UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224529

UNIVERSAL
LIBRARY

TIGHT BINDING BOOK

TOTAL DAMAGE BOOK

The Drinched Book

مدرسہ دہلی کا صیغہ علوم مشرقی اور صیغہ انگریزی کا مشترکہ
مطبع ۱۶ اکتوبر ۱۸۵۳ء
دلکشا خان

Wauds

Algebraical Geometry

Translated by Ramchund teacher

of European sciences & Radhakishun

senior scholar

of the

Delhie College

ہندسہ بالجبر واڈ صاحب کا ترجمہ کیا ہوا رامچند مدرس علوم انگریزی
اور رادھاکشن سکالر اعلی دہلی مدرسہ کا
باہتمام بندہ محمد حسین پرنٹر و پبلشر مطبع دہلی اردو اخبار کے متعلقہ
امام باڑۂ وقفی مولوی محمد باقر صاحب میں چھپا

CHECKED 1965

Checked 1969

CHECKED. 1951

Checked 1965

فہرست مضامین ہندسہ بالجبر

حصۂ اول

مطالب کتاب	صفحہ
باب اول حدود اون خطوط وغیرہ کے بیانمین جسمین اس علم مین بحث کیجاویگی	۱
باب دویم سوالات منقطع کے بیانمین	۱۲
باب سیوم نقطہ اور خط مستقیم کے بیانمین	۱۹
بیان تبدیل اوتار کا	۴۹
دایرہ کے بیانمین	۵۴
باب ششم عام مساوات درجہ دویم کے بیانمین	۶۵
باب ہفتم مساوات درجہ دویم کی تحویل کرنیکے بیانمین	۸۰
باب ہشتم بضوی کے بیانمین	۱۰۶
باب نہم بعید البیضوی کے بیانمین	۱۴۵
باب دہم قریب البیضوی کے بیانمین	۱۸۵
باب یازدہم قرا شہای مخروطی کے بیانمین	۲۰۴
باب دوازدہم اوپر خطوط منحنی کے بیانمین جنکی مساوات دو درجہ سے زیادہ ہی	۲۳۳

باب سیزدہم بیان تقاطع خطوط منحنی جبریہ مین	۲۸۸
باب چہاردہم خطوط منحنی غیر جبریہ کے بیان مین	۳۰۶
حصۂ دویم	
باب اول آغاز	۳۳۳
باب دویم بیان نقطہ اور خط مستقیم مین	۳۳۸
باب سیوم سطح کے بیان مین	۳۵۷
باب چہارم بیان نقطہ اور خط مستقیم اور سطح مین جسکہ محور جبری فرض کرین	۳۷۴
باب پنجم تبدیلی اوتار کے بیان مین	۳۷۹
باب ششم بیان کرہ اور اون مجسمات مین جو گرد شی سطح منحنی سے پیدا ہون	۳۸۸
باب ہفتم بیان سطوح منحنی دویم درجہ کا	۳۹۷
باب ہشتم سطوح منحنی اسطوانی اور مخروطی کے بیان مین	۴۱۵
باب نہم خطوط منحنی دو چند خمدار کے بیان مین	۴۳۳

رسالہ ہندسہ بابجبر

حصہ اول

مشتمل اوپر اوس فرع اس علم کی جسمین دو بُعد کی مقدار دان ہندسی کا ذکر آتا ہی

باب اول

آغاز

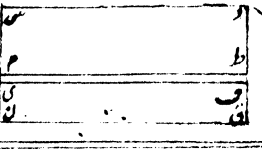
(۱) اس رسالہ کی تالیف سی یہہ غرض ہی کہ حل کرین ہم اشکال اور مسئلون ہندسی کو جبر و مقابلہ کی ذریعہ سی واضح ہو کہ جو وقت مین جبر و مقابلہ ملک یورپ مین رواج پایا لوگ تھوڑی ہی مدت بعد اکثر سوالات ہندسی بذریعہ جبر و مقابلہ کی حل کی گئی اسطرح سے کہ بجای خطوط کی حروف فرض کرکی عمل جبر و مقابلہ کے جاری کئے گئی لیکن اس طریقہ کی حل کرنسی کچھ فایدہ عظیم وقوع مین نہین آیا کیونکہ سوائے اس کے موافق اس طریق کے ہر سوال مین نئے نئے ترکیبین واسطے حل کرنی ہر سوال کے نکالنی پڑتے ہین اور سوائے اوسکے کوئی قاعدہ کلیہ اسطریق سی نہ نکلا موجد اس طریقہ عام کا جسکے ذریعہ سے جبر و مقابلہ کے مدد سے سب قسم کی سوالات ہندسی حل ہو سکتی ہین ہندس مسکار نیز تھا ایک وقت مین یہہ ہندس ایک ہندسی شکل حل کرتا تھا اور جواب اکثر اس سوال کے بیشمار تھی اور واسطے حل کرنی اس سوال کے اوسنے دو مقدارین مجہول لا اور کر فرض کین اور بعد نکالنی ایک ایسی مساوات کی جسمین یہ دو مقدارین مجہول پائی جاتی تھین اوسنے یہہ بات ثابت کردی کہ یہہ مساوات متعلق ہی ایک سلسلہ نقاط سے جنکی یہہ خطوط وتر ہین یعنی یہہ مساوات تعلق رکھتی ہی ہر نقطہ سی جو مرکب ہے ان سب نقاط سی اور اس خط منحنی کو لوگ مساوات مذکورہ کی کہتی ہین

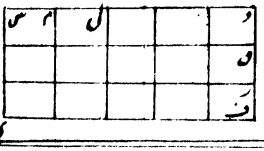
(۲) ظاہر ہی کہ جو وقت ہم قواعد جبر و مقابلہ کو ہندسہ کی مسایل پر جاری کرنا چاہین تو وقت

همین بهه بات خوب اچهی طرح سے سمجهنی چاهیے کہ کس معنی مین علامات جبر کو سیلم هندسه مین مستعمل هوسکتی هین جو وقت هم ایک گز یا ایک فٹ کا ذکر کرتے هین اسوقت همکو ان پیمانونکا خیال مطابق کرنیکی ساتهه ایک پیمانه مقرر کے آتا هی اور اس پیمانه مقرره کو واحد کہتے هین یهه واحد کچهی هوسکتا هی مثلاً اگر هووے ایک انچ تو اوس صورتمین ایک فٹ کو حاصل جمع بارہ ایسی آحاد کا خیال کرنا چاهیے اور اسهوے بتعبیر هوسکتا هی ایک فٹ عدد ۱۲ کی سے اور اگر واحد مذکور ایک گز هووے تو ایک میل تعبیر هوسکتا هی ۱۷۶۰ سے لیکن کوئی خط مستقیم مثل د ـــــــ ب ـــــــ ی ـــــــ ا ـــــــ س

اب کو واحد مذکور قرار دی سکتی هین اور اگر کوئی اور خط مثل س د مین یهه خط کئی دفع یا جاتا هو مثلاً پورا ط دفعه تو هم کهتی هین کہ خط س د کا مساوی هی ط آحاد خطی کے اور لفظ آحاد خطی کا حذف کرکی هم کها کرتی هین کہ س د مساوی هی ط کے (شکل ۱) مین س د = ۳ مثال اب کی یعنی س د = ۳ اگر ایسا هو کہ خط اب کا پورا کئی دفعه س د مین نهین پایا جاوی یعنی احاد س د کی پوری نهین بن سکتی هون احاد اب پر تو فرض کرو کہ ی سے مقسوم علیه مشترک ان دونو خطون کا دیکهو (شکل ۱) اور فرض کرو کہ س د هی م مثال ی کے یعنی س د = م ی اور اب برابر ن کی تب ظاهر هی کہ س د کو اب سی وهی نسبت رکهتا هی جو م ی رکهتا هی ن ی سے یعنی جو م رکهتا هی ن سے یعنی جو ی رکهتا هی اب سے اور یهان سے یهه معلوم هوا کہ س د هی م مثال اب کے یعنی س د = م/ن = ص شکل (۲) مین س د = ۵/۳ مثال اب = ۵/۳ اگر خطوط اب اور س د مین کوئی مقسوم علیه مشترک نهو تو همین رجوع

کرنا چاہی طرف اون ترکیبون کی جن پر موقوف ہے مسئلہ مقادیر متزولی کا
علم حساب مین یہہ تحقیق ہے کہ √۲ کو ہم تعبیر کرسکتی ہین کسی عدد صحیح یا کسور
محدود سے لیکن یہہ بات بآسانی دریافت کرسکتی ہین کہ فلانی مقدار محدود √۲ سی
زیادہ ہی اور فلانی مقدار چھوٹی اور یہہ بات جان کر کہ √۲ ہی حد جسکی قریب اتنی قریب
آسکتی ہین جتنا ہم چاہین علامت √۲ کا حساب مین استعمال کرسکتے ہین اب فرض کرو
کہ ہی آب مین کئی پوری دفعہ پایا جاتا ہی لیکن وہ نہین پایا جاتا ہی پوری دفعہ
خط س د مین پس اب فرض کرو کہ ایک عدد م ایسا ہی کہ م ہی کم ہی س د سی لیکن زیادہ ہی
(م + ۱) ای سی یہہ بات بھی ظاہر ہے کہ ہی کو اتنا کم فرض کرسکتی جتنا ہم چاہین کیونکہ جسوقت
آب ہی پر قسمت پورا ہوسکی تو بالضرور آب قسمت ہوسکیگا ہی کے نصف اور چوتھائی
اور آٹھوین حصہ وغیرہ پر بھی اور یہانسے یہہ معلوم ہوا کہ گو س د نہین تعبیر ہوسکتا ہی بصحت کمال
کسی اور عدد جزئی آب مرکب سے لیکن ہم اوسکے اتنا قریب ایسے مقدارون سے لاسکتی ہین جتنا ہم چاہین اور
یہانسے یہہ معلوم ہوا کہ س د ہی حد کسی اون مقادیر کی جو اندازہ ہوسکتی ہین ہی سے اوسطرح سے جسطرح کہ
کہ √۲ کی ہی حد ایک اون مقادیر کی جو اندازہ ہوسکتی ہین عدد ۱ سی پس یہانسے یہہ نتیجہ نکلتا ہی
کہ خط س د کا تعبیر ہوسکتا ہی کسی حرف ط ص ع وغیرہ سے کہ یہہ مقدارین یا تو کسر مین یا صحیح یا مقدار
متزولی (۳) اگر ایک واحد خطی پر ایک مربع بنایا جاوے تو اس مربع کو واحد مربع کہتی ہین فرض
کرو کہ س د ف ی ایک سطح اور اوسکا ایک ضلع د س ہی کہ اوسمین ط کتنی احاد خطی مثل س م





اور م ن وغیرہ ہیں اور دوسرا ضلع اوسکا س ی ہی کہ دسمین ص کتنی احاد خطی مثل
س ح اور ح ط وغیرہ ہیں تقسیم کرو اس سطح کو احاد مربعوں میں پہنچے ہے خطوط متوازی خط
س د کی نقطون ح اور ط وغیرہ سے اور خط س ی کے نقطون م اور ل وغیرہ سے اب ظاہر
ہی کہ سب سے اوپر کی قطار س ح د ق میں ط کتنی چھوٹی چھوٹی مربعی ہیں یعنی ط کتنی احاد
مربعی ہیں اور اتنی احاد مربع ہیں اس سے نیچے کی قطار میں اور علے ہذا القیاس باقی قطارونکے
لیکن تعداد کل قطارونکے ص ہی پس معلوم ہوا کہ تعداد کل احاد مربعونکی شکل میں ط ۴ ص
یعنی سطح س ف ط ص آحاد مربع ہیں یعنے سطح مذکور مقدار میں مساوی ہے ط ص احاد ج
کی اور جسوقت حذف کرتے ہیں ہم الفاظ آحاد مربع کو اوسوقت ہم کہا کرتی ہیں کہ سطح
س ف مساوی ہے ط ص کے مثلاً اگر س د = ۵ فٹ اور س ی = ۴ فٹ تو سطح س ف میں
۲۰ مربع فٹ ہونگی جو کچھ ہمنے اوپر بیان کیا ہی وہ اوسوقت درست ہوگا جسوقت کہ دونون
خط س د اور س ی ایک ہی واحد خطی سے اندازہ ہو سکتی ہیں پس فرض کرو کہ خط س د کسی
خاص واحد خطی سے اندازہ کیا جاتا ہے دیکھو (شکل ۴) لیکن س ی اوسی واحد خطی سے تعبیر
نہیں ہو سکتی لہذا اوس سے جو کچھ کہ پہلے بیان کیا گیا ہی یہ بات ظاہر ہی کہ ہم خط س م اور س ن
کے ایسی درجہ تک کر سکتی ہیں جو اوسی واحد خطی سے اندازہ کئی جائین جس سے کہ اندازہ کیا جاتا
ہی اور جو اونکی قریب خط س ی کے ہون جتنا ہم چاہین اب کامل کرو سطحون س ط اور س ف
اب اسمجای ظاہر ہی کہ جسقدر خطوط ص م اور ص ن کی قریب تر خط س ی کے آتی جاتی ہیں
اوسیقدر سطحین س ط اور س ف کی علیحدہ علیحدہ قریب تر سطح س ف کی آتی جاتی ہین
یعنی سطح خطون س د اور س ی کی حدی سطح س د اور س م کی یعنی اوسیطرح جسطرح سے

مس ی ہی حد خط س م کی اب فرض کرو کہ ط اور ص ہین تعداد احاد خطے مفروض کے خطون
س د اور س م کی اور یہہ بھی فرض کرو کہ س تعبیر کرتا ہی اوس مقدار نزولی کو جو تعبیر کرتی ہی
خط س ی کو اور چونکہ خط س م پس سطح خطون س د اور س ی = حد سطح خطون س د اور
س م = حد عدد ط ص کے = حاصل ضرب حدون ط اور ص کے = ط اور س کے حاصل ضرب کے اور
یہانسی یہہ معلوم ہوا کہ مقدار جبریہ کسی سطح کی مساوی ہوتی ہے حاصل ضرب اوسکی دو متصل ضلعونکے
اگر ص = ط تو شکل س ی ہو جاتی ہی مربعہ خط س د کا اور یہانسی یہہ معلوم ہوا کہ مربع س د
کا مساوی ہی ط + ط کسی احاد مربع = ط * پس اب ہم تعبیر کرسکتی ہین بذریعہ جبر و مقابلہ
کی تمام شکل مستوی مستقیم الاضلاع کو کیونکہ سب ایسے شکلین تبدیل کیجا سکتی ہین مثلثون
مین اور مساحت مثلث کی مساوی ہوتی ہی نصف مساحت اوس سطح کی جو واقع ہوا دو
مثلث کے قاعدہ پر اور درمیان دو خط متوازی کے

(۴) اب اگر شکلون مجسم کو جبر و مقابلہ سے تعبیر کیا چاہین تو ہمین فقط یہہ لازم ہی کہ دریافت
کرین ہم ترکیب واسطی تعبیر کرنی مساحت جسم ایک ایسی جسم متوازی السطوح کی جسکی دو ایا مجسم
قایمون سے مرکب ہون فرض کرو کہ ط اور ص اور س ہین تعداد احاد خطی کے طول اور عرض اور
عمق شکل مجسم متوازی السطوح مین اب اگر کھینچین سطحین متوازی اس جسم کے جو خطون کے
اور سیطرح سے اوسکو احاد جسمی مین منقسم کرین تو ہم بطور گذشتہ کے ثابت کرسکتی ہین کہ
تعداد احاد جسمی کے شکل مجسم متوازی السطوح مین ط + ص × س ہین یعنی جسم
متوازی السطوح مساوی ط + ص × س کے ہی قریب اسطور سی یہہ بھی ثابت
ہو سکتی ہی جبکہ کناری یعنی خطون شکل مجسم مذکور کے ایسے عون کرو دیوے عدد مین تعبیر ہو

ہوسکتی ہین یعنی جبکہ وہ کسور ہون اگر ص = س = ط تو جسم مذکور ہوجاتا ہے ایک شکل مکعب اور مساوی ہوتا ہے ط × ط × ط یعنی ط کے (۵) اب ہم دریافت کرین گے معنی صورتون جبریہ کے صورتون جبریہ مختلف جسم کو بذریعہ ان مساواتو کے کہ اوپر مین ہر جز حاصل ضرب مساوی مرتبہ کا ہی بآسانی تعبیر کرسکتے ہین جیسیکہ جدول آیندہ مین

لا = لا

لا² + ط لا = ص س

لا³ + ط لا + ص س لا = دی ف

لا⁴ + ط لا³ + ص س لا² + دی ف لا = گ ہ ک ل

لا^ن + ط لا^{ن-۱} + ص س لا^{ن-۲} وغیرہ ..... ب ق ر وغیرہ ن اجزا تک

اول تو یہ سب صورتین جبریہ بذریعہ احاد خطی کے سمجھی جاتی ہین مثلاً اگر ح بجاے الفاظ احاد خطی کے استعمال کیا جاوے تو صورتین جبریہ مذکور الصدر اسطور سے تعبیر کی جاینگی

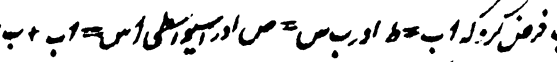
لا دفع ح = ط دفع ح

لا² دفع ح + ط لا دفع ح یعنی (لا + ط لا) دفع ح = ص س دفع ح (لا³ + ط لا² + ص س لا + دی ف لا) دفع ح = گ ہ ک ل دفع ح) اور علی ہذا القیاس اور صورتین بھی اسطور سے تعبیر ہو سکتی ہین اور اگر حل کرین ہم ان مساواتون کو تو ہر واحد ان مساواتو مین کی قیمت لا دفع ح کی معلوم ہوجائیگی بذریعہ ط اور ص اور س وغیرہ مثالون ح کے پس اسصورتین ظاہر ہی کہ ط اور ص اور س وغیرہ فقط اعداد ہین کہ تعلق رکھتی ہین

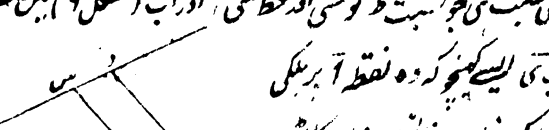
خطوط سی اونہین شکلون سے اگر ح حذف کیجاے تو بھی وہی مفہوم ہوتا ہو جو اوپر
بیان ہوا ہی اور اسطرح جو ہم سمجھین گے اون تمام مساوا تو کو بیشمار مرتبہ تیسری مرتبہ سی زیادہ
ہوگا اسطوسی سمجھا جاے جبکہ ح تغیر کری واحد سطح یا واحد حجمی کو (۶) علاوہ معنی کہ گذشتہ
کی ایک اور بھی معنی صورتون جبریہ سے ہوتی ہین دو مثلاً مساوات دوسری جدول کہ گذشتہ
مین تعلق رکھتی ہین سطحون سے یعنے اوس سے یہہ بات تعبیر ہوئی ہی کہ حاصل جمع دو سطحون کا
مساوی ہی ایک تیسری سطح کی اور اسطوسی مساوات تیسری تعلق رکھتی ہی شکلون مجسمہ سے
یعنی اوس سے یہہ بات تعبیر ہوتی ہی کہ حاصل جمع تین مجسم توازی السطوح کا مساوی ہی ایک چوتھی
مجسم توازی السطوح کے علاوہ ازین ایک مساوات جو متعلق ہی سطحون سے متعلق خطون سے بھی
تصور کیجا سکتی ہی کہ سطحین مذبعہ مربعون کے تعبیر ہو سکتی ہین اور جو وقت مربعی دو خطون کے
مساوی ہوتا ہین اوسوقت وہ خطے مساوی ہوتے ہین لہذا نکلنے مساوات خطوطی کی مساوات سطحی کی
(۷) جو کچھہ کہ اوپر مرقوم ہوا اوس سے یہہ ہویدا ہی کہ مساوات دوم اور سوم درجہ سے بالضرور تعبیر ہو
ہی کہ کوئی شکل ہندسی مثلاً مساوات لا = ط (ط - لا) سے تعبیر ہوتی ہی وہ مشہور شکل نہیں جسکی با
ذریعہ سے ہم تقسیم کر سکتی ہین کسی خط مفروض کو اسطور سے کہ کل خط اپنی جسم طول سی ہی نسبت رکھے
توجسم اصغر کی جسم اسی نسبت سے تقسیم ہین سے دو کرین ہم دو سہ اتو تیسرا جزو بدلین
د اور ی اور ف کو ر ط اور ط اور ط سے علیحدہ علیحدہ تو حاصل ہو جائینگے ہمین مشہور شکل دو گنا کرنی
شکل مکعب کے (۸) جوقت مساوا تین حل کیجاتے ہین اور مختلف قسمین مقدار مجہول کی نکلتے
ہین تو اوسوقت دو ترکیبین ہین ایک تو یہ ہی کہ اول واسطے حروف ط ص س وغیرہ
اعداد فرض کرکے بعد ازان وہ عمل جبریہ جو ضرور ہون موافق علامات جبریہ کی کریں مثلاً

اگر ط = ۴ اور ص = ۵ اور س = ۹ پس بصورتین اگر ہووے یہہ مساوات لا = ط + ط + س − ص = ۸ اشال واحد خطی کے اور لا = $\frac{ط ص}{س}$ = $\frac{۲۰}{۹}$ = ۲ $\frac{۲}{۹}$ اشال واحد خطی کے لا = ۲ ط − س = ۸ − ۹ = −۱ اشال واحد خطی کے یہہ دوسری ترکیب تعبیر کرنی مقداروں جبریہ کی بذریعہ علم ہندسہ کے ہی اور اس ترکیب کو مقدار دیکھا بنانا کہتے ہین یہہ بہت لطیف ترکیب ہی اور علاوہ ازین اوسکی واسطے بہت فایدہ منحصر ہی جو ایک کمال علم ہندسہ بالجبر کا حاصل کیا چاہین * بیان بنانے مقدار دیکھا *

(۱) فرض کرو کہ لا = ط × ص فرض کرو کہ نقطہ آ واقع ہی مقام پر جہانسے پیمایش خط کی جو قیمت لا کی ہے شروع کیجاتے ہی



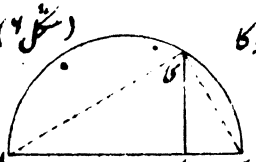
پس اب فرض کرو کہ اب = ط اور ب س = ص اور سیوا طلی اس = اب + ب س = ط + ص اور یہی قیمت لا کی ہی اب فرض کرو کہ لا = ط − ص اور اب فرض کرو کہ ب د = ص ب اور ا د = اب ب د = ط − ص ایک اور مثال یہہ ہی فرض کرو کہ لا = $\frac{ط ص}{س}$ پس دریافت کرو لا کو بذریعہ ہندسہ کے مساوات مفروض سے ظاہر ہی کہ لا : ط :: ص : س پس معلوم ہوا کہ لا وہ خط ہی جو نسبت مین مقداروں معلوم ط اور ص اور س سے معلوم ہوتا ہی یعنی لا وہ خط ہی جو اس نسبت سی حاصل ہوتا ہی س کو ص سی وہی نسبت ہی جو نسبت ط کو کسی اور خط سی ہے اور اب (شکل ۶) مین خط اس اور اب ہی ایسے کھینچو کہ وہ نقطہ آ پر ملکی



آپس مین ایک زاویہ بناتے ہون اور کاٹو اب = س اور ب ی = ط اور اس = ص اور وصل کرو ایک خط نقطون س اور ب مین

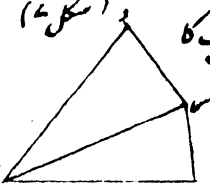
اور نقطہ د سے ایک خط دی کا متوازی ب س کے لیجیو پس اب موافق دوسرے شکل
۶ مقالہ ۶ اقلیدس کے یہہ نسبت حاصل ہوگی ا س : ا س :: ب ی : س د یعنے
ط ص : ط ص :: ب ی : س د = لا پس معلوم کرلیا ہم نے ایک خط س د کا جو
لا کی ایک اور مثال یہہ ہے فرض کرو کہ لا = $\frac{ط ص}{ی}$ پس چاہتے ہیں دریافت کرنا ایک خط تیسرے
ساوے لا کی بذریعہ ترکیب ہندسہ کے اسکی ترکیب یہہ ہے کہ فرض کردی = $\frac{ص س}{ی}$ پس موافق
مرقومہ بالا کے جب خطوط ص س اور ی معلوم ہوجائینگے اوسوقت خط د معلوم ہوجائیگا
اور چونکہ لا = $\frac{ط ص س}{ی}$ = $\frac{ص س}{ی}$ × $\frac{ط}{د}$ = $\frac{ط ط}{د}$ اور خط د کا معلوم ہے تو موافق
مرقومہ بالا کے خط ط بھی دریافت ہوسکتا ہے اسطور سے خط لا معلوم ہوسکتا ہے جبکہ یہہ مساوات
مفروض ہوں لا = $\frac{ط ص س}{د}$ اور لا = $\frac{ط ط}{د}$ اور لا = $\frac{ط^{۳}}{د^{۲}}$ اور لا =
$\frac{ط ص س د}{ی ح ف}$ ایک اور مثال یہہ ہے لا = $\frac{ط ص س}{ص ح}$ + $\frac{ی د ف}{ص ح}$ = $\frac{ط ص س}{ص ح}$ + $\frac{ی د ف}{ص ح}$
ہمکو ترکیب یہہ ہے کہ موافق مرقومہ بالا کے دو خط مساوے $\frac{ط ص س}{ص ح}$ اور $\frac{ی د ف}{ص ح}$ کے علیحدہ
دریافت کرلو تو لا مساوے اونکی حاصل جمع کی ہوگا (۱۰) لا = $\frac{ط ص}{ح}$ چونکہ لا = ط ص
تو معلوم ہوا کہ لا ہی وسطی نسبت مابین ط اور ص کے پس موافق آٹھویں شکل ۶ مقالہ اقلیدس
کی لا دریافت ہوسکتا ہے اسطور سے فرض کرو ایک خط کہ مقیم آ ب کا ہے اور ۶ نزدیک
ط کی اور س ب = ص کے بناؤ خط آ ب پر ایک نصف دایرہ اور نقطہ س سے ایک

(شکل ۶)



عمود س ی کا قایم کرو پس عمود س ی کا خط لا ہوگا
اگر لا = $\frac{ط^{۲}}{ص}$ تو لو ا س = ص اور کھینچو
عمود س ی آ ب پر اور اوسیسے کاٹو

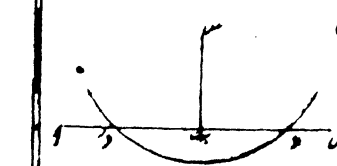
س ی = ط اور وصل کرو ایک خط ما بین ی اور آ کے اور قایم کرو ایک عمود ی ب اوپر
ی آ کی پس موافق شکل ۱۲ مقالہ ۲ اقلیدس کے س ب = $\frac{ط^2}{ص}$ ∴ لا = ب س فرض
کرو کہ لا = $\frac{ط ص + س د}{ط}$ ∴ لا = ط ص + س د = ط (ص + $\frac{س د}{ط}$) اور فرض
کرو کہ ص + $\frac{س د}{ط}$ = ر ∴ لا = ط ر ∴ لا = ط آ اور چونکہ آ کی مساوی ایک خط
معلوم ہو سکتا ہی تو جسوقت ہم ایک خط وسطی النسبت ما بین ط اور آ کے دریافت کرینگے تو خط مساوے لا کی ہوگا اس مثال مین لا کی قیمت ایک اور طرح سے معلوم ہو سکتی ہی
چونکہ لا = ط ص + س د تو معلوم ہوا کہ لا ایک ایسا خط مستقیم ہی کہ اوسکا
مربعہ مساوے دو سطحون ط ص اور س ہ کی ہی اور جب موافق ۴۵ شکل اول مقالہ اقلیدس
ان دو سطحونکی ایک سطح بنالین اور موافق ۱۴ شکل مقالہ دوم کی اس سطح کی مساوی ایک
مربعہ بنالین تو ایک ضلع اس مربعہ کا مساوے لا کی ہوگا فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 + ص^2}$


(شکل ۷)

تو ایک خط ا ب = ط اور نقطہ ب سے ایک عمود س ب کا
مساوی ص کے ا ب پر قایم کرو پس خط ا س مساوے
آ کی ہوگا فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 + ص^2 + س^2}$
اس پر ایک خط عمود س د مساوی س کے بناؤ تو ا د ایک خط لا کے مساوے ہوگا
فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 - ص^2}$ = $\sqrt{(ط + ص)(ط - ص)}$ پس معلوم ہوا کہ لا
وسطی النسبت ہی ما بین ط + ص اور ط - ص کے پس شکل گذشتہ سے
ایک شکل پہلے مین فرض کرو کہ ا ب = ط اور ا ی = ص ∴ ب ی = $\sqrt{ط^2 - ص^2}$
فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 + ص^2 - ص^2 - د^2}$ دریافت کرو آ کو مساوات ر =

ط۲ + ص۲ سی اور غ لو ع۲ = س۲ + د۲ سی اور تا کو لا۲ = ر۲ − ع۲ سے موافق
مرقومۂ بالا کی فرض کرو کہ لا = √(ط۲ + ص۲ س۲ / ص۲ − س۲) دریافت کرو کہ ر۲ = ط۲ + ص۲ اور
ع۲ = ص۲ − س۲ اور بعد ازاں لا = ط۲ / ع کو

(۱۱) یہہ بات نہایت ظاہر ہی کہ اگر بجاے حروف ط اور ص وغیرہ اعداد
فرض کئی جائین تو بہی مثالین مذکور الصدر بطور سی حل ہو سکتی ہین مثلاً لا = √۱۲۱
= √۴ × ۳۰ پس اسصورتمین شکل گذشتہ سی پہلی شکل مین فرض کرو کہ س ا =
۴ اور ب س = ۳ پس ی س = √۱۲ = لا فرض کرو کہ ل = √۵ =
√۳۲ + ۱۲ پس بذریعہ ۴۷ شکل اقلیدس کے ایک خط مساوی لا کے معلوم ہو
سکتا ہی ل = ۱/۲ √۵ ∴ ل۲ = ۱/۴ √۵ = ۱/۴ + ۱/۴ = √(۱/۴)۲ + (۱/۴)۲
(۱۲) جب مقادیر جبریہ مرکب ہوتی ہین تو اونکی مساوی خط دریافت کرنیکی واسطی یہہ
قاعدہ بنایا گیا ہی اونکی ہر جزو کے واسطی ایک ایک خط دریافت کرلین اور بعد
ازان ان سب خطونکی مساوی ایک خط دریافت کرلین لیکن اب ہم ایک ایسی
ترکیب لکھتی ہین کہ اوسکی ذریعہ سی مرکب مقادیر کے مساوی ایک خط ایک ہی شکل
کے ذریعہ بنالین مثلاً فرض کرو کہ لا = ط ± √(ط۲ − ص۲) (شکل ۹)



خط آل پر لو ا ب = ط اور نقطہ ب سی
کھینچو ب س = ص عمود اور ا ب کی
اور س کو مرکز مقرر کرکے اور ط کو نصف قطر لے
ایک دایرہ کھینچو اور فرض کرو کہ وہ خط آل کو

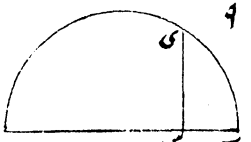
نقاط د اور ہ پر تقاطع کرتا ہی پس ظاہر ہی کہ آ د اور آ ہ دو مستقیم ل کی ہین اسی
واسطے کہ ۱۰ = ا ب + ب د = ط + √(ط² − ص) اور آ ہ = ا ب − ب ہ
= ط − √(ط² − ص) یہ ترکیب حل ہین نہین آسکتی جسوقت ص زیادہ ہو
ط سے کیونکہ اسصورت مین دایرہ خط اول کہین تقاطع نہین کریگا اور یہی حال
غیر ممکن ہونی جذر کی سی واضح ہوتا ہی — (۱۳) اشکال ہندسی یا تو خطون
کی باب مین یا سطحون یا جسمون کے باب مین ہوتی ہین تو جو مساواتین ان اشکال
کو تعبیر کرین بالضرور متجانس ہونی چاہین ہین یعنے سب اجزا ایک ہی صعود یا نزول کے حاصل
ہونی چاہین اور اسواسطے اگر کسی جای ایسی صورتین واقع ہون لا² = ص ط اور
لا = √(ط² + ص) وغیرہ تو قبل ازین جاری کرانی عملون ہندسی
لازم ہی کہ ہم اول اون مقدارونکو جنکا مرتبہ صعود وغیرہ بہ نسبت اور مقدارونکے
کم ہی عدد ایک مین ضرب کرلین مثلاً صورتون گذشتہ کو اسطور سی لکھنا چاہیے
لا² = ص ط × ۱ اور لا = √(ط × ۱) اور لا = √(ط² + ص × ۱) اور بعد ازان
عمل کرنا چاہیے —

باب دویم

سوالات منقطع کے بیان مین

(۱۰) سوالات ہندسی دو قسم کے ہوتی ہین منقطع اور غیر منقطع اول قسم کے
وہ ہین جنکی جواب ایک یا زیادہ تعداد مین محدود ہین اور دوسری قسم کی وہ جنکی
جواب کی تعداد کی نہایت ہی اگر (شکل ۹) مین ہم یہہ سوال کرین کہ وہ کونسا

نقطہ خط اب پر ہی کہ اگر اوس نقطہ سی ایک عمود نصف دایرہ تک کہ اوسی خط پر بنایا
جاے کھینچین تو وہ عمود مساوی نصف قطر دایرہ ہو ۹

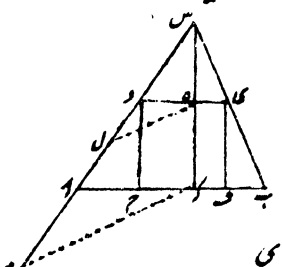


تو یہہ ظاہر ہی کہ یہہ سوال ایک سوال منقطع ہی
کہ اسکیلہ نقطہ دو ایسی نقطے مساوی فاصلہ
پر مرکز کی دونون طرف واقع ہین جنسی عمود مطلوب کھینچا جا سکتا ہے لیکن اگر ہم یہہ سوال
کرین کہ ایک خط مفروض اب کے باہر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اگر اوسمین اور دو سرے
خط مفروض مین خطوط ملائی جائین تو زاویہ جو اس نقطہ پر بنی گا وہ قایمہ ہوگا آپ واضح
ہو کہ اس سوال کی بیشمار جواب ہین کیونکہ اگر خط مفروض پر ایک نصف دایرہ بناوین
تو جتنی نقطے محیط نصف دایرہ مین ہین وہ سب ایسی نقطے ہین کہ جنمین صفت مطلوب پائی
جاتی ہی — سوالات منقطع اسقدر مفید اور مشکل نہین ہوتی ہین جسقدر کہ غیر منقطع
ہوتی ہین لیکن منقطع سوالون کے حل کرنے سی بہی ایک طرح کی استعداد زیادہ ہوتی ہی
اسیواسطے ہم اس قسم کی چند سوال اس جا ی حل کرتے ہین —

(۱۵) واسطے حل کرنی سوالات منقطع کی قواعد آیندہ بہت مفید ہین

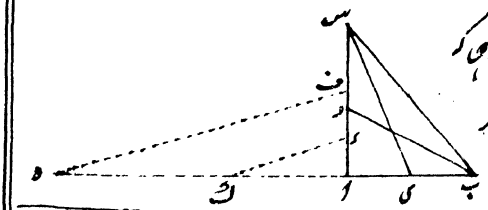
قاعدہ اول ایک شکل ایسی بنالو جس سے سب شرایط سوال کی تعبیر ہوجائین قاعدہ دوم
نتیجہ اوخطوط اگر ضرور ہون متوازی اور عمود خطون شکل مذکور پر قاعدہ سیوم اون
خطوط کو جو معلوم ہین ط اور ص اور س وغیرہ سی تعبیر کرو اور غیر معلوم خطون کو
حروف لا اور ر اور ق وغیرہی قاعدہ چہارم تمام خطون اصلے شکل کو بطور مقادیر معلوم
کی تصور کرلو اور بعض خواص ہندسی کو جو اوس شکل مین پائے جاتے ہون ایک یا زیادہ

ایسی مساواتین بنالو کہ اونمین مقادیر معلوم اور غیر معلوم دونون ہون جائین —
قاعدہ پنجم ان مساواتون کے ذریعہ سے مقادیر مجہول کی قیمت دریافت کرو —
قاعدہ ششم ان قیمتون کی مساوی خط بنالو اسطور سے کہ وہ شکل مفروض مین نمودار ہو
جائین — (۱۶) سوال بناؤ ایک مربعہ ایک مثلث اب س مفروض



مین فرض کرو کہ دی ف ح
مربعہ مطلوب ہے اور س ہ ارتفاع
مثلث کی ہی پس اس سوال کا نقطہ ہ
بات دریافت کرنا چاہئے کہ نقطہ ہ کس جای
س کہ پر واقع ہی اسوقت جبکہ اس صورتین مقام ہ کہ کا معلوم ہو جائیگا اور مربوا اوپر
بنجائیگا اب فرض کرو کہ س = ط اور ا ب = ص اور س ہ = لا تب بموافق
شرایط سوال کے دی = ہ کہ اور دی : ا ب :: س ہ : س کہ یا دی : ص :: لا
: ط :: دی = $\frac{ص لا}{ط}$ اور ہ کہ = ط — لا :: $\frac{ص لا}{ط}$ = ط — لا :: لا =
$\frac{ط^{۲}}{ط + ص}$ پس یہ بات معلوم ہوا کہ لا : ط :: ط : ط + ص اب خط س ا مین سے
کاٹ لو س ل = ط اور خارج کرو س ا کو تم تک اسطور سے کہ ل م = ص
وصل کرو م ک کو اور نقطہ ہ سے کھینچو ہ ل متوازی کم کے پس س ہ قیمت مطلوب
لا یعنی ہی — معلوم
ہوا
ہین یعنی ایک مثلث قایمہ الزاویہ دیا ہوا وتر جو حاصل ہو زاویون کے نقطہ نسبی مقابل کے
ضلعون کے وسط مین جا کر ملتی ہین اور دریافت کیا جاہتی ہین ہم مثلث مذکور کو

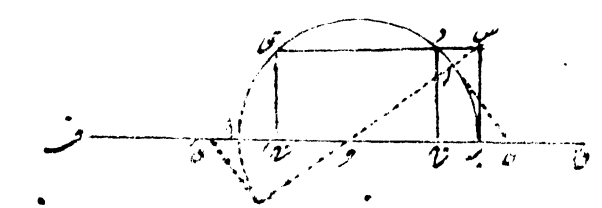
فرض کرو ملی ی = ط اور ب د = ص اور ا د = س د = لا اور ا ی =
ی ب = ر اب ظاہر ہی کہ
ط۲ = ۴ لا۲ + ر۲ اور
ص۲ = لا۲ + ۴ ر



اور حل کرنے ان دو مساواتوں کے معلوم ہوگا کہ ر = ± √(۴ص۲ − ط۲ / ۱۵)

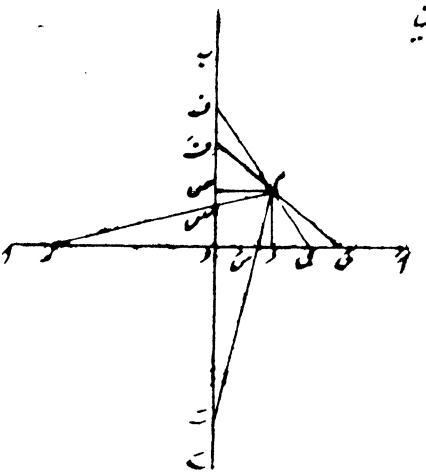
بنا دو کوئی زاویہ قایمہ اور کاٹو ایک ضلع اوسکی دو ضلعوں میں سے برابر ط/۲ کو
مرکز گردانکر کھینچو دو دایرہ جنکے نصف قطر برابر ہوں ۲ط اور ص کے اور
فرض کرو کہ ان دو دایروں کی قطع کیا خط ب آ کو اوپر دو نقطوں ک اور ہ کے
اب ملاؤ ایک خط درمیان نقطوں ف اور س کی اور کھینچو خط ک ق کو متوازی خط
ہ ف کی پس ۲ آ ق برابر ہوگا ر کے —

(۱۹) تقسیم کرو ایک خط کو ایسی دو قسمونمیں کہ سطح اون دونوں کا برابر ہو مربع ایک
خط معلوم ہ س کے فرض کرو کہ اب = ط اور ا ح = لا ∴ ب ح = ط − لا



اب موافق دیکھی کے ا ح × ب ح = ب د۲ یا لا (ط − لا) = ص۲
∴ ط لا − لا۲ = ص۲ یعنے لا۲ − ط لا = − ص۲ موافق قاعدہ مساوات کے —

(۱۹) نقطہ م کا واقع ہی برابر فاصلون پر ب ب اور ا ا سے جو متقاطع علی القوایم ہین



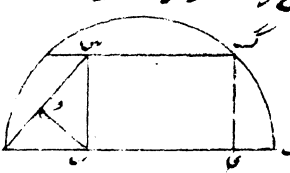
اس نقطہ مین سی گذرتا ہوا کہینچو خط ف م ق اسطرحسی کہ جز ق ف جو مابین خطون ا ا اور ب ب کی محدود ہی مساوی مقدار معروض ص کی ہو نقطہ م سی کہینچو عمود م ص اور م د اور فرض کرو کہ م د = ط اور د ق = لا اور ص ف = ر آب ظاہر ہی کہ ف ق = ف م + م ق ∴ ص = $\sqrt{ط^۲ + ر^۲}$ + $\sqrt{ط^۲ + لا^۲}$ اور $\frac{لا}{ط} = \frac{ط}{ر}$ اسواسطیکہ مثلث ف ص م اور م د ق آپسمین متشابہ ہین ∴ ص = $\sqrt{ط^۲ + \frac{ط^۴}{لا^۲}}$ + $\sqrt{ط^۲ + لا^۲}$ = $\sqrt{ط^۲ لا^۲ (۱ + \frac{ط^۲}{لا^۲})}$ اور بیانسی پر مساوات حاصل ہوتے ہی لا^۴ + ۲ ط لا^۳ + (۲ ط^۲ − ص^۲) لا^۲ + ۲ ط^۳ لا + ط^۴ = ۰ اس مساوات کے حل کرنیسی چار قیمتین لا کی معلوم ہوسکتی ہین اور شکل کہیچ سکتی ہی لیکن دریافت کرنا قیمتون جو تہی درجہ کی مساوات کا

طویل اور مشکل ہی سوا سطے اس سوال کو اور طرح سے حل کرتی ہین چونکہ چار خط
ف م ق اور ف م ق اور ر س م اور ر س م ایسی کھینچی جا سکتی ہین کہ اونسے
شرایط سوال کی پوری ہو سکتی ہین تو اس سے معلوم ہوتا ہی کہ اس سوال کے چار
جواب ہین لیکن چونکہ نقطہ م کا خطون ا ا اور ب ب سی نسبت ایک طرح پر
واقع ہی اسلیے ہم خیال کر سکتی ہین کہ خطوط مطلوبہ ہی ا ا اور ب ب کی
نسبت ایک ہی طرح پر واقع ہون مثلاً ایک خط ف م ق اور دوسرا ف م ق ہو
تو ضرور ہی کہ و ق = و ق اور و ف = و ف س = و س اور و ر =
و ر پس اگر ہم بجاے مقدار مجہول کے یعنی اوس عمود کو جو نقطہ د سی اوپر خط
س ر کی کھینچا جاوے اور فرض کریں د سی = ی تو نقطہ دو قیمتین اوس خط مجہول
کی ہونگی ایک تو متعلق خطون ا س ر اور س ر کی ہوگی اور دوسری ف ق
اور ف ق کی پس ۵ مساوات جیسی حل کرنا ہوگا درجہ دویم ہوگی یعنی یہہ ہوگے
ی۲ + ۲ ط ی − ص ط = ۰ اب چونکہ م ر = م ر اور نقطہ ۵ پر خط
س ر نصف ہوتا ہی تو بجاے مقدار مجہول کے ہم خط م ۵ کا لی سکتے ہین اور اس
فرض کی موافق ہم ایسی مساوات حاصل کر سکتے ہین کہ وہ درجہ دویم کی ہو یا درجہ دویم
کیطرف تحویل ہو جاویگی فرض کرو کہ م ۵ = لا ∴ م ر = لا + ص/۲ اور م س = لا − ص/۲ اور
م ر : م و :: ر س : س و = ط ص/(لا + ص/۲) اور م س : و د :: ر س : ر و = ط ص/(لا − ص/۲) لیکن ر س۲
= ر و۲ + س د۲ تو معلوم ہوا کہ ص۲ = (ط ص/(لا + ص/۲))۲ + (ط ص/(لا − ص/۲))۲ ∴ لا۲ − (۲ ط۲ + ص۲/۲) لا۲
+ ص۴/۱۶ − ط۲ ص۲/۲ = ۰ ∴ لا = ± √(ط۲ + ص۲/۴ ± ط/۸ √(ط۲ + ص۲

یہہ ایسی صورت ہی کہ اسکی وسیلہ سی شکل بآسانی کھینچ سکتے ہی اسمین مقدار منفی لانے
بیفایدہ ہے اور باقی دو قیمتو مین سے وہ قیمت جسمین $\sqrt{ط^2 + ص^2}$ مثبت ہی ہمیشہ ممکن
رہتی ہی اور خطون م س ر اور ب م س ر سی متعلق ہی اور دوسری قیمت جسمین $\sqrt{ط^2 + ص^2}$
منفی ہوتی ہی ایسی ہوتے ہی کہ وہ متعلق ف م ق اور ف م ق سی ہوتی ہی لیکن یہہ
قیمت غیر ممکن ہوتی ہی جبکہ ص^2 کم ہو ط^2 سے یعنی جسوقت ملاذین ہم خط و م اور کھینچین
خط ف م ق عمود د م پر تو اس صورتمین اگر ص کم ہو ف م ق سی تو لا کی قیمت
غیر ممکن ہوگی یہہ سوال نیوٹن صاحب کی علم حساب عامہ سی نکالا گیا ہی اور اس سے یہہ بات معلوم
ہوجاتی ہی کہ حل کرنے مسایل ریاضی مین کونسی مقدار کا مجہول فرض کرنا زیادہ مناسب ہے تاکہ
آسانی سی مساوات حل ہوسکی اگر کسی شکل کو حل کرنا ہو تو مجہول ایسا فرض کرنا چاہئے
جسمین تبدیل بہت کم واقع ہو۔ (۲۰) شکل گذشتہ مین نقطہ م پر سی گذرتا ہوا ایک
خط ف م ق ایسا کھینچو کہ حاصل جمع مربعون ف م اور م ق کا مساوی ہو مربعہ خط مفروض ص
کے اگر بطور اول جزو فقرہ گذشتہ کی حروف بجاے خطوط مختلفہ کی فرض کی جائین تو حاصل ہوگا
یہہ مساوات لا^2 + ط^2 + ر^2 + ط^2 = ص^2 اور لا ر = ط^2 ∴ لا^2 + ر^2 + ۲ لا ر =
ص^2 اور لا + ر = ± ص یا لا + $\frac{ط^2}{لا}$ = ± ص اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی
یہہ قیمت لا کی لا = ± $\frac{ص}{۲}$ ± $\sqrt{\frac{ص^2}{۴} - ط^2}$ اب واسطے اس امر کی کہ بجاے ان چار قیمتون لا کے
خطوط شکل مین کھینچی جاوین لازم ہی کہ م کو مرکز گردانکی بفاصلہ نصف قطر ص کی ایک دایرہ
کھینچین اور فرض کرو کہ خط ا ا' کو یہہ دایرہ نقاط ل اور ل' پر تقاطع کرتا ہی اور بعد
ازان ل اور ل' کو مرکز گردانکی بفاصلہ ص نصف قطر کی دو اور دایری کھینچو تو ظاہر ہی کہ

یہہ دو دایری خط ا ا کی چار نقطون مین کاٹین گے اور یہہ نئی چار نقطے نقاط مطلوبہ ہین

(۲۱) ہم ایک ایسا مثلث اب س دریافت کیا چاہتے ہین کہ اوسکی ضلع اس اور ب س اور ب ا اور عمود ب د سب کے سب اجزا و سلسلہ ضرب کے ہین فرض کرو کہ کسیکو خط مفروض مین سے = ط اور ب س = لا اب ا : ب س :: س ب : ب ا :: ب ا : ب د اور یہانسے موافق مساوات شکل چہٹی مقالہ اقلیدس کے ضرور ہے کہ مثلث اس ب اور اب د آپسمین مساوی الزوایا ہون اور اب س کا ایک ضایعہ ہی اور ا س = $\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}}$ پس مربعہ اس = مربعہ ب



+ مربعہ اب ∴ $\frac{\text{لا}^4}{\text{ط}^2}$ = لا^2 + ط^2 یعنے لا^4 — ط^2 لا^2 — ط^4 = ۰ اور اس مساوات سے یہہ قیمت لا کی دریافت ہوتی ہی لا = $\pm\sqrt{\frac{\text{ط}^2 \pm \text{ط}^2\sqrt{5}}{2}}$

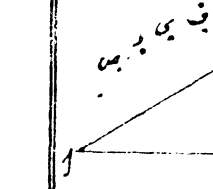
ان چار قیمتون لا کی مین سے دو غیر ممکن ہین کیونکہ ط^2 $\sqrt{5}$ زیادہ ہی ط^2 سے اور باقی دو مین سے ایک جو منفی ہی وہ بھی کار آمد خارج کئی ہوئی ہین سے فرض کرو کہ ب ی = ط $\sqrt{5}$ (۱۱) اور ی ف = $\frac{\text{ط}}{2}$ اور ف ک بھی ایک نصف دایرہ اور کھینچو عمود ی گ پس مصور ہین ی گ = $\sqrt{\frac{\text{ط}}{2}(\text{ط} + \text{ط}\sqrt{5})}$ = $\sqrt{\frac{\text{ط}^2 + \text{ط}^2\sqrt{5}}{2}}$ اور یہہ ہی قیمت مطلوبہ لا کی ہی

باب سیوم

نقطہ اور خط مستقیم کے بیان مین

(۲۲) باوجود رسہات کی کہ سوالات منقطع بہت عجیب ہوتی ہین لیکن اس واسطے کہ اوسمین کوئی بات بڑی یا نیچر خلق قابل بہت توجہ کی نہین مگر جب

اول دفعہ جبر و مقابلہ یورپ مین مروج ہوا اوسوقت اسی فرع علم ہندسہ مین جبر و مقابلہ کا استعمال کیا گیا لیکن ڈسکارٹیز نے جو فراسیسی حکیم تہا اوسنے اسکے ابتدا مین موجود تہا اول دفعہ جبر و مقابلہ کا اور بانو تمین استعمال کیا وہ جبر و مقابلہ کو خطوط کے باب مین کام مین لایا اور اسطرح پر اوسنے ایک نیا علم ایجاد کیا جسکا نام علم ہندسہ بالجبر رکہا گیا دسکارٹیز کی ترکیب ایک سہل مثال سی بخوبی ہویدا ہوسکتی ہے فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی نقطہ کو کہ وہ واقع ہو ہر ایک خط مستقیم



اب کی اور مجموعہ مربعون اط اور ب ط کا مساوی ہو مربع اب کی فرض کرو کہ ا نقطہ مطلوبہ ہی اور اوس نقطہ سی عمود طم کا خط اب پر کہینچو اور فرض کرو کہ ام = لا اور م ط = ر اور اب = ط پس موافق شرایط سوال کے ظاہر ہی کہ مربع اب = مربع اط + مربع ب ط = مربع ام + مربع طم + مربع طم + ب م یعنے ط^۲ = (لا^۲ + ر^۲) + (ر^۲ + (ط - لا)^۲ = ۲ر^۲ + ۲لا^۲ - ۲طلا + ط^۲ ∴ ر^۲ = طلا - لا^۲ اب ظاہر ہی کہ اس مساوات مین بیشمار قیمتین واسطے لا کے فرض کیجا سکتی ہین مثلاً واسطے لا یا ام کی $\frac{ط}{۲}$ اور $\frac{ط}{۴}$ وغیرہ فرض کرسکتے ہین اور ان فرضون کی موافق اوتنی ہی قیمتین ر یا طم کی دریافت ہونگی اور ہر واحد ان قیمتون سی ایک نقطہ جس سے شرایط سوال پوری ہونگی دریافت ہوگا فرض کرو کہ ص ر ی ف وغیرہ وہ نقاط ہین جو اسطرح دریافت ہوئی ہین تعداد قیمتون

ترکی زیادہ ہوسکتی ہی اگر واسطے لا کے ایسی قیمتین لیوین کہ وہ بامین قیمتون مذکورہ بالا کی واقع ہون اور اسس صورتمین ظاہر ہی کہ بی نہایت قیمتین ترکی دریافت ہوسکتی ہین اور ان قیمتون کی وسیلہ سے بی نہایت نقطی مثل ص د ی ت وغیرہ کی دریافت ہوسکتی ہین اور یی نقطے آپسمین بہت کم فاصلہ پر واقع ہونگے اور آخر کو ان نقطون سی ایک خط بن جاویگا اس خط ا ص د ی ف وغیرہ کو خواہ خط مستقیم ہو خواہ خط منحنی خط اس مساوات کا کہتی ہین ص — اسطور سی حل کرنا سوالات غیر منقطع کا کو یا تحقیق کرنا مساواتون غیر منقطع کی خطون کا ہی اور یہی فرع علم ریاضی بہت بڑی ہی اور اس سے بہت سی باتین معلوم ہوسکتی ہین —

(۳۰) اسبات کی واسطے کہ تحقیقات خطون مساوات کی بآسانی ہوسکی ریاضی دانون نی مساواتون کی دو قسمین کی ہین اول مساوات جبریہ دویم مساوات غیر جبریہ مساوات جبریہ اوسی کہتی ہین جسمین دو مقدارین غیر مقررہ لا اور آ پائی جاوین اور اوسکی اجزا محدود ہون اور قوای آ اور لا کی اعداد صحیح ہون اور مساوات مین مقادیر مقررہ بہی پائی جاوین اور اوس مساوات جبریہ کو کامل کہتی ہین جسمین تمام قسمون کے مجموعہ مقادیر غیر مقررہ کی اور ایک مجموعہ مقادیر مقررہ کا پایا جاوے [illegible] مساوات غیر جبریہ اوسی کہتی ہین جسمین جمع نہ ہون قوای مقادیر غیر مقررہ [illegible] مساوات مین درجہ اس رقم کی دریافت [illegible] شمار بیحد دو مساواتین ہین —

(۱) بکار پیری [illegible] کہ اوسکی مساوات کا کہتے ہین

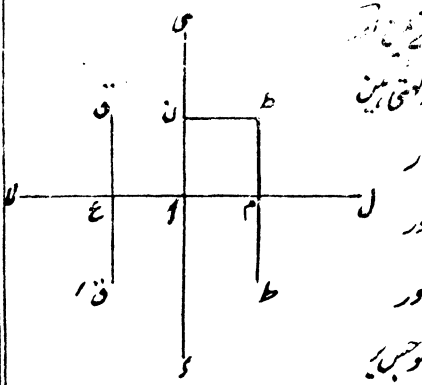
ط ر + ص لا + س = ۰ ط ر² + ص لا ر + س لا² + د ر + ی لا + ف = ۰

اول مساوات کامل مساوات درجہ اول کی ہی اور دوسری کامل مساوات درجہ دوم
کی ہی اور جہ قیاس کرنا چاہئے اور درجہ کے مساواتون کا اون مساواتونکو جنمین
مقادیر غیر مقررہ لا اور ر ہین لیکن اونکی ہزار غیر مقررہ محدود اور غیر نزولی
نہین ہین مساوات غیر جبریہ کہتی ہین مثلاً ر = جس لا ط لا = مساوات
غیر جبریہ ہین (۴۴) نام خطون مساواتون کا اونکی مساواتون
کی موافق ہوتا ہی مثلاً خط اول درجہ کی مساوات کو خط اول درجہ کا کہتی ہین اور خط
دوسری درجہ کی مساوات کو دوسری درجہ کا خط کہتی ہین
اور خط مساوات غیر جبریہ کو خط غیر جبریہ کہتی ہین مساوات جبریہ مین ہمیشہ یہہ نہین ہوتا
کہ اونسی کوئی خط ضروری تعلق رکھی ہو اسطے کہ مساوات ایسی بھی ہوسکتی ہی کہ جسکی کوئی
قیمت ممکن نہو اسکی مثال یہہ ہی ر² + لا² + ط² = ۰ یہہ ایک ایسی مساوات ہی کہ
جسمین کچھہ ہی قیمت لا کیواسطے فرض کرین پھر بھی کوئی قیمت ممکن ر کی واسطے دریافت
نہین ہوسکتی اور یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی خط اسی مساوات سی متعلق نہین ہی

دریافت کرنا مقام کسی نقطہ کا خاص سطح مین

(۴۵) مقام ایک نقطہ کا کسی سطح مین اسطرح دریافت ہوسکتا ہی کہ معلوم کرین ہم
اوسکا مقام بعض اشیا مقررہ کے کہ سطح مذکور مین واقع ہون پس جب یہہ
معلوم ہوا تو فرض کرتے ہین ہم کہ سطح کاغذ کی سطح مفروض ہی اور مان لیتے ہین ہم
کہ نقطہ تقاطع تو دو خطون غیر محدود لا ل اور ر ی کا اور زاویہ جو مابین ان

دونون خطون کے واقع ہی معلوم ہی اب کسی نقطہ ط سی کہ اسی سطح مین واقع ہی
کھینچو طم متوازی آی کی اور طن متوازی آل کے پس اسصورت مین ظاہر ہی
کہ مقام ط کا معلوم ہوجاویگا اگر مقدار خطون آم اور آن کی معلوم ہون اسواسطے
کہ دلیل خلف سی یہہ آسانی ثابت ہوسکتا ہی کہ مابین زاویہ آل کے فقط ایک ہی ایسا
نقطہ ہی کہ اوسکی فاصلے خیالون آی اور آل سے ط ن اور ط م ہین



آم کو وتر العرض نقطہ ط کا کہتے ہین اور
آن یا اوسکے مساوی ع م کو وتر کہتی ہین
اور آم اور ط م دونون کو اوتار
نقطہ ط کی کہتی ہین۔ آل کو محور
اوتار وتر العرض کا اور آی کو محور
وترون کا کہتی ہین اور نقطہ آ کو جس پر
دونون محور تقاطع کرتی ہین نقطہ شروع کہتی ہین محورون کو ترچھا یا متقاطع علی
الزوایم کہا کرتی ہین جب کہ زاویہ ی آل ترچھا یا قایمہ ہو اس رسالہ مین محور
متقاطع علی الزوایم کا اکثر استعمال کیا ہی اسواسطی کہ اوسمین بہت سہولت ہوتی ہی
فرض کرو کہ آم = لا اور م ط = ک پس جسوقت پیمایش کرتی ہین ہم ان خطون
کو تو دریافت ہوتا ہی کہ اول ط ہی اور دوسرا ص پس واسطے دریافت کرنی مقام
نقطہ ط کے دو مساواتین کفایت کرتی ہین لا = ط اور ک = ص
مقام اسی نقطہ کا اس مساوات سی بہی دریافت ہوسکتا ہی (ک - ص)۲ = لا - ط)۲ +

اسواسطے کہ شرط اس مساوات کی اوسیوقت پوری ہوسکتی جبکہ وقت لا = ط
اور ر = ص پس یہانسی عام قاعدہ یہہ نکلتا ہی کہ جو کوئی ایسی مساوات ہو کہ اوسکی
شرط نقطہ ایک ایک قیمت لا اور ر کی ایسی پوری ہوتی ہو وہ مساوات متعلق اوس نقطہ
کی ہوگی جسکا مقام بذریعہ قیمتون مذکورہ کی متعین ہوتا ہی —

(۲۶) اسیطور سے مقام کسی نقطہ کا درمیان زاویہ ی آل کی دریافت ہوسکتا ہی لیکن
واسطے دریافت کرنے مقام اون نقاط کی جو زاویہ ی آل کی درمیان مین واقع
ہون چند اور باتون کا بھی لحاظ رکھنا ضرور ہی فقرہ (۱۸) مین ایک مسئلہ کے
حل کرنی مین ہمنی بیان کیا ہی کہ مقادیر منفی کی پیمایش ایک خاص سمت مین ہوا
کرتی ہی پس اگر اسی خیال کو ہم زیادہ وسعت دین اور آیندہ کی باتین حاصل ہوسکینگی
جب کسی مقدار پر علامت نفی کی ہم باتی ہین تو اوس سے ہمارے مراد یہہ نہین ہوتی ہی کہ
اوسکی مقدار مین کچھہ فرق آگیا بلکہ یہہ مراد ہوتی ہی کہ اوسپر ایک طرح کا عمل کرین اور
اور اوسی خاص سمت مین پیمایش کرین مثلاً مقدار مطلق — ہ کی وہی ہی جو + ہ
کی ہی لیکن — ہ سی نقطہ یہہ مراد ہی کہ ہ کو تعریق کرنا چاہیے اور + ہ سی یہہ مراد
ہی کہ ہ کو جمع کرنا چاہیے علامت اثبات یعنی + مختلف مقدارون پر واقع ہوتی ہی اور
اس علامت کی موافق مقدارین مختلف واسطے علامت نفی یعنی — سی ہوتی ہین
کچھہ ہی معنی واسطے + کی ہون لیکن ہر صورت مین یہہ مساوات ہوگی — ط + ط
= ۰ پس یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ — ط کی یہہ معنے ہین کہ اگر اوسپر + ط لگادین
تو مجموعہ صفر ہوجاوے اور حقیقت مین یہی معنی علامت نفی کے ہوتی ہین کہ وہ ہمیشہ اوپر علامت

+ کی موقوف ہوتی ہی مثلاً اگر ایک بالنس پانی مین رکھین اور اوسپر نشان انکھون کی لگالین اور ایک خاصہ سیدہ یا نشان عظیم کرین کہ اوس سے یہہ بات شمار کیا کرین کہ سطح پانی کی کسقدر اونچی اوس نشان سے ہی پس اسصورتمین اگر پانی اونچا اس نشان سے ہو مثلاً ۱۱ انچ بلند ہو تو اس بلندی کو مثبت ۱۱ انچ کہا کرتی ہین لیکن اگر پانی نشان سے ۱۱ انچ نیچی ہو تو کہا کرتی ہین کہ پانی کی سطح نفی ۱۱ انچ اونچا نشان مذکور سی ہی اور اسکی وجہ یہہ ہی کہ اگر اس نفی بلندی پر ۱۱ انچ مثبت زیادہ کرین تو بالضرور حاصل جمع سادے صفر کے ہوگا اور پانی کی سطح ٹھیک برابر نشان کے ہوگی اور اوسکا فاصلہ اوس نشان سی صفر انچ ہوگا فرض کرو کہ ایک آدمی ۶ گھنٹی مین ق میل تعداد مین ایک خاص سمت مین سفر کرتا ہی اور اسیقدر وقت مین ق میل بعد واپس سمت مخالف مین آتا ہی پس اسصورتمین ظاہر ہی کہ کل ۱۲ گھنٹہ مین وہ ق — ق حرکت کریگا یعنی اوسکا فاصلہ مقام شروع سی ف — ق میل ہوگا مثلاً اگر ف = ۱۰ اور ق = ۶ میل تو بعد ۱۲ گھنٹہ کی اوسکا فاصلہ مقام شروع سے ۱۰ — ۶ = ۴ میل ہوگا لیکن فرض کرو کہ شخص مذکور ۱۰ ہی میل واپس آتا ہی تو اوسکا فاصلہ مقام شروع سے ۱۰ — ۱۰ یعنی صفر میل ہوگا یعنی ۱۲ گھنٹی کی بعد وہ آدمی پھر اوسی مقام پر آجائیگا جہانسی وہ چلا تہا فرض کرو کہ شخص مذکور ۱۵ میل واپس چلا تو ظاہر ہی کہ اسصورتمین وہ بعد ۱۲ گھنٹہ مقام شروع سے صفر کے سی ۵ میل بھی پیچھے جا پڑیگا اسی جا ہم لفظ پیچھے کا کام مین لائی ہین اسواسطیکہ جبکہ اول دفعہ وہ مقام شروع صفر کر سکتا تہا تو ہمنی یہہ بات مانی تہی کہ وہ آگی کو چلتا ہی اور اسصورتمین ظاہر ہی کہ جب مسافر

۱۰ میل چلتا ہی اور ۵ میل پیچھے واپس آتا ہی تو ظاہر ہی کہ حقیقت مین وہ مقام شروع سی ۵ میل چلا یعنی ۵ میل آگی چلتا پھر ضرور ہی تاکہ مسافر اپنی اصلے یعنی شروع کے مقام پر آجاوے فرض کرو کہ نقطہ آ سمت مثبت آل مین ایک خط پیمایش کیا جاے اور یہہ بھی فرض کرو کہ ایک خط مستقیم بسبب حرکت اس نقطہ کی بنی اور جب وہ نقطہ مقام ب تک جاوے یعنی

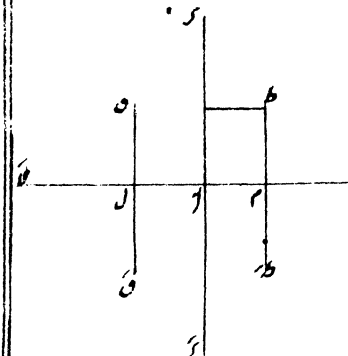
ل ——— ب ——— ص ——— ا

م آحاد خطی طی کری اوسوقت وہ پھر اولٹا مقام ص تک چلی اور اس مسافت مین وہ ن احاد خطی طی کری پس اسصورتین ظاہر ہی کہ کل مقدار آگی چلنی نقطہ آ کی م ن احاد خطی سی تعبیر کیجاگی پھر فرض کرو کہ ن زیادہ ہی م — ن سی پس اسصورت مین بھی ظاہر ہی کہ کل مسافت آگی چلنے آکے م — ن ہوگی لیکن اب م — ن ایک مقدار منفی ہوگی اور اس سے یہہ معلوم ہوگا کہ کسقدر نقطہ مفروض کو آگی لیجانا چاہیے تاکہ وہ اپنی شروع کی مقام پر پھر آجاوے اب ظاہر ہی کہ کوئی خط مثل اص کے نقطہ آ کی حرکت سی بنا ہوا تصور کیا جاتا ہی اور یہہ تصور دو طرح سے ہوسکتا ہی اول تو یہہ کہ وہ آ سی ص تک چلا اور دویم یہہ کہ وہ اول آ سی ب تک آگی کو پہونچا اور وہان سی اولٹا ص تک آیا اب ظاہر ہی کہ اگر ہم یہہ مان لین کہ جتنی مقدارین مقام آ طرف ل کی شمار کیجاوے وہ مثبت ہین تو بالضرور ہمین ماننا چاہیے کہ جو مقدارین سمت مخالف مین پیمایش کیجاوین وہ سب منفی خیال کیجاوین

ل ——— ب ——— ا ——— س

اب ظاہر ہی کہ مقام نقاط کی باسانی معلوم ہوسکتی ہین اگر فرض کیا

جاوی اون خطوط کو جو کہ واقع ہون سمت اآلا کیطرف مثبت اور اونکو جو کہ اآلا کی
طرف ہین منفی اور اسیطرح سی اونکو
جو کہ اآ کیطرف ہین مثبت اور اونکو
جو اآ کیطرف ہین منفی اسیواسطے
موافق اس فرض کے اگلی فہرست
اوتار کی بخوبی واضح ہوجائیگی



مقام نقطہ ط کا زاویہ لااک مین ..... + لا ..... + ک

ق ک الا' ..... — لا ..... + ک

قَ لا ا' ..... — لا ..... — ک

ط' لا ا' ک ..... + لا ..... — ک

اسیواسطے مساواتین نقطہ ط کی بفرض لا = ط اور ک = ص

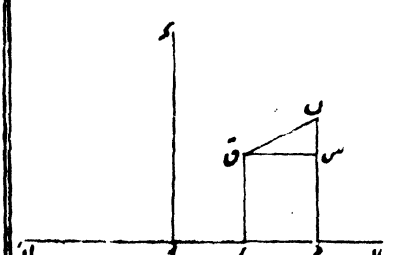
..... ق ... لا = — ط اور ک = ص

..... قَ ... لا = — ط اور ک = — ص

..... ط' ... لا = ط اور ک = — ص

(۲۸) اگر دتر العرض آم ایک ہی رہی اور طآم کم ہوتا جاوے تو نقطہ ط کا نزدیک محور
اآلا کی آتا جاویگا اور جب بمقدار طآم کی مساوی صفر کی ہوجاوی تو نقطہ ط کا محور اآلا
پر ہوگا اس صورتین مساواتین نقطہ ط کی یہہ ہونگی لا = ط اور ک = ۰ یا
ک۲ + (لا — ط) ۲ = ۰ اسیطور سے جب کہ نقطہ ط کا محور اآ پر ہو تو اسکی

مساواتین یہہ ہونگی لا = ۰ اور ر = ص ∴ (ر − ص)² + لا² = ۰
اگر دونو مقدارین آم اور م ط کی زایل ہوجاوین تو اسیصورتمین مساواتین گذشتہ
مساواتین نقطہ شروع آ کی ہوجاوینگی لا = ۰ ر = ۰ یا لا + ر² = ۰
مثال (۱) وہ نقطہ جسکی مساواتین لا = ۴ اور ر = −۲ واقع ہی درمیان
زاویہ لا آ ر کی جسکا فاصلہ آم = ۴ احاد خطی کے محور ر سے اور م ط =
۲ احاد خطی کے محور لا کی سے
مثال (۲) وہ نقطہ جسکی مساوات (ر + ۳)² + (لا + ۲)² = ۰ واقع ہی
درمیان زاویہ لا آ ر کی جسکی فاصلے ا ل = ۲ اور ل ن = ۳ محورون سے ہین
مثال (۳) وہ نقطہ جسکے مساواتین لا = ۰ اور ر = −۳ واقع ہی خط آ ر پر
جسکا فاصلہ = ۳ احاد خطی کے ہی
مثال (۴) وہ نقطہ جسکے مساوات ر² + (لا + ط)² = ۰ واقع ہی محور آ لا
پر جسکے فاصلہ نقطہ شروع سے ساوی ط کی ہی یہہ تمام صورتین بآسانی ثابت ہوسکتے
ہین جبکہ محور متقاطع علی الزوایم ہون —
(۲۹) دریافت کرو ایک صورت واسطے ایک فاصلہ ق کے جو کہ درمیان نقاط ل
اور ق کی واقع ہی فرض کرو کہ محور
متقاطع علی الزوایم ہون اور مان لو
کہ مساواتین نقطہ ن کے لا = ط
اور ر = ص اور ق کی لا = ط



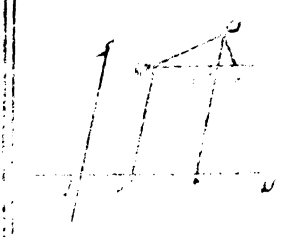
اور ر = صَ یا فرض کرو کہ اوتار نقطہ ن کے ا م = ط اور م ن = ص اور اوتار نقطہ ق کی ا ر = طَ اور ر ق = صَ اور کھینچو خط ق س کا متوازی خط آ آ کی اسیواسطے مربع خط ق ن = مربع خط ق س + مربع ن س کو اور چونکہ ق س = ر م = ا م − ا ر = ط − طَ اور ن س = ن م − ق ر = ص − صَ

∴ ف² = ق ن² = (ط − طَ)² + (ص − صَ)² اگر ق زاویہ آ آ کا مین فرض کیا جاوے تو ا ر = − طَ ∴ ف² = (ط + طَ)² + (ص − صَ)²

اگر نقطہ ق کا شروع پر فرض کیا جاوے تو طَ = ۰ اور صَ = ۰ ∴ ف² = ط² + ص²

∴ ف = √(ط² + ص²)

(۳۰) اگر محور متقاطع علی القوایم نہ فرض کئے جاوین بلکہ زاویہ جو کہ محور آپس مین بناتی ہین = ج اب واسطے ثبوت شکل مرقومہ بالا کے کھینچو خطوط ن م اور طَ



تو متوازی آ آ کی اور ق س کا متوازی آ آ کے اور ڈالو ایک عمود ن د کا خط ق س پر تو مربع ق ن = مربع ق س + مربع ن س + دوچند سطح ق س اور س د کو اور چونکہ ق س = ط − طَ اور ن س = ص − صَ اور س د = ن س جم ر آ آ = ن س جم ج = (ص − صَ) جم ج

∴ ف² = (ط − طَ)² + (ص − صَ)² + ۲ (ط − طَ) (ص − صَ) جم ج

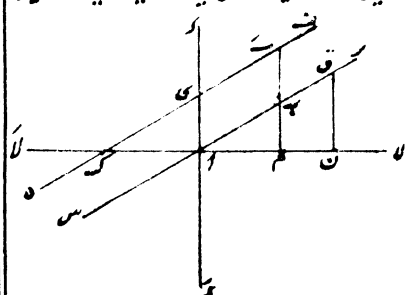
اور جبکہ نقطہ ق کا نقطہ شروع ہوگا تو طَ = ۰ اور صَ = ۰ ∴ ف² = ط² + ص² + ۲ ط ص جم ج

ص^{۲} + ۲ ط ص جم ج

در باب مساوات اوس خط کی جو کہ اول درجہ ہی متعلق ہی

(۳۱) دریافت کرو خط اول درجہ کی مساوات کا جسمین دو مقدارین غیر مقررہ پائی جاوین عام صورت ایسی مساوات کی یہ ہوگی ا ر + ب لا + س = ۰ یا

ر = − $\frac{ا}{ب}$ لا − $\frac{س}{ب}$ یا ر = ط لا + ص اگر − $\frac{ا}{ب}$ = ط اور − $\frac{س}{ب}$ = ص آب ہم سب سے پہلی نہایت آسان صورت مساوات درجہ اول کی جو کہ ر = ط لا ہی حل کرینگے فرض کرو کہ آلا اور آر محور متقاطع علی القوایم ہین اور اب ایک نقطہ فرض کرنی سی لا کو مساوات گزشتہ مین مساوے ایک خاص قیمت ۱ یا ۲ یا ۳ وغیرہ کے حاصل ہوسکتا ہی فرض کرو کہ ام اور م ب اور ان اور ن ق اور تار نقطون ب اور ق کی ہین اور چونکہ ر = ط لا کی ہی



تو م ب = ط ام اور ن ق = ط ان ∴ م ب : ام :: ن ق : ان

یہانسی معلوم ہوا کہ مثلث ام ب کا مشابہ ہی مثلث ان ق کو اور زاویہ م ا ب کا مساوے ہی زاویہ ن ا ق کی اسیواسطے خط ا ب منطبق ہوگا خط ا ق پر اگر ایک تیسرا نقطہ ر کا بھی اسیطور سے لیا جاوے تو اسیطرح ثابت ہوگا کہ خط ا ر منطبق ہے خطوط ا ب اور ا ق پر یہانسی ثابت ہوا کہ تمام نقطے ا ب ق ر وغیرہ ایک ہی خط مستقیم مین ا ر پر ہین اسیطور سی جبکہ لا کو قیمت منفی دی جاوین تو نقاط س وغیرہ

دریافت ہوجاوینگی اور اب ثابت ہوگا کہ تمام نقطے س آ ق ر وغیرہ ایک ہی خط مستقیم آر مین ہین یہانتک بیدلیل ظاہر ہوا کہ خط س آر مساوات ی = ط لا + ص سے دریافت ہوا ہی اور مساوات ی = ط لا + ص سے معلوم ہوتا ہی کہ جیادہ تر آ کا زیادہ ہی پہلے و ترسی بمقدار ص کی اور اب اگر قطع کرین ہم آی کو آ آ مین سے مساوے مقدار ص کے اور کھینچین نقطہ ہی سی خط ہ ی ف کو متوازی خط س آر کی تو ہ ی ف وہ خط ہی جو کہ بوسیلہ مساوات ی = ط لا + ص کی حاصل ہوا ہی یہانتک معلوم ہوا کہ مساوات اول درجہ کی تعلق رکھتی ہی خط مستقیم سے —

(۳۲) اب ہم بیان کرینگی واسطے بخوبی سمجھنی خاصیت اس مساوات کی — دریافت کرو ایک مساوات واسطے خط مستقیم ہ ق کی یعنی معلوم کرو نسبت اس خط کی مختلف نقطون کے اوتار کی فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محرون لا اور وا کا ہی اور نقطہ آ سے کھینچو ایک خط آ ب کا متوازی خط ہ ف کی اور نقطہ ب سے جو کہ خط مفروض پر ہی کھینچو عمود ب م کا لا پر جو کہ کاٹی گا خط آر کو نقطہ ب پر اور فرض کرو کہ آ م = لا اور م ب = ی اور ا ی = ص اسیواسطے ہم ب = ب م + ب ب = آ م مس ب آ م + ا ی = لا مس ف ک لا + ص یا ی = ط لا + ص اگر مس ف ک لا = ط اور اب اگر ا ک = ط کی فرض کیا جاوے تو ا ی = ا ک مس ی ک ا یا ص = ط ط اسیواسطے مساوات خط مستقیم کے یہہ ہوجاویگی ی = ط لا + ط ط

(۳۳) واضح ہو کہ مساوات عام خط مستقیم مین دو مقدارین مقررہ ص اور ط

کی بین مقدار ص کی مساوی فاصلہ اسی یا مساوی کوتراو سی نقطہ کی جہانسے خط مستقیم تقاطع کرتا ہی محور آ کی سی اور مقدار ط تعبیر کرتی ہی مماس اُس زاویہ کو جو کہ خط مستقیم بناتا ہی محور آ سی کیونکہ زاویہ ف ک ا = زاویہ ب ا م پہانسی معلوم ہوا کہ مس ف ک ا = مس ب ا م = $\frac{\text{ص}}{\text{لا}}$ = ط اور واضح ہو کہ ط تعبیر کرتا ہی مماس زاویہ ف ک لا کو اور اسی مماس زاویہ ف ک لا کا بہی سمجھنا چاہیے

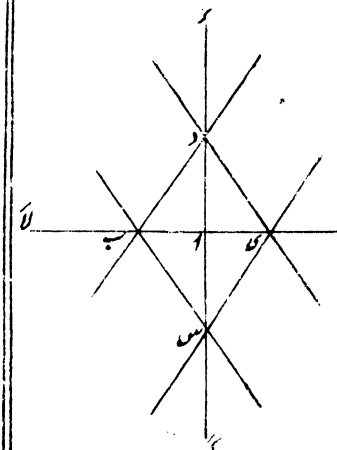
(۳۴) مساوات ر = طلا + ص مین دو مقدارین ط اور ص کی مثبت یا منفی ہو سکتی ہین یا ایک انمین سی مثبت اور دوسری منفی ہو سکتی ہی اب ہم دریافت کرینگے مقام خط مستقیم کو ہر ایک صورت مین اور یہہ ظاہر ہے کہ بوسیلہ معلوم ہونی دو نقطون کی ایک خط مستقیم بآسانی کہینچ سکتا ہی اسیواسطے اب ہم دریافت کرینگے اون نقطون کو جہانکہ یہہ خط مستقیم کاٹتا ہی دو محور ذکو اور یہہ نقاط بآسانی معلوم ہو سکتی ہین

(۱) فرض کرو کہ ط اور ص مثبت ہین ∴ ر = طلا + ص فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = ص محور آ سی کاٹو ا د = ص اور فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ لا مین سی کاٹو ا ب = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ اور ملاؤ ب د تو خط مستقیم ب د وہ خط ہی جسکا دریافت کرنا منظور تہا (۲) فرض کرو کہ ط مثبت اور ص منفی ہی ∴ ر = طلا − ص فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = − ص ا د مین سے کاٹو ا س = ص اور فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ لا مین سی کاٹو ا ی = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ اب ملاؤ س ی کو تو س ی خط مطلوب ہے (۳) فرض کرو کہ ط منفی اور ص مثبت ہی

ر = − ط لا + ص فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = ص آ مین سی قطع کرو

ا د = ص اور فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا = $\frac{ص}{ط}$ آ لا مین سی کاٹو آ ی = $\frac{ص}{ط}$

ملاؤ ی کو تو خط دی خط مطلوب ہی (۴) فرض کرو کہ ط اور ص دونون منفی



ہین ∴ ر = − ط لا − ص

اب فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = − ص

ا ر مین سی کاٹو ا س = ص

اور فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا =

− $\frac{ص}{ط}$ آ لا مین سے قطع کرو

ا ب = $\frac{ص}{ط}$ ملاؤ ب س کو تو

ب س خط مطلوب ہی —

(۳۰۵) مقدارین ط اور ص کی اپنی ذات مین بھی تبدیل ہو سکتی ہین یعنے کم و بیش ہو سکتی ہین سوای برابری علامت کے فرض کرو کہ ص = ۰ ∴ ر = ± ط لا

اسکی وسیلہ سی ایسے دو خط مستقیم دریافت ہو سکتے ہین جو کہ گذرتی ہین نقطہ شروع پر سی اور جنکی ڈھلاؤ + ط اور − ط ہی فرض کرو ط = ۰

∴ ر = ۰ لا ± ص یا ر = ± ص اور لا = ÷ پہلی مساوات سے معلوم ہوتا ہی کہ ہر ایک نقطہ خط مستقیم مین سے فاصلہ پر ہی محور لا سی اور دوسری مساوات یا (۰ لا = ۰) سی معلوم ہوتا ہی کہ ہر ایک قیمت لا کی شرط مساوات کے پورا کرتی ہی پس ثابت معلوم ہوا کہ اس مساوات کی وسیلہ سے دریافت ہونگی دو خط

دو خط مستقیم جو کہ کھینچی جاوین کے دو نقطون د اور س سے متوازی محور لا کے
فقرہ (۲۸) مین بیان کیا گیا ہی کہ مساواتین ر = ص اور لا = ۰ تعلق رکھتے
ہین ایک نقطہ سی اور یہان ثابت کیا ہی کہ ر = ص اور لا = ÷ تعلق ایک
خط سی رکھتی ہین یہانسی ثابت ہوا کہ لا = ÷ کا جسکو کہ اکثر چھوڑ دیتی ہین ضرور
لحاظ کرنا چاہیے فرض کرو کہ ط = ١/٠ اس صورت مین موافق فقرہ (۳۲) کے
مساوات خط مستقیم اسطور سے لکھی جاویگی ر = ط لا ± ط′ یا ١/٠ = لا + ط′
اور جبکہ لکھی ہمنی اسمین قیمت ط = ١/٠ کی تو صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی
ر = لا ± ط′ یہانسی معلوم ہوا کہ لا = ± ط′ اور ر = ÷ مساواتین دو خطون
مستقیم کے ہین جو کہ متوازی ہین محور ر کی فاصلہ ط′ پر اور اب فرض کرو کہ
ط = ۰ اور ص = ۰ اسیواسطی صورت ر = ط لا + ص اس شکل کی ہوجاویگی
ر = ۰ لا + ۰ یہانسی معلوم ہوا کہ ر = ۰ اور لا = ÷ سی محور لا کا تعبیر
ہوتا ہی اور اگر ط = ١/٠ اور ص = ۰ کی ہو تو صورت مساوات یہہ ہوجاویگی
۰ ر = لا + ۰ ∴ لا = ۰ اور ر = ÷ اور یہہ مساواتین تعبیر کرتی ہین محور ر کو
(۳۶) موافق ترکیب گذشتہ کی ہر ایک خط جسکو کوئی مساوات تعلق رکھتی بآسانی
کھچ سکتا ہی مثالون آیندہ مین پچھلے شکل کا لحاظ رکھنا چاہیے
مثال (۱) ۳ ر − ۵ لا − ۱ = ۰ فرض کرو لا = ۰ ∴ ر = ١/٣
محور آ ر مین سی قطع کرو ا د = ١/٣ احاد خطی کے تو اب معلوم ہوا کہ یہہ خط
گذرتا ہی نقطہ د مین سے اور اب فرض کرو ر = ۰ ∴ لا = − ١/٥

محور الا میں سے کاٹو اب = $\frac{1}{5}$ احاد خطی کی تو اب معلوم ہوا کہ یہی خط اب میں سے ہی گذرتا ہی ملاؤ ایک خط درمیان نقاط د اور ب تب خط اب خط مطلوب ہوگا ۔

مثال (۲) ۱۰ ر — ۱۲ لا + ۶ = ۰ اس مساوات کی حل کرنی سے معلوم ہوگا کہ یہہ تعلق رکھتی ہی ایک ایسی خط سے جو کہ واقع ہوگا اوس سمت جسمیں کہ خط س ک واقع ہی مثال (۳) ر = لا = ۰ فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = ۰

یہانسے ظاہر ہوتا ہی کہ وہ خط جس سے یہہ مساوات تعلق رکھتی ہی نقطہ شروع پر سے گذرتا ہی اور چونکہ اس مثال میں ط = ۱ تو معلوم ہوا کہ خط مذکور محور سے زاویہ ۴۵° درجہ کا بناتا ہی اب کھینچو ایک ایسا خط جو کہ تنصیف کرے زاویہ ر الا کو تو یہہ خط کھینچا ہوا خط مطلوب ہوگا مثال (۴) ۵ ر — ۱۲ لا = ۰ اسسے معلوم ہوتا ہی کہ وہ خط جسکے یہہ مساوات ہی نقطہ شروع پر سے گذرتا ہی واسطے معلوم کرنے ایک دوسری نقطہ کی فرض کرو کہ لا = ۵ ∴ ر = ۲ یہانسی معلوم ہوا کہ ای = ۵ اور نقطہ ی سے کھینچو ایک عمود (ی ب = ۲) الا پر اور ملاؤ نقاط آ اور ب کھینچو ایک خط جو کہ مطلوب ہے

(۵) ط ر + ص لا = ۰ اسکی وسیلے ایک ایسا خط پیدا ہوگا جو کہ گذریگا نقطہ آ میں سے متوازی ہوگا خط ب س کو مثال (۶) ر۲ — ۱۳ لا = ۰ اسکی حل کرنی سے دو خط ایسی حاصل ہونگی جو کہ زاویہ ۹۰° کا بناوینگی محور لا سے

مثال (۷) ۳ ر — ۴ = ۰ قطع کرو ا د = $\frac{۴}{۳}$ احاد خطی کے تو اب ایک خط کھینچا

گیا نقطہ معین سے متوازی آلا کی خط مطلوب ہوگا مثال (۸) لا + لا − ۲ = ۰ کا تو ی = ۱ اور ا ب = ۲ تو اب ایک خط کھینچا گیا نقطہ ی اور ب مین سے مثال (۹) ر + ۲ لا = ۴ مساوات خط مستقیم بآسانی اس صورت کی ہوسکتی ہے ر/ص + لا/ب = ۱ مقدارین ص اور ط فاصلے نقطہ شروع سے اس نقطہ کے ہین جہانکہ خط مستقیم تقاطع کرتا ہی محورون لا اور ر سے اب اگر ہم بدلین صورت مثال (۹) کی طرف ر/ص + لا/ب = ۱ کی تو ر/۴ + لا/۲ = ۱ صورت مساوات (۹) کی ہوجاویگی ا د = ۴ اور ا ی = ۲ اور ملاو دی کو تو خط دی خط مطلوب ہوگا

(۳۷) اگر ایک مساوات اول درجہ مین جذر ایک مقدار منفی کا پایا جاوے تو یہہ مساوات خط مستقیم سی تعلق نہین رکھی گے یہہ مساوات ایک نقطہ سی تعلق رکھی گے یا یہہ ناممکن ہوگی مثلاً مساوات ر + ۲ لا − ۲ − ط = ۰ ایک ایسی نقطہ سے تعلق رکھتی ہے جسکے و تر لا = ۰ اور ر = ط کیونکہ سوای اس قیمت لا کی کوئی اور قیمت اسکی ایسی نہی ہوسکتی ہے کہ جسکی وسیلہ سی ایک دوسری قیمت ر کی حاصل ہو اور مساوات ر + لا + ط − ۱ = ۰ ناممکن ہے کیونکہ کوئی قیمت لا کی ایسی نہین ہوسکتی کہ جسکی وسیلہ سی قیمت ر کی بھی حاصل ہو —

(۳۸) ب ثابت ہوا کہ مساوات خط مستقیم کی ر = ط لا + ص اور معلوم اس خط کا موقوف دو مقدارون ط اور ص پر خط معلوم سی مراد ہی کہ اسکی مقام دیا ہوا ہی یعنی مقدارین ط اور ص کے معلوم ہین دریافت کرنے ایک

خط سی مراد ہی کہ ہم اسکا مقام دریافت کرنا چاہتے ہین اور بواسطے اس مطلب کے ہم
ی = ط لا + ص اسکی مساوات فرض کرتے ہین اور بوسیلہ شرایط سوال کے مقدارین
ط اور ص کی دریافت کی جاتی ہین اور اگر ایک ہی مقدار انمین سے معلوم ہوسکی
تو دریافت ہوتا ہی کہ سوال کافی نہین ہین واسطے تقرر کرنے مقام خط کے
نقطہ معلوم کی ہم ضرورت جانتے ہین کہ اسکے اوتار معلوم ہین اور ہم اکثر لا اور را اوتار
نقطہ معلوم کی فرض کیا کرینگے واسطے اختصار کی اوس نقطہ کو کہ جسکے اوتار
لا اور را ہین نقطہ لا را اور ر را کا تعبیر کرینگی اور اسیطرح سے اوس خط کو کہ جسکے
مساوات ی = ط لا + ص ہی خط ی = ط لا + ص کا تعبیر کرینگی ۔ اگر ایک
شکل کے ثابت کرنے مین دو مساواتین ی = ط لا + ص اور ی = ط لا + ص
لکھی جاوین تو ان دونون مساواتونمین لا اور را مختلف سمجھنی چاہئین
(۴۰۹) بڑی افسوس کی بات ہی کہ اگلی شکلون مین جو کہ درباب خطوط مستقیم کے
ہین ہم یہ ایک سی مساواتونکو کام مین بھی لاسکتے ہین ۔

شکلین درباب خطوط مستقیم کے

(۴۱۰) دریافت کرو مساوات ایک ایسی خط کی جو کہ گذرتا ہو ایک نقطہ مفروض سے
چونکہ نقطہ مفروض ہی اسیواسطے اسکی اوتار معلوم ہونگی تو اب فرض کرو کہ لا را اور
را اسکے اوتار ہین اور فرض کرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہہ ہی ی = ط لا + ص
اور ظاہر ہی کہ مساوات خط مستقیم کے نقطہ مفروضہ پر یہہ ہوجاویگی را = ط لا
+ ص ∴ ص = را − ط لا لکھو اس قیمت ص کو مساوات اول مین

∴ ر = ط لا + ر۱ − ط لا۱ یا ر − ر۱ = ط (لا − لا۱) نہایت آسان طریقہ واسطے دور کرنی مقدار ص کے یہہ ہی تفریق کرو مساوات دویم کو مساوات اول مین سے اور یہہ طریقہ اکثر اختیار کیا گیا ہی چونکہ ط جو کہ سمت خط کو مقرر کرتی ہی اس مساوات مین معلوم نہین ہی تو معلوم ہوا کہ لانہایت خطوط نقطہ مفروضہ سے کھینچ سکتے ہین یہہ بات علم ہندسہ سے بھی ثابت ہو سکتی ہی اگر نقطہ مفروضہ محور لا پر ہو تو ر۱ = ۰ کی ہوگا ∴ ر = ط (لا − لا۱) اور وہ محور پر ہو تو لا۱ = ۰ ∴ ر − ر۱ = ط لا اگر ایک یا دو نواو تار نقطہ مفروضہ کی منفی ہون تو علامت اوتار کی موافق اس فرض کے لکھنی چاہئی مثلاً اگر نقطہ مفروضہ محور لا پر ہو لیعنی منفی سمت کیطرف نقطہ آ سی ہو تو اسکے اوتار − لا۱ اور ۰ ہونگی اسواسطے صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی ر = ط (لا + لا۱)

(۴۱) دریافت کرو مساوات ایسی خط کی جو کہ گذرتا ہو دو نقطون مفروضہ لا۱ اور ر۱ اور لا۲ اور ر۲ سے فرض کرو کہ مساوات مطلوب یہہ ہی

ر = ط لا + ص (۱) اور چونکہ یہہ خط گذرتا ہی دو نقطون مفروضہ سے اسواسطے یہہ دو مساواتین ہمین حاصل ہونگی ر۱ = ط لا۱ + ص (۲)

ر۲ = ط لا۲ + ص (۳)

تفریق کرنے سے (۲) کو (۱) مین سے حاصل ہوگا یہہ ر − ر۱ = ط (لا − لا۱) (۴) اور تفریق کرنے سے (۳) کو (۲) مین سے حاصل ہوگا یہہ ر۱ − ر۲ = ط (لا۱ − لا۲) ∴ ط = $\frac{ر۱ − ر۲}{لا۱ − لا۲}$ جبکہ لکھی ہین یہہ قیمت

ط کی مساوات (۴) میں تو حاصل ہوگا یہہ ک − ک۱ = $\frac{ک۲ − ک۱}{لا۲ − لا۱}$ (لا − لا۱)
دو شرطون کے وسیلہ سے مقدارین ط اور ص کی دریافت ہوئی ہین اور اوکمی دور کرنی سی مقام خط کا مقرر کیا گیا ہی اور یہی ہونا چاہیئے تہا کیونکہ دونون نقطون مین سے صرف ایک خط گذر سکتا ہی صورت اس مساوات کی مختلف ہوگی موافق مختلف فرضون کی مثلاً اگر نقطہ لا۲ اور ک۲ محور لا پر ہو تو ک۲ = ۰

∴ ک − ک۱ = $\frac{ک۱}{لا۱ − لا۲}$ (لا − لا۱) اور اگر وہ محور ک پر ہو تو لا۲ = ۰

∴ ک − ک۱ = $\frac{ک۱ − ک۲}{لا۱}$ (لا − لا۱) اور اگر وہ نقطہ شروع پر واقع ہو تو

ک۲ = ۰ اور لا۲ = ۰ ∴ ک − ک۱ = $\frac{ک۱}{لا۱}$ (لا − لا۱)

= $\frac{ک۱}{لا۱}$ لا − ک۱

∴ ک = $\frac{ک۱}{لا۱}$ لا

یہہ مساوات اخیر کی بطور آیندہ کی بہی حاصل ہوسکتی ہی مساوات اس خط کی جو کہ نقطہ شروع سی گذری یہہ ہونی چاہیئی ک = ط لا (۳۱) یہان ط تغیر کرتا ہی تمام اوس زاویہ کو جو کہ خط مستقیم بناتا ہی محور لا سے اور چونکہ یہہ خط گذرتا ہی نقطہ لا۱ اور ک۱ سی اسیواسطے ط = $\frac{ک۱}{لا۱}$ تو اب ثابت ہوا کہ ک = $\frac{ک۱}{لا۱}$ اگر ایک خط گذری تین نقطون مین سے تو نسبت آیندہ ضرور ہونی چاہیئے ان نقطون کے اوتارین

(ک۱ لا۲ − لا۱ ک۲) − (ک لا۲ − لا۱ ک۲) + (ک۲ لا − لا۲ ک) = ۰

(۳۲) دریافت کرو مساوات ایسے خط کی جو کہ گذرے نقطہ مفروضہ سی تنصیف کرتا ہے ایک محدود خط کو فرض کرو کہ خط دیا ہوا محدود تا درمیان ان نقاط کی لا۱ اور لا

اور لا۲ اور ر۲ اسیواسطے اوتار نقطہ تنصیف کے یہہ ہین $\frac{\text{لا۱ + لا۲}}{۲}$ اور $\frac{\text{ر۱ + ر۲}}{۲}$ یہانسی صاف معلوم ہوتا ہی کہ مساوات مطلوب یہہ ہی ر − ر۲ =

ط (لا − لا۲) = $\frac{\text{ر۱ + ر۲ − ۲ر۳}}{\text{لا۱ + لا۲ − ۲لا۳}}$ (لا − لا۳)

(۴۳) دریافت کرو مساوات ایسے خط کے جو کہ متوازی ایک خط مفروضہ کی ہو

فرض کرو کہ ر = ط لا + ص ..... (۱) دیا ہوا خط ہی

ر = ط لا + ص' ..... (۲) وہ خط ہی جسکا دریافت کرنا مطلوب ہے

چونکہ خطوط متوازی ایک دوسری کے ہین اسیواسطے زاوی جو کہ یہہ خطوط محور لا سی بناتے ہونگے مساوی ہونگے یا ط = ط ∴ خط مطلوب یہہ ہی ر = ط لا + ص' (۳)

یہان مقدار ص کے ایک شرط سی معلوم نہین ہوسکتے ہی کیونکہ بیشمار خط ایک اور خط مفروض کے متوازی کھچ سکتے ہین لیکن اگر ایک اور دوسری شرط دیجاوے تو ص' معلوم ہوسکتا ہے مثلاً اگر خط مطلوب ایک اور نقطہ مفروضہ سی لا۱ اور ر۱ سی گذرے تو صورت مساوات (۲) کی یہہ ہوجاویگی ر − ر۱ = ط' (لا − لا۱)

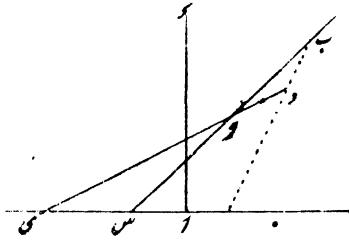
اسیواسطی صورت مساوات (۳) یہہ ہوجاویگی ر − ر۱ = ط (لا − لا۱)

(۴۴) دریافت مقام تنصیف دو خطون مفروض ب س اور ی د کا اسمین صرف دریافت کرنا د کا ہی جہانکہ دونون خط تقاطع ایک دوسری کو کرتی ہین یہہ ظاہر ہی کہ نقطہ د پر اوتار دونون خطوط کی ایک ہی ہونگی اور مان لو کہ وہ ع ح ہین اب فرض کرو کہ ر = ط لا + ص مساوات س ب کی ہی اور ر = ط لا + ص' ..... مساوات ی د کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ نقطہ د پر

ح = ط ع + ص = ط′ ع + ص′ ∴ ع = $\frac{ص - ص'}{ط' - ط}$

اور ح = ط ع + ص

= $\frac{ط ص' - ط' ص}{ط - ط'}$ + ص



مثال (۱) دریافت کرو نقطہ تقاطع ان خطوں کا جنکی مساواتین لا = ۳ ی + ۱ اور لا = ۲ ی − ۴ = ۰ یہان ع = ۳ اور ح = ۱۰ مثال (۲) دریافت کرو نقطہ تقاطع ان خطوں کا جنکی مساواتین یہ ہین ی − ل = ۰ اور ۳ ی − ۲ ل = ۱ یہان ع = ۱ اور ح = ۱ اگر ایک تیسرا خط جسکی مساوات ی = ط″ لا + ص″ ہی گذری اس نقطہ تقاطع سے تو شرط امثال مین یہ ہوگی (ط ص′ − ط′ ص) − (ط ص″ − ط″ ص) + (ط′ ص″ − ط″ ص′) = ۰

(۴۵) دریافت کرو مماس اور جیب مستوی اور جیب التمام اوس زاویہ کی جو کہ دو خطوں کی ہی فرض کرو کہ ی = ط لا + ص مساوات خط س کی

..... اور ی = ط′ لا + ص′ مساوات خط ی کی

اور فرض کرو کہ ز اور ز′ وہ زاویہ ہین جو کہ یہ دونون خط بمالی مین

تو اب مس دوب = مس ی وس = مس (ز − ز′) = $\frac{مس ز - مس ز'}{1 + مس ز \times مس ز'}$ = $\frac{ط - ط'}{1 + ط ط'}$

اور جم دوب = $\frac{1}{مس دوب}$ = $\frac{1}{\sqrt{1 + (مس دوب)^2}}$ = $\frac{1}{\sqrt{(1 + ط^2)(1 + ط'^2)}}$

اور جیب دوب = مس دوب × جم دوب = $\frac{ط - ط'}{\sqrt{1 + ط^2} \times \sqrt{1 + ط'^2}}$

(۴۶) دریافت کرو مساوات خط مستقیم کی جو کہ بناتا ہی ایک زاویہ مفروض دو کے
خط مستقیم ہی فرض کرو کہ یہ = ط لا + ص مساوات خط مفروض ہی اب کی
..... اور ک = ط لا + س مساوات خط مطلوب ہی دی ہی
فرض کرو م = مماس زاویہ مفروض دو ب تو اب ظاہر ہی کہ ط = مس دی ہی
= مس (ب مس لا — ب و د) = $\frac{\text{مس ب مس لا — مس ب و د}}{\text{۱ + مس ب مس لا مس ب و د}} = \frac{\text{ط — م}}{\text{۱ + ط م}}$
لگانی سے اس قیمت ط کو مساوات دویم مین ہمین حاصل ہو گا یہہ
ک = $\frac{\text{ط — م}}{\text{۱ + ط م}}$ لا + ص اگر خط مطلوب نقطہ مفروض لا۱ اور و۱ ہی سے گزرے
تو ک — ک۱ = $\frac{\text{ط — م}}{\text{۱ + ط م}}$ (لا — لا۱) اگر د نقطہ مفروضہ لا۱ اور و۱ کا ہو
تو صرف خط دو ہی کا نہین بلکہ ایک دوسرا خط (نقطہ دار جو کہ شکل مین ہی)
کھینچ سکتا ہی بناتی ہوئی ایک زاویہ مفروضہ خط ب س سی اور اسکی مساوات بطور
سابق یہہ ہو گی ک — ک۱ = $\frac{\text{ط + م}}{\text{۱ — ط م}}$ (لا — لا۱) اور اب ظاہر ہی کہ دونون
مساوا تین صورت آیندہ مین داخل ہونگے ک — ک۱ = $\frac{\text{ط + م}}{\text{۱ ± ط م}}$ (لا — لا۱)
مثلاً وہ دو خط جو کہ گذرتی نقطہ د سے بناتی ہین ایک زاویہ ۴۵° درجہ کا خط ب س سے
مساوا تون آیندہ کی وسیلہ سی دریافت ہو سکتی ہین

ک — ک۱ = $\frac{\text{ط — ۱}}{\text{ط + ۱}}$ (لا — لا۱)

ک — ک۱ = $\frac{\text{ط + ۱}}{\text{ط — ۱}}$ (لا — لا۱)

اور مساوات اس خط کی جو کہ نقطہ د سے گذرتی بناتا ہی زاویہ ۱۳۵° کا محور لا سے یہہ ہو گی
و — و۱ = م (لا — لا۱) = مس ۱۳۵° (لا — لا۱) = — (لا — لا۱)

(۴۷) اگر خط مطلوب عمود خط مفروض پر ہو تو م ۱ نہایت بڑا ہوگا بسبب اسکے

$\frac{ط-م}{1+ط م} = \frac{ط - \frac{1}{ط}}{1+ط.\frac{1}{ط}} = -\frac{1}{ط}$ یا $ط' = -\frac{1}{ط}$ یہانسی ثابت ہوا کہ

مساوات اوس خط کی جو کہ عمود خط مفروض ی = ط لا + ص پر ہی یہہ ہوگی

ی = $-\frac{1}{ط}$ لا + ص یہہ دوسری ایک اور آسان طریقہ سی ثابت ہو سکتا ہی

اور وہ یہہ ہی کہ ہیچو عمود دی کا ب س پر شکل آیندہ مین تو ط = مس دی لا =

مس دی س = — مم دس لا = $-\frac{1}{ط}$ یہانسی ظاہر ہی کہ اون دو خطون

مستقیم کی مساوا تو مین جو کہ عمر دایک دوسری پر ہین ہمین یہہ حاصل ہوگا

ط ط' + ۱ = ۰ و برعکس اسکے اگر دو خطون کی مساوا تو مین یہہ ثابت ہو کہ ط ط' + ۱

= ۰ تو معلوم ہوگا کہ یہہ دونون خط عمود ایک دوسری پر ہین — اگر خط عمود

گزری نقطہ لا' و ی' سی بھی تو اسکی مساوات یہہ ہوگی ی — ی' = — $\frac{1}{ط}$ (لا —

لا') اور واضح ہو کہ اس مساوات کی مختلف صورتین ہو سکتی ہین موافق مختلف مقام

نقطہ لا' اور ی' کی مثلاً اگر وہ خط جو کہ عمود خط ی = ط لا + ص پر گذری نقطہ

شروع سے بھی تو اسکے مساوات یہہ ہوگی ی = — $\frac{1}{ط}$ لا کیونکہ یہان دونو لا'

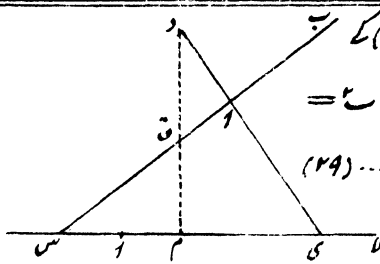
اور ی' = ۰

(۴۸) دریافت کرو طول ایک خط کا جو کہ کھینچا گیا ہی عمود نقطہ مفروض د (لا' و

ی') سے خط مفروض ب س پر فرض کرو کہ ی = ط لا + ص ..... (۱)

مساوات س ب ہی تو ی — ی' = — $\frac{1}{ط}$ (لا — لا') ..... (۲) مساوات

عمود دی کی ہوگی — فرض کرو کہ ب = د و ع اور ح اوتار نقطہ د



کی ہین جو کہ بوسیلہ (۱) اور (۲) کے
آسانی سی دریافت ہو سکتی ہین تو ب² =
(ع − لا)² + (ح − کا)² .... (۳)
مساوات (۲) سی ح =
کا − $\frac{۱}{b}$ (ع − لا) = ط ع + ص موافق مساوات (۱) کے
۰ = ط (ع − لا) + ط لا + ص
∴ (ط + $\frac{۱}{b}$) (ع − لا) = کا − ط لا − ص
∴ ع − لا = $\frac{b}{b^۲+۱}$ (کا − ط لا − ص) اور ح − کا = − $\frac{۱}{b}$ (ع − لا)
∴ ب² = (ع − لا)² + (ح − کا)²
= (ع − لا)² + $\frac{۱}{b^۲}$ (ع − لا)²
= $\frac{۱+b^۲}{b^۲}$ (ع − لا)²
= $\frac{۱+b^۲}{b^۲}$ $\frac{b^۲}{(۱+b^۲)^۲}$ (کا − ط لا − ص)² = $\frac{۱}{۱+b^۲}$ (کا − ط لا − ص)²
∴ ب = ± $\frac{کا − ط لا − ص}{\sqrt{۱+b^۲}}$ اوپر کی علامت کو اوسوقت
استعمال مین لانا چاہئی جبکہ نقطہ مفروضہ خط مفروض کے اوپر اور نیچی کے علامت کو اوس
وقت جبکہ وہ نیچی ہو — اگر خط مفروض نقطہ شروع سی گذری تو ص = ۰
∴ ب = $\frac{کا − ط لا}{\sqrt{۱+b^۲}}$ اور اگر نقطہ شروع نقطہ مفروض ہو تو لا = ۰ اور
کا = ۰ ∴ ب = $\frac{± ص}{\sqrt{۱+b^۲}}$ صورت واسطے ب کی ایک اور طور سے بھی حاصل ہو سکتی ہے
چونکہ مساوات کا = ط لا + ص ہر ایک نقطہ س د ب کی ہو سکتے ہی اسواسطی اس

نقطہ کی یہی ہوگی جہانکہ م د یا ک ا قطع کرتا ہی س ب کو ∴ م ق = ط لا ا + ص

اور اب دو = دق جس دق د اور دق = دم − م ق = ک ا − ط لا ا − ص

اور جس د ق د = جس س ق م = جم ق س م = سٹ ق س م =

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\text{مس ق س م})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+ط^2}} \therefore \text{دو یا ب} = \frac{ک ا - ط لا ا - ص}{\sqrt{1+ط^2}}$$ یا

$$\frac{ط لا ا + ص - ک ا}{\sqrt{1+ط^2}}$$ اگر نقطہ د کا نیچی خط کی ہو

(۴۹) اگر خط دی کا کھینچا جاوے بنا تا ہوا ایک خاص زاویہ جسکا مماس م ہی خط مفروض دو سے تو فاصلہ دد کا بآسانی دریافت ہوسکتا ہی بجای مساوات (۲) کی ہمین یہہ مساوات حاصل ہوگی ک − ک ا = $\frac{ط - م}{1+ط م}$ (لا − لا ا) ..... (۴۶)

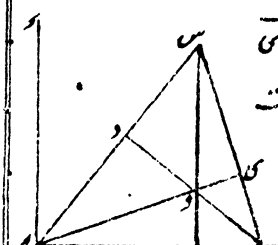
تو اب استعمال مین لانی سے طریقہ گذشتہ کی ہمین حاصل ہوگا یہہ ب = $\frac{+ک ا - ط لا ا - ص}{\sqrt{1+ط^2}}$

× $\frac{\sqrt{1+م^2}}{م}$ یہہ صورت بوسیلہ علم مثلث کی آسانی سی حاصل ہوسکتی ہی فرض کرو کہ

ح = جس زاویہ مفروضہ کی تو اب دو = دق $\frac{\text{جس دق د}}{\text{جس دو ق}}$ = $\frac{ک ا - ط لا ا - ص}{\sqrt{1+ط^2}}$ ×

$\frac{1}{ح}$ (۵۰) مساوات خط مستقیم اگلی شکل کے ثابت کرنی مین بہت فایدہ مند ہوگی

اگر ایک مثلث کی تینون زاویون سے عمود مقابل کے اضلاع پر کھینچی جاوین تو یہہ تینون عمود ایک نقطہ پر ملینگے مثلث اب س کی تین نقطون ا ب س سی کھینچو تین عمود



س ف اور ا ی اور ب د کی فرض کرو کہ خطوط ا ی اور ب د کی ملی ہین نقطہ و پر تو اب یہہ شکل ثابت ہوگی اگر اف وتر العرض د کا ثابت ہوجاوے اور اوسکو اب ہم ثابت کرینگی

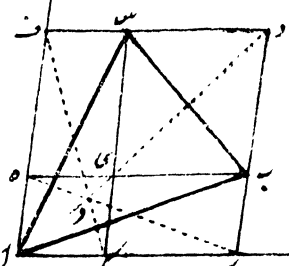
فرض کرو کہ آ نقطہ شروع اوتار کا اور اب محور لا اور اے محور ر کا ہی اور فرض کرو کہ اوتار
نقطہ س کی لا آ اور ر آ ہین .... ب ... لا ۲ ... ہین تو اب مساوات اس کی یہہ ہوگی
ر = $\frac{ط}{لا}$ لا موافق (۴۱) کی اسیواسطے مساوات ب د کی یہہ ہوگی ر = ط (لا - لا ۲)
= - $\frac{لا}{لا}$ (لا - لا ۲) (۴۷) اور مساوات ب س کی یہہ ہوگی ر - ر ۲ = $\frac{ر ۱ - ر ۲}{لا - لا ۲}$
(لا - لا ۲) (۴۱) یا ر = $\frac{ط}{لا - لا ۲}$ (لا - لا ۲) کیونکہ ر ۲ = ۰ ∴ مساوات آپہنچی
ر = ط لا = - $\frac{لا - لا ۲}{لا}$ لا چونکہ نقطہ د براجو کہ مقام تقاطع خطوط ب د اور
ہی کا ہی) وتر آ د دونون مساوات ب د اور اے مین ایک ہی ہوگا اسیواسطے جبکہ لکھا
ہمنے ان دونون قیمتون ر کو مساوے ایک دوسرے کے تو حاصل ہوگا یہہ - $\frac{لا}{لا}$ (لا - لا ۲) =
- $\frac{لا - لا ۲}{لا}$ لا یا لا لا - لا لا ۲ = لا لا - لا ۲ لا ∴ لا ۲ لا = لا لا یا لا = لا
یعنے وتر العرض نقطہ د کا مساوے نقطہ س کے وتر العرض کے ہی اسیطرح ثابت ہوسکتا ہی
کہ اگر ایک مثلث کی تینون خطون کو تنصیف کرکے نقاط تنصیف سی عمود کھینچی جاوین
تو یہہ تینون عمود بہی ایک ہی نقطہ پر ملاقی ہونگے -

(۵۱) ہمنی ابتک محور د کو متقاطع علی القوایم فرض کیا ہی لیکن اگر وہ عمود ایک زاویہ
پر ہون تو سر لا مساوات خط مستقیم مین مماس اوس زاویہ کا جو کہ خط مذکور بناتا ہی
محور لا سی نہین ہوگا فرض کرو کہ ک = اوس زاویہ کی جو کہ محور ایک دوسرے بناتی ہین
اور ل = اوس زاویہ کی جو کہ خط مستقیم بناتا ہی محور لا سی تو اب ط = $\frac{جس ل}{جس (ک - ل)}$ (۳۳) ہس اس صورت مین بہی مساوے اس فاصلے کے ہی جو کہ
واقع ہی درمیان نقطہ شروع اور اوس نقطہ کی جہانکہ خط مذکور کاٹتا ہی محور کو سے

اسیواسطے ر = $\frac{\text{جب}\,ی}{\text{جب}\,(ک-ی)}$ لا + ص چونکہ یہہ صورت مثل صورت ر = ط لا + ص
کی ہی تو تمام صورتین جو کہ ہم ثابت کر آئی ہین وہ اس صورت مین بہی صحیح ہونگی کیونکہ
اونکی ثبوت مین کسیطرح کی تبدیلی $\frac{\text{جب}\,ی}{\text{جب}\,(ک-ی)}$ مین نہین آویگی واضح ہو کہ صورت ۳
اور ۴ اور ۴۲ اور ۴۳ اور ۴۴ مین کسی نوع تبدیل واقع نہوگی — دریافت کرو مماس
(م) اوس زاویہ کا جو کہ واقع ہی درمیان دو خطون مفروض کے فرض کرو کہ (ر = ط لا + ص اور
ر = ط' لا + ص') مساواتین خطون مفروض کی ہین - قیمت ط = $\frac{\text{جب}\,(ک-م)}{\text{جب}\,م}$
سی ہم دریافت کر سکتے ہین مس ر = $\frac{\text{ط جب ک}}{\text{۱ + ط جم ک}}$ اور اسیطرح سے مس ر' = $\frac{\text{ط' جب ک}}{\text{۱ + ط' جم ک}}$
یہانسے معلوم ہوا کہ م = مس (ر - ر') = $\frac{\text{(ط - ط') جب ک}}{\text{۱ + ط ط' + (ط + ط') جم ک}}$ دریافت کرو
مساوات ایک خط کی جو کہ گذرے نقطہ مفروض لا۱ اور ر۱ سے بناتا ہی ایک زاویہ
مفروض ایک خط مفروض سے فرض کرو کہ م مماس زاویہ مفروضہ کی ہی اور ر = ط +
ص خط مفروض ہے اور ر - ر۱ = ط (لا - لا۱) خط مطلوب ہی موافق بچھلے
صورت کی ط = $\frac{\text{ط جب ک — م (۱ + ط جم ک)}}{\text{جب ک + م (ط + جم ک)}}$ اسیواسطے مساوات مطلوبہ یہہ ہوگی
ر - ر۱ = $\frac{\text{ط جب ک - م (۱ + ط جم ک)}}{\text{جب ک + م (ط + جم ک)}}$ (لا - لا۱) اگر خطوط مذکورہ مو ایک دوسرے
پر ہون تو م = $\frac{۱}{۰}$ ∴ ط = $\frac{\text{۱ + ط جم ک}}{\text{ط + جم ک}}$ تو اب مساوات مطلوب یہہ ہوگی
ر - ر۱ = — $\frac{\text{۱ + ط جم ک}}{\text{ط + جم ک}}$ (لا - لا۱) دریافت کرو طول ایک عمود کا جو کہ کھینچا گیا ہے
ایک نقطہ مفروضہ سے ایک خط مفروض پر بجائے مساوات (۲) فقرہ (۴۸) کی مساوات
گزشتہ کلام مین لاؤ جو کہ ابہی ثابت کر آئی ہین اور افتیار کرو وہی طریقہ دریافت کرنے
طول عمود کا جو کہ ہم لکھہ آئی ہین تو حاصل ہوگا ب = $\frac{\text{(ر۱ - ط لا۱ - ص) جب ک}}{\text{۱ + ط۲ + ۲ ط جم ک + ط۲}}$

واضح ہو کہ اس قسم کی محورونکو حتی الامکان کام مین نہین لاتی ہین اور یہہ فایدہ مند
دان ہوگی جہانکہ نقطہ اور خطوط سی بحث کرتی ہین اور جہانکہ ذکر زاویہ کا ہوگا وہان
اسکا استعمال نہین ہوسکتا ہی شکل آیندہ کو بطور مثال کے درج کرتی ہین —

(۵۲) اگر ایک مثلث کی اضلاع کو قطر فرض کرکی ایسی متوازی الاضلاع کھینچی جاوین
جنکے اضلاع متوازی دو خطوط مفروض کی ہون تو اقطار ان متوازی
اضلاعون کی ایک ہی نقطہ پر ملینگے



فرض کرو کہ اب س مثلث ہی اور اے
اور اک خطوط مفروضہ ہین اور ہی ب د س
اور س ف اک اور ہ اے ب
متوازی الاضلاع ہین تو اب اقطار دی اور ف ک اور ہ ے نقطہ د پر ملاقی
ہونگی فرض کرو کہ آ نقطہ شروع ترچہی محورون اآ اور آا کا ہی اور فرض کرو کہ لاا
اور کا اوتار نقطہ ب کی ہین اور لا۲ اور ک۲ . . . . . س اب دریافت کرو مساوات
خط دی کی فرض کرو کہ مساوات اس خط کی ی = ط لا + ص تو صورت اس مساوات کے
نقطہ د پر یہہ ہوگی ک۲ = ط لا۲ + ص ∴ ی − ک۲ = ط (لا − لا۲) اور شکل
مساوات کی نقطہ ی پر یہہ ہوگی ا۱ − ک۲ = ط (لا۲ − لا۲) ∴ ی − ک۲ =
ا۱ − ک۲ / لا۲ − لا۲ (لا − لا۲) . . . . (۱) اور اب دریافت کرو مساوات ف ک کی اور فرض
کرو کہ مساوات اسکی ی = ط لا + ص تو نقطہ ف پر ک۲ = ۰ + ص ∴
ی − ک۲ = ط لا اور مساوات نقطہ ک پر ۰ − ک۲ = ط لا۲ ∴ ی − ک۲ =

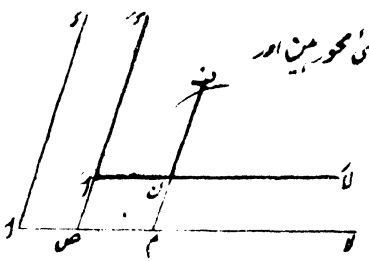
$-\frac{ک_{۲}}{لا_{۲}}$ لا ..... (۲) اور اب دریافت کرو مساوات ہ ے کی فرض کرو کہ اسکی مساوی یہہ ہی ک = ط لا + ص اور نقطہ ہ پر ک۱ = ۰ + ص ∴ ک − ک۱ = ط لا اور نقطہ ے پر ۰ − ک۱ = ط لا۱ ∴ ک − ک۱ = $\frac{ک_{۱}}{لا_{۱}}$ لا ..... (۳) چونکہ نقطہ و پر قیمتین او تار اقطار متوازی الاضلاع کے آپسمین مساوی ہوگی اسیواسطے اب لکھو قیمتین و کی جو کہ (۱) اور (۲) مین ہین مساوی ایک دوسرے کی تو اب حاصل ہوگا ع = $\frac{لا_{۱}لا_{۲}(ک_{۱}-ک_{۲})}{ک_{۱}لا_{۲}-لا_{۱}ک_{۲}}$ اسیطرحسی جبکہ لکھی ہی قیمتین و کی جو کہ (۲) اور (۳) مین ہین مساوی ایک دوسری کی تو اسکی وسیلہ سے قیمت ع کی وہی حاصل ہوگی جو کہ ہمنی اوپہی نکالی ہی تہا لہذا ثابت ہوا کہ وتر العرض ہر ایک دو قطر وکی مساوی ہین آپسمین یعنی اگر ایک بار دو قطر کے تقاطع کے وسیلہ سی قیمت وتر العرض نقطہ تقاطع کی نکالین تو مساوی اوس قیمت وتر العرض کی ہوگی جو کہ دوسرے قطر وکی تقاطع سی حاصل ہوگی یہانتک صاف معلوم ہوتا ہی کہ تین اقطار دی ہوے اور وہ تک ایک ہی نقطہ و پر ملتی ہین اسیطرح سے ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر ایک مثلث کے تینون زاویون سی تین خطوط واسطی تنصیف کرنی اضلاع مقابل کے کھینچے جاوین تو وہ تینون ایک ہی نقطہ پر ملین گے ---

بیان تبدیل اوتار کا

(۵۳) پیشتر بحث مساوات دوسری درجہ وغیرہ کی ہم ترکیب تبدیل کرنی مقام اوتار کو بیان کرین گی مطلب اس سے یہہ ہی کہ محور وکو ایک ایسی جگہ رکھنا چاہیے کہ صورت مساوات کے نہایت آسان ہوجاوے اور برعکس اسکی مساوات مین اکثر اوقات مقادیر غیر مقررہ دیکھو کم کرنے اجزاء کی داخل کرتے ہین اور اس طرحسی وہ مساوات آسانی سی حل ہوجاتے

ہی اور اسطرح سی وہ خط جس سے وہ تعلق رکھتی ہی معلوم ہوجاتا ہی واضح ہو کہ اس قسم کی تبدیل سی شکل خط منحنی مین کسیطرح کی تبدیلی نہین ہوتی ہی لیکن صورت مساوات مین ایک طرح کی تبدیل ہوجاتی ہی مثلاً مساوات عام خط مستقیم کی ی = ط لا + ص صورت یہہ ہوجاویگی ی = ط لا جبکہ خط مستقیم نقطہ شروع پر سے گذریگا فقرہ (۴۶) اور (۵۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ آسانی مساوات کی موقوف ہی اُس زاویہ پر جو کہ محور آپس مین بناتی ہی یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ تبدیلی نقطہ شروع اور سمت محورون سی بہت فایدہ ہوسکتا ہی اور اس تبدیلی کو بدلنا محورون کا تعبیر کرتے ہین —

(۵۴) بدلو اوس مساوات کو جسکا نقطہ شروع آ ہی اوس مساوات سی جسکا نقطہ شروع ا آ ہی جبکہ ا لا متوازی آ لا اور ا ی متوازی آ ی کی ہو فرض کرو کہ آ لا اور آ ی اصلی محور ہین اور ا لا اور ا ی نئی محور ہین اور



ام = لا
م ف = ی
} اصلی اوتار نقطہ ف کی ہین

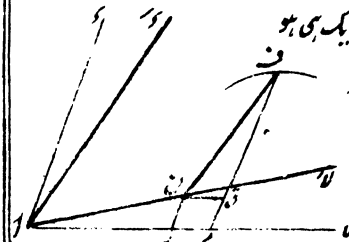
اور ان = لا
ن ف = ی
} نئی اوتار نقطہ ف کی ہین

اور ا ص = ط
ص آ = ص
} اوتار نقطہ شروع د کی ہین

تو اب م ف = م ن + ن ف یعنے ی = ص + ی اور ا م = ا ص + م ص یعنی لا = ط + لا جبکہ لکھینگے ہم یہہ قیمتین لا اور ی کی کسی مساوات مین تو حاصل ہونگی جنمین ایک ایسی مساوات جسمین اوتار لا اور ی پائے جاوینگی جو کہ اوس نقطہ

شروع آ سے شمار کئی جاتی ہیں -

(۵۵) بدلو ایک مساوات کو جسکے ترچھی محور ہیں ایک ایسی مساوات سی جسکی اور ترچھے محور ہوں لیکن نقطہ شروع دونوں کا ایک ہی ہو



فرض کرو کہ اَلا اور اَی اصلی محور اور اَلا' اور اَی' نئی محور ہیں اور

$$\left.\begin{array}{l} \text{ام} = \text{لا} \\ \text{م ف} = \text{ی} \end{array}\right\} \text{ اصلی اوتار نقطہ ف کی ہیں}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{اور ان} = \text{لا}' \\ \text{ن ف} = \text{ی}' \end{array}\right\} \text{ نئی اوتار نقطہ ف کے ہیں}$$

فرض کرو کہ زاویہ لا اَ ی = ک

اور لا اَ لا' = ر اور لا اَ ی' = ر' اور کھینچو خط ن ر کا متوازی م ف کی اور ن ق متوازی ام کی تو ی = م ف = م ق + ق ف = ن ر + ق ف =

$$\text{ان}\frac{\text{جس ن ار}}{\text{جس ن ر ا}} + \text{ف لا} \times \frac{\text{جس ف ن ق}}{\text{جس ف ن ان}} = \text{لا}'\frac{\text{جس ر}}{\text{جس ک}} + \text{ی}\frac{\text{جس ر'}}{\text{جس ک}} \quad \text{اور لا} = \text{ام}$$

$$= \text{ار} + \text{م ر} = \text{ار} + \text{ان ق} = \text{ان}\frac{\text{جس ان ر}}{\text{جس ار ن}} + \text{ف ن}\frac{\text{جس ان ف ق}}{\text{جس ن ق ف}} =$$

$$\text{لا}'\frac{\text{جس (ک - ر)}}{\text{جس ک}} + \text{ی} \times \frac{\text{جس (ک - ر')}}{\text{جس ک}} \quad \therefore \text{ی} = \frac{\text{لا جس ر} + \text{ی جس ر'}}{\text{جس ک}} \quad \text{اور لا} =$$

$$\frac{\text{لا}'\text{جس (ک - ر)} + \text{ی جس (ک - ر')}}{\text{جس ک}}$$

(۵۶) فرض کرو کہ اصلی محور ترچھی ہوں اور نئی محور متقاطع علی القوایم یا ر' - ر = ۹۰° ∴ ر = $\frac{\text{لا جس ر} + \text{ی جم ر'}}{\text{جس ک}}$ اور لا = $\frac{\text{لا جس (ک - ر)} - \text{ی جم (ک - ر)}}{\text{جس ک}}$

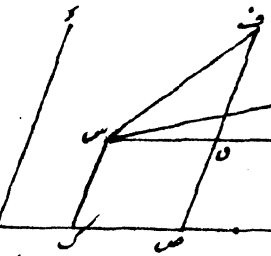
(۵۷) فرض کرو کہ اصلی محور متقاطع علی القوایم یا ک = ۹۰° ∴ ر = لا جس ر

+ ۲ جم ر اور لا = لا جم ر - ۲ جس ر (۵۸) اب فرض کرو کہ اصلی اور نئی محور متقاطع علی التعاکم ہین یا ۲ = ۹۰° اور ر - ر = ۹۰° ۲ = لا جس ر + جس ر اور لا = لا جم ر + ۲ جم ر

(۵۹) یہہ تمام صورتین بوسیلہ پہلی صورت کی نکالی گئین لیکن یہہ بغیر اسکی مدد کی بھی حاصل ہو سکتے ہین پہلی اور اخیر کی صورتین بہت مفید ہین اور یقین ہے کہ وہ اچھی طرح یاد رہین گے اگر بطور آیندہ لکھی جاوین اگر دونو یعنے اصلی اور نئی محور ترچھی ہون تو صورتین (۵۵) اس صورت کی ہو جاوین گی ۲ = {لا جس لا ۲ لا + ۲ جس ۲ لا} × $\frac{1}{\text{جس لا ۲}}$ اور لا = {لا جس لا ۲ لا + ۲ جس ۲ لا ۲} $\frac{\text{جس لا ۲ لا}}{\text{جس لا ۲}}$ اگر دونون یعنی اصلی اور نئی محور متقاطع علی التعاکم ہون تو صورتین (۵۸) اس صورت کی ہو جاوین گی ۲ = لا جم لا ۲ لا + ۲ جم ۲ لا ۲ اور لا = لا جم لا ۲ لا + ۲ جم ۲ لا ۲ اگر مقام نقطہ شروع کا بھی تبدیل کیا جاوے جبکہ سمت محور کی تبدیل کی گئی ہے تو اس صورت مین صرف قیمتین لا اور ۲ پر منحصر ارین ط اور ص زیادہ کرنی چاہئین یعنے لا پر ط اور ۲ پر ص زیادہ کرنا چاہئے اگرچہ یہہ طریقہ بہت آسان ہے لیکن پھر بھی یہہ تبدیل علیحدہ علیحدہ کرنا چاہئی اور اگر نئی محور لا کا پیچھی محور لا کے واقع ہو تو زاویہ ر کا منفی ہوگا اسیواسطے اسکی جیب مساوی منفی ہوگی اور جیب التمام مثبت یہانتک ظاہر ہوتا ہے کہ صورتون تبدیلی مین واسطے اس خاص صورت کے کچھہ تبدیل کرنا چاہئے چونکہ قیمتین لا اور ۲ کی ہر ایک صورتین پہلے درجہ کی مساوات مین حاصل ہوتی ہے تو اب یہانتک معلوم ہوا کہ تبدیل کرنے اور تارسی کسیطرح کی تبدیلی قوای مساوات مین نہین ہوتی —

(۶۰) اب تک ہمنے مقام نقطہ کا ایک سطح مین بوسیلہ اسکے فاصلون کے دو محور سے معلوم کیا ہے لیکن اب ہم ایک اور مفید طریقہ اسکی دریافت کرنے کا بیان کرینگے فرض

فرض کرو کہ س ایک نقطہ قایم ہی اور س ب ایک خط قایم ہی تو اس صورت میں مقام نقطہ ف کا بآسانی معلوم ہو سکتا ہی



اگر طول خط س ف کا اور زاویہ ب ف س کا معلوم ہو اگر س ف = ر ، ف س ب = ع اور زاویہ ف س ب = ر

نقطہ س کو قطب کہتی ہین اور س ف کو نصف قطر متحرک کیونکہ ایک خط منحنی حرکت اس نصف قطر سی بن سکتا ہی جبکہ س ف غیر منقطع فرض کیا جاوے ٹھہری ہوئی خط س ب کو کبھی محور بھی کہتی ہین - بدلو ایک مساوات کو جسکے او تار لا اور ق ہین ایک اور مساوات سی جسکی محور قطبی ع اور ر ہین کھینچو خط س و کا متوازی آتا کے اور فرض کرو کہ زاویہ ب س د = ھ اور زاویہ ر لا ا = ک اور

فرض کرو کہ ا م = لا اور م ف = ر اور ا ص = ط اور س ص = ص تو

$$\left.\begin{array}{l} ر = م ف = م ق + ق ف = ص + ع \dfrac{\text{جیب } (ر + ھ)}{\text{جیب ک}} \\ \text{اور } لا = ا م = ا ص + س ق = ط + ع \dfrac{\text{جیب ک} - (ر + ھ))}{\text{جیب ک}} \end{array}\right\} \quad (۱)$$

فرض کرو کہ س ب منطبق خط س د پر ہوا یا ھ = ۰

$$\left.\begin{array}{l} \therefore ر = ص + ع \dfrac{\text{جیب ر}}{\text{جیب ک}} \\ \text{اور } لا = ط + ع \dfrac{\text{جیب (ک - ر)}}{\text{جیب ک}} \end{array}\right\} \quad (۲)$$

(۶۱) فرض کرو کہ اصلی محور بہی متقاطع علی الزوایہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{یا ک} = \frac{۱}{۲} \text{ک} \text{ یہان ک} = ۹۰° \text{ تو } ر = ص + ع \text{ جیب ر} \\ \text{اور } لا = ط + ع \text{ جیب ر} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور اگر نقطہ شروع آ فرض کیا جاوے تو ط = ۰ اور ص = ۰

∴ ی = ع جس ر
اور لا = ع جم ر
... (۴)

(۶۲) برعکس اسکے دریافت کرو ر اور ع کو اجزا ی لا اور ی ط مین بموجب (۱) کی

$$\frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{ی} - \text{ص}} = \frac{\text{جس} (\text{ک} - (\text{ر} + \text{ک}))}{\text{جس} (\text{ر} + \text{ک})} = \text{جس ک کٹ} (\text{ر} + \text{ک}) - \text{جم ک} \quad \therefore$$

$$\text{مس} (\text{ر} + \text{ک}) = \frac{\text{جس ک}}{\text{لا} - \text{ط} + (\text{ی} - \text{ص}) \text{جم ک}} \quad \therefore \text{ر} + \text{ک} = \text{مس}^{-1}$$

$$\left\{ \frac{(\text{ی} - \text{ص}) \text{جس ک}}{\text{لا} - \text{ط} + (\text{ی} - \text{ص}) \text{جم ک}} \right\}$$

جہانکہ مس$^{-1}$ ط سے یہہ مراد ہی (وہ قوس دایرہ کی جسکے نصف قطر (آ) ہی اور مماس ط) اور ع^{2} = (لا − ط)^{2} + (ی − ص)^{2} + ۲ (لا − ط) (ی − ص) جم ک ..... (۳۰)

(۶۳) اگر محور متقاطع علی القوایم ہون یا ک = ½ پی اور قطب نقطہ شروع پر (تو ط = ۰ اور ص = ۰) اور ک = ۰ کی بہی فرض کیا جاوے اسیواسطے لا = ½ پی = مس ر اور اسصورت مین ر = مس$^{-1}$ لا اور ع^{2} = لا^{2} + ی^{2} ..... (۲۹) اور یہہ صورتین اکثر کام آتی ہین بوسیلہ اس مساوات کی

$$\text{مس } \text{ر} \div \text{لا} = \text{جم ر} \sqrt{1 + (\text{مس ر})^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\text{ی}^2}{\text{لا}^2}}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ی}^2 + \text{لا}^2}}$$

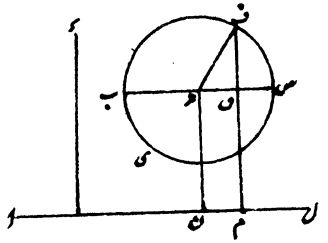
اور جس ر = جم ر × مس ر = $\frac{\text{ی}}{\sqrt{\text{ی}^2 + \text{لا}^2}}$ ان مساواتون کے وسیلے قیمت ر بطور آیندہ کی بہی حاصل ہوسکتے ہی ر = جس$^{-1}$ $\frac{\text{ی}}{\sqrt{\text{ی}^2 + \text{لا}^2}}$ یا ر = جم$^{-1}$ $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ی}^2 + \text{لا}^2}}$

دایرہ کی بیان مین

(۶۴) واضح ہو کہ عام مساوات درجہ دویم سی جسمین دو مقدارین غیر مقررہ ہون کئی خط منحنی مثل دایرہ اور بیضوی اور قریب البیضوی وغیرہ متعلق ہین جنانچہ مساوات درجہ دوم کی حل کرنے سی اور اوسکے خواص جاننے سے یہہ بات دریافت

ہوجاویگی اور ان خطون مین سی دایرہ ایک نہایت سیدھے شکل ہی اور اوسکی خواص
بآسانی معلوم ہوسکتی ہین گو ہم پہلی سی عام مساوات درجہ دویم سی بحث نہ کرین اسیواسطے
قبل از بیان کرنے عام مساوات کی ہم اول دایرہ کی خواص بیان کرتے ہین —

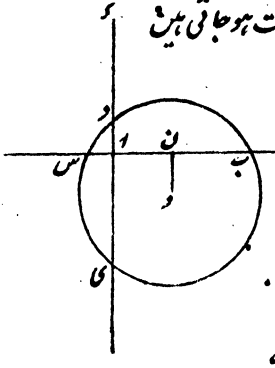
(۶۵) مساوات دایرہ کی اسطور سے معلوم ہوتی ہی فرض کرو کہ $\overline{ا ا'}$ اور $\overline{ل ل'}$ محور
متقاطع علی القوایم ہین اور و مرکز دایرہ



