

**THE BOOK WAS
DRENCHED**

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_I 191060

UNIVERSAL
LIBRARY

كتاب البراعة الشرقية في علم الهندسة الوصفية
تأليف حضرة صاحب برافندى صهبرى
مدرس فروع الوصفيات
بمدرسة الهندسة بخانه
الخطية

*(الجزء الاول) *

يشتمل على ما يجب تدريسه من علم الهندسة الوصفية لتلامذة المدارس
التجهيزية قبل دخولهم بالمدارس الخصوصية

قد قرر مجلس المعارف الاعلا في جلسته المنعقدة بتاريخ ٢٥ ابريل سنة ١٨٨٢
افرن كمية لزوم استعمال هذا الكتاب بالمدارس الاميرية المصرية

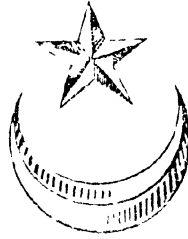
لا يجوز لاحد مطبع هذا الكتاب مطلقا بدون اذن مؤلفه ومن تجارى
على ذلك يجازى حسب القوانين

*(الطبعة الاولى) *

(بمطبعة ديوان عموم المعارف بدرب الجمالين)

س ١٢٩٩ هجرية

*(على صاحبها افضل الصلاة وازكى التهنية) *



* (بسم الله الرحمن الرحيم) *

ان خـبر ما صورته الافكار وجرت به اقلام الوصف من جليل الآثار حمد مسقط
كرات الغيث على مستويات البقاع وشكر مهيت واقعها الذبيبة لانحاج ما يجب
الزراع مدير الكائنات على محور قدرته ومصور اشكال الخـ لوفات طبق ارادته
وحكمته المنزه في ذاته عن الابعاد المتعالى في صفاته عن الانداد فسبحانه من اله
بسطة هذه الكرة في كل وضع من الاوضاع ورفع السماء بلا عمد اقوم ارتفاع لاله
الاهول لا تدركه الابصار وهو يدرك الابصار وهو اللطيف الخبير والصلاة والسلام
على قاطع الطبقات الفراغية راقب اوج الاكرام الى ان وصل الى مسـة وسـع فيه
صريف الاقلام محمد الماسـحى رسوم الضلالة وتماثيل الجـهالة وعلى آله المقتفين
أنزه الكـريم السالكين طريقه المستقيم (وبعد) فيقول المتوسل بعضـه
مناجـع الرشاد بكوكب عباء الدرى والمعرف بالحق صغير عبده صابر صبرى مدرس
علم الهندسة الوصفية وفروعه التطبيقية بمدرسة المهندسخانة الخديوية المصرية
لما كان لهذا العلم من المقام الاسنى والمنزلة العليا المحسنا ما حاز به قصب السبق
في ميدان العلوم وارتقى به أوج المنطوق والمفهوم لافتقار الصنائع اليه واحتياج
الامور العمارية للعرض عليه وناهيك به من منبه للاذهان الخادمة ومربط للقرايح
الجـامدة توجهت ارادة العالم الجليل واللوذعى الفضيل صاحب المناقب السامية
والهمم

(٣)

والهمم الا تصفية النامية حضرة اسمعيل بك الفلكي ناظر مدرسة المهندسة الى ان اجمع كتابا في هذا الموضوع لينتشر فقمه بين العموم وبموضوع فبادرت بتحقيق هذه الآمال الابوية قياما بواجب الخدمة الوطنية وجمعت فيه هذا الكتاب من كل مستطلع مستطاب وسميته بالبراءة الشرقية في الهندسة الوصفية راجيا من واسع الافضال ومحقق الآمال ان ينفع به أبناء الديار المصرية المشغولة بمراحم الحضرة التوفيقية ليكون هذا الفضل منه واليه ويعود حسن التشكر لما أسداه عليه فلتدوجه انظاره لئلا يعلم المعارف واعلاء بنود العوارف حقق الله في حسن التفاته الآمال واصالح لنا ولاخواننا الاحوال

(الباب الاول)

(في المخطوط المستقيمة والمستويات)

(الفصل الاول)

في بيان الغرض الاصل من علم الهندسة الوصفية وفي طريقة المساقط بـ (مبادئ أولية) من المعلوم أن جميع المسائل الرياضية يمكن حلها اما بملاحظات رسمية أو بطرق وحسابات جبرية وجذس المسئلة هو الذي يعرفنا أي هاتين الطريقتين أحسن استعمالا لحلها لان حل بعض تلك المسائل بالطريقة الرسمية قد يكون أسهل من حله بالطريقة الجبرية والبعض الآخر بعكس ذلك بمعنى أن حله بالطريقة الجبرية أقرب من الطريقة الرسمية وقد توجد بعض مسائل يستوى فيها استعمال احدي الطريقتين الرسمية والجبرية بدون أولوية

بـ فلذا انقسمت العلوم الرياضية الى قسمين متغايرين في الوضع لكنهما متقيدان في النتيجة والنتيجة فالقسم الاول هو فرع الهندسيات على العموم وهو الفرع الذي يبحث فيه عن معرفة الطرق الكافية لحل المسائل الرياضية بواسطة الاعمال الرسمية التي يمكن اجراؤها عليها والثاني هو فرع الجبريات وهو الفرع الذي يبحث فيه عن معرفة الطرق الجبرية والحسابية اللازمة لحل المسائل الرياضية المذكورة أما الفرع الثاني فلانشتغل به هنا حيث ان مقصودنا هو الاشتغال بالفرع الاول فقط وهو فرع الهندسيات فنقول بـ لا يفتنى على كل من درس الهندسة العادية التي هي مبادئ فرع الهندسيات أن

طرقها غير كافية لمحل جميع المسائل الرياضية وفي الواقع كذلك لان الهندسة العادية منقسمة بحسب طبيعة الاشكال المتعلقة بها الى قسمين اولهما هو الهندسة المستوية وثانيهما هو الهندسة الفراغية ففي القسم الاول يبحث عن خواص الاشكال الموجودة في مستو واحد وعن حل المسائل الرياضية الممكن حصر جميع اجزائها في فرخ من الورق وهذا القسم وان كان غير كاف لمحل بعض تلك المسائل اعنى المسائل المستوية لكنه كاف لمحل اغلبها. وأما القسم الثاني فلا يكون أن موضوعه الاشكال الفراغية والاجسام التي لا يمكن حصرها في مستو واحد وهو غير كاف لمحل المسائل المتعلقة بها احلا حقيقيا

مثلا الهندسة العادية وان دلت على الطريقة النظرية لايجاد البعد الاصغر بين مستقيمين غير موجودين في مستو واحد ذلك انهم لم يتوصل الى معرفة حقيقة البعد المذكور ولا الى تعيين وضع المستقيمين المذكورين في الفراغ بالنسبة لبعضهما

وكذلك قد بينت الهندسة العادية طريقة نظرية لا مراسطح كروي بأربع نقط معلومة في الفراغ وليست موجودة في مستو واحد ذلك انهم لم يتوصل الى معرفة الوضع الحقيقي لمركز هذه الكرة بالنسبة للنقط المعلومة ولا الى معرفة حقيقة نصف قطر هذه الكرة وبالمجمله فهي غير كافية لتعيين الكرة المذكورة بالرسم تبيننا حقيقيا

بمسئله والمحاصل ان الهندسة العادية قاصرة على بيان الطرق النظرية اللازمة تتبعها في حل بعض المسائل الرياضية فقط وليست كافية لمحل تلك المسائل حلا قطعيا فلذا اضطر الانسان بحسب احتياجاته الضرورية الى البحث عن الطرق الكافية والاعمال الشافيه التي بها يمكنه حل المسائل الرياضية التي يعسر عليه حلها بواسطة الهندسة العادية فباجتهاده المستمر في تدبـع أعمال سلفه ووصول ما أوجده المتقدمون عليه من النتائج والبراهين العقلية اليه توصل الى مقصوده فوضع علم الهندسة الوصفية التي بها توصل الى حل جميع المسائل الرياضية المتعلقة بالاجسام أو الاشكال الفراغية

بمسئله الخامس علم الهندسة الوصفية لانه ليس قاصرا على حل المسائل الرياضية كما تقدم بل ان من اخص منافعه ومزاياه كونه يساعد المهندس على وصف ما يريد وصفه لاقرانه المهندس من الاجسام التي اخترعها أو التصميمات التي صنعها من بيوت وآلات ومبان واشغال علمية أو ما يريد وصفه من ذلك الى أرباب الصنائع كالتجارين والنجارين والبنائين وعموم أرباب طائفة الممار و صفا جيبـد بحيث يتيسر للاصناف انشاء الجسم الموصوف بحسب أبعاده وتفاصيله المطلوبة وهذا الوصف انما يكون برسم تلك

الاشياء لهم بواسطة الطرق الهندسية على فرخ من ورق وابدائها لمن يريد معرفة حقيقة وتفاصيل تلك الاشياء

ويعلم مما تقدم أن علم الهندسة الوصفية هو كلغة مختصرة اخترعها المهندسون لتوصيل أفكار بعضهم لبعض بواسطة الرسم الوصفى لان المهندس ربما يفهم من الرسم فى ظرف دقيقة ما لا يفهمه بالوصف المعتاد فى ظرف ساعة وأما بالنسبة لارباب الصنائع فان الرسم الوصفى يكون عندهم كترجمان ماهر يفسر لهم اغراض المهندس وسرأفكاره التى أودعها فى الرسم

بهتد فاستبان حينئذ من جميع ما ذكر أن الغرض الاصلى من علم الهندسة الوصفية أمران الاول رسم الاجسام ذات الثلاثة ابعاد على فرخ من ورق ذى بعدين والثانى معرفة الطرق الرسمية اللازمة لحل جميع المسائل الرياضية المتعلقة بالاشكال الفراغية وغيرها

وقد يظهر للطالب فى أول الأمر أن فى الحصول على هذين الامرين صعوبتين الاولى كون الاجسام على العموم ذات ثلاثة أبعاد وكيف يمكن حصرها بالرسم فى فرخ من ورق ذى بعدين فقط والثانية هى انه ينبغي فى الهندسة الوصفية رسم الاشياء على حقيقةها وبحسب الاوضاع الشاغلة لها حتى ان النتائج التى تحصل بعد حل المسائل تكون معينة بحقيقةها أيضا بغاية الضبط والدقة ولاشك انه يتوهم فى ذلك صعوبة أيضا لكنه قد زالت الصعوبات وصار الحصول على الغرض المطلوب بواسطة استعمال طريقة المساقط وهى التى سنشرح لك أصولها فقول

بهد طريقة المساقط (شكل الواحد) اذا أنزل من نقطة موضوعة فى الفراغ كنقطة ا عمودا كعمود ا ا على مستوئيات كالمستوى وضع خ سميت نقطة ا التى هى موقع هذا العمود على المستوى الثابت مسقط نقطة ا على المستوى المذكور وأيضا اذا أنزل من جميع نقط المستقيم ا ب عمدة سمي الخط الحاصل للنقط ا و ب و مسقط مستقيم ا ب و على المستوى الثابت ويلزم أن يكون هذا المسقط بالضرورة مستقيما لانه حيث كانت جميع هذه العمدة موجودة فى المستوى المار بأحدها وهو ا ا وبالمستقيم ا ا يلزم أن يكون المسقط ا ب و كناية عن خط تقاطع المستوى ا ا الذى يسمى المستوى المسقط مع المستوى وضع خ الذى يسمى مستوى المسقط

بـ هـ د على العموم مسقط أى منح من مثل م هـ ط هو الخط الجامع لمواقع الاعمدة م م هـ و هـ ط ط ر المنزلة من نقطه المختلفة على المستوى الثابت وفي العادة يكون هـ د المسقط م هـ ط خطا المنحناؤه مخالف لانحناء المنحنى المـ لوم في الفراغ وايضا يـ يكون من مجموع هـ د الاعمدة سطح اسـ ط وانى يسمى بالاسطوانة المسقطه للمنحنى م هـ ط

بـ هـ د وحيث يمكن أن يقال ان كلاما من النقطة أو المستقيم أو المنحنى الفراغى يصير معين الوضع بالكلية متى علم مسقطا كل منها على مستويين ثابتين وضعهما معلوم وليسا متوازيين لانه في الواقع اذا فرض أن م هـ ط م هـ ط م هـ ط مستويان بهذه الصفة وفرض أن آ و آ هما المسقطان المعلومان لنقطة فراغية حيثما اتفق فاذا أقيم من نقطه آ هـ د غير محدود مثل آ آ على المستوى م هـ ط م هـ ط م هـ ط أن يكون هذا العمود مارا بالنقطة المطلوبة وكذا يلزم أن تكون النقطة المذكورة موجودة على العمود آ آ المقام من نقطة آ على المستوى م هـ ط م هـ ط م هـ ط حيث ان تلك النقطة لا يمكن أن تشغل في الفراغ سوى وضع واحد يلزم أن تكون موجودة في نقطة تقابل هـ د من العمودين ببعضهما

وفي الحقيقة اذا لم تقابل المستقيم آ آ مع المستقيم آ آ فلا يوجد في الفراغ نقطة يكون مسقطاها آ و آ ولا شك ان هذا يدل على انه لا يصح اتخاذ مسقطى النقطة بكيفية اختيارية بالكلية وأنه يوجد بينهما علاقة سند كرها فيمـ سـ آ بـ (بـ ١٧ د)

بـ هـ د (شكل الوجه ١) فاذا فرض الآن أن آ و آ مسقطا مستقيم مجهول على المستويين الثابتين م هـ ط م هـ ط م هـ ط ونصورنا مستويا كالمستوى د آ آ غير محدود الامتداد مارا بالمسقط الاول وعموديا على المستوى م هـ ط م هـ ط م هـ ط فان هذا المستوى يلزم أن يكون مشتملا على المستقيم المطلوب وايضا يكون موجودا في المستوى د آ آ المار بالمسقط الثانى د آ آ والعمودى على م هـ ط م هـ ط م هـ ط حيث ان يكون الخط المجهول موجودا بالضرورة في محل تقاطع هـ د من المستويين الذى هو مستقيم واحد معين انما توجد حالة واحدة لا يمكن فيها تعيين المستقيم الفراغى بواسطة مسقطيه وهى الحالة التى

يحدد فيه المستويان المسقطان α و α' ويصيران مستويين واحداً ولا شك أن ذلك لا يحصل إلا إذا كان المستوى المسار بكل من المستقيم الفراغي ومسقطيه عمودياً بالضبط على الفاصل المشترك بين المستويين الثابتين الذي هو OX وحينئذ نقول هذين المسقطين لا يكون كافياً لتحديد المستقيم المطلوب بل يلزم طلب مسقط ثالث على مستوي ثابت آخر غير مواز للفاصل المشترك بين المستويين الأولين

بـ α وبالمجمل إذا علم المسقطان M و M' لمنحن مجهول يتصور اسطوانة عمودية على المستوى OX مارة بالمسقط الأول واسطوانة أخرى عمودية على المستوى OX مارة بالمسقط الثاني فمن حيث أن المنحنى المطلوب يلزم أن يكون موجوداً بالطبيعة على كل من هذين السطحين الاسطوانيين فيكون هو خط تقاطعهما M و M' الذي يجوز أن يكون منحنياً شاملاً أي مضاعفاً لا ننحسره بمعنى أن نقطه ليست موجودة كلها في مستوى واحد

بـ α ليكن معلوم بناء على ما ذكرنا من الآن فصاعداً عين النقط والمخطوط في الرسم بواسطة مسقطي كل منها بحيث متى قلنا أن النقطة الفلانية والمخط الفلاني معلوم يلزم أن يفهم من ذلك أن مسقطي تلك النقطة أو مسقطي ذلك المخط هما المعلومان فقط وأما السطوح فنذكر فيما سياتي بـ α ما يلزم تقريره من الاعتبارات التي على مقتضاها يجب بيان السطوح بالرسم على مستوى المسقط

بـ α قد فرضنا الآن أن خطوط الاسقاط مستقيمة عمودية على المستوى الثابت ليكن يلزمنا أن ننبه هنا على أنه يجوز أحياناً اتخاذ المستقيمات المسقطية مائلة على المستوى المذكور وموازية لاتجاه معلوم وتكون النتائج المتحصلة بهذه الطريقة هي عين النتائج التي وجدت في حالة ما تكون المستقيمات المسقطية عمودية على المستوى الثابت لكن بمنعنا عن استعمال طريقة الاسقاط المسائل بجملة موانع صعبة منها أن طريقة الاسقاط المذكورة تكون على العموم أصعب في العمل من الطريقة الأولى ومنها أن النتائج التي تحصل بواسطتها تكون أقل ضبطاً مما يتحصل بطريقة الاسقاط العمودي لأن المستقيمين المتقاطعين على زاوية حادة تكون بالبداية نقطة تقاطعهما أقل وضوحاً وتحدد من نقطة تقاطع المستقيمين المذكورين في حالة ما إذا كانا متقاطعين على زاوية قائمة

* (أ) *

بـ ١٤٤ بناء على هذه الاسباب يكون معلوما من الاثن فصار عدا أن المعتبر عندنا دائما
هو المساقط العمودية ما لم ينبذ في عكس ذلك اذا لزم الحال تبنيها خصوصا
وأيا قد جرت العادة بسبب موانع كالماوانع المتقدمة بأن ينتخب المستويان الثابتان أعنى
مستويي المسقط وضخ ر ض غير متعامدين على بعضهما ثم انه لاجل سهولة
تصوره ما يفرض في الغالب ان أحدهما أفقي والاخر رأسي وسمى خط تقاطعهما
خط ض الذي هو مستقيم مهم خط الارض

بـ ١٤٥ يشاهد حينئذ ما تقدم ان طريقة الاسقاط السابقة كافية لتبيين معالم أى
مسألة بالرسم تبيننا ما فالباقي علينا حينئذ هو تنويع هذه الطريقة فقط بحيث يمكن
اجراء جميع العمليات على مستوي واحد كما هو الغرض الاصلى من علم الهندسة الوصفية
اذ بدون ذلك تكون طريقة الاسقاط المتقدمة صعبة جدا ان لم نقل مستحيلة لانها
تكون حينئذ داعية لان يكون الرسم حاملا معه دائما لوحين متعامدين على بعضهما
من الخشب أو غيره ليعخذ عليهما مساقط الاشياء التي تصادف في اثناء عمله ولا يخفى
ما في ذلك من الصعوبة

* (تحويل مستوى المسقط الى مستوي واحد) *

بـ ١٤٦ لاجل الوصول الى هذا الغرض أعنى لاجل تحويل جميع العمليات الى مستوي
واحد وهو سطح الفرخ الورقي نتصور بعـ ١ انفسق النقطة والخطوط المعلومة على
المستويين وضخ ر ض غير المتعامدين على بعضهما أن المستوى الاخير الذي هو
الرأسي قد دار حول خط الارض ض خ حتى انطبق على المستوى الأفقي لاجل ان
لا يتكون عنهما سوى مستوي واحد مثل وض وهو الذي يرسم عليه في الحقيقة جميع
العمليات التي كان ينبغي اعمالها على المستويين الاصلين لكن ينبغي ان يلاحظ دائما أن
هذا التطبيق لم يستعمل الا لتسهيل اجراء العمل فقط بحيث متى لزم الحال لتصور رأى
عملية كانت باعتبار هذرية ينبغي ان يتصور عتلا أن المستوى الرأسي يرجع عن
الانطباق الى وضعه الاصلى أى صار عموديا على المستوى الأفقي

بـ ١٤٧ (شكل ١ لوح ١) بعد تطبيق المستويين الثابتين على بعضهما يرى انه
يوجد بين مسقطي النقطة الواحدة من الفراغ علاقة أى ارتباط مهم ينبغي ملاحظته
لانه حيث كان أحد المستقيمين ١ ١ ، ١ ١ الساقطين لنقطة ١ الفراغية في نقطة أ

وفي نقطة α عموديا على المستوى الافقي والآخر عموديا على المستوى الرأسى بنحى بناء على ذلك أن يكون المستوى $\alpha \alpha'$ المار بهذين المستقيمين عموديا على مستويي المسقط في آن واحد وحينئذ يكون عموديا على فاصلهما المشترك $\alpha \alpha'$ واذن فالمستوى $\alpha \alpha'$ يقطع المستويين المذكورين في مستقيمين مثل $\alpha \alpha'$ و $\alpha \alpha'$ عموديين على $\alpha \alpha'$ ومتلاقين في نقطة واحدة مثل نقطة α على خط الارض المذكور اذا تقرر هذا يقال حينئذ لا يدور المستوى الرأسى $\alpha \alpha'$ حول $\alpha \alpha'$ فيجذب معه المستقيم $\alpha \alpha'$ الذى لا يزال في أثناء الحركة عموديا على محور الدوران $\alpha \alpha'$ وبناء على ذلك يوجد من بعد انطباق المستوى الرأسى على المستوى الافقى ان المستقيم $\alpha \alpha'$ قد أخذ موضعا مثل $\alpha \alpha'$ هو بالضرورة امتداد المستقيم $\alpha \alpha'$ وعلى هذا يعلم أن المسقطين $\alpha \alpha'$ و $\alpha \alpha'$ لنقطة فراغية واحدة يوجدان دائما على مستقيم واحد وعمودى على خط الارض $\alpha \alpha'$ وذلك من بعد انطباق مستويي المسقط على بعضهما بحيث اذا أخذ أحدهذين المسقطين وهو $\alpha \alpha'$ مثلا بالاختيار لزم أن يقام المستقيم $\alpha \alpha'$ فى الغير محدود وعموديا على $\alpha \alpha'$ ويوضع بعد ذلك المسقط الثانى وهو $\alpha \alpha'$ فى أى نقطة من امتداد العمود $\alpha \alpha'$

بشأن ما من خصوص المستقيم $\alpha \alpha'$ فاننا اذا طبقنا نقطته الثانية α' فى α' صار مسقطه الرأسى $\alpha \alpha'$ منطبقا على $\alpha \alpha'$ لكن لا يكون بين هذا الانطباق وبين المسقط الافقى $\alpha \alpha'$ أدنى ارتباط ضرورى بحيث يمكن اعتبار أى خطين مثل $\alpha \alpha'$ و $\alpha \alpha'$ مرسومين بالاختيار كمسقطين لمستقيم واحد فراغى ما عدا الحالة الخصوصية التى يكون فيها المسقط $\alpha \alpha'$ عموديا على خط الارض $\alpha \alpha'$ لان المسقط الرأسى له بالزم ان يكون فى هذه الحالة كناية عن امتداد المسقط $\alpha \alpha'$ لكننا ننهي فى بشأنه على ان مسقطين اثنين بهذه الصفة لا يكفيان فى هذه الحالة لخصوصية التعيين وضع المستقيم الفراغى بشأنه وتوجهه الى أى نقطة لا يكون فيها المسقطان $\alpha \alpha'$ على مستقيم واحد فراغى وهى الحالة التى يكون فيها كل من المسقطين عموديا على خط الارض وليس متلاقين معه

في نقطة واحدة لأنك إذا مررت بأحدهما مستويا وعموديا على المستوى الأفقي وبالأخر
مستويا وعموديا على المستوى الرأسي صار هذا المستويان متوازيين فلا يعينان وضع
أى مستقيم ما

بنفسه من الآن فصاعدا سنضع مستويي المسقط باعتبارهما في حالة انطباق بحيث
يكون خط الأرض $غ\خ$ ضاغلا الوضع المبين في (شكل ٢ لوحه ١) وبناء على ذلك يكون
الجزء $غ\خ$ من ورقة الرسم دالفاي آن واحد على كل من الجزء المقدم من المستوى
الأفقي والجزء الأسفل من المستوى الرأسي الذي داروا نطبق على الجزء المقدم المذكور
وأما الجزء $ض\مر$ من ورقة الرسم فإنه يشتمل على الجزء الأعلى من المستوى الرأسي
وعلى الجزء المؤخر من المستوى الأفقي ولا يكتفى حينئذ لأجل تعيين النقطة الفراغية
أن يعطى مسقطاها $ا\و$ (شكل ٢) فقط بدون تمييزهما عن بعضهما بل يلزم
أن يذكر أيضا ما إذا كانت النقطة $ا$ هي المسقط الأفقي للنقطة الفراغية أو هي
مسقطها الرأسي لأن كلاهماذين الفرضين صحيح وممكن اعتباره لكن يذهب ما فرق
كبير جدان حيثية الوضع الحقيقي للنقطة الفراغية وحينئذ فلاجل أن نلهم الطالب
ونبين له المجنسية التابع لها كل من المسقطين قد اتفقنا على أن نسمي على الدوام المساقط
الأفقية للنقط أو المستقيمت بـ $ج\روف$ خالية عن العلامات والمساقط الرأسية لها نسميها
بنفس الحروف التي سميت بها مساقطها الأفقية لكن يلزم أن يوضع على كل منها العلامة
المعروفة بالنقطة (بريم) مثلا النقطة $(ا\و)$ (شكل ٢) تدل على النقطة
الفراغية المنسقة أفقيا في نقطة $ا$ ورأسيا في $ا$ ونقطة $(ب\و)$ تدل على النقطة
الفراغية التي مسقطها الأفقي $ب$ ومسقطها الرأسي $ب$ وكذلك نعتبر مساقط كل من
نقطتي $(ج\و)$ $(د\و)$ $(ه\و)$ بالاعتبار المتقدم وعلى التلامذة أن يعودوا في كل مرة
بكثرة القرب على تصور الأوضاع المختلفة الشاغلة لها هذه النقط المختلفة فوق وتحت
أوامام أو خلف مستويي المسقط لكي بذلك يسهل عليهم معرفة الوضع التي تشغله أى
نقطة معلومة بمسقطيها كما كانت النقطة المذكورة في أى زاوية من الزوايا الزوجية
الاربعة المتكونة بين مستويي المسقط

بنفسه (شكل ٣ لوحه ١) الاصطلاح الذي اتبعناه في تسمية مساقط النقط يلزم تطبيقه
أيضا على الخطوط مثلا المستقيم $(ا\ب\و)$ هو كناية عن المستقيم الفراغي الذي
مسقطه

مسقطه الافقى ا ب ومسقطه الرأسى ا ب ولكن حيث ان وضع اى مستقيم بصير
معينا اذا علم منه نقطتان فيلزمنا حينئذ ان نشرح الطريقة العمومية لاييجاد اثرى اى
مستقيم أعنى نقطتى تقابل هذا المستقيم مع مستوي المسقط فنقول

حيث ان الاثر الرأسى للمستقيم (ا ب و ا ب) هو نقطة مشـتركة بينه وبين
المستوى الرأسى فيلزم حينئذ ان يكون مسقطه الافقى موجودا على خط الارض خ ض
وعلى الخط ا ب الغير محدود الطول أيضا وحينئذ فيكون المسقط الافقى لهذا الاثر هو
نقطة ح وبناء عليه يكون الاثر المذكور موجودا على احدى نقط الخط الرأسى ه و
ليكن حيث انه يوجد بالضرورة على المسقط الرأسى ا ب الغير المحدود فيكون حينئذ
هو نقطة د ومن ذلك نتج قاعدة عمومية ينبغي التمرين على استعمالها كثيرا فى الاحوال
المختلفة لوضع المستقيم وهى ان يمد المسقط الافقى للمستقيم المعلوم حتى يتلاقى مع خط
الارض فى نقطة فيقام منها عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع المسقط الرأسى
للمستقيم فى نقطة تكون هى الاثر الرأسى للمستقيم المعلوم

وأيا حيث ان الاثر الافقى للمستقيم نفسه هو كناية عن نقطة موضوعة فى آن واحد على
المستوى الافقى وعلى المستقيم المعلوم فيكون مسقطه الرأسى موجودا على كل من خط
الارض خ ض والمسقط الرأسى ا ب الغير المحدود أعنى فى نقطة ز وبناء على ذلك
يكون الاثر الافقى نفسه موجودا على احدى نقط المستقيم ز و المقام عمودا على خط
الارض من نقطة و ولكن حيث ان هذا الاثر يوجد بالضرورة أيضا على المسقط
الافقى ا ب الغير المحدود فهو حينئذ نقطة و

ومن ذلك يؤخذ انه للحصول على الاثر الافقى يمد المسقط الرأسى للمستقيم المعلوم حتى
يتلاقى مع خط الارض فى نقطة فيقام منها عمود عليه ويمد هذا العمود حتى يتلاقى مع
المسقط الافقى فنكون نقطة تلاقيهما هى الاثر الافقى المطلوب

بمسند وبالعكس اذا علم الاثران د و ز لمستقيم أمكن ايجاد مسقطيه لانه
حيث كانت نقطة د من نقط المستقيم الفراغى نفسه فاذا انزل منها عمود كالعمود
ح على خط الارض كانت نقطة تقابل هذا العمود بخط الارض نقطة من المسقط
الافقى للمستقيم ويكون هذا المسقط بالضرورة ه و وبالمثل اذا اسقطنا نقطة و
التي هى من نقط المستقيم المعلوم رأسا على خط الارض فحصلت نقطة مثل ز من

المسقط الرأسى الذى يصير بناءه على ذلك كناية عن المستقيم و
ومن المستحسن أن يبحث المـ علم تلامذته على كثرة القرين على حل هاتين المسألتين
المتضادتين فى جملة مستقيجات مختلفة الأوضاع كالمستقيم (هو ، هـ) (شكل ٤ لوحة ١)
الذى أثره الافقى نقطة و وأثره الرأسى نقطة ط أو كالمستقيم (م هـ ، م هـ)
(شكل ٥ لوحة ١) الذى أثره الرأسى نقطة ق وأثره الافقى نقطة ك
بمسند (قواعد فى التنقيطات المصطلح عليها) قبل انتهاء الكلام على التعاريف
الاولية يلزمنا أن نضع هنا بعض قواعد أصلية ينبغى مراعاتها عند رسم أى شكل من
الهندسة الوصفية فنقول

حيث كان الغرض من هذه الرسومات هو تبين شكل الاشياء بالرسم مع غاية الضبط
والدقة فيلزم أن تكون أجناس المخطوط التى تستعمل فيها كلغة يفهمها الناظر بالعودة
عليها أعنى أنها تورى الوضع الخاص لجميع الأجزاء المختلفة وتميز ما كان منها ظاهرا
وما هو مخبأ بالنسبة لوضع الناظر لها وتساعد على التمييز بين الاشياء الناتجة من المسئلة
وبين المخطوط التى لم ترسم إلا للمساعدة على الحصول على هذه الاشياء فقط فلذا صار
الاتفاق على القواعد الآتية للسيرة على مقتضاها دائما

فأولا المخطوط الأصلية أعنى التى تدل على معالم أى مسئلة أو على نتائجها بحرى رسمها
خطوطا كاملة مستمرة متى كانت مشاهدة اما اذا كانت تلك المخطوط الأصلية غير
مشاهدة لزم بيانها بمخطوط نقطية أعنى مركبة من نقط مدورة فى الدوائر الأولى وهو
المخطوط السكاملة المستمرة مبين فى (شكل ٦ لوحة ٢) بالمخط ١ ح وهو ومنشال الثانى
خط ر ح ط س ك من نفس الشكل المذكور

وثانيا المخطوط المساعدة أعنى المخطوط التى ليست من خطوط القسم الاول ولم يؤت بها
إلا للتوصل الى حل المسئلة وهذه المخطوط يلزم بيانها فى الرسم بمخطوط مجزئة أعنى مركبة
من جملة أجزاء خطية غير متصلة ببعضها وذلك مثل المخط ٢ م (شكل ٦) وليس لازما هنا
التمييز بين ما هو مشاهد من هذه المخطوط وما هو مخبأ منها لانه ليس لها فى الحقيقة وجود
بل فقط يتصورها المهندس فى ذهنه للوصول الى النتيجة المطلوبة

وثالثا قد توجد من هذه المخطوط المساعدة خطوط كثيرة الاهمية بالنسبة
لامثالها ويراد تحويل النظر والانتفات اليها زيادة عن غيرها فمثل هذه المخطوط تبين
فى الرسم بمخطوط مختلفة أعنى مركبة من أجزاء خطية صغيرة منفصلة عن بعضها بنقطة

مدورة أو نقطتين وذلك مثل المستقيمين هـ ر سه (شكل ٦) انما لا ينبغي استعمال هذه الخطوط لرسم المستقيمات العمودية على خط الارض التي لم يكن القصد منها سوى الوصل بين مسطقتي نقطة واحدة فقط

بهـ قد ذكرنا في البند السابق أن الخطوط الاصلية من أى مسـثلة تكون اما مشاهدة فيلزم رسمها خطوطا كاملة واما مخبأة فيلزم رسمها نقطية والآن نبين الكيفية التي بها يمكن التمييز بين خطوط هـذين النوعين فنقول من المعلوم انه وان كان لا يمكن اعطاء قواعد مستوفية لهذا الخصوص الا من بعد الكلام على السطوح المنحنية لكن من حيث ان المسائل الاولى التي سنتغل بها الآن لا يوجد فيها خطوط سوى المستقيم ولا سطوح سوى السطح المستوي فيكفينا حينئذ موقفا أن نقرر هنا الاعتبار والاصطلاحات الآتية

بهـ قد يتبدنا أن الرسم الذي يأخذ مساقط جميع الاشياء على المستوى الافقي واقف على بعد لانها في من المستوى المذكور من جهة فوق على الخط الرأسى المار باحدى نقط ذلك الشيء ونقطة بصره موجودة امام المستوى الرأسى وهذا الاعتبار الذى به يسهل علينا رسم المحيط الظاهرى للسطوح المنحنية كما سنشاهد ذلك فيما سياتى انشاء الله تعالى في بهـ قد مأخوذ ومستنتج من طريقة اسقاط نقطة فراغة على مستو وفي الواقع لان الاشعة البصرية الواصلة من عين الرسم الى جميع نقط الجسم تقرب كثيرا من ان تصير عمودية على المستوى الافقى كلما زاد ارتفاع الرسم عن المستوى المذكور مع انقائه دائما على خط رأسى واحد بحيث متى صارت نقطة البصر موجودة في بعد لانها في صارت هذه الاشعة متوازية واتحدت مع المستقيمات المسطرة لنقط الجسم المنظور ومن هنا يشاهد ان المسقط الافقى لاى شئ كناية عن منظور ذلك الشئ الذى أخذ باعتبار نقطة بصره متباعدة بعد الانها في موجودة على الخط الرأسى وهذه النتيجة محقة لما تقرر في مدد الاعتبار الذى نحن بصدد

وبمثل هذه الاسباب يتبدنا أن المسقط الرأسى لاى شئ مأخوذ باعتبار أن الرسم موجود امام المستوى الرأسى وفوق المستوى الافقى ونقطة بصره هذا الرسم موضوعة في بعد لانها في من المستوى الرأسى على العمود المقام على المستوى المذكور من احدى نقط الجسم المقروض

وبما تضى ذلك فكل خط أوجه من خط أصل الى وجه تحت المستوى الافقى أو خلف

المستوى الرأسى فهو مخطط أعنى غير مشاهد وبناء على ذلك يلزم تنقيطه أعنى رسمه بنقط مدورة

وكذا اذا وجد فى المسئلة بعض مستوياتها وجود حقيقى وكان جزء من خط أصلى موضوعا خلاف احده هذه المستويات أو تحتها بالنسبة لوضع الرسم لزم أيضا تنقيط الجزء المذكور لئلا ينزل نذكرا الطالب أيضا أنه ليس لهذه التميزات لزوم فى المخطوط المساعدة كما ينهنا على ذلك فى (ب ٢٣ د) ويمكن معرفة تطبيقات هذه القواعد فى كل من الاشكال ٣، ٤، ٥، ٦ وبالمجمل فالتاسعة نذكر بها الطالب أيضا فى أغلب المسائل التى سنورد حلها

(ملحوظة مهمة) ينبغى قبل رسم أى لوحة من لوحات الهندسة الوصفية أن تراعى الاحتراسات الآتية وهى أن يجبر أولا بالقلم الرصاص مستقيم غير محدود فى وسط ورقة الرسم ومواز تقريبا لوطولها ثم يقام على وسط هذا المستقيم مستقيم آخر عمودى بالضبط على المستقيم الاول ويلزم لذلك استعمال طريقة البرجل لان المثلث الخشب لا يمكن به الحصول على الضبط الكافى فى اقامة مستقيم عمودى على مستقيم آخر خصوصا فى حالة ما يكون العمود المطلوب ذا طول كبير نوعا لئلا يستعمل مع غاية الضبط والسرعة فى رسم المستقيمات المتوازية ولذا انه من بعد رسم المستقيمين المتعامدين بالطريقة المتقدمة ترسم جميع المخطوط الموازية لخط الارض أو العمودية عليه بالتوازى له جامع استعمال المثلثات الخشب بأن يوضع أحدهما بحيث يوازي الخط الذى يراد رسم الموازى له ثم يوضع المثلث الثانى بجانب الاول بحيث ينطبق أحد اضلاعه على أحد اضلاع المثلث الاول المذكور ثم تثبت المثلث الجديد ويحرك الاول بالاتساع عليه الخ

وعما يجب التنبيه عليه هنا أيضا هو أن بعض الرسمة يجعلون خط الارض فى رسوماتهم أنحن من باقى المخطوط الأصلية ناظرين فى ذلك لكثرة أهمية الخط المذكور ولكننى أنصح التلاميذ بان يحترسوا من اتباع هذا رأى لانه ينشأ عن ذلك فى الغالب عدم ضبط فى تعيين وضع نقط تقابله بالمستقيمات الاخر فلا صواب حينئذ ان لا تجعل ثخناته أكثر من ثخناته باقى المخطوط الأصلية التى معه فى اللوحة

(الفصل الثانى)*

(فى مسائل متنوعة على المستقيمات والمستويات)

(١٥)

بنسبة (مسائل ابتدائية على المستقيمات) المطلوب رسم المستقيم المار بنقطتين معلومتين
كنقطتي (ا و آ) و (ب و ب) (شكل ٧ لوحة ٢) ثم إيجاد البعد الحقيقي
بين هاتين النقطتين

فلذلك يقال حيث كان المستقيم الذي يراد رسمه مارا بالنقطتين المعلومتين فيكون
مسقطه الافقي بمقتضى بـ ٧ مارا بالمسقطين الاقبيين ا و ب للنقطتين
المذكورتين ومسقطه الرأسى مارا بالمسقطين الرأسين آ و ب لهما وبناء على ذلك
يكون المسقط الافقي لهذا المستقيم هو اب ومسقطه الرأسى آ ب وبذلك
يصير المستقيم الفراغى معينا باعتبارانه غير محدود

اما من خصوص البعد الحقيقي بين النقطتين (ا و آ) و (ب و ب) الذى مسقطاه
هما اب و آ ب فلاجل تعيينه يقال من المعلوم أن المستقيم الفراغى يكون على
الدوام أكبر من كل من مسقطيه الافقى والرأسى كل على حدته الافى حالتيه اثنتين
الاولى اذا كان المستقيم الفراغى موازيا الى المستوى الرأسى كان مسقطه على المستوى
المذكور مساويا له بالضبط واثنائية اذا كان المستقيم الفراغى موازيا الى المستوى
الافقى كان مسقطه الافقى مساويا له أيضا لكن من حيث ان المستقيم المعلوم
(اب و آ ب) ليس موازيا الى المستوى الرأسى ولا الى المستوى الافقى بدليل ان كلامنا
مسقطيه غير مواز الى خط الارض خض فلايجوز اعتباراى واحد من هذين المسقطين
حقيقة للمستقيم الفراغى

واذن فلاجل إيجاد هذه الحقيقة يتوهم دوران المستوى آ ب ا المسقط افقيا
للمستقيم المعلوم حول الرأسى آ المسقط افقيا للنقطة (ا و آ) فى نقطة ا بشرط
ان يفرض ان المستقيم الفراغى ثابت فى هذا المستوى ومنجذب معه فى اثناء حركته الى
ان يصير ذلك المستوى والمستقيم الفراغى الموجود فيه موازيين الى المستوى الرأسى
للمسقط وفى اثناء هذا الدوران تبقى نقطة (ا و آ) ثابتة لوجودها على محور الدوران
واما نقطة (ب و ب) فانها ترسم فى الفراغ قوس دائرة موازيا الى المستوى الافقى
فينسقط بناء على ذلك افقيا على قوس منله كالقوس ب ب مركزه فى نقطة ا لانها
مسقط جميع نقط محور الدوران الموجود عليه مركز القوس الفراغى ونصف قطره

عبارة عن البعد α ورأسيا على مستقيم مواز لخط الأرض كالمستقيم β وعند
ما يصير المستقيم الفراغي موازيا إلى المستوى الرأسى يؤل مسقطه الأفقى إلى المستقيم
 α الموازى لخط الأرض وحينئذ فيكون المسقط الأفقى للنقطة المنحركة (β و α)
بعد الحركة كناية عن نقطة β التى هى نقطة تقابل مسقط القوس بمسقط المستقيم من
بعد الحركة ومسقطها الرأسى نقطة تقابل العمود المقام من المسقط الأفقى الجديد β
على خط الأرض بالمسقط الرأسى للقوس أعنى نقطة β ومن هنا يرى ان المسقط الرأسى
للمستقيم الفراغى قد آل من بعد الحركة إلى المستقيم α الذى يكون بناء على ذلك

مساويا بالضبط إلى حقيقة المستقيم الفراغى

بـ γ ويمكن أيضا إيجاد هذه الحقيقة بواسطة دوران المستوى المسقط رأسيا للمستقيم
الفراغى حول الخط الأفقى المسقط رأسيا للنقطة (α و β) فى α إلى ان يصير هو والمستقيم
الفراغى الموجود فيه موازيا إلى المستوى الأفقى وفى هذه الحالة تكون العمليات
والبراهين اللازمة لأجرائها مشابهة للعمليات والبراهين التى أجريت فى الحالة المتقدمة
ويكون المسقط الأفقى الجديد وهو α للمستقيم الفراغى من بعد ان يصير موازيا إلى
المستوى الأفقى مساويا لحقيقة المستقيم الفراغى أو لحقيقة البعد بين نقطتي (α و β)
و (β و α) المعلومات

(نتيجة) اذا ما دالمستقيم β على استقامته حتى تقابل مع امتداد الخط الرأسى α فى
نقطة مثل δ حدث مثل β α القاسم الزاوية فى δ وتره وهو β α هو البعد
الحقيقى بين النقطتين وضلع قائمته وهو β α = β α أعنى يساوى للمسقط
الأفقى للبعد بين النقطتين وضلع القائمة الثانى وهو δ α = δ α = δ α = δ α
أعنى مساويا للفرق بين ارتفاعى النقطتين المعلوماتين عن المستوى الأفقى المقدرين
ببعدى مسقطيهما الرأسين عن خط الأرض

وأيا اذا ما دالمستقيم β على استقامته إلى ان يقابل المستقيم α فى نقطة مثل δ
حدث مثل β α δ وتره وهو β α هو البعد الحقيقى بين النقطتين المعلوماتين (α و β)
و (β و α)

و (ب و ت) المعلوماتين وضاع قائمته $\text{ب} = \text{ط} = \text{ب} = \text{آ} = \text{ت}$ أعنى مساويا الى المسقط الرأسى للمستقيم الواصل بين النقطتين وضاع القائمة الثانى وهو $\text{ا} = \text{ك} - \text{ط} = \text{ك} = \text{ا} - \text{ب} = \text{ع}$ اعنى مساويا للفرق بين بعدى النقطتين المعلوماتين عن المستوى الرأسى المقدرين به بعدى مسقطيهما الافقيين عن خط الارض

ومن هذه النتيجة تؤخذ قاعدة عمومية لاجل تعيين البعد المحقيق بين نقطتين معلومتين بمسقطيهما وهى ان يركب مثلث قائم الزاوية احد ضلعي قائمته المسقط الافقى للمستقيم الواصل بينهما وضاع القائمة الثانى الفرق بين ارتفاعى النقطتين المذكورتين عن المستوى الافقى المقدرين به بعدى مسقطيهما الرأسيين عن خط الارض أو يركب مثلث قائم الزاوية بواسطة المسقط الرأسى للمستقيم الواصل بين النقطتين والفرق بين بعدى المسقطين الافقيين للنقطتين المعلوماتين عن خط الارض فكل من وترى المثلثين القائى الزاوية المثلثين بهذه الكيفية يكون حقيقة للبعد الكائن بين النقطتين المفروضتين

