UNIVERSAL
LIBRARY

OU_220681

UNIVERSAL
LIBRARY

BROWN BOOK

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No. 517/C 31C Accession No. 17061

Author Cornu, A. / S.

Title Cours de ... integral 1932

This book should be returned on or before the date last marked below.

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL

ET MÉTHODE DE FORMATION

AU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

LIVRE II

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

ET MÉTHODE DE FORMATION AU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

LIVRE II

FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR M. S. CARRUS

Agrégé de l'Université, Ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique
Professeur d'Analyse à la Faculté des Sciences d'Alger

PARIS
LIBRAIRIE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
LÉON EYROLLES, ÉDITEUR
3, Rue Thénard
1932

Tous droits réservés

PRÉFACE

Ce deuxième volume complète l'ensemble des matières qui figurent au programme normal du Certificat de Calcul différentiel et intégral.

Ce programme est légèrement variable suivant les Facultés. Nous avons donc dû lui donner son extension presque maxima. Cependant nous avons laissé de côté l'étude des fonctions elliptiques, le calcul des Variations qui relèvent plutôt du Certificat d'Analyse supérieure, celle des lignes géodésiques d'une surface.

Comme nous l'avons indiqué dans notre première Préface, nous avons, par contre (et on voudra bien nous en excuser) exposé le résultat de recherches personnelles qui sont des applications ou des extensions immédiates du Cours.

C'est ainsi que, dans ce deuxième volume, nous avons exposé l'étude des *systèmes incomplets* d'équations différentielles, leur intégration *sans signe de quadrature*, dans le cas des systèmes linéaires à coefficients quelconques, celle également de certains autres systèmes d'équation du premier ordre.

Dans la Théorie des Surfaces, nous avons donné une généralisation des développées des courbes gauches, leur intégration sans signe de quadrature, et mis en relief la si grande importance, pour une courbe gauche, du rapport $\frac{R}{\tau}$.

Nous avons établi la condition pour reconnaître si un ds^2 est celui d'une surface développable.

Dans le cas des surfaces applicables sur une surface de révolution pour lesquelles les coefficients du ds^2 sont seulement fonctions de u, nous avons obtenu, sans signe de quadrature, le ds^2 le plus général de ces surfaces, la surface de révolution sur laquelle la

« perfection, et par conséquent menacée de sclérose, tu as su faire « quelque chose de vivant qui est un régal pour l'esprit et dont je « te félicite très vivement. »

Nous espérons que cet ouvrage et cette méthode pourront rendre quelques services aux Etudiants et donner à certains le goût de la recherche mathématique.

Nous serions particulièrement reconnaissants à tous ceux, Professeurs ou Etudiants, qui voudront bien nous donner leur appréciation sur la possibilité qu'ils ont eue d'appliquer cette méthode et sur les résultats qu'ils croient avoir obtenus.

S. Carrus.

Cours de Calcul différentiel et Intégral

Méthode de formation au raisonnement Mathématique

LIVRE DEUXIÈME

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Sommaire.

Rappel sur les imaginaires.

Fonctions d'une variable complexe : Fonction analytique, fonction de fonction, fonction holomorphe — de plusieurs variables.

Fonctions élémentaires : e^z, sin z, cos z. — Formules d'Euler. — Applications. Fonction logarithmique. — Détermination précise. — Propriétés. Fonction $(z - a)^m$.

Représentation conforme. — Applications.

Détermination d'une fonction analytique par une condition donnée.

Intégrale de fonction de variable complexe : Limite supérieure. — Applications.

Conditions pour qu'elle soit indépendante du chemin. — Généralisation.

Changement de variable. Dérivation sous le signe.

I. — RAPPEL SUR LES IMAGINAIRES

Bien que nous ayons eu déjà à considérer des quantités complexes, nous allons rappeler et préciser la définition de ces quantités et les opérations qui s'y rattachent :

Nous appelons « quantité complexe » ou « imaginaire » tout polynôme d'une indéterminée i

$$P(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_m i^m.$$

Nous conviendrons de regarder comme équivalents deux polynômes qui, divisés par $i^2 + 1$, donnent le même reste du premier degré en i. En sorte que, si l'on fait la division de $P(i)$ par $(i^2 + 1)$ sous la forme

$$P(i) = Q(i)(i^2 + 1) + a + bi$$

les deux polynômes $P(i)$ et $(a + bi)$ sont équivalents.

La forme « réduite » d'une quantité complexe est donc $a + bi$.

Pour que deux quantités complexes mises sous forme réduite $a + bi$, $c + di$ soient égales, il faut que

$$a = c \qquad b = d$$

Les opérations élémentaires sur les quantités complexes seront définies par les opérations ordinaires sur les polynômes $P(i)$ toujours avec cette condition que nous avons le droit de négliger les multiples de $(i^2 + 1)$. On peut dire d'une façon légèrement incorrecte mais pratique que l'on peut remplacer i^2 par -1 et d'une façon plus incorrecte encore que $i^2 = -1$.

Si deux polynômes $P(i)$, $Q(i)$ admettent pour forme réduite $a + bi$, $c + di$, la somme $P + Q$ aura pour forme réduite

$$a + c + (b + d)i.$$

De même

$$a + bi - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + (ad + bc)i.$$

Ce résultat peut s'écrire :

$$ac - bd + (ad + bc)i.$$

L'expression $\frac{a + bi}{c + di}$ sera une quantité complexe $x + yi$ telle que

$$a + bi = (c + di)(x + yi)$$

ou, en effectuant le second membre d'après les règles précédentes

$$a + bi = cx - dy + i(dx + cy)$$

Il faut donc que

$$a = cx - dy \qquad b = dx + cy$$

ce qui donne

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \qquad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ces deux valeurs sont finies si c et d ne sont pas tous deux nuls.

Plus généralement, on pourra exprimer sous forme réduite une fraction rationnelle quelconque de i.

Les opérations élémentaires sur les quantités complexes n'étant autres que les opérations correspondantes faites sur des polynômes, d

les propriétés fondamentales des opérations algébriques subsistent, propriété commutative, associative, etc., représentées par les formules

$$AB = BA, \qquad A\cdot B\cdot C\cdot = A\cdot(B\cdot C), \qquad A(B + C) = AB + AC, \text{ etc.}$$

Imaginaires conjuguées. — Deux quantités $a + bi$, $a - bi$ qui ne diffèrent que par le signe du coefficient de i sont dites « conjuguées » ; d

leur somme est réelle. On en déduit que si une quantité, apparemment imaginaire, ne change pas lorsqu'on change i en $-i$, cette quantité est réelle. Cette remarque est importante dans la pratique. Par exemple, la quantité :

$$\frac{1 - i}{1 + ix} + \frac{1 + i}{1 - ix}$$

est certainement réelle.

De même une quantité $a + bi$ sera une imaginaire pure ($a = o$) p

si son imaginaire conjuguée lui est égale et de signe contraire et cette propriété est également caractéristique. Par exemple, la quantité

$$\frac{1 + i}{1 + ix} - \frac{1 - i}{1 - ix}$$

qui p change simplement de signe quand on change i en $-i$ est une imaginaire pure.

En admettant que l'on sache définir e^{ix} et e^{-ix} et que ces symboles soient des quantités complexes telles que nous venons de les définir, on voit que

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

sont des quantités réelles.

Représentation géométrique. — On peut représenter l'imaginaire $a + bi$ soit par un point de coordonnées a, b par rapport à deux axes rectangulaires, soit par un vecteur ayant pour projections sur les axes a, b. Si M est le point de coordonnées a, b, désignons par ρ la longueur géométrique OM et par α l'un des angles (Ox, OM) dont il faut faire tourner Ox dans le sens de Ox vers Oy pour l'amener sur OM ; ρ est le « module », α « l'argument » de la quantité complexe. On aura

$$a = \rho \cos \alpha \qquad b = \rho \sin \alpha$$

et on en déduit

$$\rho = + \sqrt{a^2 + b^2} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

La quantité imaginaire se met alors sous la forme dite « trigonométrique » $\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Il est essentiel de remarquer que l'angle α est déterminé à $2k\pi$ près, pour tout point, *sauf pour l'origine.*

Nous désignerons le module d'une quantité complexe z par $| z |$.

La somme de deux quantités complexes

$$z = a + bi \qquad z' = a' + b'i$$

étant $a + a' + (b + b')\, i$, sera représentée par le vecteur ayant pour projections $a + a'$, $b + b'$. Ce vecteur s'obtient en portant à la suite du vecteur OM représentatif de z, un vecteur MM'' équipollent à OM' représentatif de z'.

Le module de la somme est égal à OM''. On voit immédiatement que

$$OM'' \leqslant OM + MM''$$

c'est-à-dire que

$$| z + z' | < | z | + | z' |$$

Cette inégalité se traduit par l'inégalité algébrique

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Produit. Formule de Moivre. — Si l'on fait, par la règle habituelle, le produit de deux quantités complexes, mises sous forme trigonométrique, on obtient

$$\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times \rho'(\cos \alpha' + i \sin \alpha') = \rho\rho'[\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')]$$

Le module d'un produit de facteurs est égal au produit des modules ; l'argument du produit est égal à la somme des arguments Cette propriété se généralise au cas d'un nombre quelconque de facteurs

$$\rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \times \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \times \cdots \times \rho_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n)$$
$$= \rho_1\rho_2\cdots\rho_n[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)].$$

Dans le cas où toutes les quantités complexes sont égales, on obtient la célèbre « formule de Moivre »

$$[\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^m = \rho^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha)$$

En développant le premier membre par la formule du binôme et égalant les parties réelles d'une part, et les parties imaginaires d'autre part, dans les deux membres de l'identité, on obtiendra $\cos m\alpha$ et $\sin m\alpha$ en fonction des puissances de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

On vérifie aisément que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

Par conséquent

$$\left(\frac{1}{z}\right)^m = \cos m\alpha - i\sin m\alpha = z^{-m}$$

La formule de Moivre est donc également vraie pour m entier et négatif.

Toutes les fois que l'on voudra prendre la puissance d'une imaginaire, il faudra la mettre sous forme trigonométrique. Par exemple

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc

$$(1 + i)^m = 2^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{m\pi}{4} + i\sin m\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi :

$$(1 + i)^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

II. — FONCTION D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Soit z une quantité complexe de la forme $z = x + yi$; donnons-nous deux fonctions réelles quelconques bien déterminées $U(x, y)$, $V(x, y)$ et considérons la quantité complexe

$$Z = U(x, y) + iV(x, y)$$

On remarque qu'à toute valeur de z correspondent des valeurs bien déterminées de x et y et par suite une quantité $Z = U + iV$. On peut donc dire que Z est une fonction bien déterminée de la variable complexe z. Ce sera une fonction continue si U et V sont elles-mêmes continues. Si U et V sont continues dans une aire C et sur le contour de cette aire, elles seront uniformément continues. On pourra déterminer une quantité η fixe, telle que, si la distance de deux points quelconques du champ est moindre que η, on ait

$$\text{mod } \Delta U < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad \text{mod } \Delta V < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

et par suite

$$\text{mod. } \Delta Z < \varepsilon$$

Si l'on n'imposait pas d'autres conditions à U et V, l'étude des fonctions de variable complexe se réduirait à l'étude des couples de fonctions réelles sans aucun lien et ne conduirait par conséquent à aucun résultat particulier.

On peut imposer à ces fonctions, telles conditions que l'on veut.

Cherchons, avec Cauchy, *si une fonction Z peut avoir une dérivée bien déterminée par rapport à z.*

A cet effet, il faut donner à z un accroissement Δz qui résultera d'accroissements Δx, Δy donnés à x et y, et chercher si le rapport $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ a une limite.

On aura

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

Pour les accroissements Δx, Δy, Z prend un accroissement ΔZ

$$\Delta Z = U(x + \Delta x, y + \Delta y) + iV(x + \Delta x, y + \Delta y) - [U(x, y) + iV(x, y)]$$

Cette quantité peut s'écrire

$$U(x + \Delta x, y + \Delta y) - U(x, y) + i[V(x + \Delta x, y + \Delta y) - V(x, y)]$$

En appliquant à chacune des parties le théorème des accroissements finis, si U et V admettent des dérivées partielles, on obtient

$$\Delta Z = \Delta x\, U'_x(\xi_1, \eta_1) + \Delta y\, U'_y(\xi_1, \eta_1) + i[\Delta x V'_x(\xi_2, \eta_2) + \Delta y V'_y(\xi_2, \eta_2)]$$

ξ_1, ξ_2 étant compris entre x et $x + \Delta x$; η_1 et η_2 entre y et $y + \Delta y$

On pourrait même supposer $\xi_1 = \xi_2$, $\eta_1 = \eta_2$ en appliquant le théorème au groupement $U(x, y) + iV(x, y)$. On a donc

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\Delta x(U'_x + iV'_x) + \Delta y(U'_y + iV'_y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Supposons que Δx et Δy tendent simultanément vers zéro, de telle manière que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ait pour limite λ. Si les dérivées partielles sont continues, elles auront pour valeur à la limite $U'_x(x, y)$, $U'_y(x, y)$, $V'_x(x, y)$, $V'_y(x, y)$.

Le rapport $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ aura donc pour limite

$$\frac{U'_x + iV'_x + \lambda(U'_y + iV'_y)}{1 + \lambda i}$$

On voit que cette limite dépend en général de λ.

Pour que cette limite soit bien déterminée et unique, quelle que soit la manière dont Δx et Δy tendent vers zéro, c'est-à-dire pour que la limite ci-dessus soit indépendante de λ, il faut et il suffit que

$$\frac{U'_x + iV'_x}{1} = \frac{U'_y + iV'_y}{i}$$

c'est-à-dire

$$i(U'_x - V'_y) = U'_y + V'_x.$$

Mais les fonctions U, V étant des fonctions supposées réelles de variables réelles x, y, on en déduit nécessairement

$$U'_x = V'_y \qquad U'_y = -V'_x. \tag{1}$$

Le rapport $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ aura bien alors une limite déterminée

$$U'_x + iV'_x \quad \text{ou} \quad V'_y - iU'_y.$$

Pour que la limite soit bien déterminée quel que soit le point x, y, il faut que les équations (1) soient identiquement satisfaites. Nous dirons alors que la fonction $U + iV$ est « monogène » ou « analytique » et que sa dérivée est

$$f'(z) = U'_x + iV'_x.$$

Nous appellerons « différentielle » de la fonction le produit de la dérivée par l'accroissement Δz d'ailleurs arbitraire donné à z.

En la désignant par df, on a donc

$$df = f'(z)\Delta z$$

Δz se confond nécessairement avec dz. On peut donc écrire

$$df = f'(z)dz$$

Des deux relations (1), on peut déduire qu'aucune des fonctions U, V ne peut être arbitrairement choisie. En supposant qu'elles admettent des dérivées secondes, on en déduit en effet, par dérivation :

$$U''_{x^2} = V''_{xy} = - U''_{y^2}$$

c'est-à-dire

$$\Delta U = U''_{x^2} + U''_{y^2} = 0.$$

De même

$$\Delta V = V''_{x^2} + V''_{y^2} = 0.$$

Cette équation porte le nom d' « Equation de Laplace ».

Equation de Laplace. — L'étude des fonctions analytiques revient donc, en somme, à l'étude de certaines couples de fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta U = 0$.

La dérivée de la fonction est

$$f'(z) = U'_x + iV'_x.$$

Si l'on admettait pour les fonctions U, V, l'existence des dérivées du second ordre continues, on peut voir que cette dérivée est aussi une fonction analytique. Il faut, en effet, que l'on ait en appliquant les équations (1)

$$U''_{x^2} = V''_{xy}, \qquad U''_{xy} = - V''_{x^2}.$$

Or ces conditions se déduisent par dérivation des équations fondamentales.

Ainsi (en admettant l'existence de dérivées successives, ce que nous démontrerons plus tard) *toutes les dérivées successives d'une fonction analytique sont elles-mêmes des fonctions analytiques.*

Autres formes des équations fondamentales. — Pour que le rapport homographique en λ que nous avons considéré soit indépendant de λ, et par suite pour que la fonction $f(z) = U + iV$ soit analytique, il faut et il suffit que deux quelconques des limites obtenues en faisant varier le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soient égales. Mais on peut également faire varier de deux manières différentes deux fonctions quelconques de x, y.

Prenons par exemple, les coordonnées polaires

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi, \qquad z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Soit une fonction quelconque

$$f(z) = U(\rho, \varphi) + iV(\rho, \varphi).$$

Si l'on fait varier seulement ρ, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ a pour limite

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial \rho} + i \frac{\partial V}{\partial \rho}}{\cos \varphi + i \sin \varphi}.$$

Si l'on fait varier seulement φ, ce rapport a pour limite

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi} + i \frac{\partial V}{\partial \varphi}}{\rho(-\sin \varphi + i \cos \varphi)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi} + i \frac{\partial V}{\partial \varphi}}{i\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)}.$$

Pour que ces deux limites soient les mêmes, c'est-à-dire pour que la fonction $U(\rho, \varphi) + iV(\rho, \varphi)$ soit analytique, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + i \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} + i \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$$

et par suite

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Soit par exemple

$$f(z) = \rho^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi) = z^m$$

δ_1

Suivant que l'on fait varier ρ seulement ou φ seulement, on obtient les deux limites

$$\frac{m\rho^{m-1}(\cos m\varphi + i \sin m\varphi)}{\cos\varphi + i\sin\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{m\rho^m(-\sin m\varphi + i\cos m\varphi)}{\rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)}.$$

Ces deux limites étant les mêmes, la fonction est analytique. La dérivée est d'ailleurs

$$m\rho^{m-1}[\cos(m-1)\varphi + i\sin(m-1)\varphi] = mz^{m-1}$$

On a donc

$$(z^m)' = mz^{m-1}.$$

Soient encore deux fonctions $R(x, y)$, $\Theta(x, y)$ que nous considérons comme le module et l'argument d'une fonction $f(z)$

$$f(z) = R[\cos\Theta + i\sin\Theta]$$

δ_1

En appliquant les équations de condition (1), ou en faisant varier successivement x et y, on obtient

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial\Theta}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial\Theta}{\partial x}.$$

on a alors

$$f'(z) = \left[\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right](\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

Fonction de fonction. — *Si* $\zeta = U + iV$ *est une fonction analytique de* $Z = u + iv$, *et si* Z *est une fonction analytique de* $z = x + iy$, *on peut considérer* ζ *comme une fonction analytique de* z.

x, ξ

Il faut en effet considérer le rapport

$$\frac{\Delta\zeta}{\Delta z} = \frac{\Delta(U + iV)}{\Delta(x + iy)}$$

On a identiquement

$$\frac{\Delta(U + iV)}{\Delta(x + iy)} = \frac{\Delta(U + iV)}{\Delta(u + iv)} \times \frac{\Delta(u + iv)}{\Delta(x + iy)}.$$

ω

Lorsque Δx et Δy tendent vers zéro d'une manière quelconque, le deuxième rapport a par hypothèse toujours la même

limite ; d'autre part, si l'on prend deux de ces manières et les accroissements correspondants de u et v, le premier rapport a également toujours la même limite. Il en résulte bien que le premier membre a toujours la même limite ; $U + iV$ est donc bien fonction analytique de z. On a de plus

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dZ} \times \frac{dZ}{dz}.$$

2° *Si* Z *et* Z' *sont deux fonctions analytiques d'une même variable* z, *on peut considérer* Z' *comme fonction analytique de* Z.
On a effet identiquement

$$\frac{\Delta Z'}{\Delta Z} = \frac{\Delta Z'}{\Delta z} : \frac{\Delta Z}{\Delta z}.$$

Les deux rapports du second membre ayant toujours une limite déterminée quelle que soit la façon dont Δz tende vers zéro, il en est de même du premier quelle que soit la façon dont ΔZ tendra vers zéro. La dérivée aura pour expression

$$\frac{dZ'}{dZ} = \frac{dZ'}{dz} : \frac{dZ}{dz}.$$

Fonction inverse. — Donnons-nous une fonction analytique $u = f(z)$; supposons que, sous certaines conditions, nous ayons démontré que, dans un champ suffisamment petit, à une variation continue de u, à partir d'une certaine valeur u_0, correspond une suite de valeurs de z, variant d'une façon continue à partir de z_0, satisfaisant constamment à $u = f(z)$: nous dirons que cette suite de valeurs de z constitue une fonction inverse $z = \varphi(u)$ de la fonction donnée $u = f(z)$.

Cette fonction sera analytique. Car si l'on donne à u un accroissement Δu, il lui correspondra un accroissement Δz qui tendra vers zéro avec Δu. Or, on a identiquement $\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{1}{\frac{\Delta u}{\Delta z}}$. La fonction $u = f(z)$ étant analytique, le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ a toujours même limite $f'(z)$ quelle que soit la façon dont Δz tende vers zéro. Donc le rapport $\frac{\Delta z}{\Delta u}$ a également une limite toujours la même, quand Δu tend vers zéro

de façon quelconque. La fonction $z = \varphi(u)$ est bien analytique, et la dérivée est donnée par

$$\frac{dz}{du} = \varphi'(u) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Opérations sur les dérivées. — Si une fonction $f(z) = u + iv$ est analytique, sa dérivée est

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Prendre la dérivée par rapport à z d'une fonction analytique

revient donc tout simplement à prendre la dérivée par rapport à x d'un groupement de la forme $u + iv$.

Il en résulte immédiatement que la dérivée d'une somme de fonctions analytiques est égale à la somme des dérivées ; la dérivée d'un produit $f_1 \times f_2$ sera égale à

$$f_2\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_2\frac{\partial f_1}{\partial z} + f_1\frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

On en déduit la dérivée d'une puissance, U^m (m entier)

$$(U^m)' = m\,U^{m-1}\frac{dU}{dz}.$$

De même la dérivée d'un quotient s'obtiendra par la règle habituelle.

Ainsi toutes les règles du calcul des dérivées pour les fonctions de variable réelle, s'appliquent aux fonctions analytiques.

La dérivée d'un polynôme, la dérivée d'une fraction rationnelle s'obtiennent par la même règle que si la variable était réelle.

Formule des accroissements finis. — Nous avons vu que, même si la fonction n'est pas analytique, on peut écrire, en appliquant le théorème des accroissements finis au groupement $U + iV$,

$$\Delta f = \Delta x[U_x'(\xi, \eta) + iV_x'(\xi, \eta)] + \Delta y[U_y'(\xi, \eta) + iV_y'(\xi, \eta)].$$

ξ étant compris entre x et $x + \Delta x$, η entre y et $y + \Delta y$.

Mais, si la fonction est analytique,

$$U_x' = V_y' \qquad U_y' = -V_x'$$

on peut donc écrire

$$\Delta f = \Delta x[U_x' + iV_x'] + i\Delta y[U_x' + iV_x'] = (\Delta x + i\Delta y)(U_x' + iV_x')$$

c'est-à-dire

$$\Delta f = f'(\zeta)\Delta z$$

Nous pouvons dire que ζ est compris entre z et $z + \Delta z$.

La formule des accroissements finis est donc applicable.

Puisque, pour la définition d'une fonction analytique, nous avons dû supposer les dérivées partielles continues, elles le sont uniformément dans le champ.

r, σ_1 On peut déterminer un intervalle η suffisamment petit, tel que, si

$$|x'' - x'| < \eta \qquad |y'' - y'| < \eta$$

on ait par exemple

$$|U_x'(x'', y'') - U_x'(x', y')| < \varepsilon$$

on peut dire encore que, à la condition que

$$|z'' - z'| < \eta'$$

on a certainement

$$|f'(z'') - f'(z')| < \varepsilon'.$$

ω *La dérivée est donc uniformément continue.*

Fonctions holomorphes. Points singuliers. — On dit qu'une fonction analytique $f(z)$ est « uniforme » ou « monodrôme » dans une région R du plan connexe, ou d'un seul tenant, si elle a une valeur bien déterminée en tout point M de cette région, quel que soit le chemin suivi dans la région pour parvenir en M.

On dit qu'une fonction analytique est « holomorphe » dans la région R si elle y est uniforme, finie et continue.

On dit qu'un point est un point « singulier » de la fonction, si pour les coordonnées de ce point, l'une des conditions n'est pas satisfaite. Il en est donc de diverses sortes :

Si U et V sont deux fonctions holomorphes dans une aire, la somme, $aU + bV$, le produit UV sont des fonctions holomorphes, mais le quotient $f(z) = \frac{U}{V}$ cessera d'être holomorphe pour les points de la région qui annulent V, π le module de la fonction croissant

au-delà de toute limite pour des points suffisamment proches. Mais aux environs d'un de ces points, l'inverse de la fonction

$$\varphi(z) = \frac{V}{U}$$

sera holomorphe : un tel point a s'appelle « pôle » de la fonction.

Si le produit $(z - a)^n f(z)$ reste fini lorsque z tend vers a, pour une certaine valeur de l'exposant entier n, on dit que le pôle est d'ordre n.

On dit qu'une fonction analytique, uniforme est « méromorphe » dans une région connexe, si dans cette région, elle n'admet d'autres singularités que des pôles en nombre fini. En supprimant autour de chaque pôle une petite région de forme quelconque, par exemple, un petit cercle entourant le pôle, la fonction sera holomorphe dans la région restante.

Domaine d'un point. Valeur infinie de la variable. — On appelle « domaine » d'un point M, l'ensemble des valeurs de z correspondant à tous les points d'une région de forme indéterminée entourant le point, et suffisamment petite pour que la fonction y jouisse en chacun de ces points de certaines propriétés vérifiées au point M, comme d'être continue, d'être développable en série, etc.

En particulier, le domaine de l'origine sera formé par tous les points d'un cercle, de centre origine, de rayon suffisamment petit ε. Faisons la transformation $Z = \frac{1}{z}$. A tous les points z à l'intérieur du cercle, correspondront tous les points Z à l'extérieur d'un cercle de rayon $R = \frac{1}{\varepsilon}$. L'ensemble de tous ces points qui correspondent ainsi au domaine du point origine sera appelé le « domaine de l'infini ».

On est donc amené à considérer l'infini comme un véritable point, auquel correspond une valeur bien déterminée de Z. Etudier une fonction $f(Z)$ pour les valeurs infinies de la variable, reviendra à faire la transformation $Z = \frac{1}{z}$ et étudier la fonction transformée $\varphi(z)$ dans le domaine de l'origine.

Appliquons ces notions à l'étude des fonctions simples.

Soit un polynôme entier

$$P(Z) = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_n Z^n.$$

Si nous faisons la transformation $Z = \frac{1}{z}$ nous obtenons

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^n}.$$

Cette fonction devient infinie au point $z = o$. Mais le numérateur et le dénominateur sont holomorphes dans le domaine de l'origine et l'inverse de cette fonction est holomorphe en ce point. Le point $z = o$ est donc un pôle de la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$. Le produit $z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ restant fini dans le domaine de l'origine, l'origine est un pôle d'ordre n de la fonction $P\left(\frac{1}{z}\right)$. On dit par suite que l'infini est un pôle d'ordre n pour le polynôme donné.

Fonction rationnelle. — Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. P et Q désignant des polynômes de degré respectivement n(P) et m(Q). On verra aisément que l'infini est un point ordinaire de $f(z)$ si les polynômes sont de même degré. C'est un pôle d'ordre $n - m$, si $n > m$. Enfin pour les valeurs qui annulent Q(z), l'inverse de la fonction reste holomorphe aux environs de chacun d'eux et finie (nulle).
La fonction est donc « méromorphe » dans tout le plan.

Fonction exponentielle. — Si nous posons $z = x + iy$, nous verrons que nous pouvons définir la fonction exponentielle par la formule

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

et on vérifie aisément que c'est une fonction analytique.

Si le point z s'éloigne indéfiniment, le module e^x tend vers zéro ou augmente indéfiniment, mais sin y et cos y ne tendent vers aucune valeur déterminée. Le point infini est donc un point « singulier » de la fonction. Si l'on cherche les points pour lesquels e^z prend une valeur donnée e^a, on aura à résoudre l'équation

$$e^z = e^a$$

Nous verrons qu'il faut que $z = a + 2k\pi i$ (k entier quelconque). Si nous faisons la transformation $Z = \frac{1}{z}$, on aura pour tous ces points $Z = \frac{1}{a + 2k\pi i}$. Il y en aura donc d'aussi rapprochés qu'on le veut de l'origine et dans un cercle de rayon aussi petit qu'on le veut, il existe autant de points qu'on le veut pour lesquels la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ prend la valeur arbitraire e^a. Cette fonction n'est donc pas déterminée à l'origine et peut y prendre telle valeur qu'on le veut à la seule condition que l'on se rapproche convenablement de 0. L'origine est un « point singulier essentiel » de la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ et le point infini est un point singulier essentiel de la fonction e^z.

Fonction trigonométrique. — Nous verrons comment l'on définit $\sin z$. Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}.$$

Les points pour lesquels cette fonction prend une valeur donnée $\frac{1}{\sin \alpha}$, sont donnés, comme nous le verrons, par la formule

$$\frac{1}{z} = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z} = \pi - \alpha + 2k'\pi \qquad (k \text{ et } k' \text{ entiers})$$

d'où l'on déduit

$$z = \frac{1}{\alpha + 2k\pi} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{\pi - \alpha + 2k'\pi}.$$

Si nous prenons les premières valeurs, on voit que, dans un cercle de rayon aussi petit qu'on le veut, il y a une infinité de tels points, k pouvant être pris aussi grand que l'on veut. La fonction peut prendre à l'origine telle valeur que l'on veut, à condition que l'on se rapproche convenablement de ce point.

De plus la fonction devient infinie pour les valeurs

$$z = \frac{1}{k\pi}.$$

Dans un cercle de centre origine, quel que petit que soit son rayon,

ρ

il y a une infinité de tels points. Il est impossible de tracer autour de l'origine un cercle de rayon, si petit soit-il, ne contenant pas d'autre point critique que l'origine. On dit que l'origine est un point critique « non isolé. »

Fonction infinie. — Si une fonction $f(z)$ devient infinie pour une valeur a de z, nous étudierons la fonction inverse

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

aux environs de a.

Fonctions de plusieurs variables. — Considérons, par exemple, deux quantités imaginaires z_1, z_2 représentées par des points m_1, m_2 variables dans un même plan (ou dans des plans différents) dans des aires C_1, C_2.

Posons :

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Soient X, Y, deux fonctions des variables x_1, x_2, y_1, y_2.

ξ

On pourra dire que l'imaginaire

$$U = X + iY$$

est une fonction des deux variables z_1 et z_2. Elle sera bien déterminée, finie et continue si X, Y le sont elles-mêmes par rapport aux variables x, y.

ξ, α

Si l'on veut que, z_1 variant seule, la fonction admette une dérivée par rapport à z_1, limite du rapport $\frac{\Delta U}{\Delta z_1}$ quelle que soit la manière dont Δz_1 tende vers zéro, β il faudra évidemment que l'on ait

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial Y}{\partial y_1} \qquad \frac{\partial X}{\partial y_1} = -\frac{\partial Y}{\partial x_1}.$$

Cette limite s'appellera la « dérivée partielle » de U par rapport à z_1.

On aura

$$\frac{\partial U}{\partial z_1} = \frac{\partial X}{\partial x_1} + i\frac{\partial Y}{\partial x_1},$$

De même U admettra une dérivée partielle par rapport à z_2, si l'on a

$$\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial Y}{\partial y_2} \qquad \frac{\partial X}{\partial y_2} = -\frac{\partial Y}{\partial x_2}.$$

La fonction U sera alors une fonction analytique des variables z_1 et z_2.

Pour un système d'accroissements Δz_1, Δz_2, la différentielle de la fonction sera par définition :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial z_1}\Delta z_1 + \frac{\partial U}{\partial z_2}\Delta z_2.$$

Mais Δz_1, Δz_2 devront nécessairement se confondre avec dz_1, dz_2.

On a donc

$$dU = \frac{\partial U}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial U}{\partial z_2}dz_2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que U *se réduise à une constante est que la différentielle soit nulle quels que soient* dz_1, dz_2.

La condition est évidemment nécessaire.

Si elle est remplie, on en déduit

$$\frac{\partial U}{\partial z_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial z_2} = 0$$

et d'après les expressions de $\frac{\partial U}{\partial z_1}$,

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial x_1} = 0.$$

et par suite

$$\frac{\partial X}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial y_1} = 0.$$

Les fonctions X, Y seront bien indépendantes de x_1, y_1, De même, si $\frac{\partial U}{\partial z_2} = 0$, elles seront indépendantes de x_2, y_2 ; X et Y se réduisent donc bien à des constantes.

Fonction composée. — Supposons que, à leur tour, z_1 et z_2 soient des fonctions analytiques de plusieurs variables, par exemple, de trois variables $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ et qu'elles se déplacent dans les champs C_1, C_2 quand les variables $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ se déplacent dans les champs K_1, K_2, K_3 ;

(si, par exemple, $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, x_1 et y_1 devront être des fonctions de $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$).

ψ, ξ

La fonction $U = X + iY$ pourra être considérée comme fonction de $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

ψ

Nous allons montrer que c'est une fonction analytique par rapport à ces variables.

δ, ξ

Si c'est une fonction analytique par rapport à l'une des variables ζ, (nous supprimons l'indice) sa dérivée sera :

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + i\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

et on devrait avoir aussi

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + i\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right).$$

δ_1

Mais on a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \cdots$$

On a donc

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + i\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi}\left(\frac{\partial X}{\partial x_1} + i\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right) + \cdots + \cdots + \frac{\partial y_2}{\partial \xi}\left(\frac{\partial X}{\partial y_2} + i\frac{\partial Y}{\partial y_2}\right).$$

ρ_1, σ_2

La fonction U étant fonction analytique de z_1, on a

$$\frac{\partial U}{\partial z_1} = \frac{\partial X}{\partial x_1} + i\frac{\partial Y}{\partial x_1} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y_1} + i\frac{\partial Y}{\partial y_1}\right).$$

De même

$$\frac{\partial U}{\partial z_2} = \frac{\partial X}{\partial x_2} + i\frac{\partial Y}{\partial x_2} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y_2} + i\frac{\partial Y}{\partial y_2}\right).$$

δ_1

L'expression ci-dessus s'écrit donc :

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + i\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial z_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + i\frac{\partial y_1}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial U}{\partial z_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi} + i\frac{\partial y_2}{\partial \xi}\right).$$

δ_1, ρ

$z_1 = x_1 + iy_1$, étant d'autre part, fonction analytique de ζ, on a

$$\frac{\partial z_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + i\frac{\partial y_1}{\partial \xi}$$

et de même

$$\frac{\partial z_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial x_2}{\partial \xi} + i \frac{\partial y_2}{\partial \xi}.$$

On a donc enfin

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + i \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial \zeta}.$$

Cette forme montre que l'on obtiendrait la même valeur pour

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + i \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right).$$

La fonction U est donc bien fonction analytique de ζ_1, ζ_2, ζ_3 et de plus

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{\partial U}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial \zeta}.$$

Les expressions des dérivées partielles de la fonction composée s'obtiennent donc par les mêmes formules que si les variables étaient réelles.

On en déduit aussi que la différentielle dU a la même forme que si les variables z_1 et z_2 étaient indépendantes.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial U}{\partial z_2} dz_2.$$

On voit donc que tous les résultats du calcul différentiel établis pour les variables réelles, s'appliquent aux fonctions analytiques de variables complexes et de même aussi tout le calcul intégral indéfini. Car la détermination d'une fonction « primitive » d'une fonction donnée se vérifie par des dérivations lesquelles sont applicables aux fonctions de variables complexes.

II. — FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Avant de poursuivre l'étude des fonctions de variables complexes, nous allons définir et étudier les fonctions transcendantes élémentaires

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad (z-a)^m, \quad \log z, \quad \ldots$$

Fonction exponentielle e^z. — Lorsque x est réel, nous savons que e^x est représenté, quel que soit x, par la série de Mac-Laurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots$$

Si nous considérons la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots$$

cette série est absolument convergente pour toute valeur de z.

Nous pouvons donc la prendre pour définition de e^z.

Puisque la série est absolument convergente, on obtiendra la dérivée de la fonction qu'elle représente en prenant la série des dérivées, si cette série est elle-même absolument convergente.

Or, on obtient ainsi la série

$$\sum n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} ;$$

elle reproduit la fonction elle-même. Chaque terme de la série est analytique. La série des dérivées est convergente. La fonction e^z admet donc une dérivée : *elle est donc certainement analytique* et on a

$$(e^z)' = e^z$$

comme si z était réel.

Fonctions trigonométriques. — Nous définirons de même $\sin z$, $\cos z$, par les développements :

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \cdots$$

Ces séries sont en effet absolument convergentes quel que soit z et se réduisent à $\sin x$, $\cos x$ lorsque z se réduit à sa partie réelle x. Chacun des termes de l'une ou l'autre des séries est analytique ; d'autre part, les séries des dérivées sont absolument conver-

gentes, car elles reproduisent cos z et — sin z. *Les fonctions qu'elles représentent sont donc certainement analytiques* et on a

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

Formules d'Euler. — Dans la formule qui donne e^z, changeons z en iz.

Nous aurons

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

En groupant d'une part les termes indépendants de i, et d'autre part ceux qui en dépendent, ce que nous avons le droit de faire, puisque la série est absolument convergente, on voit que

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

En changeant i en $-i$,

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

On en déduit

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Ces formules portent le nom de « Formules d'Euler ». Elles sont remarquables, puisqu'elles établissent un lien entre les exponentielles et les fonctions trigonométriques.

Elles sont valables quelle que soit z. Si z se réduit à sa partie réelle x

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

en particulier

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i \qquad e^{\frac{-i\pi}{2}} = -i \qquad e^{i\pi} = -1 \qquad e^{2i\pi} = +1.$$

Propriétés de la fonction exponentielle. — I. Ainsi que nous l'avons vu, la dérivée de la fonction e^z est la fonction elle-même

II. Si z et u sont réels, on sait que

$$e^z \times e^u = e^{z+u}$$

ψ
Nous allons montrer que cette formule est encore valable si z et u sont imaginaires.

δ_1, ξ
On a en effet

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2!} + \cdots$$

Pour faire le produit de ces deux séries absolument convergentes,

α
on peut grouper les termes d'une manière quelconque.

ν
Nous allons dans le produit grouper les termes de même degré en z et u.

δ_1, σ_1
L'ensemble des termes de degré μ sera

$$\sum_{n=0}^{n=\mu} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{u^{\mu-n}}{(\mu-n)!}.$$

Cet ensemble peut s'écrire

$$\frac{1}{\mu!} \sum \frac{\mu!}{n!\,(\mu-n)!} z^n u^{\mu-n}.$$

ρ, δ_1
Or, on voit que la somme est le développement de

$$(z+u)^\mu.$$

L'ensemble des termes de degré μ est donc

$$\frac{1}{\mu!}(z+u)^\mu.$$

et par suite

$$e^z \times e^u = 1 + \frac{z+u}{1} + \frac{(z+u)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z+u)^\mu}{\mu!} + \cdots$$

ω
c'est-à-dire

$$e^z \cdot e^u = e^{z+u}.$$

La propriété est donc démontrée.

IV. Séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire
Si $z = x + yi$, on a d'après la propriété ci-dessus

$$e^z = e^x \times e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Le module de e^z est donc e^x et l'argument est y, ne s'annule donc jamais dans tout le plan (sauf pour $x = -\infty$) et e^z se reproduit si y augmente de $2k\pi$.

Propriétés des lignes trigonométriques. — Comme on l'a déjà vu :

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\cos z$$
$$\sin(-z) = -\sin z \qquad (\cos -z) = +\cos z.$$

Addition des arcs. — Si z et u sont imaginaires, on a

$$\sin(z + u) = \sin z \cos u + \sin u \cos z.$$

Il suffit en effet de remplacer les lignes trigonométriques en fonction d'exponentielles au moyen des formules d'Euler.

En particulier

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

De même

$$\cos(z + u) = \cos z \cos u - \sin z \sin u$$

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z.$$

Si $z = -u$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

Ces diverses propriétés constituant toute la base du calcul trigonométrique, *toutes les formules de trigonométrie* établies dans le cas où les variables sont réelles, *sont encore valables pour les variables complexes.*

Séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire. — On a d'abord

$$\sin iy = i\left(y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots\right).$$

Si y est réel, sin iy est donc purement imaginaire.

De même

$$\cos iy = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots;$$

Cos iy est donc réel.

On appelle « sinus hyperbolique » et « cosinus hyperbolique » et on désigne par sh x, ch x, les fonctions réelles

$$sh\ x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$ch\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, sh x croît constamment de $-\infty$ à 0 puis de 0 à $+\infty$; ch x décroît de $+\infty$ à 1, puis croît de 1 à $+\infty$.

En introduisant ces nouvelles fonctions,

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x\ ch\ y + i \cos x \operatorname{sh} y$$
$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x\ ch\ y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

La séparation des parties réelles et imaginaires est bien effectuée

Racines de $\sin z = 0$. — Si l'on pose

$$\sin(x + iy) = 0$$

δ_1 d'après les formules ci-dessus, on doit avoir

$$\sin x \operatorname{ch} y = 0 \qquad \cos x \operatorname{sh} y = 0.$$

Comme ch $y \neq 0$, il faut que

$$\sin x = 0 \qquad x = k\pi.$$

δ_1 La seconde équation donne alors

$$\operatorname{sh} y = 0, \qquad y = 0$$

ω Ainsi *les seules racines de* sin z *sont des racines réelles*

$$z = k\pi.$$

ψ Il en est de même pour cos z.

Plus généralement, α résolvons l'équation

$$\sin z = \sin z_0.$$

Puisque les transformations de la trigonométrie réelle sont applicables, α cette équation s'écrit

$$2 \sin \frac{z - z_0}{2} \cos \frac{z + z_0}{2} = 0$$

et par suite on obtient, soit

$$\frac{z - z_0}{2} = k\pi$$

soit

$$\frac{z + z_0}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

c'est-à-dire

$$z = z_0 + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad z = \pi - z_0 + 2k'\pi.$$

Ce sont les mêmes résultats que si z et z_0 étaient réels.

Application des formules d'Euler. — *Expression de* $\sin mx$, $\cos mx$ *en fonction de* $\sin x$, $\cos x$ (*m étant entier*).

On a

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

En élevant les deux membres à la puissance $m^{\text{ème}}$

$$e^{mix} = (\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx$$

on retrouve la formule de Moivre.

En égalant, les parties réelles des deux membres, (il suffit de prendre les termes de deux en deux), on obtient

$$\cos mx = \cos^m x - C_m^2 \cos^{m-2} x \sin^2 x + C_m^4 \cos^{m-4} x \sin^4 x - \cdots$$

De même en égalant les parties imaginaires

$$\sin mx = C_m^1 \cos^{m-1} x \sin x - C_m^3 \cos^{m-3} x \sin^3 x + \cdots$$

La première expression ne renferme dans tous les cas que des puissances paires de $\sin x$; $\cos mx$ peut donc s'exprimer par un polynôme de degré m en $\cos x$ (tous les termes sont de même parité).

Dans l'expression de $\sin mx$, on peut mettre $\sin x$ en facteur.

Si m est impair, elle ne renferme que des termes de degré pair en $\cos x$; $\sin mx$ s'exprime donc par un polynôme de degré m en $\sin x$, tous les termes étant de degré impair.

Si m est pair, on aura le produit de $\sin x \cdot \cos x$ par un polynôme de degré $\left(\frac{m}{2} - 1\right)$ en $\sin^2 x$.

On connaît d'ailleurs les racines de ces polynômes, solutions des équations

$$\cos mx = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sin mx = 0$$

Expression de $\sin^m x$, $\cos^m x$. — De même on peut *exprimer* $\sin^m x$, $\cos^m x$ *en fonction des lignes trigonométriques des multiples de l'arc* x.

On a par exemple, en effet

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}.$$

En élevant les deux membres à la puissance m et développant le second membre par la formule du binôme, on aura

$$2^m \cos^m x = e^{mix} + C_m^1 e^{(m-2)ix} + C_m^2 e^{(m-4)ix} + \cdots + C_m^1 e^{-(m-2)ix} + e^{-mix}.$$

En rassemblant les termes équidistants des extrêmes, et remarquant que

$$e^{(m-2k)ix} + e^{-(m-2k)ix} = 2\cos(m-2k)x$$

on aura

$$2^m \cos^m x = 2\,\Sigma\, C_m^k \cos(m-2k)\,x = 2\cos mx + 2\,C_m^1 \cos(m-2)\,x + \cdots$$

Si m est pair, on aura un terme médian constant $C_m^{\frac{m}{2}}$. Si m est impair, le dernier terme sera un terme en $\cos x$.

De même, en partant de l'égalité

$$2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$$

on aura

$$2^m i^m \sin^m x = e^{mix} - C_m^1 e^{(m-2)ix} + C_m^2 e^{(m-4)ix} + \cdots + (-1)^k C_m^k e^{(m-2k)ix} + \cdots + (-1)^m e^{-mix}.$$

Si m est pair, les termes équidistants des extrêmes sont de même signe et ont même coefficient. En les rassemblant, on introduira donc des cosinus :

$$2^m (-1)^{\frac{m}{2}} \sin^m x = 2\cos mx - 2\,C_m^1 \cos(m-2)x + \cdots$$

Les deux membres sont bien réels.

Si m est impair, les termes équidistants des extrêmes ont des coefficients de signes contraires ; on introduira donc des sinus :

$$2^m i^m \sin^m x = 2\,i \sin mx - 2\,C_m^1\, i \sin(m-2)x + \cdots + (-1)^k 2\,C_m^k\, i \sin(m-2k)x + \cdots$$

On peut donc diviser les deux membres par i et les deux termes de l'égalité deviennent réels.

Si $m = 2m' + 1$, le dernier terme s'obtiendra en faisant $2k = 2m'$. Il sera, $(-1)^{m'} \cdot 2C_m^{m'} \sin x$.

Fonction logarithmique. — On ne peut pas, comme pour la fonction exponentielle ou les fonctions trigonométriques définir Log z par un développement en série, puisque, si z est réel et se réduit à x, Log x ne peut pas l'être. Car pour des valeurs de x infiniment petites, Log x ne peut être équivalent à une puissance quelconque de x.

Nous définirons Log z comme l'inverse de la fonction exponentielle : Si nous avons l'égalité $e^u = z$ nous dirons que u est le logarithme de z. Nous avons déjà remarqué que toute fonction inverse d'une fonction analytique est une fonction analytique. Donc u considéré comme fonction de z sera une fonction analytique. La dérivée $\frac{du}{dz}$ sera d'ailleurs égale à $\frac{1}{z'_u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z}$.

Ainsi $D \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$ comme si z était réel.

Cette dérivée n'existera d'ailleurs que si z est différent de zéro.

Cherchons à déterminer ces valeurs de u.

Soit $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ et soit $X + iY$ un logarithme de z.

On devra avoir

$$e^{X+iY} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^X(\cos Y + i \sin Y).$$

On en déduit

$$e^X = \rho \qquad X = \log\rho \qquad \text{et} \qquad Y = \varphi + 2k\pi$$

k désignant un entier arbitraire.

Ainsi la partie réelle est bien déterminée : c'est le logarithme arithmétique de mod z. La partie imaginaire n'est déterminée qu'à $2k\pi$ près. On a en général

$$\log\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \log\rho + i(\varphi + 2k\pi).$$

Pour l'origine, Log ρ décroît jusqu'à $-\infty$ mais φ n'est pas déterminée. Ce point est un point singulier de la fonction et ce n'est pas un pôle.

Sous cette forme, $u = \underset{\sigma_1, \pi}{\text{Log}}\, \rho + i(\varphi + 2k\pi)$, il est aisé de voir que la fonction est analytique. Car si dans $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, ρ varie seul, on a comme lim. du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\frac{1}{\rho}\Delta\rho}{\Delta\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{z}.$$

Si, δ_1 au contraire, φ varie seul, on a comme limite

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{i\Delta\varphi}{\rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\Delta\varphi} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{z}.$$

Les deux limites sont donc bien les mêmes. La limite sera indépendante de la loi de variation de ρ et φ. La dérivée est $\frac{1}{z}$.

Détermination précise de la fonction logarithmique. — D'après les résultats ci-dessus, on voit que la fonction Log z n'est pas encore déterminée d'une manière précise, puisque l'on peut donner à k une valeur entière quelconque.

Pour achever de la déterminer, précisons d'abord la variable z. Pour chaque point z du plan, le module est bien déterminé. Pour déterminer son « argument », nous remarquons qu'il existe un argument et un seul compris entre $2k\pi$ et $2(k+1)\pi$.

D'une façon un peu plus générale, traçons à partir de 0 une demi-droite OC que nous appellerons une « coupure » et soit α le plus petit angle que cette droite fait avec ox. A chaque point du plan correspondra un argument et un seul compris entre $\alpha + 2k\pi$ et $\alpha + 2(k+1)\pi$.

Nous désignerons cet argument par φ_k et nous appellerons $\text{Log}_k z$, la fonction Log $\rho + i\varphi_k$.

Propriétés. — d Cette fonction est ainsi nettement déterminée pour chaque point z *sauf pour l'origine*, sans qu'il soit nécessaire de spécifier quelle courbe a décrite le point z, partant d'une position initiale z_0 pour arriver à sa position finale z.

Continuité. — ζ Voyons si cette fonction est continue. Si z se déplace d'une façon continue dans le plan, en décrivant une courbe telle que M_0MN, *qui ne traverse pas la coupure* OC, ρ le

module et l'argument φ_k varient d'une façon continue et par suite la fonction $\operatorname{Log}_k z$. En particulier, si z revient au point de départ z_0 le logarithme reprend sa valeur initiale $\operatorname{Log}_k z_0$.

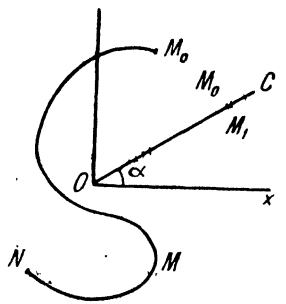


Fig. 1.

Mais, prenons de part et d'autre de la coupure deux points très voisins M_0, M_1. Les deux modules ρ de $\operatorname{Log}_k z$ seront très voisins. δ_1 Mais l'argument de z_0 sera très voisin de $2k\pi + \alpha$ (et n'en différera que du petit angle $\varepsilon = \mathrm{COM}_0$), tandis que l'argument de z_1 sera très voisin de $2k\pi + 2\pi + \alpha$.

Les deux valeurs de $\operatorname{Log}_k z$ correspondant à deux points très voisins tels que M_0, M_1 mais de part et d'autre de la coupure, différeront d'une quantité presque égale à $2\pi i$ (et aussi voisine qu'on le veut de $2\pi i$). ω

Si donc l'on faisait décrire au point M une courbe traversant la coupure de haut en bas, ω la fonction $\operatorname{Log}_k z$, telle que nous l'avons définie, augmenterait brusquement de $2\pi i$.

Cette fonction $\operatorname{Log}_k z$ n'est donc pas une fonction continue si la courbe décrite par z traverse la coupure. ω

Il y aurait diminution brusque de $2\pi i$, si la courbe décrite traversait la coupure de bas en haut.

En résumé : on a une fonction bien déterminée en chaque point sans qu'il soit nécessaire de préciser la courbe décrite par le point, mais cette fonction n'est pas continue dans la traversée de la coupure.

Pour éviter cet inconvénient, deux solutions se présentaient :

Détermination précise. — 1° Interdire à la variable cette traversée de la coupure, admettre par imagination, que le plan est réellement coupé suivant la demi-droite OC et que le point variable ne peut la traverser ; lorsque la courbe décrite par le point n'est pas fermée, ou est une courbe fermée ne contenant pas l'origine à son intérieur, cela n'a aucun inconvénient puisque l'on peut tracer la coupure (droite ou courbe) de manière à ce qu'elle ne rencontre pas la courbe décrite. α

Mais il ne peut en être de même si la courbe décrite est fermée et comprend l'origine à son intérieur : on ne pourrait l'admettre dans le plan coupé, comme courbe décrite par le point.

2° Une deuxième solution résulte des considérations suivantes : supposons, par exemple, que le point traverse la coupure de haut en bas. En même temps que la fonction $\mathrm{Log}_k z$, nous pourrions définir $\mathrm{Log}_{k+1} z$ (correspondant à un argument compris entre $\alpha = 2(k+1)\pi$ et $\alpha + 2(k+2)\pi$).

Lorsque z passe de M_0 à M_1, nous avons vu que l'argument augmente brusquement de 2π; $\mathrm{Log}_k z_1$ diffère donc très peu de $\mathrm{Log}_{k+1} z_0$.

Si donc on admet que les « diverses déterminations » constituent, non des fonctions distinctes, mais des branches différentes d'une même fonction Log z, on peut dire que lorsqu'on traverse la courbe en descendant, on passe *d'une façon continue* de la branche k à la branche suivante $k+1$.

Pour étudier la fonction Log z, *on se donnera sa valeur initiale (ce qui revient à indiquer celle des branches que l'on choisit initialement).*

Lorsque à partir de ce point, le point z décrira un contour absolument quelconque, traversant ou non la coupure, on suivra par continuité les variations du module et de l'argument de z. On en déduira sans ambiguïté la valeur finale de Log z.

Lorsque on reviendra au point de départ, la valeur finale du logarithme pourra différer de la valeur de départ. Si la courbe décrite a traversé la coupure m fois de haut en bas, et n fois de bas en haut, elle en différera de $2(m-n)\pi i$.

Dans cette solution :

La fonction Log z est bien déterminée en tout point du parcours. Elle varie d'une façon continue quelle que soit la courbe décrite.

Mais il est nécessaire de spécifier quelle est la courbe décrite ou tout au moins de connaître combien de fois dans chaque sens cette courbe traverse la coupure.

Quand on reviendra au point de départ, la valeur finale de Log z pourra différer de la valeur initiale.

Le point $z = o$ est un point singulier essentiel, non pôle, de la fonction.

Bien entendu, si l'on avait la fonction Log $(z-a)$, ce serait le

point a qui serait point singulier essentiel et il faudrait tracer une coupure à partir de a.

Propriétés de la fonction logarithmique. — Dans le cas de nombres réels, on a la propriété fondamentale des logarithmes :

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Dans le cas où les nombres sont complexes, il est bien évident que cette propriété ne peut subsister intégralement puisque les logarithmes ne sont définis qu'à $2k\pi i$ près, mais on peut prouver que, quelles que soient les déterminations, on aura

$$\log zz' = \log z + \log z' + 2h\pi i.$$

Si en effet, on désigne par u, u', v, certaines déterminations de Log z, Log z', Log zz', on a par définition

$$e^u = z, \qquad e^{u'} = z', \qquad e^v = zz'.$$

On en déduit

$$e^v = e^u \, e^{u'} = e^{u+u'}.$$

Par suite

$$v = u + u' + 2h\pi i.$$

Fonction $(z-a)^m$. — Quels que soient m, a, z, nous définirons la fonction $(z-a)^m$ par l'égalité :

$$(z-a)^m = e^{m \log (z-a)}$$

qui est vérifiée dans le cas où z, a, m sont réels.

Si nous posons

$$z - a = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

nous aurons donc

$$(z-a)^m = e^{m[\log\rho + i(\varphi + 2k\pi)]}.$$

La fonction $(z-a)^m$ présente donc des indéterminations correspondant à celles de Log $(z-a)$.

Traçons à partir du point a une demi-droite, coupure, faisant avec ox, l'angle α. Parmi les arguments de $z-a$, il en existe un et un seul compris entre $\alpha + 2k\pi$ et $\alpha + 2(k+1)\pi$.

En désignant par φ_k cet argument particulier, nous aurons une valeur de la fonction

$$u_k = e^{m(\log \rho + i\varphi_k)} = e^{m \log \rho} \times e^{mi\varphi_k}.$$

ρ

Cette valeur sera bien déterminée en tout point M du plan (sauf le point A) sans qu'il soit nécessaire de spécifier le chemin antérieurement parcouru.

Si z se déplace de façon continue, la fonction u_k variera d'une manière continue, à condition que le point M ne traverse pas la

δ_1

coupure. Mais pour deux points M_0, M_1, voisins, situés de part et d'autre de la coupure, les facteurs $e^{m \log \rho}$ seront très voisins, mais on aura sensiblement

$$(\varphi_k)_0 = 2k\pi + \alpha, \qquad (\varphi_k)_1 = 2k\pi + \alpha + 2\pi$$

et par suite

$$(u_k)_1 = (u_k)_0 \times e^{2m\pi i}$$

ρ, ω

Si m n'est pas entier réel, les deux valeurs $(u_k)_0$ et $(u_k)_1$ sont donc inégales.

La fonction $(z - a)^m$ subit donc des discontinuités quand on traverse la coupure : elle est multipliée brusquement par $e^{2m\pi i}$ quand on traverse la coupure de haut en bas.

α_1

Si l'on veut éviter cet inconvénient, il faut, soit admettre que la variable ne pourra se déplacer que dans le plan coupé (sans traverser la coupure), soit admettre que les diverses déterminations possibles de la fonction sont les diverses branches d'une même fonction, et que l'on passe d'une façon continue d'une branche à une autre quand on traverse la coupure.

α_1

Il faudra alors s'assujettir à se donner la valeur initiale de la fonction en un point de départ M_0, *par exemple* $e^{m \log \rho_0} \times e^{mi(\varphi_k)_0}$, *suivre par continuité les variations de* ρ et de φ_k : *on aura la valeur finale de la fonction* u.

À vrai dire, il suffira de connaître le nombre de traversées de la coupure soit en montant, soit en descendant.

Le point a est un « point singulier essentiel » de la fonction $(z - a)^m$.

Séparation de la partie réelle. Si m est de la forme $\lambda + \mu i$, en désignant par φ l'un des arguments de z, toutes les déterminations de $(z - a)^m$ sont comprises dans la formule

$$(z - a)^m = e^{(\lambda + \mu i)[\log \rho + i(\varphi + 2k\pi)]}$$

δ_1

C'est une expression de la forme $e^{\alpha + \beta i}$ en posant

$$\alpha = \lambda \log \rho + \mu(\varphi + 2k\pi)$$
$$\beta = \mu \log \rho + \lambda(\varphi + 2k\pi).$$

ω

Alors

$$(z - a)^m = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta).$$

Il y aura autant de déterminations possibles de $(z - a)^m$ qu'il y aura de déterminations pour α, et de déterminations pour β à $2k\pi$ près.

δ_1

Si $\mu \not\equiv o$, toutes les déterminations de α étant différentes, il y a une infinité de déterminations de la fonction, à modules tous différents.

Si $\mu = o$, le module des diverses déterminations de la fonction est unique et bien déterminé $e^{\lambda \log \rho} = \rho^{\lambda}$. δ_1 Il y aura autant de déterminations, qu'il y aura de valeurs distinctes de β ne différant pas d'un multiple de 2π.

Deux indices k et k' donneront donc la même détermination de u, si l'on peut avoir

$$\lambda(\varphi + 2k\pi) - \lambda(\varphi + 2k'\pi) = 2h\pi$$

c'est-à-dire

$$\lambda(k - k') = h.$$

σ, ρ

Cette égalité ne peut avoir lieu que si λ *est rationnel.*

ω

Si donc λ est irrationnel, toutes les déterminations de la fonction, en nombre infini, sont distinctes.

Si λ est rationnel de la forme $\frac{p}{q}$, pour avoir toutes les déterminations de la fonction, il suffira de considérer q valeurs consécutives de l'indice k, par exemple

$$k = 0, 1, 2 \cdots (q - 1).$$

Dérivée de la fonction. — σ_2 La fonction $v = \log(z - a)$ étant fonction analytique de z, et la fonction $u = e^{mv}$ étant une fonction analytique de v, la fonction $u = e^{m \log(z-a)}$ est une fonction analytique de z. δ_1 Sa dérivée sera $me^{mv}\frac{dv}{dz}$ c'est-à-dire $mu\frac{1}{z - a}$.

D'ailleurs si l'on prend la détermination u_k,

$$u_k = e^{m(\log \rho + i\varphi_k)}$$

on a

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi_k}, \qquad \frac{u_k}{z-a} = e^{(m-1)\log \rho} \times e^{(m-1)i\varphi_k}$$

Donc

$$\frac{du}{dz} = me^{(m-1)[\log \rho + i\varphi_k]} = m(z-a)_k{}^{m-1}.$$

ρ, ω

La formule de dérivation est donc la même que si les variables et l'exposant sont réels.

Propriétés fondamentales. — Dans le cas où les variables et l'exposant sont réels, σ_2 on a les trois propriétés fondamentales :

$$z^m u^m = (zu)^m, \qquad z^m \cdot z^n = z^{m+n}, \qquad (z^m)^n = z^{mn}$$

ψ

Ces formules ne peuvent plus subsister intégralement si m, z, u sont imaginaires puisque chacune des fonctions z^m, u^m... est susceptible de plusieurs déterminations.

α

Voyons quelle modification il faut introduire.

Prenons, par exemple, la première formule. δ_1 On a

$$z^m = e^{m \log_k z}, \qquad u^m = e^{m \log_l u}, \qquad (zu)^m = e^{m \log_j (zu)}.$$

Donc

$$z^m u^m = e^{m(\log_k z + \log_l u)}.$$

Or, quels que soient les indices, on a une égalité de la forme

$$\log_j zu = \log_k z + \log_l u + 2h\pi i.$$

Donc

$$(zu)^m = z^m u^m e^{2mh\pi i}.$$

La valeur de h dépendra des déterminations adoptées pour z^m, u^m, $(zu)^m$.

En particulier si m est réel entier, quelles que soient les déterminations, on aura

$$(zu)^m = z^m u^m.$$

III. — REPRÉSENTATION CONFORME

En désignant par

$$X = f(x, y), \qquad Y = \psi(x, y) \tag{I}$$

deux fonctions absolument quelconques de x, y, considérons la fonction (non analytique en général) de variable complexe $z = x + iy$

$$f(z) = X + iY.$$

Les relations (I) σ_1 font correspondre à tout point m (x, y), un point M de coordonnées X, Y.

Lorsque le point m décrit une courbe c, le point M décrit une courbe C qui est dite « transformée » de la première.

Conservation des angles. — Nous dirons que la transformation *conserve les angles* si à deux courbes quelconques c, c_1 se coupant en un certain point m, correspondent deux courbes C, C_1 se coupant au point M ψ *sous le même angle*. On dit aussi que la transformation constitue une « représentation conforme ».

La conservation sera dite « directe » ou « inverse » suivant que l'angle des tangentes MT, MT_1 est de même sens que l'angle des tangentes mt, mt_1 ou de sens contraire.

Condition suffisante. — *Si la fonction*

$$Z = X + iY$$

est analytique, ψ *la transformation conserve directement les angles.*

En effet soient z, z_1 deux points m, m_1 voisins du plan des xoy, Z, Z_1 les deux points voisins correspondants du plan des XY.

δ, σ_2 Le quotient $\dfrac{Z_1 - Z}{z_1 - z}$ a alors par hypothèse une limite bien déterminée $\dfrac{dZ}{dz}$ quand z_1 tend vers z *d'une manière quelconque*.

Faisons tendre m_1 vers m en suivant un arc de courbe c. L'argument de $z_1 - z$ o tendra vers l'angle α de la tangente en m à la courbe c avec l'axe ox. De même, δ_1 l'argument de $Z_1 - Z$ tendra vers l'angle β de la tangente en M à C avec OX.

Si les deux systèmes d'axes sont parallèles, l'argument de $\frac{Z_1 - Z}{z_1 - z}$ tendra donc vers une limite $\beta - \alpha$, angle des deux tangentes en m et M. Cet argument limite est l'argument de $\frac{dZ}{dz}$. Il ne dépend pas de la courbe c, mais simplement du point m.

L'angle des directions des tangentes à deux courbes correspondantes aux deux points correspondants est donc constant.

Si alors on considère deux courbes c_1, c_2, passant en m et les deux courbes C_1, C_2 correspondantes, si l'on mène par l'origine les parallèles ot_1, ot_2, oT_1, oT_2 aux tangentes, on aura

$$\widehat{t_1 o T_1} = \widehat{t_2 o T_2}.$$

On en déduira

$$\widehat{t_1 o t_2} = \widehat{T_1 o T_2}.$$

La transformation aura donc bien lieu avec conservation directe des angles.

Conditions nécessaires. — Inversement, cherchons les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ pour que les angles soient conservés.

Il suffit de chercher une transformation avec conservation directe, car si elle était inverse, pour les fonctions φ, ψ elle serait directe pour les fonctions φ, $-\psi$ qui donneraient des courbes symétriques des premières par rapport à ox.

Menons par l'origine les parallèles ot_1, ot_2 aux tangentes à deux courbes c_1, c_2, et oT_1, oT_2 aux tangentes aux deux courbes correspondantes C_1, C_2.

Par hypothèse, on doit avoir, quelles que soient les courbes,

$$\widehat{t_1 o t_2} = \widehat{T_1 o T_2}.$$

On en déduit

$$t_1 o T_1 = t_2 o T_2 = \text{const.}$$

On est ainsi ramené à calculer l'angle de deux tangentes à deux courbes correspondantes c, C.

δ_1 On a

$$\operatorname{tg}(to\mathrm{T}) = \frac{\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} - \dfrac{dy}{dx}}{1 + \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}} = \frac{dx\,d\mathrm{Y} - dy\,d\mathrm{X}}{dx\,d\mathrm{X} + dy\,d\mathrm{Y}}.$$

α Remplaçons $d\mathrm{X}$, $d\mathrm{Y}$ en fonction de dx, dy

$$\operatorname{tg}(to\mathrm{T}) = \frac{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)dx - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)dy}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)dx + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)dy}$$

ou enfin, en posant $\dfrac{dy}{dx} = y'$

$$\operatorname{tg}(to\mathrm{T}) = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)y' - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'^2}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)y' + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}y'^2}.$$

ρ On voit bien que cet angle dépend en général de y', c'est-à-dire de la courbe c.

β Pour qu'il en soit indépendant, il faut et il suffit que l'on puisse poser

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

α, ν Dans la deuxième de ces relations, remplaçons $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ par leurs valeurs tirées des deux autres. On obtiendra

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\lambda^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \qquad \text{ou} \qquad (1+\lambda^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

Or $\underset{\omega}{\varphi}(x, y)$, $\psi(x, y)$ étant des fonctions réelles, il en est de même de λ. Il faut donc que

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.$$

d On en déduit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

ρ, ω

Ce sont les conditions qui expriment que la fonction

$$Z = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

est une fonction analytique de $x + iy$.

Inversement si ces conditions sont satisfaites, les relations I se réduisent à

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

et par suite

$$\operatorname{tg}(to\mathrm{T}) = \lambda = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}.$$

ω

Conclusion. — *Pour obtenir une représentation conforme, ou avec conservation des angles, il faut et il suffit que l'une des fonctions* $X + iY$, $X - iY$ *soit analyttque.*

Différentielles des arcs. — Remarque. — Lorsque le point x, y se déplace d'une quantité très petite, la différentielle de l'arc a pour expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

La différentielle de l'arc correspondant décrit par le point X, Y est :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2.$$

σ

Or, on a

$$dX = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy, \qquad dY = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy.$$

ξ

Si la fonction $X + iY$ est analytique, ces expressions deviennent

$$dX = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\psi}{\partial x}dy, \qquad dY = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy.$$

δ_1

Par suite

$$dS^2 = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right](dx^2 + dy^2)$$

c'est-à-dire

$$dS^2 = \mu^2 ds^2$$

en posant

$$\mu^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$$

μ *ne dépendant que de* x, y.

α, ξ

Inversement supposons que, dans une transformation, deux arcs élémentaires correspondants satisfassent à la condition

$$dS^2 = \mu^2 ds^2$$

μ ne dépendant que des coordonnées x, y (et non des différentielles dx, dy).

δ_1, α

En explicitant dS^2 et égalant les coefficiente de dx^2, dy^2, $dy\,dy$, on devra avoir

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = \mu^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

D'après cette dernière, posons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Substituons dans la première. On aura

$$(\lambda^2 - 1)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] = 0.$$

ω

Par suite

$$\lambda = \pm 1.$$

δ_1

Si $\lambda = +1$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = +\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

ρ

La fonction $\varphi + i\psi$ est analytique.

Si $\lambda = -1$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = +\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

La fonction $\varphi - i\psi$ est alors analytique.

π

Ce résultat était à prévoir. Car si l'on a

$$dS = \mu ds$$

$\mu(x, y)$ ne dépendant que des coordonnées x, y, deux triangles infiniment petits correspondants sont semblables et par suite leurs angles sont égaux. A la limite, ce sont les angles des tangentes à deux courbes correspondantes.

La transformation entraîne donc la conservation des angles.

Résumé. — *Pour qu'une représentation conserve les angles, ou pour qu'entre deux arcs élémentaires correspondants on ait la relation* $dS^2 = \mu^2 ds^2$, *il faut et il suffit que l'une des fonctions* $\varphi + i\psi$ *ou* $\varphi - i\psi$ *soit analytique.*

Pour obtenir une *représentation conforme*, il suffit donc de prendre les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique quelconque.

Exemples. — 1° Considérons la fonction $f(z) = \frac{k}{z}$. Elle est analytique.

on peut l'écrire

$$f(z) = k\frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

On a donc

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \qquad Y = -\frac{ky}{x^2 + y^2}.$$

Si l'on donne de telles formules, à deux courbes c_1, c_2 quelconques décrites par un point m correspondront deux courbes C_1, C_2 se coupant sous le même angle.

Il est aisé de voir la signification géométrique de la transformation. Considérons le point de coordonnées

$$X = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \qquad Y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}$$

on a

$$\frac{Y'}{X} = \frac{y}{x}, \qquad X^2 + Y'^2 = k^2\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Si on rapporte les points x, y, X, Y′ aux mêmes axes, on voit que deux points correspondants m, M′ sont en ligne droite avec l'origine et que

$$om^2 \cdot oM'^2 = k^2.$$

La transformation est donc une transformation par rayons

vecteurs réciproques. Le point M se déduit de M′ par symétrie par rapport à ox. La transformation initiale est donc une inversion suivie d'une symétrie.

2° Prenons encore

$$f(z) = z^2 = (x + yi)^2.$$

δ_1

C'est une fonction analytique. La transformation

$$X = x^2 - y^2, \qquad Y = 2xy$$

conserve les angles.

Familles de courbes orthogonales. — Si $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ désigne une fonction analytique quelconque, considérons la famille de courbes

$$\varphi(x, y) = \text{const.}$$

Il passe une courbe et une seule par chaque point du plan.

Le coefficient angulaire de la tangente en ce point M est

$$m = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}.$$

De même si nous considérons la deuxième famille $\psi(x, y) = \text{const.}$, le coefficient angulaire de la tangente au point M est

$$m' = -\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}.$$

ρ

Or, si la fonction est analytique on a, comme on l'a vu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

d

On en déduit donc

$$mm' = -1.$$

ω

Les deux courbes de la famille qui se croisent au point quelconque M se coupent orthogonalement.

Si nous considérons l'une des courbes C_0 de la première famille

$$\varphi(x, y) = C_0$$

et *toutes* les courbes Γ de la deuxième famille, en un point de rencontre de C_0 avec l'une quelconque des courbes Γ, les deux courbes se coupant orthogonalement, on peut dire que la courbe C_0 rencontre orthogonalement toutes les courbes de la famille Γ.

Autrement dit, les courbes de l'une des deux familles sont les trajectoires orthogonales des courbes de la deuxième famille.

Ce résultat pouvait être prévu d'après les considérations du chapitre précédent, puisque les courbes

$$\varphi(x, y) = \text{const.} \qquad \psi(x, y) = \text{const.}$$

sont les courbes qui correspondent respectivement aux parallèles aux axes oX, oY dans la transformation

$$X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y).$$

Or la transformation conserve les angles et ces parallèles se coupent à angle droit.

Dans le dernier exemple donné, on voit que les courbes

$$x^2 - y^2 = \text{const.}, \qquad xy = \text{const.}$$

constituent deux familles orthogonales d'hyperboles équilatères, les asymptotes de l'une étant les axes de l'autre.

Exemple. — Considérons encore le système de coniques homofocales représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0$$

λ étant un paramètre variable.

Si $\lambda^2 < c^2$, la conique est une hyperbole ;

Si $\lambda^2 > c^2$, la conique est une ellipse.

Par tout point x, y du plan passent deux de ces coniques, une ellipse et une hyperbole. En effet l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0$$

admet deux racines : l'une inférieure à c^2 l'autre supérieure à c^2 comme on le voit en substituant ε', $c^2 - \varepsilon$, $c^2 + \varepsilon$, $+\infty$ dans le premier membre de l'équation.

Désignons par λ^2 le paramètre correspondant à l'ellipse, par μ^2 le

paramètre correspondant à l'hyperbole passant au point x, y. Les relations

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0, \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0$$

τ, ρ

expriment que l'équation

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - c^2} - 1 = 0$$

ω

admet pour racines λ^2 et μ^2. On doit donc pouvoir mettre son premier membre sous la forme

$$- \frac{(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}{t^2(t^2 - c^2)}$$

en remarquant que pour $t = \pm \infty$, le premier membre doit se réduire à -1.

ρ

C'est donc comme si l'on avait décomposé cette dernière fraction rationnelle en fractions simples. Nous supposerons $c^2 = 1$.

ν

En calculant les coefficients de la décomposition par la méthode habituelle, nous multiplierons les deux membres de l'identité par t^2 et ferons ensuite $t^2 = 0$. Nous obtiendrons

$$x^2 = \lambda^2 \mu^2 \qquad x = \pm \lambda \mu.$$

δ_1

De même en multipliant par $(t^2 - 1)$ et faisant ensuite $t^2 = 1$, nous obtenons

$$y^2 = (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) \qquad y = \pm \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}$$

On a donc les coordonnées x, y d'un point du plan en fonction de λ, μ. Calculons $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

δ_1

On a, en prenant les signes +

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - 1}.$$

Si nous formons $dx^2 + dy^2$, le coefficient de $2 d\lambda d\mu$ est

$$\frac{x^2}{\lambda\mu} + y^2 \cdot \frac{\lambda\mu}{(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1)} = 0.$$

δ_1

On trouve finalement

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4}{\lambda^2 - \mu^2}\left[\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2}\right].$$

Si donc l'on pose

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = dY \qquad \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} = dX$$

C'est-à-dire

$$X = \text{arc sin } \mu \qquad Y = \log (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

On aura

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4}{\lambda^2 - \mu^2} [dX^2 + dY^2].$$

On a d'ailleurs

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} = e^y$$

et par suite

$$\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} = e^{-y}.$$

Donc

$$\lambda = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \qquad \mu = \sin X.$$

En remplaçant λ et μ par leurs expressions dans x et y,

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin X \qquad y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos X.$$

Par cette transformation, on a donc

$$dS^2 = A^2 ds^2 \qquad A^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{4}.$$

ω

Cette transformation conserve les angles. Les courbes $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$, c'est-à-dire les courbes $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, c'est-à-dire enfin, les ellipses et les hyperboles homofocales forment deux familles de courbes orthogonales.

2e Application. — En désignant par $R(x, y)$, $\Theta(x, y)$, le module et l'argument d'une fonction analytique $f(z)$, nous avons vu qu'elles doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Theta}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = - R \frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

Log $f(z)$ est alors également une fonction analytique.
Or

$$\log f(z) = \log R + i(\Theta + 2k\pi).$$

Log R et $\Theta(x, y)$ représentent donc la partie réelle et le coefficient de i d'une fonction analytique.

$\sigma_2\ \omega$

Donc d'après le paragraphe précédent, les courbes

$$\log R = \text{const.} \qquad \theta(x, y) = \text{const.}$$

c'est-à-dire les courbes

$$R(x, y) = \text{const.} \qquad \theta(x, y) = \text{const.}$$

forment deux familles de courbes orthogonales.

On a donc ce résultat : *Etant donnée une fonction analytique quelconque, les courbes d'égal module, d'une part, les courbes d'égal argument, d'autre part, forment un système orthogonal.*

Soit par exemple la fonction analytique

$$f(z) = (z - a)(z - b)$$

δ_1

Si A et B sont les deux points d'affixe a, b, les courbes d'égal module sont les courbes, lieu des points M, tels que

$$MA \cdot MB = \text{const.}$$

σ_2

Ce sont donc des ellipses de Cassini de foyers A, B.

δ_1

D'autre part, on a

$$\arg f(z) = \arg(z - a) + \arg(z - b)$$

ω

Les courbes d'égal argument sont donc les courbes, lieu des points M, telles que

$$\widehat{AM, ox} + \widehat{BM, ox} = k$$

c_2

Il est visible que, pour chaque valeur de k, le lieu du point M est une hyperbole passant par A, B, donc admettant pour axe transverse A, B et dont les directions asymptotiques font l'angle $\frac{k}{2}$ ou $\frac{k}{2} - \frac{\pi}{2}$ avec ox.

Ces hyperboles d'une part, et les ellipses de Cassini, d'autre part, forme un système orthogonal.

Transformation homographique sur un cercle. — Enfin, nous allons donner un dernier exemple de transformation : a, b, c, d désignant des quantités réelles ou complexes, considérons la fonction

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = X + iY.$$

Elle fait correspondre au point $z(x, y)$ le point Z(X, Y).

Nous allons montrer que dans cette transformation, la figure transformée d'une circonférence est une circonférence.

ν

On pourrait le montrer en considérant des transformations successives intermédiaires qui, toutes, transforment une circonférence en une circonférence.

Les considérations suivantes nous conduiront immédiatement au résultat : considérons l'imaginaire conjuguée de z

$$t = x - yi.$$

α

On peut exprimer x et y en fonction de z et t

$$x = \frac{z + t}{2} \qquad y = \frac{z - t}{2i}.$$

d, ν

Il en résultera que l'équation d'une courbe quelconque pourra s'écrire en fonction de z et t.

ξ, ν

Dans ces conditions cherchons la condition qu'il faut établir entre z et t pour que le point correspondant décrive une circonférence.

Soit α un nombre complexe quelconque désignant l'affixe du centre C, β le conjugué. Soient M(z) un point quelconque du cercle, M'(t) le conjugué. On aura immédiatement

$$(z - \alpha)(t - \beta) = \overline{MC}^2 = R^2$$

Telle est l'équation du cercle en « coordonnées complexes ».

Elle est de la forme

$$zt - \alpha t - \beta z + \alpha\beta - R^2 = 0$$

ou

$$zt - \alpha t - \beta z + \gamma = 0. \qquad (1')$$

ρ

Remarquons que γ est réel, et que les coefficients de z et t sont imaginaires conjugués.

δ

Si donc nous avons

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

On en déduit

$$z = \frac{b - dZ}{cZ - a}$$

$z - \alpha$ est donc de la forme

$$z - \alpha = \frac{L + MZ}{cZ - a}.$$

α Désignons par T l'imaginaire conjuguée de Z, L', M', c', a' les imaginaires conjuguées de L, M, c, a.

On aura

$$t - \beta = \frac{L' + M'T}{c'T - a'}.$$

En substituant dans l'équation du cercle c, on obtient donc

$$(L + MZ)(L' + M'T) - R^2(cZ - a)(c'T - a') = 0.$$

ρ Il est aisé de voir que c'est une relation de la forme (1').

Le coefficient de ZT est $MM' - cc'R^2$: il est réel.

Le terme indépendant, $LL' - R^2 aa'$, est réel.

ξ Enfin, les coefficients de Z et T sont bien imaginaires conjugués.

Le résultat est donc bien démontré.

Invariants. — Considérons une fonction absolument quelconque $f(x, y)$.

Faisons sur x, y une transformation conservant les angles.

$$x = P(X, Y) \qquad y = Q(X, Y).$$

C'est-à-dire telle que

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial Q}{\partial Y} \qquad \frac{\partial P}{\partial Y} = -\frac{\partial Q}{\partial X}.$$

La fonction $f(x, y)$ devient

$$F(X, Y) = f(P, Q).$$

Nous allons calculer les dérivées première et seconde de F

δ_1
$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial X}$$
$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial Y} = -\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial X}.$$

d On en déduit

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)^2\right].$$

De même on trouverait aisément

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\left[\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)^2\right].$$

ν, α

En divisant membre à membre, on obtiendra donc

$$\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial Y^2}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y}\right)^2}.$$

Le rapport reste donc « invariant » par une transformation quelconque conservant les angles.

Remarquons que si $f(x, y)$ satisfait à l'équation de Laplace $\Delta f = 0$ la fonction $F(X, Y)$ qui s'en déduit par une transformation quelconque conservant les angles, satisfait à la même équation.

IV. — DÉTERMINATION D'UNE FONCTION ANALYTIQUE SATISFAISANT A UNE CONDITION DONNÉE

Nous avons vu que, pour qu'une fonction

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

soit analytique, il faut que P et Q satisfassent aux conditions

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Nous en avons déduit que P et Q vérifient l'équation de Laplace,

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

On peut se proposer de déterminer la fonction analytique qui satisfasse à une condition supplémentaire donnée :

Cette condition se traduira par une relation entre x, y et les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

$$\lambda(x, y, P, Q) = 0. \tag{2}$$

Si l'on se basait sur les conditions (1) et l'équation (2) il faudrait dériver l'équation (2) par rapport à x et y, y substituer les expressions de $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{dQ}{\partial y}$; on obtiendrait deux nouvelles équa-

tions qui ne renfermeraient que x, y, P, Q et les dérivées de P. Entre ces deux équations et la condition (2) on éliminerait Q. On aurait ainsi deux équations ne renfermant plus que P et ses dérivées :

ω

on est ainsi amené à résoudre des équations aux dérivées partielles ou plutôt à trouver les solutions *communes* à deux telles équations, *qui doivent être compatibles.*

ψ

Cette façon de procéder est fort pénible. Les remarques suivantes simplifient considérablement la solution du problème.

Dans la fonction P (x, y) faisons, comme nous l'avons fait dans l'exercice précédent, le changement de variables

$$z = x + iy, \qquad t = x - iy$$

D'où

$$x = \frac{z+t}{2}, \qquad y = \frac{z-t}{2i}.$$

o

La fonction se transforme en une fonction $p(z, t)$

$$\mathrm{P}(x, y) = p(z, t).$$

α

On peut calculer les dérivées partielles secondes de P en fonction des dérivées partielles de p. Or si l'on transforme l'équation

$$\Delta \mathrm{P} = 0$$

δ

on trouve que la fonction $p(z, t)$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} = 0.$$

d

Il en résulte que la fonction $p(z, t)$ doit être à variables séparées et que l'on peut poser

$$p(z,t) = \varphi(z) + \varphi_1(t).$$

Mais de plus, la fonction $p(z, t)$ étant la fonction transformée de

δ_1

P(x, y) est réelle. Si l'on change i en $-i$ elle ne doit donc pas changer. Or z et t se permutent.

ω, β

Donc, à une constante réelle près, la fonction $\varphi_1(t)$ doit se déduire de la fonction $\varphi(z)$ par le changement de i en $-i$ et par le remplacement de z par t. Nous dirons pour abréger que c'est la fonction conjuguée de $\varphi(z)$ et nous poserons

$$p(z,t) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + c \qquad (\varphi_1 \text{ conj. de } \varphi, c \text{ réel}).$$

De même on peut poser

$$q(z,t) = \psi(z) + \psi_1(t) + c'$$

$\psi_1(t)$ étant la fonction conjuguée de $\psi(z)$.

ρ, ξ

Mais de plus, on a alors

$$f(z) = p + iq = \varphi(z) + i\psi(z) + \varphi_1(t) + i\psi_1(t) + c + c'i.$$

β

Il faut que le second membre se réduise à une fonction de z.

ω

On peut donc poser

$$\varphi_1(t) + i\psi_1(t) = m + ni$$

ou

$$\psi_1(t) = i\varphi_1(t) + n - mi$$

σ_2

En changeant i en $-i$.

$$\psi(z) = -i\varphi(z) + n + mi.$$

D'où

$$q(z, t) = -i[\varphi(z) - \varphi_1(t)] + c' + 2n$$

Faisons le changement

$$\Phi(z) = \varphi(z) + \frac{c}{2} + \frac{c' + 2n}{2} i$$

D'où

$$\Phi_1(t) = \varphi_1(t) + \frac{c}{2} - \frac{c' + 2n}{2} i.$$

o

On aura finalement

$$p'(z, t) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + c = \Phi(z) + \Phi_1(t), \qquad q(z, t) = -i[\Phi(z) - \Phi_1(t)].$$

En résumé on peut donc poser

$$x = \frac{z + t}{2}, \qquad y = \frac{z - t}{2i}$$

$$P(x, y) = p(z, t) = \Phi(z) + \Phi_1(t), \qquad Q(x, y) = q(z, t) = -i[\Phi(z) - \Phi_1(t)].$$

Ce sont là les formes simples que nous adopterons.

Par suite

$$f(z) = p + iq = 2\Phi(z).$$

ω

Pour obtenir la fonction $f(z)$, il suffit donc de déterminer la fonction $\Phi(z)$.

Or si l'on substitue x, y, P, Q dans la condition donnée, elle se transforme en

$$(1') \qquad \lambda\left(\Phi(z) + \Phi_1(t),\quad i[\Phi_1(t) - \Phi(z)],\quad \frac{z+t}{2},\quad \frac{z-t}{2i}\right) = 0.$$

α

Pour obtenir la fonction $\Phi(z)$, *qui ne dépend que de* z, on peut dans cette équation donner à t une valeur quelconque t_0 (telle cependant que l'on puisse résoudre l'équation par rapport à $\Phi(z)$).

δ_1

La relation (1') deviendra

$$\lambda\left[\Phi(z) + \Phi_1(t_0),\quad i[\Phi_1(t_0) - \Phi(z)],\quad \frac{z+t_0}{2},\quad \frac{z-t_0}{2i}\right] = 0.$$

C'est une relation de la forme

$$L(\Phi(z), z) = 0$$

dépendant de la seule constante inconnue $\Phi_1(t_0)$.

Elle donne donc $\Phi(z)$, au moyen d'une constante et par suite $f(z) = 2\,\Phi(z)$.

On déterminera sa valeur précise par substitution, ou en donnant à x et y des valeurs particulières.

Applications. — *Supposons que l'on donne la partie réelle d'une fonction analytique.*

Au lieu de déterminer la fonction $Q(x, y)$ par deux intégrations successives, faisons dans la fonction $P(x, y)$ le changement de variables indiqué.

β

$P(x, y)$ devra pouvoir se mettre sous la forme

$$\Phi(z) + \Phi_1(t) = p(z, t).$$

Mais, sans qu'il soit nécessaire de faire cette transformation, donnons à t une valeur t_0 quelconque (qui ne rende pas infinie $p(z, t_0)$). On aura

$$\varphi(z) = p(z, t_0) + C_1$$

et par suite

$$f(z) = 2p(z, t_0) + 2C_1.$$

Soit par exemple

$$P(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

δ_1

Faisons la transformation. Il vient

$$p(z, t) = 4 \cdot \frac{(z+t)^2 + (z-t)^2}{[(z+t)^2 - (z-t)^2]^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 + t^2}{z^2 t^2}.$$

On vérifierait bien que le second membre se met sous la forme $\varphi(z) + \varphi_1(t)$. Mais cela est inutile.

δ_1

Donnons à t une valeur quelconque t_0

$$\varphi(z) + \varphi_1(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2 + t_0^2}{z^2 t_0^2} = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2t_0^2}$$

par suite

$$\varphi(z) = \frac{1}{2z^2} + a + bi.$$

ω

Donc

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 2(a + bi).$$

Or pour $y = 0$, par exemple, $P(x, o) = \frac{1}{x^2}$.

La partie réelle de $f(z)$ est alors $\frac{1}{x^2} + 2a$.

On a donc $a = 0$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 2bi$$

b est arbitraire.

2° Soit encore

$$P(x, y) = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x},$$

δ_1

on a

$$p(z, t) = \frac{2 \sin (z+t)}{e^{\frac{z-t}{i}} + e^{-\frac{z-t}{i}} - 2 \cos (z+t)} = \frac{2 \sin (z+t)}{2 \cos (z-t) - 2 \cos (z+t)}$$

c'est-à-dire

$$p(z, t) = \frac{\sin (z+t)}{2 \sin z \sin t}.$$

ρ

On vérifierait encore que le second membre est à variables séparées. Mais il n'est pas nécessaire de faire cette séparation.

En donnant à t la valeur $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\varphi(z) = \frac{\cos z}{2 \sin z} + \text{const.} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} z + a + bi.$$

ω

Donc

$$f(z) = \operatorname{cotg} z + 2(a + bi).$$

Or pour $y = o$

$$P(x, 0) = \operatorname{cotg} x.$$

Donc $a = 0$

$$f(z) = \operatorname{cotg} z + 2\,bi.$$

3° *Déterminer une fonction analytique telle que*

$$3xQ - yP = 8x^3y.$$

δ_1

Faisons la transformation

$$x = \frac{z + t}{2} \qquad y = \frac{z - t}{2i} \qquad P = \varphi(z) + \varphi_1(t) \qquad Q = i[\varphi_1(t) - \varphi(z)].$$

En substituant, nous aurons

$$3\,\frac{(z + t)}{2}\,i(\varphi_1 - \varphi) - \frac{z - t}{2i}\,(\varphi + \varphi_1) = (z + t)^3\,\frac{z - t}{2i}$$

ou

$$3(z + t)(\varphi - \varphi_1) - (z - t)(\varphi + \varphi_1) = (z + t)^3(z - t).$$

α

Faisons par exemple $t = 0$

$$3z(\varphi - \varphi_{10}) - z(\varphi + \varphi_{10}) = z^4.$$

En simplifiant

$$2\varphi = z^3 + k = z^3 + a + bi.$$

quelle que soit la valeur t_0. δ_1 Par suite

$$f(z) = z^3 + a + bi$$

Si nous faisons par exemple $y = 0$, σ d'après l'équation donnée

$$Q(x, 0) = 0.$$

Donc $b = 0$.

De même $P(o, y) = 0$. Donc $a = 0$.

ω

La seule solution possible est $f(z) = z^3$.

On vérifie que cette fonction satisfait bien à la condition donnée.

V. — INTÉGRALES DES FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE

Définition. — Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction de variable complexe, analytique ou non. Supposons $P(x, y)$, $Q(x, y)$ finies et continues lorsque le point z décrit un arc de courbe AB compris entre les points z_0 et Z. Nous allons définir l'intégrale, le long de l'arc AB, de la fonction $f(z)$.

α, ν

Partageons cet arc par des points de division z_0, z_1, z_2,... z_k, z_{k+1}, ... Z.

Dans chaque intervalle z_k, z_{k+1}, prenons sur l'arc, un point intermédiaire ζ_k, ξ, σ_1 et faisons la somme

$$\Sigma f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

ψ

Nous allons montrer que :

Cette somme a une limite bien déterminée quand, le nombre de points augmentant indéfiniment, tous les intervalles tendent simultanément vers zéro d'une manière quelconque, et quelle que soit la manière dont on choisisse chaque point ζ_k dans chaque intervalle.

On a en effet

$$f(\zeta_k) = P(\xi_k, \eta_k) + iQ(\xi_k, \eta_k)$$
$$z_{k+1} - z_k = x_{k+1} - x_k + i(y_{k+1} - y_k) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

δ_1

La somme devient donc

$$\Sigma[P(\xi_k, \eta_k) + iQ(\xi_k, \eta_k)][(x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k)]$$
$$= \Sigma[P_k\Delta x_k - Q_k\Delta y_k] + i\,\Sigma[P_k\Delta y_k + Q_k\Delta x_k]$$

ρ, σ_1

Nous voyons que ces sommes, par définition, ont pour limite les intégrales curvilignes.

$$\int_{AB} (Pdx - Qdy) + i\int_{AB} Qdx + Pdy.$$

σ_2

Nous savons que si l'on exprime les coordonnées d'un point de l'arc en fonction d'un paramètre t sous la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

19061

R. ID. No 0004942 5

et si t varie de t_0 à T quand le point décrit l'arc AB, ces intégrales se ramènent aux intégrales définies ordinaires

$$\int_{t_0}^{T} [P(\varphi,\psi)\varphi' - Q(\varphi,\psi)\psi']dt + i\int_{t_0}^{T} (P\psi' + Q\varphi')dt.$$

Comme on le voit, ρ la démonstration ne suppose pas du tout que la fonction $P + iQ$ soit analytique. L'intégrale ρ est une simple combinaison de deux intégrales curvilignes et toutes les propriétés des intégrales curvilignes peuvent lui être appliquées. La fonction peut admettre un nombre fini de discontinuités pour des points de l'arc tout en restant bornée. Elle change de signe si l'on change le sens du parcours. Nous la désignerons par

$$\int_{AB} f(z)dz.$$

Contour fermé. — Supposons que le point z décrive un contour fermé compris dans une aire Ω. Lorsque le point revient au point de départ A, la fonction quoique bien définie au départ, et bien déterminée tout le long de la ligne peut reprendre en A sa valeur initiale (si elle est uniforme dans l'aire Ω) ou revenir avec une autre valeur. C'est ce que nous avons vu pour la fonction $\log z$ quand le contour décrit contient l'origine à son intérieur.

Dans le premier cas, ψ nous allons montrer que *l'intégrale aura même valeur quel que soit le point de départ.*

δ_1 Prenons en effet deux points de départ différents A, A'. L'intégrale I_1 a pour valeur

$$I_1 = \int_{AA'MA} = \int_{AA'} + \int_{A'MA}.$$

Si au contraire nous partons de A' nous obtiendrons

$$I_2 = \int'_{A'MAA'} = \int'_{A'MA} + \int'_{AA'}$$

en désignant par un accent ces nouvelles intégrales.

Mais pour la première des intégrales du second membre, la fonction ayant au point A' une valeur bien déterminée, unique, quel que soit le chemin parcouru antérieurement, o la valeur initiale de

la fonction et les valeurs successives qu'elle prendra seront les mêmes que celles qu'elle avait dans l'intégrale $\int_{A'MA}$. On peut d'ailleurs prendre pour la définir les mêmes points de division. Les deux sommes qui les définissent à la limite, sont donc alors constamment les mêmes. Les deux intégrales ont donc même valeur. De même dans l'intégrale $\int_{AA'}'$, la fonction prend la même suite de valeurs que dans l'intégrale $\int_{AA'}$. Les deux intégrales sont donc aussi égales.

Il n'en serait plus de même si la fonction $f(z)$ avait une valeur différente suivant le chemin parcouru. Les deux intégrales peuvent être différentes. Si dans l'intégrale $\int_{A'MA}'$ on prenait pour détermination de la fonction au point A', sa valeur finale dans l'intégrale $\int_{AA'}$, les deux intégrales $\int_{A'MA}$ et $\int_{A'MA}'$ seraient les mêmes. Mais après avoir décrit le contour complet, la fonction n'ayant pas au point A la même détermination que la valeur de départ de l'intégrale $\int_{AA'}$ les deux intégrales $\int_{AA'}$ et $\int_{AA'}'$ seraient différentes.

Considérons par exemple la fonction $f(z) = \sqrt{z}$.

Intégrons-la le long d'un cercle de centre origine.

En posant $z = R(\cos\theta + \sin\theta)$, θ variera dans un intervalle de 2π. Définissons la fonction $\sqrt{z}$. Nous prendrons

$$\sqrt{z} = R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Parcourons le cercle à partir d'un point A correspondant à l'angle α. Nous aurons successivement

$$\int_C \sqrt{z}\,dz = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) Ri(\cos\theta + i\sin\theta)\,d\theta$$

$$= iR^{\frac{3}{2}}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right)d\theta = \frac{2}{3}R^{\frac{3}{2}}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right)_\alpha^{\alpha+2\pi}$$

$$= -\frac{4}{3}R^{\frac{3}{2}}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} + i\sin\frac{3\alpha}{2}\right).$$

ρ

On voit que la valeur de l'intégrale dépend bien du point de départ.

Limite supérieure d'une intégrale. — Considérons l'intégrale $\int_c f(z)dz$.

Supposons que, lorsque z parcourt AB, le maximum de mod $f(z)$ soit M. $^{o,\alpha}$ Les sommes successives qui définissent I sont moindres en valeur absolue que

$$\Sigma M\,|\,\Delta z\,| = M\Sigma\,|\,\Delta z\,|.$$

Mais $^{\rho}$ $|\,\Delta z\,| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Donc $\Sigma\,|\,\Delta z\,|$ tend vers L, $^{\omega}$ L désignant la longueur du contour d'intégration. On a donc

$$I \leq ML.$$

Application I. — *Une fonction $f(z)$ est telle que, pour des valeurs de z voisines de a, on ait lim $(z - a)\,f(z) = 0$, quand z tend vers a. L'intégrale de $f(z)$ prise le long d'un cercle de centre a tend vers zéro, lorsque le rayon du cercle tend vers zéro.*

δ

On peut en effet supposer R suffisamment petit pour que, le long du cercle, $|\,z - a\,| \times |\,f(z)\,| < \varepsilon$, quel que soit le point du cercle.

δ_1

On aura donc

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - a|} = \frac{\varepsilon}{R}$$

puisque pour tout point du cercle $|\,z - a\,| = R$. En appliquant le résultat ci-dessus, il viendra

$$|\,I\,| < \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi\varepsilon.$$

L'intégrale peut donc bien être rendue aussi petite qu'on le veut.

II. — *Une fonction $f(z)$ est telle que le produit $|\,zf(z)\,|$ tende vers zéro lorsque $|\,z\,|$ augmente indéfiniment. L'intégrale de $f(z)$ prise le long d'un cercle tendra vers zéro lorsque le rayon du cercle augmentera indéfiniment.*

δ_1

Dire que $f(z)$ tend vers zéro c'est dire que, $^{d,\sigma_1}$ pour tout point z à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment grand,

ce produit a un module moindre que toute quantité ε choisie aussi petite qu'on le veut. Si donc nous prenons un cercle de rayon supérieur, pour tout point du cercle, on pourra écrire

$$|zf(z)| < \varepsilon \qquad \text{d'où} \qquad |f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z|}.$$

Mais si l'on prend un cercle de centre origine pour tout point du cercle $|z| = R$ et par suite $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{R}$.

L'intégrale est donc moindre en module que $\frac{\varepsilon}{R} \times 2\pi R = 2\pi\varepsilon$; ε pouvant être rendu aussi petit qu'on le veut en même temps que l'on fait croître R, l'intégrale a bien pour limite zéro.

Condition pour que l'intégrale soit indépendante du chemin d'intégration entre deux points fixes. — Sous la forme générale que nous avons adoptée, l'intégrale étant une simple combinaison de deux intégrales curvilignes ordinaires, et par suite de deux intégrales définies, il est bien évident qu'elle ne peut pas jouir de propriétés particulières. Nous allons rechercher quelles restrictions nous devons imposer à $f(z)$ c'est-à-dire à $P(x, y)$, $Q(x, y)$, pour obtenir des propriétés nouvelles.

Il est bien évident que nous devons considérer d'abord le cas où la fonction $f(z)$ est analytique. On a dans ce cas

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Or, en étudiant les intégrales curvilignes, nous avons démontré la formule de Riemann

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C M dx + N dy$$

et nous en avons déduit la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

pour que l'intégrale $\int_C M dx + N dy$ prise le long d'un arc ouvert soit indépendant du chemin d'intégration, et ne dépende que des extrémités de l'arc. Cette condition est nécessaire et suffisante.

Dans le cas actuel, nous avons à considérer les deux intégrales curvilignes

$$\int_C P\,dx - Q\,dy, \qquad \int_C P\,dy + Q\,dx.$$

Or les conditions (I) expriment précisément que ces deux intégrales ne dépendent que des extrémités.

Inversement, pour que la condition (2) soit satisfaite pour une courbe quelconque des intégrales, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

La fonction $P + iQ$ doit donc être analytique.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale de fonction de variable complexe, ne dépende que des extrémités, (lorsque le contour d'intégration reste dans une aire Ω où $f(z)$ est continue), est que la fonction $f(z)$ soit analytique.

2e Démonstration. — En raison de l'extrême importance de ce théorème et de ses applications multiples, nous allons en donner une autre démonstration directe.

Condition nécessaire. — M et N désignant deux fonctions de x et y, nous considérons l'intégrale $\int_C M\,dx + N\,dy$. Nous allons d'abord démontrer que si l'intégrale est indépendante du chemin, on a la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Soit Ω l'aire dans laquelle se déplace le point x, y et dans laquelle nous traçons le contour d'intégration. Il est aisé de voir tout d'abord que *l'intégrale le long d'un contour fermé doit être nulle.*

Soit en effet un contour fermé quelconque C. Prenons sur ce contour deux points quelconques, A, B. Par hypothèse

$$\int_{AMB} = \int_{AM_1B}.$$

$\hat{\delta}_1$

Mais

$$\int_{AM_1B} = -\int_{BM_1A}.$$

Par conséquent

$$\int_{AMB} + \int_{BM_1A} = \int_C = 0.$$

La réciproque est évidente.

Considérons alors un carré ABCD dont les côtés égaux à l sont parallèles aux axes de coordonnées et ayant un sommet au point z_0 quelconque. β L'intégrale prise le long de ce carré doit être nulle.

δ_1

Le long de AB, $dy = 0$ et x varie de x_0 à $x_0 + l$.

L'intégrale se réduit donc à l'intégrale ordinaire

$$\int_{AB} = \int_{x_0}^{x_0+l} M(x, y_0)dx.$$

De même le long de CD, $y = y_0 + l$ et

$$\int_{CD} = \int_{x_0+l}^{x_0} M(x, y_0 + l)dx.$$

$\hat{\delta}_1$

La somme de ces deux intégrales est

$$-\int_{x_0}^{x_0+l} [M(x, y_0 + l) - M(x, y_0)]dx.$$

α

Appliquons à la parenthèse la formule des accroissements finis. Nous l'écrirons

$$-l\int_{x_0}^{x_0+l} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y_0 + \theta l)dx.$$

(Il faut remarquer que θ dépend de x.)

De même, $\hat{\delta}_1$ si nous parcourons BC ou DA, $dx = 0$. La somme des intégrales suivant ces contours est

$$\int_{y_0}^{y_0+l} N(x_0 + l, y)dy + \int_{y_0+l}^{y_0} N(x, y)dy$$
$$= \int_{y_0}^{y_0+l} N[(x_0 + l, y) - N(x_0, y)]dy.$$

Elle s'écrira

$$l\int_{y_0}^{y_0+l}\frac{\partial N}{\partial x}(x_0+\theta' l,\ y)dy.$$

β

L'intégrale le long du contour total devant être nulle, on doit donc avoir

$$\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{\partial M}{\partial y}(x, y_0+\theta l)dx=\int_{y_0}^{y_0+l}\frac{\partial N}{\partial x}(x_0+\theta' l,\ y)dy.$$

α

Appliquons à chacune des intégrales le théorème de la moyenne.

Après division par l, nous aurons

$$\frac{\partial M}{\partial y}(\xi, y_0+\theta_1 l)=\frac{\partial N}{\partial x}(x_0+\theta_2 l,\ \eta)$$

ξ étant compris entre x_0 et x_0+l, η entre y_0 et y_0+l.

Ces égalités devant avoir lieu quelque petit que soit l, lorsque l tend

ω

vers zéro, ξ tendant vers x_0, et η vers y_0, on a, à la limite, (en supposant que les dérivées $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ soient continues).

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x_0, y_0)=\frac{\partial N}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Or le point x_0, y_0 a été pris arbitrairement dans Ω. On doit donc avoir

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

La condition est donc bien nécessaire.

Si l'on applique ce résultat à chacune des deux intégrales curvilignes

$$\int_C P dx - Q dy, \qquad \int_C P dy + Q dx$$

ρ

on voit bien que, pour que ces intégrales soient indépendantes du contour, il faut que

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$

c'est-à-dire que la fonction $P+iQ$ soit analytique.

Ainsi la condition est bien *nécessaire.*

Condition suffisante. — Nous allons montrer que, inversement, *si* $f(z) = P + iQ$ *est analytique, l'intégrale* $\int_C^{\alpha, \delta_1} f(z)dz$ *est indépendante du chemin d'intégration et ne dépend que des extrémités.*

Supposons deux lignes d'intégration *quelconques* L_1, L_2 situées dans Ω allant d'un point A à un point B.

Nous allons démontrer que, si à l'intérieur de l'aire qu'elles comprennent, la fonction, supposée uniforme, est continue, on a

$$\int_{L_1} = \int_{L_2}.$$

Il faut évaluer ces intégrales et les ramener à des intégrales définies ordinaires. Soient

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t), \qquad y = \psi_1(t) \\ x &= \varphi_2(u), \qquad y = \psi_2(u) \end{aligned}$$

les équations de L_1, L_2. Les points A, B correspondent dans la première aux valeurs t_0, T du paramètre, dans la seconde aux valeurs u_0, U. Si nous faisons un changement de variable linéaire

$$v = \alpha u + \beta$$

nous pourrons évidemment disposer de α, β de manière que les valeurs de v correspondant à u_0, U, soient précisément t_0, T.

Ainsi dans les équations de L_2, nous pouvons supposer que le paramètre varie également de t_0 à T. Nous pouvons donc le désigner encore par t.

Considérons la courbe auxiliaire variable L_α

$$L_\alpha \begin{cases} x = \varphi_1(t) + \alpha[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] = \varphi(t, \alpha) \\ y = \psi_1(t) + \alpha[\psi_2(t) - \psi_1(t)] = \psi(t, \alpha). \end{cases}$$

Les courbes L_1, L_2 correspondent aux valeurs 0 et 1 de α.

Cette courbe variable passera toujours par les points A et B qui correspondront toujours aux valeurs t_0, T du paramètre.

Nous considérons ainsi une suite *linéaire* de courbes $L\alpha$. C'est en apparence une restriction, mais la conclusion sera générale.

α

Nous pouvons définir l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{L_\alpha} f(z)dz = \int_{t_0}^{T} [P(x, y) + iQ(x, y)](dx + idy).$$

Dans la fonction sous le signe $\int$, nous supposons x et y exprimés en fonction de t et de α. L'intégrale devient une somme de deux intégrales définies ordinaires

$$I_\alpha = \int_{t_0}^{T} \left(P \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dt + i \int_{t_0}^{T} \left(P \frac{\partial \psi}{\partial t} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt.$$

On peut écrire plus simplement

$$I_\alpha = \int_{t_0}^{T} (P + iQ) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dt = \int_{t_0}^{T} f(z) \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

Pour exprimer que cette intégrale ne dépend pas du contour c'est-à-dire de α, $\overset{\alpha, \beta}{}$ nous devons écrire que $\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = 0$.

ξ, σ₂

Il faut donc prendre la dérivée par rapport à un paramètre d'une intégrale définie ordinaire, les limites de l'intégrale étant d'ailleurs constantes. Il suffit à cet effet de prendre l'intégrale de la dérivée par rapport à α.

La fonction à intégrer dépend de α par l'intermédiaire de z. *Or* $f(z)$ *étant supposée analytique*, admet une dérivée par rapport à z que nous désignons par $f'(z)$.

δ₁

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial t} \right] = \frac{\partial z}{\partial t} f'(z) \frac{\partial z}{\partial \alpha} + f(z) \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial t}.$$

ρ

On remarque que le second membre peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right].$$

Par suite

$$\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = \int_{t_0}^{T} \frac{\partial}{\partial t} \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] dt.$$

On peut donc intégrer.

Ainsi on a

$$\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = \left[f(z)\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right]_{t_0}^{T}.$$

Mais le facteur $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ s'annule évidemment aux deux extrémités t_0, T, puisque les points z correspondant à t_0, T sont fixes.

D'ailleurs $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ se calcule par la formule

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \varphi_2 - \varphi_1 + i(\psi_2 - \psi_1).$$

Chacune des parties s'annule pour t_0 et T.

Par suite $\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = 0$.

L'intégrale de la fonction analytique $f(z)$ prise suivant la suite linéaire de courbes L_α est donc constante.

En particulier

$$I_{L_1} = I_{L_2}.$$

Mais les courbes L_1, L_2 sont deux courbes *arbitraires* passant par A et B. L'intégrale suivant une courbe quelconque passant par A et B est donc constante.

On peut donc dire que :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\int_{AB} f(z)dz$ d'une fonction uniforme $f(z)$, prise le long d'un contour dont les extrémités A et B sont fixes, soit indépendante du contour et ne dépende que de ces extrémités, est que la fonction $f(z)$ soit analytique.

Pour la démonstration, nous avons supposé implicitement que tout le long de la courbe $L\alpha$, les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ (c'est-à-dire la fonction $f(z)$) restent finies. Pour que l'on ait $\int_{L_1} = \int_{L_2}$, il faut donc que dans la région comprise entre les courbes L_1, L_2, la fonction $f(z)$ supposée uniforme reste finie.

Le résultat peut s'énoncer sous une forme légèrement différente : *Pour que l'intégrale le long d'un contour fermé quelconque situé dans une aire* Ω *soit nulle quel que soit ce contour, il faut et il suffit que* $f(z)$ *soit uniforme, continue, analytique dans l'aire* Ω, *c'est-à-dire qu'elle soit « holomorphe » dans cette aire.*

Généralisation. — Nous allons voir toutes les conséquences que l'on peut déduire de ce théorème fondamental. On prévoit de quelle ressource il peut être, puisque l'on peut modifier comme on le veut le chemin d'intégration. Si nous savons calculer une intégrale suivant un contour particulier simple, nous en déduirons une infinité d'intégrales définies, en modifiant le chemin d'intégration par introduction des deux fonctions arbitraires $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Nous allons d'abord transformer et généraliser le résultat : Considérons un contour fermé C à l'intérieur duquel la fonction, supposée toujours uniforme, peut admettre des points critiques en nombre limité.

Soient C_1, C_2, C_3 d'autres contours fermés à l'intérieur de C renfermant tous ces points critiques. Supposons que dans l'aire comprise entre C et les contours C_1, C_2, C_3 la fonction soit holomorphe.

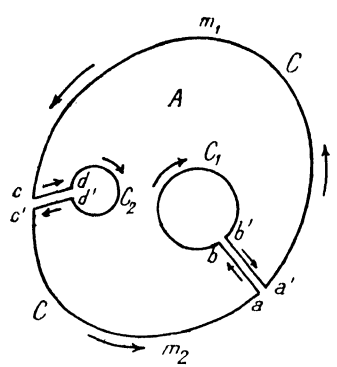


Fig. 2.

On aura l'égalité

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

tous les contours étant parcourus dans le même sens.

En effet, traçons des éléments de courbes ou droites ab, $a'b'$ infiniment voisins reliant le contour C, au contour C_1 et de même des éléments de droites cd, $c'd'$... reliant C à C_2, C à C_3, etc...

Considérons le contour $abC_1b'a'm_1cdC_2d'c'm_2a$, les flèches indiquant le sens de parcours sur C, C_1, C_2, etc.

A l'intérieur du contour considéré, la fonction n'admet plus de point critique. L'intégrale prise suivant le contour total est donc nulle.

La fonction étant monodrôme, les intégrales $\int_{ab}$, $\int_{b'a'}$ sont,

à la limite, égales et de signes contraires. Il en est de même des intégrales $\int_{cd}$ et $\int_{d'c'}$, etc...

Il ne reste que les intégrales prises suivant les contours C_1, C_2 et les intégrales suivant $a'm_1c$ et $c'm_2a$ qui reconstituent l'intégrale totale prise suivant le contour C.

On a donc

$$\int_{C} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0. \tag{1}$$

et par conséquent, en parcourant tous les contours dans le même sens,

$$\int_{C} = \int_{C_1} + \int_{C_2}.$$

Remarque. — L'aire A, à l'intérieur de laquelle la fonction n'admet plus de point critique, peut être considérée comme limitée par les contours C, C_1, C_2. Parcourons *tous* ces contours de manière à laisser à *notre gauche* l'aire A. Nous aurons précisément le sens de parcours indiqué par les flèches dans la formule (1).

Nous pouvons donc dire que *l'intégrale prise le long du contour total, limitant une aire à l'intérieur de laquelle la fonction $f(z)$ est holomorphe, est nulle, ce contour étant tout entier parcouru de manière à laisser à sa gauche l'aire A.*

Intégrale considérée comme fonction de sa limite supérieure. — La fonction $f(z)$ étant analytique, considérons une intégrale $\int_{AB} f(z)dz$ prise le long d'un contour allant d'un point z_0 à un point Z. L'intégrale étant indépendante du chemin reliant z_0 à Z (sous certaines réserves), ne dépend plus que des extrémités z_0, Z. Sans spécifier le chemin, l'intégrale peut alors s'écrire $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz$.

Si en particulier, nous supposons z_0 fixe, nous pouvons dire que cette intégrale est fonction de l'extrémité Z et écrire

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = F(Z).$$

υ, ξ

Nous allons voir si cette fonction est une fonction continue de Z et si elle admet une dérivée par rapport à Z.

Si nous donnons à Z un accroissement ΔZ, le point extrémité se déplace de B en B'. Nous devons considérer l'intégrale $\int_{AB'}$, mais

α

puisque cette intégrale est indépendante du contour AB', nous pouvons supposer que ce contour comprenne d'abord le contour AB, qui était parcouru dans la première intégrale, et ensuite par exemple l'élément de droite BB'.

d

L'accroissement de l'intégrale se réduit donc alors à

$$\int_B^{B'} f(z)dz.$$

Mais, le long de la corde BB' supposée très petite, $f(z)$ étant continue, on peut écrire

$$f(z) = f(Z) + R(z)$$

$R(z)$ étant, en module, inférieur à une quantité fixe aussi petite

δ_1

qu'on le veut. On a alors

$$\Delta I = \int_z^{z'} f(z)dz = \int_z^{z'} [f(Z) + R]dz = f(Z)\Delta Z + \int_z^{z'} R(z)dz.$$

σ_1

Le module de la dernière intégrale est inférieur à $\varepsilon\,|Z' - Z|$. On a donc

$$\Delta I = f(Z)\Delta Z + R_1\,\Delta Z, \qquad |R_1| < \varepsilon.$$

ω

ΔI tend donc vers zéro avec ΔZ. *L'intégrale I est donc une fonction continue de* Z. De plus

$$\frac{\Delta I}{\Delta Z} = f(Z) + R_1.$$

Le rapport admet donc une limite bien déterminée $f(Z)$ quand ΔZ tend vers zéro d'une manière quelconque.

ω

L'intégrale, fonction de Z, *admet une dérivée par rapport à* Z,

$$\frac{dI}{dZ} = f(Z)$$

I(Z) *est donc une fonction analytique.*

L'intégrale d'une fonction analytique est une fonction analytique.

Si $\Phi(Z)$ est une primitive quelconque de $f(Z)$, elle ne peut différer de $F(Z)$ que par une constante. On peut donc poser

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \Phi(Z) + \text{const.}$$

Comme pour $Z = z_0$, le premier membre s'annule, la constante est égale à $-\Phi(z_0)$ et par suite

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \Phi(Z) - \Phi(Z_0).$$

La formule fondamentale du calcul d'une intégrale connaissant une fonction primitive subsiste donc dans le cas d'une fonction analytique de variable complexe.

Intégration par parties. — Supposons que u, v soient deux fonctions holomorphes dans une aire A. On a

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

En intégrant les deux membres de cette égalité le long d'un contour quelconque, on a

$$\int_{z_0}^{z} (uv)'dz = \int_{z_0}^{z} uv'dz + \int_{z_0}^{z} vu'dz.$$

Or la première intégrale est égale à $(uv)_{z_0}^{z}$. Donc

$$\int_{z_0}^{z} uv'dz = (uv)_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} vu'dz.$$

On voit que l'on peut intégrer par parties comme pour les fonctions de variable réelle.

REMARQUE. — La formule

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \Phi(Z) - \Phi(z_0).$$

s'applique même si les fonctions $f(z)$, $\Phi(z)$ sont à déterminations multiples. Si l'on choisit une détermination pour $f(z)$ et une détermination pour $\Phi(z)$ admettant pour dérivée la détermination choisie

pour $f(z)$, en suivant par continuité $\Phi(z)$ lorsque z varie de z_0 à Z, on aura la valeur du second membre.

Quand on écrit par exemple

$$\int_{z_0}^{Z} z^m dz = \left(\frac{z^{m+1}}{m+1}\right)_{z_0}^{Z}$$

β

il faut d'abord définir nettement la détermination choisie pour z^m, $z^m = e^{m \log z}$. C'est cette même détermination de log z que l'on prendra dans la fonction primitive et que l'on suivra par continuité lorsque z varie de z_0 à Z.

Changement de variable. — Soit une intégrale de fonction analytique $\int_L f(z)dz$. L désignant un contour allant de z_0 à Z.

Faisons le changement de variable $z = \varphi(u)$, $\varphi(u)$ désignant une fonction analytique de la nouvelle variable complexe u. Nous supposons que lorsqu'on fait parcourir à la variable u un arc de courbe L_1 allant u_0 à U, z parcourt l'arc de courbe L.

ψ

Nous allons montrer que

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Nous supposerons $\varphi'(u)$ continue dans un champ comprenant L_1.

ν

Partons en effet de la définition de l'intégrale qui figure au second membre.

δ, ξ

Nous devons décomposer l'arc L_1 par des points de division u_0, u_1... u_k, u_{k+1}.... U et faire la somme

$$\Sigma f(\varphi(u_k))\varphi'(u_k)\,(u_{k+1} - u_k)$$

en prenant pour simplifier u_k dans chaque intervalle $u_{k+1} - u_k$.

ρ

Or on a

$$z_{k+1} - z_k = \varphi(u_{k+1} - \varphi(u_k) = (u_{k+1} - u_k)\varphi'(u'_k)$$

puisque la fonction φ *est analytique*, u'_k étant compris entre u_k et u_{k+1}.

Puisque $\varphi'(u'_k)$ reste finie, chaque différence $z_{k+1} - z_k$ tend vers zéro avec $u_{k+1} - u_k$. Dans la définition de la première intégrale, comme nous avons le droit de décomposer l'intervalle z_0 Z de

manière quelconque à la condition que tous les intervalles tendent simultanément vers zéro, α nous avons le droit de supposer que les valeurs z_k, z_{k+1} dans la première intégrale sont précisément celles qui correspondent à u_k, u_{k+1}.

La dérivée $\varphi'(u'_k)$ étant continue, σ_1 nous savons qu'elle l'est uniformément. On peut donc déterminer un intervalle η tel que, si $| u'' - u' | < \eta$, on soit certain que

$$| \varphi'(u'') - \varphi'(u') | < \varepsilon$$

α, ζ Tous les intervalles $| u_{k+1} - u_k |$ devant tendre vers zéro, nous pouvons supposer qu'ils sont tous inférieurs à η. Il en sera alors *a fortiori* de même de $u'_k - u_k$. On peut alors poser

$$\varphi'(u'_k) = \varphi'(u_k) + R_k$$

avec la condition $| R_k | < \varepsilon$. La somme

$$\Sigma f(\varphi(u_k))\varphi'(u_k)\,(u_{k+1} - u_k) = \Sigma f(\varphi(u_k))\,(\varphi'(u'_k) - R_k)(u_{k+1} - U_k)$$

peut donc s'écrire

$$\Sigma f(z_k)\,[(z_{k+1} - z_k) - R_k(u_{k+1} - u_k)].$$

ρ Elle se décompose en deux. La première

$$\Sigma f(z_k)\,(z_{k+1} - z_k)$$

a pour limite l'intégrale $\int_L f(z)dz$.

ψ La seconde peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

π Si, en effet, M désigne le maximum du module de $f(z)$ le long de L, cette deuxième somme a un module moindre que

$$M\varepsilon\Sigma\,| u_{k+1} - u_k | \leqslant M\varepsilon L_1$$

δ_1 On a donc en définitive

$$\int_L f(z)dz - \int_{L_1} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = S,$$

la quantité $| S |$ pouvant être rendue aussi petite qu'on le veut.

δ_1

Mais le premier membre est la différence de deux quantités bien déterminées et fixes. Cette différence est donc rigoureusement nulle et l'on a bien

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Dérivation sous le signe $\int$. — Considérons une fonction $f(z, \alpha)$ de deux variables z, α, holomorphe quand z, et α se déplacent respectivement dans des champs C et C'. L'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z,\alpha)dz$$

prise entre deux extrémités fixes représente une fonction de α dans le champ C'. Désignons-la par $F(\alpha)$. ξ, ψ *Nous allons montrer que c'est une fonction holomorphe dans ce champ.*

δ_1

On a en effet

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \int_{z_0}^{z_1} [f(z, \alpha + \Delta\alpha) - f(z, \alpha)]dz.$$

Par hypothèse, $f(z, \alpha)$ est holomorphe par rapport à α dans le domaine C'. α En appliquant à la parenthèse sous le signe $\int$, le théorème des accroissements finis, on a

$$f(z, \alpha + \Delta\alpha) - f(z,\alpha) = \Delta\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}(z, \alpha_1)$$

α_1 étant compris entre α et $\alpha + \Delta\alpha$.

Mais nous avons vu que la dérivée d'une fonction holomorphe est uniformément continue dans le champ. Il existe un intervalle h tel que, sous la seule condition $|\Delta\alpha| < h$, on ait, quels que soient z et α.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(z, \alpha + \Delta\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(z,\alpha)\right| < \varepsilon.$$

On peut donc poser dans ces conditions

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(z,\alpha_1) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(z,\alpha) + R.$$

et l'on aura $|R| < \varepsilon$.

On en déduit

$$\frac{F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_{z_0}^{z_1} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}(z, \alpha) + R \right] dz.$$

δ_1

L'intégrale du second membre se décompose en deux :

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(z, \alpha) dz.$$

La seconde, $\int_{z_0}^{z_1} R dz$, a un module moindre que εL. Elle tend donc vers zéro avec $\Delta\alpha$.

ω

Ainsi la fonction $F(\alpha)$ *admet une dérivée*

$$F'(\alpha) = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(z, \alpha) dz.$$

C'est donc une fonction holomorphe dans le champ C'.

La formule de dérivation par rapport au paramètre a est la même que si les variables étaient réelles.

CHAPITRE II

INTÉGRALE DE CAUCHY — FORMULE DE TAYLOR SÉRIE DE LAURENT

SOMMAIRE.

Intégrale de Cauchy : Dérivées successives. — Fonctions de plusieurs variables.
Retour sur les séries de fonctions de variable complexe : Intégration. — Dérivation.
Formule et série de Taylor : Théorème de Liouville. — Fonctions de plusieurs variables.
Conséquences de la formule de Taylor : Prolongement. — Zéros. — Expression analytique d'une fonction méromorphe dans une aire.
Série de Laurent : Série de Fourier. — Points singuliers essentiels.

I. — INTÉGRALE DE CAUCHY

Nous allons démontrer une formule extrêmement importante due à Cauchy.

Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans un champ donné Ω. Soit un contour fermé C compris dans Ω et un point a quelconque.

Si a est extérieur à C, l'intégrale $\int \frac{f(z)}{z-a} dz$ prise le long du contour est nulle.

Si a est intérieur à C, la fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ est holomorphe à l'intérieur de C sauf au point a. Isolons a par un petit cercle γ de centre a et de rayon ρ suffisamment petit.

D'après le théorème de Cauchy, on a

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Mais la première est bien définie et est indépendante du rayon du cercle γ. Il doit donc en être de même de la seconde. Voyons ce qu'elle devient quand nous prenons ρ aussi petit que nous le voulons. Pour la calculer, on peut poser quand z parcourt γ,

$$z - a = \rho e^{i\theta}, \qquad f(z) = f(a + \rho e^{i\theta}).$$

θ variant de 0 à 2π. La fonction étant continue en a, on peut écrire

$$f(a + \rho e^{i\theta}) = f(a) + \mathrm{R}$$

et l'on aura $|\mathrm{R}| < \varepsilon$ pourvu que ρ soit suffisamment petit. D'ailleurs $\frac{dz}{z-a} = id\theta$.

L'intégrale du second membre devient donc

$$\int_0^{2\pi} [f(a) + \mathrm{R}] id\theta = 2i\pi f(a) + i\int_0^{2\pi} \mathrm{R}\, d\theta.$$

Mais la seconde intégrale a un module moindre que $2\pi\varepsilon$.

La différence entre les deux quantités fixes

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz \qquad \text{et} \qquad 2i\pi f(a)$$

peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut : elle est donc rigoureusement nulle et l'on a

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2i\pi f(a), \qquad f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Telle est la formule de Cauchy. Ce résultat est extrêmement remarquable : L'intégrale du second membre ne fait en effet intervenir les valeurs d ela fonction $f(z)$ *que seulement le long de C*. La formule montre donc que cette détermination suffit pour entraîner celle de $f(z)$ en un point *quelconque intérieur à* C.

Une fonction non analytique $\mathrm{P}(x, y) + i\mathrm{Q}(x, y)$ peut prendre des valeurs arbitrairement choisies sur un contour C et également arbitraires à l'intérieur de C.

Si $\mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ *désigne une fonction analytique, il suffit de la déterminer sur* C *pour qu'elle soit déterminée en tout point intérieur à* C.

Dérivées successives. — De plus, l'égalité ci-dessus donne la valeur d'une intégrale de fonction analytique dépendant d'un paramètre arbitraire a. Comme dans le cas des fonctions de variable réelle, nous pourrons en déduire de nouvelles intégrales en dérivant la première par rapport au paramètre a. Puisque $f(z)$ est analytique, le premier membre a une dérivée $f'(a)$. D'après la règle de dérivation sous le signe $\int$, la dérivée de l'intégrale par rapport à a est

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz.$$

On a donc

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz.$$

Mais de plus, nous obtenons un résultat très important :
Le second membre (intégrale) admet des *dérivées successives* qui sont les intégrales des dérivées successives par rapport à a, dérivées qui, au facteur $f(z)$ près, sont simplement celles de $\frac{1}{(z-a)^k}$.

Donc la fonction $f(a)$ admet non seulement une dérivée première, mais *des dérivées de tout ordre* et l'on a les expressions de ces dérivées.

$$f''(a) = \frac{1\cdot 2}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz \cdots f^n(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

Ainsi, à la *seule condition* qu'une fonction $f(z)$ soit holomorphe dans une région, c'est-à-dire qu'elle soit monodrôme, continue et admette *une dérivée première*, elle admettra dans cette région des dérivées *de tout ordre* également *holomorphes*.

C'est là une propriété qui n'existe pas pour les fonctions de variable réelle.

Limites supérieures des dérivées successives. — Pour trouver une limite supérieure des dérivées, nous appliquerons l'inégalité $|I| \leq ML$, M désignant le maximum du module de la fonction à intégrer le long du contour, L la longueur du contour.

δ_1

Soit M le maximum de $|f(z)|$ le long de C. Désignons par δ la plus courte distance du point a à ce contour.

On aura

$$\left|\frac{1}{z-a}\right| < \frac{1}{\delta}.$$

ω

On a donc d'abord

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\delta}L.$$

De même

$$|f^n(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{\delta^{n+1}}L.$$

Si, en particulier, le contour C est un cercle de centre a,

$$L = 2\pi R, \qquad \delta = R$$

$$|f(a)| \leqslant M, \qquad |f^n(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!\,M}{R^n}.$$

On voit en particulier que le module d'une fonction, au centre d'un cercle, est tout au plus égal au maximum du module de la fonction *sur* le cercle.

Fonctions de plusieurs variables. — Ces résultats s'étendent aux fonctions de plusieurs variables.

Soit, par exemple, une fonction $f(z, z')$ holomorphe quand les variables z et z' se déplacent respectivement à l'intérieur de deux champs C et C'.

Soient a, a' deux points respectivement à l'intérieur de C et C'.

α

On peut écrire successivement

$$f(a, a') = f(z, a')_{z=a} = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z, a')}{z-a}dz.$$

ρ

Mais d'autre part

$$f(z, a') = f(z, z')_{z'=a'} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(z, z')}{z'-a'}dz'.$$

En substituant, on a donc

$$f(a, a') = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_C \frac{dz}{z-a}\int_{C'} \frac{f(z, z')}{z'-a'}dz'.$$

Comme évidemment, ψ on peut intervertir le rôle des variables z et z', on peut écrire

$$f(a, a') = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_C\int_{C'}\frac{f(z, z')}{(z-a)(z'-a')}dzdz'.$$

étant bien entendu que le symbole qui figure au second membre représente deux intégrations successives par rapport à z et à z'.

Comme dans le cas d'une variable, α on déduit par dérivation sous le signe $\int$, et toujours en passant par la décomposition en deux intégrales successives, les valeurs des dérivées successives (qui existent nécessairement) de la fonction $f(a, a')$. On trouve ainsi

$$\frac{\partial^{n+n'}f(a, a')}{\partial a^n \partial a'^{n'}} = \frac{n\,!\,n'\,!}{(2i\pi)^2}\int_C\int_{C'}\frac{f(z, z')}{(z-a)^{n+1}(z'-a')^{n'+1}}dzdz'.$$

Enfin, α_1 désignons par M le maximum de $|f(z, z')|$ quand les variables z et z' parcourent respectivement C et C' et soient δ, δ' o les plus courtes distances de a et de a' aux contours C, C'. On aura

$$|I_{nn'}| < \frac{n\,!\,n'\,!}{4\pi^2}\frac{MLL'}{\delta^{n+1}\delta'^{n'+1}}.$$

Si C et C' sont des cercles de centre a' et a, de rayon R' et R

$$|I_{nn'}| < n\,!\,n'\,! \times \frac{M}{R^n R'^{n'}}.$$

II. — RETOUR SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE — INTÉGRATION — DÉRIVATION

Nous pouvons maintenant revenir avec précision sur les séries de fonction d'une variable complexe, leur intégration, leur dérivation.

Nous supposerons une série de fonctions holomorphes d'une variable z

$$S(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots$$

Nous avons dit que cette série est *uniformément convergente* dans

un champ de variation de z, si, au nombre ε choisi arbitrairement, on peut faire correspondre un entier ν, tel que, si $n \geqslant \nu$, on ait

$$| S(z) - S_n(z) | < \varepsilon ,$$

ce nombre ν étant *indépendant de la valeur de* z dans le champ.

THÉORÈME. — *Si les termes d'une série uniformément convergente sont continus, la somme de la série est aussi une fonction continue de* z *dans le champ.*

La démonstration faite dans le cas d'une variable réelle subsiste intégralement.

Série des intégrales. — THÉORÈME. — *Si on intègre le long d'une ligne* L *chacun des termes d'une série uniformément convergente dans un champ, la série des intégrales est convergente et a pour valeur l'intégrale de la série* $S(z)$ *le long de* L.

On peut en effet écrire

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

et pour $n \geqslant \nu$, on a, quelque soit z, $| R_n(z) | < \varepsilon$.

La fonction $S(z)$, étant continue, peut être intégrée le long d'une ligne L dans le champ.

On aura

$$\int_L S(z)dz = \int_L u_1 dz + \int_L u_2 dz + \cdots + \int_L u_n dz + \int_L R_n dz$$

le nombre de termes du second membre étant limité.

Désignons par Σ_n la somme des n premières intégrales. On peut écrire

$$\int_L S(z)dz - \Sigma_n = \int_L R_n(z)dz.$$

Or cette dernière intégrale a un module moindre que εL et peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut. L'égalité exprime donc que la somme Σ_n des n premiers termes de la série des intégrales tend vers $\int_L S(z)dz$. La série des intégrales *est donc bien convergente* et a pour valeur $\int_L S(z)dz$.

THÉORÈME. — *Si les termes d'une série* S(z) *sont des fonctions holomorphes dans une aire* S *et sur le contour,* **si la série converge uniformément sur le contour C,** *elle est uniformément convergente à l'intérieur de* S *et il en est de même pour la série formée par les dérivées d'un même ordre quelconque.*

Soit en effet a un point quelconque à l'intérieur de S. Entourons a d'une courbe c entièrement intérieure à C et n'ayant aucun point commun avec C. Soit δ la plus courte distance des courbes C et c.

Puisque S(z) est uniformément convergente *sur le contour,* on peut déterminer n assez grand pour que $|\, R_n(z)\,| < \varepsilon$ quel que soit le point z, sur ce contour. δ_1 On a

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z). \qquad (1)$$

α

Divisons les deux membres de cette égalité par $(z - a)$ et intégrons le long de C. δ_1 On aura

$$\int_C \frac{S(z)}{z-a}\,dz - \int_C \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{z-a}\,dz = \int_C \frac{R_n(z)}{z-a}\,dz.$$

Mais les termes de la deuxième intégrale forment

$$2i\pi[u_1(a) + u_2(a) + \cdots + u_n(a)].$$

D'ailleurs l'intégrale du deuxième membre a un module moindre que $\frac{\varepsilon L}{\delta}$ et peut être rendue aussi petite qu'on le veut, quel que soit a.

d

La valeur de n étant d'ailleurs fixe, quel que soit a, on en déduit que la série $u_1(a) + u_2(a) \cdots + u_n(a) + \cdots$ est uniformément convergente et a pour somme

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{S(z)}{z-a}\,dz.$$

De plus la formule de Cauchy est applicable.

$$S(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{S(z)}{z-a}\,dz.$$

Série des dérivées. — Pour introduire la série des dérivées d'un ordre quelconque, α, ν divisons les deux membres de (1) par $(z - a)^{k+1}$ et intégrons le long de C.

δ_1

$$\int_C \frac{S(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz - \int_C \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{(z-a)^{k+1}}\,dz = \int_C \frac{R_n(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz. \qquad (3)$$

α, δ_1

Les termes de la seconde intégrale sont respectivement égaux à

$$\frac{2i\pi}{k!}u_1^k(a), \frac{2i\pi}{k!}u_2^k(a), \cdots \frac{2i\pi}{k!}u_n^k(a)$$

et ont pour somme

$$\frac{2i\pi}{k!}[u_1^k(a) + u_2^k(a) + \cdots + u_n^k(a)].$$

L'intégrale du second membre ρ a un module moindre que $\frac{\varepsilon L}{\delta^{k+1}}$ et peut être rendue aussi petite qu'on le veut, quel que soit a.

ω

n étant fixé l'égalité (3) exprime donc que la série des dérivées d'ordre k

$$u_1^k(a) + u_2^k(a) + \cdots + u_n^k(a) + \cdots$$

est *uniformément* convergente et a pour somme $\frac{k!}{2i\pi}\int_C \frac{S(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$

La formule de Cauchy est encore applicable aux dérivées successives d'une fonction représentée par une série.

En particulier, la série des dérivées du premier ordre est uniformément convergente et a pour somme

$$S_1(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{S(z)}{(z-a)^2}dz.$$

Le théorème suivant montre enfin que ces séries de dérivées représentent les dérivées successives de la fonction.

THÉORÈME. — *Si la série de fonctions holomorphes est uniformément convergente* **sur le contour C**, *la fonction* $S(z)$ *est aussi holomorphe à l'intérieur de* C *et sa dérivée en un point a quelconque* ψ *est égale à la série des dérivées en ce point (qui est nécessairement convergente d'après le théorème précédent).*

ψ

La série des dérivées d'ordre k représente la dérivée d'ordre k de la fonction $S(z)$.

α, δ_1

En effet, comme ci-dessus, on peut écrire

$$\int_C \frac{S(z)}{z-a}dz = \int_C \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{z-a}dz + \int_C \frac{R_n}{z-a}dz.$$

Dérivons les deux membres par rapport à a. On aura

$$(4) \qquad \frac{D}{Da}\int_C \frac{S(z)}{z-a}dz = \int_C \frac{u_1 + u_2 + \cdots u_n}{(z-a)^2}dz + \int_C \frac{R_n}{(z-a)^2}dz.$$

δ_1

Les termes de la seconde intégrale sont respectivement égaux à

$$2i\pi u_1'(a), \quad 2i\pi u_2'(a), \cdots 2i\pi u_n'(a).$$

ξ

La série des dérivées étant uniformément convergente, on peut déterminer n de manière que

$$2\pi\,|\,u_1'(a) + u_2'(a) + \cdots + u_n'(a) - \mathrm{S}_1(a)\,| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, la dernière intégrale peut être également rendue moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$. δ_1 De l'égalité (4), on déduit donc

$$\left| \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}a} \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{S}(z)}{z - a}\, dz - 2i\pi \mathrm{S}_1(a) \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\left| 2i\pi \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}a} \mathrm{S}(a) - 2i\pi \mathrm{S}_1(a) \right| < \varepsilon.$$

ω

Le premier membre étant une différence entre deux quantités fixes, cette différence est donc rigoureusement nulle et on a bien

$$\mathrm{S}_1(a) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}a} \mathrm{S}(a).$$

La fonction $\mathrm{S}(z)$ est donc bien holomorphe.

La série des dérivées premières est la dérivée de la fonction $\mathrm{S}(z)$.

δ_1

De proche en proche et sans nouvelle démonstration, la série des dérivées d'un ordre quelconque k, représente la dérivée d'ordre k de la fonction $\mathrm{S}(z)$.

Nous avons ainsi étendu aux séries de fonctions de variable complexe, les théorèmes sur la continuité, l'intégration, et la dérivation des séries de fonctions.

Mettons en relief le fait extrêmement important : il a suffi qu'une certaine propriété ait lieu *sur le contour* (convergence sur ce contour) pour qu'elle ait lieu à l'intérieur du contour.

III. — FORMULE ET SÉRIE DE TAYLOR

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur d'un cercle C de centre a et sur ce cercle. Prenons un point B à l'intérieur du cercle, d'affixe $a + t$.

La fonction $\frac{f(z)}{z-a-t}$ est holomorphe à l'intérieur d'une couronne comprise entre C et un cercle γ de centre $(a+t)$ de rayon aussi petit qu'on le veut.

σ_1 On a, en appliquant la formule de Cauchy

$$f(a+t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz.$$

Remarquons que, lorsque z parcourt le cercle C on a

$$\left|\frac{t}{z-a}\right| = \frac{AB}{|R|} < 1.$$

α On peut donc écrire

$$\frac{1}{z-a-t} = \frac{1}{z-a} \times \frac{1}{1-\frac{t}{z-a}}$$

et développer $\left(1-\frac{t}{z-a}\right)^{-1}$ en série convergente suivant les puissances croissantes de $\frac{t}{z-a}$. On peut écrire identiquement, quel que soit τ,

δ_1
$$1 = (1-\tau)(1+\tau+\tau^2+\cdots+\tau^n)+\tau^{n+1}.$$

Donc, pour $\tau = \frac{t}{z-a}$

$$\frac{1}{1-\frac{t}{z-a}} = 1 + \frac{t}{z-a} + \cdots + \frac{t^n}{(z-a)^n} + \frac{t^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-t)}$$

ou enfin

$$\frac{1}{z-a-t} = \frac{1}{z-a} + \frac{t}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{t^n}{(z-a)^{n+1}} + R_n$$

en posant

$$R_n = \frac{t^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-t)}.$$

α En substituant dans l'intégrale, elle se décompose donc en une somme d'intégrales. δ_1 On aura

$$2\pi i f(a+t) = \int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz + t\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + \cdots$$
$$+ t^n\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz + \int_C R_n(z) f(z)\,dz.$$

Mais $^{\rho}$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

et de même

$$2\pi i f^k(a) = k\,!\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz.$$

$^{\omega}$

On a donc

$$f(a+t) = f(a) + \frac{t}{1}f'(a) + \cdots + \frac{t^n}{n\,!}f^n(a) + \frac{1}{2\pi i}\int_C R_n f(z)dz.$$

La dernière intégrale est

$$I_{n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t^{n+1}}{(z-a)^{n+1}}\,\frac{f(z)}{z-a-t}\,dz.$$

Cette formule porte le nom de « formule de Taylor ».

Si l'on pose $a + t = z$

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n\,!}f^n(a) + \frac{1}{2\pi i}\int_C R_n f(z)dz.$$

On peut avoir une limite supérieure de la dernière intégrale.

$^{\alpha,\chi}$

Désignons par M le maximum de $|f(z)|$ le long de C et remarquons que

$$|z-a| = R, \qquad \left|\frac{1}{z-a-t}\right| < \frac{1}{R-|t|}.$$

On aura

$$I_{n+1} < \frac{M}{2\pi}\,\frac{|t^{n+1}|}{R^{n+1}(R-|t|)} \times 2\pi R = \frac{MR}{R-|t|}\left|\frac{t}{R}\right|^{n+1}.$$

$^{\rho,d}$

Si donc l'on suppose que t est infiniment petit, on voit que la différence infiniment petite $f(a+t) - f(a)$ est développée suivant les puissances successives *entières* de t. Le facteur $\frac{MR}{R-|t|}$ étant borné, I_{n+1} est un infiniment petit d'ordre $n+1$.

En négligeant un infiniment petit d'ordre $n+1$, on peut écrire

$$f(a+t) = f(a) + \frac{t}{1}f'(a) + \cdots + \frac{t^n}{n\,!}f^n(a).$$

$^{\rho,\sigma_1}$

C'est la formule obtenue dans le cas des variables réelles. Mais dans le cas actuel, on est *assuré* que la fonction $f(a)$ admet des

dérivées partielles de tout ordre. On peut prolonger indéfiniment le développement ; le terme complémentaire I_{n+1} tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Si donc l'on désigne par S_n la somme des n premiers termes de la série ainsi formée, la différence $f(a+t) - S_n$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, on voit que la série

$$f(a) + \frac{t}{1} f'(a) + \cdots + \frac{t^n}{n!} f^n(a) + \cdots$$

est donc *toujours certainement convergente* et a pour valeur $f(a+t)$. Cette série porte le nom de série de Taylor.

Si $a = 0$, on a la formule de Mac-Laurin.

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1} f'(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!} f^n(0) + \cdots$$

Le développement est valable à l'intérieur de tout cercle C de centre a, à la seule condition que $f(z)$ y soit holomorphe. Donc en général, on pourra prendre un cercle de centre a allant jusqu'au point critique le plus voisin. Il est bien certain que le développement ne peut plus être valable pour un point au delà du cercle, car une série entière convergente pour un point quelconque à une distance R est convergente pour tout point du cercle de rayon R, donc holomorphe, et en particulier devrait être convergente au point critique.

On appelle « fonction entière » une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle aussi grand qu'on le veut. Le développement ci-dessus est donc valable quel que soit le point $a + t$ dans le plan.

$$f(a+t) = \frac{1}{2i\pi} \Sigma t^n \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

THÉORÈME DE LIOUVILLE. — *Une fonction entière dont le module reste inférieur à un nombre fixe* M *dans tout le plan se réduit à une constante.*

Appliquons la formule de Taylor en nous arrêtant au deuxième terme. On aura

$$f(a+t) = f(a) + \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{t f(z)}{(z-a)(z-a-t)} dz.$$

Nous pourrons prendre pour C un cercle de centre a de rayon aussi grand qu'on le veut.

Supposons que $f(z)$ puisse rester bornée dans tout le plan. En désignant par M le maximum du module de $f(z)$, le module du deuxième terme sera moindre que

$$\frac{1}{2\pi}\frac{M}{R-|t|}\frac{|t|}{R}\times 2\pi R = M\frac{|t|}{R-|t|}.$$

On peut prendre R assez grand pour que ce terme soit moindre que toute quantité donnée. La différence $f(a+t)-f(a)$, entre deux quantités fixes, pouvant être rendue aussi petite qu'on le veut, est *rigoureusement nulle*, et

$$f(a+t)=f(a).$$

Plus généralement, supposons que mod. $\frac{f(z)}{z^n}$ reste inférieur dans tout le plan à un nombre fixe M. *Nous allons montrer que la fonction se réduit à un polynôme de degré n.*

Appliquons en effet la formule de Mac Laurin jusqu'au terme de degré n, en intégrant le long d'un cercle de centre origine.

Le terme complémentaire sera

$$R_n=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}\cdot\frac{f(z)}{z-t}\,dz.$$

Puisque $\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| < M$, on aura sur le cercle $|f(z)| < MR^n$; le module de l'intégrale sera moindre que

$$\frac{1}{2\pi}\left|\frac{t^{n+1}}{R^{n+1}}\right|\frac{MR^n}{R-|t|}\times 2\pi R = t^{n+1}\frac{M}{R-|t|}.$$

Ce terme pourra être rendu moindre que ε en prenant R suffisamment grand. La différence entre les deux quantités *fixes*

$$f(t) \quad \text{et} \quad f(0)+\frac{t}{1}f'(0)+\cdots+\frac{t^n}{n!}f^n(0)$$

est donc rigoureusement nulle et par suite

$$f(t)=f(0)+\frac{t}{1}f'(0)+\cdots+\frac{t^n}{n!}f^n(0).$$

La fonction $f(z)$ se réduit donc bien à un polynôme de degré n.

Remarque. — En appliquant la série de Mac-Laurin, on a par exemple

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \cdots + \frac{z^n}{n!} f^n(0) + \cdots$$

la série entière du second membre étant convergente dans un cercle de centre origine de rayon R.

Inversement, supposons que pour tout point d'un certain cercle, $f(z)$ puisse être représentée par une série entière admettant un rayon de convergence R. Nous allons montrer que cette série se confond avec la série de Mac Laurin.

En effet, cette série est absolument et uniformément convergente pour les valeurs

$$|z| \leqslant \rho < R$$

ainsi que *toutes* les séries dérivées. Ces dernières représentent les dérivées de la fonction $f(z)$. Soit le développement

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

En faisant $z = 0$ on a d'abord $a_0 = f(0)$.

Dérivons n fois les deux membres de l'égalité et faisons encore $z = 0$. La série du second membre

$$n!\, a_n + \frac{(n+1)!}{1} a_{n+1} z + \cdots$$

se réduira à $n!\, a_n$.

On a donc

$$f^n(0) = n!\, a_n \qquad \text{d'où} \qquad a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

On retrouve les coefficients du développement de Mac Laurin. La fonction $f(z)$ n'est donc développable en série entière *que d'une seule manière.*

Fonctions de plusieurs variables. — Si l'on a une fonction holomorphe $f(z, z')$ de deux variables, considérons deux cercles C, C′ de centre a, a' et soient deux points $a + t$, $a' + t'$ à l'intérieur de ces cercles.

Pour avoir le développement de $f(a + t, a' + t')$, comme

dans le cas des variables réelles, nous considérerons la fonction auxiliaire

$$F(\theta) = f(a + \theta t, a' + \theta t')$$

θ étant une variable complexe assujettie à se déplacer dans le cercle de centre origine de rayon un.

Dans ces conditions, ρ les points $a + \theta t, a' + \theta t'$ seront certainement à l'intérieur des cercles C, C' si les points $a + t, a' + t'$ le sont eux-mêmes.

δ_1 Appliquons la formule de Mac Laurin et faisons $\theta = 1$. On aura

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1} F'(0) + \cdots + \frac{1}{n!} F^n(0) + \cdots$$

Mais ρ la fonction composée $F(\theta)$ admet des dérivées de tout ordre par rapport à θ. σ_1 Elles sont données par la formule générale symbolique

$$F^n(\theta) = \left(t \frac{\partial}{\partial a} + t' \frac{\partial}{\partial a'}\right)^{(n)} f(a + \theta t, a' + \theta t').$$

Pour $\theta = 0$, les dérivées qui figurent dans le développement symbolique doivent être prises aux points a, a'.

$$F^n(0) = \left(t \frac{\partial}{\partial a} + t' \frac{\partial}{\partial a'}\right)^{(n)} f(a, a').$$

δ_1 D'ailleurs

$$F(0) = f(a, a') \qquad F(1) = f(a + t, a' + t').$$

on a donc

$$f(a + t, a' + t') = f(a, a') + \frac{1}{1}\left(t \frac{\partial}{\partial a} + t' \frac{\partial}{\partial a'}\right) f(a, a') + \cdots + \frac{1}{n!}\left(t \frac{\partial}{\partial a} + t' \frac{\partial}{\partial a'}\right)^{(n')} f(a, a') + \cdots$$

ρ C'est la même formule que dans le cas des variables réelles.

IV. — CONSÉQUENCES DE LA FORMULE DE TAYLOR CALCUL DE LA FONCTION DE PROCHE EN PROCHE

Prolongement. — Considérons une région C où $f(z)$ soit holomorphe. Proposons-nous de calculer les valeurs successives de $f(z)$

le long d'une ligne L comprise dans C. Soit a un point de cette ligne.

Si l'on connaît toutes les dérivées en a, la formule de Taylor

$$f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + \cdots$$

permettra de calculer $f(z)$ en tous les points d'un cercle γ de centre a et complètement intérieur à C. Ce cercle γ coupe L en un point a_1'.

Soit sur L un point a_1, intérieur à γ et aussi voisin qu'on le veut de a_1'. Nous pourrons calculer $f(a_1)$. Les séries dérivées permettront de calculer $f'(a_1)$, $f''(a_1)$... Le développement de Taylor relatif au point a_1

$$f(z) = f(a_1) + (z - a_1)f'(a_1) + \cdots$$

permettra à son tour de calculer $f(z)$ en tous les points d'un nouveau cercle γ_1, de cercle a_1 intérieur à C. Si nous prenons sur L un point a_2 intérieur à γ_1 et aussi voisin qu'on le veut de γ_1, nous pourrons calculer $f(a_2)$ et les valeurs des dérivées en ce point...

Tous ces cercles successifs ayant un rayon fini, au moins égal à la plus courte distance des points de L à C, nous pourrons ainsi certainement arriver à un point final b sur L et y calculer $f(b)$ et toutes les dérivées en ce point.

Rappelons *qu'il a suffi pour cela de connaître $f(a)$ et toutes les dérivées au point a.*

Remarque. — Si en un point a, toutes les dérivées sont nulles, on en déduira $f(a_1) = f(a)$. Toutes les séries dérivées donneront de même

$$f'(a_1) = f'(a) = 0, \qquad f''(a_1) = f''(a) = 0, \text{ etc.}$$

Donc au point a_2

$$f(a_2) = f(a_1) = f(a), \qquad f^k(a_2) = 0, \text{ etc.}$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une région* C, *si en un seul point particulier a, toutes les dérivées de la fonction sont nulles, la fonction est constante dans la région.*

Théorème. — *Dans toute région où une fonction $f(z)$ est holo-*

morphe, les points pour lesquels elle prend une valeur donnée sont isolés.

Soit en effet a un point pour lequel la fonction prend la valeur $f(a)$, et soit z un point compris dans le cercle de convergence de la série de Taylor relative au point a.

α

On aura

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^n(a) + \cdots.$$

Il est possible qu'un certain nombre de dérivées soient nulles en a. Si toutes les dérivées étaient nulles, la fonction serait constante dans l'aire, ce que nous ne supposons pas. Désignons par $f^n(a)$ la première dérivée qui ne soit pas nulle.

δ_1

On aura alors

$$f(z) - f(a) = \frac{(z-a)^n}{n!}\left[f^n(a) + \frac{z-a}{n+1} f^{n+1}(a) + \cdots\right].$$

σ_1

La parenthèse représente une série convergente. On peut choisir $(z-a)$ suffisamment petit pour que l'ensemble des termes à partir du second soit aussi petit en module qu'on le veut. Comme $f^n(a)$ est différent de zéro, pour tous les points d'un cercle suffisamment petit,

d

on aura donc certainement

$$f(z) - f(a) \not\equiv 0.$$

ω

En aucun autre point de ce cercle, la fonction ne reprend donc la valeur $f(a)$.

Zéros. — En particulier si $f(a) = 0$, a est un zéro de $f(z)$. Si l'on a de plus

$$f'(a) = 0, \qquad f''(a) = 0 \cdots, \qquad f^{n-1}(a) = 0, \qquad f^n(a) \not\equiv 0,$$

c'est-à-dire si la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre n, on dit que a est un zéro d'ordre n de la fonction.

Dans ce cas, le développement de la série de Taylor

ρ

commence à un terme de degré n en $(z-a)$.

Corollaire I. — *Si la fonction est holomorphe, les zéros de la fonction sont isolés, et par conséquent nécessairement en nombre limité dans* C.

COROLLAIRE II. — *Si la fonction holomorphe dans une aire, garde une valeur constante le long d'un petit arc ab, si petit soit-il, la fonction a une valeur constante dans l'aire tout entière.*

En effet, il faut nécessairement que toutes les dérivées soient nulles en a. Donc d'après le premier théorème, la fonction a une valeur constante dans toute l'aire.

Pôles. — Nous avons vu que, si un point a est un zéro d'ordre n de $f(z)$, $^{\sigma_1}$ on peut écrire

$$f(z) = (z-a)^n\left[\frac{f^n(a)}{n!} + \frac{z-a}{(n+1)!}f^{n+1}(a) + \cdots\right] = (z-a)^n\varphi(z).$$

Comme $f^n(a) \not\equiv 0$, $\varphi(z)$ ne s'annule pas au point a.

Nous avons appelé « pôle » $^{\sigma_1}$ un point pour lequel $f(z)$ devient infinie, mais pour lequel l'inverse de la fonction

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

est holomorphe aux environs de ce point.

La fonction $\varphi(z)$ s'annule donc en ce point. Soit b un tel point. $^{\alpha, \sigma_1}$ Si b est un zéro d'ordre n de $\varphi(z)$, pour tout point d'un certain cercle C de centre b, on pourra écrire

$$\varphi(z) = (z-b)^n\varphi_1(z)$$

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{n!}\varphi^n(b) + \frac{z-b}{(n+1)!}\varphi^{n+1}(b) + \cdots.$$

la fonction $\varphi_1(z)$ étant holomorphe au point b et ne s'y annulant pas; $\frac{1}{\varphi_1(z)}$ $^{\rho}$ est donc également holomorphe aux environs de b, et pour tout point d'un certain cercle C' de centre b, ^{o} on aura un développement de la forme

$$\frac{1}{\varphi_1(z)} = a_0 + a_1(z-b) + \cdots \qquad (a_0 \not\equiv 0).$$

$^{\omega}$ Donc aux environs du pôle b et pour tout point du cercle C', on peut écrire

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-b)^n} \times \frac{1}{\varphi_1(z)} = \frac{1}{(z-b)^n}[a_0 + a_1(z-b) + \cdots]$$

$$= \frac{a_0}{(z-b)^n} + \frac{a_1}{(z-b)^{n-1}} + \cdots + a_n + a_{n+1}(z-b) + \cdots.$$

On dit que le point $z = b$ est un pôle d'ordre n de la fonction.

On dit qu'une fonction est « méromorphe » dans une aire donnée, si elle n'admet dans cette aire d'autres singularités que des pôles. Ces pôles correspondent aux zéros de la fonction $\varphi(z)$. Ils sont donc
ω
isolés. On voit donc que les pôles d'une fonction méromorphe sont nécessairement isolés.

R
Ordre d'une fonction méromorphe. — Si un point a est un point ordinaire d'une fonction méromorphe $f(z)$, c'est-à-dire n'est ni pôle, ni zéro, on peut écrire pour tout point d'un cercle C de centre a

$$f(z) = a_0 + a_1(z - b) + \cdots$$

δ1 σ1
Si a est un zéro d'ordre n, on a, aux environs de a, un développement de la forme

$$f(z) = (z - a)^n[a_0 + a_1(z - a) + \cdots].$$

σ1
Enfin si a est un pôle d'ordre n,

$$f(z) = (z - a)^{-n}[a_0 + a_1(z - a) + \cdots].$$

ρ
On peut donc écrire d'une façon générale

$$f(z) = (z - a)^n\varphi(z)$$

n étant un entier positif, nul ou négatif. Ce nombre n s'appelle « ordre » de la fonction au point considéré.

L'ordre d'un produit de fonctions est évidemment égal, en chacun de ces points, à la somme des ordres des facteurs.

L'ordre de $f'(z)$ en chaque *zéro* ou *pôle* est égal à $(n - 1)$ (si $n \not\equiv 0$).
δ1
On a en effet

$$f'(z) = (z - a)^{n-1}[n\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)].$$

Or, la parenthèse ne s'annule pas pour $z = a$ car $\varphi(a) \not\equiv 0$.

Si $n = 0$, on ne peut rien dire sur l'ordre de $f'(z)$.

L'ordre d'une fonction méromorphe *dans une aire* est égale à la somme des ordres de la fonction pour tous les points (zéros ou pôles) de cette aire. C'est un nombre fini.

Expression analytique des fonctions méromorphes dans une aire donnée. — Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans une aire, admet-

tant pour zéros les points $a_1, a_2, \dots a_n$ d'ordre respectif $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ et les pôles $b_1, b_2, \dots b_p$ d'ordre $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p$.

Il est aisé de construire une fonction particulière $\varphi(z)$ admettant ces zéros et ces pôles avec ces ordres de multiplicité. Il suffit de prendre

$$\varphi(z) = \frac{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n}}{(z-b_1)^{\beta_1}\cdots(z-b_p)^{\beta_p}}.$$

Cherchons alors l'expression générale des fonctions $f(z)$.

Si nous considérons la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$, elle n'aura visiblement plus dans l'aire donnée ni zéro ni pôle. C'est donc une fonction holomorphe. Mais pour exprimer qu'elle n'a pas de zéro nous prendrons son logarithme qui sera également une fonction holomorphe dans l'aire. On peut donc poser

$$\log \frac{f(z)}{\varphi(z)} = h(z),$$

$h(z)$ étant une fonction holomorphe, et par suite

$$f(z) = \varphi(z)e^{h(z)}.$$

Telle est l'expression générale des fonctions $f(z)$.

Deuxième forme. — On peut donner une autre forme très utile des fonctions $f(z)$ admettant des pôles donnés, $b_1, b_2 \dots b_p$.

Aux environs du point b_1, par exemple, on peut poser

$$f(z) = (z-b_1)^{-\beta_1} f_1(z),$$

$f_1(z)$ étant holomorphe aux environs de b_1 (ou dans le domaine de b_1). On peut donc, dans ce domaine, la développer suivant les puissances positives entières croissantes de $(z-b_1)$ sous la forme

$$f_1(z) = a_0 + a_1(z-b_1) + \cdots + a_{\beta_1-1}(z-b_1)^{\beta_1-1} + (z-b_1)^{\beta_1} g_1(z).$$

avec la condition $a_0 \neq 0$, $g_1(z)$ étant holomorphe. De sorte que l'on met $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-b_1)^{\beta_1}} + \frac{a_1}{(z-b_1)^{\beta_1-1}} + \cdots + \frac{a_{\beta_1-1}}{(z-b_1)^{\beta_1-1}} + g_1(z).$$

La partie rationnelle

$$R_1 = \frac{a_0}{(z-b_1)^{\beta_1}} + \cdots + \frac{a_{\beta_1-1}}{(z-b_1)^{\beta_1-1}}$$

s'appelle la fonction *caractéristique* de $f(z)$ relative au point b_1.

On peut ainsi déterminer les parties caractéristiques $R_1, R_2, \ldots R_p$ relatives à tous les pôles $b_1, b_2, \ldots b_p$. Supposons les *données*; considérons leur somme.

$$\varphi(z) = R_1 + R_2 + \cdots + R_p.$$

et formons la différence

$$f(z) - \varphi(z) = F(z).$$

La fonction $\varphi(z)$ admet pour pôles les points b_1, $b_2 \ldots b_p$.

Si nous cherchons le développement de $F(z)$ autour du point b_1, aux environs de ce pôle on peut écrire

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z) - \varphi(z) = R_1 + g_1(z) - [R_1 + R_2 + \cdots + R_p] \\ &= g_1(z) - [R_2 + R_3 + \cdots + R_p]. \end{aligned}$$

La différence $F(z)$ est donc holomorphe aux environs de b_1. Comme il en est de même pour tous les points b, on voit que cette différence est holomorphe dans toute l'aire. On peut donc écrire

$$f(z) = R_1 + R_2 + \cdots + R_p + F(z)$$

$F(z)$ étant une fonction holomorphe dans l'aire, (qui peut d'ailleurs être quelconque).

Somme des ordres d'une fonction méromorphe. — Donnons-nous une fonction méromorphe dans une aire limitée par un contour fermé C. Supposons que le point m image de z décrive C dans le sens direct. Le point M, image de $f(z)$, décrira également un contour fermé, puisque, quand z revient à son point de départ, la fonction, étant uniforme, reprend la même valeur. Le module de $f(z)$ reprend donc la même valeur mais l'argument pourra avoir varié de $2\Pi\pi$ (Π entier).

THÉORÈME. — *Lorsque z décrit une seule fois un contour* C, *la variation totale d'argument de la fonction méromorphe* $f(z)$ *est égale à* $2\Pi\pi$, Π *étant la somme des ordres de la fonction dans l'aire.*

Nous supposons que C ne passe par aucun pôle, ni zéro de $f(z)$.

d

Le point image M restera alors à distance finie et la courbe qu'il décrira ne passera pas par l'origine (il y aurait dans ce cas variation brusque de l'argument, de π).

Remarquons d'abord que si M décrit un même chemin dans deux

ρ

sens opposés, la variation correspondante de l'argument sera nulle puisque le point image repasse lui-même par les mêmes positions.

Si donc on décompose l'aire en deux aires partielles par une transversale, la variation de l'argument correspondant au contour total

d

sera égale à la somme des variations correspondant aux contours partiels. Le résultat s'étend visiblement à un nombre fini d'aires partielles.

ψ

Si C ne contient aucun zéro ni pôle, H est nul. En effet, pour tous les points à l'intérieur de C, $| f(z) |$ restant supérieur à un nombre

d

déterminé A, le point image restera à l'extérieur d'un cercle de rayon A. Or on peut décomposer l'aire par des parallèles aux axes en un nombre fini de carrés suffisamment petits pour que l'image M décrive un contour fermé aussi petit qu'on le veut.

d

Tous les points devant rester à l'extérieur du cercle A, cette courbe fermée ne pourra contenir l'origine.

δ_1

Quand z décrit un de ces petits carrés, la variation de l'argument de $f(z)$ est donc nulle. Le nombre de carrés étant fini, la variation totale de arg. $f(z)$ sera donc aussi nulle quand z décrira C.

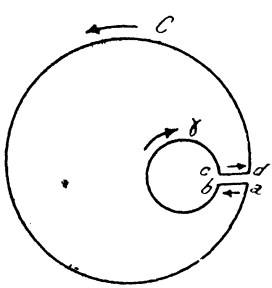


Fig. 3.

Prenons maintenant la fonction $(z - a)^n$, a étant à l'intérieur de C, n étant positif ou négatif. Entourons a d'un cercle γ entièrement intérieur à C. La fonction n'aura aucun zéro entre C et γ.

α_1

Si donc nous les réunissons par une

d

double corde, la variation totale d'argument quand z décrit

ρ

le contour total, dans le sens des flèches sera nulle. Or, la va-

riation d'argument, quand z décrit la double corde, étant nulle, on voit que la variation d'argument quand z décrit C est égale à la variation d'argument $2H\pi$ pour le contour γ, les deux contours étant cette fois parcourus dans le même sens.

Mais il est alors facile de calculer H. En posant

$$z - a = re^{i\theta}$$

on aura

$$(z - a)^n = r^n e^{ni\theta}$$

Quand θ croit de 2π, l'argument de $(z - a)^n$ croît de $2n\pi$. Donc $H = n$.

Enfin, prenons une fonction méromorphe dans C. Nous avons vu, qu'en introduisant la fonction

$$\varphi(z) = \frac{(z - a_1)^{\alpha_1} \cdots}{(z - b_1)^{\beta_1} \cdots},$$

on pouvait poser $f(z) = \varphi(z)e^{h(z)}$, $e^{h(z)}$ n'ayant ni pôle ni zéro dans C. La variation de l'argument de $f(z)$ sera égale à la somme des variations des arguments des facteurs de φ. La variation d'argument de chacun de ces facteurs étant $2\alpha_1\pi$... ou $-2\beta_1\pi$..., on voit que la variation totale de l'argument de $f(z)$ sera donc bien $2H\pi$, avec

$$H = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_p).$$

Le théorème est donc démontré.

Fonction entière. — On dit qu'une fonction est « entière » lorsqu'elle est holomorphe dans un cercle de rayon R aussi grand qu'on le veut.

Pour étudier une fonction à l'infini, nous savons que nous devons faire la transformation $z = \frac{1}{\zeta}$ et étudier la fonction $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ à l'origine. Si l'origine est une singularité de la fonction $g(\zeta)$, nous dirons que l'infini est la même singularité pour la fonction $f(z)$.

Si l'origine est un pôle d'ordre p de $g(\zeta)$ on peut poser

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a_0}{\zeta^p} + \frac{a_1}{\zeta^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{\zeta} + \varphi(\zeta)$$

$\varphi(\zeta)$ étant holomorphe aux environs de l'origine. En revenant à la variable z, on voit donc que, pour de grandes valeurs de $|z|$, on peut poser

$$f(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_{p-1} z + \psi(z)$$

$\psi(z)$ restant fini pour z infini. On dit alors que l'infini est un « pôle » d'ordre p de $f(z)$.

