = ١٦ ب + ح$

(٢) مفروض $ك + ث = ك + ب + ح$

باتمام التريع $ك + ث + ك = ٤ = ٤ ب + ح$

بالتجذير $ك + ٢ = ٤ ب + ح$

وبالمقابلة $ك - ٢ = ٤ ب + ح$

(٤) مفروض $ك - ك = ح - د$

باتمام التريع $ك - ك + ١/٤ = ١/٤ + ح - د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = ١/٢ + ١/٤ + ح - د$

(٥) مفروض $ك + ٢ = ٢ + د + ٦$

باتمام التريع $ك + ٢ + ك = ١/٤ + د + ٦$

وبالتجذير والمقابلة $ك = ٢ + ١/٤ + د + ٦$

(٦) مفروض $ك - ث = ث = ب - س د$

باتمام التريع $ك - ث + ث = ٤ = ٤ ب + ح$

بالتجذير والمقابلة $ك = ٢ + ٤ ب + ح$

(٧) مفروض $ك + ٢ = ٢ + ح$

باتمام التريع $ك + ٢ + ك = ٢ + ٤ ب + ح$

وبالتجذير والمقابلة $ك = ٢ + ٤ ب + ح$

(٨) مفروض $ك - ٧ = ٧$

باتمام التريع $ك - ٧ + ك = ١/٤ + ٧$

بالتجذير والمقابلة $ك = ١/٢ + ٧$

١٥٤ متى كانت القوة الدنيا في عدة من اجزاء المعادلة يجب جمعها الى جزء واحد قبل اتمام التريع . وان كانت مضلعة يجب فكها الى اضلاعها لكي يُعرف مسماها

(١) مفروض $ك + ٢ + ك + ك = د$

بالجمع $ك + ٦ = د$

باتمام التريع $ك + ٦ + ك + ٦ = د + ١٢$

وبالتجذير والمقابلة ك $- = ٢ + ١٦ + ٤$

(٢) مفروض ك $+ ت + ك + ب = ك = ح$

بالتك حسب (٢٨) ك $+ (ت + ب) \times ك = ح$

باتمام التربيع ك $+ (ت + ب) \times ك + \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ + ح$

بالتجذير ك $+ \frac{ت + ب}{٢} = \sqrt{\left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ + ح}$

وبالمقابلة ك $- = \frac{ت + ب}{٢} + \sqrt{\left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ + ح}$

(٢) مفروض ك $+ ت - ك - ب = ب$

بالتك (٢٨) ك $+ (١ - ت) \times ك = ب$

باتمام التربيع ك $+ (١ - ت) \times ك + \left(\frac{١ - ت}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{١ - ت}{٢}\right)^٢ + ب$

بالتجذير والمقابلة ك $- = \frac{١ - ت}{٢} + \sqrt{\left(\frac{١ - ت}{٢}\right)^٢ + ب}$

١٥٥ ينبغي في بعض الاحيان ان تُعدَّ المعادلة لاتمام التربيع بالجبر او المقابلة

او القسمة او تبديل العلامات وما يشبه ذلك كما ترى في هذه الامثلة

(١) مفروض ت $+ ٥ - ك - ب = ٢ - ك$

بالمقابلة والجمع ك $+ ٢ = ك - ب - ت$

باتمام التربيع ك $+ ٢ + ١ = ١ + ك + ١ - ب - ت$

بالتجذير والمقابلة ك $- = ١ + \sqrt{١ - ب - ت}$

(٢) مفروض $\frac{ك}{٢} = \frac{٢٦}{٢ + ك} - ٤$

بالجبر والمقابلة والجمع ك $+ ١٠ = ك = ٥٦$

باتمام التربيع ك $+ ١٠ + ك = ٢٥ + ٨١$

بالتجذير والمقابلة ك $- = ٥ + \sqrt{٨١}$

(٣) مفروض ك $+ ٢٤ - ح = ١٢ - ك - ٥$

بالمقابلة والجمع ك $- ٦ = ١٢ - ك - ح - ٢٤$

بالقسمة على ٦ ك $- ٢ = ح - ٤$

باتمام التربيع ك $- ٢ + ١ = ١ + ح - ٤$

بالتجذير والمقابلة ك $+ ١ = \sqrt{٤ - ح}$

(٤) مفروض ح $+ ٢ = ك - د - \frac{ب \times ك}{٢}$

بالجبر والمقابلة ب ك $+ ٢ = ك - د - ح$

$$\begin{aligned}
 & \text{بالقسمة على ب ك} \quad \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} \\
 & \text{باتمام الترييع ك} \quad \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ب}} \\
 & \text{بالتجذير والمقابلة ك} \quad \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{\text{ك}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت} - \text{د}}{\text{ب}} \\
 & (٥) \text{ مفروض ب ك} \quad \text{د ك} - \text{ك} = \text{ب} - \text{ح} \\
 & \text{بالقسمة على ب د} \quad \frac{\text{د ك}}{\text{ب د}} - \frac{\text{ك}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ب} - \text{ح}}{\text{ب د}} \\
 & \text{ك} = \frac{\text{د ك}}{\text{ب د}} + \frac{\text{ك}}{\text{ب د}} - \frac{\text{ب} - \text{ح}}{\text{ب د}} \\
 & (٦) \text{ مفروض ت ك} \quad \text{ك} + \text{ح} = \text{ك} + \text{ك} - \text{ك} \\
 & \text{بالمقابلة والجمع ت ك} \quad \text{ك} + \text{ك} - \text{ك} = \text{ح} \\
 & \text{بالقسمة على ت ١} \quad \frac{\text{ك}}{١} - \frac{\text{ك}}{١} = \frac{\text{ح}}{١} \\
 & \text{ثم ك} = \frac{\text{ح}}{١} + \frac{\text{ك}}{١} - \frac{\text{ك}}{١}
 \end{aligned}$$

١٥٦ لنفرض ت ك + ب ك = د فاذا ضرب الجانبان في د واضيف اليها ب نصير المعادلة د ت ك + د ب ك + د = د + د ب فندى الجانب الاول قوة نامية من ٢ ت ك + ب ولنا من ذلك قاعدة اخرى لاتمام الترييع وهي ان نضرب المعادلة في اربعة امثال مسمى قوة المجهول العليا ونضيف الى الجانبين مربع مسمى قوته الدنيا

تنبيه . هذه القاعدة اسهل من الاولى متى كان للمجهول مسميات لا يمكن ازالها بالقسمة لانه لا يحدث منها كسر في اتمام الترييع كما ترى في هذه الامثلة

$$\begin{aligned}
 & (١) \text{ مفروض ت ك} \quad \text{د ك} = \text{ح} \\
 & \text{باتمام الترييع حسب القاعدة الثانية} \\
 & \text{د ت ك} + \text{د ك} + \text{د} = \text{د} + \text{د ك} + \text{د} \\
 & \text{بالتجذير} \quad \sqrt{\text{د ت ك} + \text{د ك} + \text{د}} = \sqrt{\text{د} + \text{د ك} + \text{د}} \\
 & \text{وبالمقابلة والقسمة ك} \quad \frac{\sqrt{\text{د ت ك} + \text{د ك} + \text{د}}}{\text{ت}} = \frac{\sqrt{\text{د} + \text{د ك} + \text{د}}}{\text{ت}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{وباتمام الترييع حسب القاعدة الاولى لنا} \\
 & \text{ك} + \frac{\text{د}}{\text{ت}} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}} = \frac{\text{د}}{\text{ت}} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}} + \frac{\text{د}}{\text{ت}} \\
 & \text{بالتجذير ك} \quad \sqrt{\frac{\text{د}}{\text{ت}} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}} + \frac{\text{د}}{\text{ت}}} = \sqrt{\frac{\text{د}}{\text{ت}} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}} + \frac{\text{د}}{\text{ت}}}
 \end{aligned}$$

$$\text{وبالمقابلة ك} = -\frac{د}{٢} \pm \frac{ح}{٢} + \frac{د}{٢٤}$$

(٢) مفروض ك' + د = ح

باتمام التربيع ٤ ك' + ٤ د + د' = ٤ ح + د'

$$\text{بالتجذير ٢ ك} + د = ح \pm \sqrt{٤ د + د'}$$

$$\text{وبالمقابلة والقسمة ك} = \frac{-\frac{د}{٢} \pm \sqrt{٤ د + د'}}{٢}$$

(٢) مفروض ٢ ك' + ٥ = ٤٢

باتمام التربيع ٢٦ ك' + ٦٠ + ٢٥ = ٥٢٩

بالتجذير والمقابلة والقسمة ك = ٢

(٤) مفروض ك' - ١٥ = -٥٤

باتمام التربيع ٤ ك' - ٦٠ + ٢٢٥ = ٩

$$\text{ثم ٢ ك} = ١٥ \pm ٢ = ١٨ \text{ أو } ١٢$$

نتبيه . اذا وقع - ك' في معادلة يجب تبديل جميع علاماتها حتى نصير القوة العليا من المجهول ايجابية (٦٥) لان - ك' لا يكون جزءا من مربع كمية ثنائية فلا يمكن اتمام التربيع

(١) مفروض - ك' + ٢ = د - ح

بتبديل العلامات ك' - ٢ = ح - د

$$\text{ثم ك} = ١ + \sqrt{١ + ح - د}$$

(٢) مفروض ٤ ك' - ك' = ١٢

بتبديل العلامات ك' - ٤ = ١٢

$$\text{ثم ك} = ٢ \pm \sqrt{١٦}$$

حيلة للتخلص من الكسور في اتمام التربيع

لنفرض المعادلة ا ك' + ب ك = س

افرض ك = $\frac{د}{١}$ ثم ا ك' = $\frac{د'}{١}$ و ب ك = $\frac{د''}{١}$

وصارت المعادلة $\frac{د}{١} + \frac{د'}{١} = س$ اي د' + د = اس

فاذا كان ب شفعاً يتم التبرع بالقاعدة الاولى بدون كسور وهذا التعويض
يسهل العمل جداً

ان لم يكن b شفعاً فاضرب المعادلة في ٢ فيصير مستقيم كشفعاً وتصبح المعادلة

$$(1) \quad r_1 = r_2 + r_3$$

افرض $\frac{د}{١٢} = ك$ ثم $\frac{د}{١٢} = ك$ و $\frac{د}{١٢} = ك$

والمعادلة (١) صارت $\frac{r_1}{12} + \frac{r_2}{12} = 2$

ای د^۱ + ب^۲ د = ۴ اس

بأنام التريع بالقاعدة الاولى $د^2 + ٢ ب د + ب^2 = ٤ ا س + ب^2$

بعض المسائل يعسر حلها بواسطة القاعدتين المذكورتين وهي تستلزم في العامل
نقطة لاختراع حيل لاجل التخلص من كميات مشبكة ونحويل المسئلة الى معادلة
مربعة ولجل الاعانة على ذلك وتوضيح كيفية تلك المعادلات لنراجع مربع كمية ثنائية
ان $k^2 + k + 1$ مربع كمية ثنائية تام وهو مؤلف
(١) من ثلاثة اجزاء

(۲) جزوہ الاول والثالث مربعان تامان

(٢) جزؤه الأوسط هو مضاعف حاصل جذري الجزء الأول والثالث

فلو فقد الجزء الثالث أي $ا^3$ لني $ك^3 + ١٢ ك$ ولا يتركب من هذه الكميات مربع لان مربع كمية ثنائية لابد ان يكون له ثلاثة اجزاء ولا بد من كون الجزء الثالث مربعاً

فلنفرضه = ثاً ثم حسب الافتراض

ك^١ + ١٢ ك + ت^١ هي مربع نام لكمية ثنائية

وحسب الملاحظة الثالثة اعلاه $2K = 12$

ای ت = ا و ت = ا

فوجدنا الجزء المفقود ا

(١) $14^2 + 14$ هما الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

لتفرض $T^2 =$ ذلك الجزء الثالث

ثم $14^{\circ} + 14^{\circ} + 14^{\circ}$ هي مربع كمية ثنائية

ای ۴ ات = ۴ اب ای^۴ ن + ب و ت = ب^۴ ای ب^۴ هو الجزء الثالث

المنفرد و $١٤ + ١٤ + ١٢ + ١٢$ هو مربع كمية ثنائية وجذرها $١٢ + ١٢$

(٢) $٢٦ + ٢٦$ هي ما الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ٦

(٣) $٦ + ٦$ هي ما الجزء الثاني والثالث لمربع كمية ثنائية مطلوب الأول

الجواب ٦

(٤) $٤٩ - ٤٩$ هي ما الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ٤٩

(٥) $٩ - ٩$ هي ما الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ١

(٦) $١٢ + ١٢$ هي ما الجزء الأول والثاني مطلوب الثالث

(٧) $٨١ + ٨١$ هي ما الجزء الأول والثالث مطلوب الأوسط

(٨) $٨ - ٨$ هي ما الجزء الأول والثاني مطلوب الثالث

(٩) $١٢ + ١٢$ هي ما الجزء الثاني والثالث مطلوب الأول

(١٠) $٢٦ + ٢٦$ هي ما الجزء الأول والثالث مطلوب الأوسط

(١١) $١٦ + ١٦$ هي ما الجزء الثاني والثالث مطلوب الأول

(١٢) $٩ + ٩$ هي ما الجزء الثاني والثالث

إذا كانت المعادلة بعد تحويلها على صورة $١٢ + ١٢ = ١٢$ ب تحل بدون اتمام التربيع بواسطة التعويض على هذه الكيفية

افرض $١ - ١ = ١$

ثم $١ - ١ = ١$

و $١٢ - ١٢ = ١٢$

بالجمع $١٢ + ١٢ = ١ - ١ = ١$

ثم $١ + ١ = ١ + ١ = ١$

وذلك مثل ما يخرج بالقاعدة الأولى وهذه قاعدة التعويض

افرض قيمة المجهول مجهولاً آخر مع نصف مسمى قوته الدنيا وعكس

علامته

لاجل زيادة ابضاح ماهية المعادلات المربعة لنحل هذه

مفروض $ك^2 + ٤ = ٦٠$ ك مطلوب قيمة ك

باتمام الترييع $ك^2 + ٤ = ٦٠$ ك

بالتجذير $ك + ٢ = ٨$ ك $٦ = ١٠ - ك$

اي بالتعويض عن ك باحدى هاتين القيمتين في المعادلة الاصلية تكون صحيحة اي

$٦٠ = ٦ \times ٤ + ٢$ و $٦٠ = ١٠ \times ٤ - ٢$

اذا كان ك $٦ = ٦$ فنجتذر ك $٠ = ٦ - ٦$

اذا كان ك $١٠ = ١٠$ " ك $٠ = ١٠ - ١٠$

اضرب احدى هاتين بالاخري ك $٦ - ٦$ ك

$١٠ - ك$

$ك^2 + ٤ = ٦٠ - ك$

بالمقابلة ك $ك^2 + ٤ = ٦٠$ وهي المعادلة الاصلية

فترى ان المعادلة المربعة تتبركانها حاصل معادلتين بسيطتين من الدرجة

الاولى وقيمت ك في تلك المعادلات البسيطة سميت جذور المعادلة المربعة وذلك

بوضح سبب التيمتين اللتين للمجهول في كل معادلة مربعة

ان لم توجد من المعادلة الآ قيمة واحدة للمجهول نستنتج ان القيمة الاخرى تعدلها

والجذران متساويان او ان احدهما صفر

١٥٧ قد يكون جزء من كمية ثنائية اصلية قوة مثل ك $ك^2 + ت$ ومربعها

ك $ك^2 + ت$ فترى دليل المجهول في الجزء الاول مضاعف دليله في

الثاني. وان فقد الجزء الثالث يستعمل باتمام الترييع حسبا تقدم. ولنا من ذلك هذه

القاعدة. وهي كل معادلة فيها قوتان من المجهول فقط دليل احدها مضاعف دليل

الاخرى فنحل كمعادلة مربعة اي باتمام الترييع

(١) مفروض ك $ك^2 - ٢ = ب - ت$

باتمام الترييع ك $ك^2 - ٢ = ١/٤ + ب - ت$

بالتجذير والمقابلة ك $ك^2 - ٢ = ١/٢ + ب - ت$

- بالتجذير ايضا $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (١) مفروض $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (٢) مفروض $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- باتمام التربيع $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- بالتجذير والمقابلة $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- بالترقية $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (٣) مفروض $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- باتمام التربيع $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- بالتجذير والمقابلة $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- بالترقية $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (٤) مفروض $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- باتمام التربيع $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- بالتجذير والمقابلة $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- بالترقية $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (٥) مفروض $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- افرض $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (١) بالترقية $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (٢) فتصير المعادلة $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- أو $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- أو $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- وك $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- وك $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت

١٥٨ متى خرج للجهول قيمة وهمية (١٠٢) لا يمكن ان توجد تلك القيمة حقيقية.

مثال

- ك $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- للمجهول قيمة . ولا بد لكل معادلة مربعة ان تكون على احدى هذه الصور الثلاث
- (١) $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (٢) $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت
- (٣) $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ك $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ت

ففي الاولى والثانية لا تكون القيمة وهمية البتة . وتكون وهمية في الثالثة متى كان ب
أكثر من $\frac{1}{4}$ ت فالتقيمة الوهمية تدل على فساد مسئله كما تقدم (١٠٢)
فلو قيل اقسام ٨ الى قسمين حاصلها ٢٠ لقل ك $(٨ - ك) \times ٢٠ = ك$ $٢٠ = ك$
١٠٤ - ٦ - ٤ وذلك مستحيل

١٥٩ للجهول في كل معادلة مربعة قيمتان حسبما تقدم (١٥٢) وغالباً نتعين
التي يجب ان تؤخذ منها بشروط المسئلة . فلو قيل اقسام ٢٠ الى قسمين حاصلها يعدل
ثمانية امثال فضلنها لتبل اصغرهما = ك واكبرها = ٢٠ - ك وبشروط المسئلة
ك $(٢٠ - ك) \times ٨ = (٢٠ - ك) \times ٢$

$$ك = ١٧ + ٢٢ = ٤٠ \text{ او } ٦$$

ولكن لا يكون ٤٠ قسماً من ٢٠ فيكون القسم الاصغر ٦ والاكبر ٢٤

١٦٠ لنا طريقة اخرى لحل المعادلات المربعة المتزجة . وهي بالتعويض .
فلنفرض $ك' = ف + ك + ق$ وفوق معروفتان . فلنفرض $ك = ي + \frac{1}{2} ف$ ثم
بالتعويض عن ك بهذه القيمة نصير المعادلة

$$ي + ف + ي + \frac{1}{2} ف = ف + \frac{1}{2} ف + ق$$

$$ثم ي + \frac{1}{2} ف = ف + \frac{1}{2} ف + ق$$

$$ي = \frac{1}{2} ف + ق$$

وك $\frac{1}{2} ف + \frac{1}{2} ف + ق = ق$ وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة متزجة كما
تري في هذه الامثلة الآتية

مفروض $ك' = ٦ + ك = ٩١$ ثم $ك' = ٦ - ٩١$

وهنا $ف = ٦ - وق = ٩١$ فلنا بموجب العبارة المذكورة $٩١ + ٦ + ٢ = ١٠٠$

$١٠٠ - ١٢ = ٨٨$ او ٧

مفروض $ك' = ١٠٩ - ٢٢ = ٨٧$

ثم $ك' = ٨٧ - ك = ١٢٢$ ف $٨٧ - ١٢٢ = ٣٥$

ولنا $٣٥ - \frac{1}{2} (١٢٢ + ٣٥) = ٣٥ - \frac{1}{2} (١٥٧) = ٣٥ - ٧٨ = ٤٣$ او ١١

مفروض $ك' = ٢ + ك = ١٨٠$ ثم $ك' = ٢ - ١٨٠ = ١٧٨$

باتمام التريع ك^٢ - ١٤ ك + ١٤ = ١٢ او ١٢

بالتجدير ك^٢ - ١٢ = ١٢ او ١٢

فللمجهول اربع قيمات اي ك = (١٢ + ١٢) وك = (١٢ - ١٢)

وك = (١٢ + ١٢) وك = (١٢ - ١٢)

واذا نعوض عن المجهول في المعادلة الاصلية باحدى هذه القيمات نضع

(٢) حل ك^٢ + ١٢ ك + ١٢ = ١٢ + ١٢ ك + ١٤ = ٠ بواسطة معادلة مربعة

بما ان القوة العليا ليست شفعاً يجب ضرب المعادلة في ك فنصير

ك^٣ + ١٢ ك^٢ + ١٢ ك + ١٤ ك = ٠

استخرج الجذر الجزئين وانظر الباقي الذي يدخل في الجذر فلما

(ك^٢ + ١٢ ك) (ك^٢ + ١٢ ك + ١٤ ك) = ٠

اقسم على (ك^٢ + ١٢ ك) نصير ك^٢ + ١٢ ك + ١٤ ك = ٠ وهي معادلة مربعة

(٣) حل ك^٢ + ١٢ ك + ١٢ = ٠ - ١٢ ك - ١٢ = ٠ بواسطة معادلة مربعة

هذه المعادلة تكتب على هذه الصورة

(ك^٢ + ١٢ ك) - ١٢ ك - ١٢ = ٠

ك = ١ او ٢ او -٢ او -٤

(٤) مفروض ك^٢ - ٨ ك + ١٩ = ١٢ - ١٢ ك مطلوب قيمات ك

ك = ١ او ٢ او ٤

ك = ٤ او -٢

(٥) ك^٢ - ٢ ك + ١٢ = ١٢

قد حالت هنا بعض المسائل دلالة على بعض الحيل التي نستخدم في حل المسائل

من هذا الباب

(١) افرض ٢ ك^٢ + ٢ ك + ١ = ٠ - ٢ ك^٢ - ٢ ك - ١ = ٠

وافرض ٢ ك^٢ + ٢ ك + ١ = ٠

بالترقية ٢ ك^٢ + ٢ ك + ١ = ٠ (١)

فصارت المعادلة ٠ = ١ - ٢ ك^٢ - ٢ ك - ١ افرض ١٢ = ٠ (٢)

ثم ١ - ١٢ = ١٢ + ١

اضف ١ الى الجانين لاجل اتمام التريع نصير ١ - ١٢ = ١٢ + ١

- بالتجذير $1 - 1 = 1 + 1$ $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- (٢) مفروض $1 - 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- (٣) مفروض $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- ثم $1 + 1 = 1 + 1$ عوض هذه القيات عن المسميات العددية
- وتم التبريع نصير $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- بالتجذير $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- (٤) مفروض $1 - 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- و $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- بالتجذير $1 - 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- (٥) مفروض $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- افرض $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$
- بالتجذير $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ أو $1 - 1$

في هذه المعادلات فرضنا مسمى القوة الاولى للجهول $1 = 1$ ثم اذا وجدنا الجذر المطلق في الجانب الثاني يعدل $1 + 1$

او $1 + 1$

او $1 + 1$

او $1 + 1$ او على الاطلاق $1 + 1$ $1 = 1$ اعني المضروب فيه $1 + 1$ مربع ذلك المضروب فيه = الجانب الثاني من المعادلة في تخلص على الطريقة التي اشرنا اليها وذكرنا امثلتها لان جذراً من جذري المعادلة هو هذا المضروب فيه $1 + 1$ والجذر الآخر هو $1 + 1$ اذا كان المضروب فيه. ولا مزية لهذه الطريقة ان لم تكن م كبة صحيحة وصغيرة

مثال معادلة فيها م كسر

$1 - 1 = 1 + 1$ مطلوب قيمة ك

افرض $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ او $1 - 1$

فصارت المعادلة $1 + 1 = 1 + 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ او $1 - 1$

ك = - او $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ $1 = 1$ او $1 - 1$

اذا كانت جذور المعادلة كيات صماء او غير منطقية فالطريقة المذكورة لا تنافق واستعلام كون الجذور منطقية او صماء امر سهل

مثاله لنفرض ك^١ + ١٢ = ك^٢ = ٤٠

افرض ١٢ = ١٢ ثم ١٢ = ٤ + ٨ = ٢٠ و ١٦ = ٩ + ٧ = ٤٨

ومن ذلك نرى ان واحداً من جذري المعادلة واقع بين ٢ و ٣

اذا كانت جذور المعادلة كيات غير منطقية او صماء فلا نفيدنا حيلة من الحيل لحل المعادلة بل يقتضي مما ملئها بموجب القواعد الثابتة غير انه اذا كانت الجذور اعداداً صحيحة ولم تكن كبيرة قد تخترع لكل مسألة حيلة لاجل التخلص من الاعداد الكبيرة وذلك بتعلم بالممارسة اذ لا قاعدة ضابطة يسلك عليها في ذلك وقد وضعت هنا بعض الامثلة ايضاً للمعنى

(١) مفروض ك^١ + ٩٩٨٤ = ك^٢ = ١٦٠٠٠٠ مطلوب قيمة ك

لاحظ ان ٩٩٨٤ = ١٠٠٠٠ - ١٦

افرض ١٢ = ١٠٠٠٠ ثم ١٢ = ١٦٠٠٠٠

بالتعويض ك^١ + (١٦ - ١٢) = ك^٢ = ١٢٣

باتمام التريع بالقاعدة الاولى ك^١ + (١٦ - ١٢) + ك^٢ + (٨ - ١) = ١١٦ + ٦٤ +

بالتجذير ك^١ + (٨ - ١) = ١٢ او ١٦ = ١٢ - ١٠٠٠٠

(٢) مفروض ك^١ + ٤٥ = ك^٢ = ٩٠٠٠ مطلوب قيمة ك

اذا فرضنا ١٢ = ٤٥ يكون المضروب فيه ومربعة حتى يصير ٩٠٠٠ كبيراً

فلامزية في هذه الطريقة والغرض التخلص من الاعداد الكبيرة. فلاحظ ان ٤٥ ×

٢٠٠ = ٩٠٠٠ ثم افرض ١ = ٤٥

وبالتعويض ك^١ + ١ = ك^٢ = ١٢٠٠

ثم التريع بالقاعدة الثانية ٤ = ك^١ + ١٤ + ك^٢ + ١ = ١٨٠٠ + ١

بالتجذير ٢ = ك^١ + ١ = ١٢٠٠ + ١ = ١٢٠١

اضرب احد الضلعين تحت علامة الجذر في ٥ واقسم الآخر على ٥ يصيران

١٦٩ × ٢٢٥ وكل واحد منها مربع. جذرها ورجع القيمة المفروضة لها

فصير المعادلة ٢ = ك^١ + ١٥ × ٢ + ١٥ × ١٢

ك = ٧٥

اخرج ١٥ × ٢ من الجانين ٢ = ك^١ + ١٥ × ١٠

(٢) مفروض $١٦ ك - ٢٢٥ = ٢٢٥ ك$ مطلوب قيمة $ك$

لاحظ ان $١٥ \times ١٥ = ٢٢٥$ ثم افرض $١٥ = ١$ $١٦ = ١ + ١$

بالتعويض $(١ + ١) ك - ١ ك = ١$

ثم التربع بالقاعدة الثانية

$$٤ (١ + ١) ك - ٤ (١ + ١) ك + ٤ = ٤ + ٤ ك$$

بالتجدير $٢ (١ + ١) ك - ١ ك = ١٢ + ١ ك$

انقل ١ واقسم على ٢ $(١ + ١) ك = ١ + ١$ $١ = (١ + ١)$

اقسم على $١ + ١$ $ك = ١ = ١٥$

(٤) مفروض $\frac{٦٥ - ك}{٧٢} = \frac{ك - ٨١}{١ ك} + \frac{١٨}{ك}$ مطلوب قيمة $ك$

تري الاعداد اما ٢ واما مضروب ٩ فلنفرض $٩ = ١$

$$\frac{٦٥ - ك}{١٨} = \frac{ك - ٩}{١ ك} + \frac{١٢}{ك}$$

بالجبر $١٦ ك + ١٨ ك - ١ ك = ٦٥ ك - ٦٥ ك$

انقل الكل الى جانب واحد ورتب الكميات على ترتيب القوت نصير

$$٦٥ ك - ١٨ ك - ١٦ ك - ١ ك = ٠ \quad | \quad ٦٥ ك + ٤ ك$$

$$\frac{٦٥ ك - ١٨ ك - ١٦ ك - ١ ك}{٦٥ ك + ٤ ك}$$

$$- ١٨ ك - ١٦ ك - ١ ك - ١٦ ك$$

$$١ - (١٦ ك + ١٨ ك)$$

فحسب ما تقدم آنفاً صارت المعادلة

$$٠ = (١٦ ك + ١٨ ك + ١ ك) - ١$$

او $(١٦ ك + ١٨ ك + ١ ك) = ١$ بالقسمة $ك = ١$

$$١ + ١ = ١ + ١$$

الامثلة المتقدمة تعين على حل بعض هذه الامثلة الآتية

$$١٦ - ٥ = ك$$

$$٨٠ = ك + ١١$$

$$٤ = ك - ١$$

$$٧ - ك = \frac{٢ - ك}{٢} + ك$$

$$٢ = ك$$

$$\frac{١٢}{٦} = \frac{١ + ك}{ك} + \frac{ك}{١ + ك}$$

$$(٨) \quad \frac{1}{r} = \frac{17}{r} + \frac{14}{r} = 16 + \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 2 - \text{او} 2 - \text{او} 8 - \text{او} \frac{1}{r}$$

$$(٩) \quad \frac{1}{r} + 2 = 1 - \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 4 \text{ او } 1$$

$$(١٠) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r}} \right) \quad \text{ك} = 5 \text{ او } 2 - \text{ك}$$

$$(١١) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 8 - \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 7 - \text{او} 4$$

$$(١٢) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 47 - \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 12 - \text{او} \frac{1}{r}$$

$$(١٣) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 14 - \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 4 - \text{او} \frac{1}{r}$$

$$(١٤) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 1 - \text{او} 1$$

$$(١٥) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 4 \text{ او } \frac{1}{r}$$

$$(١٦) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 12 \text{ او } 7$$

$$(١٧) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 21 \text{ او } 1$$

$$(١٨) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 1 - \text{او} 28$$

$$(١٩) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 2$$

$$(٢٠) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 10$$

$$(٢١) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 1 + \frac{1}{r}$$

$$(٢٢) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

$$(٢٣) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r}$$

$$(٢٤) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r}$$

$$(٢٥) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 49$$

$$(٢٦) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r}$$

$$(٢٧) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 7$$

$$(٢٨) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = 8$$

$$(٢٩) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

$$(٣٠) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

$$(٣١) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r}$$

$$(٣٢) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{ك} = 70$$

$$(٣٣) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1 - \frac{1}{r}}{r} \quad \text{ك} = \frac{1}{r}$$

$$\text{ك} = ٩ \quad \frac{\gamma + ٥}{\sqrt{\gamma - \text{ك}}} = \frac{\sqrt{٢} \sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma - \text{ك}}}{\sqrt{\gamma - \text{ك}}} \quad (٢٤)$$

$$\text{ك} = ٩ \quad \frac{\sqrt{١٦ + \text{ك}} - ١٠}{\sqrt{١٦ + \text{ك}}} = \frac{\sqrt{١٦ + \text{ك}} - ١٠}{\sqrt{١٦ + \text{ك}}} \quad (٢٥)$$

$$\sqrt{٦} = \sqrt{٢} + \sqrt{٤} \quad (٢٦)$$

بالقسمة على $\sqrt{٦}$ $\text{ك} = ٦$ $\sqrt{٦} = \text{ك} + \sqrt{٦}$ $\text{ك} = ٢$

$$\text{ك} = ٢ \quad \frac{\frac{١٢ + \text{ك}}{\sqrt{١٢}} - \frac{\gamma - \text{ك}}{\sqrt{\gamma - \text{ك}}} - \frac{٥ - \text{ك}}{\sqrt{٥ - \text{ك}}}}{\sqrt{١٢}} = \frac{\gamma - \text{ك}}{\sqrt{\gamma - \text{ك}}} - \frac{٥ - \text{ك}}{\sqrt{٥ - \text{ك}}} \quad (٢٧)$$

$$\text{ك} = ٢ \quad \frac{\frac{١١}{\sqrt{٥}} - \frac{٧}{\sqrt{\gamma - \text{ك}}} + \frac{\sqrt{٢} - \text{ك}}{\sqrt{٢ - \text{ك}}}}{\sqrt{٥}} = \frac{\gamma - \text{ك}}{\sqrt{\gamma - \text{ك}}} + \frac{\sqrt{٢} - \text{ك}}{\sqrt{٢ - \text{ك}}} \quad (٢٨)$$

$$\text{ك} = ٩ \quad \frac{٤٠}{\sqrt{٤٠}} = \frac{٢ - \text{ك}}{\sqrt{٢ - \text{ك}}} - \frac{٥ - \text{ك}}{\sqrt{٥ - \text{ك}}} \quad (٢٩)$$

$$\text{ك} = ١٠ \quad \frac{\sqrt{٦} \sqrt{٢} + \sqrt{٦} + \sqrt{٦ + \text{ك}}}{\sqrt{٦ + \text{ك}}} = \frac{\sqrt{٦} \sqrt{٢} + \sqrt{٦} + \sqrt{٦ + \text{ك}}}{\sqrt{٦ + \text{ك}}} \quad (٣٠)$$

$$\frac{\sqrt{٨} \sqrt{٢} + \sqrt{٨} + \sqrt{٨ + \text{ك}}}{\sqrt{٨ + \text{ك}}} = \text{ك} \quad (٣١)$$

$$\frac{\sqrt{٨} \sqrt{٢} + \sqrt{٨} + \sqrt{٨ + \text{ك}}}{\sqrt{٨ + \text{ك}}} = \text{ك} \quad (٣٢)$$

$$\frac{\sqrt{٨} \sqrt{٢} + \sqrt{٨} + \sqrt{٨ + \text{ك}}}{\sqrt{٨ + \text{ك}}} = \text{ك} \quad (٣٣)$$

$$\sqrt{٢} = \text{ك} \quad (٣٤)$$

$$\text{ك} = ٢ \quad (٣٥)$$

$$\text{ك} = ٨١ \quad (٣٦)$$

$$\sqrt{١٥} + \sqrt{٤} = \text{ك} \quad (٣٧)$$

$$\sqrt{١٤} + \sqrt{٦} = \text{ك} \quad (٣٨)$$

$$\sqrt{٦} + \sqrt{٨} = \text{ك} \quad (٣٩)$$

$$\frac{١}{٩} - \frac{٢}{٩} = \text{ك} \quad (٤٠)$$

$$\frac{١}{١٥} - \frac{٢}{١٥} = \text{ك} \quad (٤١)$$

$$\frac{\sqrt{١١} + \sqrt{٢}}{\sqrt{١١ + \text{ك}}} = \text{ك} \quad (٤٢)$$

٤

$$\sqrt{٤} + \sqrt{٦} = \text{ك} \quad (٤٣)$$

عليّات

(١) تاجر عنده ثوبان طولهما ١١٠ اذرع وان طرّح مربع اذرع اطولهما من ٨٠ مرة اذرع الآخر في ٤٠٠ فكم ذراعاً كل ثوب.

لنفرض ك اطولها و ١١٠ - ك الآخر

بشروط المسئلة $٤٠٠ = ٨٠ \times (١٠ - ك) - ك^٢$

ك = ٦ اطولها ٥٠ = الآخر

(٢) سُئل أخوان كم عمر كل واحدٍ منكما . فقالا مجتمع عمرينا ٤٥ سنة وحاصلها

٥٠٠ سنة . فكم عمر كلٍ منهما

الجواب ٢٥ و ٢٠

(٢) اي عدد من فضلها ٤ وحاصلها ١١٧

ك = احدها ك + ٤ = الآخر

ثم $(ك + ٤) \times ك = ١١٧$

(٤) تاجر باع ثوباً كان قد اشتراه بثلاثين ديناراً ولو ضرب الثمن الذي باعه

بـ في الربح الذي ربحه لكان الحاصل مكعب الربح . فكم كان الربح

لنفرض ك = الربح فيكون $٢٠ + ك$ ثمن المبيع

ثم بشرط المسئلة $ك^٢ = (٢٠ + ك) \times ك$

(٥) اي عدد من فضلها ٢ وفضلته كعبيها ١١٧

ك = الاصغر ك + ٢ = الأكبر

الجواب ٢٠ و ٢٢

(٦) ما عددان فضلتهما ١٢ ومجموع مربعيهما ١٤٢٤

(٧) ما عددان فضلتهما ٧ ونصف حاصلهما مع ٢٠ يعادل مربع اصغرها

ك = الاصغر ك + ٧ = الأكبر

ثم بالمسئلة $ك^٢ = ٢٠ + \frac{(ك + ٧)}{٢} \times ك$

(٨) سرب طيور طار منه جذر مال نصفه ثم $\frac{١}{٩}$ منه وبقي طائران . فكم طائراً

كان السرب

لنفرض العدد ٢ ك فلنا $ك + \frac{١٦}{٩} ك + ٢ = ٢ ك$

الجواب ٧٢ طائراً

(٩) رجل اشترى قطيعاً من الغنم بثمن ٢٤٠٠ دينار . ولو زيد عدد الغنم ٨

روؤوس لكان ثمن كل راس اقل ما كان في الحقيقة ١٠ دنانير. فكم راساً كان القطيع
الجواب ٤٠

(١٠) رجل اشترى مواشي ببلغ ١١٤٠ ديناراً ومات منها ٨ روؤوس ثم باع
الباقى ورجع في كل راس ٨ دنانير ولم يخسر شيئاً. فكم راساً اشترى الجواب ٢٨

(١١) زيد وعبيد سافرا معاً فاصدين مكاناً بعده عنها ٣٠٠ ميل. وزيد
سبق عبيداً كل ساعة ميلاً فوصل قبله بعشر ساعات. فكم ميلاً مشى كل واحدٍ منها
في الساعة زيد = ٦ اميال وعبيد = ٥ اميال

(١٢) اقسام ١٨ الى ضلعين حتى يكون مجموع كعيها ٢٤٢

ك = احدها $= \frac{18}{ك}$ الآخر

ك = اكبرها $= \frac{18}{٦} = ٣$ اصغرها

(٢) اي عدد من فضلتها ١٢٠ ونسبة اكبرها الى اصغرها :: الاصغر : ١٠

الجواب ٤٠ و ١٦٠

(١٤) اي عدد من مجتمعهما ٦ ومجموع كعيها ٧٢ الجواب ٢ و ٤

(١٥) اقسام ٥٦ الى ضلعين حاصلها ٦٤٠ الجواب ٤٠ و ١٦

(١٦) رجل اشترى اثواباً ثمنها ٦٧٥ ديناراً. ثم باع كل ثوبٍ بثانية واربعين

ديناراً ورجع مبلغاً يماثل ثمن الثوب الاصلي. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٥

(١٧) رجل اشترى فرساً ببلغ من المال ثم باعه بمئة وتسعة عشر ديناراً ورجع في

المئة ما يماثل الثمن الاصلي فكم كان ثمنه

ك = الثمن فيكون ك ايضا الرخ في المئة و $\frac{ك}{١٠٠}$ الرخ كله

فلما ك + $\frac{ك}{١٠٠} = ١١٩$ ك = ٧٠

(١٨) رجل اشترى اثواباً ببلغ ١٨٠ ديناراً. ولو زيد ثلاثة اثوابٍ لانحط ثمن

الثوب ثلاثة دنانير. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٢

(١٩) تاجران تشاركا وكن راس مالهما ١٠٠ دينار. وبقيت حصة احدهما في

الشركة ثلاثة اشهر وحصة الآخر شهرين. ثم انفصت الشركة فحصل لكل واحدٍ منها

من راس المال والرجح ٩٩ ديناراً. فكم وضع كل واحدٍ من راس المال في الاصل

لنفرض ك = حصة الاول و ١٠٠ - ك = حصة الثاني. فيكون ربح الاول

٩٩ - ك لثلاثة اشهر وك = ١ = ربح الثاني لشهرين ولو بقي راس مالو ثلاثة اشهر

لكان ربحه $\frac{٣}{٢} ك$ ولكن الربح هو ك راس المال. فلما ك : ٩٩ - ك :: ١٠٠ - ك

ك = ٤٥ = الأول = ٥٥ = الثاني

(٢٠) نزلت امرأتان الى السوق ومع كل واحدة منها عدد من البيض خلاف ما مع الاخرى ولكن الجميع ١٠٠ بيضة. فباع كل واحدة ما معها بثمن واحد. فقالت احدهما للاخرى لو كان معي من البيض قدر ما معك لاختدت ثمنه ١٥ غرشاً. وقالت الاخرى لو كان معي قدر ما معك لاختدت ٦ ١/٢ غروش. فكم بيضة كان مع كل واحدة منهما لنفرض ما مع الاولى = ك وما مع الاخرى ١٠٠ - ك. وبما ان الاولى كانت قد باعت ١٠٠ - ك بثمن ١٥ غرشاً لنا (١٠٠ - ك) : ١٥ :: ك : ١٥ - ك والثانية كانت باعت ك بثمن ٦ ١/٢ غروش لنا

$$ك : (١٠٠ - ك) :: \frac{٢٠}{٦} : \frac{٢٠٠٠ - ٢٠٠}{٦}$$

ثم ان كل واحدة اخذت مبلغاً واحداً فلما

$$\frac{١٥ - ك}{٣} = \frac{٢٠ - ٢٠٠٠}{٦}$$

ك = ٤٠ = الاولى = ٦٠ = الثانية

(٢١) تاجران باعا اذرعاً من قش بمبلغ ٢٥ ديناراً وباع احدهما ٢ اذرع زيادة عن الآخر. فقال له صاحبه لو بعث ما بعته لاختدت ٢٤ ديناراً فقال وانا لو بعث ما بعته لاختدت ١٢ ١/٢ ديناراً. فكم ذراعاً باع كل واحد منهما

ك = ما باعه الاول وك + ٢ = ما باعه الثاني. فيكون $\frac{٢٤}{٢٠ - ك}$ ثمن ك اذرع و $\frac{٢٥ + ك}{٢}$ ثمن ك + ٢ اذرع فلما

$$ك = ٥ + ١٠ = ٥ = ١٥ او الاول = ٥$$

١٨ او الثاني = ٨

(٢٢) سافر زيد وعبيد قاصدين بلدة بعدها عنها ١٥٠ ميلاً وزيد قطع من المسافة كل ساعة ٢ اميال زيادة عن عبيد فوصل قبل عبيد بثلاث ساعات وعشرين دقيقة فكم قطع كل واحد منهما في الساعة

(٢٣) اي عدد من فضلتها ٦ واذا اضيف ٤٧ الى مضاعف مربع الاصغر بعدل

المجموع مربع الاكبر

(٢٤) زيد وعبيد تصدقا على الفقراء كل واحد منهما بمبلغ ١٢٠٠ دينار والذين اعطاهم زيد اربعون نفراً اكثر من الذين اعطاهم عبيد غير ان صدقة عبيد لكل واحد ٥ دنائير اكثر من صدقة زيد. فكم كان عدد الفقراء جميعاً

$$زيد = ١٢٠ = عبيد = ٨٠$$

- (٢٥) ما عددان مجتمعا ١٠ ومجتمع مربعها ٥٨ الجواب ٧ و ٢
- (٢٦) اشترك رجال في شراء بستان ثمنه ١٧٥ ديناراً. ثم خرج اثنان من الشركة فلتحق كل واحد من الآخرين ١٠ دنائير زيادة عما كان قد لحقه لو بقي الاثنان معهم. فكم عددهم أولاً الجواب ٧
- (٢٧) تاجر اشترى اذرعاً من القماش بستين ديناراً. فأتخذ منها لنفسه ١٥ ذراعاً وباع الباقي باربعة وخمسين ديناراً مرج في كل ذراع $\frac{1}{10}$ دينار. فكم ذراعاً اشترى وكم كان الثمن الجواب ٧٥ ذراعاً و $\frac{1}{10}$ دينار ثمن الذراع
- (٢٨) سافر زيد من بلدة وعمره من اخرى فاصدين ان يلتقيا في مكان وبين البلدين ٢٤٧ ميلاً. فزيد قطع كل يوم ٩ اميال والايام التي سافرا فيها قبل التقائهما تزيد ثلاثة ايام عن عدد الاميال التي قطعها عمرو في اليوم. فكم ميلاً سافرا الجواب زيد = ١١٧ وعمره = ١٢٠
- (٢٩) رجل اشترى ثوبين من الجوخ ثمن الذراع من الواحد يزيد ٤ دراهم عن ثمن الآخر. وكان ثمن هذا الثوب جميعه ٢٦٠ درهماً وثمن الآخر جميعه ٢٢٠ درهماً ولكنه اطول من الاول بذراعين. فكم ذراعاً كان كل واحد منهما وكم ثمن الذراع منه الجواب الاول ١٨ ذراعاً وثمن الذراع ٢٠ درهماً والآخر ٢٠ ذراعاً وثمن الذراع ١٦ درهماً
- (٣٠) رجل اشترى ٥٤ رطلاً من الخمر الاصفر وعدة ارطال من الخمر الاسود وكان ثمن الرطل من الاول يعدل نصف ارطال الثاني وثمن الرطل من الثاني اقل من ثمن الرطل من الاول اربعة دراهم. ثم مزجها وبيع الرطل من المزيج بعشرة دراهم فحسر ٥٧٦ درهماً. فكم كان ثمن الرطل من الاصفر وكم عدد ارطال الاسود الجواب الرطل من الاصفر = ١٨ درهماً والاسود ٢٦ رطلاً
- (٣١) اي عدد اذا طرح مربعه من ٤٠ واضيف الى جذره الباقي المائي ١٠ وضرب المجموع في ٢ وانقسم المحاصل على العدد ننسج يخرج ٤ الجواب ٦
- (٣٢) سئل رجل عن عمره فقال اذا اضيف جذره المائي الى نصفه وطرح من المجموع ١٢ لا يبقى شيء. فكم كان عمره الجواب ١٦
- (٣٣) رجل اشترى زقبن من الخمر ثمنها ٥٨ غرشاً. وفي الواحد منها ٥ ارطال زيادة عن الآخر وثمن الرطل اقل من $\frac{1}{2}$ عدة ارطال الاصغر بفرشين فكم رطلاً في كل زقبي وكم ثمن الرطل الجواب الاكبر = ١٧ والاصغر = ١٢ وثمن الرطل = ٢

(٢٤) رجل معه ٢٤ قطعة بعضها فضة وبعضها نحاس . وقمة النطعة من الفضة تساوي غروشاً عدد قطع النحاس وقمة النطعة من النحاس تساوي عدد قطع الفضة .
وقمة الجميع ٢١٦ غروشاً . فكم عدد النطع

الجواب النضة = ٦ والنحاس = ١٨

(٢٥) رجل اشترى عدة من الغنم بثمانين ديناراً . ولو اخذ بهذا الثمن اكثرهما اخذ باربعة رؤوس لانحط ثمن الراس ديناراً واحداً . فكم رأساً اشترى

