

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191135

UNIVERSAL
LIBRARY

حساب التفاضل والتكامل

تأليف
شفيق بك منصور
(يكن)

الجزء الأول
في
حساب التفاضل

يوجد عند احمد افسندي العشي والخواجدي يوسف شيت

بالمقاهرة

كتب اخرى للمؤلف

APPLICATION DES MATHEMATIQUES A LA JURISPRUDENCE

(تطبيق الرياضيات على علم القوانين)

تحت الطبع يوافق	{	حساب التفاضل
		مختصر علم الحساب
		مختصر علم الجبر
		مختصر علم الهندسة

حساب التفاضل والتكامل

تأليف

شفيق بك منصور
(يكن)

الجزء الاول

في حساب التفاضل

يوجد عند احد افندي العشى والخواجه يوسف شيت

بالقاهرة

الفرسبخت

صفحة

(٢)

المقدمة

الباب الاول

(٣)

تعريفات أولية

(٥)

المتعلقة المشتقة ومعناها الهندسي

(٧)

التفاضل

(٩)

بعض خواص عامة للمشتقات

الباب الثاني

(١٠)

مشتقات المتعلقات وتفاضلاتها

في مشتقة حاصل الضرب وتفاضله : حاصل ضرب متعلقة في كمية

(١١)

ثابتة

(١١)

مشتقة حاصل ضرب متعلقين

(١٢)

مشتقة حاصل ضرب جملة متعلقات

(١٣)

مشتقة خارج القسمة وتفاضله

(١٣)

مشتقة متعلقة بمتعلقة وتفاضلها

(١٤)

مشتقة المتعلقة المركبة وتفاضلها

الباب الثالث

(١٥)

نهاية $(1 + \frac{1}{x})^x$

(١٨)

تفاضل لوغاريتم

(١٨)

تفاضل جيب

الباب الرابع

(٢٠)

تفاضل المتعلقات الجبرية الظاهرة

(٢٠)

امثلة

(٢١)

تقريبات

(٢١)

تفاضل المتعلقات اللوغاريتمية والاسية

(٢٢)

امثلة

صفحة

(٢٣)

تعارين

(٢٣)

تفاضل المتعلقات الدائرية

(٢٤)

امثلة

(٢٥)

تقرينات

الباب الخامس

(٢٦)

تفاضل المتعلقات المضمرة

المشتقات والتفاضلات ذات المراتب المختلفة لامتعلقات بمتغيرة

(٢٨)

واحدة

(٢٩)

تطبيقات

(٣٢)

قانون لايبنتس

(٣٦)

تقرينات لعمل تفاضل المتعلقات المضمرة

(٣٦)

تقرينات لعمل التفاضلات ذات المراتب المختلفة

(٣٧)

تقرينات لتطبيق قانون لايبنتس

(٣٨)

المشتقات المتتابعة لامتعلقات المضمرة

(٣٩)

تبدل المتغيرة المستقلة

(٤٢)

تقرينات

الباب السادس

(٤٣)

تطبيقات جبرية : نسبة زيادتي متعلقين بمتغيرة واحدة

(٤٦)

المقدار الحقيقي لامتعلقات ذات الصورة :

(٤٧)

امثلة

(٤٨)

تقرينات

(٤٩)

المقدار الحقيقي لامتعلقات ذات الصورة $\frac{\infty}{\infty}$

(٥٠)

امثلة

(٥١)

تقرينات

المقدار الحقيقي لامتعلقات ذات الصورة $\infty \times \infty$ و $\infty \div \infty$

(٥١)

و ∞^{∞} و ∞^{∞} و $\infty - \infty$

الباب السابع

(٥٥)

المتسلسلات

(٥٩)

أمثلة

الباب الثامن

(٦٠)

متسلسلة تيلور

(٦٩)

متسلسلة ماكلوران

(٧١)

متسلسلة بيرنولي

الباب التاسع

(٧١)

تطبيقات على متسلسلة ماكلوران : قانون نيوتن

(٧٤)

نشر المتعلقات الاسمية

(٧٥)

نشر لوغاريتم (١ + س)

(٧٩)

نشر بعض متعلقات دائرية

(٨٢)

تقرينات

الباب العاشر

(٨٢)

العبارات التخيلية

(٨٣)

قانون موافر

بسط جاسر و جتاسر على حسب جيوب مكررات القوس س

(٨٥)

وجيوب مقامها

(٨٨)

حل المعادلة ذات الحدين $\sqrt{\pm} = \pm \sqrt{\pm}$

(٩٠)

معرفة متداري جاسر و جتاسر بواسطة الكمية الاسمية التخيلية

(٩١)

اللوغاريتيمات التخيلية

الباب الحادي عشر

(٩٣)

النهايات الكبرى والصغرى للمتعلقات الظاهرة بمتغيرة واحدة

(٩٦)

تطبيقات

(٩٧)

تقرينات

(٩٨)

النهايات الكبرى والصغرى للمتعلقات المضمر بمتغيرة واحدة

صهيفة

(١٠٠)

تمة الكميات الصغيرة

الباب الثاني عشر

(١٠٣)

تطبيقات هندسية : معادلاتي المماس والعمود عليه

(١٠٦)

تطبيقات

(١٠٧)

في السيكلويد

(١٠٩)

تقرينات

(١١٠)

في التجويف والتخديب

الباب الثالث عشر

(١١٣)

تفاضل قوس منحني مستو

(١١٥)

تماس المنحنيات المستوية

(١١٩)

المنحنيات الالتصاقية

(١١٩)

الدائرة الالتصاقية

(١٢١)

انحناء المنحنيات

الباب الرابع عشر

(١٢٣)

المنتشرات والانتشارات

(١٢٦)

تطبيقات

(١٣٤)

تقرينات

الباب الخامس عشر

(١٣٥)

المنحنيات المرسومة بالنسبة لاحداثات القطبية

(١٣٧)

المماس ونحته وتحت العمود

(١٣٩)

تفاضل قوس منحني

(١٣٩)

مركز الانحناء ونصف قطره

(١٤١)

تطبيقات

(١٤١)

المنحنيات ذات الدرجة الثانية

(١٤٤)

في حلزون ارشميدس

(١٤٦)

في الحلزون الهذلولي

(١٤٦)

في الحلزون الاوغاريتمى

مجموعة

(١٤٩)

تجزيئات

الباب السادس عشر

(١٤٩) في التفاضلات الجزئية والكليّة لامتدادات بعدة متغيرات مستقلة
التفاضلات الجزئية ذات المراتب المختلفة لامتدادات بجملة
مستقلة

(١٥١)

(١٥٥)

(١٥٦)

التفاضلات الكليّة ذات المراتب لامتدادات بجملة مستقلة
المشتقات ذات المراتب المختلفة لامتدادات مضمرة بمقتلة واحدة

الباب السابع عشر

(١٥٧)

(١٦١)

(١٦٢)

في تعميم قانون تيلور
تعميم قانون ماكوران
النهايات الكبرى والصغرى لامتدادات بجملة متغيرات مستقلة

الباب الثامن عشر

(١٦٨)

(١٦٨)

(١٧١)

(١٧٣)

(١٧٣)

(١٧٤)

(١٧٥)

(١٧٦)

(١٧٨)

في النقط المتمازة : نقط التغير

نقط التكرار

نقط الرجوع

النقط المنفردة

نقط الوقوف

النقط المنزوية

تجزيئات

تحليل المتخنيات

تجزيئات

الباب التاسع عشر

(١٧٩)

(١٧٩)

(١٨٢)

(١٨٣)

(١٨٥)

المتخنيات ذات الانحنائين

المماس

المستوى العمودي

تفاضل قوس منحنى

الانحناء

محمدة

(١٨٧)

نطبقات على المنحنى البرعى

الباب العشرون

(١٩٠)

في المستوى المماس للأسطح المنحنية

(١٩٢)

الموشور والاسطوانة المحيطان بسطح منحنى

(١٩٣)

نطبق

الباب الحادى والعشرون

(١٩٥)

المخيمات الفلافية

(١٩٧)

نطبق

(١٩٧)

تقريبات

(١٩٨)

السطوح الفلافية

(١٩٩)

تقريبات

تمت الفهرست

(ج)

صواب	خطا	ساطر	صفحة
X	+	٦	٣٤
X	+	٨	٣٥
X	+	٢٠	٠٠
$(1-u)X$	$(1-u)+$	٢٠	٣٦
$1 \times 2 \times 2$	$1 \times 2 + 2$	٤	٣٧
$1 + 2$	$(-1) \times 2$	٠٠	٠٠
$\frac{6}{3} \text{ ط } 3$	$\frac{6}{3} \text{ ط } 3$	١٤	٤٠
$\frac{6}{3} \text{ ص } 3$	$\frac{6}{3} \text{ ص } 3$	١٧	
$\frac{6}{3} \text{ ط } 3$	$\frac{6}{3} \text{ ط } 3$	١١	٤٢
$\frac{6}{3} \text{ ص } 3$	$\frac{6}{3} \text{ ص } 3$	٤	٤٦
تتعد	تتعد		
$\frac{م(س)}{م(س)}$	$\frac{م(س)}{م(س)}$	٥	٥٠
$\frac{م(س)}{م(س)}$	$\frac{م(س)}{م(س)}$	٨	٠٠
$\frac{1}{س}$	$\frac{1}{س}$	١٨	٥١
$\frac{1}{س}$	$\frac{1}{س}$	١٥	٠٠
$\frac{1}{س}$	$\frac{1}{س}$	٧	٥٦
بمقابلة	بمقابلة	٩	٠٠
الاولى	الاولى	٠٠	٠٠
غائبة	غائبة		
$\frac{ج-ع}{س}$	$\frac{ج-ع}{س}$	٣	٦١
$\frac{1}{س}$	$\frac{1}{س}$	٩	٠٠
$\frac{1}{2 \times 2}$	$\frac{1}{2 + 2}$	١٨	٦٢

صواب	خطا	سطر	صفحة
التي	الذي	٦	٦٣
$\frac{ع}{١٢} م (س)$	$\frac{ع}{١٢} م (س)$	١٠	٦٤
بالتفيرة سة	بالتفيرة	١٦	٥٠
م (س)	م (س)	٥٥	٥٥
ضع جد ولا أى خطا عرضيا قبل السطر الاخير			٥٥
فنتهى	فنتهى	١٤	٦٧
م (٠)	م (س) (٠)	١٣	٦٩
يحكم	أبحكم	١٣	٧٠
ان	ن	١٤	٥٠
الذي	لذى	١٣	٧٥
١ + س	١ × س	١	٧٦
ضع فى أول السطر علامة الضرب ×		١٣	٧٧
جنا ص +	جاص +	٤	٨٤
() ع	()	١٩	٥٠
حاصل	حاصل	٩	٨٤
وهو أى الحد المتوسط	وهو	٣	٨٦
$١ + \frac{ع}{٢}$	$١ - \frac{ع}{٢}$	٨	٨٦
$١ + \frac{ع}{٢}$	$١ - \frac{ع}{٢}$	١٦	٨٦
.....		٨	٨٦
لو - ظ	لو - ظا	٥	٨٧

صواب	خطا	سطر	صفحة
$\bar{\text{د}} = \text{ح} + \text{ء} + \bar{\text{د}}$	$\bar{\text{د}} = \text{ح} + \text{ء} + \bar{\text{د}}$	٢١	٨٨
$\bar{\text{د}}$	نون	٢١	٨٨
الاسمية	الاسمية	٦	٩٠
$\bar{\text{ا}} - \bar{\text{ا}}$	٢	٣	٩١
$\bar{\text{ا}}$	$\bar{\text{ا}}$	١٥	٩١
بسمي	فبسمي	٦	٩٣
معدومة	معدومة	١	٩٤
الفرق	الفرق	١٥	٩٤
(س - س)	(س - س)	٨	١٠٥
المختي	المختي	١٤	١٠٧
الزاوية	الزاوية	١	١٠٨
المعادلة الاولى	المعادلة	١٢	١٠٩
ب و	ب و	٦	١١٠
$\bar{\text{ا}}$	$\bar{\text{ا}}$	٢	١٠٠
$\bar{\text{ا}} - \bar{\text{ا}}$	$\bar{\text{ا}} - \bar{\text{ا}}$	٤	١١٠
$\bar{\text{ا}}$	$\bar{\text{ا}}$	٩	١١٢
$\bar{\text{ا}}$	$\bar{\text{ا}}$	١٤	١١٢
لمختي	لمختي	٢	١١٣
ف و	ف و	٩	١١٣

صواب	خطا	سطر	مصحفة
$\frac{٢}{٢٢}$	$\frac{٢}{٢٢}$	١١	١١٤
ق هـ	ق	١٣	١١٤
$\frac{٢}{٢٢} =$	$\frac{٢}{٢٢} =$	٤١	١١٤
م (م)	م (س)	٥	١١٦
م (س)	م (س)	٢	١١٦
٣!	٢!	٣	١١٦
٢	٣	١٢	١١٦
يكون	يكون	٤	١١٨
جهتي	جهة	١٠	١١٨
بعض معلوم ص	بعض معلوم	٦	١١٩
$\frac{٢}{٢٢}$	$\frac{٢}{٢٢}$	٢٢	١١٩
$\frac{٢}{٢٢}$	$\frac{٢}{٢٢}$	٣	١٢٠
$\frac{٢}{٢٢}$	$\frac{٢}{٢٢}$	٣	١٢٠
$\frac{٢}{٢٢}$	$\frac{٢}{٢٢}$	١١	١٢١
الزاوية	الزاوية	١٣	١٢١
نق	نق	١	١٢٩
ب	ب	١	١٢٩
ب	ب	٢	١٢٩
السابقة	السابقة	٥	١٢٩
ع	ع	١١	١٢٩
ص	ص	٦	١٣٣

(ل)

صواب	خطا	سطر	صفحة
و (حرف عطف)	ف	١١	١٣٤
نق + ف نق	نق + ف نق	١٥	١٣٧
٩٠	٩٥	٥	١٣٨
الوتر	الوتر	٦	١٣٨
١٠٠	١١٦	١٠	١٣٨
٩٠	٩٥	١٢	١٣٩
صه + صه	صه + صه	١٤	١٦٠
× سه	سه	٦	١٦٣
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	٨	١٦٦
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	١٥	١٦٦
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	١٧	١٦٦
$\frac{٢٦}{٦٥}$	$\frac{٢٦}{٦٥}$	٥	١٧٤
سه ٣٠	سه ٣٥		
٠ =	٠ +	٢٠	١٩٠
م ج	م ج	١٢	١٩٦

ن

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله سريع الحساب المتعال عن التفاضل اذ كل ما سواه مفضول غدير
كامل وائس الاله التكامل والصلاة والسلام على سيدنا محمد غير محصاتي
العدد وعلى آله وأصحابه الذين كانوا يعدون المآثر المستمرة على الزيادة
أحسن العدد (وبعد) فان العلوم الرياضية علوم نفيسة ولا شبهة في أن
ينسب اليها معظم التقدم الذي حصل الآن في البلاد الاوروپاوية وخصوصا
منذ اختراع علم التحليل العالي أى حساب التفاضل والتكامل اذ به حسنت
المخانيقة وتحسنت الآلات التي عليها مدار الصنائع وتقدمت العلوم
الفلكية والبحرية والحربية والهندسية العملية فاذا هذا العلم جليل
القدر عظيم الفوائد ولذا ألفت فيه هذا الكتاب مما تلقينه عن أساتذتي
ومن الكتب المعتبرة الاوروپاوية أيضا على أسلوب مختصر مفيد لاسيما
وقد اوردت فيه من الامثلة والتمارين ما هو تسهيل وتقريب للمبتدئين
قاصدا به النفع للوطن اذ كان خدمة لابنائنا وأسأله عز وجل أن يلهمني
الصواب

هذا أول من وضع هذا العلم رجلا كانا متعاصرين في القرن السابع
عشر من الميلاد أحدهما لايتس الألماني (ولد سنة ١٦٤٦ ومات سنة
١٧١٦) والاخر نيوتن الانجليزى (ولد سنة ١٦٤٢ ومات في سنة ١٧٢٧)
وذلك انه لما اخترع ديكرات القرنساوى (ولد في سنة ١٥٩٦ ومات سنة
١٦٥٠) الهندسة الجبرية المعروفة بتطبيق الجبر على الهندسة عظم ميدان
المسائل وتحير العلماء في حل أكثرها كمسائل المماس والنهايات الكبرى
والصغرى وتسطيح الاشكال وغير ذلك فاشتغل بها هذان العالمان حتى صادقا
أصول هذا العلم ثم اجتهد فيه بعدهما الرياضيون الى أن أوصلوه الآن الى
ما أوصلوه من الدرجة العظمى من التقدم وهذا أو ان الشروع في المقصود
وبالله عز وجل الاستعانة

(ملحوظ) كثيرا ما تكون المتغيرة الواحدة متعلقة بجملة مستقلة كسطح

الاسطوانة فانه متعلق بارتفاعها ونصف قطر قاعدتها فالعلاقة

$$ط = م (س د صه) \text{ أو } م (س د صه د ط) = ٠$$

معناها أن ط متعلقة بالمتغيرتين س د و صه وبالجمله اذا كانت ع مثلا متعلقة بثلاث متغيرات أو بما كثير من اياها بالرمز

$$ع = م (س د صه د ط ٠٠٠) \text{ أو } م (س د صه د ط ٠٠٠ ع) = ٠$$

(٤) يقال أن المتعلقة صه مستقرة اذا أخذت عدة مقادير حقيقية معينة وكانت الفروق بينها كميات صغيرة جدا عندما تأخذ المستقلة س د عدة مقادير تكون الفروق بينها كذلك كميات صغيرة جدا

(٥) حينما يقرب مقدار المتغيرة س د من كمية معينة ثابتة د بحيث يصير الفرق بينهما ما صغيرا جدا بقدر ما يراد تسمى الكمية الثابتة د نهاية المتغيرة س د ويكتب بطريق الاختصار $س د =$ مثال ذلك سطح الدائرة فانه نهاية لسطح الشكل المنظم ذي الاضلاع الانتهائية المرسوم داخلها لان الفرق بينهما ما صغير جدا كما هو معلوم في الهندسة العادية

(٦) الكمية الصغرى جدا هي التي نهايتها صفر وينتج من هذا و مما سبق ان كل كمية صغرى تكون متغير غير معينة وتقرّب دائما من الصفر كالفرق بين مساحتي كثير الاضلاع والدائرة المذكور في المطلب السابق

(٧) الكمية العظمى أو الانتهائية هي التي تزداد دائما وتصبحا كبيرا من كل كمية مفروضة ويرمز لها بالعلامة ∞ أو ∞ مثلا لاسم يكبر دائما كلما قربت س د من الزاوية القائمة فاذا صار لانها ثانيا وكذا

$\frac{د}{س د} =$ يصير لانها ثانيا عندما تكون س د مساوية للكمية د ولوضع هذا على وجه جبري يكتب

$$س د طاسه = \infty \quad \text{بفرض } س د = \frac{د}{١}$$

$$و س د طاسه = \infty \quad \text{بفرض } س د = د$$

(١) رمز نايم هذا الحرف د (ط س راييه) الى نسبة محيط الدائرة لقطرها

(ملحوظ) في حالة ما تكون $ص$ في الكمية $\frac{ص}{سم}$ أصغر من $ص$ تكون نهايتها موجبة وفي حالة ما تكون أكبر تكون النهاية سالبة فالانهاية تكون حينئذ موجبة أو سالبة

في المتعلقة المشتقة ومعناها الهندسي

(٨) لنفرض $ص = م(سم)$ متعلقة مستقرة فإذا زادت المستقلة زيادة ما في $سم$ زادت المتعلقة مقابلة لذلك بالمقدار $ف$ في $ص$ وتؤول المعادلة المذكورة إلى

$$ص + ف = م(سم + فسم) \text{ أو } ف = م(سم + فسم) - م(سم) \quad (١)$$

وبقسمة كل من الطرفين على $ف$ يحدث

$$\frac{ف}{ف} = \frac{م(سم + فسم) - م(سم)}{فسم}$$

فإذا فرضنا أن $ف$ يتناقص إلى غير نهاية تقرب النسبة $\frac{ف}{سم}$ من نهاية معينة غالباً سماها الرياضي لاجرانج (٢) مشتقة المتعلقة $ص$ ورمزها هذا المؤلف الشهير بالرمز $ص'$ أو $م'(سم)$ حينئذ يكون

$$ص' = \frac{ف}{فسم} = \frac{م(سم + فسم) - م(سم)}{فسم} \text{ أو } م'(سم)$$

مثلاً لمعرفة مشتقة المتعلقة $ص = سم$ المفروض فيها أن $ص$ كمية موجبة صحيحة نقول إذا زادت المستقلة $سم$ بالمقدار $ف$ زادت المتعلقة $ص$ بالمقدار $ف$ كما تقدم ويحدث

$$ص + ف = م(سم + فسم) \text{ أو } ف = م(سم + فسم) - م(سم)$$

وببسط الكمية ذات الحدين $(سم + فسم)$ على حسب قانون نيوتن نجد

(١) الزيادة $ف$ تسمى أيضاً فاضل المتعلقة $ص$

(٢) ولد سنة ١٦٣٦ ومات سنة ١٨١٣ وهو أحد الفحول انفرنساويين في العلوم الرياضية

$$(١) \quad \text{ف ص} = \text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{ص}^{\frac{1}{3}} + \text{ص}^{\frac{1}{4}} + \dots + \text{ص}^{\frac{1}{n}} + \dots$$

$$+ \text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{ص}^{\frac{1}{3}} + \text{ص}^{\frac{1}{4}} + \dots + \text{ص}^{\frac{1}{n}} + \dots$$

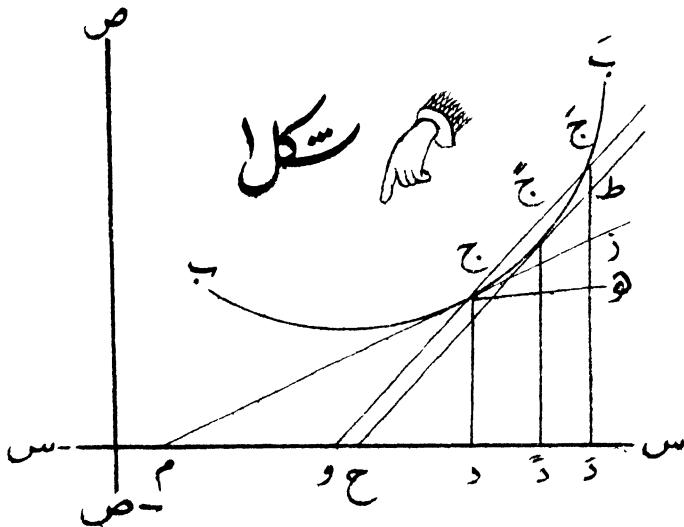
وبقسمة كل من الطرفين على ف ص بعد محو $\text{ص}^{\frac{1}{2}}$ يحدث

$$\frac{\text{ص}}{\text{ف ص}} = \text{ص}^{\frac{1}{3}} + \text{ص}^{\frac{1}{4}} + \dots + \text{ص}^{\frac{1}{n}} + \dots$$

$$\text{ص}^{\frac{1}{3}} + \text{ص}^{\frac{1}{4}} + \dots + \text{ص}^{\frac{1}{n}} + \dots$$

وبالمشاهدة نجد أنه كلما نقص ف ص يقرب الطرف الثاني من الكمية

$\text{ص}^{\frac{1}{2}}$ وعند النهاية يكون $\text{ص}^{\frac{1}{2}} = \text{ص}^{\frac{1}{2}}$ وهي المشتقة المطلوبة



ولنبحث الآن عن المعنى الهندسي للمشتقات فنقول ليكن $\text{ص}^{\frac{1}{2}}$ منحنياً (شكل ١) مبيناً باعادلة $\text{ص} = \text{م}(\text{س})$ ومرسوماً بالتسوية إلى محورين

(١) اعلم بأن في كل ما يأتي العلامة ص ! (بفرض ص عدداً صحيحاً) تدل على حاصل الضرب $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times \text{ص}$

متعامدين $اسه$ و $اصه$ فاذا فرضنا أن $سه = ادو$ و $ص = ج د$
 احداثي (١) النقطة ج الكائنة على المنحنى المذكور وزاد العين اد
 بالمقدار $ف$ $سه$ المساوي $دد$ فالمرتب ج د يصير ج د أو ج د
 $+ ج ه$ أعني $ص + ج ه$ وحينئذ يكون ج ه هو مقدار
 $ف$ $ص$ الذي زاده المرتب $ص$ مقابلة لزيادة $سه$ التي هي $ف$ $سه$ أو
 $دد$ ويرسم قاطع المنحنى ج ج د ومماسه في النقطة ج وهو م ج ز
 ورسم ج ه موازيا لمحور السينات فيجد في المثلث ج ج ه القائم
 الزاوية

$$\frac{ج ه}{ج ه} \text{ أو } \frac{ص}{ص} = \frac{ظا ج ه}{أو طا ج و سه}$$

ومن هنا يتج أن النسبة $\frac{ص}{ص}$ تعادل غالبا ظل المساحي للزاوية
 الحادثة من تلاقى القاطع ج ج د مع محور المعينات فاذا فرضنا أن الزيادة
 $ف$ $سه$ أو $ماساها$ وهو $دد$ يتناقص بالتدرج فيدور القسامع وج ج
 حول النقطة ج ويقرب من المماس ج م وبعبارة أخرى كلما تناقص
 $ف$ $سه$ وقرب من الصفر قربت الزاوية ج د سه من الزاوية ج م سه فاذا تكون
 $سا$ $\frac{ص}{ص}$ أعني المشتقة تساوي ظل المساحي للزاوية التي هي ميل المماس
 على محور المعينات ومن البديهي أن الزاوية ج م سه تتغير بانتقال النقطة
 ج على المنحنى أعني بتغير العين سه فظل هذه الزاوية أعني المشتقة تكون
 متعلقة بالتغيرة سه