Si la fonction est entière, elle ne peut admettre le point à l'infini comme point ordinaire. Car dans un certain cercle de rayon ρ suffisamment petit, la fonction $g(\zeta)$ conserverait un module fini.

Donc $f(z)$ aurait un module fini à l'extérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{\rho}$. Comme d'autre part, la fonction « entière » est finie pour toute valeur *finie* de z, $f(z)$ aurait alors un module fini pour toute valeur de z. D'après le théorème de Liouville, elle se réduirait donc à une constante.

Si le point à l'infini est un pôle d'ordre p pour la fonction supposée entière $f(z)$, on peut poser pour $|z| > R$

$$f(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_{p-1} z + \psi(z)$$

$\psi(z)$ restant fini. Mais alors la différence

$$f(z) - (a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots)$$

restant d'autre part finie, pour toute valeur finie de z, d'après le théorème de Liouville cette différence se réduit à une constante a_p.

On a donc, dans ce cas,

$$f(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_{p-1} z + a_p.$$

Donc : *si l'infini est un pôle d'ordre p pour la fonction entière $f(z)$, elle se réduit nécessairement à un polynôme de degré p.*

Fonction fractionnaire. — On dit qu'une fonction est *fractionnaire*, lorsqu'elle est méromorphe dans un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut.

THÉORÈME. — *Toute fonction fractionnaire qui admet l'infini comme pôle ou comme point ordinaire, se réduit à une fraction rationnelle.*

Si l'infini est un pôle ou un point ordinaire de $f(z)$, l'origine est un pôle ou un point ordinaire de $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. On peut donc tracer un cercle de rayon ρ suffisamment petit ne contenant aucun autre pôle de $g(\zeta)$. La fonction $f(z)$ n'admettra donc aucun pôle à l'extérieur du cercle de rayon $R = \frac{1}{\rho}$. Or à l'intérieur du cercle, la fonction est méromorphe. Elle n'a donc à l'intérieur qu'un nombre limité de pôles.

Soient R_1, R_2... R_k toutes les fonctions caractéristiques relatives à ces pôles. La différence

$$f(z) - [R_1 + R_2 + \cdots + R_k]$$

est holomorphe dans le cercle. En dehors de ce cercle, elle n'admet qu'un pôle au plus. C'est donc une fonction « entière » qui se réduit soit à une constante, soit à un polynôme P.

On peut donc poser

$$f(z) = R_1 + R_2 + \cdots + R_k + P.$$

Ce qui démontre le théorème :

Somme des ordres d'une fonction rationnelle. — Faisons la transformation $z = \frac{1}{\zeta}$. Si l'infini est un pôle ou un zéro de $f(z)$ d'ordre p, c'est le seul pôle ou zéro de $g(\zeta)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho = \frac{1}{R}$.

Quand z décrit le cercle de rayon R, ζ décrit le cercle de rayon ρ dans le sens inverse. La variation d'argument de $g(\zeta)$ est donc égale à $-2ip\pi$. Mais d'autre part, lorsque z décrit ce cercle, la variation d'argument de $f(z)$, qui est celle de $g(\zeta)$, est égale à $2i\mathrm{H}\pi$. Donc

$$p = -\mathrm{H}, \qquad p + \mathrm{H} = 0.$$

THÉORÈME. — *La somme des ordres d'une fonction rationnelle, pour toute valeur finie ou infinie de z, est donc nulle.*

V. — SÉRIE DE LAURENT. — SÉRIE DE FOURIER

Série de Laurent. — La série de Taylor peut être généralisée. Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit holomorphe à l'intérieur d'une couronne formée par deux cercles de centre a de rayons r et R.

Remarquons qu'il s'agit d'une couronne et non plus du cercle total. La fonction peut d'ailleurs admettre des points singuliers quelconques à l'intérieur du petit cercle.

Soit x l'affixe d'un point quelconque M de la couronne. Nous allons montrer que :

$f(z)$ *peut être développée suivant une double série* :

1° *Une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de* $(x - a)$.

2° *Une série ordonnée suivant les puissances entières positives et croissantes de* $\frac{1}{x - a}$.

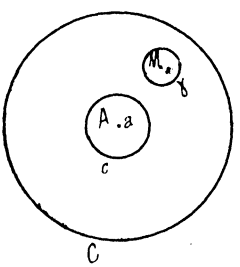


Fig. 4.

Soit en effet γ un petit cercle de centre x entièrement compris dans la couronne. La fonction $\frac{f(z)}{z - x}$ est holomorphe dans la région comprise entre le cercle C, d'une part, et les cercles c et γ, d'autre part.

On a donc d'après le théorème de Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{z - x}\,dz = \int_c \frac{f(z)}{z - x}\,dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z - x}\,dz$$

les trois cercles étant parcourus dans le même sens.

La troisième intégrale est égale à $2i\pi f(x)$.

On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z - x}\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)}{z - x}\,dz.$$

Pour introduire le point a, nous écrirons d'ailleurs

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{z - a - (x - a)} = \frac{1}{z - a} \times \frac{1}{1 - \frac{x - a}{z - a}}.$$

Or, pour tous les points de C, on a $\left|\frac{x - a}{z - a}\right| = \frac{AM}{R} < 1$.

α_1 On peut donc développer la deuxième fraction, en série entière convergente de $\frac{x-a}{z-a}$

δ_1
$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a}\left[1 + \frac{x-a}{z-a} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{x-a}{z-a}}\right]$$
$$= \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}} \times \frac{1}{z-x}$$

δ_1 et par suite

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dx = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + R_n$$

en posant

$$a_k = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz, \qquad R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \times \frac{1}{z-x}\,dz.$$

δ_1 La deuxième intégrale peut s'écrire de même

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)}{x-a-(z-a)}.$$

α, β Il faut dans ce cas, développer la fraction $\frac{1}{x-a-(z-a)}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{z-a}{x-a}$, car, z décrivant le cercle c, on a

$$\left|\frac{z-a}{x-a}\right| = \frac{r}{AM} < 1.$$

Il faut donc écrire

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-a} \times \frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}} = \frac{1}{x-a}\left[1 + \frac{z-a}{x-a} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^n} + \frac{(z-a)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}}\right]$$

δ_2 et par suite

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)}{x-z}\,dz = \frac{b_1}{x-a} + \frac{b_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{b_{n+1}}{(x-a)^{n+1}} + S_n$$

en posant

$$b_k = \frac{1}{2i\pi}\int_c (z-a)^{k-1} f(z)dz, \qquad S_n = \frac{1}{2i\pi}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int \frac{(z-a)^{n+1}}{x-z} f(z)dz.$$

ψ

Restes. — *Les intégrales complémentaires* R_n *et* S_n *tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.*

π, d En effet, si M est le maximum de $|f(z)|$ lorsque z décrit C ou c, on a,

$$|R_n| < \frac{M}{2\pi}\frac{|x-a|^{n+1}}{R^{n+1}} \times \frac{1}{R-AM}\cdot 2\pi R$$

ou

$$|R_n| < \frac{MR}{R-AM}\cdot\left|\frac{AM}{R}\right|^{n+1}.$$

Or, le facteur $\frac{AM}{R}$ étant inférieur à l'unité, R_n tend donc bien vers zéro. De même, pour S_n,

δ_1
$$|S_n| < \frac{M}{2\pi}\left(\frac{r}{AM}\right)^{n+1}\frac{1}{AM-r}\times 2\pi r = \frac{Mr}{AM-r}\left(\frac{r}{AM}\right)^{n+1}$$

et ce dernier facteur tend bien vers zéro.

ω En faisant croître n indéfiniment, on peut donc bien écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots + \frac{b_1}{x-a} + \frac{b_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(x-a)^n} + \cdots$$

Expression générale des coefficients. — Les intégrales qui représentent les coefficients a_k, b_k sont prises le long des circonférences c et C. Comme les fonctions sous le signe $\int$ sont holomorphes dans la couronne, δ_1 on peut les intégrer indifféremment suivant une circonférence quelconque Γ comprise entre c et C.

D'autre part, si l'on convient de faire varier l'indice n de $-\infty$ à $+\infty$, on peut écrire

$$(1)\quad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x-a)^n \qquad \text{avec} \qquad a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

π, δ_1

En effet pour des valeurs négatives de n, $(n = -n')$ on aura bien

$$a_{-n'} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{-n'+1}}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (z-a)^{n'-1} f(z)\,dz = b_{n'}.$$

La formule (1) porte le nom de formule de *Laurent*.

Il faut remarquer que, si la fonction est holomorphe même à l'intérieur de c, les intégrales $b_{n'}$ sont nulles. La série de Laurent se réduit à la série de Taylor.

Série de Fourier. — Dans le cas où la fonction $f(z)$ admet la période 2ω (réelle ou imaginaire), c'est-à-dire si $f(z + 2\omega) = f(z)$, on peut modifier la représentation de la manière suivante :

Faisons la transformation $u = e^{\pi i \frac{z}{\omega}}$.

Lorsque z varie de 2ω, u reprend la même valeur.

Si le point z se déplace sur une parallèle à la période, c'est-à-dire si nous posons

$$z = z_0 + t\omega$$

(t variable réelle de $-\infty$ à $+\infty$), le module de u ne varie pas, car

$$|u| = \left|e^{\pi i \frac{z_0}{\omega}}\right| \times \left|e^{\pi i t}\right| = \left|e^{\pi i \frac{z_0}{\omega}}\right| = \text{const.}$$

ω

A la parallèle à la période, correspond donc pour u une circonférence de centre origine. Donc si le point z se déplace dans le champ compris entre deux parallèles D, D' à la période, (en se donnant

o

deux valeurs distinctes de z_0), le point u se déplacera dans la couronne comprise entre les deux circonférences C, C' qui correspondent à ces droites.

o

Par la transformation, la fonction $f(z)$ devient une fonction $\varphi(u)$. A tout point u de la couronne correspondent dans la

bande une infinité de points z situés dans le champ, compris dans la formule $z = z_0 + 2h\omega$ (h entier) en désignant par z_0 l'une des valeurs. Mais pour ces diverses valeurs de z, la fonction $f(z)$, étant périodique, reprend la même valeur.

La fonction $\varphi(u)$, qui est évidemment analytique et continue comme $f(z)$, est donc aussi *uniforme* dans la couronne. C'est donc une fonction holomorphe : On peut la représenter par une série de Laurent dans la couronne

$$\varphi(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots + \frac{B_1}{u} + \frac{B_2}{u^2} + \cdots$$

Si l'on revient à la variable z, on voit que la fonction $f(z)$ est représentée dans la bande, par un développement de la forme

$$f(z) = \Sigma A_k e^{k\pi i \frac{z}{\omega}} + \Sigma B_k e^{-k\pi i \frac{z}{\omega}}.$$

Or rassemblons les termes correspondant à un même indice, ce qu'on a le droit de faire, on peut poser

$$A_k e^{k\pi i \frac{z}{\omega}} + B_k e^{-k\pi i \frac{z}{\omega}} = a_k \cos k\pi \frac{z}{\omega} + b_k \sin k\pi \frac{z}{\omega}$$

a_k et b_k étant bien déterminés. On aura donc finalement pour $f(z)$ un développement de la forme

$$f(z) = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi z}{\omega} + a_2 \cos \frac{2\pi z}{\omega} + \cdots + b_1 \sin \frac{\pi z}{\omega} + b_2 \sin \frac{2\pi z}{\omega} + \cdots$$

On retrouve pour la fonction de variable complexe, admettant la période 2ω la série de Fourier : elle représente $f(z)$ dans une bande comprise entre deux droites parallèles à la période.

Points singuliers essentiels. — Nous avons obtenu le développement de Laurent dans la couronne comprise entre deux cercles de centre a, dans laquelle $f(z)$ est holomorphe

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots a_n(z-a)^n + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \cdots$$

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons $a = 0$. Ce développement se réduit à

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots$$

Nous le désignerons par $\varphi(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right)$. Nous dirons que $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$ représente la *fonction caractéristique* relative à l'origine.

Supposons que l'origine soit un point critique *isolé*. On pourra supposer que C ne renferme aucun autre point critique et d'autre part le développement sera valable quelque petit que soit le rayon du cercle intérieur c.

Le coefficient b_m a pour expression

$$b_m = \frac{1}{2i\pi}\int_c (z-a)^{m-1} f(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_c z^{m-1} f(z)dz.$$

Si M désigne le maximum de $| f(z) |$ le long de c, on aura

$$| b_m | < Mr^m.$$

La série $\psi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum \frac{b_m}{z^m}$ est donc absolument et uniformément convergente si $| z | > r$.

Cette fonction est donc convergente à *l'extérieur* d'un cercle de rayon aussi petit qu'on le veut.

Si donc l'on pose $z = \frac{1}{\zeta}$, la fonction $\psi(\zeta)$ sera une fonction holomorphe convergente à l'*intérieur* d'un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut.

Ce sera donc une fonction « entière » en ζ.

Trois cas peuvent se présenter :

1° ψ est identiquement nul. Dans le domaine de l'origine, la série de Laurent se réduit à la série de Taylor : l'origine est donc point ordinaire de $f(z)$;

2° ψ est limité c'est-à-dire est un polynôme en $\frac{1}{z}$ de la forme

$$\psi(z) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_p}{z^p}.$$

Le produit $z^p f(z)$ a alors un développement ne renfermant que des puissances entières de z : L'origine est un pôle d'ordre p ;

3° ψ est illimité

$$\psi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_p}{z^p} + \cdots$$

On dit que l'origine est un *point singulier essentiel* de $f(z)$.

THÉORÈME. — *Si l'origine est un point singulier essentiel, il existe des points, aussi voisins qu'on le veut de* 0, *pour lesquels la fonction prend telle valeur* α *arbitrairement choisie.*

Considérons en effet la différence $f(z) - \alpha$ ou plutôt son inverse

$$\theta(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}.$$

Le point 0 ne peut être ni zéro ni point ordinaire pour $\theta(z)$, parce qu'il serait un pôle ou un point ordinaire pour $f(z) - \alpha$ et par suite pour $f(z)$.

Le point 0 ne peut pas être un pôle de $\theta(z)$, . Car ce serait un point ordinaire de $f(z) - \alpha$.

L'origine est donc point singulier essentiel de $\theta(z)$. Dans une couronne enveloppant l'origine, la fonction $\theta(z)$ a donc un développement en série de Laurent de la forme

$$\theta(z) = \varphi_1(z) + \psi_1\left(\frac{1}{z}\right).$$

Nous allons montrer que $|\theta(z)|$ *peut être rendu aussi grand qu'on le veut.* On peut choisir z suffisamment petit pour que $\varphi_1(z)$ soit aussi voisin qu'on le veut de a_0 et reste donc fini. D'autre part, φ_1 étant une fonction entière de $\zeta = \frac{1}{z}$, d'après le théorème de Liouville, ψ_1 augmente indéfiniment avec ζ. Par suite, il existe des valeurs de z suffisamment petites, pour lesquelles $\left|\psi_1\left(\frac{1}{z}\right)\right|$ est plus grand que toute quantité donnée. Il en sera donc de même de $|\theta(z)|$. Pour ces valeurs, on aura $|\theta(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$ et par conséquent

$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon.$$

Pour des points suffisamment voisins de 0, la fonction s'approche donc bien autant qu'on le veut de la valeur arbitrairement choisie α.

Autres singularités. — Nous avons supposé que l'origine était un point critique qui pouvait être isolé de tout autre point critique.

Il pourrait arriver qu'il n'en fût pas ainsi et que, par consé-

quent, dans un cercle entourant un point a, il y eut une infinité d'autres points critiques, si petit que soit le rayon du cercle. Ces points devraient être en effet, en nombre infini, π sans quoi ils pourraient être isolés.

Nous avons déjà considéré la fonction $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. σ_1 Elle admet comme points critiques tous les zéros de $\sin \frac{1}{z}$ c'est-à-dire

$$\frac{1}{z} = k\pi \qquad z = \frac{1}{k\pi}.$$

Chacun de ces points est un pôle de $f(z)$ car, π pour l'un quelconque de ces points, l'inverse de $f(z)$ c'est-à-dire $\sin \frac{1}{z}$ s'annule. Mais il n'en est pas de même du point $z = 0$. Dans un cercle de centre origine, de rayon r aussi petit qu'on le veut, il existe un nombre infini de points critiques aussi voisins qu'on le veut de 0 : π ce sont tous les points pour lesquels $\frac{1}{k\pi} < r$, ou $k > \frac{1}{\pi r}$. Tous ces points sont d'ailleurs des pôles.

Lorsqu'on se rapproche de 0 suivant une loi convenable, la fonction peut prendre telle autre valeur arbitrairement choisie que nous prendrons sous la forme $\frac{1}{\sin \alpha}$. φ Il suffit en effet de poser

$$\sin \frac{1}{z} = \sin \alpha, \qquad z = \frac{1}{\alpha + 2k\pi}.$$

Il y en a bien d'aussi rapprochés qu'on le veut de l'origine.

Enfin il faut remarquer qu'une fonction peut admettre non seulement des points critiques isolés ou non, mais aussi des lignes dont tous les points soient critiques. Il en est ainsi, par exemple, pour les coupures que nous avons dû introduire pour définir la fonction z^m ou $\log z$. Pour la fonction $\sqrt{z}$ par exemple, en prenant pour coupure l'axe $0x$, pour deux points de part et d'autre de la coupure, et aussi voisins soient-ils, la fonction

$$\sqrt{z} = \rho^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

prend deux valeurs égales et de signes contraires correspondant aux valeurs $\varphi = \varepsilon$ et $\varphi = 2\pi - \varepsilon'$.

CHAPITRE III

ÉTUDE DES FONCTIONS HARMONIQUES PROBLÈME DE DIRICHLET

SOMMAIRE.

Fonctions harmoniques : Formule de Green.
Problème de Dirichlet : Cas du cercle, théorème de Liouville. — Cas Général.
Fonctions harmoniques : Trois variables. — Généralisation de la formule de Green.
Formule de Poisson. — Formule de Gauss.
Problème de Dirichlet : cas de la sphère.

I. — FONCTIONS HARMONIQUES

L'étude des fonctions analytiques est ramenée, comme on l'a vu, à l'étude des couples de fonctions $U(x, y)$, $V(x, y)$ liées par les équations fondamentales. Nous dirons qu'une fonction $U(x, y)$ est « harmonique » dans une aire si elle est uniforme et continue dans l'aire et si de plus elle vérifie la condition

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

σ1

Nous avons déjà vu qu'à toute solution de cette équation, on peut accoupler une autre solution $V(x, y)$ (à une constante près), telle que $U + iV$ soit analytique. On conçoit donc *qu'à toute propriété des fonctions analytiques, on puisse faire correspondre une propriété des fonctions harmoniques.*

Prenons, par exemple, la formule de Cauchy. Si l'on donne une fonction analytique

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

si $z_0 = a + bi$ désigne un point quelconque à l'intérieur d'un contour C, on a

σ1

$$2i\pi[U(a, b) + iV(a, b)] = \int_C (U + iV)\,\frac{dz}{z - z_0}.$$

L'intégrale du second membre σ_1 se réduit à de simples intégrales ordinaires, en exprimant les coordonnées d'un point de C en fonction d'un paramètre. α En égalant les parties réelles d'une part, et d'autre part les parties imaginaires des deux membres, on aura deux relations entre les quantités réelles, qui introduiront les dérivées de U et V, ou seulement les dérivées de V par exemple, χ au moyen des formules fondamentales.

Tel est le principe de ce que nous allons faire.

Rappelons d'autre part, la définition de la dérivée d'une fonction $U(x, y)$ dans une direction donnée. La différentielle de la fonction est

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

σ_1 Si le point se déplace d'une quantité ds dans la direction α, on peut poser

$$dx = \cos \alpha \, ds, \qquad dy = \sin \alpha \, ds,$$

δ_1 et par suite

$$\frac{dU}{ds} = \cos \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Telle est la dérivée de U dans la direction α. On peut désigner le second membre par la notation $D_\alpha U$

Si $V(x, y)$ est la fonction à accoupler à $U(x, y)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

On peut écrire

$$D_\alpha U = - \sin \alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial V}{\partial y}.$$

On a donc la relation

$$D_\alpha U = D_{\alpha + \frac{\pi}{2}} V.$$

En particulier, si l'on donne une courbe quelconque

$$D_s U = D_n V,$$

et par suite

$$D_s V = - D_n U,$$

les dérivées étant prises suivant la tangente et suivant la direction de la normale (intérieure pour le sens de déplacement choisi) obtenue en faisant tourner la demi-tangente de $+ \frac{\pi}{2}$ (sens de ox vers oy).

Ces relations peuvent remplacer les deux conditions fondamentales.

Formule de Green. — Considérons alors une fonction analytique $U + iV$. D'après la formule de Cauchy,

$$2i\pi[U(a, b) + iV(a, b)] = \int_C (U + iV) \frac{dz}{z - z_0}.$$

En égalant les parties réelles d'une part et imaginaires, d'autre part, cette relation pourra se décomposer en deux.

Posons $z - z_0 = re^{i\theta}$, on aura

$$\frac{dz}{z - z_0} = \frac{dr}{r} + id\theta.$$

En égalant, par exemple, les parties réelles des deux membres

$$- 2\pi V(a, b) = \int_C U \frac{dr}{r} - \int_C V d\theta.$$

Pour évaluer les intégrales, prenons par exemple, pour variable indépendante, l'arc décrit par le point, compté à partir d'une certaine origine. L désignant la longueur totale du contour, on aura

$$- 2\pi V(a, b) = \int_0^L U \frac{dr}{ds} \cdot \frac{1}{r} ds - \int_0^L V \frac{d\theta}{ds} ds.$$

En intégrant la première par parties,

$$\int_0^L U \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds} ds = \left(U \log r \right)_0^L - \int_0^L \log r \frac{dU}{ds} ds.$$

Pour un contour fermé, la partie tout intégrée est nulle,

π

U log r reprenant la même valeur aux extrémités du contour.

δ_1

Il reste donc simplement

$$+ 2\pi V(a, b) = \int_0^L \left(V \frac{d\theta}{ds} + \log r \frac{dU}{ds} \right) ds.$$

Éliminons la fonction U et la fonction θ

ρ, σ_1

D'après ce que nous avons vu,

$$D_s U = D_n V.$$

Enfin comme $\log z = \log r + i\theta$ est une fonction analytique,

o

on a aussi

$$D_s \theta = - D_n \log r.$$

δ_1

En substituant, on a donc finalement

$$2\pi V(a, b) = \int_0^L (\log r D_n V - V D_n \log r) ds.$$

Telle est la formule de Green : Elle ne renferme que la fonction V.

$\pi. \rho.$

Elle est remarquable, puisque le second membre ne dépend que des valeurs de V et des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ *le long du contour seulement*. Elle donne la valeur de V en tout point *intérieur* au contour.

ρ, σ_1

Il en était du reste ainsi pour une fonction analytique, par la formule de Cauchy, mais celle-ci introduisait une intégrale de fonction analytique et était compliquée d'imaginaires, tandis que la formule de Green concerne des fonctions réelles et des intégrales ordinaires.

On constate bien que, d'une relation concernant la fonction analytique $f(z)$,

d

nous avons déduit une relation concernant la fonction harmonique $V(x, y)$.

R_1, σ_1

2e Démonstration. — Cette formule pouvait se déduire également de la première formule de Green, que nous avons établie à propos de la transformation d'une intégrale triple en une intégrale de surface.

Nous avons vu que, si U et V désignent deux fonctions harmoniques quelconques, on a

$$\int_C (UD_nV - VD_nU)ds = 0.$$

Prenons comme fonction harmonique

$$U = \log r, \qquad (r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}).$$

A(a, b) étant un point à l'intérieur de C.

On reconnait qu'elle satisfait à l'équation $\Delta U = 0$.

Soit c un petit cercle de centre A de rayon r_0 intérieur à C.

Appliquons la formule de Green à l'ensemble des contours C et c comprenant une aire Ω.

N'oublions pas que les dérivées D_nU, D_nV désignent les dérivées prises suivant la portion de normale intérieure à Ω.

Si au contraire on convient de prendre sur c la dérivée suivant la normale intérieure à c, il faudra écrire

$$\int_C (\log r\, D_nV - VD_n \log r)ds = \int_c (\log r D_nV - VD_n \log r)ds.$$

Mais cette deuxième intégrale se simplifie. D'abord le long de c, r est constant. D'autre part,

$$D_n \log r = \frac{1}{r} D_n r = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dn}$$
$$= -\frac{1}{r} = -\frac{1}{r_0}.$$

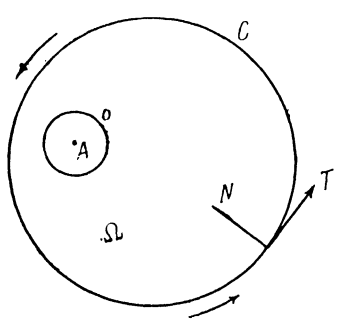


Fig. 5.

La première partie de l'intégrale

$$\int_c \log r D_nV ds = \log r_0 \int_c D_nV ds,$$

est nulle comme on l'a vu en appliquant la formule de Green

à la fonction $U = 1$. Le second membre se réduit donc simplement à $\frac{1}{r_0}\int_c V ds$ donc

$$\int_C (\log r D_n V - V D_n \log r) ds = \frac{1}{r_0}\int_c V ds.$$

Le premier membre est indépendant du rayon r_0 du cercle. Si l'on suppose que ce rayon soit suffisamment petit, le long de c, V est aussi voisin qu'on le veut de $V(a, b)$.

Le second membre est donc aussi voisin qu'on le veut de $\frac{1}{r_0} V(a, b) \times 2\pi r_0$ c'est-à-dire de $2\pi V(a, b)$.

Le premier membre étant constant, on a donc *rigoureusement*

$$2\pi V(a, b) = \int_C (\log r D_n V - V D_n \log r) ds.$$

C'est la formule que nous avons obtenue.

Si, en particulier, C est une circonférence de centre A de rayon R, on a sur cette circonférence

$$r = R, \qquad D_n \log r = \frac{1}{r}\frac{dr}{dn} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{R}.$$

Comme enfin $\int_C D_n V ds = 0$, la formule se réduit à

$$2\pi V(a, b) = \int_c \frac{1}{R} V ds$$

$$V(a, b) = \frac{1}{2\pi R}\int_c V ds.$$

Elle signifie que, pour une fonction harmonique, sa valeur en un point A est la moyenne arithmétique des valeurs qu'elle prend en tous points d'une circonférence de centre A.

Il en résulte que $V(x, y)$ ne peut avoir de maximum ou de minimum dans une aire quelconque. Car si V était minimum en

A_1, α en prenant une circonférence de centre A_1, de rayon suffisamment petit, ω il serait impossible que la valeur de la fonction en A_1, fut la moyenne des valeurs de la fonction le long de la circonférence.

II. — PROBLÈME DE DIRICHLET

Nous avons vu que, si une fonction harmonique est déterminée ainsi que ses dérivées le long d'un contour C, σ_1 sa valeur en un point intérieur quelconque sera aussi déterminée.

ξ, ν *Il est naturel de chercher à déterminer une fonction harmonique à l'intérieur d'un contour, connaissant seulement les valeurs de V en tout point du contour.*

La formule ci-dessus de Green ne résoud pas entièrement la question, π puisqu'elle fait intervenir le dérivée $D_n V$ qui n'est pas donnée.

La recherche de la fonction harmonique à l'intérieur d'un contour, connaissant seulement ses valeurs le long du contour, constitue le problème de Dirichlet.

Cas du cercle. — Nous résoudrons ce problème dans le cas d'un cercle.

Nous avons

$$(1) \qquad 2\pi V(a, b) = \int_C [\log r D_n V - V D_n \log r] ds.$$

ρ La dérivée $D_n V$ n'est pas donnée. Nous allons tâcher de l'éliminer. A cet effet, nous nous baserons sur la formule générale : U et V désignant deux fonctions harmoniques quelconques,

$$\int_C (V D_n U - U D_n V) ds = 0.$$

ξ Supposons que l'on ait déterminé une fonction harmonique U qui, sur le cercle, prenne les valeurs $\log r$. On aura d'après la formule précédente

$$\int_C (\log r D_n V - V D_n U) ds = 0.$$

δ_1 et par suite la formule (1) deviendra

$$2\pi V(a, b) = \int_c V[D_n U - D_n \log r]ds.$$

ρ Sous le signe $\int$, n'intervient plus que la fonction V.

δ_1 Le problème revient donc simplement à déterminer la fonction U. Or cette détermination est facile. Il suffit de remarquer que, si l'on pose

$$r' = \sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2}$$

la fonction $\log r'$ est harmonique quel que soit le point $A'(a', b')$ et aussi la fonction $\log kr'$, quelle que soit la constante k.

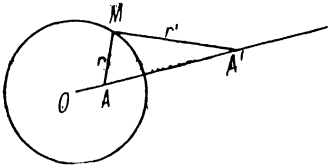


Fig. 6.

α Peut-on déterminer k, de telle manière que, pour tout point de cercle, on ait $kr' = r$?

σ_2, ξ La solution est immédiate. On sait que si l'on considère sur le prolongement de OA (OA = d), un point A′ à une distance OA′ = d', telle que

$$dd' = R^2$$

σ_2 pour tout point M du cercle, le rapport de ses distances aux deux points A, A′ sera constant.

$$\frac{r'}{r} = \frac{R}{d} = \frac{d'}{R}.$$

δ_1 Si donc l'on pose

$$U = \log \frac{d}{R} r',$$

ω on aura bien une fonction harmonique qui, pour tout point du cercle, prendra la valeur $\log r$.

On peut donc bien prendre $U = \log \frac{d}{R} r'$.

δ_1 Par suite

$$2\pi V(a, b) = \int_c V[D_n \log r' - D_n \log r]ds = \int_c V D_n \log \frac{r'}{r} ds$$

Cette formule ne fait bien intervenir *que les valeurs de V sur le cercle.* Nous allons calculer $D_n \log \frac{r'}{r}$.

On a

$$D_n \log r = \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}.$$

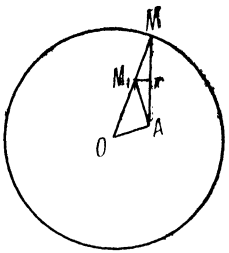


Fig. 7.

Or, si en un point M du cercle, on se déplace sur la normale intérieure d'une quantité positive dn, on a

$$dr = -\cos\theta\, dn$$

θ désignant l'angle $\widehat{OMA}$

δ_1

$$\frac{dr}{dn} = -\cos\theta = \frac{d^2 - R^2 - r^2}{2Rr}.$$

Par suite

$$D_n \log r = \frac{d^2 - R^2 - r^2}{2Rr^2}.$$

δ_1

De même

$$D_n \log r' = -\frac{\cos\theta'}{r'} = \frac{d'^2 - R^2 - r'^2}{2Rr'^2}$$

θ' désignant l'angle $\widehat{OMA'}$.

ω

Finalement,

$$2\pi V(a,b) = \int_C V\left(\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\cos\theta'}{r'}\right)ds$$

$$= \int_C V\left(\frac{R^2 - d^2}{2Rr^2} - \frac{R^2 - d'^2}{2Rr'^2}\right)ds.$$

α, δ_1

Or, en remplaçant r' et d' par leurs valeurs,

$$\frac{R^2 - d'^2}{r'^2} = \frac{R^2 d^2 - R^4}{R^2 r^2} = \frac{d^2 - R^2}{r^2}.$$

Donc

$$2\pi V(a,b) = \int_C V\frac{R^2 - d^2}{Rr^2}\, ds.$$

Telle est la formule qui résoud le problème de Dirichlet dans le cas d'un cercle.

De cette expression on déduit le théorème suivant dû à Liouville :

THÉORÈME DE LIOUVILLE. — *Si une fonction harmonique a un module constamment inférieur à un nombre fixe* M, *pour tout point du plan, elle se réduit nécessairement à une constante.*

ξ

Cette constante doit être la valeur à l'origine.

Remarquons que, si le point a, b se confond avec l'origine, on a $d = 0$ et, pour tout point du cercle,

$$r = R, \qquad \left(\frac{R^2 - d^2}{Rr^2}\right)_0 = \frac{1}{R}.$$

α

Donc

$$2\pi[V(a,b) - V(o,o)] = \int_C V\left(\frac{R^2 - r^2}{Rr^2} - \frac{1}{R}\right)ds.$$

On peut prendre pour C un cercle de rayon aussi grand qu'on le

α_1, γ

veut. Il faut donc montrer, qu'à la condition de prendre R suffisamment grand, le module de l'intégrale peut être rendu aussi

δ_1

petit qu'on le veut. Or, si pour tout point du plan, on a $|V(x, y)| < M$, on aura

$$|I| < 2\pi RMA$$

A désignant, sur le cercle, le maximum de

$$\varphi(r) = \frac{R^2 - d^2}{Rr^2} - \frac{1}{R} = \frac{R^2 - d^2 - r^2}{Rr^2}.$$

ρ

Or pour tout point du cercle, $R - d < r$.

δ_1

Donc

$$\varphi(r) < \frac{R^2 - d^2 - (R - d)^2}{R(R - d)^2} = \frac{2d}{R(R - d)}.$$

Donc enfin

$$I < 4\pi \frac{dM}{R - d}$$

Le second membre peut être rendu aussi petit qu'on le veut.

ω

La différence entre les deux quantités *fixes* $V(a, b) - V(o,o)$ pouvant être rendue aussi petite qu'on le veut, est rigoureusement nulle et l'on a bien

$$V(a,b) = V(o,o) = \text{const.}$$

Cas général. Propriétés. — Dans le cas où le contour donné est quelconque, on peut établir d'abord quelques propriétés générales de la fonction harmonique.

THÉORÈME. — *Si une fonction harmonique s'annule en tout point d'un contour, elle est identiquement nulle.*

Appliquons en effet la formule de Green

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_c P\,dx + Q\,dy$$

aux fonctions

$$Q = U\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad P = -U\frac{\partial U}{\partial y}$$

On obtiendra

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial U}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{dy}\right)^2\right] dx\,dy + \iint_\Omega U\Delta U\,dx\,dy = \int_c U\left(\frac{\partial U}{dx}\,dy - \frac{\partial U}{dy}\,dx\right).$$

Nous désignerons par $\Omega(U)$, la première intégrale essentiellement positive.

$$\Omega(U) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Si la fonction U est harmonique, $\Delta U \equiv 0$.

Si elle s'annule tout le long de C, $U = 0$, et l'intégrale du second membre disparaît aussi.

Il reste donc simplement

$$\Omega(U) = 0.$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

La fonction U est donc constante et comme elle est continue et s'annule sur C, elle est bien identiquement nulle.

THÉORÈME. — *Si le problème de Dirichlet admet une solution pour un contour donné, il n'en admet qu'une.*

En effet, si U et $U + \Theta$ sont deux solutions, la différence serait une solution qui s'annulerait tout le long du contour.

Elle est donc identiquement nulle à l'intérieur.

THÉORÈME. — *Si* U *est une solution, elle est, parmi toutes les fonctions uniformes et continues, celle qui rend minimum l'intégrale* $\Omega(U)$.

Soit en effet $U + \Theta$ une autre fonction quelconque, Θ s'annulant tout le long de C. On a

$$\Omega(U + \theta) = \Omega(U) + \Omega(\theta) + 2\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)dxdy.$$

Nous allons montrer que la dernière intégrale est nulle.

Nous pourrons la transformer en appliquant la formule de Green aux fonctions

$$P = -\theta\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Q = \theta\frac{\partial U}{\partial x}.$$

On aura

$$\int_C \theta\left(\frac{\partial U}{\partial x}dy - \frac{\partial U}{\partial y}dx\right) = \iint_{\Omega}\left[\theta\Delta U + \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]dxdy.$$

Or, U étant harmonique, $\Delta U = 0$ et d'autre part Θ s'annulant tout le long de C, l'intégrale curviligne est nulle. Il reste bien simplement

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

Par suite

$$\Omega(U + \theta) = \Omega(U) + \Omega(\theta).$$

Or l'intégrale $\Omega(\Theta)$ étant essentiellement positive, on a bien

$$\Omega(U + \theta) > \Omega(U).$$

Postulatum de Dirichlet. — Dirichlet admettait comme certain que, parmi toutes les fonctions uniformes et continues prenant sur le contour d'une aire une suite de valeurs données, il y en avait nécessairement une qui rendait minimum l'intégrale $\Omega(U)$.

Existence de la solution. — Si l'on admet ce postulatum, il est aisé de démontrer que cette fonction H doit nécessairement satisfaire à l'équation $\Delta H = 0$ et que par conséquent, le problème de Dirichlet admet toujours une solution et une seule.

En effet considérons une aire quelconque ω intérieure à Ω. La fonction H prend sur le contour de ω une certaine suite de valeurs. Parmi toutes les fonctions qui prennent sur ce contour cette *même* suite de valeurs, il est évident que la fonction H rendra minimum dans ω l'intégrale $\Omega(U)$. Car si dans ω une fonction K, autre que H rendait minimum cette intégrale, la fonction continue W qui serait égale à K dans ω, et égale à H sur le contour de ω et dans la portion restante de Ω, donnerait, dans l'aire totale, à $\Omega(U)$ une valeur moindre que H.

En particulier, prenons pour ω un cercle intérieur quelconque.

Il existe une fonction harmonique U, qui prend, sur le contour de ω, la même suite de valeurs que la fonction H. Cette fonction U rend minimum dans ω l'intégrale $\Omega(U)$. Donc H se confond nécessairement avec U dans le cercle ω et comme ce cercle a été pris quelconque dans l'aire Ω, on voit bien que la fonction H est harmonique dans toute l'aire.

Nous ne démontrerons pas le postulatum de Dirichlet. L'existence d'une fonction harmonique dans une aire, prenant sur un contour une suite continue de valeurs donnée, a été établie en toute rigueur.

III. — FONCTIONS HARMONIQUES : CAS DE TROIS VARIABLES

Fonction régulière. — Les résultats que nous avons obtenus pour les fonctions de deux variables s'étendent aux fonctions de trois variables.

Nous dirons qu'une fonction $U(x, y, z)$ est « *régulière* » dans un volume V lorsqu'elle est uniforme et qu'elle admet des dérivées partielles du second ordre continues dans V, et restant finies sur la surface Σ limitant V ; elles pourraient être *discontinues sur* Σ. La fonction elle même et ses dérivées premières seront donc également continues dans V et sur Σ.

Considérons maintenant la région extérieure à V et s'étendant jusqu'à l'infini. Soit R la distance d'un point à l'origine (ou à tout

point fixe à distance finie). Nous dirons que la fonction U est *régulière* dans cette région, si aux conditions précédentes, nous ajoutons les suivantes : Les quantités

$$RU,\ R^2\frac{\partial U}{\partial \cdot},\qquad R^2\frac{\partial U}{\partial y},\qquad R^2\frac{\partial U}{\partial z},\qquad R^3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdots R^3\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}$$

restent finies quand R augmente indéfiniment. Nous disons alors que $U(x, y, z)$ est « *régulière à l'infini* ».

Dans le cas où les fonctions U et V sont continues dans un volume V limité par une surface Σ et sur cette surface, admettant des dérivées du *second ordre continues*, nous avons établi la formule de Green

$$\iint_{\Sigma}(UD_nV - VD_nU)d\sigma = \iiint_{V}(U\Delta V - V\Delta U)dxdydz$$

l'intégrale de surface étant prise sur la face *extérieure* au volume V.

ψ

Généralisation de la formule de Green. — Nous allons d'abord montrer que *cette formule subsiste si les fonctions* U *et* V *sont « régulières » dans* V.

ρ

Il ne peut y avoir de difficulté que si les dérivées secondes sont discontinues (tout en restant finies) sur Σ.

α

Considérons en effet un volume V — ρ limité par une surface Σ′ parallèle à Σ et aussi voisine qu'on le veut de Σ.

δ_1

En appliquant la formule à ce volume, on a constamment

$$\iint_{\Sigma'} = \iiint_{V-\rho}.$$

α o

Si Σ′ se rapproche indéfiniment de Σ, la deuxième intégrale tend vers l'intégrale

$$\iiint_{V}(U\Delta V - V\Delta U)dxdydz$$

bien que la parenthèse puisse être discontinue (mais finie) sur Σ.

Pour la première, les dérivées premières étant continues dans V et sur Σ, l'expression $UD_nV - VD_nU$ prise en tout point de Σ′, est aussi voisine qu'on le veut de cette même expression pour le

point infiniment voisin de Σ. D'autre part, l'élément $d\sigma'$ tend vers l'élément correspondant $d\sigma$.

La première intégrale tend donc vers

$$\iint_{\Sigma}(UD_nV - VD_nU)d\sigma$$

et la formule est encore applicable.

Nous allons montrer que *la formule est encore applicable à la région extérieure à* V, *région limitée par* Σ, *si* U *et* V *sont régulières à l'infini.*

Limitons en effet cette région par une sphère de rayon aussi grand que nous le voulons. Soit Ω la surface de cette sphère (Ω).

Nous aurons

$$\iint_{\Omega+\Sigma} = \iiint_{(\Omega)} - V.$$

Dans le premier membre, nous devons prendre les intégrales de surface sur les surfaces Ω et V, sur les faces *extérieures* au volume (Ω) — V. Cette première intégrale se décompose en

$$\iint_{\Omega} + \iint_{\Sigma}.$$

Pour les intégrales de surface, je dis que l'intégrale de surface $\iint_{\Omega}$ tend vers zéro quand R augmente indéfiniment.

En effet, d'après les hypothèses, $R^3(UD_nV - VD_nU)$ reste finie quand R augmente indéfiniment. On peut donc écrire, pour R suffisamment grand,

$$|UD_nV - VD_nU| < \frac{M}{R^3}.$$

L'intégrale de surface est donc moindre en valeur absolue que

$$\frac{M}{R^3} \times 4\pi R^2 = \frac{4\pi M}{R}$$

et peut donc bien être rendue aussi petite qu'on le veut.

Dans l'intégrale de volume, α, ρ la fonction à intégrer $U\Delta V - V\Delta U$ est infiniment petite du quatrième ordre avec $\frac{1}{R}$, en vertu des hypothèses faites. ω L'intégrale de volume tend donc vers une limite finie quand R augmente indéfiniment. Elle sera étendue à l'espace extérieur à V. Nous désignerons cette limite par $\iiint_{-V}$.

ω La différence entre les deux intégrales *fixes* $\iint_{\Sigma}$ et $\iiint_{-V}$, pouvant être rendue aussi petite qu'on le veut, est rigoureusement nulle, et on a bien

$$\iint_{\Sigma}(UD_nV - VD_nU)d\sigma = \iiint_{-V}(U\Delta V - V\Delta U)dxdydz$$

l'intégrale de surface étant prise sur la face *extérieure* au volume comme cela doit être, c'est-à-dire sur la face intérieure à V.

ν La formule de Green étant ainsi généralisée, on voit qu'elle se simplifie si les fonctions U et V satisfont aux équations

$$\Delta U = 0, \qquad \Delta V = 0.$$

ψ, τ_2 Nous dirons qu'une fonction est « harmonique » dans un volume si elle est uniforme et continue et si en tout point de V, elle vérifie *l'équation de Laplace*

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Si U et V sont harmoniques dans V, la formule de Green se réduit a

$$\iint_{\Sigma}(UD_nV - VD_nU)d\sigma = 0.$$

ρ Pour une fonction harmonique U donnée, on obtiendra autant de relations particulières que l'on pourra particulariser la fonction harmonique V. ν Si en particulier $V \equiv 1$, on a

$$\iint_{\Sigma} D_nU\, d\sigma = 0.$$

Cas où $V = \frac{1}{r}$. — Il est aisé de voir que la fonction

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{1}{r}$$

est harmonique. En effet on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)}{r^4} \cdot \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}.$$

Par suite, on a bien

$$\Delta V = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} \Sigma(x-a)^2 = 0.$$

La fonction sera continue dans V, si le point a, b, c est extérieur à V.

α

On aura donc

$$\iint_\Sigma (U D_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} D_n U)\, d\sigma = 0.$$

Si la fonction U (régulière dans V) est quelconque, la formule de Green donnera

$$\iint_\Sigma (-U D_n \frac{1}{r} + \frac{1}{R} D_n U) d\sigma = \iiint_V \frac{1}{r} \Delta U\, dx dy dz.$$

Formule de Poisson. Le point de trouve à l'intérieur. — Cherchons comment il faut modifier cette formule ψ si le point A(a, b, c) se trouve à l'intérieur de V ou sur Σ.

α

Si A est dans V, isolons ce point par une petite sphère σ de centre A, de rayon ρ. Nous aurons dans l'espace restant

$$\iiint_{V-\sigma} \frac{1}{r} \Delta U\, dx\, dy\, dz = \iint_{\Sigma+\sigma} \left(\frac{1}{r} D_n U - U D_n \frac{1}{r}\right) d\sigma$$

Comme $\frac{1}{r}\Delta U$ devient infiniment grand du premier ordre seulement, l'intégrale de volume a une limite

$$\iiint_V \frac{1}{r} \Delta U\, dx dy dz.$$

δ_1 L'intégrale de surface se décompose en $\iint_\Omega + \iint_\sigma$.

Etant donné un point fixe A(a, b, c), un point variable M(x, y, z), nous aurons besoin de connaître la dérivée de la fonction $\frac{1}{r}$ (AM $= r$) par rapport à une direction MN issue de N. δ_1 On a

$$D_l \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dl}.$$

Or

$$\frac{dr}{dl} = \cos(AM, MN).$$

Donc

$$D_l \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cos(AM, MN).$$

δ_1 Or, sur la sphère σ, on a $r = \rho$. En prenant la dérivée suivant la normale o .

$$D_n \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cos(AM, MN).$$

L'intégrale de surface doit être prise χ sur la face extérieure au volume V $- \sigma$. La direction de la normale est donc celle de MA.

On a donc

$$\cos(AM, MA) = -1, \qquad D_n \frac{1}{r} = +\frac{1}{r^2} = +\frac{1}{\rho^2}.$$

ω L'intégrale $\iint_\sigma$ se réduit donc à

$$\frac{1}{\rho} \iint_\sigma D_n U d\sigma - \frac{1}{\rho^2} \iint_\sigma U d\sigma.$$

La première intégrale tend vers zéro avec ρ.

π En effet, en désignant par M le maximum de (D_nU), cette intégrale est moindre que

$$\frac{1}{\rho} M \times 4\pi\rho^2 = 4\pi\rho M$$

et tend bien vers zéro avec ρ.

Pour la seconde, la sphère σ étant très petite, en appliquant le théorème de la moyenne, elle est égale à

$$-\frac{1}{\rho^2}\,U(\alpha,\beta,\gamma)\times 4\pi\rho^2 = -4\pi U(\alpha,\beta,\gamma),$$

α,β,γ étant un point intérieur à σ. Lorsque ρ tend vers zéro, cette intégrale tend vers $-4\pi U(a,b,c)$. Par suite, à la limite, on a

$$\iiint_V \frac{1}{r}\,\Delta U\,dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma \left(\frac{1}{R}\,D_n U - U D_n \frac{1}{r}\right)d\sigma - 4\pi U(a,b,c).$$

Point sur la surface. — Enfin, voyons ce qui se passe si le point a, b, c, se trouve sur Σ.

Nous considérerons la portion de sphère (σ) de centre A intérieure à V. Elle a une surface σ et isole une portion $\Delta\Sigma$ de la surface Σ. En appliquant la formule de Green à la région extérieure, on a

$$\iiint_{V-(\sigma)} \frac{1}{r}\,\Delta U\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma-\Delta\Sigma}\left(\frac{1}{r}\,D_n U - U D_n\frac{1}{r}\right)d\sigma + \iint_\sigma \left(\frac{1}{r}\,D_n U - U D_n\frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

L'intégrale de volume a pour limite $\iiint_V$.

La surface σ est sensiblement égale à celle détachée par le plan tangent en A c'est-à-dire $2\pi\rho^2$. De même que ci-dessus, en appliquant le théorème de la moyenne à la deuxième intégrale de surface, on voit qu'elle est égale à $-2\pi U(a,b,c)$ à la limite.

Pour la première intégrale de surface, nous allons montrer qu'elle a pour limite $\iint_\Sigma$. En effet, considérons pour un point de Σ, la fonction à intégrer. La première partie $\frac{1}{r}\,D_n U$ étant un infiniment grand $\left(\text{avec } \frac{1}{r}\right)$ du premier ordre seulement, et $\Delta\sigma$ un

infiniment petit du second ordre ; son intégrale tend vers $\iint_\Sigma \frac{1}{r} D_n U d\sigma$. Pour la deuxième partie, il est facile de voir que $\iint_{\Delta\sigma}$ tend vers zéro. Il suffit encore de montrer que la fonction à intégrer est un infiniment grand du *premier ordre* au plus par rapport à $\frac{1}{r}$.

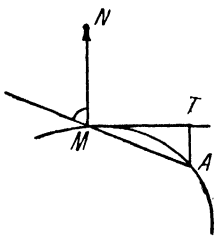


Fig. 8.

Nous avons

$$D_n \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cos (AM, MN).$$

Remarquons que, dans ce cas, cos (AM, MN) est aussi infiniment petit avec r. Si nous menons la tangente MT,

$$D_n \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \sin (AM, MT).$$

En désignant par δ la distance du point A à la tangente

$$D_n \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\delta}{r}.$$

Or, on sait que δ est infiniment petit du second ordre par rapport à r. La fonction $UD_n \frac{1}{r}$ est donc infiniment grande du premier ordre seulement par rapport à $\frac{1}{r}$.

L'intégrale $\iint_{\Delta\Sigma}$ tend bien vers zéro avec r.

On a donc à la limite

$$\iiint_V \frac{1}{r} \Delta U dx\, dy\, dz = \iint_\Sigma \left(\frac{1}{r} D_n U - U D_n \frac{1}{r}\right) d\sigma - 2\pi U(a, b, c).$$

Comme cas particulier, si la fonction U est harmonique, le premier membre est nul.

Conclusion. — On voit que l'intégrale

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\,D_n U - U D_n \frac{1}{r}\right)d\sigma$$

est nulle si le point A(a, b, c) est extérieur au volume que limite Σ. Elle est égale à $2\pi U(a, b, c)$ si le point A est sur Σ. Elle est égale à $4\pi U(a, b, c)$ si A est à l'intérieur de V.

Formule de Gauss. — En particulier, prenons pour Σ une sphère de rayon R de centre A(a, b, c) contenue dans V. On aura pour tous les points de Σ

$$r = R, \qquad D_n \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} D_n r = -\frac{1}{R^2}.$$

On a donc

$$4\pi U(a, b, c) = \frac{1}{R}\iint_{\Sigma} D_n U d\sigma + \frac{1}{R^2}\iint_{\Sigma} U d\sigma.$$

Or U étant harmonique, la première intégrale est nulle.

Il reste donc simplement

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} U d\sigma.$$

Cette formule a été établie par Gauss. On voit qu'elle exprime que la valeur d'une fonction harmonique en un point quelconque A est la moyenne des valeurs qu'elle prend sur une sphère quelconque de centre A. On en déduit, comme pour le cas de deux variables, que U ne peut admettre ni maximum, ni minimum dans un volume donné.

Problème de Dirichlet. — Il consiste à déterminer une fonction harmonique à l'intérieur d'un volume V qui prenne en tout point de la surface Σ qui le limite, une valeur donnée.

Cas de la sphère. — Supposons d'abord que la surface Σ soit une sphère. La formule ci-dessus donne pour tout point intérieur

$$4\pi U(a, b, c) = \iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\,D_n U - U D_n \frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

ψ, ρ, σ1

Mais cette formule ne résoud pas la question, car on ne connaît pas la valeur de D_nU sur la surface Σ. Nous allons l'éliminer.

α, δ1

Par analogie avec le cas de deux variables, supposons que l'on ait déterminé une fonction harmonique V qui, pour tout point de Σ, prenne la valeur $\frac{1}{r}$.

δ1

V et U étant harmoniques, la formule de Green donne

$$\iint_{\Sigma}(UD_nV - VD_nU)d\sigma = 0.$$

Comme sur Σ, $V = \frac{1}{r}$

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}D_nUd\sigma = \iint_{\Sigma}UD_nVd\sigma.$$

o

On obtient donc

$$4\pi U(a, b, c) = \iint_{\Sigma}\left(UD_nV - UD_n\frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

p

La fonction D_nU ou plutôt l'intégrale $\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}D_nUd\sigma$ a donc disparu.

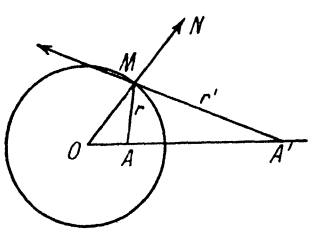


Fig. 9.

α1, ξ

Il ne reste donc plus qu'à déterminer la fonction auxiliaire V. A cet effet, σ2 nous considérerons sur le rayon OA un point A' tel que $OA.OA' = R^2$. Posons $OA = d$, $OA' = d'$; σ1 on sait que, pour tout point de la sphère, le rapport de ses distances aux deux points A, A' est constant.

$$\frac{r'}{r} = \frac{R}{d} = \frac{d'}{R}.$$

Si nous prenons $V = \frac{R}{d}\cdot\frac{1}{r'}$, pour tout point de la sphère, on aura bien $V = \frac{1}{r}$. On aura donc en substituant,

$$4\pi U(a, b, c) = \iint_{\Sigma} U\left(\frac{R}{d} D_n \frac{1}{r'} - D_n \frac{1}{r}\right) d\sigma.$$

Or

$$D_n \frac{1}{r'} = -\frac{1}{r'^2} D_n r' = -\frac{1}{r'^2}\cos(A'M\cdot MN) = \frac{1}{r'^2}\cos(A'MN)$$

Comme

$$d'^2 = r'^2 + R^2 + 2Rr'\cos(A'MN),$$

il vient

$$D_n \frac{1}{r'} = \frac{d'^2 - R^2 - r'^2}{2Rr'^3}.$$

De même

$$D_n \frac{1}{r} = \frac{d^2 - R^2 - r^2}{2Rr^3}.$$

La parenthèse dans l'intégrale devient

$$P = \frac{d'^2 - R^2 - r'^2}{2dr'^3} - \frac{d^2 - R^2 - r^2}{2Rr^3}.$$

Remplaçons d' et r' par leurs valeurs

$$P = \frac{R^4 - R^2d^2 - R^2r^2}{2R^3r^3} + \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr^3} = \frac{R^2 - d^2}{Rr^3}.$$

On a donc enfin, si la fonction harmonique U existe,

$$4\pi U(a, b, c) = \iint_{\Sigma} U\frac{R^2 - d^2}{Rr^3} d\sigma.$$

Reste à démontrer que cette fonction $U(a, b, c)$ définie par l'intégrale de surface, $(a, b, c$ entrant comme paramètres dans la fonction à intégrer et U étant connue en tout point de Σ) satisfait bien à l'équation de Laplace et qu'elle prend sur Σ les valeurs données de U.

Désignons par $\frac{U}{R}\varphi(a, b, c)$ la fonction sous le signe $\iint$

$$\varphi(a, b, c) = \frac{R^2 - d^2}{r^3}.$$

Nous voulons démontrer que $\Delta U(a, b, c) = 0$.

En faisant une combinaison de dérivations sous le signe $\iint$ par rapport aux paramètres a, b, c, on aura

$$\Delta U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{U}{r} \Delta\varphi d\sigma.$$

Il suffit donc de démontrer que $\Delta\varphi = 0$.

On peut écrire

$$\varphi = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{r^3} - \frac{1}{r}.$$

Or

$$R^2 + r^2 - d^2 = 2Rr \cos(OMA) = 2[x(x - a) + y(y - b) + z(z - c)].$$

Comme d'autre part, $\Delta \frac{1}{r} = 0$ Il reste à démontrer que

$$\Delta \frac{x(x - a) + y(y - b) + z(z - c)}{r^3} = 0.$$

La vérification directe serait facile. Mais on peut remarquer que, si ψ est une solution quelconque de $\Delta U = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial a}$, $\frac{\partial\psi}{\partial b}$, $\frac{\partial\psi}{\partial c}$ sont aussi des solutions, car

$$\Delta \frac{\partial\psi}{\partial a} = \frac{D}{Da} \Delta\psi = 0.$$

Or $\frac{1}{r}$ étant solution, $\frac{D}{Da}\frac{1}{r} = \frac{x - a}{r^3}$ et, aussi $\frac{x(x - a)}{r^3}$ sera solution, x étant un facteur constant dans les dérivations de Δ. Donc

$$\Delta \frac{x(x - a)}{r^3} = 0.$$

De même

$$\Delta \frac{y(y - b)}{r^3} = 0, \qquad \Delta \frac{z(z - c)}{r^3} = 0.$$

On a donc bien $\Delta\varphi = 0$.

Il resterait enfin à démontrer que cette fonction, représentée par l'intégrale, prend bien pour tout point de la sphère, la même valeur que $U(x, y, z)$.

C'est là un point que nous ne démontrerons pas. (Voir, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. Picard).

THÉORÈME. — *Une fonction harmonique et régulière pour tout point x, y, z de l'espace qui reste, en valeur absolue, moindre que toute quantité fixe* M, *se réduit à une constante.*

Prenons en effet pour Σ une sphère de centre origine de rayon suffisamment grand et soit a, b, c, un point intérieur quelconque. On aura pour l'origine

$$4\pi U(0, 0, 0) = \iint_{\Sigma} U \frac{1}{R^2}\, d\sigma.$$

Par suite

$$(1) \qquad 4\pi[U(a, b, c) - U(0, 0, 0)] = \iint_{\Sigma} U\left(\frac{R^2 - d^2}{Rr^3} - \frac{1}{R^2}\right) d\sigma.$$

Nous allons montrer que, si R est suffisamment grand, l'intégrale du second membre peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

Cherchons, en effet, une limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale. Si M est une limite supérieure de $|U|$ on aura

$$\left|\iint_{\Sigma}\right| < M \times 4\pi R^2 \times \max.\left(\frac{R^2 - d^2}{Rr^3} - \frac{1}{R^2}\right).$$

Désignons par P cette dernière parenthèse et remarquons que pour tout point de la sphère

$$R - d < r < R + d.$$

En remplaçant r par $(R - d)$,

$$P < \frac{R(R^2 - d^2) - (R - d)^3}{R^2(R - d)^3} < \frac{3d}{R(R - d)^2}.$$

Or si R augmentait indéfiniment, d restant fini, cette parenthèse serait un infiniment petit du troisième ordre par rapport à $\frac{1}{R}$ et par suite $\iint_{\Sigma}$ tendrait bien vers zéro.

Le second membre de l'égalité (1) peut bien être rendu aussi petit qu'on le veut pour R suffisamment grand.

Or le premier membre étant fixe, on a donc rigoureusement

$$U(a, b, c) = U(0, 0, 0) = \text{const.}$$

CHAPITRE IV

THÉORÈME DES RÉSIDUS CONSTRUCTION DE FONCTIONS FONCTIONS IMPLICITES — PÉRIODES POLAIRES

Sommaire.

Théorème des résidus : Applications.
Intégrale de Cauchy : Applications. — Conséquences.
Construction de fonctions : Théorème de Riemann. — de Mittäg-Löffler. — Fonctions à pôles donnés : Application.
Facteurs primaires de Weierstrass : Zéros donnés.
Fonctions implicites : Continuité des racines. — Fonctions algébriques. — Fonctions multiformes.
Lacets. — Cas où $f(z, u)$ est une fonction holomorphe.
Systèmes d'équations implicites. — Fonction inverse.
Périodes polaires. — Diverses valeurs de l'intégrale $u - u_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}\, dz$. — Points critiques de la fonction inverse.

I. — THÉORÈME DES RÉSIDUS : APPLICATIONS

Nous allons reprendre l'étude des propriétés des fonctions analytiques.

Donnons-nous un contour C à l'intérieur duquel une fonction analytique $f(z)$ n'admet comme points critiques que des pôles ou des points singuliers isolés a, b, c...

Ces points sont donc en nombre fini. Entourons chacun d'eux d'un petit cercle c. Dans l'aire comprise entre C et les divers cercles c, la fonction $f(z)$ est holomorphe. En appliquant le théorème de Cauchy, on a donc

$$\int_C f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz + \cdots$$

tous ces contours étant parcourus dans le même sens.

ξ

Considérons l'une des intégrales du second membre par exemple $\int_{c_1} f(z)dz$.

σ_2

Aux environs du point a, la fonction peut être développée sous la forme

$$f(z) = \varphi(z - a) + \psi\left(\frac{1}{z - a}\right).$$

La première partie $\varphi(z - a)$ est de la forme

$$\varphi(z - a) = \Sigma a_m (z - a)^m.$$

Elle est absolument et uniformément convergente à l'intérieur

ω

d'un champ comprenant c_1. La série des intégrales prises le long de c représente donc l'intégrale de la fonction φ. Mais chacune

ρ

des intégrales $\int_{c_1} (z - a)^m dz$ est nulle.

ω

Donc

$$\int_{c_1} \varphi(z - a)dz = 0.$$

ξ

Prenons maintenant $\int_{c_1} \psi\left(\frac{1}{z - a}\right)dz$.

On a

$$\psi\left(\frac{1}{z - a}\right) = \frac{A_1}{z - a} + \frac{A_2}{(z - a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(z - a)^m} + \cdots$$

α, σ_1

Nous savons que le second membre est absolument et uniformément convergent dans une couronne comprenant le cercle c_1. L'intégrale de la fonction $\psi\left(\frac{1}{z - a}\right)$ le long de c_1 est donc égale à la somme des intégrales. Or

ρ

chacune des intégrales $\int_{c_1} \frac{1}{(z - a)^m} dz$ est nulle, si $m \neq 1$,

π

la fonction primitive $-\frac{1}{m - 1} \times \frac{1}{(z - a)^{m-1}}$ reprenant la même valeur lorsqu'on revient au point de départ sur c_1.

ξ

Le premier terme seul donne une intégrale

$$A_1 \int_{c_1} \frac{dz}{z - a}$$

qui, comme nous le savons, est égale à $2\pi i A_1$

On a donc

$$\int_{c_1} f(z)dz = 2\pi i A_1.$$

Cauchy appelle « résidu » le coefficient A_1, du terme en $\frac{1}{z-a}$.

De même les intégrales suivantes ont pour valeur

$$2\pi i B_1, \qquad 2\pi i C_1 \cdots 2\pi i L_1$$

B_1, C_1, représentant les résidus relatifs aux pôles ou points singuliers $b_1, c_1, \ldots l_1$.

On a donc au total

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(A_1 + B_1 \cdots + L_1) = 2\pi i \Sigma R.$$

D'où le théorème suivant dû à Cauchy :

Théorème des Résidus. — *L'intégrale d'une fonction analytique uniforme prise le long d'un contour, à l'intérieur duquel la fonction n'admet que des pôles ou des points singuliers isolés, est égale au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus relatifs à tous les points critiques.*

On peut prévoir la très grande importance de ce théorème, le calcul de l'intégrale d'une fonction le long d'un contour fermé étant ramené à une simple opération algébrique : le calcul des résidus relatifs à tous les points critiques situés à l'intérieur du contour.

Cauchy a donné un grand nombre d'applications de ce théorème.

Si, en particulier, le point a est un pôle simple de la fonction, le résidu est la limite du produit $(z-a)f(z)$ lorsque z tend vers a.

Si a est un pôle d'ordre m, le produit $(z-a)^m f(z)$ est une fonction entière de $(z-a)$ et le résidu est égal au coefficient de $(z-a)^{m-1}$ dans le développement. Il sera utile pour l'obtenir, de poser $z - a = h$, et de chercher le développement de $f(z) = f(a+h)$ suivant les puissances croissantes de h. Le résidu sera le coefficient de h^{m-1}.

Conséquences. Calcul d'intégrales. — Soit une fonction $f(z)$ qui jouisse des propriétés suivantes : 1° elle est monodrome dans toute la portion du plan située d'un côté de ox ; 2° Elle n'a pas de point critique sur ox et n'a dans la région que des points critiques isolés (en nombre fini ou infini) ; 3° $z\,f(z)$ tend vers zéro lorsque le point z s'éloigne à l'infini dans la région (ox compris).

Nous allons montrer que, dans ces conditions, *on pourra calculer l'intégrale de variable réelle*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Supposons, par exemple, les conditions remplies pour la portion du plan au-dessus de ox. Appliquons le théorème des résidus à l'aire limitée par ox, un demi cercle ABC, de centre O et de diamètre CA sur ox.

En désignant par ΣR la somme des résidus relatifs aux pôles compris à l'intérieur du demi cercle, on aura

$$\int_{CA} + \int_{ABC} = 2\pi i \Sigma R \qquad \int_{CA} = 2\pi i \Sigma R - \int_{ABC}.$$

Le long de ox, la fonction $f(z)$ se réduit à la fonction de variable réelle $f(x)$ et la première intégrale est

$$\int_{-R}^{+R} f(x)dx.$$

Faisons croître indéfiniment le rayon du cercle.

La deuxième intégrale a pour limite zéro puisque $zf(z)$ a pour limite zéro quand z augmente indéfiniment.

La somme Σ R s'étendra à tous les pôles au-dessus de ox, c'est-à-dire à tous ceux pour lesquels le coefficient de i est positif.

Donc, si ΣR a une limite, (ce qui aura lieu nécessairement si les points critiques sont en nombre fini) le premier membre

$$\int_{-R}^{+R} f(x)dx$$

a certainement une limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \Sigma R.$$

Applications : 1° Fraction rationnelle. — Nous allons donner de nombreuses applications de ce résultat.

Soit, par exemple, la fraction rationnelle $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Les points critiques sont tous des pôles, racines de $Q(z) = 0$.

β

Il est nécessaire qu'aucun de ces pôles ne soit situé sur ox. c'est-à-dire que $Q(z)$ n'ait aucune racine réelle.

β

Enfin, pour que

$$\left| zf(z) \right| = \left| z \frac{P(z)}{Q(z)} \right|.$$

tende vers zéro quand $|z|$ augmente indéfiniment, il faut que le degré de $P(z)$ soit inférieur d'au moins deux unités à celui de $Q(z)$. Cette condition est d'ailleurs nécessaire pour que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

existe.

δ_1

En appliquant le théorème, on aura alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \Sigma R$$

les résidus étant pris pour toutes les racines de $Q(z)$ au dessus de ox.

1° Soit par exemple l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}.$$

δ_1

Les racines de

$$Q(z) = 1 + z^4 = 0$$

sont

$$z = \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{4}.$$

Celles dont les affixes sont au-dessus de ox correspondent à $k = 0, k = 1$.

Ces racines étant simples, le résidu relatif à la racine z_k est, comme on l'a vu, la limite du rapport

$$(z - z_k)f(z_k) = \lim \left(\frac{z - z_k}{1 + z^4}\right)_{z = z_k}.$$

Cette limite est égale au rapport des dérivées pour $z = z_k$,

$$\frac{1}{4z_k^3} = -\frac{z_k}{4}.$$

Ainsi

$$R_0 = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{8}\sqrt{2}\,(1 + i)$$

$$R_1 = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}\sqrt{2}\,(1 - i)$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = 2\pi i(R_0 + R_1) = -\frac{2\pi i}{8}\sqrt{2} \times 2i = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

2° *Calculer* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\,dx$.

Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1 + z^2}.$$

Elle n'admet comme points critiques que les points $z = \pm i$.

Le seul point $z = +i$ est au-dessus de ox. Ce point est un pôle. Posons en effet $z = i + h$, on aura

$$\frac{e^{iz}}{1 + z^2} = \frac{e^{-1+ih}}{2ih + h^2} = \frac{e^{-1}}{2ih} \times \frac{e^{ih}}{1 + \frac{h}{2i}}.$$

Or le facteur $e^{ih} \times \frac{1}{1 + \frac{h}{2i}}$ se développe sous la forme

$$(1 + ih - \frac{h^2}{2} + \cdots)\left(1 + \frac{h}{2i}\right)^{-1} = (1 + ih - \frac{h^2}{2} \cdots)(1 - \frac{h}{2i} \cdots) = 1 + \frac{3}{2}ih + \cdots$$

Le développement de $f(z)$ s'effectue bien suivant les puissances croissantes de $h = z - i$ commençant à un terme $\frac{a_1}{h}$.

Le résidu, coefficient de $\frac{1}{h}$, est

$$R = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Enfin $z f(z)$ tend vers zéro lorsque le point s'éloigne indéfiniment en *restant au-dessus de ox*. En effet, posons

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

On aura

$$\frac{ze^{iz}}{1+z^2} = \frac{z}{1+z^2} e^{-r\sin\varphi} e^{ir\cos\varphi}$$

$$\left|\frac{ze^{iz}}{1+z^2}\right| = \left|\frac{z}{1+z^2}\right| \times e^{-r\sin\varphi}$$

Lorsque r augmente indéfiniment, $e^{-r\sin\varphi}$ tend vers zéro si $\varphi \not\equiv 0$, *et seulement si* $0 < \varphi < \pi$.

D'autre part, le facteur $\left|\frac{z}{1+z^2}\right|$ tend vers zéro.

Le théorème des résidus est donc applicable et donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i R = \frac{\pi}{e}.$$

Or l'intégrale s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{1+x^2}\, dx.$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = 0.$$

Ce deuxième résultat était d'ailleurs évident.

3° $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$. — Considérons la fonction $f(z) = e^{-z^2}$. Intégrons-la le long d'un rectangle ABCD dont un côté AB coïn-

cide avec ox (abscisses $-p$ et $+q$ que nous ferons croître indéfiniment) la hauteur b du rectangle restant finie.

β, ξ, ρ

La fonction $f(z)$ n'a aucun point critique. On a donc

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0.$$

δ1

Si nous faisons croître p et q indéfiniment, la première intégrale aura pour limite, comme nous le savons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

α

Pour calculer l'intégrale le long de BC, il faut poser

$$z = q + it$$

δ1

t variant de 0 à b. Cette deuxième intégrale est donc

$$\int_0^b e^{-(q+it)^2} i dt = ie^{-q^2} \int_0^b e^{t^2} e^{-2qit} dt.$$

Or, cette intégrale tend vers zéro quand q augmente indéfiniment.

π

On a en effet $| e^{-2qit} | = 1$.

Le module de la fonction à intégrer est donc moindre que e^{b^2} et l'intégrale moindre que $be^{-q^2}e^{b^2}$. Cette intégrale tend donc bien vers zéro quand q augmente indéfiniment.

δ1, ψ

Il en est de même de l'intégrale $\int_{DA}$.

δ1

Il reste donc simplement l'intégrale suivant CD. Le long de CD, il faut poser

$$z = t + bi$$

t variant de q à $-p$.

$$e^{-z^2} = e^{b^2} e^{-t^2} e^{-2bit}$$

$$\int_{CD} = e^{b^2} \int_q^{-p} e^{-t^2} e^{-2bit} dt = e^{b^2} \int_q^{-p} e^{-t^2} (\cos 2bt - i \sin 2bt) dt$$

α

Si l'on fait croître p et q indéfiniment, elle tend vers

$$e^{b^2} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-t^2} (\cos 2bt - i \sin 2bt) dt.$$

ω

On a donc à la limite

$$\sqrt{\pi} = e^{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (\cos 2bt - i \sin 2bt) dt.$$

En égalant les parties réelles, d'une part, et les parties imaginaires, d'autre part, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2bt \, dt = \sqrt{\pi} e^{b^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2bt \, dt = 0.$$

4° Intégrales de Fresnel. — Intégrons la même fonction

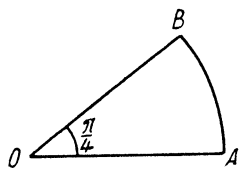


Fig. 10.

$$f(z) = e^{-z^2}$$

le long d'un secteur circulaire OABO d'angle $\frac{\pi}{4}$.

δ1

On aura

$$\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = 0.$$

α1

En faisant croître R indéfiniment, la première aura pour limite

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

ψ

La deuxième aura pour limite zéro. π On peut en effet poser le long de l'arc

$$z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi) \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

On aura

$$\int_{AB} e^{-z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} Ri(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi.$$

ξ

Le module de la fonction à intégrer est égal à $Re^{-R^2 \cos 2\varphi}$. On a donc

$$I < \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2 \cos 2\varphi} d\varphi.$$

En raison de la valeur $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ρ pour lequel l'exposant devient nul (et la fonction sous le signe augmenterait alors indéfiniment avec R), nous sommes obligés d'isoler cette valeur et de décomposer le champ en deux parties, de prendre par exemple

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}.$$

La première intégrale tend vers zéro quand R augmente indéfiniment, π la fonction devenant infiniment petite avec $\frac{1}{R}$.

Dans le deuxième intervalle, nous userons d'un léger artifice. On a

$$\sin 2\varphi > \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2\varphi > 1.$$

Donc

$$e^{-R^2 \cos 2\varphi} < \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-R^2 \cos 2\varphi} \sin 2\varphi.$$

α La deuxième intégrale est donc moindre que

$$\frac{R}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2e^{-R^2 \cos 2\varphi} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{R\sqrt{3}} \left(e^{-R^2 \cos 2\varphi}\right)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{R\sqrt{3}} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}}\right).$$

(Grâce à l'introduction du facteur $\sin 2\varphi$, nous avons pu intégrer).

ω Elle tend donc aussi vers zéro quand R augmente indéfiniment.

Donc $\int_{AB}$ tend bien vers zéro quand R augmente indéfiniment.

δ_1, ξ Reste l'intégrale $\int_{BO}$. β Pour celle ci, il faut poser

$$z = t\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = t\sqrt{2}\,\frac{1+i}{2}$$

t variant de R à O. A la limite, on a donc

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1+i)^2t^2} \times \sqrt{2}\,\frac{(1+i)}{2}\,dt = (1+i)\,\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-it^2}dt$$

$$\sqrt{\pi} = (1+i)\sqrt{2}\int_0^\infty (\cos t^2 - i\sin t^2)dt.$$

En égalant les parties réelles, d'une part, et les parties imaginaires, d'autre part, on en déduit

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ce sont les intégrales de Fresnel.

5° *Calculer l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$.

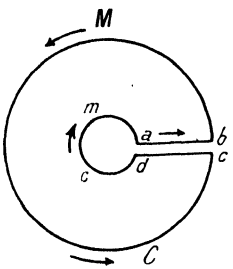


Fig. 11.

A cet effet, nous considérons la fonction

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z}$$

et l'intégrerons suivant le contour $abMcdma$ figuré ci-contre, formé par un petit cercle c dont nous ferons décroître le rayon r jusqu'à zéro, un cercle C dont nous ferons croître le rayon R indéfiniment et deux portions de droites aussi voisines qu'on le veut de part et d'autre de ox réunissant ces deux cercles.

Etudions d'abord la fonction. Il faut d'abord la définir, c'est-à-dire définir z^{p-1}. Nous prendrons pour coupure ox. Posons

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

φ variera de 0 à 2π. On sait que

$$z^{p-1} = e^{(p-1)[\log\rho + i(\varphi + 2k\pi)]}.$$

Nous prendrons $k = 0$ de sorte que, pour les points de ab, ($\varphi = \varepsilon$), z^{p-1} se réduit à la détermination réelle

$$e^{(p-1)\log\rho} = x^{p-1}.$$

Points critiques. — Les points critiques de $f(z)$ sont le point $z = 0$, mais il ne se trouve pas dans le champ, et le point de ox'. $z = -1$.

Ce point est un pôle pour la fonction, puisque $\frac{1}{f(z)} = \frac{1+z}{z^{p-1}}$ s'annule en ce point et est holomorphe aux environs. Le résidu relatif à ce pôle est la limite de $(z+1)f(z) = z^{p-1}$ pour le point $z = -1$. En ce point

$$\rho = 1, \qquad \varphi = \pi$$

Donc

$$(z^{p-1})_{-1} = e^{(p-1)i\pi} = -(\cos p\pi + i \sin p\pi) = R.$$

Enfin considérons $zf(z) = \frac{z^p}{1+z}$. Pour que $| zf(z) |$ tende vers zéro, quand z augmente indéfiniment, il faut que $p < 1$.

D'autre part, pour que $| zf(z) |$ tende vers zéro sur le petit cercle, quand $| z |$ tend vers zéro, il faut que $p > 0$.

Nous supposerons donc

$$0 < p < 1.$$

Ces précisions étant faites, appliquons le théorème des résidus

Nous aurons

$$\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} = 2\pi i R.$$

Si nous faisons croître R indéfiniment et tendre r vers zéro, la première a pour limite

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx.$$

La deuxième tend vers zéro, puisque $| zf(z) |$ tend vers zéro lorsque $| z |$ augmente indéfiniment. Il en est de même de l'intégrale $\int_c f(z)dz$, puisque $| zf(z) |$ tend vers zéro lorsque $| z |$ tend vers zéro.

Reste l'intégrale $\int_{cd}^{\psi}$ Cette intégrale ne détruit pas l'intégrale $\int_{ab}^{\pi}$, puisque, aux points de cd, les valeurs de la fonction ne sont pas les mêmes que les valeurs aux points correspondants de ab. Pour les points de cd, on a en effet $\varphi = 2\pi$.

Donc

$$z^{p-1} = e^{(p-1)(\log\rho + 2i\pi)} = e^{(p-1)\log\rho}\, e^{2pi\pi}.$$

Les valeurs de la fonction en cd, sont donc celles qu'elle a aux points correspondants de ab, multipliées par le facteur constant $e^{2pi\pi}$.

D'autre part, le sens étant inversé, la quatrième intégrale est donc

$$I_4 = -e^{2pi\pi} I_1.$$

On a donc

$$I_1(1 - e^{2pi\pi}) = 2\pi i R = -2\pi i e^{pi\pi}.$$

Par suite

$$I_1 = \frac{\pi}{H}$$

en posant

$$H = \frac{e^{2pi\pi} - 1}{2ie^{pi\pi}} = \sin p\pi.$$

On a donc enfin

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

C'est le résultat sur lequel nous nous sommes appuyé dans l'étude des fonctions Γ.

De même, considérons la fonction

$$f(z) = \frac{z^{p-1} - z^{q-1}}{1-z}. \quad (o < p < 1,\ o < q < 1)$$

Comme ci-dessus, nous définirons d'abord les fonctions z^{p-1}, z^{q-1}.

Nous prendrons comme coupure l'axe ox.

En posant

$$z = re^{i\varphi}, \qquad o < \varphi < 2\pi.$$

Nous prendrons

$$z^{p-1} = e^{(p-1)(\log\rho + i\varphi)}, \qquad z^{q-1} = e^{(q-1)(\log\rho + i\varphi)}.$$

Nous intégrerons la fonction, le long du contour $abMcdma$ formé par un demi grand cercle bMc, un demi petit cercle dma, tous deux de centre o de diamètre sur ox, et au-dessus de ox, ces deux demi-cercles étant réunis par deux portions ab, dc de l'axe des x, supposées au-dessus de ox, et aussi voisines qu'on le veut de ox.

ρ

A l'intérieur du contour, la fonction n'a plus de point critique. On a

$$\int_{ab} + \int_{bMc} + \int_{cd} + \int_{dma} = 0.$$

α

Or, si nous faisons croître indéfiniment le rayon du grand cercle et tendre vers zéro celui du petit cercle, o les intégrales suivant les demi-cercles tendront vers zéro π la première parce que $p < 1, q < 1$, la seconde parce que $p > 0, q > 0$.

Il restera donc

$$\lim \int_{ab} + \lim \int_{cd} = 0.$$

δ_1

Le long de ab, on a

$$\varphi = 0, \qquad z^{p-1} = x^{p-1}.$$

x variant de r à R.

α

En passant à la limite, la première intégrale est donc

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1 - x}\, dx.$$

δ_1

Le long de cd, on a

$$\varphi = \pi, \; z = -\rho, \; dz = -d\rho, \; z^{p-1} = \rho^{p-1} e^{(p-1)i\pi} = -\rho^{p-1} e^{pi\pi}$$

De même

$$z^{q-1} = -\rho^{q-1} e^{qi\pi}.$$

ρ variant de R à ε.

La deuxième intégrale a donc pour limite

$$+\int_{\infty}^{o} \frac{\rho^{p-1} e^{pi\pi} - \rho^{q-1} e^{qi\pi}}{1+\rho} d\rho.$$

ou en changeant de notation

$$-\int_{o}^{\infty} \frac{x^{p-1} e^{pi\pi} - x^{q-1} e^{qi\pi}}{1+x} dx.$$

ω

on a donc

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} e^{pi\pi} - x^{q-1} e^{qi\pi}}{1+x} dx.$$

x_1

En égalant les parties réelles, d'une part, et, d'autre part, les parties imaginaires des deux membres, on obtient

$$\sin p\pi \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \sin q\pi \int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} \cos p\pi - x^{q-1} \cos q\pi}{1+x} dx.$$

ρ

D'après la première, on voit que, *quel que soit p* (compris entre 0 et 1),

$$\sin p\pi \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \text{const.}$$

β

χ

La valeur de la constante s'obtient facilement, en prenant par exemple $p = \frac{1}{2}$.

$$c = \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{2dt}{1+t^2} = \pi \qquad (x = t^2).$$

ώ

On a donc

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

δ_1

On retrouve donc le résultat obtenu ci-dessus. Mais de

o

plus, en substituant ces valeurs dans la deuxième égalité, elle devient

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx = \pi(\text{ctg. } p\pi - \text{cotg. } q\pi).$$

ce qui donne une nouvelle intégrale.

Polynômes de Legendre. — Enfin, nous allons traiter, tout au long, une dernière application, un peu délicate, qui nous permettra d'exprimer sous forme d'intégrale définie les polynômes de Legendre.

Nous avons obtenu ces polynômes en développant l'expression

$$y = \frac{1}{+\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots$$

suivant les puissances croissantes de z. Nous avons vu que X_n est un polynôme de degré n

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n.$$

Dans cette identité x peut être réel ou imaginaire.

Il est facile d'obtenir une fonction admettant X_n comme résidu relatif au pôle $z = 0$. Il suffit de prendre

$$f(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

Aux environs de l'origine, elle admettra bien un développement de la forme

$$\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{X_1}{z^n} + \cdots + \frac{X_n}{z} + X_{n+1} + \cdots$$

L'origine est un pôle d'ordre $(n + 1)$ et le résidu relatif à ce pôle est X_n. On peut alors obtenir X_n sous forme *d'intégrale de fonction de variable complexe*. D'après le théorème des résidus, il suffit d'intégrer cette fonction le long d'un petit cercle de centre origine ne contenant pas les points critiques du radical. On aura bien

$$X_n = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

On a donc immédiatement X_n sous forme d'intégrale de fonction de variable complexe. Nous allons la transformer en intégrale de fonction de variable réelle.

δ1

Points critiques. — Les points critiques de $f(z)$ sont le pôle $z = 0$, et les valeurs qui annulent le radical

$$z_0 = x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad z_1 = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

α

Entourons ces trois points de petits cercles c, c_0, c_1 dont nous ferons tendre les rayons vers zéro ; réunissons c_0 c_1 par une double coupure ab, ef, enfin traçons un cercle C dont nous ferons croître le rayon indéfiniment.

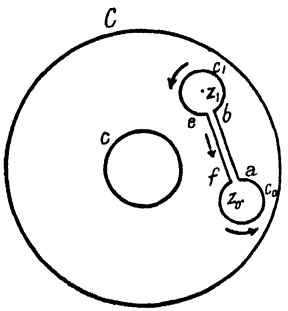


Fig. 12.

Désignons par K le contour abc_1efc_0a. décrit dans le sens direct.

α2, β

Pour appliquer le théorème des résidus à une région, il est nécessaire que la fonction soit uniforme dans cette région. ψ Nous allons montrer que dans la région comprise entre C, c et K, la fonction considérée est bien uniforme.

Cela est évident si l'on ne tourne autour d'aucun des points z_0, z_1, points critiques du radical. Si z faisait un tour complet, dans le sens direct, autour *d'un seul* des points critiques, σ1 le radical après rotation, se retrouverait multiplié par $e^{i\pi} = -1$. Mais si la variable z se déplace dans le champ indiqué, ρ elle ne peut revenir à son point de départ que si elle n'a tourné autour d'aucun de ces points ou si elle a tourné *simultanément* autour de chacun d'eux. La fonction, après rotation, a donc subi un nombre pair de simples changements de signe. Elle a repris la même valeur.

ω

La fonction est bien uniforme et le théorème des résidus lui est applicable.

δ1

La fonction n'a dans la région aucun point critique.

o

L'intégrale prise suivant le contour total est nulle ou. si l'on veut

$$\int_C = \int_c + \int_K$$

les cercles et le contour K étant parcourus dans le même sens.

Si R augmente indéfiniment, la première intégrale $\int_c f(z)\,dz$ tend vers zéro, car $|\, zf(z)\,|$ tend vers zéro. Comme elle est constamment égale au deuxième membre qui est indépendant de R, elle est donc *rigoureusement* nulle et il reste

$$\int_c + \int_K = 0.$$

Ainsi

$$2\pi i X_n = \int_c f(z)dz = -\int_K f(z)dz.$$

Nous avons ainsi remplacé l'intégrale suivant le cercle c, par l'intégrale suivant le contour K.

Mais cette intégrale se décompose elle-même en

$$\int_K = \int_{c_0} + \int_{ab} + \int_{c_1} + \int_{ef}.$$

Quand les rayons de c_0 et c_1 tendent vers zéro, les intégrales $\int_{c_1}$ et $\int_{c_0}$ tendent vers zéro, car par exemple :

$$\lim_{z=z_0}(z - z_0)f(z) = \lim (z - z_0)\,\frac{1}{z^{n+1}\sqrt{(z - z_0)(z - z_1)}} = 0.$$

A la limite, il reste donc

$$\int_K = \lim \int_{ab} + \lim \int_{ef}$$

ab venant se confondre avec z_0z_1, mais restant à *droite* de z_0z_1 (et aussi voisin qu'on le veut), ef à gauche de z_0z_1.

Or, quand le point z, ayant passé par un point m de ab, vient au point infiniment voisin m' de ef, il n'a tourné qu'autour du seul point critique z_1. La fonction, au point m', prend donc la valeur qu'elle avait au point correspondant m, mais *changée de signe*. Comme d'autre part, le sens de parcours

ω
est changé, les deux intégrales, à la limite sont égales, et il reste simplement

$$\pi i X_n = -\lim \int_{ab} = -\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

ω, ρ
L'intégrale prise suivant le cercle c a donc été remplacée par une intégrale prise suivant un *segment de droite* z_0z_1, z parcourant ce segment de droite mais en restant infiniment peu "à droite" de ce segment.

z
Il ne reste plus qu'à transformer cette intégrale curviligne (rectiligne) en une simple intégrale ordinaire en exprimant z au moyen d'un paramètre.

R_1, ρ
Remarquons que z doit varier de

$$z_0 = x + \sqrt{x^2-1} \qquad \text{à} \qquad z_1 = x - \sqrt{x^2-1}$$

α, ν
Il est donc naturel de poser

$$z = x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\,;$$

r
z étant fonction linéaire du paramètre $\cos\varphi$, le point décrira bien une droite ; o Ce sera la portion de droite z_0z_1 si φ varie de 0 à π.

. δ_1
On a alors

$$dz = -\sqrt{x^2-1}\sin\varphi\, d\varphi \qquad 1-2xz+z^2 = -(x^2-1)\sin^2\varphi$$
$$\sqrt{1-2xz+z^2} = \varepsilon i\sqrt{x^2-1}\sin\varphi \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ω
Donc enfin

$$\pi i X_n = \int_o^{\pi} \frac{d\varphi}{\varepsilon i[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi]^{n+1}}.$$

c'est-à-dire

$$X_n = -\frac{\varepsilon}{\pi}\int_o^{\pi} \frac{d\varphi}{[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi]^{n+1}}.$$

ω, ρ
On a bien finalement l'expression de X_n *sous forme d'intégrale définie ordinaire d'une fonction de variable réelle* φ, x *entrant comme paramètre.*

Mais nous avons posé

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \varepsilon i \sqrt{x^2 - 1} \sin \varphi.$$

Détermination du signe. — Il reste donc à déterminer, le signe de ε résultant de cette égalité, sachant que, pour l'origine, le radical a la valeur $+1$, et sachant qu'il faut prendre la détermination du radical pour les points situés « à droite » de $z_0 z_1$.

Toute la difficulté proviendra de cette détermination de ε.

Tout d'abord remarquons que $\sin \varphi > 0$.

D'autre part, $z_0 z_1 = 1$. Les vecteurs oz_0, oz_1 sont donc, dans tous les cas, symétriques par rapport à ox et les modules sont inverses.

Supposons d'abord z_0 (et par suite z_1) à droite de o.

Nous prendrons comme coupure la portion de droite $z_0 z_1$ et nous poserons

$$z_1 - z_0 = -2\sqrt{x^2 - 1} = \lambda e^{i\zeta}$$

ζ désignant le plus petit angle dont il faut faire tourner $z_0 x$ pour l'amener sur $z_0 z_1$ (sens direct).

Nous désignerons par α l'inclinaison sur ox de oz_0 ou oz_1 (en valeur absolue).

Enfin, pour un point quelconque M(z) du plan, nous poserons

$$z - z_0 = l_0 e^{i\varphi}, \qquad z - z_1 = l_1 e^{i\psi}.$$

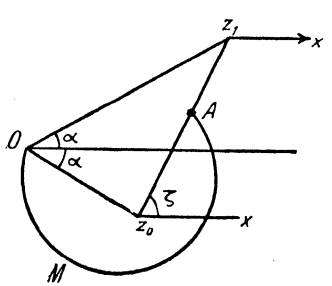


Fig. 13.

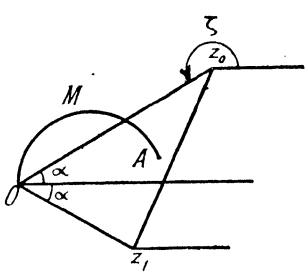


Fig. 14.

On sait que, pour définir une fonction $(z - z_0)^m$, il faut définir l'angle φ, pour un point de départ, et suivre les variations de φ et par suite de la détermination quand le point se déplace sans

α

traverser la coupure. Nous allons donc définir les angles φ et ψ et la détermination du radical à l'origine et nous suivrons ensuite la variation des angles φ et ψ lorsque le point se déplacera jusqu'à un point A voisin de z_0z_1 et *à droite de* z_0z_1.

Nous allons examiner les divers cas de figure.

δ_1

Toutes les déterminations possibles du radical sont comprises dans la formule

$$R = \sqrt{(z - z_0)(z - z_1)} = \sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\left[\frac{\varphi + 2k\pi}{2} + \frac{\psi + 2k'\pi}{2}\right]}.$$

Supposons d'abord z_0 au-dessous de z_1.

ξ

Pour l'origine prenons

$$\varphi = \widehat{xz_0o} = \pi - \alpha \qquad \psi = \widehat{xz_1o} = \pi + \alpha.$$

On a

$$\varphi + \psi = 2\pi \qquad R = \sqrt{l_0 l_1}\, e^{i(1 + k + k')\pi} = e^{i(1 + k + k')\pi}.$$

β

Si l'on veut que, pour l'origine, R = 1, il faut prendre

$$k + k' = 1.$$

ω

Nous avons donc

$$R = \sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\left(\frac{\varphi + \psi}{2} + \pi\right)} = -\sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\frac{(\varphi + \psi)}{2}}.$$

δ_1, α_1

Suivons maintenant par continuité les variations de φ et ψ *sans traverser la coupure*, z_0z_1, de façon à arriver en uu point A *à droite* de z_0z_1, par exemple, le long du chemin OMA. Nous aurons (fig. 12),

$$\varphi = 2\pi + \zeta, \qquad \psi = \pi + \zeta$$

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \zeta.$$

ω

On aura

$$e^{i\frac{\varphi + \psi}{2}} = -ie^{i\zeta}.$$

Par suite

$$R_A = +\sqrt{l_0 l_1}\, ie^{i\zeta}.$$

o

Si z_0 avait été au-dessus de z_1 (fig. 13), on aurait eu pour l'origine

$$\varphi = \pi + \alpha, \qquad \psi = \pi - \alpha, \qquad \varphi + \psi = 2\pi$$

et par suite encore, d'une façon générale

$$R = -\sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}.$$

δ_1

En A, à droite de $z_0 z_1$, on a

$$\varphi = \zeta, \qquad \psi = \zeta - \pi, \qquad \frac{\varphi+\psi}{2} = \zeta - \frac{\pi}{2}.$$

Par suite encore

$$R_A = +\sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\zeta}.$$

Supposons maintenant les deux points z_0, z_1 à gauche de o.

δ_1, α

Nous choisirons pour l'origine

$$\varphi = \alpha, \qquad \psi = -\alpha.$$

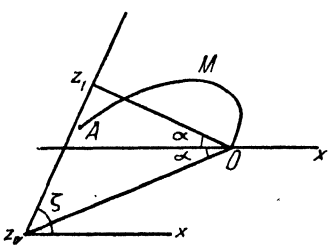


Fig. 15.

Par suite, si l'on veut que le radical ait, à l'origine, la valeur 1,

$$R = +\sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}.$$

δ_1

Ensuite si l'on suit le chemin ÓMA, on obtiendra en A (à droite de $z_0 z_1$)

$$\varphi = \zeta, \qquad \psi = \zeta - \pi$$

et par suite

$$R_A = -i\sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\zeta}.$$

On trouverait le même résultat si z_0 était au-dessus de z_1.

ω

Ainsi si z_0, z_1 sont tous deux à droite de o, la valeur du radical pour un point A *à droite de $z_0 z_1$ (et sur $z_0 z_1$) est*

$$R_A = i\sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\zeta}.$$

Si z_0, z_1 sont tous deux à gauche de o, on a

$$R_A = -i\sqrt{l_0 l_1}\, e^{i\zeta}.$$

Nous pouvons maintenant déterminer le signe de ε.

δ_1

On a

$$e^{i\zeta} = \frac{z_1 - z_0}{\lambda} = -2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\lambda}$$

(1) $$\lambda^2 e^{2i\zeta} = 4(x^2 - 1).$$

δ_1

D'autre part, dans tous les cas,

$$z - z_0 = l_1 e^{i\varphi} = l_0 e^{i\zeta} = \sqrt{x^2 - 1}\,(\cos\varphi - 1)$$

$$z - z_1 = l_1 e^{i\psi} = -\, l_1 e^{i\zeta} = \sqrt{x^2 - 1}\,(\cos\varphi + 1).$$

D'où

$$l_0 l_1 e^{2i\zeta} = (x^2 - 1)\sin^2\varphi. \tag{2}$$

$\varkappa$

En divisant m. à m. (1) et (2)

$$\frac{l_0 l_1}{\lambda^2} = \frac{\sin^2\varphi}{4}.$$

Comme $\sin\varphi > 0$

$$\sqrt{l_0 l_1} = \frac{1}{2}\lambda\sin\omega$$

ω

Si z_0 et z_1 sont à droite de o

$$R = +\,i\frac{\lambda}{2}\sin\varphi \times \frac{-\,2\sqrt{x^2-1}}{\lambda} = -\,i\sqrt{x^2-1}\sin\varphi.$$

On a donc $\varepsilon = -1$.

Si z_0 et z_1 sont à gauche de O

$$R = +\,i\sqrt{x^2-1}\sin\varphi, \qquad \varepsilon = +1.$$

En revenant à l'intégrale, et remarquant que le point M(x) est le milieu des points z_0 et z_1 et par conséquent du même côté que ces points par rapport à l'origine ou oy;

Si le point M(x) est à droite de oy

$$X_n = +\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}.$$

Si le point M(x) est à gauche de oy

$$X_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{[x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi]^{n+1}}.$$

On a donc ainsi, sans ambiguité, l'expression du polynome de Legendre au moyen d'une intégrale définie de variable réelle φ, x entrant comme paramètre dans la fonction à intégrer.

Nous avons terminé avec les applications du théorème des résidus.

ξ

On voit que dans toute application, il faut : 1° définir avec netteté la fonction $f(z)$ que l'on considère de manière à donner sans

ambiguïté son expression en un point quelconque, la fonction *devant être uniforme dans le champ* ; 2° étudier les points critiques de la fonction et déterminer les résidus correspondants.

II. — INTÉGRALE DE CAUCHY $\int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Donnons nous une fonction méromorphe dans un champ limité par un contour fermé C ne passant par aucun zéro ni pôle de $f(z)$; $\varphi(z)$ désignant d'autre part une fonction n'ayant pas de point critique dans le champ, proposons nous de calculer l'intégrale.

$$\int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

α, ξ

Nous allons rechercher les points critiques de la fonction

$$F(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

et appliquer, si possible, le théorème des résidus.

Soit a un point qui ne soit ni zéro ni pôle de $f(z)$.

ψ π

Ce point est évidemment point ordinaire pour $F(z)$ car aux environs de ce point, on peut poser

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{a_1 + 2a_2(z-a) + \cdots}{a_0 + a_1(z-a) + \cdots}$$

La fraction pourra se développer suivant les puissances entières positives de $(z-a)$, π puisque a_0 est différent de zéro. Il en sera donc de même de $F(z)$, $\varphi(z)$ étant holomorphe.

Si a est un zéro d'ordre μ, δ_1 aux environs de ce point, $f(z)$ a un développement de la forme

$$f(z) = (z-a)^\mu [a_\mu + a_{\mu+1}(z-a) + \cdots] = (z-a)^\mu f_1(z)$$

$f_1(z)$ étant holomorphe et ne s'annulant pas en a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu}{z-a} + \frac{a_{\mu+1} + 2a_{\mu+2}(z-a) + \cdots}{a_\mu + \cdots}.$$

α

Si nous multiplions ce résultat par $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \varphi(a) + (z-a)\varphi'(a) + \cdots$$

on voit que le développement de F(z) sera de la forme

$$\frac{\mu\varphi(a)}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \cdots$$

ω

Le point a est donc un pôle simple de F(z), de résidu $\mu\varphi(a)$.

δ_1

Enfin si b est un pôle d'ordre ν de $f(z)$, on verra de même que c'est pour F(z) un pôle simple de résidu $-\nu\varphi(b)$.

ω

Formule. — La fonction F(z) est donc méromorphe et on connaît ses pôles et les résidus correspondants. On a donc

$$I = 2\pi i\Sigma(\mu\varphi(a) - \nu\varphi(b))$$

on peut écrire simplement

$$I = 2\pi i\Sigma(\varphi(a) - \varphi(b))$$

à la condition de compter autant de fois $\varphi(a)$ ou $\varphi(b)$ que le comporte le degré de multiplicité du zéro a ou du pôle b.

ν

En particulier, si $\varphi(z) = 1$

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(Z - P)$$

Z désignant le nombre de zéros, P le nombre de pôles à l'intérieur de C.

ρ, σ

L'intégrale est donc égale à $2\pi i$ H, H étant la somme des ordres de $f(z)$ à l'intérieur du contour.

σ_1

Mais nous avons déjà établi un théorème relatif à la somme des ordres H d'une fonction. δ_1 Nous avons vu que si z décrit un contour C dans le sens direct, la variation de l'argument de $f(z)$ est égale à 2πH. ω On doit donc en conclure que

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = i\Delta\Phi$$

$\Delta\Phi$ désignant la variation de l'argument de $f(z)$.

δ

La démonstration de ce résultat, est immédiate. Posons en effet

$$f(z) = re^{i\varphi}$$

r et φ étant fonctions d'un même paramètre quand z décrit C, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi.$$

δ_1

Donc, si nous intégrons le long de C, nous aurons

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_C \frac{dr}{r} + i\int_C d\varphi.$$

ρ π

La première intégrale du second membre est nulle, la fonction primitive log r reprenant la même valeur quand on revient au point de départ. La deuxième est égale à $i\Delta\Phi$, $\Delta\Phi$ désignant la variation d'argument. On retrouve donc bien le résultat ci-dessus.

Application : Théorème de d'Alembert. — La formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z - P$$

π

est remarquable puisque le second membre est un nombre entier. L'application de cette formule permet donc d'obtenir cette différence. Il suffit à cet effet de calculer une valeur approchée de l'intégrale.

ξ

En particulier, si $f(z)$ n'a aucun pôle à distance finie, l'intégrale donnera le nombre de zéros.

ψ, R1

Si $f(z)$ est un polynôme, nous pouvons en déduire le théorème de d'Alembert.

Soit

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Cherchons une valeur approchée de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{na_0 z^{n-1} + \cdots}{a_0 z^n + \cdots}\,dz.$$

α

Prenons pour C un cercle de centre origine de rayon R

suffisamment grand. La fonction sous le signe $\int$ pourra être rendue aussi voisine qu'on le veut de

$$\frac{na_0z^{n-1}}{a_0z^n} = \frac{n}{z}.$$

δ_1

On pourra donc poser le long du cercle

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z} + u(z)$$

avec la condition

$$|u(z)| < \varepsilon.$$

ε étant aussi petit qu'on le veut. L'intégrale est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{n}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{u(z)}{z}\,dz.$$

δ_1

La première intégrale est égale à n. La seconde a un module moindre que $\frac{1}{2\pi} \times 2\pi R \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$. ω Le nombre entier peut donc être rendu aussi voisin qu'on le veut de n, si R est suffisamment grand. Il lui est donc rigoureusement égal.

Racines de l'équation $f(z) + \varphi(z) = 0$ lorsque $\left|\frac{\varphi}{f}\right| < 1$. — Comme deuxième application, démontrons le théorème suivant :

Si deux fonctions $f(z)$ et *$\varphi(z)$ sont holomorphes dans une aire limitée par un contour* C, *si le rapport $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ a un module constamment inférieur à l'unité lorsque z décrit le contour, le nombre de zéros contenus dans l'aire est le même pour les deux fonctions*

$$f(z) \qquad \text{et} \qquad F(z) = f(z) + \varphi(z).$$

φ, α

Puisque f et φ n'ont pas de pôles à l'intérieur de C, il suffit de démontrer que la variation de l'argument de $f(z)$ est la même que celle de $F(z)$. ν Or, on peut écrire

$$F(z) = f(z)\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right].$$

La variation de l'argument de $F(z)$ est la somme des variations d'argument de chacun des facteurs.

Or, si nous considérons le point $\zeta = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$, comme

$$\zeta - 1 = \frac{\varphi(z)}{f(z)},$$

ce point décrira, autour du point $z = 1$, une courbe fermée tout entière à l'intérieur d'un cercle de rayon moindre que l'unité puisque $\left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1$. Cette courbe fermée ne contiendra donc pas l'origine et la variation de l'argument de $F(z)$ se réduit bien à celle de $f(z)$.

Plus généralement : Si f et φ sont méromorphes à l'intérieur de C, la somme des ordres de $F = f + \varphi$ est la même que celle de $f(z)$.

THÉORÈME. — *La fonction $f(z)$ étant uniforme dans tout le plan, si l'équation $f(z) = b$ n'admet, quel que soit b, qu'un nombre limité de racines, $f(z)$ se réduit à une fraction rationnelle.*

Supposons que l'équation

$$f(z) - b = 0$$

n'admette jamais plus de p racines quel que soit b ; mais qu'elle admette effectivement p racines pour la valeur b_0. Nous allons démontrer d'abord qu'elle admettra *toujours* p racines quelque soit b.

Entourons en effet les zéros correspondants à la valeur b_0 de petites courbes $c_1, c_2, \cdots c_p$ isolant tous les zéros les uns des autres ; soit δ le minimum de $| f(z) - b_0 |$ *sur* toutes ces courbes.

Nous devons considérer l'équation

$$F(z) = f(z) - b = 0.$$

Nous pouvons l'écrire

$$F(z) = f(z) - b_0 + (b_0 - b) = 0.$$

Pour être sûr qu'à l'intérieur d'une courbe c_i, $F(z)$ admet même nombre de zéros que $f(z) - b_0$, il suffit que le long de c_i, on ait constamment

$$\left| \frac{b - b_0}{f(z) - b_0} \right| < 1.$$

Or, ρ le long de c_i, on a $| f(z) - b_0 | > \delta$. φ Il suffit donc que $| b - b_0 | < \delta$.
α, δ_1

Si donc l'on passe de la valeur b_0 à une valeur b suffisamment voisine, l'équation $f(z) - b = 0$ admettra même nombre de racines que $f(z) - b_0 = 0$ à l'intérieur de toute courbe c_i et par suite dans tout l'ensemble d'aires c_i.
ω

De proche en proche, on pourra passer de la valeur b_0 à une valeur b_1 quelconque.

L'équation $f(z) - b_1 = 0$ admettra même nombre de racines que l'équation $f(z) - b_0 = 0$ quel que soit b_1.
σ_1, ξ

Montrons alors que la fonction se réduit à une fraction rationnelle.
β, R

Il faut qu'elle n'admette que des pôles dans un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut et aussi pour l'infini.

Supposons qu'elle admette un point singulier essentiel a.

L'équation $f(z) - b = 0$ admet des zéros $z_1, z_2, \cdots z_p$. Traçons autour de chacun d'eux des contours $c_1, c_2, \cdots c_p$, les isolant les uns des autres et aussi autour de a. Soit δ le minimum de $| f(z) - b |$ le long des contours.

Le point a étant singulier essentiel, σ_2 nous avons montré que la fonction $f(z)$ prend une valeur b' aussi voisine qu'on le veut de b pour un point ζ à l'intérieur de c_a. Supposons $| b' - b | < \delta$
ξ δ_1

Considérons l'équation $f(z) - b' = 0$. Nous pouvons être certain que cette équation admet un zéro dans chacun des cercles $c_1, c_2, \cdots c_p$ et elle admet ρ aussi le zéro ζ qui est différent des précédents puisqu'il est à l'intérieur de c_a.
ω

L'équation

$$f(z) - b' = 0$$

admettrait donc au moins $(p + 1)$ racines, ce qui est contraire à ce que nous avons montré ci-dessus.

La fonction $f(z)$ n'admet donc que des pôles dans un cercle de rayon aussi grand que l'on veut.

Si l'on fait la transformation $z = \frac{1}{\zeta}$, la fonction $f(z)$ devient une fonction $\varphi(\zeta)$, qui est donc aussi méromorphe dans un cercle aussi

grand que l'on veut. Le point $\zeta = 0$ est donc point ordinaire ou pôle pour cette fonction ; donc, le point $z = \infty$ est point ordinaire ou pôle pour $f(z)$.

La fonction $f(z)$ n'admettant que des pôles à distance finie ou infinie, se réduit bien à une fonction rationnelle.

III. — CONSTRUCTION DE FONCTIONS

THÉORÈME DE RIEMANN. — *Si deux fonctions* U *et* V *sont uniformes dans une aire* S, *si elles coïncident le long d'un élément fini, ab, elles coïncident dans l'aire tout entière.*

Nous avons déjà démontré ce théorème dans le cas où la différence U — V est holomorphe dans l'aire. M. Picard a généralisé le résultat de la manière suivante :

Isolons l'élément ab de tous les points singuliers de U ou V. Dans cette aire S' la fonction U — V est holomorphe, nulle le long de ab. Elle est donc nulle dans toute l'aire S'.

Soit maintenant a un point singulier de U ou V.

Voyons la nature de ce point pour la différence U — V.

Si ce point était pôle ou point singulier essentiel, il y aurait aux environs de a un point *ordinaire* a' pour lequel on aurait $| U - V | > A$, A étant un nombre positif arbitrairement choisi. Mais alors, nous pourrions considérer une aire S'' englobant a' en laissant a à l'extérieur. Dans cette aire S'' nous avons vu que la différence U — V devait être constamment nulle. On ne pourrait donc pas avoir, en a', $| U - V | > A$. Il n'est donc pas possible de supposer que a' soit pôle ou point singulier de U — V. C'est donc un point ordinaire. La fonction U — V ne peut donc pas avoir de point singulier dans S. Elle est donc holomorphe, et par suite nulle dans toute l'aire S.

Proposons-nous le problème suivant : Trouver l'expression générale des fonctions uniformes qui n'ont à distance finie, que des points singuliers isolés, et telles que, de plus, à chacun d'eux a_p,

ξ, σ2

pôle ou point singulier essentiel, corresponde une « *fonction caractéristique* » $G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right)$, $G_p(\zeta)$ *désignant une fonction entière donnée en* ζ *sans terme constant.*

Théorème de Mittag-Löffler : fonctions à pôles donnés. — *Etant donné un ensemble de points* $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ *en nombre fini ou infini, et un ensemble de fonctions entières correspondantes* $G_1, G_2 \cdots G_n \cdots$

ψ

on peut toujours constituer une fonction uniforme qui admette les points comme points singuliers, la fonction caractéristique correspondante étant la fonction G *donnée.*

Le théorème est évident ψ si les points $a_1, a_2, \cdots a_p$ sont en nombre fini. φ Il suffit en effet de prendre

$$F(z) = G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \cdots + G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right).$$

Supposons que les points soient en nombre infini.

Nous les classerons par ordre de *module croissant*. Puisque tous ces points sont isolés, r il ne peut y en avoir qu'un nombre fini dans tout cercle de rayon fini. Puisque les points forment un ensemble infini, r il est donc nécessaire que $|a_p|$ devienne infini avec p.

j

Nous voulons construire une fonction F(z) holomorphe dans tout le plan, sauf aux points $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ pour chacun desquels la fonction caractéristique $G_1, G_2 \cdots G_n \cdots$ soit donnée.

On peut d'abord supposer que l'origine ne fait pas partie des points a, π car si elle en faisait partie avec comme fonction caractéristique $G_0\left(\frac{1}{z}\right)$. φ il suffirait d'abord de construire la fonction holomorphe F(z) n'ayant plus comme points singuliers que $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ et de former ensuite la fonction

$$\Phi(z) = F(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

Construisons donc la fonction F. Considérons l'un des points a.

Remarque préalable. — La fonction $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ est holomorphe dans un cercle allant jusqu'au point a exclus. Choisissons une fois pour toutes un nombre θ inférieur à l'unité.

α_1

Si l'on avait $\left|\frac{z}{a}\right| < \theta$, on pourrait développer $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ suivant les puissances croissantes de $\frac{z}{a}$, sous la forme

$$(1) \qquad G\left(\frac{1}{z-a}\right) = A_0 + A_1\frac{z}{a} + A_2\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots + A_k\left(\frac{z}{a}\right)^k + \cdots$$

La série du second membre étant uniformément convergente,

σ_2

en prenant un nombre n suffisamment grand de termes, le reste sera inférieur en module à un nombre ε choisi arbitrairement. Soit $P(z)$ le polynôme ainsi obtenu. On aura donc pour ces valeurs,

$$\left|G\left(\frac{1}{z-a}\right) - P(z)\right| < \varepsilon.$$

Nous poserons

$$\varphi(z) = G\left(\frac{1}{z-a}\right) - P(z).$$

Même si $\left|\frac{z}{a}\right| > \theta$, nous introduirons un polynôme P (de degré arbitraire) résultant du développement de $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ d'après la formule (1) et nous introduirons encore la fonction correspondante φ.

Construction. — Cette remarque préalable étant faite, donnons-nous une suite de valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n \cdots$ formant une série convergente.

α

Pour chaque point a_k, nous pourrons construire le polynôme correspondant $P_k(z)$ et la fonction φ_k correspondante tels que, si $\left|\frac{z}{a_k}\right| < \theta$, on aurait

$$|\varphi_k(z)| = \left|G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - P_k(z)\right| < \varepsilon_k.$$

ξ, δ_1

Considérons alors la fonction

$$F(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots + \varphi_k(z) + \cdots$$

Voyons ce qu'elle représente en un point *quelconque* x du plan. Soit R le rayon d'un cercle C, de centre origine englobant le point x.

A partir d'un certain rang i, on aura

$$|a_k| > \frac{R}{\theta}.$$

Par conséquent, à *partir de ce rang*, et pour tout point à l'intérieur ou sur le cercle C, on aura

$$\left|\frac{z}{a_k}\right| \leqslant \frac{R}{|a_k|} < \theta.$$

Donc, à partir de ce rang i, on sera certain que

$$|\varphi_{i+1}| < \varepsilon_{i+1}, \qquad \varphi_{i+2} < \varepsilon_{i+2} \cdots$$

On peut écrire :

$$F(z) = \sum_{1}^{i} \varphi_i + \sum_{i+1}^{\infty} \varphi_k.$$

Les termes de la première somme sont holomorphes dans tout le cercle C sauf aux points a, et sont en *nombre limité*. Cette première somme constitue une fonction holomorphe dans C. D'autre part pour *tout point de la circonférence* C, la deuxième série est absolument et uniformément convergente puisque

$$|\varphi_{i+1}| + |\varphi_{i+2}| + \cdots, \qquad < \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} + \cdots$$

et que la série des ε est convergente. Donc, d'après un théorème que nous avons démontré, cette seconde série constitue aussi une fonction holomorphe à l'intérieur de C *et par suite au point x qui a été choisi quelconque dans le plan* (sauf aux points a_i).

La fonction F(z) ainsi construite est donc holomorphe à l'intérieur de C sauf aux points a_i.

Il reste à rechercher la nature de l'un quelconque des points a_k. Si nous éliminions le point a_k, et si nous raisonnions comme nous venons de le faire sur les points restants, nous construirions une fonction

$$F_1(z) = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{k-1} + \varphi_{k+1} + \cdots = F(z) - \varphi_k(z).$$

qui serait holomorphe dans le cercle C *et aussi au point* a_k qui deviendrait pour F_1, un point quelconque. La fonction

$$F(z) - \varphi_k = F(z) - G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) + P_k(z).$$

est donc holomorphe au point a_k. Ce résultat signifie que la fonction $F(z)$ admet le point a_k comme point singulier et que la fonction caractéristique correspondante est $G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$.

La fonction $F(z)$ répond donc à toutes les conditions du problème.

Le problème admet une infinité de solutions, puisque l'on peut prendre pour les ε une suite arbitraire convergente et qu'il en résulte une certaine indétermination dans le degré des polynômes P.

Forme générale. — Cherchons la forme générale des solutions.

Soit $F_1(z)$ une autre solution quelconque. La différence $F_1 - F$ sera une fonction holomorphe dans tout le plan ; c'est donc une *fonction entière*. On a donc

$$F_1(z) = E(z) + \sum\left[G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) - P_k(z)\right].$$

La série ainsi obtenue est uniformément convergente à l'intérieur d'un cercle C. On peut donc la dériver autant de fois qu'on le veut. La série des dérivées représentera la dérivée de la fonction $F(z)$ à l'intérieur de C, (sauf aux points a).

Cette série représentera la dérivée de F *dans le plan tout entier.*

En effet, si on dérive la série, on obtient une série Φ qui sera convergente partout sauf aux points a. Mais cette série coïncide avec la fonction F' à l'intérieur de C. Donc, d'après le théorème de Riemann, elle coïncide avec F' dans le plan tout entier.

Si les degrés des polynômes P_k ne vont pas en augmentant indéfiniment avec k, au bout d'un certain nombre d'opérations, on pourra faire disparaître tous ces polynômes.

Application : Fonctions à pôles simples. — En particulier, soit une fonction *fractionnaire* c'est-à-dire qui n'admette que des pôles dans tout le plan. Si l'infini est aussi un pôle, la fonction est une fonction rationnelle.

Si le nombre de pôles est infini, l'infini sera un point *singulier non isolé.*

Cherchons à déterminer une fonction n'admettant que des pôles simples $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ les résidus correspondants $A_1, A_2, \cdots A_n \cdots$ restant tous inférieurs en module à un nombre fixe.

La fonction caractéristique G_k est ici $G_k = \dfrac{A_k}{z - a_k}$.

Nous devons la développer sous la forme

$$G_k = -A_k\left(\frac{1}{a_k} + \frac{z}{a_k^2} + \cdots + \frac{z^{\mu-2}}{a_k^{\mu-1}}\right) - A_k \frac{z^{\mu-1}}{a_k^{\mu-1}} \times \frac{1}{a_k - z},$$

on peut prendre

$$\varphi_k = G_k - P_k = -\frac{A_k}{1 - \dfrac{z}{a_k}} \times \frac{z^{\mu-1}}{a_k^{\mu}},$$

et nous formerons $F(z) = \Sigma\varphi_k(z)$.

Le premier facteur est fini. Il suffit donc que la série $\sum\left(\frac{1}{a_k}\right)^{\mu}$ soit absolument convergente. En particulier, supposons qu'il existe un entier μ, tel que la série $\sum\frac{1}{a_k^{\mu}}$ soit absolument convergente. La série $\sum\left(\frac{z}{a_k}\right)^{\mu}$ et par suite la série $\Sigma\varphi_k$ le sera aussi.

Ainsi la fonction cherchée est, dans ce cas,

$$F(z) = \sum \frac{A_k}{z - a_k} + \frac{A_k}{a_k}\left(1 + \frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^{\mu-2}}{a_k^{\mu-2}}\right).$$

Fonction de pôles $\pm k$ avec résidus égaux à 1 : $\operatorname{Cotg} \pi z$. — Supposons par exemple que l'on donne les pôles réels

$$\pm 1, \quad \pm 2 \cdots \pm n \cdots$$

Dans ce cas la série $\sum\frac{1}{n^{\mu}}$ est convergente dès que $\mu > 1$ on peut prendre $\mu = 2$.

ω

On a donc la fonction

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

En particulier, si tous les résidus sont égaux à 1 et si nous introduisons le pôle zéro avec un résidu égal à 1, o nous aurons la fonction

$$\lambda(z) = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Considérons d'abord la somme des termes de $-n$ à $+n$

$$\lambda_n(z) = \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z+n-1} + \cdots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \cdots + \frac{1}{z-n}$$

on aura

$$\lambda_n(z+1) = \frac{1}{z+n+1} + \frac{1}{z+n} + \cdots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{z-(n-1)}$$

ρ, d

on en déduit

$$\lambda_n(z+1) - \lambda_n(z) = \frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z-n}.$$

α

Si nous faisons croître n indéfiniment, le deuxième membre tendant vers zéro, on a donc

$$\lambda(z+1) = \lambda(z).$$

ω

Ainsi la fonction $\lambda(z)$ admet la période 1.

La fonction est impaire en z. On a donc

$$\lambda\left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

On reconnaît dans la fonction toutes les propriétés de la fonction $\operatorname{ctg} \pi z$.

Nous avons supposé qu'il existait une puissance fixe μ telle que la série $\sum \frac{1}{a_k^\mu}$ soit absolument convergente. Si elle n'existe pas, il faut et il suffit toujours que la série $\sum\left(\frac{z}{a_k}\right)^\mu$ soit absolument convergente. Il suffit pour cela que $\mu = k$.

Car si l'on pose $u_k = \left(\frac{z}{a_k}\right)^k$, on a

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{z}{a_k}.$$

$\sqrt[k]{u_k}$ tend donc vers zéro quand k augmente indéfiniment.

Dans ce cas, le degré du polynôme P_k croit avec l'indice; on a la fonction méromorphe

$$F(z) = \sum \frac{A_k}{z - a_k} + \sum \frac{A_k}{a_k}\left[1 + \frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^{k-2}}{a_k^{k-2}}\right],$$

qui admet tous les pôles *simples* donnés a_k avec un résidu égal à A_k.

Facteurs primaires de Weierstrass. — Etant donné un polynôme entier, on sait qu'on peut le décomposer en un produit de facteurs de la forme $(z - a)$ dont certains peuvent être confondus.

Si l'on donne une fonction holomorphe $F(z)$, il est naturel de chercher pour cette fonction une décomposition analogue.

Il faut donc se donner les zéros de cette fonction.

Supposons d'abord qu'elle n'admette aucun zéro (comme e^z).

Sa dérivée logarithmique $\frac{F'}{F}$, n'admettant aucun pôle à distance finie, est aussi une fonction entière ou encore la dérivée, $g'(z)$, d'une fonction entière. On peut donc poser

$$\frac{F'}{F} = g'(z)$$

et par suite

$$F(z) = e^{g(z)}.$$

Ainsi toute fonction entière sans aucun zéro est de la forme

$$F(z) = e^{g(z)}$$

$g(z)$ étant entière.

Supposons maintenant les zéros $a_1, a_2, \cdots a_n$, en nombre limité d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, et ne comprenant pas l'origine.

Si nous posons

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{\alpha_1}\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} f(z).$$

la fonction $f(z)$ sera fonction entière sans aucun zéro. Elle sera donc de la forme $e^{g(z)}$ et par suite on aura

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} e^{\varphi(z)}.$$

Si l'origine était un zéro de multiplicité α_0, il faudrait ajouter le facteur z^{α_0}.

Zéros en nombre infini. — Supposons enfin que les zéros soient en nombre infini.

Comme ils sont isolés, si nous les rangeons par ordre de module croissant ou stationnaire, $|\, a_n \,|$ croîtra indéfiniment.

Il serait naturel de prendre comme dans le cas précédent

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{\alpha_1}\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} \cdots$$

mais le second membre serait un produit infini, qui pourrait ne pas être convergent. Nous allons adjoindre à chacun des facteurs $\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{\alpha_k}$ un facteur exponentiel e^{Q_k}, Q_k étant un polynôme et *nous chercherons si l'on ne peut pas disposer de ces polynômes de manière que le produit infini ainsi obtenu soit uniformément convergent dans tout le plan.*

Chacun des facteurs du produit se met sous la forme

$$e^{\alpha_n\left[\operatorname{Log}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + Q_n\right]}.$$

Si l'on avait $\left|\frac{z}{a_n}\right| < 1$, on *pourrait* développer le logarithme sous la forme

$$\left[-\frac{z}{a_n} - \frac{z^2}{2a_n^2} \cdots - \frac{z^\nu}{\nu a_n^\nu} \cdots\right].$$

On peut, *de toutes façons*, que $\left|\frac{z}{a}\right| \leqq 1$, poser, (en supprimant l'indice)

$$Q = \frac{a}{z} + \frac{z^2}{2a^2} + \cdots + \frac{z^\nu}{\nu a^\nu}$$

ν étant laissé encore indéterminé.

δ_1, r

Chacun des exposants sera alors de la forme

$$\varphi(z) = \alpha\left[\frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)a^{\nu+1}} + \frac{z^{\nu+2}}{(\nu+2)a^{\nu+2}} + \cdots\right].$$

Dans le cas où $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$, la série $\frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \cdots$ étant uniformément convergente, on pourra poser

$$\varphi(z) = \alpha\frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)a^{\nu+1}}(1+\varepsilon)$$

ε tendant vers zéro, lorsque a augmente indéfiniment.

Ces résultats étant établis, *quelle que soit la valeur de* z, nous pouvons construire la fonction

$$F(z) = e^{\alpha_1[\log\left(1-\frac{z}{a_1}\right)+Q_1]+\alpha_2[\log\left(1-\frac{z}{a_2}\right)+Q_2]+\cdots}$$

α, ξ

Voyons ce qu'elle représente en un point x *quelconque* du plan.

α, σ_1

Soit C un cercle de centre origine de rayon R englobant le point x.

Choisissons, une fois pour toutes, un facteur θ quelconque inférieur à l'unité. Laissons provisoirement de côté le produit des facteurs correspondant aux points a_n tels que $|a_n| > \frac{R}{\theta}$.

Dans la fonction F(z), prenons donc d'abord le produit des termes *en nombre limité*,

$$e^{\alpha_1[\log\left(1-\frac{z}{a_1}\right)+Q_1]+\alpha_2[\log\left(1-\frac{z}{a_2}\right)+Q_2]+\cdots+\alpha_n[\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+Q_n]}$$
$$= \frac{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n}}{a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}} e^{\alpha_1Q_1+\alpha_2Q_2+\cdots+\alpha_nQ_n}.$$

ρ ω

Chacun des facteurs de ce produit est holomorphe. Le produit représente donc une fonction holomorphe, *quel que soit* z

Pour les facteurs restants, on a

$$\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{R}{|a_n|} < \theta.$$

Donc, pour ces facteurs restants, *on a le droit* d'appliquer

le développement que nous avons donné ci-dessus, et mettre chaque facteur du produit sous la forme

$$e^{\alpha_n}\frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)a_n{}^{\nu+1}}(1+\varepsilon_n)$$

δ_1

(ν pourrait d'ailleurs être variable avec n). Mais la série des exposants ainsi formée, est uniformément convergente avec la série

$$\alpha'_n\frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)a_n{}^{\nu+1}}$$

α_1

et comme tous les α sont bornés, en même temps que la série

$$\frac{1}{\nu+1}\cdot\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1}$$

et *a fortiori* avec la série $\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{R}{a_n}\right|^{\nu+1}$.

Supposons que cette dernière le soit :

Tous les facteurs de ce produit sont holomorphes et le produit

r

de tous les facteurs après le $n^{ème}$, sera alors absolument et uniformément convergent dans tout le cercle.

ω

Le produit *total* $F(z)$ représentera donc une fonction holomorphe dans un cercle C dont le rayon a été choisi arbitrairement et n'a d'ailleurs aucune influence sur le choix des polynômes Q_n.

C'est donc une fonction entière.

ω, R

Ainsi, pour que le produit représente une fonction entière, il faut et il suffit que les degrés ν soient choisis de telle manière que la série $\frac{1}{\nu+1}\left|\frac{R}{a_n}\right|^{\nu+1}$ *soit absolument et uniformément convergente.*

Supposons, par exemple, qu'il existe un exposant fixe k tel que la série $\left|\frac{1}{a_n}\right|^k$ soit convergente.

φ

Il suffira de prendre $\nu+1=k$; les polynômes sont donc tous de degré $k-1$. On dit que la fonction est de genre $(k-1)$.

Dans le cas général, d'après une remarque de M. Borel, il suffit

π

que ν soit choisi de telle manière que $\nu+1>\log n$. En effet, à partir de valeurs suffisamment grandes de a_n, on aura

$$\left|\frac{R}{a_n}\right|<\frac{1}{e^2}.$$

Par suite

$$\frac{1}{\nu+1}\left(\frac{R}{a_n}\right)^{\nu+1} < \frac{1}{(\nu+1)e^{2(\nu+1)}} < \frac{1}{\log n \times e^{2\log n}} = \frac{1}{n^2 \log n}$$

série convergente absolument et uniformément.

Nous avons supposé que l'origine n'était pas zéro de la fonction.

Si l'origine est un zéro de multiplicité α_0, on a la fonction

$$F(z) = z^{\alpha_0} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} e^{Q_n(z)}.$$

Les facteurs du produit s'appellent les « facteurs primaires » de la fonction.

Les polynômes Q_n ont pour expression

$$Q_n = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^\nu}{\nu a_n^\nu}.$$

Ils sont assujettis à la seule condition que la série

$$\sum \frac{1}{\nu+1}\cdot\left(\frac{R}{a_n}\right)^{\nu+1}$$

soit absolument et uniformément convergente

En multipliant $F(z)$ par $e^{g(z)}$, $g(z)$ étant une fonction entière, on a la fonction holomorphe la plus générale ayant les zéros donnés.

Application : les zéros sont les nombres entiers successifs. Fonction sin πz. — Cherchons une fonction admettant les zéros simples

$$0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm n \cdots$$

La série

$$\frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{n^2}$$

est *absolument convergente.*

φ

Il suffit donc de prendre pour Q_n un polynôme du premier degré, soit

$$Q_n = \frac{z}{a_n} = \pm \frac{z}{n}.$$

ω

On a donc la fonction

$$S(z) = z \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

α

Dans ce produit absolument convergent, si nous accouplons les facteurs correspondant à deux valeurs de n égales et de signes contraires, nous obtiendrons

$$S(z) = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

ρ

La fonction $S(z)$ est donc une fonction impaire.

r

La fonction $\sin \pi z$ admet les mêmes zéros. On peut donc être certain que

$$\sin \pi z = z \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \times e^{g(z)}.$$

σ_2

On sait que le facteur $e^{\frac{z}{n}}$ se réduit à π. Nous allons retrouver ce résultat.

Nous avons

$$S(z) = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Le produit étant uniformément convergent, prenons la dérivée logarithmique

$$\frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n}\right).$$

ρ, σ_1

Nous obtenons au second membre la fonction de pôles simples $\pm n$, que nous avons construite précédemment, que nous avons désignée par $\lambda(z)$ et qui admet la période $+1$

$$\lambda(z + 1) = \lambda(z).$$

d On a donc

$$\frac{S'(z+1)}{S(z+1)} = \frac{S'(z)}{S(z)}.$$

En intégrant,

$$S(z+1) = kS(z).$$

Pour déterminer k, donnons à z la valeur particulière $-\frac{1}{2}$.

On obtiendra

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = kS\left(-\frac{1}{2}\right).$$

ρ Or $S\left(\frac{1}{2}\right)$ étant différent de zéro, et la fonction étant une fonction impaire, on a donc $k = -1$.

δ_1 Par suite

$$S(z+1) = -S(z) \qquad \text{D'où} \qquad S(z+2) = +S(z).$$

La fonction admet la période $+2$.

Enfin, α_2 en donnant à z la valeur particulière $z = \frac{1}{2}$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\prod\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\prod\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n+1}{2n}$$

et ρ d'après la formule de Wallis

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

R La fonction

$$\pi S(z) = \pi z \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

admet donc la période $+2$, les zéros $\pm n$, et se réduit à 1 pour la valeur $z = \frac{1}{2}$.

ε On reconnaît toutes les propriétés de la fonction $\sin \pi z$.

On retrouve le développement en produit infini que nous avons obtenu pour cette fonction.

Autre expression des fonctions fractionnaires. — Donnons-nous une fonction fractionnaire $F(z)$. Soient $a_1, a_2 \cdots a_n \cdots$ ses pôles en nombre fini ou infini.

Nous pouvons former une fonction entière $\varphi(z)$ admettant ces points comme zéros avec le même ordre de multiplicité. Considérons alors le produit $F(z)\cdot\varphi(z)$. Ce produit n'admet plus de pôles.
ω

C'est donc une fonction entière. On peut écrire

$$F(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

ω

Toute fonction fractionnaire est donc le quotient de deux fonctions entières.

IV. — FONCTIONS IMPLICITES

Existence. — Après avoir étudié les fonctions analytiques définies de façon explicite, ou par leurs zéros, leurs pôles ou points singuliers, nous allons étudier les fonctions implicites définies par une équation de la forme

$$f(z, u) = 0.$$

ζ

Nous supposerons $f(z,u)$ holomorphe par rapport aux variables z, u quand z et u se déplacent respectivement à l'intérieur de deux aires S et S'. Nous supposerons que $f(z, u)$ ne peut pas se décomposer en un produit de deux fonctions holomorphes

$$f(z, u) = f_1(z, u) \times f_2(z, u).$$

α, ψ, σ_1

Nous allons d'abord démontrer l'existence de une ou plusieurs fonctions implicites u de la variable z.

ζ

Supposons qu'il existe un système de valeurs $z = a$ $u = b$ appartenant respectivement à S et S', telles que

$$f(a, b) = 0.$$

ρ

Si nous considérions la fonction $f(a, u)$, on voit que $u = b$ serait un zéro de cette fonction.

α_1, ψ

Nous allons d'abord montrer que *c'est un zéro de multiplicité finie.*

En effet la fonction $f(z, u)$ étant holomorphe dans le domaine de b
σ_2

se développe sous la forme

$$f(z, u) = \varphi_0(z) + (u - b)\varphi_1(z) + \cdots$$

Pour $z = a$, un certain nombre de fonctions φ_0, φ_1 s'annulent. Si toutes les fonctions s'annulent jusqu'à φ_n exclusivement, $u = b$ est un zéro d'ordre n pour $f(a, u)$.

Si tous les φ s'annulaient pour $z = a$, $f(a, u)$ serait identiquement nul dans le domaine de b et par suite, d'après ce que l'on sait sur les fonctionsd'une variable, dans toute l'aire S'.

D'autre part dans le domaine de a, on peut écrire

$$f(z, u) = \psi_0(u) + (z - a)\theta(z, u)$$

θ étant encore holomorphe dans les aires S et S', Or

$$f(a, u) = \psi_0(u).$$

Si tous les φ s'annulaient, $\psi_0(u)$ serait identiquement nul.

On aurait donc finalement

$$f(z, u) = (z - a)\theta(z, u).$$

La fonction holomorphe $f(z,u)$ serait donc le produit de deux fonctions holomorphes, contrairement à notre hypothèse générale.

Donc pour chaque valeur de z, l'équation $f(z, u) = 0$ ne peut admettre en u, que des zéros d'un ordre de multiplicité fini.

Il faut maintenant étudier comment varient ces racines égales u quand z varie aux environs de a.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Les racines sont des fonctions continues.

THÉORÈME. — *Si pour $z = a$, l'équation $f(z,u) = 0$ admet n racines égales à b, lorsqu'on donnera à z des valeurs voisines de a, l'équation admettra n racines voisines de b et n racines seulement.*

De façon plus précise encore, étant donné un cercle C' de centre b, de rayon r' inférieur à une certaine limite, on peut lui faire correspondre un cercle C de centre a, de rayon r, tel que si z se meut dans l'intérieur de C, l'équation ait toujours n racines dans l'intérieur de C' et n racines seulement.

τ, τ_1 Nous allons évidemment nous appuyer sur le théorème déjà démontré concernant le nombre de zéros de deux équations,

$$f(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(z) + \varphi(z) = 0.$$

τ_2 Dans le domaine de b, nous avons un développement de la forme

$$f(z, u) = \varphi_0(z) + (u - b)\varphi_1(z) + \cdots + (u - b)^n\varphi_n(z) + \cdots$$

toutes les fonctions φ étant holomorphes dans S, et de plus,

$$\varphi_0(a) = 0 \qquad \varphi_1(a) = 0 \cdots \varphi_{n-1}(a) = 0 \qquad \varphi_n(a) \neq 0$$

En mettant en évidence le premier terme qui ne s'annule pas pour $z = a$, nous écrivons l'équation :

$$f(z, u) = (u - b)^n\varphi_n(z)[1 + P + Q],$$

en posant

$$P(z, u) = \frac{1}{(u - b)^n}\frac{\varphi_0}{\varphi_n} + \frac{1}{(u - b)^{n-1}}\frac{\varphi_1}{\varphi_n} + \cdots + \cdots + \frac{1}{u - b}\cdot\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$$

$$Q(z, u) = (u - b)\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} + (u - b)^2\frac{\varphi_{n+2}}{\varphi_n} + \cdots$$

β, τ_2 Rappelons exactement le théorème que nous avons signalé : Si deux fonctions f et φ sont holomorphes dans une aire limitée par un contour C, si, *lorsque z décrit ce contour*, l'on a constamment $\left|\frac{\varphi}{f}\right| < 1$, τ_2 le nombre de zéros contenus dans l'aire est le même pour les deux fonctions

$$f(z) \qquad \text{et} \qquad F(z) = f(z) + \varphi(z).$$

δ_1 Comme l'équation $(u - b)^n\varphi_n(z) = 0$ a en u, n racines, φ il suffit donc de démontrer que si l'on fait décrire à u *la circonférence de cercle* C′, on peut avoir

$$|P + Q| < 1$$

quel que soit le point u sur cette circonférence, et quel que soit le point z à l'intérieur de C.

Pour démontrer que $|P + Q| < 1$, φ il suffit de démontrer que l'on a séparément

$$|P| < \frac{1}{2} \qquad |Q| < \frac{1}{2}.$$

La démonstration est, pour ainsi dire, faite.

δ_1

Lorsque u décrit C', on a $|u-b|=r'$: Nous supposerons que C ait été suffisamment petit pour que $\varphi_n(z)$ n'ait aucun zéro à l'intérieur ; r $|\varphi_n(z)|$ sera dans ce cas supérieur à un nombre fixe δ. Enfin toutes les fonctions φ, étant holomorphes dans S, seront, quel que soit z, inférieures en module à un nombre fixe M. δ, r

On aura donc

$$|Q|<\frac{M}{\delta}(r'+r'^2+\cdots)=\frac{M}{\delta}\frac{r'}{1-r'}$$

ω

Pour que $|Q|<\frac{1}{2}$, il suffit donc que

$$\frac{M}{\delta}\frac{r'}{1-r'}<\frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad r'<\frac{\delta}{\delta+2M}.$$

ξ

Considérons P : P est composé d'un nombre fini de termes. Soit μ le maximum des modules des n premières fonctions

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \cdots\ \varphi_{n-1}.$$

o

On aura

$$|P|<\frac{\mu}{\delta}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'^2}+\cdots+\frac{1}{r'^n}\right)=\frac{\mu}{\delta}\frac{1-r'^n}{1-r'}\times\frac{1}{r'^n}.$$

A fortiori,

$$|P|<\frac{\mu}{\delta}\cdot\frac{1}{r'^n(1-r')}.$$

β

Pour que l'on ait $|P|<\frac{1}{2}$, φ il suffit donc que

$$\mu<\frac{\delta}{2}r'^n(1-r').$$

α

Nous allons voir si l'on peut prendre z suffisamment voisin de a, pour que cette condition soit remplie pour les n fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{n-1}$.

Or σ_2 toutes ces fonctions s'annulent pour $z=a$ et sont continues. δ_1 On peut donc déterminer un cercle C de rayon r suffisamment petit, pour que, ψ quel que soit z à l'intérieur ou sur ce cercle, *les fonctions en nombre fini* restent inférieures, en module, à un nombre fixé arbitraire, en particulier à $\frac{\delta}{2}r'^n(1-r')$.

ω
Quel que soit z à l'intérieur de C et quel que soit u *sur* C', on aura donc bien simultanément

$$|Q|<\frac{1}{2} \qquad |P|<\frac{1}{2}$$

et par suite

$$|P+Q|<1.$$

Pour tout point z à l'intérieur de C, les deux équations en u

$$f(z,u)=0, \qquad (u-b)^n\varphi_n(z)=0$$

admettent même nombre de racines, c'est-à-dire n. Le théorème est donc démontré.

Fonctions algébriques. — Etudions d'abord le cas particulier où ξ $f(z,u)$ est un polynôme en z et u. Nous le mettrons sous la forme

$$f(z,u)=A_0u^n+A_1u^{n-1}+\cdots+A_n$$

les A étant des polynômes en z.

La fonction est holomorphe à l'intérieur des cercles S, S' de rayons aussi grands qu'on le veut.

Pour chaque valeur de z n'annulant pas A_0, σ2 l'équation admet n racines $u_1, u_2\cdots u_n$. Deux de ces racines deviennent égales σ2 si l'on a simultanément

$$f(z,u)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(z,u)=0$$

et par suite d si l'on a $R(z)=0$, $R(z)$ étant le résultant de ces deux équations.

Enfin si une valeur de z annulait A_0 et les premiers coefficients, r l'équation se réduirait au degré $(n-k)$ et n'admettrait plus que $(n-k)$ racines u. Mais σ2, v si l'on posait $u=\frac{1}{\rho}$, l'équation transformée

$$A_n\rho^n+A_{n-1}\rho^{n-1}+\cdots+A_1\rho+A_0=0$$

admettrait k racines ρ nulles. On peut donc dire que l'équation en u admet k racines infinies.

Nous appellerons « points critiques », les points ayant pour affixes les racines de l'équation

$$A_0(z)R(z) = 0.$$

En ce qui concerne les racines de $R(z) = 0$, on verra plus loin la raison de leur introduction.

Supposons que z ζ reste à l'intérieur d'une aire S ne renfermant aucun point critique et α étudions comment varient les racines u. Faisons décrire à z une ligne l.

Pour chaque valeur de z, l'équation admettra *n racines distinctes*. Soit u^0_k l'une quelconque des racines correspondant à z_0. Lorsqu'on passe de z_0 à un point infiniment voisin z_1, σ_2 cette racine u_k δ_1, ξ varie d'une façon continue et passe de u^0_k à $u^1_k \cdots$, etc. Aux valeurs $z_0, z_1, \cdots z_i \cdots$, correspondront donc une suite de valeurs $u^0_k, u^1_k, \cdots u^i_k \cdots$, variant d'une façon continue. L'ensemble de ces valeurs constituera une fonction u_k de la variable z.

THÉORÈME. — ψ *Chacune des fonctions u_k est une fonction uniforme de z dans l'aire* S.

Quand z, partant de z_0, décrit un contour fermé l et revient en z_0, ν, ψ nous allons montrer que la racine u_k revient à sa valeur primitive u^0_k. Tout ce que nous pouvons dire en effet jusque maintenant, c'est que, lorsque z revient à sa valeur initiale z_0, σ_2 la valeur finale de u_k est encore une des racines de $f(z_0, u_k) = 0$.

Nous allons simplement nous baser sur ce que, à l'intérieur de S, l'équation n'admet pas de racines multiples et que ces racines r restent finies. Dans ces conditions, le *module de la différence* entre deux quelconques des racines reste supérieur à un nombre fixe r'.

Autour de chaque point ζ de S, on peut décrire une circonférence χ de rayon r suffisamment petit, pour que, lorsque z se déplace dans un de ces cercles, chacune des racines u_k se déplace dans un r cercle de rayon moindre que r'. Ce cercle r' ne contient donc certainement qu'une seule racine u_k, et lorsque z décrira une courbe r fermée dans C, la racine u_k reviendra certainement à sa

valeur initiale. En d'autres termes, la variation totale de la racine u_k est nulle pour toute courbe fermée décrite par z dans le cercle C.

Le théorème est ainsi démontré pour des petites aires de S. Il faut maintenant considérer l'aire totale.

Démontrons d'abord que le rayon r, que l'on doit tracer autour de chaque point ζ (pour que la racine u_k se déplace dans un cercle de rayon r') est *indépendant* de ce point ζ et de la racine u_k considérée.

Il suffit de reprendre la démonstration du théorème précédent. Nous avons posé

$$f(z, u) = \varphi_0 + (u - b)\varphi_1 + \cdots$$

Le rayon r est déterminé par la condition que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{n-1}$ (pour un zéro d'ordre n) restent moindres qu'une certaine quantité $\frac{\delta}{2} r'^n(1 - r')$. Dans le cas actuel, $n = 1$: il suffit de considérer φ_0. Or

$$\varphi_0 = f(z, b).$$

b désignant l'une quelconque des racines u correspondant à la valeur ζ. On doit donc avoir

$$|f(z, b)| < \frac{\delta}{2} r'(1 - r').$$

Comme l'on a $f(\zeta, b) = 0$, cette inégalité sera satisfaite à la seule condition que $|z - \zeta|$ soit inférieur à une certaine quantité r.

Cette valeur r peut bien être choisie indépendante des valeurs ζ et b, la fonction $f(z, u)$ étant *uniformément* continue dans les champs bornés des valeurs de z et u.

Si l'on décompose S en aires partielles par des transversales quelconques, il est bien évident que la variation d'une des racines u_k, quand z décrit le contour total, sera égale à la somme des variations quand z décrit les contours partiels.

Décomposons alors S en un nombre *fini de* carrés de diago-

nale inférieure à r; la variation d'une quelconque des racines u_k quand z décrira le contour de chaque carré partiel étant nulle, la variation de u_k quand z décrira le contour total de S sera également nulle ; la racine u_k reprendra donc bien sa valeur initiale :

Chaque racine u est bien fonction uniforme de la variable z.

THÉORÈME. — *Chacune des racines est une fonction analytique de z.*

Soit b l'une quelconque des racines correspondant à la valeur z_0.

Nous devons donner à z_0 un accroissement h ; la racine b prendra un accroissement k. Nous allons montrer que le rapport $\frac{k}{h}$ a une limite bien déterminée, quelle que soit la façon dont h tende vers zéro. On a

$$f(z_0, b) = 0 \qquad f(z_0 + h, b + k) = 0.$$

La seconde équation est un polynôme en h et k et peut s'écrire, en tenant compte de la première,

$$h\frac{\partial f}{\partial z_0} + k\frac{\partial f}{\partial b} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)} f(z_0, b) + \cdots = 0.$$

Posons $\frac{k}{h} = \lambda$. L'équation devient une équation entre λ et h.

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} + \lambda\frac{\partial f}{\partial b} + \frac{h}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \lambda\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)} f + \cdots = 0.$$

Pour $h = 0$, l'équation admet une seule racine $\lambda_0 = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial b}\right)_0}$.

Donc, pour h infiniment petit, l'équation n'admet qu'une seule racine voisine de λ_0. Le rapport $\frac{k}{h} = \lambda$ a donc une limite, bien déterminée, λ_0 quand h tend vers zéro.

En résumé, chacune des racines u de l'équation $f(z, u) = 0$ est une fonction holomorphe de z dans l'aire S, ne contenant aucun point critique.

L'équation définit donc n fonctions holomorphes de z dans l'aire S.

Points critiques des racines. — Les points critiques de ces fonctions ne peuvent donc se trouver que parmi les racines de l'équation

$$A_0(z)R(z) = 0.$$

Soit $z = a$ un de ces points critiques. Faisons décrire à z un chemin continu partant de z_0 et aboutissant à un point α voisin de a.

En z_0, l'équation admet n racines distinctes $u_1, u_2, \dots u_n$

Considérons l'une quelconque u_k de ces racines. Suivie par continuité, elle prendra les valeurs successives $u^0_k, u^1_k, \dots u^i_k$ pour les valeurs $z_0, z_1, \dots z_i$.

Lorsque z viendra en α, cette racine sera devenue v_k. Or au point a, l'équation admet n racines. L'une d'elles sera infiniment voisine de la racine v_k. Si cette racine est finie et simple, il n'y aura aucune difficulté ; on pourra prolonger le contour C jusqu'en a et au delà. La racine u_k prendra en α la valeur v_k, en a, la valeur infiniment voisine b. Au delà, on trouvera une valeur et une seule infiniment voisine de b que l'on pourra suivre aussi par continuité.

Si la valeur u_k, suivie par continuité, grandissait indéfiniment (en module) quand on se rapproche de a, il y aurait en a, une ou plusieurs racines infinies. En posant $w = \frac{1}{u}$, l'équation $f\left(z, \frac{1}{w}\right) = 0$ admettrait en a une racine nulle, en α une racine infiniment petite. Si la racine nulle est simple, il n'y aura de même aucune difficulté : la fonction $w = \frac{1}{u}$ partant de $\frac{1}{u^0_k}$ prendrait en α la valeur infiniment petite $\frac{1}{v_k}$, en a une valeur nulle et il y aurait au delà de a, une racine infiniment petite qui donnerait la valeur de la fonction $\frac{1}{u}$ suivie par continuité.

La fonction w, admettant pour zéro simple le point $z = a$, on voit que ce point serait un pôle simple pour la fonction u.

δ_1, ξ

Il n'en sera plus de même si, au point a, l'équation admet une racine multiple d'ordre i.

Si cette racine *finie b* est infiniment voisine de v_k, en suivant C, on arriverait bien à la valeur v_k en α.

σ_2

Il y aurait en α, i racines infiniment voisines de v

δ_1

En prolongeant C jusqu'en a, la racine v_k suivie par continuité

ρ, R_1

deviendrait égale à b. Mais, au delà de a, il y aurait encore i

ψ

racines infiniment voisines de b, et l'on ne saura pas quelle sera celle de ces valeurs qui correspond à la racine u_k et qu'il faudra suivre à partir de là. Les i valeurs des racines formeront à partir de a,

ω

i branches. Il y a donc indétermination partielle à partir de a. Le point a est un point singulier de la racine considérée. On l'appelle « *point d'embranchement* » de la fonction.

ξ

Le résultat serait le même si la racine multiple b limite de

π

v_k était infiniment grande, les racines infiniment grandes correspondant aux racines nulles de l'équation $f\left(z, \frac{1}{w}\right) = 0$.

Ces considérations montrent que, même si l'on donne la valeur initiale de la fonction considérée, il n'est possible d'obtenir sa

β

valeur finale que si le chemin parcouru par la variable z ne passe par aucun des points critiques, racines de $R(z) = 0$ et expliquent l'introduction de ces racines.

χ

On pourrait rendre chacune des fonctions holomorphes, par exemple en réunissant les points critiques a_1, a_2,... a_i,..., racines de $R(z) = 0$ par une coupure allant ensuite jusqu'à l'infini et interdisant à la variable z, la traversée de cette coupure.

Comme dans le cas de la fonction logarithmique ou de la fonc-

σ_2, γ_1

tion z^m, on peut considérer l'équation $f(z, u) = 0$ comme définissant une *seule fonction* multiforme.

On y est conduit par les considérations suivantes :

Fonctions multiformes. — Nous allons étudier les variations de l'une des fonctions u_k lorsque la variable z se déplace d'une façon quelconque dans le plan (sans passer par aucun point critique).

Soit a un de ces points critiques, pour lequel l'équation $f(a, u) = 0$

admette une racine multiple d'ordre m que nous désignons par b. Soit u_1 une racine. Lorsqu'on arrive au point α voisin de a, cette racine u_1 prend la valeur v_1.

Comme nous l'avons vu, il faut supposer que a est un point critique pour la racine considérée et que par conséquent v_1 est infiniment voisine de l'une des *racines multiples* b au point a. Soient de même $v_2, v_3, \dots v_m$ les autres racines infiniment voisines de b.

Si z tourne une première fois autour de a et revient en α, la solution v_1, qui *est restée toujours infiniment voisine de* b, ne peut avoir en α que l'une des valeurs $v_1, v_2, \dots v_m$. Si la solution v_1 reprend, après ce tour, la valeur v_1, elle reprendra indéfiniment la valeur v_1, quel que soit le nombre de tours décrits par z.

Supposons qu'après un premier tour, la solution initiale v_1, prenne une des autres valeurs, v_2, par exemple.

Si l'on fait un deuxième tour, la solution ne pourra pas reprendre la valeur v_2, puisque sans cela elle reprendrait indéfiniment la valeur v_2, quel que soit le nombre de tours (et leur sens) et nous savons qu'en faisant un tour en sens inverse, on doit revenir à la valeur v_1.

Il pourrait arriver qu'après ce deuxième tour, la solution reprenne la valeur v_1, mais alors on obtiendra indéfiniment les valeurs $v_1, v_2, v_1, \dots$

Ces deux solutions se permuteront donc entre elles par la rotation autour de a.

Il est possible qu'après un deuxième tour, la solution prenne une nouvelle valeur v_3. Après un nouveau tour, elle ne pourra reprendre la valeur v_3 (qu'elle reprendrait indéfiniment) ni la valeur v_2 (car v_2 et v_3 se permuteraient constamment). Mais on pourrait revenir à la valeur v_1. On obtiendra alors constamment, et dans l'ordre, $v_1, v_2, v_3, v_1, \dots$ Les trois racines se permuteraient entre elles.

On continuerait aisément le raisonnemment, et on voit que la solution v_1, fait nécessairement partie d'un groupe de solutions $v_1, v_2, \ldots v_k$ (en nombre inférieur ou égal à m) et qui se permutent circulairement dans un certain ordre quand on tourne autour de a. On dit qu'elles forment un « *système circulaire* ».

Si l'on était parti d'une solution v_{k+1} qui ne fasse pas partie du groupe précédent et également infiniment voisine de b, on verrait de même que v_{k+1} fait partie d'un nouveau groupe de solutions, ne contenant aucune des solutions du premier groupe, qui se permutent circulairement quand on tourne autour de a.

En résumé, *on voit que toutes les solutions qui, en x sont infiniment voisines de b, se partagent en un ou plusieurs groupes, toutes les solutions d'un même groupe, se permutant circulairement entre elles par la rotation autour de a. Chaque solution ne peut appartenir qu'à un seul groupe.*

Lacets. Diverses déterminations. — Nous appellerons « *lacet du point a* » un chemin qui, partant d'un point initial z_0, aboutit à un point x voisin de a, se continue par un petit contour fermé, autour de a, décrit dans le sens direct, et revient au point initial.

Il est clair que si une rotation autour de a, a permuté la racine v_1 (correspondant à la valeur initiale u_1) en la racine v_2, lorsque z décrit le lacet de a, la racine u_1 prendra la valeur finale u_2.

Le lacet a permute donc les racines u_1, u_2 ; k lacets successifs (ou un contour fermé partant de z_0 et y revenant après avoir tourné le même nombre de fois autour de a) échangeront successivement les racines dépendant du groupe circulaire auquel appartient u_1.

Enfin, considérons maintenant un chemin quelconque allant d'un point z_0 à un point Z, mais ne tournant qu'autour d'un seul point critique a.

Sur ce chemin, après le dernier tour fait autour de a, prenons un point M quelconque.

Il est clair que, si, au lieu de nous diriger vers Z, nous sui-

vons le chemin Mz_0, puis z_0Z, nous obtiendrons pour la solution considérée la même valeur finale.

En d'autres termes, le chemin considéré sera équivalent au point de vue du résultat, à un chemin fermé partant de z_0 et y revenant, et un autre chemin particulier (par exemple, la ligne droite) allant de z_0 à Z, mais ne tournant plus autour de a.

Le contour fermé lui-même est équivalent à un certain nombre de lacets.

Un contour quelconque allant de z_0 à Z est donc équivalent à un certain nombre de lacets, suivis du chemin rectiligne z_0Z, ou inversement au chemin z_0Z suivi d'un certain nombre de lacets.

Soient alors U_1, U_2,... U_m les m valeurs finales des racines u_1, u_2..., u_m quand on décrit le chemin rectiligne z_0Z et soient U_1, U_2,... U_k celles qui appartiennent à un même groupe circulaire.

Une combinaison de lacets pourrait permuter la solution u_1 en une quelconque des autres solutions U_1, U_2..., U_k.

Donc, par un chemin convenable allant de z_0 à Z on peut passer de la valeur u_1 à l'une quelconque des valeurs U_1, U_2,... U_k.

En d'autres termes, la valeur finale de la solution u_1, que l'on a choisie au départ, ne peut être que l'une des k valeurs U_1, U_2,... U_k et peut-être l'une quelconque de ces valeurs.

Si l'on considérait les lacets relatifs aux autres points singuliers, racines de $R(z) = 0$, le lacet du point a_2, par exemple, permettraient d'échanger les valeurs U_1, $U'_2 \cdots U'_i$.

D'une façon générale, une combinaison de lacets quelconque autour des divers points singuliers permettrait d'échanger toutes les valeurs U_1, U_2,... U_n ou seulement un nombre moindre de ces valeurs.

On voit donc que la solution choisie peut être considérée comme une fonction « *multiforme* » qui, en chaque point du plan, peut avoir k valeurs distinctes, ces valeurs satisfaisant constamment à l'équation donnée $f(z, u) = 0$.

On donne le nom de « fonction algébrique » à cette fonction multiforme définie par une équation algébrique $f(z, u) = 0$.

Points singuliers. — D'après cette discussion, on voit que la fonction algébrique admet deux espèces de points singuliers :

1° Des *pôles fixes* racines de $A_0(z) = 0$ (mais non en même temps de $R(z) = 0$).

2° Des « *branchements* » (racines de $R(z) = 0$) qui sont tels qu'aux environs de chacun d'eux, l'équation admette m racines infiniments voisines d'une racine multiple b, ces racines formant des groupes circulaires.

Etude à l'infini. — Pour étudier la fonction à l'infini, il faut poser $z = \frac{1}{\zeta}$ et étudier les solutions de $f\left(\frac{1}{\zeta}, u\right) = 0$.

Or, le premier membre de cette équation rendue entière est encore un polynôme en ζ, u. Le point $\zeta = 0$ pourra être un point simple pour la solution u considérée ou un point critique algébrique. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction multiforme algébrique n'admet à distance finie que des points singuliers algébriques (pôles ou branchements).*

Mais nous allons voir que la réciproque de ces propriétés est vraie en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction multiforme qui n'a en chaque point du plan qu'un nombre fini de valeurs, variant d'une façon continue, et qui n'admet à distance finie ou infinie que des points singuliers algébriques est une fonction algébrique.*

Il est facile de voir, *a priori*, quelle peut être la base de la démonstration : Nous voulons démontrer que u est liée à z par une équation de la forme

$$A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

A_0, A_1,... A_n étant des polynômes en z.

1° Il faut donc d'abord qu'à toute valeur de z corresponde toujours un *même* nombre de valeurs de u. 2° Les rapports de ces polynômes au premier représentent des fonctions symétriques de ces valeurs, ce qui amène à étudier les fonctions symétriques des solutions. Il faudra et il suffira que ces fonctions symétriques soient rationnelles.

Tout d'abord, si en un point ordinaire M, la fonction a n déterminations, σ_2 ces n déterminations variant d'une façon continue, r on aura encore n déterminations en un point voisin M'. De proche en proche, on en conclut que la fonction a toujours n déterminations en tout point non singulier.

Soient $u_1, u_2, \dots u_n$ ces n déterminations en un point z_0 et soit a un point singulier. Considérons le lacet de a d'origine z_0. Si z décrit ce lacet, σ_2 les n déterminations ne peuvent que se permuter entre elles.

Le même raisonnement que nous avons fait, et qui était simplement basé sur ce fait qu'en un point a, il ne pouvait y avoir que n valeurs bien déterminées de la fonction et que ces déterminations étaient continues, montre que toutes ces déterminations se classent en un ou plusieurs groupes circulaires, la rotation autour du point singulier n'ayant pour effet que de permuter entre elles les valeurs d'un groupe.

2° ξ Soit alors $V(u_1, u_2, \dots u_n)$ une fonction symétrique entière quelconque de *toutes les valeurs*. ρ V sera comme tous les u une fonction analytique de z. De plus, ψ elle sera uniforme π car un chemin fermé quelconque issu de z_0 ne peut avoir pour effet que de permuter les valeurs $u_1, u_2, \dots u_k$ de chaque groupe, d et comme il en sera de même de toutes les valeurs, la valeur de V ne sera donc pas changée.

ξ, δ_1 Un chemin quelconque allant de z_0 à Z, qui peut être ramené à un contour fermé suivi du chemin rectiligne z_0Z, donnera donc ω également à V toujours la même valeur finale : V est donc une fonction *holomorphe* de z sauf aux points critiques des u.

Les seuls points critiques de V ne peuvent donc être que ceux σ_2 pour lesquels une au moins des valeurs des u est infinie. Ce sont donc des pôles pour u, donc aussi pour V. Enfin, le point à l'infini, étant supposé point simple ou pôle pour les u sera également point simple ou pôle de V.

ω En résumé, V est une fonction holomorphe n'admettant à distance finie ou infinie d'autres singularités que des pôles.

σ_2, ω

Toute fonction symétrique des u se réduit donc bien à une fonction rationnelle de z.

δ_1, ξ

Soient alors S_1, S_2,... S_k... S_n la somme des u, la somme des produits deux à deux,... k à k, etc. Ce seront toutes des fonctions

α

rationnelles de z. En les réduisant au même dénominateur A_0, on pourra donc écrire

$$S_k = (-1)^k \frac{A_k}{A_0}.$$

ω

On en conclut bien que les u sont racines de l'équation

$$A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + \cdots A_n = 0.$$

A_0, A_1,... A_n étant des polynômes en z.

Mais on peut en déduire un résultat plus restrictif encore : Supposons qu'une rotation quelconque autour des divers points critiques, c'est-à-dire qu'une combinaison quelconque de lacets, n'ait jamais pour effet que de permuter seulement k des déterminations u.

La fonction déduite par continuité de la valeur φ_0 n'aurait nulle part que k valeurs au plus.

ξ, α

Au lieu d'une fonction symétrique $V(u_1, u_2, \ldots u_n)$, nous eussions pu considérer une fonction symétrique de $u_1, u_2, \ldots u_k$ seu-

o

lement. Nous aurions vu que cette fonction symétrique était une fonction holomorphe de z n'admettant que des pôles.

d

Nous en aurions déduit que ces déterminations étaient racines d'un polynôme $P(z, u)$ de degré k seulement en u.

α

Si l'on donne à z une valeur z_0, le polynôme en u, $f(z_0, u)$ admettrait toutes les racines de $P(z_0, u)$.

ω

On aurait donc

$$f(z_0, u) = P(z_0, u) Q(z_0, u),$$

δ_1

$Q(z_0, u)$ étant encore un polynôme en u. Cette égalité ayant lieu pour toute valeur de z_0, serait une identité

$$f(z, u) = P(z, u) Q(z, u).$$

D'ailleurs les coefficients du polynôme

$$Q(z, u) = B_0 u^{n-k} + B_1 u^{n-k-1} + \cdots + B_{n-k}$$

seront des fonctions rationnelles de z, comme on le voit en donnant à u, $(n - k + 1)$ valeurs quelconques et résolvant le système d'équation en B_0, B_1,... telles que

$$B_0 u_1^{n-k} + B_1 u_1^{n-k-1} + \cdots + B_{n-k} = \frac{f(z, u_1)}{P(z, u_1)}.$$

En résumé, on voit que, dans ce cas, l'équation $f(z, u) = 0$ pourrait se mettre sous la forme

$$f(z, u) = P(z, u) \times \frac{Q_1(z, u)}{p(z)},$$

P et Q, étant des polynômes en z, u, et $p(z)$ un polynôme en z.

Le polynôme $f(z, u)$ *serait décomposable en un produit de polynômes. Si donc l'équation donnée* $f(z, u) = 0$ *est irréductible,* comme on l'a supposé au début, *une combinaison convenable de lacets devra permettre de passer d'une valeur* u_i *à une autre valeur* u_k *absolument quelconque.*

Cas où $f(z, u)$ est une fonction holomorphe quelconque. — Soit a, b, un système de valeurs qui annulent $f(z, u)$.

Nous avons déjà démontré que, si pour $z = a$ l'équation $f(a, u) = 0$ admet m racines égales à b, pour z voisin de a, l'équation admettra m racines voisines de b.

Si $m = 1$, lorsque z variera d'une façon continue, on aura une suite continue de valeurs de u vérifiant constamment l'équation $f(z, u) = 0$, ce qui démontre l'existence de la fonction implicite u, tant que la racine u est simple, c'est-à-dire tant que l'on n'aura pas simultanément $f'_u(z, u) = 0$.

De même que dans le cas d'un polynôme, et simplement en raison de la continuité de ces racines, lorsque z tourne autour d'un point critique a, ces racines se partagent en groupes circulaires. Ces diverses fonctions sont analytiques. Leur dérivée est donnée par l'équation

$$f'_z + f'_u \frac{du}{dz} = 0.$$

Etude à l'infini. — Si l'on veut étudier la fonction à l'infini, il faut faire la substitution $z = \frac{1}{\zeta}$.

Contrairement à ce qui se passe pour un polynôme, on ne peut dire ce que sera l'équation transformée. Le point à l'infini peut être point critique essentiel pour la fonction u.

Il en serait de même si pour une suite de valeurs de z tendant vers a, la solution u augmentait indéfiniment.

Nous allons enfin démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La fonction implicite holomorphe que l'on vient de définir est la seule fonction continue vérifiant l'équation donnée* $f(z, u) = 0$, *et se réduisant à la valeur* b *pour* $z = a$, *tant que* $\frac{\partial f}{\partial u}(z, u)$ *est différent de zéro.*

Ce résultat est presque évident, étant donnée la démonstration faite pour établir l'existence de la fonction. Nous allons l'établir d'une manière différente.

Désignons par $u = \varphi(z)$ la fonction implicite. Supposons qu'il existe une autre fonction $\psi(z)$ se réduisant à la valeur b pour $z = a$, et vérifiant identiquement $f(z, u) = 0$. Nous pourrons poser

$$\psi(z) = \varphi(z) + \rho(z),$$

ρ étant nulle pour $z = a$ et continue comme φ et ψ. Nous allons démontrer que $\rho(z)$ est identiquement nulle.

En effet, pour toute valeur de z, on doit avoir simultanément

$$f(z, u) = 0, \qquad f(z, u + \rho) = 0.$$

Nous allons appliquer à la deuxième équation, le développement de la formule de Taylor en nous bornant à un arc c' suffisamment petit de la courbe décrite par z. Nous aurons, en tenant compte de la première équation,

$$\rho\left[\frac{\partial f}{\partial u}(z, u) + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(z, u) + \cdots\right] = 0.$$

Ce résultat doit être identiquement nul tout le long de c'; ρ est nulle pour $z = a$, et par hypothèse $\frac{\partial}{\partial u} f(a, b)$ est différent de zéro. Donc la parenthèse est différente de zéro pour les valeurs a, b. Comme elle représente une fonction continue, elle sera encore diffé-

rente de zéro pour des valeurs voisines de a, b. Pour la valeur $a + \varepsilon$ de z, la parenthèse étant différente de zéro, il faut nécessairement que ρ soit nulle. Donc la fonction ρ est nulle pour un petit arc voisin de a.