ی ب ف س کا ہی اور چونکہ و ایک
خاص نقطہ ہی اسیواسطے اوسکی دوو تر
مقدارین مقررہ ہین اور اسیواسطے
فرض کرتی ہین ہم کہ $\overline{ا ن}$ = ط اور ن و = ص اور فرض کرو کہ $\overline{ا م}$ = لا اور
م ف = ی دوو تر ہین اوس نقطہ مثلاً ف کی جو محیط پر واقع ہی اور نصف قطر و
= نق اب ظاہر ہی کہ ق و = م ن = ا م − ن ا = لا − ط اور ف ق =
م ف − ق م = م ف − د ن = ی − ص اور چونکہ وق^۲ + ف ق^۲ = وف^۲
∴ (لا − ط)^۲ + (ی − ص)^۲ = نق^۲ اور یہی ہی مساوات عامہ دایرہ کی اگر محور لا
یا تو مرکز دایرہ پر سے گذری تو ان دونون صورتون مین یہہ دو علیحدہ مساواتین حاصل
ہونگی (ی − ص)^۲ + لا^۲ = نق^۲ ... (۱) ی^۲ + (لا − ط)^۲ = نق^۲ .... (۲)
اگر نقطہ شروع کسی نقطہ مثل ی محیط دایرہ پر منطبق ہوجاوے تو ظاہر ہے کہ یہہ مساوات
حاصل ہوگی ط^۲ + ص^۲ = نق^۲ پس اگر مساوات عامہ دایرہ کی صورت مفصلہ
دریافت کرین اور اوسمین بجاے ط^۲ + ص^۲ کی نق^۲ درج کرین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی

$ر^۲ - ۲ص ر + لا^۲ - ۲ط لا = ۰$ .... (۳) اگر نقطہ شروع مقام ب پر ہو
اس صورت مین ب و محور لا کا ہوجاویگا اور ∴ ص = ۰ اور ط = نق
اور ∴ $ر^۲ + لا^۲ - ۲نق لا = ۰$ یعنے $ر^۲ = ۲نق لا - لا^۲$ ..... (۴)
اب اگر فرض کرین کہ نقطہ شروع مرکز دایرہ پر ہی تو ظاہر ہے کہ ط = ۰ اور ص = ۰
اور اسیواسطے مساوات عام اس شکل کی ہوجائیگی $ر^۲ + لا^۲ = نق^۲$ .... (۵) یہ سب
مساواتین بہت مفید ہین — (۶) اگر مساوات عامہ دایرہ کی
صورت مفصلہ دریافت کرین تو حاصل ہوگا یہہ $ر^۲ + لا^۲ - ۲ص ر - ۲ط لا$
$+ ط^۲ + ص^۲ - نق^۲ = ۰$ اب ظاہر ہی کہ اس مساوات اور عام مساوات درجہ دوم مین
فرق ہی کہ اسمین مربع $ر^۲$ اور $لا^۲$ عدد ایک ہی اور وہ جزو جسمین حاصل ضرب $لا ر$
ہوتا ہی اسمین نہین ہی — اگر کوئی مساوات دایرہ کی دیجاوے اور اوسی اس مساوات
عام دایرہ سی مطابق کرین تو ہمکو مقام مرکز کا اور مقدار دایرہ کی معلوم ہوجائیگی
مثلاً فرض کرو کہ کسی دایرہ کی یہہ مساوات ہی $ر^۲ + لا^۲ + ۴ر - ۸لا - ۵ = ۰$
اور اگر اسکو اور مساوات عامہ دایرہ کو آپسمین مطابق کرین تو یہہ دریافت ہوگا
ص = - ۲ اور ط = ۴ اور $ط^۲ + ص^۲ - نق^۲ = -۵$ ∴ $نق^۲ =$
$ط^۲ + ص^۲ + ۵ = ۴۵$ ∴ نق = ۵ فرض کرو کہ آ نقطہ شروع ہی محور ر
آ ر اور آ لا کا آ پر پیمایش کرو ایک خط آ ن = ۴ اور خط آ لا پر
قایم کرو نیچی کیطرف عمود ن د = ۲ پس ظاہر ہی کہ د مرکز دایرہ کا ہوگا اور
اسی مرکز پر ایک دایرہ بنالو کہ جسکا نصف قطر آ ہو پس دایرہ مطلوب ہے وہ

وہ نقاط جہان دایرہ محور لا کو کاٹتا ہی دریافت ہو جاتی ہین



جسوقت ک = ۰ کی فرض کرین

∴ لا² − ۸لا − ۵ = ۰

∴ لا = ۴ ± √۲۱ ∴ اب = ۴ + √۲۱

اور ا س = ۴ − √۲۱ اسیطور اگر لا = ۰

تو ہم پاتی ہین کہ ا د = ۱ اور ا ی = − ۵

(۶۷) نہایت سہل ترکیب بنانی دایرہ کی جسکی مساوات معلوم ہو یہہ ہی کہ مساوات مفروض کو اس صورت کیطرف تحویل کرین (ک − ص)² + (لا − ط)² = ن²

مثلاً اگر مساوات دایرہ کی یہہ ہو ک² + لا² + س ک + د لا + ی = ۰ تو عمل مساوی جبر اور نقصان س²/۴ اور د²/۴ سے یہہ حاصل ہوتا ہی ک² + س ک + س²/۴ + لا² + د لا + د²/۴ + ی − س²/۴ − د²/۴ = ۰ ∴ (ک + س/۲)² + (لا + د/۲)² = (س² + د²)/۴ − ی پس اس صورت مین صاف ظاہر ہی کہ − د/۲ اور − س/۲ دایرہ کے مرکز کی ہین اور √((س² + د²)/۴ − ی) نصف قطر دایرہ مطلوب کا ہی — مثالین اس طریقہ کی یہہ ہین (۱) ک² + لا² + ۴ ک − ۴ لا − ۸ = ۰ پس موافق ترکیب گذشتہ کی لازم ہی کہ ک اور لا کی نصف سروکی مجذوز کو زیادہ اور کم کرین اور ∴ حاصل ہوگا یہہ ک² + ۴ ک + ۴ + لا² − ۴ لا + ۴ − ۱۶ = ۰ ∴ (ک + ۲)² + (لا − ۲)² = ۴² ∴ معلوم ہوا کہ دو ترمرکز دایرہ مطلوب کے ص = − ۲ اور ط = ۲ ہین اور نصف قطر ۴ ہی مثال (۲) ۲ ک² + ۲ لا² − ۴ ک − ۴ لا

$+۱۲ = ۰$ جواب $ط = ۱$ اور $ص = ۱$ اور $نق = ۱۸\frac{۳}{۴}$ مثال (۳)
$ر^۲ + ل^۲ - ۶ر + ۴ل - ۳ = ۰$ جواب $ط = -۲$ اور $ص = ۳$ اور $نق = ۴$
مثال (۴) $۶ر^۲ + ۶ل^۲ - ۱۲ر - ۸ل + ۱۴ = ۰$ جواب $ط = -\frac{۲}{۳}$ اور
$ص = \frac{۷}{۴}$ اور $نق = \frac{۱۳}{۱۲}$ مثال (۵) $ر^۲ + ل^۲ + ۴ر - ۳ل = ۰$ جواب
$ط = \frac{۳}{۲}$ اور $ص = -۲$ اور $نق = \frac{۵}{۴}$ مثال (۶) $ر^۲ + ل^۲ - ۴ر + ۲ل$
$= ۰$ جواب $ط = -۱$ اور $ص = ۲$ اور $نق = ۱۵$ اخیر دو مثالون مذکورہ
بالا مین کچھ ضرور نہین کہ مقدار نصف قطر کو دریافت کرین کیونکہ نقطہ شروع محیط دایرہ پر
واقع ہی اور اسیواسطے وہ خط جو مابین مرکز دایرہ اور نقطہ شروع کی وصل کیا جاوے
مساوے نصف قطر کی ہوگا واضح ہو کہ یہی حال سب ایسی مثالون مین ہوتا ہی جنمین جزو
اخیر یعنی مقدار مقررہ نہین ہوتی ہی - مثال (۷) $ر^۲ + ل^۲ - ۴ر = ۰$ جواب
$ط = ۰$ اور $ص = ۲$ اور $نق = ۲$ مثال (۸) $ر^۲ + ل^۲ + ۶ل = ۰$ جواب
$ط = -۳$ اور $ص = ۰$ اور $نق = ۳$ مثال (۹) $ر^۲ + ل^۲ - ۶ل + ۸ = ۰$
جواب $ط = ۳$ اور $ص = ۰$ اور $نق = ۱$ آن مثالون مین مرکز دایرہ کا
محورون پر واقع ہی — (۶۸) ہمنے پہلے بیان کیا ہی کہ وہ مساوات
دایرہ کی جو موافق محورون متقاطع علی القوایم کی ہو ایک ایسی مساوات درجہ دوم
کی ہوتی ہی کہ اوسمین سر $ر^۲$ اور $ل^۲$ کا علیحدہ علیحدہ ایک ایک ہوتا ہی اور علاوہ
ازین اوسمین جزو $لر$ کا نہین پایا جاتا ہی اور یہہ بھی ہمنی بیان کیا ہی کہ ایسی مساوات
اکثر دایرہ ہی سے متعلق ہوتی ہین لیکن اس جا ہی واضح ہو کہ یہہ قاعدہ کلیہ نہین ہی کہ

کہ ایسی مساوات کسی دایرہ سے ہمیشہ متعلق ہوتی ہی کہ واسطیکہ بعض صورتین ایسی ہوتی ہین کہ مساوات دایرہ سے متعلق نہین ہوتی بلکہ ایک خط مستقیم یا ایک نقطہ سی مثلاً مساوات ر۲ + لا۲ − ۸ر − ۶لا + ۲۵ = ۰ دایرہ کی معلوم ہوتی ہی لیکن اسکا لوکس دایرہ نہین ہے بلکہ ایک ایسا نقطہ ہی جسکی وتر لا = ۳ اور ر = ۴ کیونکہ مساوات گزشتہ کو ہمطور پر لکھہ سکتے ہین (ر − ۴)۲ + (لا − ۳)۲ = ۰ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ لا = ۳ اور ر = ۴ اور یہی حال ہمیشہ ایسی مساواتونکا ہوگا جنمین لو۲ = ۰ یہانسی ثابت ہوا کہ نقطہ کو بہی ایک ایسا دایرہ کہہ سکتی ہین جسکا نصف قطر لانہایت چہوٹا ہو اور دوسری مساوات ر۲ + لا۲ − ۴ر + ۱۰لا + ۹ = ۰ کی صورت یہہ ہوسکتی ہی (ر − ۲)۲ + (لا + ۱)۲ = −۴ لیکن اسکی وسیلہ سے قیمت لا اور ر کا ایسے دریافت نہین ہوسکتے ہین جنسی شرط مساوات کی پوری ہو جاوی اسیواسطی ثابت ہوا کہ اسکا لوکس غیر ممکن ہی (۲۴) —

(۶۹) دریافت کرو مساوات مماس دایرہ کی — فرض کرو کہ مرکز نقطہ شروع اوتار کا ہی اور لا اور ر دو وتر اس نقطہ کی ہین جو محیط پر ہی اس صورت مین مساوات اوس خط کی جو اس نقطہ پر سے گذرتا ہی یہہ ہی ر − ر = ط (لا − لا)

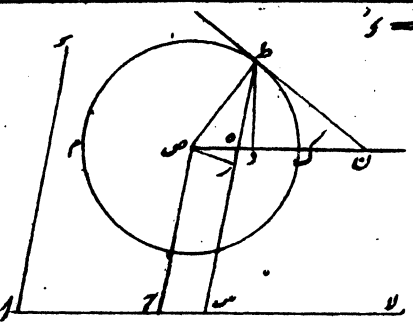
اور مساوات اوس نصف قطر کی جو اس نقطہ پر سے گذری یہہ ہوگی ر = $\frac{ر}{لا}$ لا اور چونکہ مماس نصف قطر عمود پر ہوتا ہی اسیواسطی ط = − $\frac{لا}{ر}$ ∴ ر − ر = − $\frac{لا}{ر}$ (لا − لا) یا ر ر − ر۲ = − لا لا + لا۲ ∴ ر ر + لا لا = ر۲ + لا۲ = لو۲ مساوات مماس ر ر + لا لا = لو۲ یاد رہ سکتی ہے

بوسیلہ مساوات دایرہ کی کیونکہ مساوات مماس کی حاصل ہوسکتی ہی اس مساوات
ر۲ + لا۲ = ن۲ سے بوسیلہ بدلنے ر کے ر۔ سے اور لا کے لا۔ سی اگر ہم
فرض کریں عام مساوات دایرہ کی (ر۔ − ص)۲ + (لا۔ − ط)۲ = ن۲ تو مساوات
نصف قطر کی (ر۔ − ص) = $\frac{ر۔ - ص}{لا۔ - ط}$ (لا۔ − ط) ..... (۴۱) ∴ ط =
$\frac{لا۔ - ط}{ر۔ - ص}$ اور مساوات مماس کی ر۔ − ر = ط (لا۔ − لا) = − $\frac{لا۔ - ط}{ر۔ - ص}$
(لا۔ − لا) بوسیلہ مساوات (ر۔ − ص)۲ + (لا۔ − ط)۲ = ن۲ کی مساوات
مماس کو تحویل کر کی اس صورت کیطرف بدل سکتی ہین (ر۔ − ص) (ر۔ − ص)
+ (لا۔ − ط) (لا۔ − ط) = ن۲
(۷۰) دریافت کرو مساوات مماس کے جوکہ متوازی ایک خط مفروض کے ہو فرض
کرو کہ ر = طلا + ص خط مفروض ہے اور ر = − $\frac{لا}{ر}$ لا + $\frac{ن۲}{ر}$ یا
ر۲ + لالا = ن۲ مساوات اوس مماس کی ہی جسکا دریافت کرنا منظور ہی
لیکن اسمین مقدار لا اور ر کے مجہول ہین اور چونکہ یہہ خطوط متوازی ایک دوسرے
کی ہین ∴ − $\frac{لا}{ر}$ = ط (۴۳) یا $\sqrt{\frac{ن۲ - ر۲}{ر۲}}$ = ط ∴ ر =
± $\frac{نق}{\sqrt{1+ط۲}}$ اگر اس قیمت ر کو مساوات ر = − $\frac{لا}{ر}$ لا + $\frac{ن۲}{ر}$ مین لکھین
اور بجای − $\frac{لا}{ر}$ کی ط لکھین تو حاصل ہوگا یہہ ر = طلا ± نق $\sqrt{1+ط۲}$
یہہ ثابت ہوا کہ دو مماس متوازی ایک خط مفروض کے کھینچ سکتے ہین
(۷۱) دریافت کرو مقام تقاطع ایک خط اور ایک دایرہ کا ۔ فرض کرو کہ مرکز
دایرہ نقطہ شروع ہو اور مان لو کہ مساواتین دونون کی یہہ ہین ر

ر = ط لا + ص اور ر² + لا² = ن² اب ظاہر ہی کہ نقطہ تقاطع پر متغیرات لا اور ر کی دونون کی واسطے ایک سی ہونگی ∴ ن² − لا² = (ط لا + ص)² یہانسی حاصل ہوتا ہی لا = $\frac{-ط ص \pm \sqrt{ن²(1+ط²) - ص²}}{1+ط²}$ چونکہ قیمت لا کی دو ہین اسواسطے دو نقطون پر خط اور دایرہ مفروض تقاطع کرینگے ان قیمتون کے وسیلہ سی نقطۂ تقاطع دریافت ہو سکتی ہین اگر ن²(1+ط²) = ص² تو دونون قیمتین لا کی مساوی ہین اور اس صورت مین خط مفروض دایرہ کو مس کریگا اور اگر ن²(1+ط²) کم ہو ص² سے تو اس صورت مین خط مفروض دایرہ سے نہین ملیگا۔ مثال (۱) ر² + لا² = ۲۵ اور ر + لا = ۱ ∴ لا = ۴ یا −۳ اور ر = ۳ یا ۴ مثال (۲) ر² + لا² = ۲۵ ر + لا = ۵ ∴ لا = ۵ یا ۰ اور ر = ۰ یا ۵ مثال (۳) ر² + لا² = ۲۵ ۴ر + ۳لا = ۲۴ خط مس کریگا دایرہ کو یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ شامل کرنے سی مساوات اول درجہ کو مساوات دویم درجہ سے ایک مساوات درجہ دویم کی پیدا ہوگی یہانسے ثابت ہوا کہ صرف دو ہی نقطون پر تقاطع ہو سکتا ہی۔

(۷۲) اگر محور ترچھی فرض کئے جاوین اور زاویہ اونکی درمیان کا ر ہو تو اس صورت مین مساوات دایرہ کی یہہ ہوگی (ر − ص)² + (لا − ط)² + ۲ (ر − ص). (لا − ط) حم ر = ن² ..... (۳۰) اور ر² + لا² + ۲ لا ر حم ر = ن² مساوات اوس دایرہ کی ہی جسکا مرکز نقطہ شروع ہو یہانسی معلوم ہوا کہ مساوات ر² + س لا + لا² + د ر + ی لا + ف = ۰ علاقہ رکھتی ہے دایرہ سے ایک خاص صورت مین جبکہ

محور دنکن زاویہ کی جیب التمام = $\frac{ب}{ج}$ جبکہ مطابق کیا ہمنے اس مساوات کو مساوات عامہ سی تو حاصل ہوگا ۲جم ر = س اور — ۲ص — ۲ط جم ر = د اور — ۲ط — ۲ص جم ر = ی اور ط۲ + ص۲ + ۲ط ص جم ر — ن۲ = ف ان مساواتون کے وسیلے سے ہم حاصل کرینگے ط = $\frac{۲ی — س د}{۴}$ اور ص = $\frac{۲د — س ی}{س۲ — ۴}$ اور ن۲ = $\frac{س ی د — ی۲ — د۲}{س۲ — ۴}$ — ف یہانسی ثابت ہوا کہ اگر اوتار مرکز کی اور نصف قطر معلوم ہو تو لوکس بآسانی معلوم ہوسکتا ہی مثال (۱) ر۲ + لا ر + لا۲ + ر + لا — ۱ = ۰ یہان ظاہر ہی کہ ۲جم ر = ۱ ∴ ر = ۰ یہانسے ثابت ہوا کہ اس مساوات سی ایک دایرہ پیدا ہوگا اگر محورون کی درمیان مین زاویہ ۶۰° کا واقع ہو اور اوتار مرکز کے یہہ ہون ط = $\frac{۱}{۴}$ اور ص = — $\frac{۱}{۴}$ اور ن = $\frac{۲}{۴\sqrt{۳}}$ اگر فرض کرین اس مساوات کی محورونکو متقاطع علی القوایم اور مرکزونکو نقطہ شروع تو اس صورت مین مساوات یہہ ہوگی ر۲ + لا۲ = ن۲ = $\frac{۴}{۳}$ مثال (۲) ر۲ + ۲لا ر + لا۲ — ۹ = ۰ یہہ مساوات پیدا ہوگی جبکہ محور زاویہ ۴۵° کا بناوینگے اور مرکز نقطہ شروع اور ن = ۳ اور واضح ہو کہ س یہان مساوے یا زیادہ ± ۲ سے نہین ہوسکتا کیونکہ جم ر ایک سی کم ہی اگر لا ا اور لا ۱ ترچھی محور فرض کئے جاوین اور ک م ایک دایرہ ہو اور طاصر نصف قطر اور ن ط مماس دایرہ کا نقطہ ط سی کھینچا گیا ہی اور کھینچو خط طاس اور ص ح متوازی محور لا ۱ کے اور کھینچو خط ن ص متوازی محور لا ا کے اور اب کھینچو عمود ط د کا خط ن ص پر اور عمود ص ر کا خط طاس اور فرض کرو کہ



اس = لا اور طس = ک

اور اح = ط، اور

حص = ص، اور فرض

کرو زاویہ کاالا = گ

اور ظاہر ہی کہ مساوات

نصف قطر کی موافق ترچھی محوروں الا اور اک کی یہ ہوگی ک - ص =

$\frac{ک - ص}{لا - ط}$ (لا - ط) اور ظاہر ہی مثلث طدہ مشابہ مثلث ہ ص کی ہے

∴ ہ ص : دہ :: طہ : ہ ر یا دص : طر :: ہ ص : طہ یعنے

(لا - ط) + (ک - ص) جم ک : (ک - ص) + (لا - ط) جم ک :: لا - ط

: ک - ص اسیواسطے $\frac{ک - ص}{لا - ط} = \frac{(ک - ص) + (لا - ط) \text{ جم ک}}{(لا - ط) + (ک - ص) \text{ جم ک}}$ یہاسلئے

دریافت ہوا کہ مماس اوس زاویہ کا جو کہ نصف قطر محور سے بناتا ہے یہ ہے

$\frac{ک - ص + (لا - ط) \text{ جم ک}}{(لا - ط) + (ک - ص) \text{ جم ک}}$ اسیواسطے مماس اوس زاویہ کا جو کہ مماس محور سے بناتا ہے

یہ ہوگا $\frac{(لا - ط) + (ک - ص) \text{ جم ک}}{(ک - ص) + (لا - ط) \text{ جم ک}}$ اب ظاہر ہی کہ مساوات

مماس ن ط کی یہ ہوگی ک - ک = $\frac{(لا - ط) + (ک - ص) \text{ جم ک}}{(ک - ص) + (لا - ط) \text{ جم ک}}$ لا - لا

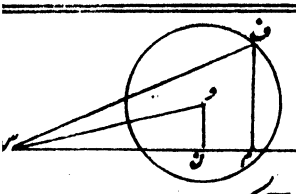
اور جبکہ مختصر کرینگے ہم اس مساوات کو موافق فقرہ (۶۰) کے تو حاصل ہوگا یہ

(ک - ص) (ک - ص) + (لا - ط) (لا - ط) + (لا - ط) (ک - ص) جم ک

+ (لا - ط) (ک - ص) جم ک = لو۲ — ∴ ∴ ∴

(۷۳) چاہتے ہیں کہ ناقطعی مساوات دایرہ کا فرض کرو کہ نقطہ قطبی نقطہ شروع سے

پر ہی اور زاویہ ف س م (= ر) پیدا کیا



جاتا ہی محور لا سے فرض کرو

$$\left.\begin{matrix} س م = لا \\ م ف = ر \end{matrix}\right\}$$ اوتار متقاطع علی القوایم نقطہ ف کے ہین

$$\left.\begin{matrix} \text{اور } س ن = ط \\ ن و = ص \end{matrix}\right\}$$ ایضاً وکی ہین

فرض کرو کہ س ف = ع اور س و = س

اور زاویہ و س لا = ز تو اس صورت مین

موافق (۶۱) کے یا بوسیلہ شکل کے ر = ع جس ز اور لا = ع جم ز اور ط = س جم ز اور ص = س جس ز لکھو ان قیمتون کو مساوات ر² + لا² − ۲ ص ر − ۲ ط لا + ط² + ص² − ل² = ۰ تو حاصل ہوگا یہہ ع² (جس ز)² + ع² (جم ز)² − ۲ س ع جس ز جس ز − ۲ س ع جم ز جم ز + س² (جم ز)² + س (جس ز)² − ل² = ۰ یا ع² − ۲ س ع (جس ز جس ز + جم ز جم ز) + س² − ل² = ۰

یا ع² − ۲ س ع جم (ز − ز) + س² − ل² = ۰

(۷۴) اگر ط اور ص کی قیمت اجزای قطبے س ت اور ز ت مین نہ لکھی جاوے تو مساوات قطبے اس صورت کی ہو جاویگی ع² − ۲ (ص جس ز + ط جم ز) ع + ط² + ص² − ل² = ۰ اگر نقطہ شروع محیط دایرہ پر فرض کیا جاوے تو مساوات دایرہ کی یہہ ہوگی ط² + ص² = ل² اسیواسطے مساوات قطبی اس صورت مین یہہ ہو جاویگی ع = ۲ (ص جس ز + ط جم ز) اگر محور تا کا ہر گز پر سے گذرے تو ص = ۰ اور مساوات قطبے کیصورت یہہ ہوگی ع² − ۲ ط ع جم ز + ط² − ل² = ۰ یہان سے

معلوم ہوگا کہ ہ = ط حم ر ± ق − ط۲ (جس ر)۲ اور یہہ مساوات شکل گذشتہ سی ہے بغیر استعانت مساوات کی نکل سکتے ہی۔

باب ششم

عام مساوات درجہ دویم کے بیان مین

(۵۷) عام صورت مساوات درجہ دویم کی یہہ ہی ا ز۲ + ب لا ز + س لا۲ + د ز + ی لا + ف = ۰ اسمین آ اور ب اور س وغیرہ مقادیر مقررہ ہین اگر ہم حل کرین اس مساوات کو واسطے دریافت کرنے قیمتون لا اور ز کی تو حاصل ہوگی یہہ دو مساوات

$$ز = -\frac{ب لا + د}{۲ا} \pm \frac{۱}{۲ا}\sqrt{(ب۲ - ۴ا س) لا۲ + (ب د - ۲ ا ی) لا + د۲ - ۴ا ف} \quad ..(۱)$$

اور

$$لا = -\frac{ب ز + ی}{۲س} \pm \frac{۱}{۲س}\sqrt{(ب۲ - ۴ا س) ز۲ + (د ب - ۲ س ی) ز + ی۲ - ۴س ف} \quad (۲)$$

چونکہ اول مساوات تین جذر پر ± کی علامت ہی تو اسیواسطے قیمت ز کی اکثر دو ہوتی ہین اور یہانسی معلوم ہوا کہ دو وتر مطابق ایک ہی وتر العرض کے ہین یہہ دو وتر کھینچی جا سکتے ہین جبکہ قیمتین وتر العرض کی ایسی ہون کہ جب اونہین صورت تزولی مین لکھین تو وہ صورت ممکن ہو یعنی صفر اور غیر ممکن نہو جاوے کیونکہ اگر وہ صفر ہو جاوے تو فقط ایک ہی وتر ہوگا اور اگر غیر ممکن ہووی تو کوئی وتر نہین کھینچا جا سکتا یہانسے معلوم ہو جاویگا کہ کوئی نقطہ خط منحنی پر مطابق اس قیمت لا کی نہین ہے پس یہانسے معلوم ہوا کہ اگر ہم وسعت اور حدود خط منحنی کی دریافت کیا چاہین تو لازم ہی کہ پہلے دریافت کرین اس امر کو کہ کس صورت مین مقدار تزولی صفر ہو سکتے ہی اور کس صورت مین ممکن اور کونسی صورت مین غیر ممکن دریافت کرنا اس امر کا موقوف ہی اوپر علامت مقدار ذیل کے

(ب۲ − ۴اس) لا۲ + ۲ (پ د − ۲ ی) لا + د۲ − ۴ف ..... (ط)

واضح ہو کہ اس صورت مین واسطے لا کی ایسی بڑی قیمت فرض کیجا سکتے ہی کہ علامت ساری مقدار کی موقوف ہو جاوے اول جزو کی امثال یعنے (ب۲ − ۴اس) کی علامت پر اسواسطے کہ لا۲ ہمیشہ مثبت رہی گا لا کیواسطے کیسی ہی قیمت فرض کیجاوے دلیل اس بات کی کہ لا کیواسطے ایسی قیمت فرض کر سکتے ہین کہ علامت ساری مقدار کی موقوف ہو جاوے علامت (ب۲ − ۴اس) پر واسطے اسبات کی لکھو صورت (ط) کو اسطور پر م (لا۲ + $\frac{ن}{م}$ لا + $\frac{ف}{م}$) اور فرض کرو کہ $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{ف}{م}$ مین جو مقدار بڑی ہے بغیر لحاظ علامت کی = ق اور یہہ بھی فرض کرو کہ ر = ± (ق + ۱) = لا اور لکھو اس قیمت لا کو اسکی صورت مین بس اب حاصل ہو گی یہہ صورت م (ق۲ + ۲ق + ۱ ± $\frac{ن}{م}$ ق ± $\frac{ن}{م}$ + $\frac{ف}{م}$) اب ظاہر ہی کہ قیمت اس صورت اخیر کی مثبت رہیگی $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{ف}{م}$ کی واسطے کچھہ ہی فرض کرین اور یہی بات ثابت ہو سکتی ہی جبکہ لا کی واسطے قیمت (ق + ۱) سی زیادہ فرض کیجاوے پس معلوم ہوا کہ علامت ساری صورت کی موقوف ہی علامت م پر ——

جبکہ (ب۲ − ۴اس) ایک مقدار منفی ہووے تو اسوقت ایسی ممکن قیمتین لا کیواسطے فرض کیجا سکتی ہین کہ وہ مثبت ہون یا منفی لیکن زیادہ ہون ± ر سی اور اسی مین ظاہر ہی کہ ر یعنے دو ترغیر ممکن ہو جاوینگا اس سے یہہ معلوم ہوا کہ خط محدود ہو گا دونو سمت مین یعنی مثبت اور منفی ستون لا کی مین جسکہ (ب۲ − ۴اس) مثبت ہو تو اس صورت مین اگر فرض کرین ہم واسطے لا کی ایسی قیمتین جو ± ر سی کم نہون تو ظاہر ہی کہ قیمتین دو ترممکن اور یہانتک معلوم ہوا کہ خط منحنی کا دونون ستون لا کی مین

بی حدہی اور جبکہ (ب۲ − ۴اس) = ۰ تو مقدار جو بیچ علامت جذر کی واقع ہوئی وہ نہ رہیگی ۲ (ب د − ۱۲ ای) لا + د۲ − ۴۸ اف اب اگر (ب د − ۱۲ ای) مثبت ہووے تو ظاہر ہی کہ ممکن اور مثبت قیمتین لا کیواسطے ایسی فرض کیجا سکتی ہین کہ قیمت ر کی ممکن رہی لیکن اگر لا کی واسطے کوئی قیمت منفی زیادہ $\frac{د۲ - ۴۸ اف}{۲ (ب د - ۱۲ ای)}$ سی فرض کیجاوے تو ر غیر ممکن ہوجاویگا اور یہانسی معلوم ہوا کہ خط منحنی طول لا انتہا سمت مثبت لا مین رکھیگا اور محدود ہوگا سمت مخالف مین لیکن اگر (ب د − ۱۲ ای) منفی ہووے تو نتایج معکوس حاصل ہونگی یعنی طول خط منحنی کا لا انتہا ہوگا سمت لا نفی مین اور محدود ہوگا سمت مخالف مین — اب اگر مساوات (۲) سی بحث کرین تو نتایج مثل ہر قومہ بالا حاصل ہونگی پس معلوم ہوا کہ خطوط منحنی جو مساوات عام درجہ دویم سی تعلق رکھتی ہین تین قسم کی ہوتی ہین — قسم اول جبکہ ب۲ − ۴اس = مقدار منفی تو خطوط منحنی محدود ہر سمت مین ہوتی ہین — قسم دویم جب کہ ب۲ − ۴اس = مقدار مثبت تو خطوط منحنی غیر محدود ہر سمت مین ہوتی ہین — قسم سیم جبکہ ب۲ − ۴اس = ۰ تو خطوط منحنی محدود ایک سمت مین اور سمت مخالف مین غیر محدود ہوتے ہین

(۷۶) بیان اول قسم کا جسمین ب۲ − ۴اس = مقدار منفی کے — فرض کرو کہ $\frac{ب}{۲۸} = ط$ اور $\frac{د}{۲۸} = ل$ اور $\frac{ب۲ - ۴اس}{۴۸۲} = ع$ اور فرض کرو کہ لا اور لا۲ قیمتین مساوات آیندہ کی مین (ر۲ − ۴اس) لا۲ + ۲ (ب د − ۱۲ ای) لا + د۲ − ۴۸ اف = ۰ اب ظاہر ہی کہ مساوات (۱) یعنے ر = − ط لا + ل ± $\sqrt{ع}$

$\sqrt{\frac{ب^2-4اس}{4ا^2}\left(لا^2+\frac{2(ب د-2ای)}{ب^2-4اس}لا+\frac{د^2-4اف}{ب^2-4اس}\right)}$ اسکی شکل کی ہوجاوے

$ی = طلا + ل \pm \sqrt{ع(لا-لا۱)(لا-لا۲)}$ ..... (1) فرض کرو کہ $\overline{آ}$

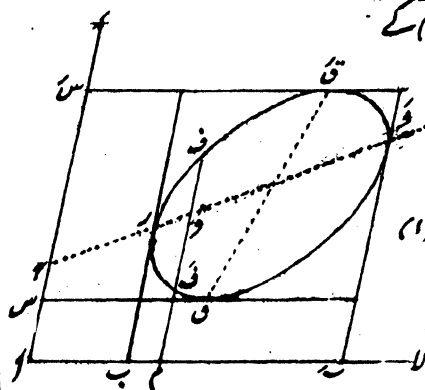
ہی نقطہ شروع اوتار کا اور $\overline{لا}$ اور $\overline{ی}$ ترچھی محورین اور یہہ بھی فرض کرو کہ $\overline{حح}$ وہ

خط ہی جسکے مساوات $ی = طلا + ل$ ہی اور $\overline{مو}$ اوسکا ایک وتر ہی جسکی قیمت مطابق

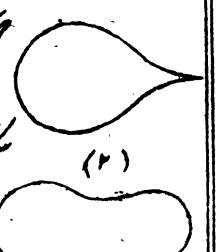
اوس وتر العرض لا کی ہی جو واقع ہی مابین $\overline{لا۱}$ اور $\overline{لا۲}$ کی فرض کرو کہ $\overline{اف}$

اور $\overline{وق}$ اوپر م ف کی ایسے خط ہین کہ ہر واحد امین کا مساوے ہی

$\sqrt{ع(لا-لا۱)(لا-لا۲)}$ کے



شکل (۱)



(۲)

پس اب ظاہر ہی کہ $\overline{قف}$ اور $\overline{ق ف}$ دو نقطہ خط منحنی پر ہین — اسواسطے کہ م ف =

م و + و ف = $طلا + ص \pm \sqrt{ع(لا-لا۱)(لا-لا۲)}$ اور م ف =

$طلا + ص - \sqrt{ع(لا-لا۱)(لا-لا۲)}$ اگر ہم اسطرح کیسیچین خطوط مطابق

ممکن قیمتون لا کے جنکی وسیلہ سے مقدار نزولی ممکن رہی تو ہم دریافت کرینگی

مختلف نقاط خط منحنی کے — ممکن ہونا $\sqrt{}$ کا موقوف ہی اوپر ممکن ہونے مقدار

نزولی کی اور اسکا ہونا موقوف ہی اوپر صورت اجزای ضربی $(لا-لا۱)$ اور $(لا-لا۲)$ کے

یعنی اوپر قیمتون لا، اور لا۲ کے اب ظاہر ہی کہ یہہ قیمتین لا، اور لا۲ تین طرح پر مساوات مین آسکتی ہین — اول صورت یہہ ہی کہ ممکن اور غیر مساوی ہون — دوسری یہہ کہ ممکن اور مساوی ہون — تیسری یہہ کہ غیر ممکن ہون صورت اول فرض کرو کہ لا، اور لا۲ ممکن اور غیر مساوی ہین اور کا ٹو اب = لا، اور اے = لا۲ پس اگر اس صورت مین لا = لا، یا لا = لا۲ تو مقدار — ع (لا — لا،) (لا — لا۲) صفر ہوجاویگی اور دو نقطہ منحنی کا منطبق اور مساوی دو نقطہ کہوجاویگا اسیواسطے جبکہ کھینچین ہم خط ب ر اور ے ر ایسی کہ وہی گذرتے ہوئی نقاط ر اور ر مین متوازی ہون اے کی تو معلوم ہوجاویگا خط منحنی فطر کو مقام ر اور ر پر کاٹتا ہی اگر فرض کرین ہم واسطے لا کی ایسی قیمتین کہ واقع ہون مابین لا، اور لا۲ کے تو حاصل ہونگی دو قیمتین ممکن ر کی اسیواسطے کہ (لا — لا،) مثبت ہی اور (لا — لا۲) منفی اور یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ — ع (لا — لا،) (لا — لا۲) مثبت رہیگا — اگر لا کو ایسا فرض کرین ہم کہ وہ زیادہ ہو لا۲ سی یا کم لا، سی تو ظاہر ہی کہ — ع (لا — لا،) (لا — لا۲) منفی رہیگا اور مقدار ر دل غیر ممکن ہوجاویگی اور ر کی کوئی قیمت ممکن دریافت نہوگی یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی درمیان خطون ب ر اور ے ر کی محدود ہی — جسطرح ہمنی مساوات (۱) کا حال بیان کیا ہے اوسیطرح مساوات (۲) پر بھی عمل کرین تو دریافت کرینگے ہم کہ خط مستقیم وق ایک قطر ہی اور خط منحنی اوسی نقاط ق پر کاٹتا ہی اور جبوقت کھینچینگے ہم خطوط متوازی لا۲ کے ایسی کہ وہ گذرتی ہون نقاط ق اور ق پر تو دریافت ہوگا کہ خط

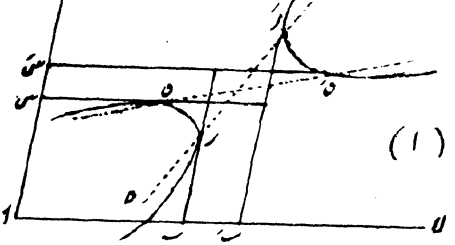
منحنی مابین ان خطون متوازی کی محدود ہی پس ہمنے ترکیب بالاسی دریافت کرلیا
کہ خط منحنی فقط خاص خطون متوازیہ کی مابین واقع ہی گو اوسکی صورت ابتک دریافت
نہین ہوئی — جسوقت فرض کرین ہم واسطے لا کی مختلف قیمتین ایسی کہ واقع ہون
مابین لا' اور لا'' کے تو دریافت کرینگے ہم مختلف نقاط مثل ق ق وغیرہ کے
اور اسطرح سی ہمین درست تقریب اوسکی شکل کا حاصل ہوگا لیکن قطع نظر اس تدبیر
دریافت کرنی شکل خط منحنی کے یہہ بات ظاہر ہی کہ اوسکی شکل شکل مرقومہ بالاسی بہت
مختلف نہین ہوسکتے اسواسطے کہ اگر اوسی مثل شکل (۲) کی فرض کرین تو ایک
خط مستقیم ایسا کھینچا جاسکتا ہی کہ وہ اس خط منحنی کو اوسی زیادہ نقطون پر تقاطع
کری اور یہہ بات غیر ممکن ہی اسلئے کہ وہ خطوط منحنی جو دوسری درجہ کی مساوات سی
تعلق رکھتی ہین اونمین یہہ بات نہین ہوتی — اس خط منحنی کو جسکا بیان ہوا بیضوی
کہتے ہین — اگر ہم اون نقاط کو دریافت کیا چاہین جہان کہ خط منحنی محور الا کو
تقاطع کرتا ہی تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم ی = ۰ اور اس صورت مین قیمتون مساوات
س لا' + ی لا + ف = ۰ سی اوسطار العرض نقاط تقاطع کی تعیین ہونگے اور یہہ نقطے
دو ہونگی جب یہہ قیمتین ممکن اور غیر مساوی ہون اور ایک نقطہ ہوگا جب کہ یہہ قیمتین
ممکن اور مساوی ہون اور ایک نقطہ بھی نہوگا جب کہ یہہ قیمتین غیر ممکن ہون اسطور سے
اگر فرض کرین ہم لا = ۰ تو ہم دریافت کرینگی اون نقاط کو (بشرطیکہ پائی جاوین)
جہان کہ خط منحنی محور آ کو تقاطع کرتا ہی — صورت دوسری
فرض کرو کہ لا' اور لا'' ممکن اور مساوی ہین ∴ ی = ط لا + س ±

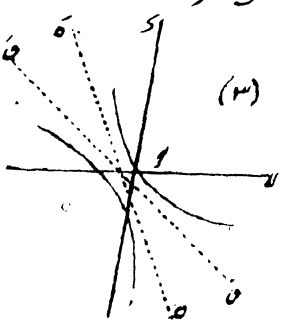
$(لا - لا_1)^2 = ع$ اور یہہ مقدار غیر ممکن ہی مگر اوس صورت مین جب کہ $لا = لا_1$
پس معلوم ہوا کہ اس صورت خاص مین بجاے خط منحنی کے ایک نقطہ ہی جسکی وتر
$لا_1$ اور $ط لا_1 + ص$ یا $\frac{ی_2 - ی_1}{س_2 - س_1}$ اور $\frac{س_2 د - س ی}{س_2 - س_1}$ ہین —
صورت تیسری فرض کرو کہ $لا_1$ اور $لا_2$ غیر ممکن ہین اس صورت مین ہم کہتے
ہین کہ کوئی ایسی قیمت لا کیواسطے فرض نہین کیجا سکتے کہ $(لا - لا_1)(لا - لا_2)$
مقدار منفی ہووے کیونکہ قیمتین غیر ممکن اس صورت کی ہوتی ہین $\pm ح + ق \sqrt{-1}$
اور $\pm ح - ق \sqrt{-1}$ ∴ $(لا - لا_1)(لا - لا_2) = لا^2 \pm 2ح لا + ح^2 + ق^2 =$
$(لا \pm ح)^2 + ق^2$ اور یہہ مقدار مثبت ہی جبوقت ممکن قیمت لا کے واسطے فرض
کیجاوے پس معلوم ہوا کہ اس صورت مین مقدار نزولی غیر ممکن رہیگی اسلئے اس
شرط کی موافق خط منحنی نہین ہوسکتا — یعنی اوس مساوات کا حال جسمین لا کی قیمت
نسبت ؤ کی دریافت کی گئی ہی نہین لکھا کیونکہ اس مساوات کی نتایج موقوف ہین
(۱) مساوات پر پس جبوقت مطابق کرین ہم مساواتون (۱) اور (۲) کو تو ہم
دیکھینگے کہ (۱) مساوات مین س اوسی مقام پر واقع ہی جہان کہ آ (۲)
مساوات مین واقع ہی اور اسسے معلوم ہوتا ہی کہ مقادیر نزولی ایک ہی دفعہ دونون
مساواتون مین ممکن اور مساوے یا غیر ممکن ہوتی ہین بشرطیکہ آ اور س کے علامت
ایک ہی ہو چنانچہ ایسا ہی واقع ہوتا ہی جب کہ $ی_2 - ی_1$ مقدار منفی ہو
جبوقت کوئی خاص مثال حل کرین تو چاہیے کہ مساوات مفروضہ کو ان شکلون کیطرف
تحویل کرین کہ $ی = ط لا + ص \pm \sqrt{-ع (لا - لا_1)(لا - لا_2)}$

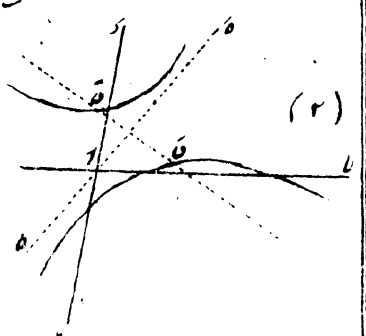
لا = طَ ک + ص ± √ ع (ک − ک۱) (ک − ک۲) پس اب تین صورتین ہین
صورت اول لا۱ اور لا۲ ممکن اور غیر مساوی ہون اس صورت مین خط منحنی بیضوی
ہی اور اوسکی حدود قیمتون لا۱ اور لا۲ اور ک۱ اور ک۲ سی دریافت ہوتی ہین اور بواسطہ
مساواتون ک = طَ لا + ص اور لا = طَ ک + صَ کے اوسکی قطر کھینچی جا سکتی
ہین اور اوسکی نقاط تقاطع محورون سے دریافت ہو سکتے ہین — جسوقت کہ فرض
کرین ہم لا۱ اور ک۱ کو علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کی مساوات مفروض مین صورت دوم
فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ ممکن اور مساوی ہین پس اس صورت مین خط منحنی ایک
نقطہ ہوگا صورت سوم فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ غیر ممکن ہین پس اس صورت مین
خط منحنی غیر ممکن ہوگا — مثال (۱) ک۲ − ۲ لا ک + ۲ لا۲ − ۲ ک − ۴ لا + ۹
= ۰ یہہ صورت متعلق شکل اول اور صورت اول کی ہی اور اسکی حل کرنی سی معلوم
ہوگا کہ اَب = ۲ اور اَبَ = ۴ اور اَس = ۴ − ۲√۲ اور اَسَ =
۴ + ۲√۲ اور اَح = ۱ مثال (۲) ک۲ + لا ک + لا۲ + ک + لا − ۵ = ۰
یہہ صورت اول سے متعلق ہی اسمین جسوقت کہ اَب = ۲ ½ اور اَبَ = −۲
اور اَس = ۲ ½ اور اَسَ = −۲ تو اوسوقت خط منحنی قطر دکو کاٹیگی
اور محور دکو ۱۷۵ اور −۲۷۵ پر تقریبا یہہ جہتہ نقطہ کفایت کرتی ہین
خط منحنی کی شکل دریافت کرنیکو — مثال (۳) ک۲ + ۲ لا ک + ۳ لا۲ − ۴ لا
= ۰ یہہ صورت اول سے متعلق ہے — مثال (۴) ک۲ − ۲ لا ک + ۲ لا۲ − ۴ ک
+ ۲ لا = ۰ ایضاً (۵) ک۲ + ۲ لا۲ − ۱۰ لا + ۱۲

= یہہ صورت اول سی متعلق ہی۔ مثال (۶) ۶ع۲ − ۱۲لا ر + ۱۳لا۲ − ۱۲ر − ۱۱لا + ۱۹ = ۰ صورت دویم سی متعلق ہی (۷) ر۲ − ۱۴لا ر + ۵لا۲ + ۲ر − ۱۴لا + ۲ = ۰ صورت سویم سی متعلق ہی۔ ان مثالون کے حل کرنیسی دریافت ہوگا کہ بخوبی صورت خط منحنی کی دریافت ہوگی فقط یہہ معلوم ہوجاویگا کہ خط منحنی کس مقام پر واقع ہی۔

بیان دوسری قسم کی خط منحنی کا جسمین ب۲ − ۴اس مثبت ہوتا ہی اسس صورتمین ظاہر ہی کہ ـــع + ع ہوجاویگا اور اسیواسطے مساوات (۱) اسس شکل کی ہوجاویگی ر = ط لا + ص ± √ع (لا − لا۱) (لا − لا۲)







فرض کرد کہ شکل (۱) مین ۵۵ قطر ہی جسکی مساوات یہ ہی ی = ط لا + ص
پس اس صورتمین موافق گذشتہ کی تین صورتین قیمتون لا، اور لا، کی ہونگی —
صورت اول مین فرض کرو کہ لا، اور لا، ممکن اور غیر مساوی ہین اور یہہ بھی فرض کرد
کہ لا، = آب اور لا، = آ ے کھینچو ب ر اور ے ر متوازی آ ے کے اب ظاہر
ہی کہ خط منحنی قطع سے نقطون ر اور ر سی ملتا ہی — ظاہر ہی کہ مقدار ز ولی یعنے
جو علامت جذر کے نیچے واقع ہی غیر ممکن ہو جاویگی اوس صورت مین جبکہ لا کو مابین لا،
اور لا، کے فرض کرین اور ممکن ہو جاویگی اوس صورتمین جبکہ لا کی قیمتین ان حدود سے
باہر ہون اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ کوئی جزو خط منحنی کا مابین خطوط متوازی آ ر
اور ے ر کی واقع نہین ہی بلکہ وہ خط منحنی غیر نہایت ادہر اودہر انکی پھیلا ہوا ہی اب
اگر حل کرین مساوات کو واسطے دریافت کرنے قیمت لا کے نسبت ے کی تو قطر ق ف کا
کھینچ سکتے ہین اور معلوم کر سکتے ہین خطون س ق اور س ف کو جو متوازی آ لا
کی ہین اور جنکی درمیان مین کوئی جزو خط منحنی کا واقع نہین ہی اور محور لا بھی انکی
ادہر اودہر ممکن رہتا ہی اس بیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی جو متعلق اس مساوات
کی ہی ایسا ہی کہ اوسکی شکل کچھ مطابق شکل (۱) کی ہی اور اوسکی دو قوسین مین
جو غیر محدود ہین اس خط منحنی کو بعید البیضوی کہتی ہین یہان یہہ بیان کرنا چاہیے کہ
قطر دوسرا یعنے ق ف ضرور نہین کہ خط منحنی سے ملا ہی کرے اسواسطے کہ ممکن اور
غیر ممکن ہونا مقدار ز ولی کا ایک ہی وقت مین موقوف ہی اوپر علامتون آ لا،
س کے اور یہ علامتین بعید البیضوی مین مختلف ہو سکتے ہین یعنی ممکن کہ ایک مقدار

نزدل کی قیمت ممکن ہو اور دوسری کی غیر ممکن — صورت دوسری

فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ ممکن اور مساوی ہین پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

ر = ط لا + ص ± (لا − لا۱) √ع اور یہہ مساوات دو خطون مستقیم سے

تعلق رکھتی ہی — صورت تیسری فرض کرو کہ لا۱ اور

لا۲ غیر ممکن ہین اس صورتین ظاہر ہی کہ کتنی ہی ممکن قیمتین لا کیواسطے فرض

کیجاوین سب صورتون مین مقدار نزدل ممکن رہیگی یہانتک یہہ معلوم ہوا کہ خط

منحنی کی چار شاخین غیر محدود ہونگی — چونکہ √ع (لا − لا۱) (لا − لا۲)

کبھی زایل نہین ہو سکتا اسواسطے کہ بیضوی کی بیان مین ثابت ہوا ہی پس

قطرہ ہ خط منحنی سے کبھی نہین مل سکتا لیکن دوسرے قطر وں کو کھینچ سکتے

ہین اور اگر دونون قطر خط منحنی سے نہ ملین تو بھی اتنا دریافت ہو سکتا ہی کہ

خط منحنی کون سی جگہ نہین پایا جاتا اور اس صورت مین دریافت کرنا چاہیئے

کہ خط منحنی کس کس جگہ محورون سے تقاطع کرتا ہی — اگر ان ترکیبون سے نقاط

خط منحنی کے اسقدر دریافت ہو سکین کہ جسسے مقام خط منحنی کا معلوم ہو جاوے

تو اون ترکیبون کا استعمال کرنا چاہیئے جنکا آگے بیان ہوتا ہی — جب کہ خاص

مثال کو حل کیا چاہین تو مساوات عام کو اس صورت سے لکھنا چاہیئے ر = ط لا

± √ع (لا − لا۱) (لا − لا۲) ل = ط ر + ص ± √ع (ر − ر۱) (ر − ر۲)

اب اسکی بھی تین صورتین ہین صورت اول فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲

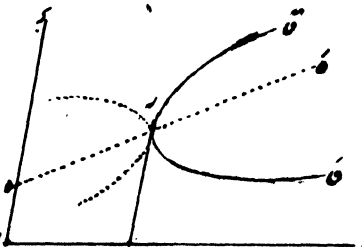
ممکن اور غیر مساوی ہین اس صورت مین خط منحنی بعید البیضوی ہی اور اوسکی حدود

مقداروں لا۱ اور لا۲ اور ک۱ اور ک۲ کے وسیلہ سے دریافت ہو سکتی ہیں اور دونوں قطر اوسکے مساواتوں ر = ط لا + ص اور لا = ط ر + ص سے دریافت ہو سکتے ہیں اور اوسکے نقاط تقاطع محوروں سے بھی دریافت ہو سکتی ہیں جبکہ فرض کریں ہم لا اور ک کو علحدہ علحدہ مساوی صفر کے —

صورت دوسری لا۱ اور لا۲ ممکن اور مساوی ہیں اس صورت میں خط منحنی دو خط مستقیم ہونگی جو آپسمیں متقاطع ہونگے — صورت تیسری لا۱ اور لا۲ غیر ممکن ہیں اس صورت میں خط منحنی بعید البیضوی ہے کھینچو دونوں قطر اور اگر کوئی نقطہ ایسا ہو کہ جہاں خط منحنی محوروں یا کسی قطر سے تقاطع کرتا ہو اوسے بھی دریافت کرو — مثال (۱) ر۲ − ۳ لا ر + لا۲ + ۱ = ۰ صورت اول شکل (۱) سے متعلق ہے اسمیں نقطہ شروع وہاں ہے جہاں دونو شاخیں بعید البیضوی کی آپسمیں تقاطع کرتی ہیں مساواتیں قطروں کی یہہ ہیں ر = ۳/۲ لا = ۲ ر/۳ اور یہ ظاہر ہے کہ ا ب = ۲/√۵ اور ا ب = −۲/√۵ اور ا س = ۲/√۵ اور اس سے ۲/√۵ مثال (۲) ر۲ − ۲ لا ر − لا۲ + ۲ = ۰ صورت اول متعلق ہے اسمیں دونوں قطر نقطہ شروع پر سے گذرتی اور محوروں سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہیں اور دوسرا قطر ق ق خط منحنی سے کہیں ملتا اور ا ب = ۱ و ا ب = ۱ اور خط منحنی سے محور و تر العرض ان فاصلوں پر ± √۲ تقاطع کرتا ہے مثال (۳) ۴ ر۲ − ۴ لا ر − ۳ لا۲ + ۸ ر + ۴ لا + ۱۶ = ۰ صورت اول سے متعلق ہے مثال (۴) ر۲ − ۴ لا ر − ۵ لا۲ − ۱۰ ر + ۴۰ لا − ۲۶ = ۰ ایضاً

(۵) $ی^۲ - ۶لای + ۹لا^۲ + ۲لا - ۱ = ۰$ صورت دوسری آس مساوات
مین جزو مساوات خطون مستقیم کے یہہ نکل سکتے ہین $ی - ۳لا + ۱ = ۰$ اور
$ی - ۲لا - ۱ = ۰$ (۶) $ی^۲ + ۳لای + ۲لا^۲ + ۲ی + ۳لا + ۱ = ۰$
صورت دوسری (۷) $ی^۲ - ۴لای - لا^۲ + ۴لا - ۳ = ۰$ صورت تیسری شکل (۲)
(۸) $ی^۲ + ۳لای + لا^۲ + ی + لا = ۰$ صورت تیسری شکل (۳) اس صورت
مین بہی ایک قطر خط منحنی سے نہین ملتا لیکن خط منحنی نقطہ شروع مین سے گذرتا ہی
اور محور لا کو فاصلہ $\frac{۱}{۲}$ پر تقاطع کرتا ہی اور محور ی سے بہی اسی فاصلہ پر تقاطع
کرتا ہی۔ (۹) $ی^۲ - لا^۲ - ۲ی + ۵لا - ۳ = ۰$ صورت تیسری اس
مثال مین قطر متوازی محور وں کی ہین اور خط منحنی اوس قطر سے کبہی نہین ملتا جسکی
مساوات یہہ ہی $لا = \frac{۵}{۴}$ (۱۰) $ی^۲ - لا^۲ - ی = ۰$ صورت تیسری
(۷۸) یہان سے تیسری قسم کے خطوط منحنی کا بیان جسمین $ب^۲ - ۴اس = ۰$
اس صورتین عام مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہی $ی = \frac{-لا + د}{۲ا}$
$\pm \frac{۱}{۲ا} \sqrt{۲(ب د - ۲ا ی) لا + د^۲ - ۴اف}$ ..... (۱)
فرض کرو کہ $\frac{-ب}{۲ا} = ط$ اور $\frac{د}{۲ا} = ص$ اور $\frac{ب د - ۲ا ی}{۲ا^۲} = ع$
اور لا، قیمت ہی اس مساوات کی $۲(ب د - ۲ا ی) لا + (د^۲ - ۴اف) = ۰$
اور جسوقت لکہین یہہ قیمتین مساوات (۱) مین توحاصل ہوتے ہی یہہ مساوات
$ی = ط لا + ص \pm \sqrt{ع (لا - لا۱)}$ وہ خط جو متعلق مساوات $ی = ط لا + ص$ ہی قطر وہ ہی فرض کرو کہ ع مثبت ہی پس اگر لا، = لا، تو طاہر ہے

کہ اب مقدار نزولی صفر ہو جاتی ہی پس اب اگر لا = اب اور ب ر متوازی
آ ر کے کھینچا جاوے تو خط منحنی قطر کو مقام د پر تقاطع کریگا اب جبوقت لا زیادہ



ہووی لا اسی ∞ تک
اوسوقت آ بھی زیادہ ہوتا ہے
∞ تک اور یہانتک یہہ معلوم ہوا
کہ خط منحنی کی دو قوسین ر ق
اور ر ق غیر محدود ہین اور اگر لا کم ہو بہ نسبت لا کے تو آ غیر ممکن ہو جاتا ہے
یعنی کوئی جزو خط منحنی کا نفی سمت مین نہین جاتا — اگر فرض کرین ہم کہ
ع نفی ہی تو اس صورت مین ساری نتایج خلاف مذکورہ بالا کے حاصل ہونگے
اور خط منحنی فقط سمت نفی لا کے مین پہیلی گا اس صورت کا نقش خط نقطہ دار
سی معلوم ہو جاتا ہی — اس خط منحنی کو قریب البیضوی کہتی ہین — اگر ب د
— ۲ ای = ۰ تو ر = ط لا + ص ± √(د۲ — ۴ ا ف / ۴ ا ع) اس مساوات سی
دو خط مستقیم متوازی محور کے متعلق ہین — اب اگر مقدار نزولی صفر ہو جاوے
تو فقط ایک ہی خط مستقیم رہ جاویگا اور اگر د۲ — ۴ ا ف مقدار منفی ہو
تو قیمت آ کی غیر ممکن ہو جاویگی اور کوئی خط منحنی نہین ہو سکتا — جب کسی
خاص مثال کو حل کرین تو عام مساوات کو اس صورت کیطرف تحویل کرین
ر = ط لا + ص ± √(ع (لا — لا)) صورت اول ع مثبت ہو یا منفی اس
صورت مین خط منحنی کو قریب البیضوی کہتی ہین کیونکہ قطع لا در یافت کردہ نقاط

جہان خط سخنی محورون اور قطر کو تقاطع کرتا ہو — صورت دوسری
ع = ۰ اس صورت مین یا تو دو خط متوازی ہوتی ہین یا ایک خط مستقیم ہوتا ہی
یا کچھ بھی نہین ہوتا ۔ مثال (۱) ر۲ − ۲لاس + لا۲ − ۲ر − ۱ = ۰
صورت اول سی متعلق ہی ۔ (۲) ر۲ − ۲لاس + لا۲ − ۲ر − ۲لا = ۰
ایضاً (۳) ر۲ + ۲لاس + لا۲ + ۲ر + لا = ۰
ایضاً (۴) ر۲ − ۲لاس + لا۲ − ۱ = ۰ صورت
دوم مین سی دو خط متوازیون سے متعلق ہی ۔ (۵) ر۲ − ۲لاس + لا۲ + ۲ر
− ۲لا + ۱ = ۰ ایضاً ایک خط مستقیم سے (۶) ر۲ + ۲لاس + لا۲ + ۱ = ۰
،،،،،،،،،، ایضاً غیر ممکن خط

(۷۹) پہلے تمام کرنی اس باب کی سی یہہ مناسب معلوم ہوتا ہی کہ ساری باتین
جنکا اس باب مین ذکر ہوا ہی اکھٹی لکھی جاوین ا ر۲ + ب لاس + س لا۲ + د ر
+ ہ س + ف = ۰ اگر ب۲ − ۴ا س نفی ہو تو خط متعلق اس مساوات کا
بیضوی ہوگا اور اوسکی یہہ تین قسمین ہونگی (۱) س = ۱ اور ب = ۰
جیب التمام اوس زاویہ کی جو درمیان محورون کی واقع ہی یہہ دایرہ ہی چنانچہ فقرہ
(۷۲) مین بیان کیا گیا ہی (۲) قسم (ب د − ۲ا ہ)۲ = (ب۲ − ۴ا س)
(د۲ − ۴ا ف) اسسے ایک نقطہ متعلق ہی (۳) اگر ب۲ − ۴ا س مثبت ہو
تو خط متعلق اس مساوات کا بعید البیضوی ہوگا اور اوسمین یہہ ایک قسم بھی ہوگی (۱)
(ب د − ۲ا ہ)۲ = (ب۲ − ۴ا س) (د۲ − ۴ا ف) اور اسسے دو خط مستقیم

بھی متعلق ہین — اگر ت² — ۴ ا س = ۰ تو اس صورت مین خط فرضی البیضوی کا
اور اسمین یہہ تین قسم ہونگی پہلے قسم (۱) ب د — ۴ ا ی = ۰ (دو خط مستقیم کا متعلق
ہونگی (۲) ب د — ۴ ا ی = ۰ اور د² — ۴ ا ف = ۰ اب ایک ہی خط مستقیم
ہوگا (۳) ب د — ۴ ا ی = ۰ اور د² کم ۴ ا ف سے تو خط غیر ممکن ہوگا
اگر لا کی قیمت ت² کی دریافت کرتے تو اسمین بھی ایسا ہی کچھ دریافت ہوتا اگرچہ
ظاہر مین کچھ اختلاف ہوتا —

ساتوان باب

اسمین تحویل کرنی مساوات عام درجہ دویم کا ذکر ہی

(۸۰) جب یہہ معلوم ہو کہ مساوات عام چارون خط منحنی سے متعلق ہی تو جانا چاہئے
کہ جب نقطہ شروع ایسی مقام پر ہو کہ مجہ ور اور مسطح اور قوت اولی ت اور لا اور مقدار
منقطع ق سب ایک خط کی مساوات مین دخل رکھتی ہون تو ظاہر ہی کہ بہت وقت
اوسکے حل کرنی مین واقع ہوتی ہی اسواسطے ترکیب نقطہ شروع بدلنی کی ایسی تجویز
کی ہی کہ مساوات کا اختصار ہو جاتا ہی یعنے ت اور لا ساقط ہو جاتے ہین اور اوس
خط مین جسکے وہ مساوات ہی کچھ خلل واقع نہین ہوتا بموجب اس ترکیب کے
لا = لا' + ط اور ر = ر' + ص اور جب ان قیمتون کو بجاے ت اور لا کی مساوات عام
لکھین تو

$$\left.\begin{array}{l} ا(ر'^{۲} + ۲ص ر' + ص^{۲}) + ب(لا' ر' + لا ص + ر' ط + ص ط) \\ س(لا'^{۲} + ۲ط لا' + ط^{۲}) + د(ر' + ص) + ی(لا' + ط) + ف \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس مساوات مین سر لا اور ت کی یہہ ہین انکو فرض کرو کہ برابر

اسمیں مساوات مین سرلاً اور برآ کے یہہ ہین انکو فرض کرو کہ برابر صفر کی ہین تب

$$\left.\begin{array}{l} ب ط + ۲ ا ص + د = ۰ \quad (۴) \\ ب ص + ۲ ط س + ی = ۰ \quad (۵) \end{array}\right\}$$ مساوات (۴) سے ظاہر ہے کہ $ص = -\frac{ب ط + د}{۲ ا}$ لکھو اس قیمت

ص کو مساوات (۵) مین تو اس سے یہہ مساوات پیدا ہوتی ہے

$$ب\left(-\frac{ب ط + د}{۲ ا}\right) + ۲ ط س + ی = ۰ \quad \therefore -ب^۲ ط - ب د + ۴ ا ط س$$

$$+ ۲ ا ی = ۰ \text{ یعنے } (۴ ا س - ب^۲) ط = ب د - ۲ ا ی \therefore ط = \frac{ب د - ۲ ا ی}{۴ ا س - ب^۲}$$

..... (۶) اب لکھنا چاہئے اس قیمت ط کو مساوات (۵) مین تب ظاہر ہے کہ

$$ب ص + ۲ س\left(\frac{ب د - ۲ ا ی}{۴ ا س - ب^۲}\right) + ی = \frac{ب ص + ۲ س ب د - ۴ ا س ی}{۴ ا س - ب^۲} + ی$$

$$= \frac{۲ س ب د - ۴ ا س ی + ۴ ا س ی - ب^۲ ی}{۴ ا س - ب^۲} = ۰$$ بعد تقسیم طرفین مساوات

کی ب پر حاصل ہوتا ہے $ص = \frac{ب ی - ۲ س د}{۴ ا س - ب^۲}$ اس سے معلوم ہوا کہ مساوات

عام جس خط سخنی سے تعلق رکھتی ہے اگر اوسکا نقطہ شروع بدلا جاوے اور دو در نقطہ شروع

کی یعنی ط اور ص کے وہ قیمت جو یہان حاصل ہوئی تو مساوات اس صورت کی ہو جاوینگی

$$ا ز^۲ + ب لا ر + س لا^۲ + ف = ۰ \quad (۸)$$

(۸۱) نقطہ آ کو جو نیا نقطہ شروع اور مرکز خط سخنی کا کہتی ہین اسواسطے کہ ہر ایک

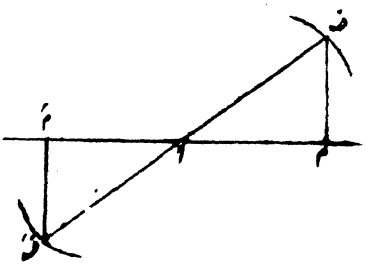
وتر خط سخنی کا جو اس نقطہ پر سے گذرتا ہے نصف ہو جاتا ہے کیونکہ مساوات (۸) کی وہی

صورت رہتی ہے جبکہ بجای +لا اور +ر لکھو -لا اور -ر لکھی جاوین اسلئے کہ یہان

سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ مطابق ہر نقطہ ف کے کہ خط سخنی پر واقع ہے اور اوسکی وتر لا اور ر

ہوں ایک اور نقطہ ف اوسی خط پر ہوتا ہے جسکے دو وتر -لا اور -ر یعنے ا م،

اور م ف ہوتی ہین پس دو مثلث قایمہ الزاویہ ا م ف اور آ م ف آپسمین برابر



ہوتی ہین اسواسطے آ پر دو زاویہ مقابل کی آپس مین برابر ہوتی ہین اسلیے خط ف آ خط مستقیم ہی اور آ پر بالنصف ہوتا ہی - پس ثابت ہوا کہ اگر دایرہ

بجای لا اور د کی - لا اور - د لکھی جاوین اور مساوات کی شکل نہ بدلی تو بالضرور اوس خط منحنی کیواسطے جو اوس مساوات سی متعلق ہی مرکز ہوتا ہی - اور اگر مساوات مین ہر جزو کی مقادیر غیر مقررہ کا نشان قوت حاصل جمع ایک عدد جفت ہو تو بھی یہہ شرط بالضرور پوری ہوتی ہی مثلاً مساوات عام درجہ دویم مین ا د۲ + ب لا د + س لا۲ + د د + ی لا + ف = ۰ مین حاصل جمع نشان قوت مقادیر غیر مقررہ کا اول تین جزو مین ۲ ہی اور اوسسے اگلے دو جزو مین آ ہی پس اگر اس صورت مین تبدیل کرین ہم علامتون لا اور د کو تو مساوات کی یہی شکل نہین رہتی یعنی اگر کوئی نقطہ مثل ف کی ایک جای خط منحنی پر واقع ہو تو دوسرا نقطہ مثل ف کی دوسری جای خط منحنی پر اسطرح نہین ہو سکتا کہ مقام اوسکا نقطہ شروع سے پہلے نقطہ کی مشابہ اور مقابل ہو اور یہانسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ نقطہ شروع مرکز خط منحنی کا نہین لیکن مساوات (۴) کی صورت نہین بدلتی خواہ مقادیر غیر مقررہ مثبت ہون خواہ منفی پس اسواسطے اوسکے خط منحنی کیواسطے نقطہ شروع مرکز ہی - اگر مساوات طاق مرتبہ کی ہو اور ہر جزو مین حاصل جمع نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا طاق ہو اور مقادیر مقررہ بالکل زایل

ہوجاوے خط سخنی مرکزی ہوگا سوائے اسکے کہ اگر ان دونون شرطون مین کوئی شرط پوری نہو تو جبوقت تبدیل کرین ہم علامتون + لا اور + ے کو توظاہر ہی کہ مساوات کی شکل بدل جاویگی — پس ہر خط سخنی کا نقطہ شروع مرکز ہوسکتا ہی اگر اوسکی مساوات کی ایسی تحویل کرین کہ اوسکی شکل مطابق ایک کی دو صورتون ذیل کی ہوجاوے —

(۱) جب کہ مجموعہ نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا ہر جزو مین جہت ہو خواہ مقدار مقررہ اوسمین پائی جاوی خواہ نہ پائی جاوے مثلاً ا ر^۲ + ب لا ر + س لا^۲ + ف = ۰

(۲) جب کہ مجموعہ نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا ہر جزو مین طاق ہو اور مقدار مقررہ نہ پائی جاوی مثلاً ا ر^۳ + ب لا ر^۲ + س لا^۲ ر + د لا^۳ + ی ر + ف لا = ۰

فقرہ (۵۹) مین بیان کیا ہی کہ کوئی مساوات اسطرح تحویل نہین کیجا سکتی کہ اوسکا مرتبہ کم ہوجاوے یا زیادہ یہانتک یہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر مساوات اصلی جہت مرتبہ کی ہو تو بعد تحویل کے ایسی ہی رہیگی اور وہ خط سخنی جو اصلی مساوات سے تعلق رکھتا ہی مرکزی ہوسکتا ہی اگر اوس مساوات کو شرط (۱) کی طرف تحویل کرسکین لیکن اگر مساوات اصلی طاق مرتبہ کی ہو تو بعد تحویل کی بہی طاق مرتبہ کی رہیگی اور اس صورت مین خط سخنی متعلق اوس مساوات کا اوسوقت مرکزی ہوسکتا ہی جب کہ اوس مساوات کو شرط (۲) کی طرف تحویل کرسکین اور یہانتک یہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہم دریافت کیا چاہین اسبات کو کہ خط سخنی کسی مساوات کا مرکزی ہی یا نہین تو ترکیب مذکورہ ذیل کفایت کریگی —

پہلی ترکیب یہ ہی اگر مساوات جہت مرتبہ کی ہو تو اوسمین مجہولون کی تبدیل اسطرح کرین کہ وہی اجزا جنمین حاصل جمع نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا ہی بالکل زایل ہوجاوے

دوسری ترکیب یہ ہی کہ اگر مساوات طاق مرتبہ کی ہو تو محورون کو اسطرح تبدیل کرنا چاہی کہ وہ اجزا جنمین حاصل جمع نشانون قواے مقادیر غیر مقررہ کا جفت ہو بالکل زایل ہوجاوین اور مقدار مقررہ بہی جاتی رہی — ابتک جو ہمنی تبدیل مساوات کی بیان کی ہی اوسمین فرض کیا ہی کہ لا = لا' + ط اور ی = ی' + ص اور اس تبدیل سی فقط دو جزو مساوات کی زایل ہوتی ہین اور مساوات درجہ دویم کی موافق شرط (۲) کی ہوسکتی ہی مگر اوس صورت مین جب کہ قیمت ط اور ص کی غیر ممکن یا لانہایت ہو — اون خطوط منحنی مین جو متعلق مساوات درجہ دویم کی ہین ہم دیکہتی ہین کہ قیمتین ط اور ص کے ممکن اور محدود ہین الّا اوسوقت جب کہ ب۲ - ۴ ا س = ۰ اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ بیضوی اور بعید البیضوی مین مرکز ہوتا ہی اور قریب البیضوی مین نہین ہوتا — اوس صورت مین جبکہ ب۲ - ۴ ا س = ۰ اور اسیوقت ۲ ا ی + ب د یا ۲ س د - ب ی زایل ہوجاوین تو مساوات مفروض مساوات خط مستقیم کی ہوجاویگی جسطرح مساواتون (۱) اور (۲) کہ فقرہ (۷۵) مین درج ہین دیکہنی سی واضح ہوتا ہی — اگر بسبب کسی تبدیل کی مقدار ی زایل ہوجاوے تو مساوات مفروض اس شکل کی ہوجاویگی ا ی۲ + ب لا ی + س لا۲ = ۰ اور اس سے یہ قیمت ی کی حاصل ہوتی ہی ی = { - ب ± √ ب۲ - ۴ ا س } / ۲ ا اور یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات خط منحنی مساوات دو خطون مستقیم سی تبدیل ہوجاویگی لعنی یہ دونون خط مستقیم مرکز مین سے گذرتی ہوئی جاویگی اگر اس صورت مین ب۲ - ۴ ا س منفی ہووی تو بجاے اس صورت مین خط منحنی کے ایک نقطہ ہوگا (دیکہو فقرہ (۷۰))

(۸۲) اون حظون منحنی کی مساوات جنکا مرکز ہوتا ہی اور بہی تحویل ہوسکتی ہی اگر حاصل ضرب دو مقدار غیر مقررہ کا زایل ہوجاوے اور یہہ اسطرح ہوسکتا ہی کہ نقطہ شروع کو دوسری جگہ تبدیل کرین موافق صورتون (۵۹) کی اور اسیواسطے یہہ حاصل ہوتا ہی ر = لا جس ر + ا جم ر اور لا = لا جم ر - ا جس ر جب کہ یہہ قیمتین ر اور لا کی مساوات (۱) مین مندرج کرین تو ظاہر ہی کہ وہ مساوات اس شکل کی ہوجاویگی یعنی

$$\left.\begin{array}{l} \text{ا}\,(\text{ا}^2\,\text{جم}^2 ر + 2\,\text{لا}\,\text{ا}\,\text{جس}\,\text{جم}\,ر + \text{لا}^2\,\text{جس}^2 ر) + \\ \text{ب}\,(\text{لا}\,\text{ا}\,(\text{جم}^2 ر - \text{جس}^2 ر) - (\text{ا}^2 - \text{لا}^2)\,\text{جس}\,\text{جم}\,ر) + \\ \text{س}\,(\text{لا}^2\,\text{جم}^2 ر - 2\,\text{لا}\,\text{ا}\,\text{جس}\,\text{جم}\,ر + \text{ا}^2\,\text{جس}^2 ر) + \end{array}\right\} =$$

اور مساوات (۹) مین یہہ حاصل ہوتا ہی ر^۲ (ا جم^۲ ر - ب جس جم ر + س جس^۲ ر) + لا^۲ (ا جس^۲ ر + ب جس جم ر + س جم^۲ ر) + لا ا (۲ ا جس جم ر + ب جم^۲ ر - ب جس^۲ ر - ۲ س جس جم ر) + ف = ۰ اب فرض کرو کہ امثال لا ا کی برابر صفر کے یعنی ۲ ا جس جم ر + ب جم^۲ ر - ب جس^۲ ر - ۲ س جس جم ر = ۰ ∴ (۱ - س) ۲ جس جم ر + ب (جم^۲ ر - جس^۲ ر) = ۰ ∴ (۱ - س) جس ۲ ر + ب جم ۲ ر = ۰

اگر اس مساوات کو جم ۲ ر پر تقسیم کرین تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\text{مس}\,2ر = \frac{\text{ب}}{\text{ا}(\text{س}-1)}$ اور یہان ر تعبیر کرتا ہی اس زاویہ کو جو بنیا محور لا کا پہلی محور تا سی سیتا کے اسیجای ہی یہہ دریافت ہوتا ہی کہ اگر پہلی محورون متقاطع علی القوایم کے مقامون کو بصد زاویہ ر کے جسکی دوگنی کے مماس $= \frac{\text{ب}}{\text{ا}(\text{س}-1)}$ تبدیل کرین تو تبدیل کی ہوئی مساوات مین کوئی جزو مسطح لا ا کا نہوگا یعنے جب مساوات موافق نئی محورون کے

تبدیل ہوجاوینگی تو اوسکی صورت یہہ ہوجاویگی $ر^۲ + س لا + ف = ۰$

(۸۳) چونکہ حاس تغیر ہوسکتا ہی تمام اون مقدارون سی جو مابین صفر اور لانہایت کے واقع ہون بغیر لحاظ اسبات کی کہ علامت اون مقدارونکی منفی ہو خواہ مثبت تو معلوم ہوا کہ زاویہ ر کیواسطے قیمت ہمیشہ ممکن ہیگی مقدارون ر ب س وغیرہ کی واسطے کچھ ہی قیمت فرض کرین اور یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ دور کرنا جزو لانہا کا ہمیشہ ممکن ہے قیمتین جسطار کہ دم ر کی بوسیلہ قیمت مس ر اسطرح حاصل ہوتی ہین

$$\text{دم ر} = \pm \sqrt{۱ - \text{مس}^۲ \text{ر}} = \pm \sqrt{۱ + (۱ - \text{س})^۲} = \pm \sqrt{(۱ - \text{س})^۲ + ب^۲}$$

$$\text{اور جس ر} = \text{دم ر مس ر} = \pm \frac{ب}{\sqrt{(۱ - \text{س})^۲ + ب^۲}}$$

چونکہ راویہ ر کا بالضرور قایمہ سی کم ہونا چاہئے تو اسیواسطے جس ر کے مثبت ہوگی اور یہانسی معلوم ہوا کہ مقدار ترول ہمیشہ مثبت یا منفی ہونی چاہئے موافق اس شرط کی کہ ب اپنی ذات سی منفی یا مثبت ہو

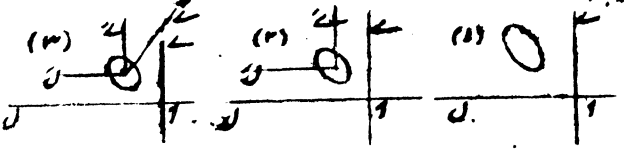
(۸۴) تعبیر کیا چاہتی ہین ہم امثال ر اور س کو جو مساوات تبدیل کی ہوئے مین پائی جاتی ہین نسبت امثالون اصلی مساوات کی ظاہر ہی کہ مساوات جو فقرہ (۸۲) سی حاصل ہوتی ہین یہہ ہین $ا' = ا \text{جم}^۲ ر - ب \text{جس ر جم ر} + س \text{جس}^۲ ر$

اور $س' = ا \text{جس}^۲ ر + ب \text{جس ر جم ر} + س \text{جم}^۲ ر \quad \therefore ا' - س' = ا(\text{جم}^۲ ر - \text{جس}^۲ ر) - ۲ ب \text{جس ر جم ر} + س(\text{جس}^۲ ر - \text{جم}^۲ ر) = ا \text{جم}^۲ ر - ب \text{جس}^۲ ر - س \text{جم}^۲ ر = (ا - س)\text{جم}^۲ ر - \text{جس}^۲ ر$ لیکن $\text{جم}^۲ ر = \pm \frac{۱ - س}{\sqrt{(۱ - س)^۲ + ب^۲}}$

اور $\text{جس}^۲ ر = \pm \frac{ب}{\sqrt{(۱ - س)^۲ + ب^۲}}$ پس بیشوقت لکھین ہم یہہ قیمتین تو حاصل ہونگی

یہ مساوات $ا - س = \frac{(ا-س)^۲}{۲} + \frac{ب^۲}{۲(ا-س)^۲ + ب^۲}$ یعنے $ا - س = \pm \sqrt{\frac{(ا-س)^۲ + ب^۲}{۲}}$ اور یہ بات ظاہر ہی کہ $ا^۲ + س^۲ = ۱ + س$ $\therefore ا = \frac{۱}{۲}\left\{۱ + س \pm \sqrt{(ا-س)^۲ + ب^۲}\right\}$ اور $س = \frac{۱}{۲}\left\{۱ + س \pm \sqrt{(ا-س)^۲ + ب^۲}\right\}$ اب بھالنسی یہ مساوات حاصل ہوتی ہی $\frac{۱}{۲}\left\{۱ + س \pm \sqrt{(ا-س)^۲ + ب^۲}\right\}$ $ک^۲ + \frac{۱}{۲}\left\{۱ + س \pm \sqrt{(ا-س)^۲ + ب^۲}\right\}$ $لا^۲ + \frac{ای^۲ + س د - ح ی}{ب^۲ - ۴ا س} + ف = ۰$

اور اس مساوات مین علامت جذر کی برعکس علامت $ب$ کے جو پہلی مساوات مین پائی جاتی ہی استعمال کرنا چاہئے یعنے اگر $ب$ اصلی مساوات مین منفی ہو تو یہان علامت جذر کو مثبت رکھنا چاہئی اور جو وہان مثبت تو علامت جذر کو منفی رکھنا چاہئے ۞ ۞ ۞ (۸۵) اب تک مساوات اصلی کو ممکن مختلف صورتونمین تحویل کیا ہی شکلین آیندہ موافق تبدیلیون کے کہینچی گئے ہین انمین فقط بیضوی کہینچی گئے ہین اسوسطے کہ یہ خط منحنی بہ نسبت بعید البیضوی کی آسانی سے کہینچا جا سکتا ہی — شکل (۱) مین اصلے مقام خط منحنی کا تغیر ہوتا ہی اور اوسکے



دو محور اول اور ثانی ہین اور اونکی مطابق یہ مساوات ہی $ا ر^۲ + ب لا ر + س لا^۲ + د ر + ی لا + ف = ۰$ شکل دوسری مین مقام نقطہ شروع کا اوسی بدل کر مرکز خط منحنی پر مقرر کیا گیا ہی اور اس نئے نقطہ شروع سے دو

م = $\frac{۲ ای - ب د}{ج - ۴ اس}$ اور ن = $\frac{۲ س د - ب ای}{ج - ۴ اس}$ اور یہہ نئی محور

اَلؔ اور اَیؔ متوازی پہلی محوروں کے ہین اور اس صورت مین مساوات یہہ ہے

اَیؔ۲ + ب لاَیؔ + س لاَ۲ + ف = ۰ ۔ شکل تیسرہ مین نقطہ شروع تو مقام

اَ پر ہی لیکن محور اسکی اَلؔ اور اَیؔ ہین محور اَلؔ کی مقام کو بقدر زاویہ لاَاَلؔ

کی تبدیل کیا ہی اور زاویہ لاَ اَلؔ مساوات مندرجہ ذیل سی معلوم ہوتا ہی

مس ار = $\frac{ب}{۱ - س}$ اور اس صورت مین مساوات خط منحنی کی یہہ ہی اَیؔ۲

+ س لاَ۲ + ف = ۰ ۔ ۔ ۔

$$\frac{(\text{ای}^2 + \text{س}\,\text{د}^2 - \text{ب}\,\text{د}\,\text{ی} + \text{ف}\,\text{ا}^2)}{(\text{ب}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{س})}$$

مساوات کو ا ر^2 + س لا^2 + ف = ۰ اس صورت مین لکھو

(− ف/ا) ر^2 + (− ی/ا) لا^2 = ۱ اگر خط منحنی بیضوی ہو تو بالضرور

ب^2 − ۴ ا س مقدار منفی ہوگی یعنی چونکہ اس صورت مین ب = ۰ تو بالضرور

− ۴ (− ف/ا) (− س/ا) مقدار منفی ہوگی اور ∴ − ف/ا × − س/ا

مثبت ہونگی اور یہانسی معلوم ہوا کہ دونو محور خط منحنی سے ملتے ہین مگر جب کہ

− ف/ا اور − س/ا منفی ہون تو لوکس غیر ممکن ہوگا — اگر خط منحنی بعید

البیضوی ہو تو بالضرور ب^2 − ۴ ا س مقدار مثبت ہوگی اور ∴ − ۴ (− ف/ا)

(− س/ا) یا مقدار مثبت ہوگی یا ایک جز اس حاصلضرب کا یعنے ف/ا مثبت

ہوگا اور دوسرا منفی ہوگا اور یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ ایک محور کی قیمت بعید

البیضوی مین غیر ممکن ہوتی ہی اور اسیواسطی وہ خط منحنی سے نہین ملتا طول محورون

کی موافق ہونگی ف/ا اور س/ا ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

(۸۷) اب تک ہمنی فرض کیا ہی کہ اصلے اور تار محورون متقاطع علی القوایم پر

شمار کئی جاتی ہین لیکن اگر محور ترچھی فرض کئے جاوین تو بعضے صورتون مین بہت

تبدیل واقع ہوگی — بیان فقرون (۸۰) اور (۸۱) کا ہر صورت مین مستعمل

ہوسکتا ہی مگر فقرون (۸۲) اور (۸۳) اور (۸۴) مین بالکل تبدیل واقع

ہوجائیگی لیکن ترکیب جو اس صورت مین استعمال کیجاویگی قریب اوسی ترکیب کے ہوگی

جو صورت بالا مین مستعمل ہوئی ہی مگر بباعث اسکے کہ بعضے عملون مین طوالت بہت ہوگی تو لازم ہی کہ ہم تھوڑی سی عمل لکھہ دین اور سبھونکے نتایج بیان کرین * طالبعلم کو لازم ہی کہ اس فقرہ کو اور جس پر ایسا ہی نشان ہو اول مطالعہ مین ترک کری — واسطے زایل کرنے اوس جزو کے جسمین حاصل ضرب مقدارون غیر معروفہ کا ہی اون صورتون کا استعمال کرو جو فقرہ (۵۵) مین مندرج ہین یعنے

ر = $\frac{\text{لا}'' \text{جس ر} + \text{ر}'' \text{جس ر}'}{\text{جس گ}}$ اور لا = $\frac{\text{لا}' \text{جس (گ — ر)} + \text{ر}' \text{جس (گ — ر')}}{\text{جس گ}}$

) آب جو قت لکھین ہم یہہ قیمتین ر اور لا مساوات ا ر'' + ب لا ر + س لا'' + ف = ۰ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ر'' { ا جس'' ر + ب جس ر جس (گ — ر) + س جس'' (گ — ر) } + $\frac{1}{\text{جس'' گ}}$ لا'' { ا جس'' ر + ب جس ر جس (گ — ر) + س جس'' (گ — ر) } + $\frac{1}{\text{جس گ}}$ لا ر' { ۲ ا جس ر جس ر' + ب جس ر جس (گ — ر') + ب جس ر' جس (گ — ر) + ۲ س جس ر جس (گ — ر) جس (گ — ر') } + $\frac{1}{\text{جس'' گ}}$ ر'' { ا جس'' ر' + ب جس ر' جس (گ — ر') + س جس'' (گ — ر') } + $\frac{1}{\text{جس گ}}$ لا { ا ر جس (۲ گ — ر) + ب ر جس (۲ گ — ر) + ۲ س جس گ جس (گ — ر) } + $\frac{1}{\text{جس'' گ}}$ ر ر' { ۲ ا جس ر جس ر' + ب جس (ر + ر') + ۲ س جس گ جس (گ — ر') } + $\frac{1}{\text{جس'' گ}}$ ر'' { ا جس'' ر' + ب جس ر' جس (گ — ر') + س جس'' (گ — ر') } + ف = ۰ آب فرض کرو کہ امثال لا ر کے مساوی صفر کی اور اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ جس (گ — ر) اور جس (گ — ر') کی اور تقسیم کرین اونکو جم رحم ر' پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات (ا — ب جم گ + س جم'' گ) م'' رم ر'' + { ب — ۲ س جم گ } جس گ + { مس ر + ن س ر' } + ۲ س جس'' گ = ۰ اور یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر کوئی خاص قیمت واسطے ر کی فرض کیجاے تو اسکی موافق ر' اور ر — ر' کی دریافت ہوسکتی ہی اس سے معلوم ہوا کہ بیشمار محور خط منحنی کے ہوسکتے ہین اور اوسکے مساوات اس شکل کی ہوسکتی ہین

$ا ر^۲ + س لا ر + ف = ۰$ اب ان محورون کا ذکر کرتے ہین اور یہہ بات دریافت کرنی کہ ان محورون مین سے کونسی متقاطع علی القوایم ہین اسکے دریافت کرنیکو فرض کرو کہ $ر - ر = \frac{ر_۲}{۲}$ ∴ $س ر = -\frac{س ر_۲}{۲}$ جو قت لکھین ہم یہہ قیمت $س ر$ کی اوس مساوات مین جسمین $س ر$ اور $س ر$ ہی جاتی ہین تو حاصل ہوگا یہہ $= ۲ \{ ا - ب جم گہ + س حم^۲ گہ \} + (۲ س حم گہ - ب) جس گہ \times \frac{۲}{س ر} + ۲ س جس^۲ گہ = ۰$ ∴ $س ر =$

$\frac{س جس ۲ گہ - ب جس گہ}{ا - ب جم گہ + س حم ۲ گہ}$ واضح ہو کہ دو زاویے ایسے ہین کہ اونکی مماس $س ر$ ہی اور اون زاویون مین فرق $۱۸۰°$ کا ہی یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ شرائط مساوات بالا کو دو زاویے ر کی پورا کرسکتے ہین مگر از بسکہ ایک زیادہ ہی دوسری سے بقدر $۹۰°$ کے تو فقط دوسری قیمت نئی محور ر کے مین مستعمل ہوسکتی ہی یہانسے معلوم ہوا کہ صرف دو ہی محور متقاطع علی القوایم ہوسکتے ہین اور مقام اونکا صورت گذشتہ سے معلوم ہوجائیگا — ٭ ٭ ٭ (۸۸) دریافت کرو کہ اشکال $ا ج ہ$ کو $س ر$ کو بہ نسبت اصلی مساوات کے اس شرط پر کہ نئی محور متقاطع علی القوایم فرض کیے جاوین اگر فرض کرین ہم $ر = \frac{ر_۲}{۲} + ر$ اور ضرب کرین (جس گہ) تمکو اشاعون عام مساوات بدلی ہوئے مین جو پہلی دریافت کی گئی ہی تو حاصل ہوگا یہہ $(جس گہ)^۲$

$= ا (جم ر)^۲ - ب جم ر حم (گہ - ر) + س (جم (گہ - ر))^۲$ اور $س (جس گہ)^۲$

$= ا (جس ر)^۲ + ب جس ر جس (گہ - ر) + س (جس (گہ - ر))^۲$

∴ $(ا - س) (جس گہ)^۲ = ا (حم ر^۲ - جس ر) - ب (جم ر حم (گہ - ر)$

+ جس ر جس (گ - ر)) + س (جم ۲ (گ - ر) - جس ۲ (گ - ر)) =

۱ جم ۲ ر - ب جم (گ - ۲ ر) + جم (۲ گ - ۲ ر) = (۱ - ب جم گ + س جم ۲ گ)

(جم ۲ ر) + (س جم ۲ گ - ب جس گ) جس ۲ ر اور یہ بھی ظاہر ہی کہ موافق

ترکیب فقرہ (۸۳) کے بوسیلہ قیمت س ۲ ر کی یہ حاصل ہوتا ہی جم ۲ ر =

$\frac{۱ - ب جم گ + س جم ۲ گ}{\pm م}$ اور جس ۲ ر = $\frac{س جس ۲ گ - ب جس گ}{\pm م}$

اور اسصورت مین م = $\pm \sqrt{۱ ۲ + ب ۲ + س ۲ - ۲ ب (۱ + س) جم گ + ۲ ۱ س جم ۲ گ}$

= $\pm \sqrt{(۱ + س - ب جم گ)^۲ + (ب ۲ - ۴ ۱ س) جس ۲ گ}$ یہانسی معلوم ہوا

کہ (۱ - س) جس ۲ گ = $\pm$ م اور (۱ + س) جس ۲ گ = ۱ - ب جم گ $\pm$ م

∴ ۱ = (۱ - ب جم گ + س $\pm$ م) × $\frac{۱}{۲ جس ۲ گ}$ اور س = (۱ - ب جم گ

+ س $\pm$ م) $\frac{۱}{۲ جس ۲ گ}$ پس اخیر مساوات عام یہہ ہوگی (۱ - ب جم گ + س

$\pm$ م) $\frac{۱}{۲ جس ۲ گ}$ + (۱ - ب جم گ + س $\mp$ م) $\frac{۱}{۲ جس ۲ گ}$ + $\frac{ای + س د - ب د ی}{ب ۲ - ۴ ۱ س}$

+ ف = ۰ علامت $\pm$ مین سی ایک کا استعمال کرنا چاہیے موافق

$\pm$ (س جس ۲ گ - ب جس گ) کے کیونکہ ۲ ر کو مثبت فرض کیا ہی - یہہ تینون

جبر یہ بطور علم ہندسہ کے بھی موافق فقرہ (۸۵) کے ہوسکتے ہین - شکلون

(۱) اور (۲) اور (۳) مین فرض کرنا چاہیے کہ مابین محورون اول اور

ای اور اول اور ای کی زاویہ گ واقع ہی - ترکیب فقرہ (۸۶) کے

اسوقت بھی مستعمل ہوسکتی ہی جبکہ محور ترچھی ہون اور اس صورت

مین قیمت اوس مربع کی جو نصف محور کمان پر بھی یہہ ہو کی

$$\frac{-۲حس\,گ}{۱-ب جم\,گ+س\pm م}\left(\frac{ای^{۲}+س د^{۲}-ب دی}{ب^{۲}-۴ا س}+ف\right)$$

(۸۹) اس فقرہ کی اخیر مین چند مثالین لکھی جاسکتی مرکزی خطوط منحنی کے بحث کی بعد —

تفصیل اون صورتونکی جو مذریعہ محور متقاطع علی القوم کے حاصل ہوتے ہین

$$ا ر^{۲}+ب لا ر+س لا^{۲}+د ر+ی لا+ف=۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} ر=ر'+b \\ لا=لا'+ص \end{array}\right\}$$ یہہ مساواتین کام مین آتی ہین $$ص=\frac{۲ا ی-ب د}{ب^{۲}-۴ا س} \ldots\ldots (۲)$$

$$b=\frac{۲س د-ب ی}{ب^{۲}-۴ا س} \ldots\ldots (۳)$$

$$ف=\frac{د b+ی ص}{۲}+ف=\frac{ای^{۲}+س د^{۲}-ب دی}{ب^{۲}-۴ا س}+ف \ldots\ldots (۴)$$

$$ا ر'^{۲}+ب لا' ر'+س لا'^{۲}+ف'=۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

$$\left.\begin{array}{l} ر'=لا'\,جس\,ر+ر'\,جم\,ر \\ لا'=لا'\,جم\,ر-ر'\,جس\,ر \end{array}\right\}$$ یہہ صورتین کام مین آتی ہین

$$جس\,۲ر=-\frac{ب}{۱-س} \quad (۶) \qquad ا'=\frac{۱}{۲}(۱+س\pm م) \ldots\ldots (۷)$$

$$س=\frac{۱}{۲}(۱+س\mp م) \ldots\ldots (۸) \qquad م=\pm\sqrt{(۱-س)^{۲}+ب^{۲}}$$

اسمین علامت $\pm$ مین سے کسی ایک کا استعمال موافق علامت $\mp ب$ کی کرنا چاہئے

$$(-\frac{ا}{ف})ر'^{۲}+(-\frac{ی}{ف})لا'^{۲}=۱ \ldots\ldots (۹)$$ مساوات (۹) اور (۳) سے دریافت ہونا ہی مقام مرکز کا اور جسوقت مساوات (۴) کو بھی کام مین لاتی ہین تو مساوات عام (۵) مساوات کی طرف تحویل ہوجاتی ہی (۶) مساوات

سی مقام اون محورون متقاطع علی القوایم کا جو مرکز سی گذرتی ہون دریافت ہوتا ہی
مساوات (۷) اور (۸) کی وسیلہ سی مساوات عام (۹) مساوات کیطرف تحویل
ہوجاتی ہی اور امثال ر'' اور لا'' کی جو قت اولی جائین تو اون سے علیحدہ علیحدہ مجذور
نصف محورون کے جو محورون ر'' اور لا'' پر شمار کی جائین تعبیر ہوتی ہین۔
مثال (۱) ر''۲ − ۲لا'' ر + لا''۲ + لا + ر − ۱ = ۰ اس مساوات کا لوکس
بیضوی ہی اور اسمین ص = −۱ اور ط = −۱ اور ف = −۲
∴ ر''۲ − ۲لا'' ر + لا''۲ − ۲ = ۰ اور چونکہ مس ۲ر = ½ ∴ ۲ر = ۹۰°
اور ر = ۴۵° اور ب منفی ہے ∴ م = +۱ اور ۴ = ۳/۴ اور س = ½
∴ ¾ ر''۲ + ½ لا''۲ − ۲ = ۰ یعنے ¾ ر''۲ + ¼ لا''۲ = ۱ اسکا ی مجذور
نصف محورون کے √۸/۳ اور √۴ ہین اور یہانسی معلوم ہوا کہ نصف محور √۸/۳ ہی
اور √۴ ہین اور ∴ طول محور دونکا √۴ اور √۸/۳ مثال (۲) ۳ر''۲ − ۴ر لا''
+ ۳لا''۲ + ر − لا − ۹/۱۰ = ۰ اسکا لوکس بیضوی ہی اور اخیر مرتبہ تک تحویل
کی ہوئی مساوات یہہ ہے ۵ر''۲ + لا''۲ = ۱ اس صورتمین محورون √۲ اور √۲/۵
ہین۔ مثال (۳) ۳ر''۲ + ۴ر لا'' + لا''۲ − ۲ر − ۴لا + ۳ = ۰
اس صورتمین لوکس بیضوی ہی اور اخیر مرتبہ تک تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہی
(۳ − √۵)/۲ ر''۲ + (۳ + √۵)/۲ لا''۲ = ۱ مثال (۴) ۵ر''۲ + ۶ر لا'' +
۵لا'' − ۲۲ر − ۲۶لا + ۲۹ = ۰ اسکا لوکس بیضوی ہی اور ص = ۲
اور ط = ۱ اور ف = (ر ط + ی م)/۲ + ف = −۸ اور مس ۲ر = ∞

∴ ر = ۵ اور ∴ وہ صورتین جنسی تحویل عمل مین آتی ہی یہہ ہین

ز = $\frac{لا'' + ر''}{۲}$ اور لا = $\frac{لا'' - ر''}{۲}$ ∴ $\frac{۵}{۴}$ (لا'' + ر'')۲ + ۶ ($\frac{لا'' - ر''}{۲}$)۲ + $\frac{۵}{۴}$ (لا'' - ر'')۲ - ۸ = ۰ یعنے ۴ ر''۲ + لا''۲ = ۴ مثال (۵) ۵ ر۲ + ۲ لا ر + ۵ لا۲ - ۱۲ لا = ۰ اسکا لوکس بیضوی ہی اور اخیر مرتبہ تک تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہی ۲ ر''۲ + ۳ لا''۲ = ۶ مثال (۶) ۲ ر۲ + لا۲ + ۴ ر - ۲ لا - ۶ = ۰ اسکا بھی لوکس بیضوی ہی - فرض کرو کہ ر = ز + ط اور لا = لا' + ص ∴ اول مرتبہ کی تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہے ۲ (ز + ط)۲ + (لا' + ص)۲ + ۴ (ز + ط) - ۲ (لا' + ص) - ۶ = ۰ یعنے ۲ ز۲ + لا'۲ + ۴ (ط + ۱) ز + ۲ (ص - ۱) لا' + ۲ ط۲ + ص۲ + ۴ ط - ۲ ص - ۶ = ۰ فرض کرو کہ ط + ۱ = ۰ اور ص = ۱ = ۰ ∴ ص = ۱ اور ط = - ۱ اور ف = + ۹ اسمین زیادہ تحویل کرنے کچھہ ضرورنہین محور ۶ اور ۳ ہین مثال (۷) ر۲ - ۱۰ لا ر + لا۲ + ر + لا + ۱ = ۰ اس صورت مین لوکس بعید البیضوی ہی اسمین اخیر مرتبہ کی تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہی ۶ ر''۲ - ۴ لا''۲ + $\frac{۹}{۸}$ = ۰ مثال (۸) ۴ ر۲ - ۸ لا ر - ۴ لا۲ + ۲۸ لا - ۱۵ = ۰ لوکس اسکا بعید البیضوی ہی اور تحویل کے ہوئی مساوات یہہ ہی ر''۲ - لا''۲ = - $\frac{۱}{۱۶}$ اس صورت مین ہر ایک محور برابر ہی $\frac{۱}{۴}$ اور یہہ بھی واضح ہو کہ اس صورت مین وہ محور جو محور لا'' پر شمار کیا جاوے خط منحنی سے ملیگا مثال (۹) ر۲ - ۲ لا ر - لا۲ - ۲ = ۰ اسکا لوکس بھی بعید البیضوی ہی اور اسمین نقطہ شروع مرکز ہی اور

اسلیئے ایک ہی تحویل کفایت کرتے ہی ظاہر ہی کہ مس ۲ر = ۱ ∴ ۲ر = ۴۵°
اور م = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور ا' = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور س = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور ک' = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۹۰) اس فقرہ مین محور ترجیحی فرض کئے جاتے ہین قیمتین ط اور ص اور ف کی بعینہ ویسی ہی رہینگی جیسی محورون متقاطع علی القوایم مین تھین مس ۲ر = $\frac{\text{جس ۲ا' کہ}}{\text{جس ۲ا کہ}}$ اور ا' = $\frac{\text{جس ا کہ}}{\sqrt{۱ - ب جم ۲ا کہ + س جس ۲ا کہ}}$

اور م = $\frac{۱}{\sqrt{۱ + ب^۲ + س^۲ - ۲ب (۱ + س) جم کہ + ۲ س جم ۲ کہ}}$ آسین علامت ± کا استعمال کرنا چاہئی موافق علامت ± (س جس ۲ا کہ - ب جس کہ)

مثال (۱) ک^۲ + لا ک + لا^۲ + ک + لا - $\frac{۱}{۴}$ = ۰ زاویہ محورون کا اس صورت مین ۴۵° ہی اور ص = - $\frac{۱}{۳}$ اور ط = - $\frac{۱}{۳}$ اور مس ۲ر = ۱ ∴ ۲ر = ۴۵° اور م = + (۱ - ۲ا') اور ا' = ۳ - $\frac{۳}{۲ا'}$ اور س = ۱ + $\frac{۱}{۲ا'}$ اور ف = - $\frac{۱}{۲}$ تحویل کی ہوئی مساوات یہ ہی ۳ (۲ - ۲ا') ک'^۲ + (۲ + ۲ا') لا'^۲ = ۱ اور لوکس بیضوی ہی اور مجذور نصف محورون کے یہ ہین $\frac{۱}{۳ (۲ - ۲ا')}$ اور $\frac{۱}{۲ + ۲ا'}$ مثال (۲) ۷ ک^۲ + ۱۶ لا ک + ۱۶ لا^۲ + ۳۲ ک + ۶۴ لا + ۲۸ = ۰ اس صورت مین زاویہ کہ = ۶۰° اور ص = - ۲ اور ط = ۰ اور ف = $\frac{\text{ط + ی ص}}{۲}$ + ف = - ۳۶ اب صورت مساوات کی یہ ہوئی ۷ ک'^۲ + ۱۶ لا ک' - ۹ لا^۲ - ۳۶ = ۰ چونکہ مس ۲ر = ۰ تو مساوات مذکور مساوات محورون متقاطع علی القوایم سے تبدیل ہو سکتی ہی اگر تبدیل کرین محور ک کو بقدر زاویہ ۶۰° کے اور اسلیئے جبکہ فرض کرین ر = ۰ اور کہ = ۶۰°

تو صورتین (۵۶) بوسیلہ تبدیلی کے اس شکل کے ہو جائینگی ر = $\frac{۱}{۳}$ $\sqrt{۳}$ ع اور لا = لا″ $\frac{۱}{۳}$ $\sqrt{۳}$ اور جب لکھین یہہ قیمتین مساوات بالا مین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی ۴ ع″ + ۱۶ لا″ − ۳۶ = ۰ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ محور بیضوی کے ۳ اور ۲ ہین مثال (۴) ع″ − ۳ لا ع + لا″ + ۱ = ۰ زاویہ گہ = ۶۰° اور ص = ۰ اور ط = ۰ اور مس ۲ر = $\sqrt{۳}$ اور ∴ ر = ۳۰° اور م = ۴ اور ا = ۵ اور س = − $\frac{۱}{۲}$ اور ف = ۱ ∴ تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہوگی ۵ ع″ − $\frac{۱}{۳}$ لا″ = − ۱ واضح ہو کہ لوکس اسصورتین بعید البیضوی ہی اور اوسکی محور $\frac{۲}{۳}$ $\sqrt{۳}$ اور $\frac{۲}{۵}$ $\sqrt{۵}$ ہین اول انمین سے جو بڑا ہی نئی محور لا″ پر شمار کیا گیا ہی اور دوسرا محور خط منحنی سے کبھی نہین ملتا —

(۹۱) فقرہ (۸۱) کی اخیر مین ہمنے بیان کیا ہی کہ عام مساوات درجہ دویم کی متعلق دو قسم کے خط منحنی ہوتی ہین ایک تو مرکزی جسمین ایک نقطہ ایسا ہوتا ہی کہ جتنی خط اوسمین سی گذر کر خط منحنی تک منتہی ہوتی ہین اونکی تنصیف ہو جاتی ہی اور دوسری قسم جسمین ایسا نقطہ نہین ہوتا ہی یہہ بات کہ فلانی خط مرکزی ہین اور فلانی غیر مرکزی ہمکو معلوم ہوتی ہی قیمتون ص اور ط کی جو واسطی دور کرنے بعض اجزاء مساوات عامہ کی فرض کی گئی تھی معلوم ہوئے تھی جبکہ ص اور ط بی نہایت ہوتی تھی تو اس سے یہہ معلوم ہوتا تھا کہ خط منحنی ایسی صورت مین مرکزی نہین ہی یعنے جسوقت امثال اول تین جزون مساوات عامہ مین یہہ نسبت ہوتی تھی ب″ − ۴ اس = ۰ اوسوقت غیر مرکزی ہونا خط منحنی کا معلوم ہوتا تھا — چونکہ ب″ − ۴ اس = ۰ ایک نشان قریب البیضوی کا

کا ہی تو اس سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ عام مساوات درجہ دویم کی جو قریب البیضوی سے متعلق ہی ایسی نہین کہ اوسمین بھی وہی تحویل ہوسکے جو فقرہ (۸۰) مین کام آئی تھی یعنی اسمین اشکال لا اور آ کو زایل نہین کرسکتے اور مساوات عام کو اسطرف تحویل نہین کرسکتے ا ر۲ + ب لا ر + س لا۲ + ف = ۰ یعنے اخیر مرتبہ تحویل کا یہہ نہین ہوسکتا ا ر۲ + س لا۲ + ف = ۰ گو کہ ہم مساوات قریب البیضوی کو بعینہ موافق بالا کی تحویل نہین کرسکتے برادسکی تحویل اسطرح ہوسکتی ہی کہ تحویل کی ہوئی صورت صورتون مذکورہ سے نہایت سہل ہو اور یہہ اسطرح ہوسکتا ہی کہ عمل جو پہلے کہی گئی ہین اوسطرح کئے جاوین مگر ترتیب اونکی بدل دین — ہم اول تبدیل کرینگے محورون کو بقدر زاویہ آ کی اور اس ترتیب سی دو جزر مساوات عام کی زایل ہوجاوینگے اور صورت مساوات کی یہہ رہ جائیگی ا ر۲ + د ر + ی لا + ف = ۰ اور اب ہم تبدیل کرینگی محورونکو اسطرح کہ نئی محور پہلی محورونکی متوازی ہون اور اس ترکیب سی دو جزر زایل ہوجائینگے پس مساوات اخیر اس صورت کی ہوگی ا ر۲ + ی لا = ۰

(۹۲) صورتون فقرون (۵۸) مین فرض کرو کہ ر = لا جس ر + ر جم ر اور لا = لا جم ر − ر جس ر آب جو قت لکھین یہہ قیمتین مساوات ا ر۲ + ب لا ر + س لا۲ + د ر + ی لا + ف = ۰ مین اور پھر مرتب کرین اسکی اجزا کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

ا جم۲ ر − ب جس ر جم ر	ر۲ + ۲ ا جس ر جم ر
+ س جس۲ ر	+ ب جم۲ ر
۰	− ب جس۲ ر
۰	− ۲ س جس ر جم ر

لا۲

+ ۱ جس۲ ر	لا۲ + د حم ر	ر۲ + د جس ر	لا۲
ـ حس حم ر	ـ ی جس ر	ی حم ر	+ ف = ۰
س حم۲ ر			

فرض کرو کہ امثال لا۲ ر۲ مساوے صفر کے ∴ (۱ ـ س) جس۲ ر + ب (حم۲ ر ـ جس۲ ر) = ۰ یعنی (۱ ـ س) جس۲ ر + ب حم۲ ر = ۰ ∴ مس۲ ر = $\frac{ب}{۱-س}$ یہ وہی صورت ہی جو فقرہ (۹۲) مین حاصل ہوئی تھی یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر محور تبدیل کیے جاوین بقدر ایک ایسی زاویہ ر کی کہ مس۲ ر = $\frac{ب}{۱-س}$ تو مساوات تبدیل کی ہوئی مین کوئی ایسا جز نہو کا جسمین حاصلضرب مقادیر غیر مقررہ کا پایا جاوے یعنے صورت مساوات کی یہہ ہوگی ا ر۲ + س لا۲ + د ر ر + ی لا + ف = ۰ چونکہ یہہ مساوات متعلق قریب البیضوی کی ہی تو ضرور ہی کہ نسبت امثالون اول کی تین جزون کی ایسی ہونی چاہیے کہ ب۲ ـ ۴ ا س = ۰ کی ہو اس صورت مین چونکہ ب = ۰ تو بالضرور حاصل ہوگی یہہ مساوات ـ ۴ ا س = ۰ اور یہانسی معلوم ہوا کہ ا = ۰ یا س = ۰ یعنی وہ تحویل جس سے سر لا۲ ر۲ کا زایل ہوگیا ہی اوسی تحویل سی سر لا۲ یا ر۲ کا بھی بیشک زایل ہوجاویگا اور یہہ بات بوسیلہ امتحان کرنی قیمتون لا۲ یا ر۲ کی معلوم ہوسکے

(۹۳) فرض کرو کہ مساوات عام مین سر ب کا منفی ہی یعنے ب = ـ ۲ ا ح اور بذریعہ مس۲ ر کی حاصل ہوتے ہی یہہ مساوات حم۲ ر = $\frac{۱}{۱+(\frac{۱-س}{ب})^۲}$ = $\frac{۱-س}{ب^۲+(۱-س)^۲}$ = $\pm\frac{۱-س}{۲ا}$ اور جس۲ ر = $\frac{۱}{۱+\frac{۱-س}{۲ا}}$

$\pm(1+س) = \frac{-ب}{1+س}$ کیونکہ جس ر مثبت ہونا چاہئی اور ب اپنی ذات سی منفی ہی پس معلوم ہوا کہ جم ر $= \sqrt{\frac{1+جم ر}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1-س}{1+س})} =$ $\sqrt{\frac{1}{1+س}}$ اور جس ر $= \sqrt{\frac{1-جم ر}{2}} = \sqrt{\frac{س}{1+س}}$ اور جسوقت لکھین یہہ قیمتین جس ر اور جم ر کی مساوات تبدیل کی ہوئی مین تو حاصل ہونگی یہہ

مساوات ا $= \frac{ا ا}{1+س} - ب\sqrt{\frac{ا س}{1+س}} + \frac{س س}{1+س} = \frac{ا^2 + ا ب ا س + ب^2 س}{1+س}$

$= 1+س$ $ب^2 = \frac{ا س}{1+س} + ب ا\sqrt{\frac{ا س}{1+س}} + \frac{س ا}{1+س}$ لیکن ب $= -\sqrt{ا س}$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ب^2 = \frac{ا س}{1+س} + ب\sqrt{\frac{ا س}{1+س}}$

$+س ا \frac{}{1+س} = \frac{ا س}{1+س} - \frac{ا ب س}{1+س} + \frac{ا س}{1+س} = \frac{ا ب س - ا ب س}{1+س} = 0$

د $= د\sqrt{ا} - ی\sqrt{س}$ اور ی $= \frac{د\sqrt{س} + ی\sqrt{ا}}{1+س}$ اور اس صورت مین تبدیل کی ہوئی مساوات کی شکل یہہ ہوجاتی ہی

$(1+س) ر^2 + \frac{د\sqrt{ا} - ی\sqrt{س}}{\sqrt{ا}+س} ر + \frac{د\sqrt{س} + ی\sqrt{ا}}{\sqrt{ا}+س} لا + ف = 0$

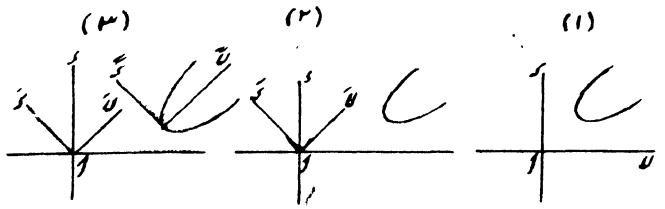
(۹۴) تاکہ مساوات کی تحویل اور بہی ہوسکی تبدیل کردہ محورون مفروض کو اور محورون سے جو اکثی متوازی ہون بذریعہ ان صورتون جبریہ کے

ر $= ر' + ط$ اور لا $= لا' + ص$ جو فقرہ (۵۴) سے حاصل ہوتی ہین اور اس تبدیلی سی مساوات $ا ر^2 + س لا^2 + د ر + ی لا + ف = 0$

ایسی صورت کی ہوجاوگی $ا (ر' + ط)^2 + د (ر' + ط) + ی (لا' + ص) + ف = 0$ یعنی $ا ر'^2 + (2 ا ط + د) ر' + ی لا' + ا ط^2 + د ط + ی ص + ف = 0$ چونکہ اس مساوات مین دو مقدارین غیر منقطع ط اور ص ہین

اور اسیواسطے اختیار ہی کہ دو یا تین ان مقدارون کی فرض کرین پس فرض کرو کہ انکی قیمتین ایسی ہین کہ امثال گ اور مقدار مقررہ علحدہ علحدہ مساوے صفر کے ہوجاوین یعنی فرض کرو کہ ۲ا ط + د = ۰ اور ا ط۲ + د ط + ی ص + ف = ۰ یہانسی معلوم ہوا کہ ط = $-\frac{د}{۲ا}$ اور ص = $\frac{د۲ - ۴اف}{۴اى}$ پس اب تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہوگی ا ذ۲ + ى لا۲ = ۰ اور یہہ ظاہر ہی کہ اگر ب مثبت ہوتی تو یہہ مساوات حاصل ہوتی س لا۲ + د ذ + ى لا + ف = ۰ اور اس سے اخیر مرتبہ کی تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہوتی س لا۲ + د ذ۲ = ۰ اور اسکے قیمتین ط اور ص ان مساواتون سے معلوم ہوجاتی ہین ص = $-\frac{ى}{۲س}$ اور ط = $\frac{ى۲ - ۴سف}{۴سد}$

(۹۵) شکلون آیندہ سی تمام تبدیلیان مقام خط منحنی کے کہ اونکی مطابق تبدیلیان جبریہ مساوات مین واقع ہوئی ہین معلوم ہوتی ہین



شکل (۱) مین خط منحنی محورون اَلا اور اَذ سی متعلق ہی اور اسکی صورت مین مساوات یہہ ہے ا ذ۲ + ب لا ذ + س لا۲ + ى لا + د ذ + ف =

شکل (۲) مین اصلی محورون کو اَذ اور اَلا سے تبدیل کیا ہے اور زاویہ ر...

لا لا اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ مس ر = $\frac{-ب}{ا-س}$ اور موافق اس تبدیل کی مساوات عام اس صورت کی ہو جاتی ہے بشرطیکہ ب منفی ہو ا ر² + د ر + ی لا + ف = ۰ اگر ب مثبت ہو تو خط منحنی شروع میں اس مقام پر واقع ہوگا کہ اوسکی نئی محور اصلی محورون پر عمود ہوتے جائین اور اس صورت مین مساوات بعد تبدیل کی یہہ ہوتی ہے س لا² + د ر + ی لا + ف = ۰ شکل (۳۰) مین نقطہ شروع ر سے آ پر بدلا گیا ہے اور اوسنے آ کے محورون آ لا اور آ ر پر شمار کئی جاتے ہین اور انکی قیمت مساوات آیندہ سے آیندہ معلوم ہوتی ہے اگر ب منفی ہو تو ط = $\frac{-د}{۲ا}$ اور ص = $\frac{د²-۴اف}{۴ا²ی}$ جسوقت ب مثبت ہو اوسوقت ص = $\frac{-ی}{۲س}$ اور ط = $\frac{د²-۴س ف}{۴س د}$ پس جسوقت ب منفی ہو اوسوقت مساوات بعد تحویل کے یہہ رہیگی ا ر² + ی لا² = ۰ اور جسوقت ب مثبت ہو اوسوقت مساوات یہہ ہوگی س لا² + د ر = ۰

(۹۶) اگر اصل محور ترچھی ہون تو تبدیلی مساوات عامہ کی بوسیلہ صورتون مندرجہ فقرہ (۵۵) کے ہوسکتے ہے قیمتین آ س ب کے بعینہ ویسی ہی حاصل ہونگی جو فقرہ (۸۷) مین حاصل ہوئی ہین اوس صورت مین فرض کرسکتے ہین کہ ب = ۰ اور قیمت مس ر کی بھی معلوم کرسکتے ہین جبکہ محور متقاطع علی القوایم ہون اور موافق فقرہ (۸۷) کی یہہ بھی معلوم ہوسکتا ہے کہ فقط ایک ہی مجموعہ ایسی محورون کا ہی جو قوت ر کے جز لا ر کو زایل کرتی

کرنی ہی وہی قیمت اون جزون کو بہے زایل کریگی جو لا۲ اور ر۲ سی متعلق ہین جیسی فقرہ (۹۳) سی واضح ہی اور مساوات تحویل کی ہوئی یہہ ہوگی جبکہ س جس ۲ گہ − ب جس گہ مثبت ہووے اوسوقت ا ر۲ + د ر + ی لا + ف = ۰ اور جبوقت س جس ۲ گہ − ب جس گہ منفی ہو تو یہہ مساوات ہوگی س لا۲ + د ر + ی لا + ف = ۰ (۹۷) دریافت کیا جاتے ہین ہم قیمتین ا و سہ د ی کے واضح ہو کہ انکی قیمتین آسانی سے بوسیلہ فقرہ (۸۸) کی معلوم ہوسکتی ہین چونکہ ب۲ − ۴ ا س = ۰ تو جبوقت س جس ۲ گہ − ب جس گہ مثبت ہوا وقت حاصل ہوگی یہہ مساوات م = ۱ − ب جم گہ + س اور ا = (۱ − ب جم گہ + س) جم۲ گہ اور س = ۰ اور جم ۲ ر = ۱ − ب جم گہ + س جم۲ گہ اور جس گہ = جس کہ ما س / ۱ − ب جم گہ + س اور جم گہ = ۱ − ب جم گہ + س جم۲ گہ اور د = د جم گہ − ی جم (گہ − ر) / جس گہ = (د − ی جم گہ) ۱ − ب جم گہ + س جم۲ گہ − ی ما س جس۲ گہ / جس گہ ما ۱ − ب جم گہ + س اور ی = د جس ر + ی جس (گہ − ر) / جس گہ = (د − ی جم گہ) (س + ی ۱ − ب جم گہ + س جم گہ) / ۱ − ب جم گہ + س

پس تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہوگی ا ر۲ + د ر + ی لا + ف = ۰ اوس صورت مین جبکہ (س جس ۲ گہ − ب جس گہ) منفی ہو تو قیمتین ا س م د ی کی یہہ ہونگی م = − (۱ − ب جم گہ + س) اور ا = ۰ اور س = (۱ − ب جم گہ + س)۲ جم۲ گہ فقط جس ر اور جم ر کے قیمتون مین فرق واقع ہوتا ہی اور یہانسے معلوم ہوا کہ د = (د − ی جم گہ) ما س − ی ما ۱ − ب جم گہ + س جم۲ گہ + س جم۲ گہ + ی ما س جس۲ گہ / ما ۱ − ب جم گہ + س

اور ی = $\frac{(د - ی جم گ) ا ا - ب گ م گ + س م م گ + ی ا س حس ا گ}{\text{جس گ ا ا - ب م گ + س}}$ اور اب مساوات

تحویل کی ہوئی یہہ ہوگی س لا^{۲} + د ک + ی لا + ف = ۰ اس مساوات کی تحویل زیادہ ہو سکتی ہی موافق فقرہ (۹۴) کے اور جبوقت اوس زاویہ کو جو محور وں کی درمیان مین واقع ہی حادہ فرض کرین تو اوسوقت شکلون مندرجہ فقرہ (۹۵) سی تبدیلی مقام خط سنحنی کی معلوم ہو جاوینگے —

(۹۸) قبل از تمام کرنے اس باب کے چند مثالین اون صورتون کی ہم بیان کرینگے جنکا حال ابہی لکھہ چکی ہین مثال (۱) ک^{۲} - ۶ لا ک + ۹ لا^{۲} + ۱۰ ک + ۱ = ۰ اسکا لوکس قریب البیضوی ہی اور مس ۲ر = $\frac{ا - س}{ب}$ = $\frac{-۳}{۴}$ اور :: قیمت رکھکے فہرست مقادیر مثلثی دریافت ہو سکتی ہی اور ظاہر ہی کہ ب منفی ہی : موافق فقرہ (۹۳) کے ا^{۲} = ۱ + س = ۱۰ اور س = ۰ اور د = $\sqrt{۱۰}$

اور ی = $\sqrt{۱۰}$ ۳ ∴ ۱۰ ک^{۲} + $\sqrt{۱۰}$ ک + ۳ $\sqrt{۱۰}$ لا + ۱ = ۰ اور موافق فقرہ (۹۴) کل ط = $\frac{د}{ا ا}$ = $\frac{۱}{۱۰}$ پس اخیر مساوات یہہ ہوگی ک^{۲} + $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ لا = ۰ مثال (۲) ک^{۲} + ۲ لا ک + لا^{۲} + ک - ۳ لا + ۱ = ۰ اس سی قریب البیضوی متعلق ہی اور اخیر مرتبہ کی تحویل کے ہوئی مساوات یہہ ہی لا^{۲} + $\sqrt{۲}$ ک^{۲} = ۰ مثال (۳) ما^{۲} + نا^{۲} = ا^{۲} یہہ مساوات اسطرح لکھی جا سکتی ہی لا + ک - د = ۲ $\sqrt{۲}$ لا ک اور اسطرح بہی تحویل ہو سکتی ہی ک^{۲} - ۲ لا ک + لا^{۲} - ۲ د ک - ۲ د لا - د^{۲} = ۰ لوکس اسکا قریب البیضوی ہے اسواسطے کہ اسمین شرایط اوسکے پائی جاتی ہین اگر موافق فقرہ (۸۷) کی اس

خط منحنی کو کھینچیں تو دریافت ہوگا کہ اوسکا مقام ط ب س ق ہی اور مساواتین

ر = لا ± د وہی مساواتین ہین جو متعلق

قطرون ب ی اور س ف کی ہین ا لا

اور ا ر نئی محور ہین اور زاویہ ر یعنے

لا ا لا = ۴۵° اور ا = ۰ اور د = ۰

اور ی = − ۰ و ۲ اور ط = ۰ اور ص = $\frac{د}{۲\sqrt{۲}}$ ط اور ص کو نئی محورون

پر شمار کرنا چاہئے اور ∴ فرض کرو کہ ا ا = $\frac{ف}{۲\sqrt{۲}}$ اور ا نیا نقطہ شروع ہی

اور اخیر مساوات یہہ ہی ر² = د لا ۲ مثال (۴) ر = د + ی لا + ف لا²

لوکس اسکا قریب البیضوی ہے کیونکہ ب² − ۴ ۱ س یا ۰ − ۴ × ۰ × ف = ۰

فرض کرو کہ ر = ر + ط اور لا = لا + ص ∴ ر + ط = د + ی (لا + ص)

+ ف (لا + ص)² ∴ ف لا² + (۲ ص ف + ی) لا − ر + ف ص² + ی ص + د − ط

= ۰ فرض کرو کہ ۲ ص ف + ی = ۰ اور ف ص² + ی ص + د − ط = ۰

∴ ص = − $\frac{ی}{۲ف}$ اور ط = $\frac{۴ د ف − ی²}{۴ ف}$ اور اب صورت مساوات کی یہہ

ہو جاویگی ف لا² − ر = ۰ (۹۹) جبکہ محور تر بھی ہون اور

ر² − ۲ لا ر + لا² − ۶ ل = ۰ اور اگر زاویہ محورون کے درمیان ۶۰° کا فرض

کیا جاوے تو س جس ۲ گ − ب جس گ مثبت ہوگا اور جس ر = $\frac{جس ۶۰°}{۲\sqrt{۳}}$ =

$\frac{۱}{۲}$ ∴ ر = ۳۰° اور م = ۳ اور ر = ۴ اور س = ۰ اور د = ۶

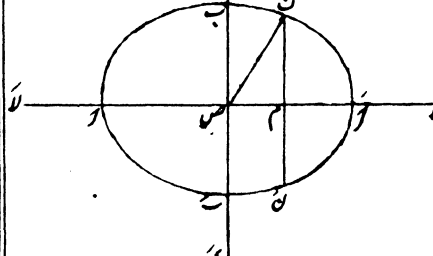
اور ی = − ۲ √۳ اور ص = − $\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}$ اور ط = − $\frac{۳}{۴}$ ∴

۴ ر۲ − ۲ ر ت لا = ۰

باب ہشتم

بیضوی کے بیان مین

(۱۰۰) مساوات عام درجہ دویم کی بحث مین ثابت ہوا ہی کہ اگر مرکز نقطۂ شروع محور ون متقاطع علی القوایم کا فرض کیا جاوے تو مساوات بیضوی کی یہہ ہوتی ہی $\left(\frac{۱}{ق}\right)$ و^۲ + $\left(\frac{-س}{ق}\right)$ لا^۲ = ۱ یا ان ر^۲ + ن لا^۲ = ۱ جسمین امثال ن اور ق مقادیر مثبت ہین ہم اب نکالین گے بوسیلہ اس مساوات کی مختلف شکلین بیضوی کی اب تاکہ اچھی طرح امثال اس مساوات کی دریافت ہوسکین فرض کرو کہ ص مرکز بیضوی کا ہی اور لا لا اور ر ر محور متقاطع علی القوایم نقطہ ص پر ہین



اور فرض کرو کہ ص م = لا

اور م ن = ر اب ظاہر ہے کہ جہان محور خط منحنی سے تقاطع کرتے ہین وہان

ر = ۰ } ∴ ن لا^۲ = ۰ ∴ لا = ± $\frac{۱}{\text{ما ق}}$

اور لا = ۰ } ∴ ن ر^۲ = ۱ ∴ ر = ± $\frac{۱}{\text{ما ق}}$

قطع کرو محور لا پر ا ص = $\frac{۱}{\text{ما ن}}$ اور ص ا = − $\frac{۱}{\text{ما ن}}$ اسیطرح سے محور ر پر ص ب = $\frac{۱}{\text{ما ق}}$ اور ص ب = − $\frac{۱}{\text{ما ق}}$ اس صورت مین یہہ خط

منحنی کا نہایتی محور دکو نقطون آ آ اور ب ب پر اب اگر فرض کیا جاوے ص ا = ط
اور ص ب = ص، اور ط بڑا ہو ص سے تو ق = $\frac{ا}{ط^۲}$ اور ن = $\frac{ا}{ص^۲}$
اسیواسطے مساوات اس خط منحنی کے یہہ ہوگی $\frac{ر^۲}{ص^۲} + \frac{لا^۲}{ط^۲} = ا$ یا $ط^۲ ر^۲$
$+ ص^۲ لا^۲ = ط^۲ + ص^۲$ ∴ $ر^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲}(ط^۲ - لا^۲)$

(۱۰۱) ہمنی ابہی (۷۶) مین ثابت کیا ہی کہ خط منحنی محدود ہی ہر ایک طرف
سی اور نقطی آ آ اور ب ب ان حدود پر واقع ہین اور مساوات گذشتہ
حاصل ہونگی یہہ مساواتین $ر = \pm \frac{ص}{ط} ط^۲ - لا^۲$ (ا) اور
$لا = \pm \frac{ط}{ص} ص^۲ - ر^۲$ (۲) مساوات (ا) سی معلوم ہوتا ہی کہ
اگر لا بڑا ہو $\pm$ ط سے تو ر غیر ممکن ہوگا اور اسیطرح (۲) سی معلوم ہوتا ہے
کہ اگر ر برابر ہو $\pm$ ص سی تو لا بہی غیر ممکن ہوجاویگا یہانسی معلوم ہوا کہ
اگر خطوط مستقیم کہینچی جاوین درمیان نقطون آ اور آ اور ب ب کی تو
وہ بالکل گہیرین گے خط منحنی کو۔ یہہ بہی مساوات (ا) سی معلوم ہوتا ہے
کہ واسطے ہر ایک قیمت لا کی جو کہ کم ہی ط سی دو قیمتین ر کی حاصل ہونگی یعنے
واسطے کسی در ص م کی جو کہ کم ص آ سے ہی حاصل ہونگی دو قیمتین مساوے
در العرض م ن اور م ن کے اور علامت $\pm$ کی سے دریافت ہوتا ہی کہ ہمتین
انکی مقابل ایک دوسری کے ہین اور یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ جتنا لا بڑہتا ہی۔
سی ط تک اوتنی ہی قیمتین ر کی گہٹتی ہین $\pm$ ص سے۔ تک یہانسے
ہمین حاصل ہونگی دو برابر قوسین ب ن آ اور ب ن آ بالکل مشابہ

اور مقابل ایک دوسرے کی آپ اگر لا ہو منفی اور گنتا شروع کری ب سی ط تک تو لا مثبت ہوگا اور ویسی قیمتین ر کی نکلین گی جیسی ابھی نکالی ہین یہان سے معلوم ہوا کہ دو اور قوسین ب آ اور ب آ مقابل اور مساوے ایک دوسری کی ہین اسیواسطے معلوم ہوا کہ خط منحنی کو محور لا دو حصون مین برابر تقسیم کرتا ہی - اسیطرحی مساوات (۲) سی معلوم ہوتا ہی کہ محور ر بھی خط منحنی کو دو حصون برابر مین تقسیم کرتا ہی اور اسی سبب سے اس خط منحنی کو متناسب اون محورون کا کہتے ہین - اس خط منحنی کا جو ف بھی طرف مرکز کی ہوتا چاہئی نہین تو ایک خط مستقیم قطع کریگا اس خط منحنی کو دو سی زیادہ نقطون پر جو کہ ناممکن ہی موافق (۱۷) کے —

(۱۰۲) مساوات ر^{۲} = $\frac{ص^{۲}}{ط^{۲}}$ (ط^{۲} - لا^{۲}) سی حاصل ہوتا ہی یہہ

ص ن = لا^{۲} + ر^{۲} = لا^{۲} + $\frac{ص^{۲}}{ط^{۲}}$ (ط^{۲} - لا^{۲}) = ص^{۲} + $\frac{ط^{۲} - ص^{۲}}{ط^{۲}}$ لا^{۲}

یہانسی معلوم ہوا کہ ص ن نہایت بڑا ہوسکتا ہی جبکہ لا نہایت بڑا ہو —

یعنی جبکہ لا = ط تو اس صورتین ص ن بھی برابر ط کی ثابت ہوگا - مساوات گذشتہ سی یہانسی معلوم ہوا کہ خطوط ص آ اور ص آ نہایت بڑی خط ہین تمام اون خطون مین سے جو کہ کھینچی جاوین مرکز سی محیط تک اس خط منحنی کی اور ص ا نہایت کم ہوگا جبکہ لا = ۰ ∴ ص ن برابر ہوجاویگا ص کے یہانسی دریافت ہوا کہ ص ن اور ص ن نہایت چھوٹا ہی اون خطون مین سے جو کہ کھینچی جاسکتے ہین مرکز سی محیط تک یعنی محور آ آ نہایت بڑا اور ب ب نہایت چھوٹا اون خطون مین سے ہی جو کہ کھینچی جاسکتے ہین مرکز سے گذرتی ہوئی محیط تک آ آ کو محور کہتے ہین

اور ب ب کو محور خورد —

(۱۰۳) نقطے آ اور ب اور آ ب راس محورونکی کہلاتی ہین کوئی نقطہ انمین سے نقطہ شروع فرض کیا جاسکتا ہی مثلاً فرض کرو کہ آ نقطہ شروع ہی اور ص محور لا کا اور مان لو کہ محور ر کا متوازی ص ب کی ہی اور ا م = لا

∴ لا = ص م = ا م − ا ص = لا − ط ہسیہ اسلی ر² = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (ط² − لا²)

= $\frac{ص^2}{ط^2}$ (ط² − (لا² − ط²)²) = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (۲ ط لا − لا²) اور بعد دور کرنے

علامت کی ر² = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (۲ ط لا − لا²) = $\frac{ص^2}{ط^2}$ لا (۲ ط − لا) بوسیلہ اس

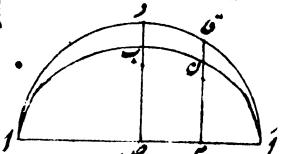
مساوات کی تناسب ہندسی حاصل ہوگا اور وہ یہہ ہی

مربع م ن : سطح ا م اور م آ :: مربع ب ص : مربع ا ط یا

م ن² : ا م × ا م :: ب ص² : ا ط² یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ مربع نصف وتر کا گھٹتا بڑہتا ہی موافق سطح دو خطون محور کلان کے اگر ص نقطہ شروع فرض کیا جاوے اور ص آ محور ر کا اور ص ب محور لا تب مساوات موافق اس فرض کے یہہ ہوگی ر² = $\frac{ط^2}{ص^2}$ (ص² − لا²) جبکہ لکھین ہم مساوات گذشتہ مین لا بجای ر اور ر بجای لا کی اور اگر نقطہ شروع فرض کیا جاوے نقطہ ب کا تو ر² = $\frac{ط^2}{ص^2}$ (۲ ص لا − لا²)

(۱۰۴) اگر محور کلان اور محور خورد کو برابر فرض کرین تو اس صورت مین مساوات بیضوی کی یہہ ہو جاویگی ر² = ط² − لا² اور یہہ مساوات دایرہ کی ہی جسکا قطر برابر ۲ ط کے ہی یہانسی ثابت ہوا کہ دایرہ بہی ایک خاص بیضوی ہی چنانچہ

(۷۹) مین ثابت ہوا ہی فرض کرو کہ اَدَ اَ ایک دایرہ ہی جسکا قطر اَا ہی اور م ق یا ر آ ایک وتر العرض موافق وتر ص م یا لا کی ہی اور فرض کرو کہ ان (= د) وتر العرض ایک بیضوی کا ہی اس صورت مین د۲ = ط۲ − لا۲ اور د۲ = صی۲/ط۲ (ط۲ − لا۲)
∴ د۲ = صی۲/ط۲ د۲ یا د۲ = صی۲/ط۲ ر ۰ د : ر : : ص : ط یہانسی ثابت ہوتا ہے کہ وتر بیضوی اسی مقام کی دایرہ مین ایک نسبت مقررہ موافق محور خورد اور کلان کے ہی چونکہ ص چھوٹا ہی ط سی اسلئے ہر ایک نقطہ دایرہ کا واقع ہوگا باہر بیضوی کے سوا دو نقطون آ اور اَ کے جہانکہ یہہ دونون خط منحنی ملتے ہین اب اگر ایک دایرہ کھینچا جاوے محور خورد پر تو اسطرح سے ثابت ہو سکتا ہی کہ ہر ایک نقطہ دایرہ کا واقع ہی اندر بیضوی کے سوا دو نقطون ب اور بَ کی یہانسی معلوم ہوا کہ خط منحنی بیضوی کا واقع ہی درمیان دو محیط دایرون کے



