الحمد للہ والمنۃ

ہمبلن سمتھہ صاحب مہندس کی اقلیدس مختصر کے پہلے دو مقالے

جنمین اشکال ہندسیہ کے ثبوت مین صرف علامات

ومخففات کو دخل دیا ہے

سررشتہ تعلیم اودہ مین مولوی ابو الحسن صاحب بک پورٹر نی ترجمہ کیا اور

بار دوم

مطبع منشی نولکشور مقام لکھنؤ مین چھپی

بماہ اپریل سنہ ۱۸۶۶ع

دیباچہ

اس رسالہ کی تالیف سے مولف کی یہ غرض ہے کہ اقلیدس کی ترتیب قائم رکھے اور جو باتین اوس سے چھوٹ گئی ہین وہ بیان کرے اور مختصر حاشیے مطالب دقیق کی تشریح کے واسطے لکھے اور نہایت مشکل شکلون کو سہل تر طریقے سے ثابت کرے —

یہ رسالہ اصل عبارت یونانی سے موافق اقلیدس مؤلفہ آگسٹ ویبرڈ کے لکھا گیا ہے اور پروفسر ڈی مورگن صاحب مرحوم نے جو مفید باتین لکھی ہین اور وہ کتاب مسمّی بہ کمپینین ٹو دی برٹش المانک مین مذکور ہین اونھین بھی مؤلف نے مرعی و ملحوظ رکھا ہے —

اکثر اشخاص کو یہ مرغوب ہے کہ علم ہندسہ مین الفاظ کے مقام پر علامات استعمال کیے جائین اور مؤلف نے بڑے معتبر لوگون سے سنا ہے کہ جو علامتین اس رسالہ مین مستعمل ہوئی ہین وہ [illegible]

اکسفرڈ و کیمبرج کے امتحانات مین جائز و مقبول ہین

مولف نے اکثر اقلیدس کے طریقۂ استدلال کی پیروی کی ہے لیکن اور طرق استدلال کو جو اوس سے سہل تر اور واضح تر ہین ترک نہین کیا ہے اور مولف کا یہ قصد ہے کہ پہلے مقالہ کی پانچوین اور ساتوین شکل کہ مشکل ہے اور طریقون سے ثابت کرے اور اوس مین بھی راقم نے کوشش کی ہے کہ اکثر اشکال کو جیسی شکل ۲ و ۱۳ و ۵ و ۳ مقالہ اول کی اور شکل ۱۳ مقالہ دوم کی ایسے طریقے سے ثابت کرے کہ طالب العلم کو دقت اور انتشار کم ہو دوسرے مقالہ کی شکل ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ مین مولف نے اقلیدس کے طریقہ بیان و استدلال مین بڑا تصرف کیا ہے اور ان اشکال سے **اقطار** کو اور اونکے دعوے کی عبارت سے **اعلام** کو حذف کر دیا ہے

تیسرے مقالہ مین راقم نے اس سے زیادہ جرأت کی ہے اور اقلیدس کے سلسلۂ بیان سے عدول کیا ہے اس واسطے کہ اس مقالہ مین خواص دائرہ سے بحث کی ہے اور اسی بحث سے چند مسائل اہم جنکا ذکر اس رسالہ کے فوائد و تنبیہات مین ہے واضح ہوتے ہین اِن مسائل اہم سے راقم کی مراد قاعدہ **تطبیق** ہے جس سے

راقم کے نزدیک یہ امر بالکل طے ہو چکا ہے او کاغذات امتحان علم ہندسہ پر ممتحنین مدرسہ عالیہ کیمبرج نے یہ دو اشتہار لکھدیے ہین

پہلے امتحان کے کاغذات پر یہ لکھا ہے۔ ان سوالات کے جوابات مین ایسی علامات و مخففات جو سمجھہ مین آجائین مستعمل ہو سکتی ہین

پھر دوسرے امتحان کے کاغذات پر لکھا ہے۔ اقلیدس کے سوالات کے جواب مین یہ علامت (ـــ) نہ لکھی جائے لیکن اب کے مربع کیواسطے فقط اسکا مخفف مع اب لکھہ سکتے ہین اور سطح جو اب اور س د سے گھری ہو اسکا مخفف لع اب س د لکھہ سکتے ہین ۱۲

مساوات مقادیر معلوم ہوتی ہے اور زاویہ کو یہ خیال کرنا ہی کہ وہ ایسی مقدار ہے جو بنا حد و نہایت بڑھ سکتی ہے اور اون قاعدون کا بیان کرنا ہے جو محل اور تناسب مقادیر سے متعلق ہین —

مثالین خاص کرکے مدرسہ عالیہ کیمبرج کے کاغذات امتحان سے بکمال احتیاط منتخب کی گئی ہین اور سہل اور مسلسل لکھی گئی ہین تاکہ پہلے ہی سے طالب علم کو خود اشکال[1] حل کرنے کی رغبت پیدا ہو —

مؤلف چاہتا ہے کہ اُن دوستون کا شکریہ ادا کرے جنکے مضامین سے اس رسالہ کو رونق ہوئی اور اون سے زیادہ مدد کا سائل ہے

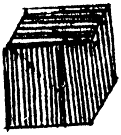
دستخط — جان ہیمبلن سمتھ
مقام کیمبرج ۱۸۷۱ع

اصول علم ہندسہ

مقدمہ

جب پتھر چٹان سے تراشا جاتا ہے تو اوسے جسم مُصمَت[2] کہتے ہین اور جب سنگ تراش اوسکی شکل بناتا ہے اور وہ کیفیت اوسکی پیدا کرتا ہے جسے تناسب شکل کہتے ہین تو جب اوسے شکل مصمت کہتے ہین —

فرض کرو کہ اس پتھر کی شکل ایسی ہے کہ اوسکے چھہ ضلع مستوی[3]



[1] واضح ہو کہ اس کتاب سے مؤلف و مترجم دونون کا یہ مقصود ہے کہ طالب علمون کو اشکال اقلیدس لکھنے کا طریقہ موجز و مختصر معلوم ہوجائے اور اسی غرض سے صاحب ڈائرکٹر بہادر نے اسکی طبع و ترویج کا حکم فرمایا ۱۲ منہ

[2] یعنی ٹھوس

[3] یعنی چپٹے

ہین اور ہر ضلع دوسرے کا ٹھیک جواب ہے اس طرح سے کہ جو شخص اس تھہ کے ایک گوشہ کی طرف منہ کرکے کھڑا ہو تو تینون ضلع اوسے ایسے دکھائی دین جیسے شکل مرقومہ بالا مین ہے

اس شکل کے ہر ضلع کو سطح کہتے ہین اور جب یہ صاف اور شفاف کیجاتی ہو تو اوسے سطح مستوی کہتے ہین

اور اسکے تیز اور خوب اُبھرے ہوئے سرے جہان پر دو ضلعے ملتے ہین خطوط کہلاتے ہین اور جس جگہہ پر انمین سے تین سرے ملتے ہین اوسے نقطہ کہتے ہین

مقدار اوس چیز کو کہتے ہین جو ایسے اجزا سے بنی ہو جو اوس سے کسی حیثیت سے مشابہ ہون مثلاً خط ایک مقدار ہے اس واسطے کہ اوسے یہ خیال کرسکتے ہین کہ ایسے اجزا سے مرکب ہے جو خود خطوط ہین

طول عرض (یعنی چوڑائی) اور دبز (یعنی عمق وارتفاع) یہ خواص جسم ابعاد کہلاتے ہین

حدود مرقومہ ذیل سے اجسام مصمتہ و سطوح و خطوط و نقاط مین فرق معلوم ہوجائے گا

جسم مُصمت مین تین بُعد ہوتے ہین طول و عرض و حجم

سطح مین دو بُعد ہوتے ہین طول و عرض

خط مین ایک بُعد ہوتا ہے طول

نقطہ مین کوئی بُعد نہین ہوتا

مقالہ اول اقلیدس

حدود

۱ - نقطہ وہ ہے جسکے اجزاء نہون

یہ مثل اسکی ہے کہ کہین کہ نقطہ وہ چیز ہے جسکی کچھ مقدار نہو کیونکہ اوسکی یہ تعریف کرتے ہین کہ نقطہ وہ چیز ہے جو اجزاء صغیرہ مین نہ منقسم ہوسکے

۲ — خط طول ہے بغیر عرض کے

لکن خط مرئی بغیر عرض کے متصور نہین ہوسکتا تاہم خطوط کو عرض سے خالی فرض کرکے اونکی نسبت بحث کرسکتے ہین اور یہی اقلیدس کی غرض ہے

۳ - خطوط محدودہ کے اطراف نقطے ہین

نقطہ سے جگہ معلوم ہوتی ہے مثلاً وہ جگہ جہان سے خط شروع ہوتا ہے یا جہان پر منتہی ہوتا ہے یا جہان پر وہ دوسرے خط سے ملتا ہے یا اوسے قطع کرتا ہے

۴ - خط مستقیم وہ ہے جو اپنے نقاط اطراف مین ہموار واقع ہو یعنی اونچا نیچا نہو

۵ — سطح وہ ہے جسمین فقط طول و عرض ہو

۶ — سطح کے اطراف خطوط ہین

۷ — سطح مستوی وہ ہے کہ اگر اوسمین دو نقطے فرض کرین اور اونکے درمیان مین ایک خط مستقیم کھینچین تو وہ خط بالکل سطح مین رہے

مثلاً سیدھے ہوے پنسل کے اطراف سطوح مستویہ ہین لکن باقی سطح اوس پنسل کی سطح مستوی نہین ہے اسطرح سے کہ اوسمین دو نقطے ایسے فرض ہوسکتے ہین کہ جو خط اونہین ملاتا ہے وہ پنسل کی سطح پر نہ واقع ہو

مقدمہ مین ہمنے سطح اور خط اور نقطے کی مثالین باعتبار اوس علم کے دین جو اس ظاہرہ کے وسیلے سے حاصل ہوتا ہے نہ باعتبار اونکی اصل حقیقت کی

سطوح وخطوط ونقاط ہندسیہ کو اون سطوح وخطوط ونقاط کے تصویرات خیالی سمجھنا چاہیے جنہین ہم تجربہ اور مشاہدہ سے دریافت کرتے ہین تاہم ازروی علم ہندسہ کے ان چیزون کو ممکن الوجود تصور کرنا چاہیے یعنی

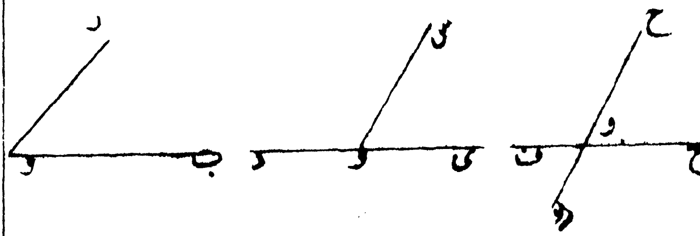
(۱) سطح بغیر جسم کے

(۲) خط بغیر سطح کے

(۳) نقطہ بغیر خط کے

۸ — جب دو خط مستقیم ایک دوسرے سے ملین مگر ایک سیدہ پر نہون تو ان دونون کے میل کو زاویہ کہتے ہین

جب ایک نقطہ دو مستقیم خطون مین مشترک ہو تو اوس نقطے پر ایک زاویہ یا کئی زاویے پیدا ہوتے ہین اور اوس نقطے کو راس الزاویہ (یا راس الزوایہ) کہتے ہین اور اون دو خطون کو سُوق الزاویہ[1] (یا سُوق الزوایا) تعبیر کرتے ہین

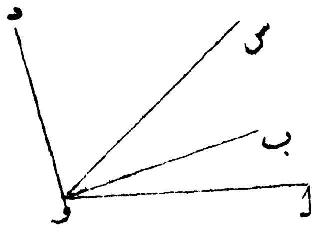


مثلاً اگر خط دل و دب ایک ہی نقطہ د پر منتہی ہون تو اونسے ایک زاویہ بنتا ہے جسے زاویہ د یا زاویہ ل د ب یا ب د ل کہتے ہین انمین سے جو حرف راس الزاویہ پر ہے وہ اون حرفون کے بیچ مین ہوتا ہے جو ساقین پر ہین

اور اگر خط س و خط د ی سے ایک نقطہ پر د ی مین ملے اس طرح سے کہ

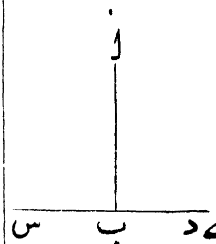
[1] جمع ساق بمعنی ٹانگ ۱۲

نقطہ د دونوں خطوں مین مشترک ہو تو خط س و خط دی کے ساتھ زاویہ
س و د و س و ی پیدا کرتا ہے اور چونکہ ان زاویوں کی ایک ساق س و دونوں مین
مشترک ہے لہذا انہین زوایاے متصلہ کہتے ہین
اور اگر خط ف ج و ح ك ایک دوسرے کو نقطہ و پر قطع کرین تو ان دونوں خطوں
سے چار زاویے پیدا ہوتے ہین یعنی ف و ح ح و ج ج و ك
ك و ف ان مین سے زاویہ ج و ح و ف و ك راس کے مقابل زاویے
کہلاتے ہین اور علی ہذا القیاس زاویہ ف و ح و ج و ك
جب تین یا زیادہ خطوط مستقیم مین جیسے و ا و ب و س و د ایک ہی نقطہ
و مشترک ہو تو جو زاویہ ان مین سے ایک خط و د



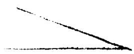
و ا کے ساتھ پیدا کرتا ہے اوسے یہ سمجھنا چاہیے کہ زوایای ا و ب و ب
و س د س و د سے بنا ہے یعنی زاویہ ا و د کو کل کہہ سکتے ہین جسکی اجزا
زوایای ا و ب و ب و س و س و د ہین لہذا ہر زاویہ کو مقدار کہہ سکتے ہین اسواسطے
کہ ہر زاویہ کو یہ سمجھ سکتے ہین کہ وہ کئی اجزا سے مرکب ہو جو خود زاویے ہین
جاننا چاہیے کہ زاویے کی مقدار کسی اعتبار سے ساقین کی طول پر نہین
موقوف ہے جنسے وہ محدود ہے
آگے چلکے ہم بیان کرین گے کہ اقلیدس نے جو زاویے کی تعریف کی ہے اوس سے

زاویہ کی مقدار بہت محدود ہو جاتی ہے اور اوس تعریف کو بڑھانے سے بڑے نتائج پیدا ہوتے ہین



۹ — جب ایک خط مستقیم (جیسے اب) دوسرے خط مستقیم (جیسے س د) سے ملکر زاویاے متصلہ ایک دوسرے کے برابر پیدا کرے تو ان مین سے ہر ایک زاویہ کو زاویہ قائمہ کہتے ہین اور اون دونون خطون مین سے ہر ایک خط کو دوسرے کا عمود کہتے ہین

۱۰ — زاویہ منفرجہ وہ ہے جو زاویہ قائمہ سے بڑا ہو



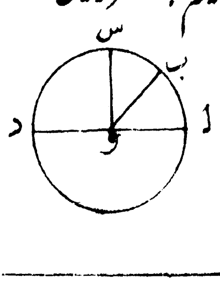
۱۱ — زاویہ حادہ وہ ہے جو قائمہ سے چھوٹا ہو

۱۲ — شکل اوسے کہتے ہین جو ایک حد یا کئی حدود سے گھری ہو

۱۳ — دائرہ اوس شکل مسطح کو کہتے ہین جسے ایک خط نے جسے محیط کہتے ہین گھیرا ہو اور اوسکے بیچ مین ایک نقطہ ایسا ہو کہ اوس سے محیط تک جتنے خط کھینچین سب آپس مین برابر ہون اس نقطہ کو مرکز کہتے ہین

۱۴ — جو خط مرکز دائرہ سے محیط تک کھینچا جاے اوسی نصف قطر دائرہ کہتے ہین

۱۵ — قطر دائرہ وہ خط مستقیم ہے جو مرکز مین سے گذر کر محیط پر دونو طرف منتہی ہو



مثلاً اس شکل مین و دائرہ ا ب س د کا مرکز ہے اور و ا و ب و س و د یہ سب نصف قطر دائرہ ہین اور ا و د خط مستقیم قطر دائرہ ہے اس سے ثابت ہوا کہ نصف قطر دائرہ قطر کا نصف ہوتا ہے

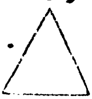
۱۶ — نصف دائرہ وہ شکل ہے جو قطر سے اور محیط کے اوس حصہ سے جو قطر نے قطع کیا ہے گھری ہو

۱۷ — اشکال مستقیمۃ الاضلاع وہ شکلین ہین جو خطوط مستقیمہ سے گھری ہون

۱۸ — مثلث وہ شکل مسطح ہے جسے تین خط مستقیم گھیرے ہون

۱۹ — ذوات الاربعۃ الاضلاع وہ شکل مسطح ہے جسے چار خط گھیرے ہون

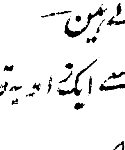
۲۰ — ذوات الاضلاع کثیرہ وہ شکل مسطح ہے جسے چار سے زیادہ خط مستقیم گھیرے ہون
جب شکل ذو اضلاع کثیرہ کے سب ضلع اور سب زاویے باہم برابر ہون تو اوسے ذو الاضلاع الکثیرۃ المتساویہ و الزوایا المتساویہ کہتے ہین



۲۱ — مثلث متساوی الاضلاع وہ ہے جسکے سب اضلاع برابر ہون

۲۲ — مثلث متساوی الساقین وہ ہے جسکے دو ضلع برابر ہون
اسکے تیسرے ضلع کو قاعدہ کہتے ہین — اضلاع مثلث مین سے ایک ضلع کو قاعدہ کہتے ہین تاکہ اوسمین اور اور دو ضلعون مین فرق معلوم ہو خاص کر جب ان دونون ضلعون کا ذکر اوپر ہوا ہو تو قاعدہ کا لفظ ضرور استعمال کرتے ہین —

۲۳ — مثلث قائم الزاویہ وہ ہے جسکے زاویون مین سے ایک زاویہ قائمہ ہو



اس مثلث مین زاویہ قائمہ کے ضلع مقابل کو وتر قائمہ کہتے ہین

۳۴ — مثلث منفرج الزاویہ وہ ہے جسمین ایک زاویہ منفرجہ ہو

آگے چلکے ہم ثابت کرینگے کہ مثلث مین فقط ایک زاویہ قائمہ کے برابر یا اوس سے بڑا ہوسکتا ہے

۳۵ — مثلث حاد الزاویہ وہ ہے جسکے سب زاویے حادّے ہون

۳۶ — خطوط مستقیمہ متوازیہ وہ ہین جو ایک ہی سطح مستوی مین ہون اور انھینر دونون طرف چاہین ہمیشہ کھینچتے چلے جائین لکن وہ کبھی باہم نہ ملین

- واضح ہو کہ اقلیدس نے چہ[1] اصول موضوعہ مقرر کیے ہین — اصول موضوعہ وہ قواعد ہین جنھین اشکال ہندسیہ بنانے کے واسطے اور مقادیر ہندسیہ کی خواص بیان کرنیکو صحیح تسلیم کر لیا ہو

اصول موضوعہ

فرض کرو

۱ — کہ ایک خط مستقیم کسی نقطہ سے دوسرے نقطے تک کھنچسکتا ہے

۲ — خط محدود کسی بُعد تک بالاستقامۃ بڑھ سکتا ہے

۳ — دائرہ کسی مرکز سے اور کسی بعد پر اوس مرکز سے کھنچ سکتا ہے

۴ — زوایائے قائمہ سب آپسمین برابر ہوتے ہین

۵ — دو خط مستقیم ایک جگہہ کو نہین گھیر سکتے

۶ — اگر ایک خط مستقیم اور دو خطوط مستقیمہ سے اس طرح سے ملے کہ اوس خط

[1] یاد رہے کہ اقلیدس نے پہلے تین اصول کو اصول موضوعہ قرار دیا ہے اور پچھلے تین اصول موضوعہ کو علوم متعارفہ مین داخل کیا ہو لکن جبکہ ہمنے اصول موضوعہ کی یہ تعریف کی کہ وہ قواعد ہین جنھین اشکال ہندسیہ بنانیکے واسطے اور مقادیر ہندسیہ کی خواص بیان کرنیکے لیے صحیح تسلیم کر لیا ہے تو اس تعریف سے ظاہر ہے کہ یہ پچھلے تین اصول بھی اصول موضوعہ مین داخل کرنے چاہیین کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ یہ تینون اصول موضوعہ نظریہ ہین بدیہیہ نہین ہین ۱۲

کی ایک طرف کے دو زاویے داخلہ کا مجموع دو قائمون سے کم ہو تو اگر ان دونون خطون کو بڑہاتے چلے جائین تو آخر کو یہ اوسی طرف باہم ملجائینگے جسطرف کہ وہ زاویے ہین جنکا مجموع دو قائمون سے کم ہے

جس لفظ کا ترجمہ اصول موضوعہ ہے اوسکی معنی اصل یونانی مین درخواست ہے پہلے تین اصول موضوعہ مین اقلیدس کچہ الات ہندسیہ کا استعمال بلحاظ چند قیود کے خط اور دائرے کھینچنے کے واسطے بیان کرتا ہے

مثلاً پہلی اور دوسری اصل موضوع سے اوسکی یہ غرض ہے کہ ایک سیدھی لکڑی سے جسے رُول کہتے ہین خطوط مستقیمہ کھینچے جائین لکن قید یہ ہے کہ اوس لکڑی مین جیسے نشان نہون جنسے خطوط کی مقدار معلوم ہوجائے

تیسری اصل موضوع سے اقلیدس کی یہ غرض ہے کہ دائرہ پرکار سے کھینچا جاے اور اوسکا مرکز ایک خط مفروض کی ایکطرف پر ہو اور اوسکا محیط اوس خط کے دوسری طرف سے گذر جائے لکن قید یہ ہے کہ پرکار ایسا نہو جس سے ابعاد خطوط مشخص ہو جائین

اصل چہارم و پنجم مین سہل باتین علم ہندسہ کی مذکور ہین اور اقلیدس چاہتا ہے کہ انہین بلادلیل تسلیم کرے

اصل ششم۔ ایک شکل نظری ہے جو ایک سہل تر اصل سے مستنبط ہو سکتی ہے جیسا کہ آگے چلکے ثابت کیا جائیگا۔ طالب علم کو لازم ہے کہ جبتک وہ مقالہ اول کی سترہوین شکل تک نہ پہونچے جبتک اس اصل سے تعرض نکرے

بعد اصول موضوعہ کے اقلیدس نو علوم متعارفہ بیان کرتا ہے کہ وہ امور بدیہیہ ہین اور اونہین اقلیدس کلیات عامہ کہتا ہے کہ وہ (باستثناء آٹھوین کلیہ کے) سب قسم کے مقادیر و اجسام مین جاری ہوسکتے ہین اور مثل اصول موضوعہ کے مقادیر ہندسیہ سے کچہ مخصوص نہین ہین

علوم متعارفہ

۱— کئی چیزین جو ایک چیز کے برابر ہون وہ آپسمین بھی برابر ہین

۲— اگر مساوی چیزین اشیاء متساویہ پر زیادہ کیجائین تو اونکے مجموعے بھی باہم مساوی ہون گے

۳— اگر مساوی چیزین اشیاء متساویہ سے گھٹائی جائین تو مقادیر باقیہ باہم برابر ہون گی

۴— اگر متساوی چیزون پر غیر متساوی چیزین بڑھائی جائین تو اونکے مجموعے غیر متساوی ہون گے

۵— اگر مساوی چیزین غیر متساوی چیزون مین سے گھٹائی جائین تو مقادیر باقیہ غیر متساوی ہون گی

۶— جو چیزین ایک ہی چیز کے مضاعف (دوگنی) ہون وہ باہم برابر ہین

۷— جو چیزین ایک ہی چیز کی نصف ہون وہ بھی آپس مین برابر ہین

۸— جو مقدارین ایک دوسرے پر منطبق ہو جائین یعنی ایک ہی جگہ مین سما جائین وہ باہم برابر ہین

۹— کل اپنے اجزا سے بڑا ہوتا ہے

ان کلیات عامہ کو اقلیدس اپنے مطلوب کی دلیل گردانتا ہے اور اوسکی کلام کا مآل یہ ہے کہ اصول موضوعہ کو تسلیم کرنے کا آپ کو اختیار ہے لکن علوم متعارفہ آپ کو ضرور تسلیم کرنے پڑین گے

اقلیدس نے علم ہندسہ کو بہت سے اشکال سے ثابت کیا ہے ان مین سے بعض اشکال نظریہ کہلاتے ہین بعض اشکال عملیہ لکن خود اقلیدس نے یہ تقسیم اشکال کی نہین کی ہے

شکل نظری اوس قیاس کو کہتے ہین جو ایسے مقدمات سے مستنبط یا ثابت ہو سکے جو پیشتر مسلم یا ثابت ہو چکے ہون

شکل عملی اوس شکل کو کہتے ہین جسمین اون اصول کے بموجب جو سابق مین مسلم یا ثابت ہو چکے ہون کوئی چیز بنانی پڑے

نتیجہ صحیح اوس شکل نظری یا شکل عملی کو کہتے ہین جو اوس شکل سے بہ آسانی مستنبط ہو سکے جس سے وہ متعلق ہے

ہمنے اقلیدس کے پہلے مقالہ کو تین فصلون پر تقسیم کیا ہے اور اس تقسیم کی وجہ آیندہ منکشف ہو جائیگی

بیان اون علامات[1] و مخففات کا جو مقالہ اول مین مستعمل ہوے ہین

علامت	کسکی علامت ہے
∵	اسواسطے کہ
∴	پس یا لہذا
=	برابر ہین یا برابر ہے اسکے
∟	زاویہ
△	مثلث
⊙	دائرہ
○	محیط

[1] واضح ہو کہ یہ علامات تو بجنسہ مطابق اصل کتاب کے اس ترجمہ مین استعمال کیے گئے ہین اسواسطیکہ انسے اکثر اشکال کا عمل بہت سہل اور مختصر ہو گیا ہے اور نہین کسی کو دھوکا نہین ہو سکتا لیکن مخففات کا مترجم نے فقط ترجمہ کر دیا ہے اونھین استعمال نہین کیا کیونکہ اون مین دھوکا ہوتا ہے اور کلکتہ یونیورسٹی نے اونھین جائز نہین رکھا فقط شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ یا سطح کا مخفف لع استعمال کیا ہے اسے طالب علم خوب یاد رکھین ۱۲

॥	خطوط متوازیہ
▱	شکل متوازی الاضلاع
⊥	عمود
لثلع	مثلث متساوی الاضلاع
جہ	زاویہ خارجہ
لہ	زاویہ داخلہ
طہ	نقطہ
یم لع	شکل مستقیم الاضلاع
مہ	زاویہ قائمہ
بع	مربع
ح	حدود
صہ	اصول موضوعہ
فہ	علوم متعارفہ
ھب [1]	وہو المطلوب
ھف [2]	ہذا خلف
لم	وہ امر جو پیشتر مسلم کرلیا ہو یا صحیح مان لیا ہو

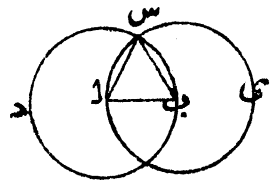
[1] یہ ہر شکل کے آخر میں لکھا جاتا ہے اسکے معنی یہ ہیں کہ مطلب ثابت ہوا ۱۲

[2] یہ بعض اشکال کے آخر میں لکھا جاتا ہے اسکے معنی یہ ہیں کہ یہ محال یا خلاف قیاس ہے ۱۲

فصل اوّل مثلث کے خواص کے بیان مین

شکل اوّل عملی

ایک خط مستقیم معلوم پر مثلث متساوی الاضلاع بناؤ



فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم معلوم ہے

مطلوب یہ ہے کہ ایک △ متساوی الاضلاع ا ب پر بناؤ

ا کو مرکز قرار دیکر ا ب کے بعد پر ⊙ ب س د کھینچو (عہ ۳)

پھر ب کو مرکز قرار دیکر ب ا کے بعد پر ⊙ ا س ی کھینچو (عہ ۳)

نقطہ س سے جہان پر دایرے تقاطع کرتے ہین خط س ا و س ب کھینچو (عہ ۱)

تو اب ا ب س △ متساوی الاضلاع ہو جائیگا

کیون $\because$ ا ⊙ ب س د کا مرکز ہے

$\therefore$ ا س = ا ب (ح ۱۳)

اور $\because$ ب ⊙ ا س ی کا مرکز ہے

$\therefore$ ب س = ا ب (ح ۱۳)

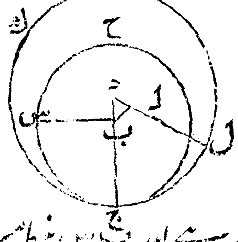
لیکن $\because$ ا س ب س ہر ایک = ا ب

$\therefore$ ا س = ب س (رفہ ۱)

پس ثابت ہوا کہ ا س و ا ب و ب س سب باہم برابر ہین اور ∆ متساوی الاضلاع
ا ب س ا ب پر بنایا گیا۔ ہسب