في التفاضل

(٩) حيث أن النسبة $\frac{ص}{ص}$ تقرب من النهاية $ص$ يمكن أن يوضع

$$\frac{ص}{ص} = ص + د \text{ أو } ف ص = ص في سه + د في سه$$

(١) قد سمينا الاحداث اد (سه) بالاحداث العين والاحداث ج د
 بالاحداث المرتب (وهما اسماء فاعل)

(و كية تعد مع في سه) فاذا صار في سه صغيرا جدا سمي الحد الاول وهو ص في سه تفاضل المتعلقة ص ويرمز له بالرمز ϵ ص (ونقرأ فا صا) فيكون

ϵ ص = ص في سه أو ϵ ص = م (سه) في سه (١)
وينتج من هذا التعريف أن تفاضل المتغيرة المستقلة سه يساوي الزيادة في سه لانه اذا فرضنا أن ط = سه يكون في ط = في سه أو $\frac{\epsilon}{\text{ط}}$ = ١ ومنها $\frac{\epsilon}{\text{ط}} = ١$ أعني ان مشتقة المتعلقة ط تساوي واحد اذا يكون

ϵ ط أو ϵ سه = ١ × في سه = في سه وهو المطلوب بيانه
فتصير المعادلة (١)

ϵ ص = م (سه) سه ومنها $\frac{\epsilon}{\text{ص}} = م$ (سه) = $\frac{\epsilon}{\text{ط}}$ ص ومعنى المعادلة الاولى هو أن تفاضل أي متعلقة يساوي حاصل ضرب مشتقتها في تفاضل المتغيرة المستقلة ولذا سميت المشتقة المكرر التفاضل ومن الضروري معرفة الفرق بين في ص و ϵ ص أي بين زيادة المتعلقة ص وتفاضلها ولاجل ذلك يقال حيث ان ϵ سه = في سه المساوي د د (سه) و في ص = ج ه وكان في المثلث نرج ه القائم الزاوية

نره = ج ه ط نرج ه = ص ه سه يكون نره = ϵ ص ومن هنا ينتج انه يوجد فرق بين زيادة المتعلقة وتفاضلها وان النسبة بينهما وهي $\frac{\epsilon}{\text{ص}} = ١ + \frac{\epsilon}{\text{ص}}$ تقرب من الواحد ان تناقص في سه الى غير نهاية وكانت المشتقة ص غير صفر

(١٠) اذا كانت المشتقة م (سه) مستمرة بين النهايتين سه وسه + في سه (أعني لكل مقادير سه المحصورة بينهما) تاخذ النسبة $\frac{\epsilon}{\text{ص}}$ صورة الحدية لانه يوجد (سه) مستقيم وهو ج ه ط مواز للقاطع ج ه

ومماس للمعنى في نقطة ج موضوعية بين النقطتين ج و ح ولها المعنى
 ا د المحصور بين ا د و ا د أعني بين س و س + ف س فاذا
 فرضنا أن ا د = س + ف س يأخذ (٥) عددا موجبا
 محصورا بين الصفر والواحد يكون

$$\text{طاج ح د} = \text{م} (\text{س} + \text{ف س})$$

ومن المعلوم ان طاج وس = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ وان $\text{ج ح د} = \text{ج وس}$
 فيكون حينئذ

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{م} (\text{س} + \text{ف س}) \text{ ومنها ف ص} = \text{م} (\text{س} + \text{ف س}) (\text{ف س} + ١)$$

(في بعض خواص عامة للمشتقات)

(١١) القانون (١) السابق يفيدنا بعض خواص مهمة للمشتقات
 (الاولى) اذا فرضت الزيادة ف س موجبة اتحدت علامتا ف ص و
 م (س + ف س) وحيث انه يمكن فرض ف س صغيرا صفرا بحيث لا يتغير
 علامة م (س) حينما تزداد س من س الى س + ف س تكون
 م (س + ف س) أو ف ص متحدة العلامة مع م (س) وينتج
 من هذا انه اذا اخذت المستقلة مقادير تصاعدية تصاعدت أو تنازلات مقادير
 المتعلقة على حسب كون المشتقة موجبة أو سالبة

(الثانية) اذا كانت مشتقة المتعلقة م (س) معدومة مهما فرضت
 س خلت هذه المتعلقة من المتغيرة س وصارت كمية ثابتة برهانها ان
 يقال حيث ان م (س) = ٠ يكون أيضا على موجب ما فرضنا
 م (س + ف س) = ٠ وحينئذ المعادلة (١) تصير ف ص = ٠

ومن المعلوم ان ف ص = م (س + ف س) - م (س) فينتج

$$\text{م} (\text{س} + \text{ف س}) = \text{م} (\text{س})$$

يعنى ان المتعلقة م (س) لا تتغير بتغير س وعليه تكون كمية ثابتة
 وهو المطلوب

(الناثمة) اذا تساوت مشتقتا المتعلقتين م (سه) و م (سه) يكون
فرقهما كمية ثابتة لانه لو وضع

$$صه = م(سه) - م(سه)$$

لكان $صه + ف صه = م(سه + ف سه) - م(سه + ف سه)$
ويحدث من ذلك

$$\frac{ص}{ف} = \frac{م(سه + ف سه) - م(سه + ف سه)}{ف سه} - \frac{م(سه + ف سه) - م(سه + ف سه)}{ف سه}$$

وعند النهاية

$$\frac{ص}{ف} = م(سه) - م(سه)$$

وحيث كان فرضنا م(سه) = م(سه) يكون $\frac{ص}{ف} = ٠$ اعني تكون
ص كمية ثابتة وهو ما اردنا ان نبينه

(١٢) الغرض من حساب التفاضل هو البحث عن مشتقات المتعلقات
وتفاضلاتها وعن تطبيق خواصهما على المسائل الجبرية والهندسية

الباب الثاني

(في مشتقة حاصل الجمع وتفاضله)

(١٣) لتكن ط و د و ح ثلاث متعلقات بالمسئلة سه فاذا اريد
ايجاد مشتقة الحاصل ص من

$$ص = ط - د + ح$$

نقول اذا زادت سه بالمقدار ف سه زادت الكميات الاربعة المذكورة
بالمقادير ف ص و ف ط و ف د و ف ح وينتج

$$ص + ف ص = (ط + ف ط) - (د + ف د) + (ح + ف ح)$$

ويطرح المعادلة الاولى من الثانية طرفا من طرف فيحدث

$$ف ص = ف ط - ف د + ف ح$$

وبقسمة كل من طرفي هذه المعادلة على ف سه يوجد

$$\frac{ص}{سه} = \frac{ط}{سه} - \frac{د}{سه} + \frac{ح}{سه}$$

وياخذ

ويأخذ النهايات يحصل

$$م \frac{ب}{س} = م \frac{ا}{س} - م \frac{ب}{س} + م \frac{ب}{س}$$

$$او \quad \frac{ب}{س} = \frac{ا}{س} - \frac{ب}{س} + \frac{ب}{س}$$

وهي المشتقة المطلوبة

واذا أريد التفاضل يكفي ان نضرب طرفي هذه المعادلة في $س$ فيجاء

$$ب = ا - ب + ب$$

اعني ان مشتقة حاصل جمع متعلقين أو جملة متعلقات تساوي حاصل جمع مشتقات هذه المتعلقات وكذا تفاضله

﴿ في مشتقة حاصل الضرب وتفاضله ﴾

(حاصل ضرب متعلقة في كمية ثابتة)

(١٤) لتكن المعادلة $ص = ح ط$ التي فيها $ح$ كمية ثابتة و $ط$ متعلقة بالمستقلة $س$ فاذا زادت $س$ بالمقدار $ف$ من حدث كما تقدم نظيره

$$ص + ف = ح (ط + ف) = ح ط + ح ف$$

ويحذف المدين المتساويين وهما $ص$ و $ح ط$ فيحدث

$$ف = ح ف \quad \text{ومنه} \quad \frac{ب}{س} = \frac{ب}{س} + ح \frac{ف}{س}$$

ويأخذ النهايتين ينتج $\frac{ب}{س} = \frac{ا}{س} + ح \frac{ب}{س}$ وهي المشتقة المطلوبة

ويضرب كل من الطرفين في $س$ فيجد $ب = ا + ح ب$ وهو التفاضل

وينتج من ذلك أن مشتقة حاصل ضرب متعلقة أو تفاضلهما في $س$ تساوي

يساوي حاصل ضرب مشتقة المتعلقة أو تفاضلهما في المكرر الثابت

(حاصل ضرب متعلقين)

ولعرفة المشتقة لحاصل ضرب متعلقين بالمستقلة $س$ نفرض أن $ص =$

$و ط$ فزيادة $س$ بالمقدار $ف$ من يحدث

$$ص = (و + ف) (ط + ف) = و ط + و ف + ف ط + ف ف$$

$$او \quad \frac{ص}{س} = \frac{و ط}{س} + \frac{و ف}{س} + \frac{ف ط}{س} + \frac{ف ف}{س}$$

وبقسمة كل من الطرفين على $ف$ من نجد

$\frac{ب}{س} = \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} + \frac{ف}{س} \times \frac{ط}{س}$
 وبفرض أن $ف$ سر كية صغيرة جدا يندم الحد الأخير لانه يصير حاصل ضرب
 مشتقة $ط$ في كية صغيرة جدا وهي $ف$ وحينئذ يكون

$$\frac{ب}{س} = \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} + \frac{ط}{س} \times \frac{ط}{س}$$

$$\frac{ب}{س} = \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س}$$

ومنها

اعني ان مشتقة حاصل ضرب متعلقين أو تفاضله يساوي حاصل ضرب
 المتعلقة الاولى في مشتقة الثانية أو تفاضلهما زائد حاصل ضرب الثانية
 في مشتقة الاولى أو تفاضلهما

(حاصل ضرب جملة متعلقات)

وبمثل ما سبق يمكن ايجاد المشتقة لحاصل ضرب جملة متعلقات عددها $ن$
 أو تفاضله فانه اذا فرضنا أن

$$ص = ط + ز + ف + \dots + الخ$$

$$بحدث \quad ف = (ط + ز + ف) (ط + ز + ف) \dots + الخ$$

$$ص = ط + ز + ف + \dots + الخ$$

واذا اجرينا عملية الضرب ورمزنا بالحرف $خ$ لحاصل جمع الحدود المشتقة
 على زيادتين فاكثر من الزيادات $ف$ و $ط$ و $ز$ ثم قسمنا كلا من
 الطرفين على $ف$ سر فنجد

$$\frac{ب}{س} = \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} + \frac{ف}{س} + \frac{ط}{س} \times \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} \times \frac{ط}{س} + \frac{ف}{س} \times \frac{ط}{س} + \dots + \frac{ط}{س} \times \frac{ط}{س}$$

وحيث ان $\frac{ف}{س} = 0$ كما تقدم يكون

$$\frac{ب}{س} = \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} + \frac{ط}{س} \times \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} \times \frac{ط}{س} + \dots + \frac{ط}{س} \times \frac{ط}{س}$$

ومنه

$$\frac{ب}{س} = \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} + \frac{ط}{س} \times \frac{ط}{س} + \frac{ز}{س} \times \frac{ط}{س} + \dots + \frac{ط}{س} \times \frac{ط}{س}$$

أعني ان مشتقة حاصل ضرب متعلقات عددها $ن$ في بعضها أو تفاضله يعادل
 مشتقة الاولى أو تفاضلهما في حاصل ضرب المتعلقات الباقية زائدا مشتقة
 الثانية أو تفاضلهما في حاصل ضرب المتعلقات الباقية زائدا مشتقة الثالثة أو

تفاضلها في حاصل ضرب المتعلقات الباقية وهذا الى المتعلقة المئوية
(في مشتقة خارج القسمة وتفاضله)

(١٥) اذا فرضنا ان $\frac{z}{\tau} = \frac{z}{\tau}$ خارج قسمة المتعلقتين z و τ بالاستقلة
سر يحدث

$$\frac{\tau \frac{z}{\tau} - z \frac{\tau}{\tau}}{\tau (\tau + \tau)} = \frac{z}{\tau} - \frac{z + \tau}{\tau + \tau} = \text{نص}$$

وبقسمة كل من الطرفين على τ نجد

$$\frac{\tau \frac{z}{\tau} - \frac{z}{\tau} \tau}{\tau (\tau + \tau)} = \frac{\tau}{\tau}$$

فاذا فرضنا τ كمية صغيرة جدا انعدمت τ وآت المعادلة الى

$$\frac{\tau \frac{z}{\tau} + \frac{z}{\tau} \tau}{\tau} = \frac{\tau}{\tau}$$

ومنها

$$\frac{\tau \frac{z}{\tau} - z \frac{\tau}{\tau}}{\tau} = \tau$$

اعني ان مشتقة خارج القسمة أو تفاضله يعادل حاصل ضرب مشتقة المقسوم
أو تفاضله في المقسوم عليه ناقصا حاصل ضرب مشتقة المقسوم عليه أو تفاضله
في المقسوم مقسوماً باقيه على مربع المقسوم عليه
(في مشتقة متعلقة بمتعلقة وتفاضلها)

(١٦) اذا فرضنا ان $\tau = \tau$ و $\tau = \tau$ وان τ هي
المتغيرة المستقلة يقال ان τ متعلقة بمتعلقة فلايجاد مشتقتها أو تفاضلها
بالنسبة الى τ يكفي وضع مقدار τ في المعادلة الاولى فنصير $\tau =$
 τ [τ] ثم يجري العمل كما تقدم

وهناك طريقة أخرى وهي ان نفرض أولاً المتطابقة

$$\frac{\tau}{\tau} \times \frac{\tau}{\tau} = \frac{\tau}{\tau}$$

وحيث ان $\tau = \tau$ و $\tau = \tau$ $\tau = \tau$

يكون حينئذ $\tau = \tau$ (١)

فيؤخذ من ههنا ان مشتقة متعلقة بمتعلقة تساوي حاصل ضرب مستقفي المتعلقتين . وهذه اذا عُدت تجري على متعلقة بمتعلقة بمتعلقة الخ .

ومن القانون (١) ينتج $ص = م (ط) م (س)$ وهو التفاضل (في مشتقة المتعلقة المركبة وتفاضلها)

(١٧) اذا كانت طول متعلقتين بالمستقلة $س$ وكانت $ص = م (ط دل)$ يقال ان $ص$ متعلقة مركبة بالمتغيرة $س$ فللتحصيل على مشتقتها نقول اذا زادت $س$ بالمقدار $س$ زادت المتعلقاتان $ط$ و $دل$ مقابلة لذلك كما تقدم ويحدث

$ص = م (ط + ف ط دل + دل) - م (ط دل)$
وبفرض $ل$ كمية ثابتة وأخذم $ط (ط دل)$ رمز المشتقة $م (ط دل)$ اعني $ص$ بالنسبة الى $ط$ يحدث بناء على ما في المطلب ٩

$م (ط + ف ط دل) = م (ط دل) + ف ط [م (ط دل) + دل]$ (١)
 $د$ كمية تنعدم اذا فرضت $ط$ صغيرة جدا وصارت $ط$ وكذلك اذا فرضنا ان الثابتة هي $ط$ ورمزنا بالرمز $م (ط دل)$ المشتقة $م (ط دل)$ بالنسبة الى $ل$ نجد

$م (ط دل + دل) = م (ط دل) + دل [م (ط دل) + دل]$
(د كمية تنعدم اذا صغرت $دل$ وصارت $ط$) وبوضع $ط + ف ط دل$ بدلا عن $ط$ في هذه المعادلة الاخيرة تتغير $د$ وقصير $د$ مثلا ويكون حينئذ

$م (ط + ف ط دل + دل) = م (ط + ف ط دل) + دل [م (ط + ف ط دل) + دل]$
فاذا وضعنا في هذه المعادلة بدلا عن $م (ط + ف ط دل)$ مقدارها في المعادلة (١) ينتج

$ص = ف ط [م (ط دل) + دل] + دل [م (ط + ف ط دل) + دل]$
وبقسمة كل من الطرفين على $ص$ يوجد

$\frac{ص}{ص} = \frac{ط}{ص} [م (ط دل) + دل] + \frac{دل}{ص} [م (ط + ف ط دل) + دل]$

وباخذ النهايات بصير

$$(٢) \quad \frac{ك}{س} = م ط (ط دل) \frac{ك}{س} + م ل (ط دل) \frac{ك}{س}$$

ولو أخذنا عوضا عن م ط و م ل قيمتهما يكون

$$(٣) \quad \frac{ك}{س} = \frac{ك}{ط} \cdot \frac{ك}{س} + \frac{ك}{ل} \cdot \frac{ك}{س}$$

وهي المشتقة

(تنبيه) اعلم أن في هذه المعادلة معنى ل في $\frac{ك}{ل}$ غير معناها في $\frac{ك}{س}$ لأنها في الكمية الأولى تدل على زيادة صغيرة جدا للمتغيرة ل باعتبارها مستقلة وأما في الثانية فتدل على تفاضل ل باعتبارها متعلقة بالمتغيرة س فلا يلزم حينئذ محوهما وكذلك ط

ومن المعادلة (٣) ينتج $\frac{ك}{ط} = \frac{ك}{ل} + \frac{ك}{س}$ وهو التفاضل وإذا كانت $ص = م (ط دل دء ٠٠٠٠)$

فجد أيضا

$$\frac{ك}{س} = \frac{ك}{ط} \cdot \frac{ك}{س} + \frac{ك}{ل} \cdot \frac{ك}{س} + \frac{ك}{ع} \cdot \frac{ك}{س} + \dots$$

ومنها

$$\frac{ك}{ط} = \frac{ك}{ل} + \frac{ك}{س} + \frac{ك}{ع} + \dots$$

اعني ان المشتقة أو تفاضل متعلقة مركبة بجملة متغيرات متعلقة بالمستقلة س يساوي حاصل ضرب مشتقة أو تفاضل المتعلقة الأولى في مشتقة المتعلقة المركبة بالنسبة اليها زائد حاصل ضرب مشتقة أو تفاضل الثانية في مشتقة المتعلقة المركبة بالنسبة اليها وهكذا

الباب الثالث

في نهاية $(١ + \frac{١}{ع})$

(١٨) البحث عن تفاضل لغا س يتعلق (١) بمعرفة نهاية الكمية $(١ + \frac{١}{ع})$

(١) رمزنا بالعلامة لـ اللوغاريتم البرجسي أي الذي أساسه ١٠ وبالعلامة لـ الغالب ياني كما سيأتي

المفروض فيها ان ϵ تزيد الى غير نهاية . ولذلك نفرض ان مقدار ϵ موجب ورمز بالحرف γ لا كبر عدد صحيح مشتمل عليه ϵ وبالحرف δ للكسر الباقي فيكون $\epsilon = \gamma + \delta$ ويكون

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma + \delta} + 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{\gamma + \delta}{\gamma}} + 1\right)$$

واذا بسطنا الكمية ذات الحدين $\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)$ بموجب قانون فيوتون نجد

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \dots + \frac{1}{\gamma^3} \cdot \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma})(1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1} + 1$$

وبضرب الطرف الثاني في γ وقسمته عليه يكون

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \dots + \frac{1}{\gamma^3} \cdot \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma})(1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1} + 1$$

ويتبع من المعادلة $\epsilon = \gamma + \delta$ ان $\frac{\gamma}{\epsilon} = 1 - \frac{\delta}{\epsilon}$ فيقرب $\frac{\gamma}{\epsilon}$ من الواحد كلما زادت كمية δ فاذا فرضنا ان $\frac{\gamma}{\epsilon} = \frac{1}{2}$ ه يحدث

$$\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right) = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} = \dots + \frac{1}{\gamma^3} \cdot \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma})(1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1} + 1$$

وياخذ δ رمز العدد العنوني أعنى الحد الذي قبله حدود عددها δ يكون

$$\frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} = \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1} = \frac{(1 - \frac{\delta}{\gamma}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{\delta}{\gamma})}{1}$$

والحدود التي بعده تكون

$$\frac{(1 + \frac{\delta}{\gamma}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{\delta}{\gamma})}{1} = \frac{(1 + \frac{\delta}{\gamma}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{\delta}{\gamma})}{1} = \frac{(1 + \frac{\delta}{\gamma}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{\delta}{\gamma})}{1}$$

ويترك الكميات السالبة وأخذ الواحد بدلاً عن δ في البسوط وعوضا عن $\frac{1}{\gamma} + 1$ و $\frac{1}{\delta} + 1$ في المقامات العدد الا صغر $\frac{1}{\gamma} + 1$ تكبر الاطراف الثانية أعنى ان

$$\frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} > \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} \quad \text{و} \quad \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} > \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\gamma}}$$

ومنه $\frac{1}{2} > \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $\left[\dots + \frac{1}{2(1+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2(1+\frac{1}{2})} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + 1 \right] \frac{1}{2}$
 بفرض ان عدد الحدود في الطرف الثاني يكون غير نهائي
 وحيث أن السكمة بين القوسين متوالية هندسية أساسها $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ وحاصل جمعها

$$\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{2}} - 1}$$

تؤول المتباينة الأخيرة الى

$$\left(\frac{1}{2} + 1 \right) \frac{1}{2} > \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

واذا رمزنا بالطرف $\frac{1}{2}$ بعدد اصغر من $\frac{1}{2}$ حيث يكون

$$\left(\frac{1}{2} + 1 \right) \frac{1}{2} = \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

نجد

$$\dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \dots + 1 = \left(\frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \dots + 1 = \left(\frac{1}{2} + 1 \right)$$

بفرض دائما ان $\frac{1}{2} > \dots$ فبواسطة هذه المتسلسلة نجد النهاية المسالوبة
 بغاية التقريب وحيث ان الباقي $\frac{1}{2}$ يقرب من الصفر كلما كبر $\frac{1}{2}$ نجد

اذا رمزنا بالهاء العريانية ∞ لهذه النهاية

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \infty$$

بفرض ان المتسلسلة تمتد الى ما لا نهاية . فاذا اقتصر ناعلى العشرة - ١٠
 الاول نجد

$$2,7182818 = \infty$$

ولنفرض الآن ان ∞ عدد سالب مساو الى $-\infty$ فيحدث

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) = \frac{1+\varepsilon}{1} \left(\frac{1}{1+\varepsilon} - 1\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$$

و يجعل $\varepsilon = \infty$ يكون

$$\alpha = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)^{\varepsilon} \quad \text{ومنه أيضا كما تقدم} \quad 1 = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)^{\varepsilon} \quad \text{في تفاضل لوغاريتم (س)}$$

١٩. اذا كان $\nu = \lg \alpha$ يكون

$$\nu = \lg \alpha = \lg (\nu + 1) - \lg \alpha = \lg \left(\frac{\nu + 1}{\alpha}\right)$$

وبقسمة كل من الطرفين على ν يحدث

$$\frac{\nu}{\nu} = \frac{\lg \left(\frac{\nu + 1}{\alpha}\right)}{\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\lg (\nu + 1)}{\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\lg (\nu + 1)}{\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\lg (\nu + 1)}{\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\lg (\nu + 1)}{\nu}$$

واذا فرضنا ان $\varepsilon = \frac{1}{\nu}$ يكون

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)^{\varepsilon} = \frac{1}{\nu}$$

وكما صغر ν كبر ε فبأخذ النهاية يتبع

$$\frac{1}{\nu} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)^{\varepsilon} = \frac{1}{\nu} \quad \text{ومن هنا}$$

واذا كان $\alpha = \lg \alpha$ أساس اللوغاريتم ν اللوغاريتم نيربانيا ساوير منزله بالرمز α

فيكون $\alpha = 1$ وحينئذ نؤول المعادلة السابقة الى

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu} \quad \text{ومن هنا}$$

في تفاضل جيب (س)

٢٠. ليعلم ان خطوط القوس المساحيه ونفس القوس ν منسوبة الى

دائرة نصف قطرها يساوي واحدا ليكن (ش) $\alpha = \nu$ قوس أصغر من

ربع محيط الدائرة فيكون

$$\text{وترج ج} > \text{قوس ج} > \text{ج} > \text{قوس ج} > \text{ج} > \text{قوس ج} > \text{ج}$$

ومن هنا $\alpha > \nu$ (١)