به ^{٢٨}د (طريقة ثانية لحل المسئلة المتقدمة) اذا فرض ان النقطتين المعلوماتين هما (ا و ا') و (ب و ب') (شكل ٨ لوحه ٢) وكان المطلوب إيجاد حقيقة المستقيم المحدود (ا ب و ا' ب') الواصل بينهما ما يعال ان هذا المستقيم صانع مع المستقيمين المسقطين افقيا لنهايتيه ومع المسقط الافقى ا ب شبه منحرف وحينئذ فيمكن إيجاد حقيقة ذلك المستقيم بتطبيقه على المستوى الافقى للمسقط ولذلك يتوهم دوران شبه المنحرف المذكور بفرض ارتباط اضلاعه ببعضها وحفظ الزوايا الواقعة بينهما حول المسقط الافقى ا ب الى ان ينطبق على المستوى الافقى بحيث كان المستقيمان المسقطان افقيا لنهايتيهما محدودين على المسقط الافقى فى الوضع الاصلى فلا يزالان عمادين عليه بعد الانطباق وحينئذ اذا أقيم العمود ب ب' من نقطة ب على اتجاه المسقط الافقى ا ب وأخذ عليه بعد ب ب' مساويا الى طول المستقيم المسقط افقيا بالنقطة (ب و ب') المقدر به بعد ب ب' ثم أقيم عمود ا ا' أيضا وأخذ عليه بعد ا ا' مساويا الى ا و وبعد ذلك وصل المستقيم ا ب كان هذا المستقيم هو منطبق المستقيم الفراغى على المستوى الافقى واذن فهو حقيقة

ويمكن أيضا إيجاد حقيقة المستقيم (ا ب و ا' ب') (شكل ٨ لوحه ٢) بواسطة تدوير شبه المنحرف المتكون منه ومن المستقيمين المسقطين رأسيا لنهايتيه ومن مسقطه الرأسى

أ- حول المسقط الرأسى المذكور الى ان ينطبق على المستوى الرأسى ومن بعد تطبيقه بكيفية مماثلة لكيفية التي أجريتها عند التطبيق على المستوى الافقى نجد ان حقيقة المستقيم عبارة عن البعد β

(تنبية) اذا لم ينطبق المستقيم على المستوى الافقى الذى هو مستقيم β على استقامته يلزم ان يمر امتداده بالانحراف α والمستقيم الاصلى لان هذا الانحراف نقطة من المستقيم الفراغى ثابتة اثناء حركته بسبب وجودها على محور الدوران فلا يزال المستقيم المذكور مازالها بعد الانطباق

وكذا اذا لم الانطباق β على استقامته لزم ان يمر كما تقدم بالانحراف الرأسى α للمستقيم الاصلى

ب- عند وبالعكس اذا علم مستقيم غير محدود كالمستقيم (ب و د) (شكل ٨ لوحة ٢) ونقطة عليه كنقطة (ب و ت) وكان المطلوب إيجاد نقطة على هذا المستقيم مثل نقطة (أ و آ) بحيث يكون بعدها عن النقطة المعلومة (ب و ت) مساويا لـ β معلومة رمزها β فلذلك ينطبق المستقيم المعلوم على المستوى الافقى بموجب ما تقدم بأن يؤخذ البعد $\beta = \beta$ ويوصل المستقيم β الذى يكون هو منطبق المستقيم المعلوم ثم بعد ذلك تقطع على هذا المستقيم بالابتداء من نقطة β مسافة مثل β مساوية الى البعد المعلوم β فاذا توهمنا قيام المستقيم المنطبق β ورجوعه الى وضعه الاصلى رجعت معه نقطة β الى نقطة β يعود على محور الدوران β وأخيرا بين المسقط الرأسى لهذه النقطة بأن يقام من مسقطها الافقى β يعود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع المسقط الرأسى للمستقيم فى نقطة مثل β فتكون هي المسقط الرأسى للنقطة المطلوب إيجادها

ب- بناء المستقيمان المتوازيان فى الفراغ تكون مساطهما المتحدتين الاسم متوازيين مثلا اذا فرض ان المستقيمين الفراغيين α و β (شكل ٩ لوحة ٢) متوازيان أقول ان مسطبيهما الافقيين α و β متوازيان ومسطبيهما الرأسين α و β متوازيان أيضا

وذلك لانهما كان المستقيمان الفراغيان α و β متوازيين فالمستويان α و β المسقطان لهما افقيا يكونان متوازيين وبناء على ذلك يكون
خطا

خطا تقاطع هذين المستويين بالمستوى الافقى اللذان هما α و β أعني
المستويين الافقيين للمستقيمين الفراغيين متوازيين أيضا وبمثل ذلك يبرهن على ان
مستقيهما الرأسين α و β يكونان متوازيين
وبالعكس اذا كان المستويان الافقيان α و β (شكل ٩ لوحة ٢)
للمستقيمين فراغيين متوازيين وكان مستقيهما الرأسيان α و β متوازيين أيضا
يلزم بناء على ما سبق في برهان الحالة الاولى ان يكون المستقيمان الفراغيان α و β
متوازيين

وبمقتضى هذه النظرية وعكسها يمكن حل المسئلة الثانية وهي
المعلوم مستقيم مثل (α و β) (شكل ١٠ لوحة ٢) ونقطة خارجة عنه مثل (γ و δ)
والمطلوب مد مستقيم من هذه النقطة يكون موازيا الى المستقيم المعلوم لذلك يكفي ان يمرر
من نقطة γ التي هي المسقط الافقى للنقطة المعلومه مستقيم مثل δ موازيا الى α
فيكون مستقيم δ مسقطا افقيا للمستقيم المطلوب وأيضا يمد من نقطة γ مستقيم
مثل δ موازيا الى α فيكون هو المسقط الرأسى للمستقيم المطلوب أيضا فاذا أريد
ايجاد أثرى المستقيم (δ و γ) الذى تعين بهذه الصورة يجرى العمل بمثل ما تقدم
في بـ ١٤

بـ ١٥ (تعين المستويان بحسب شروط معاليمهما) المعلوم مستقيمان والمطلوب ايجاد
المستوى الخارجيهما وانثبه قبل الشروع في حل هذه المسئلة أولا على أن المستويين
في الهندسة الوصفية بأثره وأثر المستوي هما خطا تقاطعه بمستوى المسقط فخط
تقاطعه بالمستوى الافقى يسمى أثره الافقى وخط تقاطعه بالمستوى الرأسى يسمى أثره
الرأسى

ولا يتخلو الحال عن ان يكون المستوى الفراغى إمارة لتقاطع خط الارض وامام مواز به
فاذا كان المستوى متلاقيا مع خط الارض لزم دائما ان تكون نقطة تلاقيهما موجودة
على كل من أثره الافقى والرأسى وهذا يدل على انه يلزم في هذه الحالة أن يكون أثره
المستوى متلاقين في نقطة واحدة من خط الارض واما اذا كان المستوى المستوي المعلوم
موازيا الى خط الارض لزم ان يكون أثره موازيين لخط الارض أيضا
وثانيا على انه اذا كان مستقيم فراغى موجودا داخل مستوي فراغى أيضا لزم ان يكون أثره
هذا المستقيم موجودين على أثرى المستوى كل على نظيره وهذا أمر بدى اذ لا يتأتى

للمستقيم المذكورهما امتدادان يخرج عن المستوى الموحد هـ وفيه
وانرجع الآن محل المسئلة المذكور منطوقها في أول هذا البند فنقول لاشك ان
المستقيمين المعلومين اللذين برادقير المستوى المطلوب بهما اما ان يكونا متقاطعين
أو متوازيين

فاذا اعتبرنا الحالة الاولى وفرض ان المستقيمين المتقاطعين المعلومين هما (ا ب و آ ت)
(حـ و دـ) (شكل ١١ لوحة ٣) يقال يلزم التحقق أولا ما اذا كان المستقيمان
المذكوران متقاطعين في الفراغ أم لا ولعرفة ذلك بتطرق في نقطة تقاطع مسقطيهما
الافقيين وهي هـ ونقطة تقاطع مسقطيهما الرأسيتين وهي هـ فان كانتا على عمود واحد
على خط الارض كما هو مفروض في شكل ١١ علم من ذلك ان مستقيمي (ا ب و آ ت)
(حـ و دـ) متقاطعان وان كانتا بخلاف ذلك علم ان المستقيمين المذكورين غير
موجودين في مستوى واحد وبعد التحقق من تقاطع المستقيمين المذكورين في الفراغ
بواسطة الامتحان المتقدم يكفي لتعيين اثرى المستوى الساري بهما أن يقال حيث ان
المستوى المطلوب ايجاد مشتمل على المستقيمين المعلومين فبناء على التظنية الثانية المتقدم
تكون آثارهما موحدة على أثريه ويلزم حينئذ البحث عن أثرى كل من المستقيمين
المذكورين بمقتضى ما تقدم في بحثنا فنجد أن الاثر الافقي للمستقيم (ا ب و آ ت) هو ا
وأثره الرأسى ت وان الاثر الافقي للمستقيم (حـ و دـ) هو ح وأثره الرأسى ت فاذا
وصل بين الاثرين الافقيين ا و ح بمستقيم ح ا ثم بين الاثرين الرأسيتين ت و ت بمستقيم
ت و كان المستقيمان ح ا و ت و كتابة عن أثرى المستوى الساري بهما المستقيمين (ا ب و آ ت)
(حـ و دـ) المعلومين ولاجل تحقيق الرسم يلزم بناء على ما تقرر في التظنية الاولى أن
يتقاطع كل من الاثرين ا و الحـ الافقى و ت و ت الرأسى من المستوى المطلوب في نقطة
واحدة مثل سـ على خط الارض

بمسئدة الحالة الثانية اذا كان المستقيمان المعلومان (ا ب و آ ت) و (حـ و دـ) (شكل ١٢
(شكل ١٢ لوحة ٣) متوازيين يلزم أن يكون مسقطاهما الافقيان ا ب و حـ
متوازيين ومسقطاهما الرأسيان آ ت و دـ متوازيين أيضا كما في بحثنا ولنعمين
أثرى المستوى الساري بهما يبحث كما تقدم في الحالة الاولى عن أثرى كل من المستقيمين
المذكورين ويمرر بالاثرين الافقيين ح ا و ا مستقيم مثل ح ا س فيكون هو الاثر
الافقى للمستوى وبالاثرين الرأسيتين ت و ت مستقيم مثل ت و س فيكون هو الاثر

الرأسي للمستوى المذكور وبمقتضى مائة - د م يلزم ان يكون متقاطعا مع الاثر الاثني في نقطة مثل س على خط الارض خ ض

(نتيجة) إذا كان المطلوب تمريسه وتو ثلاث نقاط معلومة مثل (ع و ع) , (ه و ه) و (م و م) (شكل ١١ لوحه ٣٤) يكفي لذلك ان يمرر بنقطتي (ه و ه) و (ع و ع) مستقيم مثل (ع ه و ع ه) وأيضاً يمرر بنقطتي (ه و ه) و (م و م) مستقيم آخر مثل م ه و م ه) فيكون قاطعا للمستقيم الاول في نقطة (ه و ه) وتؤول المسئلة حينئذ الى كيفية تمريسه وبمستقيمين متقاطعين وبمقتضى مائة تقدم يكون س ح هو المستوى المطلوب

(نتيجة ثانية) اذا كان المعلوم مستقيماً مثل (اب و ا ب) (شكل ١٢ لوحه ٣٤) ونقطة خارجة عنه مثل (م و م) و اريد تمريسه وبهما كفي لذلك ان يمرر من النقطة المذكورة مستقيم قاطعاً موازاً للمستقيم (اب و ا ب) المعلوم وليكن هذا الموازي هو المستقيم (حم و ح م) فتؤول المسئلة الى تمريسه وبمستقيمين متوازيين فيكون بناءه على مائة تقدم المستوى ح م س ح هو المستوى المطلوب
بـ ٣٣ د المعلوم مستو مثل ع ه ك (شكل ١٣ لوحه ٣٤) ونقطة خارجة عنه مثل نقطة (م و م) والمطلوب م د من هذه النقطة مستو مواز له

لذلك يقال من المعلوم ان اثرى المستوى المطلوب سيكونان موازيين الى اثرى المستوى المعلوم ع ه و ه ك كل لتفسيره لان المستويين المتوازيين تكون آثارهما المتحددة الاسم متوازية وبناء عليه فاللازم لنا فقط هو إيجاد نقطة من كل اثر من اثرى المستوى المطلوب ولذلك يمرر من النقطة المعلومه (م و م) مستقيم موازاً للمستوى ع ه ك فيؤخذ أولاً مستقيم مثل (اب و ا ب) داخل المستوى المذكور بأن يؤخذ انثراه ا , ت على اثرى المستوى ع ه ك وبعد ذلك يمد من نقطة (م و م) مستقيم (دم و د م) موازاً الى مستقيم (اب و ا ب) فيكون المستقيم الاول موجوداً بأكمله في المستوى المطلوب واذن يلزم البحث عن اثره وليكونا ح و ز ويمد منهما مستقيمان موازيان الى اثرى المستوى المعلوم فيبتعين مستو مثل ك و ح هو المستوى المطلوب

بـ ٣٤ ويمكن لأجل السهولة والوفرى الرسم تعويض المستقيم الذي أخذ في الحالة الاولى داخل المستوى المعلوم في وضع حيثما اتفق باحد اثرى المستوى المعلوم

مثلاً إذا ريد من نقطة (م و م) (شكل ١٤ لوحة ٣) مذهب مستوي مواز إلى المستوى ع هـ ك المعلوم يمرر بالنقطة (م و م) مستقيم مواز إلى الاثر الأفقي ك هـ من المستوى المعلوم فيكون مسقطه مستقيماً مثل م ب موازياً إلى الاثر الأفقي ك هـ ومسقطه الرأسى مستقيماً مثل م ب موازياً إلى خط الأرض لأن المستقيم المار في الفراغ بنقطة (م و م) والموازي إلى الاثر الأفقي ك هـ يكون موازياً إلى المستوى الأفقي للمسقط وعلى هذا يكون الاثر الأفقي لهذا المستقيم معدوماً أثره الرأسى ب فيعين بمقتضى بذلك فإذا مد جيتل من نقطة ب مستقيم مثل ب د مواز إلى ع هـ ثم من نقطة تقابله بخط الأرض وهى ل مذهب مستقيم ل ح مواز إلى ك هـ حدث مستوي مثل ب د ح هو المستوى المطلوب

ويمكن أيضاً ان يمد من النقطة المعلوم (م و م) مستقيم مثل (د م و م) مواز للاثر الرأسى من المستوى بدلاً عن الموازى إلى أثره الأفقي ويكون العمل عين ما تقدم

ب ٣٤ من المهم ان يلاحظ اننا لم نذكر في شكل (١٣ و ١٤) أن المستويين المتوازيين لهما وجود حقيقي في الفراغ لأن ذلك كان يستلزم عدم ظهور المستوى ك ل د (شكل ١٣ لوحة ٣) لاختلافه تحت المستوى ع هـ ك وعليه فكان يجب تنقيط اثرى المستوى الاول بمقتضى الاصطلاح المقرر ب ٣٤ لكن حيث ان ذلك مما يكثّر عدد الخطوط النقطية ويحطل الذهن عن تمييز الاجزاء من اثرات المستويات التي تكون امام او خلف مسطوي المسقط فلذا يعتبر دائماً ان الموجود من المستوى هو اثره فقط وفي بعض الاحيان يعتبر للمستوي الفراغى وجود حقيقى لكن عندما يعتبر ذلك فلانهم مل في اخبار الطالاب بذلك للتنوير عليه وعدم الوقوع في الخطأ

ب ٣٥ يمكن بواسطة الاعتبار المبررة في ب ٣٤ حل المسئلة الآتية وهى المعلوم المسقط الأفقى اب (شكل ١٥ لوحة ٣) مستقيم مجهول المسقط الرأسى ل ك هـ محقق الوجود داخل مستوي فراغى معلوم ك المستوى م هـ ك والمطلوب تعيين مسقطه الرأسى المجهول ولذلك يقال لاشك اننا اذا مدنا المسقط الأفقى المعلوم حتى تلاقي مع خط الأرض في نقطة ولتكن ا كانت هذه النقطة هى المسقط الأفقى للاثر الرأسى من المستقيم الذى يراد تعيين مسقطه الرأسى وحيث ان هـ ل ا اثر موجود أيضاً على الاثر الرأسى م هـ

من المستوى المعلوم Γ هـك فيكون حينئذ هونقطة α التي هي نقطة تقابل الاثر Γ هـ مع العمود α المقام من نقطة α على خط الارض $\chi \zeta$ اما الاثر α لفي للمستقيم المذكور فانه يوجد على كل من مسقطه الافقي $\alpha \beta$ المعلوم والاثر α لفي هـك المستوى الشامل له وعلى ذلك هونقطة تقابلهما β وبناء على ماذ كرقصاار المستقيم معين الاثرين وهما α و β فبمقتضى $\beta \gamma$ يمكن تعيين مسقطه الرأسى α ت الذى كان مجهولا فاذا كان المعلوم من المستقيم هونمسقطه الرأسى α ت (شكل ١٥ لوحه ٣٤) وأريد تعيين مسقطه الافقى المجهول أجرى العمل مثل ما تقدم فى الحالة الاولى فاذا فرض أن المسقط الافقى $\alpha \beta$ المعلوم (شكل ١٦ لوحه ٣٤) مواز الى الاثر الافقى هـك من المستوى المعلوم Γ هـك يعين الاثر الرأسى α ت من المستقيم المذكور كما تقدم وأما اثره الافقى β كونه معدوما بسبب عدم تقاطع خط $\beta \gamma$ بخط هـك يعلم أن المستقيم الفراغى المطلوب مواز الى المستوى الافقى للمسقط ويكون مسقطه الرأسى بناء على ذلك عبارة عن المستقيم α الموازى الى خط الارض $\chi \zeta$

وبمثل ذلك يرى أنه اذا كان المسقط الافقى المعلوم هونمستقيم $\gamma \delta$ الموازى الى $\chi \zeta$ (شكل ١٦ لوحه ٣٤) دل ذلك على أن المستقيم فى الفراغ مواز الى المستوى ازاى للمسقط ويكون حينئذ مسقطه على هـذا المستوى الاخير عبارة عن المستقيم $\gamma \delta$ الموازى الى هـم $\beta \gamma$ وهـاك أيضا مسألة مشابهة للمسئلة المتقدمة وهى

المعلوم المسقط الافقى $\gamma \delta$ (شكل ١٥ لوحه ٣٤) لنقطة محقق وجودها فى مستوي معلوم مثل هـك والمطلوب تعيين مسقطها الرأسى فالحل هـذه المسئلة يمد من نقطة γ المعلومه مستقيم حيثما اتفق مثل $\alpha \beta$ ويعتبر مسقطا أفقيا للمستقيم موجود فى المستوى المعلوم هـك ثم يبحث بمقتضى المسئلة السابقة عن المسقط الرأسى α ت لهـذا المستقيم وحينئذ ليمبق سوى أن يبحث عن المسقط الرأسى للنقطة على المستقيم α ت الذى هونمسقط الرأسى لمستقيم مار بها ولذلك ينزل منها عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع α ت فى نقطة مثل β فسيكون هى المسقط الرأسى المطلوب ويمكن أيضا تعيين المسقط لافقى $\gamma \delta$ للنقطة اذا كان مجهولا وكان المعلوم هونمسقطها الرأسى α ت

نتيجه عوضا عن أن يتخذ المستقيم المساعد $\alpha \beta$ (شكل ١٥ لوحه ٣٤) المسار نقطة γ فى اتجاه حيثما اتفق الاحسن والاسهل ان يمرر بها مستقيم مواز لالاثر الافقى هـك من المستوى أو مستقيم مواز لخط الارض ومثال ذلك مبين فى (شكل ١٦ لوحه ٣٤)

فالتنظر اليه غان عن التلويل

بمسد (تقاطع المستويات مع بعضها) المطلوب إيجاد خط تقاطع مستويين معلومين وهو على جملة حالات بحسب أوضاع المستويين المتقاطعين
الحالة الاولى أن تكون أنار المستويين المعلومين متقاطعة مثني داخل حدود الرسم كما إذا أريد مثلا إيجاد خط تقاطع المستوي م هـ ك (شكل ١٧ لوحة ٤) بالمستوى س ع صه فلذلك يقال بما أن خط التقاطع المطلوب موجود في كل من المستويين م هـ ك و س ع صه فيكون أثره موجودين على اثرى كل منهما بمعنى أن أثره الأفقى يكون عبارة عن نقطة أ التي هي نقطة تقابل أثريهما الأفقيين هـ ك و س ع صه وأثره الرأسى يكون عبارة عن نقطة ب أيضا وحيث علم أن أثر خط التقاطع سهل تعيين مسقطيه وهما اب و آ ب بمقتضى ب مسد

بمسد الحالة الثانية أن يكون انشان من أنار المستويين متقاطعين معا والآخران متوازيين كالمستويين م هـ ك و س ع صه (شكل ١٨ لوحة ٤) بأن كان اثرهما المتوازيان هما هـ ك و س ع صه الأفقيان فيقال من كون الاثرين المذكورين غير متقاطعين يعلم أن خط التقاطع مستقيم أفقى أعنى موازيا الى المستوى الأفقى للمسقط حيث لا أثر له على المستوى المذكور وبناء على ذلك يكون المسقط الرأسى للخط المذكور هو المستقيم آ ب الموازى لمخط الارض والممدود من نقطة آ التي هي أثره الرأسى وذلك بمقتضى ما قيل فى الحالة الاولى وأما المسقط الأفقى فيتعين بأن ينزل من آ عمود مثل آ ا على خط الارض ومن نقطة تقابلها وهى ا يرسم المستقيم اب موازيا للأثرين الأفقيين هـ ك و س ع صه من المستويين المعلومين فيكون اب هو المسقط الأفقى للفاصل المشترك المطلوب ومثل ذلك يعمل فى حالة ما يكون الاثران الرأسيان من المستويين المعلومين هما المتوازيان

بمسد الحالة الثالثة أن يكون المطلوب إيجاد خط تقاطع مستويين متوازيين متوازيين (شكل ١٩ لوحة ٤) بمستويين مواز لا حد مستويي المسقط كالمستوى س ع الموازى الى المستوى الأفقى مثلا فلذلك يقال أن خط التقاطع فى هذه الحالة مستقيم أفقى لا يكونه موجودا فى المستوى س ع الموازى للمستوى الأفقى فلهذا يكون خط التقاطع المذكور موجودا أيضا فى المستوى م هـ ك هو جبهته واثره الأفقى هـ ك أعنى احدا فى مياته و بناء على ذلك يكون المسقط الرأسى لمخط المصاع المذكور عبارة عن

المستقيم

المستقيم آس الموازي لخط الارض والممدود من نقطة آ أعنى منطبقا على الاثر
الرأسي ع منه من المستوى القاطع الموازي للمستوى الافقي للسقط وأما مسقطه الافقي
فهو المستقيم اب الموازي الى الاثر هك ومثل ذلك يجري في حالة ما يكون احد المستويين
المتقاطعين موازيا الى المستوى الرأسي عوضا عن ان كان موازيا الى الافقي

بهذا الحد الحالة الرابعة أن تكون اثرات المستويين المتقاطعين متقاطعة مثنى لكن
في خارج حدود الرسم وذلك كحالة المستويين م هك و س ع صه (شكل ٢٠ لوحه ٤)
فلتعيين خط التقاطع في هذه الحالة يقال يلزم أن يعين منه نقطتان بدلا عن نقطتي
الاثرين اللتين وقعتا خارج حدود الرسم وللوصول الى ذلك تقطع المستويين المعروفين
م هك و س ع صه بمستومساعد أول اتجاهه اختياري فيقطععهما في مستقيمين
وهذان المستقيمان يتقاطعان في نقطة فتكون تلك النقطة بالضرورة نقطة من خط
تقاطع المستويين الاصيلين ثم نقطعهما بمستومساعد آخر يفعل بهما كما فعل المستوى
الاول وتعين به نقطة ثانية من خط تقاطع المستويين الاصيلين أيضا فاذا وصل بين
النقطة الاولى والثانية بمستقيم كان هو خط التقاطع المطلوب

ولاجل السهولة يؤخذ المستويان المساعدان موازيين لاحد مستويي المسقط وليكن
احدهما هو المستوى لآ الموازي الى المستوى الافقي مثلاً فيقطع المستوى م هك
في مستقيم ينسقط رأسيه على نفس الاثر لآ وأفقياً على المستقيم لب الموازي الى
هك (انظر بهند) وكذا يقطع المستوى الثاني س ع صه في مستقيم آخر مثل
(لآ و لاب) ونقطة ب التي هي نقطة تقابل المسقطين الافقيين لب و لاب تكون
هي المسقط الافقي لنقطة من خط التقاطع المطلوب مسقطها الرأسي نقطة ت تقابل
العمود المقام من المسقط الافقي ب على خط الارض مع المستقيم لآ الذي هو مسقط
رأسي مشترك لكل من خطي تقاطع المستوى لآ مع مستويي م هك و س ع صه
ولاجل ايجاد نقطة أخرى من خط التقاطع المطلوب يستعان بمستوان مساعد كالمنتهي
ط ح الافقي أيضا فيقطع مستوى م هك في المستقيم (ط ح و ط ا) ومستوى
س ع صه في المستقيم (ع ح و ح ا) الذي يعين به تقاطعه مع المستقيم الاول نقطة مثل
(ا و آ) فتكون نقطة ثانيه من خط التقاطع المطلوب الذي يكون بناء على ذلك
عبارة عن المستقيم (اب و آت) بحيث اذا مده مسقطه الافقي اب مربطة نقطة تقاطع

الاثربين الاقيين هـ و ع صه واذا مده سقطة الرأسى آت مربعة تقاطع
الاثربين الرأسين م ه و س ع وهذا أمر سهل التصور لاحتياج الى زيادة التطويل
(تنبه) قد أخذت المستويات المساعدة هنا موازية للمستوى الافقى من مستوى
المسقط لكنه كان يمكن أخذها موازية الى المستوى الرأسى والعمل بعينه

بـ ٤٤ الحالة الخامسة وهى التى تكون فيها أثرات المستويين المتقاطعين متوازية
لا يخفى ان كل مستويين أثراتهما متوازية ~~بـ~~ ونان على العموم متوازيين ما لم تكن
أثراتهما المتوازية موازية الى خط الارض ومنعكسة الترتيب لان كل مستويين بهذه
الصورة يتقاطعان فى مستقيم مواز الى خط الارض المذكور

ولنفرض مستويين من هذا القبيل كالمستويين اللذين أثرا أحدهما م س صه
و سـ صه (شكل ٢١ لوحة ٤) وأثرا المستوى الثانى هما م ه و تم هـ والمفروض
انهما جميعا متوازية وموازية الى خط الارض ومنعكسة الترتيب بالفسبة له بمعنى ان
المستوى الذى أثره الافقى سـ صه الاقرب من غيره بالنسبة لخط الارض يكون أثره
الرأسى هو سـ صه الابعدا بالنسبة لخط الارض المذكور والعكس بالعكس وقد اعتبرنا
فى (الشكل ٢١ لوحة ٤) ان المستويين المعلومين لهما وجود حقيقى فى الفراغ ولذا
قد التزمنا بتقريب الاثربين سـ صه و تم هـ الخباين ورائهما طبقا للاصطلاح المقرر
فى بـ ٤٥

فلما وجد خط تقاطع هذين المستويين يقطعان بمستوى مساعد حيثما اتفق مثل ط ع
الذى يقطع المستوى (سـ صه و سـ صه) فى المستقيم (د ر و ل ر) والمستوى
(م ه و تم هـ) فى المستقيم (ح ف و حـ ف) وهذا المستقيم الاخير متقاطع مع
المستقيم الاول فى نقطة (ظ و ظ) التى تكون حينئذ نقطة من خط التقاطع
المطلوب وحيث ذكرنا فى أوائل هذه المسئلة ان خط التقاطع مواز لخط الارض فيكفى
حينئذ لايجاد ان يعدم نقطة (ظ و ظ) مستقيم مثل (ظ و ظ و ظ) مواز
لخط الارض فيكون هو خط التقاطع المطلوب

ويمكن ايضا ان يؤخذ عوضا عن المستوى ط عـ الماخوذ حيثما اتفق مستوى قطاع
عمودى على خط الارض خـ ض مثل المستوى غـ هـ (شكل ٢١ لوحة ٤) الذى
يكون خط التقاطع بمستوى المسقط الاصليين عبارة عن المستقيمين غـ هـ و هـ
الساكنين على استقامة واحدة وهذا المستوى يقطع الاثربين الرأسين للمستويين

المعومين في نقطتين مثل γ و δ فاذا أردنا المستوى المساعد المذكور حول أثره الأفقي γ كى الى أن ينطبق على المستوى الأفقي للسقط انطبق أثره الرأسى γ غ على خط الارض $\gamma\delta$ وانطبقت معه نقطتا γ و δ اللتان هما نقطتا تقابل مستوى القطاع $\gamma\delta$ مع الاثرين الرأسين γ و δ للمستويين الاصليين أو هما الاثران الرأسيان المحطى تقاطع مستوى القطاع بالمستويين الاصليين بأن يرسم اقوسى $\gamma\delta$ و $\delta\gamma$ في المستوى الرأسى وباتى γ و δ من خط الارض وعلى هذا يكون $\gamma\delta$ و $\delta\gamma$ منطبقين المحطى تقاطع المستوى $\gamma\delta$ كى بالمستويين الاصليين على المستوى الأفقي للسقط والى كون الخطين المذكورين متقاطعين في نقطة γ تكون هذه النقطة نقطة من خط التقاطع المطلوب فاذا اسقطت نقطة γ افقيا في نقطة γ علم ان المسقط الأفقى لخط التقاطع المطلوب هو المستقيم $\gamma\delta$ و الموازى الى $\gamma\delta$ وأيضا اذا رفعنا مستوى القطاع الى وضعه الاصلى انسقطت نقطة γ رأسيا على نقطة γ وصار المستقيم $\gamma\delta$ و الموازى الى خط الارض مسطوا رأسيا لخط تقاطع المستويين المعومين

بـ ٤٣ الحالة السادسة اذا كانت اثرات المستويين المتقاطعين متلاقية بجميعها في نقطة واحدة من خط الارض كانت هذه النقطة بالضرورة نقطة من خط تقاطع المستويين المعومين وعلى ذلك فلا يلزم البحث سوى عن نقطة ثانية منه ولذا تستعمل احدى الطريقتين المدونتين في البند السابق وقد كتبتنا بذكرة هذه المحووظات من باب التذكير والمساعدة للتلازمة وعلى المعلم أن يكافهم بحل هذه المسئلة وعمل الشكل اللازم لها ثم ينالهم على تطبيق القاعدتين المذكورتين في بـ ٤٢ على حلها والى تحقيق المعلم من تمكن تلامذته في تصورهم للاقواعد الماضية أو عدمه

بـ ٤٤ لطريقة اخرى محل المسئلة المذكورة في الحالة الرابعة بـ ٤٢ قد يكون الحل المستعمل (في بـ ٤٢ حالة الرابعة) غير كافى في بعض الاحيان لايجاد خط تقاطع المستويين مثلا اذا فرض ان المطلوب ايجاد خط تقاطع مستويين مثل $\gamma\delta$ و $\delta\gamma$ (شكل ٢٢ لوجه ٥) نجد انه بموجب طريقة الحل المذكورة كان يلزم قطع المستويين المذكورين بمستوى $\gamma\delta$ كى فبقطعهم في المستقيمين المنسطين افقيا على $\gamma\delta$ و $\delta\gamma$ وتكون نقطة تقاطع هذين المنسطين مسقطا افقيا للنقطة من خط التقاطع . . . الخ وليكن من حيث انه من الجائز ان المنسطين

الافقيين المستقيمي التقاطع لا يتقاطعان كاثرات المستويين الا في نقطة موحدة خارج حدود الرسم كما حصل ذلك في المستقيمين $ا د$ و $ب$ وغيرهما مما هو موجود في (شكل ٢٢ لوجه ٥) فينتج ذلك ان المحل لهذه الكيفية غير ممكن في هذا الوضع وما يماثله ولذا التزم بأن اذكر لذلك طريقة كافية يمكن استعمالها دائماً وهي الآتية

اذا اريد إيجاد خط تقاطع المستويين $م هـ ك$ وسع صه (شكل ٢٣ لوجه ٥) اللذين اثرانهما متقاطعة بعيدا جدا عن حدود الرسم يقال لاجل إيجاد المسقط الرأسى لمخط التقاطع نقط المستويين المعلومين $م هـ ك$ وسع صه بمسطة ومساعد ما يربط الارض غرض ومائل على المستوى الافقى بزواوية صغيرة جدا لانه اذا مر مستوي بهذه الصورة صار من المحقق انه يقطع المستويين المعلومين في مستقيمين قريبين جدا من المستوى الافقى وعليه فيتحقق تقاطع مسقطيهما الرأسيين قريباً جداً من خط الارض أى داخل حدود الرسم ولتحديد هذا المستوى المساعد تؤخذ نقطة مثل (١ د آ) حيثما اتفق امكنها قرية جداً من المستوى الافقى ويتوهم مرور المستوى المذكور بها ويخط الارض غرضه ثم يبحث عن خطى تقاطع هذا المستوى بمستويي $م هـ ك$ وسع صه ولذلك يمرر نقطة (١ د آ) مسطة ومساعد مواز للمستوى الرأسى كالمستوى الذى اثره الافقى وهو $هـ ا و$ مار بالمسقط الافقى $ا$ للنقطة ومواز لمخط الارض فهذا المستوى يقطع المستوى $م هـ ك$ في مستقيم مثل (هـ ا و هـ هـ) ويقطع المستوى المساعد الاول أعنى المار بمخط الارض وبالنقطة (١ د آ) في مستقيم مواز لمخط الارض كالمستقيم (هـ ا و لا آ لا) وهذا المستقيم يتقاطع مع المستقيم الاول في نقطة تنسقط رأسياً في نقطة $ل$ التى هي نقطة تقابل مسقطيهما الرأسيين وتكون تلك النقطة احدى نقط خط تقاطع المستوي $م هـ ك$ بالمستوى { غرض (١ د آ) } وعليه يكون خط التقاطع المذكور منسقطاً رأسياً على خط $هـ ل$ غير الحدود ثم يبحث بمثل ذلك عن خط تقاطع المستوى { غرض (١ د آ) } المساعد مع المستوى الايسر سع صه فيوجد انه هو المنسقط رأسياً على $هـ ل$ الذى يقطع المستقيم الاول $هـ ل$ في نقطة مثل نقطة $ح$ التى تكون احدى نقط المسقط الرأسى لمخط تقاطع المستويين الاصلين $م هـ ك$ وسع صه ومن المحقق ان نقطة $ح$ لا بد وان تقع داخل حدود الرسم حيث أخذ

أخذ المستوى المساعد { غض (١ د آ) } ماؤلا على المستوى الافقى بميل صغير جدا ثم لاجل إيجاد نقطة ثانية من المسقط الرأسى لخط التقاطع خلاف نقطة ج يمرر أيضا مستويا مساعدا آخر بخط الارض وبه نقطة اخرى ك نقطة (ب د ت) أعلى او اوطى بقليل من النقطة الاولى (١ د آ) التى مرر بها المستوى المساعد الاول وبه كذلك يبحث عن خطى تقاطع المستوى المساعد الجديد الذى هو { غض (ب د ت) } بالمستويين الاصليين كما يبحث عن خطى تقاطعهما بالمستوى المساعد الاول فيوجدان المسقطين الرأسيين لهما عبارة عن مستقيمين هـ فـ طـ ر عنقـ طـ المقاطعين فى نقطة ط التى تكون كما تقدم نقطة ثانية من المسقط الرأسى لخط التقاطع المطلوب فاذا وصل منها الى النقطة التى وجدت من قبل بمستقيم مثل ط ج كان هو المسقط الرأسى لخط تقاطع المستويين م هـ كـ ر سهـ صهـ الاصليين بحيث لومد ح ط على استقامته لتقاطع مع الاثرين هم ر عـ سـ فى نقطة واحدة

واما المسقط الافقى لخط التقاطع فانه يتعين كما عين المسقط الرأسى بأن تؤخذ المستويات المساعدة مارة بخط الارض أيضا ومائلة على المستوى الرأسى للمسقط بزوايا صغيرة جدا وذلك كالمستويين { غض (حـ رـ خـ) } و { غض (دـ رـ ذـ) } ويجرى عليها كما أجرى على امثالها فيحصل المسقط الافقى لخط التقاطع المطلوب الذى يلزم ان يتقابل مع هـ كـ ر عـ صـ فى نقطة واحدة وفى التأمل فى الشكل ما يغنى عن التطويل فى الشرح

بـ ٤٥ المطلوب إيجاد نقطة تقاطع ثلاثة مستويات معلومة مع بعضها لنفرض مثلا ان الثلاثة مستويات المعلومة هى م هـ كـ ر سهـ صـ و ح ط عـ (شكل ٢٤ لوحة ٥) ويراد إيجاد نقطة تقاطعها مع بعضها لذلك يبحث عن خطى تقاطع احد المستويات المذكورة وليكن م هـ كـ مع المستويين الآخرين سهـ صـ و ح ط عـ فيجدهما بمقتضى ما تقدم فى بـ ٣٨ عبارة عن المستقيمين (اب د آ ت) و (حـ د خـ ذـ) وعلى هذا تكون نقطة تقاطع هذين المستقيمين وهى (هـ د هـ) نقطة تقاطع المستويات الثلاثة المعلومة وهذا أمر بديهي اذ ان هذه النقطة هى المشتركة وحدها بين كل من الثلاثة المستويات المذكورة بـ ٤٦ المطلوب إيجاد نقطة تقابل مستقيم مثل (اـ بـ آـ تـ) (شكل ٢٥ لوحة ٥)

بمستوى معلوم كالستوى م هـ ك

لذلك يمرر بالمستقيم (ا ب د آ) مستوحيثما اتفق قاطع للمستوى المعلوم ويبحث
عن خط تقاطعهما بموضع ما وحيث ان خط التقاطع المذكور يلزم ان يكون
بالضرورة مارا بالنقطة المطلوبة فتكون هي نقطة تقابله بالمستقيم المعلوم (ا ب د آ)
ولاجل تمرير المستوى القاطع بالمستقيم المعلوم (ا ب د آ) فبحث عن أنثرى المستقيم
المذكور بمقتضى مبدأ فوجد ان أنثرى الرأسى نقطة ت وأنثرى الافقى نقطة ح وحيث
ان أنثرى المستوى الذى يراد تقريره يلزم ان يكونا مارين بأنثرى المستقيم المعلوم اللذين
هما ح و ت فبمدن الاثر الافقى ح مستقيم حيثما اتفق مثل ح ع صه ويعتبر أنثرا
افقيا للمستوى المطلوب ثم يوصل من نقطة ع الى الاثر الرأسى ت بمستقيم مثل ع ت سه
فيكون هو الاثر الرأسى للمستوى المذكور وحيث يبحث عن خط تقاطع هذا المستوى
المجدد سه ع صه بالمستوى م هـ ك المعلوم فيوجد انه كناية عن المستقيم (هـ و ز هـ و)
وهذا المستقيم متلاق مع المستقيم (ا ب د آ) فى نقطة (ط د ط) التى تكون هي
نقطة تقابل المستقيم المعلوم بالمستوى م هـ ك المعلوم أيضا ولجل زيادة الايضاح
قد اعتبرنا ان المستوى م هـ ك له وجود حقيقى فى الفراغ فصار الجزء (ا ط د آ ط)
هو الجزء المشاهد فقط من المستقيم الكلى (ا ب د آ) لكونه فوق المستوى م هـ ك
ولذا قد بيناه بخطوط كاملة واما الجزء الذى تحت نقطة (ط د ط) فليكونه مخبأ
بالمستوى م هـ ك قدر رسم نقطيا بحسب الاصطلاح الذى اتفقنا عليه فيما تقدم بسند
ويمكن أيضا ان يمرر بالمستقيم المعلوم المستوى المسقط له افقيا عوضا عن ان يمرر به مستو
حيثما اتفق وبين ذلك موضع فى (شكل ٢٦ لوجه ٦) وطريقته هي ان يمرر
بالمستقيم المعلوم (ا ب د آ) المستوى ا ب ت المسقط له افقيا الذى ينطبق
بالضرورة أنثرى الافقى على المسقط الافقى ا ب من المستقيم المعلوم وأنثرى الرأسى ت
يكون عموديا على خط الارض فاذا بحث بعد ذلك عن خط تقاطع هذا المستوى المسقط
ا ب ت بالمستوى المعلوم م هـ ك وجد ان خط التقاطع المذكور هو المسقط افقيا على
د و رأسيا على ز الذى يقطع المسقط الرأسى للمستقيم المعلوم وهو آ ح فى نقطة
ط فتكون هذه النقطة مسقطا رأسيا بالنقطة التقابل المطلوبة فيبحث عن مسقطها
الافقى ط بمقتضى ما تقدم وقد اعتبرنا فى رسم (الشكل ٢٦ لوجه ٦) ان
المستوى م هـ ك موجود فى الفراغ وبيننا الظاهر والمخبأ من المستقيم المعلوم كلاهما

يليق به كما فعلنا في المحل الاول لهذه المسئلة
وأخيرا يمكن ان يمرر بالمستقيم المعلوم المستوى المسقط له رأسيا ويكون الجمل مشابها
بالكتابة لما تقدم في حالة ما اذا مرر به المستوى المسقط له أفقيا انظر (شكل ٢٦ لوجه ٦)
تجد العمل واحدا

بـ ٤٧ (في المساقط المساعدة) من المعلوم أنه حينما يكون المستوى المسقط أفقيا المستقيم
معموديا على خط الارض يكون هذا المستوى بالضرورة عموديا أيضا على المستوى
الرأسي للمسقط أعني يكون هو المستوى المسقط رأسيا للمستقيم المعلوم كما انه مسقط له
أفقيا وعلى هذا يكون أن هذا المستوى على مستويي المسقط موجودين على مستقيم
واحد عمودي على خط الارض هو عبارة عن مجموع مسقطي المستقيم الفراغي الاصلي
على مستويي المسقط المذكورين وقد تقدم في بناء ان كل مسقطين بهذه الصورة
هما غير كافيين لتعيين وضع المستقيم الفراغي المبين به حالان المستقيم الفراغي يمكنه
ان يأخذ عدة أوضاع مختلفة داخل المستوى العمودي على خط الارض المسار بالمسقطين
المذكورين مع بقائهما مسقطين له في أي وضع أخذته داخل المستوى المذكور
نعم انه يمكن تحديد وضع المستقيم الفراغي في مثل هذه الحالة بمعلومية مساقط نقطتين
من نقطه يمكن تكون هذه الطريقة غير مطابقة ولا وافقة لعمليات الهندسة الوصفية
مباشرة بل بواسطة وزد على ذلك انه عندما يكون المعلوم عدة مستقيمية مهمة موجودة
كلها في مستوي واحد عمودي على خط الارض فان بيانها بهذه الطريقة أعني بتعيين
مساقط نقطتين من كل منها يؤدي الى اللخبطة والارتباك في تمييز بعضها عن بعض
فلجميع هذه الاسباب يستعمل على العموم مستوى مسقط مساعد خلاف المستويين
الاصليين وفي الغالب يؤخذ المستوى المساعد المذكور عموديا على المستويين
الاصليين ويطبق بعد ذلك على أحدهما بتدويره حول أثره عليه وليبان هذه القاعدة
نطبقها على مثال فنقول