De proche en proche, on voit que ρ est nulle le long de tout arc décrit par z dans le domaine.

Développement des solutions. — Une racine simple u peut être développée en série entière de $(z - a)$.

Supposons que pour $z = a$, l'équation ait une racine multiple d'ordre k.

Si z fait k tours autour de a, la solution u reprend sa valeur initiale. Or si l'on pose

$$z - a = z'^k$$

lorsque z fait k tours autour de a, le point z' ne fait qu'un tour autour de l'origine. Donc, quand z' fait un tour autour de 0, u reprend sa valeur initiale. On voit donc que la fonction u est une fonction holomorphe de z', dans les environs de l'origine. On peut donc poser

$$u = c_0 + c_1 z' + c_2 z'^2 + \cdots$$

et par suite

$$u = c_0 + c_1 (z - a)^{\frac{1}{k}} + c_2 (z - a)^{\frac{2}{k}} + \cdots$$

Cette forme met bien en évidence la permutation circulaire des solutions qui correspondent aux diverses déterminations de $(z - a)^{\frac{1}{k}}$.

Si la racine multiple était infinie pour $z = a$, dans le cas où $f(z, u)$ est algébrique, z' serait un pôle de la solution et on aurait

$$u = A_0 + A_1 (z - a)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + B_1 (z - a)^{-\frac{1}{\mu}} + \cdots$$

Fonction inverse. — Donnons-nous une équation de la forme $u = f(z)$, $f(z)$ étant holomorphe dans une aire donnée S. Soit a un point de cette aire auquel correspond la valeur b de u.

Supposons $f'(a) \neq 0$.

Si z décrit un arc c compris dans S, à la suite de valeurs $a, z_1, z_2, \ldots$ correspondront une suite $b, u_1, u_2 \ldots$ de valeurs de u, formant une ligne continue C'.

Inversement, aux valeurs $b, u_1, u_2 \ldots$, on peut faire correspondre au moins une suite continue de valeurs de z, soient $a, z_1, z_2, \ldots$ vérifiant constamment la relation $u = f(z)$.

On peut donc considérer z comme fonction de u.

D'autre part, on peut écrire l'équation $f(z) - u = 0$ et la considérer comme une équation implicite définissant une fonction $z = \varphi(u)$ se réduisant à a pour $u = b$ et holomorphe tant que $f'(z) \neq 0$.

D'après le théorème que nous avons démontré, cette fonction $\varphi(u)$ se confond nécessairement avec la fonction z le long de C'.

Cette fonction $z = \varphi(u)$ s'appelle la « fonction inverse » de $u = f(z)$. Elle est holomorphe tant que $f(z)$ est holomorphe et que $\frac{\partial f}{\partial z}$ est différent de zéro.

V. — FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Considérons une fonction de $(n + 1)$ variables $z_1, z_2, \ldots z_n, u$, holomorphe quand ces variables se déplacent respectivement dans des aires $S_1, S_2, \ldots S_n, \Sigma$ et formons l'équation

$$f(z_1, z_2, \cdots z_n, u) = 0.$$

On pourra reprendre identiquement toutes les considérations développées dans le cas d'une seule variable z. On démontrerait d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Supposons* 1° *qu'il existe dans ces aires un système de valeurs* $a_1, a_2, \ldots a_n, b$ *telles que*

$$f(a_1, a_2, \cdots a_n, b) = 0$$

2° *que, aux environs de ces points, la dérivée* $\frac{\partial f}{\partial u}$ *soit différente de zéro.*

On pourra déterminer un rayon ρ *suffisamment petit, tel que, pour toutes les valeurs des* z *satisfaisant à* $(z_i - a_i) \leq \rho$.

1° *Il existe une fonction* $u = \varphi(z_1, z_2, \ldots z_n)$ *holomorphe aux environs*

du système de valeurs, se réduisant à b pour les valeurs $a_1, a_2, \dots a_n$ *et vérifiant identiquement l'équation donnée.*

σ_2

2° *Les dérivées partielles* *de cette fonction seront déterminées par les relations*

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 0.$$

On dit que l'équation définit une fonction implicite u des n variables z.

ψ

Comme dans le cas d'une seule variable, *cette fonction est la seule fonction continue des z qui, pour le point* $a_1, a_2, \dots a_n$ *se réduise à b et vérifie l'équation donnée.*

α, δ_1

Supposons en effet qu'il existe une autre fonction

α

$\psi(z_1, z_2, \dots z_n)$ se réduisant également à b. Nous pouvons toujours poser

$$\psi = \varphi + \rho(z_1, z_2, \cdots z_n)$$

ρ sera fonction continue comme φ et ψ et se réduira à zéro pour $a_1, a_2, \dots a_n$.

δ_1

On aura simultanément

$$f(z_1, z_2, \cdots z_n, u) = 0 \qquad f(z_1, z_2, \cdots z_n, u + \rho) = 0.$$

Or il existe certainement un cercle de rayon ρ' (nous prendrons de plus $\rho' < \rho$) tel que si $| z_i - a_i | < \rho'$ on puisse appliquer à cette deuxième équation la formule de Taylor qui se réduira à

α

$$\rho\left[\frac{\delta f}{\delta u}(z_1, z_2, \cdots z_n, u) + \frac{\rho}{2}\frac{\delta^2 f}{\partial u^2}(z_1, z_2, \cdots z_n, u) + \cdots\right] = 0.$$

α, σ_2

Par hypothèse pour les valeurs $a_1, a_2, \dots a_n, b$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a_1, a_2, \cdots a_n, b) \neq 0 \quad \text{et} \quad \rho = 0.$$

d

Donc, en vertu de la continuité, pour des valeurs des z voisines, et pour la valeur de u correspondante, c'est-à-dire pour des petits arcs C_i issus de chaque point a_i, la parenthèse sera encore différente de zéro. Donc pour ces valeurs, $\rho = 0$.

ω

De proche en proche on voit que ρ est nulle le long d'arcs finis C_i.

L'existence de la fonction analytique u étant démontrée, en dérivant autant de fois qu'on le veut, l'équation par rapport à toutes les variables, on pourra obtenir toutes les dérivées en $a_1, a_2, \dots a_n, b$.

La formule de Taylor, pour les fonctions de plusieurs variables, permettra d'obtenir théoriquement, l'expression analytique de u et sa valeur approchée avec autant d'approximation que l'on voudra, pourvu que les variables z restent respectivement dans des petits cercles de rayon *fini* suffisamment petit.

Systèmes d'équations implicites. — Après avoir considéré le cas d'une seule fonction de plusieurs variables, donnons-nous plus généralement un système de p équations entre n variables $z_1, z_2, \dots z_n$ et p autres variables $u_1, u_2, \dots u_p$ que nous allons considérer comme des fonctions des z. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant donné un système d'équations de la forme*

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, \cdots z_n, u_1, \cdots u_p) &= 0 \\ f_2(z_1, z_2, \cdots \quad u_1, \cdots u_p) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_p(z_1, z_2, \cdots z_n, u_1, \cdots u_p) &= 0 \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Les fonctions $f_1, f_2, \dots f_p$ sont holomorphes par rapport à toutes les variables z_i, u_k quand les z et les u se déplacent respectivement dans des aires S_i, Σ_k.*

2° *Il existe un système de valeurs initiales a_i, b_k respectivement dans ces aires, pour lesquelles toutes les fonctions s'annulent $f(a_i, b_k) = 0$.*

3° *Pour ce système de valeurs le déterminant fonctionnel*

$$\frac{D(f_1, f_2, \cdots f_p)}{D(u_1, u_2, \cdots u_p)}$$

est différent de zéro.

Si ces conditions sont remplies, on peut déterminer un rayon ρ suffisamment petit, tel que, pour toutes les valeurs des z satisfaisant à $|z_i - a_i| < \rho$, il existe un système de fonctions

$$u_1 = \varphi_1(z_1, z_2, \cdots z_n) \qquad u_2 = \varphi_2, \cdots u_p = \varphi_p(z_1, z_2, \cdots z_n).$$

1° *Holomorphes pour ces systèmes de valeurs, se réduisant respectivement à* $b_1, b_2, \dots b_p$ *pour les valeurs* $a_1, a_2, \dots a_n$ *et vérifiant identiquement les relations*

$$f_i(z_1, \cdots z_n, u_1, \cdots u_p) = 0 \qquad (i = 1,2, \cdots p)$$

2° *Les dérivées partielles de toutes ces fonctions par rapport à la variable* z_i *s'obtiendront en résolvant un système de p équations linéaires compatibles tant que le déterminant fonctionnel sera différent de zéro.*

Le théorème ayant été démontré pour le cas d'une seule équation déterminant une seule fonction, il est naturel de procéder par récurrence. Nous allons donc supposer le théorème établi dans le cas de p équations et nous démontrerons qu'il est encore vrai pour un système de $(p+1)$ équations.

Soit donc un tel système

$$\begin{aligned} f_1 \quad & (z_1, \cdots z_n, u_1, \cdots u_p, u_{p+1}) = 0 \\ f_p \quad & (z_1, \cdots z_n, u_1, \cdots \quad u_{p+1}) = 0 \\ f_{p+1} & (z_1, \cdots z_n, u_1, \cdots \quad u_{p+1}) = 0 \end{aligned}$$

tel qu'il existe un système de valeurs $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, \dots b_p, b_{p+1}$ annulant à la fois tous les f. De plus pour ce système de valeurs

$$\frac{D(f_1, f_2, \cdots f_{p+1})}{D(u_1, u_2, \cdots u_{p+1})} \neq 0.$$

Ce déterminant fonctionnel n'étant pas nul, l'un des mineurs du premier ordre au moins est différent de zéro. Il est naturel de le considérer puisqu'il est indispensable à la condition d'existence dans le cas de p équations.

On peut évidemment supposer que c'est le déterminant

$$\frac{D(f_1, f_2, \cdots f_p)}{D(u_1, u_2, \cdots u_p)}.$$

Il suffit, en effet, de noter convenablement les équations et les variables u.

Ce déterminant étant différent de zéro, pour les valeurs a_i, b_k, et le théorème étant supposé démontré dans le cas de p équations, les p premières équations détermineront p fonctions $u_1, u_2, \dots u_p$

des $(n+1)$ variables $z_1, z_2, \dots z_n, u_{p+1}$ et satisfaisant identiquement aux p premières équations, sous des conditions de la forme

$$|z_i - a_i| < \rho \qquad |u_{p+1} - b_{p+1}| < \rho.$$

Soient

$$u_1 = \psi_1(z_1, \dots z_n, u_{p+1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_p = \psi_p(z_1, z_2, \dots z_n, u_{p+1})$$

Pour ce système de fonctions, les p premières équations seront identiquement satisfaites. Il suffit donc de satisfaire à la dernière équation.

Substituons ces valeurs dans la dernière équation. Elle deviendra

$$f_{p+1}(z_1, z_2, \dots z_n, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_p, u_{p+1}) = 0.$$

Nous la désignerons par

$$F(z_1, z_2, \dots z_n, u_{p+1}) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que cette équation peut définir une fonction implicite u_{p+1} des n variables z.

1° Or, pour les valeurs a_i, b_{p+1}, les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ se réduisent respectivement à $b_1, b_2, \dots b_n$. On a donc

$$F(a_1, a_2, \dots b_{p+1}) = f_{p+1}(a_1, a_2, \dots a_n, b_1, \dots b_{p+1}).$$

Ce résultat est nul par hypothèse.

2° Il faut considérer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial u_k}$.

Or elles existent, puisque f_{p+1} admet des dérivées par rapport à toutes les variables, et nous supposons que $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ admettent des dérivées par rapport à $z_1, z_2, \dots z_n, u_{p+1}$. Donc F admet bien des dérivées par rapport à toutes les variables z et u_{p+1}.

3° Enfin, il faut encore considérer la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial u_{p+1}}$ et montrer que cette dérivée est différente de zéro pour les valeurs a_i, b_{p+1}.

On peut prendre cette dérivée, en considérant F comme une fonction composée

$$f_{p+1}(z_1, z_2 \dots z_n, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_n, u_{p+1})$$

des z et de u_{p+1} par l'intermédiaire de $\psi_1, \dots \psi_n$.

o

On a

$$\frac{\partial F}{\partial u_{p+1}} = \frac{\partial f_{p+1}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial u_{p+1}} + \frac{\partial f_{p+2}}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial u_{p+1}} + \cdots + \frac{\partial f_{p+1}}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial u_{p+1}} + \frac{\partial f_{p+1}}{\partial u_{p+1}}.$$

Il faut donc calculer les dérivées de $u_1, u_2, \ldots u_p$ par rapport à u_{p+1}.

σ_2

Mais, le théorème étant supposé démontré pour les p fonctions, leurs dérivées par rapport à u_{p+1} s'obtiennent, nous le supposons, par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial u_{p+1}} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial u_p}\cdot\dfrac{\partial u_p}{\partial u_{p+1}} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u_{p+1}} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial u_{p+1}} + \cdots + \dfrac{\partial f_p}{\partial u_p}\cdot\dfrac{\partial u_p}{\partial u_{p+1}} + \dfrac{\partial f_p}{\partial u_{p+1}} = 0. \end{array}\right.$$

α, β

En somme, il faut tirer les dérivées $\dfrac{\partial u_i}{\partial u_{p+1}}$ de ce système d'équations compatibles et les substituer dans $\dfrac{\partial F}{\partial u_{p+1}}$. Autrement dit, il faut éliminer entre ces $(p+1)$ équations, les p inconnues $\dfrac{\partial u_i}{\partial u_{p+1}}$,

o

ce qui donne

$$\left|\begin{array}{llll} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}, \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_p}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_{p+1}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1}, \cdots & & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial u_1}, \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_{p+1}}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial f_{p+1}}{\partial u_2}, \cdots & \dfrac{\partial f_{p+1}}{\partial u_{p+1}} - \dfrac{\partial F}{\partial u_{p+1}} & \end{array}\right| = 0.$$

α

En développant ce déterminant d'après les éléments de la dernière colonne, on obtient

$$\frac{D(f_1, f_2, \cdots f_{p+1})}{D(u_1, u_2, \cdots u_{p+1})} - \frac{\partial F}{\partial u_{p+1}}\cdot\frac{D(f_1, \cdots f_p)}{D(u_1, \cdots u_p)} = 0.$$

δ_1

Or, par hypothèse le premier déterminant est différent de zéro pour les valeurs a_i, b_j, b_{p+1}. On aura donc bien pour ces valeurs

$$\frac{\partial F}{\partial u_{p+1}}(a_i, b_j, b_{p+1}) \neq 0.$$

ω

De l'équation $F(z_1, \ldots z_n, u_{p+1}) = 0$, on peut donc bien déduire une fonction

$$u_{p+1} = \psi_{p+1}(z_1, z_2, \cdots z_n)$$

holomorphe dans de certains cercles, se réduisant à b_{p+1} pour $z_i = a_i$, et satisfaisant à $F(z_1, \dots z_p, u_{p+1}) = 0$, c'est-à-dire à la $(p+1)^{ème}$ équation.

Si l'on substitue à son tour cette expression de u_{p+1} dans les fonctions

$$u_k = \psi_k(z_1, \cdots z_n, u_{p+1})$$

ces fonctions se transforment en fonctions de $z_1, z_2, \dots z_n$ seulement. Ainsi restreintes, elles ne cesseront pas de satisfaire aux p premières équations, la dernière étant déjà satisfaite ; elles se réduisent encore à $b_1, b_2, \dots b_p$ pour $a_1, a_2, \dots a_n$, puisque pour ces valeurs u_{p+1} se réduit lui-même à b_{p+1}.

Enfin, calculons les dérivées des fonctions $u_1, u_2, \dots u_p, u_{p+1}$; $\psi_1, \dots \psi_p$ admettant des dérivées par rapport à $z_1, \dots z_n$ et u_{p+1}, et d'autre part, u_{p+1} définie par

$$F(z_1, \cdots z_n, u_{p+1}) = 0,$$

admettant des dérivées par rapport à $z_1, z_2, \dots z_n$, il est certain que $u_1, u_2, \dots u_p, u_{p+1}$ admettent des dérivées partielles par rapport à toutes les variables z. Ces dérivées se calculeront donc en dérivant toutes les équations (qui deviennent des identités si on remplace les u en fonction des z), par rapport à la variable correspondante

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z_k} + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial z_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial z_k} + \frac{\partial f_i}{\partial u_{p+1}} \cdot \frac{\partial u_{p+1}}{\partial z_k} = 0.$$

La règle de calcul des dérivées que nous avons supposée pour p, est donc, aussi, générale et le théorème est entièrement démontré.

Expression analytique des fonctions φ. — L'existence des fonctions holomorphes φ étant démontrée, on peut obtenir l'expression de ces fonctions par leur développement suivant la formule de Mac Laurin.

Il suffit pour cela d'avoir l'expression des fonctions u et de toutes les dérivées partielles successives, pour un système de valeurs initiales.

Si nous prenons pour valeurs initiales, les valeurs $a_1, a_2, \dots a_n$, la valeur initiale de la fonction u_k est b_k.

α

En dérivant les équations $f_1 = 0 \ldots f_{p+1} = 0$ par rapport aux variables z, on pourra calculer successivement toutes les dérivées partielles, en particulier en $a_1, a_2, \ldots a_n$.

ω

On peut donc, théoriquement du moins, obtenir les expressions des φ.

THÉORÈME. — **Le système est unique.** *Le système de fonctions continues* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ *est le seul qui satisfasse aux équations* $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots f_p = 0$ *et se réduise à* $b_1, b_2, \ldots b_p$ *pour* $a_1, \ldots a_n$.

δ1

Si, en effet, il existait un autre système $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_p$, on pourrait poser

$$\psi_k = \varphi_k + \rho_k$$

les ρ étant également continues et se réduisant à zéro pour les valeurs a_i.

o

On aurait simultanément (en supprimant l'indice)

$$f(z_1, z_2, \cdots z_n, \varphi_1, \cdots \varphi_p) = 0, \qquad f(z_1, z_2, \cdots z_n, \varphi_1 + \rho_1, \cdots \varphi_p + \rho_p) = 0.$$

δ1

Cette deuxième équation se développerait par la formule de Mac Laurin. En la réduisant au deuxième terme et tenant compte des premières équations, on aurait

$$\rho_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \rho_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \cdots + \rho_p \frac{\partial f}{\partial u_p} = 0$$

toutes les dérivées étant prises pour des valeurs intermédiaires entre φ_1 et $\varphi_1 + \rho_1, \ldots \varphi_p$ et $\varphi_p + \rho_p$.

On obtiendra ainsi p équations linéaires et homogènes en $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_p$.

Or, pour les valeurs initiales $a_1, \ldots a_n$, tous les ρ s'annulant et les φ se réduisant à $b_1, b_2, \ldots b_p$, le déterminant des fonctions $f_1, f_2, \ldots f_p$ est aussi voisin qu'on le veut de $\frac{D(f_1, f_2, \cdots f_p)}{D(u_1, u_2, \cdots u_p)}$, pour les valeurs a_i, b_k.

ρ

Il est donc différent de zéro. Les équations donnent donc

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = 0, \cdots \rho_p = 0.$$

ω

De proche en proche, et tant que le déterminant fonctionnel sera différent de zéro, les ρ seront donc tous constamment nuls.

Fonctions inverses. — Considérons un système de n fonctions holomorphes

$$u_1 = \varphi_1(z_1, \cdots z_n) \cdots u_n = \varphi_n(z_1, z_2, \cdots z_n).$$

σ_1, δ_1

Supposons que pour les valeurs $a_1, \ldots a_n$, elles prennent les valeurs $b_1, b_2, \ldots b_n$. Supposons $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)}{D(z_1, z_2, \cdots z_n)} \neq 0$ pour ce système de valeurs.

ξ

On peut considérer ce système d'équations comme définissant n fonctions implicites.

$$z_1 = \psi_1(u_1, \cdots u_n),\ z_2 = \psi_2(u_1, \cdots u_2, u_n) \cdots z_n = \psi_n(u_1, \cdots u_n)$$

π

se réduisant à $a_1, a_2, \ldots a_n$ pour les valeurs $b_1, b_2, \ldots b_n$, puisque le déterminant fonctionnel des φ par rapport aux z_s n'est pas nul.

Ces fonctions ψ ainsi définies s'appellent les fonctions inverses des fonctions φ.

Tous ces divers procédés : fonctions implicites, fonctions inverses, systèmes de fonctions implicites, nous ont donné de nouveaux moyens d'obtenir des fonctions d'une ou de plusieurs variables.

Nous allons étendre encore considérablement la notion de fonction en considérant des intégrales de fonction de variable complexe.

VI. — PÉRIODES POLAIRES

Intégrale. — Considérons deux variables complexes z, u liées par la relation

$$du = \frac{P(z)dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

$P(z)$ étant un polynôme et $R(z)$ un polynôme de degré n n'admettant que des *racines simples.*

$$R(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = a_0(z - e_1)(z - e_2) \cdots (z - e_n).$$

Si nous nous donnons la valeur initiale u_0, correspondant à la valeur initiale z_0, nous aurons

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}\, dz.$$

En raison des points critiques, l'intégrale $^{o,\sigma_2}$ pourra dépendre du chemin parcouru par la variable z, et pour une même valeur de z, on pourra donc avoir diverses déterminations de u.

Cherchons $^{\alpha,\nu}$ quelles sont ces déterminations quand on fait varier la ligne d'intégration.

Les points critiques de la fonction et par suite de l'intégrale sont les points $e_1, e_2, \dots e_n$.

Nous les numéroterons par ordre d'argument croissant en partant d'une direction quelconque issue de z_0.

$^{\alpha}$ Entourons-les de petits cercles $c_1, c_2, \dots c_n$ et traçons à partir de chacun d'eux une « coupure ».

Le radical $^{\sigma_2}$ $\sqrt{R(z)}$, a, en chaque point, deux déterminations égales et de signes contraires.

Dans le plan coupé, ces deux déterminations sont monodromes et peuvent être suivies par continuité. Nous les désignerons par

$$+\sqrt{R(z)} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{R(z)}.$$

Soient $l_1, l_2, \dots l_n$ des lignes droites allant de z_0 à chacun des points $e_1, e_2, \dots e_n$.

Les intégrales $^{\sigma_2}$ $\int_l, \int_l, \dots \int_l$ existent.

En partant de la *même valeur* $+\sqrt{R(z_0)}$, désignons-les par $I_1, I_2, \dots I_n$.

Enfin, nous appellerons « lacet » L_k du point e_k, $^{\psi,\sigma_2}$ le chemin formé de la ligne l_k, du petit cercle c_k décrit dans le sens direct, et de la ligne de retour l_k^{-1}.

Calculons $^{\alpha_1}$ l'intégrale le long d'un tel contour. ^{o} Si nous partons de z_0 avec la détermination $+\sqrt{R(z_0)}$, l'intégrale prise suivant l_k est égale à I_k.

$^{\delta_1}$ L'intégrale prise suivant c_k tend vers zéro lorsque le rayon du cercle tend vers zéro, $^{\pi}$ puisque

$$\lim (z - z_0) \frac{P(z_0)}{\sqrt{R(z_0)}} = 0.$$

Enfin, après avoir décrit c_k, $^{\rho}$ la détermination du radical

ayant changé de signe, et le sens ayant également changé, l'intégrale de retour $\int_{l_k^{-1}}$ est encore égale à I_k.

ω

L'intégrale prise suivant le lacet considéré est donc égale à $2I_k$. Il est clair que nous aurions obtenu le même résultat si nous avions parcouru le lacet en sens inverse, à la condition de prendre toujours pour valeur initiale $+\sqrt{R(z_0)}$. Il est clair enfin que nous

ξ

obtiendrons encore la même valeur, si, au lieu du lacet, nous prenons un contour *quelconque*, comprenant le point e_k à son intérieur et ne *comprenant pas d'autre point critique.*

Diverses valeurs de l'intégrale. — Supposons maintenant qu'après

α_1

avoir parcouru le lacet L_k, nous parcourions un autre lacet L_j mais en suivant toujours par continuité, la même valeur du radical.

Si nous partions de z_0 avec la détermination $+\sqrt{R(z_0)}$, le lacet L_j

ρ, o

donnerait une intégrale égale à $2I_j$. Mais la détermination du radical a changé de signe lorsque, après avoir tourné autour de e_k

d

on revient au point z_0. Il en résulte que lorsque z décrira le lacet L_j, on obtiendra pour intégrale $-2I_j$.

ω

L'intégrale totale est donc égale à $2I_k - 2I_j$. Chacun de ces lacets peut être déformé, par continuité, en un contour quelconque

ψ

n'englobant que e_k ou e_j. L'ensemble des deux contours, peut être déformé en un seul contour qui repassera ou non, intermédiairement, par le point z_0 et qui ne renfermera que e_k et e_j.

ξ

Considérons enfin un chemin quelconque allant du point z_0 au point z quelconque. Nous désignerons par $I(z)$ l'intégrale obtenue en faisant décrire à z le chemin direct z_0z en partant de la détermination initiale $+\sqrt{R(z_0)}$.

ξ

Supposons, par exemple, que ce chemin rencontre k des coupures, celles des points e_α, e_β,... e_μ en des points r_α, r_β,... r_μ.

Entre deux des coupures, prenons sur le contour des points quel-

α

conques, m_α, m_β,... m_μ et joignons-les au point z_0. Nous

pouvons, sans changer la valeur de l'intégrale, remplacer le contour donné par le chemin

$$z_0 r_\alpha m_\alpha z_0 + z_0 m_\alpha r_\beta m_\beta z_0 + \cdots + z_0 m_{\mu-1} r_\mu m_\mu z_0 + z_0 Z.$$

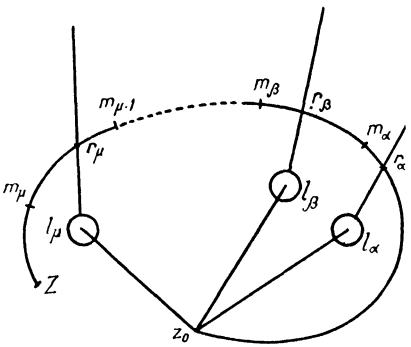


Fig. 16.

δ_1, σ_2

Les intégrales suivant les divers contours fermés partiels auront pour valeurs, d'après ce que nous avons dit,

$$2I_\alpha - 2I_\beta + 2I_\gamma \cdots + (-1)^{k-1} 2I_\mu + (-1)^k I(z).$$

ω

On a donc, suivant que le nombre de lacets rencontrés k est pair ou impair,

$$u - u_0 = 2I_\alpha - 2I_\beta \quad \cdots - 2I_\mu + I(z)$$
$$u - u_0 = 2I_\alpha - 2I_\beta + \cdots + 2I_\mu - I(z).$$

Désignons par $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$, les différences

$$\omega_1 = I_2 - I_1 \qquad \omega_2 = I_3 - I_1 \cdots \omega_{n-1} = I_n - I_1.$$

Par suite

$$I_\alpha - I_\beta = \omega_{\alpha-1} - \omega_{\beta-1} \qquad I_\alpha = I_1 + \omega_{\alpha-1}.$$

o

Si le nombre de lacets traversés est impair, on aura une expression de la forme

$$u - u_0 = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + \cdots + 2m_{n-1}\omega_{n-1} + 2I_\mu - I(z).$$

o

S'il est pair,

$$u - u_0 = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + \cdots + 2m_{n-1}\omega_{n-1} + I(z).$$

Nous appellerons « période » toute expression de la forme

$$2\Omega = 2m_1\omega_1 + \cdots + 2m_{n-1}\omega_{n-1}$$

m_1, m_2, m_n étant des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques.

D'ailleurs,

$$2I_\mu = 2I_1 + 2\omega_{\mu-1} = 2I_1 + \text{période.}$$

R

En résumé toutes les déterminations possibles sont de l'une des formes

$$u - u_0 = \text{période} + I(z)$$
$$u - u_0 = \text{période} + 2I_1 - I(z).$$

ψ

Il faut bien remarquer que *ces périodes sont indépendantes du point de départ choisi.*

En effet, on a par exemple

$$\omega_1 = I_2 - I_1.$$

Si donc, nous considérons un contour fermé passant par z_0 et ne

α

renfermant que e_1, e_2, on pourra le déformer sans modifier l'intégrale, à la condition qu'il ne renferme toujours que les

α

deux seuls points critiques e_1, e_2, En particulier, on pourra réduire ce contour à un contour infiniment aplati allant du point e_1 au point e_2.

Sous une autre forme, si l'on décrit le triangle $z_0\, e_1\, e_2$ se rapprochant autant qu'on le veut de e_1, e_2 mais les *laissant à l'extérieur*, en d'autres termes si en e_1, on prend pour détermination du radical, celle

ρ

qui avait pour valeur en z_0, $+\sqrt{R(z_0)}$, pour ce triangle,

σ

la fonction n'y ayant aucun point critique, on a

$$I_1 + \int_{e_1}^{e_2} - I_2 = 0.$$

Donc

$$I_2 - I_1 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}} dz.$$

ω

Les périodes sont donc bien égales aux intégrales prises suivant les éléments de droites e_1e_2, e_1e_3,...

Le résultat que nous avons obtenu peut être présenté de façon plus expressive encore.

Si l'on envisage la relation entre u et z, on voit que, à une valeur donnée de z peuvent correspondre, d'après la première formule, une infinité de valeurs de u.

$$u - u_0 = \text{période} + \mathrm{I}(z).$$

ρ, ξ

Mais *inversement*, on peut dire que, *à toutes les valeurs de u comprises dans cette formule, correspond la même valeur de z.*

ξ

Si donc l'on considère z comme une fonction de u, on voit que cette fonction $z = \Phi(u)$ *satisfera à la condition*

$$\Phi(u + 2\Omega) = \Phi(u).$$

ω

La fonction admet donc les $(n-1)$ *périodes* $2\omega_1, 2\omega_2, \ldots 2\omega_{n-1}$ *et par suite la période générale* 2Ω.

Il est d'ailleurs possible que ces périodes ne soient elles-mêmes pas toutes distinctes.

Considérons en effet, d'une part un contour fermé partant de z et renfermant tous les points critiques, d'autre part *le lacet de l'infini* Λ formé de la façon suivante :

Une coupure $z_0 a$ extérieure au premier contour, partant de z_0, allant à l'infini, puis un cercle de rayon R que nous ferons croître indéfiniment, enfin le chemin de retour bz_0, soit le contour $z_0 a m b z_0$.

o, ξ

La fonction n'ayant aucun point critique entre les deux régions considérées, les intégrales prises dans le même sens sont égales. On a donc

$$2\mathrm{I}_1 - 2\mathrm{I}_2 \cdots \pm 2\mathrm{I}_n = \int_{\Lambda} \frac{\mathrm{P}dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} dz = \int_{z_0 a} + \int_{\mathrm{C}} + \int_{bz_0}.$$

ξ, δ_1

Considérons les deux intégrales

$$\int_{z_0}^{a} \quad \text{et} \quad \int_{b}^{z_0}.$$

δ_1

Lorsqu'on revient en b après avoir décrit le cercle, le radical $+\sqrt{\mathrm{R}(z)}$ a subi n changements de signe. D'autre part le chemin d'intégration étant inverse, ω on a donc

$$\int_{b}^{z_0} = (-1)^{n+1} \int_{z_0}^{a}.$$

Les deux intégrales se détruisent si n est pair.

D'autre part, si R est infiniment grand, ρ la fonction devient infiniment petite d'ordre $\frac{n}{2} - p$, p étant le degré de P. ω Si

$$\frac{n}{2} - p > 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad n > 2p + 2,$$

$\int_C^{\omega}$ tendra vers zéro. Donc si n est pair, le premier membre pouvant être rendu aussi petit qu'on le veut et étant d'ailleurs constant, est rigoureusement nul.

$$2I_1 - 2I_2 + 2I_3 \cdots - 2I_n = 0.$$

D'où

$$2\omega_1 - 2\omega_2 + 2\omega_3 \cdots + 2\omega_{n-1} = 0.$$

o

Si n est impair,

$$2I_1 - 2I_2 - \cdots + 2I_n = 2\int_0^{\infty}.$$

R

On peut donc écrire dans tous les cas

$$u - u_0 = I(z) + 2m_1\omega_1 + \cdots + 2m_l\omega_l$$

ou

$$u - u_0 = 2I_1 - 2I(z) + 2m_1\omega_1 + \cdots + 2m_l\omega_l$$

l étant le plus grand nombre pair inférieur à n.

Exemple. — Soit

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

en prenant $u_0 = z_0 = 0$.

ξ

Les points critiques de la fonction sont $e_1 = 1$, $e_2 = -1$. Choisissons la détermination du radical qui se réduit à $+1$ pour $z = 0$.

La fonction inverse de $u = \Phi(z)$ σ_2 admettra une période

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = 2\pi.$$

D'ailleurs $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

ω

Les diverses valeurs de u sont donc

$$u = I(z) + 2m\pi \qquad u = \pi - I(z) + 2m\pi.$$

ρ

On retrouve donc les propriétés de la fonction inverse de $u = \arcsin z$.

REMARQUE. — On voit que la fonction inverse $z = \Phi(u)$ jouit d'une propriété plus caractéristique que celle de la fonction $u = \varphi(z)$. Comme l'a pensé Abel, elle doit donc être plus simple à étudier : on le voit bien par l'exemple de la fonction $z = \sin u$.

Points critiques de la fonction inverse. — Dans le cas général,

ξ

recherchons quels peuvent être ses points critiques et leur nature.

Nous posons

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{P(z)}{+\sqrt{R(z)}}\, dz.$$

Soit u_1, z_1, un système de valeurs simultanées de u et z.

α, β

Il faut avoir le développement de $(u - u_1)$. Nous sommes évidemment amenés *a priori* à distinguer les cas où z_1 est ou n'est pas racine de $R(z)$, racine de $P(z)$, et le cas de z infini.

δ1

1° Supposons z_1 non racine de $R(z)$ ni de $P(z)$.

Aux environs de ce point, on pourra écrire

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = a_0 + a_1(z - z_1) + \cdots$$

$$P(z) = b_0 + b_1(z - z_1) + \cdots$$

δ1

D'où

$$\frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}} = c_0 + c_1(z - z_1) + \cdots$$

Si z_1 n'est pas racine de $P(z)$, $c_0 \neq 0$.

On a donc l'égalité

$$du = [c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots]\, dz.$$

ρ

La série du second membre étant uniformément convergente dans un certain cercle de centre c_1, on peut l'intégrer et on obtiendra

$$u - u_1 = c_0(z - z_1) + \frac{c_1}{2}(z - z_1)^2 + \cdots$$

δ_1, σ_2

c_0 étant différent de zéro, on peut renverser la série et on obtiendra pour $(z - z_1)$, un développement de la forme

$$z - z_1 = d_1(u - u_1) + d_2(u - u_1)^2 + \cdots$$

ω

Le point u_1 est donc un point ordinaire pour la fonction $z(u)$.

δ_1, ξ

2° Si z_1 est racine de $R(z)$, par exemple si $z_1 = e_1$, aux environs de ce point, on pourra écrire

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{\sqrt{z - e_1}}[a_0 + a_1(z - e_1) + \cdots]$$

Donc

$$\frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{\sqrt{z - e_1}}[b_0 + b_1(z - e_1) + \cdots] = \frac{du}{dz}.$$

α

En intégrant cette équation, nous obtiendrons

$$u - u_1 = 2b_0\sqrt{z - e_1} + \frac{2b_1}{3}(z - e_1)^{\frac{3}{2}} + \cdots = \sqrt{z - e_1}[2b_0 + \cdots$$

En élevant au carré,

$$(u - u_1)^2 = c_0(z - e_1) + c_1(z - e_1)^2 + \cdots$$

δ_1, σ_2

Par suite en renversant la série, nous aurons

$$z - e_1 = d_0(u - u_1)^2 + d_2(u - u_1)^4 + \cdots$$

ω

Le point u_1, est donc zéro double de la fonction $(z - e_1)$.

ζ

3° Enfin supposons z_1 racine d'ordre α de $P(z)$.

σ

Nous aurons aux environs de ce point

$$du = c_0(z - z_1)^\alpha + \cdots$$

et en intégrant

$$u - u_1 = \frac{c_0}{\alpha + 1}(z - z_1)^{\alpha+1} + \cdots$$

δ_1

En renversant la série, on sait qu'on obtiendra un développement de $(z - z_1)$, suivant les puissances entières de $(u - u_1)^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

ω

Le point u_1 est donc point critique algébrique pour la fonction z.

4° Etude à l'infini.

Pour z très grand, nous pourrons écrire

$$du = \frac{P\,dz}{\sqrt{R(z)}} = (a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots)\left[b_0 z^{-\frac{n}{2}} + b_1 z^{-\frac{n}{2}-1} + \cdots\right]dz$$

$$= c_0 z^{p-\frac{n}{2}} + c_1 z^{p-\frac{n}{2}-1} + \cdots$$

D'où en intégrant

$$u - u_1 = d_0 (z - z_1)^{p-\frac{n}{2}+1} + d_1 (z - z_1)^{p-\frac{n}{2}} + \cdots$$

Enfin

$$(u - u_1)^{\frac{2}{2p+2-n}} = [e_0 + e_1 (z - z_1)^{-1} + \cdots](z - z_1).$$

En posant $(u - u_1)^{\frac{2}{2p+2-n}} = \rho$, on aurait pour $(z - z_1)$, un développement de la forme

$$z - z_1 = f_{-1}\rho + f_0 + f_1 \cdot \frac{1}{\rho} + f_2 \frac{1}{\rho_2} + \cdots$$

Le point u_1 sera donc encore point critique algébrique à moins que $\frac{2}{2p+2-n}$ ne soit entier.

En particulier si $p = 0$, il faut que $\frac{2}{2-n}$ soit entier, ce qui donne $n = 3$ ou $n = 4$.

Si $n = 4$, on aura

$$(u - u_1)^{-1} = (z - z_1)[e_0 + e_1 (z - z_1)^{-1} + \cdots].$$

D'où

$$(z - z_1)^{-1} = \mu_1 (u - u_1) + \mu_2 (u - u_1)^2 + \cdots$$

Le point u_1, est donc pôle simple de $z - z_1$.

Si $n = 3$

$$(u - u_1)^{-2} = (z - z_1)[e_0 + e_1 (z - z_1)^{-1} + \cdots]$$

$$(z - z_1)^{-1} = \mu_1 (u - u_1)^2 + \mu_2 (u - u_1)^4 + \cdots$$

Le point u_1 est pôle double.

Dans ces deux cas, la fonction $z = \Phi(u)$ admet deux périodes.

Si $n = 3$, on peut ramener le polynôme $R(z)$ à la forme

$$R(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

On peut démontrer que le rapport des deux périodes $\int_{e_1}^{e_2}$, $\int_{e_2}^{e_3}$ est nécessairement imaginaire.

Si $n = 4$, θ_2 nous avons vu qu'on peut ramener $R(z)$ à la forme bicarrée

$$R(z) = (1 - z^2)(1 - k^2z^2).$$

L'étude de ces fonctions constitue l'étude des fonctions *elliptiques* ou fonctions doublement périodiques.

Nous n'entreprendrons pas cette étude, extrêmement intéressante et d'applications nombreuses, mais qui sort du programme que nous nous sommes fixé.

Nous en avons terminé avec l'étude des fonctions de variables complexes.

CHAPITRE V

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

SOMMAIRE.

Equations du premier ordre : Equations les plus simples. — Facteur intégrant. — Equations homogènes. — Equation de Darboux, de Jacobi.
Equations linéaires : Méthode de variation des constantes, du facteur intégrant. Equation de Bernouilli, de Riccati : Propriétés.
Equations non linéaires. — Diverses méthodes d'intégration.
Equation de Lagrange — de Clairaut.
Problème des trajectoires. — Applications.
Relations entre les intégrales d'une même équation : Application aux transcendantes. — Equation d'Euler ; méthode d'Abel.

Généralités. — On appelle « équation différentielle » une relation entre *une* variable indépendante, une ou plusieurs fonctions de cette variable, et certaines dérivées de ces fonctions.

On appelle « système d'équations différentielles » un système formé de telles équations. Le système sera *complet*, si le nombre d'équations est égal au nombre des fonctions inconnues ou plus exactement si le nombre d'équations permet de déterminer à des constantes près, toutes les fonctions inconnues.

On appelle « équation aux dérivées partielles » une équation entre *plusieurs* variables indépendantes, une ou plusieurs fonctions de ces variables et certaines dérivées partielles de ces fonctions par rapport à ces variables.

Nous avons montré au début du cours, comment se formaient de telles équations :

Pour une équation différentielle, étant donnée une famille de fonctions dépendant de n paramètres, définie par

$$f(x, y, a_1, a_2, \cdots a_n) = 0, \tag{1}$$

en éliminant ces n paramètres entre la relation (1) et les équations dérivées successives jusqu'à l'ordre n au plus.

Pour les équations aux dérivées partielles, σ2 en éliminant des fonctions arbitraires de m variables entrant dans la définition de familles de fonctions de n variables ($n > m$).

On obtient également une équation différentielle en cherchant à déterminer une courbe par certaines propriétés relatives à des éléments de cette courbe ; arc, rayon de courbure, sous-tangente, sous-normale, etc.

De même, une équation aux dérivées partielles s'obtiendra en cherchant à déterminer une surface χ par certaines propriétés relatives à cette surface, arc, rayons de courbure, longueur de la normale, propriété du plan tangent, etc.

I. — ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Equations les plus simples. — Avant même de montrer l'existence de solutions d'un système d'équations différentielles donné, ou d'équations aux dérivées partielles (ce qui serait le plus logique), nous allons d'abord et pour avoir une idée du problème, résoudre les cas les plus simples d'équations différentielles.

Nous supposerons d'abord qu'il n'y a qu'une seule équation et qu'une seule fonction inconnue. Nous supposerons que cette équation est du premier ordre, c'est-à-dire qu'elle ne renferme que la dérivée première de la fonction inconnue.

Enfin nous pouvons supposer ζ que cette équation est résolue par rapport à cette dérivée première, de sorte qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y).$$

σ2 Nous avons déjà résolu le cas le plus simple, celui où le second membre $\varphi(x, y)$ ne dépend que de x : y s'obtient par une quadrature. La solution générale dépend d'une constante arbitraire. Elle est telle ρ qu'on peut disposer de la constante de manière que, pour une valeur donnée de x, soit x_0, (zéro par exemple), la

fonction prenne une valeur y_0 arbitrairement choisie. On a ainsi la solution

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx.$$

ξ

On pourrait envisager ensuite l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

π

mais ce cas se ramène au précédent, en échangeant le rôle des variables et considérant x comme une fonction de y.

L'équation s'écrit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varphi(y)} = \varphi_1(y).$$

Dans le cas général, l'équation (1) peut s'écrire plus symétriquement

(1') $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Les deux formes se ramènent visiblement l'une à l'autre.

σ1

On intégrerait immédiatement cette équation si l'on avait la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

π

En effet, le premier membre de l'équation serait alors la différentielle totale exacte d'une certaine fonction $u(x, y)$ qui pourrait s'obtenir par deux quadratures

$$u = \int_a^x M(x, y)dx + \int_b^y N(a, y)dy.$$

ω

L'équation pourrait donc s'écrire

$$du = 0$$

et par suite, on aurait

$$u = \text{const.}$$

Nous savons d'ailleurs que le résultat de cette double quadrature

σ2

se met sous la forme

$$F(x, y) - F(a, b) = u(x, y).$$

Dans la solution de l'équation différentielle, toutes les constantes se groupent ainsi en une constante unique

$$F(x, y) = \text{const.}$$

la fonction $F(x, y)$ étant parfaitement déterminée.

On voit que la solution la plus générale dépend d'une seule constante arbitraire. On peut en disposer de manière que, pour une valeur donnée de x, soit x_0, y prenne une valeur arbitrairement fixée y_0, à la condition que $F(x_0, y_0)$ soit bien déterminée. Il suffit de prendre

$$C = F(x_0, y_0).$$

Cas général : Facteur intégrant. — Euler s'est proposé de ramener le cas général au cas particulier que nous venons de traiter, en multipliant toute l'équation par un facteur à déterminer $\mu(x, y)$.

Si cela est possible, on devrait avoir, pour la nouvelle équation,

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{2}$$

En développant cette équation, on obtient

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0. \tag{3'}$$

C'est une équation à laquelle devront satisfaire la fonction $\mu(x, y)$ de deux variables et les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction. C'est donc une équation aux dérivées partielles.

Il semble donc que l'on ait compliqué le problème. Cependant il suffit de remarquer que nous n'avons pas besoin de résoudre entièrement l'équation (3') et d'en connaître toutes les solutions, mais seulement une *solution particulière quelconque*. On peut à cet effet, voir si l'on peut déterminer des solutions satisfaisant à des conditions supplémentaires données, par exemple, des solutions ne dépendant que de x ou de y ou de $\frac{y}{x}$, etc.

D'ailleurs nous allons montrer que, *si nous avons pu déterminer*

une solution $\mu(x, y)$, *nous pourrons en déduire toutes les autres.*

Soit, en effet, une autre solution $\mu_1(x, y)$. Pour mettre en évidence la connaissance de la première solution, μ, nous prendrons cette deuxième solution sous la forme $\mu(x, y) \times \nu(x, y)$.

Nous devrons donc avoir

$$\frac{\partial(\mu\nu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\nu N)}{\partial x}.$$

Si l'on développe cette équation en tenant compte de (3) il reste simplement

$$\mu M \frac{\partial \nu}{\partial y} = \mu N \frac{\partial \nu}{\partial x}. \tag{4}$$

Mais d'autre part, puisque μ était un premier facteur intégrant, nous savons que $\mu M dx + \mu N dy$ est la différentielle totale exacte d'une certaine fonction $u(x, y)$. Nous pouvons donc écrire

$$\mu M = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \mu N = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'équation (4) devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0.$$

Or, le premier membre est le déterminant fonctionnel des deux fonctions $u(x, y)$, $\nu(x, y)$. Ce déterminant étant nul, $u(x, y)$, $\nu(x, y)$ sont donc fonctions l'une de l'autre. On peut donc écrire

$$\nu(x, y) = F(u).$$

On a ainsi l'expression générale des facteurs intégrants.

$$\mu_1 = \mu F(u).$$

La fonction F (u) peut d'ailleurs être quelconque.

Toutes les solutions. — Bien plus, supposons que nous ayons pu obtenir directement deux facteurs intégrants μ et μ_1 (μ_1 ne différant pas de μ simplement par un facteur constant).

On peut être certain que si u est la solution de l'équation

aux différentielles totales exactes correspondant au facteur intégrant μ, on aurait une identité de la forme

$$\frac{\mu_1}{\mu} = F(u).$$

Or u étant supposée déterminée, la solution de l'équation différentielle serait $u = \text{const.}$, on aurait donc aussi

$$F(u) = \text{const.}$$

On peut donc poser immédiatement

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \text{const.}$$

Cette relation entre x, y dépendant d'une constante arbitraire donne la solution de l'équation différentielle.

En résumé : *Si l'on connaît un facteur intégrant, la solution générale s'obtient au moyen de deux quadratures. Si l'on connaît deux facteurs intégrants, la solution générale s'obtient sans quadratures.*

Remarque. — Si l'on a pu obtenir un facteur intégrant μ, solution de l'équation (3), dans l'équation différentielle,

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

le premier membre est la différentielle d'une fonction u que l'on peut déterminer par deux quadratures. On a alors identiquement

$$\mu M dx + \mu N dy \equiv du.$$

L'équation donnée peut donc s'écrire

$$\frac{1}{\mu} du = 0.$$

Elle peut être satisfaite, soit en posant $du = 0$, $u = \text{const.}$ ce qui donne la solution « générale » dépendant d'une constante arbitraire, soit en posant $\frac{1}{\mu} = 0$ ce qui fournit une solution dite « singulière » de l'équation.

Nous allons indiquer les différents types généraux d'équations que l'on sait intégrer.

Faisons au préalable la recommandation pratique suivante :

Toutes les fois que l'on a à intégrer une équation, il faut se demander comment interviennent x, y, y' ou encore x, y, dx, dy dans l'équation donnée pour se rendre compte si elle n'est pas de l'un des types que nous allons étudier.

Equations à variables séparées. — *L'équation est de la forme*

$$X dx + Y dy = 0$$

X *ne dépendant que de* x, Y *de* y.

Le premier membre est une différentielle totale exacte. La solution sera

$$\int X dx + \int Y dy = \text{const.}$$

en laissant indéterminées les limites d'intégration.

Si l'équation est de la forme

$$XY dx + X_1 Y_1 dy = 0$$

elle se ramène immédiatement au type précédent ; en divisant le premier membre de l'équation par $X_1 Y$, on obtient

$$\frac{X}{X_1} dx + \frac{Y_1}{Y} dy = 0.$$

Le facteur $\mu = \frac{1}{X_1 Y}$ est donc un facteur intégrant.

On aurait eu des solutions singulières en posant $\frac{1}{\mu} = 0$ c'est-à-dire, soit $X_1 = 0$, soit $Y = 0$.

En effet si $y = b$ est racine de l'équation $Y = 0$, la relation $y = b$ donnera bien une solution de l'équation différentielle.

Equations homogènes. — On appelle *équation homogène* une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

ou

$$M dx + N dy = 0 \tag{1'}$$

M *et* N *étant homogènes et de même degré en* x *et* y.

On aura bien alors en effet

$$M(x, y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad N(x, y) = x^m \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les formes (1) et (1′) sont bien équivalentes.

On voit que l'équation ne dépend que de y' et de $\frac{y}{x}$.

Cette forme de l'équation $^{\alpha, \nu}$ conduit à faire le changement de fonction $u = \frac{y}{x}$

δ_1

On en déduit

$$dy = x du + u dx.$$

L'équation (1′) s'écrit

$$\varphi(u)dx + \psi(u)(x du + u dx) = 0$$

ou

$$[\varphi(u) + u\psi(u)]dx + x\psi(u)du = 0.$$

ρ

On constate que l'équation transformée est une équation à variables séparées :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)}\, du. \tag{3}$$

Ainsi, quelle que soit l'équation homogène, elle doit se transformer en une équation de la forme

$$\frac{dx}{x} = F(u)du.$$

δ_1

En intégrant l'équation (3), on aura

$$\log x = -\int \frac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)}\, du + \text{const.}$$

On est donc ramené à une simple quadrature.

En désignant par $\theta(u)$ une fonction primitive quelconque de $\frac{-\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)}$, on aura, C étant une constante arbitraire

$$\left.\begin{aligned} x &= Ce^{\theta(u)} \\ y &= Cue^{\theta(u)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ω

On a ainsi les expressions de x et y en fonction du paramètre u. Le problème peut être considéré comme résolu. On aurait

d'ailleurs la relation entre x et y en remplaçant dans l'expression de x, u par $\frac{y}{x}$, ce qui donne

$$x = Ce^{\theta\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{4}$$

Ce sont là les équations des courbes intégrales. La solution, comme on le voit, dépend d'une constante arbitraire C.

On peut en disposer de manière que y prenne la valeur y_0 pour la valeur donnée, x_0, de x.

On voit que l'équation (4) représente, quand la constante C varie, des courbes homothétiques par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant seul variable.

Inversement, nous allons démontrer que si l'on donne une famille de courbes homothétiques par rapport à l'origine, l'équation différentielle que vérifie cette famille de courbes est une équation différentielle du premier ordre homogène.

L'équation de la famille est de la forme

$$f(Cx, Cy) = 0$$

ou encore

$$Cx = \psi\left(\frac{Cy}{Cx}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

C désignant une constante arbitraire. Formons, suivant la méthode habituelle l'équation différentielle vérifiée par les fonctions y.

Pour cela, différentions l'équation (1)

$$Cdx = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}. \tag{2}$$

Eliminons C entre (1) et (2) par simple division

$$x\,dx = \frac{\varphi'}{\varphi}(x\,dy - y\,dx)$$

ou

$$\left[x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx = x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)dy.$$

On voit que les coefficients de dx, dy sont homogènes et de même degré (*un*).

Géométriquement, le résultat était évident. Car la relation différentielle donnée exprime que la direction de la tangente en un point, ne dépend que de $\frac{y}{x}$, par conséquent est la même, pour toutes les courbes solutions, aux différents points de rencontre de ces courbes avec une droite issue de l'origine : propriété caractéristique des courbes homothétiques par rapport à l'origine.

REMARQUE. — Pour ramener l'équation à une équation à variables séparées dont le premier membre est alors une différentielle totale exacte, nous avons divisé successivement l'équation par x^m, puis par $x[\varphi(u) + u\psi(u)]$; le facteur

$$\frac{1}{x \cdot x^m[\varphi(u) + u\psi(u)]} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{Mx + Ny}$$

est donc un facteur intégrant. On en déduit que $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ est une différentielle totale exacte, ce que l'on vérifie aisément.

Exemple. — Soit l'équation

$$(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0.$$

En posant $y = ux$, elle devient

$$(1 - u^2)dx + 2u(x\,du + u\,dx) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2u\,du}{u^2 + 1}.$$

En intégrant,

$$\log x + \log(u^2 + 1) = \text{const.} \quad \text{ou} \quad x(u^2 + 1) = \text{const.}$$

L'équation des courbes intégrales est donc :

$$x^2 + y^2 = cx.$$

REMARQUE. — Nous avons appelé équation homogène une équation de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

mais toute équation non résolue par rapport à y' de la forme

$F\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0$ pourrait se décomposer (en la résolvant par rapport à y') en une ou plusieurs équations homogènes.

Si cette résolution est possible, on est naturellement ramené au cas précédent. Mais, sans que cette résolution soit possible, il est parfois possible d'obtenir une représentation paramétrique de la courbe

$$F(X, Y) = 0$$

en posant

$$X = y' \qquad Y = \frac{y}{x}.$$

Supposons que l'on ait obtenu, en fonction d'un paramètre t,

$$X = y' = \frac{dy}{dx} = \lambda(t) \qquad Y = \frac{y}{x} = \mu(t).$$

En éliminant y, (il suffit d'égaler les deux expressions de dy), on obtient

$$\lambda(t)dx = \mu(t)dx + x\mu'(t)dt$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{x} = \frac{\mu'(t)}{\lambda(t) - \mu(t)}dt.$$

On est donc ramené à une équation à variables séparées.

En particulier si $\lambda(t)$, $\mu(t)$ sont des fonctions rationnelles de t, (la courbe $F(X,Y) = 0$ est unicursale) on est ramené à une intégrale de fraction rationnelle.

Première généralisation. — L'équation homogène $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ peut aisément être généralisée. On peut considérer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right).$$

Il suffit de faire le changement de variable et de fonction défini par

$$a_1x + b_1y + c_1 = \eta \qquad ax + by + c = \xi$$

On en déduit

$$a_1dx + b_1dy = d\eta \qquad adx + bdy = d\xi$$

et par suite des expressions de la forme

$$dx = \mathrm{A}d\xi + \mathrm{B}d\eta \qquad dy = \mathrm{A}_1 d\xi + \mathrm{B}_1 d\eta.$$

L'équation (1) devient donc

$$\frac{\mathrm{A}_1 d\xi + \mathrm{B}_1 d\eta}{\mathrm{A}d\xi + \mathrm{B}d\eta} = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

α

En la résolvant par rapport à $\frac{d\eta}{d\xi}$. ρ on obtient bien une équation de la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mathrm{F}\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

L'équation en ξ et η est homogène.

Nous avons dû supposer

$$ab_1 - ba_1 \neq 0$$

σ

c'est-à-dire que les deux droites

$$ax + by + c = 0 \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

ne sont pas parallèles. Si elles le sont, o on peut écrire identiquement

$$ax + by = \frac{a}{a_1}(a_1 x + b_1 y)$$

et par suite

$$ax + by + c = \frac{a}{a_1}(a_1 x + b_1 y + c_1) + c - \frac{ac_1}{a_1}.$$

α

Posons alors simplement

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = \xi$$

on en déduit

$$dy = \frac{d\xi - a_1 dx}{b_1}.$$

L'équation donnée devient donc

$$\frac{d\xi - a_1 dx}{b_1 dx} = \varphi\left(\frac{\xi}{\frac{a}{a_1}\xi + c - \frac{ac_1}{a_1}}\right)$$

Elle est de la forme

$$\frac{dx}{d\xi} = F(\xi).$$

Elle s'intègre par une seule quadrature.

Ayant x en fonction de ξ, on en déduirait y par

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = \xi.$$

2e Généralisation. — On peut généraliser d'une manière différente l'équation homogène en prenant l'équation

$$P dx + Q dy + M(x dy - y dx) = 0.$$

P et Q désignant des fonctions homogènes de *même* degré p, M une fonction homogène de degré m. Elle diffère de l'équation homogène par l'addition d'un terme en $(x dy - y dx)$. On a donc

$$M = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad P = x^p \psi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad Q = x^p \theta\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nous ferons naturellement le changement de variable $\frac{y}{x} = t$

$$dy = t dx + x dt, \qquad x dy - y dx = x^2 dt.$$

L'équation devient donc

$$\psi(t) dx + \theta(t)[t dx + x dt] + x^{m-p+2} dt = 0$$

c'est-à-dire

$$[\psi(t) + t\theta(t)] dx + x\theta(t) dt + x^{m-p+2} dt = 0.$$

Considérée comme définissant x en fonction de t, elle ne renferme qu'un terme en $\frac{dx}{dt}$, un terme en x, un terme en x^n, les coefficients pouvant être des fonctions quelconques de t.

Nous verrons que c'est une équation dite « *de Bernouilli* » que l'on sait intégrer.

Equation de Darboux. — L'équation ci-dessus peut être mise sous forme plus symétrique si l'on introduit des coordonnées homogènes X, Y, Z.

Posons

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z}$$

δ_1

on a

$$x\,dy - y\,dx = x^2 d\frac{y}{x} = x^2 d\frac{Y}{X} = \frac{X\,dY - Y\,dX}{Z^2}.$$

L'équation devient donc

$$P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\frac{Z\,dX - X\,dZ}{Z^2} + Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\frac{Z\,dY - Y\,dZ}{Z^2} + M\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)\frac{X\,dY - Y\,dX}{Z^2} = 0$$

ou, plus symétriquement, en changeant de notation,

$$M(Y\,dZ - Z\,dY) + N(Z\,dX - X\,dZ) + P(X\,dY - Y\,dX) = 0,$$

M, N, P $^{\rho}$ désignant des fonctions homogènes et de même degré en X, Y, Z.

(Nous reprendrons la notation x, y, z).

Darboux a étudié cette équation dans le cas où M, N, P sont des polynômes de degré m.

Si l'on fait une transformation linéaire et homogène quelconque $^{\sigma, \psi}$ *sur* x, y, z, *l'équation transformée sera de la même forme.*

δ_1

En effet, si l'on pose

$$X = ax + by + cz.$$
$$Y = a'x + b'y + c'z$$
$$Z = a''x + b''y + c''z$$

comme, dans l'équation donnée $^{\rho}$ n'entrent que les rapports de $x : y : z$, et les différentielles de ces rapports, $^{\sigma}$ dans l'équation transformée ne peuvent entrer que les rapports de X : Y : Z et les différentielles de ces rapports.

L'équation peut s'écrire

$$(Nz - Py)dx + (Px - Mz)dy + (My - Nx)dz = 0.$$

Considérons les courbes de degré $(m + 1)$:

$$Nz - Py = 0, \qquad Px - Mz = 0, \qquad My - Nx = 0.$$

Tous les points appartenant aux deux premières courbes appartiennent à la troisième sauf les points $z = 0$, $P = 0$.

ω
Elles ont donc $(m+1)^2 - m$ points communs que nous appellerons points α, les points définis par

$$\frac{M}{x} = \frac{N}{y} = \frac{P}{z}.$$

En ces points, la direction de la tangente à une courbe intégrale n'est plus déterminée par l'équation.

Il ne peut pas y avoir plus de $(m+1)$ de ces points α sur une
π
droite, car la droite rencontrerait les courbes en plus de $(m+1)$ points : elle devrait donc faire partie de chacune des courbes. On pourrait supprimer le facteur correspondant.

ψ
Mais il est possible que $(m+1)$ des points α soient sur une
ψ
droite D. *Dans ce cas,* nous allons montrer que *l'équation de cette droite fournit une solution de l'équation différentielle.*

Faisons en effet une transformation linéaire en prenant pour l'une des formules de transformation

$$X = ax + by + cz,$$

$ax + by + cz = 0$ représentant l'équation de la droite.

o
D'après la remarque faite, l'équation transformée sera de même forme

$$(1) \qquad M_1(X, Y, Z)(Y dZ - Z dY) + N_1(X, Y, Z)(Z dX - X dZ) + P_1(X, Y, Z)(X dY - Y dX) = 0.$$

D'après la propriété des points singuliers α, que nous avons
ψ
signalée, les points α ont évidemment pour transformés les nouveaux points α et $(m+1)$ des points transformés doivent être en ligne droite. Or la nouvelle équation de D est $X = 0$.

β
Elle doit couper les courbes

$$N_1Z - P_1Y = 0, \qquad P_1X - M_1Z = 0, \qquad M_1Y - N_1X = 0$$

δ_1, β
en $(m+1)$ points. Il faut donc que M_1 soit identiquement nul.

δ_1
L'équation se réduit alors à

$$N_1(Z dX - X dZ) + P_1(X dY - Y dX) = 0.$$

Elle est satisfaite pour $X = 0, dX = 0$.

ω

La droite D forme donc bien une solution de l'équation.

Considérons maintenant une équation entière et homogène de degré p

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

Cherchons à quelle condition *nécessaire* elle pourra fournir une solution de l'équation.

o

Pour tous les points de cette courbe, la fonction $f(x, y, z)$ étant homogène, on aura

$$pf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

On en déduit

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{ydz - zdy} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{zdx - xdz} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{xdy - ydx}. \tag{3}$$

Si $f = 0$ est une solution, pour tout système de valeurs satis-

β

faisant à $f = 0$, on devra avoir aussi, en substituant dans l'équation les valeurs proportionnelles de $y\,dz - z\,dy$, $z\,dx - x\,dz$, $x\,dy - y\,dx$.

$$M\frac{\partial f}{\partial x} + N\frac{\partial f}{\partial y} + P\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

d

Tous les systèmes de valeurs satisfaisant à $f = 0$ satisfont donc aussi à l'équation (4). Or les premiers membres des équations étant des polynômes, on en déduit *qu'on doit avoir une identité de la forme*

$$M\frac{\partial f}{\partial x} + N\frac{\partial f}{\partial y} + P\frac{\partial f}{\partial z} \equiv Qf$$

Q étant un polynôme homogène de degré $(m - 1)$.

Cette remarque permettra de rechercher si de telles solutions

φ

sont possibles. Il suffit de voir si l'on peut faire l'identification.

Equation de Jacobi. — L'équation de Jacobi correspond au cas où les polynômes sont linéaires (et homogènes) en x, y, z.

$$(ax + by + cz)(ydz - zdy) + (a_1x + b_1y + c_1z)(zdx - xdz) + (a_2x + b_2y + c_2z)(xdy - ydx) = 0.$$

α, ν

Cherchons si cette équation peut admettre comme solutions des droites.

δ1

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ l'équation d'une de ces droites.

β

D'après la remarque de Darboux, on voit que l'on devra avoir une identité de la forme

$$\alpha(ax + by + cz) + \beta(a_1x + b_1y + c_1z) + \gamma(a_2x + b_2y + c_2z) = Q(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Dans le cas actuel, Q (de degré $(m - 1)$) se réduit à une constante S.

δ1

En égalant, dans les deux membres, les coefficients de x, y, z, on obtient

$$\text{I} \begin{cases} \alpha(a - S) + \beta a_1 + \gamma a_2 = 0 \\ \alpha b + \beta(b_1 - S) + \gamma b_2 = 0 \\ \alpha c + \beta c_1 + \gamma(c_2 - S) = 0. \end{cases}$$

ρ

Or, ces trois équations sont linéaires et homogènes en α, β, γ.

ω

Il est donc nécessaire que

$$\begin{vmatrix} a - S & a_1 & a_2 \\ b & b_1 - S & b_2 \\ c & c_1 & c_2 - S \end{vmatrix} = 0.$$

S doit donc être racine de cette équation du troisième degré.

σ2, ρ

Pour chacune des racines, les équations (I) se réduisent à deux, qui déterminent alors des quantités proportionnelles à α, β, γ et donnent l'équation d'une droite solution de l'équation différentielle. Si les trois racines sont distinctes, on a donc trois droites solutions de l'équation.

ψ

Nous allons montrer que *l'on peut en déduire la solution générale de l'équation différentielle.*

α

Faisons en effet une transformation linéaire, en prenant comme nouveau triangle de référence, le triangle formé par ces trois droites correspondant aux trois racines distinctes, S_1, S_2, S_3.

$$\text{II}\begin{cases} X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ Y = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \\ Z = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0. \end{cases}$$

δ_1

Faisons la substitution. Le calcul semble devoir être très compliqué puisqu'il faut résoudre (ou supposer résolue) l'équation en S, résoudre les trois systèmes analogues à (I) pour avoir $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, résoudre ensuite le système ci-dessus par rapport à x, y, z et substituer enfin dans l'équation différentielle, les variables et leurs différentielles.

Ce calcul se fait très méthodiquement assez simplement. Il faut calculer les différences

$$\delta_1 = y dz - z dy, \qquad \delta_2 = z dx - x dz, \qquad \delta_3 = x dy - y dx.$$

Nous désignerons par Δ_1, Δ_2, Δ_3 les différences correspondantes.

Enfin, nous emploierons la notation abrégée connue

$$\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = (\beta_2\gamma_3).$$

α_1

En différentiant les deux dernières équations du système (II), et faisant la combinaison $\Delta_1 = Y\Delta Z - Z\Delta Y$, σ nous avons

$$\Delta_1 = (\beta_2\gamma_3)\delta_1 + (\gamma_2\alpha_3)\delta_2 + (\alpha_2\beta_3)\delta_3.$$

De même, par simple permutation circulaire des indices,

$$\Delta_2 = (\beta_3\gamma_1)\delta_1 + (\gamma_3\alpha_1)\delta_2 + (\alpha_3\beta_1)\delta_3$$
$$\Delta_3 = (\beta_1\gamma_2)\delta_1 + (\gamma_1\alpha_2)\delta_2 + (\alpha_1\beta_2)\delta_3.$$

δ_1, α χ

On calculera aisément δ_1 en multipliant respectivement ces équations par α_1, α_2, α_3 et les ajoutant. Si nous posons

$$H = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

o

on obtient simplement

$$\alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2 + \alpha_3\Delta_3 = H\delta_1$$

de même

$$\beta_1\Delta_1 + \beta_2\Delta_2 + \beta_3\Delta_3 = H\delta_2, \qquad \gamma_1\Delta_1 + \gamma_2\Delta_2 + \gamma_3\Delta_3 = H\delta_3.$$

δ_1

L'équation transformée est donc

$$(\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2+\alpha_3\Delta_3)M+(\beta_1\Delta_1+\beta_2\Delta_2+\beta_3\Delta_3)N+(\gamma_1\Delta_1+\gamma_2\Delta_2+\gamma_3\Delta_3)P=0.$$

δ_1

Le coefficient de Δ_1 est

$$\alpha_1 M+\beta_1 N+\gamma_1 P.$$

ρ

Or, nous formerons facilement cette combinaison d'après les équations (I). Nous avons

$$\begin{aligned}\alpha_1 a+\beta_1 a_1+\gamma_1 a_2&=\alpha_1 S_1\\ \alpha_1 b+\beta_1 b_1+\gamma_1 b_2&=\beta_1 S_1\\ \alpha_1 c+\beta_1 c_1+\gamma_1 c_1&=\gamma_1 S_1.\end{aligned}$$

α

Si nous les multiplions respectivement par x, y, z et les ajoutons, nous aurons

$$\alpha_1 M+\beta_1 N+\gamma_1 P=S_1(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z)=S_1 X.$$

δ_1

De même le coefficient de Δ_2 est S_2Y, celui de Δ_2, est S_3Z.

ω

L'équation transformée est donc

$$S_1X(YdZ-ZdY)+S_2Y(ZdX-XdZ)+S_3Z(XdY-YdX)=0.$$

ρ, δ_1

Elle s'écrit

$$(S_2-S_3)YZdX+(S_3-S_1)ZXdY+(S_1-S_2)XYdZ=0.$$

α

En divisant par XYZ,

$$(S_2-S_3)\frac{dX}{X}+(S_3-S_1)\frac{dY}{Y}+(S_1-S_2)\frac{dZ}{Z}=0.$$

En intégrant, on obtient donc

$$X^{S_2-S_3}Y^{S_3-S_1}Z^{S_1-S_2}=\text{const.}$$

R

En résumé, l'intégration est ramenée à la résolution de l'équation du troisième degré, puis la détermination des trois droites correspondantes X, Y, Z. Ces trois droites sont les droites passant par deux des points communs aux trois coniques

$$Nz-Py=0,\qquad Px-Mz=0,\qquad My-Nx=0.$$

ρ

Le triangle qu'elles forment est donc le triangle inscrit à la fois dans les trois coniques.

Remarque. — Il était facile de voir très rapidement que l'équation pouvait être intégrée si l'on connaissait les trois solutions particulières

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

α

Prenons en effet ces trois droites comme triangle de référence.

σ_2

Nous savons que l'équation transformée conserve la même forme

$$M_1(X, Y, Z)(Y dZ - Z dY) + N_1(X, Y, Z)(Z dX - X dZ) + P_1(X, Y, Z)(X dY - Y dX) = 0.$$

ν_1, β

Cette équation devant admettre la solution $X = 0$, d'où $dX = 0$, il est nécessaire que $M_1(X, Y, Z)$ soit divisible par X et par conséquent se réduise à λX, λ étant une constante. De même

$$N_1 = \mu Y, \qquad P_1 = \nu Z.$$

ω

L'équation est donc de la forme

$$\lambda X(Y dZ - Z dY) + \mu Y(Z dX - X dZ) + \nu Z(X dY - Y dX) = 0$$

ρ

et s'intègre comme ci-dessus, mais nous n'avons pas ainsi les valeurs de λ, μ, ν qui sont, comme on l'a vu, les racines de l'équation en S.

II. — ÉQUATIONS LINÉAIRES

On appelle « équation linéaire du premier ordre » une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x) = 0 \tag{1}$$

linéaire par rapport à y et $\frac{dy}{dx}$, P et Q étant des fonctions de x seulement.

Méthode de variation des constantes. — Si $Q(x)$ était nul, nous aurions une équation de la forme

$$\frac{dz}{dx} + Pz = 0 \tag{2}$$

ρ

qui serait à variables séparées.

En l'intégrant, on aurait

$$z = Ce^{-\int P dx}.$$

ψ

Nous allons montrer que, si Q est différent de zéro, l'intégration de (1) se ramène à celle de (2).

Cela est évident si l'on connaît une solution particulière y_0 de

π, α

l'équation (1), car si l'on pose $y = y_0 + z$, z désignant une nouvelle fonction inconnue, on voit que z doit satisfaire à l'équation (2). Cette condition est d'ailleurs suffisante.

ω

Ainsi la solution générale de (1) est

$$y = y_0 + Ce^{-\int P dx}.$$

ρ

Elle dépend d'une constante arbitraire C. Elle s'obtient (connaissant y_0) par une seule quadrature.

Règle. — *On obtient la solution générale de l'équation donnée, en ajoutant à une solution particulière quelconque, la solution générale de l'équation sans terme indépendant* $\left(\text{de } y \text{ et } \frac{dy}{dx}\right)$.

Nous allons montrer que, sans connaître la solution particulière

ψ

y_0, on peut obtenir la solution générale de (1) au moyen de deux quadratures.

En effet désignons par z_0 une solution quelconque de l'équation (2) ($C = C_0$ par exemple), nous pouvons toujours supposer

α, ν

que la solution cherchée y est de la forme

$$y = z_0 u, \qquad \left(z_0 = C_0 e^{-\int P dx}\right)$$

u désignant une nouvelle fonction inconnue.

δ_1

En écrivant que y satisfait à (1) nous obtenons

$$z_0 \frac{du}{dx} + u\left(\frac{dz_0}{dx} + Pz_0\right) + Q = 0.$$

ρ

Mais puisque z_0 est solution de (2), cette équation se réduit à

$$z_0 \frac{du}{dx} + Q = 0$$

et par suite

$$u = -\int \frac{Q}{z_0} dx + C_1,$$

ω

Ainsi on a la forme nécessaire et suffisante de la fonction u.

δ_1

On a donc finalement

$$y = C_0 e^{-\int P dx}\left[C_1 - \int \frac{Q}{C_0} e^{\int P dx} dx\right]$$

c'est-à-dire

$$y = e^{-\int P dx}\left[C_1 C_0 - \int Q e^{\int P dx} dx\right]$$

ou, en désignant par k une autre constante arbitraire,

$$y = e^{-\int P dx}\left[k - \int Q e^{\int P dx} dx\right]. \tag{4}$$

ρ

Elle est indépendante de C_0 c'est-à-dire de la solution particulière choisie. Elle dépend d'une constante arbitraire k dont on peut disposer de manière qu'elle prenne une valeur arbitrairement choisie, y_0, pour x_0.

Cette méthode a consisté comme on le voit à prendre la solution générale de l'équation en z sans second membre (2), soit

$$z = Ce^{-\int P dx}$$

ξ

et à considérer C non plus comme une constante, mais comme une nouvelle fonction. Elle porte le nom de méthode de « *variation de la constante* » (il serait préférable de dire « variation de l'arbitraire »).

Pratiquement, il ne faut évidemment pas retenir et appliquer la formule (4), mais appliquer la méthode, c'est-à-dire après avoir déterminé la solution Cz_0 de l'équation sans second membre, considérer C comme une nouvelle fonction et écrire immédiatement l'équation

$$z_0 \frac{dC}{dx} + Q = 0$$

en négligeant le terme en y.

Méthode du facteur intégrant. — Une deuxième méthode, pour intégrer l'équation linéaire, consiste à rechercher un facteur intégrant.

α_1 Nous devons écrire l'équation

$$dy + dx(Py + Q) = 0. \tag{1}$$

β En multipliant l'équation par $\mu(x, y)$, le facteur intégrant μ devra satisfaire à

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\mu(Py + Q). \tag{2}$$

α_1, ν Cherchons s'il ne peut exister de facteur μ qui soit fonction de x seulement. L'équation (2) se réduit alors à

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P \tag{3}$$

ω μ est donc donné par une quadrature

$$\mu = e^{\int P dx}.$$

σ_2 Ayant obtenu μ, nous sommes assuré que le premier membre de la nouvelle équation est une différentielle totale exacte.

δ_1 Elle s'écrit

$$\mu dy + \mu(Py + Q)dx = 0.$$

α_1 Remplaçons $\mu P dx$ par $d\mu$, on obtiendra

$$\mu dy + y d\mu + \mu Q dx = 0$$

ρ c'est-à-dire

$$d(\mu y) + \mu Q dx = 0.$$

On peut l'intégrer et on obtient

$$\mu y + \int \mu Q dx = c_1.$$

ω Ainsi on a

$$y = \frac{c_1}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int \mu Q dx = c_1 e^{-\int P dx} - e^{-\int P dx}\int Q e^{\int P dx} dx.$$

ρ On retrouve donc identiquement la formule obtenue par la première méthode.

Applications. — 1° Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} - y + x^2 = 0.$$

δ_1

L'équation sans second membre est

$$\frac{dz}{dx} - z = 0.$$

En l'intégrant, nous avons

$$z = Ce^x.$$

x

En prenant C comme nouvelle fonction, et posant $y = Ce^x$, nous écrirons *immédiatement*, en négligeant le terme en y, l'équation réduite

$$e^x \frac{dC}{dx} + x^2 = 0.$$

D'où

$$C = -\int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + k.$$

ω

On a donc

$$y = ke^x - (x^2 + 2x + 2).$$

C'est la solution générale.

2° Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{xy^2 + 1}.$$

δ_1

Elle s'écrit

$$(xy^2 + 1)dy - y^3 dx = 0.$$

ρ

C'est une équation *linéaire en x et dx.*

α

Nous prendrons donc y comme variable indépendante et écrirons l'équation

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} - \frac{1}{y^3} = 0$$

ξ

L'équation sans second membre

$$\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = 0$$

admet pour solution $z = Cy$.

Nous posons donc $x = Cy$, C désignant une nouvelle fonction ; C sera déterminée par l'équation

$$y\frac{dC}{dy} - \frac{1}{y^3} = 0 \qquad C = \int \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{3y^3} + k.$$

Nous avons donc

$$x = Cy = ky - \frac{1}{3y^2}.$$

REMARQUE. — I. Nous voyons que la solution générale de l'équation linéaire se présente toujours sous la forme

$$y = \varphi_0(x) + k\varphi_1(x)$$

k désignant une constante arbitraire, φ_0 et φ_1 deux fonctions déterminées de x.

Inversement, il est aisé de voir que *toute famille de fonctions de cette forme satisfait à une équation linéaire.*

L'élimination de k s'obtient immédiatement en écrivant

$$\frac{y - \varphi_0}{\varphi_1} = k$$

et dérivant. On obtient

$$\varphi_1\left(\frac{dy}{dx} - \varphi_0'\right) - \varphi_1'(y - \varphi_0) = 0$$

équation linéaire en y.

II. Nous avons vu que, si l'on connaît une solution particulière, une quadrature suffira pour avoir la solution générale.

Mais *si l'on connaît deux solutions particulières, on pourra écrire la solution, sans aucune intégration.*

En effet, si l'on connaît les deux solutions y_1, y_2, on connaîtra une solution particulière

$$z = y_2 - y_1$$

de l'équation sans second membre. La solution générale de l'équation sans second membre est donc $z = k(y_2 - y_1)$ et par

suite, la solution générale de l'équation donnée est

$$y = y_1 + k(y_2 - y_1).$$

Les solutions particulières correspondent à $k = 0$, $k = 1$.

Equation de Bernouilli. — On appelle *équation de Bernouilli* une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^m = 0. \qquad (m \text{ quelconque})$$

Elle est linéaire et homogène en $\frac{dy}{dx}$, y, y^m, les coefficients étant des fonctions de x, de même qu'on peut dire que l'équation linéaire est linéaire et homogène en $\frac{dy}{dx}$, y, et y^0.

Elle se ramène immédiatement à une équation linéaire. Il suffit de diviser le premier membre de l'équation par y^m et de poser

$$z = \frac{1}{y^{m-1}}.$$

On a alors

$$\frac{dz}{dx} = -(m-1)\frac{1}{y^m} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Par suite l'équation se transforme en

$$-\frac{1}{m-1} \cdot \frac{dz}{dx} + Pz + Q = 0.$$

C'est bien une équation linéaire en z que l'on sait intégrer par deux quadratures.

Application. — I. Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} - x\sqrt{y} = 0.$$

Nous divisons toute l'équation par $\sqrt{y}$ et nous posons $\sqrt{y} = z$. On aura

$$2\frac{dz}{dx} + \frac{x}{1-x^2}z - x = 0.$$

ξ

L'équation sans second membre

$$2\frac{dz}{z} + \frac{xdx}{1-x^2} = 0$$

admet comme solution

$$z = C(x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}.$$

δ_1

En prenant C comme nouvelle fonction, elle sera déterminée par

$$2(x^2 - 1)^{\frac{1}{4}}\frac{dC}{dx} - x = 0.$$

En intégrant,

$$C = \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{4}} + k.$$

ω

On a donc finalement

$$z = \frac{1}{\sqrt{y}} = k(x^2 - 1)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}(x^2 - 1).$$

II. Soit encore l'équation

$$x^2y^3dy + xydy - dx = 0.$$

ρ

L'équation n'est pas linéaire en dy, y, y^m : ce n'est donc pas une équation de Bernouilli en y, mais ρ elle est linéaire et homogène en dx, x, x^2 : C'est donc une équation de Bernouilli si l'on prend x comme fonction. δ_1 Nous l'écrirons donc

$$\frac{dx}{dy} - xy - x^2y^3 = 0.$$

δ

On l'intégrera sans difficulté. On obtiendra

$$z = \frac{1}{x} = 2 - y^2 + ke^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Equation de Riccati. — L'équation de Riccati est de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P + Qy + Ry^2 = 0.$$

P, Q, R étant trois fonctions de x.

ρ
Elle diffère de l'équation linéaire par l'addition d'un terme du second degré en y, ou d'une équation de Bernouilli par l'addition d'un terme indépendant de y.

On ne sait, en général, pas intégrer une telle équation. Cependant
ψ
si l'on connaît une solution particulière y_0, on peut la ramener à une équation de Bernouilli et par suite à une équation linéaire.
α
Il est visible en effet que, en posant

$$y = y_0 + z$$

o
z satisfera à une équation de même forme. Mais, comme
ρ
la nouvelle équation doit admettre la solution $z = 0$, il n'y aura pas de terme indépendant de z. La nouvelle équation sera donc une équation de Bernouilli de la forme

$$\frac{dz}{dx} + Q_1 z + R_1 z^2 = 0.$$

α
Nous poserons donc immédiatement

$$y = y_0 + \frac{1}{z}.$$

δ1
En substituant dans l'équation donnée, nous aurons

$$\frac{dy_0}{dx} - \frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx} + P + Q\left(y_0 + \frac{1}{z}\right) + R\left(y_0^2 + 2\frac{y_0}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = 0.$$

o
Tenant compte de ce que y_0 est solution, et multipliant par z^2, on obtient

$$-\frac{dz}{dx} + (Q + 2Ry_0)z + R = 0.$$

C'est bien une équation linéaire.

σ2
On voit donc, que si l'on connaît une solution particulière, la solution générale s'obtient au moyen de deux quadratures et dépend d'une constante arbitraire. Si l'on connaît deux solutions
ρ, o
particulières, on connaîtra une solution particulière de
χ
l'équation en z, d'après la relation

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{z}.$$

Par suite l'intégration sera ramenée à une seule quadrature. On verrait que les changements successifs reviennent au changement

$$\varphi = \frac{y - y_2}{y - y_1}.$$

En effet, si l'on fait le changement

$$y = \frac{y_2 - \varphi y_1}{1 - \varphi}$$

l'équation transformée est encore visiblement une équation de Riccati en φ. Comme cette équation doit admettre les solutions $\varphi = 0$, $\varphi = \infty$ correspondant à $y = y_2$, et $y = y_1$, l'équation transformée ne doit pas avoir de terme P_1, ni de terme R_1. Elle est donc de la forme

$$\frac{d\varphi}{dx} + \varphi Q_1 = 0$$

et s'intègre par une seule quadrature.

Enfin si l'on connaît trois solutions particulières y_1, y_2, y_3, on connaîtra deux solutions particulières de l'équation en z : on aura donc la solution générale *sans aucune quadrature* de l'équation linéaire et par suite aussi de l'équation de Riccati.

Forme de la solution. — Nous avons vu qu'en posant

$$y = y_0 + \frac{1}{z}$$

connaissant la solution particulière y_0, z satisfait à une équation linéaire. La solution générale de cette dernière est de la forme

$$z = \varphi(x) + k\psi(x)$$

φ et ψ étant deux fonctions déterminées, k une constante arbitraire.

La solution générale de l'équation de Riccati est donc de la forme

$$y = f(x) + \frac{1}{\varphi + k\psi}$$

ou encore

$$y = \frac{\varphi_1 + k\psi_1}{\varphi + k\psi}.$$

ρ

On voit donc que *y est une fonction homographique de la constante k.*

ψ

Nous allons montrer que, inversement, toute famille de fonctions dépendant, sous cette forme, d'une constante arbitraire, satisfait à une équation de Riccati.

α_1

On éliminera sans difficulté la constante k entre cette équation et l'équation dérivée. L'élimination se fait immédiatement

ζ

si on résoud l'équation par rapport à k.

On obtient

$$k = \frac{y\varphi - \varphi_1}{\psi_1 - y\psi}.$$

δ_1

On a donc en dérivant

$$(\psi_1 - y\psi)(y'\varphi + y\varphi' - \varphi_1') - (y\varphi - \varphi_1)(\psi_1' - y\psi' - y'\psi) = 0.$$

ρ

Les termes en yy' se détruisent. On reconnaît que l'équation est bien de la forme de Riccati.

Remarque : *Rapport anharmonique.* — Nous avons vu que la solution générale

σ_2

se présente sous la forme d'une fonction homographique de la constante k, les coefficients étant des fonctions déterminées de x. D'après les propriétés des fonctions homographiques,

σ_2

si l'on connaît quatre solutions quelconques, *le rapport anharmonique des quatre solutions* (y_1, y_2, y_3, y_4) *est égal au rapport anharmonique des quatre constantes* (k_1, k_2, k_3, k_4) *auxquelles elles correspondent et par suite est constant*

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \text{const.}$$

Si donc on connaît trois solutions particulières, y_1, y_2, y_3,

ρ, *d*

une solution quelconque y est telle que

$$(y_1, y_2, y_3, y) = \text{const.}$$

c'est-à-dire

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = k\,\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

ω

On a donc la solution générale sans aucune quadrature.

Résumé. — En résumé et comme règle pratique :

R, σ_2 Si l'on connaît une solution particulière y_0, faire le changement de variable $y = y_0 + \frac{1}{z}$: On est ramené à une équation linéaire.

α Si l'on connaît deux solutions y_1, y_2, faire le changement de variable $v = \frac{y - y_2}{y - y_1}$: on est ramené à une équation de la forme

$$\frac{dv}{dx} + vQ_1 = 0$$

qui s'intègre par une seule quadrature.

o Enfin, si l'on connaît trois solutions particulières, on a, sans quadrature, la solution générale en posant

$$(y, y_1, y_2, y_3) = \text{const.}$$

v Pour trouver des solutions particulières, on pourra quelquefois rechercher des solutions qui soient polynômes en x.

Application. — Intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx}(1 - x^3) + 2x + x^2y - y^2 = 0.$$

Si elle admet une solution, polynôme en x de degré m,

$$y = a_0x^m + \cdots$$

β les termes du plus haut degré dans le résultat de la substitution seront de degré

$$m - 1 + 3, \qquad 2 + m, \qquad 2m.$$

ω Il est donc nécessaire que $m = 2$ ou $m = 1$.

δ_1 On trouve alors aisément les solutions

$$y_1 = -x^2, \qquad y_2 = x + 1.$$

δ_1 Nous ferons donc le changement

$$\frac{y - x - 1}{y + x^2} = v, \qquad y = \frac{x + 1 + vx^2}{1 - v}.$$

o On trouve simplement, après suppression du facteur $(x^2 + x + 1)^2$,

$$v'(x - 1) = v.$$

D'où, en intégrant,

$$\varphi = k(x - 1).$$

ω

On a donc la solution générale

$$y = \frac{x + 1 + kx^2(x - 1)}{1 - k(x - 1)}.$$

Les solutions particulières trouvées correspondent à $k = 0$ $k = \infty$.

III. — ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

Dans tous les cas précédents, nous avons supposé l'équation résolue par rapport à y'.

α

Prenons maintenant une équation générale

$$f(x, y, y') = 0.$$

Nous allons d'abord traiter trois cas simples.

ζ

Cas simples. — 1° *L'équation ne dépend que de* y, y' *soit* $f(y, y') = 0$.

ξ, ν

Considérons-la comme représentant une courbe, les deux coordonnées étant y et y'. α Nous pouvons essayer d'en chercher une représentation paramétrique et d'exprimer y et y' en fonction d'une variable auxiliaire t, sous la forme

$$y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t).$$

α

Il faut alors déterminer x en fonction de t

δ1

A cet effet nous avons

$$y' = \frac{dy}{dx} = \psi(t).$$

Donc

$$dx = \frac{dy}{\psi(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt.$$

Par suite

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt.$$

L'intégration de l'équation serait donc ramenée à une simple quadrature.

α

2° *L'équation ne dépend que de x et y'.* Supposons de même, qu'on puisse avoir une représentation paramétrique de la courbe $f(x, y') = 0$ sous la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t).$$

δ_1

On aura pour déterminer y l'équation

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt, \qquad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

On pourra, en particulier, obtenir la représentation paramétrique et effectuer les quadratures σ_2 toutes les fois que la courbe $f(y, y') = 0$ ou $f(x, y') = 0$ est une courbe unicursale. o On sera ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle.

3° *L'équation est homogène en x et y et ne dépend que de* $\frac{y}{x}$, *et de y'. Soit*

$$f\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0.$$

α, ζ

Si nous pouvons avoir une représentation paramétrique de la courbe sous la forme

$$\frac{y}{x} = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t)$$

d

on en déduira

$$dy = x\varphi'(t)dt + \varphi(t)dx = \psi(t)dx$$

et par suite

$$\frac{dx}{x} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}.$$

ρ

L'intégration est donc encore ramenée à une simple quadrature.

La représentation sera possible et l'intégration portera sur une fraction rationnelle, si la courbe est unicursale.

Application. — Soit, par exemple, l'équation

$$x^3y'^3 + y^3 - 3ax^2yy' = 0.$$

ρ

L'équation est homogène en x et y.

La courbe représentative est ici

$$Y^3 + X^3 - 3aXY = 0$$

en posant

$$\frac{y}{x} = X, \qquad y' = Y.$$

ρ

C'est une courbe unicursale qui peut être représentée par les équations

$$\frac{y}{x} = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y' = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

d

on en déduit

$$dy = y'dx = \frac{3at^2}{1+t^3}\,dx = \frac{3at}{1+t^3}\,dx + 3ax\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

D'où la quadrature

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-2t^3}{t(t-1)(1+t^3)}.$$

Cas général. — Prenons maintenant l'équation générale

$$f(x, y, y') = 0.$$

1re *Méthode : Changement de variables.* — Faisons sur la variable indépendante et la fonction des changements de variables quelconques.

$$x = \lambda(X, Y), \qquad y = \mu(X, Y).$$

d

On pourra en déduire

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial\mu}{\partial X}\,dX + \frac{\partial\mu}{\partial Y}\,dY}{\frac{\partial\lambda}{\partial X}\,dX + \frac{\partial\lambda}{\partial Y}\,dY}.$$

L'équation différentielle se transforme en

$$f\left(\lambda, \mu, \frac{\frac{\partial\mu}{\partial X}\,dX + \frac{\partial\mu}{\partial Y}\,dY}{\frac{\partial\lambda}{\partial X}\,dX + \frac{\partial\lambda}{\partial Y}\,dY}\right) = 0.$$

ρ

On est donc ramené à l'intégration *d'une autre* équation différentielle

$$F\left(X, Y, \frac{dY}{dX}\right) = 0,$$

qui peut être plus simple à intégrer si l'on a choisi convenablement les formules de transformation.

En particulier, on pourra voir si l'équation ne dépend pas seulement de x^2 ou de y^2.

On peut même faire des changements de variables introduisant la dérivée y', en particulier, on peut utiliser les transformations de contact permettant de calculer la dérivée de la nouvelle fonction Y en fonction seulement de x, y, y',

Par la transformation de Legendre, par exemple,

$$X = y', \qquad Y = xy' - y$$

on en déduit comme on le sait,

$$x = Y', \qquad y = XY' - Y.$$

De sorte que l'équation $f(x, y, y') = 0$ se transforme en

$$f(Y', XY' - Y, X) = 0.$$

Si l'on sait intégrer cette équation, on obtiendra une relation de la forme

$$Y = F(X, c)$$

dépendant d'une constante arbitraire c. En revenant aux anciennes variables on aura

$$xy' - y = F(y', c).$$

Cette équation, *jointe à l'équation différentielle* permettra *sans intégration nouvelle*, soit d'éliminer y' et d'obtenir une relation entre x et y, soit d'exprimer x et y en fonction du paramètre y'.

2e *Méthode* : *Intégration par dérivation.* — Un deuxième procédé général d'intégration est le procédé par dérivation.

Supposons l'équation

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

avec

$$dy = y'dx. \tag{2}$$

Si on considère ces deux relations comme des relations entre les trois variables x, y, y', on peut dire que l'on a entre elles deux relations permettant de considérer deux de ces variables comme fonctions de la troisième.

Si nous différentions l'équation (1), nous obtiendrons la nouvelle équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\partial y' = 0. \tag{3}$$

Elle est une conséquence de l'équation (1) et ne contient encore que x, y, y' et leurs différentielles. Si nous considérons les équations (1), (2), (3) entre les trois variables x, y, y' et leurs différentielles dx, dy, dy', nous pourrons entre ces trois relations éliminer un des groupes

$$x \text{ et } dx, \qquad y \text{ et } dy, \qquad y' \text{ et } dy'.$$

Si nous éliminions le groupe y' et dy', nous obtiendrions l'équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

qui est l'équation donnée.

Mais nous pouvons aussi éliminer un des deux autres groupes. Si nous éliminons le groupe x et dx, nous obtiendrons une équation

$$\varphi(y, y', dy, dy') = 0 \tag{4}$$

équation différentielle entre les deux variables y et y'.

Si nous éliminons le groupe y et dy, nous obtiendrons de même une équation

$$\psi(x, y', dx, dy') = 0 \tag{5}$$

équation différentielle entre les variables x et y'.

Si nous avons intégré l'équation (4) par exemple, par une relation de la forme

$$\lambda(y, y', k) = 0$$

dépendant d'une constante arbitraire, en tenant compte de l'équation différentielle donnée, nous pourrons soit éliminer y', soit exprimer x et y en fonction de y' *sans aucune intégration nouvelle.*

Il en serait de même si nous avions intégré l'équation (5).

Ainsi l'intégration de l'équation donnée est ramenée à l'intégration de l'une des équations (4) ou (5).

De même, par dérivation, chacune de celles-ci pourrait être ramenée à l'intégration d'une nouvelle équation du premier ordre.

En résumé, la méthode revient à différentier l'équation donnée

(1) $$f(x, y, y') = 0$$

et à éliminer entre (1), l'équation différentiée, et

$$dy - y'dx = 0,$$

un des groupes x et dx ou y et dy.

Equation de Lagrange. — L'équation de Lagrange est de la forme

(1) $$y = xf(y') + \varphi(y').$$

Sa caractéristique, comme on le voit, est d'être *linéaire en x et y*, les coefficients étant des fonctions de x.

δ1 Différentions l'équation (1)

(3) $$dy = f(y')\,dx + [xf'(y') + \varphi'(y')]dy'.$$

Nous avons d'autre part

(2) $$dy - y'dx = 0.$$

β Entre les équations (1), (2), (3), il faut éliminer soit y et dy, soit x et dx. Nous voyons qu'il est plus simple d'éliminer y et dy, ce qui revient simplement à remplacer dy par $y'dx$ dans (3). On obtient ainsi

$$[y' - f(y')]dx = [xf'(y') + \varphi'(y')]dy'.$$

ρ Or, cette équation est linéaire en x et dx, x étant consi-

o dérée comme fonction de y' : on sait donc l'intégrer. On obtiendra une équation de la forme

(5) $$\lambda(x, y', c) = 0.$$

α On pourra ensuite éliminer, soit y' entre (1) et (5) soit, mieux, exprimer x et y en fonction de y'.

On aurait pu aussi bien éliminer x et dx. On aurait obtenu une équation linéaire en y.

Pour éviter une confusion entre y et y' on désigne généralement y' par p et on écrit l'équation (1)

$$y = xf(p) + \varphi(p).$$

Equation de Clairaut. — Un cas particulier remarquable est celui où $f(y') = y'$

(1) $$y = xy' + \varphi(y').$$

C'est l'équation de Clairaut.

δ_1 En différentiant et remplaçant dy par $y'dx$, on obtient

$$dy = y'dx = xdy' + y'dx + \varphi'(y')dy'.$$

o Il reste simplement

$$[x + \varphi'(y')]dy' = 0.$$

o Elle se décompose en

$$dy' = 0, \qquad y' = c.$$

et

$$x + \varphi'(y') = 0.$$

Si l'on pose $y' = c$, on aura la solution

(5) σ $$y = cx + \varphi(c).$$

Les courbes intégrales sont donc des droites dont l'équation s'obtient en remplaçant y' par une constante dans l'équation différentielle donnée.

Mais on peut avoir aussi

(4″) ρ, δ_1 $$x + \varphi'(y') = 0.$$

La solution y s'obtiendrait en éliminant y' entre (1) et (1″). ρ Cela revient à éliminer c entre les équations

$$y = cx + \varphi(c) \qquad x + \varphi'(c) = 0.$$

σ c.-à-d. à prendre l'enveloppe des droites représentées par la solution générale (5).

Cette solution qui ne renferme rien d'arbitraire, et qui, pour aucune valeur de la constante, ne peut être comprise dans la solution générale, est appelée (nous indiquerons pourquoi), solution *singulière* de l'équation différentielle.

La solution générale d'une équation de Clairaut se compose d'une famille de droites dépendant d'une constante arbitraire.

α, ψ Inversement, une telle famille de droites satisfait à une équation de Clairaut.

β Les droites peuvent, en effet, être représentées par

$$y = mx + \varphi(m).$$

Pour former leur équation différentielle, α_1 il faut éliminer m entre cette équation et l'équation dérivée

$$y' = m.$$

L'élimination donne donc bien

$$y = xy' + \varphi(y').$$

REMARQUE. — Il était évident *a priori* que la solution de l'équation (1) devait comprendre une famille de droites.

L'équation, en effet, σ traduit une relation entre le coefficient angulaire y' d'une tangente à la courbe intégrale

$$Y - y = y'(X - x)$$

et l'ordonnée à l'origine $(y - xy')$ de cette tangente.

Si donc, les tangentes à une certaine courbe jouissent d'une telle propriété, il en sera de même pour chacune des tangentes elle-même, considérée comme une courbe.

ω Si une courbe C donne une solution de l'équation de Clairaut, toutes les tangentes à cette courbe, dépendant d'une constante arbitraire, doivent également donner des solutions de l'équation. On retrouve bien, comme solutions, une courbe et les tangentes à cette courbe.

Applications. — I. *Déterminer une courbe telle que si l'on mène en chaque point la tangente et la normale, elles rencontrent ox en des points* N *et* T *tels que*

$$OT \cdot ON = c^2.$$

δ_1 Si $y = f(x)$ est l'équation de la courbe cherchée, l'abcisse à l'origine de la tangente est $OT = \dfrac{xy' - y}{y'}$, celle de la normale, $ON = x + yy'$.

On a donc l'équation

$$(xy' - y)(x + yy') = c^2 y'$$

c'est-à-dire

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - c^2)y' - xy = 0.$$

Ce n'est pas là une équation de Clairaut, mais ν multi-

plions cette équation par $\frac{y}{x}$ (ce qui est évident) et remplaçons y' par $\frac{dy}{dx}$, on obtient

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 \quad y^2 - c^2)\frac{ydy}{xdx} - y^2 = 0.$$

ρ

On voit que cette équation ne dépend que de x^2 et y^2. Si donc nous posons

$$x^2 = u, \qquad y^2 = v$$

σ

elle devient

$$u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (u - v - c^2)\frac{dv}{du} - v = 0.$$

ρ

Elle est linéaire en u, v. Elle s'écrit

$$v(1 + v') = uv'(1 + v') - c^2v'$$

c'est-à-dire

$$v - uv' = -\frac{c^2v'}{1 + v'}.$$

σ_1

C'est donc une équation de Clairaut en v.

La solution générale s'obtient χ en remplaçant v' par une constante. En revenant aux variables x, y on a

$$y^2 - kx^2 = -\frac{c^2k}{1 + k}.$$

ou

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{1 + k}} - \frac{y^2}{\frac{c^2k}{1 + k}} = 1.$$

ρ

Ce sont des coniques homofocales.

II. *Déterminer une courbe telle, que la portion de normale comprise entre les axes ait une longueur constante l.*

δ

On a immédiatement l'équation

$$(x + yy')^2 = \frac{l^2y'^2}{1 + y'^2}.$$

En extrayant les radicaux et prenant par exemple le signe + au second membre, on obtient

$$x + yy' = \frac{ly'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

ρ

C'est une équation de Lagrange. Posons

$$y' = \frac{dy}{dx} = p. \qquad \text{D'où} \qquad x + py = \frac{lp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

δ1

En différentiant, on obtient

$$dx + pdy + ydp = \frac{ldp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

ν

Dans le cas actuel, il est plus naturel d'éliminer $dx = \frac{dy}{p}$.

σ

On obtient ainsi

$$dy(1+p^2) + pydp = \frac{lp\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

C'est l'équation linéaire entre y et dy.

ξ

L'équation sans second membre conduit à poser

$$y = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}},$$

δ1

c sera déterminé par l'équation

$$\frac{c'}{\sqrt{1+p^2}}(1+p^2) = \frac{lp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

c'est-à-dire

$$c = \int \frac{lp}{(1+p^2)^2}\,dp.$$

D'où

$$c = -\frac{l}{2(1+p^2)} + k.$$

ω

On a donc finalement

$$y = \frac{k}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{l}{2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

On a ensuite sans nouvelle intégration

$$x = -py + \frac{lp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5}$$

Les formules (4) et (5) donnent x et y en fonction d'un paramètre p.

α, ν

Si l'on pose $p = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ représentant le coefficient angulaire de la tangente à la courbe,

$$x = l\sin\alpha + \frac{l}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha - k\sin\alpha,$$
$$y = k\cos\alpha - \frac{l}{2}\cos^3\alpha.$$

En particulier, considérons la courbe X, Y correspondant à $k = 0$

$$C \left| \begin{array}{l} X = l\sin\alpha + \dfrac{l}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha \\ Y = -\dfrac{l}{2}\cos^3\alpha. \end{array} \right.$$

Si, sur la normale en chaque point de cette courbe, on porte la longueur k on voit que les coordonnées de l'extrémité seront x, y.

ω

Toutes les courbes intégrales sont donc parallèles à la courbe C.

Troisième méthode d'intégration. — Nous allons indiquer une troisième méthode pour l'intégration des équations différentielles du premier ordre,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{1}$$

C'est une équation entre trois variables.

ν, ξ

Il est donc naturel de considérer la surface

$$f(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

en posant

$$z = \frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

σ, ρ

Intégrer l'équation (1), revient au même que de trouver deux fonctions y et z de x qui satisfassent aux équations (2) et (3) ou encore x_2 à trouver trois fonctions x, y, z d'une autre variable indépendante t satisfaisant aux équations (1), (2), (3).

ξ, ν

Or, pour la surface, on peut d'abord rechercher une représentation paramétrique en fonction de deux paramètres u, v.

Soient

$$x = \varphi(u, v) \qquad y = \psi(u, v) \qquad z = \theta(u, v).$$

δ_1

Il suffit alors de satisfaire à l'équation (3)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv = \theta(u, v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right].$$

ρ

Cette équation est une équation du *premier ordre* résolue par rapport à $\frac{dv}{du}$. Si on l'a intégrée par une relation

$$F(u, v, c) = 0 \qquad \text{ou} \qquad v = \lambda(u, c),$$

φ

dépendant d'une constante arbitraire, il suffit de remplacer v en fonction de u dans les expressions de x, y, z. On aura en particulier x et y en fonction d'un paramètre u.

σ_2

A ce nouveau point de vue, les équations homogènes correspondent aux conoïdes, les équations à deux variables

$$f(y, y') = 0, \qquad f(x, y') = 0$$

aux cylindres.

En particulier, si l'équation est du premier degré par rapport à x

α

ou y, on peut prendre les deux autres variables comme paramètres. Soit l'équation

$$y = f(x, y').$$

Substituons dans $dy = y'dx$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y'}\,dy' = y'dx$$

équation résolue par rapport à $\frac{dy'}{dx}$.

Si les sections de la surface par des plans parallèles à l'un des

o

plans de coordonnées sont des courbes unicursales, on aura, sous forme rationnelle, les expressions de x, y, z.

Problème des trajectoires. — Le problème de la détermination des trajectoires d'une famille de courbes planes conduit à une équation différentielle.

Etant donnée, une famille de courbes planes C, dépendant d'un paramètre a, on appelle « *trajectoire sous l'angle* α » de cette famille de courbes, toute courbe coupant sous un angle constant α, les courbes de la famille donnée.

Soit

$$f(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la famille. Soit x, y un point M de cette courbe. Considérons la trajectoire Γ passant par ce point. Nous désignerons par X, Y les coordonnées de M considéré comme appartenant à la trajectoire Γ. Elles sont égales à x, y mais, lorsqu'on se déplace sur Γ, $\frac{dY}{dX}$ n'est pas égale à $\frac{dy}{dx}$ quand on se déplace sur C.

Les coefficients angulaires des tangentes en M aux deux courbes C et Γ sont respectivement $\frac{dY}{dX}$, $\frac{dy}{dx}$.

Si nous écrivons que les deux courbes se coupent sous l'angle α, nous obtenons l'équation

$$\frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha\left[1 + \frac{dY}{dx}\frac{dy}{dx}\right]. \tag{2}$$

Mais en M, le coefficient angulaire de la tangente à C est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

L'équation (2) devient donc

$$\frac{dY}{dX}\frac{df}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dY}{dX}\right]. \tag{4}$$

On peut, dans cette équation, y remplacer x, y par X, Y.

D'autre part, on a pour chaque valeur de a

$$f(X, Y, a) = 0. \tag{5}$$

Si entre l'équation (4) et l'équation (5), on élimine a, on obtiendra une équation de la forme

$$F(X, Y, dX, dY) = 0$$

qui sera l'équation différentielle de la famille des courbes trajectoires.

Le cas le plus important est celui des trajectoires « *orthogonales* ».

δ_1
L'angle α est droit. — L'équation (4) se réduit alors à

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dY}{dX} = 0. \tag{4'}$$

(Dans $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, il faut supposer x, y remplacés par X, Y).

Il faudra éliminer a entre (4') et (5).

Or, si l'on voulait former l'équation différentielle des courbes C,

σ_2
il faudrait éliminer a entre

$$f(x, y, a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

o
On obtiendrait une relation

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{6}$$

ρ
On voit que pour obtenir l'équation différentielle des trajectoires, il suffit de remplacer dans (6) x, y par X, Y et $\frac{dy}{dx} = y'$ par $-\frac{1}{\frac{dY}{dX}} = -\frac{1}{Y'}$.

On dit d'une façon abrégée, mais incorrecte que, dans l'équation différentielle de la famille de courbes, il suffit de remplacer y' par $-\frac{1}{y'}$.

Application. — *Trajectoires orthogonales des paraboles dont on connaît l'axe et la directrice.*

δ_1, α
En prenant pour axes de coordonnées, l'axe et la directrice, l'équation des paraboles est

$$y^2 = 2px - p^2. \tag{1}$$

ξ
On obtiendra donc l'équation différentielle de ces courbes en éliminant p entre (1) et

$$yy' = p. \tag{2}$$

δ_1
On obtiendra l'équation différentielle des trajectoires orthogonales en éliminant p entre

$$Y^2 = 2pX - p^2$$

et

$$Y + pY' = 0.$$

On obtient l'équation

$$Y'^2 + \frac{2X}{Y} Y' + 1 = 0. \tag{3}$$

ρ

C'est une équation que l'on peut intégrer, soit comme équation homogène, soit comme équation de Lagrange.

δ_1

Si par exemple, nous posons $Y' = p$ nous déduirons de (3)

$$X = -\frac{Y}{2p}(1 + p^2).$$

α

En la différentiant

$$dX = \frac{dY}{p} = -\frac{dY}{2p}(1 + p^2) - \frac{Y}{2p^2}(p^2 - 1)dp.$$

On a donc l'équation à variables séparées

$$\frac{dY}{Y} = \frac{1 - p^2}{p(3 + p^2)}\, dp.$$

δ_1, o

L'intégration se fait sans aucune difficulté ($p^2 = t$) et donne

$$Y = k \frac{p^{\frac{1}{3}}}{(3 + p^2)^{\frac{4}{3}}}.$$

D'où

$$X = -\frac{k}{2p^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1 + p^2}{(3 + p^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Trajectoires sous l'angle α des méridiennes d'une surface de révolution. — Si la courbe méridienne dans le plan xoz a pour équation

$$z = \varphi(x),$$

σ_2

l'équation de la surface de révolution sera

$$z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Les équations paramétriques seront

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varphi(r).$$

ξ

Les cosinus directeurs λ, μ, ν de la tangente au méridien (ϑ = const.) seront donnés par

$$\frac{\lambda}{\cos\theta} = \frac{\mu}{\sin\theta} = \frac{\nu}{\varphi'(r)} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

δ_1

Les paramètres directeurs de la tangente à la trajectoire seront proportionnels à dx, dy, dz.

$\bar{\omega}$

On a donc l'équation

$$\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy + \varphi'(r)dz = \sqrt{1+\varphi'^2}\cos\alpha\, ds.$$

α

En substituant les expressions de dx, dy, dz en fonction de $d\vartheta$, dr, on obtient simplement

$$d\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{r}\sqrt{1+\varphi'^2}\, dr.$$

o

Une simple quadrature donnera donc θ en fonction de r.

Application. — *Trajectoires des méridiennes de la surface de révolution.*

$$\operatorname{tg} z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

δ_1

On a

$$\varphi(r) = \operatorname{arc\,tg} r, \qquad \sqrt{1+\varphi'^2} = \frac{\sqrt{1+(1+r^2)^2}}{1+r^2}.$$

o

D'où la quadrature

$$d\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{r}\frac{\sqrt{1+(1+r^2)^2}}{1+r^2}\, dr.$$

En posant $1 + r^2 = u$

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u(u-1)}\, du.$$

L'intégrale peut être calculée.

IV. — RELATIONS ENTRE LES INTÉGRALES D'UNE MÊME ÉQUATION

Comme nous l'avons vu, dans toutes les équations que nous venons de traiter, et comme nous le démontrerons en général, l'intégrale dite « générale » d'une équation différentielle

(1) $$f(x, y, y') = 0$$

dépend d'une constante arbitraire c

$$F(x, y, c) = 0. \tag{2}$$

Si on résoud cette équation par rapport à c, on obtient une relation

$$c = \varphi(x, y). \tag{3}$$

Dire que y satisfait à l'équation différentielle (1) $^{\alpha_1, \sigma}$ c'est dire que y varie de telle façon, avec x, que $\varphi(x, y)$ reste constant.

Mais il eût pu se faire que, par une méthode d'intégration différente, $^{\psi, o}$ on ait mis la solution générale sous la forme différente

$$c' = \psi(x, y).$$

Si l'on considère *la même* solution de l'équation différentielle, $^{\rho}$ on voit que les mêmes suites de valeurs de x et y rendent $^{\omega}$ simultanément constantes les deux fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$. On en conclut que ces deux fonctions sont fonctions l'une de l'autre. Il doit donc y avoir entre elles une relation de la forme

$$\psi(x, y) = \mathcal{F}(\varphi(x, y)).$$

Application aux transcendantes. — *Soit l'équation*

$$x dy + y dx = 0. \tag{1}$$

On obtient immédiatement l'intégrale générale sous la forme

$$xy = c.$$

$^{\alpha_1}$ Mais si l'on écrit l'équation

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \tag{1'}$$

en désignant provisoirement par $\lambda(x)$ une fonction qui admette pour dérivée $\frac{1}{x}$, nous aurons en intégrant (1')

$$\lambda(x) + \lambda(y) = \text{const.}$$

$^{\delta_1, \delta}$ On a donc une identité de la forme

$$\lambda)x) + \lambda(y) = \mathcal{F}(xy). \tag{2}$$

Déterminons la fonction $\mathcal{F}$. Précisons la fonction $\lambda(x)$ en l'assujettissant à prendre la valeur zéro pour $x = 1$.

α

En donnant à y, dans l'identité (2), la valeur 1, nous aurons

$$\lambda(x) = \mathcal{F}(x).$$

ρ

La fonction $\mathcal{F}$ n'est donc autre que la fonction λ elle-même. On a donc finalement l'identité

$$\lambda(x) + \lambda(y) = \lambda(xy).$$

σ2

On reconnaît la propriété caractéristique des logarithmes qui est ainsi la conséquence de ce que la fonction $\log x$ a pour dérivée $\frac{1}{x}$ et s'annule pour $x = 1$.

2° *Soit l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0. \tag{1}$$

Désignons par $\mathrm{As}(x)$ la fonction qui a pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et qui s'annule pour $x = 0$. o En intégrant (1), nous aurons

$$\mathrm{As}(x) + \mathrm{As}(y) = \text{const.}$$

D'autre part, σ1 en chassant les dénominateurs on obtient

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0. \tag{2}$$

Nous pouvons l'écrire

$$\mathrm{D}[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}] + xy\left[\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = 0. \tag{2'}$$

Mais en vertu de (1), ρ la deuxième parenthèse est nulle.

En intégrant (2'), on a donc

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c'.$$

ω

On en conclut qu'on doit avoir une identité de la forme

$$\mathrm{As}(x) + \mathrm{As}(y) = \mathcal{F}[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}]. \tag{3}$$

α1

Pour déterminer la fonction $\mathcal{F}$, donnons à y la valeur zéro. En raison de la définition de la fonction As, $(\mathrm{As}(o) = 0)$ on obtient

$$\mathrm{As}(x) = \mathcal{F}(x).$$

L'identité (3) devient donc

$$\mathrm{As}(x) + \mathrm{As}(y) = \mathrm{As}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

ρ, σ_2

On retrouve la propriété de la fonction arc sin x ou la formule d'addition de la fonction sinus, fonction inverse, si l'on introduit également la fonction complémentaire

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Equation d'Euler. — Euler a généralisé l'équation précédente en prenant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

X étant un polynôme en x du troisième ou du quatrième degré, Y le même polynôme en y.

Dans l'équation précédente, si on rend entière la solution générale (3), on obtient

$$x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{1-c^2} - c^2 = 0$$

ou encore

$$x^2 + y^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 - 1 = 0.$$

(Elles représentent les coniques inscrites dans le carré $x = \pm 1$, $y = \pm 1$).

ν, ψ

Pour l'équation d'Euler, on peut se demander si on ne pourrait pas satisfaire à l'équation en se donnant une relation du second degré par rapport à x et par rapport à y, symétrique en x et y.

Euler ne pouvait évidemment espérer que déterminer ainsi certaines solutions particulières.

δ_1

Soit donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y) &= a_0x^2y^2 + a_1(xy^2 + x^2y) + a_2(x^2 + y^2) \\ &\quad + a_3xy + a_4(x + y) + a_5 = 0. \end{aligned} \right.$$

la relation la plus générale symétrique en x et y.

On peut l'écrire sous l'une des formes

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} F &= Ay^2 + By + C = 0. \\ F &= A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

A, B, C désignant des polynômes du second degré en x, A_1, B_1, C_1 les mêmes polynômes en y.

δ1, α

En différentiant l'équation (2), on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2A_1x + B_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2Ay + B.$$

D'ailleurs, de l'équation elle-même, on déduit, en la résolvant,

$$2A_1x + B_1 = \pm\sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}$$

de même

$$2Ay + B = \pm\sqrt{B^2 - 4AC}.$$

ω

L'équation (4) s'écrit donc

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \pm \frac{dy}{\sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}} = 0. \tag{5}$$

ρ

La fonction y définie par l'équation (2) satisfait donc à l'équation (5) qui est bien de même forme que l'équation d'Euler. Le polynôme $B^2 - 4AC$ est en effet du quatrième degré en x, le polynôme $B_1^2 - 4A_1C_1$ le même polynôme en y.

β

Si nous voulons que l'équation (5) s'identifie avec l'équation donnée (1), il faut et il suffit que le polynôme $B^2 - 4AC$ soit identique au polynôme donné X.

Or ce polynôme X du quatrième degré dépend de cinq coefficients et le polynôme indéterminé F de six coefficients.

α

L'identification donnera cinq équations de condition entre les six coefficients.

ρ

Il restera donc un coefficient arbitraire ou encore tous les coefficients pourront être déterminés en fonction d'un paramètre qui reste arbitraire.

ω

On aura donc des solutions $F(x, y) = 0$ de l'équation différentielle, *dépendant d'une constante arbitraire.*

Ainsi, non seulement on détermine des solutions particulières de l'équation, ce qui était logique, mais une solution dépendant d'une constante arbitraire, c'est-à-dire la solution « générale » de l'équation d'Euler.

χ

Elle se détermine par une simple identification de deux polynômes.

L'identification de ces polynômes $B^2 - AC$ et X, et la détermination des coefficients a_0, a_1,... a_5 sont très pénibles : une méthode très régulière de calcul, basée sur des considérations géométriques a été donnée par Jacobi (voir par exemple, GOURSAT, *Traité d'analyse*).

Méthode d'Abel. — Abel a indiqué une méthode complètement différente pour l'intégration de l'équation d'Euler.

Nous allons l'exposer dans le cas où le polynôme X est du troisième degré. Nous désignerons les variables par x_1, x_2 (on verra pourquoi) et nous considérerons l'équation

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0.$$

ν, ξ

Il est assez naturel de considérer la courbe

(1) $$y^2 = X.$$

Principe de la méthode.— Une droite quelconque coupe la courbe en trois points réels ou imaginaires. Il y a certainement, quand la droite varie une relation indépendante de la droite, entre les abscisses x_0, x_1, x_2 des trois points d'intersection et par conséquent une relation entre les différentielles dx_0, dx_1, dx_2.

α

C'est cette relation que nous voulons former.

δ_1

Soit une droite variable

$$y = ax + b$$

rencontrant la courbe en trois points $x_0\ y_0$, $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$.

o

Les abscisses des points d'intersection sont racines de l'équation

(2) $$F(x) = (ax + b)^2 - X = 0.$$

Les ordonnées correspondantes sont $y_i = \pm\sqrt{X_i}$, mais ρ il faut remarquer que le signe est bien déterminé, π puisque l'on a sans ambiguïté

$$y_i = ax_i + b.$$

Nous engloberons le signe dans le radical.

Les trois points étant en ligne droite, σ_2 on a, quels que soient a, b

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \sqrt{X_0} \\ 1 & x_1 & \sqrt{X_1} \\ 1 & x_2 & \sqrt{X_2} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Ceci étant, lorsque la droite varie, α_1 en différentiant l'équation (2) pour la racine x_i, on aura

$$2(ax_i + b)(x_i da + db) + F'(x_i)dx_i = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx_i}{y_i} = -\frac{2(x_i da + db)}{F'(x_i)}. \tag{4}$$

α, ν

En ajoutant les trois égalités telles que (4), on obtient

$$\sum \frac{dx_i}{y_i} = -2\sum \frac{x_i da + db}{F'(x_i)}. \tag{5}$$

Le second membre ρ est de la forme

$$\sum \frac{\varphi(x_i)}{F'(x_i)},$$

φ étant du premier degré en x. ρ, ν, σ_2 Nous savons que si l'on décompose une fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, le dénominateur n'admettant que des racines simples $x_0, x_1, \ldots$ et φ étant de degré inférieur à F, σ_2 le numérateur de la fraction $\frac{1}{x - x_i}$ est précisément $\frac{\varphi(x_i)}{F'(x_i)}$.

On a donc identiquement

$$\frac{\varphi(x)}{F(x)} = \sum \frac{\varphi(x_i)}{F'(x_i)} \cdot \frac{1}{x - x_i}.$$

Pour obtenir $\sum \frac{\varphi(x_i)}{F'(x_i)}$, α_1, ξ il faut réduire les fractions du second membre au même dénominateur et prendre au numérateur le coefficient de x^{n-1}. Ce coefficient doit alors s'identifier avec celui de $\varphi(x)$. Mais ρ si $\varphi(x)$ est de degré inférieur à $(n-1)$, ce coefficient sera nul. o On devra donc avoir

$$\sum \frac{\varphi(x_i)}{F'(x_i)} = 0. \tag{6}$$

Ainsi, quelle que soit la fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$, si φ est de degré au plus égal à $(n-2)$ on a l'identité (6). (Nous aurions pu supposer connue cette propriété.)

ρ

C'est le cas du second membre de l'équation (5), le numérateur $x_i da + db$ étant du premier degré en x_i.

o

L'équation (5) se réduit donc à

$$\sum \frac{dx_i}{y_i} = 0,$$

(7)
$$\frac{dx_0}{\sqrt{X_0}} + \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0.$$

ω

Ainsi, lorsque les trois points M_0, M_1, M_2 varient en restant en ligne droite, les variations des abscisses satisfont nécessairement à l'identité (7).

Les différentielles da, db ont disparu.

α

Si, en particulier, le point M_0 est fixe, c'est-à-dire si l'on fait pivoter la droite variable autour d'un point fixe de la courbe, cette condition se réduit à

(7')
$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0.$$

R

En résumé, à la seule condition que les abscisses satisfassent à la condition (3), x_0 étant fixe, les variations de x_1 et x_2 satisfont à la condition (7'). Or celle-ci ρ est une équation différentielle entre x_1 et x_2, de la forme d'Euler. Elle est indépendante de x_0 alors que la relation (3) ρ est une relation entre x_1 et x_2 dépendant d'une constante x_0.

ω

C'est donc la solution générale de l'équation (7').

R

En résumé, pour intégrer l'équation

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0,$$

les radicaux pouvant être pris avec le signe + ou le signe —, on établira entre x_1 et x_2 la relation

$$\begin{vmatrix} 1, & x_0, & \sqrt{X_0} \\ 1, & x_1, & \sqrt{X_1} \\ 1, & x_2, & \sqrt{X_2} \end{vmatrix} = 0$$

les radicaux $\sqrt{X_1}, \sqrt{X_2}$ étant ceux qui figurent dans l'équation différentielle, mais le troisième radical étant tel que le point $x_0, \sqrt{X_0}$ soit en ligne droite avec les points $x_1, \sqrt{X_1}$, et $x_2, \sqrt{X_2}$.

CHAPITRE VI

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS THÉORÈMES D'EXISTENCE SOLUTIONS SINGULIÈRES

SOMMAIRE.

Théorèmes d'existence : Transformation des problèmes les uns dans les autres.
Existence des solutions : Réduction à la forme canonique. — Construction des solutions. — Démonstration de la convergence.
2e *Démonstration de M. Picard* : Valeurs approchées successives. — Limites de Y_n, Z_n. Application au domaine complexe. — Cas des fonctions analytiques.
Fonctions définies par une équation différentielle :
Prolongement analytique. — Points critiques.
Reconnaître si un point est critique.
Cas où $f(z, u)$ est rationnelle en U.
Conditions pour que toutes les solutions soient uniformes.
Solutions singulières des équations différentielles :
Recherche en partant de la solution générale. — Recherche directe.
Concordance des deux méthodes.
Signification des courbes P et Q.
Solutions singulières dans le cas d'un système.

I. — THÉORÈMES D'EXISTENCE

Transformation des problèmes les uns dans les autres. — Avant d'aborder le problème de l'existence des solutions d'une équation différentielle, ou plus généralement d'un système, nous allons établir encore quelques résultats généraux.

Nous disons qu'une équation différentielle entre une variable indépendante x et une ou plusieurs fonctions y, z, t est d'ordre n par rapport à la fonction y, $\overset{\downarrow}{}$ si l'ordre le plus élevé des dérivées de y qui y figurent, est n.

Le problème le plus général qui puisse se poser est la résolution d'un système de n équations d'ordres quelconques définissant m fonctions d'une variable indépendante $x (n \geqslant m)$.

Si $n = m$, nous dirons que le système est complet.

Nous traiterons d'abord ce cas et nous allons montrer qu'on peut réduire ce problème de deux manières différentes.

1° Résolution d'une seule équation ne renfermant plus qu'une seule fonction inconnue ;

2° Résolution d'un système de N équations à N fonctions inconnues ($N \geqslant n$), mais ces équations ne renfermant plus que les dérivées du premier ordre des nouvelles fonctions inconnues.

Premier Problème : Réduction à une seule équation. — Etant donné un système de n équations différentielles entre les n fonctions $y, z, t...$, le premier problème qui se pose est celui de l'élimination de toutes les fonctions sauf une, afin d'obtenir une équation différentielle ne contenant qu'une seule des fonctions.

Prenons d'abord deux équations à deux fonctions inconnues y et z

$$f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0$$

$$f_2\left(x, y \ldots . \qquad\qquad\qquad\qquad\right) = 0.$$

Nous allons éliminer z.

Supposons que les dérivées de z figurent dans la première équation jusqu'à l'ordre p_1 et dans la deuxième jusqu'à l'ordre p_2. Dérivons la première équation p_2 fois et la deuxième p_1 fois par rapport à x. Nous obtiendrons au total $(p_1 + p_2 + 2)$ équations.

Les dérivées de z entreront jusqu'à l'ordre $(p_1 + p_2)$.

Si nous considérons z et toutes ses dérivées comme des fonctions distinctes, nous pourrons éliminer ces $(p_1 + p_2 + 1)$ fonctions inconnues entre les équations. Nous obtiendrons au moins une équation qui ne renfermera que y et ses dérivées.

Les dérivées de y entreront au plus jusqu'aux ordres

$$m_1 + p_2, \qquad m_2 + p_1.$$

Prenons maintenant le cas de plus de deux équations.

Nous raisonnerons sur trois équations ; le raisonnement sera suffisamment général.

Soient donc trois équations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0$$

entre les trois fonctions y, z, t. Supposons que les dérivées de y, z, t entrent respectivement jusqu'aux ordres m_1, n_1, p_1 dans la première, m_2, n_2, p_2 dans la seconde, m_3, n_3, p_3 dans la troisième.

j

Nous voulons éliminer z et t.

Considérons le tableau de ces ordres

$$\begin{vmatrix} m_1, & n_1, & p_1 \\ m_2, & n_2, & p_2 \\ m_3, & n_3, & p_3 \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par A_1 le plus grand des nombres $n_2 + p_3$, $n_3 + p_2$ formés avec les termes du mineur de m_1. De même par A_2, A_3 les deux autres termes analogues.

α

Dérivons alors la première équation A_1 fois, la deuxième A_2 fois, la troisième A_3 fois. Nous obtiendrons un nombre total d'équations égal à $(A_1 + A_2 + A_3 + 3)$.

α

Calculons le nombre total des inconnus z et t, et leurs dérivées. Les dérivées de z entrent jusqu'aux ordres

$$n_1 + A_1, \qquad n_2 + A_2, \qquad n_3 + A_3.$$

ξ

Il faut considérer le plus grand de ces nombres soit B.

De même il faudra considérer le plus grand des trois nombres

$$p_1 + A_1, \qquad p_2 + A_2, \qquad p_3 + A_3.$$

α

soit C. En traitant z et t et toutes les dérivées comme des inconnues distinctes, on aurait donc un nombre total d'inconnues égal à $(B + C + 2)$.

ψ

Nous allons montrer que

$$B + C = A_1 + A_2 + A_3.$$

δ₁

Soit par exemple $n_2 + A_2$ le plus grand ordre des dérivées de z. On aura

$$n_2 + A_2 \geqslant n_1 + A_1, \qquad n_2 + A_2 \geqslant n_3 + A_3.$$

Soit, d'autre part,

$$A_2 = n_1 + p_3 \geqslant n_3 + p_1.$$

δ_1

On aura alors

$$n_2 + A_2 = n_2 + n_1 + p_3 = n_1 + (n_2 + p_3).$$

d

Par conséquent

$$n_2 + A_2 \leq n_1 + A_1.$$

On a donc certainement

$$B = n_2 + A_2 = n_1 + A_1$$

et de plus

$$A_1 = n_2 + p_3.$$

δ_1

De même soit

$$C = p_1 + A_1 \geqslant p_3 + A_3.$$

On aura

$$C = p_1 + n_2 + p_3 \leqslant p_3 + A_3.$$

a

De ces deux inégalités, on déduit donc

$$C = p_1 + A_1 = p_3 + A_3 \qquad \text{avec} \qquad A_3 = p_1 + n_2.$$

δ_1

Alors

$$B + C = A_2 + n_2 + A_3 + p_3 = A_2 + A_3 + A_1.$$

On vérifierait cette conclusion quelle que soit l'hypothèse initiale.

ω

Ainsi l'élimination est possible et conduit à, au moins, une équation différentielle ne contenant que y et ses dérivées.

Du reste l'ordre le plus élevé des dérivées de y sera le plus grand des nombres

$$n_1 + A_1, \qquad n_2 + A_2, \qquad n_3 + A_3$$

c'est-à-dire le plus grand des nombres

$$\begin{array}{lll} m_1 + n_2 + p_3, & m_2 + n_3 + p_1, & m_3 + n_1 + p_2 \\ m_1 + n_3 + p_1, & m_2 + n_1 + p_3, & m_3 + n_2 + p_1 \end{array}$$

ρ

ou enfin le plus grand des nombres formés par les termes du tableau des ordres.

Lorsqu'on aura résolu l'équation résultante, les relations précédentes détermineront les autres fonctions, en particulier z et t.

ω

L'intégration du système peut donc bien être ramenée à l'intégration d'une seule équation d'ordre plus élevé.

2e Problème : Réduction à un système d'équations du 1er ordre. — Nous pouvons y arriver de deux manières différentes :

1° En nous servant de la transformation qui vient d'être faite.

Soit l'équation finale

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0. \tag{1}$$

Introduisons comme nouvelles fonctions

$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \qquad y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \cdots y_{m-1} = \frac{dy_{m-2}}{dx}. \tag{I}$$

d

On en déduira de proche en proche

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} \cdots y_{m-1} = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}. \tag{I'}$$

α

L'équation donnée peut donc s'écrire

$$f\left(x, y, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}, \frac{dy_{m-1}}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

L'équation (2) et le système (I) peuvent remplacer l'équation (1).

Or ces équations sont toutes du premier ordre.

ρ, σ

2e Méthode. — On aurait pu opérer directement sur le système donné.

Soient, par exemple, les deux équations

$$f(x, y, y', y'', y''', z, z', z'') = 0$$
$$\varphi(x, y, y', y'', y''', z, z', z'') = 0.$$

φ

Il suffit d'introduire comme nouvelles fonctions inconnues

$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \qquad y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \qquad z_1 = \frac{dz}{dx}. \tag{I}$$

σ

Les équations deviennent

$$f\left(x, y, y_1, y_2, \frac{dy_2}{dx}, z, z_1, \frac{dz_1}{dx}\right) = 0, \quad \varphi\left(x, y, y_1, y_2, \frac{dy_2}{dx}, z, z_1, \frac{dz_1}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Ces équations (2) et le système (I) peuvent remplacer le système donné et dans toutes ces équations, n'entrent que les dérivées du premier ordre des fonctions inconnues.

En résumé, pour étudier les solutions d'un système d'équations d'ordres quelconques, nous pouvons supposer, soit que nous avons ramené l'intégration à celle d'une équation à une seule variable, soit que nous avons ramené le système à un système d'équations ne renfermant que les dérivées du premier ordre des fonctions.

Nous allons maintenant établir l'existence des solutions d'un système d'équations différentielles.

II. — EXISTENCE DES SOLUTIONS : CAS DE DEUX ÉQUATIONS

Réduction à la forme canonique. — Nous allons supposer que, dans le système d'équations, n'entrent que les dérivées du premier ordre des fonctions inconnues.

Supposons, par exemple, un système de quatre équations

$$(I)\qquad \begin{cases} F_1(x, y, z, t, u, y', z', t', u') = 0 \\ F_2(x, y, z, t, u, y', z', t', u') = 0 \\ F_3(x, y, z, t, u, y', z', t', u') = 0 \\ F_4(x, y, z, t, u, y', z', t', u') = 0. \end{cases}$$

En général , on pourra résoudre ces équations par rapport aux dérivées et les mettre sous la forme

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z, t, u), & t' &= f_3(x, y, z, t, u) \\ z' &= f_2(x, y, z, t, u), & u' &= f_4(x, y, z, t, u). \end{aligned}$$

On dira alors qu'on a mis le système sous la « forme canonique ».

Etudions de plus près ce qui peut se passer :

L'une au moins des équations (I) dépend de l'une des dérivées, soit u'. On pourra donc tirer u' de cette équation, soit

$$u' = \theta(x, y, z, t, u, y', z', t')$$

et substituer sa valeur dans les équations restantes.

Elles deviendront

$$\varphi_1(x, y, z, t, u, y', z', t') = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0.$$

En général, l'une de ces équations au moins dépendra de l'une des dérivées. Supposons que φ_3 dépende de t'. Nous pourrons (théoriquement du moins) tirer t' en fonction de x, y, z, t, u, y', z', soit $t' = \chi(x, y, z, t, u, y', z')$ et en substituant cette expression dans les deux premières équations, on obtiendrait deux équations

$$\psi_1(x, y, z, t, u, y', z') = 0, \qquad \psi_2 = 0.$$

Si l'une au moins de ces équations dépendait de l'une des dérivées z', on pourrait continuer comme nous l'avons fait jusqu'ici. Mais supposons que ces deux équations soient indépendantes des dérivées.

Alors, on aura deux équations finies entre les quatre fonctions. Elles permettront de tirer deux des fonctions en fonction des autres, par exemple, t, u en fonction de y, z

$$t = \lambda(x, y, z), \qquad u = \mu(x, y, z).$$

On en déduirait t' et u' en fonction de y', z'. En substituant dans les équations restantes on aura deux équations

$$\theta_1(x, y, z, y', z') = 0, \qquad \theta_2(x, y, z, y', z') = 0.$$

C'est un système de même forme que le système initial avec deux inconnues en moins.

On voit donc que le système donné peut être :

1° Soit intégralement ramené à la forme canonique ;

2° Soit se décomposer en deux groupes d'équations :

a) Un groupe d'équations ne renfermant aucune dérivée ;

b) Un groupe ramené à la forme canonique.

Existence des solutions. — Au point de vue de l'étude des solutions des équations différentielles, nous pouvons donc supposer que le système a été mis sous la forme canonique.

Nous considérerons donc un système d'équations

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(z, u_1, u_2, \cdots u_n)$$
$$\frac{du_2}{dz} = f_2(z, u_1, \cdots\cdots u_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{du_n}{dz} = f_n(z, u_1, \cdots\cdots u_n).$$

ρ ζ

Nous employons cette notation, parce que nous supposons que z peut être une variable complexe et que les fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ sont des fonctions de variables complexes.

ζ

Nous supposerons qu'elles sont holomorphes aux environs du système de valeurs $z = a$, $u_1 = b_1, \ldots u_n = b_n$.

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant donné un système d'équations* (I) *mises sous forme canonique, à la seule condition que les fonctions* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *soient holomorphes dans le voisinage des valeurs* a, b_1, $b_2, \ldots b_n$ *il existe un système de fonctions*

$$u_1 = \varphi_1(z), \qquad u_2 = \varphi_2(z), \cdots u_n = \varphi_n(z)$$

holomorphes dans le domaine du point a, *vérifiant identiquement les équations* (I) *et prenant les valeurs* $b_1, b_2, \ldots b_n$ *pour* $z = a$.

ζ

Pour simplifier l'écriture, nous pourrons supposer nulles les valeurs initiales a, $b_1, \ldots b_n$ (à la condition que les fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ soient holomorphes au point 0, 0, 0, ... 0).

π

Cela reviendrait, en effet, à faire le changement de variable et de fonctions

$$z = Z + a, \qquad u_1 = U_1 + b_1, \cdots u_n = U_n + b_n$$

on obtiendrait un système d'équations de même forme : Z, $U_1, \ldots U_n$ se réduisent bien à zéro comme valeurs initiales.

Pour simplifier l'écriture également, et éviter des indices nous raisonnerons sur deux équations

$$\text{(I)} \qquad \frac{du}{dz} = f(z, u, v) \qquad \frac{dv}{dz} = \varphi(z, u, v).$$

(La généralisation se fera d'elle-même).

Nous allons montrer qu'il existe des fonctions

$$u = \lambda(z), \qquad v = \mu(z)$$

holomorphes dans le voisinage de l'origine, vérifiant identiquement le système (I) et s'annulant pour $z = 0$.

Construction des solutions. — Si ces fonctions existent, remarquons tout d'abord que le système (I) et les équations dérivées successives permettent de calculer *toutes* les dérivées pour $z = 0$.

On pourra appliquer alors la formule de Mac Laurin. La solution, si elle existe, est donc certainement *unique*.

Puisque ces fonctions doivent être holomorphes dans le voisinage de 0, c'est qu'elles sont développables en série de la forme

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} u = \lambda(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \\ v = \mu(z) = d_1 z + d_2 z^2 + \cdots + d_n z^n + \cdots \end{cases}$$

Nous allons « construire » des développements en série tels que (II) satisfaisant identiquement au système (I).

Les fonctions f et φ étant supposées holomorphes aux environs de 0, 0, 0, sont développables en série sous la forme

$$f = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} z^\alpha u^\beta v^\gamma \qquad \varphi = \Sigma B_{\alpha\beta\gamma} z^\alpha u^\beta v^\gamma.$$

Ces développements sont convergents dans un cercle de rayon R et si r désigne une quantité inférieure à ce rayon R, on sait qu'on peut déterminer une quantité M, telle que

$$|A_{\alpha\beta\gamma}| < \frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}} \qquad |B_{\alpha\beta\gamma}| < \frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Si les séries (II) sont convergentes, les dérivées des fonctions qu'elles représentent sont données par les séries des dérivées des termes.

Substituons à u, v, les développements (II) et leurs dérivées et déterminons les coefficients c, d, de manière à égaler les coefficients des diverses puissances de z dans les deux membres.

δ_1

En égalant les termes constants, nous aurons

$$c_1 = A_{000}$$
$$d_1 = B_{000}.$$

En égalant les termes du premier degré,

$$2c_2 = A_{100} + A_{010}c_1 + A_{001}d_1$$
$$2d_2 = B_{100} + B_{010}c_1 + B_{001}d_1.$$

δ_1

En égalant les termes de degré k, nous aurons manifestement

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (k+1)c_{k+1} = P(c_1, c_2 \cdots c_k, d_1, d_2, \cdots d_k) \\ (k+1)d_{k+2} = Q(c_1, \cdots c_k, d_1, d_2, \cdots d_k). \end{cases}$$

d

les polynômes P dépendant en outre des coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$ avec la condition $\alpha + \beta + \gamma \leqslant k$, les polynômes Q dépendant de même des coefficients $B_{\alpha\beta\gamma}$.

α

Si nous substituons dans c_2, d_2, les valeurs de c_1, d_1 nous aurons c_2, d_2 en fonction uniquement des coefficients A, B.

α_1, δ_1

Si nous substituons dans c_3, d_3, les expressions de c_1, d_1 et ces nouvelles expressions c_2, d_2, nous aurons c_3, d_3 en fonction uniquement des coefficients A, B. On voit que, de proche en proche,

o

les coefficients c_{k+1}, d_{k+1} pourront s'exprimer par des polynômes en $A_{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\alpha\beta\gamma}$. De plus, dans toutes ces opérations de substitution,

ε

nous ne procédons que par *additions et multiplications.*

ω

Ainsi donc, on peut écrire en général.

$$\text{(IV)} \quad c_{k+1} = P_{k+1}(A, B) \qquad d_{k+1} = Q_{k+1}(A, B).$$

ξ, α

Si nous démontrons que les séries ainsi formées sont absolument convergentes dans un cercle de rayon ρ,

o

elles constitueront des fonctions holomorphes de z. Pour ces fonctions, $\frac{du}{dz}$ et $\frac{dv}{dz}$ sont de même des fonctions holomorphes. D'autre part, les seconds membres $f(z, u, v)$, $\varphi(z, u, v)$ se transforment également en

d

fonctions holomorphes de z, soient, $f(z, \overline{u}, \overline{v})$ $\varphi(z, \overline{u}, \overline{v})$. Les

fonctions holomorphes qui figurent dans les deux membres ayant leurs développements en z identiques jusqu'à tel degré qu'on le veut, seront identiques.

Ces fonctions u, v seront bien des solutions du système différentiel.

Il reste donc à résoudre la question essentielle : il faut que ces développements soient convergents dans un cercle de rayon suffisamment petit, mais fini.

Démonstration de la convergence. — Pour étudier la convergence des séries (II), , nous allons leur substituer d'autres séries plus simples qui soient des séries majorantes.

Nous savons que si nous avons deux séries entières,

$$u = c_1 z + c_1 z^2 + \cdots \qquad U = C_1 Z + C_2 Z^2 + \cdots$$

où $Z = |z|$, si l'on a constamment $C_k > |c_k|$, la série u admet un rayon de convergence au moins égal à celui de la série à termes positifs U. Or d'après la remarque faite sur les polynômes P_{k+1}, Q_{k+1} (additions et multiplications), pour avoir des polynômes de module supérieur, il suffit de remplacer les $A_{\alpha\beta\gamma}$ et $B_{\alpha\beta\gamma}$ par des quantités positives supérieures à leurs modules. Il est naturel de prendre pour ces quantités, précisément les quantités

$$\frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}}, \qquad \frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

Si, au lieu du système, nous avions considéré les équations

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dZ} = \sum \dfrac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}} Z^\alpha U^\beta V^\gamma \\ \dfrac{dV}{dZ} = \sum \dfrac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}} Z^\alpha U^\beta V^\gamma. \end{cases}$$

et si nous avions cherché à déterminer les développements

$$U = C_1 Z + C_2 Z^2 + \cdots$$
$$V = D_1 Z + D_2 Z^2 + \cdots$$

satisfaisant à ces équations, nous aurions eu pour déter-

miner ces coefficients, les mêmes équations (III) avec naturellement les nouveaux coefficients

$$A'_{\alpha\beta\gamma} = \frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}}, \qquad B'_{\alpha\beta\gamma} = \frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}}.$$

d, o

Nous en aurions déduit également les mêmes polynômes

$$C_{k+1} = P_{k+1}\left(\frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}}, \frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}}\right).$$

ψ, ω

Ces séries sont précisément les séries majorantes que nous recherchons.

Si donc ces nouvelles fonctions U, V sont convergentes dans un certain intervalle — R + R, les fonctions u, v le seront *a fortiori* dans un cercle de rayon au moins égal à R.

Or, $\overset{\alpha}{\pi}$ nous pouvons résoudre directement le système (V)

On en déduit en effet

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{dV}{dZ}$$

et puisque les deux fonctions s'annulent simultanément pour $Z = 0$

$$U = V.$$

δ_1, φ

Il suffit donc d'intégrer la première équation qui devient

$$\frac{dU}{dZ} = \sum \frac{M}{r^{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot Z^\alpha U^\beta U^\gamma.$$

ρ

La série du deuxième membre peut s'écrire

$$M \sum \left(\frac{Z}{r}\right)^\alpha \left(\frac{U}{r}\right)^\beta \left(\frac{U}{r}\right)^\gamma.$$

ξ

Si les séries géométriques $\sum\left(\frac{Z}{r}\right)^\alpha$, $\sum\left(\frac{U}{r}\right)^\alpha$ étaient conver-

gentes, c'est-à-dire si $Z < r$, $U < r$, $\overset{o}{\ }$ la série serait le produit des séries convergentes, c'est-à-dire

$$M \cdot \frac{1}{1 - \frac{Z}{r}} \times \frac{1}{1 - \frac{U}{r}} \times \frac{1}{1 - \frac{U}{r}}.$$

Nous supposerons $|Z < r$ et nous n'appliquerons nos résultats que si nous pouvons bien avoir $U < r$.

On peut alors écrire

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{1}{1 - \frac{Z}{r}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{U}{r}\right)^2}$$

c'est-à-dire

$$\left(1 - \frac{U}{r}\right)^2 \frac{dU}{dZ} = \frac{1}{1 - \frac{Z}{r}}.$$

Nous pouvons donc intégrer et écrire

$$\frac{r}{3}\left(1 - \frac{U}{r}\right)^3 = MrL\left(1 - \frac{Z}{r}\right) + \text{const.}$$

En remarquant que pour $Z = 0$, on doit avoir $U = 0$, la constante est égale à $\frac{r}{3}$

$$\frac{1}{3}\left[-1 + \left(1 - \frac{U}{r}\right)^3\right] = ML\left(1 - \frac{Z}{r}\right).$$

En résolvant

$$\frac{U}{r} = 1 - \sqrt[3]{1 + 3ML\left(1 - \frac{Z}{r}\right)} \tag{6}$$

en choisissant la détermination du radical qui se réduit à 1 pour $z = 0$.

Au second membre, le logarithme est holomorphe dans un cercle de rayon r, le radical admet comme point critique le point défini par

$$1 + 3ML\left(1 - \frac{Z}{r}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$Z = r\left(1 - e^{-\frac{1}{3M}}\right).$$

Le radical est donc holomorphe dans un cercle d'un tel rayon. Ce rayon étant inférieur à r, on voit que U est holomorphe dans un cercle de rayon r'

$$r' = r\left(1 - e^{-\frac{1}{3M}}\right).$$

On aura alors d'ailleurs

$$U < r.$$

Si nous développons la fonction U définie par l'égalité (6) en série, ce développement ne pourra que se confondre avec celui que nous avons construit, puisque nous avons démontré que la solution est unique.

Ainsi, la série U est convergente, absolument et uniformément, dans un cercle de rayon r' ; donc la série u sera convergente dans un cercle de rayon au moins égal.

Nous avons donc bien montré l'existence de fonctions u, v holomorphes dans un cercle de rayon r', satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant aux valeurs arbitraires u_0, v_0 pour $z = z_0$.

Les valeurs initiales u_0, v_0 peuvent être prises arbitrairement pourvu que les seconds membres des équations (1) soient holomorphes au point z_0, u_0, v_0.

On dit que les fonctions intégrales satisfaisant au système d'équations dépendent de deux constantes arbitraires.

Généralisation. — Le résultat que nous avons obtenu se généralise visiblement.

Si on a un système de n équations.

$$\frac{du}{dz} = f_1(z, u, v, w \cdots)$$
$$\frac{dv}{dz} = f_2(z, u, v, w \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

il existe des fonctions u, v, w... satisfaisant identiquement au système, se réduisant à u_0, v_0, w_0... et holomorphes dans un cercle de rayon fini.

Après avoir obtenu les coefficients du développement, pour démontrer la convergence, on arrivera à l'équation

$$\frac{dU}{dZ} = \frac{M}{1 - \frac{Z}{r}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{U}{r}\right)^n}.$$

En intégrant, on aurait

$$\frac{U}{r} = 1 - \sqrt[n+1]{1 + M(n+1)L\left(1 - \frac{Z}{r}\right)}.$$

δ_1

Cette expression est développable en série dans un cercle de rayon

$$r' = r\left[1 - e^{\frac{-1}{M(n+1)}}\right].$$

Forme des intégrales. — Le système de solutions se présente sous la forme

$$u = \lambda(z, z_0, u_0, v_0) \qquad v = \mu(z, z_0, u_0, v_0).$$

Soient u, v les valeurs des fonctions λ, μ correspondant à la valeur z. Il existe donc des solutions qui, prenant les valeurs de départ u_0, v_0 pour la valeur de départ z_0, prennent les valeurs finales u, v pour la valeur z. ξ, d Inversement, en faisant décrire à z le chemin inverse, il existe donc aussi des solutions qui prennent les valeurs finales u_0, v_0 en partant des valeurs initiales u, v. ω On peut donc certainement résoudre les équations par rapport à u_0, v_0 (comme on les a résolues par rapport à u, v) o et écrire

$$u_0 = l(z, z_0, u, v) = \text{const.} \qquad v_0 = m(z, z_0, u, v) = \text{const.}$$

Plus généralement, supposons qu'on ait obtenu un système de solutions dépendant de deux constantes arbitraires

$$\lambda(z, u, v, c_1, c_2) = 0, \qquad \mu(z, u, v, c_1, c_2) = 0.$$

α, ν, ξ

Demandons-nous à quelles conditions elle représentera la solution « générale » donnée par le théorème d'existence.

α, β

Il faut qu'on puisse déterminer c_1, c_2 de manière que les fonctions u, v prennent des valeurs u_0, v_0 pour une valeur z_0 de z. δ_1 Il faut donc qu'on puisse déterminer c_1, c_2 par des équations de la forme

$$\lambda(z_0, u_0, v_0, c_1, c_2) = 0, \qquad \mu(z_0, u_0, v_0, c_1, c_2) = 0.$$

σ_2

Ces équations pourront déterminer c_1, c_2 si, pour les valeurs z_0, u_0, v_0, on peut les résoudre par rapport à c_1, c_2, c'est-à-dire si

$$D^{c_1, c_2}_{\lambda, \mu} \neq 0.$$

Nous appellerons « solution générale » d'un système de n équations différentielles, ψ une solution dépendant de n constantes arbitraires qui soit la solution donnée par l'application du théorème d'existence de Cauchy, ou qui puisse s'identifier avec cette solution.

Nous appellerons « solution singulière » tout système de fonctions, ψ qui, bien que satisfaisant aux équations différentielles, ne puisse, pour aucun système de valeurs des constantes entrant dans la solution générale, s'identifier avec la solution considérée (nous verrons qu'il peut en exister).

III. — DEUXIÈME DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'EXISTENCE

Démonstration de M. E. Picard. — Ce théorème d'existence des solutions étant fondamental, puisqu'il est à la base de toute la théorie des équations ou des systèmes d'équations différentielles et ainsi de la théorie des équations aux dérivées partielles, nous allons donner une deuxième méthode de démonstration totalement différente, dont le principe est également dû à Cauchy, mais qui, sous la forme où nous allons l'exposer, est due à M. E. Picard (*Traité d'analyse*, tome II, p. 301 et suivantes).

C'est une méthode d'approximations successives.

Nous raisonnerons sur deux équations mises sous forme canonique

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z).$$

La méthode de démonstration et les conclusions s'appliqueront à des fonctions absolument quelconques de variables complexes, même non analytiques, mais nous supposerons d'abord les variables réelles et les fonctions f_1, f_2 réelles.

Il ne sera pas nécessaire que ces fonctions admettent des dérivées partielles. Par contre, nous supposerons seulement remplies les conditions suivantes (beaucoup plus générales) :

Soit un système de valeurs x_0, y_0, z_0.

1° Il existe deux intervalles h, k tels que, pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z satisfaisant à

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < k, \qquad |z - z_0| < k,$$

$f_1(x, y, z)$ et $f_2(x, y, z)$ restent inférieures en valeur absolue à un nombre fixe M.

2° **Condition de Lipschitz.** — Il existe deux constantes positives A, B telles que pour deux systèmes quelconques de valeurs x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 comprises dans les mêmes intervalles, on ait

$$| f_1(x, y_2, z_2) - f_1(x, y_1, z_1) | < A | y_2 - y_1 | + B | z_2 - z_1 |$$
$$| f_2(x, y_2, z_2) - f_2(x, y_1, z_1) | < A | y_2 - y_1 | + B | z_2 - z_1 |$$

Cette deuxième condition dont l'importance a été nettement mise en valeur par Lipschitz porte le nom de « condition de Lipschitz ».

Il résulte de cette condition que les fonctions sont certainement continues dans le champ.

Remarquons que, si les fonctions f_1, f_2 admettent des dérivées partielles bornées, par rapport à y, z, ces conditions sont certainement vérifiées. Si les variables sont réelles, on le voit immédiatement, en appliquant le théorème des accroissements finis.

Si on a des fonctions de variables complexes on peut écrire

$$f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x, y, z_1)}{\partial y}\, dy + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f(x, y_2, z)}{\partial z}\, dz.$$

Si les dérivées restent respectivement inférieurs en module à α, β, en désignant par L, L′ les longueurs des chemins d'intégration, le module du second membre sera inférieur à $\alpha L + \beta L'$ et *a fortiori* à

$$A | y_2 - y_1 | + B | z_2 - z_1 |$$

pour d'autres valeurs des constantes A, B.

Ces hypothèses étant faites :

Principe de la Méthode : Valeurs approchées successives. — Nous pouvons mettre les équations sous la forme

$$y = b + \int_a^x f_1(x, y, z)dx, \qquad z = c + \int_a^x f_2(x, y, z)dx,$$

en supposant dans f_1, f_2, y et z remplacés en fonction de x.

Ces équations ψ remplacent comme on le voit les équations proposées et les conditions initiales. Si nous connaissions les expressions exactes de y et z, o ces équations seraient des identités, et en faisant les quadratures indiquées, o nous retrouverions, pour chaque valeur de x, les valeurs correspondantes exactes de y, z.

Si dans les fonctions à intégrer nous remplaçons y et z par des fonctions approchées, ψ, o on conçoit que les résultats des nouvelles intégrations seront des valeurs approchées de y et z.

α Donnons-nous un système de fonctions y_0, z_0 de x, continues *quelconques* dans l'intervalle $a - h$, $a + h$, assujetties simplement aux conditions suivantes :

1° Elles prennent pour $x = a$ les valeurs b, c.

2° Dans l'intervalle ci-dessus de x, leurs valeurs sont comprises dans un intervalle $\pm k$ (autour de b et c respectivement).

De ce système de fonctions y_0, z_0, d nous déduisons un deuxième système de fonctions y_1, z_1, par les formules

$$y_1 = b + \int_a^x f_1(x, y_0, z_0)dx, \qquad z_1 = c + \int_a^x f_2(x, y_0, z_0)dx.$$

Remarquons que, y_0, z_0 restant dans le champ indiqué, les fonctions f_1, f_2 σ2 sont continues en x, donc intégrables et y_1, z_1 d sont donc déjà aussi des fonctions continues de x comme y_0, z_0.

Nous allons montrer ψ, ν, ξ que, en restreignant *encore une seule fois* si c'est nécessaire, le champ h de variation de x les fonctions y_1, z_1 restent aussi comprises dans le même intervalle $\pm k$ (autour de b, c) que y_0, z_0.

δ1 En effet dans l'intervalle a, x les variables x, y, z restant dans les champs indiqués, les fonctions f_1, f_2 restent, par hypothèse, en valeur absolue, moindres que M. d On a donc

$$| y_1 - b | < \mathrm{M} | x - a |.$$

Nous aurons donc $| y_1 - b | < k$ si nous prenons $| x - a | < \frac{k}{M}$.

Nous choisirons donc pour h le plus petit des nombres h et $\frac{k}{M}$ et nous prendrons cette valeur comme intervalle *définitif* des variations de x.

Nous avons donc bien certainement

$$| y_1 - b | < k \qquad \text{et de même} \qquad | z_1 - c | < k.$$

Ainsi y_1 et z_1 satisfont aux mêmes conditions que y_0, z_0.

Nous pouvons donc opérer sur y_1, z_1 comme nous l'avons fait sur y_0, z_0 et déterminer deux nouvelles fonctions y_2, z_2

$$y_2 = b + \int_a^x f_1(x, y_1, z_1)dx, \qquad z_2 = c + \int_a^x f_2(x, y_2, z_2)dx,$$

y_2, z_2 seront encore, dans l'intervalle h, des fonctions continues et seront comprises dans l'intervalle k (sans nouvelle restriction).

En opérant ainsi de proche en proche, ayant déterminé des fonctions y_{n-1}, z_{n-1} continues, variant dans l'intervalle k, nous en déduirons de nouvelles y_n, z_n par les relations

$$y_n = b + \int_a^x f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})dx, \qquad z_n = b + \int_a^x f_2(x, y_{n-1}, z_{n-1})dx.$$

Les opérations du second membre sont bien licites, y_n et z_n seront bien continues et comprises dans l'intervalle k.

Limites de y_n, z_n. — Il faut maintenant voir si ces fonctions y_1, y_2,... y_n... tendent vers une limite lorsque n augmente indéfiniment et de même z_1, z_2,... z_n... A cet effet, il faut étudier les différences $y_{n+1} - y_n$. On a

$$y_{n+1} - y_n = \int_a^x [f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})]dx.$$

α, ν
Nous allons évidemment appliquer maintenant la condition de Lipschitz.

$$| f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}) | < A | y_n - y_{n-1} | + B | z_n - z_{n-1} |.$$

α, ν
On est donc amené à procéder par récurrence :

ζ
Supposons que les différences $| y_n - y_{n-1} |$ et $| z_n - z_{n-1} |$ restent inférieures à une certaine fonction $\varphi_n(x)$, o on aura

$$| f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}) | < (A + B)\varphi_n(x),$$

d
et par suite

$$| y_{n+1} - y_n | < (A + B) \int_a^x \varphi_n(x) dx.$$

Or la première différence $| y_1 - y_0 |$ reste inférieure à une certaine quantité fixe, par exemple, $\varphi_1 = \lambda$.

Donc de proche en proche, d les différences $| y_{n+1} - y_n, |$ et $| z_{n+1} - z_n |$ resteront inférieures à une nouvelle fonction φ_{n+1}

$$\varphi_{n+1} = (A + B) \int_a^x \varphi_n(x) dx.$$

β, ο
C'est, comme on le voit, une loi de récurrence entre les fonctions successives $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}$, valeurs limites des différences.

ο, d
Elles se déduisent les unes des autres par intégration successive après multiplication par le facteur constant $(A + B)$.

α, ξ
Puisque la première différence $| y_1 - y_0 |$ est inférieure à λ,

δ1, d
on aura successivement

$$| y_2 - y_1 | < \lambda(A + B) | x - a |$$

$$| y_3 - y_2 | < \lambda(A + B)^2 \frac{| x - a |^2}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$| y_{n+1} - y_n | < \lambda(A + B)^n \frac{| x - a |^n}{n!}.$$

ρ Ces inégalités successives montrent immédiatement ψ que les quantités y_n ont une limite. On a en effet

$$|y_{n+1} - y_0| \leqslant |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \cdots + |y_{n+1} - y_n|$$

$$< \lambda\left[1 + (A+B)\frac{|x-a|}{1} + (A+B)^2\frac{|x-a|^2}{2!} + \ldots + (A+B)^n\frac{|x-a|^n}{n!}\right].$$

En continuant ainsi indéfiniment, on constitue au second membre une série absolument et uniformément convergente π car on a

$$\Sigma |y_k - y_{k-1}| < \lambda e^{(A+B)|x-a|}.$$

ω Les fonctions y_n, z_n tendent donc bien vers des limites y, z.

ξ, α Il faut maintenant démontrer que ces fonctions y, z vérifient bien les équations différentielles données et les conditions initiales.

δ₁ Les différences $y_n - y$, $z_n - z$ tendent uniformément vers zéro. ξ Il en est de même de

$$f(x, y, z) - f(x, y_n, z_n),$$

d'après l'inégalité de Lipschitz. d Par suite $\int_a^x f(x, y_n, z_n)dx$ tend uniformément vers $\int_a^x f(x, y, z)dx$.

ω On a donc bien à la limite

$$y = b + \int_a^x f(x, y, z)dx,$$

et de même pour z.

Enfin, ξ il faut montrer que ces fonctions y et z ne dépendent pas du choix des fonctions initiales y_0, z_0 et que la solution trouvée est unique.

ζ Supposons en effet que nous ayons pris d'autres fonctions de départ Y_0, Z_0 satisfaisant aux mêmes conditions. On en déduirait une suite de nouvelles fonctions Y_1, Y_2,... Y_n... et Z_1, Z_2... Z_n...

α Comparons les deux suites y_n, Y_n.

ν

Procédons encore par récurrence. Désignons par μ une limite supérieure de $|\ Y_0 - y_0\ |$ et de $|\ Z_0 - z_0\ |$.

En appliquant l'inégalité de Lipschitz, on aura alors

$$|\ f(x, Y_0, Z_0) - f(x, y_0, z_0)\ | \leqslant A\ |\ Y_0 - y_0\ | + B\ |\ Z_0 - z_0\ | \leqslant (A + B)\mu.$$

δ_1

Par suite, comme

$$Y_1 - y_1 = \int_a^x [f(x, Y_0, Z_0) - f(x, y_0, z_0)]dx,$$

on en déduit

$$|\ Y_1 - y_1\ | < (A + B)\mu\ |\ x - a\ |.$$

δ_1

On aura de même, si $(A + B)\ \mu\ |\ x - a\ | < k$, (ce que nous supposerons)

$$|\ f(x, Y_1, Z_1) - f(x, y_1, z_1)\ | < A\ |\ Y_1 - y_1\ | + B\ |\ Z_1 - z_1\ | < (A + B)^2 \mu\ |x - a|$$

et par suite

$$|\ Y_2 - y_2\ | < \mu(A + B)^2\ \frac{|\ x - a\ |^2}{2\ !}.$$

δ_1, o

De proche en proche, on aura donc

$$|\ Y_n - y_n\ | < \mu(A + B)^n\ \frac{|\ x - a\ |^n}{n\ !}.$$

ρ, σ

Ces inégalités prouvent bien que Y_n et y_n (qui ont séparément des limites) ont même limite, et de même Z_n, z_n.

ξ

Enfin la solution est bien unique :

Si nous supposions une autre solution Y, Z du système, en prenant $Y_0 = Y$, $Z_0 = Z$, r il est bien évident que Y_1, Z_1 se réduiraient aussi à Y, Z, de même Y_2, Z_2,... Y_n, Z_n.

ω

Les nouvelles quantités Y_n, Z_n auraient donc pour limites Y, Z.

σ_2

Or, nous savons que ces limites ne peuvent être que y et z.

Le théorème d'existence est donc complètement démontré.

Application au domaine complexe. — Nous avons considéré des ζ fonctions réelles f_1, f_2 de variables réelles x, y, z. Supposons

maintenant les variables complexes, et les fonctions f_1, f_2 absolument quelconques, même non analytiques, de ces variables.

Cherchons s'il existe des fonctions y, z, de x, même non analytiques, satisfaisant aux équations et se réduisant à b, c pour $x = a$. Cependant, comme nous écrirons

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z)$$

(nous ne raisonnerons que sur y), nous supposons par cela même, que la fonction y admet une dérivée, limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *quand* x *se déplace dans une certaine direction*, dérivée qui pourra être différente si la direction change.

Donnons-nous donc un chemin L. Soit s l'arc de cette courbe allant de a à x. Nous supposons que dans des cercles de rayon R, R′ suffisamment petits, les fonctions f_1, f_2 satisfont aux inégalités de Lipschitz pour des valeurs convenables de M, A, B.

Ceci étant, prenons deux fonctions continues quelconques, même non analytiques, y_0, z_0, se réduisant à b, c comprises dans des cercles de rayon R′ (de centres b, c), lorsque x se déplace dans le cercle de rayon R, et posons

$$y_1 = b + \int_a^x f_1(x, y_0, z_0)dx$$

on aura

$$|y_1 - b| < \mathrm{M}s.$$

Nous supposons l'arc s suffisamment petit pour que $\mathrm{M}s < \mathrm{R}'$; y_1 sera donc une fonction continue de x et sera comprise à l'intérieur du cercle R′ : y_1 satisfera donc aux mêmes conditions que y_0.

De même si nous posons

$$y_2 = b + \int_a^x f_1(x, y_1, z_1)dx \cdots \qquad y_{n+1} = b + \int_a^x f_1(x, y_n, z_n)dx$$

(et de même pour $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$), $y_2, y_3, \ldots y_{n+1}$ seront des fonctions continues et seront toutes comprises dans le cercle R′.

Limite des y. — On aura

$$y_2 - y_1 = \int_a^x [f_1(x, y_1, z_1) - f_1(x, y_0, z_0)]dx.$$

Appliquons l'inégalité de Lipschitz

$$| f_1(x, y_1, z_1) - f(x, y_0, z_0) | < A | y_1 - y_0 | + B | z_1 - z_0 | < (A + B)\lambda.$$

Par suite, en désignant par λ une limite supérieure des premières différences $| y_1 - y_0 |$, $| z_1 - z_0 |$ en appliquant l'expression de la limite supérieure d'une intégrale de variable complexe

$$| y_2 - y_1 | < (A + B)s\lambda.$$

Posons

$$\lambda_2 = (A + B)s\lambda.$$

Nous allons montrer que nous pouvons poser d'une manière générale

$$| y_{n+1} - y_n | < \lambda_{n+1}, \quad \text{avec} \quad \lambda_{n+1} = \lambda(A + B)^n \frac{s^n}{n!}.$$

Nous allons procéder par récurrence :

Supposons que la loi soit vraie pour n, c'est-à-dire que nous ayons

$$| y_n - y_{n-1} | < \lambda (A + B)^{n-1} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}.$$

(et de même pour z).

On aura ensuite

$$y_{n+1} - y_n = \int_a^x [f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})]dx.$$

En appliquant l'inégalité de Lipschitz,

$$| f_1(x, y_n, z_n) - f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1}) | < A | y_n - y_{n-1} | + B | z_n - z_{n-1} |$$
$$< \lambda(A + B)^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Or, étant donnée une intégrale de fonction de variable complexe, même non analytique, $I = \int_a^x f(z)dz$,

elle est par définition σ_2 la limite de la somme

$$\sum f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Si $\varphi(s)$ désigne le maximum du module de $f(z_k)$ le long de chaque arc, o on a

$$|I| < \sum \varphi(s)\Delta s = \int_o^s \varphi(s)ds.$$

En appliquant cette formule, o on aura

$$|y_{n+1} - y_n| < \int_o^s \lambda(A + B)^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\, ds = \lambda(A + B)^n \frac{s^n}{n!}.$$

ω La loi de récurrence est donc bien démontrée. Etant vraie pour 2, la formule

$$|y_{n+1} - y_n| < \lambda(A + B)^n \frac{s^n}{n!}$$

est donc générale.