الجواب ١٦

(٢٦) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الآخر :: ٩ : ٤ وبينهما ٣٠ قيراطاً مطلوب النطة من الخط الموصل بين مركزيهما التي فيها يجذب كل واحد ابرة على حدة سوى على افتراض ان الجاذبية هي بالقلب كمرجع البعد

الجواب ٨ قراريط عن اقربها

او - ٤٠ قيراطاً عن اضعفها

(٢٧) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الآخر :: م : ن . وبينهما ب قراريط . في اية نقطة على الخط الموصل بين مركزيهما تكون جاذبيتها لابرقة واحدة

الجواب عن م = $\frac{ب \cdot م}{ب + م}$

البعد عن ن = $\frac{ب \cdot ن}{ب + ن}$

١٦١ كثيراً ما تسهل الاعمال الجبرية ولا سيما حل المعادلات بواسطة التحويل عن عبارة طويلة مجرد واحد . وعند نهاية العمل ترجع العبارة الاصلية . فلو فرض ك - ٢ = ك + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ - ٦٤ + ح فافرض ب عوضاً عن الجانب الثاني فنصير ك - ٢ = ك = ب ثم ك = ب + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$ + ح ثم بترجع العبارة الاصلية نصير

$$ك = ب + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + ح + ٦٤ - \frac{١}{٨} - \frac{١}{٨}$$

ولو فرض ث - ك - ٢ = د = ب - ك - ك - ٢ = ك

فبالقابلة والنك نصير ك + (ث - ب - ١) = د

افرض ح عوضاً عن (ث - ب - ١) فلنا ك + ح = د

$$ثم ك = د - \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨}$$

وبترجع العبارة الاصلية ك = $\frac{د - ب - ١}{٢} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨}$

وما من احد يبرع في حل المسائل الجبرية ان لم يعود نفسه على التعويض المناسب
كما تقدم وكثيرا ما تحل المسائل بسهولة بواسطة التعويض ويختصر العمل كما ترى في
هذه المسئلة وكما رأيت في ما تقدم

$$(1) \text{ ك }^{\text{ر}} \text{ ي } + \text{ ك }^{\text{ر}} \text{ ي }^{\text{ر}} = 20$$

$$(2) \frac{1}{\text{ك}} + \frac{1}{\text{ي}} = \frac{1}{7}$$

$$\text{بالتك ك }^{\text{ر}} \text{ ي } + \text{ ك }^{\text{ر}} \text{ ي }^{\text{ر}} = \text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي } (\text{ك } + \text{ ي})$$

$$(2) \text{ بالجبر ك } + \text{ ي } = \frac{\text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي }^{\text{ر}}}{7}$$

$$\text{افرض ك } + \text{ ي } = \text{ص } \text{ وك }^{\text{ر}} \text{ ي } = \text{ف}$$

$$\text{وعوض بذلك في (1) تصير ص ف } = 20$$

$$\text{و } 6\text{ص} = 20\text{ف}$$

فنستعلم قيمة ص وف ومنها قيمة ك وي

فائدة . اذا كان المجهولان في معادلتين من صورة

$$(1) \text{ ك } + \text{ ي } = \text{ص}$$

$$(2) \text{ ك }^{\text{ر}} \text{ ي } = \text{ف}$$

تحل المسئلة على هذه الكيفية

$$(1) \text{ ك }^{\text{ر}} + 2\text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي } + \text{ ي }^{\text{ر}} = \text{ص }^{\text{ر}} \quad \text{ربع (1)}$$

$$\text{اضرب (2) } \times 4 \text{ وا طرح } 4\text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي } = 4\text{ف}$$

$$\text{الفضلة } \text{ك }^{\text{ر}} - 2\text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي } + \text{ ي }^{\text{ر}} = \text{ص }^{\text{ر}} - 4\text{ف}$$

$$(2) \text{ بالتجذير ك } - \text{ ي } = 2\text{ص }^{\text{ر}} - 4\text{ف}$$

$$(3) \text{ اجمع (1) و (2) } 2\text{ك }^{\text{ر}} = \text{ص }^{\text{ر}} + 2\text{ص }^{\text{ر}} - 4\text{ف}$$

$$(4) \text{ اطرح (2) من (1) } 2\text{ك }^{\text{ر}} = \text{ص }^{\text{ر}} - 2\text{ص }^{\text{ر}} - 4\text{ف}$$

$$\text{مفروض ك } + 2\text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي } + \text{ ي }^{\text{ر}} = 19$$

$$\text{ك }^{\text{ر}} + \text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي } + \text{ ي }^{\text{ر}} = 123$$

$$\text{افرض ك } + \text{ ي } = \text{ص } \text{ و } 2\text{ك }^{\text{ر}} \text{ ي } = \text{ف}$$

$$(1) \text{ بالتعويض ص } + \text{ ف } = 19$$

$$(2) \text{ ص }^{\text{ر}} - \text{ف }^{\text{ر}} = 123$$

$$\text{بقسمة (2) على (1) } \text{ص } - \text{ف } = 7 \quad \text{ك } = 9 \quad \text{ي } = 12 \text{ او } 19$$

وهذه الامثلة نهم بأكثر سهولة بعد درس الفصل الآتي

الفصل الخامس عشر

في المسائل المشتملة على مجهولين فاكثر

$$١٦٢ \text{ لنفرض ك} + \text{ى} = ١٤$$

$$\text{واضاً ك} - \text{ى} = ٢$$

$$\text{بنقل الياء فيهما لنا ك} = ١٤ - \text{ى}$$

$$\text{وك} = ٢ + \text{ى} \text{ وحسب الاولى الحادبة عشرة ان الاشياء المساوية لشيء}$$

واحد هي متساوية

$$\text{فاذا} ٢ + \text{ى} = ١٤ - \text{ى} \text{ وهي معادلة جديدة فيها مجهول واحد فقط . وقد}$$

استخرجناها من معادلتين في كل واحدة منها مجهولان . ولنا من ذلك

الناعدة الاولى لاجراج احد المجهولين واستخراج معادلة واحدة من اثنتين . وهي ان

نستعمل قيمة احد المجهولين في المعادلتين ونبنى المعادلة الجديدة من هاتين القيمتين

(١) ما عددان مجتمعهما ٢٤ والاكبر منها ٥ مرات الاصغر

$$\text{لنفرض ك} = \text{الاكبر وى} = \text{الاصغر}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول ك} + \text{ى} = ٢٤$$

$$(٢) \text{ بالشرط الثاني ك} = ٥ \text{ ى}$$

$$(٣) \text{ بمقابلة ى في الاول ك} = ٢٤ - \text{ى}$$

$$(٤) \text{ بالمساواة بين (٢) و (٣) ٥ ى} = ٢٤ - \text{ى}$$

$$(٥) \text{ بالمقابلة والقسمة ى} = ٤$$

(٢) ما كيتان مجتمعهما يعدل ح وفضله مربعيهما تعدل د

$$\text{لنفرض ك} = \text{اكبرها وى} = \text{اصغرها}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول ك} + \text{ى} = \text{ح}$$

$$(٢) \text{ بالثاني ك} - \text{ى} = \text{د}$$

$$(٣) \text{ بمقابلة ى في (٢) ك} = \text{د} + \text{ى}$$

$$(٤) \text{ بالتجذير ك} = \sqrt{\text{د} + \text{ى}}$$

$$(٥) \text{ بمقابلة ى في (١) ك} = \text{ح} - \text{ى}$$

(٦) بالمساواة بين (٤) و (٥) $\frac{١٦}{٢٠} + د = ح - ي$

(٧) فلنا $ي = \frac{٢٠ - د}{٢}$

(٢) مفروض ت ك + ب = ح

و ك + ي = د

مطلوب قيمة ي الجواب $ي = \frac{٢٠ - د}{٢} - ت$

١٦٢ مفروض ك = ح ي

وايضاً ت ك + ب = ي

نرى هنا قيمة ك في الاولى هي ح ي ويمكننا ان نعوض عن ك في الثانية بهذه القيمة فتصير ت ح ي + ب ح ي = ي وليس فيها سوى مجهول واحد. ولنا من ذلك

القاعدة الثانية لاجراج مجهول. هي ان نستعلم قيمة احد المجهولين في احدي المعادلتين ونعوض عنه بها في الاخرى

(٤) سنية جرت على اثراخرى كانت قد سبقتم ٢٠ ميلاً. وكانت التابعة

تجري ٨ اميال كلما جرت السابقة ٧ اميال. فكم ميلاً تجري الاولى قبل ان تدرك الاخرى

لنفرض ما تجريه الاولى = ك وما تجريه الاخرى = ي فلنا

(١) بالشروط ك = ي + ٢٠

(٢) بالشروط ك : ي :: ٨ : ٧

(٣) ثم $ي = \frac{٧}{٨} ك$

(٤) بالتعويض عن ي في (١) $ك = \frac{٧}{٨} ك + ٢٠$

(٥) ولنا من ذلك ك = ١٦٠

(٥) سئل كم عمر زيد وعبيد. فقبل منذ سبع سنين كان عمر زيد ثلاثة امثال

عمر عبيد. وبعد سبع سنين يكون عمره مضاعف عمر عبيد. فكم هو عمر عبيد

لنفرض ك = عمر زيد ي = عمر عبيد

ثم ك - ٧ = زيد منذ سبع سنين

ي - ٧ = عبيد منذ سبع سنين

ك + ٧ = زيد بعد سبع سنين

ي + ٧ = عبيد بعد سبع سنين

(١) بالشرط الاول $ك - ٧ = ٢ \times (٧ - ٢) = ٢١ - ٢$

(٢) بالثاني $ك + ٧ = ٢ \times (٧ + ٢) = ٢٤ + ٢$

(٣) بمقابلة الاولى $ك - ٢ = ١٤$

(٤) بالتعويض عن ك في (٢) $٢٤ + ٢ = ٧ + ١٤ - ٢$

(٥) ولنا من ذلك $٢١ = ٢ = ٢١ =$ عمر عبيد

(٦) اي عدد بين نسبة اكبرها الى اصغرهما :: ٢ : ٣ وجمعها يعدل سدس

الجواب ١٠ و ١٥

حاصلها

١٦٤ مفروض $ك + ٢ = ٢٤$ ت

وايضاً $ك - ٢ = ٢٤$ ب

جميع المعادلتين $٢٤ = ٢٤$ ت + ب

وليس فيها سوى مجهول واحد

مفروض $٢٤ = ٢٤ + ٢ = ٢٦$ ح

وايضاً $٢٤ = ٢٤ + ٢ = ٢٦$ د

بالطرح $ك = ٢٦ - ٢ = ٢٤$

فقد اخرجت ٢

مفروض $ك - ٢ = ٢٤$ ت

و $ك + ٢ = ٢٤$ ب

بضرب الاولى في ٢ $٢٤ = ٢٤ - ٢ = ٢٦$ ت

ثم يجمع الثانية والثالثة $٢٤ = ٢٤ + ٢ = ٢٦$ ت فلنا من ذلك

القاعدة الثالثة لاجراج مجهول . هي ان تضرب احدى المعادلات او قسمها حتى

يكون احد الاجزاء المشتملة على المجهول يعدل جزءاً من الاخرى . ثم يجمع المعادلتين

او تطرح الواحدة من الاخرى حتى ينفي جزءاً من الواحدة جزءاً من الاخرى

القاعدة الرابعة لاستخراج مجهول

(١) لنفرض $٢٤ = ٢٤ + ٢ = ٢٦$

(٢) ولنفرض $١٠ = ٢٤ - ٢ = ٢٦$

اضرب احدى المعادلتين في كمية غير معينة منها كانت ولتكن م ولنضرب بها

الاولى منها فتصير

$$٢م ك + ٢م ي = ٢٢م$$

$$\text{اطرح منها (٢) } ٥ ك - ٢ ي = ١٠$$

$$\text{الفضلة } (٥ - ٢م) ك + (٢ + ٢م) ي = ١٠ - ٢٢م$$

وقد فرضنا م كمية غير معينة فلنا ان نعين لها اية قيمة شئنا فلنفرض لها قيمة تجعل مسمى ي اي (٢ + م) = ٠ فيصير ذلك الجزء من المعادلة صفراً وتصبح المعادلة

$$(٥ - ٢م) ك = ١٠ - ٢٢م$$

$$(٢) \quad \frac{١٠ - ٢٢م}{٥ - ٢م} = ك$$

وقد فرض ٢ + م = ٠ وبجّل هذه المعادلة م = - $\frac{٢}{٣}$ عوض عن م بهذه القيمة في المعادلة (٢) فتصير

$$ك = \frac{٧٦ - ٢٠ - ٢ \times ٢٢}{١٩ - ١٥ - ٢ \times ٢} = \frac{١٠ - \frac{٢}{٣} \times ٢٢}{٥ - \frac{٢}{٣} \times ٢} = ٤$$

وهذه الطريقة فرنساوية قليلة الاستعمال

وهذه القواعد تستخدم لخراج اي عدد كان من المجاهيل على شرط ان عدد المعادلات المستعملة يعدل عدد المجاهيل

مثال ذلك

$$(١) \quad ا ك + ب ي + س ل = د$$

$$(٢) \quad ا ك + ب ي + س ل = د$$

$$(٣) \quad ا ك + ب ي + س ل = د$$

فنستخرج ك او ي اول حسب ما يوافق شروط المسئلة من ١ و ٢ فلنا معادلة جديدة فيها مجهولان فقط ولنعمل ذلك مع (٢) و (٣) ومع (١) و (٣) فلنا معادلة ثالثة فيها المجهولان اللذان في السابقة ومنها نستخرج احد المجهولين بطريق من الطرق المذكورة

(٧) عسكران مجتمع انارها ٢١١١٠ ومضاعف اكبرها مع ثلاثة امثال اصغرها

يعدل ٥٢٢١٦ فكم عدد اكبرها

لفرض ك = الأكبر وى = الأصغر

(١) بالشرط الأول ك + وى = ٢١١١٠

(٢) بالثاني ك + وى = ٥٢٢١٩

(٣) اضرب (١) في ٢ ك + وى = ٦٢٢٢٠

(٤) اطرح (٢) من (٣) ك = ١١١١١

(٨) مفروض ك + وى = ١٦ و ك - وى = ٦ مطلوب قيمة ك

(١) بالفرض الأول ك + وى = ١٦

(٢) بالثاني ك - وى = ٦

(٣) اضرب (١) في ٢ ك + وى = ٤٨

(٤) يجمع (٢) و (٣) ك = ٥٤

ك = ٦

(٩) مفروض ك + وى = ١٤ و ك - وى = ٢ مطلوب قيمة وى

الجواب وى = ٦

(١٠) في عمود ذي قطعتين اذا اضيف $\frac{1}{2}$ النطعة السفلى الى $\frac{1}{4}$ النطعة العليا

يكون المجموع ٢٨ واذا طرح ٦ امثال النطعة العليا من ٥ امثال النطعة السفلى يبقى ١٢ فاهو طول العمود

لفرض ك = النطعة السفلى وى = العليا

(١) بالشرط الأول $\frac{1}{4} ك + \frac{1}{2} وى = ٢٨$

(٢) بالثاني ٥ ك - ٦ وى = ١٢

(٣) بضرب (١) في ٦ $\frac{3}{2} ك + ٣ وى = ١٦٨$

(٤) بقسمة (٣) على ٦ $\frac{1}{2} ك - وى = ٢٨$

(٥) يجمع (٣) و (٤) $\frac{1}{2} ك + ٢ وى = ١٧٠$

(٦) بالجبر والمجموع ١٧ ك = ١٠٢٠

(٧) بالقسمة ك = ٦٠ = السفلى

ثم بالتعويض عن ك في (٢)

$١٢٠ = وى + ١٦٨$ وى = ٤٨ = العليا

(١١) مطلوب كسر اذا اضيف واحد الى صورته يعادل الكسر $\frac{1}{2}$ وان

اضيف واحد الى مخرجه يعادل الكسر $\frac{1}{2}$

لنفرض ك = الصورة وى = المخرج

$$(١) \text{ بالشرط الأول } \frac{ك}{٢} = \frac{١+ى}{٢}$$

$$(٢) \text{ بالثاني } \frac{ك}{٤} = \frac{ك}{١+ى}$$

$$ك = ٤ = الصورة \quad ى = ١٥ = المخرج$$

(١٢) اى عددان نسبة فضلتهما الى مجتمعها :: ٢ : ٣ ونسبة مجتمعها الى حاصلها

الجواب ١٠ و ٢

٥ : ٣ ::

(١٣) ما عددان حاصل مجتمعها في فضلتهما يعدل ٥ وحاصل مجموع مربعيهما

في فضلة مربعيهما يعدل ٦٥

لنفرض ك = الأكبر ى = الأصغر

$$(١) \text{ بالشرط الأول } (ك + ى) \times (ك - ى) = ٥$$

$$(٢) \text{ بالثاني } (ك + ى) \times (ك - ى) = ٦٥$$

$$(٣) \text{ بضرب الاولى } ك - ى = ٢$$

$$(٤) \text{ بقسمة (٢) على (٣) } ك + ى = ١٢$$

$$(٥) \text{ يجمع (٣) و (٤) } ٢ ك = ١٨$$

$$(٦) ك = ٩ \quad ى = ٣$$

(١٤) اى عددان فضلتهما ٨ وحاصلهما ٢٤٠

(١٥) ما عددان فضلتهما ١٢ ومجموع مربعيهما ١٤٢٤

لنفرض اكبرها = ك واصغرها = ى

$$(١) \text{ بالشرط الأول } ك - ى = ١٢$$

$$(٢) \text{ بالثاني } ك + ى = ١٤٢٤$$

$$(٣) \text{ بمقابلة ى في (١) } ك = ١٢ + ى$$

$$(٤) \text{ بتربيع الجانبين } ك = ١٢ + ى \quad ١٤٤ + ٢٤ ى + ى = ١٤٢٤$$

$$(٥) \text{ بمقابلة ى في (٢) } ك = ١٤٢٤ - ى$$

$$(٦) \text{ بالمساواة بين (٤) و (٥) } ١٤٤ + ٢٤ ى + ى = ١٤٢٤ - ى$$

$$ى = ٢٠ \quad ك = ٣٢$$

(١٦) انقسمت تركة بين عدة ورثة بحيث كان الاول ١٠٠ غرش وعشر

الباقى. والثاني ٢٠٠ غرش وعشر الباقى. والثالث ٣٠٠ غرش وعشر الباقى. والرابع

٤٠٠ غرش وعشر الباقى ولم يجرأ. فوجدان التركة قد انقسمت بينهم بالسوية فكم

كانوا كم حصة كل واحد منهم

لنفرض التركة $ي$ وك حصة كل واحد فيكون $\frac{ي}{١٠}$ عدة الورثة

$$\frac{١٠٠ - ي}{١٠} + ١٠٠ = ك$$

ويبقى $ي - ك$

$$\frac{٢٠٠ - ك - ي}{١٠} + ٢٠٠ = ك$$

ويبقى $ي - ٢ ك$

$$\frac{٣٠٠ - ك - ٢ ي}{١٠} + ٣٠٠ = ك$$

ولهلم جراً وبطرح حصة الأول من حصة الثاني

$$\text{لنا } ١٠٠ - \frac{ك}{١٠} = ٠ \text{ وهكذا ان طرح الثاني من الثالث والثالث من}$$

الرابع ولهلم جراً

$$\text{فلنأخذ هذه المعادلة } ١٠٠ - \frac{ك}{١٠} = ٠$$

$$ك = ٩٠٠ \text{ حصة كل واحد ثم بالتعويض عن ك لنا } ٩٠٠ = ١٠٠ +$$

$$\frac{١٠٠ - ي}{١٠}$$

$$ي = ٨١٠٠ \text{ التركة } \frac{ي}{١٠} = ٨١٠ = \text{عدد الورثة}$$

(١٧) اي عدد من فضلتهما ١٥ ونصف حاصلها يعدل كمب اصغرها

الجواب ٢ و ١٨

(١٨) اي عدد من مجتمعهما ١٠٠ وحاصلها ٢٠٥٩ الجواب ٧١ و ٢٩

(١٩) اقسام ٢٦ الى ثلاثة اقسام بحيث يزيد كل قسم على ما قبله اربعة ويكون

مجتمع مربعاتها ٤٦٤ الجواب ٨ و ١٢ و ١٦

(٢٠) قال حمار لبغل لو زيد على حملي رطل من حملك لكان وزني

مضاعف وزن حملك . فقال البغل ولو زيد على حملي رطل من حملك لصار ثلاثة

امثال حملك . فكم رطلا كانا حاملين

$$ك = \text{البغل} \quad ي = \text{الحمار}$$

لو زيد على حمل الحمار رطل من حمل البغل لكان $ي + ١$ وبقي للبغل $ك - ١$

$$\text{وكان حمل الحمار مضاعف حمل البغل اي } ٢ - ك = ١ + ي$$

$$\text{وان زيد على حمل البغل لنا } ك + ١ = ٢ - ي$$

$$ك = ٢\% \quad ي = ٢\%$$

$$١٦٥ \text{ مفروض } ك + ١ = ١٢$$

$$\text{وأيضاً } ك + ٢ = ١٠$$

$$\text{وأيضاً } ك + ١ = ٤$$

علينا ان نجد قيمة ك وى ول

بالمقابلة لنا من الاولى ك = ١٢ - ١ = ١١

من الثانية ك = ١٠ - ٢ = ٨

من الثالثة ك = ٤ - ١ = ٣

بالمساواة بين الاولى والثانية وبين الثانية والثالثة لنا

$$١٢ - ١ = ١٠ - ٢ = ٤ - ١$$

$$\text{وأيضاً } ١٠ - ٢ = ٤ - ١ = ٣$$

بالمقابلة لنا من الاولى ك = ١٢ - ١ = ١١

ومن الثانية ك = ١٠ - ٢ = ٨

بالمساواة بين هاتين ك = ١٢ - ١ = ١١

وذلك حسب القاعدة لحل مسئلة فيها ثلاث مجهولات فأكثر المذكورة آنفاً

اي ان نستخرج من المعادلات الثلاث معادلتين فيها مجهولان فقط . ونستخرج

من هاتين واحدة فيها مجهول واحد فقط

$$(٢١) \text{ مفروض } (١) \text{ ك } + ١ = ١٢$$

$$\text{أيضاً } (٢) \text{ ك } + ٢ = ١٠$$

$$\text{أيضاً } (٣) \text{ ك } + ١ = ٤$$

المطلوب قيمة ك وى ول

$$(٤) \text{ بطرح الثانية من الاولى } ١٢ - ١ = ١٠ - ٢$$

$$(٥) \text{ بطرح (٢) من (١) } ١٢ - ١ = ١٠ - ٢$$

$$(٦) \text{ بطرح (٥) من (٤) } ١٢ - ١ = ١٠ - ٢$$

ثم لكي نجد ك وى نعوض عن ل بقيمتها ونحول المعادلات كما تقدم

$$\text{فلما في (٥) } ١٨ = ١٠ + ٢ = ٨$$

$$\text{وفي (٦) } ١٢ = ٥ + ٤ = ٣$$

(٢٢) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات الثلاث

- (١) مفروض ك + ي + ل = ١٢
 (٢) ايضاً ك + ي + ل = ٢٠
 (٣) ايضاً $\frac{1}{2}ك + \frac{1}{2}ي + ل = ٦$
 (٤) اضرب الاولى في ٢ $٢ك + ٢ي + ٢ل = ٢٦$
 (٥) اطرح (٢) من (٤) $٢ك + ٢ي = ١٦$
 (٦) اطرح (٣) من (١) $\frac{1}{2}ك + \frac{1}{2}ي = ٦$
 (٧) بالجبهر $٢ك + ٢ي = ٢٦$
 (٨) اضرب (٥) في ٢ $٤ك + ٤ي = ٤٨$
 (٩) بطرح (٧) من (٨) $٢ك = ١٢$ $ك = ٦$
 (١٠) بنحويل (٧) $ي = ٤$ (١١) بنحويل (١) $ل = ٢$
 (١٢) مفروض $ك + ي = ت$
 (١٣) $ك + ل = ب$
 (١٤) $ي + ل = س$

مطلوب ك و ي ول
 الجواب ك = $\frac{ت + ب - س}{٢}$ ي = $\frac{ت + س - ب}{٢}$ ل = $\frac{ب + س - ت}{٢}$

(١٢٤) زيد وعبد وبكر تشاركوا في شراء فرس ثمنه مئة دينار فلو أخذ ماع
 زيد ونصف ماع عبید كان المجموع ثمن الفرس. ولو أخذ ماع عبید وثلاث ماع
 بكر لكان المجموع ثمن الفرس. ولو أخذ ماع بكر ورابع ماع زيد لكان المجموع ثمن
 الفرس. فكم كان مع كل واحد منهم

لنفرض ك = زيد ي = عبید ل = بكر

(١) بالشرط الاول $ك + \frac{1}{2}ي = ١٠٠$

(٢) بالثاني $ي + \frac{1}{4}ل = ١٠٠$

(٣) بالثالث $ل + \frac{1}{2}ك = ١٠٠$

ك = ٦٤ ي = ٧٢ ل = ٨٤

(١٢٥) ثلاثة رجال اشتروا كرمًا بمئة دينار. فلو أخذ ماع الاول ونصف ماع
 الثاني كان المجموع ثمن الكرم. ولو أخذ ماع الثاني وثلاث ماع الثالث كان المجموع ثمن
 الكرم. ولو أخذ ماع الثالث ورابع ماع الاول كان المجموع ثمن الكرم. فكم ديناراً مع
 كل واحد منهم الجواب الاول = ٦٤ الثاني = ٧٢ الثالث = ٨٤ ديناراً

(٢٦) ملك عنده ثلاث كنائب من العساكر احلها اترك والثانية عرب والثالثة اعجم. فامر ان نهب احدى الطوائف على قلعة ووعد ان يعطي الجميع ٩٠١ من الدنانير غير انة يعطي كل نفر من الطائفة الهامة ديناراً واحداً وبوزع ما بقي على الطائفتين الاخرين بالمساواة. فلو هجمت الاتراك لاصاب كل نفر من الاخرين نصف دينار. ولو هجمت العرب لاصاب كل نفر من الاخرين ثلث دينار. ولو هجمت الاعجم لاصاب كل نفر من الاخرين ربع دينار. فكم نفراً كان في كل طائفة

لنفرض الاتراك = ك والعرب = ي والاعجم = ل

ولنفرض ك + ي + ل = س اي مجموع الثلاثة. فان هجمت الاتراك فلنا البقية

= س - ك وللاتراك دينار واحد لكل نفر. وللبقية نصف دينار لكل نفر اي ك +

$\frac{1}{2}$ س - $\frac{1}{2}$ ك = ٩٠١ وان هجمت العرب فلنا ي + $\frac{1}{4}$ س - $\frac{1}{4}$ ي = ٩٠١ وان

هجمت الاعجم فلنا ل + $\frac{1}{4}$ س - $\frac{1}{4}$ ل = ٩٠١

ك = ٢٦٥ ي = ٥٨٢ ل = ٦٨٩

(٢٧) زيد عمرو وبكر سافروا الى جهات مختلفة. وكان مجموع اسفارهم ٦٢

ميلاً. وكان سفر زيد اربعة امثال سفر بكر مع مضاعف سفر عمرو. و١٧ مثل سفر

بكر تعدل مضاعف سفر زيد مع ثلاثة امثال سفر عمرو. فكم ميلاً سافر كل واحد منهم

زيد = ٤٦ عمرو = ٩ بكر = ٧

(٢٨) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات

$\frac{1}{2}$ ك + $\frac{1}{4}$ ي + $\frac{1}{4}$ ل = ٦٢

$\frac{1}{4}$ ك + $\frac{1}{4}$ ي + $\frac{1}{2}$ ل = ٤٧

$\frac{1}{4}$ ك + $\frac{1}{2}$ ي + $\frac{1}{4}$ ل = ٢٨

الجواب ك = ٢٤ ي = ٦٠ ل = ١٢٠

(٢٩) مفروض ك ي = ٦٠٠ ك ل = ٢٠٠

ى ل = ٢٠٠ مطلوب قيمة ك ول وى

ك = ٢٠ ي = ٢٠ ل = ١٠

١٦٦ على هذه الكيفية نحل اربع معادلات فاكتر. اي يستخرج من الاربع ثلاثاً

ومن الثلاث اثنين وملم جراً

(٣٠) مطلوب قيمة ك وى ول وى من هذه المعادلات

اربع معادلات	$\frac{1}{2}ي + ل + \frac{1}{2}ن = ٨$	(١) مفروض
	$ك + ي + ن = ٩$	(٢) مفروض
	$ك + ي + ل = ١٢$	(٣) مفروض
	$ك + ن + ل = ١٠$	(٤) مفروض
ثلاث معادلات	$١٦ = ي + ل + ٢ن$	(٥) مجبر الاولى
	$٢ = ن - ل$	(٦) بطرح (٢) من (٢)
	$٢ = ن - ي$	(٧) بطرح (٤) من (٢)
معادلتان	$١٩ = ي + ل$	(٨) يجمع (٥) و (٦)
	$١ = ي + ل - ٢$	(٩) بطرح (٧) من (٦)
الكليات المطلوبة	$٥ = ل \quad ٢٠ = ل$	(١٠) يجمع (٨) و (٩)
	$٤ = ي \quad ١٩ = ي - ل$	(١١) بمقابلة (٨)
	$٢ = ل - ي \quad ١٢ = ك$	(١٢) بمقابلة (٢)
	$٢ = ن - ك - ي$	(١٣) بمقابلة (٢)
مطلوب ك و ي ول ون	$٥٠ = ن + ك$	(١٤) مفروض
	$٢ = ي + ١٢٠ = ك$	
	$٢ = ي + ١٢٠ = ل$	
	$٢ = ن + ١٩٥ = ل$	

$$ن = ١٠٠ \quad ك = ١٥٠ \quad ي = ٩٠ \quad ل = ١٠٥$$

(٢٢) مطلوب عدد ذوقين احدها في منزلة الآحاد والآخر في منزلة العشرات . والذي في منزلة العشرات يعدل ثلاثة امثال الآخر . واذا طُرِحَ ١٢ من العدد نفعه يعدل الباقي منه مربع الرقم الذي في منزلة العشرات لنفرض ك = الذي في منزلة العشرات وي = الذي في منزلة الآحاد . فوقع ك في منزلة العشرات بزيده عشرة امثال ما كان لو وقع في منزلة الآحاد . فلنا

$$١٠ + ك = العدد$$

وبشروط المسئلة ك = ٢ ي

وابيضاً ١٠ ك + ي - ١٢ = ك

$$ك = ٩٢$$

(٢٣) مطلوب ثلاثة اعداد يكون الأول مع نصف الآخرين ٢٤ والثاني مع ثلث

الآخرين ٢٤ والثالث مع ربع الآخرين ٢٤ الجواب ١٠ و ٢٢ و ٣٦

(٢٤) مطلوب عدد ذو رقمين مجموعهما ١٥ وإذا أُضيف ٢١ الى حاصلها

تنقلب رتبة الرقمين اي الذي كان في منزلة الآحاد يصير في منزلة العشرات وبالعكس

الجواب ٧٨

(٢٥) اي عدد ذي رقمين اذا انقسم على حاصل رقمين يخرج اثنان. وإذا أُضيف

٢٧ الى العدد نفسه تنقلب رتبة رقميه الجواب ٢٦

(٢٦) ما عددان اذا طُرِحَ الاصغر من ثلاثة امثال الاكبر بقي ٢٥ وإذا انقسم

اربعة امثال الاكبر على ثلاثة امثال الاصغر مع واحد يكون الخارج نفس العدد الاصغر

الجواب ١٢ و ٤

(٢٧) اي كسر اذا أُضيف ٢ الى صورته تكون قيمته $\frac{1}{4}$ وإذا طُرِحَ واحد من

مخرجيه تكون قيمته $\frac{1}{4}$ الجواب $\frac{21}{4}$

(٢٨) رجل له فرسان وسرج قيمته ١٠ دنانير. فاذا وُضِعَ السرج على الفرس

الأول تكون قيمته مضاعف قيمة الفرس الثاني. وإذا وُضِعَ على الثاني تكون قيمته اقل

من قيمة الأول بثلاثة عشر ديناراً. فكم قيمة الفرسين الجواب ٥٦ و ٢٣ ديناراً

(٢٩) اقسام ٩٠ الى اربعة اقسام بحيث اذا أُضيف الى الأول ٢ وطُرِحَ من

الثاني ٢ وضُرِبَ الثالث في ٢ وانقسم الرابع على ٢ تكون الاقسام كلها متساوية

لتفرض ثلاثة اقسام ك وى ول فيكون الرابع ٩٠ - ك - ي - ل

فلنا ك + ٢ = ي - ٢

و ك + ٢ = ل

و $\frac{٩٠ - ك - ي - ل}{٣} = ل$

الجواب ١٨ و ٢٢ و ١٠ و ٤٠

(٤٠) ما ثلاثة اعداد يكون الأول منها مع نصف مجموع الثاني والثالث ١٢٠

والثاني مع $\frac{1}{4}$ فضلة الثالث والأول ٧٠ ونصف مجموع الثلاثة ٢٥

(٤١) ما عددان النسبة بين فضلتهما ومجموعهما وحاصلهما كالنسبة بين ٢ و ٣ و ٥

الجواب ١٠ و ٢

(٤٢) رجل باع ٢٠ رطلاً من الخمر الاسود و ٢٠ رطلاً من الاصفر وكان ثمن

المجموع ١٢٠ غشاً. ثم باع ٢٠ رطلاً من الاسود و ٢٥ رطلاً من الاصفر بالسعر الأول

وبلغ ثمن الجميع في المرة الثانية ١٤٠ غرشاً . فكم كان ثمن الرطل من كل صنف
الجواب الاسود = ٢ غروش والاصفر = غرشين

(٤٢) رجل مزج خمراً بماء ولو زاد من كل صنف ٦ ارطال لكان في المزيج
٧ ارطال من الخمر لكل ٦ ارطال من الماء . ولو نقص من كل صنف ٦ ارطال
لكان في المزيج ٦ ارطال خمر لكل ٥ ارطال ماء . فكم رطلاً مزج من كل صنف
الجواب الخمر = ٧٨ والماء = ٦٦ رطلاً

(٤٤) اي كسر اذا تضاعفت صورته واُضيف ٧ الى مخرجه تكون قيمته $\frac{1}{2}$ واذا
تضاعف المخرج واُضيف ٢ الى صورته تكون قيمته $\frac{1}{4}$ الجواب $\frac{1}{4}$

(٤٥) رجل اشترى من التفاح والليمون ثلاثين غرشاً . وكان كل اربع تفاحات
بغرش وكل خمس ليمونات بغرش ايضاً . ثم باع نصف التفاح و $\frac{1}{4}$ الليمون بسعر ما
اشترى فبلغ الثمن ١٢ غرشاً فكم اشترى من كل صنف

الجواب التفاح = ٧٢ والليمون = ٦٠

(٤٦) استعلم مال كل واحد من ثلاثة اشخاص ا وب و ت على افتراض
(١) ان مال ا مع ل مرة مال ب و ت = ف (٢) ان مال ب مع م مرة
مال ا و ت = ق (٣) ان مال ت مع ن مرة مال ا وب = ر
افرض مجموع مال ا وب و ت = ص

الجواب = $\frac{ل-ص}{١-٢} - \frac{م-ص}{١-٣} - \frac{ق-ن}{١-٤}$

(٤٧) استعلم قيمة رزق كل واحد من ستة اشخاص ا ب ت ث ج ح على
افتراض (١) ان مجموع رزق ا وب = د ومجموع رزق ت و ث = س ومجموع
رزق ج و ح = ص (٢) ان رزق ا = م مرة رزق ت ورزق ت = ن مرة
رزق ج ورزق ح = ف مرة رزق ت
هذه المسئلة تحل بجهول واحد وستة مجاهيل

١٦٧ متى وُجد ك' ي' اوك' ي في كل جزء من المعادلتين تكونان على

احدى هاتين الهيئتين ت ك' + ب ك' ي + س ي' = د

ث ك' + ب ك' ي + س ي' = د

ولحلها افرض ك = ف ي اذا ك' = ف ي'

وبالتعويض عن ك' وك في المعادلتين لنا

$$\begin{aligned} \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} &= \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} \\ \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} &= \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} \end{aligned}$$

وبالمساواة بين هاتين لنا

$$\begin{aligned} \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} &= \text{ث ف ي} + \text{ب ف ي} + \text{س ي} \\ (\text{ث د} - \text{ث د}) + (\text{ب د} - \text{ب د}) + (\text{س د} - \text{س د}) &= 0 \text{ وهي معادلة} \\ \text{مربعة محل} &\text{ باتمام التريع كما تقدم} \end{aligned}$$

$$(1) \text{ مفروض } 20 = \text{ك ي} + \text{ك ي} + \text{ك ي} = 30$$

$$41 = \text{ك ي} + \text{ك ي} + \text{ك ي}$$

$$\text{افرض ك = ف ي} \quad \text{ثم بالتعويض لنا}$$

$$20 = \text{ك ي} + \text{ك ي} + \text{ك ي} = 30$$

$$41 = \text{ك ي} + \text{ك ي} + \text{ك ي}$$

$$\text{ثم بالمساواة} \quad \frac{20}{41} = \frac{30}{41}$$

$$6\text{ف} - 41\text{ف} = 12 - 13\text{ف} \quad \text{ف} = \frac{1}{2} \text{ او } \frac{1}{2}$$

$$\text{ثم بالتعويض عن ف لنا}$$

$$9 = \frac{279}{41} = \frac{41}{41} = \frac{41}{41} = \text{ك ي} = \frac{41}{41}$$

$$1 = 2 \times \frac{1}{2} = \text{ك ي} = \text{ك ي} = 1$$

$$(2) \text{ ما عددان اذا ضرب مجتمعهما في اكبرها يحصل 77 واذا ضربت فضلها}$$

$$\text{في اصغرهما يحصل 12}$$

$$\text{افرض ك = اكبرها و ي = اصغرهما}$$

$$\text{فلنا ك} + \text{ك ي} = 77$$

$$\text{و ك ي} - \text{ك ي} = 12$$

$$\text{لنفرض ك = ف ي فلنا ف ي} + \text{ف ي} = 77 \quad \text{ك ي} = \frac{77}{2}$$

$$\text{وايضاً ف ي} - \text{ك ي} = 12 \quad \text{ك ي} = \frac{12}{2}$$

$$\text{بالمساواة} \quad \frac{77}{2} = \frac{12}{2} \quad \text{ف} = \frac{1}{2} \text{ او } \frac{1}{2}$$

$$\text{ك ي} = 4 \quad \text{ك ي} = 7$$

$$(3) \text{ اي عددان فضلته مربعيهما 56 ومجموع مربع اصغرهما مع } \frac{1}{2} \text{ حاصلها 40}$$

$$\text{الجواب 9 و 5}$$

$$(4) \text{ اي عددان ثلاثة امثال مربع اكبرهما مع مضاعف مربع اصغرهما = 110}$$

ونصف حاصلها مع مربع الاصغر = ٤ الجواب ٦ و ١

١٦٨ متى ترقى المجهولان الى قوة واحدة لا تنحل المعادلة حسباً تقدم بل تستعمل

طريقة اخرى نوضحها هنا وعليها تنحل كل مسألة واقعة تحت هذه القضية . وهي

مفروض مجنوع عددان ومجنوع القوة التونية منها علينا ان نجد العددان على شرط

ان لا يتجاوز القوة التاسعة

مفروض كيمتان اكبرهما ك واصغرهما ي

مفروض ايضاً ك + ي = ٢ س ك - ي = ٢ ل

ثم بالمجمع ك = س + ل وبالطرح ي = س - ل

ثم لنفرض ك + ي = ت ك - ي = ب

ك + ي = ر ك + ي = د وهلم جرا فنجد قيمة ك وي في اجزاء من

المعلومات ت ب ر د س على هذا الاسلوب

(١) ك = (س + ل) = ٢ س + ٢ ل

ي = (س - ل) = ٢ س - ٢ ل

بالمجمع ك + ي = ت اي ت = ٢ س + ٢ ل

ل = $\frac{ت - ٢ س}{٢}$ فلنا قيمة ك وي اي ك = س + $\frac{ت - ٢ س}{٢}$

ي = س - $\frac{ت - ٢ س}{٢}$

(٢) ك = (س + ل) = ٢ س + ٢ ل

ي = (س - ل) = ٢ س - ٢ ل

ك + ي = ٢ ف ٢ = ٢ س + ٢ ل

ل = $\frac{٢ - ٢ س}{٢}$

فلنا قيمة ك وي بالتعويض اي

ك = س + $\frac{٢ - ٢ س}{٢}$ ي = س - $\frac{٢ - ٢ س}{٢}$

(٣) ك = (س + ل) = ٤ س + ٤ ل

ي = (س - ل) = ٤ س - ٤ ل

ك + ي = ٨ اي ٨ = ٤ س + ٤ ل

فلنا قيمة ل كما تقدم ثم نبعوض بها عن ك وي

(٤) ك = (س + ل) = ٥ س + ٥ ل

٥ س + ٥ ل

ي = (س - ل) = ° = س - ٥ س ل + ١٠ س ل - ١٠ س ل +
 ٥ س ل - ل ك + ي اي د = ٢ س + ٢٠ س ل + ١٠ ي ل وفي معادلة
 مربعة نستعلم منها قيمة ل ثم قيمة ك وي كما تقدم

١٦٩ مفروض ك + ي = ٢ س وك - ي = ٢ ل

ثم لنفرض $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ت$ $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ب$

$\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ر$ $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = د$

ثم بواسطة المعادلات المتقدمة (١٦٨) نجد قيمة ك وي في اجزاء من المعلومات

س ت ب ر د

(١) $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ت$ $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ي$ $ت = (س - ل) \times (س + ل)$

$ت = (س - ل) \times (س + ل)$

وحسب (١٦٨) (١) لنا $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ٢ س + ٢ ل$

فاذا $ت = ٢ س - ٢ ل = ٢ ل + ٢ س$

$\frac{ك}{ي} = \frac{٢(س - ل)}{٢ + ت}$ $\frac{ك}{ي} = \frac{٢(س - ل)}{٢ + ت}$

ثم $ك = س + \frac{٢(س - ل)}{٢ + ت}$

$ي = س - \frac{٢(س - ل)}{٢ + ت}$

(٢) $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ب$ $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ي$ $ب = (س - ل)$

حسب (١٦٨) (٢) لنا $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ٢ س + ٢ ل$ اي $ب = (س - ل)$

$٢ س + ٢ ل = ٢ س - ٢ ل$

ثم $\frac{ك}{ي} = \frac{٢(س - ل)}{٢ + ب}$ $\frac{ك}{ي} = \frac{٢(س - ل)}{٢ + ب}$

$ك = س + \frac{٢(س - ل)}{٢ + ب}$ $ي = س - \frac{٢(س - ل)}{٢ + ب}$

(٣) $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ر$ $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ي$ $ر = (س - ل)$

ثم حسب (١٦٨) (٣) لنا

$\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ٢ س + ٢ ل$ اذا

$ر = (س - ل) = ٢ س + ٢ ل$ وفي معادلة مربعة نستعلم

منها قيمة ل وكذلك قيمة ك وي حسبنا تقدم

(٤) $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = د$ $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ي$ $د = (س - ل)$

وحسب (١٦٨) (٤) لنا $\frac{ك}{ي} + \frac{ك}{ي} = ٢ س + ٢ ل$ اذا

٢ س + ٢٠ س ل + ١٠ س ل = د (س - ل) وفي معادلة مربعة نستعلم
منها قيمة ل كما تقدم

١٧٠ مفروض ك + ي = س ك ي = ف

فجد قيمة اية قوة فُرِضَتْ من ك وى في اجزاء من المعلومتين س وف هكذا

$$(١) \text{ ك } + ٢ \text{ ك ي } + ٢ \text{ ي } = \text{س}$$

$$\text{ك } + \text{ ي } = \text{س} - ٢ \text{ ك ي} - ٢ \text{ ف}$$

$$(٢) (\text{ك } + \text{ ي }) (\text{ك } + \text{ ي}) = (\text{ك } + \text{ ي}) (\text{س} - ٢ \text{ ف}) \times \text{س}$$

$$\text{ك } + \text{ ي } + \text{ ك ي } (\text{ك } + \text{ ي}) = \text{س} - ٢ \text{ ف س} \quad \text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ف س}$$

$$= \text{س} - ٢ \text{ ف س}$$

$$(٣) (\text{ك } + \text{ ي }) (\text{ك } + \text{ ي}) = (\text{ك } + \text{ ي}) (\text{س} - ٢ \text{ ف س})$$

$$\text{ك } + \text{ ي } + \text{ ك ي } (\text{ك } + \text{ ي}) = \text{س} - ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ف} (\text{س} - ٢ \text{ ف}) = \text{س} - ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } = \text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف}$$

$$(٤) (\text{ك } + \text{ ي}) (\text{ك } + \text{ ي}) = (\text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف}) (\text{س})$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ك ي } (\text{ك } + \text{ ي}) = \text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك } + \text{ ي } + \text{ ف} (\text{س} - ٢ \text{ ف}) = \text{س} - ٤ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف س}$$

$$\text{ك } + \text{ ك } = \text{س} - ٥ \text{ ف س} + ٥ \text{ ف س}$$

$$\text{ومطلقاً} \quad \text{ك } + \text{ ي } = \text{س} - ٢ \text{ ف س} + ٢ \text{ ف} \quad \text{ن} \quad \left(\frac{٢ - \text{ن}}{٢} \right) \text{ ف س} \quad \text{الى آخره}$$

مثال (١) ما عددان مجتمعهما ٦ ومجموع قوتيهما الخامستين ١٠٥٦

انظر (١٦٨) (٤)

$$\text{س} = ٢ \quad \text{د} = ١٠٥٦ \quad \text{فلنا لكي نجد قيمة ل}$$

$$\text{س} = ٢٠ \quad \text{س ل} + ١٠ \text{ س ل} = \text{د} \quad \text{اي}$$

$$١٠٥٦ = ٤٠ \text{ ل} + ٢٠ \text{ ل}$$

$$\text{ل} + ١٨ \text{ ل} = ١٩ \quad \text{ل} = ١$$

$$\text{ك} = \text{س} - ١ = ٢ - ١ = ١ \quad \text{ي} = \text{س} - ١ = ٢ - ١ = ١$$