أو

$$\frac{(\text{ح} \frac{١}{٣} \text{سر})}{(\text{ب} \frac{١}{٣} \text{سر})} = \frac{\text{ب} \text{سر}}{\text{ب} \text{سر}} \quad \text{جنا} (\text{سر} + \text{ب} \frac{١}{٣} \text{سر})$$

وحيث ان

$$١ = \frac{\text{ح} \frac{١}{٣} \text{سر}}{\text{ب} \frac{١}{٣} \text{سر}}$$

يكون

$$\frac{٦}{٦} \text{سر} = \text{جنا} \text{سر}$$

ومنه

$$\frac{٦}{٦} \text{سر} = \text{جنا} \text{سر}$$

وهو التفاضل

القواعد السابقة تكفي لإيجاد تفاضل أى متعلقة كانت

الباب الرابع

في تفاضل المتعلقات الجبرية الظاهرة

٢١ . قد علم فيما سبق تفاضل المتعلقة $\text{سر} = \text{سر}$ بفرض ح عددا صحيحا موجبا فاذا اريد معرفته بفرضه عددا حقيقيا اتفق لكنه حقيقى غير تخيلى يؤخذ اللون غاريتم النبر بانى لكل من الطرفين فيوجد

$$\text{لع} \text{سر} = \text{لع} \text{سر}$$

وبأخذ تفاضلى طارفى هذه المعادلة يحدث

$$\frac{٦}{٦} \text{سر} = \frac{٦}{٦} \text{سر} \quad \text{أو} \quad \frac{٦}{٦} \text{سر} = \frac{٦}{٦} \text{سر}$$

وبوضع سر^2 عوضا عن سر ينتج

$$\frac{١}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦} - \frac{١}{٦}$$

وهو التفاضل . فالقاعدة واحدة فى الحالتين . أعنى انه يوجد تفاضل كية مرفوعة لقوة ما ح يضرب فى الاس ح وطرح الواحد من اسمها (فيصير $١ - \text{ح}$) وضرب الحاصل فى تفاضها

أمثلة

$$\frac{١}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦} - \frac{١}{٦} \quad \frac{١}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦} - \frac{١}{٦}$$

مقداري ط و ط في المعادلة (١) بدلا عنهم نجد

وهو المطلوب

$$\text{ل. ط} = \frac{\text{م}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})} \text{ ط}$$

ليكن مثلا

$$\text{ص} = \text{ل. ط} \text{ و } \text{ط} = \text{س} + \text{ط} + \text{س} + \text{س}$$

فنجد

$$\text{ط} = \frac{\text{م}(\text{س})}{\text{س} + \text{ط} + \text{س} + \text{س}}$$

ولايجاد تفاضل متعلقة اسببة نقرض $\text{ص} = \text{س}$ (عدد موجب) ثم تأخذ
لوعاري بقى الطرفين فيحدث

ل. ص = س ل. ط ومنه $\frac{\text{ط}}{\text{ص}} = \text{ل. ط} \text{ ل. ص}$ او $\text{ط} = \text{ل. ص} = \text{ل. ط} \text{ ل. ص}$
وبوضع س عوضا عن ص نجد

وهو المطلوب

$$\text{ل. ص} = \text{س} \text{ ل. ط} = \text{س} \text{ ل. ط}$$

ومن هذا القانون ينتج

$$\text{ل. ط} = \frac{\text{س} \cdot \text{ط}}{\text{س}}$$

فاذا فرضنا ان $\text{ص} = \text{س}$ يكون ل. ط = ل. ص = α (مطلب ١٩) ومنه

$$\alpha = \frac{\text{س} \cdot \text{ط}}{\text{س}}$$

أعني ان مشتقة α تساويها

وبمثل ما ذكر يوجد ان

$$\text{ط} = \text{ل. ط} = \text{ل. ص} = \text{ل. ط}$$

أمثلة

١. ص = ل. ط (١ - س) فنجد $\text{ط} = \frac{(1 - \text{س}) \cdot \text{ط}}{1 - \text{س}}$ فنجد $\text{ط} = \text{ل. ط}$

٢. ص = ل. ط (ل. س) فنضع $\text{ط} = \text{ل. س}$ و $\text{ل} = \text{س}$ فتقول المعادلة الى ص
= $\text{ط} \cdot \text{ل}$ وبمقتضى القانون (٢) من المطالب ١٧ يحدث

$$\text{ط} = \text{ل. ط} = \text{ل. ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط}$$

ومنه $\text{ط} = \text{ل. ط} = \text{ل. ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط}$ (ل. س) (ل. س) (ل. س) (ل. س)

تجربات

$$١. ص = لع (لع س) \quad \text{الجواب} \quad ص = \frac{لع س}{س لع س}$$

$$٢. ص = لع \left[\frac{١}{٣} + س + (١ + س - س^٢) \right] \quad \text{الجواب} \quad ص = \frac{١}{٣} - (١ + س - س^٢)$$

$$٣. ص = لع (س) \quad \text{الجواب} \quad ص = \frac{س}{١ - س} \quad (١ + س) \quad (س) = ص$$

$$٤. ص = لع \frac{١ - س}{١ + س} \quad \text{الجواب} \quad ص = \frac{١ - س}{١ + س} \quad ١ - س = ص$$

في تفاضل المتعلقات الدائرية

٢٣. لتكن ط متعلقة بالمستقلة س فيكون بناء على ما تقدم

$$ط = ج ناط = ج ط$$

وللتحصيل على تفاضل ج ناط نفرض ط = $\frac{٢}{٣}$ - س فينتج

$$ج ناط = ج ناط (١ - س) = ح د$$

ويكون ج ناط = ج ح د = ج ناط = س ج ناط = ج (١ - س)

ومنه ج ناط = ج ح د وهو المطلوب

واذا أريد البحث عن تفاضل ط ناط نفرض ان ص = ط ناط فيكون كما هو معلوم

$$ص = ج = \frac{ج ناط \cdot ج ناط \cdot ج ناط}{ج ناط} = ج ناط$$

$$ج ناط + ج ناط = ج ناط$$

$$ج ناط = ج ناط$$

$$ج ناط$$

وبهذه الطريقة نجد ان ج ناط = ج ناط

وبواسطة قانونين معلومين من حساب المثلثات وهما قاط = $\frac{1}{\text{جنا ط}}$ و قنا ط = $\frac{1}{\text{سا ط}}$ يعلم بالسهولة تفاضل القاطع وقاطع القمام فيكون

$$\text{جنا ط} \cdot \text{قنا ط} = 1 \quad \text{و} \quad \text{جنا ط} \cdot \text{قنا ط} = 1$$

واذا فرضنا ان صر قوس جيبه ط يكتب
صر = قو جنا ط (١)

ومنه ط = حاصر فباخذ التفاضل يحدث $\text{جنا ط} = \text{جنا ص} \cdot \text{جنا ص} \cdot \text{جنا ص}$
ان ط = ج ص يكون كما هو معلوم جنا ص = $1 - \text{ط}^2$ وحينئذ

$$\text{جنا ط} = \frac{\text{جنا ص}}{1 - \text{ط}^2}$$

وهو المطلوب

اما اذا كان صر = قو جنا ط لوجدنا

$$\text{جنا ط} = \frac{\text{جنا ط}}{\text{جنا ط}} = 1$$

وهو التفاضل

واذا كان صر = قو طا ط يكون ط = طا ص ومنه $\text{جنا ط} = \text{جنا ص}$

$$\text{جنا ص} = \frac{1}{1 + \text{طا ص} + 1 + \text{ط}^2}$$

وحيث ان

$$\text{جنا ص} = \frac{\text{جنا ط}}{1 + \text{طا ص} + 1 + \text{ط}^2}$$

وهو المطلوب

ينج

وان كان صر = قو غنا ط لوجد بجعل ما تقدم

$$\text{جنا ط} = \frac{\text{جنا ط}}{1 + \text{طا ص} + 1 + \text{ط}^2}$$

امثلة

$$1 = \text{قو طا ص} = \frac{1}{1 + \text{طا ص} + 1 + \text{ط}^2} = \text{ط ومنه}$$

$$\text{جنا ط} = \frac{\text{جنا ط}}{1 + \text{طا ص} + 1 + \text{ط}^2} \quad \text{و} \quad \text{جنا ط} = \frac{\text{جنا ط}}{1 + \text{طا ص} + 1 + \text{ط}^2}$$

(١) المتعلقات قو جنا و قو طا الخ تسمى دائرية عكسية

$$\frac{6س}{س+۱} = ط \frac{6س}{(س+۱)(س+۱)} \text{ فینثذ بكون } 6ص = \frac{6س}{س+۱}$$

$$۰.۲ ص = فوطا \frac{س}{س-۱} قضع ط = \frac{س}{س-۱} فتنكون$$

$$\frac{6س}{(س-۱)(س-۱)} = 6ص$$

$$\frac{6س}{(س-۱)(س-۱)} = ط \frac{6س}{(س-۱)(س-۱)} \text{ فا ابكون } 6ص = \frac{6س}{س-۱}$$

$$۰.۳ ص = \frac{۱}{س+۱} فنجذ 6ص = \frac{6ظا}{(س+۱)ظا}$$

$$- = \frac{6س}{(س+۱)ظا}$$

$$- = \frac{6س}{(س+۱)ظا}$$

$$- (تمربنات) -$$

$$۰.۱ ص = ط س + \frac{۱}{۳} ط س \text{ الجواب } 6ص = \frac{6س}{۴} \text{ جفا } ۴$$

$$۰.۲ ص = ۴س \text{ جفا } ۴س \text{ الجواب } 6ص = ۴س$$

$$۰.۳ ص = ۴س \text{ الجواب } 6ص = \frac{۱}{۴} ۴س$$

$$۰.۴ ص = ۴س \text{ الجواب } 6ص = \frac{۱}{۴} ۴س$$

$$۰.۵ ص = قوطا \frac{س}{(س-۱)} \text{ الجواب}$$

$$6ص = \frac{۱}{(س-۱)}$$

$$٠٦ \text{ ص} = \frac{٣}{٢} \text{ سر} + \left(\frac{٣}{٢} \text{ جنا سر} + \frac{٢}{٣} \text{ جنا سر} \right) \text{ جاسر} \quad \text{الجواب}$$

$$\frac{٦}{٦} \text{ ص} = \frac{٤}{٤} \text{ جنا سر} \quad \frac{٤}{٦} \text{ سر}$$

$$٠٧ \text{ ص} = \frac{٣}{٢} \text{ سر} \text{ جنا} \left(\frac{٢}{٣} \text{ سر} - \frac{٣}{٢} \right) \quad \text{الجواب}$$

$$\frac{٦}{٦} \text{ ص} = \frac{٢}{٢} \text{ جنا} \left(\frac{٣}{٢} \text{ سر} - \frac{٢}{٣} \right) \quad \text{الجواب}$$

$$٠٨ \text{ ص} = \text{قو طا} \left[\left(\frac{٢}{٢} - \frac{٣}{٢} \right) \frac{١}{٢} \text{ طا} \frac{١}{٢} \right] \quad \text{الجواب}$$

$$\frac{٦}{٦} \text{ ص} = \frac{١}{٢} \times \frac{(٢ - \frac{٣}{٢})}{\frac{٢}{٢} + \frac{٣}{٢}}$$

الباب الخامس

في تناضل المتعلقةات المضمرة

٠٢٤. اتكن ص متعلقة بالمستقلة سر مبنية بالمعادلة

$$٠ = \text{م (سر ص)}$$

فلايجاء المشتقة $\frac{٦}{٦} \text{ ص}$ بدون حل هذه المعادلة نعتبر المتعلقة مركبة ونضع

$$\text{ط} = \text{م (سر ص)} \quad \text{فنجذب بموجب ما قلنا في المطلب ١٧}$$

$$\frac{٦}{٦} \text{ ط} = \frac{٢}{٦} \text{ ص} + \frac{٣}{٦} \text{ ص}$$

وحيث $\text{ط} = ٠$ فيكون أيضا $\frac{٦}{٦} \text{ ط} = ٠$ ويؤل القانون الاخير الى

$$\frac{٢}{٦} \text{ ص} + \frac{٣}{٦} \text{ ص} = ٠$$

ومنه

$$\frac{\frac{٢}{٦} \text{ ص}}{\frac{٢}{٦} \text{ ص} + \frac{٣}{٦} \text{ ص}} = - \quad \text{وهي المشتقة}$$

ومنها

$$\frac{٢}{٦} \text{ ص} = - \frac{\frac{٢}{٦} \text{ ص}}{\frac{٢}{٦} \text{ ص} + \frac{٣}{٦} \text{ ص}} \quad \text{وهو التفاضل}$$

ليكن مثلاً $m (sr \text{ ص}) = sr^2 \text{ ص} - sr \text{ ص} + r$

فنجده $\frac{r}{6 \text{ ص}} = (2 \text{ ص} - \text{ص})$

$\frac{r}{6 \text{ ص}} = (2 \text{ ص} - \text{ص})$ وبموجب القانون (١) يكون

وإذا فرض أن $6 \text{ ص} = \frac{\text{ص} (2 \text{ ص} - \text{ص})}{sr (2 \text{ ص} - \text{ص})}$

$sr \text{ ص} - \text{ص} = 1$

فنجده $\frac{r}{6 \text{ ص}} = \text{ص}$ و $1 - \text{ص} = sr \text{ ص}$ ويحدث

$\frac{\text{ص}}{6 \text{ ص}} = \frac{\text{ص}}{1 - \text{ص}}$

أو $\frac{\text{ص}}{6 \text{ ص}} = \frac{\text{ص}}{1 - \text{ص}}$

وانفرض الآن المتعاقبتين ص و ط بالمتنقلة sr والمعا. لتين

$m (sr \text{ ص} \text{ ط}) =$

$m (sr \text{ ص} \text{ ط}) =$

فلتحصل على المشتقتين $\frac{\text{ص}}{6 \text{ ص}}$ و $\frac{\text{ط}}{6 \text{ ط}}$ نعمل التفاضل فنجد

$\frac{r}{6 \text{ ص}} = \frac{\text{ص}}{6 \text{ ص}} + \frac{\text{ط}}{6 \text{ ص}} + \frac{\text{ط}}{6 \text{ ص}}$

$\frac{r}{6 \text{ ص}} = \frac{\text{ص}}{6 \text{ ص}} + \frac{\text{ط}}{6 \text{ ص}} + \frac{\text{ط}}{6 \text{ ص}}$

ومن هنا يحدث

$\frac{\text{ص}}{6 \text{ ص}} - \frac{\text{ط}}{6 \text{ ص}} - \frac{\text{ط}}{6 \text{ ص}} = \frac{\text{ص}}{6 \text{ ص}}$

$$\frac{2}{6} \text{ م } (س) = \frac{2}{6}$$

ومن هذه المعادلات ينتج

$$\frac{6}{6} \text{ م } (س) = \frac{6}{6} \text{ م } (س) \text{ و } \frac{6}{6} \text{ م } (س) = \frac{6}{6} \text{ م } (س) \text{ و } \frac{6}{6} \text{ م } (س) = \frac{6}{6} \text{ م } (س)$$

$$\dots \text{ و } \frac{2}{6} \text{ م } (س) = \frac{2}{6}$$

وهي المشتقات المتتالية

(نظائرات)

$$١. \text{ يمكن مثلا } \text{م} (س) = \text{س} \text{ فنجد}$$

$$\text{م} (س) = \text{س}$$

$$\text{م} (س) = \text{س} (١ - \text{س})$$

$$\text{م} (س) = \text{س} (١ - \text{س}) (٢ - \text{س})$$

.....

$$\text{م} (س) = \text{س} (١ - \text{س}) (٢ - \text{س}) \dots (١ + ٢ - \text{س})$$

وهي المشتقة الأولى

وإذا فرضنا أن $\text{س} = \text{م} (س)$! أعني أن مقدار هذه

المشتقة كمية ثابتة فتكون المشتقات اللاحقة معدومة

$$٢. \text{ انفرض } \text{م} (س) = \text{ق} \text{ فيكون}$$

$$\text{م} (س) = \text{ق}$$

$$\text{م} (س) = \text{ق}$$

$$\text{م} (س) = \text{ق}$$

م (س) = $\vec{v} \cdot \vec{a}$ وهي المشتقة الزمنية

واذا جاءنا $v = \infty$ يحدث

$$\alpha = (\alpha_i)$$

$$\alpha = m^{\alpha}$$

م (مر) = ۛ

• • • • •

$$\alpha^{\text{سر}} = \text{م}^{\text{ن}} (\text{سر})$$

ومن هنا ينتج ان

$$\binom{2}{s} = \dots - \binom{s}{s} = \binom{s}{s} = \binom{s}{s}$$

أعني ان المتعلقة ^{بـ} ومشتقاتها كلها متساوية

۰۳. ایک ن م (سر) = اھا سر فیحدث

$$\alpha \alpha' = (\alpha \alpha')$$

$$m'' = m - \frac{r}{a} \alpha$$

$$m(r) = \frac{1}{2} \rho(r) r^2$$

م (سر) = ۳! سر لعا α

م (نر) = ۴! نر اعا

.....

$$m^2(r) = \pm (1 - \epsilon) ! \text{ سر لعا } \propto$$

فتاخذ العلامة + اذا كان ج عددا فردا والعلامة - اذا كان زوجا

وإذا اعتبرنا أن الأوغاريتيين نبريانا نجد

$$م (س) = ل ع س$$

$$م (س) = \frac{1}{س}$$

$$م (س) = - \frac{1}{س}$$

$$م (س) = \frac{1}{س}$$

$$م (س) = - \frac{1}{س}$$

.....

$$م (س) = \frac{1}{س} + \frac{1}{س}$$

ونؤخذ العلامة كما سبق

٤. اذا فرضنا ان م (س) = ح س يوجد

$$م (س) = ح س = ح (س + \frac{1}{س})$$

$$م (س) = ح س = ح (س + \frac{1}{س})$$

$$م (س) = - ح س = - ح (س + \frac{1}{س})$$

$$م (س) = ح س = ح (س + \frac{1}{س})$$

.....

$$م (س) = ح س = ح (س + \frac{1}{س})$$

$$م (س) = ح س = ح (س + \frac{1}{س})$$

٥. واذا كان

$$م (س) = - ح س = - ح (س + \frac{1}{س})$$

$$م (س) = - ح س = - ح (س + \frac{1}{س})$$

$$\overset{==}{\text{م}} (\text{س}) = \text{ط} \text{ س} = \text{جنا} \left(\text{س} + \frac{3}{4} \right) \quad \dots\dots\dots$$

$$\overset{ج}{\text{م}} (\text{س}) = \text{جنا} \left(\text{س} + \frac{3}{4} \right)$$

٠٦. لتكن المتعلقة الأسية

$$\overset{\text{سرجنا}}{\text{م}} (\text{س}) = \text{جنا} \left(\text{س} + \frac{3}{4} \right)$$

فوجد

$$\overset{\text{سرجنا}}{\text{م}} (\text{س}) = \alpha \cdot [\text{جنا} (\text{س} + \frac{3}{4}) - \text{جنا} (\text{س} + \frac{3}{4})]$$

$$\overset{\text{سرجنا}}{\alpha} = \text{جنا} (\text{س} + \frac{3}{4})$$

$$\overset{\text{سرجنا}}{\text{م}} (\text{س}) = \alpha \cdot \text{جنا} (\text{س} + \frac{3}{4})$$

$$\overset{\text{سرجنا}}{\text{م}} (\text{س}) = \alpha \cdot \text{جنا} (\text{س} + \frac{3}{4})$$

$$\overset{\text{سرجنا}}{\text{م}} (\text{س}) = \alpha \cdot \text{جنا} (\text{س} + \frac{3}{4}) \quad \dots\dots\dots$$

$$\overset{\text{سرجنا}}{\text{م}} (\text{س}) = \alpha \cdot \text{جنا} (\text{س} + \frac{3}{4})$$

(في قانون لايفنتس)

٠٢٦. فائدة هذا القانون سهولة استخراج التفاضلات المتتابعة المتعاقبة هي

$$+ \frac{(1-2)2 \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)} + \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)}$$

$$+ \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)} + \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)}$$

وبعض الحدود المتشابهة في الطرف الثاني نجد

$$\frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)} = (\text{مط}) + \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)} + \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)}$$

$$+ \cdots + \frac{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)} + \cdots + \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)}$$

$$+ \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)} + \cdots + \frac{1+2-2}{(1+2-2) \cdots (2-2) \cdots (1+2-2)}$$

وهو القانون (١) السابق انما وضع فيه ٢ + ١ عوضا عن ٢
(ملحوظ) اذا قارنا قانون لايبنتس بقانون نيوتون نجد انه يمكن وضع الاول
على الصورة

$$\frac{2}{6} \cdot (\text{مط}) = (6 + \text{مط})$$

بشرط ان نجعل في الطرف الثاني اس ٦ و ٦ ط علامات تفاضلية
ونضرب الحد الاول في ط والاخير في ص .

ولتطبيق هذا القانون نفرض ان م = ص = ح فتأخذ

$$ص = ح و ط = ح$$

وينا على ما تقدم يكون

$$\frac{1-2}{6} = \frac{1-2}{6}$$

$$\frac{1-2}{6} = \frac{1-2}{6}$$

.....

$$\frac{1-2}{6} = \frac{1-2}{6} \cdots \frac{1-2}{6} \cdots \frac{1-2}{6}$$

ويكون

وبفرض $\alpha = 0$ يحدث

$$(1) \quad 0 = \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha} \right)^2 (1-\alpha) + \left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha} \right)^2 \alpha$$

$$1 = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \alpha$$

فاذا لاحظنا ان

وفرضنا في المعادلة (١) على التوالي ان $\alpha = 1, 2, 3, 4, \dots$ الخ لوجدنا ان

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \alpha$$

..... (١ - α) اذا كانت α زوجية

$$\alpha = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \alpha$$

وان اذا كانت α فردية

* (تجربات) *

(١) اعمل تفاضل المتعاقبات المضمرة

$$1 \cdot 1 + \alpha = \alpha + \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\alpha}{1+\alpha} \right) \alpha$$

$$\alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha$$

$$2 \cdot 2 = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha$$

$$\alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha$$

$$3 \cdot 3 = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha + \frac{1+\alpha}{1+\alpha} \alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha + \frac{1+\alpha}{1+\alpha} \alpha$$

$$\alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha$$

(ب) اعمل التفاضلات ذات المراتب المختلفة

$$1 \cdot 1 = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha$$

$$2 \cdot 2 = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha + \frac{1+\alpha}{1+\alpha} \alpha = \alpha + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \alpha + \frac{1+\alpha}{1+\alpha} \alpha$$

٢٠ ص = جناس المطلوب ٦ ص الجواب ٦ ص = ٢ × ٣

جنا (۲ سر + ۱ سر) ۶ سر

$$x^2 = \frac{3}{6} \quad \text{المطلوب} \quad \frac{x+1}{x-1} = 3$$

$$\frac{2}{6} \frac{1x^2 + 3000(1-2)2}{1x2(1-1)}$$

۴. ص = قوتاسر المطلوب $\frac{ص}{قوتاسر}$ فجداولا $\frac{ص}{قوتاسر} = \frac{۱}{۱+سر$ ثم نضرب

س = طما ه فیکون $\frac{6}{6}$ = ه - ط' ه و $\frac{6}{6}$ = ط' ه

ومنهما $\frac{r}{r_1} = \frac{r}{r_2} - \frac{r}{r_3}$ و $\frac{r}{r_1} = \frac{r}{r_2} + \frac{r}{r_3}$!

... وَاخِيراً $\frac{2}{6} = (-1)(1 - \frac{1}{2})! \cdot \frac{2}{6} = (-1)(1 - \frac{1}{2}) \times \frac{2}{6}$

وهو الجواب $\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2)}{(1+2)^2}$ ما (2) فوطنا (س)

(ج) لتطبيق قانون لايفانس

$$١٠١. ص = ص_s (١ - س)$$

الجواب $6^2 = 36$! $(1 - 1)^2$ $\left\{ \frac{2}{1} \right\} - 1$ $\frac{2}{1-1}$

$$r\left(\frac{1}{s-1}\right)^r \left(\frac{(1-s)s}{1}\right) +$$

$$2^r \left(\dots + \left(\frac{r}{r-1} \right)^r \left(\frac{(r-2)(1-2)^2}{1} \right) \right) -$$

٢٠٣. ص = قوطاس المطالب المشتقة ذات المرتبة النونية بفرض $\mathbf{r} = \mathbf{s}$.

