

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_186441

UNIVERSAL
LIBRARY

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No. H 510.7
R35 G

Accession No. H 5196

Author Dhad - M S and others

Title Dhad - M S and others

This book should be returned on or before the date
last marked below.

गणित-शिक्षण

गणित-शिक्षण

[For B. T., L. T., B. ED, and OTHERS]

लेखक

एम० एस० रावत

एम० ए०, एम० एस-सी०, एल० टी०

मुकुट बिहारी लाल अग्रवाल

एम० एस-सी०, बी० टी०



विनोद पुस्तक मन्दिर
हॉस्पिटल रोड, आगरा

प्रकाशक—

राजकिशोर अग्रवाल
विनोद पुस्तक मन्दिर
हॉस्पिटल रोड आगरा

प्रथम संस्करण

१९६१

मूल्य

४.००

मुद्रक—राजकिशोर अग्रवाल, कैलाश प्रिंटिङ्ग प्रेस
बागमुजफ्फर खाँ, आगरा

भूमिका

आधुनिक युग विज्ञान का युग है। इस विज्ञान के युग में विज्ञान की उन्नति तभी सम्भव है जब गणित की सहायता ली जाय। इसलिए गणित के विस्तृत क्षेत्र में उन्नति होनी बड़ी आवश्यक है। विद्यालयों में पढ़ाये जाने वाले विषयों में गणित एक महत्वशाली स्थान रखता है क्योंकि दिन-प्रतिदिन के भिन्न-भिन्न कार्यों में गणित का प्रयोग होता है।

गणित-शिक्षण की बहुत पुस्तकें अंग्रेजी भाषा में लिखी गई हैं और जिनका उपयोग प्रशिक्षण-महाविद्यालयों में किया जाता है। परन्तु हमारे देश में हिन्दी-भाषा में लिखी गई पुस्तकों के अभाव के कारण छात्र अंग्रेजी पुस्तकों से पूर्ण लाभ नहीं उठा पाते हैं। इस पुस्तक को इसी कमी की पूर्ति हेतु लिखा गया है। पुस्तक में गणित-शिक्षण की भिन्न-भिन्न विधियों का पूर्ण वर्णन करने का प्रयास किया गया है जिससे उनके भली प्रकार अध्ययन करने से छात्र लाभ उठा सकें।

पुस्तक कैसी लिखी गई है—इसका निर्णय तो गणित-शिक्षण में लगे अध्यापक बन्धु ही कर सकेंगे। यदि उनको पुस्तक से कुछ लाभ मिल सका तो हम लोग अपना प्रयास सफल मानेंगे।

श्री बी० पी० जौहरी-प्रिन्सीपल-आर० ई० आई० ट्रेनिंग कालेज, दयालबाग के हम विशेष रूप से कृतज्ञ हैं जिनसे पुस्तक लिखने में प्रेरणा प्राप्त हुई है तथा इन्होंने कार्य भार से अति व्यस्त होते हुए भी समय-समय पर अनेक प्रकार से सहायता दी।

पुस्तक में आवश्यक सुझावों का लेखक स्वागत करते हैं। इसके अतिरिक्त लेखक उन सभी लेखकों तथा अध्यापक-वर्ग के आभारी हैं जिनसे उनको समय-समय पर पुस्तक लिखने में सहायता मिलती रही है।

विषय-सूची

विषय	पृष्ठ
१ गणित शिक्षण का संक्षिप्त इतिहास	१
२ पाठ्य-क्रम में गणित का स्थान	५
३ गणित के उद्देश्य तथा प्राप्य उद्देश्य	११
४ गणित पढ़ाने की विधियाँ	१८
५ बेसिक शिक्षा तथा गणित शिक्षण	३३
६ सहायक सामग्री	४१
७ गणित शिक्षण में सह सम्बन्ध	५१
८ गणित में शीघ्रता एवं शुद्धता	५७
९ गणित में मानसिक, मौखिक तथा लिखित कार्य	६३
१० गणित का पाठ्य-क्रम	७५
११ अभ्यास का महत्त्व	८२
१२ गणित में परीक्षायें	८६
१३ गणित अध्यापक	९३
१४ अंकगणित पढ़ाने की विधि	९८
१५ बीजगणित की पाठ्य विधि	१३८
१६ रेखागणित का अध्ययन	१३१
१७ पाठ योजना	१४७
पाठ सूत्र १	१५१
पाठ सूत्र २	१५६
पाठ सूत्र ३	१६२
पाठ सूत्र ४	१७०
पाठ सूत्र ५	१७७
पाठ सूत्र ६	१८२
पाठ सूत्र ७	१८८
पाठ सूत्र ८	१९३
१८ कुछ चुने हुए प्रश्न	१९९

अध्याय १

गणित शिक्षण का संक्षिप्त इतिहास

(A brief history of Mathematics teaching)

भारतवर्ष में गणित का पठन-पाठन उत्तर वैदिक काल ईसा से १५०० वर्ष पूर्व से ही होता आया है। उस समय के ग्रन्थों में गणित अंकगणित, रेखा-गणित एवं बीजगणित और ज्योतिष गणित दृष्टिगोचर होती है। इसी समय यज्ञ-वेदी के बनाने में रेखा गणित का विकास हुआ। यज्ञ के लिए उचित व शुभ समय देखने के कारण ज्योतिष का विकास हुआ। इसी काल में अन्य विषयों के साथ गणित एवं ज्योतिष में बहुत उन्नति हुई। ब्राह्मणीय शिक्षा के पाठ्य विषय की सूची छांदोग्य उपनिषद में एक कथानक है जो कि इस प्रकार है - एक बार नारद, सनत्कुमार ऋषि के पास गये और उनसे ब्रह्मविद्या पढ़ाने की प्रार्थना की। सनत्कुमार ने नारद से पूछा कि वे कौन-कौन सी विद्या में पहले से ही पढ़े हैं जिससे वे विचार कर सकें कि उन्हें अब क्या पढ़ाना शेष रहा है। उस पर नारद जी ने उन सब विद्याओं को गिनाया जो वे पढ़ चुके थे। इस सूची में नक्षत्र विद्या (Astronomy) और राशि-विद्या (Arihmetic) भी सम्मिलित थी। इससे बिलकुल स्पष्ट है कि उस समय भी गणित और ज्योतिष विषय भी पढ़ाये जाते थे।

हिन्दुओं की शिक्षा में गणित भी प्रमुख विषयों में से एक विषय था। कौटिल्य के अर्थशास्त्र में लिखा हुआ है कि चूड़ाकर्म के बाद विद्यार्थी को लिपि (Alphabets) और संख्यान (Arithmetic) सीखना चाहिये। हाथी गुम्फा के अन्तर्लेख से पता चलता है कि कलिंग-नरेश खारवेल ने अपने जीवन के नौ वर्ष यानी १६ वर्ष की अवस्था से लेकर २५ वर्ष की अवस्था तक लिपि (Alphabets), रूप (Drawing and Geometry) और गणना (Arithmetic) के अध्ययन में व्यतीत किए थे। राज कुमार गौतम ने ८ वर्ष की अवस्था में अध्ययन आरम्भ किया था—पहले लेखन (Reading and writing) सीखा था और फिर उसके बाद अंकगणित जो उस समय के ७२ विज्ञानों और कलाओं में सबसे अधिक महत्व की थी। जैन आगम ग्रन्थों में भी लेखा, रूप और गणना का उल्लेख मिलता है!

प्राचीन काल में भारतवर्ष में गणित पढ़ाने का उद्देश्य यह था कि उससे वस्तुओं के मूल्य निकालने में और हिसाब रखने में सहायता मिलती थी। उस समय कार्य प्रणाली की अपेक्षा फल पर अधिक जोर दिया जाता था। बालकों को पहाड़े तथा गुरु याद करवाये जाते थे। पाठशालाओं में गणित उस समय इस लिए पढ़ाई जाती थी कि इसका सम्बन्ध धर्म-पुस्तकों, गणित-ज्योषित, फलित-ज्योषित आदि से था। ग्रहण, त्यौहार आदि तिथियों के निकालने में इसकी आवश्यकता पड़ती थी। मन्दिर और पूजा की वेदी बनाने में गणित के ज्ञान का काम पड़ता था। बुद्धि के विकास के लिए उसका उपयोग किया जाता था। प्रायः विद्यार्थी गणित की पहेलियाँ (Puzzles) बनाते थे और हल किया करते थे। इस प्रकार उनका मनोरंजन हो जाता था।

इस्लामी शिक्षा में भी गणित को स्थान प्राप्त था। इस समय बालकों के लिए मकतब में प्रारम्भिक शिक्षा की व्यवस्था थी। यहाँ पर उनको पढ़ने तथा लिखने की शिक्षा के अतिरिक्त अवजद अर्थात् अक्षरों की सर्याँ से गणना और शकुन विचार भी सिखाया जाता था। उच्च शिक्षा के मदरसे थे। इनमें शिक्षा दो प्रकार की होती थी—लौकिक और धार्मिक। लौकिक शिक्षा के अन्तर्गत ज्योतिष एवं गणित भी पढ़ाये जाते थे। अबुलफजल ने आइने अकबरी में लिखा है “प्रत्येक बालक के द्वारा नीति शास्त्र, अंकगणित, समस्याएँ, कृषि-शास्त्र, क्षेत्र मिति (Geometry), ज्योतिष विद्या, मुखाकृति विद्या, गृह-शास्त्र, राजतंत्र, औषधिज्ञान, तर्कशास्त्र, तिबी (चिकित्सा और शरीर

विज्ञान), रियाजी (गणित, ज्योतिष, संगीत और शिल्पज्ञान), इलाही (Religion and philosophy) और इतिहास आदि के सभी ज्ञान प्राप्त किये जा सकते थे।" अकबर ने आगरा और फतहपुर सीकरी में कई मदरसे भी बनवाये। इनमें गणित एवं ज्योतिष की भी उच्च शिक्षा दी जाती थी। हुमायूँ ने दिल्ली में एक मदरसा खोला जिसमें ज्योतिष तथा भूगोल पढ़ाये जाते थे।

परन्तु फिर भी गणित की प्रतिष्ठा पाठ्य विषय की हैसियत से हमारे देश की पाठशालाओं में अठारहवीं शताब्दी तक न थी। यहाँ पर ब्रिटिश काल में गणित पर बहुत जोर दिया जाता था। यहाँ तक कि हाई स्कूल के अतिरिक्त इन्टर कक्षाओं में भी गणित अनिवार्य थी। मिडिल कक्षाओं में भी गणित पर ही सब से अधिक जोर दिया जाता था। प्रश्न पत्र भी कठिन बनाये जाते थे। गणित में अच्छे अंक प्राप्त करने वाले छात्रों को प्रोत्साहन भी दिया जाता था। इटावे के राजकीय विद्यालय में तो बहुत समय से प्रतिवर्ष गणित की प्रतियोगिता होती आ रही है जिससे प्रथम और द्वितीय स्थान प्राप्त करने वाले छात्रों को पारितोषिक वितरण किया जाता है।

१९३७ में बेसिक शिक्षा का सूत्रपात हुआ। इसमें भी गणित विषय को महत्व पूर्ण स्थान प्राप्त हुआ। परन्तु इसमें गणित पढ़ाने की विधि पहले से भिन्न थी। यहाँ पर गणित को क्राफ्ट के आधार पर पढ़ाने पर जोर दिया गया। द्वितीय विश्वयुद्ध की समाप्ति पर भारत के सम्मुख सारजेंट योजना आई। इसमें हाई स्कूल को दो भागों में विभाजित कर दिया गया—साहित्यिक हाई स्कूल और व्यावसायिक हाई स्कूल। साहित्यिक हाई स्कूलों में गणित-पाठ्यक्रम में रखी गई परन्तु व्यावसायिक हाई स्कूलों में नहीं।

परन्तु स्वतंत्र भारत में यह विचार किया गया कि शिक्षा का उद्देश्य अच्छे नागरिक बनाना है न कि बलक पैदा करना। अतः इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए नागरिक शास्त्र, नेचरस्टडी, स्वास्थ्य रक्षा आदि विषय पाठ्यक्रम में सम्मिलित किये गये। फिर यह भी सोचा गया कि इन सब से बालकों के ऊपर अधिक भार हो जायेगा। इसलिए गणित के अध्यापन और पाठ्य-क्रम को हल्का कर दिया। ऐसा करने में गणित के अध्यापन पर अधिक अथवा पहला जैमा भी महत्व नहीं दिया गया और धीरे-धीरे गणित हाई स्कूल में एक ऐच्छिक-विषय तक बन गया।

उत्तर प्रदेश में स्वतंत्रता प्राप्त होने के पश्चात् अंकगणित को रेखा गणित और बीज गणित से पृथक् कर दिया गया। अङ्कगणित अनिवार्य विषय बना दिया गया और बीज गणित व रेखा गणित को ऐच्छिक विषय माना। परन्तु यह क्रम सिर्फ तीन साल तक चलता रहा। सन् १९५० ई० से अङ्कगणित हाईस्कूल कक्षा से बिल्कुल हटा दी गई परन्तु गणित की अन्य शाखाओं को ऐच्छिक विषय के रूप में ही रखा। सन् १९५२ से उत्तर प्रदेश शिक्षा बोर्ड ने बालकों की सुविधा के लिए एक प्रकार की गणित और चला दी जिसका नाम प्रारम्भिक गणित रक्खा गया। इस प्रकार की गणित में अङ्कगणित, बीज गणित और रेखागणित तीनों ही शाखाएँ सम्मिलित थी। परन्तु इसमें कोर्स कक्षा आठ तक था। अब किसी तरह शिक्षा समिति के सदस्यों के कान पर जुआँ रेंगी और उन्होंने समझा कि गणित के बिना काम नहीं चल सकता। इस लिए अब हाई स्कूल कक्षाओं में सन् १९५६ से गणित लड़कों के लिए अनिवार्य विषय हो गया है। परन्तु लड़कियों के स्कूलों में यह अब भी ऐच्छिक विषय है।

अध्याय २

पाठ्यक्रम में गणित का स्थान

(Place of Mathematic in Curriculum)

गणित का पूर्व सम्मानित स्थान—प्राचीन काल से ही शिक्षा में गणित का सदा उच्च स्थान रहा है। प्लेटो ने अपनी पाठशाला के द्वार पर तो यहाँ तक लिख रखा था कि जो व्यक्ति रेखागणित से नहीं समझते हैं वे उस पाठशाला में शिक्षा ग्रहण करने के ध्येय से प्रवेश न करें। प्रायः सभी महान शिक्षकों जैसे हरबार्ट फ्रोबेल, पैस्टालाजी, डा० मेरिया, मैन्टिसौरी और प्रोफेसर सर टो० पी० नन आदि ने गणित को मानव विकास का प्रतीक माना है। इन्होंने गणित की शिक्षा को मनुष्य के बौद्धिक एवं सांस्कृतिक विकास का सर्वश्रेष्ठ साधन मानकर शिक्षा के पाठ्यक्रम में उच्चतम स्थान दिया है। नैपोलियन जैसे महान् योद्धा शासक एवं राजनीतिज्ञ के कथनानुसार गणित को उन्नति के साथ देश की उन्नति का घनिष्ट सम्बन्ध है।

गणित की उपयोगिता—गणित का सम्बन्ध हमारे जीवन से बहुत घनिष्ट है। आजकल की सभ्यता की नींव गणित पर ही है। आधुनिक युग मशीन का युग है जिसमें लगभग सभी काम मशीनों द्वारा ही किए जाते हैं। मशीनों का आविष्कार विज्ञान द्वारा हुआ है और विज्ञान

गणित पर आश्रित है। अतः विज्ञान की उन्नति ने गणित की आवश्यकता को और भी बढ़ा दिया है और आजकल की सभ्यता में गणित का उच्च स्थान कर दिया है। आजकल जो भी राष्ट्र विज्ञान के नियमों से काम न लेकर पुराने विचारों में उलझा रहेगा, वह राष्ट्र आजकल के युग में कभी भी उन्नति नहीं कर सकता है।

गणित के बारे में तो जैन गणितज्ञ श्री महावीराचार्य जी ने अपनी गणित सार संग्रह में अत्यन्त प्रशंसा की है। वह लिखते हैं—“लौकिक, वैदिक तथा सामाजिक जो जो व्यापार हैं उन सब में गणित का उपयोग है। कामशास्त्र, अर्थशास्त्र, पाकशास्त्र, गान्धर्वशास्त्र [गायन] नाट्यशास्त्र आयुर्वेद, भवननिर्माण शास्त्र आदि वस्तुओं में, छन्द अलंकार, काव्य, तर्क, व्याकरण इत्यादि में तथा कलाओं के समस्त गुणों में गणित अत्यन्त उपयोगी है। सूर्य आदि ग्रहों की गति ज्ञात करने में, ग्रहण में, दिशा, देश तथा समय ज्ञात करने, चन्द्रमा के परिलेख आदि में सर्वत्र गणित का काम पड़ता है। द्वीपों, समुद्रों और पर्वतों की संख्या, व्यास और परिधि; लोक अन्तर्लोक, ज्योतिर्लोक, स्वर्ग एवं नरक के रहने वालों के मकानों में, सभा-भवनों एवं गुम्बदाकार मन्दिरों के परिमाण तथा अन्य बातें गणित की सहायता से ही जाने जाते हैं। वहाँ पर प्राणियों के संस्थान, उनकी आयु और आठ गुण इत्यादि, मात्रा आदि तथा संहिता आदि से सम्बन्ध रखने वाले विषय सभी गणित पर निर्भर हैं। अधिक क्या कहें—संचराचर त्रैलोक्य में जो कुछ भी वस्तु है उसका अस्तित्व गणित के बिना सम्भव नहीं हो सकता।”

प्रकृति के किसी भी अङ्ग का अध्ययन हम बिना गणित की सहायता से नहीं कर सकते हैं। यदि गणित बिना हम किसी का ज्ञान थोड़ा बहुत कर भी लें तो उससे कोई लाभ नहीं उठा सकते। उदाहरणार्थ ज्योतिष विज्ञान और भौतिक विज्ञान दोनों ऐसे विज्ञान हैं जिनसे हमारा बहुत काम निकलता है। दोनों विज्ञान पूरी तरह से गणित को प्रयोग करते हैं। यह गणित ही है जिसने पदार्थों के भौतिक और रासायनिक गुणों को मनुष्य के लिए उपयोगी बनाया है। चाहे हम यह जानते हैं कि पानी को गरम करने पर भाप बनती है और भाप जिसमें रहती है उस पर दबाव (Pressure) डालती है। परन्तु इतना सा ज्ञान वाष्प इंजन का निर्माण नहीं कर सकता। वास्तव में वाष्प इंजन बनाने के लिए भाप तथा अन्य पदार्थों के काफी गुण जो

इन्जन बनाने के काम में आते हैं, जानने चाहिए। जैसे भाप की कोई निश्चित मात्रा कितना दबाव डालेगी इत्यादि। ये सब बातें गणित के द्वारा ही जानी जा सकती हैं। इसी प्रकार हम दूसरा उदाहरण लेते हैं। चाहे हम यह जानते हैं कि जब प्रकाश किरण (Ray of Light) एक माध्यम (Medium) से दूसरे माध्यम में तिरछी प्रवेश करती है तो वह अपने मार्ग से कुछ विचलित (Refract) हो जाती है। परन्तु यदि माध्यमों के घनत्व (Densities) और विचलन (Refract) का सम्बन्ध, जो कि सिर्फ गणित द्वारा ही जान सकते हैं, का ज्ञान नहीं है तो चश्मे या प्रकाश सम्बन्धी (Optical) अन्य किसी यन्त्र को नहीं बना सकते हैं।

मनोविज्ञान (Psychology) में भी गणित का प्रयोग किये बिना काम नहीं चला सकता। हर्बर्ट ने तो आज से सौ वर्ष पहिले हो कहा था कि मनोविज्ञान के लिए गणित का उपयोग अति आवश्यक है क्योंकि इसके बिना मनोविज्ञान का मुख्य उद्देश्य Conviction की पूर्ति नहीं हो सकती है। अब प्रयोगात्मक मनोविज्ञान (Experimental Psychology) में तो बुद्धि लब्धि (Intelligent quotient) tetrad equation, समवाय गुणक (Coefficient of correlation) आदि तो बिल्कुल ही गणित द्वारा किये जाते हैं।

जनतन्त्रवाद के प्रचार ने हमसे नागरिकता की माँग और भी अधिक बढ़ा दिया है। मतदाता (Voters) होने के नाते और अपने शासकों के स्वामी होने के कारण जनता के धन के उनके द्वारा सुव्यय और दुर्व्यय की ठीक जाँच करने के निमित्त गणित की जानकारी आवश्यक है।

गणित की उपयोगिता जीव विज्ञान (Biology) में भी काफी है। इस विज्ञान के विद्वान जब प्रयोग करते हैं तो निरीक्षणों (Observations) को लिखकर उनका वर्गीकरण (classification) करते हैं तथा उनसे नियम बनाने के लिये उन निरीक्षणों की अन्य प्रयोगों के निरीक्षणों से तुलना (Comparison) करते हैं। इन सब कामों में गणित की विशेष आवश्यकता पड़ती है। इसके अतिरिक्त जीवविज्ञान के अध्ययन में और भी कई स्थानों पर गणित का उपयोग होता है।

दैनिक जीवन (Daily life) में भी व्यावहारिक कुशलता के लिए, धन्धों और व्यवसायों में थोड़े अथवा अधिक उपयोगिता के लिए तथा अन्य विषयों में सामान्यतः सहायक होने के लिए, यहाँ तक कि मनो-

रंजन (Recreation) के लिए जैसे लीलावती के उदाहरण, गणित की शिक्षा जन साधारण के लिए आवश्यक है। आधुनिक अनुसन्धानों (Modern researches) ने भी गणित की सत्ता निराधार सिद्ध ही नहीं किया वरन् इसकी पूर्ति के लिए अनुकूल स्थिति तथा पढ़ाई के ठीक तरीकों पर जोर दिया है।

गणित अनिवार्य विषय—गणित इतनी उपयोगी होते हुए भी अनिवार्य [compulsory] क्यों न रखी जाय ! कितने ही प्रदेशों में पाठ्यक्रम [Syllabus] में से बालकों को गणित छोड़ देने की पूर्ण स्वतन्त्रता दे दी है। यह उनकी बहुत बड़ी भूल है। इसका प्रभाव छोटी कक्षाओं पर भी पड़ता है और पड़ना जरूरी भी है। आजकल जब बालकों के मन में मैट्रिक तथा उसकी परीक्षा ही आराध्य देवी बनकर बैठी हो तब गणित की ऐसी अवज्ञापूर्ण दशा में बालकों के मन में गणित के प्रति श्रद्धा कभी भी जागृत नहीं हो सकती।

अधिकांश बालक मैट्रिक पास करके व्यावहारिक जीवन में प्रवेश करते हैं। उनको जीविकोपार्जन हेतु बैंकों, दफ्तरों और दुकानों आदि में काम करना पड़ता है जहाँ पर उनको संख्याओं, स्टाकों और शेयरों (Stocks and shares), लाभ-हानि (Profit and loss) मितीकाटा-तत्काल धन (Present worth and true discount) से काम पड़ता है। बालक गणित के ज्ञान के अभाव में इन बातों में पीछे रह जाता है। यदि पाठ्यक्रम में गणित की अवहेलना की गई तो बालकों को आगामी जीवन में बड़ा नीचा देखना पड़ेगा। इसके अतिरिक्त गणित के अध्ययन से जो मानसिक ट्रेनिंग (Mental training) प्राप्त होती है, वह भी खटाई में पड़ जावेगी। अतः इन सब बातों से पाठ्यक्रम में गणित का अनिवार्य होना जरूरी है।

कभी कभी ऐसा कहा जाता है कि प्रत्येक विद्यार्थी को इन्जीनियर या मिस्त्री तो बनना ही नहीं है जिसके व्यवसाय में गणित का ज्ञान काम आ सके। इसलिए सब विद्यार्थियों को गणित अनिवार्य बनाकर पढ़ाने से क्या लाभ है ? बात भी सही है। प्रत्येक विद्यार्थी डाक्टर या इन्जीनियर नहीं बन सकता। परन्तु क्या मालूम कौन क्या बनेगा ? हमारा काम तो यह है कि मैट्रिक के विद्यार्थियों को अधिक से अधिक ज्ञान दें ताकि उनको अपनी रुचि के अनुसार कोई भी व्यवसाय चुनने में जरा भी कठिनाई न हो। हाई स्कूल कक्षाओं से पहले विद्यार्थी काफी छोटे और अज्ञानी होते हैं। उनको इस बात का ज्ञान नहीं होता

कि कौन सा विषय वो लेवें जो उनके भविष्य में लाभदायक होगा। प्रायः अपने सहपाठियों तथा मित्रों की सलाह से मन चाहे विषय चुन लेते हैं। परन्तु जब वे विषय व्यवसाय में लाभदायक नहीं होते अथवा छोड़े हुए विषयों की कमी के कारण व्यवसाय में कठिनाई प्रतीत होती है तब वे अपने पहिले अज्ञानता पूर्ण निर्वाचन पर हाथ मलते हैं और सलाह देने वालों को कोसते हैं। अतः अङ्कगणित अनिवार्य विषय बनाने पर यह कठिनाई कभी भी प्रतीत न होगी।

बहुत से लोग कहते हैं कि अमेरिका, इङ्ग्लैण्ड आदि देशों में भी हाई स्कूल कक्षाओं में गणित ऐच्छिक विषय है। फिर भारत में गणित विषय ऐच्छिक बनाने में क्या हानि है? परन्तु अमेरिका और इङ्ग्लैण्ड आदि देशों की गणित और हाई स्कूल कक्षाओं में तथा भारत वर्ष की गणित और हाई स्कूल कक्षाओं में काफी अन्तर है। अमेरिका और इङ्ग्लैण्ड के हाई स्कूल के कक्षाओं के विद्यार्थियों का ज्ञान, यहाँ के इन्टरमीडियेट कक्षा के विद्यार्थियों के ज्ञान के बराबर होता है। वहाँ के हाई स्कूल कक्षाओं की गणित, यहाँ की मैट्रिक कक्षाओं की गणित के अपेक्षा काफी अधिक भी होती है और कठिन भी होती है। जो गणित भारत वर्ष में हाई स्कूल कक्षाओं में पढ़ते हैं उसको वे वहीं छोटी कक्षाओं में पढ़ लेते हैं। इसके अलावा यहाँ के हाई स्कूल के विद्यार्थियों की औसत आयु वहाँ के हाई स्कूल के छात्रों की औसत आयु से दो वर्ष कम होती है। अतः वहाँ के विद्यार्थी अपने भविष्य के विचार से निर्वाचन सरलता से कर सकते हैं।

गणित को हाई स्कूल कक्षाओं में ऐच्छिक (Optional) करने से इस बात पर भी असर पड़ता है कि जिन विद्यार्थियों की हाई स्कूल कक्षाओं में गणित न होती है उनका व्यवसाय सम्बन्धी निर्वाचन (choice of profession) बहुत संकीर्ण (limited) रह जाता है। यहाँ तक कि जो छात्र कालेज में प्रवेश करते हैं उनके अध्ययन विषय जैसे जीवविज्ञान और अर्थशास्त्र (Economics) आदि तक की पढ़ाई में गणित की अज्ञानता (Ignorance) बाधा डालती है।

गणित के अतिरिक्त स्कूल पाठ्यक्रम में कोई भी ऐसा विषय नहीं है जो बिना अधिक अध्ययन किये जीवन में प्रयोग हो सके। गणित ही एक ऐसा विषय है जिसका हाई स्कूल कक्षाओं तक का ज्ञान जीवन में प्रयोग हो सकता है। बेचारे कुली (labourer) से लेकर जो मुश्किल से अपनी जीविका कमा पाता है, अर्थ सचिव

(Finiance minister) तक जिनका लाखों और करोड़ों रुपये का बजट बनता है; पानवाले से लेकर जोकि सिर्फ आने और पाई तक हिसाब रखता है, बिरला (Birla) और ताता (Tata) तक जो करोड़ों रुपये का व्यवसाय करते हैं, साधारण बढ़ई से लेकर बड़े-बड़े इन्जीनियरों तक जो संसद जैसे विशाल भवन का निर्माण करते हैं, सभी को अपनी अपनी आवश्यकता अनुसार गणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है। अतः रोटो दाने के उद्देश्य को ही यदि पाठ्यक्रम बनाया जावे तो भी गणित का स्कूल पाठ्यक्रम में सर्वप्रथम स्थान होना चाहिए।

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि गणित मनुष्य जाति के लिए उसके जीवन में कदम कदम पर अनेक प्रकार से उपयोगी है। इसके बिना वह जीवन में तनिक भी उन्नति के पथ की ओर हिल न सकता है। स्कूल के अन्य सभी विषय इसी के आधार पर मनुष्य के लिए उपयोगी हो सकते हैं। इसके बिना सब ही विषय निरर्थक (Useless) प्रतीत होते हैं। अतः गणित का स्कूल पाठ्यक्रम में सर्व प्रथम तथा प्रतिष्ठित (Respected) स्थान होना अति आवश्यक है।

अध्याय ३

गणित के उद्देश्य तथा प्राप्य उद्देश्य

(Aims and Objectives of teaching of Maths)

विद्यालय में भिन्न २ विषयों का पाठन होता है, प्रत्येक विषय का अपना अस्तित्व तथा महत्व होता है। इसके साथ ही साथ प्रत्येक विषय को पाठ्य-क्रम में रखने का एक ध्येय होता है, विषय का महत्व उसके द्वारा प्राप्त किये जाने वाले उद्देश्यों (Aims) से जाना जा सकता है, प्रत्येक विषय के अपने उद्देश्य होते हैं। यदि उनकी पूर्ति हो जाती है तो यह कहा जा सकता है कि अमुक विषय का क्या महत्व है। है। प्रत्येक उद्देश्य (Aims) के अर्न्तगत कुछ प्राप्य (Objectives) उद्देश्य ही आते हैं, विषय को पढ़ाने का एक लक्ष होता है जिसकी परीक्षा बालकों के विद्यालय को छोड़ने के पश्चात् होती है जिसको हम लक्ष (Goal) भी कह सकते हैं। इस अध्याय में उद्देश्य (Aim) शब्द का प्रयोग उसी लक्ष से है और किसी उद्देश्य (Aim) की पूर्ति के लिए जिन छोटी २ बातों को ध्यान में रखना पड़ता है प्राप्य उद्देश्य (Objectives) कहते हैं। इस तरह से किसी एक विशेष उद्देश्य (Aim) के अर्न्तगत कई प्राप्य उद्देश्य आते हैं।

प्राप्य उद्देश्य (Objective) को तैयार करने में बहुत होशियारी

रखनी पड़ती हैं क्योंकि किसी उद्देश्य की पूर्ति तभी सम्भव है जब उसके अन्तर्गत तैयार प्राप्य उद्देश्यों की तैयारी सही रूप से की गयी हो। इनके दो मुख्य कार्य हैं—(१) इनके द्वारा किसी उद्देश्य की पूर्ति होती है। (२) इनके आधार पर पाठ्य-वस्तु से प्रश्न तैयार करके बालकों की कार्य विधि का ज्ञान होता है, इनका मतलब यह है कि एक विशेष उद्देश्य (Aim) की पूर्ति प्राप्य-उद्देश्यों (objective) पर कार्य करने से तथा पाठ्य वस्तु के आधार पर प्राप्य-उद्देश्यों की परीक्षा हेतु प्रश्न तैयार कर विद्यार्थियों के व्यवहार की परीक्षा की जाती है। उदाहरण के लिए यूँ कह सकते हैं कि यदि किसी प्रश्न के हल करने में बालक की किसी योग्यता की परीक्षा नहीं होती है तो इस प्रकार के प्रश्नों से किसी उद्देश्य की प्राप्ति नहीं हो सकती है। माना कक्षा में अध्यापक गणित के पाठ में बालकों को इकाई परिवर्तन (Conversion of-units) का पाठ पढ़ा रहा है तो यदि दैनिक जीवन में बालक बाजार जाकर पुराने १ रु० के सही नये पैसे नहीं ला सकता है तो हम यह कह सकते हैं कि उसको इकाई परिवर्तन का कोई ज्ञान नहीं हुआ क्यों कि उसका व्यवहार वही रहा जो कि कक्षा में पढ़ने से पहिले था। इनका वर्णन उद्देश्यों के बाद इसी अध्याय में किया है।

अन्य स्कूल विषयों को भाँति गणित का स्कूल में रखना निम्न उद्देश्यों पर आधारित है। -

(अ) सांस्कृतिक [Cultural]

(ब) अनुसासनिक [Disciplinary]

(स) प्रयोगात्मक [practical or utilitarian]

सांस्कृतिक (Cultural)

गणित का एक मुख्य उद्देश्य सांस्कृतिक (cultural) है, इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु गणित पढ़ने वाले विद्यार्थियों में कुछ सामान्य आदतों का बनना होता है, इसका अभिप्राय यह है कि उक्त विषय को पढ़ने वाले बालकों में कुछ सामान्य आदतों का विकास हो जाता है, गणित ही एक-ऐसा विषय है जिसके अध्ययन से बालकों में तर्क शक्ति (reasoning power) का विकास सबसे अधिक होता है। इस विषय का स्मृति (memory) से स्कूल में गणित पढ़ाने का मुख्य उद्देश्य बालकों की शक्ति का विकास होना चाहिए न कि तथ्यों (facts) का केवल याद करना केवल वही गणित का एक अच्छा जानने वाला होता है जो कि दैनिक जीवन में उनके सिद्धान्तों का प्रयोग कर सके।

इसलिए गणित पढ़ाने में तर्क शक्ति के विकास का ध्यान रखना, सूचना प्राप्ति की अपेक्षा महत्वशाली होता है। गणित पढ़ाने में विधि अधिक महत्वशाली होती है। गणित में तर्कशक्ति के विकास हेतु उसकी स्पष्टता, शुद्धता, परिणामों की वास्तविकता मूलता, तथा तर्क शक्ति का परिमाण आवश्यक होते हैं।

इस तरह वही व्यक्ति कुशल तथा उमका सामान्य व्यवहार समाज के अनुकूल होता है जिसका व्यवहार वस्तु के निरीक्षण और तर्क से सम्बन्धित हो। वह इस तरह स्कूल में शिक्षा समाप्त करने पर जब समाज का प्राणी बनता है तो वह उसके व्यवहार से स्पष्ट हो जाता है कि वह नागरिक एक अच्छा नागरिक है या नहीं स्कूल में इस तरह गणित की शिक्षा का एक मुख्य उद्देश्य सांस्कृतिक होता है।

अनुशासनिक (Disciplinary)

इस विषय में हमारा अभिप्राय मानसिक अनुशासन (mental-discipline) से है। गणित के पढ़ने से बालकों में अनुशासन की भावना उत्पन्न होती है। बहुत से मनोविज्ञों का कहना है कि गणित से जो तर्क शक्ति (reasoning power) का विकास होता है उसका क्षेत्र गणित सम्बन्धी समस्याओं तक ही सीमित है परन्तु यह बात असत्य सिद्ध हो चुकी है क्योंकि किसी विषय में सीखी बातें तथा सिद्धान्तों का प्रयोग जीवन में होता रहता है। इसकी पुष्टि (Transfer of training) से होती है। वे विद्यार्थी जो कि एक साधारण कांटि के थे गणित के अभ्यास से एक बुद्धिमान तथा चतुर विद्यार्थी बन गये हैं यह इस बात का प्रमाण देता है कि गणित विषय से बालक में किस प्रकार अनुशासन (discipline) जीवन पैदा हो जाता है, इसके अतिरिक्त इस तरह का ज्ञान उसको अन्य विषयों में सहायता करता है। इस तरह विद्यार्थी अपने दिन प्रतिदिन के जीवन में एक आवश्यक व्यवहार करता है तथा उसमें अनुशासन की भावना जागृत हो जाती है।

उपयोगिता (Utilitarian)

उपरोक्त के अतिरिक्त गणित का प्रयोगात्मक (utilitarian) उद्देश्य बहुत महत्वशाली है। हमारी आधुनिक सम्यता का आधार भी गणित ही है। आधुनिक युग विज्ञान का युग है। विज्ञान को खोज के कारण हमारे जीवन पर बड़ा प्रभाव पड़ा है। इन खोजों के पीछे गणित के

व्यवहार में परिवर्तन (Behaviour Pattern)—विद्यार्थी अपनी आवश्यकता हेतु लम्बाई, दूरी आदि को सही रूप से नाप कर भिन्न २ इकाइयों में रख सकता है।

नीचे कुछ गणित के प्राप्य-उद्देश्यों [Objectives] की सूची (Behaviour Pattern) के साथ दी गयी है जिनसे (Objectives) का सही ज्ञान हो सकता है—

उद्देश्य [Objective] - बालकों में पाठ्य-वस्तु को दैनिक जीवन में प्रयोग करने की क्षमता का विकास करना (To develop the capacity of utilising the subject in day-to-day life)

व्यवहार परिवर्तन (Behaviour pattern)

[अ] बालक सही रूप में लम्बाई, भार तथा तन मात्रा (Capacity) को माप सकता है।

[ब] बालक एक ही प्रकार की वस्तुओं तथा भिन्न २ प्रकार की वस्तुओं के मूल्य की तुलना कर सकता है। वह सही रूप में धन उधार ले तथा दे सकता है।

[स] बालक गणित सम्बन्धी हल सही रूप से कर सकता है।

[द] वह किसी समस्या को हल करने के लिए आवश्यक सूचना (information) इकट्ठा कर सकता है।

[प] वह किसी समस्या के हल करने में आवश्यक और अनावश्यक सूचना में अन्तर समझता है।

[२] प्राप्य-उद्देश्य [Objective]—बालकों में समस्याओं के सही विश्लेषण की क्षमता [Capacity] का विकास करना (To develop the capacity for analysing a problem)

व्यवहार परिवर्तन (Behaviour pattern)

[अ] वह समस्या को समझता है।

[ब] वह यह जानता है कि समस्या में क्या दिया गया है और क्या ज्ञात करना है।

[स] वह पदों (Steps) से होकर किसी निष्कर्ष पर पहुँचता है।

[द] वह उससे प्राप्त सिद्धान्त को आवश्यक स्थानों पर प्रयोग में ला सकता है।

कुछ प्राप्य-उद्देश्यों की सूची (List of some objectives)

[१] बालक को कुछ गणित के विचारों (Concepts) से परिचित कराना।

[२] बालक में मानचित्र [Graphs] को बनाने तथा समझने की क्षमता का विकास कराना।

[३] बालक सही रूप से प्रश्न हल करता है तथा उसकी गति [Speed] भी आवश्यक रूप की है।

[४] बालक सही रूप से भिन्न [Fractions], तथा अनुपात [Ratio], प्रतिशत [Percentage] आदि को समझता है तथा उनका प्रयोग भी कर सकता है।

अध्याय ४

गणित पढ़ाने की विधियाँ

(Methods of Teaching of Mathematics)

अध्यापकों का यह सामान्य अनुभव है कि अधिकतर विद्यार्थी गणित में रुचि नहीं रखते हैं। इसका विशेष कारण स्वयं विषय नहीं है परन्तु पाठन विधि के उपयुक्त न होने के कारण बालक इस विषय को पसन्द नहीं करते हैं। बैलर्ड (Ballard) महोदय के अनुसार तो गणित की शिक्षा जो एक सुखदायक क्रिया होनी चाहिए थी, एक भयानक स्वप्न बन गई है। जब कभी अध्यापक किसी एक प्रश्न का हल विद्यार्थियों को देता है तो वह समझते हैं कि यह हल उस पर एक भार स्वरूप है और जबरन उनके ऊपर थोपा गया है, परन्तु उसी प्रश्न के हल करने की विधि बदल देने पर बालक उसमें रुचि लेने लगता है और विषय से प्रेम भी करता है।

गणित पढ़ाने में भिन्न भिन्न स्तरों पर भिन्न भिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है। हमको गणित पाठन में भिन्न भिन्न स्तर के बालकों से सम्बन्ध रखना पड़ता है। इस कारण विभिन्न विधियों का प्रयोग गणित पढ़ाने में किया जाता है। इसका कारण यह भी है कि बालकों का विकास समान रूप से नहीं होता है। इसके अतिरिक्त

कक्षा में बालक समान आयु के नहीं होते हैं। कुछ बालक ६ या ७ वर्ष के होते हैं कुछ की आयु इससे अधिक होती है। इसके कारण उनकी मानसिक शक्तियों (Mental Faculties) में अन्तर होता है। उदाहरण के लिए यह कहा जा सकता है कि एक ६ या ७ वर्ष का विद्यार्थी १५ या १६ वर्ष के विद्यार्थी के बराबर किसी उपविषय या विधि को नहीं समझ सकता है क्योंकि दोनों समूहों के बालकों की मानसिक शक्ति अलग अलग होती है। अधिक आयु वाले वालों के तर्क का आधार अधिक विचार उक्त तथा गम्भीर होगा। उपरोक्त कथन से यह बात स्पष्ट है कि एक बच्चे का मस्तिष्क पूर्ण विकसित नहीं होता है जिसके कारण उसकी ओर अधिक ध्यान देने की आवश्यकता होती है। एक अध्यापक तभी अपने पाठन में सफल हो सकता है जबकि वह भिन्न भिन्न स्तर के बालकों के लिए भिन्न भिन्न विधियों का प्रयोग करे तथा अपने पाठ को इतना रोचक बनाये कि बालक उसमें रुचि ले सकें तथा उनको गणित में प्रेम हो।

थार्नडाइक महोदय ने व्यक्तिगत भिन्नताओं के बारे में कहा है कि 'एक ही कक्षा में उच्च कोटि तथा निम्न कोटि के बालकों में बड़ा अंतर होता है। उच्च कोटि के बालक एक ही समय में निम्न कोटि के बालकों से ६ गुना अधिक सीखते हैं या एक ही कार्य को उच्च बालक निम्न की अपेक्षा ३ समय में सीख सकते हैं।'

इसलिए अध्यापक के पढ़ाने की विधि इस तरह की होनी चाहिए कि उससे बालकों की शक्ति का विकास किया जा सके। इसके साथ साथ यह बात भी ध्यान देने की है कि एक ही विधि द्वारा सम्पूर्ण विषय (Topic) को समान दक्षता (Efficiency) से नहीं पढ़ाया जा सकता है।

विधि की परिभाषा (Definition of Method)—जिस ढंग पर अध्यापक कक्षा में पाठ्य-वस्तु को प्रस्तुत करता है उसको विधि (Method) कहते हैं।

गणित पढ़ाने में निम्न विधियों का प्रयोग किया जाता है—

सामान्यानुमान-विधि (Inductive method)—

पिछले कुछ वर्षों में गणित के स्वरूप का अत्याधिक विकास हुआ है। इसका विकास व्यक्तियों के अनुभवों पर आधारित होने के कारण सामान्यानुमान-विधि (Inductive Method) का प्रयोग गणित पढ़ाने

में होने लगा है। Young के मतानुसार गणित का विकास सामान्यानुमान रूप में हुआ है। इसमें न तो कार्य प्रणाली का रूप Inductive होना चाहिए बल्कि साध्य (Theorem) तथा विधि की खोज उपरोक्त ढङ्ग पर हुई है। इसमें भिन्न भिन्न उदाहरणों का प्रयोग किया जाता है।

सामान्यानुमान-विधि (Inductive Method) का गणित पाठन में मुख्य स्थान होता है। मुख्यतया इस विधि का प्रयोग अङ्कगणित (Arithmetic) तथा रेखागणित (Geometry) में किया जाता है। इसके अतिरिक्त बीजगणित में जहाँ पर नवीन नियमों तथा विचारों का प्रारम्भ किया जाता वहाँ भी इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में जिस सिद्धान्त का प्रयोग होता है उसमें विद्यार्थी स्वयं भिन्न भिन्न स्थूल तथ्यों (Concrete facts) के आधार पर अपनी मानसिक शक्ति द्वारा किसी विशेष तत्व (Generalization) पर पहुँचता है। चूँकि विद्यार्थी इस विधि में स्वयं किसी नियम पर पहुँचते हैं इसी कारण इस विधि को सामान्यानुमान विधि (Inductive Method) कहते हैं। भिन्न भिन्न उदाहरणों के आधार पर इस तरह एक नियम बनता है। सारांश में यह कहा जा सकता है कि सामान्यानुमान विधि (Inductive Method) में विशेष से सामान्य की ओर तथा स्थूल (Concrete) से सूक्ष्म (Abstract) की ओर चलती है।

इस विधि का सबसे विशेष महत्व रेखागणित (Geometry) में है क्योंकि इसके द्वारा साध्यों (Theorems) के वर्णन (Enunciation) पर पहुँच जाते हैं। भिन्न-भिन्न उदाहरणों के आधार पर साध्य तथा उनको हल करने की विधियों का आधार सामान्यानुमान-विधि (Inductive Method) ही है। यह विधि निम्न दो पदों (Steps) पर आधारित है।

(१) उपयुक्त उदाहरणों को खोज निकालना तथा जमा करना। इनके जमा करने का निम्न आधार होना चाहिए—

(अ) उदाहरणों का बालक के जीवन से सम्बन्ध होना चाहिए।

(ब) उदाहरणों की संख्या पर्याप्त होनी चाहिये जिससे किसी नियम पर पहुँचा जा सके।

(स) उदाहरण साधारण होने चाहिए ताकि नियम बिल्कुल स्पष्ट हो जावे तथा विद्यार्थी उसको आसानी से ग्रहण कर सकें।

(२) समस्याओं के हल करते समय स्वयं विद्यार्थी उनके आधार पर कोई नियम निकाल सकें।

उदाहरण—माना कि विद्यार्थियों को एक नवीन पद (Term) रूढ़ संख्या (Prime Number) का ज्ञान देना है।

उपरोक्त पद का ज्ञान देने में अध्यापक १ से १० संख्याओं को लिख कर विद्यार्थियों को उनके गुणनखण्ड (Factors) करने को कहेगा और निम्न रूप से कार्य करेगा।

१ =	कोई गुणनखण्ड नहीं	७ =	कोई गुणनखण्ड नहीं
२ =	„ „	८ =	$२ \times २ \times २$
३ =	„ „	९ =	३×३
४ =	२×२	१० =	२×५
५ =	कोई गुणनखण्ड नहीं		
६ =	२×३		

प्रश्न—उपरोक्त प्रश्न में तुम ४, ६, ८ और १० में क्या देखते हो ?

उत्तर—इनमें २ का भाग जा सकता है।

प्रश्न—६ संख्या में क्या सूचना मिलती है ?

उत्तर—इसमें भी ३ का भाग जा सकता है।

प्रश्न—४, ६, ८, ९ तथा १० में क्या सामान्य गुण है ?

उत्तर—ये संख्याएँ किसी संख्या से विभाजित की जा सकती हैं।

इसके पश्चात् अध्यापक विद्यार्थियों को १, २, ३, ५, ७ संख्याओं पर ध्यान देने को कहेगा और निम्न प्रश्न करेगा।

प्रश्न—उपरोक्त संख्याओं की क्या विशेषता है ?

उत्तर—इनमें कोई भी संख्या किसी भी संख्या से विभाजित नहीं की जा सकती है।

उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है तथा एक नियम निर्धारित किया जा सकता है कि रूढ़ संख्या (Prime Number) वह संख्या है जिसमें १ या स्वयं उसी संख्या के अतिरिक्त किसी संख्या से भाग न दिया जा सके। विद्यार्थी इस उदाहरण से इस नियम पर पहुँच सकते हैं।

गुण (Advantages)—

(१) इस विधि द्वारा आसानी से नियम का निर्माण किया जा सकता है।

(२) इसके द्वारा विद्यार्थी की निरीक्षण शक्ति (Power of Observation) तथा मानसिक क्षमता (Intellectual Capacity) का विकास होता है।

(३) इस विधि द्वारा कार्य आसान हो जाता है क्योंकि इसमें गमन विशेष वस्तुओं से सामान्य की ओर (From Particular to General) होता है।

दोष (Defects)—इस विधि में सबसे बड़ा दोष या कमी यह है कि इसमें कुछ सीमा तक सम्भावना (Probability) की जा सकती है। जितने अधिक तथ्यों का निरीक्षण किया जा सकता है उतना ही अधिक सम्भावना अधिक होती है। इसलिए ठीक गणित के प्रदर्शन में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

निगमन विधि (Deductive Method)

निगमन विधि (Deductive Method) सामान्यनुमान विधि (Inductive Method) के बिल्कुल विपरीत विधि है। इस विधि में सामान्य नियम से किसी विशेष की ओर गमन (From Particular to General or From Abstract to Concrete) होता है। इसका स्वयं का कोई अस्तित्व नहीं होता है। परन्तु यह बहुत आवश्यक तथा महत्वशाली होता है जबकि यह विधि सामान्यानुमान विधि (Inductive Method) के पश्चात् प्रयोग में लाई जाती है।

उदाहरण—६५० रु० पर ४ प्रतिशत के दर से ३ वर्ष का ब्याज ज्ञात करो।

इस प्रश्न में सबसे प्रथम ब्याज निकालने के सूत्र (Formula) को लिखा जाता है।

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{प्रतिशत दर} \times \text{समय}}{100}$$

उपरोक्त सूत्र के प्रयोग करने पर ब्याज ज्ञात किया जा सकता है। जैसे

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर प्रतिशत} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{ब्याज} = \frac{650 \times 4 \times 3}{100}$$

$$= 78 \text{ रु०}$$

गुण (Advantages) —

(१) यह विधि उपयुक्त तथा संक्षिप्त (Concise) होती है, क्योंकि प्रश्न का हल एक विशेष सूत्र के आधार पर होता है।

(२) इस विधि को आसानी से याद किया जा सकता है क्योंकि इसमें एक ही सूत्र का प्रयोग होता है।

(३) इस विधि द्वारा नवीन समस्याओं का समाधान किया जा सकता है।

बोष (Disadvantages) —

(१) गणित आरम्भ करने वालों के लिए यह उपयुक्त नहीं होता है क्योंकि उनको गणित के नियम तथा सूत्र को समझना कठिन होता है।

(२) बालकों को बिना स्पष्ट उदाहरणों के सूत्र का प्रयोग सही रूप में नहीं हो पाता है।

(३) बालकों को बिना उदाहरणों के सूत्र समझने में कठिनाई होती है और वे उसका सही प्रयोग भी नहीं कर सकते तथा विधि को सही रूप से समझ भी नहीं पाते हैं।

(४) इस विधि में भिन्न २ प्रकार के प्रश्नों के लिए अनेकों सूत्र याद करने पड़ते हैं जो कि एक कठिन कार्य है।

परन्तु इन दोनों विधियों का साथ-साथ प्रयोग करना ठीक होता है। इनको अलग २ प्रयोग करने से गणित का सही संबोध (Concept) नहीं हो पाता है। दोनों विधियों का संयुक्त रूप से प्रयोग करना लाभप्रद होता है। उपरोक्त को हम निम्न रूप में संक्षिप्त रूप से कह सकते हैं—

(१) सामान्यानुमान विधि का प्रयोग उन स्थानों पर करना चाहिये जहाँ उपयुक्त मौका हो।

(२) निगमन विधि (Deductive Method) का प्रयोग सदैव सामान्यानुमान विधि (Inductive Method) के पश्चात् करनी चाहिए।

(३) निगमन विधि तथा उसके आधार पर किसी वस्तु को याद केवल विशेष परिस्थिति में किया जाना चाहिए।

विश्लेषण विधि (Analytic Method)

यह विधि भी गणित पढ़ाने में एक आवश्यक विधि है। इसका प्रयोग मुख्यतः निम्न में किया जाता है—

(१) जब अंकगणित की किसी नवीन समस्या में हल करना होता है।

(२) जब किसी साध्य (Theorem) को हल करना होता है।

(३) जब रेखा गणित में किसी रचना को करना होता है।

विश्लेषण विधि में किसी जटिल समस्या को सरल समस्याओं में विभक्त किया जाता है। इन सरल समस्याओं को बालक सरलता से हल कर सकते हैं तथा समझ भी सकते हैं। इस विधि को कक्षा के बालक स्वीकार करते हैं। इसके प्रत्येक पद (Step) का कुछ आधार होता है तथा उसका अपना महत्व होता है।

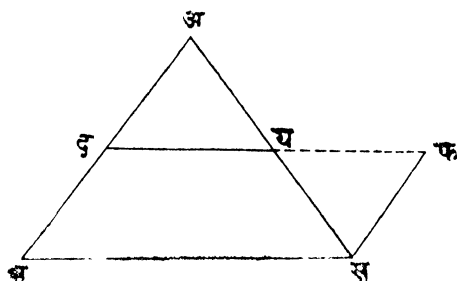
विश्लेषण वह विधि है जिसके द्वारा विद्यार्थी समस्या का हल ज्ञात करते तथा इस बात की खोज करते हैं कि किस विशेष पद (Step) को वे भूल गये हैं। इसमें विद्यार्थियों के सोचने की विधि सही ढंग पर होती है जो गणित पढ़ाने का एक मुख्य उद्देश्य होता है। वास्तव में यह विधि एक खोज करने की विधि है जिसका कि शिक्षा में एक बड़ा महत्व है क्योंकि बालक एक अन्वेषक (Discoverer) के रूप में इस विधि में कार्य करता है और शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बालक को स्वयं खोज कराना सिखाना है।

यदि अध्यापक रेखागणित में किसी साध्य (Theorem) को पढ़ाते समय प्रत्येक पद का विश्लेषण विद्यार्थियों की सहायता से ज्ञात नहीं करता है तो वे कभी भी इन पदों का सही ज्ञान प्राप्त नहीं कर पाते हैं तथा पदों की आवश्यकता को भी नहीं समझ पाते हैं। परिणाम यह होता है कि बालक साध्य के सही हल को समझ नहीं पाते हैं बल्कि साध्य की रचना और हल के पदों को केवल याद कर लेते हैं। इस तरह से यदि विश्लेषण सही रूप से नहीं होता है तो गणित का पाठन अर्थ-रहित हो जाता है।

उदाहरण (Illustration)—

रेखागणित में विशेषण (Analysis in Geometry)

प्रश्न—किसी त्रिभुज को दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरे भुजा के समानान्तर (Parallel) तथा आधी होती है।



विश्लेषण—(Analysis)

प्र०—क्या दिया है ?