بـ ٤٨ المعلوم مستقيم مثل (ا - د ا - ب) (شكل ٢٧ لوجه ٦) بمسقطيه
ا ب د ا على مستويي المسقط الاعتباريين اللذين خط أرضهما هو خض
والمطلوب إيجاد مسقط ثالث مساعد للمستقيم المذكور على مستوى المسقط المساعد
مركز العمودي على المستويين الاصليين ولذلك نسقط نقطتان اثنتان حينما اتفق
من المستقيم المعلوم على مستوى المسقط المساعد مركز والاحسن ان نسقط من

هذا المستقيم أثريه هــ جـ ا د ب بأن ننزل أولاً من نقطة أ عموداً على المستوى
م هـ ك كالعمود أ أ الذي لا يخرج بالضرورة عن المستوى الرأسى للمسقط الاصلى
ويعمد حتى يقابل خط م هـ في نقطة أ التي تكون حينئذ مسقطاً مساعداً لثالث النقطة
أ ثم ننزل من نقطة ب العمود ب ب على المستوى م هـ ك فلا يخرج هذا العمود
عن المستوى الافقى للمسقط بل يقابل مستوى م هـ ك في نقطة مثل نقطة ب من الاثر
هـ ك فاذا دورا الآن المستوى م هـ ك حول أثره الرأسى م هـ حتى ينطبق على المستوى
الرأسى للمسقط رأينا ان أثره الرأسى م هـ ونقطة أ الموحودة عليه يبقيان ثابتين واما
أثره الافقى هـ ك فانه ينطبق بعد الدوران على هـ غ وكذا النقطة ب ترسم القوس
ب ب وتصبح بعد الحركة في نقطة ت وعلى هـ هذا يكون المستقيم آ ت هو المسقط

المساعد الثالث للمستقيم المعلوم (ا ب د آ)

بمساعدة (مثال آخر) من المعلوم انه اذا فرض مثلث في الفراغ وكان مستوييه عموديين على
خط الارض آل مسطوا هذا المثلث الى مستقيمين عمودين على خط الارض وموجودين
على استقامة واحدة وعلى هذا فيمكن اعتبار خطى ا ب د و آ ت (شكل ٢٨ لوحه ٦٤)
مسقطين لمثلث فراغى روسه منسقطه أفقياً في ا ر ب و د أما على المستوى الرأسى
فحيث قد فرض ان رأسيه المنسقطتين أفقياً في ا ر و متساويتا العلون المستوى
الافقى فتنسقطان رأسياً على نقطة واحدة مثل آ ورأسه الثالثة تنسقط وحدها على
نقطة اخرى كنقطة ت بحيث يكون المثلث مبيهاً هكذا (ا ب د و آ ت) لكن اذا
تأملنا نجد ان هذين المسقطين غير كافيين لتعيين وضع أجزاء المثلث من أول وهلة حيث
ان جميع اضلاعهم منسقطه أفقياً على اتجاه خط ا ب د ورأسياً على خط آ ت فلاجل
تعيين اجزائهم هذا المثلث وظهور هيئته الحقيقية تنسقطه على مستوى مسقط ثالث
مساعداً مثل م هـ ك عمودى على خط الارض ثم نديره هذا المستوى بمافيها المسقط
المجديد للمثلث حول أثره الرأسى حتى ينطبق على المستوى الرأسى للمسقط ولاجل اسقاط
المثلث (ا ب د و آ ت) على المستوى م هـ ك ينزل من جميع روسه مستقيمات
عمودية على المستوى المذكور مثلاً العمودان المائلان من الرأس (ب و ت) ينسقطان أفقياً
على ب ب ورأسياً على ت ت بحيث تكون نقطتان ب ت كايه عن المسقطين الافقى
والرأسى لمسقط نقطة (ب و ت) الاصلياً على المستوى م هـ ك وبمثل ذلك نجد ان

(٣٣)

مسقطى مسقط نقطة (١ د آ) عبارة عن (١ د آ) ومسقطى مسقط نقطة (ح د آ) عبارة عن (ح د آ) فاذا توهمنا دوران المستوى م هـ ك حول اثره الرأسى م هـ حتى ينطبق على المستوى الرأسى للمسقط دارت معه النقطة الثلاث (ب د ح) و (١ د آ) د (ح د آ) فترسم فى انهاء دورانها اقواسا افقية تنسقط افقيا على اقواس مثلها كالاقواس ب ب د و ١ ١ د و ح ح الموجودة فى المستوى الافقى وتنسقط هذه الاقواس رأسيا على مستقيمي ب ب د و آ آ الموازيين الى خط الارض بحيث متى انطبق المستوى المتحرك والنقط الثلاث الموجودة فيه على المستوى الرأسى صارت المساقط الافقية لهذه النقط موجودة فى محلات تقاطع المساقط الافقية للاقواس المرسومة بهما مع خط الارض أعنى فى ب د ل و ح فاذا اقيم منها المدة على خط الارض تقابلت مع خطى ب ب د و آ آ فى النقط ب د و آ د التى اذا وصل بينها بمستقيمات تحصل مثلث ب آ د هو كناية عن مسقط المثلث (ب د آ) الاصل على مستوى م هـ ك مطبقا على المستوى الرأسى للمسقط أعنى هو المسقط الثالث المساعد المطلوب وقد بينا ايضا فى الشكل ٢٨ كيفية العمل فى حالة ما يصير تدوير المستوى المساعد م هـ ك حول اثره الافقى هـ ك حتى ينطبق على المستوى الافقى ولا يكون العمل مشابها بالكتابة لما تقدم فى الحالة الاولى قد اكدت فيما بينا به بالرسم فقط فالتأمل فى عين الشكل كاف

بشئ استد استعمال المساقط المساعدة لا ينفذ فقط فى تعيين أوضاع الخطوط التى لا يكفى لتعيينها مسقطان اثنان بل ينفذ ايضا محل بعض مسائل لا يمكن حلها بدون استعمالها أو يمكن حلها بدونها لكن يكون المحل به أقرب ولنورد هنا بعض المسائل التى من هذا القبيل ونعطى كيفية حلها باستعمال المساقط المساعدة المطلوب تعيين اثرى مستقيم مار بنقطتين معلومتين وموجودتين فى مستوي عمودى على خط الارض

(شكل ٢٩ لوحه ٧) لنفرض ان النقطتين المعلومتين هما (١ د آ) د (ب د ب) الموجودتان فى المستوى م هـ ك العمودى على خط الارض فلاجل تعيين اثرى المستقيم المار بهما الذى مسقطاه متعديان مع اثرى المستوى م هـ ك بقال لاشك ان الاثرين

المذكورين هـ - مانقطتا تقابل المستقيم الفراغي مع أثري المستوى م هـ ك الشامل له
حينئذ إذا دور المستوى م هـ ك باعتباره كمستوى مسقط مساعد حول أثره الأفقي
لينطبق على المستوى الأفقي دارت معه نقطتا (١ د أ) و (ب و ت) وانطبقتا
في آ د ت كفاي (بشك) اما اثر المستوى م هـ ك فان أحدهما وهو هـ ك
يبقى ثابتا في محله والثاني وهو م هـ ينطبق على الجزء د هـ من خط الأرض وعلى هذا
إذا رسم المستقيم آ ت ومذالى ان يقابل هـ ك في نقطة مثل ح فتكون هي أثره الأفقي
ثم م د من جهته الأخرى الى ان يقابل خط الأرض في نقطة و فتكون هي أثره الرأسي
منطبقا معه في المستوى الأفقي فينبغي إيجاد وضعه الحقيقي بأن يرد المستوى م هـ ك الى
وضعه الأصلي فتعود نقطة و الى نقطة ز التي تكون هي الاثر الرأسي الحقيقي للمستقيم
المسار بالنقطتين المعلومتين

بذلك المطلوب إيجاد خط تقاطع مستويين متوازيين مثل س ع ص (شكل ٣٠ لوح ٧٠)
بمسوة آخر ما بخط الأرض وصانع مع المستوى الأفقي زاوية معلومة رمزها د
لذلك يقال حيث ان أثرى المستوى المسار بخط الأرض ليسا ظاهرين لكونهما منطبقين
على خط الأرض المذكور فتتخذ مستوى مسقط مساعد كالمنطقى م هـ ك عموديا
على مستوى المسقط الأصليين وتوهم دورانه حول أثره الرأسي حتى ينطبق على
المستوى الرأسي فيكون الاثر الجديد للمستوى س ع ص أعنى أثره على المستوى م هـ ك
كناية عن س ا وأما اثر المستوى المسار بخط الأرض على المستوى م هـ ك بعينه فهو
مستقيم كالمنطقى هـ د المار من نقطة هـ وصانع مع خط الأرض زاوية تساوي لزاوية
د وهذا الاثر يتقاطع مع الاثر الاول س ا في نقطة مثل و تكون هي بالضرورة نقطة
من خط التقاطع المطلوب لكونها مشتركة بين المستويين المتقاطعين فاذا توهمنا
رجوع المستوى الى أصله صارت النقطة المذكورة في الوضع (ز و ت) وبما ان نقطة
ع هي نقطة مشتركة بين المستويين المعلومين أيضا فتكون هي إحدى نقط خط
تقاطعهما الذي يكون بناء على ذلك هو المستقيم (ع و د ع ت)

فاذا كان المستوى المسار بخط الأرض معينا معلومة نقطة منه امكن أيضا حل المسئلة
بالطريقة بعينها لكن الأسهل اتباع طريقة حلها التي ذكرت ضمن المسئلة المندرجة
في بشك

(٣٥)

بـ٢٤د المطلوب إيجاد نقطة تقابل مستويين متوازيين متوازيين مثل س ع ص (شكل ٣١ لوجه ٧) بمستقيم موجود في مستوي عمودي على خط الارض ومعين الوضع بمعلومية نقطتين من نقطه كالنقطتين (١ د ١) و (ب د ٢) لذلك يطبق المستوي م ه ك الشامل للمستقيم المعلوم على المستوي الرأسى بتدويره حول أثره الرأسى م ه مع اعتباره كمستوى مسقط مساعد ويبحث كما تقدم عن انطباق كل من الاثر الجديد للمستوى المعلوم والمستقيم المعلوم على المستوي الرأسى فيوجدان الاثر الجديد للمستوى س ع ص ه و د ج وان المستقيم المعلوم المار بنقطتي (١ د ١) و (ب د ٢) قد انطبق وصار في الوضع آ ب وهذا المستقيم متقاطع مع الاثر د ج في نقطة ه التي تكون هي نقطة التقابل المطلوبة انما يلزم إيجاد وضعها الحقيقي بترجيح المستوي المنطبق الى وضعه الاصلى فنرجع معه وتأخذ وضعها الحقيقي (ه د ه) وهو المطلوب

(تنبية) اعلم ان مستوى القطاع الذي استعملناه في (بـ٢٤د) (شكل ٢١ لوجه ٤) لايجاد خط تقاطع مستويين آثارهما موازية لخط الارض بعد كمستوى مسقط مساعد (في المستقيمت والمستويات المتعامدة)*

بـ٣٤د (نظرية) اذا كان مستقيم فراغى مثل آ ب (شكل ٣٢ لوجه ٧) عموديا على مستوي فراغى مثل م ه ك فمسقطاهذا المستقيم يكونان عمادين على أثرى المستوي النظير على نظيره بمعنى ان المسقط الافقي آ ب يكون عموديا على الاثر الافقي ه ك والمسقط الرأسى آ ب على الاثر الرأسى م ه وذلك لان المستوي آ ب س أ لما كان هو المستوي المسقط افقيا للمستقيم الفراغى على آ ب فهو حينئذ عمودي على المستوي الافقي هذا ولسكون المستقيم آ ب عموديا على المستوي الفراغى م ه ك بالفرض فيكون حينئذ المستوي آ ب س أ المار به عموديا أيضا على المستوي م ه ك اذا تقرر هذا يقال حيث انضج ان كلا من المستوي الافقي للمسقط والمستوي م ه ك عمودي على المستوي آ ب س أ المسقط افقيا للمستقيم الفراغى فيكون خط تقاطعهما وهو ه ك الذي هو كناية عن الاثر الافقي للمستوي م ه ك عموديا على المستوي آ ب س أ وحيث ذلك فيكون عموديا على خط آ ب المار بموقعه والموجود في المستوي المذكور وبذا ثبت المطلوب من ان المسقط الافقي آ ب يكون عموديا على الاثر الافقي ه ك وبمثل هذا يبرهن على ان آ ب عمودي على م ه

وبالعكس اذا كان المسقطان α و β للمستقيم الفراغي اب عموديين على
الآخرين α و β هم من المستوى الفراغي α وذلك أقول ان المستقيم الفراغي
اب عمودى على المستوى الفراغي α وذلك لان المستوى المسقط الذى أثره
 α هو بالضرورة عمودى على المستقيم α وبالتبعية لذلك يكون عموديا أيضا على
المستوى α وذلك المشتمل على هذا المستقيم وكذا من حيث ان المستوى المسقط الذى
أثره β عمودى على المستقيم β فيكون عموديا على المستوى α وذلك المار به
وبناء على ذلك يكون هذا المستوى الأخير عموديا على كل من المستويين المسقطين
فى آن واحد ومن ثم يكون عموديا على خط تقاطعهما الذى هو كلية عن المستقيم
المعلوم فى الفراغ وهذا هو ما أردنا به انه

* (تنبيه) * ليعلم ان هذه النظرية وعكسها لا يكونان صحيحين الا اذا كانت المساقط
عمودية أعنى صارتعينيها بمستقيمات مسقطه اتجاهها عمودى على مستويات المسقط
فيعلم من ذلك انها لا تكون صحيحة فى حالة ما تكون المساقط مائلة وأيضا ينبغى
الاحتراز من ان يتوهم ان الارتباط الموجود فى هذه النظرية له مثيل فيما بين
مستقيمين فراغيين متعامدين على بعضهما لان مساقطهما العمودية لا تكون متعامدة
الا اذا كان احدا للمستقيمين الفراغيين بالاقل موازيا لمستوى المسقط

(نتيجة) اذا أريد انزال مستقيم عمودى من نقطة معلومة على مستو معلوم ينزل من
مسقطى النقطة المعلومة مستقيمان عمادان على أثرى المستوى فيكونان هما مسقطا
المستقيم العمودى على المستوى الذى اريد انزاله

بـ ٤٤ المعلوم نقطة مثل (١ و ٢) (شكل ٣٣ لوح ٨) والمطلوب امرار
مستو عمودى بها على مستقيم معلوم أيضا كالمستقيم (ب و د و ح)

لذلك يمر من النقطة (١ و ٢) احد افقيات المستوى المطلوب أعنى مستقيما موازيا
لاثره الافقى فيكون مسقطه الافقى مستقيما موازيا الى الاثر الافقى للمستوى المطلوب
وما با مسقطها الافقى ١ و ٢ ان الاثر الافقى للمستوى المطلوب سيكون عموديا على
المسقط الافقى ب و د للمستقيم المعلوم فينزل حينئذ العمود اء على ب فيكون اء هو
المسقط الافقى لافقى المستوى المطلوب امام مسقطه الرأسى فهو والمستقيم آ د الموازى
لخط الارض والمار بنقطة آ فاذا بحثنا عن الاثر الرأسى للمستقيم (ا د و آ د)
ووجدناه فى نقطة د فينزل منها العمود م د ه على آ د فيكون هو الاثر الرأسى
للمستوى

للمستوى المطلوب ثم لاجل رسم أثره الافقي ينزل من نقطة ϵ عمود على β كالعمود
هـ فيكون هو الاثر الافقي للمستوى المطلوب ويمكن ان يمرر بنقطة (١ د ا)
مستقيم مثل (ا هـ د آهـ) احداثيات المستوى المطلوب عوضا عنهما مررهما من احد
افقياته والعمل مشابه لما تقدم

بمسألة اذا فرض في المسئلة السابقة ان المستقيم المعلوم موجود في مستو وعمودي على
خط الارض كالاستقيم المار بنقطتي (١ د ا) و (ب د ت) (شـ كل ٣٤، لوحه ٨)
وان النقطة المعلومه هي (ح د ز) ففي هـ هذه الحالة لا يمكن اتباع طريقة المحل التي
استعملت في البند السابق بل يعتبر المستوى ϵ مماسا للمسقط للمستقيم المعلوم كمنه
مسقط مساعد ويطبق على المستوى ϵ الراسي ويبحث عن المسقط الجديد لكل من
النقطة والمستقيم المعلومين فيوجدان مسقط نقطة (ح د ز) على المستوى المساعد
بعـ د تطبيقه هو نقطة ϵ ومسقط المستقيم المعلوم عليه بعـ د تطبيقه أيضا هو
آ ت فاذا تقرر هـ ذايقال اذا صرنا النظر موقفا عن المستوى الافقي للمسقط
واعتبرنا ان مستويي المسقط الجديدين هما المستوى الراسي الاصلي والمستوى
م هـ ك المساعد فيكون المستقيم م هـ ك خط ارض لهـ ما وتوّل المسئلة
الى ان المعلوم نقطة فراغية مثل (ح د ز) بمسقطها على مستويي المسقط الجديدين
ومستقيم مثل (آ ت د ا ت) موجود في مستوى المسقط م هـ ك المنطبق والمطلوب
من النقطة المذكورة م هـ ك مستو وعمودي على المستقيم (آ ت د ا ت) ولا شك انه يكفي
محل المسئلة بعـ د ان آ ت الى هذا المنطوق أن يرسم من نقطة ϵ مستقيم مثل ϵ ح هـ
عمودي على آ ت فيكون هو أثر المستوى المطلوب على مستوى المسقط المساعد
ثم يقيم من نقطة تقابله بخط الارض المستعار وهي نقطة ϵ عمود مثل ϵ و على خط
الارض المذكور فيكون هو أثر المستوى المطلوب على المستوى الراسي للمسقط فاذا
توهمنا قيام المستوى المنطبق رجعت نقطة هـ الى نقطة مثل ϵ يمد منها عمود على المسقط
الافقي الاصلي للمستقيم المعلوم كالعمود ϵ و فيكون هو الاثر الافقي للمستوى المطلوب
بعـ د المطلوب ايجاد البعد الاصغر بين نقطة مثل (١ د ا) ومستو مثل م هـ ك
(شـ كل ٣٥ لوحه ٨)

لذلك ينزل أولامن نقطة (١ د ا) عمود غير محدود على المستوى ϵ م هـ ك المعلوم
بأن يؤخذ مسقطاه ا ب و آ ت عمودين على اثره هـ ك و هم كل على نظيره

ذلك بمقتضى النتيجة المقررة في (ب٥٣د) ثم يبحث عن نقطة تقابل هذا العمود بالمستوى
هـ بمقتضى ما تقدم في (ب٤٦د) فتجد هـ نقطة (ب د ت) ويكون حينئذ
استقيمان اب و آ ت هما مستطال البعد الاصغر المطلوب أما حقيقة فنتبين كما
تقدم في (ب٤٧د) بمد الافقى وت هـ مساويا الى اب ووصل الوتر آ هـ فيكون هو
حقيقة البعد الاصغر بين نقطة (ا د آ) والمستوى هـ

ب٥٤د (شكل ٣٦ لوحة ٨) المطلوب إيجاد البعد الاصغر بين نقطة مثل
(ا د آ) ومستقيم مثل (ب ح د)

ذلك يمرر اولا من النقطة المعلومة (ا د آ) مستو عمودى على المستقيم (ب ح د) في
يبحث عن نقطة تقابله بالمستقيم المذكور وبعد إيجادها نصل منها الى النقطة المعلومة
بستقيم فيكون هو البعد الاصغر المطلوب ولأجل تمرير المستوى العمودى على المستقيم
(ب ح د) من نقطة (ا د آ) يمرر بها طبقة المسطرة في (ب٥٤د) أفقى
كالافقى (ا د آ) من ضمن افقيات المستوى المطلوب ومن أثره الرأسى د يمرر
الانزال رأسى سهوع للمستوى المذكور عموديا على ت ح ثم يرسم أثره الافقى ع ص
عموديا على ب ح ثم يبحث بمقتضى (ب٤٦د) عن نقطة تقابل المستوى سهوع ص
بالمستقيم (ب ح د) فتجد هـ نقطة مثل (هـ د هـ) فاذا وصل منها الى النقطة
(ا د آ) بمستقيم مثل (ا هـ د آ هـ) كان هذا المستقيم موجودا بالطبيعة داخل
المستوى سهوع ص وبناء على ذلك يكون عموديا على (ب ح د) وبه يقدر البعد
الاصغر المطلوب أما حقيقة هذا البعد وهى اط فاتها فتبين بمقتضى (ب٤٧د) بواسطة
المستقيمين ا هـ د آ هـ

اعلم انه لا داعى كون المستوى سهوع ص فى الشكل الحاضر ليس من معالم المسئلة
الاصليه ولا من نتائجها بل هو فقط وسيلة للوصول الى المحل قدر رسم اثره من جنس
الخطوط المساعدة المهمة طبقا لما تقرر في (ب٤٣د)

ب٥٥د (شكل ٣٧ لوحة ٩) حل آخر للمسئلة نفسها اذا اريد إيجاد البعد
الاصغر بين نقطة مثل (ب ح د) ومستقيم مثل (اب و آ ت) يمرر اولا بهما مستو
ولذلك يكفي أن نصل من نقطة (ب ح د) الى احدى نقط المستقيم (اب و آ ت)
ولتكن نقطة (ا د آ) مثلا بمستقيم مستقيم مثل (ا ح د آ ح) ثم يبحث عن الاثرين
الرئيسيين لكل من المستقيمين المذكورين والمستقيم المعلوم (ا ب د آ ت) فيكون خطا

توم د م عبارة عن أثرى المستوى المساعد الذى أريد تمريره بالنقطة والمستقيم
المعلومين ثم نطبق المستوى م على المستوى الافقى بتدويره حول أثره الافقى ام
ليكن نفرض أنه يجذب معه فى أثناء دورانه كلامن النقطة والمستقيم المعلومين ومن
المعلوم أنه فى أثناء هذه الحركة لا يخرج نقطة (ب د ت) عن المستوى الرأسى ب
المعروف على محور الدوران ام ولا ريب ان بعده هذه النقطة عن النقطة الثابتة م
أعنى البعد م لا يحصل له أدنى تغير بل يبقى طوله ثابتا و بناء على ذلك اذا رسم بنصف
القطر م قوس دائرة يقطع خط ب د فى نقطة مثل ت فتكون هذه النقطة هى
منطبق نقطة (ب د ت) وكذا يكون المستقيم ا ت منطبق المستقيم المعلوم
والمستقيم م ت منطبق الاثر الرأسى م ت للمستوى م ا وبمثل ذلك اذا مد المحوران
د د د على المحوران شوهان المستقيم (ا ح د ا ح د) ينطبق فى ا وان
نقطة (ح د) تنقل الى نقطة د فاذا قرر هذا يقال حيث ان جميع معالم المسئلة
صارت منطبقة على المستوى الافقى بدون حصول أدنى تغير فى أوضاعها المتناظرة فيمكن
أن ينزل على ا ت عمود مثل د ت فيكون هو البعد الاصغر المطلوب مينا بطوله الحقيقي
ولا يخفى ان الطول الحقيقى هو الذى معرفته تكون فى العادة أهم ومع ذلك اذا أريد
تعيين وضع هذا البعد الاصغر فلا يبقى سوى أن ترفع الجملة المنطبقة الى وضعها الاصلى
فترجع نقطة د الى لبعود على محور الدوران ام فتعين مسقطها الرأسى د بعود على
خط الارض وأخير ا يكون البعد الاصغر منسقطا على كل من المستقيمين ح د د ح د
بهذا استعمال هذا الحل الأخير يكون ضروريا فى حالة ما اذا أريد إيجاد
نقطة على المستقيم (ا ب د ا ب د) تكون متباعدة عن نقطة (ح د ح د) بكمية
معلومة ك مثلا لانه يكفى لذلك من بعد تطبيق كل من النقطة والمستقيم المعلومين
فى د وفى ا أن يرسم قوس دائرة مثل ح ح بنصف قطر ح ح ح فبقطع المستقيم
ا ت فى نقطة مثل ح فتكون هى النقطة المطلوبة لكنها فى حالة انطباق ثم ترفع
الجملة حول محور الدوران ام ترجع نقطة ح الى نقطة مثل ح ويكون مسقطاهما
ح د ح ومن المشاهد انه يوجد على المستقيم ا ت نقطة ثانية بخلاف نقطة ح تحل
المسئلة وذلك لانه لما كان القوس ح ح قاطعا للمستقيم المذكور فى نقطة ثانية مثل
ح فتكون هذه النقطة حلا آخر للمسئلة

بنتد (زوايا ميل المستقيمت والمستويات على بعضها) من المعلوم ان كل مستقيمين فراغين لا يمكنهما ان يشغلا بانفسهما لبعضهما بعضا سوى اوضاع ثلاثة الاول ان يكونا متقاطعين مع بعضهما متقاطعا حقيقيا وفي هذه الحالة يطلق على الزاوية الواقعة بينهما اسم زاوية ميل أحدهما على الآخر والوضع الثاني أن يكونا غير موجودين في مستو واحد أعني لا متقاطعين ولا متوازيين ففي هذه الحالة لا يكون بين المستقيمين المذكورين زاوية حقيقية وانما صار الاتفاق على أن يعطى اسم زاوية ميلهما على بعضهما الى الزاوية الواقعة بين مستقيمين موازيين لهما على التناظر وموجودين من نقطة واحدة فراعية والوضع الثالث أن يكونا متوازيين وفي هذه الحالة لا يكون بينهما زاوية ميل بالكلية فلنتصدي حينئذ للكلام على كيفية إيجاد زاوية ميل مستقيمين معلومين بمساقطهما في حالة ما يكونان متقاطعين أو غير موجودين في مستو واحد فنقول

(شكل ٣٨ لوحة ٩) المعلوم مستقيمان مثل (١ - ٢) و (٣ - ٤) و (٥ - ٦) متقاطعين في نقطة مثل (هـ) والمطلوب إيجاد زاوية ميل أحدهما على الآخر لذلك يقال اذا بحثنا عن الزاوية الواقعة بين المستقيمين المذكورين ووجدنا انهما ب و د وصلنا بينهما بخط مستقيم مثل ب د رأينا ان هذا المستقيم قاعدة لثلث رأسه هـ هي نقطة تقاطع المستقيمين المذكورين أعني نقطة (هـ) و (هـ) وزاوية التي رأسها في هذه النقطة هي الزاوية التي يبحث عنها ومن ذلك يشاهد انه كان يمكن انشاء هذا المثلث بالبحث عن أطوال اضلاعه الثلاثة بواسطة مساقطها المألوفة لكن الاصوب استعمال ارتفاع هذا المثلث ولكون ان هذا الارتفاع هو بالبداهة وتر لثلث قائم الزاوية قاعدته هي العمود هـ المار من نقطة هـ على خط ب د وارتفاعه هو الرأسى المسقط أقيما لرأسه في نقطة هـ الذي بقدر البعد هـ و فبناء على ذلك اذا أخذ البعد د و = هـ وصل هـ هـ كان هذا المستقيم هو ارتفاع المثلث الاصلى وحينئذ اذا طبق هذا المثلث على المستوى الافقي بتدويره حول قاعدته ب د فرأسه لا يخرج عن المستوى الرأسى مره العمودى على هذه القاعدة بحيث لو أخذ بالابداء من نقطة م على اتجاه الخط مره بعد مثل مره = هـ وصل خطا هـ م د هـ حدث مثلث مثل هـ هـ هو وانطبق المثلث المطلوب وزاوية رأسه هـ هـ تكون عبارة عن زاوية ميل المستقيمين الاصيلين (١ - ٢) و (٣ - ٤) على بعضهما أعني الزاوية المطلوبة

بـ (شكل ٣٩ لوحه ٩) المطلوب إيجاد زاوية ميل المستقيمين مثل α و β و (γ و δ) غير موجودين في مستو واحد على بعضهما
 فالواجب التحقق من كونه هذين المستقيمين غير موجودين في مستو واحد ينظر
 لوضع مساقطهما بالنسبة لبعضهما البعض فان وجد كفاي شكلنا هذا ان المساقط المتحددة
 الاسم غير متوازية أو انهما تقاطعتا في لـكن نقطة تقاطع المسقطين الأفقيين
 α و β ليست مع نقطة تقاطع المسقطين الرأسيين γ و δ على فهو واحد
 على خط الارض عـ لم من الشرط الاول ان المستقيمين الفراعيين غير متوازيين ومن
 الثاني انهما غير متقاطعين واذن هما غير موجودين في مستو واحد
 وثانيا للاجل إيجاد زاوية ميل أحدهما على الآخر يقال حيث ان هذه الزاوية هي بمقتضى
 تعريفها المقرر في بند الزاوية الواقعة بين مستقيمين متقاطعين في نقطة حيثما
 اتفق وموازيين للمستقيمين الأصليين فالأصوب ان تؤخذ هذه النقطة على أحد المستقيمين
 المعلومين واتسكح نقطة (γ و δ) من المستقيم (γ و δ) ثم يرسم منها
 مستقيم مثل (γ و δ) مواز الى (α و β) وبذلك تتول المسئلة الى
 البحث عن زاوية ميل المستقيمين (γ و δ) و (γ و δ) المتقاطعين
 في نقطة (γ و δ) على بعضهما وقد سبق حل هذه المسئلة في البند السابق فاذا
 طبقنا الحل المتقدم في البند السابق على المستقيمين (γ و δ) و (γ و δ)
 رأينا ان زاوية ميلهما على بعضهما هي الزاوية المنطبقة على حقيقتها في γ وهذه
 الزاوية هي أيضا زاوية ميل المستقيمين الأصليين (α و β) و (γ و δ)
 على بعضهما

بـ (شكل ٤٠ لوحه ٩) اذا كان أحد المستقيمين اللذين يراد البحث عن
 زاوية ميلهما على بعضهما أفقيا كالمستقيم (α و β) وكان المستقيم الثاني حيث
 اتفق كالمستقيم (γ و δ) فن حيث انه طبقا لما تقرر في (بـ) كان ينبغي
 البحث عن الاثرين الأفقيين لهذين المستقيمين ويوصل بينهما بمستقيم فيكون هو الاثر
 الأفقي للمستوى المسار بينهما وهو ايضا قاعدة المثلث ضلعاها الاثران هما المستقيمان
 المعلومان الى آخر ما تقرر في البند المذكور ولكن لكون أحد المستقيمين المعلومين
 هنا هو (α و β) أفقي فلا يوجد له أثر أفقي ومن المعلوم ان الاثر الأفقي للمستقيم
 الثاني وهو γ لا يكفي وحده لرسم الاثر الأفقي للمستوى المسار بالمستقيمين لكن اذا نظرنا

الى كون المستقيم (ا ب د آت) سيصير احداً فيقياته علماً ان الاثر الافقي لذلك المستوى يلزم ان يكون موازياً الى المسقط الافقي ا ب وعلى هذا اذا رسم من نقطة و مستقيم مثل و و مواز الى ا ب كان هو الاثر الافقي للمستوى السار بالمستقيمين المعلومين ثم نتوهم دوران المستوى المذكور بما فيه المستقيمين المذكورين حول اثره الافقي و و حتى ينطبق على المستوى الافقي فنقطة (هـ د هـ) تنطبق في نقطة هـ والمستقيم (هـ د هـ) ينطبق تبعاً لذلك على هـ و اما المستقيم الافقي (ا ب و آت) فانه ينطبق على المستقيم هـ و المرسوم من نقطة هـ موازياً الى الاثر و و على هذا تكون زاوية د هـ و هي الزاوية المطلوبة

فاذا فرض ان كلا المستقيمين المعلومين افقي كان الامر سهلاً لاجل ان زاوية ميل المستقيمين الفراغيين تكون في هذه الحالة مساوية للزاوية الواقعة بين مسقطيهما الافقيين

بـ ٣٣ زاوية ميل مستقيم مثل ا ب (شكل ١٤ لوحة ١٠) على مستو مثل م هـ هي الزاوية الحادة ا ب د التي يصنعها هذا المستقيم مع مسقطه العمودي ح د على المستوى المذكور (وانما قلنا مسقطه العمودي لكي لا يتوهم ان المقصود هو المسقط المسائل) فان قيل ما السبب الذي اوجب الاتفاق عـ على تخصيص الزاوية ا ب د بانها من دون الزوايا التي يصنعها المستقيم الفراغي ا ب مع جميع المستقيمان المارة بموقعه الموجودة في المستوى م هـ هي التي يطلق عليها اسم زاوية ميل المستقيم ا ب على المستوى م هـ قلنا ان السبب في ذلك هو كونها أصغر من أي زاوية مثل ا ب د يصنعها المستقيم ا ب مع أي مستقيم مثل ب د موجود في المستوى ولابرة هـ على ذلك يؤخذ البعدان ح د و ب و متساويين ويقام من نقطة د عمود مثل ح ا على المستوى م هـ فيقابل بالضرورة مستقيم ا ب في نقطة مثل ا يوصل منها الى د بمستقيم مثل ا د فيجئ مثلثا ا ب د و ا ب د فيه ماضع ا ب مشترك وضلعاً ح د و ب د متساويان بالمثل لكن ضلع ا د من مثلث ا ب د أصغر من ضلع ا د من مثلث ا ب د ليكون الاول عمودياً والثاني مائلاً وحينئذ تكون زاوية ا ب د أصغر من زاوية ا ب د

(نتيجة) حيث ان مثلث ا ب د قائم الزاوية في ح فتكون زاوية ا ب د منه متممة زاوية ح ا ب بحيث متى علمت احدهما تعلم الاخرى ومن ذلك تؤخذ الطريقة الآتية

وهي انه لاجل إيجاد زاوية ميل مستقيم مثل اب على مستو مثل م ه يفرض على اب نقطة مثل ا وينزل منها عمود مثل اد على المستوى م ه ويبحث بمقتضى ما تقدم عن الزاوية باح الواقعة بين المستقيمين اب و اد فالزاوية المتممة لها تكون هي الزاوية المطلوبة ولنطبق هذه الطريقة على مثال فنقول

بمثال المطلوب إيجاد زاوية ميل مستقيم مثل (اب د آت) (شكل ٤٣ لوحه ١٠) على مستو مثل م هك

لذلك تؤخذ بمقتضى النتيجة السابقة نقطة مثل (د د) على المستقيم (اب د آت) بالاختيار وينزل منها عمود مثل (د د) على المستوى م هك ثم نبحث بمقتضى (بمثال ١) عن الزاوية الواقعة بين مستقيمي (اب د آت) و (د د) بأن ننزل العمود دس على امتداد د د ثم نأخذ بعدل $\text{دس} = \text{د د}$ وبعد ذلك نأخذ $\text{دس} = \text{د د}$ فنكون زاوية باح هي زاوية ميل المستقيمين المذكورين على بعضهما وأخيرا ترسم الزاوية المتممة لهذه الزاوية بأن يمد د ه عموديا على د د فنكون زاوية د ه هي زاوية ميل المستقيم (اب د آت) على المستوى م هك وهو المطلوب

بمثال (شكل ٤٣ لوحه ١٠) المطلوب إيجاد زاويتي ميل مستقيم مثل (اب د آت) على مستويي المسقط

قد كان يمكن حل هذه المسئلة باعتبارها كالحالة خصوصية من المسئلة السابقة ولكن الاقرب والاصوب ان نحل مباشرة بملاحظة ما تقدم في (بمثال ١) من ان زاوية ميل المستقيم (اب د آت) على المستوى الافقي ما هي الا الزاوية الواقعة بين هذا المستقيم في الفراغ وبين مسقطه الافقي اب وحيث من المعلوم ان هذه الزاوية الاخيرة هي احدى زوايا مثلث قائم الزاوية فاعدته المستقيم اب وارتفاعه ا آ فاذا طبق هذا المثلث على المستوى الرأسى بتدويره حول ا آ وانطبق على مثلث ا آ ت مثلا علم ان زاوية ا ت آ هي الزاوية المطلوبة

وبمثل ذلك يقال ان زاوية ميل المستقيم (اب د آت) على المستوى الرأسى هي جزء من مثلث قائم الزاوية ضلعا هما آ ت و د س فاذا طبق هذا المثلث على المستوى الافقي بتدويره حول د س وانطبق على مثلث د س آ علم ان زاوية س آ ت هي زاوية ميل المستقيم على المستوى الرأسى للمسقط

بـ٦٦ الد معلوم نقطة مثل (١ ر ١) (شكل ٤٤ لوجه ١٠) في الفراغ والمطلوب
تمرير مستقيم بها يصنع مع المستوى الافقي زاوية معلومة مثل و ومع المستوى الرأسى
زاوية اخرى معلومة مثل هـ

لذلك تؤخذ أولاً نقطة اختيارية مثل (ب ر ب) من نقط المستوى الرأسى ويمرر بها
مستقيم مثل بـ د بحيث يكون صانعا مع خط الارض زاوية تساوى زاوية و ثم نتوهم
دوران هذا المستقيم حول الرأسى بـ د بحيث ان نقطة أثره ترسم القوس دـ م بنصف
القطر بـ د ففي جميع الاوضاع التى يأخذها المستقيم المتحرك أثناء حركته يكون
دائما صانعا مع المستوى الافقى زاوية تساوى زاوية و فاللازم لنا حينئذ هو ان نلتخب
فقط من هذه الاوضاع الوضع الذى يكون فيه المستقيم المتحرك صانعا أيضا مع المستوى
الرأسى زاوية تساوى زاوية هـ وحيث اننا اذا أنشأنا على المستقيم بـ د زاوية مثل
دـ رـ ب مساوية الى هـ وأنزلنا على المستقيم الغير محدود بـ د عمودا مثل دـ و كان
بالضرورة المثلث القائم الزاوية دـ رـ ب الحادث من ذلك عين المثلث القائم الزاوية الذى
يصنعه المستقيم المجهول مع مستطاه الرأسى وحينئذ اذا رسم قوس الدائرة دـ و بنصف
القطر بـ د وأقيم من نقطة دـ عمود دـ د على خط الارض ومدحى بـ د لاقى مع القوس
دـ م فى نقطة مثل دـ كان المستقيمان دـ م و بـ د مستقيمين مستقيمين فراغى صانع
مع المستوى الافقى زاوية تساوى و ومع المستوى الرأسى زاوية تساوى هـ

ثم بعد ذلك يرسم من النقطة المعلومة (١ ر ١) الاصلية مستقيم مثل
(ط ا ر د ط ا ر) مواز الى (ب د ر ب) فيكون هو المستقيم المطلوب

بـ٦٧ د (شكل ٤٥ لوجه ١١) المطلوب إيجاد زاوية ميل مستقيم معلوم مثل م هـ
على مستوي السقوط

قد علم من الهندسة العادية انه لاجل تفديد زاوية ميل مستويين على بعضهما ما يكفي
قطعهما بمسـ و ثوابت عمودى على خط تقاطعهما فتكون الزاوية الواقعة بين خطى
تقاطعهما هما هى معيار الزاوية المطلوبة فعلى مقتضى ذلك يقال لنقطع المستوى م هـ
مع المستوى الافقى للمستقيم بـ د وعمودى على الاثر هـ فلهذا المستوى يكون رأسيا
بالضرورة ويـ بـ د تكون أثره الافقى مستقيما مثل ا د وعموديا على هـ و أثره الرأسى
مستقيما وعموديا على خط الارض كالمستقيم بـ د وبناء على ذلك فهو بـ د قطع المستوى
المعلوم فى مستقيم هو الخط الواصل فى الفراغ من نقطة ا الى نقطة بـ وهو وتر المثلث قائم
الزاوية

الزاوية ضلعاها $ا و د$ و $د و ح$ حيث $ث$ اذا دور هذا المثلث حول $د$ و لاجل تطبيقه على المستوى الرأسى للسقط فانه ينطبق على المثلث $د ا و$ الذى تكون زاويته التى اسمها كاسمه هذا هي زاوية ميل المستوى $م هـ ك$ على المستوى الافقى وللحصول على زاوية ميل المستوى $م هـ ك$ على المستوى الرأسى للسقط يقطعان بمستوى $ح$ حيثما اتفق انما يكون عموديا على الاثر الرأسى $م هـ$ وذلك كالمستوى $د و ت$ فينشأ عنه مثلث قائم الزاوية ضلعاها $د و ر$ و $د ت$ وحيث $ث$ فن بعد تطبيق هذا المثلث على المستوى الافقى بتدويره حول $د$ يؤول الى مثلث $د ت ح$ الذى فيه زاوية $ت$ عبارة عن زاوية الميل المطلوبة

(تنبيه) قد يعين غالباً المستوى فى بعض الفنون بأثره الافقى $هـ ك$ وبزاوية ميله على المستوى الافقى كزاوية $و م$ مثلاً وبواسطة هذه المعاليم يمكن دائماً بالسهولة إيجاد أثره الرأسى بواسطة مستوى القطاع $ا و$ العمودى على $هـ ك$ الذى يكون مشتملاً على زاوية $و لا$ اننا اذا طبقنا $ا و$ على $ا و$ وأنشأنا زاوية $د ا و = د و$ ثم مددنا ضلعاها $ا و$ فإنه يقطع الخط الرأسى $د و$ فى نقطة مثل $د$ تكون هي نقطة من الاثر الرأسى المجهول فيوصل منها الى نقطة $هـ$ بمستقيم مثل $م د هـ$ فيكون هو الاثر الرأسى المطلوب

بل قد لا يستعمل المستوى الرأسى للسقط بالكلية ويطبق القطاع حول $ا و$ بأن فعل الزاوية $د ا و = د و$ ولاشك ان هذا كاف لبيان وضع المستوى بطريقة واضحة وضوحاً كافياً ولان تـستنتج منه النتائج التى يحتاج اليها ولكن اذا تأملنا نجد ان مستوى القطاع $د ا و$ قد حل فى باطن الامر محل المستوى الرأسى للسقط
بشكل (شكل ٥٤ لوحه ١١) المعلوم نقطة مثل نقطة (ح , ح) والمطلوب مـستوى منها بحيث يكون صانعا مع المستوى الافقى زاوية معلومة مثل $د$ ومع المستوى الرأسى زاوية اخرى معلومة أيضاً مثل $هـ$

فلنلاحظ أولاً أن مستويي $د ا و$, $د و ح$ القاطعين فى المسألة المتقدمة يلزم ان يتقاطعا هما انفسهما فى مستقيم عمودى على المستوى $م هـ ك$ وهذا المستقيم يكون بالضرورة عبارة عن البعد الاصغر بين المستويين المذكورين نقطة $د$ التى هي احدى نقط خط الأرض وكذلك من حيث أنه بتطبيق هذا العمود مرة بعد اخرى مع المثلثين نجد ان انطباقه مبينان بالعمودين $د و$, $د ح$ المنزلين على وترى هذين المثلثين

فيعلم من ذلك أنه مهما كان وضع المستوى م ه ك فلا بد من وجود هذا الارتباط
وهو ان $\angle \text{و ه ز} = \angle \text{و ه ق}$ اذا تقرر هذا يقال اذا صرف النظر عن كون المستوى م ه ك
معلوما وكان المعلوم فقط هو زاوية تمامه على مستويي المسقط وهما و ه ثم رسمنا
على خط الارض مثلثا قائم الزاوية مثل $\angle \text{و ه آ}$ بحيث تكون زاويته $\angle \text{آ}$ مساوية
الى و وبعد ذلك رسمنا قوس دائرة بنصف قطر مساو للعود و ه ثم رسمنا مستقيما
ماسا لهذا القوس وصانعا مع خط الارض زاوية تساوي ه كالمماس ت ه د الصانع
مع خط الارض زاوية ت ه د فهذا المماس يتقاطع مع امتداد الرأسى و ه في نقطة
مثل د من ان المستوى م ه ك وحينئذ اذا رسم المستقيم ح ه مماسا الى قوس الدائرة
المرسوم بنصف القطر و آ ثم وصل من نقطة ه الى نقطة د بمستقيم علم لنا ان
مستوي فرغى مائل على مستويي المسقط بقدر زاويتي و ه و حينئذ لم يبق على حل
المسئلة الاصلية سوى ان يمرر بنقطة (ح و ع) المعلومه مستويا الى المستوى
م ه ك فيطبق المحل المستعمل لذلك في (ب ٤٣ د) بتعين مستوي مستويا مستويا
هو المستوى المطلوب