δ_1 Si alors nous posons

$$y_{n+1} = y_0 + (y_1 - y_0) + y_2 - y_1) + \cdots + (y_{n+1} - y_n).$$

On voit que les termes du second membre sont moindres en valeur absolue que

$$\lambda, \qquad \lambda(A + B)s, \qquad \lambda(A + B)^2 \frac{s^2}{2!} \cdots \lambda(A + B)^n \frac{s^n}{n!}.$$

ρ La série qu'ils forment est absolument et uniformément convergente.

ω y_{n+1} tendra donc uniformément vers une limite y.

ψ Comme dans le cas des variables réelles, on démontrera aisément que cette limite satisfait à l'équation différentielle le long de la courbe choisie. Cette solution est unique, indépendante des fonctions de départ y_0, z_0.

Cas des fonctions analytiques. — Supposons maintenant f_1, f_2, holomorphes satisfaisant alors à des inégalités de Lipschitz.

Prenons pour y_0, z_0 deux fonctions holomorphes. Les fonctions y_1, z_1 que nous obtiendrons par les formules

$$y_1 = b + \int_a^b f_1(x, y_0, z_0)\,dx$$

seront aussi des fonctions holomorphes. Pour des arcs suffisamment petits, y_1, z_1 seront compris dans le même cercle R′ (pour lequel les inégalités de Lipschitz sont satisfaites).

Il en sera de même successivement de y_n, z_n.

Les limites y et z définies par des séries de fonctions holomorphes, uniformément convergentes, seront elles-mêmes des fonctions holomorphes. Ces solutions holomorphes du système seront uniques.

Mais on peut ici généraliser le théorème de Cauchy.

Ce théorème établit bien qu'il existe une solution unique de fonctions holomorphes satisfaisant au système différentiel.

On peut se demander s'il ne pourrait pas exister de fonctions *non holomorphes* satisfaisant au système.

Il faudrait naturellement partir de fonctions Y_0, Z_0 non holomorphes, et intégrer comme dans le cas des fonctions non analytiques, le long d'une courbe déterminée.

Nous avons démontré que dans ce cas, quelles que soient les fonctions non holomorphes de départ, les limites Y, Z satisfaisant aux équations différentielles sont uniques. Ces limites Y, Z se confondront nécessairement *le long de cette courbe* avec les fonctions holomorphes y et z que l'on aurait obtenues en partant de fonctions holomorphes y_0, z_0.

Si maintenant, nous faisons varier, à partir de A la courbe d'intégration, les diverses limites obtenues Y, Z, Y′, Z′ se confondront toutes avec la solution holomorphe y, z qui, elle, reste toujours la même, *quelle que soit la courbe d'intégration.*

Nous obtenons donc le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Si les fonctions f_1, f_2 sont holomorphes dans des cercles de rayon* R (*pour* x), R′(*pour* y, z), *il existe des fonctions*

holomorphes y et z satisfaisant aux équations différentielles se réduisant à b, c pour $x = a$.

Ces fonctions sont les seules solutions, holomorphes ou non, satisfaisant au système.

Remarque. — Pour établir l'existence des solutions par la méthode de M. E. Picard, nous avons dû faire les hypothèses suivantes :

1° Il existe deux intervalles h et k pour lesquels $f_1(x, y, z)$ et $f_2(x, y, z)$ restent inférieurs à M.

2° Inégalité de Lipschitz.

Nous avons ensuite restreint, s'il était nécessaire, l'intervalle h, en prenant le plus petit des intervalles h et $\frac{k}{2M}$.

Cette deuxième restriction n'a été faite, que pour s'assurer que

$$y_1 = b + \int_a^x f_1(x, y_0, z_0)dx$$

et de même z_1, (et ensuite toutes les autres valeurs approchées), restent dans l'intervalle k, et cela seulement pour pouvoir affirmer que $f_1(x, y_1, z_1)$ est continue et pouvoir intégrer.

Mais il sera inutile de faire cette restriction, si nous sommes sûrs *a priori* que les fonctions f_1 et f_2, sont continues dans le domaine de $x = a$, quelles que soient les valeurs de y et z.

On pourra alors certainement et de toutes façons calculer les intégrales successives

$$y_n = b + \int_a^x f_1(x, y_{n-1}, z_{n-1})dx$$

elles seront des fonctions continues de x.

Il suffira donc dans ce cas, qu'il existe des nombres A, B tels que

$$| f(x, y'', z'') - f(x, y', z') | < A | y'' - y' | + B | z'' - z' |.$$

Toute notre démonstration, faite ci-dessus, de l'existence des limites y et z subsiste alors intégralement.

Cas des équations linéaires. — En particulier, si les équations sont linéaires en y et z, les coefficients étant des fonctions de x

o

les solutions seront convergentes pour tout intervalle de x dans lequel tous les coefficients seront continus.

ω

Les solutions ne peuvent avoir d'autres points critiques que ceux des coefficients.

Nous avons donc établi le théorème d'existence des fonctions définies par des équations différentielles, par deux méthodes absolument différentes.

IV. — FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PROLONGEMENT ANALYTIQUE. POINTS CRITIQUES

Prolongement analytique. Points critiques. — En supposant toujours la variable complexe, considérons une seule équation différentielle du premier ordre mise sous forme canonique.

$$\frac{du}{dz} = f(z, u).$$

ξ

Faisons décrire à la variable z un certain chemin C et voyons si l'équation peut définir une fonction

$$u = \lambda(z)$$

satisfaisant à l'équation différentielle tout le long de C.

α

Prenons un point de départ a_0 sur C et faisons-lui correspondre une valeur b_0 de u.

ξ

Si le coefficient différentiel $f(z, u)$ est holomorphe aux environs de a_0, b_0, o il existera d'après le théorème de Cauchy, une solution prenant la valeur b_0 pour $z = a_0$. σ2 Cette solution est holomorphe dans un cercle C_0 de centre a_0 et d'un certain rayon ρ_0.

α

Prenons sur C_0 un point a_1 à l'intérieur de ce cercle.

Nous pourrons calculer (au moins théoriquement), et avec autant d'approximation que nous le voulons, la valeur finale b_1 de u pour $z = a_1$. α1 ξ Prenons ces valeurs comme nouvelles valeurs initiales. d Nous pourrons poursuivre la définition de la solution u à l'intérieur d'un nouveau cercle C_1 de rayon a_1. α, c

Nous pourrons par conséquent, et en admettant que ce cercle ait une partie extérieure au premier, poursuivre la définition de la fonction u le long d'un nouvel arc $A_1 A_2$ de C et... ainsi de suite.

Nous établissons ainsi l'existence d'une fonction satisfaisant constamment à l'équation différentielle, le long d'un arc $A_0 A$ qui peut s'étendre bien au delà du cercle initial. c'est-à-dire l'existence d'une *fonction définie par une équation différentielle*, fonction qui dépend du reste de la valeur initialement choisie b_0.

Points critiques. — On voit que l'on ne sera arrêté sur C que si, pour un point α et pour la valeur *correspondante* β de u, le coefficient différentiel cesse d'être holomorphe.

Sinon on pourrait continuer la définition de u le long d'un nouvel arc fini à l'intérieur d'un cercle de rayon suffisamment petit, mais *fini*, de centre α.

Ces points α peuvent d'ailleurs exister, car il est possible que les rayons des cercles successifs que l'on considère décroissent jusqu'à zéro et que l'on ne puisse, ainsi, pas dépasser sur C un point α.

Un tel point est un « point critique » de la fonction u considérée.

Lorsqu'on part d'un point initial a_0, les diverses solutions de l'équation correspondent aux diverses valeurs initiales b_0 que l'on peut adopter pour u (à la condition que $f(z, u)$ soit holomorphe en a_0, b_0). Les valeurs successives que prendra la solution dépendront de cette valeur b_0, et par suite aussi, la valeur finale de cette fonction au point α. Puisque les points critiques correspondent aux valeurs α, β pour lesquelles $f(z, u)$ cesse d'être holomorphe, il est naturel de penser que ces points critiques seront en général variables avec la valeur initiale choisie pour u, c'est-à-dire avec la solution considérée.

Il pourra cependant arriver que certains points α de C soient des points critiques de u, quelle que soit la solution adoptée.

On voit donc qu'il peut exister deux espèces de points critiques ;

1° Des points critiques « fixes » communs à toutes les solutions de l'équation différentielle.

2° Des points critiques « mobiles » variables avec la solution choisie.

Exemples :

1° Considérons l'équation

$$\frac{du}{dz} = f(z).$$

δ_1

La solution qui se réduit à b_0, pour $z = a_0$, est

$$u = b_0 + \int_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

ρ, o

Il est bien évident que les points critiques ne peuvent être que ceux de la primitive de $f(z)$: ils sont donc tous fixes.

2° Soit l'équation

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z - u}.$$

σ_2

A priori nous pouvons dire que les points critiques sont ceux pour lesquels on aura $z = u$. Or, il est facile d'intégrer cette équation.

α

On l'écrit en effet

$$\frac{dz}{du} = z - u.$$

ρ

C'est une équation linéaire, si l'on considère z comme fonc-
δ_1
tion de u. On trouve aisément la solution générale

$$z = u + 1 + Ce^u.$$

α

Déterminons la solution de Cauchy qui prend la valeur $u = b$ pour $z = a$. On aura

$$z - u - 1 = (u - b - 1)e^{u-b}.$$

ξ

Les points critiques sont ceux pour lesquels on aura $z = u$. Ils sont donnés par

$$1 = (b + 1 - a)e^{z-b}$$

c'est-à-dire

$$z = b - \log(b + 1 - a).$$

ρ, ω

On constate que tous ces points sont variables avec b, c'est-à-dire avec la solution choisie.

Etude à l'infini. — Si l'on veut étudier comment se comporte une solution pour des valeurs de z dont le module augmente indéfiniment, α, σ_2 il faudra faire le changement de variable $z = \frac{1}{\zeta}$. On aura une nouvelle équation différentielle entre ζ et u, dont on étudiera la solution aux environs de l'origine.

De même, ξ si l'on veut étudier de quelle manière se comporte une solution qui devient infinie pour une certaine valeur α de z, α_1 on fera le changement $u = \frac{1}{v}$ et on étudiera les variations de v aux environs de $z = \alpha$.

Reconnaître si un point est point critique. — En général, s'il est possible de connaître à l'avance les systèmes de valeurs α, β de z, u pour lesquels $f(z, u)$ cesse d'être holomorphe, il est difficile de voir ξ s'il existe une solution de l'équation différentielle qui se réduise à β pour $z = \alpha$, et de plus quelle est alors la nature de ce point critique α pour la solution considérée.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Si en un point α, β, $f(z, u)$ devient infini, mais si la fonction inverse*

$$\varphi(z, u) = \frac{1}{f(z, u)}$$

s'annulant pour ces valeurs, est holomorphe aux environs de α β, ψ

il existe effectivement une solution de l'équation prenant la valeur β pour $z = \alpha$. Ce point est un point critique algébrique pour la solution.

α, ξ

Puisque $\varphi(z, u)$ est holomorphe aux environs de α, β, nous considérerons l'équation définissant z comme fonction de u

$$\frac{dz}{du} = \varphi(z, u)$$

$\varphi(z, u)$ s'annulant pour α, β.

ζ_1

Il existe une solution holomorphe de cette équation pre-

nant la valeur $z = \alpha$ pour $u = \beta$. Cette solution est développable en série de Taylor sous la forme

$$z - \alpha = A_1(u - \beta) + A_2(u - \beta)^2 + \cdots$$

d

On en déduira

$$\frac{dz}{du} = A_1 + 2A_2(u - \beta) + \cdots$$

et pour $u = \beta$, $\frac{\partial z}{\partial u} = A_1$.

β

On doit donc avoir $A_1 = 0$.

Inversement, ξ l'équation

$$z - \alpha = A_2(u - \beta)^2 + \cdots$$

peut servir à définir la fonction u.

Or pour $z = \alpha$, ρ deux valeurs au moins de $(u - \beta)$ s'annulent. Pour nous placer dans le cas général, ζ supposons que les $(k - 1)$ premiers coefficients A_i (dérivées successives de z par rapport à u) soient nuls pour α, β.

o

On aura alors

$$z - \alpha = A_k(u - \beta)^k + \cdots$$

r

Quand z tend vers α, il y a k valeurs de u qui tendent vers β. σ2 Nous savons que, inversement, pour les valeurs suffisamment petites de $|z - \alpha|$, nous aurons pour $(u - \beta)$ un développement de la forme

$$u - \beta = B_1(z - \alpha)^{\frac{1}{k}} + B_2(z - \alpha)^{\frac{2}{k}} + \cdots$$

procédant suivant les puissances entières de $(z - \alpha)^{\frac{1}{k}}$. On obtiendra tous les développements de $(u - \beta)$, connaissant l'un d'eux, χ en prenant toutes les déterminations de $(z - \alpha)^{\frac{1}{k}}$.

σ2, δ1

Lorsqu'on tourne autour du point α, ces diverses déterminations se permutent les unes dans les autres.

Le point $z = \alpha$ est un point singulier algébrique des solutions u.

Nous avons supposé qu'il y avait un premier coefficient A_k diffé-

rent de zéro. Il pourrait arriver que toutes les dérivées successives de z par rapport à u fussent nulles pour $u = \beta$. On en déduit que pour la fonction $\varphi(z, u)$, toutes les dérivées partielles successives par rapport à u sont nulles pour $z = \alpha$; $\varphi(z, u)$ est donc de la forme

$$\varphi(z, u) = (z - \alpha)^k \varphi_1(z, u).$$

On a dans ce cas l'équation

$$\frac{dz}{du} = (z - \alpha)^k \varphi_1(z, u)$$

φ_1, étant holomorphe. Elle admet la solution $z = \alpha$. D'après le théorème de Cauchy, il n'existe pas d'autre solution se réduisant à α pour $u = \beta$, quelle que soit la valeur choisie de β.

L'équation donnée

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{(z - \alpha)^k \varphi_1(z, u)}$$

n'admet donc pas de solution prenant la valeur β pour $z = \alpha$.

Cas où $f(z, u)$ est une fonction rationnelle en u.

Théorème de M. Painlevé. — *Considérons l'équation*

$$\frac{du}{dz} = f(z, u)$$

$f(z, u)$ étant une fonction rationnelle de u, et uniforme par rapport à z, mais pouvant avoir pour chaque valeur de u, des pôles ou des points singuliers essentiels isolés.

En dehors de certains points critiques fixes, l'équation n'aura d'autres points singuliers que des pôles ou des points critiques algébriques.

Nous nous contenterons d'énoncer ce théorème.

Conditions pour que toutes les solutions soient uniformes. — Soit l'équation

$$\frac{du}{dz} = f(z, u) = \frac{A_0 + A_1 u + \cdots + A_m u^m}{B_0 + B_1 u + \cdots + B_n u^n} = \frac{P(z, u)}{Q(z, u)}$$

les fonctions A_i, B_k pouvant être des fonctions quelconques de z, mais uniformes dans tout le plan.

Nous allons rechercher à quelles conditions toutes les solutions de l'équation différentielle seront elles-mêmes des fonctions uniformes.

Donnons-nous une valeur α de z qui ne soit point critique pour aucun des coefficients A_i, B_k, qui n'annule pas le coefficient B_0 et enfin qui n'annule pas le résultat de l'élimination de u entre les équations

$$P(z, u) = 0, \qquad Q(z, u) = 0$$

points pour lesquels $f(z, u)$ serait indéterminée.

A cette valeur α de z, faisons correspondre une racine β de l'équation

$$Q(\alpha, u) = 0.$$

Pour ce système de valeurs, $f(z, u)$ est infini, mais l'inverse de la fonction $\varphi(z, u)$ s'annule et est holomorphe aux environs. Enfin B_0 n'est pas nul pour $z = \alpha$.

D'après le théorème précédent, il existerait une intégrale se réduisant à β pour $z = \alpha$, et ce point serait point critique algébrique pour cette solution. Si donc nous voulons que toutes les solutions soient uniformes dans tout le plan, il faut que le second membre se réduise à un polynôme en u.

Soit alors l'équation

$$\frac{du}{dz} = P(z, u).$$

Si nous faisons la transformation $u = \frac{1}{v}$, nous obtiendrons l'équation

$$-\frac{dv}{dz} = v^2 P\left(z, \frac{1}{v}\right).$$

Or, si toutes les solutions u sont uniformes, il doit en être de même de toutes les solutions v. Il est donc nécessaire que le nouveau second membre soit un polynôme en v et, par conséquent, que $P(z, u)$ soit un polynôme du second degré en u.

Nous sommes donc conduits à considérer les équations de Riccati.

$$\frac{du}{dz} = P + Qu + Ru^2.$$

Equation linéaire. — Considérons d'abord une équation linéaire et étudions les points critiques des solutions.

Soit

$$\frac{du}{dz} = P + Qu.$$

Nous savons que la solution générale de cette équation, si u_0 et u_1 sont deux solutions particulières, est donnée par

$$u = u_0 + k(u_1 - u_0)$$

k désignant une constante arbitraire. On en déduit que les seuls points critiques de u ne peuvent être que ceux de u_0 et u_1 : ce sont donc tous des points critiques fixes ; ils peuvent d'ailleurs être quelconques.

Equation de Riccati. — Prenons maintenant l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dz} = P + Qu + Ru^2.$$

Le second membre cesse d'être holomorphe pour les points critiques de l'une des fonctions P, Q, R ou pour u infini.

Les premiers ne pourront être que des points critiques fixes communs à toutes les intégrales.

Etudions les solutions qui peuvent devenir infinies pour certaines valeurs α de z. Nous devons poser $u = \frac{1}{\rho}$.

Nous aurons l'équation

$$-\frac{d\rho}{dz} = P\rho^2 + Q\rho + R.$$

Le second membre, étant alors holomorphe aux environs de $z = \alpha$, $\rho = 0$, on en conclut que la solution ρ est holomorphe et par suite s'annule pour $z = \alpha$.

Ces points α sont donc des pôles pour la solution u.

Donc l'équation de Riccati ne peut admettre comme points critiques mobiles que des pôles.

C'est aussi la conclusion à laquelle on arriverait par la transformation

$$u = u_0 + \frac{1}{\rho}$$

u_0 étant une solution quelconque de l'équation. On sait

que φ est alors solution d'une équation linéaire. Les points critiques variables de u sont ceux pour lesquels φ s'annule ; φ étant holomorphe, en dehors des points critiques (fixes) des solutions particulières, aux zéros de φ, correspondent bien des pôles de u.

Solutions singulières des équations différentielles. — Pour établir l'existence des solutions d'un système d'équations différentielles par le théorème de Cauchy, nous avons dû faire quelques restrictions.

Considérons, par exemple, deux équations différentielles du premier ordre définissant deux fonctions y et z de x.

Nous avons d'abord supposé que le système était mis sous forme canonique

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z)$$

et nous avons dû supposer aussi qu'aux environs d'un point x_0, y_0, u_0, point d'une solution, les fonctions f et φ étaient toutes deux holomorphes.

D'une part, nous ne pouvons pas obtenir ainsi les solutions pour lesquelles le point x_0, y_0, z_0, serait point critique de f ou de φ.

D'autre part on peut se demander si ces hypothèses n'écartent pas, *a priori*, certaines solutions du système d'équations, en d'autres termes, s'il n'existe pas des solutions telles, qu'aux environs *d'aucun de leurs points*, les fonctions f et φ, que l'on obtiendrait en mettant le système sous forme canonique, soient simultanément holomorphes.

S'il en était ainsi, il serait impossible d'appliquer à ces solutions, quel que soit le point de départ, le théorème d'existence de Cauchy, et de les obtenir par ce procédé.

Ce n'est pas là une vaine hypothèse. Prenons, par exemple, l'équation simple de Clairaut

$$y - xy' = y'^2.$$

$\delta_{1,\alpha}$

Si nous la supposons mise sous forme canonique, nous devons écrire

$$2y' = -x \pm \sqrt{x^2 + 4y}.$$

ξ, τ_2

Si l'on prend x_0, y_0, non situé sur la parabole

$$x^2 + 4y = 0,$$

o

on peut bien développer le radical suivant les puissances entières et croissantes de $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, et en déduire la solution

ξ

se réduisant à y_0 pour x_0. Mais il n'en est plus de même si le point est pris sur la parabole. On ne peut prendre, comme point de départ d'une solution de Cauchy, un point de la parabole, quel qu'il soit.

ξ, ψ

D'autre part, cette parabole elle-même ne pourrait-

ρ

elle constituer à elle seule une solution de l'équation ? C'est ce qui a lieu, en effet, ainsi qu'on le constate aisément. Elle ne pourrait cependant pas être obtenue par l'application du théorème d'existence.

La solution générale de l'équation est

$$y = cx + c^2.$$

ρ

Nous constatons que la parabole est l'enveloppe des droites représentées par cette équation, c'est-à-dire l'enveloppe des solutions générales. Pour aucune valeur de la constante, elle ne pourrait s'identifier avec une des solutions générales.

C'est une solution « singulière » de l'équation.

Considérons encore l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{y - x}.$$

ξ

Par tout point x_0, y_0 non situé sur la droite $y - x = 0$, passe une intégrale fournie par le théorème de Cauchy « intégrale

ξ

générale ». N'existerait-il pas de solution telle que, pour tout point, le coefficient différentiel et par suite ici $\sqrt{y - x}$ cesse d'être holomorphe ?

β

Ce sont les points pour lesquels on a $y = x$.

Or ρ la droite $y = x$ est bien solution de l'équation.

On trouve facilement la solution générale en posant

$$y = x + t^2.$$

On obtient

$$y = x + \left(\frac{x}{2} + c\right)^2.$$

On peut bien déterminer c de manière que cette solution prenne la valeur y_0 pour x_0, sauf si $y_0 = x_0$: la droite $y = x$ est solution singulière.

On constate qu'elle est l'enveloppe des courbes représentées par la solution générale.

V. — SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Recherche des solutions singulières, en partant de l'équation différentielle. — Nous allons donc chercher à déterminer, si elles existent, les solutions singulières d'une équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

On peut faire cette étude soit en supposant que l'on a obtenu l'intégrale générale, soit *a priori*, sans connaître l'intégrale générale, en se basant sur l'équation différentielle donnée. Prenons d'abord ce cas.

La solution est immédiate , si l'équation (1) peut être résolue par rapport à y'

$$y' = f(x, y).$$

Il suffit de voir si le lieu des points pour lesquels $f(x, y)$ cesse d'être holomorphe forme une solution de l'équation.

Si l'équation n'est pas résolue, soit α, β un point quelconque d'une solution singulière Σ. Si aux environs de α, β, la valeur de y' déduite de (1) était holomorphe, il existerait une solution particulière déduite du théorème de Cauchy passant par ce point. La solution se confondrait avec cette solution particulière et ne serait donc pas singulière.

Il faut donc que, pour tout point x, y d'une solution singu-

lière, la fonction y' que l'on pourrait déduire de (1) cesse d'être holomorphe.

Or nous savons que ces valeurs de x, y (et la valeur de y' correspondante) doivent satisfaire aussi à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

En éliminant y' entre les équations (1) (2), on aurait une relation entre x et y, soit $P(x, y) = 0$, qui *pourrait* constituer une solution singulière de l'équation. Il faut encore, en effet, *vérifier* que la fonction $y(x)$ qu'on en déduit satisfait bien à l'équation (1).

Par exemple pour l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \sqrt{y - x^2}$$

$\frac{dy}{dx}$ cesse d'être holomorphe pour les points de la parabole $y = x^2$.

De plus, il faut vérifier que $y = x^2$ est bien solution de l'équation, ce qui a lieu.

C'est donc une solution singulière de l'équation. La solution générale est

$$y = x^2 + \left(\frac{x}{2} + c\right)^2.$$

On constate que la solution singulière est l'enveloppe de ces courbes.

Mais si l'on donnait l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{y - x^2}$$

la seule solution singulière possible serait encore $y = x^2$ et cette fonction ne satisfait pas à l'équation. Celle-ci n'admet donc pas d'intégrale singulière.

On se rend compte que, en général, une équation différentielle n'admet pas de solution singulière.

Quand elle existe, il est possible de la déterminer a priori et sans avoir intégré l'équation

En effet, pour tout point de la solution singulière, la fonction $y(x)$ satisfait à la fois aux deux équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, y') = 0.$$

Mais si de plus nous dérivons la première en tenant compte de la seconde, nous obtenons encore une troisième équation *qui n'introduit pas* y''

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0. \tag{3}$$

Il faut remarquer d'ailleurs que, s'il existe une fonction y qui (avec sa dérivée y') satisfait aux trois équations, on n'obtiendra plus de conditions nouvelles en les dérivant encore. Les équations ultérieures définiront y'', y'''...

Considérons d'abord les trois équations comme définissant deux fonctions sans aucun lien, y et y' que nous remplaçons pour éviter toute ambiguïté par y_1.

Ces deux fonctions y, y_1 satisfont donc à la fois aux trois équations

$$f(x, y, y_1) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y_1) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 = 0.$$

Si nous éliminons y_1 entre (1) et (2), nous obtenons une certaine courbe $P(x, y) = 0$ définissant une fonction y.

Si nous éliminons y_1 entre (1) et (3) nous obtenons de même une courbe

$$Q(x, y) = 0.$$

Si ces deux courbes se confondent ou si du moins, elles ont une branche commune, nous allons démontrer que cette branche constitue bien une solution singulière de l'équation.

Il suffit en effet de démontrer que, pour cette fonction, on a bien

$$f(x, y, y') = 0$$

et par conséquent de démontrer que la fonction y_1 se confond avec y'.

Or, pour les deux fonctions y, y_1, on a, en dérivant (1),

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y_1} y'_1 = 0.$$

Cette équation se réduit, en vertu de (2), à

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation (3), on voit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial y} y_1.$$

En général, on n'aura pas encore le long de la branche considérée, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (on en déduirait d'ailleurs $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$).

Par conséquent on a bien $y_1 = y'$.

Exemple. — 1° Soit l'équation

$$(y' - 2x)^2 - y + x^2 = 0. \tag{1}$$

On a ici

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2(y' - 2x) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = -4(y' - 2x) + 2x - y' = 0. \tag{3}$$

Cette dernière se réduit à $y' - 2x = 0$.

Les trois équations se réduisent à deux. En éliminant y' entre (1) et (2) on obtient $y - x^2 = 0$.

C'est certainement une solution singulière.

2° Soit l'équation

$$(y' - x)^2 - y + x^2 = 0. \tag{1}$$

On a ici

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2(y' - x) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = -2(y' - x) + 2x - y' = 0. \tag{3}$$

La courbe P, obtenue par l'élimination de y' entre (1) et (2) est

$$y - x^2 = 0.$$

La courbe Q, obtenue par l'élimination de y' entre (1) et (3) est

$$\frac{x^2}{9} - y + x^2 = 0, \qquad 10x^2 - 9y = 0.$$

ω

Les courbes P et Q n'ont pas de branche commune : il n'existe donc pas de solution singulière.

Recherche en partant de la solution générale. — Cherchons maintenant les solutions singulières en supposant que nous ayons déterminé l'intégrale générale de l'équation.

Soit l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

σ_2

Sous certaines conditions assez générales, nous avons montré qu'il existait des solutions dépendant d'une constante arbitraire, satisfaisant à cette équation. Soit

$$\varphi(x, y, c) = 0 \tag{2}$$

l'équation qui définit ces solutions. Nous les appelons, d'après Lagrange, la solution générale de l'équation.

En un point quelconque de l'une des courbes C de la famille qu'elle représente, le coefficient angulaire de la tangente en ce point sera déterminé par l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0. \tag{3}$$

Dire que la fonction y définie par (2) satisfait à (1), quelle que soit

σ_2

la constante c, c'est dire qu'en éliminant c entre (2) et (3) les valeurs de x, y, y' satisfont à l'équation (1). Cette dernière est ce que nous avons appelé l'équation différentielle de la famille de courbes.

Inversement, donnons-nous un système de valeurs x_0, y_0, y_0', satisfaisant à (1). Puisque cette équation est le résultat de l'élimi-

d, σ

nation de c entre (2) et (3), cela veut dire que l'on peut déterminer une valeur c_0 satisfaisant à la fois à

$$\varphi(x_0, y_0, c_0) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} y'_0 = 0.$$

Si alors, on considère la courbe particulière C_0 de la famille, corres-

pondant à cette valeur c_0, la première de ces deux équations exprime que cette courbe passe par le point x_0, y_0 ; la seconde que le coefficient angulaire de la tangente en ce point est précisément y'_0.

Ainsi, étant donné un « élément » quelconque (point et tangente) x_0, y_0, y'_0, satisfaisant à (1), il existe certainement une courbe de la famille admettant ce même élément (point et tangente).

Cette seule remarque fondamentale va nous permettre de déterminer toutes les solutions de l'équation (1).

Géométriquement la réponse est immédiate : D'après la remarque ci-dessus, par tout point de la courbe Γ (qui est par hypothèse solution) passe une des courbes C tangente en ce point à Γ. Autrement dit, la courbe Γ est tangente en chacun de ses points à l'une des courbes C. D'après ce que l'on sait sur la théorie des enveloppes, ou bien Γ se confond avec l'une des courbes C, ou bien Γ est l'enveloppe de la famille de courbes C.

Analytiquement, on peut établir aisément ce même résultat : Donnons-nous une solution quelconque $y(x)$.

A la condition de déterminer convenablement une fonction $c(x)$ (c ne représentant plus une constante, mais une fonction) il est bien évident que la solution $y(x)$ pourrait être définie par l'équation $\varphi(x, y, c(x)) = 0$ (il en serait ainsi même si y n'était pas solution).

En un point quelconque x_0, y_0 de la solution, on a

$$\varphi(x_0, y_0, c_0) = 0 \qquad (c_0 = c(x_0)). \tag{2}$$

Le coefficient angulaire de la tangente en ce point sera défini par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} y'_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial c_0} c'_0 = 0 \tag{4}$$

et l'élément x_0, y_0, y'_0 doit satisfaire à

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0. \tag{1}$$

Si, par hasard, pour la valeur x_0, on avait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_0} c'_0 = 0 \tag{5}$$

l'équation (4) se réduirait à (3), et en éliminant c_0 entre (2) et (3), on retouverait bien l'équation (1).

Je dis qu'il est nécessaire que, pour la valeur x_0, on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_0} c'_0 = 0.$$

En effet, (1) est, comme nous l'avons dit, le résultat de l'élimination de c entre

$$\varphi(x_0, y_0, c) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} y'_0 = 0. \tag{3}$$

Parmi ces valeurs de c, figure la valeur c_0 d'après (2). Pour cette valeur, la condition (1) peut donc être remplacée par ces deux dernières équations. En comparant (3) et (4), on voit bien que l'on a la condition (5).

Ainsi, pour satisfaire à l'équation (1), il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_0} c'_0 = 0.$$

Et comme cette condition doit avoir lieu pour toute valeur de x_0, on doit donc avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} c' = 0.$$

Ou bien donc, on aura $c' = 0$, $c = \text{const.}$ et la courbe solution se confond avec l'une des courbes C. Ou bien l'on aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0.$$

Les deux fonctions y et $c(x)$ seraient donc définies par les deux équations

$$\varphi(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0.$$

En éliminant la fonction $c(x)$ entre ces deux équations, on obtiendra le même résultat qu'en éliminant la constante c entre elles. On obtiendra donc bien l'enveloppe de la famille de courbes C.

Les deux méthodes sont concordantes.

REMARQUE. — I. Il semble que nous soyons arrivés à un résultat contradictoire avec celui de la première recherche.

Nous avons démontré que, en général, à moins que les courbes, que nous avons désignées par courbes P et Q, aient une branche commune, l'équation différentielle n'admet pas de solution singulière.

Or, nous venons de démontrer que si l'on a déterminé la famille de courbes C, $\varphi(x, y, c) = 0$, dépendant d'une constante arbitraire, il suffit pour obtenir une intégrale singulière d'en prendre l'enveloppe. : C'est que, rien ne permet d'affirmer que cette famille aura une enveloppe, ou que la constante entrera dans son équation sous une forme telle que cette famille puisse avoir une enveloppe (par exemple, si l'on a la famille $\varphi(x, y) + c = 0$).

II. Nous avons vu qu'en partant de l'équation différentielle $f(x, y, y') = 0$, la solution singulière, si elle existe, s'obtient en adjoignant l'équation $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, et éliminant y' entre ces deux équations.

D'autre part, si nous avons obtenu l'intégrale générale, $\varphi(x, y, c) = 0$, pour obtenir cette solution singulière, il faut adjoindre à cette équation, l'équation $\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$.

Ces deux résultats sont conséquence l'un de l'autre. En effet, en chaque point x_0, y_0 du plan passent une ou plusieurs courbes C, les paramètres correspondants étant les racines de l'équation

$$\varphi(x_0, y_0, c) = 0. \tag{2'}$$

En ce point et pour chacune des courbes, il y a une tangente de coefficient y'. Ces coefficients y' sont racines de l'équation

$$f(x_0, y_0, y') = 0. \tag{1'}$$

Il y a donc autant de valeurs de y' qu'il y a de valeurs de c. Dire que l'on a aussi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$$

σ

c'est dire qu'au point x_0, y_0, deux au moins des courbes C qui

r

y passent viennent se confondre, et par conséquent deux au moins des coefficients angulaires y'. On doit donc bien avoir aussi

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Signification des courbes P, Q. — Nous avons vu que, si une solution singulière existe, σ_2 elle doit être branche commune aux courbes P, Q résultant de l'élimination de y' entre les équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{P}$$

ou entre les équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0. \tag{Q}$$

Darboux a donné la signification géométrique de ces courbes P et Q quand elles ne coïncident pas et par conséquent pour tout point n'appartenant pas à une solution singulière.

Courbe Q. — Considérons d'abord les courbes Q. ζ, τ_2 En tous les points correspondants des diverses courbes intégrales, on suppose que

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

La courbe Q s'obtiendrait par l'élimination de y'. En dérivant l'équation (1) et tenant compte de (2), on obtient simplement

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0.$$

Or, ρ, σ pour tout point ainsi considéré, on suppose que l'on n'a pas également $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. On en déduit donc qu'en tout point de chaque courbe intégrale situé sur Q, on a $y'' = 0$.

ω, σ

Ce point est donc point d'inflexion pour la courbe intégrale correspondante.

La courbe Q ω *est donc le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales.*

ξ

Courbe P. — Considérons maintenant les points des diverses courbes intégrales pour lesquels on a simultanément

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

σ_2

On obtiendra la courbe P en éliminant y' entre ces deux équations.

Etant donnée la signification de la courbe Q, lieu des points d'inflexion, on sait que, si l'on fait la transformation d'une courbe C par polaires réciproques par rapport à une conique Γ, à tout point d'inflexion de C σ_2 correspond un point de rebroussement de la courbe transformée C'.

ω

On est donc certain *a priori*, de pouvoir obtenir le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales d'une équation différentielle quelconque donnée.

Faisons donc « à tout hasard » une transformation par polaires réciproques par rapport à une conique, d'une équation différentielle et des courbes intégrales solutions.

α

Nous allons prendre évidemment comme conique de base la conique la plus simple, par exemple, la parabole

$$x^2 - 2y = 0.$$

δ_1, σ_2

Nous savons que tout point X, Y de la courbe transformée C', est le pôle, par rapport à la conique, de la tangente à la courbe C au point x, y correspondant et inversement.

δ_1

La tangente à la courbe C a pour équation (en désignant par ξ, η les coordonnées courantes)

$$\eta - y - y'(\xi - x) = 0 \qquad \text{T}$$

(6)

β

Son pôle sera un point X, Y, tel que la polaire de ce point par rapport à la parabole soit précisément la tangente T.

δ_1

Or la polaire de X, Y a pour équation

$$\xi X - \eta - Y = 0.$$

(7)

α

Ecrivons que les deux droites (6) et (7) se confondent. On obtiendra

$$\frac{X}{-y'} = -1 = -\frac{Y}{xy' - y}$$

et par suite

(8) $$X = y', \qquad Y = xy' - y.$$

ρ, σ_2

C'est, comme on le savait, la transformation de Legendre, de laquelle on déduit

$$Y' = x.$$

$\delta_1 \xi$

Si donc on a entre x, y, y' l'équation

$$f(x, y, y') = 0,$$

on aura entre X, Y, Y', l'équation

$$f(Y', XY' - Y, X) = 0.$$

ρ

C'est une équation de la forme

$$F(X, Y, Y') = 0 \equiv f(Y', XY' - Y, X).$$

ξ, δ_1

Le lieu des points d'inflexion des nouvelles courbes intégrales s'obtiendra en ajoutant l'équation

(3') $$\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} Y' = 0.$$

δ_1

Dans le cas actuel, on a

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial y} Y' + \frac{\partial f}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial F}{\partial Y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

étant bien entendu que dans ces diverses dérivées, il faudra remplacer x, y, y' par les expressions (3).

o

L'équation (4) devient alors simplement

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

ρ

Ces points correspondent donc à ceux de la courbe P.

ω

Ainsi les points de P sont les points transformés des points d'inflexion des courbes C' : Ce sont donc les points de rebroussement des courbes C.

La courbe P est donc le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

Application. — Soit l'équation

(1) $y' - 3x = \sqrt{y - x^2}$ ou $f(x, y, y') \equiv (y' - 3x)^2 + x^2 - y = 0.$

ρ

On reconnaît immédiatement que cette équation n'admet pas de solution singulière.

α

On intègre aisément l'équation, en posant

$$y = x^2 + t^2 x^2.$$

δ

On trouve la solution

$$(x - \sqrt{y - y^2})^2 (2\sqrt{y - x^2} + x) = \text{const.} \qquad (C)$$

δ_1

La courbe P, lieu des points de rebroussement des courbes C, s'obtient en éliminant y' entre (1) et

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2(y' - 3x) = 0. \qquad (2)$$

Le lieu est donc la parabole

$$x^2 - y = 0.$$

δ_1

La courbe Q, lieu des points d'inflexion des courbes C, s'obtient en éliminant y' entre (1) et

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \qquad -6(y' - 3x) + 2x - y' = 0 \qquad (3')$$

ou

$$7y' = 20x.$$

Le lieu des points d'inflexion a donc pour équation

$$\frac{x^2}{49} + x^2 - y = 0, \qquad 49y = 50x^2.$$

VI. — SOLUTIONS SINGULIÈRES DANS LE CAS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Prenons d'abord un système de deux équations différentielles. Nous l'avons supposé mis sous la forme canonique

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z)$$

σ_2, R

et nous avons établi, d'après le théorème de Cauchy, l'existence de solutions se réduisant à y_0, z_0 pour une valeur parti-

culière x_0, à la seule condition que les fonctions f et f_1 soient holomorphes aux environs de x_0, y_0, z_0. Ces solutions sont alors holomorphes dans un cercle de centre x_0, de rayon suffisamment petit.

On a donc des systèmes de solutions dépendant de deux constantes arbitraires. Comme dans le cas d'une variable, on peut se demander si cette restriction n'écarte pas *a priori* des solutions du système initial, c'est-à-dire s'il n'existe pas des solutions telles que, pour aucun de leurs points, les fonctions f et f_1 que l'on obtiendrait en mettant le système sous forme canonique, soient simultanément holomorphes.

Sous une autre forme, donnons-nous des familles de fonctions y, z d'une variable x, dépendant de deux constantes arbitraires c_1, c_2 sous la forme

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, z, c_1, c_2) = 0$$

nous savons que des solutions quelconques satisfont aussi aux équations dérivées

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z' = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} z' = 0.$$

En éliminant c_1, c_2, nous obtenons deux équations différentielles de la forme

$$\text{(III)} \qquad f(x, y, z, y', z') = 0, \qquad f_1(x, y, z, y', z') = 0$$

auxquelles satisfont toutes les couples de fonctions de la famille (I).

Si l'on donne le système d'équations (III) nous sommes ainsi assurés que toutes les couples de fonctions (I) donnent, quelles que soient les constantes c_1, c_2, des solutions du système (III).

Mais on peut se demander si l'on obtiendra de cette manière toutes les solutions du système (III), et rechercher toutes les solutions possibles de ce système.

Recherche des Solutions. — Supposons que l'on ait obtenu le système de fonctions (I) dépendant de deux constantes arbitraires et que nous appellerons avec Lagrange la solution « générale » du système (III).

Nous supposerons que cette solution peut s'identifier avec la

solution donnée par le théorème d'existence, $^{\beta}$ c'est-à-dire qu'il existe des points de la solution x_0, y_0, z_0 pour lesquels on pourra résoudre par rapport à c_1, c_2, le système d'équations

$$\varphi(x_0, y_0, z_0, c_1, c_2) = 0, \qquad \varphi_1(x_0, y_0, z_0, c_1, c_2) = 0.$$

Il faut pour cela que

$$D^{c_1, c_2}_{\varphi_1, \varphi_2} \neq 0.$$

Soit alors un système de solutions *quelconques* y, z.

$^{\alpha}$ A la condition de considérer c_1, c_2, non plus comme des constantes, mais comme des fonctions convenablement choisies de x, $^{\psi}$ nous pouvons dire que ces fonctions y, z satisfont à

$$\varphi(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, z, c_1, c_2) = 0.$$

Pour les fonctions y, z arbitrairement imposées, ce sont ces équations, si l'on veut, qui détermineront les fonctions c_1, c_2.

$^{\alpha}$ En dérivant les équations, on obtiendra identiquement

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} z' + \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} c_1' + \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_2} c_2' = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} y' + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial c_2} c_2' = 0. \end{cases}$$

Soit alors x_0 une valeur quelconque de x, et, pour le système de solutions considérées, y_0, z_0, y'_0, z'_0, les valeurs correspondantes de y, z, y', z'. $^{\sigma_2, \rho}$ Ces valeurs doivent satisfaire aux équations

$$f(x_0, y_0, z_0, y_0', z_0') = 0, \qquad f_1(x_0, y_0, z_0, y_0', z_0') = 0.$$

Dire qu'elles satisfont à ces équations, étant donnée la façon dont on les a obtenues, (les équations (III) étant le résultat de l'élimination de c_1, c_2 entre les équations (I) et (II)), $^{\sigma}$ c'est dire qu'il existe des valeurs c_{10}, c_{20}, satisfaisant à la fois aux quatre équations

$$(\mathrm{I}_0) \quad \varphi(x_0, y_0, z_0, c_{10}, c_{20}) = 0, \qquad \varphi_1(x_0, y_0, z_0, c_{10}, c_{20}) = 0.$$

$$(\mathrm{II}_0) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 y_0' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 z_0' = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_0 y_0' + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_0 z_0' = 0.$$

D'autre part, si pour la solution y, z choisie, les fonctions $c_1(x)$,

$c_2(x)$ sont définies par des équations (II), les équations (IV) sont identiquement satisfaites.

Pour la valeur initiale x_0, y et z prenant les valeurs y_0, z_0, l'un des systèmes de valeurs des fonctions $c_1(x)$, $c_2(x)$ satisfaisant à (I), est précisément c_{10}, c_{20} (d'après (I_0)). Pour ce système particulier, les équations (IV) se réduisent, en tenant compte de (II_0), aux équations

$$(V) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c_1}\right)_0 c'_{10} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c_2}\right)_0 c'_{20} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial c_1}\right)_0 c'_{10} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial c_2}\right)_0 c'_{20} = 0.$$

Le point x_0 ayant été choisi quelconque sur la solution, on en conclut que *ces équations* (V) *doivent être identiquement satisfaites.*

Ainsi pour que les fonctions y et z définies par (I) puissent être des solutions de système différentiel (III), il est nécessaire que les fonctions c_1 c_2 (et y, z) satisfassent aussi aux conditions

$$(V) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} c_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial c_2} c_2' = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_1} c_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_2} \cdot c_2' = 0.$$

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes. Car si les équations (V) sont satisfaites, les équations (IV), qui le sont identiquement, se réduisent aux équations (II) et en éliminant c_1, c_2 (qu'elles soient des constantes ou des fonctions de x) entre les équations (I) et (II), on retrouvera bien le système (III).

Ainsi, étant donnée la solution générale

$$\varphi(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, z, c_1, c_2) = 0,$$

pour obtenir toutes les solutions des systèmes d'équations (III),

il faut et il suffit qu'entre les fonctions y, z, c_1, c_2 on ait aussi les conditions (V).

Or ces équations sont linéaires et homogènes en c'_1, c_2'. Ou bien, l'on aura

$$c_1' = 0, \qquad c_2' = 0,$$

c'est-à-dire

$$c_1 = \text{const.}, \qquad c_2 = \text{const.}$$

On retrouve la solution générale d'où on est parti.

ð1 β
Si c'_1, c'_2 ne sont pas tous deux nuls, il faut nécessairement que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial c_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_2} \end{vmatrix}$$

o
soit nul. Alors les équations (V) se réduisent à une, par exemple

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_1} c_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial c_2} c_2' = 0. \tag{5}$$

On a alors les équations

$$\varphi = 0, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \Delta = 0 \qquad \text{et (5)}.$$

ρ
Les trois premières ne contiennent ni c'_1, ni c'_2.

α
Elles permettent d'exprimer z, c_1, c_2 en fonction de x,y.

$$z = \lambda(x, y), \qquad c_1 = \mu(x, y), \qquad c_2 = \nu(x, y).$$

D'où

$$c_1' = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} y' \qquad c_2' = \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial x} y'.$$

ð1
En substituant alors dans l'équation (5), on aura une relation de la forme

$$\theta(x, y, y') = 0,$$

qui pourra déterminer une solution singulière $y(x)$; jointe à la relation $z = \lambda(x, y)$, elle donnera le système « singulier » y, z.

Enfin, il pourrait arriver que dans les équations (V), tous les coefficients $\frac{\partial \varphi}{\partial c_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial c_2}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial c_1}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial c_2}$, soient nuls. Mais ρ on aurait alors un système de six équations pour déterminer seulement quatre fonctions y, z, c_1, c_2.

ψ
Ce système n'aurait en général pas de solution.

CHAPITRE VII

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES MÉTHODES D'INTÉGRATION

SOMMAIRE.

Réduction à une équation aux dérivées partielles : Cas de simplification.
Réduction à une équation unique : Cas simples. — Equations homogènes. — Equations du second ordre.
Système d'équations linéaires : Solutions indépendantes. — Solution générale. — Système adjoint. — Equations avec seconds membres.
Equation linéaire d'ordre supérieur : Solutions indépendantes. — Solution générale. — Equation avec second membre. — Indépendance linéaire de n fonctions. — Equation adjointe.
Equation linéaire à coefficients constants : Equation caractéristique. Notation symbolique. — Recherche de solutions. — Indépendance des solutions. — Cas des racines imaginaires. — Equation avec second membre. — Equation d'Euler.
Systèmes d'équations linéaires à coefficients constants : Méthode symbolique. Simplification du déterminant. — Méthode de d'Alembert. — Applications.
Points critiques des équations linéaires : Nature. — Rotation autour d'un point critique. — Simplification du tableau des transformations. — Equation en S. — Racines multiples. — Construction des intégrales. — Théorème de Fuchs. — Cas de l'intégrale rationnelle. — Equation de Gauss. — *Systèmes incomplets.* — Intégration générale, au moyen de fonctions arbitraires sans signe de quadrature, de systèmes linéaires quelconques à coefficients quelconques. — Dans le cas d'un système complet, réduction à une seule équation nécessaire et suffisante. — Intégration générale, sans signe de quadrature, de certains systèmes absolument quelconques. — Applications : Courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Equation $dz^2 = dx\,dy$.

I. — RÉDUCTION A UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Considérons un système d'équations différentielles simultanées quelconques.

Nous avons montré qu'on peut toujours (en augmentant le nombre de fonctions inconnues) le ramener à un système d'équations du premier ordre.

Soient donc n équations du premier ordre définissant n fonctions $x_1, x_2, \dots x_n$ de la variable x.

Nous avons montré qu'on pouvait le mettre sous la forme « canonique ».

Soit le système

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} = f_1(x, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dx} = f_2(x, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dx} = f(x, x_1, x_2, \dots x_n) \end{cases}$$

On peut l'écrire sous la forme plus symétrique

$$(1')\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

$X, X_1, X_2, \dots X_n$ étant des fonctions données de $x, x_1, x_2, \dots x_n$.

Cette forme est même un peu plus générale, puisqu'elle permet de considérer $x, x_2, \dots x_n$, par exemple, comme fonctions de x_1, en considérant x_1 comme la variable indépendante.

La fonction x_i admettrait bien une dérivée par rapport à x_1, qui serait donnée par

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{dx_i}{dx} \times \frac{dx}{dx_1} = \frac{X_i}{X} \times \frac{X}{X_1} = \frac{X_i}{X_1}.$$

Réduction à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. — Considérons simultanément l'équation aux dérivées partielles

$$(2)\qquad X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + X_n\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0$$

définissant une fonction $\varphi(x, x_1, x_2, \dots x_n)$ de $(n+1)$ variables considérées comme indépendantes.

C'est une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous allons montrer que la résolution du système (I') entraîne la connaissance de la solution la plus générale de l'équation (2) et que, inversement, la résolution de cette dernière permet d'avoir la solution la plus générale du système (I').

En effet, si nous avons la solution générale du système (I'), elle est représentée d'après le théorème de Cauchy, par un système de n équations entre x et les x_i dépendant de n constantes arbitraires sous la forme

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} F_1(x, x_1, \cdots x_n, c_1, c_2, \cdots c_n) = 0 \\ F_n(x, x_1, \cdots x_n, c_1, c_2, \cdots c_n) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, on peut déterminer les constantes de manière que, pour $x = x_0$, toutes les fonctions x_i prennent des valeurs arbitrairement choisies x_{i0}. Donc ces équations doivent pouvoir être résolues par rapport à $c_1, c_2, \ldots c_n$ et mises sous la forme

$$\text{(II')} \qquad \begin{cases} c_1 = \varphi_1(x, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ c_2 = \varphi_2(x, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n = \varphi_n(x, x_1, x_2, \cdots x_n). \end{cases}$$

Nous allons montrer que *chacune des fonctions φ_i est solution de l'équation aux dérivées partielles* (2).

En effet, en différentiant l'équation $\varphi_i = \text{const.}$, on a

$$0 = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}\, dx_n.$$

si $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient de manière à satisfaire au système (I'). De plus, on peut remplacer $dx, dx_1, \ldots dx_n$ par $X, X_1, \ldots X_n$. Donc, pour tout système de valeurs de x, x_i satisfaisant à (I'), on a

$$\text{(4)} \qquad X \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0.$$

En particulier, cette équation sera vérifiée par le système de valeurs initiales $x_0, x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}$. Mais ces valeurs elles-mêmes peuvent être arbitrairement choisies.

ω

Donc, l'équation (4) est satisfaite pour des valeurs arbitraires de x, x_1,... x_n. La fonction φ_1 est bien solution de l'équation aux dérivées partielles.

Solution générale. — On connaît donc n solutions particulières, de l'équation (2), les fonctions φ_1, φ_2,.. φ_n. Nous allons en chercher la solution générale.

δ_1 β

Soit φ cette solution. Nous devons avoir

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = 0.$$

τ_2

Mais nous savons que

$$X\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} = 0.$$

ρ

On remarque que toutes ces équations sont linéaires et homogènes par rapport à X, X_1,... X_n. Comme ces fonctions ne sont pas toutes identiquement nulles, il faut nécessairement que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

soit nul, ou

$$|D^{x,\,x_1,\,\cdots\,x_n}_{\varphi,\,\varphi_1,\,\cdots\,\varphi_n} = 0.$$

d

Par conséquent, il y a une relation entre φ, φ_1,... φ_n.

Mais il faut supposer qu'il n'y a pas de relation entre φ_1, φ_2,... φ_n,

π

sans quoi le système (II') ne serait pas la solution générale du système d'équations différentielles (I).

ω

La relation doit donc nécessairement contenir φ.

Résolue par rapport à φ, elle donne

$$\varphi = \mathcal{F}(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)$$

φ doit être donc une fonction de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$. D'ailleurs cette fonction peut être arbitrairement choisie.

On aura en effet alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \Sigma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_i} \times \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$

et par suite

$$\Sigma X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \Sigma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_i} \Sigma X_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}.$$

Or le second membre est nul si chacune des fonctions φ est solution de (2).

Réciproque. — Inversement, supposons que l'on ait trouvé n solutions particulières de l'équation (2), mais qui ne soient liées par aucune relation, puisque nous venons de voir que toute fonction de solutions particulières est elle-même une solution.

Pour l'une quelconque de ces solutions φ_i, nous avons identiquement

$$X \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0.$$

Mais si nous supposons que les x, au lieu d'être des variables indépendantes, varient de manière à satisfaire au système (I), nous avons le droit de remplacer $X, X_1, \ldots X_n$ par les différentielles $dx, dx_1, \ldots dx_n$.

Nous avons donc

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_i(x, x_1, x_2, \cdots x_n) = \text{const.}$$

pour tout système de valeurs des x satisfaisant à (I).

C'est une intégrale première du système (I).

δ1

Si l'on connaît n solutions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, on aura donc simultanément

$$\varphi_1(x, x_1, \cdots x_n) = c_1$$
$$\varphi_2(x, x_1, \cdots x_n) = c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(x, x_1, \cdots x_n) = c_n.$$

ρ

C'est un système de n relations entre les variables $x, x_1, \dots x_n$. D'ailleurs, l'un au moins des déterminants fonctionnels des φ par rapport à n des variables est différent de zéro, π sans cela il existerait une relation entre $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$. r On peut donc résoudre les équations ci-dessus par rapport aux n variables correspondantes. On aura les expressions de ces n variables en fonction de la dernière, dépendant de n constantes arbitraires.

C'est donc bien l'intégrale générale du système.

R

On peut donc dire que les deux problèmes :

1° *Intégrer le système* (I) : 2° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles* « *sont deux problèmes équivalents* ».

On peut se demander quel avantage résulte de la transformation du problème.

Nous allons montrer que, même sans avoir la solution générale de l'équation (2), toute solution particulière permettra de simplifier le système (I).

δ1 τ2

En effet, si $\varphi_1(x, x_1, \dots x_n)$ est une solution, nous avons vu que, pour toutes valeurs de $x, x_1, \dots x_n$ satisfaisant au système (I), on a

$$\varphi_1(x, x_1 \cdots \varphi_n) = c.$$

Si plus généralement, on a déterminé k solutions indépendantes, c'est-à-dire telles que l'un au moins des déterminants d'ordre k des dérivées des φ par rapport aux x est différent de zéro, o on aura k relations

$$\varphi_1(x, x_1, \cdots x_n) = c_1, \qquad \varphi_2 = c_2, \qquad \varphi_k = c_k.$$

α

On peut de ces relations déduire k des variables en fonction des autres, Si, par exemple, on a pu tirer

α

$x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots x_n$ en fonction de $x, x_1, \dots x_{n-k}$, en substi-

tuant dans le système, on aura un système de $(n - k)$ équations définissant toutes les variables en fonction de l'une d'elles. Ce système est d'ailleurs

$$\frac{dx}{(X)} = \frac{dx_1}{(X_1)} = \cdots = \frac{dx_{n-k}}{(X_{n-k})}$$

en désignant par (X_i) ce que devient $X_i(x, x_1, \ldots x_n)$ quand on y remplace les dernières variables en fonction des premières. L'intégration de ce système introduira $(n - k)$ constantes arbitraires nouvelles ; on aura donc bien les expressions de toutes les variables en fonction de l'une d'elles et de n constantes arbitraires, c'est-à-dire la solution générale de (I).

Cas de simplification. — Le système (I) peut d'ailleurs présenter certains cas de simplification.

I. Supposons, par exemple, que les fonctions $X, X_1, \ldots X_n$ soient indépendantes d'un certain nombre de variables, de x, x_1 par exemple

On considérera alors le système

$$\frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

qui ne renferme que $x_2, \ldots x_n$. En l'intégrant, on aura des relations de la forme

$$\varphi_1(x_2, x_3, \cdots x_n) = c_1, \qquad \varphi_2 = c_2 \cdots \varphi_{n-2} = c_{n-2}$$

qui permettront de tirer, par exemple, $x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ en fonction de x_n. En substituant dans les deux premiers rapports négligés on aura

$$\frac{dx}{(X)} = \frac{dx_1}{(X_1)} = \frac{dx_n}{(X_n)}$$

(X) désignant ce qui devient $X(x_2, \ldots x_n)$ quand on y remplace $x_2, \ldots x_{n-1}$ en fonction de x_n.

De simples quadratures donneront donc x, x_1 en fonction de x_n et introduiront deux nouvelles constantes.

II. Supposons que le système ne change pas quand on fait les substitutions suivantes

$$x' = x + \lambda, \qquad x'_1 = x_1 + a_1\lambda, \cdots x'_k = x_k + a_k\lambda$$

$a_1, a_2, \ldots a_k$ désignant des constantes, λ une fonction arbitraire.

Prenons les nouvelles variables suivantes :

$$y = x, \qquad y_1 = x_1 - a_1 x, \cdots y_k = x_k - a_k x.$$

δ_1 o, ρ

Si nous substituons dans le système, ce nouveau système ne doit pas être modifié si l'on change x en $x + \lambda$,

$$y_1 \text{ en } y'_1 = x'_1 - a_1 x' = x_1 + a_1\lambda - a_1(x + \lambda) = y_1$$
$$y_k \text{ en } y'_k = x'_k - a_k x' = x_k + a_k\lambda - a_k(x + \lambda) = y_k$$

ρ

c'est-à-dire si l'on change simplement x en $x + \lambda$. On est donc ramené au cas précédent. Le système transformé ne doit contenir x que par sa différentielle. On négligera donc le premier rapport et on aura ensuite une quadrature à effectuer.

Réduction du système à une équation unique. — Le deuxième mode de réduction des systèmes que nous avons indiqué (l'élimination) conduit à une équation différentielle unique. Cette équation est de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^n y}{dx_n}\right) = 0.$$

Puisque cette équation peut être ramenée à un système de n équations du premier ordre que l'on peut mettre sous forme canonique,

σ_2

nous savons déjà que son intégrale générale, d'après le théorème de Cauchy, introduira n constantes arbitraires, permettant d'attribuer des valeurs arbitraires, pour $x = x_0$, à y et à ses $n - 1$ premières dérivées.

Cas simples. — Nous allons d'abord considérer les cas les plus simples.

Supposons d'abord l'équation de la forme

$$f\left(x, \frac{d^n y}{dx_n}\right) = 0.$$

Si nous pouvions la résoudre par rapport à $\frac{d^n y}{dx^n}$ sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x)$$

α

n quadratures successives donneraient $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \cdots \frac{dy}{dx}, y$.

Plus généralement, en considérant la courbe $f(u, v) = 0$, nous pou-

vons supposer que nous avons obtenu une représentation paramétrique de cette courbe

$$u = x = \lambda(t), \qquad v = \frac{d^n y}{dx^n} = \mu(t).$$

α

Posons provisoirement

$$y_{n-1} = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}.$$

Nous aurons

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = \mu(t) \qquad \text{D'où} \qquad dy_{n-1} = \mu(t)\lambda'(t)dt.$$

Une quadrature donnera y_{n-1} en fonction de t soit

$$y_{n-1} = \theta(t) = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}.$$

δ_1

De même, une nouvelle quadrature donnera

$$y_{n-2} = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int \lambda'(t)\theta(t)dt.$$

ω

De proche en proche, n quadratures donneront y.

2° Supposons que y ne figure dans l'équation que par ses dérivées à partir de l'ordre $k < n$

$$f\left(x, \frac{d^k y}{dx^k} \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

α

En posant $u = \frac{d^k y}{dx^k}$, l'équation devient

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx} \cdots \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}}\right) = 0.$$

ρ

C'est une équation d'ordre $(n - k)$ en u. Si on a pu l'intégrer, k quadratures consécutives donneront ensuite y.

3° Supposons que x ne figure pas dans l'équation.

Nous ramènerons ce cas au premier, α, χ en prenant y comme variable indépendante et considérant x comme fonction de y ; δ_1

x admettra des dérivées par rapport à y que nous désignerons par x', x'',... x^n. Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x''}{x'^2} \times \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{x'^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x'}\left(-\frac{x''}{x'^3}\right)' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}$$

et d'une façon générale, $\frac{d^ny}{dx^n}$ s'exprimera au moyen des dérivées de x jusqu'à l'ordre n.

L'équation transformée est donc d'ordre n. Elle est de la forme

$$f(y, x', x'', \cdots x^n) = 0.$$

Elle sera d'ailleurs certainement d'ordre n, puisque si elle était d'ordre $(n - k)$, en faisant la transformation inverse, on aurait une équation en y qui ne serait que de l'ordre $(n - k)$.

Dans la nouvelle équation, ne renfermant pas x, on pourra prendre x' comme nouvelle fonction. On aura donc à intégrer une équation d'ordre $(n - 1)$ en x'. Une quadrature donnera ensuite x en fonction de y.

Application. — Soit l'équation

$$y'y''' + ay''^2 + by'^2y'' = 0$$

a, b désignant des constantes.

Posons $y' = p$; l'équation devient

$$p\frac{d^2p}{dx^2} + a\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + bp^2\frac{dp}{dx} = 0.$$

Cette nouvelle équation ne contient pas x explicitement.

Nous prenons donc p comme variable indépendante et x comme fonction

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x'}, \qquad \frac{d^2p}{dx^2} = -\frac{x''}{x'^3}$$

on obtient

$$-px'' + ax' + bp^2x'^2 = 0.$$

On voit qu'on peut poser $x' = u$

$$-pu' + au + bp^2u^2 = 0.$$

On reconnaît une équation de Bernouilli.

Si a est différent de -2, on trouve facilement (c désignant une constante arbitraire)

$$\frac{1}{u} = cp^{a} - \frac{b}{a+2}p^2.$$

On a ensuite

$$dx = udp.$$

Une nouvelle quadrature donnera donc x en fonction de p. On aura enfin $dy = pdx = pudp$: une quadrature donnera y en fonction de p.

Si $a = 2$, , on trouvera de même

$$\frac{1}{u} = -bp^2\mathrm{L}p + kp^2.$$

Equation homogène. — Supposons le premier membre de l'équation homogène par rapport à y et à ses dérivées successives. Elle ne change donc pas quand on remplace y, y', y'',... par λy, $\lambda y'$, $\lambda y''$... Faisons le changement de fonction

$$y = e^z.$$

On en déduit

$$y' = e^z z', \qquad y'' = e^z(z'' + z'^2) \cdots$$

D'une façon générale, dans la dérivée d'ordre k, on pourra mettre e^z en facteur, et il restera un polynôme en z', z'',... z^k.

Si nous substituons dans l'équation, puisqu'elle est homogène, nous pourrons mettre en facteur une certaine puissance de e^z et il restera une équation de la forme

$$\mathrm{F}(x, z', z'' \cdots z^n) = 0.$$

qui sera d'ailleurs certainement d'ordre n. En prenant z' comme nouvelle fonction, nous aurons une équation d'ordre $(n-1)$ en z'.

Equation homogène en x et y. — Enfin supposons l'équation

homogène en x et y. Elle ne change pas si l'on change x et y en λx, λy, λ étant une constante.

Il faudra naturellement faire les mêmes substitutions dans les dérivées successives qui deviendront

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\lambda dy}{\lambda dx} = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{\lambda d^2y}{\lambda^2 dx^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2y}{dx^2} \text{ etc...}$$

Posons alors

$$y = xz.$$

Nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \text{ etc...}$$

La dérivée d'ordre k, de y se calculera évidemment au moyen des dérivées de z jusqu'à l'ordre k.

L'équation transformée en z, d'ordre n certainement, ne change pas si on change x en λx et z en $\frac{\lambda y}{\lambda x} = z$.

z ne change donc pas : La nouvelle équation est homogène par rapport à la fonction $x(z)$ et à ses dérivées.

On est ramené au cas précédent.

Equations du second ordre. — Les équations du second ordre se rencontrent dans de nombreuses applications. On obtiendra une équation du second ordre, en particulier quand on définira une courbe plane par une propriété relative à ses tangentes, normales, ses rayons de courbure.

En mécanique, c'est à une équation du second ordre que l'on arrive quand on veut étudier le mouvement d'un mobile soumis à une force ne dépendant que de la position ou de la vitesse du mobile.

Elle est de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

On peut la ramener à de simples quadratures toutes les fois que f ne dépend que de deux des variables indiquées (dont naturellement $\frac{d^2y}{dx^2}$).

1° $f\left(x, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$. Nous pourrions supposer qu'elle est résoluble

par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$. Plus généralement, si l'on a fait une représentation paramétrique de la courbe

$$f(X, Y) = 0.$$

on est ramené au cas que nous avons déjà traité.

2° $f\left(\frac{dx}{dy}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$ En prenant comme fonction $\frac{dy}{dx} = y_1$ on aura

$$f\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0.$$

Si l'on a une représentation paramétrique

$$y_1 = \lambda(t), \qquad \frac{dy_1}{dx} = \mu(t)$$

On en déduira

$$dx = \frac{\lambda'(t)}{\mu(t)}\,dt, \qquad x = \int \frac{\lambda'(t)}{\mu(t)}\,dt = \theta(t)$$

On aura donc, par une quadrature, x en fonction de t. On aura ensuite

$$dy = \lambda(t)\theta'(t)dt.$$

Une nouvelle quadrature donnera y en fonction de t.

Si la courbe est unicursale, on est ramené à l'intégration de fractions rationnelles.

2° $f\left(y, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$. Posons encore $\frac{dy}{dx} = y_1$.

D'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1 dy_1}{dy}$$

L'équation deviendra

$$f\left(y, y_1 \frac{dy_1}{dy}\right) = 0.$$

C'est une équation du premier odre en y_1, par rapport à y. Si on peut poser

$$y = \lambda(t), \qquad y_1 \frac{dy_1}{dy} = \mu(t)$$

on en déduira

$$y_1 dy_1 = \mu(t)\lambda'(t)dt$$

en intégrant cette dernière, on aura

$$\frac{y_1^2}{2} = \int \mu(t\,\lambda'(t)dt$$

D'où $y_1 = \theta(t)$.

On aura ensuite

$$dx = \frac{dy}{y_1} = \frac{\lambda'(t)}{\theta(t)}\,dt.$$

Une quadrature donnera x.

Supposons que l'équation dépende de trois des variables.

1° Soit d'abord l'équation $f(x, y', y'') = 0$. On posera

$$\frac{dy}{dx} = y_1$$

2° $f(y, y', y'') = 0$. Posons encore $y' = y_1 = \frac{dy}{dx}$.

D'où

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = y_1 \frac{dy_1}{dy}$$

on est ramené à l'équation du premier ordre.

$$f\left(y, y_1, \frac{y_1 dy_1}{dy}\right) = 0.$$

Application. — *Déterminer les courbes dont le rayon de courbure* R *est, en chaque point, proportionnel à une certaine puissance de la portion de normale comprise entre le point et ox.*

$$R = k\overline{MN}^n$$

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe.

Nous aurons

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \qquad MN = y\sqrt{1 + y'^2}$$

R sera positif, si la courbe tourne sa concavité vers les y positifs. MN sera positif si le point est au-dessus de ox.

Nous avons donc l'équation

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ky''(1 + y'^2)^{\frac{n}{2}}$$

c'est-à-dire

$$ky^n y''(1 + y'^2)^{\frac{n-3}{2}} = 1 \tag{1}$$

C'est une équation du second ordre qui ne renferme pas x explicitement.

Posons

$$y' = y_1, \qquad y'' = y_1 \frac{dy_1}{dy}$$

l'équation devient

$$ky^n(1 + y_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \frac{y_1 dy_1}{dy} = 1 \tag{2}$$

φ, R_1 C'est une équation à variables séparées.

$$k(1 + y_1^2)^{\frac{n-3}{2}} y_1 dy_1 = \frac{dy}{y^n}. \tag{2'}$$

ρ Elle ne renferme que y_1^2. En intégrant, on obtient, si $n \neq 1$

$$k(1 + y_1^2)^{\frac{n-1}{2}} = -\frac{1}{y^{n-1}} + \text{const.} \tag{3}$$

Telle est la relation entre y et y_1.

δ_1 Nous aurons ensuite

$$dy = y_1 dx = ky^n(1 + y_1^2)^{\frac{n-3}{2}} y_1 dy_1.$$

D'où

$$dx = ky^n(1 + y_1^2)^{\frac{n-3}{2}} dy_1. \tag{4}$$

En remplaçant y en fonction de y_1^2 déduite de (2), on aura x en fonction de y_1 par une quadrature.

On pourrait également exprimer x en fonction de y.

Cas particuliers. — 1° $n = 0$. δ_1 La relation (3) devient

$$\frac{k}{\sqrt{1 + y_1^2}} = -y + \text{const.}$$

$$dx = \frac{k}{(1 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1$$

α Nous poserons

$$y_1 = \operatorname{tg} \varphi.$$

D'où

$$dx = k \cos \varphi d\varphi, \qquad x - x_0 = k \sin \varphi.$$

D'ailleurs

$$y_0 - y = k \cos \varphi.$$

Ce sont les équations paramétriques d'un cercle quelconque de rayon k, ce qui était évident.

δ_1

2° $n = -1$. L'équation (3) devient

$$\frac{k}{1 + y_1^2} = -y^2 + c, \qquad y_1^2 = \frac{c - k - y^2}{y^2 - c}.$$

D'où

$$y_1 = \sqrt{\frac{c - k - y^2}{y^2 - c}} = \frac{dy}{dx}$$

φ_2

x est donné par une intégrale elliptique à moins que $c = 0$. Dans ce cas,

$$x = \int \frac{y dy}{\sqrt{-y^2 - k}}, \qquad x - x_0 = -\sqrt{-y^2 - k}$$

ou

$$(x - x_0)^2 + y^2 + k = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle ayant son centre sur ox.

δ

3° $n = 3$. On trouve des coniques ayant un axe sur ox.

δ

4° $n = 2$. L'intégration peut encore s'effectuer, mais la formule est assez compliquée.

ρ

5° $n = 1$. La formule d'intégration (3) ne s'applique plus.

δ_1

L'équation (2) est ici

$$\frac{k y_1 dy_1}{1 + y_1^2} = \frac{dy}{y}, \qquad y = a(1 + y_1^2)^{\frac{k}{2}}$$

ou

$$y_1^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1.$$

D'où

$$dx = \frac{dy}{y_1} = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}} = \left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

ρ β
C'est une différentielle binôme. Pour qu'elle soit exactement intégrable, il faut et il suffit que k soit entier.

Par exemple, si $k = 1$

$$x = \int \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}}\, dy, \qquad x - x_0 = a\mathrm{L}\left(y + \sqrt{y^2 - a^2}\right).$$

Si $k = -1$, on trouve encore des cercles ayant leur centre sur ox.

Si $k = 2$, on trouve des paraboles ayant ox pour directrice.

6° Enfin si $n = -2$, on obtient des cycloïdes.

II. — SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Propriété. — On dit qu'une équation différentielle est *linéaire* quand elle est linéaire par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, les coefficients pouvant être des fonctions de la variable indépendante.

Si on donne un système d'équations linéaires d'ordres quelconques on peut, comme pour tout système, le ramener à un système d'équations du premier ordre. Le système final sera également linéaire.

ω
L'étude d'un système d'équations linéaires d'ordres quelconques est donc ramenée à celles d'équations linéaires du premier ordre. A son tour, la résolution de ce système pourra être ramenée à celle d'une seule équation linéaire d'un certain ordre.

Ces équations jouissent d'une propriété très générale.

Effectuons un changement de variable indépendante quelconque

$$y = \varphi(t) \tag{1}$$

et sur la fonction, un changement linéaire

$$y = u\psi(t) + \psi(t). \tag{2}$$

ψ
La nouvelle équation définissant la fonction $u(t)$ sera une équation différentielle linéaire d'ordre n.

σ_1,
Il faut calculer les dérivées successives de y par rapport à x, au moyen des dérivées successives de u par rapport à t.

En dérivant (2), on aura

$$\frac{dy}{dx} = \left| \frac{du}{dt}\theta + u\theta' + \psi' \right| \frac{dt}{dx}.$$

Or $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$.

On voit que $\frac{dy}{dx}$ s'exprime linéairement en fonction de u et de $\frac{du}{dt}$.

Il en résultera que $\frac{d^2y}{dt^2}$ s'exprimera linéairement en fonction de u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$. D'une manière générale, $\frac{d^ny}{dx^n}$ s'exprimera linéairement en fonction de u et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n. Si donc, on substitue dans l'équation les dérivées successives de y, on aura bien une équation différentielle d'ordre n au plus en u. Elle sera effectivement d'ordre n, car la transformation inverse donnerait en y une équation d'ordre inférieur à n.

L'équation en u sera linéaire.

Etude des systèmes linéaires du 1er ordre. — Nous supposerons d'abord le système « *complet* », c'est-à-dire comportant autant d'équations que d'inconnues, ces équations devant permettre la détermination des inconnues à des constantes près. Nous examinerons ensuite le cas des systèmes incomplets dans lesquels, le nombre d'équations étant moindre que le nombre d'inconnues, un certain nombre de fonctions inconnues pourraient être arbitrairement choisies.

Pour étudier les systèmes d'équations différentielles linéaires, nous pouvons, comme nous l'avons dit ci-dessus, procéder de deux manières différentes :

1° Le ramener à un système d'équations linéaires du premier ordre ;

2° Le ramener à une seule équation différentielle linéaire.

Etudions d'abord le système d'équations. Nous pouvons le supposer ramené à la forme canonique.

Soient y, z, t,... u, v, w les fonctions inconnues.

Nous mettons le système sous la forme

$$(I)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + \cdots + L_1 w = X_1 \\ \dfrac{dz}{dt} + A_2 y + B_2 z + \cdots + L_2 w = X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dw}{dx} + A_n y + B_n z + \cdots + L_n w = X_n \end{cases}$$

les coefficients A_i, B_i, L_i et les « seconds membres » X_1, X_2,... X_n étant des fonctions de la seule variable x.

Supposons d'abord que ces seconds membres soient tous nuls. Il est évident que si

$$y_1, z_1, \cdots w_1, \qquad y_2, z_2, \cdots w_2$$

sont deux systèmes de solutions particulières, on aura une solution plus générale en posant

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad z = c_1 z_1 + c_2 z_2 \cdots w = c_1 w_1 + c_2 w_2$$

quelles que soient les constantes c_1, c_2.

Nous sommes amenés, à rechercher si la connaissance de solutions particulières ne permet pas de simplifier la recherche de la solution générale.

Systèmes indépendants. — Considérons k solutions.

$$(II)\qquad \begin{cases} y_1, z_1, \cdots w_1 \\ y_2, z_2, \cdots w_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_k, z_k, \cdots w_k \end{cases}$$

On dit que ces k solutions forment un système « indépendant », si l'un au moins des déterminants d'ordre k déduits du tableau ci-dessus est différent de zéro.

Il est donc déjà nécessaire que $k \leqslant n$.

De cette définition, et de la propriété des déterminants, résulte qu'il est impossible de déterminer des quantités c_1, c_2,... c_k

non toutes nulles, telles que l'on ait entre les fonctions, une même relation linéaire et homogène

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k = 0 \\ c_1z_1 + c_2z_2 + \cdots + c_kz_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_kw_k = 0. \end{cases}$$

Cette impossibilité pourrait être prise comme définition des systèmes indépendants.

Cette deuxième définition est équivalente à la première.

δ_1

Si en effet, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1, z_1, \cdots u_1 \\ y_2, z_2, \cdots u_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_k, z_k, \cdots u_k \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, il n'est pas possible de déterminer des quantités c_1, c_2,... c_k non toutes nulles, telles que l'on ait

$$\begin{gathered} c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k = 0 \end{gathered}$$

et par suite *a fortiori*, toutes les équations du système (III).

z_1 δ_1

Inversement, si tous les déterminants d'ordre k déduits du tableau (II) sont nuls, il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments de n colonnes

$$y_1, y_2, \cdots y_k, \qquad z_1, z_2, \cdots z_k, \cdots \qquad w_1, w_2, \cdots w_k.$$

THÉORÈME. — *Si les solutions ne sont pas indépendantes, s'il existe une même relation linéaire et homogène entre les k solutions, telle que* (III), *les c sont nécessairement des constantes* (*à un facteur commun près*).

Nous pouvons en effet d'abord supposer que les $k - 1$ premières solutions sont indépendantes (sans quoi nous raisonnerions sur leur système) et par conséquent, qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre

$$y_1, y_2, \cdots y_{k-1}, \qquad z_1, z_2, \cdots z_{k-1}, \cdots \qquad w_1, w_2, \cdots w_{k-1}.$$

Les relations (III) doivent donc renfermer y_k, z_k,... w_k.

α

On peut supposer $c_k = -1$ et prendre les relations (III) sous la forme

$$\text{(III')} \quad \begin{cases} y_k = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{k-1} y_{k-1} \\ z_k = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_{k-1} z_{k-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_k = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_{k-1} w_{k-1}. \end{cases}$$

α

Écrivons alors que y_k, z_k,... w_k est solution du système donné (I).

∂_1

Dans la première équation, par exemple, si nous ordonnons par rapport à c_i, c'_j le coefficient de c_i est

$$\frac{dy_i}{dt} + A_1 y_i + B_1 z_i + \cdots + L_1 w_i.$$

ρ

Il est nul puisque y_i, z_i..., w_i est une solution.

ω, r

Il ne restera donc que les termes provenant de la dérivation des facteurs c. On aura donc

$$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \cdots + c'_{k-1} y_{k-1} = 0.$$

de même

$$c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + \cdots + c'_{k-1} z_{k-1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c'_1 w_1 + c'_2 w_2 + \cdots + c'_{k-2} w_{k-1} = 0.$$

Mais σ_2, ρ comme par hypothèse les $(k-1)$ solutions sont indépendantes, on a nécessairement

$$c'_1 = c'_2 = c'_3 = \cdots = c'_{k-1} = 0.$$

Les c sont donc bien des constantes (à un facteur commun près, qui a été supprimé quand on a supposé $c_k = -1$).

ω

Les relations de dépendance telles que (III) ne peuvent donc avoir lieu qu'avec des coefficients constants.

Simplification si l'on connaît k solutions. — Nous pouvons rechercher maintenant quelle simplification peut introduire la connaissance de k solutions indépendantes.

THÉORÈME. — *Si l'on connaît k solutions indépendantes d'un système de n équations ($k \leqslant n$), l'intégration de ce système peut être*

ramenée à celle d'un système analogue n'ayant plus que $(n - k)$ *équations, et à* k *quadratures.*

Soient par exemple, cinq fonctions y, z, t, u, v et deux solutions indépendantes.

$$\begin{matrix} y_1, & z_1, & t_1, & u_1, & v_1 \\ y_2, & z_2, & t_2, & u_2, & v_2. \end{matrix}$$

Supposons, par exemple, le déterminant $\begin{vmatrix} y_1, & z_1 \\ y_2, & z_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Nous ferons le changement de fonctions

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= k_1 y_1 + k_2 y_2 \\ z &= k_1 z_1 + k_2 z_2 \\ t &= k_1 t_1 + k_2 t_2 + \mathrm{T} \\ u &= k_1 u_1 + k_2 u_2 + \mathrm{U} \\ v &= k_1 v_1 + k_2 v_2 + \mathrm{V}. \end{aligned} \right.$$

k_1, k_2, T, U, V désignant les nouvelles fonctions. Quelles que soient, en effet, y, z, t, u, v, les deux premières équations définissent certainement k_1, k_2 puisque le déterminant $(y_1 z_2 - z_1 y_2)$ est différent de zéro.

Les trois dernières définissent alors sans ambiguïté T, U, V.

Faisons la substitution dans le système (I) sans seconds membres.

Nous obtenons

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & k_1' y_1 + k_2' y_2 + \mathrm{C_1 T} + \mathrm{D_1 U} + \mathrm{E_1 V} = 0 \\ & k_1' z_1 + k_2' z_2 + \mathrm{C_2 T} + \mathrm{D_2 U} + \mathrm{E_2 V} = 0, \\ & \frac{d\mathrm{T}}{dx} + k_1' t_1 + k_2' t_2 + \mathrm{C_3 T} + \mathrm{D_3 U} + \mathrm{E_3 V} = 0 \\ & \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ & \frac{d\mathrm{V}}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les nouvelles équations qui déterminent les nouvelles fonctions k_1, k_2, T, U, V. Or, on remarque que ces équations ne renferment que k'_1, k'_2. Des deux premières, on peut certainement tirer k'_1, k'_2 en fonction linéaire de T, U, V.

En substituant ces valeurs dans les trois dernières équations, on voit qu'on mettra le système (V) sous la forme

$$(V')\quad \begin{cases} \dfrac{dk_1}{dx} = \lambda_1 T + \mu_1 U + \nu_1 V \\ \dfrac{dk_2}{dx} = \lambda_2 T + \mu_2 U + \nu_2 V \\ \dfrac{dT}{dx} = \lambda_3 T + \mu_3 U + \nu_3 V \\ \dfrac{dU}{dx} = \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dV}{dx} = \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Or, les trois dernières constituent un système linéaire à trois fonctions, mis sous forme canonique. Elles déterminent T, U, V. Celles-ci étant déterminées, les deux premières donneront alors k_1, k_2 par deux simples quadratures.

Si l'on a déterminé une seule solution T, U, V, (non tous trois nuls) de ce système, puis les valeurs correspondantes de k_1, k_2, on en déduira par les formules (IV) un troisième système de solutions, y_3, z_3, t_3, u_3, v_3.

Voyons si ce nouveau système forme avec les deux premiers un système de solutions indépendantes. Il faut et il suffit qu'un des déterminants à trois lignes et trois colonnes déduit du tableau de ces solutions soit différent de zéro. Or, si T, par exemple, est différent de zéro, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1, z_1, t_1 \\ y_2, z_2, t_2 \\ y_3, z_3, t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ k_1 y_1 + k_2 y_2 & k_1 z_1 + k_2 z_2 & k_1 t_1 + k_2 t_2 + T \end{vmatrix} = T(y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

est différent de zéro.

Le nouveau système de solutions est donc bien indépendant.

On peut agir sur ce système comme on l'a fait sur le système précédent. On pourra donc arriver de proche en proche à obtenir un système de n solutions indépendantes.

Solution générale. — THÉORÈME. — *Si l'on connaît n solutions indépendantes du système* (I)

$$(I)\qquad y_1, z_1, \cdots w_1,\ y_2, z_2, \cdots w_2, \cdots y_n, z_n, \cdots w_n,$$

la solution générale est

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n, \cdots w = c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n$$

les c désignant des constantes arbitraires.

Soient les n solutions indépendantes (I). Elles sont donc telles que le déterminant formé par ces solutions est différent de zéro.

Faisons le changement de fonctions.

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + \cdots c_ny_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w &= c_1w_1 + \cdots c_nw_n \end{aligned}$$

les c désignant n nouvelles fonctions. On peut, en effet, tirer de ces formules c_1, c_2,... c_n en fonction de y, z,... w puisque le déterminant des c n'est pas nul. En substituant dans les équations (I) telles que

$$\frac{dy}{dx} + A_1y + B_1z + \cdots + L_1w = 0.$$

le coefficient de c_1 par exemple sera :

$$\frac{dy_1}{dx} + A_1y_1 + B_1z_1 + \cdots + L_1w_1.$$

Il sera nul. Cette première équation se réduira donc à

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots c_n'y_n = 0.$$

De même

$$\begin{aligned} c_1'z_1 + c_2'y_2 + \cdots + c_n'z_n &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1'w_1 + c_2'w_2 + \cdots + c_n'w_n &= 0. \end{aligned}$$

C'est un système d'équations linéaires et homogènes en c_1', c_2',... c_n'. Le déterminant des inconnues étant différent de zéro, ce système n'admet qu'une solution

$$c_1' = c_2' = \cdots = c_n' = 0.$$

Par suite c_1, c_2,... c_n sont des constantes qui peuvent être d'ailleurs arbitrairement choisies.

Relation générale entre les systèmes indépendants. — Considérons le système de trois équations (pour simplifier l'écriture)

$$(I)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &+ Ay + Bz + Ct = 0\\ \frac{dz}{dx} &+ A_1y + B_1z + C_1t = 0\\ \frac{dt}{dx} &+ A_2y + B_2z + C_2t = 0. \end{aligned}\right.$$

Si $y_1\ z_1\ t_1,\ y_2,\ z_2,\ t_2,\ y_3,\ z_3,\ t_3$ forment un système de solutions indépendantes, le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & t_1\\ y_2, & z_2, & t_2\\ y_3, & z_3, & t_3 \end{vmatrix}$$

est alors différent de zéro et la solution générale est

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3, \qquad z = c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3,$$
$$t = c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3.$$

Donnons-nous trois systèmes différents de telles constantes

$$c_1,\ c_2,\ c_3, \qquad c'_1,\ c'_2,\ c'_3, \qquad c''_1,\ c''_2,\ c''_3$$

nous en déduirons trois solutions

$$y,\ z,\ t, \qquad y',\ z',\ t', \qquad y'',\ z'',\ t''.$$

Il est naturel de se demander si ce système de solutions est indépendant. Il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} y, & z, & t\\ y', & z', & t'\\ y'', & z'', & t'' \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul. Remplaçons $y, z, t, \ldots t''$ par leurs expressions (II). Il est visible que le déterminant sera le produit de deux déterminants.

$$\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & t_1\\ y_2, & z_2, & t_2\\ y_3, & z_3, & t_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1, & c_2, & c_3\\ c'_1, & c'_2, & c'_3\\ c''_1, & c''_2, & c''_3 \end{vmatrix}$$

Or le premier est différent de zéro. Pour que le système forme un système indépendant, il faut donc et il suffit que

les trois systèmes de constantes forment un déterminant différent de zéro.

Système adjoint. — Étant donné le système (I), on appelle « système adjoint » le système suivant

$$(II)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dY}{dx} + AY + A_1Z + A_2T = 0 \\ -\dfrac{dZ}{dx} + BY + B_1Z + B_2T = 0 \\ -\dfrac{dT}{dx} + CY + C_1Z + C_2T = 0. \end{cases}$$

formé en changeant les signes des éléments différentiels et en remplaçant les coefficients des lignes par les coefficients des colonnes.

Le système adjoint du système (II) est évidemment le système proposé.

Il existe une relation remarquable entre une solution quelconque du système (I) et une solution quelconque du système adjoint (II).

Soient en effet y, z, t, Y, Z, T deux telles solutions.

Multiplions les équations (I) par Y, Z, T, les équations (II) par y, z, t, et retranchons les deuxièmes résultats des premiers. Nous obtiendrons simplement

$$\Sigma Y\frac{dy}{dx} + y\frac{dY}{dx} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma\frac{d}{dx}(yY) = 0$$

et par conséquent en intégrant

$$yY + zZ + tT = \text{const.}$$

On en déduit que, de toute solution y, z, t du système (I), on peut déduire une relation tout intégrée, introduisant une constante arbitraire, entre les fonctions inconnues du système adjoint.

On pourrait tirer, par exemple, T en fonction de Y et Z. En le substituant dans les premières équations, on aurait un système de deux équations à deux inconnues seulement.

Si l'on connaît trois solutions y, z, t, y_1, z_1, t_1, y_2, z_2, t_2, du système donné, formant un système indépendant, on en déduira entre Y, Z, T, les trois relations

$$yY + zZ + tT = c, \qquad y_1Y + z_1Z + t_1T = c_1, \qquad y_2Y + z_2Z + t_2T = c_2.$$

Ces trois relations permettront de tirer Y, Z, T puisque le déterminant des inconnues

$$\begin{vmatrix} y, & z, & t \\ y_1, & z_1, & t_1 \\ y_2, & z_2, & t_2 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Les expressions de Y, Z, T dépendront de trois constantes arbitraires.

Elles fourniront la solution générale du système adjoint.

Donc, si l'on connaît n solutions indépendantes d'un système, on peut en déduire, sans aucune quadrature, la solution générale du système adjoint qui dépendra de n constantes arbitraires.

Equations avec seconds membres. — Considérons maintenant le système d'équations avec « seconds membres ».

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Ay + Bz + Ct = X \\ \dfrac{dz}{dx} + A_1y + B_1z + C_1t = X_1 \\ \dfrac{dx}{dt} + A_2y + B_2z + C_2t = X_2 \end{cases}$$

et considérons simultanément le système (I′) d'équations sans seconds membres.

Soient

$$y_1, z_1, t_1, \qquad y_2, z_2, t_2, \qquad y_3, z_3, t_3$$

trois solutions de ce dernier. Faisons, comme lorsque nous avons voulu déterminer la solution générale d'équations sans seconds membres, le changement de fonctions

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ z &= c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 \\ t &= c_1t_1 + c_2t_2 + c_3t_3 \end{aligned}$$

où c_1, c_2, c_3 désignent trois nouvelles fonctions. On peut, en effet, les substituer à y, z, t puisque le déterminant de leurs coefficients est différent de zéro. Si nous substituons ces expressions

dans le système donné, nous obtiendrons, comme précédemment, aux premiers membres, simplement

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3.$$

La première équation se transformera donc en

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 = X.$$

De même

$$c_1'z_1 + c_2'z_2 + c_3'z_3 = X_1$$
$$c_1't_1 + c_1't_2 + c_3't_3 = X_2.$$

Or, on obtient ainsi un système d'équations linéaires en c_1', c_2', c_3', qui pourra être résolu par rapport à ces inconnues (déterminant $\neq 0$) sous la forme

$$c_1' = \theta_1(x), \qquad c_2' = \theta_2(x), \qquad c_3' = \theta_3(x).$$

De simples quadratures donneront donc c_1, c_2, c_3 et par suite la solution générale du système donné.

Cas de réduction immédiate. — Si l'on connaît une solution particulière y_0, z_0, t_0 du système donné avec seconds membres, en posant

$$y = y_0 + Y, \qquad z = z_0 + Z, \qquad t = t_0 + T$$

il est évident que Y, Z, T devront satisfaire au système d'équations sans seconds membres. Donc :

La solution générale du système avec seconds membres, s'obtient en ajoutant à une solution particulière quelconque, la solution générale du système sans seconds membres.

III. — ÉQUATION LINÉAIRE D'ORDRE SUPÉRIEUR

Prenons maintenant le deuxième mode de transformation des systèmes d'équations : la réduction de ce système à une seule équation d'ordre supérieur. Si le système considéré est linéaire par rapport aux fonctions inconnues et leurs dérivées, l'équa-

tion résultante sera également linéaire par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées.

Equation sans second membre. — Solutions indépendantes. — Prenons d'abord l'équation sans terme indépendant de la fonction (second membre). Elle est de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = 0.$$

De même que pour les systèmes, nous définirons d'abord k solutions indépendantes... Nous dirons que les k solutions

$$y_1, y_2, \cdots y_k$$

sont « indépendantes », si le déterminant d'ordre k

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots y_k \\ y'_1, & y'_2, & \cdots y'_k \\ y_1^{k-1}, & y_2^{k-1}, & \cdots y_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

formé au moyen des y et des dérivées jusqu'à l'ordre $(k - 1)$ est différent de zéro. Ce déterminant s'appelle « déterminant de Wronski ».

Simplification si l'on connaît des solutions indépendantes. —

THÉORÈME. — *Si l'on connaît k solutions indépendantes, on peut ramener l'intégration de l'équation à celle d'une équation linéaire d'ordre $(n - k)$, suivie de k quadratures.*

Posons

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_k y_k$$

en remplaçant la seule fonction inconnue y par k fonctions, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$.

(Il est bien évident que si les λ sont des constantes, y sera solution de l'équation). Nous pouvons assujettir ces fonctions λ à $(k - 1)$ autres relations compatibles arbitrairement choisies,. Nous écrirons pour abréger

$$y = \Sigma \lambda_i y_i.$$

On en déduirait

$$y' = \Sigma \lambda_i y_i' + \Sigma \lambda_i' y_i.$$

Nous pouvons assujettir les λ à vérifier la condition

$$\Sigma \lambda_i' y_i = 0.$$

De même, on aura

$$y'' = \Sigma \lambda_i y_i''$$

si l'on assujettit les λ à la condition

$$\Sigma \lambda_i' y_i' = 0.$$

Nous pourrons continuer ainsi et nous aurons

$$y^{k-1} = \Sigma \lambda_i y_i^{k-1}$$

à la condition que

$$\Sigma \lambda_i' y_i^{k-2} = 0.$$

En résumé, nous assujettissons les λ aux $(k-1)$ relations

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Sigma \lambda_i' y_i = 0 \\ \Sigma \lambda_i' y_i' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Sigma \lambda_i' y_i^{k-2} = 0 \end{cases}$$

et nous aurons simplement

$$\text{(III)} \qquad y' = \Sigma \lambda_i y_i', \qquad y'' = \Sigma \lambda_i y_i'', \cdots y^{k-1} = \Sigma \lambda_i y_i^{k-1}$$

Il nous serait impossible d'ajouter une nouvelle condition

$$\Sigma \lambda_i' y_i^{k-1} = 0.$$

Car cette équation, jointe aux équations (II), fournirait un système de k équations linéaires et homogènes en $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_k'$ dont le déterminant des coefficients serait différent de zéro. Ce système n'admettrait donc comme solution que

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \cdots = \lambda_k' = 0$$

Tous les λ se réduiraient à des constantes, ce que nous ne pouvons supposer.

Nous aurons ensuite

$$y^k = \Sigma \lambda_i y_i^k + \Sigma \lambda_i' y_i^{k-1}$$
$$y^{k+1} = \Sigma \lambda_i y_i^{k+1} + 2\Sigma \lambda_i' y_i^k + \Sigma \lambda_i'' y_i^{k-1}$$

et enfin, en dérivant y^{k-1}, $(n - k + 1)$ fois par la formule de Leibnitz,

$$y^n = \Sigma \lambda_i y_i^n + C^1_{n-k+1} \Sigma \lambda_i' y_i^{n-1} + \cdots + \Sigma \lambda_i^{n-k+1} y_i^{k-1}$$

Si nous substituons y, y', y'', ... y^n dans l'équation donnée, elle serait satisfaite si les λ étaient des constantes.

Il ne doit donc pas exister de termes indépendants des dérivées des λ. D'ailleurs le coefficient de λ_i est

$$y_i^n + A_1 y_i^{n-1} + \cdots + A_n y_i.$$

Il est nul. L'équation ne renferme donc que les dérivées des λ. De plus, elle est linéaire par rapport à ces dérivées jusqu'à l'ordre $(n - k + 1)$. Nous l'écrivons

$$L(\lambda_i', \lambda_i'', \cdots \lambda_i^{n-k+1}) = 0. \tag{4}$$

D'autre part, les équations (II), déterminent les valeurs des rapports des dérivées λ'

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 + \cdots + \lambda_k' y_k = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \cdots \qquad = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1' y_1^{k-2} + \lambda_2' y_2^{k-2} + \cdots + \lambda_k' y_k^{k-2} = 0 \end{cases}$$

On peut résoudre ces équations homogènes et on obtiendra

$$\text{(V)} \qquad \lambda_1' = \mu M_1, \qquad \lambda_2' = \mu M_2, \cdots \lambda_k' = \mu M_k$$

μ désignant un facteur de proportionnalité, M_1, M_2,... M_k désignant les déterminants déduits du tableau

$$\begin{Vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots y_k \\ y_1', & y_2', & \cdots y_k' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{k-2}, & y_2^{k-2}, & \cdots y_k^{k-2} \end{Vmatrix}$$

en supprimant la colonne i pour M_i.

Si nous dérivons ces expressions (V), nous aurons

$$\lambda'' = \mu' M_1 + \mu M_1' \cdots, \text{ etc.}$$

δ_1

Les dérivées jusqu'à l'ordre $(n - k + 1)$ s'exprimeront linéairement au moyen de dérivées de μ jusqu'à l'ordre $(n - k)$.

$\delta_{1,\omega}$

En substituant ces expressions dans l'équation (4) nous aurons donc finalement une équation linéaire en μ, d'ordre $(n - k)$; μ étant déterminé, les équations (V) donneront bien les λ par k quadratures et introduiront k constantes arbitraires.

La résolution de l'équation d'ordre $(n - k)$ introduira bien $(n - k)$ constantes nouvelles, soit au total n constantes.

Considérons une solution (non nulle) de l'équation en μ, et les valeurs correspondantes des λ : on aura une nouvelle solution

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_k y_k.$$

$\alpha_{1,\nu}$

Il faut se demander évidemment, si cette nouvelle solution constitue avec les k précédentes un système de solutions indépendantes.

$\delta_{1,\varphi}$

Pour cela, il faut et il suffit que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} y_1 y_2 & \cdots & y_k y \\ y_1' y_2' & \cdots & y'_k y' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^k y_2^k & \cdots & y_k^k y^k \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Or, d'après la façon dont nous avons déterminé les λ

$$y = \Sigma \lambda_i y_i, \qquad y' = \Sigma \lambda_i y_i', \ \cdots\cdots \ y^{k-1} = \Sigma \lambda_i y_i^{k-1}$$

et

$$y^k = \Sigma \lambda_i y_i^k + \Sigma \lambda_i' y_i^{k-1}.$$

α

Substituons ces expressions dans la dernière colonne du déterminant D, et retranchons des éléments de la dernière colonne, les éléments des premières respectivement multipliées par $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$.

o

Tous les éléments de cette dernière colonne seront nuls, sauf le dernier, qui se réduira à

$$\Sigma \lambda_i' y_i^{k-1}.$$

ω

On a donc en développant D par rapport aux éléments de cette colonne,

$$D = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots y_k \\ y'_1, & y'_2, & \cdots y'_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{k-1}, & y_2^{k-1}, & \cdots y_k^{k-1} \end{vmatrix} \times \Sigma \lambda_i' y_i^{k-1} = \Delta \times \Sigma \lambda_i' y_i^{k-1}.$$

Les deux facteurs sont différents de zéro. Donc D est différent de zéro et les $(k+1)$ solutions sont bien indépendantes.

On peut d'ailleurs avoir l'expression du second facteur

$$\Sigma\lambda_i' y_i^{k-1} = \mu\Sigma M_i y_i^{k-1}.$$

Les facteurs M_i sont, nous l'avons dit, les déterminants du tableau. Donc $\Sigma M_i y_i^{k-1}$ n'est autre chose que le déterminant Δ développé suivant les éléments de la dernière ligne. On a donc

$$\Sigma\lambda_i' y_i^{k-1} = \mu\Delta, \qquad D = \mu\Delta^2.$$

On peut donc se servir de cette nouvelle solution y pour obtenir une nouvelle simplification du système.

On pourra ainsi de proche en proche obtenir n solutions indépendantes, telles que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots y_n \\ y_1', & y_2' & \cdots y_n' \\ y_1^{n-1}, & y_2^{n-1}, & \cdots y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Solution générale. — Nous allons montrer que l'on peut alors obtenir la solution générale de l'équation. Nous allons, en effet, recommencer le même raisonnement que ci-dessus, en posant

$$y = \Sigma\lambda_i y_i.$$

Nous pourrons assujettir les fonctions λ à vérifier les $(n-1)$ relations linéaires et homogènes.

$$(1) \qquad \Sigma\lambda_i' y_i = 0, \qquad \Sigma\lambda_i' y_i' = 0, \qquad \Sigma\lambda_i' y_i^{n-2} = 0.$$

On aura

$$y' = \Sigma\lambda_i' y_i', \qquad y'' = \Sigma\lambda_i y_i'' \cdots\cdots \qquad y^{n-1} = \Sigma\lambda_i y_i^{n-1}$$

puis

$$y^n = \Sigma\lambda_i y_i^n + \Sigma\lambda_i' y_i^{n-1}.$$

Si nous substituons ces expressions dans l'équation différentielle, les coefficients de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ seront nuls car $y_1, y_2, \ldots y_n$ sont solutions. Il ne restera que la condition

$$\Sigma\lambda_i' y_i^{n-1} = 0.$$

Or cette équation jointe aux équations (I) formera un système de n équations linéaires et homogènes en $\lambda_1' \lambda_2' \dots \lambda_n'$.

Le déterminant des inconnues, qui n'est autre que le déterminant D, est différent de zéro. Le système n'admet donc que la solution

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \dots = \lambda_n' = 0.$$

Tous les λ se réduisent donc à des constantes $c_1, c_2, \dots c_n$, et par suite la solution générale est

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Equations avec second membre. — Considérons maintenant une équation avec second membre X.

Si nous connaissons une solution particulière y_0 de cette équation, en faisant le changement de fonction

$$y = y_0 + Y,$$

Y devra être solution de l'équation sans second membre.

La solution générale d'une équation avec second membre s'obtient donc en ajoutant à une solution particulière quelconque, la solution générale de l'équation sans second membre.

Si l'on n'a pas de solution particulière, nous allons montrer que :

Si l'on connaît la solution générale de l'équation sans second membre, n quadratures donneront la solution générale de l'équation donnée.

Considérons en effet n solutions particulières indépendantes $y_1, y_2, \dots y_n$ de l'équation sans second membre.

Faisons, comme ci-dessus, le changement de fonction

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \dots + \lambda_n y_n.$$

Assujettissons encore les fonctions λ aux mêmes équations

$$\text{(I)} \qquad \Sigma \lambda_i' y_i = 0, \qquad \Sigma \lambda_i' y_i' = 0, \dots \quad \Sigma \lambda_i' y_i^{n-2} = 0$$

de sorte que l'on ait encore

$$y' = \Sigma \lambda_i y_i', \quad \cdots \quad y^{n-1} = \Sigma \lambda_i y_i^{n-1}$$

et

$$y^n = \Sigma \lambda_i y_i^n + \Sigma \lambda_i' y_i^{n-1}.$$

Si nous substituons ces expressions dans l'équation différentielle avec second membre, le premier membre se réduira bien encore à $\Sigma \lambda_i' y_i^{n-1}$. On aura donc ici l'équation

$$\Sigma \lambda_i' y_i^{n-1} = X. \tag{2}$$

Cette équation (2) jointe aux équations (1) constituent un système de n équations linéaires, *mais non plus homogènes* (la dernière ne l'étant pas) en $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_n$.

Le déterminant de ces inconnues est

$$D = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots y_n \\ y'_1, & y'_2, & \cdots y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1}, & y_2^{n-1}, & \cdots y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Il est différent de zéro puisque les solutions sont indépendantes. Ces équations peuvent donc être résolues et on obtiendra

$$\lambda'_1 = \varphi_1(x), \qquad \lambda'_2 = \varphi_2(x), \cdots \lambda'_n = \varphi_n(x)$$

n quadratures donneront alors les expressions de ces fonctions.

Indépendance linéaire de n fonctions. — Etant données les n solutions $y_1, y_2, \ldots y_n$, nous avons dit que ces solutions sont indépendantes, si le déterminant D formé par ces fonctions et leurs $(n-1)$ dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ était différent de zéro.

Etant données n fonctions, on dit qu'elles sont « linéairement indépendantes » s'il ne peut exister de valeurs des constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$, non toutes nulles, telles que l'on ait pour toute valeur de x

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0 \tag{1}$$

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions soient linéairement indépendantes, est que le déterminant* D *ne soit pas identiquement nul.*

En effet, s'il existe une relation de la forme (1), comme cette relation doit être satisfaite quel que soit x, en la dérivant par rapport à x autant de fois qu'on le voudra, on obtiendra de nouvelles identités. On aura en particulier

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} c_1 y_1' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n' = 0 \\ c_1 y_1'' + c_2 y_2' + \cdots + c_n y_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_1^{n-1} + c_2 y_2^{n-1} + \cdots + c_n y_n^{n-1} = 0. \end{cases}$$

La relation (1) et les relations (II) étant linéaires et homogènes par rapport aux constantes c, non toutes nulles, le déterminant D est certainement identiquement nul.

Réciproquement, nous allons montrer que si le déterminant D est identiquement nul, il existe une relation de dépendance linéaire entre les fonctions y. Supposons qu'un mineur de D, par exemple le déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_2, & y_3, & \cdots y_n \\ y_2', & y_3', & \cdots y_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_2^{n-2}, & y_3^{n-2}, & \cdots y_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Remplaçons dans D, y_1 par y et considérons l'équation

$$\begin{vmatrix} y, & y_2, & \cdots y_n \\ y', & y_2, & \cdots y_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{n-1}, & y_2^{n-1}, & \cdots y_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle ne disparaîtra pas puisque le coefficient de y^{n-1} est différent de zéro. C'est une équation différentielle linéaire en y d'ordre $(n-1)$. Elle admet certainement les solutions y_2, y_3,... y_n, et d'autre part, elle admet la solution y_1 puisque, par hypothèse, D est nul.

Or, les solutions $y_2, y_3, \ldots y_n$ sont indépendantes, puisque le déter-

minant D_1 est différent de zéro. La solution générale de l'équation et par suite y_1 est donc de la forme

$$y_1 = k_2 y_2 + k_3 y_3 + \cdots + k_n y_n$$

les k étant des constantes.

Il existe donc bien une relation linéaire entre $y_1, y_2, \ldots y_n$ et elle peut même être résolue par rapport à y_1 (parce que le déterminant D_1 est différent de zéro).

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions ne soient pas indépendantes est que le déterminant soit nul. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient linéairement indépendantes est que leur déterminant D soit différent de zéro.

Equation adjointe. — Une équation différentielle d'ordre n peut être ramenée à un système d'équations linéaires. Or, nous avons défini le système linéaire adjoint d'un système linéaire.

Nous pouvons à son tour ramener l'intégration de ce système adjoint à l'intégration d'une équation d'ordre n.

Cette équation s'appellera « l'équation adjointe » de l'équation donnée. Nous allons former cette équation.

Soit l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0. \tag{1}$$

Nous la ramènerons à un système linéaire en introduisant de nouvelles inconnues $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ et posant

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{dy}{dx} \\ y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = \dfrac{dy_{n-2}}{dx} \end{cases}$$

y_k se confondant avec $\dfrac{d^k y}{dx^k}$.

Si nous substituons dans l'équation différentielle, elle s'écrit

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_n y = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) constituent bien un système canonique que nous écrivons sous la forme

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dfrac{dy_{n-1}}{dx} + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_n y = 0 \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} - y_{n-1} = 0 \\ \dfrac{dy_{n-3}}{dx} - y_{n-2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_1}{dx} - y_2 = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} - y = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons alors écrire le système adjoint du système (III).

Désignons les nouvelles inconnues par Y_{n-1}, Y_{n-2},... Y.

Ce système s'obtiendra, comme on sait, en prenant les coefficients d'une même colonne.

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} -\dfrac{dY_{n-1}}{dx} + a_1 Y_{n-1} - Y_{n-2} = 0 \\ -\dfrac{dY_{n-2}}{dx} + a_2 Y_{n-1} - Y_{n-3} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{dY_2}{dx} + a_{n-2} Y_{n-1} - Y_1 = 0 \\ -\dfrac{dY_1}{dx} + a_{n-1} Y_{n-1} - Y = 0 \\ -\dfrac{dY}{dx} + a_n Y_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Il faut maintenant ramener l'intégration de ce système à celle d'une équation linéaire d'ordre *n*.

Il est naturel de former l'équation à laquelle satisfait Y_{n-1} et par conséquent d'éliminer Y_{n-2},... Y_1, Y.

Cette élimination est facile. On voit aisément qu'il suffit de dériver la première équation $(n-1)$ fois, la deuxième $(n-2)$ fois, l'avant dernière une fois, et d'ajouter toutes les équations après multiplication respectivement par $-1, +1, -1 \ldots$

Toutes les fonctions $Y, Y_1, \ldots Y_{n-2}$ disparaissent et il reste simplement

$$D^n Y_{n-1} - D^{n-1}(a_1 Y_{n-1}) + D^{n-2}(a_2 Y_{n-1}) \cdots \pm D(a_{n-1} Y_{n-1}) \mp a_n Y_{n-1} = 0$$

C'est cette équation en Y_{n-1} que l'on appelle « équation adjointe » de l'équation donnée.

Utilité. — Si nous connaissons une solution Y_{n-1} de cette équation adjointe, les équations du système (IV) fourniront successivement et sans intégration $Y_{n-2}, Y_{n-3}, \ldots Y_1, Y$.

Soit d'autre part $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots y_1, y$ une solution quelconque du système (III).

D'après ce que nous savons sur les solutions de deux systèmes adjoints, on aura certainement une relation de la forme

$$y_{n-1} Y_{n-1} + y_{n-2} Y_{n-2} + \cdots + y Y = \text{const.}$$

Si nous remarquons que y_k se confond avec la dérivée d'ordre k de y, cette équation revient à l'équation

$$Y_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Y_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + Y y = \text{const.} \tag{5}$$

y satisfait donc à une équation différentielle d'ordre $(n-1)$ après introduction d'une constante arbitraire.

Si l'on connaît k solutions de l'équation adjointe, $Y^1_{n-1}, Y^2_{n-1}, \ldots Y^k_{n-1}$, on en déduira de même k relations analogues à la relation (5) avec des constantes arbitraires ; elles permettront, par l'élimination des $(k-1)$ dérivées d'ordre supérieur de y, c'est-à-dire des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-k+1)$, d'obtenir une équation ne renfermant plus que les dérivées de y jusqu'à l'ordre $(n-k)$; y sera donc solution d'une équation différentielle d'ordre $(n-k)$ dépendant de k constantes arbitraires.

2e mode de formation. — Il existe une deuxième façon plus rapide de former l'équation adjointe. Multiplions toute l'équation par un facteur z et intégrons le première membre dans un intervalle quelconque.

On aura

$$\int_{x,y} z\left(\frac{d^n y}{dy^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y\right) dx = \text{const.} \tag{2}$$

Or, nous avons identiquement, en intégrant par parties

$$\int_{\delta_1} z \frac{d^n y}{dy^n}\, dx = z \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - z' \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + (-1)^n \int_{\delta_1} y \frac{d^n z}{dx^n}\, dx.$$

De même

$$\int_{\delta_1} a_1 z \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\, dx = a_1 z \frac{d^{n-2} y}{dy^{n-2}} - \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}}(a_1 z)' + \cdots + (-1)^{n-1} \int_{\delta_1} y \frac{d^{n-1}(a_1 z)}{dx^{n-1}} dx,$$

En procédant de même pour tous les termes de (2) nous aurons des parties tout intégrées ne renfermant que les dérivées de y, linéairement jusqu'à l'ordre $(n-1)$, et si nous rassemblons toutes les intégrales en une seule, nous obtiendrons

$$\int_{x,y} y\left(\frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(a_1 z)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}(a_2 z)}{dx^{n-2}} - \cdots \pm a_n z\right) dx.$$

Si donc nous choisissons pour z une solution de l'équation obtenue en annulant la parenthèse, c'est-à-dire

$$\frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(a_1 z)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}(a_2 z)}{dx^{n-2}} \cdots \pm a_n z = 0$$

cette intégrale disparaît. Il ne reste que la partie tout intégrée qui constituera une équation différentielle linéaire d'ordre $(n-1)$ en y.

L'équation (3) est l'équation adjointe de l'équation donnée (1). Il est bien évident que si par le procédé inverse on formait l'adjointe de z, on retrouverait l'équation donnée.

On retrouve la même équation que par le premier procédé.

Comme ci-dessus, la connaissance de k solutions permettrait de ramener l'intégration de l'équation à celle d'une équation d'ordre $(n-k)$ dépendant de k constantes arbitraires.

V. — INTÉGRATION D'ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

Equation caractéristique. — Dans l'équation différentielle d'ordre n, supposons que les fonctions $a_1, a_2, \ldots a_n$ se réduisent à des constantes. La résolution de l'équation linéaire à coefficients constants a été effectuée par Euler.

Nous considérons d'abord une équation à coefficients constants *sans second membre*

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0 \tag{1}$$

On peut en trouver immédiatement et naturellement des solutions, en cherchant des solutions de la forme $y = e^{rx}$, r désignant une constante.

En substituant, il reste après division par e^{rx}

$$\varphi(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2}$$

Il est donc nécessaire et suffisant que r soit racine de cette équation appelée « équation caractéristique ».

Supposons d'abord que cette équation ait toutes ses racines distinctes $r_1, r_2, \ldots r_n$. On obtiendra n solutions particulières

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}, \cdots y_n = e^{r_n x}.$$

Ces solutions sont indépendantes car le déterminant de Wronski est ici

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots & \\ r_1^2 e^{r_1 x} & & \ldots & \\ & & & \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & \\ & & & \\ r_1^{n-1} & & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Or le deuxième facteur est un déterminant de Vandermonde : il est différent de zéro.

La solution générale de l'équation différentielle sera donc

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$$

$C_1, C_2, \ldots C_n$ désignant n constantes arbitraires.

Cas des racines multiples. — Si l'équation $\varphi(r) = 0$ n'a que k racines distinctes, on ne peut obtenir ainsi que k solutions.

Cherchons d'autres solutions. Soit r une des racines multiples d'ordre α de $\varphi(r) = 0$. On a identiquement, si $y = e^{rx}$

$$a_0 d^n y + a_1 d^{n-1} y + \cdots a_n y = e^{rx} \varphi(r)$$

Dérivons les deux membres par rapport à r.

Remarquons que

$$\frac{d}{dr}\frac{d^k y}{dx^k} = \frac{d^k}{dx^k} \cdot \frac{dy}{dr} = \frac{d^k}{dx^k}(x e^{rx})$$

On aura donc en substituant

$$\sum a_{n-k} \frac{d^k}{dx^k}(x e^{rx}) = e^{rx}[\varphi'(r) + x\varphi(r)]$$

Si r est racine double, le second membre est nul. Le premier membre l'est donc aussi. Il signifie que xe^{rx} est solution de l'équation.

De même si r est racine triple, en dérivant une deuxième fois par rapport à r, nous verrons que $x^2 e^{rx}$ est solution de l'équation. Si donc r est racine d'ordre α, on obtiendra α solutions de l'équation.

$$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad x^2 e^{rx}, \cdots x^{\alpha-1} e^{rx}.$$

Il en sera de même pour toutes les racines multiples.

On aura donc encore au total n solutions de l'équation différentielle.

Il reste à montrer que ces n solutions sont indépendantes.

2e méthode : Notation symbolique. — Avant de montrer que ces solutions sont bien indépendantes et de traiter le cas des racines imaginaires, nous allons traiter la question sous une forme, de principe certes un peu moins naturelle, mais qui se prêtera à toutes les extensions.

Cette méthode est d'ailleurs fort élégante et est extrêmement instructive par les analogies remarquables qu'elle met en évidence.

En employant la notation de Cauchy, l'équation différentielle s'écrit

$$a_0 \mathrm{D}^n y + a_1 \mathrm{D}^{n-1} y + \cdots + a_n y = 0.$$

On peut mettre symboliquement y en facteur et l'écrire

$$[a_0 \mathrm{D}^n + a_1 \mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_n] y = 0$$

ou encore $\mathrm{F}y = 0$, F désignant un polynôme en D.

A tout polynôme, correspond une équation différentielle à coefficients constants et inversement, tout polynôme est la représentation symbolique d'une combinaison linéaire de dérivations faites sur une fonction, c'est-à-dire d'une équation différentielle à coefficients constants.

A partir de ce moment, nous allons le plus possible *poursuivre l'analogie* avec les polynômes, sans pouvoir, semble-t-il, espérer, *a priori*, que cela pourra conduire à l'intégration de l'équation.

A la multiplication des polynômes correspond l'idée suivante :

Considérons une autre opération représentée par un polynôme G et faisons sur une fonction quelconque y la suite d'opérations représentées par G, après avoir fait la suite représentée par F.

$$\mathrm{G} = b_0 \mathrm{D}^m + b_1 \mathrm{D}^{m-1} + \cdots + b_m.$$

Nous obtiendrons

$$\mathrm{G.F} = b_0[a_0 \mathrm{D}^{m+n} + \cdots + a_n \mathrm{D}^m] + b_1[a_0 \mathrm{D}^{m+n-1} + \cdots] + \cdots + b_m[a_0 \mathrm{D}^n + a_1 \mathrm{D}^{n-1} + \cdots a_n]$$

Le résultat est donc représenté par un polynôme H en D, et l'on constate que ce polynôme est évidemment le produit des deux polynômes G et F. On en déduit immédiatement qu'on aurait obtenu le même résultat si l'on avait effectué d'abord l'opération G, puis l'opération F.

Ce résultat s'étend immédiatement à un nombre quelconque d'opérations symboliques successives. Le résultat est représenté par le polynôme produit.

Ce résultat n'est évidemment valable que si les coefficients des polynômes F et G sont constants.

Si une fonction y satisfait à une équation différentielle $Fy = 0$, elle satisfera évidemment aussi à l'équation $GFy = 0$.

La propriété fondamentale que nous venons d'établir conduit évidemment et tout naturellement à décomposer un polynôme F en produit de facteurs et par conséquent à introduire les racines du polynôme F.

Soit donc l'équation $Fy = 0$.

Le polynôme F admet des racines réelles ou imaginaires. En les désignant par s_1, s_2,... s_k d'ordre de multiplicité respectivement μ_1, μ_2,.... μ_k, on peut le décomposer sous la forme

$$F = a_0(D - s_1)^{\mu_1}(D - s_2)^{\mu_2} \cdots (D - s_k)^{\mu_k}$$

Recherche de solutions particulières. — En vertu de la propriété de multiplication ci-dessus, nous aurons certainement des solutions de l'équation différentielle donnée si nous cherchons des solutions de l'équation

$$(D - s_1)^{\mu_1} y = 0 \tag{2}$$

Or, il est aisé de trouver la solution générale de cette équation. Etant donné que nous savons qu'elle admet la solution particulière $e^{s_1 x}$, nous ferons le changement de fonction

$$y = ue^{s_1 x}$$

u désignant la nouvelle fonction.

Nous aurons d'abord

$$(D - s_1)\, y = D(ue^{s_1 x}) - s_1 ue^{s_1 x} = e^{s_1 x} Du.$$

Ainsi, si nous faisons l'opération $(D - s_1)$ sur une fonction de la forme $ue^{s_1 x}$, le résultat s'obtient simplement en remplaçant u par Du.

On en déduit immédiatement

$$(D - s_1)^2 y = (D - s_1)(e^{s_1 x} Du) = e^{s_1 x} D^2 u$$

et d'une façon générale

$$(D - s_1)^{\mu_1} y = e^{s_1 x} D^{\mu_1} u$$

Si nous voulons que $y = ue^{s_1 x}$ satisfasse à l'équation (2), il faut et il suffit que u satisfasse à l'équation

$$D^{\mu_1} u = 0.$$

Il faut et il suffit que u soit un polynôme de degré $(\mu_1 - 1)$ en x. La solution générale de l'équation (2) est donc

$$y = e^{s_1 x} P_{\mu_1 - 1}(x).$$

Quel que soit le polynôme P, ce sera une solution de l'équation différentielle donnée. Elle contient μ_1 constantes arbitraires.

Nous obtiendrons de même de nouvelles solutions, correspondant aux autres racines $s_2 \ldots s_k$, en prenant

$$y = e^{s_2 x} P_{\mu_2 - 1}(x) \cdots\cdots \quad y = e^{s_k x} P_{\mu_k - 1}(x)$$

et par suite, on obtiendra une solution plus générale en prenant

$$(3) \qquad y = e^{s_1 x} P_{\mu_1 - 1}(x) + e^{s_2 x} P_{\mu_2 - 1}(x) + \cdots + e^{s_k x} P_{\mu_k - 1}(x).$$

Elle contient $(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k)$ constantes arbitraires, c'est-à-dire n constantes arbitraires.

Indépendance des solutions. — Mais nous ne pouvons affirmer encore que ce soit là la solution générale. Elle est une combinaison linéaire des solutions

$$\begin{aligned} &e^{s_1 x},\ x e^{s_1 x} \ldots x^{\mu_1 - 1} e^{s_1 x} \\ &e^{s_2 x},\ x e^{s_2 x} \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il faut donc que ces solutions soient linéairement indépendantes, ce qui revient à démontrer qu'il ne peut exister de polynômes $P_{\mu_1 - 1}$, $P_{\mu_2 - 1}$ de degré respectif représenté par l'indice, tels que l'on ait identiquement

$$P_{\mu_1 - 1} e^{s_1 x} + P_{\mu_2 - 1} e^{s_2 x} + \cdots \equiv 0$$

à moins que chacun de ces polynômes ne soit lui-même identiquement nul. C'est ce que nous allons démontrer.

Parmi les diverses relations de cette sorte qui pourraient exister, il en existerait au moins une qui renfermerait le nombre minimum d'exponentielles. Il suffit de démontrer que celle-là est identiquement nulle.

Soit la relation

$$P_1 e^{s_1 x} + P_2 e^{s_2 x} + \cdots + P_i e^{s_i x} \equiv 0 \qquad (i \leqslant k) \tag{4}$$

Divisons cette identité supposée par $e^{s_1 x}$ on aura

$$P_1 + P_2 e^{(s_2 - s_1)x} + \cdots + P_i e^{(s_i - s_1)x} \equiv 0 \tag{4'}$$

Si α est le degré du polynôme P_1 dérivons cette identité $(\alpha + 1)$ fois. Nous obtiendrons une nouvelle identité de la forme

$$Q_2 e^{(s_2 - s_1)x} + \cdots + Q_i e^{(s_i - s_1)x} \equiv 0$$

ou

$$Q_2 e^{s_2 x} + Q_3 e^{s_3 x} + \cdots + Q_i e^{s_i x} \equiv 0 \tag{5}$$

Ce serait une nouvelle identité analogue à (4), mais avec une exponentielle de moins encore. A moins que (5) ne disparaisse identiquement, on arriverait donc à une contradiction puisqu'on a supposé que l'identité (4) était celle qui renfermait le minimum d'exponentielles.

Il ne reste plus qu'à démontrer que (5) ne peut pas disparaître complètement. Or, remarquons que si l'on considère la fonction

$$z \equiv \mathrm{R} e^{\sigma x} \equiv (b_0 x^k + \cdots) e^{\sigma x}$$

sa dérivée est

$$z' \equiv e^{\sigma x}[\sigma b_0 x^k + \cdots] \equiv \mathrm{R}_1 e^{\sigma x}$$

R_1 est un polynôme certainement de même degré que R, le coefficient du terme de degré le plus élevé étant σb_0.

Cette propriété s'étend à des dérivations successives et si l'on dérive $(\alpha + 1)$ fois, on obtiendra

$$z^{\alpha+1} \equiv \mathrm{R}_{\alpha+1} e^{s_1 x}$$

$\mathrm{R}_{\alpha+1}$ étant certainement de même degré que R.

Il en résulte que dans l'identité (5), les polynômes $Q_2, Q_3, \ldots, Q_i$ sont certainement de même degré respectivement que $P_2, P_3, \ldots P_i$ et par conséquent, ne peuvent être identiquement nuls. Nous répétons qu'on obtiendrait donc une identité (5) renfermant une exponentielle de moins que l'identité (4), qui était supposée renfermer le nombre minimum d'exponentielles.

Il est donc impossible d'admettre l'existence d'identités telles que (4) ; les diverses solutions considérées sont bien indépendantes et la formule (3) donne bien la solution générale de l'équation différentielle.

Règle. — *On considère l'équation « caractéristique » en D*

$$F = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Si $s_1, s_2, \ldots s_k$ sont les racines de cette équation algébrique, d'ordre de multiplicité respectivement $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$, la solution générale de l'équation différentielle sans second membre $Fy = 0$ est

$$y = P_{\mu_1 - 1} e^{s_1 x} + P_{\mu_2 - 1} e^{s_2 x} + \cdots + P_{\mu_k - 1} e^{s_k x}$$

les polynômes P *étant de degré marqué par l'indice.*

Cas des racines imaginaires. — Nous n'avons fait aucune distinction entre les racines réelles et les racines imaginaires de l'équation $F = 0$ et la solution (3) peut apparaître entachée d'imaginaires.

Il est aisé de les faire disparaître.

Supposons que l'équation caractéristique ait une racine imaginaire $s_1 = \alpha + \beta i$ de degré de multiplicité μ_1. Si l'équation différentielle est à coefficients réels, l'équation admettra la racine imaginaire conjuguée $s_2 = \alpha - \beta i$ au même degré de multiplicité. L'équation différentielle admettra donc la solution

$$y = P e^{(\alpha + \beta i)x} + Q e^{(\alpha - \beta i)x}$$

P et Q étant deux polynômes arbitraires de degré $(\mu_1 - 1)$.

Cette solution y pourra s'écrire

$$y = P e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + Q e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

c'est-à-dire

$$y = e^{\alpha x}[(P + Q)\cos \beta x + i(P - Q)\sin \beta x]$$

c'est-à-dire enfin

$$y = e^{\alpha x}(R \cos \beta x + S \sin \beta x)$$

en posant

$$R = P + Q, \qquad S = i(P - Q).$$

Mais les polynômes P et Q peuvent être à coefficients quelconques réels ou imaginaires. Il en est donc de même des polynômes R et S qui restent arbitraires de degré $(\mu_1 - 1)$.

On a ainsi une solution de la forme

$$y = e^{\alpha x}(R \cos \beta x + S \sin \beta x).$$

R et S étant deux polynômes quelconques de degré $(\mu_1 - 1)$. Il suffit de prendre ces polynômes à coefficients réels. Cette solution introduira $2\mu_1$ constantes arbitraires remplaçant les $2\mu_1$ constantes qui figuraient dans les polynômes P, Q.

En procédant ainsi pour toutes les couples de racines imaginaires, on aura bien la solution générale sous forme réelle et contenant n constantes arbitraires.

Equation avec second membre. — Lorsqu'on a obtenu la solution générale de l'équation sans second membre, la méthode générale (dite) de variation des constantes permet de ramener la résolution de l'équation avec second membre à n quadratures. Mais cette méthode est pénible et il y a des cas particuliers très étendus où l'on peut se dispenser de l'appliquer, en cherchant des solutions particulières. C'est le cas où le *second membre est un polynôme dépendant de x, d'exponentielles de la forme* $e^{\alpha x}$, *de lignes trigonométriques sin* βx, *cos* γx...

Tout d'abord, on peut par les formules d'Euler, remplacer toutes les lignes trigonométriques en fonction d'exponentielles. Un produit d'exponentielles se ramenant à une exponentielle, si l'on rassemble tous les termes comprenant une même exponentielle $e^{\lambda x}$, tous ces termes donneront une expression de la forme $P(x)e^{\lambda x}$.

Le second membre se décompose donc en une somme de

termes de cette forme ; il suffit de chercher une solution particulière de chacune des équations admettant successivement pour second membre chacun des termes. La somme de ces solutions particulières donnera évidemment une solution particulière de l'équation totale donnée.

Soit donc l'équation avec second membre $P(x)e^{\lambda x}$, $P(x)$ désignant un polynôme de degré m.

Il est facile tout d'abord d'obtenir une nouvelle équation sans second membre. Il suffit de faire sur l'équation complète l'opération $(D - \lambda)^{m+1}$. Cette opération faite sur le second membre $P_m e^{\lambda x}$ donnera bien un résultat nul, étant donné le degré de P.

Toute solution y satisfait donc certainement à l'équation sans second membre

$$(D - \lambda)^{m+1} F y = 0. \tag{6}$$

Mais l'équation caractéristique de cette nouvelle équation a pour racines les racines de F et la racine λ d'ordre de multiplicité $(m + 1)$.

Deux cas peuvent se présenter :

1° λ n'est pas racine de l'équation caractéristique.

La solution générale de cette nouvelle équation est

$$y = Q_m e^{\lambda x} + P_{\alpha_1 - 1} e^{\alpha_1 x} + \cdots$$

Mais tous les termes à partir du second satisfont à l'équation sans second membre. Il existe donc une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $Q_m e^{\lambda x}$.

Nous déterminerons Q_m par la méthode des coefficients indéterminés, en substituant dans l'équation.

Il faut bien remarquer qu'une substitution est nécessaire, car nous avons remplacé l'équation donnée par l'équation (6) qui est plus générale et par conséquent toute solution de (6) telle que $Q_m e^{\lambda x}$ n'est pas nécessairement solution de l'équation donnée.

2° λ est racine de l'équation caractéristique. Soit $\lambda = s_1$.

Cette dernière s'écrit alors

$$(D - \lambda)^{\alpha_1 + m + 1} (D - s_2)^{\alpha_2} \cdots = 0.$$

La solution générale de l'équation (6) est donc

$$y = Q_{\mu_1+m}e^{\lambda x} + Q_{\mu_2-1}e^{\beta x} + \cdots$$

Or, tous les termes à partir du second sont solutions de l'équation sans second membre. Il existe donc une solution particulière de la forme $Q_{\mu_1+m}e^{\lambda x}$.

Ici on peut encore simplifier.

Nous pouvons en effet, séparer dans Q tous les termes de degré inférieur à μ_1 et écrire

$$Q_{\mu_1+m} = Q_{\mu_1-1} + x^{\mu_1}R_m(x).$$

On peut alors négliger la partie $Q_{\mu_1-1}e^{\lambda x}$ qui satisfait à l'équation sans second membre. Nous devons donc chercher une solution particulière de la forme $x^{\mu_1}R_m(x)e^{\lambda x}$.

Comme dans le cas précédent, une identification sera nécessaire pour déterminer tout ou partie des coefficients du polynôme R_m.

Les deux cas peuvent se résumer en un seul. Nous pouvons dire dans tous les cas :

Règle pratique. — *Le second membre étant de la forme* $P_m e^{\lambda x}$, *nous devons rechercher une solution particulière de la forme*

$$y = x^{\mu}Q_m e^{\lambda x}$$

Q_m *étant un polynôme de même degré que* P_m, μ étant le degré de λ *comme racine de l'équation caractéristique* ($\mu = 0$ si λ n'est pas racine).

Remarque. — On peut éviter l'introduction d'imaginaires dans le remplacement de lignes trigonométriques par des exponentielles, en rassemblant tous les termes relatifs à une même exponentielle et à des lignes trigonométriques du même arc.

Soit le second membre

$$(P_m \cos \beta x + P'_m \sin \beta x)e^{\lambda x}$$

(en supposant, ce que l'on peut, les polynômes du même degré).

On verra facilement que l'on sera amené à rechercher une solution particulière de la forme

$$x^{\mu}(Q_m \cos \beta x + Q'_m \sin \beta x)e^{\lambda x}$$

μ étant le degré de $\lambda + i\beta$ considérée comme racine de l'équation caractéristique (et aussi le degré de $\lambda - i\beta$).

Application. — Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = \cos nx.$$

L'équation caractéristique est

$$D^2 + m^2 = 0.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = a \cos mx + b \sin mx.$$

Si $n \neq m$, une solution particulière de l'équation complète est

$$A \cos nx + B \sin nx$$

En substituant, on trouve

$$B = 0, \qquad A(m^2 - n^2) = 1.$$

La solution générale de l'équation est donc

$$y = a \cos mx + b \sin nx + \frac{1}{m^2 - n^2} \cos nx.$$

Si $n = m$, il faut chercher une solution particulière de la forme

$$x(A \cos mx + B \sin mx).$$

En substituant, on trouve

$$A = 0, \qquad B = \frac{1}{2m}.$$

Equation d'Euler. — On appelle « équation d'Euler » une équation de la forme

$$(1) \qquad (ax + b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1(ax + b)^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = 0.$$

Cette équation étudiée par Euler se ramène immédiatement à une équation linéaire à coefficients constants, (a, b, A_1, A_2,... A_n sont des constantes).

Il suffit de faire le changement de variable

$$ax + b = e^t,$$

d'où

$$a\,dx = e^t dt.$$

On aura alors (en désignant par y', y'',... y^n, les dérivées de y par rapport à t).

$$\frac{dy}{dx} = y' a e^{-t}$$

ou symboliquement

$$\frac{d}{dx} = a e^{-t} \frac{d}{dt}.$$

On a alors successivement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 e^{-2t}(y'' - y'), \qquad \frac{d^3y}{dt^3} = a^3 e^{-3t}(y''' - 3y'' + 2y')$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{-nt}(y^n \cdots)$$

Les parenthèses seront visiblement linéaires par rapport aux dérivées de y par rapport à t.

Substituons dans l'équation (1)

$$\Sigma A_k (ax + b)^{n-k} \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0 \tag{1'}$$

elle deviendra

$$\Sigma A_k e^{(n-k)t} a^{n-k} e^{-(n-k)t}(y^{n-k} + \cdots) = 0$$

ou simplement

$$\Sigma A_k a^{n-k}(y^{n-k} + \cdots) = 0.$$

C'est une équation linéaire d'ordre n à coefficients constants.

Désignons par s_1, s_2,... s_k les racines de l'équation caractéristique d'ordre ν_1, ν_2,... ν_k ; la solution générale en sera

$$y = P_{\nu_1 - 1}(t) e^{s_1 t} + P_{\nu_2 - 1}(t) e^{s_2 t} + \cdots \tag{2}$$

En revenant à la variable x, on aura la solution générale

$$y = (ax + b)^{s_1} P_{\nu_1 - 1}(\log(ax + b)) + (ax + b)^{s_2} P_{\nu_2 - 1}(\log(ax + b)) \cdots$$

les polynômes étant des polynômes en $\log(ax+b)$ de degré indiqué par l'indice.

On peut retrouver directement ce résultat.

Cherchons en effet une solution de la forme

$$y = (ax+b)^s.$$

Substituons dans l'équation, on obtiendra

$$(3)\quad (ax+b)^s[s(s-1)\cdots(s-n+1)a^n + A_1 s(s-1)\cdots(s-n+2)a^{n-1} + \cdots + A_n] = 0.$$

Il faut donc et il suffit que s soit racine de l'équation « caractéristique » de degré n

$$s(s-1)\cdots(s-n+1)a^n + A_1 s(s-1)\cdots(s-n+2)a^{n-1} + \cdots + A_n = 0.$$

Si toutes les racines de cette équation sont distinctes, $s_1, s_2, \ldots s_n$, on aura donc n solutions particulières.

$$y_1 = (ax+b)^{s_1}, \qquad y_2 = (ax+b)^{s_2} \cdots y_n = (ax+b)^{s_n}$$

et par conséquent la solution

$$y = c_1(ax+b)^{s_1} + c_2(ax+b)^{s_2} + \cdots$$

Ce sera la solution générale, si les diverses solutions particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ sont indépendantes, c'est-à-dire si l'on ne peut déterminer de constantes, non toutes nulles telles, que l'on ait identiquement

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

C'est ce qui a lieu. En effet s'il existait de telles identités considérons celle qui renfermerait le moins de termes, soit par exemple

$$c_i y_i + c_j y_j + \cdots + c_l y_l = 0.$$

En divisant par y_i on aurait

$$c_i + c_j(ax+b)^{s_j - s_i} + \cdots + c_l(ax+b)^{s_l - s_i} = 0.$$

En la dérivant, on aurait une nouvelle identité

$$c_j a(s_j - s_i)(ax+b)^{s_j - s_i - 1} + \cdots = 0$$

Après multiplication par $(ax + b)^{s_1+1}$, ce serait une identité de la forme

$$\lambda_1(ax + b)^{s_1} + \lambda_k(ax + b)^{s_k} + \cdots = 0$$

identité analogue à celle d'où on est parti avec un terme de moins, contrairement à l'hypothèse.

Les solutions $y_1, y_2, \ldots y_n$ sont donc bien indépendantes et l'on a bien la solution générale de l'équation.

Si deux racines s_1, s_2 sont égales, modifions légèrement les coefficients de l'équation de manière qu'elle ait deux racines voisines $s_1, s_1 + h$. L'équation différentielle admettra pour solution

$$\frac{(ax + b)^{s_1+h} - (ax + b)^{s_1}}{h}$$

aussi petit que soit h.

En passant à la limite, on voit que l'équation non transformée doit admettre pour solution

$$\frac{D}{Ds}(ax + b)^s = (ax + b)^s \log(ax + b)$$

On généralisera facilement si k racines sont égales.

On trouvera des solutions de la forme

$$(ax + b)^s, \quad (ax + b)^s \log(ax + b), \cdots (ax + b)^s \log^{k-1}(ax + b)$$

et par suite une solution

$$(ax + b)^s P_{k-1}(\log(ax + b)).$$

On retrouve le résultat déjà obtenu.

V. — SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

Nous allons continuer de façon complète l'utilisation de la représentation symbolique. Il sera tout à fait remarquable de voir dans ce domaine d'intégration d'équations différentielles, l'application des propriétés d'un domaine aussi totalement différent : la théorie des déterminants.

Nous supposerons trois équations linéaires à coefficients cons-

tants déterminant trois fonctions y, z, t de la variable indépendante x. Nous les supposerons sans termes indépendants de y, z, t.

1re méthode. — Dans la première équation, nous pouvons rassembler tous les termes correspondant à y. Nous obtiendrons un ensemble de termes que nous représenterons symboliquement par ay, a désignant un polynôme en D : de même les termes en z et en t seront représentés par bz, ct, b et c étant des polynômes en D.

La première équation s'écrit donc

$$ay + bz + ct = 0. \tag{1}$$

Les deux autres équations seront de même

$$a'y + b'z + c't = 0 \tag{2}$$

$$a''y + b''z + c''t = 0. \tag{3}$$

Comme dans les équations linéaires, nous devons considérer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Nous supposerons $\Delta \not\equiv 0$.

Désignons par A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'' les mineurs du déterminant correspondant aux éléments a, a'...

Ce sont des polynômes en D. Soit δ le plus grand commun diviseur (s'il en existe) de tous ces mineurs.

On a par exemple

$$aA + a'A' + a''A'' = \Delta.$$

Cela amène à considérer les opérations aA, $a'A'$, $a''A''$.

Faisons sur la première équation l'opération A ou mieux $\frac{A}{\delta}$, sur la seconde, l'opération $\frac{A'}{\delta}$, et sur la troisième l'opération $\frac{A''}{\delta}$, et ajoutons les trois résultats.

On aura à faire sur y l'opération $\frac{aA + a'A' + a''A''}{\delta}$ c'est-à-dire l'opération $\frac{\Delta}{\delta}$.

On aura à faire sur z l'opération $\frac{bA + b'A' + b''A''}{\partial}$. Or

$$bA + b'A' + b''A'' = 0$$

z disparaît donc de l'équation résultante et, de même, t.

Il restera donc simplement l'équation

$$\frac{\Delta}{\partial} y = 0.$$

Ainsi y satisfait à une équation différentielle à coefficients constants. On obtiendrait évidemment la même équation pour z, en faisant sur les équations les opérations $\frac{B}{\partial}, \frac{B'}{\partial}, \frac{B''}{\partial}$ et de même pour t

$$\frac{\Delta}{\partial} z = 0, \qquad \frac{\Delta}{\partial} t = 0.$$

On saura les intégrer.

Mais il faut remarquer que les opérations de dérivation que nous avons faites sur le système pour obtenir les nouvelles équations donnent des équations plus générales que celles de départ. Une identification sera donc nécessaire pour déterminer certains coefficients de y, z, t et satisfaire aux équations (1), (2), (3).

Cette méthode comme on le voit est très rapide. Mais elle a l'inconvénient de ne pas mettre en évidence le nombre de coefficients arbitraires qui subsistent dans la solution la plus générale, et, ce qui est plus grave, elle est inapplicable si le déterminant Δ est identiquement nul.

Combinaisons des équations. — Nous allons étudier de plus près les équations et continuer l'application des propriétés des déterminants, en nous rendant compte des conséquences résultant des transformations de Δ.

Voyons d'abord par quoi se traduit une combinaison de lignes de Δ. Faisons sur la deuxième équation du système

l'opération représentée par le polynôme λ et ajoutons le résultat à la première. Nous remplacerons la première équation par

$$(4) \qquad (a + \lambda a')y + (b + \lambda b')z + (c + \lambda c')t = 0.$$

Toute solution y, z, t des équations (1), (2), (3) satisfait nécessairement à (4). Inversement toute solution des équations (2), (3), (4) est évidemment solution du système (1), (2), (3).

Les deux systèmes admettent donc mêmes solutions.

Or le déterminant Δ' relatif au système (2), (3), (4) est

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a + \lambda a', & b + \lambda b', & c + \lambda c' \\ a', & b', & c' \\ a'', & b', & c'' \end{vmatrix}$$

Il est égal à Δ et se déduit de Δ par addition de lignes, après multiplication par des facteurs polynômes quelconques.

Voyons enfin le résultat d'addition de colonnes.

Faisons sur les fonctions y, z, t le changement suivant

$$y_1 = y - \lambda z, \qquad z_1 = z, \qquad t_1 = t.$$

D'où

$$y = y_1 + \lambda z_1, \qquad z = z_1, \qquad t = t_1$$

λ représentant une opération quelconque. Si l'on connaît y, z, t, on en déduit sans ambiguïté y_1, z_1, t_1, et inversement.

Les deux systèmes se déduisent l'un de l'autre par de simples dérivations et dépendent évidemment du même nombre de coefficients indéterminés.

La première équation se transforme en

$$a(y_1 + \lambda z_1) + bz_1 + ct_1 = 0$$

ou

$$ay_1 + (b + a\lambda)z_1 + ct_1 = 0.$$

On aura de même

$$a'y_1 + (b' + a'\lambda)z_1 + c't_1 = 0$$
$$a''y_1 + (b'' + a''\lambda)z_1 + c''t_1 = 0.$$

Le déterminant Δ' correspondant relatif à ce nouveau système se déduit de Δ par combinaison de colonnes.

On voit donc que l'on peut faire sur Δ toutes les combinaisons de lignes et de colonnes. Toute combinaison de lignes laisse les fonctions inaltérées. Toute combinaison de colonnes se traduit par une transformation correspondante sur les fonctions inconnues : Les deux systèmes se déduisent l'un de l'autre par de simples opérations de dérivations bien déterminées et les solutions dépendent du même nombre de coefficients arbitraires.

Nous allons donc nous baser sur cette propriété pour « simplifier » le plus possible le déterminant Δ et par suite le système d'équations différentielles.

Nous considérerons les degrés des divers polynômes qui figurent dans Δ et nous prendrons le polynôme de degré minimum (sauf le degré zéro). (Si l'un des polynômes était de degré zéro, on pourrait tirer la fonction correspondante en fonction des autres). Nous dirons qu'un déterminant Δ_1 est plus simple que Δ si le degré minimum des éléments de Δ_1 est moindre que celui des éléments de Δ. De deux déterminants Δ, Δ_1 admettant même degré minimum, nous dirons que Δ_1 est plus simple que Δ si le polynôme de degré minimum se trouve à la première ligne, puis à la première colonne du déterminant.

Simplification du déterminant. — Voyons alors comment l'on peut simplifier Δ.

Supposons que le terme de degré minimum soit b'. Divisons b par b'. Nous obtiendrons une égalité de la forme

$$b = \lambda a' + b_1$$

b_1 sera un polynôme de degré inférieur à b' si b n'est pas divisible par b'. Si b est divisible par b', nous pouvons écrire

$$b = \lambda b' + b'.$$

En retranchant des éléments de la première ligne, ceux de la seconde multipliés par λ, nous remplacerons b soit par b_1, soit par b'. De toutes façons, nous aurons simplifié le déterminant.

Nous pouvons opérer sur les colonnes comme nous l'avons fait sur les lignes et nous amènerons le terme de degré minimum à être le premier élément du déterminant.

Supposons donc que a soit le terme de degré minimum.

Nous allons montrer que si tous les éléments de la première ligne et ceux de la première colonne ne sont pas tous divisibles par a_1, nous pourrons encore simplifier le déterminant.

En effet, si b par exemple n'était pas divisible par a, nous pourrions le remplacer par le reste de la division par a. Si donc nous avons réduit le plus possible le déterminant, b, c, et de même a', a'' sont divisibles par a.

Une simple combinaison de lignes ou de colonnes ramènera alors le déterminant à la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & o & o \\ o & b_1' & c_1' \\ o & b_1'' & c_1'' \end{vmatrix}$$

Il est encore de plus nécessaire que tous les autres termes du déterminant soient aussi divisibles par a. Si b_1' par exemple ne l'était pas, on pourrait remplacer le déterminant par

$$\begin{vmatrix} a & o & o \\ b_1' & b_1' & c_1' \\ b_1'' & b_1'' & c_1'' \end{vmatrix}$$

On serait ramené au cas précédent et on pourrait encore simplifier Δ.

Le déterminant, supposé ramené à sa forme la plus simple, peut donc être réduit à la forme

$$\begin{vmatrix} x & o & o \\ o & x\beta' & x\gamma' \\ o & x\beta'' & x\gamma'' \end{vmatrix}$$

En opérant sur le mineur $\begin{vmatrix} x\beta' & x\gamma' \\ x\beta'' & x\gamma'' \end{vmatrix}$ comme nous avons opéré sur Δ, (ce qui ne modifiera plus les termes de la première ligne et de la première colonne), nous le remplacerons de même par

$$\begin{vmatrix} x\beta & o \\ o & x\beta\gamma \end{vmatrix}$$

Le déterminant Δ peut donc finalement être ramené à la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta\gamma \end{vmatrix}$$

Si donc nous désignons par η, ζ, τ les fonctions finales liées aux premières par des transformations réversibles, telles que nous les avons indiquées, (conséquences des transformations faites sur Δ), nous voyons que η, ζ, τ satisfont au système final

$$\alpha\eta = 0, \qquad \alpha\beta\zeta = 0, \qquad \alpha\beta\gamma\tau = 0.$$

Ces dernières équations sont donc des conséquences nécessaires et suffisantes du système donné. Elles indiquent que η, ζ, τ sont des solutions d'équations à coefficients constants. On en déduira par de simples opérations de dérivations, les solutions des systèmes précédents et, de proche en proche, finalement y, z, t.

Détermination des polynômes α, β, γ. — Il est possible d'écrire *a priori* les équations finales, c'est-à-dire de connaître les polynômes α, β, γ.

En effet, les opérations faites pour transformer le déterminant,

n'ont ni modifié le déterminant, ni modifié le plus grand commun diviseur de tous les mineurs du premier ordre, ni celui de tous les mineurs d'un ordre quelconque, ni enfin celui de tous les termes du déterminant.

Si donc l'on désigne par Δ, δ, d, le déterminant, le plus grand commun diviseur des mineurs, celui de tous les termes, polynômes qu'on peut déterminer *a priori*, on a en les comparant aux éléments correspondants du déterminant final

$$\Delta = \alpha^3\beta^2\gamma, \qquad \delta = \alpha^2\beta, \qquad d = \alpha.$$

Ces relations déterminent bien les polynômes α, β, γ et par conséquent permettent d'écrire les expressions finales des dernières fonctions η, ζ, τ. Mais il faut bien remarquer que pour connaître les relations entre les fonctions initiales et les solutions η, ζ, τ du système final, il est nécessaire de suivre pas à pas les transformations qui ont été faites.

Nombre de constantes. — On peut déterminer le nombre de constantes arbitraires qui figureront dans la solution. En effet, les trois équations finales introduiront un nombre de constantes égal respectivement aux degrés des équations :

$$\alpha\beta\gamma = 0, \qquad \alpha\beta = 0, \qquad \alpha = 0$$

c'est-à-dire un nombre de constantes égal au degré du polynôme $\alpha^3\beta^2\gamma$ c'est-à-dire précisément égal au degré de Δ.

Cas où $\Delta = 0$. — Enfin, on peut résoudre le cas où Δ est identiquement nul.

Si $\gamma = 0$, la fonction finale τ est arbitraire. La solution y, z, t dépend, sous une certaine forme, d'une fonction arbitraire ; les équations se réduisaient en réalité, à deux.

Si $\beta = 0$, les deux dernières équations disparaissent : deux des fonctions inconnues sont arbitraires.

Enfin le système disparaît si $\alpha = 0$.

Nous avons donc entièrement résolu le problème de l'intégration d'un système d'équations linéaires.

Méthode de d'Alembert. — Nous allons dire un mot d'une solution entièrement différente donnée par d'Alembert.

Tout d'abord, on peut supposer que toutes les équations aient été réduites à un système d'équations linéaires du premier ordre.

Ce système peut être supposé mis sous forme canonique.

Prenons pour simplifier l'écriture, le cas d'un système linéaire du premier ordre à trois inconnues seulement.

Soit le système

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + ay + bz + ct = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + a'y + b'z + c't = 0 \\ \dfrac{dt}{dx} + a''y + b''z + c''t = 0. \end{cases}$$

Par analogie avec les équations linéaires, voyons si l'on peut avoir une solution de la forme

$$y = \lambda e^{rx}, \qquad z = \mu e^{rx}, \qquad t = \nu e^{rx}$$

λ, μ, ν, étant des constantes.

Il faut que l'on ait

$$(II)\quad \begin{cases} (r+a)\lambda + b\mu + c\nu = 0 \\ a'\lambda + (r+b')\mu + c'\nu = 0 \\ a''\lambda + b''\mu + (r+c'')\nu = 0. \end{cases}$$

On en déduit que r doit être racine de l'équation

$$f(r) = \begin{vmatrix} r+a & b & c \\ a' & r+b' & c' \\ a'' & b'' & r+c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour une valeur de r racine de cette équation, les équations (II) deviennent compatibles et donnent des valeurs de λ, μ, ν proportionnelles à un des systèmes de mineurs.

Soient par exemple A, B, C, A′, B′, C′, A″, B″, C″ les mineurs de $f(r)$: λ, μ, ν seront proportionnels par exemple à A, B, C.

On aura

$$f(r) = (r+a)\,\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C}.$$

On pourra poser

$$y = \mathrm{A}e^{rx}, \qquad z = \mathrm{B}e^{rx}, \qquad t = \mathrm{C}e^{rx}.$$

En substituant ces valeurs dans les deux dernières équations du système (I), les résultats seront identiquement nuls quel que soit r. En substituant dans la première, on aura

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{A}e^{rx}, \mathrm{B}e^{rx}, \mathrm{C}e^{rx}) = e^{rx}f(r).$$

La première équation sera donc satisfaite si r est racine de l'équation (3).

Si les trois racines sont distinctes, on obtiendra la solution générale en prenant une combinaison linéaire des trois systèmes de solutions

$$y = \lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3, \qquad z = \lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3, \qquad t = \lambda t_1 + \mu t_2 + \nu t_3.$$

Supposons maintenant r racine double.

Substituons dans l'une des équations, la première par exemple, les dérivées de y, z, t *par rapport* à r, c'est-à-dire

$$y_1 = (x\mathrm{A} + \mathrm{A}')e^{rx}, \qquad z_1 = (x\mathrm{B} + \mathrm{B}')e^{rx}, \qquad t = (x\mathrm{C} + \mathrm{C}')e^{rx}$$

on aura comme résultat

$$e^{rx}[rx\mathrm{A} + r\mathrm{A}' + \mathrm{A} + a(x\mathrm{A} + \mathrm{A}') + b(x\mathrm{B} + \mathrm{B}') + c(x\mathrm{C} + \mathrm{C}')].$$

Le coefficient de e^{rx} est

$$x(rA + aA + bB + cC) + rA' + A + aA' + bB' + cC'$$

c'est-à-dire

$$xf(r) + f'(r).$$

Ainsi, si l'on pose

$$y = Ae^{rx}, \qquad z = Be^{rx}, \qquad t = Ce^{rx},$$

si, lorsqu'on substitue dans l'équation (1), on obtient

$$F(y, z, t) = e^{rx} f(r),$$

on aura aussi

$$F\left(\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial t}{\partial r}\right) = e^{rx}(xf(r) + f'(r))$$

c'est-à-dire

$$F\left(\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial t}{\partial r}\right) = \frac{\partial F}{\partial r}.$$

Cette formule se généralise immédiatement et l'on peut écrire d'une façon générale

$$F\left(\frac{\partial^k y}{\partial r^k}, \frac{\partial^k z}{\partial r^k}, \frac{\partial^k t}{\partial r^k}\right) = \frac{\partial^k F}{\partial r^k}.$$

Si r est racine double de l'équation caractéristique,

$$f(r) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

on voit que

$$y_1 = \frac{\partial y}{\partial r}, \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial r}, \qquad t_1 = \frac{\partial t}{\partial r}$$

sera aussi solution de l'une quelconque des équations, c'est-à-dire sera solution du système donné.

Plus généralement, si r est racine d'ordre de multiplicité k de l'équation $f(r) = 0$, on aura successivement

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0, \cdots \frac{\partial^{k-1} F}{\partial r^{k-1}} = 0$$

et par conséquent on aura k solutions du système

$$y, z, t, \qquad \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial t}{\partial r}, \cdots \qquad \frac{\partial^{k-1} y}{\partial r^{k-1}}, \frac{\partial^{k-1} z}{\partial r^{k-1}}, \frac{\partial^{k-1} t}{\partial r^{k-1}}.$$

A cette racine multiple d'ordre k, correspondent donc k solutions et on obtiendra toujours n solutions du système.

On montrerait aisément que ces systèmes de solutions sont bien indépendants. Une combinaison linéaire de ces solutions donnera donc la solution générale du système.

Application. — Soit le système

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 4y + 18z - 9t = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + y - 5z + 2t = 0 \\ \dfrac{dt}{dx} + 3y - 14z + 6t = 0. \end{cases}$$

Le déterminant $f(r)$ est

$$f(r) = \begin{vmatrix} r-4 & 18 & -9 \\ 1 & r-5 & 2 \\ 3 & 14 & r+6 \end{vmatrix} = (r-1)^3.$$

On peut prendre

$$A = r^2 + r - 2, \qquad B = -r, \qquad C = 1 - 3r.$$

Nous aurons donc d'abord la solution

$$y_1 = (r^2 + r - 2)e^{rx}, \qquad z_1 = -re^{rx}, \qquad t_1 = (1 - 3r)e^{rx}$$

(formules dans lesquelles il faut remplacer r par 1). Ensuite (la racine étant triple), on aura les deux solutions dérivées par rapport à r (pour $r = 1$), c. à. d.

$$y_2 = e^{rx}[2r + 1 + x(r^2 + r - 2)], \qquad z_2 = e^{rx}(-1 - rx),$$
$$t_2 = e^{rx}[-3 + x(1 - 3r)];$$
$$y_3 = e^{rx}[2 + (2r + 1)x + x(2r + 1) + x^2(r^2 + r - 2)],$$
$$z_3 = e^{rx}(-x - x(1 + rx)], \qquad t_3 = e^{rx}[-3x + x^2(1 - 3r) - 3x]$$

Pour $r = 1$, ces solutions se réduisent à

$$y_1 = 0, \qquad z_1 = -e^x, \qquad t_1 = -2e^x$$
$$y_2 = 3e^x, \qquad z_2 = -(1 + x)e^x, \qquad t_2 = -(3 + 2x)e^x$$
$$y_3 = (2 + 6x)e^x, \qquad z_3 = -(2x + x^2)e^x, \qquad t_3 = -(6x + 2x^2)e^x$$

ω

et par suite la solution générale est

$$\begin{aligned} y &= \lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3 \\ z &= \lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3 \\ t &= \lambda t_1 + \mu t_2 + \nu t_3. \end{aligned}$$

VI. — POINTS CRITIQUES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

Nous avons déjà étudié σ_2 les points critiques des systèmes d'équations. Considérons le système

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z).$$

σ_2 Nous avons d'abord montré l'existence de solutions holomorphes à l'intérieur de certains cercles. Nous avons prolongé ces solutions, de proche en proche, au-delà de ce cercle, lorsque le point x décrit un arc de courbe. Enfin, nous avons montré qu'on peut être arrêté sur cet arc en un certain point, si pour ce point x et pour les valeurs correspondantes y et z l'une des fonctions f ou f' cesse d'être holomorphe.

σ_2 Nous avons montré qu'il existe en général des points critiques fixes et des points critiques variables avec la solution envisagée. Si l'on peut connaître à l'avance les points x_1, y_1, z_1 pour lesquels f ou f_1 cessent d'être holomorphes, il est assez difficile de savoir si, en partant de valeurs initiales convenables y_0, z_0, la solution peut prendre les valeurs y_1, z_1, pour $x = x_1$.

L'étude des points critiques est, au contraire, particulièrement simple dans le cas des équations linéaires.

Nous allons montrer que *les intégrales ne peuvent admettre de point critique si ce n'est aux points critiques pour au moins l'un des coefficients.*

Considérons encore le cas de deux équations linéaires sous forme canonique

$$\frac{dy}{dx} = Ay + Bz, \qquad \frac{dz}{dx} = Cy + Dz$$

A, B, C, D étant des fonctions de x.

Si les quatre fonctions sont holomorphes aux environs de x_0,

ψ

nous allons montrer qu'il existe des solutions se réduisant à y_0, z_0 pour x_0. Ces solutions sont holomorphes dans un cercle de centre x_0, de rayon suffisamment petit.

Pour simplifier l'écriture nous supposerons $x_0 = 0$.

La démonstration sera exactement la même que dans le cas général.

δ_1

Aux environs de $x_0 = 0$, A, B, C, D, ont des développements de la forme

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

et de même pour B, C, D.

Ces développements sont valables à l'intérieur d'un cercle allant jusqu'au point critique le plus voisin. Si R désigne le rayon du cercle, en désignant par r une quantité légèrement inférieure à R, on peut déterminer une constante M, telle que l'on ait

$$| a_n | < \frac{M}{r^n}$$

et de même pour les coefficients de B, C, D.

δ_1, α

Nous chercherons alors à construire des développements

$$y - y_0 = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$
$$z - z_0 = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$$

δ_1

Nous déterminerons successivement les coefficients α, β, par substitutions dans les équations et par récurrence.

Enfin reste à montrer la convergence des séries ainsi construites.

Etant donné le mode de formation des coefficients successifs,

σ_2

ces séries sont convergentes dans un cercle de rayon au moins égal à celui des fonctions Y, Z satisfaisant à des équations

$$\frac{dY}{dX} = \mathcal{A}Y + \mathcal{B}Z$$
$$\frac{dZ}{dX} = \mathcal{C}Y + \mathcal{D}Z.$$

si les séries $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont des séries majorantes de A, B, C, D.

σ_1, α

Nous prendrons pour séries majorantes précisément les séries $\sum \frac{M}{r^k} X^k$, de sorte que nous considérons le système

$$\frac{dY}{dX} = \sum \frac{M}{r^k} X^k (Y + Z), \qquad \frac{dZ}{dX} = \sum \frac{M}{r^k} X^k (Y + Z).$$

Nous en déduirons $Y - Y_0 = Z - Z_0$. Puis en ajoutant les deux équations

$$\frac{d(Y+Z)}{dX} = 2\sum \frac{M}{r^k}(Y+Z)X^k, \qquad \frac{d(Y+Z)}{Y+Z} = 2\sum \frac{M}{r^k}X^k dX = \frac{2M}{1-\frac{X}{r}}dX$$

si $X < r$.

α

En intégrant,

$$Y + Z = k\left(1 - \frac{X}{r}\right)^{-2Mr} + \text{const.}$$

ρ

On constate bien que cette expression et par suite séparément Y et Z sont développables en série entière tant que $X \leq r$, et par conséquent les solutions y et z sont développables dans un cercle de rayon au moins égal.

Traçons alors un arc L ne passant par aucun point critique des coefficients. Marquons dans le plan les points critiques de A, B, C, D. Soit δ la plus courte distance de ces points à l'arc.

α

Décomposons alors l'arc en arcs partiels moindres que δ et traçons les cercles successifs ayant pour centres les points de division et de rayon égal à δ. Les développements seront valables dans ces cercles successifs. On sera donc bien certain d'atteindre un point quelconque de l'arc L, les rayons des cercles étant ici tous égaux et finis.

o

ω

Nature des points critiques. — Pour étudier la nature des points critiques des solutions, nous ramènerons le système à une seule équation différentielle d'ordre n. Cette équation sera donc linéaire à coefficients en général variables, mais uniformes

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0. \tag{1}$$

Cette étude nous conduira à une forme nécessaire des solutions y et par suite à une *méthode de recherche* de ces solutions.

Soit a un point critique pour l'une des solutions, point qui doit être critique pour l'un au moins des coefficients a_i.

Nous supposerons les fonctions $a_1, a_2, \ldots a_n$ holomorphes dans un certain champ, sauf en certains points de ce champ.

Soit a l'un de ces points critiques et soit une solution prenant la valeur y_0 pour un point de départ x_0 voisin de a. Faisons décrire

à x un petit contour fermé entourant a et suivons par continuité les variations de y.

Lorsque le point x reviendra en x_0, la solution y peut ne pas reprendre la valeur de départ y_0 (si elle n'est pas uniforme).

Mais remarquons que les fonctions a_i, étant supposées uniformes, reprennent en x_0 les mêmes valeurs et par conséquent, l'équation différentielle est redevenue la même qu'au point de départ.

Rotation autour d'un point critique. — Donnons-nous alors un système de n solutions indépendantes $y_1, y_2, \dots y_n$. Après rotation, ces solutions auront pris des valeurs $y'_1, y'_2, \dots y'_n$ et comme l'équation différentielle est redevenue la même, chacune de ces nouvelles solutions doit pouvoir s'exprimer en fonction linéaire de $y_1, y_2, \dots y_n$. On aura ainsi des formules de transformation telles que

$$(I)\qquad \begin{cases} y'_1 = c_{11}y_1 + c_{21}y_2 + \dots + c_{n1}y_n \\ y'_2 = c_{12}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{n2}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n = c_{1n}y_1 + c_{2n}y_2 + \dots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

tous les c désignant des constantes déterminées.

Il est bien évident que, si l'on connaît ainsi les transformations subies par les solutions indépendantes $y_1, y_2, \dots y_n$, on peut connaître la transformation subie par une autre solution quelconque z.

Elle est de la forme

$$z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n.$$

Après rotation, elle sera changée en

$$z' = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \dots + \alpha_n y'_n.$$

On peut ainsi considérer un deuxième groupe de solutions indépendantes

$$(II)\qquad \begin{cases} z_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \dots + \alpha_{n1}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n, \end{cases}$$

Après rotation elles se transformeront en

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} z'_1 = \alpha_{11}y'_1 + \alpha_{21}y'_2 + \cdots + \alpha_{n1}y'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z'_n = \alpha_{1n}y'_1 + \alpha_{2n}y'_2 + \cdots + \alpha_{nn}y'_n. \end{cases}$$

Dans ces expressions, il faudra remplacer les y' en fonction linéaire des y par les formules de transformation (I) mais ensuite, α, ν nous pourrons remplacer les y en fonction linéaire des z, en résolvant les formules (II), ce qui est possible, π puisque, les solutions étant indépendantes, le déterminant des α est différent de zéro. ρ, ω

Nous avons donc finalement les z' en fonction linéaire des z par des formules de transformation absolument analogues à (I). ψ

Quel avantage pouvons-nous espérer de la substitution des z aux y ? ψ, R_1 C'est que nous pouvons essayer de profiter de l'indétermination des α α_1 pour simplifier le plus possible les transformations subies par le système des solutions indépendantes.

Simplification du tableau des transformations : Equation en S. — α, ν

Cherchons, par exemple, s'il ne peut exister une solution z

$$z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n$$

qui, après rotation, soit simplement multipliée par un facteur constant s. Sa transformée sera

$$z' = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \cdots + \alpha_n y'_n$$

c'est-à-dire

$$z' = \alpha_1(c_{11}y_1 + c_{21}y_2 + \cdots + c_{n1}y_n) + \cdots + \alpha_n(c_{1n}y_1 + c_{2n}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n).$$

β

On devra donc avoir

$$z' = sz = s(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n).$$

Comme les solutions y_1, y_2,... y_n sont indépendantes, une telle

identité n'est possible que si tous les coefficients des y sont séparément nuls. On a donc

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} \alpha_1(c_{11}-s) + \alpha_2 c_{12} + \cdots + \alpha_n c_{1n} = 0 \\ \alpha_1 c_{21} + \alpha_2(c_{22}-s) + \cdots + \alpha_n c_{2n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + \cdots + \alpha_n(c_{nn}-s) = 0. \end{cases}$$

Ce sont n équations linéaires et homogènes en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Il faut donc que le déterminant des coefficients soit nul, c'est-à-dire que s vérifie l'équation « fondamentale »

$$\text{(6)}\quad \begin{vmatrix} c_{11}-s, & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-s & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-s \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une équation de degré n en s. Elle admet n racines réelles ou imaginaires. Pour chacune de ces racines, les équations (V) deviennent compatibles et déterminent en général les rapports des α c'est-à-dire la solution z correspondante, à un facteur constant près.