الجواب $\left(\frac{1 + \frac{6}{ص}}{1 + \frac{6}{سر}} \right) = (1 - \frac{2}{ص})$! اذا كانت زوجة

و إذا كانت ϕ فردية $\cdot = \left(\frac{1+\phi}{1+\phi} \right)_{\phi}$ $\cdot = \phi$

* (في المشتقات المتتابعة للمتعلقات المضغرة) *

٢٨ لإيجاد المشتقات المتتابعة للمتعلقة ϕ الميمنة بالمعادلة

$$\phi = (\phi \phi) \quad (1)$$

نأخذ المشتقة الأولى فيحدث

$$\cdot = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi}$$

$$\phi = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} \quad (2) \quad \text{او}$$

ومنه يستخرج مقدار ϕ يمكنه يشغل على ϕ و ϕ فاذا أريد أن لا يحتوى
الاعلى ϕ فقط فمما ϕ من المعادلتين (١) و (٢) ونحل المعادلة الناتجة
بالنسبة الى ϕ فينتج المطلوب

ولتحصيل على المشتقة الثانية ϕ نكتب المعادلة (٢) على هذه الصورة

$$\phi = (\phi \phi \phi)$$

فيأخذ المشتقة باعتبار ϕ و ϕ متعلقة بين المتغيرة ϕ يحدث

$$\cdot = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi}$$

$$\phi = \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} + \frac{\phi}{\phi} \quad (3) \quad \text{او}$$

ومن هذه المعادلة يستخرج مقدار ϕ ولأجل أنه لا يحتوى على غير ϕ

فمما ϕ و ϕ من المعادلات (١) و (٢) و (٣) وكذا كرر لسبق العمل

$$\phi = \phi - \phi \quad \text{يمكن مثلا}$$

$$\phi = \phi + \phi \quad \text{فيكون}$$

$$\phi = \phi + \phi$$

$$٣ ص + ص = ٠$$

ومنها

$$ص = - \frac{ص}{٣}$$

$$ص = - \frac{٢}{٣} ص$$

$$ص = - \frac{٣}{٣} \times ٢ = - ٢$$

وبوضع $\frac{٣}{ص}$ عرضا عن ص يحدث

$$ص = - \frac{٣}{٣}$$

$$ص = - \frac{٢}{٣}$$

$$ص = - \frac{٣}{٣} \times ٢ = - ٢$$

وهكذا

* (في دليل المتغيرة المستقلة) *

٠٢٩ قد فرضنا في المطلب ٢٥ ان تفاضل المتغيرة $ص$ وهو $٦ ص$ كمية ثابتة فاذا كانت $ص$ متعلقة بالمتغيرة $ط$ بحيث تكون $ص = م (ط)$ (١) وأريد ايجاد مشتقات $ص$ المتبادلة بالنسبة الى هذه المستقلة الجديدة نضع $م (ط)$ عرضا عن $ص$ في المعادلة $ص = م (ص)$ ثم نجري العمل مثل ما تقدم ويمكن ايجاد المطلوب بغير ما ذكر وهو ان يؤخذ تفاضلات المعادلة الاخيرة باعتبار ان $ص$ متعلقة بـ $ط$ فيحدث

$$\left. \begin{aligned} ٦ ص &= م (ص) \\ ٦ ص &= م (ص) + ٦ ص \\ ٦ ص &= م (ص) + ٦ ص + ٦ ص \end{aligned} \right\} (٢)$$

وبأخذ تفاضلات المعادلة (١) نجد

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (1)$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (2)$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (3)$$

فاذا وضعنا ابدلacen ط و ط ٠٠٠ الخ في المعادلات (٢) ماساواها في المعادلات الاخيرة ثم قسمنا طرفي كل معادلة على ط و ط ٠٠٠ الخ فنجد

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (1)$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (2)$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (3)$$

وبوضع آخر نجد

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (1)$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (2)$$

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م} \quad (3)$$

وهو المطلوب

٣٠ . لتكن $\text{م} = \text{م}$ (سرد ورد ط و ط ٠٠٠) (١)

معادلة تحتوي على س د ط و مشتقاتها المتابعة بالنسبة الى س فاذا اريد تبديل س في هذه المعادلة بتغيره بـ ط حرة طه بالتغيره س بمعادلة

مثل $\text{س} = \text{ط}$ والمشتقات $\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \text{م}$ (٢) بالنسبة الى س بمشتقات

س بالنسبة الى ط يكفي ان نحل المعادلات (٣) بالنسبة الى ط و ط ٠٠٠

د ط ٠٠٠ ثم نضع مقاديرها في المعادلة (١)

ويمكن ايجاد هذه المقادير بواسطة القانون

$$\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ط}$$

لأنه ينتج منه

$$(٤) \quad \frac{(\frac{ص}{ط})}{(\frac{ص}{ط})} = \frac{ص}{ط}$$

فباخذ المشتقة بالنسبة الى ط يكون

$$\frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{(\frac{ص}{ط})^2} = \frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{\frac{ص}{ط}^2}$$

ومنها

$$(٥) \quad \frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{(\frac{ص}{ط})^3} = \frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{\frac{ص}{ط}^3}$$

وباخذ مشتقة هذه المعادلة فنجد

$$\frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{(\frac{ص}{ط})^3} = \frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{(\frac{ص}{ط})^3}$$

$$(٦) \quad \frac{\frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط} - \frac{ص}{ط} \cdot \frac{ص}{ط}}{(\frac{ص}{ط})^4}$$

ولهلم جرا .

لتسكن مثلاً المعادلة

$$(١ - ص) \cdot \frac{ص}{ط} = ص + \frac{ص}{ط}$$

فاذا اردت تحويلها الى معادلة اخرى لا تحتوى الاعلى ص وتغيره جـ ريدة

ط بفرض ان ص = جـ نا ط نقول

$$\frac{ص}{ط} = جـ نا ط \quad \text{و} \quad \frac{ص}{ط} = جـ نا ط$$

فيوضع هذين المقدارين في قانونين (٤) و (٥) فنجد

$$\frac{ص}{ط} = جـ نا ط - \frac{١}{ط}$$

$$\frac{ص}{ط} = جـ نا ط - \frac{١}{ط}$$

فبواسطة هاتين المعادلتين والمعادلة $س = ج + ط$ تول المعادلة المقروضة الى

$$. = ص + \frac{ج^2}{ط} \quad \text{وهو المطلوب}$$

وكذلك اذا كانت

$$. = ص + \frac{ج}{س} + \frac{ج^2}{س^2}$$

و $س = ع + ط$ نجد

$$. = ص + \frac{ج}{ع+ط} + \frac{ج^2}{(ع+ط)^2}$$

٣. واذا اريد اخذ $ص$ متغيرا متقلبا فنجعل $ص = ط$ فنقول لقوانين (٤) د (٥) د (٦) الى

$$(٤) \quad \frac{1}{\frac{ج}{س}} = \frac{س}{ج}$$

$$(٥) \quad \frac{\frac{ج^2}{س^2}}{\left(\frac{ج}{س}\right)^3} = \frac{ج^2}{س}$$

$$(٦) \quad \frac{\frac{ج^2}{س^2} - \frac{ج}{س} + \frac{ج^3}{س^3}}{\left(\frac{ج}{س}\right)^0} = \frac{ج^2}{س}$$

اتمكن مثلا المعادلة

$$. = \frac{ج^2}{س^2} (س - ج) + \frac{ج}{س} \left[\left(\frac{ج}{س}\right)^2 + 1 \right]$$

وانبحث عما تول اليه اذا جعلت $ص$ المتغيرة المستقلة ولذلك نستعمل القانونين (٤) و (٥) فنجد

$$. = \frac{ج^2}{س^2} (س - ج) - \left(\frac{ج}{س}\right)^2 + 1$$

(تجربيات)

١. المقروض $س = ط$ والمطلوب تبديل $س$ بالمتغيرة $ط$ في المعادلة

$$. = ص + \frac{ج}{س} + \frac{ج^2}{س^2}$$

الجواب $\frac{6}{6\tau} + (1 - \tau) \frac{6}{6\tau} + \epsilon = 0$

٢. المفروض $\tau = \alpha + \epsilon$ والمرام تبديل τ بالمغيرة τ في

$$(\tau + \epsilon)^3 \frac{6}{6\tau} + 3(\tau + \epsilon)^2 \frac{6}{6\tau} + (\tau + \epsilon) \frac{6}{6\tau} + \epsilon = 0$$

$$\times \frac{6}{6\tau} + \epsilon = 0$$

الجواب $\frac{6}{6\tau} + \epsilon = 0$

٣. اجعل τ المتغيرة المستقلة في

$$0 = \frac{6}{6\tau} - \tau^3 \left(\frac{6}{6\tau}\right) + \alpha^3 \left(\frac{6}{6\tau}\right)$$

الجواب $\frac{6}{6\tau} - \tau + \alpha^3 = 0$

٤. المفروض $\tau = \alpha + \epsilon$ [$\tau + 1$] $\frac{1}{\tau}$ والمطلوب
تبديل τ الى τ في

$$\tau = \frac{1}{\tau} + \frac{6}{6\tau}$$

الجواب $\frac{6}{6\tau} + \tau = \tau^2 (\alpha + \epsilon)$

الباب السادس

(نظائرات جبرية)

—

نسبة زيادتي متعلقتين

بمتغيرة واحدة

٣٢. لئمكن المتعلاقة $\tau = \alpha + \epsilon$ (τ) متغيرة تصاعدا او تنازلا بين

النهايتين τ و $\tau + \epsilon$ ومن المعلوم ان

$$(1) \quad \tau = \alpha + \epsilon - \tau$$

ثم لئكن τ (τ) متعلقة بالمغيرة τ ولنفرض ان مشتقتها τ (τ)

تكون محدودة مستمرة بين النهايتين τ و $\tau + \epsilon$ فيوجبها

قلناه في المطلب ٩ يكون

$$م (ص + ف ص) - م (ص) = \frac{م (ص + ف ص) (ص)}{ف ص} \quad (٢)$$

فترض أن عدد أحده ورايه الصفر والواحد

فاذا وضعنا م (س) عوضا عن ص في م (ص) ورمزنا بالرمز
هر (س) للمتعلقة س الناتجة من هذا التبديل يحدث

$$م (ص) = هر (س) \quad (٣)$$

وحيث نذكر

$$م (ص + ف ص) = هر (س + ف س)$$

فاذا اخذنا مشتقى طرفي المعادلة (٣) باعتبار ان م (ص) متعلقة

بمتعلقة نجد

$$م (ص) م (س) = هر (س)$$

$$\frac{م (س)}{م} = هر (س)$$

ومنه

وحيث فرضنا ان ص تنفع مع اعداد ازلابين النهايتين س و س +
ف س فاذا زادت منه المتعلقة بالزيادة ف ص المحصورة بين ف ص و ص
تزيد أيضا المتعلقة س بزيادة مثلية ف س محصورة كذلك بين ف س
والصفر (فترض أن $i \leq$) ويحدث

$$م (ص + ف ص) = هر (س + ف س) \quad (٤)$$

وبهو ص من المعادلة (٢) بواسطة (١) و (٣) ر (٤) نجد

$$\frac{م (س + ف س) - هر (س)}{م (س + ف س) - م (س)} = \frac{م (س + ف س) - هر (س)}{م (س + ف س) - م (س)} \quad (٥)$$

ولملاحظ انه يلزم لاجل أن تكون م (ص) مستمرة بين النهايتين ص و ص +

ف س أن تكون المشتقتان هر (س) وم (س) مستمرتين وزيادة على ذلك

انه لا تنعدم اثنائية بين r و $r + f$ وهذا الفرض ممكن دائما اذا
اخذ f صغيرا صغرا كافيا

٣٣. اذا فرضت الكمية المبنية r مقدار لا متغيرة r وفرض ان

$$r = (r) \quad \text{و} \quad m = (r)$$

وجهل لاجل الاختصار $f = r$ و $f = r$ (فاذا تكون

$r < r$) لآلت المعادلة (٥) لي

$$\frac{r}{m} = \frac{r}{m} = \frac{r}{m}$$

فاذا فرض ان $r = (r)$ و $m = (r)$ مع الفرض بان

$r = (r)$ و $m = (r)$ كينان m و r فان m لا تنعدم فانينهما بين
 r و $r + f$ ينتج كما تقدم

$$\frac{r}{m} = \frac{r}{m} = \frac{r}{m}$$

بقرض $r > r$

ومن هذه المعادلة وسابقة يحدث ان

$$\frac{r}{m} = \frac{r}{m} = \frac{r}{m}$$

وعلى ما ذكره ينتج على وجه عام ان

$$(7) \quad \frac{r}{m} = \frac{r}{m} = \frac{r}{m}$$

بشرط أن جميع مشتقات $\frac{r}{m}$ (س) و m (س) المتتابة معاد النونية
تتعد بمجمل $r = 0$ وانما بما فيها النونية تكون مسقرة بين r و r
+ ف r . فاذا فرضنا مثلا ان m (س) = $(r - 0)$ $\frac{r}{m}$ نرى
ان جميع المشتقات معاد النونية تتعد بمجمل $r = 0$ وأن النونية
تكون

$$m \text{ (س)} = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 0$$

فتقول الحالة (٦) الى

$$(٧) \quad \frac{r}{m} = (r + 0) \frac{r}{m} = (r + 0)$$

وبفرض $0 = 0$ يحدث

$$(٨) \quad \frac{r}{m} = (r) \frac{r}{m} = (r)$$

• (في المقدار الحقيقي للمتغيرات ذات الصورة (٦))

٣٤ . المفروض أن الكمية $\frac{r}{m}$ (س) فخذ الصورة $\frac{r}{m}$ اذا جعلنا فيها
 $r = 0$ والمطلوب إيجاد المقدار الذي تقرب منه هذه الكمية حين ما تقرب
 r من 0 أعني إيجاد المقدار المعنى بالمقدار الحقيقي ولذلك نجعل $r = 0$
+ r فنجد بموجب القانون (٦)

$$\frac{r}{m} = \frac{(r + 0)}{(r + 0)}$$

وكما قربت r من 0 صغرت r وعند النهاية يصير

$$\frac{r}{m} = \frac{r}{m}$$

فإذا كانت المشتقتان $\dot{m}$ و $\dot{m}$ (ح) غير معدمتين وغير لانهائيتين

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}} \text{ كان المقدار الحقيقي هو } \dot{m}$$

أما إذا كانت $\dot{m}$ (ح) = 0 و $\dot{m}$ (ح) = 0 لمحدث

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}}$$

وعلى العموم إذا كانت $\dot{m}$ (س) و $\dot{m}$ (س) هما أول مشتقتين لانه مدان
فإن واحد بفرض $\dot{m} = \dot{m}$ يكون

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}}$$

فيكون حينئذ

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}}$$

والمدد الحقيقي يكون صفرا إذا كانت $\dot{m}$ (ح) = 0 ويكون لانهائيا

إذا كانت $\dot{m}$ (ح) = 0

(أمثلة)

١. إذا فرض أن

$$\frac{\dot{m}^2 - \dot{m}^2}{\dot{m} - \dot{m}} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}}$$

يؤول الطرف الثاني إلى 0 بجعل $\dot{m} = \dot{m}$ فإذا أخذنا مشتقة في البسط

والماقام يحدث

$$\frac{\text{م (س)}}{3 \text{ سر}} = \frac{\text{م (س)}}{3 \text{ سر}}$$

$$\frac{\text{م (س)}}{3 \text{ سر}} = \frac{\text{م (س)}}{3 \text{ سر}}$$

ومنه

وهو المطلوب

$$\frac{\alpha - 1}{\text{م (س)}} = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}}$$

٠٢ ليكن

١. افرضنا ان سر = . ياخذ الطرف الثاني الصورة : فنجد

$$1 - \frac{\alpha - 1}{\text{م (س)}} = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}}$$

٠٣ بفرض ان سر = $\frac{2}{3}$ نجد

$$1 = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{2}{3})}{\frac{2}{3} - (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{2}{3})}{\frac{2}{3} - (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})}$$

(تقرينات)

$$1 = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{2}{3})}{\frac{2}{3} - (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{3} - \frac{2}{3})}{\frac{2}{3} - (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}} = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}}$$

$$1 = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}} = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{م (س)}}{\text{م (س)}}$$

$$١ - \text{جاسر} = \frac{8}{9} = \text{بفرض سر} \quad \text{الجواب م} = ٠$$

(في المقدار الحقيقي للمتعلقات ذات الصورة ∞)

٣٥. اذا صارت المتعلقتان سر و م (سر) لانها ثابتين بفرض سر
 $=$ يكون الكسيران الحادان منهما $\frac{1}{\text{سر}}$ و $\frac{1}{\text{م}}$ متعديين
 فيمكن اخذ الكمية

$$\frac{\left[\frac{1}{\text{م}}\right]}{\left[\frac{1}{\text{سر}}\right]} \text{عوضا عن } \frac{\text{سر}}{\text{م}}$$

ثم تطبق عليها قاعدة المتعلقات ذات الصورة $\div$ فنجد

$$\frac{\text{م}}{\text{م}} = \frac{\left[\frac{1}{\text{سر}}\right]}{\left[\frac{1}{\text{سر}}\right]} = \frac{\left[\frac{1}{\text{سر}}\right]}{\left[\frac{1}{\text{سر}}\right]} = \frac{\left[\frac{1}{\text{سر}}\right]}{\left[\frac{1}{\text{سر}}\right]}$$

$$\frac{\text{م}}{\text{م}} = \frac{\text{سر}}{\text{سر}} = \frac{\text{سر}}{\text{سر}}$$

فاذا فرضنا للمقدار الحقيقي المطلوب بالحرف ه المفروض انه غير صفر نقول

$$\text{المعادلة السابقة الى} \quad \text{ه} = \text{ه} \quad \frac{\text{م}}{\text{سر}}$$

$$\text{ومن هنا} \quad \text{ه} = \text{ه} \quad \frac{\text{سر}}{\text{م}}$$

اعني ان المقدار الحقيقي اذا كان غير صفر يساوي نهاية النسبة الكائنة بين
 مشتقي المتعلقتين المفروضتين كما تقدم واذا كان صفرًا يكتب

$$\frac{\text{سر}}{\text{م}} + 1 = \frac{\text{سر} + \text{م}}{\text{م}}$$

وبفرض ان $\text{سر} = ٠$ يشاهد ان مقداره هذا الكسري يكون واحدا
 وان الطرف الثاني باخذ الصورة ∞ فيطبق القاعدة السابقة فنجد ان

$$\frac{\text{سر} + \text{م}}{\text{م}} = 1 = \frac{\text{سر}}{\text{م}} + 1 = \frac{\text{سر} + \text{م}}{\text{م}}$$

$$\text{ومن هنا} \quad \text{ه} = \frac{\text{سر}}{\text{م}}$$

ويؤخذ من هذا ان المقدار الحقيقي اذا كان صفرًا يساوي أيضا نسبة

المشتقتين $\frac{م}{سر}$ و $\frac{م}{سر}$ اما اذا كانت $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$ أى المقدار
الحقيقى لانها ثابتا يكون

فحينئذ كما تقدم $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$

وعليه $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$

ففى كل الحالات يكون $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$ (أمثلة)

١. اذا فرض ان $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$ يكون $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$

فجد $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$

وحيث ان النهاية الاخيرة أول الى $\frac{م}{سر}$ يحدث

$\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$

٢. اذا فرضنا ان $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$ يكون $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$ فجد

$\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر} = \frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$

٣. بفرض ان $\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$ فجد

$\frac{م}{سر} = \frac{م}{سر} = \frac{م}{سر} = \frac{م}{سر}$

فيكون المقدار الحقيقي $\alpha = \frac{1}{s} (1 + s)$ ما

٢. ليكن s وانه فرض $s = 0$. فنجد أولا $\text{لع } s = \text{لع } s$ وحيث ان نهاية هذا اللوغاريتم صفر يكون

$$\text{ما } s = 1$$

٣. ايكن $\left(\frac{1}{s}\right)$ بفرض $s = 0$. نجد أولا $\text{طا } s = \text{لع } s$

او $\frac{\text{طاس}}{[\text{لع } \left(\frac{1}{s}\right)]}$ وباخذ مشتق البسط والمقام يحدث

$$\frac{\frac{1}{s}}{\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{s}\right)}{\left(-\frac{1}{s^2}\right)}$$

فاذا يكون

$$0 = \left(\frac{s}{\text{جنا } s} - \right) \text{ ما}$$

والمقدار الحقيقي المطلوب

$$\text{طا } s = \left(\frac{1}{s}\right) \text{ ما (تمرينان)}$$

١. $s = \infty$ بفرض $s = \infty$ الجواب $m = 1$

٢. $(\alpha - s) = \frac{1}{s + s} = 0$ بفرض $s = \infty$ الجواب

$$\frac{1}{s} - \alpha = m$$

ظا سر ∞
 ٠٣ (ظا سر) $1 =$ بفرض سر $\frac{2}{3} =$ الجواب م $\frac{1}{\infty} =$
 ٠٣٨ اذا كان سر (سر) $\infty =$ و م (سر) $\infty =$ بفرض سر
 سر $=$ ياخذ الفرق سر (سر) $-$ م (سر) الصورة غير المعينة
 $\infty - \infty$ فلايجاد مقدار الحقيقي فنجعل للمتعلقين المذكورين
 مقام مشترك حتى ياخذ الفرق الصورة $\frac{1}{\text{سر}}$ ثم يجري العمل كما تقدم

ليكن مثلاً سر (سر) $= \frac{1}{\text{سر}}$ و م (سر) $= \text{ظنا سر}$ فاذا فرضنا
 سر $= 0$ نجد

سر (سر) $-$ م (سر) $= \frac{1}{\text{سر}} - \text{ظنا سر} = \infty - \infty$
 واذا يكون

$$\frac{\frac{1}{\text{سر}} - \text{ظنا سر}}{\frac{\text{سر}}{\text{جا سر}} - \frac{\text{سر}}{\text{جنا سر}}} =$$

$$\frac{\frac{1}{\text{سر}} - \text{ظنا سر}}{\frac{\text{سر}}{\text{جا سر}} + \frac{\text{سر}}{\text{جنا سر}}} =$$

(تقريرات)

$$٠١ \frac{2 + \text{جنا سر}}{\text{سر}^3 \text{جا سر}} - \frac{3}{\text{سر}} = \infty - \infty = \text{بفرض سر} = 0$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \text{الجواب م}$$

$$٠٢ \frac{\frac{1 - \text{سر}^2}{\text{سر}^2} + \frac{\frac{2}{3}}{(1 - \text{سر}^2) \text{سر}}}{\frac{2}{3}} = \infty - \infty = \text{بفرض سر} =$$

$$\frac{2}{3} = \text{الجواب م}$$

$$٠٣ \frac{1}{\text{سر}} - \text{ظنا سر} = \infty - \infty = \text{بفرض سر} =$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \text{الجواب م}$$

٠٣٩ في بعض الاحيان نسبة مشتقات سر (سر) و م (سر) تكون
 دائماً $\frac{\infty}{\infty}$ بفرض سر $=$ فاذا اريد ايجاد المقدار الحقيقي بواسطة

$$\frac{1}{2} : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : \dots$$

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : \dots$$

ومن المعلوم ان حاصل جمع حدودها الاولى التي عددها ١٠ هو

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

فاذا فرض ان ١٠ اقل من الواحد فان ج يقرب من $\frac{1}{2}$ كلما

ازداد ١٠ واذا كان أكبر منه أو مساويا له فأكبر ج ويصير لانها

٤١ . وانذكر بعض نظريات ناتجة من مقابلة متسلسلة بتولية هندسية
فتقول

(النظرية الاولى) المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تكون غائبة اذا كانت

نسبة أي حد من الحدود اللاحقة نسبة به حدوده لعلوم الى ما قبله أصغر من كمية

مفروضة أقل من الواحد

مثلا في المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

ذات الحدود الموجبة اذا فرض انه من ابتداء الحد العام يكون

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

تكون هذه المتسلسلة غائبة

برهانه ان يقال من المتباينات السابقة ينتج ان

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

وإذا كانت الجذور المذكورة أكبر من u (بقدر $u < 1$) فالمتسلسلة
تتكون من غائبة

(النظرية الثالثة) إذا كانت حدود المتسلسلة الآتية بعد الحد q موجبة
وسالبة على التعاقب وتقص كلما زاد عدد هذه الحدود تكون المتسلسلة
غائبة

$$\text{لنكن المتسلسلة } \dots - q + 1 + q - q + 1 + q - q + 1 + q - \dots$$

فإذا فرض أن

$$\begin{aligned} q &= p \\ 1 + q &= 1 + p - \\ 2 + q &= 2 + p - \end{aligned}$$

يكون

$$\begin{aligned} q + 1 + q + 2 + q + 3 + q + \dots &= (p - 1 + q) + \\ &+ (p - 2 + q) + \dots \\ &= p - (1 + p - 2 + q) - (2 + p - 3 + q) - \dots \\ &\text{وحيث فرضنا } p < 1 + q < 2 + q < 3 + q < \dots \end{aligned}$$

تكون الطروح $(1 + p - 2 + q)$ و $(2 + p - 3 + q)$ الخ
كلها موجبة ومن هذا يتبع أن حاصل جمع المتسلسلة المقروضة كمية موجبة
أصغر من p وحيث أن يكون هذا الحاصل محصوراً بين q و $q + p$
فهى غائبة وهو ما أردنا تبينه

(النظرية الرابعة) إذا تقارقت حدود المتسلسلة

$$q, r, q, r, q, r, \dots$$

من ابتداء الحد الأول فهى تابعة لهذه المتسلسلة (١)

$$q, r, q, r, q, r, \dots$$

لأنه لو وضعنا حاصل جمع حدود المتسلسلة الأولى بهذه الصورة

$$q + (q + r) + (q + r + q) + (q + r + q + r) + \dots$$

(١) اعنى انه اذا كانت احدها غائبة تكون الاخرى غائبة ايضا وبالعكس

٤١. المفروض المتعلقة s وان c عدد صحيح موجب فاذا زادت s المندار c يحدث بقتضى قانون نيوتون

$$s + c = s + s c + \frac{s^2 c}{1} + \frac{s^3 c}{1 \cdot 2} (1 - c) + \dots$$

$$+ \frac{s^4 c}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 - c)(1 - c) + \dots$$

وبالمشاهدة نجد ان s و $c(1 - c)s^2$

هي مشتقات s المتتابعة فيجعل $s = m(s)$ أول المتساوية السابقة الى

$$m(s+c) = m(s) + \frac{c}{1} m(s) + \frac{c^2}{1 \cdot 2} m(s) + \frac{c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} m(s) + \dots + m(s) \quad (1)$$

وحيث ان المشتقات ذات المراتب العالية عن c معدومة فهذه المتسلسلة تنتهي الى الحد ذي المرتبة $c + 1$

وانبرهن على انه مهم افترض المتعلقة $m(s)$ اذا امكن نشر $m(s+c)$ الى متسلسلة غائبة مثل

$$u + u_1 c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \dots \quad (2)$$

مرتبة على حسب القوى الصحيحة الموجبة لا لكمية c تكون هذه المتسلسلة عين المتسلسلة المتجسلة من القانون (١) . فنقول اذا فرضنا ان المتسلسلة (٢) تكون غائبة بالنسبة لجميع مقادير c التي هي اقل

من c يحدث

$$\begin{aligned} r_1 u + r_2 u + \dots + r_n u &= (r_1 + r_2 + \dots + r_n) u \\ (2) \quad \dots\dots\dots + \end{aligned}$$

و باعتبار طرفی هذه المعادلة متعلقین بالكمية x نكرن مشتقاتهما

متساویتین (مادام $e < e$) اُف بکون

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = (e+r) \cdot$$

ويكون ايضا

$$r = (r_1 + r_2 + \dots + r_n) \times \frac{1}{n}$$

وايضاً

$$= \underbrace{v_1 \times r \times r + v_2 \times r \times r + \dots + v_r \times r \times r}_{\text{}} = (v_1 + v_2 + \dots + v_r) r$$

.....