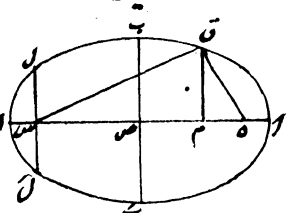
✣ نقطۂ آتشی کے بیان مین ✣

(۱۰۵) مساوات د۲ = صی۲/ط۲ (۲ط لا − لا۲) لکھی جا سکتی ہی اسطور پر
د۲ = ل لا − ل/ط۲ لا۲ اگر ل = ۲صی۲/ط کی فرض کیا جاوے اور ل (= ۲صی۲/ط۲) کو وتر آتشی اعظم کہتی ہین — چونکہ ل = ۲صی۲/ط = ۲صی۲/ط۲ ∴
ل : ۲ط ص : : ۲ص : ۲ط : یہہ ایک شکل ہی جو کہ بیضوی مین ثابت ہو چکی ہی

(۱۰۶) دریافت کرو ایک ایسا نقطہ محور کلان پر جسّی اگر ایک وتر العرض کھینچا جاوے تو دوگنا اسکا برابر ہو وتر آتشی اعظم کے یہان یہہ د۲ = ل۲ یا

$۴\frac{ص^۲}{ط^۲}(ط^۲ - لا^۲) = \frac{۴ص^۲}{ط^۲}$ ∴ $ط^۲ - لا^۲ = ص^۲$ یعنے $لا^۲ = ط^۲ - ص^۲$

اور $لا = \pm\sqrt{ط^۲ - ص^۲}$



نقطہ ب کو مرکز فرض کرکے

اور ط کو نصف قطر کھینچو

ایک دایرہ کاٹتا ہوا محور کلان کو اور پر دو نقطون ہ اور س کے تب

$ص ہ = \sqrt{ط^۲ - ص^۲}$ اور $ص س = -\sqrt{ط^۲ - ص^۲}$ بطور پر س اور ہ

ایسی نقطے دریافت ہوئی ہین کہ اگر کسی ایک نقطہ پر ایک دو نقاط مین سے ایک فرالعرض

مثل ل س ل کے کھینچا جاوے تو وہ برابر ہوگا وتر آلتی اعظم کو اب اس خط کو

وتر آلتی اعظم کہا کرین گے اور نقاط س اور ہ کو فوکس یا نقاط آلتی اور وقت

اسکی آگی بیان کیجاویگی۔ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

(۱۰۷) کسر $\frac{\sqrt{ط^۲ - ص^۲}}{ط}$ کو جو کہ تعبیر کرتی ہے نسبت ص س کی طرف ص ل

کے خارج المرکز کہتے ہین کیونکہ فرق اس خط منحنی کا دایرہ سی جو قوف اسی کسر سے

اگر خارج المرکز جو کہ عدد ایک سی کمتی ہی فرض کیا جاوے برابری کے تو $\frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲}$

$= ی^۲$ یعنے $\frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲} = ۱ - \frac{ص^۲}{ط^۲}$ ∴ $\frac{ص^۲}{ط^۲} = ۱ - ی^۲$

جو وقت لکھنے یہہ قیمت $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ کی مساوات بیضوی مین تو $ر^۲ = (۱ - ی^۲)(ط^۲ - لا^۲)$

(۱۰۸) قیمت خارج المرکز کے اوپر سی دریافت ہوئی برابر طی کے لیکن

بعض اوقات خارج المرکز کو برابر س ک بھی لکھتے ہین اور چونکہ $ط^۲ - ص^۲ = ط^۲ ی^۲$

اسیواسطی $ص^۲ = ط^۲ - ط^۲ × ی^۲ = (ط - طی)(ط + طی)$ یہان سے

دریافت ہوا کہ سطح اس اور آس = مربع کی جو کہ کھینچا جاوے اوپر ب ص کے

(۱۰۹) دریافت کرو فاصلہ فوکس سے کسی نقطہ ن بیضوی کا فرض کرو کہ

ص ن = نق اور ہ ن = نقَ ∴ نق² = (ء − ر)² + (لا − لا)² ... (۲۹)

چونکہ ر لا وترس کی ہیں ∴ ر = ۰ اور لا = — ط ی ∴

نق² = ر² + (لا + ط ی)² = (۱ − ی²) (ط² − لا²) + (لا + ط ی)²

= ط² − لا² − ی² ط² + ی² لا² + لا² + ۲ ط ی لا + ط² ی²

= ط² + ۲ ط ی لا + ی² لا² = (ط + ی لا)² ∴ س ن = ط + ی لا

اسیطور سے ثابت ہو سکتا ہی کہ ہ ن = ط − ی لا تمام سوالون مین جو کہ صرف

مقدار ون س ن اور ہ ن سی تعلق ہین علامت لا کی وہ لکھنی چاہئی جو

کہ اسکی ذاتی ہو مثلاً اگر ن ہو درمیان ب اور آ کے تو قیمت مطلق س ن

کے ط − ی لا ہی کیونکہ لا خود نفی ہی — جمع کرنی قیمتون س ن اور ہ ن

سی حاصل ہوگی یہہ مساوات س ن + ہ ن = ۲ ط = ا ا یعنی فاصلہ

کسی نقطہ بیضوی کا نقاط آتشی سے مساوی ہی محور کلان کے یہہ خاصیت بیضوی

کی مشابہ ہی اوس خاصیت دایرہ کی سی جہانکہ فاصلہ مرکز کا محیط سے ہمیشہ ایک

مقدار مقررہ کی برابر ہوتا ہی —

(۱۱۰) چونکہ یہہ خاصیت بیضوی کی بہت فایدہ مند ہی آیندہ اسطی ہم اسکو برعکس

طور پر بھی ثابت کرینگی یعنی دریافت کرو کہ کس ایک نقطہ ن کا جسکا فاصلہ

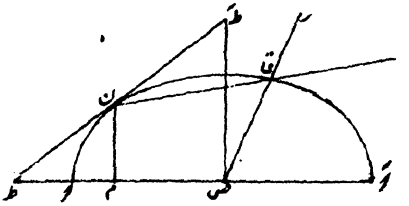
دو نقطون آتشی س اور ہ سے برابر ایک مقدار مقررہ کی ہے یا مساوی ہے

۲ط کی فرض کرو کہ س ہ = ۲ ص اور تنصیف کرو س ہ کو نقطہ ص پر اور اسی نقطہ کو نقطہ شروع بہی محور دن متقاطع علی القوایم ص ا اور ص ب کا فرض کرو اور مان لو کہ ص م = لا اور ن م = ک ∴ س ن = $\sqrt{(ص+لا)^2+ک^2}$ اور ہ ن = $(ص-لا)^2+ک^2$ لیکن س ن + ہ ن = ۲ط یا س ن = ۲ط − ہ ن ∴ $\sqrt{(ص+لا)^2+ک^2}$ = ۲ط − $\sqrt{(ص-لا)^2+ک^2}$ مجذور کرو دونون طرفون مساوات کو ∴ $(ص+لا)^2+ک^2$ = ۴ط² − ۴ط $\sqrt{(ص-لا)^2+ک^2}$ + $(ص-لا)^2+ک^2$ ∴ $(ص+لا)^2-(ص-لا)^2$ = ۴ص لا = ۴ط² − ۴ط $\sqrt{(ص-لا)^2+ک^2}$ یا ص لا = ط² − ط $\sqrt{(ص-لا)^2+ک^2}$ یعنے ط $\sqrt{(ص-لا)^2+ک^2}$ = ط² − ص لا ∴ ط² $(ص-لا)^2+ک^2$ = ط⁴ − ۲ط² ص لا + ص² لا² ∴ ط² ک² = ط⁴ − ۲ط² ص لا + ص² لا² − ط² (ص² − ۲ ص لا + لا²) = ط⁴ − ط² ص² + ص² لا² − ط² لا² = (ط² − ص²) (ط² − لا²) ∴ ک² = $\frac{ط^2-ص^2}{ط^2}$ (ط² − لا²) یہانسی ثابت ہوا کہ لوکس اسکا بیضوی مین جسکا محور کلان مساوی ۲ط کے ہی اور محور خورد برابر ۲ $\sqrt{ط^2-ص^2}$ اور جسکی نقاط آتشی س اور ہ ہین ۔

مماس کی بیان مین

(۱۱۱) دریافت کرو مساوات مماس کسی نقطہ بیضوی کی ۔ فرض کرو کہ لا اور ک اوتار نقطہ ن کے ہین اور لا′ اور ک′ نقطہ ق کی اوتار ہین ۔ مساوات خط ن ق کی جو کہ ان نقطون مین سے گذرتا ہی یہ ہے

$ر - ر' = \frac{ر - ر''}{لا - لا''}(لا - لا')$ ..... (۱۴۱) آب ظاہر ہی کہ خط کاسی وال



یا سیکنٹ ن ق ہو جاویگا

خط ط ن ط' جبکہ نقطہ

ق منطبق ہو گا نقطہ ن

پر یعنی خط ن ق ہو سکتا ہی مماس ط' ن ط جبکہ نقطہ ق منطبق ہو نقطہ ن پر اور

مساوات ن ق کی ہو جاویگی مساوات مماس کے جبکہ لا = لا'' اور ر = ر''

لیکن اس صورت مین $\frac{ر - ر''}{لا - لا''} = \div$ لیکن اسکی قیمت ہم نکالین گے بطور آیندہ کے

چونکہ ر ر' اور لا لا' دو نقطی اوپر بیضوی کی ہین اسواسطے حاصل ہونگی یہہ

دو مساواتین $ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ اور $ط^2 ر'^2 + ص^2 لا'^2 = ط^2 ص^2$

اسیواسطے تفریق کرنے سی $ط^2 (ر^2 - ر'^2) + ص^2 (لا^2 - لا'^2) = ٠$ یا

$ط^2 (ر - ر')(ر + ر') + ص^2 (لا - لا')(لا + لا') = ٠$ ∴

$\frac{ر - ر''}{لا - لا''} = -\frac{ص^2}{ط^2}\frac{(لا + لا'')}{ر + ر''} = -\frac{ص^2}{ط^2}\frac{لا}{ر}$ جبکہ لا = لا'' اور ر = ر''

اسیواسطے مساوات مماس کی یہہ ہی $ر - ر' = -\frac{ص^2}{ط^2}\frac{لا}{ر}(لا - لا')$ یعنے

$ط^2 ر ر' - ط^2 ر'^2 = -ص^2 لا لا' + ص^2 لا'^2$ ∴ $ط^2 ر ر' + ص^2 لا لا' = ط^2 ر'^2$

$+ ص^2 لا'^2 = ط^2 ص^2$ شکل مرقومہ بالا مین ص م = لا اور م ن = ر

اور لا اور ر وتر کسی نقطہ مماس ط ن ط' کی ہین مساوات مماس کے آسانی سے

یاد رکھی جا سکتی ہی کیونکہ وہ حاصل ہو سکتی ہی مساوات بیضوی سے جو کہ یہہ ہی

$ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ بوسیلہ لکھنی ر' بجای ر اور لا لا' کی بجای لا^2

(۱۱۲) اور یہہ ظاہر ہی کہ خط طن کا مماس ہی کیونکہ ایک خط نہین کاٹ سکتا ہی خط منحنی کو دو نقطون سے زیادہ پر اور یہان وہ دونو نقطے ایک نقطہ پر منطبق ہوگئے ہین اور علاوہ اسکے ہم ثابت کرینگے کہ ہر ایک نقطہ ن ط کا سوای ن کی خارج بیضوی کی ہی — فرض کرو کہ نقطہ ر کی لا اور کا دوترہین اس صورت مین اگر ط ر۲ + ص لا۲ بڑا ہو ط۲ ص۲ سی تو نقطہ ر کا باہر خط منحنی کے ہی واسطی ثبوت اس دعوی کے ملاؤ ایک ایسا خط نقطہ ر اور مرکز بیضوی مین جو کاٹی بیضوی کو نقطہ ق پر اور فرض کرو کہ لا اور کو دو ترہ نقطہ ق کی ہین اسیواسطے ط ر۲ + ص لا۲ بڑا ہی ط۲ ص۲ یا ط ر۲ + ص لا۲ سے اسیواسطے ص۲ (لا۲ — لا۲) بڑا ہوگا ط۲ (ر۲ — ر۲) سی لیکن ص چھوٹا ہی ط اسیواسطے (لا۲ — لا۲) بڑا ہوگا (ر۲ — ر۲) سی یا (لا۲ + ر۲) بڑا ہوگا (لا۲ + ر۲) سی اسیواسطی ص ر بڑا ہی ص ن سی (۲۹) یا نقطہ ر کا خارج بیضوی سے لیکن یہہ دعوی اب ہم ایک عام طور سے ثابت کرینگی — اس صورت مین حاصل ہونگی یہہ دو مساواتین ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ دو چند کرکے مساوات اول تفریق کرو مساوات دویم مین سے ∴

ط۲ ر۲ — ۲ ط۲ ر ر + ص۲ لا۲ — ۲ ص۲ لا لا = — ط۲ ص۲ یا ط۲ (ر — ر)۲ + ص۲ (لا — لا)۲ = ط۲ ر۲ + ص لا۲ — ط۲ ص۲ ∴ ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ + ط۲ (ر — ر)۲ + ص۲ (لا — لا)۲ جو کہ زیادہ ہی ط۲ ص۲ لیکن ر اور لا دوترہین کسی ایک نقطہ مماس کے اسیواسطے عموماً ہم یہہ کہہ سکتے ہین کہ ہر ایک

نقطہ مماس پر خارج بیضوی سی ہے مگر خاص ایک صورتمیں جبکہ ر = رَ اور لا = لاَ یعنی نقطہ آ پر ہمیں حاصل ہوگی یہہ مساوات ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ اسیواسطے یہانسی دریافت ہوتا ہی کہ اس خاص نقطہ پر ایک نقطہ مماس کا منطبق ہی ایک نقطہ بیضوی پر — ∴ ∴ ∴ ∴ ∴ ∴

(۱۱۳) اگر راس آ نقطہ شروع ہو تو مساوات بیضوی کی یہہ ہی ر۲ = ص۲/ط۲ (۲ ط لا − لا۲) یا ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ − ۲ ط ص۲ لا = ۰ اور مساوات اسکی مماس کے بطور مرقومۂ بالا کے یہہ دریافت ہوگی ط۲ رَ ر + ص۲ لا لاَ − ط ص۲ × (لا + لاَ) = ۰ اگر مساوات بیضوی کی ہو ر۲ = م لا − ن لا۲ تب مساوات مماس کے یہہ ہوگی رَ ر = م/۲ (لا + لاَ) − ن لا لاَ اگر صورت عام خط منحنی کی ہو یہہ ط ر۲ + ص لا ر + س لا۲ + د ر + ی لا + ف = ۰ تو صورت عام مماس کے یہہ ہوگی

ر − رَ = − (۲ س لاَ + د رَ + ی)/(۲ ط رَ + ص لاَ + د) (لا − لاَ) یا

(۲ ط رَ + ص لاَ + د) ر + (۲ س لاَ + ص رَ + ی) لا + د ر + ی لا + ۲ ف = ۰

اور فرض کرو کہ ر = م لا + د مساوات مماس بیضوی کی ہو اور چونکہ مساوات مماس بیضوی کی ثابت ہوئی ہی ط۲ رَ ر + ص۲ لا لاَ = ط۲ ص۲ ∴

ر = − ص۲ لاَ/ط۲ رَ لا + ص۲/رَ اسیواسطے مقابلہ کرنے سی اس مساوات کو مساوات ر = م لا + د سی ہمیں یہہ حاصل ہوگا م = − ص۲ لاَ/ط۲ رَ اور د = ص۲/رَ یا رَ = ص۲/د لیکن مساوات بیضوی کے یہہ ہی ر۲ = ص۲/ط۲ (ط۲ − لا۲) ∴

$\frac{ص^2}{د^2} = \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا^2)$ یا $\frac{ص^2}{د^2} = \frac{ط^2 - لا^2}{ط^2} = ۱ - \frac{لا^2}{ط^2}$ ∴

$\frac{لا^2}{ط^2} = ۱ - \frac{ص^2}{د^2}$ ∴ $لا^2 = ط^2 - \frac{ط^2 ص^2}{د^2}$ جبکہ لکھی ہمنی یہہ قیمت

لا کے اس مساوات مین $م^2 = \frac{ص^2 لا^2}{ط^4 ر^2} = \frac{د^2 ط^2 ص^2 - ط^4 ص^4}{د^2 ط^4 ر^2}$ اجبکہ

لکھی ہمنی اس مساوات مین $ر^2 = \frac{ص^2}{د^2}$ تو $م^2 = \frac{د^2 ط^2 ص^2 - ط^4 ص^4}{د^2 ط^4 ص^2} =$

$= \frac{د^2 - ص^2}{ط^2}$

یہانسی ہین یہہ حاصل ہوتا ہی $م^2 ط^2 + ص^2 = د^2$ یہہ تعلق ضرور ہونا چاہئی

درمیان امثال مساوات $ر = م لا + د$ جبکہ یہہ فرض کیجاوے مساوات مماس کی

(۱۱۴) دریافت کردہ دو نقطی جہانکہ مماس کاٹتا ہی محور کو۔ اسمساوات مین

$ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2 = ط^4 ص^2$ فرض کرو کہ $ر = ۰$ ∴ $ص^2 لا^2 = ط^4 ص^2$

اور $لا = \frac{ط^2}{ل} = ص$ و ط اور اسیطور سے $ر = ص ط = \frac{ص^2}{ر}$ یہانسی دریافت

ہوتا ہی کہ سطح ص ط اور ص م = مربع ا ص یا ص ط × ص م = ا ص^2 اور

سطح ص ط اور ن م = مربع ب ص یا ص ط × ن م = ب ص^2 چونکہ

ص ط (= $\frac{ط^2}{لا^2}$) مین ر نہین پایا جاتا ہی اسیواسطے یہہ مقدار ایک سی ہی ر واسطے

تمام اون بیضویون کے جنکا محور کلان اور مترالعرض واسطے نقطہ تماس کے ایک ہی

ہین اور چونکہ دایرہ بہی اوپر محور کلان کے ایک قسم کا بیضوی خیال کیا جا سکتا ہی

اون تمام بیضویون مین سے اسیواسطے فاصلہ ص ط ایک ہی ہی واسطی ایک بیضوی

اور اوسکی گرد کی دایرہ کی یعنے اوس دایرہ کی جسکا قطر محور کلان بیضوی کا ہی

اور چونکہ ص ط (= $\frac{ط^2}{لا^2}$) کسیطرح کا تعلق ر سے نہین رکہتا ہے اسیواسطی

دو مماس دو طرفون ایک وتر کی سے ایک ہی نقطہ پر ملین گے اور محور کے اور مساوات اوس مماس کی جو کہ دوسری طرف وتر سی کھینچا جاوے دریافت ہوسکتی ہی جبکہ ـــ ء کو بجای ء کی لکھین مساوات مماس کی مین (۱۱۱)

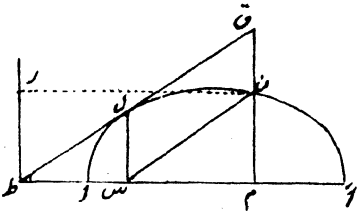
(۱۱۵) فاصلہ م ط پای وتر سی اوس نقطہ تک جہانکہ مماس کاٹتا ہی محور لا کو مماس العرض کہلاتا ہی بیضوی مین م ط = ص ط - ص م = $\frac{ط ء}{لا}$ - لا =

$\frac{ط ء - لا ء}{لا}$ یہانسی یہہ حاصل ہوگا سطح ص م اور م ط = سطح لم اور م ا ژ ژ

(۱۱۶) چونکہ مساوات مماس کے یہہ ہی ط ء ء + ص ء لا لا = ط ء ص ء فرض کرو اسمین لا = ط ∴ ء = ۰ ∴ ص ء ط لا = ط ء ص ء اور لا = ط یہانسے ثابت ہوگا کہ مماس راس محور کلان پر عمود ہی اوس محور پر اور نقطہ ب پر مساوات مماس کی یہہ ہی ء = ص اسیواسطے بطور سابق کے ثابت ہوسکتا ہی کہ نقطہ ب پر بھی مماس عمود ہی محور خرد پر - مساوات مماس کے یہہ ہی ط ء ء + ص ء لا لا =

ط ء ص ء یا ء = - $\frac{ص ء لا}{ط ء ء}$ لا + $\frac{ص ء}{ء}$ اگر خط ن ص کھینچا جاوے یہان تک کہ وہ ملی پہر خط بیضوی نقطہ ن پر علامتین وتروں ن ن کی بالکل مختلف وتروں ن ن کے سی ہین اسیواسطے امثال - $\frac{ص ء لا}{ط ء ء}$ ویسا ہی رہیگا واسطی اوس مماس کے جو کہ کھینچا جاوے نقطہ ن سی یا مماس نقاط ن اور ن پر متوازی ایک دوسرے کی ہین .... (۴۳) ژ ژ ژ ژ

(۱۱۷) دریافت کرو مساوات اوس مماس کے جو کہ کھینچا جاوے انجام وتر آتشی اعظم سے عام مساوات مماس کی یہہ ہر ط ء ء + ص ء لا لا = ط ء ص ء لیکن صورت حال



مین نقطہ ل پر لا = − طی

اور ؤ = $\frac{\text{صا}^2}{\text{ط}}$ اسیواسطی

ط ؤ = $\frac{\text{صا}^2}{\text{ط}}$ − صا لا طی =

ط صا یعنے ؤ = ط + ی لا

اگر وتر ؤ یا م ق قطع کری بیضوی کو نقطہ ن پر تو س ن = ط + ی لا ∴ م ن = س ن

(۱۱۸) دریافت کرو وہ نقطہ جہانکہ یہہ خاص مماس کاتناہی محور کو — فرض کرو کہ

ؤ = ۰ ∴ لا = صا ط = − $\frac{\text{ط}}{\text{ی}}$ نقطہ ط سی کھیچو خط ط ر کا عمود خط أ صا

پر اور نقطہ ن سی کھیچو خط ن ر کا متوازی أ صا کے تب صرف مطلق قیمتین صا م

اور صا ط کی لکھنی سی ہمین یہہ حاصل ہوگا ن ر = م ط = صا ط + صا م =

$\frac{\text{ط}}{\text{ی}}$ + لا = $\frac{\text{ط} + \text{ی لا}}{\text{ی}}$ = $\frac{1}{\text{ی}}$ س ن اسیواسطی فاصلہ کسی نقطہ ن کا تا سے

اور خط ط ر سی آپسمین وہی نسبت رکھتی ہین :: ی : ۱ اس خط ط ر کو خط بنیادی

کہتے ہین کیونکہ مقام اس خط کا اور فوکس کا جانکر ایک بیضوی کسی قدر خارج المرکز

کا کھیچا جاسکتا ہی اور ترکیب اسکی بیان کیجاویگی کسی ایک صفحہ آیندہ مین —

اگر لا = ۰ تو ہمین یہہ حاصل ہوگا ؤ = ط اسیواسطی مماس انخام مین وتر

آتشی اعظم کے کاتناہی محور ؤ کو اس نقطہ پر جہان یہہ محور ملتا ہی گرد کھیچی گئی دایرہ سے

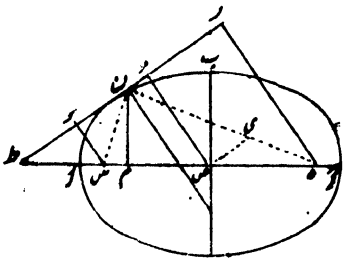
کھیچو ق م کو یہانتک کہ وہ قطع کری بیضوی کو نقطہ ن پر تو

ق ن × ق ن = س م^2 ⁂ ⁂ ⁂ (۱۱۹) دریافت کرو طول اوس عمود کا

جو کہ کھیچا جاوے نقطہ آتشی سے اوپر مماس کے — فرض کرو کہ س ؤ اور ہ ر

عمود ہین اور برن طد کے بموجب صورت (۴۸) کے ہمین حاصل ہوگا

ع = − (ی − حرما − د) / √(۱ + ح²) یہان



ع تبکیر ناہی عمود کو لیکن صورت حال مین

کر = ۰ اور لا = − ط کی ۔

جو کہ در نقطہ س کے ہین اور ر = حرلا + د مساوات مماس طن کے ہی لیکن مساوات طن کی یہ بہی ہی ر = − ص² لا / ط² ر + ص² / ر ∴

ح = − ص² لا / ط² ر اور د = ص² / ر بسیوسطی ع = − (ص² لا طی − ص² / ر) / √(۱ + ص⁴ لا² / ط⁴ ر²)

= ط ص² (ط + ی لا) / ط² ر² + ص⁴ لا² لیکن ط² ر² + ص² لا² = ط² (ط² ص² − ص² لا²)

+ ص⁴ لا² = ط² ص² { ط² − ص² / ط² لا² } = ط² ص² (ط² − ی² لا²)

∴ ع = ط ص² (ط + ی لا) / ط ص √(ط² − ی² لا²) = ص √((ط − ی لا) / (ط − ی لا)) فرض کرو کہ س ن

یا ط + ی لا = لق اور ہ ن یا ط − ی لا = ۲ ط − لق = لئ بسیوسطی

ع² = ص² لق / (۲ ط − ی) = ص² لق / لئ اگر ہ ر = ع کی فرض کیا جاوے تو بسیط ثابت ہوگا کہ ع² = ص² لق / لئ ضرب دینی سے حاصل ہوگا ع ع² = ص²

یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ سطح س ہ اور ہ ر = مربع ب ص یا س ہ × ہ ر

= ص² ⁂ ⁂ ⁂ (۱۲۰) دریافت کرو لوکس کو اور

ہ کو پچھلی شکل مین مساوات خط منحنی کے نقطہ ن پر سے ۔

$ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ ..... (۱) اور مساوات تماس کی خط لا پر

پھر $ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ ..... (۲) اور مساوات عمود س ر کی

(جسکے دتر ن اور ہ ین) یہہ ہی $ر = ح (لا + ن)$ اور یہہ خط ہ

عمود تماس پر ہی اسیواسطے $ح = \frac{ط^2 ر^2}{ص^2 لا}$ ..... (۳) اب مساوات عمود س ر کی

یہہ ہوگی $ر = \frac{ط^2 ر^2}{ص^2 لا} (لا + ن)$ ..... (۴) اگر ہم دور کرین ر اور لا

کو بوسیلہ مساوات (۱) اور (۲) اور (۳) کی تو حاصل ہوگی ہمین ایک

ایسی مساوات جسمین لا اور ر پائی جاوینگی لیکن اس دور کرنی مین لا اور

ر ایک ہی فرض کی گئی ہین مساوات (۲) اور (۳) مین اسیواسطے جو مساوات کے

بعد اس عمل کی پیدا ہوگی وہ مساوات اوس نقطہ تقاطع کی ہوگی یعنی لوکس انکی نقطہ تقاطع کی ہوگے

مساوات (۳) سی $\frac{ر^2}{لا^2} = \frac{ص^2}{ط^2} \frac{ر}{لا + ن} = \frac{ص^2}{لا ر} - \frac{ص^2 لا}{ط^2}$ مساوات (۴) سے

حاصل ہوگا اسیواسطے $\frac{1}{لا} = \frac{ر^2 + لا (لا + ن)}{ط^2 (لا + ن)} \therefore لا = \frac{ط^2 (لا + ن)}{ر^2 + لا (لا + ن)}$

اور مساوات (۳) سی $ر^2 = \frac{ص^2 ر^2 لا^2}{ط^2 (لا + ن)^2} = \frac{ص^2 ر^2}{ر^2 + لا (لا + ن)}$ بوسیلہ لکھنی

قیمت لا کے جبکہ درج کی ہمنے قیمتین لا اور ر کی مساوات (۱) مین تو یہہ حاصل ہوگا

$ط^2 ص^2 ر^2 + ص^2 ط^2 (لا + ن)^2 = ط^2 ص^2 \left\{ ر^2 + لا (لا + ن) \right\}^2$

$\therefore ص^2 ر^2 + ط^2 (لا + ن)^2 = \left\{ ر^2 + لا (لا + ن) \right\}^2$ لیکن $ص^2 =$

$(ط^2 - ن^2) \therefore ط^2 ر^2 - ن^2 ر^2 + ط^2 (لا + ن)^2 = ر^4 + 2 لا (لا + ن) ر^2$

$+ لا^2 (لا + ن)^2 \therefore ط^2 (ر^2 + (لا + ن)^2) = ر^4 + ر^2 (2 لا (لا + ن) + ن^2)$

$+ لا^2 (لا + ن)^2 = ر^4 + ر^2 لا^2 + ر^2 (لا + ن)^2 + لا^2 (لا + ن)^2 =$

$ر^۲(ر^۲+لا^۲)+(لا+ن)^۲(ر^۲+لا^۲)=(ر^۲+لا^۲)(ر^۲+(لا+ن)^۲)$

جبکہ تقسیم کیا ہمنے دونون طرف مساوات کو مقدار $(ر^۲+(لا+ن)^۲)$ پر تو ہمکو حاصل ہوگا $ط^۲=ر^۲+لا^۲$ جو کہ مساوات ایک دایرہ کی ہی جسکا نصف قطر ط ہی یہانسی ثابت ہوا کہ لوکس ر کا ایک دایرہ ہی جسکا قطرہ محور کلان بیضوی کا ہی بوسیلہ مساوات رس اور مساوات ص ن $(ر=\frac{ص^۲}{لا}\ لا)$ کی ہم ثابت کرسکتی ہین کہ یہہ دونو خط ص ن اور س ر ملینگے خط بنیادی پر—

(۱۲۱) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ فاصلہ س ن کا بنا تا ہی مماس ن ط سی

مساوات مماس کی یہہ ہی $ر=-\frac{ص^۲لا}{ط^۲ر}لا+\frac{ص^۲}{ر}$ اور مساوات خط س ن کی جو کہ گذرتا ہی نقطہ س سی (جسکے و تر۔ ن اور صفر ہی) اور نقطہ ن سی (جسکی و تر لا اور ر ہین) یہہ ہوگی $ر-ر=\frac{ر-ر}{لا-لا}(لا-لا)=$

$\frac{ر}{لا+ن}(لا-لا)$ اور مماس ن ط $=$ مس $(ن س ص-ن ط ص)$

$$=\frac{\frac{ر}{لا+ن}+\frac{ص^۲لا}{ط^۲ر}}{۱-\frac{ر}{لا+ن}\frac{ص^۲لا}{ط^۲ر}}=\frac{ط^۲ر^۲+ص^۲ن لا^۲+ص^۲ن لا}{ر(لا+ن)ط^۲-ص^۲لا)}$$

$$\frac{ط^۲ص^۲+ص^۲ن لا}{ر((ط^۲-ص^۲)لا+ط^۲ن)}=\frac{ص^۲(ط^۲+ن لا)}{ن ر(ط^۲+ن لا)}=\frac{ص^۲}{ن ر}$$ اگر ہم دریافت کیا چاہین مماس ہ ن ط کا تو ہمین صرف —ن بجاے ن کے پچھلی عمل مین رکھنا چاہیئی اسکی وسیلہ سی ہمین حاصل ہوگا مس ہ ن ط $=-\frac{ص^۲}{ر}$ اسکی وسیلہ سی دریافت ہوسکتی ہی قیمت مس ہ ن ر $=$ مس $(۱۸۰^\circ-$ ہ ن ط $)=$

$-$مس ہ ن ط $=\frac{ص^۲}{ن ر}$ یہانسی ثابت ہوا کہ دو زاویہ س ن ط اور ہ ن ر

کی برابر ہین یا مماس کسی نقطہ بیضوی کی مساوی زاویہ بناتی ہی فاصلون نقطۂ آتشی کی سے یہہ خاصیت روشنی کی ہی یعنی اگر ایک کرن نکلکر نقطہ ہ سی رن پر گری اور پہر اوس سے منعکس ہوکر سمت ن س مین گذری تب زاویہ ہ ن ر کا برابر ہوگا زاویہ س ن ر کو لیکن بیضوی مین یہہ دونون زاویہ مساوی ہوتی ہین اب اگر روشنی نقطہ ہ پر رکہی جاوی تو تمام کرن منعکس ہوکر نقطہ س پر آوینگی اسیواسطے نقاط ہ اور س کو نقاط آتشی یا فوکس کہتی ہین یہہ ایک خاصیت مشہور ہی اور اب ہم اسکو ایک اور طور سی ثابت کرینگی — موافق (۱۱۹) کے س ر = ع − ص √(ل/ق) اور ہ ر = ع − ص √(ل/ق) ∴ س ر : ہ ر :: ق : ل :: س ن : ہ ن یہانسی دریافت ہوا کہ دو مثلث س ن ر اور ہ ن ر کی الیسمین مشابہ ہین اور زاویہ س ن ر کا مساوی ہی زاویہ ہ ن ر کے *

(۱۲۲) دریافت کرو طول عمود ص و کا جو کہ کہینچا گیا ہی مرکز سی مماس پر جو کہ بابت ہو چکا ہی کہ ع = √(ا۲ + ب۲ − د۲ / ا۲ + ۱) یہان د = ۰ اور لا = ۰ اور

طریقہ آیندہ واسطے کہینچنے مماس بیضوی کی جو کہ بوسیلہ ہندسہ کی ثابت کیا گیا ہی اور واسطی ثابت کرنے اس بات کی کہ لوکس اس عمود کا جو کہ کہینچا جاوے نقطہ آتشی سے مماس پر وہ دایرہ ہی جسکا قطر محور کلان بیضوی کا ہوگا بہت مفید معلوم ہوتا ہی فرض کرو کہ اف ا بیضوی ہی اور ف ایک نقطہ اسپر واقع ہی ملاؤ س ف اور ہ ف کو اور کہینچکر ف کو ک تک قطع کرو اسیمین سے ف ک = ف س تنصیف کرو زاویہ

$$ا = -\frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲} ی^{۲}} \text{ اور } د = \frac{ص^{۲}}{ی^{۲}} \therefore ص د = \frac{\frac{ص^{۲}}{ی^{۲}}}{\sqrt{۱ + \frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲} ی^{۲}}}} =$$

$$\frac{ط^{۲} ص^{۲}}{\sqrt{ط^{۲} ی^{۲} + ص^{۲} لا^{۲}}} = \frac{ط^{۲} ص^{۲}}{ط ص \sqrt{ط^{۲} - ی^{۲} لا^{۲}}} = \text{(۱۱۴)}$$

$$\frac{ط ص}{\sqrt{(ط + ی لا)(ط - ی لا)}} = \frac{ط ص}{\sqrt{ص ص'}}$$

کرف س کو خط ر ف سی اور ملاؤ س ک جو کہ قطع کرتا ہی ف ک کو نقطہ ت پر

(۱) پہلی ہم یہہ ثابت کرینگی کہ ف ت مماس بیضوی کا ہی کیونکہ اگر کوئی اور نقطہ ن خط ف ر پر ہو تو ظاہر ہی کہ س ن + ن ہ = ک ن + ن ہ بڑا ہوگا کہ ۲ ط سے یہانتک ثابت ہوا کہ ہر ایک نقطہ خط ر ف پر سوای ف کی خارج بیضوی کے ہے

(۲) لوکس نقطہ ک کا وہ دایرہ ہی جو کہ گرد بیضوی کی کھیچا جاوے اور ملے ثبوت اس مطلب کے کھینچو ہ ر متوازی س ک کے اور ملاؤ ص ر اب چونکہ مثلث س ف ر کا مساوی مثلث کہ ف ک کی ہی تو زاویہ س ر ف قایمہ ہوگا یا س ر اور ہ ر عمود مماس پر ہین چونکہ س ر = ک ر اور س ص = ص ہ کی تو ص ر متوازی ک ہ کی ہوگا اور ص ر = ½ ک ہ = ½ (س ف + ف ہ) = ص ا

(۳) سطح س ر اور ہ ر = مربع ب ص فرض کرو کہ خط ر ہ دایرہ سی بہی نقطہ د پر ملتا ہی اور ملاؤ ص د اور چونکہ زاویہ ر د ق قایمہ ہی اور نقاط ت اور د محیط دایرہ پر ہین تو خط ت ص د خط مستقیم اور قطر دایرہ کا ہوگا یہانتک معلوم ہوا

(۱۲۳) دریافت کرو لوکس نقطہ د کا ظاہر ہی کہ

ط² ر² + ص² لا² = ط² ص² ..... (۱)

اور ط² ر² + ص² لا ا = ط² ص² ..... (۲)

اور ر = $\frac{ط^2 ر}{ص^2 ر}$ لا ..... (۳) یہہ مساوات ص د کی ہی

اگر عمل کرین ہم ان مساواتون پر جیسا کہ فقرہ (۱۲۰) مین کیا تہا بوسیلہ اس عمل کے دور کرکے لا اور ر کو حاصل کرین گی ہم یہہ مساوات

ص² ر² + ط² لا² = (ر² + لا²)² یہہ مساوات مثلا ایک بیضوی کی ہی جسکا ذکر کیا جائیگا - ☆ ☆ ☆ (۱۲۴) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ خط ص ان بناتا ہی مماس سے مساوات ص ن کی یہہ ہی ر = $\frac{لا^2}{ر}$ اور مساوات مماس ط ن کی یہہ ہی

ر = $-\frac{ص^2 لا^2}{ط^2 ر} لا + \frac{ص^2}{ر}$ مس ص ن ط = مس (ن ص ہ - ن ط ص)

= $\frac{مس ن ص ہ - مس ن ط ص}{1 + مس ن ص ہ مس ن ط ص} = \frac{\frac{لا^2}{ر} + \frac{ص^2 لا^2}{ط^2 ر}}{1 - \frac{ص^2 لا^2}{ط^2 ر}} =$

$\frac{ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2}{ط^2 لا^2 ر - ص^2 لا^2 ر} = \frac{ط^2 ص^2}{لا^2 ر (ط^2 - ص^2)} = \frac{ط^2 ص^2}{لا^2 ر ن}$ پہان ن تعبیر ہوا کہ مثلث ص س ر مساوی مثلث ص ہ د کی ہی اور سطح س ر ہ ر = سطح ر ہ اور ہ د = سطح ہ ا اور ا ہ = مربع ب ص (۱۰۸)

(۴) فرض کرو کہ س ف = ن ق اور ہ ف = ۲ ط - س ف = ۲ ط - ن ق اور مان لو کہ س ا = ع اور ہ ر = ع تو ع² = $\frac{ص^2 ن}{۲ط - ن}$ کیونکہ بسبب مشابہ ہونی سلطون کے س ا : س ف :: ہ ر : ہ ف :: ع : ع تو $\frac{ع}{ع} = \frac{ن}{۲ط - ن}$ اور چونکہ اوپر ثابت ہوا کہ ع ع = ص² ن ع² = $\frac{ص^2 ن}{۲ط - ن}$

کرتا ہی خارج المرکز کو

(۱۲۵) مساوات ص و = ص ر جس ص ر و سی ہمین حاصل ہوگا یعنے

$\frac{\text{ط ص}}{\sqrt{\text{ل ق}^2}}$ = ط جس ص ر و ∴ جس ص ر و = $\frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{ل ق}^2}}$ اور ہ ر = ہ ن جس ہ ن ر

سی ہمین حاصل ہوگا ص $\sqrt{\frac{\text{ل ق}^2}{\text{ق}^2}}$ = ق ت جس ہ ن ر ∴ جس ہ ن ر = $\frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{ل ق}^2}}$ ∴ زاویہ ص ر و = زاویہ ہ ن ر اور یہانسی ثابت ہوا کہ ص ر متوازی ہی ہ ن کے اب اگر ص ی کھینچا جاوے متوازی مماس ط ن کے جو کہ ملیگا ہ ن کو نقطہ ی مین تو ن ی = ص ر = ا ص ∴ ∴ ∴

عمود مماس کے بیان مین

(۱۲۶) عمود مماس کسی نقطہ خط منحنی کا وہ خط ہی جو کہ کھینچا جاوے نقطہ تماس سی عمود مماس پر۔ دریافت کرو مساوات عمود مماس ن گ کی مساوات اوس خط کی جو کہ گذری نقطہ ن سے (جسکے و تر لا اور ر ہین) یہہ ہی

ر - ر' = ا (لا - لا') لیکن یہہ عمود ہی مماس پر جسکی مساوات یہہ ہی ر = $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ لا + $\frac{\text{ص}^2}{\text{ر}'}$ ∴ ا = $\frac{\text{ط}^2 \text{ر}'}{\text{ص}^2 \text{لا}'}$ اسیواسطی مساوات عمود مماس کے یہہ ہوگی

ر - ر' = $\frac{\text{ط}^2 \text{ر}'}{\text{ص}^2 \text{لا}'}$ (لا - لا') — (۱۲۷) دریافت کرو وہ نقطی جہانکہ عمود مماس کا متاہی محور وکو فرض کرو ر = ۰ ∴ - ر' = $\frac{\text{ط}^2 \text{ر}'}{\text{ص}^2 \text{لا}'}$ (لا - لا')

∴ لا = لا' - $\frac{\text{ص}^2 \text{لا}'}{\text{ط}^2}$ = $\frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ لا' = $\frac{\text{ی}^2}{\text{ط}^2}$ لا' = ص گ اور اب فرض کرو کہ

لا = ۰ ∴ ر = ر' - $\frac{\text{ط}^2 \text{ر}'}{\text{ص}^2}$ = - $\frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{\text{ص}^2}$ ر' = - $\frac{\text{ط}^2 \text{ی}^2}{\text{ص}^2}$ ر' = ص گ

یہانسی ثابت ہوگا کہ س ص = ص گ = ط ی - ی لا فاصلہ

فاصلہ م ک پای وتر سے پای عمود مماس تک خط پائین کہلاتا ہی اور قیمت اسکی یہہ ہی لا − لا۲ = − $\frac{\text{صا}^2}{\text{ط}^2}$ لا۲ (۱۲۸) قیمتوں نکالی ہوئی م ک اور ص ک، سی یہہ حاصل ہوتا ہی ن ک = ر۲ + $\frac{\text{صا}^2}{\text{ط}^2}$ لا۲

= $\sqrt{\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}(\text{ط}^2 - \text{لا}^2) + \frac{\text{صا}^2}{\text{ط}^2}\text{لا}^2}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}\sqrt{\text{ط}^2 - \text{لا}^2 + \text{صا}^2\text{لا}^2}$ =

$\frac{\text{ص}}{\text{ط}}\sqrt{\text{ط}^2 - \frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{\text{ط}^2}\text{لا}^2}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ی}^2\text{لا}^2}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ ل ق اور

اسیطرح قیمت ن ک = $\frac{\text{ط}}{\text{ص}}$ ل ق اسیواسطے سطح ن ک اور ن گ

= ل ق = سطح س ن اور ہ ن اور نہایت بڑی قیمت عمود مماس کی

حاصل ہوگی جبکہ لا = ۰ یہانسے معلوم ہوگا کہ انجام محور خورد نہایت بڑی قیمت

عمود مماس = ص اور اسیطرح ثابت ہوگا کہ نہایت کم قیمت عمود مماس کے

انجام محور کلان پر = $\frac{\text{صا}^2}{\text{ط}}$ یا برابر نصف وتر آلتشی اعظم کے ہی (۱۰۵) اور

س ک = $\frac{\text{ط ی}}{\text{ص}}$ ل ق کیونکہ س ک = ص س۲ + ص ک۲ =

$\sqrt{\text{ط}^2\text{ی}^2 + \text{ط}^2\text{ی}^2\text{ر}^2}$ = $\sqrt{\frac{\text{ص}^2\text{ط}^2\text{ی}^2 + \text{ط}^4\text{ی}^2\text{ر}^2}{\text{ص}^2}}$ =

$\frac{\text{ط ی}}{\text{ص}}\sqrt{\text{ص}^2 + \text{ط}^2\text{ی}^2\left(\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}(\text{ط}^2 - \text{لا}^2)\right)}$ = $\frac{\text{ط ی}}{\text{ص}}\sqrt{\text{صا}^2 + \text{ی}^2\text{ط}^2 - \text{ی}^2\text{لا}^2}$

= $\frac{\text{ط ی}}{\text{ص}}\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ط}^2\text{ی}^2 + \text{ط}^2\text{ی}^2 - \text{ی}^2\text{لا}^2}$ = $\frac{\text{ط ی}}{\text{ص}}\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ی}^2\text{لا}^2}$ =

$\frac{\text{ط ی}}{\text{ص}}\sqrt{(\text{ط} + \text{ی لا})(\text{ط} - \text{ی لا})}$ = $\frac{\text{ط ی}}{\text{ص}}$ ل ق اور ک ک = $\frac{\text{ط ی}^2}{\text{ص}}$ ل ق کو سطح

ک ک = $\sqrt{\text{ص ک}^2 + \text{ص ک}^2\text{ر}^2}$ = $\sqrt{\text{ی لا}^2 + \frac{\text{ط}^2\text{ی}^2}{\text{ص}^2}\text{ر}^2}$ = $\sqrt{\frac{\text{ی}^2\text{لا}^2\text{ص}^2 + \text{ط}^2\text{ی}^2\text{ر}^2}{\text{ص}^2}}$

= $\sqrt{\frac{\text{ی}^2\text{لا}^2\text{ص}^2(\text{ط}^2 - \text{ط}^2\text{ی}^2) + \text{ط}^2\text{ی}^2\text{ر}^2}{\text{ص}^2}}$ =

$\frac{\text{ط ی}^2}{\text{ص}}\sqrt{\frac{\text{لا}^2\text{ص}^2 - \text{لا}^2\text{ص}^2\text{ی}^2 + \text{ط}^2\text{ر}^2}{\text{ص}^2}}$ =

$$\frac{ط ی^{۲}}{ص}\sqrt{\frac{لا^{۲} ص^{۲} - لا^{۲} ص^{۲} ی^{۲} + ط^{۲} \frac{ص^{۴}}{ط^{۲}} (ط^{۲} - لا^{۲})}{ص^{۲}}} =$$

$$\frac{ط ی^{۲}}{ص}\sqrt{\frac{لا^{۲} ص^{۲} - لا^{۲} ص^{۲} ی^{۲} + ص^{۲} ط^{۲} - ص^{۲} لا^{۲}}{ص^{۲}}} =$$

$$\frac{ط ی^{۲}}{ص}\sqrt{\frac{ص^{۲} ط^{۲} - لا^{۲} ص^{۲} ی^{۲}}{ص^{۲}}} = \frac{ط ی^{۲}}{ص}\sqrt{ط^{۲} - ی لا^{۲}} = \frac{ط ی^{۲}}{ص}\sqrt{\text{لی لو}}$$

یہانتک معلوم ہوا کہ ک ک = ی × س ک اگر ایک عمود ک ل کا کھینچا جاوے نقطہ ک سے س ن یا ہ ن پر تب مثلث ن ک ل کا مشابہ ہوگا مثلث س ن ہ کو اسیواسطے ن ل = ن ک × $\frac{ع}{ی}$ یا = ن ک $\frac{ع}{\text{لی}}$ = $\frac{ص^{۲}}{ط}$ = $\frac{۱}{۲}$ وتر آتشی اعظم۔ (۱۲۹) چونکہ مماس مساوی زاویہ بناتا ہی فاصلون نقطہ آتشی سے اور عمود مماس عمود ہی مماس پر اسیواسطے یہہ بھی مساوی زاویہ بناوینگا فاصلون نقطہ آتشی سے لیکن یہہ دعوی بطریق آیندہ کی بھی ثابت ہوسکتا ہی

س ک : ہ ک :: س ص − ص ک : ہ ک + ص ک

:: ط ی − ی^{۲} لا : ط ی + ی^{۲} لا

:: ط − ی لا : ط + ی لا

:: س ن : ہ ن

یہانتک ثابت ہوا کہ س ک : ہ ک :: س ن : ہ ن اسیواسطے بحکم ایک شکل چوتھی مقالہ اقلیدس کے زاویہ س ن ہ کا۔ تنصیف کیا گیا بہ خط ن ک سے

قطرون کے بیان میں

(۱۳۰) قطر کی تعریف ہمنی فقرہ (۴۶) مین کی ہی کہ وہ ایک خط ہی جو کہ تنصیف

تنصیف کرتا ہی تمام متوازی وتروں کو ہم اب ثابت کرینگے کہ تمام قطر بیضوی کی خطوط مستقیم ہین اور مرکز بیضوی پر سے گذرتی ہین لیکن پہلی بات بالکل ظاہری اور کچھہ ثبوت کی حاجت نہین رکھتی ہی کیونکہ کوئی خط نہیں تنصیف کرسکتا ہی متوازی وتروں کو بغیر خود گذرنے کی مرکز پر سے فرض کرو کہ ر = لا + د مساوات ایک وتر کی ہی اور مساوات بیضوی کی یہہ ہی ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ بدلو نقطہ شروع نقطہ تنصیف وتر پر جسکے وتر لا ر ہین اگر ہم لکھین ر + ر بجای ر کے اور لا + لا بجای لا کے تو اس صورت مین مساوات وتر کی یہہ ہوگی

ر + ر = ر (لا + لا) + د اور چونکہ یہہ بھی ظاہر ہی کہ ر = لا + د اسیواسطے ر = ر اور صورت مساوات بیضوی کی یہہ ہوجاویگی ط۲ (ر + ر)۲ + ص۲ (لا + لا)۲ = ط۲ ص۲ اب دریافت کرو کہان وتر کا ٹتا ہی خط منحنی کو واسطے اسکے لکھو لا بجای ر کے مساوات گذشتہ مین ∴ ط۲ (لا + ر)۲ + ص۲ (لا + لا)۲ = ط۲ ص۲ یا (ط۲ ر۲ + ص۲) لا۲ + ۲ (ط۲ ر ر + ص۲ لا) لا + ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ لیکن چونکہ نقطہ شروع وتر کی نقطہ تنصیف پر ہی اسیواسطے دو قیمتین لا کی آپسمین برابر ہونی چاہئین اور علامتین ان دونونکی مختلف یعنی دوسرا جزر مساوات گذشتہ کا مساوی صفر کی ہونا چاہئے ∴

ط۲ ر ر + ص۲ لا = ۰ اسی مساوات سے نسبت ر اور لا کے معلوم ہوتی ہی

یہان وتر سے مراد وتر ہندسی ہی اور نہ بعینہ وہ وتر جسکا ذکر پہلی آیا ہی اور واضح ہو کہ یہہ وتر نصف پہلی وتر کا ہوتا ہی —

اور چونکہ ہمین د د خل نہین رکھتا ہی اسیواسطی یہہ ایک سی ہوگی واسطی کسی وتر جو کہ متوازی ی = ا لا + د کی ہی بہانسی دریافت ہوا کہ اگر ہم لآ اور رَ کو غیر منقطع فرض کرین تو مساوات ط٢ ر٢ + ص٢ لا٢ = ٠ مساوات نقاط تضیف اوتار کا ہوگی پس یہہ ظاہر ہی کہ یہہ مساوات خط مستقیم کی ہی جو کہ مرکز پر سی گذرتا ہی برعکس اسکے کوئی خط مستقیم گذرتا ہوا مرکز پر سی ایک قطر ہی — ⁘ ⁘ ⁘ ⁘

(۱۳۱) ایک قطر دوسری قطر کا متجانس اسوقت کہلاتا ہی جبکہ قطر اول تنصیف کرے تمام وتر دکو جو کہ متوازی دوسری قطر کی ہون یہانسی ثابت ہوا کہ محور کلان اور محور خرد متجانس ایک دوسری کے ہین اور مساوات ط٢ ر٢ + ص٢ لا٢ = ط٢ ص٢ کا مرکز نقطہ شروع ہی اور قطر متجانس متقاطع علی القوایم ہین اگر ایک خط منحنی ایسا ہو جسکے وتر جیبی ہین یعنی عمود انہون اور اسکی مساوات مین صرف لآ اور رَ آ پائی بجاوین اور مقدار مقررہ تو اس صورت مین نئی محور اس خط منحنی کے بھی قطر متجانس ہونگی کیونکہ واسطے ہر ایک قیمت ایک کی وتر اور وتر العرض مین نئی دو مساوی اور مختلف علامتون کی قیمتین دوسری کے حاصل ہوتی ہین اس مساوات کی وسیلہ سی دریافت ہونگے اور مساوا تین جنکی محور ترجیبی اور متجانس قطر ہون جبکہ معلوم ہونگی تام وہ محور واسطے جنکی مساوات بیضوی کی یہی رہتی بوقت تبدیل کرنی قیمتون کی فرض کرو کہ مساوات بیضوی کی یہہ ہو ط٢ ر٢ + ص٢ لا٢ = ط٢ ص٢ اور مساوا تین واسطے تبدیل سمت محور دکی یہہ ہین موافق فقرہ (۵۷) ی = لا جس ر + رَ جس ر اور لا = لا جم ر + رَ جم ر جبکہ لکھی ہمنی یہہ قیمتین ی اور لا کی مساوات گذشتہ مین تو حاصل ہوگا یہہ

$ط^۲ (لا^۲ جس ر + ر^۲ جس ر)^۲ + ص^۲ (لا^۲ جم ر + ر^۲ جم ر)^۲ = ط^۲ ص^۲$ یا

$(ط^۲ (جس ر)^۲ + ص^۲ (جم ر)^۲) ر^۲ + (ط^۲ (جس ر)^۲ + ص^۲ (جم ر)^۲) لا^۲$

$+ ۲ (ط^۲ جس ر جس ر + ص^۲ جم ر جم ر) لا ر = ط^۲ ص^۲$ اگر ہم اس مساوات کو

اسطرح تبدیل کیا چاہین کہ اسکے محور اقطار متجانس ہو جاوین تو اسکی لازم ہی جز

$لا ر$ کو دور کرین اور چونکہ اس مساوات مین ہمنی دو مقدار غیر مقررہ ر اور ر کے

داخل کی ہین اسلیے ہم اختیار $لا ر = ۰$ کی فرض کر سکتی ہین اب ہمین حاصل

ہو گی یہ شرط $ط^۲ جس ر جس ر + ص^۲ جم ر جم ر = ۱$ یعنی $مس ر مس ر = \frac{ص^۲}{ط^۲} - ۱$ اب اس مساوات کی وسیلہ سی دو نو زاویہ ر اور ر کی دریافت نہین ہو سکتی لیکن

درسطی ایک خاص قیمت ایک زاویہ کی قیمت دوسری زاویہ کی دریافت ہو گی بہانسی

معلوم ہوا کہ لانہایت ایسی مساوا تین ہو سکتی ہین جنکے محور قطر متجانس ہون

اگر شکل آیندہ مین کیہچین ہم خط ص ن بنا تا ہوا ایک زاویہ ر کا خط ص ا سی اور

ص و بنا تا ہوا ایک زاویہ ر کا (جسکے مماس $= \frac{ص^۲}{ط^۲}$ مم ر ہی) صلا سی تب

ص ن اور ص و قطر متجانس ہین اور چونکہ حاصل ضرب مماسونکا منفی ہی اسلیے

اگر ص ن کیہچین ہم زاویہ ا ص ب مین تو ص و کیہچنا چاہیئے زاویہ ب ص ا مین

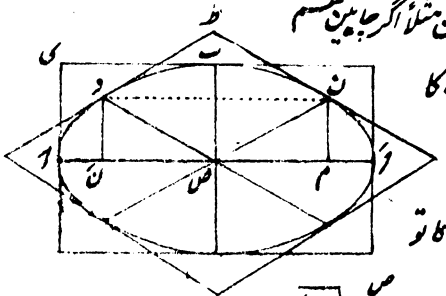
(۱۳۰) اگر $ر - ر' = ۰$ کی ہو تو امتحان کرنا مساوات مرقومہ بالا کا کچھ ضرور نہین

کیونکہ اس صورت مین تو بھی محور اصلی محور ہو جاوینگے لیکن اب ہم دیکھینگے کہ آیا اور

بھی محور ہو سکتے ہین یا نہین اسلیے فرض کرو کہ $ر = ۹۰ + ر'$ ∴ جس ر =

جم ر اور جم ر = − جس ر اب صورت مساوات (۱) کی جس سی شرط ر اور ر کی

معلوم ہوتی ہی یہہ ہو جاویگی (ط۲ - ص۲) جس رجم ر = ۰ اور جونکہ بیضوی
مین ط۲ = ص۲ کے نہین ہوسکتا ہی اسیواسطی مساوات گذشتہ مین فرض کرو
کہ ر = ۰ یا ر = ۹۰° ان دونو قیمتون کے وسیلہ سے اصلی محور حاصل ہوتے
یہانتک ثابت ہوا کہ صرف اسی قسم کی اقطار محوری ہوسکتی ہین یہہ بات منطبق
(۸۷) کی ہی ہمنی اگرچہ تبدیلی بالا مین دو مقدارین غیر مقررہ ز اور ر کے
داخل کی ہین لیکن ہم دو جزر مساوات کی دور نہین کرسکتے الا اوس صورتین جبکہ قسمیر
دو مقدارون کی ممکن ہون مثلاً اگر چہ یہہ ہم



دور کرنا کسی جزر مساوات کا
جیسا کہ مان لو کہ دور کیا
ہمنی دوسرا جزر مساوات کا تو

ہمین حاصل ہوگا یہہ ہمس ر = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}\sqrt{-1}$
یہہ ایک ایسی قیمت ہی جو کہ ناممکن ہی یہانتک ظاہر ہوا کہ لا ئ = ۰ ہمنی ایک فرض ممکن اختیار کیا
(۱۳۳) مساوات خط منحنی کے یہہ ہی $\left\{\text{ط}^2(\text{جس ر})^2 + \text{ص}^2(\text{جم ر})^2\right\}$ ئ۲
$+\left\{\text{ط}^2(\text{جس ر})^2 + \text{ص}^2(\text{جم ر})^2\right\}$ لا۲ = ط۲ ص۲ اگر ہم فرض کرین کہ ہی در ہے
ئ = ۰ اور لا ئ = ۰ تو ہمین دریافت ہوگی وہ فاصلے جو کہ نقطہ شروع سے
اوس نقطہ تک ہی جہانکہ خط منحنی محور کو قطع کرتا ہی اور تعبیر کرو ان فاصلون
کو ط اور ص اسی اول مقدار ہمین سے فرض کرو کہ محور لا پر شمار کیی
گئی ہی اور دوسری محور ئ پر اب اگر اس عمل کو جاری کرین ہم تو ئ = ۰

تو ز = ۰ ∴ {ط۲ (جس ر)۲ + ص۲ (جم ر)۲} ط۱۲ = ط۲ ص۲

اور گر لا = ۰ ∴ {ط۲ (جس ر)۲ + ص۲ (جم ر)۲} ص۱۲ = ط۲ س۲

اسیواسطے ط۲ (جس ر)۲ + ص۲ (جم ر)۲ = ط۲ ص۲ / ط۱۲

اور ط۲ (جس ر)۲ + ص۲ (جم ر)۲ = ط۲ ص۲ / ص۱۲ اگر لکھین ہم ان قیمتون

کو مساوات گذشتہ مین تو حاصل ہوگا یہہ ط۲ ص۲ / ص۱۲ ز۲ + ط۲ ص۲ / ط۱۲ لا۲ = ط۲ ص۲

یا ز۲ / ط۱۲ + لا۲ / ص۱۲ = ۱ یعنے ط۲ ز۲ + ص۱۲ لا۲ = ط۱۲ ص۱۲ اسمین طول نصف

متجانس قطرونکا ۲ ط۱ اور ۲ ص۱ ہی ۔ ۔ ۔ ۔ ۔

(۱۳۴) تبدیلی مرقومہ بالا سی تین مساواتین مرقومۂ ذیل حاصل ہونگی

ط۱۲ (ط۲ (جس ر)۲ + ص۲ (جم ر)۲ = ط۲ ص۲ ..... (۱)

ص۱۲ ط۲ (جس ر)۲ + ص۲ (جم ر)۲ = ط۲ ص۲ ..... (۲)

ط۲ جس ر جس ز + جس ۲ جم ر جم ز = ۰

یا س ر س ز = − ص۲ / ط۲ ..... (۳)

جبکہ لکھا ہمنے ا۔ جس۲ ر بجای جم ر۲ کے مساوات (۱) مین تو حاصل ہوگا یہہ

ط۱۲ (ط۲ − ص۲) جس۲ ر = ط۲ ص۲ − ط۱۲ ص۲ اور ط۱۲ (ط۲ − ص۲) جم ر۲

= ط۱۲ ط۲ − ط۲ ص۲ اور تقسیم کرنی سی مساوات اول کو دوم پر یہہ حاصل ہوتا ہے

س۲ ر = ص۲ / ط۲ ط۲ − ط۱۲ / ط۱۲ − ص۲ اسیطرح مساوات (۲) سی حاصل ہوگا یہہ

س۲ ز = ص۲ / ط۲ ط۲ − ص۱۲ / ص۱۲ − ص۲ ضرب دینی سی ان دونون مساوانون کو یہہ

حاصل ہوتا ہی س۲ ر س۲ ز = ص۴ / ط۴ ط۲ − ط۱۲ / ط۱۲ − ص۲ ط۲ − ص۱۲ / ص۱۲ − ص۲ = ص۴ / ط۴

کیونکہ مساوات (۳) سی مس ر۲ = $\frac{\text{ص}^4}{\text{ط}^2}$ اسیوسطے (ط۲-ط۲) (ط۲-ص۲)
= (ط۲-ص۲) (ص۲-ص۲) یا ط۴ - ط۲ ص۲ - ط۲ ط۲ + ط۲ ص۲ =
= ط۲ ص۲ - ط۲ ص۲ - ص۲ ص۲ + ص۴ ∴ ط۴ - ص۴ = ط۲ ص۲
+ ط۲ ط۲ - ط۲ ص۲ - ص۲ ص۲ = ط۲ (ط۲ + ص۲) - ص۲ (ط۲ + ص۲) =
= (ط۲ - ص۲) (ط۲ + ص۲) ∴ ط۲ + ص۲ = ط۲ + ص۲ یعنے مجموعہ مربعون
کا اوسط متجانس کا برابر ہی مجموعہ مربعو نکو جو کہ بنائی جاوین محوردن پر یہہ ایک شکل
بیضوی کے بہت مشہور ہی۔

(۱۳۵) اگر ضرب کرین ہم مساوات (۱) کو (۲) سی اور اس حاصل ضرب مین سے
تفریق کرین مجذور (۳) مساوات کو تو ط۲ ص۲ {ط۴ (جس ر)۲ (حس ر)۲
+ ص۴ (جم ر)۲ (حم ر)۲ + ط۲ ص۲ (حس ر)۲ (حم ر)۲ + ط۲ ص۲ (جس ر)۲ (جم ر)۲
= ط۲ ص۲ اور مجذور (۳) سی یہہ حاصل ہوتا ہی ط۴ (جس ر)۲ (جس ر)۲
+ ص۴ (جم ر)۲ (جم ر)۲ + ۲ ط۲ ص۲ جس ر جس ر جم ر حم ر = ۰ جبکہ تفریق کیا
ہمنی مساوات اول مین سے دویم کو تو ط۲ ص۲ ط۲ ص۲ {(جس ر)۲ (حم ر)۲
- ۲ جس ر حس ر جم ر حم ر + (جس ر)۲ (حم ر)۲} = ط۴ ص۴ یا
ط۲ ص۲ {جس ر جم ر - جس ر حم ر}۲ = ط۲ ص۲ یا ط۲ ص۲ {حس (ر-ر)}۲ =
= ط۲ ص۲ اور جذر لینے سے دونو طرف اس مساوات کی یہہ حاصل ہوتا ہی
ط ص جس (ر-ر) = ط ص اب ظاہر ہی کہ (ر-ر) مساوی زاویہ ن ص د
کے ہی جو کہ واقع درمیان قطر متجانس ص ن اور مس د کی پر اگر ہم کہینچین

ایسی خطوط سے دن قطر متجانس کیسی جو کہ متوازی اسمین قطر دونی ہون تو مساوات گذشتہ سی ثابت ہوگا کہ متوازی الاضلاع ن ص د ط = سطح اص ب ی اسیطرح پر ثابت ہوسکتا ہی کہ تمام متوازی الاضلاع گرد کیھنچے گئے بیضوی کے مساوی ہوگی اوس سطح کی جو کہ ضرب دینی محور خود اور محور کلانکی پیدا ہوگی *

اگر انجام اقطار متجانس ملائی جاوین تو ظاہر ہی کہ ایک ایسی متوازی الاضلاع پیدا ہوگی جو کہ مساوی ہی نصف گرد کیھنچے گئے متوازی الاضلاع کے ہم اس بات سی بھی طالبعلم کو مطلع کردیتی ہین کہ بیرونی متوازی الاضلاع جو ہو تمام اون متوازی الاضلاعون سے ہوگی جو کہ کیھنچی جاوین گرد بیضوی کے اور اندرونی متوازی الاضلاع

* شکل جو کہ (۱۳۴) اور (۱۳۵) مین ثابت ہوئی ہین وہ بطور آیندہ کی بھی ثابت ہوسکتی ہین فرض کرو کہ محور خط نحنی کے متقاطع علی القوایم ہین جیسیکہ (۱۳۸) مین ہی اور مان لو کہ د ترن کے لا اور ر ہین تب مساوات ص د کی $ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ اور اسمین د ور کرو مقادیر لا اور ر کو اس مساوات مین سی بوسیلہ مساوات $ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ تب حاصل ہونگی خطوط ص ن اور د ن سکل گذشتہ مین جو کہ ترتیب د کی ہین اور یہ نقطہ تقاطع خط ص د اور خط نحنی کا ہی ∴ ص ن = لا − $\frac{ط^2 ر}{ص}$ اور د ن = ر − $\frac{ص لا}{ط}$ یہانسی حاصل ہوگا $ط^2 + ص^2$

$= لا^2 + ر^2 + لا^2 ر^2 = لا^2 + ر^2 + \frac{ط^4 ر^2}{ص^2} + \frac{ص^2 لا^2}{ط^2} = \frac{ص^2 لا^2 + ط^2 ر^2}{ط^2} + \frac{ط^2 ر^2 + ص^2 لا^2}{ط^2}$

$= \frac{ط^2 ص^2}{ص^2 ط^2} = ط^2 + ص^2$ اور مثلث ن ص د = {متوازی الاضلاع ن م ن د − مثلث ن ص م} اور مثلث د ص ن = $(لا + لا')\frac{ر}{2} - \frac{لا ر}{2} - \frac{لا' ر}{2} = \frac{لا' ر + ر لا}{2}$

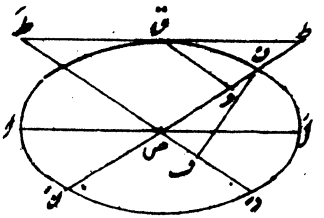
$= \frac{1}{2}\{لا' ص - \frac{ط^2 ر}{ص} + ر \frac{ط^2 ر}{ص}\} = \frac{ص^2 لا^2 + ط^2 ر^2}{2 ط ص} = \frac{ط ص}{2}$ اسیواسطی متوازی الاضلاع

ن ص د ط = ط ص ہمنی یہان علامت ص ن کا خیال نہین کیا کیونکہ یہ ایک ضرب قیمتون [illegible]

بری تمام اون متوازی الاضلاع سی ہین جو کہ اندر بیضوی کے کھینچی جاوین

(۱۳۶) اگر ہم رجوع کرین فقرہ (۱۳۳) کیطرف اور دور کرین نشانون کو

لا اور رَ پر سی جنکی اب کچھ ضرورت نہین ہی تو ہمین حاصل ہوگا



ط۲ ر۲ + ص۱۲ لا۲ = ط۲ ص۱۲

اس شکل مین ص ن = ط۱ اور

ص د = ص۱ اور ص د = لا اور

د ق = ر رکھو مساوات گذشتہ کو

اس صورت مین ر۲ = $\frac{ص_1^2}{ط^2}$ (ط۲ − لا۲) = $\frac{ص_1^2}{ط_1^2}$ (ط۱ − لا) (ط۱ + لا)

یہانسی ثابت ہوا کہ مربع او پر وتر ق د : سطح ن د اور د ن :: مربع ص د : مربع

ص ن ٭ ٭ ٭ (۱۳۷) مساوات مماس کسی نقطہ ق (لا اور رَ)

کی موافق (۱۱۱) کی یہہ ہوگی ط۲ ر رَ + ص۱۲ لا لا = ط۲ ص۱۲ اور نقاط ط

اور طَ جہانکہ یہہ مماس کاٹتا ہی نئی محورون کو دریافت ہو سکتی ہوافق (۱۱۴)

ص ط = $\frac{ط_1^2}{لا}$ اور ص طَ = $\frac{ص_1^2}{ر}$ اور مماس جو کہ کھینچی جاوین انجامون سی ایک

وتر کی ملین گے قطر سے اوس وتر کی موافق فقرہ (۱۱۴) کے ٭ ٭ ٭

(۱۳۸) فرض کرو کہ محور بیضوی کے محور متقاطع علی القوایم ہین اور یہہ بھی مان لو

کہ وتر نقطہ ن کے لا اور رَ ہین تب مساوات ص ن کی یہہ ہوگی

ر = $\frac{رَ}{لا}$ لا اور مساوات خط ص د کی یہہ ہوگی ر = لا مس رَ لیکن

مس رَ = − $\frac{ص_1^2}{ط_1^2}$ مم رَ موافق (۱۳۴) کی ∴ ر = − $\frac{ص_1^2}{ط_1^2}$ مم رَ × لا

$= -\frac{ص^2 لا}{ط^2 ى}$ لا یا $ط^2 ى^2 + ص^2 لا^2 = 0$ لیکن مساوات مماس کے

جو کہ کھینچی جاوین نقطہ ن سی یہہ ہی $ط^2 ى ى' + ص^2 لا لا' = ط^2 ص^2$ بہانسی

ظاہر ہوتا ہی کہ خط ص د جو کہ قطر متجانس ص ن کا ہی متوازی اوس مماس

کی ہی جو کہ کھینچا جاوے نقطہ ن سی اسی سبب سی اکثر اوقات تعریف قطر متجانس کی

اسطرح پر کرتے ہین قطر متجانس کے کسی قطر کا ایک ایسا خط ہی کہ مرکز سی گذرتا ہوا جاوے متوازی

اوس مماس کے جو کہ انجام سے دوسرے قطر کے کھینچا گیا ہی مساوات قطر متجانس کے بسہولت یاد ہوسکتی ہے

کیونکہ اسکی مساوات اور مساوات مماس مین صرف مقدار مقررہ اخیر جز کا فرق ہی

یعنی مساوات مماس مین $ط^2 ص^2$ پایا جاتا ہی اور اسمین نہین اسیواسطے اسکی

مساوات بہی خط سنخی سے نکل سکتی ہی جیسا کہ فقرہ (۱۱۱) کے اخیر مین لکہی ہوی ہی

تین مساواتین مذکورہ بالا یہہ ہین $ط^2 ى^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ خط سنخی کی ہی

$ط^2 ى ى' + ص^2 لا لا' = ط^2 ص^2$ مماس کی ہی $ط^2 ى ى' + ص^2 لا لا' = 0$ قطر متجانس کی ہی

مساوات خط دط جو کہ گذرتا ہی نقطہ د مین سے جسکے وتر $\frac{ص لا'}{ط}$ اور $-\frac{ط ى'}{ص}$

(دیکھو شرح ۱۳۵ کی) اور متوازی خط ص ن کی یہہ ہی $ى - \frac{ص لا'}{ط} =$

$\frac{ط}{ص} (لا + \frac{ط ى'}{ص})$ اور بعد از اختصار کرنی کی یہہ حاصل ہوگا

$ى لا - لا ى' = ط ص$ اور مساوات خط ن ص کی بموجب (۱۳۸) کی یہہ ہی

$ى لا - لا ى' = 0$ یہہ مساواتین قطر متجانس اور مماس اور خط سنخی کے بہت فایدہ مند

پائی جاوین گی حل کرنی مین اون سوالات کی جو کہ متعلق مماسون کے ہین

(۱۳۹) فرض کرو کہ لا اور ى وتر سنقاطع علی القوایم ہین نقطہ ن کے سب سی

$ط_۱^۲ + ص_۱^۲ = ط^۲ + ص^۲$ سے یہین حاصل ہوگا یہہ $ص_۱^۲ = ط^۲ + ص^۲ - ط_۱^۲$

$= ط^۲ + ص^۲ - لا^۲ - ی^۲ = ط^۲ + ص^۲ - لا^۲ - ص^۲ + \frac{ص^۲}{ط^۲} لا^۲ = ط^۲ - \frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲} لا^۲$

$= ط^۲ - ی^۲ لا^۲ = (ط - ی لا)(ط + ی لا) =$ ق ق یعنی مربع اور قطر متجانس

ص د = سطح اور ہ ن جو کہ دو نقطہ آتشی کے فاصلہ ہین ۔ ۔ ۔ ۔

(۱۴۰) کھینچو ن ف عمود قطر متجانس ص د پر تو اب بموجب فقرہ (۱۳۵) کی سطح

ن ف اور ص د = ط ص ∴ ن ف = $\frac{ط ص}{ص_۱}$ = $\frac{ط ص}{\sqrt{ط^۲ + ص^۲ - ط_۱^۲}}$ =

$\frac{ط ص}{\sqrt{۴ لا ی لا}}$ یہہ ثابت کیا گیا (۱۲۸) مین کہ ن گ = $\frac{ص}{ط}$ $\sqrt{۴ لا ی لا}$ اور

ن گ = $\frac{ط}{ص}$ $\sqrt{۴ لا ی لا}$ اسی سے صاف ظاہر ہی کہ سطح ن ک اور ن ف =

مربع ب ص اور یہہ بھی ظاہر ہی ن ک × ن ف = مربع ا ص ..... اور

ن ک × ن ک = مربع ص د

اوتار التمام کی بیان مین

(۱۴۱) دو خط جو کہ کھینچی جاوین ایک نقطہ بیضوی سے دو انجامون ایک قطر تک اوتار التمام کہلاتی ہین یہہ اوتار التمام اعظم کہلاتی ہین جسکہ وہ قطر محور کلان ہین

اب اگر بیضوی محورون کو محور اوتار کی فرض کرین تو مان لو کہ ن ن ایک قطر اور ق ن

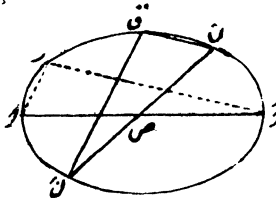
اور ق ن دو اوتار التمام ہین پس اسصورت مین اگر ی ی، و ر نقطہ ن کی اور - لا - ی، و ر ن کی مان

تو مساوات ق ن کی یہہ ہوگی ی - ی، = ا (لا - لا،) اور مساوات ق ن کی

یہہ ہی ی + ی، = ا (لا + لا،) نقطہ تقاطع ق پر لا اور ی دونون مساوا تون

کی ایک سی ہین اسیواسطے ی - ی،^۲ = ا^۲ (لا^۲ - لا،^۲) لیکن مساوات

بیضوی کے نقطہ ت پر یہہ ہی ط۲ ک۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ اور نقطہ ن پر



ط۲ ک۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲

تفریق کرنی سے یہہ حاصل

ہوگا ک۲ − ک۲ = − $\frac{ص^2}{ط^2}$ (لا۲ − لا۲)

مقابلہ کرنے سے اس مساوات کو مساوات گذشتہ سے حاصل ہوگا یعنی

ا ا = − $\frac{ص^2}{ط^2}$ یعنی حاصل ضرب مماسون اون زاویون کا جو کہ دو اوتار التمام

محور کلان سے بناتی ہین مساوے ایک مقدار مقررہ کی ہی اگر خط سخنی نسبت دو

خط متجانس کے ۲ ط اور ۲ ص کھینچا جاوے تو اس صورت مین بھی بطور سابق

کی ثابت ہوگا کہ مماس اون دو زاویون کا جو کہ دو اوتار التمام کسی محوری بناتے

ہین = $\frac{ص^2}{ط^2}$ چونکہ مساوات خط ق ن کی یہہ ہی ک − ک = ا (لا − لا) اسیواسطے مساوات

ق ن کی یہہ ہوگی ک + ک = − $\frac{ص^2}{ط^2}$ ص (لا + لا) لیکن دایرہ مین ص = ط کی ہوتا ہی

∴ اس خاص صورت مین ا ا = − ۱ اسسے ثابت ہوتا ہی کہ اوتار التمام دایرہ مین محمود ایک دوسرے

پر ہوتی ہین جو کہ ایک خاصیت مشہور دایرہ کی ہی برعکس اس دعوی کے اسطرح

ثابت ہوسکتا ہی — فرض کرو کہ آص آ ایک قطع ہی اور ص نقطہ شروع

اور ا ا = − $\frac{ص^2}{ط^2}$ تو مساوات خط آ ر کی یہہ ہوگی ک = ا (لا + ط) ... (۱)

آ ر مساوات خط آ ر کی یہہ ہوگی ک = ا (لا − ط) =

− $\frac{ص^2}{ط^2 ا}$ (لا − ط) ... (۲) اب دریافت کرو نقطہ تقاطع آ ر اور آ ر

کا اور واسطے جاری کرنے اس عمل کے مان لو کہ ک اور لا مساوی (۱) اور (۲)

ہین ایک سی ہین اور دو کرو آ کو ضرب دینے سے ن د ولون مساوات کے
تب و = $-\frac{ص^۲}{ط^۲}$ (لا^۲ − ط^۲) یا ط^۲ ک^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲ یہ مساوات
ثابت ہوا کہ لوکس نقطہ ر کا بیضوی ہی جسکے محور ۲ط اور ۲ص ہین ش
(۱۴۲) مساوات آر آ = $-\frac{ص^۲}{ط^۲}$ سی معلوم ہوتا ہی کہ آر آ ایک سے نہین ہین دو سطے
دو دو نرون کے جو کہ کھینچی جاوین ایک ہی قطر کے انجام تک بلکہ آر آ ایک ہی ہین
واسطے تمام اوتار التمام کے جو کہ کھینچی جاوین نقطہ بیضوی سی کسی قطر کے دو انجامون
تک یہانتک ظاہر ہوتا ہی کہ اگر ہم کھینچین خط آر کا انجام محور کلان سے متوازی
قن کی تو وتر التمام آر کا متوازی قطر ق ن کے ہوگا یہہ ممکن ہی تمام صورتون
مین الا جبکہ ایک وتر عمود یا متوازی محور کلان کے ہو — ش ش ش
(۱۴۳) دریافت کرو زاویہ درمیان دو اوتار التمام کے — فرض کرو کہ لا
اور ک وتر نقطہ ق کی ہین اور لا ک وتر نقطہ ن کے تو مس ن ق ا = $\frac{۱ - ر}{۱ + ر}$

$$= \frac{\frac{ک - ک}{لا - لا} - \frac{ک + ک}{لا + لا}}{۱ - \frac{ط^۲}{ص^۲}} = \frac{۲ط^۲}{ط^۲ - ص^۲} \frac{لا ک - ک لا}{لا^۲ - لا^۲}$$ یا

$$= - \frac{۲ص^۲}{ط^۲ - ص^۲} \frac{لا ک - ک لا}{ک^۲ - ک^۲}$$ وتر التمام اعظم کی صورت مین لا = ط اور
ک = ۰ ∴ مس ا ر آ = $- \frac{۲ص^۲}{ط^۲ - ص^۲} \times \frac{ط}{ک}$ چونکہ یہہ قیمت مماس کے منفی ہی
اسسے معلوم ہوتا ہی کہ زاویہ ا ر آ ہمیشہ منفرجہ ہوتا ہی اور یہہ ظاہر ہی ہے
کیونکہ تمام نقطے بیضوی کے اور اوس دایرہ کی ہین جو کہ گرد بیضوی کی کھینچی
جاوے جیسکی قیمت تو کبھی بڑھتی ہی ویسی ہی عددی قیمت مماس کی گھٹتی ہی یا

یا زاویہ بڑہتا ہی (کیونکہ جتنا زاویہ منفرجہ زیادہ ہوتا ہی اوتنا ہی اوسکا حماس چہوٹا ہوتا ہی) پہانسی ثابت ہوا کہ زاویہ نہایت بڑا اوسوقت ہوگا جبکہ ر = ص و اب معلوم ہوا کہ زاویہ ا ب ا جو کہ مابین اوتار التمام اعظم کے واقع ہی بڑی بڑا ہی اور اوسکی تمامی ب ا ا نہایت کم ہی اور چونکہ ان دونون زاویونمین سے پہلا بڑا قایمہ سی اور دوسرا چہوٹا قایمہ سی اسیواسطے ہم ایسی اوتار التمام کہہ سکتے ہین جنکے مابین ایک زاویہ برابر زاویہ مفروضہ کے اور واقع حدون مذکورمین ہوگا اور یہہ بوسیلہ کہینچنی ایک ایسی قطع دایرہ کی بن سکتا ہے جسمین ایک زاویہ مفروض واقع ہوگا اور پر کسی ایک قطر کی سوای محور کے اور بذریعہ ملانی خطوط کی اوس نقطہ مین جہانکہ دایرہ قطع کرتا ہی بیضوی کو اور دونون انجام قطر مین پہنچی زاویہ کہ درمیان ان خطون کی ہی وہ مساوی زاویہ مفروض کے ہوگا اور قیمت زاویہ ن ق ن سی دریافت ہوتا ہی کہ اگر یہہ زاویہ قایمہ ہو تو دو اوتار التمام محورون پر ہونگی ۔ ۔ ۔ ۔ ۔

(۱۴۴) صورت (۱۴۱) مین ہمنی ثابت کیا ہی کہ مس ر مس ر = $\frac{ص^2}{ط^2}$ اور صورت حال مین ثابت ہوا ہی کہ ا ا = $\frac{ص^2}{ط^3}$ اسیواسطے مس ر مس ر = ا ا اگر مس ر = ا تو مس ر = ا یا اگر ایک قطر متوازی کسی وتر کی ہو تو قطر متجانس اوسکا متوازی وتر التمام کے ہوگا ۔ ۔ ۔ ۔ ۔

(۱۴۵) چونکہ ایسی اوتار التمام درمیان ایک خاص حد کی کہینچ سکتے ہین جنکی بیچ مین ایک زاویہ مفروض ہو تو قطر متجانس ہے متوازی ان وترون کے درمیان ویسی ہی حد کی ایسی کہینچی جاوینگی جنکی مابین وہی زاویہ مفروضہ پایا جاویگا اور چونکہ زاویہ

وداوتار التمام اعظم کے بیچ مین ہمیشہ زاویہ منفرجہ ہوتا ہی اسیواسطی زاویہ آن ص د جوکہ درمیان قطر متجانس کے ہی منفرجہ ہوگا اور یہہ بڑی سے بڑا ہوگا جبکہ وہ اقطار متوازی آب اور آ ب کی ہونگی اسصورتمین چونکہ یہہ اوتار دونون محورون کی نسبت سی ایک ہی طرح پر واقع ہوتی ہین تو اب وہ آپس مین برابر ہی ہونگے اور مقدار مساوے اقطار متجانس کے معلوم ہوسکتی ہی اس مساوات سی

ط۲ + ص۲ = ط۲ + ص۲ اسواسطی ط۲ = $\frac{ط^2 + ص^2}{2}$ اور مساوے اقطار متجانس کی لحاظ سی مساوات بیضوی کی یہہ ہوتی ہی ر۲ + لا۲ = ط۲ لیکن ط بمعلم کو یہہ یاد رہی کہ اس مساوات اور مساوات دایرہ کو ایک ہی نہ سمجھا جاے اور یہہ مساوات دایرہ کی اوسوقت ہوگی جبکہ اوسکی محور متقاطع علی القوایم ہونگی ۔

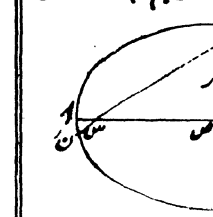
قطعی مساواتون کے بیانمین

(۱۴۶) ایک مساوات کو (جوکہ درمیان محورون متقاطع علی القوایم کی ہی) ہم بدل سکتے ہین درمیان قطبی وترون ع اور و کے فرض کرو کہ اس شکل مین ص نقطہ سہ وع ہی اور اسکی محور متقاطع علی القوایم ہین اور مان لو کہ وتر نقطہ قطب و کی لا ر ہین اور ر وہ زاویہ ہی جو کہ نصف قطر متحرک ون یا ع بناتا ہی خط ولا سی جوکہ متوازی محور لا کی ہی تو موافق (۷۱) یاد کیہنی شکل کی سی ظاہر ہوگا کہ ر = ر + ع جس ر

لا = لا + ع جم ر

اور ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ اور جبکہ لکھی ہوئی قیمتین لا اور ر کی اس مساوات

مین تو حاصل ہوگا یہہ ط۲ (ر۲ + ع۲ جس ر)۲ + ص۲ (لا۲ + ع۲ جم ر)۲ = ط۲ ص۲



اس مساوات سے بسیلہ سی قیمت ع کی نسبت ر اور مقادیر مقررہ کے معلوم ہوجاویگی ۔ ∴

(۱۴۷) فرض کرو کہ مرکز نقطہ قطبی ہی ∴ لا = ۰ لہذا ب = ۰ ∴ ط۲ ع۲ (جس ر)۲ + ص۲ ع۲ (جم ر)۲ = ط۲ ص۲ ∴ ع۲ = $\frac{ط^2 ص^2}{ط^2 جس ر^2 + ص^2 جم ر^2}$ = $\frac{ط^2 ص^2}{ط^2 جس ر^2 + (ط^2 - ط^2 ی^2) جم ر^2}$ = $\frac{ط^2 ص^2}{ط^2 - ط^2 ی^2 جم ر^2}$ = $\frac{ط^2 (۱ - ی^2)}{۱ - ی^2 جم ر^2}$

(۱۴۸) فرض کرو کہ نقطہ آتشی س نقطہ قطبی ہی یہان ر = ۰ اور لا = − طی = − س اور ع اس صورت مین ق ہوجاویگا اسیواسطے صورت مساوات (۱۴۶) کی یہہ ہوجاویگی ط۲ (ق جس ر)۲ + ص۲ (− س + ق جم ر)۲ = ط۲ ص۲

∴ ط۲ ق۲ جس ر۲ + ص۲ ق۲ جم ر۲ − ۲ ص۲ ق س جم ر + ص۲ س۲ = ط۲ ص۲

یعنی ط۲ ق۲ جس ر۲ + ط۲ ق۲ جم ر۲ − س۲ ق۲ (جم ر)۲ − ۲ ص۲ ق س جم ر =

ط۲ ص۲ − ص۲ س۲ = ص۲ کیونکہ ط۲ − ص۲ = س۲ یا ط۲ ق۲ = س۲ ق۲ جم ر۲

+ ۲ ص۲ ق س جم ر + ص۲ = (س ق جم ر + ص۲)۲ ∴ ط ق = س ق جم ر + ص۲

اور ق = $\frac{ص^2}{ط - س جم ر}$ = $\frac{ط^2 (۱ - ی^2)}{ط - ط ی جم ر}$ = $\frac{ط (۱ - ی^2)}{۱ - ی جم ر}$ ۔ ∴ ∴

(۱۴۹) فرض کرو کہ کوئی نقطہ محیط بیضوی پر نقطہ قطبی ہی اور جبوقت پہلا یعنی مساوات (۱۴۶) کو اور تحویل کیا تو بسیلہ مساوات ط۲ ر۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ تو حاصل ہوگا یہہ ع = − ۲ $\frac{ط^2 ر^2 جس ر + ص^2 لا جم ر}{ط^2 جس ر^2 + ص^2 جم ر^2}$ اگر قطب نقطہ آ کا فرض

کیا جاوے تو ع = ۰ اور لا = − ط ∴ ع = $\frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{\text{ط}^2 \text{جس}^2 \text{ر} + \text{ص}^2 \text{جم}^2 \text{ر}}$ جسکی قیمت

(۱۵۰) اگر نقطہ آتشی قطبہ فرض کیا جاوے تو اکثر مساوات نکالنے مین بوسیلہ چند خاص

معلوم بیضوی کے کسی مان لو کہ خط س ن = ق اور ص م = لا اور زاویہ

ا س ن = ر تو س ن = ط + ی لا (۱۰۹) = ط + ی (س م − س ا)

= ط + ی (− ی جم ر − ط ی) ∴ ق + ی ی جم ر = ط − ط ی² اور

ق = $\frac{\text{ط}(1 - \text{ی}^2)}{1 + \text{ی جم ر}}$ یہہ مساوات اکثر علم ہیئت مین کام آتی ہے جہان نقطہ

س مقام آفتاب کا اور بیضوی تقریبی رستہ سیارہ کا فرض کیا جاتا ہے

فرض کرو کہ ط (۱ − ی²) = $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}}$ = ل موافق صورت (۱۰۵) تو اب مساوات

گزشتہ کی یہہ صورت ہوجاوے گی ق = $\frac{\text{ل}}{2}$ $\frac{1}{1 + \text{ی جم ر}}$ = $\frac{\text{ل}}{2}$ $\frac{1}{1 - \text{ی} + 2\text{ی} (\text{جم} \frac{\text{ر}}{2})^2}$

= $\frac{\text{ل}}{2}$ $\frac{1}{(1 + \text{ی})(\text{جم} \frac{\text{ر}}{2})^2 + (1 - \text{ی})(\text{جس} \frac{\text{ر}}{2})^2}$ اگر ر کو خط س ا سے

بجائے ن کرین بلکہ ایک خط سے جو کہ گزرتا ہی نقطہ س سے بناتا ہوا ایک زاویہ ا

خط س ا سے تو صورت قطبی مساوات کی یہہ ہوجاوے گی ق = $\frac{\text{ل}}{2}$ $\frac{1}{1 + \text{ی جم} (\text{ر} - \text{ا})}$

(۱۵۱) اگر خط ن س سے خط منحنی سے نقطہ ن پر تو س ن = ق تو

ق = $\frac{\text{ل}}{2}$ $\frac{1}{1 + \text{ی جم ر}}$ اور ق' = $\frac{\text{ل}}{2}$ $\frac{1}{1 + \text{ی جم} (\text{ر} - \pi)}$ = $\frac{\text{ل}}{2}$ $\frac{1}{1 - \text{ی جم ر}}$

∴ ق + ق' = ل $\frac{1}{1 - \text{ی}^2 (\text{جم ر})^2}$ اور ق ق' = $\frac{\text{ل}^2}{4}$ $\frac{1}{1 - \text{ی}^2 \text{جم}^2 \text{ر}}$

= $\frac{\text{ل}^2}{4}$ $\frac{1}{1 - (\text{ی} \text{جم ر})^2}$ = $\frac{\text{ل}^2}{4}$ (ق + ق') یا سطح س ن اور س ن'

= $\frac{1}{4}$ سطح وتر آتشی اعظم اور اوس وتر کے جو کہ ایک نقطہ آتشی سے گذری

(۱۵۲) فرض کرو کہ نصف قطر ص د یا ص' متوازی خط س ن کی ہی تو موافق

فقرہ (۱۴۷) سے $ص_1^2 = \frac{ط^2}{1-ی^2 جم^2 ز} = \frac{ط^2}{1-ی^2} \cdot \frac{1-ی^2}{1-ی^2 جم^2 ز} = \frac{ط^2}{ل}$ (نق + نق') ÷ نق + نق' = $\frac{2 ص_1^2}{ط}$ یا نق + نق' = $\frac{4 ص_1^2}{2 ط}$ یعنی 2ط (نق + نق') = $4 ص_1^2$

∴ 2ط : $4 ص_1^2$ :: $4 ص_1^2$: (نق + نق') ــــ

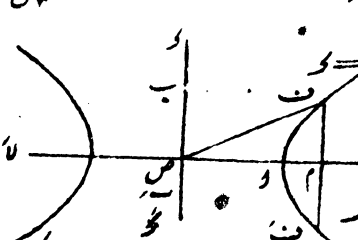
باب نہم

بعید البیضوی کے بیان مین

(۱۵۳) بحث مساوات عام درجہ دوم مین ہم ثابت کرآئی ہین کہ اگر ایک مساوات جسکا خط منحنی محور متقاطع علی القوایم اور مرکز نقطہ شروع رکھتا ہو تو شکل مساوات عام کی صورت بعید البیضوی مین پہنچ ہوجاتی ہی $(\frac{ا}{ب})^2 ک^2 + (\frac{س}{ب})^2 لا^2 = 1$ یہان اشکال مختلف علامتین رکھتی ہین (۸۵) اور (۸۶) فرضکرو کہ $(\frac{ا}{ب})$ منفی ہی اسواسطے صورت مساوات کی بہ ہوجاویگی ــ $(\frac{ا}{ب})^2 ک^2 + (\frac{س}{ب})^2 لا^2 = 1$ یا

ف $ک^2$ ــ ق $لا^2$ = ــ 1 ہم اب ثابت کرینگی بوسیلہ اسکی تمام اشکال بعید البیضوی کو

(۱۵۴) فرضکرو کہ مرکز خط منحنی کا ص ہی اور لالا' اور کک' اسکی محور متقاطع علی القوایم نقطہ ص پر ملتی ہین فرض کرو کہ ص م = لا اور م ف = ک اسواسطے ان نقاط پر جہانکہ خط منحنی قطع کرتا ہی محور ونکو ک = ۰ ق $لا^2$ = 1 ∴ لا = $\pm \frac{1}{\sqrt{ق}}$



لا = ۰ ف $ک^2$ = 1 ∴ ± $\frac{1}{\sqrt{ف}}$ = ک

محور لا پر قطع کردہ ص ا = $\frac{1}{\sqrt{ق}}$

اور ص ا' = ــ $\frac{1}{\sqrt{ق}}$ تو یہانسے

معلوم ہوا کہ خط منحنی محور لالا' کو نقاط ا اور ا' پر قطع کرتا ہی اور چونکہ

اور چونکہ قیمت ک کی ناممکن ہے تو معلوم ہوا کہ دوسرا محور خط منحنی سے نہیں ملتا
ہی پہر بھی ہم محور ک ک کو نقاط ب اور ب پر نشان کرتے ہیں جنکی فاصلے
نقطہ ص سے ص ب = + $\frac{۱}{ہ ف}$ اور ص ب = − $\frac{۱}{ہ ف}$
اور اگر ص ا = ط اور ص ب = ص کی فرض کیا جاوے تو ق = $\frac{۱}{ط}$
اور ف = $\frac{۱}{ص ہ}$ اسیواسطے صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی

$\frac{ک^۲}{ص^۲} + \frac{لا^۲}{ط^۲} = ۱$ .....

یا $ط^۲ ک^۲ - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲$ .....

یا $ک^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲} (لا^۲ - ط^۲)$ .....

(۱۵۵) پچھلی مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے یہہ .....

$ک = \pm \frac{ص}{ط} \sqrt{لا^۲ - ط^۲}$ .....(۱)

اور $لا = \pm \frac{ط}{ص} \sqrt{ک^۲ + لا^۲}$ .....(۲)

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا کم ہو ± ط سے تو ک ناممکن ہوگا اب اگر خطوط
نقاط آ اور ا سے متوازی خط ص ک کی کھینچیں جاویں تو کوئی حصہ خط منحنی
کا درمیان ان خطوط کے نہیں واقع ہوگا اور واسطے ہر ایک ایسی قیمت
لا کی جو کہ ط سے زیادہ ہو دو صحیح مساوی قیمتیں ک کی حاصل ہونگی
یعنی واسطے ہر ایک مترالعرض ص م کی دو وتر م ف اور م ف
کے مقابل ایک دوسری کی ہیں حاصل ہونگی - اور جیسا کہ قیمت لا
کی ط سے ∞ تک زیادہ ہوتی ہے ویسی ہی قیمتیں ک کی ب سے

± ∞ تک زیادہ ہوتی ہین اسیواسطے ہمین دو قوسین ف ف اور ف ف
کی مساوی اور مقابل ایک دوسریکی جو کہ لانہایت پہلتی ہین حاصل ہونگی
اگر لا منفی ہو تو لا۲ ثبت ہوگا اسیواسطے ویسی ہی فیتین لا کی جسکی اوپر معلوم
ہوئی ہین حاصل ہونگی یہانتک معلوم ہوا کہ ایک اور شاخ خط منحنی کی ہی اور
اور یہہ اُسی لانہایت پہلتی ہی تو اب معلوم ہوا کہ یہہ دونون شاخین خط منحنی
محور لا سی تنصیف کئی جاتی ہین (۲) سے معلوم ہوتا ہی کہ یہہ خط منحنی محور ط
سی بہی تنصیف کیا گیا ہی اور اسکی سمت مجوف طرف محور لا کی پھری ہوئی
ہی نہیں تو وہ الخط مستقیم سی زیادہ نقاط پر قطع کیا جاویگا (۷۱)

(۱۵۶) اگر ف ایک نقطہ خط منحنی پر ہو تو

$$ص ف = \sqrt{لا^2 + ی^2} = \sqrt{لا^2 + \frac{ص^2}{ط^2}(لا - ط)} = \sqrt{\frac{ط^2 + ص^2}{ط^2} لا^2 - ص^2}$$

یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ ص ف نہایت کم ہی جبکہ لا نہایت کم ہو یعنی
جبکہ لا = ط تو اس صورت مین ص ف بہی مساوی ط کی ہوجاویگی
یہانسی معلوم ہوا کہ ص ا یا ص ا نہایت چھوٹا خط ہی اون خطون مین سے
جو کھینچی جاوین نقطہ ص سی خط منحنی تک اسیواسطے محور ا ا معلوم ہوا
کہ لانہایت چھوٹا خط ہی جو کہ کھینچی جاوین مرکز سی کہ ذتی ہوئی خط منحنی
تک اور دوسرا محور ب ب کا خط منحنی سی نہین ملتا ہی —
مساوات ف ی۲ — ق لا۲ = ۱ مین محور خیالی زیادہ یا کم ہوگا
موافق زیادتی یا کمی ق کی ف پر تو اب معلوم ہوا کہ محور کلان ہمیشہ

اصلی محور نہین ہوتا ہی - اس کتاب مین ہم بڑی محور کو محور کلان للکہینگے اور
محور خورد کو محور متجانس -

(۱۵۷) نقاط آ اور آ کو جس خط منحنی کہتے ہین اور کوئی نقطہ ان دونوں سے
نقطہ شروع ہوسکتا ہی اگر موافق اسکی تبدیلی کی جاوی فرضکرو کہ آ نقطہ
شروع ہی اور مان لو کہ آم = لا تو

لا = ص م = ص ا + ا م = ط + لا ∴ ک² = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (لا² - ط²)

= $\frac{ص^2}{ط^2}$ {(ط + لا)² - ط²} = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (۲ ط لا + لا²) اور علامتونکو دور
کرنی سے یہہ حاصل ہوگا ک² = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (۲ ط لا + لا²) = $\frac{ص^2}{ط^2}$ لا (۲ ط + لا)
اور یہہ مساوات بطور ہندسہ کی اسطرح پر تعبیر ہوسکتی ہی -

مربع م ف : مستطیل آم اور م آ :: مربع ب ص : بمربع ا ص - اگر نقطہ شروع آ
فرض کیا جاوی تو صورت مساوات کی یہہ ہوگی ک² = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (لا² - ۲ ط لا)

(۱۵۸) اگر ط = ص تو صورت مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہوگی ک² = لا² - ط لا
اس خط منحنی کو بعید البیضوی مساوی القطرین کہتے ہین یہہ وہی ہے خط بعید البیضوی عام سے کہتا ہی جو کہ دائرہ
بیضوی سے

(۱۵۹) درمیان خطوط بیضوی اور بعید البیضوی کی نہایت فرق ہی کیونکہ انکی مساوات مین فرق صرف علامت
ص² مین ہی کیونکہ اگر مساوات بیضوی مین جو کہ یہہ ہی ط² ک² + ص² لا² = ط² ص² بجای
+ ص² کی - ص² لکہا جاوی تو ہمین مساوات بعید البیضوی کی حاصل ہوگی یہانسے معلوم ہوا
کہ اکثر شکلین جو کہ بیضو مین ثابت کیگئی ہین اوسیطرح اسمین بہی ثابت ہوسکتے ہی اگر جای
ص² کی - ص² لکہا جاوی اسواسطے ہم ایسی شکلونکو یہان ثابت نہین کرینگی لیکن صرف انکی دعوے
اور نتیجون کو لکہدینگی اور انپر اشارہ کرینگی واسطے اسکی ثبوتکی طرف اسکی خاص شکل بیضوی کی اور جہان کچہہ
تبدیلی ہے

ضرورت ہوگی اسکو ہم بیان حل کرین گی اور جس جا ی کہ شکل کے ضرورت ہوگی اُسکو مقام پر شکل بھی لکھہ دیرین گے

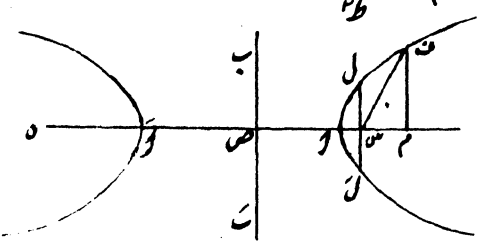
نقاط انتشی کے بیان مین

(۱۶۰) مساوات ص۲ = $\frac{ص۲}{ط۲}$ (ا ط۲ + لا۲) کی یہ صورت ہوسکتی ہی ص۲ = ل لا + $\frac{ل}{ط۲}$ لا۲ جبکہ ل = $\frac{۲ص۲}{ط}$ کے فرض کیا جاوے اور اِس ل کو وتر انتشی اعظم کہتے ہین چونکہ ل = $\frac{۲ص۲}{ط}$ = $\frac{۴ص۲}{۲ط}$ تو معلوم ہوا کہ وتر انتشی اعظم نسبت ثالث رکھتا ہی محور کلان اور محور خورد سی یعنے

محور کلان : محور خورد :: محور خورد : وتر انتشی اعظم

(۱۶۱) دریافت کرو ایک ایسا نقطہ محور کلان پر جسی ایک ایسا وتر کھینچا جاوے کہ دو چند اوسکا مساوی ہو وتر انتشی اعظم کے اس صورتین ظاہر ہی کہ ۴ص۲ = ل۲ ؛

$\frac{۴ص۲}{ط۲}$ (لا۲ − ط۲) = $\frac{۴ص۲}{ط۲}$ ∴ لا۲ − ط۲ = ص۲



ملاؤ اب کو تو اب = $\sqrt{ط۲ + ص۲}$ اب ص کو مرکز کر دائرہ کرو اور اب کو نصف قطر کھینچو ایک دائرہ کٹتا ہوا محور کلان کو نقاط س اور ہ مین تو اس صورت مین ص س = $\sqrt{ط۲ + ص۲}$ اور ص ہ = − $\sqrt{ص۲ + ط۲}$ تو اب دریافت ہوئے دو نقطے س اور ہ کے ایسی

جنین سے اگر ایک وتر مثل ل س ل کے کھینچا جاوے تو وہ مساوی وتر انتشی اعظم کے ہوگا نقاط س اور ہ کو نقاط انتشی کہتے ہین ۔

(۱۶۲) کسر $\frac{\sqrt{ط^۲+ص^۲}}{ط}$ کو (جو کہ تعبیر کرتی ہی اوس نسبت کو جو کہ درمیان ص من اور ص ا کے ہی) خارج المرکز کہتے ہین اور اگر اوس مقدار کو جو کہ عدد ایک سی کم ہی ی سی تعبیر کرین تو ہمین یہہ حاصل ہوگا $\sqrt{ط^۲+ص^۲}$ = ط ی اور یہہ انسبی معلوم ہوتا ہی کہ ی^۲ = $\frac{ط^۲+ص^۲}{ط^۲}$ = ۱ + $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ ∴ $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ = ی^۲ − ۱ تو اب ظاہر ہی کہ مساوات بعید البیضوی کو اس صورت مین لکھہ سکتے ہین

ک^۲ = (ی^۲ − ۱) (ط^۲ − لا^۲) ۔

(۱۶۳) چونکہ ط^۲ + ص^۲ = ط^۲ ی^۲ تو ص^۲ = ط^۲ ی^۲ − ط^۲ =

(ط ی + ط) (ط ی − ط) یا سطح اس اور ا س = مربع ب ص ۔

(۱۶۴) دریافت کرو فاصلہ کسی نقطہ ف خط منحنی کا نقطہ انتشی سے ۔

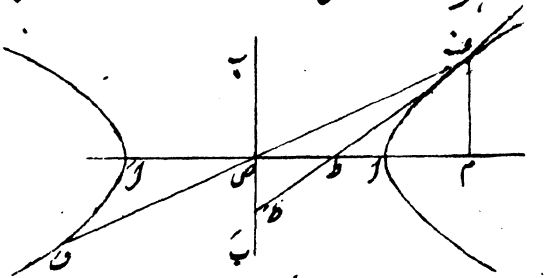
عمل کرنیسی موافق (۱۰۹) کی ہمین حاصل ہوگا یہہ س ف = ی لا − ط اور ہ ف = ی لا + ط یہہ انسبی ثابت ہوتا ہی کہ ہ ف − س ف = ۲ ط = اوز یعنی حاصل تفریق فاصلون کسی نقطہ خط منحنی کا نقاط انتشی سے مساوی محور کلا کے ہی

(۱۶۵) برعکس اسکے دریافت کرو لوکس ایک ایسی نقطہ کا فرق جسکے فاصلون کا دو قایم نقطون س اور ہ سے مساوی ایک مقدار مقررہ یا ۲ ط کی ہی اگر س ہ = ۲ س تو لوکس ایک ایسا بعید البیضوی ہی جسکے محور ۲ ط اور ۲ $\sqrt{ط^۲+ص^۲}$ ہین اور نقاط انتشی اسکے س اور ہ ہین موافق (۱۱۰) کی

مماس کے بیان میں

(۱۶۶) دریافت کرو مساوات مماس کی جو کہ کھینچا جاوے نقطہ ف (لا اور ر) خط منحنی سے مساوات مماس کے عمل کرنی سی موافق (۱۱۱) یہہ حاصل ہوگی

ط۲ ر۲ − ص۲ لا۲ = − ط۲ ص۲ یہہ صورت بخوبی یاد ہو سکتے ہی کیونکہ یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی مساوات خط منحنی سے ط۲ ر۲ − ص۲ لا۲ = − ط۲ ص۲ بوسیلہ لکھنی



ر۲ کی بجای ر۲ اور لا لا بجای لا۲ کے — ثر ثر ثر

(۱۶۷) دریافت کردہ نقاط جہانکہ مماس قطع کرتا ہی محور ذکو فرض کرو ر = ۰ ∴ لا = $\frac{ط^2}{لا^2}$ = ص ط سیطر حسی ر = ص ط = − $\frac{ص^2}{ر}$ یہانسے ہمیں حاصل ہوگا سطح ص ط اور ص م = مربع ر ص

اور سطح ص ط م ف = مربع ب ص اور چونکہ ص ط (= $\frac{ط^2}{لا^2}$) ہمیشہ کم ہوتا ہے ص ر سی تو معلوم ہوا کہ مماس کسی نقطہ شاخ ف آ کا قطع کرتا ہی محور کلان کو درمیان ص اور آ کے اور خط پائین م ط = لا − $\frac{ط^2}{لا^2}$ = $\frac{لا^2 - ط^2}{لا}$ (۱۱۵)

اور مماس نقطہ آ پر جو کہ انجام محور کلان کے ہی عمود محور کلان پر ہوگا موافق (۱۱۶)

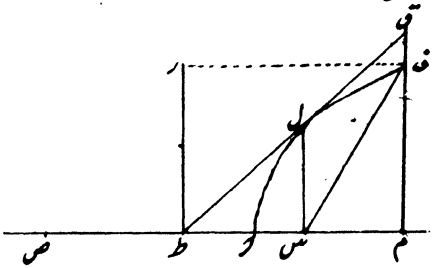
(۱۶۸) دریافت کرو مساوات مماس کی انجام وتر آتشی اعظم پر

مساوات عام مماس کے یہہ ہے ط۲ ی۲ - ص۲ لا۲ = - ط۲ ص۲ اور نقطہ ل پر

لا = ط ی اور ی = $\frac{ص}{ط}$ ∴ ط۲ ی۲ - ص۲ لا۲ ی = - ط۲ ص۲

یا ی = ی لا - ط

فرض کرو کہ وتر ی یا م ق قطع کرتا ہی خط منحنی کو نقطہ ف پر



تو س ف = ی لا - ط (۱۶۴) ∴ م ق = س ف اور

ص ط = $\frac{ط}{ی}$ اب کھینچو نقطہ ط سی عمود ط ر ا ص پر اور ق سی ف ر متوازی

م ط کے تو ط م = ف ر = م ص - ط ص = لا - $\frac{ط}{ی}$ = $\frac{ی لا - ط}{ی}$ = ی

$\frac{1}{ی}$ س ف یہانسی دریافت ہوا کہ فاصلے کسی نقطہ ف کے س سی اور خط ط ر سے

اسس نسبت مین ہوگئے ی : ا خط ط ر کو خط بنیادی کہتی ہین اگر لا = ۰

تو ی = - ط یہانسی معلوم ہوا کہ مماس انجام وتر آتشی اعظم پر کاٹتا ہی محور ی

کو اوس نقطہ پر جہانکہ دایرہ کھینچا گیا محور کلان پر قطع کرتا ہی اوسی محور کو -

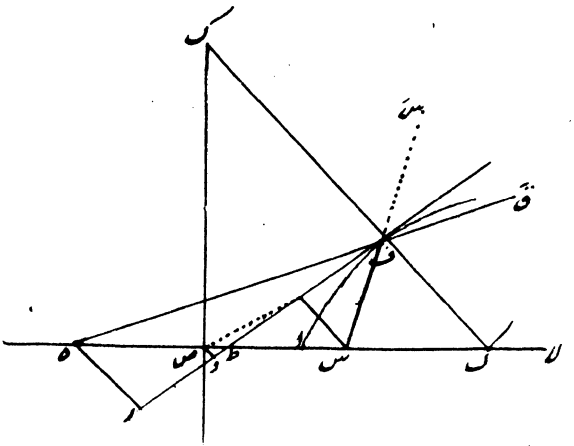
(۱۶۹) دریافت کرو طول اوس عمود کا جو کہ کھینچا جاوے نقطہ آتشی سے مماس پر

فرض کرو کہ س ی اور ہ ر عمود مماس ف ط پر ہین موافق صورت (۴۸) کے

ہین حاصل ہوگا یہہ ع = - $\frac{ک۱ - ا لا۱ - د}{ا۲ + ب۲}$ یہان ک۱ = ۰ اور

لا۱ = ط ی اوتار نقطہ س کے ہین اور ی = ا لا + د مساوات خلف کی

لیکن مساوات ف ر موافق (۱۶۶) یہہ بھی ہی ر = $\frac{ص^۲ لا^۲}{ط^۲ ی^۲}$ لا − $\frac{ص^۲}{ی^۲}$



∴ ا = $\frac{ص^۲ لا^۲}{ط^۲ ی^۲}$ اور د = − $\frac{ص^۲}{ی^۲}$ اسیواسطے ع = $\frac{-\frac{ص^۲ لا^۲}{ط^۲ ی^۲} ط ی + \frac{ص^۲}{ی^۲}}{\sqrt{۱ + \frac{ص^۴ لا^۲}{ط^۴ ی^۲}}}$

= + $\frac{ط ص^۲ (ی لا − ط)}{\sqrt{(ط^۴ ی^۲ + ص^۴ لا^۲)}}$ = $\frac{ط ص^۲ (ی لا − ط)}{ط ص^۲ \sqrt{ی^۲ لا^۲ − ط^۲}}$ = ص $\sqrt{\frac{ی لا − ط}{ی لا + ط}}$

فرض کرو کہ س ف = نق اور ہ ف = ۲ ط + نق = نی ∴ ع = ص $\sqrt{\frac{نی}{نی}}$

یا ع^۲ = ص^۲ $\frac{نی}{۲ ط + نی}$ اسیطرح اگر ر = ع تو ع^۲ = ص^۲ $\frac{نی}{نی}$

ضرب دینی سی ان دونون مساواتون کے حاصل ہوگا یہہ ع ع = ص^۲

یہانسی ثابت ہوا کہ سطح س ی اور ہ ر = مربع ب ص کو ∴

(۱۷۰) دریافت کردہ خط جو کہ حرکت نقطہ ی یا ر کے سبی پیدا ہوسکتی ہی طاہر ہے

کہ مساوات خط منحنی کی نقطہ ف پر یہہ ہوگی ط^۲ ر^۲ − ص^۲ لا^۲ = − ط^۲ ص^۲ اور

مساوات مماس کی اوسی نقطہ ف پر یہہ ہوگی ط۲ ی ی۔ ص۲ لا لا = − ط۲ ص۲

اور مساوات س ی کی یہہ ہی ی = $\frac{-ط^2 ی}{ص^2 لا}$ (لا − س) اوسکو وسیلہ دور کرنی لا

اور ی کی بطور (۱۲۰) کے ہمین حاصل ہوگا یہہ ط۲ = لا۲ + ی۲ یہانسی ثابت ہوا

کہ خط مطلوب ایسا دایرہ ہی جسکا محور کلان قطر ہی — ثر ثر ثر

(۱۷۱) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا اوس زاویہ کا جو کہ خط س ف کا مماس

ف ط سی بناتا ہی — ظاہر ہی کہ مساوات مماس کی یہہ ہی

ی = $\frac{ص^2 لا}{ط^2 ی}$ لا − $\frac{ص^2}{ی}$ اور مساوات خط مستقیم س ف کی یہہ ہے

ی − ی = $\frac{ی}{لا - س}$ (لا − لا) یہانسی معلوم ہوا کہ مس س ف ط =

مس (ف س لا − ف ط لا) = $\frac{\frac{ی}{لا - س} - \frac{ص^2 لا}{ط^2 ی}}{1 + \frac{ص^2 لا}{ط^2 ی} \frac{ی}{لا - س}}$ =

= $\frac{ط^2 ی^2 - ص^2 لا^2 + ص^2 س لا}{ط^2 ی لا - ط^2 س ی + ص^2 لا ی}$ = $\frac{ص^2 (س لا - ط^2)}{ی س (س لا - ط^2)}$ = $\frac{ص^2}{س ی}$

اسیطرح سے ثابت ہوگا کہ مس ہ ف ط = $\frac{ص^2}{س ی}$ اسیواسطے زاویہ س ف ط برابر

ہی زاویہ ہ ف ط کی کھینچو خط س ف کو س تک اب واضح ہو کہ یہہ ایک بڑی

خاصیت روشنی کی ہی کہ اگر ایک کرن نقطہ ہ مین سے گذر کی منعکس ہو خط ط ف پر

سی تو زاویہ س ف ط کا مساوی ہوگا زاویہ ہ ف ط کو اور چونکہ بعید البصر ی

مین یہہ دونو زاویے مساوی ہوتی ہین تو اب معلوم ہوا کہ اگر ایک لاوشی جسم نقطہ س

پر رکھا جاوے تو تمام کرنین نقطہ س سے نکل کے منعکس خط منحنی سے ہو کر نقطہ ہ پر

جمع ہوگی اسیواسطے یہہ دونون نقطے نقطے کہلاتے ہین یہہ ایک بڑی خاصیت خط

خط منحنی کی بطور آیندہ کے بھی ثابت ہو سکتے ہی موافق فقرہ (۱۶۹) کے

س ک = ع = ص $\sqrt{\frac{لی}{لی}}$ اور ہ ر = ع = ص $\sqrt{\frac{لی}{لی}}$ ∴

س ک : ہ ر :: لی : لی :: س ف : ہ ف ∴ زاویہ س ف ک = ہ ف ر

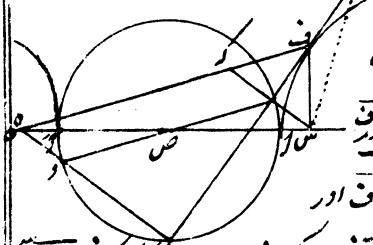
یعنی مماس مساوی زاویہ بناتا ہی اون فاصلوں سے جو کہ واقع ہی درمیان نقاط آتشی

اور نقطہ تماس * . ٭ ٭ ٭ ٭ ٭ ٭ ٭

* *

یہ طریق آیندہ بہت مفید معلوم ہوگا واسطی کھینچنی مماس کے بطور ہندسہ کی اور واسطی ثابت

کرنے اس بات کی کہ لوکس اُس عمود کا جو کہ



کھینچا جاوے نقطہ آتشی سے مماس پر دایرہ

ہوتا ہی فرض کرو کہ ر ف بعید البیضوی ہی اور ف

ایک نقطہ اُسکی اوپر ہی ملاؤ خطوط س ف اور

ہ ف یکیں سے کاٹو ف ک = ف س اور تنصیف کرو زاویہ س ف ر کو خط و ف سے

ملاؤ س ک کہ کاٹتا ہوا خط و ف کو ز مین (۱) اب ہم ثابت کرینگے کہ ف و مماس بعید البیضوی

کا ہی کیونکہ اگر ر کوئی اور نقطہ خط ف و مین ہو تو ہ ر ـ س ر = ہ ر ـ ک ر کم ہی خط

ہ ک یا ۲ط سی یہانسی معلوم ہوا کہ نقطہ ر کا جو کہ خط ف و پر واقع ہی خط منحنی مین نہیں ہے

اور اسیطرحسی ثابت ہو سکتا ہی کہ کوئی نقطہ جو کہ خط ف و پر ہو خط منحنی پر واقع نہین ہے

(۲) لوکس نقطہ ز کا وہ دایرہ ہا جو کہ محور کلان پر بن سکتا ہی واسطی ثبوت اس دعوی کے کھینچو

خط ہ ر کا متوازی خط س ز کے اور ملاؤ ص ز اب چونکہ مثلث س ف ر کا مساوی مثلث

ک ف ر کی ہی تو زاویہ س ر ف کا قایمہ ہی پس ز اور ہ ر عمود مماس ف و پر ہین اور

(۱۴۲) دریافت کرو طول عمود ص د کا جو کہ مرکز سے مماس پر کھینچا ہی

ظاہر ہی کہ ع = $\frac{ک - ل لا - د}{\sqrt{۱ + ل^۲}}$ اور ظاہر ہی کہ یہاں ک = ۰ اور

لا = ۰ اور ل = $\frac{ص^۲ لا}{ط^۲ ک^۲}$ اور د = $-\frac{ص^۲}{ک}$ ∴ ص د = $\frac{ط ص}{\sqrt{ن^۲ + ق^۲}}$

(۱۴۳) دریافت کرو لوکس ہ کا یعنی وہ خط جو کہ حرکت دسی یا د کو

غیر منقطع فرض کرنیسی پیدا ہوگا ظاہر ہی کہ مساوات ص د کی یہہ ہی ک = $-\frac{ص^۲ لا}{ط^۲ ک^۲}$ کا

دور کرنی سی لا اور ک کو بوسیلہ اس مساوات کی اور مساوات مماس کے ہمیں حاصل

ہوگا یہہ ط^۲ لا^۲ − ص^۲ ک^۲ = (لا^۲ + ک^۲)^۲ اور اسکی بحث ہم ابھی نہیں کرینگے

(۱۴۴) بوسیلہ مساوات مماس اور مساوات ص ف کے ہمیں حاصل ہوگا موافق

(۱۲۴) کے یہہ مس ص ف ط = $\frac{ط^۲ ص^۲}{ن^۲ لا^۲ ک^۲}$ اور چونکہ ص د = ص ک جس ص د ف

تو $\frac{ط ص}{ن ق}$ = ط جس ص د ∴ جس ص د = $\frac{ص}{ن ق}$ اور چونکہ

اور چونکہ س ک = ک ک اور س ص = ص ہ تو ص ک متوازی ہ ک کی ہوگا اور

ص ک = $\frac{۱}{۲}$ ہ ک = $\frac{۱}{۲}$ (ہ ف − س ف) = ص ک − (۳) سطح س ک ا اور

ہ ر ک = مربع ب ص ظاہر ہی کہ خط ہ ر کا قطع کرتا ہی دایرہ کو نقطہ د پر اور ملاؤ خط

ص د کو چونکہ خط د ص کا خط مستقیم اور قطر دایرہ کا ہی اسیواسطے مثلث ص س د کا مساوی مثلث

ص ہ د کے ہوگا اور سطح س د ا د ہ ر = سطح ہ د ا اور ہ ر ک = سطح ہ ا ک اور ہ ر ک ہی = مربع

ب ص (۴) فرض کرو کہ س ف = ن ق اور ہ ف = ۲ ط + ق اور س ک = ع اور

ہ ر = ع تو ع^۲ = $\frac{ص^۲ ن ق}{۲ ط + ق}$ کیونکہ بوسیلہ متشابہ ہونے مثلثوں کے یہہ حاصل ہوگا س ک : س ف

:: ہ ر : ہ ف ∴ ع = $\frac{ن ق}{۲ ط + ق}$ اور چونکہ ہمنی ثابت کیا کہ ع ع = ص^۲ ∴ ع^۲ = $\frac{ص^۲ ن ق}{۲ ط + ق}$

چونکہ ہ ر = ہ ف جس ہ ف ر تو ص $\sqrt{\frac{ط^۲ + ص^۲}{ط^۲}}$ = ی جس ہ ف ر ∴

جس ہ ف ر = $\frac{ص}{\sqrt{ط^۲ + ص^۲}}$ ∴ زاویہ ص ر و = زاویہ ہ ف ر اور ص ر متوازی ہ ف

کی ہے اگر ص ی متوازی مماس ف ط کی کھینچا جاوے اور وہ قطع کرے ہ ف کو نقطہ

ی مین تو ف ی = ص ر = ا ص ـــ ∴ ∴ ∴

عمود مماس کے بیان مین ـــ

مساوات اوس خط کی جو کہ گذرے نقطہ ف (لا اور ر) سی عمود مماس

(ر = $\frac{ص^۲ لا}{ط^۲ ر}$ لا ـ $\frac{ص^۲}{ر}$) پر یہہ ہوگی ر ـ ر = ـ $\frac{ط^۲ ر}{ص^۲ لا}$ (لا ـ لا)

اب دریافت کرو کہ کس جا یہہ عمود مماس محور کو تقاطع کرتا ہے واسطے اس بات کے

فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ ـ ر = ـ ـ . $\frac{ط^۲ ر}{ص^۲ لا}$ (لا ـ لا) ∴ لا = لا + $\frac{ص^۲ لا}{ط^۲}$

$\frac{ط^۲ + ص^۲}{ط^۲}$ لا = ی لا = ص ک اور اب فرض کرو کہ لا = ۰ ∴

ر = ر + $\frac{ط^۲ ر}{ص^۲}$ = $\frac{ط^۲ + ص^۲}{ص^۲}$ ر = $\frac{ط^۲ ی^۲}{ص^۲}$ ر = ص ک اور ظاہر ہے

کہ خط بائین م ک = لا ـ لا = $\frac{ص^۲ لا}{ط^۲}$ اور س ک = ی س ف ∴

(۱۷۶) بوسیلہ قیمت س ک اور س ک اور م ک کے ہمین حاصل ہوگا

یہہ ف ک = $\frac{ص}{ط}$ $\sqrt{لو}$ اور ف ک = $\frac{ط}{ص}$ $\sqrt{لو}$ اسیواسطے سطح

ف ک اور ف ک = لو = سطح س ف اور ہ ف ک اور

س ک = $\frac{ط ر}{ص}$ $\sqrt{لو}$ اور ک ک = $\frac{ط ی^۲}{ص^۲}$ $\sqrt{لو}$ ∴ ک ک = ی س ک

(۱۷۷) چونکہ مماس مساوی زاویہ بناتا ہے نقطہ آتشی کے فاصلون سے تو عمود مماس

جو کہ عمود مماس پر ہوتا ہے مساوی زاویہ بناویگا نقطہ آتشی کے فاصلون سے اگر

دوسری ثبوت اس بات کی خط ہ ف کو ہ ک تک کھینچین تو دعوی مذکورہ بخوبی بطور آیندہ کی بوسیلہ قیمت ص ک کی ثابت ہوسکتا ہی —

س ک : ہ ک :: ی ۲ لا − ط ی : ی ۲ لا + ط ی :: ی لا − ط : ی لا + ط

:: س ف : ہ ف پہانسی معلوم ہوا کہ زاویہ س ف ہ کو خط ف ک کی تنصیف کیا ہی

قطرون کے بیانمین

(۱۷۸) یہہ ثابت بخوبی ثابت ہوسکتی ہی کہ بیضوی مین فقرہ (۱۳۰) مین ہوا ہی کہ تمام اوتار بعید البیضوی کے مرکز پر سے گذرتی ہین اور برعکس اسکی جو خط کہ مرکز پر سے گذریگا وہ قطر ہوگا اگر ر = لا + د مساوات وتر کی ہو تو

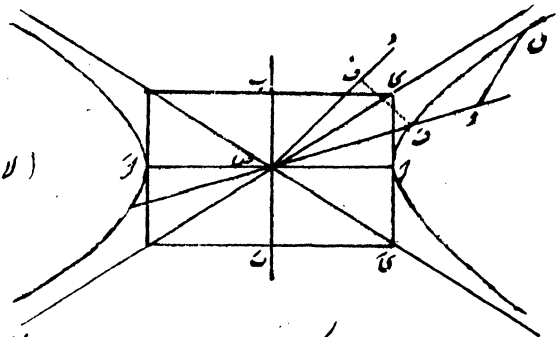
ط ۲ ر − ص ۲ لا = ۰ مساوات اُس قطر کی ہی جو کہ تنصیف کرتا ہی تمام لون وتر کو جو کہ متوازی اوس خط مستقیم کے ہین جسکی یہہ مساوات ہی ر = لا + د

(۱۷۹) تمام قطر بیضوی کی خط منحنی سے ملتی ہین لیکن بعید البیضوی مین ایسا حال نہین ہوتا ہی اور یہہ بات ظاہر ہوگی بوسیلہ دریافت کرنی نقطہ تقاطع قطر اور خط منحنی کے فرض کرو کہ ر = م لا مساوات قطر ص ف کی ہی لکہو اسکی قیمت ر کو مساوات خط منحنی مین جو کہ یہہ ہی ط ۲ ر ۲ − ص ۲ لا ۲ = ط ۲ ص ۲

∴ ط ۲ م ۲ لا ۲ − ص ۲ لا ۲ = ط ۲ ص ۲ ∴ لا ۲ = $\frac{ط^2 ص^2}{ص^2 - ط^2 م^2}$

∴ لا = ± $\frac{ط ص}{\sqrt{ص^2 - ط^2 م^2}}$ اگر ط ۲ م ۲ بڑا ہو ص ۲ سے تو یہہ قیمتین لا کی ناممکن ہونگی یعنے اگر م بڑا ہو $\frac{ص}{ط}$ سے تو یہہ قیمتین لا کی ناممکن ہونگی اور اگر م = ± $\frac{ص}{ط}$ تو قطر خط منحنی سے لانہایت فاصلہ پر ملی گا حدود اون قطرون کے

جو تقاطع ایک دوسری سے کرتی ہین اسطرح معلوم ہونگی نقاط آ اور ب اور
بَ مین سے کسیہ خطوط متوازی محور دنکی جو کہ ملین نقطون ی اور یَ پر تو اب ظاہر
ہی کہ مس ی ص ا = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ اور مس یَ ص ا = $-\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ بہالنسی معلوم ہوا



کہ اگر خطوط ی ص اور یَ ص کو کھینچا جاوے تو وہ خطوط مطلوب ہونگی یہالنسی
ثابت ہوا کہ اگر قطر خط منحنی سے ملی تو وہ بالضرور زاویہ ی ص یَ کو کھینچا گیا ہوگا
تو اب معلوم ہوگا کہ خط ص د کبھی خط منحنی سے نہین ملیگا — ز

(۱۸۰) واضح ہو کہ خط بعید البیضوی کے لا تعداد اقطار متجانس ہوسکتے ہین اور
یہہ ثابت ہوسکتا ہی اگر خط منحنی کے محور دنکی سمت بوسیلہ (۵۷) کی بدلی جاوے
ظاہر ہی کہ ی = لا جس ر + یَ جس رَ اور لا = لا جم ر + یَ جم رَ جبکہ
لکھا ہمنی ان قیمتون لا اور یَ کو اس مساوات مین ط۲ ی۲ − ص۲ لا۲ = − ط۲ ص۲
تو حاصل ہوگا یہہ {ط۲ (جس رَ)۲ − ص۲ (جم رَ)۲} یَ۲ + {ط۲ (جس ر)۲ − ص۲ (جم ر)۲} لا۲
+ ۲ {ط۲ جس ر جس رَ − ص۲ جم ر جم رَ} لا یَ = − ط۲ ص۲ واسطی ثبوت اسبات کے
کہ اس مساوات کو قطر متجانس ہون فرض کرو کہ امثال لا یَ = ۰

$\therefore ط^۲ جس ر جس ر - ص^۲ جم ر حم ر = ۰$ یا $مس ر مس ر = \frac{ص^۲}{ط^۲}$

یہان ظاہر ہی کہ واسطی کسی ایک خاص قیمت ر کے ہمین قیمت ر کی معلوم ہوجاویگی یہان سے ثابت ہوتا ہی کہ لامہایت جوڑی قطروں کی ایسی ہوسکتی ہین کہ جنکی نسبت سی اگر مساوات لئی جاوے تو وہ ایسی مساوات مطلوب ہوگی کہ جسکی قطر متجانس ہونگی - اگر مس ر کم ہو $\frac{ص}{ط}$ سی تو مس ر زیادہ ہونا چاہئے $\frac{ص}{ط}$ سی یعنی اگر ایک قطر ص ع شکل گذشتہ مین خط منحنی سے ملی تو قطر متجانس ص د خط منحنی سے نہین ملیگا تو یہانسے ثابت ہوا کہ ہر ایک دو اقطار متجانس مین سے ایک ناممکن ہوتا ہی اور چونکہ حاصلضرب مماسون کا مساوے ایک مقدار مثبت کی ہی تو دونو زاویہ حادہ یا منفرجہ ہونی چاہئین اور چونکہ شکل گذشتہ مین وہ دونو حادہ ہین تو مقابل شاخون کے درمیانی وہ دونو منفرجہ ہونگے - ثر ثر ثر ثر ثر

(۱۸۱) واضح ہو کہ ایسی قطر متجانس جو کہ متقاطع علی القوایم بہی ہون ایک ہی جوڑا ہوسکتا ہی اور اسکا کچھ ذکر فقرہ (۱۳۲) مین ہوا ہی - ثر

(۱۸۲) تو اب مساوات خط منحنی کی یہہ ہوگی

$\{ط^۲ (جس ر)^۲ - ص^۲ (جم ر)^۲\} ر^۲ + \{ط^۲ (جس ر)^۲ - ص^۲ (حم ر)^۲\} لا^۲ = - ط^۲ ص^۲$

اگر ہم متواتر فرض کرین $ر = ۰$ اور $لا = ۰$ تو ہمین حاصل ہوگی وہ فاصلی جو کہ ہامین نقطہ شروع اور ادن نقطون کے ہین جہانکہ خط منحنی قطع کرتا ہی نئے محور دنکو اور چونکہ ابہی ہمنے ثابت کیا ہے (۱۸۰) مین کہ ایک ان محورون مین سے خط منحنی سے نہین ملتا ہی تو ایک فاصلہ کو انمین سے مقدار غیر ممکن سے تعبیر کرنا چاہئی اب

اب فرض کرو کہ محور لا کا خط سخنی سے شروع مرکز سی فاصلہ ط۱ پر ملتا ہی فرض کرو کہ طول دوسری محور کا ص۱ ہا=۱ یعنی فرض کرو کہ نئی قطع متجانسین ۲ط۱ اور ۲ص۱ ہا=۱ ہین اب اگر ر = ۰

تو $\{ط^2 (جس ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2\} ط^2 = - ط^2 ص^2$

اور اگر لا = ۰ تو $\therefore \{ط^2 (جس ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2\} - ص^2 = - ط^2 ص^2$

اور مساوات بدلی ہوئی یہہ ہوگی $\frac{ط^2 ص^2}{ص^2} ر^2 - \frac{ط^2 ص^2}{ط^2} لا^2 = - ط^2 ص^2$

یا $\frac{ر^2}{ص^2} - \frac{لا^2}{ط^2} = -1$ یا $ط^2 ر^2 - ص^2 لا^2 = - ط^2 ص^2$ ثر

(۱۸۳) بوسیلہ تبدیل کرنے کی ہمین حاصل ہونگی تین مساواتین آیندہ

$ط^2 \{ط^2 (جس ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2\} = - ط^2 ص^2$ ..... (۱)

$ص^2 \{ط^2 (جس ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2\} = + ط^2 ص^2$ ..... (۲)

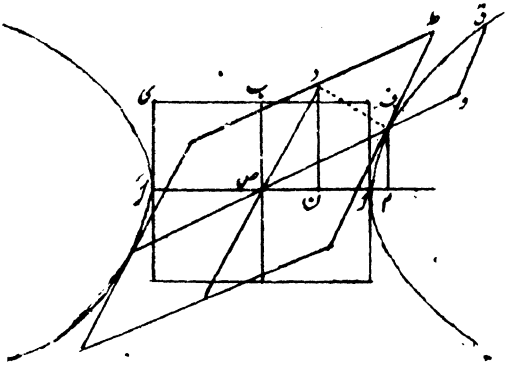
$ط^2 جس ر جس ر - ص^2 جم ر جم ر = ۰$

یا $مس ر مس ر = \frac{ص^2}{ط^2}$ ..... (۳)

اگر ہم عمل کرین مطابق (۱۳۴) کی یا کھینچین $ص^2$ کے $- ص^2$ کو اور $- ص^2$ بجاے $ص^2$ کے تو ہمین حاصل ہوگا یہہ $ط^2 - ص^2 = ط^2 - ص^2$ یا حاصل تفریق مربعون کا جو کہ کھینچین جاوین اقطار متجانس پر مساوی ہوگا حاصل تفریق اون مربعون کا جو کہ کھینچی جاوین محور دونپر — ثر ثر ثر

(۱۸۴) اور اب اگر ضرب کرین (۱) کو (۲) مین اور تجذور کرین (۳) کو اور پھر تفریق کرین انکو اور اختصار کرین موافق (۱۳۵) کے تو حاصل ہوگا یہہ

ط ص ا جس (ر - ر) = ط ص آب ظاہر ہی ہے کہ (ر - ر) مساوی ہی زاویہ ف ص د کی جو کہ درمیان اقطار ص ف اور ص د کے واقع ہی پہانسی معلوم ہوا کہ اگر



کھینچین ہم انجام اقطار متجانس سے خطوط متوازی ان اقطار کے تو ہمین حاصل ہوگی مساوات گذشتہ سی متوازی الاضلاع ف ص د ط = سطح ا ص ب ی، تو اب ثابت ہوا کہ تمام متوازی الاضلاع کہینچی گئے اس شکل مین مساوی ادس سطح کے ہین جو کہ ضرب دینی سی محور دنکی حاصل ہو کی ⊛

⊛ شکلین فقرہ (۱۸۳) اور (۱۸۴) کی بطور آیندہ کے بہی ثابت ہو سکتی ہین فرض کرو کہ خط نحنی کے محور متقاطع علی القوایم ہین جیسا کہ فقرہ (۱۸۷) مین ہین اور فرض کرو کہ اوتار نقطہ ف کے لا اور ر ہین تو مساوات خط مستقیم ص د کی یہہ ہو گی ط ر ر - ص لا لا = ۰ دور کرنی سی لا اور ر کو بوسیلہ اس مساوات اور مساوات خط نحنی کے (ط ر ر - ص لا لا = - ط ص) تو ہمین حاصل ہو نگی اوتار ص ن اور ص د جنمین علامت ۱ = ۱ کی نہین ہو گی ص ن = لا

(۱۸۵) فقرہ (۱۸۲) سے معلوم ہوگا کہ مساوات خط منحنی کے جبکہ نشان لا اور ر کی دور کسی جا بدین یہہ ہوتی ہی ط۲ ر۲ − ص۲ لا۲ = − ط۲ ص۲