Supposons alors toutes les racines de (6) distinctes $s_1, s_2, \ldots s_n$. On aura n solutions $z_1, z_2, \ldots z_n$ qui, après rotation autour du point critique, prennent les valeurs

$$z'_1 = s_1 z_1, \quad z'_2 = s_2 z_2, \quad \cdots z'_n = s_n z_n.$$

Il faut voir si ces n solutions sont indépendantes. Il en est bien ainsi : Supposons, en effet, qu'il existe entre ces solutions, une relation de la forme

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n = 0$$

(les λ étant des constantes), qui soit satisfaite quel que soit x. En faisant décrire à x un petit contour fermé autour du point critique, on aura la nouvelle relation

$$\lambda_1 s_1 z_1 + \lambda_2 s_2 z_2 + \cdots + \lambda_n s_n z_n = 0.$$

Après un nouveau tour, on aura

$$\lambda_1 s_1^2 z_1 + \lambda_2 s_2^2 z_2 + \cdots + \lambda_n s_n^2 z_n = 0$$

et après $(n-1)$ tours,

$$\lambda_1 s_1^{n-1} z_1 + \lambda_2 s_2^{n-1} z_2 + \cdots + \lambda_n s_n^{n-1} z_n = 0.$$

Ce sont des équations que l'on peut considérer comme linéaires et homogènes en $\lambda_1 z_1$, $\lambda_2 z_2$,... $\lambda_n z_n$. Il faudrait donc que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_n \\ s_1^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1^{n-1} & \cdots & \cdots & s_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

soit nul. ρ, σ₂ C'est un déterminant de Vandermonde différent de zéro π puisque toutes les racines sont distinctes. ω

Les solutions z_1, z_2,... z_n forment donc bien un système indépendant et l'on peut le prendre comme système de base.

Nous verrons d'ailleurs, que cette seule propriété pour la fonction z, de se retrouver multipliée par un facteur constant, après rotation autour du point critique, permet de déterminer la nature de ce point critique, d'en déduire la forme nécessaire de cette solution et par conséquent de la déterminer par de simples opérations d'identification.

Remarque. — Il est bien évident que la définition et l'existence des solutions z, qui sont simplement multipliées par un facteur constant après rotation, est indépendante du système des solutions sur lesquelles on s'est appuyé pour les déterminer. ξ, ω Si donc l'on était parti d'un autre système de solutions indépendantes, on aurait obtenu pour déterminer les facteurs s une équation analogue à (6). Cette équation aurait dû avoir les mêmes racines. ω Donc les racines de cette équation sont invariantes et par conséquent aussi les coefficients de l'équation. C'est un résultat qu'il est aisé de vérifier pour les termes constants de l'équation. Le déterminant des c $(\Delta(c))$ est invariant.

Voyons maintenant le cas des racines multiples. ξ

Racines multiples : Formation d'un système de base. — S'il y a k racines distinctes, s_1, s_2,... s_k, on peut bien encore déterminer les solutions correspondantes, mais c'est insuffisant.

Nous allons montrer que :

On peut toujours déterminer un système de n solutions indépendantes jouissant des propriétés suivantes :

1° *Elles se groupent en plusieurs classes. Les solutions d'une même classe,* $z_1, z_2, \ldots z_k$ *sont telles que, par une rotation autour du point critique, elle se transforment respectivement en*

$$sz_1, \quad s(z_2 + z_1) \cdots s(z_k + z_{k-1}) \tag{7}$$

s désignant une constante qui peut être la même pour plusieurs groupes.

2° *Ce facteur s racine de l'équation caractéristique mais le nombre total des intégrales qui sont affectées de ce facteur (dans un ou plusieurs groupes) est égal à l'ordre de multiplicité de cette racine s.*

Il faut bien remarquer qu'il n'est pour ainsi dire plus question d'équation différentielle. On a simplement des fonctions $y_1, y_2, \ldots y_n$ auxquelles on impose des transformations exprimées par le tableau (I) : Existe-t-il d'autres fonctions dépendant linéairement des y dont les transformations soient représentées par les formules (7) ?

Nous voulons démontrer l'existence de combinaisons linéaires z subissant les transformations (7) dans le cas de n fonctions.

Nous allons montrer que, si cette propriété existe dans le cas de $(n-1)$ fonctions, elle existe aussi dans le cas de n fonctions.

Nous avons un système de n fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, z$ qui éprouvent les transformations représentées par

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} y'_1 = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots a_{n-1}y_{n-1} + a_nz \\ y'_2 = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_nz \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_{n-1} = l_1y_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + l_nz \\ z' = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + sz. \end{cases}$$

Si on supposait $z = 0$, on aurait des fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ qui subiraient les transformations

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} y'_1 = a_1y_1 + \cdots + a_{n-1}y_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_{n-1} = l_1y_1 + \cdots + l_{n-1}y_{n-1}. \end{cases}$$

Ce sont des formules de transformation sur $(n-1)$ fonctions.

σ_2, ξ

Par hypothèse, nous supposons qu'on puisse déterminer des fonctions linéaires des y jouissant des propriétés (7), et qui se groupent en une ou plusieurs classes

$$z_1, z_2, \cdots z_\mu, \qquad t_1, t_2, \cdots t_\nu.$$

Si l'on rétablit z, c'est-à-dire si les y et z subissent les transformations totales (I), on voit que z, z_1, z_2,... z_μ se changent en

(III) $$sz, \quad s_1 z_1 + \alpha_1 z, \quad s_1(z_1 + z_2) + \alpha_2 z \cdots s_1(z_\mu + z_{\mu-1}) + \alpha_\mu z$$

t_1, t_2,... t_ν seront changées de même en

$$s_2 t_1 + \beta_1 z, \qquad s_2(t_2 + t_1) + \beta_2 z \cdots$$

Prenons le groupe des z.

α, α_2

Nous allons faire des combinaisons linéaires des z de manière à simplifier encore les formules (III).

ψ δ_1

On peut faire disparaître $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$. Considérons en effet les fonctions

$$Z_1 = z_1 + \lambda_1 z \cdots \qquad Z_\mu = z_\mu + \lambda_\mu z.$$

o

Par la transformation, Z_1 devient

$$s_1 z_1 + \alpha_1 z + \lambda_1 s z = s_1 Z_1 + \alpha'_1 z$$

en posant

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \lambda_1(s - s_1)$$

Z_i sera transformé en

$$s_1(z_i + z_{i-1}) + \alpha_i z + s\lambda_i z = s_1(Z_i + Z_{i-1}) + \alpha'_i z.$$

en posant

$$\alpha'_i = \alpha_i + s\lambda_i - s_1(\lambda_i + \lambda_{i-1}) = \alpha_i - s_1\lambda_{i-1} + \lambda_i(s - s_1).$$

j, β

Si l'on veut que α'_1,... α'_i... soient nuls, il faut poser

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + \lambda_1(s - s_1) = 0 \cdots \alpha'_i = \alpha_i - s_1\lambda_{i-1} + \lambda_i(s - s_1) = 0$$

ρ, α

Si $s \not\equiv s_1$, la première de ces relations déterminera λ_1, les suivantes détermineront successivement, sans impossibilité, λ_2, λ_3,... λ_i,... λ_μ.

δ_1

Si $s = s_1$, on aura $\alpha'_1 = \alpha_1$, mais on pourra disposer de λ_1 de manière à annuler α'_2...

Supposons pour fixer les idées qu'on ait $s = s_1 = s_2 \neq s_3$.
Le tableau des transformations sera le suivant :

(IV)

z	se change en	sz
Z_1	»	$sZ_1 + \alpha_1 z$
Z_2	«	$s(Z_2 + Z_1)$
.....		
Z_μ	»	$s(Z_\mu + Z_{\mu-1})$
T_1	»	$sT_1 + \beta_1 z$
T_2	»	$s(T_2 + T_1)$
.....		
T_ν	»	$s(T_\nu + T_{\nu-1})$
U_1	»	$s_3 U_1$
U_2	»	$s_3(U_2 + U_1)$
.....		

On peut encore simplifier, toujours en faisant des combinaisons linéaires simples sur ces solutions et profitant de l'indétermination des coefficients.

Supposons $\mu \geqslant \nu$ et $\alpha_1\beta_1 \neq 0$. Nous allons montrer qu'on peut faire disparaître β_1.

Prenons comme nouvelles fonctions

$$T'_1 = \alpha_1 T_1 - \beta_1 Z_1 \cdots T'_i = \alpha_1 T_i - \beta_1 Z_i.$$

Nous substituerons les T′ aux T.

Par la transformation, T'_1 deviendra

$$\alpha_1(sT_1 + \beta_1 z) - \beta_1(sZ_1 + \alpha_1 z) = s(\alpha_1 T_1 - \beta_1 Z_1) = sT'_1$$

T'_i deviendra

$$\alpha_1 s(T_i + T_{i-1}) - \beta_1 s(Z_i + Z_{i-1}) = s(T'_i + T'_{i-1})_1.$$

Le nouveau tableau de transformations sera donc analogue au précédent mais avec β_1 (et s'il y a lieu γ_1, etc.) nul.

On est donc ramené au cas où un seul des coefficients α_1 au plus, est différent de zéro. Si α_1 est lui-même nul, la transformation est effectuée. S'il n'est pas nul, faisons enfin le changement

$$Z_0 = \frac{\alpha_1}{s} z.$$

P

On voit que Z_1 se change en $s(Z_1 + Z_0)$, etc.

On a le tableau final des transformations.

(V)

$$\left\{\begin{array}{lll} Z_0 & \text{se change en} & sZ_0 \\ Z_1 & \text{»} & s(Z_1 + Z_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ Z_\mu & \text{»} & s(Z_\mu + Z_{\mu-1}) \\ T'_1 & \text{»} & sT'_1 \\ T'_2 & \text{»} & s(T'_2 + T'_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \end{array}\right.$$

ω

C'est la transformation indiquée.

Construction des intégrales. — Toute l'étude précédente a eu pour but d'établir une propriété *caractéristique* de certaines solutions, propriété qui va permettre, comme nous allons le voir, de trouver la forme nécessaire de ces solutions, et par suite, de les déterminer.

R, σ_2

Nous avons démontré, l'existence d'un groupe d'intégrales $z_0, z_1, \dots z_\mu$ qui, par la rotation autour du point critique, se transforment en

$$sz_0, \qquad s(z_1 + z_0) \cdots s(z_\mu + z_{\mu-1})$$

s désignant une racine de l'équation caractéristique.

Or, il est aisé de trouver des fonctions qui jouissent de la même propriété.

Pour la première, c'est immédiat.

σ_2

Nous connaissons des fonctions qui, après rotation autour d'un point critique, se retrouvent multipliées par un facteur constant. La fonction $u_0 = (x - x_0)^r$, après rotation autour de x_0, est multipliée par $e^{2\pi i r}$. Si donc nous déterminons r par la condition

$$e^{2\pi i r} = s, \qquad r = \frac{1}{2\pi i} \log s$$

la fonction $(x - x_0)^r$ sera bien, après rotation, multipliée par s.

D'autre part, parmi les fonctions qui subissent des transformations simples, nous savons que la fonction $\log (x - x_0)$, après rotation, augmente de $2\pi i$. Donc la fonction

$$0_1 = \frac{1}{2\pi i} \log (x - x_0)$$

augmente d'une unité après rotation.

ξ, δ1

Toute fonction du second degré en θ_1,

$$\theta_2 = a\theta_1^2 + b\theta_1 + c$$

se transforme en

$$\theta'_2 = a(\theta_1 + 1)^2 + b(\theta_1 + 1) + c = \theta_2 + 2a\theta_1 + b + a.$$

α

En particulier la fonction

$$\theta_2 = \frac{\theta_1(\theta_1 - 1)}{2}$$

se transforme en

$$\theta'_2 = \theta_2 + \theta_1.$$

α, ξ

Cela amène à considérer d'une façon générale la fonction

$$\theta_k = \frac{\theta_1(\theta_1 - 1)\cdots(\theta_1 - k + 1)}{k!}.$$

Après rotation, elle devient

$$\theta'_k = \frac{(\theta_1 + 1)\theta_1(\theta_1 - 1)\cdots(\theta_1 - k + 2)}{k!}.$$

ρ

Si nous écrivons le premier facteur $\theta_1 + 1 = (\theta_1 - k + 1) + k$, on voit immédiatement que

$$\theta'_k = \theta_k + \theta_{k-1}$$

ω

Ainsi, nous avons construit des fonctions u_0, θ_1, θ_2,... θ_k qui subissent des transformations analogues aux z.

θ_k est un polynôme de degré k en $\log(x - x_0)$.

ν, ξ

Posons alors

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} z_0 = (x - x_0)^r u_0 \\ z_1 = (x - x_0)^r(\theta_1 u_0 + u_1) \\ z_k = (x - x_0)^r(\theta_k u_0 + \theta_{k-1}u_1 + \cdots + \theta_1 u_{k-1} + u_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

u_0, u_1,... u_k désignant de nouvelles fonctions.

ρ

On voit immédiatement, d'après la première, que u_0 ne change pas par la rotation. ψ On vérifierait directement aussi

que u_1 ne change pas. Nous allons montrer *que toutes les fonctions* u_1, u_2,... u_k *restent invariantes par la rotation.*

Nous allons évidemment procéder par récurrence, supposer que la rotation ne modifie pas u_0, u_1,... u_{k-1} et montrer alors qu'elle ne modifie pas u_k. Supposons que u_k devienne $u_k + \Delta u_k$.

z_k se changerait en

$$\begin{aligned}
&= s(x-x_0)^r[u_0(\theta_k+\theta_{k-1}) + u_1(\theta_{k-1}+\theta_{k-2}) + \cdots + u_{k-1}(\theta_1+1) + u_k + \Delta u_k] \\
&= s(x-x_0)^r[u_0\theta_k + u_1\theta_{k-1} + \cdots + u_k] + s(x-x_0)^r[u_0\theta_{k-1} + \cdots + u_{k-1}] + s(x-x_0)^r\Delta u_k \\
&= s(z_k + z_{k-1}) + s(x-x_0)^r\Delta u_k.
\end{aligned}$$

Il faut donc bien que $\Delta u_k = 0$. La loi est donc générale.

Toutes les fonctions u sont donc des fonctions monodromes aux environs de x_0. *Elles sont donc développables en série de Laurent, à double sens, procédant suivant les puissances entières positives et négatives de* $(x - x_0)$.

On a donc bien obtenu la forme nécessaire des solutions z_0, z_1,... z_k. On introduira alors des développements u_i à coefficients indéterminés. En substituant dans l'équation différentielle, et annulant identiquement le résultat, on est certain que les équations obtenues seront compatibles et pourront déterminer tout ou partie des coefficients, certains d'entre eux pouvant rester arbitraires.

Il est bien évident que la détermination effective des coefficients des séries u_0, u_1,... sera en général très difficile.

Cette recherche sera évidemment très simplifiée si l'on pouvait être sûr que les développements des u_i ne comprennent pas des puissances négatives de $(x - x_0)$ c'est-à-dire si toutes les fonctions U_0, U_1,... U_k sont holomorphes aux environs de x_0.

On dit alors que les intégrales sont « régulières ».

Fuchs a démontré le théorème suivant :

Théorème de Fuchs. — *Etant donnée l'équation*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_n y = 0,$$

pour que, aux environs de x_0, les intégrales de l'équation soient régulières, il faut et il suffit que x_0 soit un point ordinaire ou tout au plus un pôle d'ordre i pour A_i.

Nous ne démontrerons pas ce théorème. Après avoir reconnu que cette condition est réalisée, nous allons montrer comment l'on peut obtenir la solution.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons $x_0 = 0$.

Par hypothèse le point $x = 0$ est un pôle d'ordre i au plus pour A_i. Si nous multiplions toute l'équation par x^n on aura l'équation

$$F(y) = x^n D^n y + B_1 D^{n-1} y + B_2 D^{n-2} y + \cdots + B_n y = 0.$$

On aura

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 x^n = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^n + \cdots \\
B_2 &= A_2 x^n = \beta_0 x^{n-2} + \beta_1 x^{n-1} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_i &= A_i x_n = \delta_0 x^{n-i} + \delta_1 x^{n-i+1} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_n &= A_n x_n = \lambda + \lambda_1 x + \cdots
\end{aligned}$$

Déterminons d'abord la première fonction de l'un des groupes dont nous avons montré l'existence, $z_0 = x^r u_0$.

Nous voyons que nous aurons à substituer dans l'équation des termes de la forme x^r. Formons $F(x^r)$.

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x nous aurons

$$F(x^r) = x^r \varphi_0(r) + x^{r+1} \varphi_1(r) + x^{r+2} \varphi_2(r) + \cdots$$

Nous posons

$$\begin{aligned}
\varphi_0(r) &= r(r-1)\cdots(r-n+1) + \alpha r(r-1)\cdots(r-n+2) + \cdots + \lambda \\
\varphi_1(r) &= \alpha_1 r(r-1)\cdots(r-n+2) + \beta_1 r(r-1)\cdots(r-n+3) + \cdots + \lambda_1 \\
\varphi_2(r) &= \alpha_2 r(r-1)\cdots(r-n+3) + \beta_2 r(r-1)\cdots(r-n+4) + \cdots + \lambda_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_i(r) &= \alpha_i r(r-1)\cdots(r-n+i+1) + \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire le résultat de la substitution de

$$z_0 = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + \cdots$$

o

On aura

$$\begin{aligned} F(z_0) &= c_0F(x^r) + c_1F(x^{r+1}) + \cdots \\ &= c_0[x^r\varphi_0(r) + x^{r+1}\varphi_1(r) + \cdots] \\ &+ c_1[x^{r+1}\varphi_0(r+1) + x^{r+2}\varphi_1(r+1) + \cdots] \\ &+ c_2[x^{r+2}\varphi_0(r+2) + \cdots] \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ρ

Il est ordonné suivant les puissances croissantes de x, à partir de x^r.

ω β

Pour que ce résultat puisse être identiquement nul, il faut d'abord que r soit racine de l'équation déterminante

$$\varphi_0(r) = 0$$

C'est une équation de degré n en r.

δ_1

On aura ensuite

$$\begin{aligned} &c_0\varphi_1(r) + c_1\varphi_0(r+1) = 0 \\ &c_0\varphi_2(r) + c_1\varphi_1(r+1) + c_2\varphi_0(r+2) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ρ

On voit que ces équations détermineront successivement c_1, c_2... à condition qu'aucune des quantités

$$\varphi_0(r+1) \qquad \varphi_0(r+2), \cdots \varphi_0(r+n) \cdots$$

ω

ne soit nulle, c'est-à-dire à condition que l'équation déterminante n'admette pas de racine différant de r d'un nombre entier positif. Le coefficient c_0 est arbitraire.

ρ, ω

On a donc une solution z_0 à un facteur constant près.

On aura autant de solutions analogues que l'équation $\varphi_0(r) = 0$ admet de racines r *qui ne soit suivie d'aucune autre différant d'un nombre entier.*

δ_1, ξ

Reste le cas des racines égales ou différant de r d'un nombre entier positif. Supposons qu'il existe trois racines différant d'un nombre entier. Rangeons-les par ordre de grandeur croissante $r < r' < r''$. Nous chercherons alors un développement de la forme

$$\begin{aligned} z = cx^r + c_1x^{r+1} + \cdots + (dx^r + d_1x^{r+1} + \cdots)\log x \\ + (ex^{r''} + e_1x^{r''+1} + \cdots)\log^2 x \end{aligned}$$

En faisant la substitution et annulant identiquement le résultat, on verrait que l'on peut déterminer successivement tous les coefficients c, d, e et qu'il reste trois coefficients indéterminés.

Comme $d_1, d_2, \ldots e_1, e_2 \ldots$ s'expriment d'une façon linéaire et homogène en fonction de d, e, si ces deux coefficients sont nuls, le développement ne renfermera aucun terme logarithmique.

ω

Ainsi, à chaque groupe de racines de l'équation $\varphi_0(r) = 0$, correspondent des solutions dépendant d'autant de constantes arbitraires. En ajoutant toutes les solutions partielles, on aura une solution générale dépendant de n constantes arbitraires.

Il est alors facile de montrer que les solutions d'un même groupe jouissent bien des propriétés qui ont conduit à leur détermination. Soit la solution

$$z_3 = x^r(X_0 + X_1 \log x + X_2 \log^2 x + X_3 \log^3 x).$$

δ, s

Par rotation autour de $x = 0$, elle devient

$$z_3' = sx^r[X_0 + X_1(\log x + 2\pi i) + X_2(\log x + 2\pi i)^2 + X_3(\log x + 2\pi i)^3]$$

c'est-à-dire

$$z_3' = s(z_3 + z_2)$$

ρ

z_2 désignant une expression de la forme

$$z_2 = x^r[(X_0' + X_1' \log x + X_2' \log^2 x].$$

δ1

Par rotation, celle-ci se transformera en

$$z_2' = sx^r(z_2 + z_1)$$

z_1 désignant une expression de la forme

$$z_1 = x^r(X_0'' + X_1'' \log x).$$

Celle-ci par rotation devient

$$s(z_1 + z_0)$$

z_0 désignant une expression $z_0 = x^r X''_0$.

Enfin par rotation, cette dernière se change simplement en sz_0.

ω

Ces solutions z_0, z_1, z_2, z_3 sont bien les solutions du groupe I.

Cas de l'intégrale rationnelle. — Etant donnée l'équation différentielle d'ordre n, on peut reconnaître *a priori* si l'intégrale générale est une fraction rationnelle et déterminer dans ce cas cette solution.

Tout d'abord *il est évidemment nécessaire que les coefficients soient rationnels.* Soient en effet n solutions particulières rationnelles indépendantes. La solution générale sera

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n.$$

Elle sera solution de l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y, & \mathrm{D}y, & \mathrm{D}^2 y & \cdots & \mathrm{D}^n y \\ y_1, & \mathrm{D}y_1, & \mathrm{D}^2 y_1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ y_n, & \mathrm{D}y_n, & \mathrm{D}^2 y_n & \cdots & \mathrm{D}^n y_n \end{vmatrix} = 0$$

C'est une équation linéaire dont tous les coefficients sont rationnels. En réduisant tous les coefficients au même dénominateur et chassant le dénominateur commun, on mettra l'équation sous la forme

$$\mathrm{A}_0 \mathrm{D}^n y + \mathrm{A}_1 \mathrm{D}^{n-1} y + \cdots + \mathrm{A}_n y = 0$$

tous les coefficients étant des polynômes en x.

Sous cette forme, les points critiques des solutions ne peuvent être que les points racines de $\mathrm{A}_0(x) = 0$ et le point ∞.

Aux environs de chacun des premiers points, l'intégrale générale sera certainement régulière. En effet aux environs du point a, la fraction rationnelle a un développement de la forme

$$\frac{1}{(x-a)^r}(\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots)$$

avec même r entier.

Reste le point ∞. Ce point pourrait être critique pour l'une des solutions, si le numérateur était de degré supérieur au dénominateur. Il est facile de faire en sorte que le point ∞ soit transformé en un point ordinaire. Choisissons en effet un point quelconque x_0 qui soit certainement ordinaire pour les solutions (il suffit qu'il ne soit pas racine de $\mathrm{A}_0(x) = 0$).

Faisons la transformation $x = x_0 + \frac{1}{t}$:

Pour l'équation différentielle transformée liant y à t, le

point ∞ sera certainement un point simple des solutions puisqu'il correspond à $x = x_0$.

δ_1 On sera alors certain que le développement de la solution $y(t)$ dans le domaine de l'infini, ne comprend que des puissances entières et positives de $\frac{1}{t}$.

L'intégrale ne pourra plus avoir de point critique qu'à distance finie. Ce ne peuvent être que les racines de $A_0(x) = 0$.

Les intégrales sont donc régulières aux environs de chaque point critique. σ_2 Donc d'après le théorème de Fuchs, il faut et il suffit que chaque racine a de $A_0(x) = 0$ soit tout au plus un pôle d'ordre i pour le coefficient A_i.

δ_1 Appliquant alors la méthode de Fuchs, α on formera l'équation caractéristique, $\varphi_0(r) = 0$, en substituant $(x - a)^r$ et annulant l'ensemble des termes de moindre degré.

β Toutes les racines de cette équation doivent être entières positives ou négatives. Mais cette condition n'est pas encore suffisante. Comme les racines diffèrent alors certainement de nombres entiers, β il faudra les ranger par ordre de grandeur croissante et on cherchera un développement de la forme indiquée

$$x^r X_0 + x^{r'} X_1 \log x + x^{r''} X_2 \log^2 x + \cdots + x^{r^h} X_h \log^h x$$

X_0, X_1,... X_h désignant des séries entières en x.

Il faudra que dans ces développements, les termes logarithmiques disparaissent. σ_2, φ Il suffit, comme nous le savons, que les premiers coefficients relatifs à ces termes logarithmiques soient nuls.

Si ces conditions sont remplies, ψ l'intégrale générale sera bien rationnelle, puisqu'elle n'admet que des pôles à distance finie ou infinie.

Il est alors possible de déterminer les fonctions rationnelles solutions, sans passer par leurs développements en série.

En effet, supposons que le point a (racine de A_0) soit pôle de la solution. ξ Soient $-r$, $-r'$,... les racines négatives de l'équation caractéristique relative à a. Si nous les supposons rangées par ordre de grandeur croissante, β la solution générale devra ren-

fermer $(x-a)^r$ en dénominateur. On a de même tous les facteurs du dénominateur et par suite ce dénominateur D ; quant au numérateur, il sera de degré inférieur au dénominateur pour la fonction $y(t)$ puisque le point ∞ est point simple des solutions.

On prendra donc une fraction

$$y = \frac{N}{D}$$

N étant un polynôme à coefficients indéterminés. En substituant dans l'équation, et annulant identiquement le résultat, on aura des relations linéaires entre les coefficients de N, qui détermineront un certain nombre de coefficients.

Si dans cette solution, il reste n coefficients arbitraires, l'intégrale générale sera rationnelle et on en aura la solution.

Sinon l'intégrale générale ne sera pas rationnelle, mais (à moins que les relations entre les coefficients ne soient pas compatibles), on aura déterminé toute une classe de solutions rationnelles, permettant de ramener l'intégration de l'équation à celle d'une équation d'ordre moindre.

Equation de Gauss. — Comme application, nous donnerons la résolution d'une équation proposée par Euler et généralisée par Gauss.

$$(ax^2 + bx + c)\frac{d^2y}{dx^2} + (dx + e)\frac{dy}{dx} + fy = 0.$$

On peut simplifier cette équation, par un simple changement linéaire de variable

$$x = \lambda y + \mu.$$

L'équation se transforme en une équation analogue.

On peut disposer de λ et μ de manière que les racines de A_0 soient 0 et 1. Le premier coefficient sera donc $x(1-x)$. Nous écrivons l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

car l'on peut évidemment disposer de α, β, γ de manière que les coefficients de $\frac{dy}{dx}$ et de y aient les valeurs données.

Il y a trois points critiques : $x = 0$, $x = 1$, qui annulent A_0, et le point ∞, comme nous le verrons.

1° $x = 0$. Les conditions du théorème de Fuchs sont satisfaites.

Les intégrales seront régulières. Cherchons une solution de la forme

$$y = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + \cdots + c_\lambda x^{r+\lambda} + \cdots$$

Nous obtiendrons l'équation caractéristique en annulant, dans le résultat, l'ensemble des termes de moindre degré ($r - 1$).

On obtient

$$c_0 r(r-1) + \gamma r c_0 = 0.$$

On obtient deux solutions.

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = 1 - \gamma.$$

Nous devons supposer $1 - \gamma$ non entier positif, c'est-à-dire γ non entier négatif.

Dans ce cas, à chacune d'elles correspond une solution particulière.

Pour avoir la relation entre les coefficients c_λ, annulons les termes en $x^{r+\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} &- c_\lambda (r+\lambda)(r+\lambda-1) + c_{\lambda+1}(r+\lambda+1)(r+\lambda) \\ &+ \gamma c_{\lambda+1}(r+\lambda+1) - c_\lambda(\alpha+\beta+1)(r+\lambda) - \alpha\beta c_\lambda \end{aligned}\right\} = 0$$

ou simplement

$$c_{\lambda+1} = c_\lambda \frac{(\alpha+r+\lambda)(\beta+r+\lambda)}{(1+r+\lambda)(\gamma+r+\lambda)}.$$

Comme

$$c_1 = c_0 \frac{(\alpha+r)(\beta+r)}{(1+r)(\gamma+r)},$$

on en déduit d'une façon générale

$$c_{\lambda+1} = c_0 \frac{(\alpha+r)(\alpha+r+1)\cdots(\alpha+r+\lambda)\times(\beta+r)(\beta+r+1)\cdots(\beta+r+\lambda)}{(1+r)(1+r+1)\cdots(1+r+\lambda)\times(\gamma+r)(\gamma+r+1)\cdots(\gamma+r+\lambda)}.$$

Pour $r = 0$, on a donc

$$c_{\lambda+1} = c_0 \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\lambda)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\lambda)}{1\cdot 2\cdots(1+\lambda)\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+\lambda)}$$

et par suite on a la série

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

C'est la série hypergéométrique convergente dans le cercle de rayon I. Nous désignerons cette solution par $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Pour la deuxième solution, $r_2 = 1 - \gamma$; on a $(1 - \gamma \neq 0)$.

$$c_{\lambda+1} = c_\lambda \frac{(\alpha+1-\gamma+\lambda)(\beta+1-\gamma+\lambda)}{(1+\lambda)(2-\gamma+\lambda)}.$$

Cette loi permettra de déterminer tous les coefficients $c_{\lambda+1}$, à moins que, pour une valeur de γ, on ait $2 - \gamma + \lambda = 0$, c'est-à-dire à moins que γ ne soit un nombre entier positif.

On peut alors écrire

$$c_{\lambda+1} = c_\lambda \frac{(\alpha'+\lambda)(\beta'+\lambda)}{(1+\lambda)(\gamma'+\lambda)}$$

en posant

$$\alpha' = \alpha + 1 - \gamma, \qquad \beta' = \beta + 1 - \gamma, \qquad \gamma' = 2 - \gamma.$$

On voit que la deuxième solution est

$$y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha', \beta', \gamma', x) = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

On a par suite la solution générale

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2$$

valable dans le cercle C_1 de centre origine de rayon unité.

Considérons maintenant le deuxième point critique $x = 1$.

Nous poserons, suivant l'usage, $t = 1 - x$.

L'équation se transforme en

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)(1-t)]\frac{dy}{dt} - \alpha\beta y = 0$$

c'est-à-dire

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)t]\frac{dy}{dt} - \alpha\beta y = 0$$

en posant

$$\gamma' = \alpha + \beta + 1 - \gamma.$$

ρ

On a donc exactement l'équation précédente avec le seul changement de γ'. ∂1 Elle admettra deux solutions

$$z_1 = F(\alpha, \beta, \gamma', t) = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)^{\frac{t}{2}}$$
$$z_2 = t^{1-\gamma'}F(\alpha+1-\gamma', \beta+1-\gamma', 2-\gamma', t)$$
$$= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \alpha-\beta, 1-x)$$

et par suite la solution générale

$$y = b_1 z_1 + b_2 z_2.$$

valable à l'intérieur du cercle C_2 de centre 1, passant par l'origine.

Point infini. — σ2 Nous savons que pour étudier une fonction à l'infini, nous devons faire le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ et étudier la fonction transformée dans le domaine de l'origine.

Aux environs de $t = 0$, y aurait un développement de la forme

$$y = c_0 t^r + c_1 t^{r+1} + \cdots$$

Si $r > 0$ le point $t = 0$, et par suite le point $x = \infty$ est point ordinaire pour y. Si $r < 0$, le point $x = \infty$ est un point critique.

Sans passer par la transformation, nous voyons que nous sommes amenés β à chercher un développement de la forme

$$y = \frac{c_0}{x^r} + \frac{c_1}{x^{r+1}} + \cdots + \frac{c_\lambda}{x^{r+\lambda}} + \cdots$$

∂1

Substituons et annulons identiquement le résultat qui sera ordonné suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

L'ensemble des termes de moindre degré, en x^{-r}, donnera

$$-r(r+1) + (\alpha+\beta+1)(r+1) - \alpha\beta = 0.$$

Cette équation admet deux racines

$$r_1 = \alpha, \qquad r_2 = \beta.$$

δ_1

En annulant alors les termes en $x^{r-\mu-1}$, on aura la relation entre les coefficients. On trouve

$$\frac{c_{\mu+1}}{c_\mu} = \frac{(r+\mu)(r+\mu+1-\gamma)}{(r+\mu+1-\alpha)(r+\mu+1-\beta)}.$$

Si $r = \alpha$, on a

$$\frac{c_{\mu+1}}{c_\mu} = \frac{(\alpha+\mu)(\alpha+\mu+1-\gamma)}{(\mu+1)(\alpha+\mu+1-\beta)}.$$

δ

On peut écrire

$$\frac{c_{\mu+1}}{c_\mu} = \frac{(\alpha+\mu)(\beta'+\mu)}{(\mu+1)(\gamma'+\mu)}$$

avec

$$\gamma' = \alpha+1-\beta \qquad \beta' = \alpha+1-\gamma$$

ω

Par suite, on a le développement

$$t_1 = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right).$$

δ_1

Si $r = \beta$, on trouve de même

$$t_2 = x^{-\beta} F\left(\beta+1-\gamma, \beta, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$$

et la solution générale

$$y = c_1 t_1 + c_2 t_2.$$

Le développement sera valable si $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, c'est-à-dire si $|x| > 1$ c'est-à-dire à l'extérieur du premier cercle C_1.

On voit que, à moins que α, β ne soient entiers négatifs, l'infini est un point critique.

ω, R

Ainsi donc, on a le développement de la solution générale dans les trois régions : 1° cercle C_1 ; 2° cercle C_2 ; 3° à l'extérieur de C_1.

Mais si l'on veut suivre une solution déterminée quand on passe d'une région à l'autre, il faut voir quelles sont les relations qui existent entre les coefficients a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

α, ξ

A cet effet, on considérera la région commune à C_1 et C_2.

δ_1

On prendra deux points x_0, x_1 dans cette région. Pour ces

deux points on pourra calculer avec autant d'approximation qu'c le veut les séries. On aura

$$a_1(y_1)_0 + a_2(y_2)_0 = b_1(z_1)_0 + b_2(z_2)_0$$
$$a_1(y_1)_1 + a_2(y_2)_1 = b_1(z_1)_1 + b_2(z_2)_1.$$

On aura donc b_1, b_2 en fonction de a_1, a_2.

De même, si l'on voulait avoir les relations entre les b et les par suite les relations entre les a et les c.

Variation des solutions. — L'intégrale y_2 admet comme point ci tique le point $x = 0$.

Prenons comme coupure l'axe des x. Les intégrales y_1, sont alors monodromes dans le plan coupé. Mais si l'on traverse coupure de haut en bas, y_1 ne change pas, mais, en raisc du facteur $x^{1-\gamma}$, x_2 est multiplié par

$$e^{2\pi i(1-\gamma)} = e^{-2\pi i\gamma}.$$

Donc la solution $y = a_1y_1 + a_2y_2$ se transforme en

$$y = a_1y_1 + a_2e^{-2\pi i\gamma}y_2.$$

Cela signifie que a_1 ne change pas et que a_2 est multipl par $e^{-2\pi i\gamma}$.

Si l'on traverse la coupure entre 1 et $+\infty$, c_1 est multipl par $e^{-2\pi i\alpha}$, et c_2 par $e^{-2\pi i\beta}$.

Ainsi on peut donc suivre une solution, déterminée au dépar dans tout le plan.

Systèmes incomplets d'équations différentielles. — Dans l chapitres précédents, consacrés à l'étude des systèmes d'équatio différentielles, nous avons considéré des systèmes *complets*, c'es à-dire comportant autant d'équations indépendantes (n) que c fonctions inconnues, permettant de définir des solutions ne dépe dant que de n constantes.

Nous avons montré comment, par des dérivations, l'on pouva obtenir une seule équation à une seule inconnue.

Mais il faut remarquer que les équations dérivées ainsi obt

nues sont plus générales que les équations données ; par suite, il est possible que cette équation finale soit trop générale. Quand on l'aura β intégrée et qu'on en aura déduit les valeurs des autres inconnues, une substitution dans le système sera nécessaire et l'on sera conduit à réduire la généralité du système de solutions.

Enfin, on ne peut prévoir le degré de généralité de ces solutions.

Si le système est linéaire, γ nous l'avons d'abord réduit à un système d'équations du premier ordre, que nous avons mis sous la forme canonique, ou nous avons ramené le système à une seule équation linéaire.

σ_1 Nous avons, dans chacun de ces cas, défini les solutions ou les systèmes de solutions indépendantes, et obtenu la forme générale quand on connaît n solutions indépendantes.

Mais, en dehors du cas des équations à coefficients constants, nous n'avons pu déterminer ces solutions elles-mêmes.

Nous allons maintenant étudier les systèmes *incomplets* d'équations, c'est-à-dire les systèmes dans lesquels le nombre m d'équations est moindre que le nombre n de fonctions inconnues.

Nous donnerons une méthode pour résoudre *effectivement* les systèmes d'équations *linéaires d'ordres quelconques à coefficients quelconques* qui nous permettra d'obtenir *sans aucun signe de quadrature* la solution la plus générale du système, en général, au moyen de $(n - m)$ fonctions arbitraires.

De plus, si le système est complet, cette méthode nous fournira une seule équation *nécessaire et suffisante* dont la solution entraînera, *sans qu'il soit nécessaire de faire de substitution*, la solution la plus générale du système donné.

Puisque l'on a à intégrer un système, au lieu de faire des dérivations comme dans la méthode précédente, indiquée pour les systèmes complets (opération en quelque sorte inverse et qui donne des équations trop générales), nous ne ferons jamais que des intégrations qui nous donneront chaque fois des systèmes équivalents, des équations nécessaires et suffisantes.

Enfin notre analyse, ainsi serrée, nous révèlera les cas d'incompatibilité ou de dépendance, s'ils existent.

Nous prendrons le système *tel qu'il est donné.*

En prenant par exemple trois inconnues y, z, t, (le raisonnement se généralisera de lui-même) la première équation renferme linéai-

rement les dérivées de y, z, t jusqu'aux ordres maximums respectivement, α, β, γ.

Nous désignerons une telle équation par la notation

$$L(y^{\alpha}, z^{\beta}, t^{\gamma}) = 0.$$

Ceci étant posé, considérons le groupe de termes renfermant y

$$a_{\alpha}y^{\alpha} + a_{\alpha-1}y^{\alpha-1} + \cdots + a_0 y = \Sigma a_k y^k,$$

les coefficients a étant des fonctions données de x.

Intégrons toute l'équation et appliquons à chacune des intégrales la formule *d'intégration par parties* autant que nous le pourrons. Nous aurons

$$\int a_k y^k dx = a_k y^{k-1} - \int a'_k y^{k-1} dx$$

$$= a_k y^{k-1} - a'_k y^{k-2} + \cdots + (-1)^k \int a_k^k y dx.$$

Nous obtiendrons une intégrale portant sur y seulement.

Si nous en faisons autant sur tous les termes en y, nous obtiendrons une partie tout intégrée, dépendant linéairement des dérivées de y jusqu'à l'ordre $(\alpha - 1)$ et une intégrale $\int A y dx$

$$A = (-1)^{\alpha}\left(a_{\alpha}^{\alpha} - a_{\alpha-1}^{\alpha-1} + a_{\alpha-2}^{\alpha-2} \cdots + a_0\right).$$

De même l'intégration des termes en z et en t conduira à des intégrales $\int Bz dx$, $\int Ct dx$, B et C étant des fonctions connues de x.

En désignant d'autre part par D le terme, (fonction de x), indépendant des inconnues, nous obtenons une équation de la forme

$$(2) \qquad L(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t^{\gamma-1}) + \int (Ay + Bz + Ct + D) dx = \text{const.}$$

Cette équation est une conséquence nécessaire et suffisante de l'équation donnée.

Nous supposerons $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

Si $C \not\equiv 0$ nous introduirons une nouvelle inconnue t_1, en posant

$$(3) \qquad Ay + Bz + Ct + D = t'_1.$$

L'équation deviendra

$$(4) \qquad L(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t^{\gamma-1}) + t_1 = 0.$$

en englobant la constante dans la fonction t_1. Le système (3) (4) est équivalent à l'équation (2), et par suite à l'équation donnée. De (3), on peut déduire t en fonction de y, z, t_1' sous une forme que nous écrivons

$$t = l(y, z, t_1'). \tag{3'}$$

Si nous substituons cette expression dans (4), nous obtiendrons une équation de la forme

$$L(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t_1^{\gamma}) = 0. \tag{5}$$

L'ordre maximum des dérivées de y et z ne sera, en effet, pas changé puisque $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

Cette équation (5) a le même degré de généralité que l'équation de départ. Si l'on connaît des fonctions y, z, t_1 qui y satisfont, l'équation (3') donnera t, et par élimination de t_1, on obtiendra l'équation donnée.

Or, dans cette équation, les dérivées de t_1, figurent jusqu'à l'ordre γ, et certainement jusqu'à cet ordre, les dérivées de y et z seulement jusqu'aux ordres $(\alpha - 1)$, $(\beta - 1)$.

Si $\beta = \gamma$, les termes d'ordre le plus élevé en z seront

$$b_\beta z^{\beta-1} - \frac{B}{C} c_\beta z^{\beta-1}.$$

Ces termes pourraient eux-mêmes disparaître, et l'ordre de dérivation en z serait encore réduit, si

$$\frac{b_\beta}{c_\beta} = \frac{B}{C}.$$

Nous avons supposé $C \not\equiv 0$. Si $C = 0$ et si $B \not\equiv 0$, nous poserons

$$Ay + Bz + D = z_1', \tag{3'}$$

z_1 remplaçant z. L'équation (2) pourra s'intégrer et donnera

$$L(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t^{\gamma-1}) + z_1 = 0. \tag{4'}$$

En éliminant z entre (3') et (4') nous obtiendrons une équation de la forme.

$$L(y^{\alpha-1}, z_1^{\beta}, t^{\gamma-1}) = 0.$$

Les termes en t ne seront en effet pas changés, et les dérivées de y ne figureront que jusqu'à l'ordre $(\alpha - 1)$ au plus. Les termes d'ordre le plus élevé pourraient même disparaître si $\alpha = \beta$.

Si $B = 0$, $C = 0$, $A \not\equiv 0$, nous prendrions une nouvelle inconnue y_1, en posant

$$Ay + D = y'_1.$$

Nous arriverions à une équation

$$L(y_1^{\alpha}, z^{\beta-1}, t^{\gamma-1}) = 0,$$

les dérivées de z et de t restant inchangées.

Enfin, si dans le groupe linéaire final sous le signe $\int$, on avait $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, l'équation donnée se met sous la forme

$$DL(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t^{\gamma-1}) + D = 0.$$

Si l'on peut effectuer le quadrature $\int D dx$, on obtiendra une nouvelle équation linéaire dans laquelle les ordres de dérivation maxima *seront tous trois diminués d'une unité.* Si l'on ne peut effectuer cette quadrature, on sera obligé d'introduire un terme D_1, compliqué de quadrature, mais c'est alors comme si on avait donné l'équation

$$L(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t^{\gamma-1}) + D_1 = 0,$$

On ne peut évidemment, dans ce cas, éviter les signes de quadrature.

Continuons la réduction. On est arrivé, par exemple, à une équation

$$L(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t_1^{\gamma}) = 0.$$

Si l'on a encore $\beta - 1 \geqslant \gamma$, on pourra, par le même procédé faire une nouvelle substitution, qui réduira encore de deux unités, les ordres de dérivation maxima de deux des inconnues.

Si l'on a pris, par exemple, une nouvelle inconnue t_2, l'inconnue initiale t s'exprimera en fonction linéaire connue des dérivées de y et z jusqu'au premier ordre, des dérivées de t_2 jusqu'au second ordre, sous la forme

$$t = l(y', z', t''_2).$$

On pourra ainsi, par des substitutions successives faites sur les trois variables, *réduire d'autant d'unités qu'on le veut les ordres de dérivation maxima des inconnues.*

La seule précaution à prendre, lorsqu'on a intégré par parties, et mis l'équation sous la forme

$$\mathrm{DL}(y^{\alpha-1}, z^{\beta-1}, t^{\gamma-1}) + Ay + Bz + Ct + D = 0,$$

consiste à faire la substitution sur celle des variables qui figure dans le groupe linéaire restant $(Ay + Bz + Ct + D)$ et dont l'ordre de dérivation maximum est le moins élevé dans l'équation traitée.

On introduit ainsi de nouvelles inconnues successives, t_1, t_2,... z_1... y_1... *et l'on peut, par de simples substitutions, suivre les variations subies par les inconnues initiales.*

On arrivera certainement ainsi à une équation dans laquelle l'ordre de dérivation d'une inconnue est zéro (celle d'une autre l'unité), c'est-à-dire à une équation de la forme

$$\mathrm{L}(\eta^h, \zeta', \tau) = 0,$$

entre des inconnues finales η, ζ, τ.

Les inconnues initiales y, z, t, seront des expressions linéaires connues des dérivées de η, ζ, τ.

Or, si cette équation finale renferme τ, on pourra la résoudre, *sans quadrature*, sous la forme

$$\tau = l(\eta^h, \zeta').$$

En substituant cette expression de τ dans les expressions connues de y, z, t, on aura les expressions les plus générales des fonctions inconnues y, z, t, au moyen de deux fonctions arbitraires η, ζ.

Si l'équation finale ne renferme pas τ, on pourra poursuivre la réduction sur ζ, et on résoudra la nouvelle équation par rapport à ζ_1, sans quadrature.

On aura alors y, z, t au moyen de deux fonctions arbitraires η, τ.

Ainsi donc, dans tous les cas, on pourra avoir les expressions les plus générales de y, z, t, *par de simples substitutions successives, et sans aucune intégration, au moyen de deux fonctions arbitraires* φ *et* ψ. *Les inconnues* y, z, t, *s'expriment linéairement au moyen de dérivées de* φ *et* ψ, *jusqu'à un certain ordre.*

On peut obtenir à l'avance, et suivant les cas, les formes générales des expressions de y, z, t (Cf. Mém. de l'Aut., *Journal Ec. Polyt.*, 2me série, cahier nº 28).

La généralisation à un nombre quelconque d'inconnues est évidente.

Systèmes d'équations. — L'application à un système est alors immédiate. En prenant une des équations, on peut avoir les expressions les plus générales des fonctions satisfaisant à cette équation au moyen de $(n-1)$ fonctions inconnues nouvelles. Les fonctions initiales s'expriment linéairement au moyen des dérivées de ces fonctions inconnues.

En substituant ces expressions dans les équations restantes, il reste un système de $(m-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues, que l'on traitera par le même procédé.

De proche en proche, on pourra donc finalement obtenir toutes les inconnues initiales au moyen de $(n-m)$ fonctions arbitraires.

Système complet. — Si le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues ($n = m$), on arrivera à une seule équation linéaire, à une seule inconnue η. Cette seule équation *sera nécessaire et suffisante.* Toutes les fonctions initiales s'exprimeront linéairement au moyen des dérivées de cette fonction η : aucune substitution, aucune identification, aucune réduction de généralité ne seront nécessaires.

Cette équation finale fixera le nombre de constantes arbitraires dont dépend la solution du système.

On peut d'ailleurs étudier à l'avance l'ordre de l'équation résultante (Voir pour plus de détails le mémoire précité.)

Systèmes d'équations de la forme : $f(dx_1, dx_2, \cdots dx_n, t) = 0$.
Nous supposons une équation de la forme

$$f(dx_1, dx_2, \cdots dx_n, t) = 0,$$

entre n fonctions inconnues x_1, x_2... x_n, d'une variable indépendante t, naturellement homogène en dx_1, dx_2, ... dx_n, *mais ne dépendant pas de la différentielle dt.*

Telles sont par exemple les équations

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - ds^2 = 0, \qquad dz^2 = dx\,dy,$$

entre les coordonnées et l'arc d'une courbe gauche, considérés comme fonctions d'un paramètre t.

La fonction f peut dépendre de t, d'une manière *absolument quelconque.*

Nous allons montrer que *l'on peut* dans tous les cas, et *sans signe de quadrature, intégrer une telle équation*, ou *un système de telles équations*, c'est-à-dire déterminer, au moyen d'un nombre conve-

nable de fonctions inconnues, les fonctions les plus générales satisfaisant aux équations données.

Soit un tel système

$$f_1(dx_1, dx_2, \cdots dx_n, t) = 0, \cdots f_k(dx_1, dx_2, \cdots dx_n, t) = 0.$$

Les équations étant homogènes en dx_1, dx_2 ... dx_n, ne renfermeront, par exemple, que les rapports

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \xi_1, \qquad \frac{dx_2}{dx_n} = \xi_2, \cdots \qquad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \xi_{n-1}.$$

Elles pourront s'écrire

$$f_1(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{n-1}, 1, t) = 0, \cdots f_k(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{n-1}, 1, t) = 0.$$

Ce sont là de simples équations *finies* entre les $(n-1)$ variables ξ_1, ξ_2, ... ξ_{n-1} et t. Nous pouvons résoudre d'une manière quelconque ce système fini et obtenir les expressions de ξ_1, ξ_2, ... ξ_{n-1} au moyen de $(n-1-k)$ fonctions arbitraires de t. Soient $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ ces fonctions supposées *connues* de t. Nous aurons ensuite à intégrer le système

$$\frac{dx_1}{dx_n} = a_1, \qquad \frac{dx_2}{dx_n} = a_2, \cdots \qquad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = a_{n-1}.$$

Nous allons montrer que, *quelles que soient les fonctions* $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ et par conséquent quel que soit le système donné, *on peut disposer de la fonction* x_n, qui peut être choisie arbitrairement, en la prenant sous une forme convenable, mais en lui laissant toute sa généralité, *de manière à effectuer, sans aucun signe de quadrature, toutes ces intégrations.*

Prenons la première équation

$$dx_1 = a_1(t)dx_n, \qquad x_n = \theta(t).$$

En intégrant par parties, on aura

$$x_1 = \int a_1\theta' dt = a_1\theta - \int a'_1\theta dt.$$

Faisons un changement de fonction arbitraire, en posant

$$a'_1\theta = \theta'_1, \qquad \theta = \frac{\theta'_1}{a'_1},$$

θ_1 pourra être une fonction arbitraire comme l'était θ. Il viendra

$$x_1 = \frac{a_1}{a'_1}\theta'_1 - \theta_1, \qquad x_n = \frac{\theta'_1}{a'_1}.$$

On a donc x_1 et x_n sans signe de quadrature au moyen de θ_1. Nous aurons ensuite

$$dx_2 = a_2 dx_n = a_2\theta' dt.$$

En intégrant,

$$x_2 = a_2\theta - \int a'_2\theta dt = a_2\theta - \int \frac{a'_2}{a'_1}\theta'_1\, d\iota.$$

En intégrant encore par parties,

$$x_2 = a_2\theta - \frac{a'_2}{a'_1}\theta_1 + \int \theta_1\left(\frac{a'_2}{a'_1}\right)' dt.$$

Faisons le nouveau changement de fonction arbitraire

$$\theta_1\left(\frac{a'_2}{a'_1}\right)' = \theta'_2.$$

θ_2 désignant la nouvelle fonction arbitraire, nous en déduirons successivement θ_1, puis θ et on aura alors

$$x_2 = a_2\theta - \frac{a'_2}{a'_1}\theta_1 + \theta_2.$$

Nous voyons bien que, de proche en proche, et par des substitutions successives, *nous pourrons obtenir sans quadrature les expressions les plus générales de* x_n, x_1, x_2, ... x_{n-1}, au moyen d'une fonction arbitraire θ_{n-1}.

D'ailleurs, il faut remarquer que les formules de transformation et les expressions successives de $x_n, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ sont absolument indépendantes du système d'équations différentielles donné.

Toutes réductions faites, nous avons obtenu les formules de transformation suivantes :

Désignons par D $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ le déterminant

$$D(x_1, x_2, \cdots x_k) = \begin{vmatrix} x'_1, x'_2, \cdots x'_k \\ x''_1, x''_2, \cdots x''_k \\ \\ x^k{}_1, x^k{}_2, \cdots x^k{}_k \end{vmatrix}$$

On aura les formules de transformation successives

$$\theta a'_1 = \theta'_1, \qquad \theta_1 \left(\frac{a'_2}{a'_1}\right)' = \theta'_2, \qquad \theta_2 \left[\frac{D(a_1, a_1)}{D(a_1, a_2)}\right]' = \theta'_3$$

$$\theta_{k-1} \left[\frac{D(a_1, a_2, \cdots a_{k-2}, a_k)}{D(a_1, a_2, \cdots a_{k-2}, a_{k-1})}\right]' = \theta'_k.$$

Les expressions des inconnues successives sont

$$x_n = \theta, \qquad x_1 = a_1\theta - \theta_1, \qquad x_2 = a_2\theta - \frac{a'_2}{a'_1}\theta_1 + \theta_2$$

$$x_k = a_k\theta - \frac{a'_k}{a'_1}\theta_1 + \frac{D(a_1, a_k)}{D(a_1, a_2)}\theta_2 - \frac{D(a_1, a_2, a_k)}{D(a_1, a_2, a_3)}\theta_3 \cdots$$

$$\pm \frac{D(a_1, a_2, \cdots a_{k-2}, a_k)}{D(a_1, a_2, \cdots a_{k-2}, a_{k-1})}\theta_{k-1} \mp \theta_k.$$

Applications. — I. *Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.*

On désigne ainsi les courbes gauches dont les coordonnées x, y, z, fonctions d'un paramètre u, satisfont à la condition

$$(1) \qquad a(yz' - zy') + b(zx' - xz') + c(xy' - yx') + hx' + ky' + lz' = 0,$$

a, b, c, h, k, l désignant les constantes du complexe.

Cette équation n'est pas linéaire, mais on peut la ramener à une équation linéaire, et, par suite, appliquer la méthode d'intégration. Ordonnons-la par rapport à z ; elle devient

$$z'(ay - bx + l) + z(bx' - ay') + c(xy' - yx') + hx' + ky' = 0.$$

Faisons le changement de variable

$$(2) \qquad ay - bx + l = t,$$

et prenons t comme variable indépendante. On en déduit

$$ay = bx + t - l, \qquad ay' = bx' + 1$$
$$a(xy' - yx') = x'(l - t) + x.$$

L'équation devient

$$(3) \qquad tz' - z + \frac{c}{a}[x'(l - t) + x] + hx' + \frac{k}{a}(bx' + 1) = 0$$

ou

$$a(tz' - z) + x'(ah + bk + cl) - ctx' + cx + k = 0.$$

Posons pour abréger

$$ah + bk + cl = \lambda.$$

On obtient une équation linéaire

Appliquons la méthode. On peut écrire

$$(3') \qquad D(azt + \lambda x - ctx) = 2az - 2cx - k.$$

Pour intégrer, il suffit de poser

$$(4) \qquad 2az - 2cx - k = 2\lambda\varphi',$$

φ désignant une fonction arbitraire de t. On aura alors

$$(5) \qquad azt + (\lambda - ct)x = 2\lambda\varphi.$$

Les équations (4) et (5) donnent x *et* z au moyen d'une fonction arbitraire φ

$$x = 2\varphi - t\varphi' - \frac{k}{2\lambda}t, \qquad az = cx + \lambda\varphi' + \frac{k}{2}.$$

L'équation (2) donnera y.

Si l'on fait le léger changement de fonction

$$\varphi = \psi + \frac{k}{2\lambda}t,$$

il vient

$$x = 2\psi - t\psi', \qquad ay = bx + t - l, \qquad az = cx + \lambda\psi' + k,$$

Telles sont les formules les plus générales donnant x, y, z en fonction de t, satisfaisant à l'équation (1).

Si l'on prend le complexe sous sa forme « réduite »

$$yz' - zy' - hx' = 0,$$

on trouve

$$x = 2\psi - t\psi', \qquad y = -t, \qquad z = h\psi',$$

Sous cette forme, on peut étudier facilement les propriétés générales de ces courbes, relatives en particulier aux plans osculateurs (Appell). Nous avons établi quelques propriétés nouvelles de ces courbes. (Voir même Vol. — *Complexes de droites.*)

II. *Déterminer les courbes gauches les plus générales qui se correspondent avec égalité des arcs, et avec tangentes rectangulaires.*

Si x_1, x_2, x_3, sont les coordonnées d'un point de la première courbe x_4, x_5, x_6, celles d'un point de la seconde, on a les équations

$$dx^2_1 + dx^2_2 + dx^2_3 = dx^2_4 + dx^2_5 + dx^2_6, \qquad dx_1 d_4 + dx_2 dx_5 + dx_3 dx_6 = 0.$$

Les fonctions $a_1, a_2, \dots a_5$ doivent satisfaire aux équations

$$a_1a_4 + a_2a_5 + a_3 = 0, \qquad a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 = a^2_4 + a^2_5 + 1.$$

On peut résoudre ces équations en posant, par exemple,

$$a_2 = \frac{\sin\psi}{\cos\varphi}, \qquad a_4 = \operatorname{tg}\varphi, \qquad a_5 = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos\varphi}.$$

On en déduit

$$a_1 = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sin\theta}{\cos\theta\cos\varphi},$$

puis a_3.

Il suffit alors d'appliquer les formules générales.

III. *Intégrer l'équation* $dz^2 = dx\,dy$.

On peut poser $dx = a\,dz \quad dy = \frac{1}{a}dz$.

$$x = \int a\,dz = az - \int za'dt = az - z_1, \qquad (za' = z'_1).$$

Puis, successivement

$$y = \int \frac{1}{a}dz = \frac{1}{a}z + \int \frac{a'}{a^2}zdt = \frac{1}{a}z + \int \frac{a'}{a^2}\cdot\frac{z'_1}{a'}dt$$

$$= \frac{1}{a}z + \frac{z_1}{a^2} - \int z_1\frac{2a'}{a^3}dt.$$

Faisons le nouveau changement

$$\frac{2a'}{a^3}z_1 = z'_2.$$

Il viendra finalement

$$z = \frac{1}{a'}\left(z'_2\cdot\frac{a^3}{2a'}\right)' \qquad x = \frac{a}{a'}\left(z'_2\frac{a^3}{2a'}\right)' - z'_2\frac{a^3}{2a'}$$

$$y = \frac{1}{aa'}\left(z'_2\frac{a^3}{2a'}\right)' + \frac{a}{2a'}z'_2 + z_2.$$

Telles sont les expressions les plus générales de x, y, z, en désignant par a et z_2 deux fonctions arbitraires de t.

CHAPITRE IX

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SOMMAIRE.

Théorème d'existence : Equation du premier ordre. — Equation d'ordre n. — Application au second ordre.

Equation du premier ordre : Equation linéaire. — Solution générale. — Equation non homogène. — Règle pratique. — Applications. — Interprétation géométrique de la méthode.

Equation aux différentielles totales à trois variables : Applications géométriques.

Equation de forme quelconque : Intégrale complète. — Recherche en partant d'une intégrale complète. — Recherche de la solution singulière. — Equation de Clairaut. — Caractéristiques. — Problème de Cauchy.

Recherche d'une intégrale complète : Méthode de Lagrange et Charpit. — Applications.

Méthode de Cauchy : Système fondamental. — Surface passant par une courbe donnée. — Méthode de Darboux. — Caractéristiques.

Méthode des caractéristiques : Applications.

Equation à n variables : Intégrale complète. — Recherche de toutes les solutions. Méthode de Cauchy. — Caractéristiques. — Solution du problème de Cauchy.

I. — THÉORÈME D'EXISTENCE

Considérations générales. — On appelle équation aux dérivées partielles toute relation entre une fonction z de plusieurs variables indépendantes x_1, x_2,... x_n, ces variables et certaines dérivées partielles de la fonction.

L'équation est d'ordre n si la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qui y figure est elle-même d'ordre n. S'il n'y a que deux variables indépendantes, nous les désignerons par x, y. Nous désignerons les dérivées partielles du premier ordre par p, q, celles du second ordre par r, s, t.

On peut essayer de simplifier une telle équation par un changement des variables indépendantes, ou de la fonction. Mais

les règles des changements de variables montrent que l'ordre de l'équation se conserve par toute transformation ponctuelle, ou par toute transformation de contact.

Pour une équation différentielle d'ordre n, nous avons vu que la solution dépend de n constantes arbitraires.

Pour une équation aux dérivées partielles d'ordre n à p variables indépendantes, nous allons montrer, sous certaines réserves, que *la solution la plus générale dépend de n fonctions arbitraires de $(p-1)$ variables.*

Equation du premier ordre. — Prenons d'abord le cas le plus simple (et le plus important par ses applications) celui d'une équation du premier ordre à deux variables indépendantes. Cette équation est de la forme

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Elle dépend de l'une au moins des dérivées partielles.

Si nous la supposons résolue par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$ par exemple, nous aurons

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Nous allons montrer qu'*il existe une solution de cette équation qui, pour $x = x_0$, se réduit à une fonction arbitrairement choisie de y, soit $z = \psi(y)$.*

Nous pouvons, pour simplifier l'écriture, supposer $x_0 = 0$, ce qui revient comme nous l'avons fait bien souvent, à prendre comme nouvelle variable $(x - x_0)$.

Si nous supposons la fonction z développable en série de Mac-Laurin, nous aurons un développement de la forme

$$z = z_0 + x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cdot\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_0 + \cdots$$

les coefficients du développement étant des fonctions de y seulement.

Nous allons montrer que l'on peut calculer tous ces

coefficients et même, que l'on peut calculer non seulement les dérivées partielles par rapport à x, mais toutes les dérivées par rapport à x et à y *pour* $x = 0$.

Tout d'abord on a

$$z_0 = z(o, y) = \psi(y).$$

Ensuite, les dérivées partielles par rapport à y s'obtiennent en dérivant la fonction $\psi(y)$, puisque, pour $x = 0$, z se réduit à $\psi(y)$.

La dérivée première par rapport à x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, est donnée par l'équation elle-même, puisque, pour $x = 0$, on connaît $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \varphi(o, y, \psi(y), \psi'(y)).$$

Si l'on dérive cette équation par rapport à y un nombre quelconque de fois, on aura toutes les dérivées d'un deuxième groupe, celles où x ne figure qu'une seule fois.

Ces dérivées étant obtenues, en dérivant l'équation par rapport à x, une fois, puis par rapport à y, k fois, on aura toutes les dérivées $\frac{\partial^{k+2} z}{\partial x^2 \partial y^k}$ c'est-à-dire toutes les dérivées d'un troisième groupe, celles où x figure deux fois et ainsi de suite.

On voit donc que l'on peut obtenir de proche en proche toutes les dérivées partielles, et en particulier toutes les dérivées $\left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right)_0$, et par suite le développemment de z.

Mais il est bien évident que le résultat que nous avons obtenu n'est pas suffisant. Nous avons construit *le seul développement possible* de la fonction z (en admettant qu'elle soit développable en série de Mac Laurin). Il reste à démontrer que ce développement est convergent.

Nous ne démontrerons pas cette convergence, résultat établi sous certaines conditions par Cauchy et Mme Kowaleska.

Mais en supposant établie la convergence de cette série, cette série représentera bien une fonction $z(x, y)$ qui satisfera à l'équation aux dérivées partielles et qui, pour $x = 0$, se réduira à $\varphi(y)$.

En effet, si la fonction $\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ est holomorphe par rapport aux quatre variables, z et $\frac{\partial z}{\partial y}$ étant eux-mêmes fonctions holomorphes de x et y, si on les substitue dans φ, le résultat deviendra fonction holomorphe de x et y. D'ailleurs $\frac{\partial z}{\partial x}$ est aussi fonction holomorphe de x et y. Ces deux fonctions admettant, d'après la façon dont on a déterminé les coefficients du développement, mêmes dérivées partielles de tous ordres, par rapport à x et y, les deux fonctions sont identiques et par suite la fonction $z(x\,y)$ ainsi construite satisfera bien à l'équation aux dérivées partielles.

Enfin le calcul même des coefficients du développement montre que, s'il existe une solution holomorphe de l'équation se réduisant à $\psi(y)$, cette solution est unique.

Elle dépend bien d'une seule fonction arbitraire d'une seule variable.

Signification géométrique. — Le théorème que nous venons d'établir montre qu'il existe une solution $z = f(x, y)$ de l'équation, telle que la surface qu'elle représente passe par une courbe arbitrairement choisie

$$x = 0, \qquad z = \psi(y)$$

du plan des yz (ou d'un plan parallèle au plan des yz).

Il peut y avoir des cas d'exception, correspondant aux cas pour lesquels le théorème de Cauchy ne serait pas applicable.

Exemples :

1° Nous avons supposé l'équation résoluble par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$. S'il en est autrement, le théorème peut être en défaut.

Il en est ainsi, par exemple, pour les équations de la forme

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

2° Nous avons supposé que, cette équation étant résolue par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$, le second membre $\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ était holomorphe aux environs de $x = 0$. Il n'en serait pas ainsi, par exemple, pour l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

Surface passant par une courbe quelconque. — Au lieu de chercher une surface passant par une courbe du plan des yz, il est naturel de chercher une surface passant par une courbe plane quelconque et même par une courbe quelconque, plane ou gauche. Il est facile de démontrer que l'équation admet des solutions. Donnons nous en effet la courbe gauche

$$x = \lambda(y), \qquad z = \mu(y).$$

Faisons un changement de variables en posant

$$\xi = x - \lambda(y), \qquad \eta = y.$$

z devient une fonction de ξ, η. Nous obtiendrons une équation transformée du même ordre

$$F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Cette nouvelle équation admet une solution qui, pour $\xi = 0$, se réduit à une fonction arbitrairement choisie $z = \mu(\eta)$.

Donc, l'équation donnée admet une solution qui pour $x = \lambda(y)$ se réduit à une fonction $z = \mu(y)$ et qui passe par conséquent par la courbe gauche choisie.

Il peut y avoir des cas d'exception correspondant à ceux du paragraphe précédent.

Equation d'ordre n. — Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles d'ordre n

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \cdots \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0.$$

Nous la supposerons résoluble par rapport à l'une des dérivées « carrées » $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ et mise sous la forme

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \cdots \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right).$$

Nous allons montrer qu'*il existe une solution de cette équation qui satisfait aux deux conditions suivantes* :

1° *Pour $x = 0$, elle se réduit à une fonction arbitrairement choisie de y, soit $z = \varphi_0(y)$.*

2° *Toutes les* $(n-1)$ *premières dérivées partielles par rapport à* x *se réduisent, pour* $x = 0$, *à des fonctions arbitrairement choisies de* y.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \varphi_1(y), \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = \varphi_2(y) \cdots\cdots \left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)_0 = \varphi_{n-1}(y)$$

Nous emploierons exactement le même mode de démonstration que pour l'équation du premier ordre.

Si nous supposons la solution holomorphe aux environs de $x = 0$, elle sera représentable par une série de Mac-Laurin

$$z = z_0 + \frac{x}{1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_0 + \cdots$$

les divers coefficients de cette série étant des fonctions de y.

Il suffit donc de calculer toutes ces dérivées.

Nous allons montrer que les conditions imposées à la solution permettent, non seulement de calculer, les dérivées par rapport à x, mais toutes les dérivées partielles de tous les ordres par rapport à x et à y, *pour* $x = 0$,

Nous appellerons « dérivées du groupe k », toutes les dérivées prises k fois par rapport à x, et un nombre quelconque de fois par rapport à y.

En effet, nous avons déjà un premier groupe de dérivées, celles prises par rapport à y seulement (groupe zéro) :

Puisque, pour $x = 0$, z se réduit à $\varphi_0(y)$, les dérivées de z par rapport à y seront simplement les dérivées de $\varphi_0(y)$.

Prenons les dérivées du premier groupe. Puisque pour $x = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduit à la fonction donnée $\varphi_1(y)$, les dérivées du premier groupe se réduiront aux dérivées de $\varphi_1(y)$.

Nous aurons de même les dérivées du groupe k ($k \leq n-1$) en dérivant par rapport à y la fonction $\varphi_k(y)$.

Ainsi donc, nous avons toutes les dérivées des $(n-1)$ premiers groupes.

L'équation donne elle-même $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ en fonction des dérivées que nous venons de calculer. En dérivant par rapport à y

les deux membres de l'équation, un nombre quelconque de fois, nous n'introduirons au second membre que des dérivées connues (pour $x = 0$) et par conséquent nous pourrons calculer toutes les dérivées du groupe n.

En dérivant alors une fois par rapport à x les deux membres de l'équation, et par rapport à y un nombre quelconque de fois, nous aurons toutes les dérivées du groupe $(n + 1)$ en fonction des dérivées du groupe n maintenant connues.

On voit donc que, de proche en proche, nous obtiendrons toutes les dérivées, de tous les groupes, de z.

Nous pourrons alors appliquer la formule de Mac-Laurin.

Il restera naturellement à démontrer que ce développement est convergent. Mais comme dans le cas du premier ordre, si ce développement est convergent, il représentera une fonction qui satisfait aux conditions imposées et vérifie l'équation aux dérivées partielles.

De plus, la démonstration montre que la solution ainsi obtenue est la seule solution holomorphe possible de l'équation.

Application. — Si nous prenons une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

le théorème de Cauchy montre que, sous certaines réserves, il existe une solution holomorphe qui se réduit à une fonction donnée de y, pour $x = 0$, et telle que la dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduise à une autre fonction donnée de y. Comme la dérivée $\frac{\partial z}{\partial y}$ est également connue, on voit que le plan tangent est déterminé en tout point de la courbe donnée.

Géométriquement, la solution de Cauchy consiste donc à déterminer une surface intégrale passant par une courbe arbitrairement choisie du plan des yz, et tangente, en tous les points de cette courbe à une développable arbitrairement choisie.

Sauf exceptions, le problème n'admet qu'une solution.

Courbe quelconque. — Comme dans le cas de l'équation du premier ordre, un changement de variables permet de déterminer la surface passant par une courbe gauche quelconque et inscrite le long de cette courbe dans une développable donnée.

Il y aura des cas d'exception, comme pour les équations du premier ordre.

II. — ÉQUATION DU PREMIER ORDRE

Nous allons étudier les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous allons d'abord prendre le cas le plus simple, celui de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire et homogène par rapport à ces dernières.

Equation linéaire. — Si z est la fonction de n variables $x_1, x_2, \dots x_n$, cette équation est de la forme

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

$X_1, X_2, \dots X_n$ étant n fonctions que nous supposons d'abord dépendre seulement de $x_1, x_2, \dots x_n$ (et non de z).

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les solutions de l'équation*

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \qquad (E)$$

sont les intégrales premières du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}. \qquad (S)$$

Nous avons déjà fait cette démonstration. Nous allons la rappeler ici.

Nous allons montrer que toute intégrale première du système S est solution de E et inversement.

Le système S définit $(n-1)$ des variables en fonction de la dernière, par exemple de x_1, et son intégration introduirait $(n-1)$ constantes arbitraires, qui peuvent être les valeurs initiales de ces variables pour une valeur initiale de x_1, soit x_{10}.

Une intégrale première de S est donc de la forme

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n, c) = 0$$

ou, résolue par rapport à c, de la forme

$$c = f(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

L'intégrale première, $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, est donc une fonction qui reste constante lorsque les variables varient de façon à satisfaire à S. On doit donc avoir

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n = 0. \tag{2}$$

D'ailleurs, les variables satisfaisant à S, on peut remplacer $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ par les quantités proportionnelles $X_1, X_2, \ldots X_n$. On a donc aussi

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0. \tag{3}$$

Cette relation (3) est donc satisfaite pour tout système des variables satisfaisant à S, en particulier pour les valeurs initiales

$$x_{10}, x_{20}, \cdots x_{n0}.$$

Mais, a quelques réserves près, ces valeurs initiales peuvent elles-mêmes être arbitrairement choisies. *La relation* (3) *est donc satisfaite quelles que soient les valeurs de* $x_1, x_2, \ldots x_n$.

La fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ satisfait donc bien à $E = 0$, identiquement.

Inversement, donnons-nous une fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ satisfaisant à $E = 0$. Par hypothèse, on aura identiquement

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Mais si, en particulier, $x_1, x_2, \ldots x_n$ varient de façon à satisfaire à S, on peut remplacer $X_1, X_2, \ldots X_n$ par les quantités proportionnelles $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ et par conséquent, pour tous les systèmes de variables ainsi assujetties, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \text{const.}$$

$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est donc bien une intégrale première de S.

Ainsi toute solution de E permet d'avoir une intégrale de S et inversement.

Solution générale. — Supposons donc que l'on ait obtenu la solution générale du système S. C'est par hypothèse un système de $(n-1)$ intégrales premières indépendantes

$$z_1(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_1, \quad z_2(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_2 \cdots z_{n-1}(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_{n-1}.$$

Elles sont donc telles, que l'un des déterminants d'ordre $(n-1)$ déduits du tableau

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, & \cdots\cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \cdots\cdots & & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_n} \end{array} \right|$$

soit différent de zéro. Chacune de ces fonctions satisfait à E. On a donc

$$X_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial z_1}{\partial x_n} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Soit alors $z(x_1, x_2, \ldots x_n)$ une autre solution quelconque de E.

On doit avoir aussi

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Le rapprochement de ces équations montre que le déterminant

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \cdots\cdots & & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_n} \end{array} \right|$$

est identiquement nul. Il y a donc nécessairement une relation entre $z, z_1, z_2, \dots z_{n-1}$. Comme on suppose qu'il n'y a pas de relation entre $z_1, z_2, \dots z_{n-1}$, cette relation dépend certainement de z. On peut donc la mettre sous la forme

$$z = \mathcal{F}(z_1, z_2, \cdots z_{n-1}).$$

La solution quelconque z est donc une fonction des solutions connues $z_1, z_2, \dots z_{n-1}$. Elle peut d'ailleurs être absolument quelconque. En effet, si l'on prend une fonction quelconque de $z_1, z_2, \dots z_{n-1}$, soit

$$z = \mathcal{F}(z_1, z_2, \cdots z_{n-1}).$$

On aura

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_{n-1}}\cdot\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_i}.$$

En multipliant toutes les égalités analogues par le facteur correspondant X_i, et faisant la somme, on aura

$$\Sigma X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\Sigma X_i \frac{\partial z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2}\Sigma X_i \frac{\partial z_2}{\partial x_i} + \cdots$$

Or, les différentes sommes qui figurent au second membre sont nulles, puisque $z_1, z_2, \dots z_n$ sont solutions de $E = 0$.

Donc

$$\Sigma X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

et z est bien solution de $E = 0$.

Conclusion. — *Si l'on a obtenu la solution générale du système* S *au moyen de* $(n-1)$ *intégrales premières indépendantes mises sous forme*

$$z_1 = c_1, \qquad z_2 = c_2, \cdots \qquad z_{n-1} = c_{n-1},$$

la solution générale de $E = 0$ *est de la forme*

$$z = \mathcal{F}(z_1, z_2, \cdots z_{n-1}),$$

$\mathcal{F}$ *désignant une fonction arbitraire.*

On constate que la solution de $E = 0$ dépend bien d'une fonction arbitraire de $(n-1)$ variables indépendantes.

Equation non homogène. — Soit maintenant l'équation linéaire non homogène

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z,$$

X_1, X_2,... X_n, Z désignant $(n+1)$ fonctions données de x_1, x_2,... x_n et aussi de z.

Supposons que la solution dépende au moins d'une constante arbitraire c. En la résolvant par rapport à cette constante, on la mettrait sous la forme

$$u(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = c.$$

Nous chercherons donc à déterminer u, telle qu'en posant

$$u = \text{const.}$$

la fonction z déduite de cette équation implicite soit solution de E pour chaque valeur de c.

De (1), on déduirait les dérivées partielles de z par rapport aux x par les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}.$$

En substituant dans E, on voit que la fonction u devrait satisfaire à l'équation

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + Z \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (E')$$

Pour un système arbitraire de valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ cette équation devrait être satisfaite *pour les valeurs de z satisfaisant à* (1). Mais, comme c peut être arbitraire, il en est de même de z puisque, en donnant à z une valeur quelconque, il suffit de choisir $c = u(x_1, x_2, \ldots x_n, z)$. La condition E′ doit donc être satisfaite, *quelles que soient les valeurs de* x_1, x_2,.... x_n et z.

C'est une équation linéaire et homogène analogue à E, mais définissant une fonction u de $(n+1)$ variables indépendantes.

Nous pouvons ramener son intégration à celle du système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z} \qquad (S')$$

En intégrant S', on obtiendrait un système de n intégrales premières sous la forme

$$u_1(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = c_1, \qquad u_2 = c_2, \cdots \qquad u_n = c_n.$$

La solution générale de E' s'obtiendrait en posant

$$u = \mathcal{F}(u_1, u_2, \cdots u_n),$$

$\mathcal{F}$ étant arbitraire, et pour déterminer la fonction z, il faudrait donc poser

$$\mathcal{F}(u_1, u_2, \cdots u_n) = c,$$

c'est-à-dire tout simplement

$$\mathcal{F}(u_1, u_2, \cdots u_n) = 0,$$

En résolvant l'équation E' ou le système S', on obtient bien toutes les solutions de E, sauf peut être toutefois, quelques solutions exceptionnelles ne dépendant d'aucune constante arbitraire. Les solutions seraient des solutions « singulières » de E.

Résumé : Règle pratique. — *En résumé, étant donnée l'équation*

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z,$$

on intégrera le système différentiel à $(n + 1)$ *variables*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}.$$

Si

$$u_1(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = c_1, \cdots \qquad u_n(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = c_n,$$

sont n intégrales premières indépendantes, la solution générale de E *s'obtiendra en posant*

$$\mathcal{F}(u_1, u_2, \cdots u_n) = 0.$$

Applications. — Nous appliquerons cette méthode à l'intégration des quelques équations aux dérivées partielles que nous avons établies au début du Cours (familles de surfaces dépendant de constantes arbitraires, etc.).

1° ***Équation aux dérivées partielles des cylindres.*** Soit

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c,$$

a, b, c désignant trois constantes.

Nous aurons à intégrer le système

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

Nous en déduisons deux intégrales premières

$$cx - az = c_1, \qquad cy - bz = c_2.$$

La solution générale s'obtient en posant

$$\mathcal{F}(cx - az, \quad cy - bz) = 0.$$

C'est l'équation d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction a, b, c (intersection des deux plans $cx - az = 0$, $cy - bz = 0$).

Géométriquement, l'équation signifie que, en tout point de la surface intégrale, le plan tangent est parallèle à la direction fixe a, b, c. Nous trouvons donc que cette propriété est caractéristique des cylindres.

2° Soit l'équation

$$(x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$

Nous aurons à intégrer le système

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}.$$

Nous en déduisons les deux intégrales

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = c_1, \qquad \frac{y - y_0}{z - z_0} = c_2.$$

Par suite, la solution de l'équation s'obtient en posant

$$\mathcal{F}\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

C'est l'équation d'un cône quelconque de sommet x_0, y_0, z_0. Géométriquement, l'équation exprime que le plan tangent en tout point d'une surface intégrale passe par le point fixe x_0, y_0, z_0. Cette propriété est donc caractéristique des cônes.

3° Soit l'équation

$$(bz - cy)\frac{\partial z}{\partial x} + (cx - az)\frac{\partial z}{\partial y} = ay - bx.$$

δ_1 Il faut intégrer le système

$$\frac{dx}{bz - cy} = \frac{dy}{cx - az} = \frac{dz}{ay - bx}.$$

α En multipliant les numérateurs et dénominateurs par a, b, c et les ajoutant, on obtient la combinaison intégrale

$$adx + bdy + cdz = 0 \qquad \text{d'où} \qquad ax + by + cz = c_1.$$

De même, δ_1 en multipliant par x, y, z, et ajoutant, on obtient

$$xdx + ydy + zdz = 0 \qquad \text{d'où} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

ω La solution générale s'obtient en posant

$$\mathcal{F}(ax + by + cz, \quad x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

ρ C'est l'équation d'une suface de révolution quelconque d'axe

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

σ L'équation exprime que le plan tangent en un point est perpendiculaire au plan

$$(bz - cy)X + (cx - az)Y + (ay - bx)Z = 0.$$

ρ Or ce plan est le plan qui passe par le point x, y, z et la droite fixe

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c}.$$

Cette propriété est donc aussi caractéristique des surfaces de révolution.

4° Equation des fonctions homogènes

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = mz.$$

δ_1 Il faut intégrer le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{mz}.$$

On en déduit

$$\frac{z}{x^m} = c_1, \qquad \frac{y}{x} = c_2.$$

La solution de l'équation est donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{z}{x^m}, \frac{y}{x}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = x^m f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Interprétation géométrique de la méthode. — Prenons simplement le cas de deux variables indépendantes et considérons l'équation

$$\text{(E)} \qquad X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$$

X, Y, Z étant des fonctions données de x, y, z.

A chaque point x, y, z de l'espace nous lierons la droite D parallèle à la direction X, Y, Z. L'équation (E) exprime alors que, en chaque point d'une surface intégrale, le plan tangent contient la droite D correspondante.

Appelons « courbe caractéristique » toute courbe qui, en chaque point, est tangente à la droite D qui lui est liée.

Ces courbes seront définies par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

En les intégrant, nous introduirons deux constantes arbitraires et nous aurons des équations de la forme

$$u_1(x, y, z) = c_1, \qquad u_2(x, y, z) = c_2.$$

Prenons une surface quelconque lieu de ces courbes, en établissant une relation quelconque entre c_1, c_2, soit $\mathcal{F}(c_1, c_2) = 0$.

L'équation de cette surface sera

$$\mathcal{F}(u_1, u_2) = 0.$$

En tout point de cette surface, la droite D, qui est tangente à la caractéristique correspondante, sera tangente à la surface elle-même. Cette surface est donc une surface intégrale de l'équation : On retrouve la règle obtenue.

Mais il faut montrer que, réciproquement, une surface intégrale quelconque peut être obtenue de cette manière.

Il suffit de montrer que, par tout point d'une telle surface, passe une caractéristique.

En effet, par définition, en tout point de cette surface la droite D associée au point est tangente à la surface. Partant d'un point quelconque de la surface, nous pouvons donc définir sur celle-ci, une courbe satisfaisant à la condition d'être en chaque point tangente à la droite D correspondante. (Définition analogue, comme nous le verrons, à celle des lignes asymptotiques, des lignes de courbure.) Cette courbe sera la courbe caractéristique passant par le point.

Analytiquement, donnons-nous une surface intégrale quelconque $f(x, y, z) = 0$. Supposons les coordonnées x, y, z d'un point exprimées en fonction de deux paramètres u, v.

Nous pouvons considérer les courbes de la surface satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \tag{1}$$

équation dans laquelle nous supposons x, y, z ainsi que dx, dy exprimées en fonction de u, v, du, dv. Cela reviendra à établir entre u, v une certaine relation et par conséquent à définir une courbe de la surface. Nous voulons montrer que, si on se déplace sur la surface, les rapports ci-dessus sont encore égaux à $\frac{dz}{Z}$.

En effet l'équation de la surface définit une fonction $z(x, y)$ et on aurait identiquement

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

quelles que soient les variables indépendantes.

D'autre part, puisque la surface est solution de l'équation, on a aussi

$$pX + qY - Z = 0$$

quelles que soient aussi les variables indépendantes au moyen desquelles on exprime x, y, z.

Si donc nous multiplions les numérateurs et dénominateurs des rapports (1) par p et q, et si nous les ajoutons, nous obtiendrons bien comme rapport égal $\frac{dz}{Z}$.

Mais alors, dans les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

plus rien n'oblige à considérer que x, y, z sont exprimées en fonction de u, v, ni que l'on connaisse la surface intégrale. Ces équations suffisent à déterminer des relations entre x, y, z. Elles sont *indépendantes* de la surface intégrale que l'on avait prise comme point de départ. On peut donc considérer « *a priori* » ces courbes : on retrouve les caractéristiques. ω Une surface intégrale sera un lieu de caractéristiques.

Solution du problème de Cauchy. — Si, pour résoudre le problème de Cauchy, τ nous voulons déterminer une surface intégrale qui passe par une courbe donnée plane ou gauche, α, φ il suffira de prendre les caractéristiques qui passent par les divers points de la courbe donnée.

Le lieu de ces caractéristiques constituera une surface, à moins que ψ la courbe donnée ne soit elle même une caractéristique.

Par exemple, si la courbe a pour équation

$$x = \lambda(t), \qquad y = \mu(t), \qquad z = \nu(t)$$

et si les caractéristiques ont pour équations

$$u_1(x, y, z) = c_1, \qquad u_2(x, y, z) = c_2$$

on exprimera que

$$u_1(\lambda, \mu, \nu) = c_1, \qquad u_2(\lambda, \mu, \nu) = c_2$$

β ont une solution commune en t. En éliminant t entre ces deux équations, on obtiendra la relation à établir entre c_1 et c_2.

Problème. — On peut se proposer de *déterminer une surface intégrale circonscrite à une surface* Σ *donnée, le long d'une courbe* Γ *(à déterminer)*.

φ Il suffit évidemment de connaître cette courbe. Si la surface donnée est connue sous forme paramétrique

$$x = \lambda(u, v), \qquad y = \mu(u, v), \qquad z = \nu(u, v),$$

il suffit de connaître la relation entre u et v. Or, puisque en tout point de cette courbe, la surface et la surface intégrale sont tangentes, et puisque, en tout point de la surface intégrale la droite D est tangente à la surface, elle le sera aussi à la surface Σ. En tout point x, y, z, de Γ, les coefficients directeurs de D sont X, Y, Z. Exprimons-les au moyen de u, v. Nous les représenterons par $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$. Il suffit d'écrire que cette direction est contenue dans le plan tangent à Σ. On a donc immédiatement la condition

$$\overline{X}D^{u,v}_{z,z} + \overline{Y}D^{u,v}_{z,x} + \overline{Z}D^{u,v}_{x,y} = 0.$$

Telle est la relation entre u et v qui déterminera la courbe Γ.

On a alors simplement à déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée.

III. — ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES A TROIS VARIABLES

Définition. — On appelle « équation aux différentielles totales » à trois variables une équation de la forme

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \tag{1}$$

Si $R((x, y, z)$, par exemple, est différent de zéro, on peut la mettre sous la forme

$$dz = M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy.$$

Intégrer cette équation revient à chercher, si elle existe, une fonction z de x, y, satisfaisant identiquement à cette équation.

Si M et N ne dépendent que de x, y, c'est une équation aux différentielles totales ordinaires, et nous savons déjà que ces fonctions doivent satisfaire à la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Il est évident que, dans le cas général, les fonctions

$M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ doivent satisfaire également à une ou plusieurs équations.

L'équation revient en effet aux deux équations

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = M(x, y, z), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = N(x, y, z).$$

Ce sont deux équations aux dérivées partielles qui doivent admettre une ou des solutions communes. Nous aurons déjà une équation de condition en égalant les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Nous obtenons ainsi, en les explicitant, et tenant compte de (I)

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} + N\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial z}.$$

Cette équation nécessaire s'appelle « condition d'intégrabilité ».

C'est donc là une nouvelle équation à laquelle doit satisfaire z.

Mais cette équation ne dépend pas des dérivées de z. Deux cas se présentent :

A) L'équation (2) n'est pas satisfaite identiquement. Elle définit alors une fonction $z(x, y)$. C'est la seule solution qui soit possible, mais il faut voir si cette fonction satisfait bien à l'équation (1).

Sinon le problème est impossible. En particulier si la condition (2) ne renferme pas z, le problème est évidemment impossible.

B) L'équation (2) est vérifiée identiquement.

Nous allons montrer qu'elle est alors suffisante, et que l'équation donnée ou le système (†) admettent une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire.

Nous prendrons d'abord l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M(x, y, z).$$

C'est une équation aux dérivées partielles, mais que

nous pouvons considérer comme une simple équation différentielle entre z et x, y ne figurant que comme paramètres. En l'intégrant, nous aurons donc un résultat de la forme

$$z = \varphi(x, y, \lambda)$$

λ désignant une certaine constante par rapport à x, *mais que nous pouvons considérer comme dépendant de* y.

Voyons si l'on peut déterminer une fonction $\lambda(y)$ de manière à satisfaire à la deuxième équation (I).

Nous savons déjà que

$$\varphi_x' = \mathrm{M}(x, y, \varphi(x, y, \lambda))$$

identité en x, y, λ, considérées comme trois variables indépendantes.

Nous devons avoir

$$\mathrm{N}(x, y, \varphi(x, y, \lambda)) = \varphi_y' + \varphi'_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y}.$$

C'est là une équation qui devrait définir une fonction λ dépendant de y seulement. Elle s'écrit

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\mathrm{N} - \varphi_y'}{\varphi'_\lambda}.$$

Le second membre devrait donc être, comme le premier, indépendant de x. Nous devrions avoir

$$\varphi'_\lambda \left| \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} \varphi_x' - \varphi''_{xy} \right| = (\mathrm{N} - \varphi_y')\varphi''_{\lambda x}. \tag{4}$$

Dans cette équation, nous pouvons remplacer φ'_λ par sa valeur, et aussi φ''_{yx} et $\varphi''_{\lambda x}$

$$\varphi''_{xy} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi} \varphi'_y, \qquad \varphi''_{\lambda x} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi} \cdot \varphi'_\lambda.$$

En substituant dans (4), et divisant par φ_λ' il vient

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} \varphi_x' - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi} \varphi_y' = \mathrm{N} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi} \cdot \varphi_y'$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} + \mathrm{M} \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \mathrm{N} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}.$$

C'est la condition d'intégrabilité.

Le second membre de l'équation (3) est donc bien indépendant de x. Cette équation se réduit certainement à une équation de la forme

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \pi(y, \lambda).$$

C'est une équation différentielle entre y et λ. Elle donne

$$\lambda = \theta(y, c)$$

c désignant une constante arbitraire. En substituant λ dans la valeur de z, on a bien une fonction dépendant d'une constante arbitraire et satisfaisant aux deux équations (I) ou à l'équation (1).

La condition d'intégrabilité (2) est donc bien nécessaire et suffisante.

Application. — Soit l'équation

$$y(y - z)dx + x(x - z)dy + xy\,dz = 0.$$

On pourrait vérifier que la condition d'intégrabilité (2) est satisfaite identiquement.

Cette équation se ramène aux deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - y}{x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z - x}{y}.$$

Si nous intégrons la première, (en considérant y comme un paramètre) (c'est une équation linéaire) nous obtiendrons

$$z - y = \lambda x$$

λ est une certaine constante par rapport à x, mais que nous considérons comme une fonction de y.

Voyons si l'on peut satisfaire à la deuxième équation. En subsituant z, on trouve

$$1 + x\lambda'(y) = \frac{y + x\lambda(y) - x}{y}.$$

Après simplification, elle se réduit à

$$\lambda'(y) = \frac{\lambda(y) - 1}{y}.$$

Ce résultat montre que la condition d'intégrabilité est satisfaite.

En intégrant cette dernière équation, on obtient

$$\lambda - 1 = cy$$

c désignant une constante arbitraire. On a donc finalement

$$z = y + x(1 + cy), \qquad z = x + y + cxy.$$

Cette solution dépend d'une constante arbitraire c.

REMARQUE. — Dans la pratique, on commencera naturellement par intégrer celle des deux équations qu'il est le plus facile d'intégrer.

Cas de l'équation $P dx + Q dy + R dz = 0$. — Il suffit de mettre cette équation sous la forme précédente. On aura

$$M = -\frac{P}{R}, \qquad N = -\frac{Q}{R}.$$

En écrivant la condition d'intégrabilité, on obtiendra

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

Comme il fallait s'y attendre, elle est symétrique en x, y, z. (Il faut retenir cette formule).

Applications géométriques. — Associons à chaque point de l'espace, la droite issue de ce point, de coefficients directeurs P, Q, R, ou le plan

$$P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0.$$

Cherchons *s'il existe une surface admettant en chaque point le plan associé comme plan tangent (ou la droite comme normale).*

Si $z = f(x, y)$ est l'équation de la surface, l'équation du plan tangent en un point x, y, z, est

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y).$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}.$$

Ce sont les deux équations qui expriment que l'équation

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

est une équation aux différentielles totales.

Si la condition d'intégrabilité est satisfaite, il existe non pas *une* surface, mais une infinité de surfaces dépendant d'une constante arbitraire.

2° Donnons nous une « congruence » de courbes dépendant de deux paramètres, sous la forme

$$f_1(x, y, z) = c_1, \qquad f_2(x, y, z) = c_2.$$

Cherchons *s'il existe une famille de surfaces* S *qui leur soient orthogonales.*

Par chaque point de l'espace, passe une courbe de la famille et nous pouvons associer à ce point la tangente à la courbe. Les coefficients de direction de cette tangente, sont proportionnels aux déterminants

$$D^{y,z}_{f_1,f_2}, \qquad D^{z,x}_{f_1,f_2}, \qquad D^{x,y}_{f_1,f_2}.$$

Nous devons donc voir s'il existe une surface qui admette, en chacun de ses points la droite comme normale.

C'est le problème précédent. Si la condition d'intégrabilité est satisfaite, il existera une infinité de surfaces dépendant d'une constante arbitraire.

Par exemple, si l'on donne une congruence quelconque de droites, cette congruence n'est, en général, pas formée de normales à une surface. Mais si elles sont normales à une surface, elles le sont à une infinité.

Solutions communes à deux équations. — Plus généralement, cherchons s'il existe des fonctions $z(x, y)$ satisfaisant à deux équations aux dérivées partielles

(1) $$f_1(x, y, z, p, q) = 0$$

(2) $$f_2(x, y, z, p, q) = 0.$$

Si l'on peut résoudre ces deux équations par rapport à p et q, on aura

$$p = \varphi(x, y, z), \qquad q = \psi(x, y, z).$$

On sera donc ramené au cas précédent. Si la condition d'intégrabilité est satisfaite, la solution générale ne peut dépendre que d'une constante arbitraire.

Si on ne peut résoudre les équations données par rapport à p, q, dérivons les équations (1), (2), par rapport à x et à y. On obtiendra quatre équations qui n'introduiront que trois dérivées nouvelles, les dérivées secondes r, s, t, de z au premier degré. On pourra donc, dans tous les cas, éliminer r, s, t entre ces quatre équations. On obtiendra ainsi une nouvelle équation.

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0. \tag{3}$$

Il pourra se présenter deux cas :

1° Cette équation est identiquement satisfaite, ou elle est une conséquence des deux premières. Dans ce cas, les équations sont compatibles et peuvent déterminer une famille de fonctions $z(x, y)$ dépendant d'une constante.

2° Si l'équation n'est pas identiquement satisfaite, ou n'est pas conséquence de (1) et (2), en éliminant p, q entre les équations (1), (2), (3), on obtiendra une équation qui définira une fonction $z(x, y)$. Ce sera la seule possible, mais il faudra encore vérifier que cette fonction satisfait bien aux équations données.

IV. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE FORME QUELCONQUE

Cas de deux variables indépendantes : Intégrale complète. — Nous considérons maintenant une équation aux dérivées partielles du premier ordre, de forme quelconque, définissant une fonction z de deux variables indépendantes x, y.

Soit

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

cette équation.

Que savons-nous jusque maintenant sur cette question ? Tout à fait au début du cours, quand nous avons étudié la formation même d'équations aux dérivées partielles, nous avons montré que, si nous considérions une famille de fonctions z de deux variables x, y, dépendant, en outre, de deux paramètres a, b, sous la forme

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{2}$$

toutes les fonctions de cette famille satisfont à une même équation aux dérivées partielles. On obtient cette équation en éliminant a, b entre (2) et les deux équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{II}$$

Le résultat de cette élimination est une équation de la forme (1).

Mais on peut se demander si, étant donnée une équation quelconque telle que (1), elle peut être obtenue de la manière précédente.

Cela est évident, et même d'une infinité de manières, puisque, d'après le théorème de Cauchy, il existe des fonctions satisfaisant à l'équation, dépendant d'une fonction *arbitraire* d'une variable, et que dans cette fonction, on peut introduire autant de paramètres qu'on le veut (et non plus seulement deux).

Soit une telle famille de surfaces (2). Lagrange a donné le nom *d'intégrale complète* à une telle solution.

Il est bien évident, d'après le théorème de Cauchy, que ce ne sont pas les seules solutions de l'équation donnée.

Recherche des solutions en partant de l'intégrale complète. — En la supposant connue, on peut se demander d'abord s'il ne serait pas possible d'en déduire *toutes* les solutions de l'équation.

C'est ce que Lagrange a montré : nous l'établirons par une méthode de variation des arbitraires.

Par hypothèse, l'équation (1) est le résultat de l'élimination de a, b entre les équations (2) et (II). *Elle exprime donc*

qu'il existe deux quantités a, b, *(peu importe que ce soient des constantes ou des fonctions de* x, y) *qui satisfont à la fois aux équations* (2) *et* (II).

Or, soit une solution *quelconque* de l'équation représentant une surface S. Soit un « élément » quelconque, point et plan, (direction du plan tangent en ce point) de cette surface, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 : ces éléments satisfont à (1).

D'après la remarque que nous venons de faire, cette équation exprime qu'il existe deux quantité a_0, b_0 satisfaisant aux èquations

$$V(x_0, y_0, z_0, a_0, b_0) = 0 \tag{2'}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + p_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 + q_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0. \tag{II'}$$

Considérons alors la surface particulière a_0, b_0 (constants)

$$V(x, y, z, a_0, b_0) = 0.$$

Les conditions (2') (II') expriment qu'elle passe par le point x_0, y_0, z_0 et qu'elle admet comme plan tangent en ce point le plan de paramètres directeurs p_0, q_0, — 1, c'est-à-dire qu'elle admet l'élément de contact considéré de S.

Ainsi, par tout point x, y, z *de la surface quelconque* S *envisagée passe une surface de la famille* V *et les deux surfaces sont tangentes en ce point.*

Géométriquement, cette considération suffit pour déterminer les solutions de l'équation. En effet, d'après la théorie des enveloppes, (supposée connue au moins partiellement) si l'on considère la famille de surfaces à deux paramètres

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

1° ou bien la surface se confondra avec l'une des surfaces de cette famille ; 2° ou bien elle sera l'enveloppe d'une famille particulière à un paramètre que l'on obtiendra en assujettissant a et b à une relation $b = \varphi(a)$. Dans ce cas, on obtiendrait son équation en éliminant a, b entre les équations

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad b = \varphi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a) = 0.$$

3° ou bien enfin, la surface sera l'enveloppe de la famille à deux paramètres. On obtiendrait son équation, en éliminant a, b entre les équations

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

Les premières solutions, dépendant de deux constantes, constituent, comme nous l'avons dit, la *solution complète* ; les deuxièmes forment ce que Lagrange appelait la *solution générale*. Elles ont, en effet, un grand caractère de généralité, prévu par le théorème de Cauchy, puisqu'elles dépendent d'une fonction arbitraire $\varphi(a)$; la troisième n'a plus rien d'arbitraire. Lagrange l'appelait « *la solution singulière* » de l'équation.

Recherche analytique. — Analytiquement, on arrive aux mêmes conclusions.

Reprenons la conclusion à laquelle nous sommes arrivés : par tout point x, y, z de S, passe une surface de la famille V et les deux surfaces sont tangentes.

Les valeurs de a, b qui définissent la surface de la famille V seront en général variables avec le point considéré. On peut les considérer comme des fonctions de x, y, grâce à quoi, on aura identiquement en tout point de S

$$V(x, y, z, a(x, y), b(x, y)) = 0 \tag{4}$$

et on aura de plus d'après (II'), puisque le plan tangent est le même que si a et b étaient constants (quelle que soit la solution, et c'est là une remarque essentielle).

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{II}$$

Si nous dérivons l'identité (4) par rapport à x et y, nous obtiendrons

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial a}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial a}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Mais ces équations (IV) se réduisent, en tenant compte de (II) à

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}\cdot\dfrac{\partial a}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial b}\cdot\dfrac{\partial b}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Ainsi, les fonctions inconnues $a(x, y)$, $b(x, y)$ satisfont aussi aux équations (V).

Inversement, si l'on définit trois fonctions, z, a, b de x et y, par l'équation (4) et les équations (V), en dérivant

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

et tenant compte de (V), on obtiendra les équations (II). L'élimination de a, b entre (4) et (II) donnera bien l'équation (1) (même si a et b sont des fonctions et non plus des constantes).

En résumé, il faut et il suffit que les fonctions a, b, z satisfassent aux équations (4) et (V).

Mais ces deux dernières sont linéaires et homogènes en $\dfrac{\partial V}{\partial a}$, $\dfrac{\partial V}{\partial b}$.

1° Si le déterminant $D^{x,y}_{a,b}$ est différent de zéro, elles n'admettent qu'une solution

$$\frac{\partial V}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b}=0.$$

Les fonctions z, a, b sont définies par les trois équations

$$V(x, y, z, a, b)=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a}=\frac{\partial V}{\partial b}=0.$$

En particulier, on obtiendra z en éliminant a, b entre ces trois équations. Le résultat sera le même que si l'on voulait chercher l'enveloppe de la famille à deux paramètres (constants) a, b. On obtient ainsi la solution *singulière* de Lagrange.

2° Le déterminant est nul. Il existe donc une relation entre a et b. Si elle contient b, (c'est-à-dire si a n'est pas constant), on peut la mettre sous la forme

$$b=\varphi(a).$$

Les équations V se réduisent alors à

$$\frac{\partial a}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a)\right]=0, \qquad \frac{\partial a}{\partial y}\left[\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a)\right]=0.$$

Deux cas peuvent se présenter : Si la parenthèse n'est pas nulle, on a

$$\frac{\partial a}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial a}{\partial y}=0, \qquad \text{d'où} \qquad a=\text{const.} \qquad \text{et par suite} \qquad b=\text{const.}$$

On a la solution *complète* d'où on est parti.

Enfin, si la parenthèse est nulle,

$$\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a)=0,$$

les fonctions z, a, b sont définies par

$$V(x, y, z, a, b)=0, \qquad b=\varphi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a)=0.$$

Le résultat est le même que si l'on voulait chercher l'enveloppe d'une famille à un paramètre (constant), déduite de la famille à deux paramètres, en se donnant une suite simplement infinie de surfaces par la condition $b=\varphi(a)$.

On obtient la solution *générale* de Lagrange.

On retrouve bien tous les résultats obtenus géométriquement.

Conclusion. — Etant donnée une solution complète, (famille de surfaces à deux paramètres), on obtient toutes les autres solutions en prenant : 1° l'enveloppe de la famille de surfaces à deux paramètres (solution singulière), si elle existe.

2° L'enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre, obtenue en se donnant une relation arbitraire $b=\varphi(a)$, et cherchant l'enveloppe de la famille

$$V(x, y, z, a, \varphi(a))=0.$$

C'est la solution générale.

REMARQUE. — Il est possible que la solution singulière n'existe pas, bien qu'il semble que, si l'on a une famille de surfaces dépendant de deux paramètres, $V(x, y, z, a, b)=0$, la solution sin-

gulière, enveloppe de cette famille à deux paramètres, doive exister toujours. Cependant, rien n'indique que dans la solution complète de l'équation, les paramètres a, b figurent sous une forme telle que la famille puisse avoir une enveloppe. (C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'intégrale complète était de la forme $V(x, y, z, a) + b = 0$).

Recherche de la solution singulière. — Comme dans le cas des équations différentielles, nous allons montrer que *si la solution singulière existe, on peut la déterminer a priori, sans supposer connue l'intégrale complète.*

Puisque cette solution complète ne dépend de rien d'arbitraire, c'est qu'elle ne peut pas s'obtenir par application du théorème de Cauchy. Or, pour démontrer ce théorème, nous avons supposé que l'équation était résolue par rapport à p (ou à q) sous la forme $p = \theta(x, y, z, q)$ et que la fonction θ était holomorphe aux environs de valeurs x_0, y_0, z_0, q_0, (d'où p_0).

Nous savons que, pour qu'il n'en fût pas ainsi, il faudrait que, pour ces valeurs, on ait $\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_0 = 0$, ou de même, $\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_0 = 0$.

Ainsi le théorème même de Cauchy nous conduit à ce résultat que, pour tout point d'une solution singulière (et les valeurs de p, q correspondantes) on doit avoir aussi

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

On peut arriver à la même conclusion en partant de la considération de l'intégrale complète

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

et de la façon dont nous avons obtenu la solution singulière.

Soit

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{4}$$

la famille de surfaces.

La solution singulière est l'enveloppe de cette famille à deux paramètres et s'obtient en ajoutant les équations

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = 0. \tag{VI}$$

De plus, les dérivées partielles de la fonction $z(x, y)$ ainsi déterminée σ_2 sont données par les équations

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

(cela est vrai pour toute solution).

ξ

Il faut maintenant considérer l'équation aux dérivées partielles : σ_2 o on l'obtiendrait en éliminant a, b entre l'équation (4) et les équations (II). En d'autres termes, α, ξ on peut considérer le premier membre de l'équation aux dérivées partielles, R_1 comme étant égal à $V(x, y, z, a, b)$, dans lequel on aurait remplacé a, b en fonctions de x, y, z, p, q, données par les équations (II).

c_1

Il est alors aisé de terminer. On a

$$f(x, y, z, p, q) = V(x, y, z, a, b).$$

α

Prenons alors les dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial p}.$$

ω

Mais, en tout point de la solution singulière, nous savons que nous avons les équations (VI). Nous avons donc bien

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad \text{et de même,} \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Ces équations et l'équation (1) déterminent trois fonctions de x, y. En éliminant p, q entre ces trois équations, nous obtenons la solution singulière possible

$$\lambda(x, y, z) = 0.$$

Mais β il faut de plus que les fonctions p, q que l'on pourrait également déduire de ces trois équations se confondent avec les dérivées partielles de z.

α

Si nous dérivons l'identité

$$\text{(1)} \qquad f(x, y, z, p, q) = 0,$$

en tenant compte de (VII), et remplaçant $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ par p et q,

o

nous obtenons les deux nouvelles équations nécessaires

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

o

L'élimination de p et q entre les équations (I) (VII) (VIII) donnera trois relations de la forme $\lambda(x, y, z) = 0$ qui devront être satisfaites pour une même branche de fonction $z(x, y)$.

ψ

Dans ce cas seulement, la solution singulière existera effectivement.

δ_1

Inversement en effet, si les cinq équations (I), (VII), (VIII), sont satisfaites pour trois mêmes fonctions z, p, q β il faut démontrer que p et q se confondent avec les dérivées partielles de z, c'est-à-dire que l'on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

δ_1

En effet dérivons (1) et tenons compte de (VII); on obtient

$$\text{(VIII)}' \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

ρ

En comparant (VIII) et (VIII)'

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - q\right) = 0.$$

ρ

A moins que l'on ait aussi $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, et par suite, d'après (VIII),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

on a bien

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

et comme l'on a

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

on aura bien

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Conclusion. — En résumé, pour voir si la solution singulière existe, il faut considérer les cinq équations (1), (VII), (VIII)

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

En éliminant p, q entre ces équations, on obtient trois équations de la forme

$$\lambda_1(x, y, z) = 0, \qquad \lambda_2(x, y, z) = 0, \qquad \lambda_3(x, y, z) = 0.$$

Il faut et il suffit que ces trois surfaces aient une nappe commune : ce sera la solution singulière.

Application : Equation de Clairaut. — Soit l'équation

$$z = px + qy + \varphi(p, q), \tag{1}$$

généralisation de l'équation de Clairaut.

Elle admet visiblement la solution complète

$$z = ax + by + \varphi(a, b),$$

obtenue en remplaçant simplement p et q par deux constantes arbitraires. On en déduit en effet

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = b.$$

L'élimination de a, b donne bien (1)

Les surfaces de la solution complète sont donc des plans.

La solution singulière est la surface Σ enveloppe de cette famille de plans à deux paramètres. Elle existe donc dans ce cas.

La solution générale de Lagrange s'obtiendrait en prenant une simple infinité de ces plans, c'est-à-dire en se donnant $b = \varphi(a)$, et en prenant l'enveloppe : Ce sont donc des surfaces développables circonscrites à Σ.

Nous aurions pu obtenir *a priori* la solution singulière.

Les équations (VII) sont ici

$$x + \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \qquad y + \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0. \tag{VII}$$

Quant aux équations (VIII), elles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0 = p + p\times(-1),$$

de même $q + q \times (-1) = 0$.

Elles s'évanouissent. Les cinq équations se réduisent à trois.

Pour avoir $z(x, y)$ il faut éliminer p, q entre (1) et (VII).

A la notation près, cela revient à éliminer a, b, entre

$$z = ax + by + \varphi(a, b), \qquad x + \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \qquad y + \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0,$$

c'est-à-dire à chercher l'enveloppe de la famille de plans à deux paramètres.

Caractéristiques. — Si

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{2}$$

est une solution complète, la solution générale s'obtient, comme nous l'avons vu, en posant

$$b = \varphi(a) \tag{5}$$

et éliminant a, b entre (2) (5) et (7)

$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a) = 0. \tag{7}$$

Pour chaque valeur de a, les équations (2), (7) sont les équations de la courbe suivant laquelle chaque surface (a) touche la surface infiniment voisine.

C'est la « caractéristique » de la surface (a) au sens de la théorie des enveloppes.

Il semblerait que cette courbe dût dépendre d'une fonction arbitraire d'une variable, comme la famille particulière dont on est parti. Cependant, si l'on pose $\varphi'(a) = c$, on se rend compte de ce fait extrêmement remarquable, que les équations d'une de ces courbes

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\cdot c = 0,$$

ne dépendent que de *trois constantes arbitraires*, a, b, c.

D'autre part, les valeurs de p, q en un point de la caractéristique sont données par les équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Elles ne dépendent également que de ces trois constantes.

On arrive donc à cette conclusion : *quelle que soit la surface générale considérée, en tous les points d'une ligne de contact de la surface avec son enveloppe, caractéristique, les éléments de contact* (x, y, z, p, q) *ne dépendent que de trois constantes* a, b, c.

On appelle « caractéristique » (au sens de la théorie des équations aux dérivées partielles) la suite simplement infinie de ces éléments de contact le long d'une des courbes.

Chacune de ces suites sera connue si l'on donne les valeurs des trois constantes a, b, c.

Théorème. — *Un seul élément de contact de départ* x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 *suffit à déterminer une caractéristique.*

Soit en effet x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 un élément satisfaisant à $f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$. Il faut déterminer les valeurs de a_0, b_0, c_0.

Les équations

$$V(x_0, y_0, z_0, a, b) = 0, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + p_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 + q_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0,$$

sont alors compatibles en a, b. Soit a_0, b_0 une couple de valeurs. L'équation $\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 + c\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0 = 0$ donnera alors une valeur de c.

On a donc bien les éléments de la courbe caractéristique.

Théorème. — *Toutes les surfaces, intégrales générales, admettant un élément de contact commun, admettent en commun toute la caractéristique (ligne et plans tangents) issue de cet élément.*

Soit, en effet, un élément de contact x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 définissant, comme nous venons de le voir, une caractéristique Γ_0 (a_0, b_0, c_0).

Soit alors une solution générale (non singulière) quelconque S, définie par la fonction $b = \varphi(a)$.

σ_2 Elle est le lieu des courbes C

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0.$$

Pour que cette surface admette l'élément x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 des valeurs desquelles on déduira a_0, b_0, c_0 qui satisfont alors à

$$V(x_0\, y_0\, z_0\, a_0\, b_0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_0 + c_0\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)_0 = 0,$$

β il faut et il suffit que, pour $a = a_0$, on ait $\varphi(a_0) = b_0$ et $\varphi'(a_0) = c_0$.

Mais alors ρ on constate que la courbe C_{a_0} se confond avec la caractéristique Γ_0, et que de plus les valeurs de p, q en un point quelconque de C_{a_0} sont alors les mêmes que pour la caractéristique.

ω Toutes les surfaces intégrales admettant un élément de départ commun, ont donc en commun toute la caractéristique (courbe et plans tangents) issue de cet élément de départ.

Remarque. — Pour définir les caractéristiques, nous avons dû supposer que nous connaissions une intégrale complète. Mais la ρ, φ propriété que nous venons d'établir suffit à montrer que la définition des caractéristiques est indépendante de l'intégrale complète prise comme point de départ.

Corollaire. — *Toute surface intégrale (non singulière) est un lieu de caractéristiques.*

En effet nous venons de montrer σ_2 que par chaque élément de cette surface passe une caractéristique.

Inversement, si nous considérons le lieu des caractéristiques a, b, c telles que, φ étant une fonction quelconque, on ait $b = \varphi(a)$, $c = \varphi'(a)$, o ce lieu sera une surface intégrale.

Problème de Cauchy : Surface passant par une courbe donnée. — ξ On est amené enfin, étant donnée une solution complète, à déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée.

Donnons nous les équations d'une courbe C

$$x = \lambda(t), \qquad y = \mu(t), \qquad z = \nu(t).$$

Puisque une surface intégrale est un lieu de caractéristiques, δ_1, α_1 nous déterminerons la surface, comme lieu de caractéristiques rencontrant C. Il ne pourrait y avoir exception que β si C elle-même était une caractéristique et alors le problème serait indéterminé.

d On peut donc dire que *les caractéristiques sont les seules courbes pour lesquelles le problème de Cauchy est indéterminé.*

Ce sont donc aussi les seules courbes pour lesquelles deux surfaces intégrales quelconques (et non plus une intégrale complète et une intégrale générale) puissent se raccorder.

Pour déterminer la surface générale S passant par C, α_1, φ il suffit de déterminer la fonction $\varphi(a)$ et alors l'équation de S s'obtiendra en éliminant a entre les équations

$$V(x, y, z, a\, \varphi(a)) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\, \varphi'(a) = 0.$$

Pour chaque valeur de a, ces équations représentent une courbe caractéristique C_a.

γ_1 Cherchons la condition pour que les courbes C_a rencontrent C.

δ_1 β Si t désigne le paramètre du point de rencontre M, on doit avoir simultanément

$$(4)\quad V(\lambda(t), \mu(t), \nu(t), a, \varphi(a)) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a}(\lambda, \mu, \nu, a, \varphi) + \frac{\partial V}{\partial b}\, \varphi'(a) = 0.$$

Ces deux équations déterminent à la fois la valeur du paramètre α et la valeur de a correspondant à la courbe caractéristique. En éliminant t, on aurait une équation en a dépendant de $\varphi(a)$ et aussi de $\varphi'(a)$, de la forme

$$R(a, \varphi(a), \varphi'(a)) = 0.$$

Cette équation ρ devrait être vérifiée pour une infinité de valeurs a correspondant à toutes les caractéristiques. Ce doit donc être une identité. Elle exprime que la fonction $\varphi(a)$ doit être solution de cette équation différentielle.

Ici se présente une petite difficulté : Si l'on intègre cette équation, ρ, σ on déterminera une solution φ qui dépendra d'une constante arbitraire, et il semblerait, contrairement au théorème de

Cauchy, qu'il y eût une infinité de surfaces passant par C. Mais, en raison de la forme particulière des équations, nous allons trouver une autre condition (dont $R(a, \varphi, \varphi') = 0$ sera une conséquence), en *exprimant que le plan tangent en* M *contient la tangente à la courbe* C.

En tout point d'une solution quelconque, les coefficients du plan tangent sont donnés par

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

et la condition $\dfrac{\partial V}{\partial a} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0$ est une conséquence de ces deux.

D'autre part, les paramètres directeurs de la tangente en M sont $\lambda'(t)$, $\mu'(t)$, $\nu'(t)$. On a donc aussi

$$\text{(9)} \qquad p\lambda' + q\mu' - \nu' = 0.$$

On a donc les équations (4), (II), (9) pour déterminer t, a, p, q.

En éliminant p, q entre (II) et (9), on obtiendra une équation entre a et t qui remplacera $\dfrac{\partial V}{\partial a} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0$.

Cette équation est

$$\text{(10)} \qquad \lambda'\frac{\partial V}{\partial x} + \mu'\frac{\partial V}{\partial y} + \nu'\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Les deux équations (4), (10) déterminent a, t. En éliminant t entre ces deux équations, on obtiendra une relation

$$S(a, \varphi(a)) = 0,$$

ne dépendant pas de $\varphi'(a)$, qui déterminera sans ambiguïté la fonction $\varphi(a)$.

Remarque. — Considérons l'équation en t

$$\Psi(t) = V(\lambda(t), \mu(t), \nu(t), a, \varphi(a)) = 0.$$

Le premier membre de l'équation (10) n'est autre que la dérivée de cette fonction par rapport à t. La condition (10) exprime donc que l'équation en t a une racine double.

D'où la règle pratique :

Règle. — *Former l'équation aux t des points de rencontre d'une surface* $V(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$ *avec la courbe* C. *Exprimer que cette équation en t a une racine double.*

Si l'on considère la solution complète $V(x, y, z, a, b) = 0$, cela revient à exprimer que la surface intégrale complète est tangente à C. On obtient ainsi la relation entre a et b.

La solution générale cherchée est donc l'enveloppe des intégrales complètes tangentes à la courbe C.

Application. — *On donne l'équation*

$$z(px - qy) + xy(px + qy) = 0. \tag{1}$$

Voir si l'équation n'admet pas comme surfaces intégrales des quadriques à centre admettant pour axes les axes des coordonnées. Déterminer la surface intég. ale passant par la courbe.

$$y^2 - x^2 - 4x - 1 = 0, \qquad z = x\sqrt{3}.$$

Une quadrique de centre origine, a pour équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0.$$

Pour cette quadrique,

$$ax + czp = 0, \qquad by + czq = 0.$$

On doit donc avoir, en substituant dans (1) les valeurs de p, q,

$$xyz\,\frac{ab - c^2z^2}{c\,z^2} - xy \cdot \frac{ax^2 + by^2}{cz} = 0,$$

ou

$$ab - c^2z^2 - c(ax^2 + by^2) = 0,$$

ou simplement

$$ab - c = 0.$$

Ainsi les surfaces

$$ax^2 + by^2 + abz^2 - 1 = 0,$$

sont solutions de l'équation. On a ainsi une solution complète.

Pour déterminer la surface qui passe par la courbe, formons l'équation aux x des points d'intersection

$$ax^2 + b(x^2 + 4x + 1) + 3abx^2 - 1 = 0,$$

ou

$$x^2(a + b + 3ab) + 4bx + b - 1 = 0.$$

Exprimons que cette équation a une racine double. On trouve

$$3b^2(1 - a) + b(1 + 2a) + a = 0,$$

c'est-à-dire

$$b = \frac{a}{a - 1} \qquad \text{ou} \qquad b = -\frac{1}{3}.$$

Pour cette dernière valeur, l'équation aux x se réduit à

$$x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Ces points de rencontre sont donc fixes sur la courbe C. Cette solution est donc à rejeter.

Si l'on pose $b = \frac{a}{a - 1}$

on trouve la famille

$$a(a - 1)x^2 + ay^2 + a^2z^2 - (a - 1) = 0,$$

ou

$$a^2(x^2 + z^2) + a(y^2 - x^2 - 1) + 1 = 0,$$

dont l'enveloppe a pour équation

$$(y^2 - x^2 - 1)^2 - 4(x^2 + z^2) = 0.$$

C'est la surface cherchée. Elle passe bien par la courbe

$$y^2 - x^2 - 1 = 4x, \qquad z = x\sqrt{3}.$$

V. — RECHERCHE D'UNE INTÉGRALE COMPLÈTE

On voit donc que le problème de l'intégration sera complètement résolu si l'on connaît une intégrale complète.

Quelquefois, cette intégrale complète est en évidence, soit d'après l'équation, soit si le problème a une signification géométrique.

PROBLÈME. — *Cherchons les surfaces telles que, si on mène la normale en un point* M *quelconque,* N *étant le point de rencontre avec le plan des* x, y, *la longueur* MN *soit égale à l'abscisse de* N.

L'équation du problème s'obtient immédiatement.

On trouve

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = (x + pz)^2.$$

On aura des solutions évidentes du problème en prenant des sphères dont le centre est dans le plan des x,y, et tangentes à l'axe des y. L'équation d'une telle sphère est

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z^2 - a^2) = 0.$$

Elle constitue une intégrale complète.

Cas simples. — Considérons une équation aux dérivées partielles. Si on la résoud par rapport à q, par exemple, on obtient

$$q = \theta(x, y, z, p).$$

Si, pour une solution de l'équation, on connaissait la dérivée partielle $p = \pi(x, y, z)$, on en déduirait

$$q = \theta(x, y, z, \pi(x, y, z)).$$

La différentielle de z serait alors

$$dz = \pi dx + \theta(x, y, z, \pi)dy. \tag{2}$$

Ce serait certainement une équation aux différentielles totales complètement intégrable.

Inversement, si pour une certaine fonction $\pi(x, y, z)$ et pour la fonction q correspondante, l'équation (2) est complètement intégrable, en l'intégrant, on obtiendra une fonction $z(x, y)$.

Cette fonction satisfera à l'équation aux dérivées partielles, puisque l'on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \pi(x, y, z), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \theta(x, y, z, \pi(x, y, z)),$$

et par conséquent

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \theta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

L'intégration introduira une constante arbitraire.

Pour obtenir une solution complète, il suffirait que la fonction $p = \pi(x, y, z)$ qui rend (2) totalement intégrable, dépende elle-même d'une constante.

On aurait bien alors une solution de l'équation dépendant de deux constantes arbitraires.

Cette simple remarque permet déjà d'intégrer quelques équations.

1° *Soit l'équation* $f(y, p, q) = 0$.

On en déduit

$$q = \varphi(y, p).$$

Si l'on pose $p = a$ l'équation

$$dz = a\,dx + \varphi(y, a)\,dy, \tag{2'}$$

est complètement intégrable et donne

$$z = ax + \int \varphi(y, a)\,dy + b.$$

2° Pour l'équation $f(z, p, q) = 0$, il suffira de prendre y comme fonction.

3° *Supposons l'équation de la forme*

$$f_1(x, p) = f_2(y, q).$$

Il suffira d'égaler chacun des membres à une constante a

$$f_1(x, p) = a, \qquad f_2(y, q) = a.$$

On en déduit

$$p = \varphi_1(x, a), \qquad q = \varphi_2(y, a).$$

D'où l'équation

$$dz = \varphi_1(x, a)\,dx + \varphi_2(y, a)\,dy.$$

qui est évidemment complètement intégrable et donne

$$z = \int \varphi_1(x, a)\,dx + \int \varphi_2(y, a)\,dy.$$

Exemple :

$$pq = xy \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p}{x} = \frac{y}{q} = a.$$

On a l'intégrale complète

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{1}{a}\frac{y^2}{2} + b.$$

Soit

$$p^2 + q^2 = x^2 + y^2.$$

D'où

$$x^2 - p^2 = q^2 - y^2.$$

On obtient

$$z = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx + \int \sqrt{y^2 + a^2}\, dy + b.$$

4° *Soit l'équation*

$$f(z, pX, qY) = 0,$$

X *désignant une fonction de* x *seulement,* Y *une fonction de* y, f *étant homogène en* z, pX, qY.

Posons $z = e^{z_1}$. On aura

$$p = p_1 z, \qquad q = q_1 z.$$

L'équation devient

$$f(z, p_1 zX, q_1 zY) = 0.$$

L'équation étant homogène, z disparaît et on retrouve

$$f_1(p_1 X, q_1 Y) = 0.$$

Ou

$$p_1 X = \varphi(q_1 Y).$$

C'est une équation de la forme (3).

Cas général : Méthode de Lagrange et Charpit. — Dans le cas général, il faut se demander comment choisir la fonction p pour que (2) soit complètement intégrable. Mais comme p et q sont liés par l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

et qu'il n'y a pas lieu de chercher p plutôt que q, on voit que, *pour avoir* p *et* q, *il faut ajoindre à l'équation* (1) *une autre relation*

$$\varphi(x, y, z, p, q) = a, \tag{2}$$

telle que, en tirant p *et* q *de ces deux équations, l'équation*

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{3}$$

soit complètement intégrable, pour une valeur quelconque de a.

Le problème étant ainsi posé, sa solution n'offre plus aucune difficulté. Pour que (3) soit complètement intégrable, il faut que les fonctions p et q satisfassent à la condition

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}. \tag{4}$$

on est simplement amené à calculer les dérivées des fonctions implicites p, q des trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes (puisque dans (4) on a explicité les dérivées totales de p par rapport à y et de q par rapport à x), ces fonctions, p et q étant définies par les équations (1) (2).

Calculons, par exemple, $\frac{\partial p}{\partial y}$.

En dérivant (1) (2) par rapport à y, nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

On en déduit, en éliminant $\frac{\partial q}{\partial y}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{D}^{y,q}_{f,\varphi} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{D}^{p,q}_{f,\varphi} = 0. \tag{5}$$

Ce seul calcul suffit.

Pour avoir $\frac{\partial p}{\partial z}$, il suffit de permuter dans cette équation y et z.

$$\mathrm{D}^{z,q}_{f,\varphi} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{D}^{p,q}_{f,\varphi} = 0$$

Pour calculer $\frac{\partial q}{\partial x}$, il suffit de permuter dans (5) y et x, p et q.

On obtient

$$\mathrm{D}^{x,p}_{f,\varphi} + \frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{D}^{q,p}_{f,\varphi} = 0$$

ou

$$\mathrm{D}^{x,p}_{f,\varphi} - \frac{\partial q}{\partial x}\mathrm{D}^{p,q}_{f,\varphi} = 0$$

Enfin on aura de même

$$D_{f,\varphi}^{z,p} - \frac{\partial q}{\partial z} D_{f,\varphi}^{p,q} = 0$$

Nous obtenons ainsi toutes les dérivées qui figurent dans (4).

Nous remarquons qu'elles admettent, toutes, même dénominateur $D_{f,\varphi}^{p,q}$. Nous supposons qu'il n'est pas nul, et nous le devons, pour pouvoir tirer les fonctions implicites p et q des équations (1) (2).

En substituant dans (4), nous obtenons l'équation

$$D_{f,\varphi}^{y,q} + qD_{f,\varphi}^{z,q} + D_{f,\varphi}^{x,p} + pD_{f,\varphi}^{z,p} = 0. \tag{6}$$

C'est l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction $\varphi(x, y, z, p, q)$ des *cinq variables*, considérées comme indépendantes x, y, z, p, q.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons, suivant l'usage, par X, Y, Z, P, Q les dérivées partielles de f par rapport aux cinq variables x, y, z, p, q

$$X = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdots, \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial q}.$$

L'équation (6) développée s'écrit alors

$$Y\frac{\partial \varphi}{\partial q} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\left(Z\frac{\partial \varphi}{\partial q} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + X\frac{\partial z}{\partial p} - P\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\left(Z\frac{\partial \varphi}{\partial p} - P\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

En l'ordonnant

$$P\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (pP + qQ)\frac{\partial \varphi}{\partial z} - (X + pZ)\frac{\partial \varphi}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0. \tag{6'}$$

On constate que c'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire et homogène.

Remarquons qu'il suffirait que cette équation (6') fut satisfaite en tenant compte de (1), (2). Nous la considérerons en elle-même, et sans aucune relation avec ces deux premières. (D'ailleurs l'équation (2) n'est pas à retenir, car elle dépend de a qui devrait être quelconque, et l'équation (6') n'en dépend pas).

Conclusion. — Déterminons une solution quelconque $\varphi(x, y, z, p, q)$ de l'équation aux dérivées partielles (6') (telle cependant que $D^{p,q}_{f,\varphi} \not\equiv 0$). En posant

$$\varphi(x, y, z, p, q) = a \tag{2}$$

les équations (1) (2) détermineront deux fonctions p, q telles que l'équation aux différentielles totales.

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

soit complètement intégrable. En l'intégrant, on introduira une deuxième constante b. On aura une intégrale complète.

Le problème est donc ramené à l'intégration de (6').

L'intégration complète de (6') se ramènerait, comme on le sait, à l'intégration du système différentiel.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}. \tag{I}$$

On déduit aisément de ce système une combinaison intégrable, en multipliant les numérateurs et dénominateurs respectivement par X, Y, Z, — P, — Q et ajoutant les résultats. On obtiendra au dénominateur

$$PX + QY + (pP + qQ)Z - P(X + pZ) - Q(Y + qZ) = 0.$$

Il faut donc que le numérateur soit nul

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq = 0$$

c'est-à-dire

$$df = 0, \qquad f = \text{const.}$$

Il faut prendre la constante nulle. On obtient alors l'équation donnée. En tenant compte de cette équation le système se réduirait à un système différentiel à quatre variables. Son intégration complète introduirait trois constantes arbitraires.

Mais il n'est pas nécessaire d'avoir intégré complètement l'équation (6') ou le système (I). *Une seule intégrale (différente de $f = 0$) suffira (et c'est le grand avantage de cette méthode) pour déterminer, par deux quadratures, l'intégrale complète.*

Cette méthode porte le nom de « méthode de Lagrange et Charpit ».

Nous appellerons « système fondamental » que nous retrouverons avec une plus grande importance encore, dans d'autres méthodes, le système (I).

Application. — Soit l'équation

$$pq - z = 0.$$

Le système fondamental est ici

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

Ce système s'intégrerait complètement facilement. On a en particulier

$$dy = dp, \qquad p = y - a.$$

On en déduit

$$q = \frac{z}{y - a}.$$

On est alors assuré que l'équation aux différentielles totales

$$dz = (y - a)dx + \frac{z}{y - a}dy$$

est complètement intégrable. Pour l'intégrer, il suffit d'écrire

$$dx = \frac{(y - a)\,dz - z\,dy}{(y - a)^2} = d\,\frac{z}{y - a}$$

et par suite

$$z = (y - a)(x - b).$$

Telle est l'intégrale complète.

D'après le système (I), nous aurions pu prendre la combinaison intégrable

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \qquad \text{d'où} \qquad q = ap.$$

En tenant compte de (1), on trouve

$$p = \sqrt{\frac{z}{a}}, \qquad q = \sqrt{az}.$$

L'équation aux différentielles totales est donc

$$dz = \sqrt{\frac{z}{a}}\,dx + \sqrt{az}\,dy \qquad \text{ou} \qquad dz = \sqrt{\frac{z}{a}}\,(dx + a\,dy).$$

ρ

C'est une équation complètement intégrable qui donne

$$x + ay + b = \int \sqrt{\frac{a}{z}}\,dz = 2\sqrt{az}$$

ou, en changeant légèrement de notation

$$x + x^2y + b = 2x\sqrt{z}.$$

C'est une nouvelle intégrale complète.

Cas particuliers. — Supposons que l'équation donnée soit de la forme

$$f(z, p, q) = 0.$$

D'où X = 0, Y = 0. Dans le système (I) ρ les deux derniers rapports se réduiront à

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

φ

Il suffit donc de poser $q = ap$.

De l'équation (1), on déduira alors

$$p = \varphi(a, z)$$

On a donc des expressions de la forme

$$p = \varphi(a, z), \qquad q = a\varphi(a, z).$$

δ1

L'équation aux différentielles totales

$$dz = \varphi(a, z)(dx + a\,dy)$$

est complètement intégrable et donne

$$x + ay = \int \varphi(a, z)\,dz + b.$$

2° De même, si l'équation est linéaire en $x, y, z.$, les deux derniers rapports sont de la forme

$$\frac{dp}{\lambda(p, q)} = \frac{dq}{\mu(p, q)}.$$

En intégrant cette équation, on aura une relation entre p, q. Soit, par exemple, l'équation

$$px + qy = pqz. \tag{1}$$

Les deux derniers rapports donnent

$$\frac{dp}{p(1 - pq)} = \frac{dq}{q(1 - pq)}.$$

On a donc 1° soit :

$$pq = 1$$

et en tenant compte de (1)

$$p = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4xy}}{2x}, \qquad q = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4xy}}{2y}.$$

On en déduit l'équation

$$dz = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4xy}}{2x}\,dx + \frac{z - \sqrt{z^2 - 4xy}}{2y}\,dy.$$

On l'intègre facilement en faisant le changement de variable

$$z^2 - 4xy = t^2 \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{z^2 - t^2}{4x}.$$

En substituant, il vient simplement, après réductions,

$$(t + z)dx - x(dz + dt) = 0$$

c'est-à-dire

$$z + t = kx \qquad \text{ou} \qquad z + \sqrt{z^2 - 4xy} = kx.$$

2° Soit, si $pq \neq 1$.

$$q = ap$$

D'où

$$p = \frac{x + ay}{az}, \qquad q = \frac{x + ay}{z}$$

et l'équation

$$dz = \frac{x + ay}{az}(dx + ady).$$

En intégrant

$$az^2 = (x + ay)^2 + b$$

3° Si l'équation donnée ne renferme pas z, soit $f(x, y, p, q) = 0$.

on peut chercher des solutions $\varphi(x, y, p, q)$ également indépendantes de z. On aura à chercher une solution de l'équation

$$P\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial y} - X\frac{\partial \varphi}{\partial p} - Y\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0$$

c'est-à-dire à chercher une intégrale première du système

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = -\frac{dp}{X} = -\frac{dq}{Y}$$

système qui se réduirait à un système à trois variables en tenant compte de l'équation $f(x, y, p, q) = 0$.

VI. — MÉTHODE DE CAUCHY

Nous allons exposer une deuxième méthode due à Cauchy.

Posons à nouveau le problème de façon à bien nous en pénétrer : Intégrer l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

c'est trouver une fonction z des deux variables x, y telle que cette fonction et ses deux dérivées partielles p, q satisfassent à (1).

Nous exprimerons que p et q sont les dérivées partielles de z, en écrivant que l'on a

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{2}$$

Concluons : il faut donc trouver trois fonctions z, p, q de x, y satisfaisant à (1) et (2).

Pour transformer ce problème et tâcher de le simplifier, nous pouvons faire un changement de variables indépendantes (et même de fonction). Nous savons, en effet, que l'équation (2) a toujours la même forme que x et y soient ou non variables indépendantes.

Nous ne prendrons qu'une seule autre variable indépendante u, remplaçant y. Le problème revient alors à trouver des fonc-

tions y z, p, q des deux variables x, u satisfaisant aux équations (1) et (2) et à l'équation de liaison que nous pouvons choisir arbitrairement.

En explicitant dans (2) les variables indépendantes x, u, nous pouvons la remplacer par les équations

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p + q\dfrac{\partial y}{\partial x} & (3) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} = q\dfrac{\partial y}{\partial u} & (4) \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque (1) est alors une identité en x et u, nous avons aussi en dérivant

$$(II)\quad \begin{cases} X + Y\dfrac{\partial y}{\partial x} + Z\dfrac{\partial z}{\partial x} + P\dfrac{\partial p}{\partial x} + Q\dfrac{\partial q}{\partial x} = 0 & (5) \\ Y\dfrac{\partial y}{\partial u} + Z\dfrac{\partial z}{\partial u} + P\dfrac{\partial p}{\partial u} + Q\dfrac{\partial q}{\partial u} = 0 & (6) \end{cases}$$

Enfin en considérant les équations (I), nous sommes amenés à égaler les dérivées secondes rectangles.

$$(III)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} - q\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} = \dfrac{\partial p}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial q}{\partial u} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial x} - q\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}. \end{cases}$$

Chose assez anormale d'ailleurs, nous constatons que, en égalant les seconds membres, toutes les dérivées secondes ont disparu, et *nous obtenons une nouvelle équation ne renfermant encore que des dérivées partielles premières*

$$(7)\quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Ainsi donc, au lieu des deux équations (1), (2) nous avons obtenu cinq équations (3, 4, 5, 6, 7) ne renfermant que des dérivées premières.

Nous pouvons faire des combinaisons entre ces équations de manière à tâcher d'obtenir des équations plus simples. Or, les équations (4), (5), (7), sont linéaires et homogènes par rapport aux quatre dérivées $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial q}{\partial u}$.

Nous pouvons dans l'équation (6) substituer les expressions de $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial u}$. Nous obtiendrons

$$\frac{\partial y}{\partial u}\left(Y + qZ + P\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \frac{\partial q}{\partial u}\left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0. \tag{8}$$

Tous ces calculs ont été complètement naturels.

Ici se place l'artifice dû à Cauchy.

Jusque maintenant la relation entre u et x et y a été laissée indéterminée. Voyons si l'on ne peut choisir cette relation de manière que, sur les surfaces intégrales cherchées, les variables satisfassent à l'équation

$$Q - P\frac{\partial y}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

z, p, q étant dans P et Q supposés remplacées en fonction de x, y en les déduisant de l'équation de la surface.

Alors, s'il en était ainsi, l'équation (8) se réduirait à

$$Y + qZ + P\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

(puisque l'on ne peut avoir $\frac{dy}{\partial u} = 0$).

Pour voir si l'on peut faire l'hypothèse indiquée, remarquons que, dans l'équation (9), la variable indépendante que nous avons introduite n'apparaît pas explicitement.

Sur une surface intégrale déterminée, z et aussi p et q sont des fonctions de x, y et si nous supposons que nous les remplaçons dans P et Q, l'équation se transforme en une simple équation différentielle entre x et y de la forme

$$\mathfrak{P}(x, y)dy - \mathfrak{Q}(x, y)dx = 0. \tag{9'}$$

Il faut donc supposer que, sur la surface intégrale considérée, les variables x et y varient de manière à satisfaire à cette équation différentielle. Mais ceci n'est pas une restriction : Sur toute surface intégrale, quelle qu'elle soit, nous pouvons supposer que nous considérons les courbes satisfaisant à telle équation différentielle que nous le voulons (pour leur projection sur le plan

des x, y). En intégrant l'équation (9') nous obtiendrons une relation de la forme

$$\lambda(x, y, c) = 0 \tag{9''}$$

Si nous choisissons pour c, non une constante, mais une fonction de la deuxième variable indépendante u, la fonction y de deux variables x, u définie par (9'') satisfera encore à l'équation (9').

Nous pouvons donc bien supposer que la relation entre y, x, u est telle que l'on ait l'équation (9) et par suite l'équation (10).

Ces deux équations remplacent (6).

Réduction à un système. — On a donc en résumé les équations (3), (4), (5), (7), (9), (10).

On constate que, sur ces équations, quatre d'entre elles (3, 5, 9, 10) ne renferment que les dérivées des fonctions par rapport à x et que la variable u n'y paraît pas explicitement. Ce sont quatre équations de la forme

$$\mathrm{L}\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0$$

linéaires par rapport aux dérivées.

Nous pouvons donc les traiter comme un simple système d'équations différentielles, et le mettre sous la forme canonique.

On obtient ainsi immédiatement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{p\mathrm{P} + q\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\mathrm{X} + p\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}, \quad \frac{dq}{dx} = -\frac{\mathrm{Y} + q\mathrm{Z}}{\mathrm{P}}.$$

Comme nous considérons maintenant un simple système d'équations différentielles, nous employons la notation $\frac{dy}{dx}$ au lieu de $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Ce système s'écrit

$$\frac{dx}{\mathrm{P}} = \frac{dy}{\mathrm{Q}} = \frac{dz}{p\mathrm{P} + q\mathrm{Q}} = -\frac{dp}{\mathrm{X} + p\mathrm{Z}} = -\frac{dq}{\mathrm{Y} + q\mathrm{Z}}. \tag{I}$$

On constate que l'on retrouve le système fondamental auquel nous avions été conduits dans la méthode de Lagrange et Charpit.

Si nous intégrons ce système, en introduisant les valeurs initiales des variables (pour une valeur initiale x_0 de x), nous obtiendrons des relations de la forme

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} y = f_1(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), & z = f_2(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0). \\ p = f_3, & q = f_4. \end{cases}$$

Telles sont les expressions des quatre fonctions de x, satisfaisant aux équations (3, 5, 9, 10).

Mais ces fonctions doivent dépendre non seulement de x, mais aussi de u, que nous avons jusqu'ici traité comme un paramètre. Elles ne pourront dépendre de u, que par l'intermédiaire des valeurs initiales y_0, z_0, p_0, q_0.

En effet, dans l'intégration du système (I), si nous considérons x_0 comme une constante absolue, rien n'empêche de considérer y_0, z_0, p_0, q_0 comme des fonctions d'une autre variable u absolument indépendante de x.

Nous n'avons satisfait qu'aux équations 3, 5, 9, 10.

Il reste encore à satisfaire à (4) et (7), ou en revenant aux équations initiales à (1), (3), (4).

Remarquons, comme nous l'avons déjà vu, que nous connaissons une intégrale première du système (I), obtenue en multipliant les rapports par X, Y, Z, — P, — Q et les ajoutant. Nous avons trouvé

$$f(x, y, z, p, q) = \text{const.} = f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Comme il faut que les fonctions satisfassent à l'équation donnée (1), il faut prendre la constante nulle, et par conséquent aussi

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

Ainsi les fonctions satisferont bien quels que soient x et u aux deux équations

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}$$

cette dernière étant une des équations du système (I).

Il faut enfin que ces fonctions satisfassent, quels que soient x et u à l'équation

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

Cette dernière condition sera alors suffisante. Car les équations (3) et (4) montrent que les fonctions p, q sont les dérivées partielles de z considérée comme fonction de x, et y, et l'équation (1) montre bien que l'on a

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Mais il semble que nous soyons arrivés à une impasse.

Car nous devons écrire l'équation (4) et nous ne savons pas comment s'introduisent les valeurs initiales, fonctions de u dans le système (I) : on sait simplement que pour $x = x_0$, y, z, p, q se réduisent à y_0, z_0, p_0, q_0.

Nous l'avons dit, l'équation (4) doit être satisfaite quel que soit x.

Comme cas tout à fait particulier, comme pour $x = x_0$, les fonctions se réduisent à y_0, z_0, p_0, q_0, il est déjà *nécessaire* que l'on ait

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} = q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u}.$$

Mais il semble que cette condition sera bien insuffisante.

Étudions le premier membre de l'équation (4).

La fonction U de x, u

$$U = \frac{\partial z}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u}$$

est nulle pour la valeur particulière $x = x_0$. Il est naturel de se demander comment elle varie avec x.

Calculons sa dérivée

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial x} - q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Mais nous avons déjà rencontré le groupement des deux premiers termes en dérivant l'équation (3) *qui est satisfaite*.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{11}$$

Dans cette expression (11), nous ne connaissons que les

dérivées par rapport à x. Nous substituerons donc leurs expressions d'après le système fondamental.

Nous obtenons

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{P}\left(P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u} + (Y + qZ)\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{1}{P}\left(Y\frac{\partial y}{\partial u} + P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u} + qZ\frac{\partial y}{\partial u}\right).$$

Nous retrouvons dans la parenthèse les premiers termes de l'identité (6) qui est identiquement satisfaite, puisque $f(z, y, z, p, q)$ est identiquement nul, quels que soient x et u.

Il vient donc, en en tenant compte

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Z}{P}\left(q\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

ou enfin tout simplement

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Z}{P}U. \tag{12}$$

Ainsi la fonction $U(x, u)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles (12).

Mais il n'entre dans cette équation que la seule dérivée de U par rapport à x. Nous pouvons donc la traiter comme une simple équation différentielle en x, u étant traité comme un paramètre.

Nous substituerons dans Z, P les expressions de y, z, p, q supposées tirées du système I (formules II). Nous aurons une équation de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U \times \lambda(x, u)$$

en posant

$$\lambda(x, u) = -\frac{Z(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})}{P(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})}.$$

Intégrons cette équation à partir de x_0.

$$U = U_0 e^{\int_{x_0}^{x} \lambda(x, u)\,dx}$$

c'est-à-dire

$$U = U_0 e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx}.$$

U_0 désignant la valeur initiale de U. On constate que, *si les valeurs initiales des variables satisfont à la condition* $U_0 = 0$, *on aura constamment* $U = 0$.

On arrive donc à ce résultat exceptionnellement remarquable :

Il suffit que la fonction

$$U = \frac{\partial z}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u}$$

dépendant des deux variables x, u soit nulle (quelle que soit u) pour la valeur particulière x_0, pour qu'elle le soit quels que soient x et u.

Objection de Bertrand. — Bertrand a fait l'objection suivante : La conclusion ci-dessus ne peut être rigoureuse que si, pour les valeurs initiales, $\left(\frac{Z}{P}\right)_0$ n'est pas infini.

Il faut donc que P_0 ne soit pas nul. Mais si ce fait se présente, nous remarquons que, d'après le système fondamental,

$$\frac{Z}{P} dx = \frac{Z}{Q} dy.$$

D'après ce système, nous pouvons donc supposer que nous exprimions x, z, p, q en fonction de y et de u et nous aurions

$$U = U_0 e^{-\int_{y_0}^{y} \frac{Z}{Q} dy}$$

dans laquelle nous avons exprimé Z et Q en fonction de y et de u.

La conclusion à laquelle nous étions arrivés sera donc encore valable à moins que $Q_0 = 0$.

Dans ce cas, en adoptant comme variable p ou q on arrivera donc à la même conclusion, à moins que, pour les valeurs initiales, tous les dénominateurs dans le système fondamental soient nuls.

ω, R

Conclusion. — Nous voyons que pour intégrer l'équation aux dérivées partielles, nous devons intégrer le système fondamental (I). Ce système admet l'intégrale première $f(x, y, z, p, q) = 0$ et peut par conséquent se réduire à un système entre quatre variables.

En l'intégrant on obtiendra quatre relations de la forme

$$f_1(x, y, z, p, q, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0, \qquad f_4 = 0,$$

x_0 étant une constante arbitraire, y_0, z_0, p_0, q_0, des fonctions de u assujetties aux *seules* conditions

$$(1') \qquad f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0. \qquad \frac{\partial z_0}{\partial u} = q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u} \qquad (4')$$

Les formules ci-dessus donneront y, z, p, q en fonction de x, u, en particulier y et z en fonction de x, u. On aura donc la représentation paramétrique d'une surface intégrale.

Surface passant par une courbe donnée. — Ces considérations nous permettent alors de résoudre le problème de Cauchy. Si l'on veut déterminer la surface passant par la courbe plane

$$x = x_0, \qquad z = \varphi(y)$$

x, φ

il suffit de prendre

$$y_0 = u, \qquad z_0 = \varphi(u).$$

z_1

De (4') on déduira alors

$$q_0 = \varphi'(u)$$

puis de (1') on déduira p_0

$$f(x_0, u, \varphi(u), p_0, \varphi'(u)) = 0.$$

Pour $x = x_0$, les expressions générales de y, z fonctions de x, u, se réduisent à des fonctions de u seulement

$$y = y_0 = u, \qquad z = z_0 = \varphi(u).$$

ω

L'équation de la surface sera donc bien satisfaite pour

$$x = x_0, \qquad z = \varphi(y).$$

x

Courbe quelconque. — Mais nous pouvons nous proposer un problème plus général, celui de la détermination d'une surface passant par une courbe gauche quelconque.

Nous avons déjà vu qu'un changement de variables préalable transformait l'équation en une autre équation aux dérivées partielles, pour laquelle le problème de Cauchy était ramené au problème précédent.

Mais nous pouvons nous demander si nous ne pouvons pas obtenir la solution du nouveau problème sans opérer le changement de variables et sans refaire d'intégrations.

Nous allons voir qu'il suffit de modifier le raisonnement dans une très faible mesure.

En introduisant une nouvelle variable indépendante u, nous avons été amenés pour déterminer les fonctions y, z, p, q à intégrer le système d'équations fondamental

$$(I) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}.$$

Méthode de Darboux. — Dans ces équations, nous considérions y, z, p, q comme de simples fonctions de x. Mais si x était lui-même fonction d'une autre variable t, ces équations resteraient les mêmes. Pour plus de symétrie dans les calculs, nous égalerons ces rapports à dt, t étant une nouvelle variable indépendante dont nous pouvons supposer la valeur initiale nulle. Nous écrivons donc

$$(I') \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \cdots = -\frac{dq}{Y + qZ} = dt.$$

En intégrant le système, nous aurons cinq relations de la forme

$$(III) \quad f_1(x, y, z, p, q, t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0, \quad f_5 = 0$$

les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 étant des constantes par rapport à t mais pouvant être des fonctions de u.

Les nouvelles variables indépendantes étant actuellement t et u, x, y, z, p, q ne pourront en effet dépendre de u que par l'intermédiaire des valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0.

Dans la première solution, nous considérions en effet que x_0 était une constante absolue, mais rien ne nous y oblige et nous considérerons x_0 également comme fonction de u.

Ces fonctions x, y, z, p, q de t et u devront satisfaire à l'équation (1) et à

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{2}$$

Or $f(x, y, z, p, q) = \text{const.}$ étant toujours une intégrale première du système I', l'équation (1) sera satisfaite si les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 satisfont à l'identité

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

quel que soit u.

Quant à l'équation (2) (t et u étant actuellement les variables indépendantes), elle se décompose en

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p\frac{\partial x}{\partial t} + q\frac{\partial y}{\partial t} \tag{3'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{4'}$$

L'équation (3') est certainement satisfaite : elle résulte identiquement du système (I') qui donne

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p\mathrm{P} + q\mathrm{Q}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = \mathrm{P}, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \mathrm{Q}.$$

Il faut donc et il suffit que les fonctions x, y, z, p, q de t et u définies par (I), satisfassent identiquement quels que soient t et u, à la seule équation (4').

Or, pour $t = 0$ elles se réduisent à x_0, y_0, z_0, p_0, q_0.

On doit donc avoir *en particulier*

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} = p_0\frac{\partial x_0}{\partial u} + q_0\frac{\partial y_0}{\partial u}.$$

Comme dans le cas précédent, et fait tout à fait remarquable, nous allons montrer que *cette condition est suffisante* et que l'équation (4') sera alors satisfaite *pour toutes valeurs de t et de u*.

Considérons en effet la fonction $\mathrm{U}(t, u)$

$$\mathrm{U}(t, u) = \frac{\partial z}{\partial u} - p\frac{\partial x}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u}.$$

z

Etudions sa variation quand t varie.

δ_1

Nous aurons

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} - p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial t} - q\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

ρ, R_1

Les trois premiers termes se retrouvent en dérivant par rapport à u l'équation (3′) qui est identiquement satisfaite.

δ_1

On aura donc

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

ρ, r_2

Au deuxième membre, nous connaissons toutes les dérivées par rapport à t déduites de (I′). En les substituant, nous obtenons

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u} + (X + pZ)\frac{\partial x}{\partial u} + (Y + qZ)\frac{\partial y}{\partial u}.$$

ρ

Nous voyons se former le groupement

$$X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u}$$

que l'on obtient en dérivant par rapport à u l'identité en t et u.

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Nous avons

$$X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial y}{\partial u} = -Z\frac{\partial z}{\partial u}.$$

δ_1

En substituant la première partie dans l'expression de $\frac{\partial U}{\partial t}$, nous obtenons finalement

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -Z\frac{\partial z}{\partial u} + pZ\frac{\partial x}{\partial u} + qZ\frac{\partial y}{\partial u}.$$

ρ, R_1

On reconnaît que le second membre est simplement $-ZU$.

ω

On a donc finalement

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -ZU. \tag{10}$$

ρ

C'est une équation aux dérivées partielles à laquelle satis-

fait la fonction $U(t, u)$. Si nous substituons dans Z les expressions de x, y, z, p, q en fonction de t, u, déduites du système (III), elle est de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -U\zeta(t, u), \qquad \zeta = Z(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q}).$$

Dans l'équation (10), la variable u ne figure que par les expressions de x_0, y_0, z_0, p_0, q_0. Nous pouvons donc la traiter comme un paramètre et considérer l'équation (10) comme une simple équation différentielle entre U et t.

En l'intégrant à partir de $t = 0$, nous obtiendrons puisque, pour $t = 0$, la fonction U se réduit à U_0.

$$U = U_0 e^{-\int_0^t \zeta(t, u)\, dt}$$

On voit donc bien que, *si les valeurs initiales* x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, *satisfont à la condition* $U_0 = 0$, *on aura constamment* $U = 0$ *quel que soit* t.

Dans le cas actuel, l'objection de Bertrand ne se présente pas.

Conclusion. — Pour avoir une solution de l'équation, il suffit d'intégrer le système fondamental (I'), par des formules telles que (II), en introduisant les valeurs initiales des fonctions x, y, z, p, q, pour $t = 0$.

Il faut et il suffit que ces valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 *soient des fonctions de* u *satisfaisant aux deux seules conditions*

$$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \qquad \frac{dz_0}{du} = p_0 \frac{dx_0}{du} + q_0 \frac{dy_0}{du}.$$

Les équations (III) donneront alors x, y, z, p, q en fonction de t et u, en particulier x, y, z en fonction de t, u.

On aura donc les expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres t, u.

Problème de Cauchy (Courbe quelconque). — Si l'on veut obtenir la surface passant par la courbe quelconque

$$x = \lambda(u), \qquad y = \mu(u), \qquad z = \nu(u)$$

il suffira de poser

$$x_0 = \lambda(u), \qquad y_0 = \mu(u), \qquad z_0 = \nu(u).$$

Les fonctions p_0, q_0 de u seront alors déterminées par les équations

$$f(\lambda, \mu, \nu, p_0, q_0) = 0, \qquad \nu'(u) = p_0\lambda'(u) + q_0\mu'(u).$$

Pour $t = 0$, les expressions de x, y, z, qui sont encore fonctions de u sur la surface, se réduisent à x_0, y_0, z_0 et on aura bien

$$x = x_0 = \lambda(u), \qquad y = y_0 = \mu(u), \qquad z = z_0 = \nu(u).$$

La surface passe donc bien par la courbe donnée.

Caractéristiques. — Reprenons les formules

$$y = f_1(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \quad z = f_2(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \quad p = f_3, \quad q = f_4.$$

Sans que cela constitue la moindre restriction, nous pouvons déterminer une surface intégrale quelconque par sa section par un plan déterminé $x = x_0$, (x_0 étant une constante absolue, par exemple, $x_0 = 1$, à moins que les courbes $x =$ const. ne soient les caractéristiques). (Dans ce cas nous prendrions une courbe $y_0 =$ const. ou $z_0 =$ const.).

Si l'équation de cette section est $z = \varphi(y)$, nous poserons

$$y_0 = u, \qquad z_0 = \varphi(u), \qquad q_0 = \varphi'(u)$$

p_0 sera ensuite déterminé par

$$f(x_0, u, \varphi(u), p_0, \varphi'(u)) = 0 \qquad \text{soit} \qquad p_0 = \pi(u).$$

Nous obtenons alors les expressions de y, z, p, q sur la surface en fonction de x, u.

En particulier, on peut dire que les deux premières formules

$$y = f_1(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \qquad z = f_2(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

représentent la surface.

Si l'on donne à u une valeur constante, ces deux premières expressions définissent une courbe de la surface.

Il semble que, pour toutes les surfaces intégrales possibles, toutes ces courbes ψ doivent dépendre de la fonction $\varphi(u)$ que nous avons choisie pour définir la surface, c'est-à-dire d'une fonction arbitraire d'une variable.

Or, ρ nous retrouvons ici un fait absolument remarquable, c'est que, *quelle que soit cette fonction, c'est-à-dire quelle que soit la surface*, comme, pour chaque valeur de u, les fonctions y_0, z_0, p_0, q_0 ρ, R1 prennent certaines valeurs constantes, *toutes ces courbes ne dépendent, au fond, que de trois constantes arbitraires* y_0, z_0, q_0, (p_0 étant défini au moyen de celles-ci par $f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$).

ω Toutes les courbes $u = \text{const.}$ de toutes les surfaces intégrales *ne dépendent que de trois constantes arbitraires*. Elles forment un « complexe ».

Donnons-nous un de ces systèmes de constantes x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 (satisfaisant à $f_0 = 0$) c'est-à-dire σ2 un élément point et plan ξ tangent de la surface. Si nous considérons toutes les surfaces correspondant à *toutes les fonctions* $\varphi(u)$ assujetties seulement à ce que, pour $u = y_0$ on ait les deux seules conditions

$$z_0 = \varphi(y_0), \qquad q_0 = \varphi'(y_0)$$

(toutes ces fonctions φ ρ sont encore des fonctions arbitraires ρ d'une variable), toute cette ∞^1 de surfaces admettront le même élément x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 correspondant à $x = x_0, u = y_0$.

Pour cette valeur particulière $u = y_0$, σ ces surfaces passeront par la courbe

$$y = f_1(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \qquad z = f_2(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

ω *Toutes ces surfaces admettront donc en commun toute la courbe correspondante du complexe.*

Mais de plus, si nous considérons les expressions de p et q

$$p = f_3(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \qquad q = f_4(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

ρ, d ces valeurs de p et q (fonctions de x) ne dépendent également que de x_0, y_0, z_0, p_0, q_0.

Les fonctions de x seront donc également les mêmes en chaque point de la courbe, pour toutes les surfaces. Ainsi :

Propriétés. — *Toutes ces surfaces seront donc tangentes tout le long de la courbe* u_0.

Toutes les surfaces ayant un seul élément commun, admettent en commun toute une courbe du complexe, et sont tangentes en tous les points de cette courbe.

Nous retrouvons la propriété fondamentale des « caractéristiques » que nous avons obtenues dans la recherche d'une solution complète, et par une méthode absolument différente.

Identité avec les caractéristiques en partant de l'intégrale complète. — Il est bien évident que la propriété ci-dessus suffit pour établir que les courbes que nous obtenons par cette méthode se confondent avec les caractéristiques obtenues par la méthode de Lagrange.

Il est aisé d'établir analytiquement ce résultat.

Les deux méthodes que nous avons exposées, issues de points de départ si différents, se rapprochent ainsi par la propriété des courbes caractéristiques. On pourrait donc établir une troisième méthode en introduisant *a priori* ces courbes sur une surface intégrale.

Pour établir analytiquement l'identité, il suffit de s'appuyer sur une propriété analytique *caractéristique* de ces courbes.

Or, d'après la façon dont nous avons obtenu ces courbes caractéristiques, c'est-à-dire le système (III), nous voyons que nous avons dû faire l'hypothèse que, sur une surface intégrale, elles satisfont, quel que soit u, à l'équation

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}.$$

Montrons d'abord que cette condition est suffisante.

VII. — MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

Sur une surface déterminée, connue, nous pouvons, en effet, considérer, *a priori*, les courbes qui satisfont à cette équation. En rempla-

çant dans P et Q, z et aussi p et q en fonction de x et y, ce serait, comme nous l'avons dit, une équation différentielle entre x et y

$$\frac{dx}{\mathfrak{P}(x, y)} = \frac{dy}{\mathfrak{Q}(x, y)}. \tag{12}$$

Au lieu d'intégrer directement cette équation, égalons ces rapports à dt, t désignant une nouvelle variable dont la valeur initiale sera nulle. Nous obtiendrons x et y en fonction de t et des valeurs initiales x_0 et y_0.

Nous allons montrer que de ces seules équations, on peut déduire, *sans préciser la surface que nous considérons*, *toutes* les autres équations du système fondamental.

Sur la surface, x, y, z, p, q peuvent être exprimées en fonction de t et d'une autre variable u qu'il est inutile de préciser : x_0, y_0 peuvent être des fonctions de ce paramètre u.

Si l'on se déplace sur la caractéristique, on doit avoir identiquement

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

D'autre part, si l'on se déplace sur la caractéristique, on a

$$dp = r\,dx + s\,dy.$$

On peut y remplacer dx, dy par les quantités proportionnelles P, Q

$$dp = (\mathrm{P}r + \mathrm{Q}s)\,dt.$$

Or, en dérivant par rapport à x, on obtient l'équation aux dérivées partielles, qui doit être identiquement satisfaite

$$\mathrm{X} + p\mathrm{Z} + r\mathrm{P} + s\mathrm{Q} = 0.$$

On en déduit donc

$$\frac{dp}{dt} = -(\mathrm{X} + p\mathrm{Z}).$$

et de même

$$\frac{dq}{dt} = -(\mathrm{Y} + q\mathrm{Z}).$$

Ainsi donc, tout le long d'une caractéristique, *quelle que soit la surface intégrale*, et sans préciser la deuxième variable u, les fonctions x, y, z, p, q satisfont aux équations

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ} = dt.$$

Ces équations suffisent à déterminer x, y, z, p, q le long d'une caractéristique en fonction de t. On terminera comme dans la méthode de Cauchy.

Nous voyons donc bien que les caractéristiques sont complètement définies par la première équation

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}. \tag{9}$$

Nous pouvons alors démontrer l'identité de ces courbes caractéristiques avec celles introduites par la méthode de Lagrange.

Dans cette première méthode, nous avons obtenu les courbes caractéristiques comme les caractéristiques (théorie des enveloppes) d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre

$$V(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0.$$

Pour montrer que l'identité est complète avec les précédentes, il faut montrer que ces dernières courbes satisfont à la condition (9).

Nous devons donc prendre une famille de surfaces dépendant d'un paramètre a, solution de l'équation aux dérivées partielles, et montrer que les caractéristiques (théorie des enveloppes) satisfont à (9).

Or, si nous prenions x et y comme variables indépendantes, cette équation donnerait le coefficient angulaire de la tangente en un point de la projection sur le plan des x,y.

Il faut donc introduire ce coefficient angulaire. Pour l'obtenir commodément, nous pouvons supposer que la famille des surfaces solutions, a pour équation

$$z = \theta(x, y, a).$$

L'enveloppe s'obtiendra en ajoutant

$$\frac{\partial \theta}{\partial a}(x, y, a) = 0.$$

Cette dernière équation représentera précisément la projection de la courbe caractéristique (enveloppes) sur le plan des x,y.

Le coefficient angulaire de la tangente sera donné par l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial a \partial x} dx + \frac{\partial^2 \theta}{\partial a \partial y} dy = 0.$$

Mais il faut exprimer que $z = \theta(x, y, a)$ satisfait, quel que soit a, à l'équation aux dérivées partielles donnée.

$$f\left(x, y, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = 0.$$

Cette équation doit avoir lieu quels que soient x, y, a.

Si en particulier, nous dérivons par rapport à a, nous obtenons la nouvelle identité

$$Z \frac{\partial \theta}{\partial a} + P \frac{\partial^2 \theta}{\partial a \partial x} + Q \frac{\partial^2 \theta}{\partial a \partial y} = 0.$$

Or, puisque la courbe est une caractéristique, le premier terme est nul. Il reste donc simplement

$$P \frac{\partial^2 \theta}{\partial a \partial x} + Q \frac{\partial^2 \theta}{\partial a \partial y} = 0.$$

La comparaison avec l'équation qui donne le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$, montre que, pour la courbe caractéristique (au sens de la théorie des enveloppes), on a bien

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}.$$

L'identité est donc complète.

Application. — *Intégrer l'équation*

$$z^2(p^2 + q^2) = 3a^2.$$

Surface passant par la courbe $x = 0,\ z^2 = 2ay\sqrt{2}$.

δ_1

On a à intégrer le système

$$\frac{dx}{pz^2} = \frac{dy}{qz^2} = \frac{dz}{3a^2} = -\frac{dp}{pz(p^2+q^2)} = -\frac{dq}{qz(p^2+q^2)}.$$

ρ

Des deux derniers rapports, on déduit

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}. \qquad \text{D'où} \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0}.$$

Cette relation jointe à l'équation, donne

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p_0^2+q_0^2}} = \frac{z_0}{z}.$$

δ_1

Les trois premiers rapports donnent ensuite

$$\frac{dz}{3a^2} = \frac{dx}{z_0p_0z} = \frac{dy}{z_0q_0z},$$

D'où

$$3a^2dx = z_0p_0zdz, \qquad 3a^2dy = z_0q_0zdz.$$

δ_1

En intégrant, et introduisant les valeurs initiales

$$6a^2(x - x_0) = p_0z_0(z^2 - z_0^2)$$
$$6a^2(y - y_0) = q_0z_0(z^2 - z_0^2).$$

δ_1

Si l'on veut avoir la surface passant par

$$x = 0, \qquad z^2 = 2ay\sqrt{2},$$

β

il faut poser

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = u, \qquad z_0^2 = 2au\sqrt{2}, \qquad z_0q_0 = a\sqrt{2}.$$

On en déduit

$$z_0^2p_0^2 = 3a^2 - z_0^2q_0^2 = a^2.$$

D'où

$$z_0p_0 = \varepsilon a, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

δ_1

On obtiendra l'équation de la surface en éliminant u entre les équations

$$6a^2x = \varepsilon a(z^2 - 2au\sqrt{2})$$
$$6a^2(y - u) = a\sqrt{2}(z^2 - 2au\sqrt{2}).$$

En les divisant membre à membre, on a d'abord

$$\frac{y-u}{x} = \varepsilon\sqrt{2}, \qquad u = y - \varepsilon x\sqrt{2}.$$

Substituons dans la première, on obtient

$$6a^2x = \varepsilon az^2 - 2a^2\sqrt{2}(\varepsilon y - x\sqrt{2}),$$

ou enfin

$$2ax = \varepsilon(z^2 - 2ay\sqrt{2}).$$

On obtient deux solutions π correspondant aux deux équations aux dérivées partielles

$$zp = \pm\sqrt{3a^2 - z^2q^2}.$$

Nous avons d'abord étudié le cas (le plus important par ses applications) des équations aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables indépendantes. Il est aisé d'étendre les résultats obtenus au cas des fonctions de n variables indépendantes.