(अ ब स एक $\triangle$ है जिसकी अ ब भुजा तथा अ स भुजा के मध्य बिन्दु क्रमशः द और य हैं)

प्र०—क्या सिद्ध करना है ?

[द य रेखा ब स रेखा के समानान्तर तथा आधी है]

प्र०—द य रेखा ब स रेखा के $\frac{1}{2}$ कब हो सकती है ?

[जब द य रेखा को दूना कर दिया जाय और २ द य = ब स के हो, इसलिए द य को फ बिन्दु तक बढ़ाया जाय ताकि द य = य फ के]

प्र०—दूसरी क्या बात सिद्ध करनी है ?

(दूसरी बात यह है कि द य ॥ समानान्तर होगी ब स के)

प्र०—यह कब सिद्ध हो सकता है ?

(यदि यह सिद्ध हो जाय कि द ब स फ एक समानान्तर चतुर्भुज है)

प्र०—हम कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि द ब स फ एक समानान्तर चतुर्भुज है ?

(यदि यह सिद्ध हो जाय कि द ब ॥ और बराबर फ स के)

प्र०—यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि द ब = फ स ?

(यदि यह सिद्ध हो जाय कि फ स = अ द क्योंकि द ब = अ द के)

प्र०—यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि द ब ॥ फ स ?

(यदि $\angle$ द अ य = $\angle$ फ स य जो कि एकान्तर कोण हैं)

प्र०—यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं फ स = अ द तथा $\angle$ द अ य = $\angle$ फ स य ?

[यह दोनों त्रिभुज अ द य और फ य स को अनुरूप (Congruent) सिद्ध करने पर हो सकता है । त्रिभुजों की अनुरूपता आसानी से सिद्ध हो सकती है जिसके आधार पर उपरोक्त प्रश्न हल हो सकता है]

उदाहरण २—एक वर्ग जिसका क्षेत्रफल (Area) २२५ वर्ग गज है । उसके चारों ओर २ आना प्रति वर्ग गज की दर से तार लगाने का क्या खर्चा होगा ?

विश्लेषण—

प्र०—इस प्रश्न में क्या दिया है ?

(वर्ग का क्षेत्रफल और तार लगाने की दर)

प्र०—क्या ज्ञात करना है ?

(तार लगाने का सम्पूर्ण खर्च ज्ञात करना है)

प्र०—तार लगाने के सम्पूर्ण खर्च को कब मालूम कर सकते हैं ?

(जब सम्पूर्ण तार की लम्बाई तथा तार की दर ज्ञात हो)

प्र०—तार की लम्बाई क्या होगी ?

(तार की लम्बाई वर्ग की परिमिति (Perimeter) के बराबर होगी)

प्र०—वर्ग की परिमिति कैसे ज्ञात की जाती है ।

(वर्ग की एक भुजा को ४ से गुणाकर परिमिति ज्ञात हो जाती है)

प्र०—वर्ग की भुजा का मान कैसे ज्ञात होता है ?

(वर्ग के क्षेत्रफल (Area) का वर्गमूल (Square root) निकालने पर भुजा का मान ज्ञात हो सकता है)

चूँकि वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात है इसलिए प्रश्न उपरोक्त विश्लेषण के आधार पर हल किया जा सकता है ।

उदाहरण ३—

यदि अ : ब = स : द तो सिद्ध करो अ स + २ ब^२ : ब स = स^२ + २ ब द : द स ।

विश्लेषण—

अ स + २ ब^२ : ब स = २ ब द : द स सही होगा

$$\text{यदि } \frac{\text{अ स} + २ \text{ ब}^२}{\text{ब स}} = \frac{\text{स}^२ + २ \text{ ब द}}{\text{द स}}$$

यदि (अ स + २ ब^२) द स = (स^२ + २ ब द) ब स

या यदि अ स^२ द + २ ब^२ द स = ब स^३ + २ ब^२ द स

या यदि अ स^२ द = ब स^३

या यदि अ द = ब स

या यदि $\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{स}}{\text{द}}$ (जो कि दिया है)

संश्लेषण विधि (Synthetic Method)

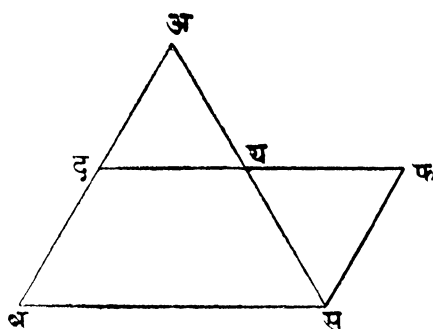
संश्लेषण विधि (Synthetic Method) विश्लेषण विधि (Analytic Method) के बिलकुल विपरीत होती है । इस विधि में ज्ञात (Known) से अज्ञात (Unknown) की ओर को जाते हैं । जब कभी हमको रेखा गणित में कोई साध्य सिद्ध करनी होती है तो हम अनुमान

(Hypothesis) के आधार पर किसी निष्कर्ष (Conclusion) पर पहुँचते हैं। रेखा गणित की पुस्तकों में जिस रूप में साध्यों का हल लिखा होता है वह सब संश्लेषण का ही रूप है। इसको विश्लेषण विधि के पदों का संक्षिप्त रूप कह सकते हैं।

संश्लेषण में एक तथ्य (Fact) की सत्यता की जाँच होती है। परन्तु इससे प्रस्तुत पाठ का सही तथा वास्तविक ढाँचा (Plan) ज्ञात नहीं होता है। इस तरह संश्लेषण विधि साध्य सिद्ध करती है परन्तु उसकी व्याख्या नहीं करता है। इसके द्वारा विश्लेषण विधि से प्राप्त तथ्य की जाँच की जा सकती है।

उदाहरण—

प्र०—सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा की आधी और समानान्तर होती है।



उत्तर

दिया है—

अ ब स एक त्रिभुज है और 'द' और 'य' क्रमशः अब और अस के मध्य बिन्दु हैं तथा द और य मिला दिये गये हैं।

सिद्ध करना है (To prove)—द य॥ और $\frac{1}{2}$ ब स के।

रचना—(Construction)—दय को फ बिन्दु तक इस तरह बढ़ाया कि द य=य फ के। फ और स को मिला दिया।

उपपत्ति (Proof)—

त्रिभुज अ द य और य फ स में

अ य=य स (दिया है)

द य = य फ (रचना से)

$\angle$ अ य द = $\angle$ स य फ सम्मुख कोण (Vertically Opposite Angles)

$\therefore \triangle$ अ द य $\equiv$ $\triangle$ य फ स ।

इसलिए $\angle$ द अ य = $\angle$ फ स य ।

परन्तु ये एकांतर (Alternate) कोण हैं

इसलिए अ द ॥ फ स और अ ब ॥ फ स

फिर अ द = ब द

$\therefore$ ब द = फ स

$\therefore$ द फ = ब स

द य = $\frac{1}{2}$ द फ

द य = $\frac{1}{2}$ ब स

द य = ॥ और $\frac{1}{2}$ ब स

यही सिद्ध करना है

विश्लेषण तथा संश्लेषण विधि का उपयोगिता (Value of Analytic and Synthetic Method)---

[१] विश्लेषण विधि की यह विशेष उपयोगिता है कि इसके द्वारा अज्ञात [Unknown] को ज्ञात [known] से जोड़ा जा सकता है। परन्तु संश्लेषण विधि द्वारा केवल एक ही का ज्ञान होता है। यंग [Young] कथानुसार संश्लेषण विधि में सूखी घास से एक तिनका निकाला या के दूढ़ा जाता है परन्तु विश्लेषण विधि में स्वयं तिनका घास से बाहर निकलना चाहता है।

[२] संश्लेषण विधि द्वारा किसी वर्णन की पुष्टि की जाती है परन्तु इसमें सीखने वाले को कोई विशेष मानसिक लाभ नहीं होता है जबकि विश्लेषण विधि में मानसिक क्रिया को लाभ होता है।

[३] विश्लेषण विधि में बालक एक खोज करने वाले की तरह कार्य करता है। विद्यार्थी इस विधि में संश्लेषण विधि की अपेक्षा अधिक सक्रिय रहता है।

[४] पुस्तकों में प्रश्न का हल संश्लेषण विधि द्वारा दिया होता है जिससे उसका बालकों को अधिक लाभ होता है क्योंकि उसका निश्चित रूप होता है।

कक्षा में संश्लेषण विधि का स्थान (Place of Synthetic Method In Class Room)

इसका कक्षा में महत्वशाली स्थान है। कक्षा में इसके द्वारा विश्लेषण विधि द्वारा की गई खोजों को क्रम से रखा जाता तथा दुबारा निरीक्षण किया जाता है। चूँकि इस क्रिया में ज्ञात से अज्ञात की ओर जाना होता है, इसलिए प्रश्नों के हल करने में सरलता तथा सही गमन इसके द्वारा सम्भव है। प्रत्येक प्रकार के गणित के पाठ में इसका प्रयोग किया जा सकता है।

ह्यूरिस्टिक विधि [Heuristic Method]

ह्यूरिस्टिक शब्द एक ग्रीक [Greek] शब्द से निकला है जिसका अर्थ है खोज [Discovery]। इस विधि में बालक स्वयं खोज करता है। उसको कुछ बताया नहीं जाता है और वह स्वयं सक्रिय रहता है। इस विधि में बालक स्वयं ज्ञान की खोज करते हैं और अध्यापक उनको कम से कम ज्ञान देता है। परन्तु माध्यमिक कक्षाओं में बच्चे की योग्यताओं का विकास इस सीमा तक नहीं हो पाता है कि वे स्वयं कोई वास्तविक खोज कर सकें फिर भी उनको इस विधि में पर्याप्त मात्रा तक स्वतंत्रता होती है कि वे स्वयं कार्य करें और शिक्षक उनको समय २ पर सहायता दे तथा प्रश्नों के आधार पर नवीन ज्ञान दे। इस विधि में आने वाली पुस्तकें भी ह्यूरिस्टिक ढंग पर लिखी होनी चाहिए ताकि बालक उसकी सहायता से कार्य कर सकें। यह विधि वह है जिसमें विद्यार्थी स्वयं अधिक से अधिक खोज करें और शिक्षक कम से कम सहायता दे।

गुण [Advantages]—

[१] इस विधि में बालक स्वयं क्रियाशील [active] होते हैं और उनको सोचने का मौका मिलता है।

[२] इस विधि द्वारा बालकों को विषय का सही ज्ञान होता है। एक विद्यार्थी जो स्वयं किसी समस्या का हल करता है उसको समस्या में उत्पन्न प्रत्येक कठिनाई का सही ज्ञान हो जाता है जिसके आधार पर समस्या आसानी से हल हो सकती है।

[३] इस विधि में बालकों की रुचि तथा कार्य करने की इच्छा, दोनों अन्य विधियों की अपेक्षा अधिक होती है।

[४] अध्यापक इस विधि में प्रत्येक बालक के सम्पर्क में आता है

जिससे वह प्रत्येक बालक की मानसिक क्षमता को समझ सकता है तथा उसके विकास में सहायता दे सकता है।

[५] इस विधि में घर पर अध्ययन अन्य विधियों की अपेक्षा सरल तथा कम होता है।

दोष [Disadvantages]—

[१] गणित प्रारम्भ करने वालों के लिए यह विधि उपयुक्त नहीं है।

[२] प्रारम्भ में यह विधि धीरे चलती है।

[३] कभी कभी बालकों को गणित के तथ्यों [facts] की खोज करना कठिन प्रतीत होता है।

(४) इस विधि में अध्यापक को विशेष तैयारी करनी पड़ती है।

(५) प्रत्येक अध्यापक इस विधि को कक्षा में सुचारु रूप से नहीं चला सकता है।

(६) इस विधि को चलाने के लिए कक्षा भी छोटी होनी चाहिए।

प्रयोगशाला विधि (Laboratory Method)

ह्य रिस्टिक विधि की भाँति इस विधि में भी बालक गणित के तथ्यों (Facts) की खोज प्रयोगशाला में करते हैं। इस विधि में खोज प्रश्नों के आधार पर न होकर प्रयोगों द्वारा की जाती है। भिन्न भिन्न प्रयोग जैसे क्षेत्रफल (Area), आयतन (Volume) रेखा (Line), कोण (Angle) आदि को तोल (weighing) तथा नाप (Measuring) कर आपस का सम्बन्ध प्रयोगों द्वारा स्थापित किया जाता है। उदाहरण के लिए एक बालक वृत्त के क्षेत्रफल (Area) तथा उसके अर्ध व्यास (Radius) में सम्बन्ध ज्ञात करना चाहता है। इस समस्या के हल करने में बालक निम्न प्रयोग करेगा।

वह कार्ड-बोर्ड के भिन्न भिन्न गोलाई के बहुत से वृत्त तैयार करेगा। फिर प्रत्येक वृत्त (Circle) के क्षेत्रफल (Area) तथा उसके अर्ध व्यास (radius) को ज्ञात करेगा। इन दोनों के अनुपात के आधार पर वह एक निष्कर्ष पर पहुँचेगा। प्रत्येक दशा में

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{22}{7} \times (\text{अर्ध व्यास})^2$$

इस तरह से भिन्न भिन्न प्रयोगों के आधार पर उपरोक्त सूत्र (Formula) ज्ञात हो जाता है।

गुण (Advantages)—

१—खोज करने का ढंग प्राकृतिक [Natural] होता है।

२—यह सदैव स्थूल (Concrete) होता है जिसके कारण बालक इसमें रुचि [Interest] तथा आनन्द लेते हैं।

३—इसके द्वारा गणित के प्रयोग (Application) आसानी से ज्ञात किये जाते हैं।

४—इसके द्वारा बालकों को स्थान (space) का सही बोध होता है। विद्यार्थी जिसने बहुत से कोण नाप लिए हों उसको कोण का सही बोध हो सकता है।

दोष (Disadvantage)—

(१) विद्यालय के बालकों को प्रयोगों द्वारा गणित के तथ्यों (Facts) की खोज करना आसान नहीं होता है।

(२) यह विधि बड़ी ही मन्द (slow) विधि है।

(३) इस विधि में व्यय अधिक होता है,

(४) इस विधि में बालकों को गणित के तथ्यों (facts) से सम्बन्ध होता है परन्तु उनमें गणित सम्बन्धी तर्कशक्ति (Power of Reasoning) का विकास नहीं होता है, जो कि अधिक आवश्यक है।

व्याख्यान विधि (Lecture Method)

यह विधि निम्न कक्षाओं में उपयुक्त नहीं होती है। इसका प्रयोजन उच्च कक्षाओं में लाभप्रद होता है। परन्तु उच्च कक्षाओं में भी इसके साथ ही साथ प्रश्न-उत्तर विधि का प्रयोग भी करना चाहिए। आधुनिक युग में गणित पढ़ाने में यह विधि स्कूलों में प्रयोग में नहीं लाई जाती है क्योंकि इसमें बालकों की अपेक्षा शिक्षक सक्रिय (Active) होता है। इस विधि में शिक्षक अपने व्याख्यान के द्वारा बालकों को नवीन ज्ञान देता है।

गुण (Advantages)—

(१) इस विधि द्वारा अधिक पाठ्य-वस्तु को कम समय में दिया जा सकता है।

(२) यह विधि बड़ी कक्षाओं में उपयुक्त होती है।

(३) इस विधि में विचारों की कड़ी (Sequence of Ideas) का क्रम टूटता नहीं है।

(४) यह विधि शिक्षक के लिए सरल है।

दोष (Disadvantages)--

(१) इससे केवल सूचना प्राप्त होती है जाँ कि गणित में आवश्यक नहीं है ।

(२) विद्यार्थी कक्षा में ध्यान नहीं देते हैं ।

(३) इस विधि में एक विचार दूसरे के बाद शीघ्रता से आता है जिससे घर पर अध्ययन अधिक करना पड़ता है ।

(४) इस विधि में शिक्षक कक्षा में विद्यार्थियों के सम्पर्क (Contact) में नहीं आ पाता है ।

डॉगमैटिक विधि (Dogmatic Method)—

इस विधि में गणित पढ़ाने की मुख्य रूप रेखा अध्यापक का कड़ा-पन (Rigour) होता है । यह विधि मनोविज्ञान की विधि के बिल्कुल विपरीत होती है जहाँ कि शिक्षक बालकों की व्यक्तिगत योग्यता (Ability) पर ध्यान नहीं देता है । इस विधि के अनुयायियों (Followers) का यह मत है कि गणित पाठन में विशेष ध्यान उसकी सत्यता (Exactness) पर होना चाहिए ।

इस विधि में गणित को याद कराया जाता है । इस तरह से भिन्न भिन्न नमूनों के आधार पर गणित को पढ़ाया जाता है जिससे बालकों में गणित समझने की योग्यता (Ability) तथा जानकारी (Understanding) पैदा हो जाय । अध्यापक इस विधि में पर्याप्त मात्रा में सख्ती करके गणित पढ़ाते हैं ।

उपरोक्त विधि का प्रयोग गणित पढ़ाने में मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों के बिल्कुल विपरीत होता है । बालकों को इस विधि द्वारा इस गणित के प्रति रुचि उत्पन्न नहीं हो पाती है । इसलिए आधुनिक युग में इस विधि का प्रयोग गणित पढ़ाने में नहीं होता है ।

अध्याय ५

बेसिक शिक्षा तथा गणित शिक्षण

(Basic Education and Teaching of Mathematics)

बेसिक शिक्षा में गणित का महत्व—

बेसिक शिक्षा तीन माध्यमों (Mediums) द्वारा दी जाती है—प्रकृति (Nature) समाज (Society) और उद्योग (Craft)। बालक का जीवन प्रकृति और समाज में बीतता है। इसलिए बेसिक शिक्षा में प्रकृति और समाज के सन्तुलन पर विशेष जोर दिया जाता है। गणित प्रकृति और समाज में सम्बन्ध स्थापित करती है और उद्योग की वृद्धि में सहायक है। बालक को प्राकृतिक घटनाओं जैसे सूर्य, चन्द्रमा, तारों के निकलने का समय, उनकी स्थिति तथा दिशा, ऋतुओं तथा वर्षा आदि के ज्ञान की आवश्यकता होती है। यह सब गणित द्वारा ही सम्भव है। इस प्रकार गणित प्राकृतिक घटनाओं को समझने में बहुत सहायक है। घर और समाज सम्बन्धी समस्याओं जैसे खाने पीने, कपड़े और मकान बनवाने, लेन देन में उठने वाले खर्चों के हिसाब किताब, शादी ब्याह, श्राद्ध और अन्य सामाजिक उत्सवों में हुए आय-व्यय के व्यौरों का सामना करना पड़ता है। यह

सब समस्यायें भी गणित द्वारा ही सुलझाई जा सकती है। इस प्रकार सामाजिक समस्याओं में भी गणित की आवश्यकता होती है। उद्योग में तो गणित का कदम-कदम पर उपयोग है। खेतों का क्षेत्रफल, बीजों की नाप तौल और उनसे उत्पादित पदार्थों की तौल, भंडार-बिक्री खरीद बिक्री, रंग कागज, लकड़ी, लोहा, जस्ता, टीन आदि की बाजार दर, रंग रासायन आदि का अनुपात के अनुसार उपयोग, लाभ-हानि का हिसाब फैलाना आदि बातों का हल बिना गणित के सम्भव नहीं। अतः गणित का उपयोग तीनों प्रकार के माध्यम प्रकृति, समाज और उद्योग में भली-भाँति होता है।

इसके अतिरिक्त बेसिक शिक्षा में इस बात पर ध्यान दिया जाता है कि बालक जो भी ज्ञान प्राप्त करे वह विभिन्न क्रियाओं (Activities) के आधार पर प्राप्त करे। इसमें शिक्षा इस प्रकार दी जाती है कि ज्ञान (Knowledge) और कर्म (Activity) में परस्पर समन्वय (Correlation) बना रहे। गणित विभिन्न क्रियाओं और उनसे उत्पन्न ज्ञानों के जोड़ने में बड़ी उपयोगी है। जिस प्रकार भवन निर्माण में गारा एक ईंट को दूसरी ईंट के जोड़ने सहायक होता है। उसी प्रकार गणित भी विभिन्न क्रियाओं और ज्ञान के जोड़ने में सहायक होता है। इसीलिए बेसिक शिक्षा में गणित की उपयोगिता को समझकर पाठ्यक्रम में इसका समावेश (Include) किया गया।

बेसिक शिक्षा में गणित पढ़ाने के उद्देश्य—

बेसिक शिक्षा में गणित पढ़ाने का उद्देश्य विद्यार्थियों को इस योग्य बनाना है कि वे अपने उद्योग को तथा घरेलू व सामाजिक जीवन के सम्बन्ध में आने वाले हिसाब किताब और नाप तौल की समस्याओं को शीघ्रता से हल कर सकें। अतः बेसिक शिक्षा में गणित के व्यावहारिक तथा सांस्कृतिक मूल्य पर अधिक जोर दिया जाता है। गणित के अनुशासनात्मक मूल्य पर बिल्कुल ध्यान नहीं दिया जाता।

अतः अध्यापक को बेसिक शिक्षा में गणित पढ़ाते समय निम्न-लिखित उद्देश्यों को ध्यान में रखने चाहिये।

(१) बालकों को दैनिक जीवन में काम आने वाले अङ्कों का भली भाँति ज्ञान कराना चाहिए।

(२) उद्योग और दैनिक जीवन में उठने वाली अनेकों संख्या व ज्यामिति सम्बन्धी समस्याओं को शीघ्र एवं शुद्धता से हल करने की क्षमता प्राप्त करानी चाहिए।

(३) बालकों को किसी विषय पर म्यग्रं सोचने की, एकाग्रचित्त (Concentrate) होने की, उस पर सफल प्रयत्न (effort) करने की तथा उसको शब्दों, संकेतों या चित्रों द्वारा सूक्ष्म में व्यक्त करने के अवसर प्रदान करने चाहिए ।

बेसिक शिक्षा में गणित का पाठ्यक्रम—

बालक को किसी विशेष परिस्थिति में गणित के जिस ज्ञान की आवश्यकता होती है वही बात उस समय बालक को पढ़ाई जानी चाहिए । ऐसा करने से बालक रुचि पूर्वक गणित के ज्ञान को ग्रहण करता है । इस प्रकार वर्तमान आवश्यकता और बालक की रुचि, बेसिक शिक्षा में गणित का पाठ्यक्रम बनाने के मूल सिद्धान्त हैं ।

यह पाठ्यक्रम बड़ा लचीला (Flexible) होता है । इसमें कोर्स की सूक्ष्म रूपरेखा (Out Line) दी हुई होती है । अध्यापक पढ़ाते समय उस कोर्स में से आवश्यकता तथा बालकों की रुचि के अनुसार किसी भी विषय को चुनने में पूर्ण स्वतन्त्र होते हैं । पाठ्यक्रम में सैद्धान्तिक और कृत्रिम (Artificial) गणित के लिए कोई स्थान नहीं होता है । इसमें विशेष जोर इस बात पर दिया जाता है कि गणित का दैनिक जीवन से सम्बन्ध हो । डा० जाकिर हुसैन ने बेसिक शिक्षा की मूल योजना में बतलाया है कि बेसिक शिक्षा सैद्धान्तिक और अकों तक ही सीमित न रखी जाये बल्कि इसका बहुत समीप सम्बन्ध उन व्यावहारिक समस्याओं से होना चाहिए जो बुनियादी कला कौशल को सीखते समय उत्पन्न होती हैं । इसीलिए बेसिक शिक्षा में गणित के पाठ्यक्रम में नीरस (Dry) भिन्न, काम और समय सम्बन्धी रूखे प्रश्न तथा निरर्थक (Meaningless) बीजगणित के गुणन खण्ड आदि को तनिक भी स्थान प्राप्त नहीं है । इसमें उसी गणित को सम्मान प्राप्त है जो हस्तकला में सामाजिक तथा मनोरंजन सम्बन्धी क्रियाओं और व्यावहारिक जीवन में आवश्यक होती है । रचनात्मक रेखागणित पर अधिक जोर दिया जाता है जिससे यह हस्तकला तथा घरेलू कामों में डिजाइन और चित्र बनाने में सहायक हो सके । बीजगणित भी वही पढ़ाई जाती है जो अंकगणित के प्रश्नों को सरल करने में सहायक हो । बीजगणित की उन समीकरणों को पढ़ाया जाता है जो हस्तकला सम्बन्धी समस्याओं को हल करने में सहायक होती है ।

बेसिक शिक्षा में गणित के पाठ्यक्रम बनाने में प्रायः गणित को इसके व्यवहारिक कोर्स से पृथक कर दिया जाता है ।

पाठ्यक्रम में इसका सीधी तौर पर कोर्स लिख दिया जाता है जैसे जोड़, बाकी, गुणा, भाग, दशमलव, एकिक नियम आदि। इसका प्रभाव यह पड़ता है कि प्रायः अध्यापक बालकों को पढ़ाते समय उस कोर्स को दैनिक जीवन सम्बन्धी समस्याओं से बड़ी कठिनाई से जोड़ पाते हैं। अतः गणित कोर्स को दैनिक जीवन सम्बन्धी समस्याओं से जोड़ देना चाहिए।

गणित में दैनिक जीवन सम्बन्धी समस्यायें अनेकों हैं उनमें से कुछ नीचे दी जाती हैं—

(१) उद्योग सम्बन्धी—त्रिभुज, चतुर्भुज, वर्ग व आयत आदि आकृतियों की व्याख्याएँ बनवाई जा सकती हैं। जब वे खेतों के लिए बीज व खाद और बिनौले तौलें उस समय उनको तौल सम्बन्धी इकाइयाँ जैसे तौला, छटाँक, सेर इत्यादि के बारे में बताया जा सकता है। खेतों व बागों में व्याख्याएँ व मार्ग बनाते समय उनको भूमि की पैमाइश करना, क्षेत्रफल आदि का निकालना सिखाया जा सकता है। खेत व बाग में उत्पन्न सामान, बुने हुये कपड़े को बिकवाकर उनको लाभ हानि तथा व्यवहार गणित का ज्ञान कराया जा सकता है। इसी सम्बन्ध में उनको रसीद बही, रोकड़वही, और बैलेंस शीट का ज्ञान भी सहज में हो जायेगा। खेती-बाड़ी में व्याख्याओं के बनवाते समय उनको फील्ड-बुक भी सिखलाई जा सकती है। वस्त्र बुनते समय उनको गति, घर्षण आदि का भी ज्ञान कराया जा सकता है। बुने हुए वस्त्र पर डिजाइन करवाते समय ज्यामिति की विभिन्न आकृति का ज्ञान दिया जा सकता है। रंगवाते समय रंगों के हिसाब का ज्ञान हो जाता है। मिट्टी का माँडल बनाने में ठोस ज्यामिति की आकृति गोले (Sphere), घन (Cube) आदि का ज्ञान सरलता से दिया जा सकता है। जब वे मिट्टी के ढेलों से काम करेंगे तो उनको गिनती का ज्ञान भी सहज में हो जायेगा लकड़ी व मिट्टी के खिलौने बनवाते समय नापतौल, विभिन्न पैमाइशें आदि सिखलाई जा सकती है। उनको रंगने में रंगों को विभिन्न अनुपात में मिलाना बताया जा सकता है। इस प्रकार विभिन्न प्रकार के उद्योग पर विभिन्न प्रकार की गणित की शिक्षा दी जा सकती है।

(२) घर और परिवार सम्बन्धी—खाने पीने, कपड़े व मकान बनवाने, पढ़ने लिखने, लेन-देन के सम्बन्ध में उठने वाले हिसाब सम्बन्धी प्रसंगों में अनेक प्रकार की गणित की शिक्षा दी जा सकती है। बालकों के अभिभावकों की आमदनी पर टैक्स के सम्बन्ध में प्रतिशत सम्बन्धी

प्रश्न करवाये जा सकते हैं। डाकखाने व बैंकों में रुपयों को जमा करना निकालने और उस पर ब्याज फैलाने के प्रसंग में ब्याज सम्बन्धी प्रश्न कराये जा सकते हैं।

(३) समाज सम्बन्धी-स्कूल में सहकारी भंडार (Cooperative Bank) चलाकर बालकों को ब्याज, लाभ-हानि, साभेदारी तथा अंकगणित के अन्य प्रमुख नियम सरलता से बतलाये जा सकते हैं। स्कूल में हुए उत्सव का हिसाब भी बालकों से रखवाया जावे, इससे वे लेन-देन-खरीद और खर्च आदि बातों को सरलता से सीख जाते हैं। समाज में शादी, ब्याह, श्राद्ध और अनेक व्यवहारिक एवं सामाजिक कामों में लेन-देन—खरीद, बिक्री के प्रसंग में आये हुई अनेक प्रकार की गणित बालकों को सिखलाई जा सकती है।

उपकरण—

पाठ्यक्रम बनाने के बाद गणित शिक्षण के लिए आवश्यक उपकरण और सामग्री का होना भी नितान्त आवश्यक है। इन उपकरणों और सामग्री से गणित का शिक्षण सरस एवं रोचक हो जाता है। इसके अतिरिक्त गणित शिक्षण में कुछ ऐसी सूक्ष्म बातें भी आजाती हैं जिनका समझना यदि सब छात्रों के लिये नहीं तो कुछ के लिये तो अवश्य हो असम्भव हो जाता है। ऐसी दशा में यदि उपकरण तथा चित्रादि दिखलाकर सूक्ष्म बातें स्पष्ट करदी जायँ तो उसे बालक शीघ्र ही समझ लेते हैं। ब्लैक बोर्ड, पोइटर, खल्ली, झाड़न के अतिरिक्त ज्यामेट्रीकल सेट, चैन और मापने के यंत्र जैसे गिनने के सामान, विभिन्न रंगों की गोलियाँ, भिन्न-भिन्न ऊँचाई और गहराई वाले सामान ठोस ज्यामिति के विभिन्न आकृतियों के मॉडल जैसे गोला, घन, आयताकार ठोस, त्रिपाश्व (Prism) और शंकु आदि, भिन्न भिन्न प्रकार के सिक्के, विभिन्न घनत्व वाले पदार्थ, तैल के विभिन्न प्रकार के बाँट, ग्राफ, चार्ट तथा विभिन्न प्रकार के चित्र व रेखाचित्र आदि आकर्षण ढंग से विद्यालय में सजे हुए होने चाहिए। यदि सम्भव हो सके तो विद्यालय में सहकारी भंडार (Cooperative Bank) भी होना चाहिए। यह भी बालकों को गणित शिक्षण का एक साधन है। जहाँ तक हो सके चित्र हाथ के बने होने चाहिए। इन उपकरणों की सफाई और व्यवस्था का प्रबन्ध भी अध्यापक और बालकों द्वारा होना चाहिए।

विधि (Method)—

बेसिक शिक्षा में गणित की शिक्षण पद्धति सीधी तौर पर नियम

बताकर प्रश्न निकलवाने की नहीं है बल्कि सीखते समय जो समस्या खड़ी हो उसको हल करते हुए गणित सिखलानी चाहिये। जैसे किसी बालक ने एक दिन में ४० गज सूत काता और दूसरे दिन ३५ गज। अब इस बात की आवश्यकता होगी कि उसने दोनों दिन में कितने गज सूत काता। इस समय अध्यापक को जोड़ का नियम सिखलाने का अच्छा अवसर है। इस प्रकार क्राप्ट के सम्बन्ध में अनेक समस्याएँ आवेंगी और उनका उपयोग करते हुए गणित का ज्ञान सहज में दिया जा सकेगा। अध्यापक को गणित की शिक्षा देते हुए यह भी विचार रखना चाहिए कि बेसिक कक्षाओं में बालक बहुत छोटे होते हैं अतः उनकी आगमन प्रणाली (Inductive Method) से पढ़ाना चाहिये क्योंकि निगमन प्रणाली (Deductive Method) के लिये काफी तर्क और समझ की आवश्यकता पड़ती है।

ऐसा करने से जीवन सम्बन्धी वास्तविक प्रसंगों के सहारे गणित का शिक्षण हो सकेगा। कभी-कभी बेटुके और असत्य उदाहरण पुस्तकों में दिखलाई देते हैं। जैसे एक आदमी की उम्र १४ साल है और उसके तीन बच्चे हैं। अब यह साँचने की बात है कि क्या १४ साल के लड़के के ३ बच्चे हो सकते हैं? इसी प्रकार ऐसे प्रश्न भी दिये जाते हैं जिनका उत्तर २० $\frac{१}{२}$ आदमी आता है। क्या यह सम्भव है कि २० $\frac{१}{२}$ आदमी हो सकते हैं? कभी-कभी ऐसे प्रश्न भी पूछे जाते हैं कि—घोड़े का दाम २ रु० है तो ८ घोड़ों का दाम बताओ। क्या एक घोड़ा २ रु० का हो सकता है? अतः ऐसे प्रश्नों को बालकों से नहीं करने चाहिए जो कृत्रिम और असत्य हों। इसका बालकों पर बुरा प्रभाव पड़ता है। वे गणित को जीवन से असम्बन्धित समझकर एक अजीब और भयानक विषय समझ बैठते हैं। अध्यापक को चाहिए कि वे बालक से उन्हीं प्रश्नों को करवाये जो संख्यात्मक, वर्णनात्मक, खाने-पीने, पहनने-ओढ़ने, खेल-खिलौने आदि से सम्बन्धित तथा मनो-रंजक हों। इसके साथ-साथ गणित से सम्बन्ध रखने वाली सामग्री का जैसे गिनने के साधन, सिक्के, ज्योमैट्रीकल सैट, ठोस ज्यामिति की आकृतियाँ आदि का भी गणित पढ़ाते समय उपयोग करना चाहिए। ऐसा करने से बालकों में सहज प्रवृत्ति उत्पन्न होगी। उन्हें गणित में रस मिलेगा। वे गणित में रुचि लेने लगेंगे। उनमें शोध की प्रवृत्ति जागृत होगी और अपनी समस्याओं का हल अपने आप निकालने में समर्थ होंगे।

कभी-कभी अध्यापक एक गल्ती कर बैठते हैं। वे बालकों को गणित सिखाते समय उन पर कुछ गल्ती करने पर धमकाते हैं उनको बैचों पर खड़ा कर देते हैं और उनको पीटते हैं। इसके अतिरिक्त गणित के सूक्ष्म और अबोधगम्य सिद्धांतों को वे बालकों की उम्र, समझ और ओकात का बिना बिचार किये उन पर लादते हैं। इसका परिणाम यह होता है कि बालक गणित के प्रति उदासीन हो जाते हैं और उससे कोसों दूर भागते हैं। रट रटकर वे चाहें परीक्षा में उत्तीर्ण होजाते हैं परन्तु गणित का वास्तविक उपयोग अपने जीवन में नहीं ले पाते हैं। अतः अध्यापकों को चाहिए कि वे इन गलतियों से सावधान रहें। उनको चाहिए कि वे बालकों में इस प्रकार प्रेम का वातावरण बनायें कि बालक निःसंकोच अध्यापक से अपनी शंका समाधान करें और किसी बात को अध्यापक से पूछने में भिन्नकों नहीं।

गणित अध्यापक को यह बात भी ध्यान में रखनी चाहिए कि जब तक बालकों की रुचि विषय में रहे तभी तक गणित पढ़ानी चाहिए क्योंकि अनुकूल परिस्थिति और ठीक समय पर किया हुआ ही कार्य पूर्ण रूप से सफल होता है। यदि जिस समय बालक गणित के किसी विषय को पढ़ते-पढ़ते ऊब जावें और उनको अब उसके पढ़ने में रुचि नहीं रहे फिर भी अध्यापक गणित के उस पाठ को पढ़ाता रहे तो इसका परिणाम उसी प्रकार होगा जैसा कि बर्तन के भर जाने पर और पानी भरने से होता है। अतः बालकों को जब तक विषय में रुचि बनी रहे तभी तक उनको पढ़ाना चाहिए।

लड़कों में गणित के प्रश्नों को हल करने में शीघ्रता एवं शुद्धता का विकास हो तथा गणित के सम्बन्धी लेखन में कहीं भी किसी तरह भूल न होने पाये। इसके लिये गणित कार्य में अभ्यास (Drill)की आवश्यकता है। परन्तु अभ्यास इस प्रकार कराना चाहिए कि बालक उसके करने से ऊँचें नहीं। अध्यापक को यह अभ्यासकार्य खेल पद्धति(Play Way Method)द्वारा कराना चाहिए। अभ्यास कार्य में प्रश्न इस ढंग से बालकों के सम्मुख चुनने चाहिए कि बालक उनमें रुचि लेते रहें। अध्यापक को किसी प्रश्न की लघु विधि (Short Cut) पर जोर न देना चाहिए बल्कि इस क्रम से कराना चाहिए जिस क्रम से बालक सोचते चलते हैं। कमजोर बालकों का भी गणित अध्यापक को ध्यान रखना चाहिए। तेज (Intelligent) और कमजोर (Weak)

बालकों को यथा सम्भव उनकी योग्यता अनुसार पढ़ाना चाहिए। कमजोर बालकों को तेज बालकों के साथ लाने के लिये कभी-कभी अध्यापक बहुत जल्दी कर बैठते हैं। ऐसा करने से कमजोर बालकों की नींव कमजोर रह जाती है जो आगे उन्नति में बाधक होती है। अशुद्ध उत्तर आने पर बालकों से गुस्सा नहीं होना चाहिए बल्कि उनसे सही उत्तर निकलवाने की चेष्टा करनी चाहिये।

पाठ्य-पुस्तकें—कुछ लोगों की ऐसी धारणा है कि बेसिक शिक्षा में पाठ्य पुस्तक की कोई आवश्यकता नहीं होती है परन्तु यह उनकी बहुत बड़ी भूल है। बेसिक शिक्षा के लिए भी पुस्तकों का होना अनिवार्य है परन्तु ये पुस्तकें बेसिक शिक्षा के सिद्धान्त पर लिखी होनी चाहिए। गणित की पाठ्य पुस्तक में जो प्रश्न दिये जावें वे जीवन से सम्बन्धित होने चाहिए। प्रश्न वास्तविक हों उनमें कृत्रिमता की झलक न रहे। प्रश्नों को रखने का ढंग भी क्रम पूर्वक हो ताकि सरल प्रश्न पहले आवें और फिर अन्त में सबसे कठिन। मौखिक (Oral) तथा मानसिक प्रश्नों का भी समावेश होना चाहिए। गणित की अच्छी पुस्तक में पुष्टि के लिए कहीं-कहीं चित्र और आकृतियों का भी होना अनिवार्य है।

अध्याय ६

सहायक सामग्री

गणित को भली भाँति पढ़ाने के लिए सहायक सामग्री (Material Aid) का प्रयोग आवश्यक है क्योंकि समस्त विचार केवल मौखिक वर्णन द्वारा ही स्पष्ट नहीं हो पाते। सहायक सामग्री के प्रयोग से विद्यार्थियों का ज्ञान निश्चित हो जाता है क्योंकि मॉडल आदि देख लेने से बालकों को पाठ्य वस्तु समझने में कोई कठिनाई नहीं होती। ये वस्तुयें पाठ को रोचक एवं सरल बनाती हैं। बालकों का मन भी पढ़ने में लगा रहता है और वे प्रसन्नतापूर्वक सहज में ही ज्ञान ग्रहण कर लेते हैं। इसके प्रयोग से बालकों की स्मरण शक्ति तथा निरीक्षण शक्ति का भी विकास होता है।

गणित शिक्षण में सहायक सामग्री के रूप में प्रयोग करने वाली वस्तुयें निम्नलिखित हो सकती हैं।

- १—श्यामपट व चाँकें
- २—प्रत्यक्ष वस्तु व मॉडल
- ३—गणित सम्बन्धी उपकरण
- ४—चित्र, रेखा-चित्र, चार्ट आदि
- ५—गणित का संग्रहालय

६—गणित परिषद्

७—गणित की पुस्तकालय

८—गणित कक्ष

९—सिनेमा फिल्म

श्यामपट व चाँकें—गणित अध्यापक के लिए श्यामपट बड़ी उपयोगी वस्तु है। अंकगणित और बीज गणित के प्रश्नों के हल, रेखा गणित के चित्र तथा आँकड़ों के ग्राफ गणित अध्यापक श्यामपट पर लिखकर ही बालकों को सिखलाते हैं। श्यामपट की अनुपस्थिति में गणित का शिक्षण असम्भव है। अतः गणित कक्ष में काफी बड़ा एक श्यामपट होना चाहिए। ग्राफ के लिए या तो दूसरा श्यामपट होना चाहिये या उसी श्यामपट के दूसरी ओर ग्राफ के खाने बने होने चाहिए। यह श्यामपट चिकना और काले रंग से अच्छी तरह पुता होना चाहिए ताकि उस पर लिखावट ठीक आवे। यह चाँकें सफेद और रंगीन दोनों प्रकार की होनी चाहिये। ये चाँकें न तो इतनी कठोर होनी चाहिए कि श्यामपट पर लिखने में उस पर निशान बना दें और लिखते समय आवाज करें और न इतनी मुलायम ही होनी चाहिए कि थोड़ी २ देर बाद टूट जावें। साधारणतः प्रश्न सफेद चाँक से ही करने चाहिए परन्तु कुछ विशेष बातों को समझाने के लिए रंगीन चाँकों का प्रयोग करना चाहिए रंगीन चाँकों के प्रयोग से चित्र सजीव और स्पष्ट हो जाते हैं। जैसे यदि गणित अध्यापक रेखागणित की किसी आकृति में समान कोणों को बतलाने के लिए उन्हें रंगीन चाक से बना देता है तो बालक समान कोणों को सरलता से समझ लेंगे। रंगीन चाँक का प्रयोग, चित्र, रेखा-चित्र, कोण, इत्यादि बनाने में ही करना चाहिए, लिखने में नहीं।

प्रत्यक्ष वस्तु एवं मॉडल—प्रदर्शन सामग्री में सबसे अधिक महत्व प्रत्यक्ष वस्तु का है। प्रत्यक्ष वस्तुओं को देखकर बालकों को तत्सम्बन्धी ज्ञान शीघ्र हो जाता है। उदाहरणार्थ लीवर, पेंच, घिरी, सिक्के, बांट, घड़ी और तराजू इत्यादि ऐसी वस्तुएँ हैं जिनको यदि गणित अध्यापक प्रश्नों को हल करते समय आवश्यकतानुसार उपयोग करें तो बालकों को बड़ा लाभ होता है। इसी प्रकार गणित शिक्षण में मॉडल का भी बड़ा उपयोग है। ज्यामिति पढ़ाते समय मॉडल को बड़ी आवश्यकता अनुभव होती है। जैसे त्रिभुजों की विभिन्न किस्में पढ़ाते समय उनकी विभिन्न किस्मों के मॉडल दिखलाने से बालक

बड़ी आसानी से समझ जाते हैं। इसी प्रकार विभिन्न साध्यों को पढ़ाने के लिए विभिन्न प्रकार के मॉडल प्रयोग किये जा सकते हैं। ठोस ज्यामिति में मॉडल को आवश्यकता बहुत अधिक होती है, क्योंकि ये तीन क्षेत्रीय (Three Dimensional) होते हैं। इनको कल्पना मात्र से ही समझना प्रायः कठिन होता है। अतः घन (Cube), पिरामिड, प्रिज्म, गोले, बेलन (Cylinder), शंकु (Cone) आदि के मॉडल कक्षा में दिखला दिए जायँ तो बालक शीघ्रता से उनके बारे में ज्ञान प्राप्त कर लेते हैं।

गणित सम्बन्धी उपकरण—गणित शिक्षण में श्यामपट और चाँक के अतिरिक्त कुछ अन्य उपकरण की आवश्यकता पड़ती है। जैसे रेखागणित में पढ़ाते समय गणित अध्यापक श्यामपट पर वृत्त (Circle) प्रायः हाथ से बना देते हैं। इस प्रकार बनाया हुआ वृत्त बिल्कुल सही (Correct) नहीं होता है। अतः इस वृत्त से सम्बन्धित जो बात अध्यापक बताना चाहता है वह इस गलत आकृति से नहीं बता पाता। इसके अतिरिक्त इस अशुद्ध आकृति का बालकों पर प्रभाव भी बुरा पड़ता है। अतः गणित अध्यापक को श्यामपट पर परकार का प्रयोग करके बिल्कुल सही और स्वच्छ वृत्त बनाना चाहिए। यह परकार बालकों के प्रयोग करने वाली परकार से बड़ी होती है और इसमें पेंसिल के स्थान पर चाँक प्रयोग की जाती है। परकार के अतिरिक्त चाँदा (Protactor), सेट स्क्वायर, तथा स्केल, कैंची, काडंबोर्ड, तुला (Balance) आदि सभी उपकरण का गणित अध्यापक को काम पड़ता है। अतः इन उपकरणों का होना परमावश्यक है और गणित अध्यापक को इनका अधिक से अधिक प्रयोग करना चाहिए।

चित्र रेखाचित्र और चार्ट—कभी कभी कक्षा में चित्र, रेखाचित्र, ग्राफ और चार्ट आदि भी दिखलाने पड़ते हैं। प्राइमरी कक्षाओं के बालकों को गिन्ती सिखलाने के लिए गिन्ती का चार्ट का प्रयोग आवश्यक होता है मिडिल कक्षाओं के बालकों को भिन्न और क्षेत्रफल आदि बातों को पढ़ाने के लिए गणित अध्यापक को भिन्न सम्बन्धी चार्ट और क्षेत्रफल सम्बन्धी चार्टों का प्रयोग करना चाहिए। ऊँची कक्षाओं में रेखागणित की साध्यों की उपपत्ति से सम्बन्ध रखने वाले चार्ट दिखलाने चाहिए। रेखागणित और क्षेत्रफल व आयतन पढ़ाते समय रेखाचित्र का भी बड़ा प्रयोग होता है। यदि रेखागणित में पायथोगोरस साध्य पढ़ाते समय पायथोगोरस का चित्र और बीज-

गणित में श्रीधराचार्य विधि से गुणनखण्ड कराते समय श्रीधराचार्य का चित्र बालकों को दिखला दिया जावे तो बालकों को विषय के प्रति बड़ी रुचि बनी रहती है। परन्तु चित्रव चाटों के दिखलाने में यह ध्यान रखना चाहिए कि वे आकार में बड़े, स्पष्ट तथा गहरे रंग के होने चाहिए ताकि प्रत्येक बालक उनको भली भाँति देख सके। रेखाचित्र जहाँ तक हो सके घर से बने बनाये लाने की अपेक्षा बालकों के सामने ही बनाने चाहिए।

गणित का संग्रहालय—यदि सम्भव हो सके तो गणित का एक संग्रहालय भी स्थापित होना चाहिए क्योंकि गणित शिक्षण में संग्रहालय का एक महत्वपूर्ण स्थान है। इससे गणित का शिक्षण सजीब एवं रोचक बनाया जा सकता है। ठोस ज्यामिति की आकृतियों का बालकों को मॉडल आदि दिखलाकर सहज में ही ज्ञान कराया जा सकता है। इसके अतिरिक्त बालकों को भी वस्तुओं के संग्रह (Collect) करने की स्वाभाविक प्रकृति होती है। संग्रहालय के द्वारा बालकों की इस प्रकृति को विकसित तथा इसका सदुपयोग किया जा सकता है। इनमें अनेक प्रकार के गणित सम्बन्धी मॉडल होने चाहिए। इन मॉडलों में से कुछ खरोदे भी जा सकते हैं जैसे शकु (Cone), समपाश्व (Prism), बेलन (Cylinder) आदि के तथा कुछ मॉडल बालकों से भी बनवाये जा सकते हैं। गणित सम्बन्धी विभिन्न प्रकार की आकृतियों जैसे त्रिभुज की किस्में आदि भी रखनी चाहिए। प्रमुख गणितज्ञों जैसे पाइथोगोरस, आर्किमिडोज, रामानुज महावीराचार्य आदि के चित्र (Portraits) तथा मूर्तियों (Busts) का भी समावेश होना चाहिए। इसके अतिरिक्त गणित सम्बन्धी उपकरण परकार, सेटस्वाक्यर, फीता स्केल आदि तथा गणित सम्बन्धी मशीनें जैसे गणना करने की मशीन (Calculating Machine), क्षेत्रफल ज्ञात करने की मशीन आदि भी संग्रहालय में होनी चाहिए।

गणित परिषद्—गणित के शिक्षण में गणित परिषद् भी बड़ी उपयोगी होती है। बहुत सी बातें जो कक्षा शिक्षण में सम्भव नहीं हैं वे इसके द्वारा सहज में ही जान ली जाती हैं। गणित परिषद् बालकों को गणित की व्यावहारिक उपयोगिता प्रदान करता है। इसकी उपस्थिति में बालकों को अपने विचार प्रगट करने की शिक्षा प्राप्त करने का अवसर प्राप्त होता है। इसके द्वारा बालक अध्यापक के अधिक सम्पर्क में आते हैं जिससे बालक और अध्यापक

एक दूसरे को अच्छी तरह समझ लेते हैं। अध्यापक बालकों में निहित गुणों और आदतों को जान लेते हैं तथा बालक भी अध्यापक से कोई बात पूछने में हिचकिचाहट न रखते हैं।

ऐसी परिषद् गणित अध्यापक की देख रेख में बालकों द्वारा चलाई जानी चाहिए। इसके लिए बालकों में से सभापति, मंत्री, कोषाध्यक्ष तथा पुस्तकालय अध्यक्ष चुनने चाहिए। इसके प्रत्येक सदस्य से या तो वार्षिक चन्दा प्रारम्भ में लेलेना चाहिए या फिर महावारी चन्दा प्रारम्भ में ले लेना चाहिए या फिर महावारी चन्दा भी लिया जा सकता है चूँकि गणित अनिवार्य (Compulsory) विषय है अतः गणित परिषद् की सदस्यता प्रत्येक विद्यार्थी के लिए खुली होनी चाहिए। चाहे जो विद्यार्थी इसका सदस्य हो सकता है। ऐसा करने से परिषद् का आर्थिक लाभ भी होगा और साथ ही अधिक से अधिक विद्यार्थी इसका उपयोग ले सकेंगे।

परिषद् की बैठक (Meeting) महीने में कम से कम दो बार अवश्य होनी चाहिए। इसके लिए पन्द्रह तारीख और महीने की आखिरी तारीख अधिक अच्छी रहेगी। प्रत्येक बैठक में गणित के किसी विषय पर जैसे किसी गणितज्ञ का जीवन इतिहास तथा कार्य गणित सम्बन्धी खेल, पाइथोगोरस साध्य की विभिन्न उपपत्तियाँ (Proofs) गणित का दैनिक जीवन में उपयोग, शून्य की कहानी आदि पर भाषण होने चाहिए। इस पर प्रायः लड़कों को बोलने का अवसर मिलना चाहिए। विषय पहले ही तय कर लेना चाहिए इससे बालकों को विषय की तैयारी करने का अवसर मिल जाता है। कभी कभी बाहर से अन्य कॉलेजों के प्रोफेसर आदि विद्वानों को बुलाकर उनके भाषण भी कराने चाहिए। इस परिषद् के अन्तर्गत बालकों से उनकी रुचि के अनुसार गणित के चित्र, रेखाचित्र, चार्ट व मॉडल भी तैयार कराये जा सकते हैं। साल में एक बार गणित प्रदर्शनी (Mathematical-Exhibition) का आयोजन भी होना चाहिए। इस प्रदर्शनी में बालकों द्वारा तैयार किये गये चित्र, रेखाचित्र, चार्ट और मॉडल तथा उनके द्वारा इकट्ठा किया गणित सम्बन्धी साहित्य, प्रश्नों को हल करने के लिए नये तरीके, साध्यों को सिद्ध करने की विविध उपपत्तियों आदि रखनी चाहिए। ऐसा करने से बालकों का उत्साह बढ़ता है। इसके अतिरिक्त प्रदर्शनी में वह सहायक सम्बन्धी उपकरण तथा मॉडल आदि भी रखने चाहिए जो अध्यापकों ने अपनी सूझ से बनाये

हैं या कहीं अन्य स्थानों को देखकर या किन्हीं पुस्तकों में पढ़कर बनाये हैं। इन उपकरणों को देखकर बाहर के बालक व गणित अध्यापक लाभ उठा सकेंगे।

गणित की पुस्तकालय—आधुनिक शिक्षा प्रणाली के अनुसार बालकों को शिक्षा इस प्रकार दी जाती है कि वे नवीन बातों को स्वयं खोजें। अध्यापक का कार्य केवल उनको सही रास्ता दिखलाना है। इसके अतिरिक्त गणित अध्यापक के लिए यह सम्भव भी नहीं है कि वह अध्यापन काल में ही गणित का सारा कोर्स, उसके ऊपर काफी अभ्यास तथा मनोरंजन की दृष्टि से गणित एवं गणितज्ञों का इतिहास तथा गणित सम्बन्धी पहेलियाँ आदि करादे। वह तो कक्षा में गणित के प्रति रुचि उत्पन्न करता है। इस कोर्स सम्बन्धी विषयों पर काफी अभ्यास उसको कक्षा के बाद में करना होता है। इस पर काफी अभ्यास करने के लिए तथा मनोरंजन की दृष्टि से अध्ययन करने के लिए उसे पाठ्य पुस्तकों के अतिरिक्त पुस्तकों के अध्ययन की आवश्यकता होती है। इसी दृष्टि से गणित के पुस्तकालय की आवश्यकता होती है। अध्यापकों को भी पढ़ने के लिए पूर्ण अध्ययन करना पड़ता है। केवल पाठ्य पुस्तकों की सहायता से वह विद्यार्थियों की सभी आवश्यकता पूर्ण नहीं कर सकता। उसको भी आधुनिक खोजों और नवीन प्रणालियों के सम्पर्क आना पड़ता है अतः गणित के पुस्तकालय से गणित अध्यापक को भी सहायता मिलेगी।

पुस्तकालय के लिए पुस्तकों का चुनने का काम भी बड़ा महत्व पूर्ण होता है। पुस्तकें चुनते समय पुस्तकालय में पढ़ने वालों के स्तर और आयु का ध्यान अवश्य रखना चाहिये। इसमें पढ़ने वाले प्रायः अध्यापक ऊँची कक्षाओं के बालक तथा छोटी कक्षाओं के बालक हो सकते हैं। अतः पुस्तकालय में इन दोनों की आवश्यकता तथा स्तर के अनुसार पुस्तकें होनी चाहिए।