شکل گذشتہ مین ص ف = ط، اور ص د = ص، اور ص و = لا اور د ق = ر اگر مساوات کو اس صورت مین لکھین

ر۲ = ص۲/ط۲ (لا۲ − ط،۲) = ص۲/ط۲ (لا − ط،) (لا + ط،) تو اب

مربع ق د : سطح ف د اور د ف : : مربع ص د : مربع ص ف

(۱۸۶) مساوات مماس کی نقطہ ق پر (جسکی وتر لا اور ر ہین) یہہ ہی

ط۲ ر ر − ص۲ لا لا = − ط۲ ص۲ — ثر ثر ثر

(۱۸۷) اب فرض کرو کہ محور خط منحنی کے ص ا اور ص ب ہین اور فرض کرو کہ او تار ف ق کے لا اور ر ہین اور چونکہ مساوات ص ف کی

ر = ر/لا لا تو مساوات ص د کی یہہ ہوگی ر = لا ص/ط

= ط ر/ص اور د ق = ر = ص لا/ط یہانسی ہمین حاصل ہوگا یہہ ط۲ − ص۲ =

لا۲ + ر۲ − لا۲ − ر۲ = لا۲ + ر۲ − ط۲ ر۲/ص۲ − ص۲ لا۲/ط۲ = ص۲ لا۲ − ط۲ ر۲ ر۲/ص۲ +

+ ط۲ ر۲ − ص۲ لا۲/ط۲ = ط۲ ص۲/ص۲ − ط۲ ص۲/ط۲ = ط۲ ص۲

اور مثلث ف ص د = منحرف ف م ن د + مثلث د س ق − مثلث ف س م

= (لا − لا) ر + ر/۲ + لا ر − لا ر/۲ = لا ر − ر لا/۲ =

۱/۲ { لا ص لا/ط − ر ط ر/ص } = ص۲ لا۲ − ط۲ ر۲/۲ ط ص = ط۲ ص۲/۲ ط ص = ط ص/۲

تو اب معلوم ہوا کہ متوازی الاضلاع ف ص د = ط ص

مم = $\frac{ص^2 لا^2}{ط^2 ی^2}$ لا یا $ط^2 ی^2 - ص^2 لا لا^2 = 0$ لیکن مساوات مماس کی نقطہ ف پر یہہ ہوگی $ی ی^2 - ص^2 لا لا^2 = - ط^2 ص^2$ یہانسی معلوم ہوا کہ خط صد یا قطر متجانس صف کا متوازی ہی اوس مماس کی جو کہ ف پر کھینچا جاوے مساوات قطر متجانس کی وہی ہی جو کہ مماس کی ہی سوای جز اخیر $- ط^2 ص^2$ کے۔

(۱۸۸) فرض کرو کہ لا اور ی اوتار نقطہ ف کی ہین تو بوسیلہ اس مساوات $ط^2 - ص^2 = ط^2 - ص^2$ حاصل ہوگا یہہ $ص^2 = ط^2 - ط^2 + ص^2 =$

$= لا^2 ی^2 - ط^2 + ص^2 = لا^2 + (\frac{ص^2}{ط^2} لا^2 - ص^2) - ط^2 + ص^2 =$

$= \frac{ط^2 + ص^2}{ط^2} لا^2 - ط^2 = ی لا^2 - ط^2 = (ی لا - ط)(ی لا + ط) =$

$= ی ی$ یعنے مربع قطر متجانس صد = سطح س ف اور ہ ف

(۱۸۹) اگر خط ع ف کا نقطہ ف سی عمود ص د پر کھینچا جاوے جیسا کہ شکل گزشتہ سی ایک شکل پہلی مین کھینچا ہوا ہی تو سطح ع ف اور ص د =

$= ط ص$ (۱۸۴) $\therefore$ ع ف $= \frac{ط ص}{ص ی}$ $= \frac{ط ص}{\sqrt{ط^2 - ط^2 + ص^2}} = \frac{ط ص}{ی ی}$

اور ف ک $= \frac{ص}{ط} ی ی$ اور ف ک $= \frac{ط}{ص} ی ی$ یہانسی ثابت ہوا کہ

سطح ف ک لعد ع ف = مربع ب ص اور سطح ف ک اور ع ف = مربع ا ص اور

سطح ف ک اور ف ک = مربع ص د — دیتر التمام کی بیانین

(۱۹۰) اگر وہ خط ایک نقطہ سی جو کہ خط منحنی پر ہی دو انجام ایک قطر تک کھینچے

اگر فاصلہ ص ف = ع اور ب = اوس عمود کی جو کہ کھینچا جاوی مرکز سے مماس پر تو یہہ مساوات ہوگی $ب^2 = \frac{ط^2 ص^2}{ع^2 - ط^2 + ص^2}$

کھینچی جاوین قوابناد و نو خطوط کو وتر التمام کہتی ہین اور اُنکو وتر التمام اعظم اوس وقت کہتی ہین جبکہ قطع محور کلان ہو تو ساوات دو وتر ون کی یہہ ہین

$ک - ک' = ر'(ل - لا')$ اور $ک + ک' = ر'(ل + لا')$ اور بوسیلہ ان ساوا تون کی ہمین حاصل ہوگا یہہ $ر'ر = \frac{ص^2}{ط}$ جیسا کہ (۱۴۱) مین ثابت ہوا ہی یعنی حاصل ضرب مماس اُن زاویون کا جو کہ یہہ اوتار بناتی ہین قطر سی سادی ایک مقدار مقررہ کی ہی اور برعکس اسکی بہی ثابت ہوسکتا ہی موافق (۱۴۱) کے (۱۹۱) وہ زاویہ جو کہ درمیان دو اوتار التمام ہی صورت آیندہ سی معلوم ہوسکتا ہی

مس قا = $\frac{۲ص^2}{ط + ۲ص^2} \frac{لا'ک - ک'ل}{ک' - ک^2}$ ..... (زیکھو اوس شکل کو جو کہ فقرہ (۱۴۱) مین لکھی ہی) اور اگر $ر'$ اور $ر$ اوتار التمام اعظم کھینچے جاوین ایک نقطہ ر سی تو مس $ر'ر = \frac{۲ط ص^2}{(ط + ۲ص^2)ک}$ واضح ہو کہ زاویہ $ر'ر$ کا ہمیشہ حادہ ہوگا اور کم ہوگا جاوبگا زاویہ قایمہ سی $\frac{۱}{۲}$ تک اور زاویہ $ر'ر$ اسی وقت مین زیادہ ہوتا جاوبگا ایک قایمہ سی دو قایمہ یعنی ۱۸۰° تک یہانتک ثابت ہوا کہ زاویہ درمیان اوتار التمام اعظم کے ایک ایسا زاویہ ہوگا جو کہ واقع ہوگا مابین $\frac{۱}{۲}$ اور ۱۸۰° کے واضح ہو کہ ایسی اوتار بہی کھینچ سکتے ہین جنکے مابین ایک زاویہ سادی ایک زاویہ مفروضہ کے ہوگا اور یہہ اسطرح ہوگا کھینچو ایک قطع دایرہ کا جسمین ایک زاویہ واقع ہوسکے سادی ایک زاویہ مفروضہ کی کسی قطع بعید البیضوی پر سوای محور کلان کے اور ملاؤ خطوط درمیان دو انجام اس قطر کے اور اوس نقطہ کے جہانکہ یہ قطع دایرہ کا تقاطع کرتا ہی بعید البیضوی سے اور اب اوتار التمام اعظم متوازی

انکی کھینچ سکتے ہین

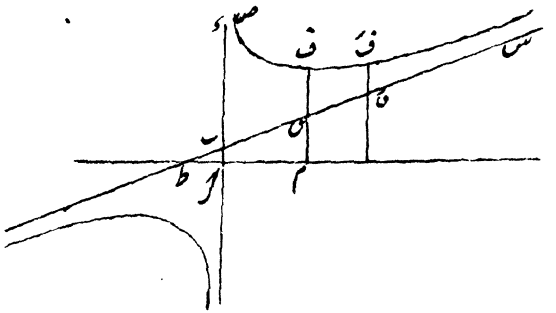
(۱۹۲) چونکہ قطر متجانس متوازی اوتار التمام کے ہوتی ہین موافق (۱۴۴) کے ہیپربولی وہ سطح سی کھینچ سکتی ہین کہ مابین انکی ایسا زاویہ ہوگا جو کہ درمیان ۰ اور ۹۰° بن سکتا ہی

(۱۹۳) واضح ہو کہ مساوی قطر متجانس بعید البیضوی مین نہین ہوتی ہین لیکن اس خاص خط منحنی مین جسمین ص = ط اور اس صورتمین ہمین حاصل ہوگا یہہ ط۲ - ص۲ = ط۲ - ص۲ = ۰ یہانسے ثابت ہوا کہ قطر متجانس ط اور ص مساوی ایک دوسری کی ہین اور مساوات اس خط منحنی کے جسکو کہ بعید البیضوی مساوی القطرین کہتی ہین یہہ ہی ک۲ - لا۲ = - ط

خطوط متقضر الملاقات کی بیانمین

(۱۹۴) ہمنی ابھی بیان کیا ہی کہ اکثر خواص بیضوی کے بوسیلہ تھوڑی تبدیلی کے خواص بعید البیضوی کی مطابق ہوتی ہین لیکن بعض خاصیتین بعید البیضوی کی ایسی ہین جو کہ بیضوی مین نہین پائی جاتی ہین یہہ فرق صرف بسبب شکل مخروط اوسکے خطوط کی جو لانہایت پہیلتی ہین واقع ہوتی ہین ظاہر ہی کہ مس ر مس ر = $\frac{ص۲}{ط۲}$ (۱۸۰) اور جیسا کہ قیمت مس ر کی قریب $\frac{ص}{ط}$ کی آتی ویسی ہی قیمت مس ر کی بھی قریب اسکے آتی ہی — ہم اب بیان کرین گے کہ خط منحنی قریب بنی خط متقضر الملاقات کے آتا ہی لیکن اوسکی مین ملتا ہی اور چونکہ یہہ صفت صرف بعید البیضوی مین ہی نہین پائی جاتی ہی اسلیے ہم اسکو اب ہم عموماً لکھینگے —

(۱۹۵) فرض کرو کہ س ف ف ایک ایسا خط منحنی ہو جسکی مساوات بحسب احداثیات کی یہہ ہوگی ی = ط لا + ص + $\frac{\text{ت}}{\text{لا}}$ اور مان لو کہ ط ب س وہ خط ہی جسکی مساوات یہہ ہی ی = ط لا + ص واسطے ایک خاص قیمت لا کی تو ق م کا حاصل ہوگا اور جبکہ جمع کرین گی اس خط پر $\frac{\text{ت}}{\text{لا}}$ کو تو ہین حاصل ہوگا ایک نقطہ ف خط منحنی کا اسیطرحسی ہم دریافت کرسکتی ہین نقاط (ف اور ف وغیرہ) جو



خط منحنی اور خط مستقیم پر ہونگی - چونکہ $\frac{\text{ت}}{\text{لا}}$ کم ہوتا ہی جبکہ لا زیادہ ہوتا ہی اسیواسطے خط ف ق کا کم ہوگا ف ق سے جیسا کہ لا زیادہ ہوتا ہی اتنا ہی خط ف ق کا کم ہوتا ہی اور جبکہ لا نہایت زیادہ ہوگا تو ف ق نہایت کم ہوگا یا خط منحنی لا نہایت قریب خط ط ب س کے آویگا لیکن پھر بھی حقیقت مین اوسی نہین ملیگا اسیواسطے خط ط ب س کو خط متقرب الملاقات خط منحنی کا کہتے ہین مساوات خط ط ب س کے یہہ ہی ی = ط لا + ص اور یہی مساوات خط منحنی کے ہوجاویگی جبکہ لا اوسپر زیادہ کیا جاوے

(۱۹۶) یہی دلیل اسوقت بھی عمل مین آسکتی ہی جبکہ قوای منفی لا کی ایک سے

زیادہ ہون اگر صورت عام مساوات خط منحنی کی یہہ ہو

ک = وغیرہ + م لا^۳ + ن لا^۲ + ط لا + ص + س/لا + د/لا^۲ + وغیرہ

تو مساوات خط متنفر الملاقات منحنی کے یہہ ہو گی ک = وغیرہ + م لا^۳ + ن لا^۲ + ط لا + ص + س/لا اور مساوات ک = وغیرہ + م لا^۳ + ن لا^۲ + ط لا + ص

سی حاصل ہوتا ہی ایک خط زیادہ متنفر الملاقات کا بہ نسبت پچھلی مساوات کی یہا نسی حاصل ہوتا ہی ایک سلسلہ خطوط منحنی کا جو کہ زیادہ تر قریب اصلی خط منحنی کے آویگی -

(۱۹۷) اب ہم استعمال کرینگے اوس ترکیب کا اون خط منحنیون مین جنکی مساوات درجہ دویم کی ہی اور انکی مساوات عام یہہ ہی موافق فقرہ (۵۷) کے

ک = − (ص لا + د)/ب۲ ± (۱/ب۲) √{(ص^۲ − ۴ ب ط س) لا^۲ + (ص د − ۲ ب ی) لا + د^۲ − ۴ ب ف س}

= − (ص لا + د)/ب۲ ± √{م لا^۲ + ن لا + ع} موافق فرض کی

= − (ص لا + د)/ب۲ + لا √م {۱ + (ن لا + ع)/(م لا^۲)}^½

= − (ص لا + د)/ب۲ ± لا √م {۱ + ½ (ن لا + ع)/(م لا^۲) + (½ × −½)/۲ ((ن لا + ع)/(م لا^۲))^۲ + وغیرہ}

= − (ص لا + د)/ب۲ ± √م {لا + ½ ن/م} ± اجزای مقدار مقررہ / قوای لا پر

تو اب معلوم ہوتا ہی کہ مساوات خط متنفر الملاقات کی یہہ ہی ک = − (ص لا + د)/ب۲ ± √م {لا + ½ ن/م} = − (ص لا + د)/ب۲ ± (۱/ب۲) √{(ص^۲ − ۴ ب س) لا^۲ + (ص د − ۲ ب ی) لا + د^۲ − ۴ ب ف س}

چونکہ ص^۲ − ۴ ب س منفی ہی بیضوی مین اسیواسطے اسی مساوات کے نشنہ کسی خط منحنی سے تعلق نہین رکھی گی اور جبکہ یہہ صورت ہو کی ص^۲ − ۴ ب س = ۰

کھینچی جاوین تو اس صورت مین مساوات گذشتہ مین ۷ لا پایا جاویگا اسوسطے یہہ مساوات تعلق رکھی گی خط منتفر الملاقات سے سو اب معلوم ہوا کہ صرف ایسے خط کا خط منتفر الملاقات مستقیم خط ہی اور اس ± علامت سے معلوم ہوتا ہی کہ دو خط منتفر الملاقات ہونگی اور انمودہ قطر تنصیف کریگا جسکی یہہ مساوات ہی

ی = − (ص لا + د) / ۲ط اور خطوط منتفر الملاقات مرکز سے بھی گذرتی ہین کیونکہ اگر

فرض کرین لا = (۲طی − ص د) / (ص ب − ۴ط س) تو ی = − (ص لا + د) / ۲ط = (۲ص د − ص ی ب) / (ص ۲ − ۴ط س)

اور یہہ قیمتین لا اور ی کے اوتار مرکز کی ہین −

(۱۹۸) اگر مساوات خط منحنی مین اجزای لا اور ی کی باہی بنا دین تو ایک تھوڑی تبدیلی کے وسیلے سے ہم مساوات کو ایک ایسی سلسلہ سی بدل سکتی ہین کہ جو سیمین قوتے ی اور لا کی منفی ہونگی مثلاً اگر مساوات یہہ ہو ص لا ی + س لا ۲ + د ی + ی لا + ف = ۰

تو ی = − (س لا ۲ + ی لا + ف) / (ص لا + د) = − (س لا ۲ + ی لا + ف) / (ص لا (۱ + د / ص لا))

= − (س لا ۲ + ی لا + ف) / ص لا (۱ + د / ص لا)^{-۱}

= − (س لا / ص + ی / ص + ف / ص لا) (۱ − د / ص لا + (د / ص لا)^۲ − وغیرہ) جبکہ ضرب کرین

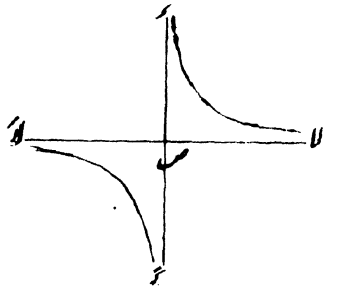
ہم اور دور کرین باقی قوای لا کو تو حاصل ہوگی مساوات خط منتفر الملاقات کی جو

یہہ ہی ی = − س لا / ص − ی / ص + س د / ص ۲ یا ص ی + س لا = س د − ص ی

دوسرا خط منتفر الملاقات اس طرح حاصل ہو سکتا ہی فرض ایک ایسی خاص قیمت لا کی جسکے وسیلے سی ایک صحیح لاانہایت قیمت ی کی حاصل ہو اس قیمت لا کے وسیلے سے مقام دوسرے خط منتفر الملاقات کی معلوم ہو جاویگا اب اگر فرض کرین ہم ص لا + د = ۰ تو ی = ∞

یہان سے ثابت ہوا کہ اگر خط نقطہ (لا = − ص/ط) سی متوازی محور ی کے کھینچا جاوے تو یہہ خط متنفر الملاقات مطلوب ہوگا اگر مساوات یہہ ہو ط ر² + ص لا ی + د ی + ی لا + ف = ۰ تو مساوات خط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی ط ی + ص لا = طی − صد / ص اور ص ی + ی = ۰ اور دوسرا خط متنفر الملاقات متوازی محور ی کی ہی اگر مساوات یہہ ہو ص لا + د ی + ی لا + ف = ۰ تو مساواتین خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہونگی ص لا + د = ۰ اور ص ی + ی = ۰ پہلا خط متنفر الملاقات متوازی ی کی ہی اور دوسرا موازی محور لا کی ہی۔

(۱۹۹) اگر مساوات یہہ ہو ص لا ی + ف = ۰ تو اس صورتین خطوط متنفر الملاقات محور ہونگے مقام خط منحنی کا اس مساوات سی معلوم ہوجاویگا



ی = − ف/ص لا = ط/لا موافق فرض کے فرض کرو کہ ص لا اور ص ی محور ہین اب فرض کرو کہ لا = ۰ تو ی = ∞ جتنا لا زیادہ ہوگا اتنا ہی ی کم ہوگا اور جب لا = ∞ تو ی = ۰ تو اب ہین حاصل ہوا کی شاخ ولا کی اگر لا منفی ہو تو ی بہی منفی ہوگا اور جبکہ لا زیادہ ∞ سے ∞ تک تو ی کم ہونا شروع کریگا ∞ سے ۰ تک تو اب حاصل ہوگی

ہمین دوسری شاخ ر لا کے برابر اور مثل پہلی کے ث ث ث ث

(۲۰۰) دریافت کرو مساوات خطوط متنفر الملاقات کی مساوات لبعید البیضوی سے جسکا مرکز نقطۂ شروع اس مساوات کا ہو ظاہر ہی کہ

$$ر = \pm \frac{ص}{ط} \sqrt{لا^2 - ط^2} = \pm \frac{ص}{ط} لا \sqrt{1 - \frac{ط^2}{لا^2}} =$$

$$\pm \frac{ص}{ط} لا \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{ط^2}{لا^2} + \text{وغیرہ} \right\}$$ تو اب ظاہر ہی کہ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی $ر = \pm \frac{ص}{ط} لا$ واسطی کھینچے ان خطوط کے تمام کرو متوازی الاضلاع کو محور دن پر قطر اس متوازی الاضلاع کی لو کس مساوات گذشتہ کے ہوگی تو اب معلوم ہوا کہ یہی خطوط متنفر الملاقات مطلوب ہین یعنے خطوط ص ی اور ص ی کھینچی گئے خطوط متنفر الملاقات ہین — مساوات خطوط متنفر الملاقات کی بآسانی یاد رہ سکتی ہی کیونکہ یہہ مساوات مثل مساوات خط منحنی کی ہی سوائے جز اخیر کی اور دونو مساواتین یہہ ہین $ط^2 ر^2 - ص^2 لا^2 = - ط^2 ص^2$ مساوات خط منحنی کی ہے اور $ط^2 ر^2 - ص^2 لا^2 = 0$ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی ہے

اگر مساوات بعید البیضوی کے محور قطر متجانس ہون تو اس صورت مین مساواتین گذشتہ اس شکل کی ہو جاوینگی

$ط_1^2 ر^2 - ص_1^2 لا^2 = - ط_1^2 ص_1^2$ مساوات خط منحنی کی ہی

اور $ط_1^2 ر^2 - ص_1^2 لا^2 = 0$ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی ہی

(۲۰۱) اگر ص = ط اور مرکز بعید البیضوی کا نقطہ شروع فرض

فرض کیا جاوے اور محور متقاطع علی القوایم تو ع۲ − لا۲ = − ط
اسواسطے مساوات خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی ع۲ − لا۲ = ۰
یا ع = ± لا یعنے خطوط متنفر الملاقات زاویہ ۴۵° کا محور ون سے
بناتی ہین اور زاویہ ۹۰° کا آپس مین یہانسے معلوم ہوا کہ محور بعید البیضوی
مساوی القطرین کے متقاطع علی القوایم ہوتی ہین ۔ ش

(۲۰۲) اگر اس خط منحنی کا نقطہ مشروع آ فرض کیا جاوے اور محور
متقاطع علی القوایم تو ظاہر ہی کہ مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہوگی
ع = ± ص/ط (لا۲ − ۲ط لا)^½ = ± ص/ط لا (۱ + ۲ط/لا)^½ جبکہ
پہیلا دین یا لیوین صورت مفصلہ اسکی جذر کی اور چھوڑ دین قوای منفی
لا کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی
ع = ± (ص/ط لا + ص)

(۲۰۳) اگر فرض کرین ہم مساوات ایک خاص خط مستقیم کی
(ع = ص/ط لا + س) اور یہہ خط متوازی خط متنفر الملاقات کی ہو
اور دور کرین ع کو بوسیلہ اس مساوات کی اور مساوات خط منحنی کے
تو ہمین حاصل ہوگی صرف ایک قیمت لا کی تو اب ثابت ہوا کہ ایک خط
مستقیم متوازی خط متنفر الملاقات کی قطع کرتا ہی خط منحنی کو ایک نقطہ پر

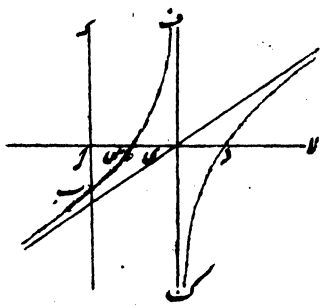
(۲۰۴) فقرہ (۷۷) مین بیان کیا ہی کہ بعض صورتون مین صورت
خط منحنی کی آسانی سے نہین معلوم ہوسکتی ہے مثلاً جبکہ خط منحنی

قطر کو تقاطع نگری دو اقطار متجانس مین سے تو اس صورت مین ایک طرح کا اشکال واقع ہوگا دریافت کرنی مین صحیح صورت خط منحنی کے اور اخطوط مستفر الملاقات بہت فایدہ مند ہونگی واسطی معلوم کرنے مقام خط منحنی کی مثلاً اگر مساوات یہہ ہو لا ی = لا^ن + ص لا + س^۲ یا ی = لا + ص + س^۲/لا اگر فرض کیا جاوے لا = ۰ تو ی = ∞ اور جبکہ لا بہت بڑا فرض کیا جاوے تو ی تقریباً مساوی لا + ص کی ہوگا تو اب معلوم ہوا کہ خطوط آی اور ط ب س شکل (۱۹۴) مین خطوط مستفر الملاقات بعید البیضوی کے تعبیر کرینگے اور چونکہ خط منحنی محور دنسی نہین ملتے تو معلوم ہوا کہ یہہ خط منحنی واقع ہی درمیان زاویہ ک ب س کی اور متقابل اُسی زاویہ ط ب آ کے تو اب رستہ خط منحنی کا بخوبی معلوم ہوگیا جیسا کہ شکل (۱۹۴) مین ہی۔

مثال (۲)

ی (لا - ۲) = (لا - ۱) (لا - ۲)^۲ یا ی = (لا - ۱)(لا - ۳)/(لا - ۲) چونکہ ص^۲ - ۴ د مثبت ہی تو معلوم ہوتا ہی کہ یہہ مساوات بعید البیضوی کی ہی تو اب کھینچو محور متقاطع علی القوایم آلا اور آی اور دریافت کرو وہ نقاط جہانکہ یہہ خط منحنی تقاطع کرتا ہی محورون کو ∴ فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ی = -۳/۴ = آب اور فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ لا = ۱ = آس اور لا = ۳ = آد تو اب معلوم ہوا کہ خط منحنی نقاط ب س اور د سی گذرتا ہی واسطی دریافت کرنی

خطوط متنفر الملاقات کی فرض کرو کہ لا = ۲ ش ک = ∞ تو اب ثابت ہوا کہ اگر ای = ۲



تو خط ف ی ک جو کہ عمود ہے لا پر ایک خط متنفر الملاقات ہی اور اب دریافت کرو دوسرے خط متنفر الملاقات کو تو اب

ظاہر ہی کہ ک = $\frac{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۳)}{\text{لا}-۲} = \frac{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۳)}{\text{لا}\times(۱-\frac{۲}{\text{لا}})} =$

$\frac{(\text{لا}-۱)(\text{لا}-۳)}{\text{لا}}(۱-\frac{۲}{\text{لا}})^{-۱} =$

$\frac{\text{لا}^{۲}-۴\text{لا}+۳}{\text{لا}}(۱+\frac{۲}{\text{لا}}+\text{وغیرہ}) = (\text{لا}-۴+\frac{۳}{\text{لا}})(۱+\frac{۲}{\text{لا}}+\text{وغیرہ})$

لا − ۴ + ۲ + $\frac{ب}{\text{لا}}$ + وغیرہ تو اب یہانسی معلوم ہوا کہ مساوات دوسری خط متنفر الملاقات کی یہ ہی ک = لا − ۲ اسیواسطے اس خط کو کھینچا چاہئے نقطہ ی سے بنا تا ہوا زاویہ ۴۵° کا محور لا سی اب ہم مقام خط منحنی کا بخوبی دریافت کرسکتے ہین کیونکہ واسطے تمام قیمتون لا کے جو کہ کم ہین آسی ک سے منفی ہوگا تو اب اس فرض کی موافق شاخ ب س حاصل ہوگی اور واسطے ایسی قیمتون لا کے جو کہ آسے زیادہ اور ۲ سے کم ہین ک مثبت ہوگا اور زیادہ ہوتا جاویگا ∞ سے تو اب اس فرض کے وسیلہ سی شاخ س ف کے حاصل ہوگی اور

واسطے ایسی قیمتون لا کے جو کہ ۲ سے زیادہ اور ۳ سے کم ہین ر منفی
ہوگا تو اب پیدا ہوگے شاخ ک د کی اور واسطے اون قیمتون لا کے
جو کہ ۳ سے زیادہ ہین ر مثبت اور قریب آتا جاویگا لا − ۲ کے
یہانتک معلوم ہوگی وہ شاخ جو کہ نقطہ د سے دوسری خط متنفر الملاقات
کی طرف پہیلتی ہی واسطے تمام قیمتون منفی لا کے ر منفی ہوگا اور
زیادہ ہونا شروع کریگا $-\frac{3}{2}$ سی ∞ تک اور قریب آتا جاویگا
(− لا − ۲) کی یہانتک معلوم ہوا کہ خط منحنی نقطہ ب سے نیچی کو پہیلتا
طرف خط متنفر الملاقات کی — مثال (۳)

ر (لا − ط) = لا (لا − ۲ط) یہان لا = ط اور ر = لا − ط
مساوات خطوط متنفر الملاقات کی ہین شکل اسکی پچھلی شکل کی ہے
اگر فرض کیا جاوے نقاط آ اور س کو منطبق ایک دوسری پر
مثال (۴) $ر^2 = ط لا^2 + لا^3$ ظاہری کہ یہان محور کا
ایک خط متنفر الملاقات ہوگا کیونکہ جب لا = ۰ تو ر = ∞
اور $ر = لا (1 + \frac{ط}{لا})^2 = لا + ۲ط + \frac{ط^2}{لا}$ تو اب یہان سے معلوم
ہوتا ہی کہ دوسری خط متنفر الملاقات کی یہہ مساوات ہی ر = لا + ط
(۲۰۵) باب (۷) مین ہمنے بخوبی بحث مساوات درجہ دوم کی
لکھی ہی اور وہان ترکیب اسکی اختصار کی بھی بیان کی گئی ہی اور وہان
یہہ بھی لکھا ہی کہ اگر مساوات متعلق بعید البعضوی سے ہو تو مساوات

اسکی بعد اختصار کے یہہ ہوجاویگی ا ر۲ + ب ر + س لا۲ + ف = ۰ (۸۴)
واضح ہو کہ یہی مساوات اسقدر مختصر ہوسکتی ہی کہ اسکی صورت بعد اختصار
کی یہہ ہوجاویگی لا۲ = کہ۲ اور چونکہ یہہ صورت بہت فایدہ مند ہے
واسطی بحث خطوط متقاطع الملاقات کی اسیواسطے اب ہم اسکو بیان کرینگے
(۲۰۶) فرض کرو کہ محور مساوات متقاطع علی القوایم ہین اور صورت
اسکی یہہ ہی ا ر۲ + ب لا ر + س لا۲ + د ر + ی لا + ف = ۰ اب فرض
کرو کہ لا = لا۱ + م اور ر = ر۱ + ن اور اب موافق فقرہ (۸۰)
فرض کرو کہ امثال لا۱ اور ر۱ کی مساوی صفر کی ہین تو اب بوسیلہ
اس تبدیلی کے جو مساوات کہ حاصل ہوگی وہ متعلق مرکز سی ہوگی
اور صورت اسکی یہہ ہوجاویگی ا ر۱۲ + ب لا۱ ر۱ + س لا۱۲ + ف = ۰
اسیطرحسی واسطی دور کرلے امثال لا۱ اور ر۱ کی بہ لوسمت
محورون متقاطع علی القوایم کے طرف ترچھی محورون کے (۵۷)
∴ ر = لا جس ر + ر جم ر
اور لا = لا جم ر + ر حم ر بوسیلہ لکھنی ان قیمتون
لا اور ر کی مساوات گزشتہ مین اور علی الترتیب لکھنی قوای لا
اور ر وغیرہ کی حاصل ہوگا یہہ

ر۲ { ا (جس ر)۲ + ب جس ر جم ر + س (جم ر)۲ } +
لا۲ { ا (جس ر)۲ + ب جس حم ر + س (حم ر)۲ } +

$\alpha^2 \gamma^2 \{ 2\alpha\beta \sin r \cos r + \beta^2 (\sin r \cos^2 r + \cos r \sin^2 r) +$
$+ 2\alpha\delta \cos r \cos^2 r + \delta^2 \} = 0$ چونکہ اس مساوات مین دو مقدارین
r اور r' کی غیر منقطع ہین اسیواسطے فرض کرسکتے ہین امثال $\alpha^2 \gamma^2 = 0$
اور $\gamma^2 = 0$ $\therefore \alpha^2 (\sin r)^2 + \beta \sin r \cos r + \delta (\cos r)^2 = 0$ (۱)

اور $\alpha^2 (\sin r')^2 + \beta (\sin r')(\cos r') + \delta (\cos r')^2 = 0$ (۲)

تقسیم کرنیسی اول مساوات کو $(\cos r)^2$ پر ہمین حاصل ہوگا یہہ

$\alpha^2 (\tan r)^2 + \beta \tan r + \delta = 0$ یا

$\tan r = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha^2\delta}}{2\alpha^2}$ چونکہ صورتین دونو
مساواتون گذشتہ کی ایک سی ہین تو حل کرنے سی مساوات دویم کو ہمین
حاصل ہوگی وہی قیمت $(\tan r')$ کی جو کہ $(\tan r)$ کی حاصل ہوئے ہی
یعنی سمت دونو محورونکی $(\tan r)$ کے وسیلے سے دریافت ہوسکتی ہی
اور ظاہر ہی کہ اس صورت مین شکل مساوات کی یہہ ہوگی

$\beta' \alpha^2 \gamma^2 + \delta' = 0$

(۲۰۷) اب دریافت کرو قیمت β' کی ظاہر ہی کہ

$\beta' = 2\alpha\beta \sin r \cos r + \beta (\sin r \cos^2 r + \cos r \sin^2 r) +$
$+ 2\delta \sin r \cos r = \cos r \cos r \{ 2\alpha\beta \tan r + \beta \tan r +$
$\beta (\tan r^2 + \tan r) + 2\delta \}$ ہم ابہی ثابت کرآئی ہین
$\tan r \tan r' = \frac{\delta}{\alpha}$ اور $\tan r + \tan r' = -\frac{\beta}{\alpha}$ اسیواسطے

جم رجم ر = $\sqrt{(۱-س)^۲ + ب^۲}$

∴ ب' = $\frac{۱}{\sqrt{(۱-س)^۲ + ب^۲}}$ { ۲س − $\frac{ب^۲}{۱}$ + ۲ی } =

$\frac{۲س - ب^۲}{\sqrt{(۱-س)^۲ + ب^۲}}$ اور ف' = $\frac{ای^۲ - س د^۲ - ب دی}{ب^۲ - ۴ا^۲ س}$ + ف (۸۰)

تو اب ثابت ہوا کہ − $\frac{ب^۲ - ۴ا^۲ س}{\sqrt{(ط-س)^۲ + ب^۲}}$ لاگ ر + $\frac{ای^۲ + س د^۲ - ب دی}{ب^۲ - ۴ا^۲ س}$

+ ف = ۰ ثر ثر ثر ثر

(۲۰۸) اگر اصلی محور ترچھی ہوں تو ہمیں صورتیں (۵۶) کی لینی چاہئیں اور پھر موافق گذشتہ کی انپر عمل کرکے ہمیں حاصل ہوگا یہہ

مس ر = ± $\frac{\sqrt{ب^۲ - ۴ا^۲ س} - ب + ۲س جم ک}{۲(۱ + س (جم ک)^۲ - ب جم ک}$ اور

ب' = $\sqrt{(۱ + س - ب جم ک)^۲ + (ب^۲ - ۴ا^۲ س)(جس ک)^۲}$

$- (ب^۲ - ۴ا^۲ س)$

(۱۰۹) مثالین آیندہ کو کہ جسکی مساواتین محور متقاطع علی الاقوم ہمیں ایسی مساواتوں سی تبدیل کرنی چاہئی جو متعلق خطوط متفرق الملاقات سی ہوں مثال (۱)

ر' − ۱۰ لا ر + لا' + ۲ ر + لا + ۱ = ۰ یہاں م = $\frac{۱}{۸}$ اور ن = $\frac{۱}{۸}$

اور ف = $\frac{۹}{۸}$ اور مس ر = ۵ ± ۲ $\sqrt{۶}$ اور ب' = − $\frac{۴۸}{۵}$

∴ − $\frac{۴۸}{۵}$ لا' گ' + $\frac{۹}{۸}$ = ۰ یا لا' گ' = $\frac{۱۵}{۱۲۸}$

مثال (۲) ۴ ر' − ۸ لا ر − ۴ لا' − ۴ ر + ۴۸ لا − ۱۵ = ۰

یہاں ب' = − ۸ $\sqrt{۳}$ اور ف' = ۲ ∴ ۸ $\sqrt{۳}$ لا' گ' + ۴ = ۰

یا لا' گ' = $\frac{۱}{۲ ہ ۴}$ مثال (۳) $\frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{ص^۲}{ہ^۲} = ۱$

یا لا' = ط و + ص لا واضح ہو کہ اس مساوات مین محور متوازی خطوط
متنصف الملاقات کے ہین (۱۹۸) دسطے بدلنی نقطہ شروع کے طرف مرکز
کی فرض کرو کہ و = آ + ن اور لا = لآ + م بہالتی معلوم ہوا
کہ م = ط اور ن = ص اور اسیواسطے صورت مساوات بعد اختصار
کی یہہ ہوگی لآ' = ط ص — شر شر شر
(۲۱۰) اگر ر اور ر' تعبیر کرین اون زاویون کو جو کہ خطوط متنصف
الملاقات محور اصلی سے بنالی ہین اور ہم ابھی کر آئی ہین فقرہ (۲۰۶)
کہ ا (مس ر)^۲ + ب مس ر + س = ۰ ∴ مس ر مس ر' = $\frac{س}{ا}$
اب اگر فرض کیا جاوے س = — ا تو صورت مساوات گذشتہ کی یہہ
ہو جاویگی مس ر مس ر' = — ا یا مس ر مس ر' + ۱ = ۰ تو اب
معلوم ہوا موافق (۴۷) کے کہ زاویہ درمیان خطوط متنصف الملاقات
کی = ۹۰° تو اب ثابت ہوا کہ اگر مساوات بعید البیضوی مین
س = — ا تو ایسا بعید البیضوی کے محور متقاطع علی القوایم ہونگی —
مثال (۴) ۴ لآ^۲ — ۹ آ^۲ = ۳۶ یہہ مساوات بعید البیضوی کی ہے اور
اسکا نقطہ شروع مرکز اور محور متقاطع علی القوایم ہین اور حکم حاصل
کرینگے دو قیمتین (مس ر) کی بوسیلہ مساوات (۲۰۶) کی تو حاصل ہوگا
مس ر = ا اور مس ر' = — ا یعنے ر = ۴۵° اور ر' = ۱۳۵°

اور مساوات تبدیل کرنی کی یہہ ہو جاوینگے کہ = $\frac{لا - کہ}{۲ لا}$ اور

لا = $\frac{لا + کہ}{۲ لا}$ ∴ $\left(\frac{لا - کہ}{۲ لا}\right)^۲ - \left(\frac{لا + کہ}{۲ لا}\right)^۲$ = $\frac{}{۲ لا}$

یا - ۲ لا کہ = $\frac{}{۲ لا}$ اور لا کہ = $\frac{۱}{۲ لا}$ اس مثال مین مقام خط

منحنی کا ایسا ہوگا جیسا کہ شکل آیندہ مین ہے پہلی اس مساوات کی محور

آلا اور آر سمتی لیکن اب اسکی محور خطوط منتقر الملاقات ضلع

اور صلع ہین اور اور زاویہ ح صلع = ۹۰°

(۲۱۱) برعکس مرقومۂ بالا کی فرض کرو کہ یہہ مساوات دی ہوئی ہے

لا = کہ۲ اور دریافت کیا چاہتے ہین ہم بوسیلہ اس مساوات کی ایک

ایسی مساوات جسکے محور متقاطع علی الزوایم ہون اور معلوم کرو طول

اس مساوات کی محور و نکا واسطے ثبوت اس دعوی کے استعمال کرو

(۵۶) کو واسطے بدلنی سمت ترجیحی محور و نکے طرف محور ون متقاطع علے

الزوایم کے ظاہری کہ کہ = $\frac{لا حس ر + کہ حم ر}{حس ک}$ اور لا =

$\frac{لا حس (ک - ر) - کہ حم (ک - ر)}{حس ک}$ کہنے سے ان قیمتون لا اور کہ

کو مساوات لا = کہ۲ مین حاصل ہوگا لا۲ حس ر حس (ک - ر)

- کہ۲ حم ر حم (ک - ر) + لا کہ {حم ر حس (ک - ر) - حس ر حس (ک - ر)}

= کہ۲ (حس ک)۲ فرض کرو امثال لا کہ = ۰ ∴ حم ر حس (ک - ر)

- حس ر حم (ک - ر) یا حس (ک - ۲ ر) = ۰ ∴ ک = ۲ ر

اور ر = $\frac{ک}{۲}$ یہانسے معلوم ہوتا ہے کہ محور لا جو کہ بوسیلہ زاویہ ر

کی معلوم ہو سکتی ہی تنصیف کرتا ہی زاویہ ک کو جو کہ درمیان خطوط منتظر الملاقات کی ہی یہہ مطابق ہی اوس اشارہ کی جو کہ ممنی فقرہ (۱۸۹) کی انجام مین لکھا ہی جبکہ لکھینگے ہم ر = $\frac{ک}{۲}$ تو صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی لا^۲ (جس $\frac{ک}{۲}$)^۲ - ی^۲ (جم $\frac{ک}{۲}$)^۲ = کہ^۲ (جس ک)^۲ اور اسمین جز لا ی کا زایل ہوگیا ہی اور جبکہ لکھا ہمنے جس ک = ۲ جس $\frac{ک}{۲}$ جم $\frac{ک}{۲}$ تو حاصل ہوگا یہہ

$$\frac{۴ \text{کہ}^۲ (\text{جس} \frac{ک}{۲})^۲}{\text{کہ}^۲} - \frac{۴ \text{کہ}^۲ (\text{جم} \frac{ک}{۲})^۲}{\text{لا}^۲} = ۱$$

مطابق کرنی سی اس مساوات کو مساوات $\frac{ص^۲}{ط^۲} - \frac{ی^۲}{لا^۲} = ۱$ سے

ہمین حاصل ہوگا یہہ ط = ۲ کہ جم $\frac{ک}{۲}$ اور ص = ۲ کہ جس $\frac{ک}{۲}$

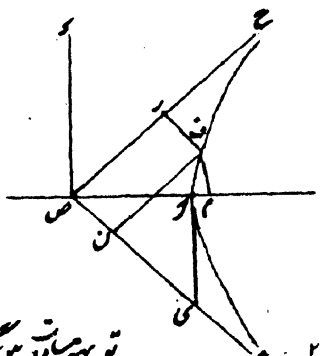
تو اب طول ط اور ص جو کہ نصف محور ہین معلوم ہو جاویگا اگر صورت مساوات کی یہہ ہو لا ی^۲ + ط لا + ص ی + س = ۰ پہلی اس مساوات کو رجوع کرو طرف مرکز کے یعنی بدلو اس مساوات کو ایسی مساوات سی جسکا نقطہ شروع مرکز ہو اور پہر عمل کرو موافق ترکیب گذشتہ کے -

(۲۱۲) تحویل کرو مساوات بعید البیضوی جسکا نقطہ شروع مرکز ہو اور محور متقاطع علی القوایم طرف اس مساوات کے لا ی = کہ^۲

فرض کرو کہ ص لا اور ص ی محور متقاطع علی القوایم ہین اور ص ح اور ص ع خطوط منتظر الملاقات یا ہی محور ہین ص م = لا / ص ن = ی اصلے در نقطہ ف کی ہیں

$$\left.\begin{array}{l} ص ن = لا' \\ ن ف = ى' \end{array}\right\}$$ نئے وتر فرض کیے ہین۔

اب واسطی تبدیل کرنی منظور ہے



محوروں کے فرض کرو کہ

ى = لا جب ر + ى جب ر

لا = لا جم ر + ى جم ر

لکھو ان قیمتون لا اور ى کو مساوات بعید البیضوی

مین $ط^2 ى^2 - ص^2 لا^2 = - ط^2 ص^2$ تو یہہ مساوات ہوگی

$ط^2 (لا جب ر + ى جب ر)^2 - ص^2 (لا جم ر + ى جم ر)^2 = - ط^2 ص^2$

یا $\{ط^2 (جب ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2\} ى^2 + \{ط^2 (جب ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2\} لا^2$ +

$2 (ط^2 جب ر جب ر - ص^2 جم ر جم ر) لا ى = - ط^2 ص^2$ واسطی بدلنی

اس مساوات کی طرف مساوات مطلوب کی اجزای $لا^2$ اور $ى^2$ کو دور کرنا چاہئی اور چونکہ اس مساوات مین دو مقدارین غیر مقررہ داخل کی گئی ہین اسلیے ہم امثال $لا^2$ اور $ى^2$ کو مساوی صفر کی فرض کرسکتے ہین

تو اب فرض کرو کہ $ط^2 (جب ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2 = 0$ اور

$ط^2 (جب ر)^2 - ص^2 (جم ر)^2 = 0$ مساوات اخیر سے یہہ حاصل ہوگا

$ظا ر = \pm \frac{ص}{ط}$ اور چونکہ مساوات اول سے یہی قیمت $(ظا ر)^2$ کی حاصل ہوگی تو اب معلوم ہوتا ہی کہ قیمتین ر اور ر' کی دونو اس مساوات

مین داخل ہین مس ر = ± ص/ط یعنے اگر مس ر (= − ص/ط)
متعلق محور لا کی ہو تو مس ر (= + ص/ط) متعلق ز کی ہوگا
(یعنی مس ر = − ص/ط واسطے محور لا کے فرض کیا ہے تاکہ یہہ فرض
مطابق شکل کی ہو) تو اب ثابت ہوا کہ مساوات خط منحنی کی جبکہ خطوط
متنفر الملاقات اسکی محور ہون یہہ ہوگی

۲ {ط² جس ر جس ز − ص² جم ر جم ز} لا ز = − ط² ص² یا

۲ جم ر جم ز {ط² مس ر مس ز − ص²} لا ز = − ط² ص² اور چونکہ

مس ر = ± ص/ط تو جم ر = 1/√(1+(مس ر)²) = ط/√(ط²+ص²) = جم ز

∴ ۲ ط²/(ط²+ص²) {− ط² ص²/ط² − ص²} لا ز = − ط² ص² یا

− ۴ ط² ص²/(ط²+ص²) لا ز = − ط² ص² ∴ لا ز = (ط²+ص²)/۴

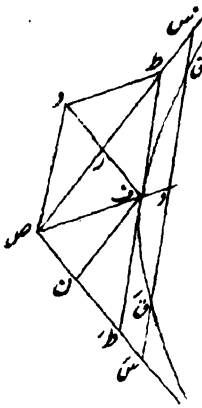
اگر ص = ط یعنے اگر بعید البیضوی مساوی القطرین ہو تو مساوات اوسکے
موافق محورون خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی لا ز = ط²/۲

(۲۱۳) ظاہر ہی کہ زاویہ درمیان خطوط متنفر الملاقات کی ۲ ز ہی
تو اب اگر ف د متوازی ص ن کی کھینچا جاوے تو سطح ف ن ص ر =
لا ز جس ۲ ز = لا ز ۲ جس ز جم ز = ط²/۴ × ۲ × ص/√(ط²+ص²) × ط/√(ط²+ص²)

* = ط ص/(ط²+ص²) تو اب ثابت ہوا کہ تمام متوازی الاضلاع بنای
گئی اوپر اوتار کی جو کہ متوازی خطوط متنفر الملاقات کی ہون مساوی ایک
دوسری کی ہوتی ہین اور مساوی نصف سطح نصف محورون کی یعنے برابر

برابر $\frac{ط صا}{۲}$ کے ہیں — ش ش ش ش ش ش

(۲۱۴) فرض کرو کہ ص س اور ص س خطوط متنفر الملاقات ایسی خط منحنی کے ہیں جسکی محور اقطار متجانس ص د اور ص ف (ط، و صا) ہیں اب اگر خط ط ف متوازی خط ص د کے کھینچا جاوے تو وہ مماس خط منحنی کے نقطہ ف پر ہوگا موافق (۱۸۷) کے اور خط ط ف ط دوگنا خط متنفر الملاقات کا ہے کیونکہ



مساوات ص س کی یہہ ہے ر = ± $\frac{صا}{ط ا}$ لا اور جب لا = ط ا تو ر = ± صا یعنی ف ط = ف ط یا وہ حصے مماس کے جو کہ درمیان نقطہ تماس اور خطوط متنفر الملاقات کے واقع ہیں مساوی ایک دوسرے کے اور نصف قطر متجانس کے ہیں — ش ش ش

(۲۱۵) ملاؤ خط د ط کو تو ظاہر ہے کہ د ف ایک متوازی الاضلاع ہوگی اور چونکہ خط ص د کا مساوی ہے اور متوازی خط ف ط کی ہے تو خط د ف کا متوازی خط متنفر الملاقات ص س کے ہوگا یہاں سے معلوم ہوا کہ اگر اقطار متجانس معلوم ہوں تو خطوط متنفر الملاقات معلوم ہو سکتی ہیں بوسیلہ کھینچنے ایک متوازی الاضلاع کے اور ان اقطار کے بعد اسکی کھینچو قطر اس متوازی الاضلاع کی تو یہہ قطر خط متنفر الملاقات ہوگی اور اگر خطوط

مستفر الملاقات معلوم ہون تو قطر متجانس ص ف کا معلوم ہو سکتا ہی
بوسیلہ کھینچنی خط ف ر کی متوازی ص س کی اور اب قطع کرو
ف د = ۲ ف ر تو د ص قطر متجانس ص ف کا ہوگا اور اگر خط
مستفر الملاقات معلوم ہون تو اسطرح پر مماس کھینچ سکتا ہی قطع کرو
ص ط = ۲ ص ر اور ملاؤ خط ف ط کا تو یہہ مماس مطلوب ہوگا
اگر مقام نقطہ آتشی کا معلوم ہو تو طول قطر متجانس کا مساوی اوس
عمود کے ہوگا جو کہ کھینچا جاوے نقطہ آتشی سے خط مستفر الملاقات پر۔ مثلہ
(۲۱۶) دریافت کرو مساوات مماس ط ف کی جبکہ محور اسکی خطوط مستفر
الملاقات ہون فرض کرو کہ لا اور ک ترنقطہ ف کی ہین اور لا
اور گ ترایک اور دوسری نقطہ خط منحنی کے ہین

$$\therefore \text{ک} = \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}} \text{ اور } \text{گ} = \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2} \therefore \text{ک} - \text{گ} = \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}} - \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2} = -\frac{\text{ک}^2}{\text{لا لا}^2}$$

$$\therefore \text{ک} - \text{گ} = -\frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2}(\text{لا} - \text{لا}') \text{ مساوات سیکنٹ کی ہی}$$

اور اب فرض کرو کہ لا = لا تو مساوات مماس کی یہہ ہوگی

$$\text{ک} - \text{ک}' = -\frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2}(\text{لا} - \text{لا}') = -\frac{\text{ک}^2}{\text{لا}}\text{ل} + \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}} \text{ یعنی لا ک} + \text{ک لا}$$

$$= ۲\text{لا ک} = ۲\text{ک}^2 \text{ یہہ مساوات مماس کے مساوات خط منحنی سی اسطرح}$$

نکل سکتی ہی (مساوات خط منحنی کی لا ک = ک² یا لا ک + لا ک = ۲ک²)
لکھو اس مساوات مین متواتر لا ک اور لا ک بجای لا ک کی تو ظاہر ہی کہ
وہ مساوات مماس کی ہوگی فرض کرو کہ ک = ۰ ∴ ص ط = ۲لا =

= ۲ ص ن اور ص ط = ۲ ی = ۲ ن ف اور مثلث ص ط ط =

= ½ × ۲ لا × ۲ ی جس ط ص ط = ۲ لا ی جس ۲ ر = ط ص (۱۱۳)

(۲۱۷) واضح ہو کہ دو حصی س ق اور س ق سیکٹن س ف ق س کی جو کہ واقع درمیان خط منحنی اور اسکی خط متنفر الملاقات کی ہین مساوی ایک دوسری کی ہین کیونکہ اگر قطر ص ف د اور اسکا قطر متجانس ص د کھینچا جاوے تو ف ن = ق ی بوسیلہ مساوات خط منحنی کے

(ی = ± ص/ط √(لا² − ط²)) ثابت ہوگا اور بوسیلہ مساوات خطوط متنفر الملاقات (ی = ± ص/ط لا) کی ثابت ہوگا کہ ق ن = ن ی

∴ س ق = س ی ″ ″ ″

(۲۱۸) اگر وتر ق س اور ق ی کو حروف ع اور ی سے تعبیر کیا جاوے تو ع² − ی² = ص²/ط² لا² − ص²/ط² (لا² − ط²) یا

(ع − ی) (ع + ی) = ص² یعنے سطح س ق اور س ق ی = مربع ص د کے

قطبی مساوات کے بیان مین

(۲۱۹) فرض کرو کہ مرکز ص نقطہ شروع ہی اور ص ک اور ص ب محور متقاطع علی الزوایہ ہین اور فرض کرو کہ اوتار قطب د کی لا اور ی ہین اور نقطہ د کا سطح خط منحنی پر ہی اور نقطہ ف کا خط منحنی پر ہی جیسا کہ فقرہ (۲۱۶) مین اور ر وہ زاویہ ہی جو کہ نصف قطر متحرک ف ص یا ع ہے تا ہی اس خط سے کہ متوازی محور لا کی ہی تو اب بموجب فقرہ (۲۱۶)

ک = کَ + ع جس ر اور لا = لاَ + ع جم ر اور جبکہ لکھینگے ہم
ان قیمتون لا اور کَ کو مساوات خط منحنی مین جو کہ یہہ ہی
ط² کَ² − ص² لاَ² = − ط² ص² تو حاصل ہوگا یہہ
ط² (کَ + ع جس ر)² − ص² (لاَ + ع جم ر)² = − ط² ص² ۔

(۲۲۰) فرض کرو کہ مرکز قطب ہی تو لاَ = ۰ اور کَ = ۰
∴ ع² = − ط² ص² / ط² (جس ر)² − ص² (جم ر)² = ط² (ی² − ۱) / ی² (جم ر)² − ۱

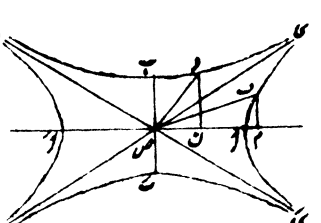
(۲۲۱) فرض کرو کہ قطب نقطۂ آتشی سے ہی تو ظاہر ہی کہ کَ = ۰
اور لاَ = ط ی اور اب ع نق ہوجاویگا جبکہ لکھین اِن قیمتون کو
اور عمل کرین موافق (۱۴۸) کے تو حاصل ہوگا یہہ
نق = ص² / ط − س جم ر = ط (ی² − ۱) / ۱ − ی جم ر اور اگر زاویہ اس ف = ر تو
نق = ط (ی² − ۱) / ۱ + ی جم ر اس مساوات کا اکثر استعمال کرتی ہین یہہ صورت
مساوات آیندہ سے بآسانی ثابت ہوسکتی ہی نق = ی لا − ط شکل (۱۶۱)
= ی (ط ی − ل جم ر) − ط ∴ نق = ط (ی² − ۱) / ۱ + ی جم ر ۔

(۲۲۲) اگر ر/۲ = ط (ی² − ۱) تو ل = ر/۲ / ۱ + ی جم ر =
= س ف اور اگر خط س ف خط منحنی سے نقطہ ف پر بھی ملی تو سطح
س ف اور س ف کَ = ۲/۳ (ف س + ف س) = ر/۲ ف ف یعنی
طول وتر جو کہ نقطہ آتشی سے گذری = ۲ ص²/ط جہانکہ ص رقطر اوس کا

بیان بعید البیضوی متجانس کا

(۲۲۳) واضح ہو کہ مساوات بعید البیضوی ایک اور طرح کی بھی ہوسکتی ہی اوسکا اب ہم بیان کرینگی اگر $(-\frac{ص^2}{ق})$ منفی فقرہ (۱۰۳) مین فرض کیا جاوے تو صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی $ف ز^2 - ق لا^2 = ا$ یا $ط ز^2 - ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ جبکہ $ف = \frac{1}{ط}$ اور $ق = \frac{1}{ص}$ اب اگر دریافت کیا جاوے مقام اس خط منحنی کا تو ظاہر ہوگا کہ $ب ب' = 2ص$ محور کلان اس خط منحنی کا ہی اور $ز ز'$ یا $2ط$ قطر متجانس اسکا ہی اور یہہ بھی معلوم ہوجاویگا کہ خط منحنی دونو طرف نقطہ ب کی اور ب' کی نہایت پہیلتا ہی یعنے اسکی صورت مثل بعید البیضوی کے ہی جسکا ابھی ہم بیان کر آئی ہین لیکن مقام اسکا مختلف ہی اسکی مقام سی دونو خطوط منحنی شکل آیندہ سی معلوم ہوجاویگی اور محور ایک کا انمین سے قطر متجانس دوسری کا ہی اور صورت مساوا تونسی ظاہر ہوگا کہ دونو خطوط منحنی خطوط منتفر الملاقات ی ص ی' اور ف ص ف' ہین ش

(۲۲۴) فرض کرو کہ ف ص اور ص د دو قطر متجانس بعید البیضوی



اوف ی کے ہین
اب دریافت کیا
چاہتی ہین ہم
کہ کس نقطہ د کا
فرض کرو کہ ص م = لا اور ف م = ز

اور صن = لا اور ن د = ی تو ط۲ − ص۲ = ط۲ − ص۲

∴ لا۲ + ی۲ = لا۲ + ی۲ + ط۲ − ص۲ لیکن مساوات ص ی کی

یہہ ہی ط۲ ی۲ − ص۲ لا۲ = ۰ ∴ لا = $\frac{ط^2 ی^2}{ص^2 لا}$

∴ لا۲ + ی۲ = $\frac{ط^4 ی^2 + ص^4 لا^2}{ص^4 لا^2}$ ی۲ = لا۲ + ی۲ + ط۲ − ص۲

∴ ی۲ = $\frac{ص^4 لا^2}{ط^4 ی^2 + ص^4 لا^2}$ (لا۲ + ی۲ + ط۲ − ص۲) اور

لا۲ = $\frac{ط^2 ی^2}{ط^4 ی^2 + ص^4 لا^2}$ (لا۲ + ی۲ + ط − ص۲) جبکہ لکھین ہم ان

قیمتون کو اس مساوات ط۲ ی۲ − ص۲ لا۲ = − ط۲ ص۲ تو جدتحویل

کی حاصل ہوگا یہہ ط۲ ی۲ − ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ اب ثابت ہوا کہ

لوکس نقطہ د کا بعید البیضوی متجانس ہی − یہانسی معلوم ہوا کہ

صرف علامت بدلنی مقدار مقررہ سی جو کہ مساوات بعید البیضوی مین ہی

جسکا مرکز نقطہ شروع ہو ہین مساوات بعید البیضوی متجانس کی حاصل

ہوگی جسکے محور لا اور ی ہونگی مساواتین دو نو خطوط مستقیم کے مساوات

آیندہ مین داخل ہین (ط۲ ی۲ − ص۲ لا۲)۲ = ط۴ ص۴ یا لا ی = کر۲

باب دہم

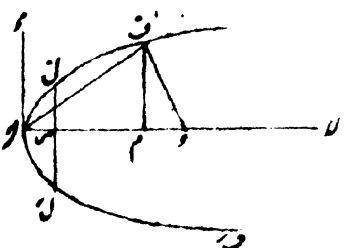
قریب البیضوی کے بیان مین

(۲۲۵) مساوات قریب البیضوی کی جسکی محور متقاطع علی القوائم ہین یہہ

ثابت ہوئی ہی ط۲ ی۲ + ی لا = ۰ اب ہم پوسیدا اس مساوات کا انجام

خواص اس خط منحنی کے ثابت کرینگے — فرض کرو کہ $ط_{ی} = ن$
$\therefore ی = ان$ لا فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محور دن آلا اور آ ر کا
اب ظاہر ہی کہ اگر لا = ۰ تو ی = ۰ یہانسی معلوم ہوا کہ خط منحنی
نقطہ شروع سی کندتا ہی واسطی ہر ایک مثبت قیمت لا کی دو قیمتین ی کی
ایک مثبت اور دوسری منفی حاصل ہوتی جو کہ ∞ سی ∞ تک زیادہ
ہوتی جاوینگی جیسا کہ آلا ∞ سی لا نہایت زیادہ ہوتا جاویگا یہانسے
معلوم ہوا کہ اس خط منحنی کی دو شاخین طرف اور طرف ہوتی ہین
اور آ کی دونو طرف لا نہایت پھیلتی ہین اور یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی
کہ یہہ خط منحنی دونو طرف محور لا کی مشابہ ہی اور اسکی طرف مجوف محور
کی طرف پھری ہوئی ہی نہین تو ایک خط مستقیم اس خط منحنی کو ایک نقطہ
سی زیادہ پر قطع کریگا مساوات گذشتہ سی ظاہر ہی کہ واسطہ ہر ایک
منفی قیمت لا کی قیمت ی کی ناممکن ہی ث ث ث

(۲۲۶) واضح ہو کہ نقطہ آ کو راس خط منحنی کا کہتی ہین اور آلا اور آ ر



کو محور کہتے ہین لیکن اکثر طرف
محور ہی کو محور قریب النہایتی
کہا کرتی ہین اور مساوات
منحنی کی جسکو راس
نقطہ شروع اور آلا اور آ ر محور ہون یہہ ہی $ی^{۲} = ان$ لا اس مساوات کی

دسیدہ سی ثابت ہونا ہی کہ مربع وتر کا = سطح وتر العرض اور ایک مقدار
مقررہ کی یعنی مربع وتر کا کم یا زیادہ ہونا موقوف ہی وتر العرض پر
(۲۲۷) خواص اخیر اس خط منحنی سے معلوم ہونا ہی فرق درمیان
اس خط منحنی اور بعید البیضوی کی — شاخین ان دونو کی لاانہایت پہنچتی
ہین لیکن مختلف خواص کی ہین کیونکہ مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہی
ی۲ = ص۲/ط۲ (لا۲ − ط۲) = ص۲/ط۲ لا۲ (۱ − ط۲/لا۲) یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ ولے
ہر ایک بڑی قیمت لا کے ی۲ کم وزیادہ ہوتا ہی موافق لا۲ کے یا ی بدلتا ہی
موافق لا کے یہانسی ثابت ہوا کہ شاخ بعید البیضوی کی جلدی سی بلند
ہوتی جاتی ہی نسبت قریب البیضوی کے جسکا وتر کم وزیادہ ہوتا ہی موافق
مالا کی جبکہ قیمت لا کی بہت بڑی ہوگی تو رستہ بعید البیضوی کا تقریبًا مثل
اس خط منحنی کے ہوگا ی = ص/ط لا لیکن قریب البیضوی مین لا کی زیادہ
ہونی سی قیمت ی کی بہت زیادہ نہین ہوتی ہی اس سی معلوم ہوتا ہی کہ
قریب البیضوی تقریبًا میلان متوازی ہونی کا محور لا سے رکھتا ہی —
(۲۲۸) محور کلان بیضوی کا لاانہایت بڑا فرض کیا جاوے تو مساوات
قریب البیضوی کی مساوات بیضوی سی بآسانی حاصل ہوسکتی ہی فرض
کرو کہ ص مرکز اور س نقطہ آتشی اس بیضوی کا ہی جسکی مساوات
یہہ ہی ی۲ = ۲ص/ط لا − ص۲/ط۲ لا۲ (۱۰۵) فرض کرو کہ م = اس
= اص − س ص = ط − √(ط۲ − ص۲) ... دیکھو ... شکل (۱۰۶) کو

$\therefore ص^2 = ۲ط م - م^2 \quad \therefore ی^2 = (۴م - \frac{۴م^2}{ط}) لا - (ط^2 - \frac{۴م^2}{ط}) لا^2$

اب اگر مقدار ط کی غیر منقطع فرض کیجاوے تو اس مساوات سے ایک سلسلہ بیضویونکا حاصل ہوگا جسمین کہ فاصلہ ترس یا م ایک ہی اور واسطی تمام بیضویون کی ہیگا لیکن محور کلان ہر ایک کا مختلف ہوگا تو اب ثابت ہوا کہ واسطی ہر ایک خاص قیمت ط کے ایک خاص بیضوی حاصل ہوتا ہے

اب فرض کرو کہ ط لا نہایت ہی اور چونکہ تمام اجزا سوای جزا خیر ۴م لا کی مساوی صفر کے ہوجاوینگی اسیواسطی صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی $ی^2 = ۴م لا$ یہانسے معلوم ہوا کہ مساوات بیضوی کی موافق ایک خاص فرض کے مساوات قریب البیضوی کی ہوجاتی ہی اسیطرح مساوات قریب البیضوی کی مساوات بعید البیضوی سی بہی حاصل ہوسکتی ہی

نقطۂ آتشی کے بیان مین

(۲۲۹) مقدار ن کو جوکہ مساوات قریب البیضوی مین سرلا کا ہی وتر آتشی اعظم کہتے ہین اور چونکہ $ن = \frac{م^2}{لا} \quad \therefore لا : ی :: ی : ط$ فقرہ (۲۲۸) مین بجای مساوات قریب البیضوی کی یہہ مساوات لکھی ہی $ی^2 = ۴م لا$ صرف واسطی دوکرنی کیسرکے واضح ہوکہ اس مساوات کی وسیلہ

اگر لا نہایت چھوٹا ہو نسبت ط کے تو مساوات بیضوی تقریبا مساوات قریب البیضوی کی ہوگی موافق اسی دلیل کے رستہ دم دار ستارہ کا نزدیک حضیض کے ایک حصہ قریب البیضوی کا معلوم ہوتا ہی۔

وسیلہ سی مساوات قریب البیضوی کی بہت آسانی سی حل ہو سکتی ہی اور عمل مین بوسیلہ لکھنی ۴ م = ن بہت اختصار ہوتا ہی بغیر دور ہونی عمومیت اس مساوات کی تو اب ہم صورتین آیندہ کی ثابت کرنی مین اس مساوات کا استعمال کر سکتی ہین اسطرح پر کہ جس جای مقدار م کی ہوگی وہان $\frac{ن}{۴}$ = م کی لکھین گے اسیواسطی جو مساوات کہ بعد اس عمل کی حاصل ہوگی اوسمین اجزای وتر آنشی اعظم کے پائی جاوینگی

(۲۳۰) دریافت کرو مقام اوس وتر کا جسکا دو چند مساوی مقدار وتر آنشی اعظم کے ہو فرض کرو کہ ۲ ر = ۴ م ∴ ۴ ر^۲ = ۱۶ م^۲ یا ۱۶ م لا = ۱۶ م^۲ ∴ لا = م محور ل آ مین سے قطع کرو اس = م اور نقطہ س مین سے گذرتا ہوا کھینچو وتر ل س ل کا جو وتر آنشی اعظم اور س نقطہ آنشی ہوگا مقام نقطہ س کا بطور آیندہ کی بہی دریافت ہو سکتا ہی فرض کرو کہ ل م = لا اور م ف = ر اور ملاؤ خط ل ف کو اور کھینچو خط ف و کا عمود ل ف پر تو اب ظاہر ہی کہ ل م : م ف :: م ف : م و

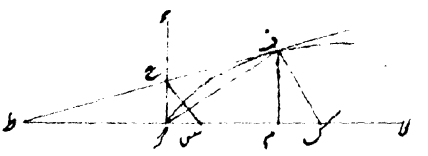
∴ م و = $\frac{ر^۲}{لا}$ = ۴ م ∴ ل س = م = $\frac{۱}{۴}$ م و

(۲۳۱) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا اوس فاصلہ کا جو کہ واقع ہی درمیان نقطہ آنشی اور ایک نقطہ ف کے جو کہ خط منحنی پر ہی - فرض کرو کہ س ف = ق ل م = لا اور م ف = ر اور ظاہر ہی کہ اوتار نقطہ س کی ر = ۰ اور لا = م ∴ ق^۲ = (ر - ر$_۱$)^۲ + (لا - لا$_۱$)^۲ = ر^۲ + (لا - م)^۲ =

۴ م لا + (لا − م)² = (لا + م)² ∴ ق = مس ف = لا + م

مماس کے بیان مین

(۲۳۲) جا ہتی ہین ہم دریافت کرنا مساوات مماس کی جو ایک نقطہ ف (لا اور ک) قریب البیضوی کے کھینچی جاوے ظاہر ہی کہ مساوات اُس سیکنٹ کی جو دو نقطون خط منحنی (لا اور ک) اور (لا″ اور ک″) مین سی گذرتا ہی یہہ ہوگی ک − ک = $\frac{ک − ک''}{لا − لا''}$ (لا − لا)



اور مساوات قریب البیضوی کی یہہ ہی ک² = ۴ م لا اور ک″² = ۴ م لا″

∴ ک² − ک″² = ۴ م (لا − لا″) اور $\frac{ک − ک''}{لا − لا''}$ = $\frac{۴م}{ک + ک''}$ جبکہ لکھین ہم مساوات گذشتہ مین تو مساوات سیکنٹ کی یہہ ہو جاویگی

ک − ک = $\frac{۴م}{ک + ک''}$ (لا − لا″) اور جبکہ دو نقطی ایک دوسری پر منطبق ہونگی تو ک = ک″ اور اس صورت مین مساوات سیکنٹ کی مساوات مماس کے ہو جاویگی

اسیواسطے ک − ک = $\frac{۴م}{۲ک}$ (لا − لا″) یا ک ک − ک² = ۲ م (لا − لا″)

∴ ک ک = ک² + ۲ م (لا − لا″) = ۴ م لا″ + ۲ م (لا − لا″)

∴ ک ک = ۲ م (لا + لا″) واضح ہو کہ یہہ مساوات مماس کی مساوات قریب البیضوی سی حاصل ہو سکتی ہی کیونکہ ک² = ۴ م لا = ۲ م (لا + لا)

لکھو اس مساوات مین بجای ک کی ک′ اور بجای (لا + لا) کی (لا + لا′) تو اب حاصل ہوگی مساوات مماس کی جو کہ یہہ ہی

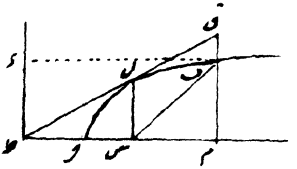
ک ک′ = ۲ م (لا + لا′)

(۲۳۳) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا اون نقاط کا جہان مماس قطع کرتا ہے محور کو اب واسطی ثبوت اس دعوی کی فرض کرو کہ ک = ۰ ∴ لا + لا′ = ۰ یا لا = − لا′ یعنے ط ر = − ر م یہانسی معلوم ہوا کہ قیمت مطلق مماس الترتیب کی یعنی بغیر لحاظ علامت کی یہہ ہی م ط = ۲ ر م اور اب فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ک = ۲ م $\frac{لا^{۲}}{ک}$ = $\frac{ک^{۲}}{۲ک}$ = $\frac{ک}{۲}$ ∴ ر ع = $\frac{۱}{۲}$ م ف

(۲۳۴) چونکہ مساوات مماس کی ک ک′ = ۲ م (لا + لا′) اور ظاہر ہے کہ نقطہ آ پر دونو لا اور ک′ = ۰ اسیواسطی صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی ۲ م لا = ۰ یا لا = ۰ لیکن لا = ۰ مساوات محور ک ک′ کی ہی تو اب ثابت ہوا کہ مماس نقطہ آ پر محور ک ک′ پر منطبق ہوتا ہے

(۲۳۵) دریافت کرو مساوات مماس کی انجام دتر آنشی اعظم پر چونکہ مساوات مماس کی یہہ ہی

ک ک′ = م (لا + لا′) تو



نقطہ ل پر جہانکہ لا′ = م

اور ک′ = ۲ م صورت اوسکی

یہہ ہوجاویگی ۲ م ک = ۲ م (لا + م) ∴ ک = لا + م اور اگر ترک

یا م ق قطع کری خط منحنی کو خط ف ب پر تو س ف = لا + م (۲۳۱)

∴ م ق = س ف

(۲۳۶) دریافت کرو وہ نقطہ جہانکہ یہہ خاص مماس تقاطع کرتا ہی محور لا سی فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا = ر ط = − م = − ر س نقطہ ط سی کھینچو خط طر کا عمود ر لا پر اور نقطہ ف سی کھینچو خط ف ر کا متوازی ر لا کے تو ف ر = ر ط + ر م = م + لا = س ف واضح ہو کہ ہمنی اسمین قیمت ر ط کی بغیر لحاظ علامت کی لکھی ہی یہانتنی معلوم ہوا کہ فاصلہ کسی نقطہ ف کا نقطہ س سے مساوی خط طر کی ہی یہہ خط طر کا خط بنیادی قریب البیضوی کا کہلاتا ہی کیونکہ بوسیلہ معلوم ہونی اس خط کی اور مقام نقطہ آتشی کے قریب البیضوی بآسانی کھچ سکتا ہی یہہ مماس محور لا سی زاویہ ۴۵° کا بناتا ہی (۳۵ مثال سوم)

(۲۳۷) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا طول عمود س ع کا جو کہ کھینچا گیا ہی نقطہ آتشی س سے مماس ف ط پر موافق صورت (۴۸) کی ظاہر ہی کہ س ر = − (ر − ط لا − ص) / (۱ + ط ۲) لیکن دیکھنی شکل (۲۳۲) کی سی معلوم ہوگا کہ ر = ۰ اور لا = م اوتار نقطہ س کے ہین اور ر = ط لا + ص مساوات خط ف ط کی ہی اور مساوات آیندہ بہی خط ف کی ہی ر = ۲ م / ر (لا + لا′) ∴ ط = ۲ م / ر اور ص = ۲ م لا / ر

اسیواسطے

$$\text{س ر} = \frac{\frac{۲م}{ک^۲}م + \frac{۲م}{ک^۲}لا^۲}{\sqrt{\left(۱ + \frac{۲م}{ک^۲}\right)}} = \frac{۲م(م + لا^۲)}{ک^۲ + ۲م} = \frac{۲م(م + لا^۲)}{\sqrt{م^۲ + ۲م لا^۲ + ۲م}}$$

$= \sqrt{م(م + لا^۲)} = \sqrt{م}$ م ق اگر س ف = ق یہانسی معلوم ہوا کہ مربع س ر = سطح س ف اور س ر یعنے س ر^۲ = س ف × س ر (۲۳۸) دریافت کرو لوکس کا شکل گذشتہ مین مساوات مماس ف ط کی موافق شکل (۲۳۲) یہہ ہی ر = $\frac{۲م}{ک^۲}$ (لا + لا^۲) تو اب ظاہر ہی کہ مساوات خط س ر کی جو کہ گذرتا ہی نقطہ (م اور ۰) مین سے اور عمود مماس ف ط پر ہی یہہ ہوگی ر = − $\frac{ک^۲}{۲م}$ (لا − م) معلوم کردہ نقطہ جہانکہ یہہ خط تقاطع کرتا ہی محور ر کو اسیواسطے واسطے ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = $\frac{ک^۲}{۲}$ لیکن اسی نقطہ پر مماس نقطہ ف کا محور ر کو تقاطع کرتا ہی (۲۳۲) یہانسی ثابت ہوا کہ مماس اور عمود نقطہ س سی اس مماس پر محور ا سی ایک ہی نقطہ پر ملتی ہین یا لوکس ک کا محور ر کا ہی (۲۳۹) دریافت کردہ نقطہ جہانکہ عمود س ع تقاطع کرتا ہی خط بنیادی کو واسطے ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ لا = − م ہ ا ی = ف

− $\frac{ک^۲}{۲م}$ (لا − م) = − $\frac{ک^۲}{۲م}$ (− م − م) = ک لیکن یہہ یعنی ک = م ف تو دریا ہوا کہ اگر ایک مماس کھینچا جاوے کسی نقطہ ف سی تو عمود کھینچا گیا نقطہ آتشی س سے اوس مماس پر تقاطع کریگا خط بنیادی کو اوس نقطہ پر جہان کہ ایک عمود کھینچا گیا نقطہ ف سی خط بنیادی کو کاٹتا ہی

(۲۴۰) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ مماس نقطہ آتشی کے فاصلوں سے بناتا ہی ظاہر ہی کہ مساوات مماس ف ط کی یہہ ہی ر = $\frac{۲م}{ر'}$ (لا + لا') اور مساوات فاصلہ نقطہ آتشی کی یعنی خط س ف کی جو کہ نقاط س (= ۰ اور م) اور ف (= لا' اور ر') میں سے گذرتا ہی یہہ ہی ر = $\frac{لا'-م}{}$ (لا - م)

اور مس س ف ط = مس (ف س لا - ف ط لا) =

$$= \frac{\frac{ر'}{لا'-م} - \frac{۲م}{ر'}}{۱ + \frac{ر'}{لا'-م} \times \frac{۲م}{ر'}} = \frac{ر'^{۲} - ۲م(لا'-م) + ۲م ر'}{ر'(لا'-م) + ۲م ر'} = \frac{۴م لا' - ۲م لا' + ۲م^{۲}}{ر'(لا'+م)}$$

$$= \frac{۲م(لا'+م)}{ر'(لا'+م)} = \frac{۲م}{ر'} = \frac{۲لا'}{ر'} \text{ کیونکہ } ۲م = \frac{ر'^{۲}}{۲لا'}$$

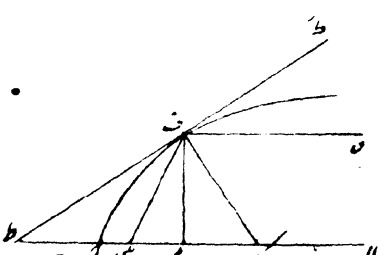
لیکن م ف = م ط × مس ف ط

∴ مس ف ط م = $\frac{ر'}{۲لا'}$

∴ مس س ف ط = مس س ط ف

= مس ط ف ی یہہ لو سوقت

صحیح ہی جبکہ خط ف ق کا



ستوازی لا لا' کی کھینچا جاوے تو اب ثابت ہوا کہ زاویہ جو کہ مماس فاصلہ آتشی یعنی س ف سے بناتا ہی مساوی اوس زاویہ کی ہی جو کہ یہی مماس بناتا ہی اوس خط سے جو کہ کھینچا گیا ہی نقطہ ف سے متوازی محور لا لا' کی یہہ شکل مشہور اور مفید بطور آئندہ کی بوسیلہ فقرہ (۲۴۳) کے ثابت ہوسکتی ہی ہمنے اس فقرہ میں ثابت کیا ہی کہ قیمت ر ط بغیر لی ظ علامت کی خط ط م

ہی تو اب ثابت ہوا کہ س ط = س ر + ر ط = م + لا = س ف

اسیواسطی زاویہ . س ف ط = زاویہ س ط ف = زاویہ قاف ط

ظاہر ہی کہ اگر ایک کرن سمت قاف مین قریب البیضوی پر گری تو یہہ کرن بسبب برابری زاویہ قاف ط اور س ف ط کی اس نقطہ قریب البیضوی سے منعکس ہوکر نقطہ س پر آویگی اسیطرح سے تمام کرنین جو کہ متوازی محور لا کی قریب البیضوی پر واقع ہون تو یہہ تمام کرنین نقطہ س پر اگر جمع ہون گی اگر ایک قریب البیضوی محور لا کی گرد پھر کر ایک مجوف خالی شیشہ بنادی تو تمام کرنین جو کہ متوازی محور لا کی اس شیشہ پر گرینگی وہ نقطہ س پر جمع ہونگی مثلاً اگر ایک قریب البیضوی کی صورت کا شیشہ طرف آفتاب کی اسطرح سے رکھا جاوے کہ محور قریب البیضوی کا مقابل آفتاب کی ہو تو ایک بڑی روشنی نقطہ آتشی س پر جمع ہونگی — برعکس اسکی اگر ایک روشن جسم نقطہ آتشی پر رکھا جاوے تو مجموعہ کرنون روشنی کا بجای بی ترتیبی سے پھیلنے کے اس سمت مین جاوینگی جو کہ متوازی محور کی ہی اور اسطرح سے روشن کریگا ایک بڑی فاصلہ کی جزو نکو جو کہ مقابل اوس سمت کی ہین اسیواسطی اکثر روشن خانون مین ایسی صورت کی شیشون کو استعمال مین لاتے ہین —

عمود مماس کے بیان مین

(۲۴۱) دریافت کرو مساوات عمود مماس ف ک کی جو کہ عمود نقطہ ف (لا اور ؤ) سی مماس پر کھینچا گیا ہی ظاہر ہی کہ مساوات اوس خط مستقیم

کی جو کہ نقطہ ف سے گذرتا ہی یہہ ہی ر - ر' = ط (لا - لا') اور
چونکہ یہہ خط عمود م س پر ہی جسکی مساوات یہہ ہی ر = $\frac{م^2}{ر'}$ (لا+لا')
تو ط = - $\frac{م^2}{ر'}$ اسواسطے مساوات عمود م س کی یہہ ہوگی
ر - ر' = - $\frac{ر'}{م^2}$ (لا - لا')

(۲۴۴) دریافت کردہ نقطہ جہانکہ عمود م س تقاطع کرتا ہی محور
لا سی - فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا - لا' = م یعنی خط باہین مساوی
نصف وتر آتشی اعظم کے ہی اسیواسطے س ک = س م + م ک
= لا - م + ۲م = لا + م = س ف اور ف ک = $\sqrt{ر'^2 + ۴م^2}$
= $\sqrt{۴م لا' + ۴م^2}$ = $\sqrt{۴م (لا' + م)}$ = $\sqrt{۴م ق}$ یہانسے معلوم
ہوا کہ خط ف آ وسط فی النسبت ہی درمیان وتر آتشی اعظم اور خط اس ف کے

قطرون کے بیان مین

(۲۴۴) فقرہ (۸۱) مین بیان کیا گیا ہی کہ مرکز قرب البیضوی کا
نہین ہوتا ہی - چونکہ واسطے ر ایک قیمت لا کے دو قیمتین مثبت اور منفی
ر' کی حاصل ہوتی ہین تو اب معلوم ہوا کہ محور لا کا قطر قرب البیضوی
کا ہی لیکن محور ر' کا قطر نہین ہوسکتا ہی اسیواسطے محور اسکی قطر متحالس
نہین ہین - واضح ہو کہ یہہ خط منحنی لانہایت قطر متوازی محور کی رکھتا ہے
واسطے ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ ر = ط لا + د مساوات کسی
ایک وتر کی ہی اور ر' = ن لا مساوات خط منحنی کی ہی اب بدلو

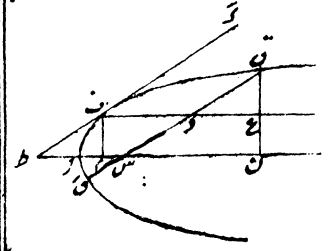
نقطہ شروع کو نقطہ تنصیف (لا اور ذ) وتر پر توصورتین مساوات کی یہ ہوجاوینگی ذ = ط لا اور (ذ + ذ')² = ن (لا + لا') اب معلوم کردہ نقطہ جہانکہ وتر قطع کرتا ہی خط منحنی کو واسطی ثبوت اس مطلب کے لکھو ط لا بجای ذ کی مساوات دویم مین ∴ (ط لا + ذ')² = ن (لا + لا') یا ط² لا² + (۲ ط ذ' - ن) لا + ذ'² - ن لا' = ۰ چونکہ نقطہ شروع نقطہ تنصیف وتر پر ہی تو دونو قیمتین لا کی مساوی ایک دوسری کی ہونگی اور علامت ان دونو کی مختلف ہوگی یعنی علامت ایک کی مثبت اور دوسری کی منفی ہوگی اسیواسطی دوسرا جز مساوات گذشتہ کا مساوی صفر کی لکھنا چاہئی اسیواسطے ۲ ط ذ' - ن = ۰ بوسیلہ اس مساوات کی قیمت ذ' کی معلوم ہوجاویگی اور چونکہ اسمین مقدار مقررہ یعنی ذ نہین پائی جاتی ہی اسیواسطے یہہ ایک سی ہوگی واسطی کسی ایک وتر کی جو کہ متوازی ذ = ط لا + ذ کی ہی یہانتک ثابت ہوا کہ ذ' = ن/۲ط تمام متوازی وترون کی نقاط تنصیف کا لوکس ہی اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات ایک ایسی خط مستقیم کی ہی جو کہ متوازی محور کی ہی (۲۴۴) تبدیل کرو اس مساوات کو ایک اور ایسی مساوات سی جسکا نقطہ شروع اور سمت محورون کی مختلف پہلی سے ہو اسکی صورت مساوات مین کسی نوع کا فرق نہ آوی فرض کرو کہ لا = ط + لا' جم ر + ذ' جم ر اور ذ = ص + لا' جس ر + ذ' جس ر (۵۷) لکھو ان قیمتون کو اسمین مساوات ر² = ن لا تو بعد علی الترتیب لکھنی قوای لا' اور ذ' کی حاصل ہوگا یہہ

ر۲ (جس ر)۲ + لا۲ (جس ر)۲ + ۲ لا ر جس ر جس ر + ر۲ (۲ ص جس ر - ن جم ر)
+ لا (۲ ص جس ر - ن جم ر) + ص - ط ن = ۰ اور چونکہ صورت اسکی
مثل مساوات (ر۲ = ن لا) ہونی چاہئی اسیواسطی فرض کرو کہ
(جس ر)۲ = ۰ (۱) اور ۲ جس ر جس ر = ۰ (۲)
۲ ص جس ر - ن جم ر = ۰ (۳) ص۲ - ط ن = ۰ (۴)
اسیواسطے صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی
ر۲ (جس ر)۲ + (۲ ص جس ر - ن جم ر) لا = ۰ اور چونکہ ر = ۰
تو ر۲ (جس ر)۲ - ن لا = ۰

(۲۴۵) جبکہ امتحان مساوات (۱) اور (۲) اور (۳) اور (۴) کا
کیا جاوے تو (۱) سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ نئی محور لا کا متوازی محور لا کی ہی
اور چونکہ مساوات (۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ ر مساوی صفر کی ہی تو مساوات
(۲) کی جاتی رہیگی یعنی = ۰ کی ہوگی تو اب تین مساوا تین باقی رہین اور
چونکہ چار مقدارین مجہول ہین تو اب ثابت ہوا کہ لا نہایت ایسی نقاط ہونگے
ہین کہ جن پر اگر مساوات گذشتہ کا نقطۂ شروع بدلا جاوے تو صورت مساوات
کی ویسی ہی رہی گی یعنے اسمین کسیطرح کی تبدیلی نہین ہوگی باقی تین مقدارین
ط اور ص اور ر کو کسی ترتیب سی لو تو نتیجہ اوسی ایک ہی حاصل ہونگے
مثلاً فرض کرو کہ ط مقدار معلوم ہی تو مساوات (۴) سی یہہ حاصل ہوگا
ص۲ = ط ن اسی مساوات سی معلوم ہوتا ہی کہ ط کو آ سی مثبت سمت

کی طرف شمار کرنا چاہیئے اور نیا نقطہ شروع کسی نقطہ ف خط منحنی پر ہی
جیسا کہ شکل آیندہ مین ہی اور مساوات (۳) سی یہہ حاصل ہوگا
مس ر = $\frac{ن}{۲ص}$ = $\frac{ص}{۲ط}$ کیونکہ مساوات (۴) سی ن = $\frac{ص^۲}{۲ط}$
∴ مس ر = $\frac{ص^۲}{۲ط ص}$ = $\frac{ص}{۲ط}$ لیکن یہہ بعینہٖ قیمت اوس زاویہ کی مماس
کی ہی جو کہ مماس ف ط بناتا ہی محور لا سی (۲۴۰) یہانسی دریافت ہوا
کہ نیا محور ر کا مماس خط منحنی کا نئی نقطہ شروع ف ہی اب تمام اس
بیان سی شرطین آیندہ حاصل ہونگی نیا نقطہ شروع کسی نقطہ ف خط
منحنی پر ہی (دیکھو شکل آیندہ کو) نئی محور ونمین ف لا متوازی لا
کی اور دوسرا ف ر مماس نئے نقطہ شروع ف پر ہی اور صورت
مساوات سی دریافت ہوتا ہی کہ نیا محور لا کا قطر قریب البیضوی کا ہی
(۲۴۶) ظاہر ہی کہ مساوات خط منحنی کی ر^۲ = $\frac{ن}{(حس ر)^۲}$ لا = ن لا
جبکہ ن = $\frac{ن'}{(حس ر)^۲}$ = ن (کٹ ر)^۲ = ن (۱ + مم ر)^۲ =
ن (۱ + $\frac{۴ط^۲}{ص^۲}$) = ن + ۴ط = ۴ ($\frac{ن}{۴}$ + ط) = ۴ س ف (۲۳۱)
یہانسی معلوم ہوا کہ نیا وتر آنشی نقطہ ف پر = ۴ س ف
(۲۴۷) مساوات قریب البیضوی کی جبکہ معلوم ہو مقام اور سمت نئی محور ن
کی بآسانی اصلی مساوات سی جسکے محور متقاطع علی القوایم ہین حاصل ہوسکتی ہی
واسطے ثبوت اس دعوی کی فرض کرو کہ ف نقطہ شروع ہی اور ف لا
اور ف ر نئی محور اور زاویہ ف لا = ر اور ن ف لا = ن

وتر متقاطع علی القوایم نقطہ ق سے ہیں اور ل م = ط اور م ف = ص اور ف ر = لا اور و ق = ک سنی وتر ق کے ہیں — تو اب ظاہری



کہ ک = و ن = م ف + ق ع

= ص + ک جس ر اور لا = ل ن

= ل م + ف و + و ع = ط + لا

+ ک جم ر جبکہ لفظین ہم ان

قیمتون کو مساوات آیندہ مین ک = ن لا تو حاصل ہوگا یہہ

(ص + ک جس ر)² = ن (ط + لا + ک جم ر)

∴ ک² (جس ر)² + (۲ ص جس ر − ن جم ر) ک + ص² = ن ط + ن لا

لیکن ص² = ن ط اور مس ر = مس ف ط م = ص/ط = ۲ص/۲ط = ۲ص/ن

∴ ۲ ص جس ر − ن جم ر = ۰ تو اب صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہو جاویگی ک² (جس ر)² = ن لا اور بوسیلہ اسکی (مس ر)² = ص²/۴ط² ہمین حاصل ہوگا یہہ (جم ر)² = ۴ط²/۴ط² + ص² اور (جس ر)² = ص²/۴ط² + ص²

∴ ک² ن/۴ط + ن = ن لا یا ک² = ن/۴ط + ن = ن لا

(۴ط + ن) لا = ۴ (ط + ن/۴) لا = ن لا جبکہ ن = ۴ ص ف

تو اب ثابت ہوا کہ مربع وتر کا = سطح وتر العرض اور وتر آتشی اعظم کے (۲۴۸) دریافت کرو طول اوس وتر کا جو کہ نقطہ آتشی مین سی گذرتا ہی ظاہری کہ یہان لا = ف و = ۴ط = مس ف = ق ق ∴ ک = ن لا

= ۴ ق × ق = ۴ ق۲ ∴ ک = ۲ ق تو اب ثابت ہوا کہ

ق ق = ۴ س ف تو اب معلوم ہوا کہ وہ وتر جو کہ نقطہ آتشی سے گذرے

(مساوی ۴ ف س) کی ہی اور یہی مساوی اوس وتر کا ہی جو کہ نقطہ ف

سے کھینچا جاوے — تو اب عموماً دریافت ہوا کہ اگر نقطہ ف کا نقطہ شروع

اوتار کا فرض کیا جاوے اور اگر محور دونین سے ایک قطر اور دوسرا مماس خط

منحنی کا نقطہ ف پر ہو تو وتر آتشی نقطہ ف کا وہ وتر ہوگا جو کہ نقطہ آتشی

مین سے گذرتا ہی —

(۲۴۹) ظاہر ہی کہ مساوات اوس مماس کی جو کہ نقطہ ق (لا اور ک)

سے کھینچا جاوے اور جس کے کہ نسبی محور ف لا اور ف و مین ہیہ ہوگی

ک − ن/۲ (لا + لا) فرض کرو کہ ک = ۰ ∴ لا = − لا یہانسے

معلوم ہوتا ہی کہ خط با مُن = دوگنی وتر العرض کی ہی اور اب فرض کرو کہ

لا = ۰ ∴ ک = ن لا/۲ک = ک/۲ = ۱/۲ وتر کی لکھو جاوے ک کی = ۰

تو ہمین حاصل ہوگی مساوات اوس مماس کی جو کہ کھینچا جاوے دوسری انجام ق

وتر ق ق سے تو اب بآسانی ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر دو مماس دو انجام مونے

ایک وتر سے کھینچی جاوین تو وہ اوس وتر کی قطر پر ملینگے — ش ش

(۲۵۰) اگر وتر ق ق کا نقطہ آتشی سے گذرے جیسا کہ شکل مین ہی تو وتر

نقطہ ق کی ہیہ ہوگی ک = ۲ س ف = ۲ ن ق اور لا = ف و = س ف

= ن ق اور ن = ۴ ق اسیواسطے صورت مماس نقطہ ق کی یا

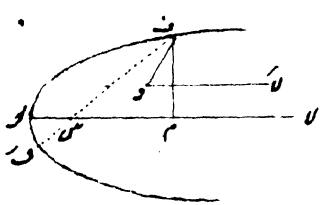
رَ رَ' = $\frac{\text{لَ}}{۲}$ (لا + لَا) یہہ ہوجاویگی ر = لا + نق اسیطرح سی صورت
اوجس کہ نقطہ قَ سی کہینچا جاوے یہہ ہی ۔ رَ = لا + نق اور یہہ خط محور فلا
سی فاصلہ ۔ لق پر نقطہ ق سی ملتی ہین یعنے اگر دو عماس ایک قطع ناقص
کے دوسرون سی کہینچی جاوین تو وہ خط بنیادی پر ملین گے اور زاویہ جو کہ
درمیان ان دو عماسون کا واقع ہی صورت آیندہ سی حاصل ہوسکتا ہی

$$\text{مس}\, ر = \frac{(\text{ط} - \text{طَ})(\text{جس ک})}{۱ + \text{ط طَ} + (\text{ط} + \text{طَ})\text{جم ک}} \quad \ldots\ldots\ldots (۵۱)$$

$= \frac{(۱+۱)\text{جس ک}}{۱-۱+۰}$ کیونکہ ط = ۱ اور طَ = ۱ − = $\frac{۱}{۰}$ = مس ۹۰°
یہانسی دریافت ہوا کہ اگر دو عماس ایک قطع ناقص کی دو نوسرون سے کہینچی
جاوین تو وہ خط بنیادی پر ملکر ایک دوسرے سی زاویہ قایمہ بناتی ہین ۔

مساوات قطبی کے بیان مین

(۲۵۱) دریافت کرو مساوات قطبی قریب البیضوی کی فرض کرو کہ وتر
نقطہ وَ کی لَا اور وَ ہین اور فرض کرو کہ زاویہ رَ پیمایش کیا جاتا ہی
خط ولَا سے جو کہ متوازی محور خط سخنی کے ہی تو اب بوسیلہ (۶۱) کے
یا شکل خط سخنی کے وسیلہ سی ثابت ہوسکتا ہی کہ ر = رَ + ع جس ر اور



لا = لَا + ع جم ر جبکہ لکھین ہم
ان قیمتون لَا اور وَ کو مساوات
آیندہ مین رَ = ن لا
تو حاصل ہوگا یہہ

$(ک' + ع جس ر)^۲ = ن (لا' + ع جم ر)$

(۲۵۲) فرض کرو کہ قطب ایسا نقطہ ہی جو کہ خط منحنی پر واقع ہی

$\therefore ک'^۲ + ۲ ع ک' جس ر + ع^۲ (جس ر)^۲ = ن لا' + ن ع جم ر$ یا

$ع (جس ر)^۲ = ن جم ر - ۲ ک' جس ر$ کیونکہ $ک'^۲ = ن لا'$

$\therefore ع = \frac{ن جم ر - ۲ ک' جس ر}{(جس ر)^۲}$ اور اگر اس خط منحنی کا قطب فرض کیا جاوے

تو $ک' = ۰ \quad \therefore ع = \frac{ن جم ر}{(جس ر)^۳}$ — ثر ثر ثر

(۲۵۳) فرض کرو کہ نقطہ آتشی س قطب ہی $\therefore ک = ۰$ اور $لا' = \frac{ن}{۴}$

اور اسصورت میں ع ق ت ہو جاویگا اسیواسطے صورت مساوات عام کی جو کہ یہہ ہی

$(ک' + ع جس ر)^۲ = ف (لا' + ع جم ر)$ یہہ ہو جاویگی

$ل^۲ (جس ر)^۲ = \frac{ن^۲}{۴} + ن ل جم ر$ یا $ل^۲ (جس ر)^۲ + ل^۲ (جم ر)^۲ =$

$\frac{ن^۲}{۴} + ن ل جم ر + ل^۲ (جم ر)^۲ \quad \therefore ق^۲ = (\frac{ن}{۲} + ل جم ر)^۲$

$\therefore ق = \frac{ن}{۲} + ل جم ر$ یا $ل = \frac{ن}{۲} \frac{۱}{۱ - جم ر}$ مساوات قطبی اس

صورت میں بوسیلہ فقرہ (۲۴۱) کی بھی حاصل ہو سکتی ہی فرض کرو کہ

زاویہ اس ف = ر تو ل = س ف = ر م + ا س =

$۲ ا س + س م = \frac{ن}{۲} - ق جم ر \quad \therefore ل = \frac{ن}{۲} \frac{۱}{۱ + جم ر} = \frac{ن}{۲ (جم \frac{ر}{۲})^۲}$

(۲۵۴) اگر ف س خط منحنی سے نقطہ ف پر بھی ملی تو ہمیں حاصل ہوگا

$س ف' \times \frac{ن}{۲} \frac{۱}{۱ - جم (ک - ر)} = \frac{ن}{۲} \times \frac{۱}{۱ + جم ر}$ یہاں کہ $= ۱۸۰°$

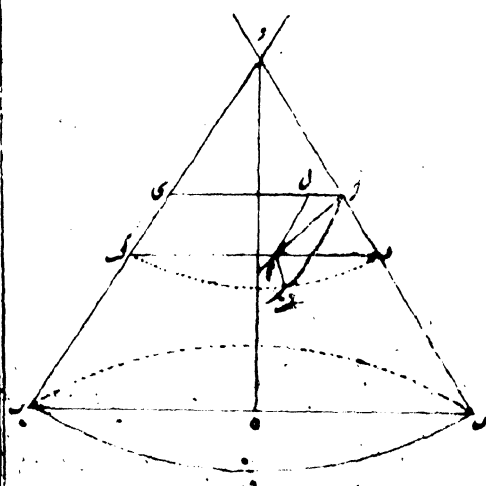
تو اب ثابت ہوا کہ سطح ف س اور $س ف' \times \frac{ن}{۴} \frac{۱}{۱ - (جم ر)^۲} =$

$$\frac{ن}{م}(س ف + س ف') = \frac{ن}{م} ف ف'$$

باب یازدهم

تراشهای مخروطی کی بیانمین

(۲۵۵) واضح ہو کہ تین خط منحنی بیضوی اور بعید البیضوی اور قریب البیضوی پہلی مخروط کی تراشنے سی حاصل ہوتی ہین اسیواسطے انکو تراشہای مخروطی کہتی ہین اب ہم بیان کرینگی خاص ترکیبین مخروط کی قطع کرنے کی اور اونسی دریافت ہوگا کہ اگر مخروط کو ایک طرحسی کاٹین تو خاص خط منحنی ان خطوط مین سی پیدا ہوتا ہی — واضح ہو کہ گردش کرنے ایک مثلث قایمہ الزاویہ سے گرد ایک ضلع عمود کے مخروط پیدا ہوتا ہی — مثلاً خط وہ جسکے گرد مثلث مذکور پھرتا ہی



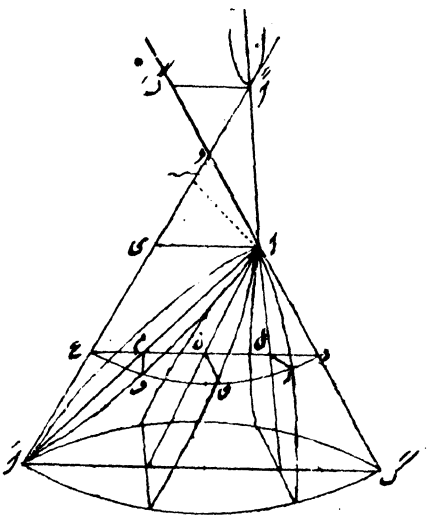
محور کہلاتا ہی اور
نقطہ و کو جہاں کہ
وتر مثلث کا محور
سی ملتا ہی راس
مخروط کا کہتی ہین
اگر وتر متحرک کو
ہو پر راس کے کھینچین
تو ہر وتر ایک دوسرا
مخروط پیدا کریگا جسکے راس اور محور وہی ہونگی جو کہ پہلے مخروط کی تھا ہر ایک

ہر ایک نقطہ و تر مثلث قایمہ الزاویہ کا وقت گردش کی ایک دایرہ پیدا کرتا ہی
یہانسی معلوم ہوا کہ قاعدہ مثلث کا حرکت کرنی سی ایک سطح دایرہ بناتا ہی اور اسکو
قاعدہ مخروط کا کہتے ہین اون تراشون کو جو کہ پیدا ہوتی ہین ایک ایسی سطح سے
جو راس مخروط سی شروع ہو کی محور مین سے گذرتی ہی عمودی تراشین کہتی ہین
اور ظاہر ہی کہ ان تراشون سی مثلث پیدا ہوتی ہین اگر ایک سطح مخروط کی
کسی سمت مین کہنچی تو وہ تراش جو کہ اس سطح کی گذرنی سی پیدا ہوگی تراش
مخروطی کہلاتی ہی خواص اون خطون کی جو کہ اس سطح کی تراشنے سے پیدا ہونگی
مختلف موافق مختلف مقام سطح مذکور کی ہونگی اب ہم بیان کرین گے کہ کس
قسم کے خطوط منحنی کو ایک خاص تراش تعلق رکھتی ہی اور یہہ بھی لکھین گی کہ
ایک خاص قسم کی خطوط منحنی ایک خاص تراشنے والی سطح سی پیدا ہوتے ہین
(۲۵۶) فرض کرو کہ وب ق س ایک مخروط ہی اور و راس اور وہ
محور اور ب س ق قاعدہ اور ف ر وہ خط ہی جو کہ سطح تراشنی والی اور
سطح مخروط کی ملنی سی پیدا ہوتا ہی اور ر وہ نقطہ خط منحنی کا ہی جو تمام نقطون
خط منحنی سے نزدیک تر راس و کی ہی فرض کرو کہ وب ہ س ر ایک ایسی
سطح عمودی ہی جو کہ گذرتا ہی محور وہ مین سی اور عمود تراشنی والی سطح قاطع
پر ہی اور ر م جو کہ مقام تقاطع ان سطحون کا ہی ایک خط مستقیم ہی اور اسکو
محور تراش مخروطی کا کہتے ہین کیونکہ خط منحنی مشابہ دونو طرف اس خط سکے ہی
فرض کرو کہ ک ف د ایک تراش متوازی قاعدہ کے ہی اور ظاہر ہی کہ یہہ تراش

دایرہ ہی اور خط ک ف د جو کہ تقاطع کرنی اس سطح اور سطح د ب ہ س آ کی
سی پیدا ہوا ہی قطر اس دایرہ کا ہی — چونکہ سطح ک ف د اور تراشنی والی
سطح ف آ م دونو عمود سطح د ب ہ س پر ہین تو خط م ف جو کہ تقاطع کرنے
پہلی دو سطح سی پیدا ہوتا ہی عمود سطح د ب ہ س پر ہوگا (مواعی ایک شکل
۱۱ مقالہ ۱۱) اور اسیواسطے یہہ خط عمود ہوگا تمام اون خطون پر جو کہ اس
سطح مین اوس سے ملین گی اسیواسطے خط م ف کا عمود خط ک د اور آ م پر
ہوگا فرض کرو کہ زاویہ د آ م کا جو کہ درمیان خط آ د اور آ م کے ہی
= ط اور فرض کرو کہ زاویہ آ د ب = م اور کھینچو خط آ ی کا متوازی
خط ب ہ کی اور م ل متوازی د ب کی اور فرض کرو کہ زاویہ آ م = لا
اور م ف = ر اور آ د = ر تو اب موافق خاصیت دایرہ کی مربع ف م =
سطح ک م اور م د کی اور م د = م آ حس م آ د / جس م د آ = لا حس ط / جم ط/۲ اور
ک م = ی آ - ی ل = آ د حس آ د ی / جس د ی آ - م آ حس آ م ل / جس آ ل م لیکن زاویہ
د ی آ = ۹۰° - ط/۲ اور آ ل م = ۹۰° + ط/۲ اگر ہم کھینچین م ل کو
یہان تک کہ ملی خط آ د سی تو ظاہری کہ آ م ل = ۱۸۰° - (ط + م))
تو اب ثابت ہوا کہ ک م = ۱ / جم ط/۲ - لا حس (ط+م) / جم ط/۲ اسیواسطے
ر۲ = لا حس ط / جم ط/۲ { ۱ / جم ط/۲ - لا جس (ط+م) / جم ط/۲ }
∴ ر۲ = جس ط / (جم ط/۲)۲ { ۱ حس م × لا - جس (ط + م) لا۲ } جونکہ

چونکہ یہہ مساوات دوسری درجہ کی ہی تو معلوم ہوا کہ ترا ستہای محذوفی مساوات درجہ دویم سی تعلق رکہتی ہین جیکر مطابق کرینگی ہم اس مساوات کو مساوات آیندہ سی $ر^2 = ن لا + ق لا^2$ جو کہ تعبیر کریگی بیضوی یا قریب البیضوی یا بعید البیضوی کو جیکہ ق مساوی ایک مقدار منفی یا صفر یا مثبت کی فرض کیا جاوی تو معلوم ہوگا کہ مساوات گذشتہ تعلق رکہتی ہی بیضوی یا قریب البیضوی یا بعید البیضوی سی جیکہ مقدار جس (ط + م) مثبت یا صفر یا منفی فرض کی جاوینگی اور واسطی ثبوت ان صورتون کے اب ہم فرض کرینگی کہ کاٹنی والی سطح حرکت کرتی ہی گرد نقطہ آ کے اسطرح پر کہ قیمتین ط کی ۰ سی زیادہ ہوتی جاینگی ۱۸۰° تک ۔ ثر ثر ثر

(۲۵۷) فرض کرو کہ ط = ۰ ∴ $ر^2$ = ۰ اور ر = ۰ یہہ مساوات اوس خط مستقیم کی ہی جو کہ محور لا کا ہی یہہ شکل سے بہی ظاہر ہوتا ہی کیونکہ جب ط = ۰ تو اس صورت مین ترا شنی والی سطح صرف محذوط سی مس کرتی ہی اسیواسطی مقام خط آم کا آد ہوجاویگا ۔



(۲۵۸) فرض کرو (ط + م) کم ہی ۱۸۰° سے تو اس صورت میں خط منحنی بیضوی ہوجاویگا چونکہ اب شکل مرقومہ بالا میں دونوں زاویہ ی دی اور ی دم کی ۱۸۰° سے کم ہیں اسواسطے خطوط دی اور دم نقطہ ی پر ملینگے یا تراشنی والی سطح قطع کریگی مخروط کے دونو ضلعونکو۔

(۲۵۹) فرض کرو کہ م مرکز بیضوی کا ہی تو اب م = ½ ای اور م د = ½ ی گ ∴ مربع محور خرد کا = سطح ای اور ی گ اور جبکہ کھینچیں گے ہم دو عمود نقاط ی اور ی سے ی گ پر تو مربع محور کلان کا = مربع ی ک + سطح ای اور ی گ ∴ فاصلہ درمیان نقاط آتشی کے = ک ا اگر خط مستقیم ی گ کا کھینچا جاوے بنا ہوا ایک زاویہ ی ای گ کہ = زاویہ ی ا ی تو خط ی گ خط بنیادی تراش مخروطی کا ہوگا اگر

اگر ایک دایرہ اندر مثلث آ آ و کے کھینچا جاوے تو یہہ مس کریگا خط آ آ
سی تراش مخروطی کے نقطہ آتشی پر — ش ش ش
(۲۶۰) فرض کرو کہ ط = ۹۰° − م/۲ تو جس ط جس (ط + م) / ۲ (جم م/۲) = ۱
اسیواسطے اس صورت مین جبکہ تراشنے والی سطح متوازی قاعدہ کی ہو
تو مساوات گذشتہ مساوات دایرہ کی ہوجاوے گی — ش ش ش
(۲۶۱) فرض کرو کہ ط + م = ۱۸۰° ∴ جس (ط + م) = ۰
تو اب اس صورت مین خط منحنی قریب البیضوی ہوجاویگا اور قطع کرنیوالی
سطح حرکت کرتی ہوئی مقام آن ق پر آجاویگی چونکہ اس صورت مین محور
آن کا متوازی ضلع وع مخروط کی ہے اسیواسطے مساوات گذشتہ
مساوات قریب البیضوی کی اور صورت اوسکی یہہ ہوگی ر = ۲ ط (جس ع/۲)
اگر آ کہ کھینچا جاوے بنا تا ہو ازاویہ ی آ ک = زاویہ ر و ک تو آ ک خط
بنیادی تراش مخروطی کا ہی اور وہ دایرہ جو کہ مس کرتا ہی خطوط آ و
اور آن اور وع سی مس کریگا خط آن قریب البیضوی کے نقطہ آتشی پر
(۲۶۲) فرض کرو کہ (ط + م) زیادہ ہی ۱۸۰° سی تو جس (ط+م)
کی منفی ہوگی اور خط منحنی مطلوب بعید البیضوی ہوگا اور قطع کرنیوالی سطح
اس خاص صورت مین مقام آن ر پر ہوگی اس صورت مین اگر خطوط آل
اور وی کو پیچھی کیطرف کھینچین تو وہ بالضرور نقطہ ل پر ملین گے یا قطع
کرنی والی سطح دو نو مخروط سے ملی اور خط منحنی کی دو شاخین ہونگی ایک

مناخ انمین سی ہر ایک مخروط کی سطح پر بنی گی -

سوا فق بیضوی کی ثابت ہوسکتا ہی کہ مربع قطر متجانس کا = سطح آی اور آک کی اور خط ا ک فاصلہ درمیان دو نقطہ آتشی کے ہی اور ا کہ خط بنیادی ہی اور وہ دایرہ جو کہ مس کرتا ہی ا د اور د ا اور ا ل سے ا ل کو نقطہ آتشی پر مس کریگا -

(۲۶۳) واضح ہو کہ ہم ط کی بہی مختلف قیمتین فرض کرسکتی ہین یا ہم اسکو اسطرح پر تعبیر کرینگی کہ تراشنے والی سطح مخروط سی ملتی ہی ایک اور نقطہ پر سوے نقطہ آ کے مثلاً فرض کرو کہ ط = ۰ ش۲ = $\frac{\text{جب ط جب (ط + م)}}{(\text{جم } \frac{\text{م}}{۲})^۲}$ لا۲

چونکہ اس صورتمین جب ط اور $(\text{جم } \frac{\text{م}}{۲})^۲$ مثبت ہین تو اب ممکن ہو نا قیمت مساوات گزشتہ کا سو قوف ہوگا مقدار جب (ط + م) پر اگر ط + م کم ہو ۱۸۰° سی تو اس صورتمین مقدار (ط + م) کی ناممکن ہوگے اور یہہ مساوات صرف بطور آیندہ کی حل ہوگی لا = ۰ تو ش = ۰ تو اب معلوم ہوا کہ تراش مخروطی اس صورتمین ایک نقطہ ہی اور یہہ صورت اس وقت حاصل ہوگی جبکہ تراشنے والی سطح، اس مخروط سی اسطور پر گذری کہ وہ متوازی ا ف آ کی ہو - اگر (ط + م) زیادہ ہو ۱۸۰° تو ہمین حاصل دو ایسی خطوط مستقیم ہونگی جو کہ تقاطع کرینگے ایک دوسرے کو نقطہ شروع پر اس صورتمین قطع کرنے والی سطح نقطہ د سی گذرتی ہوئی متوازی خط ا ل کے کھینچی گئی ہی اور تراش مخروطی اس صورت مین ایسی

دو خط مستقیم ہونگے کہ ملین گے نقطہ و پر - ثر ثر ثر ثر

(۲۶۴) مرقومہ بالا سے واضح ہوگا کہ تراشہای مخروطی سات قسم کے ہین نقطہ اور خط مستقیم اور دو خطوط مستقیم جو کہ تقاطع کرتی ہین ایک دوسرکو اور دایرہ اور بیضوی اور بعید البیضوی اور قریب البیضوی یا تمام ایسی خطوط منحنی جو کہ مساوات درجہ دویم سے تعلق رکھتی ہین معہ اونکی اختلاف کی سوای وہ خط متوازیہ کے جو صرف اختلاف قریب البیضوی کا ہی -

واضح ہو کہ تینون اخیر کی تراشون کو یعنی بیضوی اور بعید البیضوی اور قریب البیضوی کو تراشہای مخروطی کہتی ہین اور بیان انکا اکثر ریاضی دانون نے فلاطون کے وقت سے کیا ہی اور یہہ خطوط منحنی افلاطون کے مدرسہ مین دریافت کئی گئی تہی اور جبکہ اوسکے شاگردونکو اکثر خواص ان خطوط منحنی کے معلوم ہوئی تو اونہون نے بخوبی انکا استحان کرکے اکثر کتابین انکی باب مین چھپوائین ان کتابونمین سے وہ کتاب جو کہ اپولونیس باشندہ پرگا نے تصنیف کی ہے موجود ہی اوسکی آٹھہ باب ہین چار آسان اور چار مشکل لیکن فی الحقیقت لایق مطالعہ کرنیکے ہی اور متقدمین نے اون خطوط منحنی کو بوسیلہ علم ہندسہ کی اسطرح سے لکھا ہی جسطرح کہ متاخرین انکو بوسیلہ مساواتون کی تعبیر کرتی ہین

$$ر^۲ = ن لا + \frac{ن}{ب^۲} لا^۲$$

$$ر^۲ = ن لا - \frac{ن}{ب^۲} لا^۲$$

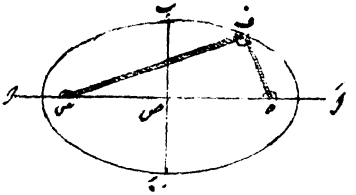
$$ر^۲ = ن لا$$

بیان کھینچنی تراشہای مخروطی کا بوسیلہ حرکت متواتر کی

(۲۶۵) واضح ہو کہ تراشہای مخروطی صرف ریاضی ہی مین مفید نہین ہین وہ اکثر علوم اور فنون مین فایدہ مند ہین اسیواسطے اب ہم بیان انکا بہ تفصیل اور صحیح طور سی کرین گے واضح ہو کہ ہر ایک خط منحنی دو طور سی کھینچ سکتا ہی بوسیلہ ایک خاص ترکیب ریاضی کے یا بوسیلہ نقاط کی مثال پہلی ترکیب کی ایک دایرہ ہے جو کہ کھینچ سکتا ہی بوسیلہ ایک خط پرکاری کی یا بوسیلہ ایک ڈوری کے جسکا ایک سرا بند ہا ہوا مرکز پر اور دوسرا سرا حرکت کری گرداوس نقطہ کی اس قسم کی ترکیبین جو کہ حرکت متواتر پر موقوف ہین ہمیشہ کام مین بہی آتی ہین سوای دایرہ کے کوئی اور خط ایسا سہل نہین ہی کہ اسمین ایسی ترکیب جاری ہوسکی اسیواسطے ایسی خطوط منحنی کو نقاط کی وسیلہ سے دریافت کرتے ہین یہہ ترکیب استعمال مین آسکتی ہی بوسیلہ مساوات خط منحنی اور بعض خواص ہندسی کی جو کہ اوس خط منحنی مین پائی جاتی ہین جسکا کھینچنا مطلوب ہے بوسیلہ اس ترکیب کی بہت سی نقاط خط منحنی کے معلوم ہوجاتی ہین اور ان نقاط کو ایک مہین قلم یا آلہ سی ملا کی خط منحنی مطلوب دریافت ہوجائیگا لیکن ان نقاط کو بہت صفائی سے ملانا چاہیے اب ہم ترکیبین ان خطوط منحنی کی کھینچنی کے بیان کرین گے

(۲۶۶) کھینچنا اوس بیضوی کو جسکے محور معلوم ہین — فرض کرو کہ

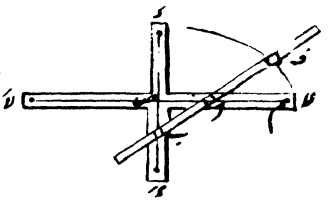
ا آ اور ب ب محور ہین نقطہ ب کو مرکز گردان کر کھینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر مساوی آ ص کے ہو کاٹتا ہوا ا آ کو نقاط س اور ہ مین ان نقاط کو نقاط آنشی کہتے ہین



قایم کرو دو میخین مقام س اور ہ مین فرض کرو کہ ایک سرا ڈوری کا نقطہ آ پر ہی اور گذارو دوسرا اس ڈوری کا نقطہ ہ مین لاؤ اسسے بہر نقطہ ا پر اسطرح پر کہ دونو بہری اس ڈوری کے اس نقطہ پر ملین اور ڈور اگرد ہ اور آ کی مساوی دو چند آ ہ کی ہو - قایم کرو میخ یا ایک تیز آلہ کو اس ڈوری مین نقطہ ا پر اور پھراؤ اس ڈوری کو گرد نقاط س اور ہ کی اسطرح کہ یہہ ڈور ا ہمیشہ تنا ہوا رہی تو اب یہہ میخ یا آلہ خط منحنی بیضوی کا بناویگا مثلا اگر ڈور ا پھرتے ہوئے مقام ف پر آوی تو س ف + ف ہ + ہ س = ہ ا = ا آ + ہ س ∴ س ف + ف ہ = ا آ

(۲۶۷) ایک اور ترکیب کھینچنے اس خط منحنی کے بوسیلہ ایک بیضوی پرکار کی جسکو ٹریمل کہتی ہین یہہ ہی - فرض کرو کہ ڈورل یا دو لکڑیان معہ سوراخون کے عمود ایک دوسری پر ہین اور فرض کرو کہ ب ف ایک تیسری لکڑی ہی قطع کرتی ہے ب ف مساوی نصف محور کلان کے اور ف ق مساوی نصف محور خورد کی اور فرض کرو کہ نقطہ ب پر ایک ایسی میخ ہی

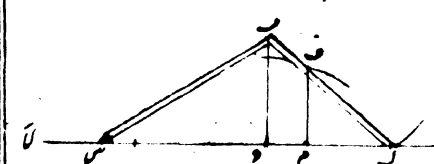
جوکہ ر ر پر حرکت کرسکے اسیطرح کی اور بیخ نقطہ ح پر ہی اور جبکہ ب ف



حرکت کری گرد ایک قلم کے جوکہ ف پر ہی تو ایک خط بیضوی کا پیدا ہوگا اور مان لو کہ نقطہ ص پر محور ملتی ہین اور ص م = لا اور م ف = ر و ترف کی ہین کھینچو خط ب ن کا متوازی خط ص م کے جوکہ ملتی ہی خط ف م سے نقطہ ن پر تو اب ظاہر ہی کہ ر م = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ ب ن اور مربع ر ف = مربع ف م + مربع ر م

یا ص^{۲} = ر^{۲} + $\frac{\text{ص}^{۲}}{\text{ط}^{۲}}$ لا^{۲} ∴ ط^{۲} ر^{۲} + ص^{۲} لا^{۲} = ط^{۲} ص^{۲}

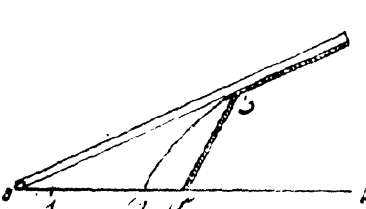
(۲۶۸) ترکیب آیندہ بھی بہت آسان ترکیب واسطے کھینچنے بیضوی کی ہی فرض کرو کہ لا لا^{۱} ایک لکڑی ہی اور س ع اور ک ع دو لکڑیان ہین ہر ایک انمین سی مساوی نصف مجموعہ محور کلان اور محور خورد کے ہر لیخے



س ع یا ک ع = $\frac{\text{ط} + \text{ص}}{۲}$ جہانکہ ط مساوی نصف محور کلان اور ص مساوی نصف محور خورد کی ہی پھر دونو لکڑیان نقطہ ع پر بوسیلہ ایک ایسی

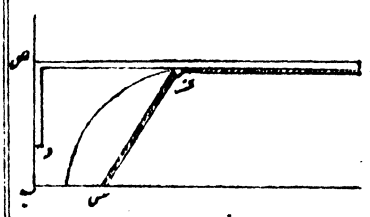
بندش کے ملائی گئے ہیں جو کہ بآسانی حرکت کر سکتے ہیں۔ اور فرض کرو کہ ف ع = $\frac{ط-ص}{۲}$ اب اگر نقطہ ک کو خط لاآ پر حرکت دی جاوے تو ظاہر ہے کہ نقطہ ف خط بیضوی کا بنا دیگا کھینچو عمود ع د اور ف م س لا پر اور فرض کرو کہ س م = لا اور ف م = ء تو اب ظاہر ہی کہ مربع ع ک = مربع ع د + مربع د ک لیکن ک ع : ک ف :: ع د : ف م یعنے $\frac{ط+ص}{۲}$: ص : ع د : ء ∴ ع د = $\frac{ط+ص}{۲}$ × $\frac{ء}{ص}$ اور ظاہر ہی کہ ک د : م د :: ک ع : ع ف ∴ ک د + م د : م د :: ک ع + ف ع : ع ف یعنے لا : م د :: ط : $\frac{ط-ص}{۲}$ ∴ م د = $\frac{ط-ص}{۲}$ × $\frac{لا}{ط}$ اور یہہ بھی ظاہر ہی کہ ک ع : ف ع :: ک د : م د یا $\frac{ط+ص}{۲}$: $\frac{ط-ص}{۲}$ :: ک د : $\frac{ط-ص}{۲}$ × $\frac{لا}{ط}$ ∴ ک د = $\frac{ط+ص}{۲}$ × $\frac{لا}{ط}$ ∴ $\left(\frac{ط+ص}{۲}\right)^{۲}$ = $\left(\frac{ط+ص}{۲}\right)^{۲}$ × $\left(\frac{ء}{ص}\right)^{۲}$ + $\left(\frac{ط+ص}{۲} \times \frac{لا}{ط}\right)^{۲}$ یعنے $\frac{ء^{۲}}{ص^{۲}}$ + $\frac{لا^{۲}}{ط^{۲}}$ = ۱

(۲۶۹) کھینچو خط بعید البیضوی کو بوسیلہ حرکت متواترکے۔ فرض کرو کہ آآ محور کلان بعید البیضوی کا ہی اور س ہ فاصلہ درمیان نقاط آتشی کی ہی اور ہ ف کہ ایک ایسی لکڑی ہی جو کہ نقطہ ہ پر حرکت کر سکتے ہی اور ملاؤ ایک دور اور درمیان نقاط ک اور س کے مساوی کہ ہ — آآ کی اور حرکت



دو لکڑی کہ ہ ک کو اسطرح پر کہ دور رکھ ف س کے ہمیشہ بنی ہوئی رہی تو اب حرکت نقطہ ف کیطرح جبکہ ایک قلم سرمہ کا لگا ہوا ہی خط بعید البیضوی کا بنیگا کیونکہ حاصل تفریق خط ہ ف اور س ف کا ہمیشہ ایک رہیگا اگر طول دور کا مساوی خط ہ ک کی ہو تو نقطہ ف کے حرکت سی ایک ایسا خط پیدا ہوگا جو کہ عمود ہوگا ہ س پر — اور اگر دور زیادہ ہو خط ہ ک سے تو اس صورت میں دوسرے شاخ بعید البیضوی کی گرد نقطہ ہ کی بنی گے

(۲۷۰) کھینچو خط قریب البیضوی کو بوسیلہ حرکت متواتر کے۔ فرض کرو کہ س نقطہ آتشی ہی اور ب ص خط بنیادی ہی رہو آلہ د ص ک کو جو کہ اکثر بڑھیون کے پاس ہوتا ہی اور تیسری لکڑی ص ک عمود دوسری لکڑی ب ص پر ہی اور علاوہ ایک دور اسا دی ک ص کے درمیان نقاط ک اور س کے اسطرح پر کہ وہ گذرے نقطہ ف مین جہانکہ ایک قلم سرمہ کا لگا ہوا ہی اب حرکت دو ک ص د کو خط ب ص پر تو اب ظاہر ہی کہ اس حرکت سی نقطہ ف کا خط قریب البیضوی کا بناویگا کیونکہ س ف ہمیشہ مساوی خط ف ص کے رہیگا جو کہ خط بنیادی ص ب پر عمود ہی —



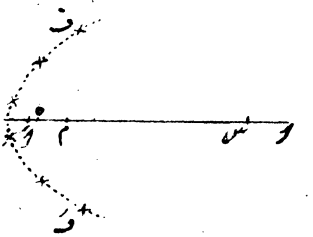
(بیان بنانی تراشہای مخروطی کا بوسیلہ نقاط کے)

(۲۷۱) کھینچو خط بیضوی کو بوسیلہ نقاط کی جبکہ محور اوسکے معلوم ہون

فرض کرو کہ اَرَ محور کلان ہی اور سَ اور ہ نقاط آتشی نقطہ سَ کو مرکز

گردان کے کھینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر خط اَم ہو جو کہ چھوتا ہی خط اَرَ

سی اسیطرحسی



کھینچو ایک اور

دایرہ جسکا ہ

مرکز اور رَم

نصف قطر ہو اور فرض کرو کہ یہہ دایرہ قطع کرتا ہی پہلے دایرہ کو نقاط ف

اور فَ پر تو اب ظاہر ہی کہ سَف + ہف = اَم + مَرَ = اَرَ تو اب

ثابت ہوا کہ ف ایک نقطہ خط بیضوی کی اسیطرحسی بہت نقاط معلوم ہو سکتے

ہین جنکی ملانی سے خط بیضوی بنیگا — ثٗ ثٗ ثٗ

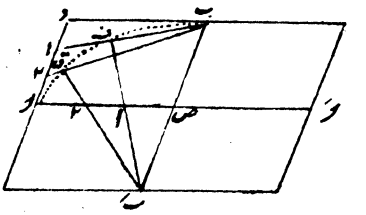
(۲۷۲) کھینچو خط بیضوی کو جبکہ اوسکی اقطار متجانس معلوم ہون

فرض کرو کہ اَرَ اور بَد

اقطار متجانس ہین لمطر ب

مین سی کھینچو خط بَد کا

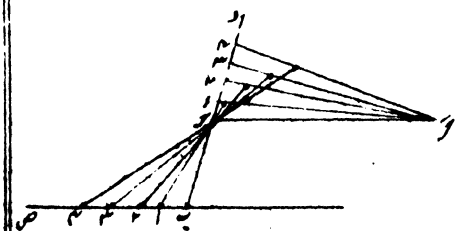
متوازی خط اَص کے اور



نقطہ آ مین سی کھینچو خط اَد کا متوازی خط ب ص کے تقسیم کرو دونو خطوط

آد اور آص کو مساوی حصوں مین مثلاً مساوی تین حصوں مین اور ملاؤ خطوط ب ا اور ب د کو نقاط تقسیم آد مین اور ت ا اور ت ۲ کو نقاط تقسیم ص آ مین تو اب نقاط تقاطع ف اور ق کے نقطے خط منحنی کی ہونگی واسطی ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ ص نقطہ شروع ہی اور آص = ط ا اور ب ص = ص ا تو اب ظاہر ہی کہ مساوات خط مستقیم ب ف کی یہہ ہوگی ی - ص ا = $\frac{\text{ص ا}}{\text{۳ ط ا}}$ لا اور مساوات خط مستقیم ب ف کی یہہ ہوگی ی + ص ا = - $\frac{\text{۳ ص ا}}{\text{ط ا}}$ لا تو اب ظاہر ہی کہ حاصل ضرب اون راویون کی مماس کا جو کہ یہہ خطوط محور لا سے بناتی ہین = - $\frac{\text{ص ا}}{\text{۳ ط ا}}$ × $\frac{\text{۳ ص ا}}{\text{ط ا}}$ = - $\frac{\text{ص ا ۲}}{\text{ط ا ۲}}$ اور چونکہ یہہ ایک مقدار مقررہ ہی اسیواسطے نقطہ ف کا خط منحنی پر ہوگا (۱۴۱) اسیطور سے دریافت ہو سکتے ہین لانہایت نقطے جنکی ملانی سے ایک خط بیضوی کا پیدا ہوگا

(۲۷۳) ترکیب آیندہ واسطی کھینچنے خط بیضوی کے بوسیلہ نقاط کی بہت خوب اور آسان ہے



فرض کرو کہ آ آ ایک قطر ہی اور آ ب برابر اور متوازی قطر متمایل بیضوی کے ہی نقطہ ب مین سے کھینچو خط ب ص کا متوازی آ آ کی اور

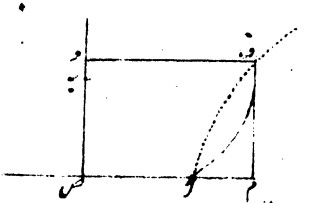
قطع کرد اسکو مساوی چند ضعف آرَ کے اور اسیطرح سی کھینچکر خط آب کو د تک اور لو آرَ کو مساوی اوتنی ہی ضعف آب کی اور تقسیم کرد دونو خطوط ب ص اور ب د کو مساوی حصو نمین یعنی آرَ کے جتنی حصے کرو اوتنی ہی ب ص کے کرنے چاہین مثلاً تقسیم کرد آرَ کو چار حصو نمین اور ب ص کی بہی چار حصہ کرد ملاؤ خطوط آرَ اور آ۲ اور آ۳ اور آ۴ نقطہ آ اور نقاط تقسیم آرَ مین اور اسیطرح سے ملاؤ خطوط آ۱ اور آ۲ اور آ۳ اور آ۴ کو نقطہ آ اور نقاط تقسیم ب ص مین تو اب نقاط تقاطع ان خطوط کی نقطہ خط منحنی کے ہونگی ثبوت اسکا موافق ترکیب گذشتہ کی ہی

(۲۷۴) کھینچو خط بعید البیضوی کو جبکہ اوسکی محور معلوم ہون ۔

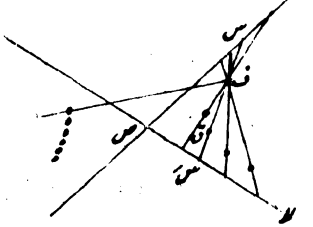
فرض کرد کہ آرَ محور بکلان ہے اور س اور ہ نقاط التقی معلوم ہین نقطہ س کو مرکز فرض کرکے کھینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر آم زیادہ ہو آرَ سی اسیطرح سی کھینچو ایک دوسرا دایرہ نقطہ ہ مرکز اور آم کو نصف قطر کرد اگر تو اب نقاط تقاطع ان دونو دایرہ کی نقطے خط منحنی کے ہونگی ثبوت اسکا اوس طور سی ہوگا جب کہ واسطی کھینچنے بیضوی کے فقرہ (۲۷۱) کی مین بیان کیا گیا ہی ۔

اگر (۲۷۳) مین ب ص کو بجای بائین طرف لینی کی سیدہی طرف کو لیوین اور بعد اسکی عمل کرین اوسیطرح جسطور سی (۲۷۳) مین بیان کیا تو اوس عمل سے بعید البیضوی کا خط پیدا ہوگا ۔

(۲۷۵) کھینچو خط بعید البیضوی مساوی القطرین کو بوسیلہ نقاط کے فرض کرو کہ صم اور صب مساوی محور ہین کھینچو خط صب نقطہ د تک نقطہ د کو مرکز کرکے انکی کھینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر د ہی کھینچو خط دف کا عمود خط صم ف پر جو کہ قطع کریگا دایرہ کو نقطہ ف پر تو اب نقطہ ف کا نقطہ خط منحنی مطلوب کا ہوگا - فرض کرو کہ صم = لا اور م ف = ر تو اب ظاہر ہی کہ مربع صم د = مربع د ف - مربع صم ف یا د^۲ = لا^۲ - ط^۲

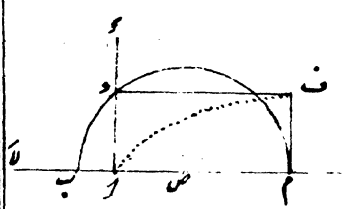


(۲۷۶) معلوم ہین ہمین خطوط متنفر الملاقات صلا اور صس اور نقطہ ف خط منحنی کا بناؤ خط بعید البیضوی کو بوسیلہ نقاط کے نقطہ ف مین سی گذرتا ہوا کھینچو خط سس ف تس کا جو کہ انجام ہوتا ہی خطوط متنفر الملاقات پر خط سس ف مین ن کا تو س ن ق = ن ف تو اب نقطہ ق موافق فقرہ (۲۱۷) کے ایک نقطہ خط منحنی کا ہوگا اسیطرح سی بہت سی نقاط معلوم ہوسکتے ہین جنکی ملانی سی خط منحنی پیدا ہوگا واضح ہو کہ سوای معلوم ہونی خطوط متنفر الملاقات ایک اور شرط معلوم ہونی چاہئی واسطی دریافت کرنے خط منحنی کے کیونکہ خطوط متنفر الملاقات



کی معلوم ہونی سی صرف نسبت محوروں کے معلوم ہوتی ہی اور اس نسبت سی محور دریافت نہین ہوسکتے —

(۲۷۷) بناؤ خط قریب البیضوی کا بوسیلہ نقاط کے جب کہ وتر آتشی اعظم ن معلوم ہو فرض کرو کہ لا لا اور ر ر محور متقاطع علی القوایم ہین محور لا لا مین سی کاٹو ر ب = ن نقطہ ص کو جوکہ لا لا پر ہی مرکز کرکے اتنا کھینچو ایک دایرہ ب د م جسکا نصف قطر ص ب ہو تقاطع کرتا ہوا محور ر کو نقطہ د پر اور محور لا کو نقطہ م پر اب کھینچو خطوط د ف اور ف م عمود خطوط ر ر اور لا لا پر تو نقطہ ف کا خط منحنی پر ہوگا —



فرض کرو کہ ر م = لا اور

م ف = ر تو اب ظاہر ہی

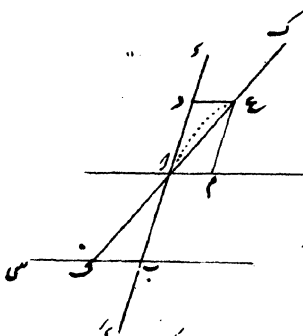
کہ مربع ر د = سطح ب ا در م

یعنی ح² = ن لا ⁞ ⁞ ⁞

(۲۷۸) بناؤ خط منحنی کو جبکہ معلوم ہو زاویہ جو کہ درمیان محورون کی اور ایک وتر آتشی ن کے واقع ہی فرض کرو کہ لا لا اور ر ر محور ہین اور اب وتر آتشی نقطہ ب ہین سے کھینچو ص ب متوازی خط لا لا کے اور نقطہ ا ہین سی گذارو ایک خط ک ا ف کا جوکہ قطع کرتا ہی ص ب کو نقطہ ف ہین کاٹو خط ر ر ہین سی ر د = ب ف اور کھینچو خط د ع کا متوازی لا لا کی جو کہ قطع کرتا ہی ا ک کو نقطہ ع ہین تب نقطہ ع نقطہ خط منحنی مطلوب

مطلوب کا ہوگا - کھینچو خط م ع متوازی ز د کے اور فرض کرو کہ ا م = لا

اور م ع = ی تو اب ظاہر ہے

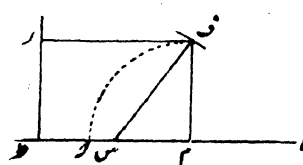


م ع : م ا :: ا ب : ب ف۔

یعنے ی : لا :: ن : ر لا

∴ ی² = ن لا

(۲۷۹) کھینچو کوئی ایک تراش تراشہای مخروطی سی جسکا معلوم ہو مقام خط بنیادی ط ر اور نقطہ آتشی س کا - کھینچو س ط عمود ط ر پر اور کھینچو خط ط س کو تو یہہ خط محور خط منحنی کا ہوگا فرض کرو کہ ی : ا وہ نسبت ہے جو کہ فاصلہ کسی نقطہ خط منحنی کا