(٢) ما عددان مجتمعهما ١٨ ومربع الأكبر على الأصغر مربع الأصغر على

الأكبر ٢٧

انظر (١٦٩) (٢) س = ١ ب = ٢٧

$$\begin{aligned} ٢ = ٦٦ &= \frac{٨١ \times ٩}{٥٤ + ٢٧} \quad ٦ = \frac{٢(٣ - س)س}{٦ + س} \quad ٦ = ل \\ ك = س + ل = ٢ + ٩ = ١٢ \quad ١٢ = ٢ + ٩ = ل - س = ١٢ - ٩ = ٣ \\ (٢) \text{ عددان مجتمعهما } ٥ \text{ وحاصلهما } ٦ \text{ فاهو مجموع قوتيهما الرابعتين} \\ \text{انظر (١٧٠) (٢)} \\ ك + ٤ = س - ٤ - ف س + ٢ = ف \quad ٩٧ = ٧٢ + ٦٠٠ - ٦٢٥ = ٢ + ف \end{aligned}$$

١٧١ متى كانت المعادلات الناتجة من مسئلة أكثر من عدد المجهولات المتضمنة فيها تكون بعضها اما متناقضة واما فضولاً. فنال المتناقضة ٢ = ك = ٦٠ / ٢ = ك = ٣٠ لان بالاولى ك = ٢٠ وبالثانية ك = ٤٠ ولو غيرنا الثانية حتى نصير ٢ / ٢ = ك = ١٠ لكنت فضولاً لان قيمة ك تُستعمل بدونها. وان كان عدد المعادلات اقل من عدد المجهولات في المسئلة تكون المسئلة سيالة اي اجوبتها كثيرة. وسياقي الكلام على بعض انواع هذه المسائل في محله

١٧٢ في حل المسائل المتضمنة عدة مجاهيل المتعلم باب واسع لاستعمال فطنته في اختراع طرق لتسهيل العمل. وهذه الطرق لا تنحصر في قواعد معلومة

$$(١) \text{ فلو فرض } ١٢ = م + ك + ٤ = س$$

$$(٢) \text{ م + ك + ل = ١٧}$$

$$(٣) \text{ م + ٤ + س = ١٨}$$

$$(٤) \text{ ك + ٤ + ل = ٢١}$$

فلنفرض مجتمع المجاهيل اي ك + ٤ + م + ل = س

ثم في الاولى نجد الجميع الا ل اي س - ل = ١٢

في الثانية نجد الجميع الا س اي س - ٤ = ١٧

في الثالثة نجد الجميع الا ك اي س - ك = ١٨

في الرابعة نجد الجميع الا م اي س - م = ٢١

بالجمع ٤ = س - ل - ٤ - س - م - ك = ٦٩

اي ٤ = س - (ل + ٤ + م + ك) = ٦٩

اي ٤ = س - س = ٦٩ = س - س = ٢٣

$$\begin{array}{ll} \text{ثم بالمعروض } ٢٣ - \text{ل} = ١٢ & \text{ل} = ١٠ \\ ٢٣ - \text{ى} = ١٧ & \text{ى} = ٦ \\ ٢٣ - \text{ك} = ١٨ & \text{ك} = ٥ \\ ٢٣ - \text{م} = ٢١ & \text{م} = ٢ \end{array}$$

براهين على نظريات بالمعادلات

١٧٣ في ما تقدم استخدمنا المعادلات لحل مسائل عملية . وهي نتمعمل ايضاً في برهان النظريات كما ترى هنا

نظرية اولى . اربعة امثال حاصل كيتين يعدل مربع مجتمعهما الا مربع فضلتهما لنفرض اكبرها = ك اصغرها = ى
مجتمعهما = س فضلتهما = د

(١) بالشروط ك + ى = س (٢) ك - ى = د

(٢) بالجمع ٢ ك = س + د

(٤) بالطرح ٢ ى = س - د

(٥) بضرب (٢) في (٤) ٤ ك ى = س^٢ - د^٢

نظرية ثانية . مجموع مربعي كيتين يعدل مربع فضلتهما مع مضاعف حاصلهما لنفرض ك = الاكبر ى = الاصغر
د = فضلتهما ف = حاصلهما

(١) بالشروط ك - ى = د (٢) ك ى = ف

(٢) بتربيع الاولى ك^٢ - ٢ ك ى + ى^٢ = د^٢

(٤) بضرب الثانية في ٢ ٢ ك ى = ٢ ف

(٥) يجمع هاتين ك^٢ + ى^٢ = د^٢ + ٢ ف

نظرية ثالثة . نصف فضلة كيتين مع نصف مجتمعهما يعدل اكبرها . ونصف مجتمعهما الا نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

لنفرض (١) ك + ى = س (٢) ك - ى = د

(٢) بالقسمة على ٢ ١/٢ ك + ١/٢ ى = ١/٢ س

(٤) ايضاً ١/٢ ك - ١/٢ ى = ١/٢ د

(٥) يجمع هاتين ك = ١/٢ س + ١/٢ د

(٦) بطرحها $ي = \frac{1}{2}س - \frac{1}{3}د$
وقس على ذلك نظائرهُ

في القيمة السلبية التي تخرج من حل معادلة

(١) مطلوب عدد اذا أضيف الى $ب = ١$

لنفرض $ك =$ العدد المطلوب ثم $ك + ب = ١$ $ك = ١ - ب$

وهذه العبارة العامة تدل على قيمة $ك$ في كل مسألة خصوصية من هذا النوع . مثاله

لنفرض $١ = ٤٧$ و $ب = ٢٩$

فحينئذ $ك = ١٨ = ٢٩ - ٤٧$

ثم لنفرض $١ = ٢٤$ و $ب = ٢١$ فحينئذ $ك = ٢٤ - ٢١ = ٣$

اي قيمة $ك$ سلبية وكمية سلبية مجردة ليس لها وجود اي $٧ -$ مجردة لاجود لها

ولكنها موجودة جبرياً او نسبياً واذا أضيف $٧ -$ الى ٢١ جبرياً يكون المجموع ٢٤

وذلك يستوفي شروط المسئلة ونصح بها المعادلة ويمكننا تركيب مسئلة جبرية (لا مجردة)

توافق هذه الشروط فاذا فرضنا ان مجموع مال شخصين $= ١٢٠$ درهماً ومال الواحد

منها ١٦٠ درهماً اكثر من مال الآخر فما هو مال كل واحد منها

الجواب $= ١٤٠$ درهماً و $- ٢٠$ درهماً ولكن $- ٢٠$ لاجود لها فيؤخذ على معنى

الدين الذي علامته عكس علامة ما في اليد

(٢) رجل عاش سنين $= ١$ وابنه عاش سنين $= ب$. في كم سنة يكون عمر

الابن $\frac{1}{4}$ عمر الاب

لنفرض $ك =$ السنين المطلوبة

ثم $١ + ك =$ عمر الاب عند نهاية المدة المطلوبة

$ب + ك =$ عمر الابن عند نهاية المدة المطلوبة

ثم بشروط المسئلة $\frac{١+ك}{٤} = ب + ك$ $ك = \frac{٤-١}{٣}ب$

فلنفرض $١ = ٥٤$ و $ب = ٩$ ثم $ك = \frac{٢٦-٥٤}{٣} = \frac{١٨}{٣} = ٦$

فاذا كان عمر الاب ٥٤ سنة وعمر الابن ٩ سنين بعد ٦ سنين يكون عمر الاب

٦٠ سنة وعمر الابن ١٥ سنة وه اربع ٦٠ اي

$ك = ٦$ يستوفي شروط المسئلة

ثم لنفرض $١ = ٤٥$ و $ب = ١٥$ ثم $ك = \frac{٦٠-٤٥}{٣} = ٥$

فاذا عوضنا عن ك بهذه القيمة في المعادلة السابقة اي $\frac{1}{4} + ك = ب + ك$ نصير $\frac{٤٥}{٤} - ١٥ = ٥ - ١٠$ اي ك = ١٠ فقيمة ٥ يستوفي شروط المعادلة كما ان قيمة ٦ + يستوفي شروط المسئلة فالجواب الاجمالي يدل على ان عمر الاب يكون اربعة امثال عمر الابن بعد ٦ سنين والجواب السليبي يدل على ان عمر الاب كان ٤ امثال عمر الابن قبل بخمس سنين فالمسئلة تطلب الوقت الذي فيه يكون عمر الاب ٤ امثال عمر الابن وعدد افتراض المسئلة لاجل اصطناع المعادلة ففرض ذلك الوقت مستقبلاً وبالاقتراض الثاني اقتضى ان يكون ذلك الوقت قد مضى ودلت على ذلك العلامة السلبية في الجواب

ولاجل تحصيل جواب اجمالي بالاقتراض الثاني تغيّر المسئلة اي يقال كم سنة مضت منذ كان عمر الاب ٤ امثال عمر الابن فان فرضنا ك = السنين المطلوبة لنا بشروط المسئلة

$$\frac{١ - ك}{٤} = ب = ك \text{ وك } = \frac{٤ - ب}{٣} = ٥ \text{ وان فرض ك } = ٤٥ \text{ وب } = ١٥$$

ك = ٥

(٢) رجلٌ عند ما تزوّج كان عمره ٣٠ سنة وعمر امرأته ١٥ سنة فبعد كم سنة يكون عمره ثلاثة امثال عمر امرأته

الجواب $\frac{٧}{٢}$ سنين قبل ما تزوّجا وفي لفظ المسئلة خلل اي يجب ان يسأل كم سنة قبل ما تزوّجا كان الخ

فما تقدم لنا هذه القواعد الاربع من جهة القيمة السلبية

(١) في كل معادلة من الدرجة الاولى القيمة السلبية للجهول

بعلاقتها الواجبة توافق المعادلة التي استعملت منها

(٢) وهذه القيمة السلبية بعلاقتها الواجبة توافق شروط المسئلة على

معنى جبري

(٣) اذا اخذت قيمة ايجابية على معنى تؤخذ القيمة السلبية الى

عكسه (انظر عدد ١٣ صفحة ٦)

(٤) القيمة السلبية بعد بدل علامتها توافق المسئلة بعد تغيير

عباراتها بحيث صارت الكميات المضافة مطروحة والمطروحة مضافة

(٤) أي كسر اذا أضعف واحد الى صورته بصير $\frac{1}{7}$ وإذا أضعف واحد الى مخرجه بصير $\frac{1}{7}$

هذا الكسرايس له وجود حسابياً ولكن العبارة الجبرية $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ توافق شروط المسئلة
(٥) جسمان تحركا الى جهة واحدة من نقطتين بينها اميال = ١ الواحد على سرعة ن ميل كل ساعة والآخر لحته على سرعة م ميل كل ساعة ففي كم ساعة يدرك الثاني الأول
الجواب في $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ساعة

على اي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة صفرًا
الجواب اذا كان $n < m$

$$\text{فلنفرض } m = 20 \text{ ون } n = 25 \text{ و } 60 = \text{ميلاً}$$

$$\text{ثم } k = \frac{60}{20} - \frac{60}{25} = \frac{12}{5} = 2.4$$

ومعنى ذلك ان الثاني لا يمكنه ان يلحق الأول لان حركته ابطأ وعند الانطلاق كانت المسافة بينهما ٦٠ ميلاً وهي تزيد كل ساعة وعلى افتراض حركتها قبل ذلك على هذا النسق نفسه كانا معاً في وقت ما قبل الوقت المفروض فيجب ان يقال بين جسمين ٦٠ ميلاً وهما يتحركان الى جهة واحدة الواحد على سرعة ٢٥ ميلاً كل ساعة والآخر على حركة ٢٠ ميلاً كل ساعة فكم ساعة منذ كانا معاً
ثم لنفرض $k =$ الساعات المطلوبة

$$\text{و } 20 = k = \text{المسافة التي قطعها الأول}$$

$$20 = k = \text{المسافة التي قطعها الثاني}$$

$$\text{والآن بينهما } 60 \text{ ميلاً أي } 20 = k + 60 \quad 0 = k + 60 \quad 12 = k + 60$$

فلنا للمجهول قيمة ايجابية
ولاجل اشغال كلا الحالتين تكون المسئلة مطلوب وقت كونها معاً بدون تعيين الماضي او المستقبل

في ما قيمته $\frac{1}{2}$

(٦) على اي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها صفرًا وما هو معنى ذلك

الجواب اذا كان $a = 0$ والمعنى انها معاً وقت الافتراض اذا خرجت قيمة المجهول صفرًا فقد توافق شروط المسئلة وقد تدل على كون المسئلة محالاً او متضمنة محالاً

في ما قيمته $\frac{1}{2}$

(٧) على اي افتراض تصير قيمة المجهول لهذه المسئلة نفسها $\frac{1}{2}$ وما هو معنى ذلك

الجواب اذا كان $m = n$

اذا كانت بينهما مسافة وتحركا على سرعة واحدة الى جهة واحدة لا يمكن ان يدرك احدهما الآخر فالعبارة $\frac{1}{2}$ تدل على محال وهي نعتقد للدلالة على عدم النهاية وذلك لانه اذا كانت فضلة m ون اي $m - n$ صغيرة جدا يكون الخارج $m - n$ كبيرا جدا . مثالا لنفرض $m - n = 0.1$

ثم $k = m - n = 0.1$ و $1100 = 1100$ واذا فرضنا $m - n = 0.0001$

ثم $m - n = 0.0001 = 0.0001$

فان لم يكن الفرق بين حركتيها صفرا لا بد من التفائهما معا بعد مدة من المدة وتلك المدة تزيد كلما قل الفرق بين الحركتين فان فرضنا ذلك الفرق اقل من اصغر كمية مدركة يكون $m - n$ اكبر من اكبر كمية مدركة اي غير متناهية فاذا خرجت قيمة المجهول $\frac{1}{2}$ فذلك دليل على عدم امكانية استيفاء شروط المسئلة بالاعداد

في ما قيمته $\frac{1}{2}$

(٨) على اي افتراض تصير قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها $\frac{1}{2}$ وما هو معنى

الجواب اذا كان $a = 0$ و $m = n$

ذلك

اذا كان a صفرا ينطلقان معا من نقطة واحدة واذا كان $m = n$ يتحركان على سرعة واحدة فيتيان معا فتكون الساعة المطلوبة اية ساعة كانت لانهما معا كل ساعة فالعبارة $\frac{1}{2}$ غير معينة وتدل على اية كمية متناهية فرضت مها كانت

في المرححات

المرجحة عبارة جبرية دالة على كون كمية اعظم من كمية . مثالا $a < b$ فهي دالة على كون a اكبر او اكثر من b والكمية عن يمين علامة الترجيح سميت الاولى والتي عن يسارها سميت الثانية والقواعد الماضي ذكرها لمعاملة المعادلات نصح على الغالب في معاملة المرححات

في مرجحين اذا كانت الكمية الكبرى على جانب واحد من علامة الترجيح في كليهما قيل انها متفتتان معنى والآخر مغلقتان معنى

مثال النوع الاول $7 < 9$ و $7 < 6$ و $8 > 5$ و $4 > 2$

ومثال النوع الثاني $10 < 6$ و $7 > 4$

ومن القواعد لاجل معاملة المرححات هذه الآتية

(١) اذا اُضيفت كمية واحدة الى جانبي مرحة او طُرِحَت منها كمية واحدة فالمرحة الحاصلة تكون من معنى الاولى . مثاله

$$\begin{aligned} \text{لنفرض } ٨ < ٢ \text{ اصف } ٥ \text{ الى الجانبين} \\ ٥ + ٨ < ٥ + ٢ \quad \text{اطرح } ٥ \text{ من الجانبين} \\ ٥ - ٨ < ٥ - ٢ \end{aligned}$$

اذا كانت كيمتا مرحة سلبيتين فاصفهما جبرياً اكبرها حسابياً . مثاله

$$\begin{aligned} -٢٥ > -٢٠ \text{ واذا اُضيف } ٢٠ \text{ الى الجانبين تصبح } ١٠ > ٠ \\ \text{افرض } -٢ > -٢ \text{ اصف } ٦ \text{ الى الجانبين } -٦ + ٢ > -٦ + -٢ \text{ اي} \\ ٨ > ٤ \text{ او اطرح } ٦ \text{ من الجانبين } -٦ - ٢ > -٦ - ٢ \text{ اي } -٨ > -٩ \\ \text{وعلى هذه القاعدة تنقل كمية من جانب مرحة الى الجانب الآخر بعد بدل علامتها} \end{aligned}$$

مثاله

$$\begin{aligned} ١ + ٢ < ٢ + ٢ \\ \text{بالمقابلة } ١ + ٢ < ٢ + ٢ \text{ اي } ١ < ٢ \end{aligned}$$

(٢) اذا كانت مرجحتان على معنى واحد واُضيفت احدهما الى الاخرى الاولى للاولى والثانية الى الثانية فيكون المجموع مرحة على نفس معنى الاوليين . مثاله

$$\begin{aligned} \text{لنفرض } ١ < ٢ \text{ و } ٣ < ٤ \text{ بالجمع } ١ + ٣ < ٢ + ٤ \\ \text{ولكن بالطرح قد تصح القاعدة وقد لا تصح} \\ \text{مثاله } ٧ > ٤ \text{ و } ٢ > ٢ \text{ بالطرح } ٢ > ٢ \text{ و } ٤ > ٤ \\ \text{ولكن } ٩ > ١٠ \text{ و } ٨ > ٨ \text{ بالطرح } ٢ < ٢ \end{aligned}$$

فتجنب هذه المعاملة على قدر الامكان واذا اضطر اليها يتعين معنى المرحجة الناتجة

(٣) اذا ضُرِبَت مرحة في كمية ايجابية تكون الحاصلة على نفس معنى الاولى وهكذا اذا قُسمَت على كمية ايجابية

$$١ > ٢ \times ١٢ \quad ٢ > ١ \quad \text{و-} \quad ١ > ٢ \times ١٢ \quad ٢ > ١ \quad \text{و-} \quad ١ > ٢ \times ١٢ \quad ٢ > ١$$

وعلى هذا القاعدة تزال الكسور من مرجحة

$$\text{مثالة } \frac{١}{٢} < \frac{١}{٣} \quad \frac{١}{٢} < \frac{١}{٣}$$

بالضرب في ٦ ا د نصير ١٢ (ا - ب) < ٦ (د - س) (د - س)

(٤) اذا ضربت مرجحة في كمية سلبية او انقسمت عليها تكون المرجحة

الناجمة على عكس معنى الاولى . مثالة

$$١ < ٢ \quad \text{اضرب في } -٢ \quad -٢ < -١$$

$$\text{وبالقسمة } -\frac{١}{٢} > -\frac{١}{٣}$$

وعند هذه المعاملة يقتضي تعيين علامة المضروب فيو او المقسوم عليه واذا كانت سلبية تعكس علامة الحاصل او الخارج

(٥) اذا بدلت علامة جانبي مرجحة يجب قلب علامة الترجيح

لان ذلك مثل ضرب الجانبيين في -١

(٦) اذا كان الجانبان ايجابيين يمكن ترقيتها لاية قوة فُرِضَتْ

وتبقى المرجحة على معناها . مثالة

$$٥ < ٢ \quad ٢ < ١٠ \quad \text{اي } ٢ < ١٠ \quad ١ < ٢ \quad \text{وا } ١ < ٢ \quad \text{وا } ١ < ٢$$

يكونا ايجابيين فقد يبقى المعنى وقد يتقلب

$$\text{مثالة } ٢ + > ٢ - \quad ٢ > ٢ - \quad \text{اي } ٢ > ٢ - \quad ١ > ٢ - \quad \text{فها على معنى واحد ولكن}$$

$$٢ - < ٢ - \quad ٥ - > ٢ - \quad \text{اي } ٥ - > ٢ - \quad ٢٥ > ١ \quad \text{فقد انقلب المعنى}$$

(٧) في تجذير مرجحة قد يلزم قلب علامة الترجيح

$$\text{مثالة } ١ > ٢ \quad \text{بالتجذير } ١ > ٢ \quad \text{او } ١ < ٢$$

امثلة

$$٤ > ٢$$

$$(١) ٢٥ > ٢$$

- (٢) $٥ ك - ٦ < ١٩$
 (٣) $٢ ك + ١٢ < ٣٠ - ك$
 (٤) $٢ ك + ٨ - \frac{ك}{٢} > ٦$
 (٥) $\frac{ك}{٦} - \frac{١}{٦} + ك + \frac{ك}{٢} + \frac{١٧}{٢} < ١٧$
 (٦) $\frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} + \frac{ك}{٦} - \frac{٧}{١٢} < ٩$
 (٧) $\frac{ب}{٧} ك - ا + ك + ا ب > \frac{ب}{٧}$
 (٨) $ك < ٥$
 (٩) $ك < ٤$
 (١٠) $ك > ٦$
 (١١) $ك < ٦$

(٨) سئل رجل كم ثمن ساعتك فقال ان ضُرب ثمنها في ٤ واضيف ٦٠ الى المحاصل يكون المجموع اكثر من ٢٥٦ واذا ضُرب الثمن في ٣ وطُرح ٤٠ من المحاصل يكون المجموع اقل من ١١٣ مطلوب ثمن الساعة

(٩) اي عدد اذا جُمع نصفه مع ثلثه يكون المجموع اقل من ١٠٥ ونصفه الآخر خمسة اكبر من ٢٢

(١٠) اي عدد ضعفه الا ٦ اكثر من ٢٤ وثلاثة امثاله الا ٦ اقل من مضاعفه

مع ١٠

(١١) اي عدد من مجموعها ٢٢ واذا انقسم اكبرها على اصغرها يكون الخارج اقل

من ٥ واكثر من ٢

قد تقدم ان العبارة العامة لجسمين متحركين الى جهة واحدة هي $\frac{١}{٦} - \frac{١}{٤}$ (انظر مسئله ٥) فلذلك العبارة صحيحة مهما كانت المسافة بينهما ومهما كانت سرعة كل واحد منها على افتراض الحركة الى جهة واحدة فلو فرض بينهما ١٠٠ ميل وسرعة الاول ٤ اميال كل ساعة وسرعة الثاني ٦ اميال كل ساعة $\frac{١}{٦} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$ ساعة

اي البعد بينهما مقسوماً على فضلة سرعتها يعدل الوقت المطلوب والمسافة التي يقطعها كل واحد تعدل ذلك الوقت في السرعة ثم لنفرض ان بينهما اميالاً = ١ والسرعة ن وم كما تقدم ولكن الحركة من طرفين الواحد نحو الآخر فاي العبارة الدالة على وقت الالتقاء

الجواب $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٤} =$ الوقت
 والوقت في السرعة يعدل المسافة التي يقطعها كل واحد فلو فرض بينهما ١٠٠ ميل كما تقدم وسرعة الواحد ٦ والاخر ٤ كما تقدم

فلنا الوقت $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٤}$ واذا فرض ك = مسافة الاول

وي = مسافة الثاني لنا ك $\frac{٤ \times ١٠٠}{٤ + ٦} =$ وي $\frac{٦ \times ١٠٠}{٤ + ٦} =$

ثم لنجعل المسئلة عامة اي جسمان بينهما ١ ميل وسرعة حركة احدهما ن ميل

وسرعة حركة الآخر م ميل كل ساعة فاي متى يلتقيان وك المسافة التي يقطعها كل واحد منها

لنفرض ق = الوقت ك = مسافة الأول وى = مسافة الثاني ود = المسافة كلها

$$(١) \text{ ك + وى = د } \quad (٢) \text{ ك = ن × ق } \quad \text{وى = م × ق}$$

$$\text{و (ن + م) × ق = د او (٣) ق = } \frac{\text{د}}{\text{ن + م}}$$

$$(٤) \text{ ك = ن × ق = ن × } \frac{\text{د}}{\text{ن + م}} \quad \text{ك = م × ق = م × } \frac{\text{د}}{\text{ن + م}}$$

فاذا كان ن = م ك = $\frac{1}{2}$ د وى = $\frac{1}{2}$ د لان السرعة واحدة للثنتين

$$\text{اذا كان ن = ٠ ك = } \frac{\text{د}}{\text{م}} \quad \text{وى = م × ق = د}$$

اي الواحد ساكن والثاني يقطع المسافة كلها

(٥) غروب الساعات وغروب الدقائق متفان عند الساعة ١٢ في اية ساعة

$$\text{يتفان ايضا ق = م - ر}$$

وبما ان المينا مقسومة الى ١٢ ساعة لنفرض د = ١٢

ون وم حركة الغروبين النسبية اي الاول م = ١٢

$$\text{ون = ١ اي ق = } \frac{١٢}{١١} = \frac{١}{١١} \quad \frac{٢}{٢٧} = \frac{١}{١١}$$

وان سئل اي متى يتفق الغروبان بين الساعة ٢ و٤ لتيل الثاني يتحرك ٢ عوضاً

عن ١ وق = $\frac{١٢}{١١} \times \frac{٢}{١١}$ ولو سئل اي متى يجعل الغروب الواحد زاوية قائمة مع الآخر

بين الساعة ٢ و٤ لتيل يقتضي للواحد ان يمر على مسافة د = $\frac{1}{4}$ وق = $\frac{١٢}{١١} \times \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} = \frac{٢}{٢٧} \times \frac{١}{١١}$ ولو سئل في اي وقت بين ٥ و٦ يكون الغروبان على استقامة

واحدة لتيل

$$\text{د = } \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١٢} = \frac{١}{٢٤} \quad \text{ق = } \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١٢} = \frac{١}{٢٤}$$

ودائرة الساعة يمكن ان نوسمها الى قدر ماشتنا فتكون عبارة عن دائرة جرمين

ساويين وهذه المعادلة نفسها تدل على نسبة حركة الشمس الى حركة القمر لانها يتحركان

مثل غربي ساعة

الدائرة ٢٦٠ والقمر يتحرك كل يوم على المعدل ١٢٦٤' ١٢' والشمس ٩٨٥٦٥°

اي اقل من درجة فحركة القمر اسرع وتعديل ن وحركة الشمس م ون = م =

$$١٢٦٤' ١٢' - ٩٨٥٦٥° = ١٢٦٤' ١٩٠٧٥° \quad \text{والوقت لالتحاق الجرم الواحد بالآخر}$$

$$\text{اي ق = ن - م}$$

$$\frac{٢٦٠}{١٢٢١٩٠٧٥} = ٥٣٠٠٨٨٧ \text{ يوما اي } ٢٩ \text{ يوما و } ١٢ \text{ و } ٤٤ \text{ و } ٢ \text{ اي مدة دوران}$$

القمر القانوني او الشهر القانوني

الزهرة لو نُظِر اليها من الشمس لكانت حركتها اليومية ٢٦٠١ والارض حركتها اذا نُظِر اليها من الشمس ٥٩ كل يوم ففي اية مدة تكون الارض والزهرة والشمس على استقامة واحدة $٢٢٠١ = م = ٥٩ = د = ٢٦٠ = ن - م = ٢٧$

$$\text{وق} = \frac{٦٠ \times ٢٦٠}{٢٧} = ٥٨٢٠٩٢ \text{ يوما ونصف ذلك هو مدة مكث الزهرة فنجم الصبح}$$

ونجم الغروب وهذه المعادلة الدالة على النسبة بين المسافة والسرعة ثابتة صحيحة في اية

مسئلة كانت واذا تعين الوقت بالرصد كما هو ممكن من جهة الارض وسيار من السيارات

العليا فيستعلم معدل حركة اي سيار كان البوي لان $٢٦٠ = د$ ون $٥٩ = و$

اي حركة الارض منظور اليها من الشمس ولنفرض ان م اي حركة المرنج مثلاً مجهول

$$\text{ولنفرضها} = ك \text{ ثم } ق = ن - ك \quad ق - ن = ق - ك = د \quad و ك = ق - ن$$

وقد ذكرت هذه الامثلة هنا للدلالة على كيفية استخدام الطرق الجبرية في المسائل

الفلكية وغيرها وسوف اذكر امثلة اخرى لذلك في محلها



الفصل السادس عشر

في التناسب والنسبة

١٧٤ التناسب هو التفاوت بين كميتين باعتبار المقدار . ولا يقع الا بين الكميات

المتشابهة اي بين عددي واعد او بين خطي وخطي او بين مجسم ومجسم او بين سطحي وسطحي

وهلم جرا لانه لا يمكن مناسبة خطوط على ارطال ولا سطوح على اقسام الوقت . واذا

اعتبرت زيادة كمية على اخرى فهو التناسب الحسابي واذا اعتبرت مرار وجود احدهما

في الاخرى فهو التناسب الهندسي

١٧٥ التناسب الحسابي حسبنا تقدم هو الفضلة بين كميتين او عدة كميات . والكميات

نفسها هي اجزاء التناسب . فالتناسب الحسابي بين ٥ و ٢ هو ٢ ويدل عليه بوضع

علامة الطرح بين الكميتين هكذا ٥ - ٢ او بوضع نقطتين هكذا ٥ . ٢ فان ضربت

اجزاء تناسب حسائي في كمية او انقسمت عليها يُضرب التناسب او ينقسم على تلك الكمية

مثاله لو فرض $ت - ب = ر$

بضرب الجانين في $ح$ لنا $ح ت - ح ب = ح ر$

وبالقسمة على $ح$ $ت - ب = ر$

اذا اضيفت اجزاء تناسب الى اجزاء تناسب آخر كل جزء الى نظيره او طرحت

اجزاء الواحد من اجزاء الآخر يعدل تناسب المجمع او الفضلة مجتمع التناسلين او

فضلتها . مثاله ليكن $ت - ب$ تناسلين ثم

$(ت + د) - (ب + ح) = (ت - ب) + (د - ح)$ لان كل واحد من

الجانين $ت + د - ب - ح$ وكذلك $(ت - د) - (ب - ح) =$

$(ت - ب) - (د - ح)$ لان كل واحد من الجانين $ت - د - ب + ح$

التناسب الحسائي بين ١١ و $٤ = ٧$

التناسب الحسائي بين ٥ و $٢ = ٣$

وتناسب المجمع ١٦ و $١٠ = ٦$ = مجموع التناسلين

وتناسب الفضلة ٦ و $٤ = ٢$ = فضلة التناسلين

١٧٦ التناسب الهندسي هو المداول عليه بالخارج من قسمة كمية على اخرى .

فالتناسب الهندسي بين ٨ و ٤ هو $\frac{٨}{٤} = ٢$ وبين ٢ و ١ هو $\frac{٢}{١} = ٢$ وبين ٤ و ٢

$ح$ و $ب$ هو $\frac{ح}{ب} = ٢$ ويبدل عليه ايضاً بنقطتين بين الكميتين . مثاله $ت :$

$ب$ و $١٢ : ٤$ ويقال للكميتين معاً زوج وتسمى الاولى سابقاً والثانية تالياً

١٧٧ في كل تناسب ثلاثة اقسام وهي السابق والتالي والتناسب الوافع بينهما . وان

فرض اثنان منها يستعلم منها الثالث هكذا

لفرض السابق $ت$ والتالي $س$ والتناسب $ر$ ثم حسب الحد

المذكور آنفاً $ر = \frac{ت}{س}$ اي التناسب يعدل الخارج من قسمة السابق على التالي بالجبر

$ت = س ر$ اي السابق يعدل حاصل التالي في التناسب . وبالقسمة على $ر$

$س = \frac{ت}{ر}$ اي التالي يعدل الخارج من قسمة السابق على التناسب

فرع ^١أول في زوجين ان كان السابقان متساويين والتاليان متساويين ايضاً
يكون التناسبان متساويين (افلديس ك ٥ ق ٧)
فرع ^٢ثاني في زوجين ان كان التناسبان متساويين والسابقان متساويين يكون
التاليان متساويين. وان كان التناسبان متساويين والتاليان متساويين يكون السابقان
متساويين (افلديس ك ٥ ق ٩)

١٧٨ اذا تساوى السابق والتالي يكون التناسب واحداً ويقال له تناسب
المساواة. مثاله $١٨ : ٦ \times ٣$ وإذا كان السابق أكبر من التالي يكون التناسب
أكثر من واحد. مثاله $٦ : ١٨ = ٣$ وتسمى تناسباً أعظم. وإذا كان السابق أصغر
من التالي يكون التناسب أقل من واحد. مثاله $٣ : ٦ = \frac{١}{٢}$ وتسمى تناسباً أصغر. أما
التناسب بالقلب او التناسب المكنوه فهو تناسب مكفوء كيتين. فالتناسب بالقلب
بين ٦ و ٣ هو $\frac{١}{٦} : \frac{١}{٣}$ اي $\frac{١}{٢} : ١$ والتناسب المستقيم بين ت و ب هو ب بالقلب
هو ت : ب اي $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٣} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{١} = \frac{٣}{٢}$ اي الخارج من قسمة التالي على
السابق. فيُبدل على التناسب المكنوه اما بقلب الكسر الدال على المستقيم واما بقلب
رتبة السابق والتالي. فتناسب ت : ب بالقلب هو ب : ت

١٧٩ التناسب المركب هو التناسب بين حواصل اجزاء تناسبين فلكثر اذا
ضرب كل جزء من الواحد في نظيره من الآخر. مثاله

$$\text{تناسب} \quad ٢ : ٦ = ٣ : ٩$$

$$\text{وتناسب} \quad ٣ : ٩ = ٤ : ١٢$$

$$\text{والمركب منها هو} \quad ٦ : ١٢ = ٩ : ١٨$$

وهكذا المركب من ت : ب و س : د و ح : ز هو ت س ح : ب د ز
 $\frac{ت س ح}{ب د ز} =$

فرع كل تناسب مركب يعدل حاصل التناسبات البسيطة التي تركب منه - أ.
مثاله تناسب ت : ب = ب : س و د = د : ز و ح : ز = ز : ح والمركب هو ت س ح
: ب د ز = $\frac{ت س ح}{ب د ز}$ حاصل الكسور الدالة على التناسبات البسيطة

١٠٨ في عدة تناسبات اذا كان تالي الأول سابق الثاني وتالي الثاني سابق

الثالث وهم جراً يكون تناسب السابق الأول الى التالي الاخير مثلاً للتناسب المركب من التناسبات كلها . مثالة

ت : ب : ب : س : د : د : ح
فالمركب من هذه التناسبات هو ب : س : د : ح وهو يعدل ح : اي التناسب السابق الأول الى التالي الاخير

١٨١ التناسب المركب من مربع اجزاء تناسب بسيط يُسمى تناسباً مالياً . فلو فرض ت : ب لكان تناسبها المالي ت : ب^٢ والكعي هو المركب من تكرار ثلاثة تناسبات بسيطة اي ت : ب^٣ وتناسب الجذر المالي هو ت : ب^٦ والجذر الكعي ثلث : ثلث^٣ فالتناسب البسيط بين ٦ و ٢ هو ٢ : ٣ اي ٢ : ٦ = ٣ : ٢

ومضاعفة
ثلاثة امثاله
والمالي
والكعي

$$٦ = ٢ : ١٢$$

$$٩ = ٢ : ١٨$$

$$٩ = ٢ : ١٨$$

$$٢٧ = ٢ : ٦$$

١٨٢ قدر رأينا ان التناسب يدل عليه بكسر . ورأينا في فصل الكسور ان ضرب صورة كسر هو كسر قيمته وقسمه صورته كقسمة قيمته (٤٥) فاذا ضرب سابق زوج في كميته ما يضرب التناسب في تلك الكمية . وقسمه السابق يُقسم التناسب . مثاله ٢ : ٦ = ٢ : ٢ = ١ : ١ وت : ب = ب : ت وت : ب = ب : ت وت : ب = ب : ت

فرع اذا بقي التالي على حاله فكلما زاد السابق زاد التناسب وبالقلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ و ١٩)

١٨٣ ضرب تالي زوج كقسمة التناسب . وقسمه التالي كضرب التناسب . مثاله ٦ : ٢ = ٣ : ١ وت : ب = ب : ت وت : ب = ب : ت وت : ب = ب : ت

فرع اذا بقي السابق على حاله فكلما زاد التالي صغر التناسب وبالقلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ و ١٠)
ثم انه قد اتضح ما تقدم ان ضرب سابق زوج هو كقسمة التالي . وقسمه السابق كضرب التالي . مثاله

مفروض تناسب ت : ب مثل س : د ثم ت + س : ب + د = ت : ب

او س : د

(١) لان بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) بالجبر ت د = ب س

(٣) اضعف س د الى الجانبيين ت د + س د = ب س + س د

(٤) بالقسمة على د ت + س = ب س + س د

(٥) بالقسمة على ب + د $\frac{ت + س}{ب + د} = \frac{ب س + س د}{ب + د}$

وكذلك $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(١) لان بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) والجبر ت د = ب س

(٣) بطرح س د من الجانبيين ت د - س د = ب س - س د

(٤) بالقسمة على د ت - س = ب س - س د

(٥) بالقسمة على ب - د $\frac{ت - س}{ب - د} = \frac{ب س - س د}{ب - د}$

مفروض $٢ = ٥ : ١٥$

وايضاً $٢ = ٢ : ٩$

يجمع اجزاء الزوجين $٢ = ٢ + ٥ : ٩ + ١٥$

بالطرح $٢ = ٢ - ٥ : ٩ - ١٥$

ومكناهما تعددت الازواج . مثلاً

$٢ = ٦ : ١٢$

$٢ = ٥ : ١٠$

$٢ = ٤ : ٨$

$٢ = ٢ : ٦$

بالجمع $٢ = (٢ + ٤ + ٥ + ٦) : (٦ + ٨ + ١٠ + ١٢)$ انقليدس ك ه

ق او ١٢

١٨٦ تناسب اعظم بصغر باضافة كمية واحدة الى جزءه . مثاله اذا فرض

ت + ب : ت اي $\frac{ت + ب}{ت}$ واذا اضيف ك الى الجزئين فلنا $\frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$ ثم

بالتحويل الى مخرج مشترك يصير الأول $\frac{ت + ب + ك + ك}{ت + ك}$ والثاني

$\frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$ فالصورة الثانية اقل من الاولى ومن ثم صغر النساسب

تناسب اصغر يزداد باضافة كمية واحدة الى جزويه
 مفروض ت - ب : ت اي $\frac{ت - ب}{ت}$ ثم باضافة ك الى الجزئين لنا
 ت - ب + ك : ت + ك اي $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ وبالتحويل الى مخرج مشترك بصير
 الاول $\frac{ت - ب}{ت} = \frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ والثاني $\frac{ت - ب}{ت} = \frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ والصورة
 الثانية اكبر من الاولى فيكون التناسب قد زاد . واذا طرح كمية واحدة من الجزئين
 يكون الفعل عكس ما ذكر

امثلة

- (١) اي تناسب اكبر ١١ : ٩ ام ٤٤ : ٣٥
- (٢) اي تناسب اكبر ت + ٢ : ١/٢ ت ام ٣ ت + ٧ : ١/٢ ت
- (٣) سابق زوج ٦٥ والتناسب ١٢ فاهو التالي
- (٤) اذا كان التالي ٧ والتناسب ١٨ فاهو السابق
- (٥) ماهو التناسب المركب من ٧ : ٤ و ٣ : ٥ ب و ٧ : ١ + ٢ : ١
- (٦) ماهو التناسب المركب من ك + ٢ : ١ ب وك - ٢ : ١ ب و ت + ٢ : ١ ب وت
 + ب : ح
 الجواب ك - ٢ : ١ ب ح
- (٧) اذا تركب ٥ ك + ٧ : ٢ ك - ٢ مع ك + ٢ : ١/٢ ك + ٣ فحل بمحدث
 تناسب اعظم او اصغر
 الجواب تناسب اعظم
- (٨) اي تناسب من الانواع الثلاثة (١٧٨) بمحدث من تركيب ك + ٢ : ١ ب
 وك - ٢ : ١ ب وب : ك - ٢ : ١ ب
 الجواب تناسب المساواة
- (٩) ماهو التناسب المركب من ٥ : ٧ و ٤ : ٩ المالي ٢ : ٣ الكمي
 الجواب ١٤ : ١٥
- (١٠) ماهو التناسب المركب من ٧ : ٤ وك - ٢ : ١ الكمي و ٩ : ٤ المجزئي
 المالي
 الجواب ك - ٢ : ١ ب
- (١١) ماهو التناسب المركب من ت - ٢ : ك - ٢ : ت وت + ك : ب وب :
 ت - ك
 الجواب (ت + ك) : ت
- (١٢) اي تناسب اكبر ت + ٢ : ١/٢ ت + ٤ ام ت + ٤ : ١/٢ ت + ٥
 الجواب ت + ٤ : ١/٢ ت + ٥

نبذة

في النسبة

١٨٧ النسبة هي المساواة بين تناسبين فأكثر. وهي اما حسابية واما هندسية.