अध्यापकों के विचार से गणित के प्रत्येक विषय पर अनेक लेखकों की पुस्तकें, गणित शिक्षण पद्धति एवं गणित विषय पर वे पुस्तकें जो उसको पढ़ाने में सहायक हों तथा गणित सम्बन्धी ग्रन्थ होना आवश्यक है। इसके अतिरिक्त गणित कोष, विश्वकोष, गणित के इतिहास आदि भी पुस्तकालय में होने चाहिए। ऊँची कक्षाओं के बालकों की दृष्टि से उच्चकोटि के ग्रन्थ, पाठ्य पुस्तकें, गणित का इतिहास, बड़े-बड़े गणितज्ञों की जीवनियाँ, गणित के चमत्कार, गणित

में मनोरंजन, गणित का व्यवहारिक उपयोग तथा गणित सम्बन्धी नवीन खोज सम्बन्धी पुस्तकें होनी चाहिए। छोटी कक्षाओं के बालकों के विचार से पुस्तकें ऐसी होनी चाहिए जिनमें चित्रों की अधिकता हो। इन पुस्तकों में गणितज्ञों की रोचक कहानियाँ और गणित सम्बन्धी खेल तथा पहेलियाँ आदि होने चाहिए। छोटी कक्षाओं के बालकों के लिए पुस्तकों में यह बात अवश्य ध्यान में रखनी चाहिए कि इसकी छपाई मोटे अक्षरों में हो।

इन पुस्तकों के उपयोग में भी गणित अध्यापक का सहयोग होना चाहिए कि वह बालकों में इन पुस्तकों के पढ़ने की रुचि उत्पन्न करे। उसको कक्षा में ऐसी पुस्तकों की चर्चा करनी चाहिए। कक्षा में पढ़ाते समय उपविषय एवं प्रसंगों के सम्बन्ध में बतलाना चाहिये कि अमुक बात अमुक पुस्तक में मिलेगी। ऐसा करने से विद्यार्थी पुस्तकालय की पुस्तकों की उपयोगिता समझेंगे और उनसे लाभ उठावेंगे। इसके अतिरिक्त बालकों को उन पुस्तकों को उचित पाठन विधि से अवगत कराना भी गणित को उचित रीति से पढ़ने की विधियाँ भी बतलानी चाहिए।

गणित के पुस्तकालय के लिए कुछ पुस्तकों के नाम नीचे दिए जाते हैं परन्तु यह सूची पूर्ण नहीं है। इसमें अन्य उपयोगी एवं आवश्यक पुस्तक और ग्रन्थों के नाम बढ़ाये जा सकते हैं।

शिक्षण पद्धति :—

लेखक

- | | |
|---|---|
| 1. Teaching of Mathematics : | J. W. A. Young |
| 2. The Teaching of Secondary Mathematics | Cloude H. Brown |
| 3. Teaching of Mathematics in the Secondary Schools | Luncien Blain Kinney and C. Richard Purdy |
| 4. The Teaching of Elementary Mathematics | Godfrey and Siddons. |
| 5. The Teaching of Mathematics in the New Education | N. Kuppaswami Aiyanger |
| 6. Multi Sensory Aids in the Teaching of Mathematics. | |
| 7. गणित शिक्षण | एम० एस० रावत एवं एम० बी० लाल |

प्रमुख गणित सम्बन्धी पत्रिकाएँ

1. Mathematics Teacher.
2. Bullatin of Calcutta Mathematical Society.

गणित के इतिहास एवं मनोरंजन की पुस्तकें—

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1. Mathematics for the Million | Lancelot Mogben. |
| 2. What is Mathematics | Richard Courant and Herber Palious, |
| 3. History of Mathematics
I & II | D. E. Smith. |
| 4. हिन्दू गणित का इतिहास
भाग १, २, ३ | बी० बी० दत्त एवं
ए० एन० सिंह |
| 5. हिन्दू ज्योतिष का इतिहास | डा० गोरखप्रसाद |
| 6. गणित चमत्कार | रा० र० खाडिल्यकर |
| 7. गणित के आमोद-प्रमोद | हरेशचन्द्र जैन |
| 8. गणित सार संग्रह | महावीराचार्य |
| 9. गणित का इतिहास | काजोरी |
| 10. प्रमुख गणितज्ञों की कहानियाँ | मृकुट बिहारी लाल |
| 11. Mathematical Recreation and
Problems | Ball |
| 12. Recreations in Mathematics | Vinot |
| 13. गणित तिलक | सिंह तिलक सूरि |
| 14. त्रिशक्तिका | श्रीधराचार्य |
| 15. गणित में खेल तमाशे | महावीरप्रसाद जैन |

गणित कक्ष—गणित का कमरा गणित के समुचित एवं प्रभावोत्पादक शिक्षण के लिए परम आवश्यक है। पूर्णतः सुसज्जित कमरे के अभाव में गणित पढ़ने के लिए भूगोल, विज्ञान आदि अन्य कक्षाओं से आने पर बालक गणित के वातावरण में नहीं आ पाते। इसके अतिरिक्त गणित पढ़ने में कुछ उपकरणों का प्रयोग भी होता है उनका उपयोग भी भली भाँति न हो सकेगा। गणित के सुसज्जित कमरे में विद्यार्थी बहुत सी बातों से अनायास ही परिचित हो जाते हैं। अतः अनुकूल वातावरण में बनाये रखने और प्रभावपूर्ण गणित शिक्षण के लिए पृथक गणित का कमरा होना अनिवार्य है।

गणित के कमरे में सीटें इस प्रकार लगी होनी चाहिए कि जब

लड़के सीटों पर बैठ जावें तो उनको श्यामपट भली भाँति दिखलाई दे। पीछे बैठे हुए लड़कों को देखने में कठिनाई न हो। इन सीटों की ऊँचाई भी लड़कों की नाप के अनुसार होनी चाहिए। इसके अतिरिक्त यदि कोई बालक कमरे में इधर-उधर जावे तो उसके कारण अन्य बालकों को श्यामपट (Black Board) देखने में बाधा न पड़े। प्रकाश और हवा का भी गणित कक्ष में समुचित प्रबन्ध होना चाहिए। इसके लिए कमरे में दरवाजे खिड़कियाँ और रोशनदान पर्याप्त संख्या में होने चाहिए। दरवाजों और खिड़कियों पर किवाड़ भी लगे होने चाहिए ताकि श्यामपट पर चोंध (Reflection) पर बन्द किये जा सकें। प्रायः कमरों में फर्नीचर ढीले-ढाले होते हैं जरा हिलाने से कक्षा में आवाज करने लगते हैं और इससे कक्षा में विघ्न होती है। अतः फर्नीचर फर्श पर स्थिर (Fixed) होना चाहिए ताकि बालकों के हिलाने-डुलाने से जरा भी न हिलें और न आवाज ही करें ताकि पढ़ाई में विघ्न न पड़े। जमीन पर मूँज का फर्श बिछा हो तो और भी अच्छा है। इससे चलने फिरने से आवाज कम होगी और बालकों का ध्यान पढ़ने से न उछटेगा।

इस कमरे में श्यामपट भी काफी बड़ा होना चाहिये ताकि पूरा प्रश्न उस पर सरलता एवं स्वच्छता से किया जा सके। गणित में प्रायः ग्राफ के प्रश्न भी हल करने होते हैं। अतः साधारण श्यामपट के अतिरिक्त एक ऐसा भी श्यामपट गणित कक्ष में होना अनिवार्य है जिस पर ग्राफ के खाने बने हों। श्यामपट (Black Board) ऐसी जगह होना चाहिए जहाँ से सब बालक देख सकें। वहाँ पर्याप्त प्रकाश हो और प्रकाश बाईं ओर से आता हो तथा श्यामपट पर चोंध न पड़ती हो। यदि श्यामपट की स्थिति अच्छी होती है तो बालकों की आँखों पर जोर नहीं पड़ता है और उन्हें पढ़ने में सुविधा होती है। गणित के कमरे में रामानुजम, श्रीधराचार्य, महावीराचार्य, आर्कमिडीज, न्यूटन, गैलीलो आदि विख्यात गणितज्ञों के चित्र लगे होने चाहिए। कमरे को दीवारों पर गणित के इतिहास के दृश्य अङ्कित हों तो और भी अच्छा है। इसके अतिरिक्त बालकों द्वारा तैयार किये गये गणित सम्बन्धी कुछ रेखा-चित्र और अन्य चित्र भी दीवारों पर लगे होने चाहिए। गणित के विकास (Development) के चार्ट आदि भी दीवारों पर लगाये जा सकते हैं।

सिनेमा फिल्म—गणित शिक्षण में सिनेमा फिल्म का भी महत्व पूर्ण स्थान है। फिल्म द्वारा बालकों को रोचक ढंग से गणित का ज्ञान कराया जा सकता है। इसके ऊपर विदेशों में तो प्रयास किया गया है और कई गणित सम्बन्धी फिल्म बनाये गये हैं जो अंग्रेजी भाषा में हैं। इनमें से कुछ ये हैं—

1. Origin of Mathematics—यह फिल्म संख्या और रेखा-गणित के इतिहास से सम्बन्धित है तथा यह 1921 ई० में H. W. Wilson Company Newyork द्वारा तैयार किया गया था।
2. Geometry in Action—यह फिल्म जूनियर हाई स्कूल कक्षाओं के लिए, जब कि रेखागणित प्रारम्भ की जाती है, बहुत उपयोगी है। यह Baldeagle film Production, 104 Howe St. Amex, New Havencoum द्वारा 1940 ई० में तैयार की गई थी।
3. Rectilinear Coordinate—इसमें Coordinate Geometry का परिचय दिया है। यह McCrory Studios Newyork द्वारा 1939 में तैयार की गई है।
4. Slide Rule :—इसमें C और D का भली भाँति वर्णन तथा गुणा भाग में प्रयोग करने की विधि बतलाई है। यह Castle films, Inc, 30 Rockefeller के Playa Nwyork कम्पनी द्वारा तैयार की गई है।
5. इसी प्रकार Frequency curve, Einstens Theory of Relativity आदि पर भी फिल्म है परन्तु खेद का विषय है कि भारतवर्ष में इस प्रकार की फिल्मों की कमी है। यद्यपि भारत सरकार का ध्यान इस ओर आकृष्ट है। उसने बालफिल्म प्रतियोगिता भी चलाई थी जिसमें अच्छे फिल्म निर्माताओं को पुरस्कार भी दिये गये। इससे फिल्म निर्माता इस ओर ध्यान देने लगे हैं। हमें आशा करनी चाहिए कि निकट भविष्य में इस प्रकार के फिल्म तैयार होंगे और इस कमी को पूरा करेंगे।

अध्याय ७

गणित शिक्षण में सह सम्बन्ध

(Correlation in Mathematics Teaching)

पढ़ाने में सुविधा के लिए समस्त ज्ञान को कई भागों में विभाजित कर लिया गया है। प्रत्येक भाग को विषय कहते हैं। जैसे भूगोल, गणित, विज्ञान आदि। पढ़ाते समय भी इन विषयों को एक दूसरे से सम्बन्धित करके पढ़ाया जाता है तो बालक पढ़ने में रुचि लेने लगते हैं और उससे लाभ उठाते हैं। विभिन्न विषयों के इस प्रकार के पारस्परिक सम्बन्ध को सह सम्बन्ध (Correlation) कहते हैं।

गणित शिक्षा में भी सह सम्बन्ध आवश्यक है। इससे बालक गणित शीघ्रता से समझने लगते हैं। इसका कारण यह है कि मस्तिष्क भिन्न-भिन्न अनुभवों को पारस्परिक सम्बन्ध, तुलना और मिश्रण आदि करके उन्हें ग्रहण करता है और सह सम्बन्ध द्वारा ये सब बातें सम्भव हो जाती हैं। अतः बालक का मस्तिष्क सह सम्बन्ध द्वारा पढ़ाने से शीघ्रता से ग्रहण कर लेता है। गणित के शिक्षण में सह सम्बन्ध करने से बालक के व्यक्तित्व का भी विकास होता है। इसके अतिरिक्त पाठ्यक्रम में अनेक विषय होने से बालक को कुछ घबराहट होती है और शिक्षक के अध्यापन में कुछ कृत्रिमता आ जाती है। परन्तु सह सम्बन्ध से यह दोष भी दूर हो जाता है।

सह सम्बन्ध की किस्में (Kinds of Correlation)—सह सम्बन्ध चार प्रकार का होता है ।

(१) गणित की विभिन्न शाखाओं में सह सम्बन्ध—गणित शिक्षण में गणित की विभिन्न शाखाओं अंकगणित, रेखागणित और बीजगणित में अधिक से अधिक यह सम्बन्ध स्थापित करना परम आवश्यक है । अंकगणित के लाभ हानि, ब्याज, क्षेत्रफल के कठिन प्रश्नों को बीजगणित की सहायता से बड़ी सरलता से किया जा सकता है । बीजगणित में लघुत्तम तथा महत्तम समापवर्तक (L. C. M. and G. C. M.), भिन्न (Fractions), वर्गमूल (Square root) आदि में अंकगणित के ही कायदे लगते हैं । अङ्कगणित में क्षेत्रफल, व आयतन पढ़ाते समय इसको रेखागणित से सम्बन्धित किया जा सकता है । इसीप्रकार अङ्कगणित की अनेकों क्रिया जैसे जोड़, बाकी, वर्गमूल, एकिक नियम आदि के प्रश्न रेखागणित द्वारा भी हल किये जा सकते हैं । रेखागणित में अंकगणित की अनेक क्रियाओं का काम पड़ता है । बीजगणित और रेखागणित में भी घनिष्ठ सम्बन्ध है । बीजगणित के सूत्र $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ और $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ आदि रेखागणित द्वारा भी सिद्ध किये जा सकते हैं । बीजगणित की वर्गात्मक समीकरण (Quadratic Equation) को रेखागणित द्वारा भी हल कर सकते हैं । बीजगणित की युगपत समीकरण (Simultaneous Equations) को ग्राफ द्वारा हल करते हैं । इस प्रकार अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित, ग्राफ आदि का आपस में सम्बन्ध स्थापित करते हुए गणित का शिक्षण होना चाहिए ।

(२) गणित के किसी विषय के विभिन्न पाठों का आपस में सह-सम्बन्ध—गणित के किसी विषय के विभिन्न पाठों में यथा सम्भव सम्बन्ध जोड़ने का प्रयत्न करना चाहिए । जैसे—अङ्कगणित में भिन्नों के जोड़ बाकी का सम्बन्ध लघुत्तम से किया जा सकता है । लाभ-हानि और ब्याज के प्रश्नों का सम्बन्ध प्रतिशत से जोड़ा जा सकता है । इसी प्रकार बीज गणित में समीकरण हल करने में सक्षेप करना (Simplification), भिन्नों का सरल करना, खण्ड करना और कोष्टक तोड़ना आदि क्रियाओं का काम पड़ता है । रेखागणित पढ़ाते समय भी त्रिभुज की रचना में सरल रेखा खींचने का प्रयोग और चतुर्भुज की रचना में त्रिभुज की रचना का प्रयोग होता है । साध्यों (Theorems) के सिद्ध करने में पहली साध्यों की उपपत्ति आगे की साध्यों में प्रयोग होती है ।

इस प्रकार विभिन्न पाठों में सम्बन्ध स्थापित करते हुए पढ़ाने में बालकों को विषय सरल होने के साथ-साथ रोचक भी हो जाता है।

(३) गणित के अन्य विषयों में सह सम्बन्ध—इस प्रकार का सह सम्बन्ध दो प्रकार का होता है। प्रासंगिक और व्यवस्थित। प्रासंगिक सह सम्बन्ध में दैनिक शिक्षण अधिक रोचक और व्यापक बनाने के लिए आवश्यकतानुसार अन्य विषयों में पढ़ी हुई बातों का प्रयोग किया जाता है जिससे पाठ समझने में बड़ी सहायता मिलती है। इस प्रकार के सह सम्बन्ध के लिये शिक्षण में कोई पूर्व व्यवस्था नहीं करता वरन् पढ़ते समय किसी बात को अधिक व्यापक दृष्टि से सरल बनाने के लिये दूसरे विषयों में गणित सामग्री का प्रयोग कर लेता है।

व्यवस्थित सह सम्बन्ध में विभिन्न विषयों की सामग्री को ऐसे क्रम चुनते हैं कि एक विषय के शिक्षण से अन्य विषयों का निकट सम्बन्ध रहे। जो सामग्री एक विषय में पढ़ाई जाती है उसी का थोड़ा या बहुत अन्य विषयों में प्रयोग हो। इसके लिए शिक्षक पहले से व्यवस्था करता है।

विज्ञान और गणित—

विज्ञान और गणित का बड़ा घनिष्ट सम्बन्ध है। प्रायः यह कहा जाता है कि गणित विज्ञान के हाथ पैर हैं। बिना गणित के विज्ञान की शिक्षा अधूरी रहती है। विज्ञान में प्रयोग द्वारा प्राप्त निरिक्षणों से कोई निष्कर्ष निकालने में गणित अत्यन्त आवश्यक है। गोलीय धरातलों (Spherical Surface) से प्रकाश के परावर्तन (Reflection) और आवर्तन (Refraction) आदि में गोले सम्बन्धी गणित का ही उपयोग होता है। इसी प्रकार प्रकाश सम्बन्धी अनेकों सिद्धान्त सिद्ध करने लिए गणित की आवश्यकता होती है। गति (Speed), त्वरण (Acceleration), अश्वशक्ति (Horse Power), आकड़े का ग्राफ आदि गणित के विषय होते हुए भी विज्ञान के अन्तर्गत आते हैं। ऊँची कक्षाओं में तो विज्ञान का बहुत कुछ ज्ञान गणित में ही पढ़ाया जाता है। जैसे बी० एम०-सी० कक्षाओं में गणित में हाईड्रोस्टैटिक्स पढ़ाई जाती है। इस हाईड्रोस्टैटिक्स में घनत्व, आपेक्षिक घनत्व आदि विषय ही होते हैं जो विज्ञान के विषय हैं। इसी प्रकार एम० एस०-सी० कक्षाओं में गणित में हाईड्रोमैकेनिक्स तथा ज्योतिष (Astronomy) पढ़ाया जाता है। ज्योतिष में भी प्रकाश का वर्तन, परावर्तन आदि विज्ञान की अनेकों बातें होती हैं। इसी प्रकार भौतिक विज्ञान तथा रसायन आदि विषयों

में भी गणित का बड़ा उपयोग होता है । इस तरह विज्ञान और गणित में बड़ा गहरा सम्बन्ध है ।

भूगोल और गणित—

पैमाने के अनुसार रेखाचित्र बनाना, दो स्थानों के बीच की दूरी नापना, नदियों और नहरों की लम्बाई बतलाना, पहाड़ों और तालाबों की ऊँचाई व गहराई की चर्चा करना । किसी स्थान की जनसंख्या आदि भूगोल और गणित दोनों के अन्तर्गत आते हैं । क्षेत्रफल सम्बन्धी ज्ञान, इँचों में वर्षा, अंशों के ताप, आँकड़ों में ग्राफ आदि गणित के विषय होते हुए भी भूगोल में आते हैं । भूगोल के बहुत से रेखागणित की सहायता बिना सिद्ध नहीं किये जा सकते हैं । पृथ्वी का आकार, उसका मानचित्र समतल पर बनाना, पृथ्वी की गतियों और उसका प्रभाव आदि ऐसी बहुत सी बातें हैं जो बिना रेखागणित की सहायता के ठीक-ठीक समझ नहीं आ सकतीं । अक्षांश और देशान्तर से दूरी, प्रमाणिक तथा स्थानीय समय (Standard and Local Time) निकालने में गणित का ही काम पड़ता है । अतः गणित अध्यापक को भूगोल की इन बातों का ज्ञान होना जरूरी है । उनको गणित पढ़ाते समय इनसे सम्बन्ध जोड़ने का सफल प्रयत्न करना चाहिए ।

ड्राइंग और गणित—ड्राइंग और हस्तकला का सम्बन्ध भी गणित से बड़ी सरलता से जोड़ा जा सकता है । गणित में रेखागणित और ठोस ज्यामिति (Solid Geometry) की आकृतियाँ क्षेत्रफल, आयतन व फील्डबुक के रेखाचित्र और आँकड़ों के ग्राफ आदि बनाने का बहुत काम पड़ता है और चित्रों व आकृतियों की सुन्दरता ड्राइंग खींचने की पटुता पर ही निर्भर है । अतः गणित पढ़ाते समय ड्राइंग की ओर भी ध्यान देना चाहिए तथा बालकों को सुन्दर तथा स्वच्छ रेखाचित्र व आकृतियों के लिए उत्साहित करते रहना चाहिए । इसके अतिरिक्त ड्राइंग में ज्यामितीय और ठोस ज्यामितीय का भी काम पड़ता है । इनके बनाने का ज्ञान भी गणित पढ़ाते समय दिया जा सकता है । ड्राइंग में रचनात्मक ज्यामितीय (Practical Geometry) भी पढ़ाई जाती है । जिस बालक को ज्यामिति को अच्छा ज्ञान होता है वह ड्राइंग में भी निपुण होता है । इस प्रकार ड्राइंग और गणित में घनिष्ठ सम्बन्ध है ।

इतिहास और गणित—गणित पढ़ाते समय पाइथोगोरस, न्यूटन, रामानुज आदि गणितज्ञों का इतिहास बतलाकर और किसी उपविषय

के अन्वेषण का इतिहास सुनाकर गणित को रोचक भी बनाया जा सकता है। इसलिए गणित अध्यापकों को गणितज्ञों के जीवन, विषयों के खोज की कहानी और गणित के इतिहास का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए।

भाषा और गणित—प्रायः बालक यह समझा करते हैं कि गणित में भाषा की व्याकरणीय अशुद्धि (Grammatical Mistake) कोई अशुद्धि नहीं है परन्तु ऐसा समझना उनकी भूल है। गणित ही नहीं वरन् सम्पूर्ण विषय जिनसे मनुष्य के जीवन का सम्बन्ध है, साहित्यमय है। उनमें भाषा की अशुद्धि उतनी ही दोष युक्त है जितनी कि साहित्य में। अतः गणित अध्यापक को बालकों की गणित क्रिया में भाषा पर भी ध्यान देना चाहिए। गणित में भाषा का ठीक प्रयोग न करने से बालक की तर्क शक्ति पर बुरा प्रभाव पड़ता है और उसकी क्रिया में उसे अशुद्धता की झलक प्रतीत होती है। छोटी कक्षाओं के पास शब्द संग्रह भी थोड़ा होता है। वे अपने भाव भली भाँति व्यक्त नहीं कर पाते। गणित अध्यापक को चाहिए की गणित सम्बन्धी शब्दों का भण्डार बढ़ायें तथा गणित पढ़ाते हुए उनकी भाव व्यञ्जना (Expressing Power) सुदृढ़ बनायें। इसके अतिरिक्त प्राचीन गणित तो श्लोकों के रूप में ही प्राप्त होता है। जैसे भिन्न तोड़ने के लिए

का, भाग, गुणा, जोड़ और बाकी।

पाँच बात याद हैं भिन्न न गल्ती ताकी ॥

इसलिए भाषा और गणित में सह सम्बन्ध आवश्यक है।

पाठशाला का बाह्य जगत से सम्बन्ध—गणित शिक्षण का उद्देश्य बालकों को आगामी जीवन के लिए तैयार करना होता है। इसके लिए उनको व्यावहारिक वातावरण और बाह्यजगत से परिचित होना अति आवश्यक है। अतः गणित पढ़ाते समय अध्यापक को पाठ का सम्बन्ध स्कूल के बाहर जगत की वस्तुओं से करा देना चाहिए। उनको गणित में ऐसे प्रश्न दिये जाने चाहिए जो वास्तव में उनके जीवन में आते हैं। जैसे अपने यहाँ पौंड, शिलिंग और पेंस के सिक्के प्रचलित नहीं हैं अतः पौंड, शिलिंग, पेंस पर प्रश्न न बनाकर रुपये और नये पेंसों से सम्बन्धित प्रश्नों को बनाना अधिक अच्छा होगा। इसी प्रकार तौल के लिए टन, हण्डरवेट, पौंड आदि की बजाय, मन, सेर, छटाँक अथवा किलोग्राम, हैक्टोग्राम, ग्राम आदि पर प्रश्न

बनाना अच्छा होगा । अंकगणित अधिक व्यावहारिक बनाने के लिए अध्यापक की देख-रेख में स्कूल में एक दूकान का आयोजन होना चाहिए जिसमें सब काम बालक ही करें । स्कूल में एक बैंक भी खोली जा सकती है । स्कूल का सहकारी भण्डार (Cooperative Store) भी बालकों को व्यावहारिक गणित पढ़ाने में सहायक होता है ।

बाह्य जगत से सम्बन्ध जोड़ने के लिए गणित अध्यापक को चाहिए कि वह बालकों को बाहर मैदान में ले जावे और वहाँ जाकर बालकों से उसकी पैमाइश करावे । दरवाजों और चौखटों की लम्बाई व चौड़ाई नपवावे और उनके कोण नपवावे । ऐसा करने से उनके गणित के ज्ञान का बाह्य जगत से शीघ्र सम्बन्ध स्थापित होता है और बड़े होकर इंजीनियर और ओवरसियर बनने पर यह ज्ञान उपयोगी होता है ।

अध्याय ८

गणित में शीघ्रता एवं शुद्धता

(Speed and Accuracy in Mathematics)

शुद्धता एवं शीघ्रता का महत्व—

गणित में बालकों की शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डालना बहुत ही आवश्यक है। कोई भी विद्यार्थी, चाहे वह गणित में कितना ही योग्य क्यों न हो, यदि वह प्रश्नों का शुद्धता एवं शीघ्रता से नहीं कर सकता तो वह सफल विद्यार्थी नहीं माना जा सकता। इतना ही नहीं बल्कि वह अपने आगामी जीवन में भी सफल नहीं होता। उदाहरणार्थ कोई विद्यार्थी गणित की योग्यता प्राप्त करने के बाद बड़े होने पर कपड़े का व्यवसाय करता है। इसमें उसको गणित की योग्यता का बहुत काम पड़ेगा। कोई ग्राहक कपड़ा लेता है तब दुकानदार को कपड़े के भाव की दर से कुल खरीदे हुए कपड़े के पैसे बताने पड़ते हैं और ठीक प्रकार से गिनना है। यदि उस दुकानदार में शुद्धता तथा शीघ्रता की आदत नहीं है तो वह ग्राहक को दाम बताने में बहुत देर लगावेगा और गलत भी बतावेगा। इस प्रकार उसका व्यवसाय कभी सफल नहीं हो सकता। अतः संख्यात्मक गणना में शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत बालक में अवश्य डालनी चाहिये।

शुद्धता एवं शीघ्रता की कमी के कारण—

बालकों में अशुद्धता की आदत अध्यापक की थोड़ी लापरवाही से

आती है। प्रारम्भ में तो बालक नासमझ होता है वह अनेकों अशुद्धियाँ भी करता है। यह अध्यापक का काम है कि उसमें शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डाले। यदि अध्यापक लापरवाह होते हैं तो वे बालकों की अशुद्धियों पर ध्यान नहीं देते। प्रायः देखा जाता है कि बालक प्रश्न गलत करने पर कह देते हैं कि 'साहब यह गलती भूल से हो गई है'। इस पर अध्यापक उनकी गलती छोड़ देते हैं और आगे बढ़ जाते हैं। यहाँ पर अध्यापकों का कर्त्तव्य है कि उनकी भूल समझें और लड़कों द्वारा प्रश्न को फिर से सही ढंग से हल करावें। इसी प्रकार प्रायः बालक यह भी कह देते हैं कि प्रमुख प्रश्न को मैं भली भाँति जानता हूँ इसके करने में बहुत समय लगेगा। इस प्रश्न को रहने दीजिए मैं अगला प्रश्न करे लेता हूँ। लापरवाह अध्यापक उनको ऐसा कर लेने देते हैं। इसका परिणाम यह होता है कि उनमें प्रश्नों का शुद्धता एवं शीघ्रता से करने की आदत नहीं पड़ पाती है।

बालकों में शुद्धता एवं प्रश्नों को देर में करने की आदत इस कारण भी आती है कि वे प्रश्नों के जोड़, बाकी, गुणा, भाग आदि हासिये (Margin) पर शुद्धता से नहीं करते बल्कि वे उनको पीछे के पृष्ठों पर अथवा बेकार कागजों पर करते हैं और वह भी बड़े वेढंगेपन से। इसका फल यह होता है कि इस जोड़ इत्यादि के फल को यथार्थ प्रश्न में उतारने में अधिक समय भी लगता है और उतारने में गलती होने की सम्भावना भी रहती है। कभी-कभी गन्दा लिखने तथा एक अंक के ऊपर दूसरा अंक लिखने से भी अशुद्धि हो जाती है। अतः प्रत्येक विद्यार्थी को साफ-साफ लिखने की आदत डालनी चाहिए तथा यदि कोई संख्या गलत लिख जावे तो उसे काटकर अलग सही संख्या लिखनी चाहिए, यह नहीं कि उसे ही ठीक बनाने की चेष्टा की जावे।

शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डालने की अवस्था—

अब प्रश्न उठता है कि शुद्धता एवं शीघ्रता की शिक्षा विद्यार्थियों को किस अवस्था में दी जावे। इसके लिए ठीक-ठीक आयु बतलाना तो मनोवैज्ञानिकों का काम है, परन्तु प्रो० सिड्गन के कथानुसार यदि ६ अथवा १० वर्ष की आयु का बालक गणना में गलती करता हो और प्रश्न हल करने में देर लगाता हो तो शुद्धता एवं शीघ्रता की शिक्षा को आगे के लिए स्थगित न करना चाहिए बल्कि उसी समय अध्यापक को यह शिक्षा आरम्भ कर देनी चाहिए।

शुद्धता एवं शीघ्रता की शिक्षा—प्रोफेसर कप्पुस्वामी आयंगर के अनुसार शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डालने की सबसे उत्तम विधि यह है कि बालकों से काफी अधिक मात्रा में प्रश्न हल करने का अभ्यास दिया जावे। साथ ही साथ उनको उन सिद्धांतों को भी समझा देना चाहिए जिनको उन्हें प्रयोग में लाना पड़ता है। अब प्रश्न यह उठता है कि यह अभ्यास मौखिक हो अथवा लिखित। इसके कुछ विद्वानों की राय है कि यह अभ्यास अधिक मात्रा में मौखिक ही होना चाहिए। अधिक लिखित अभ्यास से बालकों में थकान आती है और समय भी अधिक लगता है। परन्तु फिर भी थोड़ा सा लिखित अभ्यास भी होना जरूरी है। यद्यपि मुख्यतः अभ्यास मौखिक ही होना चाहिये। मौखिक अभ्यास में अध्यापक को दो बातें अवश्य ध्यान में रखनी चाहिए। पहली तो यह कि दस वर्ष से अधिक की उम्र वाले बालक को अंगुली पर न गिनने दिया जाय और दूसरी बात यह कि अंकगणित के घन्टे के शुरू में पाँच मिनट और कभी-कभी अन्त में भी पाँच मिनट मौखिक अभ्यास हो। अधिक अभ्यास की आवश्यकता नहीं है। यह कार्यक्रम तब तक जारी रखना चाहिए जब तक बालक में शुद्धता एवं शीघ्रता की काफी अच्छी आदत न पड़ जाय।

शुद्धता प्राप्ति के उपाय—नीचे कुछ ऐसी बातें बतलाई गई हैं जिनका अभ्यास कराने से बालक शुद्धता प्राप्त कर सकते हैं। अतः अध्यापक को इन बातों का प्रतिदिन अभ्यास कराना चाहिए।

(१) अंक बड़े और सुन्दर लिखे जायें। जब तक अंक स्पष्ट एवं सुन्दर नहीं लिखे जावेंगे तब तक वे सरलता पूर्वक नहीं पढ़े जावेंगे और उनमें शुद्धता भी नहीं आवेगी। इसके अतिरिक्त उनको यथा स्थान पर लिखने में भी भूल होवेगी। जैसा कि नीचे के प्रश्न में दिखलाया गया है।

$$\begin{array}{r}
 ७३६ \\
 २०४ \\
 २६४४ \\
 १४७ २ \\
 \hline
 १४६६६४
 \end{array}$$

इसके लिये आवश्यक होगा कि सुलेख के पाठ में अंकों के लिखने का अभ्यास कराया जाय।

(२) बालक से पुस्तक या श्यामपट से अंक उतारने के लिए कहा जाय क्योंकि कभी उतारने में भी बालक भूल कर जाते हैं। वे ७३ को

जगह ३७, ३०७ की जगह ३७० आदि उतार लिया करते हैं। उसी के अनुसार क्रिया द्वारा उत्तर शुद्ध निकालते हैं। निरीक्षण के समय वास्तविक उत्तर से न मिलने पर उन्हें अपनी गलती मालूम होगी और वे भविष्य में उतारने की अशुद्धि न करने की चेष्टा करेंगे।

(३) फल या उत्तर की जाँच कराई जाय। मोटे अंदाज या किसी गुरु के अनुसार उत्तर की जाँच करने पर बालकों को शुद्ध उत्तर के ज्ञान हो जायगा। यदि उत्तर अशुद्ध हो तो वे उसे शुद्ध करने की चेष्टा करेंगे।

(४) प्रश्नों को ध्यान पूर्वक पढ़ने, निर्दिष्ट और करणीय को अलग-अलग करने की टेव डाली जाय। बालक उतावली से कई अशुद्धियाँ कर जाते हैं उनको यह बतलाने की आवश्यकता है कि प्रश्नों के के खण्ड किस प्रकार करना चाहिये।

(५) विचार शुद्ध तथा संक्षिप्त भाषा में प्रकट किये जायें।

(६) साधारण क्रियाओं तथा नियमों पर मौखिक अभ्यास कराया जाय। यह अभ्यास इतना हो कि उसके फल कंठाग्र हो जाय और विचार करने की आवश्यकता न रहे।

शीघ्रता प्राप्ति के उपाय—

(१) शुद्धता की वृद्धि की जाय। यद्यपि यह ठीक है कि शुद्ध रूप में कार्य करने वाला सर्वदा शीघ्रता प्राप्त नहीं कर सकता तो भी अशुद्ध क्रिया करने वाले से इस विषय में वह अधिक सफलता प्राप्त कर सकता है। क्योंकि अशुद्ध क्रिया से अधिकांश उत्तर अशुद्ध ही निकलने की आशंका है। जाँच के पश्चात् यदि उत्तर अशुद्ध प्रतीत हुआ को उसे दुबारा क्रिया करनी पड़ती है। शुद्ध क्रिया करने वाले को यह अवसर बहुत कम मिलता है।

(२) प्रत्येक कार्य के लिए समय निर्धारित किया जाय। बहुत से बालक इसलिये शीघ्रता से कार्य नहीं करते कि अध्यापक उनको एक प्रश्न हल करने को देता है। जब लड़के उस कर लेते हैं तब उसे दूसरा दिया जाता है। बालकों को यह ज्ञात नहीं होता कि उन्हें इस प्रश्न पर कितना समय व्यतीत करना है इसलिये आवश्यक होगा कि समयानुसार ४ या ५ प्रश्न श्यामपट या पुस्तक में से हल करने को कहा जाय। यह समय चतुर बालकों की योग्यतानुसार निश्चित किया जाना चाहिये।

(३) सहायक साधनों का प्रयोग कम किया जाय।

यद्यपि आरम्भ में सहायक साधनों का प्रयोग करने से क्रिया में सहायता मिलती है परन्तु क्रिया समझ में आ जाने पर इससे गति में बाधा पहुँचती है। इसलिए शीघ्रता प्राप्ति के लिए इसका बन्द करना आवश्यक है।

(४) भाषा की संक्षिप्त तथा अंकों की न्यूनता पर ध्यान दिया जाय। जब बालक क्रिया को समझ जायें तो आवश्यकता से अधिक सोपान क्रिया में न दर्शाये जायँ और न निर्दिष्ट और करणीय में ही अलग-अलग लिखे जायें। जैसे—

प्रश्न—एक नगर की जन संख्या १४५००० है। इसमें ५५ प्रतिशत ब्राह्मण हैं। यदि ब्राह्मणों में २०% खेती करने हैं तो खेती करने वालों की संख्या बताओ।

लम्बी क्रिया

१४५००

.५५

७८५०

७२५०

७६७५० ब्राह्मण

.२०

१५३५० खेतिहर

संक्षिप्त क्रिया

खेतिहर ब्राह्मणों की संख्या

$१४५००० \times \frac{५५}{१००} \times \frac{२०}{१००}$

= १५३५० उत्तर

(५) योग्यतानुसार कार्य निश्चित किया जाय। सम्पूर्ण कक्षा की योग्यतानुसार टोलियाँ बनाली जायँ और प्रत्येक टोली के लिये समय निर्धारित किया जाय जो उस टोली के चतुर बालक की योग्यतानुक्रम हो।

(६) क्रिया में संक्षिप्त रीति काम में लाई जाय। आरम्भ में लम्बी क्रिया द्वारा नियम निकलवाकर अभ्यास कराया जाय। जब बालक उसके सिद्धांत को ठीक प्रकार समझ जायें तो क्रियाओं को छोटा रूप दे दिया जाय।

(७) आवश्यक टेवें डाली जायें। बालक सोच विचार में जितना अधिक समय देगा उतनी शीघ्रता नष्ट होती जायगी इसलिए डाली हुई टेवों के आधार पर इस प्रकार कार्य कराया जाय कि क्रियाओं में अधिक सोच विचार की आवश्यकता न पड़े। बालक एक यन्त्र की भाँति कार्य करे। ये आदतें निम्न प्रकार की होती हैं।

विषय सम्बन्धी टेव—गुणा और जोड़ के पहाड़े, पैमाने जाँच की संक्षिप्त विधियाँ, भिन्नों का प्रतिशित रूप आदि कठस्थ कराये जायें।

क्रियात्मक—क्रम पूर्वक लिखना, उत्तर का मोटा अम्दाज करना, किसी 'गुरु' के अनुसार उसको सिद्ध करना, प्रश्न को निर्दिष्ट और करणीय दो भागों में विभक्त करना। अंकों को स्वच्छ और स्पष्ट लिखना आदि।

मानसिक टेव—यह वह टेव है जिसके द्वारा शुद्धता की भावना, एकाग्रता तथा तर्क शक्ति का अभ्यास बालकों को होता रहता है जो गणित में उन्नति प्राप्त करने का प्रधान साधन है।

शुद्धता एवं शीघ्रता दोनों को समान रूप से प्राप्त करना कठिन होता है। परन्तु इन दोनों के प्राप्त करने में स्थायी अभ्यास का विशेष प्रभाव होता है। इस तरह शुद्धता एवं शीघ्रता प्राप्ति के लिए अभ्यास कुछ समय तक चलता रहना चाहिए जिससे उसका प्रभाव पूर्ण रूप से स्थायी हो जावे।

अध्याय ६

गणित में मानसिक, मौखिक तथा लिखित कार्य

(Mental, Oral and Written Work in Mathematics)

मानसिक गणित—मानसिक गणित का आशय उस प्रकार के गणित से है जिसमें कलम तथा कागज की आवश्यकता नहीं होती। यद्यपि मौखिक (Oral) गणित और मानसिक गणित लगभग एक ही क्रियायें हैं परन्तु फिर भी इनमें कुछ सीमा तक अन्तर है। मौखिक गणित साधारण श्रेणी का होता है। मौखिक गणित द्वारा केवल गणित सम्बन्धी प्रत्ययों का निर्माण किया जाता है। परन्तु मानसिक गणित द्वारा बालकों में इतनी योग्यता उत्पन्न का प्रयत्न किया जाता कि वे प्रश्नों को मन में ही हल करले।

जहाँ तक हो सके बालकों को इस स्तर पर पहुँचाना चाहिये कि वह गणित के प्रश्नों को मन में ही निकालें। उनको कागज और पेंसिल की सहायता सिर्फ वहीं लेनी चाहिये जहाँ बिना कागज-पेंसिल की सहायता के प्रश्न करना सम्भव ही नहीं हो। यह मानसिक गणित ही व्यावहारिक जीवन में उपयोगी होती है। यह लिखित गणित में भी सहायक होती है। इससे बालकों में प्रश्नों को शीघ्रता से हल करने की आदत पड़ती है। स्मरण शक्ति की वृद्धि के साथ चित्त की एका-

ग्रता भी बढ़ती है। कमजोर छात्रों की कठिनाइयाँ भी मानसिक गणित से काफी हद तक दूर हो जाती है। अतः गणित के सफल शिक्षण के लिये मानसिक गणित बालकों के लिये परमावश्यक है।

मानसिक अंकगणित (Mental Arithmetic)—

अङ्कगणित के अध्यापन में किसी नये नियम को सिखाते समय मानसिक अंकगणित बड़ी उपयोगी होती है। इसके प्रयोग से बालक अपना मस्तिष्क विषय की ओर पूर्णरूप से एकाग्र कर लेता है। इसलिए मानसिक अंकगणित भी वास्तविक अंकगणित का ही अङ्ग है उससे पृथक् नहीं। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि मानसिक अंकगणित, वास्तविक अङ्कगणित ही है क्योंकि अंकगणित का शिक्षण बिना मानसिक अंकगणित के सम्भव नहीं है। मनोविज्ञान और सांस्कृतिक विचार धारा के अनुसार भी मानसिक अंकगणित लिखित अंकगणित से पहले पढ़ाना परम आवश्यक है क्योंकि इससे यथार्थता, शुद्धता, आत्मविश्वास और शीघ्रता का विकास होता है। गणित शिक्षण के विचार से भी मानसिक अंकगणित का शिक्षण में प्रमुख स्थान होना चाहिये क्योंकि मानसिक अंकगणित से बालकों को संख्यात्मक एवं परिमाण सम्बन्धी राशियों पर विचार करने का अवसर प्राप्त होता है जो गणित के विकास के लिए आवश्यक है। इसलिए अंकगणित के शिक्षण में मानसिक अंकगणित का प्रयोग अवश्य करना चाहिये।

मानसिक बीजगणित (Mental Algebra)—बीजगणित के अध्ययन में बीजगणित के सूत्रों (Formulae) का बहुत काम पड़ता है। इन सूत्रों की सहायता बीजगणित के कठिन से कठिन तथा लम्बे प्रश्न सरलता से कर लिये जाते हैं। इन सूत्रों का अधिक से अधिक प्रयोग ही मानसिक बीजगणित है। आजकल ऐसी एक धारणा चल गई है कि प्रश्न यथा सम्भव सूक्ष्म रूप से किये जावें और यह प्रश्नों को सूक्ष्म रूप से करना केवल मानसिक बीजगणित द्वारा ही सम्भव है। मानसिक बीजगणित का उद्देश्य बालकों में अधिक सोचने, सूत्रों का प्रयोग करने और बिना पेंसिल-कागज के प्रश्न हल करने की योग्यता बढ़ाना है। अतः बीजगणित पढ़ाते समय मानसिक बीजगणित का भरसक अभ्यास कराना चाहिये।

मानसिक रेखागणित (Mental Geometry)—

रेखा गणित की शिक्षा तो बिल्कुल ही मानसिक गणित है। यद्यपि अंकगणित और बीजगणित में ऐसा हो सकता

है कि अध्यापक एक नियम के प्रश्न बालकों को बतलादे और बालक वैसे ही प्रश्नों को बिना दिमाग लगाये उस नियम के आधार पर हल करले। परन्तु रेखागणित में तो कदम कदम पर विचारना पड़ता है। इसके अतिरिक्त बालकों को रेखागणित में साध्यों (Theorems) के अभ्यास (Exercises) करनी पड़ती हैं। उसमें बालकों को अपना दिमाग लगाना पड़ता है। यदि साध्य पढ़ने के बाद उस पर आश्रित अभ्यास बालक स्वयं हल कर लेता है तो वह गणित का अच्छा छात्र होता है और आगे चलकर वह एक विद्वान बनता है। रचनात्मक रेखागणित (Practical Geometry) में भी आकृतियों की रचना करने में बालकों को पूर्ण रूप से मानसिक व्यायाम करना पड़ता है। अतः गणित अध्यापक को रेखागणित पढ़ाते में मानसिक रेखागणित का प्रयोग करना चाहिये।

मानसिक गणित के लिये कोई पृथक् से उपयुक्त पुस्तक नहीं है। अतः अध्यापक को स्वयं इस ओर ध्यान देना चाहिये। उसको स्वयं ऐ प्रश्न बनाने चाहिए जिससे बालकों को मानसिक गणित का काफी अभ्यास मिल सके।

मौखिक गणित (Oral Mathematics) —

मौखिक गणित, गणित विषय का बहुत ही आवश्यक अङ्ग है। परन्तु स्कूलों में इसे या तो विल्कुल ही छोड़ दिया जाता है या उचित स्थान नहीं दिया जाता। यही कारण है कि लिखकर बालक प्रश्नों को बड़ी शीघ्रता तथा शुद्धता के साथ कर लेते हैं परन्तु जब उनकी आयु के अनुसार मौखिक प्रश्न दिये जाते हैं तो बालक कागज व कलम की सहायता लेने दौड़ते हैं। इसमें बालकों का कोई दोष नहीं है क्योंकि उनको यही बताया जाता है कि लिखित गणित ही सब कुछ है मौखिक गणित का शिक्षा में कोई स्थान नहीं है। परन्तु आजकल की शिक्षा प्रगति को देखते हुए हमें अपना दृष्टिकोण बदलना चाहिये। मौखिक गणित के महत्व को समझ कर उसे पाठ्यक्रम में उपयुक्त स्थान देना चाहिए। हम जो लिखित गणित को ही सब कुछ समझ बैठे हैं उसे भूल जावें। कहने का तात्पर्य यह है कि लिखित गणित तथा मौखिक गणित दोनों को अपना अपना उपयुक्त स्थान प्राप्त होना चाहिये। किसी की शिक्षा में किसी प्रकार की भी कमी न रहनी चाहिए।

साधारणतः यह कल्पना करली जाती है कि मौखिक गणित तथा लिखित गणित, गणित के दो भिन्न-भिन्न भाग हैं। यही कारण है कि अध्यापक सर्व प्रथम लिखित कार्य कराते हैं और उसके पश्चात् मौखिक गणित। ऐसा करना ठीक नहीं। वास्तविकता तो यह है कि मौखिक गणित तथा लिखित गणित का अटूट सम्बन्ध है। दोनों की क्रियाएँ एक हैं। अन्तर केवल यह है कि लिखित गणित में क्रिया कागज पर होती है और मौखिक गणित में क्रिया मस्तिष्क में। यदि हमें किसी प्रश्न को मौखिक निकालना होता है तो कम से कम उत्तर लिखने की आवश्यकता तो पड़ती ही है। मौखिक गणित में यदि क्रिया के अंकों को कहीं लिखते जाते हैं तो बड़ी सहायता मिलती है। बिना कुछ लिखे मन में लम्बी क्रिया को करना बड़ा कठिन पड़ जाता है।

इसी प्रकार मौखिक गणित भी लिखित गणित में बड़ी सहायक है। यदि हम गणित के लिखित प्रश्नों में सब कुछ लिखकर ही करें तो हमारा काम बड़ा कठिन हो जाता है। उदाहरण के लिए हमें ६७ और ८५ को जोड़ना है।

क्रिया—पाँच और सात बारह होते हैं, नौ और आठ सत्तरह होते हैं। सत्तरह का मान एक सौ सत्तर है और एक सौ सत्तर में जब बारह जोड़ते हैं तो एक सौ ब्यासी हो जाते हैं।

उपर्युक्त क्रिया कितनी लम्बी और भद्दी है। इसमें बहुत कुछ कार्य मौखिक किया जा सकता है। इसकी क्रिया इस प्रकार होनी चाहिए—

$$\begin{array}{r} ६७ \\ ८५ \\ \hline ११२ \end{array}$$

उपरोक्त बातों से पता चलता है कि मौखिक तथा लिखित गणित को पृथक करके पढ़ाना भूल है। अतः गणित के उत्तम शिक्षण में लिखित गणित तथा मौखिक गणित की शिक्षा साथ-साथ होनी चाहिये। एक का कोर्स समाप्त करके दूसरे को पढ़ाना बड़ी भारी गलती है। स्मरण शक्ति की सहायता के लिए कठिन मौखिक गणित को कुछ स्थान मिलना आवश्यक है। इसके विपरीत यदि लिखित गणित में कोई विद्यार्थी बिना लिखे ही कोई बात निकाल लेता है तो उसको प्रोत्साहित करना चाहिए।

गुण (Advantages)—मौखिक कार्य में निम्न लिखित गुण हैं।

(१) इसके द्वारा हर्बट (Herbert) के प्रथम पद का विकास होता है।

इस का तात्पर्य नवीन पाठ के प्रस्तावना वाले (Introduction) भाग से है ।

(२) इससे पर्याप्त मात्रा में पुनरावृत्ति होती है ।

(३) इससे पर्याप्त समय की बचत होती है । इसके द्वारा कक्षा में पढ़ाये गये गणित के नियमों तथा विधियों (Rules and Processes) को उचित परख होती है ।

(४) इसके द्वारा कठिनाई आसानी से दूर हो जाती है ।

(५) गणित का प्रयोग दैनिक जीवन में इसी के द्वारा होता है ।

(६) इससे बालक तीव्र (Quick) तथा शीघ्र समझने वाला (Quick Witted) हो जाता है ।

(७) इसका प्रयोग लिखित कार्य के बीच में गलती पकड़ने हेतु किया जाता है । जैसे— $5 \times 11.3 + 6.5$ को गुणा करना है तो मौखिक रूप में $5 \times 6 = 30$ के लगभग गुणनफल आना चाहिए । इस तरह उत्तर लगभग ५६ लिखा जा सकता है ।

(८) यदि बालक मौखिक गणित में निपुण होता है तो वह लिखित गणित को विश्वास तथा धैर्य के साथ करता है । इससे उसका लिखित कार्य शीघ्र हो जाता है और बालक को विश्वास रहता है कि उसकी क्रिया ठीक है ।

(९) मौखिक गणित का क्रमानुसार यदि काफी अभ्यास कराया जावे तो बालकों में निश्चयता का भाव आजाता है जो लिखित गणित के बस का नहीं है ।

(१०) नया नियम सिखाते समय बालकों को मौखिक अभ्यास अधिक कराने से वे नियम स्वयं निकाल लेते हैं और इस प्रकार निकाला हुआ नियम उनके मस्तिष्क में स्थायी हो जाता है ।

(११) मौखिक गणित से समय की भी बचत होती है तथा लिखित काम कम हो जाने से बालक को आराम मिलता है ।

दोष (Disadvantages)—

(१) कभी कभी बालक बिना समझे निष्कर्ष पर पहुँच जाते हैं ।

(२) इसमें यूक्तिपूर्ण (Logical) तथा यथाक्रम (Systematic) हल सम्भव नहीं है ।

मौखिक कार्य करने में निम्न आवश्यक बातों को ध्यान में रखना चाहिए—

(१) प्रारम्भ में मौखिक कार्य का आधार बालक का ज्ञान होना चाहिए ।

(२) अन्त में मौखिक कार्य बालक ने किसी निश्चित समय में कितना सीखा है उसकी परीक्षा हेतु होना चाहिए ।

(३) मौखिक कार्य में प्रश्न साधारण (Simple), क्रमानुसार या यथा क्रम (Systematic), उनकी शब्दावली उपयुक्त, उपयुक्त क्रम में (Graded), निश्चित (Definite), स्पष्ट होने चाहिए तथा उनका सम्बन्ध बालकों की आवश्यकता से होना चाहिए ।

(४) इसके प्रस्तुत करने में यह ध्यान देना चाहिए कि बालक पूर्ण रूप से व्यस्त रहें । अध्यापक को प्रसन्नचित होना चाहिए तथा उसकी वाणी में शक्ति तथा बल होना चाहिए ।

(५) मौखिक कार्य समान रूप से बाँटना चाहिए जिससे सम्पूर्ण कक्षा का ध्यान अध्यापक की ओर हो और कमजोर बच्चों को प्रेरणा मिले ।

(६) जहाँ तक सम्भव हो मौखिक कार्य में चिन्ह (Symbols) तथा दशमलव कार्य (Decimal work) का प्रयोग कम किया जावे तथा निम्न कक्षाओं में इनका प्रयोग बिल्कुल न किया जावे ।

(७) इस कार्य में यह भी ध्यान में रखा जाय कि शीघ्र ही अध्यापक किसी निष्कर्ष (Conclusion) पर न पहुँच जाय ।

(८) प्रतिदिन मौखिक गणित थोड़ा बहुत कराया जाय और यथा सम्भव लिखित गणित में जहाँ मौखिक गणित की आवश्यकता हो, इसकी सहायता ली जावे ।

कक्षा में मौखिक कार्य का महत्व तथा उपयोग (Importance & Use of Oral work in the Class)

(१) इसके आधार पर विद्यार्थियों के द्वारा की गई पाठ की तैयारी (Preparation) की परख की जाती है ।

(२) इसके द्वारा विद्यार्थी की त्रुटियाँ (Errors) तथा उसका मिथ्या बोध (Misunderstanding) का सही बोध होता है ।

(३) इसके द्वारा विद्यार्थियों में पाठ्य-वस्तु के प्रति रुचि (Interest) उत्पन्न की जाती है ।

(४) इसमें आवश्यक तथा महत्वशाली (Important) बातों पर जोर दिया जा सकता है।

(५) बालकों की दूसरे बालक के मौखिक वर्णन तथा शिक्षक के दृष्टिकोण (Views) को सुनने से भिन्न भिन्न प्रकार की सोचने की क्रिया का विकास होता है।

(६) कक्षा में बालक को बातचीत करने का मौका मिलता है। इसके अतिरिक्त बालक ध्यान देने का अभ्यास भी डालते हैं।

मौखिक कार्य में निम्न प्रकार के प्रश्नों का प्रयोग किया जाता है।

- (१) प्रत्यास्मरण (Recall)
- (२) तुलनात्मक (Comparision)
- (३) विपरीत (Contrast)
- (४) जाँच सम्बन्धी (Evaluation)
- (५) कारण सम्बन्धी (Cause)
- (६) प्रभाव सम्बन्धी (Effect)
- (७) उदाहरण (Illustration)
- (८) वर्गीकरण (Classification)
- (९) परिभाषा (Definition)
- (१०) हल सम्बन्धी (Proof)
- (११) विश्लेषण (Analysis)
- (१२) संश्लेषण (Synthesis)
- (१३) प्रयोग (Application)

लिखित कार्य (Written Work)

मौखिक कार्य की तरह लिखित कार्य (Written Work) का अपना महत्व है। लिखित कार्य के लिए मौखिक कार्य अपनी सहायता नहीं दे सकता है क्योंकि उसकी प्रकृति भिन्न होती है। मौखिक रूप से बहुत से तथ्यों को याद करना कठिन होता है इसलिए लिखित कार्य की शरण लेनी पड़ती है। केवल लिखित कार्य के आधार पर हम भूत में हुई घटनाओं को जान सकते हैं। गणित में जिस स्थान पर प्रश्न के पद तथा किसी समस्या (Problem) की गणना (Calculation) अधिक होती हैं उस स्थिति में हमको लिखित कार्य की सहायता आवश्यक होती है। इसके अतिरिक्त बड़ी आकृति (Figure) खींचने में भी

लिखित कार्य आवश्यक होता है क्योंकि इस तरह की आकृति को मौखिक रूप से याद करना कठिन होता है।

मनोविज्ञान के विचार से भी लिखित गणित की आवश्यकता है। हम मानते हैं कि हमारे मस्तिष्क में एक समय में एक ही विचार रहता है और दूसरे विचार उसके बाहरी भागों में चले जाते हैं। इसलिए जब हम किसी क्रिया को केवल मौखिक ही करते हैं तो क्रिया से संबन्धित अन्य विचारों को समय पर याद रखने में कठिनाई होती है तथा अनावश्यक परिश्रम करना पड़ता है। इसलिए लिखित गणित अत्यन्त आवश्यक है।

गणित में लिखित कार्य निम्न कार्यों (Purpose) की पूर्ति करता है
 (१) विद्यार्थी द्वारा हल किये प्रश्नों की सूची का बोध होता है।
 (२) पाठ जिनमें मौखिक वार्तालाप होता है उनकी परख (Test) इसके द्वारा की जा सकती है।

इसके द्वारा न केवल अन्तिम (Final) परिणामों का ज्ञान होता है, बल्कि समस्या के बीच में आने वाले पदों तथा परिणामों का बोध होता है जिससे कि स्मृति (Memory) पर अधिक जोर नहीं लगाना पड़ता।

लिखित कार्य को निम्न रूप दिया जा सकता है—

मानसिक कार्य × लिखने की सामग्री = लिखित कार्य।
 (Mental Work × Writing Material) (Written Work)

लिखित कार्य के गुण—(Advantages of Written Work)

(१) इसके द्वारा विचार स्पष्ट होते हैं तथा तर्क (Reasoning) सही होता है।

(२) इसके द्वारा मानसिक (Mental) तथा मौखिक (Oral) कार्य की छाप मस्तिष्क में पड़ती है।

(३) कठिन तथा बड़ी संख्यायें जिनको मौखिक तथा मानसिक विधि द्वारा हल नहीं कर सकते हैं उनको लिखित रूप द्वारा हल किया जा सकता है।

(४) कठिन तथा जटिल गुणा, भाग आदि कार्य इस विधि द्वारा शीघ्रता तथा आसानी से किया जा सकता है।

(५) इस बिधि मे पाठ्य-वस्तु (Subject Matter) भविष्य के उपयोग हेतु रखा जाता है ।

(६) लिखित कार्य के आधार पर किसी विद्यार्थी की तथा सम्पूर्ण कक्षा की उन्नति (Progress) की जाँच की जा सकती है ।

(७) जिस समय विद्यार्थी लिखित कार्य में व्यस्त रहते हैं उस समय शिक्षक को कुछ आराम का अवकाश मिल जाता है ।

कक्षा में लिखित कार्य कराते वक्त निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए—

(१) लिखित कार्य प्रारम्भ कराने के पहिले आवश्यक आदेश (Instructions) दे देने चाहिए । ये आदेश इकाई (Unit) कार्य की शुद्धता (Neatness), समय को अवधि (Time Limit), के बारे में होने चाहिए ।

(२) लिखित कार्य इतना अवश्य हो जिससे कक्षा को सम्पूर्ण अन्तर (Period) व्यस्त रखा जा सके ।

(३) लिखित कार्य ऐसा होना चाहिए जिससे कक्षा के सभी विद्यार्थी उसको कर सकें ।

(४) समस्यायें लिखित कार्य में इस तरह की होनी चाहिए जिनका सम्बन्ध बालकों के जीवन से हो ।

(५) लिखित कार्य में प्रश्न की भाषा साधारण (Simple) स्पष्ट (Clear) तथा निश्चित होनी चाहिए ।

(६) जहाँ तक सम्भव हो बालकों की उत्तर-पुस्तिकाओं की जाँच उनके सम्मुख की जाय ।

लिखित कार्य की जाँच—

लिखित कार्य की जाँच में निम्नलिखित सिद्धांतों को काम में लाना चाहिए ।

१. कार्य का निरीक्षण शीघ्र से शीघ्र हो जाना चाहिए । काम करके और उनकी जाँच के बीच कम से कम समय दिया जाना चाहिए ।

२. कोई कार्य ऐसा न छोड़ना चाहिए जिसकी जाँच न हो ।

३. त्रुटियों का सुधार बालकों द्वारा शीघ्र कराना चाहिये ।

४. बालकों द्वारा किया गया सुधार एक बार फिर देखना चाहिए । ऐसा न हो कि बालक लापरवाही की ओर झुक जाय और त्रुटियों के सुधारने को अनावश्यक समझने लगें ।

५. नोट बुक का कार्य अध्यापक की दृष्टि में श्यामपट के कार्य से कम महत्व का नहीं होना चाहिए ।

६. बालकों में यह आदत पड़ जाय कि वह नियत समय पर अपने कार्य की जाँच करालें और अपनी त्रुटियों का सुधार भी बार-बार कहे ही करलें ।

७. अध्यापक अपनी ओर से बालकों के कार्य पर ऐसे नोट लिखें जो बालक को अपना कार्य ठीक करने में उत्साह बढ़ावें ।

कच्चा कार्य (Rough Work) तथा गलत कार्य को करने के लिए मना करना चाहिए । निम्न प्रकार की गलती की ओर बालकों का ध्यान आकर्षित करना चाहिए ताकि भविष्य में वे इस ओर ध्यान दें और ऐसी गलती न करे ।

१० व्यक्ति = ४ दिन,

१ ,, = ४० दिन

बालकों को इस प्रकार के प्रश्नों में पूर्ण तथा निश्चित भाषा का प्रयोग करना चाहिए । लिखित कार्य में भाषाओं का मिश्रण नहीं होना चाहिए ।

अशुद्धियाँ तथा उनका संशोधन

(Mistakes and their Correction)

बालकों को गणित में अशुद्धियों का संशोधन बहुत आवश्यक होता है । अध्यापक प्रत्येक अशुद्धि को काट कर उसको सही कर देता है तथा अशुद्धि के स्थान पर एक नोट भी लिख देता है । इससे बालक को अपनी गलती का ज्ञान हो जाता है और वह उसको सुधारने की कोशिश करता है । परन्तु यदि बालक उस अशुद्धि का संशोधन घर के कार्य में नहीं करता है तो अध्यापक की मेहनत बेकार जाती है । यदि बालक दुवारा उस अशुद्धि को नहीं करता है तब तो अध्यापक का परिश्रम सफल समझा जाता है बरना नहीं । इस कार्य को किस तरह किया जा सकता है ?