شکل دوم عملی

نقطہ معلومہ سے ایک خط مستقیم ایسا کھینچو جو خط مستقیم معلوم کے برابر ہو



فرض کرو کہ ا نقطہ معلومہ ہے اور ب س خط مستقیم معلوم ہے
مطلوب یہ ہے کہ ا سے ایک خط مستقیم ب س کے برابر کھینچو
ا سے ب تک خط مستقیم ا ب کھینچو

ا ب پر ∆ متساوی الاضلاع ا ب د بناؤ (ش ا ع ۱)

مرکز ب سے ب س کے بعد پر ○ س ج ح کھینچو (عہ ۳)

د ب کو خارج کرو کہ ○ س ج ح سے نقطہ ج پر ملے

مرکز د سے د ج کے بعد پر ○ ج ک ل کھینچو (عہ ۳)

د ا کو خارج کرو کہ ○ ج ک ل سے نقطہ ل پر ملے

تو ا ل = ب س ہوگا

کیون ∵ ب ○ س ج ح کا مرکز ہے

∴ ب س = ب ج (ح ۱۳)

اور ∵ د ○ ج ک ل کا مرکز ہے

∴ د ل = د ج (ح ۱۳)

اوران دمونون کے اجزا یعنی دا و دب باہم برابر ہین (ح ۳۱)

∴ باقی ال = باقی ب ج (رفہ ۳)

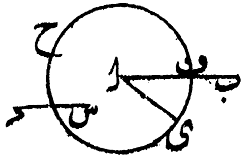
لکن ب س = ب ج

∴ ا ل = ب س (رفہ ۱)

پس نقطہ ا سے ایک خط مستقیم ا ل = ب س کے کھینچا گیا ھب

شکل سوم عملی

دو خطوط مستقیمہ معلومہ مین جو بڑا خط ہے اوسمین سے ایک جزء چھوٹے خط کے برابر قطع کرو



فرض کرو کہ ا ب و س د خطوط مستقیمہ معلومہ مین سے ا ب بڑا خط ہی
مطلوب یہ ہی کہ ا ب مین سے ایک جزء س د کے برابر قطع کرو

نقطہ ا سے خط ا ی = س د کھینچو (ش ۲ م ۱)

مرکز ا سے ا ی کے بعد پر ⊙ ی ف ح کھینچو

تو ا ف = س د کے ہوگا

کیون ∵ ا ⊙ ی ف ح کا مرکز ہے

∴ ا ف = ا ی

لکن ا ی = س د

∴ ا ف = س د (رفہ ۱)

ؔ اسپر کوئی صاحب معترض ہنون کہ جمع کا اطلاق دو پر کیونکر ہو سکتا ہی مترجم نے جمع منطقی مراد لی ہی اور تمام کتاب مین جمع کا اطلاق ما فوق الواحد پر کیا ہے ۱۲ مترجم

پس ا ب مین سے ایک جز اف = س د کے قطع کیا گیا - ھب

مثالین

۱- ثابت کرو کہ اگر شکل اول مین نقطہ ا و ب سے خطوط مستقیمہ دوسرے نقطہ تقاطع دائرتین تک کھینچے جائین تو ایک اور مثلث متساوی الاضلاع اب پر بنجائیگا

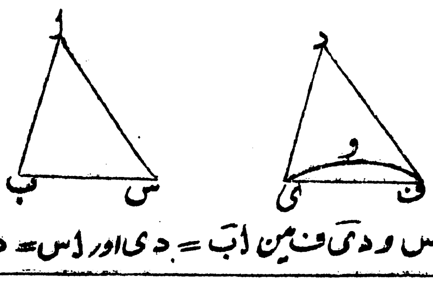
۲- بموجب عمل ش ۱ کے ایک خط مستقیم معلوم پر مثلث متساوی الساقین بناؤ جسکے اضلاع متساویہ مین سے ہر ایک ضلع ایک خط مستقیم معلوم کے برابر ہو

۳- ش ۲ مین اوس صورت کی شکل کھینچو جسمین نقطۂ معلومہ نقطہ ب سے منطبق ہوجاے -

۴- ش ۳ کے عمل کے بموجب دو خطوط معلومہ مین سے جو چھوٹا خط ہی اوسے اتنا خارج کرو کہ وہ بڑے خط کے برابر ہوجاے

شکل چہارم نظری

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کے دو ضلعے برابر ہون دوسری مثلث کے دو ضلعون کے ہر ایک اپنے نظیر کے اور زاویے درمیانی ان ضلعون کے بھی آپسمین برابر ہون تو ان مثلثون کے قاعدے بھی باہم برابر ہون گے اور یہ دو مثلث بھی برابر ہون گے اور اونکے اور زاویے بھی جنکے مقابل برابر ضلعے ہین برابر ہونگے ہر ایک اپنے نظیر کے -



فرض کرو کہ △ ا ب س و د ی ف مین ا ب = د ی اور ا س = د ف اور

∠ ب اس = ∠ ی دف

تو ب س = ی ف کے ہوگا اور △ اب س = △ دی ف اور باقی
زاویے جو برابر ضلعوں کے مقابل ہین باہم برابر ہونگے یعنی ∠ اب
س = ∠ دی ف اور ∠ اس ب = ∠ دف ی

اس واسطے کہ اگر △ اب س △ دی ف پر اسطرح چسپان کیا جاے
کہ نقطہ ا نقطہ د پر منطبق ہو جاسے اور اب دی پر واقع ہو

تو ∵ اب = دی ∴ ب ی پر منطبق ہو جاسے گا

اور ∵ اب دی پر منطبق ہے اور ∠ ب اس = ∠ ی دف بموجب فرض کے

∴ اس دف پر واقع ہوگا

∵ اس = دف کے ∴ س ف پر منطبق ہوگا

∴ ب ی پر منطبق ہوگا اور س ف پر

∴ ب س ی ف پر منطبق ہو جائیگا

اسواسطے کہ اگر ب س ی ف پر منطبق نہو تو ب س علیحدہ واقع ہوگا جیسی
ی و ف تو دو خط مستقیم ب س ی ف ایک جگہ کو گھیر لینگے یہ غیر ممکن ہے (ع ۵)

∴ ب س ی ف پر منطبق ہو جائیگا ∴ اوسکے برابر ہوگا (رفہ ۸)

اور △ اب س .... △ دی ف کے

اور ∠ اب س .... ∠ دی ف کے

اور ∠ اس ب .... ∠ دف ی کے

ھب +

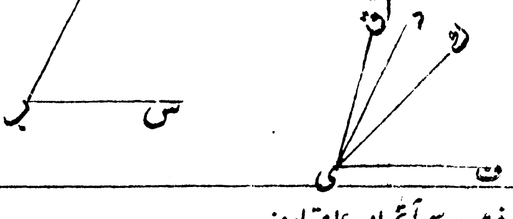
فائدۂ اول دربیان قاعدۂ تطبیق مقادیر ہندسیہ

بموجب مقولہ ۸ کے دو مقادیر ہندسیہ اوسوقت باہم برابر ہوتے ہین جبکہ وہ اس طرح سے رکھے جائین کہ ایک کے حدود دوسرے کے حدود پر منطبق ہوجائین

مثلاً دو خط مستقیم اوسوقت آپسمین برابر ہوتی ہین جبکہ وہ اس طرح سی رکھی جائین کہ اونکی نقاط اطراف باہم منطبق ہوجائین اور دو زاویے جب باہم برابر ہوتی ہین جبکہ وہ اس طرح سی رکھی جائین کہ اونکے راس محلاً منطبق ہوجائین اور اونکی ساقین جہتہً منطبق ہوجائین اور دو مثلث اوسوقت مساوی ہوتی ہین جبکہ وہ اس طرح سے رکھے جائین کہ اونکے اضلاع جہت اور مقدار مین منطبق ہوجائین

جاننا چاہیے کہ یہ قاعدہ تطبیق مقادیر ہندسیہ کی مساواۃ دریافت کرنیکے واسطے جب جاری ہوگا جبکہ یہ فرض کرلین کہ زاویہ یا مثلث کو ایک جگہ سے نقل کرکے دوسرے مقام پر اس طرح سے رکھہ سکتے ہین کہ اوسکے حدود کے اوضاع نہ بدلنے پائین اور یہ بھی فرض کرنا چاہیے کہ اگر ایک جز خط مستقیم کا دوسرے خط مستقیم کے کسی جز پر منطبق ہو تو اور اجزا ان خطوط کے جہتہً منطبق ہوجائین گے یا یون کہیے کہ جب خطوط مستقیمہ دو نقطون پر منطبق ہون تو بعد الاخراج بھی وہ منطبق ہون گے

اس قاعدہ تطبیق سے یہ فائدہ بھی ہے کہ اسکے بموجب ایسی مقادیر کا مقابلہ و موازنہ کرسکتے ہین جو ایک ہی قسم کے ہون لکن غیر متساوی ہون مثلاً فرض کرو کہ ا ب س و د ی ف دو زاویے معلوم ہین



ملہ یعنی علوم متعارفہ مین سے آٹھوان علم متعارف ۱۲

اور فرض کرو کہ ساق ب س ساق ی ف پر رکھی گئی اور اس ب راس ی پر تو اب
اگر ساق ب ا ساق ی د سے جہتہ منطبق ہوجاے تو زاویہ ا ب س زاویہ د ی ف
کے برابر ہوگا

لکن اگر ساق ب ا ی د اور ی ف کے درمیان ی ك کی جہتہ مین واقع ہو
تو ∠ ا ب س ∠ د ی ف سے چھوٹا ہوگا

اور اگر ب ا ی ق کی جہتہ مین واقع ہو اور ی د اور ی ق اور ی ف کے
درمیان مین ہوجاے تو ∠ ا ب س ∠ د ی ف سے بڑا ہوگا

فائدہ دوم در بیان شروط مساواۃ دو مثلث

ہر مثلث کے چھہ جزء ہوتے ہین تین ضلعے اور تین زاویے

اقلیدس نے چار صورتون مین ایک مثلث کی مساواۃ کلی دوسری مثلث سے
ثابت کی ہے بشرطیکہ اجزاء مرقومۂ ذیل دونون مثلثون کے برابر ہون

۱ — دو ضلعے اور اونکے درمیان کا زاویہ (ش ۴ م ۱)

۲ — دو زاویے اور اونکے بیچکا ضلع (ش ۲۶ م ۱)

۳ — ہر ایک کے تین ضلعے (ش ۸ م ۱)

۴ — دو زاویے اور ایک زاویہ کے مقابل کا ضلع (ش ۲۶ م ۱)

جن شکلون مین یہ صورتین ثابت کی گئی ہین وہ پہلے مقالہ مین بہت ضروری اہم ہین
پہلی صورت تو ہمنے ش ۴ مین ثابت کی

قاعدہ تطبیق سے دوسری اور تیسری صورت کا عمل اوس سے سہل ہوجاتا ہے
جو اقلیدس نے لکھا ہے اور یہ بھی فائدہ ہے کہ ان دونون صورتون کو پہلی صورت
سے مناسبۃ زیادہ ہوجاتی ہے لہذا ہم اقلیدس کی ۵ و ۶ و ۷ و ۸ شکلون کی
جگہہ پر تین شکلین بیان کرتے ہین اور اونکا نام الف ب س رکھتے ہین

جن اشکال کے عوض مین یہ شکلین لکھی ہین وہ اس رسالے کے آخر مین مرقوم ہین

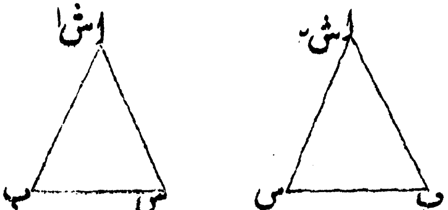
ہماری وضع کی ہوئی شکل الف اقلیدس کی (ش ۵ م ۱) کے مرادف ہے

. . . . ب . . . . . (ش ۲۶ صورت اول م ۱) کے

. . . . . . س . . . . (ش ۸ م ۱) کے

شکل الف نظری

اگر مثلث کے دو ضلعے برابر ہون تو اونکے مقابل کے زاویے بھی برابر ہون گے



فرض کرو کہ ا ب س مثلث متساوی الساقین ہین ا س = ا ب (ش ۱)

تو ∠ ا ب س = ∠ ا س ب ہوگا

خیال کرو کہ △ ا ب س کو اوٹھایا اور اولٹا کر کے اوسے پھر رکھدیا جیسے ش ۲ ہے

اور زاویے پر کے نقطون کا نام اَ بَ سَ رکھا

تو △ ا ب س و اَ سَ بَ مین

∵ ا ب = اَ سَ اور ا س = اَ بَ اور ∠ ب ا س = ∠ سَ اَ بَ

∴ ∠ ا ب س = ∠ اَ سَ بَ (ش ۴ م ۱)

لیکن ∠ اَ سَ بَ = ∠ ا س ب

∴ ∠ ا ب س = ∠ ا س ب ـ ہب (ف ۱)

نتیجہ صریح

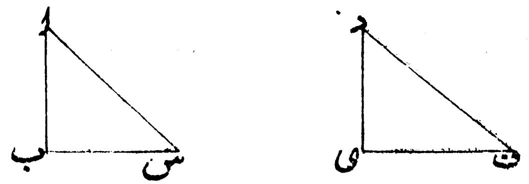
اس شکل سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ہر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوایا بھی ہے

تنبیہ

جب مثلث کے ایک ضلع اور دو اضلاع سے تمیز کرنے کے واسطے قاعدہ کہتے ہین تو اس ضلع کے مقابل کے زاویہ پر کے نقطہ کو راس المثلث کہتے ہین

شکل ب نظری

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے کے دو زاویون کے برابر ہون ہر ایک اپنے نظیر کے اور جو اضلاع ان زوایا سے متساویہ سے متصل ہون وہ بھی باہم برابر ہون تو دونون مثلث سب باتون مین برابر ہونگے



فرض کرو کہ △ ا ب س و د ی ف مین

∠ ا ب س = ∠ د ی ف اور ∠ ا س ب = ∠ د ف ی اور ب س = ی ف

تو ا ب = د ی اور ا س = د ف اور ∠ ب ا س = ∠ ی د ف ہوگا

اسواسطے کہ اگر △ د ی ف △ ا ب س پر چسپان کیا جاسے اس طرح سے کہ ی ب پر منطبق ہوجاسے اور ی ف ب س پر واقع ہو

تو ∵ ی ف = ب س ∴ ف س پر منطبق ہوجائیگا

اور ∵ ∠ د ی ف = ∠ ا ب س ∴ ی د ب ا پر واقع ہوگا

∴ د ب ا پر بغیر اخراج یا بعد الاخراج واقع ہوگا

پھر ∵ ∠ د ف ی = ∠ ا س ب ∴ ف د س ا پر واقع ہوگا

∴ د س ا ب پر بغیر اخراج یا بعد الاخراج واقع ہوگا

∴ د ا پر کہ یہی نقطہ ب ا اور س ا مین مشترک ہے منطبق ہوگا

∴ د ی ا ب پر منطبق ہوگا ∴ اوسکے برابر ہوگا

اور د ف .... ا س کے

اور ∠ ی د ف .... ∠ ب ا س کے

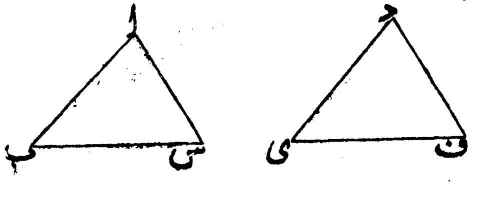
∴ دونون مثلث ہر بات مین برابر ہین — ہب

نتیجہ صحیح

شکل الف کے عمل کے بموجب یہ شکل نظری ثابت ہو سکتی ہے
کہ اگر ایک مثلث کے دو زاویے برابر ہون تو اونکے مقابل کے اضلاع بھی برابر
ہون گے (اقلیدس ش ۶ م ۱)

شکل س نظری

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے کے تین ضلعون کے برابر ہون ہر ایک اپنے نظیر کے تو دونون مثلث سب باتون مین برابر ہونگے



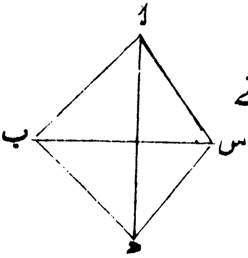
فرض کرو کہ △ ا ب س و د ی ف کے تینون ضلع اپنے اپنے نظیر کے برابر ہین
یعنے ا ب = د ی اور ا س = د ف اور ب س = ی ف
تو یہ مثلث سب باتون مین برابر ہون گے

خیال کرو کہ △ د ی ف کو اوٹھا کر △ ا ب س پر اس طرح چسپان کیا کہ ی ف

ب س پر منطبق ہو گیا اور د راس الزاویہ ضلع ب س پر واقع ہوا جو اوس ضلع
کے مقابل ہے جسپر ا واقع ہوا ہے اور ا د کو ملا دیا

تو اس مین تین صورتین نکلین گی

صورت اوّل یہ ہے کہ ا د ب س کو قطع کرجائے



تو △ اب د مین ∵ ب د = ب ا ∴ ∠ ب ا د = ∠ ب د ا (ش الف)

اور △ اس د مین ∵ س د = س ا ∴ ∠ س ا د = ∠ س د ا

∴ مجموع ∠ ب ا د و س ا د = مجموع ∠ ب د ا و س د ا

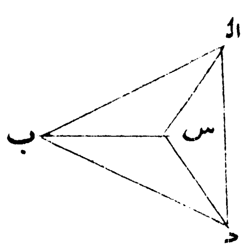
یعنی ∠ ب ا س = ∠ ب د س

لہذا اصل مثلثون کو ملاحظہ کیجیے تو معلوم ہو جائیگا کہ

∠ ب ا س = ∠ ی د ف

∴ بموجب ش ۴ کے یہ مثلث سب باتون مین باہم برابر ہین

صورت دوم یہ ہے کہ جو خط دونون مثلثون کے راس کو ملاتا ہو وہ ب س کو نہ قطع کرے



پس △ اب د مین ∵ ب د = ب ا ∴ ∠ ب ا د = ∠ ب د ا

اور △ اس د مین ∵ س د = س ا ∴ ∠ س ا د = ∠ س د ا

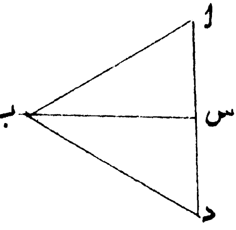
لکن چونکہ کل زاویے ب ا د و ب د ا باہم برابر ہین

اوزاوسنکے اجسنرا یعنے زاویے س ا د و س د ا بھی باہم برابر ہین

∴ باقی زاویے ب ا س و ب د س بھی باہم برابر ہین (فہ ۳)

پس جسطرح سے کہ پہلی صورت مین ہوا اوسی طرح اس صورت مین بھی اصل مثلثونکی مساوات ثابت ہو سکتی ہے

صورت سوم یہ ہے کہ ا س و س د ایک ہی سیدہ پر ہون



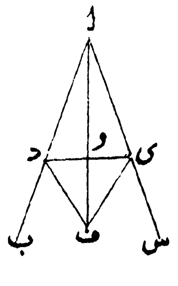
تو △ ا ب د مین ∵ ب د = ب ا ∴ ا ب ا د = ∠ ب ا د

یعنے ∠ ب ا س = ∠ ب د س

پس جس طرح سے کہ پہلی صورت مین کیا اوسی طرح اس صورت مین بھی اصل مثلثون کی مساواۃ ثابت ہو سکتی ہے ۔ ہب

شکل نہم ۹

زاویہ معلومہ کی تنصیف کرو



فرض کرو کہ ا س زاویہ معلومہ ہے

مطلوب یہ ہے کہ ∠ ب ا س کی تنصیف کرو

ب ا مین ایک نقطہ د فرض کرو

ا س مین سے ا ی = ا د قطع کرو اور د ی کو وصل کردو

د ی کی اوس طرف پر جو ا کے مقابل ہے △ متساوی الاضلاع د ف ی بناؤ

ا ف کو وصل کردو تو ا ف ∠ ب ا س کی تنصیف کریگا

اس واسطے کہ △ ا ف د و ا ف ی مین

∵ ا د = ا ی اور ا ف مشترک ہے اور ف د = ف ی

∴ ∠ د ا ف = ∠ ی ا ف (شکل ۸)

یعنے ∠ ب ا س ا ف سے تنصیف ہوگیا — ھب

مثالین

۱ — اس شکل کو ش ۸ اور ش الف سے ثابت کرو شکل ۸ کو دخل ندو

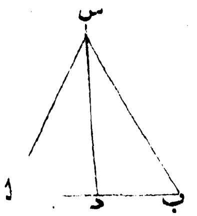
۲ — اگر وہ مثلث متساوی الاضلاع جو اس شکل مین بنایا گیا ہو اس طرح سے بنایا جاسے کہ اوسکا راس زاویہ معلومہ کی طرف ہو تو یہ ثابت کرو کہ ایک صورت مین عمل باطل ہوگا اور دو صورتون مین عمل صحیح ہوگا

تنبیہ

جو خط کسی زاویہ کو دو مساوی جزؤن مین تقسیم کر دے اوسے مُنصِّف زاویہ کہتے ہین

شکل دہم عملی

خط مستقیم معلوم محدود کی تنصیف کرو



فرض کرو کہ اب خط مستقیم معلوم ہے

مطلوب یہ ہے کہ اب کی تنصیف کرو

اب پر △ متساوی الاضلاع اس ب بناؤ

∠ اس ب کو خط س د سے تنصیف کرو کہ وہ اب سے د پر ملجائے

تو اب د پر تنصیف ہو جائے گا

اسوا سطے کہ △ اس د ب س د مین

∵ اس = ب س اور س د مشترک ہے اور ∠ اس د = ∠ ب س د

∴ اد = ب د (ش ۴ م ۱)

∴ اب د پر تنصیف ہو گیا ــ ھب

مثالین

۱ــ جو خط مستقیم کہ مثلث متساوی الساقین کے راس کے زاویہ کی تنصیف کرے وہ اوسکے قاعدہ کی بھی تنصیف کریگا

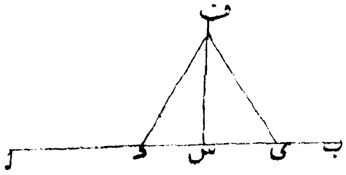
۲ــ جو خط مستقیم مثلث متساوی الساقین کے راس کے زاویہ سے نکلکر اوسکے قاعدہ کی

تنصیف کرے وہ راس الزاویہ کی بھی تنصیف کرے گا

۳ — ایک خط مستقیم معلوم محدود کو ایک نقطہ تک اسطرح خارج کرو کہ جزء مخرج ایک ثلث ہو اوس خط کا جو کل خط معلوم اور جزء مخرج سے بنا ہے

شکل یازدہم عملی

خط مستقیم معلوم مین نقطہ معلوم سے ایک خط مستقیم کھینچو جو اوس خط معلوم پر زاویے قائمے پیدا کرے



فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم معلوم ہے اور اوسمین س نقطہ معلومہ ہے

مطلوب یہ ہے کہ نقطہ س سے ایک خط مستقیم کھینچو جو اب پر زاوی قائمے پیدا کرے

ا س مین ایک نقطہ د فرض کرو اور س ب مین سے س ی س د کے برابر قطع کرو

د ی پر △ متساوی الاضلاع د ف ی بناؤ

ف س کو وصل کرو تو ف س ا ب پر زاویے قائمے پیدا کریگا

اسواسطیکہ △ د س ف و ی س ف مین

∵ د س = س ی اور س ف مشترک ہے اور ف د = ف ی

∴ ∠ د س ف = ∠ ی س ف (شکل س)

اور یہ متصل زاویے ہین

∴ ہر ایک امین سے قائمہ ہے

پس ف س ا ب پر زاویے قائمے پیدا کرتا ہے — ہب

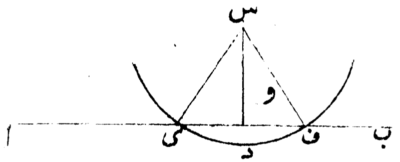
مثالین

۱ — یہ ثابت کرو کہ ش ۹ مین اف و ی د باہم تقاطع کر کر زاویے قائمے پیدا کرتے ہین اور ی د اف سے تنصیف ہوتا ہے

۲ — جو دو خط کہ اب و اس اضلاع مثلث متساوی الاضلاع کی تنصیف کر کے دو زاویے قائمے بناتے ہین اگر وہ دونون خط نقطہ و پر ملین تو یہ ثابت کرو کہ وا و وب و وس باہم برابر ہین

شکل دوازدہم عملی

غیر محدود خط مستقیم معلوم پر نقطہ معلومہ سے کہ اوس سے باہر ہو عمود کھینچو



فرض کرو کہ اب غیر محدود خط مستقیم معلوم ہے اور س نقطہ معلومہ اوس سے باہر ہے

مطلوب یہ ہے کہ س سے عمود اب پر کھینچو

اب کے دوسری طرف ایک نقطہ د فرض کرو

مرکز س سے س د کے بعد پر ایک ⊙ کھینچو جو اب کو نقطہ ی و ف پر قطع کرے

ی ف کو و پر تنصیف کرو اور س ی و س و و س ف کو وصل کر دو

تو س و اب پر عمود ہوگا

اس واسطے کہ △ س و ی و س و ف مین

∵ ی و = ف و اور س و مشترک ہے اور س ی = س ف

∴ ∠ س و ی = ∠ س و ف (شکل ۸)

∴ س و ا ب پر عمود ہے - ہب (۹۷)

مثالین

۱- اگر یہ خط مستقیم معلوم غیر محدود نہ ہوتا تو کس دلیل سے عمل باطل ہوجاتا

۲- اگر کسی مثلث کے راس سے عمود نکلکر قاعدہ کی تنصیف کرے تو وہ مثلث متساوی الساقین ہوگا

۳- جو خط کہ مثلث متساوی الاضلاع کے نقاط الزوایا سے اضلاع مقابل کے وسط کے نقطون تک کھینچے جائین وہ خط باہم برابر ہون گے

متفرق مثالین ش ۱ سے ش ۲۱ تک

۱- ش ۲ کی وہ صورت کھینچو جسمین کہ نقطہ ا

(۱) خط ب س کے نیچے اور اوسکے دہنی طرف واقع ہو

(۲) خط ب س کے نیچے اور اوسکے بائین طرف واقع ہو

۲- زاویۂ معلومہ کو چار برابر حصون مین تقسیم کرو

۳- مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ پر کے زاویے ب و س خطوط مستقیمہ ب د و س د سے تنصیف ہوے ہین اور یہ خطوط د پر ملے ہین تو اب ثابت کرو کہ ب د س بھی مثلث متساوی الساقین ہے

۴- مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعون ب س س ا ا ب مین نقطے د ی ف اسطرح فرض کیے کہ ب د = س ی = ا ف تو اب ثابت کرو کہ د ی ف بھی مثلث متساوی الاضلاع ہے

۵- خط مستقیم معلوم مین ایسا نقطہ تبلاؤ جو دو معلوم نقطون سے متساوی البعد ہو اول جبکہ وہ نقطے خط کے ایک ہی طرف ہون دوم جبکہ وہ اوسکے اطراف مقابل مین ہون

۶- ا ب س ایک مثلث ہے اسکے ایک ضلع ب ا مین بغیر اخراج یا بعد الاخراج ایک نقطہ د ایسا دریافت کرو کہ ب د = س د کے ہو

۷- ا ب س مثلث متساوی الساقین کے برابر ضلعون ا ب ا س کو ف ج

نقطون تک خارج کیا اس طرح سے کہ ا ف = ا ج اور ب ج و س ف کو وصل کردیا اور ح اونکا نقطہ تقاطع ہے تو اب ثابت کرو کہ ب ح = س ح اور یہ بھی ثابت کرو کہ زاویہ ا خط ا ح سے تنصیف ہوگیا ہے

٨ — ب ا س و ب د س مثلث متساوی الساقین ایکہی قاعدہ ب س کی مقابل طرفون پر واقع ہین تو ثابت کرو کہ جو خط مستقیم ا سے د تک کھینچا جائے وہ ب س پر زاویے قائمے پیدا کرے گا

٩ — ش ٣ مین خط ا ی کے جہتون مین کھینچ سکتا ہے

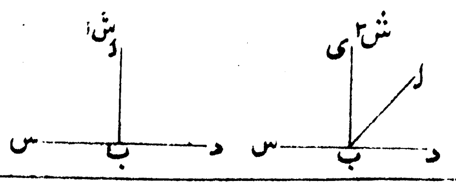
١٠ — اگر مثلث کے دو ضلعے خارج کیے جائین اور اوسکے قاعدہ کے دوسری طرف کے زاویے برابر ہون تو ثابت کرو کہ وہ مثلث متساوی الساقین ہے

١١ — ا ب س و ا ب د دو مثلث ہین اور ایک ہی قاعدہ ا ب کی ایک طرف پر واقع ہین اور ہر مثلث کا راس دوسرے کے باہر ہے اس صورت مین اگر ا س = ا د تو ثابت کرو کہ ب س = ب د نہین ہوسکتا