فالحسابية هي مساواة تناسبات حسابية كها في ٦ ٤ ١٠ ٨ والهندسية هي مساواة تناسبات هندسية كما في ٦ ٢ ١٢ ٤ فينبغي ان يميز بين التناسب والنسبة ولو استعمل اللفظان مترادفين في بعض الاحيان. والفرق بينهما واضح اذ يقال في تناسب ما انه اكبر من آخر. مثاله ١٢ : ٢ اكبر من ٢ : ٦ ولا يقال ذلك في النسبة لانها مساواة تناسبات والمساواة تستلزم عدم التفاوت. وفي كل نسبة زوجان. ويقال للسوابق الاجزاء المشابهة وكذلك للتوالي. ويقال للسوابق والتوالي من كل زوج الاجزاء المتناسبة ولا خلاف في رتبة زوجي نسبة لانه ان كان ت : ب :: س : د تكون س : د :: ت : ب من حيث مساواة النعبتين. واذا قصد الدلالة على نسبة بين ثلاث كميات فلا بد من تكرار الوسطى. فيدل على النسبة بين ٨ و٤ و٢ هكذا ٨ : ٤ :: ٤ : ٢

ويسمى المكرر متناسبا متوسطا بين الآخرين. ويسمى الثلاثة من الكميات الثلاث متناسبا ثالثا للآخرين

١٨٨ النسبة بالقلب ويقال لها ايضا النسبة المكفوءة هي المساواة بين تناسب مستقيم ونعكس بالقلب. مثاله ٢ : ٤ :: ١/٢ : ١/٤ اي نسبة ٤ الى ٢ هي بالقلب كسبة ٢ الى ٤ وتكتب احيانا هكذا ٢ : ٤ :: ١/٢ : ١/٤ بالقلب. ومتى تعددت الكميات وكان تناسب الاولى الى الثانية مثل تناسب الثانية الى الثالثة وهلم جرا سميت النسبة متصلة. مثاله ١٠ و٨ و٦ و٤ و٢ في النسبة الحسابية المتصلة. و٦ و٤ و٢ و١٦ و٨ و٤ في النسبة الهندسية المتصلة. وهكذا ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ح الى آخره. والنسبة الحسابية انما هي معادلة بسيطة. مثالها ت - ب = س - د وفي كل نسبة حسابية يكون مجموع الطرفين مائلا لمجموع الوسطين اي ت + د = ب + س وهكذا في ١٢ - ١٠ = ١١ - ٩ ٩ + ١٢ = ١١ + ١٠ وان كانت ثلاث كميات على نسبة حسابية يكون مجموع الطرفين مضاعف الوسط. فاذا فرض ت - ب = ب - س يكون ت + س = ٢ ب

نبذة

في النسبة الهندسية

١٨٩ متى كانت اربع كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائلاً لحاصل الوسطين

مفروض ت : ب :: س : د فاذا ت د = ب س لانه بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{د}{س}$ وبالجبر ت د = ب س وهكذا ١٢ : ٨ :: ١٥ : ١٠ $١٠ \times ٨ = ١٠ \times ١٢$ فاذا فرغ اذا نُقِلَ ضلعٌ من طرف الى آخر او من وسط الى آخر لا تتغير النسبة . فاذا فُرض ت : م :: ب : ك : ن تكون ت : ب :: م : ك : ن : ك : ن تكون ت : ب :: ك : ن : ك : ن تكون ت : ب :: ك : ن : ك : ن

اذا كان حاصل كيتين مائلاً لحاصل كيتين أخريين تكون الاربعة على نسبة هندسية اذا جُبلَ ضلعاً الجانب الواحد طرفين وضلعاً الجانب الآخر وسطين . فان فُرض م : ن :: ح : ي وان فُرض (ت + ب) : س = (د - م) : خ ي تكون ت + د : م : ن :: ح : ي : س

اذا كانت ثلاث كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائلاً لمربع الوسط . مثاله اذا فُرض ت : ب :: ب : س يكون ت س = ب^٢ فتجد متناسباً متوسطاً بين كيتين بنجذير حاصلها . فاذا فُرض ت : ك :: ك : س لنا ك^٢ = ت س وك = $\sqrt{ت س}$

١٩٠ يتيج ما تقدم ان كل طرف من نسبة يعدل حاصل الوسطين مقسوماً على الطرف الآخر . وكل وسط يعدل حاصل الطرفين مقسوماً على الوسط الآخر اذا فُرض ت : ب :: س : د يكون ت د = ب س وت = $\frac{ب س}{د}$ $\frac{ب س}{ت} = د$ فان فُرض ثلاثة اجزاء من نسبة نستعمل الرابع بقسمة حاصل الثاني والثالث على الاول . وقد بُني على ذلك باب الاربعة المتناسبة في علم الحساب

١٩١ اذا كانت اربع كميات متناسبة يمكن مبادلة الطرفين او الوسطين او جزئي كل زوج بدون تغيير النسبة لان حاصل الطرفين لا يزال مائلاً لحاصل الوسطين بعد المعاملات المذكورة

اذا فرض $ت : ب :: س : د$

و $٤ : ٦ :: ٨ : ١٢$

فاذا بمبادلة الوسطين

$ت : س :: ب : د$ $٤ : ٨ :: ٦ : ١٢$ (افلیدس ك ه ق ١٦)

وبمبادلة الطرفين

$د : ب :: س : ت$ $١٢ : ٦ :: ٨ : ٤$

وبمبادلة جزئي كل زوج

$ب : ت :: د : س$ $٦ : ٤ :: ١٢ : ٨$

ويسمى هذا العمل الاخير قلباً

وبمبادلة ترتيب الزوجين

$س : د :: ت : ب$ $٨ : ١٢ :: ٤ : ٦$

وبقلب ترتيب النسبة كلها

$د : س :: ب : ت$ $١٢ : ٨ :: ٦ : ٤$

لان المعادلة من الجميع $ت = د = ب = س$ و $٨ \times ٦ = ١٢ \times ٤$

١٦٢ لا تنزع النسبة اذا ضرب الجزآن المتناسبان معاً او الجزآن المتشابهان معاً في كمية واحدة او انفسما عليهما

مفروض $ت : ب :: س : د$

(١) بضرب المتناسبين الاولين $م : ت :: م : ب :: م : س : د$

(٢) بضرب المتناسبين الآخرين $ت : ب :: م : س : د$

(٣) بضرب السابقين (افلیدس ك ه ق ٢)

$م : ت :: ب : س : د$

(٤) بضرب التاليين $ت : م :: ب : س : د$

(٥) بقسمة الاولين $ت : م :: ب : س : د$

(٦) بقسمة الآخرين $ت : ب :: م : س : د$

(٧) بقسمة السابقين $ت : م :: ب : س : د$

(٨) بقسمة التاليين $ت : م :: ب : س : د$

فرغ اذا ضرب كل واحد من الاجزاء الاربعة او انقسم لا تتغير النسبة (افلیدس ك ه ق ٤)

ت م ب م س م د م ت م ب م س م د
فرع آخر في المعاملات الثاني المتقدمة يمكن ضرب الثاني عوضاً عن قسمه
السابق وعكسه

١٩٣ اذا عدل تناسبان تناسباً ثالثاً يكونان متساويين (افليدس ك ه ق
(١١) (اولية ١١)

اذا فرض ت م ب م س م د و س م د م ب م ن
يكون ت م ب م س م د او ت م س م ب م د
واذا فرض ت م ب م س م د و م ن م س م د
يكون ت م ب م س م د او ت م س م ب م د
فرع اذا فرض ت م ب م س م د و م ن م س م د
يكون ت م ب م س م د (افليدس ك ه ق ١٢)

١٩٤ اذا فرض م ت م ن ب ثم بالمبادلة م ن ت م ب
واذا فرض م س م ن د ثم بالمبادلة م ن س م د
فحسباً تقدم ت م ب م س م د
اذا فرض م ت م ن ب ثم بالقلب والمبادلة ت م ب م ن
واذا فرض م س م ن د ثم بالمبادلة م س د م ن فيكون
ت م ب م س م د حسباً تقدم
اذا فرض ت م ب م ن ثم بالمبادلة ت م ب م ن
واذا فرض م س م ن د تكون ت م ب م س م د كما تقدم (افليدس
ك ه ق ٢٢)

١٩٥ في عدة نسب اذا كان الجزء من الآخران من الاولى الاولين من الثانية
والآخران من الثانية الاولين من الثالثة وهلم جرا تكون نسبة الاولين من الاولى كنسبة
الآخرين من الاخيرة . مثالة

ت م ب م س م د
س م د م ح م ل
ح م ل م ن
م ن م ك م ي
تكون ت م ب م ك م ي

وهكذا ان امكن تحويل النسب الى هذا الترتيب

مثاله ت : س :: ب : د بالمبادلة ت : ب :: س : د
 س : ح :: د : ل بالمبادلة س : د :: ح : ل
 ح : م :: ل : ن بالمبادلة ح : ل :: م : ن
 م : ك :: ن : ي بالمبادلة م : ن :: ك : ي
 ت : ب :: ك : ي كما تقدم

١٩٦ متى كان الطرفان او الوسطان من نسبة واحدة كالطرفين او الوسطين
 من اخرى تكون الاجزاء الاربعة الباقية متناسبة بالقلب

مثاله ت : م :: ن : ب وس : م :: ن : د ثم ت : س :: ب : د
 لان ت : ب = م : ن وس : د = م : ن وت : ب = س : د اي ت : س :: د : ب
 وهكذا متى تشابه الطرفان . مثاله م : ت :: ب : ن وم : س :: د : ن ثم
 ت : س :: د : ب (اقليدس ك ٥ ق ٢٣)
 واذا كانت ت : م :: ن : ب وم : س :: د : ن فيكون ت : س :: د : ب
 كما تقدم

١٩٧ اذا شابهت اجزاء نسبة اجزاء نسبة اخرى يكون مجتمعهما او فضلتهما
 ايضاً (اقليدس ك ٥ ق ٢) مثاله
 اذا فرض ت : ب :: س : د
 وايضاً ت : ب :: م : ن

فبالجمع ت + م : ب + ن :: س : د وت - م : ب - ن :: س : د وت
 : ب :: س : م + د + ن وت + ب :: س : م - د - ن
 وبالمبادلة ت + م : س :: ب + ن : د وت - م : س :: ب - ن : د
 وهكذا تعددت النسب . مثاله

مفروض ت : ب ::

س : د	}
ح : ل	
م : ن	
ك : ي	

ثم ت: ب :: س: ح + م + ك: د + ل + ن + ي (أقليدس ك ه ق ٢)
إذا فُرض ت: ب :: س: د وم: ب :: ن: د
يكون ت: م + ب :: س: ن + د لانه بالمبادلة ت: س :: ب: د
وم: ن: ب: د فاذا ت: م + س: ن + ب: د وبالمبادلة ت: م: ب
:: س: ن + د (أقليدس ك ه ق ٢٤)

١٩٨ في النسبة الواحدة اذا أضيف احد الجزئين المتناسين او المتشابهين الى
الآخر او طرح احدهما من الآخر لا تتغير النسبة . فاذا فُرض ت: ب :: س: د
و ١٢: ٤: ١٢: ٦ ثم

(١) باضافة الجزئين الاخيرين الى الاولين

ت + س: ب + د :: ت: ب ١٢ + ٤: ٦ + ١٢ :: ٢: ١٢

ت + س: ب + د :: س: د ١٢ + ٤: ٦ + ١٢ :: ٢: ٦

ت + س: ت: ب :: ب: د ١٢ + ٤: ٦ + ١٢ :: ١٢: ٦

ت + س: س: س :: ب + د: د ١٢ + ٤: ٦ + ١٢ :: ٢: ٢

(٢) باضافة السابقين الى التاليين

ت + ب: ب: ب :: س + د: د ١٢ + ٤: ٤ + ١٢ :: ٢: ٢

ت + ب: ت: ب :: س + د: س ١٢ + ٤: ٤ + ١٢ :: ١٢: ٢

وهكذا الى آخره . ويقال لهذا العمل تركيب النسب (أقليدس ك ه ق ١٨)

(٣) بطرح الاولين من الآخرين

س - ت: ت - ب: ب :: س - س: س - د - ب: د الخ

(٤) بطرح الآخرين من الاولين (أقليدس ك ه ق ١٧)

ت - س: ب - د: ت: ب :: ت - س: ب - د: س: د الخ

(٥) بطرح التاليين من السابقين

ت - ب: ب: ب :: س - د: د ت: ت - ب: ب :: س: س - د: د الخ

ويسمى هذا الاخير قلب النسبة

(٦) بطرح السابقين من التاليين

ب - ت: ت: ت :: د: د س: ب: ب - ت: ت :: د: د س: د الخ

(٧) ت + ب: ت - ب: ب :: س + د: س - د اي مجتمع الاولين الى فضلتهما

كجميع الاخيرين الى فضلتهما
فرع اذا كانت اربع كميات مركبة متناسبة كما في الامثلة المتقدمة تكون البسيطة
التي تركبت منها متناسبة ايضاً. فاذا فرض $ت + ب : ب : س + د : د$ تكون
 $ت : ب : س : د$ ويسمى هذا العمل قسمة النسبة (افلئدس ك ٥ ق ١٧)

١٩٩ اذا ضربت اجزاء نسبة في اجزاء نسبة اخرى كل جزء في نظيره تكون
الحواصل متناسبة ايضاً. مثالة

$$\begin{array}{lcl} ت : ب :: س : د & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \\ و ح : ل :: م : ن & ١٠ : ٥ :: ٨ : ٤ \\ ت ح : ب ل :: س م : د ن & ١٢٠ : ٢٠ :: ٤٨ : ٨ \end{array}$$

وهكذا هما تعددت النسب . مثالة

$$\begin{array}{l} ت : ب :: س : د \\ ح : ل :: م : ن \\ ف : ق :: ك : ي \\ ت ح ف : ب ل ق :: س م ك : د ن ي \end{array}$$

وهكذا اذا ترقبت اجزاء نسبة الى اية قوة فرضت . مثالة

$$\begin{array}{lcl} ت : ب :: س : د & ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢ \\ ت : ب :: س : د & ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢ \\ ت : ب :: س : د & ٤ : ١٦ :: ٢٦ : ١٤٤ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} وايضاً \\ و \\ و \end{array}$$

٢٠٠ اذا انقسمت اجزاء نسبة الى اجزاء نسبة اخرى تكون الخواارج متناسبة .

مثالة

$$٩:١٨::٦:١٢$$

$$ت:ب::س:د$$

$$٢:٩::٣:٦$$

$$ح:ل::م:ن$$

$$\frac{٩}{٣}:\frac{١٨}{٦}::\frac{٦}{٣}:\frac{١٢}{٦}$$

$$\frac{ت}{د}:\frac{ب}{س}::\frac{ل}{م}:\frac{ح}{ن}$$

٢٠١ في تركيب بعض النسب يمكن افناء الاجزاء المتساوية واخراجها قبل الضرب لاجل اختصار العمل . مثاله

$$ت:ب::س:د$$

$$م:ت::ن:س$$

$$ث م:ت:ب::س:ن:د$$

فاذا م:ب::ن:د وهكذا

$$٣:٩::٤:١٢$$

$$ت:ب::س:د$$

$$٦:٣::٨:٤$$

$$ب:ح::د:ل$$

$$١٥:٦::٢٠:٨$$

$$ح:م::ل:ن$$

$$١٥:٩::٢٠:١٢$$

$$ت:م::س:ن$$

٢٠٢ متى كانت اربع كميات متناسبة فاذا كانت الاولى اعظم من الثانية تكون الثالثة اعظم من الرابعة واذا كانت مثلها فمثلها او اصغر فاصغر

$$\left. \begin{array}{l} ت = ب \quad س = د \\ ت < ب \quad س < د \\ ت > ب \quad س > د \end{array} \right\} \begin{array}{l} ت:ب::س:د \text{ فاذا} \\ ت:ب::س:د \end{array}$$

فرع اذا كانت الاولى اعظم من الثالثة تكون الثانية اعظم من الرابعة (اقليدس كه ق ١٤) فان فرض ت:ب::س:د قبل المبادلة ت:س::ب:د وحينئذ ان كان ت=ب يكون س=د الى آخره

فرع ثان اذا فرض ت:م::س:ن

وم:ب::ن:د فان كان ت=ب يكون س=د

الى آخره (اقليدس كه ق ٢٠) لان بالتركيب ت:ب::س:د ومن ثم ان كان ت=ب يكون س=د الى آخره

$$\left\{ \begin{array}{l} ت:م::ن:د \\ م:ب::س:ن \end{array} \right.$$

فان كان $t = b$ يكون $s = d$ الى آخره (افلديس لكه ق ٢١)
اذا كانت اربع كميات متناسبة تكون مكفولاتها متناسبة ايضا . فاذا فرض
 $t : b :: s : d$ يكون $t : b :: s : d$ لان الحاصل من تحويلها كلها هو
 $t = d = b = s$

نبذة

في النسبة المتصلة

٢٠٢ في النسبة المتصلة (١٨٨) تكون جميع التناسبات متساوية . فاذا فرض
 $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$ برادان تناسب $t : b$ يعدل تناسب
 $b : s$ وتناسب $s : d$ الى آخره . وتناسب الاولى الى الاخيرة يعدل الحاصل
من التناسبات المتوسطة بينها اي تناسب $t : y$ يعدل $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$
ولكن هذه التناسبات كلها متساوية فيمكن الضرب في ابنتها شئت اي $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$
 $t : b = b : s$ فيكون $t : y :: t : b$ ولنا من ذلك هذه القاعدة

وهي اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون نسبة الاولى الى الاخيرة كنسبة

احد التناسبات المتوسطة مرقاة الى قوة دليلها اقل من عدة الكميات بواحد . مثاله

اذا فرض $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$ تكون $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$ وان فرض
 $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$ تكون $t : y :: t : b$

٢٠٤ اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون متناسبة ايضا اذا انعكس

ترتيبها حسب ما تقدم (١٩١) فاذا فرض

٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤

فالتناسبات

٢ ٢ ٢ ٢

وبالعكس

٦٤ ٣٢ ١٦ ٨ ٤

فالتناسبات

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

اي متى انعكس ترتيب الكميات تكون التناسبات مكفولات التناسبات المستفيدة
ومكفولات كميات متساوية هي متساوية كما يتضح من الاولية الرابعة

في النسبة الموسيقية

اذا كانت النسبة بين ثلاث كميات بحيث تكون نسبة الاولى الى الثالثة كنسبة فضلة

الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة قيل انها على نسبة موسيقية . مثالة ٢ و ٢ و ٦ لان

$$٦ : ٢ :: ٢ : ٢ - ٦ : ٢$$

فاذا كانت ا وب وس على نسبة موسيقية فحينئذ

$$ا : س :: ا - ب : ب - س$$

بالتحويل الى معادلة تصير $س = \frac{ا}{ب - ا}$

فاذا اردت متناسبا ثالثا موسيقيا لكيتين فاقسم حاصل الاولى والثانية على مضاعف الاولى الا الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبا ثالثا موسيقيا بين ٢ و ٥

مثال ٢ مطلوب متناسبا ثالثا موسيقيا بين ٥ و ٨

اربع كميات هي على نسبة موسيقية اذا كانت نسبة الاولى الى الرابعة كسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثالثة والرابعة . مثالة ٢ و ٤ و ٨ و ٨ لان

$$٨ : ٢ :: ٢ - ٤ : ٨ - ٨$$

واذا كانت ا ب س د على نسبة موسيقية فحينئذ

$$ا : د :: ا - ب : ب - س - د$$

بالتحويل $د = \frac{ا}{ب - ا}$

اي اذا اردت متناسبا موسيقيا رابعا لثلاث كميات فاقسم حاصل الاولى والثالثة على مضاعف الاولى الا الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبا موسيقيا رابعا بين ٤ و ٥ و ٦

مثال ٢ مطلوب متناسبا موسيقيا رابعا بين ٥ و ٨ و ١

مسائل

(١) اقسام ٦٠ الى قسمين تكون نسبة حاصلها الى مجموع مربعيها كسبة ٢ الى ٥

لنفرض ك = قسما و ٦٠ - ك = القسم الآخر

(١) بالشروط ٦٠ - ك = ك : ٢ + ك : ٢٠ - ٢٠ : ٢ :: ٥ : ٢

(٢) بالتحويل الى معادلة ٢٠ - ك = ٥ = ٤ : ك + ٢٠ - ٧٢٠٠ : ٢٤٠ - ك

(٢) بالمناقلة والقسمة ك = ٦٠ - ٨٠٠ =

(٤) باتمام التوزيع والتجذير والمقابلة ك = ٤٠ ٦٠ - ٤٠ = ٢٠

(٢) اقسام ٤٩ الى قسمين تكون نسبة اكبرها مع ستة الى الاصغر الا أحد عشر

كنسبة ٢:٩

لنفرض ك = الاكبر ٤٩ - ك = الاصغر

بالشروط ك + ٦ : ٢٨ - ك :: ٢ : ٩

باضافة السابقين الى التاليين ك + ٦ : ٤٤ :: ٩ : ١١

بقسمة التاليين ك + ٦ : ٤ :: ٩ : ١

ثم بالتحويل ك + ٦ = ٢٦ ك = ٢٠

(٣) اي عدد اذا اُضيف اليه ١ ثم ٥ ثم ١٢ تكون نسبة المجموع الاول : الثاني

:: الثاني : الثالث

لنفرض العدد ك

ثم بالشروط ك + ١ : ٥ + ك :: ٥ + ك : ١٢ + ك

بالطرح ك + ١ : ٤ :: ك + ٥ : ٨

بقسمة التاليين ك + ١ : ١ :: ك + ٥ : ٢

ثم ٢ + ك = ٢ + ك = ٥ ك = ٣

(٤) ما عددان نسبة اكبرها الى الاصغر كجانبها الى ٤٢ وكضلتها الى ٦

لنفرض العددين ك وى

ثم بالشرط الاول ك : وى :: ك + ٤٢ : وى

وبالثاني ك : وى :: ك - ٦ : وى

بالمساواة ك + وى : ٤٢ :: ك - وى : ٦

بقلب الوسطين ك + وى : ك - وى :: ٤٢ : ٦

بالمجموع والطرح ٢ ك : ٢ وى :: ٤٨ : ٣٦

بالقسمة ك : وى :: ٤ : ٣

٢ = ك = ٤ وى = ك = $\frac{٤}{٣}$ ثم بالتعويض في النسبة الثانية وى = ٢٤

ك = ٢٢

(٥) اقسام ١٨ الى قسمين بين مربعيها نسبة ٢٥ : ١٦

لنفرض القسمين ك و ١٨ - ك

ثم بالشروط ك : (١٨ - ك) :: ٢٥ : ١٦

بالتحذير ك : ١٨ - ك :: ٥ : ٤

بالجمع ك: ١٨: ٥: ٩

بالقسمة ك: ٣: ٥: ١٠ = ك

(٦) اقسام ١٤ الى قسمين تكون نسبة الخارج من قسمة الاكبر على الاصغر الى

الخارج من قسمة الاصغر على الاكبر كسبة ١٦: ٩

لنفرض اكبرها ك والاصغر ١٤ - ك

بالشروط ١٤ - ك : ١٤ - ك = ١٦ : ٩

بالضرب ك: (١٤ - ك) = ١٦ : ٩

بالتجذير ك: ١٤ - ك = ٤ : ٣

بالجمع ك: ١٤: ٤: ٧

بالقسمة ك: ٢: ٤: ٨ = ك

(٧) اقسام ٢٠ الى قسمين بينهما نسبة ٢ المالية الى ١ المالية واستعمل متناسباً متوسطاً

بينها

لنفرض احدها ك والآخر ٢٠ - ك

بالشروط ك: ٢٠ - ك = ٢ : ١

بالجمع ك: ٢٠: ٩: ١٠ = ك والآخر = ٢ والتناسب المتوسط

(حسب ١٨٩) $7 = \frac{18 \times 2}{20}$

(٨) اي عدد ين حاصلها ٢٤ ونسبة فضله كعبيها الى كعب فضلها كسبة ١٩: ١٠

لنفرض ك احدها وى الآخر

بالمفروض كى = ٢٤

وايضاً ك - ي: (ك - ي) = ١٩: ١٠

بالسط ك - ي: ك - ي = ٢ ك - ي + ٢ ك - ي = ١٩: ١٠

بالطرح (١٩٤) ٢ ك - ي - ٢ ك - ي: (ك - ي) = ١٨: ١٠

بالقسمة على ك - ي ٢ ك - ي: (ك - ي) = ١٨: ١٠

٢ ك - ي = ٢٤ × ٢ = ٧٢ حسب المفروض

فبالتعويض ٧٢: (ك - ي) = ١٨: ١٠

بالضرب والقسمة (ك - ي) = ٤ ك - ي = ٢ ك - ي = ٢٤ ك = ٧

ي = ٤

(٩) مفروض (ت + ك): (ت - ك): (ك + ي): (ك - ي)

(١٧) مزيج من خمر وماء كانت فيه نسبة فضلها : الماء :: ١٠٠ : الخمر ونسبة نفس هذه الفضلة الى الخمر :: ٤ : الماء . فكم في المزيج من الصنفين

الجواب خمر ٢٥ ماء ٥

(١٨) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر :: ٢ : ٣ وإذا أُضيف ٦ الى الأكبر

وطُرِحَ ٦ من الأصغر كانت نسبة المجموع الى الفضلة :: ٣ : ١ الجواب ٢٤ و ١٦

(١٩) ما عددان حاصلهما ٢٢٠ ونسبة فضلة كعبيها الى كعب فضلها :: ٦١ : ١

الجواب ٢٠ و ١٦

(٢٠) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر كالنسبة المالية بين ٤ و ٢ والمتناسب

المتوسط بينهما هو ٢٤ الجواب ٢٢ و ١٨

(٢١) مطلوب عددان نسبة أكبرهما الى اصغرها كنسبة مجتمعهما الى ٤٢ وكنسبة

فضلتها الى ٦ الجواب ٢٢ و ٢٤

(٢٢) مطلوب عددان نسبة أكبرهما الى اصغرها كنسبة مجتمعهما الى ١ وكنسبة

فضلتها الى ب الجواب $\frac{٢(ب+١)}{٢(ب-١)+١}$ و $\frac{ب+١}{٢}$

(٢٣) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٢ : ٣ ونسبة فضلة قوتها

الرابعة الى مجموع كعبيها كنسبة ٢٦ : ٧ الجواب ٦ و ٤

(٢٤) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كنسبة م : ن ونسبة فضلة قوتها

الرابعة الى مجموع مكعبيها كنسبة ف : ق الجواب $\frac{٢}{ق} \times \frac{٢}{ن-٢}$ و $\frac{٢}{ق} \times \frac{٢}{ن-٢}$

—•••—

الفصل السابع عشر

في التغير او النسبة العمومية

٢٠٥ قد يحدث احيانا ان اجزاء نسبة يتعلق بعضها ببعض حتى يتغير احدهما

بتغير آخر منها فنحفظ النسبة . مثاله اذا قيل ان ثمن ٥٠ ذراعاً من قماش = ١٠٠

غرش فان طُرِحَ من الاذرع ١٠ نصير ٤٠ فطُرِحَ من الثمن ٢٠ فيصير ٨٠ وان

صارت الاذرع ٢٠ يصير الثمن ٦٠

	ذ	ذ	ذ	ذ	
اي	٥٠	٤٠	١٠٠	٨٠	
و	٥٠	٢٠	١٠٠	٦٠	
و	٥٠	٢٠	١٠٠	٤٠	و لم جراً

فكلما تغير نالي الزوج الأول يتغير مثله نالي الثاني حتى تبقى النسبة محفوظة .

إذا فرض سابقان ت وب وفرضت ت كمية من جنس ت ولكن اكبر منها او اصغر . وب كمية من جنس ب اكبر او اصغر مراراً مساوية للأحاد التي في فضلة ت وت فتكون ت : ت :: ب : ب فان تغيرت ت فصارت ت تتغير ب وتصبح ب ويقال ان ت تغيرت بتغير ب او بالاختصار ان تاء كباء كما يقال ان اجرة فاعل يتغير كتغير مدة عمله وان ربح مبلغ يتغير كتغير راس المال . ولنا هنا جزءان من نسبة وكل نسبة لها اربعة اجزاء . فاذا قولنا السابق انما هو عبارة مختصرة نذكر جزءين من النسبة عوضاً عن الاربعة . ولو بسطنا العبارة لقلنا نسبة راس مال : راس مال آخر :: ربح الأول : ربح الثاني

٢٠٦ نحتاج في بعض المسائل التعليمية او الفلسفية الى معرفة نسبة شي الى آخر بدون معرفة قيمتها الخصوصية . ويكفي لذلك جزءاً نسبته غير انه ينبغي ان نذكر كون الجزءين الآخرين متضمنين في المذكورين . كما لو قيل ان ثل الماء هو بالنسبة الى مقدار فانه يراد به ان رطلاً : عدة ابطال مفروضة :: ثل رطل : ثل الارطال المفروضة وبدل على نسبة بين كميات غير ثابتة بهذه العلامة - او بهذه ∞ مثالها ت س ب فيراد ان ت تتغير كتغير ب اي ان ت : ت :: ب : ب ويقال لهذه العبارة اي ت س ب نسبة عمومية

٢٠٧ متى زادت كمية عند زيادة اخرى او نقصت عند نقصانها قيل ان الاولى تغيرت كالاخري بالاستقامة . فان ربا دين مثلاً يزيد او ينقص بالنسبة الى راس المال فان تضاعف راس المال تضاعف الربا ولم جراً . اذا فرض ا ∞ ب فيبتدئ ا = م ب حيث تكون م كمية ثابتة . فاذا كانت الفسحة (س) تتغير كمرجع الوقت (ت) فيبتدئ س = م ت واذا نقصت كمية عند زيادة اخرى او بالعكس

فيل ان الاولى تنغير كالثانية بالقلب . مثالها ان الوقت الذي فيه يجيع الفاعل مبالغاً
يكون بالقلب كاجرتو اي كلما زادت الاجرة قلّ الوقت وبالقلب

٢٠٨ متى زادت كمية او نقصت كزيادة حاصل كميّتين او نقصانه قيل انها
تغيرت كتنغيرها معاً . مثالها ربا دين يتغير كحاصل راس المال في الوقت . فان
تضاعف راس المال وتضاعف الوقت زاد الربا اربعة امثال . ومتى كانت كمية
متناسبة ابتداء مع اخرى مقسومة على كمية ثالثة قيل انها تنغير بالاستقامة كالثالثة وبالقلب
كالثالثة . مثاله ان كانت ت : ت :: س : س تكون ت س
ومن امثلة ذلك قاعدة الجاذبية اي ج تنغير بالاستقامة كالمادة م وبالقلب
كمربع البعد د اي ج $\propto$ د^٢

فترى ما سبق ان هذا الباب لا يلزم له شيء سوى ان يناس على قواعد النسبة
المتقدم ذكرها . وان النسبة العمومية انما هي عبارة مختصرة بذكر فيها جزآن من اربعة
اجزاء متناسبة . وان اشكل شيء من مسائله يوضح جلياً بذكر الجزآن المحذوفين

٢٠٩ يتضح ما سبق انه يصح عكس ترتيب الاجزاء في نسبة عمومية كما في نسبة
خصوصية . فان كان ت س ب فكذلك ب س ت لان ت : ت :: ب : ب
اذا ب : ب :: ت : ت
وان ضرب جزء او جزآن من نسبة عمومية في كمية واحدة ثابتة او انقسما عليها فلا
تغير النسبة (١٩٢) مثاله

اذا فرض ت : ت :: ب : ب اي ت س ب فيكون م : م :: ت : ت :: ب : ب
اي م ت س ب وم ت : م ت :: م ب : م ب اي م ت س م ب الخ
وهكذا ان ضرب كلا الجزآن في كمية غير ثابتة او انقسما عليها لا تتغير النسبة . فان
فرض م كمية متغيرة وت : ت :: ب : ب اي ت س ب يكون م : م :: ت : ت
:: م ب : م ب اي م ت س م ب

فرع أوّل اذا تغيرت كمية كاخري يكون الخارج من قسمة احدها على الاخرى
كمية ثابتة كما يتضح من انه اذا تغيرت صورة كسر كتنغير مخرجوه لا تتغير قيمته
مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت س ب اذا ب : ب :: ب : ب
فرع ثان اذا كان حاصل كميّتين ثابتاً تنغير احدها كمكثوره الاخرى . مثاله

ت ب : ت ب :: ا ا يكون $\frac{ت}{ب} :: \frac{ب}{ب}$: اوت : ت :: $\frac{ب}{ب}$: ب : ب
 فرع ثالث : يصح نقل كمية من احد جزئي نسبة عمومية الى الآخر . فاذا كان
 مضروباً فيه في احدها يصير مقسوماً عليه في الآخر . مثاله ت س ب س يكون ايضاً
 $\frac{ت}{ب} :: \frac{س}{س}$ وان كان $\frac{ت}{س} :: \frac{س}{د}$ يكون $\frac{ت}{س} :: \frac{س}{د}$

٢١٠ اذا تغيرت كميّتين كثالثة بتغير احدهما كالآخرى

مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت س ب
 س : س :: ب : ب اي س س ب
 اذا ت : ت :: س : س اي ت س س

واذا تغيرت كميّتان كالثالثة بتغير مجتمعهما وفضلتها ايضاً كالثالثة . مثاله اذا فرض

ت : ت :: ب : ب اي ت س ب
 وس : س :: ب : ب اي س س ب

فاذا ت + ت : س + س :: ب : ب اي ت + ت : س + س ب و ت - س :

ت - س :: ب : ب اي ت - س س ب

وهكذا مهما تعددت الكميات التي تتغير ككمية واحدة . مثاله اذا فرض ت -

ب وس س ب ود س ب وى س ب

فحينئذ (ت + س + د + وى) س ب

واذا تغير مربع مجتمع كميّتين كمربع فضلتهما بتغير مجموع مربعيهما كحاصلهما

فان فرض (ت + ب) - (ت - ب) يكون ت + ب - ت + ب - ت لانه

بالمفروض (ت + ب) : (ت - ب) :: (ت + ب) : (ت - ب)

البسط والجمع والطرح حسب ما تقدم في النسبة لنا

٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب :: ٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب

وبالقسمة ت + ب : ت ب :: ت + ب : ت ب اي ت + ب - ت ب

٢١١ يصح ايضاً ان تضرب اجزاء نسبة عمومية في اجزاء اخرى او تقسم عليها

فان فرض ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

وس : س :: د : د اي س س د

فحينئذ ت : س :: ت : س :: ب : د :: ب : د اي ت س ب د

فرعٌ اذا تغيرت كلتا كميتي كئالفة بتغير حاصل الاثنين كبرج الاخرى
مثاله اذا فرض

$$\begin{array}{r} \text{و} \\ \text{س} - \text{ب} \\ \hline \text{اذا} \quad \text{ت} \text{ س} - \text{ب} \end{array}$$

واذا تغيرت كمية كاخرى بتغير اية قوة او اى جذرٍ فرض من الواحدة مثل ذلك
الجذر او تلك القوة من الاخرى (ع ١٩٩)

مثاله اذا فرض
يكون
و

٢١٢ في تركيب نسب عمومية يصح طرح كميات متساوية من الجزئين
مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت س ب
وب : ب :: س : س اي ب س س
وس : س :: د : د اي س س د
اذا ت : ت :: د : د اي ت س د

فرع اذا تغيرت كمية كئالفة والثانية كئالفة والثالثة كربعة ولم جراً فالاولى
تغير كالاخيرة . مثاله اذا فرض ت س ب س د فحينئذ ت س د واذا
فرض ت س ب س فحينئذ ت س اي ان تغيرت الاولى كالثانية والثانية
كمكثورة الثالثة فالاولى تتغير كمكثورة الثالثة

٢١٣ اذا تغيرت كمية كحاصل كميتين اخريين وكانت احدى الاخريين ثابتة
فالاولى تتغير كالاخري غير الثابتة . مثاله

اذا فرض ك س ل ب وكانت ب ثابتة فاذا ك س ل ومثال ذلك ايضاً
نقل اللوح فانه يتغير كتغير طول وعرضه وعنفه فان في المعنى على ما هو كان تغير
نقله كتغير طول وعرضه
فرعٌ ومكثماها تعددت الكميات . فان فرض

ك س ب ط

فان جُعِلَت ل ثابتة ك س ب ط

وان جعلت ل ب ثابتة ك س ط

وان كانت قيمة كمية متوقفة على اخرين وان فرضت الثانية تغيرت الاولى كالثالثة وان فرضت الثالثة تغيرت الاولى كالثانية فالاولى لتغير كحاصل الاخرين . مثاله ان تغير ثقل لوح كالطول مع عرض مفروض وكالعرض مع طول مفروض ثم ان تغير الطول والعرض يتغير الثقل كحاصلها . وهكذا معها تعددت الكميات

اذا تغيرت كمية كاخري تكون الاولى مساوية للثانية في كمية ثابتة . فان كان ت س ب فلا بد ان تكون نسبة ت : ب ثابتة . ويصح ان تُضْرَبَ في كمية ما حتى يكون الحاصل ت وان كانت نسبة ربح ١٠٠ غرش : راس المال :: ٢٠ : ١ يكون لربح ١٠٠ غرش او ١٠٠٠ غرش نفس هذه النسبة الى راس المال

تنبيه . ان لنظرة مفروض في مسائل هذا الباب ولاسيا في الفلسفة الطبيعية يراد بها كميات ثابتة كما انه في غير هذا الباب يراد بها كميات معروفة لتمييزها من المجهولة

الفصل الثامن عشر

في السلسلة الحسابية والهندسية

٢١٤ السلسلة ويقال لها النسبة المتصلة نوعان حسابية وفيها كلامنا الآن . وهندسية وسياقي الكلام عليها . اما الحسابية فهي عبارة عن طائفة من الكميات تملواو تهبط بزيادة كمية مفروضة او طرحها على التوالي . مثاله ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ وهكذا بالعكس ١٠ ٨ ٦ ٤ ٢ ويقال للاولى سلسلة صاعدة وللثانية سلسلة نازلة

٢١٥ في السلسلة الصاعدة نستعمل كل حلقة باضافة الفضل المشترك الى ما قبلها . فان كانت الحلقة الاولى ٢ والفضل المشترك ٢ تكون السلسلة ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ الى آخره . وان كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون الحلقة

الثانية ت + د والثالثة ت + د + د اي ت + د٢ والرابعة ت + د٢ + د
 اي ت + د٢ والثالثة ت + د٢ + د اي ت + د٤ وهلم جرا . وتكون
 السلسلة ت وت + د وت + د٢ وت + د٢ + د وت + د٤ الى آخره .
 وان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين اي الحلقة الاولى ت والفضل
 المشترك ت نصير الثانية ت + د اي ت٢ والثالثة ت٢ + د اي ت٣
 الى آخره . فتكون السلسلة ت ت٢ ت٣ ت٤ الخ

وفي السلسلة النازلة نستعلم كل حلقة بطرح الفضل المشترك من التي قبلها فان
 كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون السلسلة ت - د
 ت - د٢ ت - د٣ ت - د٤ الخ
 ثم ان هذا العمل يطول بنا جدا في سلسلة طويلة ولكن اذا نظرنا الى سلسلة مثل
 ت ت + د ت + د٢ ت + د٢ + د ت + د٤ الى آخره نرى ان د
 اُضيفت الى ت مرارا تماثل عدة الحلقات الا واحدا لان

ت + د	الحلقة الثانية في
ت + د٢	والثالثة
ت + د٢ الى آخره	والرابعة
ت + د٤٩	فتكون الحلقة الخمسون
ت + د٩٩	والحلقة المئة
ت - د٩٩	وان كانت نازلة تكون

اي ان د تضاف الى ت مرارا تماثل عدة الحلقات الا واحدا . فان فُرض
 ت = الحلقة الاولى ول = الاخيرة وع = عدد الحلقات وف = الفضل
 المشترك فلنا ل = ت + (ع - ١) × ف

٢١٦ لنا ما سبق هذه القاعدة وهي ان الحلقة الاخيرة من السلسلة الحسابية تعدل
 الحلقة الاولى مضافة الى حاصل الفضل المشترك في عدة الحلقات الا واحدا . ومكنا
 نستعلم اية حلقة فُرضت بان تحسبها الحلقة الاخيرة فنعدل عليها العبارة السابقة
 ثم ان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين نصير العبارة ل = ت +
 (ع - ١) × ت = ت + ت - ت اي ل = ت ع

٢١٧ نرى في العبارة السابقة اربع كميات اي ت الحلقة الاولى ل الاخيرة
ع عدد الحلقات ف الفضل المشترك . فان فرض منها ثلاث نستعلم منها
الاخرى

- (١) لما كما تقدّم ل = ت + (ع - ١) ف = الاخيرة
- (٢) بالمقابلة ل - (ع - ١) × ف = ت = الاولى
- (٣) بالمقابلة والتقسمة في الاولى $\frac{ل - ت}{١ - ع} = ف =$ الفضل المشترك
- (٤) ايضاً بالمقابلة والتقسمة في الاولى $\frac{ل - ت}{١ - ع} = ١ + ع =$ عدد الحلقات

ومن المعادلة الثالثة نستعلم اية عدة فرضت من اوساط حسابية بين عددين لان
عدة الحلقات تماثل الطرفين مع جميع الحلقات المتوسطة بينهما . فان فرض ط = عدة
الواسط يكون ط + ٢ = ع اي عدة الحلقات . ثم بوضع ط + ٢ عوضاً عن ع
في المعادلة الثالثة تصير $\frac{ل - ت}{١ + ط} = ف =$ الفضل المشترك
منفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٧ والفضل المشترك ٢ وعدة الحلقات ٩
فما هي الاخيرة

ل = ت + (ع - ١) ف = ٧ + ٢ × (١ - ٩) = ٣١
والسلسلة ٧ ١٠ ١٣ ١٦ ١٩ ٢٢ ٢٥ ٢٨ ٣١
منفروض الحلقة الاخيرة من سلسلة صاعدة ٦٠ وعدة الحلقات ١٢ والفضل
المشترك ٥ فما هي الاولى

ت = ل - (ع - ١) × ف = ٦٠ - ٥ × (١ - ١٢) = ٥٠
استعلم ستة اوساط حسابية بين ١ و ٤٣
الفضل المشترك ٦ والسلسلة ١ ٧ ١٣ ١٩ ٢٥ ٣١ ٣٧ ٤٣

٢١٨ يلزم احياناً معرفة مجتمع حلقات سلسلة ويتوصل اليها بجميع الحلقات
لا محالة . ولكن لنا طريقة اخصر من ذلك وهي انه لا بد ان يكون مجتمع سلسلة صاعدة
مثل ٣ ٥ ٧ ٩ ١١

مساوياً لمجتمع سلسلة نازلة ١١ ٩ ٧ ٥ ٣
فيكون مجتمع الاثنين مضاعف مجتمع احدهما فبجد مجموعهما مضاعف مجتمع احدهما.
ثم ان اخذ نصفه يكون مجتمع احدهما

١١	٩	٧	٥	٣	فلنضرب
٣	٥	٧	٩	١١	وعكسها
١٤	١٤	١٤	١٤	١٤	يكون المجموع

ت	ت + د	ت + ٢	ت + ٢	ت + ٤	}	ومكلا وعكسا
ت + ٤	ت + ٢	ت + ٢	ت + د	ت		
٢ + ت + ٤	٢ + ت + ٤	٢ + ت + ٤	٢ + ت + ٤	٢ + ت + ٤		المجموع

فلما من ذلك هذه القضية وهي ان مجموع طرفي سلسلة يعدل مجموع أي حلقتين
فرضنا على بعد واحد من الطرفين. ولكي نتعلم مجموع الحلقات في السلسلتين لا يلزم إلا
ان تضرب مجموع الطرفين - في عدد الحلقات أي $14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 5 \times 14$

وفي الثانية يكون المجموع $(2 + 4) \times 5$ وهذا مضاعف مجموع حلقات سلسلة واحدة. ثم ان فرض $t =$ الأولى $l =$ الاخير $h =$ عدد الحلقات وم $=$ مجموع الحلقات $11 = m = \frac{t+l}{2} \times c$ وهذه المعادلة مشتملة على هذه القاعدة وهي ان مجموع حلقات سلسلة حسابية يعدل نصف مجموع الطرفين في عدد الحلقات

ما هو مجموع سلسلة الأعداد الطبيعية أي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ إلى ١٠٠٠
 الجواب م = $\frac{ت+١}{٢} \times ع = \frac{١٠٠٠+١}{٢} \times ١٠٠٠ = ٥٠٠٠٥٠$

ثم ان عوضنا عن ل في هذه المعادلة بقيمتها في عـ ٢١٧ نصير المعادلة

$$(1) \quad m = \frac{f + (1 - e)f}{2} \times c \text{ وفيها اربع كميات اي الحلقة الاولى والنصل}$$

المشترك وعدة الحلقات ومجموعهما . وان فرض منها ثلاث نستعمل منها الرابعة . فبالتحويل

نصير

$$(2) \quad T = \frac{2^2 F - 2^2 F + F}{6} = \text{الحلقة الاولى}$$

$$(٢) \text{ ف} = \frac{٢٢ - ٢٢\text{ع}}{٢٢ - ٢٢\text{ع}} = \text{الفضل المشترك}$$

$$\frac{2f + 2 - 2f - 2}{2f} = 0 \quad (4)$$

ينفرد من هذه المعادلات والمنروضات عشرون حالاً نحلُّ بواسطة العبارات المذكورة او بما ينفرد منها وهذه الاحوال مذكورة في هذا الجدول

مفروض	مطلوب	عبارة
١ ت ف ع		$ل = ت(ع - ١) ف$
٢ ت ف م	ل	$ل = ٢ ف + ٢(٢ - ت) + ٢(٢ - ف)$
٣ ت ع م		$ل = ٢ ع - ت$
٤ ف ع م		$ل = ٢ ع + (١ - ع) ف$
٥ ت ف ع		$م = ٢ ع + ٢(٢ - ت) + (١ - ع) ف$
٦ ت ف ل		$م = ٢ ل + ٢(٢ - ت) + ٢(٢ - ف)$
٧ ت ع ل	م	$م = ٢ ل + ٢(٢ - ت) + ٢(٢ - ف) \times ٢$
٨ ف ع ل		$م = ٢ ع + ٢(٢ - ل) - (١ - ع) ف$
٩ ت ع ل		$ف = ٢ ل - ٢ ع$
١٠ ت ع م	ف	$ف = ٢ ع - ٢(٢ - ت) - (١ - ع) ل$
١١ ت ل م		$ف = ٢ ل - ٢(٢ - ت) - ٢(٢ - ف)$
١٢ ع ل م		$ف = ٢ ل - ٢(٢ - ت) - ٢(٢ - ف) - (١ - ع) ل$
١٣ ف ع ل		$ت = ل - (١ - ع) ف$
١٤ ف ع م	ت	$ت = ٢ ع - ٢(١ - ع) ف$
١٥ ف ل م		$ت = ٢ ف + ٢(٢ - ل) + ٢(٢ - ف) - ٢(٢ - م)$
١٦ ع ل م		$ت = ٢ ع - ل$
١٧ ت ف ل		$ع = ٢ ل + ٢(٢ - ت) + ٢(٢ - ف) - ٢(٢ - م)$
١٨ ت ف م	ع	$ع = ٢ ل + ٢(٢ - ت) + ٢(٢ - ف) - ٢(٢ - م) - ٢(٢ - ل)$
١٩ ت ل م		$ع = ٢ ل + ٢(٢ - ت) + ٢(٢ - ف) - ٢(٢ - م) - ٢(٢ - ل) - ٢(٢ - م)$
٢٠ ف ل م		$ع = ٢ ل + ٢(٢ - ت) + ٢(٢ - ف) - ٢(٢ - م) - ٢(٢ - ل) - ٢(٢ - م) - ٢(٢ - ل)$

(١) مفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٢ والفضل المشترك ٢ وعدد

الجواب ٤٤٠

الحلقات ٢٠ فما هو مجموعها

(٢) اذا وُضع مئة حجر على خط مستقيم بين كل اثنين منها ذراعٌ واحدة فكم يمشي من يجمع الجميع في مكانٍ بينهُ وبين الحجر الأوّل ذراع اذا كان كل مرةً يحمل حجراً واحداً
الجواب ١٠١٠٠ ذراع

(٣) ما هو مجتمع ١٥٠ حلقة من سلسلة صاعدة مثل $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ الى آخره
الجواب ٢٧٧٥

(٤) اذا كان مجتمع سلسلة حسابية ١٤٥٥ والحلقة الاولى ٥ وعدد الحلقات ٢٠ فما هو الفضل المشترك
الجواب ٢

(٥) مجتمع سلسلة ٥٦٧ والحلقة الاولى ٧ والفضل المشترك ٢ فما هو عدد الحلقات
الجواب ٢١

(٦) ما هو مجتمع ٢٢ حلقة من هذه السلسلة ١ $\frac{1}{2}$ ٢ $\frac{1}{3}$ ٣ $\frac{1}{4}$ ٤ $\frac{1}{5}$
الجواب ٢٨٠

(٧) رجل اشترى ٤٧ كناناً وكان ثمن الأوّل ١٠ غروش وثنى الثاني ٢٠ غرشاً والثالث ٥٠ غرشاً وهلمّ جرّاً فكم بلغ ثمن الجميع
الجواب ٢٢٠٩٠ غرشاً

(٨) رجل اعطى صدقةً للفقراء في اليوم الأوّل من السنة غرشاً وفي الثاني غرشين وفي الثالث ثلاثة غروش وهلمّ جرّاً فكم اعطى في السنة
الجواب ٦٦٧٩٥

(٩) رجل اشترى اثواباً وكان ثمن الأوّل دينارين والثاني ٤ والثالث ٦ وهلمّ جرّاً الى آخره وبلغ ثمن الجميع ١١٠ دنانير فكم ثوباً اشترى
الجواب ١٠ اثواب

٢١٩ في سلسلة اعدادٍ وترية مثل ١ ٢ ٥ ٧ ٩ الى آخره تكون الحلقة الاخيرة اقلّ بواحدٍ من مضاعف عدد الحلقات ابدأً لان $ل = ت + (ع - ١) ف$ حسباً تقدّم. وفي السلسلة المفروضة $ت = ١$ و $ف = ٢$ فتكون المعادلة $ل = ١ + (ع - ١) \times ٢ = ع - ١$ وكذلك في سلسلة اعدادٍ وترية مثل ١ ٢ ٥ ٧ ٩ الى آخره مجتمع الحلقات يعدل مربع عدد الحلقات لان $م = \frac{1}{2}(ت + ل \times ع)$ وفي هذه السلسلة $ت = ١$ وحسباً تقدم $ل = ع - ٢$ فتصير المعادلة $م = \frac{1}{2}(١ + ع - ٢ + ع \times (١ - ع + ٢))$

مثالة

$$\left\{ \begin{array}{l} ٤ = ٢ + ١ \\ ٩ = ٥ + ٢ + ١ \\ ١٦ = ٧ + ٥ + ٢ + ١ \end{array} \right.$$

مربعات عدد الحلقات

٢٢٠ اذا كان ص٢ان من كميات في سلسلة حساية تكون مجتمعاتها او فضلاتها

ايضاً على سلسلة حساية لان ذلك جمع تناسبات او طرحها فقط

مثالة ٢ ٦ ٩ ١٢ ١٥ ١٨ ٢١ التناسب = ٣

٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ ١٤ التناسب = ٢

المجموع ٥ ١٠ ١٥ ٢٠ ٢٥ ٣٠ ٣٥ التناسب = ٥

الفضلة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ التناسب = ١

واذا ضرب جميع حلفات سلسلة حساية في كمية واحدة او انقسم عليها تكون

المحاصل او الخوارج على سلسلة حساية ايضاً لان ذلك كضرب تناسبات او قسمتها

في سلسلة ٢ ٥ ٧ ٩ ١١ اذا ضرب في ٤

تصير ١٢ ٢٠ ٢٨ ٣٦ ٤٤ ثم اذا انقسم هلا على ٢

تصير ٦ ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ الى آخره

(١) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حساية مجتمعها ٥٦ ومجتمع مربعاتها ٨٦٤

ك = الثاني ي = الفضل المشترك فتكون السلسلة ك - ي ك ك + ي

ك + ٢ ي

وبالشروط (ك - ي) + ك + (ك + ي) + (ك + ٢ ي) = ٥٦

وايضاً (ك - ي) + ك + (ك + ي) + (ك + ٢ ي) = ٨٦٤

بالاولى ٤ ك + ٢ ي = ٥٦

بالثانية ٤ ك + ٦ ي = ٨٦٤

وتغويل هذه المعادلات لنا ك = ١٢ ي = ٤

والاعداد ٨ ١٢ ١٦ ٢٠

(٢) ثلاثة اعداد في سلسلة حساية مجتمعها ٩ ومجتمع كمونها ١٥٢ فهاي هذه

الاعداد الجواب ١ و ٢ و ٥

(٣) ثلاثة اعداد في سلسلة حساية مجتمعها ١٥ ومجتمع مربعي الطرفين ٥٨ فهاي

الاعداد

(٤) اربعة اعداد في سلسلة حساية مجتمع مربعي الاولين ٢٤ ومجتمع مربعي

الآخرين ١٢٠ فهاي الاعداد الجواب ٢ ٥ ٧ ٩

(٥) مطلوب عدد ذو ثلاثة ارقام على سلسلة حساية واذا انقسم العدد على مجتمع

ارقامه يكون الخارج ٣٦ واذا اُضيف اليه ١٩٨ ينقلب ترتيب الارقام

لنفرض الأرقام ك - ي وك + ي فيكون العدد ١٠٠ (ك - ي)
 $10 + ك + (ك + ي) = 111 - ك - ي$
 وبالشروط $111 - ك - ي = 3$
 و $111 - ك - ي = 198 + ي = 100 + (ك + ي) + 10 + ك + (ك - ي)$
 $ك = ٢ = ي = ١$ والعدد ٢٢٤