कक्षा में कुछ अशुद्धियाँ ऐसी होती हैं जो कि अधिकतर विद्यार्थी करते हैं । इस प्रकार की अशुद्धियों का संशोधन कक्षा में सभी विद्यार्थियों के सम्मुख किया जाना चाहिए । इस तरह से अधिक संख्या में अशुद्धियों का संशोधन किया जा सकता है परन्तु अध्यापक को इतना ज्ञान अवश्य होना चाहिए कि कौन-सा अशुद्धियाँ सामान्य तथा अधिक

तर विद्यार्थी करते हैं और जिनके सुधार में उनकी रुचि है। यदि अशुद्धियाँ सामान्य रुचि की न होंगी तो वे बालक जिन्होंने अशुद्धियाँ नहीं की हैं अध्यापक के शिक्षण में कोई रुचि न लेंगे तथा उतना समय भी कक्षा में व्यर्थ नष्ट होगा। व्यक्तिगत अशुद्धियों का निवारण छोटे-छोटे समूहों तथा व्यक्तिगत रूप से करना चाहिए। कुछ अशुद्धियाँ अध्यापक द्वारा विद्यार्थी की कापी पर ही दूर की जा सकती हैं। जिस स्थान पर अशुद्धि हो वहाँ पर 'पूछो' शब्द लिख कर अध्यापक अपनी स्मृति हेतु कक्षा में उस अशुद्धि के बारे में बालकों को बतला सकता है। इसी तरह व्यक्तिगत अशुद्धि के लिए कुछ और निशान रखा जा सकता है।

स्कूल में यदि विद्यार्थी किसी एक प्रश्न में गलती करते हैं तो उस सम्पूर्ण प्रश्न का फिर से पूरा हल दोहराया जाता है। इस तरह से प्रश्नों को पूरा दोहराने में अनुशासनीय महत्व होता है।

सवालियों के हल करने में मुख्य रूप से दो प्रकार की अशुद्धियाँ होती हैं। एक तो सिद्धांत की और दूसरी अशुद्धि जोड़, घटाने आदि की होती है। प्रथम प्रकार की गलती अधिक हानिकारक होती है क्योंकि एक बार यदि बालक किसी एक सिद्धांत को ठीक प्रकार नहीं समझता है तो इस प्रकार की गलती होने को सदा संभावना होती है। इस प्रकार की अशुद्धि को कक्षा में उन सभी बालकों को भली भाँति समझा देनी चाहिए जो कि उक्त सिद्धान्त को ठीक से न समझे हों। अध्यापक को इसकी जाँच हेतु कुछ प्रश्न अभ्यास के लिए तथा गृह कार्य के लिये दे देने चाहिए। प्रत्येक सिद्धान्त का पूर्ण निवारण होने पर दूसरे सिद्धान्त को कक्षा में बालकों को बतलाना मनोवैज्ञानिक होता है।

दूसरी प्रकार की अशुद्धि वह है जो कि बालक सवाल सही सिद्धांत के आधार पर हल करने में जोड़ने, घटाने आदि में करते हैं। इस प्रकार की गलती दो रूपों में पायी जाती है। एक तो वह कि बालक सदा एक ही प्रकार की गलती करे या भूल में किसी पद (Step) में कभी कोई गलती हो जाय। दूसरे रूप की गलती भयंकर नहीं होती है। इस तरह भूल से गलती करने के लिए बालक को चेतावनी ही देना पर्याप्त होता है। परन्तु प्रथम प्रकार की गलती जो कि बार २ दोहराई जाती है भयंकर होती है। इस प्रकार की गलती की ओर अध्यापक का विशेष ध्यान होना चाहिए। पहिले अध्यापक को इस प्रकार की गलती ढूँढ़ लेनी चाहिए और फिर उसके निवारण हेतु उस

प्रकार के प्रश्नों का पूर्ण रूप से अभ्यास कराने से उपरोक्त गलती दूर की जा सकती है। घटाने आदि में जो गलती हो उसको लिखित तथा मौखिक विधियों से अभ्यास कराने पर दूर किया जा सकता है।

अशुद्धियों के करने के कारण निम्न हैं—

(अ) किसी नवीन विधि को कक्षा में समझाते समय विद्यार्थी ध्यान नहीं देते हैं।

(ब) प्रश्नों के हल करते समय पर्याप्त संख्या में अभ्यास नहीं कराया जाता है।

(स) किसी विशेष कठिन विधि को बालक ठीक रूप से कक्षा में नहीं समझ पाते हैं।

अध्याय १०
गणित का पाठ्यक्रम
(Curriculum in Mathematics)

गणित के विस्तृत ज्ञान को एक क्रम से संग्रह करने मात्र का नाम ही गणित का पाठ्यक्रम है। इसकी गणित शिक्षण में बड़ी उपयोगिता है। यह शिक्षा का वह मार्ग है जिस पर चलकर विद्यार्थी अपने लक्ष्य को प्राप्त करता है। कनिष्ठ ने इसकी उपयोगिता पर प्रकाश डालते हुए कहा है कि यह कलाकार रूपी शिक्षक के हाथ में वह साधन है जिससे कि वह अपने पदार्थ रूपी विद्यार्थी को अपने आदर्श के अनुसार स्कूल में ढाल सके। इससे पढ़ने वाले सभी बालक निश्चित रूप से यह जान जाते हैं कि उनको नियत अवधि में क्या-क्या पढ़ना है। अध्यापक को भी इससे यह ज्ञात रहता है कि उसे निश्चित समय में क्या-क्या पढ़ाना है। इसी के आधार पर वह वार्षिक कार्यक्रम रखता ताकि नियत अवधि में अपने कोर्स को भली भाँति समाप्त कर सके। परीक्षक (Examiner) के दृष्टिकोण से भी पाठ्यक्रम बहुत उपयोगी है। इससे वे इस बात का अनुमान लगा लेते हैं कि बालकों ने क्या-क्या पढ़ा है और इसी के आधार पर वे परीक्षा-पत्र (Examination paper) बनाते हैं। इसके अतिरिक्त पाठ्य पुस्तकों के लेखक एवं संक-

लन कर्त्ता भी पाठ्यक्रम से जो सहायता एवं मार्ग दर्शन पाते हैं वह भी भी कम महत्त्व का नहीं। इस प्रकार पाठ्यक्रम से शिक्षा कार्य में संलग्न सभी व्यक्तियों को सहायता एवं पथ प्रदर्शन (Guidance) मिलता है।

अब प्रश्न यह उठता है कि गणित की शिक्षा प्रदान करने के लिए पाठ्यक्रम किस प्रकार निश्चित किया जावे। शिक्षा में बालक का स्थान मुख्य होता है। शिक्षा बालक को देनी होती है। अतः पाठ्यक्रम बनाते समय बालक को ध्यान में अवश्य रखना चाहिये। पाठ्यक्रम बालक के लिए है बालक पाठ्यक्रम के लिए नहीं है। इसलिए पाठ्यक्रम को अनुकूल बनाना चाहिये। पाठ्यक्रम का निर्माण इस प्रकार होना चाहिए कि उसमें निश्चित किये हुये पाठ्य विषय बालक को शीघ्रता से समझ जायँ, उनको भली भाँति ग्रहण कर सके तथा उस ज्ञान का जीवन में उपयोग कर सकें। इन सब बातों के लिए बालक की आयु, स्तर, अंक, समझने की योग्यता आदि बातों पर भी विचार करना चाहिए। प्रायः देखा गया है कि अध्यापक बालकों की योग्यता पर विचार न रखते हुए उनको प्रश्न हल करने को दे देते हैं। जब बालक उनको करता है तो उसे कई प्रश्न कठिन मालूम पड़ते हैं और कुछ में गलतियाँ भी करता है। परिणाम यह होता है कि बालक को गणित के प्रति घृणा उत्पन्न हो जाती है और वह गणित से दूर भागने की चेष्टा करता है। गणित जैसे उपयोगी विषय से सदा के लिए मुँह मोड़ लेता है। यदि अध्यापक उसकी योग्यता को ध्यान में रखकर प्रश्न देता तो ऐसा क्यों होता? अतः गणित के पाठ्यक्रम बनाते समय बालक की योग्यता को दृष्टि में अवश्य रखना है।

गणित के पाठ्यक्रम की रचना करने में विद्यालय के चारों तरफ के वातावरण पर भी ध्यान देना चाहिये। पाठ्यक्रम में उन प्रकरणों का समावेश करना चाहिए जो वहाँ के वातावरण के अनुकूल हों। उदाहरणार्थ गाँवों के स्कूलों के लिए पाठ्यक्रम में कृषि सम्बन्धी गणित पर अधिक जोर देना चाहिए। इसी प्रकार लड़के और लड़कियों के लिए भी गणित का पाठ्यक्रम समान नहीं हो सकता। लड़कियों के लिए पाठ्यक्रम में गृह विज्ञान से सम्बन्ध रखने वाली गणित अधिक होनी चाहिये और लड़कों के पाठ्यक्रम में इन्जीनियरिंग इत्यादि से सम्बन्ध रखने वाली गणित का समावेश होना चाहिए।

गणित के पाठ्यक्रम के आधार पर ही शिक्षा देकर उद्देश्यों की

प्राप्ति करनी होती है। यदि पाठ्यक्रम की रचना करते समय गणित शिक्षण के उद्देश्यों पर ध्यान नहीं दिया तो उन उद्देश्यों की प्राप्ति किस प्रकार सम्भव है। अतः पाठ्यक्रम को निश्चित करने में बालक के साथ-साथ गणित शिक्षण के उद्देश्यों पर ध्यान देना आवश्यक है। इन उद्देश्यों को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है—

१. व्यावहारिक उपयोगिता

२. अच्छी आदतों तथा उच्च विचारों का बनना

व्यावहारिक उपयोगिता के विचार से गणित का पाठ्यक्रम ऐसा होना चाहिए जिसमें बालक को उन प्रश्नों एवं समस्याओं को हल करने का अवसर मिलना चाहिये जो उसके दैनिक जीवन में आती हैं। प्रायः देखा जाता है कि हाई स्कूल का विद्यार्थी डेढ़ रुपये सेर से एक सेर चौदह छटांक रुई के दाम बताने में असमर्थ होता है जबकि एक बिना पढ़ा-लिखा दुकानदार उस रुई के दाम शीघ्र ही बतला देता है। इसका मुख्य कारण यह है कि बालक को व्यावहारिक ज्ञान की शिक्षा नहीं दी जाती है। उनको थोथा ज्ञान दिया जाता है जो वास्तविकता से दूर होता है। उसमें कृत्रिमता भलकती है। बालक भी केवल परीक्षा में पास होने के लिए उसको यंत्रवत (Mechanically) रट लेते हैं और परीक्षा में उगलने के बाद रटे हुए ज्ञान शीघ्र भूल जाते हैं। अपने जीवन में उस ज्ञान का कुछ भी उपयोग नहीं कर पाते। यह दोष पाठ्यक्रम में गणित व्यावहारिक उपयोग का समावेश करके दूर किया जा सकता है। उसको ऐसा ज्ञान देना है जो उनके आगामी जीवन में उपयोगी हो तथा वर्तमान जीवन से सम्बन्धित हो। दैनिक वातावरण से सम्बन्धित प्रश्न और समस्याएँ बालक में रुचि उत्पन्न करने में भी सहायक होते हैं और इनको बालक कोई अपरिचित चीज न समझकर सहज में ही ग्रहण कर लेता है। अपरिचित बात एवं तथ्य से बालक चौंकता है तथा देर में समझ पाता है। अतः पाठ्यक्रम में गणित की वे ही बातें कोर्स में रखनी चाहिए जो उनके आगामी जीवन में उपयोगी हैं तथा उस कोर्स को इस तरह के प्रश्नों द्वारा कराना चाहिए जो बालकों के दैनिक जीवन में काम आते हैं। उदाहरणार्थ अंकगणित में स्टाक और शेयर, लाभ और हानि नापना इत्यादि दैनिक जीवन में काम आने वाले विषय हैं। इसी तरह रेखागणित में भूमि की नाप, डिजाइन आदि दैनिक जीवन से सम्बन्धित विषय हैं।

गणित विषय को जीवन से सम्बन्धित करने के लिए बालक के

जीवन पर भी ध्यान देना आवश्यक है। बालक के जीवन में खेल प्रधान होता है। अतः खेल द्वारा गणित के प्रश्नों को हल कराया जा सकता है। इसके लिए गणित के अध्यापक को चाहिए कि वह बालकों के विभिन्न खेलों का अध्ययन करे और-ऐसे खेलों को चुने जिनके द्वारा गणित की शिक्षा दी सके। इसके लिए गणित में खेल तमाशे नामक एक पुस्तक भी है। यह पुस्तक श्री महावीर प्रसाद जैन एम० एस-सी द्वारा लिखी गई है तथा इसमें विभिन्न खेल तमाशों द्वारा गणित की शिक्षा दी गई है। इसके अतिरिक्त डी० एल० आनन्द राव ने भी बालकों के खेल पर पुस्तक लिखी है। इस पुस्तक से भी खेल द्वारा गणित की शिक्षा प्रदान करने में सहायता ली जा सकती है।

जहाँ तक गणित के दूसरे उद्देश्य का प्रश्न है बालक में गणित सांस्कृतिक तथा अनुशासनात्मक विकास भी अवश्य होना चाहिए। इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए पाठ्यक्रम में उस प्रकार की गणित का समावेश होना चाहिए जो बालकों के मस्तिष्क को विकसित करे, उन की बुद्धि को बढ़ावे, उनमें किसी बात को सोचने समझने की क्षमता बढ़ावे और किसी भी विषय पर अच्छी तरह तर्क करने की आदत डाले ऐसी योग्यता प्रायः सोचने की समस्याओं और पहेलियों से बढ़ती है। अतः पाठ्यक्रम में कुछ ऐसी गणित जैसे रेखागणित की साध्य तथा अभ्यास तथा पहेलियाँ आदि भी होना चाहिए। पाठ्यक्रम में पहेलियाँ आदि के समावेश में गणित में कुछ रोचकता भी बढ़ जायेगी। परन्तु सांस्कृतिक तथा अनुशासनात्मक विकास केवल इस प्रकार के गणित से ही सम्भव नहीं है। इसके लिए व्यावहारिक गणित भी आवश्यक है। अनुशासन एवं सांस्कृति दृष्टि से गणित का समावेश हाई स्कूल तक की कक्षाओं तक बहुत कम होना चाहिए। इस प्रकार की गणित उच्च कक्षाओं के लिए ठीक रहती है और उन्हीं के लिए उपयोगी होती है जो गणित का उच्च ज्ञान प्राप्त करते हैं। आधे से ज्यादा बालक हाई स्कूल पास करके व्यवसाय में लग जाते हैं। अतः हाई स्कूल तक की कक्षाओं में गणित व्यावहारिक उपयोगिता के विचार से अधिक होनी चाहिए।

पाठ्य-क्रम बनाने में एक महत्त्वपूर्ण सिद्धांत और है और वह है शिक्षा में सह सम्बन्ध (Correlation)। अतः इस पर भी विचार कर लेना आवश्यक है। शिक्षा में सह सम्बन्ध का आशय यह है कि गणित की शिक्षा का अन्य विषयों तथा गणित की विभिन्न शाखा-

ओं और पाठों में भी आपस में सम्बन्ध होना चाहिए। गणित शिक्षण में गणित का बालकों के वातावरण से सम्बन्ध होना चाहिए। प्रायः छोटी कक्षाओं में अध्यापक बालकों को टन, हन्टरवेट, क्वार्टर, पौंड आदि के जोड़, बाकी, गुणा, भाग आदि करवाते हैं। परन्तु तौल की यह प्रणाली भारतवर्ष में काम नहीं आती। अतः उनको अपरिचित वस्तु समझते हैं और उनका ज्ञान पूर्ण रूप से नहीं कर पाते। यदि इसके स्थान पर मन, सेर, छटाँक प्रश्न करवाये जायें तो बालक शीघ्रता से समझ लेते हैं और उस ज्ञान का उपयोग अपने दैनिक जीवन में करते हैं। गणित का अन्य विषयों से भी सम्बन्ध करते हुए पढ़ाने से बालकों की रुचि बढ़ती है और वे उस विषय के ज्ञान के सहारे सहज में ही समझ लेते हैं। अतः भूगोल, विज्ञान, ड्राइंग, इतिहास आदि विषयों से सम्बन्धित करते हुए गणित पढ़ाना अच्छा है इसके अतिरिक्त गणित के विभिन्न पाठों का आपस में तथा गणित के ज्ञान का बाहरी जगत से भी सम्बन्ध को भी ध्यान में रखना चाहिए और इसी के अनुसार पाठ्यक्रम बनाना चाहिए।

इसके अतिरिक्त पाठ्य-क्रम बनाने में गणित का इतिहास, गणितज्ञों, की कहानियाँ नये-नये गणित सम्बन्धी आविष्कार तथा पहेली और रोचक समस्याओं का भी ध्यान रखना चाहिए। गणित के पाठ्यक्रम इन बातों का समावेश करने से गणित में सरसता आ जावेगी। आजकल बालक गणित से दूर भागते हैं। गणित के प्रति सदैव उदासीन रहते हैं। गणित के पाठ्य-क्रम में उपरोक्त बातों को समावेश करने से ये दृश्य फिर दिखलाई न देंगे।

पाठ्यक्रम कमेटी—गणित का पाठ्यक्रम प्रायः शिक्षा विभाग द्वारा बना दिया जाता है। इसके बनाने वाले ऐसे व्यक्ति होते हैं जो उन कक्षाओं के सम्पर्क नहीं आ सकते हैं। इस प्रकार बालकों की आवश्यकताओं इत्यादि बातों का ध्यान रखे बिना पाठ्यक्रम की रचना दी जाती है। बालकों की वास्तविक आवश्यकताओं को अध्यापक ही जानते हैं क्योंकि वे हर समय उनके सम्पर्क में रहते हैं। अध्यापक बालकों के मनोविज्ञान से परिचित होते हैं। वह अपने अनुभव के आधार पर अनेक सुझाव दे सकता है। अतः गणित के पाठ्य-क्रम कमेटी में गणित के अध्यापक, गणितज्ञ तथा शिक्षा विभाग के अधिकारी ये सभी व्यक्ति होने चाहिए तभी पाठ्यक्रम ठीक प्रकार से बन सकता है।

उपयुक्त पाठ्यक्रम

प्राथमिक कक्षाओं का पाठ्यक्रम—छोटी कक्षाओं में गणित की शिक्षा बालक के स्वयं अनुभव के आधार पर होनी चाहिए। वह जीवन में हर समय कुछ न कुछ करता ही रहता है। अतः इन क्रियाओं के विभिन्न पहलुओं द्वारा गणित का ज्ञान देना चाहिए। छोटे बालकों में जिज्ञासा भी काफी बढ़ जाती है। वह भिन्न-भिन्न बातों के बारे में जानना चाहता है। तथा बड़ों से अनेकों शंकाओं का समाधान करता रहता है। अतः अध्यापक को बालकों की इस जिज्ञासा का गणित की शिक्षा में ध्यान रखना चाहिए और इसी के आधार पर पाठ्यक्रम करना चाहिए। इसके अतिरिक्त छोटी कक्षाओं के पाठ्यक्रम में एक बात और ध्यान रखनी चाहिये और वह है कि भारत जैसे निर्धन देश में बहुत से बालक कक्षा ४-५ पास करने के बाद पढ़ना छोड़ देते हैं और किसी व्यवसाय में लग जाते हैं। अतः पाठ्यक्रम में गणित का ऐसा कोर्स रखना चाहिए जो उनके स्कूल छोड़ने के बाद उनके दैनिक जीवन और व्यवसाय में उपयोगी है।

उपरोक्त बातों को ध्यान में रखते हुए प्राथमिक कक्षाओं के पाठ्यक्रम अंकगणित के अन्तर्गत संख्याएँ, साधारण जोड़, बाकी, गुणा, भाग, महाजनी गुरु, किलोग्राम, ग्राम, रुपये नये पैसे सम्बन्धी जोड़ बाकी, गुणा, भाग, लघुत्तम, महत्तम, भिन्न, दशमलव क्षेत्रफल काम और समय सम्बन्धी प्रश्न साधारण ब्याज, लाभ हानि सम्बन्धी प्रश्न। रेखागणित में त्रिभुज, चतुर्भुज आदि विभिन्न आकृतियों का ज्ञान।

मिडिल कक्षाओं का पाठ्यक्रम—इन कक्षाओं के बालकों की रुचियाँ तथा योग्यता और बढ़ जाती है तथा विभिन्न बालकों की योग्यता में अन्तर भी होता है। अतः इनका पाठ्यक्रम इस प्रकार का होना चाहिए कि उसमें बालकों को अपनी रुचि और योग्यता के अनुसार चुनने की गुंजाइश रहे। इस अवस्था में बालकों की योग्यता इतनी बढ़ जाती है कि वे सूक्ष्म बातों को भी समझने लगते हैं अतः रेखागणित में साध्यों (Theorems) भी इस अवस्था के बालकों को पढ़ाई जा सकता है। बीज गणित का भी प्रारम्भिक ज्ञान दिया जा सकता है।

उपरोक्त बातों को ध्यान में रखते हुए मिडिल कक्षाओं के बालकों को अंकगणित में एकिक नियम, वगमूल अनुपात और समानुपात, प्रतिशत, क्षेत्रफल और ग्राफ इत्यादि पढ़ाया जा सकता है। बीज

गणित में चारों नियम—जोड़, बाकी, गुणा, भाग, कोष्ठक तोड़ना तथा समीकरण का ज्ञान कराया जा सकता है। रेखागणित में विभिन्न नामों के त्रिभुजों और चतुर्भुजों की रचना तथा इन पर आधारित साध्य व अभ्यास पढ़ाने चाहिए।

हाई स्कूल कक्षाओं का पाठ्यक्रम—हाई स्कूल कक्षाओं तक आने पर बालकों की व्यक्तिगत भिन्नतायें बहुत हो जाती हैं। कुछ बालक तो हाई स्कूल परीक्षा पास करने के बाद पढ़ना छोड़ देते हैं और किसी व्यवसाय में लगकर पेट पालन करने लगते हैं। कुछ बालक हाई स्कूल परीक्षा पास करने के बाद कॉलेज में गणित उच्च शिक्षा के लिए प्रवेश लेते हैं और प्रोफेसर इन्जीनियर इत्यादि बनते हैं। अतः सब दृष्टिकोणों को ध्यान में रखते हुए पाठ्यक्रम की रचना करनी चाहिए। गणित के पाठ्यक्रम में ऐसे भी प्रकरण रखने चाहिये जो व्यवसाय में उपयोगी हों, रुचिकर हों, ज्यादा कठिन न मालूम न पड़ें तथा ऐसे प्रकरण भी होने चाहिए जो गणित की उच्च शिक्षा की तैयारी में सहायक हों।

उपरोक्त बातों के आधार पर हाई स्कूल कक्षाओं में अंकगणित में फील्ड बुक, क्षेत्रफल, आयतन, लाभ-हानि, तत्काल धन, मिति काटा, कमीशन, काम सम्बन्धी प्रश्न तथा साभा आदि प्रकरणों का समावेश होना चाहिए। बीजगणित में विभिन्न प्रकार के गुणन खण्ड, तीन अज्ञात राशियों के समीकरण तथा इबारती प्रश्न पढ़ाने जाने चाहिये। रेखागणित में छोटी कक्षाओं के कोर्स के साथ वृत्त की रचना तथा साध्यों को भी रखना चाहिए। इसके अतिरिक्त कुछ रोचक पाठ्यक्रम जैसे पाइथोगोरस, श्रीधराचार्य और श्री महावीराचार्य आदि गणितज्ञों का जीवन परिचय आदि भी होना चाहिए।

अध्याय ११

अभ्यास का महत्व

(Importance of Drill)

प्रत्येक नवीन अध्याय के प्रारम्भ में कुछ छोटे छोटे प्रश्न अभ्यास के रूप में देने चाहिए। इसके अतिरिक्त नवीन ढंग के प्रश्नों के हल करते समय भी बीच बीच में अभ्यास के लिए कुछ प्रश्न करा लेने चाहिए। जब किसी एक विधि पर विद्यार्थी पूर्ण ज्ञान प्राप्त कर लें तो बीच बीच में स्मृति की जाँच करने हेतु प्रश्न दिये जाने लाभदायक सिद्ध होते हैं और वह ज्ञान सदा स्थायी तथा लाभप्रद होता है। किसी निश्चित अवधि में कराई गयी विधि की जाँच करने के लिए अध्यापक को एक साधारण प्रश्न पत्र विद्यार्थियों को देते रहना चाहिए। इन प्रश्न-पत्रों से अध्यापक को बालक की स्थिति का ज्ञान हो जाता है तथा इनसे विद्यार्थियों की स्मृति फिर से जागृत हो उठती है। साधारण प्रश्न-पत्रों तथा उदाहरणों द्वारा पूर्व अवधि के कार्य को दोहराया जा सकता है।

एक अध्यापक यदि बालक के किए हुए कार्य पर ध्यान नहीं देता है तो इसका तात्पर्य यह है कि अगली कक्षा में उस बालक को उसे स्वयं नहीं पढ़ाना है। उस अध्यापक का शिक्षण केवल उसी स्तर तक सीमित रहता है। इस दशा में बालक के भविष्य पर ध्यान नहीं देता

है। इस दशा में सुधार हेतु गणित के प्रमुख अध्यापक को सतर्क रहना चाहिये। उसको यह ध्यान में रखना चाहिए कि गणित के प्रत्येक अध्यापक को नवीन ढंग के प्रश्नों के प्रारम्भ में बालक की परीक्षा ले लेनी चाहिये तथा नवीन प्रश्नों को हल करने के साथ ही साथ उस विधि का पर्याप्त रूप से अभ्यास करा लेना चाहिए। जिस विद्यालय में एक ही अध्यापक बालकों को पढ़ाता हो वहाँ तो यह सम्भव ही है परन्तु जहाँ बालक एक विद्यालय की पढ़ाई समाप्त करके दूसरी में प्रवेश करते हैं वहाँ अध्यापक अपनी जिम्मेदारी नहीं समझते हैं।

छोटी कक्षाओं में बालकों को बिना किसी नवीन विधि में पूर्ण अभ्यास कराने से पहले ही दूसरी कक्षा में भेज दिया जाता है। इसके कारण ऐसे बालकों की नींव कमजोर पड़ जाती है और नवीन विधि को समझने में बालक कठिनाई प्रतीत करता है। इसलिए अभ्यास का महत्व इस स्तर पर भी उतना ही है जितना कि और स्तरों पर होता है। अध्यापक को नवीन विधियों का प्रयोग करना अच्छा लगता है परन्तु इससे बालक का ग्रहित होता है। उनको किसी नवीन विधि आरम्भ कराने से पहिले पूर्व विधि को पूर्ण रूप में समझ लेना आवश्यक होता है। यह तभी सम्भव है जब कि प्रत्येक नवीन विधि के पर्याप्त अभ्यास कक्षा में कराये जावें। स्कूल में ऐसे विद्यार्थी भी होते हैं जो कि उच्च विधि के प्रश्न तो हलकर सकते हैं परन्तु उनके अन्तर्गत आने वाले साधारण विधि के प्रश्नों को हल नहीं कर सकते हैं। इसका एक मात्र कारण उन विधियों में अभ्यास की कमी होती है। इसके कारण विद्यार्थी उन सरल प्रश्नों को पूर्ण रूप से नहीं समझ पाते हैं। इस तरह विद्यार्थी जब किसी परीक्षा में बैठते हैं तो वे साधारण प्रश्नों को हल करने में असफल होते हैं और इस असफलता के कारण उनकी रुचि गणित को ओर से हट जाती है। इस तरह से वे विद्यार्थी जो कि गणित के प्रत्येक क्षेत्र में पूर्ण अभ्यास करते हैं उनको सदा सफलता प्राप्त होती है।

उपरोक्त वर्णन से यह स्पष्ट हो जाता है कि गणित के क्षेत्र में अभ्यास का क्या स्थान है तथा वह क्यों आवश्यक है। अभ्यास का प्रत्येक विषय में अपना स्थान है परन्तु गणित में यह प्रमुख स्थान रखता है और अति आवश्यक है।

गणित का अभ्यास (Drill in Maths) इतना महत्वपूर्ण होते हुए भी कुछ कारणों से भाँखों में खटकता है। इसमें कामचोर

(Careless) गणित अध्यापक को बहानेबाजी की खूब गुन्जाइश मिल जाती है जब कि अन्य विषयों के अध्यापक गला फाड़ते फाड़ते थक जाते हैं। गणित अध्यापक अपने अभ्यास कार्य की छाया में चैन की बंशी बजाया करते हैं। इसकी आड़ में काम नहीं होता है। इस कारण अभ्यास पद्धति बदनाम हो गई है। परन्तु वास्तव में गणित जैसे महत्वपूर्ण एवं श्रमसाध्य विषय को बिना अभ्यास के पढ़ाया जाना अच्छा नहीं है। यह पद्धति तो उपयोग में लानी ही है परन्तु उसमें अध्यापक को अपने कर्तव्य से भली भाँति परिचित भी होना चाहिए। उसको चाहिए कि जब बालक अभ्यास कार्य करें तो वह कक्षा में सब बालकों का निरीक्षण करे तथा जो बालक जहाँ अटके वहीं उसकी कठिनाई दूर करदे। ऐसा करने से सब बालक अभ्यास कार्य में रुचि पूर्वक लगे रहेंगे और पूरा-पूरा लाभ उठा सकेंगे।

अंकगणित में अभ्यास स्थान—अभ्यास का अंकगणित में मुख्य स्थान होता है। बिना अभ्यास के अंकगणित का कोई प्रयोगात्मक महत्व नहीं है। अंकगणित में अभ्यास पर्याप्त मात्रा में होना चाहिये। अभ्यास का कार्य समयानुसार तथा छोटे छोटे खण्डों में होना लाभप्रद होता है। यदि कक्षा को किसी नवीन विधि के आरम्भ में अभ्यास की आवश्यकता हो तो अध्यापक को चाहिए कि उस तरह के अभ्यास के प्रश्न विद्यार्थियों को करादे ताकि वे नवीन विधि को आसानी से समझ सकें। इस तरह के कार्य में विद्यार्थी स्वयं रुचि लेंगे और पाठ रोचक होगा।

अभ्यास का समय निश्चित होना चाहिए। किसी विशेष विधि के पश्चात् अभ्यास के लिए अधिक समय नहीं देना चाहिए। कभी कभी अभ्यास के लिए ५ मिनट पर्याप्त होते हैं, परन्तु सामान्यतया अभ्यास के लिये १० मिनट दिये जाने चाहिए। अभ्यास में प्रश्नों की संख्या केवल उतनी होनी चाहिए जिनको कक्षा के सभी बालक कर सकें। जो बालक निश्चित समय से पहले अभ्यास प्रश्नों को हल करलें उनके लिए पुस्तक से और प्रश्न देने की व्यवस्था होनी चाहिए ताकि उनका समय व्यर्थ नष्ट न हो। इसके अतिरिक्त अभ्यास के प्रश्न इस तरह के होने चाहिये कि वे क्रमानुसार सरल से कठिन हों ताकि कक्षा में सभी प्रकार के बालक—मन्द बुद्धि से तीव्र बुद्धि वाले अभ्यास कार्य में व्यस्त रहें। प्रश्नों का क्रम सरल से कठिन की ओर होना चाहिए।

अध्यापक को या तो कक्षा में ही अभ्यास प्रश्नों की जाँच कर लेनी चाहिए या अन्तर (Period) समाप्त होने पर जाँच करके दूसरे दिन के प्रश्न के हल करने से पहिले उत्तर-पुस्तिका लौटा देनी चाहिए। अभ्यास के प्रश्न देने में अध्यापक को पर्याप्त विचार करके प्रश्न तैयार कर लेने चाहिए। उसको बालकों की कठिनाई को समझकर अभ्यास हेतु उसी प्रकार के प्रश्न देने चाहिए जिनके हल करने से उनकी कठिनाई दूर हो सके।

अध्याय १२

गणित में परीक्षाएँ

(Examination in Mathematics)

गणित के सफल शिक्षण के लिए परीक्षाएँ परम आवश्यक हैं। शिक्षा के परिणामों की नाप तौल करने के साथ ही साथ यह विद्यार्थियों को आगे बढ़ने, कठिनाइयों से टक्कर लेने और उन पर विजय प्राप्त करने की प्रेरणा देती है। इससे विद्यार्थी यह जान लेते हैं कि उन्होंने किसी विषय में कितनी योग्यता प्राप्त करली है, किस विशेष स्थल पर उनको कठिनाई है। इस तरह परीक्षा छात्रों के लिए उस मोल के पत्थर के समान है जो यात्री को उसकी यात्रा में इस बात की सूचना देता रहता है कि उसने अपनी यात्रा का कितना मार्ग तय कर लिया है और कितना मार्ग अभी शेष रहा है। अध्यापक को इससे मालूम पड़ जाता है कि उसको शिक्षण प्रक्रिया किस सीमा तक सार्थक हुई। इसके अतिरिक्त अध्यापक परीक्षा द्वारा प्रत्येक बालक की बुद्धि, मनोशक्ति, रुचि, रुझान, स्तर (Standard) और कार्य का पता लगा लेता है। बालकों के संरक्षक परीक्षाओं द्वारा सहज में ही जान लेते हैं कि उनके बालक कितनी उन्नति कर रहे हैं। शिक्षा शास्त्री भी परीक्षाओं के आधार पर नवीन शिक्षा प्रणालियों की जाँच एवं प्रयोग करते हैं। इस प्रकार शिक्षा से सम्बन्धित सभी व्यक्ति परीक्षा द्वारा मार्ग दर्शन पाते हैं।

वर्तमान परीक्षायें—

हाई स्कूल कक्षाओं में गणित की परीक्षायें लिखित होती हैं। तीन घण्टे में प्रायः छः या सात प्रश्नों को हल करने के लिए कहा जाता है। अंकगणित और बीजगणित में संख्यात्मक प्रश्न होते हैं। ग्राफ खींचने के ऊपर भी प्रश्न होता है। रेखागणित में साध्य और उन पर अभ्यास सिद्ध करने पड़ते हैं। कुछ प्रश्न रचनात्मक रेखागणित के भी होते हैं। इन सब में भाषा का भरसक प्रयोग होता है। इन्टर कक्षाओं में भी गणित की परीक्षायें करीब ऐसी ही होती हैं। संख्यात्मक प्रश्नों के अतिरिक्त परिभाषायें भी पूछी जाती हैं। जूनियर हाई स्कूल में भी लिखित परीक्षायें होती हैं। इनमें संख्यात्मक प्रश्न के साथ रेखागणित में कुछ परिभाषायें तथा कुछ रचनात्मक कार्य पूछा जाता है। प्राइमरी कक्षाओं में लिखित परीक्षा के साथ मौखिक परीक्षा (Oral Test) भी होती है।

वर्तमान परीक्षाओं के दोष

वर्तमान परीक्षा प्रणाली दोषमय है। इसके प्रति शिक्षा शास्त्रियों का विरोध दिन पर दिन बढ़ता जा रहा है। इसमें उपस्थित दोषों को तीन भागों में विभाजित किया जा सकता है।

विद्यार्थियों की दृष्टि से दोष—

वर्तमान परीक्षा प्रणाली के दोषों का विद्यार्थियों पर सबसे अधिक प्रभाव पड़ता है। परीक्षा का बुरा उन पर सदा चढ़ा रहता है। विद्यार्थी अपने जीवन में परीक्षा के अतिरिक्त किसी और ध्यान नहीं दे पाते। परीक्षा में सफल होना मात्र ही उनका ध्येय रह जाता है। प्रश्न पत्र (Examination Papers) भी पाठ्य पुस्तक के सीमित ज्ञान पर ही आधारित होते हैं। इसलिए विद्यार्थी पिछले प्रश्न पत्रों को देख कर और अध्यापकों के सुझाव अनुसार सम्भवित प्रश्नों (Important Questions) की सूची तैयार कर लेते हैं। परन्तु इस प्रकार की तैयारी में प्रायः धोखा हो जाता है और एक अच्छा विद्यार्थी भी फेल हो जाता है। वर्तमान परीक्षा प्रणाली विद्यार्थियों के शारीरिक विकास में भी बाधक होती है। परीक्षा के दिनों में विद्यार्थी रात-रात भर जागकर, भूखे रहकर और सारे खेत कूद छोड़कर परीक्षा की तैयारी में लग जाते हैं। इसका परिणाम यह होता है कि बहुत से विद्यार्थी परीक्षा के दिनों में ही बंमार पड़ जाते हैं। इस प्रकार की परीक्षाओं से विद्यार्थियों को नकल करने में भी सहायता मिलती है।

अध्यापकों की दृष्टि से दोष—

प्रचलित परीक्षा प्रणाली का प्रभाव अध्यापक और शिक्षण विधि पर भी पड़ता है। परीक्षाफल अच्छा रखने के प्रयत्न में वे पाठ्यविषय को भली-भाँति समझाने की बजाय उनको सम्भावित प्रश्नों के उत्तर लिखा देते हैं। विद्यार्थी बिना समझे इनको रट लेते हैं। इस प्रकार बालकों के ज्ञान की जाँच नहीं हो पाती है। इसके अतिरिक्त परीक्षा-फल को अच्छा करने के लिए कुछ अध्यापक तो नकल तक कराते पाये गये हैं।

परीक्षाफल की दृष्टि से दोष—

प्रचलित परीक्षा प्रणाली परीक्षाफल पर भी प्रभाव डालती है। इसका कारण यह है कि परीक्षित विषय के अतिरिक्त अन्य बातों का भी प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ गणित की उत्तर पुस्तकें जाँचते समय परीक्षक (Examiner) को केवल गणित के ज्ञान की जाँच करनी चाहिए परन्तु परीक्षार्थी के भाषा प्रवाह, लिखावट, आकृति की स्वच्छता आदि का भी परीक्षक पर प्रभाव पड़ता है इसके अतिरिक्त परीक्षक के विचारों और मनोदशा (Mood) का भी प्रभाव परीक्षाफल पर पड़ता है। संतोष एवं प्रसन्नता की दशा में जाँची गई उत्तर पुस्तक में अंक अधिक मिल जाते हैं परन्तु दुःख, क्लेश अथवा क्रोध की अवस्था में जाँचने पर उसी उत्तर पुस्तक में अंक कम मिलते हैं।

नवीन परीक्षा प्रणाली

शिक्षा विशेषज्ञों का कहना है कि गणित विषय में परीक्षा तो अवश्य होनी चाहिए परन्तु परीक्षा प्रणाली दोष रहित होनी चाहिए। परीक्षा के प्रश्न पत्रों में प्रश्न अधिक संख्या में होने चाहिए। ऐसा करने से बालक के सम्पूर्ण पाठ्य-क्रम के ज्ञान की जाँच हो सकेगी। इसके अतिरिक्त रटने के लिए भी प्रोत्साहन न मिलेगा और नकल (Unfair Means) करने की गुंजाइश भी न रहेगी। इन सभी विशेषताओं से सम्पन्न एक नवीन परीक्षा प्रणाली का प्रयोग कुछ देशों में किया जा रहा है। इस प्रणाली के अनुसार परीक्षा पत्र में प्रश्न तो काफी संख्या में होते हैं परन्तु उनका उत्तर रेखांकन चिन्हों या एक या दो शब्दों में दिया जाता है। गणित की परीक्षा में ऐसी बहुत सी विधियाँ हैं जो इस प्रकार की हैं— पूर्ति परीक्षण (Completion Test) सत्यासत्य परीक्षण अनेक उत्तरों में उपयुक्त उत्तर का चयन आदि।

(१) पूर्ति परीक्षण—इस प्रकार की परीक्षा में कोई बात दी जाती है। इसमें कुछ शब्द छूटे होते हैं इन शब्दों का स्थान खाली रहता है और विद्यार्थी उन खाली स्थानों को भरता है। जैसे—निम्न-लिखित वाक्यों को पूर्ति करो :—

(अ) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग.....होता है।

(ब) $1 : 4 :: \dots : 20$

(स) १२, २४, ३६,.....