فإذا فرضنا $\epsilon = 0$ في المعادلة (٣) وما يترتب

$$\begin{aligned} \textcircled{\scriptsize\text{م}}(\textcircled{\scriptsize\text{س}}) &= \textcircled{\scriptsize\text{س}}(\textcircled{\scriptsize\text{م}}) = \textcircled{\scriptsize\text{م}}(\textcircled{\scriptsize\text{س}}) = \textcircled{\scriptsize\text{س}}(\textcircled{\scriptsize\text{م}}) \\ &\dots\dots\dots \times = \end{aligned}$$

$$u = u = u = \dots = \frac{1}{r+r}$$

وبوضع هذه المقادير في المعادلة (٣) نجد القانون (١)
 وينتج من هذا ان نشر المتعلقة م (س + ع) الى متسلسلة غايبية مرتبة
 على حسب قوى ع الصحيحة الموجبة يوجد بواسطه القانون المذكور
 المسمى قانون تيلور أو متسلسلاته

٤٣ . حيث انه لا يمكن استعمال متسلسلة تيلور في نشر المتعلقة الا اذا
 كانت غايبية فيلزم البحث عن الباقي من طرح الحدود الاول الذي عددها د
 من المتعلقة م (س + ع)

فانه ان قرب هذا الباقي من الصفر كلما زاد د تكون م (س + ع) غاية
 المتسلسلة فيمكن نشرها وان زاد الباقي كلما زاد د تكن غير غايبية ويصير نشرها
 بواسطه قانون تيلور مستحيلا
 لنرضى بالحرف ب للباقي المذكور فنجد

$$ب = م (س + ع) - م (س) - ع م (س) - \frac{ع^2}{2!} م (س) - \dots$$

$$(٤) \quad \dots - \frac{ع^{س-١}}{(س-١)!} م (س) - \frac{ع^{س-٢}}{(س-٢)!} م (س) - \dots$$

وباعتبار ان طرفي هذه المعادلة معتلقتان بالكمية ع وفرضنا ان سر
 ثابتة فنجد

$$\frac{ع^{س-١}}{(س-١)!} م (س) - \frac{ع^{س-٢}}{(س-٢)!} م (س) - \dots - \frac{ع^{س-١}}{(س-١)!} م (س) - \frac{ع^{س-٢}}{(س-٢)!} م (س) - \dots$$

$$\frac{ع^{س-١}}{(س-١)!} م (س) - \frac{ع^{س-٢}}{(س-٢)!} م (س) - \dots - \frac{ع^{س-١}}{(س-١)!} م (س) - \frac{ع^{س-٢}}{(س-٢)!} م (س) - \dots$$

.....

.....

$$\begin{aligned}
 & \dots + (س) م \frac{(ط-س)^2}{1!} + (س) م \frac{(ط-س)}{1} + (س) م \dots \\
 & \quad + (س) م \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} + \dots
 \end{aligned}$$

الذى ينتج من وضع ط - سر بدلا عن ع ويؤول الى م (ط) اذا فرض
 $س = ط$ فيجد

$$\begin{aligned}
 & م (س) = م (س) + (س) م \frac{(ط-س)}{1} + (س) م \frac{(ط-س)^2}{2!} + \dots \\
 & \quad + (س) م \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} + \dots
 \end{aligned}$$

ويجد ايضا

$$م (ط) = م (ط) (٢)$$

وبأخذ مشتقتى طرفى المعادلة (١) بالنسبة الى سر يكون

$$\begin{aligned}
 & م (س) = م (س) + (س) م \frac{(ط-س)}{1} + (س) م \frac{(ط-س)^2}{2!} + \dots \\
 & \quad + (س) م \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} + \dots \\
 & \quad + (س) م \frac{(ط-س)^{2-2}}{(2-2)!} + \dots \\
 & \quad + (س) م \frac{(ط-س)^{3-2}}{(3-2)!} + \dots
 \end{aligned}$$

وبحذف الحدود المتشابهة نجد

$$م (س) = (س) م \frac{(ط-س)^{1-2}}{(1-2)!} = (س) م (٣)$$

ولنضع ط - سر بدلا عن ع فى القانون المعلوم

$$م (س + ع) = م (س) + ع م (س + ع)$$

نجد

م (ط) = م (س) + م (ط - س) م [س + ط - س] (٤)
 وإذا أخذنا في (٣) س + ط - س بدلا عن س نجد

$$\times \frac{(1-2)^{1-2} (س-ط)}{(1-2)!} = [س + ط - س] م$$

$$م [س + ط - س] م$$

وبوضع هذا المقدار في (٤) وأخذ بدلا عن م (ط) و م (س) ما سواهما
 في (١) و (٢) يحدث

$$م (ط) = م (س) + م \frac{(س-ط)}{1} + م \frac{(س-ط)^2}{1 \cdot 2} + م (س)$$

$$+ \dots + م \frac{(س-ط)^{1-2}}{(1-2)!} + \dots + م (س)$$

$$+ م \frac{(س-ط)^2 (س+ط-س)}{(1-2)!} + \dots + م [س + ط - س] م$$

فإذا وضعت الآن الكمية س محالها المعنى بدلا عن م (ط - س) يكون

$$م (س + ط) = م (س) + م \frac{ط}{1} + م \frac{ط^2}{1 \cdot 2} + م (س)$$

$$+ \dots + م \frac{ط^{1-2}}{(1-2)!} + \dots + م (س)$$

$$+ م \frac{ط^2 (س+ط-س)}{(1-2)!} + \dots + م (س + ط - س) م (١) (١)$$

وهو المطلوب

٤٤ . بواسطة القانونين (١) و (٢) نعرف الحالة التي فيها يمكن بسط
 المتعلقة م (س + ط) الى متسلسلة ثابتة على حسب قانون تيلور لانه

(١) ينسب شكل الباقي هذا الى كونى وهو احد الرياضيين الفرنساويين ولد

سنة ١٧٨٩ ومات سنة ١٨٠٧

إذا قرب أحد الباقيين

$$\frac{e}{1!} (s + e) \quad \text{و} \quad \frac{e}{1!} (1 - e) \quad m^{1-2} (s + e)$$

من الصغر كلما زاد 2 وبفرض مقدار معلوم للكمية e تكون متسلسلة نيولوغائية وتكون $m (s + e)$ هي حاصل جمعها وحينئذ يمكن نشر هذه المتعلقة الى متسلسلة

وما ذكر يكون متسلا إذا بقيت $m (s)$ محدودة بين النهايتين s و s $+$ e كلما زاد 2 لانه اذا رمزنا بالحرف 2 لا كبر عدد صحيح تشتمل عليه e يكون

$$2 \times \dots \times \frac{e}{2+2} \times \frac{e}{1+2} \times \frac{e}{1!} = \frac{e}{1!}$$

وحيث ان كلامنا من العوامل $\frac{e}{1+2}, \frac{e}{2+2}, \dots$ أصغر من الواحد وعددها $2-2$ يكون حاصل ضربهم الأصغر من $(\frac{e}{1+2})^{2-2}$ وحينئذ يكون

$$\left(\frac{e}{1+2} \right)^{2-2} \frac{e}{1!} > \frac{e}{1!}$$

وبما ان $(\frac{e}{1+2})^{2-2}$ بصغر كلما كبر 2 فنحن نرى هذه الكمية بان تصبح صفرا وحينئذ تكون نهايتنا $\frac{e}{1!}$ و $\frac{e}{1!} (s + e)$ صفرا أيضا لان m

$(s + e)$ محدودة بالفرض فيمكن بناء على ذلك نشر $m (s + e)$ الى متسلسلة غائية

(الملاحظ ١)

حتى أريد ببط المتعلقة $m (s + e)$ الى الحد

$$\frac{e}{1!} \frac{1-2}{(s)}$$

يكون الخطأ الناشئ مساويا للباقي

$$\frac{e}{1-2} m (s + e)$$

وحيث ان الكمية e مجهولة يلزم ايجاد المائتين اللتين يفحص بينهما الباقي
الذي كور ولذا يصخرج أكبر مقادير m (س) واصغرها حينئذ تنتقل s
متزايدة من s الى $s + e$ فاذا فرضنا هذين المقدارين بالحرفين $\llcorner$
و $ل$ يحدث

$$\llcorner < m (s + e) < ل$$

فحينئذ يكون

$$\frac{\llcorner e}{1-2} < \frac{e}{1-2} m (s + e) < \frac{ل e}{1-2}$$

أعني ان الخطأ الذي كور يكون أقل من $\frac{\llcorner e}{1-2}$ وأكبر من $\frac{ل e}{1-2}$

(الملاحظ ٢) هما كانت المتعلقة m (س) يمكن دائماً أخذ e صغيرة صفراً
ليكون المقدار المطابق للباقي وهو

$$\frac{e}{1-2} m (s + e) \text{ أصغر من الحد الأخير } \frac{e}{(1-2)!} \times m^{1-2} (s + e)$$

انما يشترط ان لا تنعدم المشقة m^{1-2} (س) بمقدار s المعتبر ويكون
هذا اذا كان عند اعتبار المقادير المطلقة فقط

$$\frac{e}{1-2} m (s + e) > \frac{e}{(1-2)!} m^{1-2} (s)$$

$$\frac{e}{1-2} m (s + e) > m^{1-2} (s)$$

ويفتح هذا الشرط بأخذ e صغيرة صفراً كافياً لان الطرفين الاصلين ينعدم

بفرض $e = 0$

ويمكن ان يلاحظ أيضاً ان نسبة الباقي الى الحد الأخير وهي

$$\frac{m^2 (s + e)}{(1 - s)} \times \frac{e}{s}$$
 نصغره بقدر ما يراد لانها اقرب من الصفر كلما نقص e .
 متسلسلة ما كلوران (١)

٤٥ . اذا فرضنا في القانونين (١) و (١) ان $s = 0$ ووضعنا الحرف s عوضا عن e نجد القانون $m (s) = m (0) + s m' (0) + \frac{s^2}{2!} m'' (0) + \frac{s^3}{3!} m''' (0) + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} m^{(n-1)} (0) + \frac{s^n}{n!} m^{(n)} (0)$ الذي كتب فيه b عوضا عن

$$\frac{s^n}{n!} m^{(n)} (0) \quad \text{أو عن} \quad \frac{s^n (1 - e)}{(1 - s)!} m^{(n)} (e)$$

وفرض فيه ان المتعلقة $m (s)$ ومشتقاتها التي هي قبل النونية لانصير لانها ثابتة بجعل $s = 0$ وان $m (s)$ تكون محدودة مستمرة بين 0 و s فاذا قرب احد m داري الباقي b من الصفر كلما زادت n يكون للمتسلسلة

$$m (0) + s m' (0) + \frac{s^2}{2!} m'' (0) + \frac{s^3}{3!} m''' (0) + \dots$$

الغير منتهية غاية تعادها وهي $m (s)$ اعني

$$m (s) = m (0) + s m' (0) + \frac{s^2}{2!} m'' (0) + \frac{s^3}{3!} m''' (0) + \dots$$

$$+ \dots + (2)$$

وهذا هو قانون ما كلوران او متسلسلته .

٤٦ . اذا صارت المتعلقة $m (s)$ او احدى مشتقاتها لانها ثابتة بفرض $s = 0$ فبسطها الى متسلسلة لاهر تبة على حسب

(١) ولد في الانجلايز سنة ١٦٩٨ ومات سنة ١٧٤٦

القوى الصاعدة الموجبة للمتغيرة s يكون مستحيلا في هذه الحالة يجعل
في متسلسلة تيلور $s = \epsilon$ و $s = \epsilon$ فيحدث

$$m(s) = m(\epsilon) + \frac{m'(\epsilon)}{1} (\epsilon - s) + \frac{m''(\epsilon)}{2!} (\epsilon - s)^2 + \dots + \frac{m^{(n)}(\epsilon)}{n!} (\epsilon - s)^n + \dots$$

والحرف ϵ يبين

$$\frac{m'(\epsilon)}{1!} [\epsilon + (\epsilon - s)] \text{ أو } \frac{m'(\epsilon)}{1!} (1 - \epsilon) \times$$

$$m[\epsilon - (\epsilon - s)]$$

فبواسطة هذا القانون يمكن بسط $m(s)$ على حسب قوى $s - \epsilon$
الصاعدة ولكن يلزم تعيين الثابتة ϵ بحيث أن المتعاقبة $m(s)$ ومشتقاتها
لا تصير لانهاية بفرض $s = \epsilon$

٤٧ إذا شوهد عند اجراء العمل في نشر المتعاقبة $m(s)$ بواسطة قانون
ماكلاوران أن المتسلسلة غائبة وأن الباقي يقرب من الصفر كلما زاد ϵ
ابحكم بامكان نشرها وليكن غائبة المتسلسلة لا يمكن في وحدها في تحقيق
ن حاصل جمع المتسلسلة المذكورة يكون $m(s)$ لأنه يوجد بعض

متعاقبات مثل المتعاقبة $\frac{1}{s^r}$ نصيرها دومة هي وجميع مشتقاتها بفرض
 $s = 0$ فينتج من هذا انه اذا أمكن نشر $m(s)$ الى متسلسلة

غائبة على حسب القانون المذكور فنجد للمتعلقة $m(s) + \frac{1}{s^r}$
متسلسلة عين المتسلسلة السابقة وليكن عوضا عن أن يكون حاصل

جمعها $m(s) + \frac{1}{s^r}$ يكون $m(s)$ فيكون من الضروري حينئذ
لعرفته حاصل جمع متسلسلة غائبة اعتبار الباقي في مثالنا الباقي من نشر

$$م (س) يقرب من الصفر والباقي من نشر المنعقدة م (س) + \frac{1}{س^2}$$

يقرب من $\frac{1}{س^2}$

$$٠٤٨ اذ جعلنا في مقامه س = ١ - س نجد$$

$$م (٠) = م (س) - م (س) + م (س) + \frac{1}{س^2} م (س) +$$

$$\frac{1}{س^3} م (س) - \dots\dots\dots$$

ومنه

$$م (س) = م (٠) + م (س) - م (س) + \frac{1}{س^2} م (س) +$$

$$\frac{1}{س^3} م (س) - \dots\dots\dots$$

وهو قانون بيرنولي (١)

الباب التاسع

(نظريات المتسلسلة ما كاوران)

١٠ قانون نيوتن

$$٠٤٩ يمكن م (س) = (س + ١) الذي فيه عدد كيفما
اتفق فنجد$$

$$م (س) = (س + ١) -$$

$$م (س) = (س + ١) (١ -) -$$

$$م (س) = (س + ١) (٢ -) (١ -) -$$

.....

(١) جاك بيرنولي هو واحد الرياضيين ذوي الابداع في هذا العلم ول سنة ١٦٥٤

بالويسرة ومات سنة ١٧٠٥

$$1 + 2 - r \quad (r+1)(2+2-r) \cdots (2-r)(1-r) r = (r)^{1-2}$$

$$2 - r \quad (r+1)(1+2-r) \cdots (2-r)(1-r) r = (r)^2$$

و بفرض $r = 0$ بكون

$$1 = (0)^r$$

$$r = (0)^r$$

$$(1-r) r = (0)^r$$

$$(2-r)(1-r) r = (0)^r$$

.....

$$(2+2-r) \cdots (2-r)(1-r) r = (0)^{1-2}$$

$$(1+2-r) \cdots (2-r)(1-r) r = (0)^2$$

$$2 - r \quad (1 + 0 + r) \times$$

و بوجوب قانون ما كادران بكون

$$(r+1)^r = 1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} + \cdots$$

$$+ \frac{1-2}{r} \frac{(2+2-r) \cdots (1-r) r}{(1-2)!} + \cdots +$$

مع فرض ان r بيساوى احدى الكميّتين

$$2 - r \quad (1 + 0 + r) \frac{(1+2-r) \cdots (2-r)(1-r) r}{(1-2)!}$$

او

$$2 - r \quad (1-1)^{1-2} \frac{(1+2-r) \cdots (2-r)(1-r) r}{(1-2)!}$$

ويرى بغاية سهولة ان هذا المثل لا يكون غامضة او غير غامضة على حسب

كون مقدار $\frac{1}{r}$ المطلق أصغراً أو أكبر من الواحد مدافنه إذا أخذنا $\frac{1}{r}$ رمزاً
للحد الذي مرتبة $\frac{1}{r}$ نجد

$$\frac{1}{r} = \frac{(1-r)(1-r^2)\dots(1-r^{n-1})}{(1-r^n)} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{(1-r)(1-r^2)\dots(1-r^{n-1})}{(1-r^n)} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

ومن هنا

$$\frac{1}{r} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}$$

وحيث أنه كلما زاد $\frac{1}{r}$ تقرب الكمية $\frac{1}{1-r}$ من الصفر فالنسبة المذكورة

تقرب من $\frac{1}{1-r}$ سر فإذا كانت r محصورة بين 1 و 0 ينتهي المقدار
المطلق لهذه النسبة بأن يصير أصغر من الواحد وتكون المتسلسلة ثنائية

أما إذا كانت r خارجة عن هاتين النهايتين فالنسبة $\frac{1}{1-r}$ تكون

أكبر من الواحد وحيث أن المتسلسلة تكون غير ثنائية

٥. تسهل البرهنة على أن $(1+r)$ هو حاصل جمع المتسلسلة إذا

كانت $r > 1$ لأن الباقي الأول يساوي حاصل ضرب الكميتين

$$\frac{1}{1+r} \times \frac{1-r}{1-r} \times \dots \times \frac{1-r^{n-1}}{1-r^n} = \frac{1-r^n}{1-r^n} = 1$$

وحيث أن العامل الأخير من الكمية الأولى وهو

$$\frac{1-r^n}{1-r} \text{ أو } \frac{1+r}{1-r}$$

يقرب من $\frac{1}{1-r}$ سر كلما كبر n فتكون الكمية المذكورة حينئذ أصغر

من الواحد ويقترب حاصل الضرب الأول من الصفر كلما زاد n ويجعل

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1-r^n}{1-r^n} \text{ وهي المساوية}$$

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1-r^n}{1-r^n} \text{ نرى أن المقدار محصور بين الواحد و } \frac{1}{1+r}$$

اعنى اقل من الواحد اذا كانت s موجبة فاذا يقرب الباقي b من الصفر
كلما زاد s وتكون حينئذ $(1+s)$ حاصل جمع المتسلسلة

واذا كانت s سالبة فلا يمكن الجزم بان الكمية $\frac{1}{(1+s)}$ التي

تؤول الى $\frac{1}{(1-s)}$ بفرض $s = -\epsilon$ لانصير لانها ثابتة وليكن

باعتبار الباقي الثاني نرى ان المقدار

$$\frac{(1-s)(1-s^2)\dots(1-s^{2n})}{(1-s)^{2n}}$$

يقرب من الصفر كلما زاد s وان الكمية

$$\frac{(1-s)^{2n}}{(1-s)^{2n}}$$

تصير منصهرة دائماً بين الصفر والواحد لان $1-s > 1-s^2$ فيقرب

الباقي b من الصفر وينتج مما ذكر ان $(1+s)$ يكون حاصل جمع

المتسلسلة حينئذ نأخذ s اى مقدار من المقادير المحصورة بين 1 و $1+s$

نشر المتعلقات الاسية

٥١. اذا فرض ان $m = (s)$ وان s عدد حقيقيما اتفق موجب نجد

$$m = (s) = s$$

$$m = (s) = s^2$$

$$m = (s) = s^3$$

$$m = (s) = \frac{s^{1-2n}}{1-s}$$

$$m = (s) = \frac{s^{2n}}{1-s}$$

ومن هذا

$$m = (0) = 1$$

$$1- \quad م (س) = لعا \alpha \cdot (1 \times س)$$

$$2- \quad م (س) = لعا \alpha - (س + 1) \cdot$$

$$3- \quad م (س) = لعا \alpha \cdot 2 (س + 1) \cdot$$

$$4- \quad م (س) = لعا \alpha \cdot 3! (س + 1) \cdot$$

$$\vdots \quad م (س) = لعا \alpha \cdot (1-2) + (3+1) \cdot$$

$$\cdot = (0) م$$

ومن هنا

$$\alpha لعا = (0) م$$

$$\alpha لعا - = (0) م$$

$$\alpha لعا \cdot 2 = (0) م$$

$$\vdots \quad م (0) = (1-2) + لعا \alpha \cdot 2$$

$$م (س) = (1-2) + لعا \alpha \cdot (س+1) \cdot 2$$

وحينئذ يصير

$$لعا (س+1) = لعا \alpha \cdot (س - س + \frac{س^2}{2} - \frac{س^3}{6} + \frac{س^4}{24} + \dots + \frac{س}{1-2} + ب) (1) \quad \text{و ب عبارة عن احدى الكميتين}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{س}{س+1} \right) \quad \text{أو} \quad \frac{2(س-1)}{2(س+1)}$$

فاذا كانت س موجبة اقل من الواحد تقرب الكمية $\frac{1}{2} \left(\frac{س}{س+1} \right)$ من الصفر كلما زيد 2 واذا انحصرت بين الصفر و 1 فالباقي الثاني يؤول بعد فرض ان س = ط الى

$$1-2 \quad \frac{ط}{1-ط} \left(\frac{1-ط}{1-ط} \right)$$

وحيث ان $\tau > 1$ فالعامل τ يقرب من الصفر وكذا حيث ان

$$1 - \tau > 0 \quad \tau \text{ تكون الكمية } \left(\frac{1-\tau}{1-\tau\tau} \right)^{1-\tau} \text{ اصغرون}$$

الواحد فينمذ اذا كانت τ محصورة بين 1 و $1 + \tau$ تكون المتسلسلة غائية ويكون حاصل جمعها يساوي لها $(1 + \tau)$ واذا وقعت خارج هاتين النهايتين تكون المتسلسلة غير غائية (مطلب ٤٠ المذال الاول)

٥٣. اذا وضعنا τ بدلا من τ في القانون (١) من المطلب السابق نجد

$$\text{لما } (1 - \tau) = 1 - \tau \propto (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4} + \dots) \text{ وبطرح هذا منه يحدث}$$

$$\text{لما } \frac{1+\tau}{1-\tau} = 1 + \tau \propto (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^4}{4} + \dots)$$

واذا فرض ان $\frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{\tau + \tau}{\tau}$ الذي ينتج منه $\tau = \frac{\tau}{\tau + \tau}$

بول القانون الاخير الى

$$\text{لما } \frac{\tau + \tau}{\tau} = \text{لما } (\tau + \tau) - \text{لما } \tau = \text{لما } \tau$$

$$(\tau) \left[\frac{\tau}{\tau + \tau} + \frac{\tau^2}{(\tau + \tau)^2} + \frac{\tau^3}{(\tau + \tau)^3} + \frac{\tau^4}{(\tau + \tau)^4} + \dots \right]$$

وبفرض ان $\tau = 1$ يكون

$$\text{لما } (1 + \tau) - \text{لما } \tau = \text{لما } \tau = \text{لما } \tau \propto \left[\frac{1}{(\tau + \tau)^2} + \frac{1}{(\tau + \tau)^3} + \dots \right]$$

$$[\dots +$$

فبواسطة هذا القانون يمكن حساب لوغاريمات جميع الاعداد الصحيحة من ابتدا الواحد

ويمكن ايجاد قانون آخر اسهل في الاستعمال وذلك بجعل

$$\frac{1}{1-\tau} = \frac{1+\tau}{1-\tau} \text{ الذي منه } \tau = \frac{1-\tau}{1+\tau}$$

$$\text{وبملاحظة ان } \text{لما } (1 - \tau) = \text{لما } (1 + \tau) +$$

$$\text{لما } (1 - \tau) \text{ فيحدث}$$

$$\text{لما } (1 + \tau) = \text{لما } \tau - \text{لما } (1 - \tau) - \text{لما } \tau$$

وحيث ان مقدار جناة سر المطلق هو دائماً أقل من اواحدا فيقرب الباقي
من الصفر وتكون المسألة

$$\text{جا سر} = \text{سر} - \frac{\text{سر}^3}{3!} + \frac{\text{سر}^5}{5!} - \dots$$

غائية مهمما فرضت سر

٥٦. ايكن م (سر) = جناة سر فيجدت

$$\text{م (سر)} = \text{سر} - \text{جا سر}$$

$$\text{م (سر)} = \text{جناة سر} - \text{جا سر}$$

$$\text{م (سر)} = \text{جا سر}$$

$$\text{م (سر)} = \text{جناة سر}$$

.....

$$\text{م (٠)} = ١$$

ومنه

$$\text{م (٠)} = ٠$$

$$\text{م (٠)} = ١$$

$$\text{م (٠)} = ٠$$

$$\text{م (٠)} = ١$$

.....