١٢ — ا ب خط مستقیم مین ایک نقطہ س فرض کرکے اوس سے سَ د ا ب پر عمود نکالا اور مرکز ا سے ا ب کے بعد پر دائرہ کھینچا جو سَ د سے نقطہ د پر ملتا ہے اور اَ د سے ا ی = اَ س قطع کیا تو اب ثابت کرو کہ اَ ی ب زاویہ قایمہ ہے

شکل سیزدہم نظری

ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر ایک جہت مین جو زاویے پیدا کرتا ہے یا وہ دو قایمے ہوتے ہین یا برابر دو قائمون کے



فرض کرو کہ اب س د کی ایک جہت مین ∠ اب س و اب د پیدا کرتا ہی
تو یہ زاویے یا دو قائمے ہون گے ∠
یا برابر دو قائمون کے ∠

صورت اوّل

اگر ∠ اب س = ∠ اب د جیسا کہ ش ۱ مین ہے
تو ہر ایک ان مین سے قائمہ ہے (ح ۹)

صورت دوم

اگر ∠ اب س = ∠ اب د نہین ہے جیسا کہ ش ۲ مین ہے
تو ب سے ب ی ⊥ س د پر کھینچو (ش ۱۱ م ۱)
تو مجموع ∠ اب س و ∠ اب د = مجموع ∠ ی ب س ی ب ا
اب د اور مجموع ∠ ی ب س و ی ب د = مجموع ∠ ی ب س ی ب ا اب د
∴ مجموع ∠ اب س و اب د = مجموع ∠ ی ب س ی ب د
∴ مجموع ∠ اب س و اب د = مجموع ایک قائمہ اور ایک قائمہ
∴ مجموع ∠ اب س و اب د = دو قائمون کے ـ ہب

مثال

۱ ـ شکل ذوا ربعۃ الاضلاع مین مقابل کے نقاط الزوایا سے خطوط مستقیمہ نکلکر نقطہ ق پر تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ نقطہ ق پر کے زاویون کا مجموع چار قائمون کے برابر ہے

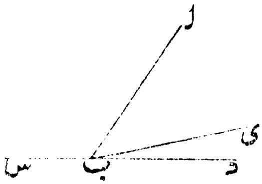
(تنبیہ ۱) جب دو زاویون سے ملکر ایک قائمہ بنتا ہے تو اون مین سے ہر ایک دوسرے کا متمم کہلاتا ہے مثلاً ش ۲ مین ∠ اب د ∠ اب ی کا متمم ہے

(تنبیہ ۲) جب دو زاویون سے ملکر دو قائمے بنتے ہین تو اونمین سے ہر ایک دوسرے کا

ضمیمہ کہلاتا ہے مثلاً ان دونون شکلون مین ∠ اب د ∠ اب س کا ضمیمہ ہے

شکل چہار دہم نظری

اگر ایک نقطہ پر کسی خط مستقیم کے دو اور خط مستقیم اوسکے مقابل کی سمتون سے آکر دو متصل زاویے برابر دو قائمون کے پیدا کرین تو یہ دو خط مستقیم ایک ہی خط مستقیم مین ہون گے



فرض کرو کہ خط مستقیم اب کے نقطہ ب پر ب س و ب د دو خط مستقیم اب کے مقابل سمتون سے آکر اب س و اب د زوایا سے متصلہ = دو قائمون کے پیدا کرتے ہین

تو ب د اور ب س ایک ہی خط مستقیم مین ہونگے

اس واسطے کہ اگر یہ دو خط ایک ہی خط مستقیم مین نہین ہین تو فرض کرو کہ ب ی اور ب س ایک ہی خط مستقیم مین ہین

تو ∠ اب س و اب ی ملکر = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

اور ∠ اب س و اب د ملکر = دو قائمون کہ بموجب فرض کے

∴ مجموع ∠ اب س و اب ی = مجموع ∠ اب س و اب د

اب متساوین مین ہر ایک مین سے ∠ اب س نکال ڈالو

∴ ∠ اب ی = ∠ اب د (دفعہ ۳) ۱۴

یعنے چھوٹا زاویہ = بڑے زاویہ یہ محال ہے

∴ ب ی اور ب س ایک ہی خط مستقیم نہین ہے

اسی طرح سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ سوا ب د کے اور کوئی خط مستقیم ب س سے ملکر ایک خط مستقیم نہین ہے

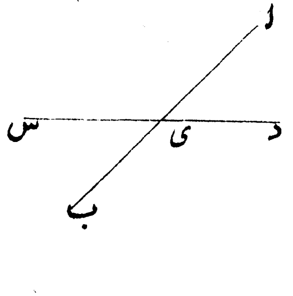
∴ ب د اور ب س ملکر ایک ہی خط مستقیم ہے — ہب

مثال

ثابت کرو کہ اس شکل کے دعوے مین مقابل کی سمتون ان الفاظ کا ہونا ضرور ہے

شکل پانزدہم نظری

اگر دو خط مستقیم متقاطع ہون تو اس کے مقابل زاویے آپس مین برابر ہون گے



فرض کرو کہ خط مستقیم اب و س د نقطۂ ی پر تقاطع کرتے ہین

تو ∠ ا ی س = ∠ ب ی د اور ∠ ا ی د = ∠ ب ی س

کیون ∴ ا ی س د سے ملا ہے

اور ∴ د ی اب سے ملا ہے

∴ مجموع ∠ ب ی د و ا ی د = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

∴ مجموع ∠ ا ی س و ا ی د = مجموع ∠ ب ی د و ا ی د

∴ ∠ ا ی س = ∠ ب ی د (فہ۴)

اسیطرح سے یہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ ∠ ا ی د = ∠ ب ی س — ہب

نتیجہ صریح ۱

اس سے یہ ظاہر ہے کہ اگر دو خط مستقیم باہم متقاطع ہون تو نقطہ تقاطع پر جو چار زاویے پیدا ہون گے وہ ملکر چار قائمون کے برابر ہون گے

نتیجہ صریح ۲

جتنے زاویے کئی خطوط مستقیمہ کے ایک نقطہ پر ملنے سے پیدا ہون وہ سب ملکر چار قائمون کے برابر ہونگے

مثال ۱ — یہ ثابت کرو کہ ا ی د ب ی س کے خطوط منصفہ ملکر ایک ہی خط مستقیم ہے

مثال ۲ — اگر دو خط مستقیم نقطہ ی سے نکلکر ا ی و ا س پر دو قائمے پیدا کرین اور یہ دونون س د کے اوپر واقع ہون تو یہ ثابت کرو کہ ان دونون خطون کے درمیان کا زاویہ زاویہ ا ی د کے برابر ہوگا

مثال ۳ — اگر ا ب و س د نقطہ ی پر متقاطع ہون تو یہ ثابت کرو کہ دو مثلث ا ی د و ب ی س بہمہ وجوہ برابر ہین

فائدہ سوم

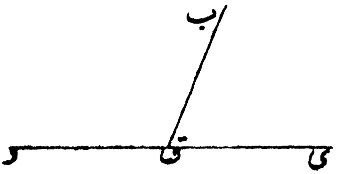
زاویہ کی تعریف جس طرح اقلیدس نے کی ہے

اقلیدس کہتا ہے کہ زاویہ کو یہ سمجھیے کہ وہ میلان ہر دو خطوط مستقیمہ کا جو باہم ملجائین لیکن ایک ہی خط مستقیم مین نہ واقع ہون

پس اس تعریف سے معلوم ہوتا ہے کہ اقلیدس کے نزدیک کوئی زاویہ ایسا نہیں ہے
جو مقدار مین دو قائمون کے برابر ہو
اقلیدس نے جو زاویہ کی تعریف کی ہے اگر اوسے اس طرح سے بڑھائین تو
فائدے سے خالی نہو گا

حدّ تام زاویہ

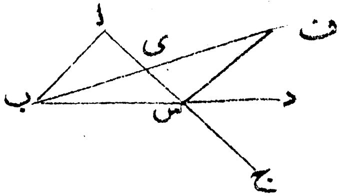
فرض کرو کہ د ق ی ایک خط مستقیم غیر متحرک ہے اور ق ب ایک اور خط ہے
کہ وہ ق نقطہ ساکن کے گرد گھوم رہا ہے اور پہلے یہ خط خط ق ی پر منطبق ہے



تو جب ق ب اوس مقام پر پہونچ جائے جو اس شکل مین بنا ہی تو یہ کہین گے
کہ ق ب نے زاویہ ی ق ب پیدا کیا
اور جب ق ب اتنا گھومے کہ ق د پر منطبق ہو جائے تو یہ کہین گے کہ ق ب
نے ایسا زاویہ پیدا کیا ہے جو دو قائمون کے برابر ہے
اس تعریف سے ش ۱۳ باسانی ثابت ہو سکتی ہے اس واسطے کہ ب ق خواہ
جس مقام پر ہو یہ جو زاویے د ی کے ساتھ پیدا کریگا وہ ملکر دو قائمونکے برابر ہونگے
اور اس تعریف سے یہ بھی ظاہر ہے کہ شکل ۵ امین ∠ ا ی د = ∠
ب ی س اس واسطے کہ ان مین سے ہر ایک کا ضمیمہ ایک ہی ∠ ا ی س ہی
آگے چلکے ہم یہ ثابت کرینگے کہ یہ تعریف زاویہ کی اس قدر بڑھ سکتی ہے
کہ وہ زاویے بھی اس مین داخل ہو جائین جو دو قائمون سے بڑے ہون

شکل شانزدہم نظری

اگر مثلث کا ایک ضلع خارج کیا جاوے تو زاویہ خارجہ ہر ایک مقابل کے زاویہ داخلہ سے بڑا ہوگا



فرض کرو △ ا ب س کا ضلع ب س د تک خارج کیا گیا

تو ∠ ا س د ∠ س ا ب یا ∠ ا ب س سے ضرور بڑا ہوگا

ا س کو ی پر تنصیف کرو اور ب ی کو ملا دو

پھر ب ی کو ف تک خارج کرو اور ی ف کو ب ی کے برابر کر لو اور ف س کو ملا دو

تو △ ب ی ا و ف ی س مین

∵ ب ی = ف ی اور ی ا = ی س اور ∠ ب ی ا = ∠ ف ی س (ش ۱۵ م ۱)

∴ ∠ ی س ف = ∠ ی ا ب (ش ۴ م ۱)

اب چونکہ ∠ ا س د ∠ ی س ف سے بڑا ہے

∴ ∠ ا س د ∠ ی ا ب سے بھی بڑا ہے

یعنی ∠ ا س د ∠ س ا ب سے بڑا ہے

علی ہذا القیاس اگر ا س ج تک خارج کیا جائے تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

∠ ب س ج ∠ ا ب س سے بڑا ہے

اور ∠ ب س ج = ∠ ا س د (ش ۵ ا م ۱)

∴ ∠ ا س د ∠ ا ب س سے بڑا ہے — ح ب

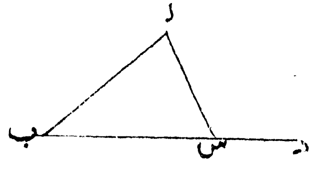
مثالین

۱ — یہ ثابت کرو کہ ایک نقطہ سے دو خطوط مستقیمہ متساویہ زیادہ نکلکر ایک خط مستقیم معلوم سے نہین مل سکتے

۲ — اگر کسی نقطہ سے خط مستقیم نکلکر خط مستقیم معلوم کے ساتھ ایک زاویہ حادہ اور ایک منفرجہ پیدا کرے اور اگر اوسی نقطہ سے ایک عمود خط معلوم پر کھینچا جائے تو وہ عمود زاویہ حادہ کی جہت مین واقع ہوگا

شکل ہفدہم نظری

مثلث کے دو زاویے ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہوتے ہین



فرض کرو کہ ا ب س ایک △ ہے

تو دو زاویے اسکے ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہونگے ۔

ب س کو د تک خارج کرو

تو ∠ ا س د بڑا ہے ∠ ا ب س سے (ش ۱۶ م ۱)

∴ ∠ ا س د + ∠ ا س ب ملکر بڑے ہین ∠ ا ب س + ∠ ا س ب تو

لکن ∠ اس د و ∠ اس ب ملکر = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

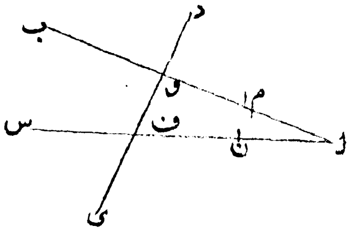
∴ ∠ اب د و ∠ اس ب ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہین

علی ہذا القیاس یہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ ∠ اب س و ∠ ب اس ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہین اور ب اس د اس ب بھی ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہین

فائدہ چہارم

چھٹی اصل موضوع کے بیان مین

ش ۱۷ سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر دو خط مستقیم ب م و س ن جو نقطہ ا پر ملتے ہین ایک اور خط مستقیم د ی سے نقطہ و و ف پر ملین



تو زاوےیے م و ف و ن ف و ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہون گے

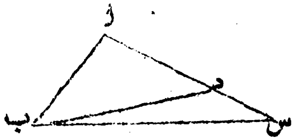
چھٹی اصل موضوع کا یہ دعوے ہے کہ اگر ایک خط د ی اور دو خطون ب م و س ن سے ملکر ایک ہی جہت مین دو زاوےیے داخلے م و ف و ن ف و دو قائمون سے کم پیدا کرین تو اگر ب م و س ن د ی کی اوسی جہت مین خارج کیے جائین جس مین زاوےیے م و ف و ن ف و ہین تو وہ دونون خط باہم ملجائین گے

پس چھٹی اصل موضوع ۱۷ شکل کا عکس ہے

آیندہ ہم بیان کرین گے کہ کیا سبب ہے کہ یہ اصل موضوع ایسی جلد نہین ثابت ہوسکتی جیسے یہ شکل ثابت ہوتی ہے

شکل ہیجدہم نظری

اگر مثلث کا ایک ضلع دوسرے ضلع سے بڑا ہو تو اس بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ دوسرے ضلع کے مقابل کے زاویہ سے بڑا ہوگا



فرض کرو کہ ∠ اب س میں اس اب سے بڑا ہے

تو ∠ اب س ∠ اس ب سے ضرور بڑا ہوگا

اس میں سے اد = اب قطع کرو اور ب د کو ملا دو

تو ∵ اب = اد

∴ ∠ ادب = ∠ اب د (ش الف م ۱)

اور ∵ س د کہ ایک ضلع △ ب د س کا ہے ا تک خارج کیا گیا ہے

∴ ∠ ادب ∠ اس ب سے بڑا ہے (ش ۱۶ م ۱)

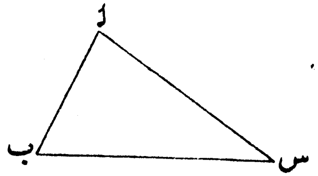
اور ∴ ∠ اب د بھی ∠ اس ب سے بڑا ہے

تو ∠ اب س ∠ اس ب سے بہت بڑا ہوا — ہب

مثال — ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث کے دو زاویے باہم برابر ہوں تو اون کے مقابل کے ضلعے بھی باہم برابر ہوں گے (ش ۶ م ۱)

شکل نوزدہم نظری

اگر مثلث کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ سے بڑا ہو تو پہلے زاویہ کے مقابل کا ضلع دوسرے زاویہ کے مقابل کے ضلع سے بڑا ہوگا



فرض کرو کہ △ ا ب س مین ∠ ا ب س ∠ ا س ب سے بڑا ہے

تو ا س ا ب سے ضرور بڑا ہوگا

اسواسطے کہ اگر ا س ا ب سے بڑا نہین ہے

تو ا س یا = ا ب یا ا ب سے چھوٹا ہے

ا س = ا ب نہین ہوسکتا اسواسطیکہ اس صورت مین

∠ ا ب س = ∠ ا س ب کے ہوجاوسے گا حالانکہ یہ امر نہین ہے

اور نہ ا س ا ب سے چھوٹا ہوسکتا ہے اسواطیکہ اسصورت مین (ش ۱۸ م ۱)

∠ ا ب س ∠ ا س ب سے چھوٹا ہو جاے گا حالانکہ یہ امر نہین ہے

∴ ا س ا ب سے بڑا ہے ۔ ہ ب

مثالین

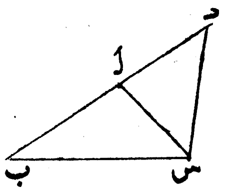
۱ ۔ مثلث منفرج الزوایہ مین سب سے بڑا ضلع زاویہ منفرجہ کے مقابل ہوتا ہے

۲ ۔ ب ا س مثلث متساوی الساقین کا قاعدہ ب س نقطہ د خارج کیا گیا تو ثابت کرو کہ ا د ا ب سے بڑا ہے

۱۷ — سب سے چھوٹا خط جو نقطہ معلومہ سے خط مستقیم معلوم تک کھنچ سکتا ہے
وہ عمود ہے اور اور خطوط مین جو خط عمود سے زیادہ قریب ہو وہ اوس سے چھوٹا
ہے جو عمود سے بعید تر ہے

شکل بستم نظری

مثلث کے دو ضلعے ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہوتے ہین



فرض کرو کہ ا ب س ایک △ ہے

اسکے دو ضلعے ملکر تیسرے ضلع سے بڑے ہون گے

ب ا کو د تک خارج کرو اور ا د کو ا س کے برابر کرلو اور د س کو ملادو

تو ∵ ا د = ا س

∴ ∠ ا س د = ∠ ا د س یعنی ∠ ب د س (شکل الف)

اب ∵ ∠ ب س د ∠ ا س د سے بڑا ہے

∴ ∠ ب س د ∠ ب د س سے بھی بڑا ہے (ش ۱۹ ام ۱)

لیکن ∵ ب د = مجموع ب ا و ا د

یعنے ب د = مجموع ب ا و ا س

∴ ب ا و ا س ملکر ب س سے بڑے ہین

اسی طرح سے یہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ

اب و ب س ملکر ا س سے بڑے ہین

اور ب س و س د ملکر .... اب سے ہے

مثالین

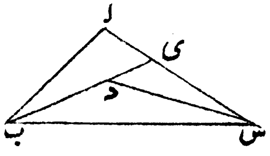
۱— یہ ثابت کرو کہ شکل ذوار بعۃ الاضلاع کے تین ضلعے ملکر چوتھے ضلع سے بڑے ہین

۲— یہ ثابت کرو کہ ایک ضلع مثلث کا اور دو ضلعون کے تفاوت سے بڑا ہو

۳— اگر مثلث کا ایک ضلع تنصیف کیا جائے تو اور دو ضلعونکا مجموع اوس خط کے دو چند سے زیادہ ہوگا جو راس المثلث اور نقطہ تنصیف کو ملاتا ہے

شکل بست و یکم نظری

اگر مثلث کے ایک ضلع کے دو طرفون سے دو خط مستقیم ایک نقطہ تک مثلث کے اندر کھینچین تو یہ خط ملکر مثلث کے اور دو ضلعون سے چھوٹے ہونگے مگر اونکے درمیان کا زاویہ بڑا ہوگا



فرض کرو کہ اب س △ ہے اور اوسکے اندر ایک نقطہ د سے دو خط مستقیم ب س تک کھینچو تو ب د د س ملکر ب ا ا س سے چھوٹے ہونگے لکن ∠ ب د س ∠ ب اس سے بڑا ہوگا

ب د کو خارج کرو کہ ا س سے ی پر ملجائے

تو ∵ ب ا ا ی ملکر ب ی سے بڑے ہین (ش ۲۰ م ۱)

انمین سے ہر ایک پر ی س زیادہ کرو

تو ب ا ا س ملکر ب ی و ی س سے بڑے ہین

پھر ∵ د ی ی س ملکر د س سے بڑے ہین

انمین سے ہرایک پر ب د زیادہ کرو

تو ب ی ی س ملکر ب د د س سے بڑے ہین

اور یہ ثابت ہوچکا ہے کہ ب ا ا س ملکر ب ی ی س سے بڑے ہین

∴ ب ا ا س ملکر ب د د س سے بڑے ہین

پھر ∵ ∠ ب د س ∠ د ی س سے بڑا ہے (ش ۱۶ م ۱)

اور ∠ د ی س ∠ ب ا س سے بڑا ہے (ش ۱۶ م ۱)

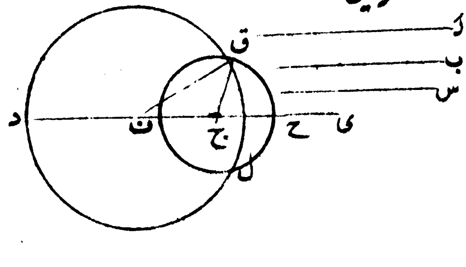
∴ ∠ ب د س ∠ ب ا س سے بڑا ہے – ہب

مثال ۱ — مثلث ا ب س کے قاعدہ ا ب پر ا د ی ب شکل ذوار بعۃ الاضلاع ایسی بنائی کہ وہ بالکل مثلث کے اندر ہے تو اب یہ ثابت کرو کہ مثلث کی ضلعو ا س س ب ملکر شکل ذوار بعۃ الاضلاع کے ا د د ی ی ب ضلعو نسے بڑے ہین

مثال ۲ — یہ ثابت کرو کہ مجموع اون خطوط مستقیمہ کا جو مثلث کے زاویونکو ایک نقطہ سے مثلث کے اندر ملادین چھوٹا ہوگا مجموع اضلاع مثلث سے اور بڑا ہوگا نصف مجموع اضلاع مذکورہ سے

شکل بست و دوم عملی

ایک ایسا مثلث بناؤ جسکے اضلاع تین خطوط معلومہ کے برابر ہون کہ اونمین سے دو خط ملکر تیسرے سے بڑے ہین



فرض کرو کہ آ ب س تین خطوط مستقیمہ ہین اور ا نمین سے دو خط ملکر تیسرے سے بڑے ہین

تو مطلوب یہ ہے کہ ایک △ بناؤ کہ اوسکے اضلاع = آ ب س بالتناظر ہون

دی ایک غیر محدود خط مستقیم فرض کرو

دی مین د ف = آ اور ف ج = ب اور ج ح = س بناؤ

مرکز ف سے ف د کے بُعد پر ⊙ د ق ل کھینچو

اور مرکز ج سے بُعد ج ح پر ⊙ ح ق ل کھینچو

ق ف ق ج کو وصل کردو

تو △ ق ف ج کے اضلاع = آ ب س بالتناظر ہین

اسواسطے کہ ف ق = ف د (ح ۱۳)

∴ ف ق = آ

اور ج ق = ج ح (ح ۱۳)

∴ ج ق = س

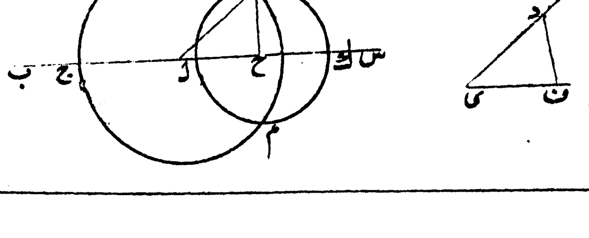
اور ف ج = ب

∴ △ ق ف ج موافق مطلوب کے بنگیا — ہب

مثال ایسا مثلث متساوی الساقین بناؤ کہ وہ زاویہ معلومہ کے برابر ہو

شکل بست و سوم عملی

خط مستقیم معلوم مین نقطہ معلومہ پر ایک زاویہ بناؤ کہ وہ زاویہ معلومہ کے برابر ہو



فرض کرو کہ ا نقطہ معلومہ ہے اور ب س خط مستقیم معلوم ہے اور دی ف ل معلومہ

تو مطلوب یہ ہے کہ ا پر ایک زاویہ = ∠ دی ف بناؤ

ی د اور ی ف مین دو نقطے د ف فرض کرو اور د ف کو ملا دو

اگر ضرورت ہو تو اب کو خارج کرو اور اوسمین سے اج = دی قطع کرو

اس کو بشرط ضرورت خارج کرکے اوس مین سے اح = ف د قطع کرو

ح س کو بشرط ضرورت خارج کرکے اوسمین سے ح ک = ف د قطع کرو

مرکز ا سے اج کے بعد پر ⊙ ج ل م کھینچو

مرکز ح سے ح ک کے بعد پر ⊙ ل ک م کھینچو

ل ا و ح ل کو وصل کر دو

تو ∵ ل ا = اج ∴ ل ا = دی

اور ∵ ح ل = ح ک ∴ ح ل = ف د

تو △ ل ا ح د ی ف مین

∵ ل ا = دی اور اح = ی ف اور ح ل = ف د

∴ ∠ ل ا ح = ∠ د ی ف (شکل س)

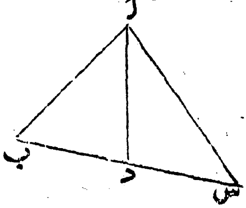
∴ نقطہ ا پر موافق مطلوب کے زاویہ ل ا ح بنا دیا — ھب

فائدہ پنجم

اس مقام پر ہم ایسی شکل نظری کا ثبوت لکھتے ہین کہ وہ ش ۲۴ کے اثبات کے واسطے ضرور ہے اور مقالہ سوم کے بہت سے اشکال مین جاری ہو سکتا ہے

شکل د نظری

جو خط مستقیم راس المثلث سے قاعدے تک کھینچا جاوے وہ اعظم ضلعین سے چھوٹا ہوگا اور اگر ضلعین برابر ہون تو ہر ضلع سے چھوٹا ہوگا

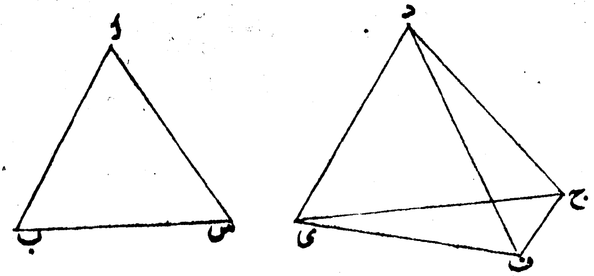


فرض کرو کہ مثلث ا ب س مین ضلع ا س ا ب سے چھوٹا نہین ہے
ب س مین ایک نقطہ د فرض کرو اور ا د کو ملا دو
تو ا د ا س سے ضرور چھوٹا ہوگا

کیون ∵ ا س ا ب سے چھوٹا نہین ہے
∴ ∠ ا ب د ∠ ا س د سے چھوٹا نہین ہے (شکل الفا نش ام ا)
لکن ∠ ا د س ∠ ا ب د سے بڑا ہے (ش ۱۶ م ۱)
∴ ∠ ا د س ∠ ا س د سے بڑا ہے
∴ ا س ا د سے بڑا ہے ــ ھب

شکل بست و چہارم نظری

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے کے دو ضلعون کے برابر ہون ہر ایک اپنے نظیر کے لکن اس مثلث کے ان دو ضلعون کا زاویہ درمیانی دوسرے مثلث کے اون ضلعون کے زاویہ درمیانی سے جو پہلے مثلث کے دو ضلعون کے برابر ہین بڑا ہو تو جس مثلث کا زاویہ درمیانی بڑا ہے اوسکا قاعدہ دوسرے مثلث کے قاعدہ سے بڑا ہوگا



فرض کرو کہ △ ا ب س د ی ف مین

ا ب = د ی اور ا س = د ف

لکن ∠ ب ا س ∠ ی د ف سے بڑا ہے

تو ب س ی ف سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ د ی د ف ضلعون مین د ی د ف [1] بڑا نہین ہے

ی د خط مستقیم مین نقطہ د پر ∠ ی د ج = ∠ ب ا س بناؤ (مش ۲۳ م ۱)

اور د ج = ا س یا د ف کرو اور ی ج ج ف کو وصل کردو

تو ∵ ا ب = د ی اور ا س = د ج اور ∠ ب ا س = ∠ ی د ج

∴ ب س = ی ج (مش ۴ م ۱)

[1] یہ خط سمسن صاحب مہندس مشہور نے بڑھایا ہے تاکہ اقلیدس کی دلیل مین جو نقص ہے وہ دفع ہوجائے اگر یہ شرط نہو تو اس شکل کی تین صورتین ثابت کرنی پڑینگی اور بنا بر اس شرط کر یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ ف ی ج کے نیچے واقع ہوگا اسواسطے کہ چونکہ د ف د ی سے چھوٹا نہین ہے اور د ج د ف کے برابر کھینچا ہے لہذا د ج د ی سے چھوٹا نہین ہے پس بموجب شکل د کے جو خط نقطہ د سے نکلکر ی ج سے ملیگا وہ د ج سے چھوٹا ہوگا اور چونکہ د ف د ج کے برابر ہے تو د ف ی ج کے باہر ضرور بڑھ جائیگا۔ اس شکل کے حل کرنے کا ایک اور طریقہ اس رسالے کے آخر مین مذکور ہوگا

پھر ∵ دج = دف

∴ ∠ دفج = ∠ دج ف (شکل الف)

∴ ∠ ی فج ∠ دج ف سے بڑا ہے

لہذا ∠ ی ف ج ∠ ی ج ف سے بہت بڑا ہے

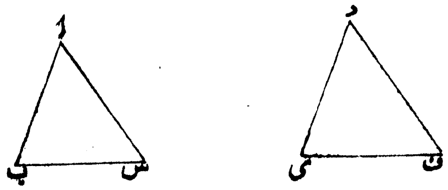
∴ ی ج ی ف سے بڑا ہے (ش ۱۹ م ۱)