ويمكن ايضا حل هذه المسئلة بأن يرسم أولا بمقتضى (ب ٦٦ د) مستقيما يكون صانعا
مع مستويي المسقط زاويتي مثل

$$\angle \text{و ه ز} = \angle \text{و ه ق} = 90^\circ$$

ثم يمرر بعد ذلك بالنقطة المعلومه مستويا عمودى على هـ هذا المستقيم فيكون هو المستوى
المطلوب

ب ٦٩ د (شكل ٤٦ لوحه ١١) المطلوب إيجاد الزاوية الواقعة بين مستويين
معلومين مثل م ه ك و س ع ص أعنى زاوية ميل احدهما على الآخر

لذلك يقال يلزم بناء على ما قبل فى (ب ٦٧ د) أن نقطع هذين المستويين بمستوي ثالث
عمودى على خط تقاطعهما وحيث انه بالبحث بمقتضى (ب ٣٨ د) عن خط تقاطع هذين
المستويين نجده عبارة عن المستقيم (ا ب د آ) وهو فى الفراغ كناية عن وتر
مثلث قائم الزاوية ضلعا هـ ما ا ب د آ بحيث اذا طبق هذا المثلث على المستوى
الافقى آل الى ا ب آ وحينئذ اذا أقيم من نقطة ح المفروضة بالاختيار على هذا
الوتر عمود عليه مثل د و ثم توهمنا بعد ذلك قيام المثلث ا ب د فى وضعه الرأسى ا ب د
فن الواضح الجلى ان الخط د و يصير اذ ذلك موجودا فى المستوى القاطع الذى يراد تقريره
بنقطة

بنقطة γ عموديا على الفصل المشترك ثم من حيث ان خط γ مقابل للمستوى الافقي في نقطة δ فيكون المستقيم $\delta\gamma$ هو المرسوم منها وعموديا على المسقط $\delta\alpha$ هو مقتضى (ب ٥٣ د) عبارة عن الاثر الافقي لهذا المستوى القاطع ومن المشاهد ان هذا المستوى الاخير يقطع المستويين المعلومين في مستقيمين مارين بنقطة γ المقابلة في الفراغ من جهة ومن الاخرى بنقطة δ وهما صانعين لثلث قاعدته هي $\delta\alpha$ وزاويته التي في رأسه γ تكون هي الزاوية المطلوبة وعلى ذلك فليس الامر محتاجا الى رسم هذا المثلث على احد مستويي المسقط وحيث ان ارتفاعه هو $\gamma\delta$ بلا شك ليكون هذا المستقيم في وضعه الفراغي موجودا داخل المستوى الرأسى $\alpha\beta$ العمودى على القاعدة وهو فلوطبق هذا المثلث بتدويره حول خط $\delta\alpha$ على المستوى الافقى فان رأسه γ لا يخرج عن المستوى الرأسى $\alpha\beta$ العمودى على هذا المحور وحينئذ اذا أخذ على المستقيم $\alpha\beta$ بعد مثل $\delta\gamma$ كان مثلث $\delta\gamma\epsilon$ هو المثلث المطلوب وزاوية $\delta\gamma\epsilon$ منه هي زاوية ميل المستويين $\delta\gamma\epsilon$ مذكور سعة ص على بعضهما

ومن الممكن ايضا ان يطبق خط تقاطع المستويين المعلومين على المستوى الرأسى عوضا عن تطبيقه على المستوى الافقى فيصير هذا المستقيم منطبقا في هذه الحالة على $\alpha\beta$ فاذا اقيم عليه عمود مثل $\gamma\delta$ ورداثر هذا العمود هي نقطة δ الى نقطة δ أمكن اجراء العمل من هذه النقطة كما أجرى في الحالة المتقدمة

بمثال إذا كان اثنان من آثار المستويين المعلومين متوازيين على مستوي واحد من مستويي المسقط كما في مستوي $\delta\gamma$ مذكور سعة ص (شكل ٤٧ لوح ١١٤) لزم ادخال بعض تغييرات خفيفة في العملية المتقدمة من شأنها جعل الحل أسهل مما تقدم لانه لا يخفى على من عرف ما في (ب ٥٣ د) ان خط التقاطع يكون في هذه الحالة كتابية عن المستقيم الافقى ($\alpha\delta$ د ١) الموازى للآخرين الافقيين وبناء على ذلك اذا مر مستوي رأسى مثل $\alpha\beta$ عمودى على خط التقاطع المذكور فانه يقطع المستويين المعلومين في مستقيمين صانعين مع $\alpha\beta$ مثلثا رأسه في نقطة α وارتفاعه هو الرأسى $\alpha\beta$ بحيث لو طبق هذا المثلث على المستوى الافقى بتدويره حول قاعدته $\alpha\beta$ لاقت رأسه وهو α في α وصارت زاوية $\delta\alpha\epsilon$ كتابية عن زاوية ميل المستويين المعلومين على بعضهما

وأخيرا اذا كانت جميع آثار المستويين المعلومين موازية لمخطط الارض كما في

(شكل ٢١ لوحه ٤) لزم قطع المستويين المذكورين بمستوى القطاع غ ع ك
الذى سبق استعماله في (بسط ٤) فبواسطة عملية التطبيق التي أجريتها في البند
المذكور تحصل زاوية مثل حها فتكون هي زاوية ميل المستويين المعروفين لأن
مستوى القطاع عمودي من طبيعته على خط تقاطعهما
بسط ٥ المطلوب إيجاد وضع مقدار البعد الاصل - غربين مستقيمين غير موجودين في
مستوى واحد

قد تقدم ان المستقيمين ان لم يكونا متقاطعين ولا متوازيين فهما غير موجودين في مستوى
واحد ومن الضروري حينئذ معرفة أصغر الابعاد الواصلة بين نقطتين من نقطتهما
المتماثلين سهولة فهم تسلسل العمليات اللازمة لاجراء هذا الحل هذه المسئلة تبدأ بـ أول بيانها
بطريقة نظرية على شكل نظري فنقول اذا فرض ان المستقيمين المعروفين هما
ح و ا ب (شكل ٤٨ لوحه ١٢) فنأخذ نقطة اختيارية مثل ه على المستقيم
الاول ونرسم منها مستقيما مثل هو موازيا الى ا ب ونوهم تمثيل للمستوى وهو
فهذا المستوى يصير موازيا من نفسه الى المستقيم ا ب فعلى هذا اذا أنزل من أى
نقطة من نقط هذا المستقيم الاخير عمود مثل ح ط على المستوى وهو كان هذا العمود
مساويا لبعد الاصل المطلوب ولكن لاجل الاثبات على انه يوجد مستقيم مساو الى ح ط
وواصل بين نقطتين من نقط المستقيمين المعروفين يرسم من نقطة تقابل هذا العمود
بالمستوى وهو التي هي نقطة ط مستقيم مثل ط ع موازيا الى ا ب فالمستقيم ط ع
يقطع بالضرورة مستقيم ح و في نقطة مثل نقطة ع والالكان المستقيم ح و موازيا
الى ا ب وهذا مخالف لما فرض في رأس المسئلة وحيث انه اذا أقيم من نقطة ع عمود
مثل ع و على المستوى وهو لزم ان يكون هذا العمود موجودا في المستوى ب ح ط ع
العمودي على مستوى وهو من الاصل فبناء على ذلك يكون المستقيم ع و متقاطعا
مع المستقيم ا ب وحينئذ يكون هذا المستقيم وهو ع و المساوي والموازي الى ح ط
هو البعد الاصل بين المستقيمين ا ب و ح و ومن المشاهد انه عمودي على كل منهما
في أن واحدا لكونه عموديا على مستوى ع و الموازي لهذين المستقيمين

ولاجل البرهنة على ان المستقيم ع و العمودي على كل من المستقيمين المعروفين هو في
الحقيقة أصغر الابعاد الواصلة بين المستقيمين المذكورين يقال من المعلوم انه اذا واصل
بين نقطتين اختياريتين مثل م ر ه من نقط المستقيمين المفروضين بمستقيم مثل م ه
كان

كان المستقيم الموصول خارجا عن المستوى ب ح ط ٤ مادامت نقطة ه مأخوذة غير نقطة ٤ ومن هنا يعلم ان م ه مائل بالنسبة لمستوى ٤ هو و وبناء على ذلك يكون أطول من العمود م ك المساوي الى ٤ في انما حالة ما تتحد نقطة ه بنقطة ٤ يكون المستقيم م ٤ مائلا على المستقيم ب ا فيكون حينئذ أطول من العمود ٤ في الذي يصير بناء على ذلك أصغر الأبعاد الممكن وصلها بين نقطتين حيثما اتفق من نقط المستقيمين المفروضين

ب ٢٤ ونجرب الآن العمليات التي لم نذكر في البند السابق الا بالطريقة النظرية بطريقة الهندسة الوصفية لتعلم حقيقتها وليظهر لنا الفرق بين العمليات المهمة الموجودة في الهندسة العادية وبين الطرق المضبوطة التي بها يتحصل في الهندسة الوصفية على نتائج معينة بالكلية في حل المسائل المتعلقة بالاشكال ذات الثلاثة ابعاد وقد أسرفنا الى هذا الفرق في (بندى ٣ و ٤) فقول

ليكن (ا ب و ا ت) و (ح د و ح د) (شكل ٤٩ لوحه ١٢) هما المستقيمان المعلومان من المحقق أولا أن هذين المستقيمين غير موجودين في مستوى واحد لانه مشاهد من الشكل أنهم هما غير متوازيين وكذلك حيث ان نقطتي تقابل مسقطيهما الرأسيتين ومسقطيهما الأفقيين ليستا على مستقيم واحد عمودى على خط الارض فهما غير متقاطعين اذا قررر هذا نتخب نقطة (ح و د) من المستقيم (ح د و ح د) لنرسم منها مستقيما مثل (ح و د) موازيا للمستقيم (ا ب و ا ت) ثم نرسم اثرى المستوى المار بالمستقيمين (ح د و ح د) و (ح و د و ح د) فنجد ههما عبارة عن الاثرين د و ه و ح د ثم نفرض نقطة مثل (ه و ه) على المستقيم الثاني (ا ب و ا ت) وننزل منها المستقيم (ه ط و ه ط) عموديا على المستوى د ه ح ونبحث بمقتضى (ب ٢٤) عن نقطة تقابل هذا العمود بالمستوى د ه ح بواسطة استمال المستوى ه و ح ح المسقط افقيا للمستقيم (ه ط و ه ط) ثم نرسم من نقطة (ط و ط) مستقيما مثل (ط ل و ط ل) موازيا الى (ا ب و ا ت) فيقطع المستقيم (ح د و ح د) بمقتضى (ب ٢٤) في نقطة مثل (ل و ل) وبعد ذلك نجد من نقطة (ل و ل) مستقيما مثل (ل م و ل م) موازيا الى (ه ط و ه ط) وحيث ان هذا المستقيم الممدود يلزم أيضا ان يكون متقاطعا مع المستقيم (ا ب و ا ت) فيلزم حينئذ ان تكون نقطتنا م و ن موجودتين على مستقيم

واحد عمودي على خط الأرض وعلى ذلك فيكون لم $\angle$ م مسقطي البعد الاصغر المطلوب ثم لاجل إيجاد طول المحقق يؤخذ بمقتضى (ب ٤٧ د) على الافق الممدود من نقطة $\angle$ بعد مثل $\angle$ = لم ويوصل المستقيم $\angle$ فيكون هو الطول الحقيقي للبعد الاصغر المذكور

اما اذا كان المستقيمان المعلومان متوازيين فيكون البعد بينهما واحدا في جميع امتدادهما وللحصول عليه يكفي البحث عن البعد الاصغر بين أحدهما ونقطة حيثما اتفق من المستقيم الثاني ولا يخفى ان هذه المسئلة قد سبق حلها في (بندى ٥٧ ، ٥٨) * (تنبيه) * اعلم ان طريقة إيجاد البعد الاصغر بين مستقيمين غير موجودين في مستوى واحد التي ذكرناها في (بندى ٧١ ، ٧٢) هي الطريقة العمومية الممكنة تطبيقها على أى مستقيمين مهما كان وضعهما ولكن قد توجد أحوال فيها يكون البعد الاصغر بين المستقيمين المعلومين معينان نفس معاليم المسئلة قدرار وضعها ولا يكون معينان من معاليم المسئلة لكن يمكن تعيينه بطرق أسهل من الطريقة العمومية وسند ذكر تلك الاحوال فيما سيأتى بغاية الاختصار ونعتبرها كمسائل تطبيقية يطلب من التلامذة حلها وعمل الاشكال اللازمة لها مع ذكر بعض أفكار قليلة تساعد على حلها

* (الفصل الثالث في تغيير مستويات المسقط ومسائل تطبيقية على ما تقدم) *

ب ٧٣ د (في نظرية تغيير مستويات المسقط) قد يتأتى أحيانا للرسم خصوصاً في الرسومات المتعلقة بفتح الاجزاء والاشباب أن يضطر لاجل إيجاد بعض أجزاء المسئلة الى الاسعانة بمستويات مسقط مساعدة خلاف مستوي المسقط اللذين يثبت عليهما معاليم المسئلة المذكورة فعند ذلك يلزمه تعيين المساقط الجديدة للخطوط والنقط المعلومه بمساقطها على المستويين القديمين وقد درسنا هذه المسئلة في بعض أحوال بسيطة كما تقدم في البنود المنحصرة بين (ب ٤٧ د ، ب ٤٢ د) والآن نعود لها لاجل تمام الكلام عليها فنقول

ب ٧٤ د المعلوم نقطة مثل (١ د ١) (شكل ٥٠ لوحه ١٢) مسقطها ١ د ١ على مستوي مسقط رمزها س س وخط أرضها هو خ ض ثم افترض الحال لتعويض المستوي الافقى س س بمسلة وأفى آخر يرزله بحرف س س بحيث يكون خط أرضه هو خ ض مع توهم دوران المستوي المد كور حول خط أرضه حتى ينطبق

حسب العادة على المستوى س ه والمطلوب إيجاد مسقطى هذه النقطة على مستويي المسقط س ه و س ه

فلذلك يقال حيث أن المستوى س ه ثابت فالمسقط الرأسى لهذه النقطة يبقى ثابتا ولا يزال هو نقطة أ وأما المسقط الافقى الجديد لهذه النقطة الذى هو ب فلا شك أنه يلزم للحصول عليه أن يؤخذ على العمود ا ب بعد مثل ه ب مساو الى و ا وهذا أمر بديهى وواضح لا يحتاج الى طول الرهان و يمثل ذلك اذا كانت موجودة نقطة أخرى مثل (ب د س) فراعيه فتحول مسقطاها الى س د ب بحيث أن المستقيم الفراغى (ا ب د س) لا يزال مسقطه الرأسى هو آ ت وأما مسقطه الافقى الجديد فيصير عبارة عن ا ب الموازى الى ا ب

فاذا كان معلوما مستو مثل م ه ك باثريه م ه ه ك على مستويي المسقط س ه د س ه وأريد إيجاد أثريه على مستويي س ه د س ه يقال ان أثره الرأسى لا يزال عبارة عن خط م ه وأما أثره الافقى الجديد على المستوى س ه فانه يخرج من نقطة ه الكائنة على خ ض ويصير عبارة عن ه ب الموازى الى ه ك ومثل ذلك يجري فى حالة ما اذا أريد تعويض المستوى الرأسى س ه بمستوى آخر موازله

ب. ولنفرض الآن ان المستويين الاصليين س ه د س ه اللذين خط أرضهما هو خ ض (شكل ٥١ لوجه ١٢) قد حفظنا أحدهما وهو الافقى س ه واستعوض المستوى الثانى وهو الرأسى س ه بمستو مثل س ه رأسى أيضا لكن خط أرضه على المستوى س ه مستقيم جميعا اتفق خ ض الذى يتوهم دوران المستوى س ه حوله حتى ينطبق على المستوى س ه فعند ذلك كل مستقيم كالمستقيم الذى كان مسقطاه الاصليان هما ا ب د آ ت يحفظ بالضرورة مسقطه الافقى ا ب وأما مسقطه الرأسى الجديد على المستوى س ه فيكفى لإيجاده ان ينزل من نقطتى ا ب عمودان على خط الارض الجديد خ ض ثم يؤخذ الارتفاعان

$$ح ا = ا د \quad د ب = ب س$$

تفحص لنا المسقط الرأسى الجديد وهو Γ Γ على المستوى Γ المنطبق
 وأما إذا كان المعلوم مستويا مثل Γ Γ بأثره Γ Γ و Γ Γ على المستويين الأصليين
 فن المعلوم أن أثره الأفقى Γ Γ يبقى بالضرورة على أصله بحيث إذا مذهب حتى يتلاقى مع
 خط الأرض الجديد Γ Γ في نقطة مثل Γ Γ فإن هذه النقطة الأخيرة تكون
 بالضرورة نقطة من الأثر الرأسى للمستوى المعلوم Γ Γ على المستوى Γ Γ وأيضا إذا
 تصورنا قيام المستوى المذكور Γ Γ في وضعه الرأسى فإنه يقطع المستوى الرأسى
 الأصلى Γ Γ في المستقيم الرأسى Γ Γ الذى هو مقابل للمستوى Γ Γ فى نقطة Γ Γ
 وحينئذ منطبق المستوى Γ Γ حول خط أرضه Γ Γ فان هذا الرأسى Γ Γ
 ينطبق على مستقيم مثل Γ Γ عمودى على محور الدوران Γ Γ وتكون نقطة Γ Γ
 نقطة من خط تقاطع المستوى Γ Γ بالمستوى Γ Γ أعنى أن نقطة Γ Γ تكون نقطة
 من أثر المستوى Γ Γ على المستوى الرأسى Γ Γ وبناء عليه يكون هذا التعبير
 عن المستقيم Γ Γ Γ Γ

بـ ٧٦ الحالة التى تقدمت فى البند السابق وإن كانت هى فى الحقيقة الحالة النافعة دون
 غيرها لكن لأجل أن نبين أن المسئلة قابلة للحل بوجه عمومى التزمنا بذلك حل المسئلة
 الآتية

(شكل ٥٢ لوحة ١٣) إذا فرض أن مستويي المسقط الأصليين هما Γ Γ الأفقى
 و Γ Γ الرأسى وأنه صارت تطبيق أحدهما على الآخر بتدويره حول خط أرضه Γ Γ ما
 خض ومعلوم نقطة فراغية بمسقطها Γ Γ على هذين المستويين والمطلوب إيجاد
 مسقطى هذه النقطة بعينها على مستويين جديدين مثل Γ Γ و Γ Γ متعامدين على
 بعضهما أيضا وأثر أولهما هو Γ Γ على المستويين الأصليين هما Γ Γ و Γ Γ أما خط
 أرضهما أعنى فاصلهما المشترك فهو المستقيم المنسقط أفقيا على Γ Γ ولا حاجة لإعطاء
 مسقطه الرأسى إذ يمكن الحصول عليه بالسهولة لأن خط الأرض المذكور موجود
 فى المستوى Γ Γ المعلوم

فإن ذلك يمرر بنقطة (ب و ب) مستوى قطاع عمودي على هـ ك فيكون بالضرورة
 أسبابا ويكون أثره الأفقي عبارة عن المستقيم ب هـ و أما أثره الرأسى فهو المستقيم و و
 العمودى على خ س وهذا المستوى يقطع المستوى م هـ ك فى مستقيم إذا طبق مع
 مستوى القطاع حول و و انطبق بالضرورة على هـ و أما نقطة (ب و ب) فإنها
 تجزئ مع مستوى القطاع وتأخذ موضعا مثل ت وللحصول على هذا الوضع بقاء من
 نقطة ب هـ و على محور الدوران مثل ب ت وحينئذ إذا أنزل من نقطة ت
 عمود مثل ت ت على هـ و وتصوّرتا قيام مستوى القطاع فى وضعه الاصلى رأينا ان
 نقطة ت ت هى مسقط نقطة (ب و ب) على المستوى م هـ ك أى على المستوى
 س لكن حيث انه لاجل استعمال مستوى المسقط س لابد من تطبيقه على ورقة
 الرسم فتصوّر دورانه حول هـ ك حتى ينطبق على المستوى الأفقى الاصلى وبذلك تأتى
 نقطة ت ت فى الوضع ب ويبقى علينا حينئذ ان نبحث بعد الدوران عن وضع خط الارض
 المنسقط افقيا على خ س والموجود فى المستوى م هـ ك ولذلك يمد من نقطة ض عمود
 غير محدود على محور الدوران هـ ك ويرسم قوس دائرة بنصف القطر هـ ض فيعلم ان
 نقطة ض هى منطبق نقطة (ض و ض) وعلى هذا يكون خط خ ض هو منطبق
 خط الارض الجديد وأخيرا اذا تصوّرنا ان مستوى المسقط س دار حول خ ض حتى
 انطبق على المستوى الأفقى كفى لإيجاد المسقط الثانى لنقطة (ب و ب) عليه ان يمد
 من نقطة ب هـ و عمود غير محدود على خ ض وان يؤخذ البعد ل ب مساويا لى ت ت
 وعلى هذا تكون نقطتا ب و ب هما مسقطا نقطة (ب و ب) على مستوى
 المسقط س و س الجديدين المنطبقين على بعضهما حول خط أرضهما خ ض

(فى بعض مسائل تطبيقية على ما تقدم)*

بـ ٧٧ هذه المسائل يطلب حلها من التلامذة لاجل تجربتهم وتدريبهم على فهم القواعد
 المقدمة ولا بأس من مساعدة المعلم لهم فيما يتيسر عليهم حله
 (المسئلة الاولى) المعلوم نقطتان مثل (١ د آ) (ب د ب) (شكل ٥٣ لوح ١٣)

ليكن أحدهما هو (١ ، ١) فوق المستوى الأفقى للسقط والآخرى تحته
والمطلوب إيجاد حقيقة البعد الواصل بينهما بجميع الطرق التى تقررت فى (بن د ٢٦
د ٢٧ ، ٢٨)

(المسئلة الثانية) المطلوب تقرير مستويين مستقيمين معلومين فى جميع الاحوال الاتية
(أولاً) حينما يكون أثراً أحدهما غير موجودين فى حدود الرسم
(ثانياً) حينما يكون المستقيمان الفراغيان المعلومان متقاطعين فى نقطة من خط الارض
(ثالثاً) حينما يكون كل من المستقيمين المعلومين موازياً الى خط الارض
(رابعاً) حينما يكون احدهما المستقيمين المعلومين موازياً للمستوى الأفقى والمستوى الرأسى
(المسئلة الثالثة) المطلوب مد مستقيم من نقطة معلومة بحيث يكون قاطعاً للمستقيمين

معنى الوضع

لاجل حل هذه المسئلة يكفي ان يمرر بكل واحد من المستقيمين المعلومين والنقطة
المعلومة مستو خط تقاطع المستويين الحادثين يكون هو المستقيم المطلوب
أو يمرر بأحدهما والنقطة مستو واحد ثم نبحث عن نقطة تقابل هذا المستوى
بالمستقيم الثانى ويوصل منها الى النقطة المعلومة بمستقيم فيكون هو المستقيم المطلوب
(المسئلة الرابعة) المطلوب تقرير مستويين مستقيمين معلومين بحيث يكون عمودياً على مستو
معلوم أيضاً

(المسئلة الخامسة) المعلوم نقطة والمطلوب مد مستو منها بحيث يكون عمودياً على
مستويين معلومين أيضاً

(المسئلة السادسة) المطلوب إيجاد مركز ونصف قطر الدائرة التى تمر بثلاث نقط
معلومة بمساقطها

(المسئلة السابعة) المطلوب تعيين مسقطى الخط المانصف للزاوية الواقعة بين مستقيمين
معلومين بمساقطهما

(المسئلة الثامنة) المطلوب تقرير مستقيم من نقطة معلومة بحيث يكون صانعا مع مستقيم
آخر معلوم بمسقطيه زاوية معلومة أيضاً

(المسئلة التاسعة) المطلوب إيجاد المسقط الرأسى لمستقيم من بعد معرفة نقطة منه
ومسقطه الأفقى وزاوية ميله على المستوى الأفقى

(المسئلة العاشرة) المطلوب إيجاد الزاوية الزوجية الواقعة بين مستويين معلومين

بطريقة غير الطريقة المتقدمة في ٢٦٩

مخلص المحل هو ان يفرض داخل الزاوية الزوجية المذكورة نقطة وينزل منها عمود على أحد المستويين وهو عمود على المستوى الآخر ويبحث عن الزاوية الواقعة بين العمودين فتكون مكاملة للزاوية المطلوبة وعلى الطالب ان يعمل الرسم اللازم لهذه المسئلة طبقا لهذا المحل المخلص

(المسئلة المحادية عشر) المعلوم مستقيم موجود داخل مستوي معلوم بأثريه والمطلوب نمير مستوي بهذا المستقيم بحيث يكون صانعا مع المستوى الاول زاوية معلومة هـ

(الفصل الرابع)

(في المسائل المختصة بمحل الزاوية المجسمة الثلاثية)

بـ ٧٨ كل زاوية مجسمة ثلاثية مثل الزاوية س هـ ا ب د (شكل ٤ هـ لوحه ١٣) تشتمل على ثلاثة زوايا مستوية وثلاث زوايا زوجية أما الثلاث الاولى فهي الزوايا المستقيمة الاضلاع المتكوّنة بين أحرف الزاوية المجسمة وبعضها وأما الثلاث زوايا الآخر فهي عبارة عن زوايا ميل الواجهة على بعضها ومتى علم ثلاث زوايا من هذه الست أمكن دائما تعيين الزوايا الباقية بحيث ينشأ عن ذلك ست مسائل متميزة

لانتادار من بابا المحروف ا ب و د الى الزوايا الزوجية التي أحرفها هي على التناظر س هـ ا و س ب و س د و ب والمحروف ا ب و د الى الزوايا المستوية أعنى الواجهة المقابلة الى هذه الزوايا الزوجية ظهرت لنا الاحوال الستة الآتية

- (أولا) ان يكون المعلوم الثلاثة أوجه اعنى الزوايا المستوية
 $\begin{array}{c} \text{د ب و د} \\ \text{ا ب و د} \\ \text{ا ب و د} \end{array}$
 - (ثانيا) ان يكون المعلوم وجهين والزاوية الزوجية المنحصرة بينهما
 $\begin{array}{c} \text{د ب و د} \\ \text{ا ب و د} \\ \text{ا ب و د} \end{array}$
 - (ثالثا) المعلوم وجهان والزاوية الزوجية المقابلة لاحدهما
 $\begin{array}{c} \text{د ب و د} \\ \text{ا ب و د} \\ \text{ا ب و د} \end{array}$
 - (رابعا) المعلوم زاويتان زوجيتان وأحد الوجهين المقابلين لهما
 $\begin{array}{c} \text{د ب و د} \\ \text{ا ب و د} \\ \text{ا ب و د} \end{array}$
 - (خامسا) المعلوم زاويتان زوجيتان والوجه المنحصر بينهما
 $\begin{array}{c} \text{د ب و د} \\ \text{ا ب و د} \\ \text{ا ب و د} \end{array}$
 - (سادسا) المعلوم الثلاث زوايا الزوجية
 $\begin{array}{c} \text{د ب و د} \\ \text{ا ب و د} \\ \text{ا ب و د} \end{array}$
- فهذه الستة احوال هي الناشئة من أخذ توافق الست زوايا
 $\begin{array}{c} \text{د ب و د} \\ \text{ا ب و د} \\ \text{ا ب و د} \end{array}$
- ثلاثية لكن من بعد حذف التوافق المشتركة

والثلاثة احوال الاخيرة من هذه الست يمكن تحويلها الى الثلاثة الاول وذلك باستعمال

الزاوية المجسمة الثلاثية المكملية للزاوية المجسمة المعروفة . هـ ا ك ي ب ا ذلك

بـ ٧٩ د اذا اخذت نقطة كنقطة س داخل زاوية المجسمة الثلاثية س

(شكل ٤٠ لوحه ١٣) وأنزل منها ثلاثة عمود مثل س آ د س ب د س ج على الثلاثة

أوجه ثم اعتبرنا لاجل زيادة الايضاح ان المستوى ب س ج افقى والضلع س ا

كـ مستقيم موجود فوق هذا المستوى وخارج عنه فانه يتكون عن ذلك زاوية مجسمة

ثلاثية أخرى س ا ح فها هي المستقيم الرأسى س آ والمستقيمان س ب د س ج

العموديان على الوجهين ا س ج ر ا س ب كل على نظيره وهذه الزاوية المجسمة

الثلاثية الجديدة هي ما تسمى بالزاوية المكملية للزاوية الاصلية لان اوجها وزواياها

الزوجية مكملية للزوايا الزوجية ولا وجه الزاوية الاصلية المذكورة ولعكس بالعكس

ولابرهنه على ذلك نرسم بالحروف آ د ب د ج للزوايا الزوجية المنحصرة بين

الأوجه المتقاطعة في المستقيمات س آ د س ب د س ج وبالحروف آ د ب د ج

الى الأوجه المقابلة لهذه الاضلاع فجدان المستوى آ س ب العمودى على كل من

الوجهين ب س ج ر ا س ج يقطعهما في مستقيمين مثل آ هـ د هـ يكونان

بنفسهما عموديين على س ج وبناء على ذلك تكون زاوية آ هـ د معيارا للزاوية

الزوجية د ومن حيث أن الشكل الرباعى س آ هـ د فيه زاويتان قائمتان وهما

آ د ب فحينئذ تكون الزاويتان الاخرتان متكاملتين ويكون

$$\text{آ س ب} + \text{آ هـ د} = 180^\circ \text{ أعني ان } \text{د} + \text{ج} = 180^\circ$$

$$\text{وبمثل ذلك يبرهن على أن } \text{ب} + \text{ج} = 180^\circ$$

$$\text{وأن } \text{آ} + \text{ب} = 180^\circ$$

من الشكلين الرباعيين س آ د ج د س ب عن تقاطع الوجهين

آ س د د س ج بأوجه الزاوية المجسمة الثلاثية س ج د هـ د هـ فثبت المطلوب من

ان أوجه الزاوية المجسمة س هي الزوايا المكملية للزوايا الزوجية من الزاوية

المجسمة س

بشئ فاذ اعتبرنا الآن الزوايا الزوجية من المجسمة الثلاثية س رأينا ان الوجهين

تس آ د تس آ العمودين على المستوى س س د قاطعان له في المستقيمين
آ ه د آ و بناء على ذلك تكون الزاوية المستوية س آ ه معيارا للزاوية الزوجية
آ و حيث كان الوجه آ س ت عموديا على س د والوجه آ س د عموديا على
س ت فتكون بالضرورة زاويتا س و ه من الشكل الرباعي س و آ ه قائمتين
وبناء على ذلك تكون زاويتاه الاخرتان متكاملتين وتكون زاوية

$$س آ ه + س و ه = ١٨٠ \quad \text{أو} \quad آ + د = ١٨٠$$

وبمثل ذلك يبرهن على ان

$$١٨٠ = ب + ج \quad \text{وان}$$

وذلك من الشكلين الرباعين س ه و د س و د و من ذلك يثبت المطلوب حيثند
من ان الزوايا الزوجية من الزاوية المجسمة الثلاثية س مكملية لالوجه الزاوية المجسمة
س ب يمكن ان يقال ان الزاوية المجسمة س نفسها مكملية للزاوية المجسمة س
ب لشد يلزم ان يلاحظ انه اذا جعلت نقطة س التي هي رأس الزاوية المجسمة مركزا
ورسمت كرة بنصف قطر حيثما اتفق مثل س ا فان سطح هذه الكرة يتقاطع مع أوجه
هذه المجسمة في ثلاثة أقواس من دوائر عظام كالأقواس ا ب و ج ا التي تكون
عنها مثلث كروي اضلاعه هي معايير للزوايا المستوية ا ب د و زواياه عبارة
عن زوايا مثل أوجه الزاوية المجسمة الثلاثية على بعضها بعض أعني عبارة عن مقادير
الزوايا ا ب و ج

ومن ذلك يرى أن طرق انشاء الزاوية المجسمة الثلاثية من بعد معرفة ثلاثة اجزاء من
اجزائها الستة لم تكن سوى حلول رسمية للمسائل التي تحل في علم حساب المثلثات الكروية
بحلول حسابية وهذا مصادق لما ذكرنا في بندي (١ و ٢) من ان المسائل الرياضية
يمكن حلها اما بالبرهان او بالجبر والحساب

وأبضا اذا نقلنا الزاوية المجسمة س الى المركز س ه فان أوجهها تتقاطع مع سطح الكرة
في ثلاثة أقواس يتكون عنها مثلث كروي هو المثلث الكروي المكمل القطبي للمثلث
ا ب ج وهذا المثلث القطبي يستعمل أيضا في علم حساب المثلثات الكروية للمساعدة
على حل المثلث الاول

به٥٤د ولترجع الآن الى حل المسائل الستة التي ذكرناها في به٥٥د ونلاحظ أنه اذا علمت الثلاث زوايا الزوجية α و β و γ من الزاوية المجسمة الثلاثية سه أمكن بالمهولة تعيين الزوايا المشكلة لها وبمقتضى ما تقرّر في به٥٩د تكون هذه الزوايا المشكلة عبارة عن الزوايا المستوية أعني الوجة α و β و γ لزاوية مجسمة أخرى سنّ حينئذ يرى انه اذا أمكن تعيين الزوايا الزوجية α و β و γ من الزاوية المجسمة سنّ المذكورة بواسطة معلومية أوجهها المتقدمة وهي α و β و γ أمكن بالمهولة أيضا تعيين الوجة α و β و γ للزاوية المجسمة الاصلية لان هذه الوجة ليست الا الزوايا المشكلة للزوايا الزوجية α و β و γ من المجسمة الثلاثية سنّ ومن ذلك يتضح ان الحالة السادسة من الاحوال الستة المتقدمة في به٥٧د تؤول الى الحالة الاولى منها وان الحالة الخامسة تؤول بالمثل الى الثانية والحالة الرابعة الى الحالة الثالثة واذن اذا حلت الثلاث حالات الاول تحل الثلاثة الاخرى أو بالعكس فلنشتغل الآن حينئذ بحل الثلاث مسائل الاولى فنقول

به٥٣د (الحالة الاولى) المعلوم الثلاثة أوجه α و β و γ (شكل ٥٥ لوحه ١٣) من زاوية مجسمة ثلاثية والمطلوب تعيين زواياها الزوجية الثلاث α و β و γ لذلك نأخذ نقطة حيثما نلقى مثل سه في المستوى الافقى ونقدمها الاربعة المستقيمات سه α و سه β و سه γ بحيث تكون صانعة مع بعضها ثلاث زوايا مساوية للثلاثة أوجه المعلومه α و β و γ كما هو مشاهد في الشكل باعتبار أن أحدها وهو الوجه α موجود في الاصل على المستوى الافقى وأن الوجهين الآخرين β و γ قد دارا على التناظر حول سه γ و سه β حتى انطبقا مع الوجه الاول على المستوى الافقى

ثم نأخذ على المستقيمين سه α و سه β نقطتين مثل م و ن متساويتى البعد عن نقطة سه ونقول لاشك انه يكفي انترجيع هذه الزاوية المجسمة المنهولة الى حالة تركيبها الاصلية أن ندور الوجهين α و β سه حول مستقيمي سه β و سه γ باعتبارهما محورين دوران حتى ينطبقا المستقيمان سه α و سه β على بعضهما في الفراغ ويصيرا مستقيما واحدا وهو الحرف الثالث من أحرف الزاوية المجسمة ولا ينفى

أن نقطتي م و م ترسمان في أثناء هذه الحركة قوسين مستوييهما هو ديان على محوري الدوران سب و س د ينسقطان أوقبا على المستقيمين م ه م و م و م المتزايين عموديا على سب و س د من نقطتي م و م لكن حيث كانت هاتان النقطتان متساويني البعد عن نقطة س ه فعندما يتحد المستقيمان س أ و س ب بعضهما فتحد بالضرورة هاتان النقطتان ونصيران نقطة واحدة في الفراغ مسقطها على المستوى الأفقي يوجد بالضرورة في نقطة م التي هي نقطة تقاطع مسقطي القوسين اللذين رسمتهما النقطتان م و م وبناء على ذلك يكون المستقيم س م هو مسقط الحرف الثالث من الزاوية الخمسة

وأبضا المستوى الرأسي و م العمودي على س د ينبغي أن يقطع الوجهين المارين بهذا الحرف في مستقيمي م و م اللذين اذاردا إلى وضعهما الحقيقي صنعائيهما زاوية مساوية لزاوية ميل هذين الوجهين على بعضهما وتكون منهما ومن الرأسي المقام من نقطة م مثل قائم الزاوية وحينئذ إذا طبق هذا المثلث على المستوى الأفقي بتدويره حول قاعدته و م بان أقيم على هذه القاعدة هو د مثل م و غير محدود ثم حدد هذا العمود بجعل نقطة د مركزا ورسم القوس م و بنصف القطر و م فهذا القوس يتقاطع مع العمود المتقدم في نقطة مثل و بحيث لو وصل منها إلى و بالمستقيم و س لكانت زاوية و س م المستوية معيارا للزاوية الزوجية د المبحوث عنها

وكذلك مستوى ه م الرأسي يقطع الوجهين المارين بالحرف سب في مستقيمي ه م و م اللذين اذارفعنا إلى وضعهما الحقيقي صنعائيهما زاوية مستوية هي معيار الزاوية الزوجية ب و بما أن هذين المستقيمين صانعا أيضا مع الرأسي م مثلًا قائم الزاوية هما قاعدته ووتره امكن بالسهولة حينئذ إيجاد المنطبق و ه م لهذا المثلث بحيث تكون زاوية م ه و هي معيار زاوية ب الزوجية و مما ينبغي ملاحظته أيضا هو أنه يجب ان يكون الرأسان م و و م و متساويين لان كلا منهما يدل على شيء واحد وهو ارتفاع النقطة الوحيدة من الحرف س أ التي تنسقط على نقطة م ولأجل الحصول على معيار الزاوية الزوجية الثالثة ابرر مسقطها عمودي على الحرف س أ من نقطة المنسقة على نقطة م والمنطبقة من جهة على م ومن الجهة

الآخرى على م فهذا المستوى يقطع الوجهين الجانبيين في مستقيمين مثل م ح و م ط
يكونان على التناظر عموديين على س آ و س آ و بناء على ذلك يكون خط تقاطع هذا
المستوى مع الوجه ح س ب هو عبارة عن المستقيم ح ط الذي يلزم أن يكون
بمقتضى بنس ٣٢ عموديا على المسقط الأفقى للحرف الثالث وهو س د وحينئذ فلورسم
مثلث م ح ط بواسطة الثلاثة خطوط ح م و ح ط و ط م لكانت زاويته التي
في رأسه م هي بالضبط معيار الزاوية الزوجية التي حرفها س ا

وللاحظ أيضا أن هذا المثلث قيل تطبيقه حول ح ط كانت رأسه م موجودة على
نقطة المحرف س ا المنسقة على نقطة م ولما كان محور الدوران ح ط المذكور
عموديا على المستوى الرأسى س ا كما تقدم لزم أن لا تخرج نقطة م عن هذا المستوى
وبناء على ذلك يجب أن يكون منطبق هذه النقطة موجودا على امتداد المستقيم س م ا
وهذا تحقيق للعمل يجب ملاحظته

بمسألة العمليات المتقدمة يمكن إجراؤها أيضا في حالة ما تكون الثلاث زوايا
ا د ب د ح كلها أو بعضها قائمة وانما لاجل أن تكون المسئلة ممكنة المحل يلزم
دائما استيفاء الشرطين الآتين أولا أن يكون مجموع الثلاث زوايا ا د ب د ح
أقل من أربع زوايا قوائم وثانيا يفتى أن تكون أكبر هذه الزوايا أصغر من مجموع
الزاويتين الأخرين

لأنه ان لم يتوفر حصول هذين الشرطين من معالم المسئلة تشوه هذا بسهولة ان العمليات
الرسمية توصلا الى وترين للثلثين م م و د ه م و يكونان أقصر من قاعدتيهما وبهذا
يستحيل رسم هذين المثلثين بخلاف ما اذا توفر الشرطان المتقدمان فإنه يمكن تكوينهما
بالسهولة وتكون معالم المسئلة بناء على ذلك كافية لتركيب الزاوية المجسمة

بمسألة (في رد الزاوية الى الأفقى) كثيرا ما يحتاج في عملية رفع المستويات أعنى في رسم
المخطط الطبوغرافية الى رد زاوية معلومة الى الأفقى أعنى ايجاد المسقط الأفقى لزاوية مثل
ا معلوم مقدارها ومعلوم أيضا الزاويتان الواقعتان بين ضلعيها وبين المخطط الرأسى
النازل من رأسها للثتين نورمهما بمحرفي ب د و لذلك نقول لتصورنا زاوية مجسمة
قائمة أحرفها هي هذا المخطط الرأسى وضاد الزاوية المعلومة ا لرأينا ان الثلاث زوايا

المستوية α β γ أعنى أوجهه - هذه الزاوية المجسمة معلومة ويكون حينئذ المسقط المطلوب كتابة عن الزاوية المستوية التي هي معيار للزاوية الزوجية α المقابلة للوجه α والمختصرة بين الوجهين الرئيسين ومن ذلك يفهم أن هذه المسئلة داخله ضمن مسئلة $\beta\gamma\delta$ ويمكن حلها كما حلت المسئلة المذكورة لكن لا يكون أحد أحرف الزاوية المجسمة هو في هذه الحالة خط رأسى وهذا مما يعطى الشكل وضعا بسيطا لزم حل هذه المسئلة حالا بسيطا خاصا بها

(شكل ٦٠ - لوحة ١٤) ولذلك نرسم في المستوى الرأسي للمسقط أوفى أى مستوية مستقيمين يكونان صانعين مع الخط الرأسى α المأخوذ بالاختيار زاويتين مثل $\alpha\beta\gamma$ و $\alpha\delta\gamma$ بحيث تكون زاوية $\alpha\beta\gamma = \beta\gamma\delta$ وزاوية $\alpha\delta\gamma = \gamma\delta\epsilon$ ثم ندور هذه الزاوية الأخيرة أعنى $\alpha\delta\gamma$ حول الرأسى α مع حفظ مقدارها على حالتها الأولى إلى أن يصير ضلعها المتحرك $\delta\gamma$ صانعا في الفراغ مع الضلع الثابت $\alpha\delta$ زاوية مساوية للزاوية $\alpha\beta\gamma$ المعلومة وبذا تصير الزاوية المعلومة موجودة بالضبط في وضعها المقرر لها من رأس المسئلة وحينئذ يسهل علينا إيجاد مسقطها الأفقى ومن حيث أنه في أثناء هذه الحركة الدورانية حول α ترسم نقطة δ التي هي أثر الضلع المتحرك قوس الدائرة $\delta\gamma$ الذى مركزه نقطة α وتسير عليه إلى أن تقف في نقطة منه كنقطة δ بحيث يكون بالضرورة بعدها عن النقطة الثابتة α قاعدة مثلث ضلعاها الآخران مستقيمان مساويان إلى $\alpha\delta$ و $\alpha\gamma$ والزاوية الواقعة بينهما تساوى زاوية $\alpha\beta\gamma$ وحينئذ نرسم على المستوى الرأسى زاوية مثل $\alpha\beta\gamma = \alpha\delta\gamma$ وأخذ البعد $\alpha\delta = \alpha\gamma$ لكان المستقيم $\delta\gamma$ عبارة عن البعد الذى نوهنا عنه فإذا نقلنا هذا البعد بواسطة قوس دائرة وجعلناه من α إلى δ علم لنا الوضع $\delta\gamma$ الذى ينبغي أن يقف عنده أثر الضلع المتحرك $\delta\gamma$ وبناء على ذلك يتضح أن هذا الضلع يصير بعد الحركة منسقطا أفقيا على $\alpha\delta$ ومن حيث أن الضلع الثابت $\alpha\delta$ منسقط على $\alpha\delta$ فيؤخذ من ذلك أن زاوية $\alpha\delta\gamma$ الفراغية منسقة على زاوية $\alpha\delta\gamma$ وهذا المسقط قد يكون بالضرورة أكبر أو أصغر من الزاوية الأصلية $\alpha\beta\gamma$ وهو الذى يجب أخذه واستعماله في المخرط الطبوغرافيه بدلا عن الزاوية الفراغية $\alpha\beta\gamma$ لان