وبفرض ٥ عدد از وجيا يصير

$$\text{جناة سر} = ١ - \frac{\text{سر}^2}{2!} + \frac{\text{سر}^4}{4!} - \frac{\text{سر}^6}{6!} + \frac{\text{سر}^8}{8!} - \dots$$

$$\frac{\text{جناة سر}}{٥!} + \frac{\text{جناة سر}}{(٢-٥)!} + \dots$$

ويشاهد كما سبق انه مهمما كانت سر يكون

$$\dots\dots\dots + \frac{6}{16} - \frac{4}{14} + \frac{2}{12} - 1 = \text{س جفا}$$

٥٧. ليكن $\text{س} = \text{فوطا}$ سر قبعد [مطلب^{٢٧} غرين ٢ (ج)] ان

$$\text{اذا كانت } \text{س} \text{ فرضية} \quad \text{س} = \left(\frac{1+\text{س}}{1+\text{س}} \right)$$

$$\text{اذا كانت } \text{س} \text{ زوجية} \quad (1-\text{س}) = \left(\frac{1+\text{س}}{1+\text{س}} \right)$$

فاذا فرضنا على التوالي أن $\text{س} = 0, 1, 2, 4, 6, 8, \dots$ يحدث

$$1 = \left(\frac{1}{\text{س}} \right)$$

$$2 = \left(\frac{2}{\text{س}} \right)$$

$$4 = \left(\frac{4}{\text{س}} \right)$$

$$6 = \left(\frac{6}{\text{س}} \right)$$

.....

واذا فرضنا هذه المبادئ في قانون ما كاوران ولا حظنا ان $\text{م} (0) = \text{فوطا} = 0$ وأن المشتقات ذات المرتبة الزوجية كلها معدومة ينتج

$$\text{فوطا} \text{ س} = \text{س} - \frac{3}{3} + \frac{5}{5} - \frac{7}{7} + \dots\dots\dots$$

شريطة أن $\text{س} < 1$ و $\text{س} > 1$ أو $\text{س} = 1$ لان الباقي (١)

(١) وجدنا هذا الباقي بما قلناه في الفرع الرابع (ب) (مطلب^{٢٧})

وهو $p = \pm \frac{2}{2} \frac{\text{جاء فوظ. امة (س)}}{(1 + \text{امة (س)})^2}$ بقرب من الصفر كلما زاد 2

ويجعل $s = 1$ لمجد

$$\dots\dots\dots \frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{7}{2}$$

وهي صورة قار بفة مناسبة الدائرة الى قطرها

(تقرينات)

٠١ انشر م (س) = جا ' سر ' بموجب قانون ماكلوران

الجواب

$$\text{جا ' سر '} = \frac{1}{r} \left[\frac{r^2 (س^2)}{2!} + \frac{r^4 (س^4)}{4!} + \dots\dots\dots \right] \text{ مهما}$$

كانت s لان الباقي هو

$$p = \dots\dots\dots \frac{1}{r} \frac{r^2 (س^2)}{2!} \text{ جئا (امة س + } \frac{2}{r} \text{)}$$

٠٢ م (س) = (فوحاسر)

الجواب

$$\frac{r^8}{8!} \frac{r^6}{6!} \frac{r^4}{4!} \frac{r^2}{2!} + \frac{r^7}{7!} \frac{r^5}{5!} \frac{r^3}{3!} + \frac{r^6}{6!} \frac{r^4}{4!} \frac{r^2}{2!} + \frac{r^5}{5!} \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} \frac{r}{1} = \text{(فوحاسر)}$$

..... +

٠٣ انشر م (س) = (س + س) بموجب قانون بيرنولي

الجواب

$$\frac{(1-2)2}{r^{12}} - \frac{1-2}{(س + س)} 2 + 2 = 2 (س + س)$$

$$\dots\dots\dots - \frac{r-2}{(س + س)} \times$$

الباب العاشر

في العبارات التفاضلية

٥٨. من المعلوم ان جذور المعادلات ذات الدرجة الثانية تاخذ في بعض الاحيان هذه الصورة $\sqrt{s} + \sqrt{1-s}$ التي فيها s و $1-s$ عدنان قيمتا اتفقا من جهة الايجاب والسالب و $\sqrt{s} - \sqrt{1-s}$ الذي ليس له قيمة معينة يفرض ان مربعه $1 - s$. وكل ما جاء على هذه الصورة يسمى بالعبارة التخييلية

اذا امكن تحويل متعلقة m مثلا الى صورة تخيلية بطريقة تبين مختلفتين بحيث يكون مثلا

$$m = \sqrt{s} + \sqrt{1-s} \text{ و } m = \sqrt{s} - \sqrt{1-s}$$

ينبغي ضرورة ان

$$s = s \text{ و } 1-s = 1-s$$

٥٩. كل عبارة تخيلية $\sqrt{s} + \sqrt{1-s}$ يمكن ان تاخذ الوضع غ (جنا n + (جنا 1 حان)

وهذا يجعل

$$s = \text{غ (جنا } n \text{ و } s = \text{ع (حان$$

لانه ينبغ من هاتين المعادلتين ان

$$e = \sqrt{s} + \sqrt{1-s} \text{ و } e = \sqrt{s} - \sqrt{1-s} \text{ و حان}$$

$$\frac{s}{e} = n \text{ و } \frac{s}{\sqrt{s} + \sqrt{1-s}} =$$

فالكمية e التي هي موجبة دائما تسمى مقياسا للزاوية n تسمى دلالة للعبارة التخييلية

وعادة ياخذ للزاوية n اصغروا موجب من القانون $\frac{s}{e} = n$

(قانون موافر)

اشر حان s و جفا s

٥٠. اذا ضربت جنا سر + $\overline{\gamma - 1}$ جا سر في جنا سر +

$\overline{\gamma - 1}$ جا سر يحدث

جنا سر جنا سر - جا سر جا سر + $\overline{\gamma - 1}$ (جا سر
جا سر + جا سر جنا سر)

وكما هو واضح

جنا (سر + ص) + $\overline{\gamma - 1}$ جا (سر + ص)

فينتج انه يكفي لايجاد حاصل ضرب اربعين تخيلية بين هذه الصورة جنا سر

+ $\overline{\gamma - 1}$ جا سر ان يجمع الدلائل ومنه المضروبين في هـ ذاء عدة
مضارب فان حصل ضرب

(جنا سر + $\overline{\gamma - 1}$ جا سر) (جنا سر + $\overline{\gamma - 1}$ جا سر)

(جنا ط + $\overline{\gamma - 1}$ جا ط)

= جنا (سر + ص + ط + ٠٠٠٠) + $\overline{\gamma - 1}$ جا (سر + ص + ط + ٠٠٠٠)

+ ط + (٠٠٠٠٠٠٠ + ١)

واذا كانت المضارب كلها متساوية وكان عددها ع فيجد

(جنا سر + $\overline{\gamma - 1}$ جا سر) = جنا ع سر + $\overline{\gamma - 1}$ جا ع سر

(٢) $\times$ ط ع سر

وهذا هو المسمى بقانون موافق

واذا وضع فيه $\overline{\gamma - 1}$ عوضا عن $\overline{\gamma - 1}$ يحدث

(جنا سر - $\overline{\gamma - 1}$ جا سر) = جنا ع سر - $\overline{\gamma - 1}$ جا ع سر

ويمكن ايجاد الطرف الثاني من القانون آخذ الصورة اخرى وذلك ببسط الطرف

الاول على منتهى قانون نيوتن فان وجد

(جنا سر + $\overline{\gamma - 1}$ جا سر) = جنا سر - $\overline{\gamma - 1}$ جا سر

+ $\overline{\gamma - 1}$ جا سر ط سر + ...
١٤

$$+ \frac{1 - \gamma}{1 - \epsilon} [\epsilon \text{ جتا } - \text{سر جتا سر}] \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{1}!$$

$$\times \text{ جتا } \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon} \text{سر جتا سر} + \dots (2)$$

فبواسطة (٢) و (٣) وما تقدم في مطالب يكون

$$\text{جناء سر} = \text{جتا سر} - \frac{\epsilon}{1} \frac{(1 - \epsilon) \epsilon^2}{\text{جتا سر جتا سر}} + \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)(3 - \epsilon)}{1}!$$

$$\times \text{ جتا } \frac{\epsilon^4}{1 - \epsilon} \text{سر جتا سر} - \dots$$

$$\text{جا ع سر} = \epsilon \text{ جتا } \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \text{سر جتا سر} - \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{1}!$$

$$\times \text{ جتا } \frac{\epsilon^3}{1 - \epsilon} \text{سر جتا سر} + \dots$$

(بط جتا سر و جتا سر)

على حسب جيوب مكررات القوس سر وجيوب مقاماتها

٦١. لتكن المعادلتان

$$د = \text{جتا سر} + \frac{1 - \gamma}{1 - \epsilon} \text{جا سر و } \epsilon = \text{جتا سر} - \frac{1 - \gamma}{1 - \epsilon} \text{جا سر}$$

التان يحدان

$$\epsilon \text{ جتا سر} = د + \epsilon \text{ و } \frac{1 - \gamma}{1 - \epsilon} \text{جا سر} = د - \epsilon$$

فيكون بموجب قانون نيوتن

$$\epsilon \text{ جتا سر} = (د + \epsilon) = \epsilon + د + \frac{\epsilon}{1} \frac{\epsilon(1 - \epsilon)}{\text{جتا سر جتا سر}} + \dots$$

$$+ \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{1} \epsilon + \dots \text{ و } \epsilon + د + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \text{ و يكون أيضا}$$

$$(1 - \gamma) \text{جا سر} = (د - \epsilon) = د - \epsilon + \frac{\epsilon}{1} \frac{\epsilon(1 - \epsilon)}{\text{جتا سر جتا سر}} + \dots$$

$$- \dots + \frac{\epsilon(1 - \epsilon)(2 - \epsilon)}{1} \epsilon + \dots \text{ و } \epsilon + د + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}$$

فإذا فرضت ϵ عددًا زوجيًا ينتج حده متوسط مجهول $\frac{\epsilon}{r} = \frac{1}{2}$ في الحد العام
 $\epsilon (1-\epsilon) (2-\epsilon) \dots (r-\epsilon) \dots (1+\epsilon-\epsilon) \dots \frac{1}{2}$

$$\text{وهو } \frac{\epsilon (1-\epsilon) (2-\epsilon) \dots (r-\epsilon) \dots (1+\frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{\epsilon}{r}}{\frac{1}{2}}$$

ونضم الحدود ذات الأبعاد المتساوية من الحدين المتطرفين في المعادلتين
 السابقتين فنجد

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \text{ جتا } \epsilon &= \epsilon (1+\epsilon) + \frac{\epsilon}{r} (2-\epsilon) + \frac{\epsilon}{r} (3-\epsilon) + \dots + \frac{\epsilon}{r} (1-\epsilon) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{r} (1-\epsilon) \dots (2-\epsilon) \dots (1+\frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{\epsilon}{r} + \dots + \frac{\epsilon}{r} (1-\epsilon) \dots (2-\epsilon) \dots (1+\frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{\epsilon}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 (1-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon &= \epsilon (1+\epsilon) - \frac{\epsilon}{r} (2-\epsilon) + \frac{\epsilon}{r} (3-\epsilon) - \dots + \frac{\epsilon}{r} (1-\epsilon) \dots (2-\epsilon) \dots (1+\frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{\epsilon}{r} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{r} (1-\epsilon) \dots (2-\epsilon) \dots (1+\frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{\epsilon}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{وحيث ان } r = 1 \text{ و } r = 2 \text{ جتا } \epsilon &= \epsilon (1-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon + \frac{\epsilon}{r} (2-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon \\ &= \epsilon (1-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon + \frac{\epsilon}{r} (2-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon \end{aligned}$$

ϵ^2 جتا ϵ سر تؤول المعادلتان السابقتان بعد القسمة على ϵ الى

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \text{ جتا } \epsilon &= \epsilon (1-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon + \frac{\epsilon}{r} (2-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon + \dots + \frac{\epsilon}{r} (1-\epsilon) \dots (2-\epsilon) \dots (1+\frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{\epsilon}{r} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{r} (1-\epsilon) \dots (2-\epsilon) \dots (1+\frac{\epsilon}{r}) \dots \frac{\epsilon}{r} \end{aligned}$$

$$(1-\epsilon) \frac{\epsilon}{r} \text{ جتا } \epsilon = \epsilon (1-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon - \epsilon (2-\epsilon) \text{ جتا } \epsilon$$

$$+ \frac{e(1-e)}{1!} \text{ جتا } (1-e) - \dots$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{e(1-e)(1-e)(1-e) \dots (1+\frac{e}{r})}{1! \frac{e}{r}}$$

أما إذا فرضت e عددا فرديا يكون عدد الحدود زوجيا ونجد الحدين
المتوسطين $\frac{1-e}{r} = 2$ و $\frac{1+e}{r} = 2$ في الحد العاشر وإذا

ضمت الحدود ذات الأبعاد المتساوية من الحدين المتطرفين ولو-ظان

$$(1-e) = \frac{e}{1-\frac{1-e}{r}} \quad (1-e) = \frac{1-e}{r}$$

ينتج

$$2 \text{ جتا } e = 2 + 2 + e + (1-e + 1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$\times (1-e + 1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$+ \frac{e(1-e)}{1!} \frac{e(1-e)}{1!} \dots + \frac{e(1-e)}{1!} \frac{e(1-e)}{1!} \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$(1-e) = 2 \text{ جتا } e = 2 + 2 + e + (1-e + 1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$+ \frac{e(1-e)}{1!} \frac{e(1-e)}{1!} \dots + \frac{e(1-e)}{1!} \frac{e(1-e)}{1!} \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$+ \frac{e(1-e)}{1!} \frac{e(1-e)}{1!} \dots + \frac{e(1-e)}{1!} \frac{e(1-e)}{1!} \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

وبقسمة هاتين المعادلتين على 2 نجد

$$2 \text{ جتا } e = 2 + 2 + e + (1-e + 1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$\times \text{ جتا } (1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{1!} \frac{e(1-e)}{1!} \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$(1-e) = 2 \text{ جتا } e = 2 + 2 + e + (1-e + 1-e) + \dots + \frac{e(1-e)}{1!}$$

$$\times \text{ جا } (٤-٤) \text{ سر } ٠٠ \div \frac{٤+٤}{٢} (١-٤) \text{ سر } \frac{٤+٤}{٢} \text{ جا سر}$$

(في حل المعادلة ذات الحدين)

٦٢. اذا فرضت المعادلة $\sqrt{x} + ٢ = ٤$ وفرضت ٢ كمية موجبة

ثم أريد إيجاد جميع مقادير الجذور الحقيقية والتخيلية ونرمز بالحرف ٤

الجذر ٢ العيني العددي أعني $\sqrt{x} = ٢$ ثم نضع $\sqrt{x} = ٤$ سر

بنرض $\sqrt{x}$ سر مجهول جديد فنؤول المعادلة المفروضة الى $\sqrt{x} = ٤$ سر

وحيث ان $\sqrt{x} = ٤$ سر يكون $\sqrt{x} = ١$ سر

لنعتبر أولاً المعادلة $\sqrt{x} = ١$ التي ينتج منها $\sqrt{x} = ١$ فاذا جعلنا $\sqrt{x}$

$\sqrt{x} = ١$ المقروض فيه $\sqrt{x}$ عدداً صحيحاً يحدث منه

$\sqrt{x} = ٢$ سر $\sqrt{x} = ١$ سر و $\sqrt{x} = ٤$ سر

واذا وضعت هذه المقادير في القانون

$$(\text{جنا سر} + \sqrt{x} - ١) = \sqrt{x} - ١ + \sqrt{x} = ١ - ١ + \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

$$\text{يكون } ١ = \sqrt{x} + \sqrt{x} - ١ + \sqrt{x} = ١ - ١ + \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

$$\text{ومنه } \sqrt{x} = ١ + \sqrt{x} - ١ + \sqrt{x} = ١ - ١ + \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

$$\text{فاذا يصير } \sqrt{x} = ١ + \sqrt{x} - ١ + \sqrt{x} = ١ - ١ + \sqrt{x} = \sqrt{x} \quad (١)$$

واذا فرض على التوالي ان $\sqrt{x} = ٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩$

ياخذ القوس $\sqrt{x}$ مقادير مختلفة عددها $\sqrt{x}$ وكل واحد منها أقل من $\sqrt{x}$

وحيث انه لا يمكن ان يكون اقوس بين من اجيب وجيب متم متماثلان فحدث

حينئذ جزور الجذور التي عددها

واذا جعل للكمية $\sqrt{x}$ مقادير أكبر من $\sqrt{x}$ حدثت الجذور السابقة بعينها

لانه لو فرض ان $\sqrt{x} = ٢ + ٤ = ٦$ الذي فيه $\sqrt{x}$ عددها صحيح وان فون

$$> \text{ع بحاث} \quad \frac{2}{\text{ع}} + 2 \text{ ح} = \frac{2}{\text{ع}} \quad \text{وبكون}$$

جنا $\frac{2}{\text{ع}} = \text{جنا} \frac{2}{\text{ع}} \quad \text{و} \quad \text{جا} \frac{2}{\text{ع}} = \text{جا} \frac{2}{\text{ع}}$
 أنق أن مقدار سر الناتج بفرض أن د يساوي مكرر ع زائد اعداد
 مثل $\text{د} = \text{د}$ هو عين المقدارات الناتجة بفرض أن $\text{د} = \text{د}$
 فينتج من د ذاته يمكن بواسطة لقانون السابق إيجاد جميع د - ذور المعادلة

$$\text{سر} - 1 = 0 \quad \text{حقيقية كانت وتخييلية}$$

لضعف في القانون (١) $\text{ع} - \text{د}$ موضحين د نجد

$$\text{سر} = \text{جنا} \frac{2}{\text{ع}} - \sqrt{1 - \frac{2}{\text{ع}}}$$

فإذا يمكن إيجاد مقادير سر بجعل $\text{د} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \text{ع}$
 أو $\frac{1-\text{ع}}{\text{ع}}$ (على د بكون ع زوجية أو فردية) في القانون

$$\text{سر} = \text{جنا} \frac{2}{\text{ع}} \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\text{ع}}}$$

واعتبر المعادلة $\text{سر}^2 = 1 - \frac{2}{\text{ع}}$ بفرض $\text{سر} = \frac{2(1+\text{د})}{\text{ع}}$ يكون
 جنا $\text{ع} = \text{سر} - 1$ أو $\text{ع} = \text{سر} + 1$ ومرة

$$[\text{جنا} \frac{2(1+\text{د})}{\text{ع}} + \sqrt{1 - \frac{2(1+\text{د})}{\text{ع}}}] = 1 - \frac{2}{\text{ع}}$$

وإذا يكون

$$\text{سر} = \text{جنا} \frac{2(1+\text{د})}{\text{ع}} + \sqrt{1 - \frac{2(1+\text{د})}{\text{ع}}}$$

فيمكن بجعل $\text{د} = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \text{ع}$ في هذا
 القانون إيجاد جميع د - ذور المعادلة $\text{سر}^2 = 1 - \frac{2}{\text{ع}}$ حقيقية كانت
 أو تخيلية

وإذا وضه منافيه $\text{ع} - (1+\text{د})$ بدلا عن د يحدث

$$س = جئا \frac{2(1+2^2)}{2} - \sqrt{1 - جئا \frac{2(1+2^2)}{2}}$$

فاذا يمكن أيضا إيجاد المقادير المذكورة بجعل $2 = 0$ ر ١ ر ٢ ر
 ٠٠٠٠ ر $\frac{2}{2}$ ر $\frac{1}{2}$ (على حسب كون 2 زوجية أو فردية)
 في القانون

$$س = جئا \frac{2(1+2^2)}{2} + \sqrt{1 - جئا \frac{2(1+2^2)}{2}}$$

(في معرفة مقداري $س$ و $جئا$ $س$ بواسطة)

(الكمية الاسمية التخيلية)

٦٢. انرجع الى المتسلسلة

$$1 = س + س + \frac{س}{2!} + \frac{س}{3!} + \frac{س}{4!} + \dots$$

ونفرض اننا نتحقق أيضا اذا وضع فيها $س$ $1 - \sqrt{1 - 2س}$ بدلا عن $س$ فيحدث

$$1 - \sqrt{1 - 2س} = 1 - \left(1 - \frac{س}{2!} + \frac{س^2}{4!} - \frac{س^3}{6!} + \dots \right)$$

$$\left(\frac{س}{2!} - \frac{س^2}{4!} + \frac{س^3}{6!} - \dots \right) \times$$

وحيث ان الجزء الحقيقي من الطرف اليمين يساوي $جئا$ $س$ ومكرر $1 - \sqrt{1 - 2س}$
 يساوي $س$ يكون

$$س = 1 - \sqrt{1 - 2س}$$

$$س = جئا \frac{2(1+2^2)}{2} + \sqrt{1 - جئا \frac{2(1+2^2)}{2}}$$

وبتغيير علامة $\sqrt{1 - 2س}$ يحدث

$$س = 1 - \sqrt{1 - 2س}$$

$$س = جئا \frac{2(1+2^2)}{2} - \sqrt{1 - جئا \frac{2(1+2^2)}{2}}$$

وهو ما يحدث

$$\begin{aligned} \text{جنا} &= \frac{\alpha + \alpha}{2} \\ \text{حاص} &= \frac{\alpha - \alpha}{2} \end{aligned}$$

وهو المطلوب

٦٢. من المعلوم انه اذا كان α و α كيتين حقيقيتين يكون

$$\alpha = \alpha \times \alpha$$

فهذا الارتباط يتحقق أيضا اذا وضع α و α بدلا
عن α و α من القانون (١) ينتج

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha + \alpha \\ \alpha &= \alpha + \alpha \end{aligned}$$

واذا يكون

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \times \alpha \\ \alpha &= \alpha \times \alpha \end{aligned}$$

أي ان خواص المتعلقة α تبقى بدون تغيير سواء كانت α حقيقية
او تخيلية

(في الاوغاريتمات التخيلية)

٦٥. اذ فرض ان

$$و + \overline{\gamma} = 1$$

$$\overline{\gamma} + \overline{\gamma} = 1$$

نسمى و + $\overline{\gamma}$ لو غاريتم $\overline{\gamma} + \overline{\gamma}$ النبريان
فأزاجهما

$$ع = ع جناه و ع = ع طاه$$

مع الفرض ان ع عدد موجب والزوية ه محه ورهين - ه و + ه
يمكن وضع $\overline{\gamma} + \overline{\gamma}$ على هذه الصورة

$$\overline{\gamma} \text{ ه}$$

$$ع (عناه + \overline{\gamma} - 1 \text{ طاه}) = ع$$

فالمعادلة المقترضة تصير

$$\alpha' (عناه + \overline{\gamma} - 1 \text{ طاه}) = ع (عناه + \overline{\gamma} - 1 \text{ طاه})$$

$$(\overline{\gamma} - 1 \text{ طاه})$$

$$\alpha' عناه = ع طاه \text{ و } \alpha' عناه = ع طاه$$

ومن هنا

$$\alpha' ع = ع \text{ او } \alpha' ع = ع$$

فيكون

وبنفسه ان

$$و = ه + 1 \text{ ك ه}$$

بفرض ك عدد صحيح غير معين

$$\overline{\gamma} \text{ ه}$$

وعما سبق يؤخذ ان اسكل متعلقة بتخيلية مثل ط = ع

لو غاريتات نبرانية لاصرها عدد هاتوا تخرج بواسطة القانون

$$\alpha' ط = ع + (ه + 1 \text{ ك ه}) (\overline{\gamma} - 1)$$

فأفرض ان ك = . نجر

$$\alpha' ط = ع + ه (\overline{\gamma} - 1)$$

وهذا المقدار هو الذي سماه الرياضي كوثى مقدار α ط الاصلى

الباب الحادى عشر

• (في النهايات الكبرى والصغرى للمتعاقبات الظاهرة) •

بـ متغيرة واحدة

٦٦ • اذا فرضت المتعلقة m (س) وفرض ان s تاخذ جميع المقادير التى جـ اتت بها هذه المتعلقة متتمة فبالإمامة m (س) المتتابعة تارة تصاعد وتارة تنمازل فاما α الذى تنقل به m من التصاعد الى التنازل فهو النهاية الكبرى والمقدار الذى تنقل به m من التنازل الى التصاعد يسمى نهاية صغرى