(द) $(4y^2 - 8r^2) = (2y - 3r) (\dots)$

(य) १ समकोण में अंश होते हैं।

(२) अनेक उत्तरों में से उपयुक्त उत्तर का चयन—

इस प्रकार की परीक्षा में एक प्रश्न पूछा जाता है और उसके साथ कई उत्तर दे दिये जाते हैं। इन उत्तरों में से एक सही उत्तर होता है और शेष सब गलत। सही उत्तर छांटना पड़ता है। जैसे—निम्न-लिखित में से सही उत्तर को रेखांकित करदो।

(अ) त्रिभुज की तीनों मध्यका (Medians) जिस बिन्दु पर मिलती है। उसे परिकेन्द्र, गुरुत्वकेन्द्र (Centroid); अन्तः केन्द्र (Incentre) कहते हैं।

(ब) यदि एक आयताकार मैदान की लम्बाई ५०० गज और चौड़ाई २०० गज है तो इसका क्षेत्रफल ८००, १०००, ४०००, १००००, वर्ग गज होगा।

(स) २०, २५, २६, ३० और १६ का औसत ३०, ३५, २४, ४८ है।

(द) जिस त्रिभुज की तीनों भुजायें बराबर होती हैं उसे समकोण, समबाहु, विषमकोण, समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

(३) सत्यासत्य निर्देशन (True and False Test)—

इस प्रकार की परीक्षा में कुछ कथन दे दिये जाते हैं और परीक्षार्थी उन्हें देखकर बतलाता है कि वह ठीक है अथवा गलत जैसे—

(१) त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी के बराबर होता है।

(२) $4y^2 - 8r^2 = (2y + 3r)(2y - 3r)$

(३) $(y^2)^3 = y^6$

(४) ३ प्रतिशत वार्षिक व्याज की दर से २ वर्ष का ३०० रु० का साधारण व्याज २० रु० होता है।

(४) मेल परीक्षा (Matching Test) —

इस प्रकार की परीक्षाओं में दो कतारों में अलग-अलग कुछ शब्द दे दिये जाते हैं और ये शब्द इस प्रकार होते हैं कि एक कतार का प्रत्येक शब्द दूसरी कतार के किसी शब्द से मेल खाता है। परीक्षार्थी को मेल खाते हुए शब्दों को मिलाना होता है। जैसे —

निम्नलिखित दो हुई कतारों में से पहली कतार के प्रत्येक शब्द से मेल खाते हुए दूसरी कतार के शब्द को छाँटो और पहली कतार के शब्द के साथ लिखिये—

(क) एक चतुर्भुज जिसकी आमने सामने (१) ६३

की भुजायें समान्तर होती हैं।

(ख) त्रिभुज की तीनों मध्यगत

रेखाओं का कटान बिन्दु

(२) समान्तर चतुर्भुज

(ग) अधिक कोण

(३) १५

(घ) $75 \div 5$

(४) गुरुत्व केन्द्र

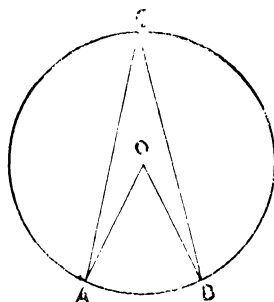
(ङ) 6×7

(५) 105°

(५) पहिचान परीक्षा (Recognition Test) —

इस प्रकार की परीक्षा में कोई चित्र आदि बना दिया जाता है और उसके विभिन्न भागों के नाम पूछे जाते हैं। जैसे —

निम्नलिखित चित्र में O, A, B, C, OA भागों के नाम लिखो तथा यह भी बतलाओ कि कोण A O B और कोण A C B में क्या सम्बन्ध है।



(६) तर्क युक्त चयन (Logical Selection) —

इस प्रकार की परीक्षा में कई वस्तुओं के नाम दिये जाते हैं। उन में एक के अतिरिक्त शेष सब ऐसी होती हैं जो आपस में मिलती हुई होती हैं। उस अतिरिक्त वस्तु को छाँटकर अलग करना होता है,

जैसे—

निम्नलिखित समूह में से उस शब्द को काट दो जो समूह में अतिरिक्त मालूम पड़े ।

(क) बिन्दु, सरल रेखा, अधिक कोण, चाप (Arc), वृत्त, व्याज, सम्मुख कोण ।

(ख) आसन्न कोण, सम्मुख कोण, समकोण, वृत्त, पुनर्युक्त कोण, स्थूल कोण ।

(ग) २, ५, ८, ११, ४, १४, १७

(घ) व्याज, दर, मूलधन, औसत, मिश्रधन, समय

(७) बुद्धि परीक्षा (Intelligent Test)—

परीक्षा में कुछ प्रश्न ऐसे भी देने चाहिए जिनमें बालकों को अपनी बुद्धि लगानी पड़े । प्रायः अध्यापक बालकों को कुछ ऐसे सूत्र तथा कायदे बतला देते हैं कि बालक प्रश्न पढ़ते ही मशीन की तरह प्रश्न करने लग जाते हैं । अतः परीक्षा पत्र में ऐसे भी प्रश्न होने चाहिए जिनमें बालक को अपनी बुद्धि प्रयोग करने का अवसर प्राप्त हो । जैसे—एक गाँव में पाँच कुएँ हैं जिनकी गहराई क्रमशः १६, १८, २०, २४ और २५ गज है । बताओ वह छोटी से छोटी रस्सी कितनी लम्बी होगी जो पाँचों कुओं में काम आ सके । इस प्रश्न में छोटी से छोटी लम्बाई निकालने के लिए प्रायः लघुत्तम (L. C. M.) निकालने की सोचेंगे क्योंकि अक्सर वे छोटी से छोटी राशि निकालने के लिए लघुत्तम निकलते थे ।

यह नवीन परीक्षा प्रणाली पूर्णतः विश्वसनीय है । इसमें प्रश्न पत्र सम्पूर्ण पाठ्यक्रम पर बनाया जा सकता है । इसके अतिरिक्त प्रश्न इतने अधिक ह्राते हैं कि रटना भी सम्भव नहीं । प्रश्नों की संख्या अधिक होने के साथ-साथ समय कम मिलता है । अतः बालकों को नकल करने की गुन्जाइश भी इस प्रणाली में नहीं रहती । वे प्रश्नों के उत्तर देने में ही इतने व्यस्त रहते हैं कि इधर-उधर ध्यान नहीं दे पाते । यदि वे इधर-उधर देखेंगे तो सम्पूर्ण प्रश्न पत्र को हल नहीं कर सकेंगे । इन परीक्षा पत्रों के प्रश्न का एक ही सही उत्तर सम्भव होता है अतः विभिन्न परीक्षों में मतभेद की कोई गुन्जाइश नहीं रहती । अंक देते समय परीक्षक की मनोदशा का भी प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि प्रश्न सही हैं तो पूर्णाङ्क (Full Marks) और यदि प्रश्न गलत हो तो शून्य मिलता है ।

इन सब अच्छाइयों के होते हुए भी इस प्रणाली में कुछ कमियाँ हैं। इसमें बालकों को अटकल तथा अनुमान द्वारा प्रश्नों के उत्तर देने का काफी अवसर मिलता है। इसके अतिरिक्त इस प्रणाली को प्रयोग करने से बालकों को गणित का वास्तविक ज्ञान चाहे अवश्य हो जाता है परंतु गणित के किसी तथ्य को दूसरों के सामने भलीभाँति रखने की क्षमता उनमें तनिक भी न आती। इसलिए इस नवीन प्रणाली के साथ-साथ मौखिक परीक्षा और निबन्धात्मक परीक्षा का भी समावेश होना आवश्यक है। परीक्षा पत्र में एक आदि प्रश्न ऐसे भी होने चाहिए जिसका उत्तर, विधि सहित लिखा जावे। इसके अतिरिक्त इस बात की आवश्यकता है कि बालकों की परीक्षा हर महीने होनी चाहिए और सब परीक्षाओं के परिणाम पर ही उनको पास करना चाहिए। ऐसा करने से बालक वर्ष के अन्त में केवल कुछ महीने पढ़ कर पास होने का प्रयत्न न करेंगे।

अध्याय १३
गणित अध्यापक
(Mathematics Teacher)

आधुनिक युग में बच्चे के सीखने के हेतु पाठ्य-वस्तु, बच्चा तथा अध्यापक तीनों महत्वशाली हैं। इनका अपना महत्व है। ये तीनों अपनी २ विशेषतायें रखते हैं। सीखने में अध्यापक का स्थान सबसे महत्वशाली है क्योंकि वही पाठ्यवस्तु (Subject Matter) को बच्चे के सामने प्रस्तुत करता है। यदि अध्यापक का व्यवहार बच्चे की भावनाओं को ध्यान में रखते हुए होता है तो बच्चे को अध्यापक तथा उसके पढ़ाने में प्रेम होगा और उसके सीखने की (Learning) गति तीव्र होगी।

प्रत्येक विषय की अपनी २ विशेषतायें होती हैं जिनको समझना उस विषय के अध्यापक को आवश्यक तथा अनिवार्य होती हैं। इस तरह प्रत्येक विषय के अध्यापक में कुछ ऐसे गुण होने चाहिए जिनके द्वारा वह एक सफल अध्यापक बन सके। प्रत्येक अध्यापक में कुछ ऐसी विशेषतायें होनी आवश्यक हैं जिसके बिना वह अध्यापक नहीं कहलाया जा सकता है। इन विशेषताओं को सामान्य विशेषतायें (General Qualities) कहते हैं। इनका सम्बन्ध

इन व्यवसाय (Profession) में काम करने वाले प्रत्येक व्यक्ति में होना अनिवार्य है। इन सामान्य विशेषताओं के अतिरिक्त प्रत्येक विषय हेतु अध्यापक में कुछ विशेष तथा विशिष्ट गुण होने आवश्यक हैं। इस अध्याय में गणित पढ़ाने वाले अध्यापक के गुणों का वर्णन किया गया है। ये गुण निम्न हैं—

(१) विषय का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए (Thorough knowledge of the Subject)—किसी भी विषय के अध्यापक में यह गुण होना अति आवश्यक है कि वह अपने विषय में पूर्ण रूप से निपूण तथा पूर्ण जानकारी रखता हो। उसको अपने विषय पर इतना अधिकार हो कि वह बिना हिचक तथा संकोच के पाठ्य-वस्तु (Subject Matter) को औरों के सम्मुख प्रस्तुत कर सके। किसी भी विषय में पूर्ण अधिकार प्राप्त करने हेतु विषय का गहरा अध्ययन होना आवश्यक है। विषय में अधिकार तभी हो सकता है जब अध्यापक विषय का विस्तृत (Extensive) अध्ययन करे तथा गणित का प्रभाव जिस सीमा तक हो सकता है उसके बारे में समझे।

इसके साथ ही साथ गणित अध्यापक को अपने विषय का सही ज्ञान होना आवश्यक है। गणित को प्रभावित रूप से पढ़ाने के लिए अध्यापक को गणित का जीवन में प्रभाव के बारे में पूर्ण ज्ञान होना अनिवार्य है। गणित पढ़ाने के लिए अध्यापक को केवल गणित विषय का ज्ञान होना ही आवश्यक नहीं है बल्कि जीवन में गणित का प्रयोग जहाँ जहाँ होता हो उसकी पूर्ण जानकारी होनी चाहिए। इस प्रकार के कार्यों में वस्तुओं का व्यापार, वस्तुओं को खरीदना, सट्टा, (Speculation), ठेके में हिस्सा, रुपये का लेन देन (Banking) आदि प्रमुख हैं जिनका जीवन से गहरा सम्बन्ध होता है।

गणित में पांडित्य (Scholarship) तभी सम्भव है जब कि गणित के इतिहास की जानकारी हो तथा समय समय पर होने वाली गणित सम्बन्धी घटनाओं का ज्ञान हो। कक्षा में गणित विषय को रोचक बनाने के लिए उसको जीवन से सम्बन्धित करके बालकों के सम्मुख रखा जाना अनिवार्य है। अध्यापक को गणित पढ़ाते समय बच्चे की कठिनाइयों का बोध तभी हो सकता है जब कि उसको समय समय पर होने वाली कठिनाइयों का ज्ञान हो जो कि मनुष्य जाति ने पाश्चात् समय से अब तक गणित के तथ्यों को प्राप्त करने में झेली थी। वह पूर्व ज्ञान अध्यापक को बड़ी भारी सहायता कर सकता है जिसके

आधार पर बच्चों की गणित सम्बन्धी कठिनाई का बोध होता है। इस तरह बच्चों की गणित सम्बन्धी कठिनाइयों के समझने पर ही उनका निवारण सम्भव है।

उपरोक्त ज्ञान के लिए अध्यापक को सम्पूर्ण पुस्तकों का ज्ञान होना चाहिये। विषय में अब तक जो भी पुस्तकें लिखी गई हों उनको अध्यापक को अवश्य पढ़ लेना चाहिए। इसके अतिरिक्त विषय में जो पत्रिकाएँ तथा नवीन खोज के पत्र छपे हों उनका अध्ययन भी आवश्यक है। इस तरह से नवीन ज्ञान की जानकारी होने पर अध्यापक अपने विषय की वास्तविक माँग की पूर्ति कर सकता है तथा विषय को आसानी से दूसरे लोगों के सम्मुख रख सकता है। इसके अतिरिक्त समय समय पर गणित के प्रवीण विद्वानों के भाषण का भी अपना महत्व होता है।

(२) पाठन विधियों की शिक्षा की आवश्यकता (Trainig in Teaching Method)—जैसा कि पाठन विधियों (Teaching Method) के अध्याय में गणित पढ़ाने के लिए भिन्न २ विधियों की आवश्यकता का वर्णन किया गया है उनका ज्ञान भी गणित अध्यापक को होना आवश्यक है। भिन्न भिन्न गणित के उपविषयों (Topics) के पढ़ाने के लिए भिन्न भिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है। इसलिए इनका ज्ञान शिक्षा गणित अध्यापक को होना जरूरी है। विषय का ज्ञान होते हुए भी गणित के अध्यापक को तभी सफलता प्राप्त हो सकती है जब कि विषय को प्रस्तुत करने का ढंग उसको ज्ञात हो। इसलिये गणित के अध्यापक को शिक्षण विधियों की पूर्ण शिक्षा ले लेनी चाहिए।

(३) गणित अध्यापक को विषय के लिए उत्साह होना चाहिए (Enthusiasm for his Subject)—गणित के अध्यापक को केवल गणित का ज्ञान तथा विधियों की शिक्षा का ज्ञान होना ही आवश्यक नहीं है बल्कि उसमें गणित पढ़ाने के लिए एक उत्साह भी होना चाहिये। बिना उत्साह के वह गणित सफलता से नहीं पढ़ा सकता है और न बालकों में विषय के प्रति रुचि तथा उत्साह उत्पन्न कर सकता है। इस तरह एक गणित का सफल अध्यापक होने के लिए विषय में उत्साह होना आवश्यक है।

गणित का इतिहास, गणित की नवीन तथा मनुष्य के जीवन में गणित की देन आदि से बालकों में गणित के प्रति रुचि उत्पन्न होती

है। इसके अतिरिक्त एक सफल गणित अध्यापक को अपनी स्कूल में एक गणित क्लब (Maths Club) भी स्थापित करना चाहिए। इस क्लब में गणित सम्बन्धी तथ्यों (Facts) का समाधान किया जाता है और गणित के सिद्धांतों (Principles) के आधार पर नवीन उपकरणों का बनाना तथा गणित के नवीन चमत्कारों का ज्ञान प्राप्त किया जाता है। इस तरह क्लब (Club) में प्रत्येक बालक को स्वयं कार्य करने के लिये प्रोत्साहन मिलता है तथा जिन तथ्यों (Facts) की जानकारी तथा हल कक्षा में नहीं हो सकते हैं उनको क्लब में आसानी से हल किया जा सकता है। इस तरह शिक्षा के सिद्धांत के अनुसार बालक क्लब में क्रियाशील रहता है और विषय का वास्तविक ज्ञान हो जाता है। इसमें बालक अध्यापक के निकट सम्पर्क में भी आ जाते हैं जो कि उसके ज्ञान प्राप्त करने में सहायक होता है।

(४) अध्यापक को सम्पूर्ण तैयारी करनी चाहिए (He Should Make Thorough Preparation)—अध्यापक को यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि उसकी कक्षा में बालक का थोड़ा समय भी बरबाद न करे जिस तरह बालकों का यह कर्तव्य है कि वे कक्षा में अध्यापक का समय नष्ट न करें। यदि अध्यापक चाहता है कि वह कक्षा में बालकों को अधिक से अधिक ज्ञान दे तो इसके लिए उसकी तैयारी सम्पूर्ण रूप में होनी चाहिए। यह सोचना भूल है कि गणित का प्रारम्भ में पढ़ाने वाले या छात्राध्यापक (Pupil Teacher) को ही गणित पढ़ाने के लिए तैयारी की आवश्यकता पड़ती है। गणित पढ़ाने वाले सभी अध्यापकों चाहे वे कितने भी अनुभवी हों, तैयारी अवश्य करनी चाहिए। कभी कभी कक्षा में इस तरह की समस्याएँ (Problems) तथा कठिनाइयाँ आ जाती हैं जिनका हल करना कठिन प्रतीत होता है। इनके हल करने के लिए अध्यापक को सम्पूर्ण तैयारी करना आवश्यक होता है। यदि कठिनाइयों के निवारण हेतु कक्षा में ही समय दिया जाय तो कक्षा का अधिक समय नष्ट होता है।

प्रत्येक पाठ की तैयारी (Preparation for Each Lesson)—प्रत्येक अन्तर (Period) के लिए किसी एक सामान्य तैयारी से काम नहीं चलता है। प्रत्येक अन्तर (Period) के लिए सामान्य तैयारी के अतिरिक्त एक विशेष (Specifice) तैयारी की आवश्यकता पड़ती है। कोई भी अध्यापक अपने कार्य में तभी सफल हो सकता है जब कि वह

प्रत्येक अन्तर के लिए तथा विभिन्न कक्षाओं के लिए एक विशेष तथा सम्पूर्ण तैयारी करे ।

इस तरह गणित के अध्यापक के लिए यह परम आवश्यक है कि वह खोज विधि (Heuristic Method) द्वारा बालकों को गणित पढ़ावे तथा उसकी स्वयं की प्रवृत्ति (Attitude), खोज (Heuristic) हो । प्रत्येक स्थिति में उसको कक्षा के बालकों को एक खोज करने वाले के स्थान में रखना चाहिये ताकि बालक स्वयं अपने लिए नवीन ज्ञान को खोज करें । बिना उपरोक्त विधि को अपनाये वह एक गणित का सफल अध्यापक नहीं हो सकता है ।

अध्याय १४

‘अङ्कगणित पढ़ाने की विधि

(The Teaching of Arithmetic)

१६ वीं शताब्दी से पहिले अंक गणित के अन्तर्गत दो भिन्न २ रूप रेखायें थी एक तो यह कि यह विषय अंको का ज्ञान (Science of Numbers) तथा दूसरी हल करने की कला (Art of Computing) । परन्तु १६ वीं शताब्दी के पश्चात् अंकगणित में दोनों रूप—अंको का ज्ञान तथा हल करने की कला दोनों आवश्यक समझे जाने लगे । ये दोनों अंकगणित के ही अन्तर्गत समझे गये । इसलिए अंकगणित के अध्यापकों को विषय पढ़ाने में दोनों ही बातों पर समान रूप से जोर देना चाहिए । पाठन विधि का मुख्य उद्देश्य सिद्धान्त का समझना, सम्बन्ध समझना, सिद्धान्तों का प्रयोग करना होना चाहिए ।

अंक गणित पढ़ाने के कुछ प्राप्य-उद्देश्य (Some Objective of Teaching Arithmetic)—

(१) विद्यार्थी को इस प्रकार के विचारों से परिचित कराया जावे कि वह अङ्कगणित सम्बन्धी बयानों (Statements) को ठीक तौर पर समझ सके । इसके साथ ही साथ विद्यार्थी में विश्लेषण (Analysis) करने की तथा उसके द्वारा सही परिमाणों पर पहुँचने की क्षमता पैदा हो जाय ।

(२) विद्यार्थी में अपने वातावरण में होने वाली भार तथा नाप सम्बन्धी घटनाओं के कारण में रुचि उत्पन्न करना ।

(३) बालक में अंकगणित के आधार भूत क्रियाओं में प्रयोग में आने वाले साधारण जोड़ बाकी आदि में शुद्धता का ज्ञान कराना ।

(४) बालक में प्रयोगात्मक (Practical) अंकगणित के जीवन में सम्बन्धी ज्ञान को समझने तथा हल करने का अवकाश देना ।

(५) बालक को इस स्थिति में उच्च गणित समझने के हेतु नीव डालना ।

अच्छ गणित पढ़ाने के सामान्य नियम (General rules of Teaching Arithmestic)

(१) यह बात सही है कि यदि अध्यापक एक समय में अधिक ज्ञान नहीं समझ सकता है तो बालक तो उसकी अपेक्षा कहीं कम ज्ञान हजम कर सकता है । प्रारम्भ में अंकगणित पढ़ाते समय बालकों को अधिक तथा बारीक (Minute) आदेश नहीं देने चाहिए । अध्यापक को चाहिए कि पाठ सम्बन्धी सामान्य नियमों को वह बालकों का बतादे तथा पाठ के अन्तर्गत जो बारीक तथा सूक्ष्म नियम आते हों उनको बालक स्वयं ढूँढ़े । बालकों की त्रुटियों को देख कर स्वयं पाठ को समझ सकते हैं ।

(२) गणित की शिक्षा में समझने की शक्ति को बढ़ाना ज्ञान प्राप्त करने की अपेक्षा अधिक आवश्यक समझा जाता है । इसलिए पाठ समझते समय अध्यापक को बार बार सहायता नहीं देनी चाहिए । कक्षा में विद्यार्थियों की क्षमता (Capacity) में अन्तर होता है । इस लिए शिक्षक को विद्यार्थियों की आवश्यकतानुसार सहायता देना लाभ-प्रद होता है । बहुत अधिक सहायता की ही तरह बहुत निम्न सहायता हानिकारक होती है ।

(३) उपरोक्त सिद्धान्त (Principle) का प्रयोग भी अभ्यास (Drill) कार्य में होता है । जहाँ तक हो सके अभ्यास कार्य में भी कम से कम सहायता देनी चाहिए । उदाहरण के लिए यह इस प्रकार किया जा सकता है कि किसी प्रश्न में कहाँ पर अशुद्धि है और वहाँ पर यह कहना पर्याप्त होगा कि यह गलत है इसका दोहरालो आदि । प्रश्न हल करने में जो अशुद्धि हो उसके निवारण हेतु उसी ढंग का एक दूसरा प्रश्न हल करने को दे देना चाहिए, इस तरह बालक को स्वयं अपनी अशुद्धि का ज्ञान हो जावेगा ।

(४) शुद्धि (Correction) करने में भी अध्यापक और विद्यार्थी दोनों को किसी प्रकार का भार न समझना चाहिए। यह सदैव असम्भव है कि प्रत्येक प्रश्न सही रूप से हल किया जा सके। यदि प्रश्न करने में सम्पूर्णतया अशुद्धि होती है तो इसका मतलब यह होगा कि बालक प्रश्न को बिल्कुल नहीं समझे हैं या उसको समझाने में अध्यापक ने किसी सिद्धान्त की अशुद्धि की है। ऐसे प्रश्नों को अध्यापक को स्वयं समझ कर फिर से दोहरा लेना अनिवार्य होगा।

(५) अंकगणित के विशेष महत्व का (Importance) अन्त हो जाता है यदि यह न समझा जाय कि अंकगणित में गणना (Computation) का स्थान महत्वशाली तथा आवश्यक है। इस गुण पर ध्यान न देने से गणित की शुद्धता (Accuracy), क्रमशीलता (Orderliness) नहीं रह पाती है। प्रश्न हल करने में जो बुरी आदतें (Habit) पड़ जाती हैं उनका प्रभाव जीवन पर बुरा पड़ जाता है जिससे गणित के उद्देश्यों की पूर्ति नहीं हो पाती है।

(६) अंक गणित प्रारम्भ करने में अध्यापक को गणना मौखिक अभ्यास देना चाहिए। इसके पश्चात् शीघ्रता, तथा शुद्धता (Accuracy) का अभ्यास धीरे २ जोड़ने (Addition), घटाने (Subtraction) और गुणा (Multiplication) के द्वारा दिया जा सकता है। इसके लिये थोड़ा समय निश्चित होना चाहिए। प्रत्येक अभ्यास का कार्य, क्रम में तथा निरन्तर होते रहना चाहिए। इस तरह के कार्य से बालकों में एक दृढ़ शक्ति (Power) उत्पन्न हो जाती है जिसके आधार पर दैनिक जीवन के कार्यों को समझना सरल हो जाता है।

(७) अंकगणित में जो गणना की जाती है उसके अन्तर्गत जो अभ्यास कार्य किया जाता है वह अधिक रुचिकर हो सकता है यदि विद्यार्थी को प्रश्न पूछने का अवसर दिया जावे। इस तरह विद्यार्थी स्वयं अपनी रुचि अनुसार अभ्यास कार्य को करेंगे।

(८) लिखित कार्य (Written Work) में प्रारम्भ से ही इस बात पर बल दिया जाना चाहिए कि उसका कार्य उपयुक्त ढंग (System) से तथा साफ (Clear) हो। साधारण रूप से प्रश्नों को दो श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है। एक तो वे जिसमें गणना का मुख्य स्थान होता है और दूसरा वह जिनमें तर्क का विकास अधिक महत्वशाली होता है। प्रथम श्रेणी के प्रश्नों में प्रश्न का हल पत्र के मध्य में तथा द्वितीय श्रेणी के प्रश्नों में प्रश्नों में प्रश्न के आवश्यक

तर्क सम्बन्धी वाक्य मध्य भाग में होना चाहिए तथा उसके अन्तर्गत किया हल पत्र के किनारे वाले भाग में स्वच्छ रूप से होना चाहिए ।

(९) गणना का कार्य कभी भी कच्चे काम (Rough Work) के रूप में नहीं किया जाना चाहिए । इससे बालकों में उसको कच्चे रूप में करने की आदत पड़ जाती है । इसी प्रकार रेखा गणित (Geometry) में भी चित्र (Figure) का कच्चा रूप नहीं होना चाहिए ।

(१०) प्रश्न के हल करने में कांट छाँट (Cancellattion) साफ होना चाहिए । इस तरह प्रश्न के हल में कुछ चिन्ह जैसे π और $\sqrt{2}$ आदि को अंत पद तक रखना चाहिए ।

(११) प्रत्येक प्रश्न के हल करने में भाषा साधारण तथा सहां होनी चाहिए । प्रश्न का परिणाम स्पष्ट लिखा होना उचित होता है । उत्तर की इकाई (Unit) अवश्य होनी चाहिए । समस्या प्रश्नों में उत्तर एक सम्पूर्ण वाक्य में होना चाहिए ।

सम्पूर्ण पाठन विधि का उद्देश्य तथा आधार सरल (Simple) और स्थूल (Concrete) उदाहरणों से प्रारम्भ होकर सिद्धान्त निरूपण (Generalization) पर समाप्त होना चाहिए । विद्यार्थियों को इन नियमों को भली भाँति समझने हेतु इनका प्रयोग करना चाहिए । जब कभी गणित का कोई नवीन नियम पढ़ाया जाय तो यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि प्रथम उदाहरण सरल प्रकृति का हो तथा उसको हल करने में कठिनाई न हो । किसी प्रश्न के पदों के बीच बीच में तथा प्रश्न के पश्चात सामान्य उदाहरणों का प्रयोग करने से छोटे बालकों की रुचि बनी रहती है ।

(१२) उदाहरण देने में इस बात का ध्यान रखा जाना चाहिए कि वह बालकों के तथा विद्यालय के अनुकूल हों । कक्षा में पढ़ाई गयी गणित का सम्बन्ध बालकों के जीवन से होना चाहिए । छोटे बालकों को दिए गये उदाहरण उनके खेल तथा रुचि के अनुकूल हों ।

अङ्क गणित में अभ्यास का स्थान (Drill Work in Arithmetic) —

यदि अङ्कगणित में अभ्यास पर्याप्त रूप से नहीं हो पाता है तो उसका दैनिक जीवन में कोई उपयोग नहीं होता है । इस हेतु इस विषय में और विषयों को अपेक्षा अधिक अभ्यास होना आवश्यक होता है । परन्तु अभ्यास में दो बातें बड़ी ध्यान देने की हैं एक तो यह कि अभ्यास कार्य बिलकुल स्पष्ट हो तथा उसको धीरे धीरे छोटे छोटे खण्डों में दिया जावे । यदि कक्षा यह आवश्यकता समझती है कि यह

कार्य पाठ के आरम्भ में होना चाहिये और बालक उस कार्य में रुचि रखते हैं तो इस तरह के अभ्यास का कार्य सदा जीवन (Life) रखेगा। अभ्यास का समय निश्चित (Limited) होना चाहिए। किसी भी पाठ में इसके लिए अधिक समय देना उचित नहीं होता है। साधारणतया एक अन्तर (Period) में अभ्यास के लिये पाँच से दश मिनट पर्याप्त हैं। अभ्यास कार्य के देने में इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी उसको चाव से करता है तथा नियत समय में समाप्त भी कर लेता है। अधिक शोध समाप्त करने वाले बालकों के लिए उनकी आवश्यकतानुसार कार्य और देना चाहिए। अभ्यास के लिए प्रश्नों का क्रम सरल से कठिन की ओर होना चाहिए ताकि मन्द बुद्धि बालक भी कक्षा में कुछ प्रश्न अवश्य हल कर सकें।

अभ्यास कार्य को सुभीते के अनुसार कक्षा में या कक्षा के पश्चात् अध्यापक को जाँच लेना चाहिए। यह क्रम भिन्न भिन्न प्रकार के प्रश्नों में भिन्न भिन्न होता है। सबसे आवश्यक यह है कि अभ्यास कार्य की जाँच अवश्य होनी चाहिए।

अभ्यास कार्य में आवश्यक विचार तथा तैयारी की विशेष रूप से आवश्यकता होती है। इसके लिए गणित अध्यापक को स्वयं यह सोच लेना चाहिए कि उसको बालकों से किस प्रकार के प्रश्नों के अभ्यास कराने आवश्यक हैं। इसके लिए उसको पुस्तक में दिए गये प्रश्नों पर चिन्ह लगा देने चाहिए ताकि उसको अभ्यास में प्रश्न देने के समय आसानी हो।

अभ्यास के द्वारा गणित के तथ्यों (Facts) का मस्तिष्क में प्रवेश होता है तथा उनकी स्थिरता बन जाती है। जब तथ्यों के साहचर्य (Associations) स्थिर रूप धारण कर लेते हैं तो वह तथ्य सदा के लिए अपना बन जाता है। इस तरह अभ्यास का पाठ्य-वस्तु सीखने में प्रमुख स्थान होता है। अभ्यास से विचारों का प्रत्यास्मरण (Recall) होता है।

अभ्यास कराते समय अध्यापक को निम्न बातें ध्यान में रखनी चाहिए—

- (१) प्रथम बार के विचारों में शुद्धता होनी चाहिए।
- (२) इन विचारों को स्पष्ट (Vivid) होना चाहिए।
- (३) साहचर्य (Associations) को दोहराना चाहिए।
- (४) नवीन साहचर्य पर ध्यान देना चाहिए।

(५) अभ्यास काय करते समय उपयुक्त प्रेरणा (Motivation) मिलती रहनी चाहिये ।

(६) अभ्यास करते समय विद्यार्थी अनुमान (Guess) लगा कर प्रश्न हल न करे बल्कि समझ कर हल करे ।

(७) अभ्यास कार्य के बीच में किसी प्रकार की बाधा न हो ।

(८) अभ्यास कार्य अधिक समय के लिए न दिया जाय ।

अंकगणित में गति तथा शुद्धता (Speed and Accuracy in Arithmetic)—

अंकगणित सम्बन्धी गति और शुद्धता एक विशेष आयु के बीच ध्यान में रखनी पड़ती है । इसका ध्यान ६ और १० वर्ष की आयु के बीच रखना चाहिए । इस अवस्था में अधिक कार्य मौखिक तथा कुछ लिखित होना चाहिए ।

१० वर्ष के एक बालक को अपनी अँगुलियों की सहायता से संख्या न गिनने देना चाहिए । इसके अतिरिक्त ४० मिनट के अन्तर (Period) में मौखिक कार्य ५ मिनट में आरम्भ में तथा ५ मिनट अन्त में होना लाभप्रद होता है । इस तरह का कार्य प्रतिदिन होना चाहिए । इसके द्वारा एक आवश्यक गति तथा शुद्धता का ज्ञान बालकों में पैदा हो जावेगा और इस तरह प्रश्न हल करने में दोनों बातों पर उनका ध्यान रहेगा । कुछ समय तक इस तरह से कार्य करने से गति और शुद्धता उनकी आदत में आ जावेगी । मौखिक कार्य के बीच में कभी कभी लिखित कार्य भी दिया जाना चाहिए ।

कुछ मौलिक प्रक्रियाओं का पाठन (Teaching of some Basic Concepts)—

अंक ज्ञान (Number Concept)—अंकगणित में अङ्कों का ज्ञान एक आधार भूत प्रक्रिया है । इसके ज्ञान में स्थूल वस्तुओं (Concrete Objects) का प्रयोग अधिक आवश्यक होता है । बालकों को अपने खेलने की वस्तुओं के प्रयोग से अंकों का ज्ञान देना लाभप्रद होता है । इनके ज्ञान में किसी तरह का रटना न होना चाहिए ।

अङ्क ज्ञान में निम्न क्रम से बढ़ना चाहिए—

(अ) वास्तविक वस्तु द्वारा (Object Stage)—इसमें बालक को काँच की गोलियों, पत्थर के टुकड़ों आदि द्वारा गिनना सीखना होता है ।

(ब) तसवीर द्वारा (Picture Stage)—वास्तविक वस्तु के स्थान पर उसका चित्र गिनने के ज्ञान में प्रयोग किया जाता है।

(स) अर्द्ध-वास्तविक वस्तु (Semi-Concrete Objects)—इस स्थिति में गिनने का ज्ञान वृत्त (Circle), रेखा (Line), बिन्दु (points) आदि के प्रयोग द्वारा होता है।

(द) बिना वस्तु द्वारा (Abstract Stage)—इस स्थिति में बालक को वस्तु की अनुपस्थिति में भी अङ्कों का ज्ञान तथा उनको गिनने का ज्ञान होता है। जब वह 'चार' के अंक का प्रयोग करता है तो वह ४ अंक के बारे में भी समझता है, ४ के चिह्न का चार के विचार (Concept) से सम्बन्ध होना ही वस्तु की अनुपस्थिति में अंक का ज्ञान करना कहलाता है।

जोड़ना (Addition)—जोड़ प्रारम्भ करने से पहिले अंक गिनने की क्षमता का पूर्ण विकास होना अनिवार्य है। जब बालक स्वयं जोड़ने की आवश्यकता समझे तो उनको अंकों के आधार भूत सम्बन्ध समझने का अवकाश देना चाहिए। अंकों के सम्बन्ध (Combination) को पढ़ाने में निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए—

(अ) सम्बन्ध को दो भागों में बाँटा जाता है। प्रथम वह जिसमें १० या उससे नीचे के अंक आते हैं और दूसरा वह जिसमें १० से ऊपर के अंक सम्मिलित हैं।

(ब) सम्बन्धों के पढ़ाने में सरल अंक पहिले तथा कठिन बाद में आना चाहिए। जैसे ७ को १ में जोड़ना है तो उसको बजाय ७+१ लिखने के १+७ लिखना चाहिए।

जोड़ में दोनों दिशाओं में अभ्यास आवश्यक है जैसे—

२+३+५ और २

३

५

—

घटाना (Subtraction)—घटाने में भी जोड़ने की भाँति आधार-भूत सम्बन्ध पर अधिक ध्यान देना आवश्यक होता है।

घटाने में निम्न पदों को ध्यान में रखना चाहिए—

(१) प्रथम उदाहरण केवल दो अंकों (Digits) का होना चाहिए

(२) धीरे धीरे जटिल संख्याओं का प्रयोग किया जाना चाहिए जिनमें संख्या को उधार ले कर लौटाने (Borrowing) की विधि प्रयोग में आती है।

(३) उधार ले कर लौटाने (Borrowing) की विधि का पूर्ण अभ्यास होने पर घटाने की सरल विधि का ज्ञान कराना चाहिए। जैसे नीचे दिया गया है—

प्रश्न— ५२३ में से २५७ घटाओ।

(i) विभाजन विधि—

$$\begin{aligned} ५२३ &= ५०० + २० + ३ = ४०० + ११० + १३ \\ २५७ &= २०० + ५० + ७ = २०० + ५० + ७ \\ \therefore ५२३ - २५७ &= \underline{२०० + ६० + ६} \\ &= २६६ \end{aligned}$$

(ii) बराबर संख्या जोड़ने की विधि—

$$\begin{aligned} ५२३ \text{ में } ११० \text{ जोड़ने पर} &= ५०० + १२० + १३ \\ २५७ \text{ में } ११० \text{ जोड़ने पर} &= ३०० + ६० + ७ \\ \therefore ५२३ - २५७ &= \underline{२०० + ६० + ६} \\ &= २६६ \end{aligned}$$

(iii) सम्पूरक यांग विधि (Complimentary Method)

$$\begin{aligned} ५२३ &= ५०० + २० + ३ \\ २५७ &= २०० + ५० + ७ \\ ५२३ - २५७ &= \underline{२०० + ६० + ६} = २६६ \end{aligned}$$

जोड़ने तथा घटाने के कुछ उदाहरण (Addition and Subtraction)

(अ) (i) १, २, ३, ४, ... इससे आगे १ बढ़ा कर लिखो।

(ii) १, ३, ५, ७, ... इससे आगे २ बढ़ा कर गिनो।

(iii) १, ४, ७, १० या २, ५, ८, ११, ... इससे आगे ३ बढ़ा कर गिनो।

(iv) इसी प्रकार ४, ५, ६ आदि के अन्तर से संख्याओं को लिखो।

(ब) जैसे ऊपर दिया गया है उसी प्रकार ५०, ४७, ४४, ४१ पीछे की ओर ३ के अन्तर से संख्याएँ गिनो।

(स) कापी या बोर्ड पर बड़ी-बड़ी तथा दूर दूर कुछ संख्याएँ लिखो। जैसे २, ७, ५, ३, १, ४, ६, ९ आदि। प्रत्येक में ४ जोड़ कर तथा १ घटा कर अलग अलग लिखो।

(द) निम्न संख्याओं को अलग अलग २५ से घटा कर मान लिखो—

१८, १६, २३, १५, ९, १३, ७ आदि।

(य) नीचे दी गयी संख्याओं को बाँयीं ओर से दाँयीं ओर को जोड़ते हुए मान निकालो तथा प्रत्येक संख्या को ३० से घटा कर जो मान आता हो उसका भी योग करके मान ज्ञात करो।

१६, १२, १०, ९, १८, २४, २२, २७, २८

गुणा करना (Multiplication)—गुणा करने में निम्न पदों का प्रयोग किया जाता है—

(१) प्रारम्भ में साधारण और सरल संख्याओं के गुणा पढ़ाने चाहिए। इस प्रकार के गुणा करने में केवल एक संख्या का प्रयोग किया जाना चाहिए।

(२) इसके पश्चात् हासिल (Carry Over) वाले गुणा कराने चाहिए।

(३) इसके बाद दो संख्याओं वाले सरल गुणा जैसे $१८ = २ \times ९$, $२८ = ७ \times ४$ का प्रयोग होना चाहिए।

(४) अन्त में जटिल रूप की संख्याओं के गुणा कराने चाहिए। बालकों को यह भी ज्ञात होना चाहिए कि गुणा सरल रूप में बदला जा सकता है यदि गुणने वाली संख्या को दो भागों में बाँटा जाय। जैसे २३ से गुणा करने में उसके दो खण्ड $२० + ३$ हो सकते हैं। २० और ३ से अलग अलग गुणा करके जोड़ने से वही गुणनफल आता है जो कि २३ से गुणा करने पर आता है।

(५) विद्यार्थियों को स्वयं अपने लिए पहाड़े के पैमाने (Multiplication Tables) तैयार करने चाहिए। इनके तैयार करने में वे छोटे छोटे दानों, लकड़ी के टुकड़े आदि खेल की सामग्री का प्रयोग कर सकते हैं। इनके तैयार करने के अतिरिक्त इनको प्रयोग में भी लाना चाहिये। अभ्यास (Drill) द्वारा ये पैमाने याद कर लिये जा सकते हैं।

(६) बालकों को यह भली भाँति समझ लेना चाहिए कि गुणा करने में दोनों संख्याओं का प्रयोग गुणक (Multiplier) के रूप में करने से परिणाम में कोई अन्तर नहीं आता है।

पहाड़े के पैमाने इस भाँति याद हों कि $६ \times ६ = ५४$ कहने की आवश्यकता न पड़े बल्कि ६×६ को देख कर ही स्वयं ५४ का ज्ञान हो जाय। नीचे कुछ मौखिक गुणा करने के उदाहरण दिये गये हैं—

(अ) नीचे दी हुई संख्याओं का ७ से गुणा करो।

५, ६, ९, ८, ७, ४

(ब) नीचे दी गयी संख्याओं में से किन्हीं दो को गुणा करके फल ज्ञात करो।

८, १२, ७, ९, ६, ५, ११, १३

(स) नीचे दी हुई संख्याओं को ४ से गुणा करके प्रत्येक के दाँयी ओर को संख्या को पहले के गुणनफल में जोड़ें।

८, १५, २४, ३१, १२, १७—आदि,

भाग देना या विभाजन (Division)

(१) भाग देने में प्रारम्भ में एक संख्या का प्रयोग लाभप्रद होता है।

(२) इसके पश्चात् के भाग देने में शेष (Remainders) का ग्राना, उचित होता है जैसे ४

$$\begin{array}{r} ४५ \\ ४४ \\ \hline १ \end{array}$$

१—(शेष)

(३) इसके बाद इस प्रकार के प्रश्न हों जिनमें आगे को उठाकर (Carry) ले जाने का रूप हो। इसके साथ ही साथ बालकों को दो संख्याओं वाले भाग का पर्याप्त रूप से अभ्यास कराना चाहिए।

(४) इसके पश्चात् ऐसे प्रश्न हल करने चाहिए जिनमें ० का प्रयोग हो।

भाग देने की क्रिया के दो प्रकार के अर्थ हैं। एक तो $\frac{६}{३} ६० = २ ६०$ इसमें ६६० के तीन तीन ६० के २ समूह हुये। यह बराबर बराबर के भागों में विभाजित करना है। दूसरा रूप $\frac{६}{३} ६० = २$ है। यह अनुपात का रूप है। इसके अनुसार ६६० वाले ३ समूह हुए।

भाग देने के प्रश्नों में उत्तर बड़े भाग में ऊपर तथा छोटे भाग में भाज्य के नीचे स्थानीय मान का विचार करके लिखने पर आग्रह करना चाहिए। कभी दाँए लिखने की आज्ञा नहीं देनी चाहिये। भाग के प्रश्न को भी गुणा के प्रश्न की भाँति विभाजित करके लगाने के बाद इसकी सरल विधि उपलब्ध कराई जा सकती है। भाग देना इसलिए कठिन है कि इसमें सम्भावनाओं (Possibilities) का क्षेत्र काफी विस्तृत होता है किन्तु अभ्यास से यह सोमित (Limited) हो जाता है।

भिन्न (Fractions)—यदि भिन्न का ज्ञान अंकगणित में सही रूप से हो जाता है तो बीजगणित (Algebra) में भिन्न का ज्ञान सरल हो जाता है। इसलिए शिक्षक को मुख्य रूप से ध्यान देना आवश्यक है।

बालक को छोटी ही आयु में $\frac{१}{२}$ भिन्न का ज्ञान हो जाने पर शीघ्र ही $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{२}{३}$ आदि का ज्ञान हो जाता है। किसी भी पाठ के प्रारंभ

करने से पहले उपरोक्त भिन्नों का ज्ञान आवश्यक है। उपरोक्त भिन्नों का ज्ञान एक वस्तु के द्वारा दिया जा सकता है। जैसे $\frac{3}{4}$ का ज्ञान देना है तो वस्तु के बराबर ४ हिस्से करके उसमें से ३ हिस्से लेकर उपरोक्त भिन्न $\frac{3}{4}$ का सही ज्ञान दिया जा सकता है भिन्न पढ़ाने में बालकों को यह ज्ञान देना आवश्यक है कि किसी भी भिन्न का मान सदैव वही रहता है यदि उसके अंश (Numerator) और हर (Denominator) को किसी एक ही संख्या से भाग या गुणा किया जाय। उदाहरण के लिये $\frac{3}{4}$ एक भिन्न है तो २ से अंश और हर

को गुणा करने से $\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ही आता है इसी प्रकार २ से भाग देने से भी—

$\frac{3 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ ही आता है। परन्तु आरम्भ में अंश और हर के स्थान पर ऊपरी तथा नीचे का भाग का सरल प्रयोग होगा।

भिन्न समझने में निम्न कठिनाई होती है (Difficulties in Grasping Fractions)

(१) बालक भिन्न में संख्या के स्थान पर ध्यान नहीं देते हैं जिससे वे $\frac{3}{4}$ को $\frac{4}{3}$ से बड़ा समझते हैं क्योंकि पहिले में दूसरे से बड़ी संख्या का प्रयोग हुआ है।

(२) भिन्न से किसी संख्या को गुणा करने से मान कम आता है जब कि बालक गुरो का अर्थ मान में अधिकता के होने का ध्यान रखते हैं।

(३) बालक अपने मस्तिष्क में वास्तविक (Original) इकाई का ध्यान नहीं रख पाते हैं। जैसे एक वस्तु के तीसरे भाग के चार और छोटे भाग किए जायें तो उसका मान बालक चौथाई में ही समझते हैं जब कि उसका मान १२ वें रूप में होना चाहिये।

भिन्न का सही ज्ञान साधारण वस्तुओं के द्वारा सही रूप में दिया जा सकता है। इसके लिये रुपये, आने, दिन, घंटे, मिनट, पटरी आदि की सहायता ली जा सकती है।

जोड़ (Addition)— $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के जोड़ से प्रारम्भ किया जाय। इसके लिए एक गोल केक या सेव लेकर उसके दो बराबर भाग तथा तीन बराबर भागों में बाँट कर $\frac{1}{2}$ भाग और $\frac{1}{3}$ भाग को लेकर मिला लो। उनको मिलाकर स्वयं ही $\frac{2}{3}$ आ जावेगा।

एक दूसरा उदाहरण $\frac{३}{४}$ और $\frac{२}{३}$ को जोड़ने का है। इस स्थिति में ४ और ३ हरों (Denominators) को ऐसे हर में बदलना है जिसमें ४ और ३ का भाग जा सकता है वह १२ होगा। हमने ४ का १२ कैसे बनाया ? ४ को ३ से गुणा करके। भिन्न में कोई परिवर्तन न आवे तो हमें क्या करना चाहिये ? अंश को भी इसे गुणा करना चाहिये।

$$\frac{३}{४} = \frac{३ \times ३}{४ \times ३} = \frac{९}{१२}$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{२}{३} = \frac{२ \times ४}{३ \times ४} = \frac{८}{१२}$$

$$\text{इसलिए } \frac{३}{४} + \frac{२}{३} = \frac{९}{१२} + \frac{८}{१२} = \frac{९+८}{१२} = \frac{१७}{१२} = १\frac{५}{१२}$$

इस तरह चित्र की सहायता से भी जोड़ने का विचार सही रूप से किया जा सकता है—

घटाना (Subtraction)—भिन्न के घटाने में जोड़ की भाँति हर को समान करके वही विधि अपनायी जाती है। परन्तु कभी २ निम्न रूप के प्रश्नों में कुछ कठिनाई मालूम होती है। उसको इस प्रकार हल दिया जाता है—

$$\begin{aligned} \frac{५}{४} - \frac{१}{२} &= ३ + \frac{५}{१२} - \frac{६}{१२} = ३ + \frac{५-६}{१२} \\ &= २ + \frac{१२}{१२} + \frac{५-६}{१२} \\ &= २ + \frac{१२+५-६}{१२} \\ &= २ + \frac{११}{१२} \end{aligned}$$

गुणना (Multiplication)—भिन्न के गुणा करने में निम्न विधि का प्रयोग किया जाता है:—

प्रथम प्रश्न यह किया जाता है कि $\times$ चिन्ह का क्या मतलब है ? बालक जानते हैं कि $२ \times ३ = ३ \times २$ । इसका अभिप्राय इतने गुणों (Times) से होता है। इस स्थान पर $\times$ चिन्ह के स्थान पर 'का' (of) का ज्ञान दे देना चाहिये।

$\frac{१}{२}$ का ८ इंच = ४ इंच

३ लम्बाई का ८ इंच = ८×३ इंच

इसलिए $८ \times \frac{१}{२} = १/२$ का ८

परन्तु $८ \times \frac{१}{२} = १/२ \times ८$

इसलिए $८ \times \frac{१}{२}$, $१/२ \times ८$ और $१/२$ का ८ सभी बराबर हैं।

आरम्भ में गुणा पूर्णाङ्क से करना चाहिए। इसके पश्चात् चित्र की सहायता से भिन्न का गुणा प्रारम्भ करना चाहिये। जैसे एक आयत (Rectangle) के दो भाग करके फिर छोटे २ भागों में विभाजित करके भिन्न का ज्ञान दिया जाता है।

भाग देना (Division)—भिन्न के भाग देने में दो विधियों का प्रयोग किया जा सकता है।

प्रथम विधि (First Method)—

(१) यदि बालक जानते हैं कि $५ \div ८ = \frac{५}{८}$ तो वे समझ सकते हैं कि

$$\frac{३}{४} \div \frac{२}{५} = \frac{३}{४} \times \frac{५}{२}$$

इसको हल करने के लिये अंश तथा हर को ४×५ में गुणा करके उत्तर ज्ञात किया जा सकता है जैसे—

$$\frac{३}{४} \div \frac{२}{५} = \frac{३}{४} = \frac{३ \times ५ \times ५}{४ \times ४ \times ५} = \frac{३ \times ५}{२ \times ४}$$

(२) दूसरी विधि (Second Method)—

$\frac{३}{४} \div \frac{२}{५}$ इन दोनों को एक ही भिन्न जिसका हर समान हो उस रूप में प्रकट करो।

$$\frac{३}{४} = \frac{३ \times ५}{४ \times ५} \text{ और } \frac{२}{५} = \frac{२ \times ४}{५ \times ४}$$

$$\text{इस तरह } \frac{३}{४} \div \frac{२}{५} = \frac{३ \times ५}{४ \times ५} \div \frac{२ \times ४}{५ \times ४}$$

$$= \frac{(३ \times ५) \text{ का } २० \text{ वाँ भाग}}{(२ \times ४) \text{ का } २० \text{ वाँ भाग}} \\ = \frac{३ \times ५}{२ \times ४}$$

दशमलव भिन्न (Decimal Fractions)

१२३. को १० से गुणा करो।

इसका उत्तर १२३० आता है। १२३ में क्या जोड़ा गया है। इसमें

• जोड़ा गया है। इसके बजाय यह कहना सही होगा कि इनमें प्रत्येक संख्या को एक स्थान बाँयी ओर रख देते हैं और रिक्त स्थान पर ० रख देते हैं।

अब दूसरे उदाहरण को ध्यान से देखा जाय ।

११११. में प्रत्येक १ अपने दाँयी ओर को अपने १० गुने के बराबर तथा $\frac{1}{10}$ गुने के बराबर अपने बाँयी ओर होता है । यदि उपरोक्त में १ को स्तम्भ (Column) के दाँयी ओर रखा जाय तो नवीन १ का मान १ का $\frac{1}{10}$ वाँ होगा । इस तरह से—

हजार (Thousands)	सैकड़ा (Hundreds)	दहाई (Tens)	कई (Units)	१/१० वाँ
१	१	१	१ $\frac{1}{10}$	१

स्थानीय मान का ज्ञान हो जाने के बाद दशमलव का जोड़ और घटाना आसानी से हल किया जा सकता है । इसके बाद पूर्ण संख्याओं का गुणा और भाग किया जा सकता है । दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदला जाता है । इसके पश्चात् साधारण भिन्न (Fraction) की तरह उनका जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग किया जा सकता है ।

क्षेत्रफल तथा आयतन (Area and Volume)

क्षेत्रफल (Area)—

कक्षा में बालकों को क्षेत्रफल का विचार (Concept) प्रारम्भ से ही गलत दिया जाता है जिसके कारण वे उसकी परिभाषा को रट कर प्रश्न हल करते हैं । परन्तु उनको क्षेत्रफल का सही ज्ञान नहीं हो पाता है । इसके लिए प्रारम्भ में परिभाषा नहीं दी जानी चाहिये ।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये एक निश्चित इकाई को मान कर चलना चाहिये । माना कि एक श्यामपट्ट (Black Board) का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो हम एक आधार इकाई वर्ग फुट (Square Foot) कार्ड बोर्ड के टुकड़े से आरम्भ करते हैं । कार्ड बोर्ड की सहायता से यह ज्ञात किया जाता है कि वह कितनी बार (Times) श्यामपट्ट पर आता है । माना यह वर्ग फुट १५ बार बोर्ड पर आता है तो उस बोर्ड का क्षेत्रफल १५ वर्ग फुट होगा । इसकी लम्बाई = ५ फुट तथा चौड़ाई ३ फुट है और इसमें १ वर्ग फुट के १५ भाग बनते हैं तो ५ को ३ से गुणा करने पर भी १५ वर्ग फुट आते हैं क्योंकि ५ वर्ग फुट के क्षेत्र इसमें ३ बार आते हैं ।

इस तरह के भिन्न-२ उदाहरणों के द्वारा एक सामान्य नियम पर पहुँचा जाता है । किसी आयत (Rectangle) के क्षेत्रफल में वर्ग फुट की संख्या ज्ञात करने के लिये लम्बाई के फुट को चौड़ाई के फुट से

गुणा करते हैं। इस तरह से परिणाम वर्ग फुट में आता है। इसमें वास्तव में संख्याओं का गुणा होता है न कि लम्बाई और चौड़ाई का।

इसके बाद भिन्न तथा दशमलव का प्रयोग किया जा सकता है। इसमें केवल ध्यान देने की बात यह है कि छोटी इकाई का प्रयोग किया जावे। भिन्न-भिन्न आकार के चित्रों का क्षेत्रफल निकालने की विधि रेखा गणित के अध्याय में ही दी गयी है।

आयतन (Volume)—

किसी ठोस वस्तु का आयतन निकालने के लिए सबसे आवश्यक बात यह है कि हमको आयतन का सही विचार हो। क्षेत्रफल (Area) की भाँति इसके निकालने में भी निम्न पदों (Steps) से होकर जाना पड़ता है।

(अ) एक आयतन की इकाई मान लेनी चाहिये।

(ब) इस इकाई के कितने भाग किसी आयतन (Volume) में सम्मिलित हैं।

इस तरह से कक्षा में आयतन का ज्ञान दिया जाता है। जैसे कि क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई (Length × Breadth)

आयतन = ल० × चौ० मोटाई (Length × Breadth × Thickness)

उपरोक्त विचार वास्तव में एक सही रूप नहीं है।

इसके लिये एक आयत (Rectangular) लिया जाता है। माना इसकी

लम्बाई = ९ इ०

चौड़ाई = ४ इ०

मोटाई = ३ इ०

इसको आधार से ऊपर की ओर छोटे २ वर्ग इंचों में बाँट दो और १ इंच मोटे भागों पर चिन्ह लगा दो।

नीचे के प्रत्येक वर्ग इंच पर १ घन इ० भाग खड़ा रहता है। इस तरह से नीचे की सतह पर उतने ही वर्ग इंच होते हैं जितने की आधार (Base) वर्ग का क्षेत्रफल (Area) होता है। यह बात सभी भागों के लिये समान होती है। इस उदाहरण से एक नियम ज्ञात किया जाता है।

किसी समान मोटाई (Cross Section) के ठोस में घन इ० निका-

लने के लिए मोटाई के वर्ग इंचों (Square Inches) को लम्बाई के इंचों से गुणा करके ज्ञात किया जाता है।

इस तरह से प्रारम्भ में वस्तु के द्वारा आयतन ज्ञात करने के पश्चात् वस्तु के अभाव में भी उसके आयतन का स्पष्ट विचार (Concept) हो जाता है।

अनुपात (Ratio)—अनुपात का तात्पर्य यह है कि कोई संख्या दूसरी संख्या के कितने गुनी है। जैसे कि ५ सेर, १ सेर से ५ गुना है तो १ सेर से उसका अनुपात ५ का है क्योंकि पहली संख्या दूसरी से ५ गुनी है।

यद्यपि बालक अनुपात सम्बन्धी प्रश्न हल कर सकते हैं परन्तु उन को अनुपात का सही ज्ञान नहीं होता है। इसका ज्ञान एक गज या फुट पैमाने से दिया जा सकता है। यहाँ हम दो लम्बाई से मतलब रखते हैं एक तो ३ फु० और दूसरा १ फुट दोनों की तुलना दो रूपों में की जा सकती है :—

(१) ३ फु० की लम्बाई १ फु० से २ फु० अधिक है।

(२) ३ फु० की लम्बाई १ फु० के ३ गुना है।

उपरोक्त ज्ञान शिक्षक छोटी-छोटी गेंदों की सहायता से भी दे सकता है। एक ओर २ गेंद तथा दूसरी ओर १० गेंद रखकर उनमें आपस के सम्बन्ध को ज्ञात किया जा सकता है। इस तरह से एक ही प्रकार की भिन्न २ वस्तुओं की संख्याओं में अनुपात ज्ञात किया जा सकता है। इस तरह अनुपात १ : ४, ३ : ५, ४ : १०, ३ : १५ आदि का हो सकता है।

इसके पश्चात् बालकों को अनुपात लिखने का ज्ञान देना चाहिए। अनुपात के लिए $\div$, $/$ और $:$ जैसे $३ \div ५$, $३/५$ और $३:५$ के चिन्हों का प्रयोग किया जाता है। अनुपात में दोनों भागों की एक ही संख्या से गुणा करने पर उनके अनुपात में कोई अन्तर नहीं आता है। जैसे १:६, २:१२, ३:१८ आदि में अनुपात एक ही है।

समानुपात (Proportion)—अनुपात का ज्ञान हो जाने पर समानुपात (Proportion) का ज्ञान देना चाहिए। इसके पढ़ाने से पहिले बालकों को भिन्न का गुणा तथा भाग का स्पष्ट ज्ञान होना आवश्यक है।

प्रथम पाठ में बालकों को वह प्रश्न हल कराने चाहिए जिनमें

समानुपात न हो फिर जिनमें कुछ समानुपात हो तथा अन्त में वे प्रश्न देने चाहिए जिनमें समानुपात पूर्ण रूप से हो ।

किन्हीं चार संख्याओं में ऐसा अनुपात हो कि १ और २ का संबंध =३ और ४ के सम्बन्ध के हो । इस तरह के क्रम को समानुपात (Proportion) कहते हैं । जैसे २ : ४ = ८ : १६ । इसको $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$ या २:४::८:१६ के रूप में लिखा जा सकता है । समानुपात या तो सरल (Direct) या प्रतिलोम (Inverse) दो प्रकार का हो सकता ।

सरल समानुपात (Direct Proportion)—इसका प्रयोग उन संख्याओं में किया जाता है जहाँ दोनों संख्याओं में समान रूप से घटना तथा बढ़ना होता है । इसका प्रयोग निम्न में करते हैं—

- (i) कीमत तथा संख्या में (Costs and Numbers)
- (ii) मील की दूरी और किराया (Mileage and Fares)
- (iii) समय तथा दूरी (Time and Distance)
- (iv) मजदूरी तथा कार्य (Wages and Work)

प्रतिलोमानुपात (Inverse Proportion)—इस प्रकार के समानुपात में एक राशि के बढ़ाने पर दूसरी राशि घट जाती है । उदाहरण के लिए एक आयत (Rectangle) की भुजाओं के अनुपात से यह बात स्पष्ट हो जाती है ।

एक भुजा	दूसरी भुजा
४ फु०	४ फु०
८ फु०	२ फु०
१६ फु०	१ फु०
३२ फु०	$\frac{1}{2}$ फु०

उपरोक्त ज्ञान लेखाचित्र (Graph) के द्वारा भी स्पष्ट हो जाता है । एक बार समानुपात का ज्ञान हो जाने पर कठिन प्रश्नों का प्रयोग किया जा सकता है ।