(١) مطلوب اربعة اعداد في سلسلة حسابية مجموع مربعي الطرفين فيها ٢٠٠
 ومجموع مربعي الوسطين ١٢٦

(٧) ساع سعى الى مكان بعده ١٩٨ ميلاً. في اليوم الاول قطع من المسافة ٢٠
 ميلاً وفي الثاني ٢٨ ميلاً وفي الثالث ٢٦ ميلاً ولم يجرّ في كم يوم قطع المسافة كلها
 الحلقة الاولى = ٢٠ الفضل المشترك = ٢ - الجواب ٩

(٨) مطلوب اعداد على سلسلة حسابية فضلها المشترك ٢ ومجموعها يعدل عدة
 الحلقات ثمان مرات واذا اضيف ١٢ الى الحلقة الثانية وانقسم المجموع على عدة الحلقات
 يكون الخارج الحلقة الاولى

لنفرض ك = الاولى ي = عدة الحلقات ك + ٢ = الثانية ك + (ي - ١)
 = ٢ الاخيرة

$$\begin{aligned} \text{حسباً تقدم } م &= \frac{٢ + (١ - ع) + ٢}{٢} \times ع = ك ي = ع \\ \text{ثم بالعمود م} &= \frac{٢ + (١ - ي) + ٢}{٢} \times ي = ك ي = ي - ٢ \\ \text{وبالمسئلة ك ي} &+ ي - ٢ = ي - ٨ ي = ٩ - ك \\ \text{وايضاً } ك &= \frac{١٢ + ٢ + ك}{٩ - ٩} = ك = ٥ \text{ او } ٢ \\ ي &= ٤ \text{ او } ٦ \end{aligned}$$

والاعداد ٥ ٧ ٩ ١١ او ٢ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٢

(١) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حسابية مجموعها ٢٨ وحاصلها ٥٨٥

(١٠) جسم سقط في الثانية الاولى ١٦ قدماً وفي كل ثانية بعد الاولى سقط ٢٢
 قدماً أكثر ما سقط في الثانية السابقة فكم قدماً يسقط في الثانية الاخيرة اذا بقي ساقطاً
 ٢٠ دقيقة وكم في المدة كلها الجواب في الاخيرة ٦٢٤ قدماً والكل ٦٤٠٠ قدم

(١١) سافر زيد وفي اليوم الاول من سفره قطع ميلاً واحداً وفي اليوم الثاني قطع
 ميلين وفي اليوم الثالث ٢ اميال ولم يجرّ وبعد ٥ ايام لحقة عمرو وقطع ١٢ ميلاً كل
 يوم ففي كم يوم يلحق زيدا الجواب ١٥ يوماً او ٨ ايام

اي جذرا المعادلة من الدرجة الثانية كلاهما ايجابيان في المسئلة السابقة
(١٢) قطع زيد في اليوم الاول ميلاً واحداً وفي الثاني ميلين وفي الثالث ثلاثة
اميال ثم بعد ١ يوم سافر عمرو وقطع ب ميلاً كل يوم ففي كم يوم يلحق زيداً

$$\frac{2 - 1 + \sqrt{1 + 4(1 - 2)}}{2} = \frac{2 - 1 + \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{2 - 1 + \sqrt{-3}}{2}$$

(١٢) على اي شرط لا يلحق عمرو زيداً ابداً الجواب اذا كان $\frac{(2 - 1)}{2} < 1$
ففي المسئلة السابقة او تأخر عمرو يوماً واحداً لما لحقه زيد ابداً

(١٤) سافر سائح في اليوم الاول ميلاً واحداً وفي الثاني ثلاثة اميال وفي الثالث
خمس اميال وبعد ثلاثة اميال تبعه آخر وقطع في اليوم الاول ١٢ ميلاً وفي الثاني ١٢
ميلاً ولم يجرأ في كم يوم يلحق الاول الجواب في يومين او في ٩ ايام

في السلسلة الهندسية

٢٢١ السلسلة الهندسية هي نسبة هندسية متصلة كما ان الحسابية هي نسبة حسابية
متصلة . فالاعداد ٦٤ ٣٢ ١٦ ٨ ٤ هي على نسبة هندسية متصلة
واذا انقسم كل جزء على النسب المشترك يخرج الجزء الذي يتلو . مثاله $\frac{64}{32} = 2$
و $\frac{32}{16} = 2$ و $\frac{16}{8} = 2$ الى آخره . وهكذا اذا انعكس الترتيب وصار المقسوم عليه
المشترك مضروباً فيه . مثاله ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤ الى آخره $4 = 2 \times 2$ و $8 = 2 \times 4$ و $16 = 2 \times 8$ و $32 = 2 \times 16$ و $64 = 2 \times 32$ الخ

وانما في ذلك هذه القضية وهي ان الكميات التي تمهبط بمقسوم عليه مشترك او تعلق
بمضروب فيه مشترك هي على سلسلة هندسية . ويُسمى المقسوم عليه او المضروب فيه
النسب المشترك . وان جعلنا المقسوم عليه كسراً يصبح ان نحسبه المضروب فيه ابداً كما
في السلسلة السابقة فانها تمهبط بالقسمة على ٢ او بالضرب في ٢

٢٢٢ في السلسلة الهندسية الصاعدة نعرف كل حلقة بضرب النسب المشترك
في التي قبلها . فان فرضت الاولى ت والنسب المشترك ب تكون الحلقات على
هذا النسق $ت \times ب = ت ب$ = الثانية $ت ب \times ب = ت ب^2$ = الثالثة
 $ت ب^2 \times ب = ت ب^3$ = الرابعة $ت ب^3 \times ب = ت ب^4$ = الخامسة الخ وتكون
السلسلة ت ت ب ت ب^2 ت ب^3 ت ب^4 الخ

وإذا كانت الأولى والتناسب متساويين تكون السلسلة سرّد قوّات اي تكون الأولى ب والتناسب ب فتكون السلسلة ب ب^١ ب^٢ ب^٣ ب^٤ الخ

٢٢٣ في السلسلة النازلة نستعمل كل حلقة بقسمة التي قبلها على التناسب المشترك او ضربها في التناسب المشترك الكسري. فان كانت الحلقة الأولى ت ب^١ بالقسمة على ب نصير ت ب^٢ او بالضرب في ب^١ نصير ت ب^١ × ب = ت ب^٢

وتكون السلسلة ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ ت ب^٥ الخ. وان كانت الأولى ت والتناسب ب تكون السلسلة ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ الخ. وان نظرتنا الى السلسلة

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦
ت ت ب ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ الخ

نرى ان دليل القوة في كل حلقة اقل من عدد تلك الحلقة بواحد. فنرى في الثانية الدليل ١ وفي الثالثة الدليل ٢ وهلمّ جراً. فان فرض ت = الحلقة الأولى ل = الاخيرة ب = التناسب وع = عدد الحلقات لنا ل = ت ب^{١-ع} فلنا من ذلك هذه الفضية وهي ان الحلقة الاخيرة من سلسلة هندسية تعدل الحلقة الأولى مضروبة في قوة من التناسب دليلها اقل من عدد الحلقات بواحد. ومتى كانت الأولى والتناسب متساويين نصير المعادلة ل = ب ب^{١-ع} = ب^ع

٢٢٤ اذا عُرِفَت ثلاث من الكميات المذكورة اي من ت ب ل ع تُعرَف منها

الآخرى

- (١) لنا ممّا سبق ل = ت ب^{١-ع} = الاخيرة
- (٢) بالقسمة ت = ب^ع ل = الاولى
- (٣) بالقسمة والتجدير ب = (ت^{١-ع} ل) = التناسب

اما عدة الحلقات فتستعمل من هذه المعادلة بالانساب اي اللوغرتمات وليس هذا موضعاً لذكر طريقها

ثم اننا بالمعادلة الاخيرة نجد اية عدّة فُرِضت من اوساط هندسية بين عددين. فان فُرِض ط = الاوساط يكون ط + ٢ عدد الحلقات اي ط + ٢ = ع ثم

الحلقة الأخيرة = ت ب $^{1-\epsilon}$ $\times \frac{1}{r} = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1.1}$

$$\frac{121}{163} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{163} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \text{والمتبع}$$

(۲) ما هو مجتمع هذه السلسلة ۱ ۲ ۹ ۲۷ الى آخره الى ۱۲ حلة

الجواب ۲۶۵۷۲۰

(٤) ما هو مجموع عشر حلقات من هذه السلسلة $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}$ ؟

الجواب $\frac{174.75}{59.49}$

٢٢٦ كميات على سلسلة هندسية هي مناسبة لفضلاتها

لنفرض سلسلة ت ت ب ت ب ت ب ت ب ت ب الح فحسب كيفية
السلسلة ت:ت ب::ت ب::ت ب::ت ب::ت ب::ت ب::ت ب::ت ب الى
آخره. ثم في كل زوج يطرح السابق من التالي فنصير ت:ت ب::ت ب-ت
:ت ب-ت ب-ت ب-ت ب-ت ب-ت ب-ت ب الح

اي نسبة الاولى الى الثانية كنسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة .
وكنسبة فضلة الثانية والثالثة الى فضلة الثالثة والرابعة وهلمّ جرّاً الى آخره

فرعٌ اذا كانت كيمياء على سلسلة هندسية تكون فضلاتها ايضاً على سلسلة هندسية

مثالہ	۲	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳ الی آخرہ
وفضلائہا	۶	۱۸	۵۴	۱۶۲	ایضاً علی سلسلہ

عدة كميات تكون على سلسلة موسيقية اذا كانت اية ثلاثاً متواليه من السلسلة بحيث تكون نسبة الاولى الى الثالثة كنسبة فضله الاولى والثانية الى فضله الثانية والثالثة . مثالة الكميات ٦٠ ٢٠ ١٥ ١٢ ١٠ هي على سلسلة موسيقية لان

$$12-10:10-20::12:20, \quad 20-20:20-70::20:70.$$
$$10-15:15-10::10:10, \quad 10-20:20-20::10:20,$$

يتفرع ما تقدم ٢٠ حالاً كما في السلسلة الحسابية وماك جدول العبارات اللازمة
لحل كل مسائل هذا الباب

المفروض	المطلوب	العبارة
١ ث ب ع		$ل = ث ب^{١-ع}$
٢ ث ب م	ل	$ل = \frac{ث + (ب - ١)}{٢}$
٣ ث ع م		$ل (م - ل) = ث^{١-ع} (م - ث)$
٤ ب ع م		$ل = \frac{ب (١ - م)}{١ - ع}$
٥ ث ب ع		$\frac{ب}{١ - ع} = ث$
٦ ث ب ل		$\frac{ل - ب}{١ - ب} = ٢$
٧ ث ع ل	٢	$\frac{ل - ع}{١ - ع} = \frac{ل - ع}{١ - ع}$
٨ ب ع ل		$\frac{ل - ب}{١ - ب} = ٢$
٩ ث ع ل		$\frac{ل - ع}{١ - ع} = ب$
١٠ ث ع م	ب	$ث ب^{١-ع} = م - ث$
١١ ث ل م		$\frac{ث - م}{١ - م} = ب$
١٢ ع ل م		$(م - ل) (ل - ب) = م^{١-ع} - ل$
١٣ ب ع ل		$\frac{ل}{١ - ع} = ث$
١٤ ب ع م	ث	$\frac{ب (١ - م)}{١ - ع} = ث$
١٥ ب ل م		$ث = ل ب - (ب - ١) م$
١٦ ع ل م		$ث (م - ث) = ل^{١-ع} (ل - م)$
١٧ ث ب ل		$\frac{نسب ل - نسب ث}{نسب ب} = ع$
١٨ ث ب م	ع	$\frac{نسب [ث + (ب - ١) م] - نسب ب}{نسب ب} = ع$
١٩ ث ل م		$\frac{نسب ل - نسب ث}{١ + \frac{نسب (م - ث) - نسب (م - ل)}{نسب ب}} = ع$
٢٠ ب ل م		$\frac{نسب ل - نسب [ل ب - (ب - ١) م]}{نسب ب} = ع$

مسائل

(١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجموعها ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤

لنفرض الاعداد k و l

بالشروط ك: ي: ي: ل: اى كل = ي

وك + ي + ج = ١٤ وك + ي + ج + ي = ١٥ الاصلاد ٢ و ٤ و ٨

(۲) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية حاصلها ۶۴ ومجموع كماليها ۵۸۴

لنفرض ك = الحلقة الاولى وى = التماسب فتكون السلسلة ك كى كى كى

بالشرط الأول $K \times K \times K$ أي $K^3 = 76$

بالتالي $ك^1 + ك^2 + ك^3 = ٨٤$ $ك = ٢$ $ي = ٢$

١ ٤ ٥ والاعداد

(٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجموع الاول والثالث ٥٢ ومربع

الحجواب ۲۰۱۰

الوسط ١٠٠

(٤) مطلوب اربعة اعداد على سلسله هندسية مجتمع الاولين ٥٠ ومجتمع الاخيرين ٦٠

لنفرض السلسلة ك كى كى كى ؟ الأعداد ٥ ١٠ ٢٠ ٤٠

(٥) رجل قسم ٢١٠ دنانير بين بنيه الثلاثة وكانت اقسامهم على سلسلة هندسية .

وكان الأول ٩٠ دينارًا أكثر من الآخر فكم كان قسم كل واحد منهم

(٦) المطلوب ثلاثة اعداد على سلاسة هندسية وفضلة اكبرها واصغرها ١٥ ونسبة

فضلة مربى الأكبر والأصغر الى مجموع مربعات الأعداد الثلاثة :: ٧ : ٥

الحواب ٥ ١٠ ٢٠

(٧) . طلب اربعة اعداد على سلسله هندسية الثانية منها اقل من الرابعة باربعة

وعشرين ونسبة مجمع الطرفين : مجمع الوسطين :: ٧ : ٢

الجواب ۱ ۲ ۹ ۲۷

(٨) رجل استخدم خادمًا الى مدة ١١ سنة . ووعده ان يعطيه في السنة الاولى

حبة قمح وغلة هذه الحبة في الثانية وغلة الغلة في الثالثة ولم تجرأ الى نهاية المدة المذكورة.

فان اثرت كل حبة عشر حبات كل سنة فكم حبة تبلغ

الاجواب ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱

- (١) رجل هندي اخترع الشطرنج وقدمه الى الملك فاعجبه جداً وقال له ما طلبت اعطيك. فطلب الرجل حبة فحم للبيت الأول من رقعة الشطرنج وحبين للتاني واربع حبات للتالث وثماني للرابع ولم يجرأ الى الاربعة والستين بيتاً فكم حبة اخذ (١٠) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمعا ٢٦ وحاصل الأول في الثالث ٧٢ الجواب ١٢ ٨ ٦
- (١١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمعا الأول والثالث ١٨ وحاصل الثلاثة ٥٧٦ الجواب ٦ ٨ ١٢
- (١٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية فضلة فضلتها ٢ وثلاثة امثال حاصل الأول في الثالث ٢١٦ الجواب ٦ ٨ ١٢
- (١٣) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعا ١٨٩ ومجموع الثاني والخامس ٥٤ الجواب ٢ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦
- (١٤) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعا ١٨٩ ومجموع الوسطين ٣٦ الجواب ٢ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦

الفصل التاسع عشر

في غير المتناهيات ونظير غير المتناهي

٢٢٧ غير المتناهي بحسب مفهومه المطلق شيء لا يقبل زيادة ولا ينوّم له زيادة. وهذا هو المراد به في الادبيات والالهيّات. واما في العدد فلا يمكن تصوّره اذ يمكن ان يزداد عدد حتى يتجاوز اي عدد ففرض. وبحسب ذلك يكون العدد الاعظم ما يستحيل الوصول اليه. ومما زيد عدد يمكن ان تنوّم له زيادة فيكون المراد بنظير المتناهي في التعليميات غير المراد به في غيرها كما مرّ

٢٢٨ الكمية التعليمية اذا توفّقت زيادتها فوق حدود مفروضة سميت غير متناهية. والمراد بالحدود المفروضة ما يستطيع العقل ادراكه. وعلى هذا المعنى تكون الاعداد الطبيعية التي هي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الى آخره غير متناهية لانها مهما زيدت

تقبل الزيادة أيضاً. وبناء على ذلك يصح ان يقال في غير متناه انه اعظم من غير متناه آخر. مثاله ٢ ٢ ٢ ٢ الى غير نهاية و ٤ ٤ ٤ ٤ الى غير نهاية. فيها زاد السركان يكون الثاني مضاعف الأول وهكذا ت + ت + ت + ت + ت الى ٩ ت + ٩ ت + ٩ ت + ٩ ت الى ١٠ ت. يكون الثاني تسعة امثال الأول

يجب ان يميز بين كمية غير متناهية وعدة اجزاء غير متناهية لانه يمكن ان تعدد الاجزاء الى غير نهاية وتكون الكمية كلها متناهية وصغيرة. مثاله اذا أخذ واحد ثم نصفه ثم رבעه وهلم جرا يكون $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ الى آخره. فيها تعددت الاجزاء لا يمكن ان تنفوق الواحد. وهكذا $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ الى آخره لا يمكن ان تنفوق الثانية

٢٢٩ اذا هبطت كمية تحت حدة مفروض سميت نظير غير المتناهي. مثاله $\frac{1}{1000000}$ $\frac{1}{100000}$ $\frac{1}{10000}$

وعلى المعنى المذكور تُقسم كمية الى غير نهاية. والكمية التي هي اصغر ما يكون لا يمكن الوصول اليها اذ لا يمكن تجزئها الى حدة لا يوم تجزئها ايضاً وعلى هذا المعنى ايضاً يمكن ان يكون نظير غير متناه اصغر من نظير غير متناه آخر. مثاله $\frac{1}{1000000}$ $\frac{1}{100000}$ $\frac{1}{10000}$ الى آخره. فيكون الثاني نصف الاول هما تعددت الاجزاء. وهكذا $\frac{1}{1000000}$ $\frac{1}{100000}$ $\frac{1}{10000}$ $\frac{1}{1000}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{10}$

٢٣٠ اذا حدثت في الاعمال الجبرية كمية نظير غير المتناهي يمكن طرحها من العمل بدون ان يجعل فرقاً في الحاصل اذ لا اعتبار لما هو صغير حتى لا يشعر بحضوره او غيابه. مثاله في تحويل $\frac{1}{10}$ الى كسر عشري فان قسمنا الصورة على المخرج يكون لنا $\frac{1}{10}$ وهي تعدل $\frac{1}{10}$ تقريباً و $\frac{22}{100}$ اكثر تقريباً و $\frac{222}{1000}$ اكثر تقريباً وهلم جرا حتى يصير الفرق بين $\frac{1}{10}$ والكسر العشري صغيراً جداً لا اعتبار له

ونرى ما سبق ان كمية ربما تقترب الى اخرى الى غير نهاية بدون ان تبلغ اليها. مثاله في تحويل $\frac{1}{10}$ الى كسر عشري فما امتد في منازل الكسر العشري لا يمكن ان يبلغ الى $\frac{1}{10}$ تماماً. ومما تعددت المنازل فلا بد ان يبنى بينها وبين $\frac{1}{10}$ فرق ولو

كان صغيراً الى غير نهاية . وفي كميات من هذا النوع سُميت احدهما حد الاخرى . فان
 $\frac{1}{3}$ هو حد $\frac{2}{3}$ الى آخره و $\frac{1}{3}$ هو حد $\frac{2}{3}$ الى غير نهاية . ثم ان
 نظير غير المنتهي وان لم يكن له اعتبار في ذاته ان وقع مضروباً فيه او مقسوماً عليه
 يكون له احياناً اعتبار كلي . واذا كان نظير غير المنتهي لا يفرق عن صفر بما يشعر
 به فيدُلُّ عليه احياناً بصفر ويدُلُّ على غير المنتهي بهذه العلامة ∞

٢٢١ لما كان غير المنتهي اعظم من نظير غير المنتهي بما لا يوصف كان يمكن
 عدد ارتباطها بعلامة الجمع او الطرح اخراج نظير غير المنتهي من العمل بالكلية . وهكذا
 اذا ارتبط نظير غير المنتهي بكمية متناهية . ولكن اذا ضرب غير متناه في متناه يزداد
 بذلك غير المنتهي كقيمة الكميات . مثاله ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ الخ $\times ٤$ يكون
 الحاصل ٨ ٨ ٨ ٨ ٨ الخ اي اربعة امثال الاولى . واذا انقسم غير متناه على
 متناه ينتص الاول كقيمة الكميات . مثاله ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ الخ $\div ٢ = ٣$ ٣ ٣
 الخ اي نصف الاولى . وان ضربت كمية متناهية في نظير غير المنتهي
 يكون الحاصل نظير غير المنتهي . مثاله اذا فرض $ل =$ المتناهية و $=$ نظير غير
 المنتهي لنا $ل \times = ٠$. لانه لو كان المضروب فيه واحداً لكان الحاصل مساوياً
 المضروب . وان كان اقل من واحد يكون الحاصل اقل من المضروب . وهنا فرضنا
 المضروب فيه اقل من واحد الى غير نهاية فيكون الحاصل اقل من المضروب فيه الى
 غير نهاية . واذا انقسمت كمية متناهية على نظير غير المنتهي يكون الخارج غير متناه
 اي $ل = \infty$. لانه كلما قل المقسوم عليه زاد الخارج وهنا قد قل المقسوم عليه الى غير
 نهاية فزاد الخارج الى غير نهاية . مثاله $٢ = ٢ \div ٦$ و $٢ = ٢ \div ٦$ و $٢ = ٢ \div ٦$ و $٢ = ٢ \div ٦$
 $٢٠٠ = ٢٠٠ \div ٦$ و $٢٠٠ = ٢٠٠ \div ٦$ الخ واذا انقسمت متناهية على غير متناه يكون
 الخارج نظير غير المنتهي اي $ل = \infty$. لانه كلما زاد المقسوم عليه قل الخارج . فان زاد
 المقسوم عليه الى غير نهاية يقل الخارج الى غير نهاية

الفصل العشرون

في الكسور المتصلة

إذا انقسمت صورة هذا الكسر $\frac{247}{373}$ على نفسها والمخرج على الصورة تكون القيمة $\frac{1}{373} + 1$ وإذا انقسم $\frac{126}{247}$ صورته ونفرجه على 126 بصير $\frac{1}{126} + 1$ أي $\frac{247}{373} = \frac{1}{126} + 1$

$$\frac{1}{126} + 1 = \frac{1}{126} + \frac{1}{126} = \frac{2}{126} = \frac{1}{63}$$

$$\frac{1}{63} + 1 = \frac{1}{63} + \frac{1}{63} = \frac{2}{63}$$

$$\frac{1}{63} + 1 = \frac{1}{63} + \frac{1}{63} = \frac{2}{63}$$

فالكسر المتصل هو كسر صورته واحد ونفرجه صحيح مع كسر صورته واحد ونفرجه صحيح مع كسر الخ وعبارته العامة هي

$$\frac{1}{1} + 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

أي كسر كان يتحول إلى كسر متصل بواسطة استعمال العاد الأكبر الصورة ونفرجه كما تقدم في ع ١٢٣ صحيفة ٧٤

(١) حول $\frac{114}{327}$ إلى كسر متصل

$$\frac{114}{327} = \frac{1}{3} + \frac{1}{327}$$

$$\frac{1}{327} + 1 = \frac{1}{327} + \frac{1}{327} = \frac{2}{327}$$

$$\frac{1}{327} + 1 = \frac{1}{327} + \frac{1}{327} = \frac{2}{327}$$

(٢) حول $\frac{201}{460}$ إلى كسر متصل

$$\frac{201}{460} = \frac{1}{2} + \frac{1}{460}$$

$$\frac{1}{460} + 1 = \frac{1}{460} + \frac{1}{460} = \frac{2}{460} = \frac{1}{230}$$

$$\frac{1}{230} + 1 = \frac{1}{230} + \frac{1}{230} = \frac{2}{230} = \frac{1}{115}$$

$$\frac{1}{115} + 1 = \frac{1}{115} + \frac{1}{115} = \frac{2}{115}$$

(٢) حول $\frac{٤٢١}{٩٧٢}$ الى كسر متصل

(٤) حول $\frac{٢٥١}{٧٦٤}$ الى كسر متصل

(٥) حول $\frac{١٢٠}{٤٢١}$ الى كسر متصل

لاجل استعمال قيمة كسر متصل حول الصحيح والكسر في المخرج الاخير الى كسر غير صحيح ثم اقلبه اي اجعل المخرج صورة والصورة مخرجاً ثم حول الصحيح في المخرج قبله الى كسر من اسم الكسر الذي قد وجدته واجمع الصورتين

$$(١) \text{ استعمل قيمة هذا الكسر المتصل } \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2+1}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \text{ و } \frac{12}{4} = \frac{1}{4} + 3$$

$$\frac{12}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \text{ و } \frac{20}{12} = \frac{1}{12} + 1 + \frac{1}{3}$$

$$(٢) \text{ استعمل قيمة هذا الكسر المتصل } \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{3+1}$$

$$(٣) \text{ استعمل قيمة هذا الكسر المتصل } \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{4+1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{5+1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{6}} = \frac{6}{6+1}$$

بعد تحويل كسر الى كسر متصل نستعمل له قيمة تقريبية باخذ بعض الاجزاء الاول من ذلك الكسر لاجل تلك القيمة مثاله في $\frac{114}{374}$ له قيمة تقريبية $\frac{1}{3}$ وهو الجزء الاول من الكسر المتصل واذا اخذ منه جزءان تكون $\frac{22}{77}$ وذلك اكثر تقريباً وثلاثة اجزاء تكون اكثر تقريباً

الجواب $\frac{22}{74} \approx \frac{1}{3}$

(١) استعمل قيمات تقريبية للكسر $\frac{٥٢٢}{١١٩٣}$

(٢) استعمل قيمات تقريبية للكسر $\frac{١١٥}{٤٣٤}$

(٣) استعمل قيمات تقريبية للكسر $\frac{١١٩}{٤٠٩}$

وعلى هذه الكيفية نستعمل قيمات تقريبية للكسور الكثيرة المنازل وذلك كثير الفائدة في بعض مسائل علم الهيئة

(٤) تناسب محيط الدائرة الى قطرها هو ٣١٤١٥٩٢٦ فاستعمل لذلك قيمات تقريبية

الجواب $\frac{٢٢}{٧} \approx \frac{٢٢٢}{١٠٦} \approx \frac{٢٥٥}{١١٣}$

(٥) في ٨٧٩٦٩ سنة تقترن الأرض وعطارد ٢٧٧٢٨٧ مرة فاستعلم قيمات

$$\frac{٢٢}{١٠٤} \frac{١٢}{٤١} \frac{٧}{٢٣} \frac{٦}{١٩} \frac{١}{٣} \text{ الجواب}$$

$$\frac{٨٧٩٦٩}{٢٧٧٢٨٧} \text{ تقريبية للكسر}$$

(٦) في ٥٧٥٥١ سنة تقترن الأرض والزهرة ٢٦٠٠٠ مرة فاستعلم قيمات

$$\frac{٢٢٥}{١٤٧} \frac{٨}{٥} \text{ الجواب}$$

$$\frac{٥٧٥٥١}{٢٦٠٠٠} \text{ تقريبية للكسر}$$

(٧) في ٢٩٥٣٠٦ سنة بدور القمر ٢٦٥٢٤٢٢ دورة قانونية فاستعلم قيمة تقريبية

$$\frac{١٩}{٢٣٥} \text{ الجواب}$$

$$\frac{٢٩٥٣٠٦}{٢٦٥٢٤٢٢} \text{ للكسر}$$

الفصل الحادي والعشرون

في المبادلات والتراكيب

يراد بالمبادلات الترتيب المختلفة التي يمكن ترتيب هذه كميات عليها . مثاله

ا ب ت

ا ت ب

ب ا ت

ب ت ا

ت ا ب

ت ب ا

الحروف الثلاثة ا ب ت يمكن ترتيبها

ا ب

ا ت

ب ا

ت ب

ت ا

إذا أخذت اثنين اثنين يمكن ترتيبها

ا

ب

ت

إذا أخذت فرداً فرداً ترتب

لأجل استعمال عدة احرف = ن متخذة م وم مرة
لفرض ا ب ت ث س = ن حرف فالمبادلات اذا أخذت الاحرف
فرداً فرداً تعدل عدة الاحرف اي ن وعدة المبادلات اذا أخذت اثنين اثنين هي
ن (ن - ١) لانه اذا ابقينا حرفاً ١ مثلاً بقي (ن - ١) حرف

اي ب ت ث س

ثم اذا وضعنا ١ قبل كل واحد لنا

ا ب ا ت ا ث اس

اي لنا مبادلات ن - ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها يكون الالف الاول
واذا فعل مثل ذاك بالباء لنا مبادلات ن - ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها
يكون الباء الاول وهكذا للاحرف ن كلها فتكون كل المبادلات ن (ن - ١)

اذا أخذت ثلاثة ثلاثة تكون المبادلات ن (ن - ١) X (ن - ٢) لانه اذا

ابقينا حرفاً ١ مثلاً بقي (ن - ١) حرف وقد تبين ان مبادلات ن حرف

اثنين اثنين هي ن (ن - ١) فتكون مبادلات ن (ن - ١) حرف اثنين اثنين (ن - ١)

X (ن - ٢) فاذا وضعت ١ اولاً في هذه المبادلات لنا (ن - ١) X (ن - ٢)

مبادلة للاحرف ن ثلاثة ثلاثة فيها يكون الف الاول واذا فعل مثل ذلك بالباء لنا

(ن - ١) X (ن - ٢) مبادلة للاحرف ن فيها - الاول وهكذا في كل الاحرف

ن فتكون كل المبادلات ن (ن - ١) X (ن - ٢)

وهكذا يبين ان المبادلات لاحرف ن ماخوذة اربعة اربعة تكون ن (ن - ١)

X (ن - ٢) X (ن - ٣)

اذا أخذت الاحرف اثنين اثنين يكون الضلع الاخير في العبارة الثلاثة على عدة

المبادلات (ن - ١) واذا أخذت ثلاثة ثلاثة يكون الضلع الاخير (ن - ٢) واذا أخذت

اربعة اربعة يكون الضلع الاخير (ن - ٣) فاذا أخذت م وم معاً يكون الضلع الاخير

ن - (م - ١) او ن - م + ١ وعدة المبادلات لاحرف ن ماخوذة م وم معاً هي

ن (ن - ١) X (ن - ٢) X (ن - ٣) (ن - م + ١)

امثلة

(١) ما المبادلات الممكنة للاحرف الثمانية ا ب ج د هـ و ز ح ماخوذة خمسة خمسة

ن = ٨ م = ٥ ن - م + ١ = ٤ فتصير العبارة

الجواب ٦٧٢٠

$$٥ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨$$

(٢) ما المبادلات الممكنة لستة وعشرين حرفاً مأخوذة أربعة أربعة

الجواب ٢٥٨٨٠٠

(٣) ما المبادلات الممكنة لاثني عشر حرفاً مأخوذة ستة ستة ستة

الجواب ٦٦٥٢٨٠

إذا دخل كل حرف في كل مبادلة أي إذا كان $m = n$ نصير العبارة

$$n(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 \text{ أو قلب ترتيب الإضلاع}$$

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

(٤) كم نغمة تدق على ٨ أجراس

$$٤٠٢٢٠ = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

(٥) كم مبادلة ممكنة للأحرف الجيد

٤٧٩٠٠١٦٠٠

(٦) على كم ترتيب يمكن وضع ١٢ شخصاً

أما التراكيب فبراد بها المجموعات المختلفة التي يمكن أن توضع كميات عليها بدون التناث إلى ترتيبها. مثالة الأحرف ا ب ت معاً لما مركب واحد فقط أي ا ب ت

إذا أخذت اثنين اثنين لها ثلاثة تراكيب

ا ب ا ت ب ت

لأجل استعمال التراكيب الممكنة لأحرف ن مأخوذة م وم معاً

إذا أخذت فرداً فرداً فهي ن

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

فتكون العبارة العامة لأحرف ن مأخوذة م وم معاً

$$n(n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-m+1) + 1$$

$$١ \times ٢ \times ٣ \times \dots \times m$$

مثال أول كم تركيب ممكن لستة أحرف مأخوذة ثلاثة ثلاثة ثلاثة

$$n=6 \quad m=3 \quad n-m+1=4$$

$$٢٠ = \frac{٤ \times ٥ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١}$$

الجواب ٧٠

(٢) كم تركيب لثانية أحرف مأخوذة أربعة أربعة

الجواب ٢١٠

(٣) كم تركيب لعشرة أحرف مأخوذة ستة ستة ستة

الفصل الثاني والعشرون

في السرد غير المتناهي

٢٢٢ انه في تجذير كمية او في قسمة كمية على اخرى يحدث احيانا اننا لانستطيع الوصول الى الجذر او الى الخارج بالتام ولكن ننشأ في العمل الى غير نهاية والحادث من ذلك يُسمى سرداً غير متناهٍ

٢٢٣ الكسر يُبسّط احيانا كثيرة الى سرد غير متناهٍ بقسمة الصورة على المخرج . لان قيمة الكسري الخارج من تلك القسمة . وان لم يوجد المخرج في الصورة مراراً معلومة يبقى بعد كل قسمة باقٍ فيمنشأ في العمل الى غير نهاية . مثالة او قبل ابسط $\frac{1}{2}$ الى سرد غير متناهٍ لنيل

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots)$$

$$1 - \frac{1}{2}$$

$$+\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{8}$$

$$+\frac{1}{16}$$

$$-\frac{1}{32}$$

$$+\frac{1}{64}$$

$$-\frac{1}{128}$$

$$+\frac{1}{256}$$

وعلى هذا المثال يكون السرد $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots$ ثم لكي يقترب السرد الى قيمة الكسر في كل جزء منه أكثر فأكثّر يقتضي ان يكون الجزء الأول من المتسوم عليه أكبر من الثاني كما نرى من المثال السابق فان كان ت أكبر من واحد يبعد كل جزء من السرد أكثر فأكثّر عن قيمة الكسر الحقيقية لانه بعد كل قسمة يبقى باقٍ يجب اضافته الى الخارج او طرحه منه وكل ما كان هذا الباقي اعظم ابتعد عن القيمة الحقيقية ولكن ان كان ت اصغر من واحد كما لو فرض $\frac{1}{2}$

تكون $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ و $\frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ و $\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$ الخ
 ويكون السرد $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1}{16} = \frac{1}{32} = \frac{1}{64} = \frac{1}{128} = \frac{1}{256} = \frac{1}{512} = \frac{1}{1024} = \frac{1}{2048} = \frac{1}{4096} = \frac{1}{8192} = \frac{1}{16384} = \frac{1}{32768} = \frac{1}{65536} = \frac{1}{131072} = \frac{1}{262144} = \frac{1}{524288} = \frac{1}{1048576} = \frac{1}{2097152} = \frac{1}{4194304} = \frac{1}{8388608} = \frac{1}{16777216} = \frac{1}{33554432} = \frac{1}{67108864} = \frac{1}{134217728} = \frac{1}{268435456} = \frac{1}{536870912} = \frac{1}{1073741824} = \frac{1}{2147483648} = \frac{1}{4294967296} = \frac{1}{8589934592} = \frac{1}{17179869184} = \frac{1}{34359738368} = \frac{1}{68719476736} = \frac{1}{137438953472} = \frac{1}{274877906944} = \frac{1}{549755813888} = \frac{1}{1099511627776} = \frac{1}{2199023255552} = \frac{1}{4398046511104} = \frac{1}{8796093022208} = \frac{1}{17592186044416} = \frac{1}{35184372088832} = \frac{1}{70368744177664} = \frac{1}{140737488355328} = \frac{1}{281474976710656} = \frac{1}{562949953421312} = \frac{1}{1125899906842624} = \frac{1}{2251799813685248} = \frac{1}{4503599627370496} = \frac{1}{9007199254740992} = \frac{1}{18014398509481984} = \frac{1}{36028797018963968} = \frac{1}{72057594037927936} = \frac{1}{144115188075855872} = \frac{1}{288230376151711744} = \frac{1}{576460752303423488} = \frac{1}{1152921504606846976} = \frac{1}{2305843009213693952} = \frac{1}{4611686018427387904} = \frac{1}{9223372036854775808} = \frac{1}{18446744073709551616} = \frac{1}{36893488147419103232} = \frac{1}{73786976294838206464} = \frac{1}{147573952589676412928} = \frac{1}{295147905179352825856} = \frac{1}{590295810358705651712} = \frac{1}{1180591620717411303424} = \frac{1}{2361183241434822606848} = \frac{1}{4722366482869645213696} = \frac{1}{9444732965739290427392} = \frac{1}{18889465931478580854784} = \frac{1}{37778931862957161709568} = \frac{1}{75557863725914323419136} = \frac{1}{151115727451828646838272} = \frac{1}{302231454903657293676544} = \frac{1}{604462909807314587353088} = \frac{1}{1208925819614629174706176} = \frac{1}{2417851639229258349412352} = \frac{1}{4835703278458516698824704} = \frac{1}{9671406556917033397649408} = \frac{1}{19342813113834066795298816} = \frac{1}{38685626227668133590597632} = \frac{1}{77371252455336267181195264} = \frac{1}{154742504910672534362390528} = \frac{1}{309485009821345068724781056} = \frac{1}{618970019642690137449562112} = \frac{1}{1237940039285380274899124224} = \frac{1}{2475880078570760549798248448} = \frac{1}{4951760157141521099596496896} = \frac{1}{9903520314283042199192993792} = \frac{1}{19807040628566084398385987584} = \frac{1}{39614081257132168796771975168} = \frac{1}{79228162514264337593543950336} = \frac{1}{158456325028528675187087900672} = \frac{1}{316912650057057350374175801344} = \frac{1}{633825300114114700748351602688} = \frac{1}{1267650600228229401496703205376} = \frac{1}{2535301200456458802993406410752} = \frac{1}{5070602400912917605986812821504} = \frac{1}{10141204801825835211973625643008} = \frac{1}{20282409603651670423947251286016} = \frac{1}{40564819207303340847894502572032} = \frac{1}{81129638414606681695789005144064} = \frac{1}{162259276829213363391578010288128} = \frac{1}{324518553658426726783156020576256} = \frac{1}{649037107316853453566312041152512} = \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} = \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} = \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} = \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} = \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} = \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} = \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} = \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} = \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} = \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} = \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} = \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} = \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} = \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} = \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} = \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} = \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} = \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} = \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} = \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} = \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} = \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} = \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} = \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} = \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} = \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} = \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} = \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} = \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} = \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} = \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} = \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} = \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} = \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} = \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} = \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} = \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} = \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} = \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} = \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} = \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} = \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} = \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} = \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} = \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} = \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} = \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} = \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} = \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} = \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} = \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} = \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} = \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} = \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} = \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} = \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} = \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} = \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} = \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} = \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} = \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} = \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} = \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} = \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} = \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} = \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} = \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} = \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} = \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} = \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} = \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} = \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} = \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} = \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} = \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} = \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} = \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} = \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} = \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} = \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} = \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} = \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} = \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} = \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} = \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} = \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} = \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} = \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} = \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} = \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} = \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} = \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} = \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} = \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} = \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} = \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} = \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} = \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} = \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} = \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} = \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} = \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} = \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} = \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} = \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} = \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} = \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} = \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} = \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} = \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} = \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} = \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} = \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} = \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} = \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} = \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} = \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} = \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} = \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} = \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} = \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} = \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} = \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} = \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} = \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} = \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} = \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} = \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} = \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} = \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} = \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} = \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} = \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} = \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} = \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} = \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} = \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} = \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} = \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} = \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} = \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} = \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248} = \frac{1}{7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496} = \frac{1}{14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992} = \frac{1}{28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984} = \frac{1}{57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968} = \frac{1}{115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936} = \frac{1}{231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872} = \frac{1}{463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744} = \frac{1}{926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488} = \frac{1}{1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976} = \frac{1}{370534685559411825355427152027801305130463950930$

الناسب الى الجزء الاصغر منسوماً على الناسب الى واحداً وفي سردها بطر يكون الجزء
الاصغر صغيراً الى غير نهاية فيحسب لاشي فتصير العبارة $m = \frac{b}{1-b}$ او $m = \frac{b}{1-b}$

مثال ١ ما هو مجموع هذا السرد

$$الخ \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

الجزء الاعظم $= \frac{1}{1}$ والناسب $= 10$

$$m = \frac{b}{1-b} = \frac{10}{1-1} = \frac{10}{0} = \infty$$

٢ ما هو مجموع هذا السرد $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

$$x = \frac{1 \times 2}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

٣ ما هو مجموع هذا السرد $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

$$الجواب \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

٢٢٨ ثم انه يستعمل مجموع بعض انواع السرد بواسطة الطرح لانه حسب قواعد

الكسور

$$\frac{1}{2 \times 2} = \frac{2-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4 \times 4} = \frac{4-4}{4 \times 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5 \times 5} = \frac{5-5}{5 \times 5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}$$

فان جعلت الكسور الواقعة عن اليسار في سرده فالامر واضح انه يعدل فضلة
السردين المركبين من الكسور عن اليمين . وتستعمل تلك الفضلة بسهولة لانه ان طرح
الجزء الاول من احد هذين السردين فالباقي يعدل السرد الآخر

فالتفرض سردها غير متناه $\frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{4 \times 4} + \frac{1}{6 \times 6} + \frac{1}{8 \times 8} + \dots$ المطلوب
مجموعه فلنصنع منه سردها جديداً بطرح الضلع الثاني من الخارج وليكن مجموع هذا السرد
الجديد $= m$

$$اي \quad m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$اذ \quad m - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$وبالطرح $\frac{1}{2} = \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{4 \times 4} + \frac{1}{6 \times 6} + \frac{1}{8 \times 8} + \dots$$$

مثال ٢ ما هو مجموع السرد $\frac{1}{7 \times 7} + \frac{1}{16 \times 16} + \frac{1}{25 \times 25} + \frac{1}{36 \times 36} + \frac{1}{49 \times 49} + \dots$

لنفرض $m = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ الخ

إذا $m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ الخ

بالطرح $\frac{1}{2} = \frac{1}{7 \times 2} + \frac{1}{6 \times 3} + \frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{2 \times 7}$ الخ

أو $\frac{1}{2} = \frac{1}{7 \times 2} + \frac{1}{6 \times 3} + \frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{2 \times 7}$ الخ

ما هو مجموع سرده اجزاء هذه

الخ $\frac{1}{12 \times 10 \times 8} + \frac{1}{10 \times 8 \times 6} + \frac{1}{8 \times 6 \times 4} + \frac{1}{6 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1}$

فتذكر الجزء الاخير من الخارج والطرح لنا $\frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 6 \times 4} + \frac{1}{6 \times 4 \times 3} = \frac{1}{8}$

الخ $\frac{1}{12 \times 10 \times 8} + \frac{1}{10 \times 8 \times 6}$

أو $\frac{1}{12 \times 10 \times 8} + \frac{1}{10 \times 8 \times 6} + \frac{1}{8 \times 6 \times 4} + \frac{1}{6 \times 4 \times 3} = \frac{1}{8}$

ما هو مجموع هذا السرد

الخ $\frac{1}{6 \times 5 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1}$

الجواب $\frac{1}{2}$

٢٢٩ طريقة اخرى لجمع اسراده جميعها ممكن

افرض سردها بطلًا فيقوات كمية غير ثابتة القيمة مثل ك وليكن مجموعها $m = 0$ ثم

اضرب جانبي المعادلة في كمية مركبة من ك وكمية اخرى ثابتة واجعل للكاف قيمة حتى

تكون قيمة الكمية المركبة المضروب فيها صفرًا فان نقل جزء او اكثر الى الجانب الاول

يعدل الجانب الثاني . مثاله

(١) افرض $m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ الخ

اضرب الجانبين في ك - ١ فيصير

$m \times (ك - ١) = (ك - ١) + \frac{ك - ١}{2} + \frac{ك - ١}{3} + \frac{ك - ١}{4} + \frac{ك - ١}{5} + \frac{ك - ١}{6} + \frac{ك - ١}{7}$ الخ

فان قُرض ك - ١ = ٠ يصير الجانب الاول اي $m \times (ك - ١) = ٠$ ثم بنقل

١ الى الجانب الاول لنا $١ = \frac{1}{7 \times ٦} + \frac{1}{٥ \times ٤} + \frac{1}{٤ \times ٣} + \frac{1}{٣ \times ٢} + \frac{1}{٢ \times ١}$ الخ

(٢) مفروض $m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ الخ

اضرب الجانبين في ك - ١ فلنا

$m \times (ك - ١) = (ك - ١) + \frac{ك - ١}{2} + \frac{ك - ١}{3} + \frac{ك - ١}{4} + \frac{ك - ١}{5} + \frac{ك - ١}{6} + \frac{ك - ١}{7}$ الخ

ثم ان قُرض ك = ١ يكون ك - ١ = ٠ وينقل الجزء من الى الجانب الاول لنا

$$\frac{1}{7 \times 5} + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{5 \times 3} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{3 \times 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1$$

$$\text{الح } \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 = \text{مفروض م}$$

اضرب الجانبيين في ٢ ك - ٢ ك + ١ فلنا

$$\frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{2} - 1 = (1 + 2 - 2) \times \text{م}$$

وان قُرض ك = ١ لنا

$$\frac{1}{1 \times 5 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

فترى من المثالين الاخيرين ان سردين مختلفين قد يكونان على قيمة واحدة

نبذة

في تعكس الاسرار

٢٤٠ لكي تعكس مرداً مثل هذا

ك = ت + ن + ب + س + ن + د + ر + ن الح

اي لتجد قيمة ن في اجزاء من ك افرض سرداً له مسميات غير معينة

فلنفرض ن = ت + ك + ب + ك + س + ك + د + ك + ر + ك + الح

ثم لنجد قيمة قوات ن بموجب هلا المفروض لنا

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ب} + \text{ك} + \text{ت} + \text{س} + \text{ك} + \text{ت} + \text{د} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ر} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ن} + \text{ك} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ك}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ب} + \text{ك} + \text{ت} + \text{س} + \text{ك} + \text{ت} + \text{د} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ر} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ن} + \text{ك} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ك}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ب} + \text{ك} + \text{ت} + \text{س} + \text{ك} + \text{ت} + \text{د} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ر} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ن} + \text{ك} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ك}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ب} + \text{ك} + \text{ت} + \text{س} + \text{ك} + \text{ت} + \text{د} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ر} + \text{ك} + \text{ت} + \text{ن} + \text{ك} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ك}$$