نقطہ آتشی سے رکھنای اوس فاصلہ سے جو کہ درمیان اوسی نقطہ خط منحنی اور خط بنیادی کے ہے یعنے اگر اوس : ا ط :: ی : ا تو ز نقطہ خط منحنی کا ہے فرض کرو ایک نقطہ م کا خط ز ا میں اور نقطہ س کو مرکز کرکے کھینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر ی دفع ط م ہو کھینچو م ف عمود محور ز لا پر جو کہ ملی دایرہ سے نقطہ ف پر تو اب نقطہ ف کا ایک نقطہ خط منحنی کا ہوگا فرض کرو کہ ز نقطہ شروع ہے اور ز م = لا اور م ف = ی محور تقاطع علی القوایم میں اور ز ا = م ا : ز ط = ی² اور اب ظاہر ہے کہ س ف = ی × ط م =

ی × ف ر ∴ ر² + (لا − م)² = ی² (لا + $\frac{م}{ی}$)²

یا ر² + لا² − ۲ م لا + م² = ی² لا² + ۲ ی م لا + م²

∴ ر² + (۱ − ی²) لا² − ۲ م لا (۱ + ی) = ۰ اور یہہ مساوات اون خطوط منحنی کی ہی جو کہ مساوات درجہ دویم سے تعلق رکھتی ہین اب فرض کرو کہ ی کم ہی آ سی ∴ ر² = (۱ − ی²) { $\frac{م^۲}{(۱-ی)^۲}$ لا − لا² } جبکہ مطابق کرینگی ہم اس مساوات کو مساوات بیضوی سے جو کہ یہہ ہی ر² = $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ (۲ ط لا − لا²)

تو ۲ ط = $\frac{م^۲}{۱-ی}$ اور $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ = ۱ − ی² ∴ ص² = $\frac{م^۲}{(۱-ی)^۲}$ (۱ − ی²)

= م² $\frac{۱+ی}{۱-ی}$ تو اب ثابت ہوا کہ خط منحنی ایک ایسا بیضوی ہی جسکے محور $\frac{۲م}{۱-ی}$

اور ۲ م × $\sqrt{\frac{۱+ی}{۱-ی}}$ اب فرض کرو کہ ی زیادہ ہی آ سی تو

ر² = (ی² − ۱) { $\frac{م^۲}{ی^۲-۱}$ لا + لا² } تو اب ظاہر ہی کہ یہہ مساوات بعید البیضوی کی ہی جسکی محور $\frac{۲م^۲}{ی^۲-۱}$ اور ۲ م × $\sqrt{\frac{ی+۱}{ی-۱}}$ ہونگی اور اب فرض کرو کہ

ی = ۱ ∴ ر² = ۴ م لا یہہ مساوات ایسی قریب البیضوی کی ہی جسکا وتر آتشی اعظم ۴ م ہی —

(۲۸۰) چون کہ عام مساوات تراشہای مخروطی کی یہہ ہی

ر² + (۱ − ی²) لا² − ۲ م لا (۱ + ی) = ۰ تو اب ظاہر ہی کہ اگر کوئی خط بیضوی کا معلوم ہو تو وہ صورت بعید البیضوی یا قریب البیضوی مین بھی صحیح ہو سکتا ہی بوسیلہ ایک خاص تبدیلی قیمت کی کے مثلاً مساوات مماس بیضوی کی یہہ ہی

ر ر′ + (۱ − ی²) لا لا′ − م (۱ + ی) (لا + لا′) = ۰ تو مساوات مماس بعید

البیضوی کی یہہ ہوگی ر۲ − (ی۲ − ۱) لا لا′ − م (۱ + ی) (لا + لا′) = ۰

اور مساوات قریب البیضوی کی یہہ ر۲ − ۲م (لا + لا′) = ۰ اگر لکھین

ہم بجای ص۲ کے ص۲ تو اکثر خاصہ بیضوی کی جو کہ باب ہشتم مین دریافت کی گئی ہین

خواص بعید البیضوی کے ہوجاوینگی اور یہی خواص قریب البیضوی ہوجاوینگی بتدا نقطہ شروع

راس بیضوی پر اور لکھین م/(۱ − ی) کو بجای ط اور م (۱ + ی)/(۱ − ی) کو بجای ص۲/ط کے اور

فرض کرین کہ ی = ۱ مثلاً مساوات مماس بیضوی کے انجام وتر اتشی اعظم

پر جبکہ نقطہ شروع راس بیضوی کا فرض کیا جاوے یہہ ہوتی ہی

ر = ط + ی (لا − ط) (۱۱۷) یا ر = ط (۱ − ی) + ی لا لکھو بجای

ط کے م/(۱ − ی) اور فرض کرو کہ ی = ۱ ∴ ر = م + لا اور یہی نقطہ

(۲۳۵) مین بھی ثابت ہوا ہی — ثر ثر ثر

(۲۸۱) اگر س ف = ق اور ر س ف = ر تو مساوات قطبی مماس کی

حاصل ہوسکتی ہی کیونکہ س ف = ی × ف ر = ی (ط س + س م)

یا ق = ی (م (۱ + ی)/ی − ق جم ر) ∴ ق = م (۱ + ی)/(۱ + ی جم ر) اور چونکہ

بیضوی اور بعید البیضوی مین م (۱ + ی) = ص۲/ط اور یہہ صورت قریب

البیضوی مین = ۲م ہوتا ہی تو اب حاصل ہوگی (جبکہ لکھین ہم ل وتر

وتر اتشی اعظم کے) مساوات عام قطبی واسطے تینون خط منحنی کے

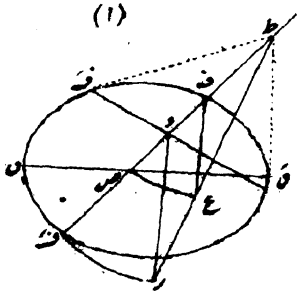
ق = ل/۲ · ۱/(۱ + جم ر) — (۱۵۰)

(۲۸۲) کھینچو ایک مماس نقطہ ف سے جو کہ بیضوی پر واقع ہی واسطے ثبوت

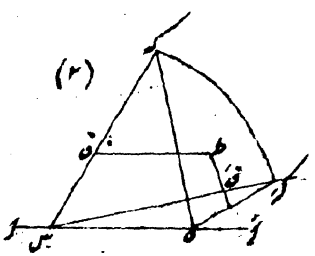
اس مطلب کے کھینچو وتر ف ف اور کھینچو اسکو یہان تک کہ وہ ملی نقطہ ق پر اوس دایرہ سی جو کہ کرد بیضوی کے کھینچا جاوے اور نقطہ ق سی کھینچو ایک مماس دایرہ کا جو کہ قطع کرتا ہی محور کلان کو نقطہ ط پر اور ملاؤ خط ف ط کا تو ظاہر ہی کہ یہہ خط مماس مطلوب ہی سوا ق (۱۱۴) کے اور اگر اوس شکل مین جو کہ فقرہ (۱۲۱) کے حاشیہ مین لکھی گئی ہی ملاوین س ف اور ہ ف کو اور کھینچین ہ ف کو نقطہ ک تک اور قطع کرین ف ک = ف ہ اور بعد اسکے ملاوین خط س ک کو تو اب ظاہر ہی کہ خط ف کو جو تنصیف کرتا ہی خط س ک کو مماس مطلوب ہی ۔

(۲۸۳) کھینچو مماس بیضوی کا ایک نقطہ ط سی جو کہ باہر اوسکی واقع ہی

(۱)



(۲)



واسطی ثبوت اس دعوی کے کھینچو خط ط ف، ص ف گذرتا ہوا مرکز مین سی شکل (۱) مین اور کھینچو قطر متجانس ص ف کا اور اب صورت سوال کی یہہ ہوگی دریافت کرو ایک نقطہ و کا خط ص ف مین کہ وتر ق و گذرتا ہوا اوسمین اسطرح پر کھینچا جاوے کہ خطوط ط ق اور ط و مماس مطلوب ہون قطع کرو

خط ص د کو اسطرح پر کہ ص ط : ص ف :: ص ف : ص د
تو نقطہ د کا نقطہ مطلوب ہی (۱۳۶) واسطی معلوم کرنے خط ص د کے ط کو مرکز
گردانکی کھینچو دو دایرہ ص ع ف ر اور کھینچو ایک ط ع ر جو قطع کرتا ہی دونو دایرونکو
نقاط ع اور ر مین اور ملاؤ خطوط ع اور کھینچو خط ر د متوازی ع ف کے

تو اب بوسیلہ متشابہ ہونے مثلثون کے ثابت ہوسکتا ہی
کہ ص د نسبت مین ثالث ہی خطوط ص ط اور ص ف کی اسیواسطی
نقطہ د نقطہ مطلوب ہے

(۲۸۴) فرض کرو کہ بیضوی معلوم نہین ہی اور محور اوسکے معلوم ہین تو اس
صورت مین مان لو کہ نقاط س اور ہ شکل (۲) مین دو نقطہ اتنی
ہین اب نقطہ س کو مرکز گردانکے کھینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر ا ر
ہو اور ط کو مرکز اور ط ہ نصف قطر گردانکر کھینچو ایک دوسرا دایرہ
جو کہ قطع کرے دایرہ اول کو نقاط ک اور ک پر خطوط س ک اور س ک
اور ہ ک اور ہ ک کو اور نقطہ ط سے کھینچو دو عمود ط ق اور ط ن خطوط
ہ ک اور ہ ک پر تو یہہ خطوط ملینگی خطوط س ک اور س ک سے نقاط ق اور
ق پر اور یہی نقطے مطلوب ہین واسطے ثبوت اس دعوے کی ملاؤ خطوط ہ ق
اور ہ ق کو بعد اسکی ثابت کرنے مین اس دعوے کے حاشیہ (۷۷) کی مدد لینی
چاہئی یعنے طریقہ اسکا حاشیہ (۷۷) کی طور پر ہے

(۲۸۵) کھینچو مماس بعید البیضوی نقطہ معلوم ف سے جو کہ اوسپر واقع ہی

اسیواسطی ملاؤ خطوط س ف اور ہ ف اوس شکل مین جو کہ اوس حاشیہ
مین جو صفحہ (۹۷) مین ہی کھینچی ہوئی ہی اور ہ ف مین سی قطع کرو ف کر
= س ف اور ملاؤ خط س ک تو خط ف ک جو تنصیف کرتا ہی خط س ک کو
مماس مطلوب ہوگا

(۲۸۶) کھینچو مماس بعید البیضوی ایک نقطہ ط سی جو کہ باہر اوس سی ہی وہ
دو طریقہ جو کہ فقرہ (۲۸۳) مین واسطے بیضوی کی لکھی گئی ہین اس خط
منحنی مین عمل مین لانی چاہئی مگر کچھ تبدیلی شکل مین واقع ہوگی

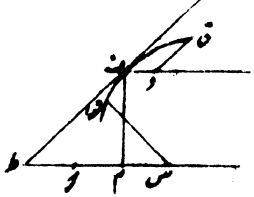
(۲۸۷) کھینچو مماس قریب البیضوی کا ایک نقطہ معلوم ف سی جو کہ اوس پر
واقع ہی — واسطی ثبوت اس دعوی کی کھینچو وتر ف م کا اس شکل مین جو کہ
فقرہ (۲۳۲) مین کھینچی ہوئی ہی اور کھینچو محور ا ک کو اور کاٹو اوسمین سے
ر ط = ر م اور ملاؤ ف ط تو یہہ خط مماس مطلوب ہوگا موافق (۲۳۳) کے
یا قطع کرو س ط = س ف اور ملاؤ ف ط کو تو خط ف ط مماس مطلوب ہوگا

(۲۸۸) کھینچو مماس قریب البیضوی کا ایک نقطہ ط سی جو کہ اوسپر واقع نہین ہے
واسطی ثبوت اس مطلب کے کھینچو قطر ف و متوازی محور کے جو کہ قطع کرتا ہی
خط منحنی کو نقطہ ف پر اور کاٹو ف و = ف ط اور کھینچو وتر وق واسطے
وتر العرض ف و کی تو اب ظاہر ہی کہ موافق (۲۴۹) کے خط ط ق اور
اور ط ق مماس مطلوب ہوگی — اگر یہہ خط معلوم نہو اور اسکا خط بنیادی
اور نقطہ آتشی معلوم ہون تو اس صورت مین نقطہ ط کو مرکز کرداکی کھینچو ایک

دایرہ جسکا نصف قطر طس ہو اتقاطع کرتا ہو خط بنیادی کو نقطہ ر اور ز
ملاؤ خطوط رس اور زس کو اور کھینچو خطوط رق اور زق متوازی محور
کے تو اب خطوط طق اور طق جو کہ عمود خطوط رس اور زس پر ہین
مماس مطلوب ہونگی موافق (۲۳۹) کے

(۲۸۹) اگر ایک قوس قف ق تراش مخروطی کی ایک سطح پر کھچی ہوئی
ہو تو دریافت کرو کہ وہ کس خط منحنی سے تعلق رکھتی ہی اور معلوم کرو محور اور نقطہ
آتشی اس تراش کے کھینچو خط ل گذرتا ہوا درمیان دو متوازی وترون کے
اور اسیطرح ہی کھینچو ایک اور خط ل گذرتا ہوا بیچ مین دو اور متوازی وترون کے
تو اب اگر خطوط ل اور ل متوازی آپس مین ہون تو قوس مذکور قریب القطعی
سی تعلق رکھیگی اور اگر وہ مجوف طرف اس خط منحنی کے ملین تو یہہ قوس بیضوی
سی تعلق رکھیگی اور اگر وہ محدب طرف اس خط منحنی کی ملین تو یہہ قوس بعید القطعی
سی تعلق رکھیگی موافق (۱۴۰ اور ۲۴۳) کے

(۲۹۰) فرض کرو کہ خط منحنی بیضوی ہی اور وہ نقطہ جہانکہ خطوط ل اور ل ملتی
ہین مرکز فرض ہی اور
فرض کرو کہ ف ایک
قطر ہی اور اسکا قطر
متوالف بقطور آیندہ کے
معلوم ہو سکتا ہی

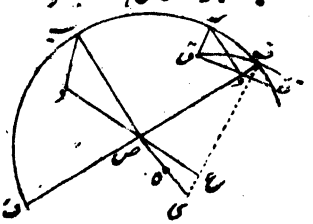


خط ف ق کو قطر گردانکے کھینچو دایرہ ف ب ق اور ملاؤ ر ق اور کھینچو ب د متوازی ر ق کے جو کہ ملتا ہی اوس خط سی جو کہ متوازی ف و کی ہی اور مرکز ص مین سی گذرتا ہی تو اب ظاہر ہی کہ خط ص د قطر متجانس ہی موافق (۱۳۶) کی - واسطی دریافت کرنے طول اور مقام محوروں کے کھینچو خط ف ع کا عمود ص د پر اور کھینچکی اسکو نقطہ ی تک قطع کرو ف ی = ص د اور ملاؤ ص ی اور تنصیف کرو ص ی کو نقطہ ہ پر اور ملاؤ ف ہ تو اب بوسیلہ مثلث ص ف ی کے ہمین حاصل ہوگی قیمت ضلع ص ی کے اجزائے ص ف مین اور ص د = $\sqrt{\{ط^۲ + ص^۲ - ۲ط.ص جس (ر - ر)\}}$ = $\sqrt{ط^۲ + ص^۲ - ۲ط.ص}$ = ط - ص ∴ ص ہ = $\frac{ط - ص}{۲}$ اور بوسیلہ اسی مثلث کے ہمین حاصل ہوگا ف ہ = $\frac{ط + ص}{۲}$ تو اب یہانسی معلوم ہوا کہ ف ہ + ہ ی نصف محور کلان ہی اور ف ہ - ہ ی نصف محور خورد ہے - خط ہ ف مین سے قطع کرو ہ ک = ہ ی تو ص ک سمت محور کلان کی ہوگی - ز ز ز ز ز ز

(۲۹۱) اگر قوس ف ق قوس بعید البیضوی کی ہو تو واضح ہو کہ اس صورت مین بہی قطر متجانس اوس ترکیب سے دریافت ہوگا جو اوپہی صورت بیضوی مین لکہی ہے اور اب خطوط متنفر الملاقات بوسیلہ فقرہ (۲۱۵) کی بآسانی کہینچ سکتی ہین اور سمت محورون کی تنصیف کرتی ہی اوس زاویہ کو جو کہ خطوط متنفر الملاقات آپسمین بناتی ہین اور طول انکا دریافت ہوسکتا ہی بوسیلہ کھینچنی مماس

ف ط اور عمود ف م کے محور پر اور بوسیلہ قطع کرنے ص آ کے اسطرح پر کہ وہ وسط فی النسبت ہو درمیان ص م اور ص ط کے (۱۶۷)

(۲۹۲) اگر قوس مذکور قوس قریب البیضوی کی ہو تو کھینچو ط ف ط سوائے ف د کے اور کھینچو خط ف س



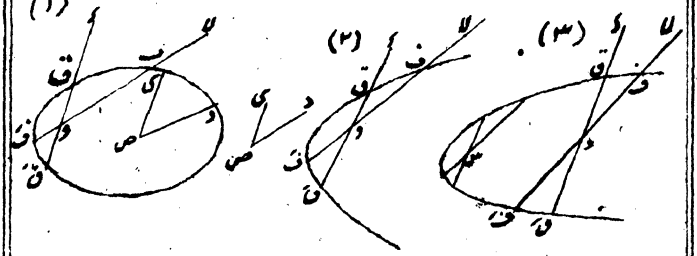
بناتا ہوا زاویہ س ف ط = زاویہ ط ف د اور یہی عمل کرو نقطہ ف پر بھی تو اب جس نقطہ پر کہ خط ف س اور ف ق تقاطع کریگی وہ نقطہ آتشی ہوگا (۲۴۰) واضح ہو کہ محور متوازی خط ف د کے ہی اور اسی اس خط نحنی کا بوسیلہ کھینچنی عمود کے محور پر اور تنصیف کرنے خط ط م کے دریافت ہو سکتا ہی ہوا فی فقرہ (۲۴۳)

(۲۹۳) اب ہم ختم کرینگی بحث تراشہای مخروطی کو بعد لکھنی شکل آیندہ کے جو کہ بہت مفید ہی۔ اگر ایک نقطہ مین سے جو کہ باہر یا اندر تراش مخروطی کے فرض کیا جاوے دو خط بناتی ہوئی ایک زاویہ کھینچی جاوین یہان تک کہ وہ ملین خط نحنی سے تو سطح ایک خط کی (جو کہ ضرب دو حصی ایک خط کی سی حاصل ہوئے ہی) سطح دوسرے خط سی نسبت مقررہ رکھتی ہی

(۱) فرض کرو کہ تراشہای مخروطی بیضوی اور بعید البیضوی مین فرض کرو کہ ص د اور ص ی دو نصف قطر متوازی دو وتروں ف ق اور ق ق کے ہین اور ظاہر ہی کہ جو وقت وتر متوازی انکی کھینچی جاوینگے

تو ہمین حاصل ہوگی یہہ نسبت

(۱) (۲) (۳)



سطح ف د اور وف : سطح ق د اور ق وَ :: مربع ص د : مربع ص ی

فرض کرو کہ وَ نقطہ شروع ترچھی محورون ولا اور وَ کا ہی تو اب مساوات

خط منحنی کی یہہ ہوگی ا ر^۲ + ب لا ر + س لا^۲ + د ر + ی لا + ف = ۰

فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ا ر^۲ + د ر + ف = ۰ اور چونکہ حاصل ضرب قیمتون

مساوات کا ہی $\frac{ف}{ا}$ اسیواسطے سطح ق د اور وق = $\frac{ف}{ا}$ اسیطرحسی

ف د اور وف = $\frac{ف}{س}$ ∴ سطح ف د اور وف : سطح ف د اور وف ::

$\frac{ف}{ا}$: $\frac{ف}{س}$ :: س : ا اور اب بدلو نقطہ شروع کو مرکز پر بغیر

بدلنی سمت محورون کے تو اب صورت مساوات کی یہہ ہوگی

ا ر^۲ + ب لا ر + س لا^۲ + ف = ۰ (۸۱) فرض کرو لا = ۰

∴ مربع ص ی = − $\frac{ف}{ا}$ اور مربع ص د = − $\frac{ف}{س}$

∴ مربع ص ی : مربع ص د :: س : ا اسیواسطے

سطح ق د اور ق وَ : سطح ف د اور ف وَ :: مربع ص ی : مربع ص د

شکل بعد البیضوی مین جو کہ (۲) ہی خطوط ص ی اور ص د خط منحنی سے

نہین ملتی ہین لیکن واسطے معلوم کرنے اس بات کی کہ یہہ نصف قطر حواسخنی
کی ہین حرکت دو محور کو یہانتک کہ وہ قطر متجانس ص د کا ہوجاوے تو
ظاہر ہی کہ صورتین (۵۵) واسطے تبدیل محورون کے جبکہ ر = ۰ اس صورت
کی ہوجاوینگی ی = ر جس ک / جس ل اور لا = لا + ی جس (ک - ر) / جس ک
جبکہ لکھین ہم ان قیمتون لا اور ی کو مساوات گذشتہ مین یعنی اوس مساوات
مین جسکا مرکز نقطہ شروع ہی اور فرض کرین کہ ب = ۰ واسطے تبدیل
کرنی اس مساوات کی اوس مساوات سی جسکی محور اقطار متجانس ہون تو اب
بعد اس تبدیل کے صورت مساوات کی یہہ ہوجاوی گی
ح ی^۲ + س لا^۲ + ف = ۰ اسمین مقادیر س اور ف کی نہین بدلی ہین
اور ف / س مساوی اوس مربع کی جو کہ نصف قطر پر کھینچ سکتا ہی اور
یہہ محور لا پر شمار کیا گیا ہی (۸۶) تو اب دعوی مرقومہ بالا صورت بعید
البیضوی مین بھی ثابت ہوا -

(۲) اب فرض کرو کہ تراش مخروطی قریب البیضوی ہی اور شکل پوسکی (۳) سے
بطور مرقومہ بالا کے ہین اس صورت مین بھی نسبت آئندہ حاصل ہوگی
سطح ف د اور ف د : سطح ق د اور ق د :: س : ح اب فرض کرو کہ ف
اور ق اوتار آتشی وترون ف و ف اور ق و ق کی ہین بدلو نقطہ
شروع کو نقطہ آتشی پر لیکن سمت محورون کی متوازی ف و اور ق و کے
رکھنی چاہئی اس تبدیل سے مقادیر س اور ح مین کسی طرح کی تبدیلی

ہنین ہوگی اور چونکہ اس صورت مین اوتار نقطۂ آتشی سی گذرتی ہین توسطح
سطح ف س اور س ف : : سطح ق س اور ق س : : $\frac{1}{4}$ ف : $\frac{1}{4}$ ق (۲۹۳)
اور چونکہ ف س اور س ف : : سطح ف س اور ق س : : س : ر اسواسطے
سطح ف د اور ف د : : سطح ق د اور ق د : : س : ر : : ف : ق

(۲۹۴) اگر نقطہ د کا باہر خطوط منحنی کے ہو اور نقاط ف اور ق
ایک دوسری پر منطبق اور سطح سی ق اور ق بر باخطوط مماس ہوجاوین
تو ہمین صورت بیضوی اور بعید البیضوی مین یہہ حاصل ہوگا

مربع دف : مربع دن : : مربع ص د : مربع ص ی یا
دف : دق : : ص د : ص ی — قریب البیضوی کی صورت مین یہہ
حاصل ہوگا مربع دف : مربع دق : : س ف : س ق یہانسے معلوم
ہوتا ہی کہ اگر ایک کثیر الاضلاع گرد ایک بیضوی کے کھینچا جاوے تو حاصل
ضرب جبریہ اسکی اجزای متبادلہ کا مساوی ایک دوسری کے ہیگا اور یہی صورت
استعمال مین آسکتی ہین جبکہ مماس کھینچا جاوین گرد ایک بعید البیضوی کے اور
جبکہ یہہ مماس ایک نقطہ خطوط متنفر الملاقات سی شروع ہون - نثر

باب دوازدہم اون خطوط منحنی کے بیان مین جنکی مساوات کئی درجہ کی ہو یعنی زیادہ دو درجہ سی ہو

(۲۹۵) چونکہ بحث اون خطوط کی جنکی مساوات دوسری درجہ کی تھی
تمام ہوچکی ہے اسواسطے اب ہم بیان اون خطوط کا کرین گے جنکی مساوات

زیادہ دو درجہ سے ہی چونکہ مساوات انتہی درجہ تک ہوتی ہی تو اس سے معلوم ہوتا ہے
کہ بحث کرنی اونکی اس مختصر رسالہ مین ناممکن ہی علاوہ اسکی بیان کرنا انکا کچھ ضرور
بھی نہین کیونکہ اونسی امورات دنیوی مین کسی نوع کا فایدہ نہین ہوتا ہی لیکن وہ
ریاضی دان ہی کو خوب معلوم ہونگی اور چونکہ ترا شہای مخروطی بہت فایدہ مند
امورات دنیوی مین معلوم ہوتی ہین اسیواسطی ہمنی بیان انکا بخوبی کیا ہی —
چونکہ تحقیقات تیسری درجہ کی خطوط کی پہلی اسحاق نیوٹن نی کی تہی اسیواسطی
وہ بہت مشہور ہوئی وہ خطوط جو تیسری درجہ کی مساوات سی تعلق رکہتی ہین
اسکی قسم پر ہین اونمین سی بہتر صورتین اسحاق نیوٹن نے دریافت
کی تہین اور باقی آٹہہ صورتین بعد اسکی دریافت ہوئی ہین جو طالب علم کہ
کہ انکا مطالعہ کیا چاہے وہ انکو اسحاق نیوٹن یا سیر لنگ کی کتاب مین
دیکہہ سکتا ہی جو تہی درجہ کی خطوط پانچ ہزار سی زیادہ ہین اور تعداد زیادہ
درجہ کی خطوط کی اسقدر ہی کہ اونکا بیان کرنا اس رسالہ مختصر مین ناممکن
ہی چونکہ بیان کرنا تمام خطوط منحنی کا بہت مشکل ہی اسیواسطی ہم اس کتاب مین
صرف اون خطوط کو لکہینگے جو کہ بہت فایدہ مند ہین اور جنکا جاننا ضروری
یعنی اون خطوط کو اس کتاب مین بیان کرینگے جو غیر منقطع ہین یعنے جنکی مسکوات
مین دو مقدار غیر مقررہ پائی جاتی ہین اور بعد اسکی لوکس ان سوالونکا
دریافت کرینگی اور انکی بعض ضروری خواص کو بہی لکہینگے واضح ہو کہ کوئی
خاص ترکیب واسطے معلوم کرنے ان سوالون کے فایدہ مند نہین ہوگی اور

قواعد جو کہ واسطی دریافت کرنے سوالات منقطع کے بیان کئی گئی ہین یہان بہی مفید ہونگی اور حل کرنا سوالات منقطع اور غیر منقطع کا صرف تجربہ پر موقوف ہی - واضح ہو کہ واسطی دریافت کرنے سوالات غیر منقطع کے ہم ایک ہی قاعدہ نہین لکہین گی بلکہ مختلف طور بیان کرینگی تاکہ طالبعلم کو مختلف طریقی واسطی نکالنے سوالات کی معلوم ہو جاوین اب ہم بیان کرینگے ایسی شکلون کو جنکا لوکس درجہ دویم سی تعلق رکہیگا —

(۲۹۶) معلوم ہی خط اب (=ظ) دریافت کرو نقطہ جو کہ اس خط پر واقع نہین ہی جسکے اف : ب ف :: م : ا

فرض کرو کہ آ نقطہ شروع ہی محورون متقاطع علی الزوایم کا اور مان لو کہ

آم = لا اور م ف = ء ∴ م ب = ظ - لا اسیواسطی

اف : ب ف :: م : ا یا $\sqrt{لا^2 + ء^2} : \sqrt{(ظ - لا)^2 + ء^2} :: م : ا$

∴ $لا^2 + ء^2 = م^2 (ظ - لا)^2 + م^2 ء^2$ یا $(ا - م^2) ء^2 + (ا - م^2) لا^2 + ۲ م^2 ظ لا$

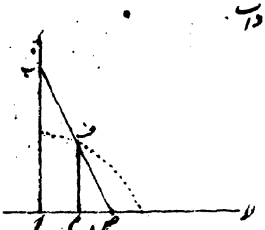
$- م^2 ظ^2 = ۰$ یا $ء^2 + (لا + \frac{م^2 ظ}{(ا - م^2)})^2 = \frac{م^2 ظ^2}{(ا - م^2)^2}$

اس مساوات کے وسیلہ سی لا نہایت ایسی نقاط معلوم ہو سکتی ہین جسکے وسیلہ سے شرط اس مساوات کی پوری

ہو جاویگی اور تمام یہہ نقطی محیط ایک دایرہ پر واقع ہونگی موافق (۶۶) کے

واسطے کھینچنے اس دایرہ کی قطع کرو آلا مین سے اص = $\frac{۱-م^۲ ط}{۱-م^۲}$
نقطہ ص کو مرکز کرکے دانکی کھینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر اص ہو یہی لوکس
مطلوب ہوگا اگر م = ۱ تو بوسیلہ مساوات اصلکے یہہ حاصل ہوگا
لا = $\frac{ط}{۲}$ اور یہہ مساوات اوس خط کی ہوگی جو کہ نقطہ تنصیف آب سی متوازی
آء کے کھینچا جاوے ۔ (۲۹۷) دریافت کرو لوکس ف کا جبکہ
کھینچے دو عمود نقطہ ف سی دو ایسی خطوط پر جنکا مقام معلوم ہے اور فاصلہ
درمیان اول دو مقام کے جہانکہ دو عمود واقع ہوتی ہین مساوے مقدار مقرر
آ کی ۔ فرض کرو کہ نقطہ تقاطع خطوط معلوم کا نقطہ شروع محورون متقاطع
علی القوایم کا ہی اور مان لو کہ ایک ان خطوط مین سے محور لا ہی اور فرض کرو کہ
ء = ط لا مساوات دوسری خط کی ہی تو اب مساوات اوس خط کی جو کہ نقطہ ف
(لا اور ء) سی گذرکی عمود اس خط پر ء = ط لا یہہ ہوگی
ء - ء = - $\frac{۱}{ط}$ (لا - لا) بوسیلہ ان دو مساواتون کے اوتار اون
نقاط کی جہان عمود واقع ہوتی ہین دریافت ہوسکتے ہین اور اب مساوات اخیر
بوسیلہ فقرہ (۲۹) کے یہہ حاصل ہوگی ء^۲ + لا^۲ = آ^۲ $\frac{(۱+ط^۲)}{ط^۲}$ یہہ مساوات
اوس دایرہ کی ہی جسکا مرکز نقطہ تقاطع ان خطوط کا ہی ۔
(۲۹۸) فرض کرو کہ ایک خط معلوم ب س حرکت کرتا ہی درمیان دو خطوط
آب اور آس کی اسطرح پر کہ انجام ب اور س اس خط کی ہمیشہ خطوط آب
اور آس پر حرکت کرتے ہین اب چاہتے ہین دریافت کرنا اوس خط منحنی کا

جو پیدا ہو گا حرکت کرنے نقطہ معلوم ف کی سی جو ب س پر واقع ہی۔
فرض کرو کہ خطوط آ ب اور اُس محور لا اور ی ہین اور م م = لا اور
م ف = ی اور ب ف = ط اور ف س = ص اور مان لو کہ زاویہ
ب اُس کا قایمہ ہی تو اب م م : ب ف :: م س : ف س یا
لا : ط :: ۴ ص - ی : ص ∴ ص لا = ط ص - ط ی
یا ط ی + ص لا = ط ص اور یہہ مساوات



ایسی بیضوی کی ہی جسکا مرکز نقطہ
آ ہی اور محور ۲ ط اور ۲ ص ہین
اگر ایک زینہ ایسی دیوار کی

سہارے رکھا جاوے جو عمود زمین پر ہی اب بشکل گذشتہ سی ظاہر ہی کہ
اگر زینہ مذکور زمین پر بسطح حرکت دین کہ اوپر کا سرا دیوار ہی پر رہی تو
ہر ایک پایہ اوسکا سوای بیچ کی پایہ کے ربع بیضوی کا بنا دیگا اور بیچ کا
پایہ ربع دایرہ بنا دیگا ۔ اگر محور ترچھی فرض کئے جاوین اور درمیان
اوسکی ایک زاویہ ر کا ہو تو اب = $\frac{ط + ص}{ص}$ ی اور ص = $\frac{ط + ص}{ط}$ لا
اسبواسطے ط ی ۲ + ص لا ۲ - ۲ ط ص جم ر لا ی - ط ۲ ص ۲ = ۰ اور یہہ
مساوات بیضوی کی ہی موافق (۷۲) کے ظاہر ہی کہ بوسیلہ اس شکل کے ایک
خاصہ تو کیب واسطی کھینچے بیضوی کے معلوم ہوتی ہی ۔ اگر ایک خطاب س
جسکا طول غیر منقطع ہی یعنے کم زیادہ ہوتا ہی خطوط آ ب اور اُس پر

اسطرح حرکت کرے کہ مثلث اب س ہمیشہ ایک ستارے یعنی مساوی ایک مقدار مقررہ کی ہو بوسیلہ حرکت نقطہ ف کے (جو کہ خط ب ج کو ایک خاص نسبت پر تقسیم کرتا ہی) بعید البیضوی پیدا ہوگا۔

(۲۹۹) معلوم ہی ہمیں خط اب (= س) دریافت کرو نقطہ ف کا (جو کہ اس خط پر واقع نہیں ہے) اسطرح پر کہ اگر کہیں جاویں خطوط ف ا اور ف ب تو زاویہ ف ب ا دوگنا ہو زاویہ ف ا ب سی فرض کرو کہ ا نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم لا اور ا ا کا ہی اور مساوات اف کی یہہ ہی ر = ط لا (۱) اور مساوات خط ب ف کی یہہ ہی ر = ط (لا - س)

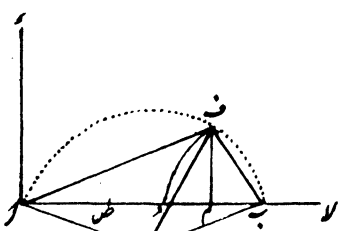
لیکن ط = س ف ب لا = - س ف ب ر = - س ۲ ف ا ب =

= - $\frac{ط۲}{۱-ط۲}$ ∴ ر = - $\frac{ط۲}{۱-ط۲}$ (لا - س) ... (۲)

جبکہ دو کرین گے ہم مقدار ط کو بوسیلہ مساواتون (۱) اور (۲) کے تو ہمیں حاصل ہوگی یہہ مساوات

ر۲ = ۳ لا۲ - ۲ س لا

یہانسی ثابت ہوا کہ لوکس ف کا بعید البیضوی ہی



جبکہ مطابق کرین گے ہم اس مساوات کو مساوات بعید البیضوی سے جو کہ یہہ ہی ر۲ = $\frac{ص۲}{ط۲}$ (لا۲ - ۲ ط لا) تو معلوم ہوگا کہ محور اسکے $\frac{۲س}{۳}$ اور $\frac{س}{۳}$ ہیں اور مرکز اس خط سنحنی کا ص ہی جہانکہ ا ص = $\frac{س}{۳}$

واضح ہو کہ بوسیلہ اس بعید البیضوی کے ایک قوس دایرہ کو تین مساوی حصونمین تقسیم کرسکتے ہین مثلاً فرض کرو کہ $\overset{\frown}{اف ب}$ ایک قوس دایرہ کی ہی جسکی تین حصہ مساوی کرنے منظور ہین واسطی ثبوت اس مطلب کے کھینچو ایک ایسا بعید البیضوی $\overset{\frown}{دف}$ جسکا ابھی بیان ہوا ہی تو اب ہم کہتی ہین کہ قوس $\overset{\frown}{ب ف}$ کی تہائی قوس $\overset{\frown}{اب}$ کی ہی کیونکہ اگر فرض کرین ہم $د$ مرکز قوس مذکور کا تو

$\overset{\frown}{اوف} = ۲\overset{\frown}{اوب}$ $\quad \overset{\frown}{ف ب} = ۴\overset{\frown}{اف ب} = ۲\overset{\frown}{اف ب}$ یعنی قوس $\overset{\frown}{ب ف}$ تہائی $\overset{\frown}{ب ف اک}$ کے ہی

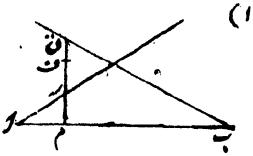
شکل مرقومۂ بالا بطور آیندہ کے بھی ثابت ہوسکتی ہی - فرض کرو کہ $اوم = لا$ اور $م ف = ک$ اور زاویہ $ف اب = ر$ اسپر واسطی $مس ر = \frac{ک}{لا}$

اور $مس ۲ر = \frac{مس ر}{لا}$ لیکن $مس ۲ر = \frac{۲مس ر}{۱ - مس^۲ ر}$

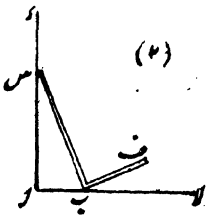
$\therefore \frac{ک}{لا} = \frac{۲\frac{ک}{لا}}{۱ - \frac{ک^۲}{لا^۲}}$ یا $ک^۳ = ۳لا^۲ ک - ۴ک^۳$ واضح ہو کہ بعد غور کے دونو طریقے مرقومۂ بالا ایک ہی معلوم ہونگی -

مساوات (۳۰۰) سوالات آیندہ مساوات درجۂ دویم سے تعلق رکھتے ہین یعنی اونکی لوکس کی مساوات درجہ دویم کی ہی - (۱) معلوم کرو لوکس نقطہ ف کا جبکہ نقاط $آ$ اور $ب$ سی (جو معلوم ہین شکل (۱) مین) دو خطوط ایسے کھینچی جاوین جنکا مقام معلوم ہو اور $م ق$ و $ر ق$ مشترک ان دو لو خطوط کا ہو اور خط $م ف$ $ر ق$ مین سے اسطرح کاٹا جاہی کہ وہ وسط فی النسبت خطوط $م ق$ اور $م ر$ کا ہو

(۱)



(۲)



(۲) س ب ف شکل (۲) مین ایک آلہ بڑھئی کا اور یہہ اسطرح پر بنایا گیا ہی کہ لکڑی ب س لکڑی ب ف پر عمود ہی دریافت کرو لوکس ف کا جبکہ یہہ آلہ حرکت کرتا ہی زاویہ قایمہ ا ل ا مین اسطور سے کہ نقطہ س ہمیشہ خط ل ا پر حرکت کری اور نقطہ ب خط ل ا پر

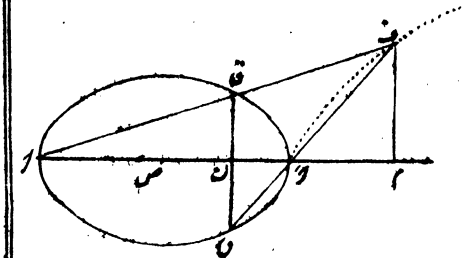
(۳) اگر قاعدہ ایک مثلث اور حاصل تفریق دو زاویون کا جو کہ قاعدہ پر بنتی ہین معلوم ہون تو ثابت کرو کہ لوکس راس مثلث کا بعید البصری مساوی القطرین ہوگا — (۴) دریافت کرو ایک ایسا نقطہ ف کا جس سے اگر دو عمود دو خطون مفروض پر کھینچی جاوین تو وہ شکل چار ضلع کی جو ان عمودون سے بنی گی مساوی ایک مربع مفروض کے ہوگی — ش ش

(۳۰۱) فرض کرو کہ ل ق ل ا ایک بیضوی ہی اور ل ا محور کلان اور ق ق ایک وتر اوسکا ہی اور اب ملاؤ خطوط ل ق اور ل ق کو جو تقاطع کرتے ہین نقطہ ف پر اب چاہتی ہین دریافت کرنا لوکس نقطہ ف کا

فرض کرو کہ ص نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم کا ہی اور ص م = لا اور م ف = ک اور ص ن = لا اور ن ق = ر تو اب ظاہر ہی کہ

مساوات خط ق ق کی یہہ ہوگی ی = ص لا + د صورت اس مساوات کی نقطہ

ق پر یہہ ہو جاویگی



∴ ی = − ص ط + د

∴ ی = ص (لا + ط)

نقطہ ق پر صورت

اسکی یہہ ہو جاویگی

ی = ص (لا + ط) ∴ ص = $\frac{ی}{لا + ط}$ یہانسی ثابت ہوا کہ مساوات

ق ق کی یہہ ہی ی = $\frac{ی}{لا + ط}$ (لا + ط) ..... (۱) اسیطرحسی مساوات

ق ق کی یہہ ہوگی ی = $\frac{-ی}{لا - ط}$ (لا − ط) .. (۲) اور مساوات بیضوی کی

نقطہ ق پر یہہ ہوگی ط² ی² + ص² لا² = ط² ص² .... (۳) بوسیلہ مساوات (۱)

اور (۲) کی ہمین حاصل ہوگا لا = $\frac{ط}{لا}$ اور ی = $\frac{ی}{لا}$ جبکہ لکھین گے

ہم ان قیمتون لا اور ی کو مساوات (۳) مین تو حاصل ہوگا یہہ

ط² $\frac{ط² ی²}{لا²}$ + ص² $\frac{ط²}{لا²}$ = ط² ص² یا ط² ی² − ص² لا² = − ط² ص² اور یہہ مساوات

اوس بعید البیضوی کی ہی جسکا مرکز نقطہ ص اور محور کلان ۲ ط ہی طریقہ دور

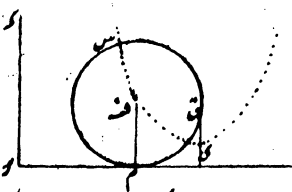
کرنی مقادیر لا اور ی جو کہ یہان استعمال مین لایا گیا بہت فایدہ مند معلوم ہوتا ہی

اور بیان اسکا بتفصیل ہو سکتا ہی ظاہر ہی کہ اسصورت مین ہمنے پہلی مساوات

ق ق اور ق ق کی اور بعد اوسکی فرض کیا کہ قیمت لا اور ی کے دونو مساوات مین

مین ایک ہی ہی تو اب ظاہر ہی کہ یہہ قیمتین لا اور ی دونو مساواتون مین سوای نقطہ

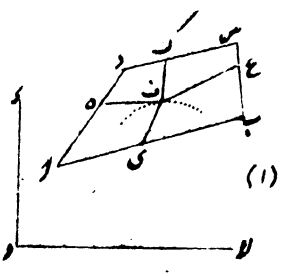
تقاطع ف کی مساوی ایک دوسری کے نہیں ہوسکتی ہیں اور یہہ قیمتیں لا اور ی کی تعبیر کرینگے خطوط ص م اور م ف کو اور دور کرنے مقادیر لا اور ی سی معلوم ہوتا ہی کہ لا اور ی ہمیشہ اوتار نقط تقاطع خطوط ق ق اور ق ق کی ہونگی اور مساوات اخیر جو کہ موافق اس فرض کے حاصل ہوگی وہ لوکس نقطہ تقاطع ف کی ہے (۳۰۲) دریافت کرو لوکس تمام اون دایرون کے مرکز ونکا جو کہ مس کرتی ہیں خط ق لا سی اور گذرتی ہیں نقطہ مفروضہ ق (ط اور ص) ہیں سی فرض کرو کہ



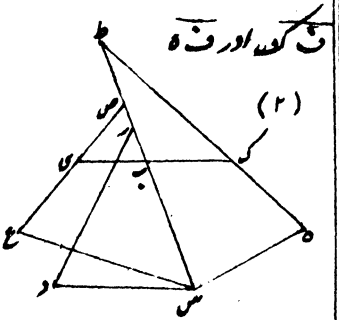
م ہی م ایک اون دایرون ہیں
س ہی جسکے محور منقاطع علی القوائم
ق لا اور ق ی ہیں اور لا اور ی
اوتار مرکز ف کے ہیں اور لا اور ی اوتار ایک ایسی نقطہ کی ہیں جو کہ محیط دایرہ پر واقع ہی اور اب مساوات دایرہ س ق م کی یہہ ہوگی (ی+ی)² + (لا-ل)² = ق² (۶۵) لیکن جبکہ یہہ دایرہ نقطہ ق ہیں سی گذریگا تو صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوجاویگی (ص-ی)² + (ط-ل)² = ق² اور چونکہ خط ق لا مماس دایرہ کا ہی اسواسطے ق = ی ∴ (ص-ی)² + (ط-ل)² = ی²
یا لا² - ۲ط لا - ۲ص ی + ط² + ص² = ۰ ظاہر ہی کہ یہہ مساوات قریب القطع کی ہے موافق (۶۷) کی اور ظاہر ہی کہ صورت مساوات گذشتہ کی یہہ بھی ہوسکتی ہی (ل-ط)² = ۲ص (ی - ص/۲) اب اگر بدلیں ہم نقطہ شروع نقطہ کی پر جسکے ل = ط اور ی = ص/۲ ہیں تو ہمیں حاصل ہوگا یہہ لا² = ۲ص ی تو

اب معلوم ہوا کہ راس ی نقطہ شروع خط منحنی مطلوب کا ہی اور یہہ نقطہ مرکز سب سے چھوٹی دایرہ کا ہی اب اگر دایرہ بجای گذرنی کی نقطہ مفروض مین سے مس کرے ایک دایرہ مفروض کو تو اس صورت مین بھی لوکس نقطہ ف کا قریب البیضوی ہوگا۔

(۳۰۳) فرض کرو کہ آ ب اور ب س اور س د اور د آ شکل (۱) مین ایسی خطوط ہین جنکا مقام معلوم ہی دریافت کرو لوکس نقطہ ف کا اسطرح سے کہ اگر کھینچے جاوین خطوط ف ی اور ف ع اور ف ک اور ف ہ بناتی ہوئی زاویہ مفروضہ خطوط آ ب اور ب س اور س د اور د آ سی تو سطح ف ی اور ف ع = سطح ف ک اور ف ہ



(۱)



(۲)

فرض کرو کہ و نقطہ شروع محور دن متقاطع علی القوایم ولا اور وہ کا ہی اور لا اور د آ و تا رف کے ہین اور فرض کرو کہ م اور م' اور م'' اور م''' کو سیکنہ اون زاویون کے ہین جو کہ ف ی اور ف ع وغیرہ بناتی ہا خطوط ب آ اور ب س وغیرہ سے ہین اور چونکہ [illegible] اور خط ز [illegible] کی ہیہ ہی

ز = ط لا + س تو ف ی = $\frac{\text{ز} - \text{ط لا} - \text{س}}{\sqrt{1 + \text{ط}^2}}$ اور

مساوات خط ب س کی یہ ہی ک = ط لا + ص تو ذ ع = $\frac{ک - ط لا - ص}{\sqrt{۱ + ط^۲}}$ ع ر

اور ... دس ... ک = ط' لا + ص' تو ف ک = $\frac{ک - ط' لا - ص'}{\sqrt{۱ + ط'^۲}}$ ع' ر'

اور ... ... اد ..... ک = ط'' لا + ص'' تو ہ = $\frac{ک - ط'' لا - ص''}{\sqrt{۱ + ط''^۲}}$ ع'' ر''

اسیواسطی موافق دعوی کے $\frac{ک - ط لا - ص}{\sqrt{۱ + ط^۲}}$ × $\frac{ک - ط لا - ص}{\sqrt{۱ + ط^۲}}$ ع ر ع ر =

$\frac{ک - ط'' لا - ص''}{\sqrt{۱ + ط''^۲}}$ × $\frac{ک - ط'' لا - ص''}{\sqrt{۱ + ط''^۲}}$ ع'' ر'' ع'' ر'' چونکہ یہہ مساوات دو مرتبہ کی ہے تو لوکس نقطہ کا تراش مخروطی ہوگی اور خاص صورتین اس مساوات کے مقام خطوط مفروضہ پر موقوف ہونگی یہہ مشکل اسی بہی عام طور سی ثابت ہوسکتی ہی فرض کرو کہ ۳ یا ۴ یا ۵ یا زیادہ خطوط مفروض ایسی ہین جنکا مقام معلوم ہی اب مطلوب ہے ایک ایسا نقطہ جسی اگر کہینچی جاوین خطوط بنائی ہوئی زاویہ مفروضہ

خطوط مفروض تک تو سطح دو خطونکا ان خطوط مین سی ایک نسبت مقررہ رکہتا ہی مربع تیسرے ضلع سی جبکہ خطوط مفروض تین ہون یا سطح باقی دو خطون سی جبکہ چار خطوط مفروض ہون اور اگر پانچ خطوط مفروض ہون تو مجسم تین خطونکا نسبت معلوم رکہتا ہی باقی دو خطون کے مجسم سے معہ ایک تیسری خط مفروض کے یا باقی تین خطوط کی مجسم سے جبکہ خطوط مفروض چہہ ہون اور اگر سات خطوط مفروض ہون تو حاصل ضرب تین یہ چار خطونکا ایک نسبت معلوم رکہتا ہی باقی تین خطون اور ایک اور خط معلوم کی حاصل ضرب سی یا باقی چار خطون کے حاصل ضرب سی جبکہ آٹہہ خطوط مفروض ہون اور وغیرہ نسبت معلوم

رلھتا ہی وغیرہ سی اس شکل کے ثابت کرنیمین مہندسان متقدمین بہت دقت ہوئی
اور باوجود سعی بلیغ کی کوئی اوسکو ثابت نہ کرسکا اور میں بیان کرتا ہی کہ یہہ
شکل اقلیدس اور اپولونیس سے حل نہوئی اور اس شخص نے اس شکل کو جسکہ خطوط
مفروض تین یا چار ہون ثابت کیا اور اس صورتین اوسنے اس شکل کو حل کرکی معلوم
کیا کہ لوکس ف کا تراش مخروطی ہی اور وہ اس سے زیادہ خطوط کی صورت کو حل نکرسکا
اور جبکہ تعداد خطوط کی سات یا آٹھہ فرض کی گئی تو متقدمین اس شکل کو اس خاص
صورتین بیان بھی نکرسکی کیونکہ وہ سوای مجسم اور کسی صورت سی واقف نہتی اور
ظاہر ہی کہ سمجھنا اس شکل کا بغیر استعانت جبر مقابلہ کے ناممکن ہے کیونکہ حاصلضرب
چار خطوط کا سوای جبر مقابلہ کے بیان نہین ہوسکتا اس شکل کو وٹس کار نیٹر صاحب
نی ثابت کیا اور اس شخص نے اس شکل کے ثابت کرنے سی طریقہ ثابت کرنے اشکال
ہندسی کا بوسیلہ جبر مقابلہ کے دریافت ہوا اس شکل کو وٹس کار نیٹر صاحب نے
بطور آیندہ حل کیا فرض کرو کہ ب ب اور آد اور ی ع اور ک ہ شکل (۲) مین
خطوط مفروض ہین اور س نقطہ مطلوب جسسے تمام خطوط س ب اور س د اور
س ع اور س ہ بناتی ہوئی زاویہ مفروض س ب ا اور س د ا اور س ع ی
اور س ہ ک کھینچی گئے ہین اور ا ب (= ل) اور ب س (= ز) ایسی خطہ ہین
جنکے وسیلہ سی قیمت باقی اور خطون کے دریافت کی جاویگی اور فرض کرو کہ خطوط مفروض
خط س ب سی نقاط ر اور ص اور ط مین ملتے ہین اور یہی خطوط ب ب سے نقاط
آ اور ی اور ک مین ملتی ہین فرض کرو کہ ای = س اور ا ک = د اور چونکہ

تمام زاویلی مثلث آ ب ر کے معلوم ہین تو ب ر = ط × آ ب = ط لا

∴ س ر = ط لا + ی اور س د = ط (ط لا + ی) اور چونکہ س ص = ط ب ی

= ط (س + لا) س ص = ی + ط (س + ا) اور س ع =

ط (ی + ط (س + لا)) اور چونکہ ب ط = ط ب ک = ط (د - لا)

∴ س ط = ی + ط (د - لا) اور س ہ = ط {ی + ط (د - لا)}

اور چونکہ سطح س ب اور س ع = سطح س د اور س ہ تو

ی ط (ی + ط (س + لا)) = ط (ط لا + ی) ط {ی + ط (د - لا)} اس

مساوات کو ڈس کارٹیز صاحب نے بہ تفصیل حل کرکے بیان کیا یہہ مساوات

تراش مخروطی سے تعلق رکھتی ہی اوسنے شمال آیندہ عدد دونین بہی لکھی ہی

فرض کرو کہ ی آ = ۳ اور آ ک = ۵ اور آ ب = ب ر اور ب س = ½

ب س = ½ ب ی اور ک ب = ب ط اور س د = ۳/۲ س ر اور

س ع = ۲ ص س اور س ہ = ۲/۳ س ط اور زاویہ آ ب ر = ۹۰°

اور سطح س ب اور س ع = سطح س د اور س ہ کی اور موافق طریقہ

اسنی صورت مساوات کی یہہ معلوم کی ۲ لا ی + لا² - ۲ د - ۵ لا = ۰

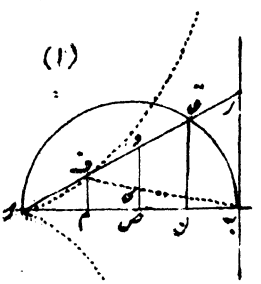
اس مساوات کو اوسنے ثابت کیا کہ دایرہ سے تعلق رکھتی ہی اور سوا فی فقرہ

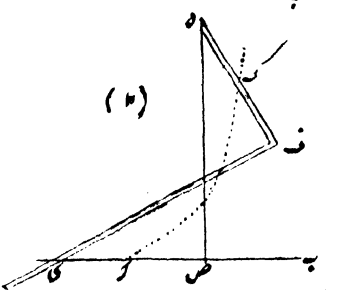
(۷۲) کے اوتار مرکز کی یہہ معلوم ہوگئی ۳/۴ اور - ½ اور نصف قطر =

= √۱۹/۴ ٭ ٭ ٭ (۴۴) فرض کرو کہ آ ق ب

ایک نصف دایرہ ہی جسکا قطر آ ب ہے اور ب ر ایک خط غیر محدود عمود

خط اب پر ہی اور آق ر ایک ایسا خط مستقیم ہی جو کہ دایرہ سی نقطہ ق پر اور ب ر سی نقطہ ر پر ملتا ہی اور قطع کرو اف = ق ر اب در یافت کرو لوکس نقطہ ف کا — فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم کا ہی اور آب محور لا ہی اور مان لو کہ اب = ۲ط اور ا م = لا اور م ف = ی اور کھینچو ق ن متوازی م ف کے





چونکہ اف = ق ر تو ا م = ب ن اور ا م : م ف :: ا ن : ن ق یعنے لا : ی :: (۲ط - لا) : √(۲ط - لا) لا (۶۵) ∴ ی² = $\frac{لا^۳}{۲ط - لا}$ اور ی = ± $\sqrt{\frac{لا^۳}{۲ط - لا}}$ جدول آیندہ سی واسطے ہر ایک خاص قیمت لا کے قیمت ی کی حاصل ہوگی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قیمتین لا کی	۰	ط	< ۲ط	۲ط	> ۲ط	—
قیمتین ی کی	۰	ط	ممکن	∞	ناممکن	ناممکن

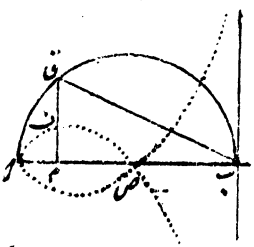
(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ شروع پر گذرتا ہی اور (۲) سی معلوم ہوتا ہی

کردہ تنصیف نصف دایرہ آن بہ گرتا ہی اور (۳) سے معلوم ہوتا ہی کہ تین
ذ ممکن ہوگی جبکہ قیمتین لا کی کم ۲ط سی فرض کیجاوین اور (۴) سی معلوم ہوتا ہی
کہ نقطہ ب پر ایک ایسا وتر ہی جسکا طول لا نہایت ہی یا ب ر خط متنفر الملاقات خط منحنی
کا ہی بوسیلہ تمام ان قیمتون کے ایک قوس غیر محدود حاصل ہوگی جو کہ نقطہ آ سی شروع
ہوکی ہمیشہ خط ب ر کی پاس آتی جاتی ہی اور (۵) سی دریافت ہوتا ہی کہ واسطی
تمام اون قیمتون لا کے جو کہ ۲ط سے بڑی ہون کہ ناممکن یعنی خط منحنی داہنی
طرف خط متنفر الملاقات کی واقع نہین ہے اسیطرح (۶) سے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی
بائین طرف آ کے بھی واقع نہین ہی اور چونکہ واسطے ہر ایک قیمت لا کی دو قیمتین ذ
کی نکلتی ہین ایک مثبت اور دوسری منفی تو اس سے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نیچی
کی طرف آ ب کے بھی واقع ہی - واضح ہو کہ اس خط منحنی کو ڈای اوکلیس صاحب نے
ایجاد کیا ہی اور یہہ اور نام اسکا اسنے سسائڈ رکھا اسمنی اس شکل کی وسیلہ سے
دو واسطی فی النسبت درمیان دو طرفون کی معلوم کئی بیشتر اس ریاضی دان کے
نیوٹن صاحب نے اس شکل کی ایک خاص صورت نکالی ہی فرض کرو کہ ب ص اور
ص ی دو طرف ہین اور آ ق ب ایک ایسا دایرہ ہی جسکا مرکز ص اور نصف قطر
ب ص ہی اور کھینچو ایک خط مستقیم غیر محدود ب ی ف گذرتا ہوا نقطہ ی مین سی اور
اب کھینچو خط آ ف ق کا ملتا ہوا ب ی اور ص ی سی نقاط ف اور ق مین اور
دایرہ سی نقطہ ق مین اسطرح سی کہ ق ف = ق ف تو اب ظاہر ہی کہ ص و سلا
دو واسطی فی النسبت مین سے ہوگا لیکن مقام نقطہ ف کا دریافت نہین ہوسکتا ہی

اسپیرابطے ڈائی اوکلس نے اس خط منحنی کو واسطے دریافت کرنے ایک سلسلہ نقاط
کی ایجاد کیا جسکی وسیلہ سے اوسنے واسطے ہر ایک طول ص ی کے اس شکل کو ثابت
یعنی کچھ ہی مقدار ص ی کی فرض کرو کہ یہہ شکل تمام صورتون مین ثابت ہوگی
مثلاً فرض کرو کہ ب ص اور ص ی اور سہ اڈ کھینچا ہوا ہی اور کھینچو خط باقی جو خط
منحنی سے نقطہ ف پر ملتا ہی اور چونکہ در = وا اور ق ر = اف تو
وق = وف بوسیلہ حدود اس خط منحنی کے بہت سی نقطے اس خط منحنی کے حاصل
ہوسکتی ہین جنکے ملانے سے یہہ خط منحنی بنی گا اور چونکہ اسطور سے بنانا اس خط منحنی
کا حرکت برموقوف ہی تو ظاہر ہی کہ بنانا اسکا موافق دلیل ہندسی کے صحیح نہین ہے
اسپیرابطے نیوٹن صاحب نے ایک آسان آلہ واسطے اس خط منحنی کے بوسیلہ
حرکت متواتر کے ایجاد کیا — فرض کرو کہ ص ہ شکل (۲) مین ایک خط
مستقیم متوازی خط ب ر کی ہی قطع کرو ای = وص اور فرض کرو کہ
ی ف ہ ایک پٹری کا آلہ ہی جسکی طرف ف ی غیر محدود ہے اور ف ہ = ب
اس آلہ کو اسطرح سے حرکت دو کہ پٹری طرف ی ف کی ہمیشہ نقطہ ی مین گذری
ہوئی رہی اور انجام ہ دوسری طرف ہ ف کی خط ص ہ پر سرکی تو اب لوکس
نقطہ کا جو کہ بیچ مین خط ف ہ کے واقع ہی سہ اڈ ہوگا —
دریافت کرو مساوات قطبی اس خط منحنی کی فرض کرو کہ ی = ق جس ر اور
لا = ق جم ر جبکہ لکھین ہم ان قیمتون لا اور ی کو اس مساوات مین
ی = $\frac{\text{لا}^{۳}}{\text{ب ط} - \text{لا}^{۲}}$ تو حاصل ہوگا یہہ $\frac{\text{ق}^{۳} (\text{جم ر})^{۳}}{\text{ب ط} - \text{ق}^{۲} \text{جم}^{۲} \text{ر}}$ = ق (جم ر)

∴ ق = ۲ ط جب ر ÷ مس ر (مثال) اگر ایک عمود دائرہ البیضوی سے ایک مماس پر کھینچا جاوے تو لوکس اور نکی نقاطہ کا مساوی ہوگا

(۳۰۵) اگر اب ایک دایرہ اور ص ایک نقطہ قطر اب پر ہو اور م ق ایک وتر علاوت ق کو اور کھینچو ص ف متوازی اب ق سے جو کہ ملتاہی منتظم م ق سی نقطہ ف پر آب ور یافت کرو لوکس نقطہ ف کا



فرض کرو ام = لا اور م ف = ی

اور اب = ط اور ص = ص تو اب

ظاہر ہی ب م : م ق :: ص م : م ف

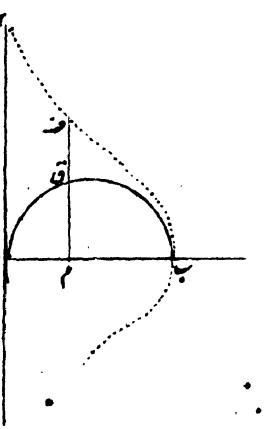
یا (ط − لا) : √(ط لا − لا²) :: (ص − لا) : ی

∴ ی = ± (ص − لا) √(لا ÷ ط − لا) جبکہ لکھینگے ہم اس مساوات مین وہ قیمتین جو کہ جدول آیندہ مین لکھی گئی ہین تو نتایج مرقومہ ذیل اس مساوات سی حاصل ہونگی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قیمتین لا کی	۰	ص	ط	ط ÷ ۲	ط ÷ ۷	—
قیمتین ی کی	۰	۰	± ∞	ممکن	ناممکن	ناممکن

(۱) اور (۲) سی معلوم ہوتاہی کہ خط منحنی آ اور ص مین سی گذرتاہی اور (۳) سی ظاہر ہوتاہی کہ وتر نقطہ ب پر خط منتظر الملاقات خط منحنی کا ہی (۴) سی معلوم ہوتاہی کہ دو قوسین خط منحنی کی درمیان آ اور ص کے واقع ہین اسیطرح سے

دو قوسین درمیان ص اور ب کے اور (۵) اور (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ
خط سخنی داہنی طرف ب کی اور بائین طرف آ کے واقع نہین ہے
اگر ص = ۰ تو بیضوی شکل جو کہ درمیان آ اور ص کے واقع ہی جاتی رہیگی
تو اب ظاہر ہی کہ یہہ خط سخنی سیدھا ڈائی اوکلس کا ہو جاویگا - اگر ص منفی
ہو یا نقطہ ص بائین طرف آ کے ہو تو خط سخنی کی دو شاخین ہونگی اور یہہ نقطہ
آ سے شروع ہوکی پاس خط منتظر الملاقات کی آتا جاویگا جو نقطہ ب سے کھینچا گیا
ہی اگرچہ یہہ نقطہ ص کا خط سخنی پر نہین ہے لیکن تاہم اوس سے تعلق رکھتا ہی اس
نقطہ کو نقطہ متی لس کہتے ہین ذکر اس نقطہ کا بخوبی حساب جزئیات مین ہوتا ہی
جس طالبعلم کو کہ دیکھنا منظور ہے وہ حساب جزئیات کے کتابون مین دیکھی - مثال
دریافت کرو لوکس نقطہ ف کا جبکہ نقاط آ اور ق و تر م ق قریب البضوی سی
اسطرح قطع کئی جاوین کہ وہ ہمیشہ مساوی فاصلہ پر نقطہ ف اور راس قریب البضوی
سی واقع ہون - شکل



(۳۰۶) دریافت کرو لوکس
نقطہ ف کا جبکہ خط م ق ایک
وتر نصف دایرہ آ ق ب کا
ہو اور م ق نقطہ ف تک
اسطرح سی کھینچا جاوے کہ
م ف : م ق :: آ ب : م آ

فرض کرو کہ ب لا اور آ ء محور متقاطع علی الزوایا ہین اور فرض کرو کہ
م ف = لا اور م ق = ء اور ا ب = ۲ط چونکہ م ف : م ق :: ا ب : ا م
∴ ء : √(۲ط لا − لا²) :: ۲ط : لا ∴ ء لا = ± ۲ط √(۲ط لا − لا²)
∴ ء = ± ۲ط √((۲ط − لا)/لا)

	۱	۲	۳	۴	۵
قیمتین لا کی	۰	۲ط	> ۲ط	< ۲ط	—
قیمتین ء کی	± ∞	۰	ممکن	ناممکن	ناممکن

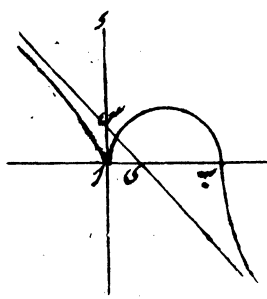
(۱) سی معلوم ہوتا ہی کہ وتر نقطہ شروع پر لانہایت ہی تو اب معلوم ہوا کہ وتر نقطہ شروع پر خط متنفر الملاقات خط منحنی کا ہی اور (۲) سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط منحنی محور سی نقطہ ب پر ملتا ہی اور (۳) سی دریافت ہوتا ہی کہ خط منحنی درمیان آ اور ب کے پہیلتا ہی اور (۴) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی پری ب سے واقع نہین ہی اور (۵) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی بائین طرف آ کے واقع نہین ہی نام اس خط منحنی کا وچ ہی اسکو ایک عورت نی جسکا نام میریا گیٹنا اگنیس ہی ایجاد کیا اور یہہ رہنی والی اٹلی کی تہی اور سنہ ۱۷۴۸ ع بعد حضرت عیسی کے مدرسہ بولوگنا مین ریاضی سکہاتی تہی —

(۳۰۷) ظاہر ہی کہ دایرہ مین مربع وتر کا مساوی سطح دو حصون قطر کے ہوتا ہی تو اب دریافت کرو صورت اُس خط منحنی کی کہ مکعب اوسکی وتر کا مساوی

ایک ایسی مجسم کی ہو کہ قاعدہ اوسکا مربع ایک دائرہ کا ہو اور بلندی اسکی دوسرا انگرا یا ص۳ = لا۲ (۲ط - لا) فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوائم کو ، اور آلا کاہی اور آب = ۲ط فرض کرو کہ لا = ۰ یا = ۲ط ∴ ص = ۰ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی مطلوب نقاط آ اور ب مین سی گذرتا ہی اور جبکہ لا < ۲ط تو ص مثبت ہوگا اور جبکہ لا > ۲ط تو قیمت ص کی منفی ہوگی اور مقدار اسکی لا نہایت ہوسکتی ہی کیونکہ کعب ایک مقدار منفی کا منفی اور ممکن ہوتا ہی اور جبکہ لا منفی فرض کیا جاوے تو ص مثبت ہوگا اور یہہ لا نہایت زیادہ ہوتا جاویگا اور واسطے ہر ایک قیمت لا کے ایک صحیح قیمت ص کی حاصل ہوسکتی ہی اور باقی دو قیمتین اس مساوات کی ص۳ ± ۱ = ۰ ناممکن ہونگی - بوسیلہ پہلانی یعنی کعب یسی مساوات گذشتہ کی ہمین حاصل ہوگا

ص = - لا √۳ - ۲ط/۳ =

= - لا {۱ - ۱/۳ ۲ط/لا - ۹/۱۰ ۲ط/لا + وغیرہ}



اسیواسطے مساوات خط منحنی للملاقات لا کی یہہ ہوگی ص = - لا + ۲ط/۳ (۱۹۵)

قطع کرو آ ص مین سے آس = ۲ط/۳

اور آلا مین سے آی = ۲ط/۳ اور ملاؤ س ی کو تو جبکہ خط س د کھینچا جاوے دونو طرف س اور ی کی تو وہ خط منحنی للملاقات خط منحنی کا ہوگا -

مثال دریافت کرو لوکس اس مساوات کا ص۳ + لا۳ = ط۳ اور اس مساوات کا

(۳۰۸) دریافت کرو لوکس اس مساوات کا

$ر^۳ = ط^۲ لا - لا^۳ -$

$ط د^۲ = لا^۳ + م لا^۲ + ن لا + ف$ صورت (۱) فرض کرو کہ قیمتین اس مساوات کی صحیح اور نامساوی ہین اور تعبیر کرو اونکو ط اور ص اور س سے اسطرح پر کہ ط بڑا ہو ص سے اور ص بڑا ہو س سے تو اب ظاہر ہی کہ صورت مساوات کی یہہ ہوگی $ر = \pm \sqrt{\frac{لا - ط}{ط} (لا - ص)(لا - س)}$

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
قیمتین لا کی	۰	ط	ص	س	ص	س		س	∞	—
قیمتین ر کی	ناممکن	۰	ممکن	ممکن	۰	ناممکن	۰	ممکن ± ∞		ناممکن

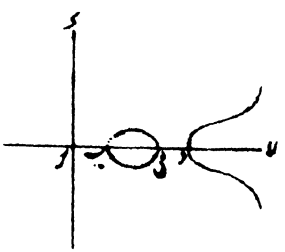
فرض کرو کہ آ نقطہ شروع

محور متقاطع علی الاقوام

آلا اور آر کا ہی اور

فرض کرو آب = ط

اور آس = ص اور



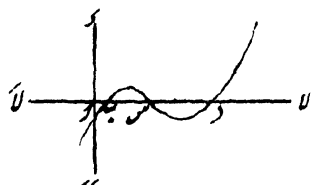
ر د = س (۲) اور (۵) اور (۷) سی معلوم ہوتا ہی خط منحنی نقاط ب اور س اور د مین سی گذرتا ہی اور (۳) اور (۶) سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط منحنی درمیان نقاط آ اور ب اور س اور د کے واقع نہین ہی اور (۴) سی دریافت ہوتا ہی کہ درمیان ب اور س کے دو شاخین خط منحنی کے واقع ہین اور

(۸) اور (۹) سے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ د سے لانہایت پہلیتا ہی
اور (۱۰) سے دریافت ہوتا ہی کہ بائین طرف آ کی خط منحنی واقع نہین ہی -
اگر قیمتین مساوات کی منفی فرض کیجاوین تو اس صورتین بہی خط منحنی کی یہی صورت
ہوگی لیکن مقام اسکا نسبت نقطہ شروع کی مختلف صورت گذشتہ سے ہوگا
صورت (۲) اگر دو قیمتین مساوات کی مساوی ہون تو صورت مساوات کی یہہ ہوگی
ی = (لا - س) √(لا - ط / ط) یا ی = ± (لا - ط) √(لا - س / ط) صورت اول
مین شکل خط منحنی کی تقریباً مثل شکل گذشتہ کی ہوگی لیکن نقاط س اور د
منطبق ایک دوسرے پر ہونگی اور صورت دویم مین نقاط ب اور س ایک دوسرے
پر منطبق ہین یا شکل بیضوی ب س نقطہ متجانس ہوجاویگا -
صورت (۳) اگر دو قیمتین مساوات کی نا ممکن ہون تو وہ حصہ خط منحنی کا جو کہ
مثل صورت گذشتہ کی ہی اور جو نقطہ د سے شروع ہوتا ہی حاصل ہوگا
صورت (۴) اگر تینون قیمتین مساوات کی مساوی ہون تو صورت مساوات کی
یہہ ہوجاویگی ط ی^۲ = (لا - ط)^۳ اس خط منحنی کے دو ساقین ہین اور یہہ دونو
نقطہ ب سے شروع ہوتی ہین اور محدب طرفین انکی طرف محور لا کی پھری ہوئی
ہین اس خط منحنی کو نصف مکعبی قریب البیضوی کہتی ہین مساوات اسکی بہت
آسان ہوگی جبکہ راس ب نقطہ شروع خط منحنی پر فرض کیا جاوے یعنے جبکہ لا
بجای (لا - ط) لکہا جاوے تو اس صورت مین ط ی^۲ = لا^۳ اور یہہ خط منحنی بہت
مشہور ہی کیونکہ اول طول اسی خط منحنی کے ایک حصہ کا مساوی ایک خط مستقیم کے

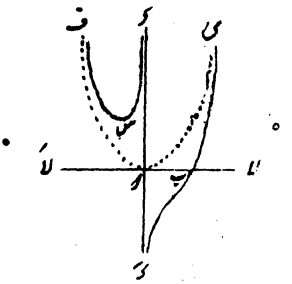
ثابت ہوا تہا — ثر ثر ثر ثر ثر ثر

(۳۰۹) دریافت کرو لوکس اس مساوات کا $ط^{۲} ر = لا^{۳} + م لا^{۲} + ن لا + ف$

واضح ہو کہ لوکس اسکا مثل مساوات گذشتہ کی دریافت ہوسکتا ہی شکل آیندہ لوکس اس مساوات کا ہوگا جبکہ تینون قیمتین اس مساوات کی مثبت اور صحیح اور مساوی ایک دوسرے کی نہون اگر دو قیمتین مساوی ہون تو ایک نصف بیضوی کی صورت کی شکل پیدا نہین ہوگی اگر تینون قیمتین مساوی ہون تو دو نو حاصل نہین ہوگی اس صورت مین صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی $ط^{۲} ر = (لا - ط)^{۳}$ یا اگر نقطہ شروع نقطہ ب پر بدلا جاوے $ط^{۲} ر = لا^{۳}$ اور اس صورتمین خط منحنی کو قریب البیضوی مکعبی کہتے ہین —



(۳۱۰) اگر مساوات یہہ ہو $ط لا ر = لا^{۳} + م لا^{۲} + ن لا + ف$ تو اس صورت مین محور ر کا خط متنصف الملاقات خط منحنی کا ہی اور ایک شاخ خط منحنی کی زاویہ ر آ لا مین ہوگی اور باقی صورت خط منحنی کی مثل شکل گذشتہ کی ہوگی اگر فرض کرین ہم نیچی کی شاخ نقطہ ب سی طرف ر آ کی پہلی بطور خط متنصف الملاقات کی یعنی ہمیشہ خط ر آ کی نزدیک آتا ہی اور ظاہر ہی کہ اس صورتمین شکل خط منحنی کی مختلف ہوگی موافق قیمتون مساوات کی یعنی جبکہ قیمتین مساوات کی گہٹتی اور بڑہتی ہین تو شکل خط منحنی کی بہی بدلتی جاویگی اب ہم فرض کرتے ہین وہ صورت جبکہ $ر = \frac{لا^{۳} - ط^{۲}}{ط لا}$



	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
قیمتین لا کی	۰	ط	> ط	< ط	∞	∞ −	∞ −
قیمتین ز کی	∞	۰	−	+	∞	∞ +	∞ +

(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ ا ز خط متنفر الملاقات خط منحنی کا ہی اور (۲) سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط منحنی تقاطع کرتا ہی محور کو نقطہ ب مین جہانکہ (ا ب = ط) اور (۳ اور ۴ اور ۵) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ ا سے ب تک نیچی محور لا پہیلتا ہی اور نقطہ ب سی اوپر کیطرف لا کی لانہایت پہیلتا ہی اور (۶) اور (۷) سی شاخ ف س ز کی حاصل ہوگی — اس خط منحنی کو موافق اسکی صورت کی خط منحنی سہ برگہ یا ترسول کہتی ہین بوسیلہ اس خط منحنی کے فرق درمیان شاخ قریب البیضوی اور شاخ بعید البیضوی ایک خط منحنی کے دریافت ہوسکتا ہی — واضح ہو کہ شکل گذشتہ مین ب ز اور س ز دو شاخین بعید البیضوی کی ہین کیونکہ خط مستقیم ز ز انکا خط متنفر الملاقات ہی لیکن ب ی اور س ف شاخین قریب البیضوی کی ہین کیونکہ انکا خط متنفر الملاقات خط منحنی ف ا ی ہی جو کہ

خط منتظر الملاقات قریب البیضوی کا ہوا کرتا ہی اور مساوات اوس خط سخنی کی جو کہ نقاط سی بنا ہوا ہی یہہ ہی ز = $\frac{لا^2}{ط}$ (۱۹۶) مثال دریافت کرو کہ کس اس مساوات کا لا ز - ز - لا^2 - لا = ۰ اگر مساوات یہہ ہو

لا ز^2 + ط^2 ز = لا^3 + لا^2 + ن لا + ف صورت اس مساوات کی خط سخنی کی مساوات آیندہ کی قیمتون پر موقوف ہی لا^2 + م لا^3 + ن لا + $\frac{ط^4}{4}$ = ۰ واضح ہو کہ اس مساوات کی خاص صورتون مین کسی طرح کا اشکال واقع نہین ہوگا اور مساوات عام خطوط منتظر الملاقات کی یہہ ہوگی ز = ± (لا + $\frac{1}{2}$ م) اور محور ز خط منتظر الملاقات ہوگا — ش ش ش ش ش ش

(۳۱۱) اگر اجزای لا^3 اور م لا^3 مساوات مین نہون تو اس صورت مین صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہو جاوےگی لا ز^2 + ط^2 ز = ن لا + ف

∴ ز = $\frac{-ط^2 \pm \sqrt{ط^4 + 4ف ن + 4ن لا^2}}{2لا}$ اگر مخرج اس صورت کا ایک مقدار مقررہ ہوتا تو یہہ مساوات بیضوی یا بعید البیضوی یا قریب البیضوی سی تعلق رکھتی جبکہ ن مثبت یا منفی یا صفر ہوتا تو اب ظاہر ہی کہ اگر بجای ایسی ایک مقدار مقررہ کی مقدار غیر متقطع ۲ لا لکھی جاوے تو یہہ تر شس مخروطی بعید البیضوی بنجاویگی جسکا لانہایت مقابل طرف آ کی پہلین کی جگہا محور خط منتظر الملاقات ہوگا اور اسی مساوات کی خط سخنی کی نو شکلین ہو سکتی ہین بموافق قیمتون ف کے ثبوت انکا ایک خاص کتاب یون صاحب کی مین ہے —

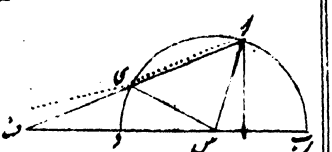
فقرہ گذشتہ سی معلوم ہوتا ہی کہ خطوط سخنی تیسرے مرتبہ کے لانہایت شاخین

رکھتی ہین اور یہہ حقیقت مین صحیح کیونکہ ہر ایک مساوات طاق درجہ سی کم سی کم ایک صحیح قیمت حاصل ہوگی پس اسصورت مین ہر ایک صحیح قیمت ی کی موافق ایک خاص صحیح قیمت لا کے حاصل ہوگی —

(۳۱۲) دریافت کرو مساوات کن کواڈ کی جسکو نکومنڈیز صاحب نے ایجاد کیا ہے فرض کرو کہ لا آ مسئل (۱) مین ایک خط غیر محدود ہے اور آ ایک نقطہ مفروض ہے کھینچو اس نقطہ سے عمود آس ب خط لا لا پر اور کھینچو اور بہت سے خطوط آی ف اور آی ف' وغیرہ اور قطع کرو ی ف کو ہمیشہ مساوی س ب کے تو لوکس نقطہ ف کا کن کواڈ ہوگا — اگر ی آ مین سے قطع کرین ی ف' = ی ف تو لوکس ف' کا جو ناکن کواڈ ہوگا دونو کن کواڈ سے ایک خط سخنی پیدا ہوگا یعنی مساوات دونو کی ایک ہی ہوگی —

(۱)

(۲)



فرض کرو آس = ط اور س ب = ص اور س م = لا اور م ف = ی

تو اب ظاہر ہی کہ ی ف : م ف :: آ ف : آ ن یا ص : ی :: $\sqrt{لا^2+(ط+ی)^2}$: ط+ی

∴ ی^2 لا^2 + ی^2 (ط+ی)^2 = ص^2 (ط+ی)^2 ∴ لا^2 = (ص^2 − ی^2) $\left(\frac{ط+ی}{ی}\right)^2$

∴ لا = ± $\frac{ط+ی}{ی}$ $\sqrt{ص^2-ی^2}$ اس مساوات کی تین صورتین ہوسکتی ہین

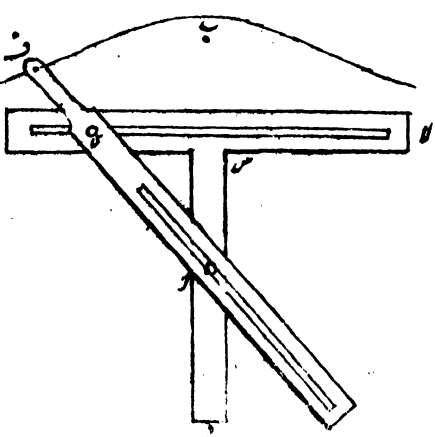
ص > ط یا = ط یا < ط صورت (۱) ص > ط

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
قیمتین ح کی	۰	ص	< ص	> ص	ط	ص	< ط	> ط اور < ۷ ط ص
قیمتین لا کی	∞	۰	ممکن	ناممکن	۰	۰	ممکن	ممکن

(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ لا لا خط منتفر الملاقات خط سنجی کا ہی اور (۲) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط سنجی نقطہ ب مین سے گذرتا ہی اور (۳) اور (۴) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط سنجی نقطہ ب مین سے شروع ہوکی اوپر کی طرف خط منتفر الملاقات کی واقع ہی اور نقطہ ب کی اوپر کیطرف نہین جاتا ہی اور اسکی وسیلہ سے شاخ ب صفحہ حاصل ہوگی اور (۵) اور (۶) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط سنجی نقاط ز اور د مین سی گذرتا ہی اگر س د = ص اور (۷) سی ظاہر ہوتا ہی کہ شاخ اول نقطہ ز سی طرف خط منتفر الملاقات کی پہلیتی ہی اور (۸) سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط سنجی درمیان نقاط ز اور د کے واقع ہی اور بوسیلہ دو قیمتون لا کے معلوم ہوتا ہی کہ خط سنجی س لا کی طرف بھی پہلیتا ہی — صورت (۲) ص = ط جدول گذشتہ مین لکھو ص = ط اور دور کرو (۸) کو تو اب صورت خط سنجی کی مثل مرقومہ گوشتہ کے ہوگی مگر صورت مدور ز د معدوم ہوجاویگی اور یہہ بسبب منطبق ہونے نقاط ز اور د کے واقع ہوگا — صورت (۳) ص > ط جدول گذشتہ مین لکھو ص بجاے ط کے (۷) مین — اگر ۷ < ص تو لا ناممکن ہوگا (۸) مین موافق اس فرض کے اوپر کے خط سنجی مین کسی نوع کا فرق نہین

نہین آویگا لیکن نقطہ د درمیان آ اور س کے واقع ہوگا اور (۸) سی ظاہر ہی
کہ کوئی حصہ خط منحنی کا درمیان آ اور د کے واقع نہین ہی اور (۵) سی معلوم ہوتا ہے
کہ نقطہ آ خط منحنی پر نہین ہی لیکن خط منحنی سے تعلق رکھتا ہی اور اس نقطہ کو نقطہ
متجانس کہتے ہین اور ظاہر ہی کہ اس صورت مین ملی کا خط منحنی مشابہ اوپر کی خط
منحنی کے ہی بوسیلہ بنانی کن کو اوڈکسی کے تصور خاصیت خط منفرد الملاقات کا نجو
آتا ہی کیونکہ خط ی ف ہمیشہ مساوی س ب کے ہونا چاہئے اور ظاہر ہی کہ موافق
اس شرط کی خط منحنی ہمیشہ نزدیک خط س لا کے آتا ہی (جیسا کہ نقطہ ف پر) اگرچہ
خط منحنی خط س لا پر منطبق نہین ہوگا لیکن پھر بھی زیادہ نزدیک اوس کے آویگا
بہ نسبت کسی ایک خاص مقدار کے - یہہ خط منحنی کنوسیہ پرخاصیت نی ایجاد کیا
واضح ہو کہ یہہ مہندس باشندہ یونان کا تہا اور ۲۰۰ برس پیشتر حضرت عیسی
کی موجود تہا اوسنی اسکی وسیلہ سی طریقہ تضعیف مکعب اور تثلیث زاویہ کا دریافت کیا
واسطی ثبوت دوسری دعوی یعنی واسطی تثلیث زاویہ کی بوسیلہ اس خط منحنی کے
فرض کرو کہ شکل (۲) مین زاویہ ب س آ کی تثلیث کیا چاہتی ہین کھینچو خط ا ف
ملتا ہوا دایرہ سی نقطہ ی پر اور قطر سی نقطہ ف پر اسطرح ملی کہ خط ی ف سا
نصف قطر س آ کے ہو تو اب ظاہر ہی کہ قوس دی ایک تہائی اب کی ہوگی -
اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ خط مستقیم اور دایرہ کی ای ف اسطرح پر نہین کھینچ سکتا ہی
کہ ی ف = ای س (یہہ بوسیلہ حرکت کی ہوسکتا ہی اسیواسطے یہہ موافق
ہندسہ کی صحیح نہین ہے) اور چونکہ ایک مدت دراز سی مہندسان متقدمین کو

سوای رول اور پرکار کے کوئی اور آلہ معلوم نہتا اسیواسطی وہ ابن شکل کو
ثابت نہ کرسکی اور جب اونکو یہہ دریافت ہوا کہ ثلیث زاویہ کی بوسیلہ خطوط
منحنی کی ہوسکتی ہی اسیواسطی اونہون نے ذواسطی ثبوت اس شکل کے مختلف خطوط
منحنے ایجاد کئی اونمین سے بہت مشہور خط منحنی نکومیدیز کا تہا بوسیلہ اس خط
منحنی کے یہہ شکل بطور آیندہ کے ثابت ہوسکتی ہی - فرض کرو کہ آ قطب کن
کواؤ خورد کا ہی اور ب ف خط مستفر الملاقات اور اس خط متحرک تو اب ظاہر ہی
کہ نقطہ تقاطع ی خط منحنی اور دایرہ کا نقطہ مطلوب ہوگا - واضح ہو کہ کن کواؤ
کلان سی بہی یہہ شکل ثابت ہوسکتی ہی - چونکہ سوای حرکت متواتر کے یہہ خط
منحنی نہین بن سکتا ہی اسیواسطی نکومیدیز نی ایک آسان آلہ واسطی کھینچنی اس خط منحنی
کی ایجاد کیا فرض کرو کہ لا لا ایک سیدہی لکڑی ہی اور اسمین ایک سوراخ ہی اور
فرض کرو کہ س د دوسری لکڑی لا لا پر اسطرح پرجڑی ہوئی ہی کہ یہہ اوپر



عمود ہی اور نقطہ
ف پر ایک کیل
نیچری لکڑے
د ہی کے سوراخ
مین رکہی ہوئی ہی
اور اس مین ایک
کیل نقطہ ی پر ہے

اور یہ لیل سورانج لالا مین جڑی ہوئی یعنے لکڑی ف ا بوسیلہ دو کیلون ا
اور ی لکڑی س ف اور لالا اسی طرح ملی ہوئی ہی کہ وہ بخوبی حرکت کرسکتی ہی
اور طول خط ف ی کا معلوم ہی تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ حرکت لکڑی ف ی کے
ایک سُرمہ کا قلم نقطہ ف پر کن کواڈ بناویگا اور اگر دوسرا سرمہ کا قلم خط کا
مین کسی مقام پر رکھا جاوی تو وہ کن کواڈ خورد بنادیگا - اس خط منحنی کو
پہلے معمار استعمال مین لاتی تھی کیونکہ وہ اکثر ایک خاص لکڑی ستون مین
ب ف کو جو کہ ایک حصہ کن کواڈ کا ہی استعمال مین لاتے تھے -
مساوات قطبی کن کواڈ کی بطور آیندہ کے دریافت ہوسکتی ہی - فرض کرو
کہ شکل (۱) مین قطب ہے اور ا ف = ق اور زاویہ ف ا ب = ز
∴ ی + ط = ق جم ز اور لا = ق جس ز جبکہ لکھینگے ہم ان قیمتوں کو
مساوات کن کواڈ مین بعد تحویل کے مساوات قطبی کن کواڈ کی یہہ حاصل ہوگی
ق = ط سٹ ز + ص — واضح ہو کہ مساوات قطبی اس خط منحنی کی بوسیلہ
حدود اس خط منحنی کے بآسانی دریافت ہوسکتے ہی ظاہر ہی کہ ق = ا ف
= ا ی + ی ف = ا س سٹ س ا ی + س ب = ط سٹ ز + ص
(۳۱۳) طریقہ آیندہ واسطے دریافت کرنے مساوات کن کواڈ کے اس صورت کی
خطوط منحنی مین اکثر استعمال مین آسکتا ہی اور مختلف شکلون مفید ہوگا -
فرض کرو کہ بہت سی خطوط مثل ا ی ف کی شکل (۱) مین جو کہ کھچی ہوئی ہین
کاٹتی ہین خط س لا کو نقاط ی وغیرہ مین ہر ایک نقطہ ی کو مرکز فرض

کرکے کھینچو ایسی دایرے جسکا نصف قطر ص ہو قطع کرتی ہوئی خطوط ای ق کو نقاط ق اور ف مین تو اب ظاہر ہی کہ لوکس ف کا کن کواڈ ہوگا واسطے ثبوت اس مطلب کے فرض کرو کہ ر نقطہ شروع محوروں متقاطع علی القوایم کا ہی اور ب محور ی کا اور ر لا متوازی س لا کے اور فرض کرو کہ مساوات عام ای ف کی ی = م لا اور اسمین م غیر منقطع ہی تو اب ظاہر ہی کہ ی = ط اور لا = $\frac{ط}{م}$ نقطہ ی کی مساوات ہین ہین اور مساوات اوس دایرہ کی جسکا مرکز نقطہ ی اور نصف قطر ص ہی یہہ ہوگی $(ی - ی)^2 + (لا - لا)^2 = ص^2$ یا $(ی - ط)^2 + (لا - \frac{ط}{م})^2 = ص^2$ جبکہ دور کرین گی ہم مقدار م کو بوسیلہ اس مساوات اور مساوات خط ای ف کے تو مساوات خط منحنی کی یہہ حاصل ہوگی $(ی - ط)^2 + (لا - \frac{ط}{م} لا)^2 = ص^2$ یا $(ی - ط)^2 \frac{لا^2 + ی^2}{ی^2} = ص^2$ اگر خط س لا ایک ایسا خط منحنی فرض کیا جاوے کہ اوسکی مساوات عام یہہ ہو ی = ج (لا) تو اوتار نقطہ ی کے بوسیلہ دور کرنے مقادیر لا اور ی کے مساوات ی = م لا اور ی = ج (لا) مین سے حاصل ہوگی تو اب ہمین حاصل ہوگئی یہہ مساوات لا = ح (م) اور ی = م ح (م) اور مساوات دایرہ کی یہہ ہوگی $(ی - م ح (م))^2 + (لا - ح (م))^2 = ص^2$ اور مساوات عام خط منحنی کی یہہ ہوگی

$$\left\{ ی - \frac{1}{لا} ح (\frac{ی}{لا}) \right\}^2 + \left\{ لا - ح (\frac{ی}{لا}) \right\}^2 = ص^2$$

(۱۴۳) اگر ایک عمود مرکز بیضوی سے اوسکی مماس پر کھینچا جاوے تو دریافت کرو تو اوسکی نقطہ تقاطع کا — چونکہ مساوات مماس کا یہہ ہے

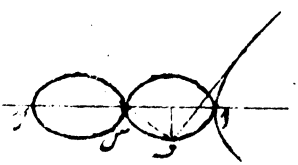
$ط^۲ ک^۲ - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲$ (۱) تو مساوات اوس محور کی جو کہ مرکز سی اوس مماس پر کھینچا جاوے یہہ ہوگی $ک = - \frac{ط^۲}{ص^۲} \frac{ک}{لا}$ لا (۲) واسطی دریافت کرنے مساوات نقطہ تقاطع مطلوب کے مقادیر لا اور ک کو بوسیلہ مساوا تون (۱) اور (۲) اور مساوات بعید البیضوی کی دور کرنا چاہئی تو اب بوسیلہ (۱) اور (۲) کے یہہ حاصل ہوگا $لا = \frac{ط^۲ لا}{لا^۲ + ک^۲}$ اور $ک = - \frac{ص^۲ ک}{لا^۲ + ک^۲}$ جبکہ لکھین گے ہم ان قیمتون کو اوس مساوات مین $ط^۲ ک^۲ - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲$ تو حاصل ہوگا یہہ $(لا^۲ + ک^۲)^۲ + ص^۲ ک^۲ - ط^۲ لا^۲ = ۰$ اور یہہ مساوات چوتھی درجہ کی ہی اب ہم صرف صورت اوس مساوات کی ایک خاص صورت مین جبکہ $ص = ط$ یعنی جبکہ بعید البیضوی مساوے القطرین ہو دریافت کرینگی اب ظاہر ہی کہ صورت مساوات گزشتہ کے موافق اوس شرط کی یہہ ہوگی $(لا^۲ + ک^۲)^۲ = ط^۲ (لا^۲ - ک^۲)$ ∴ $ک^۴ + (۲ لا^۲ + ط^۲) ک^۲ + لا^۴ - ط^۲ لا^۲ = ۰$ اور $ک = \pm \sqrt{- (لا^۲ + \frac{ط^۲}{۲}) \pm ط \sqrt{۲ لا^۲ + \frac{ط^۲}{۴}}}$ ظاہر ہی کہ اگر علامت اندر کی جذر کی منفی ہو تو ک قیمت ک کی ناممکن ہوگی اسیواسطے ہم اس مساوات کو اوس خاص صورت مین دریافت کرین گے جبکہ $ک = \pm \sqrt{- (لا^۲ + \frac{ط^۲}{۲}) + ط \sqrt{۲ لا^۲ + \frac{ط^۲}{۴}}}$ اس صورت مین قیمت ک کی ناممکن ہوگی جبکہ $لا^۲ + \frac{ط^۲}{۲} < ط \sqrt{۲ لا^۲ + \frac{ط^۲}{۴}}$ یعنے اگر $لا^۴ + ط^۲ لا^۲ + \frac{ط^۴}{۴} < ۲ ط^۲ لا^۲ + \frac{ط^۴}{۴}$ یا اگر $لا^۲ < ط^۲$ یعنے اگر $لا < \pm ط$ اسیواسطے ہمین حاصل ہوگی جدول آیندہ

	۱	۲	۳	۴
قیمتین لا کی	۰	± ط	∠ ± ط	∠ ± ط
قیمتین ر کی	۰	-	ممکن ۰	ناممکن

(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ س ہین سے گذرتا ہی اور (۲) سی دریافت ہوتا ہی کہ نقاط آ اور آ ہین سی گذرتا ہی اور (۳) سی ظاہر ہوتا ہی کہ اس خط منحنی کی دو شاخین ہین

س سی آ تک

اور س سی آ تک



اور (۴) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی بری آ اور آ کے ہین پہلتا ہی اب ہم صورت ان بیضوی شکلون کے زیادہ تحقیق سی دریافت کر سکتی ہین چونکہ مماس راس بعید البیضوی پر عمود محور پر ہوتا ہی تو صورت بیضوی نقطہ آ پر قطع کری گی محور کو اسطرح پر گویا کہ یہہ عمود محور پر ہی اور نقطہ س پر زاویہ ۹۰° کا بناویگی کیونکہ مماس تقریباً خط منتفر الملاقات پر منطبق ہوتا ہی تو اب عمود اس مماس پر زاویہ ۹۰° کا بناویگا — اس خط منحنی کو جیمس برنولی صاحب نے ایجاد کیا ہے اور نام اس خط منحنی کا لمنسکیٹ ہی اور یہہ ایک سلسلہ خطوط منحنی کا بناتا ہی موافق مختلف قیمتون ص کے دریافت کرد مساوات قطبی لمنسکیٹ کی فرض کرو ک = لی جس ر اور لا = لی جم ر تو اب صورت اس مساوات کی

$(لا^۲ + د^۲)^۲ = ط^۲ (لا^۲ - د^۲)$ یہہ ہوجاویگی $ل^۲ = ط^۲$ جم ۲ ر

ہر آیہ خط منحنی جو کہ اس شکل کا ہی لمنکیٹا کہلاتا ہی —

(۳۱۵) مثال آیندہ مین خط منحنی بوسیلہ نقاط کی بآسانی کھچ سکتا ہی

فرض کرو کہ ایک ایسا دایرہ کھچا ہوا ہی جسکا س مرکز اور س ق نصف قطر

ہی اب کھینچو ترقم اور ق س مین سے قطع کرو ق ف = ق م تو اب لوکس

ف کا لمنکیٹا ہوگا اور اگر ق م سے کسی قطع کریں ہم م ر جو تیسری نسبت

مین ہو خط ق م اور س م کے یعنی ق م : س م :: س م : م ر تو لوکس

ر کا ایک دوسرا لمنکیٹا ہی اور اسکی مساوات یہہ ہوگی $لا^۲ - ط^۲ لا^۲ + ط^۲ د^۲$

$= ۰$ اور مساوات آیندہ بھی $ط^۲ (د - ط)^۲ = (لا - ط)^۲ (۲ط لا - لا^۲)$

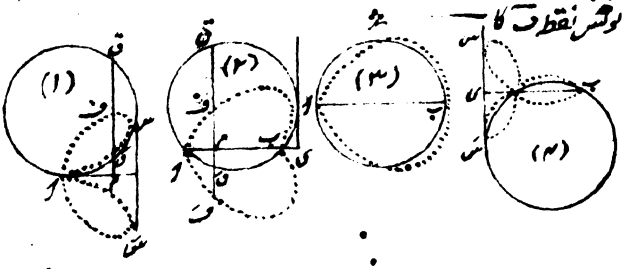
مساوات اسی خط منحنی کی ہی لیکن نقطہ شروع اسکا مختلف ہی — مثال

دریافت کرو لوکس اس مساوات کا $د^۲ = لا^۲ \frac{ط^۲ + لا^۲}{ط^۲ - لا^۲}$ ثر ثر ثر

(۳۱۶) اگر ترم شکل (۱) مین مماس دایرہ س ق کا ہو اور ق م و تر دور

العرض ترم کا اور م ف وسطی النسبت ترم اور م ق کا ہو تو اب دریافت

کرو لوکس نقطہ ف کا



فرض کرو ا م = لا اور م ف = د اور ا ر متقاطع علی القوایم ق ف کی ہن

اور فرض کرو کہ نصف قطر دایرہ کا = ص تو اب ظاہر ہی کہ موافق فرض کے
مربع م ف = سطح ر م اور م ق اب دریافت کرو م ق کو چونکہ مساوات
دایرہ کی یہہی (ی - ی')² + (لا - لا')² = ص² یا ی² - ۲ص ی + لا² = ۰
کیونکہ لا' = ۰ اور ی' = ل ص ∴ م ق = ص ± √(ص² - لا²)
∴ م ف یا ی = ± √(ص لا ± لا √(ص² - لا²)) چونکہ ص² - لا² < ص²
تو اب معلوم ہوتا ہی کہ قیمتین ی کی چار ہین موافق ہر ایک مثبت قیمت لا ص سے
اور جبکہ لا منفی ہوگا تو ی کی قیمت حاصل نہین ہوگی تو اب معلوم ہوتا ہی کہ اگر
ا ب = ص شکل (۱) مین فرض کیا جاوے تو خط مستقیم س ب س تک جو کہ
عمود خط ا ب پر ہی خط منحنی کی ہوگی یعنی خط منحنی اس سے بڑی نہین ہوسکیگا اور
جبکہ لا = ص تو دتر خط منحنی کا مساوی مماس ب س کے ہوگا درمیان
لا = ۰ اور لا = ص حاصل ہونگی چار قیمتین ی کی جنکی وسیلہ سے دو نقشہ ار
بیضی صورتین شکل (۱) مین حاصل ہونگی واسطی اثبات کی کہ یہہ دعوی
عموماً ثابت ہو فرض کرو کہ خط ا ب کو ایک دتر دایرہ کا اشکال (۲) اور (۳)
اور (۴) مین ہی تو اب اگر ط اور ص او تار مرکز کے فرض کئے جاوین اور آ نقطہ
شروع تو مساوات خط منحنی کی یہہ ہوگی ی = ± √(ص لا ± لا √(ص + ۲ط لا - لا²))
ظاہر ہی کہ بوسیلہ اس مساوات کی چار صورتین حاصل ہوسکتی ہین اور یہہ چارون
موقوف قیمتون ص اور ط پر ہین اسیواسطے چار خطوط منحنی مختلف صورتونکی
حاصل ہونگی لیکن ان خطوط کی ایک ہی خاصیت ہوگی —

صورت (۱) جبکہ ط = ۰ تو شکل (۱) حاصل ہوگی اسکا معنی ابھی ذکر کیا ہی

صورت (۲) جبکہ ط اور ص مثبت ہون تو شکل (۲) مین اى = ط + √(ط² + ص²)

صورت (۳) ص = ۰ شکل (۳)

صورت (۴) جبکہ ص منفی ہو تو شکل (۴) پیدا ہوگی مساوات انکی یہہ ہوگی

ر = ± √(− ص لا ± لا √(ص² + ۲ ط لا − لا²)) ظاہر ہی کہ اس مساوات سے دو قیمتین ر کی حاصل ہو سکتی ہین جبکہ لا مثبت اور > ۲ ط بھی فرض کیا جاوے اور چار قیمتین ر کی حاصل ہو سکتی ہین جبکہ لا منفی اور < √(ط² + ص²) − ط یعنی < اى سے چونکہ بدلنا ایک خط منحنی کا دوسری سی آسان ہی اور اسمین کچھہ حاجت بیان کی نہین ہی اسیواسطی اسکا بیان کرنا ضرور نہین ہی اور چونکہ ایک ہی شکل سے خطوط منحنی (۲) اور (۴) پیدا ہوتی ہین یہہ شکل سی سمجھہ مین آتا ہی اسیواسطی اسکو ہم تفصیل سی بیان کرینگی - شکل (۱) مین نقاط ق اور ف دریافت ہوئی ہین بوسیلہ وسط فی النسبت ق م اور م ف اور ق م کے علاوہ اسکی نقطہ ف کا خط ق م کھینچی ہوئے اور ق م مین ہو سکتا ہی اسیواسطے ہمین دو بیضی صورتین شکل (۱) مین حاصل ہونگی چونکہ باہین طرف آ کی وتر العرض ا م منفی ہی اور وتر ق م مثبت اسیواسطی باہین طرف آ کی وسط فی النسبت نہین ہو سکتا ہی باخط منحنی باہین طرف آ کی واقع نہین ہی شکل (۲) مین بوسیلہ خطوط ا م اور ق م کے نقاط ف اور ق معلوم ہو سکتی ہین لیکن ا م اور م ق سے صرف ایک خیالی لوکس حاصل ہوتا ہی —

شکل (۳) مین کسیطرح کے تفصیل کی حاجت نہین ہی — شکل (۴) مین وہ شے
مثبت طرف (۱) کے وہ بیان استعمال مین آسکتا ہی جسکا شکل (۲) مین
ذکر ہوا ہی یعنی جو صورت خط منحنی کی کہ شکل (۲) مین ہوئی وہی شکل (۴) مین
مثبت طرف آ کی ہوگی اور چونکہ باین طرف آ کی وتر العرض اور دونو وتر
منفی ہین اسسبب اسطی دو وسطانی النسبت معلوم ہوسکتی یا چار نقطی خط منحنی کے
بوسیلہ ہر ایک وتر العرض کے حاصل ہوگی واضح ہو کہ ایسی خطوط منحنی مختلف
ہوسکتی ہین اور صورت انکی موجد کی اختیار ہی اور یہہ اس صورت مین بھی حاصل
ہوسکتی ہین جبکہ قریب البیضوی یا کوئی اور خط منحنی واسطی قاعدہ کی بجای دایرہ
کی فرض کیا جاوے مثال دریافت کرو لوکس اس مساوات کا $ز^۲ + ۲ط لا ز$
$- ط لا^۲ = ۰$

(۳۱۷) دریافت کرو الیا ایک نقطہ ف کا کہ اگر کھینچین ہم اوس نقطہ سے
مختلف خطوط نقاط مفروضہ س اور ہ تک تو ہمیشہ سطح س ہ اور ہ ف کا
مساوی ایک مقدار مقررہ کی ہو واسطی ثبوت اس دعوی کے ملاؤ نقاط س
اور ہ کو اور تنصیف کرو خط س ہ کو نقطہ ص پر اور فرض کرو کہ ص نقطہ
شروع محورون متقاطع علی القوایم کا ہی اور فرض کرو کہ س ہ = ۲ط
اور ص م = لا اور م ف = ز اور فرض کرو کہ سطح س ف اور ہ ف =
ط ص اور چونکہ س م = ط + لا اور م ہ = ط - لا تو
$(ز^۲ + (ط + لا)^۲)(ز^۲ + (ط - لا)^۲) = ط^۲ ص^۲$ یعنے

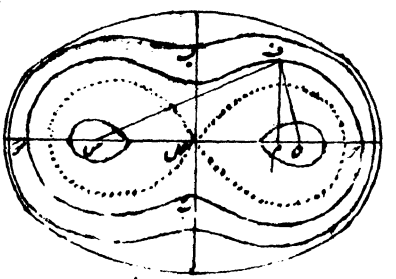
$(ر^۲ + لا^۲ + ط^۲ + ۲ ط لا)(ر^۲ + لا^۲ + ط^۲ - ۲ ط لا) = ط^۲ ص^۲$ یا

$(ر^۲ + لا^۲ + ط^۲)^۲ - ۴ ط^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲$ اسیواسطے

$ر = \pm \sqrt{-(ط^۲ + لا^۲) + ط \sqrt{ص^۲ + ۴ لا^۲}}$ فرض کرو کہ ر = ۰

$\therefore$ لا $= \pm \sqrt{ط (ط \pm ص)}$ (۱) اور فرض کرو کہ لا = ۰

$\therefore$ ر $= \pm \sqrt{ط (ص - ط)}$ (۲)



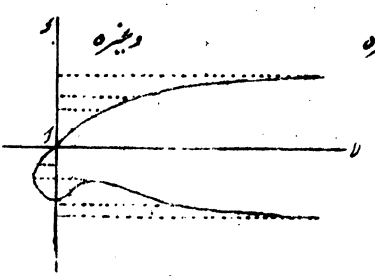
(۱) فرض کرو کہ ط کم ہی ص سے تو اب بوسیلہ (۱) کی نقاط آ اور آ حاصل ہونگے اور بوسیلہ (۲) کے نقاط ب اور ب — بوسیلہ تعلیم کرنے قیمت آ کی جو کہ (۲) مین حاصل ہوئے اوس سے جو کہ اصلی مساوات مین ہے دریافت ہوگا کہ م ف بڑابر ص ب سے جب تک لا بڑابر $\sqrt{۲ ط (۲ ط - ص)}$ سے تو اب ظاہر ہی کہ صورت خط منحنی کی آ ف ب آ ب آ ہوگی اور جیسا کہ ص زیادہ ہوگا اوسیقدر صورت بیضی کی ادھر کسطرف چپٹی ہوتی جاتی ہی اور صورت اسکی مثل بیرونی خطوط منحنی کے ہوجاویگی — (۲) فرض کرو ط = ص تو اس صورت مین ہمین نقشہ ارخط منحنی گذرتا ہوا نقطہ ص مین سے اور چونکہ اس صورت مین مساوات یہہ ہوجاتی ہی $(ط^۲ + ر^۲)^۲ = ۲ ط^۲ (لا^۲ - ر^۲)$ تو لوکس

اس صورت مین لنسکیناً برنولی صاحب پیدا ہوگا — (۳) فرض کرو کہ ط بڑا ہی ص سی تو اس صورت مین مساوات (۱) سی دو قیمتین لا کی حاصل ہونگی اور (۲) سی ایک ناممکن قیمت ز کی تو اب بہانسی معلوم ہوتا ہی صورت خط منحنی کی موافق اس شرط کی مشتمل دو شکل بیضی پر ہوگی جو کہ گرد ہ اور س کے کھچی ہوئی ہین جبکہ ص کم ہوتا ہی تو یہہ دو نو صورتین گھٹنا شروع کرتی ہین یہان تک جبکہ ص = ۰ تو اس صورت مین نقاط س اور ہ تو کس ہو جاوینگے یہہ خطوط منحنی بیضی کیسینی صاحب کی کہلاتی ہین اس مشہور ہیئت دان نے رشتہ ایک ستارہ کا مثل بیرونی خط منحنی شکل گذشتہ کے خیال کیا تہا —

اس مساوات سی (ز۲ + لا۲)۲ = ص۲ ز۲ + ط۲ لا۲ جو کہ (۱۲۳) دریافت کی گئی ہی حاصل ہوگی ایک شکل مثل صورت (۱) کے ثثث

اگر ع = −۳ تو ک = −۲ $\frac{9}{10}$ اور ل = ۸ $\frac{7}{10}$

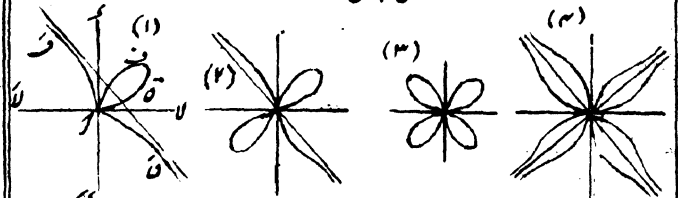
ع = −۳	= −۲	= ۴
= −۲	= −۱ $\frac{1}{2}$	= ۱ $\frac{1}{2}$
= −۱	= −۱ $\frac{7}{10}$	= $\frac{17}{20}$
= $-\frac{1}{2}$	= −۲	= ۰
= ۰	= −۱ $\frac{1}{2}$	= $-\frac{33}{4}$
= $\frac{1}{2}$	= $-\frac{1}{2}$	= $-\frac{9}{2}$
= ۱	= $\frac{11}{26}$	= $\frac{331}{52}$
= ۱ $\frac{1}{2}$	= ۱ $\frac{1}{5}$	= ۳ $\frac{2}{5}$
= ۲	= ۲ $\frac{1}{2}$	= ۷ $\frac{1}{2}$
= ۳	= ۳ $\frac{11}{17}$	= ۱۴ $\frac{10}{17}$
= ۴ وغیرہ	وغیرہ	وغیرہ



اور جبکہ ک = ۰ تو ل = ۰ یہانتک معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ آ سے گذرتا ہے فرض کرو کہ آل اور آک محور ہیں آ سے قطع کرو قیمتین ک کی جو جدول گذشتہ میں لکھی ہیں اور ان نقاط سے جو کہ بوسیلہ قیمتون ک کی دریافت

ہوئی ہین کھینچو خطوط مساوی نیتون لا کے جو کہ حد دل گذشتہ مین لکھی ہین
(یہہ خطوط نقطہ دار خط ہین) اس ترکیب سے بہت نقطی خط منحنی مطلوب
کی معلوم ہونگی جنکی ملانی سے مقام خط منحنی کا معلوم ہوجاویگا یہہ مثال لوس
کتاب مین سے نکالگئے ہی جو کہ گریر صاحب باشندہ جنیوا نے بیان خطوط
منحنی مین لکھی ہی اور یہہ مہندس ۱۷۵۰ء مین موجود تہا اور یہہ کتاب بہت سی
فایدہ مند اعلی بڑہنی خطوط منحنی جبریہ کی ہوگی —

(۳۱۹) دریافت کرو لوکس اس مساوات کا $ق^{۵} - ۵ط لا^{۲} ق^{۳} + لا^{۵} = ۰$



فرض کرو کہ لا بہت چہوٹا ہی :: لا نہایت چہوٹا ہوگا اسیواسطے جبکہ اس
مقدار کو مساوات گذشتہ مین سے دور کرینگی تو حاصل ہوگا
$ق^{۵} = ۵ط لا^{۲} ق^{۳}$ یا $ق^{۲} = ۵ط لا^{۲}$ اور یہہ مساوات نصف قریب البیضوی
مکعبی ف ق ف کی ہی جو کہ شکل (۱) مین کھینچی ہوئی ہی اور اگر لا بہت
چہوٹا ہو تو ق مین حاصل ہوگا یہہ $لا^{۳} = ۵ط ق^{۲}$ اور اس سے حاصل ہوگا
قریب البیضوی ق ق ق بہانسی معلوم ہوا کہ خط منحنی کے نقطہ شروع پر دو شاخین
قریب البیضوی کی ہین اور جبکہ لا لانہایت زیادہ ہو تو لا بہت ہی زیادہ ہوگا
اسیواسطے لا کو مساوات گذشتہ مین سے دور کرکے حاصل ہوگا یہہ $ق^{۵} = - لا^{۵}$

∴ ز = − لا یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ واسطے مثبت لا کے لانہایت بڑی شاخ خط منحنی کی زاویہ لاا ز مین حاصل ہوگی اور واسطے منفی لا کے ایک لانہایت بڑی شاخ زاویہ ز لا مین حاصل ہوگی — دریافت کرو خط منتفر الملاقات اس خط منحنی کا چونکہ مساوات اس خط منحنی کی یہہ ہی

$$ص^{۲} = -لا^{۲} + ۵ط لا^{۲} ز^{۲} = -لا^{۲}(۱ - \frac{۵ط}{لا} ز^{۲}) \therefore ز = -\frac{۱}{۵}(۱ - \frac{۵ط}{لا} ز^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$= -لا(۱ - ط\frac{ز^{۲}}{لا^{۲}} - \frac{۲ط^{۲}ز^{۴}}{لا^{۴}} - \text{وغیرہ}) = -لا + ط(\frac{ز}{لا})^{۲} + ۲ط^{۲}\frac{ز^{۴}}{لا^{۴}} + \text{وغیرہ}$$

$$= -لا + ط + ۲\frac{ط^{۲}}{لا^{۲}} + \text{وغیرہ جبکہ ز} = -لا$$

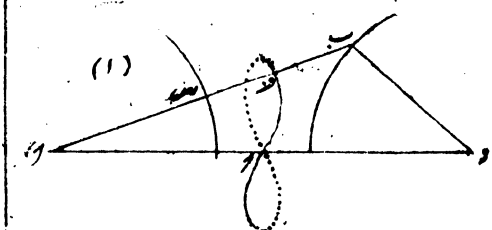
اسیواسطے مساوات خط منتفر الملاقات کی یہہ ہوگی ز + لا = ط جبکہ کھینچین ہم اس خط کو اور کھینچین شاخون ح ف اور ح ق کو طرف اس خط منتفر الملاقات کے تو ہمین تقریباً خط منحنی مطلوب حاصل ہوگا — اگر مساوات یہہ ہو ص − ۵ط لا^{۲} ز^{۲} + لا^{۲} = ۰ تو ہمین حاصل ہوگا ایسا خط منحنی اس مساوات کا جیسا کہ شکل (۲) مین ہی اور اگر مساوات یہہ ہو ز^{۲} − ط^{۲} لا^{۲} ز^{۲} + لا^{۲} = ۰ خط منحنی اسکا شکل (۳) سے

مثال دریافت کرو لوکس اس مساوات کا ز^{۴} − ۴ط^{۲} لا ز − لا^{۴} = ۰

ترکیب گذشتہ واسطے دریافت کرنے اس قسم کی خطوط منحنی کے اوس رسالہ حساب جزئیات مین لکھی ہوئی ہے جو کہ ملکم صاحب مدرس کیمبرج نے سنہ ۱۸۳۳ء مین تصنیف کیا تھا —

(۳۲۰) ب س ایک ایسا خط ہی جسکا طول (۲ ص) معلوم ہی اور انجام اسکے ہمیشہ دو مساوی دایرون کے محیط پر ہین اب دریافت کرو لوکہ

نقطوں کا جو کہ بیچ میں خط ب س کی ہی ملاؤ ایک خط درمیان نقاط
د اور ذ جو کہ مرکز دو دایروں کے ہیں اور فرض کرو کہ یہی خط محور لا ہی اور
نقطہ تنصیف دذ کا نقطہ شروع محور ون متقاطع علی القوایم کا ہی
فرض کرو کہ لا اور د اوتار ب ب کی اور لا اور ذ اوتار س س کی اور ع اور
ح اوتارت کی ہیں



اور ظاہر ہی کہ
ا د = ر د
= ط اور
د ب = د س = س اور ظاہر ہی کہ مساوات نقطہ ب کی یہہ ہی

$$ر^۲ + (لا - ط)^۲ = س^۲ \quad (۱)$$

اور مساوات س کی یہہ ہے $ر^۲ + (لا + ط)^۲ = س^۲$ (۲)

اور $(ر + ر')^۲ + (لا - لا')^۲ = ۴ص^۲$ (۳)

$$۲ح = ر + ر' \quad (۴)$$

$$۲ع = لا + لا' \quad (۵)$$

بوسیلہ ان پانچ مساواتوں کے چار مقداریں ر اور لا اور ر' اور لا' دور کرنی
چاہئیں (۱) اور (۲) سی یہہ حاصل ہوتا ہی $ر^۲ - ر'^۲ + لا'^۲ - ۲لا(لا + لا')$
= ۰ اور (۴) اور (۵) سی یہہ حاصل ہوتا ہی $ر^۲ + ر'^۲ + لا^۲ + لا'^۲ + ۲ر ر' + ۲لا لا'$
$= ۴ح^۲ + ۴ع^۲$ اور (۳) سی $ر^۲ + ر'^۲ + لا^۲ + لا'^۲ + ۲ر ر' + ۲لا لا' = ۴ص^۲$

اور (۱) اور (۲) سی ۲ر۲ + ۲ر۲ + ۲لا۲ + ۲لا۲ − ۴ط (لا − لا) =

۴س۲ − ۴ط۲ اسیواسطے بوسیلہ لکھنی قیمتون کے یہہ حاصل ہوگا

۴ط (لا − لا) = ۴ (ح۲ + ع۲ + ص۲ + ط۲ − س۲) یا (لا − لا) = $\frac{ح^2+ع^2+م^2}{ط}$

اگر م۲ = ط۲ + ص۲ − س۲ اور (۶) سی حاصل ہوگا یہہ ر − ر۱ =

$\left\{۲ط - (لا - لا)\right\}\frac{ع}{ح} = \left(۲ط - \frac{ح^2+ع^2+م^2}{ط}\right)\frac{ع}{ح}$ جبکہ لکھین ان قیمتون

لا − لا اور ر − ر۱ کو (۳) مین تو حاصل ہوگا یہہ $\left(۲ط - \frac{ح^2+ع^2+م^2}{ط}\right)^2\frac{ع^2}{ح^2}$

$+\left(\frac{ح^2+ع^2+م^2}{ط}\right)^2 = ۴ص^2$ یا $۴ط^2ع^2 - ۴(ح^2+ع^2+م^2)ع^2$

$+\left(\frac{ح^2+ع^2+م^2}{ط}\right)^2(ع^2+ح^2) = ۴ص^2ح^2$ ∴ $ط^2ع^2 - ص^2ح^2 - ع^2(ع^2$

$+ ح^2 + م^2) + (ع^2+ح^2)\left(\frac{ع^2+ح^2+م^2}{۲ط}\right)^2 = ۰$ چونکہ یہہ مساوات

چوتھی درجہ کی ہی اور اسکی دو نسبت سی بڑی قوای کی اجزای مثبت ہین تو خط منحنی سب

طرف سی محدود ہوگا جبکہ ع نہایت چھوٹا فرض کیا جاوے تو چار قیمتین ح کا حاصل ہونگی

اور جب ع = ۰ تو ح = ۰ یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی دو چند بیضی کیسی

صورت کا یا لمنسکیٹا ہی - اگر دایرہ مساوے ایک دوسرے کی ہون تو اس صورت مین

بھی خاصیت خط منحنی کی یہی رہیگی لیکن اسکی ثبوت مین ایک طرح کا اشکال واقع ہوگا

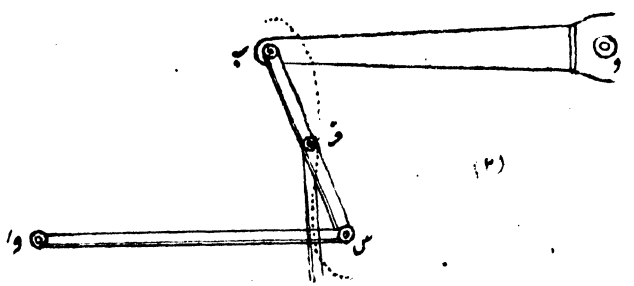
یعنی اس خط منحنی کی مساوات معلوم کرنی مشکل ہوگی - واضح ہو کہ واٹ صاحب

نی ایک بہت اچھی ترکیب سے سی حرکت مدور کو حرکت علی الاستقامت سی بدلا ہے

اور یہہ اکثر آدمیون کو معلوم ہی ہی فرض کرو کہ ب سرا ایک لکڑی کا ہی جو کہ

گرد مرکز د کے حرکت کرتا ہی اسکی وسیلہ سے ایک دوسری لکڑی کو جو عمود ہی حرکت

دیتی ہین اور یہہ ظاہر ہی کہ یہہ حرکت عمود کو نقطہ ب یا کسی نقطہ و ب برکانی سے



حاصل نہ ہوگی اب فرض کرو کہ ایک لکڑی و س گرد مرکز و کے حرکت کرتی ہی
اور ملاد نقاط ب اور س کو بوسیلہ سلاخ ب س کے اور مان لو کہ سرا عمود
مذکور کا بیچ مین سلاخ ب س کی جڑا ہوا ہی تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ مرقومہ بالا کے
حرکت اسکی ایک ایسے حصہ خط منحنی مین ہوگی جیسا کہ تاریک حصہ لمنسکیٹا کا شکل گذشتہ
مین ہے اور ظاہر ہی کہ اس صورت مین عمود مذکور اسی حالت عمودی مین رہتا ہی
اور ایسا حال نقطہ ب پر نہین ہوگا بہت سی ترکیبین اسکی اکثر کتابون مین لکھی ہین
اور خصوصاً ذکر خط منحنی مرقومہ بالا کا پرونی ہائیڈرولک مین ہی —

(۳۲۱) واضح ہو کہ ہم یہان بحث زیادہ مرتبہ کی مساوات کی باوجود ضرورت
کی یہان نہین کرسکتے ہین بلکہ حقیقت مین ہمین وسیلہ انکی دریافت کرنے کا نہین ہے
کیونکہ ہم ابھی ثابت کرآئے ہین کہ اکثر اشکال گذشتہ ایسی درستی سے معلوم ہوسکتے ہین
جیسا کہ اشکال ریاضی ثابت ہونی چاہئین اگر ہم اشکال گذشتہ مین محنت

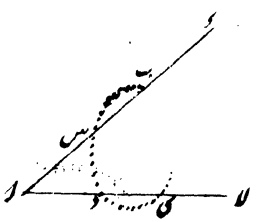
اور وقت معلوم کرنے نقاط خطوط سنحنی کی نہ لیتی تو اسخنا خط سنحنی کا ہرگز آسانی سے دریافت نہین ہوسکتا اسیواسطے اب ہم مساوات عام ن مرتبہ کا بیان کرینگے اور بعد اسکی بیان تقاطع خطوط سنحنی جیریہ کا لکھینگے ✳

✳ واضح ہو کہ طالب علم کو یہہ خیال کرنا چاہئی کہ ہندسہ بالجبر سی صورت خط سنحنی کے دریافت نہین ہوسکتی ہی مثال آیندہ سی دریافت ہوگا کہ ہندسہ بالجبر سی بخوبی اسخنا خط سنحنی کا معلوم ہوسکتا ہی فرض کرو کہ ک۱ اور ک۲ اور ک۳ تین وتر مساوی فاصلہ پر ایکدوسری سے ہین اب بوسیلہ کھینچنے ان اوتار کے خط سنحنی کے معلوم ہوگا کہ منحوف طرف یا محدب طرف خط سنحنی طرف محور کے جبکہ ک۲ < یا > $\frac{ک۱+ک۳}{۲}$ مثلاً درسطی مثال اسبات کی فرض کرو مساوات قریب البیضوی مکعبی کے ط۲ی = لا۳ تو اب ظاہر ہی کہ خط سنحنی محدب ہوگا اگر ۲لا۳ < (لا-۱)۳ + (لا+۱)۳ < ۲لا۳ + ۶لا اور چونکہ یہہ ہی شرط مساوات گذشتہ مین ثابت ہی تو خط سنحنی محدب ہی فاصلہ اوتار کا آپس مین موقوف مقدار مقررہ مساوات پر ہی - اور واسطی دریافت کرنے اوس زاویہ کی جو کہ خط سنحنی محور لا کو تقاطع کرتی ہی بناتا ہی بدو نقطہ شروع اس نقطہ پر اور اب ظاہر ہی کہ خط سنحنی اور مماس اس نقطہ پر ایک ہی زاویہ محور لا سی بناتی ہین لیکن قیمت اوس زاویہ کی مماس کی جو کہ مماس خط سنحنی کا اس نقطہ پر محور سے بناتا ہی یہہ ہی $\frac{ی}{ل}$ = ÷ اور اسکی مختلف قیمتین ہوسکتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ط۲ی = لا ∴ $\frac{ی}{ل}$ = $\frac{لا^{۲}}{۲ط}$ = ۰ جبکہ لا = ۰ تو اب یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ خط سنحنی نقطہ شروع پر محور سی منطبق ہوتا ہی اب لو مثال فقرہ (۲۰۷) کی ی۲ = لا۲(۲ط - لا) نقطہ ب پر یہین حاصل ہوگا یہہ $\frac{ی^{۲}}{لا^{۲}}$ = $\frac{۲ط-لا}{لا}$ = $\frac{۱}{۰}$ اور نقطہ ب پر $\frac{ط-لا}{لا}$ = $\frac{ی}{ل}$ = $\frac{لا^{۲}}{۲ط}$ = $\frac{۲ط}{۰}$ یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ خط سنحنی تقاطع کرکے محور لا سے بناتا ہی زاویہ ۹۰° کا -

(۳۲۲) مساوات عام ن درجہ کی سو تمام اوسکے اجزا کی یہہ ہی
$ا^ن + (ط لا + ص) ا^{ن-۱} + (ہ لا^۲ + ل لا + ی) ا^{ن-۲} + \dots + ف لا^ن + ک لا^{ن-۱} + ه لا^{ن-۲} + \dots + کر لا + ل$ واضح ہو کہ اس مساوات مین تمام ممکن ترکیب اجزا لا اور ا کے لحاظ سے جہ مین کہ قوای ہر ایک جز کی ن سے زیادہ نہین ہین تعداد اجزا کی یہہ ہی $۱ + ۲ + ۳ + \dots + (ن + ۱)$ یا ایسا ایک سلسلہ جمع کا ہی جسکا جز اول اور فرق عام عدد ایک ہی اور تعداد اجزا کی $(ن + ۱)$ ہی اور حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہی $\frac{(ن+۲)(ن+۱)}{۲}$ اور تعداد اجزای مقادیر مقررہ کی (قطع کر کی امثال ل سے اگر ضرور ہو) جو کہ کسی پر موقوف نہین ہی ایک کم تعداد اجزای مساوات سی ہین یعنے $= \frac{(ن+۲)(ن+۳)}{۲} - ۱ = \frac{ن(ن+۳)}{۲}$

(۳۲۳) واضح ہو کہ ہر ایک خط منحنی جبریہ ن مرتبہ کا اتنی نقاط مین سی گذرتا ہی جتنی اسکی مقدار مقررہ ہین یعنے $\frac{ن(ن+۳)}{۲}$ نقاط مین سے گذریگا کیونکہ جب فرض کرین ہم قیمتین لا اور ا کی ہر ایک نقطہ مفروضہ پر تو ہمین حاصل ہونگی $\frac{ن(ن+۳)}{۲}$ مختلف مساواتین جنسے ان مساواتون کے قیمت مقادیر مقررہ کی دریافت ہو سکتی ہی مثلاً مساوات عام تراشہای مخروطی کی بعد تقسیم کرنیکے امثال ا^۲ پر یہہ ہوگی $ا^۲ + ب لا ا + س لا^۲ + در + ی لا + ف = ۰$ اسمین پانچ امثال ہین اسیواسطے ایک تراش مخروطی پانچ نقطہ مین سی گذر سکتی ہین جبکہ نکہین ہم ادنا نقاط مفروضہ کو جای ل اور ا کو حاصل

ہوگی ہمیں پانچ مساواتیں جنکی وسیلہ سے مقادیر مقررہ معلوم ہو سکتی ہیں اسطرح
ہمیں خط مطلوب دریافت ہو جاویگا یہہ خط مخنی بیضوی یا بعید المرکز بیضوی یا قرب المرکز
ہوگا جبکہ ب^{۲} - ۴ ہ س منفی یا مثبت یا صفر ہی (۷۹) — ش ش ش
(۴ ۳ ۲) چونکہ حساب دور کرنے کا بہت طایل ہوگا اسیواسطے دوسری دور کرنی
اس دقت کی فرض کرو کہ ایک نقطہ ان نقاط میں سے نقطہ شروع ہی اور فرض
کرو دو خطوط جو کہ کھینچی جاویں اس نقطہ شروع سی دو نقطہ مفروضہ تک محور میں
مثلاً اگر ایک تراش مخروطی کو چار نقاط ب س دی میں سے گذارنا مطلوب
ہو تو ملاؤ ب س اور دی کو اور فرض کرو کہ وہ نقطہ ک پر ملتی ہیں



اور فرض کرو کہ اب محور ہے اور اد
محور لا کا ہی - فرض کرو کہ اس = کا
اور کد = لا ا اور وب = کم
اور ای = لا م فرض کرو کہ مساوات
یہہ ہی ک^{۲} + ب لا ک + س لا^{۲} + د ک + ی لا + ف = ۰ واسطی لا :: کے
یہہ حاصل ہوتا ہی ک^{۲} ا^{۲} + د ک ا + ف = ۰ اور ک^{۲} م^{۲} + د ک م + ف = ۰
∴ د = - (ک ا + ک م) اور ف = ک^{۲} ا م اسیطرح جب د و
تو ی = - س (لا ا + لا م) اور ف = س لا ا لا م جبکہ کہا ہمنی قیمتوں
ف کو مساوی ایک دوسری کی تو حاصل ہوگا یہہ س = $\frac{\text{ک ا ک م}}{\text{لا ا لا م}}$
جبکہ لکھینگے ہم ان قیمتوں کو اور تقسیم کرینگی ک ا ک م پر تو حاصل ہوگا یہہ

$$\frac{ک}{ک_1 ک_2} + \frac{ک}{ک_1 ک_3} لا_1 + \frac{ک}{ک_2 ک_3} لا_2 + \frac{ک_1 + ک_2}{ک_1 ک_2} لا_1^2 - \frac{ک_1 + ک_3}{ک_1 ک_3} لا_2^2 + \frac{لا_1 + لا_2}{لا_1 لا_2} ل$$

$$+ 1 = 0$$

اس مساوات مین صرف امثال ب کا مجہول ہی واضح ہو کہ بعض نقص مقام نقاط مفروضہ پر بہی موقوف ہین اور ایک خط مین دو نقطون سے زیادہ نہین ہوسکتی ہین اور بالفرض اگر ایسا نہو تو تراش مخروطی دو خط ہوجاوینگی واضح ہو کہ اسجای پانچ نقاط ایسی ہین جیسیکہ پانچ شرطین صورتون جبریہ مین لکہی ہوئی ہوسکتی ہین اور چار شرطین کافی ہونگی اگر خط منحنی قریب البیضوی ہو کیونکہ $ب^2 - ۴ ا ح = ۰$ سوائے ایک شرط کی ہی اگر خط منحنی کا مرکز ہوچکا مقام معلوم ہے تو تین اور شرطین کافی ہونگی کیونکہ ہم اس صورت مین صورت مساوات کی یہ فرض کرینگے $ک^2 + ب لا ک + س لا^2 + ف = 0$ اگر مقام دو قطرون مترجانس کا معلوم ہو تو صرف دو اور شرطین کافی ہونگی - واضح ہو کہ نیوٹن صاحب نے اپنی کتاب حساب عامہ مین ایک ترکیب بوسیلہ حرکت متواتر کے واسطے گذرنے ایک تراش مخروطی کے پانچ نقطون مین سے لکہی ہے -

(۳۲۵) اگر ایک خط منحنی کو جسکے قسم معلوم نہین سے چند نقاط مفروضہ سے گذرنا منظور ہو تو ہم اس صورت مین واسطے فایدہ کی یہہ مساوات خط منحنی کی فرض کرینگے $ک^2 + ب لا + س لا^2 + د لا^3 +$ وغیرہ اس مساوات مین سی مقادیر مقررہ آسانی دور ہوسکتی ہین کیونکہ ایسی خطوط منحنی کو خطوط قریب البیضویہ کہتے ہین (تین اجزای اول مساوات گذشتہ سی قریب البیضوی معلوم ہوگا) اور مشتمل ایک سلسلہ ایسی خصوصون خط منحنی کا ہی جیسا کہ (۳۰۹) مین ہین اور خط دار آسانی سی

دریافت ہوسکتی ہین واسطے دور کرنے مقادیر مقررہ کے لاگر یا لارڈ نرصاحب
ہندسہ بالجبر فقرہ (۶۱۷) کو دیکھو۔

(۳۲۶) ہمنے فقرہ (۷۹) مین بیان کیا ہی کہ بعض صورتون مین مساوات عام
درجہ دویم سی خطوط مستقیم حاصل ہوتی ہین اور یہہ صورت واقع ہوگی جبکہ ایک
مساوات عام سی بعد اختصار کے اجزای صحیح درجہ اول کے حاصل ہونگی پس یہانسے
معلوم ہوا کہ مساوات ن درجہ کیواسطے ہمیشہ لوکس ن مرتبہ کا ہوتا ہی۔ اگر
ایک مساوات ایسی مختصر ہوجاوے کہ اوسکے اجزای قوای کم درجہ کی رہین تو موقوف
ان اجزا کی لوکس اوس مساوات کا سلسلہ خطوط کا ہوگا مثلاً اگر ایک مساوات
چوتھی درجہ کی مین ایک جزو دوسری درجہ کا اور دو جز پہلی درجہ کی تو لوکس اس
مساوات کا ایک تراش مخروطی اور دو خطوط مستقیم ہونگی یہانسی معلوم ہوا
کہ ہر ایک مساوات عام سی جسکے کئی درجہ ہون خطوط کم مرتبہ کی نکل سکتے ہین اگر
ایک جزا سکا ناممکن ہو تو لوکس اس مساوات کا انقطاع یا ناممکن ہوگا۔

اگر مجموعہ قوای لا اور ر کا ہر ایک جز مین مساوی ہو تو لوکس خطوط مستقیم یا انقطاع
ہونگی کیونکہ صورت اس قسم کی مساوات کی یہہ ہوگی ر^ن + ر^{ن-۱} لا + ب ر^{ن-۲} لا^۲ +
..... ل لا^ن = ۰ یا (ر/لا)^ن + ا (ر/لا)^{ن-۱} + ب (ر/لا)^{ن-۲} ..... + ل = ۰
فرض کرو کہ قیمتین اس مساوات کی ط اور ح اور ک وغیرہ ہین تو اب ظاہر ہی کہ جسکی
مساوات کی یہہ ہوگی (ر/لا - ط)(ر/لا - ح)(ر/لا - ک) ..... = ۰
چونکہ ہر ایک جز اسکا = ۰ تو ظاہر ہی کہ لوکس اسکا خط مستقیم ہوگا اگر قیمتین