प्रतिशत (Percentage)—प्रतिशत भिन्न का वह रूप है जिसमें हर (Denominator) १०० होता है । इसका ज्ञान देने के लिए शिक्षक को साधारण उदाहरणों का प्रयोग करना चाहिए । कक्षा में प्राप्त अंकों को क्यों प्रतिशत में ज्ञात किया जाता है इससे तुलना (Comparison) करने में आसानी होती है । ३० में से १५ अंक प्राप्त करने से कुछ स्पष्ट नहीं होता परन्तु यदि यह कहा जाय कि अमुक बालक को ५०% प्रतिशत अंक मिले तो यह स्पष्ट हो जाता है कि बालक की क्या योग्यता है ।

इस तरह से प्रत्येक मोल तोल में प्रतिशत का प्रयोग किया जाता है। इसके द्वारा तुलना करने में आसानी होती है।

प्रतिशत का प्रयोग ब्याज (Interest), लाभ और हानि (Profit and Loss) तथा (Discount) आदि में होता है। प्रतिशत का अध्ययन भिन्नो की तुलना से प्रारम्भ होना चाहिए। जब इन भिन्नो को १०० के अनुपात में रखा जाता है तो उसे प्रतिशत कहते हैं।

प्रतिशत में वह मुख्य बात जिस पर जोर दिया जाना चाहिए वह क% है जिसका तात्पर्य वस्तु के क/१०० से है। इसके ज्ञान के लिए बहुत से सरल उदाहरण दिये जाने चाहिए। कुछ उदाहरण नीचे दिये गये हैं—

उदाहरण (१) $\frac{3}{4}$ भिन्न को प्रतिशत के रूप में लिखो।

$$\text{माना } \frac{3}{4} = \frac{k}{100}$$

$$\therefore k = 37 \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{4} = 37 \frac{1}{2}\%$$

उदाहरण (२)—एक विद्यालय में १८% बालक चश्मा प्रयोग करते हैं। यदि विद्यालय में कुल २५० लड़के हों तो कुल कितने बालक चश्मा प्रयोग करते हैं।

$$\text{स्कूल का } 18\% = \frac{18}{100} \times 250$$

$$= 45 \text{ लड़के उत्तर}$$

ब्याज, स्कन्ध तथा अंश (Interest, Stock and Shares)
ब्याज (Interest)—

ब्याज का ज्ञान देने से पहिले प्रतिशत का ज्ञान होना आवश्यक होता है। कभी कभी बालक ४% (4Percent) सूत्र को सही रूप से नहीं समझते हैं। पहिले मौखिक (Oral) तथा बाद में लिखित उदाहरण का प्रयोग होना चाहिए। यदि बालक ४% को समझता है कि यह किसी वस्तु के १०० से मतलब रखता है तो वह ब्याज के प्रश्न आसानी से हल कर सकेगा।

बालक को यह ज्ञान होना चाहिए कि ब्याज क्यों पड़ता है। यह किस धन पर पड़ता है। जैसे हम पोस्ट आफिस में १०० रु० जमा कर दें तो किसी निश्चित समय के बाद हमें १०० रु० के अतिरिक्त कुछ और मिलता है इसी अतिरिक्त धन को ब्याज कहते हैं।

प्रश्न १— २५० रु० पर ५ वर्ष का ४% के हिसाब से क्या ब्याज होगा ?

$$\begin{aligned} २५० \text{ रु० पर } ४\% \text{ प्रति वर्ष के हिसाब से ब्याज} &= \frac{४}{१००} \text{ का } २५० \\ \therefore २५० \text{ रु० पर } ४\% \text{ प्रति वर्ष के हिसाब से } ५ \text{ वर्ष का ब्याज} \\ &= \frac{४}{१००} \times ५ \times २५० \\ &= ५० \text{ रु०} \end{aligned}$$

प्रश्न २— यदि १२५ रु० पर ५ प्रति वर्ष के हिसाब से ब्याज २५ रु० है तो यह ब्याज कितने समय में होगा ?

$$\begin{aligned} १२५ \text{ पर } १ \text{ साल का } ५\% \text{ के हिसाब से ब्याज} &= \frac{५}{१००} \text{ का } १२५ \\ १२५ \text{ रु० पर 'क' का } ५\% \text{ " " " " " " } &= \frac{५}{१००} \times १२५ \times \text{क} \\ \text{परन्तु ब्याज} &= ५ \\ \therefore \frac{५}{१००} \times १२५ \text{ क} &= २५ \\ \therefore \text{क} &= \frac{२५}{१२५} \times \frac{१००}{५} = ४ \text{ वर्ष।} \end{aligned}$$

प्रति वर्ष का ब्याज जोड़कर संयुक्त धन पर ब्याज निकाला जाता है।

स्कन्ध तथा अंश (Stock and Shares)—

इसका प्रयोग प्रारम्भ में न करना चाहिए, इसका प्रयोग करीब १५ वर्ष की आयु से किया जाता है। भिन्न भिन्न प्रकार के धन को यदि बालक समझते हैं कि वह ब्याज है या स्कन्ध है तो स्कन्ध (Stock) समझने में उनको किसी तरह की कठिनाई नहीं होगी।

ब्याज की भाँति इनमें भी प्रारम्भ में मौखिक प्रश्न तथा बाद में लिखित प्रश्न कराने चाहिए। इनकी प्रस्तावना (Introduction) अवश्य उपयुक्त होनी चाहिए। इसका ज्ञान समाचारपत्र में किसी नई खुली कम्पनी की विज्ञप्ति द्वारा होना चाहिए। स्कन्धों (Stocks) के प्रश्नों में आय की दर साथ लगी रहती है।

वर्गमूल (Square Root)—

वर्गमूल ज्ञात करने में दाँयी ओर से बाँयी ओर को चलना चाहिए। इसके साथ ही साथ दो दो के जोड़े बना लेने चाहिए। जैसे १७३६१८२० का वर्गमूल निकालना है तो इसके चार जोड़े १७,३६,१८,२० बन जाते हैं। इसके बाद प्रथम जोड़े का वर्गमूल निकाल लो। जैसे कि | १७,३६,१८,२० के प्रथम जोड़े १७ का वर्गमूल चार हुआ। फिर

दानों ओर ४, ४ रख लो जैसे $\overline{४ \mid १७, ३६, १८, २०}$ फिर ऊपर वाले का दुगना करके बाँयी ओर लिखकर पहले जोड़े का शेष तथा दूसरे जोड़े का उतार कर उसमें ४ के दुगने भाग यानी ८ का भाग दे दो। इस तरह किसी भी संख्या का वर्गमूल निकाला जा सकता है।

उदाहरण—६६६०६३२१ का वर्गमूल ज्ञात करो।

$$\begin{array}{r}
 \text{हल} \quad \overline{८३ \mid ६६, ६०, ६३, २१} \\
 \underline{६४} \\
 १६३ \mid ५६० \\
 \underline{४८६} \\
 १६६ \mid १०१६३ \text{ आदि} \dots\dots
 \end{array}$$

अंक गणित के किसी भी प्रकार के प्रश्न को हल करने में विश्लेषण (Analysis) विधि का प्रयोग सबसे उत्तम होता है। इसके उदाहरण पाठ्य-सूत्र (Lesson Plan) में दिए गए हैं।

अध्याय १५

बीजगणित की पाठन विधि (Teaching of Algebra)

बीजगणित क्या है (What is Algebra)—बीजगणित (Algebra) शब्द एक अरबी शब्द से निकला है। उस शब्द का मतलब यह है कि किसी समीकरण (Equation) के एक ओर से कोई संख्या दूसरी ओर ले जाने में उसका चिन्ह बदल जाता है।

अंकगणित की तरह बीजगणित भी संख्याओं का विज्ञान है। केवल अन्तर यह है कि बीजगणित में अंकों (Numbers) के स्थान पर अक्षरों (Letters) का प्रयोग होता है। इन दोनों के बीच कोई विशेष भेद नहीं है। बीजगणित को अंकगणित का सामान्यानुमान रूप (Generalised Aspect) कहा जाता है।

बीजगणित को क्यों पढ़ाया जाता है (Why do We teach Algebra)—

बीजगणित पढ़ाया जाता है क्योंकि—

- (१) यह गणित की अन्य शाखाओं में प्रयोग में आता है।
- (२) इसमें बहुत से लाभदायक विचार होते हैं जिनका शिक्षा में बड़ा महत्व है।
- (३) इसके द्वारा कार्य करने की दक्षता पैदा होती है।

बीज गणित से निम्न विचार पैदा होते हैं—

(१) समीकरणों (Equations) के द्वारा बहुत सी समस्याओं का हल ज्ञात होता है।

(२) सामान्यानुमान (Generalisation) की शक्ति का विकास तथा सूत्रों (Formulae) का प्रयोग की क्षमता इसके द्वारा पैदा होती है।

(३) प्रयोगात्मक विचार क्या है, इसका भी ज्ञान होता है।

समस्याओं का हल (Solution of Problems)—समीकरणों का बीजगणित में प्रयोग अंकगणित की विधियों की एक नवीन रूप रेखा है। बालक में इसके द्वारा एक नवीनता आती है जिससे वह इसमें रुचि रखता है।

सामान्यानुमान तथा सूत्र (Generalisation and Formulae)—

बीजगणित में अङ्कगणित के बड़े वर्णानों को छोटे रूप में लिखा जा सकता है। भिन्न भिन्न उदाहरणों के द्वारा किसी तथ्य पर पहुँचा जाता है जैसे $2 \times 7 = 7 \times 2$ इसको एक सूत्र में रखा जा सकता है जैसे $a \times b = b \times a$

गणित को जीवन में प्रयोग करने में सूत्रों का विशेष स्थान होता है। इसमें एक विस्तृत सूचना होती है तथा इसमें विचार गुथा रहता है।

प्रयोगात्मक विचार—बीज गणित में किसी कार्य को समीकरण रूप में तथा रेखाचित्र में रखा जा सकता है। इनके द्वारा वस्तु के बारे में समझना सरल हो जाता है। रेखाचित्र के द्वारा सारे कार्य को स्थूल (Concrete) बनाया जा सकता है। इसके विपरीत अङ्क गणित में वस्तु का ज्ञान स्पष्ट नहीं हो पाता है। बीजगणित में किसी समस्या को कोई रूप दिया जाता है।

बीजगणित के कार्य (Fuctions of Agebra)—

(१) इसके द्वारा अंकगणित की विधियों का स्पष्टीकरण किया जाता है।

(२) इसके द्वारा विद्यार्थियों की गणित शक्ति को अधिक पक्का बनाया जाता है।

(३) इसके द्वारा समीकरण तैयार की जाती है तथा उनके द्वारा दैनिक जीवन में आने वाली उन समस्याओं का समाधान किया जाता है, जो समस्यायें गणित द्वारा आसानी से हल नहीं की जाती हैं।

(४) इसके द्वारा इस प्रकार की सामग्री का प्रबन्ध किया जाता है जो गणित की भिन्न भिन्न शाखाओं में प्रयोग में आती है।

(५) भिन्न भिन्न नवीन भाषा तथा चिन्हों का ज्ञान देना।

(६) मानसिक शिक्षा (Mental Training) में एक उपकरण के रूप में कार्य करना।

(७) भिन्न भिन्न उदाहरणों के द्वारा किसी तथ्य पर पहुँचना। इन तथ्यों को सूत्रों (Formulae) द्वारा प्रयोग करना।

बीजगणित पढ़ाने की विधियाँ (Methods of Teaching Algebra) — बीजगणित पढ़ाने की दो विधियाँ प्रचलित हैं एक तो समीकरण और समस्या तथा दूसरी विधि सूत्र विधि कहलाती हैं परन्तु किसी भी विधि के प्रयोग में दोनों का ही प्रयोग होता है।

बीजगणित का प्रयोग समीकरण विधि से इस प्रकार हो सकता है—

एक संख्या ७ में कोई संख्या जोड़ने से योग १२ होता है संख्या ज्ञात करो।

$$\text{संख्या} + ७ = १२$$

$$क + ७ = १२ \quad \text{दोनों पक्षों में से ७ घटाने पर}$$

$$क + ७ - ७ = १२ - ७$$

$$\therefore क = ५$$

शिक्षक चाहे किसी भी विधि का प्रयोग करे परन्तु उसको यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि बालक उसका मतलब समझे, उनको उसमें रुचि हो तथा उसका प्रयोगात्मक स्थिर महत्व का हो।

बीजगणित की प्रारम्भिक स्थिति (The Early stage of Algebra)

सबसे प्रारम्भ में बालक को यह ज्ञान कराया जावे कि अंकों के स्थान पर अक्षर का प्रयोग कैसे होता है। उदाहरण के लिए प्रश्न इस प्रकार पूछा जाता है—

निम्न में कितने पेन्स होते हैं—(i) १ शि० (ii) २ शि० (iii) ५ शि० (IV) क शि०

प्र०—तुमने २ शि० का मान कैसे ज्ञात किया ?

उ०—शि० की संख्या को १२ से गुणा किया।

प्र०—तो क शि० का मान कैसे ज्ञात करोगे।

उ०—उसी प्रकार क शि० को १२ से गुणा कर देंगे।

इसी प्रकार क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात करने में—एक आयत का

क्या क्षेत्रफल (Area) होगा जिसकी भुजा १५" और ५" है, एक भुजा ७०' तथा दूसरी २०' है एक भुजा क' तथा दूसरी ५' है, एक भुजा क" तथा दूसरी ख" है ।

भिन्न (Fractions) के उदाहरण

प्रश्न—यदि 'क' आदमी किसी कार्य को 'ब' दिनों में करते हैं तो 'स' आदमी कितने दिनों में करेंगे ?

'क' आदमी 'ब' दिन में करते हैं

∴ १ ,, ब × क दिन में

∴ स ,, दिन में

यदि उपरोक्त को बीच के पद के बिना हल किया जाय तो—

क आदमी करते हैं 'ब' दिन में

स ,, ,, ब × क/स

प्रश्न—यदि स का मान क से कम हो तो दिनों की संख्या ब से कम या अधिक होगी ?

बालक— अधिक होगी ।

इसलिए अधिक संख्या से गुणा तथा छोटी से भाग करने पर हल ज्ञात हो जायेगा ।

$$ब \times \frac{क}{स} \text{ दिन (को स से अधिक मान लिया गया है)}$$

समस्यायें तथा समीकरण (Problems and Equations)

बीजगणित का आरम्भ समस्या के हल (Solution of a problem) से होना चाहिए । आरम्भ में बालक को हल करने में (Manipulation) कार्य में रुचि नहीं होती है । परन्तु धीरे २ इस कार्य में दक्षता प्राप्त करने पर बालक समस्या हल करने में रुचि लेने लगता है ।

बीजगणित में यदि (Manipulation) से कार्य आरम्भ किया जाय तो बालक के सम्मुख एक समस्या (Problem) आनी चाहिए फिर वह उसको हल करे तो अधिक रुचिकर होता है । समस्या सम्मुख होने पर (Manipulation) में रुचि होती है और बालक सम्पूर्ण समस्या का हल निकालना चाहते हैं और समस्या को सही विधि द्वारा हल भी कर लेते हैं ।

साधारण तथा सरल समस्याओं के हल करने में बालक कोई चिन्ह का प्रयोग न करके उसे अंकगणित की सहायता से हल कर

लेते हैं परन्तु बीजगणित का प्रयोग जब कठिन समस्याओं के हल करने में किया जाता है तभी वे उसका आनन्द उठाते हैं।

उदाहरण हेतु एक प्रश्न बीजगणित प्रारम्भ करने वालों को दिया गया था। उसका हल किस भाँति किया गया। वह नीचे दिया है।

प्रश्न— दो मोटर १५ और १८ मील की चाल से दौड़तो हैं। यदि तेज मोटर धीमी मोटर को पकड़े जब कि धीमी मोटर ६ मील चल चुकी हो तो पहली तेज मोटर दूसरी को कब पकड़ लेगी ?

इस प्रश्न को बालकों ने बीजगणित से आसानी से हल कर दिया। इसके पश्चात् उनको इसका हल अंकगणित से कराया गया। बालक दोनों विधियों को समझे और उन्होंने दोनों विधियों को सीखने की कोशिश भी की।

इस अवस्था में समस्या के शब्दों की ओर मुख्य रूप से ध्यान देना चाहिए। इसके साथ ही साथ समीकरण (Equation) का हल आधारभूत सिद्धांतों पर आधारित होना चाहिए। इस अवस्था में समीकरण पक्षान्तर करने का बोध नहीं देना चाहिए।

उदाहरण— $k + 6 = 6$

प्र०— इस प्रश्न में क्या मुख्य बात देखते हो ?

उ०— ६ संख्या बाँयी ओर है।

प्र०— ऐसी स्थिति में क्या करना चाहिए ?

उ०— दोनों पक्षों में से ६ घटा देते हैं।

इस तरह से बालक स्वयं इस प्रकार के प्रश्न हल कर लेंगे। प्रश्नों में जहाँ कहीं भी कठिनाई प्रतीत हो एक कुशल अध्यापक समय समय पर इन कठिनाइयों को दूर करता हुआ चलता है। परन्तु इस प्रकार की कठिनाइयों की एक सूची तैयार करलेनी चाहिए और धीरे २ जैसे २ बालक उनको समझते जायँ, उनको सूची से अलग कर लेना चाहिए।

नीचे एक सूची दी गई है जिसका निवारण ऋणात्मक संख्याओं का बोध (Negative Numbers) देने से पहिले होना आवश्यक है—

$$२ क \equiv २ \times क$$

$$२७ \equiv २ \times १० + ७$$

$$१६ क + १३क = (१६ + १३) क = ३२ क$$

$$४ ख \times ४, ४ \times ८ ख, ४ (क + ख)$$

० चिन्ह या संख्या से गुणा करना—

उपरोक्त कथन को अधिक सरल और रोचक बनाने के लिए ५ क + ३ क के स्थान पर ५ बन्दर + ३ बन्दर यानी स्थूल (Concrete) उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

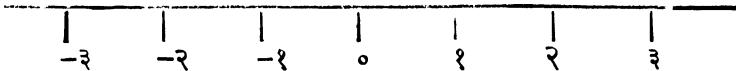
ऋणात्मक संख्यायें (Negative Numbers)—ऋणात्मक संस्था के सीखने के बारे में भिन्न भिन्न मत हैं। वास्तव में जब भी इसकी आवश्यकता हो उसी समय इसका प्रयोग उपयुक्त होता है।

बालकों के सम्मुख एक समस्या रखी गयी। इस समस्या में एक पहाड़ है जिसके ऊपर चढ़ना तथा नीचे उतरना है। इसके आधार पर एक समीकरण (Equation) तैयार किया गया—

$$३ क + ६ + क - २० = क + ७ + क - ३$$

बालकों ने ३ क + क = ४ क, क + क = २ क तथा ७ - ३ = ४ कर लिया परन्तु कुछ बालक ६ - २० का मान न निकाल सके। इसी स्थान पर ऋणात्मक संख्याओं का प्रारम्भ होना चाहिए। ६ - २० का तात्पर्य यह है कि ६ गज ऊपर जाकर फिर २० गज नीचे उतरा गया।

ऋणात्मक संख्याओं का ज्ञान एक पैमाने (Scale) के द्वारा निम्न रूप में दिया जा सकता है—



० के स्थान से एक ओर १, २, ३, संख्यायें तथा उसके विपरीत —१,—२,—३, आदि का प्रयोग किया जाता है।

ऋणात्मक संख्या का ज्ञान पर्याप्त अभ्यास के बाद स्वयं हो जाता है। इसके समझने में शीघ्रता नहीं करनी चाहिए। भिन्न २ स्थूल (Concrete) उदाहरणों द्वारा यह स्पष्ट हो जाता है। बालकों को स्वयं उदाहरणों के आधार पर एक नियम ज्ञात करना चाहिए। जैसे $(-२) \times (-३) = + ६$ किसी नियम पर (Rule) पर आधारित होता है।

भिन्न जिनमें हर, संख्याओं में होते हैं (Fractions with Numerical Denominators)—इस प्रकार की भिन्नों में अधिक कठिनाई नहीं होती है यदि अंकगणित में भिन्नों के हल करने का ज्ञान सही रूप में दिया गया हो।

लिखित कार्य में इस प्रकार की भिन्न के हल करने में कुछ कठिनाई होती है। जैसे $\frac{\text{ख} - २}{२}$ परन्तु कोष्ठकों (Brackets) के प्रयोग करने से इसको हल करना सरल हो जाता है। जैसे—

$$\frac{२ \text{ ख} - ३}{३} - \frac{\text{ख} - २}{२} = \frac{२ (२ \text{ ख} - ३)}{६} - \frac{३ (\text{ ख} - २)}{६}$$

$$= \frac{२ (२ \text{ ख} - ३) - ३ (\text{ ख} - २)}{६}$$

कोष्ठकों के खोलने पर यह ध्यान रखना है कि - चिन्ह के पश्चात् आगे के चिन्ह बदल जाते हैं।

चिन्हों के नियम (Rules of Signs)

$$(+ क) \times (+ ख) = + कख$$

$$(- क) \times (+ ख) = - कख$$

$$(+ क) \times (- ख) = - कख$$

$$(- क) \times - (ख) = + कख$$

उपरोक्त चिन्हों के नियम वास्तविक उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किये जाते हैं। इस तरह के उदाहरण लम्बाई—चौड़ाई (Length and Breadth) में, दर—समय (Rate—Time) या लाभ—हानि (Profit and Loss) आदि में हो सकते हैं।

उदाहरण (i) ३ लड़कों ने एक स्कूल में दाखिला लिया और प्रत्येक को ३ रु० फीस देनी पड़ी। ये नये लड़के थे। इसलिए नये लड़कों की संख्या = + ३ हुई और प्रत्येक (+ ३) रु० देता है। उनके द्वारा स्कूल को कुल ९ रु० अधिक आय होती है।

$$\text{या } (+३) + (\times ३) = +९$$

(ii) ३ लड़के स्कूल में भर्ती होते हैं परन्तु उनसे कोई फीस नहीं ली जाती है।

$$\text{इस स्थिति में लड़कों की संख्या} = (+३)$$

प्रत्येक लड़के के कारण स्कूल की आय में (-३) रु० प्रति लड़का हानि होती है।

$$\therefore \text{स्कूल को पूर्ण हानि} = (+३) + (-३) = -९ \text{ रु०}$$

(iii) ३ लड़के स्कूल छोड़ देते हैं परन्तु स्कूल को फीस देते रहते हैं स्कूल में ३ लड़के कम हो गये या स्कूल छोड़ने वाले लड़कों की संख्या = (-३)

जब प्रत्येक (+३) रु० देता है तो स्कूल को हानि

$$= (-३) \times (+३) = -९$$

(iv) ३ लड़के जो कोई फीस नहीं देते हैं। स्कूल छोड़ देते हैं ३ लड़के जो कोई फीस नहीं देते हैं स्कूल छोड़ते हैं $= (-३)$

न्बुकि वे मुक्त है स्कूल को प्रत्येक लड़के के पीछे लाभ $= (-३)$ होगा।

$$\text{स्कूल को लाभ} = (-३) \times (-३) = ९ \text{ रु०}$$

इस तरह के कुछ और उदाहरणों के द्वारा बालकों को स्पष्ट हो जावेगा कि—

$$\frac{+त्मक}{+त्मक} = +त्मक \quad \frac{+त्मक}{-त्मक} = -त्मक; \quad \frac{-त्मक}{+त्मक} = -त्मक$$

$$\frac{-त्मक}{-त्मक} = +त्मक$$

सूत्रों का पढ़ाना (Teaching of Formulae)—सूत्रों के पढ़ाने में बड़ी सावधानी रखनी चाहिए। बालकों को इसका प्रयोग यांत्रिक (Mechanical) रूप से न करना चाहिए। सूत्रों को भिन्न भिन्न उदाहरणों की सहायता से ज्ञात करना चाहिए। यदि बालक इस तरह सूत्र ज्ञात करेंगे तो उनको इनके प्रयोग करने में रुचि होगी। वह सूत्र बालकों के लिए एक वास्तविक वस्तु होगी क्योंकि उनका ज्ञान बालकों को निगमन विधि (Inductive Method) द्वारा हुआ है।

उदाहरण के लिए यदि सूत्र के बारे में बालकों को ज्ञान देना है तो निम्न विधि का प्रयोग किया जावेगा—

$(अ + ब)^2 = अ^2 + ब^2 + २ अ ब$, इस सूत्र का ज्ञान देना है,

पदार्थ (Matter)

(१) $५ \times ५ = २५$

(२) $३ + २$ या $१ + ४$ या $२ + ३$

(३) $३ + २$

$$\begin{array}{r} ३ + २ \\ \hline ५ + ५ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ५ + ५ \\ \hline १० + ४ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} १० + ४ \\ \hline १४ + १० \end{array}$$

$$\begin{array}{r} १४ + १० \\ \hline २४ + ४ = २८ \end{array}$$

(४) $५ + २$

$$\begin{array}{r} ५ + २ \\ \hline २५ + १० \end{array}$$

$$\begin{array}{r} २५ + १० \\ \hline ३५ + ४ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ३५ + ४ \\ \hline ३९ + १० + ४ = ४९ \end{array}$$

विधि (Method)

(१) $(५)^2 =$ क्या ?

(२) ५ को दो भागों में बाँटो

(३) $(३ + २)$ क्या होगा

(४) $(५ + २)^2 =$ क्या होगा

(५) अ+ब

अ+ब

अ^२ + अ ब

+ अ ब + ब^२

अ + २ अ ब + ब^२

(५) (अ+ब)^२=क्या ?

इस तरह से उपयुक्त प्रश्नों के द्वारा इस परिणाम पर पहुँचा जा सकता है कि दो समान पदों का वर्ग जिनके बीच में + का चिन्ह होता है वह = प्रथम पद का वर्ग + प्रथम और द्वितीय पद का दुगुना + दूसरे का वर्ग । इस निर्णय पर पहुँचने के बाद इससे सम्बन्धित प्रश्न कराने चाहिए तथा उनकी उपयोगिता पर ध्यान देना चाहिए । इस तरह से बालकों की यह ज्ञान हो जावेगा कि सूत्र (Formulae) एक जीवित वस्तु है जिसका प्रश्न हल करने में एक मुख्य स्थान होता है । भिन्न २ कठिन संस्याओं का वर्ग सूत्र (Formulae) के द्वारा आसानी से ज्ञात किया जा सकता है ।

गुणनखण्ड (Factors)—गुणन खंड का अध्ययन बीजगणित में बड़ा ही आवश्यक होता है । चूँकि खंड करना एक कठिन विधि है । इसलिये इसके अध्यापन में शिक्षक को विशेष ध्यान रखना चाहिए । गुणन खंड पढ़ाने में शिक्षक को यह ध्यान में रखना होता है कि किस रूप में इनका ज्ञान देना तथा किस सरल विधि का प्रयोग करना उप-युक्त है जिससे बालक उनको आसानी तथा रुचि से इनको सीख लें । इनके पढ़ाने में भी स्थूल (Concrete) उदाहरणों का प्रयोग करना लाभदायक होता है । इनके पढ़ाने में निम्न विधि का प्रयोग करना होता है—

नीचे एक पद है अ ब + ब स । इस तरह के दो पदों को ज्ञात करो जिनके गुणा करने से गुणनफल अ ब + ब स आता है ।

हल : अ ब + ब स दोनों में क्या शामिल है ? 'ब' दोनों में शामिल है ।

इसलिए इसको ब (अ + स) भी लिखा जा सकता है ।

इस तरह से ब और (अ + स) दो पद हुए जिनको गुणा करने से गुणनफल = अ ब + ब स आता है । ये ब (अ + स) उपरोक्त का गुणन खंड (Factors) हुए !

गुणनखण्ड पढ़ाने में भी स्थूल (Concrete) उदाहरणों का प्रयोग

करना चाहिए। इस तरह के उदाहरणों से यह क्रिया वास्तविक (Real) हो जावेगी और बालक उनमें रुचि भी लेंगे।

गुणनखण्डों के पढ़ाने से बालकों की सोचने की शक्ति (Thinking Power) को बढ़ाया जा सकता है। इसमें बिना समझे खण्ड याद करने के ऊपर जोर नहीं दिया जाना चाहिए। इसके प्रश्न एक क्रम में (Graded) होने चाहिए। कुछ अभ्यास हो जाने के बाद कठिन खण्डों का ज्ञान देना चाहिए। इस तरह अधिक से अधिक विधियों का ज्ञान देना चाहिए जिनसे कि भिन्न भिन्न पदों के खण्ड निकाले जा सकें।

समस्या तथा समीकरण (Problems and Equations) —

बीजगणित का प्रारम्भ समस्या के हल से होता है। समस्या समाधान में जो कार्य किया जाता है उसका कुछ मतलब होना चाहिए। बालकों का यह मालूम न हो कि केवल कार्य करना, नियमों का प्रयोग करना ही, बीज गणित है बल्कि वह समस्या को समझने का प्रयोग करें। इसके लिए समस्या से प्रारम्भ करके चलना चाहिए तभी उसके हल करने तथा नियमों के प्रयोग करने में बालकों की रुचि होगी। इस तरह बालक समस्या के हल करने में आनन्द लेंगे और सफलता से समस्या हल करेंगे।

बेसिक कक्षाओं में साधारण समीकरण (Equation) का प्रयोग आसान होता है। बालकों को समीकरण का प्रयोग उनके याद करे हुए सूत्रों के आधार पर होना चाहिए। माना दो बालकों को बगीचे में दो समान आयाताकार (Rectangular) बगियाँ तैयार करनी हैं। यदि एक बगियारी का क्षेत्रफल = १६० वर्ग फु० और दूसरी १६ फु० लम्बी है तो दूसरी बगियारी कितनी चौड़ी होनी चाहिए। पहिले बालक इनके चित्र तैयार कर लेंगे। फिर उनका सूत्र लिखेंगे।

$$\text{क्ष० (क्षेत्रफल)} = \text{ल०} \times \text{चौ०}$$

उपरोक्त सूत्र (Formula) में दिये गये मान को लिख देते हैं जैसे—

$$\text{ल०} \times \text{चौ०} = \text{क्षेत्रफल}$$

$$\text{ल०} = १६$$

$$१६ \times \text{चौ०} = १६०$$

$$\therefore \text{चौ०} = \frac{१६०}{१६} = १० \text{ फु०}$$

इस तरह बालक समीकरण (Equation) का महत्व समझेंगे। समीकरण हल करने में पहला पद यह होता है कि बालक समझ लें कि इस

में क्या निकालना है। उनको सूत्र और समीकरण में स्पष्ट अन्तर ज्ञात होना आवश्यक है सूत्र एक तथ्य (Fact) को लक्ष करता है तथा समीकरण का तात्पर्य एक प्रश्न से होता है।

साधारण समीकरणों का प्रयोग अंकगणित (Arithmetic) तथा रेखागणित में उच्च कक्षाओं में आसानी से किया जा सकता है।

रेखा चित्र (graph)—

रेखाचित्र का महत्व (Importance of graphs) रेखाचित्र का प्रयोग आजकल सभी क्षेत्रों में होता है। रेखा चित्र (Graph) के स्वयं अपने गुण होते हैं। किसी रेखा चित्र को देखने से उस विशेष वस्तु का पूर्ण ज्ञान एक साधारण चित्र के द्वारा हो जाता है। स्कूलों में रेखा चित्र का ज्ञान देना एक महत्वशाली विषय हो गया है। निम्न कारणों की वजह से रेखा चित्र का प्रयोग स्कूलों में होता है—

(१) रेखाचित्र का प्रयोग मुख्य रूप से बीज गणित में होता है। रेखाचित्र के द्वारा बीज गणित का ज्ञान स्थूल रूप से हो जाता है। इसके अभाव में बीज गणित के बहुत से नियम स्पष्ट रूप से नहीं पढ़ाये जा सकते हैं।

(२) रेखा चित्रों का प्रयोग हमारे दैनिक जीवन में समाचार पत्रों तथा लेखों में किया जाता है। इनके बिना समझे हम समाचार पत्रों का ज्ञान प्राप्त नहीं कर सकते हैं। इसलिए विद्यालय में इसका ज्ञान देना अति आवश्यक है।

(३) इसके द्वारा किसी विस्तृत वर्णन को सूक्ष्म रूप (Concise) में रखा जा सकता है। इसलिए किसी भी ज्ञान को समझने के लिए रेखा चित्र का ज्ञान होना आवश्यक है।

(४) बहुत से जटिल तथ्य (Facts) जो किसी और विधि से स्पष्ट ही किये जा सकते हैं उनको रेखा चित्रों द्वारा स्पष्ट और सरल बनाया जा सकता है।

(५) रेखा चित्रों द्वारा बालक समीकरण सम्बन्धी प्रश्नों को सरलता से हल कर सकते हैं।

(६) रेखा चित्र का ज्ञान उच्च गणित (High Mathematics) के लिए एक आवश्यक आधार प्रदान करता है।

(७) रेखा चित्र साधारण समीकरणों के हल की अपेक्षा नवीनता रखते हैं जिससे बालक उनमें रुचि लेते हैं। इनका ज्ञान नेत्रों के द्वारा

मन्तिष्क को जाता है इस तरह पढ़ाते समय इन चित्रों के प्रयोग से वही लाभ होता है जो कि विज्ञान में प्रयोग से होता है।

(८) रेखा चित्र द्वारा दो सम्बन्धित वस्तुओं का सम्बन्ध स्पष्ट होता है।

(९) इनके प्रयोग करने से कक्षा का बहुत समय बचता है जिसका उपयोग किया जा सकता है।

रेखा चित्र का प्रारम्भ करना (Introduction of Graphs)—रेखा चित्र प्रारम्भ बालकों के दैनिक जीवन की घटनाओं से सम्बन्धित करके करना चाहिए। शिक्षक को कार्य का विभाजन, तापक्रम का रेखा चित्र, आबादी का रेखा चित्र आदि के उदाहरण के आधार पर करना चाहिए। बालक को सरल चित्र से कठिन की ओर (Simple to Complex) ले जाना चाहिए। केवल रेखा चित्र (graph) खींच देना ही पर्याप्त नहीं होता है। उनका समझना भी उतना ही आवश्यक है। रेखा चित्र खींचने में एक बिन्दु से दोनों ओर बिन्दु निश्चित करने में दो मात्राओं को दिखाया जा सकता है। इसके लिए एक रेखा खिचें श्यामट का प्रयोग किया जाना चाहिए। शिक्षक को अपनी कक्षा के बालकों को पर्याप्त अभ्यास देना चाहिए। रेखाचित्र की सहायता से समीकरण का हल भी बताना चाहिए।

समीकरणों द्वारा दो या दो से अधिक समस्याओं का हल रेखा चित्र की सहायता से किया जा सकता है। दो समानुपाती (Proportional) पदों का चित्र एक सीधी रेखा के रूप में आता है। रेखा चित्र का प्रारम्भ कैसे किया जाता है (How to Introduce graphs)—

(१) सबसे प्रथम स्थूल (Concrete) उदाहरणों का प्रयोग किया जाता है। जैसे उनके स्कूल की भिन्न भिन्न वर्षों में उन्नति का चित्र आदि। इसके पश्चात् तापक्रम, आबादी आदि के रेखा चित्र खींचे जाते हैं।

(२) इसके बाद बालकों से संख्याओं के खाने तैयार करने को कहा जाय। जैसे लोहे की कीमत ० पौण्ड से ८ पौंड तक खानों में लिखकर रेखा चित्र खींचा जाय।

(३) बीज गणित सम्बन्धी रेखा चित्र—इसमें 'अ' और 'ब' की कीमत समीकरण की सहायता से रेखा चित्र में खींचे—

$$ब = ३ अ + २ \text{ या } ब = अ^२$$

(४) इसके बाद भौतिक तथा रेखा गणित के सूत्रों के रेखा चित्र तैयार करे जायँ ।

(५) फिर समस्याओं (Problem) के रेखा चित्र द्वारा हल तैयार करें ।

रेखा चित्र खींचना पढ़ाते समय निम्न बातें ध्यान में रखनी चाहिए (Point to be kept in Mind while Teaching graphs)—

(१) रेखा चित्र खींचने के साथ ही साथ उसको पढ़ना (Inter Pret) करना भी समझाना चाहिए । एक तापक्रम के रेखा चित्र द्वारा बालकों को किसी समय का तापक्रम ज्ञात करने का ज्ञान होना चाहिए तथा किसी विशेष तापक्रम किस समय में है आदि पढ़ना चाहिए ।

(२) बालकों को यह समझना चाहिए कि यदि दो मात्रायें समानु-पाती (Proportional) हों तो इस तरह का रेखा चित्र एक सीधी रेखा में आता है ।

(३) रेखा चित्र खींचने में अधिक समय न लगना चाहिए ।

(४) समीकरणों के हल को रेखा चित्र के द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है ।

(५) प्रत्येक बिन्दु रखने में सावधानी से काम करना चाहिए ।

अध्याय १६
रेखा गणित का अध्ययन
(Teaching of Geometry)

व्यक्ति के सांस्कृतिक विकास हेतु रेखागणित का अध्ययन बड़ा महत्वशाली है। इसके द्वारा व्यक्ति की तर्क शक्ति का विकास होता है। रेखागणित के अध्ययन से मनुष्य की बुद्धि तीव्र तथा तर्क (Reasoning) शक्ति का विकास होता है। बालकों में खोज करने की प्रवृत्ति पैदा होती है। वह वस्तुओं की आवश्यक बनावट पर भी ध्यान देता है। साधारण रेखाओं के द्वारा वह भिन्न २ सुन्दर नमूने तैयार करता है।

परन्तु हमारे स्कूलों में रेखागणित के अध्यापन की ओर कोई विशेष ध्यान नहीं दिया जाता है। बालक साध्यों (Theorems) तथा अभ्यास (Exercise) के हलों को बिना समझे हुए रट लेते हैं। इसके साथ ही साथ बनावट या रचना (Construction) को भी बालक रट लेते हैं और परीक्षा में लिख आते हैं। वे समस्या के हल करने में किसी प्रकार की संश्लेषण (Synthesis) तथा विश्लेषण (Analysis) क्रिया का प्रयोग नहीं करते हैं। इस तरह से रेखागणित का मुख्य उद्देश्य (Objective) सफल नहीं हो पाता है।

रेखागणित के पढ़ाने के सामान्य उद्देश्य—(General Aims of Teaching Geometry)

(१) बालकों में बहुत से रेखा गणित सम्बन्धी तथ्यों (Facts) के बारे में ज्ञान कराना ।

(२) उन तथ्यों का आपस में सम्बन्ध समझना ।

(३) इन तथ्यों का दैनिक जीवन में प्रयोग करना ।

वस्तु में रेखा गणित का प्रारम्भ बच्चे के पैदा होने के पश्चात् ही हो जाता है परन्तु उस अवस्था से हमारा सम्बन्ध नहीं होता है । बालक रेखा गणित का ज्ञान या तो जूनियर या सेकेंड्री स्कूल की अवस्था से प्रारम्भ करता है । इस समय उसकी आयु १० से १२ वर्ष तक होती है ।

बालक के कक्षा में प्रवेश करने पर उसको साधारण इंच तथा उसके भागों में, गजों, फीटों आदि में नापने को कहा जाय । इसके अतिरिक्त कुछ समय बाद वह सेंटीमीटर (Centimeter) तथा मिली-मीटर (Millimetre) इकाइयों में वस्तु को नाप सकता है ।

इसके साथ ही साथ उनको कुछ रेखा गणित सम्बन्धी शब्दों (Vocabulary) का ज्ञान भी करना चाहिए । इनमें से बिन्दु (Point), वर्ग (Square), वृत्त (Circle), सीधा (Straight), लम्बा (Long), पतला (Thin) आदि मुख्य हैं । परन्तु अधिक शब्दावली का प्रयोग न किया जाय ।

बालकों को इस अवस्था में क्षेत्रफल (Area), आयतन (Volume) का ज्ञान अंकगणित से रहता है । वह एक समकोण (Right angle) को पहिचान सकते हैं परन्तु कोण (Angle) का सही ज्ञान उनको नहीं रहता है । उनको सीधी रेखा (Straight Line) का ज्ञान भी होता है ।

रेखा गणित की प्रथम सीढ़ी या स्तर

(A First Term's Geometry)

अध्यापक का उद्देश्य (Teacher's Aim)—रेखा गणित प्रारम्भ करने में एक उद्देश्य सम्मुख होना चाहिए । वह उद्देश्य बालकों को रेखा गणित सम्बन्धी तथ्यों को समझना (To Acquire geometrical-Facts); उनका आपस का सम्बन्ध जानना तथा उनका दैनिक जीवन में प्रयोग करना होना चाहिए ।

अध्यापक का प्रारम्भ का उद्देश्य — (Teacher's Aim of the First Term) इस अवस्था का उद्देश्य बालकों की रेखा गणित सम्बन्धी

शब्दावली (Geometrically Vocabulary) का विस्तृत करना होता है। इसका ज्ञान होने पर बालक सही रूप में उनका प्रयोग भी कर सकते हैं। परिभाषा (Definitions) की सीढ़ी बाद में आती है।

इसके अतिरिक्त बालक को रेखा गणित के चित्रों को पहिचानना तथा कक्षा के बाहर इस तरह की शकलों (Figures) को समझना भी होता है।

इसके अतिरिक्त बालकों को यह समझना होता है कि अमुक चित्र उनके स्तर के अन्दर हैं। इनका प्रथम उद्देश्य सही चित्र खींचने का भी होना चाहिए।

प्रथम पाठ (First Lesson)—प्रथम पाठ में भिन्न २ प्रकार के चित्रों को, वस्तुओं को देखकर पहिचानना होता है जैसे लकड़ी के टुकड़ों के बने वर्ग (Square) आयत (Rectangle) घन (Cubes) गोला (Sphere) आदि को एक शकल एक समय में पहिचानी जाती है। बालकों को स्वयं उनकी भुजाओं, किनारों तथा कोणों को गिनने को मौका देना चाहिए।

इसके बाद बिना वस्तु या चित्र के उनसे स्वयं किसी वर्ग की भुजाओं के बारे में, मस्तिष्क में चित्र बना कर पूछो। इस तरह से घन (Cube) आदि शकलों के बारे में प्रश्न करने चाहिए।

इसके पश्चात् वस्तुओं की सहायता से बालकों को चित्र खींचने को कहा जाय। पहिले वस्तु से सुन्दर चित्र खींचने को कहा जाय फिर बाद में उसको समझकर खींचा जाय, पहिले वर्ग बने कागज पर फिर साधारण कागज पर चित्रों को खींचा जाय।

इसी तरह एक दियासलाई के बक्स के भीतरी भाग को चारों किनारों पर काटने के बाद उसका चित्र खींचा जाय। चित्र में कोण देखने तथा बराबर भुजाओं पर निशान लगाने को कहा जाय। इस तरह कार्ड बोर्ड के द्वारा भिन्न भिन्न चित्रों के बनाने का अध्ययन कराना चाहिए।

इतना पढ़ाने के बाद दिशा (Direction) का ज्ञान देना चाहिए। इसमें सीधा (Horizontal) खड़ा (Vertical) दिशा का ज्ञान देना आवश्यक है। इसके साथ उत्तर या दक्षिण दिशा के बारे में भी ज्ञान दिया जाय।

दिशा के ज्ञान के बाद कोण (Angle) का ज्ञान दिया जाना चाहिए। बालकों को इस स्थिति में समकोण का ज्ञान होता है परन्तु

उनको समकोण का वास्तविक ज्ञान नहीं होता है। वे इस कोण की कोई निश्चित आकार समझते हैं।

कोण का ज्ञान देने के लिए घड़ी की सुई द्वारा, स्वयं दाँये घुमा कर तथा लकड़ी के दुकड़ों का प्रयोग किया जा सकता है। इसके बाद चित्र खींच कर कोण बना कर भी कोण का ज्ञान दिया जा सकता है। भिन्न भिन्न उदाहरणों के आधार पर बालको को यह समझा दिया जाय कि एक सीधे तल पर दूसरे तल के झुकाव (Inclination) को कोण कहते हैं।

इस तरह एक समकोण (Rightangle) का सही ज्ञान होने पर उससे छोटे कोण (Acute) तथा बड़े कोण (Obtuse) का ज्ञान देना चाहिए। समकोण से छोटे कोण को न्यून कोण (Acute) का तथा बड़े को अधिक कोण (Obtuse) कहते हैं।

इसके पश्चात् चाँदे (Protractor) का प्रयोग करना चाहिए। इसके आधार पर अंश (Degree) का ज्ञान हो जाता है। इसका ज्ञान होने पर भिन्न भिन्न अंशों (Degrees) के कोण नापने का अभ्यास दे देने के उपरान्त बालकों से भिन्न भिन्न अंशों के कोण खिचवाने चाहिए। इस स्थिति में पर्याप्त अभ्यास की आवश्यकता होती है।

पटरी द्वारा चित्र खींचना (Scale Drawing)—चित्र खींचने के लिए इस तरह के पाठ (Plan) तैयार करो जिसमें बालक लम्बाई (Lengths) तथा कोण (Angles) नाप सकें। इस पाठ में शहर या कस्बे का नक्शा, स्कूल का नक्शा, खेल के मैदान आदि का नक्शा प्रयोग में लाया जा सकता है। इस तरह से १" को १ मील में, १" को १' में तथा १" को १० फी० के पैमाने में बदला जा सकता है। अभ्यास के लिए बालकों के परिचित स्थानों का प्रयोग किया जा सकता है।

इस तरह के पाठों में नापने का अभ्यास हो जाने के पश्चात् उनको खींचने का अभ्यास कराना उचित है। इस तरह बिना नापे चित्र तैयार करके उसको नापना तथा बिलकुल सही नाप का चित्र खींचने का अभ्यास कराना चाहिए। इस तरह से चित्र खींचने में निम्न पदों से होकर कार्य करना पड़ता है—

(१) बालक के प्रत्येक चित्र को शिक्षक को जाँच लेना चाहिए।

(२) प्रत्येक चित्र खींचने से पहिले आवश्यक तैयारी कर लेनी चाहिए।

(३) तैयारी के पश्चात् स्वयं चित्र खींचने चाहिए।

(४) बालकों को बिना पैमाने की सहायता से चित्र खींचने का अभ्यास कई वर्ष तक कराना चाहिए ।

चित्र खींचने में शुद्धता (Accuracy) तथा स्वच्छता (Neatness) पर विशेष ध्यान देना चाहिये । प्रश्न का प्रयोग सरल से कठिन की ओर होना चाहिए । इस तरह से बालकों को इस स्तर में सूर्य की छाया, उससे बना कोण आदि का अभ्यास कराना चाहिए । कुछ बालक त्रिभुज के कोणों का अनुमान लगा लेते हैं । ऐसे बालकों को बढ़ावा देना चाहिए । इस तरह से इस स्तर पर बालकों को कुछ रेखागणित सम्बन्धी तथ्यों का ज्ञान हो जाना आवश्यक होता है ।

रेखागणित का दूसरा स्तर

(A second terms Geometry)

इस स्तर में हमारा अभिप्राय बालकों को कुछ रेखागणित के तथ्यों को समझना तथा उनका प्रयोग करना होता है ।

एक बिन्दु पर कोण खींचना

(Angles at a Point)

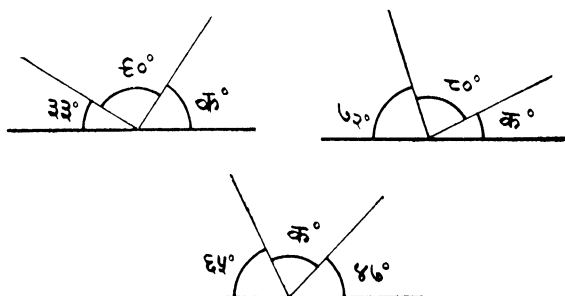
किसी भी साध्य या प्रमेय को प्रारम्भ करने में उसका (Enunciation) प्रारम्भ में न आना चाहिए । यह सबसे गलत विधि है कि हम इस तरह से कहें कि हमें यह सिद्ध करना (Prove) है कि यदि एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी है तो इस तरह से जो कोण बनेंगे उनका योग = २ सम कोण के होगा ।

इस स्तर पर बालकों को सिद्ध करना (Prove) और उपपत्ति (Proof) का सहो ज्ञान देना चाहिए । इस स्तर पर बालकों में कार्य प्रारम्भ की क्षमता (Initiative) का विकास करना होता है । बालकों को स्वयं अपने अपने हल कक्षा को समझाने चाहिए । इसके बाद उनके हल की कक्षा में विवेचना करनी चाहिए ।

एक प्रमेय (Theorem) जिसमें दोनों कोणों का योग = २ सम कोण के होता है । यदि इस प्रमेय में बालक चाँदे (Protractor) का प्रयोग करता है तो वह नाप कर ज्ञात कर लेगा कि इस तरह से बने दोनों कोणों का योग = २ समकोण के है । परन्तु प्रमेय में पटरी द्वारा खींचे गये चित्र के द्वारा सिद्ध करना होता है । बालकों को स्वयं तथ्य ढूँढ़ने का मौका देना चाहिए । इससे बालक विषय में रुचि लेंगे, परन्तु इसके साथ ही साथ अभ्यास कार्य अवश्य होना चाहिए । प्रमेय

(Theorem) के सिद्ध करने में खोज विधि (Heuristic Method) का प्रयोग किया जाना लाभप्रद होता है। बालकों की आयु के आधार पर ही किसी समस्या का उनको देना चाहिए।

बालकों के पास एक कापी होनी चाहिए जिसमें प्रत्येक प्रमेय की (Enunciation) लिखने चाहिए। इस तरह परिणामों की पुष्टि वास्तविक रूप से कोणों के मान की सहायता से घर पर गृह कार्य के रूप में कर लेने चाहिए। शिक्षक श्याम पट (Board) पर कुछ त्रिभुजों के चित्र खींच कर उसके एक-दो कोणों का मान लिख कर बालकों को तीसरे कोण का मान ज्ञात करने को कहेगा तथा इस तरह के प्रयास अभ्यास करायेगा। अज्ञात कोण के लिए कोई अक्षर लिख देना उचित होता है। इसी समय सम्पूरक (Supplementary) शब्द तथा कोण का परिचय भी दे देना चाहिए। इस तरह से निम्न कोणों का मान निकालने के अभ्यास देने चाहिए।



उपरोक्त कोणों का मान ज्ञात करने पर बालकों को यह ज्ञान कराना चाहिए कि यदि बहुत सी सीधी रेखाएँ एक बिन्दु पर मिलती हैं तो उनके द्वारा बने कोणों का योग $= 4$ सम कोण के। इस युक्ति पर भी बालकों को यह बताया न जाय कि एक बिन्दु पर पर बने कोणों का योग 4 सम कोण के होता है, बल्कि स्वयं बालकों को चित्र खींच कर कोणों को नाप कर कोणों का योग ज्ञात करना चाहिये। अध्यापक इस समय यह बतायेगा कि यह प्रमेय (Theorem) पहली प्रमेय के चित्र को बढ़ा देने से तैयार की जा सकती है। याने प्रथम प्रमेय के चित्र की किसी रेखा को बिन्दु से आगे बढ़ाने से दूसरी प्रमेय सम्मुख आ जाती है।

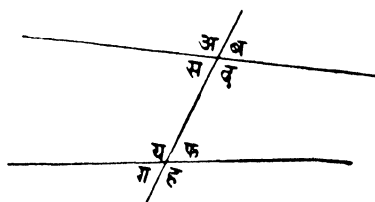
इसके बाद गुणा का चिह्न बढ़ा कर जो सम्मुख कोण (Vertical Opposite Angles) बनते हैं वे आपस में बराबर होते हैं। कक्षा में

बालकों को स्वयं चित्र खींच कर कोणों को नापना चाहिए। इसके आधार पर यह प्रमेय सिद्ध की जा सकती है।

युक्ति का आरम्भ कब करना चाहिए (When Should Logic be Introduced)

हालाँकि युक्ति का आरम्भ बालक में छोटी अवस्था में ही हो जाता है फिर भी रेखागणित के सीखने में बालक को उसका दास नहीं होना चाहिए। बालक की उन्नति में युक्ति के अभाव के कारण किसी प्रकार की बाधा नहीं डालनी चाहिए। इस अवस्था में हमारा तात्पर्य तथ्य (Facts) जानना होता है। परन्तु कभी-कभी इस बात की परीक्षा करना आवश्यक है कि बालक इन तथ्यों में युक्ति सम्बन्ध का भी ध्यान रखे। इस अवस्था में युक्ति (Logic) सम्बन्धी शक्ति के विकास की ओर अधिक ध्यान देने की आवश्यकता नहीं होती है।

उदाहरण—



इस चित्र में $\angle व = \angle फ$ तो साबित करो कि $\angle स = \angle फ$ के।

इस तरह के प्रश्न में बालक को स्वयं चित्र बना कर जिन कोणों को बराबर साबित करना है उन पर चिन्ह लगा दे। फिर युक्ति संगत विधि से उसको हल कर ले। जैसे—

दिया है— $\angle ब = \angle फ$

साबित करना है कि— $\angle स = \angle फ$

उपपत्ति (Proof — $\angle ब = \angle स$ (सम्मुख कोण)

परन्तु कोण $\angle ब = \angle फ$

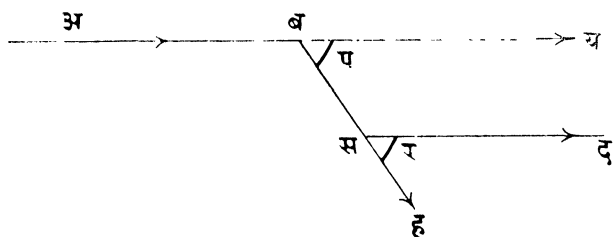
$\therefore \angle स = \angle फ$ के।

समानान्तर सीधी रेखायें (Parallel Straight Lines)

समानान्तर रेखाओं की परिभाषा आरम्भ में नहीं देनी चाहिए। इसका ज्ञान एक उदाहरण के द्वारा दिया जा सकता है। इसके द्वारा स्वयं विद्यार्थी उसकी परिभाषा बता देंगे।

एक आदमी अ से ब की ओर चलता है। उसकी ऐड़ी कहाँ होगी? उसको अँगुलियाँ कहाँ हैं? अब वह अपनी ऐड़ी को मोड़ कर ब से स की

ओर चलता है। जब वह मुड़ता है तो उसकी अँगुलियाँ कहाँ हैं? ब स दिशा की ओर। वह कितने अंश के कोण पर मुड़ा— 90° के। अब वह



स द दिशा को चलता है। इस ओर चलने पर वह फिर पहिले वाली दिशा की ओर चलता है, तो $\angle$ र कितना होगा। $\angle$ प और $\angle$ र आपस में बराबर होंगे। इस उदाहरण से क्या परिभाषा बना सकते हो?