الاشيا تبين في المخرط المذكورة بمساقطها الاربعة انما هي
 بـ (المحالة الثانية) المعلوم من الزاوية المحسومة الثلاثية وجهها α β γ والزاوية
 الزوجية المنحصرة بينهما وهي δ والمطلوب ايجاد وجهها الثالث والزاويتين الزوجيتين
 الاخرتين

(شكل ٥٧ لوحه ١٤) مثلا ليكن الوجهان المعلومان هما $س د = ا ر$ و $س ا = ب$ باعتبار انهما منطبقان على المستوى الافقى فاذا تصورنا دوران الوجه الثانى منهما وهو $س د$ حول $س د$ الى أن يشغل فى الفراغ وضعا يكون صانعا فيه مع الوجه $س د$ زاوية زوجية تساوى زاوية $د$ الزوجية المعلومه فيستحصل حينئذ على وجهين من الزاوية المجسمة موضوعين فى وضعهما الحقيقى وحيث انه اذا أخذت نقطة بالاختيار على الضلع المتحرك كنقطة $و$ مثلا نرى انها لا تخرج فى مده هذه الحركة الدورانية عن المستوى الرأسى $و س د$ العمودى على محور الدوران فلواخذنا حينئذ فى هذا المستوى من بعد تطبيقه على المستوى الافقى بتدويره حول $و س د$ زاوية مثل $م$ $و س د$ ثم أخذ البعد $و ح = م$ و رأينا بالبداهه ان نقطة $و$ تأتى بعد الدوران وتتحد مع نقطة $ح$ وعلى ذلك يكون مسقطها الافقى اذذاك فى نقطة $و$ وعندما يأخذ الوجه المتحرك $ا س د$ ميله المقرر له فى رأس المسئلة فاذا لاحظنا الآن أن النقطة الفراغية التى مسقطها $و$ ومنطبقها $ح$ هى من ضمن نقط الوجه الثالث المجهول وتصورنا انطبق هذا الوجه على المستوى الافقى حول $س د$ علما ان نقطة $(د ر ح)$ لتخرج أبدا عن المستوى الرأسى $و س د$ العمودى على محور الدوران المذكور وبما أن هذه النقطة يجب أيضا أن تبقى على بعد ثابت من رأس المجسمة مساو الى $س د$ فاذا رسم قوس دائرة بهذا البعد قطع المستقيم $و س$ الغير المحدود فى نقطة مثل $و$ بها تتحدد الزاوية $و س د$ فنكون هى الوجه الثالث المجهول وحيث صارت الثلاثة أوجه من الزاوية المجسمة معلومة فيمكن حينئذ بواسطة ما نقرر فى ٥٣ إيجاد الزاويتين الزوجيتين المجهولتين ويمكن أيضا استعمال البعد $م ح$ المساوى بالضرورة الى $م و$ لرسم قوس دائره آخر لتقاطع مع القوس الاول فى نقطة يلزم أن تكون هى نقطة $و$

(تنبیه) هذه المسئلة تكون دائماً ممكنة الحل ولا يعترضها اقطأ احوال يستحيل فيها تركيب الزاوية الخمسة كما قد يحصل ذلك في المسئلة الاولى

بـ ٥٧ د (الحالة الثالثة) المعلوم وجهها α و β من زاوية مجسمة ثلاثية والزاوية الزوجية γ المقابلة لاحدهما والمطلوب تعيين الاشياء الباقية منها (شكل ٥٨ لوحه ١٤) لنفرض كما في الحالة المتقدمة أن زاويتي β و γ = α و β هما الوجهان المعلومان في حالة انطباق على المستوى الافقى ونتصور مرور مستوي رأسي عمودي على الحرف β من نقطة حيثما اتفق منه كنقطة ϵ مثلا وليكن المستوى المذكور هو ϵ وبعد أن نعتبره منطبقا على المستوى الافقى نرسم الزاوية δ = β فاذا تصورنا بعد ذلك قيام هذه الزاوية ورجوعها الى وضعها الاصلي وتوهمنا تمرير مستوي غير محدود بالمستقيمين β و ϵ دل ذلك المستوى على وضع الوجه المجهول من المجسمة بحيث لم يبق عليه الا لاجل تركيب هذه المجسمة سوى أن ندور الوجه α = γ حول β حتى يصير الحرف β موجودا في المستوى ϵ وفي أثناء هذا الدوران لا تخرج نقطة ϵ المفروضة على الحرف المتحرك عن المستوى الرأسي ϵ و ϵ المار بنقطة ϵ والعمودي على محور الدوران β وبناء عليه فنقطة ϵ تقف على خط تقاطع المستوى الرأسي ϵ مع المستوى الغير المحدود β و بما أن خط التقاطع المذكور لم يكن سوى المستقيم الخارج من نقطة ϵ ليكونا اثره الافقى والمقابل للخط الرأسي ϵ في نفس نقطة تقاطع الرأسي المذكور مع المستقيم ϵ بعد رفعه الى وضعه الحقيقي وحينئذ فلاجل تعيين ارتفاع نقطة التقاطع المذكورة عن المستوى الافقى بقام المستقيم ϵ عموديا على ϵ ثم ينقل البعد ϵ على زاوية قائمة مع ϵ بالابتداء من نقطة ϵ الى نقطة δ مثلا فلو وصل بعد ذلك المستقيم δ لكان هو خط التقاطع الذي ذكرناه وهذا هو المستقيم الذي يجب أن تقف عنده نقطة ϵ المأخوذة على الحرف المتحرك β عند ما يشغل المستوى α = γ وضعه الحقيقي في الفراغ وعلى هذا اذا رسم بنصف القطر ϵ قوس دائرة يقطع δ في نقطة ϵ التي تكون بالضرورة نقطة من الحرف الثالث β موجودة في المستوى ϵ فيسهل حينئذ تعيين مسقطها الافقى وهو δ ثم نلاحظ الآن أن نقطة ϵ الموجودة في المستوى الرأسي ϵ هي من نقط مستوي الوجه المجهول وأن هذه النقطة لا يتغير بعدها عن نقطتي β و ϵ اذا دار المستوى المذكور حول الحرف β لينطبق على المستوى الافقى وذلك لان نقطتي β و ϵ

موجودتان على محور الدوران والكون هـ. ذين البعدين مساويين في الحقيقة الى
 م ح د س و فلورسم حينئذ يجعل هذين البعدين نصفين قطرين قوسا اثنتين كانت
 نقطة تقاطعهما وهي و منطبقا لنقطة ح وبناء عليه يكون الوجه المجهول عبارة
 عن الوجه و س ب ولا يخفى انه متى هـ هذا الوجه آلت المسئلة الى مسئلة ب س د
 الذي بمقتضاه يمكن إيجاد الأجزاء الباقية المجهولة من الجسمة الثلاثية

وكان يمكن أيضا إيجاد المنطبق و لنقطة ح بتقاطع احد القوسين المتقدمين مع المستقيم
 د و المنزل عموديا على محور الدوران س ب من المسقط الافقي و لنقطة ح

ب س د و بالاحظ أيضا أن القوس المرسوم بنصف القطر و يقطع دائما المستقيم
 م ل في نقطتين مثل ح د بحيث ان الوجه آ س ح يمكنه ان يأخذ عند تدويره حول
 ح س وضعين اثنين يكون المحرف س آ في كل وضع منهما موجودا في المستوى الغير
 المحدود س ل أو س م ل ففي أحد هذين الوضعين تقف نقطة و عند نقطة ح
 وفي الوضع الثاني تقف عند ح وبناء على ذلك اذا طبقت هـ هذه النقطة الأخيرة حول
 س ب كما طبقت النقطة الأولى حوله انتقلت الى نقطة و وحينئذ فيكون الوجه و س ب
 هو مقدار الوجه الثالث المجهول وعلى ذلك يرى أنه يوجد زاويتان مجسمتان ثلاثيتان
 مختلفتان يمكن تركيبهما بواسطة المعاليم الموجودة وهي ا ب ر د وهذه الحالة
 مشابهة بالكلية لما يحصل عند ما يراد رسم المثلث المستقيم الاضلاع من بعد معرفة
 ضلعين من اضلاعه والزاوية المقابلة لأحدهما

وانى لا ظن أن الامر ليس محتاجا لأن أزيد على ذلك قولى انه اذا لم يقطع القوس المرسوم
 بنصف القطر و و المستقيم م ل في نقطتين بل كان مماسا له في نقطة واحدة فلا يكون
 للمسئلة سوى حل واحد وأنها تكون مستحيلة المحل اذا لم يتقاطع هذا القوس بالكلية
 مع المستقيم م ل بأن كان لاقاطعا ولا مماسا له

ومع ذلك ينبغي أن يلاحظ انه يجب اهمال المحل الثانى اذا وقعت نقطة ح على المستقيم
 م ل تحت المستقيم م و أعنى في حالة ما يكون القوس و ح قاطعا للمستقيم م ل تحت
 المستوى الافقى (وهذا بفرض ان المطلوب رسم الزاوية ب المعلومة فوق المستوى
 الافقى لا تحتها سواء كانت حادة أو منفرجه) لاننا اذا اعتبرنا المحل الذى تقع فيه
 نقطة ح تحت المستوى الافقى رأينا أن الزاوية الجسمة المحاذية مكوّنة بواسطة
 الوجهين ا ب ر و زاوية زوجية مكملتا لزاوية ب وحيث ان هذه الزاوية معلومة

هنا بالرسم لاجتماع حبيها فلا يمكن حينئذ ان يحصل فيها أدنى شك ولا شبهة من جهة مقدارها الحقيقي وبناء على ذلك يعلم أنه ليس من الجائز اعتبار الزاويتين ب و ١٨٠ - ب على حد سواء بدون تقرير يقين بينهما بل الواجب ان تميز احدهما عن الاخرى لان المجسمة الثلاثية الناشئة عن اعتبار احدهما تخالف التي تنشأ عن اعتبار الاخرى ولهذا السبب أيضا ينبغي اجمال المحايين معا والمجزم بأن المسئلة مستحيلة المحل بواسطة المعاليم الحسالية اذا وقعت كل من نقطتي ح و ع تحت الافقى م و وبالمجمل فان ذلك لا يحصل الا اذا كانت الزاوية الزوجية ب منفردة

ب ١٩٠ د (تنبيه مهم) هو اننا وان أورينا في ب ١٢٠ د انه يمكن تحويل الثلاثة احوال الاخيرة من الستة احوال المذكورة في ب ٧٨ د الى الثلاثة احوال الاول منها وذلك بواسطة اعتبار الزاوية المجسمة المكتملة للزاوية المعلومة كما علم حقيقة ذلك في ب ١٢٠ د المذكور لكن حيث انه قد تنأت في احوال يكون حل تلك المسائل فيها بطرق قائمة بذاتها لا مبنية على اعتبار الزاوية المكتملة ضروريا بل ربما كان نافعا قد التزم علماء هذا الفن أن يقرروا تلك المسائل الثلاث حلولا قائمة بذاتها ولا يمكن لما كانت تلك الحلول متوقعة على معرفة المستويات المماسية للسطوح المخنثية قد اخرجنا ذكرها ولو كان موضعها هو هذا المحين تمام ذكر الاشياء التي هي مبنية عليها فنوردها ان شاء الله تعالى في ب ١٦٤ د وفي البندود الثلاثة التالية له

(الفصل الخامس)

(في كثيرى السطوح المنتظمة)

بند كثير السطوح يسمى منتظما متى كانت جميع أوجهه أى سطوحه مضلعات منتظمة متساوية وكانت جميع زواياه المجسمة متساوية أيضا ولا يخفى أنه لا يوجد من كثيرى السطوح ما يوفى لهذه الشروط سوى خمسة أنواع وهى (أولا) ذو الاربعة سطوح المثلثية المنتظم وهو ما كان محدودا بأربعة أوجه كل منها مثلث متساوى الاضلاع وكل ثلاثة منها مجتمعة مع بعضها حول رأس واحد (ثانيا) ذو الثمانية سطوح المثلثية المنتظم وهو ما تكون من ثمانية مثلثات متساوية الاضلاع ومجموعة مع بعضها أربعة فأربعة

(ثالثا) ذوالعشرين سطحاً المثلثية المنتظم وهو ما تسمى ~~تكون~~ من عشرين مثلثاً متساوية الاضلاع ومجموعة مع بعضها خمسة وخمسة

(رابعا) ذوالستة سطوح المربعة المنتظم الذي يسمى في الغالب بالمكعب وهو ما تتركب من ستة سطوح كل منها كناية عن مربع وكل ثلاثة منها بمجموعة مع بعضها حول رأس من رؤسه

(خامسا) ذوالاثني عشر سطحاً الخمسية المنتظم وهو ما كان محدودا باثني عشر سطحاً كل واحد منها كناية عن مخمس منتظم وكل ثلاثة منها بمجموعة حول رأس واحدة اما كونه لا يوجد من كثيرى السطوح المنتظمة سوى هذه الانواع الخمسة المتقدمة فلانه لو اخذ من الالوجه المثلثية أو المربعة أو الخمسة أعدادا أكثر مما تقدم واريد جمعها حول نقطة واحدة لفاق مجموع الزوايا بالسطحية عن ٣٦٠ درجة أو كان مساويا لها بالاقل وبذلك لا يتيسر تكوين الزاوية المجمعة وأما الدليل على وجود هذه الانواع الخمسة فهو ما كان انشائها على الوجه الآتى

به ٩١ ذوالاربعة أوجه المثلثية المنتظم (شكل ٩٠ لوحة ١٥) لرسم هذا الجسم على مستوى المسقط يرسم أولا على المستوى الافقى مثلث متساوى الاضلاع بحيث يكون ضلعه مساويا الى الضلع المعلوم له لكثير السطوح الذي يراد انشاؤه وليكن هذا المثلث هو ا ب د ثم يقام من نقطة س مركز الدائرة المرسومة عليه مستقيم رأسي مثل (س د س ع) مساو للضلع س ك من المثلث القائم الزاوية اس ك المنشأ يجعل اس قاعدة له وبعد اك المساوى الى اب وترا

فاذا وصل بذلك من النقطة (س د س) الى الثلاثة رؤوس الاصلية تحصل بالضرورة جسم محاط بأربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتساوية وكانت بالضرورة الزوايا المجسمة الثلاثية الممتدة كونه من اجتماع كل ثلاثة أوجه مع بعضها متساوية أيضا به ٩٢ ذوالثمانية أوجه المثلثية المنتظم (شكل ٩٠ لوحة ١٥) لرسم هذا الجسم يرسم اولاً في المستوى الافقى مربعاً ضلعه يساوى لضلع الجسم الذي يراد انشاؤه الذي نرسمه بحرف ل وليكن (ا ب د ه) هو هذا المربع ثم يقام من مركزه (س د ه) مستقيم رأسي يمد تحت و فوق نقطة ه ويؤخذ عليه بالابتداء من ه هذه النقطة وفي جانبيه ابعدا س ه د س ه متساويين وكلاهما يساوى نصف القطر س ب فلو وصلنا بذلك من نقطتي (س د س) و (س ه د س) الى اربعة رؤوس المربع

لحدث جسم مركب من هرمين رباعيين تكون أوجههما بالضرورة مثلثات متساوية الاضلاع لانا كنا ندورنا المربع ا ب ح د ربع دورة حول قطره ا ح أو ب د وأيضا تكون الزوايا المحسمة التي رؤوسها في (س د س) و (د ا د) و (ب د ب) و... متساوية لان كلامنا تابع لهرم رباعي مساو الى الهرم الاول (س ا ح د د س آ آ ح د)

ب ٩٣ د ذوالعشرين سطحاً المثلثية المنتظم (ش كل ٦١ لوحه ١٥٤) لرسم هذا الجسم يرسم بواسطة الضلع ا ب الذي هو ضلع الجسم المطلوب في مسـ توافق حتماً اتفاق الخمس منتظم مثل (ا ب ح د د س آ آ) ثم يبحث عن نقطة ك نقطة (س د س) من نقط المحاور الرأسى بحيث اذا وصل منها الى رؤوس الخمس حدثت خمسة مثلثات متساوية الاضلاع ولذلك يكفي بالضرورة ان ننشئ على القاعدة س د مثلثاً قائم الزاوية مثل د س ع بحيث يكون وتره د ع مساوياً الى ا ب أعني الى د س فيكون حينئذ ضلع س ع من هذا المثلث الاعلى الارتفاع المجهول آ س للهرم الخامس (س ا ب ح د د س آ آ) ثم نرسم داخل مستو كالستوى ق م الأفقى الذى سيعين فيما بعد بعده عن مستوى آ م مخرساناً بما مثل لم هو هو مساوياً للخمس ا ب ح د د س ومحدد المركز معه لكنه منحرف عنه انحرافاً بحيث تكون رؤوسه ل د م د ه و... موضوعة فى منتصفات الاقواس الموترية بالاضلاع ح د د س د س ا د... من محيط الدائرة المرسومة على هذا الخمس ثم بعد ذلك نأخذ البعد د س مساوياً الى آ س وننشئ الهرم الخامس (س ل د م ه و د س ق م) فيكون بالضرورة مساوياً للهرم السابق ثم بعد ذلك نوصل من كل رأس من رؤوس الخمس العلوى الى الرأسين الجاورين له من الخمس السفلى مثلنا نوصل الرأس (ح د) مع (ب د) و (د د) والرأس (د د) مع (ل د) و (م د م) و... فتتوصل حينئذ منطقة وسطى مركبة من عشرة مثلثات تكون متساوية الساقين من طبيعتها ينبغى تحويلها الى أخرى متساوية الاضلاع وهذا لا يتأتى الا بانحساب البعد د ق الواقع بين مستويي الخمسين الذى لم نتكلم فى الاول على كيفية تعيينه انتخاباً ملائماً وحيث انه يكفي لجعل المستقيم (ح د د س) مساوياً الى د ق أن ننشئ مثلث ل ح ك يوتر مثل ل ك مساوياً الى د ق فضلع ح ك يكون هو فرق الاستواء اللازم وجوده بين ح د ل أو هو بعد د ق اللازم وضعه بين الخمسين المتوازيين وبذا يتكون

جسم محاط بعشرين مثلثا متساوية الاضلاع بمجموعة خمسة زخمة وتكون أيضا الزوايا المجسمة متساوية لانه يمكن أن يتصور في كل رأس مثل (ح د ز) و (د ز ل) و . . . وجود هرم خماسي مماثل للهرم الاول (سه ا ب ح د ز) و (سه د ز ل) وهو المطلوب

بمسألة ذوالستة سطوح المربعة المنتظم المعروف بالمكعب (ش-كل ٦٢ لوه ١٥٤) لرسم هذا الجسم يرسم أولا المربع ا ب ح د في المستوى الافقي بحيث يكون ضاعه مساويا لضع المكعب المطلوب رسمه ثم يقام من رؤوس زواياه الاربع رأسيات كالرأسيات (ا د آ) و (ب د ب) و . . . متساوية وكل منها يساوي الى ا ب فاذا وصل بين النهايات العليا لهذه الرأسيات باضلاع مربع اخر فحصل مباشرة الجسم المطلوب الذي اصطلح على تسميته بالمكعب

بمسألة ذوالاثني عشر سطحا الخمسية المنتظم (ش-كل ٦٣ لوه ١٥٤) لرسم هذا الجسم نرسم أولا في مستوا فقي حيثما اتفق مثل ك آ ه مخمس منتظما كالخمس ا ب ح د كل ضلع من اضلاعه يساوي ضلع كثير السطوح الذي يراد رسمه ثم يضم الى كل رأس من الرؤس الخمس (ا و آ) و (ب د ب) و (ح د ز) و . . . مخمسان مساويان للخمس الاول وما لان عليه بحيث يتكون من الجميع خمس زوايا مجسمة ثلاثية وبذا يتحصل جسم ك الطربوش محاط بستة مخمسات محدودة من الاسفل بالمحيط (ك م ر س ط ع ح ز و ك م ر س ط ع ح ز) الذي سنبين لك عن قريب طريقة ايجاده مسقطيه ثم نرسم أيضا في المستوى الافقي مخمسا آخر كالخمس ل م ه و ف م مساويا للخمس ا ب ح د و متحد المركز معه لكنه منحرف عنه انحرافا بحيث تكون رؤوس زواياه في منتصفات الاقواس الموترية بالاضلاع ا ب و ب ح و . . . في الدائرة المرسومة عليه ونثنى بعد ذلك على الخمس ل م ه و ف المذكور طربوشا معرأى مقولوبا بعكس وضع الطربوش الاول ثم نرفع هذا الطربوش بطول الخط الرأسى (و د ل آ) الى ان تقعد زواياه البارزة والداخلية مع الزوايا الداخلية والبارزة من الطربوش الاول ولا يخفى أن جميع ذلك ممكن حيث لم يكن الغرض منه سوى أن تجتمع في كل رأس من رؤوس المحيط ثلاثة مخمسات مماثلة لتي

كوت الزاوية المجسمة الثلاثية (ا د آ) أو (ب د ب) أو الخ
ولكن لم يبين لآن مقدارا والمسافة الرأسية التي تفصل مستويي الخمسين الافقيين

عن بعضهم ما فاجتماع هذين الطرفين مع بعضهما يحصل كثير سطوح مركب من اثني عشر منحنى متساوية وزواياها المجسمة الثلاثية تكون متساوية أيضا لان كلامها مركب من ثلاثة منحنى متساوية

ولاجل رسم مسقطي هذا الجسم مع الايضاح الكافي نبتدى أولا بالطربوش السفلى فنجعل قاعدته لم $د ف ق$ في مستواً في مثل $ت ق$ ثم مأخوذاً لاختياره نطبق على هذا المستوى الواجهة الثلاثية المجسمة من المجسمة الثلاثية ($ق د ق$) ولذلك نرسم الخمسين $ق ن ص ع ح ق د$ وذلك مساويين الى الخمس لم $د ف ق$ ثم نجري على هذين الخمسين عملية مماثلة لتلي يجب اجراؤها في حالة ما يراد تعيين الزوايا الزوجية من هذه المجسمة الثلاثية كافي $ب ه$ ٨٣ $د ب$ ان نتصور قيامهما من رقدتهما بتدويرهما حول ضلعي $ق د$ $ق ه$ الى أن يتقدمتا الضلعان المنطبقان في $ق ح$ $د ه$ ويصيرا مستقيما واحداً وفي أثناء هذا الدوران لا تخرج النقطتان المنطقتان في $ح د$ $ه$ عن المستويين الرأسين $ح ا$ العمودى على $ق د$ $د ه$ العمودى على $ق د$ $ه$ وهذان المستويان يتقاطعان في الخط الرأسى $ح$ الذى تجتمع عليه نقطتا $ح د$ $ه$ وتصبحان نقطة واحدة عندما تتركب الزاوية المجسمة وبناء على ذلك تكون نقطة $ح$ مسقطاً أفقياً لحدى رؤس كثير السطوح المطلوب ويكون أيضاً المستقيم $ح ق$ مسقطاً أفقياً لحدى اضلاعه وينبغى ان يمر المستقيم $ح ق$ بالمركز و اذا امتد نحوه ثم لاجل تعيين المسقط الرأسى $ح$ لهذه النقطة يلاحظ ان هذه النقطة الفراغية رأس المثلث قائم الزاوية قاعدته هي $ح ا$ ووتره هو $ا ح$ فلورسم حينئذ مثلث $ا ح ق$ هذه المعاليم ليكون ضلعه $ق ا$ مبيداً للارتفاع $ت ق$ الذى ينبغى وضعه على المستوى الرأسى للمسقط لاجل الحصول على المسقط الرأسى $ح$ بأن يمد من نقطة $ت$ الافقى $ت س ه$ ويقسم من $ح$ مستقيماً عمودى على خط الارض الى ان يقابل ذلك الافقى في نقطة $ح$ المذكورة وبذا تبين الضلع $ح ق$

ومما يجب التنبيه عليه هنا هو انه كان يمكن تعيين الارتفاع المجهول $ت ق$ بطريقة أخرى حيث كان المسقط الافقى $ح ق$ ضلعاً من اضلاع الجسم وحقيقة هذا الضلع المساوية الى $ق د$ معلومين وبكفى لذلك انشاء مثلث قائم الزاوية قاعدته $ح ق$ ووتره $ق د$

(٧٠)

فضله الثاني بين لنا الارتفاعات المطلوبة تعيينه

والرأس المنطبقة في نقطة ع من المحققات عند قيام الوجه ص ع ح ح ح حول
ضلع ح ح لتخرج عن المستوى الراسي ع ع و العمودي على محور الدوران ح ح
وأن بعدها المحققة في ع أو البعد الأصغر بينهما وهو ع ع ينتهي بأن يأخذ موضعا
موازيا لـ ح ح فاذا مدحمت هذا الأخير إلى أن يصير البعد ح ح منه مساويا إلى
ع ع وانزل الراسي ح ح ثم نقت نقطة ح إلى نقطة ع على المستقيم ع ع كانت
نقطة ع هي المسقط الأفقي للرأس المنطبقة في ع التي أريد تعيين مسقطها

واما مسقطها الراسي ع فانه يتعين بملاحظة انه ينبغي ان يكون موجودا على ارتفاع
مثل ح ح مساويا إلى ح ح وكان يمكن أيضا إيجاد نقطة ع بملاحظة انه لداعي
مسألة الطريقين لبعضهما ما ينبغي ان يكون البعد ب ع مساويا إلى ح ح الذي علم
من قبل وكذا يمكن تعيين الارتفاعات ح ح من هذا الاعتبار الا اني وهو ان المستقيم
المسقط على ع ع طوله المحققة يساوي إلى ع ح م

وأخير الارتفاع ح ح للطريقين العلوي ينبغي بالضرورة أن يؤخذ مساويا إلى ح ح
وبعد ذلك يمكن تعيين المساقط الرأسية آ د ح ح و د ح ح والمقابلة للنقط آ د
ح ح و ح ح ثم تعيين بمثل ذلك النقط ز د ح ح و د ح ح ... بعد ان ترسم الأبعاد ح ح ذلك
و ح ح مساوية كلها إلى البعد ح ح الذي عرفناك طريقة إيجادها آنفا

(الباب الثاني)

في المخطوط المنحنية والسطوح وطرق تولدها والمستويات المماسية لها

(الفصل الاول)

في المخطوط المنحنية على العموم ومماساتها وخواصها

بـ٩٦ ليس مقصودنا ان نطيل الكلام هنا على المنحنيات ولان نشرح أنواع
المنحنيات الموجودة شرحة تفصيليا فان الهندسة الوصفية ليست محل ذلك اذ لا يخفى ان
المنحنيات المعروفة كثيرة العدد ولما كتب خاصة بها وفيها يتكلم على جميع أنواع
المنحنيات

المخنيات وخواصها وطرق رسمها ورسم محاسنها المختلفة وجميع ما يلزم لها وانما مقصودنا ان نذكر هنا بعض تعريفات عمومية على المخنيات ومحاسنها المختلفة وهي التي تلزم لنا في دراسة بعض نظريات ومسائل علم الهندسة الوصفية الذي نحن مشغولون به الآن وذلك من باب التسهيل على طالب هذا العلم ولا لكي يستغني بوجودها في هذا الكتاب عن مراجعتها في كتب المخنيات الخاصة بصفة فنقول

بطلق فهو الاسم خط على المحل أو المسار الهندسي للأوضاع المختلفة التي تأخذها نقطة تتحرك بكيفية وشرط مخصوصة فإن كانت تلك النقطة تتحرك داخل مستويات كانت جميع نقاط الخط المتولد من حركتها موجودة في هذا المستوى الثابت ويقال للخط في هذه الحالة خط مستوي وأما إذا خرجت ولو بعض أوضاع النقطة المتحركة عن هذا المستوى سمي الخط المتولد خطاً شعاعياً أو مضاعفاً الانحناء

وكلية خط كلية عمومية تشمل المستقيم والمنحني في المستقيم تكون الأوضاع المتتالية
 للنقطة الراسمة موجودة على استقامة واحدة وفيما عدا ذلك يقال للخط المحادث منحن
 وعلى العموم اذا لم يحصل تغير في قانون أو شرط تحرك النقطة الراسمة للخط فانه يكون
 مستقيماً ليس به زوايا ولا نقاط وقوف فيمتد الى غير نهاية كالمستقيم مثلاً أو يلتف على نفسه
 كالدائرة مثلاً وذلك فيما عدا بعض الاحوال الاستثنائية التي يكون فيها للخط بعض
 نقط وقوف ولولم يتغير قانون تولده لكننا لا يلزم لنا أن نشغل انفسنا بهذه الاحوال الغريبة
 أي الغير عمومية لانه ليس لها أقل اهمية في المسائل اللازمة لنا مدارسها

بـ ٩٧- إذا أخذنا مستقيم مثل م ه (شكل ٦٤ لوحه ١٦) قاطع المنحن معلوم في نقطتين كنه قطتي م وه ودور حول احدهما وهي م مثلا أخذت نقطة التقاطع الثانية على التوالي أوضاعا مثل ه د ه د ه د ه د ... الخ فلا بد وان يوجد فيها موضع تتحدد فيه نقطة ه المتحركة مع نقطة م فبقال للقاطع في هذا الوضع الوحيد أساس فيفهم من ذلك حينئذ ان الأساس للمنحن ما هو الوضع الثنائي للمستقيم القاطع للمنحنى المذكور عندما يتحدد نقطتا تقاطعه بالمنحنى وتصبحان نقطة واحدة وهو المستقيم الذى لا يشترك مع المنحنى الا في نقطة واحدة

ويقال ان المنحنين مماسان في نقطة ما متى كان لهما فيهما مماس واحد
بشأن المستقيمان المماسان للمنحن واحد في نقطتين متقاربتين من بعضهما ما وجدان
على العموم في جهة واحدة من المنحنى المذكور وهي جهة تحدديه وذلك كما هو مشاهد

في (شكل ٦٥) من وضع المماسين $اب$ و $آ$ $د$ للمنحنى $م$ $هـ$ لكن قد توجد أحوال فيها يكون المماسان للمنحنى واحد في نقطتين متقاربتين مثل نقطتي $ا$ و $ب$ (شكل ٦٦) موجودين في جهتين مختلفتين بالنسبة للمنحنى المقروض ففي مثل هذه الحالة يحكم بأنه لا بد من أن توجد بين نقطتي $ا$ و $ب$ نقطة مثل $م$ يكون المماس للمنحنى فيها له جزء موجود في إحدى جهتي هذا المنحنى وجزء آخر في الجهة الثانية وتلك النقطة هي ما نسمي بنقطة الانقلاب لأنه يترأى للمشاهد أن المنحنى قد انقلب فيها أعني أنه قد غير جهة تحديه في هذه النقطة فإذا فرضنا أن المستقيم $س$ ينقل من وضعه $هـ$ ويأخذ أوضاعاً أخرى بشرط أن لا يزال مماساً للمنحنى ولا يمكن في نقط تقارب من نقطة $م$ شيئاً فشيأً رأينا أن نقطة تقاطعه بالمنحنى وهي $ب$ تقرب من نقطة $س$ المتحركة معها شيئاً فشيأً بحيث يأتي وقت تتحد فيه هاتان النقطتان مع بعضهما في نقطة $م$ ومن ذلك يرى أن المماس للمنحنى في نقطة الانقلاب $م$ وهو $س$ يكون تماسه مع المنحنى المذكور أقوى وأتم من التماس المعتاد حيث اجتمعت فيه نقطة تماس ونقطة تقاطع مع بعضهما وفي هذه الحالة يكون للمماس عنصران اثنان مشترك كان بينهما وبين المنحنى أحدهما هو العنصر الذي كان مشتركاً بين المماس في وضعه الأول وبين المنحنى والثاني هو العنصر الذي تكون من انضمام نقطة التقاطع التي كانت في $ب$ مع نقطة الانقلاب $م$ بخلاف التماس الاعتيادي أو البسيط فإن المستقيم المماس فيه لا يشترك مع المنحنى إلا في عنصر واحد وهو الحادث من انضمام نقطتي تقاطع القاطع الأصلي عند ما يصير مماساً

في فهم مما ذكر أن تماس المستقيم بالمنحنى ليس على حالة واحدة بل هناك جملة رتب من التماس فالتماس المعتاد أو البسيط هو التماس برتبة أولى وهو ما كان فيه عنصر واحد دخل مشترك بين المماس والمنحنى وذلك كما في الدائرة مثلاً والتماس الذي رأيناه في نقطة الانقلاب $م$ (شكل ٦٦) هو التماس برتبة ثانية وهو تماس أقوى من ذي الرتبة الأولى حيث اشترك فيه المماس مع المنحنى في عنصرين خطيين بدل عنصر واحد دخل وهناك تماسات ذوات رتب أعلى من ذلك فيقال تماس برتبة ثالثة متى وجدت ثلاثة عناصر خطية مشتركة بين المماس والمماسوس ويقال تماس برتبة رابعة إذا كانت العناصر المشتركة أربعة وهكذا

المستقيم س س المماس للمخني في نقطة الانقلاب م (شكل ٦٦ لوحه ١٦) هو
المحدد الفاصل بين القواطع التي مثل ط ه القاطعة للمخني في ثلاث نقط وبين التي
لا تقطعه سوى في النقطة الغريده م كالقاطع لا أمثلا

متى نحرك المستقيم المماس ب ب حالة كونه مماسا على الدوام للمخني فانه يدور في
جهة معلومة حتى يصير مماسا له في نقطة الانقلاب م ثم يأخذ به ذلك أوضاعا
موازية للأوضاع التي كان يأخذها قبل مروره بنقطة م وحينئذ فلنصورنا وجود
مستقيم ثابت في مستوى المخني ومماسه المتحرك لعلنا أن المماس يصنع مع هذا المستقيم
زاوية متغيرة تبعا لتغير وضع المماس المتحرك وهي إما أن تأخذ في الكبر شيئا فشيئا
الى أن تبلغ نهاية ازديادها عند ما يمر المماس بنقطة الانقلاب ثم تأخذ في الخسـة ثانيا
بعد تجاوز المماس لهذه النقطة اذ علمنا أن الأوضاع التي يأخذها المماس بعد ذلك
تكون موازية على المناظر لأوضاعه الاول وإما أن تتغير هذه الزاوية الابتدائية
بالنقص شيئا فشيئا حتى يصل المماس الى نقطة الانقلاب فتبلغ نهاية نقصها وترجع بعد
ذلك آخذة في الازدياد شيئا فشيئا ومن ذلك يعلم أن المماس للمخني ما في أي نقطة من
نقط انقلابه يصنع مع أي مستقيم ثابت موجود معه في مستوا واحد زاوية أكبر أو أصغر
الزوايا التي تصنعها بقية المماسات مع هذا المستقيم الثابت وذلك خاصية يتيقن بها هذا
المماس في نقطة الانقلاب عماسواه من المماسات وتستعمل لاجل تعيينه كما سنرى ذلك
في محله انشاء الله تعالى

به ٩٩ وقد يكون للمخني أحيانا نقطة رجوع وهي النقطة التي فيها يغير المخني المذكور
جهة سيره الاصلية راجعا الى الجهة التي أتى منها وذلك كما (في شكل ٦٧ و٦٨ لوحه ١٦)
ولاجل تصور الكيفية في تكون مثل هذه المخنيات يقال ان سرعة سير النقطة الراجعة
لها تأخذ في النقص شيئا فشيئا الى أن تنعدم في نقطة الرجوع م وتسير صرفا ثم تأخذ
ثانيا في الزيادة تدريجا مغيرة اتجاه سيرها الاصلية وآخذة اتجاهها مضادا له بحيث يكون
تغير اتجاه المماس مستمرا

ويقال لهذا الرجوع رجوع من الرتبة الاولى أو من الرتبة الثانية بحسب وجود شعبتي
المخني الراجع في جهة واحدة بالنسبة للمماس م س وعدمه فان كان الشعبتان
موجودتين في جهة واحدة من هذا المماس (كما في شكل ٦٧) قيل للرجوع رجوع من
الرتبة الاولى وان كان كل واحد منهما موجودا في جهة مخصوصة كما في (شكل ٦٨)

قبل له رجوع من الرتبة الثانية

بنسبة وهنالك منحنيات يكون لها نقطة مزدوجة وتسمى أيضا نقطة العقدة وهي التي تنعقد فيها شعبتا المنحنى وذلك كما في (شكل ٦٩ لوحة ١٦) الذي يرى فيه ان شعبتي المنحنى ا م ح م و المعلوم منعقدتان في نقطة م التي تسمى من أجل ذلك بنقطة العقدة وعلى العموم يعطى اسم نقطة مضاعفة الى النقطة التي يمر بها جمل اقواس من منحن واحد وذلك كالنقطة م التي في (شكل ٧٠) وكما انه يمر بهذه النقطة بجمل اقواس من المنحنى فيكون ذلك يكون لهذا المنحنى في هذه النقطة مماسات مختلفة بقدر عدد تلك الاقواس لكل قوس منها اساس مخصوص

بمسند الخط المستقيم هو أبسط الخطوط المنحنية اللانهاية أي التي تمتد الى ما لا نهاية فاذا اعتبرنا مستقيما مثل اب (شكل ٧١ لوحة ١٦) ومستقيما آخر ح و قاطعاه ودور هذا الاخير حول احدى نقطه مثل ح مثلا بحيث تأخذ نقطة التقاطع و على التوالي اوضاعا مختلفة مثل د و ه و . . . الخ حالة كونها آخذة في التباع د جهة الشمال الى ما لا نهاية ففي وضع ما يصير بالضرورة المستقيم القاطع المتحرك موازيا الى اب وتنتقل حينئذ نقطة التقاطع الى بعد لانهائي وفي هذه الحالة لا يمكن المحكم على نقطة التقاطع بانها هل هي موجودة في نهاية المستقيم اب من الجهة اليسرى أو في نهايته اليمنى لكن متى استقر المستقيم المتحرك في الحركة بعد الوضع الموازي رأينا أن نقطة التقاطع التي كانت على بعد لانهائي قد أخذت في الاقتراب شيئا فشيئا بأعانة من الجهة اليسرى للمستقيم اب حتى تصير في البعد المحدود بعد ان كان بعدها لانهايا وحيث الامر كما ذكر فالأحرى حينئذ هو أن نعتبر المستقيم اب كمنحنى مقفول ونقطة التقاطع انقسام شعبتيه

المتحدتين في جهتين متضادتين موجودة على بعد غير محدود أو لانهائي وعليه فحتى وجد ان منحنيهما تمتد الى ما لا نهاية لزم أن يعلم ان له نقطة لانهاية لكنه لا يقف فيها ولا فيمساعداها بل لابد أن يكون له شعبة ثانية غير شعبته الاولى ممتدة نحو هذه النقط اللانهاية ومتصلة بالشعبة الاولى فيها كما شوهد ذلك في المستقيم ولا بد من أن يكون لكل منحنى فروع لانهاية بقدر ماله من النقط اللانهاية وان يكون لكل فرع منها شعبتان متصلتان ببعضهما في النقطة اللانهاية

ولبيان ذلك تمثل بالمنحنى المبين في (شكل ٧٢ لوحة ١٧) الذي يعرف بالقطع الزائد فهذا المنحنى له نقطتان لانهايتان أي موجودتان على بعد لانهائي ولذا كان له فرعان

مثل ا ب ح و وهو كلاهما ذو شعبتين ممتدتين الى مالا نهاية وشعبنا كل منهما متصلان ببعضهما في النقطة الانتهائية التي تمثل كلاهما الوصول اليها والمماس المنحني لانهائي في نقطته الانتهائية قد اعطى له اسم مخصوص ليمتيزه عن سائر المماسات التي نقط تماسها محدودة وهذا الاسم هو الخط التقربي وبتدري ما يكون للمنحني من النقط الانتهائية يكون له خطوط تقريبية فالقطع الزائد مثلاله خطان تقريبيان هما xy و zr لان له نقطتين لانتهائيتين فحما امتد فرعا القطع الزائد ومهما امتد معه - مالاخطان التقريبيان فانهما لا يقابلان الفرعين الا في نقطتيهما الانتهائيتين ويكونان مماسين لهما في هاتين النقطتين

ولاجل الحصول على الخط التقريبي المنحن تستعمل الطريقة التي يجب اجزاؤها للحصول على أى مماس حيثما اتفق وذلك ان يؤخذ قاطع مثل م ه ويحرك تحريكا بحيث يجتمع بسببه نقطتا التقاطع م و ه في بعد لانها في وتصبحان نقطة واحدة ومن المعلوم انه اذا حرك م ه تحريكاً كبيراً عند نقطتي م و ه عن بعضهما شيئاً فشيئاً الى ان تصبحا لانهما اثنين فعند ذلك يمكن ان نعتبر ان طرقي المستقيم م ه التماسيه بعضهما واصارا نقطة واحدة كما تقدم في أول هذا البند ويصير اذ ذاك القاطع م ه خطاً تقريبياً بهند العودى على منحن ما في احدى نقطه هو المستقيم المقام من تلك النقطة عمودياً على مماس ذلك المنحن فيها وحيث يمكن أن يقام من نقطة التماس جلة مستقيمت كلها عمودية على المستقيم المماس وكل واحد منهما موجود مع المماس في مستوي مخصوص بجميع هذه المستقيمت يقال لها عمودية على المنحن في نقطة التماس المعبرة وحينئذ يكون المنحن المعلوم منحنياً مستويياً يعطى على الخصوص اسم الهندوى عليه في نقطة معينة على المستقيم المقام من تلك النقطة عمودياً على مماسه فيها الموجود في مستوى ذلك المنحن ومماسه

* (مبسط النحنيات المستوية) *

بـ ٣٠٨ اذ افرضنا منحنيا حيثما اتفق كالمنحنى ا ب ص (شكل ٧٣ لوح ١٧٤)
مرسوما في مستو ما ونصورنا انه منقسم الى جملة عناصر متساوية بان كان
س = س = س = ... الخ ثم اقيم من منتصفات هذه العناصر الهموديات
المتجاورة جدا م د د م د د م د ... الخ فهذه الهموديات تتقاطع مع بعضها
تقاطعا متساويا ويكون من تقاطعاتها المتتالية منحن مثل د د د ... الخ وتكون

كلها مما سألناه والمنحنى δ هو المذکور المحاصر لمجبع عموديات المنحنى الاصلی
 ا ب ص هو ما يسمى ببسيط أو مفرد المنحنى ا ب ص وأما المنحنى ا ب ص فإنه يسمى
 بالنسبة للمنحنى δ بالمنحنى البسيط أو الفارده وسيظهر لنا سبب هذه التسمية فيما
 هوأت ومن المعلوم ان نقطة δ التي هي نقطة تقاطع العمودين δ م و δ م^٢ المقيمين
 من منتصفى العنصرين ب ب و δ المتساويين تكون بالضرورة متساوية الابعاد
 عن الثلاث نقط δ ب و δ و δ وعليه فتكون نقطة δ المذكورة مركز الدائرة يكون
 بينها وبين المنحنى ا ب ص عنصران متساويان. نرى ان كان هـ ا ب و δ و δ و δ حيث انه لا يمكن
 تشكيل الدائرة بالمرور بأكثر من ثلاث نقط فتلك حيث ذى الدائرة الوحيدة التي
 تقرب وتكاد أن تتحد مع المنحنى ا ب ص بجوار نقطة ب زيادة عن مساوها ولذا سميت
 بالدائرة الملاصقة لهذا المنحنى في نقطة ب اما نصف قطر هذه الدائرة الملاصقة فإنه على
 التحقيق عبارة عن أحد الخطوط الثلاثة δ ب و δ ب و δ ب التي يمكن استعاض
 كل منها تقريبا بأحد الخططين المتساويين δ م و δ م لان هذه المستقيمان المتوازيان
 ما خرجت عن كونها انصاف أقطار الدائرتين مرسومتين خارج ودخل المضلع ب ب و
 الوحيد ومن المعلوم انه عند النهاية أو عندما تعتبر العناصر صغيرة صغرا لانها انما تتحد
 هاتان الدائرتان ببعضهما وتصيران كاللدايرة الواحدة ومن ذلك ينبج أن المركز δ
 ونصف القطر δ م للدائرة الملاصقة يتعينان بتقاطع عمودين قريين جذان بعضهما
 من عموديات المنحنى المعلوم