VIII. — ÉQUATIONS A n VARIABLES

Intégrale complète. — Nous allons suivre pas à pas les mêmes raisonnements.

Etant donnée une famille de fonctions z de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$, définie par une équation de la forme

$$V(x, x_1, x_2, \cdots x_n, a_1, a_2, \cdots a_n) = 0, \tag{1}$$

dépendant en outre de n constantes arbitraires, on sait que toutes les fonctions de cette famille satisfont à une même équation aux dérivées partielles, que l'on formera en éliminant $a_1, a_2, \ldots a_n$ entre l'équation (1) et les équations dérivées par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_n$.

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots n). \tag{1}$$

Nous désignerons par $p_1, p_2, \ldots p_n$ les dérivées partielles de z.

Nous aurons donc les équations

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

On obtiendra en général une seule relation de la forme

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0. \tag{2}$$

On dit que toutes les fonctions définies par (1) forment la solution « complète » (d'après Lagrange) de l'équation aux dérivées partielles (2).

Mais il n'est pas démontré (et il n'est pas vrai) que ce soient les seules solutions possibles de l'équation (2).

Nous continuerons à appeler « surface » ($(n+1)$ variables) toute relation de la forme

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = 0.$$

Nous disons que le « plan tangent » en un point a pour paramètres directeurs $p_1, p_2, \cdots p_n$.

Nous appellerons « élément » l'ensemble des coordonnées $x_1, x_2, \cdots x_n, z$ d'un point de la surface et des coefficients de direction du plan tangent en ce point $p_1, p_2, \cdots p_n$.

Recherche de toutes les solutions en partant de l'intégrale complète. — Considérons une « surface » intégrale quelconque de l'équation (1). Soit x_{i_0}, z_0, p_{k_0} $(i = 1, 2, \cdots n, k = 1, 2, \cdots n)$ un élément quelconque (point et plan tangent).

On a par hypothèse

$$f(x_{10}, x_{20}, \cdots z_0, p_{10}, \cdots p_{n0}) = 0.$$

Nous écrirons pour abréger

$$f(x_{i_0}, z_0, p_{k0}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f_0 = 0.$$

Dire que les coordonnées de l'élément satisfont à (2), puisque cette équation est le résultat de l'élimination de $a_1, a_2, \cdots a_n$ entre (1) et (I), c'est dire qu'il existe des valeurs $a_{10}, a_{20}, \cdots a_{n0}$ qui satisfont à toutes les équations

$$V(x_{10}, z_0, a_{i0}) = 0, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0 + p_{i0}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0.$$

Considérons l'un des systèmes de valeurs $a_{10}, a_{i0}, \dots a_{n0}$ et prenons la surface de la famille

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, z, a_{10}, a_{20}, \dots a_{n0}) = 0.$$

Les conditions ci-dessus expriment que cette surface passe par le point $x_{10}, x_{i0}, \dots x_{n0}, z_0$ et que le plan tangent en ce point a pour coefficients

$$p_{10}, p_{20}, \dots p_{n0}.$$

Cette surface a donc en commun, avec la surface intégrale considérée, l'élément x_{i0}, z_0, p_{k0}. Ainsi :

Étant donné un élément quelconque d'une surface intégrale quelconque, il existe toujours au moins une surface de la famille V *(solution complète) qui admet ce même élément, c'est-à-dire qui passe par le point et lui est tangente.*

Cette seule remarque suffit pour déterminer toutes les solutions, d'après ce que l'on sait sur la théorie des enveloppes.

1° Ou bien la surface intégrale considérée se confond avec l'une des surfaces de la solution complète.

2° Ou bien elle est l'enveloppe d'une famille « particulière » de surfaces comprises dans la solution complète.

Cette famille particulière s'obtiendra en général, en se donnant k relations entre les a, permettant de tirer k des paramètres en fonction des $(n - k)$ autres. La famille se réduira à une famille de $(n - k)$ paramètres indépendants. On en cherchera l'enveloppe, en éliminant ces paramètres entre l'équation de cette famille et les dérivées partielles par rapport à chacun des paramètres restants.

La surface enveloppe solution dépendra donc de k fonctions arbitraires de $(n - k)$ variables indépendantes. On obtient n classes de solutions correspondant à $k = 1, 2, \dots n$.

En particulier, il existe une solution dépendant de une fonction arbitraire de $(n - 1)$ variables.

Analytiquement. — Dire que l'équation (2) est le résultat de l'élimination de $a_1, a_2, \dots a_n$, entre (1) et (I) , c'est dire qu'il existe

n « quantités » ou fonctions $a_1, a_2, \ldots a_n$ satisfaisant aux équations (1) et (I).

Nous pouvons donc remplacer (2) par l'ensemble des équations (1), (I) et nous sommes amenés *à déterminer de toutes les manières possibles, des fonctions satisfaisant à* (1) *et* (I). Or, en dérivant l'équation (1) par rapport à x_1, et tenant compte de la première équation du système (I), il reste simplement

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x_1}=0.$$

Nous écrirons

$$\sum\frac{\partial V}{\partial a_i}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_1}=0.$$

On obtiendra de même

$$\text{(II)}\qquad \sum\frac{\partial V}{\partial a_i}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_2}=0\ldots\ldots\sum\frac{\partial V}{\partial a_i}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_n}=0.$$

Inversement, de ce système II, on déduit évidemment le système (I).

On est donc amené à satisfaire de toutes les manières possibles aux équations (1) et (II).

Ce système est un système d'équations linéaires homogènes en $\frac{\partial V}{\partial a_1}, \frac{\partial V}{\partial a_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial a_n}$.

Elles sont satisfaites si $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont des constantes.

Nous retrouvons la solution complète d'où nous sommes partis. Ce cas n'est qu'un cas particulier du deuxième cas ci-après :

Deux cas peuvent se présenter :

1° Si le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \frac{\partial a_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, le système n'admet qu'une solution

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \cdots \qquad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

Les fonctions a_1, a_2,... a_n, z sont donc définies par (I) et (III).

On obtiendra en particulier z, en éliminant a_1, a_2,... a_n. Cette solution n'offre rien d'arbitraire. Lagrange l'appelait la solution « singulière » de l'équation (2).

2° $D = 0$. Or, ce déterminant est le déterminant fonctionnel

$$D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{a_1, a_2, \cdots a_n}.$$

S'il est nul, c'est qu'il existe au moins une relation entre les fonctions (a), indépendante des x.

En particulier, si tous les a sont des constantes (n relations), on retrouve la solution complète.

Plus généralement, supposons qu'il existe k relations entre les fonctions (a). Nous pourrons alors déduire k de ces fonctions en fonction des $(n - k)$ autres, par exemple, a_1, a_2,... a_k.

$$a_1 = \lambda_1(a_{k+1}, \cdots a_n), \qquad a_2 = \lambda_2, \cdots \qquad a_k = \lambda_k(a_{k+1}, \cdots a_n),$$

et il faut supposer qu'il n'existe plus de relations entre a_{k+1},... a_n.

Substituons alors dans les équations (II). Celles-ci peuvent se remplacer par l'équation unique.

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} \cdot da_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial a_n} \cdot da_n = 0.$$

En exprimant da_1, da_2,... da_k en fonction de da_{k+1}, da_{k+2},... da_n, on aura une nouvelle relation linéaire et homogène en da_{k+1}, da_{k+2},... da_n. Il faut donc que les coefficients de da_{k+1},... da_n soient nuls.

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{k+1}} + \frac{\partial V}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial a_{k+1}} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{k+1}} + \frac{\partial V}{\partial a_{k+1}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_n} + \frac{\partial V}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial a_n} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

On obtiendra donc $(n - k)$ équations qui jointes aux k relations entre $a_1, a_2, \ldots a_n$ et (1) détermineront $a_1, a_2, \ldots a_n$ et z.

L'élimination de $a_1, a_2, \ldots a_n$ donnera une solution « générale » z dépendant de k fonctions arbitraires de $(n - k)$ variables.

On voit donc qu'il peut exister autant de classes de « solutions générales » que l'on peut s'imposer de relations (d'ailleurs arbitraires) entre les a.

En particulier, on peut se donner une seule relation.

On obtiendra une solution dépendant d'une fonction arbitraire de $(n - 1)$ variables. C'est la solution du théorème de Cauchy.

Ce sont toutes ces classes d'intégrales que Lagrange appelait intégrales « générales ».

Equation de Clairaut. — Soit l'équation

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n + f(p_1, p_2, \cdots p_n).$$

Elle admet visiblement pour intégrale complète

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + f(a_1, a_2, \cdots a_n).$$

En effet, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i = a_i.$$

L'élimination de $a_1, a_2, \ldots a_n$ donne bien l'équation (2).

Equation de la forme

$$f(p_1, p_2, \cdots p_n) = 0.$$

Elle admet pour intégrale complète

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b,$$

à condition que

$$f(a_1, a_2, \cdots a_n) = 0.$$

Vérification d'une intégrale complète. — Nous avons supposé que l'élimination de $a_1, a_2, \ldots a_n$ entre (1) et (I) ne donnait qu'une seule équation de la forme (2).

Etant donnée une intégrale dépendant de n constantes arbitraires, il faut donc reconnaître si elle satisfait à cette condition et si elle est bien une solution « complète » de l'équation.

Soit l'intégrale

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n, z, a_1, a_2, \cdots a_n) = 0.$$

En la résolvant par rapport à z, on la met sous la forme

$$z = \lambda(x_1, x_2, \cdots x_n, a_1, a_2, \cdots a_n).$$

Les équations du système I sont ici

$$(I') \qquad p_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = l_i(x_1, x_2, \cdots x_n, a_1, \cdots a_n).$$

Nous devons éliminer $a_1, a_2, \ldots a_n$. A cet effet, nous tirerons $a_1, a_2, \ldots a_n$ du système (I') en fonction des x et des p et les substituerons dans l'expression de z.

1° Supposons que le déterminant

$$J = D \begin{matrix} a_1, a_2 \cdots a_n \\ l_1, l_2 \cdots l_n \end{matrix}$$

soit différent de zéro.

On pourra résoudre les équations (I'). En substituant dans

$$z = \lambda(x_1, x_2, \cdots a_1, a_2, \cdots a_n),$$

on obtiendra une seule équation de la forme

$$z = \Phi(x_1, x_2, \cdots x_n, p_1, p_2, \cdots p_n)$$

2° J = 0. Alors, il existe une relation entre $l_1, l_2, \ldots l_n$ pouvant dépendre également de $x_1, x_2, \ldots x_n$. Elle est de la forme

$$\theta(l_1, l_2, \cdots l_n, x_1, x_2 \cdots x_n) = 0$$

c'est-à-dire de la forme

$$\theta(p_1, p_2, \cdots p_n, x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$$

Tous les mineurs de J ne peuvent pas être nuls car sans cela, il y aurait deux relations entre $l_1, l_2, \ldots l_n$ et par suite deux équations de la forme ci-dessus.

Supposons par exemple

$$D \begin{matrix} a_1, a_2, \cdots a_{n-1} \\ l_1, l_2, \cdots l_{n-1} \end{matrix} \neq 0.$$

On pourra alors résoudre les $(n-1)$ premières relations (I) par rapport à $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$.

Substituant ces valeurs dans la dernière équation

$$p_n = l_n(a_1, a_2, \cdots a_n, x_1, \cdots x_n).$$

a_n disparaîtra, puisque J est nul et on aura une relation de la forme

$$p_n = \mathrm{L}_n(p_1, p_2, \cdots p_{n-1}, x_1, x_2, \cdots x_n).$$

D'ailleurs si l'on substituait dans

$$z = \lambda(x_1, x_2, \cdots x_n, a_1, a_2, \cdots a_n)$$

il faudrait que a_n ne disparaisse pas, car sans cela on aurait deux équations aux dérivées partielles.

Recherche d'une intégrale complète. — D'après tout ce qui précède, on voit que si l'on connaît une intégrale complète, on peut avoir toutes les autres solutions de l'équation.

Résolvons l'équation par rapport à l'une des fonctions, par exemple, p_n si elle y figure. Nous obtiendrons

$$p_n = \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_{n-1}).$$

De même que dans le cas de deux variables, considérons l'équation aux différentielles totales

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + \varphi dx_n. \tag{3}$$

Supposons que l'on ait pu trouver des fonctions

$$p_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots x_n, z), \qquad p_2 = \varphi_2, \cdots\cdots \qquad p_{n-1} = \varphi_{n-1}$$

desquelles on déduirait

$$p_n = \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_{n-1}) = \Phi_n(x_1, x_2, \cdots x_n, z)$$

telles que l'équation (3) admette des solutions. Elles seront certainement solutions de l'équation aux dérivées partielles, car on en déduirait

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \varphi_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} = \varphi_{n-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, \cdots p_{n-1})$$

et par conséquent, on aurait bien

$$\frac{dz}{\partial x_n} = \varphi\left(x_1, x_2, \cdots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right)$$

δ1

Si l'équation aux différentielles totales est complètement

o

intégrable, on aura une solution dépendant d'une constante

ξ

arbitraire, b. Mais si de plus, les fonctions φ_1, φ_2,... φ_{n-1} dé-

o

pendent elles-mêmes de $(n-1)$ constantes arbitraires, alors on aura une solution dépendant de n constantes arbitraires, c'est-à-dire une solution complète.

Exemple : Soit par exemple l'équation de la forme

$$f_1(x_1, p_1) \times f_2(x_2, p_2) \times \cdots \times f_n(x_n, p_n) = 1.$$

α

Il suffira de poser

$$f_1(x_1, p_1) = a_1, \qquad f_2(x_2, p_2) = a_2, \cdots f_n(x_n, p_n) = a_n$$

à la condition que a_1, a_2,... a_n satisfassent à la condition

$$a_1 a_2 \cdots a_n = 1.$$

δ1

En résolvant par rapport à p_1, p_2,... p_n on obtiendrait

$$p_1 = l_1(x_1, a_1), \qquad p_2 = l_2(x_2, a_2) \cdots \qquad p_n = l_n(x_n, a_n)$$

ξ

et l'équation aux différentielles totales

$$dz = l_1(x_1, a_1)dx_1 + l_2(x_2, a_2)dx_2 + \cdots + l_n(x_n, a_n)dx_n$$

est évidemment complètement intégrable et donne

$$z = \int l_1(x_1, a_1)dx_1 + \int l_2(x_2, a_2)dx_2 + \cdots + \int l_n(x_n, a_n)dx_n + b.$$

ρ

Elle contient n constantes arbitraires a_1, a_2,... a_{n-1}, b.

Par exemple, soit l'équation

$$p_1 p_2 \cdots p_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

δ1

On posera

$$\frac{p_1}{x_1} = a_1, \qquad \frac{p_2}{x_2} = a_2, \qquad \frac{p_n}{x_n} = a_n = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

On déduirait

$$p_i = a_i x_i$$

et par conséquent

$$z = \frac{1}{2}\left(a_1 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \cdots + \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} x_n^2\right) + b.$$

Nous n'exposerons pas la méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles par la recherche d'une intégrale complète, dans le cas de n variables ; cette extension de la méthode de Lagrange a été faite par Jacobi.

Par contre, nous étendrons au cas de n variables, la méthode de Cauchy, et des caractéristiques.

Méthode de Cauchy : Caractéristiques. — Soit l'équation aux dérivées partielles,

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0 \tag{1}$$

et soit une solution quelconque de cette équation

$$z = \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n) \tag{2}$$

Prenons un point quelconque de la surface $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{no}, z_0$ et les coefficients du plan tangent en ce point $p_{10}, p_{20}, \ldots p_{no}$ c'est-à-dire considérons un « élément » de cette surface.

Faisons varier toutes les variables à partir de ces valeurs initiales, en restant sur la surface, et de manière à satisfaire aux équations

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n}. \tag{I}$$

(Nous désignerons par $X_1, X_2, \ldots X_n, Z, P_1, P_2, \ldots P_n$ les dérivées de f par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n \ldots$).

Nous allons d'abord montrer que la chose est possible et que cette suite d'éléments sera bien déterminée.

En effet, dans ces équations, si nous supposons z exprimé au moyen de (2) ainsi que les dérivées de z, $p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, nous pourrons substituer ces expressions dans $P_1, P_2, \ldots P_n$ Elles se transformeront en fonctions $x_1, x_2, \ldots x_n$ soit

$$P_i = \pi_i(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

Le système (1) se réduira à un simple système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\pi_1} = \frac{dx_2}{\pi_2} = \cdots = \frac{dx_n}{\pi_n} \tag{1}$$

entre les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Nous égalerons à dt l'ensemble de ces rapports, t étant une variable dont nous supposerons la valeur initiale nulle.

L'intégration de ce système introduira alors n constantes arbitraires. Nous pouvons en disposer de manière que pour $t = 0$, les variables x_i prennent les valeurs initiales x_{i0} choisies arbitrairement.

Les expressions des x seront alors complètement déterminées. Elles seront de la forme

$$x_1 = f_1(t, x_{10}, x_{20}, \cdots x_{n0}), \qquad x_2 = f_2 \cdots x_n = f_n(t, x_{10}, x_{20}, \cdots x_{n0}).$$

On aura alors

$$z = \varphi(f_1, f_2, \cdots f_n) = \Phi(t, x_{10}, x_{20}, \cdots x_{n0}).$$

Pour $t = 0$, $z = z_0$ et les dérivées de z par rapport aux x se réduiront aux valeurs initiales.

Le point $x_1, x_2, \ldots x_n, z_0$ décrira une courbe sur la surface et on aura de plus les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$ en chacun des points. Nous appellerons « caractéristique » cette suite simplement infinie d' « éléments ». En particulier, la courbe caractéristique est tout entière tracée sur la surface.

Elle est complètement déterminée si l'on donne le seul élément de départ.

Mais tout cela suppose jusqu'ici que l'on connaisse la surface

$$z = \varphi(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

On ne pourrait, en effet, intégrer un tel système (1) que si l'on connaissait les expressions de $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$, c'est-à-dire la surface. Nous allons montrer ce fait absolument remarquable et fondamental, que, **sans connaître ni avoir à préciser cette surface**, *il est possible d'obtenir d'autres équations permettant de définir complè-*

tement la variation des x, z, p en fonction de t en tous les points d'une caractéristique

En effet, si l'on se déplace d'une manière quelconque sur la surface, et *a fortiori* si l'on se déplace le long d'une caractéristique, on a

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n.$$

Dans ces différentielles t seul varie

Les rapports (I) sont égaux à

$$\frac{p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n}{p_1 P_1 + p_2 P_2 + \cdots + p_n P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + p_2 P_2 + \cdots + p_n P_n}.$$

D'autre part, il faut supposer que les coordonnées d'un point d'une surface intégrale quelconque sont fonctions de t et de $(n-1)$ autres variables u_1, u_2..., u_{n-1} qu'il est inutile de préciser.

Nous désignerons par D un symbole de différentiation quand toutes les variables t et u varieront, par d un symbole quand t variera seul, par δ quand les u varieront seules.

Si l'on se déplace sur la caractéristique,

$$dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} dx_n.$$

En tenant compte des rapports (I)

$$\frac{dp_1}{dt} = P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \cdots + P_n \frac{\partial p_1}{\partial x_n}.$$

Mais d'une façon générale, $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$. Donc

$$\frac{dp_1}{dt} = P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_1}.$$

Nous obtiendrons le groupement qui figure au second membre, en dérivant par rapport à x_1, l'équation (1), ce qui donne

$$X_1 + p_1 Z_1 + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \cdots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_1} = 0.$$

On a donc

$$X_1 + p_1 Z_1 = -\frac{dp_1}{dt}.$$

Les rapports (I) sont donc aussi égaux à $\frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z_1}$ et de même à $\frac{-dp_2}{X_2 + p_2 Z_2}$, etc.

Réduction à un système. — On a donc finalement quand on se déplace sur une caractéristique

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{P_1} = \dfrac{dx_2}{P_2} = \cdots = \dfrac{dx_n}{P_n} = \dfrac{dz}{p_1P_1 + \cdots + p_nP_n} = \dfrac{-dp_1}{X_1 + p_1Z} \\ \qquad = \cdots = \dfrac{-dp_n}{X_n + p_nZ} = dt. \end{cases}$$

On voit bien que ces équations sont indépendantes de la surface considérée : elles déterminent complètement les variations des x, z, p tout le long de la caractéristique, et à la seule condition de connaître les valeurs initiales de toutes ces variables (valeurs qui devront satisfaire à

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0).$$

En intégrant le système (I'), à la condition que pour les valeurs initiales, tous les dénominateurs ne soient pas nuls, et introduisant les valeurs initiales des variables, on obtiendra des relations de la forme

$$(II)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(t, x_{i0}, z, p_{k0}), & p_1 = \varphi_1(t, x_{i0}, z, p_{k0}) \\ x_2 = f_2(t, x_{i0}, z, p_{k0}), & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_n = f_n(t, x_{i0}, z, p_{k0}), & p_n = \varphi_n(t, x_{i0}, z, p_{k0}) \\ z = \varphi(t, x_{i0}, z, p_{k0}) & \end{cases}$$

Telles sont les expressions qui définissent une « caractéristique », suite simplement infinie d'éléments *indépendants de toute surface.*

On en conclut immédiatement que *si deux surfaces ont un élément commun, elles sont tangentes tout le long de la caractéristique définie par cet élément de départ.*

Pour tout système des valeurs initiales, chacune de ces courbes est tout entière tracée sur une surface intégrale. On peut donc considérer *toute surface intégrale comme un lieu de courbes caractéristiques.*

Les coordonnées d'un point d'une surface devant être exprimées en fonction de n variables, les expressions ci-dessus de x_i, z qui dépendent déjà de t devront dépendre encore de $(n-1)$ autres variables $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$. Elles ne le pourront que par l'intermédiaire des valeurs initiales x_{i0}, z, p_{k0}.

α ψ
Nous sommes donc amenés à chercher *comment l'on doit choisir ces fonctions pour que le lieu des courbes caractéristiques correspondantes, constitue bien une surface intégrale.*

β
Il faut :

1° Que toutes ces fonctions satisfassent identiquement à l'équation

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0$$

(quels que soient t, u_1, u_2,... u_{n-1}).

2° Qu'elles satisfassent de même à la condition

$$\mathrm{D}z = p_1\mathrm{D}x_1 + p_2\mathrm{D}x_2 + \cdots + p_n\mathrm{D}x_n \tag{3}$$

a) Comme dans le cas de trois variables, on déduit facilement du système (I'), σ, ψ une combinaison intégrable en multipliant les numérateurs et dénominateurs des rapports respectivement par

$$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots \mathrm{X}_n, \mathrm{Z}, -\mathrm{P}_1, -\mathrm{P}_2, \cdots -\mathrm{P}_n$$

et les ajoutant : on obtient au dénominateur zéro.

ρ1
Il est donc certain que

$$\mathrm{X}_1dx_1 + \mathrm{X}_2dx_2 + \cdots + \mathrm{X}_ndx_n + \mathrm{Z}dz + \mathrm{P}_1dp_1 + \cdots + \mathrm{P}_ndp_n = 0$$

c'est-à-dire

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n, z, p_1, \cdots p_n) = \text{const.} = f_0.$$

ω
Pour que la première condition soit satisfaite, il faut donc et il suffit que

$$f_0 = f(x_{10}, x_{20}, \cdots z_0, p_{10}, \cdots p_{n0}) = 0.$$

b) Prenons la deuxième condition (3).

Les variables indépendantes étant au nombre de n, soient t, u_1, u_2,... u_{n-1}, cette condition revient à n conditions.

ρ1
On doit d'abord avoir quand t varie seul

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots p_ndx_n. \tag{4}$$

ρ ψ
Cette condition est certainement satisfaite, puisque c'est une des équations du système (I').

Il faut maintenant que, quand les u varient seuls,

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\delta x_n. \tag{5}$$

Il semble que nous ne puissions plus continuer, puisque nous ne connaissons pas les expressions des x_i, z, p_k en fonction des valeurs initiales. Qu'allons nous faire ?

Cette condition doit avoir lieu quel que soit t. Mais en particulier, elle doit être satisfaite pour $t = 0$.

Pour cette valeur z, x_i p_k, se réduisent aux valeurs initiales.

On doit donc avoir, en particulier,

$$\delta z_0 = p_{10}\delta x_{10} + p_{20}\delta x_{20} + \cdots + p_{n0}\delta x_{n0} \tag{5'}$$

quels que soient les δu.

Mais il semblerait que cette condition soit bien insuffisante.

Comme dans le cas de trois variables, nous allons montrer que, *si elle est satisfaite, la condition* (5) *sera satisfaite quels que soient les u et quel que soit t.*

Pour le montrer, nous allons considérer la fonction

$$U = \delta z - p_1\delta x_1 - p_2\delta x_2 \cdots - p_n\delta x_n = \delta z - \Sigma p_i\delta x_i$$

et étudier sa variation quand t varie.

On a

$$dU = d\delta z - \Sigma dp_i\delta x_i - \Sigma p_i d\delta x_i.$$

Mais d et δ, étant deux symboles de différentiation, peuvent évidemment être intervertis, et l'on peut écrire

$$dU = \delta dz - \Sigma dp_i\delta x_i - \Sigma p_i\delta dx_i. \tag{7'}$$

D'ailleurs la condition (4) étant identiquement satisfaite, différentions-là quand les u varient. Nous obtiendrons

$$\delta dz = \Sigma\delta p_i dx_i + \Sigma p_i\delta dx_i \tag{8}$$

En comparant (7') et (8)

$$dU = \Sigma\delta p_i dx_i - \Sigma dp_i\delta x_i. \tag{9}$$

Dans cette expression, nous connaissons les expressions de dx_i, dp_i tirées de (I). En les substituant, nous aurons

$$dU = \int [\Sigma P_i \delta p_i + \Sigma \delta x_i (X_i + p_i Z)] dt$$

c'est-à-dire

$$dU = \int [\Sigma X_i \delta x_i + \Sigma P_i \delta p_i + Z \Sigma p_i \delta x_i] dt. \tag{10}$$

Nous voyons apparaître dans les deux premiers groupes du second membre, un groupement que nous obtiendrons en différentiant par rapport aux u l'identité (1) satisfaite quel que soit t et quels que soient les u.

On aura

$$\Sigma X_i \delta x_i + \Sigma P_i \delta p_i + Z \delta z = 0.$$

En en tenant compte dans (10), on obtiendra simplement

$$dU = -Z(\delta z - \Sigma p_i \delta x_i) dt$$

c'est-à-dire enfin

$$dU = -ZU dt.$$

Si l'on fait varier seulement t, les u étant traités comme des paramètres, on peut considérer cette équation comme une simple équation différentielle. En l'intégrant à partir de $t = 0$, on aura

$$U = U_0 e^{-\int_0^t Z dt}.$$

On voit donc bien que si $U_0 = 0$, on a constamment $U = 0$.

Il suffit que la condition (5) *soit satisfaite pour les valeurs initiales, c'est-à-dire que l'on ait*

$$\delta z_0 = p_{10} \delta x_{10} + \cdots + p_{n0} \delta x_{n0}. \tag{5'}$$

Pour avoir une surface intégrale, il faut donc et il suffit que $x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}, t_0, p_{10}, \ldots p_{n0}$ *soient des fonctions de* $(n-1)$ *variables satisfaisant à* (1) *et à* (5').

Solution du problème de Cauchy. — En particulier, si l'on veut avoir l'intégrale de Cauchy qui pour $x_{10} = \text{const.}$ se réduit à

$z_0 = \varphi(x_{20}, x_{30}, \dots x_{no})$ on pourra prendre comme variables u, les quantités $x_{20}, x_{30}, \dots x_{no}$.

La condition (5′) σ_2 exprime alors que $p_{20}, p_{30}, \dots p_{no}$ sont les dérivées de φ par rapport à $x_{20}, \dots x_{no}$.

$$p_{k0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k0}}.$$

Quant à p_{10}, α elle sera donnée par l'équation (1)

$$f\left(x_{10}, x_{20}, \cdots x_{n0}, \varphi, p_{10}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{20}}, \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n0}}\right) = 0.$$

Le système (II) détermine alors $x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, \dots p_n$ en fonction de $t, x_{20}, \dots x_{no}$.

De ces expressions (sauf celle donnant z) on pourra déduire t, $x_{20}, \dots$ x_{no} en fonction de $x_1, x_2, \dots x_n$, β si le déterminant

$$D^{t,\, x_{20}, \cdots x_{n0}}_{x_1, x_2, \cdots x_n}$$

n'est pas nul.

Or, pour la valeur $t = 0$, ce déterminant se réduit à $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_0$ c'est-à-dire à P_{10}. Il n'est donc pas nul.

ω On pourra donc bien tirer $t, x_{20}, \dots x_{no}$ en fonction de $x_1, x_2, \dots x_n$; en les substituant dans l'expression de z, on aura z en fonction de $x_1, x_2, \dots x_n$.

Nous nous bornerons à ces considérations dans le cas de n variables indépendantes.

CHAPITRE IX

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES THÉORIE DES COURBES : FORMULES DE SERRET ET FRESNET

I. — POINTS ORDINAIRES. — POINTS SINGULIERS. — TANGENTE PLAN TANGENT. — COURBES PLANES

Sommaire.

Points ordinaires, points singuliers : Tangente. — Plan tangent.
Théorie du Contact : Contact de deux courbes planes ou gauches, de deux surfaces, etc., Osculation.
Courbes et surfaces enveloppes : Enveloppe de courbes planes : Relation de contact. — Cas des points singuliers. — Familles de surfaces à un paramètre : Arête de Rebroussement. — Familles à deux paramètres.
Applications de la théorie du contact : Courbes planes. — Eléments géométriques en un point d'une courbe. — Deux tableaux de formules pour la résolution de tous les problèmes. — Développée. — Cercle osculateur.
Courbes gauches : Plan osculateur. — Cercle osculateur. — Sphère osculatrice.
Courbure. — Torsion. — Formules de Fresnet : Signification précise de ρ et τ. — Remarques sur les formules. — Relations entre les rayons de courbure et de torsion des diverses indicatrices.
Courbes réciproques : Courbure géodésique d'une courbe sphérique. — Courbes de Bertrand.
Détermination d'une courbe connaissant ρ et τ : Méthode de Darboux. — Méthode du développement des coordonnées.
Application de la théorie générale à l'hélice : Théorème de Bertrand. — Hélices coniques. — Hélices coniques et cylindriques.
Une généralisation des hélices : Propriétés de ces courbes. — Relations entre les rayons.

Une courbe plane peut être représentée :

1° Soit par une équation $f(x, y) = 0$ à laquelle satisfont les coordonnées d'un point de la courbe.

2° Soit par deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

donnant les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre t.

On peut aisément passer d'un mode de représentation à l'autre.

Points ordinaires. — Supposons la courbe donnée sous la première forme $f(x, y) = 0$.

Nous dirons qu'un point x, y est un point « ordinaire » de la courbe si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° Toutes les dérivées partielles de tous les ordres f'_x, f'_y, f''_{x^2},.. ont des valeurs finies et bien déterminées au point x, y.

2° Les dérivées du premier ordre f'_x, f_y, ne sont pas simultanément nulles.

La courbe a été rapportée à certains axes de coordonnées et par conséquent ces conditions semblent dépendre de ces axes.

Nous allons d'abord montrer que ces conditions sont indépendantes du choix des axes de coordonnées.

Prenons en effet un nouveau système d'axes. Les nouvelles coordonnées x_1, y_1 d'un point seront liées aux anciennes par des relations de la forme

$$x = ax_1 + by_1 + x_0, \qquad y = a'x_1 + b'y_1 + y_0, \qquad (ab' - ba' \neq 0)$$

L'équation de la courbe par rapport aux nouveaux axes est donc

$$F(x_1, y_1) = f(ax_1 + by_1 + x_0, \quad a'x_1 + b'y_1 + y_0) = 0.$$

Les nouvelles dérivées partielles sont données par les relations

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = a\frac{\partial f}{\partial x} + a'\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = b\frac{\partial f}{\partial x} + b'\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

1° Toutes ces nouvelles dérivées seront donc finies et bien déterminées en même temps que les anciennes.

2° De plus, comme $ab' - ba' \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ ne peuvent être simultanément nulles, car on aurait aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Signification géométrique. — Nous allons rechercher une signification géométrique des conditions pour qu'un point soit simple.

Soient $M(x, y)$ un point ordinaire, $M'(X, Y)$ un point voisin sur la courbe. On peut écrire

$$f(X, Y) = f(x + (X - x), y + (Y - y)) = 0.$$

Appliquons la formule de Taylor. Nous obtiendrons puisque $f(x, y) = 0$

$$(1)\quad \left\{ (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left| (X - x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial}{\partial y}\right|^{(2)} f(x, y) + \cdots = 0. \right.$$

En posant $X - x = h$, $Y - y = k$, on voit que c'est une équation de la forme

$$a_{10}h + a_{01}k + a_{20}h^2 + a_{11}hk + \cdots = \Sigma a_{ij}h^i k^j = 0.$$

Supposons, par exemple, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = a_{01} \neq 0$, et soit $a_{\alpha 0}h^\alpha$ le premier terme en h différent de zéro. On sait alors que, de cette équation, on pourra déduire un développement de k de la forme

$$k = mh^\alpha + nh^{\alpha+1} + \cdots = -\frac{a_{\alpha 0}}{a_{01}}h^\alpha + \cdots$$

$(Y - y)$ est donc un infiniment petit d'ordre α par rapport à $(X - x)$.

Si en particulier $\alpha = 1$, $(Y - y)$ est un infiniment petit du premier ordre par rapport à $(X - x)$. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, par rapport à $(X - x)$ ou $(Y - y)$, on voit que l'on a sensiblement

$$a_{10}(X - x) + a_{01}(Y - y) = 0$$

c'est-à-dire

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

La courbe, aux environs du point, se confond donc sensiblement avec la droite ci-dessus. Cette droite s'appelle la « tangente » au point.

Si $\alpha > 1$, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur

au premier, on a encore $k = 0$, c'est-à-dire encore (2), puisque dans ce cas $a_{10} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, en prenant alors $(Y - y)$ comme infiniment petit principal, et négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, nous arrivons à la même conclusion.

Donc, dans tous les cas, si le point est un point ordinaire, la courbe se confond, aux infiniment petits d'ordre supérieur au premier près, avec une droite, appelée « tangente », dont l'équation est (2).

Supposons $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Le point M est dit « point singulier ».

En appliquant la formule de Taylor, le développement (1) se réduira à

$$\frac{1}{2!}\left[(X - x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x, y) + \cdots = 0$$

Si les trois dérivées partielles secondes ne sont pas toutes trois nulles, on voit comme ci-dessus, qu'en négligeant des termes du troisième ordre par rapport à $(X - x)$ ou $(Y - y)$, on a

$$\left[(X - x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x, y) = 0$$

c'est-à-dire

$$(X - x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(X - x)(Y - y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (Y - y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Cette équation homogène, du second degré en $(X - x)$, $(Y - y)$ rreprésente deux droites.

Aux environs du point, la courbe se confond sensiblement avec l'une ou l'autre de ces droites. Deux branches de courbes viennent se couper au point M. On dit dans ce cas, que le point M est un point « double » de la courbe.

Si

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

les deux droites, tangentes, sont réelles et distinctes.

Si $H = 0$, les deux droites sont réelles et confondues : les deux

branches réelles admettent même tangente. Le point double est dit « point de rebroussement ». On a en ce point

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Si $H < 0$, les deux droites sont imaginaires : il n'y aura pas de point réel de la courbe aux environs du point M qui est dit point double « isolé ».

Enfin, pour généraliser, supposons que toutes les dérivées partielles soient nulles en un point $M(x, y)$ jusqu'à l'ordre $(n - 1)$, une des dérivées partielles d'ordre n étant différente de zéro.

En appliquant la formule de Taylor, on aura

$$\frac{1}{n!}\left[(X - x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)} f(x, y) + \cdots = 0$$

En négligeant des termes d'ordre supérieur à n en $(X - x)$ et $(Y - y)$, on aura

$$\left[(X - x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)} f(x, y) = 0.$$

Cette équation homogène de degré n en $(X - x)$, $(Y - y)$ représente n droites réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues.

Il y aura n branches de courbes, distinctes ou non, se croisant en M.

Le point M est dit « point multiple d'ordre n ».

Cas où la courbe est donnée sous la forme $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$.

THÉORÈME. — *Si, la courbe étant supposée connue sous la forme $f(x, y) = 0$, la définition était la même que ci-dessus, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point soit « ordinaire » sont :*

1° *Les dérivées successives x', x'',... y', y''... par rapport à t sont en ce point finies et bien déterminées ;*

2° *Les deux dérivées du premier ordre x', y' ne sont pas simultanément nulles.*

Nous allons ramener ce cas au cas précédent.

En effet supposons, par exemple, x' différent de zéro.

De l'équation $x = f(t)$, nous pourrions tirer t en fonction

de x, soit $t = \lambda(x)$. En substituant dans l'expression de y, on aura bien l'équation de la courbe sous la forme

$$F(x, y) = y - \varphi(\lambda(x)) = 0.$$

Pour que le point x, y soit ordinaire, il faut et il suffit que toutes les dérivées partielles de F soient finies et bien déterminées et que l'une des dérivées du premier ordre ne soit pas nulle.

Or ici, $F'_y = 1$; quant aux dérivées partielles elles se réduisent aux dérivées de la fonction composée $\varphi(t)$ où $t = \lambda(x)$.

Cette fonction admet des dérivées de tous les ordres par rapport à x, puisque φ admet des dérivées par rapport à t, et que d'autre part t a des dérivées de tous ordres par rapport à x, obtenues en dérivant $x = f(t)$:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}, \qquad t''_{x^2} = -\frac{x''}{x'^3} \cdots$$

Les expressions de t'_x, t''_{x^2}... admettent toutes pour dénominateur une puissance de x', qui n'est pas nul.

THÉORÈME. — *Réciproquement, étant donnée une courbe* $F(x, y) = 0$ *si le point* x, y *est un point ordinaire de cette courbe, on peut obtenir une représentation paramétrique*

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

telle que les conditions précédentes soient satisfaites au point x, y, t (*existence de dérivées de tous ordres, une des dérivées* x', y' *différente de zéro*).

Par hypothèse, le point étant simple, l'une des dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ n'est pas nulle, soit par exemple $\frac{\partial F}{\partial y}$.

L'équation $F(x, y) = 0$ permet donc de considérer y comme une fonction de x, soit $y = \varphi(x)$, qui admet des dérivées successives déterminées par les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0 \cdots$$

Toutes ces dérivées y', y''... admettent pour dénominateur une puissance de $\frac{\partial F}{\partial y}$. On pourra donc calculer successive-

ment y', y''... Ces dérivées seront finies et bien déterminées puisque $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ et que toutes les dérivées partielles de F sont finies et bien déterminées.

Si donc nous prenons x comme variable indépendante, nous aurons $x' = 1$, $x'' = 0$, $x''' = 0$... et les dérivées de y par rapport à x seront toutes finies et bien déterminées.

Le point sera donc bien ordinaire sur la courbe

$$x = t, \qquad y = \psi(x) = \varphi(t).$$

Si X, Y sont les coordonnées d'un point voisin correspondant à $t + \Delta t$, on a

$$X - x = f_t' \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2!} f''(t) + \cdots$$

$$Y - y = \varphi_t' \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2!} \varphi''(t) + \cdots$$

Si f_t' et φ_t' ne sont pas tous deux nuls, aux infiniment petits du second ordre près, on a

$$\frac{X - x}{Y - y} = \frac{f_t'}{\varphi_t'}.$$

Le point voisin se trouve sur cette droite qui est la tangente au point. Si f' et φ' sont tous deux nuls, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, si f'', φ'' ne sont pas tous deux nuls, on a de même

$$\frac{X - x}{Y - y} = \frac{f''}{\varphi''}.$$

C'est, dans ce cas, l'équation de la tangente, etc. L'équation de la tangente est donc toujours déterminée même si le point est singulier.

Surfaces. — Une surface peut être représentée soit par une relation $F(x, y, z) = 0$ entre les coordonnées de chacun de ses points, soit en considérant ces coordonnées comme fonctions de deux paramètres, sous la forme

$$x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u), \qquad z = \psi(t, u)$$

1er Cas. — On dit qu'un point x, y, z est ordinaire sur la surface, lorsque :

1° La fonction $F(x, y, z)$ admet des dérivées partielles de tous les ordres finies et bien déterminées.

2° Les trois dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ne sont pas simultanément nulles.

Comme dans le cas des courbes, on démontrera que ces conditions sont indépendantes des axes de coordonnées.

Soit $M(x, y, z)$ un point ordinaire de la surface et $M'(X, Y, Z)$ un point voisin. Nous poserons

$$X - x = h, \qquad Y - y = k, \qquad Z - z = l.$$

Nous aurons

$$F(x + h, y + k, z + l) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0.$$

En développant la première par la formule de Taylor, nous obtiendrons

$$(1) \quad h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y} + l\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{2!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right]^{(2)} F(x, y, z) + \cdots = 0.$$

Puisque le point est ordinaire, l'une des trois dérivées du premier ordre, par exemple $\frac{\partial F}{\partial x}$ est différente de zéro.

Comme dans le cas d'une courbe, on verra qu'en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur au premier, par rapport à $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z)$, les points infiniment voisins de M satisfont à l'équation

$$(2) \qquad (X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ils se trouvent dans un plan, le plan « tangent » à la surface au point M.

Supposons maintenant

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

on dit alors que le point est un point « singulier ». L'équation (1) se réduit à

$$\frac{1}{2!}\left[h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right]^{(2)} F(x, y, z) + \cdots = 0,$$

les termes suivant le terme écrit étant successivement du troisième, du quatrième ordre... par rapport à h, k, l.

En négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on voit que les points de la surface voisins du point M satisfont à l'équation (en supposant les dérivées du deuxième ordre non toutes nulles)

$$\left[(X - x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial}{\partial z}\right]^{(2)} F(x, y, z) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma(X - x)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\Sigma(X - x)(Y - y)\frac{\partial^2 F}{dxdy} = 0.$$

Or cette équation homogène et du second degré en $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z)$ représente un cône du second degré ayant son sommet au point $M(x, y, z)$.

La surface se confond donc sensiblement avec ce cône aux environs de M.

Si toutes les dérivées partielles du second ordre de F sont nulles au point M, supposons, pour nous placer dans le cas général, que toutes les dérivées partielles soient nulles jusqu'à l'ordre $(n - 1)$, une dérivée au moins du $n^{ième}$ ordre n'étant pas nulle.

Dans ce cas, en négligeant des infiniment petits d'ordre $n + 1$ par rapport à $(X - x)$, $(Y - y)$, $Z - z)$, les points voisins de M satisfont à l'équation

$$\frac{1}{n!}\left[(X - x)\frac{\partial}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial}{\partial z}\right]^{(n)} F(x, y, z) = 0.$$

Sans qu'il soit nécessaire de la développer, on constate que c'est une équation homogène de degré n en $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z)$.

Elle représente donc un cône d'ordre n ayant son sommet au point x, y, z.

Ce cône peut d'ailleurs se décomposer en cônes d'ordre moindre.

2e Cas. — Supposons la surface donnée sous la forme

$$x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u), \qquad z = \psi(t, u).$$

On dit qu'un point correspondant aux valeurs t, u est « ordinaire » si, pour ces valeurs :

1° Les fonctions x, y, z admettent des dérivées partielles de tous les ordres par rapport à t, u.

2° L'un des trois déterminants fonctionnels

$$D^{t,u}_{y,z} \qquad D^{t,u}_{z,x} \qquad D^{t,u}_{x,y}$$

est différent de zéro.

ξ, ψ

Nous allons montrer que cette définition du point ordinaire se ramène à la précédente, et inversement si l'on donne une surface $F(x, y, z) = 0$, on pourra obtenir une représentation paramétrique, telle que les conditions ci-dessus soient satisfaites.

δ_1

Supposons, par exemple

$$D^{t,u}_{y,z} \not\equiv 0.$$

z

Des équations

$$y = \varphi(t, u), \qquad z = \psi(t, u),$$

on pourrait alors tirer t, u en fonction de y, z sous la forme

$$t = \lambda(y, z), \qquad u = \mu(y, z).$$

En substituant dans l'expression de x, on aurait l'équation de la surface sous la forme

$$F(x, y, z) = x - f(\lambda, \mu) = 0.$$

δ_1, ξ

La condition que l'une des dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ ne soit pas nulle est bien satisfaite puisque $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$.

φ

Il suffit donc de montrer que F admet des dérivées partielles de tous les ordres par rapport à x, y, z.

On a $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$. Toutes les autres dérivées se réduisent (au signe près) aux dérivées partielles de la fonction composée $f(\lambda, \mu)$.

δ_1, σ_2

Or, cette fonction admet des dérivées de tous les ordres par rapport à λ, μ c'est-à dire t, u, et d'autre part t, u admettent des dérivées de tous les ordres par rapport à y, z.

σ_2

On sait, en effet, qu'en dérivant par rapport à y, z les équations

$$y = \varphi(t, u), \qquad z = \psi(t, u),$$

on obtiendra successivement, les dérivées du premier ordre, du deuxième ordre de t, u. Toutes ces dérivées sont des expressions admettant comme dénominateur une puissance de $D^{t,u}_{y,z} \neq 0$ et le numérateur est fini.

Réciproquement, soit M un point ordinaire d'une surface $F(x, y, z) = 0$.

Puisque, par hypothèse, une des dérivées premières, par exemple $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'est pas nulle, cette équation permet de considérer z comme fonction de x, y sous la forme

$$z = \psi(x, y).$$

Cette fonction admettrait, comme on le sait, des dérivées de tous les ordres, finies, puisque $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Si donc l'on pose

$$x = t, \qquad y = u \qquad \text{d'où} \qquad z = \psi(t, u),$$

on aura bien une représentation paramétrique de la surface.

D'ailleurs le déterminant $D^{t,u}_{x,y}$ est égal à l'unité.

Toutes les conditions relatives au point ordinaire sous la deuxième forme sont donc satisfaites.

Plan tangent. — Si l'on considère un point X, Y, Z voisin du point x, y, z correspondant aux valeurs $t + \Delta t$, $u + \Delta u$, des paramètres, les coordonnées de ce point seront

$$X = f(t + \Delta t, \quad u + \Delta u),$$

et de même Y et Z.

On aura

$$X - x = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{1}{2!}\left|\frac{\partial}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial}{\partial u}\Delta u\right|^{(2)} f(t, u) + \cdots$$

On voit, qu'en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur au premier par rapport à Δt, Δu, on a sensiblement

$$X - x = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u.$$

De même

$$Y - y = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u, \qquad Z - z = \frac{\partial \psi}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u.$$

Si le point est simple, on a par exemple $D^{t,u}_{\varphi,\psi} \neq 0$.

Des deux dernières expressions, on pourra déduire Δt, Δu et les transporter dans l'expression de $(X - x)$.

Le résultat s'obtiendra sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} X - x & \dfrac{\partial f}{\partial t} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ Y - y & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ Z - z & \dfrac{\partial \psi}{\partial t} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation du plan tangent au point t, u.

Courbes gauches. — Une courbe gauche peut être considérée soit comme l'intersection de deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

soit comme la trajectoire d'un point. Les coordonnées d'un point sont alors définies par des expressions de la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

en fonction d'une variable t,

1er Cas. — Prenons la courbe sous la forme

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

On dit qu'un point $M(x, y, z)$ est « ordinaire » sur la courbe, si :

1° Les dérivées partielles de tous ordres de f et φ sont finies et bien déterminées ;

2° L'un au moins des déterminants

$$\delta = D^{y,z}_{f,\varphi}, \qquad \delta_1 = D^{z,x}_{f,\varphi}, \qquad \delta_2 = D^{x,y}_{f,\varphi},$$

est différent de zéro.

Il faut d'abord montrer que *ces conditions sont indépendantes des axes de coordonnées choisis.* En effet, si on change les axes, les nouvelles coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point seront liées aux anciennes x, y, z par des relations de la forme

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + a \\ y &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 + b \\ z &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 + c \end{aligned} \qquad \text{avec} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Les équations de la courbe par rapport aux nouveaux axes seront donc

$$F(x_1, y_1, z_1) = f(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + a, \alpha_1 x_1 + \cdots, \alpha_2 x_1 + \cdots) = 0$$
$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = \varphi(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + a, \alpha_1 x_1 + \cdots, \alpha_2 x_1 + \cdots) = 0.$$

Or les fonctions $F(x_1, y_1, z_1)$, $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ admettent des dérivées partielles de tous les ordres par rapport à x_1, y_1, z_1 puisqu'on peut les considérer comme des fonctions composées de x_1, y_1, z_1 par l'intermédiaire de x, y, z. Les fonctions f, φ admettant des dérivées par rapport à x, y, z, et d'autre part x, y, z admettant des dérivées par rapport à x_1, y_1, z_1, les fonctions composées F, Φ admettent bien des dérivées de tous ordres par rapport à x_1, y_1, z_1.

Il faut démontrer ensuite que l'un des nouveaux déterminants

$$\Delta = D^{y_1, z_1}_{F, \Phi}, \qquad \Delta_1 = D^{z_1, x_1}_{F, \varphi}, \qquad \Delta_2 = D^{x_1, y_1}_{F, \varphi},$$

est différent de zéro. Formons Δ.

On a

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

et des expressions analogues pour les dérivées qui figurent dans Δ. On trouve ainsi

$$\Delta = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\delta + (\beta_2\gamma - \gamma_2\beta)\delta_1 + (\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)\delta_2.$$

On aurait des expressions analogues pour les deux autres déterminants, par permutation circulaire de x, y, z, α, β, γ.

Or, ces trois expressions sont linéaires et homogènes par rapport à δ, δ_1, δ_2.

Le déterminant des inconnues est

$$D = \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, & \beta_2\gamma - \gamma_2\beta, & \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 \\ \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

C'est le déterminant déduit du déterminant :

$$d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

en remplaçant chaque élément par le mineur correspondant de d, c'est-à-dire le déterminant *adjoint* de d. On sait que, en général, si l'on fait la même opération sur un déterminant d'ordre n, on a entre les deux déterminants la relation $D = d^{n-1}$, comme on le voit immédiatement en multipliant les deux déterminants D, d.

Dans le cas actuel $D = d^2$. Or d est différent de zéro, si les axes coordonnées forment un véritable trièdre.

Il n'est donc pas possible que l'on ait simultanément $D = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$.

Voyons maintenant comment se comporte la courbe aux environs d'un point x, y, z. Soit $M'(x, y, z)$ un point voisin. Posons

$$X = x + h, \qquad Y = y + k, \qquad Z = z + l.$$

On a, puisque

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

$$f(x + h, y + k, z + l) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z) + \cdots$$

$$\varphi(x + h, y + k, z + l) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(x, y, z) + \cdots$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur au premier en h, k, l, ces équations se réduisent à

$$h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad h\frac{\partial \varphi}{\partial x} + k\frac{\partial \varphi}{\partial y} + l\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Les points voisins de la courbe satisfont donc sensiblement aux équations

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$(X - x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Ces équations représentent une droite car les trois mineurs $D^{y, z}_{f, \varphi}$, $D^{z, x}_{f, \varphi}$, $D^{x, y}_{f, \varphi}$ ne sont pas tous trois nuls. Cette droite est

d'ailleurs l'intersection des plans tangents aux deux surfaces $f = 0, \varphi = 0$ au point M. C'est la « tangente » à la courbe au point M.

Cas d'un point singulier. — Si les déterminants $\delta, \delta_1, \delta_2$ sont tous trois nuls, le point est « singulier ». Les deux équations ci-dessus sont identiques à un facteur près λ. Mais alors si l'on forme la combinaison

$$f(x + h, y + k, z + l) - \lambda\varphi(x + h, y + k, z + l) = 0,$$

cette équation pourra remplacer $\varphi = 0$. Or, si on la développe, les termes du premier degré en h, k, l disparaissent. Si les premiers termes qui subsistent sont de degré n en h, k, l, en annulant leur ensemble et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on obtiendra un cône de degré n.

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(n)} f(x, y, z) - \lambda\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(n)} \varphi(x, y, z) = 0.$$

Ce cône sera coupé par le plan tangent commun à $f = 0$, $\varphi = 0$ suivant n droites qui seront les tangentes aux diverses branches d'un point multiple d'ordre n.

2e Cas. — Supposons que les équations de la courbe soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Le point $M(x, y, z)$ correspondant à la valeur t de la variable sera un point ordinaire,

1° Si f, φ, ψ, admettent des dérivées de tous les ordres finies et bien déterminées ;

2° Si les trois dérivées premières ne sont pas nulles toutes trois.

Nous allons montrer que *ces conditions se ramènent aux conditions précédentes, et que inversement, si un point d'une courbe, donnée sous la forme d'intersection de deux surfaces, est un point ordinaire, on peut trouver une représentation paramétrique telle que les conditions ci-dessus soient vérifiées.*

Ramenons ce nouveau cas au premier. Puisque l'une des dérivées, par exemple $f'(t)$ n'est pas nulle, nous pourrons tirer de l'équation $x = f(t)$, t en fonction de x sous la forme $t = \lambda(x)$.

En substituant cette valeur dans les expressions de y et z, on aura

$$y - \varphi(\lambda(x)) = 0, \qquad z - \psi(\lambda(x)) = 0$$

Ce sont deux équations de la forme

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0.$$

Or, la première par exemple admet des dérivées de tous ordres par rapport aux variables. Elles se réduisent en effet aux dérivées de la fonction composée $\varphi(\lambda(x))$. Celles-ci existent puisque φ admet des dérivées par rapport à $\lambda(x)$, et que, de $x = f(t)$, on peut déduire des dérivées de tous les ordres de la fonction inverse $t = \lambda(x)$.

Il faut encore montrer que les trois déterminants Δ, Δ_1, Δ_2 ne sont pas tous trois nuls. Or,

$$\Delta = D^{y, z}_{F, \Phi} = 1.$$

Démontrons maintenant la réciproque.

Soit un point ordinaire x, y, z d'une courbe définie par

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0.$$

Puisque, par hypothèse, $\Delta = D^{y, z}_{F, \Phi}$ par exemple, n'est pas nul, ces deux équations peuvent être résolues par rapport à y, z et permettent de les considérer comme fonctions de x.

On sait qu'elles admettent alors des dérivées de tous les ordres.

Il suffit donc de prendre x comme paramètre t.

D'ailleurs, on aura alors

$$\frac{dx}{dt} = 1 \neq 0.$$

On verra facilement que les équations de la tangente en M sont

$$\frac{X - x}{f'_t} = \frac{Y - y}{\varphi'_t} = \frac{Z - z}{\psi'_t}$$

si f', φ', ψ' ne sont pas simultanément nulles.

Si elles sont toutes trois nulles, en désignant par f^k, φ^k, ψ^k les trois

premières dérivées qui ne soient pas nulles simultanément, les équations de la tangente seront

$$\frac{X - x}{f'} = \frac{Y - y}{\varphi'} = \frac{Z - z}{\psi'}.$$

II. — THÉORIE DU CONTACT

Considérons d'abord deux courbes C, C′ ayant un point commun M. Nous dirons que la *courbe* C′ a en ce point, *un contact d'ordre n avec la courbe* C, si à un point P de C infiniment voisin de M, nous pouvons faire correspondre un point Q de C′, également infiniment voisin de M, tel que la distance PQ soit infiniment petite d'ordre $(n + 1)$ par rapport à MP pris comme infiniment petit principal.

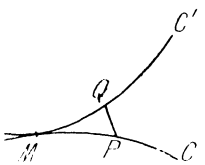


Fig. 17.

Nous adopterons la même définition pour le contact d'une surface S′ avec une surface S ou pour le contact d'une courbe C′ avec une surface S.

Nous supposerons toujours que le point M commun est point ordinaire pour chacun des éléments.

Contact de deux courbes planes. — Nous supposerons d'abord, pour une plus grande commodité, que la courbe C est donnée sous la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

et que l'équation de C′ est $F(x, y) = 0$.

Soient x, y (t) les coordonnées du point commun, x_1, y_1 les coordonnées du point voisin P correspondant à la valeur $t + \Delta t$, enfin $x_1 + \alpha$, $y_1 + \beta$ les coordonnées de Q.

Nous allons d'abord montrer que MP est un infiniment petit du même ordre que Δt.

δ_1

On a en effet

$$x_1 = f(t + \Delta t) = x + f_1'\Delta t + R$$

R étant infiniment petit d'ordre deux au moins par rapport à Δt.

On aura une expression analogue pour y_1. D'où

$$\overline{MP}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = \Delta t^2[f_t'^2 + \varphi_t'^2] + S$$

S étant infiniment petit d'ordre trois au moins par rapport à Δt.

δ_1

Comme f'_t, φ'_t ne sont pas tous deux nuls, on *voit que* MP *est un infiniment petit du même ordre que* Δt.

δ_1, ξ

On aura

$$PQ = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

3

Pour que PQ soit infiniment petit d'ordre $(n + 1)$ par rapport à MP, il faut et il suffit que l'un au moins des infiniment petits α ou β soit d'ordre $(n + 1)$, l'autre pouvant être d'ordre supérieur.

Nous allons démontrer que $F(x_1, y_1)$ *doit être infiniment petit d'ordre* $(n + 1)$ *par rapport à* MP.

δ_1

On aura en effet

$$F(x_1 + \alpha, y_1 + \beta) = 0$$

ou en développant,

$$F(x_1, y_1) + \alpha \frac{\partial F}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$$

les dérivées étant prises en un point intermédiaire ξ, η.

δ_1

Or le point x, y étant ordinaire pour C', les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ne sont pas toutes deux nulles en ce point.

On peut supposer x_1, y_1 suffisamment voisins de x, y et α, β suffisamment petits pour que les dérivées au point ξ, η ne soient pas toutes deux nulles en ce point.

ω

Si α et β sont tous les deux au moins d'ordre $(n + 1)$, il en sera *a fortiori* de même de $F(x_1, y_1)$. Mais inversement, supposons que $F(x_1, y_1)$ soit un infiniment petit d'ordre $(n + 1)$ et, par exemple, que $\frac{\partial F}{\partial x}$ soit différent de zéro.

δ_1

Choisissons $\beta = 0$. Pour le point $x_1 + \alpha$, y_1, on aura

(1) $\quad F(x_1 + \alpha, y_1) = 0 \quad$ ou $\quad F(x_1, y_1) + \alpha \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi, y_1) = 0$

ξ étant intermédiaire entre x et $x_1 + \alpha$.

δ_1 Puisque $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ n'est pas nul, on peut supposer x_1 et y_1 suffisamment petits pour que $\frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi, y_1)$ ne soit pas nul. De (1), on déduira alors pour α une valeur infiniment petite d'ordre $(n+1)$ par rapport à MP.

ω *En résumé, pour qu'il y ait contact d'ordre n, il faut et il suffit que* $F(x_1, y_1)$ *soit infiniment petit d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* MP *ou ce qui revient au même, par rapport à* Δt.

Posons alors

$$F(f(t)), \varphi(t)) = \mathcal{F}(t).$$

δ_1 On aura

$$F(x_1, y_1) = F(f(t + \Delta t), \varphi(t + \Delta t)) = \mathcal{F}(t + \Delta t)$$
$$= \mathcal{F}(t) + \frac{\Delta t}{1}\mathcal{F}'(t) + \cdots + \frac{\Delta t^n}{n!}\mathcal{F}^n(t) + \cdots$$

$\delta_1, 3$ Pour que $F(x_1, y_1)$ soit d'ordre $(n+1)$, il faut et il suffit que

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t) = 0, \qquad \mathcal{F}''(t) = 0 \cdots \mathcal{F}^n(t) = 0$$

Si le contact est d'ordre n seulement, on devra avoir $\mathcal{F}^{n+1}(t) \neq 0$

ω En résumé étant données deux courbes

C $\quad x = f(t), \quad y = \varphi(t)$ $\qquad$ C' $\quad F(x, y) = 0$

formons la fonction

$$\mathcal{F}(t) = F(f(t), \varphi(t))$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que C' *ait un contact d'ordre n avec* C *sont que* $\mathcal{F}$ *et ses dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient nulles au point t, la dérivée* $(n+1)^e$ *n'étant pas nulle.*

2e Cas. — Supposons les équations des deux courbes données sous la forme

C $\quad y = f(x)$ $\qquad$ C' $\quad y = f_1(x).$

On ramènera ce cas au cas précédent en posant

$$F(x, y) = y - f(x) = 0$$
$$x = t \qquad y = f_1(t).$$

La fonction $\varphi(t)$ est donc

$$\varphi(t) = f_1(t) - f(t).$$

Les conditions nécessaires et suffisantes d'un contact d'ordre n de C′ avec C sont donc

$$f_1(t) = f(t), \qquad f_1'(t) = f'(t) \cdots f_1^n(t) = f^n(t)$$

ou

$$f_1(x) = f(x), \qquad f_1'(x) = f'(x) \cdots f_1^n(x) = f^n(x).$$

Mais on remarque que ces conditions sont symétriques en f et f_1. Ce sont donc aussi les conditions pour que C ait un contact d'ordre n avec C′. Il est donc inutile de spécifier quelle est celle des courbes qui a un contact d'ordre n avec l'autre et nous pourrons dire désormais que « les deux courbes C et C′ ont un contact d'ordre n ».

3e Cas. — Enfin, supposons les deux courbes données sous la forme

C $\qquad f(x, y) = 0 \qquad$ C′ $\qquad f_1(x, y) = 0.$

Si nous pouvions les mettre sous la forme précédente, tirer y (ou x) en fonction de x (ou de y), ce qui suppose que les deux dérivées f_x', f_y' d'une part, f_{1x}', f_{1y}' d'autre part, ne sont pas simultanément nulles, c'est-à-dire que le point est ordinaire sur chacune des deux courbes, il suffirait d'égaler les valeurs de y et des n premières dérivées.

Or, nous pouvons calculer ces dérivées successives sans avoir résolu préalablement les équations par rapport à y (ou x).

Elles sont données par les relations

$$f_x' + f_y' y' = 0, \qquad f''_{x^2} + 2f''_{xy} y' + f''_{y^2} y'^2 + f_y' y'' = 0$$

qui donnent successivement y', y'',... et de même y_1', y_1''.

Le problème est donc résolu dans tous les cas.

Contact d'une courbe et d'une surface. — La définition du contact d'une courbe (C) avec une surface (S) ayant été donnée, soient

S $\quad F(x, y, z) = 0, \qquad$ C $\quad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$

les équations de S et de C.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point commun M correspondant à la valeur t du paramètre, x_1, y_1, z_1, les coordonnées d'un point voisin P sur la courbe, correspondant à $t + \Delta t$; $x_1 + \alpha, y_1 + \beta, z_1 + \gamma$ les coordonnées d'un point voisin Q de (S).

Ou démontrera exactement comme dans le cas de deux courbes planes :

1° Que si le point est ordinaire sur C, MP est un infiniment petit du même ordre que Δt.

2° Pour que PQ soit infiniment petit d'ordre $(n + 1)$, il faut et il suffit que l'une au moins des trois quantités α, β, γ soit infiniment petite d'ordre $(n + 1)$, les deux autres pouvant être d'ordre supérieur.

On a

$$F(x_1 + \alpha, y_1 + \beta, z_1 + \gamma) = 0$$

ou

$$F(x_1, y_1, z_1) + \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

les dérivées étant prises en un point ξ, η, ζ (ces coordonnées étant comprises entre x_1 et $x_1 + \alpha$, etc.).

Si donc α, β, γ sont des infiniment petits d'ordre $(n + 1)$ au moins, comme les dérivées sont finies, il en sera certainement de même de $F(x_1, y_1, z_1)$ (au moins).

Mais inversement, le point M étant ordinaire sur S, les trois dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ne sont pas simultanément nulles en ce point. Si, par exemple, $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, on peut prendre $\beta = 0, \gamma = 0$; l'équation (1) se réduira à

$$F(x_1, y_1, z_1) + \alpha \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, y_1, z_1) = 0. \tag{1'}$$

Si le point P est suffisamment voisin de M, et si α est suffisamment petit $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_1, z_1)$ sera différent de zéro et par suite α sera un infiniment petit du même ordre que $F(x_1, y_1, z_1)$. Si donc $F(x_1, y_1, z_1)$ est un infiniment petit d'ordre $(n + 1)$, $PQ = |\alpha|$ sera également d'ordre $(n + 1)$.

R

En résumé, il faut donc et il suffit que $F(x_1, y_1, z_1)$ *soit infiniment petit d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* Δt.

δ_1, ξ

Posons

$$\mathcal{F}(t) = F(f(t), \varphi(t), \psi(t))$$

On aura

$$F(x_1, y_1, z_1) = \mathcal{F}(t + \Delta t) = \mathcal{F}(t) + \frac{\Delta t}{1} F'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} F''(t) + \cdots + \frac{\Delta t^n}{n!} \mathcal{F}^n(t) + \cdots$$

ω

Pour qu'il y ait contact d'ordre n et n seulement, il faut donc et il suffit que

$$\mathcal{F}(t) = 0, \quad \mathcal{F}'(t) = 0, \quad \mathcal{F}''(t) = 0, \cdots \mathcal{F}^n(t) = 0, \quad \mathcal{F}^{n+1}(t) \not\equiv 0.$$

2e Cas. — La courbe est définie par les deux équations

C $$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

γ, ρ

Il suffit de supposer que y et z, par exemple, sont des fonctions de x définies par ces deux équations.

On pourra, sans les résoudre, calculer les dérivées successives de y et z.

On pourra donc calculer les dérivées successives de la fonction composée $F(x, y, z)$.

Contact de deux courbes gauches. — 1er Cas. — Nous nous donnerons d'abord les deux courbes sous la forme

C $$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

C′ $$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0.$$

Cette forme est dissymétrique mais elle se prête le mieux au calcul : nous pourrons ensuite étendre les résultats.

δ_1

Soient $x, y, z, (t)$ le point M, $x_1, y_1, z_1, (t + \Delta t)$ le point P, $x_1 + \alpha$, $y_1 + \beta$, $z_1 + \gamma$, le point Q de C′.

On démontrera comme dans les cas précédents que :

ψ

1° La distance MP est un infiniment petit du même ordre que Δt, si M est un point ordinaire de C.

δ_1

2° Pour que PQ soit infiniment petit d'ordre $(n+1)$, il faut et il suffit que l'une des trois quantités α, β, γ au moins soit d'ordre $(n+1)$, les deux autres pouvant être d'ordre supérieur.

3° Il faut et il suffit que $F(x_1, y_1, z_1)$ et $F_1(x_1, y_1, z_1)$ soient elles-mêmes d'ordre $(n+1)$.

α

Posons

$$\mathcal{F}(t) = F(f(t), \varphi(t), \psi(t)), \qquad \mathcal{F}_1(t) = F_1(f(t), \varphi(t), \psi(t)).$$

On est alors conduit aux $2(n+1)$ conditions suivantes :

β

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que C′ *ait un contact d'ordre n avec* C, *(et n seulement), sont*

$$\mathcal{F}(t) = 0, \quad \mathcal{F}'(t) = 0, \cdots, \quad \mathcal{F}^n(t) = 0, \quad \mathcal{F}^{n+1}(t) \neq 0,$$
$$\mathcal{F}_1(t) = 0, \quad \mathcal{F}_1'(t) = 0, \cdots, \quad \mathcal{F}_1^n(t) = 0, \quad \mathcal{F}_1^{n+1}(t) \neq 0.$$

2e Cas. — Donnons-nous les deux courbes sous la forme

C $\qquad y = f(x), \qquad z = \varphi(x),$

C′ $\qquad y = f_1(x), \qquad z = \varphi_1(x).$

α

On est ramené à la forme précédente si l'on écrit

C $\qquad x = t, \qquad y = f(t), \qquad z = \varphi(t),$

C′ $\qquad F(x, y, z) = y - f_1(x) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = z - \varphi_1(x) = 0.$

δ_1, ξ

On doit donc considérer les deux fonctions

$$\mathcal{F}(t) = f(t) - f_1(t), \qquad \mathcal{F}_1(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t),$$

ou ce qui revient au même

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - f_1(x), \qquad \mathcal{F}_1(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x),$$

et les annuler ainsi que les n premières dérivées.

o

On obtient ainsi

$$f(x) = f_1(x), \qquad f'(x) = f_1'(x) \cdots f^n(x) = f_1^n(x)$$
$$\varphi(x) = \varphi_1(x), \qquad \varphi'(x) = \varphi_1'(x) \cdots \varphi^n(x) = \varphi_1^n(x).$$

Or, on remarque que ces conditions sont symétriques par rapport aux deux courbes C, C′. Si donc C′ a un contact d'ordre n avec C, inversement C a un contact d'ordre n avec C′. Nous pouvons donc dire désormais que « les deux courbes C et C′ ont un contact d'ordre n ».

3e Cas. — Si enfin, les deux courbes sont données sous la forme

C $\qquad f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$

C' $\qquad f_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, z) = 0.$

α

ces équations doivent permettre de calculer deux des coordonnées y et z, par exemple, en fonction de la troisième x, si le point est ordinaire sur chacune des courbes. σ2 On pourra calculer les dérivées successives de y et z sans résoudre ces équations. Il suffira d'égaler ces couples de dérivées successives jusqu'à l'ordre n.

Contact de deux surfaces. — La définition du contact de deux surfaces est la même que pour deux courbes, ou pour une courbe et une surface.

1er Cas. — Nous prendrons la surface S sous la forme

S $\qquad x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u), \qquad z = \psi(t, u)$

et la surface S' sous la forme

S' $\qquad F(x, y, z) = 0.$

Le point $M(x, y, z)$ sur S correspondra aux valeurs t, u.

Le point $P(x_1, y_1, z_1)$ sur S correspondra aux valeurs $t + \Delta t$, $u + \Delta u$

Le point Q sur S' aura pour coordonnées $x_1 + \alpha$, $y_1 + \beta$, $z_1 + \gamma$.

Ici, il y a une légère modification aux raisonnements et aux résultats précédents.

Il faut d'abord β avoir un infiniment petit équivalent à MP.

Or, ρ cet infiniment petit dépend de Δt, Δu.

Nous allons d'abord démontrer que MP *est un infiniment petit du même ordre que* $\sqrt{\Delta t^2 + \Delta u^2}$, si le point M est ordinaire sur S.

δ1

En effet, on a

$$MP = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \cdots\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \cdots\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \cdots\right)^2}.$$

ξ

La partie principale de la quantité sous le radical est, quels que soient Δt, Δu, comprise dans le groupe

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u\right)^2.$$

On voit que, quel que soit l'ordre d'infinitude relatif de Δt, Δu, c'est un infiniment petit du même ordre que $\Delta t^2 + \Delta u^2$, à moins que l'on ait simultanément

$$\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u = 0.$$

Il faudrait pour cela que les trois déterminants

$$D^{t,u}_{y,z}, \qquad D^{t,u}_{z,x}, \qquad D^{t,u}_{x,y}$$

soient nuls simultanément, ce qui n'est point, puisque le point M est simple sur S.

2° Pour que la distance PQ soit infiniment petite d'ordre $(n+1)$, il faut que l'une des trois quantités α, β, γ au moins soit d'ordre $(n+1)$, les deux autres pouvant être d'ordre supérieur.

3° On a

$$F(x_1 + \alpha, y_1 + \beta, z_1 + \gamma) = 0.$$

Comme dans les cas précédents, on en déduit que $F(x_1, y_1, z_1)$, doit être d'ordre $(n+1)$ par rapport à MP, c'est-à-dire par rapport à $\sqrt{\Delta t^2 + \Delta u^2}$.

Posons

$$\mathcal{F}(t, u) = F(f(t, u), \varphi(t, u), \psi(t, u)).$$

On aura

$$F(x_1, y_1, z_1) = \mathcal{F}(t + \Delta t, u + \Delta u) = \mathcal{F}(t, u) + \Delta t \mathcal{F}_t' + \Delta u \mathcal{F}_u'$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial}{\partial u}\Delta u\right)^{(2)}\mathcal{F}(t, u) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial}{\partial u}\Delta u\right)^{(n)}\mathcal{F}(t, u) + \cdots$$

Il faut exprimer que cette expression est infiniment petite d'ordre $(n+1)$ par rapport à $\sqrt{\Delta t^2 + \Delta u^2}$.

Supposons d'abord Δt, Δu du même ordre et posons $\frac{\Delta u}{\Delta t} = \lambda$, λ restant fini.

Dans $F(x_1, y_1, z_1)$, l'ensemble

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial}{\partial u}\Delta u\right)^{(k)}\mathcal{F}(t, u)$$

deviendra

$$\frac{1}{k!}\Delta t^k\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\frac{\partial}{\partial u}\right)^{(k)}\mathcal{F}(t,u).$$

C'est donc un infiniment petit d'ordre k.

Pour que $F(x_1, y_1, z_1)$ soit infiniment petit d'ordre $(n+1)$ par rapport à $\sqrt{\Delta t^2+\Delta u^2}$ c'est-à-dire par rapport à Δt, il faut donc que

$$\mathcal{F}(t,u)=0,\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}+\lambda\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}=0\cdots\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\frac{\partial}{\partial u}\right)^{(n)}\mathcal{F}(t,u)=0.$$

Mais λ pouvant être arbitraire, ces conditions se décomposent, à leur tour, en

$$\mathcal{F}(t,u)=0,\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^2}=0\cdots\frac{\partial^n\mathcal{F}}{\partial u^n}=0.$$

Toutes les dérivées partielles de $\mathcal{F}(t, u)$, jusqu'à l'ordre n inclusivement, doivent donc être nulles.

Inversement, supposons ces conditions remplies. On aura

$$\mathcal{F}(t+\Delta t, u+\Delta u)=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial}{\partial u}\Delta u\right)^{(n+1)}\mathcal{F}(t,u)+\cdots$$

Choisissons Δt et Δu du même ordre, mais ne satisfaisant pas à l'équation homogène de degré $(n+1)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial}{\partial u}\Delta u\right)^{(n+1)}\mathcal{F}(t,u)=0,$$

On voit que $\mathcal{F}(t+\Delta t, u+\Delta u)$ sera d'ordre $(n+1)$ par rapport à Δt et par suite par rapport à $\sqrt{\Delta t^2+\Delta u^2}$. Il en sera de même *a fortiori* si Δu et Δt ne sont pas du même ordre.

Règle. — *On forme donc la fonction*

$$\mathcal{F}(t,u)=F(f,\varphi,\psi).$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait contact d'ordre n (et n seulement) sont que toutes les dérivées partielles de cette fonction soient nulles jusqu'à l'ordre n inclusivement.

2e Cas. — Supposons les deux surfaces données sous la forme

S $\qquad z=f(x,y),\qquad$ S′ $\qquad z=\varphi(x,y).$

Nous ramenons ce cas au précédent en écrivant

$$S \quad x = t, \quad y = u, \quad z = f(t, u), \qquad S' \quad z - \varphi(x, y) = F(x, y, z) = 0.$$

Nous devons prendre la fonction

$$\mathcal{F}(t, u) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(t, u) - \varphi(t, u).$$

Il faut que toutes les dérivées partielles de cette fonction soient nulles jusqu'à l'ordre n inclusivement. On a donc

$$f(t, u) = \varphi(t, u), \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdots \quad \frac{\partial^n f}{\partial u^n} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial u^n}.$$

Or, ces conditions sont symétriques par rapport aux deux surfaces. Comme dans les cas précédents, on peut désormais dire : *les surfaces* S *et* S' *ont un contact d'ordre n.*

2e Cas. — Si l'on a les deux surfaces

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$

si le point est simple, les trois dérivées partielles du premier ordre n'étant pas nulles, on pourra tirer l'une des coordonnées, z par exemple, en fonction des deux autres. Il suffira d'égaler les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre n, des fonctions implicites $z(x, y)$ déterminées par ces deux équations.

Or, on peut obtenir ces dérivées sans avoir résolu au préalable les équations par rapport à z. Le problème est donc résolu.

Par exemple, pour un contact du premier ordre, les dérivées étant données par

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

On devra avoir

$$D^{x,\ z}_{F,\ \Phi} = 0$$

et de même

$$D^{y,\ z}_{F,\ \Phi} = 0.$$

Ces deux conditions peuvent se mettre sous la forme plus symétrique

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Osculation. — Soit C une courbe (ou surface) quelconque. Soit d'autre part C′ une autre courbe (ou surface) dont l'équation (ou les équations) dépendent d'un certain nombre de paramètres $a_1, a_2, \dots a_n$. On pourra chercher à déterminer ces paramètres de manière que C′ et C aient en un point commun M, le contact d'ordre le plus élevé possible.

Les courbes (ou surfaces) correspondantes s'appellent « osculatrices » au point M.

Courbes planes. — Soit, par exemple, une courbe plane C

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

et une autre courbe plane (C′)

$$F(x, y, a_1, a_2, \cdots a_n) = 0.$$

On peut déterminer les valeurs des paramètres de telle façon que, en un point donné, β C′ ait avec C un contact d'ordre $(n-1)$. α, α_2

Il faut en effet former la fonction

$$\mathcal{F}(t) = F(f(t), \varphi(t), a_1, a_2, \cdots a_n)$$

et l'annuler ainsi que les $(n-1)$ premières dérivées. 0 On obtiendra n équations pour déterminer les valeurs des paramètres $a_1, a_2, \dots a_n$.

Le théorème suivant fournit une deuxième définition d'une courbe osculatrice à une autre en un point M.

Théorème. — *La courbe* C′ *osculatrice, en un point* M, *à une courbe donnée* C *peut être considérée comme la limite d'une courbe passant par le point* M et *par* $(n-1)$ *autres points voisins de* M, *quand ces derniers se rapprochent indéfiniment de* M, *d'une manière quelconque, et viennent se confondre avec lui.*

Soient, en effet,

$$t, \quad t + \Delta_1 t, \qquad t + \Delta_2 t, \cdots \qquad t + \Delta_{n-1} t$$

les paramètres correspondant au point M et aux points voisins $M_1, M_2, \dots M_{n-1}$.

δ_1, ξ Les valeurs des paramètres $a_1, a_2, \cdots a_n$ de la courbe C, passant par ces n points satisfont aux équations

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}(t + \Delta_1 t) = 0, \cdots \qquad \mathcal{F}(t + \Delta_{n-1} t) = 0.$$

α_2

Cherchons ce que deviennent ces équations, lorsque tous les points se rapprochent indéfiniment de M, c'est-à-dire lorsque tous les Δt tendent simultanément vers zéro.

Supposons d'abord qu'il n'y ait que deux points M, M_1.

δ_1

Nous aurons

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}(t + \Delta_1 t) = 0.$$

α

En tenant compte de la première, cette deuxième équation s'écrit

$$\Delta_1 t \mathcal{F}_t'(t + \theta\Delta_1 t) = 0.$$

Les paramètres de la courbe doivent donc satisfaire aux deux équations

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}_t'(t + \theta\Delta_1 t) = 0$$

ω

Lorsque $\Delta_1 t$ tend vers zéro, on voit que ces paramètres satisfont à la limite (si $\mathcal{F}_i'$ est continue, ce qu'il faut nécessairement supposer pour la suite) à

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}_t'(t) = 0.$$

α, ξ

Nous allons montrer que, si l'on a k points voisins de M tendant simultanément vers M, les paramètres doivent satisfaire, à la limite, à

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t) = 0, \cdots \qquad \mathcal{F}^k(t) = 0.$$

α, ν

Nous allons supposer la loi vraie pour k points (elle est vraie pour 1,2) et démontrer que si l'on considère un $(k+1)^{ième}$ point tendant vers M, il faut ajouter l'équation

$$\mathcal{F}^{k+1}(t) = 0.$$

δ_1, σ_2

En effet, par hypothèse, les paramètres de toute courbe passant par k points infiniment voisins de M satisfont, à la limite, aux équations

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t) = 0 \cdots \qquad \mathcal{F}^k(t) = 0.$$

Or, dans les positions successives de la courbe C', δ_1 si elle passe constamment de plus par le point M_{k+1} $(t + \Delta_{k+1} t)$, on aura aussi

$$\mathcal{F}(t + \Delta_{k+1} t) = 0$$

Si l'on tient compte des premières conditions, cette équation s'écrit

$$\mathcal{F}^{k+1}(t + \theta\Delta_{k+1}t) = 0.$$

Lorsque $\Delta_{k+1}t$ tend vers zéro, cette condition devient à la limite

$$\mathcal{F}^{k+1}(t) = 0,$$

en supposant continue la dérivée d'ordre $(k + 1)$.

Le résultat est donc établi.

Les paramètres d'une courbe (C') *passant par* $(n - 1)$ *points voisins de* M, *lorsque ces points se rapprochent indéfiniment de* M, *satisfont donc, à la limite, aux équations*

$$\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t) = 0 \cdots \qquad \mathcal{F}^{n-1}(t) = 0.$$

Ces conditions sont bien celles qui déterminent la courbe C' osculatrice en M à C.

Le même raisonnement s'appliquerait si la courbe C était une courbe gauche et si l'élément variable était une surface dépendant de n paramètres.

La surface osculatrice à la courbe est celle qui aurait avec la courbe un contact d'ordre $(n - 1)$. On pourrait la considérer comme la limite d'une surface passant par M et par $(n - 1)$ autres points infiniment voisins de M.

III. — COURBES ET SURFACES ENVELOPPES

Avant de donner des applications de la théorie du contact aux cas les plus simples (contact du premier et du second ordre), nous allons exposer une théorie qui a avec elle de nombreux points communs.

Enveloppe de courbes planes. — Considérons une famille de courbes planes dont l'équation

$$f(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

dépende d'un paramètre a.

Prenons deux courbes voisines C, C' correspondant aux valeurs $a, a + \Delta a$ du paramètre. Elles se coupent en un ou plusieurs points M.

Nous allons montrer que :

Ces points ont une position limite sur C, *lorsque la courbe* C′ *se rapproche indéfiniment de* C, *c'est-à-dire lorsque* Δa *tend vers zéro.*

Les coordonnées de l'un des points satisfont aux équations

$$f(x, y, a) = 0, \qquad f(x, y, a + \Delta a) = 0$$

et par suite, en appliquant le théorème des accroissements finis, pour chaque valeur de Δa différente de zéro, mais du reste aussi petite que l'on voudra, elles satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a + \theta \Delta a) = 0.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial a}$ est continue au point considéré, lorsque Δa tend vers zéro, on voit que les coordonnées des points limites communs satisfont à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0. \tag{2}$$

Ainsi, il existe sur chaque courbe C, un ou plusieurs points limites définis par les équations

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0.$$

Le lieu de ces points limites, sur toutes les courbes C, c'est-à-dire lorsque a varie, constitue, une courbe E appelée « enveloppe de la famille de courbes ». Ces courbes C sont les « enveloppées ».

On peut, soit considérer les coordonnées d'un point de E définies en fonction du paramètre a, par les équations (1) et (2), soit en éliminant a, obtenir l'équation

$$\mathrm{E}(x, y) = 0.$$

de l'enveloppe (elle peut parfois se décomposer en plusieurs).

THÉORÈME. — *L'enveloppe est tangente, en chacun de ses points, à l'enveloppée correspondante* (*à condition que ce point soit simple pour l'un et l'autre des éléments*).

Donnons-nous une enveloppée C_0 correspondant à la valeur a_0. La courbe enveloppe est définie par les équations

$$f(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0. \tag{2}$$

A la valeur a_0 correspondent un ou plusieurs points communs à C_0 et E. Soit $M(x_0, y_0)$ un de ces points. Il faut d'abord exprimer que ce point est ordinaire sur C_0. *On n'a donc pas* simultanément

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, a_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, a_0) = 0.$$

D'autre part, ce point est ordinaire sur E : Les dérivées x', y' des fonctions de a déduites de (1) et (2) ne sont pas toutes deux nulles au point x_0, y_0 (a_0).

Or, ces dérivées sont données par les équations

$$x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

$$x'\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0.$$

La première se réduit à

$$x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Les valeurs x', y' ne seront certainement pas toutes deux nulles si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x_0, y_0, a_0) \neq 0.$$

Nous supposerons cette condition remplie.

Nous devons exprimer que les courbes C_0 et E sont tangentes en $M_0(x_0, y_0)$. D'après la méthode générale, nous devons prendre sur E le point voisin x_1, y_1, correspondant à la valeur $a_0 + \Delta a$, substituer ces coordonnées dans l'équation de C_0 et montrer que le résultat est infiniment petit du deuxième ordre par rapport à Δa.

Or,

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, a_0) &= f(x_1, y_1, a_0 + \Delta a - \Delta a) \\ &= f(x_1, y_1, a_0 + \Delta a) - \frac{\Delta a}{1} f'_a(x_1, y_1, a_0 + \Delta a) + \frac{\Delta a^2}{2!} f''_{a^2}(x_1, y_1, a_0 + \theta_1 \Delta a). \end{aligned}$$

Or, puisque le point x_1, y_1, correspond sur l'enveloppe à la valeur $a_0 + \Delta a$, les deux premiers termes sont nuls :

$f(x_1, y_1, a_0)$ est donc bien un infiniment petit du deuxième ordre par rapport à Δa, et du deuxième ordre seulement, si la dérivée f''_{a^2} est continue en x_0, y_0, a_0 ; cette dérivée n'étant pas nulle en ce point, ne sera en effet pas nulle au point infiniment voisin $x_1, y_1, a_0 + \theta_1 \Delta a$.

Sans appliquer cette théorie générale du contact, il est aisé de démontrer, de façon plus élémentaire, qu'au point x_0, y_0, les deux courbes C_0, E ont même tangente.

En effet, le coefficient angulaire de la tangente en M_0 à C est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, a_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, a_0) \times \frac{dy}{dx} = 0.$$

D'autre part, pour obtenir le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe, comme les coordonnées d'un point de cette enveloppe sont données en fonction de a par les équations (1), (2), il faut différentier les équations (1), (2) et éliminer δa. Or, en différentiant la première, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, a_0)\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, a_0)\delta y + \frac{\partial f}{\partial a}(x_0, y_0, a_0)\delta a = 0.$$

Nous devrions également différentier, la seconde, mais si nous tenons compte de (2), cette équation se réduit à

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, a_0)\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, a_0)\delta y = 0.$$

L'élimination de δa s'est faite d'elle-même. Cette équation détermine le rapport $\frac{\delta y}{\delta x}$ (les deux dérivées n'étant pas toutes deux nulles). Les deux expressions des coefficients angulaires des tangentes à C_0 et à E sont bien les mêmes.

En tout point non singulier de C_0 et de E, et commun aux deux courbes, les deux courbes sont bien tangentes.

Cas des points singuliers. — Supposons que, pour certaines valeurs de a, la courbe C admette des points singuliers. Les coordonnées de ces points satisfont aux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, a) = 0, \qquad f(x, y, a) = 0.$$

Or, les fonctions de a qui représentent les coordonnées d'un point de la courbe enveloppe E sont déterminées par les équations

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0.$$

Si l'on différentie la première de ces équations (qui est identiquement satisfaite), les coordonnées satisfont aussi, en tenant compte de la seconde, à

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, a)dy = 0.$$

Cette condition est remplie par les coordonnées de tout point singulier.

Inversement, si pour certaines valeurs de a on obtient des points singuliers, dont les coordonnées satisfont à

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{df}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

en différentiant la première, et tenant compte des autres, il restera simplement

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0.$$

On en conclut que *les coordonnées de tous les points singuliers des courbes* C *satisfont aux équations de l'enveloppe.*

Si pour obtenir l'équation de l'enveloppe, on élimine a entre les équations (1), (2), l'équation résultante

$$\mathrm{E}(x, y) = 0,$$

pourra se décomposer en :

1° Une courbe lieu des points singuliers des courbes C ;

2° La véritable courbe enveloppe des courbes C.

Familles de surfaces à un paramètre. — Considérons de même une famille de surfaces dont l'équation dépende d'un paramètre a

$$f(x, y, z, a) = 0. \tag{1}$$

Soit

$$f(x, y, z, a + \Delta a) = 0,$$

une surface S voisine.

Cherchons si la courbe d'intersection définie par ces deux équations a une position limite sur S quand S′ se rapproche indéfiniment de S, c'est-à-dire quand Δa tend vers zéro.

∂_1

Tous les points de la courbe d'intersection satisfont, pour chaque valeur de Δa non nulle, mais aussi petite que l'on voudra, à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a + \theta\Delta a) = 0.$$

Si la dérivée $\frac{\partial f}{\partial a}$ est fonction continue de a, lorsque Δa tend vers zéro, les points d'intersection satisfont, à la limite, à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0. \tag{2}$$

ω

Ainsi, sur chaque surface S, *il existe une courbe appelée « caractéristique » dont les équations sont*

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0,$$

position limite de la courbe d'intersection de S *avec une surface infiniment voisine.*

ξ

Le lieu de ces courbes, lorsque a varie, constitue une surface qui est appelée « surface enveloppe » de la famille de surfaces à un paramètre.

On obtiendrait l'équation de cette surface enveloppe E en éliminant a entre les équations (1), (2).

Comme dans le cas des courbes :

α, ψ

THÉORÈME. — *En tout point de la caractéristique, ordinaire pour la surface et pour la surface enveloppe, l'enveloppe est tangente à l'enveloppée correspondante.*

α, ξ

Il faut d'abord exprimer que le point est ordinaire sur S et sur la surface enveloppe corrrespondante.

Soit une surface S_0 correspondant à la valeur a_0, un point x_0, y_0, z_0 de la caractéristique correspondante.

Ce point étant simple sur S_0, σ_2 les trois dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ne sont pas simultanément nulles en ce point.

D'autre part, l'enveloppe est définie par les deux équations

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0.$$

On peut y considérer, par exemple, y et z comme fonctions des deux paramètres x, a. On sait que, si le point est ordinaire, les trois déterminants

$$D^{x,a}_{y,z}, \qquad D^{x,a}_{z,x}, \qquad D^{x,a}_{x,y}$$

ne doivent pas être simultanément nuls. Ces deux derniers se réduisent respectivement à $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$.

Or les dérivées par rapport à a des fonctions y, z sont définies par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=0.$$

La première se réduit à

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}=0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux dérivées ne soient pas simultanément nulles est donc que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\not\equiv 0.$$

C'est ce que nous supposerons.

Le point x_0, y_0, z_0 étant alors simple sur l'enveloppe et sur l'enveloppée S_0, pour exprimer que ces deux surfaces sont tangentes, nous devons prendre sur la caractéristique un point infiniment voisin correspondant à la valeur $a_0+\Delta a$ et substituer ces coordonnées dans l'équation de S_0. Le résultat doit être infiniment petit du second ordre par rapport à Δa.

Remarquons d'abord que l'on a

$$f(x_1, y_1, z_1, a_0+\Delta a)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x_1, y_1, z_1, a_0+\Delta a)=0,$$

puisque le point x_1, y_1, z_1 est un point de E correspondant à la valeur $a_0+\Delta a$.

On a alors

$$f(x_1, y_1, z_1, a_0)=f(x_1, y_1, z_1, a_0+\Delta a_0)-\Delta a\frac{\partial f}{\partial a}(x_1, y_1, z_1, a_0+\Delta a)+\frac{\Delta a^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x_1, y_1, z_1, a_0+\theta\Delta a).$$

Les deux premiers termes sont nuls. Le résultat est donc bien infiniment petit du deuxième ordre, et du deuxième ordre seulement puisque le coefficient de Δa^2 n'est pas nul en x_0, y_0, z_0, a_0 et par suite aussi en $x_1, y_1, z_1, a_0 + \theta\Delta a$, si ces valeurs sont suffisamment voisines des premières et si la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ est continue en x_0, y_0, z_0, a_0.

Arête de rebroussement. — Considérons une enveloppée (a) et, sur cette surface, la courbe caractéristique C,

$$f(x, y, z, a) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0. \tag{2}$$

Prenons une surface S′ voisine de S correspondant à la valeur $a + \Delta a$. La courbe caractéristique la rencontre en un certain nombre de points. Cherchons si ces points ont sur C des positions limites quand Δa tend vers zéro.

Les coordonnées de ces points satisfont à (1), (2) et à

$$f(x, y, z, a + \Delta a) = 0.$$

En développant le premier membre par la formule de Taylor réduite aux trois premiers termes, et tenant compte de (1), (2), cette dernière se réduit à

$$\frac{\Delta a^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a + \theta\Delta a) = 0.$$

Les coordonnées des points de rencontre satisfont donc pour chaque valeur de Δa différente de zéro, mais aussi petite qu'on le veut, à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a + \theta\Delta a) = 0.$$

Si donc Δa tend vers zéro, et si la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ est continue au point considéré, on voit que les coordonnées satisfont, à la limite, à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a) = 0. \tag{3}$$

Ainsi, *les points d'intersection de* C *avec une surface infiniment voisine* S', *ont donc sur chaque courbe caractéristique, des positions limites définies par les équations* (1), (2), (3).

Le lieu de ces points quand a varie, constitue une courbe Γ. Pour l'obtenir, on pourrait soit éliminer a entre ces trois équations, soit, mieux, les considérer comme définissant x, y, z en fonction du paramètre a.

Cette courbe s'appelle « l'arête de rebroussement » de la famille de surfaces à un paramètre.

Nous avons considéré la limite des points d'intersection d'une courbe C avec une surface voisine ; toutes ces courbes C sont tracées sur la surface enveloppe E. L'arête de rebroussement est aussi sur E.

De même que nous avons considéré dans le plan l'enveloppe d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre, nous pourrions considérer deux courbes caractéristiques C, C' voisines, situées sur E, et chercher si leurs points d'intersection ont une limite sur C quand C' se rapproche indéfiniment de C.

Prenons deux courbes caractéristiques voisines

$$\text{C} \qquad f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0$$

$$\text{C}' \qquad f(x, y, z, a + \Delta a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a + \Delta a) = 0.$$

Ces deux courbes se rencontrent évidemment, puisque, si l'on éliminait a entre les équations de C, ou $a + \Delta a$ entre celles de C', on obtiendrait la même équation, celle de la surface enveloppe.

En développant par la formule de Taylor les équations de C', on a

$$f(x,y,z,a+\Delta a) = f(x,y,z,a) + \frac{\Delta a}{1}\frac{\partial f}{\partial a}(x,y,z,a) + \frac{\Delta a^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x,y,z,a+\theta\Delta a) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a + \Delta a) = \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) + \frac{\Delta a}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a + \theta_1\Delta a) = 0.$$

Mais, en tenant compte de C, ces équations se réduisent à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a + \theta\Delta a) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a + \theta_1\Delta a) = 0.$$

Si donc la dérivée seconde est continue, lorsque Δa tendra vers zéro, elles se réduiront à la limite à une seule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a) = 0. \tag{4}$$

Ainsi, *les points d'intersection de deux courbes caractéristiques infiniment voisines, ont une limite sur chaque courbe* C.

Les coordonnées de chacun de ces points sont déterminées par les équations

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0.$$

Autrement dit, les courbes caractéristiques ont une enveloppe, et cette enveloppe est précisément l'arête de rebroussement de la famille de surfaces.

De même que nous avons étudié le contact de la surface enveloppe avec chaque enveloppée, de même nous sommes amenés à étudier le contact de l'arête de rebroussement, d'une part, avec chacune des surfaces de la famille, d'autre part, avec chaque courbe caractéristique.

Relations de contact. — Théorème. — *L'arête de rebroussement a, en chaque point ordinaire, un contact du second ordre avec chaque enveloppée, et un contact du premier ordre avec chaque caractéristique.*

Soit un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de l'arête de rebroussement correspondant à la valeur a_0. Il faut d'abord exprimer que ce point est ordinaire sur la surface $f(x, y, z, a_0) = 0$.

Les trois dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, ne sont donc pas simultanément nulles.

Pour que ce point soit simple sur l'arête de rebroussement, les coordonnées x, y, z étant fonctions de a, il faut que les trois dérivées $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$ ne soient pas toutes trois nulles. Ces

trois dérivées s'obtiendront en dérivant les équations de Γ par rapport à a.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial x}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial y}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial a^2\partial x}\cdot\frac{dx}{da}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial^3 f}{\partial a^3}=0.$$

Or, les deux premières équations se réduisent à des équations homogènes en $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$, puisque $\frac{\partial f}{\partial a}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}=0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que ces trois dérivées ne soient pas nulles toutes trois, est donc que $\frac{\partial^3 f}{\partial a^3}$ soit différent de zéro.

Nous nous placerons dans ces conditions.

Pour démontrer que Γ a un contact du second ordre avec chaque surface enveloppée S en chaque point $M(x_0, y_0, z_0)$, correspondant à a_0, nous devons considérer sur Γ un point M_1 voisin de M, de coordonnées x_1, y_1, z_1, correspondant à la valeur $a_0+\Delta a$ et substituer ces coordonnées dans l'équation de la surface a_0.

Le résultat devra être un infiniment petit du troisième ordre en Δa.

Or,

$$f(x_1, y_1, z_1, a_0)=f(x_1, y_1, z_1, a_0+\Delta a)-\Delta a\frac{\partial f}{\partial a}(x_1, y_1, z_1, a_0+\Delta a)$$
$$+\frac{\Delta a^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x_1, y_1, z_1, a_0+\Delta a)-\frac{\Delta a^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial a^3}(x_1, y_1, z_1, a_0+\theta\Delta a).$$

Le point x_1, y_1, z_1 correspondant sur l'arête de rebroussement a la valeur $a_0+\Delta a$, les trois premiers termes sont nuls et $f(x_1, y_1, z_1, a_0)$ est bien un infiniment petit du troisième ordre en Δa et du troisième ordre seulement, la dérivée troisième, coefficient de Δa^3, n'étant pas nulle pour les valeurs x_0, y_0, z_0, a_0 et par suite, en vertu de la continuité, pour les valeurs voisines $x_1, y_1, z_1, a_0+\theta\Delta a$.

Considérons maintenant la courbe caractéristique C

$$f(x, y, z, a_0)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a_0)=0.$$

Pour que le contact de Γ avec C soit du premier ordre, il faut qu'en substituant les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point voisin sur Γ, dans les équations de C, on obtienne des résultats du deuxième ordre en Δa.

Mais nous venons de voir qu'en substituant dans la première, on obtient un infiniment petit du troisième ordre en Δa.

Il faut donc et il suffit que le résultat de la substitution dans la deuxième équation soit un infiniment petit du deuxième ordre.

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_1, y_1, z_1, a_0) = \frac{\partial f}{\partial a}(x_1, y_1, z_1, a_0 + \Delta a) - \Delta a \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x_1, y_1, z_1, a_0 + \Delta a) + \frac{\Delta a^2}{2!}\frac{\partial^3 f}{\partial a^3}(x_1, y_1, z_1, a_0 + \theta \Delta a).$$

Les deux premiers termes étant nuls, la dérivée troisième étant, comme nous l'avons vu, différente de zéro, le résultat est bien un infiniment petit du deuxième ordre et du deuxième ordre seulement.

Familles de surfaces à deux paramètres. — Considérons maintenant une famille de surfaces S dont l'équation

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

dépende de deux paramètres a, b.

Prenons une surface voisine correspondant aux valeurs $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, des paramètres. Une surface S et la surface voisine se coupent suivant une courbe

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \qquad f(x, y, z, a + \Delta a, b + \Delta b) = 0.$$

Si l'on tient compte de la première, cette deuxième équation se réduit à

$$\Delta a \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, \alpha, \beta) + \Delta b \frac{\partial f}{\partial b}(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

α et β étant intermédiaires entre a et $a + \Delta a$, b et $b + \Delta b$.

Supposons que Δa, Δb tendent simultanément vers zéro, de telle manière que le rapport $\frac{\Delta b}{\Delta a}$ tende vers une limite λ.

Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial a}$ $\frac{\partial f}{\partial b}$ sont continues, cette deuxième équation aura pour limite

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a, b) + \lambda \frac{\partial f}{\partial b}(x, y\ z, a, b) = 0.$$

On voit que la courbe d'intersection d'une surface avec une surface infiniment voisine est variable, mais ne dépend que du rapport limite λ.

Mais de plus, quelle que soit cette limite, cette courbe passe par les points dont les coordonnées satisfont simultanément à

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0. \tag{2}$$

Il existe sur chaque surface, un ou plusieurs points limites, dont les coordonnées sont définies par (1), (2), *qui sont points d'intersection limites de deux surfaces infiniment voisines, quelles qu'elles soient.*

Le lieu de ces points, sur toutes les surfaces, constitue une surface Σ qui s'appelle la « surface enveloppe » de la famille de surfaces à deux paramètres. On obtiendrait son équation en éliminant a, b entre les trois équations. On peut encore considérer les trois équations comme définissant x, y, z en fonction de deux paramètres a, b.

On démontrera qu'*en tout point « ordinaire » l'enveloppe est tangente en chaque point à l'enveloppée correspondante.*

On appliquera, comme dans les cas précédents, la théorie générale du contact. On pourra également démontrer que le plan tangent à la surface enveloppe est le même qu'à la surface enveloppée. Pour déterminer le plan tangent à la surface enveloppe, on pourra considérer les trois équations (1), (2) comme définissant trois fonctions a, b, z de x et y.

Enveloppe d'une famille de courbes gauches. — Enfin, l'on pourrait se demander si une famille de courbes gauches dépendant d'un paramètre a, soit

$$\text{C} \qquad f(x, y, z, a) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, a) = 0 \tag{1}$$

peut admettre une enveloppe.

δ_1, ξ

Soit une courbe voisine C'

$$f(x, y, z, a + \Delta a) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, a + \Delta a) = 0.$$

Par un raisonnement souvent fait, les solutions communes, à ces quatre équations, si elles existent, satisfont également, à la limite, aux équations

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0. \tag{2}$$

ω

Les quatre équations (1), (2) doivent avoir quel que soit a, des solutions communes en x, y, z. La courbe lieu de ce point

ψ

est alors tangente en chaque point à chacune des enveloppées.

Dans le cas des courbes caractéristiques d'une famille de surfaces à un paramètre, courbes qui ont pour équations

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0 \tag{1'}$$

les deux équations complémentaires sont

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0. \tag{2'}$$

ρ

Ces quatre équations se réduisent donc à trois qui définissent l'arête de rebroussement.

IV. — APPLICATIONS DE LA THÉORIE DU CONTACT

Courbes planes. — Soit une courbe plane

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t). \tag{1}$$

L'équation d'une droite (non parallèle à oy), $Y = mX + n$, dépend de deux paramètres.

α

On peut en disposer de manière que cette droite ait, en un point donné, $M(x, y, t)$, un contact du premier ordre avec la courbe.

ξ

Nous devons à cet effet considérer la fonction

$$\mathcal{F}(t) = \varphi(t) - mf(t) - n$$

et l'annuler ainsi que sa dérivée première. On obtient ainsi

$$\varphi(t) - mf(t) - n = 0, \qquad \varphi'(t) - mf'(t) = 0.$$

Ces équations permettent (si $f'(t) \neq 0$) d'avoir m et n.

L'équation de la droite s'écrit

$$(2) \quad Y - \varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}[X - f(t)] \quad \text{ou} \quad f'(t)(Y - y) - \varphi'(t)(X - x) = 0.$$

C'est l'équation de la tangente en M.

Si, au point donné, $f'(t) = 0$, c'est que, en ce point, la tangente est parallèle à oy. Il faudrait prendre l'équation de la droite sous la forme $X = mY + n$.

On retrouverait la même équation de la tangente.

Pour qu'il y ait contact du second ordre, il faudrait que l'on eût aussi

$$\varphi''(t) - mf''(t) = 0$$

et que par suite, au point donné

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{f''}{f'}.$$

Aux valeurs de t, racines de cette équation, correspondent les « points d'inflexion » de la courbe.

La normale a pour équation (axes rectangulaires)

$$(3) \qquad y'(Y - y) + x'(X - x) = 0.$$

Courbe $f(x, y) = 0$. — Si la courbe est donnée sous la forme $f(x, y) = 0$, nous devons égaler les valeurs de y et des dérivées successives tirées de l'équation de la courbe et de l'équation de la droite.

Or la dérivée y' déduite de l'équation de la courbe est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

On a donc les deux conditions

$$y = mx + n, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + m \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ces deux conditions donnent m et n. En portant ces valeurs dans l'équation de la droite, on obtient

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

La normale a pour équation (axes rectangulaires)

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Eléments géométriques en un point d'une courbe. — Rappelons la définition de la concavité en un point d'une courbe : on dit qu'aux environs d'un point M, une courbe tourne sa concavité vers les y positifs, si tous les points d'un arc suffisamment petit, et de part et d'autre de M, sont, par rapport aux points de la tangente en M ayant même abscisse, du côté des y positifs. (Convexité vers les y négatifs.)

En un point d'une courbe, nous convenons de choisir comme direction positive sur la normale, la demi-normale MN située dans la concavité de la courbe. La courbe étant rapportée à des axes rectangulaires ox, oy, nous choisirons alors comme direction positive sur la tangente, la direction MT' telle que l'angle (MT', MN) ait la même disposition que l'angle des axes de coordonnées (ox, oy).

Nous choisirons enfin comme sens de déplacement positif sur la courbe, le sens de la tangente positive. Nous désignerons par s la valeur algébrique de l'arc M_0M compté à partir d'un point initial M_0.

En désignant par α l'angle de ox avec MT', l'angle de ox avec MN sera alors $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

On aura dans tous les cas de figure, pour un déplacement infiniment petit $MM' = ds$

$$dx = \cos\alpha\, ds, \qquad dy = \sin\alpha\, ds, \qquad ds^2 = dy^2 + dy^2, \qquad \operatorname{tg} a = \frac{dy}{dx}.$$

Avec les conventions ci-dessus, on peut vérifier que α et s *varient toujours dans le même sens*. En d'autres termes, $\frac{ds}{dx}$ est toujours positif.

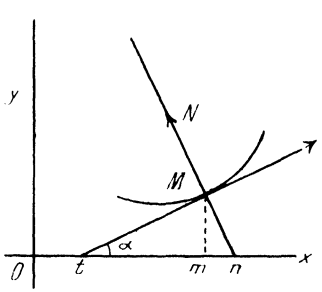


Fig. 18.

Tangente. — Sous-tangente. — Normale. — Sous-normale. — Menons la normale et la tangente en un point M d'une courbe. Elles rencontrent ox respectivement en t et n.

Nous désignerons par tangente, sous-tangente, normale, sous-normale, les segments algébriques suivants :

$$\text{Tangente } T = \overline{Mt} \qquad \text{Sous-tangente } S_t = \overline{mt}$$
$$\text{Normale } N = \overline{Mn} \qquad \text{Sous-normale } S_n = \overline{mn}$$

Dans le cas de la figure, S_n seule est positive.

On peut vérifier que, dans tous les cas de figure, ces éléments ont les expressions suivantes

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} T = -\dfrac{y}{\sin\alpha}, & S_t = -y\cot\alpha \\ N = -\dfrac{y}{\cos\alpha} & S_n = y\tan\alpha. \end{cases}$$

D'autre part, nous verrons que le rayon de courbure en un point d'une courbe a pour expression

$$\text{(I)} \qquad R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\frac{dy}{d\alpha}.$$

On a enfin

$$\text{(I)} \qquad ds = \frac{dy}{\sin\alpha}, \qquad dx = \cot\alpha\, dy.$$

Nous établirons un deuxième groupe de formules en partant de la forme « normale » de l'équation d'une droite

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha - p = 0$$

et considérant une courbe comme l'enveloppe de ses tangentes, p étant une fonction donnée de α.

Mais, dès maintenant, d'après le groupe (I), on voit que tous les éléments (sauf l'arc et x) s'expriment simplement en fonction de y et de α. Le rayon de courbure seul fait intervenir les différentielles dy, $d\alpha$.

Problèmes sur les courbes planes. — On peut se proposer de déterminer une courbe par certaine propriété se traduisant par une relation entre quelques-uns de ces éléments (x, y, T, N, S_t, S_n, R, s).

Règle pratique. — Si cette relation ne dépend pas de x, ni de s, il est préférable d'exprimer tous les éléments au moyen de y et de α. Si la relation ne dépend pas de R, on aura, immédia-

tement et *sans quadrature*, y en fonction de α sous la forme $y = \varphi(\alpha)$.

On aura ensuite x par une simple quadrature

$$dx = \operatorname{ctg} \alpha dy = \operatorname{ctg} \alpha \varphi'(\alpha) d\alpha.$$

Si la relation donnée dépend de R, on aura une équation différentielle définissant y en fonction de α. On aura ensuite x par une quadrature.

Problèmes simples. — Les problèmes les plus simples consistent à déterminer les courbes telles que l'un de ces éléments soit constant.

1° *Sous-tangente constante.*

On a $S_t = a$

$$y \operatorname{ctg} \alpha = -a, \qquad y = -a \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

D'où

$$dx = -a \operatorname{ctg} \alpha d \operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} d \operatorname{tg} \alpha.$$

En intégrant,

$$x - x_0 = -a \log \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

Les formules (1), (2), donnent les expressions des coordonnées en fonction de α. A un transport d'axes près, la courbe a pour équation

$$x = -a \log \operatorname{tg} \alpha, \qquad y = -a \operatorname{tg} \alpha$$

ou simplement

$$x = -a \log t, \qquad y = -at.$$

En éliminant t,

$$y = -ae^{-\frac{x}{a}}.$$

2° *Sous-normale constante.*

On a de même

$$y \operatorname{tg} \alpha = a$$

D'où

$$dx = a \operatorname{ctg} \alpha d \operatorname{ctg} \alpha, \qquad x - x_0 = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

A un transport d'axe près, en éliminant $\operatorname{ctg} \alpha$, on obtient

$$y^2 = 2ax$$

(parabole de paramètre a).

3° *Normale constante*

$$y = -a\cos\alpha$$

$$dx = -a\operatorname{ctg}\alpha d\cos\alpha = a\cos\alpha d\alpha, \qquad x - x_0 = a\sin\alpha.$$

En éliminant α

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2.$$

4° *Tangente constante.*

$$y = -a\sin\alpha, \qquad dx = -a\operatorname{ctg}\alpha d\sin\alpha = -a\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

En intégrant,

$$x - x_0 = a\left|\cos\alpha - \log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Les deux équations

$$x = a\left|\cos\alpha - \log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|, \qquad y = -a\sin\alpha,$$

représentent la courbe aux « tangentes égales » ou « tractrice ».

Courbe considérée comme enveloppe de ses tangentes. — L'équation de la tangente à une courbe (donnée, par exemple, sous la forme paramétrique) dépend d'un seul paramètre.

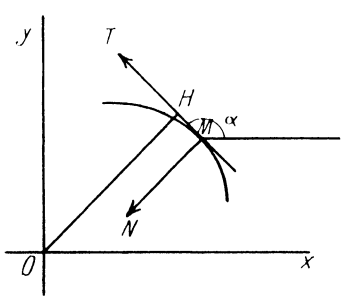


Fig. 19.

On est donc amené à considérer une courbe comme l'enveloppe de ces droites à un paramètre.

On a souvent avantage dans ce cas à prendre la droite sous la forme normale

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha - p(\alpha) = 0. \tag{1}$$

Nous adoptons le même sens positif sur la normale et sur la tangente, que dans les formules précédentes ; α désigne l'angle de la tangente avec ox.

OH désignant la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente, nous posons

$$p = \overset{\frown}{\mathrm{HO}},$$

ce segment ayant pour direction positive la direction positive sur la normale.

Dans le cas de la figure, p est positif.

L'enveloppe de cette droite δ_1 s'obtiendra en ajoutant l'équation dérivée par rapport à α.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p'(\alpha) = 0. \tag{2}$$

En éliminant α entre (1) et (2), on obtiendrait l'équation de l'enveloppe. Mais il est préférable, évidemment, d'en déduire les coordonnées x, y du point de contact M en fonction de α. On trouve ainsi

$$\begin{cases} x = p\sin\alpha + p'\cos\alpha \\ y = -p\cos\alpha + p'\sin\alpha. \end{cases} \tag{I}$$

On a

$$dx = (p + p'')\cos\alpha d\alpha, \qquad dy = (p + p'')\sin\alpha d\alpha.$$

Il en résulte que

$$ds = (p + p'')d\alpha, \qquad \left(\frac{ds}{d\alpha} > 0\right).$$

Si l'on considère x, y comme des coordonnées courantes, l'équation (2) représente une droite passant par le point M, perpendiculaire à (1) : c'est donc la normale en M à la courbe.

Développée. — Son équation dépend aussi de α. L'enveloppe des normales s'obtiendra donc en considérant l'équation dérivée par rapport à α

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - p''(\alpha) = 0. \tag{3}$$

Les équations (2), (3), donnent les coordonnées du point de contact de la normale avec son enveloppe, c'est-à-dire les coordonnées d'un point de la « développée » de la courbe C. On trouve ainsi pour ces coordonnées

$$\begin{cases} x = p'\cos\alpha - p''\sin\alpha \\ y = p'\sin\alpha + p''\cos\alpha \end{cases} \tag{II}$$

On constate tout d'abord que ces expressions ne changent pas si l'on ajoute une constante quelconque à $p(\alpha)$. La développée est donc la même pour deux courbes quelconques dont les

tangentes sont constamment parallèles et à distance constante l'une de l'autre.

Les coordonnées d'un point d'une de ces courbes sont

$$x_1 = (p + k)\sin\alpha + p'\cos\alpha = p\sin\alpha + p'\cos\alpha + k\sin\alpha$$
$$y_1 = -(p + k)\cos\alpha + p'\sin\alpha = -p\cos\alpha + p'\sin\alpha - k\cos\alpha.$$

On constate que l'un de ces points se déduit du point $M(x, y)$ en portant sur la normale en M la distance constante k.

Toutes ces courbes, qui se déduisent ainsi de la courbe donnée C, sont les « courbes parallèles » à C.

Le point de contact N d'une normale avec la développée est, comme on le sait, le « centre de courbure » de la courbe donnée en M. La distance MN est le « rayon de courbure ».

Pour obtenir son expression, on pourrait calculer les coordonnées de M et de N par les formules (I) et (II).

Mais il est plus simple de remarquer que les deux droites

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha - p = 0, \qquad x\sin\alpha - y\cos\alpha + p'' = 0,$$

qui sont la tangente à la courbe donnée et la normale à l'sont deux droites parallèles. La distance MN est donc la distance de ces deux droites. Elle est donc égale à $\pm(p + p'')$. Mais nous savons que

$$\frac{ds}{d\alpha} = p + p'',$$

et que $\frac{ds}{d\alpha}$ est positif; $(p + p'')$ est donc positif (avec les directions positives choisies)

$$R = p + p''.$$

Expression des éléments géométriques. — On calculera aisément les segments géométriques que nous avons définis. On trouve ainsi

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x = p\sin\alpha + p'\cos\alpha, & T = p\operatorname{cotg}\alpha - p', & S_t = p\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - p'\cos\alpha \\ y = -p\cos\alpha + p'\sin\alpha, & N = p - p'\operatorname{tg}\alpha, & S_n = p'\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - p\sin\alpha \end{cases}$$
$$R = (p + p''), \qquad ds = (p + p'')d\alpha.$$

Nous remarquons que *tous ces éléments sont exprimés en fonction linéaire de p et de ses dérivées et en fonction de α.*

Nous avons donc établi un deuxième groupe de formules permettant de déterminer une courbe connaissant une relation entre deux ou plusieurs des éléments.

$$(y, \alpha, T, N, S_t, S_n, R), \qquad (x, s, p),$$

que nous partageons en deux groupes pour les raisons ci-après.

Solution des problèmes : Règle pratique. — Pour traiter pratiquement tous les problèmes, nous donnerons les règles générales suivantes :

I. — *La relation ne dépend pas de* x, p, s.

α

On exprimera tous les éléments par le groupe (I) en fonction de y et de α. On aura une relation

$$F(y, \alpha, R) = 0, \qquad F\left(y, \alpha, \frac{dy}{\sin \alpha d\alpha}\right) = 0.$$

On intégrera cette équation différentielle qui donnera y en fonction de α. Si même la relation donnée ne dépend pas de R et dépend seulement de y, α, T, N, S_t, S_n, on aura sans quadrature, comme nous l'avons dit, y en fonction de α.

δ_1

De toutes façons, ayant cette expression de y, on aura x par une quadrature en intégrant

$$x = \int \operatorname{ctg} \alpha dy.$$

II. — *La relation dépend, en outre, de* x, p, *non de* s.

α

On applique le groupe de formules (II), en exprimant tous

0

les éléments en fonction de p, p', p'', α. On aura une équation différentielle du second ordre (du premier ordre seulement si la relation ne dépend pas de R).

III. — La relation ne dépend que de R, s, α.

$$F(s, R, \alpha) = 0.$$

α

On remplacera R par $\frac{ds}{d\alpha}$. L'équation

$$F\left(s, \frac{ds}{d\alpha}, \alpha\right) = 0,$$

déterminera s en fonction de α. On aura ensuite

$$dx = \cos\alpha ds, \qquad dy = \sin\alpha ds,$$

x et y seront donnés par deux quadratures.

IV. — *La relation dépend de s.*

Il faudra la différentier pour introduire ds.

δ_1

On éliminera alors s entre la relation donnée et cette dernière, et on pourra remplacer ds par son expression (groupe (I) ou (II)).

$$ds = \sin\alpha dy \qquad \text{ou} \qquad ds = (p + p'')dx.$$

o

On aura une équation différentielle entre y et α ou entre p et α.

Applications. — (I). *Courbes telles qu'en chacun des points le rayon de courbure soit égal et de signe contraire à la normale*

$$R + N = 0.$$

ρ, α

(Cas (I)). — On a l'équation

$$\frac{dy}{\sin\alpha dx} - \frac{y}{\cos\alpha} = 0,$$

ou

$$\cos\alpha dy - y\sin\alpha dx = 0, \qquad y\cos\alpha = \text{const.} = a.$$

δ_1

On a ensuite

$$dx = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha = \frac{a}{\cos\alpha}d\alpha.$$

En intégrant,

$$x - x_0 = a\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

On peut éliminer facilement α. On trouve

$$y = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right],$$

en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point x_0, 0. La courbe est une chaînette.

II. *Déterminer les courbes telles, qu'entre le rayon de courbure et l'arc, on ait la relation*

(cas III) $$4s^2 + R^2 = 6ls.$$

En remplaçant R par $\frac{ds}{d\alpha}$ on obtient

$$4s^2 + \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = 6ls,$$

équation différentielle entre s et α que l'on intégrerait facilement.

Faisons le changement

$$s = \frac{3}{2} lu^2, \qquad \frac{ds}{d\alpha} = 3lu \frac{du}{d\alpha}.$$

L'équation devient, après division par $9l^2u^2$,

$$u^2 + \left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 = 1, \qquad \left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 = 1 - u^2.$$

Donc

$$u = \sin(\alpha - \alpha_0).$$

Par suite

$$s = \frac{3}{2} l \sin^2(\alpha - \alpha_0).$$

Faisons tourner les axes d'un angle α_0, on aura

$$s = \frac{3}{2} l \sin^2\alpha, \qquad ds = \frac{3}{2} l \sin 2\alpha d\alpha.$$

On aura ensuite x et y par deux quadratures.

On peut aussi déterminer la fonction $p(\alpha)$.

On aura

$$p + p'' = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{3}{2} l \sin 2\alpha.$$

On voit aisément une solution particulière

$$p = -\frac{l}{2} \sin 2\alpha,$$

et par suite la solution générale est

$$p = x_0 \sin\alpha - y_0 \cos\alpha - \frac{l}{2} \sin 2\alpha.$$

La courbe est donc l'enveloppe de la droite.

$$(x - x_0) \sin\alpha - (y - y_0) \cos\alpha + \frac{l}{2} \sin 2\alpha = 0.$$

En transportant les axes en x_0, y_0, (c'est-à-dire finalement à un changement complet d'axes de coordonnées), la courbe est l'enveloppe de la droite

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin 2\alpha = 0.$$

La longueur de la portion de droite interceptée par les axes est l.

La courbe générale est donc l'enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur deux droites rectangulaires quelconques.

Les coordonnées du point de contact de la droite (1) avec son enveloppe, sont définies par (1) et par

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + l \cos 2\alpha = 0. \tag{2}$$

On trouve aisément

$$x = -l \cos^3 \alpha, \qquad y = l \sin^3 \alpha.$$

D'où l'équation de la courbe

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

C'est une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Développée. — On a vu que les coordonnées d'un point de la développée sont

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = p' \cos \alpha - p'' \sin \alpha \\ y = p' \sin \alpha + p'' \cos \alpha. \end{cases}$$

Ces formules se déduisent des formules (1) par le changement de p en p' et celui de α en $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

La différentielle d'un arc $d\sigma$ de la développée se déduira donc de la différentielle ds de l'arc de courbe par le même changement. On a donc

$$d\sigma = \pm (p' + p''') d\alpha.$$

Il faudra prendre le signe + si la direction de la normale MN qui est la tangente à la développée) est la direction positive sur cette tangente, c'est-à-dire si les arcs s et σ sur la courbe et sur la développée varient dans le même sens. En prenant un sens conve-

nable sur la développée pour compter les arcs, on peut toujours écrire

$$d\sigma = (\rho' + \rho''')d\alpha.$$

Nous pourrons alors intégrer et écrire

$$\sigma = \rho + \rho'' + \text{const.}$$

Mais nous avons vu que

$$R = \rho + \rho''.$$

On a donc finalement

$$\sigma = R + \text{const.} \qquad \sigma - \sigma_0 = R - R_0.$$

Ainsi, si M_0N_0, MN désignent deux normales, c'est-à-dire deux tangentes à la développée, on aura

$$\text{arc } N_0N = MN - M_0N_0.$$

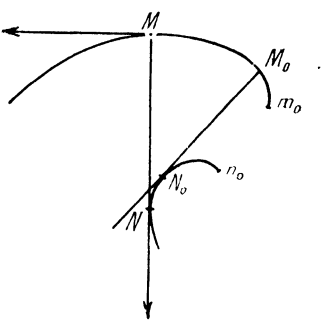


Fig. 20.

Cette propriété de la développée peut se traduire sous la forme vulgaire suivante : enroulons un fil de longueur arbitraire sur la développée à partir d'un point initial N, de N en N_0. Son extrémité M décrira la courbe C.

En modifiant la longueur du fil, on obtiendra une courbe parallèle à C.

Le rayon de courbure ρ de la développée a pour expression

$$\rho = \rho' + \rho''' = \frac{dR}{d\alpha}.$$

On voit qu'entre les arcs et les rayons de courbure on a la relation

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\rho}{R},$$

et comme $d\sigma = dR$, on en déduit

$$\rho = \frac{R\,dR}{ds}.$$

Toutes les fois que le rayon de courbure d'une courbe passe

par un maximum ou un minimum, le rayon de courbure de la développée s'annule ; le point de la développée est un point de rebroussement de première espèce.

Développées successives. — On peut prendre à son tour, l'enveloppe des normales à Γ c'est-à-dire la développée de Γ ou la développée seconde de C.

On peut donc considérer les développées successives d'une courbe, leurs rayons de courbure en des points correspondants, où leurs arcs.

σ, ξ

Les rayons de courbure successifs seront les dérivées successives du rayon de courbure R de la courbe initiale, par rapport à α.

Les formules que nous avons données

$$\rho = \frac{d\mathrm{R}}{d\alpha}, \qquad d\sigma = d\mathrm{R},$$

permettent de traiter tous les problèmes se traduisant par une relation entre les rayons de courbure et les arcs d'une courbe ou de ses développées successives.

Cercle osculateur. — L'équation générale d'un cercle

$$(\mathrm{X} - x_0)^2 + (\mathrm{Y} - y_0)^2 - \mathrm{R}^2 = 0,$$

dépend de trois paramètres. On peut disposer de ces paramètres de manière que le cercle ait, en un point donné M, un contact du second ordre avec une courbe donnée.

δ_1

Si les équations de cette courbe sont

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

α_2

on sait qu'il faut considérer la fonction

$$\mathcal{F}(t) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \mathrm{R}^2,$$

(x et y remplacés en fonction de t).

β

Cette fonction doit s'annuler, ainsi que ses deux premières dérivées, pour la valeur de t correspondant au point M. On a donc

$$(1) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \mathrm{R}^2 = 0$$

$$(2) \qquad (x - x_0)x' + (y - y_0)y' = 0$$

$$(3) \qquad (x - x_0)x'' + (y - y_0)y'' + x'^2 + y'^2 = 0.$$

Ces trois équations déterminent x_0 y_0, R. Le cercle correspondant est le « cercle osculateur ». Les deux dernières déterminent x_0, y_0 ; la première donnera alors R.

Or, si dans l'équation (2) on remplace x_0, y_0 par des coordonnées courantes, cette équation représente la normale au point M. L'équation (3) est sa dérivée par rapport à t. Les équations (2) et (3) déterminent donc l'enveloppe de la normale. Le point x_0, y_0 se confond donc avec le point de contact de la normale avec la développée. Le centre du cercle osculateur se confond donc avec le centre du « cercle de courbure » que nous définirons prochainement, et par suite le cercle osculateur avec le cercle de courbure.

Toutes les fois que l'on voudra déterminer le centre de courbure en un point d'une courbe, et par suite son rayon de courbure, il faudra, comme nous venons de le faire, considérer l'enveloppe de la normale. Ce centre sera alors déterminé sans ambiguïté.

Applications. — *Développée d'une parabole.*

Soit la parabole

$$y^2 - 2px = 0, \qquad x = \frac{y^2}{2p}.$$

L'équation de la normale en un point x, y est

$$(2) \qquad \frac{X - x}{-1} = \frac{Y - y}{\frac{y}{p}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{y}(Y - y) + X - \frac{y^2}{2p} = 0.$$

Le paramètre variable est ici y. En dérivant cette équation par rapport à y, on obtient

$$-\frac{p}{y^2}Y - \frac{y}{p} = 0 \qquad \text{ou} \qquad Y = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Par suite, en substituant dans (2), on trouve

$$X = p + \frac{3y^2}{2p}.$$

En éliminant y, on a l'équation de la développée :

$$8(X - p)^3 = 27\, pY^2.$$

Ellipse. — Pour l'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

il faudra prendre l'enveloppe de la normale

$$aX\sin t - bY\cos t = c^2\sin t\cos t.$$

On trouvera

$$X = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, \qquad Y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$$

d'où

$$R^2 = \frac{(a^2 - c^2\cos^2 t)^3}{a^2b^2}.$$

Cette expression de R donne lieu à une formule très intéressante.

On voit qu'elle ne dépend que de $(a^2 - c^2\cos^2 t)$. Or, cette expression se retrouve dans bien d'autres éléments.

Si l'on considère les rayons vecteurs de M, on sait qu'ils ont pour expression

$$r = a - \frac{cx}{a} = a - c\cos t, \qquad r' = a + \frac{cx}{a} = a + c\cos t$$

On a donc

$$rr' = a^2 - c^2\cos^2 t.$$

D'autre part, l'angle 2α des rayons vecteurs se détermine aisément dans le triangle FMF'. On trouve

$$\cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2 - c^2\cos^2 t}.$$

Enfin, la normale ayant pour équation

$$aX\sin t - bY\cos t = c^2\sin t\cos t$$

la longueur MN de la normale a pour valeur

$$\overline{MN}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2\cos^2 t).$$

De même, la portion MN', limitée à oy, a pour valeur

$$\overline{MN'}^2 = \frac{a^2}{b^2}(a^2 - c^2\cos^2 t).$$

On déduit, en particulier, de ces expressions

$$R = \frac{MN}{\cos^2 \alpha}.$$

ce qui permet une construction simple du rayon de courbure.

α, R_1

Il suffit d'élever en N la perpendiculaire NI à la normale MN.

La perpendiculaire en I à F'M rencontre la normale au centre de courbure cherché C.

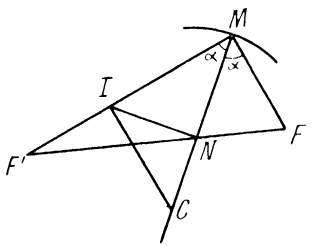


Fig. 21.

Cycloïde. — Comme dernière application, cherchons le centre de courbure en un point d'une cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

α_1

On trouve aisément, en formant l'équation de la normale, que cette normale passe par le point A de contact du cercle générateur avec ox.

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$X = a(t + \sin t), \qquad Y = -a(1 - \cos t).$$

Si l'on pose $t = \pi + \tau$, elles deviennent

$$X = a\pi + a(\tau - \sin \tau), \qquad Y = -2a + a(1 - \cos \tau).$$

ρ

On voit que le lieu de X, Y c'est-à-dire la développée, est une cycloïde égale à la cycloïde donnée, déplacée de $a\pi$ dans le sens de ox et de $(-2a)$ dans le sens de oy.

V. — COURBES GAUCHES

Tangente. — Considérons une courbe gauche

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Les équations d'une droite

$$X = mZ + n, \qquad Y = pZ + q$$

α, ψ

dépendent de quatre paramètres. On pourra en disposer

de manière qu'elle ait un contact du premier ordre avec la courbe, en un point donné $M(x, y, z, t)$.

ξ, σ_2

On sait qu'il faut considérer les fonctions de t

$$\mathcal{F}(t) = x - mz - n, \qquad \mathcal{F}_1(t) = y - pz - q$$

(x, y, z étant remplacés en fonction de t,) et les annuler ainsi que les dérivées premières.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} x - mz - n &= 0, & x' - mz' &= 0 \\ y - pz - q &= 0, & y' - pz' &= 0. \end{aligned}$$

δ_1

Ces équations déterminent m, n, p, q. Les équations de la droite se mettent alors sous la forme

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}.$$

C'est la « tangente » à la courbe en M

L'équation du plan « normal » est

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0.$$

Si la courbe est donnée sous la forme

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

α

on peut considérer ces équations comme définissant x et y

β

par exemple, en fonction de z. Ces fonctions, ainsi que leurs dérivées, devront prendre les mêmes valeurs que les fonctions

$$X = mZ + n, \qquad Y = pZ + q$$

au point x, y, z.

δ_1

Or, les dérivées de x, y sont déterminées par

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

D'autre part

$$X' = m, \qquad Y' = p.$$

ω

On a donc les conditions (au point x, y, z)

$$x = mz + n, \qquad y = pz + q$$

$$m\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad m\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

On met d'abord les équations de la droite sous la forme

$$X - x = m(Z - z), \qquad Y - y = p(Z - z).$$

δ_1

En éliminant m, p entre ces équations et les deux précédentes, on obtient

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$(X - x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Plan osculateur. — L'équation d'un plan

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

dépend de trois paramètres, les rapports des coefficients A, B, C, D.

α

On peut en disposer de manière que le plan admette un contact du second ordre avec la courbe en un point $M(x, y, z, t)$.

ξ

Il faut pour cela considérer la fonction

$$\mathcal{F}(t) = Ax + By + Cz + D$$

x, y, z étant exprimées en fonction de t, l'annuler ainsi que ses deux premières dérivées pour la valeur t. On aura donc

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0 \tag{2}$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \tag{3}$$

En tenant compte de (1), l'équation du plan se met d'abord sous la forme

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0. \tag{1'}$$

δ_1

En éliminant A, B, C entre les équations (1'), (2), (3), on obtient

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

On peut prendre pour A, B, C, à un facteur près, les valeurs

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

Autre définition. — Ainsi que nous l'avons démontré en général, le plan osculateur peut être considéré comme la limite d'un plan passant par trois points infiniment voisins de la courbe.

On peut le considérer aussi comme la limite d'un plan passant par la tangente et parallèle à la tangente infiniment voisine.

Soit en effet le plan

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

S'il contient la tangente, on a la condition

$$Ax' + By' + Cz' = 0.$$

D'autre part, les coefficients de direction de la tangente au point infiniment voisin $t + \Delta t$, sont

$$x'(t + \Delta t), \qquad y'(t + \Delta t), \qquad z'(t + \Delta t).$$

On a donc aussi

$$Ax'(t + \Delta t) + By'(t + \Delta t) + Cz'(t + \Delta t) = 0.$$

En en retranchant l'équation précédente, on peut écrire

$$Ax''(t + \theta\Delta t) + By''(t + \theta\Delta t) + Cz''(t + \theta\Delta t) = 0.$$

Si les dérivées secondes sont continues, en faisant tendre Δt vers zéro, cette dernière condition devient

$$Ax''(t) + By''(t) + Cz''(t) = 0.$$

On retrouve bien les équations qui déterminent les coefficients du plan osculateur.

Points stationnaires. — En général le contact est du second ordre.

Il sera du troisième ordre si l'on a, de plus

$$Ax''' + By''' + Cz''' = 0. \tag{5}$$

L'élimination de A, B, C entre (2), (3), (5) donne

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une équation qui ne sera vérifiée en général que pour cer-

taines valeurs de t. Les points correspondants s'appellent « stationnaires ».

Pourrait-il arriver *que cette équation soit une identité en t ?*

En prenant, par exemple, x comme paramètre, (en supposant que la courbe ne soit pas dans un plan parallèle à yoz), on aura

$$x' = 1, \qquad x'' = 0, \qquad x''' = 0.$$

La condition deviendra

$$y''z''' - z''y''' = 0.$$

En intégrant,

$$y'' = kz''.$$

En intégrant deux fois encore,

$$y = kz + ax + b.$$

La courbe serait donc plane.

THÉORÈME. — *Le plan osculateur traverse la courbe.*

Nous allons montrer que l'on peut déterminer, de part et d'autre d'un point M, des arcs suffisamment petits et situés de part et d'autre du plan osculateur.

On sait que pour déterminer la position d'un point x_1, y_1, z_1, par rapport à un plan, il faut substituer les coordonnées de ce point aux coordonnées courantes dans l'équation du plan, et étudier le signe du résultat

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Or les coordonnées d'un point voisin de la courbe, correspondant à $t + \Delta t$, sont

$$x_1 = f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} f''(t) + \cdots,$$

c'est-à-dire

$$x_1 = x + x'\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2!} x'' + \frac{\Delta t^3}{3!} x''' + \cdots,$$

et de même pour y_1 et z_1.

En substituant dans le premier membre de l'équation

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

du plan osculateur, on obtient

$$\Delta t(Ax' + By' + Cz') + \frac{\Delta t^2}{2!}(Ax'' + By'' + Cz'') + \frac{\Delta t^3}{6}(Ax''' + By''' + Cz''') + \cdots$$

Or, les deux premiers termes sont nuls. Il reste donc

$$\frac{\Delta t^3}{6}(Ax''' + By''' + Cz''') + \cdots$$

Si

$$Ax''' + By''' + Cz''' \neq 0.$$

c'est-à-dire, si le plan osculateur n'est pas « stationnaire », on voit que, pour de petites valeurs de Δt. le premier terme donne son signe au résultat. Or, ce signe change avec Δt. Deux arcs suffisamment petits, pris de part et d'autre de M, sont donc situés de part et d'autre du plan osculateur.

Enveloppe des plans osculateurs. — L'équation du plan osculateur en un point d'une courbe

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0, \tag{1}$$

dépend d'un paramètre t. Il est donc naturel de rechercher l'enveloppe du plan osculateur. On l'obtiendra en formant l'équation dérivée

$$A'(X - x) + B'(Y - y) + C'(Z - z) - (Ax' + By' + Cz') = 0.$$

Elle se réduit

$$A'(X - x) + B'(Y - y) + C'(Z - z) = 0. \tag{2}$$

La caractéristique est donc la droite

$$\begin{aligned} A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) &= 0, \\ A'(X - x) + B'(Y - y) + C'(Z - z) &= 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de direction de cette droite sont

$$BC' - CB', \qquad CA' - AC', \qquad AB' - BA'.$$

On pourrait voir qu'ils sont proportionnels à x', y', z'.

Mais on peut montrer immédiatement ce résultat. Il

faut et il suffit que chacun des plans soit parallèle à cette direction, ce qui donne les conditions

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \qquad A'x' + B'y' + C'y' = 0.$$

La première est une des conditions qui déterminent A, B, C.

La seconde s'obtient en dérivant la première et tenant compte de ce que $Ax'' + By'' + Cz'' = 0$.

La droite caractéristique des plans osculateurs est donc la tangente en M *à la courbe.*

Cherchons le point de contact de cette courbe caractéristique avec son enveloppe, c'est-à-dire le point de l'arête de rebroussement de la famille de plans. Nous savons qu'il faut dériver encore une fois l'équation (2), ce qui donne

$$(3)\quad A''(X - x) + B''(Y - y) + C''(Z - z) - (A'x' + B'y' + C'z') = 0.$$

Comme nous venons de le voir, cette équation se réduit à

$$(3)\quad A''(X - x) + B''(Y - y) + C''(Z - z) = 0.$$

Les trois équations (1), (2), (3) donnent

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z.$$

L'arête de rebroussement se confond avec la courbe donnée.

Cette conclusion ne pourrait être en défaut que si l'on avait

$$(4)\quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Or,

$$A = y'z'' - z'y'', \quad A' = y'z''' - z'y''', \quad A'' = y'z^{IV} - z'y^{IV} + y''z''' - z''y'''.$$

On a des formules analogues pour B, B', B'', C, C', C''.

Pour interpréter la condition (4), supposons que l'on ait pris pour paramètre x. Il faut faire

$$x' = 1, \qquad x'' = x''' = x^{IV} = 0.$$

Les deux dernières colonnes du déterminant se réduisent à

$$B = -z'', \quad B' = -z''', \quad B'' = -z^{IV}, \quad C = y'', \quad C' = y''', \quad C'' = y^{IV}.$$

L'équation (4) devient donc

$$\begin{vmatrix} & & y'z'' - z'y'' & -z'' & y'' \\ & & y'z''' - z'y''' & -z''' & y''' \\ y'z^{IV} - z'y^{IV} & + & y''z''' - z''y''' & -z^{IV} & y^{IV} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions les deux dernières colonnes par y', z' et ajoutons-les à la première, on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & -z'' & y'' \\ 0 & -z''' & y''' \\ y''z''' - z''y''' & -z^{IV} & y^{IV} \end{vmatrix} = 0. \quad (y''z''' - z''y''')^2 = 0$$

Mais alors nous avons vu que la courbe se réduit à une courbe plane.

Inversement, prenons l'enveloppe d'une famille quelconque de plans dont l'équation dépende d'un seul paramètre. Formons les caractéristiques et l'arête de rebroussement. Les caractéristiques sont des droites qui ont un contact du premier ordre avec l'arête de rebroussement. Ce sont donc les tangentes à cette courbe.

Mais nous savons de plus que chaque surface enveloppée à un contact du deuxième ordre avec l'arête de rebroussement.

Les plans sont donc les plans osculateurs de cette courbe.

On appelle « surfaces développables » les surfaces enveloppes d'une famille de plans dont l'équation dépend d'un paramètre.

D'après ce que nous venons de voir, on peut aussi les considérer comme engendrées par les tangentes à une courbe gauche. Chaque plan tangent est tangent à la surface tout le long d'une des droites caractéristiques (tangentes à la courbe). *Les surfaces développables sont donc des surfaces « réglées » admettant même plan tangent tout le long d'une génératrice* (exemples : surfaces coniques ou cylindriques).

Nous verrons que inversement, si une surface réglée est telle que le plan tangent soit le même tout le long de chaque génératrice rectiligne, cette surface est « développable ».

Nous étudierons ultérieurement les propriétés de ces surfaces.

Plan normal. — Les équations de la tangente à une courbe gauche en un point M(t) sont

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}.$$

L'équation du plan normal est

$$(1) \qquad (X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0.$$

Cette équation dépendant d'un paramètre, cherchons l'enveloppe de cette famille de plans. Il faudra ajouter l'équation dérivée

$$(2) \quad (X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

La droite caractéristique du plan normal, que nous appellerons « droite polaire », est représentée par les équations (1), (2). Ses coefficients de direction sont

$$y'z'' - z'y'', \qquad z'x'' - x'z'', \qquad x'y'' - y'x''.$$

Elle est donc perpendiculaire au plan osculateur. On l'appelle aussi « axe du plan osculateur » pour les raisons que nous donnerons.

L'arête de rebroussement de la famille des plans normaux se déterminera en dérivant encore une fois l'équation (2), ce qui donne

$$(3) \quad (X - x)x''' + (Y - y)y''' + (Z - z)z''' - 3(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0.$$

Le point déterminé par les trois plans (1), (2), (3), est, comme nous le verrons, le centre de la sphère osculatrice à la courbe au point M.

Cercle osculateur. — Pour déterminer un cercle de l'espace, il faut se donner son centre x_0, y_0, z_0, son rayon R, la direction de son plan.

Les équations générales d'un cercle de l'espace, dépendent donc de six paramètres. Ce cercle sera l'intersection d'une sphère de centre x_0, y_0, z_0 de rayon R, et d'un plan passant par le

centre de la sphère. Les équations de ce cercle seront donc de la forme

$$m(X - x_0) + n(Y - y_0) + p(Z - z_0) = 0 \tag{1}$$

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 - R^2 = 0. \tag{2}$$

α, ξ

On peut disposer de ces paramètres, de manière que ce cercle ait, en un point donné M d'une courbe gauche, un contact du second ordre.

Soit la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

α

En substituant ces expressions dans les équations du cercle (1), (2), on obtient deux fonctions de t

$$\mathcal{F}(t) = m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0)$$
$$\mathcal{F}_1(t) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2.$$

α, β

Pour qu'il y ait contact du second ordre au point M(t), il faut annuler ces deux fonctions et les dérivées du premier et du second ordre, ce qui donne

$$m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

$$mx' + ny' + pz' = 0 \tag{2}$$

$$mx'' + ny'' + pz'' = 0 \tag{3}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0 \tag{4}$$

$$(x - x_0)x' + (y - y_0)y' + (z - z_0)z' = 0 \tag{5}$$

$$(x - x_0)x'' + (y - y_0)y'' + (z - z_0)z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0. \tag{6}$$

Les équations (1), (2), (3) ρ montrent que le plan est le plan osculateur à la courbe au point M(x, y, z) : Le centre du cercle doit être dans ce plan. Les équations (5), (6), ρ indiquent que le point x_0, y_0, z_0 se trouve sur la droite

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0$$
$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

τ_2

Ce sont les équations de l'axe du plan osculateur ou de la droite polaire.

ω

Le centre C du cercle osculateur est donc le point d'intersec-

tion de l'axe (caractéristique du plan normal) avec le plan osculateur.

Cette propriété justifie la désignation d' « axe » donnée à cette droite caractéristique.

Enfin, le rayon du cercle déterminé par (4) est alors la distance de ce point C au point M.

δ_1

On peut obtenir les expressions de x_0, y_0, z_0, R. Le déterminant des coefficients de $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$ dans les équations (1), (5), (6) est, en prenant pour m, n, p les coefficients A, B, C du plan osculateur

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = A^2 + B^2 + C^2.$$

δ_1

D'après la règle de Cramer, on a donc

$$\Delta(X - x_0) = \begin{vmatrix} 0 & B & C \\ 0 & y' & z' \\ -(x'^2 + y'^2 + z'^2) & y'' & z'' \end{vmatrix} = (Cy' - Bz')(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

De même

$$\Delta(Y - y_0) = (Az' - Cx')(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$\Delta(Z - z_0) = (Bx' - Ay')(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

δ_1

En substituant dans (4), on a alors

$$\Delta^2 R^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^2[(Cy' - Bz')^2 + (Az' - Cx')^2 + (Bx' - Ay')^2].$$

On peut simplifier la deuxième parenthèse.

α

D'après la règle de Lagrange, on peut l'écrire

$$(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (Ax' + By' + Cz')^2.$$

Elle se réduit donc à $(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

ω

Par suite

$$R^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

ρ, σ_2

On remarque l'analogie avec l'expression du rayon de courbure en un point d'une courbe plane.

Nous verrons que R se confond avec le rayon de courbure de la courbe gauche (que nous définirons).

Dans la pratique, il ne faudra pas appliquer les formules qui donnent les expressions des coordonnées, (qu'il ne faut pas essayer de retenir). Mais on déterminera directement le point de rencontre de la caractéristique du plan normal avec le plan osculateur.

De même, pour déterminer le plan osculateur, il peut être avantageux d'exprimer que ce plan doit rencontrer la courbe en trois points confondus.

Application. — Soit, par exemple, la courbe

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Pour déterminer le plan osculateur au point de paramètre τ,

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

α_1

il suffit d'exprimer que l'équation

$$At + Bt^2 + Ct^3 + D = 0$$

admet la racine triple $t = \tau$. On a donc identiquement

$$At + Bt^2 + Ct^3 + D = C(t - \tau)^3$$

δ_1

ce qui donne

$$A = 3C\tau^2, \qquad B = -3C\tau, \qquad D = -C\tau^3$$

et par suite le plan

$$3\tau^2 X - 3\tau Y + Z - \tau^3 = 0.$$

Sphère osculatrice. — L'équation générale d'une sphère

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

α, δ_1

dépend de quatre paramètres. On peut donc en disposer de manière que cette sphère ait, en un point donné M de la courbe gauche, un contact du troisième ordre avec la courbe.

ξ

Il faut considérer la fonction de t

$$F(t) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2$$

et l'annuler au point t ainsi que ses trois premières dérivées.

δ_1

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
&(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0\\
&(x - x_0)x' + (y - y_0)y' + (z - z_0)z' = 0\\
&(x - x_0)x'' + (y - y_0)y'' + (z - z_0)z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0\\
&(x - x_0)x''' + (y - y_0)y''' + (z - z_0)z''' + 3(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0.
\end{aligned}$$

Ces trois dernières équations déterminent x_0, y_0, z_0, la première donne R. Si dans les trois dernières équations, on remplace x_0, y_0, z_0 par des coordonnées courantes, ξ, τ_2 on obtient précisément les trois équations qui déterminent le point de contact de la caractéristique du plan normal avec son enveloppe. Ainsi que nous l'avons dit, ce point de contact est donc bien le centre de la sphère osculatrice.

VI. — COURBURE. — TORSION. — FORMULES DE FRENET

Soit une courbe gauche

$$x = f(t), \qquad x = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Pour définir un point sur la courbe, prenons une origine M_0 et choisissons, à partir de ce point (arbitrairement), un sens de parcours sur la courbe, que nous prendrons comme sens positif.

Un point M sera complètement défini par l'arc $s = M_0M$ compté positivement ou négativement suivant que l'on se déplace (de M_0 en M) dans le sens positif choisi ou dans le sens contraire.

On sait que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]dt^2.$$

Par suite

$$s = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\, dt.$$

Le signe sera d'ailleurs bien déterminé par le sens positif choisi.

Si, en se déplaçant dans le sens des arcs croissants, le paramètre t va en croissant, il faut prendre le signe $+$.

Nous désignerons par $F(t)$ la fonction

$$F(t) = + \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Nous aurons donc

$$s = \varepsilon \int_{t_0}^{t} F(t)\, dt.$$

Définition de la tangente. — Nous désignerons par « tangente » la demi-droite dirigée tangentiellement à la courbe dans le sens des arcs croissants.

Pour deux points M, M′ (l'arc MM′ étant positif) correspondant aux valeurs t, $t + \Delta t$, les cosinus directeurs de la direction MM′ sont

$$\frac{\Delta x}{\overline{MM'}}, \qquad \frac{\Delta y}{\overline{MM'}}, \qquad \frac{\Delta z}{\overline{MM'}}$$

ou

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\overline{MM'}}, \text{ etc.}$$

On sait que la limite du rapport d'une corde à l'arc sous-tendu tend vers l'unité quand l'arc tend vers zéro ; Δs et MM′ sont d'ailleurs deux quantités positives.

Donc

$$\lim. \frac{\Delta s}{\overline{MM'}} = + 1.$$

(Ce résultat se déduirait immédiatement de l'expression de s_1.)

Les limites des cosinus directeurs, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la tangente sont donc

$$a = \lim. \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds}, \qquad a' = \frac{dy}{ds}, \qquad a'' = \frac{dz}{ds}.$$

On en déduit

$$\frac{a}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a'}{\frac{dy}{dt}} = \frac{a''}{\frac{dz}{dt}} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\varepsilon F(t)}.$$

Donc

$$\frac{a}{f(t)} = \frac{a'}{\varphi'(t)} = \frac{a''}{\psi'(t)} = \frac{1}{\varepsilon F(t)}.$$

Rayon de courbure. — Prenons sur la courbe deux points voisins M, M′ correspondant aux valeurs t, $t + \Delta t$ ou aux arcs s, $s + \Delta s$ (Δs positif).

Menons en ce point les tangentes MT, M′T′ à la courbe (sens positif). Ces tangentes forment entre elles un petit angle ε appelé « angle de contingence ».

Le rapport positif $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ s'appelle « courbure moyenne » de l'arc MM′. La limite de ce rapport quand Δs tend vers zéro s'appelle la « courbure » au point M. L'inverse sera le « rayon de courbure », R.

Pour calculer cette limite, menons par l'origine des parallèles om, $o'm'$ aux tangentes et prenons leur intersection m, m' avec

la sphère de rayon unité. Le point m a pour coordonnées a, a', a''. Lorsque le point M décrit C, le point m décrit sur la sphère une courbe appelée « indicatrice sphérique des tangentes ». Sur cette courbe prenons une origine m_0 correspondant au point M_0 et un sens positif des arcs σ correspondant au sens positif des arcs s sur C. Il en résultera que le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$ sera positif.

THÉORÈME. — *La courbure en* M *a pour expression*

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}.$$

En effet, l'angle ε des tangentes est égal à $\widehat{mom'}$. Il est mesuré sur la sphère par l'arc de grand cercle $\Delta\sigma_1$.

Mais $\Delta\sigma_1$ et $\Delta\sigma$ sont tous deux infiniment petits équivalents à la corde mm'. En d'autres termes, on peut écrire

$$\frac{\varepsilon}{\Delta s} = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta s} = \frac{\Delta\sigma_1}{\text{corde } mm'} \times \frac{\text{corde } mm'}{\Delta\sigma} \times \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}.$$

Les deux premiers rapports ayant pour limite l'unité, on voit que la courbure $\frac{1}{R}$ limite de $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ est aussi la limite de $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$.

On a donc bien

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds},$$

si σ et s sont exprimés au moyen d'une même variable t.

Expression de R. — Les coordonnées du point m qui décrit l'arc σ sont a, a', a''.

On a donc

$$d\sigma^2 = da^2 + da'^2 + da''^2.$$

D'où

$$\frac{1}{R^2} = \frac{da^2 + da'^2 + da''^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Nous avons trouvé les expressions de a, a', a'' en fonction de t

$$a = \frac{x'}{\varepsilon F(t)}, \qquad a' = \frac{y'}{\varepsilon F(t)}, \qquad a'' = \frac{z'}{\varepsilon F(t)}.$$

Il existe des procédés plus ou moins détournés pour calculer l'expression $\frac{1}{R^2}$. Il est tout aussi simple de calculer, sans aucune prétention d'élégance, mais sans aucun artifice, les différentielles da, da', da''.

δ_1

On a (au signe près),

$$a = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$da = \frac{x''(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt.$$

On aurait des expressions analogues pour da', da''.

δ_2

Si l'on fait la somme des carrés et qu'on ajoute les numérateurs en groupant les termes correspondants, on aura au numérateur

$$N = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^2 \Sigma x''^2 - 2(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'x'' + y'y'' + z'z'')\Sigma x'x'' + (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \Sigma x'^2$$

ou simplement

$$N = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^2 \Sigma x''^2 - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \Sigma x'^2.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par

$$ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)dt^2,$$

on a donc

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)\Sigma x''^2 - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

ρ

On voit qu'on peut appliquer au numérateur l'identité de Lagrange et l'écrire

$$(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

ω

On a donc finalement

$$\frac{1}{R^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

δ, δ_2

Telle est l'expression de la courbure en un point. On reconnaît le résultat que nous avons obtenu pour le rayon du cercle osculateur $\rho^2 = R^2$.

Ce résultat s'explique aisément. Le rayon de courbure en un point ne dépend que des dérivées premières et secondes de x, y, z.

Si donc en un point commun, deux courbes admettent mêmes valeurs pour les dérivées premières et secondes de x, y, z, c'est-à-dire si les deux courbes ont, en ce point, un contact du second ordre, ces deux courbes auront en ce point même rayon de courbure. Or, c'est le cas pour une courbe et son cercle osculateur. La courbe et le cercle osculateur admettent donc même courbure en M. Donc, le cercle osculateur et le cercle de courbure se confondent.

Si la variable indépendante est l'arc s de courbe, on aura

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

Il reste donc simplement

$$\frac{1}{R^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Normale principale. — Il existe, en un point d'une courbe, une infinité de normales situées dans le plan normal à la courbe.

Nous désignerons par « normale principale » celle qui est située dans le plan osculateur de la courbe.

Nous désignerons par b, b', b'', les cosinus directeurs de la demi-normale dirigée vers le centre du cercle osculateur.

Enfin nous appellerons « binormale » une demi-droite perpendiculaire à la tangente et à la normale principale, c'est-à-dire perpendiculaire au plan osculateur, et faisant avec ces deux droites un trièdre de même sens que le trièdre des axes de coordonnées. Nous désignerons par c, c', c'', ses cosinus directeurs. Ce trièdre est ainsi parfaitement déterminé quand on fixe le sens de parcours positif sur la courbe.

Torsion. — Nous allons définir un nouvel élément géométrique de la courbe. De même que nous avons introduit l'angle ε de deux tangentes infiniment voisines et la limite de son rapport à l'arc correspondant, $\frac{\alpha, \xi}{}$, de même, on peut introduire l'angle de deux binormales, c'est-à-dire l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

δ_1

Soit donc ω l'angle aigu de deux plans osculateurs en deux points voisins M, M′ distants d'un arc positif Δs.

ξ

Le rapport $\frac{\omega}{\Delta s}$ s'appelle la « torsion moyenne » de l'arc.

La limite de ce rapport quand Δs tend vers zéro s'appelle la « torsion » de la courbe au point M ; l'inverse sera le « rayon de torsion ».

τ

Nous pouvons répéter les considérations présentées à propos de la courbure.

Par l'origine, menons des parallèles aux binormales et prenons leur intersection avec la sphère de rayon unité.

Quand M décrira C, le point d'intersection décrira sur la sphère une « courbe indicatrice des binormales » ou des plans osculateurs.

δ_1

Nous prendrons sur cette courbe une origine μ_0 correspondant à M_0 et un sens positif de parcours correspondant au sens positif de déplacement sur C. Nous désignerons par θ l'arc $\mu_0\mu$. On aura $\frac{d\theta}{ds} > 0$.

ψ

THÉORÈME. — *La torsion* $\frac{1}{\tau}$ *a pour expression*

$$\frac{1}{\tau} = \lim. \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}.$$

δ_1

En effet l'angle α des deux binormales est mesuré sur la sphère par l'arc de grand cercle $\Delta\theta_1$.

On peut écrire

$$\frac{\omega}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta_1}{\text{corde MM}'} \times \frac{\text{corde MM}'}{\Delta\theta} \times \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

ω

Les deux premiers rapports ayant pour limite l'unité, la limite du rapport $\frac{\omega}{\Delta s}$ est bien la même que celle du rapport $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ c'est-à-dire $\frac{d\theta}{ds}$ si l'on exprime θ et s au moyen d'une même variable.

δ_1, ξ

Les coordonnées du point qui décrit l'indicatrice sont c, c', c''. On a donc

$$d\theta^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2$$

et par suite

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{dc^2 + dc'^2 + dc''^2}{ds^2}.$$

Les cosinus directeurs de la binormale sont

$$c = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad c' = \frac{B}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad c'' = \frac{C}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Malgré la forme compliquée de ces expressions, nous calculerons tout simplement, et sans aucun artifice de calcul, les différentielles dc, dc', dc'' et les substituerons dans $\frac{1}{\tau^2}$.

On a

$$dc = \frac{A'(A^2 + B^2 + C^2) - A(AA' + BB' + CC')}{\varepsilon(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

et des expressions analogues pour dc', dc''.

On en déduit

$$\sum \frac{dc^2}{dt^2} = \frac{(A^2+B^2+C^2)^2\Sigma A'^2 - 2(A^2+B^2+C^2)(AA'+BB'+CC')^2 + (AA'+BB'+CC')^2\Sigma A^2}{(A^2+B^2+C^2)^3}.$$

Le numérateur se réduit à

$$(A^2 + B^2 + C^2)^2(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2(A^2 + B^2 + C^2).$$

D'où, en divisant les deux termes de la fraction par $(A^2 + B^2 + C^2)$,

$$\sum \frac{dc^2}{dt^2} = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}$$
$$= \frac{(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Il est aisé de voir que les parenthèses sont proportionnelles à x', y', z'. On a en effet, comme on l'a déjà vu

$$Ax' + By' + Cz' = 0 \qquad A'x' + B'y' + C'z' = 0.$$

On a donc bien

$$\frac{x'}{BC' - CB'} = \frac{y'}{CA' - AC'} = \frac{z'}{AB' - BA'}.$$

En désignant par D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

on trouve en développant les parenthèses,

$$BC' - CB' = Dx', \qquad CA' - AC' = Dy', \qquad AB' - BA' = Dz'.$$

En substituant dans $\frac{1}{\tau^2}$, il reste simplement

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{D^2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2}{ds^2} \times \frac{dt^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} = \frac{D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Par suite

$$\frac{1}{\tau} = \pm \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Cette expression est remarquable. Elle ne dépend pas d'un radical comme le rayon de courbure.

On prendra le signe — si l'on veut avoir la valeur absolue de τ, car on peut démontrer que le déterminant est négatif si les deux trièdres $o(x, y, z)$ et M(T, N, B) sont de même sens. Mais nous définirons plus tard la valeur algébrique de la torsion.

REMARQUE. — I. On retrouverait facilement les expressions de BC' — CB', etc., en se basant sur les propriétés d'un déterminant et du déterminant « adjoint » Δ, formé en remplaçant chaque élément de D par le mineur correspondant.

On sait que si l'on considère un élément quelconque a_i^j d'un déterminant D et le mineur correspondant A_i^j du déterminant adjoint, on a entre eux la relation

$$A_i^j = a_i^j \times D^{n-2}$$

n étant le degré du déterminant D.

Il suffit d'appliquer cette propriété au déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

Le déterminant « adjoint » sera, en écrivant pour abréger

$$(y''z''') = y''z''' - z''y'''$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y''z''') & (z''x''') & (x''y''') \\ -A' & -B' & -C' \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

Le mineur $BC' - CB'$ correspondra à l'élément x' de D. On a donc

$$BC' - CB' = x' \times D, \qquad (n = 3).$$

II. — Si la courbe est plane, la torsion est nulle en chaque point. Inversement, si la torsion est constamment nulle, le déterminant D est nul. Nous avons vu que, dans ce cas, la courbe est plane.

Formules de Serret et Frenet. — Nous avons défini en chaque point d'une courbe gauche un trièdre fondamental formé par la tangente (sens des arcs croissants), la normale principale (vers le centre du cercle osculateur), la binormale.

Les cosinus directeurs sont respectivement

$$a, a', a'', \qquad b, b', b'', \qquad c, c', c''.$$

On a entre ces neuf cosinus les six relations (nous n'écrivons que les premières)

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0.$$

On sait qu'on en déduit un deuxième groupe

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0.$$

Le trièdre étant de même sens que le trièdre des axes, on sait de plus que

$$d = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = +1$$

Enfin, l'un quelconque des cosinus est égal, en grandeur et en signe, au mineur correspondant dans le déterminant

$$a = b'c'' - c'a''.$$

En différentiant les six relations, on obtiendra six relations homogènes entre les différentielles

$$(I) \qquad ada + a'da' + a''da'' = 0.$$

$$(II) \qquad bdc + b'dc' + b''dc'' = -(cdb + c'db' + c''db'').$$

Mais *nous obtiendrons une nouvelle relation*, en

écrivant que le plan TON est le plan osculateur à la courbe la binormale est donc perpendiculaire à la tangente et à la tangente infiniment voisine.

Si l'on désigne par $\gamma, \gamma', \gamma''$ les cosinus directeurs de la perpendiculaire à la tangente a, a', a'' et à la tangente voisine $a + \Delta a$, $a' + \Delta a'$, $a'' + \Delta a''$.

On aura

$$a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' = 0, \qquad (a + \Delta a)\gamma + (a' + \Delta a')\gamma' + (a'' + \Delta a'')\gamma'' = 0.$$

La deuxième de ces relations, en tenant compte de la première, se réduit à

$$\gamma\Delta a + \gamma'\Delta a' + \gamma''\Delta a'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \gamma\frac{\Delta a}{\Delta s} + \gamma'\frac{\Delta a'}{\Delta s} + \gamma''\frac{\Delta a''}{\Delta s} = 0.$$

Si Δs tend vers zéro, on voit que les cosinus c, c', c'' de la binormale satisfont, à la limite, aux deux conditions

$$(3) \qquad ca + ca' + c''a'' = 0, \qquad cda + c'da' + c''da'' = 0.$$

Ainsi donc, les neuf différentielles satisfont aux sept conditions (I), (II), (3). Or toutes ces différentielles peuvent s'exprimer au moyen de dt, ou ce qui revient au même, de ds.

Nous poserons, en introduisant deux inconnues auxiliaires

$$(IV) \qquad \begin{cases} bda + b'da' + b''da'' = \dfrac{ds}{\rho} \\ bdc + b'dc' + b''dc'' = \dfrac{ds}{\tau}. \end{cases}$$

$\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\tau}$ sont des facteurs de proportionnalité dont nous donnerons la signification. Nous pourrons alors exprimer toutes les différentielles au moyen de ds et des facteurs $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\tau}$.

Il faut résoudre le système d'équations (I), (II), (3), (IV).

Voyons comment se groupent les différentielles. On constate que les différentielles da, da', da'' ne paraissent que dans les trois équations

$$ada + a'da' + a''da'' = 0, \quad bda + b'da' + b''da'' = \frac{ds}{\rho}, \quad cda + c'da' + c''da'' = 0.$$

Le déterminant des inconnues est le déterminant $d = +1$.

δ_1

Multiplions les équations respectivement par a, b, c et ajoutons-les : les coefficients de da', da'' sont nuls. Il reste seulement

$$da = b\frac{ds}{\rho}.$$

De même

$$da' = b'\frac{ds}{\rho}, \qquad da'' = b''\frac{ds}{\rho}.$$

Telles sont les expressions du premier groupe de différentielles.

δ_1

Prenons maintenant les équations contenant les différentielles db, db', db'' ρ Ces différentielles ne paraissent également que dans les trois équations

$$adb + a'db' + a''db'' = -\frac{ds}{\rho}, \qquad bdb + b'db' + b''db'' = 0,$$

$$cdb + c'db' + c''db'' = -\frac{ds}{\tau}.$$

δ_1

On les résoudra comme les précédentes. On obtient

$$db = -a\frac{ds}{\rho} - c\frac{ds}{\tau}, \qquad db' = -a'\frac{ds}{\rho} - c'\frac{ds}{\tau}, \qquad db'' = -a''\frac{ds}{\rho} - c''\frac{ds}{\tau}.$$

δ_1

Enfin les différentielles dc, dc', dc'' sont déterminées par les trois équations (dont la première se déduit immédiatement de (3))

$$adc + a'dc' + a''dc'' = 0, \quad bdc + b'dc' + b''dc'' = \frac{ds}{\tau}, \quad cdc + c'dc' + c''dc'' = 0.$$

Elles donnent

$$dc = b\frac{ds}{\tau}, \qquad dc' = b'\frac{ds}{\tau}, \qquad dc'' = b''\frac{ds}{\tau}.$$

R

En résumé, on a donc

$$\text{(I)} \begin{cases} da = b\dfrac{ds}{\rho} \\ da' = b'\dfrac{ds}{\rho} \\ da'' = b''\dfrac{ds}{\rho} \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} db = -a\dfrac{ds}{\rho} - c\dfrac{ds}{\tau} \\ db' = -a'\dfrac{ds}{\rho} - c'\dfrac{ds}{\tau} \\ db'' = -a''\dfrac{ds}{\rho} - c''\dfrac{ds}{\tau} \end{cases} \qquad \text{(III)} \begin{cases} dc = b\dfrac{ds}{\tau} \\ dc' = b'\dfrac{ds}{\tau} \\ dc'' = b''\dfrac{ds}{\tau}. \end{cases}$$

Ces formules donnant les différentielles des neuf cosinus au

moyen des deux fonctions $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$ s'appellent « formules de Serret et de Frenet. »

On voit combien ces relations sont particulièrement simples.