فالمعلامة المميزة للنهاية الكبرى هي حينئذ كونها اكبر من المقادير السابقة عليها واللاحقة لها او بالاعلام النهاية الصغرى كونها اصغر وبعبارة اخرى يقال عند اخذ s المقدار α ان m (س) فى نهايتها الكبرى اذا كانت m (ح) اكبر من m ($\alpha + \epsilon$) مع فرض ان ϵ صغيرة بقدر ما يراد فالفرقان m ($\alpha + \epsilon$) - m (ح) و m ($\alpha - \epsilon$) - m (ح) يكونان حينئذ سالبين

ويقال ان m (س) فى نهايتها الصغرى اذا كانت m (ح) اصغر من m ($\alpha + \epsilon$) فالفرقان m ($\alpha + \epsilon$) - m (ح) و m ($\alpha - \epsilon$) - m (ح) يكونان موجبين

٧٧ • حيث علم (مطابقاً) أن المتعلقة تصاعد أو تنمازل على حسب كون المشتقة موجبة أو سالبة يفتضح ضرورة بالقدار α الذى به صارت المتعلقة فى نهايتها الكبرى تغير علامة المشتقة من الايجاب الى السلب واذا كان α هو المقدار الذى به تصير المتعلقة فى نهايتها الصغرى تغير علامة المشتقة من السلب الى الايجاب

ولكن حيث لا يمكن ان تتغير علامة المشتقة اذا لم تكن معديمة اولاً نهائية او غير مسهورة فمقادير المتغيرة الموافقة للنهاية الكبرى أو الصغرى تكون كذلك

معدنه أولانها ثمة أو غير مستقرة . والمعتبر الآن هي الحالة الأولى

٦٨ . لنفرض ان المشتقة الثانية م (س) ليست لانها ثمة ولا غير مستقرة
فيما يقرب من المقدار ϵ فنجد على حسب قانون تيلور

$$م (س + \epsilon) - م (س) = \epsilon م' (س) + \frac{\epsilon^2}{2} م'' (س) + \dots (١)$$

ولكن اذا لم تنعدم م (س) يمكن ان تؤخذ ϵ صغيرة صغرا كافيا (مطلب ١١)

لكي تكون علامة الطرف الثاني عين علامة الحد الاول أعني $\epsilon م' (س)$
فعلامة الفرق م (س + ϵ) - م (س) تتغير مع علامة ϵ الا يوجد حينئذ
للمتعلقة م (س) نهاية كبرى ولا صغرى فيبقى في الحالتين ان تكون

م (س) = ٠ . وينتج من ههنا ان مقادير س التي بها نصير م (س) في نهاية
كبرى أو صغرى لا توجد الا بين جذور المعادلة م (س) = ٠ فنقول
المسئلة حينئذ الى حل المعادلة المذكورة بالنسبة للعجول س وبقول القانون
(١) الى

$$م (س + \epsilon) - م (س) = \epsilon م' (س) + \frac{\epsilon^2}{2} م'' (س) + \dots$$

فاذا انساب للكمية ϵ مقادير صغيرة موجبة او سالبة تكون علامة الطرف

الثاني عين علامة م (س) واذا لا تتغير علامة لفرق م (س + ϵ) -

م (س) بتغير علامة ϵ وتكون حينئذ م (س) في نهاية كبرى أو صغرى

على حسب كون المشتقة الثانية م (س) سالبة أو موجبة واذا فرضت

م (س) = ٠ يكون

$$م (س + \epsilon) - م (س) = \epsilon م' (س) + \frac{\epsilon^2}{2} م'' (س) + \dots$$

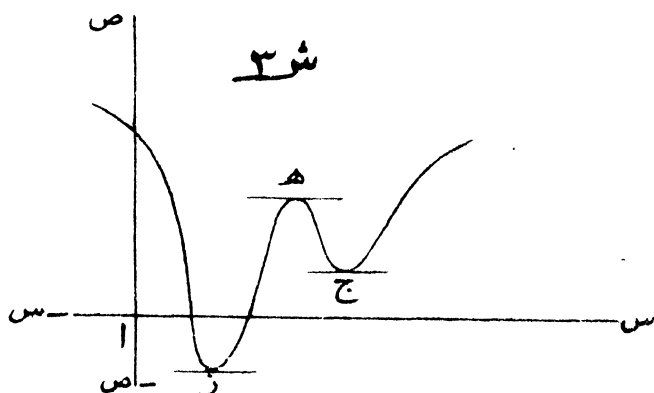
فيرى ان الحد الاول من الطرف الثاني يتغير علامته مع تغير علامة ϵ فاذا

كانت المشتقة الثالثة م (ح) ليست معومة بتغير علامة الفرق م (ع+ح)
 - م (ح) بتغير علامة ع فلا يوجد حد جديد للعلامة م (س) نهاية كبرى
 ولا صغرى وأما إذا فرضت م (ح) = ٠ فتؤول المعادلة السابقة إلى

$$م (ع+ح) - م (ح) = م (ح) \frac{ع}{٤} = م (ع+ح) \frac{ع}{٤}$$

ويرى كما تقدم أنه إذا كانت م (ح) ليست معدومة فتكون م (س) في نهاية
 كبرى إذا كانت م (ح) > ٠ وفي نهاية صغرى إذا كانت م (ح) < ٠
 وبهذه الطريقة يتحكم أنه إذا كانت م (س) هي أول مشتقة من المشتقات
 المتتالية م (س) د م (س) لا تعدم بفرض أن س = ح
 فلا يكون للعلامة م (ح) لانهاية كبرى ولا صغرى إذا كانت ح فردية
 وإذا كانت زوجية تكون م (س) في نهاية كبرى أو صغرى على حسب
 كون م (ح) سالبة أو موجبة

ولزيادة إيضاح ما تقدم نرسم المنحنى المبين بالمعادلة ص = م (س) بالنسبة
 لمحورين متعامدين (ش ٣) فنضرب في نهايات م (س) الكبرى والصغرى
 تكون مرتبات النقطة ج د هـ التي فيها المماس للمنحنى مواز
 لمحور السينات ومعيناتها تكون جذور المعادلة م (س) = ٠ (مطابق^٨)



وغير ذلك حيث ان المشتقة تتنازل كلما زادت s حالة كونها اقربية من نهاية
كبيرة فتكون ضرورة مشتقة $m(s)$ وهي $m(s)$ سالبة في تلك النقطة
وبالعكس في اقرب من نهاية مغري تتصاعد $m(s)$ بزيادة s واذا تمكون
 $m(s)$ موجبة

(نظريات)

١. لتكن $m(s) = s - 2 > s$ جتا $h + >$ فجد

$$m(s) = s - 2 > s$$
 جتا h

$$m(s) = 2$$

في المعادلة $m(s) = 0$ يعني $s - 2 > s$ جتا $h = 0$ يحدث

$s = >$ جتا h وبوضع هذا المقدار في المتعلقة المنروضة نجد $h = 2$

وهي نهاية صغرى لان $m < 0$

٢. لتكن $m(s) = \frac{s}{s-2}$ فيكون

$$m(s) = \frac{s}{s-2} \quad m(s) = \frac{s}{s-2}$$

فن $m(s) = 0$ ينتج $s = 0$ و $s = 2 >$ وبوضع هذين
المقدارين في $m(s)$ يحدث

$$m(0) = - \frac{1}{2} \quad m(2) = \frac{2}{0}$$

فالمنهانة المفروضة نهاية كبيرة مساوية للصنرو نهاية مغري تعادل 2

٣. (مسئلة) ما الخروط الا كبر حجم المرسوم داخل كرة معلومة

ليكن h نصف قطر الكرة و s نصف قطرها قاعدة الخروط و s ارتفاعه
فن المعلوم ان حجم الخروط

$$V = \frac{1}{3} \pi s^2 h$$

وحيث ان $\text{ص}^{\text{ر}} = \text{سر} (٢ \text{ نق} - \text{سر})$
 يكون $\text{ح} = \frac{1}{4} \text{سر} (٢ \text{ نق} - \text{سر})$

رباخذ المشتقة يحدث

$\text{ح} = \frac{1}{4} \text{نق} \text{سر} - \text{سر}^2 = ٠$
 ومنه $\text{سر} = \frac{1}{4} \text{نق}$ ومنه $\text{ص}^{\text{ر}} = \frac{1}{4} \text{نق} (٢ - \frac{1}{4} \text{نق})$
 وحيث ان المشتقة الثانية هي

$\text{ح} = -\frac{1}{4} \text{نق}$

فبحم المخروط المطلوب يكون

$\text{ح} = \frac{32}{81} \text{نق}$

ويرى ان نسبته بحجم الكرة تساوى $\frac{8}{17}$

(تقرينات)

المطلوب ان نهايات الكبرى والصغرى للامثلة م (سر) في

٠١ م (سر) = $\text{سر}^3 - ٧٥ \text{سر} + ١٦٢٠ \text{سر} - ١٠٠٠$

الجواب $\left. \begin{array}{l} \text{سر} = ٦ \text{ نهاية كبرى م (٦)} \\ \text{سر} = ٤ \text{ نهاية صغرى م (٤)} \\ \text{سر} = ٣ \text{ نهاية كبرى م (٣)} \\ \text{سر} = ٦ \text{ نهاية صغرى م (٦)} \end{array} \right\}$

٠٢ م (سر) = $\text{سر}^2 - ٢ \text{جنا} \text{سر} + \text{الجواب} \text{سر} = ٠$

نهاية صغرى م (٠) = ٠

٠٣ ما المستطيل الاكبر سطح المرسوم داخل قطع ناقص

(الجواب) هو ما كانت قاعدته $\text{ح} = \frac{1}{2} \text{نق}$ وارتفاعه $\text{د} = \frac{1}{2} \text{نق}$

يفرض ان معادلة القطع الناقص هي

$\text{ح}^2 \text{ص}^{\text{ر}} + \text{د}^2 \text{سر}^2 = \text{ح}^2 \text{د}^2$

فالمسطح المذكور يكون $s > 2$.

(في النهايات الكبرى والصغرى للمعادلات المضمرة)

(بمتغيرة واحدة)

٦٩ . لتكن m (سر د ص) = ٠ المفروض فيها ان ص متعلقة

بالمستقلة سر فباعتقادي ما قلناه في مطلب ^{٦٩} تأخذ من متسلسلة هذه المتعاقبة

وتساويها الصغرى فيحدث

$$0 = \frac{\left(\frac{m}{s}\right)}{\left(\frac{m}{s}\right)}$$

ثم نحصل المعادلتين السابقتين بالنسبة الى سر و ص ونضع مقاديرهما في

المشتقة الثانية فيحكم بوجود نهاية كبرى أو صغرى على حسب كون المشتقة

الثانية المذكورة سالبة أو موجبة

لتمكن من الا المعادلة

$$0 = 1 - s^2 + s^2 + s^2 - s^2$$

فالمشتقة الاولى تكون

$$0 = (2 - s) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4} \right)$$

والثانية

$$(2 - s) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4} \right) = 0 \quad (1)$$

فن الشرط $\frac{1}{s} = 0$ يحدث ص = ٢ سر وبوضع هذا المقدار

في المفروضة ينتج

$$\frac{1}{s} = \pm \frac{1}{3} \quad \text{ومنها} \quad \frac{1}{s} = \pm \frac{1}{3}$$

وحيث ان $\frac{1}{s} = 0$ تؤول المعادلة (١) الى

$$0 = (2 - s) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4} \right)$$

ويتغير s و v بما سارا هما يكون

$$\frac{v^2}{s^2} = \frac{v^2}{s^2} + \frac{v^2}{s^2}$$

٧٠. افترض ان المثلثات Δ المطلوب تعيين نهاياتها تكون مرتبطة بعدة متعلقات فتلا بافتقار وهما v و s وان يكون

$$m(s, v, t, e) = 0 \quad m(s, v, t, e) = 0$$

$$m(s, v, t, e) = 0 \quad (1)$$

فاذا امكن محو v و s من الاثنين من هذه المعادلات فنخرج معادلة مثل $m(s, v, t, e) = 0$ وبؤول الامر الى ما ذكر في المطلب السابق والاناخذ مشتقات المعادلات (١) بفرض ان v و s و e متعلقات بالمتقلة s فيحدث

$$0 = \frac{m}{s} + \frac{m}{v} \frac{v}{s} + \frac{m}{t} \frac{t}{s} + \frac{m}{e} \frac{e}{s}$$

$$0 = \frac{m}{s} + \frac{m}{v} \frac{v}{s} + \frac{m}{t} \frac{t}{s} + \frac{m}{e} \frac{e}{s}$$

$$0 = \frac{m}{s} + \frac{m}{v} \frac{v}{s} + \frac{m}{t} \frac{t}{s} + \frac{m}{e} \frac{e}{s}$$

ومحو v و s منها فجد مقدار $\frac{m}{s}$ فتساويه لاصفر ونجرب العمل

$$0 = \frac{m}{s} + \frac{m}{v} \frac{v}{s} + \frac{m}{t} \frac{t}{s} + \frac{m}{e} \frac{e}{s}$$

$$0 = \frac{m}{s} + \frac{m}{v} \frac{v}{s} + \frac{m}{t} \frac{t}{s} + \frac{m}{e} \frac{e}{s}$$

$$0 = \frac{m}{s} + \frac{m}{v} \frac{v}{s} + \frac{m}{t} \frac{t}{s} + \frac{m}{e} \frac{e}{s}$$

$$0 = \frac{m}{s} + \frac{m}{v} \frac{v}{s} + \frac{m}{t} \frac{t}{s} + \frac{m}{e} \frac{e}{s}$$

ثم نحس $\frac{m}{s}$ و $\frac{m}{v}$ فجد معادلة بين s و v و e فيستخرج منها

ومن المعادلات (١) مقادير هذه المجاهيل وبوضعها في المشتقة الثانية

$\frac{١}{٦} \frac{٢}{٦}$ يحكم بنوع النهاية

لتكن مثلا المتعلقة ط والمعادلتان

$$٦ = ط + ص + س$$

$$١٢ = ط' + ص' + س'$$

فنجد

$$(١) \left\{ \begin{array}{l} ٠ = \frac{١}{٦} ط + \frac{١}{٦} ص + ١ \\ ٠ = \frac{١}{٦} ط' + \frac{١}{٦} ص' + ١ \end{array} \right.$$

وبجعل $٠ = \frac{١}{٦} ط$ نجد

$$ص = ١ - \frac{١}{٦} ط$$

فن المعادلات $٦ = ط + ص + س$

$$١٢ = ط' + ص' + س'$$

$$س = ص$$

يستخرج $س = ٢ = ص = ٢ = ط$

واذا أخذنا مشتقة المعادلتين (١) فنجد المشتقة الثانية $\frac{١}{٦} ط$ وبوضع

المقادير السابقة فيها نراه - البقية في هذه المقادير تكون ط في نهايتها الكبرى

(تتمة للكميات الصغيرة)

٧١. قد ذكرنا في المطلب ان الكمية الصغرى هي الكمية التي تقرب جدا

من الصفر فاذا وجدت في مسألة واحدة عدة كميات من هذا النوع فنختب

منها واحدة ونقابل بها الباقية وحينئذ نسمي هذه الكمية بالكمية الاصلية

وتسمى الكمية الصغرى ذات المرتبة الاولى كل كمية تكون نهاية نسبتها الى

الاصلية عددا معينا والكمية الصغرى ذات المرتبة الثانية هي ما تكون نسبتهم

للاصلية كمية صغرى ذات المرتبة الاولى

وعلى العموم نسمي الكمية الصغرى ذات المرتبة الثانية الكمية التي تكون
نسبتها الى الاصلية كمية صغرى ذات المرتبة ٢ - ١ فلا اذا كان
التفاضل ٦ ص هو الكمية الاصلية وكانت ٤ كمية صغرى ذات المرتبة
الاولى يكون

$$\text{ما} = \frac{٤}{٦} = \text{ل} \quad (\text{ل عدد معين})$$

ومنه $٤ = ٦ \text{ ص} (\text{ل} + ٤)$ (٤ عدد صغير جدا)
وقياسا على ذلك تكون الزيادة ف ص للمتعلقة ص المقابلة للزيادة الصغيرة
٦ ص من الكميات ذات المرتبة الاولى وكذا التفاضل ٦ ص لان

$$\text{ف ص} = ٦ \text{ ص} [م (\text{س}) + ٤]$$

$$\text{٦ ص} = م (\text{س}) \text{ ص}$$

٨٢. لئلا نترك نظريتين في الكميات المذكورة وهما
(الاولى) لا تتغير نهاية نسبة كيتين صغيرتين اذا تبديلتا بكميتين أخريين تقرب
نسبتهما للاولين من الواحد

لتكن مثلا ٦ د كيتين صغيرتين و ٤ د كيتين صغيرتين ايضا حيث

$$\text{ما} = \frac{٢}{٣} = ١ \text{ د} \text{ ما} = \frac{٢}{٣} = ١ \quad (١)$$

$$\text{ما} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} \text{ ما} \quad \text{فنقول ان}$$

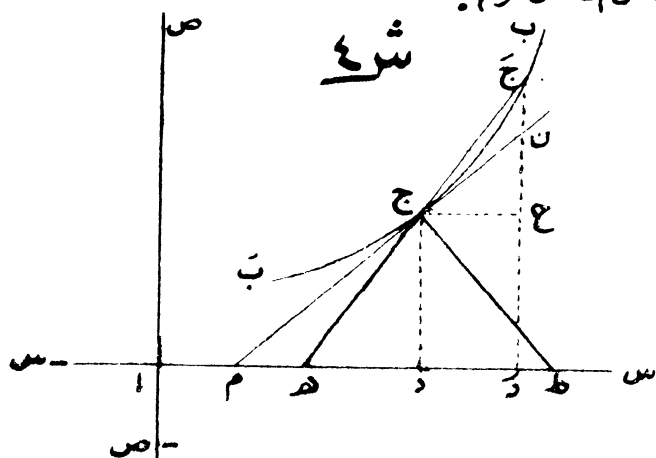
لان من المعادلتين (١) ينتج $٢ = ٣ + ٤$ ومنه $\frac{٢}{٣} = ١ +$

$\frac{٢}{٣}$ بفرض ان $\frac{٢}{٣}$ تقرب جدا من الصفر كلما نقصت ٤ د أو كما يقال

بفرض ٤ كمية صغيرة بالنسبة الى ٤ وينتج ايضا $\frac{٢}{٣} = ١ + \frac{٢}{٣}$ فبقسمة
هاتين المعادلتين يحدث

$$\frac{\frac{٢}{٣} + ١}{\frac{٢}{٣} + ١} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٢}{٣}}$$

وحيث انه كلما قربت ج من ج يدور انشط المقامع حول ج وبقر
من امام من الذي هو نمائته



$$\text{ص} - \text{ص} = \text{ك} (\text{سر} - \text{سر})$$

وحيث ان هذا الخط هو د على المماس فيكون كما هو معلوم في الهندسة الجبرية

$$\text{ك} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}} = 1 -$$

ومن هنا

$$\frac{(\frac{\text{ص}}{\text{ص}})}{(\frac{\text{ص}}{\text{ص}})} = \frac{1}{(\frac{\text{ص}}{\text{ص}})} - = \text{ك}$$

فالمعادلة السابقة تؤول الى

$$\text{ص} - \text{ص} = \frac{(\frac{\text{ص}}{\text{ص}})}{(\frac{\text{ص}}{\text{ص}})} (\text{سر} - \text{سر})$$

$$\text{ومن هنا} \quad (\text{ص} - \text{ص}) \frac{\text{ص}}{\text{ص}} - (\text{سر} - \text{سر}) \frac{\text{ص}}{\text{ص}} = 0$$

(ملحوظ) اذا امر المنحنى المبين بالمعادلة م (سر ص) = 0 بنقطة الاصل تبين

المكرر المذكور باخذ نهاية النسبة $\frac{\text{ص}}{\text{سر}}$ بفرض ان $\text{سر} = 0$ لان (مطلب)^{٣٤}

$$\frac{\text{ص}}{\text{سر}} = \frac{\text{ص}}{1} = \text{ص}$$

٧٥. الخط م د المحصور بين المماس ومرتب نقطة التماس يسمى تحت

المماس والخط ط د يسمى تحت العمود فاذا جعل $\text{ص} = 0$ في معادلة

المماس يحدث

$$\text{ص} - \text{ص} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}} (\text{سر} - \text{سر})$$

ومن هنا

$$\text{سر} - \text{سر} = 1 - 1 = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$$

واذا امرنا بالرمز (تم) تحت المماس يكون

$$\text{تم} = \frac{\text{ص}}{\frac{\text{ص}}{\text{ص}}} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}}$$

وبالنسبة تحت العمود يحدث

$$\text{نع} = \frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}}$$

وفي المثلين ح ه د د ج ط د القاشي الزاوية نجد

$$\text{ج م} = \frac{\text{ص} \text{ر} + \text{تم}}{\text{ر ج ط}} = \frac{\text{ص} \text{ر} + \text{نع}}{\text{ر ج ط}}$$

وبوضع مقداري تم و نع نجد طول المماس وطول العمود

$$\text{ط م} = \frac{\text{ص} \text{ر} + 1 \left(\frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}} \right)}{\frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}}} = \frac{\text{ص} \text{ر} + 1 \left(\frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}} \right)}{\frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}}}$$

$$\text{طع} = \frac{\text{ص} \text{ر} + 1 \left(\frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}} \right)}{\left(\text{تطبيقات} \right)}$$

٠٧٦ ولنطبق هذه القوانين على الهليلجي أى التطلع المناصر الذى معادلته

$$0 = \text{أ} \text{ص} \text{ر} + \text{ب} \text{ر} - \text{أ} \text{ر} - \text{ب} \text{ص}$$

$$\text{فنجيد} \quad \frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}} - \frac{\text{أ} \text{ر}}{\frac{\text{أ}}{\text{سر}}} = 0$$

وتكون معادلة المماس

$$\text{ص} - \text{ص} \text{ر} = \frac{\text{أ} \text{ر}}{\frac{\text{أ}}{\text{سر}}} - \frac{\text{ب} \text{ر}}{\frac{\text{ب}}{\text{سر}}} \quad (\text{سر} - \text{سر})$$

$$\text{أو} \quad \text{أ} \text{ص} \text{ر} + \text{ب} \text{ر} - \text{أ} \text{ر} - \text{ب} \text{ص} = 0$$

ومعادلة العمود

$$0 = \text{أ} \text{ص} \text{ر} - (\text{سر} - \text{سر}) - \text{ب} \text{ر} - (\text{ص} - \text{ص} \text{ر})$$

$$\text{ويحدث أيضا} \quad \frac{\text{أ} \text{ر}}{\frac{\text{أ}}{\text{سر}}} = \frac{\text{ب} \text{ر}}{\frac{\text{ب}}{\text{سر}}}$$

$$\text{نع} = \frac{\text{أ} \text{ر}}{\frac{\text{أ}}{\text{سر}}} - \frac{\text{ب} \text{ر}}{\frac{\text{ب}}{\text{سر}}}$$

$$\text{ط م} = \frac{\text{ص} \text{ر}}{\frac{\text{ص}}{\text{سر}}} = \frac{\text{أ} \text{ر}}{\frac{\text{أ}}{\text{سر}}} + \frac{\text{ب} \text{ر}}{\frac{\text{ب}}{\text{سر}}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \text{طع}$$

(في السيكلويد)

٠٧٧. اذا تدحرجت دائرة على خط مستقيم بدون زلق (أي سير على الخط بنقطة

واحدة) فاحدى نقط محيطها ترسم منحنيًا يسمى سيكلويد (١)

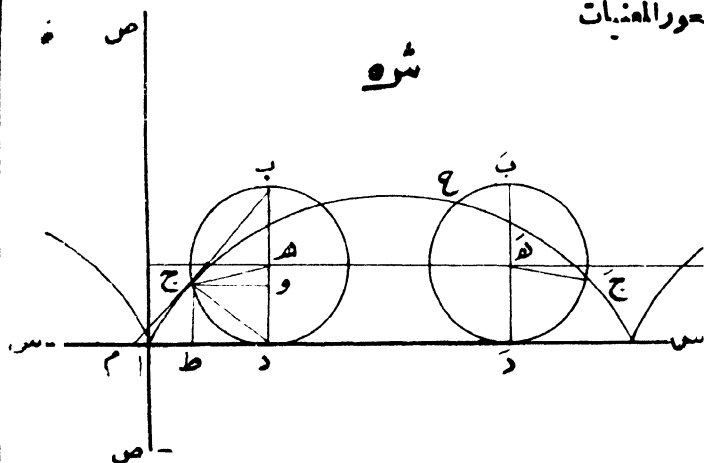
وينتج من هذا ان لالسيكلويد فروعا عددها غير نهائى