ولاجل البرهنة على ان المستقيم δ م مساو للمستقيم δ م نقول حيث كان العنصران
 م و δ م متساويين فيكون مثلنا δ م و δ م متساويين أيضا ومن تساويهما
 ثبت تساوى الضلعين δ م و δ م ثم وليبان أنه لا فرق محسوس بين δ م و δ م
 نقول بؤخذ من مثلث δ م و δ م القائم الزاوية أن

$$\delta = \sqrt{\delta^2 - \frac{\delta^2}{\delta^2}} = \left(1 - \frac{\delta^2}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبأخذ النهايات يرى انه عندما يصير العنصر م لانها في الصغرى فلا يكون هناك
 فرق بين δ م و δ م سوى كمية لانها اية الصغرى من الرتبة الثانية يجب ا هـ هـ
 ولولا النسبة الى م واذن فيمكن ان يعتبر δ م مساويا الى δ م
 بفناء المستقيم δ م هو ما يسمى أيضا بنصف قطار انحناء المنحنى ا ب ص في نقطة م

لانه بحسب كبر وصغر طوله يضعف انحناء ذلك المنحنى كثيرا أو قليلا وفي الواقع كذلك لاننا اذا أردنا أن نتصور حقيقة انحناء خط ما مثل ab صه فتعتبره كضلع صارت كوينه بثنى المستقيم $b - c - d - e - f - g$ حول النقاط $c - d - e - f - g$ و $b - c - d - e - f - g$ الخ ومن البديهي أن الانحناء في نقطة c يكون ميينا بمقدار الانفرج الواقع بين العنصرين $b - c$ و $c - d$ أعني بزاوية التماس $b - c - d$ أو بالقوس $b - c - d$ الذي تقدر به تلك الزاوية في الدائرة التي نصف قطرها الوحدة (زاوية التماس اسم للزاوية الواقعة بين قوس من منحنى ما وبين المستقيم المماس له من طرفه) لكن زاوية $b - c - d$ مساوية لزاوية $c - d - e$ وتلك الزاوية شاملة للقوس $c - d - e$ المتحد مع الدائرة الملاصقة المرسومة بنصف القطر $c - d$ حينئذ فالقوس $b - c - d$ المشابه للقوس $c - d - e$ والمرسوم بنصف قطر مساو للوحدة يكون مقداره هو الاتي

$$h = \frac{m - c}{c} = \frac{c - e}{e} = \frac{f - c}{c}$$

والرمز $f - c$ يدل على أحد العناصر التي مثل العنصر c واما e فهو رزم نصف القطر $m - c$ ومن حيث ان المنحنى ab صه منقسم الى عناصر متساوية فتكون الكمية $f - c$ ثابتة واذن فيعلم من مناقشة مقدار h المتقدم ان الانحناء الميّن بالزاوية h يتغير من نقطة الى اخرى من المنحنى ab صه بالنسبة العكسية لنصف القطر $m - c = e$ يعني انه اذا كبر e قل الانحناء أي صار خفيفا وان صغر e صار الانحناء كبيرا ومحسوسا به h (شكل ٧٣ لوجه ١٧) اذا أخذنا خط ليس قابل للانحناء مثل $m - d - e - f - g$ ولف على طول المنحنى المبسوط ثم ثبتت احدى نقط ذلك الخط ولكن e مثلا وأعطى لمجزئه المستقيم h م طولا بحيث يصل طرفه لمحد المنحنى الباسط ab صه ثم فك الخط الملفوف على المبسوط فكانت درجتيه h م على الدوام فان طرفه m يمشي بالضبط على المنحنى ab صه وفي الواقع كذلك لانه عند ما تأتي نقطة تماس الخط المبسوط من الوضع h الى c يزيد الجزء المستقيم من الخط وهو $m - c = e$ بقدر $c - d$ ويكون حينئذ طوله الكلي عبارة عن $m - c + c - d = m - d$ لكن من حيث ان هذا الخط الاخير مساو الى $m - d$ بمقتضى h م فينبغي على ذلك ان الطرف المتحرك m يمر بالضبط بنقطة m ومثل ذلك يحصل في جميع الاوضاع المتتالية للخط الذي يمكن بواسطته حينئذ

رسم المنحنى البسيط بفكره من فوق منحنى المبسوط ومن ذلك ينتج ان أى قوس حيثما
اتفق مثل $\widehat{CD}$ من المبسوط يساوى لغرق نصـ في قطري الانحناء مـ د ر قـ د
المرين بطرفه

ولملاحظ أيضا ان أى باسط مثل abc لا يقبل قط سوى مبسوط واحد لا غير
وأما المبسوط الواحد الذى مثل abc فإنه يقابل الى عدد غير متناه من البواسط لانه اذا
أخذ على المحيط abc جولة نقط مثل $m, n, \dots$ الخ فإنها ترسم عدة منحنيات
مختلفة مثل $m, n, \dots$ الخ كل منها باسط للمبسوط الواحد
 abc وجميع هذه البواسط لها اعمدة مشتركة بينها وهى متساوية الابعاد عن بعضها
فى اتجاه هذه الاعمدة لكنها تختلف عن بعضها اذ من جهة خواصها ومعادلاتها

بهذا لاجل شرح بعض أمثلة بسيطة على نظرية المبسطة نقول انه اذا كان المنحنى
 ا ب ص (شكل ٧٣ و ١٧٤) قطعاً مكافئاً اذ درجة ثانية لكان مبدوءه متركباً
 من فرعين غير محدودين مثل د ح و د ع أحدهما موضوع فوق محور ا ب
 والثاني تحته وبجسمان مع بعضهما على هذا المحور في نقطة د التي يحددان فيها رجوعاً
 وهذه النقطة متباعدة عن الرأس ا للمنحنى المكافئ بالبعد $a = 2$ ان = لنصف البعد
 الثابت من القطع المكافئ والمستقيم ا ب المذكور وهو أيضاً نصف قطر انحناء القطع
 المكافئ في الرأس ا

وفي القطع الناقص ا ب د هـ (شكل ٧٤ لوحه ١٧) الذي نصفه محوريهما وا ورمزه ا ثم وب ورمزه ب يكون المبسوط متخذاً مثل ا ب ب هـ مركباً من أربعة فروع متكون بينها أربع نقط من نقط الرجوع وابعاده هذه النقط عن رؤس القطع الناقص هي الآتية

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

وهذه الأبعاد هي أيضا مقادير لأنصاف أقطار الانحناء في الرأسين A و B لأن
الفرعين A و B يستعملان لرسم نصف القطع الناقص AB وأما الفرعان
الآخران C و D فانهما متعلقان بالنصف الأسفل AD
وفي الدائرة يؤرل المبدؤا إلى نقطة واحدة وهي المركز ويكون نصف قطر الانحناء على
الدوام

الدوام مساوٍ بالنصف قطار الدائرة المعلومة نفسها

ب ١٠٦ م فاذافرضنا الآن أن المبسوط هو المعلوم وأنه دائرة كالدائرة م ع غ ع ...
(شكل ٧٥ لوجه ١٧) التي مركزها و واريدي إيجاد باسط هذا المبسوط فاذاتبعنا
القاعدة المتقدمة في البند السابق وأخذنا محيط الدائرة ولفقناها على الدائرة المعلوم
وفرضنا ان طرفه الذي سيتحرك كان منطبقا على محيط الدائرة في نقطة م ثم فك الخط
تدريجيا بعد ان ثبتت منه نقطة مثل نقطة ع فلا شك أن نقطة م ترسم في أثناء حركتها
مخاضا مثل م م م ... ثم يكون هو باسط أوفارد الدائرة التي مركزها و

لكن يمكن إيجاد هذا الباسط أيضا بطريقة رسمية ولذلك يقسم محيط الدائرة إلى أجزاء
 متساوية ولتكن اثني عشر مثلاً ثم يؤخذ على المماسات $ع م$ و $ع م$ و $ع م$
 ... الخ ابعاد مساوية إلى $\frac{1}{12}$ و $\frac{2}{12}$ و $\frac{3}{12}$ و $\frac{4}{12}$ و ... الخ من طول
 محيط الدائرة فتحصل النقاط $م$ و $م$ و $م$ و $م$ و ... الخ التي إذا جئت بحيط
 متصل تحصل الباسط المطلوب ولاجل جمع هذه النقاط بمنحن يكفى هنا أن تجعل النقاط
 $ع$ و $ع$ و $ع$ و ... الخ مراكزا والمماسات $ع م$ و $ع م$ و ... الخ انصاف
 أقطار وترسم جملة أقواس من دوائر تتصل مع بعضها ويتكون عن مجموعها الباسط
 المطلوب لان انصاف الاقطار المذكورة هي انصاف اقطار الدوائر الانصافية للمنحني
 م م م م ... المطلوب انصافه

وهذا الباسط م م م . . . الخ هو الحزون غير محدود ونقطة أصله هي م بل
يمكننا أيضا أن نعتبر الحزون م لاي المائل للحزون المتقدم كفرع آخر من الباسط
الذكور وأن هـ ذين الفرعين ليسا الا كمنحن واحد ناشئ عن التحرك المستمرة نقطة
واحدة وفي الواقع كذلك لانه اذا عوضنا المحيط الملفوف على المبسوط بمستقيم غير قابل
للانثناء وغير محدود مثل المستقيم ا ب و تصورنا ان هذا المستقيم يدور بدون انزلاق
حول الدائرة م ع غ . . . الخ مع بقاءه على الدورام مما سألنا في الواضح ان كل نقطة تمثل
اثابة على هذا المستقيم تأخذ على التوالي أوضاعا مثل م د م د م . . . الخ الى أن
تأتي في نقطة الأصل م وبعد هاذا استمر تحرك المستقيم في جهة سيره الاصلية يرى أن

نقطة ١ التي رسمت المنحنى $ا م م م م$ تصير بعد ذلك خاف نقطة التماس وترسم بدون انقطاع الفرع $م ل ا$ الذي يجب اعتباره بناء على ذلك فرعاً وجزأ من المنحنى الاول $م م م م$. . الخ لا منحنياً قائماً بذاته . وما يجب أن يلاحظ أيضاً هو أن طريقة إيجاد البسيط هذه بواسطة دوران مستقيم غير قابل للالتقاء حول مبسوطه هي وإن كانت توصل هي والطريقة المتقدمة في بحثنا إلى نتيجة واحدة وهي إيجاد البسيط لكن الطريقة الحالية أعم من المتقدمة بل قد يكون العمل بها ضرورياً عندما يكون المبسوط المعلوم مشتملاً على نقط رجوع كافي القطع الناقص والقطع المكافئ وما شبههما لأنه إن لم تستعمل هذه الطريقة واستعملت الاولى كان من اللازم تغيير نقطة ثبات الخيط لاجل نقله من فرع إلى آخر

* (الفصل الثاني) *

(في تعريف السطوح وفي طرق تولدها وأنواعها)

١- يشار بـ $ا$ بـ $ا$ على العموم اسم سطح على المحل الهندسي لجميع الأوضاع التي يأخذها على التوالي خط ما يتحرك مغيراً وضعه بل وأحياناً هيئته على حسب قانون معين مستقر . وينتج من هذا التعريف أنه لا يجوز إطلاق كلمة سطح على مجموع عدة نقط أو عدة منحنيات متقاربة من بعضها ~~أما أمكن~~ وليس ينبغي أن يربط أو علاقة ثابتة بل يلزم لاجل أن يصح إطلاق كلمة سطح على هذا المجموع أن تكون هذه النقطة أو تلك الخطوط منقاداً لبعض روابط مشتركة بينها ومستقرة وتلك الروابط والشروط هي التي إذا ترجعت بالاصطلاح المجبري كانت ترجمتها عبارة عن معادلة ذلك السطح الخط المتحرك الذي عليه تولد السطح يسمى راسماً لذلك السطح والقانون المعين المستقر الذي على حسبه يتحرك الراسم هو عبارة عن عدد شروط موضوعية يجب أن يتقادها الراسم في أثناء حركته حتى لا يكون وضعه وهيئته في أي نقطة فراغية مفرطاً اختيارياً بل يكون ذا وضع مخصوص وهيئة معينة . وأوفى الوسائط التي جرت العادة باستعمالها لبيان قانون حركة الراسم هي أن يعين خط واحد أو جملة خطوط ثابتة تسمى بالدلة وواخذها دليلاً . ويكلف الراسم دواماً بالالتصاها في جميع أوضاعه . واذن يلزم لاجل تحديد سطح مخصوص تحديداً تاماً أن يبين جنس الراسم وكيفيته تحركه وتعيين الدلة التي يكلف هذا الراسم بالالتصاها في أثناء حركته وبتغيير الدلة وحدها لتحصل جملة سطوح تابعة لعائلة واحدة . وأيضاً يجب أن يلاحظ أن السطح الواحد المخصوص

المستقيم س و وثانيه يبق محوراه دائماً مواز بين موضعيهما الاصليين وثالثان هذين المحورين يصغران معاً بمقادير مناسبة للابعاد س و و س و د و د ... الخ فان هذا القطع الناقص المتحرك يتطبق على التوالي على $\overline{A\Gamma}$ و $\overline{D\Gamma}$ و ... الخ ويكون بناءه على ذلك راسماً للخروط متغيراً للمئة والوضع معاً لكن لاجل تحويل منطوق هذه الشروط المختلفة الى شرط ذى منطوق أبسط من منطوقها يكفي أن نتذكر أن المنحنى ذا الدرجة الثانية يصير معيناً في مستويته متى علمت منه خمس نقاط وحيداً فلورسمنا على سطح المخروط خمسة أضلاع ثابتة مثل س ا ر س ب ر س ج و س د ر س ه لا يمكننا أن نقول انه يكفي لتولده هذا المخروط أن يتحرك القطع الناقص المتغير ا ب ح بشرط أن يكون دائماً مستويته موازاً بنفسه وأن يكون ممكناً دائماً على هذه الخمسة مستقيمات التي تعتبر اذ ذلك خمسة أدلة

وأخيراً من حيث ان المستويات المتوازية القاطعة للمخروط ممكن أخذها في أى اتجاه كان بالاختيار وأيضاً من حيث انه كان يمكن قطع المخروط بسطوح أخرى غير المستويات كأن يقطع مثل البركات متحدة المركز مركزها نقطة و وانصاف اقطارها متغيرة ذلك مما ثبت لنا أنه يوجد جملة خطوط مستوية أو مضاعفة الانحناء يمكن اتخاذها رؤس للسطح المخروطى الواحد

بنسبة (السطح الاسطوانى) السطح الاسطوانى هو المحل الهندسى للأوضاع المتنوعة التي يأخذها مستقيم مثل ا ا ي يتحرك وهو متكى دائماً على طول منحن ثابت مثل ا ب ح (شكل ٧٧ لوجه ١٨٤) حالة كونه موازياً على الدوام لاتجاه معلوم لكن هذه الطريقة ليست هى الطريقة الوحيدة التي يمكن بها تولد السطح الاسطوانى بل هنالك طرق غير متناهية يتولد بها السطح المذكور كما سترى ذلك قريباً وانما هى الطريقة الوحيدة التي يكون فيها رؤس السطح مستقيماً ولبيان أنواع هذه الطرق الغير المنتهية نقول لوقفنا على السطح الاسطوانى الحادث من تحرك المستقيم ا ا ب بعدة مستويات متوازية وموازية لمستوى الدليل ا ب ح لكانت المقاطع الحادثة بالضرورة منحنيات متساوية ومساوية الى الدليل ا ب ح وعليه فيمكن اعتبار السطح ناشئاً من تحرك المنحنى ا ب ح بالتوازي لنفسه مع اتسكته دائماً على المستقيم ا ا ب باحدى نقطه الثابتة (ويقال ان المنحنى يتحرك بالتوازي لنفسه متى بقى فيه وتران حيثما اتفق من ضمن أوتاره مواز بين على الدوام لموضعيهما الاصليين) وهذا الشرط يترتب على استوفائه الحصول على أمرين أولهما

تحرك

تتحرك مستوى المنحنى بالتوازي لنفسه وثانيهما عدم دوران المنحنى داخل مستوييه المتحرك وفي طريقة التولد هذه يقال للمستقيم α دليل للمنحنى المتحرك $\alpha\beta$ الذي يسمى اذذاك راسا فاذا تغير بعد ذلك اتجاه المقاطع المتوازية أمكن الحصول على عدد غير متناه من الرواسم المنحنية التي كل منها يصلح لتولد الاسطوانة عينها وبالمجمل فيمكن اعتبار السطوح الاسطوانية كحالة خصوصية من السطوح المخروطية أعني في حالة ما تبعد رأس المخروط الى ما لانهاية

بـ ١١٢ مما يجب التنبية عليه هنا هو انه اذا غير الدليل المنحنى للمخروط أو للاسطوانة بمستقيم آل السطح الحادث الى مستو وعليه فيمكن تعريف المستوي بتعريف مشابه لتعريف الاسطوانة والمخروط بأنه هو السطح الحادث من تحرك مستقيم مكاف أولابان يتحركى دائماً على مستقيم ثابت وثانياً بأن يكون دائماً مواز بالوضعه الابتدائى أو يمر على الدوام بنقطة ثابتة

بـ ١١٣ (في السطح التحركى أو الدورانى) السطح التحركى الذى يعرف أيضاً بالدورانى هو كل سطح حدث من دوران منحنى ما مثل $\alpha\beta$ حول مستقيم ثابت مثل $\alpha\omega$ وهو (شكل ٧٨ لوجه ١٨) بحيث ان كل نقطة من هذا المنحنى كنقطة γ مثلاً ترسم دائرة مستوية عمودية على المحور $\alpha\omega$ ونصف قطرها هو البعد الاصغر $\gamma\omega$ والكائن بين هذه النقطة وبين المحور المذكور

ومما ينبغى ملاحظته هو انه وان كان جميع انصاف الاقطار المختلفة وهى $\gamma\omega$ و $\delta\omega$ و $\epsilon\omega$... الخ عمودياً على المحور $\alpha\omega$ فانها لا تكون متوازية عند ما يكون الراسم $\alpha\beta$ مضاعف الانحناء ولا عندما يكون هذا الراسم منحنياً مستوياً ومستوياً لا يمر بالمحور $\alpha\omega$ أعني لا يشتمل عليه ويقال للدوائر $\gamma\omega$ و $\delta\omega$ و $\epsilon\omega$... الخ المتنوعة المرسومة بانصاف الاقطار المذكورة موازيات السطح التحركى

بـ ١١٤ اذا مر بالمحور $\alpha\omega$ مستويات حيثما اتفق مثل $\alpha\omega$ و $\beta\omega$ وغيرهما حدثت في السطح التحركى مقاطع مستوية مثل $\alpha\alpha'$ و $\beta\beta'$ و $\gamma\gamma'$... الخ تسمى بالمقاطع الجانبية لهذا السطح التحركى وتلك المقاطع تكون بالضرورة ممثلة في الهيئة والشكل ومتساوية لان مستويات هذه المقاطع الجانبية قاطعة للموازيات في انصاف أقطار صانعة بالضرورة بين الموازى ومتساوية مثل $\alpha\omega = \beta\omega = \gamma\omega$... وعليه اذا دور المستوى $\alpha\omega$ هو ω بالمقدار الزاوى θ وانطبقت في آن واحد جميع انصاف

الاقطار $وم$ و $وَم$ و $وَم$ على $وا$ و $وَا$ و $وَا$ وبالضرورة يتحدد القطعان
المجاذيان مع بعضهما وبصيران قطعاً جانبيين واحداً وهذا لا يتأتى الا اذا كانا متساويين
ومتحدى الهيمته والشكل وما قبل عليهما يقال على غيرهما فيثبت المطلوب حينئذ من أن
جميع القطاعات الجانبية للسطح تتحرك واحدة تكون متساوية ومتماثلة الشكل والهيمته

به ١١ وينتج من ذلك أيضاً انه اذا دار القطع الجانبي ١١ حول المحور $هـ هـ$ فانه
يمر على عموم السطح التحركي واذن فيمكن اعتباره كراسم جديد للسطح المذكور يمكن
استعماله بدلا عن المنحنى الاصلى $ع ح$ ولو كان مخالفا له وفي الواقع ان المنحنى $ع ح$
يكون مغايراً للقطع الجانبي اذ لم تكن جميع نقطه موضوعة في مستو واحد مدار بالمحور
 $هـ هـ$ كما يشاهد ذلك في الشكل الحالى المفروض ان منظوره مرسوم على المستوى

هو ١١ أعنى مستوى المحورين $هـ هـ$ و $و و$ ولهذا السبب قد انقطعت
اجزاء الموازيات وجزء المنحنى $ع ح$ الموجودة بخلاف ذلك المستوى وبالمجمله يمكن دائماً
تعيين القطع الجانبي للسطح تحركي من بعد معرفته راسمه الجيمته اذ يفي لذلك
البحث عن نقط تقابل مستو مثل هو الموازيات المتنوعة المرسومة بنقط الخط
 $ع ح$ كما ستري مثال ذلك فيما بعد ان شاء الله تعالى

به ١٢ السطوح التحركية التي نحن بصدد هائلها بطريقة تولد أخرى يجب معرفتها
وذلك انه حيث كان كل مستو عمودى على المحور $هـ هـ$ (شكل ٧٨ لوحه ١٨) يلزم
ان يقطع السطح التحركي في دائرة مركزها موجود على المحور المذكور به ١٢ ولها نقطة
مشتركة بينهما وبين المنحنى $ع ح$ أو بينهما وبين القطع الجانبي $ب ت$ فيمكن حينئذ
اعتبار السطح التحركي ناشئاً عن الاوضاع المختلفة التي تأخذها دائرة تحرك وهي عمودية
دواماً على المحور $هـ هـ$ ومركزها عيشى على هذا المحور حالة كون نصف قطرها يتغير
بحيث يكون محيط الدائرة متكافئاً دائماً على المنحنى الثابت $ع ح$ ويكون حينئذ هذا
المنحنى بصفة داليل للسطح التحركي يمكن استعماله بوضاه بالقطع الجانبي $ب ت$ والدائرة
التحركية بصفة راسم لهذا السطح متغير الهيمته والوض معاً

وتعريف السطح التحركي به هذا التعريف له مزية عظيمة وهي جعل جميع السطوح
التحركية الممكن وجودها في العالم من عائلة واحدة به ١٣ حيث يمكن تولدها عموماً
بنوع واحد من الراسم الا وهو الدائرة التي تتحرك دائماً بالانعام على المحور منقادة في أثناء
حركتها الانحاء القطع الجانبي الذي هو بصفة داليل لمركزها وهو فقط الذي يختلف

باختلاف السطوح التحركية من جهة أشكالها المختلفة لامن جهة جنسها وعاثلتها وأما نوع الراسم فهو ثابت

بـ ١١٤ ولذا أنه بحسب اعتبار القطع المجانبى للسطح التحركى مستقيماً أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً أو قطعاً مكافئاً يكون السطح المحادث مخروطياً أو أسطوانياً أو مجسماً ناقصياً تحريكاً أو مجسماً زائداً تحريكاً سواء كان ذاتية واحدة أو ذاتيتين أو مجسماً مكافئاً تحريكاً لكن بشرط أن يجعل محوره دوران السطح التحركى منطبقاً على أحد محاور المنحنى الذى يتخذ راسمها لانه ان لم يلاحظ ذلك فالسطح المحادث وان كان لم يزل تحريكاً لكنه يكون مغايراً للسطوح التى ذكرنا لك أسماها وفى الواقع لتمثل لك بالدائرة مثلاً فنقول من المسلم الذى لا نقض ولا ابرام فيه أن الدائرة اذا دارت حول أحد أقطارها باعتبارها كمحور دوران لها كان السطح التحركى الثانى عن دورانها سطحاً كروياً لكن متى دارت حول مستقيم موجود فى مستويها غير مار بمركزها حدث عنها سطح تحركى آخر يعرف بالجسم الكعكى أو الحلقى وهو جسم على شكل الكعكة أو الحلقة سندا كره فيما بعد

بـ ١١٥ السطوح التحركية التى ذكرناها فى البند السابق وهى المجسم الناقصى والزائدى بنوعيه والمكافى التى قيدنا كلامنا عقب اسمه بلفظة تحركى تمييزاً له عما سندا كره بعده هذا البند ليست إلا أحوالاً خصوصية من الخمسة سطوح العمومية الاتية وان كانت غير تحركية لكن لزيادة منافعها فيما سياتى قد أبجنا بذكرها هنا وهى السطوح الخمسة ذوات الدرجة الثانية المتميزة عن بعضها وليس داخلها من عددها السطح المخروطى ولا الاسطوانى ولا المستوى التى هى سطوح بسيطة وقد ذكرناها فلا نعود لها ثانياً ونقتصر على ذكر الخمسة سطوح الاتية فقط

بـ ١١٦ (فى المجسم الناقصى) لنفرض قطعاً ناقصاً مثل (شكل ٧٩ و ٨٠) منشأ على نصفى المحورين $1 = 1$ و $2 = 2$ ومعتبراً أنه مرسوم فى المستوى الرأسى المتخيل لبيان صورة السطح الناقصى عليه بالمنظور ويؤخذ من ذلك أن الخطوط النقطية تدل على الأجزاء الموجودة خلف مستوى هذا القطع الناقص من المنحنيات وهذا الاصطلاح هو الذى سنتبعه فى بقية هذا الفصل

فاذا أنشأنا قطعاً ناقصاً آخر مثل $آ ب$ فى مستوي عمودى على $و ح$ بنصفى محورين هما $الاحداثى و آ$ $آ$ للقطع الناقص الاول ومستقيم اختياري الطول مثل $وت = ب$ لكنه

عمودى على ω ثم فرضنا أن المنحنى α يتحرك ولكن بشرط أن محور به ينتقلان
بالتوازي لنفسيهما مع حفظهما للنسبة الابتدائية الواقعة بينهما وهى $\frac{1}{2}$ وبشرط أن

أحدهما ينطبق بالتوالى على الأوتار α و β و γ و δ و الخ من
القطع الناقص الثابت δ كان المحل الهندسى المتولد بهذه الكيفية هو ما يعرف
بالمجسم الناقصى وعندما يرسم على القطع الناقص المتحرك بالمركز ω فإنه يبلغ نهاية
كبيرة حيث يصير اذ ذاك نصف المحور المتغير α عبارة عن الاحداثى الاكبر ما يمكن وهو
 $\omega = 1$ بحيث لو رمزنا بالرمز $\omega = 1$ للطول الذى يأخذه فى ذلك الوقت المحور الثانى
 β لكانت الثلاثة خطوط α و β و γ متطابقة وهى

$$\alpha = 1 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 1$$

هى ما يسمونها بالاقطار الاصلية أو بمحاور المجسم الناقصى ويجب أن يلاحظ أن هذا
السطح يكون مقفولا من جميع الجهات لان محورى القطع الناقص المتحرك يصيران من
بعد تجاوزا لنقطتي δ و ϵ تخيلين ويمكن تولدها هذا السطح عنه بواسطة تحريك قطع
ناقص آخر مثل القطع δ و ϵ المنشئ فى مستوي وعمودى على مستوي القطع الناقص
الثابت α و β و ينصف محورين أحدهما عبارة عن الوتر δ و ϵ من القطع الثابت
وثانيهما هو ω و β ذو طول اختياري فتفى حرك القطع الناقص δ و ϵ بشرط
كالشروط التى تمحرك على حسبها المنحنى α و β الاول كان السطح الحادث سطحنا ناقصا
من جنس السطح الاول ولاجل أن يكون السطح الحادث هو نفس السطح الذى تولد
بالطريقة الاولى يؤخذ المحور الثانى وهو ω بشرط أن يكون القطع الناقص المتحرك
 δ و ϵ متكاثرا تماما على القطع الناقص α و β أى بشرط أن يكون المحور ω و β
عبارة عن أحد أوتار القطع الناقص المذكور

بقية إذا كان القطع الناقص الراسم وهو α و β دائرة بمعنى أننا لو كنا قد اخترنا
المحور ω مساويا ω لصار السطح الحادث سطح ناقصا متحركا كما كانى به ω لقطع
الجانبى هو المنحنى الدليل δ و محور وانه هو δ و يصير اذ ذاك محوران اثنان
من محاور السطح وهما ω و β متساويين ويقال لهذا المجسم فى هذه الحالة المجسم
الناقص المتحركى المستطيل أما اذا كان القطع الناقص δ و ϵ الراسم للسطح الناقصى

في طريقة تولده الثنائية هو الذي صار دائرة أى تساوا محاوراه ببعضهما فان الجسم يكون تحريكاً أيضاً لكنه غير الجسم التحركى المتقدم لان محور دورانها يكون في هذه الحالة اذ الاصغر من $\frac{1}{2}$ فهو فيكون حينئذ اسطح الحادث مبسطاً لان ارتفاعه اصغر من عرضه ولذا يعرف بالجسم الناقصى التحركى المبسط فاذا تساوت انصاف المحاور الثلاثة $a = b = c$ وبعضها آل الجسم الناقصى الحادث الى كرة

وينتج من ذلك أولاً أن الجسم الناقصى على نوعين الاول وهو ما كانت محاوره الثلاثة مختلفة يسمى بالجسم الناقصى ذى الثلاثة محاور أو الجسم الناقصى فقط والنوع الثانى هو ما كان فيه محوران متساويان من ضمن محاوره الثلاثة وهذا النوع يعرف بالجسم الناقصى التحركى وهو نوعان أيضاً الجسم ناقصى تحركى مستطيل وهو ما كان كل من محوريه المتساويين اصغر من المحور الثالث المفرد وجسم ناقصى تحركى مبسط وهو ما كان بعكس ذلك

وثانياً أن الكرة لم تكن سوى حالة خصوصية من الجسم الناقصى فعندما تتساوى محاوره الثلاثة ببعضها يستحيل الى كرة

بنتائج في الجسم الزائدى ذى الطية (شكل ٨٠ لوحة ١٩) اذا عوض القطع الناقص الذى كان مستعملاً في البندين المتقدمين بصفة دليل بقطع زائدى مثل AA_1 الذى نصف محوره الحقيقى $a = \frac{1}{2}$ ونصف محوره التخيلى $b = \frac{1}{2}$ ثم انشئ قطع ناقص فى مستوى عمودى على OC كالقطع الناقص A_2C_2 مثلًا بمحورين أحدهما عبارة عن الوتر A_2C_2 للقطع الزائد والثانى اختيارى وحرك على مقتضى قانون الحركة المتقدمة فانه يولد مجسمًا يعرف بالجسم الزائدى ذى الطية وانما قيد بذى الطية لانه لم يكن مركباً من سوى طية واحدة غير منتهية كالقطع الزائد المستعمل لدليلانه وعندما يمر مستوى القطع الناقص المتحرك بالمركز O يباغ القطع الناقص المذكور نهايته فى الصغر حيث يصير المحور المتغير AA_1 اذذاك مساوياً الى OA الذى هو اصغر أو تارالقطع الزائد وهذا هو السبب الذى اوجب تسمية المنحنى ABC بقطع ناقص الحقيقى والمستقيمت الثلاثة الآتية وهى

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$$

تسمى بالمحاور الثلاثة للجسم الزائدى لكن من حيث ان الاخير منها هو وجه لا يقابل السطح فيقال له بسبب ذلك المحور التخيلى وأما الكمية الحقيقية $\frac{r}{2}$ فانها ليست الا معاملا للمقدار الجبرى التخيلى الذى ينتجه التحليل عند البحث عن نقطة السطح التى يقال بوجودها على المستقيم الغير المحدود وحو

بـ ٢٢٤ متى كان المحوران الحقيقيان wa و ob متساويين صار الجسم الحادث كما تقدم فى بـ ٢٢٤ جسمًا متحركًا يسمى بالجسم الزائدى ذى الطبيعة التكررى اذ يقول حين ذاك القطع الناقص الراسم الى دائرة وفى هـ هذه الحالة الخصوصية يمكن أيضا قول السطح بواسطة دوران منحنى القطع الزائد AA' حول محوره التخيلى وحو

بـ ٢٢٥ فى الجسم الزائدى ذى الطبيعة (شكل ٨١ لـ ١٩٥) اذا أنشئ قطع زائد بنصفى المحورين $wa = \frac{1}{2}r$ و $ob = \frac{1}{2}r$ كما تقدم امكنه موضوع بحيث يكون وحو محوره الحقيقى ثم تحرك القطع الناقص AA' كما تقدم فانه يتولد نوع من الجسميات الزائدية له طبيعتان غير محدودتين منفصلتان عن بعضهما بمسافة هوائية لم يكن بها نقط من السطح وفى الواقع لان الوتر المتغير AA' الذى يجعل محورا للقطع الناقص المتحرك يصير تخيليا فيما بين نقطتي h و h' ويصير المحوران الثانى ob بالضرورة تخيليا أيضا لان بينهما وبين الاول نسبة محفوظة ثابتة ولذا عي صيرورة الراسم كله تخيليا فى بحر تلك المسافة فلا يمكن أن تتولد من تحركه فى انشائها نقط حقيقة من السطح ومع ذلك فن حيث انه معلوم ان نصف المحور wa يصير عند المرور من نقطة و مساويا الى $wa - \frac{1}{2}r$ فلو اريد تعيين المعامل الحقيقى للمحور الآخر الذى هو تخيلى أيضا يلزم ان يؤخذ على مستقيم عمودى على المستوى او حو بعدمثل ob بحيث يكون

$$\frac{wa}{\frac{1}{2}r} = \frac{wa - \frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}r} = \frac{wa}{\frac{1}{2}r} - 1$$

وحين ذاك يكون المستقيمان $ae = \frac{1}{2}r$ و $be = \frac{1}{2}r$ هما اللذان يعبر عنهما بالمحورين التخيليين للجسم الزائدى ذى الطبيعتين وأما $ch = \frac{1}{2}r$ فهو محوره الحقيقى

بـ ٢٢٦ لاجل صيرورة هـ هذا الجسم متحركا يجب أن يكون المحوران التخيليان wa و ob متساويين لان هـ هذا الشرط موجب لان يكون $wa = ob$ وهـ هذه المساوية ينبئ عليها تحويل القطع الناقص الراسم الى دائرة وفى هـ هذه الحالة يمكن أيضا

تولد هذا السطح التحركى بتدوير الفرعين α و β من القطع الزائد الاصلى حول محوره الحقيقي γ

وينتج مما ذكر أن الجسم الزائدى نوعان ذو طية واحدة وذو طيتين وكلا هذين النوعين على نوعين ذوات ثلاثة محاور مختلفة وتحركى فيتمثل بوجود أربعة أنواع من الجسومات الزائدية تتميز عن بعضها ولها أسماء مخصوصة وهى الآتية

الجسم الزائدى ذو الطية

الجسم الزائدى ذو الطية التحركى

الجسم الزائدى ذو الطيتين

الجسم الزائدى ذو الطيتين التحركى

بمثال ١٢٤ (فى الجسم المكافى الناقص) لنجعل الآن الدليل الثابت قطعاً مكافئاً مثل α و β (شكل ٨٢ لوحه ١٩) ثم نأخذ قطعاً ناقصاً مثل γ و محوره الاول $\alpha = \beta$ يلزم أن يكون مساوياً على الدوام للاحدائى المتغير لهذا القطع المكافى ومحوره الثانى $\gamma = \delta$ يكون أول مرة اختيارياً ثم يحفظ بعد ذلك النسبة الواقعة بينه وبين المحور الاول وتتحركه بالانعام على محور القطع المكافى وهو γ و δ فيولد سطحاً مركباً من طية واحدة غير محدودة فى اتجاه المحور γ وهذا السطح هو ما يعرف بالسطح المكافى الناقص لان جميع المقاطع الممكن رسمها عليه لا تخرج عن أن تكون امقاطعاً مكافئة أو قطعاً ناقصة

بمثال ١٢٥ وعند ما يتساوى محورا القطع الناقص الراسم ببعضهما يصير السطح المتولد تحريكاً ويسمى بالسطح المكافى التحركى وينمنا يصير تحريكاً يمكن تولده أيضاً بتدوير القطع المكافى و α حول γ و δ

بمثال ١٢٦ (الجسم المكافى الزائدى) لنفرض الآن ان الدليل الثابت قطع مكافئ أيضاً مثل α و β (شكل ٨٣ لوحه ١٩) ونستعوض الراسم الناقص الذى كان يستعمله لحد الآن بقطع زائد مثل γ و δ مرسوم فى مستوعودى على γ و δ بنصفى محورين مثل α و β بحيث تبقى النسبة بينهما على الدوام ثابتة وأولهما الذى هو المحور الحقيقي لهذا القطع الزائدى يكون على التوالى مساوياً للاحدائيات المتنوعة α و β و γ و δ الخ من القطع المكافى الثابت فاذا حرك هذا القطع الزائد بالتوازى لنفسه فانه يولد

في مبدأ الامر طيتين مفتوحتين أحدهما جهة اليمين والاخرى جهة الشمال ومفصولتين عن بعضهما بالفراغ الداخلي للاستوانة α و β وممتدتين الى غير نهاية في الاتجاه α و β مثل القطع المكافئ لكن اذ ارفع القطع الزائد المتحرك من بعد نقطة α ونحو نقطة β صغر محوره الحقيقي و α ثم يعدم في نقطة β وعليه فتتصل ببعضهما الطيتان اللتان قلنا انهما كانتا منفصلتين وفي ذلك الوقت بعينه يستحيل القطع الزائد في هذا الوضع الى مستقيمين غير محدودين α و β و γ موجودين باكملهما على السطح وموازيين الى المخطوط التقريبية بجميع القطاعات الزائدة المتقدمة

ومتى ارتفع القطع الزائد الراسم فوق نقطة α بأن وصل الى نقطة β كنقطة γ مثلا نلاحظ ثانياً لكن في وضع مثل α β γ منعكس بالنسبة الى خطيه التقريبيين وفي الواقع لان المحورين اللذين بينهما α β γ مارسميا بالمستقيمين α و β يجب بيانهما في الحقيقة لاجل الضبط بمقاديرهما الآتية

$$\alpha = \alpha \quad \beta = \beta \quad \gamma = \gamma$$

وحينئذ من حيث ان احداني القطع المكافئ في نقطة α صار تخيليا وان المحور الاول للقطع الزائد المتحرك يصير تبعاً لذلك هكذا $\alpha = \beta$ و $\gamma = \alpha$ فيجب اذن ان المحور الثاني لهذا القطع لاجل ان يحفظ مع المحور الاول نسبة ثابتة ان يكون مقداره مبيّنا بالصورة الآتية

$$\alpha = \beta \quad \beta = \gamma \quad \gamma = \alpha$$

وهذه هي كمية حقيقة مبيّنة في الشكل بالبعد α ومن ذلك يظهر ان المحور الحقيقي و α للقطع الزائد الراسم يصير فيما فوق نقطة α متجهاً في اتجاه عمودي على المستوى α و β وان فرعي هذا المنحنى يولدان ايضاً طيتين غير محدودتين احدهما موضوعة امام هذا المستوى والاخرى خلفه لكن باجتماعهما مع الطيتين السابقتين في المستقيمين α و β و γ يتكّون من المجموع سطح واحد غير مقطوع ذو انحناء آت متضادة الجهة كما يرى ذلك تقريباً في السطح المقعر من مقر البكرة الذي يلف عليه الحبل وقد

سمى هذا السطح بالسطح المكافئ الزائدى لانه بالتحليل المجبرى يعلم ان جميع المقاطع المستوية الممكن رسمها عليه لا تكون الا قطاعات مكافئة أو قطاعات زائدة ومن ضمنها المحاتان اللتان يكون خط التقاطع فيهما مستقيما معزلا أو مستقيمين متقاطعين مع بعضهما

ولاجل سهولة تصور (الشكل ٨٣ لوحه ١٩) يجب أن نشد كانه مرسوم على المستوى الرأسى α وبصفة كون المستوى المذكور كستوى المنظور وعلى هذا يعلم ان جميع الخطوط النقطية موضوعة خلف هذا المستوى والاولى ان تراجع هيئة هذا السطح في ارنيكه الذى يعمل بالتجسيم أو بواسطة خطوط مشدودة كما سنبين ذلك ان شاء الله فيما سياتى لان تصور هذا السطح من الشكل الخطى فيه صعوبة نوعا

نتيجة يفهم مما تقدم ان السطح المكافئ الزائدى لا يمكن أن يكون تحريكا لانه علم مما تقدم ان هذا السطح ليس له بالسلكية مقاطع مستوية مقفولة وبناء عليه فلا يمكن أن يكون موجودا عليه دوائر مع ان هذا الشرط لازم في السطوح التحركية به ١٢٧ اذ الطريقة التى ذكرت آنفا لتولد وتكوين السطح المكافئ الزائدى ينشأ عنها في الحقيقة نوع عدم استقرار في الرسم حيث انه من فوق نقطة وبصير القاطع المكافئ الذى كان كدليل للسطح تخيلنا ولكن من حيث انه يمكن بسهولة تفسير هذه الصعوبة بواسطة التحليل المجبرى فقد استحسننا اثبات طريقة التولد المذكورة لأمور منها انها مشابهة جد الطرق لتولد السطوح المتقدمة وانها محققة جيداً للتسمية التى اعطيت لنوعى السطح المكافئ وليكونها تظهر جيداً وجود المستقيمين α و β والموضوعين على السطح المكافئ الزائدى ومع ذلك فهناك أيضاً طريقة تولد أخرى مستمرة بالسلكية ومشتركة بين نوعى السطح المكافئ نذكرها فنقول

اذا رسم على المحور الواحد $\alpha\beta$ (شكل ٨٢ لوحه ١٩) قطعتان مكافئتان مثل $\alpha\delta$ و $\beta\gamma$ بحيث يكونان متجهين في الرأس α و مرسومين في مستويين متعامدين وان يكون تغيرهما متجهين في جهة واحدة والبعد الثابت لكل منهما اختيارياً (البعد الثابت للقطع المكافئ هو البعد المكاش بين بؤرتيه ودائله) ثم حرك أحد هذين القطعين المكافئين بالتوازي لنفسه بدون حصول اختلال في شكله يمكن بشرط ان رأسه تتحرك دائماً على القطع المكافئ الثانى الثابت تحصل بالضرورة السطح المكافئ الناقص الذى كوناه في به ١٢٤ بطرقة أخرى

ولأخذنا أيضا قطعين مكافئين مثل $\bar{A}$ و $\bar{D}$ و $\bar{E}$ (شكل ٨٣ لوحه ١٩) مرسومين بنفس الشروط المقدمة و فقط بتعبيرهما - ماموجهان في جهتين متضادتين ثم حرك أيضا القطع المكافئ $\bar{A}$ و $\bar{D}$ ذوالشكل الثابت بالتوازي لنفسه وبشرط أن تسمى دائما رأسه على القطع المكافئ الآخر الثابت لتفصل لنا الأسطح المكافئ الزائدي الذي تولد في ٢٦ بكيفية أخرى

(الفصل الثالث)

بنفسه (في الكلام العام على المستويات المماسية للسطوح وكيفية بيانها بالرسم)
 ٢٨٨ يقال ان المستوي مماس للسطح في نقطة معينة متى اشتمل على المستقيمات
 المماسية لجميع المنحنيات التي يمكن رسمها على هذا السطح من النقطة المعنية المذكورة
 ولأجل أن نذكركم بهذه هذه التعريف يلزمنا ابتداءً أن نثبت وجود مستوي بهذه الصفة
 لكل نقطة من نقاط السطح المفروض وأنه يشتمل على جميع مماسات المنحنيات المرسومة
 من تلك النقطة على السطح لأنه ربما اتوهم الانسان في مبدأ الامر أن المماسات لجميع
 المنحنيات المارة بنقطة ما من السطح توجد على سطح مخروطي لأعلى مستوي واحد كما أن
 ذلك يحصل في الحقيقة أحياناً في بعض نقاط غريبة ولذا يكفي ان نبرهن على ان كل ثلاثة
 مماسات لثلاثة منحنيات مرسومة على سطح ما من نقطة معينة عليه تكون موجودة
 في مستوي واحد