لکن ی ج = ب س

∴ ب س ی ف سے بڑا ہے - ہ ب

شکل بست و پنجم نظری

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کے دو ضلعے دوسری کے دو ضلعون کے برابر ہون ہر ایک اپنے نظیر کے لکن ایک مثلث کا قاعدہ دوسرے کے قاعدے سے بڑا ہو تو جسکا قاعدہ بڑا ہے اوسکے ضلعون کا درمیانی زاویہ بھی دوسری مثلث کے اون اضلاع کے زاویہ درمیانی سے بڑا ہوگا جو پہلے مثلث کے اضلاع کے برابر ہین



فرض کرو کہ △ ا ب س دی ف مین

ا ب = دی اور ا س = د ف

اور فرض کرو کہ ب س ی ف سے بڑا ہے

تو ∠ ب ا س ∠ ی د ف سے بڑا ہوگا

اس واسطے کہ ∠ ب اس یا ∠ ی دف سے بڑا ہے یا اوسکے برابر ہو یا اوس سے چھوٹا ہو

∠ ب اس = ∠ ی دف نہین ہوسکتا

کیونکہ اس صورت مین بموجب (ش ۴ م ۱) کے ب س = ی ف ہو جائیگا حالانکہ یہ امر نہین ہے

اور ∠ ب اس ∠ ی د ف سے چھوٹا بھی نہین ہوسکتا

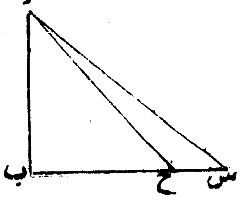
کیونکہ اس صورت مین بموجب (ش ۲۴ م ۱) کے ب س ی ف سے چھوٹا ہو جائیگا

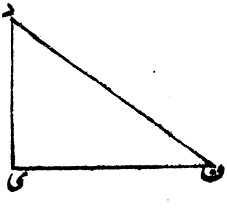
حالانکہ یہ امر نہین ہے

∴ ∠ ب اس ∠ ی دف سے بڑا ہے — ھب

شکل بست و ششم نظری

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے کے دو زاویون کے برابر ہون ہر ایک اپنے نظیر کے اور ان زوایا سے متساویہ کے مقابل کا ایک ایک ضلع دونون مثلثون مین برابر ہو تو یہ مثلث بہمہ وجوہ باہم برابر ہون گے





فرض کرو کہ △ اب س دی ف مین

∠ اب س = ∠ دی ف اور ∠ اس ب = دف ی اور اب = دی

تو ب س = ی ف اور اس = د ف اور ∠ ب اس = ∠ ی د ف

فرض کرو کہ △ دی ف کو △ اب س پر چسپان کیا

اس طرح سے کہ د آ پر منطبق ہوگیا اور دی اب پر واقع ہوا

تو ∵ دی = اب ∴ ی ب پر منطبق ہو گا

اور ∵ ∠ دی ف = ∠ اب س ∴ ی ف ب س پر واقع ہو گا

تو اب ف س پر ضرور منطبق ہو گا اس واسطے کہ اگر ایسا نہو

تو فرض کرو کہ ف ب اور س کے درمیان مین نقطہ ح پر واقع ہو اح کو ملا دو

تو ∵ ∠ اح ب = ∠ دف ی (ش ۴م ۱)

∴ ∠ اح ب = ∠ اس ب

یعنی ∠ خارجہ = ∠ داخلہ مقابل کے یہ غیر ممکن ہے

∴ ف ب اور س کے درمیان مین نہ واقع ہو گا

علی ہذا القیاس یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ف ب س پر بعد الاخراج نہ واقع ہو گا

∴ ف س پر منطبق ہو گا اور ∴ ب س = ی ف

∴ اس = دف و ∠ ب اس = ∠ ی دف (ش ۴م ۱)

∴ یہ دو مثلث بہمہ وجوہ برابر ہین — ہب

---

[۱] اس چھبیسوین شکل مین اقلیدس نے دو صورتین شامل کی ہین کہ اون مین دو مثلث بہمہ وجوہ برابر ہوتے ہین یعنے جبکہ اجزا مرقومہ ذیل دونون مثلثون کے برابر ہون

۱ — دو زاویے اور اونکے درمیان کا ضلع

۲ — دو زاویے اور ایک زاویہ کے مقابل کا ضلع

ان دونون صورتون مین سے ایک صورت تو ہم شکل ب مین ثابت کر چکے ہین پس اب فقط دوسری صورت کا ثابت کرنا باقی رہگیا اس صورت کو ہمنے قاعدہ تطبیق سے ثابت کیا —

اقلیدس نے جو اس چھبیسوین شکل کا ثبوت لکھا ہے وہ اس رسالہ کے آخر مین مرقوم ہے ۱۲

متفرق مثالین ش۱ سے ش۲۶ تک

۱۔ اب س مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ ب س مین م نقطہ وسطی ہے اور ن اس مین ایک نقطہ ہے تواب ثابت کرو کہ م ب اور م ن مین جو تفاوت ہے وہ اب اور ان کے تفاوت سے کم ہے

۲۔ مثلث اب س مین زاویہ ا ایک خط مستقیم سے تنصیف ہوا جو ب س سے د پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ ب اب د سے بڑا ہے اور س اس د سے

۳۔ اب و اس دو خط مستقیم نقطہ ا پر ملتے ہین اور د ایک نقطہ معلوم ہے د سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ اب و اس سے برابر اجزا قطع کرے

۴۔ ایک نقطہ معلومہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو کہ وہ دو خطوط مستقیمہ سے جو باہم مل گئے ہین مساوی زاوئے پیدا کرے۔

۵۔ ب اس زاویہ معلومہ کی تنصیف کی تواب اگر س اکو ج تک خارج کرین اور زاویہ ب اج کی تنصیف کرین تو دو خطوط متقاطعہ باہم زاویہ قائمہ پیدا کرینگے

۶۔ راس المثلث سے دو خط مستقیم قاعدہ تک کھینچے اس طرح سے کہ ایک خط زاویۂ الراس کی تنصیف کرتا ہے اور دوسرا خط قاعدہ کی تواب ثابت کرو کہ ان دو خطون مین سے یہ پچھلا خط بڑا ہے

۷۔ یہ ثابت کرو ش ۱۷ بغیر خارج کرنے ضلع مثلث کے ثابت ہو سکتی ہے

۸۔ ش ۱۸ کو اس ترکیب سے ثابت کرو کہ اد = اب قطع کرو اور ایک خط ای کھینچو کہ وہ ∠ ب اس کی تنصیف کرے اور ب س سے ی پر ملے اور دی کو ملاؤ

۹۔ ش ۲۰ بدون اخراج احد الاضلاع مثلث بہ تنصیف احد الزوایا ثابت کرو

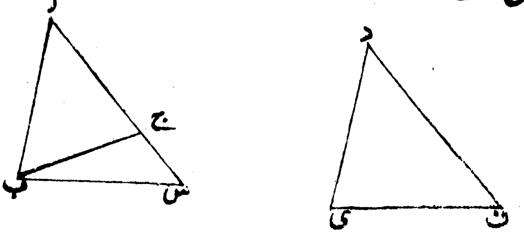
۱۰۔ مثلث کے دو زاویے اور ایک ضلع متصل زاویتین معلوم ہے پورا مثلث بناؤ

۱۱- یہ ثابت کرو کہ اگر مثلث کے زاویہ درمیانی کو ایک خط مستقیم تنصیف کرے
اور اوس خط کے ایک نقطہ سے عمود نکلکر مثلث کے دو ضلعون پہ گرین تو
یہ عمود باہم برابر ہون گے

اس فصل کے آخر مین ہم ایک شکل بیان کرتے ہین کہ اقلیدس نے اوسے نہین ثابت
کیا اس شکل مین بھی دو مثلث بہمہ وجوہ برابر ہون گے

شکل ی نظری

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے کے زاویہ کے برابر ہو اور
اس زاویہ کے متصل ضلعے ہر ایک مثلث مین برابر ہون تو اگر تیسرا زاویہ
دونون مین حادّہ ہو یا منفرجہ ہو یا ایک اونمین سے قائمہ ہو تو یہ مثلث بہمہ
وجوہ برابر ہون گے



فرض کرو کہ ∠ اب س دی ف مین ∠ ب اس = ∠ ی د ف اور اب
= دی اور ب س = ی ف اور فرض کرو کہ ∠ اس ب د ف ی دونون
حادّے ہین یا دونون منفرجے ہین یا ایک اون مین سے قائمہ ہے
تو △ اب س دی ف بہمہ وجوہ برابر ہون گے

اسواسطے کہ اگر اس = دف نہین ہے تو اج کو دف کے برابر قطع کرلو اور
ب ج کو ملادو تو اب △ ب اج ی د ف مین

∵ ب ا = ی د اور اج = دف اور ∠ ب اج = ∠ ی د ف

∴ ب ج = ی ف اور ∠ اج ب = ∠ د ف ی

لکن ب س = ی ف ∴ ب ج = ب س

∴ ∠ ب س ج = ∠ ب ج س

اوّلاً یہ فرض کرو کہ ∠ اس ب و ∠ د ف ی دونون حادّے ہین

تو ∠ اج ب حادّہ ہے ∴ ∠ ب ج س منفرجہ ہے (ش ۱۳ ام ۱)

∴ ∠ ب س ج منفرجہ ہے یہ خلاف فرض ہے

ثانیاً — فرض کرو کہ ∠ اس ب و ∠ د ف ی دونون منفرجے ہین

تو ∠ اج ب منفرجہ ہے ∴ ∠ ب ج س حادّہ ہے

∴ ∠ ب س ج حادّہ ہے یہ خلاف فرض ہے

ثالثاً — فرض کرو کہ ہر مثلث کا تیسرا زاویہ اس ب د ف ی قائمہ ہے

تو اگر ∠ اس ب قائمہ ہے

تو ∠ ب ج س بھی قائمہ ہے

∴ ∠ ب س ج و ∠ ب ج س ملکر = ۲ قائمونکے یہ غیر ممکن ہے (ش ۱۷ ام ۱)

پھر اگر ∠ د ف ی قائمہ ہے

تو ∠ اج ب قائمہ ہے ∴ ∠ ب ج س قائمہ ہے

لہذا ∠ ب س ج بھی قائمہ ہے

∴ ∠ ب س ج و ∠ ب ج س ملکر = ۲ قائمونکے یہ غیر ممکن ہے (ش ۱۷ ام ۱)

لہذا اس = د ف

اور △ اب س د ی ف بہمہ وجوہ برابر ہین — ھب

تنبیہ شکل ی کے دعوی مین اگر ان الفاظ کی عوض یا ایک اون مین سے قائمہ ہو یہ الفاظ لکھین دونون قائمے ہون تو یہ صورت ش ۲۶ سے متحد ہو جائیگی

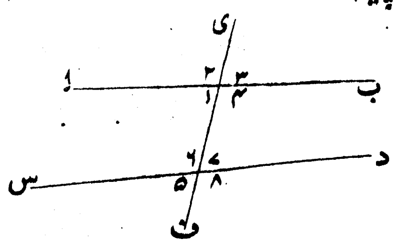
۸۷۳۴

نتیجہ صحیح

اس شکل کی پہلی صورت سے یہ شکل نظری مستنبط ہوتی ہے
اگر دو مثلث قائم الزاویہ ہین سے ایک مثلث کا وتر قائمہ اور ایک ضلع دوسری کے وتر قائمہ اور ایک ضلع کے برابر ہو ہر ایک اپنے نظیر کے تو یہ مثلث بہمہ وجوہ برابر ہونگے

فصل دوم دربیان مسئلہ خطوط متوازیہ

جن اشکال مین اقلیدس نے خطوط متوازیہ سے بحث کی ہے اونکے پیشتر اور بعد کے اشکال سے علیحدہ ہمنے اونھین بیان کیا ہے تاکہ جو مشکلین اور دقتین اس تفریق سے پیدا ہوتی ہین اور جسطرح اقلیدس نے اونھین حل کیا ہو طالب علم پر خوب منکشف ہو جائین
پہلے ہم کچھ مصطلحات کی توضیح کرتے ہین جو اس فصل مین مستعمل ہوے ہین پس جاننا چاہیے کہ اگر ایک خط مستقیم ی ف اور دو خطوط مستقیمہ آب س د کو قطع کرے تو اس سے آٹھ زاویے پیدا ہونگے انمین سے ہر ایک زاویہ کا ایک خاص نام رکھا گیا ہے

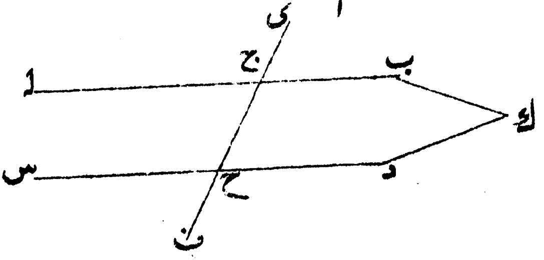


زاویۂ ۱ ۴ ۶ ۷ زاویاے داخلہ کہلاتے ہین
اور زاویے ۲ ۳ ۵ ۸ زوایای خارجہ کہلاتے ہین
اور زاویے ۱ و ۷ زوایاے متبادلہ کہلاتے ہین

اور زاویے ہ ح د ح بھی زوایاے متبادلہ کھلاتے ہین
اور دو دو زاویے یعنی ا ح ہ اور ح د ح اور ہ ح د اور ح ح د یہ زوایای تماثلہ کھلاتی ہین

شکل بست و ہشتم نظری

اگر ایک خط مستقیم اور دو خط مستقیمہ پر واقع ہو اور زوایای متبادلہ برابر پیدا
کرے تو یہ دو خط مستقیم متوازی ہون گے



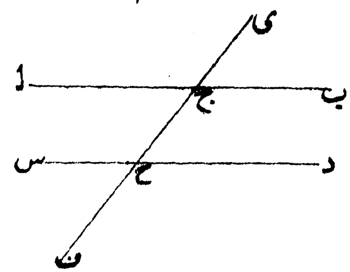
فرض کرو کہ ی ف خط مستقیم اب س د خطوط مستقیمہ پر واقع ہوا
اور اح ح و ح ح د زوایاے متبادلہ برابر پیدا کئے
تو اب || س د
اسواسطے کہ اگر اب || س د نہین ہے تو یہ دونون خط بعد الاخراج یا ب د
کی طرف مل جائینگے یا ا س کی جانب
ان دونونکو ب د کی طرف خارج کرو کہ یہ ک پر ملجائین
تو اب ح ح ک △ ہے
اور ∠ اح ح ∠ ح ح د سے بڑا ہے (ش ۱۶ م ۱)
لیکن بموجب فرض کے ∠ اح ح = ∠ ح ح د
یہ غیر ممکن ہے

∴ اب س د بعد الاخراج ب د کیطرف نہین مل سکتے
علی ہذا القیاس یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اب س د بعد الاخراج اس کیطرف بھی نہ ملین گے

∴ اب س د کا متوازی ہے۔ ہب (ح ۲۶)

شکل بست وہشتم نظری

اگر ایک خط مستقیم اور دو خطوط مستقیمہ پر واقع ہو اور زاویہ خارجہ برابر مقابل کے زاویہ داخلہ کے ایک جہت مین پیدا کرے یا زوایاے داخلہ ایک جہت مین دو قائمون کے برابر پیدا کرے تو وہ دو خط مستقیم متوازی ہون گے



فرض کرو کہ ی ف خط مستقیم اب س د خطوط مستقیمہ پر واقع ہوا اور
۱۔ ∠ ی ج ب = ∠ ج ح د پیدا کیا
۲۔ ∠ ب ج ح ج ح د ملکر = دو قائمون کے پیدا کیے
بہر صورت اب ॥ س د ہوگا
۱۔ بموجب فرض کے ∠ ی ج ب = ∠ ج ح د
اور یہ معلوم ہے کہ ∠ ی ج ب = ∠ ا ج ح (ش ۱۵ م ۱)
∴ ∠ ا ج ح = ∠ ج ح د

اور یہ زوایاے متبادلہ ہین

∴ ا ب ॥ س د (ش ۲۷ م ۱)

۲ — ∵ ∠ ب ج ح + ج ح د ملکر = دو قائمون کے بموجب فرض کو

اور ∠ ب ج ح + ا ج ح ملکر = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

∴ ∠ ب ج ح + ا ج ح ملکر = مجموع ∠ ب ج ح + ∠ ج ح د

∴ ∠ ا ج ح = ∠ ج ح د

∴ ا ب ॥ س د — ہب (ش ۲۷ م ۱)

فائدہ ششم

چھٹی اصل موضوع کے بیان مین

سترہوین شکل کے **فائدہ** مین ہمنے بیان کیا کہ **اقلیدس** نے جو چھٹی اصل موضوع مقرر کی ہے وہ ش ۱۷ کا عکس ہے

اکثر مہندسین حال نے اس اصل موضوع کی جگہ پر اصل مرقوم ذیل تجویز کی ہے کہ یہ زیادہ قریب القیاس ہے

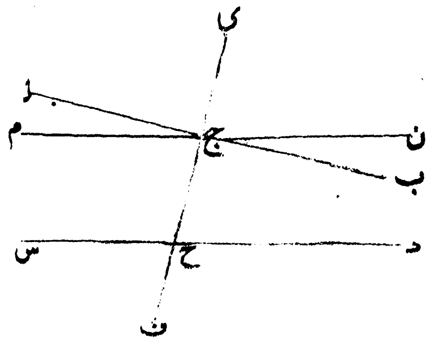
اگر دو خط مستقیم متقاطع ہون تو وہ **دونو** ایک خط مستقیم کے متوازی نہین ہوسکتے

اگر یہ فرض کرلین تو چھٹی اصل موضوع کو شکل نظری ٹھہراکر اس طرح ثابت کرسکتے ہین

فرض کرو کہ خط ی ف خطوط ا ب و س د پر واقع ہوا

اور ∠ ب ج ح + ج ح د ملکر دو قائمون سے چھوٹے پیدا کئے

تو ا ب و س د بعد الاخراج ب و د کیطرف ملجائینگے



اسواسطےکہ اگر یہ نہ ہو تو فرض کرو کہ ل ب س د متوازی ہین

تو ∵ ∠ ل ج ح و ب ج ح ملکر = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

اور ∠ ج ح د ب ج ح ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہین

∴ ∠ ل ج ح بڑا ہے ∠ ج ح د سے

اب ∠ م ج ح = ∠ ج ح د بنالو اور م ج کو ن تک خارج کرو

تو ∵ ∠ م ج ح ج ح د زوایاے متبادلہ برابر ہین

∴ م ن ‖ س د (ش ۲۷ م ۱)

پس خط م ن و ل ب کہ باہم متقاطع ہین یہ دونون س د کو متوازی ہوی یہ غیر ممکن ہے

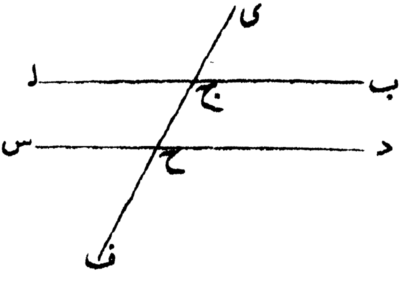
∴ ل ب و س د متوازی نہین ہین

یہ بھی ظاہر ہے کہ یہ خطوط ب د کی جہت مین ملجائینگے اسواسطے کہ ج ب درمیان ج ن و ح د کے واقع ہے ـــــ ہب

شکل بست و نہم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو خطوط مستقیمہ متوازیہ پر واقع ہو تو وہ برابر زوایای متبادلہ پیدا کریگا اور زاویہ خارجہ مقابل کے زاویہ داخلہ کے برابر ایک جہت مین پیدا کریگا الخ

اسی طرح سے دو زاویے خارجے ایک جہت مین ملکر دو قائمون کے برابر ہون گے



فرض کرو کہ ی ف خط مستقیم اب و س د خطوط مستقیمہ متوازیہ پر واقع ہوا تو ضرور ہے کہ

۱ــ ∠ اج ح = ∠ ج ح د متبادلہ

۲ــ ∠ ی ج ب خارجہ = ∠ ج ح د داخلہ

۳ــ ∠ ب ج ح ج ح د ملکر = دو قائمون کے

۱ــ فرض کرو کہ ∠ اج ح = ج ح د نہین ہے تو ∠ اج ح بڑا ہے
∠ ج ح د سے

انمین سے ہر زاویے پر ∠ ب ج ح زیادہ کرو

تو ∠ اج ح ب ج ح ملکر ∠ ج ح د ب ج ح سے بڑے ہین

اب چونکہ ∠ اج ح ب ج ح ملکر = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

∴ ∠ ج ح د ب ج ح ملکر دو قائمون سے چھوٹے ہین

∴ اگر اب و س د ب د کیطرف خارج کیے جائین تو باہم ملجائینگے (ع ۱۲)

لکن وہ نہین مل سکتے ∵ وہ متوازی ہین

∴ ∠ اج ح ∠ ج ح د سے بڑا نہین ہے

علی ہذا القیاس یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

∠ اج ح ∠ ج ح د سے چھوٹا نہین ہے

∴ ∠ اج ح = ∠ ج ح د

۲ — ∵ ∠ ی ج ب = ∠ اج ح (ش ۱۵ م ۱)

اور ∠ ج ح د = ∠ اج ح ثابت ہو چکا ہے

∴ ∠ ی ج ب = ∠ ج ب = ج ح د

۳ — ∵ ∠ ج ح د = ∠ ی ج ب ثابت ہو چکا ہے

انمین سے ہر ایک پر ∠ ب ج ح زیادہ کر دو

∴ ∠ ب ج ح ج ح د ملکر = ∠ ب ج ح ی ج ب

لیکن ∠ ب ج ح ی ح ب ملکر = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

∴ ∠ ب ج ح ج ح د ملکر = دو قائمون کے ۔ ہب

مثالین

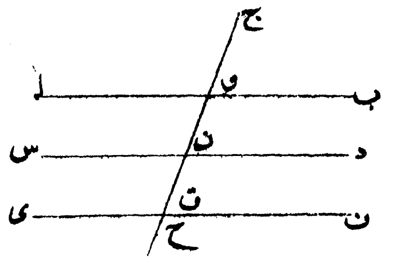
۱ — اگر ایک نقطہ سے جو دو خطوط مستقیمہ متوازیہ سے متساوی البُعد ہو دو خطوط مستقیمہ کھینچے جائین اور وہ خطوط مستقیمہ متوازیہ کو قطع کرین تو یہ خطوط متقاطعہ اون خطوط متوازیہ سے مساوی اجزاء قطع کرینگے

۲ — اگر ایک خط مستقیم مثلث کے ایک زاویہ کی تنصیف کرے اور ضلع مقابل سے ملے تو جو خطوط مستقیمہ نقطہ تنصیف سے اور اضلاع کے متوازی کھینچے جائین اور اون اضلاع پر منتہی ہون وہ برابر ہون گے

۳ — اگر ایک خط مستقیم دو خطوط متوازیہ سے ملے اور اوسکی تنصیف کیجائے تو جو خط مستقیم نقطہ تنصیف سے نکلکر اون دو خطون سے ملے گا وہ اوسی نقطے پر تنصیف ہوجائے گا

شکل سی ام نظری

جو خطوط ایک ہی خط کے متوازی ہون وہ آپسمین بھی متوازی ہون گے



فرض کرو کہ اب دس دخطوط مستقیمہ ۱۱ ی ف

تو اب ۱۱ س د ہوگا

ج ح خط مستقیم کھینچو کہ وہ اب س د ی ف کو نقاط و ن ق پر قطع کرے

تو ∵ ج ح خطوط ۱۱ اب دی ف کو قطع کرتا ہے

∴ ∠ ا و ن = ∠ متبادلہ ن ق ف (ش ۲۹ م ۱)

اور ∵ ج ح خطوط ۱۱ س د ی ف کو قطع کرتا ہے

∴ ∠ خارجہ و ن د = ∠ داخلہ ن ق ف (ش ۲۹ م ۱)

∴ ∠ ا و ن = ∠ و ن د

اور یہ زوایا سے متبادلہ ہین

∴ اب ۱۱ س د (ش ۲۷ م ۱)

ہب

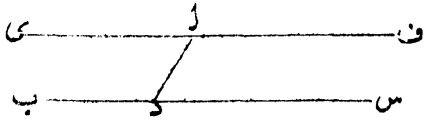
اشکال نظریہ مرقومہ ذیل اہم و ضروری ہین اور بآسانی ثابت ہو سکتے ہین اس لیے انہین طالب علم کے واسطے بطور مثالون کے بے ثابت کیے چھوڑ دیا—

۱ — اگر دو خطوط مستقیمہ اور دو مستقیم خطون کے متوازی ہون ہر ایک اپنی نظیر کے تو جو زاویے پہلے دو خطون سے پیدا ہون گے وہ ویسے ہی ہونگے جیسے پچھلے خطون کے زاویے ہین

۲ — اگر دو خطوط مستقیمہ اور دو مستقیم خطون پر عمود ہون ہر ایک اپنی نظیر پر تو جو زاویے پہلے دو خطون سے پیدا ہون گے وہ ویسے ہی ہونگے جیسے پچھلے خطون کے زاویے ہین

شکل سی و یکم نظری

نقطہ معلومہ سے خط مستقیم ایک خط مستقیم معلوم کے متوازی کھینچو



فرض کرو ا نقطہ معلومہ ہے اور ب س خط مستقیم معلوم ہے

مطلوب یہ ہے کہ نقطہ ا سے ایک خط مستقیم ‖ ب س کھینچو

ب س مین ایک نقطہ د فرض کرو اور ا د کو ملا دو

∠ د ا ی = ∠ ا د س بنا لو (ش ۲۳ م ۱)

ی ا کو ف تک خارج کرو تو ی ف ‖ ب س ہوگا

کیون ∵ ا د ی ف و ب س سے ملکر برابر زاویے متبادلہ پیدا کرتا ہے یعنے ∠ ی ا د = ∠ ا د س

∴ ی ف ‖ ب س (ش ۲۷ م ۱)

∴ نقطہ ا سے خط مستقیم ‖ ب س کھینچا گیا — ہ ب

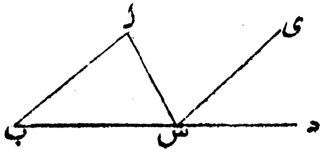
مثالین

۱- نقطہ معلومہ سے ایسا خط مستقیم کھینچو جو خط مستقیم معلوم سے زاویہ معلومہ کے برابر زاویہ پیدا کرے

۲- ا نقطہ معلومہ سے ا ب س خط مستقیم کھینچو جو دو خطوط مستقیمہ متوازیہ سنے ب س پر اس طرح سے ملے کہ ب س ایک خط مستقیم معلوم کے برابر ہو جائے

شکل سی و دوم نظری

اگر مثلث کا ایک ضلع خارج کیا جائے تو زاویہ خارجہ برابر ہوتا ہے دو مقابل کے داخلے زاویون کے اور ہر مثلث کے تینون داخلے زاویے ملکر دو قائمون کے برابر ہوتے ہین



فرض کرو کہ ا ب س ایک △ ہے اسکی ایک ضلع ب س کو د تک خارج کرو

تو ۱- ∠ ا س د = مجموع ∠ ا ب س و ∠ ب ا س

۲- مجموع ∠ ا ب س و ∠ ب ا س و ∠ ا س ب = دو قائمونکے

س سے س ی ∥ ا ب کے کھینچو (ش ۳۱ ص ۱)

تو ۱- ∵ ب د خطوط ∥ ی س ا ب سے ملتا ہے

∴ ∠ خارجہ ی س د = ∠ داخلہ ا ب س (ش ۲۹ ص ۱)

اور اس خطوط || ای س ا ب سے ملتا ہے

∴ ∠ اس ی = ∠ تبادلہ ب اس (ش ۲۹ م ۱)

∴ مجموع ∠ ی س د و ∠ اس ی = مجموع ∠ اب س ∠ ب اس

∴ ∠ اس د = مجموع ∠ اب س ∠ ب اس

اور ۲ ∵ مجموع ∠ اب س ∠ ب اس = ∠ اس د

انمین سے ہر ایک پر ∠ اس ب زیادہ کردو

تو اب مجموع ∠ اب س و ∠ ب اس و ∠ اس ب = مجموع ∠ اس د و اس ب

∴ مجموع ∠ اب س ∠ ب اس ∠ اس ب = دو قائمون کے (ش ۱۳ م ۱)

ہب

مثالین

۱ — مثلث حادّ الزاویہ کے دو زاویے ملکر تیسرے زاویہ سے بڑے ہوتے ہین

۲ — جو خط مستقیم کہ مثلث متساوی الساقین کی راس الزاویہ خارجہ کی تنصیف کرے وہ قاعدہ کے متوازی ہوگا

۳ — اگر مثلث اب س کا ضلع ب س د تک خارج کیا جاے اور ای کھینچا جائے کہ وہ زاویہ ا س د کی تنصیف کرکے ب س سے ی پر ملے تو ثابت کرو کہ زاویہ اب د و اس د ملکر زاویہ ای د کے دگنے ہین