Signification de ρ et τ. Théorème. — *ρ et τ sont en valeur absolue le rayon de courbure et le rayon de torsion.*

En effet, élevons au carré les relations du premier groupe et ajoutons-les. Nous obtiendrons

$$da^2 + da'^2 + da''^2 = \frac{ds^2}{\rho^2}.$$

C'est l'égalité qui définit le rayon de courbure.

Elevons de même au carré les équations du troisième groupe et ajoutons-les. Nous obtenons

$$dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = \frac{ds^2}{\tau^2}$$

égalité qui définit le rayon de torsion.

Des formules de Serret, on déduit en particulier

$$\frac{da}{b} = \frac{da'}{b'} = \frac{da''}{b''} = \frac{ds}{\rho}.$$

De même

$$\frac{dc}{b} = \frac{dc'}{b'} = \frac{dc''}{b''} = \frac{ds}{\tau}$$

et par suite

$$\frac{da}{dc} = \frac{da'}{dc'} = \frac{da''}{dc''}.$$

Ces résultats peuvent s'obtenir par quelques considérations géométriques simples.

Considérons sur la sphère de rayon *un*, l'indicatrice des tangentes lieu des points *m*, *om* étant parallèle à la tangente en *m*, et l'indicatrice des binormales, lieu des points *b*, *ob* étant parallèle à la binormale. Menons les tangentes *mt*, *bτ* à ces deux indicatrices.

Le point *m* ayant pour coordonnées *a*, *a'*, *a''*, les paramètres directeurs de la tangente *mt* sont proportionnels à *da*, *da'*, *da''*.

De même le point b a pour coordonnées c, c', c'' ; les paramètres directeurs de la tangente $b\tau$ sont proportionnels à dc, dc', dc''.

Nous voulons démontrer que

$$\frac{da}{dc} = \frac{da'}{dc'} = \frac{da''}{dc''}$$

ou que les deux tangentes mt, $b\tau$ sont parallèles.

Nous savons déjà que ob, perpendiculaire au plan osculateur, c'est-à-dire à la tangente om. et à la tangente infiniment voisine est perpendiculaire au plan omt.

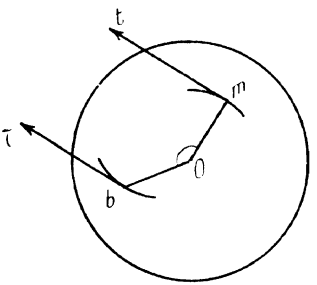


Fig. 22.

Il en résulte que mt, déjà perpendiculaire à om, est perpendiculaire au plan mob.

Il faut donc démontrer que $b\tau$ est perpendiculaire à ce même plan. Or, $b\tau$ est déjà perpendiculaire à ob.

Il ne reste donc plus à démontrer que $b\tau$ est perpendiculaire à om.

Nous allons démontrer que om est perpendiculaire au plan $ob\tau$.

En effet, quand m décrit C_t la droite om décrit un cône (C_t) et la droite ob, menée à chaque instant perpendiculairement au plan tangent, décrit le cône (Γ) supplémentaire de (C_t).

Mais on sait que, inversement, chaque génératrice om de (C_t) est perpendiculaire au plan tangent correspondant de (Γ) ;

om est donc bien perpendiculaire au plan $ob\tau$ et par suite $b\tau$ perpendiculaire à ob et à om est aussi perpendiculaire au plan mob. Les deux droites mt, $b\tau$ sont donc bien parallèles.

Les courbes décrites par m et b seront deux courbes supplémentaires de la sphère.

Signification précise de ρ et τ. — Nous avons vu que ρ et τ sont, en valeur absolue, les rayons de courbure et de torsion. Nous allons préciser leur signe.

Nous avons pris la tangente MT à C dans le sens des arcs croissants. Les cosinus directeurs a, a', a'' de cette droite sont donc :

$$a = \frac{dx}{ds}, \qquad a' = \frac{dy}{ds}, \qquad a'' = \frac{dz}{ds}.$$

Nous allons reprendre la définition du cercle osculateur et de la sphère osculatrice.

Le plan normal a pour équation

$$a(X - x) + a'(Y - y) + a''(Z - z) = 0.$$

La droite polaire s'obtiendra en ajoutant l'équation différentiée

$$(2) \quad (X - x)da + (Y - y)da' + (Z - z)da'' - (adx + a'dy + a''dz) = 0.$$

Remplaçons les différentielles da, da', da'' par leurs expressions déduites des formules de Serret et a, a', a'', par leurs valeurs. On aura

$$(2') \qquad \left[b(X - x) + b'(Y - y) + b''(Z - z)\right]\frac{ds}{\rho} - ds = 0$$

ou

$$(2') \qquad b(X - x) + b'(Y - y) + b''(Z - z) = \rho.$$

Pour avoir le centre du cercle osculateur, il faut prendre l'intersection de la droite (1), (2') avec le plan osculateur

$$(3) \qquad c(X - x) + c'(Y - y) + c''(Z - z) = 0.$$

Résolvons les équations (1), (2'), (3) par rapport à $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z)$. En les multipliant respectivement par a, b, c et les ajoutant, on obtient simplement

$$X - x = b\rho.$$

De même

$$(1) \qquad Y - y = b'\rho, \qquad Z - z = b''\rho.$$

Or nous avons désigné par b, b', b'' les cosinus directeurs de la demi-normale dirigée vers le centre du cercle osculateur. Les expressions ci-dessus montrent donc que $\rho = \overline{MC}$, ce segment étant compté positivement de M vers C ; ρ est donc essentiellement positif : c'est le rayon du cercle osculateur.

ρ est parfaitement déterminé en grandeur et en signe.

Prenons le centre de la sphère osculatrice.

Comme nous le savons, τ_2 c'est le point de contact de la droite polaire avec son enveloppe. Il faut donc ajouter aux équations (1) et (2') l'équation différentiée de (2') ce qui donne :

$$(X - x)db + (Y - y)db' + (Z - z)db'' - (bdx + b'dy + b''dz) = d\rho.$$

Or

$$bdx + b'dy + b''dz = 0.$$

Remplaçons db, db', db'' par leurs expressions tirées des formules de Serret, on obtiendra

$$(4) \qquad -\left(\frac{a}{\rho} + \frac{c}{\tau}\right)(X - x) - \left(\frac{a'}{\rho} + \frac{c'}{\tau}\right)(Y - y) - \left(\frac{a''}{\rho} + \frac{c''}{\tau}\right)(Z - z) = \frac{d\rho}{ds}.$$

Les équations (1), (2), (4), définissent le centre de la sphère osculatrice. En tenant compte de (1), (4) se réduit à

$$(4') \qquad c(X - x) + c'(Y - y) + c''(Z - z) = -\tau\frac{d\rho}{ds}.$$

Résolvons les équations (1), (2), (4') comme les précédentes, on obtiendra

$$(II) \qquad \begin{cases} X - x = b\rho - c\tau\dfrac{d\rho}{ds} \\ Y - y = b'\rho - c'\tau\dfrac{d\rho}{ds} \\ Z - z = b''\rho - c''\tau\dfrac{d\rho}{ds}. \end{cases}$$

Si S désigne le centre de la sphère, les premiers membres représentent les projections sur les axes du segment $\overrightarrow{MS}$; $b\rho$, $b'\rho$ $b''\rho$ sont d'autre part, les projections du segment $\overrightarrow{MC}$. Les formules (II) expriment donc que les termes du deuxième membre

$$-c\tau\frac{d\rho}{ds}, \qquad -c'\tau\frac{d\rho}{ds}, \qquad -c''\tau\frac{d\rho}{ds}$$

sont les projections du segment $\overrightarrow{CS}$.

Ce segment est bien porté par la binormale.

D'autre part, en prenant MB comme sens positif (c, c', c'') on a

$$\overrightarrow{CS} = -\tau\frac{d\rho}{ds}.$$

et par suite

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{\mathrm{CS}} \cdot \frac{d\rho}{ds}.$$

Nous avons défini en grandeur et en signe (toujours positif) ρ et par suite nous connaissons $\frac{d\rho}{ds}$ (qui peut être positif ou négatif). Le segment CS qui va du centre du cercle osculateur au centre de la sphère osculatrice, et compté positivement dans le sens choisi sur la binormale, (trièdre direct avec MT et MC) est aussi parfaitement déterminé. Donc la torsion $\frac{1}{\tau}$ est parfaitement déterminée en grandeur et en signe.

Contrairement à la courbure $\frac{1}{\rho}$, elle peut être positive ou négative.

Remarques sur les formules de Serret. — En désignant par R et τ les rayons de courbure et de torsion d'une courbe, les formules de Serret

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{\tau}, \qquad \frac{db}{ds} = -\frac{a}{\mathrm{R}} - \frac{c}{\tau},$$

sont symétriques en a, c, d'une part, R et τ d'autre part. Elles ne changent pas si on permute ces éléments.

Les dérivées premières (par rapport à l'arc) des cosinus s'expriment linéairement en fonction de ces cosinus et en fonction de R et τ.

Les dérivées secondes qui s'expriment linéairement en fonction des dérivées premières, s'expriment donc aussi linéairement en fonction de a, b, c, etc...

On voit que d'une façon générale, les dérivées d'un ordre quelconque k, des cosinus s'expriment linéairement en fonction de a, b, c et en fonction des dérivées d'ordre k de R *et* τ.

D'après la remarque précédente, si l'on fait la permutation de a et c, de R et τ, ces dérivées successives ne changeront donc pas par cette permutation.

Si, en particulier, on considère les courbes

$$(\mathrm{I}_a) \quad \begin{cases} \xi = a \\ \eta = a' \\ \zeta = a'' \end{cases} \qquad (\mathrm{I}_b) \quad \begin{cases} \xi_1 = c \\ \eta_1 = c' \\ \zeta_1 = c'' \end{cases}$$

a, a', a'' étant des fonctions données de s satisfaisant à

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$

c, c', c'' les fonctions correspondantes, si l'on a calculé une certaine expression (fonction de ξ, η, ζ et des dérivées) pour la courbe (I_t) et si le résultat ne dépend que de R et τ, ψ, σ on obtiendra l'expression correspondante pour la courbe (I_b) en permutant R et τ.

Nous allons donner des applications.

Rayon de courbure de l'indicatrice des tangentes. — Les coordonnées d'un point de l'indicatrice des tangentes sont

$$\xi = a, \qquad \eta = a', \qquad \zeta = a''.$$

Le rayon de courbure de l'indicatrice est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho_t^2} = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2) - (\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'')^2}{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)^3}.$$

Nous prenons pour variable indépendante l'arc s de la courbe donnée.

δ_1

On a

$$\xi' = \frac{da}{ds} = b\,\frac{1}{R}$$

(nous n'écrivons qu'une seule formule).

Donc

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \frac{1}{R^2}.$$

D'où

$$\Sigma \xi' \xi'' = -\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds}.$$

δ_1

D'autre part,

$$\xi'' = \frac{1}{R}\frac{db}{ds} - \frac{b}{R^2}\left(\frac{dR}{ds}\right) = \frac{1}{R}\left(-\frac{a}{R} - \frac{c}{\tau}\right) - \frac{b}{R^2}\frac{dR}{ds}.$$

En élevant au carré (ainsi que les expressions correspondantes η'', ζ''), et ajoutant, ρ les doubles produits vont évidemment disparaître et il restera simplement

$$\Sigma \xi''^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2\tau^2} + \frac{1}{R^4}\cdot\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

En substituant dans l'expression de $\frac{1}{\rho_t^2}$, le numérateur devient

$$N = \frac{1}{R^6}\left[1 + \frac{R^2}{\tau^2} + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2\right] - \frac{1}{R^6}\cdot\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R^6}\left(1 + \frac{R^2}{\tau^2}\right).$$

Donc

$$\frac{1}{\rho_t^2} = 1 + \frac{R^2}{\tau^2}, \qquad \rho_t^2 = \frac{\tau^2}{R^2 + \tau^2}.$$

Telle est l'expression très simple du rayon de courbure en un point de l'indicatrice des tangentes.

Si inversement, on donne l'indicatrice des tangentes toutes les courbes C correspondantes seront telles que, en des points correspondant à un même point de l'indicatrice, le rapport $\frac{R}{\tau}$ aura la même valeur pour toutes.

Indicatrice des binormales. — Un point de l'indicatrice des binormales a pour coordonnées

$$\xi_1 = c, \qquad \eta_1 = c', \qquad \zeta_1 = c''.$$

D'après la remarque que nous avons faite, sans qu'il soit besoin d'aucun calcul, nous obtiendrons le rayon de courbure en un point de cette indicatrice, simplement en permutant dans le résultat précédent R et τ. (Le calcul se ferait d'ailleurs exactement de la même manière), on a donc

$$\frac{1}{\rho_b^2} = 1 + \frac{\tau^2}{R^2}, \qquad \rho_b^2 = \frac{R^2}{R^2 + \tau^2}$$

on déduit de ces deux relations les relations très simples

$$\rho_b^2 + \rho_t^2 = 1, \qquad \frac{\rho_b}{\rho_t} = \frac{R}{\tau}.$$

THÉORÈME. — *Pour une courbe quelconque, si l'on prend la courbe indicatrice des tangentes et l'indicatrice des binormales :*

1° *La somme des carrés des rayons de courbure en deux points correspondants est constante, égale à l'unité.*

Ce résultat est général pour deux courbes supplémentaires quelconques ;

2° *Le rapport des rayons de courbure* $\frac{\rho_b}{\rho_t}$ *est égal au rapport* $\frac{R}{\tau}$ *des rayons de courbure et de torsion de la courbe donnée.*

Conséquence. — Si, pour une courbe donnée, $\frac{R}{\tau}$ est constant, il en est de même de ρ_b et ρ_t. Les indicatrices sont des petits cercles de la sphère. Les tangentes à la courbe sont donc également inclinées sur une direction fixe : la courbe est une hélice (théorème de Bertrand). Inversement, pour toutes les courbes C correspondant à une même indicatrice des tangentes (et à une même indicatrice des binormales), le rapport $\frac{R}{\tau}$ est égal au rapport des rayons de courbure de ces indicatrices.

Indicatrice des normales principales. — On calculerait de même le rayon de courbure en un point de l'indicatrice des normales principales (lieu du point b, b', b'').

On trouvera

$$\frac{1}{\rho_n^2} = 1 + \frac{R^2\tau^2}{R^2 + \tau^2}\left(\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{\tau}\right)^2.$$

Si $\frac{R}{\tau}$ = const. (hélice), la courbe indicatrice des normales principales est un grand cercle : les normales principales restent donc parallèles à un plan fixe.

Le rayon ρ_n passe par un maximum quand $\frac{R}{\tau}$ passe par un maximum ou un minimum. L'arc de l'indicatrice des normales principales se confond alors avec l'arc de grand cercle.

Rayons de torsion des indicatrices. Relations. — On calculerait de la même façon le rayon de torsion en un point de l'indicatrice des tangentes

$$\xi = a, \qquad \eta = a', \qquad \zeta = a''.$$

Nous avons calculé ξ', ξ''..., etc.

On trouve ensuite

$$A = \frac{c^2}{R^2} - \frac{a}{R^2\tau}$$

et par suite

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\tau^2}\right).$$

δ_1

On a

$$\frac{1}{\tau_t} = \pm \frac{\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Le déterminant Δ est égal à

$$\Delta = -\Sigma\xi''(\eta'\zeta''' - \zeta'\eta''') = -\Sigma A'\xi''$$

δ

On trouve simplement

$$\Delta = \frac{1}{R^3\tau^2} D\left(\frac{R}{\tau}\right)$$

δ_1, o

et par suite

$$\frac{1}{\tau_t} = R D \operatorname{arc\,tg} \frac{\tau}{R}.$$

Pour avoir le rayon de torsion de l'indicatrice des binormales.

ψ, τ_2

il suffit dans l'expression ci-dessus de permuter R et τ

$$\frac{1}{\tau_t} = \tau D \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{\tau}.$$

En divisant membre à membre, on a

$$\frac{\tau_b}{\tau_t} = -\frac{R}{\tau}.$$

ω

THÉORÈME. — *Entre les rayons de torsion de l'indicatrice des tangentes et de l'indicatrice des binormales d'une courbe quelconque (en des points correspondants) on a la relation*

$$\frac{\tau_b}{\tau_t} = -\frac{R}{\tau} = -\frac{\rho_b}{\rho_t}.$$

Courbes réciproques. — Nous avons considéré I_t comme l'indi-

ψ

catrice des tangentes de C. Mais nous pouvons considérer I_b comme une indicatrice de tangentes d'une famille de courbes C_1.

Nous dirons que les courbes C et C_1 sont réciproques.

Elles sont telles que l'indicatrice des tangentes de l'une est l'indicatrice des binormales de l'autre et réciproquement.

Elles ont toutes deux en des points correspondants même direction de normale principale.

Nous supposerons de plus que les arcs correspondants soient égaux sur les courbes C et C_1.

Désignons par R_1, τ_1 les rayons de courbure et de torsion de C_1. Cherchons leurs relations avec R, τ.

Il suffira dans les expressions que nous avons données de permuter ρ_t et ρ_b, τ_t et τ_b. On a ainsi

$$\rho_b = \frac{\tau_1}{\sqrt{R_1^2 + \tau_1^2}}, \qquad \rho_t = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + \tau_1^2}}.$$

En comparant avec les valeurs que nous avons obtenues,

$$\rho_b = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \tau^2}}, \qquad \rho_t = \frac{\tau}{\sqrt{R^2 + \tau^2}}.$$

On en déduit que

$$\frac{\tau}{R} = \frac{R_1}{\tau_1}.$$

Egalons les rayons de torsion

$$\frac{1}{\tau_b} = \frac{R_1}{R_1^2 + \tau_1^2}(R_1\tau_1' - \tau_1 R_1')$$

et

$$\frac{1}{\tau_b} = -\frac{\tau}{R^2 + \tau^2}(R\tau' - \tau R').$$

On aura

$$\frac{R_1}{R_1^2 + \tau_1^2}(R_1\tau_1' - \tau_1 R_1') + \frac{\tau}{R^2 + \tau^2}(R\tau' - \tau R') = 0$$

ou

$$\frac{R_1^3}{R_1^2 + \tau_1^2}\left(\frac{\tau_1}{R_1}\right)' = \frac{\tau^3}{R^2 + \tau^2}\left(\frac{R}{\tau}\right)'.$$

En vertu de la relation précédente, il reste simplement

$$\frac{R_1^3}{R_1^2 + \tau_1^2} = \frac{\tau^3}{R^2 + \tau^2}$$

et par suite

$$\tau_1 = R, \qquad \tau = R_1.$$

Nous appellerons « points correspondants » sur les deux courbes réciproques, deux points tels que la tangente à l'une soit parallèle à la binormale à l'autre.

En deux points correspondants de deux courbes réciproques, ayant mêmes arcs, le rayon de courbure de l'une est égal au rayon de torsion de l'autre.

Courbure géodésique d'une courbe sphérique. — Considérons la « courbure géodésique » en un point d'une courbe sphérique quelconque. Nous la définirons de la façon suivante :

Etant donnés deux points voisins M, M′ sur la courbe, menons les arcs de grand cercle tangents à la courbe en ces points. Ils se coupent sous un petit angle ε. On appelle « courbure géodésique » au point M, la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ ($\Delta s = \mathrm{MM'}$) quand Δs tend vers zéro.

On trouve comme expression de cette courbure géodésique (voir, par exemple, M. Picard, *Traité d'analyse*, tome I, p. 379)

$$G = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

ρ désignant le rayon de courbure de la courbe sphérique.

Appliquons cette formule aux deux indicatrices, on aura

$$G_t = \frac{\rho_t}{\sqrt{1 - \rho_t^2}}, \qquad G_b = \frac{\rho_b}{\sqrt{1 - \rho_b^2}}$$

c'est-à-dire

$$G_t = \frac{\rho_t}{\rho_b}, \qquad G_b = \frac{\rho_b}{\rho_t}.$$

« *Le rayon de courbure géodésique* » *d'une courbe sphérique est donc égal au rapport des rayons de courbure de cette courbe et de la courbe supplémentaire.*

Et aussi :

Le produit des rayons de courbure géodésique en des points correspondants de deux courbes supplémentaires quelconques est égal à l'unité.

Courbes de Bertrand. — Les normales (principales) à une courbe plane sont en même temps les normales principales d'une infinité de courbes planes, toutes les courbes parallèles à la première.

ξ
Bertrand s'est proposé de déterminer toutes les courbes gauches dont les normales principales soient aussi normales principales d'une seconde courbe gauche.

On trouve que l'on doit porter sur chaque normale principale une longueur a constante et que ces courbes sont celles pour lesquelles il existe une relation linéaire entre la courbure et la torsion. (Voir, par exemple, M. Goursat, *Cours d'analyse*, tome I, p. 578)

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{\tau} = 1.$$

Prenons pour C une telle courbe gauche.

z, ξ
Si l'on considère la courbe réciproque C_1 avec égalité des arcs, de rayons R_1, τ_1, on aura pour cette courbe

$$\frac{a}{\tau_1} + \frac{b}{R_1} = 1.$$

d
Toute courbe réciproque d'une courbe de Bertrand est donc aussi une courbe de Bertrand.

On obtiendrait la nouvelle courbe déduite de C en portant sur les normales principales une longueur constante a.

d
On obtiendra la nouvelle courbe déduite de C_1 en portant sur les normales la longueur constante b.

Telle est donc la signification des coefficients a, b, dans la formule linéaire. *Ce sont les quantités constantes qu'il faut porter sur les normales soit à* C, *soit à* C_1, *pour obtenir deux nouvelles courbes correspondantes.*

En particulier si C est à courbure constante, on doit avoir

$$R = a.$$

(o)
La courbe déduite de C est donc la courbe lieu des centres de courbure principaux de C.

d
A la courbe C à courbure constante, correspond pour C_1, une courbe à torsion constante.

Détermination d'une courbe connaissant les rayons de courbure et de torsion. — Lorsqu'on donne une courbe gauche, on peut déterminer en chaque point, les rayons de courbure et de torsion en fonction du paramètre t qui fixe la position du point ainsi que

l'arc de courbe s. En éliminant t, on peut dire que R et τ sont des fonctions de s. Inversement, si l'on se donne pour R et τ deux fonctions de s, nous allons montrer que la courbe gauche est bien déterminée. Plus rigoureusement :

THÉORÈME. — *A un déplacement quelconque dans l'espace près, il y a une courbe et une seule qui admette pour rayons de courbure et de torsion, des fonctions données de l'arc.*

Nous allons, en effet, chercher à déterminer les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe en fonction de l'arc s.

On a d'abord

$$a = \frac{dx}{ds}, \qquad a' = \frac{dy}{ds}, \qquad a'' = \frac{dz}{ds}.$$

Pour déterminer x, y, z, il faut donc d'abord déterminer a, a', a''.

Or, les neuf cosinus a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' sont liés à R et τ par les formules de Serret

$$da = b\frac{ds}{R}, \qquad db = -a\frac{ds}{R} - c\frac{ds}{\tau}, \qquad dc = b\frac{ds}{\tau}$$

$$da' = b'\frac{ds}{R}, \qquad db' = -a'\frac{ds}{R} - c'\frac{ds}{\tau}, \qquad dc' = b'\frac{ds}{\tau}$$

$$da'' = b''\frac{ds}{R}, \qquad db'' = -a''\frac{ds}{R} - c''\frac{ds}{\tau}, \qquad dc'' = b''\frac{ds}{\tau}.$$

Si l'on examine ces équations avec attention, on remarque que a, b, c ne figurent que dans les premières équations de chaque groupe, a', b', c' dans les secondes, a'', b'', c'' dans les troisièmes de chaque groupe.

On pourra donc traiter séparément ces trois groupes de variables. De plus, on remarque que les équations qui déterminent a', b', c' ou a'', b'', c'' sont les mêmes que celles qui déterminent a, b, c.

On est donc amené à considérer le système de trois équations

$$\text{(I)} \qquad \frac{da}{ds} = \frac{b}{R}, \qquad \frac{db}{ds} = -\frac{a}{R} - \frac{c}{\tau}, \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{\tau}.$$

Méthode de Darboux. — Darboux a généralisé ce système, dans lequel les seconds membres sont linéaires par rapport aux fonctions inconnues, en se donnant trois fonctions p, q, r de s et étudiant le système

$$(II)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} + q\gamma - r\beta = 0 \\ \dfrac{d\beta}{ds} + r\alpha - p\gamma = 0 \\ \dfrac{d\gamma}{ds} + p\beta - q\alpha = 0. \end{cases}$$

Le système (I) que nous étudions est, en effet, un cas particulier du système (II), dans lequel

$$\alpha = b, \qquad \beta = c, \qquad \gamma = a, \qquad p = 0, \qquad q = \frac{1}{R}, \qquad r = -\frac{1}{\tau}$$

ainsi qu'on le vérifie aisément.

En multipliant les équations (II) respectivement par α, β, γ et les ajoutant, on obtient

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}$$

La constante doit être prise égale à l'unité.

Pour la résolution pratique du système, Darboux introduit les fonctions x, y définies par

$$(III)\qquad \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} = \frac{1 + \gamma}{\alpha - i\beta} = x, \qquad \frac{\alpha + i\beta}{1 + \gamma} = \frac{1 - \gamma}{\alpha - i\beta} = -y.$$

Ceci n'a rien d'anormal. Il était tout à fait naturel, étant donnée la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

de rechercher une représentation, au moyen de deux paramètres, des coordonnées α, β, γ d'un point de la sphère, surface du second degré. Il était naturel alors de prendre comme paramètres ceux qui déterminent les génératrices rectilignes (imaginaires) de cette surface du second degré : x et y sont précisément les paramètres de ces génératrices. Si l'on fait

par exemple, $x = \text{const.}$, le point α, β, γ décrit une droite tout entière située sur la sphère.

Des relations (III), on déduit

$$\alpha = \frac{1 - xy}{x - y}, \qquad \beta = i\frac{1 + xy}{x - y}, \qquad \gamma = \frac{x + y}{x - y}.$$

En remplaçant α, β, γ par ces expressions dans les relations (II), on est certain *a priori*, qu'elles doivent se réduire à deux. Or, on trouve que x *et* y *satisfont à une même équation* (ce qui était évident *a priori*, étant donnée la signification de x et y)

$$\frac{du}{dt} = \frac{q - ip}{2} - iru + \frac{q + ip}{2}u^2.$$

C'est une équation de Riccati.

Dans le cas qui nous occupe, on aurait à résoudre l'équation

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{2R} + \frac{iu}{\tau} + \frac{1}{2R}u^2.$$

a, b, c, dépendent donc de deux constantes arbitraires, et par suite le trièdre fondamental de trois constantes seulement, qui définissent l'orientation des axes dans l'espace.

Les quadratures qui détermineront ensuite x, y, z introduiront ensuite l'origine des axes.

La solution est donc bien unique, à un transport général d'axes près.

2e Méthode : Développement des coordonnées. — Ainsi une courbe est déterminée par les deux fonctions R et τ.

Nous allons établir ce résultat important par un procédé tout à fait différent.

Nous prendrons comme origine des coordonnées et des arcs, un point quelconque de la courbe, et en choisissant des axes simples, nous étudierons la courbe aux environs de l'origine. Nous montrerons que si l'on donne les fonctions $R(s)$, $\tau(s)$, les coordonnées d'un point de l'arc sont parfaitement déterminées en fonction de s.

Il en sera donc de même d'un arc quelconque.

Nous prendrons comme axes de coordonnées :
pour Ox, la tangente à la courbe dans le sens des arcs croissants ;
pour Oy, la normale principale dirigée vers le centre de courbure ;
pour Oz, la binormale faisant avec les deux autres un trièdre direct.

Dans ces conditions on connaît donc les valeurs initiales des cosinus directeurs

$$\begin{array}{lll} a_0 = 1, & a_0' = 0, & a_0'' = 0 \\ b_0 = 0, & b_0' = 1, & b_0'' = 0 \\ c_0 = 0, & c_0' = 0, & c_0'' = 1. \end{array}$$

Nous supposons que les coordonnées x, y, z d'un point sont des fonctions de s développables en série par la formule de Mac-Laurin.

Pour connaître ces développements

$$x = x_0 + \frac{s}{1}\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 + \cdots$$

$$y = y_0 + \frac{s}{1}\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right)_0 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z = z_0 + \frac{s}{1}\cdot\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

il suffit de connaître, *pour l'origine*, les valeurs des dérivées successives de x, y, z.

On a d'abord

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Ensuite

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = a', \qquad \frac{dz}{ds} = a''.$$

Les valeurs à l'origine sont 1, 0, 0.

Calculons $\frac{d^2x}{ds^2}$. On a

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{da}{ds}$$

et d'après les formules de Serret,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{b}{R'} \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{b'}{R'} \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{b''}{R'}$$

Pour l'origine

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 = \frac{1}{R_0}, \qquad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = 0.$$

De même

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d}{ds}\frac{b}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}db - bd\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 ds} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \frac{c}{\tau}\right) - \frac{b\mathrm{R}'}{\mathrm{R}^2}.$$

Pour l'origine, toutes les quantités du second membre sont connues. On trouve ainsi

$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right) = -\frac{1}{\mathrm{R}_0^2}, \qquad \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = -\frac{\mathrm{R}_0'}{\mathrm{R}_0^2}, \qquad \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{\mathrm{R}_0\tau_0}.$$

D'une façon générale, on voit que si, jusqu'à l'ordre k, on a obtenu

$$\frac{d^kx}{ds^k} = f(\mathrm{R}, \tau, a, b, c),$$

(la fonction dépendant de R, τ et de leurs dérivées), en dérivant encore une fois, on introduira $\frac{da}{ds}$, $\frac{db}{ds}$, $\frac{dc}{ds}$ qui, d'après les formules de Serret, sont elles-mêmes fonctions de a, b, c, R, τ. On aura donc

$$\frac{d^{k+1}x}{ds^{k+1}} = f_1(\mathrm{R}, \tau, a, b, c),$$

et on pourra encore avoir la valeur du second membre à l'origine.

Dans le cas actuel, on peut même dire qu'une dérivée quelconque est une fonction linéaire de a, b, c, les coefficients étant fonctions de R, τ et des dérivées.

On peut donc avoir les valeurs de tous les coefficients des développements à l'origine. On obtiendra ainsi

$$x = \frac{s}{1} - \frac{1}{\mathrm{R}_0^2}\cdot\frac{s^3}{6} + \cdots$$

$$y = \frac{1}{\mathrm{R}_0}\frac{s^2}{2} - \frac{\mathrm{R}_0'}{\mathrm{R}_0^2}\cdot\frac{s^3}{6} + \cdots$$

$$z = -\frac{1}{\mathrm{R}_0\tau_0}\frac{s^3}{6} + \cdots$$

Un arc suffisamment petit autour de 0 est donc déterminé entièrement. De proche en proche, la courbe est donc complètement déterminée.

Pour avoir les développements de a, a', a'' il suffit de

prendre les dérivées de x, y, z. Pour ceux de b, b', b'', c, c', c'' on appliquerait la même méthode.

Expression de certains infiniment petits. — En prenant l'arc s, comme infiniment petit principal, on voit d'abord que x est un infiniment petit équivalent à s. Une corde infiniment petite a pour longueur

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - \frac{1}{12}\frac{s^4}{R_0^2} + \cdots$$

On en déduit

$$l = s - \frac{s^4}{24R_0^2} + \cdots$$

La différence entre un arc et sa corde est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à l'arc.

y, c'est-à-dire la distance d'un point à la tangente (z étant infiniment petit d'ordre supérieur) a pour valeur

$$y = \frac{1}{R_0}\frac{s^2}{2},$$

ou, si l'on veut, *le rayon de courbure en un point est la limite du rapport* $\frac{s^3}{2d}$ (d distance à la tangente au point).

z, c'est-à-dire la distance d'un point au plan osculateur infiniment voisin, est un infiniment petit du troisième ordre.

2° D'autre part, x change de signe avec s : la courbe est de part et d'autre du plan normal ; y ne change pas de signe : la courbe est tout entière du même côté du plan MTB ; enfin z change de signe : la courbe traverse le plan osculateur.

Enfin, si l'on considère l'arc correspondant à $s > 0$, cet arc est au-dessus du plan osculateur, si $\tau_0 < 0$.

La projection de la courbe sur le plan osculateur présente un point d'inflexion au point.

On trouvera aisément la plus courte distance entre la tangente à l'origine et la tangente au point infiniment voisin qui a pour expression, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à trois,

$$\delta = \frac{s^3}{12R\tau}.$$

C'est un infiniment petit du troisième ordre.

Application de la théorie générale : Hélice. — On appelle « hélice » une courbe C dont les tangentes font avec une direction fixe un angle constant α ; on peut la considérer comme tracée sur un cylindre et rencontrant les génératrices du cylindre sous un angle constant.

Si, pour simplifier, on prend pour direction fixe l'axe oz, nous aurons

$$\frac{dz}{ds} = a'' = \text{const.} = \cos i, \qquad z = s\cos i,$$

en prenant pour origine des arcs, un point de rencontre avec le plan xoy. Les coordonnées x, y peuvent être des fonctions quelconques de s.

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = s\cos i.$$

La projection de la courbe sur le plan xoy a pour équations

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s).$$

L'arc $d\sigma$ de la projection est donc

$$d\sigma^2 = (f'^2 + \varphi'^2)ds^2.$$

Or

$$f'^2 + \varphi'^2 + \cos^2 i = 1.$$

Donc

$$d\sigma^2 = \sin^2 i ds^2.$$

Si l'on convient de compter dans le même sens l'arc de courbe et l'arc de sa projection, on aura

$$d\sigma = \sin i \cdot ds.$$

L'arc élémentaire de courbe est donc proportionnel à l'arc de sa projection sur le plan des xy, et cela est vrai pour un arc quelconque.

Cette propriété caractérise l'hélice : *Si une courbe est telle que tout arc soit proportionnel à l'arc de sa projection sur un plan, cette courbe est une hélice ayant pour axe la perpendiculaire au plan.*

En prenant, en effet, le plan comme plan des xy, on devra avoir

$$d\tau = k ds, \qquad x'^2 + y'^2 = k^2.$$

On en déduit

$$z'^2 = 1 - k^2.$$

La tangente à la courbe fait bien un angle constant avec Oz.

Normale principale. — D'après la formule de Serret

$$da'' = \frac{b''}{\rho} ds,$$

on a $b'' = 0$. La normale principale est constamment parallèle au plan de section droite du cylindre. Elle se confond avec la normale à la section. Cette propriété est encore caractéristique de l'hélice : *toute courbe dont la normale principale reste parallèle à un plan fixe est une hélice dont l'axe est perpendiculaire au plan.*

En effet, en prenant le plan comme direction du plan des xy, on a $b'' = 0$.

Par suite $da'' = 0$, $a'' = \text{const.}$

Rayon de courbure. — L'arc étant pris comme variable indépendante, on sait que

$$\frac{1}{R^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2 = x''^2 + y''^2.$$

D'autre part, le rayon de courbure ρ de la section droite est donné par

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(x'y'' - y'x'')^2}{(x'^2 + y'^2)^3} = \frac{(x'^2 + y'^2)(x''^2 + y''^2) - (x'x'' + y'y'')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}.$$

Or

$$x'^2 + y'^2 = \sin^2 i, \qquad x'x'' + y'y'' = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{x''^2 + y''^2}{\sin^4 i}.$$

De la comparaison de ρ et R, on déduit

$$\rho = \mathrm{R}\sin^2 i.$$

Le rayon de courbure de la courbe est proportionnel au rayon de courbure de la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'hélice.

Cette propriété *n'est pas caractéristique* de l'hélice.

On peut se proposer de rechercher *toutes* les courbes qui jouissent de cette propriété. Nous indiquerons les principaux résultats après l'exposé des propriétés de l'hélice.

Plan osculateur : Torsion. — On peut poser, en introduisant une fonction $\varphi(s)$

$$x' = a = \sin i \cos\varphi, \qquad y' = a' = \sin i \sin\varphi, \qquad z' = a'' = \cos i.$$

On a d'abord

$$\frac{1}{\mathrm{R}^2} = x''^2 + y''^2 = \sin^2 i\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2.$$

D'où

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sin i}\cdot\frac{ds}{d\varphi}.$$

D'après les formules de Serret,

$$da = -\sin i \sin\varphi d\varphi = \frac{b}{\mathrm{R}}ds$$

$$da' = \sin i \cos\varphi d\varphi = \frac{b'}{\mathrm{R}}ds$$

$$da'' = 0 = b'',$$

on a, en vertu de l'expression de R,

$$b = -\sin\varphi, \qquad b' = \cos\varphi, \qquad b'' = 0.$$

D'après notre convention sur le trièdre, les cosinus directeurs de la binormale sont alors

$$c = a'b'' - b'a'' = -\cos\varphi \sin i, \quad c' = a''b - b''a = -\cos i \sin\varphi,$$
$$c'' = ab' - ba' = \sin i.$$

De la dernière, on déduit que *le plan osculateur fait un angle constant avec un plan fixe* (perpendiculaire à l'axe de l'hélice).

Inversement ψ, si $c'' = \text{const}$, comme $dc'' = b'' \frac{ds}{\tau}$.

On aura : ou $b'' = 0$ et par suite $a'' = \text{const.}$ (hélice) ou $\frac{1}{\tau} = 0$ (courbe plane).

On peut maintenant avoir l'expression de la torsion.

ð1 On a, par exemple,

$$dc = b \frac{ds}{\tau},$$

ou

$$\sin\varphi \cos i d\varphi = -\sin\varphi \cdot \frac{ds}{\tau}.$$

Or,

$$\frac{ds}{d\varphi} = \rho \sin i.$$

Donc,

$$\frac{\rho}{\tau} = -\frac{\cos i}{\sin i}.$$

ω THÉORÈME. — *Dans une hélice quelconque les rayons de courbure et de torsion sont dans un rapport constant.*

Inversement :

THÉORÈME DE BERTRAND. — *Toute courbe pour laquelle les rayons de courbure et de torsion sont dans un rapport constant est une hélice.*

ν D'après les formules de Serret, en faisant intervenir ce rapport on a

$$\frac{dc}{da} = \frac{dc'}{da'} = \frac{dc''}{da''} = \frac{\rho}{\tau}.$$

α Si donc $\frac{\rho}{\tau} = k$, en intégrant les équations précédentes on a

$$c = ka + c_0, \qquad c' = ka' + c_0', \qquad c'' = ka'' + c_0''.$$

ð1 Multiplions ces égalités par a, a', a'' et ajoutons-les, on obtient

$$k + c_0 a + c_0' a' + c_0'' a'' = 0.$$

Remarquons que c_0, c_0', c_0'' ne peuvent être tous trois nuls, car on aurait $k = 0$ d'où $\frac{1}{\tau} = 0$: la courbe serait plane.

σ L'égalité exprime que les directions a, a', a'', c_0, c_0', c_0'' font entre elles un angle constant. ω *La tangente à la courbe*

fait donc un angle constant avec une direction fixe : la courbe est une hélice.

Hélice circulaire. — Si la projection de l'hélice est un cercle, le rayon de courbure ρ de la projection étant constant, il en est de même du rayon de courbure de l'hélice elle-même et par suite du rayon de torsion. ω Donc :

Dans une hélice circulaire, les rayons de courbure et de torsion sont tous deux constants.

Inversement :

Théorème de Puiseux. — *Toute courbe dont les rayons de courbure et de torsion sont constants est une hélice circulaire.*

Leur rapport est, en effet, constant : donc, la courbe est une hélice. π

Dans cette hélice, le rayon de courbure étant constant, il en est de même du rayon de courbure de la section : l'hélice est circulaire. ρ_1

Hélices coniques. — Après avoir considéré les hélices cylindriques, nous allons considérer les hélices coniques, c'est-à-dire les courbes tracées sur un cône, coupant les génératrices sous un angle constant. ξ

Si l'on désigne par s l'arc de courbe, par l la distance d'un point au sommet du cône, par i l'angle d'intersection, on a

$$dl = ds \cos i.$$

Dans le cas général, on n'a pas de formule simple pour les éléments géométriques de la courbe.

Mais supposons que la courbe puisse être considérée, de deux manières différentes, comme une hélice conique, en désignant par l_1 la distance d'un point au sommet du second cône et par i_1, l'angle constant d'inclinaison de la courbe sur les génératrices, on aura ρ_1

$$dl_1 = ds \cos i_1.$$

De ces formules, on déduit donc d

$$dl \cos i_1 = dl_1 \cos i, \qquad l \cos i_1 - l_1 \cos i = \text{const.}$$

La courbe est donc aussi sur la surface, lieu des points dont les distances l, l_1 à deux points fixes S, S_1 *satisfont à cette condition.* Cette surface est évidemment de révolution autour de S, S_1 et la méridienne est une ovale de Descartes.

Si l'hélice est à la fois conique et cylindrique, en désignant par z la distance à un plan de section droite du cylindre et par j l'angle constant d'inclinaison sur le cylindre, on aura

$$dz = \cos j\, ds,$$

et par suite

$$\frac{dz}{\cos j} \cos i = dl.$$

En intégrant,

$$z = \frac{l \cos j}{\cos i} + \text{const.}$$

On peut supposer la constante nulle, il reste donc

$$\frac{\cos i}{\cos i} = \frac{z}{l},$$

en choisissant comme plan de base du cylindre le plan passant par le sommet du cône.

Or $\frac{z}{l}$ représente le cosinus de l'angle α de la génératrice du cône avec la génératrice du cylindre. Cet angle est constant : le cône est donc de révolution autour de Oz et d'angle α.

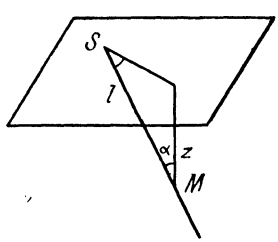


Fig. 23.

Cherchons l'équation de la section droite du cylindre.

Puisqu'il s'agit de distances à un point fixe, cherchons l'équation de cette section en coordonnées polaires. Prenons comme pôle le point S, les coordonnées d'un point seront

$$\rho \cos \omega, \qquad \rho \sin \omega, \qquad z,$$

ρ et z peuvent être considérées comme fonctions de ω.

Les paramètres directeurs de la tangente seront

$$\rho' \cos \omega - \rho \sin \omega, \qquad \rho' \sin \omega + \rho \cos \omega, \qquad z'.$$

α, β

Exprimons que cette direction fait un angle constant, d'une part avec Oz, d'autre part avec MO.

δ1

On aura

$$\frac{z'^2}{\rho^2 + \rho'^2 + z'^2} = \cos^2 i \qquad \text{ou} \qquad z'^2 \operatorname{tg}^2 i = \rho^2 + \rho'^2.$$

Mais l'on a

$$\rho = z \operatorname{tg} \alpha.$$

En éliminant z,

$$\rho'^2 \operatorname{tg}^2 i = \operatorname{tg}^2 \alpha (\rho^2 + \rho'^2), \qquad \frac{\rho^2}{\rho'^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 i - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha},$$

ρ

$\frac{\rho}{\rho'}$ est donc constant.

ξ

En désignant par V l'angle de la tangente en un point de la section droite avec le rayon vecteur du point

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}.$$

ω

L'angle V est donc constant : la section droite est une spirale d'Archimède. On a donc le résultat suivant :

Lorsqu'une courbe est une hélice cylindro-conique, elle est l'intersection d'un cône de révolution et d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe du cône et dont la base est une spirale dont le point asymptotique est le sommet du cône.

δ1 σ2

L'hélice étant une hélice cylindrique, un arc de courbe est proportionnel à l'arc de la section droite, et d'autre part, le rayon de courbure est proportionnel au rayon de courbure de la projection.

Mais si la section droite est une spirale, on sait que le rayon de courbure en un point est proportionnel à l'arc de spirale. Donc le rayon de courbure de l'hélice cylindrique est proportionnel à l'arc d'hélice.

La réciproque est évidemment vraie. Donc :

Pour qu'une hélice soit cylindro-conique, il faut et il suffit que le rayon de courbure en un point quelconque soit une fonction linéaire de l'arc.

Enfin, puisque dans une hélice cylindrique, les rayons de courbure

et de torsion sont proportionnels, on peut dans l'énoncé ci-dessus, remplacer le rayon de courbure par le rayon de torsion.

Une généralisation des hélices. — Proposons-nous, comme nous l'avons dit, *de déterminer toutes les courbes, telles que le rayon de courbure en chaque point soit proportionnel au rayon de courbure de la projection sur un plan.*

Prenons le plan de projection comme plan des xy, s étant pris comme variable indépendante, on aura

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

On peut donc poser

$$x' = \cos\theta\cos\varphi \qquad y' = \cos\theta\sin\varphi, \qquad z' = \sin\theta$$

x', y', z' sont les cosinus directeurs de la tangente ; φ et θ sont des fonctions de s à déterminer.

Le rayon de courbure de la courbe est donné par

$$\frac{1}{R^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

En calculant le second membre, on trouve simplement

$$\frac{1}{R^2} = \theta'^2 + \cos^2\theta\varphi'^2.$$

D'autre part, le rayon de courbure de la projection est donné par

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(x'y'' - y'x'')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}.$$

On trouve

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\varphi'^2}{\cos^2\theta}.$$

On a donc l'équation

$$\frac{\varphi'^2}{\cos^2\theta} = k^2(\theta'^2 + \cos^2\theta\varphi'^2)$$

$$\varphi' = \frac{k\cos\theta\theta'}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\theta}}. \tag{1}$$

En intégrant,

$$\varphi = k\int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\theta}}. \tag{1'}$$

L'équation (1) est identiquement satisfaite si

$$\theta' = 0, \qquad 1 - k^2 \cos^4 \theta = 0$$

c'est-à-dire si θ est constant ($\theta = i$), et si

$$k^2 = \frac{R^2}{\rho^2} = \frac{1}{\cos^4 i}, \qquad \rho = R \cos^2 i.$$

La courbe est une hélice.

Propriétés de ces courbes. — D'après (1') on voit que φ est une fonction bien déterminée de θ; x', y', z' sont donc des fonctions bien déterminées de θ. Toutes les courbes admettent donc même indicatrice des tangentes.

La fonction $\varphi(\theta)$ étant ainsi déterminée par cette quadrature, et θ étant une fonction de s arbitraire, on aura à intégrer

$$\frac{dx}{ds} = x' = \cos\theta \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\theta \sin\varphi, \qquad \frac{dz}{ds} = \sin\theta.$$

Toutes les courbes diffèrent par la fonction $\theta(s)$ choisie.

D'après les formules précédentes :

Pour toutes les courbes jouissant de la propriété, en tous les points où la tangente a une même inclinaison sur Oz, les tangentes sont parallèles.

On peut aussi bien conserver θ comme variable indépendante, en déduire $\varphi(\theta)$ ce qui détermine complètement l'indicatrice des tangentes de la courbe. Mais alors s pourra être une fonction arbitraire de θ. Dans une note aux C. R. de l'Académie des sciences (25-8-1930), nous avons montré que l'on peut prendre cette fonction sous une forme telle (en lui conservant toute sa généralité) que les quadratures donnant x, y, z puissent s'effectuer.

Rayons de courbure et de torsion. — La courbure en un point a pour valeur

$$\frac{1}{R^2} = \theta'^2 + \cos^2\theta\varphi'^2 = \frac{\theta'^2}{1 - k^2\cos^4\theta}.$$

En posant pour abréger $\lambda^2 = 1 - k^2 \cos^4\theta$ il vient

$$\frac{1}{R} = \frac{\theta'}{\lambda}.$$

La torsion δ a pour expression

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Dans le cas actuel

$$A^2 + B^2 + C^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\theta'^2}{\lambda^2}.$$

En calculant le déterminant numérateur, on trouve, par un calcul un peu long, mais sans difficulté

$$\frac{1}{\tau} = 3k \sin\theta \cos\theta \frac{\theta'}{\lambda}.$$

De la comparaison de R et de τ, ρ résulte

$$\frac{R}{\tau} = \frac{3}{2} k \sin 2\theta.$$

En introduisant l'inclinaison i de la tangente sur oz $\left(i = \frac{\pi}{2} - \theta\right)$, θ il vient

$$\frac{R}{\tau} = \frac{3}{2} k \sin 2i.$$

Telle est la relation très simple qui lie les rayons de courbure et de torsion :

Théorème. — *Pour toutes les courbes de la famille (dépendant d'une fonction arbitraire $\theta(s)$)*, on a

$$\frac{R}{\tau} = \frac{3}{2} k \sin 2i.$$

Donc, pour tous les points de toutes les courbes où l'inclinaison de la tangente sur Oz est la même, le rapport $\frac{R}{\tau}$ reprend la même valeur.

En particulier si $i = \text{const.}$, $\frac{R}{\tau} = \text{const.}$ (Théorème de Bertrand).

Plan osculateur. — δ Le plan osculateur en un point a pour équation

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

On trouve, en posant $u = \frac{k \cos \theta}{\lambda}$.

$$A = \theta'(\sin \varphi - u \sin \theta \cos \theta \cos \varphi)$$
$$B = -\theta'(\cos \varphi + u \sin \theta \cos \theta \sin \varphi)$$
$$C = u\theta' \cos^2 \theta.$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\theta'^2}{\lambda^2}.$$

On peut donc diviser par θ', L'équation du plan est

$$(X - x)(\sin \varphi - u \sin \theta \cos \theta \cos \varphi) - (Y - y)(\cos \varphi + u \sin \theta \cos \theta \sin \varphi) + u \cos^2 \theta (Z - z) = 0.$$

Or u ne dépend que de θ, ainsi que φ. L'arc s ne paraît donc pas encore explicitement dans la direction du plan.

Quelle que soit la courbe de la famille, en tous les points où la tangente a même inclinaison sur Oz, le plan osculateur a une direction déterminée.

De ces divers résultats, on conclut :

En tous les points de toutes les courbes où la tangente a même inclinaison sur Oz, *le trièdre fondamental lié à la courbe a une direction bien déterminée.*

Binormale. — Les cosinus directeurs de la binormale sont

$$c = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda \sin \varphi - k \sin \theta \cos^2 \theta \cos \varphi$$
$$c' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\lambda \cos \varphi - k \sin \theta \cos^2 \theta \cos \varphi$$
$$c'' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = k \cos^2 \theta.$$

Ces expressions ne dépendent que de θ.

Pour toutes ces courbes, la courbe indicatrice des binormales, comme la courbe indicatrice des tangentes, est la même.

Si l'on désigne par $d\sigma$ un arc élémentaire de l'indicatrice des tangentes, on a

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{\theta'}{\sqrt{1 - k^2 \cos^4 \theta}}, \qquad \text{d'où} \qquad d\sigma = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^4 \theta}}.$$

De même, en désignant par $d\sigma_1$ un arc d'indicatrice des binormales

$$\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{1}{\tau}, \qquad d\sigma_1 = \frac{ds}{\tau} = \frac{3k \sin\theta \cos\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2\cos^4\theta}}.$$

On peut intégrer et on trouve

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \arccos(k\cos^2\theta).$$

En introduisant l'angle i de la tangente avec oz,

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} \arccos(k\sin^2 i).$$

Enfin, la normale principale fait avec Oz un angle ψ tel que

$$\cos\psi = \lambda\cos\theta.$$

La binormale fait, d'autre part, avec Oz un angle χ tel que

$$\cos\chi = \lambda u\cos^2\theta = k\cos^4\theta.$$

Si on élimine θ entre ces deux dernières expressions, on trouve

$$k^2(\cos^2\psi + \cos^2\chi)^3 = \cos^2\chi.$$

Quelle que soit la courbe de la famille considérée, quel que soit le point, les angles ψ et χ que font avec Oz *la normale principale et la binormale satisfont à la relation ci-dessus.*

Cas particulier $k = 1$. — On a alors

$$\varphi = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta\sqrt{1 + \cos^2\theta}}.$$

L'intégrale peut être calculée. On trouve

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{L} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos^2\theta}}{\sin\theta}.$$

En se donnant alors arbitrairement une fonction $\theta(s)$, on aurait les coordonnées d'un point de la courbe en intégrant

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\theta\sin\varphi, \qquad \frac{dz}{ds} = \sin\theta.$$

Pour toutes ces courbes, le rayon de courbure est, en tout point, égal au rayon de courbure de la projection sur le plan des xy.

On peut obtenir, sans signe de quadrature, les expressions les plus générales de x, y, z, au moyen d'une fonction arbitraire.

CHAPITRE X

THÉORIE DES DÉVELOPPÉES SURFACES RÉGLÉES. CONGRUENCES. COMPLEXES

I. — THÉORIE DES DÉVELOPPÉES

SOMMAIRE.

Théorie des développées : Deux solutions du problème. — Détermination analytique. — Théorème de Joachimsthal. — Longueur d'un arc : détermination sans signe de quadrature. — Rayons.

Développées obliques : Détermination sans quadrature de la développée la plus générale. — Développée tangentielle. — Importance du rapport $\frac{R}{T}$. — Une courbe donnée ne peut être la géodésique que d'une seule développable.

Surfaces réglées : Variation du plan tangent. — Point central. — Surfaces de raccordement. — Surfaces développables.

Complexes de droites : Complexe linéaire. — Equation réduite. — Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire : Théorème de M. Appell. — Autres propriétés.

On appelle « développée » d'une courbe plane ou gauche C, toute courbe Γ dont les tangentes rencontrent constamment C à angle droit.

Ces droites ρ sont donc constamment situées dans les plans normaux à C. Or, σ_2 nous avons vu que ces plans enveloppent une surface développable, la surface polaire. Toutes les droites sont donc tangentes à la surface polaire.

Si l'on considère toutes les droites normales à C en tous les points, ces droites ρ dépendent de deux paramètres.

Elles forment ce que l'on appelle une « congruence » de droites. Nous en étudierons les propriétés, et nous montrerons que l'on

peut associer les droites d'une congruence en deux familles de surfaces développables, définies chacune par une équation différentielle.

Dans le cas actuel, une des familles est constituée par les droites aboutissant à un même point de la courbe (situées dans le plan normal, surface développable). L'autre famille est constituée par des droites tangentes à des courbes Γ, arêtes de rebroussement de la deuxième famille de développables.

Notions sur le cercle de l'infini : Droites isotropes. — Or, des considérations simples sur le cercle de l'infini et les droites isotropes, permettent de montrer que l'on peut connaître *a priori* deux solutions du problème. Comme l'équation différentielle définissant la deuxième famille est une équation de Riccati, la détermination générale des développées Γ sera donc, comme nous le verrons, ramenée à une simple quadrature.

Avant de traiter le problème analytiquement, établissons le résultat que nous venons d'indiquer.

Cercle de l'infini : Droites isotropes. — Etant donné un point de coordonnées ordinaires x, y, z, (axes rectangulaires) posons

$$x = \frac{X}{T}, \qquad y = \frac{Y}{T}, \qquad z = \frac{Z}{T}$$

X, Y, Z, T désignant quatre variables nouvelles.

Le point ne change donc pas si ces variables sont multipliées par un même facteur quelconque.

On dit que ces variables sont les coordonnées « homogènes » du point.

Si dans l'équation d'une surface $f(x, y, z) = 0$, on fait cette même substitution, elle devient

$$f\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}\right) = 0$$

ou

$$F(X, Y, Z, T) = 0$$

mais cette nouvelle équation est « homogène » en X, Y, Z, T.

Inversement, de toute équation homogène, on pourra déduire une équation ordinaire d'une surface.

En particulier, un plan en coordonnées homogènes sera représenté par une équation linéaire et homogène en X, Y, Z, T, et inversement.

Si T tend vers zéro, le point de coordonnées ordinaires $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$ s'éloigne à l'infini. On peut donc dire que tous les points à l'infini satisfont à l'équation $T = 0$, ce qui, analytiquement, revient à dire qu'ils sont dans un plan $T = 0$. Ce plan est appelé plan de l'infini.

Une sphère quelconque, dont l'équation ordinaire est

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0,$$

a pour équation homogène

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)T + \delta T^2 = 0.$$

Les points à l'infini de cette sphère, satisfaisant à $T = 0$, satisfont donc aussi à

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Ces deux équations représentent l'une une sphère, l'autre un plan et sont indépendantes de la sphère considérée.

On peut donc dire que toutes les sphères de l'espace passent par un cercle fixe, situé dans le plan de l'infini. Ce cercle est appelé cercle de l'infini.

On appelle « droite isotrope » toute droite rencontrant le cercle de l'infini, « plan isotrope » tout plan tangent au cercle de l'infini.

La condition pour que la droite

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

soit isotrope est

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Enfin pour que le plan

$$uX + vY + wZ + pT = 0$$

soit un plan isotrope, il faut que

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Développables isotropes. — Une famille de « plans isotropes » dépendant d'un paramètre a une enveloppe formée de droites isotropes.

Les tangentes à l'arête de rebroussement de cette surface rencontrent donc, toutes, le cercle de l'infini.

Or, les paramètres directeurs de la tangente sont proportionnels à dx, dy, dz. Pour tout point de la courbe on a donc

$$ds^2 = 0, \qquad s = 0.$$

Un arc de courbe quelconque a donc une longueur nulle. Autrement dit, l'arête de rebroussement est une ligne de longueur nulle de la surface.

Droites et plans perpendiculaires. — On vérifie facilement que les conditions pour que une droite

$$\frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

et un plan

$$uX + vY + wZ + \rho = 0$$

soient perpendiculaires, c'est-à-dire

$$\frac{u}{\alpha} = \frac{v}{\beta} = \frac{w}{\gamma},$$

expriment que le plan de l'infini coupe le plan suivant une droite D, et la droite en un point M, pôle de D par rapport au cercle de l'infini, et inversement.

De même si deux droites sont rectangulaires, leurs traces sur le plan de l'infini sont conjuguées par rapport au cercle de l'infini et inversement.

Enfin, si deux plans sont perpendiculaires, leurs traces sont deux droites conjuguées.

D'après ces considérations purement analytiques, il est possible que deux plans soient à la fois perpendiculaires et confondus.

Il suffit que leurs traces sur le plan de l'infini soient conjuguées et confondues. Cette trace commune doit donc

être tangente au cercle de l'infini et par conséquent il faut et il suffit que le plan soit isotrope.

De même, deux droites peuvent être à la fois perpendiculaires l'une sur l'autre et confondues. Il faut et il suffit que cette droite commune soit isotrope.

Enfin, un plan et une droite de ce plan pourront être perpendiculaires. Il faut et il suffit que les traces du plan et de la droite soient conjuguées, et que la trace de la droite soit sur celle du plan. Le plan doit donc être isotrope en un point m et la droite doit être la droite isotrope de trace m.

On en conclut enfin que toute droite isotrope située dans un plan isotrope est perpendiculaire à ce plan et par conséquent, perpendiculaire à toute droite de ce plan. Donc, en tout point d'une courbe quelconque d'une développable isotrope, la normale à la surface se confond avec la caractéristique. Le lieu de ces normales reconstitue donc la surface développable elle-même.

Deux solutions du problème des développées. — Ces quelques considérations suffisent.

Considérons une courbe gauche quelconque C et un plan mobile assujetti à rester tangent à cette courbe et au cercle de l'infini. Ces plans tangents s'obtiendront en prenant la trace t sur le plan de l'infini de la tangente en un point M de la courbe, et menant de cette trace les tangentes $t\mu$, $t\mu'$ au cercle de l'infini. Les deux plans M$t\mu$, M$t\mu'$ seront, pour chaque point M, les deux plans cherchés.

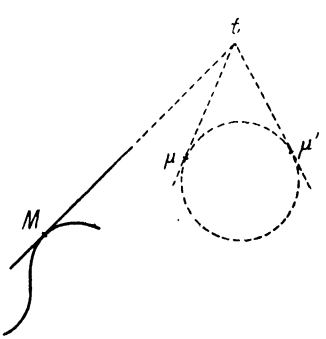


Fig. 24.

Considérons alors la surface développable engendrée par la suite de plans M$t\mu$ (ou la suite de plans M$t\mu'$).

C'est une développable isotrope. La caractéristique est la droite Mμ. Cette droite restera tangente à une courbe Γ arête de

rebroussement. Nous avons vu qu'elle est en même temps normale à la surface en tous ses points. Elle est donc, en particulier, perpendiculaire en M à la tangente M*t* qui est dans ce plan. La courbe Γ est donc bien une développée de C.

De plus, la droite sera également perpendiculaire à l'arête de rebroussement en son point de rencontre : l'arête de rebroussement sera donc une trajectoire orthogonale des génératrices.

Enfin, les normales en un point quelconque d'une courbe *quelconque* de la surface, ne sont pas autre chose que les génératrices. Elles engendrent donc la surface elle-même, surface développable. D'après une définition que nous donnerons, cette courbe quelconque est donc « ligne de courbure » de la développable isotrope. ***Les lignes de courbure d'une surface développable isotrope sont donc indéterminées*** : c'est là une propriété commune avec les sphères et avec les plans.

A la suite de plans Mμ′ correspondra une arête de rebroussement Γ′ qui sera une deuxième développée de la courbe. On a donc bien *a priori* deux solutions du problème : Il suffit de mener par chaque tangente les plans isotropes et de prendre l'arête de rebroussement de l'une ou l'autre des familles de plans.

On peut aussi prendre l'enveloppe des droites isotropes situées dans chaque plan normal.

Détermination analytique. — En tout point de la courbe gauche, nous connaissons le trièdre mobile M (T, N, B) formé par la tangente (a, a', a''), la normale principale (b, b', b''), et la binormale (c, c', c''). Prenons-le comme trièdre mobile O (x, y, z).

La développée est l'enveloppe d'une droite Mμ située dans le plan normal M*yz*. Soient O, y_1, z_1 les coordonnées du point de contact μ par rapport à ces axes mobiles ; y_1 et z_1 sont des fonctions à déterminer de la variable s fixant la position du point sur la courbe.

Les coordonnées de μ par rapport à un système d'axes fixes O(X, Y, Z) seront

(I) $X = x + by_1 + cz_1, \qquad Y = y + b'y_1 + c'z_1, \qquad Z = z + b''y_1 + c''z_1,$

X, Y, Z sont donc aussi fonctions de s.

On aura les équations du problème, en exprimant que la tangente en μ, à la courbe décrite par μ, se confond avec la droite Mμ. Or, les coefficients de direction de cette tangente sont dX, dY, dZ ; ceux de Mμ sont $X - x$, $Y - y$, $Z - z$. On doit donc avoir

$$\frac{dX}{X - x} = \frac{dY}{Y - y} = \frac{dZ}{Z - z}.$$

Le premier rapport est égal à

$$\frac{dx + b\,dy_1 + c\,dz_1 + y_1\,db + z_1\,dc}{by_1 + cz_1}.$$

Remplaçons db, dc par leurs expressions données par les formules de Serret. En désignant par R, τ les rayons de courbure et de torsion de la courbe C, on a

$$db = -\left(\frac{a}{R} + \frac{c}{\tau}\right) ds, \qquad dc = \frac{b}{\tau}\, ds, \qquad dx = a\,ds.$$

La première fraction devient, en divisant par ds,

$$\frac{a\left(1 - \frac{y_1}{R}\right) + b\left(\frac{dy_1}{ds} + \frac{z_1}{\tau}\right) + c\left(\frac{dz_1}{ds} - \frac{y_1}{\tau}\right)}{by_1 + cz_1}.$$

On transformerait de même les deux autres rapports.

En désignant par λ la valeur commune des rapports, et chassant les dénominateurs, on obtient

$$(\mathrm{I}) \qquad a\left(1 - \frac{y_1}{R}\right) + b\left(\frac{dy_1}{ds} + \frac{z_1}{\tau} - \lambda y_1\right) + c\left(\frac{dz_1}{ds} - \frac{y_1}{\tau} - \lambda z_1\right) = 0.$$

Les deux autres équations se déduiraient de celle-ci, simplement par le remplacement de a, b, c par a', b', c' ou a'', b'', c'', *les multiplicateurs restant les mêmes*. On peut donc considérer les trois équations telles que (1) comme trois équations linéaires et homogènes par rapport aux parenthèses. Comme le déterminant des coefficients est différent de zéro, on en conclut que *les trois parenthèses sont séparément nulles*

$$(\mathrm{II}) \qquad 1 - \frac{y_1}{R} = 0, \qquad \frac{dy_1}{ds} + \frac{z_1}{\tau} - \lambda y_1 = 0, \qquad \frac{dz_1}{ds} - \frac{y_1}{\tau} - \lambda z_1 = 0.$$

Ces trois équations donnent y_1, z_1, λ en fonction de s.

δ_1, α

En éliminant λ, on aura

$$(III) \qquad 1 - \frac{y_1}{R} = 0, \qquad z_1 \frac{dy_1}{ds} - y_1 \frac{dz_1}{ds} + \frac{y_1^2 + z_1^2}{\tau} = 0.$$

Ces deux équations déterminent les fonctions inconnues y_1, z_1 de s, R et τ étant des fonctions bien déterminées de s. δ_1 En substituant ces expressions dans les formules (I), on aura en fonction de s, les coordonnées, par rapport aux axes fixes, d'un point μ de la développée.

On a d'ailleurs

$$\lambda = \frac{y_1 \frac{dy_1}{ds} + z_1 \frac{dz_1}{ds}}{y_1^2 + z_1^2}.$$

δ_1

La première des équations (III) donne $y_1 = R$. La seconde s'écrit

$$(4) \qquad y_1 \frac{dz_1}{ds} = \frac{y_1^2}{\tau} + z_1 \frac{dy_1}{ds} + \frac{1}{\tau} z_1^2,$$

ρ

z_1 est donc donné par une équation de Riccati.

Cette équation est vérifiée si l'on pose

$$y_1^2 + z_1^2 = 0.$$

σ_2

On retrouve les deux solutions que nous avons déterminées *a priori*, les deux droites isotropes dans le plan normal.

L'équation (4) s'intègre d'ailleurs aisément. σ_2 Elle s'écrit

$$\frac{y_1 dz_1 - z_1 dy_1}{y_1^2 + z_1^2} = \frac{1}{\tau} ds.$$

En intégrant

$$\text{arc tg} \frac{z_1}{y_1} = \int \frac{ds}{\tau} + \text{const.}$$

Désignons par V(s) une intégrale $V = \int \frac{ds}{\tau}$.

On aura

$$z_1 = y_1 \text{ tg } (V + c).$$

R

En résumé, la solution générale est donnée par

$$y_1 = R, \qquad z_1 = y_1 \text{ tg } (V + c),$$

c désignant une constante arbitraire.

Considérons dans le plan normal le point μ (o, y_1, z_1).

Pour toutes les courbes (obtenues en faisant varier c), la première relation $y_1 = R$ signifie que la projection de μ sur le plan osculateur est le centre C du centre du cercle osculateur : *le point μ est donc sur la « droite polaire ».*

La deuxième équation indique que $\widehat{\mu MC} = V + c$.

Pour avoir toutes les développées, il faut faire varier c :

Toutes les développées sont donc situées sur la surface polaire.

Si l'on connaît une développée c_0, correspondant à des droites $M\mu_0$, il suffira de faire tourner chaque droite $M\mu_0$ d'un angle constant dans chaque plan normal ; le lieu du point μ_1, intersection avec la droite polaire correspondante donnera une nouvelle développée.

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant données deux développées, leurs tangentes, correspondant à un même point M de la courbe, font entre elles un angle constant.*

Applications : I. — Supposons que la courbe donnée soit plane.

On en connaît une développée, lieu des centres C des cercles osculateurs.

Pour avoir une développée quelconque, il suffira de mener, dans chaque plan normal, une droite faisant un angle constant avec la normale principale et de prendre l'intersection μ avec la perpendiculaire en C au plan de la courbe. Or, ces perpendiculaires engendrent le cylindre ayant pour base la développée de la courbe. Sur ce cylindre, l'angle $C\mu M$ est constant, comme l'angle $CM\mu$: La courbe lieu de μ coupe donc les génératrices du cylindre sous un angle constant :

Toutes les développées sont donc des hélices du cylindre ayant pour base la développée ordinaire de la courbe plane.

II. — **Courbes sphériques.** — Une développée se réduit à un point, centre de la sphère. Pour obtenir une développée quel-

conque, il suffira de mener dans chaque plan normal à la courbe, une droite faisant un angle constant avec le rayon.

III. — Dans le cas d'une courbe plane, une développée est formée par le lieu des centres des cercles osculateurs.

Cherchons toutes les courbes qui jouissent de cette propriété. Il faut que l'on ait comme solution $V = 0$. Donc $\int \frac{ds}{\tau}$ doit se réduire à une constante et par suite $\frac{1}{\tau} = 0$. La courbe doit donc être plane.

IV. — Nous avons déjà dit que l'on appelle « ligne de courbure » d'une surface, une ligne tracée sur la surface, telle que les normales à la surface en tous les points d'une de ces courbes forment une surface développable. Nous verrons qu'il existe sur toute surface, deux familles de lignes de courbure. Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

Théorème de Joachimsthal. — *Si une surface admet une ligne de courbure plane, le plan de cette ligne coupe la surface sous un angle constant.*

Réciproquement : *Si un plan coupe une surface sous un angle constant, la ligne d'intersection est ligne de courbure.*

Plus généralement :

Théorème. — *Si la courbe d'intersection* C *de deux surfaces* S, S′ *est à la fois ligne de courbure pour chacune des deux surfaces, ces deux surfaces se coupent sous un angle constant.*

Réciproquement, *si deux surfaces se coupent sous un angle constant, si la courbe d'intersection est ligne de courbure de l'une des surfaces, elle est aussi ligne de courbure pour l'autre.*

En effet, si C est ligne de courbure de S, les normales à S le long de C engendrent une surface développable et par conséquent, restent tangentes à une courbe Γ qui est une développée de C.

Si C est également ligne de courbure de S′, les normales à S′ le long de C sont aussi tangentes à une courbe Γ′ qui est aussi une développée de C. Or, nous savons que les tangentes à deux développées correspondant à un même point de la courbe font entre elles un angle constant.

Ces deux tangentes étant les deux normales aux deux surfaces, celles-ci se coupent bien sous un angle constant.

Réciproquement, les normales à S le long de C restent tangentes à une courbe C' développée de C.

Si ces normales font un angle constant avec les normales à S', ces dernières sont elles-mêmes tangentes à une courbe C'' qui est une deuxième développée de C.

Elles engendrent donc une surface développable et C est bien aussi ligne de courbure de S'.

En particulier, si l'une des deux surfaces est un plan, comme toute courbe d'un plan est ligne de courbure de ce plan (les normales engendrent un cylindre), on en déduit immédiatement le théorème de Joachimsthal.

On peut le généraliser, en remarquant que toute courbe d'une sphère est ligne de courbure de la sphère, puisque les normales en tous les points de cette courbe engendrent un cône, surface développable. Donc :

Si une sphère coupe une surface S *sous un angle constant, la courbe d'intersection est ligne de courbure de* S.

Réciproquement, *si une surface* S *est coupée par une sphère suivant une ligne de courbure de* S, *la sphère coupe la surface sous un angle constant.*

Longueur d'un arc de développée. — Les coordonnées d'un point de la développée sont

$$\text{(I)}\quad X = x + by_1 + cz_1, \qquad Y = y + b'y_1 + c'z_1, \qquad Z = z + b''y_1 + c''z_1.$$

Soient α, α', α'' les cosinus directeurs de la tangente en μ, $d\sigma$ un arc élémentaire de la développée, On aura, en dérivant les formules (I) par rapport à s,

$$\alpha\frac{d\sigma}{ds} = a + b\frac{dy_1}{ds} + c\frac{dz_1}{ds} - y_1\left(\frac{a}{R} + \frac{c}{\tau}\right) + z_1\frac{b}{\tau}$$

$$= a\left(1 - \frac{y_1}{R}\right) + b\left(\frac{dy_1}{ds} + \frac{z_1}{\tau}\right) + c\left(\frac{dz_1}{ds} - \frac{y_1}{\tau}\right).$$

δ_1

Introduisons la valeur commune λ des rapports qui définissent la développée μ, on aura

$$\alpha \frac{d\sigma}{ds} = \lambda(by_1 + cz_1) = \lambda(X - x).$$

De même

$$\alpha' \frac{d\sigma}{ds} = \lambda(Y - y), \qquad \alpha'' \frac{d\sigma}{ds} = \lambda(Z - z).$$

α

Elevant au carré et ajoutant, on obtient

$$\frac{d\sigma}{ds} = \lambda M\mu.$$

δ_1

Mais nous avons trouvé

$$\lambda = \frac{y_1 \frac{dy_1}{ds} + z_1 \frac{dz_1}{ds}}{y_1^2 + z_1^2}, \qquad M\mu = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}.$$

On a donc

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{y_1 \frac{dy_1}{ds} + z_1 \frac{dz_1}{ds}}{\sqrt{y_1^2 + z_1^2}} = \frac{d}{ds}\sqrt{y_1^2 + z_1^2}.$$

Enfin

$$y_1^2 + z_1^2 = y_1^2(1 + \operatorname{tg}^2(V - V_0)) = \frac{R^2}{\cos^2(V - V_0)}.$$

ω

En définitive

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d}{ds} \cdot \frac{R}{\cos(V - V_0)}.$$

ρ

On peut donc intégrer et écrire

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{R}{\cos(V - V_0)}.$$

On peut rassembler tous les résultats obtenus de la façon suivante, en partant d'une fonction supposée donnée $V(s)$:

R

$V(s)$ désignant une fonction quelconque de s *donnée*, prenons le rayon de torsion de la courbe gauche sous la forme

$$\tau = \frac{1}{V'}.$$

On obtiendra *sans signe de quadrature*, une développée quelconque en posant

$$y_1 = R, \qquad z_1 = y_1 \operatorname{tg}(V - V_0).$$

On obtiendra *sans signe de quadrature*, la longueur de l'arc de développée correspondant à la constante V_0, en prenant

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{R}{\cos(V - V_0)}.$$

ω

On a donc ainsi sans quadrature, *l'ensemble le plus général formé d'une courbe et de sa famille de développées, et aussi l'arc de courbe d'une quelconque des développées.*

Soient deux développées correspondant aux valeurs des constantes V_0, V'_0. Les arcs correspondants, comptés à partir d'origines convenables sont

$$\sigma = \frac{R}{\cos(V - V_0)}, \qquad \sigma' = \frac{R}{\cos(V - V'_0)}.$$

α, ν

On éliminera aisément V entre ces deux équations, on obtiendra

$$\frac{1}{\sigma'^2} + \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma\sigma'} \cos(V'_0 - V_0) = \frac{1}{R^2} \sin^2(V'_0 - V_0).$$

Telle est la relation entre deux arcs de développées quelconques correspondant aux mêmes points de C.

Elle ne dépend que de la différence $V_0 - V'_0$.

En particulier, si les constantes V_0, V'_0 satisfont à la condition $V'_0 - V_0 = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

ω

Entre deux arcs de développées se coupant à angle droit, on a la relation (pour des origines convenables)

$$\frac{1}{\sigma'^2} + \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{R^2}.$$

α

Rayons de courbure et de torsion. — D'après les formules (II), on a

$$\alpha \frac{d\sigma}{ds} = \lambda(by_1 + cz_1).$$

Mais

$$\frac{d\sigma}{ds} = \lambda \cdot M\mu.$$

Donc

$$x = b\frac{y_1}{M_1\mu} + c\frac{z_1}{M_1\mu} = b\cos(V - V_0) + c\sin(V - V_0).$$

δ_1

On en déduit alors aisément en appliquant les formules de Serret, le rayon de courbure R_1 de la développée

$$R_1 = \frac{1}{2}\left|\frac{R^2}{\cos^2(V - V_0)}\right|'.$$

δ_1

En dérivant les expressions des α, on a les cosinus directeurs de la normale principale. On trouve (ce qui était évident)

$$-a, \qquad -a', \qquad -a''.$$

d

On en déduit les cosinus directeurs de la binormale $\gamma, \gamma', \gamma''$

$$\gamma = c\cos(V - V_0) - b\sin(V - V_0),$$

δ_1

et enfin en appliquant les formules de Serret, on obtient le rayon de torsion

$$\tau_1 = -\frac{R}{\sin(V - V_0)}\left|\frac{R}{\cos(V - V_0)}\right|'.$$

ρ

On a donc, entre les rayons de courbure et de torsion de la développée, la formule remarquablement simple

$$\frac{R_1}{\tau_1} = -\operatorname{tg}(V - V_0).$$

Si nous prenons une deuxième développée correspondant à la constante V'_0, nous aurons

$$\frac{R'}{\tau_1'} = -\operatorname{tg}(V - V_0').$$

Entre ces deux relations, on peut aisément éliminer V, c'est-à-dire s. On trouve

$$\operatorname{tg}(V_0 - V_0') = \frac{\dfrac{R_1}{\tau_1} - \dfrac{R_1'}{\tau_1'}}{1 + \dfrac{R_1}{\tau_1}\cdot\dfrac{R_1'}{\tau_1'}} = \text{const.}$$

Telle est la relation qui existe entre deux rapports $\frac{R}{\tau}$, correspondant à un même point, pour deux développées quelconques. Elle ne dépend que de la différence $V_0 - V_0'$.

En particulier, pour deux développées quelconques se coupant à angle droit,

$$1 + \frac{R_1}{\tau_1}\cdot\frac{R_1'}{\tau_1'} = 0.$$

II. — DÉVELOPPÉES OBLIQUES

Plus généralement, étant donnée une courbe C, nous appellerons « développée oblique de C » toute courbe Γ dont les tangentes rencontrent constamment C (sous un angle quelconque, qui peut être variable).

On voit que C est tout simplement une courbe quelconque de la développable formée par les tangentes à Γ.

Nous serons amenés à étudier les relations entre les éléments de C et ceux de Γ, c'est-à-dire à *étudier les propriétés des courbes tracées sur une surface développable.*

La développée normale (ordinaire) serait une trajectoire orthogonale des génératrices.

Nous voulons partir de C et étudier les courbes Γ.

En d'autres termes, nous voulons *étudier les arêtes de rebroussement des développables passant par une courbe donnée* C.

Nous désignerons par x, y, z les coordonnées d'un point de C, par a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' les cosinus directeurs des arêtes du trièdre fondamental. Si λ, μ, ν sont les coordonnées du point correspondant μ de Γ, par rapport au trièdre, les coordonnées de μ par rapport aux axes fixes sont (nous n'écrivons que la première)

$$X = x + a\lambda + b\mu + c\nu.$$

Dérivons et tenons compte des formules de Serret, nous aurons

$$\frac{dX}{ds} = a\left(1 + \lambda' - \frac{\mu}{R}\right) + b\left(\mu' + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{\tau}\right) + c\left(\nu' - \frac{\mu}{\tau}\right).$$

Les parenthèses seront les mêmes pour $\frac{dY}{ds}$, $\frac{dZ}{ds}$.

On a donc pour déterminer λ, μ, ν les équations

$$\frac{1 + \lambda' - \frac{\mu}{R}}{\lambda} = \frac{\mu' + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{\tau}}{\mu} = \frac{\nu' - \frac{\mu}{\tau}}{\nu}.$$

Détermination sans quadrature de la développée la plus générale. — Nous allons résoudre complètement *et sans quadrature* ce

système d'équations, c'est-à-dire déterminer, au moyen d'une fonction arbitraire, les expressions les plus générales de λ, μ, ν c'est-à-dire de X, Y, Z. Ces équations s'écrivent :

$$(1')\qquad \begin{cases} \nu\lambda' - \lambda\nu' + \nu + \mu\left(\dfrac{\lambda}{\tau} - \dfrac{\nu}{R}\right) = 0 \\ \nu\mu' - \mu\nu' + \dfrac{1}{\tau}(\mu^2 + \nu^2) + \dfrac{\lambda\nu}{R} = 0. \end{cases}$$

Posons

$$\lambda = l\nu, \qquad \mu = m\nu$$

l, m remplaçant λ, μ. Les équations deviennent

$$(1')\qquad \nu\lambda' + 1 + m\nu\left(\frac{l}{\tau} - \frac{1}{R}\right) = 0$$

$$(2')\qquad m' + \frac{1 + m^2}{\tau} + \frac{l}{R} = 0.$$

δ_4

D'après (2'), on peut poser

$$(2'')\qquad l = -\frac{R}{\tau}[1 + m^2 + \tau m'].$$

d

L'équation (1') donne alors ν *sans intégration.*

$$(1')\qquad \nu\left|l' + m\frac{l}{\tau} - \frac{m}{R}\right| + 1 = 0$$

ω

En résumé, donnons-nous une fonction *arbitraire* $m(s)$. On peut alors calculer successivement

$$(II)\qquad l = -\frac{R}{\tau}[1 + m^2 + \tau m'], \qquad A = l' + m\frac{l}{\tau} - \frac{m}{R}.$$

On aura ensuite

$$\lambda = -\frac{l}{A}, \qquad \mu = -\frac{m}{A}, \qquad \nu = -\frac{1}{A}.$$

On a bien λ, μ, ν, sans quadrature au moyen d'une fonction $m(s)$.

δ_1

Les coordonnées d'un point de toute courbe dont les tangentes rencontrent C peuvent être représentées par

$$X = x + a\lambda + b\mu + c\nu = x + \frac{1}{A}(al + bm + c)$$

l et A ayant les valeurs (II).

On a donc bien sans quadrature, en partant de C, la solution la plus générale des développées obliques des courbes C, c'est-à-dire des arêtes de rebroussement des développables passant par C.

On peut astreindre ces développées à des conditions particulières.

1° Pour les développées normales ordinaires, il suffit que les droites $M\mu$ dont on cherche l'enveloppe soient constamment dans le plan normal.

Il faut donc déterminer m de manière que l'on ait constamment $l = 0$, c'est-à-dire

$$1 + m^2 + \tau m' = 0.$$

On a alors

$$A = -\frac{m}{R}, \quad \text{puis} \quad \lambda = 0, \qquad \mu = R, \qquad \nu = \frac{R}{m}.$$

Si nous prenons le rayon de torsion de C sous la forme $\tau = \frac{1}{V'}$, V désignant une fonction quelconque *donnée* de s, on aura

$$-\frac{m'}{1+m^2} = V'.$$

En intégrant,

$$m = \operatorname{ctg}(V - V_0)$$

par suite

$$\mu = R, \qquad \nu = R \operatorname{tg}(V - V_0).$$

On retrouve les résultats obtenus précédemment.

Développée tangentielle. - 2° On peut aussi astreindre les droites $M\mu$ à être dans un des deux autres plans du trièdre fondamental M(T, N, B).

Pour qu'elle fut dans le plan osculateur MTN, il faudrait que l'on eut constamment $\nu = 0$, ce qui est impossible.

Voyons si les tangentes peuvent être constamment dans le plan MTB.

Pour ces courbes, le plan tangent à la surface développable qui est le plan MTB sera constamment perpendiculaire au plan osculateur de C. En d'autres termes, C *est une courbe*

de la développable, telle que son plan osculateur soit constamment normal à la surface. Nous verrons que C est une ligne « géodésique » de la surface développable.

Il faut que l'on ait constamment $\mu = 0$ d'où $m = 0$.

On a alors

$$l = -\frac{R}{\tau}, \qquad \lambda = l'$$

d'où

$$\lambda = -\frac{l}{l'}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = -\frac{1}{l'}.$$

Pour obtenir une telle développée, il faut donc porter sur la tangente et la binormale des segments

$$\lambda = -\frac{l}{l'}, \qquad \nu = -\frac{1}{l'}, \quad \text{avec} \quad l = -\frac{R}{\tau}.$$

La développée dans le plan BOT est donc *unique*.

Nous l'appellerons « développée tangentielle » de C.

REMARQUE. — Les segments ne dépendent que de l, c'est-à-dire du rapport $\frac{R}{\tau}$.

Si donc l'on considère toutes les courbes pour lesquelles ce rapport est une même fonction de s, $\frac{R}{\tau} = -l(s)$, on obtiendra toutes les développées de toutes les courbes correspondantes en portant sur la tangente et la binormale les mêmes segments.

Considérons alors dans un plan une courbe dont les équations paramétriques seraient

$$x = -\frac{l}{l'}, \qquad y = -\frac{1}{l'}.$$

Dans chaque plan MTB, de chacune des courbes, choisissons le point μ correspondant à la valeur de s relative au point M ; le lieu de ce point μ sera une courbe dont les tangentes passent constamment par M.

A toute courbe gauche C, ou plutôt à toute une famille de courbes gauches (celles pour lesquelles $\frac{R}{\tau}$ est une fonction donnée de s), nous faisons donc correspondre une courbe plane qui pourra définir les développées tangentielles, c'est-à-dire l'arête de la développable dont C est la géodésique.

Par exemple, à toutes les courbes pour lesquelles

$$\frac{R}{\tau} = \frac{1 - e^{2s}}{2e^s}$$

correspond le cercle

$$X = \frac{2e^s}{e^{2s} + 1}, \qquad Y = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}.$$

Dans chaque plan MTB de l'une des courbes, prenons le point X, Y ; le lieu de ce point sera la développée tangentielle de C.

Une courbe donnée ne peut être géodésique que d'une seule développable. — La « développée tangentielle » d'une courbe C étant unique, on peut dire que :

Théorème. — *Etant donnée une courbe* C *quelconque, il existe une développable et une seule dont elle soit la géodésique.*

Propriétés diverses : arc de développée tangentielle. — Les coordonnées d'un point μ sont

$$X = x - \frac{1}{l}(al + c).$$

En dérivant par rapport à s, α, α', α'' désignant les cosinus directeurs de la tangente en μ, et σ un arc de développée, on a

$$\frac{d\sigma}{ds} = a + \frac{l'''}{l^2}(al + c) - \frac{1}{l}\left(b\frac{l}{R} + \frac{b}{\tau}\right) - a.$$

Or, d'après l'expression de l,

$$\frac{l}{R} + \frac{1}{\tau} = 0.$$

Il reste donc simplement

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{l'''}{l^2}(al + c).$$

En élevant au carré les expressions analogues et ajoutant, on obtient

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{l'''}{l^2}\sqrt{l^2 + 1}.$$

Le rapport $\frac{d\sigma}{ds}$ ne dépend donc également que de l, c'est-à-dire du rapport $\frac{R}{\tau}$.

En deux points correspondants des deux développées tangentielles de deux courbes admettant même rapport $\frac{R}{\tau}$ *les rapports des arcs élémentaires et par suite, les arcs correspondant* σ *sont égaux (puisqu'on suppose que les arcs* s *sont les mêmes sur les deux courbes).*

Par exemple, si

$$\frac{R}{\tau} = \frac{1 - e^{2s}}{e^s} = -l(s),$$

on trouve

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}.$$

D'où, en intégrant

$$e^s + e^{-s} = ke^{\sigma} \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \log \operatorname{ch} s,$$

Telle est (à une origine près) la formule donnant l'arc σ de développée tangentielle en fonction de l'arc s pour toutes les courbes correspondant à l'expression ci-dessus de $\frac{R}{\tau}$.

Il est possible de donner sans signe de quadrature, les familles de courbes admettant même rapport $\frac{R}{\tau}$ *(rapport exprimé au moyen d'une fonction arbitraire* $w'(s)$ *et l'arc de courbe de développée tangentielle correspondant).*

On a en effet

$$\sigma = \int \frac{l''}{l'^2} \sqrt{l^2 + 1}\, ds.$$

En intégrant par parties,

$$\sigma = -\frac{1}{l'} \sqrt{l^2 + 1} + \int \frac{l}{\sqrt{l^2 + 1}}\, ds.$$

Posons

$$\frac{l}{\sqrt{l^2 + 1}} = w'(s), \qquad l = \frac{w'}{\sqrt{1 - w'^2}}$$

w désignant une fonction arbitraire. On aura

$$\sigma = -\frac{1}{l'} \sqrt{l^2 + 1} + w(s).$$

Dans cette expression, il faudrait remplacer l et l' en fonction de w.

On a donc bien sans signe de quadrature, la famille la plus générale de courbes, pour lesquelles

$$\frac{R}{\tau} = -\frac{w'}{\sqrt{1-w'^2}}$$

et l'arc de l'arête de rebroussement de la développable dont chaque courbe est la géodésique.

Le procédé que nous avons appliqué s'étend, comme on le voit, à toute intégrale de la forme $\int \frac{\varphi''}{\varphi'^2} F(\varphi)ds$, φ désignant une fonction qui peut être arbitraire, F une fonction quelconque donnée, sans diminuer la généralité de φ. En intégrant par parties, on obtient

$$-\frac{1}{\varphi'} F(\varphi) + \int F'(\varphi)ds.$$

Il suffira donc de prendre φ sous la forme

$$F'(\varphi) = \theta'(s),$$

θ étant arbitraire.

En particulier, prenons $w(s) = \cos s$. D'où $\frac{R}{\tau} = \operatorname{tg} s$.

Nous considérons donc toutes les courbes telles que $\frac{R}{\tau} = \operatorname{tg} s$.

Chacune d'elles est la géodésique d'une seule développable. La longueur de l'arc de courbe de l'arête de rebroussement correspondante a pour expression

$$\sigma = 2\cos s + \text{const.}$$

Dans le cas général, on trouverait que *le rayon de courbure* R_1, *de la développée tangentielle, et que le rapport* $\frac{\tau_1}{\tau}$ *des rayons de torsion de la développée et de la courbe ne dépendent également que de l, c'est-à-dire du rapport* $\frac{R}{\tau}$.

Résumé. — *En résumé, nous avons trouvé que, si* C *est une géodésique de la développable d'arête* Γ, *si l'on se donne pour cette courbe* C, *simplement la relation* $\frac{R}{\tau} = -l'(s)$, *le segment* Mμ *les arcs* σ, *le rayon de courbure* R_1, *et le rapport* $\frac{\tau_1}{\tau}$ *seront pour les diverses arêtes, des fonctions ne dépendant que de* $l(s)$.

Par conséquent pour toutes ces courbes, tous ces éléments ont la même valeur, aux points correspondant à une même valeur de s.

En particulier, on a

$$\sigma = f_1(l), \qquad \frac{d\tau}{ds} = f_2(l), \qquad R_1 = \varphi_1(l).$$

On peut donc aussi exprimer tous ces éléments au moyen de l ainsi que σ, et par conséquent exprimer tous ces éléments au moyen de σ, en particulier R_1.

Mais inversement donnons-nous une relation $\sigma = \Phi(R_1)$.

En la dérivant, on aura

$$f_2(l) = \frac{\partial \Phi}{\partial R_1} \cdot \frac{dR_1}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial R_1} \times \frac{\partial R_1}{dl} \times \frac{dl}{ds}.$$

Ce sera une équation différentielle qui déterminera $l(s)$.

Par suite $M\mu$, s, $\frac{R}{\tau}$, $\frac{\tau}{\tau_1}$ seront donc aussi déterminées.

On a donc le résultat suivant :

Pour toutes les surfaces développables admettant pour arête de rebroussement une courbe Γ définie seulement par une relation entre le rayon de courbure R_1, et l'arc σ, $\sigma = \Phi(R_1)$, les géodésiques de ces surfaces s'obtiendront en portant sur chaque génératrice une même longueur, fonction de σ. Pour chacune d'elles, l'arc s, le rapport $\frac{R}{\tau}$, le rapport $\frac{\tau}{\tau_1}$, seront des fonctions bien déterminées.

Ces résultats sont indépendants de la torsion $\tau_1(s)$ de l'arête.

Tous les résultats que nous avons obtenus, montrent l'extrême importance, pour une courbe gauche, du rapport $\frac{R}{\tau}$.

III. — SURFACES RÉGLÉES

On appelle « surface réglée » la surface engendrée par le déplacement d'une droite. Si les équations de cette droite sont mises sous la forme

$$X = aZ + p, \qquad Y = bZ + q,$$

il faut supposer que a, b, p, q dépendent d'un seul paramètre t.

L'équation de la surface pourrait s'obtenir en éliminant t entre les deux équations. Il est préférable de considérer X, Y comme fonctions des deux paramètres Z et t.

Plan tangent. — Donnons-nous une génératrice t_0 et soit M (x, y, z) un point de cette génératrice. Nous allons établir l'équation du plan tangent en ce point. Il suffit d'en avoir la direction.

Si l'on considère un déplacement infiniment petit quelconque dx, dy, dz sur la surface, nous savons que ce déplacement est parallèle au plan tangent. Pour avoir la direction de celui-ci, il suffit donc d'établir une relation linéaire et homogène entre dx, dy, dz.

Les coordonnées de M satisfont aux conditions

$$(1') \qquad x = a_0 z + p_0, \qquad y = b_0 z + q_0.$$

Lorsque la génératrice varie à partir de t_0, et que le point se déplace sur la surface à partir de M, on a constamment, quels que soient t et z

$$(1') \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q.$$

En différentiant ces deux relations à partir de t_0, on a donc aussi

$$dx = a_0 dz + (a_0' z + p_0')dt, \qquad dy = b_0 dz + (b_0' z + q_0')dt.$$

Pour avoir la relation linéaire et homogène entre dx, dy, dz, il suffit d'éliminer dt entre ces deux relations.

On obtient ainsi

$$\frac{dx - a_0 dz}{a_0' z + p_0'} = \frac{dy - b_0 dz}{b_0' z + b_0'}.$$

L'équation du plan tangent, s'obtiendra en remplaçant dx, dy, dz par X $-$ x, Y $-$ y, Z $-$ z.

On obtient donc

$$(2) \qquad \frac{X - x - a_0(Z - z)}{a_0' z + p_0'} = \frac{Y - y - b_0(Z - z)}{b_0' z + q_0'},$$

ou en tenant compte de (1')

$$\frac{X - a_0 Z - p_0}{a_0' z + p_0'} = \frac{Y - b_0 Z - q_0}{b_0 z + q_0'}.$$

Sous cette forme, on constate que le plan tangent passe par la génératrice t_0, ainsi qu'il devait être.

Variation du plan tangent. — Quant le point M est pris sur une génératrice fixe t_0, ρ on remarque que cette équation ne dépend que du rapport $\frac{a_0' z + p_0'}{b_0' z + q_0'}$.

Si le point varie sur cette génératrice, ce rapport ne pourrait être indépendant de z, et par suite le *plan tangent être le même* β *tout le long de la génératrice*, que si l'on avait la relation

$$\frac{a_0'}{b_0'} = \frac{p_0'}{q_0'} \quad \text{ou} \quad a_0' q_0' - b_0' p_0' = 0. \tag{3}$$

Si cette condition est satisfaite pour les fonctions a, b, p, q quelle que soit la valeur de t, c'est-à-dire si le plan tangent à la surface réglée est le même tout le long de la surface réglée, quelle que soit la génératrice, on dit que la surface est « développable ».

ω

Pour qu'une surface soit développable, il faut et il suffit que les fonctions a, b, p, q satisfassent à la condition

$$a'q' - b'p' = 0. \tag{3'}$$

ρ

En particulier, cette condition est satisfaite :

1° Si $a' = 0$, $b' = 0$, c'est-à-dire $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$, c'est-à-dire si la génératrice reste parallèle à une direction fixe. La surface est un cylindre ;

2° Si $p' = 0$, $q' = 0$, d'où $p = p_0$, $q = q_0$, c'est-à-dire si la génératrice passe par un point fixe $x = p_0$, $y = q_0$, $z = 0$: la surface est un cône.

Nous étudierons ultérieurement les propriétés des surfaces développables. En dehors de ce cas, pour étudier la variation du plan α, φ tangent, il suffit d'étudier la variation du rapport homographique $\frac{a_0' z + p_0'}{b_0' z + q_0'}$ quand z varie.

Si, le point s'éloigne indéfiniment, ce rapport tend vers $\frac{a_0'}{b_0'}$.

Le plan tangent correspondant

$$\frac{X - a_0 Z - p_0}{Y - b_0 Z - q_0} = \frac{a_0'}{b_0'},$$

est parallèle au plan

$$\frac{X - aZ}{Y - bZ} = \frac{a_0'}{b_0'}.$$

Or ce plan est indépendant des fonctions p, q. Donc :

THÉORÈME. — *Si deux surfaces réglées ont les génératrices parallèles deux à deux, les plans tangents à l'infini, pour deux génératrices parallèles, sont parallèles.*

Par l'origine, menons des parallèles aux génératrices de la surface. On obtient le « cône directeur » de la surface.

Le plan tangent à l'infini sera parallèle au plan tangent au cône directeur, le long de la génératrice parallèle.

Nous pouvons, pour simplifier l'étude de la variation du plan tangent, supposer que nous avons pris la génératrice pour axe des z ; Cela revient à supposer que, pour la génératrice correspondante, a_0, b_0, p_0, q_0, sont nuls.

L'équation du plan se réduit à

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_0' z + q_0'}{a_0' z + p_0'}.$$

Sa trace sur le plan des xy fait avec ox un angle ψ tel que

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b_0' z + q_0'}{a_0' z + p_0'}. \tag{4}$$

Il y a donc relation homographique entre $\operatorname{tg}\psi$ et la cote z.

Or, on sait que le rapport anharmonique de quatre plans passant par une même droite est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs de $\operatorname{tg}\psi$, ψ étant l'angle d'un des plans avec un plan fixe passant par la droite. On en déduit donc :

Rapport anharmonique de quatre plans tangents.

THÉORÈME : *Le rapport anharmonique de quatre plans tangents est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact.*

Ce résultat peut s'obtenir géométriquement d'une manière très simple : Considérons une génératrice G_0, quatre points sur cette génératrice A_0, B_0, C_0, D_0 et une génératrice voisine G. Quatre courbes quelconques tracées sur la surface, passant par A_0, B_0, C_0, D_0. rencontrent G en A, B, C, D. Les quatre plans tangents sont les limites des plans passant par G_0 et respectivement par les droites A_0A, B_0B, C_0C, D_0D. Dans une position quelconque, le rapport anharmonique des quatre plans (qui passent par la même droite G) est égal au rapport anharmonique des points de rencontre de ces plans avec une sécante quelconque, par exemple avec la sécante G, soient les points A, B, C. D.

Lorsque G se rapproche indéfiniment de G_0, les points A, B, C, D se rapprochent de A_0, B_0, C_0, D_0 simultanément. On voit qu'à la limite, le rapport anharmonique des quatre plans tangents est bien égal au rapport anharmonique des quatre points de contact.

Pour construire le plan tangent en un point D, connaissant les plans tangents en trois points A, B, C, il suffit de mener par G un plan faisant avec les trois plans tangents un rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des quatre points Inversement si on donne quatre plans tangents et trois des points A_0, B_0, C_0, on peut construire le quatrième point de contact.

En particulier, *si deux surfaces ont une génératrice commune et si elles sont tangentes en trois points différents, elles sont tangentes en tout point de la génératrice.*

On dit qu'elles « se raccordent » tout le long de la génératrice.

Enfin, si deux surfaces réglées quelconques ont une génératrice commune, elles sont tangentes en deux points de cette génératrice (points doubles de deux divisions homographiques sur une même droite).

Nous avons pris la génératrice commune comme axe des *z*.

α_2

Nous allons simplifier encore en faisant tourner les axes ox, oy d'un angle convenable.

Faire tourner les axes d'un angle ψ_0, revient à changer ψ en $(\psi - \psi_0)$. δ_1 On aura

$$\operatorname{tg}(\psi - \psi_0) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\psi_0}{1 + \operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\psi_0} = \frac{b_0'z + q_0' - \operatorname{tg}\psi_0(a_0'z + p_0')}{a_0'z + p_0' + \operatorname{tg}\psi_0(b_0'z + q_0)}.$$

α, ν

Choisissons ψ_0 de telle manière que le coefficient de z au dénominateur soit nul

$$a_0' + b_0' \operatorname{tg}\psi_0 = 0, \qquad \operatorname{tg}\psi_0 = -\frac{a_0'}{b_0'}.$$

o

La relation prendra alors la forme

$$(5) \qquad \operatorname{tg}(\psi - \psi_0) = k(z - z_0), \qquad k = \frac{b_0' - a_0' \operatorname{tg}\psi_0}{p_0' + q_0' \operatorname{tg}\psi_0},$$

z_0 sera déterminé par

$$b_0'z + q_0' + \frac{a_0'}{b_0'}(a_0'z + p_0') = 0.$$

Si l'on donne à ψ la valeur ψ_0, on obtient un certain plan passant par la génératrice (le nouveau plan des zx).

Pour cette valeur, on a $z = z_0$. Ce plan s'appelle le « plan central ».

Le point z_0 de contact correspondant est le « point central ».

d, ω

Plan central. — De la relation (5). on déduit donc le théorème suivant :

Théorème. — *Sur toute génératrice, il existe un plan central tangent à la surface en un point central, qui jouit de la propriété suivante : La tangente de l'angle que fait tout autre plan avec le plan central est proportionnelle au segment qui joint le point central au point de contact de ce plan.*

Le facteur de proportionnalité k s'appelle « paramètre de distribution ».

En particulier, pour deux plans tangents rectangulaires, on a la relation

$$k^2 \overline{CM} \cdot \overline{CM'} = -1.$$

d, τ_2

Les points de contact M, M' de deux plans tangents rectangulaires décrivent sur G une involution de centre C.

Si z varie de $-\infty$ à z_0 et de z_0 à $+\infty$, $\operatorname{tg}(\psi - \psi_0)$ varie de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$. Le plan tangent tourne donc autour de la génératrice, sans repasser deux fois par la même position, faisant une révolution complète de 180°.

De plus, on voit que le plan central est perpendiculaire au plan à l'infini. On peut donc dire que le point central est le point de contact du plan tangent perpendiculaire au plan de l'infini.

On peut enfin donner une troisième définition du point central. Nous allons démontrer la propriété suivante :

THÉORÈME. — *Si l'on prend une génératrice fixe* G_0, *et une génératrice infiniment voisine* G, *et si l'on mène leur perpendiculaire commune, le pied* C_0 *de cette perpendiculaire commune sur* G_0 *tend vers une position limite quand* G *se rapproche infiniment de* G_0. *Cette position limite est le point central.*

Pour simplifier, nous pouvons supposer que G_0 est prise comme axe des z. Soient alors

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

les équations de G. La perpendiculaire commune à oz et G se projette sur le plan des xy suivant la perpendiculaire à la projection de G passant par O. Son équation est donc

$$ax + by = 0.$$

Cette perpendiculaire rencontre G en un point de cote z définie par

$$\frac{bz + q}{az + p} = -\frac{a}{b}.$$

C'est aussi la cote de C_0. Il faut chercher ce que devient cette équation lorsque G se rapproche indéfiniment de G_0, c'est-à-dire lorsque a, b, p, q tendent simultanément vers zéro, correspondant à G_0. A la limite on obtient donc l'équation

$$\frac{b_0' z + q_0'}{a_0' z + p_0'} = -\frac{a_0'}{b_0'}.$$

On retrouve l'équation qui définit le « point central ».

Le lieu ξ des divers points centraux sur les diverses génératrices décrit sur la surface une courbe appelée « ligne de striction ».

Il faut bien remarquer que cette ligne n'est pas une trajectoire orthogonale des génératrices.

Surfaces de raccordement. — Si nous considérons deux surfaces réglées ayant une génératrice commune, nous avons déjà vu qu'elles sont tangentes en deux points de cette génératrice. On peut retrouver ce résultat en s'appuyant sur la formule (4).

En effet, en prenant la génératrice commune pour *oz*, pour la première surface, l'angle du plan tangent avec le plan *xoz* est défini par une équation de la forme

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b_0' z + q_0'}{a_0' z + p_0'}.$$

ξ_1 Pour la seconde surface, cet angle est défini par

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{B_0' z + Q_0'}{A_0' z + P_0'}.$$

β Si l'on veut que les deux plans soient les mêmes, il faut égaler ces deux valeurs. On obtient bien une équation du second degré en *z*.

Si les deux surfaces sont tangentes en plus de deux points, cette équation du second degré doit disparaître. Les deux surfaces sont alors tangentes en tout point de la génératrice.

Etant donnée une surface réglée, on peut se proposer de *déterminer la surface la plus simple qui se raccorde avec elle tout le long d'une génératrice commune.* σ_2 Si la surface est développable, cette surface la plus simple est le plan tangent. Dans le cas général, ψ, σ_1 nous pouvons chercher à déterminer une surface du second degré.

β Il faut et il suffit que les deux surfaces soient tangentes en trois points.

Prenons trois points A_1, A_2, A_3 et en ces points menons les trois tangentes à trois courbes quelconques Γ_1, Γ_2, Γ_3, situées sur la surface et passant respectivement par A_1, A_2, A_3.

ξ Si nous considérons la surface du second degré déterminée

par ces trois tangentes, elle contiendra en particulier la génératrice, et satisfera à la question.

La réciproque est évidente.

Il y a donc une infinité de solutions. En général, ces surfaces sont des hyperboloïdes, mais si les trois tangentes sont parallèles à un même plan, si l'on considère, par exemple, les sections de la surface par trois plans parallèles et les tangentes à ces sections, la surface de raccordement sera un paraboloïde.

Plus particulièrement encore, prenons des sections perpendiculaires à G. Le paraboloïde sera équilatère.

En un point quelconque M de la génératrice, la normale à la surface, perpendiculaire à G et à la génératrice du deuxième système Δ, qui passe par M, se déduira de Δ par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de G.

Toutes ces normales sont donc aussi les génératrices d'un paraboloïde qui se déduit du paraboloïde de raccordement par rotation de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

THÉORÈME. — *Les normales en tous les points d'une génératrice d'une surface réglée quelconque, engendrent un paraboloïde appelé « paraboloïde des normales ».*

En faisant tourner ce paraboloïde de $\frac{\pi}{2}$ autour de la génératrice, on obtiendra le paraboloïde de raccordement le long de G,

Surfaces développables. — On appelle « surface développable ». la surface enveloppe de plans dont l'équation dépend d'un seul paramètre.

Nous avons vu que la caractéristique était tangente à une courbe gauche et par conséquent, que la surface pouvait être considérée comme engendrée par les tangentes à une courbe gauche.

Inversement toute courbe gauche peut être considérée comme l'arête de rebroussement de ses plans osculateurs.

Pour étudier une surface développable, on peut donc, soit se donner la famille de plans, soit se donner la courbe gauche, soit enfin se donner les génératrices.

Mais nous devons dans ce dernier cas, chercher les conditions à imposer aux coefficients de ces droites pour qu'elles engendrent une surface développable.

Soit donc une droite

$$aX + bY + cZ + d = 0, \qquad a_1X + b_1Y + c_1Z + d = 0,$$

dont les coefficients soient fonctions d'un même paramètre t. Pour que cette droite engendre une surface développable, il faut qu'il existe sur elle un point x, y, z dont le déplacement élémentaire dx, dy, dz soit dirigé suivant la droite elle-même.

On aura donc d'abord

$$(I) \qquad ax + by + cz + d = 0, \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

De plus, pour exprimer la deuxième condition, il suffit d'écrire que le déplacement du point est parallèle à chacun des plans. On a donc aussi les conditions

$$(II) \qquad adx + bdy + cdz = 0, \qquad a_1dx + b_1dy + c_1dz = 0.$$

Or, en dérivant les deux conditions (I) et tenant compte de (II) on obtient

$$(III) \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0, \qquad a_1'x + b_1'y + c_1'z + d_1' = 0.$$

Inversement les équations (III) entraînent les équations (II).

Mais pour que les équations (I) et (III) soient compatibles, il faut que le déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a' & b' & c' & d' \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \end{vmatrix} = 0,$$

soit nul.

Inversement, si cette condition (4) est identiquement satisfaite, les équations (I), (III), sont compatibles.

Elles déterminent des fonctions x, y, z de t, et le point x, y z ainsi déterminé aura, lorsque la droite se déplacera, un déplacement dirigé suivant cette droite elle-même. La droite restera donc tangente à la courbe C lieu du point x, y, z.

La condition (4) exprime aussi que chaque droite rencontre la droite infiniment voisine.

Dans le cas où les équations de la droite sont données sous la forme

$$X = aZ + p, \qquad Y = bZ + q.$$

On devra avoir

$$\begin{aligned} x &= az + p, & y &= bz + q, \\ dx &= a\,dz, & dy &= b\,dz, \end{aligned}$$

et par suite en différentiant les premières et tenant compte des secondes,

$$o = a'z + p', \qquad o = b'z + q'.$$

En éliminant z, on obtient

$$b'p' - a'q' = 0,$$

condition qui est satisfaite, comme nous l'avons vu, pour les cônes et les cylindres.

Remarque. — Si l'on prend la plus courte distance de deux génératrices

$$G \begin{cases} X = aZ + p, \\ Y = bZ + q, \end{cases} \qquad G_1 \begin{cases} X = a_1Z + p_1 \\ Y = b_1Z + q_1, \end{cases}$$

on trouve

$$\delta = \frac{(a_1 - a)(q_1 - q) - (b_1 - b)(p_1 - p)}{\sqrt{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}}.$$

Dans le cas où les droites sont infiniment voisines, a_1, b_1, p_1, q_1, correspondant à $t + \Delta t$, on aura

$$\delta = \frac{(a' + a''\Delta t + \cdots)(q' + q''\Delta t + \cdots) - (b' + b''\Delta t + \cdots)(p' + p''\Delta t + \cdots)}{\sqrt{(a' + a''\Delta t + \cdots)^2 + \cdots}}\,\Delta t.$$

On voit que, en général, δ est un infiniment petit du premier ordre par rapport à Δt, la partie principale étant

$$\frac{a'q' - b'p'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}}\,\Delta t.$$

Si la droite engendre une surface développable, on a

$$a'q' - b'p' = 0.$$

De plus, le coefficient de Δt^2 au numérateur est

$$a'q'' + a''q' - (b'p'' + b''p').$$

Il est nul comme on le voit en dérivant la relation précédente.

Si la surface est développable, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est donc un infiniment petit, non du deuxième ordre, mais du troisième ordre par rapport à Δt.

Ce résultat est dû à Bouquet.

IV. — CONGRUENCES DE DROITES

Les équations d'une droite peuvent se mettre sous la forme

$$X = aZ + p, \qquad Y = bZ + q.$$

Si a, b, p, q sont variables et dépendent d'un seul paramètre t, la droite engendre une surface réglée. Cette surface sera développable si les fonctions satisfont à la condition

$$(1) \qquad da\,dq = db\,dp.$$

Supposons maintenant que a, b, p, q dépendent de deux paramètres u, v. On dit que l'ensemble des droites forme une « congruence ». Pour simplifier, on pourrait supposer $a = u$ $b = v$.

On obtient une surface réglée dépendant de la congruence en établissant une relation entre u et v. Il existe donc une infinité de surfaces passant par une génératrice particulière u_0, v_0. Il suffit que la relation donnée entre u et v soit satisfaite pour u_0, v_0.

On peut se proposer de chercher si parmi ces surfaces, il existe des surfaces développables.

Les variables u, v, doivent être liées de telle sorte que l'on ait la relation (1)

$$da\,dq - db\,dp = 0.$$

En explicitant les différentielles,

$$(2) \quad \left(\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial q}{\partial u}du + \frac{\partial q}{\partial v}dv\right) - \frac{\partial b}{\partial u}du + \left(\frac{\partial b}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial p}{\partial u}du + \frac{\partial p}{\partial v}dv\right) = 0$$

C'est une relation de la forme

$$P\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + Q\frac{dv}{du} + R = 0 \tag{2}$$

P, Q, R désignant des fonctions déterminées de u, v.

C'est là une équation différentielle entre u et v.

Mais en résolvant l'équation du second degré en $\frac{dv}{du}$, elle se dissocie en deux équations

$$\frac{dv}{du} = f_1(u, v), \qquad \frac{dx}{du} = f_2(u, v). \tag{3}$$

Il faudra donc intégrer l'une ou l'autre de ces équations.

Si nous prenons, par exemple, la première, nous savons que, sous certaines conditions très générales, il existe une solution et une seule qui prenne la valeur v_0 pour $u = u_0$. On en conclut donc que :

THÉORÈME. — *Par toute droite de la congruence, passent deux surfaces développables dont les génératrices sont des droites de cette congruence.*

Développables issues d'une génératrice : Foyers. — Mais chacune de ces génératrices est tangente en un point F à l'arête de rebroussement de la développable.

Sur toute droite D, il existe donc deux points F_1, F_2 qui sont appelés les « points focaux » ou les « foyers » relatifs à D.

Nous avons vu que le z du point de contact est alors défini par l'une ou l'autre des deux conditions qui sont compatibles

$$z\,da + dp = 0, \qquad z\,db + dq = 0.$$

On a donc

$$z = \frac{-\left(\frac{\partial p}{\partial u}du + \frac{\partial p}{\partial v}dv\right)}{\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv}. \tag{4}$$

Le rapport ne dépend que de $\frac{dv}{du}$. Par conséquent

il n'est pas nécessaire d'avoir intégré l'équation (3) pour obtenir les coordonnées du point de contact. Il suffit de remplacer dans (4), $\frac{d\varphi}{du}$ soit par $f_1(u,v)$, soit par $f_2(u,v)$ pour obtenir les z (et par suite les x et y) des points F_2 ou F_1.

Les coordonnées x, y, z d'un point F_1 ou F_2, sont donc des fonctions de u, v, connues sans intégration.

Chacun de ces points décrit donc une surface.

Ces deux surfaces ont évidemment une courbe d'intersection commune, correspondant aux valeurs de u, v pour lesquelles on aurait $Q^2 - 4RP = 0$. Pour tous les points de cette courbe, les deux points F_1, F_2 sont confondus. On peut donc considérer que les deux surfaces constituent deux nappes d'une même surface appelée « surface focale de la congruence ».

Il est facile de voir que chaque droite D est tangente en F_1 et F_2 à chacune des nappes S_1 ou S_2.

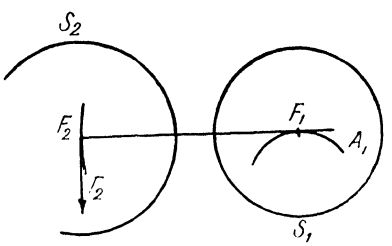


Fig. 25.

L'arête de rebroussement A_1, par exemple, lieu du point F_1, est en effet sur S_1 ; la droite D tangente à A_1, est donc *a fortiori* tangente à S_1, en F_1. Il en est de même de S_2.

Nous allons enfin étudier la disposition des plans tangents aux deux développables passant par D.

Déplaçons D de manière qu'elle reste tangente à A_1.

Le point F_2 décrira sur S_2 une courbe Γ_2 évidemment distincte de A_2 et qui sera sur la développable d'arête A_1. Le plan tangent à la première développable, qui est le même tout le long de D, sera donc, en particulier, le plan tangent en F_2. Ce plan est déterminé par D et par la tangente à Γ_2 : c'est donc le plan tangent à S_2 en F_2.

De même, le plan tangent à la deuxième développable sera le plan tangent en F_1, à la nappe S_1.

Ces deux plans tangents aux deux développables le long de D, qui sont les plans tangents aux deux nappes S_2 et S_1 sont les « plans focaux » de la congruence.

Nous savons que le plan tangent le long de D a pour équation

$$\frac{X - aZ - p}{Y - bZ - q} = \frac{z da + dp}{z db + dq}.$$

La surface étant développable, le second membre se réduit à $\frac{dp}{dq}$. La trace du plan tangent sur le plan des xy a donc pour direction

$$\frac{X}{Y} = \frac{dp}{dq}.$$

Le second membre ne dépend que de $\frac{dp}{du}$. *On peut donc obtenir les deux directions des plans tangents (et par suite ces plans) sans intégrer, au préalable, l'équation différentielle* (2).

Considérons maintenant une surface quelconque Σ de la congruence passant par D. Puisque cette droite D reste constamment tangente à la nappe S_1, le plan tangent en F_1 à Σ ne sera autre que le plan tangent à S_1. Donc :

Toutes les surfaces de la congruence admettent même plan tangent en F_1, *et de même en* F_2 : *ce sont les deux plans tangents à* S_1 *et* S_2.

Mais inversement, s'il existe un point f de D pour lequel toutes les surfaces Σ passant par D soient tangentes, ce plan tangent commun devra être, en particulier, le plan tangent à l'une ou l'autre des développables, par exemple, le plan tangent à S_2 en F_2. Mais nous savons que les plans tangents en deux points distincts d'une même génératrice d'une surface non développable, sont nécessairement distincts. Le point f se confond donc avec F_2, ou de même, avec F_1.

Cas particulier. — Les normales en tous les points d'une surface

u, v, dépendent de ces deux paramètres : elles forment donc une congruence de droites.

Nous avons déjà donné la définition des lignes de courbure d'une surface : Ce sont les (courbes tracées sur une surface, telles que les normales en tous les points d'une de ces courbes constituent une surface développable. Nous démontrerons que, par tout point de la surface, passent deux lignes de courbure, et que les deux familles de lignes de courbure se coupent partout sur la surface, à angle droit

Par chaque normale à la surface passent donc bien deux développables, et dans le cas actuel, ces deux développables se coupent à angle droit : *les deux plans focaux de la congruence sont donc constamment perpendiculaires.*

Congruence des normales à une surface. — On peut se demander si inversement, étant donnée une congruence, elle n'est pas formée de normales à une certaine surface.

D'après ce que nous venons de voir, il est nécessaire que les deux plans focaux correspondant à chaque génératrice soient toujours perpendiculaires. Nous allons montrer que *cette condition est suffisante.*

Pour simplifier, nous supposerons $p = u$, $q = v$

$$x = az + u, \qquad y = bz + v$$

a et b étant fonctions de u, v.

Si ces droites sont normales à une surface, il existera sur chaque droite D, un point dont le déplacement dx, dy, dz sera constamment normal à la direction a, b, 1 de la droite quelles que soient les variations du dv.

On aura donc

$$adx + bdy + dz = 0. \tag{5}$$

En substituant les expressions de dx, dy, on obtient

$$(a^2 + b^2 + 1)dz + z(ada + bdb) + adu + bdv = 0. \tag{5'}$$

ρ, d

Cette relation devant avoir lieu quels que soient du, dv, se décompose en deux

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} (a^2 + b^2 + 1)\dfrac{\partial z}{\partial u} + z\left(a\dfrac{\partial a}{\partial u} + b\dfrac{\partial b}{\partial u}\right) + a = 0 \\ (a^2 + b^2 + 1)\dfrac{\partial z}{\partial v} + z\left(a\dfrac{\partial a}{\partial v} + b\dfrac{\partial b}{\partial v}\right) + b = 0. \end{cases}$$

δ_1, β

Elles devraient être satisfaites par une même fonction $z(u, v)$.

En divisant par $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$, la première s'écrit :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\,\frac{\partial z}{\partial u} + z\,\frac{a\dfrac{\partial a}{\partial u} + b\dfrac{\partial b}{\partial u}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0$$

ρ

ou

$$\frac{\partial}{\partial u} \cdot z\sqrt{a^2 + b^2 + 1} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0.$$

De même, la seconde s'écrit

$$\text{(VI')} \qquad \frac{\partial}{\partial v} \cdot z\sqrt{a^2 + b^2 + 1} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 0.$$

ρ, β

Pour que ces deux équations soient compatibles, il faut que

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

δ_1

Si on développe cette relation, elle se réduit à

$$\text{(7')} \qquad (b^2 + 1)\frac{\partial a}{\partial v} - ab\frac{\partial b}{\partial v} = (a^2 + 1)\frac{\partial b}{\partial u} - ab\frac{\partial a}{\partial u}.$$

α ξ

Il s'agit d'interpréter cette condition, en considérant les plans tangents aux deux développables.

δ_1, σ_2

Or, nous avons vu que les deux plans focaux passant par la direction a, b ont pour trace sur le plan des xy les directions $m = \dfrac{dq}{dp}$, c'est-à-dire, dans le cas actuel, $m = \dfrac{dv}{du}$ et d'autre part, $\dfrac{dv}{du}$

σ_2

est racine de l'équation

$$dadq - dbdp = 0$$

qui se réduit ici à

$$\left(\frac{\partial a}{\partial u}\,du + \frac{\partial a}{\partial v}\,dv\right)dv - \left(\frac{\partial b}{\partial u}\,du + \frac{\partial b}{\partial v}\,dv\right)du = 0$$

ou

$$\frac{\partial a}{\partial v}\cdot\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v}\right)\frac{dv}{du} - \frac{\partial b}{\partial u} = 0. \tag{8}$$

Les coefficients angulaires m' m'' des deux traces sont donc racines de l'équation

$$m^2\frac{\partial a}{\partial v} + m\left(\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v}\right) - \frac{\partial b}{\partial u} = 0. \tag{8'}$$

∂_1, ξ Il faut maintenant considérer les directions mêmes des plans tangents.

∂_1 Ils sont parallèles aux plans

$$m'X - Y + (b - m'a)Z = 0$$
$$m''X - Y + (b - m''a)Z = 0$$

puisqu'ils contiennent la génératrice de direction a, b, 1.

∂_1, β Pour que ces plans soient perpendiculaires il faut que

$$m'm''(1 + a^2) - ab(m' + m'') + 1 + b^2 = 0$$

c'est-à-dire en se basant sur (8'),

$$-(1 + a^2)\frac{\partial b}{\partial u} - ab\left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial u}\right) + (1 + b^2)\frac{\partial a}{\partial v} = 0.$$

∂ C'est précisément la condition (7') de compatibilité que nous avons obtenue. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'une congruence soient formées de normales à une surface est que les plans tangents aux deux nappes de la surface focale, soient, pour chaque droite D, perpendiculaires.*

V. — COMPLEXES DE DROITES

Après les surfaces réglées et les congruences. x, y, ξ nous sommes amenés à étudier les ensembles de droites dépendant de trois paramètres.

Si

$$X = aZ + p, \qquad Y = bZ + q$$

sont les équations d'une droite et si a, b, p, q dépendent de trois paramètres, t, u, v on dit que l'ensemble de ces droites forme un « complexe ».

On peut encore dire que a, b, p, q sont liés par une relation

$$F(a, b, p, q) = 0.$$

Par un point de l'espace, passent une infinité de droites du complexe formant un cône, puisque les variables t, u, v sont alors liées par les deux relations

$$x_0 = az_0 + p, \qquad y_0 = bz_0 + q.$$

Si le complexe est défini par la relation $F(a, b, p, q) = 0$ l'équation de ce cône est

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}, \frac{x_0 z - z_0 x}{z - z_0}, \frac{y_0 z - z_0 y}{z - z_0}\right) = 0.$$

Il est naturel d'introduire également le rapport

$$\frac{xy_0 - yx_0}{z - z_0} = aq - bp.$$

Si F est un polynôme de degré n en a, b, p, q, $aq - bp$, on dit que le complexe est algébrique. Le cône est de degré n.

D'une façon correspondante, les droites d'un complexe qui sont dans un plan sont tangentes à une courbe. Par un point de ce plan, passent n de ces droites, intersections du plan par le cône relatif au point. La classe de la courbe est donc égale à n.

Complexes linéaires. — En particulier, si

$$F(a, b, p, q, aq - bp) = 0,$$

est linéaire en a, b, p, q, $(aq - bp)$, de la forme

$$Aa + Bb + Cp + Dq + E(aq - bp) + F = 0,$$

les droites du complexe qui passent par un point F_0 *sont dans un plan* P_0, *et toutes les droites qui sont dans un plan* P_0 *passent par un point fixe* F_0 *de ce plan.*

Un complexe « linéaire » établit donc une correspondance réciproque entre un plan P et un certain point F de ce plan.

Le point F s'appelle le « foyer » du plan et le plan est le « plan focal » de F.

Si les plans P passent par une droite fixe D, voyons comment varie le foyer de ce plan.

Prenons deux plans particuliers P_1, P_2 pour lesquels nous obtenons les foyers F_1, F_2. Nous allons montrer que *le foyer d'un plan quelconque passant par* D *est sur la droite* Δ *joignant* F_1 F_2.

En effet, un plan quelconque P passant par Δ rencontre D en un point f. Les droites fF_1, fF_2 étant deux droites du complexe situées dans ce plan P, le point f est le foyer de ce plan P.

On voit ainsi que toute droite rencontrant D et Δ est une droite du complexe. Donc enfin, le foyer d'un plan quelconque Q passant par D est le point f_1 de rencontre de ce plan avec Δ.

Autre démonstration par l'analyse : Il faut démontrer que si l'on prend un plan quelconque Q passant par D, son foyer est en f_1 au point de rencontre de Δ avec Q.

Dire que f_1 est le foyer de Q, c'est dire que toutes les droites de Q passant par f_1 sont droites du complexe ; autrement dit, toutes les droites issues de f_1 et rencontrant D, ou encore toutes les droites rencontrant D et Δ doivent être droites du complexe.

Dans un plan P passant par Δ et rencontrant D en f, il faut donc démontrer que toutes les droites du complexe dans ce plan, passent par f ou enfin que f est le foyer de ce plan P.

Cela est évident, puisque f est le point de rencontre de deux droites particulières du complexe situées dans ce plan, les droites fF_1 et fF_2.

On voit donc que *le foyer de tout plan passant par* D *est sur* Δ *et inversement.* Les deux droites D et Δ sont appelées « droites conjuguées ».

En particulier si D s'éloigne indéfiniment, tous les plans P sont parallèles. Les foyers de plans parallèles sont donc en ligne droite.

Equation réduite du complexe. — Supposons que nous prenions le plan des x, y parallèle aux plans, et pour axe des z la droite des foyers.

Soit

$$Aa + Bb + Cp + Dq + E(aq - bp) + F = 0.$$

l'équation du complexe.

α

Si o, o, z_0 est un point de oz, les droites qui passent par ce point sont dans le plan

$$Ax + By - Cz_0x - Dz_0y + F(z - z_0) = 0.$$

β

Pour que ce plan soit parallèle au plan des xy, quel que soit z_0, il faut que l'on ait

$$A = B = C = D = 0.$$

ω

L'équation du complexe se réduit donc à

$$E(aq - bp) + F = 0.$$

Le plan focal du point quelconque x_0, y_0, z_0 est alors

$$E(y_0x - x_0y) + F(z - z_0) = 0.$$

Autre forme du complexe. — Nous avons vu qu'un complexe est défini par une relation entre les quantités

$$\frac{x - x_0}{z - z_0}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0}, \quad \frac{y_0z - z_0y}{z - z_0}, \quad \frac{z_0x - x_0z}{z - z_0}, \quad \frac{x_0y - y_0x}{z - z_0}.$$

On peut dire encore qu'il est défini par une relation *homogène* entre les six quantités

$$X = x - x_0, \qquad Y = y - y_0, \qquad Z = z - z_0$$
$$L = y_0z - z_0y = yZ - zY, \quad M = z_0x - x_0z = zX - xZ, \quad N = xY - yX$$

entre lesquelles, on a la relation identique

$$LX + MY + NZ = 0.$$

La relation sera de la forme

$$F(X, Y, Z, L, M, N) = 0$$

X, Y, Z sont les coefficients de direction de la droite.

R

En résumé, un complexe est défini par une relation homogène

$$F(X, Y, Z, L, M, N) = 0$$

les six quantités étant elles-mêmes liées par la condition

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Les droites passant par le point x_0, y_0, z_0 engendrent le cône

$$F(X, Y, Z, y_0Z - z_0Y, z_0X - x_0Z, x_0Y - y_0X) = 0$$

Un complexe linéaire sera défini par la relation

$$AL + BM + CN + DX + EY + FZ = 0.$$

En prenant pour oz la droite des foyers des plans parallèles au
o
plan des xy, le complexe peut être réduit à la forme

$$CN + FZ = 0$$

Ou encore

$$N + kZ = 0.$$

Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. — En particulier, déterminons les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

δ_1

L'équation d'une tangente est de la forme

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

x, y, z, dépendant d'un paramètre t.

α

On peut donc prendre

$$X = dx, \qquad Y = dy, \qquad Z = dz.$$

$$L = ydz - zdy, \qquad M = zdx - xdz, \qquad N = xdy - ydx.$$

Nous avons établi, dans l'étude des systèmes incomplets d'équations différentielles sans aucun signe de quadrature, les formes les plus générales des fonctions x, y, z telles que l'on ait identiquement

$$AL + BM + CN + DX + EY + FZ = 0.$$

ζ_1, o

Mais pour simplifier, prenons le complexe sous sa forme réduite. On doit avoir entre les fonctions x, y, z de t la relation

$$xdy - ydx - kdz = 0. \tag{1}$$

On peut l'écrire

$$kz' = (xy)' - 2yx'. \tag{1'}$$

Posons

$$2yx' = u' \tag{2}$$

o

u désignant une fonction arbitraire de t. On obtiendra, en intégrant

$$kz = xy - u. \tag{3}$$

ω

Ainsi on peut poser

$$y = \frac{u'}{2x'}, \qquad kz = \frac{xu'}{2x'} - u \tag{IV}$$

x et u désignent deux fonctions arbitraires de t. Ce sont les expressions les plus générales des fonctions x, y, z satisfaisant à l'équation (1).

α_2, ζ

On peut, sans restriction, supposer que x est la variable t; u désignera alors une fonction arbitraire de x. *Donc les équations les plus générales et les plus simples des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire sont*

$$y = u' \qquad kz = xu' - 2u$$

u désignant une fonction quelconque de x.

Plan osculateur. — Sous cette forme, on démontre aisément que

Théorème de M. Appell. — *Toutes les courbes passant par un point de l'espace, y admettent même plan osculateur. C'est précisément le plan focal relatif au point donné.*

Ce résultat est dû à M. Appell.

Nous allons établir d'autres propriétés :

Autres propriétés. — Si l'on calcule le rayon de torsion en un point x, y, z de l'une des courbes, on trouve simplement

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k}{x^2 + y^2 + k^2}.$$

Ce résultat est indépendant de $u(x)$:

Toutes les courbes qui passent en un point de l'espace y admettent donc aussi même rayon de torsion.

Enfin, on démontrera aisément la propriété suivante :

Soit R le rayon de courbure d'une courbe, soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les rayons de courbure aux points correspondants des projections de la courbe sur les plans de coordonnées ; soient, d'autre part α, β, γ les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan osculateur (le même pour toutes les courbes). Enfin désignons par r, r_1, r_2, r_3 les quantités proportionnelles

$$\frac{r}{R^{\frac{2}{3}}} = \frac{r_1}{(\rho_1\alpha)^{\frac{2}{3}}} = \frac{r_2}{(\rho_2\beta)^{\frac{2}{3}}} = \frac{r_3}{(\rho_3\gamma)^{\frac{2}{3}}},$$

on aura entre r, r_1, r_2, r_3 les relations simples homogènes

$$2r = r_1 + r_2 + r_3, \qquad \pm\alpha\sqrt{r - r_1} \pm \beta\sqrt{r - r_2} \pm \gamma\sqrt{r - r_3} = 0.$$

En remplaçant r, r_1, r_2, r_3 par les quantités proportionnelles ci-dessus, on aura donc deux relations entre les rayons de courbure R, ρ_1, ρ_2, ρ_3 *indépendantes de la courbe du complexe considéré.* En particulier, on a

$$2R^{\frac{2}{3}} = (\rho_1\alpha)^{\frac{2}{3}} + (\rho_2\beta)^{\frac{2}{3}} + (\rho_3\gamma)^{\frac{2}{3}}.$$

CHAPITRE XI

THÉORIE DES SURFACES

I. — COURBES TRACÉES SUR LA SURFACE. FORMES QUADRATIQUES. ÉTUDE DES COURBES AUTOUR D'UN POINT.

SOMMAIRE.

Courbes tracées sur une surface : Formes quadratiques fondamentales.
Etude de la surface aux environs d'un point : Théorème de Meusnier. — Directions principales : leur détermination. — Courbure géodésique.
Directions conjuguées : Lignes asymptotiques. — Applications.
Lignes de Courbure : Divers cas. — Applications.
Détermination d'une surface au moyen des coefficents E, F, G, D, D′, D″.
Surfaces applicables : Surfaces applicables sur un plan. — Surfaces dont les arêtes de rebroussement admettent même expression de l'
Reconnaître si un ds^2 correspond à une surface développable.
Surfaces applicables sur une surface de révolution. — Théorème de Bour.
Représentation d'une surface avec simple conservation des angles : Cas de la sphère.

Comme nous l'avons dit, une surface peut être déterminée, soit par une relation

$$f(x, y, z) = 0$$

entre les coordonnées d'un quelconque de ses points, soit en donnant les expressions de ces coordonnées en fonction de deux paramètres

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Nous supposerons les axes rectangulaires.

Dans le premier cas, nous supposons qu'au moins pour la portion de surface que nous étudions, $f(x, y, z)$ est continue et admet des dérivées partielles d'un ordre quelconque continues.

Nous avons vu que si x, y, z sont les coordonnées d'un point simple de la surface σ_2 les trois dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne sont pas simultanément nulles en ce point.

Dans le deuxième cas, nous supposons que f, φ, ψ sont continues ainsi que leurs dérivées. σ_2 Si le point est simple, les trois déterminants

$$A = D^{u,v}_{y,z}, \qquad B = D^{u,v}_{z,x}, \qquad C = D^{u,v}_{x,y}$$

ne sont pas simultanément nuls.

Si le troisième, par exemple, n'est pas nul, z des deux premières relations, on pourrait déduire u et v en fonction de x et y et en substituant dans la troisième coordonnée, on obtiendrait l'équation de la surface sous la forme $z = F(x, y)$.

Plan tangent. — Dans le premier cas, nous savons que le plan tangent a pour équation

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Dans le second cas, cherchons le plan osculateur en un point. δ_1 L'équation d'un plan

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$

renferme trois paramètres. Nous pourrons donc en disposer de manière à tenir en un point donné, un contact du premier ordre avec la surface σ_2, β On devra écrire

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$A\frac{\partial x}{\partial v} + B\frac{\partial y}{\partial v} + C\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

δ_1 On obtient l'équation du plan tangent en éliminant A, B, C, D, ce qui donne

$$(I') \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\text{(II)} \qquad A = D^{u,v}_{y,z}, \qquad B = D^{u,v}_{z,x}, \qquad C = D^{u,v}_{x,y}.$$

Les équations de la normale sont

$$\frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}.$$

Courbes tracées sur la surface. — Si on laisse u constant, et si l'on fait varier seulement v, le point M décrira une courbe de la surface que nous désignons par courbe $u = \text{const.}$, de même si on laisse v constant, on obtient la famille de courbes $v = \text{const.}$

Plus généralement, donnons-nous une relation quelconque entre u, v, soit $\lambda(u, v) = 0$, ou encore donnons-nous les expressions de u, v en fonction d'une autre variable, t, soient $u = \lambda(t)$, $v = \mu(t)$; x, y, z deviendront de simples fonctions de t. Le point décrira une courbe de la surface. Les paramètres directeurs de la tangente en un point sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Mais x, y, z sont des fonctions de t par l'intermédiaire de u, v. On a donc

$$\text{(III)} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\lambda'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\mu'(t)$$

et des expressions analogues pour $\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

THÉORÈME. — *Les tangentes à toutes les courbes que l'on peut tracer sur la surface à partir d'un point* M, *sont dans un même plan, le plan tangent à la surface au point* M.

Nous venons de voir que les paramètres directeurs de la tangente en un point d'une courbe sont donnés par les formules (III). Ces paramètres ne dépendent de la courbe que par les deux facteurs $\lambda'(t)$, $\mu'(t)$, qui entrent dans leur expression sous forme linéaire et homogène.

Pour que la tangente reste dans un plan fixe, il faut pouvoir déterminer des quantités A, B, C telles que l'on ait identiquement, quelle que soit la courbe

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0,$$

ou

$$\Sigma A\left(\frac{\partial x}{\partial u}\lambda'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\mu'(t)\right) = 0.$$

On doit donc avoir séparément

$$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad A\frac{\partial x}{\partial v} + B\frac{\partial y}{\partial v} + C\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

et ces conditions sont suffisantes.

Ces équations donnent précisément pour A, B, C les expressions (II). Les tangentes à toutes les courbes restent donc bien dans un plan fixe, et ce plan est le plan tangent au point dont l'équation est (I').

Longueur d'un arc de courbe : Formes quadratiques fondamentales. — Etant donnée une courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

on a défini longueur d'un arc de cette courbe la limite (dont on a démontré l'existence) de la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans l'arc quand tous les côtés tendent simultanément vers zéro de façon quelconque.

En supposant qu'une extrémité t_0 reste fixe et que l'autre t soit variable, on a démontré que l'arc est une fonction de t dont la différentielle est donnée par

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Supposons maintenant que l'on donne une surface

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

On déterminera une courbe sur cette surface en donnant une relation entre u et v ou en supposant que u et v soient fonctions d'un seul autre paramètre t.

1re forme quadratique fondamentale. — Le carré de la différentielle de l'arc sera

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Mais l'on a ici

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv$$

et des expressions analogues pour dy, dz. Si l'on substitue ces expressions dans ds^2, on voit que l'on aura un résultat de la forme

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

les coefficients E, F, G ayant les valeurs suivantes :

$$(I)\quad \begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \\ F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} = \sum\dfrac{\partial x}{\partial u}\times\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Cette forme quadratique en du et dv représentant ds^2 est une des formes quadratiques fondamentales liées à la surface.

Nous aurons bientôt à en introduire une seconde.

Si nous dérivons par rapport à u, v les expressions de E, F, G, nous obtenons

$$(II)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u} = \sum\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v} = \sum\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} = \sum\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + \sum\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \dfrac{\partial F}{\partial v} = \sum\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \sum\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v\partial u\partial v} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u} = \sum\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v} = \sum\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}. \end{cases}$$

On constate que, dans ces diverses expressions, ne figurent, au second membre, que six sommes différentes.

Si donc l'on donne E, F, G, ces formules permettent de calculer ces six sommes.

On trouve ainsi

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Ces formules seront utiles plus tard.

Cosinus directeurs de la normale. — Si nous désignons par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, nous avons vu qu'ils sont proportionnels à $D^{u,v}_{y,z}$, $D^{u,v}_{z,x}$, $D^{u,v}_{x,y}$. On a donc

$$\frac{c}{D^{u,v}_{y,z}} = \frac{c'}{D^{u,v}_{z,x}} = \frac{c''}{D^{u,v}_{x,y}}.$$

En élevant au carré et en ajoutant, le dénominateur s'écrit

$$\sum \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2.$$

Si nous appliquons l'identité de Lagrange, nous obtenons

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \times \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 - \left[\sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right]^2 = EG - F^2.$$

Nous poserons

$$H = + \sqrt{EG - F^2}.$$

La quantité sous le radical est essentiellement positive, puisque c'est le discriminant de la forme ds^2. Nous avons donc, au signe près

$$c = \frac{1}{H} D^{u,v}_{y,z}, \qquad c' = \frac{1}{H} D^{u,v}_{z,x}, \qquad c'' = \frac{1}{H} D^{u,v}_{x,y}.$$

Angle de deux courbes tracées sur la surface. — Les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente à une courbe sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Lorsque le point décrit une courbe de la surface, il faut supposer u, v fonctions d'un paramètre t. On a donc

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv.$$

Donc

$$\alpha = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}}.$$

On a des formules analogues pour β, γ.

Ces cosinus ne dépendent que du rapport $\frac{dv}{du}$.

Considérons une deuxième courbe tracée sur la surface,

et désignons par ∂u, ∂v les différentielles de u, v lorsque le point se déplace sur cette deuxième courbe. On aura de même,

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v}{\partial s}.$$

L'angle V de ces deux directions aura pour cosinus

$$\cos V = \frac{\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v\right)}{ds\partial s}.$$

Or, si l'on développe le numérateur, en tenant compte des expressions de E, F, G, on obtient

$$\cos V = \frac{E du\partial u + F(du\partial v + dv\partial u) + G dv\partial v}{ds\partial s}.$$

Cet angle ne dépend que des rapports $\frac{du}{dv}$, $\frac{\partial u}{\partial v}$. De plus cette expression ne varie pas quand E, F, G varient proportionnellement.

Nous verrons l'importance de cette remarque.

Angle des deux courbes coordonnées. — En particulier, déterminons l'angle des courbes coordonnées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Pour la première, on peut poser $du = 0$, $dv = dv$. Pour la deuxième, $\partial u = \partial u$, $\partial v = 0$.

En substituant dans l'expression de cos V, on a simplement

$$\cos V = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Pour que les courbes coordonnées se coupent partout à angle droit, en tout point de la surface, il faut et il suffit que

$$F = 0$$

c'est-à-dire que le ds^2 *de la surface se mette sous la forme*

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Deuxième forme quadratique fondamentale. — Nous introduisons, dès maintenant, une deuxième forme quadratique fondamentale liée à la surface en considérant l'expression

(3) $$\Lambda = dc dx + dc' dy + dc'' dz.$$

δ_1 Si nous remplaçons dx, dy, dz, dc, dc', dc'' en fonction de du, dv

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad dc = \frac{\partial c}{\partial u}du + \frac{\partial c}{\partial v}dv, \text{ etc...}$$

ρ on voit que cette expression est homogène et du second degré en du, dv. Nous l'écrivons sous la forme

$$\text{(3')} \qquad \mathcal{A}_0 = -\frac{D}{H}du^2 - \frac{2D'}{H}dudv - \frac{D''}{H}dv^2$$

en posant comme précédemment $H = +\sqrt{EG - F^2}$

Nous verrons l'utilité de ce facteur $-\frac{1}{H}$.

Nous verrons aussi la signification de l'équation

$$\mathcal{A}_0 = dcdx + dc'dy + dc''dz = 0.$$

δ_1 Nous aurons les expressions des coefficients D, D', D'' en égalant dans (3') les coefficients de du^2, $dudv$, dv^2 dans les deux membres

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} -\frac{D}{H} = \sum \frac{\partial c}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} \\ -2\frac{D'}{H} = \sum \frac{\partial c}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \sum \frac{\partial c}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} \\ -\frac{D''}{H} = \sum \frac{\partial c}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Ces expressions ont l'inconvénient ρ d'exiger le calcul préalable de c, c', c'' et de leurs dérivées

$$c = -\frac{1}{H}D^{u,\,v}_{y,\,z} \text{ etc...}$$

α On peut se proposer de chercher les expressions de D, D', D'' au moyen des seules fonctions x, y, z, qui définissent la surface.

α Il ne faut évidemment pas calculer séparément les dérivées de c, c', c'', mais calculer, si possible, les fonctions symétriques $\sum \frac{dc}{du}\cdot\frac{dx}{du}$, etc.

ν, σ_2 Il est naturel de chercher à les introduire en partant des conditions

$$\Sigma c\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma c\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

qui expriment que la direction c, c', c'' est, en particulier, perpendiculaire aux tangentes aux courbes

$$v = \text{const.}, \qquad u = \text{const.}$$

∂_1 En les dérivant par rapport à u et v, on obtient

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \sum \frac{\partial c}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \sum c \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0 \\ \sum \frac{\partial c}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \sum c \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0 \\ \sum \frac{\partial c}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \sum c \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0 \\ \sum \frac{\partial c}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \sum c \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \end{cases}$$

ρ Par comparaison des deux équations médianes, on déduit d'abord

$$\sum \frac{\partial c}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial c}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

ρ puis, on voit apparaître précisément les sommes qui figurent aux formules (III). On a

$$\frac{D}{H} = \Sigma c \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \frac{D'}{H} = \Sigma c \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \qquad \frac{D''}{H} = \Sigma c \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

ρ On constate que l'on a fait disparaître les dérivées de c, c', c''. En tenant compte des expressions des cosinus, il vient

$$D = \sum \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}.$$

ρ Le facteur $\frac{1}{H}$ a disparu grâce à notre notation.

$\partial_{1,o}$ On voit que D est le développement du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

De même on aura

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ces expressions ne dépendent ainsi que de x, y, z et de leurs dérivées partielles. Dans ces trois déterminants, les deux dernières lignes sont les mêmes. Les premières lignes, dont les éléments sont les dérivées partielles du second ordre, seules, diffèrent.

Nous verrons la signification de l'équation

$$dcdx + dc'dy + dc''dz = 0, \qquad \text{ou} \qquad Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0.$$

II. — ÉTUDE DE LA SURFACE AUX ENVIRONS D'UN DE SES POINTS

Nous supposerons que l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$z = f(x, y).$$

Si aux environs d'un point x_0, y_0, z_0, la fonction admet des dérivées partielles d'un ordre quelconque, on pourra la développer en série par la formule de Taylor. On obtiendra

$$-z_0 = (x-x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + (y-y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x_0, y_0) + \cdots$$

Les coefficients de direction du plan tangent sont $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 - 1$.

Pour étudier la surface aux environs du point M, nous prendrons pour origine des coordonnées ce point M, et pour axe des z la normale en ce point. Nous devons donc, dans le développement ci-dessus, supposer

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Le développement se réduit donc à

$$z = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x_0, y_0) + \frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(x_0, y_0) + \cdots$$

c'est-à-dire, en désignant par r_0, s_0, t_0 les dérivées, partielles dn second ordre de $f(x,y)$ au point x_0, y_0 (origine),

$$z = \frac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2) + \frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(x_0, y_0) + \cdots$$

Si nous coupons la surface par le plan tangent $z = 0$, nous obtenons

$$r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 + \cdots = 0.$$

ρ

On voit donc que la *courbe d'intersection présente un point double à l'origine*, c'est-à-dire au point de contact du plan tangent,

σ_2

les tangentes en ce point ayant pour équation

$$r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 = 0.$$

Ce sont deux droites réelles ou imaginaires, mais dont les bissectrices sont toujours réelles. Ces bissectrices définissent les « directions principales » de la surface au point M.

Nous verrons leur importance.

α_2

Si on les avait prises pour axes de coordonnées, en faisant tourner d'un angle convenable les axes ox, oy autour de $0z$, le terme en xy n'existerait pas. En supposant que cette transformation ait été faite, on aura donc

$$2z = r_0x^2 + t_0y^2 + \frac{1}{3}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(x_0, y_0) + \cdots$$

Coupons maintenant la surface par le plan $z = h$, parallèle au plan tangent. La courbe d'intersection se projette sur le plan des xy suivant la courbe d'équation

$$2h = r_0x^2 + t_0y^2 + \cdots$$

Aux environs du point de contact, si l'on suppose que l'on puisse

ρ

négliger les termes de degré supérieur au second en x et y, on voit que la *courbe d'intersection se confond sensiblement avec la conique*

$$2h = r_0x^2 + t_0y^2.$$

ρ
Les axes de cette conique sont parallèles aux bissectrices des deux droites avec lesquelles se confond sensiblement la section de la surface par son plan tangent, direction sque, pour cette raison, nous avons appelées « principales ». ρ Cette conique est semblable à la conique

$$r_0 x^2 + t_0 y^2 = \pm 1.$$

Supposons celle-ci tracée dans le plan tangent. Elle porte le nom « d'indicatrice » de la surface au point M.

δ_1, ξ
On est amené à considérer la nature de cette conique

1° $r_0 t_0 > 0$. — Supposons, par exemple, r_0, t_0 tous deux positifs.

ρ
L'indicatrice est une ellipse. La section n'est réelle que si $h > 0$.
d

La surface est donc tout entière du même côté du plan tangent.

On dit qu'elle est « convexe » aux environs de M_0. Les droites d'intersection de la surface par son plan tangent (aux environs du point) sont imaginaires et n'ont qu'un seul point réel, le point de contact. La section de la surface par son plan tangent se réduit à ce point.

Si $r_0 = t_0$, l'indicatrice est un cercle. On dit que le point est un « ombilic » de la surface.

δ_1 δ_1
2° $r_0 t_0 < 0$. — L'indicatrice est une hyperbole. La section de la surface est toujours réelle. *La surface traverse donc son plan tangent.* Les droites d'intersection de la surface par son plan tangent sont réelles et donnent les directions asymptotiques de l'indicatrice.

o
D'un côté du plan tangent, la courbe d'intersection se projette, dans un des angles formés par les asymptotes. De l'autre côté, la courbe d'intersection se projette dans l'autre angle des asymptotes. La section de la surface par son plan tangent ρ est une courbe présentant un point double réel à l'origine.

δ_1
3° $t_0 = 0$. — L'indicatrice se compose de deux droites parallèles

$$r_0 x^2 = \pm 1.$$

La section est formée aux environs de l'origine de deux éléments de droites parallèles ; elle n'est réelle que d'un seul côté du plan tangent.

Etude des courbes tracées sur une surface autour d'un point. — Donnons-nous encore une surface sous la forme

$$z = f(x, y).$$

Les cosinus directeurs de la normale en un point M proportionnels à $-p$, $-q$, $+1$ sont

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

en convenant de choisir la demi-droite qui fait un angle aigu avec oz. Nous choisirons ultérieurement la direction de oz.

On obtiendra une courbe sur la surface en donnant x, y en fonction d'un paramètre t. *Nous voulons déterminer le rayon de courbure de cette courbe au point M.*

Introduisons les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente. Ils vérifient la relation

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0. \tag{1}$$

A moins de spécifier la courbe, c'est la seule relation qui existe entre α, β, γ. *C'est de cette seule relation que nous pouvons déduire les propriétés des courbes.* Nous allons voir avec quelle extrême facilité on obtient des résultats remarquables.

D'après les formules de Serret, si α', β', γ' désignent les cosinus directeurs de la normale principale, on a

$$d\alpha = \frac{\alpha'}{R}\, d\sigma, \qquad d\beta = \frac{\beta'}{R}\, d\sigma, \qquad d\gamma = \frac{\gamma'}{R}\, d\sigma.$$

en désignant par $d\sigma$ l'élément d'arc.

Différentions la relation (1) ; nous aurons

$$pd\alpha + qd\beta - d\gamma + \alpha dp + \beta dq = 0. \tag{2}$$

Mais

$$dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy$$

et d'autre part

$$dx = \alpha d\sigma, \qquad dy = \beta d\sigma, \qquad dz = \gamma d\sigma.$$

δ1 En substituant ces expressions dans l'équation (2) et tenant compte des formules de Serret, on a donc

$$\frac{p\alpha' + q\beta' - \gamma'}{R} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0. \tag{3}$$

Tout ce calcul est, pour ainsi dire, obligatoire.

ρ Or, si l'on désigne par θ l'angle de la direction α', β', γ' avec la normale, on a

$$\cos\theta = -\frac{p\alpha' + q\beta' - \gamma'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

ω L'équation (3) donne donc finalement « la formule fondamentale »

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

ρ *Le rayon de courbure* R *ne dépend donc que de* α, β, γ, *c'est-à-dire de la direction de la tangente, et de* θ *c'est-à-dire de l'angle que fait la normale principale avec la normale à la surface ou encore, de l'angle du plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la surface.*

δ1, d On en déduit d'abord, que, si deux courbes tracées sur la surface, ont même plan osculateur en M, elles auront même rayon de courbure.

δ1 En particulier, le rayon de courbure d'une courbe est le même que celui de la courbe plane, intersection de la surface par son plan osculateur.

ω *L'étude de la courbure des courbes passant par un point (sur une surface) est donc ramenée à celle des sections planes de la surface.*

ξ Si en particulier, on considère deux sections planes passant par une même tangente, o on aura, pour les deux rayons de courbure R, R', en désignant par θ et θ' les angles des plans osculateurs avec le plan tangent, la relation

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\cos\theta'}{R'}.$$

α Prenons la section passant par la normale, c'est-à-dire la

section normale de la surface. On aura $\theta' = 0$ ou $\theta' = \pi$: on aura $\theta' = 0$, si le centre de courbure de cette section normale est situé sur oz. Nous supposerons que la direction positive a été ainsi *choisie*. On aura alors la relation

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{R'}, \qquad R = R' \cos\theta.$$

On en déduit le théorème de Meusnier :

THÉORÈME DE MEUSNIER. — *Le rayon de courbure d'une section oblique est égal au rayon de courbure de la section normale, passant par la même tangente, multiplié par le cosinus de l'obliquité.*

Ou encore :

Le centre de courbure d'une section oblique est la projection, sur le plan de cette section, du centre de courbure de la section normale passant par la même tangente.

Comme on le voit, ce théorème ramène l'étude de sections planes quelconques d'une surface, à celle des seules sections normales.

Etude des sections normales autour d'un point. — Dans la formule (4), R est essentiellement positif.

L'axe des z étant une fois choisi, pour avoir une section normale, il faut faire $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

Nous allons attribuer un signe à R ; nous désignerons par R_0 ce rayon de courbure affecté d'un signe comme nous allons l'indiquer.

Pour une section normale donnée, supposons que le centre de courbure correspondant soit sur oz ; il faut faire $\theta = 0$, et on aura

$$\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{5}$$

R_0 sera positif. Nous prendrons $R_0 = R$ et par suite

$$\frac{1}{R_0} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Supposons, au contraire, que le centre de courbure de la section soit sur oz' ; il faudrait faire $\theta = \pi$ et on aurait

$$-\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

α, ζ

Si nous supposons que dans ce cas R_0 est négatif, ($R_0 = -R$), on aura encore

$$\frac{1}{R_0} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{5}$$

ω, ρ

Ainsi, avec la convention de signe adoptée, (R_0 négatif si le centre de courbure est sur oz'), *on aura donc dans tous les cas la formule* (5).

Pour étudier les variations de R_0, lorsque la tangente c'est-à-dire

ρ, α₁

α, β, γ varient, on voit que l'on aurait à étudier les variations de trinôme homogène $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$, α, β étant liés par la relation

$$\gamma^2 = 1 - (\alpha^2 + \beta^2) = (p\alpha + q\beta)^2. \tag{6}$$

α₁

Pour simplifier cette étude, nous allons supposer que le point M a été pris comme origine et que oz est la direction de la

o

normale. On aura donc $p = 0$, $q = 0$ et par suite

$$\frac{1}{R_0} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

avec la condition (6), qui se réduit à $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

α₂

Si nous désignons par ω l'angle de la tangente avec ox (qui est encore arbitraire dans le plan tangent)

$$\alpha = \cos\omega, \qquad \beta = \sin\omega,$$

$$\frac{1}{R_0} = r\cos^2\omega + 2s\sin\omega\cos\omega + t\sin^2\omega. \tag{7}$$

δ₁

Directions principales. — Les maximum ou minimum de $\frac{1}{R}$ ont lieu pour

$$(t - r)\sin\omega\cos\omega + s\cos 2\omega = 0,$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2s}{r - t}.$$

d

On a donc, pour ω, deux directions rectangulaires. Si

δ

on prenait ces deux directions pour axes de coordonnées la nouvelle équation

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2s_1}{r_1 - t_1},$$

devrait admettre pour racines $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$. Donc $s_1 = 0$.

La nouvelle relation entre R_0 et ω sera donc, si on suppose faite cette transformation,

$$\frac{1}{R_0} = r_1 \cos^2\omega + t_1 \sin^2\omega. \tag{8}$$

En particulier, pour $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{1}{R_1} = r_1, \qquad \frac{1}{R_2} = t_1.$$

La relation (8) prend la forme

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1}\cos^2\omega + \frac{1}{R_2}\sin^2\omega. \tag{8'}$$

Cette forme met nettement en évidence que R_0 varie entre R_1 et R_2 qui sont les rayons de courbure maximum et minimum.

Si l'on prend le rayon de courbure relatif à la direction perpendiculaire $\omega + \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{R_0'} = \frac{1}{R_1}\sin^2\omega + \frac{1}{R_2}\cos^2\omega, \tag{8''}$$

et par suite, en ajoutant ;

$$\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

La somme des courbures de deux directions perpendiculaires quelconques est donc constante.

Les sections correspondant aux rayons de courbure maximum et minimum sont appelées « sections principales ». Les rayons R_1, R_2 de ces sections sont les « rayons de courbure principaux » de la surface.

Les directions principales sont les directions des axes des coordonnées quand, pour ces directions, on a $s_0 = 0$.

On voit donc que ces directions correspondent aux directions des axes de l'indicatrice.

Représentation géométrique. — On peut obtenir une représentation géométrique de la variation des rayons de courbure des sections normales.

Dans la direction ω, prenons le point à la distance

$$\rho = \sqrt{|\,R_0\,|}.$$

δ_1

Les coordonnées de ce point sont

$$x = \sqrt{|\,R_0\,|}\cos\omega, \qquad y = \sqrt{|\,R_0\,|}\sin\omega,$$

et comme, (dans le cas général),

$$\frac{1}{R_0} = r\cos^2\omega + 2s\sin\omega\cos\omega + t\sin^2\omega,$$

il viendra tout simplement

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \varepsilon. \qquad (R_0 = \varepsilon\rho^2)$$

ρ, ω

Ainsi les rayons de courbures sont représentés, au signe près, par les carrés des rayons vecteurs d'une certaine conique, de centre origine.

ξ

Si $s^2 - rt < 0$, la conique sera une ellipse. Il faudra prendre au second membre le signe de r ou de t.

Si $s^2 - rt > 0$, la courbe représentative se compose de deux hyperboles conjuguées. Pour l'une d'elles, on aura, par exemple, $R_0 = +\rho^2$, pour l'autre $R_0 = -\rho^2$.

Les rayons de courbure maximum et minimum correspondent aux axes de cette conique. ρ, σ_2 On reconnaît dans cette conique la courbe que nous avons appelée « indicatrice » de la surface en M. *Au signe près, le rayon de courbure est représenté par le carré du rayon vecteur d'un point de l'indicatrice.*

Si R_1 et R_2 ont le même signe, R_0 a le même signe et varie entre R_1 et R_2. En particulier, si $R_1 = R_2$, on a constamment $R_0 = R_1$. Toutes les sections ont même rayon de courbure. Dans ce cas l'indicatrice est un cercle : le point est un ombilic de la surface.

Si R_1 et R_2 sont de signes contraires, o il existe deux valeurs de ω pour lesquelles $\frac{1}{R_0}$ s'annule et par conséquent R_0 augmente indéfiniment

$$\operatorname{tg}^2\omega = \sqrt{\frac{-R_1}{R_2}}.$$

Ces directions, qui sont les directions asymptotiques de l'indicatrice, correspondent à des sections ψ pour lesquelles M est un point d'inflexion.

Enfin, si l'une des courbures, $\frac{1}{R_2}$, par exemple, est nulle, on a dans ce cas

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\cos^2\omega}{R_1}.$$

L'indicatrice se compose de deux droites parallèles.

Détermination des directions principales. — Nous avons trouvé

$$\frac{1}{R_0} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Pour déterminer les directions principales, γ, α il suffit de remarquer que ce sont celles pour lesquelles $\frac{1}{R_0}$ est maximum ou minimum.

δ_1

Pour ces valeurs, on a donc

$$r\alpha d\alpha + s(\alpha d\beta + \beta d\alpha) + t\beta d\beta = 0. \tag{9}$$

Mais d'ailleurs α et β sont liés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2 = 1.$$

On en déduit

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + (p\alpha + q\beta)(p d\alpha + q d\beta) = 0. \tag{10}$$

α

En éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre (9) et (10), on obtient

$$\frac{r\alpha + s\beta}{\alpha(1 + p^2) + pq\beta} = \frac{s\alpha + t\beta}{\beta(1 + q^2) + pq\alpha}. \tag{11}$$

On obtient cette équation, comme on le voit, ρ en égalant les rapports des dérivées des deux formes

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient l'équation du second degré en $\frac{\beta}{\alpha}$

$$(11)\quad \alpha^2[(1+p^2)s - pqr] + \alpha\beta[(1+p^2)t - (1+q^2)r] - \beta^2[(1+q^2)s - pqt] = 0.$$

Pour chacune des racines, on aurait la valeur de $\frac{1}{R}$ correspondante, c'est-à-dire les courbures principales.

α, ν Il est aisé de former l'équation du second degré admettant pour racines les deux valeurs de $\frac{1}{R}$.

La valeur commune des rapports (II) est

$$\frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \times \frac{1}{R}.$$

Posons pour abréger

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R}.$$

δ_1 Les rapports (11) égalés à ρ donnent, en chassant les dénominateurs,

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha[(1 + p^2)\rho - r] + \beta(pq\rho - s) = 0 \\ \alpha[pq\rho - s] + \beta[(1 + q^2)\rho - t] = 0. \end{cases}$$

α En éliminant $\frac{\beta}{\alpha}$, on obtient

$$(13) \quad [(1 + p^2)\rho - r][(1 + q^2)\rho - t] - (pq\rho - s)^2 = 0,$$

ou

$$(13') \quad (1 + p^2 + q^2)\rho^2 - [(1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs]\rho + rt - s^2 = 0.$$

Il suffit d'y remplacer ρ par son expression $\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R}$.

On a en particulier

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$\frac{1}{R_1 R_2}$ s'appelle la « courbure totale » de la surface au point M (Gauss).

Ombilics. — Cherchons les conditions pour qu'un point soit ombilic. σ_2, β En ce point, les directions principales sont indéterminées. L'équation du second degré en $\frac{\beta}{\alpha}$ doit disparaître.

d On en déduit

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}.$$

On pourrait également écrire σ_2, ξ que l'équation du second degré en ρ admet une racine double. ψ, ρ Il semblerait que l'on ne doive obtenir ainsi qu'une seule condition.

Mais dans l'équation (13) en ρ, α, ρ il faut remarquer que, si l'on substitue à ρ, les valeurs $\frac{r}{1+p^2}$, $\frac{t}{1+q^2}$ on obtient des résultats négatifs. δ_1 Le coefficient de ρ^2 étant d'ailleurs positif, si par exemple

$$\frac{r}{1+p^2} < \frac{t}{1+q^2},$$

on voit qu'il y a une racine comprise entre $-\infty$ et $\frac{r}{1+p^2}$ et une autre entre $\frac{t}{1+q^2}$ et $+\infty$.

ω Les deux racines ne pourraient donc être égales que si

$$\rho = \frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2},$$

et alors, on a de plus $\rho = \frac{s}{pq}$.

On retrouve donc les conditions précédentes.

Directions principales : Cas où la surface est donnée sous forme paramétrique. — Nous allons établir les résultats précédents, chercher l'expression de la courbure d'une courbe tracée sur la surface, déterminer les directions principales, lorsque la surface est donnée sous forme paramétrique

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

δ_1, ξ Nous obtiendrons une courbe tracée sur la surface en supposant que u et v sont fonctions d'un même paramètre t, ou en établissant une relation entre u et v.

Cette relation étant supposée donnée, la courbe est alors bien déterminée. α, ξ Proposons-nous de construire le trièdre fondamental en un point M de cette courbe, et de déterminer les éléments géométriques.

δ_1 Nous désignerons par α, α', α'' les cosinus directeurs de la

tangente, par β, β', β'' ceux de la normale principale, par γ, γ', γ'' ceux de la binormale, enfin par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface.

δ_1

On a immédiatement α. α', α''. π Car si ds désigne l'élément d'arc de cette courbe

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}},$$

On a des expressions analogues pour α', α''.

ρ

Comme nous l'avons déjà indiqué, ces expressions ne dépendent que du rapport $\frac{dv}{du}$, de même que, dans un plan, σ_2 le coefficient angulaire de la tangente à une courbe ne dépend que de $\frac{dy}{dx}$.

La normale à la surface MN, la normale principale Mn et la

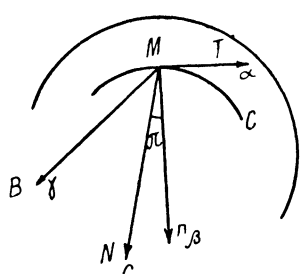


Fig. 26.

ρ binormale MB sont dans un même plan perpendiculaire à la tangente. La normale à la surface étant ν, ξ bien déterminée et fixe il est naturel d'introduire l'angle π de Mn avec MN.

δ_1

On a alors

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \cos\pi = c\beta + c'\beta' + c''\beta'' \\ \pm \sin\pi = c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma''. \end{cases}$$

Nous avons ainsi exprimé toutes les conditions du problème et tous les résultats ne peuvent que se déduire des formules (I) (II), en tenant compte des formules de Serret.