مساوات کی ناممکن ہون تو لوکس اسکا نقاط ہون گے۔ مثال۔
ر۲ - ۲ لا ر سن ط + لا۲ = ۰ لوکس اسکا دو خط مستقیم ہین جنکی مساواتین یہہ ہین
ر = لا $\frac{۱ \pm \text{جس ط}}{\text{جم ط}}$ = لا مس (۴۵° ± $\frac{\text{ط}}{۲}$) تو اب یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ
خطوط مستقیم نقطہ شروع پر سے گذرتی ہین اور محور لا سے زاویہ (۴۵° ± $\frac{\text{ط}}{۲}$)
بناتی ہین۔ ٭ ٭ ٭ ٭ (۳۴۷) چونکہ مساوات عام مین تمام
وہ مساواتین جو کہ کم مرتبہ کی اوس سے ہین ہوتی ہین اسیواسطے خاصیتین ن
مرتبہ کی خط منحنی کی اور اس سے کم مرتبہ کی خط منحنی کی ایک سی ہونگی اور وہ خواص
پائی جاوینگی چند خطوط مین جو کئی قسم کے ہون اور کم درجہ کی عام مساوات سی ہون
پس خاصیت تین مرتبہ کے خط منحنی اور ایک تراش مخروطی یا ایک شکل کی جو ایک
تراش مخروطی اور ایک خط مستقیم سے مشتمل ہی ایک سی ہوگی علاوہ اسکی کم مرتبہ کی
خطوط منحنی اور زیادہ مرتبہ کے خطوط منحنی آپسمین ایک طرح کی مشابہت رکھتی ہین
اسیواسطے بوسیلہ خاصیت کم مرتبہ کی خطوط کی زیادہ مرتبہ کے خطوط منحنی دریافت
ہوجاتی ہین ٭

(۳۴۸) بوسیلہ استعمال کرنے خواص مساواتون کے خطوط منحنی مین بہت سی
مشکلین نکلتی ہین یہہ دارنگ صاحب اور نیکلارن صاحب کی کتابون سے دریافت
ہونگی ہم یہان دو باتین خاص بیان کرین گی۔ اگر دو خط مستقیم قطع کرین
ایک خط منحنی ن مرتبہ کو نقاط ق ر وغیرہ اور س ط و وغیرہ مین
اسطرح پر کہ وق اور ر ق اور وغیرہ = ق ا اور ط ب اور ب س وغیرہ اور

اور اس اور ط اور آد وغیرہ = لا، اور لا۲ اور لا۳ وغیرہ تو اگر آلا اور آ، اسطرح پر حرکت کریں کہ ہمیشہ متوازی اپنی رہیں تو نسبت درمیان ک۱ × ک۲ × ک۳ وغیرہ اور لا۱ × لا۲ × لا۳ وغیرہ کی مقادیر مقررہ سے تعبیر ہوگی فرض کرو کہ نقطہ شروع خط منحنی کا آ اور محور آلا اور آ، بعد تبدیل کرنے نقطہ شروع ہوگئی ہیں اور فرض کرو کہ صورت مساوات کی یہ ہے

ک ن + (ط لا + ص) ک ن-۱ + ... س لا ن + د لا ن-۱ + ... ک لا + ل =

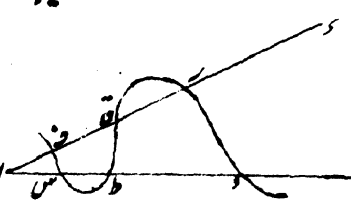
اب فرض کرو کہ ک = ۰ ∴ س لا ن + د لا ن-۱ ..... ک لا + ل = ۰ (۱)

لا = ۰ ∴ ک ن + ص ک ن-۱ + ... ک ۰ + ل = ۰ (۲)

قیمتیں (۱) کی اس اور ط اور آد وغیرہ ہیں ∴ لا۱، لا۲، لا۳ وغیرہ = $\frac{ل}{س}$ اور قیمتیں (۲) کی اف اور اق اور آر وغیرہ ہیں ∴

ک۱ ، ک۲ ، ک۳ وغیرہ = ل ∴ ک۱ ، ک۲ وغیرہ : لا۱ ، لا۲ ، لا۳ وغیرہ

:: س : ۱ اب ظاہر ہے کہ جب محور متوازی اپنی بدلگی تو اشکال ک ن اور لا ن میں کسیطرح فرق نہیں آ سکتا اسیواسطے نسبت مرقومہ بالا کی ہمیشہ بھی صورت



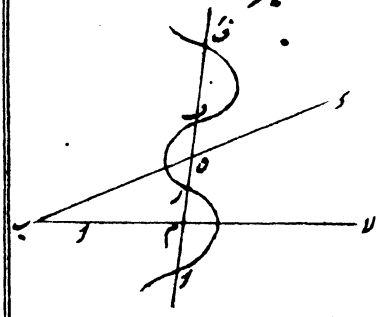
رہی کی واسطے ہر ایک متوازی مقام آلا اور آ، کے

فقرہ (۳۹۴) شال اس

شکل کی ہے۔ (۳۹۹) تعریف ایک قطر کی فقرہ (۷۶) میں یہ بیان کی گئی کہ وہ ایک ایسا خط ہے کہ تنصیف کرتا ہے ایک سلسلہ متوازی وتر کو

اس سے بھی زیادہ عام تعریف جو کہ ہر ایک صورت میں صادق آسکتی ہے یہ ہے
قطر ایک ایسا خط ہے جسکا اگر ایک وتر او تار متوازیہ میں سے ملتی ہوئی خط منحنی کو
مختلف نقاط میں کھینچا جاوے تو مجموعہ اوتار ایک طرف کا مساوی دوسری طرف
کی مجموعہ کی ہوگا اور یہ شکل میں اسطرح سے تعبیر ہوسکتا ہے ف ق + ف ق
+ وغیرہ = ر ق + ر ق + وغیرہ اور اگر یہ تعریف صادق آوے تمام اون خطوط
پر جو کہ متوازی ف ر کی ہیں تو خط ب ب کا قطر ہوگا ۔

دریافت کرو مساوات قطر ب ب کی فرض کرو کہ مساوات خط منحنی نسبت محور لا
اور متوازی وتر ف ق وغیرہ کی یہ ہے ی^ن + (طلا + ص) ی^{ن-۱} +
+ (س لا^۲ + ولا + ی) ی^{ن-۲} + وغیرہ = ۰ فرض کرو کہ م ق = ع
اور ف ق = ی ∴ ی = ی' + ع جبکہ لکھیں یہ قیمت مساوات گذشتہ میں تو
حاصل ہوگا یہ ی^ن + (طلا + ص + ن ع) ی^{ن-۱} + {س لا^۲ + ولا + ی + ن(ن-۱)/۲ ع
× طلا + ص + ن ع} ی^{ن-۲} + وغیرہ = ۰



موافق تعریف کی مجموعہ قیمتوں
ی کا مساوی صفر کی ہونا چاہئے
اور یہ مجموعہ سوا دوسری جز
مساوات گذشتہ کا ہی لیکن
اسمیں اسکی علامت بدلی ہوگی پر
∴ طلا + ص + ن ع = ۰ یا ع = − (طلا + ص)/ن یہی مساوات قطر ب ب

کی ہی اور موافق اسی دلیل کے یہہ مساوات س لا^{۲} + د لا + ی + ن − ا ع
× ط لا + ص + ن $\frac{ن-۱}{۲}$ ع^{۲} = ۰ تراش مخروطی کی ہی جو کہ اسطرح پر کھینچی
گئی ہی کہ حاصل ضرب دو دو قیمتون ع کا مساوی صفر کی ہی — اسیطرح سے
بیان چوتھی جز کا ہوسکتا ہی یہہ خطوط منحنی بعض اوقات اقطار خطوط منحنی کہلاتے
ہین — (۳۳۰) طریقہ دریافت کرنے مرکز ایک خط منحنی کا فقرہ (۸۱) مین
بیان کیا گیا ہی لیکن عمل اوسکا مساوات عام زیادہ مرتبہ کی مین بہت بڑا ہوگا
اسیواسطے ہم اب ایک مثال تیسری مرتبہ کی لکھینگی جسکے وسیلے سے یہہ مطلب بخوبی
صاف ہوجاویگا — فرض کرو کہ یہہ مساوات ہی لا^{۲} + ی د = و لا^{۲} + ب لا^{۲}
+ س لا + د اس مساوات سی اکثر خطوط منحنی تیسرے مرتبہ کی تعبیر ہوسکتی ہین
فرض کرو کہ لا = لا + م اور د = د + ن اسیواسطے صورت مساوات گذشتہ
کی بعد لکھنے ان قیمتون کی یہہ ہوجاویگی لا^{۲} + ۲ ن لا ا + م د^{۲} + (۲ ا م + ی) د
− و لا^{۳} − (۳ و م + ب) لا^{۲} + (ن^{۲} − ۳ و م^{۲} − ۲ ب م − س) لا + م ن^{۲} + ی ن
− و م^{۳} − ب م^{۲} − س م − د = ۰ ظاہر ہی کہ دوسرا اور تیسرا اور چوتھا
اور اخیر یا مقدار مقررہ = ۰ کی ہونا چاہئی نہین تو خط منحنی کا مرکز نہین ہوگا
∴ ن = ۰ اور م = ۰ اور ب = ۰ اور د = ۰ پس یہانسے معلوم ہوا کہ
خط منحنی اس صورت مین مرکز رکھتا ہی اور جبکہ امثال ب اور د نہ ہونگی تو
یہہ مرکز نقطہ شروع ہوگا —

باب سیزدہم

بیان تقاطع خطوط منحنی جبریہ مین -

(۳۳۱) نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم اور ایک خط ن مرتبہ کا بوسیلہ دور کرنے ز کی دو مساوا تو مین سے دریافت ہوسکتا ہی یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ وہ مساوات جو اب حاصل ہوگی اُسمین اجزای لا کے ہونگی اور یہہ مساوات ن درجہ کی ہوگی اسیواسطے اُسکی قیمتین بتعداد ن کے ہوسکتی ہین اب ن نقاط تقاطع ہونگی اور اسکی قیمتین ن سے کمتی بہی ہوسکتی ہین کیونکہ بعض اسکی قیمتین آپسمین مساوی ہونگی اور بعض ناممکن - واضح ہو کہ ایک خط مستقیم ایک خط منحنی ن مرتبہ کو ن نقاط مین تقاطع کرسکتا ہی لیکن اسصورتمین خط منحنی کو صورت عام مین فرض کرنا چاہئی نہین تو یعنی نقاط متجانس اور ضعف کو نامعلوم بیضوی کی صورت یا شکل ہای نامعلوم خط منحنی کے خیال کرنا چاہئی اور پس ایک خط جو کہ ایسی نقاط مین سی گذریگا مساوی دو یا زیادہ نقاط تقاطع کی ہی -

(۳۳۲) نقاط تقاطع دو خط م اور ن مرتبہ کی بوسیلہ دور کرنی ز کی دونو مساوا تو مین سی معلوم ہوسکتی ہین اب جو مساوات کہ حاصل ہوگی وہ م ن مرتبہ کی ہوگی یا اسکی م ن نقاط تقاطع ہونگی یہہ نقاط اکثر کم ہوتی ہین کیونکہ تمام صحیح قیمتین اس مساوات سی لا = ۰ نقاط تقاطع حاصل نہین ہونگی مثلاً اگر ہم دور کرین ز کو ن مساوا تون مین سے ز^۲ = ۲ط لا - لا^۲ اور ز^۲ = ۲ط (لا - ص)

تو لا = ۲ط ص یہانتک ظاہر ہوتا ہی کہ ہمیشہ ایک نقطہ تقاطع حاصل ہوگا موافق اس فرض العرض کے ۲ط ص لیکن یہہ ہمیشہ نہین ہوسکتا ہی کیونکہ

اس صورت میں ر۲ = ۲ط (۲ط ص - ص) اسیواسطے ر ناممکن ہی اگر
ص > ۲ط اور یہہ کہیچنی دو خطوط منحنی کی سی ظاہر ہوگا یہانسی ثابت ہوا
کہ بعد معلوم ہونی وتر العرض کے ہمین اوتار ہر ایک خط منحنی کے موافق اسی
وتر العرض معلوم کرنے چاہئین اگر وہ صحیح نہین ہونگی تو معلوم ہوگا کہ موافق
ایسی وتر العرض کی کوئی نقطہ تقاطع خط منحنی کا نہین ہوسکتا ہی - اگر
یہہ دو مساواتین ہون ر۲ + ۲لا = ۰ اور ر۲ + ۴لا۲ - ۱۰لا - ۱۶ = ۰
تو بعد دور کرنی ر کے وتر العرض نقطہ تقاطع کی یہہ ہونگی لا = ۴ اور
لا = - ۱ یہان صرف قیمت اخیر سی نقطہ تقاطع معلوم ہوسکتا ہی -
(۳۳۳) واضح ہو کہ دریافت کرنیمین نقاط تقاطع خطوط کے ہمین آخر
کو ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہی جو دو درجہ سی زیادہ کی ہوتی ہی
یا ایک ایسی مساوات پیدا ہوتی ہی جسکی قیمتون سی لکر آسانی سی معلوم نہین
ہوسکتا ہی واسطی دور کرنی اس اشکال کے ایک ایسا طریقہ اکثر استعمال
کیا جاتا ہی جسکے وسیلہ سی ایک خط تمام نقاط مفروضہ مین سی گزریگا اور بوسیلہ
اس ترکیب کے مقام انکا دریافت ہو جاویگا - فرض کرو کہ ر = ح(لا) (۱) *

* علامتون ح(لا) اور ک(لا) اور ل(لا) سی مراد جملہ لا کا ہی یعنی یہہ ایسی
صورتین ہیہین صرف لا ہی پایا جاتا ہی لیکن یہہ اور مقدار مفروضہ کی ساتھہ ملا
ہوا ہی اور ح(لا) اور ح(ر) مشابہ صورتین ہین مثلاً اگر ح(لا) = ۲ط لا
- لا۲ تو ح(ر) = ۲ط ر - ر۲ یا ۲ص ر - ر۲

اور د = ک (۱) (۲) مساواتین دو خطوں کی ہین تو اب ظاہر ہی کہ نقطہ تقاطع پر دو تر اور دو تر العرض ان مساواتون کی ایک ہی ہونگی یا فرض کرو ع ع اور ح ح اوتار نقطہ تقاطع کی ہین تو ح = ح (ع) اور ح = ک (ع) اسیواسطی ح (ع) = ک (ع) اور اسکی وسیلہ سی ع اور ح معلوم ہوسکتی ہین اور انکی قیمتین بہ آسانی تمام دریافت ہوسکتی ہین اور چونکہ ح = ح (ع) (۳) اور ح = ک (ع) (۴) اب جد جمع کرنے دو مساواتون کے

ح = ح (ع) + ک (ع) (۵)

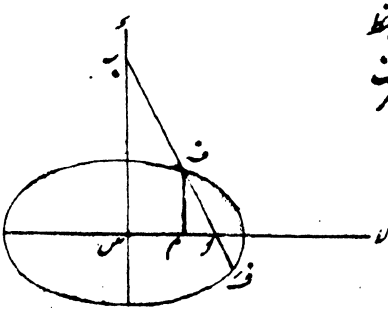
اور ضرب دینی سے ح² = ح (ع) ک (ع) (۶)

یا مساوات عام یہ ہوگی ح = ل { ح (ع) ک (ع) } (۷)

ل سی مراد ہر ایک جملہ ہی جو کہ جمع سی یا تفریق سی یا ضرب دینی وغیرہ سی (۳) اور (۴) سی پیدا ہوسکتا ہی - اب ظاہر ہی کہ ہر ایک مساوات کہ گذشتہ سی نسبت درمیان ع اور ح جو کہ اوتار نقطہ (۱) اور (۲) کی ہین دریافت ہوسکتا ہی اور جبکہ ع اور ح کو مقادیر غیر منقطع فرض کرین تو بوسیلہ اسکے نسبت درمیان سلسلہ نقاط کی معلوم ہوگی اور ان نقاط مین سے نقطہ تقاطع مطلوب ہی ایک نقطہ ہوگا یعنی جبکہ کھینچین گے ہم لوکس (۵) یا (۶) یا (۷) کا وہ ضرور نقطہ تقاطع مطلوب (۱) اور (۲) مین سی گذریگا - اور ظاہر ہی کہ اگر ایک مساواتون (۵) اور (۶) یا (۷) مین سی دایرہ باخط مستقیم ہو تو کھینچنا اس دایرہ باخط مستقیم کا آسان ہوگا بہ نسبت دریافت کرنے نقطہ تقاطع کے

بوسیلہ دریافت کرنی کسی ایک مقدار کے - واضح ہو کہ ہم اکثر نقطہ تقاطع (۱) اور (۲) کا دریافت کرتی ہین جبکہ ایک انمین سے خط منحنی معلوم ہو بوسیلہ کھینچنے لوکس دوسرے مساوات کی اور یہہ طریقہ بہت آسان ہوگا جبکہ دوسرا خط مستقیم ہو اب ہم چند مثالین وسطی تفصیل ہر قسمہ بالا کی لکھینگے —

(۳۳۴) کھینچو مماس بیضوی کا ایک نقطہ مفروضہ ق پر جو کہ اُسپر نہین ہی فرض کرو کہ اوتار ق ک م اور ق ن ہین اور ع اور ح اوتار نقطہ ف کی ہین جبکہ مماس مطلوب خط منحنی سے ملتا ہی تو اب موافق فقرہ (۱۱۱) اہمساوات اوس مماس کی جو کہ نقطہ ف مین سے کذرتا ہی یہہ ہوگی ط ۲ ص ع + ص ۲ ا ع = ط ۲ ص ۲ اور چونکہ یہہ نقطہ ق مین سے بھی کذرتا ہے تو ط ۲ ن ح + ص ۲ م ع = ط ۲ ص ۲ (۱) اور ط ۲ ح + ص ۲ ع = ط ۲ ص ۲ (۲) بوسیلہ (۱) اور (۲) کے مقادیر ح اور ع دریافت ہوجاوینگی قیمتین انکی اوتار س م اور م ف نقطہ مطلوب کی



اب ظاہر ہی کہ (۱) مساوات کسے خط مستقیم کی نہین ہی لیکن اوسی طرف نسبت درمیان س م اور م ف کی معلوم ہوجاویگی لیکن اگر ہم ع اور ح کو مقادیر غیر منقطع فرض کرین تو اس مساوات سی نسبت درمیان مختلف نقاط کی جسمین سے ایک ف ہی معلوم ہوگی

اسبو اسطی اگر وہ خط سبکی مساوات (۱) ہی کھینچا جاوے تو وہ لفظہ ف مین سے
گذریگا تو اب بوسیلہ اس مساوات اور مساوات بیضوی (۲) کی مقام نقطہ ف کا
دریافت ہوجاویگا واسطے کھینچنے خط (۱) کی فرض کرو ع = ۰ ∴ ح = $\frac{ص^{۲}}{ن}$ ا
فرض کرو ح = ۰ ∴ ع = $\frac{ط^{۲}}{م}$ اب س د سین سے قطع کرو س ب = $\frac{ص^{۲}}{ن}$
اور س لا مین سے س ا = $\frac{ط^{۲}}{م}$ اور ملاؤ ب ا کو اور کھینچو خط ب آ کو تو یہہ خط
لوکس (۱) کا ہوگا اور یہہ بیضوی کو نقاط ف اور ق مین قطع کریگا یہانتک
ثابت ہوا کہ اگر ملاوین ف ف اور ق ق کو تو یہی مماس مطلوب ہوگئی
اسیطرح مماس بعید البیضوی اور قریب البیضوی کی کھینچ سکتے ہین واسطی ثابت کرنے
ایک صورت تمام کی فرض کرو کہ ط د۲ + س لا۲ + د ی + ی لا = ۰ (۱)
مساوات دوسری دایرہ کی خط مخنی کی ہی اور مان لو کہ اسکی محور متوازی لقطار متجانس
کی ہین تو اب بساوات مماس کی نقطہ (لا اور د) پر یہہ ہوگی ط د د + س لا لا +
½ (د + د) + ½ (لا + لا) = ۰ یا (۲ط د + د) د + (۲س لا + ی) لا
+ د ی + ی لا = ۰ (۲) فرض کرو کہ یہہ مماس نقطہ م اور ن مین سے گذرتا ہی
تو اب صورت (۲) کی یہہ ہوجاویگی
(۲ط د + د) ن + (۲س لا + ی) م + د ی + ی لا = ۰ (۳)
یا (۲ط ن + د) د + (۲س م + ی) لا + د ن + ی م = ۰ (۴)
اب فرض کرو کہ لا اور د (۴) مین مقادیر غیر منقطع ہین کھینچو خط مستقیم جو کہ لوکس
(۴) کا ہی بوسیلہ اسکی خط مخنی کے تمام سیکنٹ کا جو کہ دو نقطون مین ملتا ہی

معلوم ہو جاویگا اور اب مماس درمیان نقطہ (م اور ن) کی کھینچ سکتی ہین

(۳۳۵) اب فرض کرو کہ خط سیکنٹ (ع) کا ایک نقطہ مفروضہ (م اور ن) مین سے گذرتا ہی تو اس صورت مین مساوات (۲) کی یہہ صورت ہو جاویگی

(ا ط ن + د) نَ + (ا س م + ی) مَ + د ن + ی م = ۰ (۵) اب ظاہر ہی کہ نقطہ (م اور ن) جہانی مماس کھینچی گئی تھے ایک خاص مقام پر ہون گے موافق ہر ایک خط سیکنٹ کے جو کہ نقطہ (مَ اور نَ) مین سے گذرتا ہی ہم اگر (۵) مین مقادیر مَ اور نَ کو غیر منقطع فرض کرین تو ہمین حاصل ہوگی مساوات آیندہ نقطہ (م اور ن) کی لوکس کی

(ا ط نَ + د) ن + (ا س مَ + ی) م + د نَ + ی مَ = ۰ اور اس مین مَ اور نَ اوتار غیر منقطع ہین یہان سے ثابت ہوتا ہی کہ اگر ایک نقطہ سے مختلف سیکنٹ ایک دوسری درجہ کی خط کی کھینچی جاوین اور دو نقطون مین سے جہانکہ ہر ایک سیکنٹ خط منحنی کو قطع کرتا ہی ایسی مماس کھینچے جاوین جو کہ ملتی ہین ایک دوسری کو تو لوکس ان نقاط کا خط مستقیم ہوگا

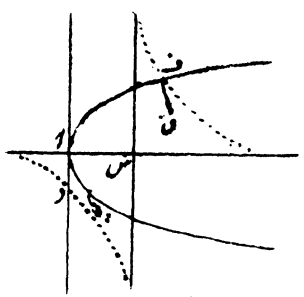
(۳۳۶) کھینچو عمود مماس ایک قریب البیضوی کا نقطہ ق (ط اور ص) مین سے جو کہ خط منحنی پر واقع نہین ہی فرض کرو کہ ق = ع م لا مساوات خط منحنی کی ہی اور مان لو کہ ع اور ح اوتار نقطہ مطلوب کے ہین تو اب ظاہری

کہ مساوات مماس کا جو کہ نقطہ ع اور رخ میں [illegible] کے موافق نقرہ (۱۹۲)
کی یہہ ہوگی ح ء = ۲م (ع + لا) اسیواسطے مساوات عمود مماس کی نقطہ (ع اور ح)
پر یہہ ہوگی و - ح = - $\frac{ح}{۲م}$ (لا - ع) اور چونکہ یہہ نقطہ (ط اور ص) میں
سے گذرتا ہی تو ص - ح = - $\frac{ح}{۲م}$ (ط - لا) یا

ع ح - (ط - ۲م) ح - ۲م ص = ۰ ..... (۱)

اور ح^{۲} = ۴م ع ..... (۲)

جبکہ دور کرینگی ہم ع کو تو حاصل ہوگا یہہ ح^{۲} - ۴م (ط - ۲م) ح - ۸م^{۲} ص = ۰ (۳)
یہہ ایک ایسی مساوات ہی کہ بوسیلہ اسکی قیمتوں کے تین وتر مطلوب حاصل ہونگی
واسطے استعمال میں لانی اس مساوات
کی اب ہم کھینچینگے لوکس (۱) کا
جو کہ مساوات بعید البیضوی ساوی
الفطرین کی ہی محور لا کا ایک خط
متنفر الملاقات خط منحنی کا موافق
نقرہ (۱۹۸) کے ہی اور دوسرا



متوازی محور آ کی ہی اور یہہ فاصلہ اوس پر = ط - ۲م نقطہ آ سی ہی مساوات
بعید البیضوی کی نسبت مرکز س اور خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہی ع ح =
۲م ص علاوہ اسکی بعید البیضوی قطع کرتا ہی محور آ کو نقطہ د مین اور
و = $\frac{۲م ص}{ط - ۲م}$ بوسیلہ انکی بعید البیضوی (اور یہہ نقشہ ارخط منحنی مشکل

مین کھینچا ہوا ہی) بن سکتا ہی ہمنی شکل مرقومہ بالا کو اسطرح پر کھینچا ہی کہ صرف
ایک نقطہ تقاطع خط مخنی کا پیدا ہوگا تو اب یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ صرف ایک
عمود مماس نقطہ ق سے کھینچ سکتا ہی اگر خطوط مخنی نقطہ ی پر مس کرین تو دو
عمود مماس ہونگی اگر بعید البیضوی مس کری قریب البیضوی کو نیچی کی شاخ مین
تو تین عمود مماس نقطہ ق سے کھینچ سکتے ہین یہہ صورتین مطابق مساوات (۳)
کی ہین اور اسکی ایک صحیح قیمت حاصل ہوگی اور تین صحیح قیمتون مین سے دو مساوی
ایک دوسریکی حاصل ہونگی اور اخیر کو تین صحیح قیمتین ایسی پیدا ہونگی جو کہ
صحیح اور غیر مساوی ہین —

(۳۳۷) واضح ہو کہ اکثر ایسی لوکس کھینچتی ہین جو بہت آسان ہون اسکے واسطے
تمام خطوط مخنی مین سے دایرہ کو اکثر ترجیح دیتی ہین اب ہمیں صورت حال مین دیکھنا
چاہیئے کہ ایا کسی ترکیب سہی بوسیلہ (۱) اور (۲) کے مساوات دایرہ کی حاصل
ہوسکتی ہی یا نہین کیونکہ موافق (۳۳۳) کی یہہ دایرہ نقاط مفروضہ عمود
مماس مین سے گذر سکتا ہی اب اگر ضرب کرینگی ہم (۱) کو ح مین تو حاصل ہوگا

ع ح^{۲} − (ط − ۲م) ح^{۲} − ۲م ص ح = ۰ یا ع × ۴م ع − (ط − ۲م)^{۲}
۴م ع − ۲م ص ح = ۰ ∴ ع^{۲} − (ط − ۲م) ع − $\frac{ص}{۲}$ ح = ۰

اور (۲) سے حاصل ہوگا یہہ ح^{۲} − ۴م ع = ۰ جمع کرنیسے یہہ ثابت ہوگا

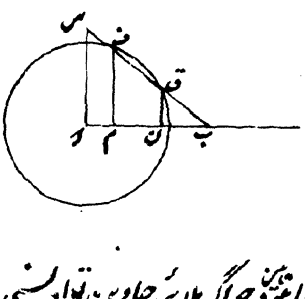
ح^{۲} + ع^{۲} − (ط + ۲م) ع − $\frac{ص}{۲}$ ح = ۰ اور یہہ مساوات دایرہ کی ہے
جسکے وتر مرکز کے یہہ ہین $\frac{ط}{۲}$ + م اور $\frac{ص}{۴}$ اور جسکا نصف قطر یہہ ہی

۸ $(\frac{ط}{۲}+م)^۲+\frac{صل}{۱۶}$ اگرچہ یہہ دایرہ راس قریب البیضوی مین سی گذرتا ہی لیکن وہ نقط نقاط تقاطع مطلوب مین سے نہین ہی اور یہہ صرف پیدا ہوتا ہی بوسیلہ ضرب دینی (۱) کے ج مین اگر ایک قریب البیضوی اور مختلف دایرہ موافق مقام ق کی کھینچی جاوین تو ہمین بخوبی معلوم ہو جاویگا جب کہ بیشتر دریافت ہوا کہ اس صورتمین ایک یا دو یا تین نقطہ تقاطع ہونگی یہہ طور بہت مفید ہی اسیطرح سی عمود دماس بیضوی کا کھینچ سکتا ہی اسیمین اور شکل مرقومہ مین کسی نوع کا فرق نہین مگر اس صورت مین چار نقطہ تقاطع ہونگی —

(۳۴۸) واسطے رفع اوس اشکال کی جو کہ حل کرنی مین مساواتون فقرات گذشتہ کی جو کہ دور کرنے ۲ سی حاصل ہوئے ہین نقاط تقاطع کا استعمال کیا گیا تہا لیکن اب ہم ایک عام قاعدہ لکھینگے اور اوسکے وسیلہ سی خطوط منحنی حل کرنے مساوات پر موقوف رہینگی اور چونکہ دو مساواتون کے ملانی سی ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہی کہ اوسکی قیمتون سی نقطہ تقاطع اونکی لوکس کا دریافت ہو جاتا ہی اسیطرح سی ایک مساوات کو دو مساواتون مین حل کرکے اونکی لوکس معلوم ہو سکتی ہین اور اونکی تقاطع سی قیمتین ایک مساوات کی معلوم ہو جاوینگی —

اسی طریقہ کو بنانا مساواتون کا کہتی ہین اور اسیطریقہ کو متقدمین بیشتر ایجاد کرنی قواعد تقریبی کے استعمال کرتی تہی اور یہہ اب بہی اکثر اوقات بہت فایدہ مند ہوتا ہی اسبو اسطی اب ہم اسکو بیان کرینگی فرض کرو کہ یہہ دو مساواتین ہین $ک+لا=ط$ (۱) اور $ک'+ل'ا=ص$ (۲) اب بوسیلہ ان دونون کے

یہہ حاصل ہوگا لا۲ − ط لا + $\frac{ط^2 - ص^2}{4}$ = ۰ (۳) ظاہر ہی کہ قیمتین (۳) کی وتر العرض نقاط تقاطع (۱) اور (۲) کے لوکس کی ہین لیکن برعکس اسکے بوسیلہ کھینچی لوکس (۱) اور (۲) کی اور ماپنی وتر العرض نقطہ تقاطع کے قیمتین (۳) کی معلوم ہوسکتی ہین — اب اگر بطریق ہندسہ کی معلوم کرنا قیمتون (۳) کا مطلوب ہو تو اب حل کرو اس مساوات کو دو مساواتون (۱) اور (۲) مین اور فرض کرو کہ س ف ی ب لوکس (۱) کا ہی اور دایرہ ی ق ن (۲) کا اور ان دونون کا نقطہ شروع اور محور ایک ہی ہین کھینچو اوتار م ف اور ن ق کو تو اب ظاہر ہی کہ ر م اور ر ن قیمتین (۳) کی ہونگی — اس طریقہ کی تفصیل یہہ ہی حل کرو ایک مساوات کو دو مساواتون مین اور اب کھینچو لوکس ان دونون مساواتونکا

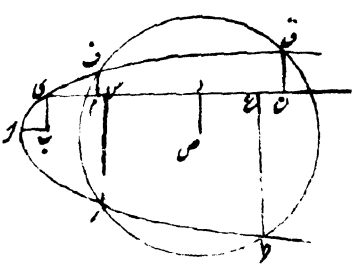


اور چونکہ یہہ ظاہر ہی کہ بہت سی ایسی مساواتین ہین جو اگر ملائی جاوین تو اور نئی مساوات مطلوب پیدا ہوجاویگی اسیطرح بہت سی لوکس ایسی ہوسکتے ہین جنکی نقاط تقاطع سی قیمتین مطلوب حاصل ہونگی مثلاً مساوات (۳) دو مساواتون آیندہ مین حل ہوسکتی ہی لا۲ = ط ر اور ط ر − ط لا = + $\frac{ط^2 - ص^2}{4}$ = ۰

اب جس وقت کہ کھینچین گے ہم انکی لوکسون کو جو کہ قریب البیضوی اور خط مستقیم ہین تو انکی تقاطع سی قیمتین (۳) کی دریافت ہوجاوینگی — واضح ہو کہ قیمتین ایک مساوات کی دریافت ہوسکتی ہین بوسیلہ تقاطع ایسی دو قسم کی خط منحنی کے

جبکہ حاصل ضرب اونکی قوتون کا مساوی قوت مساوات کی ہو تو اب ظاہر ہی کہ ایک خط مستقیم اور ایک تیسرے مرتبہ کی خط منحنی سے ایک مساوات تیسری مرتبہ کی حاصل ہوگی اور کوئی سی دو تراشون مخروطی سے سوای دو دایرون کے قیمتین چوتھے درجہ کی مساوات کی حاصل ہوسکتی ہین - ث ث ث ث

(۳۳۹) چونکہ مساوا تین تیسرے اور چوتھی درجہ کی اکثر کتب ریاضی مین مستعمل ہوتی ہین اسواسطے اب ہم پوری چوتھی مساوات کو حل کرینگے اور اسمین کوئی جزو محذوف نہین ہوگا $ر^٤ + ف ر^٣ + ق ر^٢ + ر ر + س = ٠$ یہان دایرہ اور قریب البیضوی کو جنکا بیان بہت آسان ہے پسند کرنا چاہیے بعد فرض کرنی مساوات قریب البیضوی کی ہم ایک خاص ترکیب سے مساوات دایرہ کی حاصل کرین گے



فرض کرو کہ $ر + \frac{ف}{٤} ر = لا$ (۱) $\therefore ر^٤ + ف ر^٣ + \frac{ف^٢}{٤} ر^٢ = لا^٢$

لیکن $ر^٤ + ف ر^٣ + ق ر^٢ + ر ر + س = ٠$ ∴ تفریق کرنیسے حاصل ہوگا

یہہ $(ق - \frac{ف^٢}{٤}) ر^٢ + لا^٢ + ر ر + س = ٠$ یا (۱) سے حاصل ہوگا یہہ

$(ق - \frac{ف^٢}{٤})(لا - \frac{ف}{٢} ر) + لا^٢ + ر ر + س = ٠$ یا

$لا^٢ + (ق - \frac{ف^٢}{٤}) لا + (ر - \frac{ف ق}{٢} + \frac{ف^٣}{٨}) ر + س = ٠$ اور (۱) سے

$ص^2 + \frac{ب}{۲}ی - ل = ۰ \therefore ی^2 + لا^2 + (ر + \frac{ب^2}{۸} + \frac{ف}{۲} - \frac{ف^2}{۴})ی$

$+ (ق - ا - \frac{ف^2}{۴})لا + س = ۰$ (۲) لوکس (۱) کا قریب البیضوی اسی ہی جسکے نقطہ شروع ی ہی ($ب ی = \frac{ف}{۴}$) اور اوتار متقاطع علی القوائم ہین اور لوکس (۲) کا دایرہ ق ف ر ہی اور اوتار اسکی مرکز کی ی د اور دص ہین اور نصف قطر اس دایرہ کا (۲) سی دریافت ہوسکتا ہی قیمتین مساوات کی اسطرح پر کہینچین گے ہین کہ ف م اور ق ن مثبت اور رس اور طع منفی ہین اگر ایک دایرہ ایک قریب البیضوی سی مس کری تو دو قیمتین ایسی مساوی ہونگی اور صورتین تین یا چار مساوی قیمتون کی بوسیلہ قواعد تماس کے معلوم ہوسکتی ہین اور چونکہ دو قیمتین واسطے اختصار کرنے مساوات کی طرف درجہ دوم کی کافی ہین اسیواسطے ہمین یہان ان صورتون کا ذکر کرنا کچھ ضرور نہین ہے اگر صرف دو نقاط تقاطع ہون تو دو قیمتین ناممکن ہونگی اور اگر کوئی نقطہ تقاطع کا نہو تو چارون قیمتین ناممکن ہونگی — ثر ثر ثر ثر ثر

(۳۴۰) بوسیلہ دور کرنے جز دویم مساوات کے عمل مین بہت آسانی ہوجاتی ہے مثلاً واسطے حاصل کرنی قیمتون مساوات کی فرض کرو کہ یہہ ایک مساوات ہی

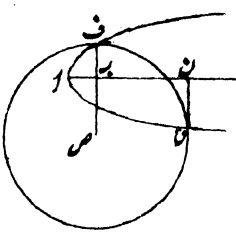
$لا^4 + ۸لا^3 + ۲۴لا^2 + ۳۲لا + ۱۶ = ۰$ (۱) فرض کرو کہ $لا = ی - ۲$

تو صورت مساوات مرقومہ بالا کی یہہ ہوگی $ی^4 - ۴ی^2 + ۴ی - ۴ = ۰$ (۲)

اب فرض کرو کہ $ی^2 = لا$ (۳) اسیواسطے $لا^2 - لا + ۴ی - ۴ = ۰$

$\therefore$ جمع کرنے سی $ی^2 + لا^2 + ۴ی - ۲لا - ۴ = ۰$

یا (ر+۲)² + (لا-۱)² = ۹ (۴) فرض کرو کہ ف زی قریب



البیضوی (۳) ہی جسکا وتر آتشی

ایک ہی اور اوتار مرکز ص دایرہ

(۴) کی یہہ ہین ا ب = ۱ اور

ب ص = ۲ اور نصف قطر = ۳

جبکہ کیہیمن بگے ہم دایرہ کو تو اوتار ب ف اور ق ن قیمتین (۲) کی ہونگی جبکہ پیمائش کرینگی ہم ان قیمتون کو تو حاصل ہوگا یہہ ب ف = ۱ اور ق ن = -۲ یہانسی ثابت ہوا کہ ممکن قیمتین (۲) کی آ اور -۲ ہین اسیواسطے (۱) کی = ۱ اور -۴ ہونگی - ۞ ۞ ۞ ۞ ۞ ۞

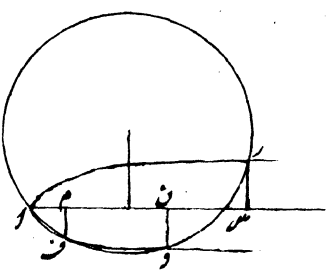
(۳۴۱) بنا نا تیسرے مساوات کا چوتھی مساوات پر موقوف ہی پہلے دور کرنی دوسری جز مساوات کو اگر ضرورت پڑی اور ضرب کرو اوس مساوات کو جو کہ اب حاصل ہوئی ہے ح = ۰ آ مین اور اب عمل کرو موافق مرقومہ بالا کے - واضح ہو کہ دایرہ ہمیشہ راس قریب البیضوی مین سے گذریگا اور ان دونون کے تقاطع سے حاصل ہوگی قیمت ر = ۰ جو کہ بوسیلہ ضرب کرنیکی داخل کیا گیا تہا اور اِسی کسیطرح کی تبدیلی مساوات مفروض مین نہین ہوگی بوسیلہ گذارنے دایرہ کی راس قریب البیضوی مین بہت فایدہ ہوتا ہی کیونکہ اس صورت مین وہ اشکال واقع نہونگے جو مثالون گذشتہ مین ہوا تہا یعنی اس صورت مین حساب نصف قطر مین کسور اعشاریہ کا کام نہین پڑتا ہی - مثال (۱) لا³ - ۶لا² - لا + ۶ = ۰ فرض کرو کہ

لا = ز + ۲ ∴ ز³ − ۱۳ ز² − ۱۲ ز = ۰ اب فرض کرو کہ

ز − لا = ۰ (۱) ∴ لا² − ۱۳ لا − ۱۲ ز = ۰

∴ ز² − ۱۲ ز + ن² − ۱۲ لا = ۰

یا (ز − ۶)² + (لا − ۶)² = ۷۲ (۲)



تین قیمتین ز کی شکل سے یہہ حاصل ہوتی ہین ۴ اور −۱ اور −۳

اسیواسطی قیمتین لا کی یہہ ہونگی ۹ اور −۱ اور −۱ مثال (۲) ۴ ز³ + ۶ ز − ۵ = ۰ اسکی ایک قیمت ممکن ہی جو کہ تقریباً = ۱/۴ مثال (۳) ۴ ز³ − ۳ ز + ۱ = ۰ واضح ہو کہ دریافت کرنین کہ کس ان مساوا تونکی تسیطرح مشکل نہین ہوسکتی ہی جبکہ ہم ایک ایسی قریب البیضوی جسکے وتر آتشی ایک ہی بہت صحیح طور سی کھینچین اور یہہ ترکیب فایدہ مند اکثر مساوا تو نین ہوگی

(۳۴۲) دریافت کرو دو وسط فی النسبت درمیان دو خط معلوم ط اور ص کے فرض کرو کہ ز اور لا دو خط مطلوب ہین اسیواسطی

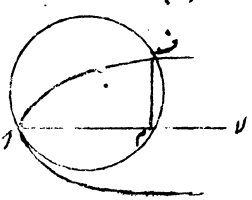
ط : ز :: ز : لا ∴ ز² = ط لا (۱)

∴ ز : لا :: لا : ص ∴ لا² = ص ز (۲)

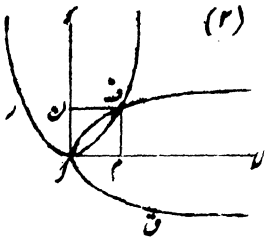
∴ ز⁴ = ط² لا² = ط² ص ز یا ز³ − ط² ص = ۰ لیکن جمع کرنے (۱) اور (۲) سے یہہ حاصل ہوگا ز² − ص ز + لا² − ط لا = ۰

یا (ز − ص/۲)² + (لا − ط/۲)² = (ط² + ص²)/۴ (۳)

(۱)



(۲)



فرض کرو کہ ق قریب البیضوی (۱) ہی تو اب تقاطع کرنے دایرہ (۳) سے م ف اور ر م دو وسط فی النسبت مطلوب دریافت ہو جاوینگے اور قسمتین مساوات ۳ - ط ص = ۰ نا ممکن ہین - یہہ شکل متقدمین ریاضی دانونمین بہت مشہور تھی - منجمی نے جسنے اغاطون کے مدرسہ مین تعلیم پائی تھی اس شکل کو حل کیا تھا اسکی ترکیب واسطے حل کرنے اس شکل کے بہت آسان ہی اسیواسطی اسکو ہم یہانپر بیان کرینگی - کھینچو ایک قریب البیضوی ف ا ق شکل (۲) مین جسکا وتر آتشی ط ہی اور کھینچو قریب البیضوی ف ر ا ر پر جو کہ لا پر عمود ہی اور جسکا وتر آتشی ص ہے تو اب سطح ط اور ر م یا ط اور ن م مساوی مربع م ف کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ ط اور م ف اور ن ف مقادیر متناسب ہین اور سطح ص اور ر ق یا ص اور م ف مساوی مربع ن ف کی ہی ∴ م ف اور ن ف اور ص مقادیر متناسب ہونگی یہانسے حاصل ہونگی یہہ نسبتین ط : م ف :: م ف : ن ف اور م ف : ن ف :: ن ف : ص ∴ ط اور م ف اور ن ف اور ص متناسب ہین - منجمی نے ایک اور طریقہ جو کہ قریب البیضوی اور بعید البیضوی پر موقوف ہے واسطے حل کرنے اس شکل کے لکھا ہی - ث ث ث

(۳۴۳) دریافت کرو ایک مکعب جو کہ دو چند ایک مکعب مفروض کا ہو۔ فرض کرو کہ ط ایک ضلع ایک مکعب مفروض کا ہی اسیواسطے وہ مساوات جسکا حل کرنا ہم چاہیں ہوگی

$ز^۳ = ۲ط^۳$ یا $ز^۳ - ۲ط^۳ = ۰$ فرض کرو کہ $ز = ط لا$ (۱)

$\therefore ط^۳ لا^۳ - ۲ط^۳ = ۰$ یا $لا^۳ - ۲ = ۰$ اسیواسطے جمع کرنیسے یہہ حاصل ہوگا

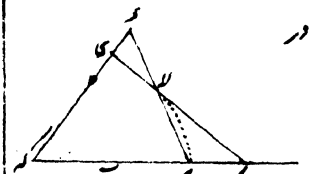
$ز^۲ - ۲ط ز + لا^۲ - ط لا = ۰$ (۲) جبکہ کھینچنگی ہم لوکس (۱) اور (۲) کا تو وہ ترم ف جو کہ انکی تقاطع سے پیدا ہوگا ایک ضلع مکعب مطلوب کا ہوگا۔

اس شکل کی ثابت کرنی مین مثل شکل مرقومہ بالا کی مہندسان متقدمین نے بڑی کوشش کی تہی اونکو معلوم ہوا کہ یہہ شکل پہلی شکل پر موقوف ہی کیونکہ اگر $ص = ۲ط$ تو اب وہ مساوات جو کہ موافق اس فرض کے حاصل ہوگی ایک سی ہوگی اسیطرح ایک ایسا مکعب دریافت ہوسکتا ہی جو کہ ایک مکعب مفروض سے ۸ گنا بڑا ہوگا۔

(۳۴۴) واضح ہو کہ ہم اسیطرح سی بہت سی وسطی النسبت دو مقدارون مفروض کی فرض کرسکتے ہین کیونکہ اگر $ز^۳$ مقدار اول وسطی النسبت مین سے ہو تو اولنسی سلسلہ آیندہ پیدا ہوگا $ط^۳$ اور $ز^۳$ اور $\frac{ز^۴}{ط}$ اور $\frac{ز^۵}{ط^۲}$ و $\frac{ز^۶}{ط^۳}$ وغیرہ فرض کرو کہ چار وسطی النسبت ہین اور اگر چھٹا جز سلسلہ کا ص ہو تو $\frac{ز^۶}{ط^۳} = ص$ یا $ز^۶ - ط^۳ ص = ۰$

اب بناؤ ایک قریب البیضوی جسکی مساوات یہہ ہی $ز^۲ = ط لا$ اور کھینچو لوکس اس مساوات کا $ز^۲ لا^۲ - ط^۳ ص = ۰$ ظاہر ہی کہ لوکس اسکا شاخین بعید البیضوی کی ہر ایک زاویہ ز لا اور ز لا مین ہونگی تو اب اوتار موافق صحیح قیمتون کے دریافت ہوسکتے ہین۔

(۳۴۵) واضح ہو کہ نیوٹن صاحب نے مساواتون کو بوسیلہ کن کواڈ ملومیدایز
کی بنایا تہا اور اوسنے یہہ بہی بیان کیا تہا کہ مساواتون کے بنانی مین اون خطوط
منحنی کو استعمال کرنا چاہئی جو بہت آسان ہون اسواسطی اسنی کن کواڈ کا استعمال
کیا کیونکہ صرف یہی خط بعد دایرہ کی بہت آسان ہی اور اگہ واسطی اسکی کہینچنی فقرہ
(۳۱۲) مین لکہا گیا ہی مثال آیندہ ایک مثال اون مثالون مین سے ہی جو کہ
نیوٹن صاحب کی کتاب یونی ورسل اریتھمیٹک مین لکہی ہین - فرض کرو کہ یہہ مساوات ہی
لا۳ + ف لا + ر = ۰ کہینچو ایک خط مستقیم کرا جسکا طول = ن اور کہ مین سی
قطع کرو کرب = $\frac{ق}{ن}$ اور تنصیف کرو ب ا کو نقطہ ص پر کہ کو مرکز کرکے اور
کہینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر کص ہو اور



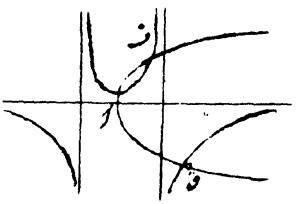
کہینچو امذ اسس دایرہ کی خط ص لا = $\frac{ر}{ن}$
اب ملاؤ خط اولا کا اور کہینچو ص لا اور
اولا کو اوداب بناؤ خط ی کا مساوی ص لا کے اسطرح پر کہ اگر خط ی کو
کہینچین تو وہ نقطہ کہ مین سے گذری تو اب بوسیلہ ہندسہ کی ثابت ہو سکتا ہی کہ
مساوات واسطی طول لا کی یہہ ہی لا۳ + ف لا + ر = ۰ یعنی لا کی قیمت اس
مساوات کی ہی واضح ہو کہ خط ی درمیان ص لا اور اولا کے بوسیلہ کن کواڈ
کی کہینچ سکتا ہی فرض کرو کہ نقطہ کہ کا قطب ہی اور اولا قاعدہ ہی اور ص ا
خط متحرک ہی تو اب بوسیلہ اس کن کواڈ کے نقطہ ی کا اسطرح سی معلوم ہو سکتا ہی
کہ ی ا = ا ص —

* یہہ کتاب اصول عامہ حساب مین ہی

(۳۴۶) واضح ہوکہ زیادہ مرتبہ کی مساوات مین ترکیب مذکورسے فایدہ مند نہین ہوگی کیونکہ اس صورتمین خطوط منحنی درستی سے نہین کھینچ سکتے ہین اس ترکیب سے اسقدر فایدہ ہوتا ہی کہ اوس سے چند ناممکن قیمتین ایک مساوات کی معلوم ہوجاتی ہین اور اسکے وسیلہ سے ہم تقریباً مقام نقاط تقاطع خط منحنی کا دریافت کرسکتے ہین لیکن مقام نقاط تقاطع درستی سے معلوم نہین ہوگا —

مثال $ص^۲ - ۳ص + ۱ = ۰$ فرض کرو کہ $ص^۲ = لا$ (۱) $\therefore لا^۲ - ۳ص + ۱ = ۰$ (۲)

یا $ص = \frac{۱}{۳ - لا^۲}$ لوکس (۱) کا قریب البضوی ف ق ہی ۔



اور لوکس (۲) کا خط منحنی تیسرے مرتبہ کا ہوگا اور ظاہر ہی کہ تین $لا$ نقاط تقاطع ہونگی اسیواسطے تین ممکن قیمتین ہونگی دو مثبت اور ایک منفی —

(۳۴۷) واضح ہوکہ استعمال کرنا خطوط منحنی کا واسطے معلوم کرنے قیمتونکی بالکل صحیح نہین ہوتا ہی ہمنے فقرہ (۳۴۲) مین بیان کیا ہی کہ بعض اوقات صحیح قیمتین مطابق ناممکن نقاط تقاطع کی ہوتی ہین اسیطرح ناممکن نقاط تقاطع انہی نقاط تقاطع سے یہہ ثابت نہین ہوتا ہی کہ صحیح قیمتین نہین ہین واسطی ثبوت اس مطلب کے فرض کرو کہ یہہ ایک مساوات ہی $لا^۳ + ۱۵ لا + ۱۴ = ۰$ فرض کرو $ص^۲ = لا^۳$ (۱) اسیواسطے $لا ص^۲ + ۱۵ لا + ۱۴ = ۰$ (۲) یہانسی ظاہر ہوتا ہی کہ اگرچہ لوکس (۱) اور (۲) کی آپس مین تقاطع نہین کرتی ہین

لیکن پہر بہی دو ممکن قیمتین ہین تو اب ظاہر ہی کہ غلطی خط منحنی (۱) کی فرض کرنے مین تہی جو کہ صرف مقام مثبت مین واقع ہی حال انکہ صورت مساوات سی معلوم ہوتا ہی کہ اسکی منفی قیمتین ہین اور جبکہ لوکس قریب البیضوی اور دایرہ کو فرض کرین تو قیمتین مساوات کی یہہ حاصل ہونگی -1 اور -2 یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ واسطی دریافت کرنے قیمتون کے دوسی زیادہ خطوط منحنی کا امتحان کرنا چاہیے

باب چہاردہم

خطوط منحنی غیر جبریہ کے بیان مین

(۳۴۸) فقرہ (۲۳) مین بیان کیا گیا ہی کہ اون مساواتون کو جنکی صورت محدود اور صحیح صورت جبریہ نہو تو اونکو غیر جبریہ کہتی ہین اسی قسم کی یہہ مساواتین ہین $y = \sin x$ اور $y = \log x$ باب دوازدہم مین ہمنے مساواتین خطوط منحنی کی بوسیلہ بعض خواص ہندسہ کی دریافت کی ہین لیکن بعضے خطوط منحنی ایسی ہین جو کہ بوسیلہ جبر مقابلہ کے تعبیر نہین ہوسکتی ہین یعنے وہ مساواتین مقادیر علم مثلث اور لوگارثم پر موقوف ہین اسیواسطی انکو مساواتین غیر جبریہ کہتی ہین ۔ ہم یہان دریافت کرینگی مساواتین اس قسم کی اون خطوط منحنی کی جو کہ بہت مشہور ہین اور بعض مشہور خاصیتین انکی بہی یہان بکہینگے لیکن وہ بجز اس حساب جزئیات و کلیات سی دریافت ہوسکتی ہین ۔

(۳۴۹) اس قسم کی خطوط منحنی مین بعضی ایسی خطوط منحنی ہین جیسیکہ کارڈی اوئیڈ جنکی مساواتونکو اجزای محدود جبریہ مین لکہہ سکتے ہین لیکن یہہ خطوط منحنی

بعض صورتین خاص غیر جبریہ کی ہین جو کہ باقی تمام خطوط منحنی سے غیر ترتیبی کے جدا نہین ہو سکتے ہین بعضی خطوط غنی غیر جبریہ کو خطوط منحنی آواتی کہتی ہین کیونکہ وہ حرکت متواتر سی بن سکتے ہین لیکن یہہ تمیز غلط معلوم ہوتی ہی کیونکہ تمام خطوط اسیطرح سی کہے سکتے ہین — ش ش ش

بیان خطوط منحنی لوگارتمی کا

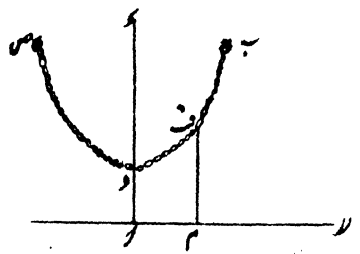
(۳۵۰) خط منحنی ق ب ف کو جسکا وتر العرض لو م لوگارتم وزم ف کا ہی خط منحنی لوگارتمی کہتے ہین — فرض کرو لو م = لا اور ہ ف = ۱ اسیواسطی موافق شرط مفروض کے لا = لوگ ۱ یعنی اگر ط عدد بنیادی لوگارتم کا ہو

تو ۱ = ط^لا دریافت کرنے مقام خط منحنی کے فرض کرو کہ لا = ۰

∴ ۱ = ط^۰ = ۱ اب جبکہ لا زیادہ ہوتا جاویگا ۱ سی ∞ تو لا زیادہ ہونا شروع کریگا ۱ سی ∞ اور جبکہ لا زیادہ ہوتا جاویگا ∞ تو ۱ گھٹتا جاویگا ۱ سے صفر تک ر ا مین سے قطع کرو ر ب = ۱ واحد خطی کے تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی داہنی طرف ر ب کی پھیلتا ہی اور اسطرف محور لا سی دور ہوتا جاتا ہی اور بائین طرف سی اوسکی پاس آتا جاتا ہی اور یہہ اسیواسطے خط متسفر الملاقی ہی — اس خط منحنی کو جیمس گریگری صاحب نی ایجاد کیا تہا اور ہالکینز صاحب نے دریافت کیا کہ اگر مماس ف ط و ق سے نقطہ ط پر ملی تو م ط مساوی ایک مقدار

مقررہ (لوگ ط / ۱) کی ہی اور اوسی پہیہ پہی معلوم کیا کہ سطح م ف ق لا جو کہ لانہایت پہیلیتا ہی طرف لا کے محدود ہی اور پہیہ مساوی دو چند مثلث ف م ط کی ہی اور وہ جسم جو کہ گردش اس سطح سی گرد لا لا کے پیدا ہوگا مساوی ہے ۱ ½ گنی اوس مخروط کی ہی جو کہ پہرنی مثلث ف ط م کی سی گرد لا لا کے پیدا ہوگا اگرچہ محدود ہونا اس جسم اور سطح کا عجیب معلوم ہوتا ہی مگر وہ اشخاص کہ جو جمع کر سکتے ہین ایسی سلسلون کو جنکے اجزا لانہایت تک گھٹتی جاتی ہین اسمین متعجب نہونگی اگر صورت مساوات کی پہیہ ہو ی = ط لا تو اسصورتمین بہی خط لوگارثمی حاصل ہوگا لیکن طرف مقابل مین نسبت ی کی واقع ہوگا یعنی محور ی کی منفی سمت کی طرف واقع ہوگا —

(۲۵۱) مساوات خطا ظنیری کی جو کہ لنکانی ایک زنجیر بارسنگ کے سی درمیان دو نقاط ب اور ص کے پیدا ہوتا ہی پہیہ ہی ی = ½ (کا لا + ی لا) اسمین



ر م = لا اور م ف = ی

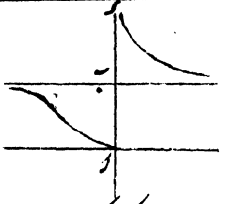
اور ا د = ا پہیہ مساوات

بوسیلہ آسان قواعد ہندسہ

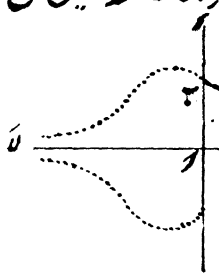
بالجبر کے حاصل نہین ہوسکتی ہے

لیکن بوسیلہ اس مساوات کی مقام خط منحنی کا دریافت ہوسکتا ہی جمع کرنی اوسکی اور دو لوگارثمی خطون کی سی جنکی مساواتین پہیہ ہین ی = ی لا اور ی = ی لا

(۲۵۲) دریافت کرو لوگس اس مساوات کا ی = ط لا

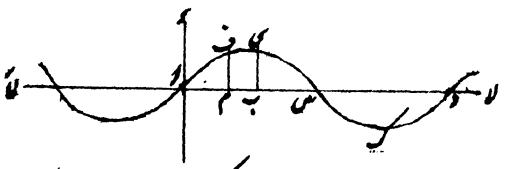


(۳۰۳) دریافت کرو اوس خط منحنی کو جسکی مساوات یہہ ہی ی = لا^لا فرض کرو لا = ۰ ۔ ی = ۱ اور فرض کرو کہ لا = ۱ ۔ ی = ۱ درمیان لا = ۰ اور لا = ۱ کی ہمین قیمت ی کی صدد آسکی حاصل ہوگی اور اگر لا آسی ص زیادہ ہوتا جاوی تو ی بہی لا نہایت بڑہیگا یہانسی معلوم ہوا کہ اگر اب = ۱ اور اص = ا تو حاصل ہونگی ہمین منحنی اب ف ق کی مطابق مثبت قیمتون لا کی فرض کرو کہ لا منفی ہر ۔ ی = (-لا)^-لا = (-لا)^لا اب اگر فرض کرین متواتر تین قیمتین ۲ اور ۲½ اور ۳ لا کی تو ظاہر ہی کہ ی مثبت یا ناممکن یا منفی ہوگا یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی مشتمل ہونا چاہئی تمام اون نقاط سی جو کہ اوپر اور نیچی محور لا کی علحدہ علحدہ واقع ہونگی چنانچہ حال اسکا بجز بی شکل مرقومہ ذیل سی معلوم ہوگا



بیان خط منحنی جیب مستویونکا

(۳۰۴) خط منحنی ا ف ی س کو جسکی اوتار م ف اور ب ی جیب مستوی و ترالعرض ا م اور ا ب کی ہین خط منحنی جیب مستویونکا کہتی ہین ۔ فرض کرو کہ ا م = لا اور م ف = ی تو اب ظاہر ہی کہ مساوات اس خط منحنی کی یہہ ہی ی = جس لا



یا ر = ر جس $\frac{\text{لا}}{\text{ر}}$ قطع کرو ا ب = $\frac{\text{کور}}{۲}$ اور ا س = کور اور

	۱	۲	۳	۴	۵
قیمتین لا کی	۰	$\frac{\text{کور}}{۲}$	کور	$\frac{۳\text{کور}}{۲}$	۲کور
قیمتین ا کی	۰	ر	۰	— ر	۰

و د = ۲کور تو (۱) سے معلوم ہوگا کہ خط منحنی کا متناہی محور کو نقطہ ا پر اور (۲) سے اگر ب ی = ر تو خط منحنی نقطہ ی میں سے گذریگا اور یہہ نقطہ سب نقاط خط منحنی سے بلند ہے کیونکہ درمیان (۱) اور (۲) کی آ زیادہ ہوتا ہے لیکن وہ درمیان (۲) اور (۳) کی گھٹتا ہے اور خط منحنی محور کو پھر س پر کاٹتا ہے اور س سے آ منفی ہوتا جاتا ہے جب تک وہ مساوی — ر کی ہو جاتا ہے اور اس جا سے گھٹنا شروع کرتا ہے جب تک وہ صفر ہو جاتا ہے تو اب موافق اسکی ایک دوسری شاخ س ک د کی مساوی اور مشابہ پہلی شاخ کے حاصل ہوگی پری ڈکلی آ اسیطور پر بڑھتا ہے اور خط منحنی اسیطرح لانہایت پہنچتا ہے اور چونکہ جس (— لا) = — جس لا تو یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ بائیں طرف آ کی بھی خط منحنی پہلیتا ہے موافق پہلے کی اسیطرح خطوط منحنی جیب التمام اور جیب معکوس اور مماس وغیرہ کی معلوم ہو سکتی ہیں اگر

اوتار خط منحنی جیب مستوی کو زیادہ یا کم کرین موافق ایک خاص نسبت کی تو وہ مساوات جو کہ موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ ہی (ا — م جس لا) اور یہہ خط منحنی بوسیلہ حرکت تارون موسیقی کے پیدا ہوگا اسیواسطے اس خط منحنی کو خط منحنی ہارمونک یا کیمان کہتے ہین —

(۳۵۵) شکل آیندہ متعلق ہی اوس خط منحنی سے جسکی مساوات یہہ ہی ر = لا س لا

ایسی خطوط منحنی فایدہ مند ہوتی ہین واسطے معلوم کرنے قیمتون مساوات کی مثلاً

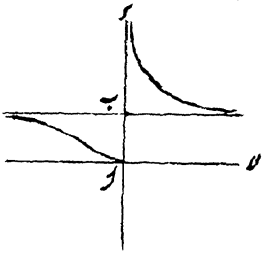
لا س لا = ط اگر کہینچین ہم خط منحنی کو اور قطع کرین آر ا ین سے ر ب = ط اور

نقطہ ب سے کہینچو ایک خط متوازی

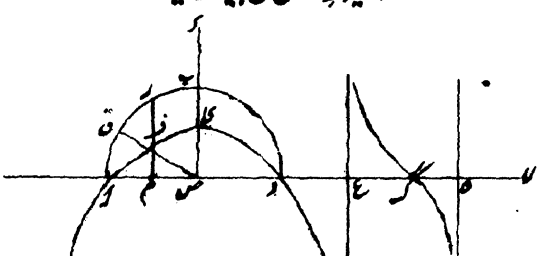
لا کے تو اب ظاہر ہی کہ اونا نقاط

تقاطع اس خط مستقیم اور خط منحنی کے

متعین یعنی لا س لا کی ہونگی —



کواڈریٹرکس کی بیان مین



(۳۵۶) فرض کرو کہ ص مرکز دایرہ آر ب د کا ہی اور فرض کرو کہ دوترم آر سرکتا ہوا

نقطہ آ سے ب ص تک حرکت اکیسان سے جبکہ نصف قطر ص ق حرکت کرتا ہی گرد نقطہ

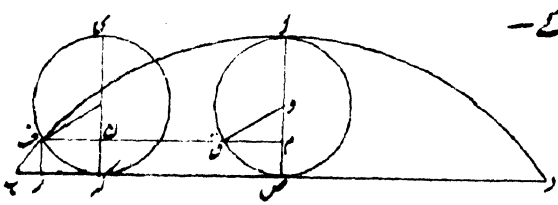
ص کے تو اب نقطہ تقاطع ف خط م ر اور ص ف کا خط منحنی کو اور ٹرلس بنا دیگا فرض
کرو کہ ا نقطہ شروع اور ا م = لا اور م ف = ر اور ا ص = نق اور زاویہ
ا ص ق = ر تو اب ظاہر ہو کہ ا م : ا ص :: ا ق : ا ب یعنی لا : نق :: نق : ر
:: کر لا : ر = کر لا / نق لیکن م ف = م ص مس ر ∴ ر = (لی - لا) مس کر لا / نق
اور یہی مساوات خط منحنی کی ہی جبکہ لا = ۰ تو ر = ۰ یعنی خط منحنی نقطہ ا سے گذرتا ہے
اور جبکہ لا نق سے زیادہ ہوتا جاتا ہے تو ر بھی بڑھتا ہی کیونکہ مماس جلدی زیادہ
ہوتا ہی بہ نسبت زاویہ کے اور جب لا = نق = ا ص تو ر = ∞ اور قیمت اسکی
بوسیلہ حساب جزئیات کی کر نق در یافت ہوگی پھر اسی معلوم ہوا کہ اگر ص ای = کر نق
تو خط منحنی نقطہ ی سے گذرتا ہی اور جبکہ لا زیادہ ہوتا ہی نق سے تو مقدار مماس کے
کم ہوتی ہی اور علامت اوسکی منفی اور اسیطرح سی علامت (لی - لا) منفی ہوتی ہی
∴ ر مثبت ہوگا اور یہہ گھٹتا جاتا ہی اور جبکہ لا = ۲ نق = او تو ر مساوی ب کی
ہو جاتا ہی اور جبکہ لا زیادہ ۲ نق سے ہوتا ہی تو مقدار مماس کی مثبت ہوتی ہی اسیواسطے
ر منفی ہی اور یہہ زیادہ بھی ہوتا ہی اور جبکہ لا = ۳ نق تو مماس = ∞ ∴
ر = - ∞ اسکی وسیلہ سے حاصل ہوتا ہی ایک خط متنفر الملاقات جو کہ نقطہ شروع
سی گذرتا ہی اور جبکہ لا ۳ نق سے زیادہ ہوتا ہی تو مماس کم ہوتا جاتا ہی اور علامت اسکی
منفی اسیواسطے ر مثبت ہی اور جب لا = ۴ نق تو ر = ۰ اور جب لا = ۵ نق
ہو ر = - ∞ اور درمیان لا = ۴ نق اور ۵ نق کے ر منفی ہی اسیواسطے ہمین
حاصل ہوگی ایک شاخ خط منحنی کی درمیان خطوط متنفر الملاقات کی جو کہ تقاطع اور

ہ سہ کھینچی جاوین گی اسیطرح سے حاصل ہونگی اور شاخین خط منحنی کی جیکہ آگی اسسے بڑھتی
اور شاخین خط منحنی کی بائین طرف آ کی دسی ہین جیسیکہ داہنی طرف د کی ہین
غالب ہی کہ اس خط منحنی کو ایک یونانی ریاضی دان نے جسکا نام ہیپیس تھا ایجاد
کیا ہو یہہ ریاضی دان سقراط کی زمانہ مین موجود تہا یہہ شخص تثلیث زاویہ کی کیا چاہتا تہا
بلکہ یہہ شخص ایک زاویہ کو کسی مساوی حصونمین تقسیم کرنا چاہتا تہا اسیواسطے اسنی
اس خط منحنی کو ایجاد کیا اور یہہ فی الحقیقت ہوسکتا ہی اگر خط منحنی درستی سے کہینچا جاوے
مثلا اگر تثلیث کرنی زاویہ اص ق کی منظور ہو تو کہینچو کواڈرٹرکس اور وترم ف
کو اور تثلیث کرو خط اکم کی نقاط ن اور د پر اور کہینچو او تا ن س اور وط
کو اڈرٹرکس کے تو اس مساوات سی ر = $\frac{\text{کہ}^{۲}}{۲\text{ق}}$ کی دریافت ہوگا کہ خطوط ص س
اور ص ط تثلیث زاویہ اص ق کے کرتی ہین اس خط منحنی کی وسیلے سے ڈیونسیس
سطح دایرہ کی معلوم کی ہی اسطرح پر کہ فرض کرو کہ نقطہ ی کا معلوم ہوسکتا ہی تو اسکی
قیمت کہ کی بوسیلہ اس مساوات کی ص ی = $\frac{\text{ک}^{۲}}{\text{ر}}$ دریافت ہوجاویگی تو اب
ظاہر ہی کہ نسبت درمیان محیط اور قطر دایرہ کی معلوم ہوجاویگی - واضح ہو کہ اسکے
ایک اور قسم کا کواڈرٹرکس ہے جسکو چرہاسن صاحب نے ایجاد کیا تہا اور یہہ
اسطرحسی ہوسکتا ہی کہینچو دو خط نقاط ن اور م مین سے متوازی اص اور ب ص
کی تو لوکس انکی نقطہ تقاطع کا خط منحنی مذکور ہوگا اور اسکی مساوات یہہ ہوگی

ہ = لو جم ($\frac{\text{کہ}}{۲}$ - ر) = لو جیس ر = لو جیس $\frac{۲\text{ر}}{\text{کہ}}$ —

خط وضعی کی بیان مین

(۳۵۷) اگر ایک دایرہ ی ف کہ گاڑی ایک سطح معروض مین خط معروض
ب ص د پر تو وہ نقطہ محیط کا جو کہ ابتدای حرکت مین نقطہ ب پر تہا گردش
دایرہ سی ایک خط منحنی ب ف د کا بناوے گا جسکو خط وضعی کہتے ہین یہہ خط
منحنی ایک کیل گاڑی کے پہیہ کی جبکہ گاڑی کسی سڑک پر حرکت کرتی ہو امین
بناتی ہی اسیواسطی دایرہ ی ف کہ کو جو کہ اس خط منحنی کو بناتا ہی پیدا کہتے ہین
خط د ب کو جسپر سے دایرہ ایک گردش مین گذرتا ہی قاعدہ خط وضعی کا کہتے
ہین اگر او ص وہ مقام بنانی والی دایرہ کا ہو جو کہ بیچ مین لوسکی رستہ
کی ہی تو اُس کو راس اور او ص کو محور خط منحنی کا کہتے ہین اور بنانی اس خط منحنی
سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ خط ب د مساوی محیط دایرہ کی ہی اور ب ص مساوی نصف
محیط دایرہ کی ہی اور اگر ی ف کہ مقام اس دایرہ کا فرض کیا جاوے اور نقطہ
ف وہ نقطہ جسپر خط منحنی بنتا ہی اور چونکہ ہر ایک نقطہ قوس ف کہ کا ب ف
پر منطبق ہوا ہی تو خط ب ف = قوس ف کہ اور کہ ص = قوس ی ف یا ہم
او ق کے —

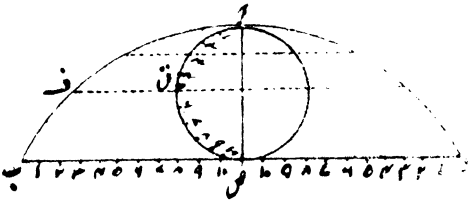


پھر چونکہ ف ن ق م متوازی قاعدہ ب د کے اور فرض کرو کہ اُ نقطہ شروع محور ان
متقاطع علی القوایم کا ہی اور او ص محور لا کا ہی بعد و مرکز دایرہ او ص کا ہی
اور فرض کرو کہ او م = لا اور او د = ط اور م ف = ء اور زاویہ او ق = ر

تو اب ظاہر ہی کہ بسبب مشابہت مقام دو دایرونکی ف ن = ق م اور
ن ف = ن م ∴ م ف = ق ف + م ق = ن م + ق م = کہس +
ق م = قوس اق + ق م یعنے ی = ط ر + ط جیب ر = ط (ر + جیب ر) (۱)
اور لا = ط − ط جم ر = ط جیب معکوس ر = ط جع ر (۲) تو اب ظاہر ہے
کہ وہ مساوات جسمین صرف لا اور ی پایا جاوے بوسیلہ دور کرنے ر مساوات (۱) اور (۲) مین سے حاصل ہوگی ہم ر = ط−لا/ب ∴ جیب ر = √(۲ط لا − لا²)/ب
اور ی = ط ر + ط جیب ر = ط جم⁻¹ (ط−لا/ب) + √(۲ط لا − لا²)
لیکن ہم مساوات خط منحنی کی جسمین لا اور ی پایا جاوی صرف بوسیلہ (۱) کے دریافت کرسکتے ہین یعنی اس مساوات سے م ف = قوس اق + ق م کیونکہ قوس اق = اوس قوس دایرہ کی ہے جسکا نصف قطر ط اور جیب معکوس لا ہی = ط {قوس دایرہ کے جسکا نصف قطر ایک اور جیب معکوس لا/ط} =
ط جع لا/ط ∴ ی = ط جع لا/ط + √(۲ط لا − لا²) اگر نقطہ شروع ب پر ہو اور ب ر = لا اور ر ف = ی تو مساوات یہہ ہوگی لا = ط − جیب ر اور ی = ط − ط جیب ر واضح ہو کہ ہم اس جا بحث اس خط منحنی کی نہین کرینگی کیونکہ صرف کھچی خط منحنی سے صورت اسکی دریافت ہوجاویگی اگرچہ بعض اشخاص کہتی ہین کہ پہلی گیلیلیو کو اسکا خیال نہین آیا تہا لیکن خط وضعی کا پہلی اسی نے امتحان کیا چونکہ ثابت کرنا اسکا تمام بڑی ریاضی دان سترہوین صدی کے جانتی تہی اسیواسطے یہہ خط منحنی بہت مشہور ہوا تمام مشہور خاصیتون اس

خط منحنی مین سے خواص آیندہ بہت مشہور ہین اول تمام سطح اس خط منحنی کا
مساوی مگنی سطح اوس دایرہ کی ہی جسکے گردش سی یہہ خط منحنی پیدا ہوا ہی
دوم قوس ارف مساوی دو چند وتر ارق کی ہی - سوم مماس جو کہ کہینچا
جاوے نقطہ ف سی متوازی وتر ارق کی ہوتا ہی چہارم اور اگر شکل الٹی جاوے
تو ایک جسم کسی ایک نقطہ ف خط منحنی سے گریگا طرف سب سے نیچی کے نقطہ آ کے
ایک ہی وقت مین اور اگر ایک جسم ایک نقطہ سی دوسرے نقطہ کل طرف گری جو
کہ ایک عمود مین ہون تو سنہ اسکی جلدی گریگا قوس خط وضعی کی ہوگی یعنی جسم مذکور
اس قوس پر جلدی سی مسافت طی کریگا بہ نسبت اوس خط مستقیم کی جو کہ درمیان
ان دو نقاط کی ہی واضح ہو کہ اس صورت مین واسطے گرنی اجسام کی قوس محدب خط
وضعی کے اوپر کو رکہنی چاہیئے تاکہ جسم اس پر سی جلدی سے گری -

(۳۵۸) معلوم ہی ہین قاعدہ خط وضعی کا دریافت کرو خط منحنی کو -

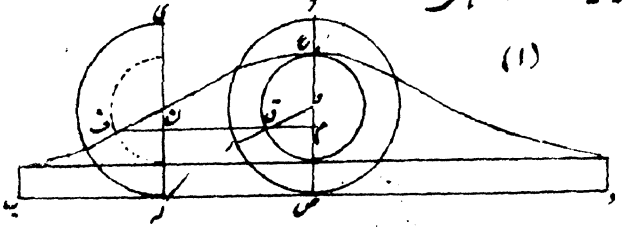


فرض کرو کہ قاعدہ ب د بائیس مساوی حصون مین تقسیم کیا گیا ہی اور مان لو کہ یہہ نقاط
د اور ب سے طرف ص کے گنی جاتے ہین نقطہ ص سے کہینچو عمود ص ا مساوی
سائیہ حصون مذکور کے اور ا ص پر بناؤ دایرہ ارق ص کا اور اسیطرح سی تقسیم
کرو ا ص کو اوسیقدر حصون مین بوسیلہ پیمایش یا بوسیلہ خط ب ص کے شکل

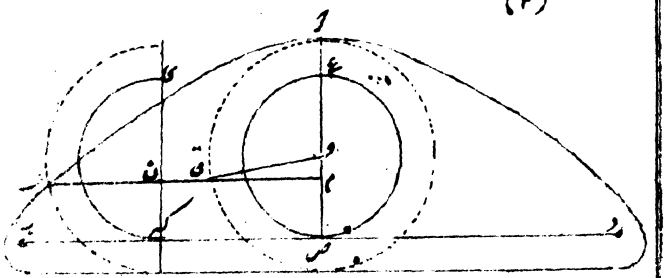
بالا مین نقطہ ق پانچوین حصہ کی انجام پر فرض کیا گیا ہی اور چونکہ قوس ق ص
مساوی ص ہ کی ہی اور اب اگر ف ق متوازی قاعدہ کی اسطرح کھینچا جاوے
کہ وہ مساوی باقی قاعدہ یعنی ب ہ یا ا ی کے ہو تو ظاہر ہی کہ ف ایک نقطہ خط
منحنی مطلوب کا ہوگا اسیطرح اور نقطے دریافت ہوسکتے ہین جنکی ملانی سے خط
وضعی مطلوب پیدا ہوگا نسبت محیط اور قطر کی اس صورت مین وہ ہی جو کہ ۲۲ کو ۷ سے

(۳۵۹) اب فرض کرو کہ نقطہ ق بجای ہونی کے محیط دایرہ پر اندر یا باہر
محیط دایرہ کی ہی صورت اولین مین خط وضعی کو خط وضعی کشادہ کہتی ہین جیسیکہ
شکل (۱) مین ہی اور صورت اخیر مین خط وضعی کو خط وضعی مختصر کہتی ہین
جیسیکہ (۲) مین ہی

(۱)

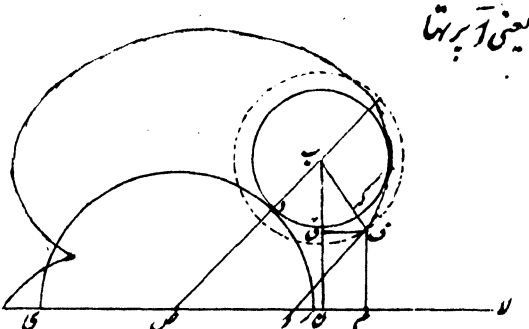


(۲)



ب د قاعدہ خط وضعی کا ہی جسپر دایرہ آرکص بنانی والا اس خط منحنی کا مرکز ہی
اور د مرکز اس دایرہ کا ہی اور ف وہ نقطہ ہی جس سے خط وضعی بنتا ہی جبکہ دایرہ
کہ پر ہی اور کھینچو خط ف ن ق م متوازی قاعدہ کے فرض کرو کہ آ نقطہ شروع
محور د ن متقاطع علی القوایم کا ہی اور ا م = لا اور م ف = ء اور ا د = ط
اور ع و = م ط اور زاویہ ا د ر = ر تو اب ظاہر ہی م ف = م ن + ف ن
= م ن + ق م = کہ ص + ق م = قوس ا ر + ق م اور ا م = ا د + د م
∴ ء = ط ر + م ط جس ر اور لا = ط جع ر یہہ مساواتین کشادہ یا مختصر خط
وضعی یا خود خط وضعی کی ہونگی جبکہ م کم یا زیادہ یا مساوے ایک کی ہوگا اگر
راس ع نقطہ شروع شکل (۱) اور (۲) کا فرض کیا جاوے تو ع و = ط
اور ا د = م ط اور م ف = کہ ص + ق م = قوس ا ر + ق م
∴ ء = م ط ر + ط جس ر = م جع $\frac{\text{ا لا}}{\text{ط}}$ + $\sqrt{\text{۲ ط لا − لا}^{۲}}$ وہ خط منحنی جسکی
مساواتین یہہ ہین ء = ط ر اور لا = ط جع ر شرکب خط وضعی کہلاتا ہی
(۳۶۰) بحث خط وضعی کی زیادہ ہو سکتی ہی جبکہ قاعدہ خط وضعی کا خط منحنی
فرض کیا جاوے مثلاً فرض کرو کہ قاعدہ ایک دایرہ ہی اور فرض کرو کہ ایک اور دایرہ
اس دایرہ کی محیط پر لڑکتا ہی تو ایک نقطہ جو کہ اندر یا باہر محیط لڑکنی والی دایرہ
کی ہی بناویگا ایک خط منحنی جسکو اپی ٹری کوائڈ کہتے ہین اور اگر یہہ نقطہ محیط دایرہ
ہو تو اوس خط منحنی کو جو کہ اس نقطہ کی گردش سے پیدا ہوگا نصف خط وضعی
کہتے ہین اگر دایرہ متحرک محوف ظرف دایرہ پر لڑکی تو وہ خط جو پیدا ہوگا ایک نقطہ

سی جو باہر یا اندر دایرہ متحرک کے کسی نقطی کو اڈ کہلاتا ہی اور جبکہ نقطہ مذکور محیط دایرہ مذکور پر نہو تو وہ خط جو اس نقطہ سی پیدا ہوگا کسی پہیا کی اڈ کہلاتا ہی۔ دریافت کرو مساوات نصف تری کواڈ کے فرض کرو کہ ص مرکز قاعدہ ی د کا ہی اور ب مرکز دایرہ متحرک د ف کا جبکہ وہ ایک خاص مقام پر ہو اور ص م ایک ایسا خط مستقیم ہی جو کہ مرکز دو دایرونمین سے گذرتا ہی جبکہ یہہ دونو دایرے اوس مقام پر تہے کہ انکی حرکت شروع ہوئی تہی یعنی جبکہ نقطہ بنانی والا اس خط منحنی کا قریب ص کے یعنی آ پر تہا



فرض کرو کہ ص آ محور لا کا ہی اور ص م = لا اور م ف = ی اور ص د = ط اور ب د = ص اور ب ف = م ص اور زاویہ آ ص ب = ر کہینچو خط ب ق کا متوازی م ف کے اور ف ق متوازی ی م کے اور چونکہ ہر ایک نقطہ ف کا قاعدہ آ د پر منطبق ہوا ہی اسیواسطے د ف = ط ر اور زاویہ د ب ف = $\frac{\text{ط ر}}{\text{ص}}$ اور زاویہ ک ب ق = زاویہ ک ب د − زاویہ ق ب د = $\frac{\text{ط ر}}{\text{ص}} - \left(\frac{\text{کے}}{۲} - ر\right)$ = $\frac{\text{ط + ص}}{\text{ص}} ر - \frac{\text{کے}}{۲}$ اور اب ظاہر ہی کہ ص م = ص ن + ن م = ص ب جم ب ص ن + ب ف جس ف ب ق = (ط + ص) جم ر +

م ص جس $(\frac{ط+ص}{ص} ر - \frac{کے}{۲})$ اور م ف = ب ن − ق ب =

$(ط + ص)$ جس ر − م ص جم $(\frac{ط+ص}{ص} - \frac{کے}{۲})$

$$\text{یا لا} = (ط+ص)\text{جم ر} - \text{م ص جم}\frac{ط+ص}{ص}\text{ر}$$
$$\text{اور ی} = (ط+ص)\text{جس ر} - \text{م ص جس}\frac{ط+ص}{ص}\text{ر} \quad (۱)$$

مساواتین اپنی نہایک لواڈ کے دریافت ہوسکتی ہین جبکہ ص بجاے م ص کے (۱) مین لکھا جاوے

$$\therefore \text{لا} = (ط+ص)\text{جم ر} - \text{ص جم}\frac{ط+ص}{ص}\text{ر}$$
$$\text{اور ی} = (ط+ص)\text{جس ر} - \text{ص جس}\frac{ط+ص}{ص}\text{ر} \quad (۲)$$

مساواتین ہای پوتری کواڈ کی دریافت ہوسکتی ہین اسیطرح جسطرح (۱) کی دریافت ہوئی ہین یا آسانی سے دریافت ہوگی جبکہ − ص بجاے ص کے مساواتون (۱) مین لکھا جاوے

$$\therefore \text{لا} = (ط-ص)\text{جم ر} + \text{م ص جم}\frac{ط-ص}{ص}\text{ر}$$
$$\text{اور ی} = (ط-ص)\text{جس ر} - \text{م ص جس}\frac{ط-ص}{ص}\text{ر} \quad (۳)$$

اور مساواتین ہای نہایک لواڈ کی دریافت ہوسکتی ہین جبکہ − ص بجاے ص اور م ص کے (۱) مین لکھا جاوے

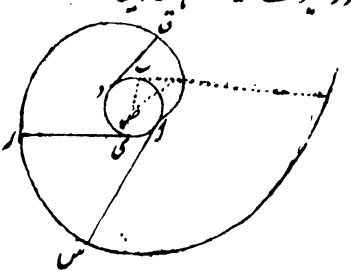
$$\therefore \text{لا} = (ط-ص)\text{جم ر} + \text{ص جم}\frac{ط-ص}{ص}\text{ر}$$
$$\text{اور ی} = (ط-ص)\text{جس ر} - \text{ص جس}\frac{ط-ص}{ص}\text{ر} \quad \ldots\ldots (۴)$$

ظاہر ہی کہ تمام صورتین گذشتہ (۱) مین داخل ہین لیکن ہر ایک انمین سے بوسیلہ انکی علیحدہ علیحدہ شکلون کے حاصل ہوسکتی یا موافق خاص فرضون کے معلوم ہوسکتی ہی

(۳۶۱) دریافتہ مقادیر شکلی کا تعین اور اس عمل سے ایسی مساواتین

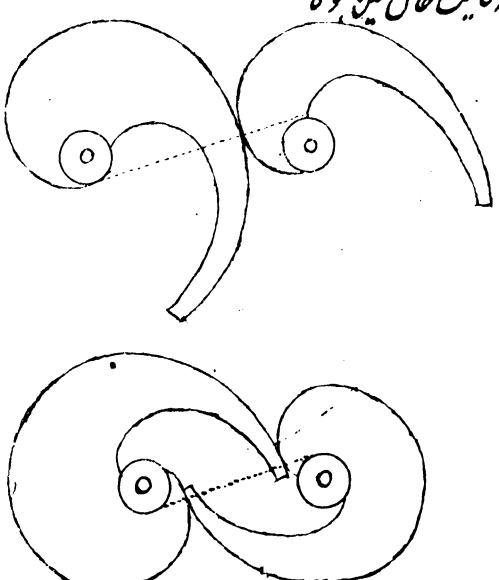
جبر یہ حاصل ہوگی جو کہ محدود ہوگی اور یہہ اوسوقت ہوسکتا ہی جبکہ نسبت درمیان
ط اور ص کی ایسی ہو جیسی صحیح اعداد مین ہوتی ہی کیونکہ اس صورت مین
جم ر اور جم $\frac{ط+ص}{ص}$ ر اور جس رو وغیرہ تعبیر ہوسکتی ہین ایسی صورتون
مثلثی سے جسمین اجزای حم ھ اور جس ھ پائی جاوینگی اور ھ ضعف مشترک
ر اور $\frac{ط+ص}{ص}$ ر کا ہی اور اب اجزای جم ھ اور جس ھ اجزای لا اور ی
مین دریافت ہوسکتی ہین اور چونکہ وہ مساوات جو کہ موافق اس فرض کی اجزای
لا اور ی مین حاصل ہوگی محدود ہی اور خط منحنی لا نہایت سلسلہ گردشون
کا بناتا ہی لیکن دایرہ متحرک مین بعد چند گردشون کے وہ نقطہ جس سے خط منحنی
بنتا ہی اوسی مقام پر دریافت ہوگا جس مقام پر وہ ابتدای گردش مین تہا
اسلیو اسطی یہہ نقطہ دوسری خط منحنی پر بناوینگا مثلا فرض کرو کہ ط = ص تو مساوات
نصف خط وضعی کی یہہ ہوگی لا = ط (۲حم ر - حم ۲ر) اور ی = ط (۲حس ر - حس ۲ر)
∴ لا = ط (۲حم ر - ۲(حم ر)۲ + ۱) اور ی = ۲ حس ر (۱ - جم ر) بوسیلہ
پہلی مساوات کی قیمت جم ر کے دریافت ہوگی اور دوسری مساوات سی قیمت جس ر
کے معلوم ہوگی اور جبکہ جمع کرینگی ہم قیمتون (جم ر)۲ اور (جس ر)۲ کو تو بعد
اختصار کی یہہ حاصل ہوگا (ی۲ + لا۲ - ۳ ط)۲ = ۴ ط۲ (۳ - $\frac{۲لا}{ط}$) یا
(لا۲ + ی۲ - ط۲)۲ - ۴ ط۲ ((لا - ط)۲ + ی۲) = ۰ چونکہ اس خط کی شکل
مثل صورت دل کی ہی اسیواسطی اسکو کارڈی اوڈ کہتی ہین فرض کرو کہ ر نقطہ
شروع یعنی بجای لا کے لکھو (لا + ط) مساوات گذشتہ مین تو اب جبوقت بدلین

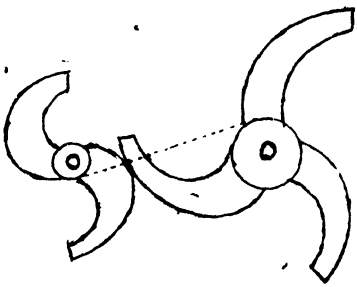
ہم اس مساوات کی محور کو قطبی محور دلسی تو اس صورت مین مساوات کارڈی آوائڈ
کی یہہ ہوجاویگی نق = ۲ ط (۱ − جم ھ) —— ش
(۳۶۲) اگر ص = $\frac{ط}{۲}$ تو مساوات (۴) ہائپی سائیکلوائڈ کی یہہ ہوجاویگی
ل = ط جم ر اور ز = ۰ اور اس صورت مین ہائپی سائیکلوائڈ قطر دایرہ اصلی
کا ہوجاویگا اور اسی صورتمین مساوات ہائپی ٹرخی کوائڈلی یہہ ہوگی
ل = $\frac{ط}{۲}$ (۱ + م) جم ر اور ز = $\frac{ط}{۲}$ (۱ − م) جس ر اور جبکہ دور کرین ھم
ر کو اس مساوات مین سے تو حاصل ہوگی ہمین مساوات بیضوی کی جسکے محور یہہ ہونگی
ط (۱ + م) اور ط (۱ − م)
(۳۶۳) اگر ایک دور اجو کہ دایرہ پر لپٹا ہوا ہی کہولا جاوے تو انجام اس دور کا
بناویگا ایک خط منحنی جسکو انوولیوٹ دایرہ کا کہتے ہین -



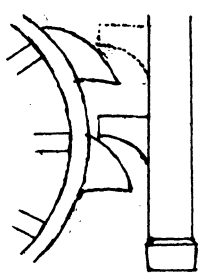
مثلاً فرض کرو کہ ایک دورا
گرد دایرہ آ ب د کی لپٹا ہوا
ہی اور اب اگر کہولا جاوے
یہہ دور انقطہ آ سی تو وہ
انجام جو کہ ناتہ مین ہی انوولیوٹ اف ق ر س دایرہ کا بناویگا خطوط ب ف
اور د ق اور ر اور اس جو کہ خاص مقام دوری کی ہین مماس دایرہ کی ہین اور
ہر ایک انمین سے مساوی اس قوس کے ہی جو کہ درمیان آ اور اوس انجام دورہ کے
واقع ہی جو کہ دایرہ پر ہی یہہ خط منحنی لانہایت گرد نشین کرتا ہی اور شاخین اسکی

ایک دوسری سی اوس فاصلہ پر واقع ہین جو مساوی محیط دایرہ کی ہی - دریافت کرو
مساوات انوولیوٹ کی فرض کرو کہ ص ا = ط اور ص ف = ق اور زاویہ
ا ص ف = ر تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ مثلث ب ص ف ہمین یہہ حاصل ہوتا ہی
ب ص = ف ص جم ف ص ب یا زاویہ ف ص ب = جم^-۱ ط/ق ∴ ب ف = ۰
= ط (جم^-۱ ط/ق + ر) یا √(ق^۲ - ط^۲) = ط (جم^-۱ ط/ق + ر) ∴
ر = √(ق^۲ - ط^۲)/ط - جم^-۱ ط/ق انوولیوٹ دایرہ کا بہت فایدہ سی دانستہ ایسون
استعمال مین لایا گیا ہی کیونکہ طاقت بہت کم ضایع ہوگی ایک دانت سی دوسری
دانت تک گذرنی مین جبکہ وہ اس صورت کی ہونگی اور جب یہہ مختلف صورتونکے ہونگے
تو یہہ فایدہ حاصل نہین ہوگا





اشکال (۲) اور (۳) مین دو سادی پہیہ ہین ہر ایک انمین سے دو دانت رکھتا ہی اور ایک پہیہ کو حرکت دینی سی دوسرا پہیہ جسکی دانت پہلی سے ملی ہوئی ہین حرکت کریگا خط نقشدار جو کہ اشکال

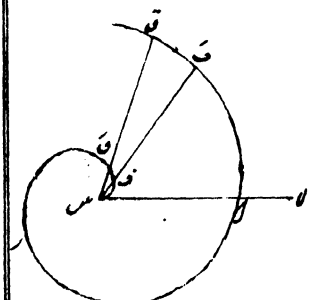


مرقومہ بالا مین ہین مماس انولیوٹ کی موافق خاصیت اس خط منحنی کے ہوگی اور یہی خط ہمیشہ مماس خط منحنی کا ہوگا اور ایک ہی قوت ہر ایک حصہ اوس خط مین ہوگی جسمین پہیہ گردش کرتی ہین شکل (۳) ایک اور مثال اس قسم کی ہی اور جبکہ متعدد اور چھوٹی چھوٹی دانت پہیہ کے بنائی جاوین تو دانت دار سطح ہمیشہ ملی ہوئی رہینگی اور اسیواسطے کل کے متحرک کرنیمین بہت آسانی ہوگی اگر ڈانٹ یا ہتوڑی کے اوٹھانی مین انولیوٹ دایرہ کا مستعمل کیا جاوے تو ظاہر ہی کہ یہہ واسطی دانت پہیی کے بہت مفید ہی کیونکہ قوت اس صورت مین دانت پر سمت عمود مین گرتی ہے —

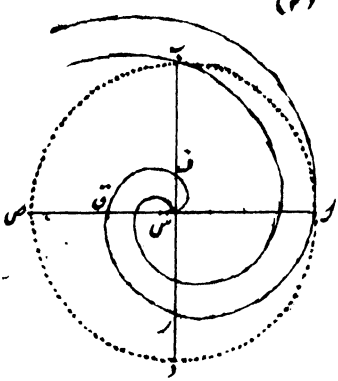
(خطوط پیچیدہ کے بیان مین)

(۳۶۴) واضح ہو کہ چند خطوط غیر جبریہ جنکا اب تک بیان نہین ہوا ہی بسبب بوکنی صورت پیچیدہ کی خطوط منحنی پیچیدہ کہلاتی ہین انکو مہندسان متقدمین نے ایجاد کیا تہا اور انہون نے نقوش اس صورت کی مکانون پر کروائی تہے ان خطوط منحنی مین سے بہت آسان اور فایدہ مندوہ خط منحنی پیچیدہ ہے جسکو آرکمیدیز نے ایجاد کیا تھا اور یہہ خط اسطرح بمتناہی فرض کرو کہ جب ایک خط مستقیم غیر محدود س ف گرد خط س ا اور نقطہ س کے پہرتا ہی اوسیوقت مین ایک نقطہ ف خط س ف پر حرکت کرتا ہی تو اب ظاہر ہی کہ یہہ نقطہ خط منحنی س ف ر کا بنا دیگا اور جبکہ خط س ف ایک گردش تمام کریگا تو نقطہ ف مقام آ پر اویگا اور اسیطرح جبکہ خط س ف پہرتا جاویگا تو ایک سلسلہ پیچیدہ خطوط کا بنیگا

(۱)



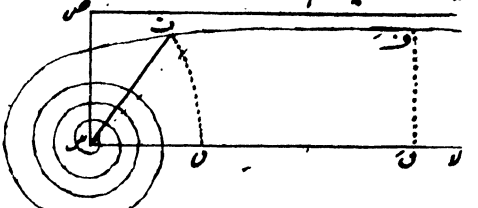
(۲)



واسطے دریافت کرنے صورت اور خواص اس خط منحنی کے بمین مساوات اس خط منحنی کی نسبت

اوتار قطبی کی دریافت کرنے چاہیئی - فرض کرو کہ س ف = ق اور س ا = ص
اور ا س ف = ر اور چونکہ زیادتی ق اور ر کی ایک سی ہی تو
س ف : س ا :: زاویہ ا س ف : چار قایموں سے :: ر : ۲ کہ جہان کہ = ۱۸۰°
∴ ق = ص ر / ۲ کہ اس مساوات سے معلوم ہوتا ہی جبکہ س ف دوگردشین کرتا ہی
یعنی ر = ۴ کہ تو ق = ۲ ص یا خط منحنی پہر محور س ا کا فاصلہ ۲ س ا پر قطع کریگا
اسیطرح جسی بعد ۳ اور ۴ اور ۵ گردشون کے وہ ملتاہی محور س ا سے فاصلہ
۳ یا ۴ یا ۵ گنے س ا پر اور آرکمیڈیز نے دریافت کیا کہ سطح س ف ق ر
مساوے ایک ثلث سطح اُس دایرہ کے ہی جسکا مرکز س اور نصف قطر س ا ہی —
(۳۶۵) خط پیچیدہ آرکمیڈیز صاحب کا بعض اوقات مینار کے ایک خاص حصہ کے
بنانی مین کام آتا ہی اور اس صورتمین طریقہ آیندہ واسطے بنانی اس خط کی بوسیلہ
نقاط کی بہت اچھا ہی فرض کرو کہ دایرہ ا ب ص د قطر ص س ا پر شکل (۲) مین
کھچا ہوا ہے اور کھینچو قطر ب د عمود ص ا پر اور تقسیم کرو نصف قطر س ا کو چار
ساوی حصونمین اور س ب مین سے قطع کرو س ف = ۱/۴ س ا اور س ص مین
سے س ق = ۱/۲ س ا اور س د مین سے س ر = ۱/۴ س ا تو اب مساوات
خط منحنی سے ظاہر ہوگا کہ یہہ نقاط خط منحنی کی ہینگی اور اگر اسیطرح نصف قطر س ا
کو اور حصص مین اور ہر ایک زاویہ کو جو ربع دایرہ مین واقع ہی تقسیم کرین تو ہمکو
اور بہی نقاط خط منحنی کے دریافت ہو جاوینگے اور واسطے تمام کرنی اوبہری ہوئی گنبری
حصہ مکوز مینار کے ایک اور خط پیچیدہ شروع ہونا ہی خط س ب سے —

(۳۶۶) خط پیچیدہ آرکمیڈیز کا ایک خط اون خطوط پیچیدہ میں سے ہی جو اس سادہ عام خط پیچیدہ کی ہمسری پیدا ہوتے ہیں نق = طارن اس قسم کی خط پیچیدہ کی ہم وہ صورتیں بیان کرینگی جہاں ن = -۱ اور ن = -۱/۲ کی ہو جاتا ہی -

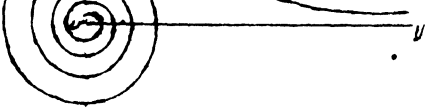


فرض کرو کہ ن = -۱ ∴ نق = طار^-۱ اور مان لو کہ س قطب ہی اور س لا وہ محور ہے جس سے ر کا شمار کیا جاتا ہی اور س ف = ر اب ظاہر ہی کہ جب ر = ۰ تو ق = ∞ اور جبکہ ر زیادہ ہوتا ہی تو نق پہلے بہت جلد کم ہوتا جاتا ہی مگر بعد اسکی قریب بکیان رفتار سے کم ہوتا ہی اور جبکہ ر لا نہایت زیادہ ہوتا جاوے گا تو اوسیطرح ق لا نہایت کم ہوتا جاویگا اور قریب صفر کے آتا جائیگا مگر کبھی صفر نہین ہوگا یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ لا نہایت پیچ گرد نقطہ س کی ہونگی کھینچو ف ق قوس دایرہ کی س کو مرکز اور س ف کو قطر کر دائکی تو اب ظاہر ہی کہ ق ف = ل ر = ط اور چونکہ یہہ قیمت ط اوسطی ہر ایک مقام ف کی ایک ہی ہے تو ق ف = ق ک = خط ص س کی جبکہ ف لا نہایت فاصلہ پر ہوگا اسوسطے اس صورتمین خط منحنی نزدیک اوس خط مستقیم الملاقات کی ہونگیا جو نقطہ ص سے متوازی س لا کے کھینچا جاویگا اس خط منحنی کو خط پیچیدہ ممکافی کہتی ہین موافق صورت اسکی مساوات کی کیونکہ مقادیر غیر منقطع نسبت ممکافی ایک دوسرے

رکھتی ہین اور بعض اوقات بعید البیضوی کا خط پیچیدہ ہوتی ہین کیونکہ مساوات اسکی مشابہ مساوات اوس بعید البیضوی کے ہی جسکی مساوات نسبت خطوط متنفر الملاقات کی حاصل ہوتی ہی اور جو یہہ ہی (لا ۲ = کر ۲)

(۳۶۷) فرض کرو کہ ن = $-\frac{۱}{۲}$ ∴ ن = طر $\frac{۱}{۲}$ یا ن ۲ ر = ط ۲

یہہ خط سنخی مثل شکل طنبور کے ہی اور صورت اسکی شکل مرقومہ ذیل سی ظاہر ہوگی یہہ خط سنخی خط متنفر الملاقات س لا سے شروع ہوکی لانہایت پیچ گرد نقطہ س کی کہاتا ہے



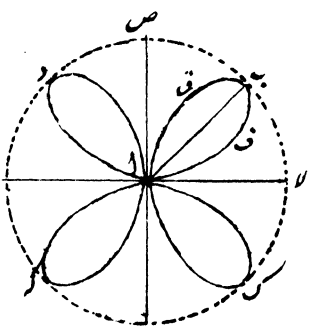
(۳۶۸) اگر اس مساوات ن ر = ط مین سے ہم ایک مقدار مقررہ ص تفریق کرین تو ہمکو یہہ مساوات حاصل ہوگی (ن - ص) ر = ط یہہ خط شروع کرتا ہی اپنی دورہ کو مثل خط پیچیدہ متکافی کی مگر جبکہ ر زیادہ ہوتا ہی تو (ن - ص) قریب صفر کی ہوتا جاتا ہی یعنی قیمت ن کے قریب ص کی ہوتی جاتی ہی پہانسی معلوم ہوتا ہی کہ خط پیچیدہ بعد لانہایت گردشون کے قریب اوس دایرہ کی آتا ہی جو خط متنفر الملاقات ہی اور جسکا نصف قطر ص اور مرکز س ہی

(۳۶۹) دریافت کرو اوس خط پیچیدہ کو جسکی مساوات یہہ ہی ر = ط ÷ (ن - ن ۲) = ص یہہ خط سنخی لانہایت گردشین گرد قطب کے کرتا ہی اور بہ آہستگی پہلیناہی طرف

اوس دایرہ کے جو خط متنفر الملاقات ہی اور جسکا نصف قطر ط ہی ۔ خ
(۳۷۰) وہ خط پیچیدہ جسکی مساوات یہہ ہی (ل - ط)² = ص² ر شروع کرتا ہی
اپنی دورہ کو ایک نقطہ محیط دایرہ سے جسکا نصف قطر ط ہی اور پہلتا ہی باہر کیطرف
بعد لانہایت گرد شون کے گرد نقطہ س کے یہہ خط منحنی پیدا ہوگا بوسیلہ لیٹنی محور
قریب البیضوی کے گرد محیط ایک دایرہ کے ہسطرح پر کہ خط منحنی قریب البیضوی کا پیچیدہ
بناوے ۔ خ (۳۷۱) وہ خط منحنی جسکی مساوات یہہ ہی ل = ط خط پیچیدہ
لوکارتمی کہلاتا ہی کیونکہ لوکارتم نصف قطر محرک کا متناسب زاویہ ر کی ہی
بعد آزمانی تمام قیمتون ر کی ∞ سی لانہایت تک معلوم ہوتا ہی ہین کہ یہہ خط
منحنی لانہایت گرد شین گرد قطب س کے کرتا ہی اور اس خط منحنی کو خط پیچیدہ
مساویہ الزاویہ بھی کہتے ہین کیونکہ بوسیلہ بعض بڑی اُصول ہندسہ یا الجبر کی دریافت
ہوتا ہی کہ یہہ خط منحنی نصف قطر محرک کو ایک زاویہ مقررہ پر قطع کرتا ہی یعنی جو زاویہ
اُسکی تقاطع سی حاصل ہوگا وہ مساوی مقدار مقررہ کی ہی ۔ ڈس کارٹیز صاحب نے
(جسکو پہلی خیال اس خط منحنی کا آیا تہا) معلوم کیا کہ تمام طول اس خط کا کسی ایک نقطہ
ف سی قطب تک متناسب اوس قطر محرک کی ہی جو ف پر ہی ۔
(۳۷۲) یہہ اگر واقع ہوتا ہی کہ مساوات جبریہ ایک خط منحنی کی زیادہ مشکل ہوتی ہی
بہ نسبت اوسکی قطبی مساوات کی جسیکہ مساوات کن کو اڈسی جسکا بیان فقرہ ۳۱۲ مین
کیا گیا ہی حال اس بات کا بخوبی واضح ہی اسیواسطی ان صورتون مین یہہ بہتر
معلوم ہوتا ہی کہ مساوات جبریہ مساوات قطبی سے بدل جاوے تاکہ آسانی خط منحنی

کی معلوم کرنے مین ہو دی مثلاً اگر مساوات یہہ ہو (لا۲ + ر۲)۲ = ۲ط لا۲ ر تو ظاہر ہی کہ بہت مشکل سی صورت خط سخنی کی بوسیلہ اس مساوت کی دریافت ہو گی لیکن اگر فرض کرین لا = ق جم ر اور ر = ق جس ر موافق فقرہ (۶۱) کی

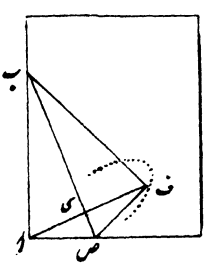
ث ق۳ = ۲ط ق۲ جم ر جس ر یا ق = ۲ط جم ر جس ۲ ر فرض کرو



کہ آ نقطہ شروع ہے اور آلا وہ محور ہی جس سے ر شمار کیا جاتا ہے آ کو مرکز اور ط کو نصف قطر گردانکی کھینچو دایرہ ب ص د کا تو اب ظاہر ہی کہ جب ر = ۰ تو ق = ۰ اور جیکہ ر زیادہ ہوتا ہی ۰ سے ۴۵° تک تو ق زیادہ ہوتا ہے ۱ سے ط تک موافق اسکے شاخ آف ب کی حاصل ہو گی اور جب کہ ر زیادہ ہوتا ہے ۴۵° سے ۹۰° تک تو ظاہر ہی کہ قیمت جس ۲ ر کی کم ہو گی آ سے ب تک ث ق کم ہو گا اور اسی ہیئت شاخ ب ق آ کی معلوم ہو گی اسیطرح سے ایک دوسری بیضی صورت دوسرے ربع دایرہ مین حاصل ہو گی اور جیکہ ر زیادہ ہونا شروع کریگا ۱۸۰° سے ۳۶۰° تک تو ظاہر ہے کہ دو بیضی تیسری اور چوتھی ربع دایرہ مین معلوم ہونگی اور چونکہ جیب مستوی ایک قوس کی زیادہ ایک ہی طور سے ہوتی ہی ہر ایک ربع دایرہ مین اسیطرح چارون بیضی مشابہ اور مساوی ایک دوسرے کی حاصل ہو گی اس صورت مین ہمنی لحاظ علامت جیب یہ تی کا نہین کیا ہی ہمنی صرف قیمت ر زیادہ ہوتی ہوئی فرض کی ہی

جسی ۳۶۰° تک اور اس طریقہ کو بہتر ترجیح دی ہی اور اس طریقہ پر جسکی وسیلہ سے ر کو زیادہ ہوتا ہوا جسی ۱۸۰° تک فرض کرتے ہین اور بعد اسکی فرض کرتی ہین کہ علامت اسکی بدلتی ہی اگر یہہ مساوات ہوتی (لا + ی)^۲ = ۲ ط لا ر تو اس صورتین بہی ہمکو ویسی ہی بیضئی پہلی اور چوتہی ربع دایرہ مین حاصل ہوتی واضح ہو کہ لوکس مساوات آیندہ کا نوں = ط (حم ر - جس ر) ویسی ہی صورت کا ہی مگر یہہ مقیم مختلف طور سی نسبت لا اور ص کے ہی - لوکس مساوات لمنکیسٹا کا جو یہہ ہی نوں = ط^۲ حم ۲ ر سوا اس فقرہ (۳۱۴) کے بطور مرقومہ بالا کی حاصل ہوسکتا ہی - ح

(۳۷۳) واضح ہو کہ اکثر اشکال غیر منقطع مین ہمکو معلوم ہوتا ہی کہ اوتار قطعے بہت مفید ہوتے ہین مثلاً فرض کرو کہ ایک کنارہ ایک صفحہ کاغذ کا بہیر گیا ہی صورت ب ص ف مین اور اسطرح پر کہ مثلث ب ص ف مساوی ایک مقدار مقررہ کے ہی اب چاہتے ہین ہم دریافت کرنا لوکس ف کا - فرض کرو کہ اف = نق اور زاویہ ف اص = ر اور سطح اب ص = ط^۲ اور چونکہ مثلث اب ی اور ف ب ی مساوی ہین تو ظاہر ہی کہ ای = ½ نوں اور زاویہ ای ب قایمہ ہوگا ∴ ای = اص جم ر اور ای = اب جم (½ ک - ر) = اب جس ر ∴ نوں^۲ / ۴ = ط^۲ / ۲ جس ر جم ر یا نوں^۲ = ط^۲ جس ۲ ر یہانسی ثابت



ہوتا ہی کہ لوکس اسکا بیضئی اوف پ ق مثل شکل گذشتہ کی ہی - اگر ایک نقطہ
س ف پر جو نصف قطر متحرک قریب البیضوی کا ہی اسطرح پر فرض کیا جاوے کہ فاصلہ
اوسکا نقطہ آتشی سے مساوی اوس عمود کی ہو جو کھینچا جاوے نقطہ آتشی سے مماس
پر تو لوکس نقطہ مذکور کا وہ خط منحنی ہوگا جسکی مساوات یہہ ہی ہوں = طسٹ ½

حصۂ دویم

مشتمل اوپر اوس فرع اس علم کے ہی جسمین تین بُعد کی مقدار و نسبی بحث ہی

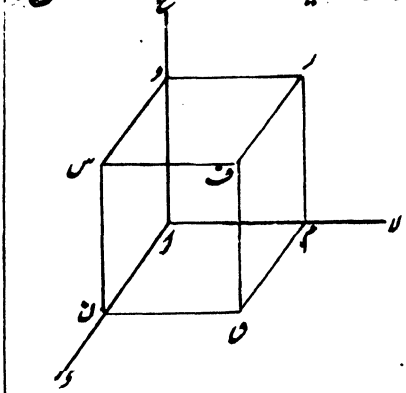
باب اول

آغاز

(۳۷۴) پہلی حصہ مین اس کتاب کی نقاط اور خطوط کو ایک سطح مین فرض کیا ہی اور مساوات اونکی بلحاظ دو دو ترون کے دریافت کی گئی ہی اور یہہ اوتار ایک سطح مین خیال کی گئی ہین اب ظاہر ہی کہ ہم ایک ایسا خط منحنی فرض کرسکتے ہین جو ایک سطح مین نہو اور ایسی سطح کو فرض کرسکتی ہین مثلاً سطح کرہ کی ایک ایسی سطح ہی کہ تمام نقطے اوسکی ایک سطح مین نہین ہین اسیواسطے وہ طریقہ جو کہ پہلے حصہ مین واسطے دریافت کرنے شکلون کے استعمال مین لایا گیا ہی اسجگہ مستعمل نہین ہوسکتا ہی تو ابہ واسطے دریافت کرنے ایسی اشکال کے جو تین بُعد سے تعلق رکھتی ہین ایک عام طریقہ لکھا جاویگا۔

(۳۷۵) واضح ہو کہ اول ہم مقام ایک نقطہ کا بلحاظ تین بُعدون کے دریافت کرینگی فرض کرو کہ ع ا ا اور ع ا ا اور ا ا ا تین ایسی سطح ہین جو کہ عمود ایک

دوسری پر ہین اور لا اور لا ی اور ی ع فصل مشترک انکی ہین اور ی پر
وہ نقطہ ہی جہانکہ یہہ تینون سطحین ملتی ہین - فرض کرو کہ نقطہ ف سطح جو



واقع ہی اور کھنچو اس نقطہ سی
خط ف ق اور ف ر اور ف س
اسطرح پر کہ وہ عمود سطح لا ا ی
اور ع لا اور ع ا ی پر ہون
تو اب ظاہر ہی کہ مقام نقطہ ف
کا معلوم ہوگا جبکہ یہہ تینون عمود

دریافت ہونگی اب اگر تمام کرین ہم مجسم ا ف کو تو ف ق اور ف ر اور ف س
مساوی ا ی اور ا ن اور ا م کی ہونگی یہہ تینون خط ا م اور ا ن اور ا ی یا م
اور م ق اور ق ف اوتار نقطہ ف کی کہلاتے ہین اور انکو حروف لا اور ا اور ع سے
تعبیر کرتے ہین اور ا کو نقطہ شروع کہتی ہین خط ا لا کو محور لا اور ا ی کو محور ا
اور ا ع کو محور ع کہتے ہین سطح لا ا ی کو سطح لا ی اور سطح ع ا لا کو سطح ع لا
اور ع ا ی کو سطح ع ی کہتی ہین - تصور تین بعد کے اوتار کا بخوبی پوسیدہ سطح
سطح ایک کمرے اور اوسکی دو دیوار ونکی ہوسکتا ہی اسصورت تین نقطہ شروع ایک
کونہ کمرہ کا ہوگا اور سطح کمرہ کی سطح لا ی کو تعبیر کرینگی اور باقی دو متصل کی دیوارین اوس
کونہ کی سطح ع لا اور ع ی کو تعبیر کرینگی نقطہ ف سے تین عمود ف ق اور ف ر
اور ف س تین سطح متقاطع علی القوایم پر کہینچی ہین اور نقطے ق اور ر اور س

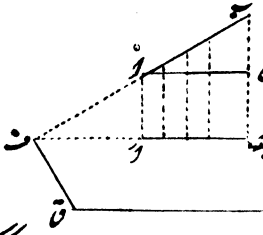
نشان نقطہ ف کے بوسیلہ کھینچنی ان عمودون کے سطح لاء اور لاع ع پر ہوئی ہین — واضح ہو کہ طریقہ نشانونکا واسطی دریافت کرنے سطوح کے بہت فایدہ مند ہے اسواسطی ہم اسجای چند ایسی شکلون کو لکھینگے جو کہ اس کتاب مین مفید ہونگی اور جنکا جاننا واسطی سمجھنے بیان سطوح کے ضرور ہی —

بیان نشانون کا

(۳۷۶) اگر چند نقاط ایک خط مستقیم مین فرض کئی جاوین تو نشان انکی بھی کسی ایک سطح پر سطوح متقاطع علی القوایم مین سے ایک خط مستقیم مین ہونگی یعنی اگر اون نقاط مفروض سے عمود ایک سطح پر ڈالے جاوین تو وہ نشان جو کہ ان عمودون کے ڈالنے سے سطح پر پیدا ہونگی وہ ایک خط مستقیم مین ہونگی کیونکہ یہہ تمام نقاط اوس سطح مین ہونگی جو کہ کھینچی جاوے خط مفروض سے عمود ایک سطح متقاطع علی القوایم پر اور چونکہ دو سطحون کے تقاطع سے ایک خط مستقیم پیدا ہوتا ہی تو اب ثابت ہوا کہ نشان نقاط مفروض کے ایک خط مستقیم مین ہین — واضح ہو کہ اوس سطح کو جسمین تمام وہ عمود ہین جو کہ کھینچے گئے ہین نقاط مفروض سے سطح نشانی کہتے ہین اور وہ خط جو کہ تقاطع کرنے اس سطح اور سطح متقاطع علی القوایم کے سے پیدا ہوتا ہی خط نشانی کہلاتا ہی —

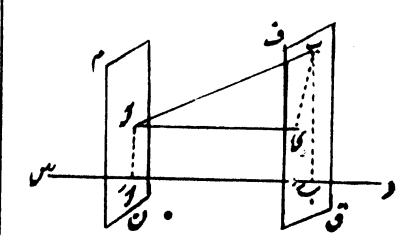
(۳۷۷) دریافت کرو محل خط نشانی ایک خط مستقیم کا جبکہ وہ ایک سطح پر کھینچا جاوے فرض کرو کہ اب وہ خط ہی جسکا خط نشانی سطح ف پر معلوم کرنا منظور ہی کھینچو خط اب جب تک کہ وہ ملی اس سطح سی نقطہ ف پر کھینچو اور

اور ب ب عمود اس سطح پر اور مان لو کہ وہ
ملتی ہین اس سطح سی نقاط ا اور ب ی
پر اب ملاؤ نقاط ا اور ب کو تو خط ا ب
خط نشانی مطلوب ا ب کا ہوگا



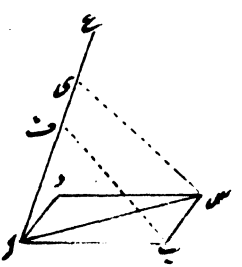
چونکہ ا ب اور ا ب ایک ہی سطح مین ہین تو ظاہر ہی کہ وہ نقطہ ف پر ملین گے
فرض کرو کہ زاویہ ب ف ب یا وہ زاویہ جو کہ خط ا ب بنا تا ہی سطح ق ر سے
= ر اور کھینچو سطح نشانی ا ب مین ای متوازی ا ب کے تو ا ب = ای
ا ب = ای = ا ب جم ب ای = ا ب جم ر اسیطرح سے معلوم ہوسکتا ہی
وہ خط نشانی جو کہ کھینچا جاوے ایک خط سے دوسری خط پر جبکہ یہہ
دونو خط ایک ہی سطح مین ہون — ثر ثر ثر ثر ثر ثر

(۳۷۸) دریافت کرو خط نشانی ایک خط مستقیم کا اوپر دوسرے خط کی جبکہ یہہ دونو خط
ایک سطح مین نہون فرض کرو کہ خط نشانی ا ب اوپر خط س د کے کھینچا منظور ہی



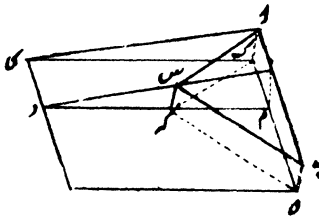
نقطہ ا اور ب سے کھینچو خط
ا ا اور ب ب عمود خط س د
پر تو ا ب خط نشانی مطلوب
ہی ا اور ب مین سے گذرتی ہوئی

کھینچو دو سطح ا ب اور ف ق عمود خط س د پر تو ظاہر ہی کہ آ ا اور ب ب ان سطحون
مین ہونگی اب نقطہ آ سے کھینچو ای عمود سطح ف ق پر اسیواسطے یہہ خط متواری مساوی
ا ب کی ہوگا چونکہ مثلث ب ای مین زاویہ ی قایمہ ہی تو ا ب = ای =
ا ب جم ب ای اور زاویہ ب آ ی مساوی اوس زاویہ کی ہی جو کہ خط ا ب خط
س د سے بناتا ہی اور فرض کرو کہ یہہ = ر : ا ب = ا ب جم ب ا ر
= ا ب جم ر واضح ہو کہ خط نشانی اوس خط کا بھی جو کہ مساوی اور متوازی خط
ا ب کے ہی آ ب خط س د پر ہوگا اور خط نشانی ا ب کا اوس خط پر جو سواری مساوی متوازی
(۳۷۹) خط نشانی ایک متوازی الاضلاع کے قطر کا اور ایک خط کی مساوی
ہی مجموعہ خطوط نشانی دو ضلعون اوس متوازی الاضلاع کی خط مذکور پر
فرض کرو ا ب س د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ا ع وہ خط ہی جسپر خط
نشانی کھینچنا منظور ہی اور جو متوازی الاضلاع سے نقطہ آ پر ملتا ہی
نقاط س اور ب سے
کھینچو س ی اور ب ف عمود
خط ا ع پر تو ظاہر ہی کہ
ای خط نشانی اوس کا



خط ای پر ہی یا ای = اوس جم س ا ع اور ا ف خط نشانی ا ب
ا ع پر ہی یا ا ف = ا ب جم ب ا ع اور ی ف خط نشانی س ب
یا ا د کا ا ع پر ہی یعنی ف ی = ب س جم د ا ع اور ای = ا ف ،

+ ف ی یہانتک ثابت ہوا کہ خط نشانی ر س = خط نشانی ر ب + خط نشانی س ب کے ∴ (۳۸۰) دریافت کرو سطح نشانی کسی خاص سطح کے ایک سطح مفروض ی ک ہ پر فرض کرو کہ ر ب س ایک مثلث جو کہ سطح ی ک ہ سے زاویہ ر کا بناتا ہی کھینچو ر ی اور س د عمود خطای د پر جو کہ فصل مشترک درمیان سطح مثلث اور سطح مفروض کی ہی



اب ظاہر ہی کہ ر ب قاعدہ مثلث ر ب س کا ساوی ک ہ کی ہی جو کہ قاعدہ اسکی سطح نشانی ک ہ کے کا ہی لیکن ارتفاع س ف اور ک م ان دونون کے غیر ساوی ہین

∴ سطح ر ب س : ک ہ ک :: س ف : ک م :: و ف : و م ::: ا : جم ر

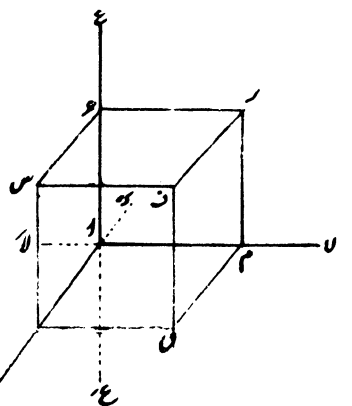
∴ سطح ک ہ ک = ر ب س جم ر جیکہ یہ دعوے صورت مثلث مین ثابت ہوا تو وہ سطح متوازی الاضلاع مین بھی ثابت ہوگا اور اسیطور سے ہر ایک سطح مین ثابت ہوسکتا ہے

باب دوم

بیان نقطہ اور خط مستقیم مین

(۳۸۱) ہمنی ابھی طریقہ دریافت کرنے مقام ایک نقطہ کا سطح مین بیان کیا ہی اور اوس سے یہہ ثابت ہوا ہی کہ بمقام ایک نقطہ کا اوسوقت معلوم ہوگا جبکہ تین عمود جو کہ کھینچے جاوین نقطہ مفروض سے تین سطحون عمودی پر معلوم ہونگی اب اگر طول ان عمودون کا یعنی طول اوتار نقطہ مفروض ف کا بعد بیانش کے

یہہ ثابت ہو ا م = ط اور ا ن = ص اور ا و = س تو ظاہر ہی کہ مقام نقطہ ف کا ان مساواتو نسے معلوم ہو جاویگا لا = ط اور ی = ص اور ع = س اور چونکہ یہہ مساواتین کافی ہین واسطے دریافت کرنے مقام ایک نقطہ کے اسیواسطے انکو مساواتین نقطہ ف کی کہتے ہین — واضح ہو کہ مقام اس نقطہ کا مساوات آیندہ سے بھی دریافت ہو سکتا ہی جیسا کہ فقرہ (۲۵) مین جہانتک صرف دو بعد کا لحاظ رکھا گیا تہا دریافت ہوا ہی (لا − ط)² + (ی − ص)² + (ع − س)² = ۰ وہ قیمتین اس مساوات کی جن سے کہ شرط اس مساوات کی پوری ہو یہہ ہین لا = ط اور ی = ص اور ع = س



(۳۸۲) علامات جبریہ اوتار لا اور ی اور ع کی اوسیطون سے دریافت ہو سکتی ہین جیسا کہ حصہ اول اس کتاب مین دریافت ہوئی ہین مثلاً لا و مثبت ہوگا جبکہ یہہ شمار کیا جاویگا لا ع پر اور منفی ہوگا جبکہ وہ شمار کیا جاویگا لا ع پر یعنی وہ مثبت ہوگا جبکہ اوپر سطح لا و ی کی ہی اور منفی ہوگا جبکہ نیچے اوسکی ہی اسیطرح سے علامات باقی

خطوط کی دریافت ہوسکتی ہین بموجب علامات اوتار کے قیمتین ف کی جدول آیندہ سی معلوم ہونگی جبکہ مقام اوسکا فرض کیا جاوے مختلف حصص سطح جو مین جوانبہ حصو مین تقسیم کی گئی ہی بوسیلہ اوتار کے اور جبکہ مقام نقطہ ف کا علیحدہ علیحدہ ہر ایک حصہ مین مان لیوین تو علامتین اوسکی اوتار کی یہہ ہونگی

+ لا + ر + ع جبکہ مقام نقطہ ف کا زاویہ لاَ ر ع مین فرض کیا جاوے

+ لا − ر + ع ..... لاَ ر ع .....

− لا − ر + ع ..... لاَ ر ع .....

− لا + ر + ع ..... لاَ ر ع .....

+ لا + ر − ع ..... لاَ ر ع .....

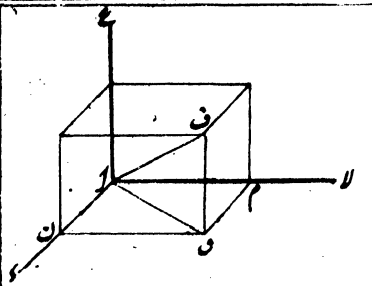
+ لا − ر − ع ..... لاَ ر ع .....

− لا − ر − ع ..... لاَ ر ع .....

− لا + ر − ع ..... لاَ ر ع .....