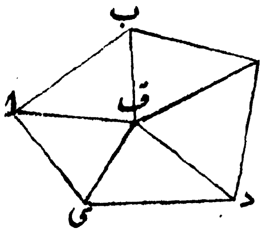
۴ — اگر خطوط مستقیم مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ کے زاویون کی تنصیف کرین اور اونہین خارج کرکے ملادین تو یہ ثابت کرو کہ ان خطوط کا درمیانی زاویہ مثلث کے زاویہ خارجہ کے برابر ہوگا

۵ - اگر خط مستقیم مثلث کے زاویہ خارجہ کی تنصیف کرے اور قاعدہ کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ وہ مثلث متساوی الساقین ہوگا

ش ٣٢ کے نتائج صریحہ جو ذیل مین مرقوم ہین بیشتر انہین سمسن صاحب نے اپنی تحریر اقلیدس مین لکھا تھا

نتیجہ اوّل

ہر شکل مستقیم الاضلاع کے زوایاے داخلہ کا مجموع مع چار قائمون کے اوتنے قائمون کا دوچند ہوتا ہے جتنے اوس شکل کے ضلعے ہین



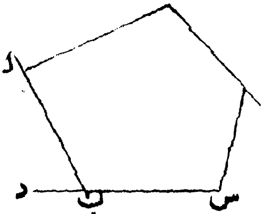
فرض کرو کہ ا ب س د ی ایک شکل مستقیم الاضلاع ہے
اس شکل کے اندر ایک نقطہ ف فرض کرو اور ف سے خطوط مستقیم فا فب فس فد فی نقاط الزوایا تک کھینچو
تو اوتنے مثلث پیدا ہوے جتنے کہ اس شکل کے ضلعے ہین
ان مثلثون مین سے ہر ایک کے تین زاویے ملکر = دو قائمون کے
∴ ان مثلثون کے سب زاویے ملکر = اوتنے قائمون کے دوچند کے جتنے مثلث ہین
یعنی اوتنے قائمون کے دوچند کے جتنے اس شکل کے ضلعے ہین
تو اب سب مثلثون کے زاویے = ∠ ادب وبس وسد ودی اور اون اونکو جو ف پر بنتے ہین
یعنی = زوایاے شکل و ف کے زاویون کے

∴ = زوایاے شکل و چار قائمون سے کے (نتیجہ صریح ٢ ش ١٥ م ١)
∴ سب زاویے اس شکل کے اور چار قائمے = اوتنے قائمون سے کے دوچند کے جتنے اس شکل کے ضلعے ہین — ہ ب

نتیجہ دوم

ہر شکل مستقیم الاضلاع محدّب کے زوایاے خارجہ جو اضلاع شکل کے علی الترتیب خارج کرنے سے پیدا ہون وہ چار قائمون کے برابر ہوتے ہین

ہر زاویہ داخلہ جیسے ا ب س ہو اپنے متصل زاویہ خارجہ ا ب د سے ملکر = دو قائمون کے

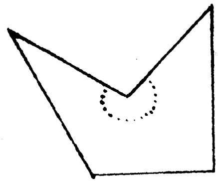


∴ سب زاویے داخلے اور کل زوایاے خارجہ ملکر = اوتنے قائمون کے دوچند کے جتنے کہ اس شکل کے ضلعے ہین
لکن سب زاویے داخلے مع چار قائمون کے = اوتنے قائمون کے دوچند کے جتنے کہ اس شکل کے ضلعے ہین —
∴ سب زاویے داخلے مع سب زوایاے خارجہ کے = تمام زوایا داخلہ مع چار قائمون کے
∴ سب زاویے داخلے = چار قائمون کے — ہ ب

تنبیہ

جاننا چاہیے کہ نتیجہ دوم ش ٣٢ مین فقط اشکال محدّبہ سے بحث ہے یعنی وہ شکلین جنمین ہر زاویہ داخلہ دو قائمون سے کم ہوتا ہے — جب کسی شکل مین ایک زاویہ دو قائمون سے بڑا ہو

بیجیسے اس شکل مین نقطہ دار زاویہ ہے تو اوسے زاویہ **متداخلہ** کہتے ہین



مثالین

۱— جوزاویے خارجے شکل ذوارابعۃ الاضلاع کے ضلعون کو علی الترتیب خارج کرنے سے پیدا ہون وہ ملکر زوایاے داخلہ کے برابر ہوتے ہین

۲— یہ ثابت کرو کہ شکل مسدس کے زوایاے داخلہ ملکر آٹھ قائمون کے برابر ہوتے ہین

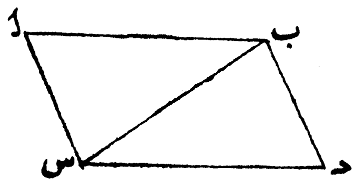
۳— یہ ثابت کرو کہ شکل مخمس متساوی الزوایا کا زاویہ قائمہ کا ۶/۵ ہے

۴— اوس شکل مستقیم الاضلاع کے کتنے ضلعے ہوتے ہین جسکے زاویے داخلے ملکر زوایاے خارجہ کے دو چند ہون—

۵— اوس شکل کثیر الاضلاع متساوی الزوایا کے کتنے ضلعے ہوتے ہین جسکے چار زاوے ملکر سات قائمون کے برابر ہون

شکل سی و سوم نظری

اگر دو خطوط مستقیمہ متوازیہ متساویہ کی ایک ایک جہت سے کے اطراف مین خطوط مستقیمہ وصل کرین تو وہ بھی باہم متساوی و متوازی ہون گے



فرض کرو کہ اب و س د خطوط متساویہ متوازیہ کی ایک ایک جہت مین اس ب د خط مستقیم وصل کئے

تو اس و ب د متساوی و متوازی ہون گے

ب س کو ملا دو

تو ∵ اب ‖ س د

∴ ∠ اب س = ∠ متبادلہ د س ب (ش ۲۹ م ۱)

تو △ اب س و ب س د مین

∵ اب = س د اور ب س مشترک ہی اور ∠ اب س = ∠ د س ب

∴ اس = ب د اور ∠ اس ب = ∠ د ب س (ش ۴ م ۱)

تو اب ∵ ب س اَب بَ د سے ملکر ∠ متبادلہ اس ب و د ب س برابر پیدا کرتا ہی

∴ اس ‖ ب د کے اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اس = ب د ـ ھب

متفرق مثالین متعلق بہ فصل اول و دوم

۱ — اگر مثلث کے دو خارجے زاویون کی تنصیف خطوط مستقیمہ سے ہوا و وہ نقطہ د پر ملین تو یہ ثابت کرو کہ جو عمود نقطہ د سے اضلاع مثلث پر بدون اخراج

یا بعد الاخراج واقع ہون گے وہ برابر ہون گے

۲- زاویہ قائمہ کی تثلیث کرو

۳- خطوط منصفہ ہر سہ زوایائے مثلث ایک نقطہ پر ملتے ہین

۴- اگر اضلاع مثلث کے نقاط وسطا سے اونپر عمود کھینچے جائین تو یہ عمود ایک نقطہ پر ملین گے

۵- جو زاویہ کہ مثلث اب س کے زاویہ ب اس کے خط منصف کا اور اسے ب س پر جو عمود نکالا جاسے اوسکے درمیان مین واقع ہوگا وہ زاویہ ہا زاویہ ب و س کے نصف تفاوت کے برابر ہوگا

۶- اگر مثلث اب س کے زاویہ ا کی تنصیف آ د خط مستقیم سے ہو اور ب د ی آ د پر عمود کھینچا جاے اور اس سے بغیر اخراج یا بعد الاخراج نقطہ ی پر سلے تو یہ ثابت کرو کہ ب د د ی کے برابر ہے

۷- ایک مثلث قائم الزاویہ کے دو مثلث متساوی الساقین بناؤ

۸- آب و س د دو خطوط مستقیمہ معلومہ ہین اونکے بیچ کے نقطہ ی سے ج ی ح خط مستقیم ایسا کھینچو کہ ج ح جزء مقطوع نقطہ ی پر تنصیف ہو جاسے

۹- مثلث و ن ق کا راس الزاویہ و زاویہ قائمہ ہوگا یا حادہ یا منفرجہ موافق مقدار خط و ذ کے جو ن ق کی تنصیف کرے اور ن ق کے برابر ہو یا اوس سے بڑا ہو یا چھوٹا ہو۔

۱۰- مثال ۹ سے ثابت کرو کہ خط مستقیم معلوم کے ایک طرف سے بغیر اوسکے اخراج کے عمود اوسپر کھینچ سکتا ہے

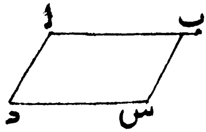
فصل سوم

دربیان مساواۃ اشکال مستقیمۃ الاضلاع و رقبہ

جتنی جگہ کو شکل گھیرے ہو اوسے اوسکا رقبہ کہتے ہین
اقلیدس کے نزدیک دو شکلین اوسوقت برابر ہوتی ہین جبکہ وہ برابر جگہ کو
گھیرے ہون اور اگرچہ وہ صورت مین مشابہ نہون لکن جو رقبہ اون دونون کے
حدود مین محصور ہین اگر وہ برابر ہون تو اقلیدس کے نزدیک وہ دونون شکلین برابر
ہین مثلاً وہ مثلث کو یہ سمجھتا ہے کہ ایک شکل ہے کہ اوسکے ضلعے اور زاویے
اور رقبہ ہوتا ہے اور اس فصل مین وہ یہ ثابت کرتا ہے کہ دو مثلثون کا رقبہ برابر ہوسکتا
ہے اگرچہ اونکے اضلاع اور زاویے غیر مساوی ہون
تمام مقادیر ہندسیہ کی مساواۃ انطباق حدود سے معلوم ہوتی ہے جیسا کہ ہمنے
فائدہ اول مین بیان کیا بلکہ خط اور زاویون کی مساواۃ دریافت کرنا تو فقط
انطباق حدود پر منحصر ہے اور اشکال کی مساواۃ بھی اس سے معلوم ہوتی ہے
لکن فقط اسی پر منحصر نہین ہے بلکہ اور دلائل سے بھی اشکال کی مساواۃ ثابت ہوسکتی
ہے جیسا کہ اس فصل مین عرض کیا جائے گا
جب دو علامات اشکال کے درمیان مین = یہ علامت لکھی ہو تو اسکی معنی یہ
سمجھنی چاہیین کہ اس شکل کا رقبہ برابر ہے اسکے
جو اشکال اس فصل مین مذکور ہین اونھین ثابت کرنے سے پیشتر ہمین چاہیئے
کہ مقالہ اول کے حدود ضروریہ جو باقی رہ گئے ہین اونھین لکھین اور جہان تک
اونھین سابق مین لکھا تھا اوسکے بعد سے شروع کرین ۔

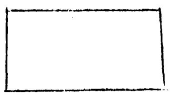
بقیہ حدود

۲۷ – شکل متوازی الاضلاع وہ شکل ہے جسکے چار ضلعے ہون اور مقابل کے ضلعے متوازی ہون

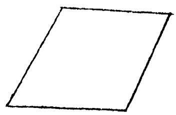


اختصار کے واسطے اکثر شکل متوازی الاضلاع کو فقط دو حرفون سے تعبیر کرتے ہین جو مقابل کے زاویون پر ہوتے ہین مثلاً شکل مرقومہ بالا کو بلحاظ اختصار فقط ا س سے تعبیر کیا ہے

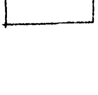
۲۸ – شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ وہ شکل ہے جسکے مقابل کے ضلعے متوازی ہون اور اوسمین ایک زاویہ قائمہ ہو



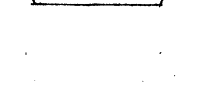
۲۹ معین وہ شکل متوازی الاضلاع ہے جسکے سب اضلاع برابر ہون



۳۰ – مربع وہ شکل متوازی الاضلاع ہی جسکے سب اضلاع برابر ہون اور سب زاویے قائمے ہون



۳۱ – منحرف وہ شکل ذوار بعۃ الاضلاع ہے جسمین فقط دو ضلعے متوازی ہون

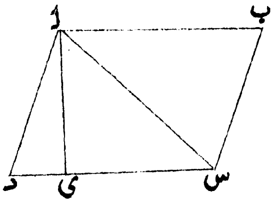


۳۲ — قطر شکل ذو اربعۃ الاضلاع وہ خط مستقیم ہے جو دو نقاط زوایائے مقابل کو اوسکے ملا دے

۳۳ — ارتفاع شکل متوازی الاضلاع اوس بُعد مستقیم کا نام ہے جو اوس شکل کے ایک ضلع کو ضلع مقابل سے ہو جو قاعدہ تصور کیا جاتا ہے

ارتفاع مثلث اوس بُعد مستقیم کو کہتے ہین جو مثلث کے ایک زاویہ کو ضلع مقابل سے ہو جسے قاعدۂ مثلث سمجھتے ہین

مثلاً فرض کرو کہ ا ب س د شکل متوازی الاضلاع ہے اور ا ی ایک عمود ا سے س د تک کھینچا تو ا ی شکل ا ب س د و مثلث ا س د دونوں کا ارتفاع ہے



لکن اگر ب سے ایک عمود د س تک بعد الاخراج کھینچا جاوے اور وہ د س سے ف پر ملے تو ب ف شکل مذکور کا ارتفاع ہوگا

مثالین

حدود مرقومۂ بالا سے یہ اشکال نظریہ ثابت کرو

۱ — مربع کے سب زاویے قائمے ہوتے ہین

۲ — شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کے سب زاویے قائمے ہوتے ہین

۳ — اقطار مربع اوسکے ہر ایک ضلع سے نصف قائمہ کے برابر زاویہ پیدا کرتے ہین

۴ — اگر دو خط مستقیم ایک دوسرے کی تنصیف کرین تو جو خطوط اونکے اطراف

کو وصل کرین اونسے شکل متوازی الاضلاع پیدا ہوگی

۵ — جو خط مستقیم کہ شکل متوازی الاضلاع کے زوایاے متصلہ کی تنصیف کرین وہ باہم تقاطع کرکے زاویے قائمے پیدا کرینگے

۶ — اگر خطوط مستقیمہ شکل متوازی الاضلاع کے دو مقابل کے زاویون کو وصل کرین اور اونکی تنصیف کرین تو وہ شکل متوازی الاضلاع معین ہوگی

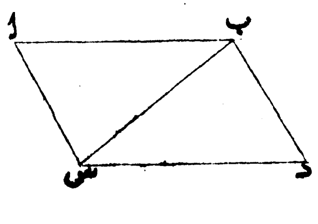
۷ — اگر شکل ذوا ربعۃ الاضلاع کے مقابل کے ضلعے باہم برابر ہون تو وہ شکل متوازی الاضلاع ہوگی

۸ — اگر شکل ذوا ربعۃ الاضلاع کے دو مقابل کے ضلعے باہم برابر ہون اور باقی دو ضلعے بھی باہم برابر ہون تو وہ شکل متوازی الاضلاع ہوگی

۹ — اگر شکل معین کا ایک زاویہ برابر ہو دو قائمون کے دو ثلث کے تو جو قطر کہ اوس زاویہ کے نقطہ راس سے کھینچا جائے گا وہ شکل معین کو دو مثلث متساوی الاضلاع مین تقسیم کردے گا

شکل سی و چہارم نظری

شکل متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور زاویے باہم برابر ہوتے ہین اور قطر اوسکی تنصیف کرتا ہے



فرض کرو کہ اب د س ▱ ہے اور ب س اوسکا قطر ہے

تو ضرور ہے کہ اب = د س اور اس = ب د

اور ∠ ب اس = ∠ س د ب او ∠ اب د = ∠ اس د

اور △ اب س = △ د س ب

کیون ∵ اب ∥ س د اور ب س اوسے وصل ہوا ہے

∴ ∠ اب س = ∠ متبادلہ د س ب (ش ۲۹ م ۱)

اور ∵ اس ∥ ب د اور ب س اوسے وصل ہوا ہے (ش ۲۹ م ۱)

∴ ∠ اس ب = ∠ متبادلہ د ب س

تو اب △ اب س و د س ب مین

∵ ∠ اب س = ∠ د س ب اور ∠ اس ب = ∠ د ب س

اور ب س ضلع مشترک دونون مثلثون کے زوایاے متساویہ سے متصل ہے

∴ اب = د س اور اس = د ب اور ∠ ب اس = ∠ س د ب

اور △ اب س = △ د س ب (شکل ۲۶ م ۱)

ونیز ∵ ∠ اب س = ∠ ب س د اور ∠ س ب د = ∠ اس ب

∴ مجموع ∠ اب س و ∠ س ب د = مجموع ∠ ب س د و ∠ اس ب

یعنی ∠ اب د = ∠ اس د ہب

مثالین

۱ — یہ ثابت کرو کہ شکل متوازی الاضلاع کے قطر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہین

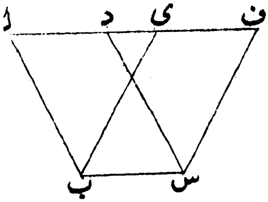
۲ — یہ ثابت کرو کہ شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کے قطر ایک دوسیر کے برابر ہوتے ہین

۳ — یہ ثابت کرو کہ اقطار ہر شکل متوازی الاضلاع کو چار مثلثون پر تقسیم کر دیتے ہین

دو مثلث باہم برابر ہین

شکل سی و پنجم نظری

جو اشکال متوازی الاضلاع کہ ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہون وہ برابر ہین



فرض کرو کہ ▱ ا ب س د و ی ب س ف ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی || مستقیمہ ا ف و ب س کے درمیان واقع ہین

تو ▱ ا ب س د = ▱ ی ب س ف ہوگا

صورت اوّل - اگر ا د و ی ف کے درمیان فاصلہ ہو

تو د ی کو وصل کر دو

تو △ ف د س و ی ا ب مین

∵ ∠ خارجہ ف د س = ∠ داخلہ ی ا ب (ش ۲۹ م ۱)

اور ∠ داخلہ د ف س = ∠ خارجہ ا ی ب (ش ۲۹ م ۱)

اور د س = ا ب (ش ۳۴ م ۱)

∴ △ ف د س = △ ی ا ب (ش ۲۶ م ۱)

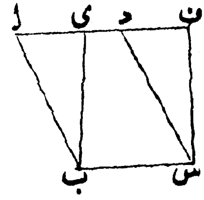
تواب ▱ اب س د مع △ ف د س کے = شکل اب س ف

اور ▱ ی ب س ف مع △ ی اب کے = شکل اب س ف

∴ ▱ اب س د مع △ ف د س کے = ▱ ی ب س ف مع △ ی اب

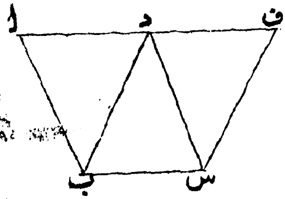
∴ ▱ اس د = ▱ ی ب س ف

صورت دوم - اگر اد و ی ف کسی قدر ایک دوسرے کو اوپر واقع ہون تب جیسے اس شکل مین ہے



تو بھی وہی ثبوت جاری ہوگا جو صورت اوّل مین ہوا

صورت سوم اگر ب س کے مقابل کے ضلعے ایک ہی نقطہ د پر منتہی ہون جیسے اس شکل مین ہے



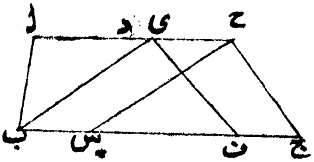
تو بھی وہی ثبوت جاری ہوتا ہے مگر یہ طریقہ استدلال اوس سے سہل تر ہے

ہر ایک دونون ▱ مین سے △ ب د س کا دوچند ہے (ش ۳۴ م ۱)

∴ ▱ اب س د = ▱ د ب س ف — ہ ب

شکل سی و ششم نظری

جو اشکال متوازی الاضلاع کہ برابر قاعدون پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہون وہ باہم برابر ہوتے ہین



فرض کرو کہ ▱ ا ب س د و ی ف ج ح برابر قاعدون ب س و ف ج پر

اور درمیان ایک ہی ‖ ا ح و ب ج کے واقع ہین

تو ▱ ا ب س د = ▱ ی ف ج ح ہوگا

ب ی و س ح کو وصل کردو

تو ∵ ب س = ف ج بموجب فرض کے

اور ی ح = ف ج (ش ۳۴ م ۱)

∴ ب س = ی ح

اور ب س ‖ ی ح بموجب فرض کے

∴ ی ب = اور ‖ س ح (ش ۳۳ م ۱)

∴ ی ب س ح شکل متوازی الاضلاع ہے

تو اب ∵ ▱ ی ب س ح = ▱ ا ب س د (ش ۳۵ م ۱)

∵ یہ دونون ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی ‖ کے درمیان واقع ہین

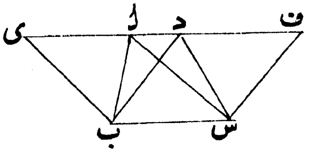
اور ▱ ی ب س ح = ▱ ی ف ج ح (ش ۳۵ م ۱)

∵ یہ دونون ایک ہی قاعدہ ی ح پر اور ایک ∥ کے درمیان واقع ہین

∴ ▱ ا ب س د = ▱ ی ف ج ح — ہب

شکل سی و ہفتم نظری

جو مثلث کہ ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہون وہ باہم برابر ہوتے ہین



فرض کرو کہ △ ا ب س و د ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی ∥ ا د و ب س کے درمیان واقع ہین

تو △ ا ب س = △ د ب س ہوگا

ب سے ب ی ∥ ا س کے کھینچو کہ وہ د ا سے بعد الاخراج ی پر ملے

اور س سے س ف ∥ ب د کے کھینچو کہ وہ ا د سے بعد الاخراج ف پر ملے

تو اب ی ب س ا و ف س ب د اشکال متوازی الاضلاع ہین

اور ▱ ی ب س ا = ▱ ف س ب د (ش ۳۵ م ۱)

∵ یہ دونون ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی ∥ کے درمیان واقع ہین

لکن △ ا ب س نصف ہے ▱ ی ب س ا کا (ش ۳۴ م ۱)

اور △ د ب س نصف ہے ▱ ف س ب د کا (ش ۳۴ م ۱)

∴ △ ا ب س = △ د ب س (ح ۷) — ہب

مثالین

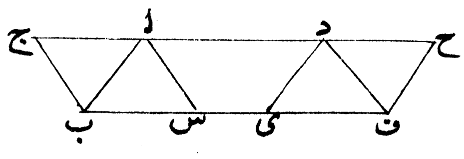
۱— اگر شکل متوازی الاضلاع ا ب س د کی ضلع ا ب مین ایک نقطہ ف فرض کرین اور ف س ف د کو ملا دین تو مثلث ف ا د و ف ب س ملکر برابر ہونگی مثلث ف د س کے

۲— ا ب س د دو خطوط مستقیمہ نقطہ ی پر متقاطع ہین اور مثلث ا ی س برابر ہے مثلث ب ی د کے تو اب ثابت کرو کہ ب س ا د کے متوازی ہے

۳— اگر دو خطوط مستقیمہ متوازیہ مین سے ایک مین نقطہ ا و ب اور دوسری مین نقطہ س و د فرض کرین اور خطوط ا د و ب س نقطہ ی پر متقاطع ہون تو مثلث ا ی س و ب ی د باہم برابر ہون گے

شکل سی و ہشتم نظری

جو مثلث برابر قاعدون پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہون وہ باہم برابر ہوتے ہین



فرض کرو کہ △ ا ب س و د ی ف مساوی قاعدون ب س و ی ف پر اور ایک ہی ‖ ا ب ف و ا د کے درمیان واقع ہین

تو △ ا ب س = △ د ی ف ہوگا

ب سے ب ج ۱۱ س ا کے کھینچو کہ وہ د ا سے بعد الاخراج ج پر ملے

ف سے ف ح ۱۱ ی د کے کھینچو کہ وہ ا د سے بعد الاخراج ح پر ملے

تواب س ج د ی ح اشکال متوازی الاضلاع ہین اور باہم برابر ہین

∵ وہ برابر قاعدون ب س و ی ف پر اور ایک ہی ۱۱ ا ب ف و ج ح

کے درمیان واقع ہین (ش ۳۶ م)

اور △ ا ب س نصف ہے ▱ س ج کا

اور △ د ی ف نصف ہے ▱ ی ح کا

∴ △ ا ب س = △ د ی ف (ح ۷)

ھب

مشالین

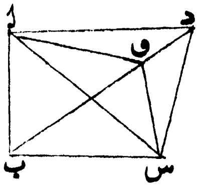
۱ — یہ ثابت کرو کہ اگر ایک خط مستقیم راس المثلث سے نکلکر اوسکے قاعدہ کی تنصیف کرے تو وہ مثلث کو دو مساوی جزون پر تقسیم کردے گا

۲ — اگر شکل مذکور مین دونون مثلث ایک ہی جہت مین نہون تو ثابت کرو کہ جو خط مستقیم کہ رؤس المثلث کو وصل کرے وہ اوس خط سے تنصیف ہو جائیگا جس مین ان مثلثون کے قاعدے ہین

۳ — ا ب س مثلث متساوی الساقین کے اضلاع مساوی ا ب و ا س مین نقطے د و ی ایسے فرض کیے کہ ب د = ا ی پس ثابت کرو کہ مثلث س ب د و ا ب ی باہم برابر ہین

شکل سی و نہم نظری

برابر مثلث جو ایک ہی قاعدے پر ایک ہی جانب مین ہون وہ درمیان ایک ہی خطوط متوازیہ کے ہوتے ہین



فرض کرو کہ برابر ∆ ا ب س و د ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر ایک ہی جانب مین ہین

ا د کو ملا دو

تو ا د ا ا ب س ہوگا

اس واسطیکہ اگر ایسا نہین ہے تو ا و ا ا ب س کے کھینچو اس طرح سے کہ وہ ب د سے بغیر اخراج یا بعد الاخراج و پر ملجاسے اور و س کو ملا دو

تو ∴ ∆ ا ب س و و ب س ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہین

∴ ∆ ا ب س = ∆ و ب س (ش ۳۷ م ۱)

لکن ∆ ا ب س = ∆ د ب س بموجب فرض کے

∴ ∆ و ب س = ∆ د ب س

یعنے چھوٹا = بڑے کے یہ غیر ممکن ہے

∴ ا و ا ا ب س نہین ہے

اسی طرح سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ سوا ا د کے اور کوئی خط ا ا ب س نہین ہے

∴ ا د ا ا ب س — ہب

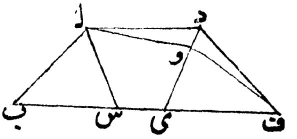
مثالین

۱ـ ا د متوازی ہے ب س کے اور ا س و ب د تی پر ملے ہین اور ب س کو ف تک خارج کیا اس طرح کہ مثلث ف ی ب برابر ہوگیا مثلث ا ب س کے تو ثابت کرو کہ ف د متوازی ہے ا س کے

۲ـ اگر شکل ذو اربعۃ الاضلاع کے قطر اوسے چار مثلثون پر تقسیم کردین اور انمین سے دو مقابل کے مثلث باہم برابر ہون تو ثابت کرو کہ اوس شکل ذو اربعۃ الاضلاع کے دو مقابل کے ضلعے متوازی ہین

شکل چہلم نظری

مثلثات متساویہ جو برابر قاعدون پر ایک سیدہ مین اور قاعدون کی ایک جہت مین ہون وہ ایک ہی خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہوتے ہین



فرض کرو کہ △ ا ب س و د ی ف باہم برابر ہین اور برابر قاعدون ب س و ی ف پر ایک ہی خط مستقیم ب ف مین اور قاعدون کی ایک جہت مین واقع ہین ا د کو ملادو

تو ا د ‖ ب ف ہوگا

اسواسطے کہ اگر ایسا نہین ہے تو اسے ا د ‖ ب ف کھینچو اس طرح سے کہ وہ

ی د سے بغیر اخراج یا بعد الاخراج و پر سلے اور و ف کو ملادو

تو △ ا ب س = △ و ی ف، .. وہ برابر قاعدون پر اور ایک ہی اا کے

درمیان واقع ہین (ش ۳۸ م ۱)

لکن △ ا ب س = △ د ی ف بموجب فرض کے

∴ △ و ی ف = △ د ی ف

یعنے چھوٹا = بڑے کے یہ غیر ممکن ہے

∴ ا و اا ب ف نہین ہے

اسیطرح سے یہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ سوا ا د کے اور کوئی خط مستقیم ب ف کا متوازی نہین ہوسکتا

∴ ا د اا ب ف ہے

ہب

مثالین

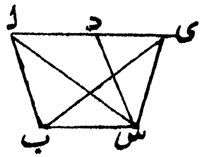
۱- اگر اس شکل مین مثلث قاعدون کی ایک ہی جہت مین نہون تو ثابت کرو کہ جو خط مستقیم کہ اونکے راس کو وصل کریگا وہ اوس خط سے تنصیف ہو جائیگا جسمین قاعدے ہین

۲- جو خط مستقیم کہ مثلث کے دو ضلعون کے نقاط تنصیف کو ملا دے وہ متوازی ہوگا قاعدہ مثلث کے