ولنفرض مثلاً أن $ح م ح$ (شكل ٨٤ لوحه ١٩) هو عبارة عن الخط الراسم للسطح المعلوم في وضعه عند ما يمر بنقطة $م$ المعلومه وأن خط $م$ هو منحن مرسوم على السطح ومع دلالة $ل$ أن يتحرك عليه دائماً الراسم عندما يتحرك لتولد السطح المعلوم واخيراً يمكن $م$ من اختيار الناحية التي يتفق مرسومها بالاختيار على السطح بعينه فإذا نقلنا الراسم في وضع آخر مثل $ح م ح$ فإنه لا يتأخر عن أن يقابل المنحنى $م$ ص في نقطة $ما$ مثل نقطة $ط$ ويشترط أن تكون نقطة $م$ مأخوذة على الدليل $م$ بالقرب من نقطة $م$ على قدر ما يمكن وحينئذ إذا وصلت الثلاث نقط $م$ و $ط$ و $ما$ بمستقيمات غير محدودة كانت هذه الثلاث مستقيمات الموصولة قواطعاً بالنسبة للمنحنيات $م و م ص و ح ح$ وتكون الثلاث موجودة بالضرورة في مستوى واحد ثم فحرك الراسم $ح ح$ على خط $م$ مع تقريبه من وضعه الابتدائي $ح ح$ لكن بشرط

بشرط المحافظة دائماً على القانون الذى على مقتضاه يتغير كل من وضع هذا المنحنى المتحرك وهيئته لاجل أن يرسم السطح المعلوم ثم بعد ذلك تصوران مستوى الثلاثة قواطع يدور حول نقطة م بحيث انه يمر فى آن واحد مع الراسم بالنقطة م و ط ثم م و ط و الخ التى هى نقطة تلاقى هذا الراسم بالمنحنيين م و م ص على التوالى و عليه فهذا المستوى المتحرك يكون على الدوام شاملاً للثلاثة قواطع المتغيرة ومن المعلوم أنه متى رجع الراسم الى الوضع م ح تتحدد نقطة م المتحركة على المنحنى م و مع نقطة م وإيضاً من الضروري أن نقطة ط السكائنة على المنحنى م ص تاتى هى الاخرى وتجتمع على النقطة م وبالتبعية لذلك ينبغى أن تتحدد أيضاً نقطتا ط و م السكائنتان على المنحنى ح ح المتحرك ببعضهما وتصبحان نقطة واحدة

و بناء عليه يرى أن الثلاثة قواطع المتحركة قد صارت مماسة على التوالى الى المنحنيات م و م ص و م ح فاذا تذكرنا أن هذه الثلاثة قواطع كانت فى كل وضع من اوضاع الراسم موجودة فى مستو واحد كما حينئذ ان نستنتج من ذلك أنها متى آلت الى الثلاثة مماسات م س و م س و م س فلا تزال توجد فى مستو واحد وهى نهاية الاوضاع التى كان يأخذها على التوالى مستوى الثلاثة قواطع المتحركة وإيضاً من حيث ان المنحنى م ص قد أخذ بالاختبار لاقى وضع مخصوص على السطح فينتج حينئذ من ذلك أن المستوى المار بالمماسين للمنحنى م ح و م و س يشمل على المماس لى لمنحنى اخر مار من نقطة م و عليه فيكون المستوى م س مماساً للسطح وذلك بناء على التعريف الذى قررناه فى أول هذا البند

اعلم ان هذه النظرية مهمة جداً لانها تسهل الاعتبارات المختصرة النافعة جداً الداخلة فى طريقة النهايات كما سترى ذلك فى محله وما يدل على أهمية هذه النظرية الاحتياج لها كثيراً عند البرهنة على بعض الاشياء فلهذا لولا ثبت ان جميع المماسات للمنحنيات المرسومة على سطح واحد من نقطة معلومة توجد فى مستو واحد لما كان يسوغ لنا اعتبار ان اى سطح منحن يتركب من جملة عناصر صغيرة مستوية وذلك لان تلك العناصر السطحية الصغيرة مركبة من الاجزاء الصغيرة الخطية المتحركة بين منحنيات السطح ومماساتها

به ٢٩٤ وحينئذ يكون للسطح المعلوم طيتان أو جملة طيات متقاطعة كما يحصل ذلك

في السطح المخروطي مثلًا عندما تفرض قاعدته منحنيًا معقدًا لانه يظهر انما في مبدأ الامر أن النقطة الموجودة على خط تقاطع الطيتين لا تنطبق عليها خاصية المستوى المماس لاي سطح فنظن انهما مستثناة من القاعدة العمومية بمعنى أن المستوى المماس للسطح في احدى هذه النقطة لا يشتمل على جميع المماسات للمنحنيات الممكن رسمها على السطح من النقطة المذكورة وليكن اذاً مثلنا في هيئة السطح المخروطي الذي يكون بهذه الصورة فجدانه مركب من طيتين مميزتين عن بعضهما بحيث يلزم التفريق بين المنحنيات الممكن رسمها من النقطة المفروضة على سطح المخروط لان بعض هذه المنحنيات يكون منسوباً لاحدى الطيتين أى موجودا على سطحها والبعض الآخر على الطية الثانية وعليه فتكون المماسات لها متميزة بعضها يوجد في مستوى واحد مماس لاحدى الطيتين والبعض الآخر يوجد في مستوى اخر مماس للطية الثانية في نفس النقطة الواحدة وبهذه الصورة متى اعتبرنا طيتي السطح كسطحين قائمين بنفسهما ومقاطععين مع بعضهما في الزاوية المتكسكة على نقطة انعقاد القاعدة رأينا ان خاصية المستوى المماس للسطح هي خاصة عمومية ليس فيها استثناء

بشيء ومع ذلك فقد توجد احيانا بعض استثناءات حقيقة في خاصية المستوى المماس لكن ذلك لا يحصل الا نادرا في بعض نقط مخصوصة من السطح تسمى من أجل ذلك بالنقطة انفرجية وهي النقطة التي يكون الخط الراسم للسطح أو دليله قـآل فيها الى نقطة واحدة فلا يكون له بالضرورة مماس بالمكانية مثلًا نقطة رأس السطح المخروطي هي نقطة غريبة بالنسبة لمجموع نقط السطح المذكور اذا لا يوجد للمخروط مستوى مماس فيها لان جميع الخطوط الممكن رسمها على السطح من هذه النقطة تؤل الى الرواسم المستقيمة من المخروط ولا شك ان كل راسم منها يعتبر كمماس لنفسه فاذا نظرنا الى الرواسم المخروط باعتبارها كمماسات للخطوط المرسومة على السطح من نقطة الرأس نجد أن كل راسمين منها يوجدان في مستوى مخصوص بمعنى ان هذه المماسات المختلفة لا توجد كلها في مستوى واحد طبقاً للخاصية المتقدمة في ١٢٤ واذن تكون رأس المخروط نقطة غريبة ليس له فيها مماس مطلقا ولونظرنا الى طريقة تولد السطح المخروطي بواسطة تحرك منحن مواز لقاعدته كما في ١٢٤ رأينا ان هذا الراسم المنحني يضيق شيئا فشيئا كلما تباعد عن القاعدة وقرب من الرأس حتى اذا وصل الى الرأس يصير نقطة واحدة وحيدة فلا يكون له في هذا الوضع الاخير مماس حقيقي ومن هنا يتضح لنا

السبب في عدم تطبيق خاصية بـ ١٢٨ على نقطة رأس المخروط وكذا اذا نظرنا لكون المخروط متولد من تحرك راس مستقيم بالاتكاء على قاعدته وبشرط ان يمر دائما بنقطة ثابتة وهى رأس المخروط كما في بـ ١٢٨ نجد انه لداعي صيرورة الدليل الثانى نقطة لا يكون له مماس بالكتابة ولهذا السبب قد امتنع تطبيق خاصية المستوى للمماس العمومية على نقطة رأس المخروط فهى بهذه الاسباب نقطة غيرية بالنسبة لسطح المخروط وقد يوجد مثل هذه الحالة في بعض السطوح التحركية التى يكون قطعها الجانبي متقاطعا مع محور الدوران على زاوية حادة او منفرجة فان نقطة هذا السطح التى تكون موجودة على محور الدوران لا يوجد عليها هذا السطح فهى مستويات مماسة لاهلها كانت جميع المماسات للقطاعات الجانبية المختلفة لهذا السطح فى احدى هذه النقط غير موجودة فى مستوي واحد بل توجد على سطح مخروطى قائم صارت بسبب ذلك نقطة غيرية بالنسبة للسطح التحركى التى هى منه ومنال ذلك السطح التحركى الحادث من دوران قوس دائرة حول وتره فان نقطتى السطح الموجودتين على محور الدوران تكونان غيريتين

بـ ١٢٨ دومن المهم أن يلاحظ ان تعريف المستوى للمماس لا يسطح بانه هو المستوى الشامل لكافة مماسات الخطوط الموجودة على السطح والمارة من نقطة التماس كما فى بـ ١٢٨ لا يفيد ولا يرضى بان لا يكون بين المستوى والمماس والسطح المماسون نقطة مشتركة سوى نقطة التماس نعم ان ذلك يحصل فى السطوح المحدبة تحديدا كليا لكن كثيرا ما يكون المستوى للمماس للسطح ملاقيا له فى نقط متعددة بل قاطعا له فى منحنى ماربة نقطة التماس كما سترى منال ذلك فى المستوى للمماس لسطح الجسيم الكعبي بـ ١٧٨ وهذه الحالة لا تمنع أبدا المستوى الذى بهذه الصورة من أن يشتمل على كافة مماسات الخطوط المرسومة على السطح من نقطة التماس المعينة وعليه فهو لاشك مماس تماثليا فى هذه النقطة ولو كان قاطعا للسطح فى جميع النقط لمغايرة لها

بـ ١٣٢ وهناك نوع من السطوح يكون المستوى للمماس له فى نقطة معلومة من نفسه وطبيعته مماسا لنفس السطح المذکور بطول مستقيم مار بهذه النقطة فـ لا اذا نظرنا لحالة الاسطوانة ا ب ح (شكل ٨٥ لوجه ١٩) التى قاعدتها حتما تنفق نجد انه لو مرر بالرسم ا ب وبالمستقيم ب س المماس للقاعدة مستوي فان ذلك المستوى لا يكون مشتملا فقط على جميع المماسات للخطوط المرسومة على الاسطوانة من النقطة ب

كما ثبت ذلك في β^{128} بل يكون مشتملاً أيضاً على جميع المماسات لعموم المنحنيات المرسومة على الاسطوانة من جميع نقاط الراسم اب المتعددة ولأجل البرهنة على صحة ذلك يكفي أن نبرهن على أن المستوى اب سه يشتمل على المماس م ف للمنحنى المحيئاً اتفق م صه الموجود على سطح الاسطوانة ولذلك نقول إذا مررنا مستويًا مثل اب ر بالراسم اب وب نقطة و القريبة من نقطة ب قطع بالضرورة هذا المستوى الاسطوانة في مستقيم مثل و ه مواز إلى اب ويقطع المنحنى م صه في نقطة مثل ح موضوعة على المستقيم و ه بحيث أن هذا المستوى يشتمل على القاطعين ب و ر م ح ف فإذا دور المستوى المذكور حول اب بشرط أن تقرب بالدوران نقطة و من نقطة ب وجدنا أن نقطة التقاطع و ر ح تتغيران على المنحنيين لكنهما موجودتان دائماً على مستقيم يتحرك وهو دائماً مواز إلى اب وحينئذ في انحدت إحدى هاتين النقطتين ولتكن و مثلاً مع نقطة ب ففي الوقت بعينه تتحد نقطة ح الأخرى مع نقطة م بمعنى أنه عندما يأخذ المستوى المتحرك الوضع اب س فالقاطع المتغير م ح ع الموجود دائماً في هذا المستوى يؤول إلى المماس م ف وعليه فيثبت المطلوب من أن هذا المستقيم موجود في المستوى اب س

وينتج من ذلك أنه عندما يقال أن المستوى مماس للأسطوانة في نقطة ما من سطحها ينبغي أن يفهم بالضرورة أن هذا المستوى مماس للأسطوانة بطول الراسم المستقيم المار بنقطة التماس المعلومة

بـ β^{133} النظرية المتقدمة في البند السابق لها أيضاً نتيجة مهمة جداً يحتاج إليها كثيراً في مباحث

وهي أنه إذا أسقط منحن مثل م صه (شكل ٨٥ لوحة ١٩) ومماسه م ف على مستو كان مسقط المماس مماساً لمسقط المنحنى والعكس للعكس لأنه لا جـ بل إيجاد مسقط المنحنى م صه يلزم بمقتضى بـ β^{134} أن تتصور اسطوانة مارة بهذا المنحنى وعمودية على المستوى المعلوم فتقطعه في منحن مثل ب و يكون هو مسقط المنحنى م صه وأيضاً لأجل إسقاط المستقيم م ف ينبغي أن يمر بـ م صه وعمودي على مستوى المسقط ولا يخفى أن المستوى الذي هذه الصورة هو المستوى ف م و لا يكون هذا المستوى مماساً بالضرورة للأسطوانة في نقطة م يلزم أن يكون بمقتضى بـ β^{134} مماساً لها في جميع نقاط الراسم م ب وفي نقطة ب بالجملة وبناء عليه فيكون المستوى المذكور

شاملا للمستقيم س المساس للقاعدة ب ح وحيدته فهذه المساس يكون عبارة عن
نقط تقاطع المستوى المسقط بمستوى القاعدة وعليه فهو مسقط المساس م ف على
مستوى القاعدة المذكور وبذلك يثبت المطلوب

وبمثل ذلك يمكن اثبات صحة هذه النظرية في الحالة التي تكون فيها المساقط مائلة أعني
عندما تكون الخطوط المسقطه مائلة على مستوى المسقط ومتوازية

به ١٢٤ المستوى المساس للسطح المخروطي في نقطة م من سطحه يسمى بطول الراسم
المستقيم المار بهذه النقطة وبرهان ذلك كبرهان خاصية المستوى المساس للأسطوانة
في نقطة ما انما يلاحظ ان نقطتي د و ح اللتين كانتا متقلبان معا على مستقيم متغير
يكون موازيا على الدوام للراسم المار بنقطة التماس تتحركان هنا معا على مستقيم متغير
أيضا تقاطع مع اب في رأس المخروط

وأخيرا يلزم التنبية على ان هذه الخاصية ليست قاصرة على الاسطوانة والمخروط فقط
بل سنرى فيما سياتي انها توجد في جميع افراد جنس من السطوح تسمى بالسطوح القابلة
للانبطاط وليس كل من الاسطوانة والمخروط الاحالة خصوصية من هذا الجنس
العمومي وسنسوق الكلام على ذلك في محله

به ١٢٥ ومع ذلك فانه لا يجب أن نتصور أن خاصية تماس المستوى المساس للسطوح
المذكورة بطول الراسم المار بنقطة التماس ناشئة عن كون تلك السطوح تقبل التولد
بواسطة الراسم المستقيم فان تصور ذلك من الخطأ الا كبر وذلك لان هناك سطوحا كثيرة
تقبل التولد بالرأس المستقيم لكن المستوى المساس لها في أي نقطة من سطحها لا يسمى
الا في نقطة التماس المعينة لا غير (راجع ما في به ١٨٢ و به ١٩٤) ومع أنه مشتمل على
راسم مستقيم من رؤاس السطح لا تتوفر شروط تماس المستوى بالسطح الا في نقطة واحدة
من هذا الراسم والسطوح التي بهذه الكيفية هي التي يسمى بها بالسطوح الشمالية
به ١٢٦ اذا اختصرنا جميع ما قيل في حق المستويات المماسية أمكان نستنتج منه قاعدة
عمومية تعمم على المستوى المساس لاي سطح في أي نقطة تعرض عليه وهي أن يبحث عن
المماسين المنحنيين مرسومين على السطح من النقطة المفروضة ويمرر بهما مسة وفيكون
مماسا للسطح المعلوم في تلك النقطة انما تسمى بالانحلال قد جرت العادة بأن نأخذ المنحنيين
اللازمين لتعيين المستوى المساس في وضعين بسطحين جدا وسهلين حتى يكون العمل
عليهما سهلا ومضبوطا اعتمادا اذا أخذنا مجانا وسنذكر عن قريب عدة أمثلة متنوعة على

كيفية اجراء هذه العملية

وحيثما يمكن أن يمرر بالنقطة المعلومة مستقيم موجوداً كله على السطح المعلوم يكون هذا المستقيم عبارة عن شئئين في آن واحد وهما كونه خطاً مرسوماً على السطح من نقطة التماس وكونه عبارة عن المماس لنفسه وبناء عليه فيكون هذا المستقيم موجوداً في المستوى المماس المطلوب وممكناً استعماله لتعيين المستوى المذكور باشتراكه مع المماس لمخطط آخر مرسوم على السطح من نقطة التماس لكن لا زالت أحذر من أن يتصور أن ذلك داع لان يكون هذا المستوى مماساً للسطح بطول ذلك المستقيم

بـ٣٧ إذا أقيم من نقطة تماس أى مستو مماس لسطح ما مستقيم عمودى على هذا المستوى المماس سمي هذا المستقيم بالعمودى على السطح المعلوم في النقطة المفروضة أو برأى السطح في النقطة المذكورة والتسمية الاولى أضبط من الثانية لان المستقيم العمودى على سطح لا يكون دائماً رأسياً أعنى عمودياً على المستوى الافقى بل ان اتجاهه يتغير بتغير وضع المستوى المماس فالاولى حينئذ بحسب ما أرى أن يصرف النظر عن هذا الاسم أى رأى السطح حيث انه لا يدل على مسماه دلالة مضبوطة كما يدل عليه اسم العمودى على السطح

وبفهم من هذا التعريف أنه يكفي لتعيين عمودى السطح في أى نقطة البحث عن المستوى المماس للسطح في هذه النقطة ثم يقام منها مستقيم عمودى عليه بأن ينزل من مسقط نقطة التماس مستقيمان عموديان على أثرى المستوى المماس وذلك تطبيقاً لما ذكر في النتيجة التى تقررت في بـ٣٥

وينتج من ذلك أن العمودى على سطح الكرة من نقطة مفروضة عليها هو نصف قطرها المار بتلك النقطة وامتداده لانه اذا رسمنا من النقطة المفروضة على سطح الكرة قوسين من دائرتين عظيمتين ورسمنا المماسين من هذه النقطة ثم وصلنا نصف قطر الكرة المار بهما رأينا أن نصف القطر المذكور عمودى على كل من المماسين لغوسى الدائرتين العظيمتين واذن فيكون عمودياً على مستويهما الذى هو المستوى المماس للكرة في النقطة المعتبرة وعليه فيكون نصف القطر المذكور بمقتضى ما قرر في أول هذا البند هو العمودى على سطح الكرة في النقطة التى فرضت عليه

بـ٣٨ إذا (المحيط الظاهرى لجسم) من المعلوم أنه اذا وضع الانسان أمام عينه جسماً ما ونظرا إليه فإنه لا يمكنه مشاهدته جميع سطح هذا الجسم بل يرى منه جزءاً محدوداً فقط وهذا

الجزء المشاهد بتغير مسامته بالنسبة لعدد عين الناظر عن الجسم المنظور بحيث كلما قربت العين من الجسم قل الجزء المشاهد وكبر بالضرورة الجزء الغير المشاهد وكلما بعدت عنه كان الامر بالعكس فالخط المحدد لدرجة الجزء المشاهد الفاصل بينه وبين الجزء الغير المشاهد هو الذي اطلقوا عليه اسم المحيط الظاهري للجسم بالنسبة لنقطة البصر المعينة وليبان ذلك نفرض ان نقطة و (شكل ٨٦ لوحة ٢٠) هي الوضع الذي تشغله عين الناظر ونتصور ان جميع المستويات الممكن رسمها من نقطة و مماسة للسطح المعلوم سه فهذه المستويات تقسم السطح في نقط مثل ا و ب و ج و د . . . الخ . تكون عنها منحن فيكون هو المنحنى الذي تمر عليه جميع الاشعة البصرية وا و ب و ج و د . . . الخ الخارجة من عين الناظر مماسة للسطح وعليه فيكون الخط ا ب ج د هو المحد الذي ينتهي اليه الجزء الذي يتيسر للناظر الواضع عينه في نقطة و مشاهدته من سطح الجسم المعلوم وهو ما يسمى بالمحيط الظاهري للسطح سه بالنسبة لنقطة البصر و وهذا المحيط الظاهري بتغير هيئة ووضعا اذا انتقلت نقطة البصر من موضعها فمثلا اذا انتقلت هذه النقطة الى نقطة و صار المحيط الظاهري عبارة عن المنحنى آ ت د وهلم جرا وبناء على ذلك ينبغي دائما تحديد نقطة النظر المنسوب لها المحيط الظاهري لجسم ما عند ذكر هذا المحيط الظاهري حيث علم انه متغير بحسبها

ولما كان المحيط الظاهري للأجسام متغيرا بتغير نقطة البصر كان من اللزوم الاتفاق على وضع مخصوص لنقطة البصر وتعين بحسبه المحيطات الظاهرية للأجسام التي يراد رسمها بواسطة طرق الهندسة الوصفية أعني بطريقة الاسقاط على مستويين متعامدين أحدهما أفقي والآخر رأسي ولذا قد اصطلح علماء هذا الفن على ان لا يعتبر في تعيين أي جسم بالرسم الوصف من محيطاته الظاهرية سوى محيطه الظاهري المأخوذ بالنسبة لنقطة بصر موضوعة على بعد لانها في بالنسبة للجسم المذكور كما أشرنا الى ذلك في بحثنا عند معنى انه عند تعيين المسقط الأفقي للجسم سه يعتبر الرسم ان عينه التي ينظر بها الى هذا الجسم موضوعة على بعد لانها في فوق الخط ا ز رأسي المار باحدى نقط هذا الجسم أياما كانت تلك النقطة وعلى ذلك تصير جميع المستويات المماسية للسطح سه التي تعين بها نقط المنحنى ا ب ج د رأسية فيمكن تعيينها بسهولة عندما كانت جميعها اتفاق بطرق بسيطة كما سنعرف ذلك قريبا فيمياسيا في وأما المحيط الظاهري للجسم حينما يراد أسقاطه على المستوى الرأسى فتعتبر فيه عين

الرسم موضوعاً امام المستوى الرأسى على بعد لانها تى منه فوق مسـتـقيم مار باحدى
نقط ذلك الجسم وعمودى على المستوى الرأسى للمسقط
بـ٢٩د ينتج مما ذكر في البند السابق أن الجسم الذى يرام اسقاطه على مستوي
المسقط الاعتياديين يلزم ان يراعى فيه محيطان ظاهريان اثنان وهما محيطه الظاهرى
بالنسبة للمستوى الافقى الذى لاجل تعيينه يبحث عن نقط تماس هذا الجسم بجميع
المستويات الرأسية الممكن رسمها مماسة له ومحيطه الظاهرى بالنسبة للمستوى الرأسى
وهو المحيط الجامع لنقط تماسه بجميع المستويات المماسه له التى تكون عمودية على
المستوى الرأسى

ومن هنا يعلم أن المحيط الظاهرى لاي جسم بالنسبة للمستوى الافقى هو غير محيطه
الظاهرى على المستوى الرأسى وهذا أمر بديهي يمكن البرهنة عليه بكيفية مستقرة
وهي ان يقال ان نقطة البصر في الحالة الاولى غير هاء في الحالة الثانية

بـ٣٠د قد ذكرنا في بـ٢٣د وبـ٢٤د بعض القواعد اللازم اتباعها في عمل
التخطيطات التى يجب اجراؤها في الرسم على الخطوط الاصلية وقلنا في بـ٢٤د انه لا يمكن
تقيم تلك القواعد الا من بعد دراسة السطوح المنحنية والان قد ان أو ان تقيم تلك
القواعد فنقول قد علم من تعريف المحيط الظاهرى للجسم بالنسبة للمستوى الافقى أن
جميع الخطوط من أى جنس كانت الموجودة على سطح الجسم فوق هذا المحيط الظاهرى
هى التى تكون مشاهدة بالنسبة للرسم المعتبر وجوده على بعد لانها تى فوق المستوى
الافقى الذى يسقط الجسم عليه وان جميع ما كان تحت المحيط الظاهرى المذكور
من الخطوط المرسومة على السطح المذكور تكون غير مشاهدة لذلك الرسم وأيضا
علم من تعريف المحيط الظاهرى للجسم بالنسبة للمستوى الرأسى ان الخطوط التى
تكون امام هذا المحيط الظاهرى هى التى تكون مشاهدة بالنسبة للرسم الذى يسقط
الجسم على المستوى الرأسى وان التى خافه هى الخفية عليه بالنسبة للرسم المذكور
اذا تقرر هذا فطبق الاصطلاحات التى اتفقنا عليها في بـ٢٣د فنقول ان الخطوط الاصلية
التي تكون مرسومة على سطح جسم ما ينبغي أن تراعى في رسم مساقطها الشروط الآتية
فاولا الخطوط التى تكون فوق المحيط الظاهرى للجسم بالنسبة للمستوى الافقى ترسم
مساقطها الافقية خطوطا كاملة والتي تحتها ترسم مساقطها الافقية نقطية
وثانيا عند رسم المسقط الرأسى لتلك الخطوط ينظر لوضوعها الفراغى بالنسبة للمحيط

الظاهر للجسم على المستوى الرأسى للسقط فما كان امامه يرسم مسقطه الرأسى كاملا وما كان خلفه يرسم مسقطه نقطيا

انما ينبغي ان لا ينسى انه قد توجد خطوط من ضمن الخطوط التى على سطح الجسم يكون الواحد منها مشاهدا في أحد المسقطين ومخبأ في المسقط الآخر لان نقطة البصر ليست واحدة في الحالتين بحيث يجب الاعتناء جدا في تمييز ما يجب تنقيطه أو رسمه بالكامل من الخطوط الاصلية في كل مسقط من المسقطين على حدته وأما الخطوط الغير اصلية أى المساعدة فانه لا ينبغي مراعاة التميزات المتقدمة فيها بل يراعى فيها ما قيل ضمن به ٢٣ لاغير

بالمقدد وفي حالة ما يوجد في أحد الرسومات الوصفية مستوية ما غير محدود سواء كان من المعالم أو من الاشياء التى يبحث عنها فلا ينبغي أن يعتبر له وجود حقيقى في الفراغ بل الواجب أن يفرض أن الموجود من المستوى هو أثره فقط ان كان من المعالم وان كان من الاشياء التى يبحث عنها فيعتبر أن الذى يبحث عنه من المستوى هو أثره فقط لاننا لم يعتبر المستوى كذلك وفرضنا له وجودا حقيقيا ترتب على ذلك انه يعطى معظم أو كل الاشياء الاخرى الموجودة تحته في شكل واحد ولا يخفى ما في ذلك من الضرر العظيم اذ لا يتيسر حينئذ تمييز الاشياء التى تكون فوق أو امام المحيطين الظاهرين لجسم من الاجسام المرسومة من التى تكون تحت أو خلف هذين المحيطين وتضيع حينئذ الغاية المقصودة بالذات من الرسم الوصفى فينبغى حينئذ من الآن فصاعدا اعتبار هذا الشرط في جميع الاحوال ولولم نذكره فيها على لزوم اعتباره أما اذا كان المستوى محدودا كوجه منشور أو هرم مثلا فلا بد من اعتباره وجوده في الفراغ وجودا حقيقيا ولا حظ ما يترتب على هذا الوجود من التنقيطات اللازمة

بالمقدد قد ذكرنا في به ٢٤ أن النقط والخطوط تبين بمسقطها على مستويين ثابتين هما مستوية المسقط وأشرنا في البند المذكور الى ان السطوح لا يمكن بيانها على هذا المنوال أعنى بالبحث عن مساقط جميع النقط والخطوط التى توجد عليها وقلنا ان هناك اعتبارات يجب اتباعها في بيان السطوح بالرسم الوصفى والآن نقول حيث ان النقطة الواحدة من سطح أى جسم يمكن ان يمر بها عدة خطوط مختلفة الانحنيات فاذا تتبعنا حينئذ الطريقة المبينة في به ٢٤ لاجل بيان سطح الجسم المذكور كانت النتيجة أننا نشحن مستويي المسقط بالنقط والخطوط التى من كثرتها وارتبائها كما لا يمكن المرسى

على الارتباطات والعلاقات التي بينها خصوصاً وأنه لا يستفاد ولا يفهم من مجموعها عند النظر إليها هيئة السطح المعلوم ولا انحناءه كثيراً كان أو قليلاً ولا عدد طبقاته إن كان له طبقات متعددة فلهذه الأسباب المجأت المحالة لتتابع الاعتبارات الآتية في بيان السطوح على العموم

أولاً حيث علم من التعريف المقرر في بحثنا أن السطح على العموم حادث من تحرك خط معلوم فيكون حينئذ لاجل بيانه بياناً واضحاً إن مستوي المسقط بجملة من أوضاع راسمه بحيث يكون عددها وتعارفها كافيين لأن يظهر للعين استقرار سطح الجسم المعلوم وانحناءه وامتداد طبقاته

وثانياً حيث أنه قد يتأق أن يكون للسطح الواحد بجملة أنواع مختلفة من الرواسم فينبغي أن ينتخب من تلك الأنواع لبيان السطح أكثرها إلقاءً وصلاحيته بالنسبة لمساطته أو انتظامه لبيان صورة السطح المذكور وفي بعض الأحيان لزيادة إيضاح صورته لا يكتب في بيان رواسم نوع واحد بل يرسم نوعان من الرواسم فيلحق السطوح التكررية ترسم عدة قطاعات جانبية وعدة موازيات وهذه هي الطريقة التي اتبعناها في الفصل السابق لاجل بيان السطوح التي رسمناها رسماً نظرياً

وثالثاً من النافع جداً أن يبين أثر السطح المعلوم على مستوي المسقط أعني خطي تقاطعه بهما وتبين أيضاً محيطاته من جهة الداخل أو من جهة الخارج إن كان له محيطات بهذه الصورة لأنه متى علمت مساقط محيطاته علم بالتحقيق أنه لا توجد نقطة على السطح المعلوم الا وتكون مساقطها منحصرة فيمابين مساقط تلك المحيطات الداخلية أو الخارجية وتلك المحيطات ليست شيئاً آخر سوى المحيطات الظاهرية للسطح المعلوم على مستوي المسقط التي شرحناها تفصيلاً في بحثنا وبه ٣٩٨ د و ٣٩٩ د فلترجع هناك

ومع كل ذلك يجب أن يلاحظ أنه متى كانت هيئة السطح المراد بيانه معلومة ومعروفة لنا من قبل فلا ينبغي أن ترسم جميع أنواع الخطوط المتقدمة أو تقابل يمكن أن يقتصر في بيان ذلك السطح على رسم بعض تلك الخطوط أعني المهم منها ويصرف النظر عن الباقي وذلك لاجل جعل الرسم بسيطاً وسهلاً للفهم على قدر الإمكان

* (١٠٣) *

* (الفصل الرابع) *

(في المستويات المماسية للسطوح الاسطوانية والمخروطية)
(وفي تامة حل الزاوية المحسمة الثلاثية)

بـ ٤٤ المعلوم نقطة على سطح اسطوانة حيثما اتفق والمطابو مدسة ومماس لهذه الاسطوانة من النقطة المذكورة

فن الضروري قبل رسم هذا المستوى المماس يلزم أولاً ان تبين الاسطوانة المعلوم بالرسم على مستوي المسقط وبعد ذلك نبحت عن طريقة حل المسألة المفروضة ومن المعلوم ان الاسطوانة لا تعلم الا اذا علم دليلها واتجاه رواستها فليكن دليل هذه الاسطوانة هو المنحنى ا ب ح ح (شكل ٨٧ لوحة ٢٠) مثلاً المفروض أنه موجود في المستوى الافقي للمسقط وقد اعتبر ذلك المنحنى في شكلنا هذا محيط دائرة لكن الطريقة التي سنجرى بها للحصول على المستوى المماس من بعد بيان الاسطوانة بالرسم تكون عمومية وممكناً اجراؤها بما كان جنس المنحنى الدليل الذي يفرض للاسطوانة ولنفرض أيضاً ان المستقيم (ا ب و ا ب) هو المستقيم الذي ينبغي لرأس الاسطوانة أن يكون موازياً له على الدوام في أثناء اتكائه على الدليل ا ب ح ح

ولاجل بيان الاسطوانة بالرسم على مستوى المسقط نبحت عن محيطها الظاهريين على هذين المستويين ونبتدئ بالبحث عن محيطها الظاهري على المستوى الافقي فقول ان هذا المحيط الظاهري بموجب بـ ٣٩ هو الخط المجامع لنقطة تماس جميع المستويات المماسية للاسطوانة المعلوم التي تكون رأسية ومما ثبت في بـ ٣٤ يدعى علم أن كل مستو من تلك المستويات الرأسية يشتمل على رأس من رواسم الاسطوانة ويكون أثره الافقي هو عين المسقط الافقي لهذا الرأس ويفهم من ذلك ان هذا الاثر يكون مستقيماً موازياً الى ا ب ومن جهة أخرى حيث ان هذا المستوى مماس للاسطوانة بطول

الرأس المذكور فيكون حينئذ أثره الافقي مماساً لقاعدة الاسطوانة وهي المنحنى ا ب ح ح لانه لو رسمنا من نقطة مقابل رأس التماس القاعدة مستقيماً لماساً له لكان هذا المستقيم موجوداً في مستويها وهو المستوى افقي للمسقط وفي المستوى المماس للاسطوانة وبما انه لا يوجد مستقيم مشترك بين هذين المستويين سوى الاثر الافقي للمستوى المماس المذكور فيعلم حينئذ ان هذا الاثر يلزم أن يكون مماساً لقاعدة الاسطوانة وبناء على

ما ذكرنا رسم لهذه القاعدة المماسان اب و ح و موازيين الى اب كان هذان المماسان عبارة عن الاثرين الافقيين المستويين رأسين مماسين للاسطوانة بطول الراسمين المستقيمين أفقياً على اب و ح و عليه فيكون المسقطان الرأسيان لهما عبارة عن المستقيمين آت و ح د المرسومين بالتوازي الى اب ومن ثم يعلم أن المستقيمين (ا- د آت) و (ح د و ح د) هما المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى الافقى وكل راسم من سطحها وجد تحت هذين المستقيمين أعنى من الرواسم المتلاقية مع القاعدة في نصف الدائرة ا ح د يكون غير مشاهد في المسقط الافقى

وأما المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى الرأسى فانه يتحصل طبقاً لما في به ١٣٩ د بواسطة المستويين المماسين لها والعموديين على المستوى الرأسى المذكور ولا يخفى أن الاثرين الافقيين لهذين المستويين يكونان عموديين على خط الارض ومماسين للقاعدة ا ح د و بناء عليه فيكون هذان الاثران هما ع ت و ح ح ومن حيث ان هذين المستويين يماسان بالضرورة الاسطوانة بطول راسمها الخارجين من نقطتي التماس ع و ح اللذين ينسقطان بالطبيعة على (ع ن د ع ن) و (ح ه د ح ه) فيكون هذان الراسمان هما محيطها الظاهري على المستوى الرأسى للمسقط بحيث ان كل راسم من سطح الاسطوانة وجد خلف هذين الراسمين أعنى من الرواسم الخارجة من نصف الدائرة ا ح د يكون غير مشاهد في المسقط الرأسى

ومن هنا يتضح ان رواسم الاسطوانة منقسمة الى أربعة أقسام من حيثية الظاهر منها والخبأ على مستوى المسقط كما يستدل على ذلك من أقسام القاعدة فأول الرواسم الخارجة من القوس ا ح ظاهرة في الافقى مخبأة في الرأسى وثانياً الرواسم الخارجة من القوس ح د فانها عكس الاولى أعنى مخبأة المسقط الافقى ظاهرة الرأسى وثالثاً الرواسم الخارجة من القوس ع د فانها ظاهرة المسقطين ورابعاً الرواسم الخارجة من القوس ح ا فانها عكس المتقدمة أى أنها مخبأة المسقطين معاً ولا شك أن هذا هو مصداق ما تقدم في أواخر به ١٤٠ د

به ١٤٣ د وانرجع الآن محل المسألة التي نحن بصدد حلها فنفرض أن م هي المسقط الافقى للنقطة المألومة على سطح الاسطوانة التي يراد منها د المستوى المماس لتلك الاسطوانة ونقول ان هـ هذا المسقط الوحيد كاف لتعيين النقطة الفراغية المذكورة

لأنه حيث كانت تلك النقطة موجودة على سطح الاسطوانة فيمكن تعيين مسقطها الرأسى بواسطة المسقط الأفقى له ولذلك يقال لابدوان عرجه هذه النقطة رأسه من رواسم الاسطوانة وهذا الراسم ينسقط أفقياً على م ل الموازى الى إ ب وبأن المستقيم م ل متلاق مع القاعدة فى نقطة ل فتكون اذن هذه النقطة أثراً أفقياً لهذا الراسم وعليه فيكون مسقطه الرأسى عبارة عن المستقيم ل د الموازى الى إ ب فيلزم حينئذ للحصول على المسقط الرأسى للنقطة م ان يقام منها عمود على خط الارض ويدعى بتلاقى مع ل د فى نقطة م التى تكون بالضرورة مسقطاً رأسياً للنقطة المذكورة ومع ذلك فهناك حل آخر لأنه لما كان المستقيم م ل ملاقياً للقاعدة فى نقطتين مثل ل و فيمكن ان يقال ان نقطة و هى أيضاً أثراً أفقياً لرأسه ثان من رواسم الاسطوانة منسقط كذلك على م و لكن مسقطه الرأسى هو و د بحيث لو مد العمود م م حتى يتلاقى مع و د فى نقطة مثل م رأينا انه يوجد على الاسطوانة نقطة ثانية هى (م و م) متحدة المسقط الأفقى مع نقطة (م و م) الاولى اذ ان كليهما منسقط أفقياً على نقطة م الوحيدة

بـ ٤٤٤ اذ اذا تقرر هذا وعلمنا ان هناك نقطتين على سطح الاسطوانة منسقطتين أفقياً على نقطة م رأينا ان للمسئلة الاصلية حلان لنبدأ بأحدهما فنقول اذا اردنا ان نرسم من نقطة (م و م) الاولى مستويًا مماساً للأسطوانة يقال لاشك ان هذا المستوى يشتمل على الراسم (م ل و م د) المار بتلك النقطة وبناء عليه يكون الاثر الأفقى لذلك المستوى ما زامن الاثر الأفقى ل لهذا الراسم ثم وكون المستوى المذكور مماساً للأسطوانة بطول هذا الراسم فلا شك انه يشتمل على المستقيم المماس للقاعدة فى نقطة ل أعنى المستقيم ل ص ويكون هذا المستقيم أثراً أفقياً له أى للمستوى المماس المطلوب ولاحل الحصول على أثره الثانى يبحث عن الاثر الرأسى للمستقيم (م ل و م د) الموجود فى هذا المستوى فيوجد أنه هو نقطة د وعليه فيكون المستقيم ص د هو الاثر الرأسى للمستوى المماس المطلوب لكن اذا وقعت نقطة تقاطع الاثر الأفقى ط ص بخط الارض خارجاً عن حد الرسم يتصور بنقطة (م و م) مرور مستقيم مساعد مواز الى الاثر الأفقى ل ص فيكون مسقطه الأفقى م س موازياً الى ص ل ومسقطه الرأسى م س موازياً الى خط الارض فلو بحثنا عن الاثر الرأسى س لهذا المستقيم كانت هذه النقطة أيضاً من نقط الاثر الرأسى للمستوى المماس وعليه فيكون س د هو هذا

الاثر وعلى كلاً من الحالات فان هذه العملية يصح استعمالها دائماً لاجل التحقيق وأما المستوى المماس للأسطوانة في نقطة (م و م) فانه يتعين بملاحظة أن راسم التماس يكون منسجماً في هذه الحالة أفقياً على م و وراسمها على م و وحينئذ فلورسم من الاثر في هذا الرسم مستقيم مثل م و لا مماس لقاعدة الاسطوانة كان هذا المماس أثراً أفقياً للمستوى المماس الجديد ويتعين أثره الرأسى لآء كما تقدم بالبحث عن نقطة رء التي يتلاقى فيها راسم التماس مع المستوى الرأسى للمنسجمة وان لزم الحال يستعان بالافقي المار بنقطة (م و م) الذي تتعين بواسطته نقطة ثالثة من الاثر المذكور

ب١٤٤ يدعي ان يلاحظ انه حيث كان المستويان المماسان ط ص م و ط ل م و الاذان قد عيناهما آنفاً مشتامين على راسمين من رواسم الاسطوانة وكان هذان الراسمان متوازيين من خاصية توازي جميع رواسم الاسطوانة فينبغي حينئذ ان يكون خط تقاطع المستويين المماسين المذكورين مستقيماً موازياً لرواسم الاسطوانة وبناء على ذلك اذا عيننا بموجب ما تقدم خط تقاطع هذين المستويين وكان هو (ط م و ط م) لزم ان يكون هذا المستقيم موازياً بالضبط الى (ا ب و ا ب) وهذا تحقيق آخر للاعمال الرسمية

ب١٤٦ يدعي بناء على الاسباب المندرجة في ب١٤٤ ان يلزمنا فقط بالبحث عن اثرات المستويات المماسية بدون ان نعتبر ان هذه المستويات موجودة وجوداً حقيقياً لكن بما ان لهذه الاثرات وجوداً فينبغي حينئذ ان نبين اجزائها الخبئة بقسمة على الاسطوانة على المستوى الافقي والمستوى الرأسى بخطوط نقطية وأما رواسم الاسطوانة المتنوعة فانه كان يمكننا ان نبين الذي استعملناه منها للمساعدة على إيجاد المستويات المماسية بخطوط مجزئة طبقاً لما اصطالحنا عليه قبل لكننا قد فرضنا اعتبار جميع هذه المستقيمات كعدة رواسم موجودة على الاسطوانة وجوداً حقيقياً لاجل أن مجموع هذه الرواسم يبين لنا جيداً هيئة السطح ومن ثم وجب علينا بيان هذه الرواسم بخطوط كاملة ان كانت مشاهدة أو نقطية ان كانت غير مشاهدة ومعرفه المشاهد والغير مشاهد منها راجع لما تقدم في ب١٤٤ وفي ب١٤٢

ب١٤٧ اذا اريد تعيين المنحنى الذي تنفذ فيه الاسطوانة من المستوى الرأسى للمنسجمة فيكون ذلك أن يبحث عن الاثرات الرأسية لرواسم هذا السطح المتنوعة فيحصل بذلك خط مثل م و م و م و وهذا الخط يكون في مثالنا هذا قطعاً ناقصاً ومماساً للآخرين

الرأسيين من المستويين المماسين في نقطتي $ك$ و $د$ لأن هذين المستويين يشتملان على جميع المستقيمات المماسية للمنحنيات المرسومة على سطح الاسطوانة من جميع نقاط راسم تماس كل منهما. ولأجل الحصول على أعلا نقطة وأولى نقطة من المنحنى $ك د هـ$... يكفي أن نعين الراسمين الخارجين من نقطتي $ع$ و $ح$ اللتين تماس القاعدة في كل منهما يكون موازيا إلى خط الأرض لأن المستوى المماس للأسطوانة في كل واحد من هذين الراسمين يقطع المستوى الرأسي في مستقيم مواز لخط الأرض أعني أفقيا. فمثلا المستوى المماس بطول الراسم ($ع ش$ و $ع ش$) يقطع المستوى الرأسي في مستقيم أفقي يكون بالضرورة مماسا للمنحنى $ك د هـ$... وعليه فتكون نقطة $ش$ هي أعلا نقطة لأن المماس للمنحنى فيها أفقي وبمثل ذلك تكون نقطة $ش$ هي أولى نقطة ويجب أن يلاحظ أن هذه النتيجة تكون صحيحة مهما كانت الاسطوانة المعروفة حيثما اتفق حتى ولو لم تكن قاعدتها دائرة