(۳۸۳) واضح ہو کہ مقام ایک نقطہ کا ایک سطح مین تین سطحون عمودی مین سے فرض کرسکتی ہین اور اس صورتین وہ عمود جو کہ کہیجا جاوے نقطہ مفروض سی اس سطح مین = ۰ مثلاً اگر نقطہ مفروض سطح لاَ ر مین فرض کیا جاوے تو فاصلہ ع = ۰ اسیواسطے مساواتین نقطہ ف کی یہہ ہونگی لا − ط اور ر = ص اور ع = ۰ یا (لا − ط)² + (ر − ص)² = ۰ اور اگر نقطہ مفروض سطح لاع مین فرض کیا جاوے تو اس صورتین مساواتین نقطہ مفروض کی یہہ ہونگی لا = ط اور ر =

اور ع = س اور اگر نقطہ مفروض سطح ع ع مین فرض کیا جاوے تو مساواتین
یہہ ہونگی لا = ۰ اور ی = ص اور ع = س اور اگر نقطہ مفروض محور لا پر واقع
ہو تو فاصلہ اوسکا سطح لا ی اور ع ع سہ = ۰ کی ہوگا اسیواسطے مساواتین
یہہ ہونگی لا = ط اور ی = ۰ اور ع = ۰ اسیطور سے دریافت ہوسکتی ہین
مساواتین نقطہ مفروض کی جبکہ مقام اوسکا باقی محورون پر فرض کیا جاوے
(۳۸۴) نقاط ق اور ر اور س شکل گذشتہ کے نقاط نشانی نقطہ ف
کی سہ سطوح عمودی پر ہین جبکہ محوران نقطون کے صرف وہ فرض کئے جاوین جنکے
سطح مین وہ مقیم ہین تو ظاہر ہی کہ مساواتین ق کی سطح لا ی مین یہہ ہونگی
لا = ط اور ی = ص اور مساواتین ر کی سطح لا ع مین یہہ ہونگی لا = ط
اور ع = س اور مساواتین س کی سطح ی ع مین یہہ ہونگی ی = ص اور
ع = س یہانتک یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر نشان ایک نقطہ کے دو سطحون عمودی
پر معلوم ہون تو نشان اوسکا تیسری سطح پر بہی دریافت ہوسکتا ہی مثلاً اگر س
اور ر معلوم ہو تو کہینچو خط س ن اور ر م متوازی ع ی کے اور ن ق اور
م ق متوازی ی لا اور ع ی کے تو اب ظاہر ہی کہ مقام ق کا آسانی سے معلوم ہوجائیگا
(۳۸۵) دریافت کرو فاصلہ اف نقطہ ف کا نقطہ شروع آسی فرض
کرو کہ لا ی اور ی ع اور ع لا محور متقاطع علی القوایم ہین اور ل م = لا او
م ق = ی اور ف ق = ع اوتار نقطہ ف کے ہین اب ظاہر ہی کہ مربع
اف = مربع ال + مربع ف ق = مربع ل م + مربع م ق + مربع ف ق



بیا ف^{۲} = لا^{۲} + ی^{۲} + ع^{۲}

(۳۸۶) فرض کرو کہ ا

اور م اور ح وہ زاویے

ہیں جو کہ اف بنا تا ہی محور

لا اور ی اور ع سی تو لا = ا م = اف جم ف ام = ف جم ا اور ی = م ق

= ان = اف جم ف ان = ف جم م اور ع = ف ق = اف جس ف اق

= ف جم ح ∴ ف^{۲} = لا^{۲} + ی^{۲} + ع^{۲} = ف^{۲} (حم ا)^{۲} + ف^{۲} (حم م)^{۲}

+ ف^{۲} (حم ح)^{۲} ∴ (حم ا)^{۲} + (حم م)^{۲} + (حم ح)^{۲} = ۱

(۳۸۸) دریافت کرو فاصلہ درمیان دو نقطہ کے فرض کرو کہ او تار نقطہ ف

کی لا اور ی اور ع ہیں اور او تار نقطہ ق کے لا$_{۱}$ اور ی$_{۱}$ اور ع$_{۱}$ ہیں تو اب ظاہر ہی

کہ فاصلہ درمیان ان نقاط کے مساوی قطر اوس مجسم کے ہیں جسکی متصل طرفیں مساوی

حاصل تفریق متوازی او تار نقاط کی ہی یعنی موافق شکل گذشتہ کے ف^{۲} = (لا − لا$_{۱}$)^{۲}

+ (ی − ی$_{۱}$)^{۲} + (ع − ع$_{۱}$)^{۲} اگر فاصلہ نقطہ لا$_{۲}$ اور ی$_{۲}$ اور ع$_{۲}$ اور نقطہ

لا$_{۲}$ اور ی$_{۲}$ اور ع$_{۲}$ نقطہ شروع سے مساوی ف$_{۱}$ اور ف$_{۲}$ کے فرض کیا جاوے

تو صورت گذشتہ اسطرح پر لکھی جاویگی ف^{۲} = ف$_{۱}^{۲}$ + ف$_{۲}^{۲}$ − (لا$_{۱}$ لا$_{۲}$ + ی$_{۱}$ ی$_{۲}$

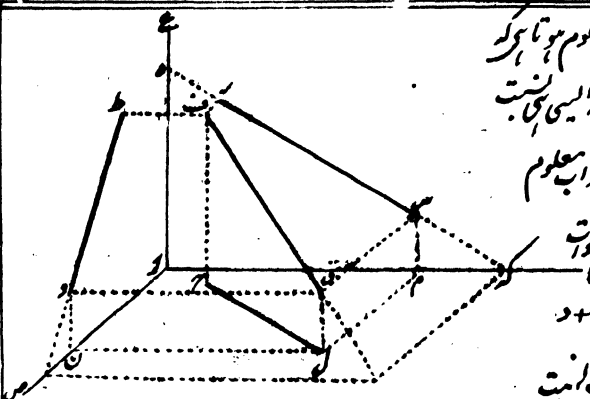
+ ع$_{۱}$ ع$_{۲}$)

بیان خط مستقیم کا

(۳۸۹) ظاہر ہی کہ ایک خط مستقیم پیدا ہوتا ہی تقاطع کرنے دو سطحوں کی سے

اور مقام اس خط کا دریافت ہوگا جبکہ مقام اون سطحون کا معلوم ہو جنکی تقاطع سے خط مذکور پیدا ہوا ہی یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ خط مفروض معلوم ہو سکتا ہی بوسیلہ کھینچنی سطحون نشانی کے جنکا مقام مقرر ہو جاویگا بوسیلہ تقاطع کے ان سطحون اور سطحون عمودی کے یعنی بوسیلہ کھینچنی خط نشانی مفروض کے اوپر سطحون متقاطع علی القوایم کی تو اب مقام خط کا موافق قواعد ہندسہ کی دریافت ہو جاویگا اور مقام اسکا بوسیلہ جبر مقابلہ کے معلوم ہو سکتا ہی جبکہ مساواتین اوسکی خطوط نشانی کی سطحون متقاطع علی القوایم پر معلوم ہو جاوینگی فرض کرو کہ محور ع وتر العرض ہی تو ظاہر ہی کہ مساوات خط نشانی کی سطح لاء مین یہہ ہوگی لا = ط ع + د موافق (۳) کے اور مساوات خط نشانی کی سطح ع ع مین یہہ ہوگی ی = م ع + ص چونکہ ان دونو مساواتونسی مقام خط کا معلوم ہو جاتا ہی اسواسطے انکو مساواتین خط مستقیم کی کہتے ہین —

(۳۹۰) واسطی توضیح دعوی گذشتہ کے فرض کرو کہ ف ف ایک خط ہی جسکی مساواتین دریافت کرنی چاہتی ہین اور مان لو کہ رس خط نشانی خط مفروض کا سطح لاع مین اور طو سطح ع ع مین اور ن ل سطح لاء مین ہیں اور فرض کرو کہ لا = ط ع + د مساوات خط رس کی اور ی = م ع + ص مساوات طو کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ کسی ایک نقطہ ف کی سطح نشانی ف ف رس مین وہی قیمتین لا اور ع کی ہین جو اوسکا نقطہ نشانی س رکھتا ہی یعنی او تار ر م اور م ن مساوی ن ل اور ل ف کی ہین یہانتک



صاف معلوم ہوتا ہی کہ
انمین ہمیشہ ایسی ہی نسبت
رہیگی - تو اب معلوم
ہوا کہ مساوات
لا = ط ع + د
سی صرف نسبت

لا اور ع خط رس کی ہی تعبیر بہتر ہوتی ہی وہ سوا اسکی اوس نسبت کو تعبیر
کرتی ہی جو کہ درمیان تمام نقاط ف ف رس کی ہی - اسیطرح مساوات
د = م ع + ص صرف ط و سی ہی تعلق نہین رکھتی وہ سطح ط د ق ف بھی تعلق
رکھتی ہین تو اب ثابت ہوا کہ دونو مساوات گذشتہ خط ف ف سی تعلق رکھتی
ہین جو کہ فصل مشترک درمیان سطوح نشانی کی ہی اور یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ یہہ
دونو مساواتین صرف اسی خط کی ہو سکتی ہین - اب یہانسی معلوم ہوا کہ
مساواتین خط مستقیم ف ف کی یہہ ہین لا = ط ع + د اور د = م ع + ص
جبکہ دور کرین ہم مقدار ع کو بوسیلہ ان مساوانونکی تو حاصل ہوگا یہہ
$\frac{1}{ط}$ (لا - د) = $\frac{1}{م}$ (د - ص) یا د - ص = $\frac{م}{ط}$ (لا - د) اور اس
مساوات سی وہ نسبت معلوم ہوتی ہی جو کہ درمیان لم اور م ل کے ہی اور یہہ
اوتار نقطہ ل کے جو کہ نقطہ ف خط ف ف کا ہی تو اب معلوم ہوا کہ یہہ مساوات
خط نشانی ل ح کی سطح لاد مین ہی -

(۳۹۱) مساواتون آیندہ مین لا = ط ع + د اور د = م ع + ص مقدار د تغیر کرتی ہی اوس فاصلہ کو جو کہ درمیان نقطہ شروع اور اوس نقطہ کی ہی جہان اوس تقاطع کرتا ہی خط اول سے یعنی ط = ا کہ سیطر حسی ص = ا ص فرض کرو لا = ۱ توع = — = ا ہ ∴ ا کہ = — ط ا ہ لیکن ا کہ = ا د مس ا د کہ = — ا د مس ع د ر تواب ثابت ہوا کہ ط مماس ا د مس زاویہ کا ہی جو کہ د مس بناتا ہی ع سی اور اسیطر سے معلوم ہو سکتا ہی کہ م مماس ا د مس زاویہ کی ہی جو ط بناتا ہی ع سی — ثر ثر ثر

(۳۹۲) واضح ہو کہ مقام خط مستقیم کا مختلف ہوگا موافق علامات جبریہ د اور ص اور ط اور م کے اور چونکہ اون صورتون مساوات مستقیم سے جو کہ تبدیلی علامات جبریہ یہ مقادیر مذکورہ سی پیدا ہوگی کسی نوع کا غلط متصور نہین ہوتا ہے اور حل کرنیمین انکی کسیطرح کی دقت واقع نہین ہوتی ہی اسواسطے ہم اونکو انجا بیان نہین کرینگے اور اس جای صرف اون صورتون کو لکھینگے جو کہ مطلق قیمتون ط اور م اور ص اور د کی تبدیلی ہی سے پیدا ہوگی اور علامت جبریہ کا لحاظ نہین کرینگی اب فرض کرو د = ۰ اور ص = ۰ تو لا = ط ع اور د = م ع تواب موافق ان مساواتون کے خط طانشانی نقطہ شروع مین سے گذرتی ہین اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ خط مطلوب بھی نقطہ شروع مین سے گذرتا ہی اور مساوات تیسرے خط نشانی کی یہ ہوگی د = — لا فرض کرو د = ۰ تو لا = ط ع اور د = م ع + ص یہانسی ظاہر ہوتا ہی کہ خط نشانی سطح لاد مین گذرتا ہی

نقطہ شروع سی اس سے معلوم ہوتا ہی کہ خط مستقیم گذرتا ہی محور ک ر مین سے
جو کہ عمود ہی سطح لا ی پر اور اگر ص = ۰ تو موافق مرقومہ بالا کی ثابت ہوسکتا ہی
کہ مساواتین لا = ط ع + د اور ی = م ع تعلق رکھتی ہین اوس خط سی
جو کہ گذرتا ہی محور لا مین سے اور اگر یہہ مساواتین فرض کیجاوین ی = ط لا
اور ی = م ع + ص تو خط مستقیم محور ع مین سے گذریگا صورت اخیر تعبیر
ہوسکتی ہی جبکہ فرض کرین بشکل گذشتہ مین کہ خط ل ح گذرتا ہی نقطہ شروع
ک ر مین سی تو اب ظاہر ہی کہ مساوات خط ل ح کی یہہ ہوگی ی = ط لا اور
مساوات ہ ط د کی یہہ ہوگی ی = م ع + ص اب اگر دو سطحین اسطرح کھینچی
جاوین کہ ایک اینمین سے ط د مین سی گذری اور سطح ع ع پر عمود ہو اور دوسرا ل ح
مین سی گذری اور سطح لا ی پر عمود ہو تو اب ظاہر ہی کہ دونو سطح نقطہ ہ مین سے گذرینگی
اسیواسطی خط مطلوب بھی اس نقطہ پر گذریگا ۔

(۳۹۳) فرض کرو کہ م = ۰ ∴ لا = ط ع + د اور ی = ص اس سی معلوم
ہوتا ہی کہ خط مطلوب اوس سطح مین ہے جو متوازی سطح لا ع کی اور اوس سے ص کی فاصلہ
پر واقع ہی اگر شکل گذشتہ کو مطابق اس خاص صورت کی فرض کرین تو ظاہر ہی کہ
ط د لا ی پر عمود فرض کرنا چاہیئے اب صاف ظاہر ہی کہ ف ق مساوی اور متوازی خط
رس کے ہی اور سطح ل ن و ق مین جو عمود ہی سطح لا ع پر ہی واقع ہوگا فرض کرو
کہ ط = ۰ ∴ لا = د اور ی = م ع + ص اسی ثابت ہوتا ہی کہ خط مطلوب
متوازی سطح لع کی ہی اسیطرح مساوات ع = س اور ی = ط لا + د

اوس خط سی تعلق رکھتی ہی جو واقع ہی ایک ایسی سطح مین جو متوازی ع ک کی ہی

(۳۹۴) ظاہر ہی کہ ہم ایک خط مستقیم کو ایک سطح مین سطوح متقاطع علی القوایم مین سی فرض کر سکتے ہین مثلاً فرض کرو کہ وہ واقع ہی سطح ع ک مین تو ظاہر ہی کہ مساواتین اس خط کی یہہ ہونگی ی = م ع + ص اور لا = ۰ اور اگر خط مطلوب سطح لا ع مین فرض کیا جاوے تو مساواتین یہہ ہونگی لا = ط ع + د اور ی = ۰ اور اگر سطح لا ک مین ہو تو یہہ مساواتین حاصل ہونگی ی = ط لا + د اور ع = ۰ — ثر ثر ثر

(۳۹۵) اگر خط مستقیم عمود ہو ایک سطح پر سطحون متقاطع علی القوایم سی مثلاً فرض کرو کہ وہ عمود ہی سطح ع ک پر تو ظاہر ہی کہ ط اور م مساوی صفر کے ہو جاوینگی اسیواسطے مساواتین اس خط کی یہہ ہو جاوینگی لا = د اور ی = ص اور ع = ÷ اور ظاہر ہی کہ جب خط مستقیم عمود ہو سطح ع ک پر تو لا = د اور ی = ÷ اور ع = س اور مساواتین اس خط کی جبکہ یہہ فرض کیا جاوے عمود سطح ع ک پر یہہ ہونگی لا = ÷ اور ی = ص اور ع = س — ثر ثر ثر ثر ثر

(۳۹۶) دریافت کرو وہ نقاط جہانکہ خط مستقیم قطع کرتا ہی سطوح متقاطع علی القوایم کو فرض کرو لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص مساواتین خط مستقیم کے ہین تو اب ظاہر ہی کہ جب یہہ خط سطح لا ی سے ملی تو ع = ۰ ∴ لا = د اور ی = ص مساواتین نقطہ مطلوب کی ہونگی اسیطرح سی

ع = − $\frac{ص}{م}$ اور لا = − $\frac{ط}{م}$ ص + د مساواتین اوس نقطہ کی ہونگی
جہانکہ خط مستقیم متناہی سطح لاع سی اور ع = − $\frac{ب}{ط}$ اور ی = − $\frac{م}{ب}$ د
+ ص مساواتین اوس نقطہ کی ہونگی جہانکہ وہ قطع کرتا ہی سطح ع ی کو ۔

(۳۹۷) ظاہر ہی کہ چار مقدارین ایک خط مستقیم کی مساواتونمین ہوتی ہین
اب اگر یہہ چارون مقادیر معلوم ہون تو مقام خط مستقیم کا معلوم ہوجاویگا
کیونکہ اگر فرض کرین ع ایک خاص قیمت ع کی تو مساواتین خط مستقیم کی یہہ
ہونگی لا = ط ع + د = ط ع + د = لا اور ی = م ع + ص = م ع
+ ص = ی اسی قیمتین لا اور ع کی دریافت ہوجاوینگی قطع کرو
ا م = لا شکل گزشتہ مین اور کھینچو م ل = ی متوازی ا ی کی اور کھینچو
ل ق سی عمود ل ق = ع تو اب ظاہر ہی کہ نقطہ ق ایک نقطہ خط مطلوب کا ہوگا
اور اسیطور سے مختلف نقطہ خط مطلوب کی معلوم کرکے مقام خط مطلوب کا معلوم
ہوجاویگا واضح ہو کہ خط مستقیم کو متوازی ایک خط کی یا گذرتا ہوا ایک
نقطہ مفروض مین سے فرض کرسکتے ہین یعنے ہم ایسی شرط فرض کرسکتے ہین
جنکے وسیلہ سی مقادیر ط اور م اور د اور ص کے معلوم ہوجاوینگی اسیطور سے
بہت سی شکلین پیدا ہونگی جیسا کہ فقرہ (۴۰ اور ۵۰) مین بیان کی گئی
ہین جہان مساوات خط مستقیم کی بلحاظ دو بعد کی دریافت کی گئی ہی ۔

بیان اشکال خطوط مستقیم کا

(۳۹۸) دریافت کرو مساواتین ایک خط مستقیم کی جسکہ وہ گذری ایک

ایک نقطہ مفروض مین سے — فرض کرو کہ اور ۱ نقطہ مفروض کی یہہ ہین لا۱
اور کا۱ اور ع۱ اور مساواتین اوسکی یہہ ہین لا = ط ع + د اور
ک = م ع + ص چونکہ خط مستقیم نقطہ مفروض مین سے گذرتا ہی تو ظاہر ہے
کہ خط نشانی اسکا بہی نقطہ نشانی نقطہ مفروض مین سے گذریگا چونکہ خط نشانی
اس کا لا = ط ع + د نقطہ لا۱ اور ع۱ مین سے گذرتا ہی تو ظاہر ہی مساوات
اس خط نشانی کی یہہ ہوگی لا۱ = ط ع۱ + د ∴ لا − لا۱ = ط (ع − ع۱)
اور اسیطرحسی ک − ک۱ = م (ع − ع۱) تو اب معلوم ہوا کہ یہہ مساواتین مطلوب
ہین چونکہ مقادیر ط اور م مجہول ہین تو اس سے معلوم ہوتا ہی کہ لا نہایت خطوط
ایک نقطہ مین سے گذر سکتی ہین اگر نقطہ مفروض سطح لاک مین فرض کیا جاوے تو
ع۱ = ۰ ∴ لا − لا۱ = ط ع اور ک − ک۱ = م ع اگر نقطہ مفروض محور
لا پر فرض کیا جاوے تو ع۱ = ۰ اور ک۱ = ۰ اور لا − لا۱ = ط ع اور
ک = م ع اور اسیطور سے مساواتون گذشتہ کی مختلف صورتین ہو سکتی ہین
موافق مختلف مقامون نقطہ مفروض کے —

(۳۹۹) دریافت کرو مساواتین ایک خط مستقیم کی جبکہ وہ گذری دو نقطہ
(لا۱ اور ک۱ اور ع۱) اور (لا۲ اور ک۲ اور ع۲) مین سے چونکہ خط مستقیم
اس نقطہ (لا۱ اور ک۱ اور ع۱) مین سی گذرتا ہی تو مساوات اس خط کی یہہ
ہوگی لا − لا۱ = ط (ع − ع۱) اور ک − ک۱ = م (ع − ع۱) اور چونکہ
وہ اس نقطہ (لا۲ اور ک۲ اور ع۲) مین سی بہی گذرتا ہی تو مساوات خط

مطلوب کی اس صورتین یہہ ہوگی لا۲ − لا۱ = ط (ع۲ − ع۱) اور
ک۲ − ک۱ = (ع۲ − ع۱) ∴ ط = $\frac{لا۲ - لا۱}{ع۲ - ع۱}$ اور = $\frac{ک۲ - ک۱}{ع۲ - ع۱}$ اسیواسطے
مساواتین خط مطلوب کی یہہ ہونگی لا − لا۱ = $\frac{لا۲ - لا۱}{ع۲ - ع۱}$ (ع − ع۱)
اور ک − ک۱ = $\frac{ک۲ - ک۱}{ع۲ - ع۱}$ (ع − ع۱) اب ظاہر ہی کہ ان مساواتون کے
مختلف صورتین ہوسکتے ہین موافق مختلف مقامون نقاط مفروض کی مثلاً اگر
نقطہ اول سطح ک ع مین فرض کیا جاوے اور نقطہ دوسرا محور لا پر تو لا۱ = ۰
اور ک۱ = ۰ اور ع۱ = ۰ ∴ لا = $\frac{لا۲}{ع۲}$ (ع − ع۱) اور ک − ک۱ =
$\frac{ک۲}{ع۲}$ (ع − ع۱) اگر نقطہ دوم نقطہ شروع پر فرض کیا جاوے تو لا۲ اور ک۲
اور ع۲ = ۰ اسیواسطے لا − لا۱ = $\frac{لا۱}{ع۱}$ (ع − ع۱) = $\frac{لا۱}{ع۱}$ ع − لا۱
اور ک − ک۱ = $\frac{ک۱}{ع۱}$ (ع − ع۱) = $\frac{ک۱}{ع۱}$ ع − ک۱ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ
مساواتین اوس خط کی جو کہ گذری نقطہ شروع مین سے یہہ ہونگی لا = $\frac{لا۱}{ع۱}$ ع اور
ک = $\frac{ک۱}{ع۱}$ ع اور یہہ مساواتین بطور آیندہ کی بہی حاصل ہوسکتی ہین فرض کرو
کہ خطوط نشانی نقطہ شروع مین سی گذرتی ہین اسیواسطے مساواتین اونکی
یہہ ہونگی لا = ط ع اور ک = م ع اور چونکہ پہلا خط نقطہ لا اور ک
مین سے گذرتا ہی تو ط = $\frac{لا۱}{ع۱}$ اور اسیطرحسی ثابت ہوگا کہ م = $\frac{ک۱}{ع۱}$
(۴۰۰) دریافت کرو مساواتین ایک خط مستقیم کے جو کہ متوازی ایک خط
مفروض کی ہی چونکہ خطوط متوازی ہین تو ظاہر ہی کہ سطح نشانی انکی بہی کسی
ایک سطح برسطوح متقاطع علی القوایم سی متوازی ہونگی اسیواسطے خطوط نشانی

بھی متوازی ہوگی یہہ سانسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر مساواتین خط معلوم کی یہہ فرض کیجاوین لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص تو مساواتین خط مطلوب کی یہہ ہونگی لا = ط ع + دَ اور ی = م ع + صَ اگر یہہ خط نقطہ مفروض (لا، اور ی، اور ع،) مین سی گذری تو اوسکی مساواتین یہہ ہونگی

لا - لا، = ط (ع - ع،) اور ی - ی، = م (ع - ع،) ش

(۴۰۱) دریافت کرو نقطہ تقاطع دو خط مفروض کا ظاہر ہی کہ دو خط جو کہ واقع ہون ایک سطح مین آپس مین مل سکتے ہین لیکن جبکہ وہ سطح جو مین فرض کی جاوین تو یہہ بات واقع نہین ہوتی تو اب ظاہر ہی کہ ایک ایسی خاص نسبت درمیان مقادیر مقررہ خطوط معلوم کے فرض کرنے چاہئی تاکہ خطوط مفروض تقاطع کرین ایک دوسرے کیواسطے ایک خاص نقطہ پر واسطی معلوم کرنے اس نسبت کی فرض کرو کہ لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص مساواتین ایک خط کی ہین اور لا = طَ ع + دَ اور ی = مَ ع + صَ مساواتین دوسرے خط کی ہین ظاہر ہی کہ نقطہ تقاطع پر قیمتین لا اور ی اور ع کی مساوات کی دونون مین ایک ہی ہونگی اسیواسطے ط ع + د = طَ ع + دَ ∴ ع = $\frac{دَ - د}{ط - طَ}$ اور

م ع + ص = مَ ع + صَ ∴ ع = $\frac{صَ - ص}{م - مَ}$ ∴ $\frac{دَ - د}{ط - طَ} = \frac{صَ - ص}{م - مَ}$

یا (دَ - د) (م - مَ) = (صَ - ص) (ط - طَ) یہہ سانسی ثابت ہوا کہ یہہ نسبت ضرور ہونی چاہئی درمیان مقادیر مقررہ کے تاکہ خطوط معلوم تقاطع ایک دوسرے کیو کرین تو اب ظاہر ہی کہ اوتار نقطہ تقاطع یہہ ہونگی ع = $\frac{دَ - د}{م - مَ}$

یا = $\frac{صَ - ص}{م - مَ}$ اور ی = م ع + ص = م × $\frac{صَ - ص}{م - مَ}$ + ص =

$= \frac{م ص - م^{۲} ص}{م - م^{۲}}$ اور لا $= ط ع + ا = ط \frac{د - د}{ط - ط^{۲}} + د = \frac{ط د - ط^{۲} د}{ط - ط^{۲}}$

(۴۰۲) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ خط (کہ) بناتا ہی محور متقاطع علے القوایم سی اور بوسیلہ اسکی دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ خط مذکور بناتا ہی سطوح متقاطع علی القوایم سی فرض کرو کہ مساواتین خط معلوم کی یہہ ہین لا $= ط ع + د$ اور د $= م ع + ص$ اور ظاہر ہی کہ مساوات اوس خط کی جو کہ متوازی خط معلوم کے اور نقطہ شروع مین سی گذرتا ہی یہہ ہی لا $= ط ع$ اور د $= م ع$ اور مان لو کہ ر مساوی اوس فاصلہ کی ہی جو کہ واقع ہی درمیان اس نقطہ (لا اور د اور ع) خط اخیر اور نقطہ شروع کی $\therefore ر^{۲} = لا^{۲} + د^{۲} + ع^{۲} = (ط^{۲} + م^{۲} + ۱) ع^{۲}$

یا $ع^{۲} = \frac{ر^{۲}}{ط^{۲} + م^{۲} + ۱}$ فرض کرو کہ کلا اور کہ د اور کہ ع تعبیر کرتے ہین مقادیر اون زاویون کے جو کہ خط معلوم یا وہ خط جو کہ متوازی اسکی ہی بناتا ہی محور لا اور د اور ع سے تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ خط متوازی کے جم کر لا $= \frac{لا ر}{ط ع} = \frac{ط}{\sqrt{۱ + ط^{۲} + م^{۲}}}$ اور جم کر د $= \frac{د ر}{ع} = \frac{م ر}{\sqrt{۱ + ط^{۲} + م^{۲}}}$

اور جم کر ع $= \frac{ر ع}{ع} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + ط^{۲} + م^{۲}}}$ اور ظاہر ہی کہ (جم کہ لا)^{۲} + (جم کہ د)^{۲} + (جم کہ ع)^{۲} = ۱ اور یہہ مساوات تعبیر کرتی ہی نسبت اون تین زاویون کے جو کہ ایک خط بناتا ہی محور متقاطع علے القوایم سی — چونکہ یہان محور متقاطع علی القوایم فرض کیے گئے ہین تو ظاہر ہی کہ وہ زاویہ جو ایک خط بناتا ہی ایک محور سی تمامی اوس زاویہ کی ہی جو کہ یہی خط بناتا ہی اوس سطح سی جو عمود اوس محور پر ہے تو اب ظاہر ہی کہ اب ہمکو معلوم ہو جاوینگی وہ زاویہ جو کہ ایک خط بناتا ہے

سطوح متقاطع علی الثوابت سے

(۴۰۳) دریافت کرو جیب التمام اور جیب مستوی اور مماس اوس زاویہ کی جو کہ درمیان دو خط مفروض کے واقع ہی فرض کرو کہ مساواتین دو خط مستقیم کی یہہ ہین

$$\left.\begin{aligned} لا &= طع + د \\ ر &= مع + ص \end{aligned}\right\} \text{ اور } \left.\begin{aligned} لا &= طَع + دَ \\ ر &= مَع + صَ \end{aligned}\right\}$$ یہہ دو نو خط ملین یا نہ ملین

لیکن زاویہ جو درمیان انکی بینگا مساوی ہے اوس زاویہ کی جو کہ درمیان اون دو خط کی بینگا جو کھینچی جاوین سوازی خطوط مفروض کے کہ زتی ہوئی نقطہ شروع مین سے تو اب ظاہر ہی کہ صورت سوال کی یہہ ہو جاویگی دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ واقع ہی درمیان اون خطوط کی جنکی مساواتین یہہ ہین $\left.\begin{aligned} لا &= طع \\ ر &= مع \end{aligned}\right\}$ (۱) اور $\left.\begin{aligned} لا &= طَع \\ ر &= مَع \end{aligned}\right\}$ (۲) فرض کرو کہ ر = اوس فاصلہ کے ہی جو کہ درمیان ایک نقطہ (لا اور ر اور ع) خط (۱) اور نقطہ شروع کی واقع ہی اور ر، = اوس فاصلہ کی جو درمیان نقطہ (لا، اور ر، اور ع،) خط (۲) اور نقطہ شروع کی واقع ہی اور ف = اوس فاصلہ کے جو درمیان اون دو نقطہ کے ہی — اور ہ = اوس زاویہ کے جو درمیان خطوط معلوم کے واقع ہی — تو اب ظاہر ہی کہ ف^{۲} = ر^{۲} + ر،^{۲} − ۲ ر ر، جم ہ = (لا − لا،)^{۲} + (ر − ر،)^{۲} + (ع − ع،)^{۲} موافق فقرہ (۳۸۸) کی = لا^{۲} + ر^{۲} + ع^{۲} + لا،^{۲} + ر،^{۲} + ع،^{۲} − ۲ (لا لا، + ر ر، + ع ع،) = ر^{۲} + ر،^{۲} − ۲ (لا لا، + ر ر، + ع ع،) ∴ ر ر، جم ہ = لا لا، + ر ر، + ع ع،

لیکن لالا + ءءا + ءءا = طءءا + مءمءا + ءءا =

(طط + مم + ۱) ءءا اور رررا = (لا + ءء + ءء)(لا + ءء + ءء)

= ءءا √(ط + م + ۱) × √(ط + م + ۱) جبکہ لکھین ان قیمتون کو اس مساوات

مین جہ = لالا + ءءا + ءءا / رررا = √(ط + م + ۱)(ط + م + ۱) / √(ط + م + ۱)(ط + م + ۱)

تو اب ظاہر ہی کہ جس ہ = √(طم − طم)² + (ط − ط)² + (م − م)² / √(ط + م + ۱)(ط + م + ۱)

اور مس ہ = جس ہ / جہ ہ = √(طم − طم)² + (ط − ط)² + (م − م)² / ط ط + م م + ۱

واضح ہو کہ جیب التمام اوس زاویہ کی جو درمیان دو خط معلوم کے ہی اجرائی اون زاویون نہین بہی معلوم ہو سکتی ہی جو دو خط معلوم (کہ) اور (کہ ا) بنا تی ہین محور متقاطع علے القوایم سی کیونکہ لا = رجم کہ لا اور ء = رجم کہ ء اور ع = رجم کہ ع اور لا = رجم کہ ا لا اور ء = رجم کہ ا ء اور ع = رجم کہ ا ع ∴ جہ ہ = لالا / رررا + ءءا / رررا + ءءا / رررا =

جم کہ لا حم کہ ا لا + جم کہ ء جم کہ ا ء + جم کہ ع حم کہ ا ع ش

(۴۰۴) اگر خطوط مفروض متوازی ہون تو ظاہر ہی کہ جس ہ = ۰

∴ (طم − طم) + (ط − ط)² + (م − م)² = ۰ اور ظاہر ہی کہ شرط اس مساوات کی اوسوقت پوری ہوگی جبکہ ط = ط اور م = م اور طم = طم دو شرطین اول کی وہی ہین جو فقرہ (۴۰۰) مین بیان کی گئی ہین اور تیسری شرط دو اول شرطون سے نکلتی ہے یعنی اگر دو اول مساوات کی شرط مساوات

کی پوری ہوگی تو ظاہر ہی کہ تیسری شرط بھی ان دونوسی حاصل ہوگی

(۴۰۵) اگر خطوط مفروض ایک دوسرے پر عمود ہون تو جم ہ = ۰

∴ ط طَ + م مَ + ۱ = ۰ یا جم کہ لا جم کہ لا + جم کہ ء جم کہ ء + جم کہ ع جم کہ ع = ۰ واضح ہو کہ ایک خط دوسری خط پر سطح جوّ مین عمود اوسوقت ہوگا جبکہ خط اول اوس سطح مین واقع ہو جو عمود خط دویم پر ہے یہانسی معلوم ہوتا ہے کہ لانہایت خط ایک خط مفروض پر عمود ہوسکتے ہین چنانچہ مساوات گذشتہ سے بھی جو مساوات خط عمود کی ہی معلوم ہوتا ہی کیونکہ اسمین چار مقادیر مجہول ہین اور ایک مساوات ہی —

(۴۰۶) اگر خطوط مفروض ایک دوسری کو تقاطع بھی کرین تو موافق فقرہ (۴۰۱) کی ایک مساوات آیندہ بھی حاصل ہوگی (د-د) (م-م) =(ص-ص) (ط-ط) باوجود اس شرط کی بھی لانہایت عمود ایک دوسری خط پر کھینچ سکتے ہین کیونکہ لانہایت سطح عمود دوسری خط پر کھینچ سکتی ہین اور ہر ایک سطح مین لانہایت ایسی خط کھینچ سکتے ہین جو ایک خط مفروض سے ملین گے —

(۴۰۷) دریافت کرو مساوات ایک خط کی جو کذرکی نقطہ مفروضہ (لا، اور ء، اور ع،) مین سی اور عمود ہو ایک خط پر جسکی مساوات (۱) ہی

فرض کرو کہ مساوات خط کی یہہ ہی
$$\left.\begin{aligned} لا &= ط ع + د \\ ء &= م ع + ص \end{aligned}\right\} \quad (۱)$$

اور جبکہ یہہ نقطہ مفروض مین سے گذرگیا تو صورت اسکی یہہ ہوجاویگی

$$\left.\begin{aligned} لا - لا_1 &= ط (ع - ع_1) \\ \text{اور } ک - ک_1 &= م (ع - ع_1) \end{aligned}\right\} \quad (۲)$$

یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ دو مساواتین آیندہ حاصل ہونگی موافق شرط سوال کے

$$ط ط' + م م' + ۱ = ۰ \quad (۳)$$

اور

$$(د - د_1)(م - م') - (ص - ص')(ط - ط') = ۰$$

چونکہ $د = لا - ط ع$ اور $ص = ک - م ع$ تو

$$(لا - ط ع_1 - د)(م - م') - (ک_1 - م ع_1 - ص)(ط - ط') = ۰ \quad (۴)$$

اب بوسیلہ مساواتون (۳) اور (۴) کے قیمتین $م'$ اور $ط'$ کی یہہ حاصل ہونگی

$$م' = \frac{(لا_1 - د) ط + ع_1) م - (ک_1 - ص)(۱ + ط^۲)}{(ک_1 - ص) م + (لا_1 - د) ط - (ط^۲ + م^۲) ع_1}$$

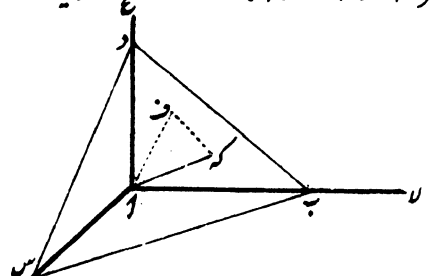
$$\text{اور } ط' = \frac{\{(ک_1 - ص) م + ع_1\} ط - (لا_1 - د)(۱ + م^۲)}{(ک_1 - ص) م + (لا_1 - د) ط - (ط^۲ + م^۲) ع_1}$$

اگر یہہ قیمتین $م'$ اور $ط'$ کی مساوات (۲) مین لکھی جاوین تو ہمین حاصل ہوگی مساوات خط مطلوب کی جو ایک نقطہ مفروض سے گذرے کی عمود ایک خط مفروض پر ہوگا اور خاص صورتونمین اور طریقی استعمال مین آسکتی ہین مثلاً دریافت کرو مساوات ایک خط کی جو محور د سے گذرتا ہی اور اسی پر عمود ہی تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین $لا_1 = ۰$ اور $ع_1 = ۰$ اسیواسطے مساواتین خط مطلوب کی یہہ ہونگی $لا = ط ع$ اور $ک - ک_1 = م ع$ لیکن خط مطلوب محور پر عمود بھی ہی اسیواسطے $م = ۰$ تو اب ثابت ہوا کہ مساواتین خط مطلوب کی یہہ ہونگی $لا = ط ع$ اور $ک = ک_1$ اگر محور متقاطع علی التوایم موافق اپنی مطلب فرض کیے

حاوین تو یہہ سوال اور سوا اسکے اور سوالات باسانی حل ہوسکی اور اسکا طریقہ کا بیان آگی کیا جاویگا۔

باب سیوم

(۴۰۸) ظاہر ہی کہ ہر ایک سطح خیال کی جاسکتی ہی کہ وہ پیدا ہوئی ہی حرکت ایک خط سی گرد دوسرے خط کی اسطرح پر کہ پہلا خط عمود دوسرے خط پر ہو فرض کرو کہ ا نقطہ شروع محور لا اور ر و اور ر ع کا ہی اور ب س د ایک حصہ سطح کا ہی اور اگر عمود اس سطح پر نقطہ شروع سے کہیچا گیا ہی اور ف ایک نقطہ سطح مفروض مین سے تو اب ظاہر ہی کہ موافق تعریف مرقومہ بالا کے ہم فرض کرسکتے ہین کہ سطح مفروض پیدا ہوئی ہی حرکت کرف سی گرد اگر کے اسطرح پر کہ زاویہ اگرف قایمہ ہی۔ دریافت کرو مساوات سطح مفروض کی فرض کرو کہ (لا اور ر و اور ع) اوتار نقطہ ف کی ہین اور (لا، اور ر و، اور ع،) اوتار نقطہ گ کے ہین اور مان لو کہ فاصلہ اگر = ف



اب ظاہر ہی کہ مربع اف = مربع اگ + مربع گف یعنی لا² + ر و² + ع² =

ف² + (لا - لا،)² + (ر و - ر و،)² + (ع - ع،)² = ف² + لا،² + ر و،² + ع،²

+ لا² + ر و² + ع² - ۲ لا لا، - ۲ ر و ر و، - ۲ ع ع،

∴ ۲ (لالا + کک + عع) = ف² + ف² = ۲ ف² یا

لالا + کک + عع = ف²

(۴۰۹) فرض کرو $\frac{\text{لا}^2}{\text{ف}^2} = \text{م}$ اور $\frac{\text{ک}^2}{\text{ف}^2} = \text{ن}$ اور $\frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2} = \text{س}$

اسیواسطی صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی م لا + ن ک + س ع = ا

واضح ہو کہ یہہ مساوات سطح کی بہت آسان ہے اسیواسطے ہم اسکو سوالات آیندہ مین

استعمال کرینگے اور فرض کرو کہ $\frac{\text{ف}^2}{\text{لا}^2} = \text{ط}$ اور $\frac{\text{ف}^2}{\text{ک}^2} = \text{ص}$ اور $\frac{\text{ف}^2}{\text{ع}^2} = \text{ہ}$

∴ $\frac{\text{لا}}{\text{ط}} + \frac{\text{ک}}{\text{ص}} + \frac{\text{ع}}{\text{ہ}} = ۱$ اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات بہت سہل ہی اور اسمین

مقادیر ط اور ص اور ہ تعبیر کرتی ہین اب اور اس اور اد کو جو فاصلہ

درمیان نقطہ ش و ع اور اون نقاط کی ہی جہان سطح تقاطع کرتی ہی محور متقاطع

علی القوایم سے اور یہہ فاصلہ اسطرح دریافت ہوسکتا ہی فرض کرو کہ دونو کے

اور ع = ۰ ∴ $\frac{\text{لا}}{\text{ط}} = ۱$ یا اب = ط اور اسیطرح باقی خطوط معلوم ہوسکتے ہین

(۴۱۰) فرض کرو کہ نقطہ سطح کا تعبیر ہوتا ہی حرف ک سے اور فرض کرو وہ زاویہ

جو اک یا ف بناتا ہی محور متقاطع علی القوایم سے تعبیر ہوتی ہین ف لا اور

ف ک اور ف ع سے اور فرض کرو کہ ک لا اور ک ک اور ک ع تعبیر کرتی ہین

اون زاویون کو جو سطح مفروض بناتی ہی محور متقاطع علی القوایم سے

اور چونکہ اوب زاویہ قایمہ ہی اور اب وہ زاویہ ہی جو سطح محور لا سے

بناتی ہے ∴ ف = ط جم ف لا اور ف = ص جم ف ک

= ط جس ک لا = ص جم ک ک اور

اور ف = ہ جم ف ع
= ہ جم ک ع } اسیواسطی جبکہ لکھی جاویں قیمتین ط اور ص اور ہ
کی مساوات سطح مین تو لا جم ف لا + ہ جم ف ہ + ع جم ف ع = ف
یا لا جس ک لا + ہ جس کہ ہ + ع جس ک ع = ف

(۴۱۱) فرض کرو کہ ک ہ ع تعبیر کرتا ہی اوس زاویہ کو جو سطح مفروض بنالتی ہے سطح ہ ع سے اور چونکہ کہ اب مساوی اوس زاویہ کے ہی جو سطح مفروض بنالتی ہی سطح ہ ع سے تو جم ف لا = جم ک . ہ ع اسیواسطی مساوات سطح کی یہہ ہوجاویگی لا جم ک . ہ ع + ہ جم ک . لا ع + ع جم ک . لا ہ = ف

(۴۱۲) چونکہ (۳۸۶) مین ثابت ہوا ہی کہ (جم ف لا)² + (جم ف ہ)² + (جم ف ع)² = ۱ تو ظاہر ہی کہ (جم ک لا ع)² + (جم ک لا ع)² + (جم ک لا ہ)² = ۱ ۞

۞ اگر تو تعبیر کرے سطح ک کو تو سطح انتہائی اس سطح کا سطح متقاطع علی القوایم پر (جم ک . لا ہ اور جم ک لا ع اور جم ک . ہ ع ہوگا اسیواسطے (جم ک لا ہ)² + (جم ک لا ہ)² + (جم ک لا ع)² + (جم ک ہ ع)² = ۱ اور ظاہر ہی کہ قیمتین ² { (جم ک . لا ہ)² + (جم ک . لا ع)² + (جم ک . ہ ع)² } = ۱ اور ظاہر ہی کہ مواقع (۴۱۲) کی اس مساوات کی جو عدد دو نمین نکلین گی مفید واسطے دریافت کرنی اوس سطح کی ہونگی جو متعلق ہین محور متقاطع علی القوایم سی مثلاً اگر مساوات سطح کی یہہ ہو لا/ط + ہ/ص + ع/ہ = ۱ اور ظاہر ہی کہ سطح اب س = ط ص/۲ اور سطح ا و س = ص ہ/۲ اور سطح ا ب د = ط ہ/۲ تو ظاہر ہے کہ سطح ب س د = √(۱/۴ (ط²ص² + ط²ہ² + ص²ہ²)) اور ظاہر ہی کہ مخروط ا س ب د = ہ/۳ . ط ص/۲ = ہ ط ص/۶

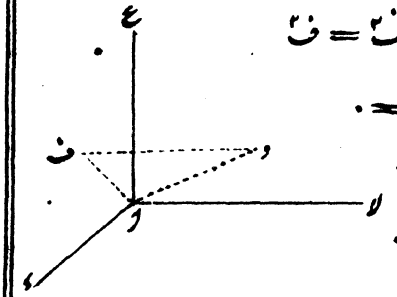
(۴۱۳) دریافت کرو وہ زاویہ جو ایک سطح بناتی ہی سطوح متقاطع القوایم سے اور قیمت ان زاویون کی ایسی اجزاء مین دریافت کرنی منظور ہی جو امثال سطح مذکور کی مساوات کی ہین فرض کرو کہ مساوات سطح مفروض کی یہہ ہی م لا + ن ک + س ع = ۱ اور مساوات ایک خاص سطح کی اجزای اون اونی مین جو وہ سطح بناتی ہی سطوح متقاطع القوایم سے موافق فقرہ (۴۱۱) یہہ ہوگی لا جم ک ز ع + ک جم ک . لا ع + جم ک . لا ک = ف تو اب بوسیلہ اس مساوات اور مساوات گذشتہ کی م = $\frac{\text{جم ک . ک ع}}{\text{ف}}$ اور ن = $\frac{\text{جم ک لا ع}}{\text{ف}}$ س = $\frac{\text{جم ک . لا ک}}{\text{ف}}$

∴ م۲ + ن۲ + س۲ = $\frac{۱}{\text{ف۲}}$ ∴ ف = $\frac{۱}{\sqrt{\text{م۲ + ن۲ + س۲}}}$ تو اب ظاہر ہی کہ

جم ک . ک ع = م ف = $\frac{\text{م}}{\sqrt{\text{م۲ + ن۲ + س۲}}}$ اور جم ک . لا ع = ن ف = $\frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{م۲ + ن۲ + س۲}}}$ اور جم ک . لا ک = س ف = $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{م۲ + ن۲ + س۲}}}$

(۴۱۴) ایک سطح کی مساوات کی مختلف صورتین ہوسکتی ہین موافق مختلف مقام سطح کے فرض کرو کہ سطح نقطہ شروع مین سے گذرتی ہی تو اب ظاہر ہی کہ ف = ۰ تو اب جسوقت لکھین فقرہ (۴۰۸) مین ف = ۰ تو حاصل ہوگی ہمین مساوات ایسی سطح کی جو گذرتی ہی نقطہ شروع مین سے اور چونکہ مساوات سطح کی دریافت ہوئی تھی جبکہ مقدارات کی محدود فرض کی گئی تھی اسیواسطے ہم اس خاص صورت کو علیحدہ ثابت کرین گے اور اسکے ثبوت مین مساوات مذکور کی استعانت

نہیں لین گی — فرض کرو کہ او (= ف) طول ایک عمود کا ہی جو کھینچا ہوا ہی
سطح مفروض سے نقطہ معلوم و تک اور فرض کرو کہ او تا نقطہ ق کی لا اور ی
اور ع ا ہین اور فرض کرو کہ لا اور ی اور ع او تا نقطہ ف کے ہین جو سطح
مفروض مین واقع ہی تو اب ظاہر ہی کہ وف² = او² + اوف² یا (لا - لا ا)² +
(ی - ی ا)² + (ع - ع ا)² = ف² + لا² + ی² + ع² ۔



— (لا لا ا + ی ی ا + ع ع ا) + ف² = ف²

یعنے لا لا ا + ی ی ا + ع ع ا = ۰

یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ یہہ مساوات
اسی خاص صورتین ویسی ہی ثابت
ہوئی ہی جیسی مساوات عام ثابت
ہوئی تھی سوای مقدار مقررہ کی یعنی دونون صورتون مین صرف فرق مقدار مقررہ کا ہی

(۴۱۵) فرض کرو کہ سطح مفروض متوازی ایک سطح کی سطوح متقاطع علی القوائم
ہی مثلاً فرض کرو کہ وہ متوازی سطح لای کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ ط = ∞
اور ص = ∞ اسیواسطے صورت مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{ط}} + \frac{\text{ی}}{\text{ص}} + \frac{\text{ع}}{\text{ھ}} = ۱$ یہہ
ہوجاویگی ۰ لا + ۰ ی + $\frac{\text{ع}}{\text{ھ}}$ = ۱ ∴ ع = ھ اور لا = ÷ اور
ی = ÷ مساوات اول سے معلوم ہوتا ہی کہ ہر ایک نقطہ سطح کا مساوی
فاصلہ پر سطح لاو سے ہی اور باقی دو مساواتون سے معلوم ہوتا ہی کہ واسطے اس
خاص قیمت ع کے ہر ایک ممکن قیمت لا اور ی کی سے نقاط سطح کی حاصل ہوسکتے

دونو مساوات اخیر کو اکثر استعمال مین نہین لاتے ہین اسیواسطے مساوات اوس سطح کی جو متوازی سطح لاءکے ہو یہ ہی ع = ٥ اور اسیطرحسی مساوات اوس سطح کی جو متوازی سطح لاع کے ہو یہ ہوگی لا = ط اور اوس سطح کی متوازی ءع کے ہو یہ ہوگی ء = ص اور مساوا تین سطح متقاطع علی القوایم کی مثلاً سطح لاء کی یہ ہوگی ع = ٠ اور لا = ÷ اور ء = ÷ یا اختصاراً اسطرح تعبیر کیجاوینگی

ع = ٠ .

(۴۱۶) خطوط بس اور بد اور دس جہان سطح مفروض تقاطع کرتی ہی سطوح متقاطع علی القوایم سی نقوش سطح مفروض کے کہلاتی ہین مساوا تین ان نقوش کی دریافت ہوسکتی ہین بوسیلہ فرض کرنے خاص قیمت لا اور ء اور ع کے جو وہ حاصل کرتی ہین جبکہ سطح مفروض قطع کرتی ہی سطوح متقاطع علی القوایم کو۔ فرض کرو کہ مساوات سطح مفروض کی یہ ہی م لا + ن لا + ٥ ع = ا تو ظاہر ہی کہ مساوا تین خط بس کی یہ ہونگی ع = ٠ اور م لا + ن ء = ا اسیطرحسی مساوا تین نقوش بد اور س د کی یہ ہونگی

ء = ٠ اور م لا + ٥ ع = ا

لا = ٠ اور ن ء + ٥ ع = ا

بیان اشکال سطح کا

(۴۱۷) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو متوازی ایک سطح مفروض کی ہے فرض کرو کہ مساوات سطح مفروض کی یہ ہی م لا + ن ء + ٥ ع = ا اور سطح

مطلوب کی یہہ م لا + ن ی + ہ ع = ۱ چونکہ سطوح متوازی ہین تو ظاہر ہے
کہ نقوش انکی بہی سطوح متقاطع علی القوایم پر متوازی ہونگی اب ظاہر ہی کہ
نقوش انکی سطح لاع پر م لا + ہ ع = ۱ اور م لا + ہ ع = ۱ : $\frac{م}{ہ} = \frac{م}{ہ}$
یا م = $\frac{م}{ہ}$ ہ اسیطرح سے ن = $\frac{ن}{ہ}$ ہ یہانتک ثابت ہوا کہ مساوات
مطلوب یہہ ہی $\frac{م}{ہ}$ ہ لا + $\frac{ن}{ہ}$ ہ ی + ہ ع = ۱ یعنے م لا + ن ی
+ ہ ع = $\frac{ہ}{ہ}$ ظاہر ہی کہ اس مساوات مین مقدار ہ مجہول ہی اور اس سے
معلوم ہوتا ہی کہ لانہایت سطوح متوازی ایک سطح مفروض کہینچ سکتے ہین
اور یہہ مواقق تحریر اقلیدس کے بہی صحیح ہی اور ظاہر ہی کہ یہان تین شرطین
معلوم ہین کیونکہ تین نقش ایک سطح کے متوازی دوسری سطح کی تین نقش
کی ہین اور اگر نقوش دو سطح پر سطوح متقاطع علی القوایم سے متوازی ہون
تو تیسری سطح پر بہی متوازی ہونگی کیونکہ $\frac{م}{ہ} = \frac{م}{ہ}$ اور $\frac{ن}{ہ} = \frac{ن}{ہ}$
∴ $\frac{ن}{م} = \frac{ن}{م}$ یا م لا + ن ی = ۱ موازی اسکی ہی م لا + ن ی = ۱
پس یہانتک معلوم ہوا کہ دو شرطین دی گئی ہین اسسے معلوم کرنے تین مقادیر
مقررہ کے

(۴۱۸) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو متوازی ایک سطح مفروض کی ہو
اور نقطہ مفروض (لا، ی، ع،) مین سے گذری فرض کرو کہ مساوات
سطح مطلوب کی یہہ ہی م لا + ن ی + ہ ع = ۱ اور چونکہ سطح نقطہ
مفروض (لا، ی، ع،) مین گذرتی ہی تو صورت مساوات گذشتہ کی

یہہ ہوجاویگی م (لا - لا۱) + ن (ی - ی۱) + ہ (ع - ع۱) = ۰
اور یہہ شرطین بھی حاصل ہونگی $\frac{م}{ہ}$ = $\frac{م}{ہ}$ اور $\frac{ن}{ہ}$ = $\frac{ن}{ہ}$
∴ $\frac{م}{ہ}$ ہ (لا - لا۱) + $\frac{ن}{ہ}$ ہ (ی - ی۱) + ہ (ع - ع۱) = ۰
یا م (لا - لا۱) + ن (ی - ی۱) + ہ (ع - ع۱) = ۰

(۴۱۹) دریافت کرو نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم اور ایک سطح کا
فرض کرو کہ م لا + ن ی + ہ ع = ا مساوات ایک سطح مفروض کی ہی
اور لا = ط ع + د
اور ی = ح ع + ص
} مساواتین ایک خط کی ہین
اور چونکہ اوتار نقطہ تقاطع کے مشترک ہوتی ہین یعنی جو اوتار کہ اس نقطہ پر خط
کی ہونگی وہی اس نقطہ پر سطح کی ہونگی ∴ م (ط ع + د) + ن (ح ع + ص)
+ ہ ع = ا ∴ ع = $\frac{ا - م د - ن ص}{م ط + ن ح + ہ}$ اور لا = ط ع + د =
$\frac{ط - ن ص د + ن ح د + ہ د}{م ط + ن ح + ہ}$ اور ی = ح ع + ص =
$\frac{ح - م د ح + ط ص + ہ ص}{م ط + ن ح + ہ}$ اور ان مساواتون سے نقطہ تقاطع معلوم ہوجاویگا

(۴۲۰) دریافت کرو ایسی شرطین موافق جنکے ایک خط مستقیم اور ایک سطح
متوازی منطبق ہوجاوین — اگر وہ متوازی ایک دوسری کی ہین تو ظاہر
ہی کہ قیمتین لا اور ی اور ع کی لانہایت ہونگی ∴ م ط + ن ح + ہ = ۰
اور اگر وہ منطبق ہونگی تو قیمتین لا اور ی اور ع کی غیر منقطع ہونگی یا
ہر واحد = $\frac{۰}{۰}$ ∴ م ط + ن ح + ہ = ۰ اور ا - م د - ن ص = ۰

اور یہہ دو شرطین اوس صورت مین صادق آوینگی جبکہ سطح اور خط منطبق ایک دوسری پر ہونگی اور شمار کنندہ لا اور ے کی بوسیلہ مساواتون گذشتہ کے ہر واحد = ۰ حاصل ہونگی یہانتک ثابت ہوا کہ واسطے دریافت کرنی ایک سطح کے جو ایک خط پر منطبق ہو یہہ شرطین پیدا ہونگی م د + ن ص = ۱ اور م ط + ن ح + ہ = ۰ ان دونو مساواتونسے یہہ حاصل ہوگا

م = $\frac{ح + ہ ص}{د ح - ص ط}$ اور ن = $-\frac{ط + ہ د}{د ح - ص ط}$ تو اب طرفین کر مساوات سطح کی یہہ ہوگی (ح + ہ ص) لا - (ط + ہ د) ے + ہ (د ح - ص ط) ع = د ح - ص د اور اس مساوات مین ہ غیر منقطع ہے ۔

(۴۲۱) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو منطبق ہو دو خط مفروض پر فرض کرو کہ مساوات سطح کی یہہ ہی م لا + ن ے + ہ ع = ۱ اور مساواتین خطوط معلوم کی یہہ ہین $\begin{cases} لا = ط ع + د \\ ے = ح ع + ص \end{cases}$ اور $\begin{cases} لا = ط' ع + د' \\ ے = ح' ع + ص' \end{cases}$ اور شرطین اوس سطح کی جو منطبق ہو خطوط مفروض پر یہہ ہونگی م د + ن ص = ۱ (۱)

اور م د' + ن ص' = ۱ (۲)

اور م ط + ن ح + ہ = ۰ (۳)

م ط' + ن ح' + ہ = ۰ (۴) مساوات (۱) اور (۲) سے قیمتین م اور ن کی حاصل ہونگی اور جبکہ لکھین ان قیمتون م اور ن کو مساوات (۳) اور (۴) مین تو دو قیمتین ہ کی حاصل ہونگی اور اب مساوات آیندہ حاصل ہوگی

(حَ - ح)(د - دَ) + (طَ - ط)(ص - صَ) = ۰ اور شرط اس مساوات کی پوری ہوگی جبکہ خطوط متوازی ہونگی (اور اس صورت میں طَ = ط اور حَ = ح) یا جبکہ وہ ملاقی ہونگی پہلا نسبی معلوم ہوا کہ ایک سطح کھینچ سکتی ہے دو تو صورتوں میں اس طرح پر کہ وہ منطبق ہو دو خط معلوم پر۔ جبکہ لکھیں قیمتوں مَ اور نَ اور ہ کو تو مساوات سطح کی یہہ حاصل ہوگی (صَ - ص)لا - (دَ - د)ک +

{(دَ - د)ح - (صَ - ص)ط}ع = دصَ - ہص

(۴۲۲) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو منطبق ہو ایک خط پر اور متوازی دوسری خط کی ہو اب ظاہر ہے کہ موافق شرط سوال کے تین مساواتیں آیندہ حاصل ہونگی

مد + نص = ا } جبکہ سطح ایک خط پر منطبق ہو
مط + نح + ہ = ۰

اور مطَ + نحَ + ہ = ۰ جبکہ سطح مطلوب متوازی دوسری خط کی ہو اور بوسیلہ ان تینوں مساواتوں کے مقادیر مَ اور نَ اور ہَ دریافت ہوسکتی ہیں اور جبکہ لکھیں ان قیمتوں کو سطح کی مساوات عام میں تو ہمیں مساوات سطلوب حاصل ہوگی

(۴۲۳) دریافت کرو تقاطع دو سطح معلوم کا فرض کرو کہ مساواتیں دو سطح کی یہہ ہیں مد + نک + ہع = ا اور مَلا + نَک + ہَع = ا جبکہ دور کریں ع کو بوسیلہ ان دو مساوات کی تو حاصل ہوگی ایک ایسی مساوات جسمیں مقادیر لا اور ک کی باہمی جا دیں گے اور یہہ مساوات تعلق رکھی گی اوس تقاطع دو سطح سے جسکا نشان سطح لاک پر ہے اور مساوات اسکی یہہ ہوگی

(م ہ - م ہ) لا + (ن ہ - ن ہ) ک = ہ - ہ اور اسیطرح سی بہیر

(م ن - م ن) لا + (ہ ن - ہ ن) ع = ن - ن مساوات اوس خط نشانی کی سطح لاع پر جو تقاطع کرنے دو سطح کی سی پیدا ہوا ہی اور چونکہ مساواتین ایک خط نشانی کی دو سطح متقاطع علی القوایم پر مساواتین خط مطلوب کی ہوتی ہین تو اب ثابت ہوا کہ مساواتین گذشتہ مساواتین اوس خط کی ہین جو تقاطع کرنی دو سطح کی سی پیدا ہوتا ہی اور تیسرا خط نشانی بوسیلہ دو باقی خط نشانی کے معلوم ہوسکتا ہی اور وہ علیحدہ بغیر انکی استعانت کی بہی دریافت ہوسکتا ہی اور مساوات اوسکی یہہ ہوگی (ن م - ن م) ک + (ہ م - م ہ) ع = م - م

(۴۲۴) دریافت کرو تقاطع تین سطح کا یعنی وہ نقطہ جو تقاطع کرنی تین سطح کی سی پیدا ہوگا فرض کرو کہ مساواتین اوس خط کی جو تقاطع کرنی سطح اول اور دویم سی پیدا ہوگا موافق فقرہ گذشتہ کے

لا = ط ع + د
ک = م ع + ص

اور فرض کرو کہ فصل مشترک سطح اول اور سیوم کا مساوات آیندہ سی تعبیر ہوتا ہی

لا = ط' ع + د'
ک = م' ع + ص'

اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ دریافت کرنی تقاطع ان دو خط کی بوسیلہ چار مساواتون گذشتہ کے ہمین حاصل ہوگی قیمتین لا اور ک اور ع اور یہہ موافق نقطہ تقاطع دو خط کی ہوگی اور ظاہر ہی کہ یہہ نقطہ فی الحقیقت نقطہ تقاطع تین سطح مفروض کا ہوگا - اسیطور سے دریافت ہوسکتی ہی

نسبت درمیان امثال کئی سطوح کے جو ملتی ہین ایک نقطہ پر

(۴۲۵) دریافت کرو نسبت درمیان امثال مساواتون چار سطح کے جنکہ وہ ملین ایک خط مستقیم پر - فرض کرو کہ مساواتین سطوح مفروض کی یہہ ہین

م لا + ن ی + ہ ع = ۱

م۱ لا + ن۱ ی + ہ۱ ع = ۱

م۲ لا + ن۲ ی + ہ۲ ع = ۱

م۳ لا + ن۳ ی + ہ۳ ع = ۱

تو اب ظاہر ہی کہ سطح اول اور دویم تقاطع کرینگی ایک خط پر جسکی مساواتین یہہ ہونگی

لا = ط ع + د

ی = م ع + ص اور تقاطع کرنے سطح اول اور تیسرے سی حاصل ہونگی یہہ مساواتین

لا = ط۱ ع + د۱

ی = م۱ ع + ص۱ اور سطح اول اور چوتھی تقاطع کرینگی ایک خط پر جسکی مساواتین یہہ ہونگی لا = ط۲ ع + د۲

ی = م۲ ع + ص۲ اب ظاہر ہی کہ جب یہہ خطوط منطبق ہون ایک دوسرے پر تو ط = ط۱ = ط۲ اور م = م۱ = م۲ اور د = د۱ = د۲ اور ص = ص۱ = ص۲ اور قیمتین ط اور م اور د اور ص کی بجزای م اور ن اور ہ وغیرہ مین معلوم ہو سکتی ہین بوسیلہ فقرہ (۴۲۳) کی تو اب ظاہر ہی کہ نسبت درمیان امثال کی دریافت ہو گئی ہے یہی نسبت درمیان امثال کئی سطحون کے مساواتون

کی ہوگی جبکہ وہ ایک نقطہ پر ملین — ثہ ثہ ثہ ثہ

(۴۲۶) دریافت کرو نسبت درمیان اشعال مساوات ایک خط اور ایک سطح کی جبکہ وہ عمود ایک دوسری پر ہون فرض کرو کہ (لا اور ی اور ع) اوتار اوس نقطہ کی ہین جہانکہ سطح اور خط ملتی ہین تو اب ظاہر ہی کہ مساوات سطح کی یہہ ہوگی

م (لا — لا۱) + ن (ی — ی۱) + ہ (ع — ع۱) = ۰ (۱) اور مساوات تین خط کی یہہ ہونگی

$$\left.\begin{aligned} لا &= ط ع + د \\ ی &= ح ع + ص \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۲)$$

اور فرض کرو کہ مساوات تین ایک خط کی جو عمود (۲) پر اور نقطہ (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) مین جو (۲) مین سے گذرتا ہی یہہ ہین

$$\left.\begin{aligned} لا - لا۱ &= ط' (ع - ع۱) \\ ی - ی۱ &= ح' (ع - ع۱) \end{aligned}\right\} (۳)$$

اور چونکہ یہہ خطوط عمود ایک دوسرے پر ہین اسیواسطے جیب التمام اوس زاویہ کا جو درمیان انکی واقع ہی = ۰

∴ ط ط' + ح ح' + ۱ = ۰ موافق فقرہ (۴۰۲) کی اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ اس مساوات اور مساوات (۳) کے ہمکو نسبت درمیان اوتار لا اور ؤ اور ع کے دریافت ہوجاویگی اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ وہ نقطہ جسکی یہہ اوتار تعلق رکھتی ہین اوس خط مین سی جو عمود خط معلوم پر ہی یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ اگر لکھین قیمتین ط' اور ح' کی مساوات گذشتہ مین تو ہمکو حاصل ہوگی ایک مساوات ایسی سطح کی جو لوکس تمام اون خطوط کا ہی جو عمود (۲) پر ہین اور وہ یہہ مساوات ہی

$$ط \frac{لا - لا۱}{ع - ع۱} + ح \frac{ی - ی۱}{ع - ع۱} + ۱ = ۰ \quad \text{یا}$$

ط (لا - لا۱) + م (ک - ک۱) + (ع - ع۱) = ۰ (۴) اور چونکہ لوکس مساوات (۴) کا لوکس (۲) پر منطبق ہونا چاہئے اسیواسطے جبکہ لکھین امثال دونو مساواتون کی مساوے ایک دوسری کی تو حاصل ہوگا یہہ ط = $\frac{ل}{ہ}$ اور م = $\frac{ن}{ہ}$ اور یہی شرطین مطلوب ہین —

(۴۲۷) یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر خط معلوم ہو تو مساوات اوس سطح کی جو عمود اسپر ہی یہہ ہوگی ہ لا + م ک + ع = $\frac{ا}{ہ}$ اور اگر سطح معلوم ہو تو مساوا تین خط کی جو عمود اسپر ہی یہہ ہونگی لا = $\frac{م}{ہ}$ ع + د اور ک = $\frac{ن}{ہ}$ ع + ص صورت مساوات سطح اور خط سی معلوم ہوتا ہی کہ نقش سطح کا عمود سے خط مذکور کی اوس خط نشانی پر جو اوسی سطح متقاطع علی القوایم پر کھینچا گیا ہی

(۴۲۸) اگر سطح نقطہ (لا۱ اور ک۱ اور ع۱) مین سے گذری اور عمود اوس خط معلوم پر ہو جسکی مساوا تین یہہ ہین (لا = ط ع + د اور ک = م ع + ص) تو مساوات سطح مذکور کی یہہ ہوگی ط (لا - لا۱) + م (ک - ک۱) + ع - ع۱ = ۰

(۴۲۹) اگر خط مستقیم ایک نقطہ معلوم مین سے گذری اور عمود اوس سطح پر ہو (م لا + ن ک + ہ ع = ۱) تو مساوا تین اوس خط کی یہہ ہونگی

لا - لا۱ = $\frac{م}{ہ}$ (ع - ع۱) اور ک - ک۱ = $\frac{ن}{ہ}$ (ع - ع۱) ۰

(۴۳۰) دریافت کرو طول ایک عمود کا جو کھینچا جاوے ایک نقطہ معلوم سے سطح معلوم پر فرض کرو کہ (لا۱ اور ک۱ اور ع۱) اوتار نقطہ معلوم کی ہین اور م لا + ن ک + ہ ع = ۱ مساوات سطح معلوم کی ہی فقرہ (۴۱۳) مین ثابت

ہوا ہی کہ اگر ف طول اوس عمود کا ہو جو کھینچا جاوے نقطہ شروع سی اوس سطح پر تو بی
مساوات یہہ ہی م لا + ن ک + ہ ع = ۱ تو ف = $\frac{۱}{\sqrt{م^۲ + ن^۲ + ہ^۲}}$ اور ظاہر
ہی کہ مساوات اوس سطح کی جو متوازی سطح معلوم کی ہی اور نقطہ مفروض مین سی گذرتا ہی
یہہ ہی م (لا - لا۱) + ن (ک - ک۱) + ہ (ع - ع۱) = ۰ (۴۱۸)
اسیواسطی فاصلہ ف۱ نقطہ شروع کا اس سطح سی یہہ ہوگا

ف۱ = $\frac{م لا۱ + ن ک۱ + ہ ع۱}{\sqrt{م^۲ + ن^۲ + ہ^۲}}$ لیکن ظاہر ہی کہ فاصلہ نقطہ مفروض کا سطح
معلوم سی یہہ ہی = ف۱ - ف = $\frac{م لا۱ + ن ک۱ + ہ ع۱ - ۱}{\sqrt{م^۲ + ن^۲ + ہ^۲}}$

(۴۱۹) دریافت کرو فاصلہ ایک نقطہ کا ایک خط مفروض سی فرض کرو کہ مساوات
خط مفروض کی یہہ ہی لا = ط ع + د اور ک = م ع + ص تو اب ظاہر ہی کہ
مساوات اوس سطح کی جو نقطہ معلوم (لا۱ اور ک۱ اور ع۱) مین سی گذرتی عمود
خط مفروض پر ہو یہہ ہی ط (لا - لا۱) + م (ک - ک۱) + ع - ع۱ = ۰ اور اب
بوسیلہ مساوات تون کے نتیجہ کی یہہ حاصل ہوگا ع = $\frac{ط (لا۱ - د) + م (ک۱ - ص) + ع۱}{۱ + ط^۲ + م^۲}$
فرض کرو کہ یہہ کسر = $\frac{ی}{ی}$ تو ع = $\frac{ی}{ی}$ اور لا = ط $\frac{ی}{ی}$ + د اور
ک = م $\frac{ی}{ی}$ + ص یہہ اوتار اوس نقطہ تقاطع کی ہین جو پیدا ہوا ہی تقاطع کرنے
خط معلوم اور سطح کی سی جو گذرتی ہی نقطہ معلوم مین سی اور عمود مطلوب (ک) فاصلہ
نقطہ معلوم کا اس نقطہ تقاطع سی ہی اسیواسطی ک^۲ = (لا۱ - لا)^۲ + (ک۱ - ک)^۲
+ (ع۱ - ع)^۲ = (لا۱ - د - ط $\frac{ی}{ی}$)^۲ + (ک۱ - ص - م $\frac{ی}{ی}$)^۲ + (ع۱ - $\frac{ی}{ی}$)^۲
اور صورت اس مساوات کی بعد مجذور لینی اور اختصار کی یہہ حاصل ہوگی

$$\text{ک}^2 = (\text{لا} - \text{د})^2 + (\text{ا} - \text{ص})^2 + \text{ع}^2 - \frac{\text{ت}^2}{\text{ن}^2}$$

(۴۳۲) اگر نقطہ معلوم نقطہ شروع فرض کیا جاوے تو لا اور ا اور ع ہر واحد = ۰ ∴ $\text{ک}^2 = \text{د}^2 + \text{ص}^2 - \frac{(\text{ط د} + \text{م ص})^2}{1 + \text{ط}^2 + \text{م}^2}$

(۴۳۳) دریافت کرو زاویہ ر جو درمیان دو سطح معلوم کی واقع ہی - فرض کرو کہ مساواتین سطوح معلوم کی یہہ ہین م لا + ن ا + ۵ ع = ۱ (۱)

م' لا + ن' ا + ۵' ع = ۱ (۲)

اگر کہیں ہم عمود نقطہ شروع سے ہر ایک سطح پر سطوح معلوم سی تو ظاہر ہی کہ زاویہ درمیان ان دو عمودون کے مساوی اوس زاویہ کی ہوگا جو مابین سطوح معلوم کے واقع ہی فرض کرو کہ مساواتین ان خطون کی یہہ ہین

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ط ع} \\ \text{ا} &= \text{ح ع} \end{aligned}\right\} \quad (۳)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ط' ع} \\ \text{ا} &= \text{ح' ع} \end{aligned}\right\} \quad (۴)$$

واسطے اثبات کی کہ (۳) عمود (۱) پر ہو جاوے ہمکو یہہ فرض کرنا چاہئی ط = $\frac{\text{م}}{۵}$ اور ح = $\frac{\text{ن}}{۵}$ موافق فقرہ (۴۲۶) کے اور اسیطرح ط' = $\frac{\text{م}'}{۵'}$ اور ح' = $\frac{\text{ن}'}{۵'}$ تو اب ظاہر ہی کہ زاویہ درمیان عمود مذکور کی یعنی زاویہ جو مابین سطوح کے واقع ہی صورت آیندہ سے معلوم ہوجاویگا

$$\text{جم ر} = \frac{\text{ط ط'} + \text{ح ح'} + ۱}{\sqrt{(۱ + \text{ط}^2 + \text{ح}^2)}\sqrt{(۱ + \text{ط}'^2 + \text{ح}'^2)}} \quad (۴۰۳) \text{ اسیواسطے}$$

$$\text{جم ر} = \frac{\text{م م'} + \text{ن ن'} + ۵۵'}{\sqrt{\text{م}^2 + \text{ن}^2 + ۵^2}\sqrt{\text{م}'^2 + \text{ن}'^2 + ۵'^2}}$$

(۴۳۴) واضح ہو کہ ہم اس قیمت ر کو ایک اور صورت مین بوسیلہ (۴۱۳) کے لکھہ سکتے ہین اور وہ یہہ ہی جم ر = حم ک لا حم ک' لا + حم ک ا حم ک' ا + حم ک ع حم ک' ع

یا جم ر = جم ک ع جم ک ع + جم ک لا ع جم ک لا ع جم ک لا ع

(۴۳۵) اگر سطوح مفروض عمود ایک دوسری پر ہون تو ظاہر ہی کہ

جم ر = ۰ ∴ م م ۱ + ن ن ۱ + ۱ = ۰ تو اب یہانسی معلوم ہوا کہ اگر

مساوات کسی سطح کی یہہ ہو م لا + ن ز + ۵ ع = ۱ تو مساوات اوس

سطح کی جو عمود اسپر ہی یہہ ہوگی م ۱ لا + ن ۱ ز − (م م ۱ + ن ن ۱)/۵ ع = ۱

اور اسمین دو مقدار مقررہ غیر منقطع ہین —

(۴۳۶) اگر سطوح مفروض متوازی ہون تو جم ر = ۱ تو اب اگر لکھین جم ر

کی مساوی لہ تُو = ۱ کی تو آخر کو یہہ حاصل ہوگا م/ن = م ۱/ن ۱ اور م/۵ = م ۱/۵

اور یہہ وہی نتیجہ ہی جو ہمنی ابھی متوازی سطوح مین حاصل کیا ہے

(۴۳۷) دریافت کرو ایک زاویہ جو درمیان ایک خط مستقیم اور ایک سطح

واقع ہی ظاہر ہی کہ یہہ زاویہ مساوی اوس زاویہ کی ہی جو کہ یہی خط بناتا ہی

سطح نشانی سطح مذکور کی سی اب اگر کھینچین ایک عمود کسی نقطہ خط مفروض سے

سطح مفروض پر تو زاویہ مطلوب تمامی اوس زاویہ کا ہوگا جو عمود مذکور خط مفروض

سی بناتا ہی فرض کرو کہ مساواتین سطح اور خط کی یہہ ہین م لا + ن ز + ۵ ع = ۱

اور لا = ط ع + د اور ز = ح ع + ص اور مساواتین اوس عمود کی

جو کھینچا جاوے اس نقطہ (لا اور ز اور ع) سی جو خط مفروض مین واقع ہی سطح

معلوم پر یہہ ہوگی لا = م/۵ (ع − ع ۱) اور ز = ن/۵ (ع − ع ۱)

موافق (۴۲۹) کے ∴ جم (کے/۲ − ر) = جس ر =

$$\frac{ط + \frac{ح}{ه} ز + \frac{ن}{و}}{\sqrt{1 + ط^2 + ح^2} \sqrt{1 + \frac{ز^2}{ه^2} + \frac{ن^2}{و^2}}} = \frac{ب + ن ج + ه}{\sqrt{1 + ب^2 + ج^2} \sqrt{م^2 + ن^2 + ه^2}}$$

باب چہارم

بیان نقطہ اور خط مستقیم اور سطح مین جبکہ محور ترچھی فرض کئے جاوین —

(۳۳۸) اگر محور متقاطع علی القوایم نہون اور وہ ایک خاص زاویہ بناوین تو اونکو ترچھی محور کہتی ہین مساواتین نقطہ کی اس صورتین وہی ہونگی جو فقرہ (۳۸۱) مین ثابت ہوئی ہین مگر مقادیر ط اور ص اور س وہان نہین بلکہ ترچھی خطوط کو جو عمود سطوح متقاطع علی القوایم پر کھینچی گئے تھی لیکن اسجای تعبیر کرینگی خطوط کو جو متوازی ترچھی محورونکی کھینچی جاوینگے —

(۳۳۹) دریافت کرو فاصلہ ایک نقطہ کا نقطہ شروع سے بلحاظ ترچھی محورونکی فرض کرو کہ لا اور ر اور ع ترچھی محور ہین اور مان لو کہ لا اور ر اور ع اونا نقطہ ف کی ہین کھینچو خط اق کو اور قایم کرو اسپر عمود ف ن تو اب ظاہر ہے

مربع او ف = مربع او ن + مربع ف ن + دوچند سطح او ن اور ق ن اور

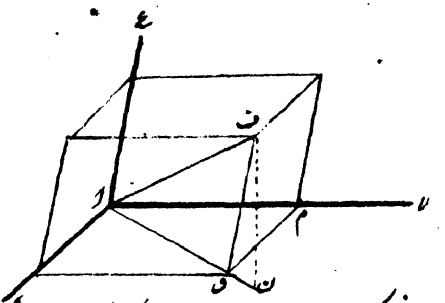
ق ن = ف ق جم ف ق ن = ع جم ع او ق اور او جم ع او ق = ا م جم ا ع

+ ر جم ر ا ع موافق فقرہ (۳۷۹) = لا جم لا ا ع + ر جم ر ا ع

∴ سطح او ق اور ق ن = ع (لا جم لا ا ع + ر جم ر ا ع) اور مربع او ن =

لا^۲ + ر^۲ + ۲ لا ر جم ر ا لا ∴ او^۲ = ف^۲ = لا^۲ + ر^۲ + ع^۲ + ۲ لا ر جم لا ا ر

+ ۲ لا ع جم لا ا ع + ۲ ر ع جم ر ا ع .



(۴۴۰) دریافت کرو فاصلہ درمیان دو نقطہ کے جبکہ محور ترچھی ہون - فرض کرو لا اور ء اور ع اوتار ایک نقطہ کی ہین اور لا، اور ء، اور ع، اوتار دوسری نقطہ کی ہین - تو اب ظاہر ہی کہ فاصلہ درمیان ان نقاط کی قطر اوس مجسم کا ہے جسکے اضلاع مساوی ہین حاصل تفریق متوازی اوتار دو نقطہ کی موافق (۴۸۸) کے

∴ ف۲ = (ل - لا،)۲ + (ء - ء،)۲ + (ع - ع،)۲ + ۲ (لا - لا،) (ء - ء،) جم لاء
+ ۲ (لا - لا،) (ع - ع،) جم لاع + ۲ (ء - ء،) (ع - ع،) جم ءع

(۴۴۱) دریافت کرو مساوات خط مستقیم کی بلحاظ ترچھی محور کی - ظاہر ہے کہ ایک خط مستقیم خیال کیا جا سکتا ہے کہ وہ پیدا ہوا ہی تقاطع کرنے دو سطح ن ق سی جو پیدا ہونگی بوسیلہ کہنچنی لا نہایت خطوط کی نقاط خط مفروض سے متوازی سطوح لاع اور ءع کی اور چونکہ نقوش ان سطوح کے ویسی ہی ہین جیسی سطوح متقاطع علی القوایم مین تھی تو اسیواسطے مساواتین خط مستقیم کی یہہ ہونگی

لا = طع + د اور ء = م ع + ص لیکن قیمت ط اور م کی کسی ایک زاویہ کی مماس کو تعبیر نہین کرتی ہی وہ تعبیر کرتی ہی اوس نسبت کو جو جیب متوی زاویونکی

جو ہر ایک نقش اپنی سطح مین محور سے بتاہی اور مقادیر اور ص وہی ہین جو صورت محور متقاطع علی القوایم مین ثابت ہوئی ہین اسیواسطے وہ مشکلین خط مستقیم کی محوردن کی زاویہ پر موقوف نہین ہین اس صورت مین اوسیطور سے ثابت ہوگی جیسی محور متقاطع علی القوایم کی صورت مین ثابت ہوئی ہین —

(۴۴۴) دریافت کرو زاویہ درمیان دو خط مستقیم کی جبکہ محور ترچھی فرض کئی جاوین ہم اسجای اوس ترکیب کو عمل مین لاوینگی جو فقرہ (۴۰۲) مین لکھی گئی تہی فرض کرو کہ مساواتین اون خطوط کے جو کھینچی جاوین متوازی خطوط مفروض کے گذرتی ہوئی نقطہ شروع مین سے یہہ ہین $\left\{\begin{array}{l} لا = ط ع \\ ى = م ع \end{array}\right.$ (۱) اور $\left\{\begin{array}{l} لا = ط' ع \\ ى = م' ع \end{array}\right.$ (۲)

فرض کرو کہ $ر$ فاصلہ ایک نقطہ (لا اور ى اور ع) (۱) کا نقطہ شروع سے ہی اور $ر_1$ فاصلہ نقطہ (لا$_1$ اور ى$_1$ اور ع$_1$) (۲) کا نقطہ شروع سے ہی اب اگر $ف$ فاصلہ درمیان ان نقاط کی فرض کیا جاوے اور $ہ$ زاویہ مطلوب تو $ف^2 = ر^2 + ر_1^2$ —

$$ف^2 = (لا - لا_1)^2 + (ى - ى_1)^2 + (ع - ع_1)^2 + 2(لا - لا_1)(ى - ى_1) جم لا ى + 2(لا - لا_1)(ع - ع_1) جم لا ع + 2(ى - ى_1)(ع - ع_1) جم ى ع = ر^2 + ر_1^2 - 2(لا لا_1 + ى ى_1 + ع ع_1) - 2\{(لا ى + لا ى_1) جم لا ى + (لا ع + ع_1 لا) جم لا ع + (ى ع + ع_1 ى) جم ى ع\} \therefore ر ر_1 جم ہ = لا لا_1 + ى ى_1 + ع ع_1 + \{(لا ى + لا ى_1) جم لا ى + (لا ع + لا_1 ع) جم لا ع + (ى ع + ى_1 ع) جم ى ع\}$$

$\therefore$ جم ہ = لا لا۱ + ک ک۱ + ع ع۱ + وغیرہ =

$$\frac{ط ط' + م م' + ۱ + (ط م + ط' م) جم لا لا۱ + (ط + ط') جم لا لا۱ + (م + م') جم ک ک۱ + جم ع ع۱}{\sqrt{(۱ + ط^۲ + م^۲ + ۲ ط جم لا لا۱ + ۲ ط م جم لا ک۱ + ۲ ط جم لا ع۱ + ۲ م جم ک ع۱ + ۱ + ط'^۲ + م'^۲ + وغیرہ}}$$

(۴۴۴) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جبکہ محور ترچھی فرض کئے جاوین —

ظاہر ہی کہ ایک سطح لوکس ہوگی تمام اون خطوط کی جو کھینچی جاوین عمود ایک خط مفروض پر گذرتی ہوئی ایک نقطہ مفروض مین سے جو خط معلوم پر واقع ہی — فرض کرو کہ مساواتین خط مفروض کی یہہ ہین لا = ط ع + د

ک = م ع + ص اور مساواتین اوس

خط کی جو نقطہ مفروض (لا۱ اور ک۱ اور ع۱) مین سے گذری یہہ ہونگی

(لا − لا۱) = ط (ع − ع۱) اور (ک − ک۱) = م (ع − ع۱) اور چونکہ یہہ خطوط عمود ایک دوسری پر ہین اسلیے زاویہ جو درمیان ان خطوط کے واقع ہی = ۹۰° یا جہ = ۰ اسلیے بحکم شکل گذشتہ کے

ط ط' + م م' + ۱ + (ط م + م ط) جم لا لا۱ + (ط + ط') جم لا لا۱ + (م + م') جم ک ک۱ + جم ع ع۱ = ۰ اور جبکہ اور کرین اسمین سے ط' اور م' کو اور لکھین قیمت انکی تو حاصل ہوگا یہہ

$$\frac{لا - لا۱}{ع - ع۱} + م \frac{ک - ک۱}{ع - ع۱} + ۱ + \left(\frac{لا - لا۱}{ع - ع۱} م + \frac{ک - ک۱}{ع - ع۱} ط\right) جم لا لا۱ + \left(\frac{لا - لا۱}{ع - ع۱} + ط\right) جم لا ع۱$$

$$+ \left(\frac{ک - ک۱}{ع - ع۱} + م\right) جم ک ع۱ = ۰ \quad \text{یا} \quad (ط + م جم لا لا۱ + جم لا ع۱)(لا - لا۱)$$

+ (م + ط جم لا لا۱ + جم ک ع۱)(ک − ک۱) + (۱ + ط جم لا ع۱ + م جم ک ع۱)(ع − ع۱) = ۰ اور یہہ مساوات جو لوکس تمام اون خطوط کی ہی جو کہ ملتی ہین خطوط مفروض سے ایک نقطہ مفروض پر اور اوسی نقطہ پر عمود ہین مساوات سطح کی کہلاتی ہی

(۴۴۴) دریافت کرو وہ سطرین جنکی موافق ایک خط مستقیم عمود ایک سطح پر ہو اور یہہ سطرین اوسی طرح سے دریافت ہونگی جیسی فقرہ (۴۲۶) مین بیان کی گئی ہین مساوات ایک سطح کی جو کدزی اس نقطہ (لا اور ک اور ع) خط مفروض مین سے یہہ ہوگی م(لا - لا) + ن(ک - ک) + ہ(ع - ع) = ۰ اور مساواتین خط مفروض کی یہہ ہونگی لا = ط ا + د اور ک = م ع + ص اور مساوات اوس سطح کی جو عمود اس خط پر ہی فقرہ گذشتہ مین لکہی ہوئی ہی اور جبکہ لکھین امثال مساوی قوای مقدار مجہول کو برابر ایک دوسری کے تو حاصل ہوگا یہہ س = ط + م جم لا ک + جم لا ع اور ن = م + ط جم لا ک + جم ک ع ہ = ا + ط جم لا ع + م جم ک ع ان مساواتون سے قیمتین س اور ن اور ہ کی یا قیمتین ط اور م کی اجزای س اور ن اور ہ مین دریافت ہوجاوینگی —

(۴۴۵) دریافت کرو زاویہ درمیان ایک سطح اور خط مستقیم کے — فرض کرو کہ مساواتین سطح اور خط کی یہہ ہین م لا + ن ک + ہ ع = ا (۱)

لا = ط ع + د
ک = ح ع + ص (۲)

اور فرض کرو کہ مساواتین اوس خط کی جو عمود سطح مفروض پر ہی یہہ ہین

لا = ط ع + د
ک = ح ع + ص (۳)

مقدار ط اور ح اجزاے ط اور ح مین بوسیلہ فقرہ گذشتہ کی معلوم ہوجاوینگی اور زاویہ درمیان

(۲) اور (۳) کی بوسیلہ فقرہ (۴۴۲) کی معلوم ہوجاویگا اور چونکہ زاویہ جو واقع ہی درمیان سطح اور (۱) کے تمامی اوس زاویہ کی ہی جو درمیان (۲) اور (۳) کے واقع ہی اسیواسطے یہہ زاویہ بھی بآسانی تمام معلوم ہوجاویگا ۔

(۴۴۶) دریافت کرو وہ زاویہ جو واقع ہی درمیان دو سطح کے ۔

مساواتین اون خطوط کی جو عمود سطح مفروض پر ہین اور نقطہ شروع مین سی گذرتی ہین بوسیلہ (۴۴۴) کے معلوم ہوجاوینگی اور زاویہ درمیان ان خطوط کے جو فی الحقیقت زاویہ سطوح مفروض کا ہی فقرہ (۴۴۲) سی دریافت ہوجاویگا

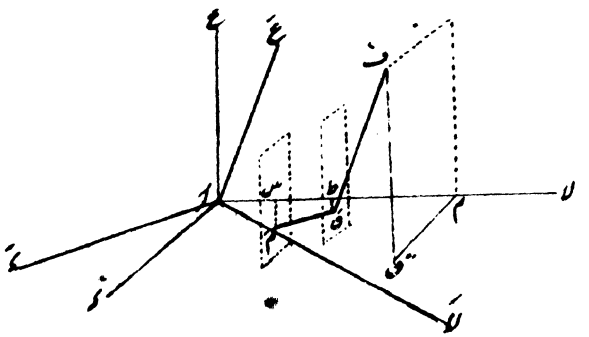
باب پنجم

تبدیلی اوتار کے بیان مین

(۴۴۷) تبدیل کرو ایک مساوات کو جسکا نقطہ شروع آ ہے اوس مساوات سی جسکا نقطہ شروع آ ہی محور صورت اخیر کے متوازی صورت اول کے محورون کی ہین اگر اوتار نئی نقطہ شروع کی ط اور ص اور س فرض کئے جاوین تو ظاہر ہی کہ اوتار ایک نقطہ کی بلحاظ نئی نقطہ شروع کے مساوی اصلی اوتار سو نئی اوتار نقطہ شروع کے ہونگی یہانسی معلوم ہوا کہ اگر لآ اور کَ اور عَ اصلی اوتار ایک نقطہ ف کے ہون اور لآ اور کَ اور عَ نئی اوتار نقطہ مرکور کی فرض کی جاوین تو لا = ط + لآ اور کَ = ص + کَ اور ع = س + عَ اگر لکھین ہم ان قیمتون لآ اور کَ اور عَ کو ایک سطح کی مساوات مین تو مساوات اوسکی اجزای لآ اور کَ اور عَ مین بلحاظ نقطہ شروع آ کے معلوم ہوجاویگی

(۴۴۸) تبدیل کرو ایک مساوات کو جسکے محور متقاطع علی القوایم ہین اوس مساوات سی جسکے محور ترجہی فرض کئے جاوین اور نقطہ شروع دونو قسم کی محورونکا ایک ہی فرض کیا جاوے فرض کرو کہ اَلا اور اَے اور اَع اصلی محور ہین اور اَلا اور اَے اور اَع نئی محور ہین اور

$$\left.\begin{matrix} \text{ا م} = \text{لا} \\ \text{اور م ق} = \text{ے} \\ \text{ق ف} = \text{ع} \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} \text{ا مَ} = \text{لا} \\ \text{مَ قَ} = \text{ے} \\ \text{قَ فَ} = \text{ع} \end{matrix}\right\}$$



کھینچو نقاط مَ اور قَ اور فَ مین سی سطوح متوازی ے ع کی یعنی عمود اَلا پر جو ملین گے اَلا سی نقطہ س اور ط اور م پر (نقشہ ارخطوط تعبیر کرتے ہین ان سطوح کو) اور اب ظاہر ہی کہ اَس اور س ط اور ط م خطوط نشانی اَمَ اور مَ قَ اور قَ فَ کی خط اَلا پر ہین اور ظاہر ہی کہ

اَم = اَس + س ط + ط م

= اَمَ جم لا اَلا + مَ قَ جم ے اَلا + قَ فَ جم ع اَلا موافق (۴۴۷)

$\therefore$ ل = لا جم لا ا ل + ک جم ک ا ل + ع جم ع ا ل

ک = لا جم لا ا ک + ک جم ک ا ک + ع جم ع ا ک

ع = لا جم لا ا ع + ک جم ک ا ع + ع جم ع ا ع

$$\left.\begin{array}{l} \text{یا لا} = م لا + م' ک + م'' ع \\ ک = ن لا + ن' ک + ن'' ع \\ ع = ۱ لا + ۱' ک + ۱'' ع \end{array}\right\}$$

ان مساواتون مین م بجای جم لا ا ل لا کے لکھا گیا ہی وغیرہ - اور فقرہ (۳۹۷) سی حاصل ہوگی مساواتین آیندہ اون زاویون کے اجزا مین جو آلا بنا تا ہی محور لا اور ک اور ع سے

$\therefore$ (جم لا ا ل)^۲ + (جم لا ا ک)^۲ + (جم لا ا ع)^۲ = ۱ اور اب یہانسی حاصل ہوگی

$$\left.\begin{array}{l} \text{مساواتین آیندہ} \quad م^۲ + ن^۲ + ۱^۲ = ۱ \\ م'^۲ + ن'^۲ + ۱'^۲ = ۱ \\ م''^۲ + ن''^۲ + ۱''^۲ = ۱ \end{array}\right\} \quad (۲)$$

(۴۴۹) اگر نئی محور محور متقاطع علے التوایم فرض کی جاوین تو ہمین مساواتین آیندہ موافق فقرہ (۴۰۵) کی حاصل ہوگی اور انسی معلوم ہوتا ہی کہ نئی محور عمود ایک دوسری پر ہین اور وہ یہہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{مساواتین حسین} \quad م م' + ن ن' + ۱ ۱' = ۰ \\ م م'' + ن ن'' + ۱ ۱'' = ۰ \\ م' م'' + ن' ن'' + ۱' ۱'' = ۰ \end{array}\right\} \quad (۳)$$

یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ نو جیب التمام مین سے جو (۱) مین ہین تین جیب التمام (۲) سی اور (۳) سی دریافت ہوجاوینگی — اور تین باقی غیر منقطع رہینگی یعنی تین زاویے ایسی ہونگی کہ اونکی قیمت جو چاہین فرض کرسکتے ہین — .

(۴۵۰) بجای مساواتون گذشتہ کے مساواتین آیندہ کام مین آسکتی ہین

$$\left.\begin{aligned} لا &= م_{11}لا + ن_{11}ى + ٥_{11}ع \\ ى &= م_{12}لا + ن_{12}ى + ٥_{12}ع \\ ع &= م_{13}لا + ن_{13}ى + ٥_{13}ع \end{aligned}\right\} \quad (۴)$$

$$\left.\begin{aligned} م_{11}^{2} + م_{12}^{2} + م_{13}^{2} &= ١ \\ ن_{11}^{2} + ن_{12}^{2} + ن_{13}^{2} &= ١ \\ ٥_{11}^{2} + ٥_{12}^{2} + ٥_{13}^{2} &= ١ \end{aligned}\right\} \quad (۵)$$

$$\left.\begin{aligned} م_{11}ن_{11} + م_{12}ن_{12} + ن_{13}٥_{13} &= ٠ \\ م_{11}ن_{11} + م_{12}٥_{12} + ن_{13}٥_{13} &= ٠ \\ م_{12}ن_{12} + م_{12}٥_{12} + ن_{12}٥_{12} &= ٠ \end{aligned}\right\} \quad (۶)$$

اب اگر ضرب کرین قیمتون لا اور ى اور ع کو جو (۱) مین ہین م اور ن اور ٥ سی علحدہ علحدہ یعنی لا کو م اور ى کو ن سے اور ع کو ٥ سی اور بعد اسکی جمع کرکے مختصر کرین ان مساواتون کو بوسیلہ (۲) اور (۳) کے تو ہمین حاصل ہوگا یہہ لا = م لا + ن ى + ٥ ع اور اگر اسیطرحی عمل کرین بعد ضرب دینی کے مقادیر م ن ١ ٥ ١ اور م ٢ ن ٢ اور ٥ ٢ مین تو ہمین تمام مساواتین (۴) کی حاصل ہونگی اور چونکہ فاصلہ ف کا نقطہ شروع سے ایک ہی ہی تو ظاہر ہی کہ لا^٢ + ى^٢ + ع^٢ = لا^٢ + ى^٢ + ع^٢ اگر لکھین قیمتین لا اور ى اور ع کے جو (۴) مین ہین اور لکھین امثال مساوی قوای دونو طرف مساوات کو برابر ایک

دوسری کے تو ہمین حاصل ہونگی مساواتین (۵) اور (۶) کی جسوقت ہمین حاصل ہونگی مساواتین (۲) اور (۳) تو ظاہر ہی کہ ہم بجای اونکی (۵) اور (۶) کو استعمال مین لاسکتی ہین اور یہہ ثابت ہوسکتا ہی بغیر استعانت بدلنی اوتار کے جبکہ فرض کرین مقادیر م اور ن اور ہ وغیرہ متعلق ایک دوسری سے اسطرح پر ہین جیسی کہ (۱) مین ہین —

(۴۵۱) واضح ہو کہ ہم ترجیحی محور وںکو بدل سکتی ہین اور ترجیحی محور وںکی بطور آیندہ کے کھینچ شکل گذشتہ مین ایک عمود نقطہ م سے سطح ع ع پر اور کھینچ خطوط نی لا اور لا اور ی اور ع کی اس عمود پر تو اب ظاہر ہی لا جس لا ی ع = لا جس لا ی ع + ی جس ی ی ع + ع جس ع ی ع اور بسیط حسی حاصل ہوگا واسطے لا اور ی کی

ی جس ی لا ع = لا جس لا لا ع + ی جس ی لا ع + ع جس ع لا ع

ع جس ع لا ی = لا جس لا لا ی + ی جس ی لا ی + ع جس ع لا ی

(۴۵۲) ایک اور طریقہ واسطے بدلنی محور متقاطع علی القوائم کے اور محور متقاطع علی القوائم سی بہت فایدہ مند اور آسان ہے ذکر کرو کہ لا = ط ع ، لا = ط ا ع ، مساواتین مخمن ون ی اور ع کی یہہ ہین

ل = ط ۲ ع ، ی = ج ع ، ی = ج ا ع ، ک = ج ۲ ع اور فرض کرو کہ م = $\frac{1}{\sqrt{1 + ط^2 + ج^2}}$ اور

م ا = $\frac{1}{\sqrt{1 + ط^2 + ج^2}}$ اور م ۲ = $\frac{1}{\sqrt{1 + ط^2 + ج^2}}$ تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ

فقرہ (۴۰۲) کے یہہ حاصل ہوگا جم لا ا لا = م ط اور جم لا ی = م ج اور

جم لا ی ع = م اور وغیرہ اور اب اگر لکھین ان قیمتون کو صورت اول (۴۸۴) مین

جو واسطی تبدیل اوتار کے لکھی گئے ہی تو

لا = م ط لا + م ا ط ا ء + م ۲ ط ۲ ع

ء = م ح لا + م ا ح ا ء + م ۲ ح ۲ ع

ع = م لا + م ا ء + م ۲ ع اور بجای نو زاویہ کی جو (۱) مین

چھ مقادیر ط اور ط ا اور ط ۲ اور ح اور ح ا اور ح ۲ لکھی گئے ہین

واضح ہو کہ بجای ان مساواتون کے ہم ایسی مساواتین حاصل کر سکتے ہین جسمین

صرف پانچ مقادیر مقررہ پائی جاوینگی مگر یہہ سب غیر منقطع ہونگی اور یہہ بوسیلہ

استعمال کرنے ترکیب آیندہ کے حاصل ہونگی فرض کرو کہ زاویہ مجسمہ جو پیدا ہوگا

سطوح متقاطع علی القوایم سے حرکت کرتا ہی گرد نقطہ شروع کے ایک نئی مقام

پر اور اس فرض سے دعوی مذکور کو ثابت کرتے ہین اور بعد اس ترکیب کی لرگن صاحب

نی یہ بتفصیل لکھی ہی

(۴۵۳) مرقومہ بالا سے معلوم ہوتا ہی کہ صرف تین مقدارون کی ایک مساوات

مین ضرورت ہوتی ہی اور اسیواسطے حاصل کر سکتے ہین ایک ایسی صورت واسطی تبدیل کرنے

اوتار کی جسمین تین زاویہ ہونگی ایسی صورتین یولر صاحب نی دریافت کی ہین اور چونکہ

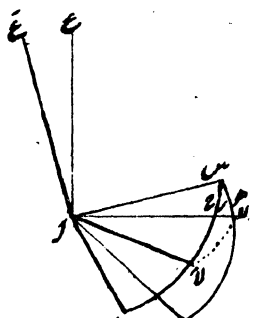
بہت مفید ہین اسیواسطے ہم اونکو اس جا بی بیان کرینگے — فرض کرو کہ اس

فصل مشترک اصلی سطح لاء اور نئی سطح لا ذ کا ہی اور فرض کرو کہ سطح س لا ذ

اور سطح س لا ء کے واقع ہی اور فرض کرو کہ سطح کاغذ کی تعبیر کرتی ہی سطح اخیر کو

بناؤ ایک کرہ جسکا مرکز آ اور قطر عدد ایک ہی اور مان لو کہ یہہ قطع کرتا ہی محور وکو

لاَ اور ءَ اور عَ وغیرہ مین اور فرض کرو کہ س لا = ھ اور س لاَ = ح اور زاویہ لاَس لا جو واقع ہی درمیان سطح لاَ ءَ اور لاَ ءَ کے = ر اب صرف ہم قیمت جیب التمامکی جو صورت (۱) فقرہ (۴۴۸) مین ہی



اجزای غیر منقطع ھ اور ح اور ر مین دریافت کرینگی اور یہہ بوسیلہ علم مثلث کروی کے معلوم ہو جاویگی اور یہہ اوس شکل سے دریافت ہوگی جسکے وسیلہ سے ایک ضلع مثلث کروی کا اجزای باقی اضلاع اور انکی زاویہ مابین مین دریافت ہوتا ہی بوسیلہ مثلث س لاَ لا اور س ءَ لا کے ہمین یہہ حاصل ہوگا

جم لاَ لا = جم ر جس ح جس ھ + جم ح جم ھ

جم ءَ لا = جم ر جس (۹۰° + ح) جس ھ + جم (۹۰° + ح) جم ھ

= جم ر جم ح جس ھ − جس ح جم ھ

اسیطرحسی جم لاَ ءَ اور جم ءَ ءَ دریافت ہوسکتا ہی اور جبکہ ملاوین قوس کروی ع لا اور ع س کی تو ہمین بوسیلہ مثلث کروی ع س لا کے یہہ حاصل ہوگا جم ع لا = جم ع س لا جس ع س جس س لا + جم ع س جم س لا = جم (۹۰° + ر) جس ۹۰° جس ھ + جم ۹۰° جم ھ = − جس ر جس ھ اور اسیطرحسی جم ع ءَ اور جم لاَ ع اور ءَ ع دریافت ہوسکتی ہین اور جم ع ءَ ع = جم ر تو اب ظاہر ہی کہ صورت (۱) یہہ ہو جاویگی

لا = لاَ (جم رجس ح جس ھ + جم ح جم ھ) + ءَ (جم رجم ح جس ھ - جس ح جم ھ)
- عَ جس رجس ھ ءَ = لاَ (جم رجس ح جم ھ - جم ح جس ھ) + ءَ (جم رجم ح جم ھ
+ جس ح جس ھ) - عَ جس رجم ھ ع = لاَ جس رجس ح + ءَ جس رجم ح + عَ جم ر

اور ان صورتون کو لا پلاس صاحب نے بھی ایک اور طرح سے ثابت کیا ہی اور یہہ صورتین اکثر کتب انگریزی مین جو ریاضی کے باب مین لکھی گئی ہین پائی جاوینگی مگر ایک تھوڑی سے تبدیلی علامت جبریہ کے اجزا مین ہوگی اور یہہ موقوف ہی مختلف مقامات اس پر

بیان تقاطع سطح منحنی اور سطح مستوی کا

(۴۵۴) مساواتین مرقومہ بالا بہت فایدہ مند دریافت کرنے مین خاصیت تقاطع سطح منحنی اور سطح مستوی کے ہوگی اگر ہم چاہین قطع کرنا کسی ایک سطح منحنی کا مثلاً فرض کرو سطح مخروط کا بوسیلہ ایک سطح مستوی کی تو واسطے اس مطلب کے ہمین لازم ہی کہ دور کرین ع کو مساواتون سطح منحنی اور سطح مستوی مین سے مگر اسسی ایک مساوات اونکی تقاطع کے نشان کی سطح لاَ ر پر حاصل ہوگی اور ہمین مساوات اوسکے تقاطع کی دریافت کرنے منظور ہی اور یہہ اس سے حاصل ہونی محال ہی اور چونکہ نشان واسطے دریافت کرنے خاصیت ایک خط منحنی کے کافی نہین ہوگا اسسی واسطے مساوات دو سطح منحنی کی جبکہ وہ کھینچا جاوے قطع کرنیوالی سطح مستوی پر دریافت کرنی چاہیے اور یہہ بوسیلہ تبدیل کرنے اوتار کے حاصل ہوسکتا ہی - فرض کرو کہ سطح مستوی قطع کرنیوالی سطح لاَ ءَ کی ہی اور فرض کرو کہ جہان محور لاَ ہی تو اب ظاہر ہی کہ محور سطح کردی کے لاَ اور ءَ اور عَ ہین اور انہین سے محور لاَ اور ءَ قطع کرنیوالی سطح

مین ہین جبکہ لکھین ع = ۰ اوس مساوات مین جو موافق اوس فرض کے حاصل ہوتی ہے تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین ہمین تقاطع یعنی فصل مشترک سطح کروی اور سطح مستوی لاَ آ کا حاصل ہوگا اور یہہ تقاطع مطلوب تھا — اور چونکہ ہمین اسجگہ صرف دریافت کرنا اوس خط منحنی کا جو تقاطع سے حاصل ہوتا ہی

مطلوب ہے اسیواسطے ہم پہلی ع = ۰ فرض کرین گے اور بعد اسکی تبدیل کرینگی ہم مساوات کو اب فرض کرو ع = ۰ اور زاویہ س لاَ یا ج = ۰ تو اب ظاہر ہی کہ صورت فقرہ گذشتہ کی یہہ ہوجاویگی لا = لاَ جھ + ژ جس ھ جھ ر اور ژ = — لاَ جس ھ + ژ جھ ھ جھ ر اور ع = ژ حس ر یہہ مساواتین بغیر استعانت مساواتون مرقومہ بالا کے بھی بآسانی حاصل ہوسکتی ہین چنانچہ یہہ طریقہ واسطے دریافت کرنی مساواتون مرقومہ بالا کے کتاب فرنیکر صاحب اور پونسینٹ کی مین لکھا ہے

(۵۵۴) چونکہ خاص صورتون مین بوسیلہ استعمال کرنے مساواتون مرقومہ بالا کے بڑی دقت ہوتی ہے اسیواسطے ہم ایک خاص ترکیب اس جاہی لکھینگے جس سے بڑی آسانی اور کم محنت تبدیل کرنے مین مساواتون کے ہوگی مثلاً اکثر صورتون مین ہم فرض کرسکتے ہین کہ سطح کاٹنے والی عمود سطح لاع پر ہی اور یہہ ظاہر ہی کہ اس فرض سے کسی نوع کا فرق عمومیت مساوات مین نہین آویگا بلکہ وہ آسان ہوجاویگی کیونکہ اس صورت مین خط اوس خط آژ پر منطبق ہوگا یا جبکہ آژ کو کھینچین تو اوسپر منطبق ہوجاویگا اور اسیواسطے ھ = ۹۰° تو اب ظاہر ہی کہ صورت اون مساواتون کی جو فقرہ گذشتہ کے اخیر مین لکھے ہوئے ہین یہہ ہوجاویگی لا = + ژ جم ر اور

اور ی = — لا اور ع = ی جس سے واضح ہو کہ یہہ صورتین بغیر استعانت کی بھی حاصل ہو سکتی ہین مثلاً شکل کذستہ مین فرض کرو کہ جب اُس اور ا لا اور ا ی کھینچے جاوین تو وہ منطبق ایک دوسری پر ہوتی ہین اور ھ = ۹۰° اور س ی = ۹۰° اور اب مستعمل کرو اصلی صورتون (۱) فقرہ (۴۴۸) کو تو موافق ان فرض کے صورتین مرقومہ بالا بآسانی تمام حاصل ہو سکتی —

(۴۵۶) اگر صورتون مرقومہ بالا مین نقطہ شروع بھی تبدیل کیا جاوے تو ظاہر ہے کہ ہمین بائین طرف مساواتون مرقومہ بالا کے مقادیر ط اور ض اور س کو داخل کرنا چاہئے

باب ششم

بیان کُرہ اور اون محسّم مین جو گردش سطح منحنی سے پیدا ہوتی ہین —

(۴۵۷) اگر بحث کرنی سطح منحنی مثلاً کُرہ کی منظور ہو تو ہم اس صورتین وُہی عمل کرینگی جو سطوح مستوی مین کیا تھا یعنی مساوات اوسکی بوسیلہ اوسکی چند خواص کے جو کہ معلوم ہین دریافت کرینگی اور اس عمل سے ہمین نسبت درمیان تین مقدارہ اور ی اور ع کی دریافت ہو جاویگی اور یہہ نسبت اس علامت سے تعبیر ہو سکتی ہے ح (لا اور ی اور ع) = ۰ یا ع = ح (لا اور ی) یہہ مساوات سطح منحنی کی کہلاتی ہے اور اسی نسبت تمام نقاط اوسکی سطح کے تعبیر ہو گی اور یہہ ایک ایسی مساوات ہے جو جامع کل یعنی تمام صورتون سطح منحنی مین صادق آتی ہے اور مانع غیر ہے —

(۴۵۸) برعکس اسکے اگر ایک مساوات اس صورت کی ہو ح (لا اور ی اور ع) = ۰ جسمین لا اور ی اور ع تو آپ ایک نقطہ کے لیون تو یہہ مساوات سطح منحنی کی ہے

اور یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اس سے نسبت ایک مجسم کے نقاط کی تغیر نہین ہوگی
اور طریقہ اسبات کی ثبوت کا یہہ ہی فرض کرو کہ دو مساوات اس صورت کی
ہین ح (لا اور ی اور ع) = ۰ اور ح' (لا اور ی اور ع) = ۰ اور فرض
کرو کہ قیمتین لا اور ی اور ع کی دونو مساوات مین ایک ہی ہین اب اگر دور
کرین ع کو دونون مساوات مین سی تو حاصل ہوگی ہمین مساوات اوسکی تقاطع یعنی فصل
مشترک کی نشان کی سطح لا ی پر اور یہہ مساوات اس صورت کی ہوگی ک (لا ی) = ۰
اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات خط مستقیم کی ہی اسیطرح سی ثابت ہو سکتا ہی کہ نشان
تقاطع یعنی فصل مشترک کا باقی سطوح لا ع اور ع ی پر خطوط مستقیم ہین
لیکن اگر نشان ایک لوکس کا تین سطح پر خط مستقیم ہو تو ظاہر ہی کہ لوکس خود خط مستقیم
ہوگا اور یہہ سطح نہین کسی وجہ سے نہین ہو سکتا ہی چونکہ تقاطع یعنی فصل مشترک
ح (لا اور ی اور ع) = ۰ اور ح' (لا اور ی اور ع) = ۰ خط مستقیم ہے
تو یہان سی معلوم ہوا کہ یہہ مساوات تین سطوح سے تعلق رکھتی ہین ۔

(۵۹) واضح ہو کہ سطوح اور خطوط مستقیم کو مختلف درجون مین تقسیم کیا ہے
اسطرح ترتیب سے رکھنی بڑی مفید اور عام خواص اور نتایج کو جو اس علم سی حاصل
ہوتی ہین اسیواسطے اوس سطح کو جو اول درجہ کی مساوات سی جسمین تین مقدار
مجہول پائی جاتی ہین حاصل ہوتی ہی سطح اول درجہ کی کہتی ہین اور لوکس اوس مساوات
کی جو دو درجہ سی تعلق رکھتی ہین اور جسمین تین مقدار مجہول پائی جاتی ہین سطح
دوسری درجہ کی کہلاتی ہی اور اسیطرحی اور بھی حاصل ہو سکتی ہین ظاہر ہے

اس حصہ ہندسہ مجرد میں کسی نوع کی دقت اور مشکل واقع نہیں ہوتی ہی مگر ترسیے طویل حساب اور عمل کرنے پڑتے ہین اور اسواسطے اسمین ایک نوع کے دقت معلوم ہوتے ہی اور اسے سبب سے ہم اکثر سوالات کو جسمین صرف محنت عمل کے ہوتے چھوڑ دینگی اور صرف مشکل باتین ان سوالات کی لکھدینگی اور خاصکر اس حصہ دقت بسبب مشکل کے واقع ہوتے ہی کیونکہ اون اشخاص کو جو عادی مجسمات سے نہین ہین اوسکو سمجھ نہین سکتی ہین وہ مساواتین جو موافق ان شکلونکی حاصل ہوتی ہین سمجھ مین نہین اوسکی کہ ہمی اس مشکل کو بوسیلہ لکھنی بیان شکلونکی بہت آسان کردیا ہے اسواسطے ہماری غرض مطالعہ سے یہہ ہی زیادہ توجہ اور غور سے شکلونکو سمجھین اور بعد سمجھنے شکلونکے کسی نوع کے دقت اونکی مساواتونکے سمجھنے مین نہین ہوسکے اب ہم پہلی بحث کرہ سے لکھتے ہے +

بیان کرہ کا

(۴۶۰) دریافت کرو مساوات کروی سطح کے ۔ فرض کرو کہ محور سطح مطلوب کے متقاطع علی القوائم ہین اور یہہ بھی مان لو کہ آ آ اور ع ع ترسطح کے ایک نقطہ کے ہین اور ط ص اور س ف مرکز کرہ کی ہین اور چونکہ سطح کرہ کی ایسی ہی کہ ہر ایک نقطہ اوسکا مساوی فاصلہ پر مرکز کرہ سے ہوتا ہی اور فرض کرو کہ یہہ مساوی ایک بمقدار مقررہ ن ک کے جسکو نصف قطر کہتے ہین تو اب ظاہر ہے کہ موافق فقرہ (۳۸۸) کے

(ا ـ ط)² + (و ـ ص)² + (ع ـ س ف)² = ن²

(۴۶۱) صورت اس مساوات کی مختلف ہوسکتی ہین موافق مختلف مقام مرکز کے

فرض کرو کہ مرکز سطح لاؤ میں واقع ہی ∴ س = ۰ تو اب ظاہر ہے کہ
(لا − ط)² + (د − ص)² + ع² = نق² — اب فرض کرو کہ مرکز محور ع پر واقع ہے
∴ ط = ۰ اور ص = ۰ ∴ لا² + د² + (ع − س)² = نق²

(۴۶۳) فرض کرو کہ مرکز نقطہ شہ د ع ہی ∴ ط = ص = س = ۰ تو اب صورت
مساوات کی یہہ ہو دیگی لا² + د² + ع² = نق² اور یہہ مساوات سطح کرہ کی اکثر استعمال
میں آتی ہے +

(۴۶۴) ظاہر ہی کہ مساوات عام سطح کرو کی کی بعد پھیلانے کی یہہ ہو جاویگی
لا² + د² + ع² − ۲ ط لا − ۲ ص د − ۲ ص ع + ط² + ص² + س² − نق² = ۰
یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ ہر ایک کرہ موافق اس صورت کی مساوات کی کھینچ سکتا ہی جیسا کہ
ترکیب کھینچنی دایرہ کے فقرہ (۶۷) میں لکھے گئی ہے +

(۴۶۴) وہ تراشیں سطح کروی کے جو سطح اوتاری یعنی سطح لاؤ یا لاع یا اد آ سے بنتی ہیں
تراشہای عظیم کہلاتی ہین اور حدود ان تراشونکی نقوش سطح کروی کے سطح اوتاری پر
کہلاتی ہین — مساوات ایک نقش کے دریافت ہوسکتی ہو سیدہ لکھنی اوس دو سطح کی جو محمود
سطح نقش پر ہی = ۰ مساوات عام ہین — مثلاً دو سطحی دریافت کرنی اوس خط
منحنے کا جو تقاطع کرنی سطح کروی اور سطح لاؤ کی سے پیدا ہوتا ہی لکھو ع = ۰
اور اب اس فرض کے موافق ہیں حاصل ہو گے مساوات اون تقاطع کی جہان سطح
کروی اور سطح لاؤ ملتی ہی اور وہ اس صورت میں یہہ ہی
(لا − ط)² + (د − ص)² + س² = نق² یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ تراش سطح لاؤ پر دایرہ

اور یہہ دایرہ ہی ہیگی جبتک صیتن لا اور تو کی صحیح ہیں اور اسیطرحسی باقی نقوبش ہے دایرہ ثابت ہوسکتی ہین۔ اور یہہ دعوی کہ تقاطع کرنی سطح کروی اور سطح مسیوسے دایرہ پیدا ہونا ہی تحریر اقلیدس میں بخوبی ثابت کیا گیا ہے

(۵۴۶) دریافت کرو مساوات اوس سطح کا جو مماس کرہ کے ہو۔ فرض کرو کہ لا، اور ر، اور ع، اوتار اوس نقطہ کے ہین جسمین سے سطح مماس کا گذرتی ہی اور فرض کرو کہ مساوات سطح کروی کی یہہ ہی (لا — ط)² + (ر — ص)² + (ع — س)² = نق² تو اب ظاہر ہی کہ مساوات اوس سطح کی جو نقطہ (لا، اور ر، اور ع،) میں سطح کرہ سے یہہ ہوسکے م (لا — لا،) + ن (ر — ر،) + ف (ع — ع،) = ۰ اور مساوات نصف قطر کے جو نقطہ (ط اور ص اور س) اور (لا، اور ر، اور ع،) میں سے گذرتا ہی یہہ ہونگی لا — لا، = $\frac{لا، — ط}{ع، — س}$ (ع — ع،)

اور ر — ر، = $\frac{ر، — ص}{ع، — س}$ (لا — لا،) چونکہ ہر ایک خط سطح مماس کا یا خود سطح عمود ہی نصف قطر پر اور یہہ عمود نقطہ مماس پر ہی تو اب بوسیلہ مساوات سطح اور خط کی یہہ حاصل ہوگا $\frac{م}{ف}$ = $\frac{لا، — ط}{ع، — س}$ اور $\frac{ن}{ف}$ = $\frac{ر، — ص}{ع، — س}$ موافق (۵۴۲) کے اسیواسطے مساوات سطح مماس کے یہہ ہوجاوینگے

$\frac{لا، — ط}{ع، — س}$ (لا — لا،) + $\frac{ر، — ص}{ع، — س}$ (ر — ر،) + (ع — ع،) = ۰

صورت اس مساوات کی موافق شرط ایندہ کی تبدیل ہوسکتی ہے

(لا، — ط)² + (ر، — ص)² + (ع، — س)² = نق² — یا

(لا، — ط) (لا — ط) + (ر، — ص) (ر — ص) + (ع، — س) (ع — س) = نق²

جملہ جمع کرین اس مساوات اور مساوات سطح مماس کو جسکو ابھی نکال آئے ہین تو ہمین حاصل ہوگا یہہ (لا - ط)(لا - ط) + (و - ص)(و - ص) + (ع - س)(ع - س) = نق۲

(۴۶۶) اگر نقطہ شروع مرکز کرہ پر فرض کیا جاوے تو مساوات سطح مماس کی یہہ ہوجاوے گی لالا + وو + ع ع = نق۲ اور یہہ مساوات بآسانی حاصل ہوسکتی تھی مساوات کرہ سے جو یہہ ہی لا۲ + و۲ + ع۲ = نق۲ یا لالا + وو + ع ع = نق۲ بوسیلہ لکھنی لالا اور وو اور ع ع کی بجاے لالا اور وو اور ع ع کی وہ خط جو تقاطع سطح مماس اور ایک سطح اوتاری سے پیدا ہو کا معلوم ہوسکتا ہی بوسیلہ لکھنی دتر کی جو عمود اوس سطح پر ہی = ۰ اور وہ نقطہ جہان سطح مماس ملتا ہی کسی ایک محور سے دریافت ہوسکتا ہی بوسیلہ لکھنی ہر ایک اون دو مقدار غیر منقطع میں سے جو باقی محورون پر شمار کئی جاتی ہین = ۰

(۴۶۷) مساوات سطح کروی کی نسبت ترچھی محورون کے موافق فقرہ (۴۴۰) سے یہہ ہوگی (لا - ط)۲ + (و - ص)۲ + (ع - س)۲ + ۲(لا - ط)(و - ص) حم لاو + ۲(لا - ط)(ع - س) حم لاع + ۲(و - ص)(ع - س) حم وع = نق۲

بیان اون مجسمات کا جو کروش سطح سے پیدا ہوتی ہین -

(۴۶۸) ایک مخروط پیدا ہوتا ہی بوسیلہ کروش کرنے وتر مثلث قایم الزاویہ کے گرداوسکی ایک عمود کی دو عمودون مین سے - فرض کرو کہ اوس حرکت کرتا ہی کرو خط اب کے جو محور فرض کیا گیا ہی تو اب ظاہر ہی کہ ہر ایک تراش

ق ف جو محور پر ای دایرہ ہوے اور مان لو کہ ا آ اور ک ک اور ع ع محو
متقاطع علی القوایم مخروط کی ہین اور نقطہ شروع راس مخروط پر ہی اور فرض کرو کہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{ا ق} = \text{ع} \\ \text{ن م} = \text{لا} \\ \text{م ف} = \text{ک} \end{array}\right\}$$ اوتار ایک نقطہ کی ہین جو سطح مخروط پر واقع ہے

تو اب ظاہر ہی کہ مربع ن م + مربع م ف = مربع ن ف اور ن ف = ن ق

= ا ن مبس س ا ب اسیو اسطلی

مساوات سطح مخروط کی یہہ ہوے گی

لا۲ + ک۲ = ی۲ ع۲ یہان ی = مماس نصف راویہ اس مخروط کی

(۴۶۹) فرض کرو کہ ا س ایک خط منحنی ہے مثلاً فرض کرو کہ ا س قریب البیضوی ہی تو اس صورت مین وہ سطح منحنی پیدا ہو گی جو گردش قریب البیضوی کی گرد اوسکی محور کی پیدا ہو سکتی ہی اور اسکو سطح منحنی مجسم قریب البیضوی کہتی ہین فرض کرو مساوات قریب البیضوی ا ق س کی یہہ ہی

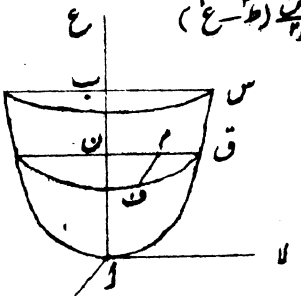
ن ق = مان ع تو اب ظاہر ہی کہ ن م۲ + م ف۲ = ن ق۲

∴ لا۲ + ک۲ = ن ع

(۴۷۰) فرض کرو کہ ا س بیضوی ہی اور مان لو کہ نقطہ ب مرکز ہی اور یہی نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم کا ہی فرض کرو ب ن = ع اور ن م = لا اور م ف = ک اور س ب = ص اور ب ا = ط تو اب

ظاہر ہی کہ ن م۲ + م ف۲ = ن ق۲ اور ن ق دہر بیضوی ق س کا ہی جسکا نصف محور کلان اور محور خورد ط اور ص ہی ∴ ن ق = $\frac{ص}{ط}$ $\sqrt{ط^2 - ع^2}$ ∴ مساوات سطح منحنی کے یہہ ہو گی لا۲ + ر۲ = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (ط۲ - ع۲)

یا لا۲ + ر۲ + $\frac{ص^2}{ط^2}$ ع۲ = ص۲



فرض کرو کہ ط اور ص تبدیل ہو گئی ہین مساوات مین یعنی ط بجای محور خورد اور ص بجای محور کلان کے ہو گیا ہی اسیواسطے مساوات سطح منحنی کے جو حرکت کرنی سی کرد محور خورد کی حاصل ہوتی ہی یہہ ہو گی لا۲ + ر۲ + $\frac{ص^2}{ط^2}$ ع۲ = ط۲

پہلی کو پرایست سفرویڈ اور دوسری کو اوبلیت سفرویڈ کہتی ہین

(۴۷۱) ظاہر ہی کہ مساوات اوس سطح منحنی کے جو حرکت بسیط البیضوی سی کرد محور کلان کے پیدا ہوتی یہہ ہو گی لا۲ + ر۲ - $\frac{ص^2}{ط^2}$ ع۲ = - ص۲ اور جب لکھین ہم بجای ص کے اور ص بجای ط تو ہمین حاصل ہو گی وہ سطح منحنی جو حرکت کرنی سی کرد قطع متجانس کے پیدا ہو سکے

(۴۷۲) عموماً مساوات تمام سطوح منحنی کی مساوات آیندہ ہو سکتی ہے

لا۲ + ر۲ = ح (ع) اگر لا ع دو محور فرض کیا جاوی جسکی گرد پھرنی سی سطح منحنی پیدا ہوتی ہی یا ر۲ + ع۲ = ح (لا) اگر لا محور ند کو فرض کیا جاوی - دریافت کرو

وہ خط منحنی جو تقاطع کرنی ایک سطح مستوی اور سطح منحنی سی پیدا ہوتا ہی

(۴۷۳) فرض کرو کہ تراش اوس سطح مستوی سی پیدا ہوئی ہی جو عمود سطح لاع پر ہی اور ظاہر ہی کہ خاصیت خط منحنی کی وہ ہی رہی گی گو نقطہ شروع کسی طرف کا منحنی والی سطح کی فرض کیا جاوی - اب اس صورت مین فرض کرو کہ نقطہ شروع سطح لاع پر واقع ہی تو اب ظاہر ہی کہ صورتین و اسطی تبدیل کرنی محورونکی یہہ ہونگی

لا = ط + ر جم ر اور ی = - لا اور ع = س + ر جس ر یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر لکھین ہم ان قیمتونکو مساوات سطح منحنی مین تو ہمین وہ خط منحنی مطلوب معلوم ہوگا جو تقاطع سی پیدا ہوگا -

(۴۷۴) فرض کرو کہ وہ سطح منحنی یہہ ہی لا + ی = ن ع ∴

(ط + ر جم ر)² + لا² = ن (س + ر جس ر) یا ی² (جم ر)² + لا² + (۲ ط جم ر - ن جس ر) لا = ن س - ط² = ن س یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ وہ خط منحنی جو تقاطع سی پیدا ہوگا خط منحنی دوسری درجہ کا ہوگا اگر خط منحنی بیضوی ہوگا موافق فقرہ (۴۶) کی اور وہ دایرہ ہی اگر ر = ۰ اور قریب البیضوی شابہ اوس قریب البیضوی کی جو گذشتہ کرتا ہی ہوگا جبکہ ر = ۰

(۴۷۵) اب فرض کرو کہ سطح منحنی مذکور یہہ ہے لا² + ی² + ط²/ص² ع² = ص² جبکہ لکھین ہم اسمین قیمتین لا اور ی اور ع جو ابھی نکالی گئی ہین تو حاصل ہوگا یہہ ی² {(جم ر)² + ط²/ص² (جس ر)²} + لا² + ۲ ی {س ط²/ص² جس ر - ط جم ر} = ۰ یہہ مساوات حقیقت مین ایک بیضوی کی مکرر وہ دایرہ کی ہوجاویگی جبکہ ر = ۰

(۴۷۶) فرض کرو کہ سطح منحنی مذکورہ وہی جو کردش بعید البیضوی کرداو سطحی محور کلانکی پیدا ہوتی ہی اور جسکی مساوات یہہ ہی لا + ی = $\frac{ص}{ط}$ ع + ص بعد اعمال ذکر کے معلوم ہو جاویگا کہ ترائین اسکی موقوف ہین قیمت مس د پر اگر مس ر کم ہو $\frac{ص}{ط}$ سی تو خط منحنی بیضوی ہوگا اگر وہ مساوی $\frac{ص}{ط}$ کی ہو تو خط منحنی قریب البیضوی ہوگا اور اگر مس زیادہ ہو $\frac{ص}{ط}$ سی تو وہ بعید البیضوی ہوگا اور اگر ر = ۰ تو خط منحنی مذکور دایرہ ہوگا —

بیان سطوح منحنی دویم درجہ کا

(۴۷۷) مساوات عام سطوح منحنیہ دیم درجہ کی یہہ ہی

لا² + ب ی² + س ع² + ۲ د لا ی + ۲ ی لا ع + ۲ ف ی ع + ۲ گ لا + ۲ ح ی + ۲ ج ع + ک = ۰ واضح ہو کہ عدد ۲ اکثر اجزای مساوات مین صرف واسطے آسانی حساب کے لگایا گیا ہی اب ہم دور کرنیکی اکثر قوای اس مساوات کو بوسیلہ تبدیل کرنی اوتار کی یعنی تبدیل کرنیکی ہم مساوات گذشتہ کو ایک آسان مساوات سی واسطے بحث کرنی اس مساوات کی یعنی واسطے دریافت کرنی مقام اور خاصیت اون سطوح منحنی کے جنکو مساوات مرقومہ بالا تعبیر کرتی ہی تبدیل کرو نقطہ شروع کو بوسیلہ لکھنی لا = لا′ + م اور ی = ی′ + ن اور ع = ع′ + ق جب لکھین ہم ان قیمتونکو مساوات عام مین اور فرض کرین ہر ایک جز کو جسمین پہلی قوت غیر منقطع کی ہو = ۰ تو ہمین حاصل ہوگا یہہ

لا²′ + ب ی²′ + س ع²′ + ۲ د لا′ ی′ + ۲ ی لا′ ع′ + ۲ ف ی′ ع′ + ک′ = ۰ اگر ہم

اگر ہم یہ لین لا اور ی اور ع کو ۔ لا اور ۔ ی اور ۔ ع سے لو صورت مساوات میں کسی طرح کا فرق نہیں آویگا یہانسے ثابت ہوتا ہی کہ ہر ایک خط جو کھینچا جاوے لذرتا ہوا نقطہ شروع سے اور منتہی ہو دونو طرف سطح منحنی کی تنصیف کیا جاویگا نقطہ شروع پر اور اسسے معلوم ہوتا ہی کہ نقطہ شروع مرکز سطح منحنی کا ہی یعنی اسکی ایسی سمجھنی چاہئی جیسی فقرہ (۸۱) مین معنی مرکز خطوط منحنی دویم کے سمجھے گئی تہی

(۴۷۸) قیمتین م اور ن اور ق کی مساوات اینده سے دریافت ہوسکتی ہے

طام + دن + ی ق + ک = ۰ اشال لا کی ہین

ب ن + د م + ف ق + ہ = ۰ ایضاً ی ایضاً

س ق + ی م + ف ن + ح = ۰ ایضاً ع ایضاً

دور کرو ق کو مساوات اول اور دویم سے اور اول اور سویم سے اور بعد اسکی جو جو دو مساوات حاصل ہونگی اونمین سے دور کرو مقدار ن کو بعد اسکی جو مساوات حاصل ہو اوسمین مقدار م پائی جاویگی اور اس مساوات سے قیمت م کی معلوم ہو جاویگی اور بعد اسکی بوسیلہ م کی قیمت ن اور ق کی دریافت ہو جاویگی

مخرج م اور ن اور ق کی قیمتونکا یہہ دریافت ہوگا

طب س + ۲ د ی ف − طف² − ب ی² − س د² ظاہر ہی کہ اگر یہہ مقدار = ۰

تو قیمتین م اور ن اور ق لانہایت ہونگی یعنی اگر یہہ نسبت درمیان اشال مساوات عام کی فرض کی جاوے تو مرکز سطح منحنی کا نہین ہوگا یہہ حال

قریب البیضوی کا فقرہ (۸۱) مین بیان کیا گیا ہی —

(۴۷۹) اب ہم استعمال کرینگی واسطی دور کرنی اشمال لا″ر اور لا″ع اور ر″ع″ کی اور طریقہ کو جو واسطی تبدیل کرنی اوتار کی لکھا گیا ہی جبکہ فرض کرین ہم اون صورتونکو جو فقرہ (۴۵۲) مین لکہی گئی ہی- تو —

لا″ = م لا″ + م ۱ ا ر″ + م ۲ ا ع″

ر″ = م ۱ لا″ + م ۱ ۱ ر″ + م ۲ ۱ ع″

ع″ = م ۲ لا″ + م ۲ ۱ ر″ + م ۲ ۲ ع″

جبکہ لکہین ان قیمتونکو مساوات عام مین اور فرض کرین اشمال ہر واحد لا″ر اور لا″ع اور ر″ع″ کو = ۰ تو ہمین تین مساوات اینده حاصل ہونگے

(ط ا + د ح + ی) ا + (د ا + ب ح + ف) ح ۱ + ی ا + ف ح + س = ۰ اشمال لا″ر کی ہیں

(ط ا + د ح + ی) ا ۲ + (د ا + ب ح + ف) ح ۲ + ی ا + ف ح + س = ۰ ایضاً لا″ع″ کی

(ط ا ۲ + د ح ۲ + ی) ا ۲ + (د ا ۲ + ب ح ۲ + ف) ح ۲ + ی ا ۲ + ف ح ۲ + س = ۰ ایضاً ر″ع″ کی

اب ہم دریافت کرین گی کہ آیا یہہ تبدیلی اوتار کی ہر صورت مین عمل مین اسکتی بھی یا نہین یعنی دریافت کرین گی کہ قیمین جتیہہ مجہول مقدارونکی جو تین مساوات گذشتہ مین ہین کس کس حالت مین ممکن ہین

(۴۸۰) مساواتین نئی محور ر″ کی یہہ ہین لا = ا ر اور ع = ح ر موافق فقرہ (۴۵۲) کی اسیواسطی جب کہ لکہین ہم ان قیمتونکو مساواتون گذشتہ کے مساوات اول مین تو حاصل ہوگا یہہ (ط ا + د ح + ی) لا + (د لا + ب ح + ف) ر + (ی لا + ف ح + س) ع

= ۰ یہہ مساوات اوس سطح کی ہی جو نقطہ شروع مین سی گذرتی ہی اب ظاہر ہی کہ اوتارا اس سطح کی ہر ایک نقطہ کی شرط اینده پورا کرتی ہین اسلئے لا" ژ" = ۰ یعنی اسی نسبت درمیان ژ، اور ح، کی معلوم ہوجاتی ہی یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ اگر نیا محور ژ" کھینچا جاوی اس سطح مین تو یہی شرط مذکور پوری ہوجاویگی پس ہم کوئی ایک سمت محور لا" کی فرض کرسکتی ہین یعنے اوسکی سمت مقرر نہین ہی مگر سمت محور ژ" کی ایک خاص سطح معلوم مین ہی جو ابھی ثابت کی گئی ہی اور جز لا" ژ" کا دور ہوگا ہی اسیطرح سی جبکہ دو کرین ہم ژ، اور ح، کو اشال لا" ع" مین سی اور مساوات ع" سی جو یہہ ہین (لا = ژ، ع اور ژ = ح، ع) تو ہمین حاصل ہوگی ایک مساوات جو پہلی حاصل ہوئی تھی اور یہہ مساوات اوس سطح کی جو نقطہ شروع مین سی گذرتی ہی اور جسکو ہمنی ابھی معلوم کیا ہی یہانتک ثابت ہوا کہ اگر ہم کھینچین محور ع" کو اس سطح مین تو جز لا" ع" کا جانا رہیگا جبکہ دریافت کیا ہمنی ژ، اور ح، تو اسطرح پر تو ظاہر ہی کہ نسبت درمیان ژ، اور ح، کی دریافت ہوسکتی ہی اشال ژ" ع" = ۰ سی مثلاً جبکہ مقرر کرین ہم مقام محور لا" کا یعنی جبکہ فرض کرین کوئی ایک خاص قیمت آ اور ح کی تو ظاہر ہی کہ ہمین ایک سطح گذرتی ہوئی نقطہ شروع سی معلوم ہوجاویگی جس سطح مین کوئی سی دو خط اور کسی ایک مقام مین کھینچی گئی محور ژ" اور ع" کی ہونگی اور جبکہ ع" کو اسطرح کھینچین تو ظاہر ہی کہ مقدار ژ، اور ح، کی ہمین معلوم ہوجاویگی اور اسیطرح نسبت درمیان ژ، اور ح، کی معلوم ہوجاویگی اشال لا" ژ" = ۰ سی = جو کہ نسبت درمیان

مقدار ا، اور ح، کی معلوم ہوگئی ہی اور یہہ مقدارین خود معلوم نہین ہوئی ہین تو اسسے معلوم ہوتا ہی کہ محور لا نہایت ایسی طور پر تبدیل ہوسکتی ہین کہ مختلف حاصل ضرب مقدار غیر منقطع سے دور ہو جاوے

(۴۸۱) فرض کرو کہ نئی محور متقاطع علی القوایم ہین - ظاہر ہی کہ اس صورت مین محور لا عمود سطح "لا" پر ہوگا یا وہ خط جسکی مساوات ہین یہہ ہین لا = ا ع اور ی = ح ع عمود اوس سطح پر ہوگا جسکی مساوات یہہ ہی

(ط ا + د ح + ی) لا + (د ا + ب ح + ف) ی + (ی ا + ف ح + س) ع = ۰

∴ ط ا + د ح + ی = (ی ا + ف ح + س) ا موافق فقرہ (۴۲۶) کی

د ا + ب ح + ف = (ی ا + ف ح + س) ح جبکہ لکھین پہلی مساوات مین قیمت ا کی جو دوسری مساوات سے حاصل ہوگی تو ہمین مساوات اینده کہ سطح قیمت ح کی حاصل ہوگی {(ط − ب) ف ی + (ف² − ی²) د} ح²

+ {(ط − ب) (س − ب ی) ی + (۲ د ی − ف² − ی²) ی + (۲ س − ط − ب) ف د} ح

+ {(س − ط) (س − ب) د + (۲ س ی − ف² − د²) د + (۲ ب − ط − س) ف ی} ح

+ {(ط − س) ف د + (ف² − د²) ی²} = ۰ اس مساوات سویم درجہ سے کم سے کم ایک قیمت ح کی دریافت ہوجاویگی اور اسکی وسیلہ سے قیمت ا اور ظاہر ہی کہ مقام محور لا کا دریافت ہوجاویگا اور مقام اوس سطح کا ہی جو عمود ی اور جسمین محور ی اور ع مقیم ہین دریافت ہوجاویگا اور اسیطرح سے ہم دریافت کرسکتے ہین ایسی سطح لا ی عمود تحور ی کہ اجزا لا ی اور ی ع جاتی رہینگی اور

جو شرط کہ موافق اس عمل ہوگی اوسسے ایک مساوات تیسری درجہ کی پیدا ہوگی جیسا
کہ مشابہت مساوات سے معلوم ہوتا ہی اور اسسی قیمت ح، کی معلوم ہوجاویگی اور
یہی حال محور ع" کا ہوگا پھانسی بات ہوا کہ تین قیمتین مساوات مرفوعہ بالا تیسری درجہ
کی تین صحیح قیمتین ح اور ح، اور ح" کی ہین ان تین مقادیر سے تین قیمتین آ اور آ، اور
آ" کی دریافت ہوجاوینگی اور چونکہ ہر ایک مقدار کی صرف ایکہی قیمت ہی تو اسسی معلوم
ہوتا ہی کہ صرف ایکہی صورت محور متقاطع علی التوا پیدا ہوسکتی ہی کہ اگر مساوات سطح
منحنی نسبت اوسکی لئی جاوی تو اوسمین سے اجزای حاصلضرب مقادیر غیر منقطع کی نہین ہونگی
(۳۸۲) جبکہ مرکز لوکس کا ہو تو صورت اوسکی مساوات کی بوسیلہ تبدیلی مذکورہ بالا
کی بعد اختصار کی یہ ہوجاویگی ط لا" + ب ک" + س ع" = ۰ جبکہ قیمتین اشال
کی اور دور کرین علامت مقادیر مجہول کو تو ل لا" + م ک" + ن ع" = ۱ واضح ہو کہ
ہم ترتیب تبدیلی کے بدل سکتی ہین یعنی ہم پہلی دور کرسکتی حاصلضرب مقادیر غیر منقطع
کو جیسا کہ فقرہ گذشتہ مین کیا اور بعد اسکی دور کرسکتی ہین تین باقی جزوونکو بوسیلہ تبدیلی
نقطہ شروع کی اور مساوات آیندہ بعد دو تبدیلی کے حاصل ہوگی +
ل لا" + م ک" + ن ع" + ف لا = ۰
(۳۸۳) وہ مساواتین جنکا لوکس مرکز رکھتا ہی تین قسم پر ہین اور ایسہ صورتین
علامت مقادیر ل اور م اور ن پر موقوف ہین
(۱) علامت ان تینون کی مثبت ہوسکتی ہے
(۲) دو مثبت اور ایک سے منفی ہوسکتا ہے

(۳) ایک مثبت اور دو منفی ہو سکتی ہیں
لیکن تینو مقدار منفی نہیں ہو سکتی - جبکہ لکھیں بجای ل اور م اور ن کی مقدار مقرر
$\frac{1}{ط^۲}$ اور $\frac{1}{ب^۲}$ اور $\frac{1}{س^۲}$ کو جنمیں ط ب اور ب س سے تو صورتیں مذکورہ بالا
اسطرح پر تعبیر ہونگی $\frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{م^۲}{ب^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$ اور $\frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{م^۲}{ب^۲} - \frac{ع^۲}{س^۲}$
$= ۱$ اور $\frac{ل^۲}{ط^۲} - \frac{م^۲}{ب^۲} - \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$ بہت آسان اور جلد طریقہ حاصل کرنے کا
سطوح منحنی کا بوسیلہ اون نراشش کی ہوگا جو اوس سطح میں ہونگی جو متوازی سطح اوتاری
کی بی یا محور سطح اوتاری میں ہونگی لیکن صورت اخیر میں انکو نراشش عظیم یا نقش کہتے ہیں

بیان مجسم بیضوی کا

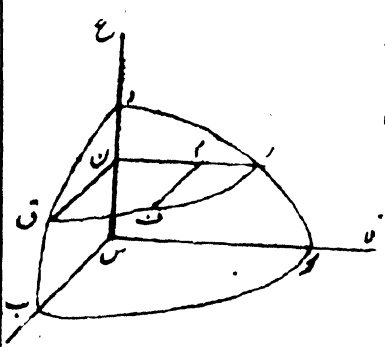
(۴۸۴) صورت (۱) $\frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{م^۲}{ب^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$
(۲) اسطلی دریافت کرنی اوس نراشش کی جو سطح لاک پر ہوگا فرض کرو ع $= ۰$ $\therefore \frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{م^۲}{ب^۲} = ۱$
الف " ..... لاع پر ..... ک $= ۰$ $\therefore \frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$
الف " ..... کوع پر ..... لا $= ۰$ $\therefore \frac{م^۲}{ب^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$
یہانسی معلوم ہوا کہ نراشہای عظیم بیضوی ہیں - فرض کرو کہ *
ع $=$ م $\therefore$ نراشش متوازی سطح لاک کی بہہ ہوگی $\frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{ک^۲}{ب^۲} = ۱ - \frac{م^۲}{س^۲}$
اور
ک $=$ ن $\therefore$ نراشش متوازی سطح لاع کی بہہ ہوگی $\frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱ - \frac{ن^۲}{س^۲}$
اور
لا $=$ ق $\therefore$ کوع $\frac{ک^۲}{ب^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱ - \frac{ق^۲}{س^۲}$
اول مساوات ان مساواتوں سے بیضوی کی ہی م باع $= ۰$ سی ع $=$ س بک اور
جب ع $=$ س تو خط منحنی ایک نقطہ ہو جاتا ہی اور جب ع بڑا ہو کا س سی تو

بیضوی ناممکن ہوجاویگا یہانتک ثابت ہوتا ہی کہ سطح منحنی محدودہی طرف سمت ع کی
اسیطرح ثابت ہوسکتا ہی کہ باقی تراشین بھی بیضوی ہین اور سطح منحنی محدودہی طرف سمت لا اور ر
کی اور چونکہ یہانتک معلوم ہوتا ہی کہ تمام تراشین بیضوی ہین اور سطح منحنی تمام طرفسے محدود ہی
تو اسسے معلوم ہوتا ہی کہ یہ مساوات سطح منحنی مجسم بیضوی ہی ۲ط اور ۲ب اور ۲س قطر
ترتہایی عظیم کی ہین قطر مجسم بیضوی کہلاتی ہین اور انجام ان اقطار کی راس مجسم بیضوی کہلاتی ہین
اگر ب = ط تو صورت مساوات کی یہ ہوجاویگی

$$\frac{ل^۲}{ط^۲} + \frac{ر^۲}{ط^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$$

اور یہ مساوات اوس مجسم کروی کی ہی جو کرد ش کرنیسے
کرہ مجوف ع کی پیدا ہوتا ہی اگر کوئی دو اور اشکال مساوی نہون تو ان صورتون مین بھی
مجسم مذکورہ بالا گرد باقی محذوفی حاصل ہونگی اور اگر ط = ب = س فرض کیا جاوے
تو سطح منحنی کرہ کی ہوجاویگی —

(۵۸ شکل) بخوبی سمجھ مین آنی اور تصور
بندہ نی اوس سطح منحنی کے بھی اوس حاشن
یعنی انتہوان حصہ مجسم بیضوی کا لکہا ہے
ق ب ایک حصہ بیضوی کا سطح لاوپری
ا د ایضاً لاع ایضاً



* واضح ہو کہ یہہ مساوات متعلق رکہتی ہی اوس شانسیے جو سطح لاوپر کہینچا جاویگا
مگر سطح لا ... تو اوی سطح ع = م کی ہی اسسے معلوم ہوتا ہی کہ صورت شانکی وہ ہی ہے
جسسے ... یا ... جو تراش سے پیدا ہوا ہی —

ب د ایک حصہ بیضوی کا سطح ک ع پر ہی ۔

اور تراشش ق ق ر کی بھی بیضوی ہی اور سطح منحنی خیال کی جا سکتی ہی کہ وہ (جو ہماری لاک ہی)
پیدا ہوئی ہی بوسیلہ حرکت بیضوی س ب کی جو کہ وبیش ہوتا ہی اور یہہ بیضوی اوپر
کی طرف متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور مرکز اسکا خط س ع مین واقع ہی
فرض کرو کہ ن ق ر ایک خاص مقام بیضوی مذکور کا ہی اور مان لو کہ

س ن = ع اور س ک = ط اور ن ر = لا ،

ن م = لا اور س ب = ب اور ن ق = ک ،

م ف = ک اور س د = س

تو اب بوسیلہ بیضوی ق ف ر کی یہہ حاصل ہوگا $\frac{لا^۲}{لا_۱^۲} + \frac{ک^۲}{ک_۱^۲} = ۱$

اور بوسیلہ بیضوی د ر ع اور د ق ب کی ہیں حاصل ہوگا

$\frac{لا^۲}{ط^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$ اور $\frac{ک^۲}{ک_۱^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$ اسیواسطے $\frac{لا^۲}{ط^۲} = \frac{ک^۲}{ک_۱^۲}$

جبکہ ضرب کرین پہلی مساوات کو ($\frac{لا^۲}{ط^۲}$) یا اسکی مساوی لہ ($\frac{ک^۲}{ک_۱^۲}$) سے تو ہیں یہہ حاصل
ہوگا $\frac{لا^۲}{ط^۲} + \frac{ک^۲}{ب^۲} = \frac{لا^۲}{ط^۲} = ۱ - \frac{ع^۲}{س^۲} \therefore \frac{لا^۲}{ط^۲} + \frac{ک^۲}{ب^۲} + \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$

مجسم بعید البیضو کی بیانین

(۴۸۶) صورت (۲) $\frac{لا^۲}{ط^۲} + \frac{ک^۲}{ب^۲} - \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$ تراشہای عظیم اسکی یہہ ہونگے

سطح لاک پر $\frac{لا^۲}{ط^۲} + \frac{ک^۲}{ب^۲} = ۱$ ..... (۱) .....