۳- جو خطوط مستقیم کہ اضلاع مثلث کے نقاط وسط کو ملا دین وہ اوس مثلث کو چار مساوی مثلثون مین تقسیم کر دیتے ہین

شکل چہل و یکم نظری

اگر شکل متوازی الاضلاع اور مثلث ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہون تو شکل متوازی الاضلاع مثلث کی دوچند ہوگی



فرض کرو کہ ▱ اب س د اور △ ی ب س ایک ہی قاعدہ ب س پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ ا ی و ب س کے درمیان واقع ہین

تو ▱ اب س د دوچند ہوگا △ ی ب س کا

ا س کو ملا دو

تو △ اب س = △ ی ب س

∵ وہ ایک ہی قاعدہ پر اور ایک خطوط متوازیہ کے درمیان واقع ہین

(ش ۳۷ م ۱)

اور ▱ اب س د دوچند ہے △ اب س کا ∵ ا س قطر ہے اب س د کا

(ش ۳۴ م ۱)

∴ ▱ اب س د دوچند ہے △ ی ب س کا — ہب

مثالین

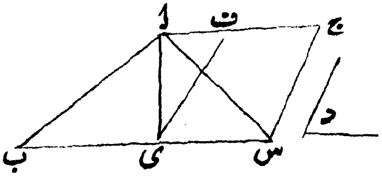
۱— اگر شکل متوازی الاضلاع کے باہر ایک نقطہ سے دو خطوط مستقیمہ اوسکے دو مقابل

کے ضلعون کے اطراف تک کھینچ جائین اور اگر یہ ضلعے خارج کیے جائین تو وہ نقطہ اونکے درمیان نہ واقع ہو تو جو مثلث کہ اسطرح سے پیدا ہون گے اونکا تفاوت نصف شکل متوازی الاضلاع کے برابر ہوگا

۲ — جو مثلث اس طرح سے پیدا ہون کہ شکل متوازی الاضلاع کے اندر ایک نقطے سے خطوط مستقیمہ اوسکے اضلاع مقابل کے اطراف تک کھینچے جائیں وہ مثلث ملکر اوس شکل متوازی الاضلاع کے نصف ہون گے

شکل چہل و دوم عملی

ایسی شکل متوازی الاضلاع بناؤ کہ وہ مثلث معلوم کے برابر ہو اور اوسکا ایک زاویہ زاویہ معلومہ کے برابر ہو



فرض کرو کہ اب س △ معلوم ہے اور د ∠ معلومہ ہے

مطلوب یہ ہے کہ ایک ▱ برابر △ اب س کے بناؤ جسکا زاویہ = ∠ د کے ہو ب س کو ی پر تنصیف کرو اور ا ی کو ملا دو

ی پر ∠ س ی ف = ∠ د کے بناؤ

ا ف ج متوازی ب س کے کھینچو اور س سے س ج متوازی ی ف کے کھینچو

تو ف ی س ج شکل متوازی الاضلاع ہے

کیونکہ △ ا ی ب = △ ا ی س

∵ وہ برابر قاعدون پر اور ایک ہی اا کے درمیان واقع ہین (س ۳۸ م ۱)

∴ △ ا ب س دوچند ہے △ ا ی س کا

لیکن ▭ ف ی س ج دوچند ہے △ ا ی س کا

∵ وہ ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی اا کے درمیان واقع ہین (ش ۴۱ م ۱)

∴ ▱ ف ی س ج = △ ا ب س (ح ۶)

اور ▱ ف ی س ج کا ایک زاویہ س ی ف = ∠ د

∴ ▱ ف ی س ج موافق مطلوب کے بنایا گیا۔ ھب

مثالین

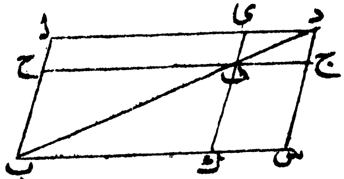
۱ ــ ایسا مثلث بناؤ کہ وہ شکل متوازی الاضلاع معلوم کے برابر ہو اور اوسکا ایک زاویہ زاویہ معلومہ مستقیمۃ الخطین کے برابر ہو

۲ ــ ایسی شکل متوازی الاضلاع بناؤ کہ وہ مثلث معلوم کی برابر ہو اور اوسکی اضلاع کا مجموع مجموع اضلاع مثلث کے برابر ہو

۳ ــ مثلث متساوی الساقین کا محیط اوس شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کے محیط سے بڑا ہوتا ہے جو مثلث معلوم کے برابر ہو اور اوسکا ارتفاع اوسکے ارتفاع کے برابر ہو

شکل چہل و سوم نظری

متممات اشکالِ متوازی الاضلاع جو کسی شکل متوازی الاضلاع کی گرد واقع ہون باہم برابر ہوتے ہین



فرض کرو کہ اب س د ایک ▱ ہو اور ب د اوسکا قطر ہے اور ی ج و ح ڭ

▱ ہین گرد ب د کے یعنے ان مین سے ب د گذرتا ہے

اور ا ف و ف س اور ▱ ہین جنسے کل شکل ا ب س د تمام ہوتی ہے

اور ∵ اونھین متمم کہتے ہین

تو متمم ا ف = متمم ف س کے ہے

کیونکہ ∵ ب د قطر ہے ▱ ا س کا

∴ △ ا ب د = △ س د ب (ش ۳۴ م ۱)

اور ∵ ب ف قطر ہے ▱ ح ڭ کا

∴ △ ح ب ف = △ ڭ ف ب

اور ∵ ف د قطر ہے ▱ ی ج کا

∴ △ ی ف د = △ ج د ف

لہذا مجموع △ ح ب ف و ی ف د = مجموع △ ڭ ف ب و ج د ف

یہ مثلثات متساویہ ہر ایک △ ا ب د و س د ب مین سے نکال ڈالو

تو باقی ▱ ا ف = باقی ▱ ف س ہے (ح ۳)

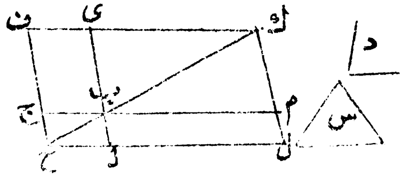
مثالین

ا — اگر شکل متوازی الاضلاع اب س د کے اندر نقطہ و سے دو خط مستقیم و سکے اضلاع کے متوازی کھینچے جائین اور ہر دو اشکال متوازی الاضلاع و ب و و د برابر ہون تو نقطہ و قطر ا س مین واقع ہوگا

۳ — ا ب س د ایک شکل متوازی الاضلاع ہے اور ام ن ایک خط مستقیم اضلاع ب س س د سے (جنمین سے ایک خارج کیا گیا ہے) نقطہ م و ن پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ مثلث ب ن برابر ہے مثلث م د س کے —

شکل چہل و چہارم عملی

خط مستقیم معلوم پر شکل متوازی الاضلاع مساوی مثلث معلوم کو بناؤ کہ اوسکے زاویون مین سے ایک زاویہ زاویہ معلومہ کے برابر ہو



فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم معلوم ہے اور △ معلوم اور د ∠ معلومہ ہے مطلوب یہ ہے کہ ا ب پر ایک ▱ = △ س کو بناؤ جسکا ایک زاویہ = ∠ د کے ہو

ایک ▱ = △ س کو بناؤ جسکا ایک زاویہ = ∠ د کو ہو (ش ۴۲ م ۱)

اور فرض کرو کہ اس شکل متوازی الاضلاع کو اسے مقام پر اوٹھاکے رکھدیا کہ اوسکے ضلعون مین سے ایک ضلع جسمین یہ زاویہ مصنوعہ ہو ایک ہی خط مستقیم ا ب مین رہا اور اس ▱ کا نام ب ی ف ج رکھا

ف ج کو ح تک خارج کرو اور ا ح ॥ ب ج یا ی ف کے کھینچو اور ب ح کو ملادو

تو ہ ف ج ا ح و ی ف خطوط ॥ اسے ملتا ہے

∴ مجموع ∠ اح ف وح ف ی = دو قائمون کے

∴ مجموع ∠ ب ح ج و ح ف ی کم ہے دو قائمون سے

∴ اگر ح ب و ف ی ب ی کیطرف خارج کیے جائین تو وہ باہم ملجائینگے (ع۱۶)

فرض کرو کہ وہ نقطہ ك پر ملے

ك مین سے ك ل ॥ ی ا یا ف ح سے کے کھینچو

اور ح ا و ج ب کو خارج کرو کہ وہ ك ل سے نقاط ل و م پر ملجائین

تو ح ف ك ل ایک ▱ ہے اور ح ك اوسکا قطر ہے

اور ا ج و م ی ▱ ہین گرد ح ك کے

∴ متمم ب ل = متمم ب ف

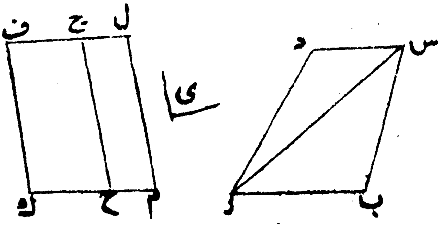
∴ ▱ ب ل = △ س

ونیز ▱ ب ل کا ایک زاویہ ا ب م = ∠ ی ب ج

∴ = ∠ د - ہب

شکل چہل و پنجم عملی

ایک شکل متوازی الاضلاع مساوی شکل مستقیم الاضلاع معلوم ہکے بناؤ جسکا ایک زاویہ زاویہ معلومہ کے برابر ہو



فرض کرو کہ اب س د شکل مستقیم الاضلاع معلوم ہے اور ی زاویہ معلومہ ہے
د س کو ملا دو

مطلوب یہ ہے کہ ایک ▱ = اب س د کے بناؤ جسکا ایک زاویہ = ∠ ی کے ہو

▱ ف ج ح ك = △ اب س بناؤ جسکا ∠ ف ك ح = ∠ ی کے ہو
(ش ۴۲ م ۱)

ج ح پر ▱ ج ح م ل = △ س د ا کے بناؤ جسکا ∠ ج ح م = ∠ ی کے ہو (ش ۴۴ م ۱)

تو ف ك م ل ▱ مطلوب ہے

کیونکہ ∵ ∠ ج ح م اور ∠ ف ك ح ہر ایک = ∠ ی

∴ ∠ ج ح م = ∠ ف ك ح

∴ مجموع ∠ ج ح م و ج ح ك = مجموع ∠ ف ك ح و ج ح ك
= دو قائمونکے (ش ۲۹ م ۱)

∴ ك ح م ایک خط مستقیم ہے (ش ۱۴ م ۱)

پھر ∵ ح ك خطوط ‖ ف ج و ك م سے ملتا ہے
∠ ف ج ح = ∠ ج ح م

∴ مجموع ∠ ف ج ح و ل ج ح = مجموع ∠ ج ح م و ل ج ح
= دو قائمونکے (ش ۲۹ م ۱)

∴ ف ج ل ایک خط مستقیم ہے (ش ۱۴ م ۱)

پس ∵ ك ف ‖ ح ج
اور ح ج ‖ ل م (ش ۳۰ م ۱)
∴ ك ف ‖ ل م

اور یہ ثابت ہو چکا ہے کہ ك م ॥ ف ل

∴ ف ك ل م شکل متوازی الاضلاع ہے

اور ∴ ف ح = △ ا ب س اور ج م = △ س د ك

∴ ▱ ف م = کل شکل مستقیم الاضلاع ا ب س د

اور ▱ ف م کا ایک ∠ ف ك م = ∠ ی

اسی طرح سے ایک ▱ مساوی شکل مستقیم الاضلاع معلوم کے بنے جسکے کتنے ہی ضلع ہون بن سکتی ہے اور اوسکا ایک زاویہ برابر زاویہ معلومہ کے ہو سکتا ہے

متفرق مثالین

۱ — اگر شکل ذو اربعۃ الاضلاع کا ایک قطر دوسرے قطر کی تنصیف کرے تو شکل مذکور دو مساوی مثلثون مین تقسیم ہو جائے گی

۲ — اگر شکل متوازی الاضلاع کے قطر مین کسی نقطہ سے بدون اخراج یا بعد الاخراج خطوط مستقیمہ زوایای مقابل تک کھینچے جائین تو وہ مساوی مثلث قطع کرین گے

۳ — شکل منحرف مین جو خط مستقیم کہ اوسکے اضلاع متوازیہ کے نقاط وسط کو وصل کرتا ہے وہ منحرف مذکور کی تنصیف کرتا ہے

۴ — شکل متوازی الاضلاع کے قطر ا ی د ب د نقطہ ق پر متقاطع ہین اور نقطہ ف مثلث ا د ب کے اندر واقع ہے تو ثابت کرو کہ مثلث ا ف ب و س ف د کا تفاوت برابر ہے مجموع مثلث ا ف س و ب ف د کے

۵ — اگر شکل متوازی الاضلاع کے دو قطرون مین سے ایک قطر اوسکے ایک ضلع کے برابر ہو تو دوسرا قطر بڑا ہوگا اوسکے ہر ایک ضلع سے

۶ — اگر شکل متوازی الاضلاع کے زاویون سے چار خطوط مستقیمہ متوازی اوسکے

قطرون کے کھینچے جائین تو ایک اور شکل متوازی الاضلاع بنجائیگی جسکا رقبہ
پہلے شکل متوازی الاضلاع کا دو چند ہوگا

۷ ـــ اگر دو مثلثون کے دو ضلعے برابر ہون ہرایک اپنے نظیر کے اور اونکے
درمیانی زاویے بھی برابر ہون تو وہ دو مثلث باہم برابر ہون گے

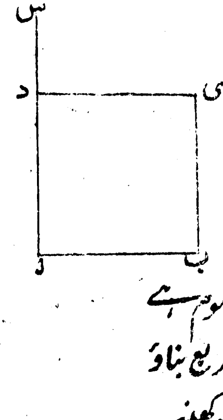
۸ ـــ مثلث معلوم کی تنصیف ایک خط مستقیم سے کرو جو اوسکی ایک ضلع مین نقطہ
معلومہ سے کھینچا جاوے

۹ ـــ اگر مثلث ا ب س کا قاعدہ نقطہ د تک اس طرح خارج کیا جاوے کہ ب د
برابر ا ب کے ہو اور خطوط مستقیم ا سے د اور ی تک جو ب س کا نقطہ وسط
ہے کھینچے جائین تو ثابت کرو کہ مثلث ا د ی برابر ہے مثلث ا ب س کے

۱۰ ـــ یہ ثابت کرو کہ جو اشکال متوازی الاضلاع کہ کسی شکل متوازی الاضلاع کے
قطر کے گرد ہون اونکے دو قطر باہم متوازی ہوتے ہین

شکل چہل و ششم عملی

خط مستقیم معلوم پر مربع بناؤ



فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم معلوم ہے
مطلوب یہ ہے کہ ا ب پر ایک مربع بناؤ
ا سے اس ا ب پر عمود کھینچو

اس مین سے ا د = اب قطع کرلو

د سے د ی ‖ ا ب کھینچو

ب سے ب ی ‖ ا د کھینچو

تو ا ی شکل متوازی الاضلاع ہے

اور ∴ ا ب = ی د اور ا د = ب ی

لیکن ا ب = ا د

∴ ا ب ب ی ی د د ا سب آپسمین برابر ہین

∴ ا ی متساوی الاضلاع ہے

اور ∠ ب ا د قائمہ ہے

∴ ا ی مربع ہے (ح ۲۴)

اور یہ ا ب پر بنا ہے — ہب

مثالین

۱— ایک شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ ایسی بناؤ جسکے ضلع دو خطوط مستقیمہ معلومہ کے برابر ہوں

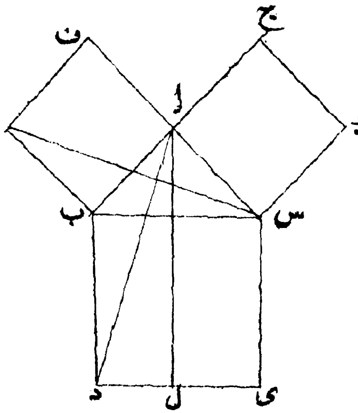
۲— یہ ثابت کرو کہ جو مربعات خطوط مستقیمہ متساویہ پر ہون وہ باہم برابر ہون گے

۳— یہ ثابت کرو کہ مربعات متساویہ خطوط مستقیمہ متساویہ پر ہوتے ہین —

ل واضح ہو کہ مثال ۲ و ۳ کہ اشکال نظریہ ہین انھین اقلیدس نے شکل ۴۸ کے ثبوت مین مسلم کرلیا ہے ش الف م ۲ بھی ملاحظہ طلب ہے ۱۲ منہ

شکل چہل و ہفتم نظری

مثلث قائم الزاویہ کے وتر قائمہ پر جو مربع بنایا جاے وہ برابر ہوتا ہے اون مربعوں کے جو اون اضلاع پر ہوں جنکے درمیان زاویہ قائمہ ہے



فرض کرو کہ ا ب س مثلث قائم الزاویہ ہے اور اوسمین ب ا س زاویہ قائمہ ہے

تو ب س کا مربع = مجموع مربع ب ا و ا س

ب س س ا ا ب پر مربعات ب د ی س س ك ج ا ا ج ف ب بناؤ

اسے ا ل ∥ ب د یا س ی کھینچو اور ا د ف س کو ملا دو

تواب ∵ ∠ ب ا س و ∠ ب ا ج دونوں قائمے ہیں

∴ س ا ج ایک خط مستقیم ہے (ش ۱۴ م ۱)

اور ∵ ∠ ب ا س و ∠ س ا ح دونوں قائمے ہیں

∴ ب ا ح ایک خط مستقیم ہے (ش ۱۴ م ۱)

تو اب ∵ ∠ د ب س = ∠ ف ب ا کیونکہ انمین سے ہر ایک قائمہ ہے

انمین سے ہر ایک پر ∠ ا ب س زیادہ کردو

∴ ∠ ا ب د = ∠ ف ب س

تو △ ا ب د و ف ب س مین

∵ ا ب = ف ب اور ب د = ب س اور ∠ ا ب د = ∠ ف ب س

∴ △ ا ب د = △ ف ب س (ش ۴ م ۱)

اب دیکھیے کہ ▱ ب ل دوچند ہے △ ا ب د کا کیونکہ وہ ایک ہی قاعدہ ب د پر اور ایک ہی خطوط متوازیہ ا ل ب د کے درمیان واقع ہین (ش ۴۱ م ۱)

اور مربع ب ج دوچند ہے △ ف ب س کا کیونکہ یہ بھی ایک ہی قاعدہ ف ب پر اور ایک خطوط متوازیہ ف ب ج س کے درمیان واقع ہین (ش ۴۱ م ۱)

∴ ▱ ب ل = مربع ب ج

اسی طرح سے ا ی ب ك کے ملا دینے سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

▱ س ل = مربع ا ك

تو اب مربع ب س کا = مجموع ▱ ب ل و ▱ س ل

= مجموع مربع ب ج و مربع ا ك

= مجموع مربعین ب ا و ا س ہے

مثالین

۱ — ثابت کرو کہ جو مربع کہ مربع معلوم کی قطر پر بنایا جائے وہ برابر ہوتا ہے دوچند مربع معلوم کے

۲ — ایسا خط بتلاؤ جسکا مربع برابر ہو مجموع مربعات کے جو تین خطوط مستقیمہ

معلومہ پر بنائے جائین

۳۔ اگر مثلث کا ایک زاویہ اور دو زاویون کے مجموع کے برابر ہو اور اوس کا ایک ضلع جو اس زاویہ کو محیط ہے چار اجزار متساویہ مین تقسیم کیا جاسے تو دوسرا ضلع ان اجزار متساویہ مین سے تین جزؤن کو محیط ہوگا اور باقی ضلع اوس مثلث کا ایسے پانچ جزؤن کو محیط ہوگا

۴۔ مثلث[1] ا ب س و د ی ف مین زاویہ ا س ب و د ف ی قائمہ ہین اور اضلاع اَب اس اضلاع د ی د ف کے برابر ہین ہر ایک اپنی نظیر کے تو ثابت کرو کہ یہ مثلث بہمہ وجوہ برابر ہین

۵۔ خط مستقیم معلوم کو دو جزؤن مین اس طرح تقسیم کرو کہ ایک جزر کا مربع دوچند ہو دوسرے جزر کے مربع کے

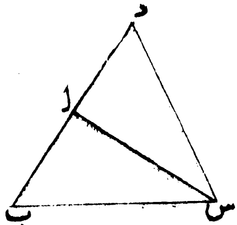
۶۔ اگر مثلث قائم الزاویہ کے حادتین مین سے ایک حادہ سے ایک خط ضلع مقابل تک کھینچا جائے تو اس ضلع کا مربع اور اس خط کا مربع ملکر برابر ہون گے مجموع اون مربعات کے جو زاویہ قائمہ کے متصل قطعہ پر اور وتر قائمہ پر ہون

۷۔ اگر مثلث کے راس الزاویہ سے اوسکے قاعدے پر عمود کھینچا جائے تو ضلعون پر کے مربعون کا تفاوت برابر ہوگا اون مربعات کے تفاوت کے جو قطعات قاعدہ پر ہین

[1] یہ شکل نظری شکل ی کا نتیجہ صریح ہے اور اوس سے مستنبط ہو چکی ہے ۱۲ منہ

شکل چہل و ہشتم نظری

اگر مثلث کے ایک ضلع کا مربع برابر ہو اوسکے اور دو ضلعون کے مربعون کو توان ضلعون کا زاویہ درمیانی زاویہ قائمہ ہوگا



فرض کرو کہ △ ا ب س کے ایک ضلع ب س کا مربع برابر ہے مجموع مُربّعین ا ب و ا س کے

تو ∠ ب ا س زاویہ قائمہ ہوگا

نقطہ ا سے ا د عمود ا س پر کھینچو

ا د = ا ب کے کر لو اور د س کو ملا دو

تو ∵ ا د = ا ب

∴ مربع ا د = مربع ا ب (ش ۴۶ مثال ۲ م ۱)

ان مین سے ہر ایک پر مربع ا س زیادہ کرو

تو مجموع مُربعین ا د و ا س = مجموع مربّعین ا ب و ا س

لکن مربع د س کا = مجموع مربعین ا د و ا س (ش ۴۷ م ۱)

مربع ب س = مربعین ا ب و ا س بموجب فرض کے

∴ مربع د س کا = مربع ب س

∴ د س = ب س (ش ۴۶ مثال ۳ م ۱)

تو اب △ ا ب س ا د س مین

∵ ا ب = ا د اور ا س مشترک ہے اور ب س = د س

∴ ∠ ب ا س = ∠ د ا س (شکل ش ۱۲)

اور ∠ د ا س زاویہ قائمہ ہے بموجب عمل کے

∴ ∠ ب ا س زاویہ قائمہ ہے — ہب

تمت

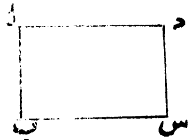
تمام شد مقالۂ اوّل

مقالہ دوم

مقدمہ

واضح ہو کہ اس مقالہ مین اشکال ہندسیہ مین سے خاص کرکے شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ سے بحث کی ہے۔ شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کو کہتے ہین کہ وہ اپنے دو متصل ضلعون سے محاط ہے یعنے گھری ہے

مثلاً اگر اب س د شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ ہے تو کہتے ہین کہ وہ اب و اد سے یا اور دو متصل ضلعون سے گھری ہے



ہم شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کا مخفف لئے اب اد لکھین گے اور اس سے ہماری مراد یہ ہوگی کہ شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ جو اب و اد سے گھری ہے

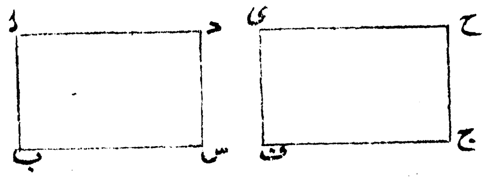
یہ شکل نظری ہے جسے ہم ذیل مین ثابت کرتے ہین اقلیدس نے استعمال کی ہے لکن ثابت نہین کیا ہم اس سے اکثر استدلال کرینگے

شکل الف نظری

اگر ایک شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کے متصل ضلعے برابر ہون دوسری کے متصل ضلعون کے ہر ایک اپنی نظیر کے تو اون دونون کا رقبہ برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ   ا ب س د اور ی ف ج ح دو متوازی الاضلاع قائمۃ الزاویہ ہین

اور فرض کرو کہ   ا ب = ی ف اور ب س = ف ج



تو لع ا ب س د = لع ی ف ج ح ہے

اسواسطے کہ اگر لع ی ف ج ح لع ا ب س د پر اس طرح رکھدیا جاے کہ

ی ف ا ب پر منطبق ہوجاے

تو ف ج ب س پر واقع ہوگا ∵ ی ف ج = ∠ ا ب س

اور ج س پر منطبق ہوجائیگا ∵ ب س = ف ج

اسی طرح سے یہ ثابت ہوسکتا ہے کہ ح د پر منطبق ہوگا

∴ لع ی ف ج ح لع ا ب س د پر منطبق ہوگا

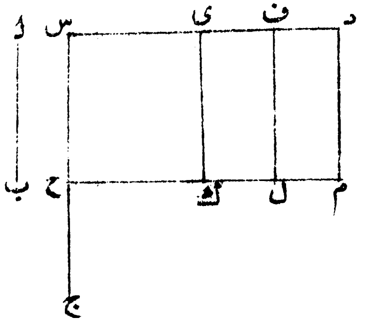
∴ اوسکے برابر ہوگا — ھب

شکل اول نظری

اگر دو خطوط مستقیمہ مین سے ایک خط کئی جزون پر منقسم ہو تو سطح[1] اون دو خطوط مستقیمہ کی برابر ہوگی اون سب سطحون کے جو خط غیر منقسم اور خط منقسم کے ہر جزو سے بنتی ہے

---

[1] شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کو اصطلاح اہل ہندسہ مین سطح بھی کہتے ہین
یہ تغایر لفظی موجب تشویش و اشتباہ نہو ۱۲



فرض کرو کہ اب و س د دو خط مستقیم ہین

اور س د کو کتنے ہی جزون مین ی اور ف پر تقسیم کیا

تو لع اب س د = مجموع لع اب س ی اور لع اب ی ف اور لع اب ف د

س سے س ج س د پر عمود کھینچو اور س ج مین سے س ح = اب کے قطع کرلو

ح سے ح م ‖ س د کھینچو (ش ۳۱ م ۱)

ی و ف و د سے ی ك و ف ل و د م ‖ س ح کھینچو

تو س م = مجموع س ك و ی ل و ف م

اور س م = لع اب س د ∵ س ح = اب

س ك = لع اب س ی ∵ س ح = اب

ی ل = لع اب ی ف ∵ ی ك = اب

ف م = لع اب ف د ∵ ف ل = اب

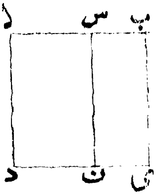
∴ لع اب س د = مجموع لع اب س ی اور لع اب ی ف اور لع اب ف د

ہب

مثال اگر دو خطوط مستقیمہ مین سے ہر ایک خط کئی جزون مین منقسم ہو تو سطح ان دو خطون کی برابر ہوگی اون سطوح کے جو تمام اجزا خط اول اور کل اجزا خط ثانی سے فرداً فرداً حاصل ہون

شکل دوم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو جزون مین منقسم ہو تو وہ سطحین جو کل خط اور اوسکے ہر جزء سے بنی ہین برابر ہون گے کل خط کے مربع کے



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر دو جزون مین تقسیم کیا گیا
تو مربع اب کا = مجموع لع اب اس اور لع اب س ب

اب پر مربع ا د ی ب بناؤ (ش ۴۶ م ۱)
س سے س ت ۱۱ اب دکھینچو (ش ۳۱ م ۱)

تو ای = مجموع ات و س ی
اور ای مربع ہے اب کا

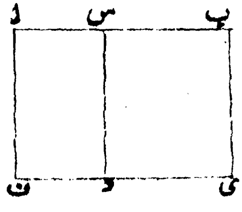
اون = لع اب اس   ∵ اد = اب
س ی = لع اب س ب   ∵ ب ی = اب

∴ مربع اب کا = مجموع لع اب اس اور لع اب س ب ــ ہب

مثال ہر خط مستقیم کا مربع چوگنا ہوتا ہے اوسکے نصف کے مربع سے

شکل سوم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو جزون مین تقسیم کیا جاسے تو سطح کل خط اور اوسکا ایک جزو کی برابر ہوگی اوس سطح کے جو اون دونون جزون سے حاصل ہو مع مربع جزو مذکور کے



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر دو جزون مین تقسیم کیا گیا

تو لع اب س ب = مجموع لع اس س ب و مربع س ب

س ب پر مربع س دی ب بناؤ (ش ۴۶ ۱۳).