ثم بالتعويض عن قوات ن في السرد الاول بهذه التيات لنا

$$\begin{aligned} \text{س} &= ٢\text{ب} - ٢\text{ب س} \\ \text{ر} &= ١٤\text{ب} - ٢١\text{ب س} + ٢\text{س} + ٦\text{ت} - ٢\text{د} - ٢\text{ر} \end{aligned}$$

فهذه قيمات المسميات غير المعينة في السرد الذي فرضناه مطابقاً اي

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{الح}$$

ثم لنفرض سرداً

$$\text{ك} = \text{ن} - \frac{1}{٢}\text{ن} + \frac{1}{٤}\text{ن} - \frac{1}{٨}\text{ن} - \frac{1}{١٦}\text{ن} - \frac{1}{٣٢}\text{ن} - \frac{1}{٦٤}\text{ن} - \frac{1}{١٢٨}\text{ن} - \frac{1}{٢٥٦}\text{ن}$$

$$\text{حيث يكون ت} = ١ \quad \text{ب} = -\frac{1}{٢} \quad \text{س} = \frac{1}{٨} \quad \text{د} = -\frac{1}{٤} \quad \text{ر} = \frac{1}{١٦}$$

فحسب قيمات المسميات المذكورة لنا

$$\text{ت} = \frac{1}{٢} \quad \text{ب} = -\frac{1}{٢} \quad \text{س} = \frac{1}{٨} \quad \text{د} = -\frac{1}{٤} \quad \text{ر} = \frac{1}{١٦}$$

$$\begin{aligned} \text{س} &= ٢\text{ب} - ٢\text{ب س} = \frac{1}{٢} - \frac{1}{٢} \times \frac{1}{٨} = \frac{1}{٨} \\ \text{ر} &= ١٤\text{ب} - ٢١\text{ب س} + ٢\text{س} + ٦\text{ت} - ٢\text{د} - ٢\text{ر} = \frac{1}{٨} - \frac{21}{٨} \times \frac{1}{٨} + \frac{2}{٨} + \frac{6}{٨} - \frac{2}{٨} - \frac{2}{٨} = \frac{1}{١٦} \end{aligned}$$

$$\text{اذا ن} = \text{ك} + \frac{1}{٢}\text{ن} + \frac{1}{٤}\text{ن} + \frac{1}{٨}\text{ن} + \frac{1}{١٦}\text{ن} + \frac{1}{٣٢}\text{ن} + \frac{1}{٦٤}\text{ن} + \frac{1}{١٢٨}\text{ن} + \frac{1}{٢٥٦}\text{ن}$$

في السرد الدائر

$$٢٤١ \quad \text{في هذا السرد} \quad ١ + ٢\text{ك} + ٤\text{ك} + ٧\text{ك} + ١١\text{ك} + ١٨\text{ك} \quad \text{نرى ان}$$

مجموع كل مسميين متواليين يعدل الذي يليها عن اليسار اي $٧ = ١ + ٢ + ٤$ و $١٨ = ١ + ٢ + ٤ + ٧$

الح وكل جزء بعد الثاني يعدل الذي قبله في ك مع الذي قبل ذلك في ك

$$\text{في هذا السرد} \quad ١ + ٢\text{ك} + ٤\text{ك} + ٧\text{ك} + ١١\text{ك} + ١٨\text{ك} \quad \text{الح نرى كل جزء}$$

بعد الثاني = ٢ ك في الجزء الذي قبله - ك في الذي قبل ذلك فالايراد التي في

على هذا النسق اي التي يعرف كل جزء منها قوماً قبله يسمى سرداً دائراً ومسميات ك وك

اي ١ - ٢ - ١ نسق قياس النسبة

$$\text{في هذا السرد} \quad ١ + ٤\text{ك} + ٦\text{ك} + ١١\text{ك} + ٢٨\text{ك} + ٦٣\text{ك} \quad \text{الح}$$

نرى في كل جزء بعد الثالث = ٢ ك في الذي قبله - ك في الذي قبل ذلك +

$$\text{ك} في الثالث قبل ذلك فيكون قياس النسبة ٢ - ١ - ٢$$

لنفرض سرداً دائراً ت + ب + س + د + ح + ف + الح

فان كان قياس النسبة مركباً من جزئين كالأول المفروض سابقاً فليكونا م و ن

$$\text{ثم س} = \text{ب} + \text{م} + \text{ن} = \text{ك} = \text{الجزء الثالث}$$

$$\text{د} = \text{س} + \text{م} + \text{ن} = \text{ك} = \text{الجزء الرابع}$$

$$\text{ح} = \text{د} + \text{م} + \text{ن} = \text{ك} = \text{الجزء الخامس}$$

الح الح

ان كان قياس النسبة مركباً من ثلاثة اجزاء مثل الثاني المفروض سابقاً فلتكن

م + ن + ر

ثم د = س م ك + ب ن ك + ت ر ك = الجزء الرابع

ي = د م ك + س ن ك + ب ر ك = الخامس

ف = ي م ك + د ن ك + س ر ك = السادس الخ

٢٤٢ في كل سردي دائري يستعمل قياس النسبة بتحويل معادلتين من هذه المعادلات

ان كان مركباً من جزئين وتحويل ثلاث منها ان كان مركباً من ثلاثة اجزاء

فلنفرض ك = ١ ولناخذ الجزء الرابع والخامس ما سبق ذكرها واذا فرضنا ك

= ١ فلنا

$$\left. \begin{array}{l} د = س م + ب ن \\ ي = د م + س ن \end{array} \right\} \text{مطلوب قيمة م ون}$$

بتحويل هاتين المعادلتين لنا

$$م = \frac{د س - ب ي}{س - ب} \quad ن = \frac{س ي - د ي}{س - ب}$$

ثم في هذا السرد ١ + ٢ ك + ٥ ك + ٧ ك + ٩ ك + ١١ ك الخ
ت ب س د ي ف

ان جعل ك = ١ فلنا

$$م = \frac{١ \times ٢ + ٥ \times ٧}{٧ \times ٣ - ١٥} = ٢ \quad ن = \frac{٧ - ١ \times ٥}{٧ \times ٣ - ١٥} = ١$$

فيكون قياس النسبة ٢ - ١

٢٤٣ متى عرفنا قياس النسبة لسرد ما بطر نستعلم من ذلك مجتمع السرد

$$\left. \begin{array}{l} ت ب س د ي ف \\ ت + ب ك + س ك + د ك + ي ك + ف ك \text{ الخ سردياً دائرياً} \\ \text{قياس النسبة لـ م + ن} \end{array} \right\}$$

فيكون ت = الجزء الاول ب = الثاني

س = ب م ك + ت ن ك = الثالث

د = س م ك + ب ن ك = الرابع

ي = د م ك + س ن ك = الخامس الخ

فترى هنا م ك مضروباً في كل جزء الآ الأول والاخير ون ك في كل جزء
الآ الاخيرين وان وهم امتداد السرد الى غير نهاية يجوز ترك الاخيرين كأن لا قيمة لما
كما علمت وان فرض ع = مجموع السرد فلما

$$ع = ت + ب + م ك \times (ب + س + د الخ) + ن ك \times (ت + ب + س الخ)$$

$$وع - ت = ب + س + د الخ \quad وع = ت + ب + س الخ$$

$$فاذا ع = ت + ب + م ك \times (ع - ت) + ن ك \times ع$$

$$\text{وتحويل هذه المعادلة نصير } ع = \frac{ت + ب + م ك}{١ - م ك - ن ك} ع$$

$$\text{مثال ١ ما هو مجموع } ٦ + ١ ك + ١٢ ك + ٤٨ ك + ١٢٠ ك الخ$$

$$\text{قياس النسبة } ٦ + ١$$

$$\text{اذا } ت = ١ \quad ب = ٦ ك \quad م = ١ \quad ن = ٦$$

$$\text{والمجموع } = \frac{١ + ٦ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك}$$

$$٢ \quad \text{ما هو مجموع } ١ ك + ٢ ك + ٤ ك + ٧ ك + ١١ ك + ١٨ ك + ٢٩ ك الخ$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ + ٢ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك}$$

$$٣ \quad \text{ما هو مجموع } ١ ك + ٥ ك + ١٣ ك + ٤١ ك + ١٢١ ك + ٢٦٥ ك الخ$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ - ١ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك}$$

$$٤ \quad \text{ما هو مجموع } ١ ك + ٢ ك + ٤ ك + ٧ ك + ١١ ك + ١٨ ك + ٢٩ ك الخ$$

$$\text{الجواب } = \frac{١}{١ - ٦ ك - ٦ ك}$$

$$٥ \quad \text{ما هو مجموع } ١ ك + ٢ ك + ٥ ك + ٧ ك + ٩ ك + ١١ ك الخ$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ + ١ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك}$$

$$٦ \quad \text{ما هو مجموع } ١ ك + ٢ ك + ٨ ك + ٢٨ ك + ١٠٠ ك الخ$$

$$\text{الجواب } = \frac{١ - ١ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك}$$

في ترتيب الفضلات

٢٤٤ لكي نستعلم قيمة بعض اجزاء سردي الى حد ما يلزم التدقيق المقصود به

عمل ما يؤخذ عدة رتب من فضلات اجزاء السرد . مثاله ان فرض سرد

١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥	ب طرح كل جزء ما بعده
١	٧	١٩	٢٧	٦١	الرتبة الاولى من الفضلات
		١٢	٢٤		الرتبة الثانية
			٦		الثالثة ولم جراً

فلنا ب-ت س-ب د-س س-ي د-ف ي-الخ = الاولى

د-د-س+ب-ت ي-د+س-ب ف-ي+د-س الخ
= الثانية

ف - هـ ي + ا - د - ا س + ب - ت الخ = الخامسة

في الرتبة الثانية ١ ٢ ١

في الثالثة ١ ٢ ٢ ١

في الرابعة ١ ٤ ٦ ٤ ١

في الخامسة ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

وهي اذا كمسيات فوات كميات ثنائية فتكون مسميات ع عدد من رتب فضلات

$$\frac{1}{2} \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon} X \quad 1-\varepsilon \quad 1-\varepsilon \quad X \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad 1$$

٢٤٥ ثم لكي نجد عبارة عمومية دالة على جزء ما في سرد مثل تبس د الخ

لنفرض $d''d'''d'''' = \text{الحزب الأول في الرتبة الأولى والثانية والثالثة والرابعة الحزب}$

اِذَا دُ = پ - ت

د = س - آب + ت

د" = د - ۲ س | ۲ ب - ت

د''' = ی - ۴ د + ۶ س - ۴ ب + ۳ ت الخ

بالمقابلة نستعلم قيمات اجزاء السرد المفروض اي تبس د الخ

ب = ت + د

س = ت + ۲ د + د

دست + د' + د' + د'''

ی = ت + د' + د' + د' + د' + د'

فأذا لنا هذه العبارة للدلالة على ع جزء من سرد أوله ت

ت + (ع - ١) د' + (ع - ١) (ع - ٢) د'' + ع - ١ - ع' $\times \frac{ع-٢}{٣} \times \frac{ع-٢}{٣}$ د''' الخ
مثال أول ما هو الجزء العشرون من هذا السرد

الخ	٢١	١٥	١٠	٦	٢	١
الرتبة الاولى من فضلات	٦	٥	٤	٣	٢	١
الثانية =		١	١	١	١	
الثالثة =						
هنا ت = ١	د' = ٢	د'' = ١	د''' = ٠			

والجزء العشرون = ١ + ٢٨ + ١٧١ = ٢١٠ والجزء الخمسون = ١٢٧٥

مثال ٢ ما هو الجزء العشرون من ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الخ

السرد	١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥	الخ
الرتبة الاولى من فضلات	٧	١٩	٢٧	٦١		
الثانية =		١٢	١٨	٢٤		
الثالثة =			٦	٦		
هنا ت = ١	د' = ٧	د'' = ١٢	د''' = ٦			

والجزء العشرون = ٨٠٠٠

٣ ما هو الجزء الثاني عشر من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٣٠ الخ

الجواب ١٥٦

٤ ما هو الجزء الخامس عشر من ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ الخ

الجواب ٢٢٥

٢٤٦ لنا ايضاً هذه العبارة الثالثة على مجموع ع اجزاء من سرده اولة ت
ع + ع' $\times \frac{ع-١}{٢}$ د' + ع' $\times \frac{ع-١}{٢} \times \frac{ع-٢}{٣}$ د'' + ع' $\times \frac{ع-١}{٢} \times \frac{ع-٢}{٣} \times \frac{ع-٣}{٤}$ د''' الخ او تكتب العبارة هكذا

٢ = ع + ع' $\times \frac{ع-١}{٢ \times ١}$ د' + ع' $\times \frac{ع-١}{٢ \times ٢ \times ١}$ د'' + ع' $\times \frac{ع-١}{٢ \times ٣ \times ١}$ د''' الخ

مثال أول ما هو مجموع ٢٠ جزءاً من ١ ٢ ٥ ٧ ٩ الخ

السرد ١ ٢ ٥ ٢ ١
 = الرتبة الاولى من فضلات ٢ ٢ ٢ ٢
 = الثانية . . .

هنا ت = ١ د' = ٢ د'' = ٥

المجموع = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠ = ٢ × $\frac{١-٢٠}{٢}$ اي ع'

(١) ما هو مجموع ٢٠ جزءا من ١' ٢' ٣' ٤' ٥' الخ

ت = ١ د' = ٢ د'' = ٥ د''' = ٢٠ = مجموع عشرين جزءا = ٢٨٧٠

(٢) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١ ٢ + ١

١ + ٢ + ١ ٢ + ٢ + ١ ٤ + ٢ + ١ الخ

السرد ١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ ٢١

الرتبة الاولى للفضلات ٢ ٢ ٤ ٥ ٦

الـ الثانية ١ ١ ١ ١ ١

الـ الثالثة . . .

ت = ١ د' = ٢ د'' = ٥ د''' = ٢٠ الخ

فحسب العبارة العامة السابقة

$$م = ع' = ٢ \times \frac{١ - (٢ - ن)}{٢ \times ١} + \frac{(٢ - ن)(١ - ن)}{٢ \times ٢ \times ١} = \frac{٢(١ - ن) + (٢ - ن)(١ - ن)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

(١) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١' ٢' ٣' ٤' ٥' الخ

ت = ١ د' = ٢ د'' = ٥ د''' = ٢٠ الخ

وبالتعويض في العبارة المشار اليها السابقة انا

$$م = \frac{٢(١ + ن)(١ + ن) + (١ + ن)(١ + ن)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

(٥) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد

١ × (١ + م) ٢ (٢ + م) ٣ (٣ + م) ٤ (٤ + م) الخ

ت = م + ١ د' = م + ٢ د'' = م + ٥ د''' = ٢٠ الخ

$$م = م + ١ = \frac{٢(١ + م)(١ + م) + (١ + م)(١ + م)}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢(٢ + م)(٢ + م) + (٢ + م)(٢ + م)}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢(٣ + م)(٣ + م) + (٣ + م)(٣ + م)}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢(٤ + م)(٤ + م) + (٤ + م)(٤ + م)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

نتبيه . هذا الباب كثير الاستعمال في علم الهيئة والطبيعات فلا يسع المتعلم جهله

(١) ما هو مجموع ٥٠ جزءاً من ١ ٢ ٣ ٤ الخ
 ت = ١ = د' ٧ = د'' ١٢ = د''' د'''' = ٠

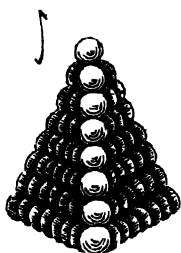
المجموع ١٦٣٥٦٣٥

(٧) ما هو مجموع ١٥ جزءاً من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٣٠ الخ
 (٨) ما هو مجموع ٢٠ جزءاً من ١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ الخ
 (٩) ما هو مجموع ١٢ جزءاً من ١ ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ ١٤ ١٦ ١٨ ٢٠ الخ

في تكويم الكرات او الكلال

ان العبارات في المثال الثالث والرابع والخامس من الامثلة المتقدمة تستخدم لمعرفة عدد الكلال او الكرات في كُومٍ على هيئات مختلفة

اولاً الكومة المثلثة الاضلاع

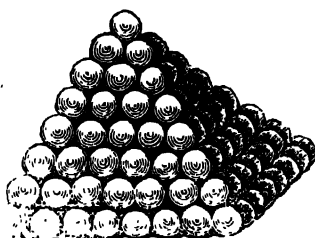


الكومة المثلثة الاضلاع مؤلفة من كلال موضوعة بعضها فوق بعض صفوفاً واعرافاً بحيث ينقص عدد الكلال واحداً في كل ضلعٍ حتى ينتهي الى واحدة - في العرق الاتلي فعدد الكلال في كومة مثلية الاضلاع كاملة هو مجموع سرد ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ = ٧٨

وعلى افتراض ن عدد الكلال في ضلع واحد من الفاعدة او

$$(١) \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1} = ٢$$

ثانياً الكومة المربعة

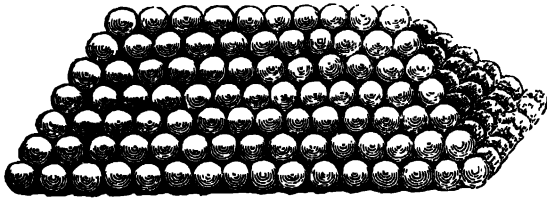


الكومة المربعة مؤلفة كما في الشكل اي في العرق الاعلى كلة واحدة وفي الثانية ٢ وفي الثالثة ٣ ولم جراً فاذا كانت الصفوف والاعراف ن يكون ددد الكلال مجموع السرد ١ ٢ ٣ ٤ الخ × ن كما ترى في العبارة في المثال الرابع السابق اي

$$(٢) \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1} = ٢$$

ثالثاً الكومة المستطيلة

عدد الكلال في الصف الاعلى $(1 + م)$ وفي الثاني $٢ (٢ + م)$ وفي الثالث $٣ (٣ + م)$ وهلم جرا فجميع الكلال في الكومة تدل عليه العبارة في المثال الخامس السابق اي



$$= \frac{(١٠ + ٩ + ٨ + \dots + ١) (١ + ١٠)}{٢ \times ٩ \times ١} = ٥٥$$

اذا كانت الكومة ناقصة فاحسب عدد الكلال الذي كان فيها لو كانت كاملة والعدد اللازم لتكميلها فتكون النضلة عدد الكلال في الكومة

وقد تكتب العبارات (١) و (٢) و (٣) السابقة مكملاً

(١) في المثلثة $١ = \frac{١ + ١}{٢} \times \frac{١ + ١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

(٢) في المربعة $٤ = \frac{١ + ٣}{٢} \times \frac{٣ + ١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

(٣) في المستطيلة $٥٥ = \frac{١ + ١٠}{٢} \times \frac{١٠ + ١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

وبما ان $\frac{(١ + ١٠)}{٢}$ هو عدد الكلال في الوجه المثلث لكل كومة والضع الثاني من

العبارة هو عدد الكلال في الصف الاطول من القاعدة مع العدد الذي في السطح

المتقابل مع الذي في الصف الاعلى فلنا هذه القاعدة

الى عدد الكلال في الصف الاطول من القاعدة اضعف عدد الكلال في السطح

المتقابل والعدد الذي في الصف الاعلى واضرب المجمع في ثلث العدد الذي في الوجه

المثلث من الكومة فالحاصل عدد الكلال في الكومة كلها

(١) كم كلة في كومة مثلثة لها ١٥ عرقاً

$$٦٨٠ = \frac{١٥ \times ١٦}{٢} \times \frac{١}{٢}$$

(٢) كم كلة في كومة مربعة لها ١٤ عرقاً وكم تبقى بعد نزع ٥ اعراق منها

الجواب ١٠١٥ و ٢٦٠

(٣) كم كلة في كومة مستطيلة اذا كان طول القاعدة ٦٠ كلة وعرضها ٢٠ كلة

الجواب ٢٣٤٠٥

- (٤) في كومة مستطيلة ناقصة طول القاعدة ٤٦ وعرضها ٢٠ والطول في الصنف الاعلى ٢٥ والعرض ٩ فكم كلة فيها
الجواب ٧١٩٠
- (٥) في كومة مثلثة ناقصة عدد الككل في كل ضلع من العرق الاسفل ٢٠ وفي كل ضلع من الاعلى ١٠ فكم كلة فيها
- (٦) في كومة مربعة ناقصة عدد الككل في ضلع من القاعدة ١٥ وفي ضلع من العرق الاعلى ٦ فكم كلة فيها
- (٧) في كومة مستطيلة عدد الككل في ضلع من القاعدة ٩٢ وفي الضلع الآخر ٤٠ وفي العرق الاعلى عدد الككل في ضلع ٧٠ وفي الضلع الآخر ١٨ فكم كلة فيها



الفصل الثالث والعشرون

في المعادلات النامة من الدرجة الثالثة

٢٤٧ متى وُجد في معادلة مكعب المجهول ومربعة سُميت معادلة نامة من الدرجة الثالثة وهذه عبارة عمومية لمعادلات من هذا النوع بعد نقل الاجزاء الى جانب واحد

$$٠ = د + س ك + ب ك^٢ + ك^٣$$

ولا بد لكل معادلة من هذا النوع من ثلاثة اجوبة كما ان المعادلات من الدرجة الثانية لما جوي بان

$$٠ = (٢ - ك) \times (٢ - ك) \times (١ - ك) \text{ لكان لنا من ذلك } ك^٢ - ٦ ك + ١١ = ٠$$

ولكن تعدل هذه الكميات صفراً لا بد ان يكون احد الاضلاع التي حصلت المعادلة منها صفراً اي تكون ك - ١ = ٠ وك = ١ او ك - ٢ = ٠ وك = ٢ ان ك - ٢ = ٠ وك = ٢ واذا عوضنا عن المجهول بكية اخرى اية كانت غير واحدة من هذه الثلاث لم يكن المحاصل صفراً فلا يكون للمعادلة غير هذه الاجوبة الثلاثة واجوبة المعادلات هذه تسمى اصولها

٢٤٨ لاجل ابضاج كبنية استعمال اصول معادلة من هذا النوع لنفرض

ك- ف- ق- ك- ر

وبضرب الاولى في الثانية لنا ك- (ف+ ق) ك+ ف ق وان ضربت

هذه في ك- ر فلنا

ك- (ف+ ق+ ر) ك+ (ف+ ق+ ر+ ر) ك- ف ق ر وهذه

العبارة تعدل صفراً متى كانت ك- ف= ٠ وك- ف او ك- ق= ٠

وك- ق او ك- ر= ٠ وك- ر فلنعوض عن هذه المعادلة باخرى مثل ك-

ت ك+ ب ك- س= ٠ فلكي تكون الاصول الثلاثة على ما تقدم اي ك= ف

او ك= ق او ك= ر يلزم ان يكون

(١) ت= ف+ ق+ ر

(٢) ب= ف+ ر+ ق

(٣) س= ف ق ر

فنرى ان الجزء الثاني من المعادلة مشتمل على مجتمع اصولها الثلاثة وان الجزء

الثالث منها مشتمل على مجتمع حاصل كل اثنين اثبت من الاصول الثلاثة . والجزء

الرابع مشتمل على حاصل الاصول الثلاثة . ونرى ايضا ان كل معادلة من الدرجة

الثالثة لا يكون لها اصول منطقية الا الكميات التي تنفي الجزء الرابع منها . فمن حيث ان

ذلك الجزء هو حاصل الاصول الثلاثة لا بد ان يقبل الانقسام على كل واحد منها .

ومن ذلك نستدل بسهولة على الكميات التي يجب ان نستعملها في تفهيننا عن اصول

المعادلة . فلو فرض ك= ٦ ك+ ٦ لكان لنا بالمقابلة ك- ٦= ٠ ومن حيث

ان هذه المعادلة ليس لها اصول منطقية الا التي تنقسم ٦ عليها نعلم ان تلك الاصول هي

ثلاثة من هذه الاربعة اي ١ ٢ ٣ ٦ لان ٦ لا تنقسم الا على هذه الاربعة

فان فرض ك= ١ لنا ٦-١-١-١= ٦

وان فرض ك= ٢ لنا ٦-٢-٢-٢= ٠

وان فرض ك= ٣ لنا ٦-٣-٣-٣= ١٨

وان فرض ك= ٦ لنا ٦-٦-٦-٦= ٢٠٤

فلنا من ذلك ك= ٢ واحد من الاصول الثلاثة

فيكون ك- ٢ ضلعاً من الاضلاع التي حصلت المعادلة من ضرب بعضها في

بعض . ونستعمل الآخر بالقسمة هكذا

٢٥١ متى كانت العلامات في المعادلة ايجابية وسلبية بالتناول كما في المعادلات المذكورة آنفاً وفي هذه ك^١ - ت ك^٢ + ب ك - س = ٠ تكون جميع الاصول ايجابية. ولو كانت جميع العلامات ايجابية كما في هذه ك^١ + ت ك^٢ + ب ك + س = ٠ لكانت جميع الاصول سلبية كما يتضح من ضربها. مثالة ك = ٢ = ك = ٣ = ك = ٤ بالمقابلة ك - ٢ = ٠ . ك - ٣ = ٠ . ك - ٤ = ٠ . وبالنضرب (ك - ٢) × (ك - ٣) × (ك - ٤) = ك^١ - ٩ ك^٢ + ٢٦ ك - ٢٤ = ٠ .

ولو فرض ك = ٢ = ك = ٣ = ك = ٤ لكان ك = ٢ = ك = ٣ = ك = ٤ . فبالضرب لنا ك^١ + ٩ ك^٢ + ٢٦ ك + ٢٤ = ٠ فنرى ان عدد الاصول السلبية يماثل مرار تغيير العلامات في المعادلة. وعدد الاصول الايجابية يماثل مرار تنابع العلامات المشابهة وفي هذه المعادلة ك^١ + ك^٢ - ٣٤ ك + ٥٦ = ٠ .

نرى العلامات تتغير من + الى - ثم من - الى + اربع مرتين و+ يتبع + مرة واحدة فقط. ونستدل بذلك ان المعادلة اصلين ايجابيين واصلًا واحدًا سلبياً. ولا بد ان ٥٦ يقبل الانقسام على هذه الاصول و٥٦ ينقسم على ١ ٢ ٤ ٧ ٨ ١٤ ٢٨ ٥٦ فاذا فرضنا ك = ٢ فلنا ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ = ٠ . فاذا ك = ٣ هو اصل واحد. ولكي نستعلم الاخرين نقسم على

$$\begin{array}{r} (٢ - ك) \begin{array}{r} ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \end{array} \\ \hline ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \\ ٢٨ - ٤ + ٨ - ٥٦ + ٦٨ \end{array}$$

والخارج ك^١ + ٢ ك - ٢٨ = ٠ وك^٢ + ٣ ك - ٢٨ = ٠ وك^٣ + ٤ ك - ٢٨ = ٠ (مسئلة ١) ما عدنان فضلتهما ١٢ واذا ضرب حاصلهما في مجتمعهما كان الحاصل ١٤٥٦٠

لنفرض ك = اصغرهما. وك = ١٢ = اكبرها. وحاصلها ك^١ + ١٢ ك ومجموعها ٢ ك + ١٢ ومنا في حاصلها بعطينا ٢ ك^١ + ٣٦ ك + ١٤٤ = ١٤٥٦٠ وبالقسمه على ٢ ك^١ + ١٨ ك + ٧٢ = ٧٢٨٠ ولو اردنا ان ننحس جميع الاعداد التي تقبل

الحاصل ٢٠٧٣٦ لنفرض الأصغر ك والأكبر ك + ٧٢٠ فلنا ك + ٧٢٠ =

$$٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨ = ٢٠٧٣٦$$

بتربيع الجانبيين ك + ٧٢٠ = ك = ٨١ × ٤ × ٨ × ٨

ثم لنفرض ك = ٨ ي فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨ = ٨١ \times ٨ \times ٧٢٠ + ٨١ \times ٤$$

بالقسمة على ٨ لنا ٨١ = ٩٠ + ٨١ = ٨١ × ٤ × ٨

ثم لنفرض ي = ٢ ل فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ = ٩٠ \times ٤ + ٨١ \times ٤$$

بالقسمة على ٨ لنا ٨١ = ٤٥ + ٨١ = ٨١ × ٤

ثم لنفرض ل = ٩ م فلنا بتعويض

$$٨١ \times ٤ \times ٨ = ٩٠ \times ٤ + ٨١ \times ٤$$

بالقسمة على ٩ لنا ٩٠ = ٥ + ٩٠ = ٩٠ × ٤

أي ٩٠ × ٤ = (٥ + ٩٠) × ٩

إذا م = ٤ = ٥ + م = ٩ = ٥ + م = ٤

فلنا ل = ٤٥ = ي = ٧٢٠ = ك = ٥٧٦ = الأصغر

و ١٢٩٦ = ٧٢٠ + ٥٧٦ = الأكبر

ولنا طريقة أخرى لحل هذه المسألة

لنفرض أكبرها ك فالأصغر ك - ٧٢٠

بالضرب في ٨ لنا ك - ٧٢٠ = ٢٠٧٣٦

أي ك - ٧٢٠ = ١٢ × ٢٧ × ٦٤

لنفرض ك = ٤ ي فلنا ٦٤ ي - ٧٢٠ = ٤ × ٢٧ × ٦٤

بالقسمة على ٦٤ لنا ي - ٤٥ = ١٢ × ٢٧

لنفرض ي = ٤ ل فلنا ٢٧ ل - ١٢٥ = ١٢ × ٢٧

بالقسمة على ٢٧ لنا ل - ٥ = ١٢

وهنا نرى من أول نظرة أن ل = ٢ ومن ثم لنا

ي = ٩ = ك = ٢٦ = ك = ١٢٩٦ = أكبرها

(مسألة ٤) ما عددان فضلتهما ١٢ وإذا ضربت هذه الفضلة في مجموع كمبيها كان

الحاصل ١٠٢١٤٤

لنفرض ك = اصغرها وك + ١٢ = اكبرها
كعب الاول = ك وكعب الثاني = ك + ٢٦ ك + ٤٢٢ ك + ١٧٢٨ فلنا
١٢ (ك + ٢٦ ك + ٤٢٢ ك + ١٧٢٨) = ١٠٢١٤٤
بالقسمة على ١٢ و ٢ لنا ك + ١٨ ك + ٢١٦ ك + ٤٢٥٦ - ٨٦٤
اي ك + ١٨ ك + ٢١٦ ك = ٢٢٩٢ = ٥٣ × ٨ × ٨
لنفرض ك = ٢٢ ونقسم على ٨ فلنا
٤٢٤ = ٥٣ × ٨ = ٤٢٤
و ٤٢٤ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٨ و ٥٣ الى آخره
فنفرض ٤ = ٤ فلنا ٢١٦ + ١٤٤ + ٦٤ = ٤٢٤
فاذا ٤ = ٤ ك = ٨ = ١٢ + ٨ = ٢٠
(مسئلة ٥) رجال عقدوا شركة على شرط ان يضع كل واحد منهم في راس المال
من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء عشر مرات فربحوا في المئة ٦ اكثر من عدد الشركاء
وكان كل الربح ٢٩٢ ديناراً فكم عدد الشركاء
لنفرض ك = عدد الشركاء ثم ١٠ ك = ما وضعه كل واحد و ١٠ ك = ما
وضعه جميعهم والربح في المئة ك + ٦ فيكون ربح دينار واحد $\frac{٦+ك}{١٠٠}$ وهذا في ١٠ ك =
 $\frac{ك}{١٠} \times \frac{٦+ك}{١٠٠}$ الربح كله
فلنا $\frac{ك}{١٠} \times \frac{٦+ك}{١٠٠} = ٢٩٢$
و $ك + ٦ = ٢٩٢٠$
لنفرض ك = ٢٢٠ ثم نقسم على ٨ فلنا
٤٩٠ = ٢٢٠ + ٢٧٠
و ٤٩٠ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٥ و ٧ و ١٠ الى آخره
فنرى من اول وهلة ان ١٠ هي اكثر ما يلزم و ٢٧٠ اصغرها يلزم. فلنفرض
٢٧٠ = ٢٧٠
١٤٧ + ٢٤٣ = ٤٩٠ فاذا ٢٧٠ = ٢٧٠ ك = ١٤
الشركاء ١٤ وكل واحد وضع في راس المال ١٤٠ ديناراً
(مسئلة ٦) شركه في تجارة كان راس مالهم ٨٢٤٠ ديناراً فاضاف اليه كل
شريك من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء ٤٠ مرة فربحوا في المئة من الدنانير ما يماثل
عدد الشركاء وعند قسمة الربح اخذ كل واحد من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء

عشر مرات وبقي ٢٢٤ ديناراً فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = الشركاء و ٤٠ ك = ما اضافة كل واحد من راس المال و ٤٠ ك
ما اضافة الجميع و ٤ ك = راس المال كله بعد الاضافات المذكورة ورجع في
المئة ك فيكون كل الربح $\frac{٤٠ ك}{١٠٠} + \frac{٨٢٤٠ ك}{١٠٠}$ اي $\frac{٢}{١٠٠} ك + \frac{٨٢٤٠}{١٠٠} ك$ ومن هذا المبلغ
اخذ كل واحد ١٠ ك والكل اخذوا ١٠ ك وبقي ٢٢٤ فلما $\frac{٢ ك}{١٠٠} + \frac{٨٢٤٠ ك}{١٠٠} = ١٠ ك$
٢٢٤ +

$$٢٥ - ك = ٢٠٦ - ك = ٥٦٠ = ٠$$

فترى العلامات تتغير ثلاث مرّات فتكون الاصول جميعها ايجابية و ٥٦٠ يقبل
الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٥ و ٧ و ٨ الخ فان فرضنا ك = ٤ نجد ان المعادلة لا تصح
وكذلك اذا فرضنا ك = ٥ واذا فرضنا ك = ٧ نجد المعادلة صحيحة فاذا ك = ٧
ونجد الاصلين الآخرين بالقسمة فلنا بعد القسمة ك = ١٨ ك = ٨٠ = ٠ ك = ٩ + ١
اي ك = ٨ او ١٠ وكل واحد من هذه الاجوبة الثلاثة يطابق شروط المسئلة هكذا

عدد الشركاء	٧	٨	١٠
كل واحد اضاف ٤٠ ك	٢٨٠	٢٢٠	٤٠٠
الكل اضافوا ٤٠ ك	١٩٦٠	٢٥٦٠	٤٠٠٠
راس المال	٨٢٤٠	٨٢٤٠	٨٢٤٠
٤٠ ك + ٨٢٤٠ =	١٠٢٠٠	١٠٨٠٠	١٢٢٤٠
رجعوا في المئة ما يماثل عدد الشركاء	٧١٤	٨٦٤	١٢٢٤
كل واحد اخذ	٧٠	٨٠	١٠٠
الكل اخذوا	٤٩٠	٦٤٠	١٠٠٠
بقي	٢٢٤	٢٢٤	٢٢٤

(مسئلة ٧) ما عددان مجتمعهما ١٢ وان ضرب كل واحد في جذر الآخر كان
مجتمع الحاصلين ٢٠

لنفرض احدهما ك' والاخرى

(١) بشروط المسئلة ك' + ي' = ١٢

(٢) اضعف ٢ كى الى الجانين ك' + ٢ كى + ١٢ = ٢ كى

(٣) بالتجدير $\frac{٢٠}{٢ كى} = ١٣٦ + ٢ كى$

(٤) بالشرط الثاني ك' + ٢ كى = ٢٠

اي كى (ك + ٢٠)

(٥) بالقسمة $\frac{٢٠}{٢ كى} = ١٣٦ + ٢ كى$

(٦) بالمساواة بين (٢) و (٥) $\frac{٢٠}{٢ كى} = ١٣٦ + ٢ كى$

(٧) بالترقية $\frac{١٠٠}{٢ كى} = ١٣٦ + ٢ كى$

(٨) بالجبر ٢ ك' + ١٢ = ٢٠

(٩) افرض كى = ف ٢ ف + ١٢ = ٢٠

اي $٢٠ = ٢ ف + ١٢$

او اذا فرض ك + ٢ = س وكى = ف

فلنا من (٤) كى (ك + ٢) = ف س

و ك' + ٢ كى + ١٢ = س

اي ك' + ٢ ف + ١٢ = س

و ك' + ٢ = س - ١٢

ومن (١) لنا س - ١٢ = ف

بالمقابلة ١٢ - س = ف

لنا من (٤) ف س = ٢٠

بالقسمة $\frac{٢٠}{س} = ف$

وبالمساواة س - ١٢ = $\frac{٢٠}{س}$

بالجبر س - ١٢ = $\frac{٢٠}{س}$

افرض س = ه فلنا ه - ١٢ = $\frac{٢٠}{ه}$

و ف س = ٢٠ ف = ٦

ك = ٦ ك' = $\frac{٦}{٢} = ٣$ و

٢ = ٢٠ = ١ = ك' = ٤

الفصل الرابع والعشرون

في حل المعادلات من كل درجة بالاستقراء

٢٥٢ قد تقدم القول ان حاصل اصول معادلة يعدل جزءها الاخير . فن النظر الى هذا الجزء يمكننا ان نفرض احد الاصول فرضاً تقريبياً . واذا فرضنا للاصل قيمتين وامتنعناهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة نستعلم الخطأ . ثم نصلح المفروضين على موجب هذه النسبة

نسبة فضلة الخطأين الى فضلة المفروضين كالخطأ الاصغر الى الاصلاح المقتضي له

ونكرر هذا العمل حتى ننهي الى المطلوب ونسبى هذه الطريقة استقراء . ويسهل العمل اذا فرضنا عددين فضلهما $ك^١$ او ١٠٠١ الى آخره .

$$(١) \text{ مفروض } ك^١ - ٨ + ١٧ ك - ١٠ = ٠ \text{ مطلوب قيمة } ك$$

نرى في هذه المعادلة ان العلامات تغيرت ثلاث مرات فيقتضي ان تكون الاصول الثلاثة ايجابية وان يكون حاصلها ١٠ ومجموعها ٨ فلنفرض احدهما $ك^١$ او ٢٠٥

بالاخر	بالاخر
$ك^١ = ١٢٢٦٥١$	١٤٠٦٠٨
$٨ - ك^١ = ٢٠٨٠٨$	$٢١٦٢٢ -$
$١٧ ك - ٨٦٧ = ٨٨٤$	٨٨٤
$١٠ - ك^١ = ١٠٠$	$١٠٠ -$
$الخطأ = ١٢٧١ +$	$٢٦٨٨ +$

بالطرح
فضلة الخطأين
 $١٢٧١ +$
 $١٤١٧ +$

ثم بالنسبة $١٤ : ١ : ٠١ :: ١٢٧ : ٠٩ : ٠٩$ اي ٠٩ يجب طرحها من المفروض الاول فلنا $١٥ - ٠٩ = ٠٦$

ثم لنفرض $ك = ٠.١$ أو ٠.٣

بالأول

$$١٢٥٠٧٥١ = ك$$

$$٢٠٠٨ = ك - ٨$$

$$٨٥١٧ = ك - ١٧$$

$$١٠ = ك - ١٠$$

$$٠.١٢١ + الخطآن$$

بالثاني

$$١٢٦٥٠٦$$

$$٢٠١٦ -$$

$$٨٥٢٤$$

$$١٠ -$$

$$٢٤٦ +$$

وبالطرح $٠.٢٤٦ - ٠.١٢١ = ٠.١٢٥$

ثم $٠.١٢٥ : ٠.١ :: ٠.١٢١ : ٠.١ =$ الاصلاح

و $٠.١ - ٠.١ = ٠$ وهي تطابق المعادلة فلنا $ك = ٠$ واحد من الاصول

الثلاثة. وبالقسمه

$$ك - ٥ = (ك - ٨ + ١٧ - ك - ١٠) ك - ٢ + ٢ = ٠$$

وباتمام التوزيع الى آخره $ك = ٢$ او ١ وهذه الاصول الثلاثة اي ٥ و ٢ و ١

بعد تبديل علاماتها يكون مجتمعا ٨ وحاصلها ١٠

$$(٢) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك - ٨ + ك + ٤ = ٤٨ = ٠$$

الجواب $٢ - ٤ + ٦$

$$(٣) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك - ١٦ + ك + ٦٥ = ٥٠ = ٠$$

الجواب $١٠ \quad ٥ \quad ١$

$$(٤) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة } ك + ٢ - ك - ٢٣ = ٩٠ = ٠$$

الجواب $٦ - ٥ - ٢$

$$(٥) \text{ مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة } ك + ٩ + ك + ٤ = ٤٠$$

$$٨٠ =$$

$$(٦) \text{ مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة } ك + ٩ + ك + ٤ = ١٠٠$$

٢٥٣ طريقة اخرى

لنفرض $ر =$ عدداً قد وجدنا بالامتحان انه يعدل قيمة المجهول $ك$ تقريباً

ولنفرض $ل =$ الفرق بين $ر$ والاصل الحقيقي $ك$ ثم في المعادلة المفروضة نعوض

عن ك بواسطة $ر + ل$ ونستط الاجزاء المحتوية قوات من $ل$ فتصير المعادلة بسيطة . مثالة

$$(١) \text{ مفروض ك}^٢ - ١٦ ك^٢ + ٦٥ = ٥٠$$

$$\text{لنفرض ك} = ر - ل$$

$$\text{فلنا ك}^٢ = ر^٢ - ٢رل + ل^٢ \\ ٥٠ = \left\{ \begin{array}{l} ١٦ ك^٢ = ١٦ ر^٢ - ٣٢ رل + ١٦ ل^٢ \\ ٦٥ ك = ٦٥ ر - ٦٥ ل \end{array} \right.$$

باسقاط الاجزاء التي فيها $ل$ ولنا

$$٥٠ = ١٦ ر^٢ - ٦٥ ر + ٣٢ رل - ٦٥ ل$$

$$\text{و } ل = \frac{٦٥ ر - ٥٠}{٦٥ - ٣٢ + ١٦} = \frac{٦٥ ر - ٥٠}{٤٩}$$

$$\text{ثم لنفرض } ر = ١١ \text{ فاذًا } ل = \frac{٦٥}{٤٩} = ٨ \text{ تقريبًا}$$

$$\text{ك} = ر - ل = ١١ - ٨ = ٣$$

$$\text{ثم افرض } ر = ١٠ \text{ في المعادلة الاخيرة فلنا } ل = ١٨٨ \text{ و } ر - ل =$$

$$١٠٠١٢$$

$$\text{افرض } ر = ١٠٠١٢ \text{ فلنا } ل = ١٠٠١٢$$

$$\text{و } ر - ل = ١٠٠١٢ - ١٠٠١٢ = ١٠ = ك$$

$$(٢) \text{ مطلوب اصل هذه المعادلة تقريبًا وهي ك}^٢ + ١٠ ك^٢ + ٥ = ٣٦٠٠$$

$$\text{الجواب } ١١٠٠٦٧$$

$$(٣) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة ك}^٢ + ٢ ك^٢ - ١١ ك^٢ = ١٢$$

$$(٤) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة ك}^٢ + ٤ ك^٢ - ٧ ك^٢ - ٢٤ ك^٢ = ٣٤$$

—xox—

الفصل الخامس والعشرون

في المسائل غير المحدودة وهي السبالة

٢٥٤ ان كانت المعادلات التي تتركب من شروط مسئله اقل عددًا من مجاهيلها تكون المسئلة غير محدودة . ويمكن ان يفرض لاحد المجاهيل أية قيمة كانت

فخرج البقية بالنسبة الى المفروض . وفي مسائل هذا الباب تستعمل القواعد السابقة ولكن ينبغي البصر والاحتيال لكي توجد الطريقة الفضلى لاستعمالها في كل مسألة بمفردها .
فلو طالب عددان صحيحان ايجابيان مجتمعا عشرة وفرضا احدهما ك والآخرى
كان لنا $ك + ى = ١٠$ $ك - ى = ١٠$ فكيف ى لانوافق المسئلة سوى ان تكون
صحيحة ايجابية فيمكن ان نفرض لما ابة قيمة صحيحة كانت من ١ الى ١٠ ولكن يجب ان
تكون ك ايضا صحيحة ايجابية فلا تُفرض ى اكثر من ١٠ والا لكانت ك سلبية فلا
تكون ى اكثر من ١

فان فرض ى = ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ تكون ك = ٩
٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ والمجموعات الاربعة الاخيرة في مثل الاربعة الاولى .
فيكون للمسئلة خمسة اجوبة

(مسئلة ١) اقسم ٢٥ الى قسمين احدهما قابل الانقسام على ٢ والاخر على ٣

لنفرض احدهما ٢ ك والاخر ٣ ى

$$\text{فلما } ٢ + ك + ٣ = ٢٥ \text{ ك} = \frac{٢٥ - ٣}{٢} = ١١$$

فدري من هذا الكسر ان ٣ ى اقل من ٢٥ فيكون ى اقل من ٨ واذا
قسمنا صورة الكسر على المخرج فلنا ك = ١٢ - ى + $\frac{١ - ى}{٢}$ فدري ان ١ - ى
او بالاحرى ى - ١ يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض ى - ١ = ٢ ل فاذا ى = ٢ + ل ١ +

وبالتعويض ك = ١٢ - ٢ - ١ - ل = ١١ - ل ولا يمكن ان تكون
ى اكثر من ٨ فنفرض اي عدد كان على شرط ان لا يكون ٢ + ل ١ + اكثر من
٨ فلا بد ان تكون ل اقل من ٤ ولا تكون اكثر من ٣

$$\text{فان فرض ل} = ٠ \text{ ل} = ١ \text{ ل} = ٢ \text{ ل} = ٣$$

$$\text{لنا } ١ = ى \quad ٢ = ى \quad ٣ = ى \quad ٤ = ى$$

$$\text{و } ١١ = ك \quad ٧ = ك \quad ٥ = ك \quad ٣ = ك$$

$$\text{فاذا } ٢ + ك = ٣ = ى \quad ٢ + ٢٢ = ٩ + ١٦ \quad ١٥ + ١٠ \quad \text{او } ٢١ + ٤$$