سطح لاع پر $\frac{لا^۲}{ط^۲} - \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$ ..... (۲) .....

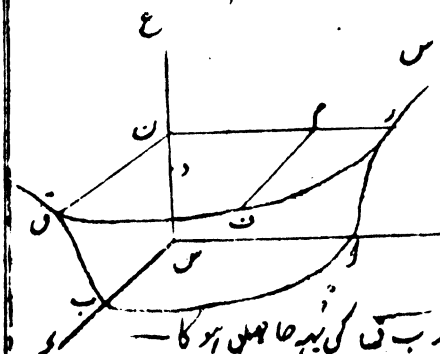
سطح کع پر $\frac{ک^۲}{ب^۲} - \frac{ع^۲}{س^۲} = ۱$ ..... (۳) .....

مساوات پہلی بیضوی کی ہی جسکی محور ۲ط اور ۲ب ہین اور (۲) اور (۳) مساواتین بعید البیضوی کی ہین جن دونونکا قطر متجانس ۲س ما — آ ہی اگر لاکم ط سے ہو یا کم سب سے ہو تو ع ناممکن ہوگا جبکہ فرض کرین ع اور ک اور لاَ کی قیمتین م اور ن اور ق تو ہمین تراشین متوازی لاَ کی بیضوی حاصل ہونگی اور متوازی کع اور لاع کی بعید البیضوی حاصل ہونگی (۴۸۷) شکل مرقومہ ذیل تعمیر کرتی ہی اٹھوان حصہ اس سطح منحنی کا اَب بیضوی لاَ پر ہی اور اَر بعید البیضوی لاع پر ہی اور ب ق دوسرا بعید البیضوی کع پر ہی — یہہ سطح منحنی خیال کی جاسکتی ہی کہ وہ پیدا ہوئی ہی بوسیلہ حرکت بیضوی س اَب کی جو کم و زیادہ ہوتا ہی اور یہہ بیضوی متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور مرکز اسکا س ع مین ہی فرض کرو ن ق مقام بیضوی مذکورہ بالا کا ہی اور فرض کرو —

س ن = ع اور س اَ = ط اور ن ر = لا

ن م = لا اور س ب = ب اور ن ق = ک

م ف = ک اور س د = س



تو اب بوسیلہ بیضوی

ف ق ر کی یہہ حاصل ہوگا

$\frac{لا^2}{لا'^2} + \frac{ک^2}{ک'^2} = 1$ اور

بوسیلہ بعید البیضوی اَر اور ب ق کی یہہ حاصل ہوگا —

$\frac{ح^2}{ط^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ١$ اور $\frac{ح^2}{ط^2} - \frac{ع^2}{ب^2} = ١$ اسیواسطی $\frac{ل^2}{ط^2} = \frac{ک^2}{ب^2}$ اور جبکہ جزو اول

مساوات اول کو $\frac{ل^2}{ط^2}$ سے یا اوسکی مساوی $\frac{ک^2}{ب^2}$ سے تو

$$\frac{ل^2}{ط^2} + \frac{ح^2}{ب^2} = \frac{ل^2}{ط^2} = ١ + \frac{ع^2}{س^2} \therefore \frac{ل^2}{ط^2} + \frac{ح^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ١$$

اس سطح کو مجسم بعید البیضوی ایک صفحہ کی کہتی ہین کیونکہ اوسسے ایک مسلسل سطح منحنی پیدا ہوتی ہی مثلاً ایک صفحہ کی مثنی ہی اگر $= ع$ تو سطح منحنی اوس مجسم بعید البیضوی کی بنی گی جو حرکت کرنی سی کرد قطر متجانس کے پیدا ہوگی —

(٨٨٩) نقطہ شروع ہین سے کھینچا ہوا کہنیچو ایک خط جسکی مساوات ہین یہہ ہین —

$ل = ح ا + ک ح$ اور جبکہ ان قیمتونکو مساوات آیندہ مین

$$\frac{ل^2}{ط^2} + \frac{ح^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ١ \quad \text{.....}$$

تو ہمین حاصل ہوگا

$$\left(\frac{ا^2}{ط^2} + \frac{ح^2}{ب^2} - \frac{ا^2}{س^2}\right) ع^2 = ١ \therefore ع = \pm \frac{ط ب س}{\sqrt{ا^2 س^2 ب^2 + ط^2 س^2 ح^2 - ط^2 ب^2}}$$

یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ یہہ خط ملیگا سطح منحنی سے جبتک کہ مخرج کسر کا مساوی ایک مقدار صحیح اور محدود کے فرض کرو کہ $ب^2 س^2 ا^2 + ط^2 س^2 ح^2 = ط^2 ب^2$ تو اب ظاہری کہ یہہ خط سطح منحنی سے فاصلہ لانہایت پر ملیگا یعنی یہہ خط سطح منحنی کا متنفر الملاقات ہی — مساوات مرقومہ بالا سے نسبت درمیان $ا$ اور $ح$ کی معلوم ہوگی جبکہ خط الکا خط متنفر الملاقات سطح منحنی کا ہو — اگر بجای $ا$ اور $ح$ کی لکھیں اونکی قیمتین اونکی $\frac{ل}{ع}$ اور $\frac{ک}{ع}$ کو تو ہمین حاصل ہوگی ایک مساوات جسمین مقادیر $ل$ اور $ک$ اور $ع$ کی پائی جاینگی اور جسکا لوکس مشتمل تمام خطوط متنفر الملاقات سطح منحنی سے ہوگا کیونکہ کوئی سا نقطہ اوسکا نسبت مرقومہ بالا رکھیگا —

مساوات اس سطح منحنی کے یہہ ہی —

ب۲ س۲ لا۲ + ط۲ س۲ ر۲ = ط۲ ب۲ ع۲ یا $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ر^2}{ب^2} = \frac{ع^2}{س^2}$ ہم فقرہ (۵۱۴) مین لکھین گے کہ یہہ مساوات اوس محروط ہی سے کار اس نقطہ شروع پر رہی اور جسکا قاعدہ یا تراشش متوازی محور کی بیضوی ہی —

(۴۸۹) صورت (۳) $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ر^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ا$ .....

تراشہائی عظیم اسکی سطح لاک پر یہہ ہونگی $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ر^2}{ب^2} = ا$ ..... (۱)

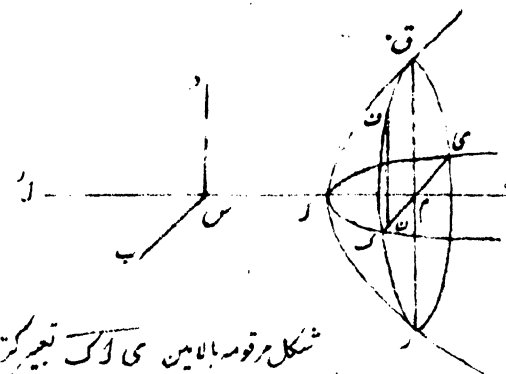
ایضاً " لاع ایضاً " $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ا$ ..... (۲)

..... ایضاً " رع ایضاً " $\frac{ر^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = ا$ ..... (۳)

مساوات (۱) مساوات بعید البیضوی کی ہی جسکی محور ۲ ط اور ۲ ب ا — ا

اور مساوات (۲) مساوات ایک ایسی بعید البیضوی کی ہی جسکی محور ۲ ط اور ۲ س ا — ا

ہین اور مساوات (۳) کا لوکس ناممکن ہی اسیواسطے سطح رع سطح منحنی سی کبھی نہین ملیگی اون تراشون مین سی جو متوازی سطح اوتاری کی ہین وہ جو متوازی لاک اور لاع کی ہی بعید البیضوی ہونگی اور وہ جو متوازی رع کی ہی ایسی بیضوی ہی جسکی مساوات یہہ ہی $\frac{ر^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = \frac{ق^2}{ط^2}$ — ا یہانسے ثابت ہوتا ہی کہ یہہ بیضوی ناممکن ہوگا اگر ق یا کم ± ط سی ہو اسیواسطے اگر دو سطح متوازی رع اور ± ط کی فاصلہ پر مرکز سی کھینچی جاوین تو کوئی حصہ سطح منحنی کا ان سطوح مین یا پا نہین جاویگا —



شکل مرقومہ بالا مین ی ک تبعید کرتا ہی اور س ش تراش بعید البیضوی کو جو سطح لاکر پر کھینچی گئی ہی اور ق ک ر اور تراش بعید البیضوی کو جو سطح لاع پر کھینچی گئی ہی اور ی ک ر ایک تراش بیضوی متوازی ع ع کی ہی اور ایک دوسری متوازی اور مقابل اسکی بعید البیضوی ایک صفحہ کی جسکی راس ک پر ہی اسپر اعلیٰ اس سطح منحنی کو بعید البیضوی مجسم دو صفحی کہتی ہین —

(۴۹۰) مساوات سطح منحنی کی بطور آیندہ کی شکل مرقومہ بالا سے حاصل ہو گی —

فرض کرو ک م = لا اور ن م = ک اور ن ف = ع اور ق م = ع، اور م ک = ک، تو اب بوسیلہ تراش بیضوی ق ف ک ر کی مساوات آیندہ حاصل ہونگی

$\frac{ع^2}{ع_1^2} + \frac{ک^2}{ک_1^2} = 1$ اور بوسیلہ بعید البیضوی ی ک اور ق ر کی یہہ حاصل ہونگی

$\frac{ک^2}{ب^2} - \frac{لا^2}{ط^2} = -1$ اور $\frac{ع^2}{س_1^2} - \frac{لا^2}{ط^2} = -1$ ۔ $\frac{ک^2}{ب^2} = \frac{ع^2}{س_1^2}$ جملہ ضرب کرکے

مساوات اول کو $\frac{ع^2}{س_1^2}$ سے یا اوسکی مساوی $\frac{ک^2}{ب^2}$ سے تو $\frac{ع^2}{س^2} + \frac{ک^2}{ب^2} = \frac{ع^2}{س_1^2} + \frac{لا^2}{ط^2}$

۔ $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ک^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = 1$

(۴۹۱) $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ک^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = 0$ مساوات متفرق الاضافات مخروطی کی ہے

یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ صورت (۲) اور (۳) مین ہمین منفرد الملاقات محوِ وطنی حاصل ہوتی ہی جبکہ دور کرین گی ہم اوس مقدار مقررہ کو جو کہ مساوا لونین پائی جاتی ہین ہی —

بیان اون سطوح منحنی کا جو مرکز نہین رکھتی ہین

(۴۹۲) واضح ہو کہ اس صورتین مساوات عام مین سی وہ اجزا دور ہوسکتی ہین جو حاصل ضرب مقادیر غیر منقطع سی حاصل ہوتی ہین جیسا کہ (۴۷۹) مین ہوا ہی اس صورت مین مساوات یہہ ہوجاویگی ط لا² + ب ی² + س ع² + ۲ ک لا + ۲ ی + ۲ ج ع + کہ = ۰

واسطے دور کرنی تین اور جزونکی فرض کرو لا = م + لا′ اور ی = ن + ی′ اور ع = ق + ع′ ∴ ط لا² + ب ی² + س ع² + ۲ (ط م + ک) لا′ + ۲ (ب ن + ۵) ی′ + ۲ (س ق + ج) ع′ + کہ′ = ۰ فرض کرو اشال لا′ اور ی′ اور ع′ = ۰ ∴ م = − ک/ط اور ن = − ۵/ب اور ق = − ج/س اور چونکہ اس قسم کی سطوح منحنی مین مرکز نہین ہوتا ہی اسیواسطے تینون بعض تمام مقدار م اور ن اور ق کی لانہایت ہونی چاہئی اسی سبب سی دو یا تین اشال ط اور ب اور س مین سی = ۰ کی ہونا چاہئے پس یہانسی ثابت ہوا کہ جب اجزا لا² اور لاع اور ی ع دور ہوگئی تبھی اوسوقت ایک یا دو اشال لا² اور ی² اور ع² کی بھی جاتی رہی ہین یہہ صورت مطابق فقہ (۹۲) کی اب ظاہر ہی کہ تینون اشال = ۰ کی نہین ہوسکتی ہین کیونکہ اس صورتین ہمین مساوات عام سطح مستوی ہوجاویگی یہانسی ظاہر ہوتا ہی کہ اس مساوات کی دو صورتین حاصل ہوسکتی ہین اول جبکہ ط جاتا رہی اور دوم جب ط اور ب دونو جاتی رہین —

(۴۹۳) فرض کرو ط = ۰ اور چونکہ ہمکو تین مقدار م اور ن اور ق دریافت کرنی ہین

تو اب ہم فرض کرسکتے ہین کہ ۰ = ۰ اور اشکال لا اور ع کو ۰ = ۰ اسیواسطے صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی ب ک۲ + س ع۲ + ۲ ک لا ۰ = ۰ یا (ب + س) ک۲ + (ب − س) ع۲ = لا۲

اس کی دو صورتین ہوسکتی ہین جو موقوف ہین علامت ب + س اور ب − س پر

(۱۴۴) صورت (۱) فرض کرو کہ علامتین ک۲ اور ع۲ ایکسی اور مثبت ہین اور اگر منفی ہون تو ہمین علامت لا کی بدلنی چاہئی تاکہ صورت مساوات کی یہی ہوجاوے

لکھو $\frac{1}{ل}$ بجاے $\frac{ب+س}{2}$ اور $\frac{1}{ل'}$ بجاے $\frac{ب-س}{2}$ اور دو کر کی علامت لا ع اور ک جنکی کچھ صورت نہین ہی صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی $\frac{ک^2}{ل} + \frac{ع^2}{ل'} = لا$

اور تراشہاے عظیم سطح لا کو پر یہہ ہوگی ک۲ = ل لا ..... (۱)

ایضاً ..... لا ع ایضاً ع۲ = ل' لا ..... (۲)

ایضاً ..... ک ع ایضاً ل ک۲ + ل' ع۲ = ۰ ..... (۳)

مساواتین (۱) اور (۲) کو کس اُون قریب البیضوی کی ہین جو لا کی مثبت سمت کی طرف کھینچی گئی ہین اور (۳) مساوات نقطہ کی ہی جو نقطہ شروع خود ہی

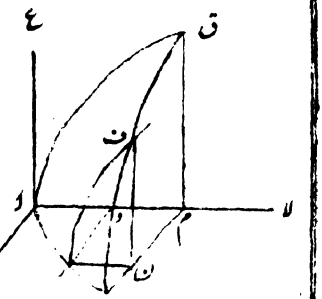
واسطے دریافت کرنی اون تراشونکی جو متوازی ہی

لا کو کچھ فرض کرو ع = ق ∴ $\frac{ک^2}{ل} = لا - \frac{ق^2}{ل'}$ ..... (۱)

ایضاً لا ع کچھ فرضکرو ک = ن ∴ $\frac{ع^2}{ل'} = لا - \frac{ن^2}{ل}$ ..... (۲)

ایضاً ک ع کچھ فرضکرو لا = م ∴ $\frac{ک^2}{ل} + \frac{ع^2}{ل'} = م$ ..... (۳)

مساوات (۱) اور (۲) مساوات قریب البیضوی کی ہین اور یہہ مساوی تراشہاے عظیم کی ہین اور انمین صرف مقدار مقررہ کا فرق ہی اور اسی



معلوم ہوتا ہی کہ نقطہ شروع مختلف مقام پر ہی بلحاظ خط منحنی کی اور (۳) بیضوی ہی —

(۴۹۵) شکل مرقومہ بالا مین $\overline{ق}$ اور $\overline{ر}$ حصہ قریب البیضوی کی سطح لاع اور لاو پر ہین اور سطح منحنی حرکت قریب البیضوی $\overline{ق}$ سی پیدا ہوتی ہی اور یہہ قریب البیضوی حرکت متوازی اپنی کرتا ہی اور راس اسکا قریب البیضوی $\overline{ر}$ کی ساتھہ حرکت کرتا ہی فرض کرو کہ $\overline{ف ن}$ ایک خاص مقام قریب البیضوی متحرک کا ہی اور مان لو کہ ام = لا اور م ن = ر اور ل ف = ع اور کھینچو $\overline{ر و}$ متوازی $\overline{ا م}$ یا $\overline{م ن}$ کی تو اب بوسیلہ قریب البیضوی $\overline{ف}$ کی یہہ حاصل ہوگا

$ع^2 = ل ر ن = ل (ام - ا و) = ل (لا - \frac{ع^2}{ل}) \div \frac{ع^2}{ل} + \frac{ر^2}{ل} = لا$

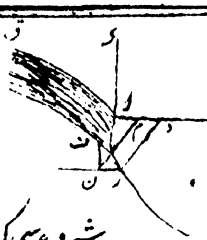
اس سطح منحنی کو مجسم قریب البیضوی بیضوی دار کہتی ہین — اور یہہ مرکب ایک تمام صفحہ ہی ہی مثل گردش مجسم قریب البیضوی کی —

(۴۹۶) صورت (۲) فرض کرو کہ علامت $ر^2$ اور لا کی مختلف ایک دوسری ہین

$\therefore ل ر^2 - ع^2 = ن$ تراشہای عظیم اسکی سطح لاو پر $ر^2 = ل لا$ (۱)

..... ایضاً ..... بلاع پر $ع = - ل لا$ (۲)

..... ایضاً ..... لاع پر $ل ر^2 - ل ع^2 = .$ (۳)



مساوات (۱) اور (۲) قریب البیضوی ہین اول مطابق مثبت لا کی ہی اور دوسری مطابق منفی لا ثی ہی اور (۳) مساوات اون دو خطونکی ہی جو نقطہ ف سے شروع ہی کر تی ہین تراشین اون سطحون پر جو متوازی لاو اور لاع کی ہین قریب البیضوی ہین اور وہ جو متوازی مع کی ہی بعید البیضوی ہین

(۴۹۷) ق ق قریب البیضوی سطح لاع پر ہی اور ر ر قریب البیضوی سطح لاو پر ہی اور سطح منحنی حرکت قریب البیضوی ق ق سے پیدا ہوتی ہی جو متوازی اپنی حرکت کرتا ہے اور راس اسکا قریب البیضوی ر ر کی ساتھ حرکت کرتا ہی فرضکرو ر ف ن ایک خاص مقام اس متحرک قریب البیضوی کا ہی اور مان لو ل م = لا اور م ن = و اور ن ف = ع اور کھینچو متوازی م ن کی تو اب وسیلہ قریب البیضوی ر ق کی ہمین یہہ حاصل ہو گا —

ع² = ل ر ن = ل (ل و - ل م) = ل (ل² - لا) = ل² - ل² = لا

اس سطح منحنی کو بعید البیضوی دار مجسم قریب البیضوی کہتے ہین —

(۴۹۸) مساوات بیضوی دار اور بعید البیضوی دار مجسم قریب البیضوی کی حاصل ہو سکتی ہی مجسم بیضوی اور مجسم بعید البیضوی ایک صفحہ سی جسکا سی کہ مساوات قریب البیضوی کی مساوات بیضوی سی حاصل ہوتی ہی فقرہ (۴۹۸) مین بوسیلہ اس فرض کی کہ مرکز لانہایت فاصلہ پر ہی تبدیل کرو نقطہ شروع کو راس سطح منحنی پر بوسیلہ لکھنی لا — ط کی بجای لا کی تو اب ظاہر ہی کہ مساوات مجسم بیضوی

اور مجسم بعید البیضوی کی یہہ ہوگی $\frac{(لا-ط)^2}{ط^2} + \frac{ک^2}{ب^2} \pm \frac{ع^2}{س^2} = ۱$ فرض کرو کہ م اور م فاصلہ اس نقاط انتشی سی یا اون تراشونسی سے ہے جو سطح لای پر لاع پر کھینچے جاوینگی $ب^2 = ط^2 - (ط-م)^2 = ۲ط م - م^2$ اور $س^2 = ۲ط م - م^2$ جبکہ لکھین ان قیمتو کو اس مساوات مین $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{لا^2}{ط} + ۱ + \frac{ک^2}{۲ط م - م^2} \pm \frac{ع^2}{۲ط م - م^2} = ۰$ یہہ حاصل ہوا

یا $\frac{لا^2}{ط} - ۲لا + ۲م - \frac{ک^2}{م} \pm \frac{ع^2}{م(۲ط-م)} = ۰$ یا $\frac{ک^2}{م} \pm \frac{ع^2}{م(۲ط-م)} - ۲لا = ۰$

جبکہ ط لا نہایت فرض کیا جاوی — یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ وہ مساوات جو حاصل ہونکی واسطے مجسم بیضوی اور مجسم بعید البیضوی کی وہ صادق ہونکی واسطے مجسم قریب البیضوی کی بعد لکھنے قیمتون مذکورہ بالا کے —

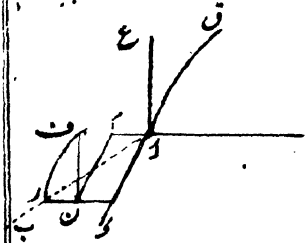
(۴۹۹) ہمنی فقرہ (۴۹۲) مین بیان کیا ہی کہ دو نو ط اور ب دور ہوسکتی ہین اور اس صورتین صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی —

$س ع^2 + ۲ک لا + ۵۲ ی + ۲ج ع + کہ = ۰$ بوسیلہ اوس طریقہ تبدیلی کی جو فقرہ (۴۹۲) مین لکھا گیا ہی ہم اشال لا اور ک کو دور نہین کرسکتی ہین مگر اشال ع اور مقدار مقررہ کو دور ہوسکتا ہی یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ صورت مساوات کی بعد تبدیلی کے یہہ ہوجاویگی $س ع^2 + ۲ک لا + ۵۲ ی = ۰$ یا

$ع^2 = ل لا + ل ع$ اگر $-\frac{۲ک}{س} = ل$ اور $\frac{۵۲}{س} = ل$ فرض کیا جاوی

(۵۰۰) یہانسی ظاہر ہوتا ہی کہ وہ صورتین موافق علامت ل اور ل کی ہوسکتی ہین جو دو نو مثبت یا ایک منفی اور ایک مثبت ہونکی صورت اول فرض کرو کہ ل اور ل

دونون نسبت ہین تو اب ظاہر ہی کہ تراش سطح لاآ پر یہہ ہوگی ل لا + ل ک = ۰ (۱)
اور تراش سطح لاع پر یہہ ہوگی ع² = ل لا (۲) اور سطح کع پر یہہ ہوگی
ع² = ل ک (۳) مساوات (۱) خط مستقیم آب کی اور (۲) مساوات قرب البیضوی
آق کی ہی اور (۳) بہی مساوات قرب البیضوی کی ہی مگر شکل مین کہنچا ہوا ہین



ہی اور تراشین اون سطوح پر جو متوازی
سطحون مذکورہ بالا کی ہین مشابہ ہر ایک صورت
مین ہین اور سطح منحنی حرکت قرب البیضوی
آق سی پیدا ہوگی جبکہ یہہ قرب البیضوی
متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور راس سکا خط آر بناتا ہی فرض کرو کہ رف ن
ایک خاص مقام اس قرب البیضوی کا ہی اور مان لو ا م = لا اور م ن = ک
اور ن ف = ع ، ع² = ل ر ن = ل ($\frac{ل}{ل}$ ک + لا) = ل ک + ل لا
چونکہ یہہ سطح منحنی ایک استوانہ ہی جسکا قاعدہ قرب البیضوی ہی اسواسطے اسکو اکثر
سطوح منحنی دویم درجہ نہین لکہتے ہین — صورت (۲) اگر علامت ل اور ل
کی مختلف ہون تو بہی یہی سطح منحنی پیدا ہوگی مگر مختلف مقام پر ہوگی —

باب ہشتم (۸)

سطوح منحنی استوانی اور محروطی کے بیان مین

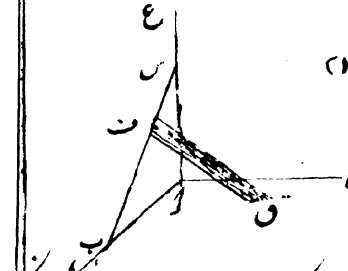
(۵۰۱) واضح ہو کہ اگر ہم خواص سطوح منحنی کی عموماً طور سے بیان کرین تو بیشمار
سطوح منحنی ہو سکتی ہین اور یہہ اوسوقت ہوگا جبکہ حدود اونکی موافق اونکی خاص

ترکیب پیدا کرنی سطوح منحنی سے لکھی جاوے اور بعد اسکی اونمین ایک خاص صورت جریمین لکھین مثلاً تحریر اقلیدس مین تعریف استوانہ کی یہہ کہی گئی ہی استوانہ ایک سطح منحنی ہی جو پیدا ہوتا ہی گردش ایک خط مستقیم سے کرد ایک دایرہ مفروض کے جبکہ خط مذکور متوازی ایک خط مفروض کی ہو اور اگر قاعدہ استوانہ مذکور کا دایرہ نہو بلکہ کوئی اور خط منحنی ہو مثلاً فرض کرو کہ قرب البیضوی ہی تو ظاہر ہی کہ اس صورتمین بھی ہمین ایک ایسی سطح منحنی حاصل ہوگی جسمین خواص ضروری استوانہ کی پائی جاوین گی اور اب ظاہر ہی کہ بہت سی سطح پر تعریف استوانہ کی صادق آوینگی اسیطرحسی تعریف سطح منحنی مخروطی وغیرہ کی ہوسکتی ہی — بعد بیان کرنی ترکیب پیدا ہونی سطح منحنی یا اوس قاعدہ کی موافق جسکی خطوط حرکت کرتی ہین مساوات ان سطوح منحنی کی دریافت کرنی چاہئی یعنی مساوات اونکی نسبت او تا ر لا اور تا اور ع کے جو دو تر ایک نقطہ سطح منحنی کے ہین معلوم کرنی چاہئی اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات عام ہوگی اور یہہ موافق خاص فرضونکی مساوات خاص سطح منحنی کے ہو جاوینگی —

سطح مستقیم کے بیانمین

(۵۰۲) واضح ہو کہ ہم پہلے ایک آسان اور فایدہ مند مثال لکھین گے تا کہ طالب علم کو شا لعاے آیندہ آسان ہو جاوین — دریافت کردہ سطح جو حرکت ایک خط مستقیم سے پیدا ہوگی اور یہہ خط متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور ایک خاص خط

مستقیم ہیں جسکی کہ تاہی فرضکرو لا اور لا ی اور ع محور متقاطع علی الزوایا ہیں
اور مان لو کہ مساواتین خط مستقیم ب س یہہ ہیں (۱) اور یہہ واسطے اسکے کہ سطح ع
ہیں فرضکیا گیا ہی کہ لا ی + ق ع = ا
لا = ۰



اور فرضکرو کہ مساواتین خط متحرک ق ف کی
ایک خاص مقام پر یہہ ہیں

(۲) لا = ا ع + ط
ی = ج ع + ص

ظاہر ہی کہ ا اور ج مماس اُن زاویوں کے
ہیں جو کہ نشان ق ف کا محور ا لا اور
ا ی سے بناتا ہی اور چونکہ ق ف متوازی اپنی بھی کب کرتا ہی اسواسطے
نشان اسکی بھی متوازی اپنی مونکی بہانسے معلوم ہوتا ہی کہ ا اور ج مقدار مقرر
اور معلوم ہیں اور چونکہ ط اور ص اوتار اُوس نقطہ کی ہیں جہاں ق ف قطع کرتا ہے
سطح لا ی کو تو ظاہر ہی کہ یہہ مقادیر بدلینگے موافق ہر ایک تبدیلی مقام ق ف کی
اور چونکہ یہہ غیر منقطع ہیں اسواسطے یہہ مقداریں مساوات سطح میں جو انجام میں حاصل
ہوئی نہیں پائی جاوینگے اب ظاہر ہی کہ مقدار ط اور ص مقادیر لا اور ی
اور ع میں بدل ہو سکتی ہیں ۔ نقطہ ف پر جہاں ق ف ملتا ہی
ب س سے یہہ مساواتین بوسیلہ (۱) اور (۲) کی حاصل ہونگی
لا = ۰ اور ع = ع = − ط/ا اور ی = ی = − ط ج/ا + ص
لیکن چونکہ (۱) واسطے ہر ایک قیمت لا اور ی اور ع کی صادق آنی ہے

اسیواسطے بوسیلہ لکھنی قیمتونکی مساوات (۱) مین ہمین مساوات آیندہ حاصل ہوگی ن (− $\frac{۲ط}{ا}$ + ص) + ق (− $\frac{ط}{ا}$) = ۱ اور اس مساوات سے نسبت درمیان ط اور ص کی معلوم ہوتی ہی یا اسی نسبت درمیان مقادیر منفی ط اور ص کی معلوم ہوتی ہی یا اوس نسبت کو تعبیر کرتی ہی جو کہ مقادیر مساوی مقدار ط اور ص کی اسمین رکھتی ہین یعنی جبکہ لکھین بجای ط اور ص کی مقادیر لا − ع اور ی − ح ع کو جو (۲) سے حاصل ہوتی ہین تو ہمین حاصل ہوگی ایک مساوات جسی نسبت درمیان مقادیر لا ی اور ع کی معلوم ہوگی اور اس مساوات کو مساوات سطح منحنی کے کہتی ہین ∴ − ن $\frac{ا}{ا}$ (لا − ا ح) + ن (ی − ح ع) − $\frac{ق}{ا}$ (لا − ا ع) = ۱ یا − $\frac{ن ح + ق}{ا}$ لا + ن ی + ق ع = ۱

یہہ مساوات ایک سطح مستویکی ہی اور یہہ ایک عام طریقہ واسطے دریافت کرنی مساوات ایک سطح مستویکی ہی کیونکہ اسیطور سے یہہ مساوات ہر ایک قسم کی محورونکی صورتین معلوم ہوسکتی ہی اور یہہ مساوات ایک آسان خاصیت سطح مستوسی دریافت کی گئی ہی اب ہم بحث اسی سطوح منحنی کے کرینگی جو حرکت ایک خط مستقیم سے پیدا ہوتے ہین جبکہ خط مذکور موافق ایک قاعدہ مفروض کی حرکت کرتا ہے *

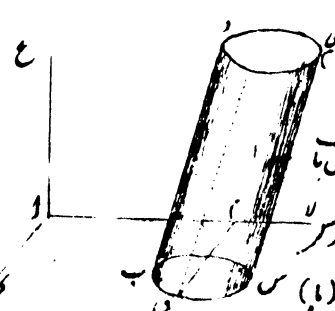
بیان استوانی سطوح منحنی کا

(۵۰۳) حد ایک استوانی سطح منحنی پیدا ہوتی ہی گردش ایک خط مستقیم سے جو حرکت متوازی اپنی کرتا ہی سطح جو ہمین اور سر اوسکا ایک خط منحنی مفروض بناتا ہی خط مستقیم کو جو حرکت کرتا ہی خبر مترکس یعنی خط متحرک اور خط منحنی

کیونکہ اسکی سرکی حرکت سے پیدا ہوتا ہی ڈائرکٹرکس کہتے ہین دریافت کرو مساوات
سطح منحنی کے - فرض کرو کہ مساوات ہین خط متحرک کی ایک خاص مقام پر یہہ ہین
لا = ع + ط اور ک = ح + ص اور چونکہ یہہ خط متوازی اپنی حرکت
کرتا ہی تو ظاہر ہی کہ مقادیر لا اور ح مین کسی نوع کا فرق نہین آویگا اور ہر ایک مقام
خط متحرک پر قیمت ایکی یہہ ہی رہیگی مگر قیمت ط اور ص کی جو اوتار اور اس نقطہ کی ہین جہان
خط متحرک سطح لاکی سے ملتا ہی ایک خاص مقام پر ہی رہیگی اور قیمت ایکی بدلیگی جبکہ
مقام خط متحرک کا بدلیگا مثلاً جبکہ ایک نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی اپنی جاہی کو بغیر
علیحدہ ہونے کی خط متحرک سے یعنی جبکہ صرف اسی خط پر حرکت کرتا ہی تو ظاہر ہے
کہ ط اور ص مین کسیطرح کا فرق نہین آویگا اور جبکہ نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی اپنی
جاکو ایک خط متحرک کسی دوسری خط متحرک پر تو ظاہر ہے کہ ط اور ص غیر منقطع یعنی کم و زیادہ ہونگی
یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ یہہ دونو مقدار مقررہ ایکہی وقت مین اور غیر منقطع یعنی ایکہی
وقت مین ہوتی ہین تو ظاہر ہی کہ یہہ دونون ایک دوسری پر موقوف ہونگی
اور اسکو اسطرح پر تعبیر کرتی ہین ایک مقدار جملہ دوسرے کا ہی -
ث ص = ک (ط) یعنی جملہ (ط) ہی او رجسکے لکھین کم قیمتین ط اور ص کی
جو مساوات کے شدنہ سے حاصل ہونگی تو ک - ح ع = ک (لا - ع) اور یہی
مساوات سطح منحنی استوانیکے ہی -
(۵۰۴) ضرور جملہ ک کی خاصیت سطح منحنی پر جبکہ وہ ایک خاص مقام پر ہی موقوف
ہوگی فرضکرو مساوات ڈائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی کے یہہ ہین —

ح (لا اور ی اور ع) = ۰ اور ح (لا اور ی اور ع) = ۰ چونکہ خط
منحنی ہر ایک مقام پر خط متحرک سے مبتا ہی تو ظاہر ہی کہ مساواتین ان دونونکی
ہر ایک نقطہ تقاطع پر حاصل ہونگی اور اب ظاہر ہی کہ مقادیر لا اور ی اور ع
چار مساواتون خطوط مذکورہ بالا سے دور ہوسکتی ہین اور بعد اس تبدیلی کے
ہمین ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین صرف مقدار ط اور ص اور مقدار
مقررہ پائی جاوینگی اور ایسی صورت جملک کی دریافت ہو جاویگی
جبکہ لکھینگے ہم بجای ط اور ص کی اونکی قیمتین لا - ع اور ی - ح ع
تو ظاہر ہی کہ ہمین مساوات استوانہ مطلوب کی حاصل ہوگی -

(۵۰) مثال اول - فرضکرو دائی گرکس یعنی خط منحنی دایرہ ب ق س
سطح لاو ہی ہی اور مالو کہ لا، اور ی، اوتار اوسکی گرکی ہین تو ظاہر ہی کہ
مساوات اسکی یہ ہوگی { (لا - لا،)² + (ی - ی،)² - ق² = ۰ } (۱) اور فرضکرو
ب د اور ق ر اور س ی مختلف مقام خبری گرکس یعنی خط متحرک کی ہین جسکی مساوات



یہ ہین { لا = ا ع + ط (۲) ; ی = ح ع + ص }

اور اب ظاہر ہی کہ واسطی تعبیر کرنی اس بات
کی کہ نقطہ ق پر دایرہ اور خبری گرکس
یعنی خط متحرک مبتای مساوات (۱)
اور (۲) ایکسی ہونی چاہئی سینے قیمتین لا اور ی اور ع کی اس مقام پر ایکسی ہونگی

ش ع = ع = ۰
∴ لا = لا = ط
∴ ک = ک = ص

جبکہ لکھین کے ان قیمتونکو مساوات (۱) مین تو یہہ حاصل ہوگا

(ط − لا)² + (ص − ک)² = نق² (۳)

تو اب ظاہر ہی کہ صورت جملہ ک کی دریافت ہوگئی ہی جبکہ لکھین قیمتین ط اور ص کی جو (۲) مین ہین تو (لا − ع لا)² + (ک − ح ع ک)² = نق²

اور یہہ مساوات ترجمی استوانہ کی جسکا قاعدہ دایرہ ہی اور یہہ سطح لا دین مقیم ہے

(۵۰۶) فرضکرو کہ مرکز دایرہ کا نقطہ ش ع پر ہی —

∴ لا = ۰ اور ک = ۰ ∴ (لا − ع لا)² + (ک − ح ع)² = نق²

اور اگر نقطہ شروع الحام قطر پر جو متوازی محور لا کی ہی فرض کیا جاوی

تو (لا − ع لا)² + (ک − ح ع)² = ۲ نق (لا − ع لا) —

(۵۰۷) فرضکرو کہ محور استوانہ کا متوازی محور ع کی ہی تو اب لا اور ح ہر واحد = ۰ کیونکہ یہہ مماس اون زاویونکی ہین جو نشان خط متحرک کا سطح لا اور ع ع مین ع ع سی بناتا ہی ∴ (لا − لا)² + (ک − ک)² = نق² اور اگر محور ع ع سی منطبق ہو جاوی تو لا² + ک² = نق² اور ع = ۰ ان صورتونمین استوانہ کو سیدھا استوانہ کہتی ہین اور اسکی اور خط متحرک کے مساوات ایکہی ہی اگر ڈائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی ایک دایرہ سطح لاع پر فرضکیا جاوی تو اس صورتمین مساوات سیدھے استوانہ کی یہہ ہوگی لا² + ع² = نق² —

(۵۰۸) فرض کرو کہ ڈائی ریکٹرکس یعنے خط منحنی ایک قرع البیضوی سطح

لاکو پر ہی اور راس اسکا نقطہ شروع پر اور محور اسکا منطبق محور لا پر ہی تو اس صورتمین مساواتین دائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی اور خط متحرک کی یہہ ہونگی

$$\left.\begin{aligned} ع^{2} &= ق لا \\ ع &= ۰ \end{aligned}\right\} \text{(۱) اور} \quad \left.\begin{aligned} لا &= ا ع + ط \\ ک &= ح ع + ص \end{aligned}\right\} \text{(۲)}$$

اور اب ظاہر ہی کہ مساواتین انکی نقطہ تقاطع پر یہہ ہونگی

ع = ع = ۰ اور لا = لا = ط اور ک = ک = ص جبکہ لکھین ہم ان قیمتونکو مساوات (۱) مین تو حاصل ہوگا یہہ ص^{2} = ق ط ∴ (ک − ح ع)^{2} = ق (لا − ا ع)

اور یہہ مساوات ایک سہمی استوانہ کی جسکا قاعدہ قریب البیضوی سطح لاکو پر ہی

(۵۰۹) فرضکرو کہ ڈائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی قریب البیضوی سطح لاع پر ہی اور محور اسکا لا اور نقطہ شروع ا ہی - اور فرضکرو کہ خط مستقیم ثرکس یعنی خط متحرک متوازی سطح لاکو کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ مساواتین یہہ ہونگی

$$\left.\begin{aligned} ع^{2} &= ق لا \\ ک &= ۰ \end{aligned}\right\} \text{(۱)} \quad \left.\begin{aligned} ک + ا لا &= ط \\ ع &= ص \end{aligned}\right\} \text{(۲)}$$

تو اب مساوات سطح منحنی کے یہہ ہوگی ع^{2} = $\frac{ق}{ا}$ ک + ق لا دیکھو اسطی اسکی ثبوت کی فقرہ (۴۹۹) کو -

بیان سطوح منحنی مخروطیکا

(۵۱۰) حد — سطح منحنی مخروطی پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم سی جسکا ایک سرا ہمیشہ کہ زتا ہی ایک نقطہ مفروض مین سی جبکہ دوسرا سرا ایک خط منحنی

مفروض کا بنا تا ہی ۔ نقطہ مفروض کو مرکز سطح منحنی کا اور خط مستقیم کو جنیز ٹرکس یعنے خط متحرک اور خط منحنی مفروض کو ڈائی ریکٹرکس کہتے ہین ۔ فرضکرو ط اور ص اور س اوتار مرکز کی ہین تو اب ظاہر ہی کہ مساوا تین خط متحرک کی یہہ ہو نگے

لا − ط = ا (ع − س)
ک − ص = ح (ع − س)

جبکہ ایک نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی اپنی جگہ کو بغیر چھوڑ نی خط متحرک کی یعنی جبکہ وہ اسی خط پر حرکت کرتا ہی تو ظاہر ہی کہ مقادیر ا اور ح مقدار مقررہ ہونگی مگر جبکہ وہ نقطہ گردتا بھی ایک خط متحرک اسی دوسری پر تو یہہ دونو غیر منقطع یعنی کم و زیادہ ہونگی یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ مقدار ا اور ح ایکہی وقت مین مقدار مقررہ ہوتی ہین اور ایکہی وقت مین غیر منقطع تو صاف ظاہر ہی کہ وہ جملہ ایک دوسریکی ہونگی ۔ ح = ک (ا) اور جبکہ لکھین کے ہم قیمت ح اور ا کی تو حاصل ہوگا یہہ ۔

ک − ص / ع − س = ک (لا − ط / ع − س) اور یہی مساوات عام سطح منحنی محدد طلی کے ہی

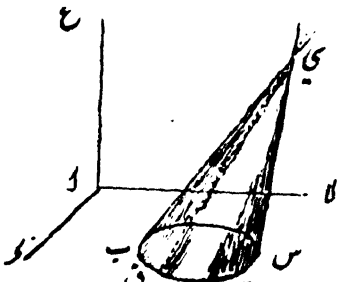
(۵۱۱) صورت جملہ ک کی خاصیت ڈائی ریکٹرکس یعنے خط متحرک کے خاص صورت پر موقوف ہو گی بوسیلہ مساواتون ڈائی ریکٹرکس اور جنیز ٹرکس کے ہم مقادیر لا اور ک اور ع کو دور کرنیکی ایک خاص صورتمین جیسا کہ صورت اسنوا مین کیا تھا تو اب ظاہر ہی کہ ہمکو بعد اس تبدیلی کے ایک ایسی مساوات حاصل ہو گی جسمین مقدار ا اور ح کی پائی جاویگی اور ایسی صورت جملہ ک کی دریافت ہو جاویگی اور جبکہ لکھین ہم قیمت ا اور ح کی لا − ط / ع − س اور ک − ص / ع − س تو ہمکو مساوات مخروط مطلوب کی ایک خاص صورتمین

حاصل ہوسکے

(۵۱۲) مثال — فرض کرو کہ ڈائی ریکٹرکس دایرہ ب ق س سطح لاو میں ہی تو مساوات اسکی یہہ ہوگی (لا — لا')² + (ک — ک')² = نق² } (۱).
= ۰

اور مساوات میں جہز بیٹرکس ب ق یا ق ک کی جو نقطہ حق (ط اور ب اور س) میں سے گذرتا ہی یہہ ہوگی لا — لا' = ط (ع — ع') } واسطے تعبیر کرنے اس
ک — ک' = ح (ع — ع') } (۲)

بات کی کہ جہز بیٹرکس دایرہ سے ملتا ہی ظاہر ہی کہ مساوات (۱) اور (۲)



ایک ہی ہونی چاہئی ۔

ع' = ع — ۰

لا' = لا = ط — ا س

ک' = ک = ص — ح س

اب اگر لکھیں ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں تو (ط — ا س — لا)²
+ (ص — ح س — ک)² = نق² (۳) جبکہ لکھکر قیمتیں ا اور ح جو (۲)
میں ہیں مخصر کریں اس مساوات کو تو حاصل ہوگا یہہ —

$$\left(\frac{\text{و ع} - \text{س لا}}{\text{ع} - \text{س}} - \text{لا}'\right)^2 + \left(\frac{\text{ص ع} - \text{س ک}}{\text{ع} - \text{س}} - \text{ک}'\right)^2 = \text{نق}^2$$

یہہ مساوات ایسی ترچھی مخروط کی ہی جسکا قاعدہ دایرہ ہی اور مقیم سطح لاو میں ہی — فرضکرو مرکز دایرہ کا نقطہ شہ و ع پر ہی ۔

(ط ع — س لا)² + (ص ع — س ک)² = نق² (ع — س)²

(۵۱۳) فرضکرو محور محروط کا متوازی محور ع کی ہی ۔ ط = لا، اور ص = کا،
اور صورت مساوات عام کی یہہ ہو جاویگی $\frac{(لا-ط)^2}{س^2} + \frac{(ع-ص)^2}{س^2} = \frac{نق^2}{س^2}$
اِس صورت مین محروط کو سیدھا محروط کہتی اور اِس صورتمین نقطہ شروع
مرکز دایرہ پر فرضکیا جاوی تو ط = ۰ اور ص = ۰
$\therefore لا^2 + ع^2 = \frac{نق^2}{س^2}(ع - س)^2$

(۵۱۴) اگر ڈائی ریکٹر کس ایک بیضوی سطح لاو مین فرضکیا جاوی
جسکا مرکز نقطہ شروع ہو اور مرکز محروط کا محور ع مین فرضکیا جاوی
تو مساوات محروط کی یہہ ہو جاویگی $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ع^2}{ص^2} = \frac{(ع-س)^2}{س^2}$
للہذا اسمین ع بجای ع - س کی یعنی جبکہ شمار کرین مرکز محروط سے تو
$\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ع^2}{ص^2} = \frac{ع^2}{س^2}$ اس صورتمین مساوات سطح منحنی کے بطور فقرہ
(۵۰۸) کی دریافت ہوسکتی ہی اسی فقرے کے شکل مین فرضکرو کہ ہر ایک
تراش مثل ق ف کی بیضوی ہی جسکا محور لا، اور کا ہمیشہ متناسب
محور ط اور ص ایک ایسی بیضوی ہین جسکا مرکز ع مین فاصلہ س پر
ع سی ہے تو اب مساوات ق ف کی یہہ ہوگی —
$\frac{لا^2}{لا_1^2} + \frac{ع^2}{ع_1^2} = ۱$ لیکن کا، = $\frac{ص}{ط}$ لا، اور لا، = $\frac{ط}{س}$ ع
$\therefore \frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ع^2}{ص^2} = \frac{ع^2}{س^2}$ —

(۵۱۵) فرضکرو کہ ڈائی ریکٹرکس ایک قرب البیضوی متوازی سطح لاو
کی ہی اور راس اسکا محور ع مین ہی اور اب ظاہر ہی کہ مساوات

دائی رکٹر کس اور جنر شر کس یہہ ہین —

$$(۲)\begin{cases} ک^۲ = ق لا \\ ع = د \end{cases} \quad (۱) \text{ اور } \quad \begin{cases} لا - ط = ا (ع - س) \\ ک - ص = ح (ع - س) \end{cases}$$

نقطہ تقاطع پر $ع = ع' = د$ اور $لا = لا' = ط + ا (د - س)$

اور $ک = ک' = ص + ح (د - س)$ جبکہ لکھین ان قیمتونکو مساوات

(۱) مین اور لکھین اسمین قیمتین $ح$ اور $ا$ کی جو (۲) سی حاصل ہوتے

تو $\left\{ص + \frac{ک - ص}{ع - س} (د - س)\right\}^۲ = ق \left\{ط + \frac{لا - ط}{ع - س} (د - س)\right\}$

(۵۱۶) فرضکرو کہ اس یا مرکز محروط کا نقطہ شروع پری —

$\therefore ط = ص = س = ۰$ اور مساوات محروط کی جسکا ڈائی رکٹر کس یہہ ہے

$\{ک^۲ = ق لا$ اور $ع = د\}$ اور جسکا راس نقطہ شروع پری ہے ہوگے

$د ک^۲ = ق لا ع$

(۵۱۷) طریقہ اینڈ واسطی دریافت کرنی مساوات سیدہی محروط کی

جسکا راس نقطہ شروع پری بہت مفید معلوم ہوتا ہی — فرضکرو کہ طول $ح$

محروط کا کہ ہی اور یہہ بھی مان لو کہ یہہ نقطہ شروع ہین سی کذر کی

ہوا ایک ایسی سطح مفروض یا قاعدہ پری جسکی مساوات یہہ ہی —

$لا + ح ک + ن ع = ک$ اور اسمین مقدار $ا$ اور $ح$ اور $ن$ جسب التمام

اون زاویونکی مین جو کہ $لا$ اور $ک$ اور $ع$ سی بناتا ہی موافق

(۴۱۰) کی اور یہہ بھی فرضکرو کہ $لا$ اور $ک$ اور $ع$ اوٹار ایک نقطہ کی ہین

جو محیط قاعدہ پر ہی اور مان لو کہ رداوہ ہی جو خط ثابت کس یا خط متحرک محدود کا بناتا ہی محور محوط سی تو اب موافق خاصیت مثلث قایمہ الزاویہ کی کہ $= ما$ $(لا^2 + ک^2 + ع^2)(جم ر)$ اب اگر لکھین دونو مساوی نہ کہ کو برابر ایک دوسری کی تو $(لا + ح د + ن ع)^2 = (لا^2 + ک^2 + ع^2)(جم ر)^2$ اور بہر مساوات ہر ایک نقطہ سطح منحنی پر صادق آویگی کیونکہ ح اور ح اور ن ایکسی رہینگے یعنی اونکی قیمت نہین بدلیگی اوس سطح کی صورت مین جو متوازی قاعدہ کی اور نقطہ (لا اور ک اور ع) کی سطح منحنی مین سی کندنی ہے اگر محور محوط کا منطبق ہوی محور ع پر تو $ل = ح = ۰$ اور $ن = ۱$

$ش ع^2 = (لا^2 + ک^2 + ع^2)(جم ر)^2$

(۵۱۸) دریافت کرو خط منحنی جو تقاطع کرنی ایک سطح مستوی اور ترچھی محوط کے سی حاصل ہو کا ہم فرض کر سکتی ہین کہ سطح مذکور نقطہ شروع اوتارین ہے کندنی ہی اور اس فرض سی عمومیت مساوات مین کسی نوع کا خلل نہین اونکا جگہ لکھین بجای لا اور ک اور ع کی مساوات مین اونکی قیمتین جو (۴۸۶) مین ہین تو سکو معلوم ہو کا کہ زاویتین خطوط دوم درجہ کی اور اونکی اختلاف کی ہونگے

سطح منحنی کو نو اڈل کی بیان مین

(۵۱۹) حد سطح منحنی کو نو اڈل کے پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم سی جو ہمیشہ حرکت کرتا ہی مواہی ایک سطح کی اور جسکا ایک سرا حرکت کرتا ہی ایک خط مستقیم پر جبکہ دوسرا سرا ایک منحنی مفروض بناتا ہے

پہلی ہم ایک آسان مثال اس قسم کی سطح منحنی کی لکھینگے فرضکرو کہ محور ع ایک ڈائی رکٹرکس ہی اور فرضکرو کہ جیر شٹرکس متوازی سطح لاد کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ مساوات جیر شٹرکس کے ایک خاص مقام پر یہہ ہونگی ع = ص ، ل = لا ۔۔۔۔

اب ظاہر ہی کہ جب ایک نقطہ حرکت کرتا ہی سطح منحنی پر بغیر علیحدہ ہونے کی جیر شٹرکس یا خط متحرک سی یعنی صرف ایسی خط سرکتا ہی تو ل اور ص مقدار مقررہ ہونگی اور جبکہ یہہ نقطہ ایک مقام خط متحرک سی اوسکی دوسری مقام پر جاتا ہی تو ل اور ص مقدار غیر منقطع یعنی کم و زیادہ ہونے کی بہانسی ثابت ہوا کہ یہہ دونو مقدارین مقرر الکمی وقت میں ہوتی ہین اور غیر مقررہ بھی الکمیتو قسمین ہوتی ہین اسواسطے الکمقدارانمین سی جملہ دوسرا کہلاوے ہ ص ـ ک (و) جبکہ لکھینگے الکی قیمتون کو تو ع ـ ک (لے) اور یہی مساوات عام تمام سطوح منحنی کو نو اڈل سے ہوگی ۔

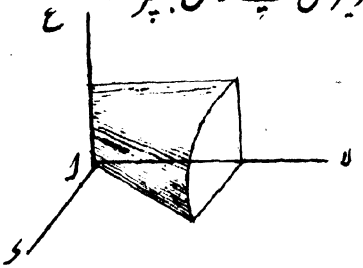
(۵۲۰) صورت جملہ ک کی ڈائی رکٹرکس دوم پر موقوف ہی تو یہلیے مساواتون ڈائی رکٹرکس اور جیر شٹرکس کے مقدار لا اور ک اور ع کی دور ہوسکتی ہی جبکہ پہلی دو رکھی گئی ہین بعد اسکی ہمین ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین ط اور ص پائی جاوینگی اور جبکہ لکھینگے ہم اس مساوات مین قیمت ص اور ط کی جو ع اور لے ہی تو ظاہر ہی کہ ہمکو مساوات ایک خاص سطح منحنی کو نو اڈل سے حاصل ہوسکے ۔

(۵۲۱) فرض کرو ڈائی رکٹرکس دوم ایک دایرہ متوازی سطح ع ح کی ہی اور مرکز اسکا محور لا مین ہی اسواسطے مساوات اسکی یہہ ہوگی

تو اب ظاہر ہے جبانکہ یہہ ڈائی رکٹرکس متناہی

$$\left.\begin{aligned} ع^2 + ک^2 &= ق^2 \\ لا &= ط \end{aligned}\right\} \quad (۱)$$

خمر شرکس سے اُوس جا پر —



$ع = ع' = ص$

$لا = لا' = ط$

$ک = ک' = ا'ط$

$\therefore ص^2 + ا'^2 ط^2 = ق^2$

یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات مطلوب یہہ ہی $ع^2 + ط^2 \frac{ک^2}{ا'^2} = ق^2$ چونکہ یہہ سطح مخنی مرکب مخروط اور مینح سی ہی ایسو اسطی اسکو ڈالس صاحب نی کونو کیونی اُس نام رکہا تھا جنی اسکی بہت سی خواص دریافت کئی تہی —

اگر محور لا ایک ڈائی رکٹرکس اور دوسرا ایک دایرہ متوازی سطح لاع کی فرض کیا جاوی اور خمر شرکس متوازی محور ع کی تو اس صورتین مساوات یہہ ہوگی

$لا^2 + \frac{ط^2 ع^2}{ا'^2} = ق^2$ —

(۵۲۲) فرض کرو کہ محور ع ایک ڈائی رکٹرکس ہی اور ایک خط مستقیم دوسرا ہی اور مان لو کہ خمر شرکس حرکت کرتا ہی متوازی سطح لاک کی تو اب ظاہر ہی کہ مساوا تین دوسکا ڈائی رکٹرکس کی یہہ ہونگی $لا = د ع + م$ اور $ک = ہ ع + ن$ اور چونکہ مساوا تین خمر شرکس کی یہہ ہین $ک = ا لا$ اور ع = ص کی تو اوس نقطہ پر جبانکہ یہہ ملینگی یہہ حاصل ہوگا

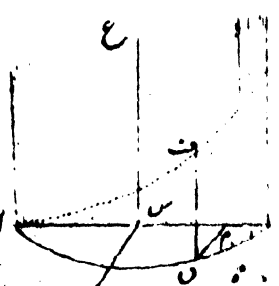
$ع = ع' = ص$ اور $ک = ک' = ہ ص + ن$ اور $لا = لا' = \frac{ہ ص + ن}{ا}$

$\therefore \frac{ہ ص + ن}{ا} = د ص + م \therefore (ہ ص + ن) \frac{ط}{ا'} = د ع + م$

یا ۰ ع لا − ع ک + ن لا − م ک = ۰

(۵۲۳) فرضکرو کہ محور ع ایک دائی رکٹرکس ہی اور مان لو کہ دوسرا دائی رکٹرکس ڈورا ایک پیچ کا ہی جسکا محور منطبق ہی محور ع پر − واضح ہو کہ ڈورا پیچ کا یا خط منحنی ہیلکس بنتا ہی بوسیلہ لپیٹنے ایک ڈوری کی گرد ایک سیدہی استوانہ کی اسطرح پر کہ ڈورہ مذکور ایکسی راویہ بناتا ہی محور سے یا اگر قاعدہ ایک مثلث قایم الزاویہ کا منطبق ہو ہی قاعدہ استوانہ پر اور مثلث لپیٹا جاوے کرد استوانہ مذکور کے تو وتر قایم الزاویہ کا ہیلکس اوف بناویگا − دریافت کرو مساواتین ہیلکس کے − فرضکرو کہ مرکز استوانہ کا نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم کا ہی اور مان لو کہ س م = لا اور م ق = ک اور ف ق = ع اور نصف قطر استوانہ کا = ط اب ظاہر ہی کہ ف ق ایک نسبت مقررہ رکھتا ہی ل ق سے یعنی بلندی قاعدہ کی قاعدہ مثلث سے نسبت مقررہ رکھتی ہی ۔ ف ق = ی ل ق اور ل ق مساوی اُس قوس کے ہی جسکی جیب تمام ی ک اور نصف قطر ط ہی اسواسطے ع = ی ط جتا $\frac{ک}{ط}$ یا ع = ی ط جتا $\frac{ک}{ط}$ اور لا² + ک² = ط²

اور یہی مساواتین ہیلکس کے نسبت کی ہونگی



اب ہم کل مطلوب بیان کرینگی جو یہ ہی دریافت کرو سطح منحنی جو بنتی ہی ایک خط مستقیم سے جو حرکت کرتا ہی موازی قاعدہ استوانہ کی جو کہ تا ہی محور سے سی اور مس کرتا ہی ہیلکس پر − مساواتین دائی رکٹرکس (اگر فاصلہ درمیان ڈورون پیچ کے

فرض کیا جاوے) کی یہہ ہین ع = ی ط جس $\frac{ا}{ط}$ $\frac{ح}{ک}$ + س اور لا^{۲} + ک^{۲} = ط^{۲}
اور چونکہ مساوات جبر شرکس یہہ ہین ک = ا لا اور ع = ص تو ع = ص
اور لا = $\frac{ک}{ا}$ = $\sqrt{ط^{۲} - ک^{۲}}$ ∴ ک = $\frac{ا ط}{\sqrt{ا^{۲} + ا^{۲}}}$ ∴
ص = ی ط جس $\frac{ا}{\sqrt{ا^{۲} + ا^{۲}}}$ $\frac{ا ح}{ک}$ + س - تو اب ظاہر ہی کہ مساوات سطح منحنی
کی یہہ ہوگی ع = ی ط جس $\frac{ا}{\sqrt{ا^{۲} + ا^{۲}}}$ $\frac{ح}{ک}$ + س ❀

(۵۲۴) دریافت کرو مساوات سطح منحنی کی جو بنتی ہی ایک ایسی خط مستقیم سی
جو کہ ثابتی دو خط مستقیم مین سی جنکی مساوا تین یہہ ہین لا = ط اور ک = ص اور
لا = ط، اور ع = ص، اور چونکہ اوس خط منحنی مین سی ہی کہ ثابتی جنکی مساوات
یہہ ہی ع - ح (ک) اور جو سطح ک ع مین واقع ہی تو مساوا تین ثابتی رکر کس
کی یہہ ہونگی $\left.\begin{matrix} لا = ط \\ ک = ص \end{matrix}\right\}$ (۱) اور $\left.\begin{matrix} لا = ط، \\ ع = ص، \end{matrix}\right\}$ (۲) اور
$\left.\begin{matrix} ع = ح (ک) \\ لا = ۰ \end{matrix}\right\}$ (۳) اور فرض کرو کہ مساوا تین جبر شرکس کے یہہ ہین
$\left.\begin{matrix} لا' = ا ع' + م \\ ک' = ح ع' + ن \end{matrix}\right\}$ ایسو اسطی ک = $\frac{ح}{ا}$ لا' + ق اگر ق = ن - $\frac{ح م}{ا}$
اور چونکہ یہہ خط تین خط مفروض سی ملتا ہی ایسو اسطی ہین مساوات آیندہ
حاصل ہونگی ص = $\frac{ح}{ا}$ ط + ق اور ط، = ا ص، + م اور - $\frac{ح}{ا}$
= ح (- $\frac{ح}{ا}$ ح + ن) ہم اب دور کرینگی ک اور ص اور م اور ن کو
بوسیلہ ان مساوا تونکی اور مساوات جبر شرکس کے اب بوسیلہ تفریق کرنی کے
یہہ حاصل ہوگا ک - ص = $\frac{ح}{ا}$ (لا - ط) اور لا - ط،

$= \frac{ا}{ا}(ع - ص_ا) \therefore ا = \frac{لا - ط_ا}{ع - ص_ا} \therefore \frac{ا}{ا} = \frac{لا}{ا} - ع$

$= \frac{ط_ا ع - ص_ا لا}{لا - ط_ا}$ اور $\frac{ن ا - م ح}{ا} = \frac{ا(ک - ح ع) - ح(لا - ا ع)}{ا}$

$= \frac{ا ک - ح لا}{ا} = ک - \frac{ح لا}{ا} = \frac{ص_ا لا - ط_ا ک}{لا - ط}$ بہانسی ظاہر ہی کہ

اخر کو یہہ مساوات حاصل ہوسکتی ہی

$\frac{ص_ا لا - ط_ا ع}{لا - ط_ا} = ح\left(\frac{ص_ا لا - ط_ا ک}{لا - ط}\right)$

(۵۲۵) دعوی اینده بہی اسطور پر بہت آسانی سے حل ہوسکتا ہی دریافت کرو مساوات ایک سطح منحنی کے جو پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم سی جو ہمیشہ کہ رتا ہی ایک خط مفروض سی جو سر کتا ہی توازی سطح لاع کی جبکہ دو نوسری اسکی دو خط منحنی مفروض پر ہون جو یہہ ہین ع = ح (ک) سطح کع پر اور لا = ک (ک) سطح کلا پر تو اب ظاہر ہی کہ مساوات مطلوب یہہ ہوگی

$\frac{ع}{ح(ک)} + \frac{لا}{ک(ک)} = ا$

(۵۲۶) اس قسم کی سوالونمین تہوڑی ہوشیاری ضرور ہی واسطی مقرر کرنی مقام محورون اور سطوح اوتاری کی اسطرح پر کہ مساواتین معلوم اور وہ جو دریافت کرنی منظور ہون ایک بہت آسان صورت جبریہ سی تعبیر ہوجاوین مثلاً دریافت کرو ایک سطح منحنی کو جو پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم سی جو ہمیشہ کہ رتا ہی تین خط مفروض مین سی - فرض کرو کہ تینون خط توازی خطوط محورونکی ہین اسیواسطی مساوی تینون ڈائی رکٹرکس کے یہہ ہونگے

$$\left.\begin{matrix} لا = ط_1 \\ ک = ص_1 \end{matrix}\right\} \text{اور} \quad \left.\begin{matrix} لا = ط_2 \\ ع = س_2 \end{matrix}\right\} \text{اور} \quad \left.\begin{matrix} ک = ص_3 \\ ع = س_3 \end{matrix}\right\} \text{اور}$$

مساوات تین خط متحرک کی یہہ ہین $\begin{matrix} لا' = لع + ط \\ ک' = حع + ص \end{matrix}$ اسیواسطے

$ک = \frac{ح}{ل} لا + س$ اور یہان $س = ص - \frac{ح}{ل} ط$ چونکہ یہہ خط

تینون خطوط معلوم سے ملتا ہی تو ظاہر ہی کہ ہمین یہہ مساوات تین حاصل ہونگی

$ص_1 = \frac{ح}{ل} ط_1 + س$ اور $ط_2 = \frac{ل}{ح} س_2 + ط$ اور $ص_3 = \frac{ح}{ل} س_3$

$+ ص$ - اب ہمکو مقدار $ط$ اور $ص$ اور $ل$ اور $ح$ کی لوسیلہ ان مساواتون

اور مساوات جبر شرکس کے دور کرنی چاہئی اسیواسطے بعد تفریق کی ہمکو

یہہ حاصل ہوگا $ک - س_1 = \frac{ح}{ل} (لا - ط_1)$ اور $لا - ط_2$

$= ل (ع - س_2)$ اور $ک - ص_3 = ح (ع - س_3)$ یہانتک

معلوم ہوتا ہی کہ جب دور کرین ہم $ل$ اور $ح$ کو تو ہمکو مساوات مطلوب

یہہ حاصل ہوگی $(لا - ط_1)(ک - ص_3)(ع - س_2) = (لا - ط_2)$

$(ک - ص)(ع - س_2)$ اور یہہ مساوات دویم درجہ کی ہی کیونکہ جرلاح

جانا رہیگا دیکھو اسطی تفصیل اس باب کی ہائی مرصاحب کی منسلکہ پیمائش

باب نہم

بیان اُون خطوط منحنی مین جو دو خم رکھتی ہین

(۵۲۷) حد - ایک خط منحنی دو چند خمدار پیدا ہوتا ہی حرکت ایک ایسی نقطہ

سی جو صرف سمت اپنی حرکت کی ہی نہین بدلتا ہی جیسا کہ سطح منحنی مین

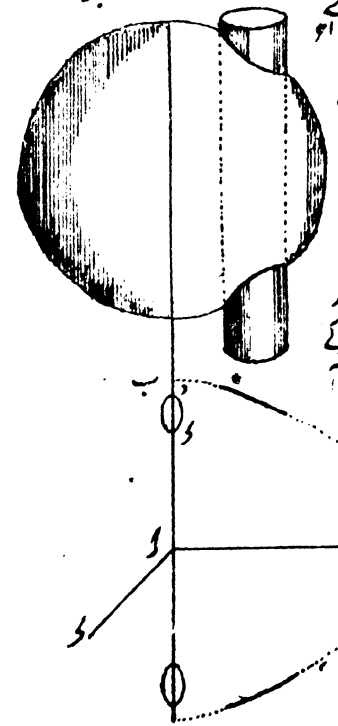
ہوتا ہی وہ سوای اسکی اوس سطح کو بھی بدلتا ہی جسمین وہ حرکت کرتا ہی
۔ اگر ایک دایرہ ایک صفحہ کاغذ پر کھینچا جاوی تو ظاہر ہی کہ وہ خط منحنی سطح کہلاویگا
اور جبکہ صفحہ کاغذ کو صورت استوانہ مین لپیٹی تو ظاہر ہی کہ اس صورتمین دایرہ
دو خم حاصل کریگا ایک وہ جو دایرہ مذکور بسبب مدور ہونی کے رکھتا ہے
اور دوسرا وہ جو اوسنی بسبب لپیٹنی کاغذ کی حاصل کیا ہی اسپر اسطرح اس
صورت مین اسکو خط منحنی دو چند خمدار کہتی ہین ۔

(۵۲۸) خطوط منحنی دو چند خمدار پیدا ہوتی ہین بوسیلہ تقاطع کرنی دو سطح منحنی کے
مثلاً قایم کرو ایک سرا پرکار کا ایک سطح استوانہ پر اور متحرک کرو دوسری سر کو
اسطرح پر کہ سرا اخیر وقت حرکت کی ہمیشہ سطح استوانہ کو مس کری اسسے ایک خط
منحنی دو چند خمدار پیدا ہوگا اور کہ یہہ خط دایرہ نہین ہی پھر بھی ہر ایک نقطہ اسپر
خط منحنی کا مساوی فاصلہ پر اوس سری پرکار سے ہی جو قایم ہی ۔
یہہ خط منحنی ایک حصہ اوس کرہ کا ہی جسکا نصف قطر مساوی اوس خط کی ہی
جو واقع ہی درمیان دو سرون پرکار کی اور اب یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی
مذکور پیدا ہوتا ہی تقاطع کرنی اس کرہ اور استوانہ کسی ۔

(۵۲۹) واضح ہو کہ بوسیلہ مساوانون دو سطح منحنی کے مساوات اونکی تقاطع
کی دریافت ہوسکتی جو فی الواقع مساوات خط منحنی دو چند خمدار کی ہوگی
بوسیلہ دور کرنی مقادیر غیر متقطع کی دو مساوات مین سے نشان خط منحنی
کی سطوح اوتاری پر حاصل ہونگی ۔ دو نشان اتنمین سے کافی ہونگی

واسطے معلوم کرنی خط منحنی دو چند خمدار کی — کیونکہ ہم دو استوانہ دو نشان خط منحنی بین سی گذار سکتی ہین جو عمود ایک دوسری پر اور سطوح اوناری پر ہونگی تو اب ظاہر ہی کہ وہ خط منحنی جو تقاطع کرنی ان استوانون کیسی پیدا ہوگا وہ خط منحنی مطلوب ہوگا — یہہ ثبوت مشابہ اوس ترکیب کی ہی جسکی وسیلہ سی منحنی مساوات خط مستقیم کے دریافت کئی تہی کیونکہ خط مستقیم بہی تقاطع کرنی دو سطح مستوی سی پیدا ہوسکتا ہی — اب ہم بیان کرتے ہین خواص خطوط منحنی دو چند خمدار کی جو تقاطع کرنی دو سطح منحنی کیسے پیدا ہوتی ہین

(۵۳۰) فرضکرو کہ خط منحنی مذکور پیدا ہوا ہے تقاطع کرنی ایک استوانہ اور کرہ کیسی اور مان لو کہ نقطہ شروع مرکز کرہ کا ہی اور محور استوانہ کا سطح لاع بین واقع ہی اور متوازی محور ع کی ہی فرضکرو کہ فاصلہ درمیان مرکز کرہ اور مرکز استوانہ کے = س تو اب ظاہر ہی کہ مساوات کرہ کی یہہ ہوگی لا۲ + ی۲ + ع۲ = ط۲ اور مساوات استوانہ کی یہہ ہوگی (لا − س)۲ + ی۲ = ص۲ جہان ص = نصف قطر



(۵۰۷) جبکہ دو کرین ہم ی کو تو

یہہ حاصل ہوگا ع^{۲} = ط^{۲} + س^{۲} − ص^{۲} − ۲ س لا (۱) اور جبکہ دور کرین لا کو تو حاصل ہوگا یہہ ع^{۲} = ط^{۲} − ص^{۲} − س^{۲} ∓ ۲ س $\sqrt{ص^{۲} - ع^{۲}}$ (۲)

(۱) سے معلوم ہوتا ہی کہ نشان خط منحنی کا سطح لاع پر ایک حصہ قریب البیضوی ب س کا ہی جسکا راس س ہی اور اس = $\frac{ط^{۲} + س^{۲} - ص^{۲}}{۲ س}$ اور اب = $\sqrt{ط^{۲} + س^{۲} - ص^{۲}}$ اور (۲) سے معلوم ہوتا ہی کہ نشان خط منحنی کا سطح لوع پر مشتمل دو بیضوی صورتون پر ہی مقام جسکا بوسیلہ قیمتون ع کی دریافت ہوجاویگا —

ا د = ± $\sqrt{ط^{۲} - (ص - س)^{۲}}$

ا ی = ± $\sqrt{ط^{۲} - (ص + س)^{۲}}$

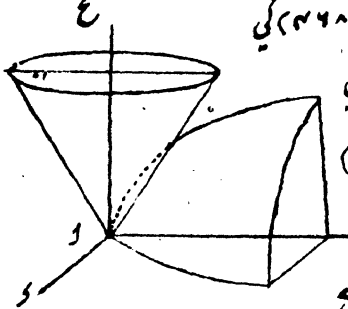
جیسا کہ س زیادہ ہوتا ہی یعنی جسقدر استوانہ دور ہوتا جاتا ہی نقطہ ا سے اوسیقدر ا ی کم ہوتا ہی اور صورتین بیضوی قریب ایک دوسرے کی آتی ہین جیسا کہ شکل (۱) مین ہی (۱) (۲) (۳) (۴)

اور جبکہ س^{۲} = ط − ص تو ا ی = ۰ اور بیضوی صورتین ایک دوسرے سے ملین گی شکل (۴) جیسا کہ س بڑھتا ہی ہین شکل (۳) حاصل ہوگی اور بہہ ہاستکی اخر کو شکل (۴) ہوجاتی ہی اور اخر جبکہ س = ط تو اوس صورتین بیضی بالکل جاتی رہتی ہی — مختلف قیمتین ہم س اور $\frac{ط}{۲}$ وغیرہ ص کی فرض کرسکتے ہین اور اس صورتین ہمین نشان معلوم ہوجاوینگی اور انکی دریافت کرنی مین کسیطرح کی شکل واقع نہین ہوتی ہی لیکن ہم اسکا بخوبی امتحان کرسکی

کیونکہ اگر ہم ایک مثال کو بخوبی توضیح سے حل کریں تو اور مثالوں کی حل کرنے میں بڑی آسانی ہو جاویگی۔

(۵۳۱) مثال (۲) فرضکرو کہ خط منحنی دو چند خمدار پیدا ہوتا ہی تقاطع کرنی ایک مخروط اور مجسم قریب البیضوی جنکا راس ایک دوسرے پر منطبق ہی اور محور مخروط کا عمود محور مجسم قریب البیضوی پر ہی مساوات مخروط کی یہہ ہے

$لا^۲ + ک^۲ = ی^۲ ع^۲$ موافق (۴۶۸) کی



اور مساوات مجسم قریب البیضوی کی یہہ ہوگی $ک^۲ + ع^۲ = ن لا$ (۴۶۹)

یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ لا نشان سطح لاع پر یہہ ہے

$لا^۲ + ن لا = (۱ + ی^۲) ع^۲$ اور یہہ مساوات بعید البیضوی کی ہی جسکی محور $ن$ اور $\frac{ن}{۱ + ی^۲}$ ہیں موافق فقرہ (۱۵۷) کی اور ظاہر ہی کہ

$لا^۲ + ک^۲ = ی^۲ (ن لا - ک^۲) \div (۱ + ی^۲) ک^۲ = ی^۲ ن لا - لا^۲$

یہانسی ثابت ہوا کہ نشان سطح لاک پر ایسی بیضوی ہے جسکا راس ا ہی اور محور $ی^۲ ن$ اور $\frac{ی^۲ ن}{۱ + ی^۲}$ موافق (۱۰۳) اور مساوات اوس نشان کی جو سطح کع پر ہوگا یہہ ہی $(ک^۲ + ع^۲)^۲ + ن ک^۲ = ی^۲ ن ع^۲$ اور یہہ مساوات لیمنسکیٹا کی ہی اور یہی مساوات اوس لیمنسکیٹا کی ہوگی جو برنولی صاحب نے ایجاد کیا ہی جبکہ ی = ۱

یعنی جبکہ محذوط فایدہ الزاویہ ہی موافق (۳۱۴) کی

(۳۲۵) دریافت کرو وہ خط منحنی جو تقاطع کرنی دو سطح منحنی کیسی پیدا ہوتا ہے

— پہلی اس سی ہمنی مقادیر غیر منقطع کو دور کرکی مساوات بین نشانونکی سطوح اوتا ہے

پر حاصل کئی تہین برعکس اسکی اگر ملا دین ان مساواتونکو بوسیلہ جمع کرنی یا طرح

کرنی وغیرہ کی تو ظاہر ہی کہ اس عملسی ہمکو ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی

جسمین تین مقدار مجہول یا غیر منقطع پائی جاوینگی اور ایسی ایک ایسی سطح منحنی

حاصل ہوگی جسپر ہم ایک خط منحنی دو چند خمدار کھینچ سکتی ہین — اس سطح منحنی

پر لانہایت خطوط منحنی خمدار کھینچ سکتی ہین اور مساوات سطح منحنی کے ہر ایک خط پر

ان خطوط منحنی سی صادق اوگی — نتایج مذکورہ بالا جو ملانی مساواتون

کیسی حاصل ہوتی ہین بہت فایدہ مند اور دلچسپ ہین اسواسطی ہم اسجا

چند مثال اونکی لکھینگے مثلاً فرضکرو کہ خط منحنی پیدا ہوا ہی تقاطع کرنے

قرب البیضوی دار استوا ہر اور یہہ لاک پر واقع ہی) اور دایرہ دار استوا ہر

سی جو لاع پر ہی اور نقطہ شروع راس قرب البیضوی پر ہی اور مرکز

دایرہ کا محور قرب البیضوی پر واقع ہی اور یہہ محور لاک کا بھی ہی فرضکرو

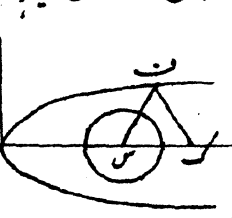
ک۲ = ۲ن لا مساوات قرب البیضوی راس کی لاک پر ہی اور

(لا — ط)۲ + ع۲ = ق۲ مساوات دایرہ کی سطح لاع پر ہی

جبکہ ملا دین ہم ان مساوتون کو بوسیلہ جمع کرنی کی تو حاصل ہوگا

یہہ (لا — ط)۲ — ۲ن لا + ک۲ + ع۲ = ق۲ ..... یا

$(لا - ط - ن)^2 + ک^2 + ع^2 = نق^2 + ن^2 + 2ط ن$ یہہ مساوات ایک



کرہ کی ہی جسکا مرکز نقطہ شروع

سے ایسی فاصلہ پر (= ط + ن)

پر واقع ہی اور یہہ خط محور لا لا

پر شمار کیا گیا ہی اور ظاہر ہی کہ ن تعبیر کرتا ہی خط پائین س ک نقطہ ف

کو اور ف س وہ وتر جو ملتا ہی نقطہ س پر موافق (۲۴۲) کی یہا نسبی

ثابت ہوا کہ تمام نقطہ منحنی دو چند خمدار کی واقع ہین اوس سطح کرہ پر جسکا

مرکز ایک سرا خط پائین ایک خاص نقطہ ایسی قریب البیضوی کا ہی

جسکا وتر مرکز دایرہ مفروض ہین سی کذرتا ہی

(۵۳۳) واضح ہو کہ تقاطع کرنی سطوح منحنی سی یہہ خطوط منحنی دو چند

خمدار پیدا نہین ہوتی ہین و اکثر خطوط منحنی مسطح ہی ہوتی ہین — اب ہم

بیان کرینگی ایک ایسی ترکیب کو جسکی وسیلہ سی مساوات اون خطوط

منحنی مسطح کی دریافت ہو جاوینگی جو تقاطع کرنی سطوح منحنی سی پیدا ہوتی

ہین اور جس صورتون مین خطوط منحنی دو چند خمدار حاصل نہین ہوتی ہین —

پوشیدہ نہ رہی کہ جب ایک خط مستقیم شان کسی خط کا ہوتا ہی تو وہ

خط منحنی دو چند خمدار نہین ہوتا ہی

مثال — فرض کرو کہ خط منحنی پیدا ہوا ہی تقاطع کرنی دو قریب البیضوی

دار استوانو نسی جنکی مساوات یہہ ہین $لا^2 = طع$ اور $ص^2 = لا^2$

۲۴۲ ۔ ۔ ۔

(دو سطح منحنی بین سی) اور ایک ایسی سطح مستوی کی جسکی مساوات یہہ ہی ع = م لا + ن ک + ف دور کرو مقدار ع کو بوسیلہ اس مساوات اور مساوات ایک سطح منحنی کے تو ظاہر ہی کہ اس عمل سی یہہ مساوات حاصل ہوگی ک (لا اور ک) = ۰ اور یہہ شابہ اس صورت کی ہوگی ج (لا اور ک) = ۰ اسکو اسطی بوسیلہ مقابلہ کرنی ان دونون جملونکی بین حاصل ہونگی مختلف مساواتین جنکی ذریعہ سی ہمکو قیمتین مقادیر م اور ن اور ف کی دریافت ہو جاوینگی اور ظاہر ہی کہ یہہ مقادیر تبھی کرینگی شرطین اون مساواتونکی ضمن یہہ پائی جاوینگی اور اگر یہ شرائط مذکور نہ پورا کرین تو خط منحنی مطلوب خط منحنی دو چند خمدار ہوگا — مثلاً فرض کرو کہ ایک کرہ اور ایک استوانہ تقاطع کرتے ہین ایک دوسرے سی جیسا کہ (۳۰۰ ص ۴۳۰) تو اب ظاہر ہی کہ مساوات کرہ کی یہہ ہوگی لا² + ک² + ع² = ط² .... (۱) اور مساوات استوانہ کی یہہ ہی (لا — س)² + ک² = ص² .... (۲) اور مساوات سطح مستوی کی یہہ ہی ع = م لا + ن ک + ف ... (۳) جبکہ دور کیا ہمنی ع کو مساوات (۱) اور (۳) مین سی تو ک (لا اور ک) = ۰ یہہ ہو جاوی کا

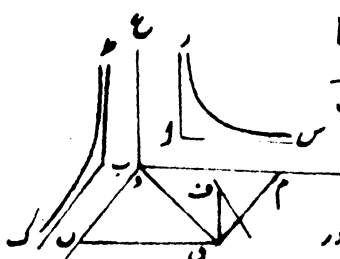
(م² + ۱) لا² + (ن² + ۱) ک² + ۲ م ن لا ک + ۲ م ف لا + ۲ ن ف ک + ف² — ط² = ۰ (۴) بوسیلہ مقابلہ کرنی (۲) اور (۴) کی ہمین یہہ حاصل ہوتا ہی م = ۰ اور ن = ۰ یہہ اشال لا² اور ک² سی حاصل ہوتا ہے

لیکن شرط م = سے اشکال لاکا (۴) مین جاتا رہتا ہی اور اسسے معلوم ہوتا ہی کہ مساوات (۴) مشابہ (۲) کی نہین ہوسکتی ہی تو اب ثابت ہوا کہ خط منحنی مطلوب خط منحنی دو جند خمدار ہی —

اب فرضکرو کہ مساوات استوانہ کے یہہ ہی لا² + ی² = ص² تو اب م = ۰ اور ن = ۰ سے مساوات (۴) مشابہ (۲) کے ہوجاتی ہی تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی ایک خط منحنی مسطح مقیم اوس سطح مین ہوگا جسکی مساوات یہہ ہی ع = ماط − ص² اور یہہ ہندسہ سے بھی معلوم ہوتی ہی (۵۳۶) دریافت کرو وہ خط منحنی جو مساواتون آیندہ سے تعبیر ہوتا ہی

$$\frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = ۱ \text{ اور } \frac{\text{ص}}{\text{ی}} + \frac{\text{س}}{\text{ع}} = ۱$$

یہہ دو مساواتین دو بعید البیضوی دار استوانونکی ہین قاعدہ ایک کا انمین سے سطح لاع مین واقع ہی اور دوسرے کا سطح ی ع مین ہی موافق فقرہ (۲۰۹) کی شال (۳) کی شکل مرقومہ ذیل مین بعید البیضوی رس سطح لاع مین واقع ہی اور مرکز اسکا



ر پر ہی اور بعید البیضوی طک سطح ی ع مین واقع ہی لا اور مرکز اسکا نقطہ ب پر ہی اور

$$\frac{\text{ط}}{\text{لا}} = \frac{\text{ص}}{\text{ی}} \text{ یا } \frac{\text{ی}}{\text{ص}} = \frac{\text{لا}}{\text{ط}}$$

پہلے سے معلوم ہوتا ہی کہ نشان استوانونکا مذکور کا سطح لاکر پر ایک خط مستقیم ق د ہی تو اب ظاہر کہ خط منحنی مطلوب

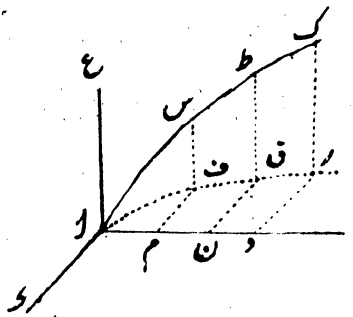
خط منحنی مسطح ہوگا اور یہہ مقیم ہوگا سطح ع دق مین جو عمود لاکر پر ہی
(۵۳۷) چونکہ ہمکو بخوبی حال خط منحنی کا بوسیلہ معلوم ہونی دو بعد البیضوی اور
استوانونکی ظاہر نہین ہوگا اسیواسطے ہم مساوات خط منحنی کے سطح
ع دق یعنی اوسیکی سطح مین دریافت کرنیکی فرض کرد کہ ف ایک نقطہ
خط منحنی کا ہی اور د م = لا اور م ق = ک اور ف ق = ع
تو اب واسطے معلوم کرنی اوس نسبت کی جو درمیان و ق (= ن)
اور ق ف = ع کی ہی ہم معلوم کرنیکی فیتین دم اور دن کی اجرائے
وق مین اور بعد اسکی لکھینگے ہم اسکو مساواتون مفروض مین طاہر ہے
کہ مساوات دق کی یہہ ہی

ک = ص/ط لا = لا مس ر (اگر ص/ط = مس ر کی فرض کیا جاوی)

∴ دم = وق جم ر اور دن = وق جس ر اسیواسطے صورت اس
مساوات کی ل/ط + س/ع = ۱ یہہ ہو جاویگی ن/جم ر ط + س/ع = ۱
اور صورت اس مساوا تکی ص/ک + س/ع = ۱ یہہ ہو جاویگی

ص/ن جس ر + س/ع = ۱ چونکہ ص = ط مس ر اور ص جم ر = ط جس ر
اور یہہ مساواتین مساوی ایک دوسریکی ہین اور ہر ایک ان مساوا تون
مین سے خط منحنی مطلوب سے تعلق رکہتی ہی یہہ اسسے معلوم ہوتا ہی کہ
خط منحنی بعید البیضوی ہی اور مساوات اوسکی جبکہ مرکز نقطہ شروع
فرضکیا جاوی یہہ ہوگی ن ع = ط ر س/ص = ط س/ص سوا تی (۲۰۹) کے

(۵۳۸) کھینچو خط منحنی دو چند خمدار کو بوسیلہ اوسکی نقاط کی فرض کرو



ح (لا اور ی) = ۰ اور

ک (لا اور ع) = ۰ دو

نشان خط منحنی مذکور کی ہیں

کھینچو خط منحنی ا ف ق ر

سطح لاک پر جسکی مساوات

یہہ ہی ح (لا اور ی) = ۰ واسطی ہر ایک قیمت لا یا ا م کی ہمکو

ایک قدر م ف یا ی ر دریافت ہو جاویگا اور اسیطرح مساوات

ک (لا اور ع) = ۰ سے ہمکو قیمت ع کی دریافت ہو جاویگی اب کھینچو

نقطہ ف سے ف س عمود سطح لاک پر اور قطع کرو اسکو مساوی ع

کی تو نقطہ س ایک نقطہ خط منحنی مطلوب کا ہوگا اسیطرح عمل کرنیسے

ہمکو مختلف نقاط س اور ط اور ک وغیرہ دریافت ہو جاوینگی

یہہ ظاہر ہی کہ اگر کسی ایک خاص قیمت لا اور ری قیمت ع کی

ناممکن ہو جاوے تو ظاہر ہی کہ کوئی حصہ خط منحنی کا موافق اسی قیمتون

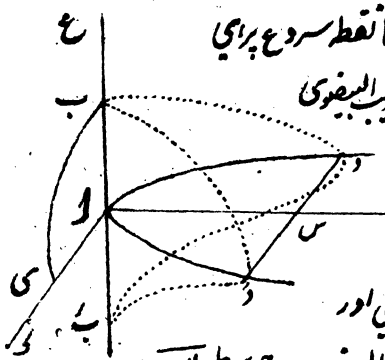
لا اور ری کی معلوم نہیں ہوگا اور اگر ع منفی ہو تو ف س نیچے سطح لاک

کی کھینچا چاہئی —

(۵۳۹) فرضکرو کہ خط منحنی پیدا ہوتا ہی اس طرح کرنی قرب القطع دار

استوانہ سی جو سطح لاک میں واقع ہی اور دایرہ دار استوانہ سی

جو سطح ک ع مین واقع ہی اور محور عمود ایک دوسری پر ہین اور راس
قرب البیضوی کا اور مرکز دایرہ کا نقطہ سر و ع پر ہی



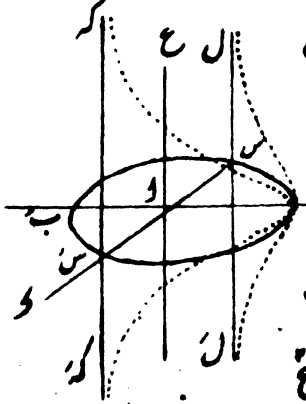
فرضکرو ک۲ = ط لا مساوات قرب البیضوی
د ا د کی ہی اور
ک۲ + ع۲ = ط۲ مساوات دایرہ ی ب کی ہی اور
ع۲ + ط لا = ط۲ وہ قرب البیضوی ہی جو سطح لا ع مین
واقع ہی فرضکرو ا ب = ط اور ا س = ط اور مان لو کہ د س د = ط
اب ظاہر ہی کہ واسطے کھینچنے خط منحنی کی ہمین تین مساواتین سطوح اوتاری پر
حاصل ہونگی ع = ± √ط (ط − لا) اور ع = ± √ط۲ − ک۲ اور
ک = ± √ط لا اگر لا = ۰ تو ک = ۰ اور ع = ط ∴ خط منحنی نقطہ
ب مین سے کذر یگا اور جیسا کہ لا زیادہ ہوگا اوسیقدر ک زیادہ ہوگا اور ع
کم ہوگا اور جب لا = ط تو ک = ط اور ع = ۰ اسسے معلوم ہوتا ہی کہ
خط منحنی بلندی مین کم ہوتا جاتا ہی نقطہ ب سے حتی کہ وہ ملتا ہی قرب
البیضوی سے نقطہ د پر اسی نقطہ دار شاخ ب د معلوم ہوتی ہی اگر
لا زیادہ ہو ط سے تو ظاہر ہی کہ ع ناممکن ہوجاویگا اسسے معلوم ہوتا ہے
کہ خط منحنی پرے نقطہ د کے نہین پہنچتا ہی چونکہ ع = ± √ط (ط − لا)
تو اسسے معلوم ہوتا ہی کہ سوای اوس دو ترسیے جو حاصل ہوتا ہی جو سہلیہ

فرضکرنی قیمت لا کی درمیان ۰ اور ط کی ایک اور وتر ہی جو مقابل وتر مذکور کی ہی اور ایسی ظاہر ہوتا ہی کہ سوای شاخ ب د کی ایک اور شاخ ب د خط منحنی کی ہی مگر منحنی سطح لاک کی واقع ہی — اور چونکہ یہ سطح فرض کرنی منفی قیمت ک کی قیمت ع مین کسی نوع کا فرق نہین لاتی تو ایسی معلوم ہوتا ہی کہ ب د ایک اور شاخ منحنی کی ہی اور بہہ مشابہ شاخ ب د د کی ہی — اب ثابت ہوا کہ خط منحنی مرکب ہی چار شاخ ب د اور د ب اور ب د اور د ب جو مساوی ایکدوسرے کی ہین اور یہہ کہنچا کیا ہی سطح قریب البیضوی دار استوانہ پر جسکا قاعدہ د د د ہی بہہ شاخین حقیقت مین ایک شکل مثل ایسی بیضوی کی بناتے ہین جسکی سطح جھکی ہوئی واسطی ملنی استوانہ کی ہی —

(۵۴۰) مثال (۲) فرضکرو کہ وہ دایرہ جسکی مساوات یہہ ہی

لا۲ + ک۲ = ط۲ نشان خط منحنی

دو جند خمدار کا سطح لاک پر ہی



اور وہ خط منحنی جسکی مساوات

یہہ ہی ط۲ ک۲ = ط۲ ع۲ — ک۲ ع۲

ایک نشان سطح ک ع پر واقع ہیجاب دریافت کیا چاہتے ہین ہم

خط منحنی انکا — فرض کرو ب س ب س ایک دایرہ سطح لاو پر ہی
جسکی مساوات یہہ ہی لا۲ + و۲ = ط۲ اور چونکہ مساوات سطح ع و
پر یہہ ہی ط۲ و۲ = ط۲ ع۲ − ک۲ ع۲ تو مساوات لاع پر یہہ ہوگی
لا۲ ع۲ = ط۲ − ط۲ لا۲ ∴ ع = ± ط / √(ط۲ − لا۲)
یا ع = ± ط ک / √(ط۲ − لا۲) اور ک = ± √(ط۲ − لا۲)
اگر لا = ۰ تو ک = ط اور لا = لا نہایت — اسی معلوم ہوتا ہے
کہ خط س ل جو نقطہ س میں سی کذرتا ہی خط متنفر الملاقات
خط منحنی کا ہی اور جب کہ لا زیادہ ہوتا ہی اوسیقدر ک کھٹتا ہی
اور ع بہی کم ہوتا ہی تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی پاس آتا ہی سطح
لاو کی اور اگر لا = ط تو ک = ۰ اور ع = ۰ اسی معلوم ہوتا ہی
کہ خط منحنی نقطہ ب میں سی کذرتا ہی اور اگر لا زیادہ ہو ط سی تو ک
اور ع ہر واحد ناممکن ہونکی اسی ظاہر ہوتا ہی کہ کوئی حصہ خط منحنی کا
پری نقطہ ب کی واقع نہیں ہی اور چونکہ واسطی ہر ایک قیمت ک کی دو
قیمتیں ع کی حاصل ہوتی ہیں تو اسی ثابت ہوتا ہی کہ بوسیلہ تمام
قیمتوں ک کی جو ربع دایرہ اوس ب میں ہیں دو مساوی شاخیں
ل ب اور ب ل حاصل ہونکی اور یہہ مقابل ایک دوسری ہونکی
اسیطرحسی دو مساوی شاخیں ک ب اور ب ک ربع دایرہ
ب اوس میں حاصل ہونکی اور چونکہ ایسی ہی قیمتیں ک اور ع

کی حاصل ہونگی جبکہ لا منفی فرض کیا جاوے تو اسی چار مساوی شاخین
حاصل ہونگی اور یہہ مقابل اونکی ہونگی جو اوپر کہیں گئی ہین اور یہہ
شاخین بوسیلہ نصف دایرہ س ب س کی حاصل ہونگی —
واضح ہو کہ یہہ دو مثالین کلیرٹ صاحب کی اوس رسالہ سے لی گئی
ہین جو اوسنے خطوط منحنی دوجہ خمدار کے بیان مین لکھا ہے اور اس رسالہ
مین بہت سی مثالین اس قسم کی ہین اور بہت سی خواص ان
خطوط منحنی کے بھی بیان کیے گئے ہین — فقط —

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴	۹	ط ص	ط ص
۵	۴	ط اور س	ط اور ص
۶	۷	ط + ط	ط × ط
۶	۶	= ط	= ط^{۲}
۶	۱۶	ط + ص × س	ط × ص × س
۶	۱۷	ط + ص × س	ط × ص × س
۶	۱۸	لمبے خطوں	خطوط
۶	۱۰	م ا دن تک	م تک
۷	۱۰	حد بہی	خط بہی
۶	۱۳	جسم	قسم
۶	۱۴	توجسم اصغر کہی جسم آسی	جو قسم اطول رکہی قسم اصغر سے
۸	۱۱	= ص ب	= ص
۸	۱۳	نسبت مین	نسبت
۱۲	۹	قبل ازین	قبل از
۱۳	۲	توہ عمود مساوی نصف قطر	توہ عمود مساوی نصف قطر
۶	۱۸	ہندسی کے	ہندسی سے
۱۴	۱۵	م ک	م کہ
۱۵	۹	ق اور س	ق اور ہ
۶	۱۸	= ص^{۲}	= ص^{۲}

صفحہ (۱۶) کی شکل مین بجای ک کے ق اور بجای ق کے گ لکھو

۱۶	۱۵	$\sqrt{ط^{۲} لا^{۲}}$	$\sqrt{ط^{۲} + لا^{۲}}$
۱۷	۴	ب ج سے	ب ج کے
۱۸	۱۲	بطور اول جزفقرہ	بطور اول فقرہ
۱۹	۱۸	نکلتے	نکلتے توہ
۲۰	۸	فرض کرو کہ ق	فرض کرو کہ ط
۲۳	۱۸	(ا - ص)^{۲} (لا - ط)^{۲} = ۰	(ا - ص)^{۲} + (لا - ط)^{۲}
۲۴	۳	کی ایسی پوری	کی سبی پوری

۲۴	۹	اور آیندہ	تو آیندہ	
۴۵	۲	ایک خاص سیدہ یا نشان	ایک خاص نقطہ پر نشان عظیم کرین	
〃	۱۶ و ۱۷	شروع صفر	شروع سفر	
۲۶	۳	نقطہ آ	نقطہ آ سے	
〃	۸	م ن سے	م سے	
〃	۱۵	آ طرف	آ سے طرف	
۲۸	۳	لا + ک۲ = ۰	لا۲ + ک۲ = ۰	
〃	۱۴	فاصلق	فاصلف	
۲۹	۱۰	اور طر	اور فر	
۳۱	۸	کریگی واسطی	کریگی برعکس اسکی واسطی	
۳۵	۲	خط ک ب	خط د ب	
〃	۵	اوس سمت جسمین	اوس سمت مین جسمین	
〃	۶	ک = لا = ۰	ک − لا = ۰	
〃	۱۳	ی ب = ۲	ی پ = ۲	
〃	۱۴	آ اور ب	آ اور پ	
۳۶	۱۳	ایسی بھی	ایسی نہین	
۳۷	۴	کہ سوالی	کہ شرایط سوال	
〃	۱۲	ہم جیہ	ہم ہمیشہ	
〃	〃	کام مین بھی	کام مین نہین	
〃	〃	لاسکتے ہین	لاسکتے ہین مثل $\frac{ص}{ک} + \frac{لا}{ط} = ۱$	
〃	۱۸	∴ ص = ی − طلا	∴ ص = ک۱ − طلا	
۳۹	۱۴	ک = $\frac{ص}{لا}$	ک = $\frac{ص}{لا}$ لا	
۴۰	۲	ک − ۲۷ =	ک − ک۳ =	

۴۰	۱۱	مفروضہ سے	مفروضہ
۴۳	۶	$-$ م ر س لا	$-$ م ر س لا
〃	۱۸	عمود و ی	عمود و ی
〃	〃	فرض کرو کہ ب $=$ ا و	فرض کرو کہ ب $=$ ا و
〃	〃	اوتار نقطہ و	اوتار نقطہ و
۴۴	۱۸	ہر ایک نقطہ س و ب	ہر ایک نقطہ س ا ب
۴۵	۱	س و ب	س ا ب
〃	۲	اور اب دو $=$ دی جس دی و	اور اب دا $=$ دی جس دی ا
〃	۳	اور جس دی و	اور جس دی ا
〃	۴	∴ دو	∴ دا
〃	۷	خط مفروض د و	خط مفروض س ا
〃	۱۱	تو اب دو $=$ دی $\frac{\text{جس دی و}}{\text{جس د و}}$	تو اب دا $=$ دی $\frac{\text{جس دی ا}}{\text{جس د ا}}$
۴۶	۹	لا ا ا $-$ لا لا م $=$	لا ا ا $-$ لا ا م $=$
۴۷	۱۰	ر $=$ ط + ص	ر $=$ ط لا + ص
۴۸	۱۲	لا م اور ک م ..... س	لا م اور ک م اوتار نقطہ س کی ہیں
۴۹	۳	ر $-$ ک ا $=$ $\frac{\text{ک ا}}{\text{لا ا}}$ لا	ر $-$ ک ا $=$ $\frac{-\text{ک ا}}{\text{لا ا}}$ لا
۵۰	۱۵	اوتار نقطہ شروع د کے ہیں	اوتار نقطہ شروع ا کے ہیں
۵۱	۱۲	+ ف لا ×	+ ف ل ×
〃	〃	+ ر	+ ر
〃	۱۴	+ ر	+ ر
۵۲	۱	+ ر جم ر	+ ر جس ر
〃	۲	یا ر $=$ ۹۰°	یا ک $=$ ۹۰°
〃	〃	ر $=$ لا جس ر + جس ر	∴ ر $=$ لا جس ر + ر جس ر
〃	〃	لا $=$ لا جم ر + ر جم ر	لا $=$ لا جم ر $-$ ر جس ر
〃	۶	+ ر جس ر لا لا	+ ر جس ر ر لا
〃	۷	+ ر جس ر ر ر × $\frac{\text{جس لا ا و}}{\text{جس لا ا ر}}$	+ ر جس ر ر ر $\left\{\frac{\text{جس لا ا و}}{\text{جس لا ا ر}}\right\}$
〃	۱۳	اور اگر نیا	اور اگر نیا

(۵۳) صفحہ کی شکل مین خط س ق ق پر حروف س ق و لکھو اور اسمین بجای ص کی م اور بجای ک کے

		س لکھو	
۵۳	۱۷	ک = ۱۸۰°	ک = ۱۸۰°
۵۴	۶	(ر - حص) جبس ک	(ر - ص) جبس ک
=	۱۲	$\frac{لا}{ر}$ جم ر	$\frac{لا}{ر}$ تو جم ر
=	۱۴	ر = جبس$^{-1}$ $\frac{ر}{\sqrt{ر^2 + لا^2}}$	ر = جبس$^{-1}$ $\frac{ر}{\sqrt{ر^2 + لا^2}}$
=	۱۵	+ ۵ = ۴۵	+ ۵ = ۲۵
=	۱۶	پس دایرہ	پس یہی دایرہ
۵۹	۳	— ۱۲ ر	— ۱۲ ر
۱۱	۴	ر = ۳	ر = — ۳
۱۲	۴	$ط = \frac{۲ی - س د}{م^2}$	$ط = \frac{۲ی - س د}{س^2 - م^2}$
=	۷	∴ ر = ۰	∴ ر = ۶۰
=	۹	$ط = \frac{۱}{م^2}$	$ط = -\frac{۱}{م^2}$
=	۱۸	خط ط س	خط ط س پر
۲۳	۱۴	لا - لا	(لا - لا)
۱۲	۱۳	کی ہین ہو جاوینگی	کی ہو جاوینگی
۶۸	۷	$\sqrt{\cdots + (ب د - ۲ ای)}$	$\sqrt{\cdots + ۲ (ب د - ۲ ای)}$
=	۹	$\sqrt{\cdots + (ب د - ۲ س د)}$	$\sqrt{\cdots + ۲ (ب د - ۲ س د)}$
۶۶	۹	$(+ \frac{ب}{م^2})$	$+ \frac{ب}{م^2})$
=	۱۰	اور $\frac{ب}{م^2}$	اور $\frac{ب}{م^2}$
۶۷	۱۵	$-\frac{د}{۲م^2} = ل$	$-\frac{د}{۲م^2} = ص$
۶۸	۲	+ ل	+ ص
=	۴	ط لا + ل	ط لا + ص

نوٹ اس صفحہ کی شکل مین بجای و جو کہ راس بیضوی پر لکھا ہوا ہی ز لکھنا چاہیئے —

۶۹	۱۷	$\sqrt{ق}$	$\sqrt{ق}$
۷۰	۸	کواوسی	کووسی
۷۲	۱	$ط ک + ص$	$ط ک + صَ$
—	۱۸	$ک^۲ + ۲لا^۲$	$ک^۲ + ۲لا^۲$
۷۵	۱۵	$ک = ط لا$	$ک = ط لا + ص$
۷۶	۱۵	کبھی ملتا	کبھی نہیں ملتا
۷۸	۲	مقام د پر	مقام ر پر
۷۹	۵	$+ لا + = ۰$	$+ لا + ۳ = ۰$
۸۰	۱۵	مساوات عام	مساوات عام مین
۸۱	۸	$ب ص + ...$	$ب ص + ...$
—	۹	$= ۰$	$= - ب ص$
—	۱۷	مطابق تر	مطابق وتر
۸۳	۱۸	کا ہی	کا طاق ہے
۸۵	۴	$- ک جس ر$	$- ک جس ر$
—	۵	ک اور لا	ک اور لا
—	۷	ب (لا ک	ب لا ک
—	۸	$+ ک^۲ جس^۲ ر + ف)$	$+ ک^۲ جس^۲ ر) + ف$
۸۷	۲	$\frac{(ا - س)^۲ + ب^۲}{(ا - س)^۲ + ب^۲}$	$\frac{(ا - س)^۲ + ب^۲}{۴ (ا - س)^۲ + ب^۲}$

صفحہ (۸۷) مین شکل (۲) اور (۳) مین مرکز بیضوی پر حرف ک لکھنا چاہئے اور صرف شکل (۳) خط ک سے عمود کھینچ کے اوسپر ل ل لکھنا چاہئے اور جہانکہ محور ل ل اور ر ر بیضوی کو تقاطع کرتا ہے حروف ب اور س مندرج کرو

۸۸	۶	$ک س^۲$	$ک س^۲$
۸۹	۱	$- \frac{ب^۲ س}{ا}$	$- \frac{ک^۲ + س^۲}{ک + س}$
—	۷	اور $- \frac{ب^۲ س}{ا}$	اور $- \frac{ف س}{ک}$
—	۱۲	موافق	موقوف
—	۱۵	$۲ م ر - م ر^۲$	$۲ س ر - س ر^۲$
۹۱	۶	$+ ۲ س جس^۲ ک$	$+ ۲ س جس^۲ ک$

	۱۱	صرف دو ہی	صرف ایک ہی

فقرہ (۸۸) پر یہ نشان * کرنا چاہئے

۹۲	۱۱	۱ی +	۱ی۲ +
۹۴	۱۷	۵لا	۵لا۲
〃	۱۸	+ ی م	+ ی ص
۹۵	۴	− ۱۲لا = ۰	− ۱۲لا − ۱۲ر = ۰
〃	۱۰	اور ص = ۱ = ۰	اور ص − ۱ = ۰
〃	۱۱	اور ف = + ۹	اور ف = − ۹

فقرہ (۹۰) پر یہ نشان کرنا چاہئے *

۹۸	۱۶	+ ۲ ا جس ر م ر	+ ۲ ا جس ر جر ر
۱۰۰	۹	$\frac{د\sqrt{ا} - ی\sqrt{ا}\,س}{ا + س}$	$\frac{د\sqrt{ا} - ی\sqrt{ا}\,س}{ا + س}$
〃	〃	$ی = \frac{د\sqrt{ا}\,س + ی\sqrt{ا}\,ا}{ا + س}$	$ی = \frac{د\sqrt{ا}\,س + ی\sqrt{ا}\,ا}{ا + س}$
〃	۱۵	ز ز۲ + س لا۲ + د ز	ز ز۲ + د ز
۱۰۱	۱	کر دو باتیں	کہ دو باتیں

لکھا جائے
اور صفحہ (۱۰۱) کا شکل (۳) کی اس قریب الصفحہ پر حرف ز ۱

فقرہ (۹۶) پر یہ علامت لکھنے چاہئے *

۱۰۲	۱۸	جو قوت	جو قیمت
۱۰۳	۹	$\frac{ا}{جم۲ کر}$	$\frac{ا}{جس۲ کر}$
〃	۱۷	الیضاً	الیضاً
〃	۱۸	اس سطر میں قیمت د میں سے جز + ی√س جس کا دور کرنا چاہئے	
۱۰۶	۱۶	$\therefore ز = \pm\frac{ا}{\sqrt{ن}}$	$\therefore ز = \pm\frac{ا}{\sqrt{ن}}$
۱۰۷	۲	ص کے	ص سے
〃	۴	− ط۲ + ص۲	= ط۲ × ص۲
〃	۶	مساوات گذشتہ	مساوات گذشتہ سے
〃	۷	ط۲ − لا۲	$\sqrt{ط۲ - لا۲}$
〃	۸	ص۲ − ر۲	$\sqrt{ص۲ - ر۲}$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
صفحہ (۱۰۸) کی سطر (۱۰) میں تمام مساوی کہ ص ن پر علامت جذر کی کرنی چاہئے یعنی ص ن $= \sqrt{لا^2 + ر^2} = \sqrt{لا^2 + \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا^2)} = \sqrt{\frac{ص^2 + (ط^2 - ص^2)لا^2}{ط^2}}$			
۱۰۹	۹	: مربع ل ط	: مربع ل ص
〃	۱۰	: ل ط^2	: ل ص^2
〃	۱۱	دو خطوں	دو حصوں
۱۱۰	۳	وتر العرض	وتر
۱۱۱	۷	ایک نقطہ پر ایک دو	ایک نقطہ پر دو
〃	〃	ایک وتر العرض	ایک وتر
〃	۸	شکل ل س ن	شکل ل س ل
〃	۱۳	لو $\frac{ط^2 - ص^2}{ط}$	تو $\sqrt{\frac{ط^2 - ص^2}{ط}}$
صفحہ (۱۱۱) کی شکل بیضوی میں بجای ق کے ن لکھو اور دست ماست کی ل کو ا کرنا چاہئے۔			
۱۱۲	۳	ص ن $=$ ق	س ن $=$ ا ن
〃	۱۸	ل ا سے	ہ سے
۱۱۳	۴	$(ص - لا^2)^2 + ر^2$	$\sqrt{(ص - لا)^2 + ر^2}$
〃	۶	ر^2 ط ۴	ر^2 $=$ ط ۴ ط^2
〃	۱۳	لوکس اسکا بیضوی میں جسکا	لوکس اسکا بیضوی جسکا
۱۱۵	۹	چھوٹا ہی ط	چھوٹا ہی ط سے
۱۱۶	۱۲	$+ د ر^2$	$+ ص ر^2$
۱۱۸	۲	جبکہ $- ر^2$	جبکہ $- ر^2$
صفحہ (۱۱۹) کی شکل میں حرف ص مرکز بیضوی پر لکھنا چاہئے یعنی درمیان نقطہ س اور م کے۔			
ص لکھو	۲	$- ی - حرلاد$	$- ی - ر^2 حرلاد$
〃	۵	اور لا $= - ط$ کے	اور لا $= - ط ی$
〃	۸	ع $= \frac{ص^2 لا^2}{ط^2 ر^2} ط ی$	ع $= - \frac{ص^2 لا^2}{ط^2 ر^2} ط ی$

۱۲۰	۹	$= \frac{ط ص^{۲} (ط + ی لا)}{ط^{۲} ر^{۲} + ص^{۲} لا^{۲}}$	$= \frac{ط ص^{۲} (ط + ی لا)}{ط^{۲} ر^{۲} + ص^{۲} لا^{۲}}$
=	۱۱	$\frac{ط - ی لا}{}$	$\frac{ط + ی لا}{}$
۱۲۱	۳	(جسکے وتر ن ن اور ت ہین)	(س کے وتر ن ن اور ۔
=	۱۰	$- \frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲}}$	$- \frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲} ر^{۲}}$
۱۲۲	۱۱	اور مماس ن ط	اور مماس س ن ط
۱۲۴	۱۵	دایرہ مسی ہی	دایرہ مسی
۱۲۵	۱۱	$= \frac{ر^{۲}}{لا^{۲}} + \frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲} ر^{۲}}$ / $۱ - \frac{ر^{۲}}{لا^{۲}} \frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲} ر^{۲}}$	$= \frac{ر^{۲}}{لا^{۲}} + \frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲} ر^{۲}}$ / $۱ - \frac{ر^{۲}}{لا^{۲}} \frac{ص^{۲} لا^{۲}}{ط^{۲} ر^{۲}}$

صفحہ (۱۲۰) کی شکل مین جہان عمود مماس قطع کرتا ہو محور کلا کو وہان گ اور جہان محور خورد کو وہان کل لکھا جاوے

۱۲۶	۱۷	$= ص گ$	$= ص گ$

صفحہ (۱۲۷) کی سطر ۱۰ مین ن گ کے مساوی پر علامت جذر کی لکھنی چاہیے

۱۲۷	۸	انجام محور خورد	انجام محور خورد پر
=	۱۳	$\frac{ط ی}{ص}$	$\frac{ط ی}{ص^{۲}}$
=	۱۶	$ی^{۲} لا^{۲}$	$ی^{۲} لا^{۲}$
۱۲۸	۱۰	ک + ص ک	۵ ص + ص ک
۱۳۱	۲	$+ ص^{۲} (جم ر)^{۲} لا^{۲}$	$+ ص^{۲} (جم ر)^{۲} لا^{۲}$
=	۷	= ۱ یعنے	= ۰ یعنی
=	۱۱	خط ص آ سے	خط ص آ سے
=	۱۷	محور ہو سکتے ہین	محور متقاطع محل القوایم ہو سکتی ہین
۱۳۳	۹	$+ ص^{۲} (جم ر)^{۲}$	$+ ص^{۲} (جم ر)^{۲}$
=	۱۰	$ص^{۲} ط^{۲} (جس ر)^{۲} + ص^{۲} (جم ر)^{۲}$	$ص^{۲} (ط^{۲} (جس ر)^{۲} + ص (جم ر)^{۲})$
=	۱۱	$+ جس جم ر جم ر = ۰$	$+ ص^{۲} جم ر جم ر = ۰$
=	۱۲	بجای $جم ر^{۲}$ کے	بجای $(جم ر)^{۲}$

۱۳۴	۲	$(ط_۲ - ص_۲)$	$(ط_۲ - ص_۲)$
"	۶	کا اقطار متجانس کا	اقطار متجانس کا
"	۱۵	$\{جس (ر - ر)\}$	$\{جس (ر - ر)\}^۲$
۱۳۵	۱۴	$ص ن = لا$	$ص ن = لا$
"	"	$دن = ذ$	$دن = ذ$
"	۱۷	$- مثلث ن ص م\}$ اور $مثلث ن ص م$	$- مثلث ن ص م$ اور $مثلث دص ن\}$
۱۳۶	۴	$ط_۲ ع_۲$	$ط_۲ ع_۲$

اس صفحہ کی شکل مین اوس جگہ جہانکہ ص ط قطع کرتا ہی بیضوی کو وہان حرف د لکھنا چاہئے اور جہان عمود ن ف قطع کرتا ہے محور اوس کو وہان حرف ک لکھنا چاہئے

۱۳۶	۱۲	ہو سکتے	ہوسکتے ہین
۱۳۷	۵	قطر متجانس کے کسی قطر کا ایسا	قطر متجانس کسی قطر کا ایسا خط
		خط ہی کہ مرکز سے	ہی جو کہ مرکز
"	۱۷	مماسون کے ہین	مماسون سے ہین
۱۳۸	۳	مربع اور قطر متجانس	مربع اور قطر متجانس
"	۱۴	اب اگر بیضوی	اب اگر بیضوی کے
"	۱۵	وتر ن کے ہین	وتر ن کے ہین
۱۳۹	۱۰	$= \frac{ص_۲}{ط_۲}$	$= - \frac{ص_۲}{ط_۲}$
"	۱۱	$- \frac{ص_۲}{ط_۲ ص}$	$- \frac{ص_۲}{ط_۲ ع}$
"	۱۸	اس عمل کی	اس عمل کے
۱۴۰	۴	ایک سی نہین ہین	ایک سی ہین
"	۱۷	اور اوس	اور اوس
۱۴۱	۳	بڑی بڑا ہی	بڑی سی بڑا ہی
"	۱۲	ہمنی نیلہ	ہمنے یہہ
۱۴۲	۱۲	ع اور د کے	ع اور ر کے

۱۴۲	۱۴	قطر متحرک رآن	قطر متحرک رآن
"	۱۵	خط دآ سے	خط رآ

۱۴۳ اول اس صفحہ کی شکل میں اس خط پر جو کہ کھینچا گیا ہے نقطہ آ سے متوازی آ ز کے رآ لکھو

"	۵	اور ز = ۰	اور ز = ۱۰
۱۴۴		$\frac{(\text{حم}\frac{\text{ل}}{۲})^۲}{}$	$\frac{}{(\text{حم}\frac{\text{ل}}{۲})^۲}$
"	۱۴	ن ن ز =	ن ن ز =
"	۱۵	ں + ں ز = ل ل ز	ں + ں ز = ن ن ز
"	۱۶	$= \frac{\text{ل}^۲}{۴}$ ـــــ ۱	$= \frac{\text{ل}^۲}{۴}$ ـــــ ۱
۱۴۸	۱۴	= ـــ ط	= ـــ ط^۲
۱۵۰	۱۸	۲ √ط^۲ + ص^۲	۲ √ط^۲ + س^۲
۱۵۱	۱۹	محور کمان کی ہے	محور کمان کا ہے
۱۵۲	۱۰	$\frac{\text{ی ل} - \text{ط}}{\text{ی}} = \text{ن}$	$\frac{\text{ی ل} - \text{ط}}{\text{ی}} =$

صفحہ (۱۵۲) کی شکل میں اس نقطہ پر کہ جو پیدا ہوا ہے تقاطع س د اور د ح کا اور ح کا نکالنا تو خط ب ح اور اس نقطہ پر جو پیدا ہوا ہے تقاطع ص د اور د ح کا نکالنا

۱۵۲	۱۷	۲ √ط^۲	√ا + ز^۲
۱۵۳	۱۴	توع^۲ = ص^۲	توع^۲ = ص^۲
۱۵۴	۱۰	+ ص آ ز	+ ص^۲ آ ز

صفحہ (۱۵۵) کی شکل میں اس نقطہ پر جو تقاطع س ک اور رف سے پیدا ہوا ہے حرف ع لکھو اور بجائے رف ز کے رف ر

۱۵۵	۱۷	خط ہ ر کا	خط ہ ر کا
"	۱۸	ک ف ز	ک ف ر
"	—	اور ہ ر عمود	اور ہ ر عمود
۱۵۶	۱۴	خط ر و ص کا	خط و ص ر کا
۱۵۷	۷	برابر ہو گی	برابر ہی ہو گی
"	۱۳	قیمت س ک اور س ک ز	قیمت ص ک اور ص ک ر

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۵۷	۱۶	$س ک = \frac{ط}{ص} \sqrt{ن ن}$	$س ک = \frac{ط ک ک}{ص} \sqrt{ن ن}$
۱۵۸	۱۲	دریافت کرنے نقطہ تقاطع	دریافت کرنے اوتار نقطہ تقاطع
〃	۱۳	قطر ص ف کے ہی	قطر ص ف کے ہر
〃	۱۵	$لا^۲ = \frac{- ط^۲ ص^۲}{ص^۲ + ط^۲ م^۲}$	$لا^۲ = \frac{ط^۲ ص^۲}{ص^۲ - ط^۲ م^۲}$
۱۶۰	۵	اگر ایک قطر ص ع شکل	اگر ایک قطر ص ف شکل
〃	۱۱	قطر متجانس جو کہ	قطر متجانس کا جو کہ
〃	۱۴	$- ص^۲ (جم ر)^۲ ر^۲$	$- ص^۲ (جم ر)^۲ \} ر^۲$
۱۶۱	۴	$- ص^۲ (حم ر)^۲ \} ط^۲$	$- ص^۲ (حم ر)^۲ \} ط^۲$
〃	۸	$- ص^۲ (حم ر)^۲ \} ص^۲$	$- ص^۲ (جم ر)^۲ \} (- ص^۲)$
۱۶۲	۱	$ط^۲ ص^۱$	$ط^۱ ص^۱$
۱۶۳	۱۵	مثلث دس ن - مثلث ف س م	مثلث دص ن - مثلث ف ص م
〃	۱۸	ف س د =	ف ص د ط =
۱۶۴	۲	ہو کی ر ر	ہو کی $ط^۲ ر ر$

تمام فقرہ (۱۸۹) میں بجای ع ف کی ف ف لکھو

۱۶۵	۸	مس ق ف	مس ف ق ف
〃	۱۱	اور کم ہو کا جاویگا	اور کم ہوتا جاویگا
۱۶۶	۱۶	قریب ہی خط	قریب خط
۱۶۷	۱۰	س ف ف	س ف ف
〃	۱۷	جبکہ لا	جبکہ $\frac{لا}{ص}$
۱۶۸	۱۰	$\sqrt{(ص^۲ - ۲ط ص لا^۲ (ص د - ۲ط ی) لا}$	$\sqrt{(ص^۲ - ۲ط ص) لا^۲ + ۲ (ص د - ۲ط ی) لا}$

(۱۶۹) کی صفحہ میں جہاں (۱۶۵) لکھا گیا ہے کہ پچھی جاوین پہلے سطر میں غلط ہی

۱۷۰	۱۰	لا - ۴	= لا - ۴
۱۷۳	۸	مس ر = ب	مس ر =

۱۷۳	۱۶	$\frac{1}{2}$ مس ر + کس ر	$\frac{1}{2}$ مس ر + کس ر
۱۷۴	۱	$\frac{1}{\sqrt{(ا-مس)^2+ب^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{(ا-مس)^2+ب^2}}$
"	۲	$\frac{1}{\sqrt{(ا-مس)^2+ب^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{(ا-مس)^2+ب^2}}$
"	۳	$\frac{ب^2-۴ا^2مس}{\sqrt{(ا-مس)^2+ب^2}}$	$\frac{ب^2-۴ا^2مس}{\sqrt{(ا-مس)^2+ب^2}}$
"	۴	$\frac{ب^2-۴ا^2مس}{\sqrt{(ط-مس)^2+ب^2}}$	$\frac{ب^2-۴ا^2مس}{\sqrt{(ا-مس)^2+ب^2}}$
۱۷۶	۳	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
"	۱۵	- جس ر جس (ک - ر)	- جس ر جم (ک - ر)
۱۷۸	۱۷	قیمت (مس ر)^2 کے	قیمت (مس ر) کی
۱۸۰	۷	دوگنا خط	دوگنا وتر خط
۱۸۳	۱۴	اگر $\frac{ب}{2}$	اگر $\frac{ب}{2}$
"	"	تو مس = $\frac{ب}{2}$	تو مس = $\frac{ب}{2}$
"	۱۶	$\frac{ب}{4}$ ف ق	$\frac{ب}{4}$ ف ق
۱۸۴	۴	ط ر^2	ط ر^2
۱۸۶	۱	فرض کرو کہ = $\frac{ی}{ط ر^2}$ = ن	فرض کرو کہ $\frac{ی}{ط ر^2}$ = ن
۱۸۷	۱۴	محور کلان بیضوی	اگر محور کلان بیضوی

صفحہ (۱۹۱) کی شکل میں جہاں ح کے ر لکھو

۱۹۲	۱۴	مس د	مس ع
۱۹۳	۱	مس د	مس ع
"	۳	مس د^2 =	مس ع^2 =
"	۴	کوکس د کا	کوکس ع کا
"	۶	خط مس د	خط مس ع
۱۹۷	۱۲	د = $\frac{ط}{2ص}$	ر = $\frac{ط}{2ص}$
۱۹۸	۲	+ ص	+ ص^2
۱۹۹	۶	شروع ف ہی	شروع ف پر ہی

صفحہ (۲۰۰) کی شکل میں خط ف ع انجام پر لا اور اس کے انجام پر لا لکھیے۔

۲۰۰	۲	ف ع = لا	ف د = لا
۲۰۱	۴	کھینچا جاوے ثواب	کھینچا جاوے اور عمود اس پر ہو ثواب
۲۰۲	۷	کیونکہ ط = ۱ اور ظ = − ۱	(کیونکہ ط = ۱ اور ظ = − ۱)
۲۰۳	۷	ش ی = ۰	∴ ش ی = ۰
"	۱۷	س ف = $\frac{ن}{۲}$	س ف = $\frac{ن}{۲}$
۲۰۶	۱	اور خط ک ف د	اور خط ک م د
"	۹	فرض کرو کہ زاویہ ا م = لا	فرض کرو کہ ا م = لا
۲۰۸	۱۳	ثواب م = $\frac{۱}{۲}$ ا ی	ثواب ع م = $\frac{۱}{۲}$ ا ی
"	۱۷	زاویہ ی ا ک	زاویہ ی ا ک
"	۱۸	خط بنیادی	وتر اکشی اعظم
۲۰۹	۱۱	تو اگر خط بنیادی	تو اگر وتر اکشی اعظم
"	۱۳	خط اون قریب البیضوی	خط اون کو قریب البیضوی
۲۱۰	۳	خط بنیادی	وتر اکشی اعظم
"	۶	ہم ط کی	ہم ا ک کی
"	۸	ط = ۰	ا = ۰
۲۱۰	۱۶	خطوط مستقیم	خطوط مستقیم

صفحہ (۲۱۴) کے فقرہ (۲۶۸) کی شکل میں لکھو ع بجائے اس کے نقطہ ف کے جو پیدا ہوا ہے تقاطع س ف اور ک ف سے

صفحہ (۲۱۵) کی شکل میں انجام خط ف ک کہ لکھنا چاہیے

۲۱۷	۱۱	نقطہ خط بیضوی پر	نقطہ خط بیضوی پر ہے
۲۱۸	۱	ملاؤ خطوط ب ا اور ب د	ملاؤ خطوط ب ا اور ب ۲
۲۱۹	۲	د تک اور لو	د تک لو
"	۳	اور ب د کو	اور ا د کو
۲۲۰	۴	خط ص ف	خط ص د
۲۲۱	۱۶	ک ا ف	ع ا ف
۲۲۸	۱	قطر س ہوا تقاطع کرتا ہو	قطر ط س ہو تقاطع کرتا ہوا

صفحہ (۲۲۸) کی فقرہ (۲۹۰) کی شکل غلطی سے فقرہ (۲۹۲) میں چھاپی گئی ہے اور اس فقرہ کی شکل فقرہ (۲۹۰) میں طبع ہوئی ہے

۲۳۱	۱۱	سطح وف اور وق	سطح وق اور وق : سطح وف اور وق
۲۳۶	۷	اول دو مقام	اون دو مقام

(۲۳۷) صفحہ کی شکل میں بجای حرف ص کی س لکھو

۲۴۲	۱۱	$(ز+ی)^۲$	$(ز-ی)^۲$

صفحہ (۲۴۳) کی شکل (۲) میں اوس نقطہ پر جو پیدا ہوتا ہے تقاطع کرنے خط بتی اور ردے کو کھنچنا چاہیے

۲۴۲	۲	ط ب ی	$\overline{ط ب}$ ی
"	۳	ط (س+لا) س ص	$\overline{ط}$ (س+لا) : س ص
۲۴۶	۱۰	اور ب س = $\frac{۱}{۲}$ ب ی	اور ب س = $\frac{۱}{۲}$ ب ی
۲۴۸	۱۱	اور یہ اور نام اسکا	اور نام اسکا
۲۴۹	۲	اوس شکل کو ثابت	اسس شکل کو ثابت کیا
"	۳	فرض کرو کہ یہ	فرض کرو یہ

صفحہ (۲۵۰) کی شکل میں ملاؤ ایک خط درمیان نقاط س اور ق کے

۲۵۱	۶	آتا جاویگا	آتی جاویگی
"	۱۰	جبکہ نقاط ز اور ق	جبکہ نقطہ ق
"	۱۱	اور قریب البیضوی سے اسطرح کی جاوین	اور قریب البیضوی پر اسطرح لیجاوی
"	۱۲	سے واقع ہوں	سے واقع ہو
۲۵۳	۱۶	توجبکہ خط س ز	توجبکہ خط س ی

صفحہ (۲۵۴) کی جدول میں بجای ۷ ط ∠ س کے ۷ ط ∠ ص لکھو قیمت لا کی ساتویں خانہ میں س قیمت کرو —

۲۵۸	۴	$لا^۳ + لا^۲ +$	$لا^۳ +$ م $لا^۲ +$
"	۵	$لا^۲ +$ م $لا^۳ +$ ن $لا^۲$	$لا^۲ +$ م $لا^۳ +$ ن $لا^۲ +$ ف لا +
۲۶۵	۱۳	تو قیمت کی	تو قیمت آ کی

صفحہ (۲۶۷) کی شکل (۱) میں حرف ف نہیں لکھا ہے اور یہ اوس جگہ پر لکھنا چاہیے جہاں پر

		نقطہ دار خط سخنی کی کاٹتی ہے خط ت ق کو	عنقطہ
۲۶۷	۹	$ط(ز-ط)^2=(ا-ط)^2(ز+ط)$	$ط(ز-ط)^2=(ا-ط)^2(ا+ط)$
″	۱۴	دریافت کرکس نقطہ کا	دریافت کرو کس نقطہ کا
۲۶۸	۱۳	خط ق ب کو ایک	خط آ ب ایک
۲۶۹	۱۰	سمجھ میں آتا ہے	سمجھ میں نہیں آتا ہے
۲۷۰	۱۲	س ہ اور ہ ق	س ف اور ق ف
۲۷۱	۲	$(ز^2+ا^2+ط^2)$	$(ز^2+ا^2+ط^2)^2$
۲۷۲	۱۶	$ز^2+ع^2ز^2$	$ز^2+ع^2ز^2$

صفحہ (۲۷۶) کی شکل میں بجائے ق کے ف کر دیجیو

۲۷۶	۹	نقطہ ب کی	نقطہ ب پر
″	۱۱	نقطہ س کی یہ ہے	نقطہ س پر یہ ہے
۲۷۹	۵	دریافت نہیں ہو سکتی ہے مثال	بخوبی دریافت نہیں ہو سکتی ہے مگر مثال
″	″	ہندسہ بالجبر سے بخوبی اٹھتا	ہندسہ بالجبر سے بھی کچھ اٹھتا
″	۷	ان اوتار کی خط سخنی کی	ان اوتار خط سخنی کی
″	۸	خط سخنی طرف محور کے	خط سخنی کی طرف محور کی ہے
″	۱۰	چونکہ یہ ہے	چونکہ یہ
۲۸۰	۹	$\frac{(ن+۲)(ن+۳)}{۲}$	$\frac{(ن+۲)(ن+۱)}{۲}$
۲۸۱	۴	بہت طایل ہوگا	بہت طویل ہوگا
″	۱۶	اور ف = س لا، لا،	اور ف = س لا، لا،
۲۸۲	۱	$\frac{ا^2}{ا^2+ب^2}$ لا،	$\frac{ب^2}{ا^2+ب^2}$ لا،
″	۳	بعض نقص	بعض شرایط
″	۴	دو نقطوں سے زیادہ	دو سے زیادہ
″	۱۶	اور ہو سکتے ہیں کیونکر اسی	دو ہو سکتے ہیں ایسی

۲۸۳	۱	لاگر یالڈز	لاگرانژیا لارڈز
"	۲	لوکس ان مرتبہ کا ہوتا ہی	لوکسمان مرتبہ کا نہین ہوتا ہی

صفحہ (۲۸۶) کی شکل مین لکھو بجاے آ کی ر

صفحہ (۲۹۱) کی شکل مین بیضوی سے داہنی طرف ایک حرف ق کا لکھدو مگر یہہ نقطہ خط

و ا پر ہو اور خارج بیضوی پر ہو

۲۹۷	۱۵	$ط ا = + \frac{ط^2 - ص^2}{2}$	$ط ا + \frac{ط^2 - ص^2}{2}$
۳۰۰	۱۰	پہلے دور کرنی	پہلے دور کرکی
"	۱۱	اگر ضرورت پڑی اور ضرب کرو	اگر ضرورت پڑی ضرب کرو
۳۰۲	۱۲	یا ط اور ان م	یا ط اور ان ق
۳۰۶	۱۰	اور ی = ط ا	اور ی = ط ا
۳۱۲	۱۴	جو کہ نقطہ شروع سے	جو کہ نقطہ ع سے
۳۱۴	۱۱	ب ق	ب کر
"	۱۲	تو خط ب ق	تو خط ب کر

صفحہ (۳۱۷) کی شکل (۲) مین لکھو بجاے ع سکے آ اور بجای اسکے ع اور جس جا کہ نصف قطر

وق قطع کرتا ہی اندرونی دایرہ کو اوس جگہ حرف ر کا درج کرنا چاہئے۔

۳۱۹	۲	مذکور پر ہو	مذکور پر ہو
"	۱۴	ہر ایک نقطہ وق	ہر ایک نقطہ وکر
"	۱۵	اسیواسطے وق = وار	وکر = وار
"	"	اور زاویہ وب ق	اور زاویہ وب کر

صفحہ (۳۲۲) کی شکل مین لکھو حرف ق اوس جای پر جہان نقطہ ار خط کھینچا گیا

مرکز ص سے قطع کرتا ہی انڈیوٹ کو

۳۳۱	۴	جو نہی ربع دایرہ مین	نیسرے ربع دایرہ مین
۳۳۵	۱۷	سطح ق ق پر	سطح ق ق ر پر
۳۳۷	۱۶	خط ای پر ہے	خط ع ر پر ہے

لکھو صفحہ (۳۳۸) کی شکل مین حرف ق اوسمقام پر جہان نمود کیا گیا نقطہ اس سے قطع کرتا ہی خط ب ک کو

صفحہ (۳۴۹) کی شکل میں درج کرو حرف ن آ اور س مقام پر جہاں خطوط مس آ اور قن آ ط

		ہیں خط آ ر پر	
۳۴۲	۱۵	— (لا۱ لا۲ + .	— ۲ (لا۱ لا۲
۳۴۳	۱۴	اور ن آل	اور حآل
۳۴۵	۳	خط آل سے یعنی ط = ا کہ	خط ا لا سے یعنی د = ا کر
״	۵	ا د مس ا کر = — ا د مس ع ا ور	ا د مس ا کر = — ا د مس ع ا ور
״	۹	مساوات مستقیم سے	مساوات خط مستقیم سے
״	۱۸	سطح لا آ	سطح لا ع
۳۴۶	۲	سطح لا آ پر	سطح لا ع پر
۳۵۶	۱۸	اپنی مطلب فرض کئے جاویں	اپنی مطلب کے فرض کئے جاویں
۳۵۸	۱۲	فرض کرو کہ نقطہ سطح کا	فرض کرو لفظ سطح کا
۳۵۹	۲	= ۰ جم ک ع	= ۰ جس ک ع
״	۴	+ ج جس کہ ء	+ ء جس ک ء
״	۶	اور چونکہ کر آ ب	اور جو کہ و آ ب
״	۱۵	+ ص ک/ع + ع/ن = ۱	ص ک/ء + ع/ن = ۱
۳۶۰	۶	.... + ج م ک . لا۱ = ف	.... + ع م ک . لا۱ = ف
۳۶۱	۶	— (لا۱ لا۲ +	— ۲ (لا۱ لا۲
۳۶۴	۱۵	متوازی منطبق ہوں	متوازی یا منطبق ہوں
۳۶۶	۵	— (د — ط)	— (د — د)
״	۶	د ص — ا ص	ذ ص — ذ ص
۳۶۹	۱۵	خط ین سے	خط مین ہے
״	۱۷	لون خطوط کا ہی	لون خطوط کی ہر
۳۷۲	۱	+ ع ۲	+ ع ۲
۳۷۶	۱	بنا تا ہی	بنا تا ہی رکھتی ہی
״	۳	کہ محورون کی	کی جو محورون کی

۳۸۰	۱۴	$\frac{ع-۱۵}{ع-ع_۱}$	$\frac{ع-۱۵}{ع-ع_۱}$
۳۸۱	۴	م (۱۵-ل)	س (۱۵-ل)
۳۸۱	۶	ع =	ع =
۳۸۲	۲	اور (۳) سے	اور تین (۳) سے
۳۸۳	۱۴	محورون لا اور ع کی	محورون لا اور ع کے
۳۸۴	۱۰	کرگن	کرگن
۳۸۷	۱۰	کتاب دیکز	کتاب فرینسیر