Si nous désignons par R le rayon de courbure de la courbe,

σ_2

on a, d'après ces formules

$$\frac{d\alpha}{\beta} = \frac{d\alpha'}{\beta'} = \frac{d\alpha''}{\beta''} = \frac{ds}{R}.$$

Par suite

$$\frac{\cos\pi}{R} = \frac{c d\alpha + c' d\alpha' + c'' d\alpha''}{ds}.$$

Pour calculer cette expression, il serait trop compliqué de différentier séparément les expressions (I) de α, α', α''.

ρ, ψ

Elles introduiraient, *semble-t-il*, les différentielles secondes de u, v.

ν, σ_2

Comme nous l'avons déjà fait, nous tâcherons d'obtenir le groupement qui figure au numérateur.

α_1, σ_2

Il faut évidemment partir de la condition

$$c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' = 0.$$

En la différentiant, nous obtenons

$$cd\alpha + c'd\alpha' + c''d\alpha'' = -(\alpha dc + \alpha' dc' + \alpha'' dc'').$$

ρ

On constate immédiatement que les différentielles secondes

ζ_1

de u, v (qui s'introduisaient par $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$) ont disparu. D'ailleurs le second membre se calcule facilement, car il est égal à

$$-\frac{dcdx + dc'dy + dc''dz}{ds}.$$

ρ

On retrouve donc la deuxième forme quadratique fondamentale que nous avons introduite au chapitre précédent. Nous avons posé

$$-(dcdx + dc'dy + dc''dz) = \frac{D}{H}du^2 + \frac{2D'}{H}dudv + \frac{D''}{H}dv^2.$$

ω

On a donc la première formule

$$\frac{\cos\pi}{R} = \frac{1}{H}\frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \tag{1'}$$

Avant d'en tirer des déductions importantes, calculons $\sin\pi$

$$\pm\sin\pi = c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma''.$$

σ_2

D'après la définition du trièdre fondamental, on a

$$\gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'',$$

et des formules analogues pour γ', γ''.

ω

On a donc $\sin\pi$ sous forme de déterminant

$$\pm\sin\pi = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

δ_1 Nous éliminerons d'autre part β, β', β'' χ au moyen des formules de Serret : $dx = \frac{\zeta}{R} d\sigma$, etc... On aura

$$\pm \frac{\sin \pi}{R} d\sigma = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ dx & dx' & dx'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

Pour calculer rapidement cette expression, nous sommes obligé *avec regret*, d'adopter un artifice de calcul.

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

ρ Si l'on remarque que l'on a $c = \frac{1}{H} D^{''}_{y,z}$, etc., on voit que, ce déterminant est précisément égal à H.

δ_1, o Multiplions les deux déterminants. Nous aurons

$$\pm \frac{\sin \pi}{R} H d\sigma = \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ dx & dx' & dx'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

La suite du calcul est alors tout à fait normale.

Si nous multiplions ces deux déterminants ligne par ligne, dans le déterminant produit, o les éléments de la première ligne seront

$$c^2 + c'^2 + c''^2, \quad c\frac{\partial x}{\partial u} + c'\frac{\partial y}{\partial u} + c''\frac{\partial z}{\partial u}, \quad c\frac{\partial x}{\partial v} + c'\frac{\partial y}{\partial v} + c''\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Le premier élément est égal à un. Les deux autres sont nuls.

r Le déterminant produit se réduit donc à un déterminant du second ordre.

$$\begin{vmatrix} \alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \alpha'\frac{\partial x}{\partial u} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial u}, & \alpha\frac{\partial x}{\partial v} + \alpha'\frac{\partial y}{\partial v} + \alpha''\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}dx + \frac{\partial y}{\partial u}dx' + \frac{\partial z}{\partial u}dx'', & \frac{\partial x}{\partial v}dx + \frac{\partial y}{\partial v}dx' + \frac{\partial z}{\partial v}dx'' \end{vmatrix}.$$

Nous allons calculer séparément chacun de ces éléments.

δ_1

Pour les éléments de la première ligne, le résultat est

o

immédiat.

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial u}+\alpha'\frac{\partial y}{\partial u}+\alpha''\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}dx+\frac{\partial y}{\partial u}dy+\frac{\partial z}{\partial u}dz\right)$$
$$=\frac{1}{ds}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{E\,du+F\,dv}{ds}.$$

Le deuxième élément de la première ligne sera de même $\frac{F\,du+G\,dv}{ds}$.

δ_1

Prenons maintenant les éléments de la deuxième ligne.

Le premier est

$$\frac{\partial x}{\partial u}d\alpha+\frac{\partial y}{\partial u}d\alpha'+\frac{\partial z}{\partial u}d\alpha''.$$

ρ, R_1

Nous introduirons ce groupement, en différentiant l'élément correspondant de la première ligne.

Nous aurons

$$d\frac{E\,du+F\,dv}{ds}=\frac{\partial x}{\partial u}d\alpha+\frac{\partial y}{\partial u}d\alpha'+\frac{\partial z}{\partial u}d\alpha''+\left[\alpha d\frac{\partial x}{\partial u}+\alpha' d\frac{\partial y}{\partial u}+\alpha'' d\frac{\partial z}{\partial u}\right].$$

δ_1

La deuxième parenthèse est

$$\sum\alpha d\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{ds}\sum d\alpha d\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{ds}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du+\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}dv\right).$$

En ordonnant le deuxième membre par rapport à du, dv, la somme s'écrit

$$du^2\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+du\,dv\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)+dv^2\sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}.$$

ρ, σ_2

Mais nous avons déjà calculé ces diverses sommes.

Les coefficients de du^2, $du\,dv$, dv^2 sont visiblement

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},\qquad \frac{\partial F}{\partial u},\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

On a donc

$$\sum\alpha d\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2ds}\left[\frac{\partial E}{\partial u}du^2+2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv+\frac{\partial G}{\partial u}dv^2\right]$$

ω

et par suite

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}d\alpha=d\frac{E\,du+F\,dv}{ds}-\frac{1}{2ds}\left[\frac{\partial E}{\partial u}du^2+2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv+\frac{\partial G}{\partial u}dv^2\right]=L_1.$$

Le dernier élément du déterminant est de même

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} dx = d\frac{Edu + Gdv}{ds} - \frac{1}{2ds}\left[\frac{\partial E}{\partial v} du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v} du dv + \frac{\partial G}{dv} dv^2\right] = L_2.$$

On a donc finalement

$$(2') \qquad \pm \frac{\sin\pi}{R} = \frac{1}{H ds} \begin{vmatrix} \frac{Edu + Fdv}{ds} & \frac{Fdu + Gdv}{ds} \\ L_1 & L_2 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant tirer les conséquences des formules (1') (2').

La première montre que $\frac{\cos\pi}{R}$ s'exprime au moyen des deux formes quadratiques fondamentales de la surface. Elle est indépendante des différentielles secondes de u, v. *Elle ne dépend que de la direction de la tangente à la courbe.* Si donc, deux courbes de la surface sont tangentes, en désignant par des lettres accentuées les éléments relatifs à la deuxième, on aura

$$\frac{\cos\pi}{R} = \frac{\cos\pi'}{R'}.$$

On retrouve le théorème de Meusnier ; ce théorème ramène l'étude de la courbure d'une courbe quelconque de la surface à celle de la section normale passant par la même tangente.

Si la courbe est une section normale de la surface, on a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{H}\frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Directions principales. — On obtiendra les directions principales en écrivant que $\frac{1}{R}$ passe par un extrêmum, c'est-à-dire

$$\frac{Ddu + D'dv}{Edu + Fdv} = \frac{D'du + D''dv}{Fdu + Gdv} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{H}{R}.$$

On a donc les deux équations

$$Edu + Fdv - \frac{R}{H}(Ddu + D'dv) = 0$$

$$Fdu + Gdv - \frac{R}{H}(D'du + D''dv) = 0.$$

En éliminant entre ces deux équations soit R, soit $\frac{dv}{du}$, on obtiendra l'équation aux directions principales, ou l'équation qui donne R.

L'équation aux directions principales est

$$\frac{Ddu + D'dv}{Edu + Fdv} = \frac{D'du + D''dv}{Fdu + Gdv}.$$

On l'obtient en égalant les rapports des dérivées par rapport à du, dv des deux formes quadratiques fondamentales.

L'équation aux rayons de courbure principaux de la surface est

$$\begin{vmatrix} E - R\frac{D}{H} & F - R\frac{D'}{H} \\ F - R\frac{D'}{H} & G - R\frac{D''}{H} \end{vmatrix} = 0.$$

Si $\cos\pi = 0$,

$$dcdx + dc'dy + dc''dz = 0 \qquad \text{ou} \qquad Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0.$$

En intégrant cette équation différentielle, on obtient une relation entre u et v dépendant d'une constante arbitraire, qui définit une famille de courbes, telles qu'en tout point de chacune d'elles, l'angle de la normale principale et de la normale à la surface soit droit, c'est-à-dire telles qu'en tout point, le *plan osculateur soit tangent à la surface*. Ces courbes sont les « lignes asymptotiques » de la surface. Nous reviendrons sur ce sujet.

Les directions asymptotiques sont donc définies par l'équation différentielle

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0.$$

D, D', D'', étant les déterminants dont nous avons donné l'expression.

Courbure géodésique. — Considérons maintenant la deuxième expression (2'). On constate que $\frac{\sin\pi}{R}$ dépend des différentielles secondes de u, v, mais $\frac{1}{R_1}$ ne dépend que des coefficients E, F, G et des dérivées de ces fonctions. Si donc les coordonnées des points de deux surfaces sont exprimées au

moyen des mêmes paramètres u, v, et si, pour ces surfaces, les expressions de l'élément d'arc ds^2 sont les mêmes, si l'on prend sur ces deux surfaces, des courbes correspondant aux mêmes variations de u et v, en des points correspondants des deux courbes, les expressions de $\frac{\sin\pi}{R}$ auront même valeur. Nous allons voir que cette expression est celle de la « courbure géodésique » de la courbe.

Or, si deux surfaces ont même ds^2, on dit qu'elles sont « applicables » l'une sur l'autre, ou que l'une d'elles se déduit de l'autre par « déformation ». On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsqu'on déforme une surface, la courbure géodésique d'une courbe quelconque de la surface ne varie pas.*

Considérons une courbe de la surface ayant MT pour tangente en M. Soit P le plan osculateur de cette courbe.

Menons la normale MN à la surface. Soit C_n le centre de courbure de la section normale MNT. Soit C le centre de courbure de la section considérée.

D'après le théorème de Meusnier, on l'obtiendra en menant de C_n la perpendiculaire sur le plan P.

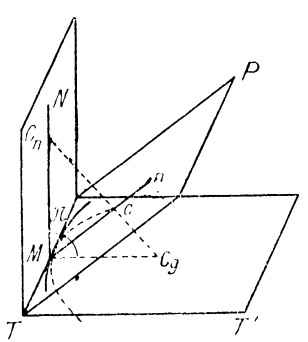


Fig. 27.

Considérons, d'autre part, la projection de la courbe sur le plan tangent, et appliquons le théorème de Meusnier à la courbe et au cylindre qui projette cette courbe. La section normale de ce cylindre est la section par le plan tangent. Le centre de courbure C_g de cette section doit être tel, que, si on le projette sur P, on doit obtenir C.

Ce point C_g s'obtiendra donc en prolongeant C_nC jusqu'à sa rencontre avec le plan tangent.

Ainsi le centre de courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent est C_g. *Les trois centres sont une même droite, l'axe du plan osculateur de la courbe.*

Désignons par R, R_n, R_g les rayons de courbure de la courbe, de la section principale, de la projection sur le plan tangent.

δ_1, τ

Nous aurons

$$R = R_n \cos\pi, \qquad R = R_g \sin\pi.$$

On a donc

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\sin\pi}{R}.$$

L'expression $\frac{1}{R}\sin\pi$ porte le nom de « courbure géodésique » de la courbe.

o

Elle représente donc la courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent. Elle reste constante si l'on déforme la surface.

δ_1, ξ

Le rayon de courbure géodésique est infini si $\sin\pi = 0$, c'est-à-dire si le plan osculateur à la courbe est normal à la surface. On appelle « ligne géodésique » d'une surface une courbe tracée sur la surface telle qu'en tout point le plan osculateur soit normal à la surface.

III. — DIRECTIONS CONJUGUÉES. — LIGNES ASYMPTOTIQUES

Directions conjuguées. — Supposons que le point M se déplace sur une surface suivant une direction MM'. Considérons les plans tangents à la surface en tous les points de cet élément de courbe.

α

Nous allons étudier la caractéristique de ce plan tangent.

ρ

Cette droite $M\mu$, intersection de deux plans tangents infiniment voisins, est perpendiculaire aux deux normales en M et en M'.

Nous prendrons d'abord la surface sous la forme $z = f(x,y)$. Nous désignerons par la lettre d, un accroissement quand on se déplace dans la direction MM', par δ, un accroissement quand on se déplace dans la direction $M\mu$: dx, dy, dz, sont donc les coefficients de direction de MM' ; δx, δy, δz, ceux de $M\mu$.

δ_1

D'après la remarque que nous avons faite, on aura simultanément

$$p\delta x + q\delta y - \delta z = 0, \qquad (p + dp)\delta x + (q + dq)\delta y - \delta z = 0.$$

En retranchant ces deux relations, il reste simplement

$$\delta x dp + \delta y dq = 0$$

ou

$$\delta x(r dx + s dy) + \delta y(s dx + t dy) = 0$$

$$r dx \delta x + s(dx \delta y + dy \delta x) + t dy \delta y = 0. \tag{1}$$

On constate que *cette relation est symétrique en* dx, et δx, dy et δy.

Si donc, on considérait la caractéristique du plan tangent quand le point M se déplace dans la direction $M\mu(\delta x, \delta y, \delta z)$, on retrouverait la direction MM′.

Il y a donc réciprocité entre ces deux directions : elles sont appelées « directions conjuguées ».

Sous la forme (1), et en se rappelant l'équation de l'indicatrice de la surface au point M,

$$r x^2 + 2sxy + t y^2 = \pm 1,$$

on reconnaît que les deux directions conjuguées sont conjuguées par rapport à la conique indicatrice.

Supposons maintenant la surface donnée sous forme paramétrique.

Désignons par U, V, W un système quelconque de paramètres directeurs de la normale ; si δx, δy, δz sont les paramètres directeurs de la caractéristique dans le déplacement dx, dy, dz, on devra avoir simultanément

$$\text{(I)} \quad U\delta x + V\delta y + W\delta z = 0, \quad (U + dU)\delta x + (V + dV)\delta y + (W + dW)\delta z = 0$$

et par suite en les retranchant

$$dU\delta x + dV\delta y + dW\delta z = 0. \tag{2}$$

On peut montrer que cette équation ne change pas si l'on permute les signes d et δ.

Si l'on différentie la première des relations (I) quand on se déplace dans la direction MM′, on aura

$$dU\delta x + dV\delta y + dW\delta z + Ud\delta x + Vd\delta y + Wd\delta z = 0.$$

Mais, pour une fonction quelconque $f(u, v)$, on a évidemment

$$d\delta f = \delta df.$$

Cela revient en effet à intervertir l'ordre des dérivations. On peut donc écrire

$$d\mathrm{U}\delta x + d\mathrm{V}\delta y + d\mathrm{W}\delta z + \mathrm{U}\delta dx + \mathrm{V}\delta dy + \mathrm{W}\delta dz = 0,$$

et par symétrie

$$\delta\mathrm{U}dx + \delta\mathrm{V}dy + \delta\mathrm{W}dz = d\mathrm{U}\delta x + d\mathrm{V}\delta y + d\mathrm{W}\delta z = 0. \tag{2'}$$

Les directions sont donc bien conjuguées.

Directions asymptotiques. — Ce sont les directions des asymptotes de l'indicatrice. Ce sont deux directions conjuguées et confondues. Dans la relation (1), on doit donc remplacer les δ par des d et écrire

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0. \tag{3}$$

De même d'après (2')

$$d\mathrm{U}dx + d\mathrm{V}dy + d\mathrm{W}dz = 0. \tag{4}$$

Directions principales. — Ce sont deux directions conjuguées et rectangulaires.

On a donc

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0,$$

et

$$d\mathrm{U}\delta x + d\mathrm{V}\delta y + d\mathrm{W}\delta z = 0.$$

Comme de plus on a

$$\mathrm{U}\delta x + \mathrm{V}\delta y + \mathrm{W}\delta z = 0,$$

on en déduit

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \mathrm{U} & \mathrm{V} & \mathrm{W} \\ d\mathrm{U} & d\mathrm{V} & d\mathrm{W} \end{vmatrix} = 0.$$

Rappelons que U, V, W, désignent un système quelconque de paramètres directeurs de la normale. En particulier, on peut prendre les cosinus directeurs c, c', c''.

Nous retrouverons ces équations.

Lignes asymptotiques. — On appelle « ligne asymptotique » d'une surface une courbe telle que le plan osculateur en chaque point soit tangent à la surface.

Nous supposerons d'abord l'équation de la surface donnée sous forme paramétrique

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Si nous supposons établie la relation entre u et v, correspondant à une ligne asymptotique, le plan osculateur sera défini par la direction dx, dy, dz de la tangente et la direction de la tangente infiniment voisine $dx + d^2x$, etc...

Si c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale à la surface, on sait qu'ils ont pour expression

$$\frac{c}{\mathrm{D}^{u,v}_{y,z}} = \frac{c'}{\mathrm{D}^{u,v}_{z,x}} = \frac{c''}{\mathrm{D}^{u,v}_{x,y}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}.$$

On doit avoir

$$c\,dx + c'dy + c''dz = 0 \tag{1}$$

$$c(dx + d^2x) + c'(dy + d^2y) + c''(dz + d^2z) = 0. \tag{2}$$

En tenant compte de (1), l'équation (2) se réduit à

$$cd^2x + c'd^2y + c''d^2z = 0. \tag{2'}$$

La première est identiquement satisfaite. L'équation (2′) est donc la condition de définition des lignes asymptotiques.

En différentiant (1) et tenant compte de (2′), on peut remplacer (2′) par

$$dc\,dx + dc'dy + dc''dz = 0. \tag{3}$$

Cette relation est plus simple, parce qu'elle ne renferme pas les différentielles secondes qui ont ainsi disparu. Or nous avons déjà considéré *a priori* la forme quadratique

$$dc\,dx + dc'dy + dc''dz,$$

qui est homogène et du second degré en du, dv. Nous l'avons mise sous la forme

$$-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{II}}du^2 - 2\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{II}}du\,dv - \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{II}}dv^2$$

et nous avons trouvé les expressions de D, D′, D″ sous forme de déterminants

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

et des formules analogues pour D′, D″, les éléments de la première ligne étant remplacés soit par les dérivées secondes $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ etc. pour D′, soit par les dérivées $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ etc. pour D″.

Ces déterminants étant formés, on a donc pour équation définissant les lignes asymptotiques

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0. \tag{4}$$

Si l'on résoud l'équation du second degré en $\frac{dv}{du}$, on obtient deux solutions

$$\frac{dv}{du} = \lambda_1(u, v), \qquad \frac{dv}{du} = \lambda_2(u, v).$$

Si l'on prend, par exemple, la première de ces équations différentielles, on sait que la solution générale dépend d'une constante arbitraire. Sous quelques réserves, de caractère très général, il existe une solution de l'équation qui se réduit à v_0 pour $u = u_0$. La ligne asymptotique correspondante passe alors par le point u_0, v_0. Il en est de même des solutions de la deuxième équation. Donc :

THÉORÈME. — *Les lignes asymptotiques de la surface constituent deux familles de courbes.*

Par tout point de la surface passe une courbe et une seule de chacune des deux familles.

Cas où l'équation de la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$.

On pourrait ramener ce cas au cas précédent en posant

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v),$$

et calculant les trois déterminants. Mais il est plus simple d'établir directement l'équation dans ce cas.

Les paramètres directeurs de la normale sont p, q, -1.

Il faut exprimer que cette direction est perpendiculaire à la tangente, et à la tangente infiniment voisine.

On a donc

$$pdx + qdy - dz = 0$$
$$p(dx + d^2x) + q(dy + d^2y) - (dz + d^2z) = 0.$$

La première est identiquement satisfaite et la deuxième se réduit à

$$pd^2x + qd^2y - d^2z = 0. \tag{5}$$

Cette forme ne suppose pas que x et y soient variables indépendantes. Comme dans le cas précédent, nous pouvons la simplifier en différentiant la première des équations et tenant compte de (5). Il restera simplement

$$dpdx + dqdy = 0. \tag{5'}$$

Telle est donc, dans ce cas, l'équation très simple des lignes asymptotiques.

D'ailleurs en désignant par r, s, t, les dérivées partielles secondes de $z = f(x, y)$

$$dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy;$$

l'équation (5') prend la forme équivalente

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0, \tag{6}$$

quelles que soient les variables indépendantes.

On reconnaît sous cette forme, l'équation qui définit en chaque point les directions des asymptotes (réelles ou imaginaires) de l'indicatrice. D'où le nom de lignes « asymptotiques ». On peut donc définir une ligne asymptotique comme une *courbe tangente en chaque point, à une des directions asymptotiques de l'indicatrice.*

Comme dans le cas de l'équation en $\frac{dv}{du}$, cette équation (6) se résoud en deux

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y).$$

L'intégration de chacune de ces équations différentielles introduira une constante arbitraire. Par tout point de la surface, passe une ligne asymptotique de chacune des deux familles.

Dans le cas où x et y sont les variables indépendantes, l'équation (5) prend la forme particulièrement simple

$$d^2z = 0.$$

En résumé :

Règle pratique. — 1° Si la surface est donnée sous forme paramétrique, calculer les trois déterminants D, D′, D″, et écrire l'équation

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0.$$

2° Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x,y)$, appliquer l'une ou l'autre des équations

$$d^2z = 0, \qquad dpdx + dqdy = 0, \qquad rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0 ;$$

la première seulement suppose que x et y sont les variables indépendantes.

Remarque. — Il est bien évident que la propriété des lignes asymptotiques est essentiellement projective. Si l'on effectue sur les coordonnées d'un point d'une surface une transformation homographique quelconque, les lignes asymptotiques de la deuxième surface sont les transformées des lignes asymptotiques de la première. Car, par cette transformation, un plan tangent se transforme en plan tangent de la surface transformée, et un plan osculateur d'une courbe, limite d'un plan passant par trois points infiniment voisins de la courbe, en plan osculateur de la courbe transformée.

Applications. — *Soit l'hyperboloïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

On a ici

$$p = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}, \qquad q = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}.$$

Nous allons appliquer la forme

$$dpdx + dqdy = 0.$$

On a immédiatement

$$b^2dx(zdx - xdz) + a^2dy(zdy - ydz) = 0. \tag{2}$$

En divisant par a^2b^2z

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} - \frac{dz}{z}\left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2}\right) = 0. \tag{2'}$$

Or, de l'équation de la surface, on déduit

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} - \frac{zdz}{c^2} = 0. \tag{3}$$

En substituant, il vient simplement

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} - \frac{dz^2}{c^2} = 0, \tag{4}$$

équation qui est symétrique en x, y, z, comme il fallait s'y attendre.

Si l'on remplace dz par son expression tirée de (3), on aura l'équation de la projection des courbes sur le plan des xy

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}\right) - \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2}\right)^2 = 0,$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{(xdy - ydx)^2}{a^2b^2} = \frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2}.$$

Si nous posons $\frac{dy}{dx} = y'$

$$(xy' - y)^2 = a^2y'^2 + b^2.$$

On obtient donc une équation de Clairaut. La solution générale s'obtient en posant $y' = \lambda = \text{const.}$

$$(\lambda x - y)^2 = a^2\lambda^2 + b^2.$$

Elle se décompose donc en un double système de droites. Ce sont les projections des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde.

La solution singulière, enveloppe des solutions générales s'obtiendra en écrivant que l'équation en λ a une racine double

$$x^2y^2 + (a^2 - x^2)(y^2 - b^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

C'est l'ellipse de gorge de l'hyperboloïde.

Ces résultats étaient du reste évidents.

2° *Equation des lignes asymptotiques de la surface* $z = y \sin x$.

Nous appliquerons soit l'équation $d^2z = 0$, soit l'équation

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0.$$

On a par exemple

$$dz = \sin x dy + y \cos x dx.$$

En supposant x et y variables indépendantes,

$$d^2z = 2 \cos x dx dy - y \sin x dx^2 = 0.$$

On a la solution $dx = 0$, $x = \text{const.}$, qui donne les génératrices rectilignes de la surface, et l'équation

$$2 \cos x dy - y \sin x dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2 \frac{dy}{y} - \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0.$$

En intégrant

$$2 \mathrm{L} y + \mathrm{L} \cos x = \mathrm{L}\, \text{const.} \qquad y^2 \cos x = \text{const.} \qquad \text{avec} \qquad z = y \sin x.$$

3° Déterminons enfin *les lignes asymptotiques d'une surface de révolution.*

On peut prendre pour équations paramétriques

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = \psi(u).$$

On pourrait former les trois déterminants D, D', D''.

Calculons les paramètres directeurs de la normale. On a

$$\begin{aligned} x'_u &= \cos v, & y'_u &= \sin v, & z'_u &= \psi'(u) \\ x'_v &= -u \sin v, & y'_v &= u \cos v, & z'_v &= 0. \end{aligned}$$

Les paramètres directeurs de la normale sont

$$(u) \qquad -u \cos v \psi'(u), \qquad -u \sin v \psi'(u), \qquad u$$

On peut donc prendre

$$\mathrm{U} = \psi'(u) \cos v, \qquad \mathrm{V} = \psi'(u) \sin v, \qquad \mathrm{W} = -1$$

Si donc nous appliquons l'équation

$$d\mathrm{U} dx + d\mathrm{V} dy + d\mathrm{W} dz = 0,$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\varphi du - u\sin\varphi d\varphi)(\psi''\cos\varphi du - \psi'\sin\varphi d\varphi)\\ &+(\sin\varphi du + u\cos\varphi d\varphi)(\psi''\sin\varphi du + \psi'\cos\varphi d\varphi)\end{aligned}\right\} = 0.$$

En simplifiant

$$\psi'' du^2 + u\psi' d\varphi^2 = 0, \qquad \frac{d\varphi}{du} = \pm\sqrt{\frac{-\psi''(u)}{u\psi'(u)}}.$$

On est ramené à une quadrature.

IV. — LIGNES DE COURBURE

On appelle « ligne de courbure » d'une surface une courbe de la surface telle que les normales à la surface en tous les points de cette courbe forment une surface développable.

Cas où la surface est sous la forme $z = f(x,y)$.

Les équations de la normale en un point sont

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

ou

$$\text{(I)} \qquad X + pZ = x + pz, \qquad Y + qZ = y + qz.$$

Les équations de ces droites dépendent de deux paramètres x, y (z étant supposé remplacé en fonction de x, y).

Si l'on suppose établie la relation entre x, y telle que le point décrive une ligne de courbure, ces équations ne dépendront plus que d'un seul paramètre. Pour que ces droites forment une surface développable, il faut que

$$\frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq}$$

ou

$$\text{(2)} \qquad \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}.$$

Mais

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy.$$

En substituant, on a donc

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} (1+p^2)\,dx + pq\,dy & pq\,dx + (1+q^2)\,dy \\ r\,dx + s\,dy & s\,dx + t\,dy \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des projections des lignes de courbure sur le plan des xy.

Si l'on remplace dx, dy par α, β, coefficients directeurs de la tangente, on obtient

$$\begin{vmatrix} (1+p^2)\alpha + pq\beta & pq\alpha + (1+q^2)\beta \\ r\alpha + s\beta & s\alpha + t\beta \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît l'équation qui définit à chaque instant les directions principales. On peut donc encore définir une ligne de courbure une courbe qui en chacun de ses points est tangente à l'une des directions principales de la surface.

L'équation (3) est homogène et du second degré en dx, dy. En résolvant cette équation du second degré en $\frac{dy}{dx}$, on obtient deux équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y).$$

De même que pour les lignes asymptotiques, on peut dire :

THÉORÈME. — *Les lignes de courbure d'une surface forment une double famille dont l'équation dépend chacune d'une constante arbitraire. Par chaque point de la surface, passe une courbe et une seule de chaque famille. Ces courbes sont tangentes en ce point aux deux directions principales.*

Les lignes de courbure tracent donc sur la surface un réseau de courbes qui se coupent deux à deux à angle droit.

Les normales le long d'une ligne de courbure forment une surface développable qui s'appelle une « normalie ». Il est naturel de chercher l'arête de rebroussement de cette développable. Nous allons à cet effet chercher le point de rencontre d'une normale

avec la normale infiniment voisine. Il suffit pour cela de différentier les équations de la normale. On obtient ainsi :

$$Zdp - dx - pdz - zdp = 0$$
$$Zdq - dy - qdz - zdq = 0.$$

Ces deux équations, qui sont compatibles, donnent la valeur de $(Z - z)$

$$Z - z = \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq} = \frac{(1 + p^2)dx + pqdy}{rdx + sdy}.$$

Si l'on désigne par α, β, les coefficients de direction de la tangente dans le plan tangent, dx, dy sont proportionnels à α, β,

$$Z - z = \frac{(1 + p^2)\alpha + pq\beta}{r\alpha + s\beta}.$$

Nous avons vu que, en désignant par R le rayon de courbure de la section principale correspondante, le rapport est égal à

$$\frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

On a donc

$$Z - z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Le point de contact se trouve donc sur la normale à la distance R. Il se confond donc avec le centre de courbure de la section principale correspondante, donc :

THÉORÈME. — *L'arête de rebroussement de chaque normalie est le lieu des centres de courbure principaux correspondant à chaque point.*

La normale en chaque point est tangente, aux arêtes de rebroussement des deux normalies, aux deux centres de courbure principaux relatifs à ce point.

Cas où la surface est donnée sous forme paramétrique. — Supposons que la surface soit donnée sous la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Nous savons que les paramètres directeurs de la normale sont

$$U = D^{u, v}_{y, z}, \qquad V = D^{u, v}_{z, x}, \qquad W = D^{u, v}_{x, y}.$$

Les équations de la normale peuvent être représentées par

$$X = x + U\lambda, \qquad Y = y + V\lambda, \qquad Z = z + W\lambda,$$

λ désignant un paramètre variable.

Si cette normale engendre une surface développable, elle sera tangente en un certain point C à l'arête de rebroussement. Autrement dit, il existera sur cette normale un point C dont le déplacement a lieu suivant la normale elle-même. Pour ce point, on devra donc avoir

$$\frac{dX}{U} = \frac{dY}{V} = \frac{dZ}{W}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d(x + U\lambda)}{U} = \frac{d(y + V\lambda)}{V} = \frac{d(z + W\lambda)}{W}.$$

ou enfin, en simplifiant,

$$\frac{dx + \lambda dU}{U} = \frac{dy + \lambda dV}{V} = \frac{dz + \lambda dW}{W}$$

les différentielles devant être exprimées au moyen de du, dv.

Si l'on éliminait λ entre ces deux équations, on obtiendrait la relation différentielle cherchée entre u, v, du, dv. Pour opérer symétriquement, égalons encore à μ la valeur commune des rapports (1). Nous aurons

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} dx + \lambda dU - \mu U = 0 \\ dy + \lambda dV - \mu V = 0 \\ dz + \lambda dW - \mu W = 0. \end{cases}$$

L'élimination de λ, μ donne l'équation différentielle cherchée

$$\text{(3)} \qquad \begin{vmatrix} dx, & U, & dU \\ dy, & V, & dV \\ dz, & W, & dW \end{vmatrix} = 0.$$

Il faudrait dans ce déterminant faire les substitutions suivantes

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv \text{ etc...}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial u}\,du + \frac{\partial U}{\partial v}\,dv \text{ etc...}$$

L'équation (3) est donc de la forme

$$\mathcal{A}du^2 + 2\mathcal{B}du\,dv + \mathcal{C}dv^2 = 0 \tag{3'}$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ désignant certaines fonctions de u, v.

En résolvant cette équation du second degré en $\frac{dv}{du}$, on obtient deux équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = g_1(u, v), \qquad \frac{dv}{du} = g_2(u, v).$$

La première, par exemple, admettra des solutions de la forme $\lambda(u, v, c) = 0$ dépendant d'une constante arbitraire. On pourra disposer de cette constante de manière que, pour $u = u_0$, v prenne une valeur donnée v_0. La courbe correspondante passera alors par le point u_0, v_0. Il en sera de même de la deuxième équation.

On retrouve les résultats obtenus pour la surface $z = f(x,y)$.

Remarque. — Nous avons pris pour U, V, W un système quelconque de paramètres directeurs de la normale, qui ne sont déterminés qu'à un facteur près. Dans la pratique, on disposera de ce coefficient de proportionnalité de manière à simplifier le plus possible les expressions de U, V, W.

En particulier, si l'on prend les cosinus directeurs de la normale, on aura l'équation

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ dx & dy & dz \\ dc & dc' & dc'' \end{vmatrix} = 0.$$

Equation en fonction des coefficients E, F, G, D, D', D''. — Exprimons cette équation au moyen des fonctions données f, φ, ψ.

Pour y arriver le plus rapidement possible nous emploierons avec regret un artifice dont nous nous sommes déjà servi. Nous multiplierons le déterminant Δ par le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

lequel, comme nous l'avons vu, est égal à $\sqrt{EG - F^2}$. Multiplions les deux déterminants ligne par ligne. Les éléments de la première ligne seront

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \qquad c\frac{\partial x}{\partial u} + c'\frac{\partial y}{\partial u} + c''\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad c\frac{\partial x}{\partial v} + c'\frac{\partial y}{\partial v} + c''\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Or ces deux derniers sont nuls et le premier est égal à un. Les éléments de la deuxième ligne seront

$$\sum c\,dx, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dx, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dx.$$

Ceux de la dernière ligne

$$\sum c\,dc, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dc, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dc.$$

Le déterminant se réduit donc à un déterminant du second ordre

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dx, & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dx \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dc, & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dc \end{vmatrix} = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dx &= \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) = E\,du + F\,dv \\
\sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dx &= \sum \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) = F\,du + G\,dv \\
\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dc &= \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial c}{\partial u}\,du + \frac{\partial c}{\partial v}\,dv\right) = -\frac{D\,du + D'\,dv}{H} \\
\sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dc &= \sum \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial c}{\partial u}\,du + \frac{\partial c}{\partial v}\,dv\right) = -\frac{D'\,du + D''\,dv}{H}.
\end{aligned}$$

En substituant dans (4), on obtient donc l'équation

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv, & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix} = 0$$

On voit que l'équation différentielle des lignes de courbure s'exprime au moyen des coefficients E, F, G, D, D', D'' des deux formes quadratiques fondamentales.

On retrouve bien l'équation obtenue pour les directions principales,

Les éléments de la première ligne sont les demi-dérivées par rapport à du, dv de la première forme quadratique

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Ceux de la deuxième sont les demi-dérivées de la deuxième forme

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2.$$

Les calculs et l'établissement de l'équation des lignes de courbure sont très simplifiés si l'on introduit immédiatement les cosinus directeurs de la normale c, c', c''. Si R désigne la distance MC, les coordonnées de C sont

$$X = x + cR, \qquad Y = y + c'R, \qquad Z = z + c''R.$$

Si C est le point de contact de la normale avec l'arête de rebroussement, le déplacement dx, dy, dz de ce point, quand M décrit la ligne de courbure, doit s'effectuer suivant cette normale elle-même. On en déduit

$$dx + R\frac{dc}{c} + c\,dR = \frac{dy + R\,dc'}{c'} + c'\,dR = \frac{dz + R\,dc''}{c''} + c''\,dR.$$

Ces équations se réduisent à

$$(1) \qquad dx + R\frac{dc}{c} = \frac{dy + R\,dc'}{c'} = \frac{dz + R\,dc''}{c''}.$$

La valeur commune de ces rapports est nulle. — En effet si l'on multiplie les numérateurs et les dénominateurs par c, c', c'' et si l'on ajoute les résultats, on obtient la fraction équivalente

$$\frac{(c\,dx + c'\,dy + c''\,dz) + R(c\,dc + c'\,dc' + c''\,dc'')}{c^2 + c'^2 + c''^2}.$$

Le dénominateur est égal à l'unité, et chacune des parenthèses du numérateur est nulle. On a donc simplement les équations

$$(1') \qquad \begin{cases} dx + R\,dc = 0 \\ dy + R\,dc' = 0 \\ dz + R\,dc'' = 0 \end{cases}$$

équations dite d'Olinde Rodrigues.

Ces équations sont compatibles et se réduisent à deux, en vertu de la combinaison ci-dessus.

Multiplions-les respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ et ajoutons-les ;

on obtient

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} dx + R \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} du + \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv\right) = 0.$$

ou, en tenant compte des expressions de E, F, G, D, D', D''

$$E du + F dv - R \frac{D du + D' dv}{H} = 0.$$

De même en multipliant les équations (I') par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ et les ajoutant, on obtient l'équation

$$F du + G dv - R \frac{D' du + D'' dv}{H} = 0.$$

Si, entre ces deux équations, on élimine R, on obtient

$$\begin{vmatrix} E du + F dv, & F du + G dv \\ D du + D' dv, & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Si, au contraire, on élimine le rapport $\frac{\partial v}{\partial u}$, on obtient

$$\begin{vmatrix} E - R\frac{D}{H}, & F - R\frac{D'}{H} \\ F - R\frac{D'}{H}, & G - R\frac{D''}{H} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

C'est l'équation du second degré qui donne les deux rayons de courbure correspondant aux deux directions principales.

L'équation (5) s'écrit

$$(ED' - FD)du^2 + (ED'' - GD)du dv + (FD'' - GD')dv^2 = 0. \tag{5'}$$

C'est une équation du second degré en $\frac{\partial v}{\partial u}$.

Cherchons si cette équation pourrait être identiquement satisfaite.

Il faudrait pour cela que l'on eût

$$ED' - FD = 0, \qquad ED'' - GD = 0, \qquad FD'' - GD' = 0.$$

Comme E, G sont certainement différents de zéro (surface réelle) ; on en déduit

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G},$$

On démontre que les seules surfaces qui satisfassent à ces conditions sont les plans, les sphères, et les développables isotropes.

Pour le plan et la sphère, toute courbe de la surface est en effet évidemment une ligne de courbure.

Pour une développable isotrope, nous avons vu que la perpendiculaire au plan tangent isotrope est la droite isotrope du plan, c'est-à-dire la génératrice même de la développable. La surface formée des normales en tous les points d'une courbe quelconque de la surface, se confond donc avec la développable elle-même.

Mais les équations, sans être des identités, peuvent être satisfaites pour des systèmes particuliers de valeurs de u, v. Les points correspondants sont les « ombilics » de la surface.

THÉORÈME. — *Les lignes de courbure qui se croisent en chaque point sont rectangulaires et sont les bissectrices des lignes asymptotiques.*

En effet, si pour simplifier, nous supposons que nous ayons pris ces lignes pour lignes de coordonnées, l'équation (5′) devrait être satisfaite pour les valeurs $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

On doit donc avoir

$$ED' - FD = 0, \qquad FD'' - GD' = 0.$$

Si D′ était différent de zéro, comme E et G ne peuvent être nuls, D et D″ ne pourraient être nuls eux-mêmes. On aurait

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

Cette solution est à écarter, comme nous l'avons vu.

Il faut donc que l'on ait $D' = 0$ et par suite $F = 0$.

La condition $F = 0$, montre que, dans ce cas, le ds^2 de la surface se réduit à

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Les courbes coordonnées sont donc rectangulaires.

La condition $D' = 0$ montre que l'équation des lignes asymptotiques se réduit à

$$Ddu^2 + D''dv^2 = 0.$$

Par conséquent, ces lignes forment un faisceau harmonique avec les lignes de courbure. Celles-ci étant rectangulaires, sont donc les bissectrices des lignes asymptotiques.

Equation aux rayons de courbure. — Considérons maintenant l'équation (6).

$$(DD'' - D'^2)R^2 - H(GD + ED'' - 2FD')R + H^2 = 0$$

En désignant par R_1, R_2, les deux rayons de courbure, on a donc

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{H^2} = \frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{GD + FD'' - 2FD'}{H^2}.$$

Le produit $\frac{1}{R_1R_2}$ s'appelle, d'après Gauss, la « courbure totale » de la surface.

La quantité $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ s'appelle la « courbure moyenne ».

En particulier, si $R_1 + R_2 = 0$, les deux rayons de courbure sont égaux et de signes contraires : la surface est dite *surface minima*.

Nous démontrerons que la quantité $DD'' - D'^2$ peut s'exprimer, pour toute surface, au moyen des coefficients E, F, G. Donc :

La courbure totale d'une surface ne dépend donc que du ds^2 de la surface.

Comme nous le verrons, toutes les surfaces qui admettent même expression de l'élément linéaire, sont « applicables » l'une sur l'autre. On obtient donc la propriété remarquable suivante due à Gauss :

THÉORÈME. — *La courbure totale d'une surface ne varie pas quand on « déforme » la surface.*

Règle pratique. — En résumé, pour déterminer les lignes de courbure d'une surface, on emploiera l'une des équations suivantes.

1° Si la surface est donnée sous la forme $z = f(x, y)$

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq} \tag{1}$$

ou

$$\frac{(1 + p^2)dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{(1 + q^2)dy + pq\,dx}{s\,dx + t\,dy}. \tag{1'}$$

2° Si la surface est donnée sous forme paramétrique, en désignant par U, V, W un système quelconque de coefficients directeurs de la normale

$$\begin{vmatrix} \mathrm{U}, & \mathrm{V}, & \mathrm{W} \\ dx, & dy, & dz \\ d\mathrm{U}, & d\mathrm{V}, & d\mathrm{W} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

En particulier, si l'on a formé les expressions des formes quadratiques fondamentales de la surface,

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}du + \mathrm{F}dv, & \mathrm{F}du + \mathrm{G}dv \\ \mathrm{D}du + \mathrm{D}'dv, & \mathrm{G}'du + \mathrm{D}''dv \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

on pourra enfin appliquer les équations d'Olinde Rodrigues

$$dx + \mathrm{R}dc = 0, \qquad dy + \mathrm{R}dc' = 0, \qquad dz + \mathrm{R}dc'' = 0 \tag{4}$$

qui peuvent donner, soit les directions des lignes de courbure, soit les rayons de courbure.

Application I. — *Lignes de courbure d'un ellipsoïde.*

Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Il serait assez pénible d'appliquer l'équation (1') en calculant p, q, r, s, t. Un système simple de coefficients directeurs de la normale est

$$\mathrm{U} = \frac{x}{a^2}, \qquad \mathrm{V} = \frac{y}{b^2}, \qquad \mathrm{W} = \frac{z}{c^2}.$$

Nous allons donc appliquer l'équation (2). On obtient

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ a^2 & b^2 & z^2 \\ dx & dy & dz \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

x, y, z étant liés par l'équation (1).

On voit qu'on a avantage à introduire les variables

$$\text{(i)} \qquad \xi = \frac{x^2}{a^2}, \qquad \eta = \frac{y^2}{b^2}, \qquad \zeta = \frac{z^2}{c^2}.$$

Elles seront en effet liées par la relation simple

$$\text{(1')} \qquad \xi + \eta + \zeta - 1 = 0$$

et d'autre part, en multipliant les colonnes du déterminant (2) par x, y, z, on obtient

$$\text{(2')} \qquad \begin{vmatrix} a^2 d\xi & b^2 d\eta & c^2 d\zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0.$$

En le développant,

$$\text{(2')} \qquad (b^2 - c^2)\xi d\eta d\zeta + (c^2 - a^2)\eta d\zeta d\xi + (a^2 - b^2)\zeta d\xi d\eta = 0.$$

Nous poserons pour abréger

$$b^2 - c^2 = A, \qquad c^2 - a^2 = B, \qquad a^2 - b^2 = C.$$

On aura $A + B + C = 0$

$$A\xi d\eta d\zeta + B\eta d\zeta d\xi + C\zeta d\xi d\eta = 0.$$

En éliminant, par exemple, $\zeta = 1 - \xi - \eta$ $(d\zeta = -d\xi - d\eta)$.

On obtiendra l'équation de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy

$$\text{(3)} \qquad (A\xi d\eta + B\eta d\xi)(d\xi + d\eta) + C d\xi d\eta (\xi + \eta - 1) = 0.$$

Le terme $C d\xi d\eta$ est irréductible avec les autres. Mais il peut y avoir réduction entre les termes $C d\xi d\eta(\xi + \eta)$ et les premiers, en tenant compte de $A + B + C = 0$.

Nous écrivons donc l'équation

$$C d\xi d\eta = (A\xi d\eta + B\eta d\xi)(d\xi + d\eta) - (A + B)(\xi + \eta) d\xi d\eta.$$

Le second membre se simplifie et se réduit à

$$(A d\eta - B d\xi)(\xi d\eta - \eta d\xi).$$

En divisant par $d\xi^2$ et posant $\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'$, on a donc l'équation

$$(A\eta' - B)(\xi\eta' - \eta) - C\eta' = 0$$

ou

$$\xi\eta' - \eta = \frac{C\eta'}{A\eta' - B}.$$

On reconnaît une équation de Clairaut.

On obtiendra la solution générale en remplaçant η' par une constante λ. On obtient

$$(A\lambda - B)(\lambda\xi - \eta) = C\lambda.$$

En revenant aux variables x, y,

$$\lambda\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{C\lambda}{A\lambda - B}. \tag{5}$$

Ce sont des coniques ayant mêmes axes que l'ellipsoïde.

La solution singulière sera l'enveloppe de ces coniques.

L'équation (5) s'écrit

$$A\frac{x^2}{a^2}\lambda^2 - \left(\frac{Bx^2}{a^2} + \frac{Ay^2}{b^2} + C\right)\lambda + B\frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{5'}$$

L'équation de l'enveloppe sera donc

$$\left(\frac{Bx^2}{a^2} + \frac{Ay^2}{b^2} + C\right)^2 - 4AB\frac{x^2y^2}{a^2b^2} = 0$$

ou

$$\frac{Bx^2}{a^2} + \frac{Ay^2}{b^2} + C \pm \frac{2xy}{ab}\sqrt{AB} = 0$$

c'est-à-dire enfin

$$\left(\frac{x}{a}\sqrt{B} \pm \frac{y}{b}\sqrt{A}\right)^2 = -C.$$

L'enveloppe se compose donc d'un système de quatre droites.

2° Considérons encore l'*hélicoïde*, lieu des droites parallèles au plan des xy, s'appuyant sur oz et sur une hélice circulaire. Ces droites sont d'ailleurs les normales principales de l'hélice.

Les équations de l'hélicoïde sont

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = kv.$$

Faisons le tableau des dérivées partielles du premier ordre

$$\begin{array}{lll} \cos\varphi, & \sin\varphi, & o \\ -u\sin\varphi, & u\cos\varphi, & k. \end{array}$$

On peut prendre comme paramètre directeurs de la normale

$$U = k\sin\varphi, \qquad V = -k\cos\varphi, \qquad W = u.$$

En appliquant l'équation (2), on obtient

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi du - u\sin\varphi d\varphi, & \sin\varphi du + u\cos\varphi d\varphi, & k d\varphi \\ k\sin\varphi & -k\cos\varphi & u \\ k\cos\varphi d\varphi & k\sin\varphi d\varphi & du \end{vmatrix} = 0$$

En développant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on trouve simplement

$$(2')\qquad (k^2+u^2)d\varphi^2 - du^2 = 0.$$

Les deux valeurs de $\frac{d\varphi}{du}$ sont donc égales et de signes contraires

$$\frac{d\varphi}{du} = \pm\frac{1}{\sqrt{k^2+u^2}},$$

$$\varphi = \pm L(u+\sqrt{k^2+u^2}).$$

Pour avoir les rayons de courbure, nous appliquerons les équations d'Olinde Rodriguez. Les cosinus directeurs de la normale sont

$$c = \frac{k\sin\varphi}{\sqrt{u^2+k^2}}, \qquad c' = -\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{u^2+k^2}}, \qquad c'' = \frac{u}{\sqrt{u^2+k^2}}.$$

On a donc, par exemple,

$$dz + \mathrm{R}dc'' = 0$$

$$k d\varphi + \mathrm{R}du\frac{k^2}{(u^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ou

$$\mathrm{R} = -\frac{1}{k}(u^2+k^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d\varphi}{du} = \pm\frac{1}{k}(u^2+k^2).$$

Les deux rayons de courbure principaux sont donc, en

tout point égaux et de signes contraires. La surface est une « surface minima ».

On démontre d'ailleurs que l'hélicoïde gauche est la *seule* surface *réglée minima*.

V. — DÉTERMINATION D'UNE SURFACE AU MOYEN DES COEFFICIENTS E, F, G, D, D′, D″

Pour une surface dont les coordonnées x, y, z, sont des fonctions données de deux paramètres u, v, nous avons été amené à considérer « deux formes quadratiques fondamentales » :

1° L'expression de l'élément linéaire

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

2° La forme quadratique

$$dc dx + dc' dy + dc'' dz = -\frac{D}{H} du^2 - 2\frac{D'}{H} du dv - \frac{D''}{H} dv^2.$$

Nous introduisons donc six fonctions E, F, G, D, D′, D″ qui seront bien déterminées quand on connaîtra les fonctions x, y, z de u et v

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

D, D′, D″ sont données par les déterminants connus.

On peut se demander si inversement, il existe des surfaces correspondant à des fonctions E, F, G, D, D′, D″ données, ou bien , à *quelles conditions doivent être assujetties ces fonctions pour qu'il puisse exister des surfaces correspondantes.*

Il semble bien en effet *a priori*, qu'il doive exister des équations de condition, puisque l'on a à déterminer trois fonctions seulement x, y, z, satisfaisant à six équations.

Indications sur la recherche des équations de condition. — Le calcul étant extrêmement ingénieux, nous donnerons quelques indications sur la façon d'établir les équations de condition.

Nous allons introduire non seulement x, y, z, mais les cosinus directeurs c, c', c'' de la normale, et en nous basant sur la définition des fonctions E, F, G, D, D', D'', obtenir des équations de condition plus simples.

Considérons d'abord le système d'équations

$$(I)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A\dfrac{\partial x}{\partial u} + A_1\dfrac{\partial x}{\partial v} + A_2 c \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} = A\dfrac{\partial y}{\partial u} + A_1\dfrac{\partial y}{\partial v} + A_2 c' \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = A\dfrac{\partial z}{\partial u} + A_1\dfrac{\partial z}{\partial v} + A_2 c''. \end{cases}$$

On peut déterminer trois fonctions A, A_1, A_2 par ces équations linéaires : Le déterminant des inconnues est, comme on le sait égal, à $H = \sqrt{EG - F^2}$. Il est différent de zéro.

Géométriquement, cette détermination revient à considérer le segment $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ et à le décomposer suivant la normale à la surface et suivant les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Calcul des A. — En multipliant les équations par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ et les ajoutant, on obtient

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + A_1\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = AE + A_1 F.$$

De même on obtiendrait

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = AF + A_1 G.$$

Enfin, en multipliant les équations par c, c', c'', et les ajoutant, on obtient simplement

$$\sum c\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A_2 = +\frac{D}{H},$$

comme nous l'avons vu.

Dans les deux premières combinaisons, nous remarquons que nous avons déjà calculé les diverses sommes qui figurent aux premiers membres.

Nous avons visiblement

$$AE + A_1F = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial u},$$

$$AF + A_1G = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Nous obtiendrons A, A_1 en résolvant ces deux équations.

Remarquons que ces fonctions ne dépendent que de E, F, G, et des dérivées de E, F, G.

On obtient

$$A = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad A_1 = \frac{-E\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad A_2 = \frac{D}{H}.$$

De même, considérons le deuxième système analogue

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + B_2 c \tag{II}$$

(nous n'écrirons que la première équation). En le traitant de la même façon, nous trouvons

$$B = \frac{G\dfrac{\partial F}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad B_1 = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad B_2 = \frac{D'}{H}.$$

Enfin, en considérant le troisième système

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + C_2 c \tag{III}$$

nous obtiendrons

$$C = \frac{2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad C_1 = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad C_2 = \frac{D''}{H}.$$

Considérons encore le système

$$\frac{\partial c}{\partial u} = m\frac{\partial x}{\partial u} + n\frac{\partial x}{\partial v} + pc, \tag{IV}$$

(et les deux équations correspondantes).

Nous obtiendrons

$$m = \frac{FD' - GD}{H^3}, \qquad n = \frac{FD - ED'}{H^3}, \qquad p = 0.$$

Et enfin pour le système

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial c}{\partial v} = m_1 \frac{\partial x}{\partial u} + n_1 \frac{\partial x}{\partial v} + p_1 c,$$

on trouve

$$m_1 = \frac{\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}'}{\mathrm{H}^2}, \qquad n_1 = \frac{\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}''}{\mathrm{H}^2}, \qquad p_1 = 0.$$

En résumé, des équations de condition imposées (la donnée de E, F, G, D, D', D'') nous avons déduit les quinze équations I, II, III, IV, V auxquelles satisfont les six fonctions (seulement) x, y, z, c, c', c''.

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles, linéaires, par rapport à ces dérivées ; elles sont du second ordre par rapport à x, y, z et du premier par rapport à c, c', c''. De plus, elles sont résolues par rapport aux dérivées d'ordre supérieur.

On a par, exemple,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{A} \frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{A}_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{A}_2 c$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \mathrm{B} \frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{B}_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{B}_2 c.$$

Lorsqu'on a de tels systèmes, pour voir si ces équations (en surnombre) sont compatibles, il faut les dériver, éliminer les dérivées d'ordre supérieur, et voir si les nouvelles équations sont des conséquences des équations précédentes. Sinon, on les y adjoindra et on recommencera jusqu'à ce que l'on obtienne un système jouissant de la propriété précédente.

Sinon, on arriverait à avoir un système d'équations en nombre suffisant pour déterminer toutes les dérivées jusqu'au second ordre et les fonctions elles-mêmes.

Dans le cas actuel, il suffit d'égaler les expressions des dérivées du troisième ordre, qu'on peut obtenir de deux manières différentes. Par exemple, écrivons que l'on a

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)$$

et remplaçons au second membre les dérivées du second ordre.

Il est visible qu'on obtiendra une équation de la forme

$$L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v} + Nc = 0.$$

En opérant de même sur y et z, c' et c'', on obtiendra la même équation correspondante, les coefficients L, M, N, qui ne dépendent que des coefficients A, B, C, *restant les mêmes*.

On aura donc aussi

$$L\frac{\partial y}{\partial u} + M\frac{\partial y}{\partial v} + Nc' = 0$$

$$L\frac{\partial z}{\partial u} + M\frac{\partial z}{\partial v} + Nc'' = 0.$$

Or, on peut considérer ces trois équations comme linéaires et homogènes en L, M, N. Le déterminant des coefficients est, comme on le sait, égal à H. Il est donc différent de zéro.

Ces équations ne peuvent donc admettre qu'une solution

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

En opérant de même sur les dérivées secondes de c, c', c'', on obtiendra trois nouvelles équations.

On constate que toutes ces relations se réduisent à trois conditions.

Ces trois conditions sont nécessaires et suffisantes.

Elles sont nécessaires d'après le calcul précédent. Elles sont suffisantes, puisque toutes les dérivées successives sont connues au moyen des dérivées précédentes et qu'il y a compatibilité.

Le système d'équations admet des solutions dépendant de constantes arbitraires. Toutes les surfaces solutions se déduisent les unes des autres par déplacement.

Parmi les trois équations de condition figure une équation donnant l'expression $\frac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^2}$ en fonction uniquement de E, F, G et de leurs dérivées.

Or, nous savons que cette expression représente la « courbure totale » d'une surface, $\frac{1}{R_1 R_2}$. Nous en avons

déduit que la courbure totale d'une surface se conserve quand on « déforme » la surface.

En particulier, si on considère un plan et toutes les surfaces applicables sur le plan, c'est-à-dire toutes les surfaces développables, pour toutes ces surfaces la courbure totale est nulle.

Pour la sphère $\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{a^2}$. Donc, pour toute surface applicable sur une sphère, on aura entre les rayons de courbure la relation

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \text{const.}$$

VI. — SURFACES APPLICABLES

Nous avons vu l'importance particulière de l'expression de l'élément linéaire d'une surface S

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Considérons une deuxième surface S'. Si nous supposons que les coordonnées d'un point de S' soient exprimées au moyen des mêmes paramètres u, v, nous établissons une correspondance entre les points des deux surfaces. Le carré de l'élément linéaire de S' sera

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2.$$

Si l'on considère l'angle V de deux courbes tracées sur la surface S, l'une correspondant au déplacement du, dv, l'autre au déplacement δu, δv, on a

$$\cos V = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{ds \delta s}.$$

Cherchons à quelles conditions l'angle de deux courbes quelconques de S *sera égal à l'angle des deux courbes correspondantes de* S'.

Pour la seconde surface, on aura

$$\cos V' = \frac{E' du \delta u + F'(du \delta v + dv \delta u) + G' dv \delta v}{ds' \delta s'}.$$

Si nous voulons que $\cos V = \cos V'$, quels que soient les rapports $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$, il faut évidemment et il suffit que

$$\frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'}.$$

Inversement, si l'on peut faire une transformation sur les coordonnées u_1, v_1 d'une surface S', en fonction des paramètres u, v, telle qu'un arc élémentaire de S' devienne proportionnel à l'arc élémentaire correspondant de S, on dit que « les deux surfaces sont représentables l'une sur l'autre avec conservation des angles ».

Un cas particulièrement intéressant est celui où

$$E = E', \qquad F = F', \qquad G = G'.$$

Alors, non seulement il y aura conservation des angles, mais encore deux arcs élémentaires correspondants, et par suite aussi deux arcs quelconques correspondants, auront même longueur.

Surfaces applicables sur un plan. — Dans le plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, ou, ov, on a

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Si donc une surface est applicable sur le plan, on doit avoir une identité de la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + dv^2.$$

Nous allons montrer, d'après O. Bonnet, *qu'une telle surface est une surface développable.*

Nous devons établir en effet entre x, y, z d'une part, u et v, d'autre part, une correspondance telle que l'on ait l'identité (1).

Or, celle-ci se décompose en

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Si nous dérivons ces équations, nous obtiendrons

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, & \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0 \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0, & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0 \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial^2 u} = 0, & \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que toutes les sommes sont séparément nulles. En particulier des équations

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=0$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=0$$

On déduit

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial u\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}}.$$

De ces égalités, résulte que $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ sont fonctions l'une de l'autre. De même des égalités semblables en $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, etc. on déduirait que $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ sont également fonctions l'une de l'autre.

Mais on a aussi

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=0.$$

Donc toutes ces dérivées sont fonctions de l'une d'elles, ou encore toutes ces dérivées sont fonctions d'une même variable.

Comme d'autre part, en désignant par p, q les dérivées partielles de z par rapport à x, y

$$\frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}.$$

On voit donc que p et q sont encore fonctions de la même variable.

En d'autres termes q est fonction de p. La surface est donc bien développable.

Nous allons démontrer que inversement *toute surface développable est applicable sur un plan.*

Correspondance entre la surface et le plan. — Nous définirons surface comme le lieu des tangentes à une courbe gauche.

Soient les coordonnées d'un point A de l'arête en fonction de l'arc s.

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = \psi(s).$$

En désignant par α, β, γ, les cosinus directeurs de la tangente et par l la distance variable AM, les coordonnées d'un point quelconque M de la surface sont

$$X = x + l\alpha, \qquad Y = y + l\beta, \qquad Z = z + l\gamma$$

X, Y, Z sont ainsi exprimées en fonction de l et de s.

On aura

$$dX = dx + ld\alpha + \alpha dl$$

et des expressions analogues pour dY, dZ. On a donc pour expression du carré de l'élément linéaire de la surface

$$d\sigma^2 = ds^2 + l^2(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) + dl^2 + 2dlds.$$

Or, en introduisant le rayon de courbure R de l'arête

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2},$$

on obtient

$$d\sigma^2 = (ds + dl)^2 + \frac{l^2}{R^2} ds^2.$$

Telle est l'expression de l'élément linéaire de la surface développable.

Pour que la surface fût applicable sur un plan, il faudrait que cet élément d'arc pût être mis sous la forme

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Nous pouvons supposer que la courbure $\frac{1}{R}$ de la courbe soit donnée sous la forme $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$, $\theta(s)$ désignant une certaine fonction de s. On aura

$$d\sigma^2 = (ds + dl)^2 + l^2\theta'^2 ds^2.$$

Cette somme de carrés au second membre, qui rappelle le $d\sigma^2$ en coordonnées polaires, conduit à l'écrire

$$d\sigma^2 = [\cos\theta(ds + dl) - l\sin\theta\,\theta' ds]^2 + [\sin\theta(ds + dl) + l\cos\theta\,\theta' ds]^2.$$

Mais alors sous cette forme, on reconnaît immédiatement *que chacun des termes est une différentielle exacte.*

Si l'on considère les fonctions U et V de s définies par

$$U' = \cos\theta, \qquad V' = \sin\theta$$

et si l'on pose

$$\xi = l\cos\theta + U, \qquad \eta = l\sin\theta + V,$$

on aura bien

$$d\xi = \cos\theta dl + (\cos\theta - l\sin\theta\,\theta')ds$$
$$d\eta = \sin\theta dl + (\sin\theta + l\cos\theta\,\theta')ds.$$

On a donc bien

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

La surface développable est bien applicable sur le plan et la correspondance entre les points de la surface et les points du plan est donnée par

$$\xi = l\cos\theta + U$$
$$\eta = l\sin\theta + V$$

avec

$$U' = \cos\theta, \qquad V' = \sin\theta$$

la courbure de la courbe ayant pour expression $\frac{1}{R} = \theta'(s)$. Le point ξ, η correspond au point l, s de la surface développable. *On a ainsi par ces deux seules quadratures, la représentation sur un plan, de la surface développable.*

Surfaces dont les arêtes de rebroussement admettent même expression de la courbure. — On reconnaît ainsi que dans cette représentation, la surface développable, définie par son arête de rebroussement n'apparaît que par la courbure mise sous la forme $\frac{1}{R} = \theta'(s)$. Donc :

ω

THÉORÈME. — *Si deux surfaces développables admettent même expression de la courbure de l'arête en fonction de l'arc, pour ces deux surfaces la représentation de la surface sur un plan sera la même et exigera les deux mêmes quadratures.*

En particulier, la courbe Γ correspondant à l'arête de rebroussement s'obtiendra en faisant $l = 0$. On a

$$\xi = U, \qquad \eta = V$$

ou

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{d\eta}{ds} = \sin\theta.$$

On a donc

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\theta.$$

α, ξ

Cherchons le rayon de courbure en un point de Γ.

On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta'}{\xi'}\right)'.$$

Ici

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1, \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta'}{\xi'} = \theta.$$

On a donc

$$\frac{1}{\rho} = \theta' = \frac{1}{R}.$$

En deux points correspondants, l'arête de rebroussement et sa transformée ont donc même rayon de courbure.

On obtient ainsi une correspondance entre une courbe gauche et une courbe plane, telle qu'en deux points correspondant aux mêmes arcs, les rayons de courbure des deux courbes soient égaux.

δ_1

Les génératrices de la surface s'obtiennent en laissant s ou θ constant et faisant varier seulement l.

Les courbes correspondantes ont donc pour équation

$$\xi = l\cos\theta + U, \qquad y = l\sin\theta + V.$$

ρ

Ce sont donc des droites passant par le point M de la transformée de l'arête où la tangente a pour coefficient angulaire $tg\,\theta$.

ω, σ_2

La transformée de la génératrice est donc la tangente au point correspondant de l'arête de rebroussement.

Enfin, nous traiterons le problème suivant :

Reconnaître si un ds^2 correspond à une surface développable. — Nous prendrons le ds^2 de la surface sous la forme

$$ds^2 = e^2du^2 + 2eg\cos\lambda du dv + g^2dv^2$$

λ désignant l'angle des deux courbes coordonnées ; e, g, λ sont des fonctions données de u, v.

α_1, β

Si la surface est développable, on doit pouvoir mettre ds^2 sous la forme

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

ξ et η désignant deux certaines fonctions de u, v.

$$\xi = \varphi(u, v), \qquad \eta = \psi(u, v).$$

Nous désignerons par les indices 1, 2 des dérivations par rapport à u et v.

ξ

Nous devons donc avoir

$$e^2du^2 + 2eg\cos\lambda du dv + g^2dv^2 = (\varphi_1 du + \varphi_2 dv)^2 + (\psi_1 du + \psi_2 dv)^2.$$

On en déduit

$$e^2 = \varphi_1^2 + \psi_1^2, \qquad eg\cos\lambda = \varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2, \qquad g^2 = \varphi_2^2 + \psi_2^2.$$

α_1, α

La première et la troisième conduisent à poser

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \varphi_1 = e\cos\alpha, & \psi_1 = e\sin\alpha \\ \varphi_2 = g\cos\beta, & \psi_2 = g\sin\beta. \end{cases}$$

En substituant dans la seconde elle se réduit à

$$\cos\lambda = \cos(\alpha - \beta).$$

On a donc

$$\alpha - \beta = \lambda.$$

Posons d'autre part $\alpha + \beta = \mu$. On en déduira

$$\alpha = \frac{\mu + \lambda}{2}, \qquad \beta = \frac{\mu - \lambda}{2}.$$

On aura les conditions

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} \varphi_1 = e\cos\dfrac{\mu+\lambda}{2}, & \psi_1 = e\sin\dfrac{\mu+\lambda}{2} \\ \varphi_2 = g\cos\dfrac{\mu-\lambda}{2}, & \psi_2 = g\sin\dfrac{\mu-\lambda}{2}. \end{cases}$$

δ_1, α

Egalons les dérivées φ_{12} et φ_{21}, ψ_{12} et ψ_{21} ; on aura

$$e_2\cos\frac{\mu+\lambda}{2} - \frac{e}{2}\sin\frac{\mu+\lambda}{2}(\mu_2+\lambda_2) = g_1\cos\frac{\mu-\lambda}{2} - \frac{g}{2}\sin\frac{\mu-\lambda}{2}(\mu_1-\lambda_1)$$

$$e_2\sin\frac{\mu+\lambda}{2} + \frac{e}{2}\cos\frac{\mu+\lambda}{2}(\mu_2+\lambda_2) = g_1\sin\frac{\mu-\lambda}{2} + \frac{g}{2}\cos\frac{\mu-\lambda}{2}(\mu_1-\lambda_1).$$

α_1

En résolvant ces deux équations par rapport à $\mu_1 - \lambda_1$ et $\mu_2 + \lambda_2$, on obtient simplement

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \dfrac{g}{2}(\mu_1-\lambda_1)\sin\lambda = e_2 - g_1\cos\lambda \\ \dfrac{e}{2}(\mu_2+\lambda_2)\sin\lambda = -g_1 + e_2\cos\lambda. \end{cases}$$

ρ

Ce sont deux équations auxquelles doit satisfaire la seule fonction μ. α On peut les résoudre par rapport à μ_1, μ_2.

δ_1

En écrivant qu'elles sont compatibles, on obtient enfin

$$\text{(2)}\qquad \lambda_{12} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}v}\cdot\frac{e_2 - g_1\cos\lambda}{g\sin\lambda} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}u}\cdot\frac{g_1 - e_2\cos\lambda}{e\sin\lambda} = 0.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les fonctions e, g, λ, représentant le ds^2 d'une surface, pour que cette surface soit développable.

Si elle est remplie, α les deux équations (IV) qui sont compatibles déterminent, par deux quadratures, la fonction $\mu(u, v)$. Les équations (III) qui sont, à leur tour, compatibles déterminent, par deux nouvelles couples de quadratures, les fonctions φ et ψ et par suite la représentation sur le plan.

Cas particulier. — La condition (2) est remplie en particulier, ρ si l'on a

$$g_1 = 0, \qquad e_2 = 0, \qquad \lambda_{12} = 0,$$

c'est-à-dire pour les surfaces dont le ds^2 à la forme

$$ds^2 = U^2du^2 + 2UV\cos(U_1 + V_1)dudv + V^2dv^2,$$

U et U_1, désignant deux fonctions quelconques de u, V et V_1 deux fonctions quelconques de V.

On pourrait obtenir, *sans aucun signe de quadrature*, au moyen de quatre fonctions arbitraires, l'expression la plus générale des surfaces admettant le ds^2 de la forme ci-dessus, et les formules donnant la représentation sur un plan de ces surfaces développables.

Si les courbes coordonnées se coupent à angle droit, $\lambda = \frac{\pi}{2}$; la condition (2) se réduit à

$$\frac{D}{Dv}\cdot\frac{e_2}{g} + \frac{D}{Du}\cdot\frac{g_1}{e} = 0.$$

Si le ds^2 de la surface était donné sous la forme

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

on pourrait transformer la condition (2) en une équation de condition entre E, F, G. Le calcul est pénible mais n'offre aucune difficulté. On trouve ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{E_2 - F_1}}\frac{D}{Dv}\cdot\frac{(E_2 - F_2)^2}{EG - F^2} + \frac{1}{G_1 - F_2}\frac{D}{Du}\cdot\frac{(G_1 - F_1)^2}{EG - F^2} + \frac{1}{H^4}\begin{vmatrix} E & F & G \\ E_1 & F_1 & G_1 \\ E_2 & F_2 & G_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En particulier, si le réseau est orthogonal, cette équation se réduit à

$$G_1\frac{D}{Dv}\cdot\frac{E_2^2}{EG} + E_2\frac{D}{Du}\cdot\frac{G_1^2}{EG} = 0.$$

Surfaces applicables sur une surface de révolution. — On ne sait pas reconnaître en général si deux surfaces dont on donne le ds^2 sont applicables l'une sur l'autre ou déterminer toutes les surfaces applicables sur une surface donnée.

Pour le cas des surfaces de révolution on peut établir le résultat suivant :

Si dans l'expression du carré de l'élément linéaire d'une surface les coefficients E, F, G *sont fonctions de u seulement, la surface est applicable sur une infinité de surfaces de révolution.*

En effet, si $z = f(x)$ est, dans le plan zox, l'équation de la méridienne de la surface de révolution, le ds^2 de cette surface est

$$ds^2 = [1 + f'^2(r)]dr^2 + r^2d\theta^2.$$

β

Il faut donc mettre le ds^2 de la surface donnée sous forme d'une somme de deux carrés.

δ_1

Nous écrirons donc

$$ds^2 = G\left(dv + \frac{F}{G}du\right)^2 + \frac{EG - F^2}{G}du^2$$

$\frac{F}{G}$ étant fonction de u, α si nous posons $\frac{F}{G} = \lambda'(u)$, nous pourrons écrire

$$dv + \frac{F}{G}du = kd\theta.$$

D'où

$$k\theta = v + \lambda(u)$$

k désignant une constante arbitraire.

δ_1

D'autre part, si G n'est pas constant, nous établirons la relation entre u et r en posant

(2) $$k^2G(u) = r^2.$$

δ_1

Enfin nous déterminerons la fonction $f(r)$, en écrivant

(3) $$[1 + f'^2(r)]dr^2 = \frac{EG - F^2}{G}du^2 = dr^2 + df^2$$

relation dans laquelle nous remplacerons u en fonction de r d'après (2). Une quadrature donnera $f(r)$.

ω

On aura bien alors identiquement

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = [(1 + f'^2(r)]dr^2 + r^2d\theta^2.$$

ρ

Comme on le voit, il y a une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire k.

On peut avoir, sans signe de quadrature, le ds^2 le plus général de ces surfaces, la surface de révolution correspondante, et la correspondance entre les points de ces deux surfaces.

Donnons-nous arbitrairement trois fonctions $r(u)$, $\lambda(u)$ et $f(r)$. et prenons d'abord

$$G = \frac{r^2}{k^2}, \qquad F = G\lambda' = \frac{r^2}{k^2}\lambda'.$$

La relation (3) donne alors

$$[1 + f'^2(r)]r'^2 = E - G\lambda'^2,$$

c'est-à-dire

$$E = \frac{r^2}{k^2}\lambda'^2 + [1 + f'^2(r)]r'^2,$$

r étant la fonction choisie de u, on a donc bien E, F, G, en fonction de u, sans signe de quadrature, au moyen de ces trois fonctions r, λ, f.

L'équation de la surface de révolution sera

$$z = f(r).$$

Par exemple, si l'on prend

$$f(r) = r^2, \qquad r(u) = \sin u, \qquad \lambda(u) = u^2,$$

on a les surfaces ayant pour ds^2

$$ds^2 = \frac{1}{k^2}[k^2\cos^2 u + 4u^2\sin^2 u + 4k^2\sin^2 u\cos^2 u]du^2 + \frac{4u\sin^2 u}{k^2}dudv + \frac{\sin^2 u}{k^2}dv^2.$$

Elles sont applicables sur le paraboloïde

$$z = x^2 + y^2,$$

par la correspondance

$$k\theta = v + u^2, \qquad r = \sin u.$$

En prenant $f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, on aurait les surfaces applicables sur une sphère, etc.

Remarque. — Nous avons dû supposer que G ne se réduisait pas à une constante. Dans ce cas on peut écrire

$$ds^2 = \left[\sqrt{G}\,dv + \frac{F}{\sqrt{G}}du\right]^2 + \frac{EG - F^2}{G}du^2$$

G étant constant, si nous posons

$$\sqrt{G}\,dv + \frac{F}{\sqrt{G}}du = dX$$

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}}du = dY.$$

Nous aurons

$$ds^2 = dX^2 + dY^2;$$

o, d

la surface serait applicable sur un plan et par suite sur un cylindre ou un cône de révolution quelconque.

Il est aisé ***d'avoir***, *sans signe de quadrature*, ***le ds^2 le plus général de la surface de révolution et sa représentation sur le plan*** :

f et η désignant deux fonctions quelconques de u, il suffit de poser

$$E = \eta'^2 + \frac{1}{G} f'^2, \qquad F = f'.$$

Alors, $EG - F^2 = G\eta'^2$. Par suite,

$$X = \rho\sqrt{G} + \frac{f(u)}{\sqrt{G}}, \qquad Y = \eta(u),$$

THÉORÈME DE BOUR. — *L'n hélicoïde quelconque est applicable sur une infinité de surfaces de révolution.*

φ

Il suffit de montrer que le ds^2 d'un hélicoïde peut se mettre sous la forme précédente (E, F, G fonctions de u).

ĉ$_1$

Si l'on prend pour oz l'axe de l'hélicoïde, et si cet hélicoïde est engendré par la courbe du plan des xz

$$y = 0, \qquad z = \mu(x),$$

les équations de l'hélicoïde sont

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = \mu(u) + av.$$

ĉ$_1$

On a donc pour cette surface

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + u^2dv^2 + [\mu'(u)du + adv]^2 \\ &= du^2[1 + \mu'^2(u)] + 2a\mu'(u)du\,dv + (u^2 + a^2)dv^2. \end{aligned}$$

ρ, ω

Le ds^2 a bien la forme indiquée.

ĉ$_1$

Pour avoir la représentation sur une surface de révolution, il faudra établir entre u et r la relation

$$k^2(u^2 + a^2) = r^2. \tag{2}$$

Ensuite on aura

$$k\theta = v + \int \frac{a\mu'(u)}{a^2 + u^2}du.$$

En intégrant par parties, il vient

$$k\theta = v + \frac{a\mu}{a^2 + u^2} + \int \frac{2a\mu u}{(a^2 + u^2)^2}du.$$

Si nous faisons le changement de fonction

$$(4) \qquad \frac{\mu u}{(a^2+u^2)^2} = \lambda'(u) \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \frac{(a^2+u^2)^2}{u}\lambda',$$

on aura

$$k\theta = \varphi + \frac{a\mu}{a^2+u^2} + 2a\lambda = \varphi + \frac{a(a^2+u^2)}{u}\lambda' + 2a\lambda.$$

L'hélicoïde (et les coefficients E, F, G) seront parfaitement déterminés au moyen de la fonction arbitraire $\lambda(u)$, et la représentation sur la surface de révolution s'obtiendra, *sans aucun signe de quadrature*, par les formules

$$(5) \qquad k^2(a^2+u^2) = r^2, \qquad k\theta = \varphi + \frac{a(a^2+u^2)}{u}\lambda' + 2a\lambda.$$

Reste à déterminer la surface de révolution elle-même, c'est-à-dire la fonction $f(r)$. Elle sera déterminée par l'équation (3),

$$(3) \qquad dr^2 + df^2 = \frac{EG - F^2}{G}\,du^2.$$

Dans le cas actuel,

$$\frac{EG - F^2}{G} = 1 + \frac{u^2\mu'^2}{a^2+u^2}.$$

D'autre part, de (2) on déduit

$$dr^2 = \frac{k^2u^2}{a^2+u^2}\,du^2.$$

En substituant dans (3), il reste donc

$$df^2 = \left(1 + \frac{u^2\mu'^2 - k^2u^2}{a^2+u^2}\right)du^2$$

$$f(u) = \int \sqrt{1 + \frac{u^2\mu'^2 - k^2u^2}{a^2+u^2}}\,du.$$

C'est la *seule quadrature* qui sera nécessaire pour déterminer la surface de révolution, μ étant remplacée en fonction de u. Dans le résultat, il faudra remplacer u en fonction de r, au moyen de (2).

En résumé, on obtient au moyen d'une seule quadrature, le couple formée de l'hélicoïde le plus général, de la surface de révolution sur laquelle il est applicable, et la correspondance entre les deux surfaces, cette correspondance étant représentée toujours par les mêmes formules (3) *et* (5) *sans aucun signe de quadrature.*

En particulier, pour la surface de vis à filets triangulaires,

$$\mu = \mu_0 u + z_0 \qquad (\mu_0 \text{ et } z_0 \text{ constants})$$

et si l'on choisit $k = \sqrt{1 + \mu_0^2}$, on aura

$$f(u) = \int \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2 + u^2}}\, du = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = a\mathrm{L}(u + \sqrt{a^2 + u^2}).$$

On a donc la surface de révolution

$$e^{\frac{z}{a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_0^2}} (r + \sqrt{r^2 - a^2(1 + \mu_0^2)})$$

avec la représentation

$$(1 + \mu_0^2)(a^2 + u^2) = r^2, \qquad k\theta = \varphi + \int \frac{a\mu_0}{a^2 + u^2}\, du = \varphi + \mu_0 \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a},$$

l'hélicoïde ayant pour équation (surface de vis triangulaire)

$$x = u \cos \varphi, \qquad y = u \sin \varphi, \qquad z - z_0 = \mu_0 u + a\varphi.$$

Si $\mu_0 = 0$, on a la surface de vis à filets carrés

Surface de vis à filet carré. — L'hélicoïde est engendré par une droite perpendiculaire à Oz.

On a

$$\mu(u) = z_0, \qquad \mu'(u) = 0.$$

D'où en général,

$$f(u) = \int \sqrt{1 - \frac{k^2 u^2}{a^2 + u^2}}\, du.$$

L'intégrale est en général elliptique. Mais si, en particulier, l'on prend $k = 1$

$$f(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} = a\mathrm{L} \frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{r}.$$

D'où l'équation de la surface de révolution

$$\frac{z - z_0}{2} = \mathrm{L} \frac{r + \sqrt{r^2 - a^2}}{a},$$

ou enfin

$$r = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{z - z_0}{a}} + e^{-\frac{(z - z_0)}{a}}\right]$$

équation d'une chainette ayant pour base $z = z_0$.

Représentation d'une surface avec simple conservation des angles. — Nous avons vu que si l'on donne les expressions de ds^2 pour deux surfaces S, S′ dont les coordonnées sont représentées au moyen de deux mêmes paramètres u, v. les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces deux surfaces puissent être représentées l'une sur l'autre, avec conservation des angles sont

$$\frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}.$$

En d'autres termes, en désignant par k^2 un facteur de proportionnalité, il faut et il suffit que l'on ait

$$ds^2 = k^2 ds'^2.$$

Le facteur k peut d'ailleurs être variable d'un point à un autre, c'est-à-dire être fonction de u, v.

Représentation plane. — En particulier, pour qu'une surface S puisse être représentée sur un plan sans déformation d'angles, en d'autres termes pour qu'on puisse *faire la carte de* S, il faut et il suffit que l'on puisse mettre l'élément d'arc ds^2 sous la forme

$$k^2 ds^2 = dX^2 + dY^2,$$

X et Y étant des fonctions de u, v à déterminer, ainsi que k.

Si nous supposons que l'élément d'arc ds^2 soit donné sous la forme

$$ds^2 = e^2 du^2 + 2fg \cos\lambda du dv + g^2 dv^2,$$

on devra donc avoir une identité de la forme

$$(\varphi_1 du + \varphi_2 dv)^2 + (\psi_1 du + \psi_2 dv)^2 = k^2[e^2 du^2 + 2fg \cos\lambda du dv + g^2 dv^2].$$

Mais on voit que l'on est ramené au problème que nous avons traité (représentation d'une surface développable sur un plan) car il suffit de supposer que les coefficients e, g relatifs à la surface sont remplacés par ke, kg.

En appliquant les résultats obtenus, on voit que *la seule condition nécessaire et suffisante* est que l'on ait

$$(1) \qquad \lambda_{12} + \frac{D}{Dv}\frac{(ke)_2 - (kg)_1 \cos\lambda}{kg \sin\lambda} + \frac{D}{Du}\cdot\frac{(kg)_1 - (ke)_2 \cos\lambda}{ke \sin\lambda} = 0.$$

ω

On n'a donc qu'une seule équation aux dérivées partielles du second ordre pour déterminer le coefficient de proportionnalité k.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(1')\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_{12} + \frac{D}{D\rho}\cdot\frac{e_2 - g_1\cos\lambda}{g\sin\lambda} + \frac{D}{Du}\cdot\frac{g_1 - e_2\cos\lambda}{e\sin\lambda} \\ &+ \frac{D}{D\rho}\cdot\frac{k_2 e - k_1 g\cos\lambda}{kg\sin\lambda} + \frac{D}{Du}\cdot\frac{k_1 g - k_2 e\cos\lambda}{ke\sin\lambda} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous désignerons, pour abréger, par $\mathcal{E}$ la première partie indépendante de k, qui est le premier membre de l'équation obtenue au chapitre précédent et nous poserons $\mu = \log k$.

L'équation s'écrit alors

$$(2)\qquad \mathcal{E} + \frac{D}{D\rho}\cdot\frac{\mu_2 e - \mu_1 g\cos\lambda}{g\sin\lambda} + \frac{D}{Du}\cdot\frac{\mu_1 g - \mu_2 e\cos\lambda}{e\sin\lambda} = 0.$$

ζ

Si, en particulier, on connaît une première solution μ de

d

cette équation, toute autre solution μ' sera telle, qu'en posant $\mu' - \mu = \nu$, ν satisfasse à l'équation

$$(3)\qquad \frac{D}{D\rho}\cdot\frac{\nu_2 e - \nu_1 g\cos\lambda}{g\sin\lambda} = \frac{D}{Du}\cdot\frac{\nu_2 e\cos\lambda - \nu_1 g}{e\sin\lambda}.$$

Le nouveau facteur de proportionnalité k' sera tel que

$$\log k' - \log k = \nu,$$

c'est-à-dire

$$k' = ke^{\nu}.$$

α, ρ

D'après la forme ci-dessus de l'équation (3), on pourra poser, en désignant par ρ une nouvelle fonction de u, v.

$$(4)\qquad \frac{\nu_2 e - \nu_1 g\cos\lambda}{g\sin\lambda} = \rho_1, \qquad \frac{\nu_2 e\cos\lambda - \nu_1 g}{e\sin\lambda} = \rho_2.$$

δ1

Or, en résolvant ces deux équations en ν_1, ν_2 on obtient

$$\nu_1 = \frac{\rho_1 g\cos\lambda - \rho_2 e}{g\sin\lambda}, \qquad \nu_2 = \frac{\rho_1 g - \rho_2 e\cos\lambda}{e\sin\lambda}.$$

ρ, d

C'est donc que l'on a aussi

$$\frac{D}{D\rho}\cdot\frac{\rho_2 e - \rho_1 g\cos\lambda}{g\sin\lambda} = \frac{D}{Du}\cdot\frac{\rho_2 e\cos\lambda - \rho_1 g}{e\sin\lambda}.$$

On retrouve la même équation.

ρ, ω

Ainsi, si ν est solution de l'équation (3), on obtiendra une nouvelle solution ρ de l'équation, en définissant ρ par les deux équations compatibles (4). On en déduit donc une deuxième forme du facteur de proportionnalité.

δ_1

Application : Carte d'une sphère. — En désignant par u, v la longitude et la colatitude d'un point de la sphère, on a

$$x = \mathrm{R} \sin u \cos v, \qquad y = \mathrm{R} \sin u \sin v, \qquad z = \mathrm{R} \cos u.$$

On en déduit

$$ds^2 = \mathrm{R}^2(du^2 + \sin^2 u dv^2).$$

On a donc dans ce cas

$$e = \mathrm{R}, \qquad g = \mathrm{R} \sin u, \qquad \lambda = \frac{\pi}{2}.$$

δ_1

L'expression que nous avons désignée par $\mathfrak{E}$ se réduit à

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}u} \cdot \frac{g_1}{e} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}u} \cos u = -\sin u$$

ω

et l'équation qui détermine μ est

$$-\sin u + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}v} \cdot \frac{\mu_2}{\sin u} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}u} \cdot \mu_1 \sin u = 0. \tag{2}$$

α, ξ

Cherchons en particulier, les solutions μ ne dépendant que de u.

L'équation (2) se réduit à

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}u} \mu_1 \sin u = \sin u.$$

δ_1

En intégrant

$$\mu_1 \sin u = -\cos u + \alpha, \qquad \mu_1 = \frac{\alpha}{\sin u} - \frac{\cos u}{\sin u}.$$

En intégrant à nouveau,

$$\mu = \alpha \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} - \log \sin u + \log \mathrm{A}, \qquad \mu = \log \mathrm{A} \frac{\operatorname{tg}^\alpha \frac{u}{2}}{\sin u}.$$

Ainsi on peut prendre en général comme facteur de proportionnalité

$$k = \frac{\operatorname{tg}^\alpha \frac{u}{2}}{\sin u}.$$

On est certain que

$$R^2 \frac{\operatorname{tg}^{2\alpha}\frac{u}{2}}{\sin^2 u}(du^2 + \sin^2 u\, dv^2)$$

se décompose en une somme de deux carrés $dX^2 + dY^2$, en posant

$$X = \varphi(u, v), \qquad Y = \psi(u, v).$$

On déterminera les fonctions φ et ψ par les équations (qui seront alors compatibles).

$$\varphi_1^2 + \psi_1^2 = k^2 R^2, \qquad \varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2 = 0, \qquad \psi_1^2 + \psi_2^2 = k^2 R^2 \sin^2 u.$$

1er Cas : $\alpha = 0$. — En calculant φ, ψ, on trouve que l'on peut poser

$$\varphi = Rv \sin\mu_0 + R\cos\mu_0 L \operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

$$\psi = -Rv\cos\mu_0 + R\sin\mu_0 L \operatorname{tg}\frac{u}{2},$$

$$k = \frac{1}{\sin u}.$$

En particulier, si l'on prend $\mu_0 = 0$

$$\varphi = RL \operatorname{tg}\frac{u}{2}, \qquad \psi = -Rv,$$

ce qui conduit à l'identité

$$R^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2) = \sin^2 u(d\varphi^2 + d\psi^2)$$

qu'il est facile de vérifier.

Les courbes $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$ correspondent à $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Les méridiens et les parallèles sont donc représentés par des parallèles aux axes. On a la projection de Mercator.

On appelle « loxodromie » une courbe qui coupe tous les méridiens sous un angle constant α. Les angles étant conservés dans la représentation, la courbe transformée sera donc une droite

$$X = Y \operatorname{tg}\alpha + n.$$

D'où l'équation

$$\mathrm{RL}\ \mathrm{tg}\frac{u}{2} = -\mathrm{R}\rho\ \mathrm{tg}\ \alpha + n.$$

ou

$$\mathrm{tg}\frac{u}{2} = Ce^{m\rho}.$$

On peut déterminer C et m de manière que cette loxodromie passe par deux points donnés de la sphère.

II. $\alpha \gtrless 0$. — δ_1 Si $\alpha \gtrless 0$, on trouve, dans ce cas en simplifiant par une rotation convenable autour de oz.

$$\varphi = \frac{1}{\alpha}\mathrm{R}\ \mathrm{tg}^{\alpha}\frac{u}{2}\cos\alpha\rho, \qquad \psi = \frac{1}{\alpha}\mathrm{R}\ \mathrm{tg}^{\alpha}\frac{u}{2}\sin\alpha\rho.$$

En particulier, si $\alpha = 1$

$$\varphi = \mathrm{R}\ \mathrm{tg}\frac{u}{2}\cos\rho, \qquad \psi = \mathrm{R}\ \mathrm{tg}\frac{u}{2}\sin\rho,$$

$$k = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{u}{2}}.$$

d On a donc l'identité :

$$\mathrm{R}^2(du^2 + \sin^2 u\,d\rho^2) = 4\cos^4\frac{u}{2}(d\varphi^2 + d\psi^2),$$

avec les expressions ci-dessus de φ et ψ.

Si l'on pose

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\ \mathrm{tg}\frac{u}{2}\cos\rho, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\ \mathrm{tg}\frac{u}{2}\sin\rho.$$

ρ on voit facilement que le point X, Y est la projection conique sur le plan de l'équateur, du point x, y, z (u, ρ), le point de vue étant le pôle austral de la sphère.

σ_2 On retrouve donc la projection stéréographique.

Enfin si $\alpha = -1$,

$$k = \frac{1}{2\sin^2\dfrac{u}{2}}, \qquad \varphi = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}}\cos\rho, \qquad \psi = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}}\sin\rho.$$

On a la projection stéréographique, le centre étant le pôle boréal.

Reprenons les formules générales

$$\rho = \frac{1}{\alpha} R \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{u}{2} \cos \alpha v$$

$$\psi = \frac{1}{\alpha} R \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{u}{2} \sin \alpha v.$$

Supposons pour simplifier $R = 1$; soient X, Y les coordonnées du point sur la carte, ρ, ω les coordonnées polaires de ce point

$$X = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{u}{2} \cos \alpha v, \qquad Y = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{u}{2} \sin \alpha v.$$

o

On aura

$$\rho = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{u}{2}, \qquad \omega = \alpha v.$$

Or, si nous faisons la projection stéréographique ayant pour centre le pôle austral, o le rayon vecteur r du point m perspectif de M serait $r = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ et l'angle polaire serait v.

ρ, d

On a donc les relations simples

$$\omega = \alpha v, \qquad \alpha \rho = r^{\alpha}.$$

ω

1° *L'angle polaire s'obtient par multiplication de l'angle polaire de m par un facteur constant* α.

2° *Entre les rayons vecteurs du point de la carte et du point stéréographique, on a la relation* $\alpha \rho = r^{\alpha}$.

3° *Les arcs ds de la sphère,* $d\sigma$ *de la carte et* $d\sigma_1$, *de la carte stéréographique sont liés par les relations*

$$\frac{r^2(1 + r^2)}{2} ds = r^{\alpha} d\sigma_1 = r d\sigma.$$

CHAPITRE XII

APPLICATIONS DIVERSES

SOMMAIRE.

Surfaces enveloppes de sphères : Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des circonférences : par inversion d'un cone, d'un tore.

Surfaces lieux de cercles.

Systèmes triples orthogonaux : Théorème de Dupin. — Double démonstration. — Application aux quadriques. — Applications.

Familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes : Intégration sans signe de quadrature, des courbes trajectoires. — Cas où l'équation de la famille est à variables séparées. — Cas où la famille est également une famille de Lamé

I. — SURFACES ENVELOPPES DE SPHÈRES

Nous avons étudié les surfaces développables, enveloppes d'une famille de *plans* dont l'équation dépend d'un paramètre.

Pour généraliser, nous pouvons étudier les surfaces enveloppes d'une famille de sphères dont l'équation dépend d'un paramètre.

Une sphère de la famille aura une équation de la forme

$$(1) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0.$$

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 et le rayon R seront fonctions d'un paramètre t. Le centre O décrira donc une courbe.

Pour obtenir l'enveloppe, il faut dériver l'équation (1)

$$(2) \qquad (x - x_0)x_0' + (y - y_0)y_0' + (z - z_0)z_0' + RR' = 0.$$

La caractéristique est définie par les équations (1), (2) : c'est donc un cercle, dont le plan est perpendiculaire à la direction x'_0, y'_0, z'_0, c'est-à-dire à la direction de la tangente en O à la courbe lieu du centre. Ces résultats sont évidents géométriquement.

La surface enveloppe est donc une « surface cerclée ».

Chaque sphère touche l'enveloppe suivant un cercle. Donc les normales à la surface enveloppe en tous les points du cercle passent par le centre O de la sphère. Ces normales engendrent donc un cône, surface développable.

Chacun des cercles caractéristiques est donc ligne de courbure de la surface enveloppe E.

En particulier, si R est constant, d'après (2), le plan du cercle passe par le centre de la sphère. La surface a donc un de ses rayons de courbure principaux constants, égal à R.

La surface est dite « surface canal ». Elle est engendrée par des cercles, de rayon constant, menés dans chaque plan normal à une courbe quelconque et ayant leur centre sur la courbe.

Dans l'étude des lignes de courbure d'une surface, nous avons vu que les normales à une surface sont, en général, tangentes, aux deux centres de courbure principaux, aux deux nappes de la développée, lieu des arêtes de rebroussement de l'une et de l'autre famille de normalies.

Dans le cas actuel, les normalies correspondant à cette première famille de lignes de courbure que sont les cercles caractéristiques, se réduisent à un cône et l'arête de rebroussement se réduit à un point, centre de la sphère, premier centre de courbure principal.

La première nappe de la développée se réduit donc, dans ce cas, à la courbe lieu des centres.

Mais les normales MO seront aussi tangentes, au deuxième centre de courbure principal de la surface, à la deuxième nappe qui sera, en général, une surface.

Les réciproques sont vraies.

THÉORÈME. — 1° *Si une surface admet pour une des familles de lignes de courbure des cercles, cette surface est l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre.*

Si la surface admet un cercle comme ligne de courbure, d'après le théorème de Joachimsthal, le plan de ce cercle coupe la surface suivant un angle constant. Les normales à la surface le long du cercle sont donc également inclinées sur ce plan et concourent donc en un même point C de l'axe du cercle (qu'elles rencontrent certainement, puisqu'elles sont situées à chaque instant dans le plan normal au cercle). Si alors on considère la sphère mobile ayant son centre en C et qui passe par le cercle, elle est tangente à la surface en tous les points du cercle. La surface est bien l'enveloppe de ces sphères mobiles.

2° **Réciproque.** — *Si l'une des nappes de la développée se réduit à une courbe, c'est-à-dire si l'un des centres principaux décrit une courbe, la surface est une enveloppe de sphères.*

En effet, par hypothèse, lorsque le point M décrit la ligne de courbure C_1, le centre de courbure correspondant est fixe en C_1. Nous savons que si un segment de droite l se déplace en s'appuyant sur deux courbes données, si ds et ds_1 sont les arcs élémentaires décrits par les deux extrémités et si φ et φ_1 sont les angles du segment avec les tangentes aux arcs, la variation dl du segment a pour expression

$$dl = -ds\cos\varphi - ds_1\cos\varphi_1.$$

Dans le cas actuel, l'une des extrémités du segment étant fixe, l'autre décrivant un arc perpendiculaire au segment,

$$ds_1 = 0, \qquad \cos\varphi = 0, \qquad \text{Donc} \qquad dl = 0.$$

Le segment MC_1, a donc une longueur constante. Si donc, de C_1 comme centre, on décrit une sphère de rayon C_1M, cette sphère touchera la surface en tous les points de la ligne de courbure. La surface est donc bien l'enveloppe de cette famille de sphères.

En général, la deuxième nappe de la développée est une véri-

table surface. Mais il peut arriver que cette nappe se réduise également à une courbe. Dans ce cas, on voit que le deuxième système de lignes de courbure de la surface est également formé de cercles. *La surface peut être alors considérée, de deux manières différentes, comme l'enveloppe d'une famille de sphères.*

Ces surfaces à double famille de lignes de courbure circulaire existent-elles ? On connaît des solutions évidentes : Pour un cône de révolution, les lignes de courbure sont les génératrices et les parallèles du cône. Pour un tore, les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles.

Nous démontrerons que : Si l'on transforme une surface par inversion quelconque, les lignes de courbure de la surface transformée sont les transformées des lignes de courbure de la surface donnée. En d'autres termes : *L'inversion conserve les lignes de courbure.*

D'autre part, par une inversion, un cercle se transforme évidemment en un cercle. Si donc on transforme, par inversion quelconque, un cône de révolution ou un tore, la surface transformée sera une surface dont les deux familles de lignes de courbure seront circulaires.

Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des circonférences. — Nous allons montrer que inversement :

Toute surface dont les deux familles de lignes de courbure sont des cercles peut être engendrée par inversion d'un cône ou d'un tore.

La surface, par hypothèse, peut être considérée de deux manières différentes comme l'enveloppe d'une famille de sphères.

Considérons trois cercles C_1, C_2, C_3, d'une première famille de lignes de courbure et les sphères correspondantes Σ_1, Σ_2, Σ_3. Considérons, d'autre part, un cercle C' de l'autre famille, rencontrant les premiers en M_1, M_2, M_3 et la sphère Σ' correspondante.

Au point M_1, les sphères Σ_1 et Σ' sont tangentes entre elles, puisque tangentes toutes deux à la surface. *La*

sphère variable Σ' *se déplace donc de manière à rester tangente à trois sphères fixes* : la surface peut déjà être considérée comme l'enveloppe de cette sphère Σ'.

Cette sphère variable, en effet, ne dépend plus que d'un seul paramètre.

Nous obtenons ainsi une définition géométrique de la surface. Il est d'ailleurs aisé d'obtenir le lieu du centre de cette sphère Σ'.

Si O_1, O_2, O_3, sont les centres des trois sphères fixes, O' est évidemment sur un hyperboloïde de révolution autour de O_2O_3 et de foyers O_2, O_3, car

$$O'O_2 - O'O_3 = \pm (R_2 - R_3)$$

et de même, O' est sur un hyperboloïde de révolution de foyers O_3, O_1. Ces deux hyperboloïdes de révolution, ayant un foyer commun O_3, peuvent être considérés comme tangents, le long d'un cercle, à la sphère de rayon nul ayant pour centre O_1. Les deux hyperboloïdes se coupent donc suivant une conique qui sera le lieu des centres de Σ'.

Par inversion d'un cône. — *Nous allons montrer que la surface est nécessairement la figure inverse d'un cône de révolution.*

Si les trois sphères fixes Σ_1, Σ_2, Σ_3 se réduisaient chacune à un plan, la surface enveloppe de Σ' qui serait constamment tangente à ces trois plans, serait bien le cône de révolution inscrit dans ces trois plans.

Nous allons ramener le cas général à celui-ci. En effet, les trois sphères Σ_1, Σ_2, Σ_3 se coupent en deux points réels ou imaginaires P_1, P_2. Si l'on prend un de ces points comme pôle d'inversion, les trois sphères se transformeront en trois plans et la sphère variable, tangente aux trois sphères, en une sphère tangente aux trois plans. Elle enveloppe donc un cône de révolution et la surface considérée est donc bien l'inverse d'un cône de révolution.

Cette surface générale, à doubles lignes de courbure circulaires,

peut être soit du troisième, soit du quatrième degré suivant que le pôle d'inversion se trouve ou non sur le cône à transformer. Elle se réduit même au cône lui-même si le pôle est au sommet.

On pourrait également transformer un tore par inversion. Mais le tore lui-même, doit être la transformée par inversion d'un cône. En effet, les cercles méridiens du tore rencontrant l'axe de révolution en deux points réels ou imaginaires. En prenant l'un de ces points comme pôle d'inversion, ces cercles méridiens se transforment en droites passant par un point fixe, transformé du deuxième point commun des cercles. Le tore se transforme donc bien en un cône de révolution.

Par inversion d'un tore. — Mannheim a démontré, directement et très simplement, que la surface générale pouvait être obtenue par inversion d'un tore.

En effet, comme nous l'avons vu, la surface peut-être considérée comme l'enveloppe d'une sphère Σ' qui reste tangente à trois sphères fixes Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Il existe un cercle C orthogonal à ces trois sphères.

Si nous transformons la figure par inversion, en prenant pour pôle un point quelconque de C, C se transformera en une droite d, les sphères Σ_1, Σ_2, Σ_3 en trois sphères Σ'_1, Σ'_2, Σ'.

La droite d devant être normale à ces trois sphères transformées, les trois sphères ont leur centre en ligne droite.

La sphère variable se transforme en une sphère S' qui reste tangente à ces trois sphères transformées. Considérons alors un plan quelconque passant par d et les sections des sphères correspondantes, puis un cercle Γ tangent à ces trois cercles de section.

La sphère S' ayant pour centre le centre de Γ et passant par Γ sera évidemment tangente aux trois sphères Σ_1, Σ_2, Σ_3.

L'enveloppe de cette sphère S' sera évidemment le tore engendré par la rotation de Γ autour de d. La surface Σ enveloppe des sphères Σ' est donc bien l'inverse de ce tore.

La surface générale porte le nom de « Cyclide de Dupin ».

Nous indiquerons quelques propriétés de ces surfaces :

Elles sont en général du quatrième degré et admettent le cercle de l'infini, comme ligne double.

Lorsque la surface est du troisième degré, elle passe par le cercle de l'infini.

Les surfaces admettent quatre points doubles.

Les normales à une surface ρ rencontrent deux courbes fixes, qui sont deux coniques, lieu des centres de l'une et l'autre famille de sphères. Ces deux coniques sont deux coniques focales l'une de l'autre.

Dans le cas du tore, σ l'une des coniques est un cercle lieu des centres des cercles méridiens, l'autre est l'axe de ce cercle, axe de révolution.

II. — SURFACES LIEUX DE CERCLES

Disons quelques mots sur les surfaces qui peuvent être considérées comme engendrées par un cercle variable.

Nous adopterons le même mode d'étude que pour une surface réglée. δ_1, ξ Les équations d'un cercle, sous leur forme générale la plus réduite, sont

$$z + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + c = 0. \tag{2}$$

ρ Elles dépendent de six fonctions d'un même paramètre variable t.

α, ξ Nous allons d'abord déterminer le plan tangent en un point x, y, z de cette surface. δ_1, σ_2 Comme nous l'avons fait pour une surface réglée, nous chercherons à établir une relation linéaire et homogène entre les accroissements dx, dy, dz, quand on se déplace sur la surface.

δ_1 En différentiant les équations (1), (2), on obtient

$$dz + \alpha dx + \beta dy + (\alpha' x + \beta' y + \gamma')dt = 0$$

$$(2x + a)dx + (2y + b)dy + 2z dz + (a'x + b'y + c')dt = 0.$$

On obtiendra la relation linéaire et homogène cherchée, en éliminant dt entre ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{dz + \alpha dx + \beta dy}{(2x + a)dx + (2y + b)dy + 2zdz} = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma'}{a'x + b'y + c'}.$$

Cette relation exprime que ce déplacement est parallèle à un certain plan. Pour obtenir l'équation du plan tangent, il suffit donc d'y remplacer dx, dy, dz par $(X - x)$, $(Y - y)$, $(Z - z)$.

L'équation de ce plan est donc

$$(3) \qquad \frac{(Z - z) + \alpha(X - x) + \beta(Y - y)}{(2x + a)(X - x) + (2y + b)(Y - y) + 2z(Z - z)} = \frac{\alpha' x + \beta' y + \gamma'}{a'x + b'y + c'}.$$

Pour obtenir tous les plans tangents en tous les points d'une même génératrice circulaire, il faut dans cette équation donner à t une valeur particulière t_0, et faire varier x, y, z sur le cercle (1) (2).

Pour se rendre compte comment varient ces plans, nous pouvons, pour simplifier, supposer que nous avons pris le plan des xy comme plan du cercle. Nous devons donc supposer que, pour la valeur t_0 considérée, on a $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ les coordonnées du point satisfaisant à

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 + a_0 x + b_0 y + c_0 = 0.$$

L'équation du plan se réduit alors à

$$\frac{Z}{(2x + a_0)(X - x) + (2y + b_0)(Y - y)} = \frac{\alpha_0' x + \beta_0' y + \gamma_0'}{a_0' x + b_0' y + c_0'}.$$

Si nous posons

$$\frac{a_0' x + b_0' y + c_0'}{\alpha_0' x + \beta_0' y + \gamma_0'} = \lambda = \frac{P_0}{Q_0}.$$

Cette équation se met sous la forme

$$(4) \qquad (2x + a_0)(X - x) + (2y + b_0)(Y - y) - \lambda Z = 0.$$

Sous cette forme on reconnaît que l'on a l'équation du plan tangent à la sphère

$$(5) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 + a_0 X + b_0 Y + c_0 - \lambda Z = 0$$

au point x, y, $z = 0$. Or, cette sphère passe par le cercle choisi.

Inversement, si l'on se donne λ, on aura une sphère passant par le cercle, qui sera tangente à la surface au point x, y à la seule condition que l'on ait

$$a_0 x + b_0' y + c_0' = \lambda(\alpha_0' x + \beta_0' y + \gamma_0'), \qquad Q_0 - \lambda P_0 = 0.$$

Le point x, y sera donc l'un des points d'intersection du cercle avec la droite $Q - \lambda P = 0$. Or cette droite passe par un point fixe, le point de rencontre des droites $Q = 0$, $P = 0$. On a donc le théorème :

THÉORÈME. — *Etant donnée une surface cerclée quelconque, une sphère quelconque passant par l'un des cercles est tangente à la surface en deux points* MM'. *Lorsque la sphère varie, cette droite* MM' *passe par un point fixe du plan de ce cercle.*

Si l'on considère les sphères (5) qui passent par le cercle fixe, on peut définir le rapport anharmonique de quatre sphères par le rapport anharmonique des quatre plans tangents en un point du cercle (plans qui passent par la même droite). Ce rapport anharmonique est aussi celui des quatre centres des sphères lequel est le même que le rapport des quatre valeurs de λ, c'est-à-dire enfin le rapport anharmonique des quatre droites de contact.

Donc :

THÉORÈME. — *Le rapport anharmonique de quatre des sphères est égal au rapport anharmonique des quatre cordes de contact.*

Voyons maintenant ce qui arrive si deux surfaces cerclées passent par un même cercle. Nous allons montrer que *ces deux surfaces sont, en général, tangentes en quatre points.*

En effet, il suffit qu'elles admettent en un point, même sphère tangente. Or, les points où l'une des sphères (5), supposée donnée, sera tangente à la surface S seront les points d'intersection du cercle avec une certaine droite d'équation

$$Q - \lambda P = 0.$$

De même, cette même sphère sera tangente à la deuxième surface S' aux points d'intersection du cercle avec une droite dont l'équation sera de la forme $Q' - \lambda P' = 0$.

Pour que ces points coïncident, il faut et il suffit que

$$QP' - PQ' = 0. \tag{6}$$

Les points x, y seront donc les points d'intersection du cercle avec cette conique (6). Les deux surfaces sont donc bien tangentes en quatre points.

Pour que deux surfaces cerclées, passant par un même cercle, se raccordent tout le long de ce cercle, il suffit donc qu'elles soient tangentes en cinq points.

III. — SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX

Théorème de Dupin. — Nous allons démontrer un théorème célèbre dû à Dupin qui a été l'origine de travaux considérables sur les « systèmes triples orthogonaux ».

Considérons trois équations de la forme

$$f(x, y, z) = \rho_1, \qquad \varphi(x, y, z) = \rho_2, \qquad \psi(x, y, z) = \rho_3. \tag{I}$$

Lorsqu'on donnera à ρ_1 des valeurs constantes successives, la première représentera une famille de surfaces que nous désignerons sous la notation « surfaces $\rho_1 = \text{const}$ ». Nous aurons de même les familles $\rho_2 = \text{const.}$ et $\rho_3 = \text{const.}$

Par tout point de l'espace, passe une surface et une seule de chacune des familles, si comme nous le supposons, les fonctions sont bien déterminées en ce point.

Inversement, si pour des valeurs de x, y, z, le déterminant fonctionnel $D\dfrac{x, y, z}{f, \varphi, \psi}$ est différent de zéro, on pourra résoudre les trois équations (I) par rapport à x, y, z et on obtiendra les expressions de x, y, z en fonction des paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3.

On dit que ρ_1, ρ_2, ρ_3 représentent un système de « coordonnées curvilignes » du point M.

Par exemple, si l'on pose

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho_1, \qquad \text{arc tg}\frac{y}{x} = \rho_2, \qquad \text{arc tg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \rho_3.$$

On pourrait obtenir inversement

$$x = \rho_1 \sin\rho_3 \cos\rho_2, \qquad y = \rho_1 \sin\rho_3 \sin\rho_2, \qquad z = \rho_1 \cos\rho_3.$$

Les surfaces $\rho_1 = \text{const.}$ sont des sphères de centre O ; les

surfaces $\rho_2 = \text{const.}$ sont des plans passant par Oz ; les surfaces $\rho_3 = \text{const}$ sont des cônes de révolution autour de Oz. Dans le cas particulier actuel, on reconnaît que ρ les surfaces de chaque famille, passant en un point quelconque de l'espace se coupent deux à deux à angle droit. On dit que ces trois familles de surfaces forment un « système triple orthogonal ».

α, ξ

Nous sommes donc amenés à *considérer toutes les familles de surfaces qui jouissent de la même propriété, c'est-à-dire qui soient telles que deux des surfaces quelconques de deux familles différentes se coupent en tout point commun à angle droit.*

β, o

On obtient immédiatement les trois conditions

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Ainsi, les trois fonctions f, φ, ψ doivent satisfaire à trois équations. On conçoit donc que, en général, il ne soit pas possible de choisir ψ arbitrairement l'une des fonctions, mais que l'une d'elles, f, par l'élimination des deux autres φ et ψ, satisfasse à une ou peut-être plusieurs équations. Il est bien évident d'ailleurs que les équations auxquelles devra satisfaire φ ou ψ seront les mêmes que celles auxquelles devra satisfaire f.

Nous n'effectuerons pas l'élimination de deux des fonctions φ et ψ, par exemple. Bonnet, puis Cayley et Darboux ont démontré que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de surfaces $f(x, y, z) = \rho$ puisse faire partie d'un système triple orthogonal est que la fonction $f(x, y, z)$ satisfasse à une seule équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

d

On connaît ainsi le caractère de généralité possible du problème. Toute famille de surfaces $f(x, y, z) = \rho$ telle que la fonction $f(x, y, z)$ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles s'appelle une « famille de Lamé ».

Mais si toute une famille de surfaces donnée, ne peut être, en général, une des trois familles d'un système triplement orthogonal

une surface déterminée peut toujours être, et d'une infinité de manières, englobée dans un système triple orthogonal.

Nous allons montrer, en effet, que, étant donnée une surface arbitrairement choisie, on peut en déduire une famille de surfaces qui la comprenne, faisant partie d'un système triple orthogonal : nous déterminerons les deux autres familles.

Etant donnée la surface S_0, portons sur la normale en chaque point une longueur constante MM'. Le lieu de M' est une surface S' « parallèle » à la première, admettant en M' la même normale M'M. Lorsqu'on fait varier la longueur MM', on obtient une famille de surfaces parallèles à la surface S_0. C'est la première famille du système.

Considérons d'autre part sur S_0 les deux lignes de courbure C_1, C_2 qui se croisent en M. Les normales en tous les points de C_1, par exemple, forment une surface développable S_1.

Mais ces normales sont aussi les mêmes pour une quelconque des surfaces S' parallèles à S_0. Donc les pieds de ces normales sur S' sont aussi sur une même ligne de courbure de S'.

Le plan tangent en M' à la développable S_1 est le plan passant par MM' et par la tangente à la ligne de courbure. Il est donc normal en M' à S'. Les surfaces S_1 et S' se coupent donc à angle droit. De même, la développable S_2 et S' se coupent aussi à angle droit. Enfin, les deux développables S_1 et S_2 qui se coupent suivant MM' et dont les plans tangents en M' passent respectivement par les tangentes aux deux lignes de courbure de S'. sont aussi orthogonales. Trois des surfaces quelconques S_1, S_2, S' se coupent donc deux à deux à angle droit.

Les deux familles de développables S_1, S_2 correspondant à toutes les lignes de courbure du premier et du deuxième système de S, constituent les deux autres familles du système triple orthogonal.

On a donc bien constitué un système triple dont fait partie la surface choisie S_0.

Ribaucour a indiqué un deuxième mode de formation du système triple.

Dans le cas actuel, comme dans le cas tout à fait particulier que

nous avons envisagé au début, on constate que les surfaces d'une famille sont coupées par les deux surfaces quelconques de deux autres familles suivant les lignes de courbure du premier et du deuxième système.

Nous allons démontrer le théorème suivant dû à Dupin :

THÉORÈME DE DUPIN. — *Quand trois familles de surfaces forment un système triplement orthogonal, chaque surface de l'une des familles est coupée, suivant ses lignes de courbure, par les surfaces des deux autres familles.*

Première démonstration. — Nous savons que, si on donne une surface $z = f(x, y)$ et si on prend pour origine un point O de la surface, et pour axe des z la normale en ce point, la condition pour que les axes Ox, Oy soient les tangentes aux lignes de courbure de la surface est que, en ce point, on ait

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s = 0.$$

C'est là toute notre démonstration.

Nous allons supposer que nous prenions trois surfaces quelconques de chacune des familles. Ces trois surfaces se coupent en un point O. Nous supposerons que nous avons pris pour axes de coordonnées les normales à ces trois surfaces, normales qui, par hypothèse, forment un trièdre trirectangle.

En O les surfaces

$$f(x, y, z) = \rho_1, \qquad \varphi(x, y, z) = \rho_2, \qquad \psi(x, y, z) = \rho_3$$

ont donc respectivement pour normale Ox. Oy, Oz.

de sorte que, pour l'origine, on a

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Nous voulons montrer que la surface $\psi(x, y, z) = \rho_3$, par exemple, est coupée par les deux autres surfaces suivant des lignes de courbure. Comme les tangentes à ces courbes d'inter-

section en O sont respectivement Ox, Oy, *il faudra et il suffira de démontrer que, pour la fonction que l'on déduirait de l'équation* $\psi(x, y, z) = \rho_3$, *on a, à l'origine, la condition*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s = 0.$$

La démonstration est pour ainsi dire terminée.

Tout d'abord, pour la fonction $z(x, y)$ définie par l'équation implicite $\psi(x, y, z) - \rho_3 = 0$, calculons la dérivée seconde s. On a successivement

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + p\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + s \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Or, pour l'origine, on a $p = 0$, $q = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} \neq 0$. Pour que, à l'origine, on ait $s = 0$, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Cette condition ne peut que se déduire des identités auxquelles satisfont les fonctions f, φ, ψ.

$$\text{(I)} \qquad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Dérivons ces identités respectivement par rapport à x, y, z et tenons compte des conditions (II), il restera simplement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

On peut considérer ces trois équations comme linéaires et homogènes en $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$. Le déterminant de ces quan-

tités est égal à $2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}$. Il est donc différent de zéro. Donc ces équations n'admettent comme solution que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \qquad \text{(pour l'origine)}$$

Le théorème est donc bien démontré.

La surface quelconque $\psi(x, y, z) = \rho_3$ est donc bien coupée au point quelconque O, par les deux autres surfaces, suivant les lignes de courbure qui passent en O.

Deuxième démonstration. — Etant donnée l'importance de ce théorème, et à titre d'éducation mathématique, nous allons donner une deuxième démonstration tout à fait différente, et tout aussi normale et naturelle du théorème de Dupin, sans être obligé de prendre des axes particuliers.

Nous avons les trois familles de surfaces

$$(1) \qquad f(x, y, z) = \rho_1, \qquad \varphi(x, y, z) = \rho_2, \qquad \psi(x, y, z) = \rho_3$$

se coupant deux à deux à angle droit, et nous voulons démontrer que, par exemple, une surface $\rho_3 = \text{const.}$ est coupée par deux autres quelconques des deux autres familles, suivant ses lignes de courbure.

Que savons-nous sur les lignes de courbure d'une surface ?

Nous savons que, si les coordonnées d'un point d'une surface sont exprimées au moyen de deux paramètres u, v, en désignant par U, V, W, un système de paramètres directeurs de la normale, l'équation qui donne les directions des lignes de courbure est

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \mathrm{U} & \mathrm{V} & \mathrm{W} \\ d\mathrm{U} & d\mathrm{V} & d\mathrm{W} \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut donc avoir les coordonnées d'un point de la surface ρ_3 en fonction de deux paramètres. Nous résoudrons donc le système (1) par rapport à x, y, z en fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3 sous la forme

$$x = \mathrm{F}(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \qquad y = \Phi(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \qquad z = \Psi(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$$

et dans ces expressions, il faudra faire varier seulement

ρ_1, ρ_2 (qui jouent le rôle de u, v), si l'on veut que le point se déplace sur la surface ρ_3, = const.

(La courbe d'intersection de deux surfaces, ρ_1 = const. ρ_2 = const. s'obtient, au contraire, en faisant varier ρ_3 seulement).

Nous devons maintenant rechercher un système de paramètres directeurs de la normale en un point de la surface ρ_3 = const. Mais puisque les trois familles sont orthogonales deux à deux, la courbe d'intersection des surfaces ρ_1 = const., ρ_2 = const. est normale à la surface ρ_3 = const. Donc d'après la remarque faite ci-dessus, les paramètres directeurs de la normale sont

$$U = \frac{\partial x}{\partial \rho_3}, \qquad V = \frac{\partial y}{\partial \rho_3}, \qquad W = \frac{\partial z}{\partial \rho_3}.$$

Nous devons les substituer dans l'équation (1) et montrer que l'équation différentielle en $d\rho_1$, $d\rho_2$ admet les solutions $d\rho_1 = 0$, $d\rho_2 = 0$.

En remarquant que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial x}{\partial \rho_2} d\rho_2, \qquad dU = \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_3 \partial \rho_2} d\rho_2, \qquad \text{etc.},$$

pour que l'équation admette la solution $d\rho_2 = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho_1}, & \frac{\partial y}{\partial \rho_1}, & \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho_3}, & \frac{\partial y}{\partial \rho_3}, & \frac{\partial z}{\partial \rho_3} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_3 \partial \rho_1}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \rho_3 \partial \rho_1}, & \frac{\partial^2 z}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} \end{vmatrix} = 0.$$

c'est-à-dire

$$(2') \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} \times D_{y,z}^{\rho_1, \rho_3} = 0.$$

Cette condition ne peut que se déduire des conditions d'orthogonalité des surfaces, ou de leurs courbes d'intersection deux à deux.

Les tangentes aux trois courbes

ρ_1 seul variable, ρ_2 seul variable, ρ_3 seul variable

étant rectangulaires deux à deux,

$$(II) \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho_3} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho_1} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho_2} = 0.$$

(Ces équations remplacement le sustème I.)

ρ, d

De la première et de la dernière, on déduit que $\frac{\partial x}{\partial \rho_2}, \frac{\partial y}{\partial \rho_2}, \frac{\partial z}{\partial \rho_2}$ sont proportionnels aux déterminants

$$D_{y,z}^{\rho_1,\rho_3}, \qquad D_{z,x}^{\rho_1,\rho_3}, \qquad D_{x,y}^{\rho_1,\rho_3}.$$

α, r

La condition (2′) s'écrit donc

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} = 0. \tag{3}$$

Mais pour obtenir cette condition, σ_2 on voit qu'il faut dériver les équations (II) respectivement par rapport à ρ_1, ρ_2, ρ_3.

o

On obtient ainsi

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} + \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_3} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = 0$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \rho_3} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} = 0$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \rho_1} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} + \sum \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} = 0.$$

ρ, ω

On en conclut évidemment que les trois sommes sont séparément nulles. La condition (2′) est donc bien satisfaite et l'équation (I) admet bien la solution $d\rho_2 = 0$ et de même, la solution $d\rho_1 = 0$.

Les lignes de courbure de $\rho_3 =$ const. s'obtiennent donc bien en posant $\rho_1 =$ const. ou $\rho_2 =$ const.

Elles s'obtiennent en coupant la surface par les surfaces des deux autres familles.

On déduit immédiatement du théorème de Dupin une conséquence remarquable. La propriété pour deux surfaces de se couper à angle droit σ_2 est une propriété qui se conserve par

a

une inversion quelconque. Si donc on transforme par inversion un système triple orthogonal, o le système transformé constituera aussi un système triple orthogonal et par conséquent les surfaces transformées se couperont encore suivant leurs lignes de courbure.

Mais ξ nous avons vu qu'une surface quelconque S peut être

englobée dans un système triple orthogonal. Si l'on transforme par inversion cette surface et les deux familles de surfaces correspondantes du système triple, les transformées des lignes de courbure de la surface seront les nouvelles courbes d'intersection de la surface transformée S′ et des familles transformées. Comme le nouveau système est encore triplement orthogonal, ces courbes d'intersection seront aussi les lignes de courbure de S′. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Par une inversion quelconque, les lignes de courbure d'une surface, se transforment en lignes de courbure de la surface transformée.*

D'une façon plus abrégée :

L'inversion conserve les lignes de courbure.

Application du théorème de Dupin aux quadriques. — Considérons les familles de quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{a-\rho}+\frac{y^2}{b-\rho}+\frac{z^2}{c-\rho}-1=0. \tag{1}$$

Par un point quelconque de l'espace, passent trois de ces quadriques correspondant aux trois racines de l'équation (1) en ρ qui exprime que la quadrique passe par le point supposé donné, x, y, z. Ces trois racines sont toujours réelles séparées par $-\infty$, c, b, a, en supposant $c<b<a$.

Si l'on désigne par ρ_1, ρ_2, ρ_3 ces trois racines, on a trois surfaces homofocales qui se coupent en M(x, y, z).

Inversement, or pourrait déduire x, y, z, en fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3, en résolvant les trois équations obtenues en remplaçant dans (1), ρ par ρ_1, ρ_2 ou ρ_3. Pour effectuer cette résolution, le moyen le plus simple consiste à remarquer que l'équation

$$\frac{x^2}{a-\rho}+\frac{y^2}{b-\rho}+\frac{z^2}{c-\rho}-1=0$$

admet par hypothèse les racines ρ_1, ρ_2, ρ_3 et que l'on a, par conséquent, une identité de la forme

$$\frac{x^2}{a-\rho}+\frac{y^2}{b-\rho}+\frac{z^2}{c-\rho}-1\equiv\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)},$$

en remarquant que les deux membres prennent la valeur -1 quand ρ augmente indéfiniment. ω, τ_2 C'est donc comme si l'on avait décomposé la fraction rationnelle du second membre en fractions simples. Les coefficients des fractions simples x^2, y^2, z^2 s'obtiennent τ_2 par la méthode habituelle. On a donc immédiatement

$$x^2 = \frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)(a-\rho_3)}{(b-a)(c-a)}, \qquad y^2 = \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)(b-\rho_3)}{(a-b)(c-b)},$$
$$z^2 = \frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)(c-\rho_3)}{(b-c)(a-c)}.$$

Si dans ces formules, on laisse, par exemple, ρ_1 constant, le point x, y, z, décrit une surface $\rho_1 = \text{const.}$ On a de même les familles $\rho_2 = \text{const.}$, $\rho_3 = \text{const.}$ Chacune de ces familles est formée de quadriques (1).

α, ψ Il est aisé de montrer que *deux surfaces quelconques* $\rho_2 = const.$, $\rho_3 = const.$ *se coupent à angle droit.*

δ_1, ξ Les paramètres directeurs de la normale à la surface $\rho_2 = \text{const.}$ sont en effet $\frac{x}{a-\rho_2}$, $\frac{y}{b-\rho_2}$, $\frac{z}{c-\rho_2}$; de même, ceux de la normale à $\rho_3 = \text{const.}$ sont $\frac{x}{a-\rho_3}$, $\frac{y}{b-\rho_3}$, $\frac{z}{c-\rho_3}$.

β On devrait donc avoir

$$\frac{x}{a-\rho_2}\cdot\frac{x}{a-\rho_3} + \frac{y}{b-\rho_2}\cdot\frac{y}{b-\rho_3} + \frac{z}{c-\rho_2}\cdot\frac{z}{c-\rho_3} = 0.$$

Mais on a séparément

$$\frac{x^2}{a-\rho_2} + \frac{y^2}{b-\rho_2} + \frac{z^2}{c-\rho_2} - 1 = 0, \qquad \frac{x^2}{a-\rho_3} + \frac{y^2}{b-\rho_3} + \frac{z^2}{c-\rho_3} - 1 = 0,$$

α En retranchant ces deux équations membre à membre, on obtient bien la condition précédente.

Les trois familles de quadriques homofocales forment donc un γ, τ_2 système triple orthogonal. Si nous appliquons le théorème de Dupin, les lignes de courbure de la surface ρ_1, par exemple, s'obtiendront en coupant cette surface par les surfaces des deux autres familles c'est-à-dire par les quadriques $\rho_2 = \text{const.}$ ou $\rho_3 = \text{const.}$

En particulier, les lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

s'obtiendront en coupant cet ellipsoïde par les quadriques

$$\frac{x^2}{a^2 - \rho} + \frac{y^2}{b^2 - \rho} + \frac{z^2}{c^2 - \rho} - 1 = 0$$

correspondant aux racines comprises dans les deux intervalles $-\infty, c^2, b^2, a^2$ qui ne comprennent pas zéro, c'est-à-dire en donnant à ρ_2 et ρ_3 les valeurs comprises entre c^2 et b^2 et entre b^2 et a^2.

Les surfaces correspondantes sont un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

Paraboloïdes. — Si l'on considère l'équation

$$\frac{x^2}{p^2 - \lambda} + \frac{y^2}{q^2 - \lambda} - 2z + \lambda = 0, \tag{1}$$

elle représente un paraboloïde. Par un point quelconque de l'espace passent trois de ces paraboloïdes, qui se coupent deux à deux à angle droit. Les trois familles de surfaces correspondant aux trois valeurs de λ séparées par

$$-\infty, \quad p^2, \quad q^2, \quad +\infty, \qquad (p < q)$$

forment donc un système triple orthogonal.

On aura, en particulier, les lignes de courbure du paraboïde.

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - 2z = 0$$

en coupant ces paraboloïdes par les deux paraboloïdes

$$\frac{x^2}{p^2 - \lambda} + \frac{y^2}{q^2 - \lambda} - 2z + \lambda = 0,$$

équation dans laquelle il faut donner à λ, soit la racine comprise entre p^2 et q^2, soit la racine comprise entre q^2 et $+\infty$.

Détermination du système triple connaissant une famille. — Si l'on sait qu'une famille de surfaces donnée, soit $f(x, y, z) = \rho$, constitue une famille de Lamé, voyons à quoi revient la détermination du système triple.

Il faudra d'abord intégrer l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0 \tag{1}$$

qui est linéaire et homogène en $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ (car on connaît $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$).

Nous savons que l'intégration de cette équation est ramenée à l'intégration du système différentiel :

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

On en déduit la forme générale des fonctions $\varphi(x, y, z)$ dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables.

De même la fonction $\psi(x, y, z)$ sera déterminée par la même équation (1) et par conséquent, ψ a la même forme générale que φ. Il reste encore à satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}=0$$

qui pourra certainement être satisfaite identiquement pour des valeurs déterminées des fonctions arbitraires dont dépendent φ et ψ puisque f est solution de l'équation aux dérivées partielles. Cette dernière condition déterminera donc les fonctions φ et ψ.

Application : Famille $\frac{xy}{z}=\rho$. — Soit, par exemple, la famille de surfaces

$$\frac{xy}{z}=\rho$$

que *l'on sait* être une famille de Lamé.

La fonction φ devra satisfaire à l'équation

$$\frac{y}{z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{x}{z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{xy}{z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0 \tag{1}$$

ou

$$yz\frac{\partial \varphi}{\partial x}+zx\frac{\partial \varphi}{\partial y}-xy\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0. \tag{1'}$$

ξ

Cette intégration est ramenée à celle du système

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = -\frac{dz}{xy}.$$

On en déduit les combinaisons

$$x\,dx + z\,dz = 0, \qquad y\,dy + z\,dz = 0$$

et par suite

$$x^2 + z^2 = \alpha, \qquad y^2 + z^2 = \beta.$$

ω, ω₂

La solution générale de l'équation (1′) est

$$\varphi(x, y, z) = \mathcal{F}(x^2 + z^2, y^2 + z^2) = \mathcal{F}(\alpha, \beta)$$

$\mathcal{F}$ désignant une fonction arbitraire de α et β.

δ₁

De même on aura

$$\psi(x, y, z) = \mathcal{F}_1(x^2 + z^2, y^2 + z^2) = \mathcal{F}_1(\alpha, \beta).$$

α

Ecrivons alors, la troisième équation

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

En explicitant $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$..., on obtient

$$(2)\quad x\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} \cdot x\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} + y\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} \cdot y\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta} + z\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right) \times z\left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta}\right) = 0.$$

α, ν

Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ ne dépendent que de α, β₁, prenons comme variables indépendantes α, β, z ; l'équation (2) deviendra

$$(3)\quad (\alpha - z^2)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} + (\beta - z^2)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta} + z^2\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta}\right) = 0.$$

β

Il faut que cette équation soit identiquement satisfaite quels

d

que soient z, β, α. Elle se résout donc en deux équations

$$(4)\quad \alpha\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta} = 0$$

$$(5)\quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} = 0.$$

On a donc deux équations (4) (5) pour déterminer les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$: Le problème est possible.

Or ρ les équations sont homogènes par rapport aux dérivées. ∂_1, α

Si l'on pose

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \lambda, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} = \mu,$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta}$$

elles deviennent

$$\alpha\lambda\mu + \beta = 0, \qquad \lambda + \mu = 0.$$

Elles donnent par suite

$$\lambda^2 = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Si nous prenons

$$\lambda = + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

on aura

$$\mu = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

∂_1

Les fonctions $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$, $\mathcal{F}_1(\alpha, \beta)$ satisfont donc à

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \beta}$$

La première s'écrit

$$\sqrt{\alpha}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - \sqrt{\beta}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = 0.$$

σ_2

Son intégration revient à l'intégration de l'équation

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \frac{d\beta}{-\sqrt{\beta}} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \text{const.}$$

o

Par suite

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) = 0(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}).$$

∂_1

De même

$$\mathcal{F}_1(\alpha, \beta) = 0_1(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}).$$

θ et θ_1 étant arbitraires.

Les deux autres familles du système triple sont donc

$$\theta(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \rho_2, \qquad \theta_1(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) = \rho_3.$$

ou simplement

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \rho_2, \qquad \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \rho_3,$$

c'est-à-dire enfin

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = \rho_2, \qquad \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = \rho_3.$$

Telles sont les deux familles qu'il faut adjoindre à la famille $\frac{xy}{z} = \rho$ pour obtenir un système triple orthogonal.

En appliquant le théorème de Dupin, ρ_2, ρ_1 on voit que les lignes de courbure de la surface $\frac{xy}{z} = \rho$, s'obtiennent en les coupant par les deux autres familles de surfaces ci-dessus.

Ces surfaces ont une signification géométrique simple :

Si l'on désigne par d_1, d_2 les distances d'un point M aux axes ox, oy, on a les conditions

$$d_1 + d_2 = \rho_2, \qquad d_1 - d_2 = \rho_3.$$

Pour tout point d'une ligne de courbure de $\frac{xy}{z} = \rho$, la somme ou la différence de ses distances aux axes ox, oy est constante.

IV. — FAMILLES DE SURFACES A TRAJECTOIRES ORTHOGONALES PLANES

Enfin, nous dirons quelques mots d'une étude qui conduit à une équation qui a la plus grande analogie avec celle qui détermine les familles de Lamé et qui est susceptible de fournir de nombreux sujets de recherches.

C'est l'étude des *familles de surfaces dont toutes les trajectoires orthogonales sont des courbes planes.* En employant des notations de mécanique, c'est l'étude des champs de forces tels que toutes les lignes de forces soient des courbes planes.

Ce sujet, étudié en particulier par Ribaucour, Darboux, a constitué la Thèse de l'Auteur.

Si l'équation de la famille de surfaces est

$$f(x, y, z) = \rho \tag{1}$$

les équations déterminant les trajectoires orthogonales sont

$$\frac{dx}{f_x'} = \frac{dy}{f_y'} = \frac{dz}{f_z'} = dt. \tag{2}$$

L'intégration donnerait des résultats de la forme

$$x = \varphi(t, c_1, c_2), \qquad y = \psi(t, c_1, c_2), \qquad z = \theta(t, c_1, c_2),$$

Si ces trajectoires sont des courbes planes, on doit pouvoir déterminer des constantes m, n, p, q, telles que l'on ait quel que soit t,

$$mx + ny + pz + q = 0.$$

Par suite, en dérivant trois fois, on en déduirait la condition

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Il suffit de développer ce déterminant pour obtenir l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x, y, z)$.

Des équations (2) on déduit d'abord

$$x' = f_x', \qquad y' = f_y', \qquad z' = f_z'.$$

Par suite

$$x'' = f''_{x^2} f_x' + f''_{xy} f_y' + f''_{xz} f_z'$$

et des formules analogues pour y', z', y'', z''.

On remarque que le second membre est la demi dérivée, par rapport à x, de la fonction

$$u = f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2.$$

On a donc

$$x'' = \frac{1}{2} u_x', \qquad y'' = \frac{1}{2} u_y', \qquad z'' = \frac{1}{2} u_z'$$

δ_1

et enfin

$$2x''' = u''_{x^2} f'_x + u''_{xy} f'_y + u''_{xz} f'_z = \delta_f u'_x$$

en introduisant une notation connue

$$\delta_u \varphi = \delta_v u = v'_x u'_x + v'_y u'_y + v'_z u'_z.$$

δ_1

Par suite, l'équation (3) devient

$$(3') \qquad D = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ u'_x & u'_y & u'_z \\ \delta_f u'_x & \delta_f u'_y & \delta_f u'_z \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x, y, z)$.

C'est une équation fort compliquée, qui, complètement développée comprendrait $2^2 \cdot 3^4 = 324$ termes. Elle est linéaire par rapport aux dérivées du troisième ordre.

Elle est d'une forme analogue à celle qui détermine les familles de Lamé. Il y *a même identité absolue, entre les ensembles de termes ne renfermant aucune dérivée du troisième ordre* (soit 162 termes).

Dans sa Thèse, l'Auteur a pu mettre cette équation sous une forme des plus condensées, conduisant à un résultat remarquable.

Si nous posons (en désignant par 1, 2, 3 les dérivations par rapport à x, y, z)

$$A = f_2 u_3 - f_3 u_2, \qquad B = f_3 u_1 - f_1 u_3, \qquad C = f_1 u_2 - f_2 u_1$$

et si nous considérons la fonction

$$(4) \qquad \varphi(x, y, z) = \frac{B}{A} = \frac{f_3 u_1 - f_1 u_3}{f_2 u_3 - f_3 u_2},$$

l'équation (3') *se met sous la forme réduite.*

$$(5) \qquad f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2 + f_3 \varphi_3 = 0.$$

τ

Or cette équation exprime que, en tout point commun, *les surfaces* $f = \text{const.}$ $\varphi = \text{const.}$ *se coupent à angle droit.*

d

On en déduit aisément que les surfaces $\varphi = \text{const.}$ *contiennent les trajectoires tout entières.*

De plus, le plan de la courbe trajectoire partant d'un point x_0, y_0, z_0 a pour équation

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ (f_x')_0 & (f_y')_0 & (f_z')_0 \\ (u_x')_0 & (u_y')_0 & (u_z')_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc on connaît une famille de surfaces $f(x, y, z) = \rho$ satisfaisant à l'équation (3') ou (5), les équations (6) et

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

donneront sans qu'il doit nécessaire de faire aucune quadrature, les courbes trajectoires.

Mais d'autre part, la fonction φ n'étant pas formée symétriquement au moyen des dérivées de f, on peut avoir une deuxième forme différente, en prenant

$$w(x, y, z) = \frac{f_1 u_2 - f_2 u_1}{f_2 u_3 - f_3 u_2} = \text{const.}$$

On peut donc mettre les équations des courbes trajectoires passant en x_0, y_0, z_0 sous la forme symétrique

$$\frac{A}{A_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{C}{C_0}.$$

sans aucune intégration.

Les deux familles de surfaces

$$\varphi = \text{const.}, \qquad w = \text{const.}$$

se coupent donc mutuellement suivant des courbes planes.

Si l'on donne la surface enveloppe des plans des courbes trajectoires, sous forme tangentielle

$$\varphi(u, v, w, z) = 0,$$

l'équation qui détermine f se réduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\varphi(A, B, C, \quad -(Ax + By + Cz)) = 0.$$

On peut astreindre les fonctions $f(x, y, z)$ à des conditions particulières.

1° Si cette fonction est à *variables séparées* de la forme

$$f(x, y, z) = X + Y + Z$$

on trouve qu'il est nécessaire et suffisant que les fonctions X, Y, Z satisfassent à une même équation

$$X'X''' + X''^2 + kX'' = a.$$

On peut intégrer complètement cette équation.

On démontre que *les plans des courbes passent par un point fixe.*

En particulier, si $k = 0$, on a la famille de surfaces

$$\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\, dx + \int \sqrt{ay^2 + 2b'y + c'}\, dy + \int \sqrt{az^2 + 2b''z + c''}\, dz = \rho.$$

Les trajectoires orthogonales sont des hyperboles tangentes à des plans parallèles, deux à deux, aux plans de coordonnées. Les plans de ces trajectoires passent par un point fixe, centre du parallélépipède.

Si $a = 0$, on obtient la famille de surfaces

$$\sqrt[3]{b}\, x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{b'}\, y^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{b''}\, z^{\frac{2}{3}} = \rho.$$

Elles ont pour trajectoires orthogonales, les paraboles

$$x = b(t + \alpha)^2, \qquad y = b(t + \beta)^2, \qquad z = b''(t + \gamma)^2.$$

Les plans des courbes sont parallèles à la direction fixe, b, b', b''.

Ces paraboles sont tangentes aux trois plans de coordonnées.

2° Pour que les plans des courbes trajectoires soient parallèles à une direction fixe a, b, c, il faut et il suffit que la fonction $f(x, y, z)$ satisfasse à une équation de la forme

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathcal{F}(f, ax + by + cz).$$

Pour que les plans des courbes trajectoires passent constamment par l'origine, il faut qu'elle satisfasse à une équation de la forme

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mathcal{F}(f, x^2 + y^2 + z^2).$$

3° Enfin on peut étudier les *familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes qui constituent également une famille de Lamé.*

Ce problème revient à la détermination des systèmes triples, dans lesquels un des systèmes de lignes de courbure est composé de courbes planes.

L'Auteur a déterminé ainsi, par des formules simples, une solution dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable $\varphi(u)$ et d'une fonction de deux variables $\psi(v, w)$.

En particulier si $\varphi(u)$ est de la forme

$$\varphi(u) = \alpha + \beta e^{u} + \gamma e^{-u},$$

un système de lignes de courbure des familles v et w *est constitué par des cercles.*

Comme cas tout à fait particulier, on obtient le système

$$\frac{x}{u} = \frac{y - v}{v} = \frac{z - w}{-w} = \frac{w^2 - v^2}{u^2 + v^2 + w^2}$$

composé de cyclides du troisième degré dont toutes les lignes de courbure sont des cercles.

Nous nous bornons à ces indications (Cf. Thèse de l'Auteur).

Nous en avons terminé avec toutes les applications géométriques. On ne peut que lire avec le plus grand intérêt le magistral *Traité* de Darboux sur la Théorie des surfaces, et tout d'abord l'ouvrage si clair et si intéressant de Demartres (*Cours de géométrie infinitésimale*).

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE DEUXIÈME

CHAPITRE PREMIER

Fonctions de variable complexe

		Pages
I. —	*Rappel sur les imaginaires*	1
	Fonction d'une variable complexe	6
	Fonction analytique : équations fondamentales	7
	Autres formes	9
	Fonction de fonction	10
	Fonction inverse	11
	Opérations sur les dérivées	12
	Formule des accroissements finis	12
	Fonctions holomorphes. — Points singuliers	13
	Domaine d'un point. — Valeur infinie de la variable	14
	Fonctions de plusieurs variables	17
	Fonction composée	18
II. —	*Fonctions élémentaires*	20
	e^z, sin z, cos z	21
	Formules d'Euler	22
	Propriétés de la fonction e^z	22
	Propriétés des lignes trigonométriques	24
	Racines de sin $z = 0$	25
	Applications des formules d'Euler	26
	Fonction logarithmique	28
	Détermination précise	29
	Propriétés de la fonction logarithmique	32
	Fonction $(z - a)^m$	32
	Séparation de la partie réelle	33
	Propriétés	35
III. —	*Représentation conforme*	36
	Conservation des angles	36
	Différentielle des arcs	39
	Exemples	41
	Familles de courbes orthogonales	42
	Exemples : coniques homofocales	43

Pages

Courbes d'égal module et d'égal argument 46
Transformation homographique sur un cercle..... 46
Invariants 48
IV. — *Détermination d'une fonction analytique par une condition* 49
Transformation 51
Applications 52
V. — *Intégrales des fonctions de variable complexe* 55
Contour fermé..... 56
Limite supérieure d'une intégrale..... 58
Applications : Cercle infiniment petit, infiniment grand..... 59
Condition pour que l'intégrale soit indépendante du chemin d'intégration entre deux points fixes..... 59
2° Démonstration : Condition nécessaire..... 60
Condition suffisante..... 63
Généralisation 66
Intégrale considérée comme fonction de la limite supérieure.. 67
Changement de variable..... 70
Dérivation sous le signe $\int$..... 72

CHAPITRE II

Intégrale de Cauchy. — Formule de Taylor. Série de Laurent

I. — *Intégrale de Cauchy*..... 74
Dérivées successives..... 76
Limites supérieures des dérivées..... 76
Fonctions de plusieurs variables..... 77
II. — *Retour sur les séries de fonctions d'une variable complexe*..... 78
Série des intégrales..... 79
Séries dérivées..... 80
III. — *Formule et série de Taylor*..... 82
Théorème de Liouville..... 85
Fonctions de plusieurs variables..... 87
IV. — *Conséquences de la formule de Taylor*..... 88
Prolongement..... 88
Zéros..... 90
Pôles..... 91
Ordre d'une fonction méromorphe..... 92
Expression analytique d'une fonction méromorphe dans une aire..... 92
Somme des ordres..... 94
Fonction entière..... 96
Fonction fractionnaire..... 97
V. — *Série de Laurent. — Série de Fourier*..... 99
Série de Laurent..... 99
Expression générale des coefficients..... 101
Série de Fourier..... 102
Points singuliers essentiels..... 103
Autres singularités..... 105

CHAPITRE III

Etude des fonctions harmoniques : problème de Dirichlet

Pages

I. — *Fonctions harmoniques* 107
Formule de Green 109
Deuxième démonstration 110
II. — *Problème de Dirichlet* 113
Cas du cercle 113
Théorème de Liouville 116
Cas général. — Propriétés 117
Postulatum de Dirichlet 118
III. — *Fonctions harmoniques : trois variables* 119
Fonction régulière 119
Généralisation de la formule de Green 120
Formule de Poisson 123
Formule de Gauss 127
Problème de Dirichlet : cas de la sphère 127

CHAPITRE IV

Théorème des résidus. — Construction de fonctions. Fonctions implicites. — Périodes polaires

I. — *Théorème des Résidus : Applications* 132
Théorème des résidus 134
Conséquences 135
Applications : Fonction rationnelle 136

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ 137

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\,dx$ 138

Intégrales de Fresnel 140

$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$ 142

$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x}\,dx$ 144

Expression par une intégrale des Polynômes de Legendre 147
Détermination du signe 151
II. — *Intégrale de Cauchy* 155
Formule 156
Applications : Théorème de d'Alembert 157
Racines de l'équation $f(z) + \varphi(z) = 0$ lorsque $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$ ... 158
Théorème : Si $f(z) = b$ n'a qu'un nombre limité de racines, etc... 159

Pages

III. — *Construction de fonctions* 161
Théorème de Riemann 161
Théorème de Mittag-Löffler : Fonctions à pôles donnés 162
Construction 163
Application : Fonctions à pôles simples : pôles $\pm k$ 166
Facteurs primaires de Weierstrass 168
Zéros en nombre infini 169
Application : $\sin \pi z$ 172

IV. — *Fonctions implicites* 175
Existence 175
Les racines sont des fonctions continues 176
Fonctions algébriques 179
Points critiques des racines 183
Fonctions multiformes 184
Lacets. — Diverses déterminations 186
Points singuliers 187
Théorème : Toute fonction multiforme... est une fonction algébrique 188
Cas où $f(z, u)$ est une fonction holomorphe quelconque 191
Développement des solutions 193
Fonction inverse 193

V. — *Fonctions de plusieurs variables* 194
Système d'équations implicites 196
Expression analytique des fonctions 200
Fonctions inverses 202

VI. — *Périodes polaires* 202

$$u = u_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}\, dz \quad \ldots\ldots 202$$

Diverses valeurs de l'intégrale 204
Exemples 208
Points critiques de la fonction inverse 209

CHAPITRE V

Equations différentielles

Généralités 213

I. — *Equations du premier ordre* 214
Equations les plus simples 214
Facteur intégrant 216
Equations à variables séparées 219
Equations homogènes 219
Première généralisation 223
Deuxième généralisation 225
Equation de Darboux 225
Equation de Jacobi 229

II. — *Equations linéaires* 232
Méthode de variation des constantes 232
Méthode du facteur intégrant 234

Pages

Applications 236
Equation de Bernouilli 238
Equation de Riccati 239
Rapport anharmonique 242
Applications 243

III. — *Equations non linéaires* 244
Cas simples 244
Cas général : première méthode : Changement de variables 246
deuxième méthode : Par dérivation 247
Equation de Lagrange 249
Equation de Clairaut 249
Applications 251
Troisième méthode d'intégration (surface) 254
Problème des trajectoires 255
Applications 257

VI. — *Relations entre les intégrales d'une même équation* 259
Application aux transcendantes 260
Equation d'Euler 262
Méthode d'Abel 264

CHAPITRE VI

Systèmes d'équations. — Théorèmes d'existence. Solutions singulières

I. — *Théorèmes d'existence* 268
Transformation des problèmes les uns dans les autres 268
Première réduction : à une seule équation 269
Deuxième réduction : à un système d'équations du 1er ordre .. 272

II. — *Existence des solutions : Cas de deux équations* 273
Réduction à la forme canonique 273
Construction des solutions 276
Démonstration de la convergence 278
Généralisation : n équations 281
Forme des intégrales 282

III. — *Deuxième démonstration de M. Picard* 283
Principe de la méthode : Valeurs approchées successives 284
Limites de y_n, z_n 286
Application au domaine complexe 289
Cas des fonctions analytiques 292
Remarque 294

IV. — *Fonctions définies par une équation différentielle. — Prolongement analytique. — Points critiques* 295
Points critiques 296
Etude à l'infini 298
Reconnaître si un point est point critique 298
Cas où $f(z, u)$ est rationnelle en u 300
Conditions pour que toutes les solutions soient uniformes 300
Equation de Riccati 302

Pages

V. — *Solutions singulières des équations différentielles* 305
Recherche en partant de l'équation : Exemple 305
Recherche en partant de la solution générale 309
Concordance des deux méthodes 312
Signification des courbes P et Q 313
Application 315

VI. — *Solutions singulières dans le cas d'un système* 316

CHAPITRE VII

Systèmes d'équations. — Méthodes d'intégration

I. — *Réduction à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles* 322
Cas de simplification 327
Réduction du système à une équation unique 328
Cas simples 328
Application 330
Equation homogène 331
Equation homogène en x et y 331
Equation du second ordre 332
Application 334

II. — *Systèmes d'équations linéaires* 337
Propriétés 337
Etude des systèmes linéaires du premier ordre 338
Systèmes indépendants 339
Simplification si l'on connaît des solutions 341
Solution générale 343
Relation générale entre les systèmes indépendants 345
Système adjoint 346
Equations avec seconds membres 347

III. — *Equation linéaire d'ordre supérieur* 348
Solutions indépendantes 349
Simplification si l'on connaît k solutions 349
Solution générale 353
Equation avec second membre 354
Indépendance linéaire de n fonctions 355
Equation adjointe 357
Deuxième mode de formation 360

IV. — *Equation linéaire à coefficients constants* 361
Equation caractéristique 362
Cas des racines multiples 362
Deuxième méthode : Notation symbolique 362
Recherche des solutions particulières 364
Indépendance des solutions 365
Cas des racines imaginaires 367
Equation avec second membre 368
Equation d'Euler 371

V. — *Système d'équations linéaires à coefficients constants* 374
Première méthode : méthode symbolique 375
Combinaisons des équations 376

Pages

Simplification du déterminant 378
Détermination des polynômes symboliques finaux 380
Deuxième méthode : Méthode de d'Alembert 381
Application 384

VI. — *Points critiques des équations linéaires* 385
Nature des points critiques 387
Rotation autour d'un point critique 388
Simplification du tableau des transformations : équation en S .. 389
Racines multiples : Formation d'un système de base 391
Construction des intégrales 395
Théorème de Fuchs 397
Cas de l'intégrale rationnelle 400
Equation de Gauss 403
Variation des solutions 408
Systèmes incomplets d'équation différentielle 408
Systèmes linéaires quelconques 409
Intégration d'une équation 410
Equations de la forme $f(dx_1, dx_2, \cdots dx_n, t) = 0$ 414
Système d'équations 414
Intégration sans signe de quadrature 414
Applications 417

CHAPITRE VIII

Equations aux dérivées partielles

I. — *Théorèmes d'existence* 420
Considérations générales 420
Equation du premier ordre 421
Surface passant par une courbe quelconque 424
Equation d'ordre n 424
Application : cas du second ordre 426

II. — *Equations du premier ordre* 427
Equation linéaire 427
Solution générale 429
Equation non homogène 431
Résumé : règle pratique 432
Application : cylindre, cone, surface de révolution, etc 433
Interprétation géométrique de la méthode 435
Solution du problème de Cauchy 437

III. — *Equations aux différentielles totales à trois variables* 438
Application 441
Cas de l'équation $P(x, y, z)\,dx + Q\,dy + Rdz = 0$ 442
Applications géométriques 442

IV. — *Equations de forme quelconque* 444
Intégrale complète 444
Recherche des solutions en partant de l'intégrale complète 445
Recherche analytique 447
Recherche de la solution singulière 450
Application : Equation de Clairaut 453
Caractéristiques 454
Problème de Cauchy : surface passant par une courbe donnée .. 456

Pages

V. — *Recherche d'une intégrale complète*..... 460
Cas simples..... 461
Méthode de Lagrange et Charpit..... 463
Conclusion..... 466
Application..... 467

VI. — *Méthode de Cauchy*..... 470
Réduction à un système..... 473
Objection de Bertrand..... 477
Surface passant par une courbe donnée..... 478
Méthode de Darboux..... 479
Conclusion..... 482
Caractéristiques..... 483
Propriétés..... 485
Identité avec les caractéristiques en partant de l'intégrale complète..... 485

VII. — *Méthode des caractéristiques*..... 485
Application..... 488

VIII. — *Equations à n variables*..... 490
Intégrale complète..... 490
Recherche de toutes les solutions en partant de l'intégrale complète..... 491
Vérification d'une intégrale complète..... 495
Recherche d'une intégrale complète..... 497
Méthode de Cauchy : Caractéristiques..... 499
Réduction à un système..... 502
Solution du problème de Cauchy..... 505

CHAPITRE IX

Applications géométriques. — Théorie des courbes et surfaces. Formules de Serret et Frenet

I. — *Point ordinaire. — Point singulier. — Tangente. — Plan tangent. Courbes planes*..... 507
Points ordinaires. — Signification géométrique..... 508
Cas de la courbe $x = f(t), y = \varphi(t)$..... 511
Surfaces : Divers cas..... 513
Plan tangent..... 514
Courbes gauches..... 518
Cas d'un point singulier..... 521

II. — *Théorie du contact*..... 523
Contact de deux courbes planes : divers cas..... 523
Contact d'une courbe et d'une surface..... 526
Contact de deux courbes gauches..... 528
Contact de deux surfaces..... 530
Osculation..... 534

III — *Courbes et surfaces enveloppes*..... 536
Enveloppe de courbes planes..... 536
Relation de contact..... 537
Cas des points singuliers..... 539

Pages

Familles de surface à un paramètre 540
Arête de rebroussement 543
Relations de contact 545
Familles de surfaces à deux paramètres 547
Enveloppe d'une famille de courbes gauches 548

IV. — *Applications de la théorie du contact* 549
Courbes planes 550
Eléments géométriques en un point d'une courbe 551
Tangente — Sous-tangente — Normale — Sous-normale 551
Problèmes sur les courbes planes : Règle pratique 552
Applications 553
Courbe considérée comme enveloppe de ses tangentes 554
Expression des éléments géométriques 556
Résolution des problèmes. — Règle pratique 557
Applications 558
Développée 559
Cercle osculateur 562
Applications 563

V. — *Courbes gauches* 565
Tangente 565
Plan osculateur 567
Enveloppe des plans osculateurs 570
Cercle osculateur 573
Sphère osculatrice 576

VI. — *Courbure. — Torsion. — Formules de Frenet* 577
Rayon de courbure 578
Torsion 581
Formules de Serret et Frenet 585
Signification de ρ et τ 588
Signification précise 589
Remarques sur les formules de Serret 592
Rayon de courbure de l'indicatrice des tangentes 593
Indicatrice des binormales 594
Indicatrice des normales principales 595
Rayons de torsion des indicatrices 595
Courbes réciproques 596
Courbure géodésique d'une courbe sphérique 598
Courbes de Bertrand 598
Détermination d'une courbe connaissant ρ et τ 599
Méthode de Darboux 601
Deuxième méthode : Développement des coordonnées 602
Expression de certains infiniment petits 605
Application de la théorie générale : Hélice 606
Rayon de courbure : Torsion 607
Théorème de Bertrand 609
Théorème de Puiseux 610
Hélices coniques 610
Hélices coniques et cylindriques 611
Une généralisation des hélices 613
Propriétés de ces courbes 614
Rayons de courbure et de torsion 614
Binormale 616

CHAPITRE X

Théorie des développées. — Surfaces réglées Congruences. — Complexes

Pages

I. — *Théorie des développées* 618
Notions sur le cercle de l'infini. Droites isotropes 619
Développables isotropes 621
Deux solutions du problème des développées 622
Détermination analytique 623
Applications 626
Théorème de Joachimsthal 627
Longueur d'un arc de développée : détermination sans signe de quadrature 628
Rayons de courbure et de torsion 630

II. — *Développées obliques* 632
Détermination sans quadrature de la développée la plus générale 632
Développée tangentielle 634
Importance du rapport $\frac{R}{T}$ 635
Une courbe donnée ne peut être la géodésique que d'une seule développable 636

III. — *Surfaces réglées* 639
Plan tangent 640
Variation du plan tangent 641
Rapport anharmonique de quatre plans 643
Plan central 644
Surfaces de raccordement 646
Surfaces développables 647

IV. — *Congruences de droites* 650
Développables issues d'une génératrice 651
Congruence des normales à une surface 654

V. — *Complexes de droites* 656
Complexes linéaires 657
Équation réduite du complexe 659
Courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire 660
Plan osculateur : Théorème de M. Appell 661
Autres propriétés 661

CHAPITRE XI

Théorie des surfaces

I. — *Courbes tracées sur une surface. — Formes quadratiques* 663
Plan tangent 664
Longueur d'un arc de courbe. Formes quadratiques fondamentales 666

Pages

Première forme quadratique 666
Angle de deux courbes de la surface 668
Deuxième forme quadratique 669

II. — *Etude de la surface aux environs d'un de ses points* 672
Etude des courbes tracées sur une surface autour d'un point. 675
Théorème de Meusnier 677
Directions principales 678
Détermination des directions principales 681
Cas où la surface est donnée sous forme paramétrique 683
Directions principales 688
Courbure géodésique 689

III. — *Directions conjuguées. — Lignes asymptotiques* 691
Directions conjuguées 691
Lignes asymptotiques 694
Cas de la surface sous forme $z = f(x, y)$ 695
Applications 697

IV. — *Lignes de courbure* 700
Cas de la surface $z = f(x, y)$ 701
Cas de la surface sous forme paramétrique 702
Equation en fonction de E, F, G, D, D', D'' 704
Equation aux rayons de courbure 709
Règle pratique 709
Applications 710

V. — *Détermination d'une surface au moyen des coefficients* E, F, G, D, D', D'' 714
Indications sur la recherche des équations de condition 714

VI. — *Surfaces applicables* 719
Surfaces applicables sur un plan 720
Correspondance entre la surface et le plan 721
Surfaces dont les arêtes de rebroussement admettent même expression de $R = f(s)$ 723
Reconnaître si un ds^2 correspond à une surface développable. 725
Cas particulier 726
Surfaces applicables sur une surface de révolution 727
Théorème de Bour 730
Exemple 732
Représentation d'une surface avec simple conservation des angles 733
Représentation plane 733
Application : carte d'une sphère. Correspondance 735

CHAPITRE XII

Applications diverses

I. — *Surfaces enveloppes de sphères* 739
Réciproque 740
Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des circonférences 740
Par inversion d'un cône 743
Par inversion d'un tore 744

Pages

II. — *Surfaces lieux de cercles* 745

III. — *Systèmes triples orthogonaux. — Théorème de Dupin* 748
Théorème de Dupin 751
Première démonstration 751
Deuxième démonstration 753
Application aux quadriques 756
Famille $\frac{xy}{z} = \rho$ 759

IV. — *Familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes* 662
Détermination des trajectoires sans signe de quadrature 765
Cas de la famille $X + Y + Z = \rho$ 766
Cas où les plans des courbes trajectoires sont parallèles à une direction fixe, passent par un point fixe 766
Familles de surfaces faisant également partie d'un système triple 766
Un système triple très général 767
Systèmes triples dont toutes les lignes de courbure sont des circonférences 767

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE R. BUSSIÈRE. — 29-1-1932.

COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

TOME II

ERRATA

Pages	Ligne	Au lieu de	Lire
24	4	$(\cos z)' = -\cos z$	$(\cos z)' = -\sin z$
31	8	$x = 2(k+1)\pi$	$x + 2(k+1)\pi$
33	dernière	$-e^{(\lambda+\mu i)}[\log\rho + \cdots]$	$= e^{(\lambda+\mu i)}[\log\rho + i\cdots]$
34	2	$x = \lambda\log\rho + \mu(\cdots)$	$x = \lambda\log\rho - \mu(\cdots)$
39	11	analyttque	analytique
40	9	coefficiente	coefficients
40	12	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \cdots = 0$
42	15	$m = -\frac{\partial y}{\partial\varphi}\Big/\frac{\partial y}{\partial x}$	$m = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}$
42	18	même faute	renverser la fraction
44	5e avant fin	$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{dp}{p}$	$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu}$
48	5e avant fin	première et seconde	premières et secondes
57	8e avant fin	$z = \mathrm{R}(\cos\theta + \sin\theta)$	$z = \mathrm{R}(\cos\theta + i\sin\theta)$
61	2e avant fin	$+\int_{y_0+l}^{y_0}\mathrm{N}(x, y_0)dy$	$\int_{y_0+l}^{y_0}\mathrm{N}(x_0, y)dy$
67	7	$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0$	$\int_{C_4} + \int_{C_1} + \int_{C_2} = 0$
96	1	étant nul	étant nulle
96	2	est égal	est égale
116	10	$\int_C \mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{\mathrm{R}r^2}\cdots\right.$	$\int_C \mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{R}^2 - d^2}{\mathrm{R}r^2}\cdots\right.$
169	2e avant fin	$\mathrm{Q} = \frac{a}{z} + \frac{z^2}{2a^2} + \cdots$	$\mathrm{Q} = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \cdots$
187	13e avant fin	permemettraient	permettraient
188	3	infiniments	infiniment

Pages	Ligne	Au lieu de	Lire
208	2	infinimiment	infiniment
228	9	$\cdots + z\frac{\partial f}{\partial z} = \epsilon$	$\cdots + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$
255	2	$\frac{\partial \psi}{\partial x}du + \cdots$	$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \cdots$
256	12	$= \operatorname{tg} \alpha \left[1 + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$	$= \operatorname{tg} \alpha \left[1 + \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dy}{dx}\right]$
271	5e avant fin	$m_1 + n_3 + p_1$	$m_1 + n_3 + p_2$
275	2	$\frac{du_1}{dx} =$	$\frac{du_1}{dz} =$
277	9 et 10	II	III
277	10	$(k+1)d_{k+2}$	$(k+1)d_{k+1}$
278	8e avant fin	au lieu du système,	au lieu du système donné (1),
280	11e »	pour $z = 0$	pour $Z = 0$
282	10e »	elle représentera	il représentera
292	13	$+ y_2 \quad y_1)$	$+ (y_2 \cdots y_1)$
293	3	$\int_a^b f_1(x, y_0, z_0)dx$	$\int_a^x f_1(x, y_0, z_0)dx$
297	9	$u = b_0 + \int_{z_0}^{z}$	$u = b_0 + \int_{a_0}^{z}$
307	3	$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, y') = 0$	$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') = 0$
307	13e avant fin	$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y_1) = 0$	$\frac{\partial f}{\partial y_1}(x, y, y_1) = 0$
310	11e »	si y	si y
333	5	$f\left(\frac{dx}{dy}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$	$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$
346	6	$\frac{dX}{dz} + BY + \cdots$	$\frac{dZ}{dx} + BY + \cdots$
346	7	$-\frac{dX}{dx} + CY + \cdots$	$-\frac{dT}{dx} + CY + \cdots$
351	12e avant fin	$\lambda_1' y_1 k^2 + \cdots$	$\lambda_1' y_1 k-2 + \cdots$
354	9	$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_nyn$	$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_nyn$
361	2e avant fin	$r_2 n-1 e^{r_1 x} \cdots r_n n-1 e^{r_1 x}$	$r^{n-1} e^{r_2 x} \cdots r_n n-1 e^{r_n x}$
471	8e »	$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial u}$	$\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial u}$
474	dernière	$\frac{\partial z}{\partial u} - q\frac{\partial x}{\partial u} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u} = 0$
481	8e avant fin	$P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial y}{\partial u} =$	$P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u} =$
493	dernière	$\frac{\partial a_n}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_n}$	$\frac{\partial a_n}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial a_n}{\partial x_n}$
497	avant dern.	$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi,$	$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1,$
515	9	$(Y - y)\frac{\partial^2 F}{dxdy}$	$(Y - y)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$
519	milieu	$D^{z_1, x_1}_{F, \varphi} \quad D^{x_1, y_1}_{F, \varphi}$	$D^{z_1, x_1}_{F, \Phi} \quad D^{x_1, y_1}_{F, \Phi}$
520	milieu	Soit M'(x, y, z) un point	Soit M'(X, Y, Z) un point
524	7	$PQ = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	$PQ = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Pages	Ligne	Au lieu de	Lire
528	6	$\frac{\Delta t}{1} F'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} F''(t) + \cdots$	$\frac{\Delta t}{1} \mathcal{F}'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathcal{F}''(t) + \cdots$
531	2	infiniment du même	infiniment petit du même
535	15	(si $\mathcal{F}_i'$ est	(si $\mathcal{F}_i'$ est
551	11e avant fin	$ds^2 + dy^2 + dy^2$	$ds^2 = dx^2 + dy^2$
551	»	tg a	tg α
584	1	en les parenthèses développant	en développant les parenthèses
651	7	$\frac{dx}{du} = f_2(u, v)$	$\frac{dv}{du} = f_2(u, v)$
669	5	$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} du + \right.$	$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \right.$
686	10	$\frac{\partial x}{\partial v} \quad \frac{\partial y}{\partial v} \quad \frac{\partial v}{\partial z}$	$\frac{\partial x}{\partial v} \quad \frac{\partial y}{\partial v} \quad \frac{\partial z}{\partial v}$
686	avant dern.	$\alpha' \frac{\partial x}{\partial u}$	$\alpha' \frac{\partial y}{\partial u}$
686	dernière	$\frac{\partial u}{\partial z} dx''$	$\frac{\partial z}{\partial u} dx''$
755	1	remplacement le sistême	remplacent le système