(مسئلة ٢) اقسم ١٠٠ الى قسمين احدهما يقبل الانقسام على ٧ والاخر على ١١

لنفرض القسمين ٧ ك و ١١ ى فلنا ٧ ك + ١١ ى = ١٠٠ ك =

$$\frac{١٠٠ - ١١ ى}{٧} = ١٤ - ى + \frac{٢ - ٤ ى}{٧} \text{ فاذا } ٢ - ٤ ى$$

او ٤ ى - ٢ يقبل الانقسام على ٧ وان كان ٤ ى - ٢ يقبل الانقسام على ٧ فنصفها

ايضا ٧ بيضات فكم بيضة مع كل واحدة منها. لنفرض ما مع الواحدة ٨ ك + ٧ وما مع الاخرى ١٠ اى ٧ فلنا ٨ ك + ١٠ اى ١٤ + ١٠٠ = ٨ ك ١٠٠ - ٨٦ = ١٠ اى ٤ ك = ٤٢ - ٥ اى ٤٠ + ٢ - ٤ - ١ اى ٣ - ٤ = ١ - ١٠ اى ٣ - ٤

فإذا ٢-ي او ي-٢ قبل الانقسام على ٤

فلفترض $ي = ٣ = ٤$ فلنا $ي = ٤ + ٢ = ٦$ و $ك = ١٠ - ٤ = ٦$ -
 $٣ = ٦ - ٧ = ٥$ ل فلا بد ان تكون ٥ ل اقل من ٧ ول اقل من ٢ فان
 فُرض $ل = ٠$ فلنا $ك = ٧ = ي = ٣$ وكان الاولى ٦٣ وللثانية ٢٧ بيضة
 وان فُرض $ل = ١$ فلنا $ك = ٢ = ي = ٧$ وكان الاولى ٢٢ وللثانية ٧٧

ديضة

(مسئلة ٥) اعجام وعرب صنعوا وليمة وانفقوا فيها ١٠٠٠ غرش اما الاعجام فلحق كل واحد منهم ١٦ غرشا واما الاعراب فلحق كل واحد منهم ١٢ غرشا فكم نفرا كان كل فريق منهم

لنفرض الاعجام = ك والعرب = ی فلنا

$$12 - 12 + 988 = 19 - 100 = 12 \quad 100 = 12 + 19$$

ك- ٦٦

٥ = ٧٦ - ك + $\frac{١٢ - ٦ - ك}{١٢}$ فإذا ١٢ - ٦ - ك أو ٦ - ك - ١٢ يقبل الانقسام

على ١٢ وك-٢ كذلك لنفرض ك-٢=١٢ ل فلما ك=١٢ ل+٢

$$ج۱۹-۷۴=ج۷-۲-ج۱۲-۷۶=وی$$

فلا بد ان تكون ل اقل من $\frac{74}{19}$ اي اقل من اربع فتكون المسئلة اربعة اجوبة

فإذا فرض $ل = ٢$. لنا $ك = ٢$ $٧٤ = ١٩ \times ٢$ $٢٨ = ١٩ \times ٢$ $١٢٧ = ١٢ \times ٧٤$ ،

ل = ١ ك = ١٥ ح = ٥٥ ٢٨٥ = ١٩ × ١٥

$$Y10 = 15 \times 00,$$

$$057 = 19 \times 28 \quad 27 = , \quad 28 = \text{ج} \quad 7 = \text{د}$$

$$471 = 15 \times 31,$$

$221 = 13 \times 17, \quad 779 = 19 \times 41 \quad 17 = ١٧ \quad 41 = ٤١ \quad ٢ = 2$

(مسئلة ٦) رجل انفق ١٧٢٠ ديناراً في شراء خيل وبقر وكان ثمن راس الخيل

۲۱ دیناراً و ثمن راس البقر ۲۱ دیناراً فکم راساً اشتری من کل جنس۔

لنفرض ك = الخيل وى = البقر فلنا

$$\begin{aligned}
 & ٢١ + ك = ٢١ = ١٧٧٠ \text{ ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤ \\
 & ٦ - ٢١ - ك = ١٠ \\
 & ١٠ - ٦ = ٤ \text{ ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{فلابد من ان } ١٠ - ك = ٦ \text{ يقبل الانقسام على } ٢١ \text{ وكذلك نصنها ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤ \\
 & \text{فلنفرض } ٥ - ك = ٢ = ٢١ \text{ ل فلنا } ٥ - ك = ٢١ + ل = ٢١ + ٢ = ٢٣ \text{ وبالعوضى } ٥ - ك = ٢٣ - ٨٤ = -٨٤ \\
 & \text{ك - ٢ = ٢١ ل ك = } \frac{٢١ + ل}{٢} = \frac{٢١ + ٢}{٢} = ١١.٥ \text{ فلنفرض } ٢ + ل = ٢٣ \text{ فلنفرض } ٢ + ل = ٢٣ \\
 & ١٢ - ر = ٢ - ك = ٢ - ١١ = -٩
 \end{aligned}$$

$$١٢ - ر = ٢ - ك = ٢ - ١١ = -٩$$

فلا بد ان تكون ر اكبر من صفر واقل من ٤

$$\begin{aligned}
 & \text{فلنفرض } ر = ١ \text{ فلنا } ١ - ك = ٢ = ٢١ \text{ ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤ \\
 & \text{ثمن البقر} = ١٤٩١
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ر = ٢ \text{ فلنا } ٢ - ك = ٢ = ٢١ \text{ ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤ \\
 & \text{ثمن البقر} = ١٨٩
 \end{aligned}$$

٢٥٥ في المسائل المتقدم ذكرها كانت المعادلات على هيئة ت ك + ب
 س وكانت ت وب وس كميات ايجابية صحيحة . وقمة ك وى كذلك .
 ولكن ان كانت ب سلبية والمعادلة على هيئة ت ك - ب س تكون المسائل
 من نوع آخر غير المتقدمة ولما اجوبة كثيرة الى ما لا نهاية له . مثالة لو قيل ا ب ج
 عدد بن فضلها ٦

فلو فرضنا اصغرهما ك واكبرها س لكان لنا

$$\begin{aligned}
 & ٦ - ك = ٦ = ٢١ \text{ ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤ \\
 & \text{من اول نظره}
 \end{aligned}$$

$$٢٥٦ \text{ متى كان س } = ٠ \text{ تكون ت ك } = ب س$$

كما لو قيل مطلوب عدد يقبل الانقسام على ٥ وعلى ٧

$$\begin{aligned}
 & \text{ولنفرضه ن فلنا } ٥ - ك = ٥ \text{ ون } ٧ = ٧ \text{ وه } ٧ = ٧ \text{ ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤ \\
 & \text{لا يقبل الانقسام على ٥ فلا بد ان س يقبل الانقسام عليها . فلنفرض } ٥ - ك = ٥ \text{ فلنا } ٢٥ \\
 & ٧ - ل = ٧ \text{ فتكون ن } = ٢٥ \text{ ل ويمكننا ان نفرض ل ا ب ج د ه } ٢١ = ١٧٧٠ - ٢١ = ١٧٦٤
 \end{aligned}$$

٧٠ ١٠٥ ١٤٠ ١٧٥ ٢١٠ الى آخره

ولو زيد على الشروط المذكورة ان العدد يقبل الانقسام على ٩ ايضا لكان لنا ما
نقدم $= ٢٥$ ل ولنفرض $ن = ٩$ $ل = ٢٥$ $ر = ٩$ $ر = ٢٥$ $\frac{ل}{٩} = ٢٥$ ولا بد ان ل
يقبل الانقسام على ٩ فلنفرض $ل = ٩$ $س فلنا ر = ٢٥$ $س ون = ٢٥ \times ٩ = ٢٢٥$
 $= ٢١٥$ $س فلنا ٢١٥ و ٦٣٠ و ٩٤٥ الى آخره$

٢٥٧ ان لم تكن $س = ٠$ فتعسر المسئلة اكثر فلو قيل ما العدد الذي يقبل
الانقسام على ٥ واذا انقسم على ٧ بقي ٢ فلنا $ه ك = ن$ و $٧ ي + ٢ = ن$ فاذا
 $ه ك = ٢ + ٧ ي$ $ك = \frac{٢ + ٧ ي}{٥} = \frac{٢ + ٧ ي + ٢ + ٧ ي}{٥} = \frac{٢ + ٧ ي}{٥} + ي$

فلنفرض $٢ + ٧ ي = ٥$
 $ل = \frac{٢ + ٧ ي}{٥}$ فاذا $ك = ي + ل$ $٢ = ٢ + ٧ ي$ $ل = ٢ - ٧ ي$ $٢ - ٧ ي = ٢ - ٧ ي$
 $٢ = \frac{٢ - ٧ ي}{٥} + ل$ ولنفرض $ل = ٢ - ٧ ي$ فاذا $ل = ٢ + ٧ ي$ و $٢ = ٢ + ٧ ي$
 $ك = ي + ل = (٢ + ٧ ي) + (٢ - ٧ ي) = ٤$
فاذا $ن = ٢٥ + ٤ = ٢٩$ فيمكن ان نفرض $ر$ اي عدد صحيح شئنا ايجابيا او
سلبيا اذ يكفي ان تكون $ن$ ايجابية. فان فرض $ر = ١ - ل$ لنا $١٠ = ن$
وباضافة ٢٥ لنا ٤٥ ٨٠ ١١٥ ١٥٠ الى آخره

ثم ان حل المسائل من هذا النوع يتيسر او يتعسر حسب النسبة الواقعة بين الاعداد
المقسوم عليها ومن المسائل السهلة هذه

اي عدد اذا انقسم على ٦ بقي ٢ واذا انقسم على ١٢ بقي ٢ فلنفرض العدد ن فلنا
 $ن = ٦ + ك$ $ن = ١٢ + ي$ $٦ + ك = ١٢ + ي$ $ك = ٦ + ي$ $٦ + ٦ + ي = ١٢ + ي$ $١٢ = ١٢$
 $ك = \frac{١٢ + ي}{٦} = ٢ + \frac{١ + ي}{٦}$ لنفرض $١ + ي = ٦$ $١٢ = ١٢$
 $١٢ - ل = ١$ $ك = ٢ + ي + ل = ١٢ - ل$
 $ن = ٧٨ - ل$ فلنا

$ن = ٦٨$ ١٤٦ ٢٢٤ ٣٠٢ ٣٨٠ الى آخره
(مسئلة ٨) اي عدد اذا انقسم على ٢٩ بقي ١٦ واذا انقسم على ٥٦ بقي ٢٧
لنفرض $ن = ٢٩ + ف$ $١٦ + ف = ن$ $٢٧ + ق = ٥٦$ $٢٩ + ف = ٥٦ + ق$
 $٢٩ + ف = ١٦ + ق$ $٢٩ + ف = ١٦ + ق$ $٢٩ + ف = ١٦ + ق$
 $ف = \frac{١٦ + ق}{٢٩} + ق = \frac{١٦ + ق}{٢٩} + ق$ $ر = \frac{١٦ + ق}{٢٩}$ $ر = \frac{١٦ + ق}{٢٩}$ $ر = \frac{١٦ + ق}{٢٩}$

$$١٧ ق + ١١ = ق = \frac{١١-٢٩}{١٧} + ٢ = \frac{١١-٢٥}{١٧}$$

$$\text{افرض } \frac{١١-٢٥}{١٧} = س \text{ ثم } ١٧ س = ١١ - ٢٥ = ر = \frac{١١+٢}{٥} = ٣ س +$$

$$\text{افرض } \frac{١١+٢}{٥} = ت = ٥ ت = ١١ + ٢ س$$

$$س = \frac{١١-٥ ت}{٢} = \frac{١١-٢ ت}{٢} + ٢$$

$$\text{افرض } \frac{١١-٢ ت}{٢} = د = ١١ + ٢ د$$

فقد تخلصنا من الكسور ولنعوّض عن كل كبة بقيتها

$$١١ + ٢ د = ت$$

$$٢٢ + ٢٥ = س$$

$$٧٧ + ١٧ = ر$$

$$١٧٦ + ٢٩ = ق$$

$$٢٥٢ + ٥٦ = ف$$

$$ن = ١٦ + (٢٥٢ \times ٢٩) + ٥٦ \times ٢٩ = ١٨٨٢$$

$$و = ٢٧ + (١٧٦ \times ٥٦) + ٢٩ \times ٥٦ = ١٨٨٢$$

اي ن = ١٨٨٢ + ٢١٨٤ = ٤ = $\frac{١٨٨٢}{٢١٨٤}$ + فلا تكون د اقل من ٤
وعلى هذا المفروض لنا ن = ١١٤٧ وإن فرضنا د = ك - ٤ فلنا ن = ٢١٨٤ ك
+ ١١٤٧ وما على سلسلة حماية الحلقة الاولى منها ١١٤٧ وفضلها المشترك ٢١٨٤
فلنا ١١٤٧ و ٢٢٢١ و ٥٥١٥ و ٧٦٩٩ و ١٨٨٢ الى آخره

(مسئلة ٩) رجال ونساء جمعوا صدقة فدفع كل رجل ٢٥ غرشاً وكل امرأة ١٦ غرشاً. فكان ما دفعه النساء جميعاً أكثر مما دفعه الرجال جميعهم بغرش واحد. فكم رجلاً وكم امرأة كانوا

لنفرض الرجال ق والنساء ف فلنا

$$١٦ ف + ٢٥ ق = ١ + ف = \frac{١+٢٥ ق}{١٦} = ق + \frac{١+ق}{١٦} = ر$$

$$١٦ ر = ١ + ق$$

$$ق = \frac{١-١٦ ر}{١} + ر = \frac{١-٧ ر}{١} = ١ - ٧ ر$$

$$ر = \frac{١+٢}{٧} + س = \frac{١+٢ س}{٧} + س = ٧ ت + ٢ = ١ + ٢$$

$$س = \frac{١-٧ ت}{٢} + ٢ = \frac{١-٢ ت}{٢} + ٢ = ٢ + د$$

$$٢ د = ١ - ت$$

ت = ١ + د ٢ ثم بالتعويض في هذه المعادلات

ت = ١ + د ٢ س = ٣ + ت د = ٧ + د ٢

ر = س + ت = ٩ + د ٤

ق = ر + س = ١٦ + د ٧

ف = ق + ر = ٢٥ + د ١١

فكان عدد النساء ٢٥ + د ١١ وعدد الرجال ١٦ + د ٧ فنفرض د أي عدد صحيح شئنا فلنا الرجال = ٧ ٢٣ ٢٩ ٥٥ ٧١ الى آخره والنساء ١١ ٢٦ ٦١ ٨٦ ١١١ الى آخره

وعلى موجب الجواب الأول دفعت النساء ١٧٦ والرجال ١٧٥ غرثا

(مسئلة ١٠) رجل اشترى خيلا وقرا وكان ثمن راس الخيل ٢١ دينارا وثمن راس البقر ٢٠ دينارا فكان ثمن البقر بقدر ثمن الخيل و ٧ دنانير زيادة فكم رأسا اشترى من كل جنس

لنفرض ف = البقر وق = الخيل فلنا

ف = $\frac{٧+ق}{٢٠} + ق = \frac{٧+ق}{٢٠} + ق$ ر = ٢٠ = ١١ + ق

ق = $\frac{٧-ر}{١١} + ر = \frac{٧-٩}{١١} + ر$ س = ١١ = ٩ - ر

ر = $\frac{٧+س}{١١} + س = \frac{٧+٢}{١١} + س$ ت = ٩ = ٢ + س

س = $\frac{٧-ت}{٢} + ت = \frac{٧-٩}{٢} + ت$ د = ٢ = ٤ + ت فلنا

ت = ٢ + د ٧

س = ٩ + د ٢٨

ر = ١١ + د ٢٥

ق = ٢٠ + د ٦٣

ف = ٢١ + د ٩٨

ونستعلم قيمة ف وق اذا فرضنا د = ٢

فلنا البقر = ٥ ٢٦ ٦٧ ٩٨ ١٢٩ ١٦٠ الى آخره

فلنا الخيل = ٢ ٢٣ ٤٢ ٦٣ ٨٢ ١٠٣ الى آخره

(مسئلة ١١) اي عدد اذا انقسم على ١١ يبقى ٣ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥

لنفرض ن = ١١ + ف ٢ ن = ١٩ + ق ٥ ١١ + ف = ١٩ + ق ٢

فاذا نصرّفنا في هذه المسئلة على نسق المسائل المتقدم ذكرها يكون لنا مجلّ الاعناد الواقعة فيها

$$٨ + ١١ \times ١ = ١٩ \quad \text{ف} = \text{ق} + \text{ر}$$

$$٢ + ٨ \times ١ = ١١ \quad \text{ق} = \text{ر} + \text{س}$$

$$٢ + ٢ \times ٢ = ٨ \quad \text{ر} = ٢\text{س} + \text{ت}$$

$$١ + ٢ \times ١ = ٣ \quad \text{س} = \text{ت} + \text{د}$$

$$٢ + ١ \times ٢ = ٤ \quad \text{ت} = ٢ + \text{د}$$

$$٢ + \text{د} = \text{س} \quad \text{ثم لنا ت} = ٢ + \text{د}$$

$$٦ + \text{د} = \text{ر} \quad \text{ق} = ٨ + \text{د}$$

$$١٤ + \text{د} = \text{ف} \quad \text{لنفرض د} = ٠$$

فلنا ن - ١١ = ف + ٣ = ١١ = (١٤ + د) ١١ = ٢٠٩ + ١٥٧ ولكن ٢٠٩

د = ٠. فاذا ١٥٧ هو اقل عدد تصحّ عليه شروط المسئلة

(مسئلة ١٢) ما العدد الذي اذا انقسم على ١١ بقي ٣ واذا انقسم على ١٩ بقي

٥ واذا انقسم على ٢٩ بقي ١٠

قد مضى حساب الشرطين الأولين في المسئلة السابقة فلنا هنا زيادة عما هناك

ن = ٢٩ + ف + ١٠ وقد وجدنا هناك ان

$$\text{ن} = ١٥٧ + \text{د} = ٢٠٩ + \text{ق} = ١٥٧$$

$$\text{فلنا } ٢٩ + \text{ف} + ١٠ = ٢٠٩ + \text{ق} = ١٥٧ \text{ اي}$$

$$٢٩ + \text{ف} = ٢٠٩ + \text{ق} = ١٤٧ \quad \text{ثم لنا حسبما تقدّم}$$

$$٦ + ٢٩ \times ٧ = ٢٠٩ \quad \text{ف} = ٧ + \text{ق}$$

$$٥ + ٦ \times ٤ = ٢٩ \quad \text{ق} = ٤ + \text{ر}$$

$$١ + ٥ \times ١ = ٦ \quad \text{ر} = \text{س} + \text{ت}$$

$$٠ + ١ \times ٥ = ٥ \quad \text{س} = ٥ - \text{ب} = ١٤٧$$

ثم بالتعويض س = ٥ - ت = ١٤٧

$$\text{ر} = ٦ - \text{ت} = ١٤٧ \quad \text{ق} = ٢٩ - \text{ت} = ٧٢٥$$

$$\text{ف} = ٢٠٩ - \text{ت} = ٥٢٩٢$$

ن = ٦٠٦١ - ت = ١٥٢٤٥٨ ونستعلم العدد الاقل اذا فرضنا

$$\text{ت} = ٢٦ \text{ ثم ن} = ٤١٢٨$$

(مسئلة ١٢) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش في بئالك بسعر ٥ غروش وانصاف المانوت بسعر ٩ غروش

لنفرض ٥ ك = البئالك ٩ ي = عدة انصاف المانوت

$$٥ ك + ٩ ي = ١٠٠ \quad ٥ ك = ١٠٠ - ٩ ي \quad ١٠٠ - ٩ ي - ٥ ي = ٤٠ ي$$

$$ك = ٢٠ - ي - \frac{٤٠}{٥}$$

فاذا ي نقبل الانقسام على ٥ فلنفرض $\frac{٤٠}{٥} = ف$ ف ي = ٥ ف ك = ٢٠ - ٥ ف - ٤ ف = ٢٠ - ٩ ف فاذا تكون ف اقل من $\frac{٢٠}{٩}$ اي اقل من ٢ واكثر من صفراي ١ فلنفرض ف = ١ فاذا ك = ١١ ١١ = ٥٥

ي = ٥٥ = ٩ × ٥ + ٥ = ٤٥ + ٥ = ٥٥ = ١٠٠ اي ليس لذلك الطريقة واحدة

(مسئلة ١٤) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش غوازي بسعر ٢٠ غرشاً وفرنكات بسعر ٤ غروش ٠ لنفرض الغوازي = ٢٠ ك والفرنكات = ٤ ي

$$٢٠ ك + ٤ ي = ١٠٠ \quad ٤ ي = ١٠٠ - ٢٠ ك$$

ي = ٢٥ - ٥ ك لنفرض ٢٥ - ٥ ك = ف ف ثم

$$٥ ك = ٢٥ - ف \quad ٥ = \frac{٢٥ - ف}{٥} \quad \text{لنفرض } ف = ٥ د \quad ٥ = د$$

ي = ٥ د فلا بد ان تكون د اكثر من صفر واقل من ٥ اي للمسئلة اربعة اجوبة. فلي فرض

$$د = ١ \quad ك = ٤ \quad ي = ٥ \quad اي \quad ١٠٠ = ٢٠ + ٨٠$$

$$د = ٢ \quad ك = ٣ \quad ي = ١٠ \quad اي \quad ١٠٠ = ٤٠ + ٦٠$$

$$د = ٣ \quad ك = ٢ \quad ي = ١٥ \quad اي \quad ١٠٠ = ٦٠ + ٤٠$$

$$د = ٤ \quad ك = ١ \quad ي = ٢٠ \quad اي \quad ١٠٠ = ٨٠ + ٢٠$$

(مسئلة ١٥) ثلاثون نفراً من رجال ونساء واولاد انتقلوا ٥٠ ديناراً وكل رجل منهم انتفى ٣ دنانير وكل امرأة دينارين وكل ولد ديناراً واحداً. فكم كان كل فريق. لنفرض الرجال = ف والنساء = ق والاولاد = ر

$$\text{فلنا (١) } ف + ق + ر = ٣٠$$

$$\text{وايضاً (٢) } ٣ ف + ٢ ق + ر = ٥٠$$

$$\text{من الاولى لنا } ر = ٣٠ - ف - ق$$

$$\text{فنرى ان } ف + ق \text{ اقل من } ٣٠$$

$$\text{وبالتعويض في (٢) } ٣ ف + ٢ ق + ٣٠ = ٥٠$$

بالمقابلة والجمع $ق = ٢٠ - ٢$ ف

ينقل ف واحدة ف $ق + ٢٠ = ف$

وذلك أيضاً أقل من ٢٠ فيشروط المسئلة لا تكون ف أكثر من ١٠ ويمكن

ان نفرض ف اي عدد شئنا من ١ الى ٩ فلنا

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١ = ف
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨ = ق
١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣	١٢	١١ = ر

(مسئلة ١٦) رجل اشترى من البقر والمعزى والغنم ١٠٠ رأس بمئة دينار وكان

ثمن الرأس من البقر $\frac{١}{٢}$ دينار وثن الرأس من المعزى $\frac{١}{٣}$ دينار وثن الرأس من الغنم $\frac{١}{٤}$ دينار. فكم رأساً اشترى من كل جنس.

انفرض ف = البقر ق = المعزى و = الغنم

فلنا (١) $ف + ق + و = ١٠٠$

(٢) $\frac{١}{٢}ف + \frac{١}{٣}ق + \frac{١}{٤}و = ١٠٠$

اضرب في ٦ $٣ف + ٢ق + ١و = ٦٠٠$

بالاولى لنا $ر = ١٠٠ - ف - ق$

عوّض عن ر في (٢) $١٨ف + ٥ق = ٢٠٠$

$٥ق = ٢٠٠ - ١٨ف$ $ق = \frac{٢٠٠ - ١٨ف}{٥}$

فلا بد ان ف تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض ف = ٥ س فلنا ق = ٦٠ -

١٨ س

$ر = ١٢٠ س + ٤٠$ فيمكن ان نفرض قيمة س اي عدد شئنا على شرط ان ق

لا تصير بذلك سلبية ولا يمكن ذلك الا على فرض س اقل من ٤

٢	٢	١	= س
١٥	١٠	٥	= ف
٦	٢٤	٤٢	= ق
٧٩	٦٦	٥٣	= ر

٢٥٨ في اختراع مسائل من هذا الباب ينبغي الاختراس من استعمالها. ولا بد

في ذلك من ملاحظة ما سنذكره هنا. فنضع عوضاً عن المعادلتين اللتين في المسئلة

السابقة هاتين

$$ك + ي + ل = ت$$

$$ف + ك + غ + ي + ح = ب$$

حيث تكون ف غ ح ت ب معلومات

فان فرضنا ف اكبر من غ وح اصغر من غ وضررنا المجانين في ف اي
(ك + ي + ل) ف = فت فلا شك ان تكون ف + ك + ي + ل اكبر
من ف + ك + غ + ي + ح ل وتكون فت اكبر من ب اي ب > فت وايضا
اذا فرضنا (ك + ي + ل) ح = ح ت تكون ح ك + ح ي + ح ل اصغر من
ف + ك + غ + ي + ح ل وتكون ح ت اصغر من ب اي ب < ح ت فاذا
ان لم تكن ب اصغر من فت واكبر من ح ت تستحيل المسئلة فاذا يجب ان
تقع ب بين الحدين فت ح ت ولا يجب ان تكون قربية جدا من احدهما والا
فلا يمكن استعمال الاحرف الاخر في المسئلة السابقة ت = ١٠٠ ف = $٢\frac{1}{2}$ ح = $\frac{1}{2}$
والحدان هما ٢٥٠ و ٥٠ وان فرضنا ب = ٥١ عوضا عن ١٠٠ كي في المسئلة فلنا

$$ك + ي + ل = ١٠٠$$

$$٢\frac{1}{2} ك + ١\frac{1}{2} ي + \frac{1}{2} ل - ٥١ = \text{اضرب الاولى في } ٢$$

$$٢ ك + ٢ ي + ٢ ل = ٢٠٠ = \text{اضرب الثانية في } ٦$$

$$٢١ ك + ٨ ي + ٢ ل = ٢٠٦$$

$$\text{بالطرح } ١٨ ك + ٥ ي = ٦$$

وذلك محال لانه يفرض كون ك وي صحيحين

(مسئلة ١٧) صانع عنده من النضة ثلاثة انواع

الاول في كل ٨ دراهم منه ٧ فضة ودرهم زيف

الثاني " " " " $٥\frac{1}{2}$ " " " $٢\frac{1}{2}$ " " " "الثالث " " " " $٤\frac{1}{2}$ " " " " $٢\frac{1}{2}$ " " " "

فاراد ان يصوغ مصاغما وزنه ٢٤٠ درهما في كل ٨ دراهم منه ٦ دراهم فضة ودرهم

زيف فكم درهما يجب ان يأخذ من كل صنف

نفرض ما يجب اخذه من النوع الاول = ك ومن الثاني = ي ومن الثالث

$$= ل فلنا ك + ي + ل = ٢٤٠ ويكون في الكل ٧ ك + $٥\frac{1}{2}$ ي + $٤\frac{1}{2}$ ل من$$

$$\text{النضة الخالصة ووزن هذا المزيج } = ٢٤٠ \text{ درهما و } \frac{٢٤٠}{٨} = ٣٠$$

$$\text{و } ٦ \times ٢ = ١٨٠ = \text{النضة الخالصة في المزيج}$$

فلنا $١٨٠ = ٧ك + ٥\frac{١}{٢}ي + ٤\frac{١}{٢}ل$

اضرب في ٢ $٣٦٠ = ١٤ك + ١١ي + ٩ل$

اضرب الاولى في ٩ $٢٧٠ = ٩ك + ٩ي + ٩ل$

بالطرح $٩٠ = ٥ك + ٢ي$

من الاولى $٣٠ = ٢ك - ي$

وايضاً $٩٠ = ٥ك - ي$ $٤٥ = ٥ك - ٣ي$

لنفرض $ك = ٣د$ فلنا $٥٠ = ٥د - ٣ي$

وايضاً $١٥ = ٣د - ٢ي$

فلا بد ان تكون $د$ اكبر من ٤ واصغر من ١٠ فلنا

$٥ = ٦ - ٧ + ٨ - ٩$

$١٠ = ١٢ - ١٤ + ١٦ - ١٨$

$٢٠ = ١٥ - ١٠ + ٥ - ٠$

$٠ = ٢ - ٦ + ٩ - ١٢$

(مسئلة ١٨) رجل اشترى من الخيل والبقر والمخير والغنم ١٠٠ رأس بئنه دينار

وكان ثمن رأس الخيل ١٠ دنانير وثمان رأس البقره دنانير وثمان الحمار دينارين وثمان

رأس الغنم نصف دينار فكم اشترى من كل جنس. لنفرض الخيل = $ف$ البقر = $ق$

المخير = $ر$ والغنم = $س$

فلنا (١) $١٠٠ = ١٠ف + ٢ق + ٤ر + س$

و (٢) $١٠٠ = ١٠ف + ٥ق + ٢ر + \frac{١}{٢}س$

اضرب في ٢ $٢٠٠ = ٢٠ف + ١٠ق + ٤ر + س$

بالطرح $١٠٠ = ٩ف + ٩ق + ٢ر$

بالمقابله والقسمه $٢٣ = ٦ - \frac{١}{٢}ف - \frac{١}{٣}ق$ اي $٢٣ - ٦ = -\frac{١}{٢}ف - \frac{١}{٣}ق$

$٢٣ - ٦ = -\frac{١}{٢}ف - \frac{١}{٣}ق$

فاذا $١ - ف$ او $١ - ق$ يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض $١ - ف = ٢ت$ $١ - ق = ٢ث$ $٢٧ - ١٩ = ر = ق - ٢ث$

$٢ - ق = ٧٢ + ٢٢ + ١٦ = ٩٠$

فاذا تكون $١٩ - ٢٣$ اقل من ٢٧ وعلى هذا الشرط نفرض $ك$ و $ث$

اي عدد شئنا

$$(١) \text{ ت} = ٠ \quad (٢) \text{ ت} = ١$$

$$\text{ف} = ١ \quad \text{ف} = ٤$$

$$\text{ق} = \text{ق} \quad \text{ق} = \text{ق}$$

$$\text{ر} = ٢٧ - ٢ \quad \text{ر} = ٨ - ٢$$

$$\text{س} = ٧٢ + ٢ \quad \text{س} = ٨٨ + ٢$$

ولا يمكن ان نفرض $\text{ت} = ٢$ لان بذلك نصير ر سلبية . وعلى المفروض الاول
لا تكون ق اكثر من ١ وعلى الثاني لا تكون اكثر من ٢ فعلى الاول لنا

$$\text{ق} = ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩ \quad ١٠$$

$$\text{ف} = ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١ \quad ١$$

$$\text{ق} = ٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩$$

$$\text{ر} = ٢٧ \quad ٢٤ \quad ٢١ \quad ١٨ \quad ١٥ \quad ١٢ \quad ٩ \quad ٦ \quad ٣ \quad ٠$$

$$\text{س} = ٧٢ \quad ٧٤ \quad ٧٦ \quad ٧٨ \quad ٨٠ \quad ٨٢ \quad ٨٤ \quad ٨٦ \quad ٨٨ \quad ٩٠$$

$$\text{وعلى الثاني} \text{ ت} = ١ \quad ٢ \quad ٣$$

$$\text{ف} = ٤ \quad ٤ \quad ٤$$

$$\text{ق} = ٠ \quad ١ \quad ٢$$

$$\text{ر} = ٨ \quad ٥ \quad ٢$$

$$\text{س} = ٨٨ \quad ٩٠ \quad ٩٢$$

(مسئلة ١٩) مطلوب ثلاثة اعداد صحيحة اذا ضرب الاول منها في ٢ والثاني في ٥

والثالث في ٧ يكون مجموع الحواصل ٥٦٠ واذا ضرب الاول في ٩ والثاني في ٢٥

والثالث في ٤٩ يكون مجموع الحواصل ٢٩٢٠

$$\text{لنفرض (١)} \quad ٢\text{ك} + ٥\text{ى} + ٧\text{ل} = ٥٦٠$$

$$(٢) \quad ٩\text{ك} + ٢٥\text{ى} + ٤٩\text{ل} = ٢٩٢٠$$

$$\text{اضرب الاولى في } ٩ \quad ٢\text{ك} + ١٥\text{ى} + ٦٣\text{ل} = ٥٠٤٠$$

$$\text{بالطرح} \quad ١٢٤٠ = ١٠\text{ى} + ٢٨\text{ل}$$

$$\text{بالقسمة على } ٢ \quad ٦٢٠ = ٥\text{ى} + ١٤\text{ل}$$

$$\text{وبالمقابل والقسمة} \quad ١٢٤ = \frac{١٤}{٥} - \text{ى}$$

$$\text{لنفرض ل} = ٥ \text{ د فاذا} \quad ١٢٤ - ١٤ = \text{ى}$$

$$\text{ثم بالتعويض في الاول لنا} \quad ٢\text{ك} - ٤٥ = ٦٢٠ \quad ٥٦٠$$

اي ٢ ك = ٢٥ د - ٦٠

ك = ٢٥ - ٢٠ فلنفرض د = ٢ ت

فإذا ك = ٢٥ ت - ٢٠ ي = ١٢٤ - ٤٢ ت ل = ١٥ ت فتكون

ت أكبر من صفر واصغر من ٢ ولنا جوابان فقط اي

ت = ١ ك = ١٥ ي = ٨٢ ل = ١٥

ت = ٢ ك = ٥٠ ي = ٤٠ ل = ٢٠

(مسئلة ٢٠) مطلوب عدنان مجتمعا مع حاصلها ٧٩

لنفرض العددين ك وى فلنا كى + ك = ي ٧٩ كى + ي = ٧٩

ك - ي = $\frac{٧٩ - ٢٠}{١ + ٢} = ١ - \frac{٨٠}{١ + ٢}$ فنرى ان ٨٠ يقبل الانقسام على ١ + ٢

و ٨٠ يقبل الانقسام على ١ ٢ ٤ ٨ ١٠ ١٦ ٢٠ ٤٠ ٨٠

فانما ك = ٠ ١ ٢ ٤ ٧ ٩ ١٥ ١٩ ٢٩ ٧٩

ي = ٧٩ ٢٩ ١٩ ١٥ ٩ ٧ ٩ ١٥ ٢٩ ٧٩

ومن هذه العشرة الخمسة الاخيرة مثل الخمسة الاولى. فلنا في الحقيقة ٥ اجوبة فقط وهي

ك = ٠ ١ ٢ ٤ ٧

ي = ٧٩ ٢٩ ١٩ ١٥ ٩

(مسئلة ٢١) اربعة رجال نزلوا الى السوق فوجدوا جوهرة تباع . فقالوا كم ثمن

الجوهرة فقيل اذا اخذ ما مع الاول منكم مع $\frac{١}{٢}$ ما مع الثاني و $\frac{١}{٤}$ ما مع الثالث و $\frac{١}{٤}$ ما

مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة . واذا اخذ ما مع الثاني و $\frac{١}{٥}$ ما مع الاول و $\frac{١}{١٠}$ ما مع

الثالث و $\frac{١}{١٠}$ ما مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة . واذا اخذ ما مع الثالث مع $\frac{١}{١٠}$ ما

مع الاول و $\frac{١}{١٠}$ ما مع الثاني و $\frac{١}{١٠}$ ما مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة . واذا اخذ ما مع

الرابع و $\frac{١}{١٠}$ ما مع الاول و $\frac{١}{١٢}$ ما مع الثاني و $\frac{١}{١٢}$ ما مع الثالث كان المجموع ثمن الجوهرة

مطلوب اصغر الاعداد الصحيحة التي تضع عليها شروط المسئلة

نرى من شروط المسئلة ان الحصة الصغرى للاول من الاربعة فلنفرض الرجال

ك وى ول ون وثمن الجوهرة ت فلنا

ك = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١٢}{٢٠}$ ت = ١٢ - ١٢ ك - ٦ ي - ٤ ل

ي = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{١٠} = \frac{٢١}{٢٠}$ ت = ٢١ - ٢١ ك - ٤٢ ي - ٢١٠ ل

ل = $\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠} = \frac{٣٦}{٢٠}$ ت = ٣٦ - ٣٦ ك - ٤٥ ي - ٤٠ ل

ن = $\frac{١}{١٢} + \frac{١}{١٢} + \frac{١}{١٢} = \frac{١٧١٦}{١٢٦}$ ت = ١٧١٦ - ١٧١٦ ك - ١٤٣ ي - ١٣٢ ل

ثم بالمساواة

$$\begin{aligned}
 ١٢ \text{ ت} - ١٢ \text{ ك} - ٦ \text{ ل} - ٤ \text{ ج} &= ٢١٠ \text{ ت} - ٤٢ \text{ ك} - ٢١٠ \text{ ل} - ٢٥ \text{ ج} \\
 ٢١٠ \text{ ت} - ٤٢ \text{ ك} - ٢١٠ \text{ ل} - ٢٥ \text{ ج} &= ٢٦٠ \text{ ت} - ٤٥ \text{ ك} - ٤٠ \text{ ل} - ٢٦٠ \text{ ج} \\
 ٢٦٠ \text{ ت} - ٤٥ \text{ ك} - ٤٠ \text{ ل} - ٢٦٠ \text{ ج} &= ١٧١٦ \text{ ت} - ١٥٦ \text{ ك} - ١٤٢ \text{ ل} - ١٣٢ \text{ ج} \\
 ١٧١٦ & \\
 ١٥٠ \text{ ي} - ٧٨ \text{ ك} - ٩٠ \text{ ت} &= \text{ل} \\
 ٥٤٠ \text{ ت} + ٢٧ \text{ ك} + ١٠٦٠ \text{ ي} &= \text{ل} \\
 ٤٦٣٢٢ \text{ ت} - ٥٩٦٧ \text{ ك} - ٥٢٩١ \text{ ي} &= \text{ل} \\
 ٥١٠٨٤ &
 \end{aligned}$$

بالمساواة ايضا

$$\begin{aligned}
 ١٥٠ \text{ ي} - ٧٨ \text{ ك} - ٩٠ \text{ ت} &= ٥٤٠ \text{ ت} + ٢٧ \text{ ك} + ١٠٦٠ \text{ ي} \\
 ٥٤٠ \text{ ت} + ٢٧ \text{ ك} + ١٠٦٠ \text{ ي} &= ٤٦٣٢٢ \text{ ت} - ٥٩٦٧ \text{ ك} - ٥٢٩١ \text{ ي} \\
 ٥١٠٨٤ & \\
 ٢٩١٦٠ \text{ ت} + ٢٤٨٣١ \text{ ك} &= \text{ي} \\
 ٤٦٦٤٠ & \\
 ١٨١١١٣٣ \text{ ت} - ٧٦٠٤٢٠ \text{ ك} &= \text{ي} \\
 ١٠٤٢٦٩٥٥ &
 \end{aligned}$$

بالمساواة ايضا

$$\begin{aligned}
 ٢٩١٦٠ \text{ ت} + ٢٤٨٣١ \text{ ك} &= ١٨١١١٣٣ \text{ ت} - ٧٦٠٤٢٠ \text{ ك} \\
 ٤٦٦٤٠ & \\
 ٣٤٠٧٣٢٢٦٠ & \\
 ١٥٢٦١٤٦٥٠١ &= \text{ك}
 \end{aligned}$$

فإذا ت قبل الانقسام على مخرج هذا الكسر ولكي يكون لنا عدد صحيح يجب

ان نترض ت هذا المخرج نفسه. فلنا ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١

$$١٠٨٢٢٢٢٩٨٨ = \text{ي} \quad ٢٤٠٧٢٢٢٦٠ = \text{ك}$$

$$١٢٤٢٩٥٧٨٠٦ = \text{ل} \quad ١٢١٨٢٧٨١٨٠ = \text{ن}$$

$$٢٤٠٧٢٢٢٦٠ = \text{ك} \quad ١٠٨٢٢٢٢٩٨٨ = \text{ي}$$

$$٥٤١١٦٦٦٩٤ = \text{ي} \quad ٤٨١٤٦٤٧٢ = \text{ك}$$

$$٤١٤٦٥٢٦٠٢ = \text{ل} \quad ٢٠٧٢٢٦٢٠١ = \text{ل}$$

$$٢٢٩٥٩٤٥٤٥ = \text{ن} \quad ١٨٨٢٢٩١٤٠ = \text{ن}$$

$$١٥٢٦١٤٦٥٠١ = \text{ت} \quad ١٥٢٦١٤٦٥٠١ = \text{ت}$$

١٢٤٦١٤٦٥٠١ = ت	١٢٤٦١٤٦٥٠١ = ن
$\frac{١٢}{١١} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$	$\frac{١٢}{١١} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$
$\frac{١٢}{١٢} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$	$\frac{١٢}{١٢} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$
$\frac{١٢}{١٣} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$	$\frac{١٢}{١٣} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$
$\frac{١٢}{١٤} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$	$\frac{١٢}{١٤} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$
$\frac{١٢}{١٥} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$	$\frac{١٢}{١٥} = \frac{١٢٤٦١٤٦٥٠١}{١٢٤٦١٤٦٥٠١}$

(مسئلة ٢٢) مطلوب عددان مربعان يكون مجموعهما مربعاً ايضاً
 لنفرض العددين ك' وت' فيكون ك' + ت' مربعاً. وكية ك' + ت' هي أكبر
 من كية (ك - ت) لان هذه الاخيرة = ك' - ٢ ك ت + ت' فلنفرض ك' + ت'
 = (م - ك - ت) فلنا ك' + ت' = م' - ٢ م ك ت + م' وبالتقابلة
 ك' = م' - ٢ م ك ت اي ك' = م' - ٢ م ك ت م' - ك' - ك' = ٢ م ت
 ك' = $\frac{٢ م ت}{١ - ٢ م}$ فاذا العددان هما ت' و ($\frac{٢ م ت}{١ - ٢ م}$) فيمكن ان نفرض ت' وم اي
 عددين شئنا ولكن لكي يكون $\frac{٢ م ت}{١ - ٢ م}$ صحيحاً ينبغي للصورة ان تقبل الاقسام على الخارج
 ويكون الخارج صحيحاً. فان فرض م = ٢ وت = ٣ فلنا العددان ١٦ و ٩ ومجموعهما
 ٢٥ واذا فرض م = ٣ وت = ٥ فلنا العددان $\frac{٢٢٥}{١٦}$ و ٢٥ ومجموعهما $\frac{٢٢٥}{١٦}$ واذا فرض
 م = ٣ وت = ٨ فلنا ٣٦ و ٦٤ ومجموعهما ١٠٠ وهلم جرا

(مسئلة ٢٣) مطلوب عدد ك بحيث يكون ك + ت وك - ت مربعين
 لنفرض ك + ت = م' ثم ك - ت = م' - ٢ م ت
 افرض م' - ٢ م ت = (م - ت) = م' - ٢ م ت + ت' ثم م' - ٢ م ت = ٢ -
 م ت + ت' او م ت = ت' + ٢ م ت وم = $\frac{٢ + ت}{٢}$ م = $\frac{٢ + ت + ٢ م ت}{٢}$
 وك = م' - ت = $\frac{٢ + ت + ٢ م ت}{٢} - \frac{٢ + ت}{٢} = م ت$ فلنا هذه القضية العمومية وهي
 اذا رُبع عدد واُضيف الى مربعه ٤ وانقسم المجموع على ٤ يكون الخارج عدداً مجموعته مع
 العدد المتروك وفضلتها عددان مربعان. فاذا فرضنا
 ت = ١ لنا ك = $\frac{٢ + ١}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ك + ت = $١ + \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٢}$ ك - ت = $\frac{٣}{٢} - ١ = \frac{١}{٢}$
 $\frac{١}{٢} = ١ - \frac{٣}{٢} =$

$$\begin{aligned} \text{ت} = ٢ \text{ ثم ك} &= \frac{٢ + ٢}{٢} = ٢ \quad \text{ك} + \text{ت} = ٤ \quad \text{ك} - \text{ت} = ٠ \\ \text{ت} = ٣ \quad \text{ك} &= \frac{٢ + ٩}{٢} = \frac{١١}{٢} \quad \text{ك} + \text{ت} = ٣ + \frac{١١}{٢} = \frac{١٧}{٢} \quad \text{ك} - \text{ت} = \frac{١١}{٢} - ٣ = \frac{٥}{٢} \end{aligned}$$

$$ت = ٤ \quad ك = \frac{٤ + ١٦}{٤} = ٥ \quad ك + ت = ٩$$

$$ك - ت = ١ \quad \text{ولهذا جراً}$$

(مسئلة ٢٤) مطلوب ثلاثة اعداد مربعة على سلسلة حماية

لتفرض الاعداد ك' وى' ول' ثم ك' + ل' = ٢' اى' افرض ك' = ف' + ق'

$$\text{ول} = ف' - ق' \quad \text{ثم} \quad ك' + ل' = ف' + ق' + ف' - ق' = ٢' \quad \text{اى}$$

$$ف' + ق' = ٢' \quad \text{اى} \quad \text{فتمثلت المسئلة الى نوع مسئلة ٢٢ فلنفرض} \quad ف = \frac{٢٢}{١ - ٢}$$

$$ق = ت$$

$$\text{ثم} \quad ك' = ف' + ق' = \frac{٢٢}{١ - ٢} + ت$$

$$ل' = ف' - ق' = \frac{٢٢}{١ - ٢} - ت$$

$$ى' = \frac{٢}{١ - ٢} - \frac{٢}{١ - ٢} = ٠$$

فيمكن ان نفرض ت وم اى حد شئنا

$$\text{لتفرض} \quad ت = ٢ \quad م = ٢ \quad \text{ثم} \quad ك = ٧ \quad ى = ٥ \quad ل = ١ \quad \text{والاعداد}$$

المطلوبة هي ٤٩ ٢٥ ١

$$\text{افرض} \quad ت = ٨ \quad م = ٢ \quad \text{ثم} \quad ك = ١٤ \quad ى = ١٠ \quad ل = -٢ \quad \text{والاعداد هي}$$

١٩٦ ١٠٠ ٤

(مسئلة ٢٥) مفروض ٢٤ ك = ١٢ ى + ١٦ فاي قيمة ك وى صحيحة

$$\text{الجواب} \quad ك = ٥ \quad ى = ٨$$

(٢٦) مفروض ٨٧ ك + ٢٥٦ ى = ١٥٤١٠ مطلوب قيمة ك الصغرى وقيمة

$$\text{الكبيرة في صحيح} \quad \text{الجواب} \quad ك = ٢٠ \quad ى = ١٢٨٠٠$$

(٢٧) كم قيمة صحيحة للاحرف في ٥ ك + ٧ ى + ١١ ل = ٢٢٤ الجواب ٦٠

(٢٨) رجل اشترى ٢٠ طائراً بعشرين غرشاً اى اوزاً بسعر الطير اربعة غروش

وحاماً بسعر الطير نصف غرش وعصافير بسعر الطير ١/٢ غرش فكم اشترى من كل

جنس الجواب اوز ٢ حمام ١٥ عصافير ٢

(٢٩) ما هو العدد الاصغر الذي يقبل الانقسام على الاعداد الطبيعية من ١ الى

$$٩ \quad \text{بدون باقى} \quad \text{الجواب} \quad ٢٥٢٠$$

تنبيه. هذا الباب واسع جداً ويمكن الامتداد فيه الى ما لا نهاية له. وقد اكتبنا

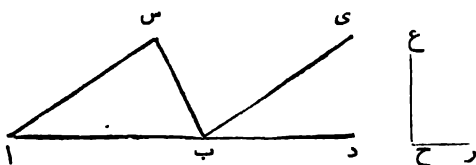
بما ذكرناه طلب الاختصار. ولا يمكن وضع قواعد خصوصية لكثير من مسائله وما تقدم

شرحه كافٍ للدلالة على الجليل التي يستعان بها في حل عقده.