जब कोई सीधी रेखा दो और सीधी रेखाओं को काटती है तो इस तरह जो (Corresponding Angles) कोण बनते हैं वे यदि आपस में बराबर हों तो दोनों रेखायें समानान्तर होती हैं। इसको विपरीत विधि के रूप में भी कहा जा सकता है। इस तरह के उदाहरणों को वास्तविक कोणों के मान द्वारा भी समझाया जा सकता है। दूसरे पाठ में फिर समानान्तर रेखा तथा (Corresponding Angles) का फिर अभ्यास करा लेना चाहिए। इसके बाद इससे सम्बन्धित साध्य को हल करने के लिए दे देनी चाहिए। यह कार्य युक्ति संगत होना चाहिए इस तरह भिन्न-भिन्न उदाहरणों के द्वारा उपरोक्त ज्ञान को और भी स्पष्ट किया जा सकता है।

उपरोक्त अभ्यास के बाद औजारों की सहायता से समानान्तर रेखायें बनाने का कार्य दे देना चाहिए। इस कार्य में बालक को पर्याप्त अभ्यास कर लेना आवश्यक है। इस तरह से इस स्थिति में किसी रेखा पर लम्ब की रचना भी कराई जा सकती है।

एक त्रिभुज के कोणों का योग (Angle-Sum of a Triangle)

उपरोक्त प्रमेय (Theorem) को सिद्ध करने के लिए बालकों से त्रिभुज खींचने को कहा जाता है। इसके कोणों को नाप कर उनका योग ज्ञात किया जाता है। इस तरह बालकों को यह स्पष्ट हो जावेगा कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = २ सम कोण। इसकी उपपत्ति बागज के कटे त्रिभुजों के कोणों को नापने से भी सिद्ध हो जाती है।

इसको सिद्ध करने के लिए आधार को आगे बढ़ा कर एक भुजा के समानान्तर रेखा खींच कर दो अन्तःकोणों (Interior) का योग बाह्य (Exterior) कोण के बराबर सिद्ध किया जा सकता है।

इस तरह भिन्न-भिन्न प्रकार के त्रिभुजों की रचना करके उपरोक्त को सिद्ध किया जा सकता है।

पटरी द्वारा चित्र खींचना—

- (१) प्रत्येक हाथ से खिंचा चित्र स्वच्छ और बड़ा होना चाहिए।
- (२) इसकी तुलना वास्तविक चित्र से करनी चाहिए।
- (३) चित्र में प्रत्येक रेखा पर दी हुई लम्बाई लिख देनी चाहिए।
- (४) प्रमेय (Theorem) की सहायता से जो नवीन कोण तथा भुजा का मान ज्ञात किया गया हो उसको भी लिख देना चाहिए।
- (५) इस स्थिति में मौखिक अभ्यास भी देना लाभप्रद होता है।
- (६) जहाँ तक हो सके चित्र सही होना चाहिए।
- (७) रचना खींची गयी रेखाओं को मिटाना नहीं चाहिए।
- (८) प्रश्न के उत्तर को शब्दों में लिखना चाहिए।

इस तरह दूसरे स्तर के कार्य करने के पश्चात् कक्षा के बालकों में चित्र खींचने का कौशल, रेखागणित सम्बन्धी तथ्य (Facts) तथा युक्ति संगत (Logical Proof) प्रमेय का ज्ञान हो जाता है। इस अवसर पर बालकों में रेखागणित सीखने का जोश होता है। इसकी समाप्ति पर तीसरे स्तर (Third Term) का कार्य प्रारम्भ करना चाहिए।

तीसरे स्तर की रेखागणित

(Third Term's geometry)

त्रिभुजों की रचना तथा त्रिभुजों की अनुरूपता,

(Construction of Triangles & Congruent Triangles)

इस स्तर का मुख्य तात्पर्य बालकों को रेखागणित सम्बन्धी और तथ्यों (Facts) का ज्ञान तथा प्रमेय (Theorems) का ज्ञान और चित्र खींचने का ज्ञान देना होता है।

सबसे प्रथम कार्य दिये हुए मान के आधार पर भिन्न-भिन्न रूप के त्रिभुजों की रचना (Construction) करना होता है। यदि त्रिभुज के तीन आवश्यक भाग दिये गये हों तो त्रिभुज की रचना आसानी से की जा सकती है। त्रिभुज के दो कोणों का मान ज्ञात होने पर तीसरे कोण का मान ज्ञात हो जाता है। इसके पश्चात् त्रिभुज की तीनों

भुजाओं का मान ज्ञात होने पर त्रिभुज की रचना की जा सकती है। यदि त्रिभुज में एक कोण ज्ञात हो तो एक भुजा खींच कर पहिले कोण खींच कर तब तीसरी भुजा खींची जाती है।

इस तरह से बालकों को यह ज्ञात हो जावेगा कि किसी त्रिभुज की रचना के लिये तीन बातें ज्ञात होनी आवश्यक है। इसके बाद त्रिभुज की रचना का पर्याप्त अभ्यास आवश्यक है। इस तरह बालक को (Compass) का प्रयोग करना भी आ जाता है। इस तरह चतुर्भुज (Quadrilateral) खींचने का ज्ञान भी दिया जाता है।

अनुरूप त्रिभुज (Congruent Triangles)—इस तरह के त्रिभुजों का ज्ञान निम्न रूप से दिया जा सकता है—

(१) यदि त्रिभुज की दो भुजायें और बीच का कोण दूसरे के बराबर हो।

(२) यदि त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे के समान हो। इसमें भुजा की ओर ध्यान देना चाहिए। (भुजा जो कोण बनाती है)

(३) यदि त्रिभुज की तीनों भुजायें दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों।

(४) यदि एक कोण समकोण (Right Angle), उसका कर्ण तथा एक और भुजा दूसरे त्रिभुज के संगति भुजाओं के बराबर हो तो त्रिभुज अनुरूप होंगे।

इस स्तर पर बालक स्वयं त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। परन्तु विलकुल सही चित्र खींचने पर जोर न देना चाहिए। अभ्यास हेतु एक (Tracing Paper) पर प्रत्येक बालक त्रिभुज की रचना करेगा तथा अपने पास के बालक के द्वारा खिचे त्रिभुज से तुलना करेगा, यदि त्रिभुजों का मान बराबर होगा तो वे एक दूसरे को ढक लेंगे।

जब बालकों को त्रिभुज की अनुरूपता (Congruency) का सही ज्ञान हो जाता है तो वे प्रमेय (Theorem) तथा अभ्यास (Riders) को आसानी से हल कर सकते हैं।

समद्विभाव त्रिभुज की रचना (Construction of an Isosceles Triangle)—इस स्थान पर समद्विभाव त्रिभुज (Isosceles Triangle) सम्बन्धी प्रमेय (Theorem) को सिद्ध करना समझाया जा सकता है। इस प्रमेय को सिर के कोण (Vertical Angle) के विभाजन द्वारा सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय तथा उसका विलोम (Theorem and its Converse)—किसी प्रमेय में दो भाग होते हैं— (१) जो कुछ दिया गया है, (२) उसका परिणाम । यदि परिणाम और जो कुछ दिया गया है उसको उलटा कर दें तो वह प्रमेय का विलोम कहलावेगा ।

जैसे—अ ब=अ स तो $\angle$ स = $\angle$ ब (प्रमेय)

$\angle$ स = $\angle$ ब तो अब=अस (विलोम)

इस तरह कक्षा में प्रमेय दे कर उसके विलोम (Converse) लिखने को कहा जाता है । परन्तु किसी प्रमेय (Theorem) का विलोम सदैव सत्य नहीं भी होता है ।

जैसे - प्रमेय यह है कि एक त्रिभुज में एक कोण = समकोण तो उसके दोनों कोण न्यून होंगे ।

विलोम—यदि त्रिभुज के दो कोण न्यून हैं तो तीसरा जरूर सम कोण होगा—परन्तु यह सत्य नहीं है ।

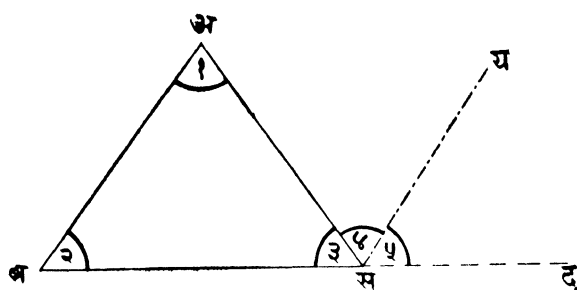
इसके लिए बालको को सही विलोमो की सूची तैयार करनी चाहिए ।

रेखागणित सम्बन्धी कुछ आवश्यक सुझाव

(Some Important Suggestions Regarding geometry)

संश्लेषण तथा विश्लेषण (Synthesis and Analysis)—प्रमेय (Theorem) तथा अभ्यास (Exercise) सिद्ध करने में संश्लेषण तथा विश्लेषण (Synthesis and Analysis) का प्रयोग किया जाता है । संश्लेषण का तात्पर्य आवश्यक परिणाम से पहिले जितने भी आवश्यक चित्र खींचे जाते हैं उनसे होता है । विश्लेषण विधि में हम अन्त की उपपत्ति (Proof) के पद से आरम्भ करते हैं तथा प्रश्नों के आधार पर जो कुछ बालक जानते हैं, आगे बढ़ते जाते हैं । संश्लेषण विधि में बालक क्रियाहीन (Passive) होते हैं तथा तथ्यों को स्वीकार करते हैं । विश्लेषण विधि में बालक क्रियाशील (active) होते हैं तथा प्रमेय के हल का 'क्यों' (Why) और 'कैसे' (How) समझते हैं । दोनों विधियों के अपने गुण और दोष (Advantages & Disadvantages) हैं । केवल एक का प्रयोग पर्याप्त नहीं है । इसलिए किसी प्रमेय या अभ्यास को सिद्ध करने में दोनों का प्रयोग आवश्यक होता है । दोनों विधियों के उदाहरण नीचे दिये गये हैं—

प्रमेय—किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग २ समकोण के बराबर होता है ।



संश्लेषण हल (Synthetic Proof)—

दिया (Theorem) है—अ ब स एक त्रिभुज है,

सिद्ध करना है (To Prove)— $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2$ समकोण के ।

रचना (Construction)—ब स को द तक बढ़ाया । स पर स य रेखा अ ब से समानान्तर खींची ।

उपपत्ति (Ptoof)—य स ॥ अ ब और अ स उनको काटती है

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ —एकान्तर कोण
(Alternate Angles)

$\therefore$ य स ॥ अ ब और ब द उनको काटती है ।

$\angle 2 = \angle 5$ —संगत कोण
(Cooresponding $\angle$ s)

दोनों को जोड़ने से—

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 5$$

इन दोनों में $\angle 3$ जोड़ दिया,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 3$$

$= 2$ समकोण (एक सीधी रेखा के कोण)

विश्लेषण (Analysis)—

सिद्ध करना है कि $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2$ समकोण के ।

जब कोण $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2$ समकोण ।

यदि वे एक सीधी रेखा पर एक ओर बने हैं ।

कोण $\angle 3$ एक सीधी रेखा पर बना है ।

ब स रेखा को द बिन्दु तक बढ़ाया ।

तुम $\angle 1$ और $\angle 2$ को किस प्रकार $\angle 3$ के साथ रख सकते हो ? पहिले $\angle 1$ को कोण $\angle 3$ के पास लाते हैं ।

यह किस प्रकार कर सकते हैं ?

क्या इस स्थिति में एकान्तर कोण सहायता कर सकते हैं ? हाँ । तब स पर एक एकान्तर कोण बना लो जोकि $\angle 1$ के बराबर हो । यह किस प्रकार से किया जा सकता है ? यदि स से स य रेखा अ ब के ॥ खींच लें ।

इस तरह $\angle 1 = \angle 4$ जो कि $\angle 3$ के समीप है ।

अब कोण $\angle 2$ को $\angle 4$ के पास लाना है । यह कैसे हो सकता है ? संगति कोण किसे कहते हैं ? इस स्थान पर संगति कोण सहायता दे सकते हैं ? हाँ ।

$\angle 2$ का कौन संगति कोण है ? $\angle 2 = \angle 5$ संगति कोण ।

इस तरह $\angle 1 = \angle 4$

$\angle 2 = \angle 5$

और $\angle 1$, $\angle 2$ और $\angle 3$ एक सीधी रेखा के कोण हो गये । इनका योग = २ समकोण के ।

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2$ समकोण के ।

रेखागणित में विश्लेषण (geometrical Analysis)—रेखागणित के विश्लेषण में निम्न बातें ध्यान में रखनी चाहिए—

(१) दिये हुए चित्र से मिलती-जुलती शकल बनानी चाहिए । हो सकता है कि उनके मान समान न हों ।

(२) चित्र में सभी रेखाओं, कोणों, आदि को जो दिये गये हैं, ज्ञात करके उन पर चिन्ह लगा दो ।

(३) चित्र सम्बन्धी जितने भी त्रिभुज बनाए जा सकें उनको बना लो और जिससे समस्या हल करने में सहायता मिल सके उसकी सहायता ले लो ।

(४) यदि कोई इस तरह का त्रिभुज उपलब्ध न हो तो रेखाओं की सहायता से इस तरह का त्रिभुज तैयार कर लो ।

रेखागणित में अभ्यास का महत्व (Importance of Exercises in Geometry)—

(१) अभ्यास के द्वारा बालकों में मूल (Original) विचार शक्ति तथा तर्क (Reasoning) शक्ति का विकास होता है । इसके द्वारा प्राप्त ज्ञान से बालकों में गणित की ओर रुझान होता है ।

(२) अभ्यास के द्वारा गणित में वास्तविक रूप से प्रवेश होता है। किसी सरल अभ्यास को हल करना अधिक रुचिकर होता है। इसके द्वारा रेखा गणित प्रारम्भ करने वाले को विषय का सही ज्ञान होता है।

(३) अभ्यास के द्वारा बालकों में विषय के प्रति रुचि (Interest) पैदा होता है। साधारण गणित सम्बन्धी तथ्य की खोज बहुत सी सूचना की अपेक्षा अधिक रुचिकर होती है।

(४) अभ्यास एक क्रम में (graded) होते हैं। इनसे बालक धीरे धीरे सरल से कठिन की ओर (Easy to Difficult) की ओर बढ़ता है। यह मनोवैज्ञानिक ढंग बालक के लिए बड़ा ही लाभदायक है।

(५) अभ्यास के द्वारा गणित के याद किए तथ्यों (Facts) की पुनरावृत्ति (Recapitulation) होती है। इनके द्वारा बालक की योग्यता (Ability) का पता भी चलता है।

अभ्यास हल करने हेतु आदेश (general Directions in Solving the Exercises) —

अध्यापक को निम्न आदेश देने चाहिए—

(१) चित्र खींचते समय सबसे आसान तथा सम्भव चित्र खींचो। यदि त्रिभुज का मान दिया है तो चित्र पर ही उसका मान लिख दो।

(२) अभ्यास (Exercise) को ध्यान से पढ़ो और प्रत्येक शब्द के अर्थ को समझने की कोशिश करो। यह स्पष्ट हो जाय कि अभ्यास में क्या दिया है और क्या ज्ञात करना है।

(३) त्रिभुज के सिरों के लिए बड़े अक्षर तथा भुजाओं के लिए छोटे अक्षर का प्रयोग करो।

(४) किसी अभ्यास को सिद्ध करने के लिए प्रत्येक सम्भव प्रमेय (Theorem) आदि को ध्यान में लाकर उनकी सहायता से अभ्यास सिद्ध करने की कोशिश करो।

(५) प्रश्नों के आधार पर कुछ सहायता (Help) दी जा सकती है।

रचना सम्बन्धी कुछ आवश्यक आदेश (Instructions Regarding the Constructions) —

(१) रचना करने में रेखागणित के वक्स को देख लेना चाहिए कि उसमें सभी आवश्यक औजार हैं। अच्छी किस्म की पेन्सिल का प्रयोग किया जाना चाहिए।

(२) प्रत्येक रेखा को बाँयीं से दाँयी दिशा की ओर खींचना चाहिए ।
 (३) प्रत्येक रेखा समान मोटाई (Thickness) की होनी चाहिए ।
 रेखा पतली खिंची होनी चाहिए ।

(४) रचना के प्रत्येक पद (Step) स्पष्ट होना चाहिए । उपपत्ति (Proof) के लिए खिंची रेखा बिन्दुदार (Dotted) होनी चाहिए ।

(५) उत्तर पुस्तिका को सख्त सतह पर रखना चाहिए ।

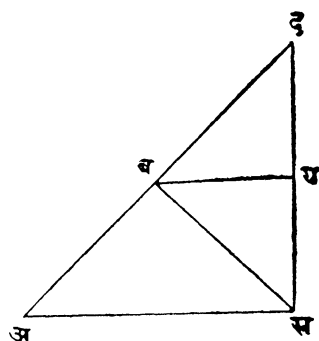
(६) परकाल (Compass) को सिरे से पकड़ कर चलाना चाहिए तथा उसके दोनों भाग बराबर लम्बे होने चाहिए ।

(७) प्रत्येक कार्य करने पर उसको अवश्य दोहरा लेना चाहिए ।

रचना कार्य में विश्लेषण (Analysis in Construction Work)

समस्या (Problem)—एक त्रिभुज की रचना करनी है जिसमें आधार = $1\frac{1}{2}$ " , शेष दो भुजाओं की लम्बाई = २" और उनके विपरीत (Opposite) के एक कोण का मान = 60° हो

विश्लेषण (Analysis)—



माना अ ब स एक त्रिभुज है जिसमें $अब + बस = 2$ " है । यदि अब को बढ़ावें और ब द को ब स के बराबर काटें तो $अद = अब + बस$ यानी $अद = 2$ " अब यदि द स को मिला दें तो $\triangle अस$ बन जावेगा जिसमें अ द दो भुजाओं के योग के बराबर होगा ।

अ स दिये आधार (Base) के बराबर होगा ।

$\angle अस$ दिये कोण के बराबर होगा ।

इस तरह अ स द $\triangle$ की रचना की जा सकती है ।

फिर $\therefore ब द = बस$

$\therefore$ बिन्दु 'ब' स द के बीच में स्थित होगा ।

इस तरह निम्न रचना हुई—

(१) एक सीधी रेखा अ स दिये आधार के बराबर खींचो ।

(२) $\angle$ स अ द = 60° का बनाओ ।

(३) अ द रेखा को २" के बराबर काटो ।

(४) स और द को मिला दो ।

(५) य ब, रेखा स द को विभाजित रेखा होगी जो अ द क ब पर मिलाती है ।

(६) ब स को मिला दो

इस तरह दिया त्रिभुज अ ब स की रचना हो गयी । (अब इसको आसानी से सिद्ध किया जा सकता है)

अध्याय १७
पाठ योजना
(Planning of Lessons)

गणित के सफल शिक्षण के लिए पाठ सूत्र तैयार करना अत्यन्त आवश्यक है। यदि अध्यापक पहले से पाठ सूत्र तैयार कर लेता है तो वह भली-भाँति पढ़ा सकता है। इससे अध्यापक का उस दिन का विषय नियमित हो जाता है, और वह फिर इधर-उधर भटकने से बच जाता है। पाठ सूत्र पहले से बनाने से उसको यह मालूम रहता है कि पढ़ाते समय अमुक समय कौनसा प्रश्न करना है और किस स्थान पर किस शिक्षण सामग्री का प्रयोग करना है। पाठ योजना से अध्यापक में आत्म-विश्वास बढ़ जाता है और वह बालकों के सामने विषय प्रस्तुत करने में भी सफल होता है। अतः प्रत्येक अध्यापक को पाठ पढ़ाने से एक दिन पहले पाठ सूत्र तैयार कर लेना चाहिए।

पाठ सूत्र तैयार करने में सबसे पहले पढ़ाया जाने वाला विषय निर्धारित करना चाहिए। फिर बालकों की अवस्था, उनके समझने की क्षमता, घंटे की अवधि (Duration of Period), पढ़ाये जाने वाले विषय तथा पढ़ाने के ढंग आदि पर विचार करके पाठ सूत्र बनाना

चाहिए। आजकल पाठ सूत्र तैयार करने की प्रथा हर्बर्ट के पदों के अनुसार है। इसमें निम्नलिखित पद होते हैं—

- | | |
|--------------------|----------------|
| १—शीर्षक | ७—उद्देश्य कथन |
| २—सामान्य उद्देश्य | ८—प्रस्तुतीकरण |
| ३—विशिष्ट उद्देश्य | ९—नियमीकरण |
| ४—पूर्व ज्ञान | १०—पुनरावृत्ति |
| ५—सहायक सामग्री | ११—गृह कार्य |
| ६—प्रस्तावना | |

शीर्षक—सबसे ऊपर पृष्ठ के बीच में पाठ-सूत्र संख्या लिखनी चाहिए। पृष्ठ के बाँई ओर तारीख लिखी जाती है इसके बाद पाठ का शीर्षक लिखना चाहिए। शीर्षक इस प्रकार लिखा जाना चाहिए कि उससे बालकों को पढ़ाये जाने वाले पाठ का ठीक ठीक अनुमान हो जावे। इसके बाद पाठशाला का नाम और फिर कक्षा, जिसे पाठ पढ़ाना है, लिखनी चाहिए। इसके बाद घंटे की अवधि लिखते हैं।

सामान्य उद्देश्य—यहाँ पर वे उद्देश्य लिखे जाते हैं जो गणित विषय के होते हैं। जैसे गणित पढ़ाने के तीन उद्देश्य हैं—व्यावहारिक, अनुशासनात्मक तथा सांस्कृतिक। अतः यही तीनों उद्देश्य यहाँ पर लिखने होते हैं।

विशिष्ट उद्देश्य—इसमें वे उद्देश्य लिखे जाते हैं जो किसी पाठ विशेष के पढ़ाने से प्राप्त होते हैं। अतः ये उद्देश्य प्रत्येक पाठ के लिये अलग-अलग होते हैं और प्रायः प्रसंग पर निर्भर करते हैं।

पूर्व ज्ञान—पूर्व ज्ञान का आशय पाठ से सम्बन्धित उन बातों से है जो बालक पहिले से ही जानते हैं। ये बातें उन्होंने चाहे विद्यालय में किसी पाठ में पढ़ी हों या विद्यालय के बाहर अनुभव से प्राप्त की हों। इसी पूर्वज्ञान के आधार पर प्रस्तावना में प्रश्न किये जाते हैं।

सहायक सामग्री—पाठ पढ़ाते समय अध्यापक को जिस प्रकार की सहायक सामग्री के प्रयोग करने की आवश्यकता होती है उस सामग्री का उल्लेख इसके

अन्तर्गत किया जाता है। इस सहायक सामग्री को उसी क्रम में लिखना चाहिये जिस क्रम में उसका प्रयोग किया जावे।

प्रस्तावना—अध्यापक के लिए प्रस्तावना ही सबसे प्रमुख है। प्रस्तावना द्वारा अध्यापक बालकों के मनोविचारों को अपने पाठ के अनुकूल बना लेता है। बालकों के पूर्व ज्ञान और नवीन पाठ में सम्बन्ध जोड़ने के लिए अध्यापक पूर्व ज्ञान के आधार पर प्रश्न पूछता है। इस प्रकार इन प्रश्नों द्वारा बालकों के पूर्वज्ञान और नवीन पाठ में सम्बन्ध जोड़ता है। ये प्रश्न इस प्रकार के होने चाहिए कि बालक को नवीन पाठ पढ़ने के लिए रुचि और उत्साह बढ़े। प्रस्तावना में सात-आठ मिनट से अधिक समय न लगाना चाहिए।

उद्देश्य कथन—प्रस्तावना समाप्त होने पर उद्देश्य कथन किया जाता है। इस समय बालकों को नवीन पाठ का आभास मिल जाता है। उद्देश्य कथन इस प्रकार करना चाहिये कि बालकों को यह मालूम हो जाये कि जो समस्या उनके मस्तिष्क को उद्विग्न कर रही है उसका हल इस नवीन पाठ के पढ़ने से मिलेगा। यह संक्षिप्त, निश्चित और आकर्षक होना चाहिए।

प्रस्तुतीकरण—इसके लिये पृष्ठ को दो भागों में विभाजित करलेते हैं। पहले भाग में पाठ्य वस्तु को स्पष्ट एवं व्यवस्थित रूप से लिखते हैं। दूसरे भाग में पढ़ाने की विधि लिखी जाती है। यदि पढ़ाते समय सहायक सामग्री प्रयोग करनी होती है तो उसका ही उल्लेख इसमें किया जाता है। पाठ्य विषय के विभिन्न भागों में सम्बन्ध आदि पाठ का पूर्ण ज्ञान इसी अवस्था में कराया जाता है। अतः अध्यापक को पाठ-विषय बड़े सोच समझकर रोचक ढंग से प्रस्तुत करना चाहिए। प्रस्तुतीकरण में जल्दी कभी भी न करनी चाहिए।

नियमीकरण—इस अवस्था में अध्यापक प्रस्तुतीकरण में पढ़ाए गए

तथ्यों में तुलना करके निष्कर्ष, परिभाषा, सिद्धांत आदि निकलवाता है। नियमीकरण में अध्यापक को कुशलता पूर्वक ऐसे प्रश्न करने चाहिए कि बालक नियम या सिद्धान्त को स्वयं निकाले। अध्यापक को नियम बताने की आवश्यकता न पड़ने पावे।

पुनरावृत्ति—पाठ समाप्त होने पर अध्यापक को बालकों से ऐसे प्रश्न पछने चाहिए जिससे यह ज्ञात होजावे कि बालकों ने पाठ भली-भाँति समझ लिया है या नहीं। प्रश्न इस प्रकार के पूछे जाने चाहिए जिससे समस्त पाठ दोहर जावे और बालकों की पढ़ाते समय यदि कोई शंका रही हो तो उसका भी समाधान हो जावे।

गृहकार्य—अन्त में पाठ से सम्बन्धित कुछ कार्य बालकों को घर पर करने के लिए दे दिया जाता है। यह कार्य गृहकार्य नामक शीर्षक के अन्तर्गत लिखा जाता है। गृहकार्य अभ्यास के लिए परम आवश्यक है। परन्तु गृह कार्य देते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि गणित में पढ़ाये गए पाठ पर सरल फिर कठिन सब प्रकार के प्रश्नों का उसमें समावेश हो और गृहकार्य इतना ज्यादा न हो कि बालक उसे घर पर न कर सके। गृह कार्य की अगले दिन जाँच भीहोनी चाहिए।

पाठ-सूत्र के सम्बन्ध में सबसे आवश्यक बात यह है कि अध्यापक को अपना पाठ नियत समय में ही समाप्त करने का भरसक प्रयत्न करना चाहिए। न तो ऐसा होना चाहिए कि घण्टा समाप्त होने से पहले ही पाठ समाप्त हो जावे और न ऐसा ही होना चाहिए कि घण्टा समाप्त हो जाय परन्तु पाठ समाप्त न हो। जहाँ तक सम्भव हो पाठ बिल्कुल ठीक घण्टे के साथ समाप्त होना चाहिए।

उदाहरण के लिए कुछ पाठ-सूत्र यहाँ पर दिये जाते हैं।

पाठ-सूत्र १

दिनांक अन्तर समय ४० मिनट

कक्षा ७ विद्यालय

विषय—रेखागणित उपविषय—सूर्य की दूरी ज्ञात करना ।
(रेखागणित का उपयोग)

सामान्य उद्देश्य—(१) छात्रों की तर्क तथा विचार शक्तियों को विकसित करना ।

(२) छात्रों की रचनात्मक शक्तियों को विकास के लिए अवसर देना ।

(३) स्वच्छता, शुद्धता और शीघ्रता की आदतें डालना ।

(४) गणित के नियमों से उनको परिचित करना ।

(५) रेखागणित का दैनिक जीवन में उपयोग करना।

मुख्य उद्देश्य—सूर्य की पृथ्वी से दूरी ज्ञात करना ।

पूर्व ज्ञान—विद्यार्थी समरूप त्रिभुज की भुजाओं के सम्बन्ध को जानते हैं ।

सहायक सामग्री—सूर्य और पैसे का एक प्रतिरूप, चाँदा, परकार, स्केल ।

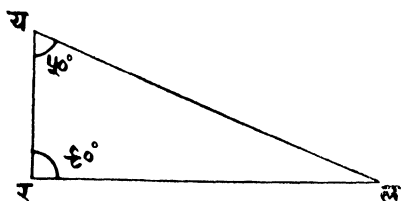
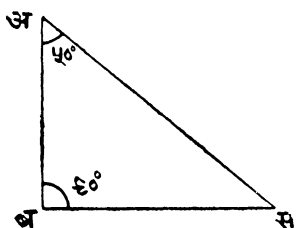
प्रस्तावना—

प्रश्न

- (१) त्रिभुज में कितने कोण होते हैं ?
 (२) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग कितना होता है ?
 (३) त्रिभुज के दो कोणों का योग 150° है तो तीसरा कोण कितना होगा ?

प्रत्याशित उत्तर

- (१) त्रिभुज में तीन कोण होते हैं ।
 (२) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180° समकोण या 180°
 (३) तीसरा कोण = $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ होगा ।



- (४) त्रिभुज अ ब स और य र ल में $\angle ब = \angle र = 50^\circ$, $\angle अ = \angle य = 40^\circ$ तो प्रत्येक में तीसरा कोण कितना है ?
 (५) ये त्रिभुज कैसे हैं ?
 (६) समरूप त्रिभुज की भुजाओं में क्या सम्बन्ध होता है ?
 (७) $\triangle$ अबस और यरल में संगति भुजायें कौन-कौन हैं ?
 (८) इन त्रिभुजों में कौन कौन भुजायें समानुपाती हैं ?
- (४) प्रत्येक $\triangle$ में तीसरा कोण = $180^\circ - (50^\circ + 40^\circ) = 90^\circ$ का होगा ।
 (५) ये त्रिभुज समरूप हैं ।
 (६) समरूप त्रिभुज की संगति भुजायें समानुपाती होती हैं ।
 (७) अब और यर } संगति
 बस „ रल }
 अस „ यल } हैं ।
 (८) अब और य र
 बस „ रल
 अस „ यल

प्रश्न

(९) इनके सम्बन्ध को कैसे लिखोगे ?

(१०) अगर अ ब = ४"
य र = ६"
र ल = ३"
तो ब स का क्या मान होगा ?

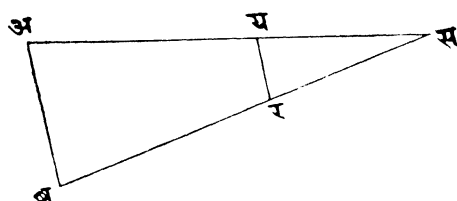
प्रत्याशित उत्तर

(९) अ ब = ब स = अ स
य र = र ल = य ल

(१०) अ ब = ब स
य र = र ल
४ ब स
= ६ र
६ ३
∴ ब स = $\frac{४ \times ३}{६}$
= २"

(११) हम एक भुजा कब ज्ञात कर सकते हैं ?

(११) जब हमको दो संगति भुजाओं तथा उसकी संगति भुजा का मान ज्ञात हो ।



(१२) इस चित्र में कितने त्रिभुज हैं ?

(१२) इस चित्र में दो त्रिभुज हैं—अबस और यरस ।

(१३) हाथ में किताब होने पर धूप में आँखों को प्रकाश से कैसे बचोगे ?

(१३) किताब को आँखों के सामने रख कर ।

अध्यापक सूर्य तथा पैसे की बनी प्रतिरूप को दिखाकर विद्यार्थियों को समझायेगा कि सूर्य को ढकने के लिए वस्तु को किसी निश्चित दूरी तक रखना पड़ता है । अगर वस्तु सूर्य की ओर ले जाते हैं तो वस्तु सूर्य को नहीं ढकती है ।

आदर्श प्रश्न—

एक पैसा जिसका व्यास १" है, आँख से लगभग

३ गज की दूरी पर है और इस अवस्था में वह सूर्य को ढक लेता है। सूर्य की दूरी ज्ञात करो जब उसका व्यास ८,७०,००० मील है।

विश्लेषण—

प्रश्न

“प्रत्याशित उत्तर

(१) इस प्रश्न में क्या दिया है ? (१) पैसे तथा सूर्य का व्यास तथा पैसे की आंख से दूरी।

(२) प्रश्न में क्या ज्ञात करना है ? (२) सूर्य की दूरी ज्ञात करनी है।

इस दशा में अध्यापक समभायेगा कि चित्र खींचना आवश्यक है और विद्यार्थियों की सहायता से चित्र खींचेगा।

(३) हमको कौन सी दूरी ज्ञात करनी है ? (३) हमको ब स की दूरी ज्ञात करनी है।

(४) ब स की लम्बाई कब मालूम हो सकती है ? (४) जब हमको उसकी संगति भुजा तथा दो और संगति भुजाओं का मान ज्ञात हो।

(५) संगति भुजाओं का अनुपात कब मालूम हो सकता है ? (५) जब त्रिभुज समरूप हों

(६) त्रिभुज समरूप कब होते हैं ? (६) जब उनके तीनों कोण बराबर हों।

(७) ब स की लम्बाई ज्ञात करने के लिए सबसे पहिले क्या करेंगे ? (७) त्रिभुज समरूप करेंगे

संश्लेषण—

(१) इस चित्र में कौन कौन से त्रिभुज हैं ? (१) $\triangle$ अ ब स और $\triangle$ य र स

(२) ये समरूप कब हो सकते हैं ? (२) जब कोण $\angle$ अ = $\angle$ य $\angle$ ब = $\angle$ र

(३) दो कोण बराबर होने पर तीसरे (३) वे भी बराबर हैं।

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

कोण में क्या

सम्बन्ध है ?

(४) भुजा अ ब संगति की (४) य र भुजा है ।

भुजा क्या है ?

(५) ब स की संगति भुजा (५) ब स की र स है ।

क्या है ?

(६) अ ब की लम्बाई (६) अ ब = $\frac{८७००००}{२}$ मील

क्या है ?

= ४३५००० मील

(७) य र की लम्बाई (७) य र = $\frac{३}{२}$ है ।

क्या है ?

(८) र स की लम्बाई (८) र स = $३ \times ३ \times १२$ है

क्या है ?

आदर्श हल—

त्रिभुज अ ब स और य र स हैं जिनमें अ ब और य र तथा ब स और र स संगीत भुजायें हैं ।

$$\text{अनुपात} = \frac{\text{अ ब}}{\text{य र}} = \frac{\text{ब स}}{\text{र स}}$$

$$= \frac{४३५०००}{\frac{३}{२}} = \frac{\text{ब स}}{३ \times ३ \times १२}$$

$$\therefore \frac{३}{२} \text{ ब स} = ४३५००० \times ३ \times ३ \times १२$$

$$\therefore \text{ब स} = ४३५००० \times ३ \times ३ \times १२ \times २ \text{ मील}$$

$$\therefore \text{सूर्य की दूरी} = ६,३६६०००० \text{ मील ।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न—पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी २,४,०००० मील है । एक गोला जिसका अर्ध व्यास २" है आँख से ५ गज की दूरी पर है, यह लगभग चन्द्रमा को ढक लेता है । चन्द्रमा का व्यास ज्ञात करो ।

(उत्तर=१३३३.२ मील)

गृह कार्य—सूर्य तथा चन्द्रमा से आने वाले प्रकाश की किरणों को चित्र द्वारा समझाओ ।

पाठ-सूत्र २

विद्यालय

दिनांक

कक्षा ६

अवधि ४० मि०

विषय—अंक-गणित

उप-विषय—दशमलव के गुणा पर कठिन प्रश्न

सामान्य उद्देश्य—

- (१) छात्रों के दैनिक जीवन में आने वाली गणित सम्बन्धी समस्याओं को हल करने की क्षमता उत्पन्न करना ।
- (२) छात्रों की तर्क एवं विचार-शक्ति को विकसित करना ।
- (३) छात्रों की रचनात्मक शक्ति के विकास के लिये अवसर प्रदान करना ।
- (४) छात्रों में स्वावलम्बन, आत्म-निरीक्षण, सत्य-प्रियता, दत्तचित्तता, शुद्धता एवं स्वच्छता आदि अभीष्ट नैतिक व मानसिक गुणों को जीवन का स्थायी अंक बनाने के लिये अवसर देना ।
- (५) छात्रों को गणित के नियमों से परिचित कराना तथा रुचि उत्पन्न कराना ।

विशिष्ट उद्देश्य—

छात्रों को दशमलव के गुणा पर कठिन प्रश्न हल करने की क्षमता प्रदान करना ।

पूर्वज्ञान—

(१) छात्र साधारण गुणा जानते हैं ।

(२) छात्र दशमलव के सरल गुणा जानते हैं ।

प्रस्तावना—

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

यदि एक रिक्शे का एक घण्टे का किराया ५० न० पैसे है तो ३ घण्टे का किराया क्या होगा ?
यदि मोटर का किराया ३.५ न० पैसे प्रति मील है तो १५ मील का किराया कितना देना पड़ेगा ?

१.५० रु०

५२.५ न० पै०

यदि आगरे से देहली जाने में १. २५ रु० ताँगे में और ३. ३७ रु० रेल में व्यय हुये तो बताओ कुल कितना किराया खर्च हुआ ?

४.६२ रु०

विषय प्रवेश—अध्यापक फोल्डर पर लिखे हुए प्रश्न को प्रस्तुत करने के बाद कितने ही विद्यार्थियों से पढ़वायेगा ।

आदर्श प्रश्न—आगरे से शिमले पहुँचने तक का कुल किराया कितना होगा, यदि आगरे से रेल द्वारा अम्बाला २४५ मील तथा अम्बाले से शिमला मोटर द्वारा ६० मील चलना है ।

रेल का किराया ३.७ न० पै० प्रतिमील और मोटर का किराया ८.३३ न० पैसे प्रतिमील है ।

विश्लेषण

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

(१) प्रश्न में क्या दिया है ?

(१) आगरे से अम्बाले की रेल द्वारा दूरी २४५ मील;

(२) अम्बाले से शिमले की मोटर द्वारा दूरी ६० मील;

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

- (१) रेल के किराये की दर ३.७ न० पै० प्रतिमील;
(४) मोटर के किराये की दर ८.३३ न० पै० प्रतिमील।
- (२) प्रश्न में क्या ज्ञात करना है ? (२) आगरे से शिमले तक का किराया ज्ञात करना है।
- (३) आगरे से शिमले तक का किराया कब ज्ञात हो सकता है ? (३) जब आगरे से अम्बाले तक का रेल का किराया ज्ञात हो तथा अम्बाले से शिमले तक का मोटर का किराया ज्ञात हो।
- (४) रेल का किराया कब ज्ञात हो सकता है ? (४) जब रेल द्वारा यात्रा की कुल दूरी ज्ञात हो तथा रेल द्वारा किराये की दर ज्ञात हो।

नोट :—अध्यापक संकेत करेगा कि कुल यात्रा की दूरी तथा किराये की दर ज्ञात है।

- (५) मोटर का किराया कब ज्ञात हो सकता है ? (५) जब मोटर द्वारा यात्रा की कुल दूरी ज्ञात हो और मोटर के किराये की दर ज्ञात हो।

नोट :—अध्यापक संकेत द्वारा बता देगा कि मोटर द्वारा यात्रा की दूरी तथा मोटर के किराये की दर ज्ञात है।

संश्लेषण

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

- (१) रेल द्वारा यात्रा की दूरी कितनी है ? रेल द्वारा यात्रा की दूरी २४५ मील है।
- (२) रेल के किराये की दर क्या है ? रेल के किराये की दर ३.७ न० पै० प्रतिमील है।
- (३) जब एक वस्तु का मूल्य मालूम हो तो अधिक का मूल्य मालूम करने के लिये क्या करेंगे ? अधिक का मूल्य मालूम करने के लिये वस्तु की संख्या को दर से गुणा कर देंगे।

प्रश्न
(४) अब २४४ मील को ३.७
न० पै० से गुणा करो ।

प्रत्याशित उत्तर
२४५
३.७
१७१५
७३५
६०६.५ न० पै०

(५) मोटर द्वारा यात्रा की
दूरी कितनी है ?

मोटर द्वारा यात्रा की दूरी ६०
मील है ।

(६) मोटर के किराये की दर
क्या है ?

मोटर के किराये की दर ८. ३३
न० पै० प्रतिमील है ।

(७) मोटर का ६० मील का
किराया मालुम करने के
लिए क्या करेंगे ?

मील को दर से गुणा कर देंगे ।

(८) ६० मील को ८.३३ न०
पै० से गुणा करो ।

६०
८.३३
७
२७०
७२०
७४६.७० न० पै०

(९) अब आगरे से शिमले तक
का किराया ज्ञात करने
के लिए क्या करें ?

रेल के कुल किराये में मोटर का
कुल किराया जोड़ना चाहिए ।

(१०) दोनों का कुल किराया
कितना हुआ ?

६०६.५
७४६.७०
१६५३.२० न० पै०

(११) १६५६.२ न० पै के रुपये
बनाओ ।

१६.५६ रुपये

आवर्ष हल:—

रेल द्वारा यात्रा की दूरी २४५ मील
रेल द्वारा किराये की दर ३.७ न० पै० प्रतिमील

∴ रेल का कुल किराया = २४५

$$\begin{array}{r} ३'७ \\ १७१५ \\ ७३५ \\ \hline ६०६'५ \text{ न० पै०} \end{array}$$

मोटर द्वारा यात्रा की दूरी ६० मील

मोटर द्वारा किराये की दर ८'३३ न० पैसे प्रतिमील

∴ मोटर का कुल किराया = ६०

$$\begin{array}{r} ८'३३ \\ \hline २७० \\ २७० \\ ७२० \\ \hline ७४६'७० \text{ न० पै०} \end{array}$$

६०६'५

कुल किराया

$$= \frac{७४६'७०}{१६५६'२०}$$

१६'५६ रुपये उत्तर

अभ्यासार्थ प्रश्न—

(१) देहली से फतेहाबाद तक का कुल कितना किराया देना पड़ेगा, यदि देहली से आगरा रेल द्वारा १३० मील और आगरे से फतेहाबाद मोटर द्वारा २१ मील हो ।

रेल के किराये की दर २'७३ न० पै० प्रतिमील;

मोटर के किराये की दर ३'३३ न० पै० प्रतिमील;

उत्तर ४'२५ रुपये

(२) यदि राम ने १४० मन चीनी ४०'७५ रु० प्रतिमन के हिसाब से तथा १७३ मन चावल ३८'५६ रु० प्रतिमन के हिसाब से बेचे । बताओ उसने कुल कितने रुपये का माल बेचा ?

उत्तर १२३७५'८८ रुपये

(३) हरी ने १७५ मन घी २२०'४५ रु० प्रतिमन के भाव से खरीदा और २२६'७२ रु० प्रतिमन के भाव से बेच डाला तो बातओ उसे कुल कितना लाभ हुआ ।

उत्तर १०६७'७२५ रु०

गृह-कार्य—

५३० विद्यार्थियों को ६५ छटाँक प्रति विद्यार्थी के हिसाब से मिठाई बाँटी गई। बाँटने के पश्चात् १२७५ सेर मिठाई शेष रही। बताओ बाँटने वाले के पास कुल कितनी मिठाई थी।

उत्तर ५ मन २८ सेर १ छटाँक

पाठ-सूत्र ३

दिनांक कक्षा ८ समय ४० मि०
विद्यालय

विषय-गणित

उप विषय-बीजगणित

- सामान्य उद्देश्य—(१) दैनिक जीवन के व्यवहार के लिए बालकों को संख्या, समय और स्थान से सम्बन्धित स्पष्ट विचार करने के योग्य बनाना ।
- (२) जीवन की समस्याओं को बुद्धिमानी, सावधानी, आत्म-विश्वास, विश्लेषण, तर्क व शीघ्रता पूर्वक सुलझाने की कुशलता उत्पन्न करना ।
- (३) उन्हें चिन्तन की मौलिकता, तर्क-संगत विधि से निरीक्षण व निर्णय करने का अभ्यास कराना ।
- (४) वैज्ञानिक अनुसंधानों के महत्व को समझने का आधार उत्पन्न करना ।
- (५) बालकों को शीघ्रता, शुद्धता एवं उचित ढङ्ग से कार्य करने की प्रेरणा देना और एकाग्रचित होकर तर्क सहित कार्य करने की क्षमता उत्पन्न करना ।

(६) अन्य विषयों के गणित सम्बन्धी तथ्यों को समझने की क्षमता उत्पन्न करना । सांख्यकीय एवं गणनात्मक अभिव्यक्तियों को समझने के लिए सक्षम बनाना ।

(७) अपने विचारों को संक्षेप में व्यक्त करने और दूसरों द्वारा इस विधि से व्यक्त किए गए विचारों को समझने की क्षमता से बालकों को युक्त करना ।

विशिष्ट—छात्र दैनिक जीवन में काम आने वाले प्रश्नों को युग पत् उद्देश्य समीकरण की मदद से हल करना जान जाय ।

पूर्वज्ञान :—छात्र युगपत् समीकरण संबंधी प्रश्नों को साधारण रूप में हल करना जानते हैं । साथ ही यात्रा भी कर चुके हैं ।

प्रस्तावना—

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

- | | |
|--|---|
| <p>(१) हवाई जहाज से यात्रा करने पर प्रत्येक व्यक्ति २० पौण्ड सामान अपने साथ में फ्री ले जा सकता है । यदि आदमी के पास २५ पौण्ड सामान है, तो उसको कितने वजन का किराया देना पड़ेगा ?</p> | <p>(१) ५ पौण्ड का किराया देना पड़ेगा ।</p> |
| <p>(२) २ आदमियों को [फ्री ले जा सकने वाले सामान को छोड़कर] १०) किराया देना पड़ता है, उसी सामान पर १ आदमी को [फ्री सामान को छोड़कर] (१०।।) देना पड़ता है, तो कितने किराये का अन्तर पड़ा ?</p> | <p>(२) आठ आने का अन्तर पड़ा ।</p> |
| <p>(३) यह आठ आने का अन्तर क्यों पड़ा ?</p> | <p>(३) फ्री ले जाने वाला सामान एक ही आदमी को मिला ।</p> |

पाठ्योपस्थापन-दो साथियों को, जिनके पास कुल मिलाकर ६ मन आदर्श प्रश्न— सामान है, रेल द्वारा अलग-अलग १ रु० ४ आना और १ रु० १४ आना सामान का किराया देना पड़ता है। यदि कुल सामान एक ही आदमी के पास होता तो उसे कुल सामान के ३ रु० ७ आना किराया देना पड़ता है। बताओ प्रत्येक यात्री अपने साथ में कितना सामान बिना महसूल दिए ले जा सकता है और प्रत्येक के पास कितना-कितना सामान है।

विश्लेषण—

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

(१) प्रश्न में क्या बातें दी हुई हैं ?

(१) दोनों साथियों का कुल मिलाकर सामान ६ मन।

(२) फ्री ले जा सकने वाले सामान को छोड़कर दोनों के सामान का अलग अलग महसूल १ रु० ४ आना व १ रु० १४ आना
३ रु० २ आना

(३) ६ मन सामान का (फ्री सामान को छोड़कर) एक आदमी द्वारा दिया जाने वाला महसूल=३ रु० ७ आना।

(२) दोनों साथियों को (२) ५ आना फ्री जाने वाले अलग-अलग मिलाकर सामान (फ्री लगेज) ३=) महसूल देना पड़ता का महसूल है।

है और उसी सामान के १ आदमी को ३ रु० ७ आ० देने पड़ते हैं तो इसमें हमें और

प्रश्न

क्या बात मालूम हो
सकती है ?

(३) प्रश्न में क्या मालूम
करना है ?

प्रत्याशित उत्तर

(३)(अ) प्रत्येक आ० अलग
अलग अपने साथ में
कितना सामान बिना
महसूल ले जा सकता
है ।

(ब) प्रत्येक साथी का
अलग-अलग कितना
सामान है ।

(४) प्रत्येक यात्री अलग
अलग अपने साथ में
कितना सामान
बिना महसूल दिए
ले जा सकता है यह
हमें अज्ञात है ।

(अ) अज्ञात राशि
को मालूम करने के
लिए हम क्या करते
हैं ?

(४) हम मान लेते हैं ।

नोट—अध्यापक संकेत करेगा कि माना प्रत्येक यात्री अपने
साथ में य सेर सामान फ्री ले जा सकता ।

(५) य का मान हम (५) जब य में कोई समीक-
कब निकाल सकते रण ज्ञात हो ।
हैं ?

(६) य का समीकरण (६) जब य में [फ्री सामान
हम कब ज्ञात कर जाने वाले में] कोई
सकते हैं ? सम्बन्ध दिया हुआ हो ।

नोट—अध्यापक संकेत करेगा कि प्रश्न में हमें सम्बन्ध तो
ज्ञात है ।

संश्लेषण—

प्रश्न

(१) बिना महसूल ले

प्रत्याशित उत्तर

दो बातें ज्ञात हैं—

जाने वाले सामान (अ) दोनों आ० का कुल
के सम्बन्ध में कौन मिलाकर महसूल ३
कौन सी बातें ज्ञात ह० २ आ० या ५०
हैं? आना पड़ता है ।

(ब) अकेले आ० को ३ ह०
७ आ० देना पड़ता है

(२) फ्री सामान कितना (२) य सेर माना है ।
माना है ?

(३) फ्री ले जाने वाले (३) ६ मन या २४० सेर—
सामान को छोड़कर य सेर का महसूल देना
१ आदमी को, कितने पड़ेगा ।
सामान का महसूल
देना पड़ेगा ?

(४) ५ आना कितने (४) य सेर का देना पड़ता
वजन का महसूल है ।
देना पड़ता है ?

(५) ∴ ३।३) या ५५ (५) $\frac{५५ \times य}{५} = ११$ सेर का
आना कितने देना पड़ेगा ।
सामान का देना
पड़ेगा ?

(६) ∴ ११ य सेर और (६) ११ य = २४०—य
२४०— य सेर में
क्या सम्बन्ध है ?

नोट—(७) इसी प्रकार अध्यापक दूसरे सम्बन्ध से भी छात्रों
को बताएगा कि दोनों यात्री २ य सेर सामान
अपने साथ में फ्री ले जाते हैं ।

∴ ३=) या ५० आना उनको $५० \times २ य = १० य$ सेर का
कितने सामान का देना पड़ता तथा $१० य = २४०—२ य$
है । होगा ।

(८) अब अध्यापक छात्रों को अपनी-अपनी कापी पर
इस समीकरण को हल करने का आदेश देगा तथा
अध्यापक स्वयं निरीक्षण कर निम्न प्रश्न पूछेगा—

(६) य का मान कितने के बराबर आया ? (६) $y = 20$ आया

(१०) यह २० क्या चीज आया ? (१०) २० सेर जाने वाला फ्री सामान आया यही उत्तर है (पहला)

विश्लेषण—

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

(१) दूसरी बात हमें प्रश्न में क्या निकालनी थी ? (१) प्रत्येक का कितना कितना सामान है ।

(२) प्रत्येक का कितना कितना सामान है, यह हम कब निकाल सकते हैं ? (अ) जब यह मालूम हो कि- (अ) कितना किराया देना पड़ता है । (ब) किराये की दर क्या है

नोट—अध्यापक संकेत करेगा कि यह तो ज्ञात है कि प्रत्येक को कितना-कितना किराया देना पड़ता है ।

(३) लेकिन किराये की दर क्या है; यह हम कब ज्ञात कर सकते हैं ? (३) यह हम तब ज्ञात कर सकते हैं जब यह मालूम हो कि कितने सामान पर कितना किराया लगता है ।

नोट—अध्यापक संकेत करेगा कि फ्री सामान पर ५ आ० लगता है और फ्री सामान हमें २० सेर ज्ञात है ।

संश्लेषण—

$\therefore$ ५ आना लगता है

$\therefore$ २० " "

२० सेर पर

$$= \frac{20 \times 20}{5} = 80 \text{ सेर}$$

पर किराया लगता है

२० सेर

अब प्रत्येक यात्री कितना सामान फ्री ले जा सकता है ?

$\therefore$ कुल सामान उसके $८० + २०$ सेर = १००
 कितना होगा ? सेर या २ मन २० सेर
 एक का सामान २ मन ६ मन = २ म० २० सेर
 २० सेर है और कुल ६ = ३ मन २० सेर दूसरे
 मन है तो दूसरे का साथी का
 कितना है ?