اسے اف اا س د کھینچو جو ی د سے بعد الاخراج ف پر ملے

تو ا ی = مجموع ا د و س ی

اور ا ی = لع اب س ب ∵ ب ی = س ب

ا د = لع اس س ب ∵ س د = س ب

س ی = مربع س ب

∴ لع اب س ب = مجموع لع اس س ب و مربع س ب — ہب

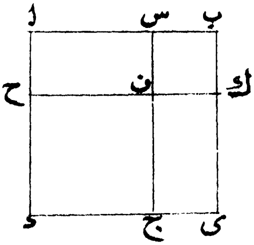
تنبیہ

جب کوئی خط مستقیم ایک نقطہ پر قطع ہوتا ہے تو نقطہ تقاطع اور اطراف خط مذکور کے درمیان جو ابعاد ہین اونھین اوس خط کے **قطعات** کہتے ہین مثلاً — اگر خط اب نقطہ س پر تقسیم کیا جاسے تو اس اور س ب قطعات

داخلہ اب کے کہلائینگے
اور اگر خط اس ب تک خارج کیا جاے تو اب وس ب **قطعات خارجہ** اس کے کہلائینگے

شکل چہارم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو جزون مین تقسیم کیا جائے تو کل خط کا مربع برابر ہوگا دونون جزون کے مربعون کے مع دو چند اوس سطح کے جو اون جزون سے حاصل ہو



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر دو جزون مین تقسیم کیا گیا
تو مربع اب کا = مجموع مربعین اس وس ب اور دو چند لع اس س ب
اب پر مربع ا د ی ب بناؤ (ش ۶ ۴ م ۱)
ا د مین سے اح = س ب قطع کرلو تو ح د = اس
س ج ||| ا د کھینچو اور ح ك ||| اب جو س ج سے ف پر ملے
تو ∵ ب ك = اح ∴ ب ك = س ب
∵ ب ك ك ف ف س س ب سب برابر ہین اور ك ب س زاویہ قائمہ ہے
∴ س ك س ب پر مربع ہے (ح ۳۰)
ونیز ح ج = مربع اس ∵ ح ف وح د ہر ایک = اس

اور ای = مجموع ح ج و س لک و لف و ف ی

اور ای = مربع اب

ح ج = مربع اس

س لک = مربع س ب

لف = لع اس س ب   ∵ س ف = س ب

ف ی = لع اس س ب   ∵ ف ا ج = اس اور ف لک = س ب

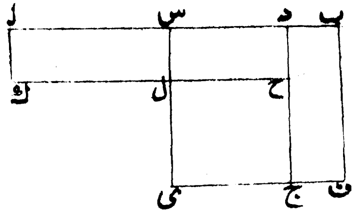
∴ مربع اب کا = مجموع مربعین اس و س ب مع دو چند لع اس س ب

ہے

مثال — ایک مثلث کا راس الزاویہ قائمہ ہے اوسکے اندر ایک خط مستقیم راس الزاویہ سے قاعدہ پر عمود کھینچا تو ثابت کرو کہ قطعات قاعدہ کی سطحین برابر ہین عمود کے مربع کے

شکل پنجم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو مساوی اور دو غیر متساوی جزون مین تقسیم کیا جاسے تو اجزا غیر متساویہ کی سطح مع اوس خط کے مربع کے جو نقاط تقطیع کے درمیان مین ہے برابر ہوگی نصف خط مذکور کے مربع کے



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر اجزاء متساویہ اور د پر اجزاء غیر متساویہ مین تقسیم کیا گیا

تو لع ا د د ب مع مربع س د کے = مربع س ب

س ب پر مربع س ی ف ب بناؤ (ش ۴۶ م ۱)

د ج ‖ س ی کھینچو اور د ج مین سے د ح = د ب قطع کرلو

ح ل ك ‖ ا د کھینچو اور ا ك ‖ د ح

تو لع د ف = لع ا ل ∵ ب ف = ا س اور ب د = س ل

ونیز ل ج = مربع س د ∵ ل ح = س د اور ح ج = س د

تو لع ا د د ب مع مربع س د

= ا ح مع ل ج

= مجموع ا ل و س ح و ل ج

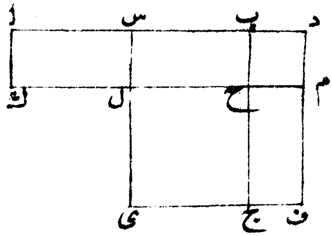
= مجموع د ف و س ح و ل ج

= س ف

= مربع س ب ــــ ہب

شکل ششم نظری

اگر ایک خط مستقیم کی تنصیف کی جاسے اور وہ کسی نقطے تک خارج کیا جای تو جو سطح کہ کل خط مخرج اور اوسکے جزء مخرج سے گھری ہے وہ مع مربع نصف خط منصف کے برابر ہوگی اوس خط مستقیم کے مربع کے جو اوس نصف اور جزء مخرج سے مرکب ہے



فرض کرو کہ اَب خط مستقیم سؔ پر تنصیف کیا گیا اور دؔ تک خارج کیا گیا

تو لع اَدؔ دبؔ مع مربع س ب کے = مربع س د ہے

س د پر مربع س ی ف د بناؤ (ش ۴۶ م ۱)

ب ج ‖ س ی کھینچو اور اوسمین سے ب ح = ب د قطع کرو

ح مین سے ک ل م ‖ ا د کھینچو

ا مین سے اک ‖ س ی کھینچو

تو اب ∵ ب ج = س د اور ب ح = ب د

∴ ح ج = س ب (رفہ ۳)

∴ لع م ج = لع ال (شکل الف م ۲)

تو لع اَد دبؔ مع مربع س ب کے

= مجموع ا م و ل ج

= مجموع ا ل و س م و ل ج

= مجموع م ج و س م و ل ج

= س ف

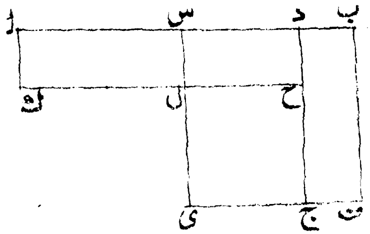
= مربع س د —— ہب

تنبیہ

اس مقام پر ہم ایک ضروری شکل نظری کو ثابت کرتے ہین اس شکل کو اکثر بمنزلہ نتیجہ صریح ش ۵ کے لکھتے ہین

شکل ب نظری

دو خطوط مستقیمہ کے مربعون کا تفاوت برابر ہے اوس سطح کے جو اون خطوط کے مجموع اور اونکے تفاوت سے حاصل ہو



فرض کرو کہ ا س و س د دو خط مستقیم ہین انمین سے ا س بڑا ہے اور فرض کرو کہ یہ دونون خط اس طرح واقع ہوے ہین کہ انسے ایک خط مستقیم ا د بنگیا ہے

ا د کو ب تک خارج کرو اور س ب کو = ا س کرلو

تو ا د = مجموع خطوط ا س و س د

اور ب د = تفاوت خطوط ا س و س د

تو تفاوت مربعین ا س و س د کا = لع ا د د ب ہوگا

س ب پر مربع س ی ت ب بناؤ

دج ۱۱ س ی کھینچو اور اوس مین سے دح = دب قطع کرو

ح ل ك ۱۱ ا د کھینچو اور ا ك ۱۱ دح

تو لع د ف = لع ا ل ∵ ب ف = ا س اور ب د = س ل

ونیز ل ج = مربع س د ∵ ل ح = س د اور ح ج = س د

تو مربعین ا س و س د کا تفاوت

= تفاوت مربعین س ب و س د

= مجموع س ح و د ف

= مجموع س ح و ا ل

= ا ح

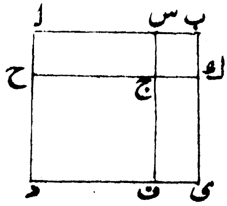
= لع ا د دح

= لع ا د دب — هب

مثال — ثابت کرو کہ ش ۵ و ش ۱۱۶ اس شکل سے مستنبط ہو سکتی ہین

شکل ہفتم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو جزون مین تقسیم کیا جاے تو کل خط اور ایک جزو کے مربعے برابر ہین دو چند اوس سطح کے جو کل خط اور اوس جزو سے گھری ہو مع دوسرے جزو کے مربع کے



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر دو جزون مین تقسیم کیا گیا

تو ثابت کرنا ہے کہ مربع اب و ب س = دو چند لع اب ب س مع مربع اس

اب پر مربع ادی ب بناؤ (ش ۴۶ م ۱)

اد سے اح = س ب قطع کرلو

س ف || اد اور ح ک || اب کھینچو

تو ح ف = مربع اس و س ک = مربع س ب

تو مربعین اب و ب س = مجموع ای و س ک

= مجموع اک و ح ف و ج ی و س ک

= مجموع اک و ح ف و س ی

اب اک = لع اب ب س

س ی = لع اب ب س ∵ ب ی = اب

ح ف = مربع اس

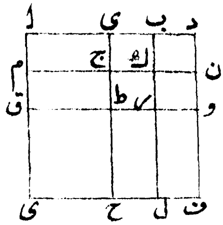
∴ مربعین اب و ب س = دو چند لع اب ب س مع مربع اس۔

ہب

مثال۔ اگر خطوط مستقیم ج سے ب تک اور ج سے د تک کھینچے جائین تو ثابت کرو کہ ب ج د ایک خط مستقیم ہے

شکل ہشتم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو جزون مین تقسیم کیا جائے تو چہار چند سطح کل خط اور ایک جزو کے مع دوسرے جزو کے مربع کے برابر ہے اوس خط کے مربع کے جو کل خط مذکور اور پہلے جزو سے مرکب ہو



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر دو جزون مین تقسیم کیا گیا

اب کو د تک خارج کرو اسطرح سے کہ ب د = ب س

تو چارچند لع اَب بَ س مع مربع اس کے = مربع اد ہوگا

اد پر مربع ای ف د بناؤ (ش ۴۶ م ۱)

ای سے ام و م ق ہر ایک = س ب قطع کرلو

س و ب سے س ح و ب ل ||ای کھینچو

م و ق سے م ج ك ن و ق ط ر و || اد کھینچو

تو اب ∵ ق ی = اس اور ق ط = اس ∴ ق ح = مربع اس

ونیز لج = م ط = ط ل = رف (شکل الف م ۲)

اور س ك = ج ر = ب ن = ك و (شکل الف م ۲)

∴ مجموع ان آٹھہ سطحون کا

= چہار چند مجموع لع اَج سَ ك

= چہار چند اك

= چہار چند لع اَب بَ س

تو چہار چند لع اَب بَ س اور مربع اس

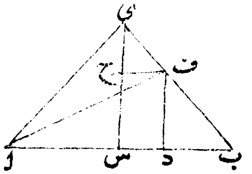
= مجموع ان آٹھہ سطحون اور ق ح

= ای ف د

= مربع اد – ہب

شکل نہم نظری

اگر ایک خط مستقیم دو مساوی اور دو غیر متساوی جزؤن مین تقسیم کیا جای تو دو غیر متساوی جزون کے مربعے ملکر دو چند ہوتے ہین نصف خط کے مربع کے اور اوس خط کے مربع سے جو درمیان نقاط تقطیع کے ہے



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر اجزاء متساویہ مین اور د پر اجزاء غیر متساویہ مین تقسیم کیا گیا

تو مجموع مربعین اد و دب کا = دوچند مجموع مربعین اس و س د ہوگا

س ی = اس اب پر عمود کھینچو اور ی ا و ی ب کو ملا دو

د ف اب پر عمود کھینچو کہ وہ ی ب سے ف پر ملے

ف ج ی س پر عمود کھینچو اور اف کو ملا دو

تو ∵ ∠ اس ی ایک قائمہ ہے (ش ۳۲ م ۱)

∴ مجموع ∠ ای س و ∠ ی اس = ایک قائمہ

اور ∵ ∠ ای س = ∠ ی اس (شکل الف م ۱)

∴ ∠ ای س = نصف قائمہ

اسی طرح سے ∠ ب ی س و ∠ ی ب س ہر ایک = نصف قائمہ

لہذا ∠ ا ی ف ایک قائمہ ہے

ونیز ∵ ∠ ج ی ف نصف قائمہ ہے اور ∠ ی ج ف ایک قائمہ ہے

∴ ∠ ی ف ج نصف قائمہ ہے ∴ ی ج = ج ف (نتیجہ صریح ش ۵ م ۱)

اسی طرح سے ∠ ب ف د نصف قائمہ ہے اور ب د = د ف

تو اب مجموع مربعین ا د و د ب

= مربع ا د مع مربع د ف

= مربع ا ف

= مربع ا ی مع مربع ی ف

= مربعین ا س و ی س مع مربعین ی ج و ج ف (ش ۴۷ م ۱)

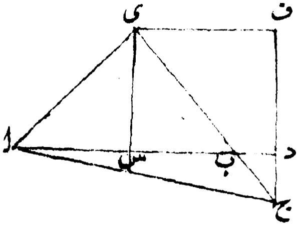
= دوچند مربع ا س مع دوچند مربع ج ف

= دوچند مربع ا س مع دوچند مربع س د — ھ ب

مثال — اگر ایک مثلث ا ب ا س مین ایک خط مستقیم ا د اس طرح کھینچا جاسے کہ وہ ب س کو د پر تنصیف کرے تو یہ ثابت کرو کہ مجموع مربعین ا ب و ا س کا برابر ہے دوچند مجموع مربعین ا د و ب د کے

شکل دہم نظری

اگر ایک خط مستقیم تنصیف کیا جاے اور کسی نقطہ تک خارج کیا جاسے تو مربع کل خط مخرج کا مع مربع جزو مخرج کے دوچند ہوتا ہے مربع نصف خط منصف کا اور اوس خط کے مربع کا جو اس نصف اور جزو مخرج سے مرکب ہے



فرض کرو کہ اب خط مستقیم س پر تنصیف کیا گیا اور د تک خارج کیا گیا
تو مجموع مربعین اد و ب د کا = دوچند مجموع مربعین اس و س د ہوگا
اب پر س ی عمود کھینچو اور س ی کو = اس کرلو
ی ا و ی ب کو ملادو اور ی ف ॥ اد اور د ف ॥ س ی کھینچو

تو ∵ ∠ ف ی ب و ی ف د ملکر دو قائمون سے کم ہین
∴ اگر ی ب و ف د ب د کیطرف خارج کئے جائین تو وہ کسی نقطہ ج پر ملجائینگے
اج کو ملادو

تو ∵ ∠ اس ی قائمہ ہے
∴ ∠ ی اس و ا ی س ملکر = ایک قائمہ
اور ∵ ∠ ی اس = ∠ ا ی س (شکل الف م ۱)
∴ ∠ ا ی س = نصف قائمہ

اسی طرح سی ∠ ب ی س = نصف قائمہ
لہذا ∠ د ب ج جو = ∠ ی ب س کے ہے نصف قائمہ ہے
∴ ∠ ب ج د نصف قائمہ ہے
∴ ب د = د ج

پھر ∵ ∠ ف ج ی یا ∠ ف ی ج = نصف قائمہ اور ∠ ی ف ج قائمہ ہے

∴ ∠ ف ی ج = نصف قائمہ اور ی ف = ف ج

∴ مجموع مربعین ا د و د ب

= مجموع مربعین ا د و د ج

= مربع ا ج (ش ۴۷ م ۱)

= مربع ا ی مع مربع ی ج

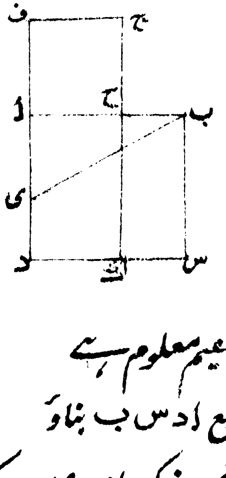
= مربعین ا س و ی س مع مربعین ی ف و ف ج (ش ۴۷ م ۱)

= دوچند مربع ا س مع دوچند مربع ی ف

= دوچند مربع ا س مع دوچند مربع س د — ہ ب

شکل یازدہم عملی

خط مستقیم معلوم کو ایسے دو جزوں میں تقسیم کرو کہ سطح کل خط اور ایک جز کی برابر ہو دوسرے جز کے مربع کے



فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم معلوم ہے

ا ب پر مربع ا د س ب بناؤ (ش ۴۶ م ۱)

ا د کو ی پر تنصیف کرو اور ی ب کو ملا دو

دا کو ف تک خارج کرو اور ی ف کو = ی ب کرو

اف پر مربع اف ج ح بناؤ

تو آب ح پر اس طرح تقسیم ہو گیا کہ لع آب ب ح = مربع اح

ج ح کو ك تک خارج کرو

تو ∵ دا ی پر تنصیف ہوا ہے اور ف تک خارج کیا گیا ہے

∴ لع دف ف ا مع مربع ای

= مربع ی ف (ش ۶ م ۲)

= مربع ی ب ∵ ی ب = ی ف

= مجموع مربعین اب و ای (ش ۴۷ م ۱)

انمین ہر ایک سے مربع ای نکال ڈالو

تو لع دف ف ا = مربع اب

لکن ف ك = لع دف ف ا ∵ ف ج = ف ا

∴ ف ك = اس

ہر ایک مین سے اك جزو مشترک نکال ڈالو

تو ف ح = ح س

یعنی مربع اح = لع آب ب ح ∵ ب س = اب

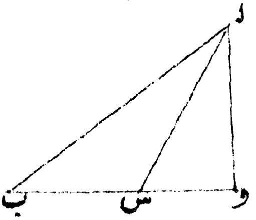
پس اب ح پر موافق مطلوب کے تقسیم کیا گیا — ہب

مثال یہ ثابت کرو کہ مربعی کل خط اور ایک جزو کے برابر ہوتی ہین سہ چند مربع دوسری جزو کی

شکل دوازدہم نظری

اگر مثلثات منفرجۃ الزاویہ مین احد الحادتین سے ضلع مقابل پر بعد الاخراج عمود کھینچا جائے تو زاویہ منفرجہ کے ضلع مقابل کا مربع بڑا ہوگا اوسکے اضلاع

محیط کے مربعون سے بقدر دو چند اوس سطح کے جو اوس ضلع سے گھری ہے جسپر
بعد الاخراج عمود واقع ہوا ہے اور اوس خط مستقیم سے جو مثلث کے باہر
عمود اور زاویہ منفرجہ کے درمیان مین واقع ہے



فرض کرو کہ ا ب س △ منفرج الزّاویہ ہی اور اسمین ∠ ا س ب زاویہ منفرجہ ہے
ا سے ا د ب س پر بعد الاخراج عمود کھینچو

تو مربع ا ب کا بڑا ہوگا مجموع مربعین ب س و س ا سے بقدر دو چند لع ب س س د کر
کیون ∵ ب د س پر دو جزون مین تقسیم کیا گیا ہے
∴ مربع ب د = مجموع مربعین ب س و س د اور دو چند لع ب س س د (ش ۴ م ۲)

انمین سے ہر ایک پر مربع د ا زیادہ کردو
تو مجموع مربعین ب د و د ا = مجموع مربعات ب س و س د و د ا اور دو چند
لع ب س س د
لکن مربعین ب د و د ا = مربع ا ب (ش ۴۷ م ۱)
اور مربعین س د و د ا = مربع س ا (ش ۴۷ م ۱)
∴ مربع ا ب = مجموع مربعین ب س و س ا اور دو چند لع ب س س د

∴ مربع اب بڑا ہے مجموع مربعین ب س و س ا سے بقدر دوچند
لع ب س س د ۔ ہب

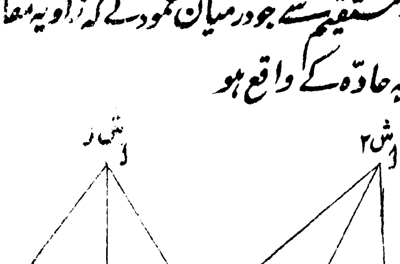
مثالین

۱۔ شکل منحرف کے قطرون پر کے مربعے ملکر برابر ہوتے ہین اوسکے اون دو ضلعون کے مربعون سے کے جو متوازی نہین ہین اور دوچند سطح اون ضلعون کے جو متوازی ہین ۔

۲ ۔ اگر ا ب س مثلث متساوی الاضلاع ہو اور ا د و ب ی عمود اضلاع مقابل پر جو نقطہ ف پر متقاطع ہین واقع ہون تو یہ ثابت کرو کہ مربع ا ب برابر ہے سہ چند مربع ا ف کے

شکل سیزدہم نظری

ہر مثلث مین مربع اوس ضلع کا جو زوایائے حادہ مین سے کسی زاویے کے مقابل ہو کم ہوتا ہے بہ نسبت اون ضلعون کے مربعون کے جو زاویہ مذکورہ پر محیط ہین بقدر دوچند اوس سطح کے جو ان مین سے ایک ضلع سے گھری ہو اور اوس خط مستقیم سے جو درمیان عمود کے کہ زاویہ مقابل سے اوسپر کھینچا جائے اور اوس زاویہ حادہ کے واقع ہو



فرض کرو کہ ا ب س ایک △ ہے اور اوسمین ∠ ا ب س حادہ ہے
اسپر ا د ب س پر بدون اخراج یا بعد الاخراج عمود کھینچو
تو مربع ا ب کم ہوگا مجموع مربعین ا ب و ب س سے بقدر دوچند لع ب س
ب د کے

اسواسطیکہ شکل مین ب س د پر دو جزون مین منقسم ہوا ہے
اور شکل ۲ مین ب د س پر دو جزون مین منقسم ہوا ہے

∴ دونون صورتون مین
مجموع مربعین ب س و ب د = مجموع دوچند لع ب س ب د اور مربع س د
(ش ۷ م ۲)

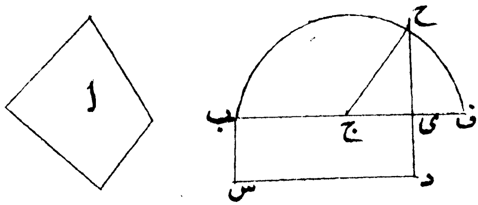
انمین سے ہر ایک پر مربع د ا زیادہ کردو
تو مجموع مربعات ب س ب د د ا = مجموع دوچند لع ب س ب د و
مربعین س د و د ا
∴ مجموع مربعین ب س و ا ب = مجموع دوچند لع ب س ب د
و مربع ا س (ش ۴۷ م ۱)
∴ مربع ا س کم ہے بہ نسبت مجموع مربعین ا ب و ب س کے بقدر
دوچند لع ب س ب د کے

جس صورت مین کہ عمود ا د ا س پر منطبق ہوجاوے اوسکے ثابت
کرنے کی کچھ ضرورت نہین ہے — ہب

مثال — ثابت کرو کہ مجموع مثلث کے دو ضلعون کے مربعون کا برابر ہوتا ہے
دوچند مجموع مربع نصف قاعدہ کے اور اوس خط کے مربع کے جو راس الزاویہ
کو نقطہ وسط سے وصل کرتا ہے

شکل چہاردہم عملی

ایسا مربع بناؤ جو شکل مستقیم الاضلاع معلوم کے برابر ہو



فرض کرو کہ ا شکل مستقیم الاضلاع معلوم ہے

مطلوب یہ ہے کہ ایسا مربع بناؤ جو = شکل ا کے ہو

ب س د ی ▭ قائم الزوایہ = ا بناؤ (ش ۴۵ م ۱)

تو اگر ب ی = ی د کے ہے تو ▭ ب س د ی مربع ہے

پس مطلوب حاصل ہے

لیکن اگر ب ی = ی د کے نہین ہے تو ب ی کو ف تک خارج کرو اور

ی ف کو = ی د کر لو

ب ف کو ج پر تنصیف کرو اور مرکز ج سے ج ب کے بعد پر —

ب ح ف نصف دائرہ بناؤ

د ی کو ح تک خارج کرو اور ج ح کو ملا دو

تو اب ∵ ب ف ج پر اجزا متساویہ مین منقسم ہوا ہے اور ی پر اجزا غیر متساویہ مین

∴ لع ب ی ی ف مع مربع ج ی کے

= مربع ج ف (ش ۵ م ۱)

= مربع ج ح

= مجموع مربعین ی ح و ج ی (ش ۴۷ م ۱)

ان مین ہر ایک سے مربع ج ی نکال ڈالو

تو لع ب ی ی ف = مربع ی ح

لکن لع ب ی ی ف = ب د ∵ ی ف = ی د

∴ مربع ی ح = ب د

∴ مربع ی ح = شکل مستقیم الاضلاع ا — ھب

مثالین

۱ — ایسی شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ بناؤ جو مربع معلوم کے برابر ہو اور اوسکا ایک ضلع خط مستقیم معلوم کے برابر ہو

۲ — خط مستقیم معلوم کو دو جزون مین اس طرح تقسیم کرو کہ جو سطح اون سے گھری ہے وہ برابر ہو اوس خط مستقیم کے مربع کے جو نصف خط مقسّم سے چھوٹا ہے

متفرق مثالین متعلق بہ مقالہ دوم

۱ — ایک مثلث مین جسکا راس الزاویہ قائمہ ہے ایک خط مستقیم راس المثلث سے قاعدہ پر عمود کھینچا تو ثابت کرو کہ مربع احد الاضلاع متصلہ زاویہ قائمہ کا برابر ہے اوس سطح کے جو مثلث کے قاعدہ سے اور اوسکے اوس قطعہ سے ہو جو اوس ضلع سے متصل ہے گھری ہے

۲ — متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کے قطرون پر کے مربعے ملکر برابر ہوتے ہین

اوسکے چارون ضلعون کے مربعون کے

۳ — ا ب س د ایک شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ ہے اور نقطہ د اوسکے اندر یا اوسکے باہر واقع ہے تو ثابت کرو کہ مجموع مربعین و ا و و س کا برابر ہے مجموع مربعین و ب و و د کے

۴ — اگر احد الاقطار شکل متوازی الاضلاع برابر ہو اون ضلعون مین سے ایک ضلع کے جو شکل مذکور کے زاویہ مقابل کے گرد واقع ہین تو اوس قطر کا مربع چھوٹا ہوگا دوسری قطر کے مربع سے بقدر دو چند اوس مربع کے جو دوسرے ضلع پر کہ اوسی زاویہ مقابل کے گرد ہے واقع ہو

۵ — ا ب خط مستقیم معلوم کو س تک اسطرح خارج کرو کہ جو سطح مجموع ا ب و ا س اور اونکے تفاوت سے حاصل ہو وہ ایک مربع معلوم کے برابر ہو

۶ — ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کے قطرون پر کے مربعون کا مجموع کم ہوتا ہے اوسکے چار ضلعون کے مربعون سے بقدر چار چند اوس خط کے مربع کے جو نقاطِ وسط اقطار مین واصل ہو

۷ — اگر راس المثلث سے ایک عمود کھینچین اور اوسکا مربع برابر ہو اوس سطح کے جو قطعات قاعدہ مثلث سے گھری ہے تو راس الزاویہ قائمہ ہوگا

۸ — ایک خط مستقیم معلوم کو اس طرح خارج کرو کہ سطح کل خط مخرج کی اور ایک اور خط مستقیم معلوم کی برابر ہو مربع جزء مخرج کے ۔

۹ — ا ب س مثلث قائم الزاویہ مین ا قائمہ ہے اور وتر قائمہ مین دو نقطے د ی ایسے فرض کئے کہ ب د = ب ا اور س ی = س ا تو ثابت کرو کہ مربع د ی کا برابر ہے دو چند سطح ب ی س د کے

۱۰— ذوات الاربعة الاضلاع کے قطرون پر کے مربعے ملکر برابر ہو تے ہین دو چند
مجموع مربعات اون خطوط مستقیمہ کے جو شکل مذکور کے اضلاع متقابل کے
نقاط وسط مین واصل ہون —

۱۱— اگر مثلث کے ہر زاویہ سے خطوط مستقیمہ نکلکر اضلاع مقابل کی تنصیف
کرین تو چار چند اون مربعات کا جو ان خطوط پر ہون برابر ہو گا سہ چند مجموع مربعات
اضلاع مثلث کے

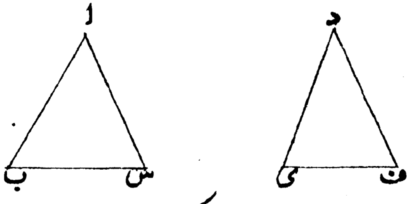
۱۲— س د اب پر جو مثلث ا ب س کا ایک ضلع ہے عمود کھینچا اور
ضلع ا س = ا ب تو ثابت کرو کہ مربع س د کا برابر ہے مربع ب د
کے مع دو چند سطح ا د د ب کے فقط

شکل ۲۵م ا کا دوسری طرح سے ثبوت

فرض کرو کہ △ اب س و دی ف میں اب = دی اور اس = دف

مگر ∠ ب اس بڑا ہے ∠ ی دف سے

تو ب س بڑا ہوگا ی ف سے



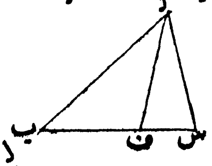
△ دی ف کو △ اب س پر چسپان کرو

اسطرح سے کہ دی اب پر منطبق ہو جائے

تو ∵ ∠ ی دف چھوٹا ہے ∠ ب اس سے

دف درمیان ب ا و اس کے واقع ہوگا

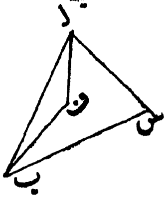
اور ف یا عین ب س پر واقع ہوگا یا اوسکے اوپر یا اوسکے نیچے