بشأن المطالب مدمستومماس لاسطوانة وماربطة خارجة عن سطحها لذلك نفرض أن الاسطوانة المعروفة هي نفس الاسطوانة الميمنة في (شكل ٨٧ لوجه ٢٠) وأن النقطة المعينة في الفراغ هي نقطة ($هـ$ و $هـ$) ونرسم من هذه النقطة مستقيما مثل ($هـ ط$ و $هـ ط$) موازيا للرأس المماس لاسطوانة المعروفة فيكون بالضرورة هذا المستقيم موجودا بأكمله في المستوى المماس الذي نبحث عنه لأن المستوى المذكور مهما كان وضعه لابد وأن يكون مشتملا على أحد رؤس الاسطوانة وبما أن المستقيم ($هـ ط$ و $هـ ط$) مرسوم من نقطة ($هـ$ و $هـ$) التي يراد تدمير المستوى المماس بها وموازي إلى مستقيم موجود في ذلك المستوى المماس وهو راسم التماس فيكون المستقيم ($هـ ط$ و $هـ ط$) موجودا في المستوى المماس المطلوب وبناء عليه إذا بحث عن الاثر الأفقي لهذا المستقيم علمت لنا نقطة من أثر المستوى المماس المطلوب وبما أن هذا الاثر يجب أن يكون مماسا للقاعدة الاسطوانة طلبة الماتقدم في ٣٢ فلا جرم أن يكون هو أحد المماسين طلصه $ر$ ط ولا الذين لا يمكن أن يرسم للقاعدة من نقطة ط مماسات سواهما ومن ذلك يظهر أن هناك مستويين يحلان المسئلة يمكن تعيين أثرهما الرأسيين بالسهولة لأن كلا هذين المستويين مشتمل على المستقيم ($ط هـ$ و $ط هـ$) وعلى الراسم الخارج من إحدى نقطتي التماس له أو في الضرورة

يكون الاثران الرأسيان المطلوبان مادين بالاثرات الرأسية لهذه المستقيمات واذن فيكون أحدهما هو تر^2 والثاني تر^3 وفضلا عن ذلك فإنه يمكن أن يستعان على تعيين هذين الاثرين أو على تحقيقهما ان كانا معينين بقرير مستقيم أفقي من نقطة (هـ د هـ) موجود في المستوى الذي يرام تعيين أثره الرأسى من المستويين المذكورين كما فعل هذاني به ٤٤٤د ويبحث عن الاثر الرأسى لهذا الافقى

(تنبيه) اعلم أن السبب في وقوع نقطتي التماس ل و هـ على مستقيم واحد ومازالى في مسألتنا هذه ما هو الا لاكوننا استعملنا الماشكل المسألة الماضية لكن متى أخذت نقطة (هـ د هـ) بالاختيار المطلق فان هذه الحالة لا تحصل دائما وبالمجمل فان ذلك لا يغير شيئا من البراهين والاجاآت التي استعملناها في حل المسألة المحالية به ٤٤٩د المطلوب رسم مستو مماس لاسطوانة ومواز لمستقيم معلوم

لنفرض أن الدائرة ا ب ص د ح (شكل ٨٨ لوحه ٢٠) الموجودة في المستوى الافقى للمستطه هي قاعدة الاسطوانة المعلومة وأن المستقيم (هـ ف د هـ) أحد رؤسها ثم نبحث عن محيطها الظاهريين على المستويين الثابتين كما فعل ذلك في به ٤٤٤د ثم بعد ذلك نقول اذا فرضنا أن المستقيم الفراغى المعلوم الذى يراد جعل المستوى المماس المطلوب موازى اليه هو المستقيم (م هـ د هـ) فيؤخذ على هذا المستقيم نقطة اختيارية وتكون نقطة (م د م) التي هي أثره الرأسى ويمرر بها مستقيم مثل (م ا د م ا) مواز لرؤس الاسطوانة ثم يمرر بها هذين المستقيمين مستو فيكون أثره الافقى بالضرورة هو المستقيم ا هـ ومن المعلوم أن هذا المستوى يلزم أن يكون موازيا للمستوى المماس المطلوب لان هذا المستوى المماس يشتمل بالطبيعة على رؤس من رؤس الاسطوانة وبناء على ذلك يكون موازيا لكل من المستقيمين (م ا د م ا) و (م هـ د م هـ) الموجودين في المستوى الذى أثره الافقى هو ا هـ وحيث انضج لنا توازى المستوى المماس المطلوب الى المستوى ا هـ فيكون بالضرورة الاثر الافقى للمستوى المماس المذكور عبارة عن أحد المستقيمين ص هـ و ط هـ المماسين للقاعدة والموازيين الى ا هـ واذن فيكون لهذه المسئلة حلان أيضا ويتعين الاثران الرأسيان لهذين المستويين مع السهولة بمساعدة رؤس التماس (ص هـ د هـ) للمستوى الاول ورؤس التماس (ط د و ط ل) للمستوى الثانى وبما ان المستويين

المماسين في الحالة الراهنة متوازيان يلزم أن يكون اثرهما الرأسيان متوازيين أيضا
 بنسبة ينتج مما تقدم أنه إذا كانت الاسطوانة التي يراد بيانها بالرسم على مستويي
 المسقط قائمة وقاعدتها في المستوى الافقي فيكفي لاجل أن نصير تلك الاسطوانة معينة
 معلومية قاعدتها فقط لان الرواسم يكون اتجاهها في هذه الحالة معينة بما أنها تكون
 كلها عمودية على المستوى الافقي وذلك مبني على خاصية الاسطوانة القائمة فان الاسطوانة
 القائمة تعرف بأنها هي الاسطوانة التي تكون رواصمها عمودية على مستوى قاعدتها فاذا
 تقرر هذا ونفرض أن المطلوب بيان الاسطوانة القائمة التي قاعدتها هي الدائرة
 ا ب ح د هـ و (شكل ٨٩ لوحه ٢١٤) المعتبرة في المستوى الافقي للمسقط بطريقة المساقط
 يقال ان المحيط الظاهري لتلك الاسطوانة على المستوى الافقي هو في هذه الحالة نفس
 القاعدة ا ب ح د هـ و لان الاسطوانة المماسية للسطح والعمودية على المستوى الافقي التي
 بهاتين محيطة الظاهري تؤلف في هذه الحالة الى نفس الاسطوانة القائمة المعلومة وأما
 المحيط الظاهري لها على المستوى الرأسى فلا يجاهد فمحصر الاسطوانة بين مستويين مماسين
 لها وعموديين على المستوى الرأسى للمسقط وفي هذه الحالة يكون هذان المستويان عموديين
 على المستوى الافقي للمسقط أيضا لكونهما مشتملين على مستقيمين عموديين على المستوى
 المذكور وهما راسما قائمتاهما بالاسطوانة واذن يكون أحد المستويين المذكورين
 هو المستوى ا ا' الذي اثره على مستقيم واحد عمودى على خط الارض ومماس
 للقاعدة واثر المستوى الثانى على مستقيم هـ ه' مماس لها أيضا وعمودى على خط
 الارض وليكون المسمطين الرأسيين راسمى تماس هذين المستويين بالاسطوانة
 منطبقين على الاثرين الرأسيين ا ا' و هـ ه' فيكون هذان المستقيمان هما المحيط
 الظاهري للاسطوانة على المستوى الرأسى ولوفرنا ان الاسطوانة محدودة من الاعلا
 بدائرة موازية للمستوى الافقي تنسقط أفقيا على ا ب ح د هـ و ورأسا على المستقيم ا ا' هـ
 الموازى لخط الارض فيكون المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى الرأسى عبارة
 عن المستطيل ا ا' هـ ه'

فلو اردنا ان نرسم مستويا مماسا لتلك الاسطوانة من النقطة المنسقة أفقيا على و لكفى
 ان نرسم من المسقط مستقيم و لم مماسا للقاعدة فيكون هو الاثر الافقى للمستوى المماس
 المطلوب ولكون المستوى المذكور يلزم ان يكون عموديا على المستوى الافقى لمروره براسم
 من رواصم الاسطوانة فيكون اثره الرأسى عبارة عن م العمودى على خط الارض .

وأما إذا رسم المستوى المماس للأسطوانة في إحدى نقط الراسم الخارج من نقطة وكان المستوى المذ كود موازيا إلى المستوى الرأسى للمسقط وليس له بناء على ذلك أثر رأسى وانما أثره الأفقى هو المستقيم وذلك الموازى لمخط الأرض ومخط تقاطع هذا المستوى مع المستوى وم يلىزم أن يكون رأسا لانه على مائدت فى به ٤٠ دى لىزم أن يكون موازيا لراسم الاسطوانة فهو منسقط أفقيا حينئذ لى على نقطة ل محل تقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين المماسين ورأسيا على المستقيم ل ل العمودى على خط الأرض به ٤٠ د وبالعكس إذا فرضنا ان الاسطوانة القائمة المعلومة قاعدتها موجودة فى المستوى الرأسى وكانت دائرة مثل آ ت ز ه و د ت (شكل ٩٠ لوحة ٢١) كانت نفس تلك الدائرة محيطا ظاهريا للأسطوانة المعلومة على المستوى الرأسى ومحيطها الظاهرى على المستوى الأفقى هو المستطيل ا ه ه ا ويكون المستوى المماس للأسطوانة فى أى نقطة من سطحها عموديا على المستوى الرأسى فأثره الرأسى هو المماس للدائرة آ ت ز ه و د . . . فى المسقط الرأسى لنقطة التماس وأثره الأفقى مستقيم عمودى على خط الأرض وذلك كالمستوى ت م م وأيضاً المستوى ل د ع المماس للأسطوانة فى النقطة المنسقة رأسيا على ل يكون موازيا للمستوى الأفقى وليس له أثر أفقى ومتقاطع مع المستوى ت م م فى المستقيم (ل د ل) العمودى على المستوى الرأسى

به ٥٤ د فى الاحوال المتقدمة جميعها قد فرضنا دائماً أن قاعدة الاسطوانة موجودة فى أحد مستويي المسقط والآن نقول اذا كان دليل الاسطوانة المعلومة متخنيا موجودا فى الفراغ كاللائرة (ا ب د ه و آ د) (شكل ٩١ لوحة ٢١) السكائنة فى مستواً أفقى مرتفع عن المستوى الأفقى للمسقط ولذلك انسقطت أفقيا على دائرة مساوية لها ورأسيا على المستقيم آ د الموازى لمخط الأرض فيكون محيطها الظاهرى على المستوى الأفقى مركبا من المماسين ه ب و د الموازيين الى المسقط الأفقى ه ب للمستقيم المبين لاتجاه رؤاسم الاسطوانة ثم من نصف الدائرة ب ع د و أما المحيط الظاهرى على المستوى الرأسى فانه يتعين برسم المماسين ا آ ر د العموديين على خط الأرض ومد المستقيمين آ ح ر ح ط من نقطى آ ر د الموازيين الى ه ب ويكون حينئذ هذا المحيط الظاهرى مركبا من المستقيمين آ ح ر ح ط ومن المستقيم آ د الذى هو المسقط الرأسى لدليل الاسطوانة

فاذا أر يد رسم المستوى المماس لهذه الاسطوانة من النقطة المنسقة أفقياً على م كان
لذلك طريقان الاول ان يتصور امتداد الاسطوانة المعلومة من جهة قاعدتها الى ان
تقطع المستوى الأفقي للسطح في منحن ويعتبر بعد ذلك هذا المنحن قاعدة جديدة
للالسطوانة فيؤل حينئذ حل المسئلة الى الحل المبين في ب٤٤١د ويكفي لتعيين خط
تقاطع الاسطوانة المعلومة بالمستوى الأفقي ان يبحث عن الاثرات الأفقية لكافة
رواسمها فتعين عدة نقط مثل ١ ١ د ب د ع د ح... الخ وتجمع بمنحن مثل
١ ١ ب ع ح د الذي يكون في مسلة انما هذه دائرة مساوية لقاعدة الاسطوانة الاصلية
أعنى للدائرة ا ب ع د و بتطبيق جميع ما قيل في ب٤٤١د على الاسطوانة المعلومة
باعتبار قاعدتها التي في المستوى الأفقي للسطح يتعين المستويان ل ل ا و ك ص ط
المماسان للاسطوانة في نقطة (م د م) و (م د م) ولومدت الاسطوانة في اتجاه
مضاد للذي مدت نحوه في الحالة الاولى لقطعت المستوى الرأسى في منحن يمكن اتخاذه
قاعدة لما ونجرى عليه العمل كما أجريناه على القاعدة التي في المستوى الأفقي ولا فرق
بين الحالتين

(الطريقة الثانية) يصح أجراء العمل على نفس قاعدة الاسطوانة المعبرة في الفراغ ولذلك
يرسم من نقطة م مسقط نقطة التماس المعلومة مستقيم مثل م س ع مواز الى ه ب
ثم نسقط نقطة س ع وهما نقطة اتقابله بالسطح الأفقي للقاعدة على المستوى
الرأسى وبعد إيجاد مسقطي الرأسين س س د ع يرسم منهما المستطمان الرأسيان
ع ق و س ق للراسمين المنسقين أفقياً على م س ع ثم يقام العمود م م الذي به
يتعين المستطمان الرأسيان م د م ل نقطتي التماس المشتركين في المسقط الأفقي م ثم
لاجل تعيين المستوى المماس للاسطوانة في احدى هاتين النقطتين يرسم مستقيم
مماس للقاعدة (ا ب د ع) في نقطة تقابل الراسم المار بالنقطة المذكورة
مع القاعدة وتعين مسقطي هذا المماس ثم يلاحظ بمقتضى ب٤٤١د ان هذا المماس
يوجد في المستوى المماس المطلوب وبناء عليه فباتحاد هذا المماس مع راسم التماس
يمكن تعيين المستوى المماس للاسطوانة لانه هو المستوى المار بهما وحيث ان هذه
العملية سهلة جداً فلا تفت لبيانها في الشكل بالرسم خوفا من تكثير المخطوط الذي
ينبغي عليه ارتباطك الشكل وصعوبة فهم أجزائه

(تنبيه) اذا كانت قاعدة الاسطوانة منحنى غير الدائرة سواء كانت في المستوى الافقى أو في الفراغ وعموما مهما كان وضع تلك القاعدة وشكلها ومهما كان اتجاه رؤس الاسطوانة فالعمل واحد لا يختلف عما تقدم الابهام بعض تغيرات يسيرة بقضية تغيير الوضع وأما نفس طريقة الاجراء فانها عموما لا تتغير فيها

بـ ٥٣٠ الم تنبيه قبل فقل باب الكلام على مسائل تماس الاسطوانات بالمستويات ينبغي ان نلاحظ انه لا يمكن أن يكلف المستوى بان يكون مماسا لسطح من هذه السطوح اعني السطوح الاسطوانية بشرط أن يمر بمستقيم معلوم لانه قد رأينا في بـ ١٣٢ ان المستوى المماس لسطح اسطوانى في نقطة ممسه في طول الراسم المار بتلك النقطة وفيه من ذلك أن شرط تماس الاسطوانة بمسـ وفي نقطة واحدة يشتمل في باطن الارض على شرطين لان رؤس التماس يكفي لتحديد نقطتان فكأن المستوى المماس مجبور بحسب خاصيته على أن يسه وفي شرطين ولولم يكلف بالشرط واحد فاذا أضفت على شرط تماسه للاسطوانة شرطا آخر وهو مروره بمستقيم معلوم ولا يخفى ان هذا الشرط يشتمل على شرطين أيضا فكأننا كلفنا المستوى بان يمر من أربع نقط مع أنه معلوم ان ثلاث نقط تكفي لتمريره في العادة وحينئذ فالشرط الرابع زائد والمسئلة تكون مستحيلة المحل لكن اذا كان المستقيم المعلوم موازيا لرؤس الاسطوانة فتكون المسئلة ممكنة المحل وتؤول الى مسئلة بـ ١٤٤ لان مرور المستوى المماس بالمستقيم الخارج عن الاسطوانة لم يكن في هذه الحالة الا كمروره بنقطة واحدة خارجة عنها وبيان ذلك انك لو أخذت على المستقيم المعلوم نقطة وحيدة ورسمت مستويا مماسا للاسطوانة ومارا بتلك النقطة لرأيت ان هذا المستوى يمر من طبيعته بكامل المستقيم المذكور لانه مارا بنقطة موجودة في المستوى المذكور وموازية مستقيم موجود فيه وهو رؤس التماس

بـ ١٤٥ الم المعلوم نقطة على سطح المخروط والمطلوب مد مستويا مماسا له منها ليكن المنحنى ا ب د (شكل ٩٢ لوح ٢٢٤) المعتبر في المستوى الافقى هو دليل المخروط وليكن نقطة (س د س) رأسه فنبتدئ أولا بالبحث عن المحيط الظاهري لهذا السطح على المستوى الافقى ولذلك نبحث بمقتضى بـ ١٣٩ عن جميع المستويات المماس له التي تكون عمودية على المستوى الافقى للسقط ومن حيث ان الانحراف على السطح مستوون هذه المستويات يكون متقدما مع السقط الافقى لرؤس تماسه بالمخروط فهذا يدل على ان الانحراف الافقى المذكور يكون مارا بنقطة س وأيضا من حيث ان

هذا الاثر يكون مماسا للقاعدة لانه تقدم في ١٣٤د أن المستوى المماس للخروط
يمسه بطول راسه من رواسته فيؤخذ حينئذ من ذلك ان المماسين س ا و س ب
المرسومين من نقطة س هما الاثران الأفقيان للمستويين المماسين للخروط والعموديين
على المستوى الأفقي وهما يماسان هذا المخروط بطول راسه (س ا و س ب)
(س ب و س ت) وهذان الراسمان هما المحيط الظاهري للخروط على المستوى
الأفقي بحيث ان كل راسم وجد تحتها أعني كل راسم من الرواسم التي تخرج من الجزء
ا ب من القاعدة يكون غير مشاهد على المستوى الأفقي وكل راسم يخرج من القوس
الباقى من القاعدة يكون بعكس ذلك أعني مشاهدا عليه

وأما المحيط الظاهري على المستوى الرأسى فانه يتحصل طبقا لما علم في ١٣٩د بالبحث
عن المستويات المماسية للخروط التي تكون عمودية على المستوى الرأسى للمسقط وبناء
على ذلك فالاثرات الأفقية لهذه المستويات يلزم أن تكون عمودية على خط الارض
ومماسية بمقتضى ١٣٤د للقاعدة ا ب واذن فالمماسان ث ت و د و يكونان
هما الاثرين الأفقيين للمستويين الممكن رسمهما مماسين للخروطين وعموديين على
المستوى الرأسى وأثرهما الرأسى ان يمان بالضرورة بنقطة س أعني المسقط الرأسى
لرأسى المخروط ويكونان هما ث س و د س ومن حيث ان هذين المستويين يماسان
الخروط بطول الراسمين (ث س و ت س) و (د س و د س) يؤخذ من ذلك ان
هذين المستقيمين هما المحيط الظاهري للسطح منسقطا على المستوى الرأسى وبناء عليه
في كل راسم وجد خلف هذين المستقيمين أعني من الرواسم الخارجة من القوس ث ا
يكون غير مشاهد في المسقط الرأسى وبالعكس جميع الرواسم التي توجد امامهما تكون
مشاهدة المسقط الرأسى

ب ١٥٥د وانرجع الآن لحل مسئلتنا الاصلية فنفرض ان نقطة م هي المسقط
الأفقي للنقطة المعلومه ولا يخفى انه لا ينبغي اتخاذ مسقطها الرأسى مجانا أى بالاختيار
لانه حيث كانت هذه النقطة موجودة على سطح المخروط فلا بد أن تكون موجودة على
راسم من رواسته وهذا الراسم يلزم أن ينسقط أفقيا على س م وهذا المستقيم يمكن أن
يعتبر اثره الأفقي في نقطة ه أوفى نقطة ح فيكون مسقطه الرأسى هو س ه أو س د
فاذا أسقطت نقطة م عليها بعمود على خط الارض تحصل للنقطة المعلومه حلان
احدهما (م د م) والثانى (م د م)

بـ ١٥٦ (شكل ٩٢ لوح ٢٢٤) إذا تقرّر هذا فلابد من البحث عن المستوى المماس للمخروط في نقطة (م و م) الاولى ونقول ان هذا المستوى يشتمل بالضرورة على الراس (س هـ و س هـ) ويمس المخروط بطول ذلك الراس طبقا لما في بـ ١٣٤ و بناء على ذلك يكون الاثر الافقي لهذا المستوى عبارة عن المستقيم ط هـ و المماس للقاعدة وأما أثره الرأسى فانه يمر بنقطة (ن و ن) التي تقابل فيها راس التماس مع المستوى الرأسى للمسقط ثم بنقطة و التي هي نقطة تقابل الاثر الافقي ط هـ بخط الارض. لكن من حيث ان نقطة و هـ هذه وقعت في شكلنا هـ لذا خار جاعن حد ود الراس فلاحظ استواضها بنقطة أخرى من الاثر الرأسى للمستوى بتوهم مرور مستقيم أفقي في المستوى المماس المطلوب من نقطة (م و م) وليكن (م ص و م ص) هو هـ هذا الافقي فيقابل المستوى الرأسى في نقطة صه وتكون تلك النقطة نقطة ثانية جديدة من الاثر الرأسى و صه للمستوى المطلوب

وبمثل ذلك يبين المستوى المماس لسطح المخروط في نقطة (م و م) الثانية بان يقال ان راس التماس يكون في هذه الحالة عبارة عن المستقيم (س ح و س ح) وعلى هذا يكون المماس ح و للقاعدة هو الاثر الافقي للمستوى المماس الجديد ولأجل تعيين أثره الرأسى ع ن يبحث عن نقطة ن التي هي نقطة تقابل راس التماس (ح س و ح س) بالمستوى الرأسى أو يستعان كما تقدم بالا فقي (م ض و م ض) السكّان في المستوى المماس الذي نحن بصدده تعيينه

بـ ١٥٧ ينبغي ان يلاحظ أنه لا داعي اشتغال كل واحد من المستويين المماسين اللذين قد تعينا أنفا على راس من رواهم المخروط فكل منهما يمر حينئذ برأس المخروط (س و س) ومن ذلك ينتج أنه اذا بحث عن خط تقاطع هذين المستويين وهو المنسقط أفقيا على ط م ورأسيا على ط م فمن الضروري ان يمر المستقيم الاول بنقطة س والثاني بنقطة س وهذا فيه تحقيق للاعمال المتقدمة وفضلا عن ذلك ينبغي أن يكون الاثران الرأسيان لهذين المستويين مماسين المنحنى تقاطع المخروط بالمستوى الرأسى في نقطتي ن و ن وهـ هذا المنحنى يبين بالبحث عن الاثر الرأسى لكافة رواهم المخروط وتجمع بمنحنى

بـ ١٥٨ المطلوب مدمستوى مماس لسطح المخروط من نقطة معلومة خارجا عنه (شكل ٩٣ لوح ٢٢٤) ليكن الخط ا ب هو قاعادة المخروط ولتكن نقطة

(س و س) رأسه فيبحث كما تقدم عن المحيطين الظاهرين للسطح على مستويي المسقط
 وبفرض ان نقطة (هـ و هـ) هي النقطة المعلومة في الفراغ التي يراد جعل المستوى
 المماس المطلوب مارا منها ومن حيث ان المستوى المماس المطلوب لابد ان يشتمل على
 راسه من المخروط فهو يمر حينئذ برأسه (س و س) وبناء على ذلك يشتمل هذا المستوى
 المماس على المستقيم (س هـ و س هـ) وحينئذ فلنبحثنا عن الاثر الافقي (ط و ط)
 لهذا المستقيم ورسم منه المماسان ط هـ و ط ح ع للقاعدة كان هذان المستقيمان
 اثرين افقيين للمستويين المماسين الموفيين لمنطوق المسئلة وأما اثرهما الرأساني فانهما
 يتعينان بواسطة المستقيم (س هـ و س هـ) الموجود في كلا المستويين المطلوبين
 أو بمساعدة راسي تماس هذين المستويين وهما الراسمان (س هـ و س هـ)
 و (س ح و س ح) وكان يمكن أيضا ان يستعمل مستقيم افقي مساعد يمد من نقطة
 (هـ و هـ) في كل واحد من المستويين كما أجرين ذلك جملة مرار
 به ١٥٩ الم المطلوب ايجاد مسـتوي يكون مماسا للمخروط معلوم وموازيا للمستقيم معلوم
 أيضا

(شكل ٩٣ لوحة ٢٢) اذا حفظنا المعاليم المتقدمة على حالها وفرضنا ان (م م و م م)
 هو المستقيم الذي يراد جعل المستوى المماس موازيا له وقلنا من حيث ان هذا المستوى
 يلزم ان يمر برأس المخروط فلورسم من هذه النقطة مستقيم مثل (س ط و س ط)
 موازيا لـ (م م و م م) لـ كان المستقيم المرسوم هكذا موجودا في المستوى المطلوب
 وبناء على ذلك فالاثر الافقي (ط و ط) لهذا المستقيم يكون نقطة من الاثر الافقي
 للمستوي المماس وحينئذ فالاثر الافقي للمستوي المماس المذكور لم يكن سوى احد
 المستقيمين ط هـ و ط ح ع المرسومين من نقطة ط مماسين للقاعدة ومن هنا يعلم
 ان لهذه المسئلة حلان أيضا وهما الاثران الرأسانيان لهذين المستويين كما في البند
 السابق

به ١٦٠ من حيث ان كل مستوي مماس للمخروط في نقطة من سطحه يمس هذا المخروط
 في طول راسه من رواسته كما يشهد ذلك من به ١٣٤ فالتنبية الذي اشرنا اليه في به ١٥٣
 يطبق هنا على الحالة الراهنة ومنه ينتج انه لا يمكن ان يكلف المستوى بان يكون مماسا
 لمخروط وما را في آن واحد بمسـتقيم أو بنقطة من معلومتين أيضا ما لم يكن المستقيم المعلوم
 أو المستقيم الواصل بين النقطتين المعلومتين ما را من طبيعته برأس المخروط لان ذلك

ما يصير المسئلة شبيهة بالمحالة التي لم يكن فيها سوى نقطة واحدة خارجة عن الخروط ويراد تقرير المستوى المماس بها كما رأينا ذلك في به ١٥٨

* (تنبيه) قبل أن نقيم هذا الفصل نرى أنه من النافع أن نضيف إليه بعض مسائل تطبيقية على ما تقدم ونبين للطالب طرق حلها على وجه الاختصار بدون أن نعمل عنها الرسم اللازم. وكلف المجتهدين من التلاميذة بأن يعملوا بأنفسهم الرسومات التي تحل بها تلك المسائل

به ١٦١ المعلوم نقطة والمطلوب أن يمد منها مستوى يصنع مع المستوى الأفقي زاوية معينة مثل ا

لذلك تؤخذ بالاختيار نقطة على المستقيم المعلوم وينزل منها مستقيم عمودي على المستوى الأفقي ومستقيم آخر مائل عليه بشرط أن يكون هذا المستقيم المائل موازيا إلى المستوى الرأسي للسقط وأن يكون مسقطه الرأسى صانعا مع خط الأرض زاوية مساوية إلى ا وحينئذ إذا تصورنا أن هذا المائل يدور حول المستقيم الرأسى فإنه يولد مخروطا قائما أثره على المستوى الأفقي دائرة يمكن تعيينها بسهولة ورؤس هذا المخروط تكون كلها مائلة على الأفق بمقدار زاوى يساوى ا وبناء على ذلك إذا رسمنا مستويا مماسا لهذا المخروط ومازّا بالمستقيم المعلوم ولا يخفى أن ذلك ممكن إذا المستقيم المعلوم مار برأس المخروط فالمستوى المماس المتحصل هكذا هو بالضرورة المستوى الموفى للشروط المقررة في منطوق المسئلة

به ١٦٢ المطلوب رسم مستو مماس لاسطوانة معلومة بشرط أن يكون مائلا على المستوى الأفقي بزاوية قدرها معين يرمز لها بحرف ا

لذلك يرسم كافي المسئلة المنة دمة مخروط تحركى رؤسها مائلة على المستوى الأفقي بقدر ا ثم بعد ذلك لو دمر رأس المخروط مستقيم موازيا إلى رؤس الاسطوانة ومر به هذا المستقيم مستويا مماسا للمخروط السابق علينا سوى أن نرسم مستويا مماسا لاسطوانة المعلومة بشرط أن يكون موازيا إلى المستوى المماس للمخروط الذى صار تعيينه وهى مسئلة تحل كافي به ١٦٩ يدبر رسم مستقيم مماس لقاعدة الاسطوانة وموازيا للأثر الأفقي من المستوى المماس للمخروط فيكون هو أثر المستوى الموفى لمنطوق المسئلة ويتعين أثره الرأسى كما مر انما يجب التنبيه على أن هذه المسئلة قد تكون مستحيلة التحل وذلك في حالة ما يكون المستقيم الممدود من رأس المخروط المساعدا بالتوازي لرؤس الاسطوانة ملاقيا المستوى الأفقي في نقطة داخل قاعدة المستديرة

* (١١٧) *

(نتيجة) اذا أريد حل نفس هذه المسئلة على مخروط معين ذي قاعدة جيمًا اتفق لزوم تنويع الحل بأن تجعل رأس المخروط المعلوم رأس المخروط المتحرك المساعدة ثم بعد ذلك يرسم مستقيم مماس مشترك لقاعدتي المخروطين فيكون هو الاثر الافقي للمستوى المطلوب
* (مسائل للحل) *

بـ ١٦٣ د المطلوب مدم مستقيم مماس لمخروط معلوم من نقطة معلومة بشرط ان يكون موازيا للمستوي معين
المطلوب رسم مستوي مماس لاسطوانة معلومة أو لمخروط معلوم بشرط ان يكون عموديا على مستوي معلوم
المعلوم مسقطا محور اسطوانة تحركية وطول نصف قطرها والمطلوب إيجاد أثرها على المستوى الافقي ومحيطها الظاهريين (أثر الاسطوانة على مستويها هو خط تقاطعها بذلك المستوى)

* (في تمة حل الزاوية المجسمة الثلاثية) *

بـ ١٦٤ د قد نمنا في بـ ٨٩ د على ان الثلاث حالات الاخيرة من الست حالات المتعلقة بحل الزاوية المجسمة الثلاثية المندرجة في بـ ٧٨ د وان كان يتيسر حلها باستعمال الزاوية المكملية وتؤول بذلك الى الثلاث حالات الاول لكن قلنا انه يمكن حل هذه الثلاث حالات الاخيرة بمحاول قائمة بنفسها ووجدنا أنه من بعد ذلك الكلام على المستويات المماسية للسطوح المخنكية نعود لتقييم حل تلك الثلاث حالات والآن حيث قد نسخت لنا الفرصة وأن أوان الكلام على ذلك فنقول

بـ ١٦٥ د الحالة الرابعة - المعلوم زاويتان زوجيتان مثل ا ب من زاوية مجسمة ثلاثية ووجهه مقابل لاجدهما كالوجه ج والمطلوب إيجاد الاشياء الباقية

(شكل ٩٤ لوحه ٢٣) لنأخذ مستوى الوجه ج المجهول مستويا أفقيا للمسقط ونرسم فيه منطبق الوجه المعلوم ب وليكن هذا المنطبق هو ا س ج وبعد ذلك نمرر مستويا رأسيًا مثل د ه ف عموديا على س ا ونرسم فيه الزاوية د ه و مساوية للزاوية الزوجية ا المعلومة من منظوق المسئلة وحينئذ فلنوردنا الوجه ا س ج حول اس الى أن يأتي في المستوى س ه و لانتقلت نقطة و الى د التي تنسقط أفقيا في نقطة د ثم لاجل تركيب الزاوية المجسمة لم يبق سوى ان يمرر بنا محور ف (س د ه و) مستويا

يكون صانعا مع المستوى الأفقي زاوية مساوية للزاوية الزوجية β ولذلك يعد
في المستوى الرأسى θ مستقيم مثل δ بحيث يصنع الزاوية $\delta = \beta$ ثم بعد
ان يتوهم دوران هذا المستقيم حول الرأسى δ ليدول مخروطا تحركيا قاعدته هي الدائرة
 δ يرسم مستوعما δ لهذا المخروط وماز بالحرف (δ, δ) فيكون أثر هذا
المستوى هو المستقيم δ من الممدود من نقطة δ مماسا للدائرة التي نصف قطرها
 δ وهذا الاثر هو المحرف الثالث من الزاوية المجسمة التي نحن بصدددها وبه يتحدد
الوجه $\delta = \delta$ وأما الوجه الثالث δ المنطبق هنا على $\delta = \delta$ فن المشاهد
بالسهولة أنه يتحصل بأن يؤخذ على العمود δ طول مثل δ مساو للراسم δ من
المخروط المماس له هذا الوجه

بـ ١١٦ (الحالة الخامسة) المعلوم من الزاوية المجسمة الثلاثية زاويتان زوجيتان
مثل α و β والوجه المنحصر بينهما δ والمطلوب إيجاد الاجزاء الباقية

(شكل ٩٥ لوجه ٢٣) محل هذه المسئلة ترسم على المستوى الأفقي زاوية مثل $\delta = \delta$
لتدل على الوجه المعلوم ثم غرر مستويا رأسيا مثل θ عموديا على المحرف δ و نرسم
فيه زاوية δ هـ مساوية للزاوية الزوجية α وبمثل ذلك ترسم زاوية $\delta = \delta$
في مستوعودى على المحرف δ وحينئذ فالمستويان δ هـ و δ يكونان
هما مستويا الوجهين المجهولين من المجسمة الثلاثية ولاجل الحصول على نقطة ثانية
مثل δ من المسقط δ لفاصلهما المشترك يكفي ان يقطع δ مستوعودى δ واحدهم أخوذ
بالاختيار وبناء على ذلك يؤخذ الارتفاع δ مساويا للارتفاع δ ثم بعد ذلك
لورسم المستقيمان δ و δ موازيين على التناظر لخطى الارض δ و δ
تحصل خطا التقاطع الأفقيان وهما δ و δ اللذان يعطيان بتقاطعهما نقطة δ
التي يبحث عنها وأخير الاجل تطبيق الوجهين المتقاطعين في خط δ يؤخذ العمود
 $\delta = \delta$ هـ والعمود $\delta = \delta$ و عليه فمكون حقيقة هذين الوجهين هي المبينة
بالزاويتين δ و δ وذلك بفرض ان الوجهين المذكورين قد دارا حول حرفي
 δ و δ حتى انطبقا على المستوى الأفقي

بـ ١١٧ (الحالة السادسة) المعلوم من الزاوية المجسمة الثلاثية زواياها الزوجية الثلاث

وهي a, b, c والمطلوب إيجاد الثلاثة وجوه
 (شكل ٩٦ لوحه ٢٣) لحل هذه المسئلة نعتبر أولان المستوى الافقي للمسقط هو مستوى
 الوجه المجهول c ونرسم فيه المستقيم الاختياري a ونعتبرانه أحد جوفى الوجه
 المذكور ثم نأخذ مستويا رأسيًا عموديا على a ونرسم فيه زاوية $\angle$ صه صه مساوية
 للزاوية الزوجية المعلومة a وبناء على ذلك يكون مستوى $\angle$ صه صه هو مستوى الوجه
 b ثم نتخبط نقطة مثل $\angle$ بالاختيار داخل الزاوية $\angle$ صه صه وينزل منها العمودان
 $\angle$ و $\angle$ على الوجهين c و b ونرسم زاوية $\angle$ ف و b وزاوية $\angle$ ع و c
 وحينئذ فلو دورنا هاتين الزاويتين حول المحورين $\angle$ و $\angle$ لمتولد عنهما مخروطان
 متحركان ويكون بداهة الوجه المجهول a مماسا لهما بحيث قد آلت المسئلة الى رسم
 مستويين في آن واحد كلان المخروطين المذكورين اللذين رأسهما المشتركة هي
 نقطة $\angle$ وقاعدتهما الدائرتان المرسومتان بنصف القطرين $\angle$ و $\angle$ ولحل
 حل هذه المسئلة الفرعية حلا سهلا يبحث عن الاثر الافقي للمخروط الثاني $\angle$ ع
 ويرسم مماس مشترك لهذا الاثر المنحني والدائرة التي نصف قطرها $\angle$ ف انما يكون أثر
 المخروط يتعين نقطة فنقطة وبالضرورة يكون رسمه تقريرا يديا فتجنب هذا الرسم التقريبي
 يستعان على الحل بمساعدة الاعتبارات الآتية
 نرسم داخل المخروطات $\angle$ و $\angle$ كرة مماسة لهما في طول الدائرة الافقية $\angle$ ف وللحصول
 على مركز هذه الكرة يرسم المستقيم $\angle$ ع العمودى على سطح هذا المخروط في نقطة $\angle$
 ثم ولايجاد كرة أخرى مساوية للأولى ومرسومة داخل المخروط الثاني $\angle$ ع أعنى
 مماسة لهما من الداخل ينبغي أن يقام على المستقيم $\angle$ ع العمود $\angle$ ش و $\angle$ ف ويتم
 متوازي الاضلاع $\angle$ ش ك و $\angle$ الذى به يتعين المركز $\angle$ للكرة الجديدة ونصف قطرها
 $\angle$ و إذا تقر هذا فلتنصوّر اسطوانة مماسة لهما بين الكرتين معا فتسمهما بالضرورة في
 دائرتين عظيمتين عموديتين على محورها وهو المستقيم $\angle$ ع ومن حيث ان المستوى الذى
 يمر المخروطين معا يلزم بالضرورة أن يكون مماسا للكرتين في آن واحد فينبغي
 أن يكون مماسا أيضا للأسطوانة الحالية وعليه فنؤول المسئلة الى أن يرسم من نقطة $\angle$
 مستوي مماس لهذا الاسطوانة المفرد

وبناء على ذلك فالطريقة السهلة هي أن يرسم في المستوى $\gamma\gamma$ العمودي على المحور $\gamma\gamma$ دائرة بنصف قطر مساو إلى $\gamma\gamma$ ثم يرسم لهذه الدائرة مستقيم مماس لها من نقطة تقابل هذا المستوى بالمستقيم المرسوم من نقطة γ موازيا إلى المحور وكل ذلك كان يمكن اجراءه في الانطباق على المستوى الافقي لكن توجد أيضا طريقة أقصر من ذلك بكثير وفي الواقع حيث يجب أن يكون المستوى المطلوب مماسا في آن واحد لكل من الاسطوانة والكورة $\gamma\gamma$ والمخروط $\gamma\gamma$ ونقطة تماسه بالكورة المذكورة يلزم أن تكون موجودة أولا على الدائرة الافقية $\gamma\gamma$ التي هي منحنى تماس الكورة بالمخروط وثانيا على الدائرة العظيمة الموجودة في المستوى $\gamma\gamma$ التي هي منحنى تماس الكورة المذكورة بالاسطوانة وبما أن هاتين الدائرتين متقاطعتان بالضرورة في وتر منسقط رأسها في نقطة γ ووضعنا المحققين مبين على المستوى الافقي بالمستقيم $\gamma\gamma$ فحيث تكون نقطة γ هي نقطة التماس والمستقيم $\gamma\gamma$ هو الاثر الافقي للمستوى المماس المطلوب وأثره الرأسى الذي يجب أن يمر بالرأس γ يكون بناء على ذلك عبارة عن المستقيم $\gamma\gamma$

وحيث ندفن حيث علم لنا مقدار حقيقة الوجه الافقي وهي $\gamma\gamma$ اس = $\gamma\gamma$ وعلم أيضا المسقط $\gamma\gamma$ للحرف الذي يتقاطع فيه المستويان $\gamma\gamma$ و $\gamma\gamma$ فلم يبق علينا سوى أن نطبق هذين المستويين الأخيرين حول محوري الدوران $\gamma\gamma$ و $\gamma\gamma$ فيتحصل بالسهولة الوجه $\gamma\gamma$ اس = $\gamma\gamma$ والوجه $\gamma\gamma$ اس = $\gamma\gamma$ ولنباحظ ان الحرف المنطبق على $\gamma\gamma$ ينبغي أن يكون مماسا للدائرة المرسومة من نقطة γ بنصف قطر مساو إلى $\gamma\gamma$ لان هذه الدائرة هي قاعدة المخروط الثاني $\gamma\gamma$ الذي يمس المستوى $\gamma\gamma$ أيضا

الى هنا انتهى الجزء الاول من كتاب البراعة المشرقية في علم الهندسة الوصفية وهو المقدار الذي تقررت درسه لتلاميذة التجهيزية قبل ان تفتح لهم مدرسة المهندسخانة وذلك بناء على ما قرره مجلس التحسينات للمدرسة المذكورة في احدى جلساته ويليها الجزء الثاني وأوله الباب الثالث في المستويات المماسية للأسطوح التحركية وفي الأسطوح القابلة للانبطاس والأسطوح المحاصرة

* (١٢١) *

وكان تمام طبعة مع أطلس الرسومات المتعلقة به في يوم السبت الخامس عشر من شهر
جمادى الأولى سنة ١٣٠٠ هجرية في ظل من تعطرت بشنائه الأفواه وبانغ من كل وصف
جميل منتهاه خديونا المعظم محمد باشا توفيق أدام الله بقاءه وإنجالة الكرام وذلك
في عهد نظارة الوزير الانغم والامير الاعظم سعادة احمد خيرى باشا أبى الله طيب
حياته وأدام كمال المعارف بحسن عنايته بمطبعة ديوان عموم المعارف مباشرة
بعالىهمة حضرة ملاحظها النقيب حسين افندى صبرى وبصحبة
حضرات مهجى المطبعة ومشاركة حضرة مؤلفه الامى الكامل

والجهدى الفاضل صابرا فندى صبرى هم

في ذلك والحمد لله على التمام وعلى

رسوله أفضل الصلاة

وأتم السلام

آمين

* (١) *

* (فهرست الجزء الاول من كتاب البراعة المنثرقية في علم الهندسة الوصفية) *

* (الباب الاول) *

(في الخطوط المستقيمة والمستويات)

مصحفة

٣ الفصل الاول في بيان الغرض الاصل من علم الهندسة الوصفية

٥ طريقة المساقط

٨ تحويل مستوي المسقط الى مستوي واحد

١٢ قواعد في التنقيط المصطلح عليها

١٤ الفصل الثاني في مسائل متنوعة على المستقيمات والمستويات

١٥ طريقة ايجاد البعد الحقيقي بين نقطتين

١٧ طريقة ثانية لحل هذه المسألة

١٩ تعيين المستويات بحسب شروط معاليمها

٢٤ تقاطع المستويات مع بعضها

٣١ المساقط المساعدة

٣٥ في المستقيمات والمستويات المتعامدة

٤٠ زوايا ميل المستقيمات والمستويات على بعضها

٤٨ ايجاد البعد الاصغر بين مستقيمين غير موجودين في مستوي واحد

٥٠ الفصل الثالث في تغيير مستويات المسقط

٥٣ في المسائل التطبيقية على مادة قدم

٥٥ الفصل الرابع في المسائل المختصة بحل الزاوية المجسمة الثلاثية

٦٠ في رد الزاوية الى الافق

٦٥ الفصل الخامس في كثيرى السطوح المنتظمة

* (الباب الثاني) *

(في الخطوط المنحنية والسطوح وطرق تولدها والمستويات المماسية لها).

٧٠ الفصل الاول في الخطوط المنحنية على العموم ومماساتها وخواصها

٧٥ مبادئ المنحنيات المستوية

٨٠ الفصل الثاني في تعاريف السطوح وفي طرق تولدها وأنواعها