$\therefore$ उत्तर २० सेर सामान प्रत्येक यात्री फ्री ले जा
 सकता है तथा २ मन २० सेर, ३ मन २० सेर
 सामान अलग अलग प्रत्येक यात्री का

श्यामपट कार्य (आदर्श हल)

माना य सेर सामान प्रत्येक यात्री अपने साथ में फ्री ले जा सकता है । कुल सामान मिलाकर = ६ मन

$\therefore$ ६ मन या २४० सेर—य सेर सामान पर अकेले यात्री को किराया पड़ेगा और २४०—२ य सेर का दोनों यात्रियों को अलग-अलग किराया पड़ेगा । दोनों को अलग-अलग किराया $(१।) + (१।।) = ३।$ देना पड़ता है तथा अकेले यात्री को $३।\equiv$ देना पड़ता है

$\therefore ३।\equiv - ३। = १।$ किराया फ्री सामान का किराया है

$\therefore$ फ्री सामान हमने य सेर माना है

$\therefore$ ५ आना किराया पड़ता है य सेर का

$\therefore$ ५५ आना $\therefore \frac{५५ \times य}{५} = ११ य$ सेर

$\therefore$ समीकरण $११ य = २४०$ —य बना

$\therefore ११ य + य = २४०$

$\therefore य = २०$ सेर सामान फ्री जाने वाला

अब अलग-अलग सामान निकालना है—

$\therefore$ ५ आना किराया है २० सेर का

$\therefore २० \therefore \frac{२० \times २०}{५} = ८०$ सेर किराया पड़ने वाला

$\therefore$ कुल सामान एक यात्री का $८० + २० = १००$ सेर या २ मन २० सेर

$\therefore$ कुल सामान दूसरे यात्री का ६ मन = २ मन २० सेर = ३ मन २० सेर

$\therefore$ उत्तर २० सेर फ्री जाने वाला सामान

२ मन २० सेर, ३ मन २० सेर सामान प्रत्येक का

उत्तर की जाँच—

प्रश्न	उत्तर
(१) प्रत्येक यात्री का कितना कितना सामान है ?	२ मन २० सेर, ३ मन २० सेर
(२) कुल मिलाकर कितना हुआ	२ म० २० + ३ मन २० सेर = ६ मन (सही है)
(३) प्रत्येक कितना-कितना सामान फ्री ले जा सकता है ?	२० सेर
(४) अलग २ कितने सामान पर किराया पड़ेगा ?	२ मन, ३ मन पर
(५) किराये की दर क्या आई ∴ २ मन, ३ मन पर क्या मह-सूल पड़ेगा ?	५ आ० २० सेर पर १ रु० ४ आ०, १ रु० १४ आना (सही है)
(६) एक यात्री को कितने सामान का पड़ेगा ?	५ मन २० सेर पर
(७) कितना किराया पड़ेगा ?	३ रु० ७ आना पड़ेगा (सही है)।

अभ्यास कार्य—

समय १० मि०

(१) दो यात्रियों के पास मिलाकर १ मन २० सेर सामान है। उनको अलग-अलग १० आने और १ रु० १४ आना उस सामान का किराया पड़ता है जो फ्री लगेज के (सामान) अतिरिक्त होता है। यदि वह सारा सामान एक ही यात्री के पास होता तो उसको ५ रुपया किराया पड़ता। बताओ प्रत्येक यात्री अपने साथ में कितना सामान बिना किराया दिये (फ्री लगेज) ले जा सकता है और प्रत्येक का कितना कितना सामान है ?

उ० = २० सेर फ्री सामान जा सकता है

तथा २५ सेर, ३५ सामान है।

गृह कार्य—

एक यात्री के पास ७ य + ६ र सेर सामान है उसको २४ में खरीदता है। दूसरा उसको ६ य + ७ सेर के ३२ में खरीदता है तो य और र सेर का मूल्य अलग-अलग बताओ।

पाठ सूत्र ४

दिनांक
कक्षा—६

विद्यालय—
अन्तर—

विषय—रेखागणित समय—४० मिनट

सामान्य उद्देश्य—(१) छात्रों की निर्माणात्मक, निरीक्षणात्मक एवं पूर्ण विचार करने की शक्ति को जाग्रत करना ।

(२) छात्रों को चित्त एकाग्र करने की क्षमता प्रदान करना ।

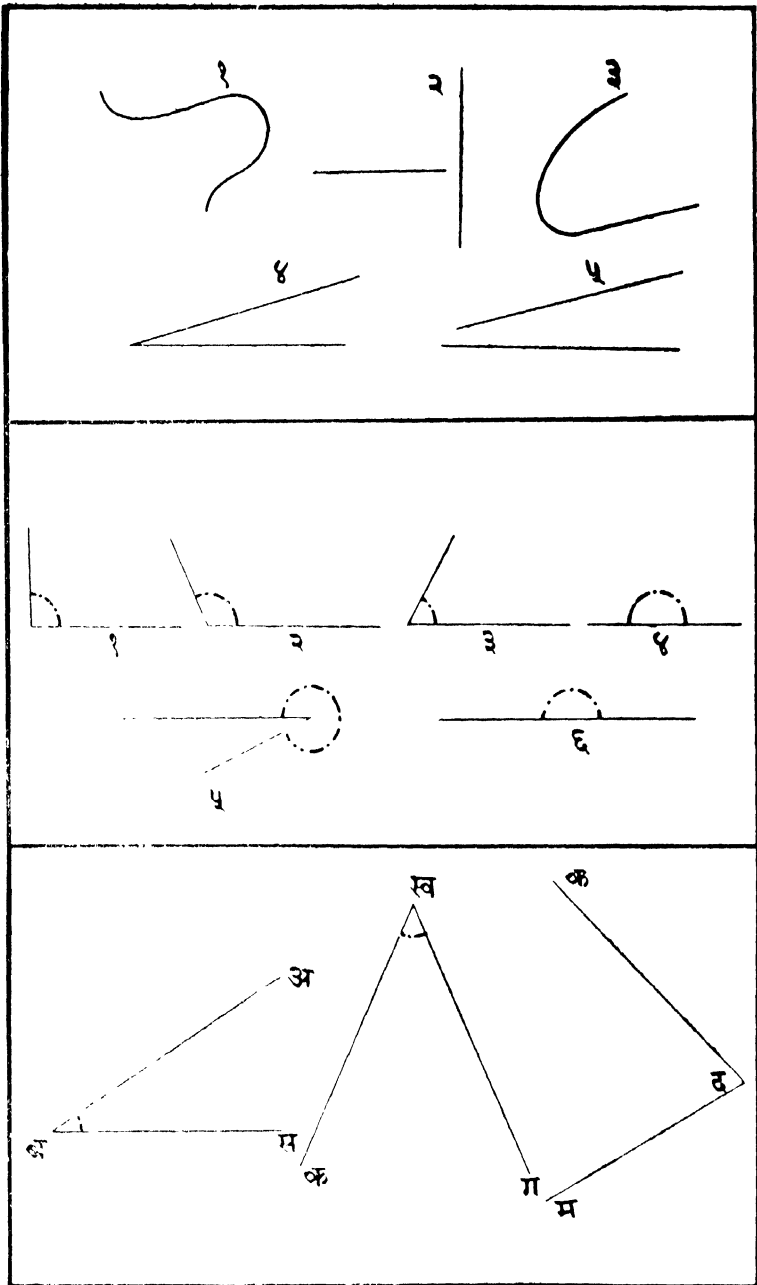
(३) छात्रों में अनुसन्धान करने की प्रवृत्ति जाग्रत करना ।

(४) गणित ज्ञान के प्रयोग द्वारा व्यावहारिक कुशलता प्रदान करना ।

(५) गणित अध्ययन के प्रति रुचि जाग्रत करना

विशिष्ट उद्देश्य—छात्रों को त्रिभुज के अन्तः कोणों का ज्ञान कराना ।

सहायक सामग्री—कागज की चिटों पर बने हुए कोण, कागज के कटे हुए त्रिभुज, कैंची, दफती व गोंद ।



पूर्वज्ञान—छात्र कोणों के भेदों, उनके नापने एवं त्रिभुज की आकृति से परिचित हैं।

प्रस्तावना—

प्रश्न

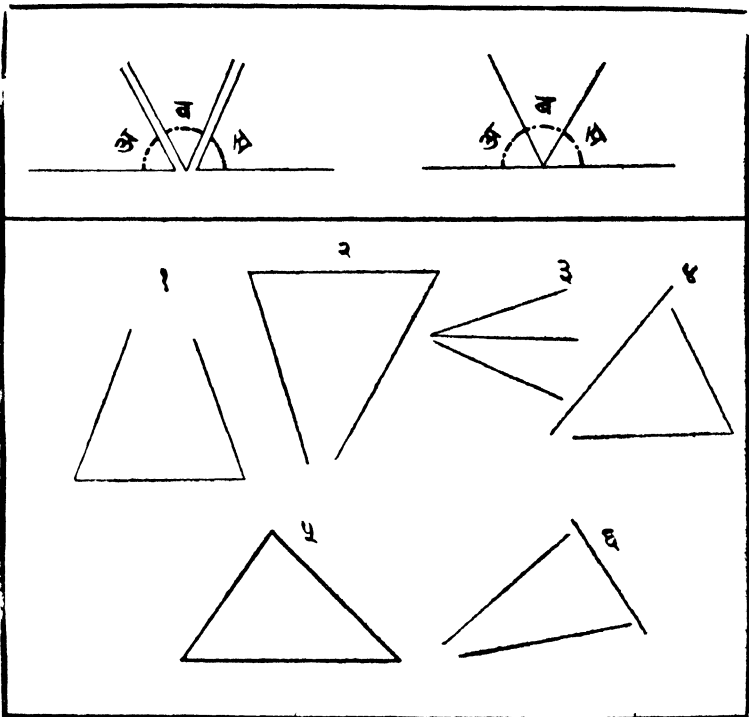
प्रत्याशित उत्तर

श्यामपट पर क्रम १ की आकृतियाँ बना कर

(१) इन आकृतियों में चौथी आकृति कोण है।
कौनसी आकृति कोण है ?

(२) कोण की नाप को कोण की नाप को हम किस प्रकार हम किस प्रकार व्यक्त करते हैं ? व्यक्त करते हैं ?

श्यामपट पर पिछले पृष्ठ पर बनी क्रम २ आकृतियाँ बनाकर



प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

बनाकर—

- (३) इन छः आकृतियों में कौनसी चौथी आकृति सरल कोण
आकृति सरल कोण है ? है ।
(४) इन आकृतियों में बृहत्कोण बृहत्कोण की आकृति
की आकृति कौन है ? पाँचवी है ।

नोट—पिछले पृष्ठ पर चिपकी हुई कागज की चिट के समान प्रत्येक विद्यार्थी को एक एक चिट दे दी जायेगी, जिन पर इसी प्रकार के कोण बने होंगे । छात्रों को कोण नापने की पूर्वज्ञान परीक्षा हेतु उनके द्वारा अध्यापक इन कोणों को नपवायेगा । जब छात्र कार्य कर रहे होंगे, अध्यापक निरीक्षण करेगा ।

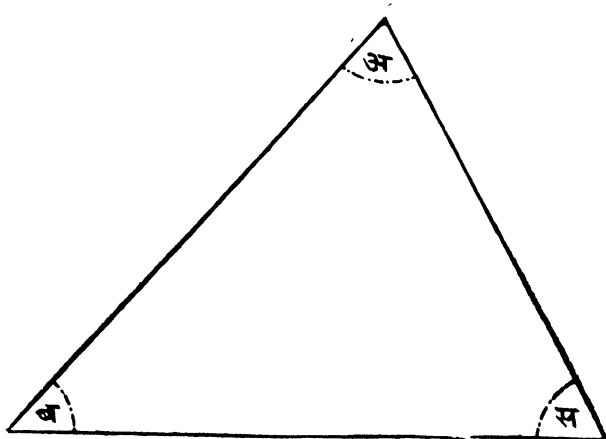
पिछले पृष्ठ पर बनी कोणों को आकृतियों को श्यामपट पर बनाकर—

- (५) $\angle$ अ, $\angle$ ब, तथा $\angle$ स कटे हुए इन तीनों कोणों
अलग अलग तीनों कोणों को परस्पर जोड़ देने से दूसरी
को किस प्रकार दूसरी आकृति का रूप बना सकता
आकृति का रूप दिया जा है ।
सकता है ?

पिछले पृष्ठ पर बनी अन्तिम क्रम की आकृतियों को श्यामपट पर बनाकर—

- (६) इन आकृतियों में कौन सी इन आकृतियों में पाँचवीं
आकृति त्रिभुज है ? आकृति त्रिभुज है ।
(७) इस त्रिभुज में कितने अन्तः त्रिभुज में तीन अन्तः
कोण हैं ? कोण हैं ।

विषय प्रवेश —



प्रयोगात्मक कार्य—अध्यापक विभिन्न आकार के कटे हुए कागज के त्रिभुजों में से एक एक त्रिभुज प्रत्येक विद्यार्थी को दे देगा, तत्पश्चात् त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों को नापकर (उन तीनों कोणों का नाम, प्रत्येक कोण के सामने उसकी नाप तथा अन्त में तीनों कोणों का योग) विद्यार्थियों से अपनी अपनी कापी पर लिखने लिए कहा जाएगा। विद्यार्थियों के कार्यरत होने पर अध्यापक उनका निरीक्षण करेगा व त्रुटि करने वाले विद्यार्थियों की सहायता करेगा। विद्यार्थियों के कार्य कर चुकने पर अध्यापक फोल्डर को खोलेगा, जिसमें किम्नांकित तालिका बनी होगी।

त्रिभुज संख्या	∠ अ की नाप	∠ ब की नाप	∠ स की नाप	योग
१				
२				
३				
४				
५				
६				
७				

अध्यापक विद्यार्थियों के द्वारा नापे गये त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों की पृथक् पृथक् नाप व तीनों कोणों का योग इस तालिका पर उनसे पूछ पूछ कर लिखेगा। अधिकांश विद्यार्थियों के तीनों कोणों का योग 180° अंश आएगा, किन्तु कोणों के नापने में त्रुटि होने के कारण कुछ विद्यार्थियों के त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग 180° अंश से कम या अधिक आना सम्भव है।

प्रश्न

- (१) त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग कितना हुआ ?

प्रत्याशित उत्तर

त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग 180° अंश हुआ।

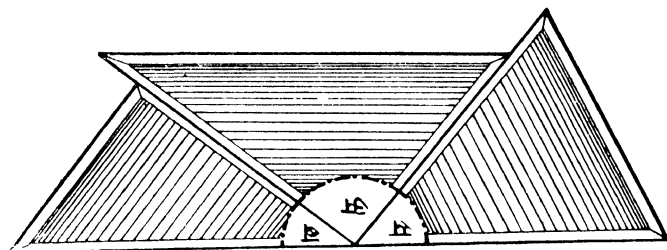
अध्यापक कथन—नापने की त्रुटि के कारण कुछ विद्यार्थियों के त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग 180° अंश या दो समकोण से कुछ कम या अधिक हो गया है। वास्तव में त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग 180° अंश या दो समकोण ही होता है।

- (२) यदि त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग बिना नापे 180° अंश या दो समकोण सिद्ध करना चाहें तो क्या करना चाहिए ?

त्रिभुज के तीनों कोणों को काट कर एक दूसरे से जोड़ना चाहिए।

(३) इन तीनों कोणों को जोड़ने से यह कब सिद्ध हो सकता है कि इनका योग 180° अंश या दो समकोण है ?

यदि इन तीनों कोणों को जोड़ने से एक सरल कोण बन जावे ।



अध्यापक के कागज त्रिभुज के तीनों कोणों को काटकर दफती पर एक-दूसरे से जोड़ कर चिपका देगा । यही कार्य विद्यार्थियों से भी कराया जायेगा । तीनों कोणों को जोड़ने से एक सरल कोण बन जायेगा ।

नियम निर्धारण—

(४) त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग कितना होता है ?

त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग 180° अंश या दो समकोण होता है ।

अभ्यास कार्य—

समय—५ मिनट

(१) $\triangle$ अ ब स में $\angle अ = 40^\circ$, $\angle ब = 60^\circ$ तो $\angle स = ?$

(२) $\triangle$ क ख ग में $\angle क = 80^\circ$, $\angle ग = 50^\circ$ तो $\angle ख = ?$

(३) $\triangle$ य व र में $\angle य + \angle र = 130^\circ$ तो $\angle व = ?$

गृहकार्य— $\triangle$ प द म में $\angle य + \angle द = 110^\circ$ तो $\angle म = ?$

पाठ-सूत्र ५

दिनांक विद्यालय

कक्षा—७ अ विषय—अंकगणित उपविषय “वृत्त का क्षेत्रफल अन्तर
ज्ञात करना ।” समम ३५

सामान्य-उद्देश्य—(१) बालकों में प्राकृति एवं मानवीय क्रिया कलापों
को सूक्ष्म एवं यथार्थ रूप में समझने की योग्यता
उत्पन्न करना ।

(२) उन्हें तर्क संगत ढंग से सोचने एवं निर्णय करने
का क्रमबद्ध अभ्यास कराना ।

(३) उनके चिन्तन को मौलिकता, स्पष्टता एवं यथा-
र्थता प्रदान करना ।

(४) सत्य के अन्वेषण एवं साक्षात्कार की प्रेरणा
देकर उनके चरित्र का निर्माण करना ।

(५) उनमें सावधानता, आत्मविश्वास, रचनात्मक-
कल्पना एवं धैर्य आदि गुणों का विकास
करना ।

विशिष्ट-उद्देश्य—वृत्त के क्षेत्रफल निकालने की विधि ज्ञात करना ।

सहायक सामग्री—गणितीय उपकरण ।

पूर्व ज्ञान—(१) छात्र 'वृत्त की परिधि' 'व्यास का सम्बन्ध' निकालना ज्ञात कर चुके हैं। अतः वे 'π' (पाई) से भली-भाँति परिचित हैं और आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालना जानते हैं।

प्रस्तावना—अध्यापक पूर्व-ज्ञान के आधार पर छात्रों से निम्नलिखित प्रश्न करेगा।

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

(१) यदि एक वृत्त का व्यास ७" हो तो उसकी परिधि कितनी होगी ?

(१) वृत्त की परिधि २२" होगी

(२)

अर्द्ध व्यास	व्यास	परिधि	प्रत्याशित उत्तर
—	१४"	?	४४ इंच
३½"	?	?	२२ इंच
१०½"	?	?	६६ इंच
—	य	?	३२ य

(अध्यापक कक्षा में रक्खी हुई मेज की ओर संकेत करते हुए प्रश्न करेगा)

(३) यदि इस मेज की लम्बाई ५ फीट हो और चौड़ाई ३ फीट हो तो इस मेज का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(३) मेज का क्षेत्रफल १५ वर्गफीट होगा।

(४) यदि इस बोर्ड की लम्बाई य और चौड़ाई र हो तो इस बोर्ड (श्यामपट) का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(४) बोर्ड का (श्यामपट का) क्षेत्रफल य र होगा।

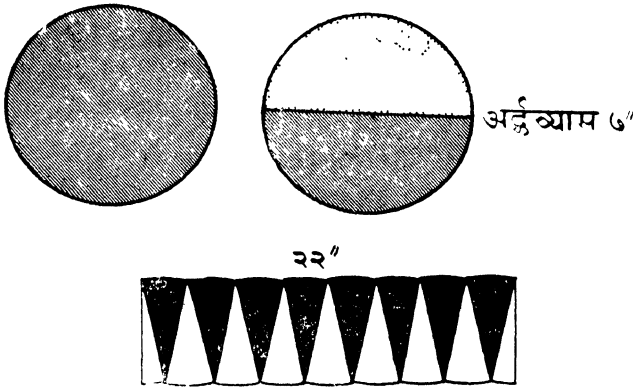
प्रस्तुतीकरण—अध्यापक प्रथम ७" अर्द्ध व्यास का बना हुआ कार्ड बोर्ड का वृत्त प्रस्तुत करेगा। एक छात्र को बुलाकर इस वृत्त का अर्द्ध व्यास नपवायेगा और उसकी ही सहायता से व्यास व परिधि निकलवाकर श्यामपट पर अङ्कित कर देगा।

$$\text{अर्द्ध व्यास} = ७''$$

$$\text{व्यास} = १४''$$

$$\text{परिधि} = ४४''$$

अध्यापक छात्रों के समक्ष ही कागज के वृत्त को १६ समभागों में काटकर उसको आयताकार रूप में व्यवस्थित करेगा और छात्र को बुलाकर लम्बाई व चौड़ाई नपवायेगा तथा उस नाप को श्यामपट पर अंकित कर देगा ।



$$\text{लम्बाई} = २२''$$

$$\text{चौड़ाई} = ७''$$

अध्यापक आयात की नापों और वृत्त की नापों की ओर (जो श्यामपट पर अंकित हैं) संकेत करते हुए प्रश्न करेगा ।

$$\text{आयताकार क्षेत्र की चौड़ाई} = \text{अर्द्ध व्यास} = ७''$$

$$\text{आयताकार क्षेत्र की लम्बाई} = \text{परिधि के आधे} = २२''$$

$$\text{आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \text{परिधि के आधे} \times \text{अर्द्ध व्यास} \quad (२२ \times ७)$$

$$\frac{१}{२} \text{ परिधि} = \pi \times \text{अर्द्ध व्यास}$$

$$\text{अब चूँकि क्षेत्र की लम्बाई} = \pi \times \text{अर्द्ध व्यास} \quad \text{या } \frac{१}{२} \text{ परिधि}$$

$$\text{और क्षेत्र चौड़ाई} = \text{अर्द्ध व्यास}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अतः क्षेत्र का क्षेत्रफल} &= \pi \times \text{अर्द्ध व्यास} \\
 &\quad \times \text{अर्द्ध व्यास} \\
 &= \pi \times \text{अर्द्ध व्यास}^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times (7)^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times 49 \text{ वर्ग इंच} \\
 &= 154 \text{ वर्ग इंच}
 \end{aligned}$$

सामान्यीकरण—किसी वृत्त का क्षेत्रफल कितना होता है ?

वृत्त का क्षेत्रफल उसके अर्द्ध व्यास के वर्ग का $\frac{22}{7}$ गुना है होता है ।

अभ्यास कार्य—उस क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालो जिसका अर्द्ध व्यास (१) ७ फीट हो, (२) ४६ फीट हो ? समय ५ मिनट ।

अदर्श प्रश्न—श्यामपट पर अंकित आदर्श प्रश्न को कतिपय पीछे बैठे हुए छात्रों द्वारा पढ़वाकर अध्यापक निम्नलिखित प्रश्न करेगा—

आदर्श प्रश्न—एक घोड़ा एक खेत में एक खूँटे से रस्सी द्वारा बँधा हुआ है । यदि रस्सी की लम्बाई १४ गज हो तो बताओ वह कितने वर्गगज भूमि में घास चर सकता है ?

- | प्रश्न | प्रत्याशित उत्तर |
|---|---------------------------------|
| (१) क्या दिया हुआ है ? | रसी की लम्बाई |
| (२) क्या ज्ञात करना है ? | घास चरने वाली भूमि का क्षेत्रफल |
| (३) घोड़ा खूँटे से अधिक से अधिक कितनी दूरी तक की घास चर सकता है ? | रस्सी लम्बाई के बराबर । |
| (४) घोड़ा जिस पूरे क्षेत्र में घूमेगा वह कैसा क्षेत्र होगा ? | वृत्ताकार होगा । |
| (५) चरी जाने वाली भूमि का क्षेत्रफल कब | जब आकृति वृत्ताकार हो । |

निकाला जा सकता है ?

(६) चरी जाने वाली भूमि वृत्ताकार है ।
की आकृति कैसी है ?

(७) वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल कब निकाला जा सकता है ?
जब उसका अर्द्धव्यास ज्ञात हो । (अर्द्धव्यास ज्ञात ही है)

आदर्श हल— ∴ वृत्ताकार क्षेत्र का अर्द्धव्यास = रस्सी की लम्बाई
= १४ गज

∴ वृत्ताकार क्षेत्र का (जिसके चारों ओर घोड़ा चर सकता है) क्षेत्रफल = $\pi \times \text{अर्द्धव्यास}^2$

$$= \frac{22}{7} \times (14)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 196 \text{ वर्गगज}$$

$$= 616 \text{ वर्ग गज}$$

अभ्यास कार्य— (१) एक बकरी एक खूँटे से बँधी हुई है । वह खूँटे से ४९ गज तक की दूरी को घास चर सकती है । बताओ बकरी कितने एकड़ जमीन को घास चर सकती है ?

उत्तर— ७५४६ वर्गगज या
१ एकड़ २७०६ वर्गगज

(२) एक फौव्वारा अपने चारों ओर ८ फीट ९ इन्च तक पानी फेंक सकता है । फौव्वारे के पानी से भोग सकने वाली जमीन का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?

उत्तर— २४० $\frac{1}{2}$ वर्गफीट

(३) एक वृत्ताकार चबूतरे के धरातल को पक्का कराने में क्या व्यय होगा जबकि चबूतरे का व्यास १५ फीट २ इन्च हो और पक्का कराने में ४ रु० ८ आना प्रति वर्गगज व्यय पड़ता है ?

उत्तर— ६० रु० ५ आ० १० $\frac{3}{4}$ पाई

(अभ्यास कार्य पूरा न होने पर घर से करके लाने को कह दिया जाएगा)

पाठ-सूत्र ६

दिनांक—
विद्यालय—

विषय—अंकगणित

अन्तर

उपविषय—बेलन के वक्र

कक्षा—८

धरातल सम्बन्धी प्रश्न

समय—४० मिनट

- सामान्योद्देश्य (१) दैनिक जीवन में आवश्यक गणित के सामान्य ज्ञान में बालकों को युक्त करना ।
- (२) जीवन की समस्याओं के समाधान के लिए आवश्यक गुणों (सावधानी, आत्मविश्वास, तर्क, रचनात्मक कल्पना आदि) का बालकों में संचार करना ।
- (३) उन्हें तर्क संगत विधि से निरीक्षण और निर्णय करने का अभ्यास कराना ।
- (४) उनमें जीविकोपार्जन की क्षमता उत्पन्न करना ।
- (५) वैज्ञानिक अनुसंधानों के महत्व को समझने का आधार उत्पन्न करना ।
- (६) वैज्ञानिक संस्कृति की रक्षा के साधनों को सबल करना ।

- (७) अन्य विषयों के गणित सम्बन्धी तथ्यों के समझने की क्षमता बालकों में उत्पन्न करना ।
- (८) कार्य कारण सम्बन्ध समझने की योग्यता प्रदान करना ।
- (९) बालकों के दृष्टिकोण के वैज्ञानिक बनने में सहायता देना ।
- (१०) गणित की विभिन्न शाखाओं के अन्तः सम्बन्ध को समझने की क्षमता प्रदान करना ।
- (११) गणित का गणित के लिए आनन्द प्राप्त करने का चाव बालकों में उत्पन्न करना ।

मुख्योद्देश्य—किसी बेलन द्वारा किसी खुदे हुए मैदान की मिट्टी बराबर करने की क्रिया में बेलन द्वारा लगाए गये चक्करों की संख्या ज्ञात करना ।

पूर्व ज्ञान—१—छात्र वृत्त के व्यास और परिधि के सम्बन्ध को जानते हैं ।
२—बेलन के वक्र धरातल निकालने का भी ज्ञान बालकों को है ।

सहायक सामग्री—एक कार्ड बोर्ड का बेलन ।

प्रस्तावना—निम्न प्रश्नों के द्वारा अध्यापक बालकों के पूर्वज्ञान की परीक्षा करके आज के पाठ का आधार प्रस्तुत करेगा :—

प्रश्न	प्रत्याशित उत्तर
१—बेलन का सिरा किस आकृति का होता है!	१—बेलन का सिरा वृत्त की आकृति का होता है ।
२—उस वृत्त की परिधि क्या होगी जिसका व्यास २१ इंच है ?	२—उस वृत्त की परिधि ६६" होगी ।
३—एक बेलन की लम्बाई ६ फीट और सिरों की परिधि २ फीट है तो उसका वक्र धरातल कितना होगा ?	३—बेलन का वक्र धरातल १२ वर्ग फीट होगा ।
४—यह बेलन एक चक्कर लगाने में भूमि के	४—यह १२ वर्ग फीट पर घूमेगा ।

कितने क्षेत्रफल पर
घुमेगा ?

पाठ्योपस्थापन—निम्न प्रश्न अध्यापक फोल्डर पर लिखा हुआ बालकों के सम्मुख उपस्थित करेगा ।

आदर्श प्रश्न—एक आयताकार मैदान जो ६४ गज लम्बा और ३३ गज चौड़ा है, खुदा हुआ पड़ा है । उसकी मिट्टी एक बेलन से सम की जा रही है । बेलन की लम्बाई १ गज और उसके सिरे का व्यास १४ इंच है, बताओ पूरे मैदान में एक बार फिरने में बेलन कितने चक्कर लगावेगा ?

अध्यापक छात्रों से फोल्डर पर लिखे हुए आदर्श प्रश्न को पढ़वायेगा और उसके बाद निम्न प्रश्नों के द्वारा समस्या को विश्लेषित करेगा—

विश्लेषण—

प्रश्न

सम्भावित उत्तर

(१) प्रश्न में क्या क्या दिया है ?

(१) मैदान की लम्बाई ६४ गज चौड़ाई ३३ गज

(२) बेलन की लम्बाई १ गज

(३) बेलन के सिरे का व्यास १४"

(२) प्रश्न में क्या ज्ञात करना ?

(२) ज्ञात करना है कि "पूरे मैदान में एक बार फिरने में बेलन कितने चक्कर लगायेगा ?"

(३) बेलन के चक्करों की संख्या कब ज्ञात हो सकती है ?

(३) बेलन के चक्करों की संख्या तब ज्ञात हो सकती है जब कुल मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात हो और एक चक्कर में समान की गई जगह का क्षेत्रफल ज्ञात हो ।

(४) कुल मैदान का क्षेत्रफल कब ज्ञात हो सकता है ?

(४) कुल मैदान का क्षेत्रफल तब ज्ञात हो सकता है जब मैदान की लम्बाई, चौड़ाई ज्ञात हो

अध्यापक संकेत कर देगा कि मैदान की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात है ।

(५) एक चक्कर में सम की हुई
जगह का क्षेत्रफल कब
ज्ञात हो सकता है ?

(५) एक चक्कर में सम की हुई
जगह का क्षेत्रफल तब ज्ञात
हो सकता है जब बेलन का
वक्र धरातल ज्ञात हो ।

(६) बेलन का वक्र धरातल कब
ज्ञात हो सकता है ?

(६) जब बेलन की लम्बाई और
सिरे की परिधि ज्ञात हो ।

अध्यापक संकेत कर देगा कि बेलन की लम्बाई ज्ञात है ।

(७) बेलन के सिरे की परिधि
कब ज्ञात हो सकती है ?

(७) जब सिरे का व्यास ज्ञात
हो ।

अध्यापक संकेत कर देगा कि प्रश्न में बेलन के सिरे का व्यास
ज्ञात है ।

संश्लेषण—

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

(१) आयताकार मैदान की
लम्बाई क्या दी है ?

(१) आयताकार मैदान की
लम्बाई ६४ गज है ।

(२) आयताकार मैदान की
चौड़ाई क्या दी है ?

(२) आयताकार मैदान की
चौड़ाई ३३ गज है ।

(३) आयताकार मैदान का
क्षेत्रफल क्या हुआ ?

(३) आयताकार मैदान का क्षेत्र
फल (६४×३३) वर्ग गज
 $= २११२$ वर्ग गज हुआ ।

(४) बेलन का व्यास क्या
दिया है ?

(४) बेलन का व्यास १४ इंच
दिया है ।

(५) बेलन की परिधि क्या होगी ?

(५) बेलन की परिधि $\frac{१४ \times २२}{७}$
इंच होगी ।

$= ४४$ इंच या $४\frac{४}{५}$ गज

(६) बेलन की लम्बाई क्या दी
है ?

(६) बेलन की लम्बाई १ गज
दी है ।

(७) बेलन का वक्र धरातल
कितना हुआ ?

(७) बेलन का वक्र धरातल
 $(१ \times \frac{४४}{५})$ वर्ग गज हुआ
 $= \frac{४४}{५}$ वर्ग गज

(८) बेलन कितनी जगह एक
चक्कर में सम करता है ?

(८) $\frac{४४}{५}$ वर्ग गज भूमि बेलन
एक चक्कर में सम करता है ।

(६) २११२ वर्ग गज में बेलन
के कितने चक्कर हुए ?

(६) २११२ वर्ग गज में बेलन के
चक्कर $= \frac{२११२ \times ३६}{४४}$

(१०) कुल चक्कर कितने हुए ?

(१०) कुल १७२८ चक्कर होंगे ।

पुष्टिकरण—निम्न प्रश्नों के आधार पर अध्यापक प्रश्न के उत्तर की
पुष्टि करेगा—

(१) एक चक्कर में कितनी
भूमि सम होती है ?

(१) एक चक्कर में $\frac{४४}{३६}$ वर्ग गज
भूमि सम होती है ।

(२) कुल कितने चक्कर लगे ?

(२) कुल १७२८ चक्कर लगे

(३) १७२८ चक्कर में कुल कितनी
भूमि सम हुई ?

(३) $\frac{१७२८ \times ४४}{३६}$ वर्ग गज

$= २११२$ वर्ग गज

यही मैदान का क्षेत्र फल है ।

आदर्श हल—

आयताकार मैदान की लम्बाई = ६४ गज

आयताकार मैदान की चौड़ाई = ३३ गज

आयताकार मैदान का क्षेत्रफल = (६४×३३) वर्ग गज
 $= २११२$ वर्ग गज

बेलन के सिरे का व्यास = १४ इन्च

बेलन के सिरे की परिधि = $\frac{१४ \times २२}{७}$ इन्च

$= ४४$ इन्च या $\frac{४४}{३६}$ गज

बेलन की लम्बाई = १ गज

बेलन का वक्र घरातल = $\frac{१ \times ४४}{३६}$ वर्ग गज

$= \frac{४४}{३६}$ वर्ग गज

$\therefore \frac{४४}{३६}$ वर्ग गज में बेलन एक चक्कर लगाता है ।

$\therefore २११२$ वर्ग गज में बेलन

$\frac{२११२ \times ३६}{४४}$ चक्कर लगाएगा

$= १७२८$ चक्कर

उत्तर—१७२८ चक्कर

अध्यापक बालकों के कार्य का निरीक्षण करेगा । आवश्यकतानुसार कमजोर छात्रों की व्यक्तिगत रूप से सहायता करेगा । विद्यार्थी अभ्यास कार्य के लिए दिये गये निम्न प्रश्नों को करेंगे—

अभ्यासार्थ प्रश्न—

समय १० मिनट

- (१) सड़क पर कङ्कड़ कूटने वाली मशीन के आगे के बेलनाकार पहिए की लम्बाई २ गज है और गोलाई का व्यास १ गज है । २२० गज लम्बी और ४ गज चौड़ी सड़क पर एक बार फिरने में पहिया कितने चक्कर लगाएगा ?

उत्तर—१४० चक्कर

- (२) ११० फीट लम्बे और ७० फीट चौड़े मैदान में एक बेलन को पूरी जगह में घूमने के लिए १०० चक्कर लगाने पड़ते हैं यदि बेलन की लम्बाई ७ फीट है तो बेलन का व्यास ज्ञात करो ?

उत्तर—३ $\frac{१}{२}$ फीट

गृह-कार्य—(१) उस मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी मिट्टी सम करने में ७ फीट लम्बे और २ फीट व्यास वाले बेलन को ६० चक्कर लगाने पड़ते हैं ।

उत्तर—२६४० वर्ग फीट

पाठ-सूत्र ७

दिनांक	विद्यालय			
समय	अन्तर	कक्षा	विषय	उप विषय
४० मि०		८ ब	गणित	बीजगणित

समकालीक समीकरण

विशिष्ट उद्देश्य— छात्रों को कुछ ऐसे कठिन समकालीन समीकरणों की प्रक्रिया का ज्ञान देना जो उनके जीवन से सम्बन्धित तथा परिचित वातावरण पर आधारित हो ।

पूर्व बोध— छात्र निम्नांकित प्रकार के समकालिक (द्वि-वर्णिक) समीकरण के प्रश्नों की प्रक्रिया से परिचित हैं -

$$२ क + ४ ख = १२$$

$$३ क - २ ख = ६$$

प्रस्तावना—

प्रश्न

प्रत्याशितोत्तर

- (१) महेश के पास य रुपये थे, परन्तु उसने ५ रु० दिनेश को दे दिये, तो महेश के पास कितने रुपये रह गये (य-५) रु०
- (२) यदि दिनेश के पास पहले २ रुपये थे, तो ५ रु० मिलने पर अब उसके

पास कितने रुपये हो गये ? $(२+५) ₹०$

(३) $(५-५) ₹०$ के दुगुने कितने हुये ? $२ (५-५)$

या $२५-१०$

(४) यदि $(५-५)$ का दुगुना, $(२+५)$ के बरा

बर हो; तो इसे समीकरण में किस

प्रकार लिखेंगे ?

$२५-१० = २+५$

उपस्थापन—पीछे बैठे हुए किसी छात्र से फोल्डर पर लिखे हुए निम्नांकित प्रश्न पढ़वाकर उसका विश्लेषण करना—

आदर्श प्रश्न—राम ने श्याम से कहा, 'यदि तुम मुझे ६ ₹० दे दो, तो तुम्हारे पास जो रुपये बचेंगे, उनके दुगुने रुपये मेरे पास हो जायेंगे।' श्याम ने उत्तर दिया, 'यदि तुम मुझे केवल २ ₹० दे सको, तो तुम्हारे पास जो रुपये बचेंगे उनके दुगुने रुपये मेरे पास हो जायेंगे।' बताओ कि दोनों के पास अलग-अलग कितने रुपये थे ?

विश्लेषण—

प्रश्न—

प्रत्याशित उत्तर

(१) इस प्रश्न में क्या- (छात्रों से स्वाभाविक उत्तर प्राप्त क्या बातें ज्ञात हैं? करते हुए निम्नांकित पूर्ण रूप में निकलवाकर उसे श्याम पटाङ्कित करना :—)

$२ (श्याम के रुपये-६) = राम के ₹० + ६ (१)$

$२ (राम के रुपये-२) = श्याम के ₹० + २ (२)$

(२) क्या ज्ञात करना दोनों (राम व श्याम) के पास है ? अलग-अलग कितने रुपये थे ?

(३) प्रत्येक के रुपयों जब कि प्रत्येक के रुपयों के की संख्या कब नि- लिए अलग-अलग अज्ञात राशि शिक्त हो सकती है? मानें।

(४) दो अज्ञात राशियों जब प्रश्न में वे दो शर्तें दी हों, का मान कब ज्ञात जिनसे दो समीकरण बन कर सकते हैं ? सकें ?

(५) वे शर्तें कैसी होनी वे ऐसी हों कि जो दोनों ओर चाहिए ? क्यों ? बराबर-बराबर मान रखती हों ताकि उनसे दो समीकरण बन सकें।

(तराजू को सन्तुलन-क्रिया का उदाहरण प्रस्तुत किया जा सकता है।

परन्तु ये शर्तें यहाँ दी हुई (ज्ञात) हैं।

अध्यापक निम्नांकित प्रश्नों के आधार पर संश्लेषण विधि द्वारा तब तक उत्तर निकलवाते हुए श्यामपट पर उन्हें लिखेगा जब तक कि पूरे प्रश्न को समीकरण का पूर्ण रूप न मिल जाय—

संश्लेषण—

प्रश्न

प्रत्याशितोत्तर

(१) श्याम और राम के रुपयों की अलग-अलग संख्या क्या-क्या मानें ? माना राम के पास र रु० थे और श्याम के पास य रु० थे। जो छात्र कहें वही मानेंगे।

(२) ६ रु० देने के बाद श्याम के पास कितने रुपये बचे ? (य-६) रु०

(३) ६ रु० मिलने पर राम के पास कितने रुपये हो गये ? (र+६) रु०

(४) श्याम के पास बचे हुए रुपयों का दुगुना क्या हुआ ? २ (य-६) रु० या २ य-१२ रु०

प्रश्नानुसार—

प्रश्नानुसार—

(५) २ य-१२=१ २य-१२=र+६ (१)

(६) य और र को एक ओर (पक्षान्तरित) करने पर इस समीकरण को कैसे लिखें ? या २य-र=१८ (१) (र को दोनों ओर घटाकर और १२ को जोड़कर पक्षान्तर से)

(७) २ रु० देने पर राम के पास क्या शेष रहा ? (र-२) रु०

(८) २ रु० मिलने पर श्याम के पास कितने रुपये हो गये ? (य+२) रु०

(९) राम के शेष रुपयों का दुगुना क्या हुआ ? २ (र-२) रु० या २र-४ रु०

(१०) प्रश्नानुसार :

२र-४ किसके बराबर है ? २ र-४=य+२(२)

(११) पक्षान्तर से क्या फल प्राप्त

होगा ?

$$२ र-य=६ (२)$$

(१२) समीकरण नं० (१) के य और

र के क्रम से इस समी० को

कैसे लिखें ?

$$या-य+२ र=६(२)$$

छात्र उक्त दो समीकरणों को स्वयं सरल करेंगे ?

तथा अध्यापक कक्षा में निरीक्षण-कार्य करेगा—आवश्यकता पर सहायता दी जावेगी ।

(निर्दिष्ट संश्लेषण-विधि से छात्रों द्वारा दिये हुए उत्तरों की सहायता लेते हुए श्याम-पट पर निम्नांकित समीकरणिक प्रक्रिया की जावेगी :—)

आदर्श प्रक्रिया—माना राम के पास र रुपये थे

और श्याम ,, ,, य रु० थे ।

६ रु० देने पर श्याम के पास बचे = (य—६) रु०

६ रु० मिलने पर राम के पास हुये = (र+६) रु०

(य—६) रु० का दुगुना = २ (य-६) या २ य-१२ रु०

प्रश्नानुसार :—२ य-१२ = र+६ (१)

या २ य—र = १८ (१) (पक्षान्तर से)

२ रु० देने पर राम के पास शेष रुपये = र—२

२ रु० मिलने पर श्याम ,, ,, रुपये हुए = य+२

प्रश्न की दूसरी शर्त के अनुसार :—

२ (र—२) = य+२ (२)

या र—४ = य+२ (२)

—य+२ र = ६ (२) (पक्षान्तर से)

या—२ य+४ र = १२ [समी० (२) दुगुना]

२ य—र = १८ (१)

३ र = ३० [समी० (१) + समी० (२)]

∴ र = १०

∴ राम के पास थे = १० रु० उत्तर ।

२ य—१० = १८ [र का मूल्य समी० नं० (१) में रखने से]

२ य = २८

∴ य = १४

∴ श्याम के पास थे = १४ रु० उत्तर ।

छात्रों द्वारा उत्तरों का परीक्षण प्रश्नानुसार शीघ्रता तथा सरलता एवं स्वाभाविकता से करवाया जायेगा ताकि उन्हें आत्म-विश्वास हो जाय और समीकरण की सत्यता भी सिद्ध हो जाय ।

उक्त प्रश्नोपरान्त छात्र फोल्डर पर लिखे हुए निम्नलिखित अभ्यासार्थ-प्रश्नों को स्वयं करेंगे— इनकी प्रक्रिया के लिए उन्हें लगभग १२ मिनट का समय रहेगा, परन्तु पूरे प्रश्न यदि छात्र कक्षा में हल न कर सकें, तो वे शेष प्रश्न गृह-कार्य में हल करेंगे—

अभ्यासार्थ प्रश्न—(१) यदि रमेश कवीन्द्र को २ सन्तरे देगा, तो कवीन्द्र और रमेश के पास बराबर-बराबर सन्तरे हो जायेंगे, परन्तु यदि कवीन्द्र रमेश को २ सन्तरे दे देगा, तो रमेश के पास कवीन्द्र के शेष सन्तरों के तिगुने सन्तरे हो जायेंगे । दोनों के पास अलग-अलग कितने सन्तरे थे ?

उत्तर—रमेश के पास १० सन्तरे और कवीन्द्र के पास ६ सन्तरे ।

(२) यदि आम के पेड़ से ५ चिड़ियाँ पीपल के पेड़ में चली जायँ, तो उस पर उतनी चिड़ियाँ हो जायेंगी जितनी पहले आम के पेड़ पर थीं, परन्तु यदि पीपल के पेड़ से ५ चिड़ियाँ आम के पेड़ पर आ जावें, तो इसमें पीपल के पेड़ की शेष चिड़ियों की दुगुनी चिड़ियाँ हो जायेंगी । आम और पीपल के पेड़ों पर अलग-अलग कितनी चिड़ियाँ थीं ?

उत्तर—आम के पेड़ में = २५ चिड़ियाँ पीपल = २० चिड़ियाँ ।

वार्षिक परीक्षा—पाठ-सूत्र ८

विषय—गरिणत उपविषय—अंकगरिणत शीर्षक—ऐकिक नियम
कक्षा—६ ब अन्तर— समय—४० मिनट

सामान्य उद्देश्य—(१) बालकों में मानवीय क्रिया कलाप को सूक्ष्म एवं पथार्थ रूप में समझने की योग्यता उत्पन्न करना ।

(२) स्वयं विचार करने की शक्ति, एकाग्रता और किसी काम के लिए निरन्तर प्रयत्न करने की प्रवृत्ति उत्पन्न करना ।

(३) बालकों की निरीक्षण एवं निर्णयात्मक शक्ति का विकास करना ।

(४) उनके चिन्तन को मौलिकता, स्पष्टता एवं यथार्थता प्रदान करना ।

(५) प्रश्नों के हल करने में यथार्थ गति उत्पन्न करना ।

विशिष्ट उद्देश्य—दैनिक जीवन में उपयोगी ऐकिक नियम के प्रश्नों को हल करना ।

पूर्व ज्ञान—छात्र ऐकिक नियम के साधारण प्रश्न हल कर लेते हैं ।

प्रस्तावना—

न

प्रत्याशित उत्तर

- | | |
|---|--|
| (१) घरों में खर्च की हुई बिजली का पता किस वस्तु के द्वारा चलता है ? | (१) घरों में खर्च की हुई बिजली का पता बिजली के मीटर द्वारा चलता है । |
| (२) मीटर द्वारा, खर्च हुई बिजली की कुल मात्रा का पता कैसे लगता है ? | (२) मीटर में लगी हुई सुई, बिजली की खर्च हुई यूनिट को बता देती है । |
| (३) यदि एक मकान में, १ दिन में २ यूनिट बिजली खर्च होती हो तो ३० दिन में कितनी यूनिट बिजली खर्च होगी ? | (३) ३० दिन में ६० यूनिट बिजली खर्च होगी । |
| (४) यदि बिजली की एक यूनिट का खर्च ४ आना हो तो ६० यूनिट का खर्च कितना कितना होगा ? | (४) ६० यूनिट बिजली का खर्च १५ रु० होगा । |

उद्देश्य कथन—आज हम बिजली के खर्च से सम्बन्धित कुछ प्रश्न हल करेंगे ।

आदर्श प्रश्न—एक बिजली का पंखा ७ जुलाई १९५८ से १९ सितम्बर १९५८ तक ५ घण्टे प्रतिदिन चलाया गया । यदि एक घण्टा में २ यूनिट बिजली खर्च हुई हो और एक यूनिट बिजली का खर्च ५ आना हो तो कुल कितना खर्च देना पड़ा होगा ?

विश्लेषण—

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

(१) क्या दिया हुआ है ?

(१) दिया है—

क—पंखा ७ जुलाई, १९५८ से १९ सितम्बर १९५८ तक चला ।

ख—पंखा प्रतिदिन
५ घण्टे चला ।

ग—एक घण्टा में २
यूनिट बिजली
खर्च होता है ।

घ—एक ६ यूनिट
का खर्च ५
आना है ।

(२) क्या ज्ञात करना है ?

(२) ज्ञात करना है
कि बिजली के
पंखे का कुल
कितना खर्च
देना पड़ा
होगा ।

(३) पंखा चलाने में बिजली
के लिए कुल खर्च कब
ज्ञात हो सकता है ?

(३) क यदि ज्ञात
हो कि कुल
कितनी यूनिट
बिजली खर्च
हुई ।

(अध्यापक संकेत कर
देगा कि एक यूनिट का
खर्च ज्ञात है ।)

ख—और एक यूनिट
में कितना धन
खर्च होता है ।

(४) कुल यूनिट बिजली जो
खर्च हुई, कब ज्ञात हो
सकती है ?

(४) क यदि ज्ञात हो
कि पंखा कुल
कितने घंटे
चला ।

(अध्यापक संकेत कर
देगा कि १ घण्टा में
कितनी यूनिट बिजली
खर्च होती है, हमें ज्ञात
है ।)

ख—और १ घण्टा
में कितनी यूनिट
बिजली खर्च
होती है ।

- (५) पंखा कुल कितने घन्टे चला यह कब ज्ञात हो सकता है ?
- (५) क—यदि ज्ञात हो कि पंखा कब चलना प्रारम्भ हुआ और कब बन्द किया गया
- (अध्यापक संकेत कर देगा कि पंखा चलाने और बन्द करते समय तथा पंखा प्रतिदिन कितना चलाया गया, ज्ञात है ।)
- ख—और यह भी ज्ञात हो कि पंखा प्रतिदिन कितने घन्टे चलाया गया ।

संश्लेषण—

प्रश्न

प्रत्याशित उत्तर

- (१) पंखा कब चलाया गया ?
- (१) पंखा ७ जुलाई, १९५८ को चलाया गया ।
- (२) पंखा कब बन्द किया गया ?
- (२) पंखा १९ सितम्बर १९५८ को बन्द किया गया ।
- (३) पंखा कुल कितने दिन चला ?
- (३) पंखा कुल ७५ दिन चला ।
- (४) पंखा एक दिन में कितने घन्टे चला ?
- (४) पंखा एक दिन में ५ घन्टे चला ।
- (५) पंखा ७५ दिन में कितने घंटे चला ?
- (५) पंखा ७५ दिन में (७५×५) घंटे = ३७५ घन्टे चला होगा ।
- (६) एक घन्टा में कितनी यूनिट बिजली खर्च होती है ?
- (६) १ घन्टा में २ यूनिट बिजली खर्च होती है ।
- (७) ३७५ घंटे में कितनी यूनिट बिजली खर्च हुई होगी ?
- (७) ३७५ घंटे में कुल (३७५×२) यूनिट = ७५० यूनिट बिजली खर्च हुई होगी ।

- (८) एक यूनिट बिजली पर कितना धन खर्च होता है ? (८) एक यूनिट बिजली पर ५ आना खर्च होता है ।
- (९) ७५ यूनिट बिजली पर कितना धन खर्च हुआ होगा ? (९) ७५ यूनिट पर $(७५ \times \frac{५}{१६})$ रुपया = २३ रु० ७ आना खर्च हुआ होगा ।

आदर्शहल—

पंखा ७ जुलाई, १९५८ को चलाया गया ।

पंखा १९ सितम्बर, १९५८ को बन्द किया गया ।

पंखा कुल ७५ दिन तक चलाया गया ।

∴ पंखा १ दिन में ५ घन्टे चला

∴ „ ७५ „ „ (७५×५) घं० = ३७५ घन्टे चला ।

∴ १ घन्टा में २ यूनिट बिजली खर्च होती है ।

∴ ३७५ „ „ ३७५×२ यूनिट = ७५० यूनिट बिजली खर्च हुई ।

∴ १ यूनिट का खर्च $\frac{५}{१६}$ रुपया है ।

∴ ७५ „ „ „ $(७५ \times \frac{५}{१६})$ रु० = $\frac{३७५}{१६} = २३$ रु०

७ आना हुआ

समय १५ मिनट

अभ्यासार्थ प्रश्न—(१) किसी कारखाने में प्रतिदिन २४ यूनिट बिजली खर्च होती है । १ जनवरी, १९५९ से ३१ मार्च १९५९ तक के लिए बिजली का कुल कितना व्यय देना पड़ेगा जब कि एक यूनिट बिजली का खर्च ४ आना ६ पाई हो ?

उत्तर—६० रुपये १२ आने

(२) एक होटल का रेडियो ६ घन्टे प्रतिदिन काम में लाया जाता है । यदि एक घन्टा में ५ यूनिट बिजली खर्च होती हो और एक यूनिट बिजली का खर्च ४ आना ६ पाई हो तो अक्टूबर, नवम्बर और दिसम्बर, १९५८ में खर्च हुई बिजली के लिए

होटल के मालिक को कितना खर्च देना पड़ा होगा ?

उत्तर—७७ रुपये १० आने

गृह कार्य—यदि तुम्हारे विद्यालय में प्रतिघंटा ५ यूनिट बिजली पंखों के लिए खर्च होती है तो ६ जुलाई से २० सितम्बर और १६ मार्च से ३० अप्रैल तक बिजली का कुल कितना खर्च देना पड़ेगा जबकि पंखे प्रतिदिन ६ घण्टे चलाए जाते हैं, और एक यूनिट का खर्च २७ नये पैसे हो ?

उत्तर—६७ रुपये २० न० पै०

कुछ चुने हुए प्रश्न

1. Make out a case with concrete suggestions for the inclusion of practical outdoor work in mathematical courses prescribed for High Schools. (B. T. 1955)
2. Draw up notes of a first lesson on 'Fractions' for a primary class. (B. T. 1955)
3. Discuss the value of oral work in teaching Mathematics. What points would you keep in mind while correcting the subsequent written work of your pupils Mathematics. (B. T. 1951)
4. Explain the Analytic Method of the teaching a theorem in Geometry. Illustrate by reference to the teaching of the theorem. The angles at the base of an isosceles triangle are equal. How would you elicit the construction portion of the process from the pupils. (B. T. 1951)
5. Estimate the relative importance of the Inductive and deduction methods used in teaching in schools. (B. T. 1952)
6. Describe the apparatus needed for teaching of elementary Geometry in Junior High School. (B. T. 1953)

7. 'Mental oral and written work in Arithmetic form a unity'—Young. Comment on the above statement.
(L. T. 1954)
8. What is the importance of practical work in teaching of Mathematics at the junior High School stage? How can this be more effectively organized? (L. T. 1954)
9. Draw up notes of a first lesson on 'Fractions' for a primary school stage. (L. T. 1955)
10. Make out a Case with concrete suggestion for the inclusion of practical outdoor work in Mathematical courses prescribed for High Schools. (L. T. 1955)
11. What do you understand by the statement that Algebra is generalized Arithmetic? Indicate briefly how you would introduce Algebra to your pupils. (L. T. 1959)
12. Discuss the essential points to be kept in view in teaching Geometrical Problems to a beginner.
(L. T. 1960)

B I B L I O G R A P H Y

1. Multisensory aids in the Teaching of Mathematics—
by Committee on Multisensory
Aids of the National Council
of Teachers of Maths.
2. The Teaching of Secondary Maths—Charles H. Butter
& F. Lynwood Wren
3. The Teaching of Elementary Maths—Godfrey & Siddons.
4. Teaching of Mathematics—J. W. A. Young.
5. The Teaching of Secondary Maths—Claude H. Brown.
6. The Teaching of Mathematics in
the new Education—N. Kuppaswami Aiyanger.
7. Teaching of Mathematics in the Secondary
School—Luncien Blainkinney and C. Richard
Purdy.
8. शिक्षा पत्रिका
9. हिन्दू गणित का इतिहास—डा० बी० के० दत्त एवं डा० एन० सिंह
10. Teachings of essentials of Arithmetic—Ballard.
11. The Teaching of Modern School Mathematics
—E. J. James
12. The Teaching of Arithmetic and Elementary
Mathematics—W. L. Summer.