الفصل السادس والعشرون

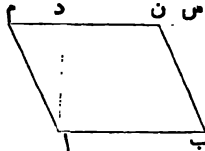
في احتكام الجبر لحل المسائل الهندسية

٢٥٩ قد نُكْتَبَ البراهين الهندسية في عبارات جبرية . مثالة ان الزوايا
الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين



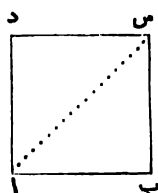
- (١) حسب اقليدس (ق ٢٩ ك ١) $\angle B = \angle D = \angle A$
 - (٢) $\angle B = \angle C$ وس ب ي = اس ب
 - (٣) بالجمع $\angle B + \angle D + \angle A = \angle B + \angle C + \angle A$
 - (٤) اضع اب س للجانبين فتصير س ب د + اب س = ب ا س + اس ب
 - (٥) حسب اقليدس (ق ١٢ ك ١) $\angle B + \angle D + \angle A = \angle B + \angle C + \angle A$
 - (٦) بمساواة (٥) و (٤) $\angle B + \angle D + \angle A = \angle B + \angle C + \angle A$
- قائمتين

٢٦٠ تُعرَف مساحة معين بضرب القاعدة في العمود عليها . مثالة في شكل



اب ن م تكون مساحة اب $\times$ ب س او م ن $\times$ ا د
لان اب $\times$ ب س = مساحة شكل م ن ا وحسب
اقليدس (ق ٢٦ ك ١) اشكال متوازية الاضلاع على

قواعد متساوية وبين خطين متوازيين في متساوية اي س ا = م ب



٢٦١ تُعرَف مساحة المربع بضرب احد اضلاعه في

نفسه . مثالة مساحة المربع اب م د = اب ا لان

اب $\times$ ب س وب س = اب

٢٦٣ مساحة المثلث هي نصف حاصل القاعدة في عو المثلث. مثالة مساحة

المثلث ا ب غ = نصف ا ب $\times$ ح غ ا و ب س او $\frac{1}{2}$ ا ب $\times$ ح غ ا و ب س
 $\times$ ب س ا و ح غ لان شكل ا ب س د = ا ب $\times$ ب س
 وحسب اقليدس (ق ٤١ ك ا) ان كان مثلث وشكل

متوازي الاضلاع على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين ب ح ا
 يكون المثلث نصف الشكل. وعلى هذا القياس لنا عبارة جبرية دالة على مساحة اي
 شكل فُرض اضلاعه مستقيمة. لان كل شكل نظير ذلك يمكن انقسامه الى مثلثات.

مثالة في شكل ا ب س د ي فيو مثلثات ا ب س ا س ي
 ي س د ومساحة ا ب س = $\frac{1}{2}$ ا س $\times$ ب ل ومساحة
 ا س ي = $\frac{1}{2}$ ا س $\times$ ح ي و ي س د = $\frac{1}{2}$ ا س $\times$ د غ س
 وكل الشكل = $(\frac{1}{2} ا س \times ب ل) + (\frac{1}{2} ا س \times ح ي) + (\frac{1}{2} ا س \times د غ)$

٢٦٣ نحتاج احيانا الى عكس هذا العمل وان نستعمل اضلاع شكل من مساحته.

فيعرف طول مستطيل من قسمة المساحة على عرضه. مثالة ان فُرض مساحة د ب
 = ك فضلع ا د = س د ويستعمل ضلع مربع باستعمال
 الجذر المالمالي من مساحته. وتعرف قاعدة مثلث بقسمة
 مساحته على نصف دلو.

٢٦٤ رأينا ان مساحة سطح يدل عليها بحاصل طول في عرضه فيبدل على مساحة

الجسم بطوله في عرضه في عنوه

(هلمية ا) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية ا ب س

ومجمع الوتر والساق مطلوب الساق

لفرض ا ب = ن ب س = ك مجموع الوتر والساق

ك + ا س = ت وبمقابلة ك نصير ا س = ت - ك

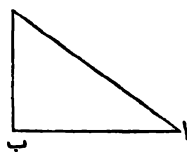
(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ا) $ا س^2 = ا ب^2 + ب س^2$

(٢) وحسب ما فُرض ك + ا = ن (ت - ك) = ت - ت ك = ت - ك + ك

بالمقابلة ت ك = ت - ن وك = $\frac{ت - ن}{٢}$ ب س الضلع المطلوب

اي في كل مثلث قائم الزاوية يعدل العمود مربع جميع الوتر والعمود الآخر مربع القاعدة
منسوماً على مضاعف مجتمع الوتر والعمود

(ع ٢) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية وفضله الوتر
والعمود مطلوب العمود



لنفرض $اب = ت = ٢٠$ و $ب س = ك$ وفضلتها $ا ب = ف$
فيكون الوتر $اس = ك + ف$

$$(١) \text{ حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) } اس^2 = اب^2 + ب س^2$$

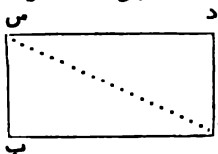
$$(٢) \text{ وبالمفروض (ك + ف)^2 = ت^2 + ك^2}$$

$$(٣) \text{ بالبسط } ك^2 + ٢ ك ف + ف^2 = ت^2 + ك^2$$

$$(٤) \text{ بالمقابلة والقسمه } ك = \frac{ت^2 - ف^2}{٢ ف} = ١٥$$

(ع ٣) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٢٠ ذراعاً. وفضله الضلعين الآخرين
٦ اذرع. فما هو طول القاعدة

(ع ٤) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٥٠ ذراعاً. ونسبة القاعدة الى العمود
كنسبة ٤ : ٣ فما هو طول العمود



(ع ٥) مفروض محيط شكل متوازي الاضلاع
وقطره مثل شكل $اب س د$ مطلوب اضلاعه

$$\text{لنفرض القطر } اس = ح = ١٠$$

$$\text{والضلع } اب = ك$$

$$\text{نصف المحيط } ب س + اب = ب س + ك = د = ١٤$$

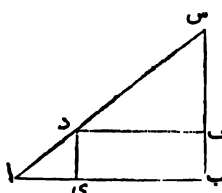
$$\text{بمقابلة ك نصير } ب س = د - ك$$

$$\text{حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) } اس^2 = اب^2 + ب س^2$$

$$\text{وحسب المفروض } ك^2 + (د - ك)^2 = ح^2$$

$$\text{اي } ك = \frac{١}{٢} (د^2 - ح^2) = ٨$$

$$\text{وب } س = د - ك = ٦$$



(ع ٦) مفروض مساحة مثلث قائم الزاوية $اب س$
واضلاعه شكل متوازي الاضلاع مرسوم فيه . مطلوب
الضلع $ب س$

$$\text{لنفرض المساحة } ع \text{ ودي } ع = ف ب = ب$$

ب = د ف = د ب س = ك اذا س ف = ب س - ب ف = ف - ب

(١) بمشابهة المثلثات س ف : د ف :: ب س : ا ب

(٢) او حسب المفروض ك - ب : د :: ك : الضلع ا ب

(٣) و د ك = (ك - ب) × ا ب

(٤) المساحة ع = ا ب × ١/٢ ب س = ا ب × ١/٢ ك

(٥) بالقسمة على ١/٢ ك = ا ب × ٢/ك ع

(٦) د ك = (ك - ب) × (٢/ك ع) = ٢ - ع ٢/ك

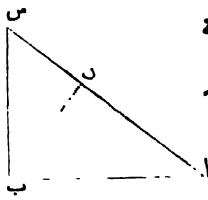
(٧) و ك = ٢ + ع ٢/ك - ٢ ع ٢/ك = ب س

(٧ ع) مفروض ثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية

ا ب س مطلوب قسّي الوتر الحادّين من عمودتي مرسوم

من القائمة على الوتر. حسب اقليدس (ق ٨ ك ٦) يقسم

المثلث الى اثنين كل واحد منها قائم الزاوية



(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٢) بالشكل س د = ا س - ا د

(٣) ربع المجانين $\overline{AD} \times \overline{AC} = (\overline{AS} - \overline{AD})^2$

(٤) بالتعويض في (١) $\overline{AB}^2 = (\overline{AS} - \overline{AD}) \times \overline{AC}$

(٥) بالبعط $\overline{AB}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{AS} \times \overline{AD} + \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٦) بالمقابلة $\overline{AB}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{AS} \times \overline{AD} + \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٧) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٨) بمساواة (٦) و (٧) $\overline{AS}^2 - \overline{AS} \times \overline{AD} + \overline{AD} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{AC}$

(٩) بالمقابلة $\overline{AS}^2 - \overline{AS} \times \overline{AD} = ٠$

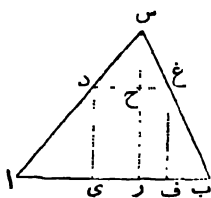
(١٠) بالقسمة ا د = $\overline{AS} - \overline{AD}$

ا س

(٨ ع) مفروض مساحة شكل د ي ف غ

متوازي الاضلاع مرسوم في المثلث ا ب س مطلوب

اضلاعه



ارسم س ر عموديا على ا ب وحسب المفروض

د غ يوازي ا ب فاذا

المثلث $\overline{س غ ح}$ يشبه المثلث $\overline{س ر ب}$

والمثلث $\overline{س د غ}$ يشبه المثلث $\overline{س ا ب}$

فلنفرض $\overline{س ر} = \overline{د}$ و $\overline{ا ب} = \overline{ب}$ و $\overline{د غ} = \overline{ك}$ والمساحة $= \overline{ع}$

(١) بمشابهة المثلثات $\overline{س ب} : \overline{س غ} :: \overline{ا ب} : \overline{د غ}$

(٢) و $\overline{س ب} : \overline{س غ} :: \overline{س ر} : \overline{س ح}$

(٣) وبمساواة النسب $\overline{ا ب} : \overline{د غ} :: \overline{س ر} : \overline{س ح}$

(٤) اي $\overline{د غ} \times \overline{س ر} = \overline{ا ب} \times \overline{س ح}$

(٥) بالشكل $\overline{س ر} - \overline{س ح} = \overline{د ي}$

(٦) بالتعويض $\overline{س ر} - \overline{د غ} \times \overline{س ر} = \overline{د ي} \times \overline{س ر}$

(٧) وبالمفروض $\overline{د} - \overline{د ك} = \overline{د ي}$

(٨) $\overline{ع} = \overline{د غ} \times \overline{د ي} = \overline{ك} \times (\overline{د} - \overline{د ك})$

(٩) اي $\overline{ع} = \overline{د ك} - \overline{د ك}^2$

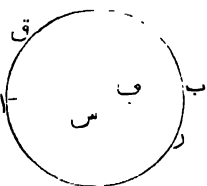
(١٠) بالتحويل $\overline{ك} = \frac{1}{4} \overline{ا ب} - \frac{1}{4} \overline{ع ب} = \overline{د غ}$

ثم يُعرف $\overline{د ي}$ بقسمة المساحة على $\overline{د غ}$

(١١) لنا ان نرسم من نقطة مفروضة في دائرة مفروضة خطاً مستقيماً حتى يكون

بين جزئيه الواقعين بين النقطة والمحيط فضلة مفروضة

في الدائرة $\overline{ا ب ر}$ لتكن $\overline{ف}$ نقطة مفروضة في



القطر $\overline{ا ب}$ ثم لنفرض $\overline{ا ف} = \overline{ت}$ و $\overline{ب ف} = \overline{ب}$

و $\overline{ف ر} = \overline{ك}$ والفضلة المفروضة $= \overline{د}$ اذاً $\overline{ق} =$

$\overline{ك} + \overline{د}$

(١) حسب اقليدس (ق ٢٥ ك ٢) $\overline{ا ف} \times \overline{ف ق} = \overline{ا ب} \times \overline{ب ف}$

(٢) وبالمفروض $\overline{ك} \times (\overline{ك} + \overline{د}) = \overline{ت} \times \overline{ب}$

(٣) اي $\overline{ك} + \overline{د ك} = \overline{ت ب}$

(٤) باتمام الترميع $\overline{ك} + \overline{د ك} + \overline{د} = \overline{د} + \overline{د} + \overline{ت ب}$

(٥) بالتجذير والمقابل $\overline{ك} = \overline{د} + \overline{د} + \overline{ت ب} = \overline{ف ر}$

(ع ١٠) مفروض مجتمع ضلعي مثلث ١١٥٥ وطول العمود من الزاوية الواقعة

بينها على الضلع الثالث ٢٠٠ وفضلة قسي الضلع الثالث الحادئين من وقوع العمود

عليه ٤٩٥ فما هو طول الاضلاع الثلاثة

الجواب ٩٤٥ و ٣٢٥ و ٢٨٠

(ع ١١) مفروض محيط مثلث قائم الزاوية ٧٢٠ وطول العمود الواقع من القائمة على الوتر ١٤٤ فما هو طول الاضلاع
الجواب ٣٠٠ و ٢٤٠ و ١٨٠

(ع ١٢) مفروض فضلة قطر مربع واحد اضلاعه مطلوب الاضلاع ليكن
ك = الضلع المطلوب وف = الفضلة بينة وبين القطر اذا ك = ف + ف ٢٦

(ع ١٣) مفروض قاعدة مثلث مستوي وعلوه مطلوب ضلع مربع مرسوم في المثلث قائم على القاعدة مثل دى ف غ في (ع ٨) لنفرض ك = ضلع المربع وق = قاعدة المثلث وع = علوه
ك = ق + ع

(ع ١٤) مفروض ضلعاً مثلث وطول خط ينصف الزاوية الواقعة بينهما .
مطلوب طول القاعدة اي الضلع الثالث الذي يقع عليه الخط المنصف للزاوية

لنفرض ك = القاعدة ت = احد الضلعين المفروضين وس = الآخر وب
= الخط المنصف
ك = (ت + س) × $\frac{ت - س}{ت + س}$

(ع ١٥) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٢٥ وضلع مربع مرسوم فيه (مثل شكل دى ف ب في (١٦) = ١٢ مطلوب الضلعان الآخران من المثلث

الجواب ٢٨ و ٢١

(ع ١٦) في مثلث قائم الزاوية كانت الاذرع في محيطه مساوية للاذرع المربعة في مساحته ونسبة القاعدة الى العمود :: ٤ : ٣ مطلوب طول كل ضلع من اضلاعه

الجواب ٦ و ٨ و ١٠

(ع ١٧) دار طولها ١٨ ذراعاً وعرضها ١٢ ذراعاً يحيط بهما منحنى متساوي العرض ومساحته تساوي مساحة الدار . فما هو عرض المنحنى

(ع ١٨) حذلة زواياها قائمة نسبة ضلع منها الى آخر :: ٦ : ٥ وسُدُس مساحتها ١٢٥ قصبه مربعة فما هو طول الاضلاع

(ع ١٩) في مثلث قائم الزاوية نسبة مساحته الى مساحة مستطيل مفروض :: ٨ : ٥ : ٥ والضلع الاقصر من كل واحد منها ٦٠ قصبه . والضلع الآخر من المثلث المتوالي للقائمة مساوي لطول المستطيل فما هي مساحة المثلث والمستطيل

الجواب ٤٨٠٠ و ٣٠٠٠ قصبه مربعة

(ع ٢٠) صندوقان زواياها قائمة اعظمها يسع ٢٠ قدماً مكعباً اكثر من اصغرها ومساحة الاصغر الى مساحة الاكبر :: ٤ : ٥ وقاعدتهما مربعتان وضلع الواحد مساوي لعمق الصندوق الآخر فما هو عمق الصندوق
الجواب ٤ و ٥ اقدام

(ع ٢١) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية مرسومة من نقطة داخل مثلث متساوي الاضلاع الى الاضلاع الثلاثة فا طول الاضلاع لنفرض ت وب وس = المخطوط العمودية وك = نصف احد الاضلاع
 اذا ك = $\frac{ت + ب + س}{٣٦}$

(ع ٢٢) ساحة مربعة احاط بها سوق متساوي العرض وطول ضلع الساحة ثلاث قصبات اقل من تسعة اضعاف عرض السوق والنقصات المربعة في السوق اكثر من النقصات في محيط الساحة بثمانية وعشرين فا في مساحة الساحة
 الجواب ٥٧٦ قصبة مربعة

(ع ٢٣) مفروض طول خطين مرسومين من الزاويتين المحاذيتين من مثلث قائم الزاوية الى نقطة انتصاف الضلعين المتقابلين . مطلوب طول الاضلاع لنفرض ك = نصف القاعدة وي = نصف العمود وت وب = الخطين المفروضين
 ك = $\frac{٤ ب - ٢ ت}{٥١}$ وي = $\frac{٤ ت - ٢ ب}{١٥}$

(ع ٢٤) مفروض قاعدة مثلث ب وعلوه العمودي ح مطلوب ضلع مربع مرسوم فيه ك
 الجواب ك = $\frac{ب}{ب + ح}$
 برهن صحة هذا الجواب هندسياً

(ع ٢٥) مفروض قاعدة مثلث ب وعلوه ح مطلوب ان يرسم فيه مستطيل بين ضلعيه نسبة مفروضة اي نسبة ك : ي افرض علو الشكل ك وطوله او قاعدته ي وافرض ك : ي :: ا : ن اي ي = ن ك
 الجواب ك = $\frac{ب}{ب + ح}$
 (ع ٢٦) مفروض قطر دائرة ق مطلوب ك ضلع مثلث متساوي الاضلاع مرسوماً في الدائرة
 الجواب ك = $\frac{٢٦ ق}{٢١}$
 برهن صحة هذا الجواب هندسياً

(ع ٢٧) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية ب وفضلة الوتر والساق ف
 الجواب $\frac{٢ ب - ٢ ف}{٢٢}$ مطلوب الساق

(ع ٢٨) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ح ونسبة القاعدة الى الساق :: م : ن
 الجواب $\frac{٢٨ م}{٢٨ ن + ٢٦ م}$ مطلوب الساق

(ع ٢٩) مفروض قطر ذي زوايا قائمة ق والمحيط ط مطلوب الاضلاع
 الجواب ط = $\frac{٢ ق}{٢١}$

(ع ٢٠) مفروض قطر ذي زوايا قائمة ١٠ ومحيطه ٢٨ فما هو طول الاضلاع
(ع ٢١) مفروض قطر دائرة قى مطلوب ضلع مثلث متساوي الاضلاع
محيطاً بها الجواب ف ٢٦

(ع ٢٢) من اية نقطة كانت داخل مثلث متساوي الاضلاع رُسِمَت خطوط
عمودية على الاضلاع مطلوب م مجتمع طول تلك الخطوط م = علو المثلث
(ع ٢٣) مفروض فضلة قطر مربع وضلعة = ف مطلوب الضلع
الجواب ف + ٢٦

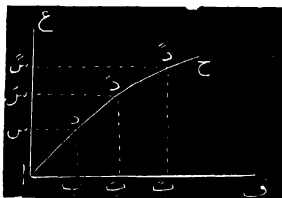
(ع ٢٤) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية اب س من نقطة مفروضة
داخل مثلث متساوي الاضلاع على الاضلاع الثلاثة مطلوب طول الاضلاع
الجواب $\frac{(٢ + ب + س)}{٢}$
٢٦

الفصل السابع والعشرون

في تعديل المنحنيات

٢٦٥ قد نظرنا في ما تقدم الى استعمال الجبر في معرفة اشكال هندسية محاطة
بخطوط مستقيمة . فلننظر الآن الى مناسبة الجبر لمعرفة الخطوط المنحنية وكيفية الدلالة
على خصائصها ونسبة بعضها الى بعض بواسطة معادلة

ان اوضاع نقط خطي بمنحن مرسوم على سطح مستوي تُعَبَّن من بُعد كل واحدة عن
خطين مستقيمين احدهما عمودي على الآخر
ليكن اغ اف عمودين احدهما على الآخر
ودب ودب' ود" ب" اعمدة على اف
وسد وسد' وسد" د" اعمدة على اغ
فيُعرَف وضع دب من طول خطي



ب دب وسد ووضع د بطول خطي ب دب وسد ووضع د من خطي ب دب
وسد وقد سمي الخطان المرسومان كما ذكر من نقطة في خطي بمنحن معبني تلك
النقطة ولاجل التمييز بين الخطين قد سمي ب د مثلاً معبني نقطة د وسد فصلهما

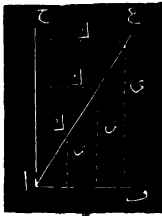
فنستعمل غالباً المعينة على الخط $\overline{اف}$ وهي مساوية للنصلة على $\overline{اغ}$ اي $\overline{اب} = \overline{اس}$
وب $\overline{ب} = \overline{س}$ $\overline{س}$ $\overline{الح}$ (اقليدس ك ١ ق ٢٢) وسي $\overline{اف}$ و $\overline{اغ}$ محوري المعين

٢٦٦ ان رُسِمَت خطوط معينة من كل نقطة في خطٍ معينٍ ودُلَّ على نسبة كل المعينة الى فصلتها بواسطة معادلة فيعين بذلك كل نقطة من المنحني لا محالة . ويُعلم شكله وكثير من خصائصه بواسطة تحويل المعادلة بالمقابلة والقسمة والترقية والتجذير وهلمَّ جراً . ونقط المنحني غير معدودة فلا يمكن رسم معين لكل واحدة منها ولكن لنا طريقة لتخصيل معادلة دالة على جميع اجزاء المنحني وهي ببناء المعادلة على خاصية مشتركة بين كل زوج مركب من معين وفصلته وفي ايضاح ذلك لننظر اولاً الى خطٍ مستقيم

فليكن $\overline{اح}$ خطاً وليرسم منه معينات وفصلات على المحورين $\overline{اف}$ و $\overline{اغ}$ العمودين احدهما على الآخر ولنجعل زاوية $\overline{فاح}$ حتى تكون النصلة $\overline{سد}$ او $\overline{اب}$ مضاعف المعين $\overline{ب}$ فتكون المثلثات $\overline{ابد}$ $\overline{ابد}$ $\overline{ابد}$ متشابهة اقليدس (ق ٢٩ ك ١) ونسبة

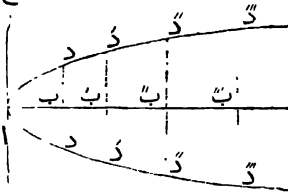
$\overline{اب} : \overline{ب} = \overline{د} : \overline{اب}$ $\overline{ب} : \overline{ب} = \overline{د} : \overline{ب}$ وان فُرض $\overline{اب} = ٢$ $\overline{ب} = ١$ فنجثني $\overline{اب} = ٢$ $\overline{ب} = ١$ و $\overline{اب} = ٢$ $\overline{ب} = ١$ $\overline{الح}$ اي كل فصلة = مضاعف معينها . ولكن لا نحتاج الى معادلة لكل زوج من معين مع فصلته بل تكفي واحدة للجميع . فلنفرض $\overline{ك} = \overline{اح}$ الفصلات $\overline{وي} = \overline{معينها}$ اذا $\overline{ك} = ٢$ $\overline{وي} = ١$ او $\overline{ك} = ١$ $\overline{وي} = ٢$ وهذه معادلة دالة على نسبة المعينات والفصلات بعضها لبعض . ولا فرق بينها وبين ما سواها من المعادلات غير انه ليس لحرثي $\overline{ك}$ $\overline{وي}$ قيمة معلومة الا انها دالتان على معين نقطة وفصلتها . ثم ان فُرض $\overline{ك} = \overline{اب}$ اذا $\overline{وي} = \overline{ب}$
وان فُرض $\overline{ك} = \overline{اب}$ " $\overline{وي} = \overline{ب}$
" " $\overline{ك} = \overline{اب}$ " $\overline{وي} = \overline{ب}$ $\overline{الح}$

فان عُيِّن طول احد الزوجين تُعرَف الآخر من المعادلة فان فُرض $\overline{ك} = ٢$ اذا $\overline{وي} = ١$ وان فُرض $\overline{ك} = ٨$ فاذا $\overline{وي} = ٤$ وان فُرض $\overline{ك} = ١٠٠$ فاذا $\overline{وي} = ٥٠$ $\overline{الح}$



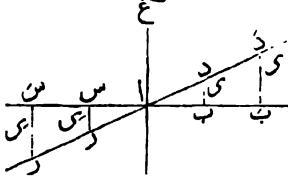
٢٦٧ اذا اخذت زاوية ح ا ف عما سبق في الرسم السابق كما يرى في هذا الرسم تبقى المعادلة على حالها الا في مسمى ك فلنفرض ت دالة على نسبة ي الى ك اي ي : ك :: ت : ا فتصير المعادلة . ت ك = ي فيكون المسمى صحيحا او كسرا حسبما كانت ي اكبر من ك او اصغر منها

ثم لنستعمل ما قد اوضح في تحصيل معادلة دالة على خط مغني . ولنفرض انه براد معادلة دالة على شكل شلجي . فن خصائص هذا الشكل كما يتضح في حساب قطع الخروط ان الفصالات متناسبة الى مربعات المعينات . فلكن ت نسبة مربع احدي المعينات الى فصلتها . ولما كانت هذه النسبة هي في بين كل زوج من معين وفصلة في الشكل كذا يحدث من ذلك هذه المعادلة ي : ك :: ت : ا وت ك = ي وهي معادلة المنحني ونصح في كل نقطة منه ومها تغيرت ك وي تبقى ت على حالها ثم ان كانت ك = ي فبالجذب ي = ت ك وان كان ت = ٢ اذا ي = ٢ ك غ



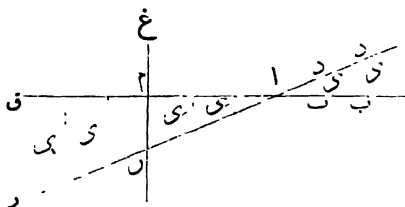
وان فرض ك = ٤٥ = ا ب
فاذا ي = ٢ = ١٦ = ٤٥ × ٢٦ = ٢
وان فرض ك = ٨ = ا ب فاذا
ي = ٨ × ٢٦ = ١٦٦ = ٤ = ب د وان
فرض ك = ١٢٥ = ا ب فاذا ي =
١٢٥ × ٢٦ = ٣٢٥٠ = ب د
وان فرض ك = ١٨ = ا ب فاذا ي
= ١٨ × ٢٦ = ٤٦٨ = ب د

٢٦٨ متى رُسيت المعينات على جانبي القطر تكون الواقعة فوقه ايجابية والواقعة تحته سلبية . مثالة في الرسم السابق ان حُسبت المعينات فوق ا ف ايجابية تكون التي تحته سلبية والفصالات الواقعة عن اليمين مثل ا ب ا ب الخ ان حُسبت ايجابية فتكون الواقعة عن اليسار مثل ا س ا س سلبية . وفي حل مسألة ان خرج معين او فصلة سلبيا يؤخذ على جانب المحور المتقابل للجانب المحسوب ايجابيا



٢٦٩ اننا في ما تقدم رى الخط المستقيم او المنحني يقطع المحور في نقطة تقاطع

المحورين كما يرى من الرسوم السابقة ولكن ليس كذلك في كل حين . فيمكن ان نحدد
النصلات على المحور $\overline{ق}$ مبتدئاً من المخطط $\overline{غ}$ فلنفرض $ك = احدى النصلات م ب$



او $م ب = الح$ وي = معينها
ولنفرض $ل = ا ب = و د =$
 $١٢ و ت = نسبة د : ا ب$
اذًا $ت ل = ي و ل = ت$
وبالشكل $ا ب = م ب - م ا$
اي $ل = ك - ب$ وبمساواة المعادلتين $ك - ب = ت$ و $ك = ت + ب$

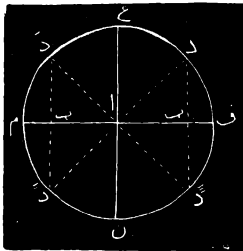
٢٧٠ يجب ان يتحقق كون المعينات والنصلات ايجابية او سلبية والى اين تنتهي
احدهما . فنرى ان الفصلة تنتهي وتلاشى في نقطة التقاء المخطط المتخني بالمحور الذي تقاس
النصلات عليه . والمعينة ثلاثى عند نقطة التقاء المتخني بالمحور الذي تقاس المعينات
عليه . مثالة في رسم الشلجي السابق نرى المعينات تقاس على المخطط $\overline{ا ف}$ فيقل طولها
شيئاً فشيئاً بتقريب المتخني الى المحور الى ان تزول بالكلية في نقطة التقاءها . والنصلات
تقاس على المخطط $\overline{ا غ}$ ونقل ايضاً كما سبق الى ان تلاشى عند $\overline{ا}$

٢٧١- الامر واضح انه اذا التقى المحوران بالمتخني في نقطة واحدة ثلاثى المعينات
والنصلات معاً كما في الرسم المشار اليه . ولكن (في رسم رقم ٢٦٩) نرى المحور $\overline{م ف}$ يقطع
المخطط $\overline{د ف}$ في $\overline{ا و غ}$ يقطعه في $\overline{ا ف}$ فالمعينات اي $\overline{م ف}$ ثلاثى عند $\overline{ا}$ والنصلات
اي $\overline{غ ف}$ ثلاثى عند $\overline{م ا و ن}$

٢٧٢ كل معين او فصله يتغير من ايجاب الى سلب عند مروره في نقطة الثلاثي
اي النقطة التي فيها تكون قيمته صفراً . مثالة في رسم رقم ٢٦٨ نرى المعين $\overline{ي ق}$ يقل شيئاً
فشيئاً الى ان يتلاشى في $\overline{ا}$ ثم يصير سلباً لانه يقع تحت المحور $\overline{س ف}$ وكذلك النصلات
عن $\overline{ي ن ا غ}$ نقل شيئاً فشيئاً الى ان تلاشى عند $\overline{ا}$ ثم يصير سلبية عن يسار $\overline{ا غ}$ ونرى
هنا ان الاثنتين تغيرتا معاً في نقطة واحدة ولكن في رسم رقم ٢٦٩ نرى المعينات تتغير
عند $\overline{ا}$ والنصلات تبقى ايجابية الى $\overline{غ ف}$ وبين $\overline{ا و غ}$ تكون المعينات سلبية
والنصلات ايجابية

٢٧٣ ان استعمال هذه القواعد وغيرها هو من متعلقات حساب قطع المخروط
ومقصودنا الآن انما هو ذكر بعض امثلة لايضاح ما قيل ولتسهيل ادراك بعض اشياء
تقع تحت نظرنا قبل الوصول الى حساب قطع المخروط الذي هو الطبقة العليا من
العلوم التعليمية

(ع ١) مطلوب معادلة الدائرة فلنفرض دائرة $\overline{ف غ م}$ ولنرسم القطرين $\overline{غ ن}$
 $\overline{ف م}$ احدهما عمودي على الآخر ارسم من اية نقطة شئت في النخعي اي محيط الدائرة المعين
 $\overline{د ب}$ عموديا على $\overline{ا ف}$ فيكون $\overline{ا ب}$ الفصلة المناظرة للمعين $\overline{د ب}$



ثم لنفرض نصف القطر $\overline{ا د} = \overline{ر}$ و $\overline{ا ب} = \overline{ك}$
و $\overline{ب د} = \overline{ي}$

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب د}^2 = \overline{ا د}^2 - \overline{ا ب}^2$
 $\overline{ا ب}^2 =$

$$\begin{aligned} \text{وبالمفروض} \quad \overline{ي}^2 &= \overline{ر}^2 - \overline{ك}^2 \\ \text{بالتجذير} \quad \overline{ي} &= \sqrt{\overline{ر}^2 - \overline{ك}^2} \end{aligned}$$

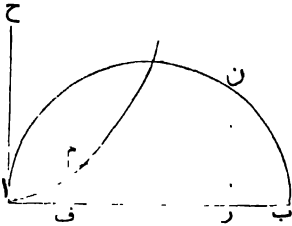
وعلى هذا السبيل $\overline{ك}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ي}^2$ اي ان الفصلة تساوي الجذر المائي من
فصلة مربع نصف القطر ومربع المعين . فان حسب نصف قطر الدائرة واحدا نصير
المعادلتان $\overline{ي}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ا ب}^2$ و $\overline{ك}^2 = \overline{ر}^2 - \overline{ا ب}^2$ وتحصل هذه المعادلة مها
كانت النقطة المفروضة في المحيط لان المعين والفسلة يكونان ضلعي مثلث ذي قائمة
و $\overline{ا د}$ الوتر لانه نصف قطر الدائرة ونرى للمعادلتين قبة ملتبسة اي تكون ايجابية ان
سلبية فتحسب المعينات والفضلات في الربع الاول $\overline{غ ف}$ ايجابية وفي الربع الثاني
 $\overline{غ م}$ تبقى المعينات ايجابية ونصير الفضلات سلبية وفي الربع الثالث م ن نصيران
سلبيتين وفي الربع الرابع ن ف تبقى المعينات سلبية وتعود الفضلات ايجابية اي

ف غ	تكون ك + و ي +	في الربع
غ م	ك - و ي +	
م ن	ك - و ي -	
ن ف	ك + و ي -	

٢٧٤ قد نجسب في الهندسة ان المخطوط حاصلة من حركة نقطة . فان تحركت
الى جهة واحدة حصل خط مستقيم . وان تغيرت الجهة في كل وقت حصل خط*

منحني . وكيفية المنحني وشكله متعلقان بكيفية تلك الحركة . فان تحركت النقطة على بُعد واحد من نقطة اخرى ثابتة حصلت دائرة تكون الثابتة مركزها وعرفنا معادلتها من معرفة كيفية هذه الحركة . وهكذا نحصل على معرفة معادلات جميع انواع المنحنيات بمعرفة كيفية حركة النقطة في رسمها كما سنرى من الامثلة الآتية

تنبيه . في هذا الشكل يجب ان يوصل بين م وف بخط عمودي على اب
(٢ع) مطلوب معادلة المنحني المسمى رديف ديوكليس وكيفية رسمه هي ان تأخذ



نصف دائرة $اب$ وفي القطر $اب$ خذ نقطة $ر$ وليكن بعد $ن$ من $ا$ مساوياً لبعـد $ر$ من $ب$ ا رسم $رن$ عموداً على $اب$ ولينقطع المحيط في $ن$ اوصل بين $ا$ و $ن$ ومن $ف$ ا رسم $فم$ عموداً على $اب$ يلاقي $ان$ في $م$ فالمنحني المنحني ماراً بنقطة $م$ فان اخذت $ف$ على ابعاد مختلفة من $ا$ تتعين اية عدة فرضت من نقط المنحني . اذ كلما تقدم خط $فم$ الى ناحية $ب$ طال . ثم لكي نستعلم معادلة هذا المنحني ليكن $اح$ و $اب$ المحورين ولنفرض لكل واحدة من الفصالات $اي$ $اف$ $اف' = ك$

تنبيه . في هذا الشكل يجب ان يوضع $م$ على راس الخط $ف$ العمودي وايضاً يجب ان يوصل بين م وف بخط عمودي على اب

وكل واحدة من الميئات $فم$ $فم'$ $فم'' = ي$

والقطر $اب = ب$

اذ $ا$ $فب = اب = اف = ب - ك$

ولان $فم$ $رن$ عمودان على $اب$ فالمثلث $افم$ شبه المثلث $ارن$ (اقليدس

ق ٢٧ وق ٢٩ ك ١)

(١) بالمثلثات المتشابهة $اف : فم :: ار : رن$

(٢) او يوضع $فب$ عوضاً عن $ار$ نصير $اف : فم :: فب : رن$

(٣) اي $اف \times فب = رن$

$$\frac{\overline{م} \times \overline{ف}}{\overline{س}} = \overline{رى} \quad (٢) \text{ و}$$

$$\frac{\overline{م} \times \overline{ف}}{\overline{س}} = \overline{رى} \quad (٢) \text{ بتربيع الجانبين}$$

$$\overline{م} - \overline{رى} = \overline{س} \quad (٤) \text{ حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١)}$$

$$\frac{\overline{م} \times \overline{ف}}{\overline{س}} = \overline{م} - \overline{رى} \quad (٤) \text{ و (٢) بمساواة}$$

$$\overline{م} - \overline{رى} = \frac{\overline{م} \times \overline{ف}}{\overline{س}} \quad (٦) \text{ اي بالمفروض } \overline{م} - \overline{رى} = \frac{\overline{م} \times \overline{ف}}{\overline{س}}$$

$$\overline{م} - \overline{رى} = \frac{\overline{م} \times \overline{ف}}{\overline{س}} \quad (٧) \text{ او (ت + ح) } \times \overline{م} - \overline{رى} = \overline{م} - \overline{رى}$$

٢٧٥ نرى في الامثلة المتقدمة ان المعادلة اخذت من وصف كيفية المنحني . وقد يعكس العمل اي تُفرض المعادلة ومنها يُرسم المنحني بأخذ فصولات مختلفة وجعل معينات لها فيبرث المنحني باطراف هذه المعينات

(٤ع) لنا ان نرسم منحنيًا بمعادلة $\overline{م} = \overline{رى}$ او $\overline{م} = \overline{رى}$ (انظر رسم الشلجي) خذ على خط اف فصولات مختلفة طولاً اي

$$\overline{م} = \overline{رى} \quad \text{فيكون المعين } \overline{م} = \overline{رى}$$

$$\overline{م} = \overline{رى} \quad \text{فيكون المعين } \overline{م} = \overline{رى}$$

$$\overline{م} = \overline{رى} \quad \text{فيكون المعين } \overline{م} = \overline{رى}$$

$$\overline{م} = \overline{رى} \quad \text{فيكون المعين } \overline{م} = \overline{رى}$$

ثم ركب هذه المعينات مع فصلاتها واصل بين اطرافها بخط $\overline{م} = \overline{رى}$ فيرسم المنحني المطلوب . ولا ريب ان الخط يكون اقرب الى المطلوب كلما زاد عدد المعينات والصلات المأخوذة

٢٧٦ اذا وُهمت حركة نقطة حتى تمر باطراف جميع المعينات المفروضة في معادلة يُسمى الخط الحادث طريق النقطة اي الطريق التي تتحرك فيها والتي توجد فيها ابداً . ويسمى ايضاً طريق المعادلة التي منها تؤخذ مواضع النقطة في حركتها . مثالة ان الشلجي يسمى طريق نقط $\overline{م} = \overline{رى}$ او طريق المعادلة $\overline{م} = \overline{رى}$ وقوس الدائرة هي طريق المعادلة $\overline{م} = \overline{رى}$ فمعرفة طريق معادلة انما هي معرفة الخط المنحني او المستقيم التي هي له

(٥٤) مطلوب طريق المعادلة $ك = ت - اوت ك = ي$ التي فيها نفرض $ك$ و $ي$ معينات وفصلات مختلفة وت كمية ثابتة معينة فان اخذ المعين $ك$ على اطوال مختلفة فلا بد للفصل $ي$ ان يتغير بالنسبة الى $ك$ حتى تبقى المعادلة $ك = ي$ او بجل المعادلة الى نسبة $ي : ك :: ت : ا$ اي لا يتغير نسبة $ي : ك$ لان $ت$ كمية معينة اي تكون نسبة فصله الى معينها كنسبة فصله اخرى الى معينها مها كان . فلنفرض فصلين $اب - اب$ (رسم رقم ٢٦٦) و $ب د$ و $ب د$ معينها اذا $اب : ب د :: اب : ب د$ فيكون خط $ا د$ مستقيماً (اقليدس ق ٢٢ ك ٦) وهو طريق المعادلة
ثم ان كانت المعادلة المفروضة $ك = ت + ب$ فزيادة $ب$ لا تسبب تغييراً في الطريق . لان $ب$ انما يزيد طول الفاصلات فقط . وعوضاً عن ان تقاس من $ا$ تقاس من نقطة اخرى مثل $م$ في رسم رقم ٢٦٦ وتبقى نسبة $اب : او اب الى ب د او ب د$ كما كانت فيكون الخط مستقيماً

٢٧٧ يبرهن ما سبق ان كل معادلة تكون $ك = و$ اي الفاصلات والمعينات في اجزاء مختلفة منها وليس لما الا القوة الاولى تكون طريقها خطاً مستقيماً لان كل معادلة من هذا النوع يمكنها ان تتحول الى $ك = ت + ب$ كما ينصع من هذه العبارة
(٦٤) مطلوب طريقة المعادلة

س ك - د + ح ك - ي = م + ن
بالمقابلة س ك + ح ك = ي + ن - م + د
وبالقسمة على س + ح نصير ك = $\frac{ن - م + د}{س + ح} + \frac{ي}{س + ح}$
فيمكن هنا ان يدل على الكميات الثابتة بالعويض عنها بحرف واحد . فلنفرض
س + ح = ت و $\frac{ن - م + د}{س + ح} = ب$ فنصير المعادلة $ك = ت + ب$ التي طريقها
خطاً مستقيماً كما تقدم

٢٧٨ ثم انه متى كانت المعينات مناسبة لمربعات الفاصلات او لكتوبها اولللقوة الرابعة منها ولم جراً يكون طريق المعادلة خطاً مستقيماً لان المعينات الموضوعة على خط مستقيم تكون نسبة بعضها الى بعض ذات النسبة الكائنة بين فاصلاتها . ولكن لا تكون نسبة كميات بعضها الى بعض كنسبة مربعاتها او ككتوبها او قواعها الرابعة والخامسة ولم جراً كما علم من باب النسبة . مثالة ان فُرض $ك = ي$ فنزيد المعينات

أكثر من الفصالات فان اخذت الفصالات ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ تكون المعينات مساوية لمربعاتها اي ١ و ٤ و ٩ و ١٦ الخ

٢٧٩ ان عدة المعادلات التي يمكن ان تتركب من قوات المعينات والفصالات المختلفة هي غير متناهية . وكل معادلة لها طريق مخصصة بها . اذاً تكون اشكال المنحنيات غير متناهية ولكنها تنحصر في انواع . وقد جرت العادة عند المولدين ان يرتبوا في انواع حسب درجات معادلاتها فيدل على انواع الخطوط بالدليل الاعظم او بجمع دلائل المعينات والفصالات في جزء من المعادلة . مثالة ت ك = ح ي تختص بخط من النوع الاول لان الدليل في كل معين وفصلة انما هو واحد وليس في هذا النوع منحن كما رأينا سابقاً

والمعادلة س ك - ت ك = ح ي مخصصة بالنوع الثاني من الخطوط والنوع الاول من المنحنيات لان الدليل الاعظم هو ٢ وت ح ي + ك ح ي = ب ك تختص بالنوع الثاني ايضاً . لانه وان لم يكن فيها دليل أكبر من واحد لكن مجموع دلائل ك و ح ي في الجزء الثاني اي ١ + ١ = ٢ و ح ي - ت ك = ح ي = ب ك مخصصة بالنوع الثالث من الخطوط والثاني من المنحنيات لان دليل ح ي الاعظم هو ٢

٢٨٠ في المنحنيات من الانواع العالية قد يمكن ان تكون لمعين فصلة قيمات مختلفة فيلتي المعين بالمنحنى في نقط متعددة لان طول المعين متوقف على معادلة المنحنى . وان كانت المعادلة فوق الدرجة الاولى يكون لها قيمتان فاكثر كما رأينا سابقاً فتكون للمعين قيمات مختلفة

ان المعادلة من الدرجة الاولى لها قيمة واحدة فقط وخطها يقطع المعين في نقطة واحدة فقط . مثالة معادلة خط آ ح (رسم رقم ٢٦٦) هي ا ك = ح ي فنرى ان ح ي لها قيمة واحدة فقط وك لا تتغير . فان اخذ الفصلة ك = ا ب يكون المعين ح ي = ب د الذي يمكنه ان يلاقي آ ح في د فقط

ولكن معادلة الثلجي ح ي = ت ك لها قيمتان كما نرى من تجذير الجانبيين اي ح ي = ح ي ت ك احاطها ايجابية والاخرى سلبية وذلك دال على امكان اخراج المعين الى جهتيه من طرف الفصلة فيمكنه ان يلاقي جزءاً آخر من المنحنى . مثالة معين الفصلة

اب الشلبي قد يمكن ان يكون ب د فوق الفصلة اوب د
قد رأينا سابقا ان معادلة مكعبة لما ثلاثة جذور اية ثلاث قيمات
فتكون لمعين معين من نوعها ثلاث قيمات فيمكن ان يلاقي المخني في
ثلاث نقط . مثالة معين الفصلة اب قد يمكن ان يكون ب د او
ب د او ب د



٢٨١ اذا التقى المخني بالمحور الذي تقاس عليه الفصالات ثلث المعينات شيئا
فشيئا الى ان ثلاثي كما تقدم . وقد يمكن ان يتقرب معين الى خط ابدأ بدون ان
يلافيو . فلنفرض على خط اف ابعادا متساوية اب
وب ب' وب' ب'' وب'' ب''' ولنفرض شكل المخني
د د' د'' على كيفية حتى يكون كل معين عند نقط
ب ب' ب'' الخ نصف الذي عن يساره اي ب د' ف ب' ب'' ب''' ب''''
نصف ب د وب'' د' نصف ب' د' الخ فالامر واضح انه مما اخرج المخني على هذه
الكيفية لا يلاقي اف بل يبقى متقربا اليه ابدأ . وكل خط على هذه الكيفية اي الذي
يتقرب ابدأ الى معين بدون ان يلتقي به يسمى متقاربا للمحور اف هو متقارب للمخني
د د' فلما زادت الفصلة قل المعين . ومتى حُصيت الفصلة غير متناهية حسبا ذكر
في فصل غير المتناهيات بصير المعين شيئا بغير المتناهي فيدل عليه بصر
والامتداد في هذا الباب من خصائص حساب قطع المخروط .
هذا ما انتضى وضعه في علم الجبر والمناقلة
والحمد لله الذي لا يحاط به علما
انتهى

وكان الفراغ من تبييض في الحادي والعشرين من شهر كانون الثاني سنة ١٨٥٢ مسيحية



وكان الفراغ من هذه الطبعة في ثلث من شهر حزيران سنة ١٨٩١