۱- اگر ف عین ب س پر واقع ہو

تو ب ف چھوٹا ہو ب س سے

∴ ی ف چھوٹا ہے ب س سے



۲- اگر ب س کے اوپر واقع ہو

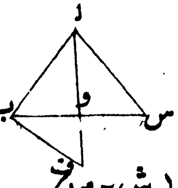
تو ب ف و ف ا ملکر چھوٹے ہیں ب س و س ا سے

اور ف ا = س ا

∴ ب ف چھوٹا ہے ب س سے

∴ ی ف چھوٹا ہے ب س سے

۳ — اگر ف ب س کے نیچے واقع ہو



تو فرض کرو کہ اف ب س کو و پر قطع کرتا ہے

تو ب و و ف ملکر بڑے ہین ب ف سے (ش ۲۰ م ۱)

اور و س و ا و .... ا س سے (ش ۲۰ م ۱)

∴ ب س و ا ف .... ب ف و ا س کے مجموع سے

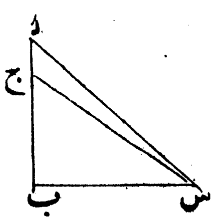
اور ا ف = ا س

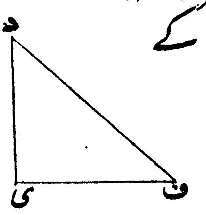
∴ ب س بڑا ہے ب ف سے

اور ∴ ی ف چھوٹا ہی ب س سے — ہب

ثبوت شکل بست و ششم برطبق اقلیدس

اگر دو مثلثون مین سے ایک مثلث کے دو زاویے برابر ہون دوسرے مثلث کے دو زایون کے ہر ایک اپنے نظیر کے اور ایک ایک ضلع ہر ایک کا برابر ہو یعنے یا وہ ضلعے برابر ہون جو برابر زاویون سے متصل ہین یا وہ ضلعے جو زاویاے متساویہ کے مقابل ہین تو اور ضلعے بھی باہم برابر ہون گے ہر ایک اپنے نظیر کے اور تیسرا زاویہ ایک مثلث کا برابر ہوگا دوسرے مثلث کے تیسرے زاویے کے





فرض کرو کہ △ اب س و دی ف مین

∠ اب س = ∠ دی ف اور ∠ اس ب = ∠ دف ی

اور **اولاً** فرض کرو کہ

زوایاے متساویہ کے متصل ضلعے برابر ہین

یعنے ب س = ی ف

تو اب = دی اور اس = دف اور ∠ ب اس = ∠ ی دف

اسواسطیکہ اگر اب = دی نہین ہے توان مین سے ایک بڑا ہوگا

فرض کرو کہ اب بڑا ہے اور ج ب کو = دی کرلو اور ج س کو ملادو

تو △ ج ب س و دی ف مین

∵ ج ب = دی اور ب س = ی ف اور ∠ ج ب س = ∠ دی ف

∴ ∠ ج س ب = ∠ دف ی (ش ۴ م ۱)

لکن ∠ اس ب = ∠ دف ی بموجب فرض کے

∴ ∠ ج س ب = ∠ اس ب

یعنی چھوٹا = بڑے کے یہ غیر ممکن ہے

∴ اب دی سے بڑا نہین ہے

اسی طرح سے یہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ اب دی سے چھوٹا نہین ہے

∴ اب = دی

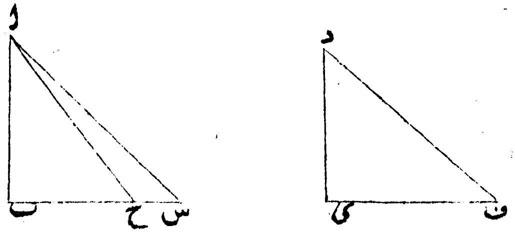
تواب △ اب س و دی ف مین

∵ اب = دی اور ب س = ی ف اور ∠ اب س = ∠ دی ف

∴ اس = دف اور ∠ ب اس = ∠ ی دف (ش ۴ م ۱)

ثانیاً- فرض کرو کہ ہر مثلث مین زاویہ متساوی یہ سکے مقابل کے ضلعے برابر ہین

یعنی اب = دی



تو اس = دف اور ب س = ی ف اور ∠ ب اس = ∠ ی دف

اس واسطیکہ اگر ب س = ی ف نہین ہے تو فرض کرو کہ ب س بڑا ہے

اور ب ح کو = ی ف کرلو اور اح کو ملا دو

تو △ اب ح و دی ف مین

∵ اب = دی اور ب ح = ی ف اور ∠ اب ح = ∠ دی ف

∴ ∠ اح ب = ∠ دف ی (ش ۴ م ۱)

لیکن ∠ اس ب = ∠ دف ی بموجب فرض کے

∴ ∠ اح ب = ∠ اس ب

یعنی زاویۂ خارجہ △ اح س کا برابر ہے مقابل کے زاویہ داخلہ ∠ اس ب کو

یہ غیر ممکن ہے (ش ۱۶ م ۱)

∴ ب س ی ف سے بڑا نہین ہے

اسی طرح سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ ب س ی ف سے چھوٹا نہین ہے

∴ ب س = ی ف

تو اب △ اب س و دی ف مین

∵ ا ب = د ی اور ب س = ی ف اور ∠ ا ب س = ∠ د ی ف

∴ ا س = د ف اور ∠ ب ا س = ∠ ی د ف ۔ ھب

متفرق مثالین متعلق بہ مقالۂ اول و دوم

۱ ـ ا ب و س د خطوط مستقیمہ متساویہ ایک دوسرے کی تنصیف کرکے زاویے قائمی پیدا کرتے ہین تو یہ ثابت کرو کہ ا س ب د مربع ہے

۲ ـ شکل متوازی الاضلاع کے ایک ضلع مین ایک نقطہ فرض کرکے اوس سے ایسا خط کھینچو کہ وہ اوسے دو مساوی جزون مین تقسیم کردے

۳ ـ دو خطوط متقاطعہ کے درمیان مین ایک نقطہ واقع ہے اوس سے ایک ایسا خط کھینچو کہ وہ خطوط معلومہ پر منتہی ہو جاے اور نقطہ معلومہ پر تنصیف ہو جاے

۴ ـ مثلث متساوی الساقین قائم الزاویہ کے وتر قائمہ پر کا مربع برابر ہوتا ہے چہار چند اوس مربع کے جو ایسے عمود پر ہو جو زاویہ قائمہ سے وتر قائمہ پر کھینچا جای

۵ ـ ایسی شکل معین بناؤ جو مثلث معلوم کے برابر ہو اور اوسکا ہر ایک ضلع اوس مثلث کے ایک ضلع کے برابر ہو

۶ ـ مربع کے قطر اور ایک ضلع مین طولاً تفاوت معلوم ہے سارا مربع بناؤ

۷ ـ دو خط مستقیم نقطہ و پر تقاطع کرکے زاویے قائمی پیدا کرتے ہین اور اوس نقطہ پر ایک پیچ گڑی ہے اور اوس مین دو چھلے ایسے ڈورے سے بندھے ہین کہ وہ گھٹ بڑھ نہین سکتا پس اگر چھلون کو اون دونون خطون پر پھیلائین تو یہ ثابت کرو کہ جب یہ چھلے نقطہ و سے متساوی البعد ہون گے جب یہ باہم بہت قریب ہوجائینگے ـ

۸ ـ ا ب س د شکل متوازی الاضلاع ہے اور ا س و ب د اوسکے قطر نقطہ

و پر متقاطع ہین تو یہ ثابت کرو کہ اگر شکل متوازی الاضلاع ا ب ف و و د س ق پوری بنائی جائین تو جو خط مستقیم کہ ف و ق مین واصل ہو وہ و مین سے گذرے گا

۹ ــ ا ب س د و ی ب س ف دو شکل متوازی اضلاع ایک ہی قاعدہ ب س پر اس طرح واقع ہین کہ س ف ا مین سے گذرا ہے د ف کو ملا دو اور اسے خارج کرکے ب ی سے ملا دو جو ك سے خارج ہوا ہے اور ف ب کو ملا دو اب ثابت کرو کہ مثلث ف ا ب برابر ہے مثلث ف ی ك کے

۱۰ ــ ذوالاضلاع الکثیرہ کے اضلاعِ متبالہ کو خارج کرکے ملا دیا تو ثابت کرو کہ سب زاویے نقاطِ تقاطع پر کے مع چار قائمون کے برابر ہین تمام زوایاے داخلۂ ذو اضلاع کثیرۂ مذکورہ کے

۱۱ ــ ثابت کرو کہ شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ کا محیط ہمیشہ بڑا ہوتا ہے اوسکے برابر مربع کے محیط سے

۱۲ ــ ثابت کرو کہ مسدس متساوی الزوایا کے اضلاع مقابل باہم متوازی ہوتے ہین اگرچہ وہ مساوی نہون اور دو متصل ضلعے اوسکے ملکر برابر ہوتے ہین ضلعین متوازیین کے

۱۳ ــ اگر دو خطوطِ مستقیمہ متساویہ کسی مقام پر تقاطع کرکے زاویے قائمے پیدا کرین تو ثابت کرو کہ رقبہ اوس ذو اربعۃ الاضلاع کا جو ان خطوط کے اطراف کے ملا دینے سے پیدا ہو موافق اور مساوی ہے نصف مربع احد الخطین کے

۱۴ ــ ا س ب و ا د ب دو مثلث ایک ہی قاعدہ ا ب کی ایک ہی جہت مین بناتے تو ثابت کرو کہ اگر ا س = ب د اور ا د = ب س تو س د متوازی ہے ا ب کے لکن اگر ا س = ب س اور ا د = ب د تو س د عمود ہے ا ب پر

۱۵- اب س مثلث قائم الزوایہ کے وتر قائمہ اب مین ایک نقطہ د ایسا بتاؤ کہ د ب برابر ہو اوس عمود کے جو د سے اس پر کھینچا جائے

۱۶- یہ ثابت کرو کہ مثلث متساوی الساقین کا محیط چھوٹا ہوتا ہے اوس مثلث کے محیط سے جسکا رقبہ اوسکے مساوی ہو اور جو ایک ہی قاعدہ پر ہو

۱۷- اگر مثلث متساوی الساقین کے برابر زاویون مین سے ہر زاویہ برابر ہو ایک ربع زاویۃ الراس کے اور اون مین سے ایک زاویہ سے عمود قاعدہ تک کھینچا جائے اور وہ ضلع مقابل سے بعد الاخراج ملے تو ضلع مخرج اور عمود اور ضلع باقی سے ایک مثلث متساوی الاضلاع پیدا ہوگا

۱۸- اگر ایک خط مستقیم ایک مثلث کے اضلاع پر منتہی ہو اور تنصیف کیا جائے تو ثابت کرو کہ اور کوئی خط جو اونہین دو ضلعون پر منتہی ہو اوسی نقطہ پر تنصیف نہین ہو سکتا

۱۹- ایک نقطہ معینہ سے دو خطوط مستقیمہ متوازیہ تک دو خطوط مستقیمہ متساویہ کھینچو کہ وہ باہم زاویے قائمے پیدا کرین

۲۰- شکل معین کے دو قطرون کا طول معلوم ہے ساری شکل معین بناؤ

۲۱- اب س د شکل ذو اربعۃ الاضلاع ہے پس ایک مثلث بناؤ کہ اوسکا قاعدہ خط اب مین ہو اور اوسکا ارتفاع ایک خط معلوم کے برابر ہو اور اوسکا رقبہ ذو اربعۃ الاضلاع مذکور کے رقبہ کے برابر ہو

۲۲- اگر مثلث اب س مین س زاویہ قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ کیونکر ایسا خط مستقیم کھنچ سکتا ہے جو ایک خط مستقیم معلوم کے متوازی ہو اور س ا و س ب پر منتہی ہو اور اب پر تنصیف ہو جائے

۳۴

۲۳— اگر مثلث ا ب س مین س زاویہ قائمہ ہو اور اس مین ایک نقطہ و سے دی اب پر عمود کھینچا جاسے تو ثابت کرو کہ سطح اب ای اور سطح اس اد باھم برابر ہین—

۲۴— ایک ایسا خط کھینچا کہ وہ اب س د شکل متوازی الاضلاع کی تنصیف کرکے اد اور ب س سے ی و ف پر مل گیا تو ثابت کرو کہ مثلث ی ب ف و س ی د باہم برابر ہین

۲۵— ا ب س مثلث قائم الزاویہ کے وتر قائمہ ب س پر اور ضلع س ا و اب پر مربعات ب د وی س و اف و اج بنائے تو ثابت کرو کہ مربعین ج ح و ی ف ملکر برابر ہین چہار چند مربع ب س کے

۲۶— اگر مثلث کے راس الزاویہ سے تین خطوط مستقیمہ کھینچے جائین اور اون مین سے ایک خط اوس زاویہ کی تنصیف کرے دوسرا قاعدہ کی تنصیف کرے اور تیسرا قاعدہ پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ پہلا خط وضعًا و مقدارًا دونون طرح سے باقی دو خطون کے درمیان واقع ہوگا—

۲۷— یہ ثابت کرو کہ شکل معین کا رقبہ برابر ہوتا ہے نصف اوس سطح کے جو اوسکے قطرون سے گھری ہو

۲۸— فرض کرو کہ اس ب و ا د ب دو مثلث قائم الزاو یہ ایک ہی قاعدہ اب پر واقع ہین س د کو ملا دو اور س د کو دونون طرف خارج کرکے اوسپر ای و ب ف عمود کھینچو اب یہ ثابت کرو کہ س ی و س ف پر کے مربعون کا مجموع برابر ہے د ی و د ف پر کے مربعون کے مجموع کے

۲۹- ایک مثلث کی قاعدہ اس مین ایک نقطہ د فرض کرو اور ا د و د س و اب و ب س کو نقاط ی و ف و ج و ح پر تنصیف کرو اب یہ ثابت کرو کہ ی ج متوازی اور برابر ہے ف ح کے

۳۰- اگر اب س مثلث متساوی الساقین کے راس الزاویہ سے خط ا د قاعدے کے ایک نقطہ د تک کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ سطح ب د د س برابر ہے تفاوت مربعین اب و ا د کے

۳۱- اگر مربع کے ضلعون مین چار نقطے ایسے فرض کرین کہ اوسکے چار زاویون کے نقطون سے متساوی البُعد ہون تو جو شکل کہ ان نقطون مین خطوط مستقیمہ ملنے سے پیدا ہو وہ بھی مربع ہوگی

۳۲- اگر مثلث اب س کے نقاط الزوایا سے اوسکے اضلاع پر ا ف ب ق و س ر عمود کھینچے جائین تو ثابت کرو کہ یہ عمود مثلث ف ق ر کے زاویون کی تنصیف کرتے ہین

۳۳- ذوا ربعۃ الاضلاع کے قطر جو اوسے چار مثلثون مین تقسیم کر دیتے ہین اگر انمین سے دو متقابل کے مثلث باہم برابر ہون تو ذو اربعۃ الاضلاع کی شکل منحرف ہوگی

۳۴- اب س د و ا ی س ف دو اشکال متوازی الاضلاع ہین اور ی ل و ا د ایک ہی خط مستقیم مین ہین اور ف ج کو اس کے متوازی کھینچکر ب ا سے جو ج تک کھینچا گیا ہے ملا دیا تو مثلث اب ی برابر ہے مثلث ا د ج کی

۳۵- مربع اب س د کے قطر ا س سے ا ی برابر ایک ربع ا س کے قطع کرو اور ب ی و د ی کو ملا دو اب ثابت کرو کہ شکل ب ا د ی برابر ہے دوچند مربع ا ی کے

۳۶- اگر مثلث اب س مین زاویہ ب و زاویہ س ہر ایک دوچند ہو زاویہ ا کا تو ثابت کرو کہ مربع اب کا برابر ہے مربع ب س مع دوچند سطح ا ب ب س کے

۳۷— اگر ذو اربعة الاضلاع کے دو ضلعے باہم متوازی ہون تو جو مثلث کہ اوسکے
اور دو ضلعون مین سے ایک ضلع کے اور اون دو خطوط مستقیمہ کے درمیان مین
واقع ہو جو اوسکے اطراف سے ضلع مقابل کی نقطہ وسط تک کھینچے ہین تو وہ مثلث ذو اربعة
الاضلاع مذکور کا نصف ہوگا۔

۳۸— اگر ذو اربعة الاضلاع کے دو مقابل زاویے قائمے ہون تو جو زاویے
کہ اوسکے ضلعون مین سے ہر ایک ضلع کے مقابل ہون وہ برابر ہون گے

۳۹— اگر مثلث کے ضلعے اپنے طول اصلی سے دو چند طول تک علی الترتیب
خارج کیے جائین اور اوسکے اطراف خارجیہ وصل کر دیے جائین تو جو
مثلث کہ اب پیدا ہوگا وہ پہلے مثلث کا ہفت چند ہوگا

۴۰— اگر مثلث متساوی الساقین قائم الزاویہ کے زاویون مین سے
ایک زاویہ حادہ تنصیف کیا جائے تو اوسکا ضلع مقابل خط منصف سے ایسے
دو جزؤن مین تقسیم ہو جائے گا کہ ایک جزو کا مربع دو چند ہوگا دوسرے جزو کے مربع کے

۴۱— مثلث ا ب س مین زاویہ ب قائمہ ہے اور ب د عمود قاعدہ پر
کھینچا گیا اور ی تک خارج کیا گیا یہان تک کہ ی س ب زاویہ قائمہ پیدا ہوا
تو ثابت کرو کہ مربع ب س کا برابر ہے مجموع سطوح ا د د س د ب د ی کے

۴۲— ثابت کرو کہ مجموع دو خطون کے مربعون کا زیادہ ہوتا ہے دو چند اوس
سطح سے جو اون خطون سے گھری ہو

۴۳— ہر مثلث مین مجموع اون خطوط مستقیمہ کے مربعات کا جو زاویون سے
اضلاع مقابل کے نقاط وسط تک کھینچے جائین برابر ہوتا ہے تین ربع مجموع
مربعات اضلاع مثلث کے

۴۴— اگر کئی اشکال متوازیة الاضلاع بنائی جائین اور اونکے اضلاع کا طول

معلوم ہو تو ثابت کرو کہ اونمین سے ہر ایک شکل کے اقطار کی مربعوں کا مجموع ایک ہی ہوگا

۴۵ — اب س د شکل متوازی الاضلاع قائم الزاویہ ہی اور اب دو چند ہے ب س کا اور اب پر ایک مثلث متساوی الاضلاع بنایا تو ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ شکل مذکور کے رقبہ سے چھوٹا ہوگا

۴۶ — مثلث اب س کے اندر ایک نقطہ و فرض کیا اس طرح سے کہ زاوئے ب وس وس و ا و ا و ب باہم برابر ہین تو ثابت کرو کہ مربعات ب س و س ا و ا ب کے ملکر برابر ہین سطوح و ب و س و و س و ا و و ا و ب کے اور دو چند مجموع مربعات و ا و ب و س کے فقط

تمام شد مقالہ دوم مع امثلہ

پانچوین شکل کا ثبوت جس طرح سے اقلیدس نے لکھا ہے

مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ پر کے زاویے باہم برابر ہوتے ہیں اور اگر ضلعین متساویین خارج کیے جائین تو قاعدہ کے دوسری طرف زاویے بھی برابر ہون گے

فرض کرو کہ اب س ∆ متساوی الساقین ہے

اور اوسمین اب = اس

اب و اس کو د و ی تک خارج کرو

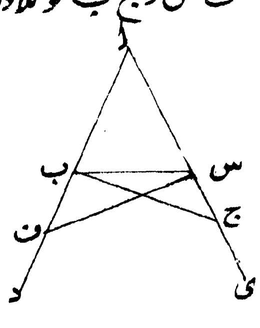
تو ∠ اب س = ∠ اس ب

اور ∠ دب س = ∠ ی س ب

ب د مین ایک نقطہ ف فرض کرو

ا ی سے اج = اف قطع کرو

ف س و ج ب کو ملادو



تو ∆ اف س و اج ب مین

∵ ف ا = ج ا اور ا س = ا ب اور ∠ ف ا س = ∠ ج ا ب

∴ ف س = ج ب اور ∠ ا ف س = ∠ ا ج ب اور ∠ ا س ف

= ∠ ا ب ج (ش ۴ م ۱)

پھر ∵ ا ف = ا ج

اور اوسکے اجزا ا ب و ا س برابر ہین

∴ باقی ب ف = باقی س ج (ع ۳)

تو اب △ ب ف س و س ج ب مین

∵ ب ف = س ج اور ف س = ج ب اور ∠ ب ف س = ∠ س ج ب

∴ ∠ ف ب س = ∠ ج س ب اور ∠ ب س ف = ∠ س ب ج (ش ۴ م ۱)

اور یہ ثابت ہوچکا ہے کہ ∠ ا س ف = ∠ ا ب ج

اور انکے اجزا ∠ ب س ف و ∠ س ب ج باہم برابر ہین

∴ باقی ∠ ا س ب = باقی ∠ ا ب س (ع ۳)

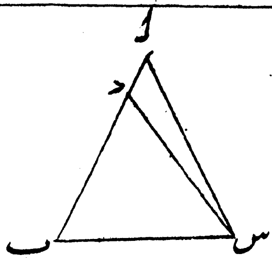
اور یہ بھی ثابت ہوچکا ہے کہ ∠ ف ب س = ∠ ج س ب

یعنے ∠ د ب س = ∠ ی س ب

ہب

چھٹی شکل کا ثبوت جسطرح اقلیدس نے لکھا ہے

اگر مثلث کے دو زاویے باہم برابر ہون تو جو ضلعے ان مساوی زاویون کے مقابل ہین وہ بھی آپس مین برابر ہون گے



فرض کرو کہ △ اب س مین ∠ اس ب = ∠ اب س

تو اب = اس

اسواسطے کہ اگر ایسا نہین ہے تو اب یا اس سے بڑا ہے یا اوس سے چھوٹا ہے

فرض کرو کہ اب اس سے بڑا ہے

اب مین سے ب د = اس قطع کرو

تو △ د ب س و اس ب مین

∵ د ب = اس اور ب س مشترک ہے اور ∠ د ب س = ∠ اس ب

∴ △ د ب س = △ اس ب (ش ۴ م ۱)

یعنی چھوٹا = بڑے کے یہ خلاف عقل ہے

∴ اب اس سے بڑا نہین ہے

اسی طرح سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اب اس سے چھوٹا نہین ہے

∴ اب = اس

ھب

ثبوت شکل ہفتم مقالہ اول برطبق اقلیدس

ایک ہی قاعدہ پر اور اوسکی ایک ہی طرف ایسے دو مثلث نہین بن سکتے جنکے ضلعے کہ قاعدہ کی ایک طرف پر منتہی ہون باہم برابر ہون اور جو ضلعے کہ قاعدہ

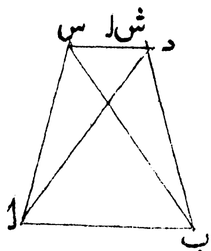
کے دوسری طرف پر منتہی ہون وہ بھی باہم برابر ہون

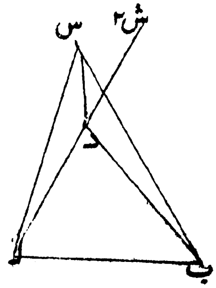
اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک ہی قاعدہ ا ب پر اور اوسکے ایک ہی طرف دو مثلث ا س ب و ا د ب ایسے بناسئے کہ ا س = ا د و نیز

ب س = ب د

س د کو ملا دو

اوّلاً — جبکہ ہر ایک مثلث کا راس دوسرے کے باہر واقع ہو جیسی ش ا مین ہے





∵ ا د = ا س

∴ ∠ ا س د = ∠ ا د س (ش ۵ م ا)

لیکن ∠ ا س د ∠ ب س د سے بڑا ہے

∴ ∠ ا د س ∠ ب س د سے بڑا ہے

∴ ∠ ب د س ∠ ب س د سے بہت بڑا ہے

پھر ∵ ب س = ب د

∴ ∠ ب د س = ∠ ب س د

یعنی ∠ ب د س ∠ ب س د کے برابر بھی ہے اور اوس سے بڑا بھی ہے

یہ خلاف عقل ہے

ثانیاً — جبکہ ایک مثلث کا راس دوسریکے اندر واقع ہو جیسی ش ۲ مین ہے

اس اور اد کو ی اور ف تک خارج کرو

تو ∵ اس = اد

∴ ∠ ی س د = ∠ ف د س (ش ۵ م ا)

لیکن ∠ ی س د ∠ ب س د سے بڑا ہے

∴ ∠ ف د س ∠ ب س د سے بڑا ہے

تو ∠ ب د س ∠ ب س د سے بہت بڑا ہے

پھر ∵ ب س = ب د

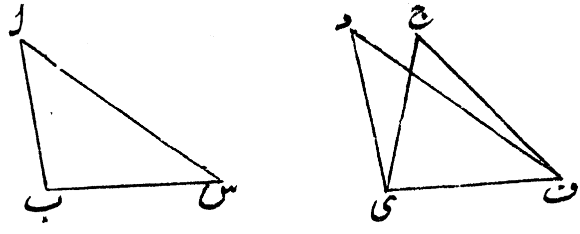
∴ ∠ ب د س = ∠ ب س د

یعنی ∠ ب د س ∠ ب س د کے برابر بھی ہے اور اوس سے بڑا بھی ہے یہ محال ہے

ثالثاً جب ایک مثلث کا راس د دوسرے کے ضلع ب س پر واقع ہو تو ظاہر ہے کہ ب س اور ب د باہم برابر نہین ہو سکتے ہیں

ثبوت شکل ہشتم مقالہ اول موافق اقلیدس

اگر دو مثلثون مین سے ایک کے دو ضلعے دوسرے کے دو ضلعون کے برابر ہون کل لنظیرہ اور اونکے قاعدے بھی برابر ہون تو ایک مثلث کے اون دو ضلعون کا درمیانی زاویہ برابر ہوگا دوسری کے ضلعون کے درمیانی زاویہ کے خوب



فرض کرو کہ △ اب س و د ی ف کے ضلعے برابر ہین کُلٌّ لِنَظِیرہ

یعنی اب = د ی اور اس = د ف اور ب س = ی ف

تو ∠ ب اس = ∠ ی د ف

△ اب س کو △ د ی ف پر چسپان کرو

اس طرح سے کہ نقطہ ب نقطہ ی پر واقع ہو اور ب س ی ف پر

تو ∵ ب س = ی ف

∴ س ف پر منطبق ہو جاے گا

اور ب س ی ف پر منطبق ہو جاے گا

تو اب اور اس د ی اور د ف پر منطبق ہو جائین گے

اس واسطے کہ اگر اب اور اس علیحدہ علیحدہ واقع ہون جیسے ج ی اور ج ف

تو یہ لازم آئیگا کہ ایک ہی قاعدہ پر اور اوسکی ایک ہی طرف دو ایسے مثلث بنین جنکے دو

ضلعے کہ قاعدہ کی ایک ہی طرف پر منتہی ہین باہم برابر ہون اور وہ دو ضلعے بھی جو قاعدہ

کی دوسری طرف پر منتہی ہین باہم برابر ہون یہ محال ہے (ش ۷ م ۱)

۲۰

ا ب پہ چونکہ قاعدہ ب س قاعدہ ی ف پر منطبق ہو گیا ہے ۔

∴ ا ب د ی پر اور ا س د ف پر ضرور منطبق ہو گا

∴ ∠ ب ا س ∠ ی د ف پر منطبق ہو گا اور اوسکے برابر ہو گا

ہب

۵ ۱۳ صہ - أ

۴۳۷۸

کتب خانہ
جامعہ عثمانیہ

۱۔ اراکین مجلس اعلیٰ، مجلس تعلیمات، مجلس انتظامی
مجالس شعبہ جات و نصاب پانچ کتابیں ایک ماہ تک اپنے پاس رکھ سکیں گے۔
۲۔ اساتذہ جامعہ عثمانیہ و کلیہ جات، گریجویٹ عہدہ داران جامعہ
اور اراکین دار الترجمہ دس کتابیں ایک ماہ تک اپنے پاس رکھ سکیں گے۔ اور انٹرمیڈیٹ
۳۔ طلبائے ایم۔ اے، ایل ایل۔ بی و تحقیقاتی جماعتوں سے
کے طلبہ تین کتابیں ایک ہفتہ تک اپنے پاس رکھ سکیں گے۔
طلبہ پانچ کتابیں دو ہفتہ تک اپنے پاس رکھ سکیں گے۔ واپس نہ ہوں تو طلبہ سے جواب
۴۔ مدت مقررہ پر کتابیں واپس نہ کی جائیں گی تو
ایک آنہ یومیہ فی کتاب جرمانہ لیا جائیگا۔
۵۔ بشرط وقوع کتابیں گم ہو جائیں یا خراب ہو جائیں تو مستعیر پر دوسری
یہ کتب خانہ میں کتاب کا لانا لازم ہے۔
۶۔ کتابوں پر کسی قسم کا نشان سیاہی یا پنسل سے
عائد ہوگی۔
۷۔ کتابوں پر کسی قسم کا نشان
لگایا جائے۔
۸۔ قلمی نسخے اور حوالے کی کتابیں
جاری نہ کیجا سکیں گی۔ فقط