فاذا اخذنا المسافة المقروص محورا السينات واحدى نقط المنحنى الموضوعة

على هـ ذا المسافة تقسم أخذت أصلا ثم رمز بالحرف هـ لمركز الدائرة معتبرة في

أحد م واضعها (ش هـ) و تق لنصف قطرها و د النقطة تماسها

بمحور السينات



وفرض القوس د ج مساويا للفصل أ د تكون النقطة ج التي احداها

س = ا ط د ص = ج ط احدى نقط السيكلويد و اذا رمزنا بالحرف ع

لزاوية د هـ ج يكون

$$\text{قوس د ج} = \text{ق ع}$$

(١) ينسب اختراع هذا المنحنى لغاليلى الشهير الطاباني (ولد سنة ١٥٦٤

ومات سنة ١٦٤٢)

ونجد في المثلث هـ ج و القائم زاوية

$$ج و = نق ج ا ع د ه و = نق ج ن ا ع$$

وحيث ان

$$ا ط = ا د - و ح د د و = د ه - ه و$$

يكون

$$س = نق (ع - ج ا ع) د ص = نق (ا - ج ن ا ع)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة يحدث

$$ج ن ا ع = \frac{نق - ص}{نق} د ع = \frac{نق - ص}{نق} د ج ن ا ع \quad \frac{ا}{نق} = \frac{ا}{نق}$$

$$\left. \begin{array}{l} \times \\ \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}$$

وحيث ان القوس ع يمكن أن يكون أصغر من نصف الدائرة أو أكبر منه تبع الوجود النقطة ج على النصف الاول أو الثاني لا بد فروع المنحنى فتعطى العلامة + للجزء $\left. \begin{array}{l} \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}$ في الحالة الاولى وفي الحالة الثانية

تعطى له العلامة - فاذا وضعنا مقدارى ع و حاء السابقين في المعادلة نجد معاملة السيكلوبيدوهى

$$س = نق نو ج ن ا ع \frac{نق - ص}{نق} - \frac{نق - ص}{نق} \left. \begin{array}{l} \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}$$

ولا يحد معاملة الاما س في النقطة ج تاخذت تماضل هذه المعادلة فيحدث

$$\frac{نق 6}{\frac{نق - ص}{نق} \left. \begin{array}{l} \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}} = \frac{نق 6}{\frac{نق - ص}{نق} \left. \begin{array}{l} \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}}$$

$$\frac{نق 6}{\frac{نق - ص}{نق} \left. \begin{array}{l} \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}} = \frac{نق 6}{\frac{نق - ص}{نق} \left. \begin{array}{l} \frac{نق - ص}{نق} \end{array} \right\}}$$

ومن هذا

فالمعادلة المعالوفة تذكر ح. ن. ن. ن.

$$\sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} \quad (س - س)$$

وعلى ذلك تكون معادلة العمود هي

$$\sqrt{\frac{ص}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} \quad (س - س)$$

ويكون

$$\sqrt{\frac{ص}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} \quad (س - س)$$

$$\sqrt{\frac{ص}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} \quad (س - س)$$

وقد بان من هـ اذ ان تع وسطا متناسبا بين در و بد = ٢ نق

ص - فيكون تع = دط ومنه ينتج ان العمود المنشأ من النقطة ج يمر بنقطة التماس د وان المستقيم ب ج هو المماس للسيرك ويبد في ح لان الزاوية د ج ب قائمة . فلنرسم الدائرة ب ج د حينئذ يكون النقطة ج م الموصلة بالوضع فجعل هـ هذه النقطة مركزا وترسم قوس بنصف القطر نق فيقطع المستقيم هـ الموازي لهور المعينات الذي بعده منه يساوي نق في نقطة هـ هي مركز الدائرة .

تمرينات

١ . لتكن ص = ٢ ع س معادلة الشلجمي أى القاطع المكافئ فتجد

$$\sqrt{\frac{ص}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} \quad (س + س) \quad \text{والعمود} \quad (س - س) \quad \sqrt{\frac{ص}{ص} - 1}$$

$$+ (ص - ص) = ٢$$

$$\sqrt{\frac{ص}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} \quad (س + س) \quad \sqrt{\frac{ص}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1}$$

$$\sqrt{\frac{ص}{ص} - 1} = \sqrt{\frac{2 \text{ نق}}{ص} - 1} \quad (س + س) \quad \sqrt{\frac{ص}{ص} - 1}$$

٠٢. لتكن $\frac{r}{r_1} - \frac{r}{r_2} = 1$ معادلة الهذلولى أى القطع الزائد فتجد

$$\text{للمماس } \frac{r}{r_1} - \frac{r}{r_2} = \frac{r}{r_3} = 1 \quad \text{والعمود } \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2} = \frac{r}{r_4}$$

أ + ب

$$د تم = \frac{r_1 - r_2}{r} = \text{تع} = \frac{r}{r_1} = \text{سر د طم} = \frac{r_2}{r}$$

$$\times \left(\frac{r_1}{r_4} + \frac{r_2}{r_4} \right) = \text{طم} = \left(\frac{r_1}{r_4} + \frac{r_2}{r_4} \right)$$

$$\frac{r - r_3}{r} = \alpha \quad \text{المطلوب ثم من المنحنى المميز بالمعادلة } r = \alpha$$

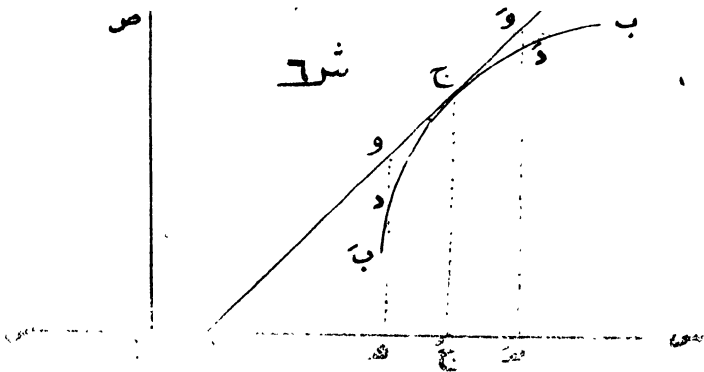
$$\text{الجواب} \quad \text{تم} = \frac{r_1}{r - r_3}$$

(فى التجويف والتخديب)

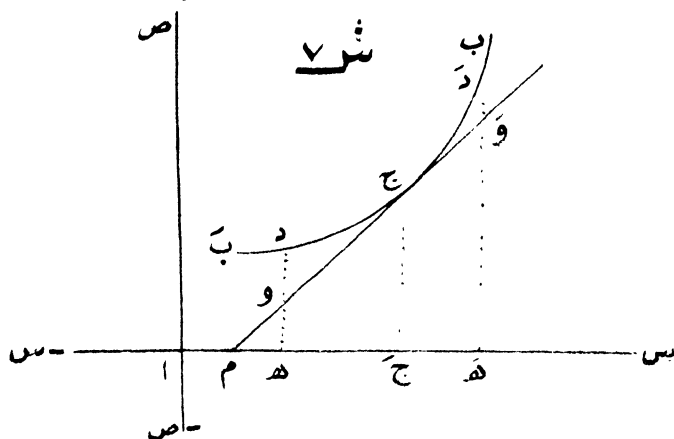
٠٧٨. اذا قورن مرتبة نقطتى المنحنى ب ب (شـ) المجاورتين لـ نقطة التماس

ج وهما د هـ د هـ بالمرتبتين د هـ د هـ المتقابلتين للمماس م ج
يمكن ان يعرف هل المنحنى المذكور موضوع بالنسبة الى المماس فى الجهة

الموجود فيه النقطة ج التى هى مستط نقطة التماس ج أوفى الجهة الاخرى



ففي الحالة الاولى (ش^٦) يكون الفرقان ده - ده ده - وه
 سالين فالمحنى يدور بتجويفه جهة محور السينات الذي يمتد من النقطة م
 الى الجهة التي فيها النقطة ج وأما في الحالة الثانية (ش^٧) فالفرقان
 المذكوران يكونان موجبين والمحنى يدور بتجديه الى الجهة المذكورة



فاذا فرض ان ج هـ = ع (ش^{٧٦}) فعادلة المماس نصير يجعل س = س + ع

$$ص = ده = ص + ع \frac{ص}{ص}$$

وبواسطة قانون تيلور نجد ان رب المنحنى المقابل ده

$$ده = ص + ع \frac{ص}{ص} + \frac{ع^2}{2} \frac{ص}{ص^2} + ب$$

فاذا يكون

$$ده - ده = ع \frac{ص}{ص} + \frac{ع^2}{2} \frac{ص}{ص^2} + ب$$

واذا فرضت المشتقة $\frac{ص}{ص}$ غير معدومة يمكن أخذ مقدار ع صغيرا كافيا

لكي ياخذ الطرف الثاني علامة الحد $\frac{ع}{2} \frac{ص}{ص^2}$ ويكون حيث ان ع

كبيرة موجبة مهما كانت علامة ع فيكون حينئذ $\frac{ص}{ص}$ سالبا حينئذ

يكون المنحنى محمداً بجهة المستقيم م س وموجباً في عكس ذلك ويتحقق
بالنظر إلى المنحنيات الموضوعة تحت محاور السينات أنه يحدث العكس حينما
يكون مرتب النقطة المعتبرة سالبا

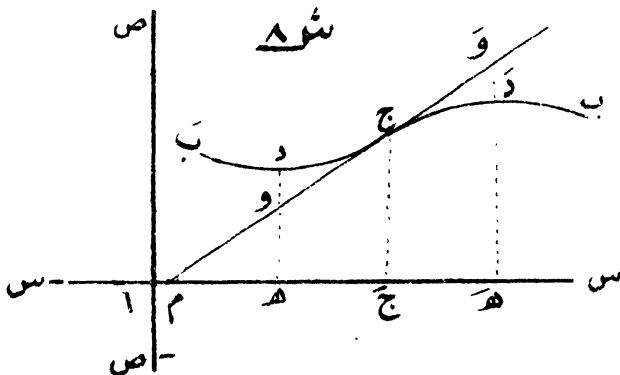
وينتج من هذا أن المنحنى يكون مجوفاً أو محدباً بجهة جزء محاور السينات
المقروص تبعاً لاختلاف المرتب ومشتقة ذات المرتبة الثانية في العلامة أو
اتحادهما فيها

٧٩. قد نفرض فيما سبق أن $\frac{26}{36}$ غير معدومة فإذا فرضنا أنها معدومة
نعتبر متسلسلة تيلور غاية الحد ذي المرتبة الرابعة فنجد

$$د ه - د ه = \frac{26}{36} \cdot \frac{4}{14} + \frac{26}{36} \cdot \frac{3}{13} + \frac{26}{36} \cdot \frac{2}{12} + \frac{26}{36} \cdot \frac{1}{11} + \dots$$

ثم نفرض أن $\frac{26}{36}$ غير معدومة فتتغير علامة الطرف الثاني تبعاً لتغير
علامة $د ه$ فالمنحنى الذي هو محدب من جهة يكون مجوفاً من أخرى (ش ٨)
أي من جهة محاور السينات والنقطة ج تسمى نقطة التغير

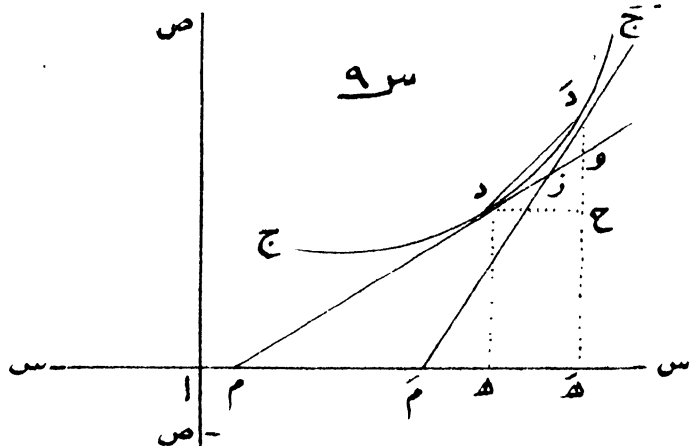
وإذا فرضت $\frac{26}{36} = 0$ و $\frac{4}{14} \neq 0$ (١) يكون المنحنى
موضوعاً في جهة واحدة من المماس أما على يمين المرتب ج ج أو على ياره
علامة $\frac{4}{14}$ تميز التجوف أو التحدب



(١) العلامة $\neq$ تدل على عدم تساوي كما هو معلوم

الباب الثالث عشر
(في تفاضل قوس لمنحنى مستو)

٨٠. لتكن $ص = م (س)$ معادلة منحنى مستو بالنسبة الى محورين متعامدين فاذا رسمنا بالحرف $ق$ اطول القوس المعتبر من نقطة ثابتة $ج$ (ش. ٩) الى النقطة $د$ ذات الاحداثين $س$ و $ص$ تكون $ق$ متعلقة بالتغيرة $س$



وللبحث عن تفاضل هذه المنعاققة نفرض ان $س + ف + ص + د$ +
ف $ص$ احداثا نقطة ثابتة مثل $د$ تكون قريبة من النقطة $د$ بحيث لا يوجد
بينهما نقطة تغير فيمكن اعتبار القوس $د د$ الذي نأخذ $د$ و $ص$ هما
منحصرة بين الوتر $د د$ والخط المتكسر $د ز + ز د$ التكون من
تلاق المماسين في النقطتين $د$ و $د$ وحيث ان $د ز > د ز + د د$
ومنه $د ز + د ز > د د + د د$ تكون هذه القوس منحصرة
بالحرى بين الوتر $د د$ و $د د + د د$ فاذا رسم $د ح$ موازيا لمحور
السينات يكون $د ح = ف ص$

و د د = γ ف سر + ف صر وبالطريق المنهات د وح نجد
وح = د ح طفا و د ح أ و ح = $\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \text{ ف سر ومنه}$

$$\text{د و} = \gamma \text{ ف سر} + \frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \text{ ف سر} \text{ و د و} = \text{د ح} - \text{و ح}$$

$$= \text{ف صر} - \frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \text{ ف سر}$$

فيمكن حينئذ كتابة المتباينة بن

$$\text{ف ن} < \gamma \text{ ف سر} + \text{ف صر} \text{ د ف ن} > \text{ف سر} \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \right)$$

$$+ \text{ف صر} - \frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \text{ ف سر}$$

وبالقسمة على ف سر يحدث

$$\frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}} < \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \right) \text{ د } \frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}} > \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \right)$$

$$+ \frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} - \frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}}$$

وبشاهد من هنا أن الطرفين الثانيين يقربان جد من النهاية $\gamma + 1 \frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}}$
لكما قرب ف سر من العفر فينبذ تقرب أيضا النسبة $\frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}}$ من هذه النهاية

وتصير مشقة القوس ن

$$\frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}} = \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \right) \text{ أو } \frac{\text{ف ن}}{\text{ف سر}} = \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \right) \text{ م (سر)}$$

ومن هنا يفتح النفاضل المطلوب وهو

$$\gamma \text{ م سر} = \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \right) \text{ أو } \gamma \text{ م سر} = \gamma + 1 \left(\frac{\text{ك صر}}{\text{ك سر}} \right)$$

(ملحوظ) حيث أن الوتر د د = γ ف سر + ف صر يكون

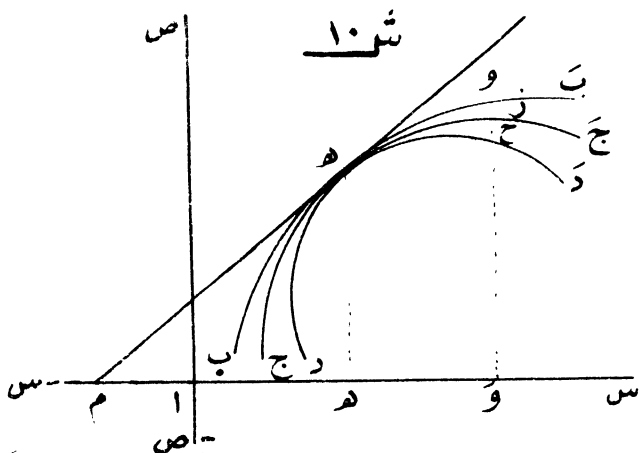
$$\frac{\text{ف ن}}{\text{د د}} = \frac{\text{ف ن}}{\gamma \text{ ف سر} + \text{ف صر}}$$

$$\text{ومنه} \quad \text{م} = \frac{\text{ف ن}}{\gamma \text{ ف سر} + \text{ف صر}} = \frac{\text{ف ن}}{\gamma \text{ م سر} + \text{ف صر}} = 1$$

يعنى ان نهاية نسبة القوس لوترها تساوى الواحد
(فى تماس المنحنيات المستوية)

٨١. لتكن $ص = م (س)$ و $ص = م (س)$ معادلتى المنحنيين

بـ بـ ر ج جـ (شـ ١٠) المارين بالנקطة هـ وليكن سـ و صـ احدائى هذه النقطـة و سـ و صـ معبر النقطتين و و ز الموضوعتين على المنحنيين المذكورين فيحدث بقية قضى قانون نيولر



$$و = م = (س + ص) م = م (س) + م (ص) + م \frac{ص}{س} (س)$$

$$+ م \frac{ص}{س} (س + ص)$$

$$ز = و = م = (س + ص) م = م (س) + م (ص) + م \frac{ص}{س} (س)$$

$$+ م \frac{ص}{س} (س + ص)$$

وحيث ان كلتا المنحنيين م (س) و م (س) تساوى المرقب هـ هـ

فيكون $m = (s)$ ومن هذا ينتج

$$و - ز = و = و ز = ع [m - (s)] + \frac{2e}{12} m (s)$$

$$- m (s) + \frac{2e}{12} [m - (s + e)] - m (s + e)$$

واذا كان المنحنيين مماس واحد في النقطة هـ [كما هو مذكور في (ش ١٠)]

فإنه على محور المعينات بهما إحدى المشتقتين $m (s)$ أو $m (s)$ فتكون

$$m (s) = m (s) \text{ وتؤول المعادلة السابقة الى}$$

$$و ز - \frac{2e}{12} [m (s) - m (s)] + \frac{2e}{12} m (s + e) -$$

$$m (s + e)$$

ويرى من هنا ان فرق المرتبتين كمية ذات مرتبة ثانية بالنسبة الى e فيقال

حينئذ ان المنحنيين مماسا من المرتبة الاولى واذا فرض ان للمشتقتين $m (s)$

و $m (s)$ مقدارا واحدا يؤل الفرق المذكور الى كمية ذات مرتبة
ثالثة وهي

$$\frac{2}{3} [m (s + e) - m (s + e)]$$

وحينئذ يكون مماس المنحنيين من المرتبة الثانية

ولجعل ذلك عاما اذا فرض في النقطة هـ ان

$$m = m (s)$$

$$m = m (s)$$

$$m = m (s)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$م^{(س)} = م^{(س)}$$

يكون الفرق بين المرتبتين

$$\frac{1+2}{(1+2)!} [م^{(س+2)} - م^{(س+1)}]$$

وهو من المرتبة ٢ + ١ بالنسبة الى ء فتماس المتخمين يكون من المرتبة الفئوية

٨٢. تمكن البرهنة بان كل منحن اخر مثل د د ذى تماس بالمنحن پ پ

مرتبة أقل من مرتبة تماس ج ج به يكون قربه من پ پ (في مجاورة

نقطة التماس ه) أقل من قرب ج ج من المنحن پ پ المذكور

لانه اذا فرضت م = م^{(س)} معادلة المنحن د د ثم فرض ان رتبة تماسه

بالمنحن پ پ هي ج ج الماخوذة أصغر من ٢ يحدث

$$م^{(س)} = م^{(س)}$$

$$م^{(س)} = م^{(س)}$$

$$م^{(س)} = م^{(س)}$$

.....

$$م^{(س)} = م^{(س)}$$

فاذا يصير

$$و ز = \frac{1+2}{(1+2)!} [م^{(س+2)} - م^{(س+1)}]$$

وبأخذ نسبة البعدين و ز و ح ينتج

$$\text{وز} = \frac{1+\varnothing}{(1+\varnothing)!} \left[\frac{1+\varnothing}{\text{م}} - (\text{س} + \text{ع}) \right] - \frac{1+\varnothing}{\text{م}} (\text{س} + \text{ع})$$

$$\text{وح} = \frac{1}{(1+\varnothing)!} \left[\frac{1+\varnothing}{\text{م}} - (\text{س} + \text{ع}) \right]$$

ويرى من هنا ان ليس $\text{وز} > \text{وح}$ فقط بل نسبتهمما تصغر حتى تقرب
جداس الصفر

٨٣. حينما يكون المنحنيين تماسا مرتبة زوجية فانما يتقاطعان في حالة
تماسهم لانه ينتج من المعادلة

$$\text{وز} = \frac{1+\varnothing}{(1+\varnothing)!} \left[\frac{1+\varnothing}{\text{م}} - (\text{س} + \text{ع}) \right] - \frac{1+\varnothing}{\text{م}} (\text{س} + \text{ع})$$

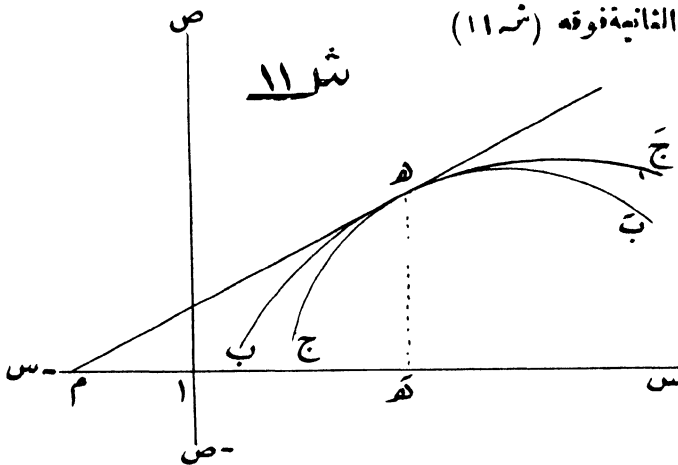
انه مع متدبير الصغيرة الموجبة أو السالبة تكون الامة العامل الثاني مثل

علامة $\text{م}^{1+\varnothing} - (\text{س})^{1+\varnothing}$ ولكن اذا كان $\varnothing$ زوجيا فعلاقة

$\text{ع}^{1+\varnothing}$ تغيرت بالتغير علامة ع ويؤخذ من هنا أن المنحنى ج ج يكون

موضوعا من احدى جهة المرب ه ه تحت ب ب ومن الجهة

الثانية فوقه (نم ١١)



واذا كانت رتبة التماس فردية وثغـيرت علامة عـ حفظ المقدار السابق
علامته وينتج من هذا أن أحد المتخمين يحيط بالآخر (شـ ١٠)

(في المتخمينات المتعاقبة)

٨٤ . لتكن ص = م (س) معادلة عامة لمخمينات من نوع معلوم فهي
تحتوي على عدة ثوابت اختيارية يمكن إيجادها إذا فرض أن أحد المتخمينات
تساوي نحن معلوم من أعلى مرتبة فإذا كان مثلا $1 + 2$ هو عدد الثوابت
يكون 2 مرتبة التماس ونجد المعادلات

$$م (س) = م (س)$$

$$م (س) = م (س)$$

$$م (س) = م (س)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$م (س) = م (س)$$

التي عددها يساوي عدد الثوابت في واسطتها نجد عدة مقادير الثوابت المذكورة
وبوضعها في المعادلة $ص = م (س)$ يحدث منحنى يسمى بالمنحنى الانصافي
(في الدائرة المتعاقبة)

٨٥ . إذا اعتبرنا مثلا الدائرة التي معادلتها العامة

$$(س - 5)^2 + (ص - د)^2 = نق^2$$

يفرض أن د و احدائهما مركزها و نق نصف قطرها ولا ظنا أن التماس
من المرتبة الثانية بما أن عدد الثوابت الاختيارية ثلاثة فنجد باخذ تفاضل
هذه المعادلة مرتين

$$ص - س = \frac{6ص}{6س} (د - ص) + 5 - 5$$

$$ص - س = \frac{6ص}{6س} (د - ص) + \frac{6ص}{6س} + 1$$

نعلي حسب ما تقدم فيأخذ ص و $\frac{6ص}{6س}$ و $\frac{6ص}{6س}$ مساوية م (س)

د م (سر) د م (سر) ثم نحل المعادلات الناتجة بالنسبة الى د و د نقي
ولكن يمكن إيجاد المطلوب باخذ هذه مقادير الثوابت المذكورة من المعادلات
السابقة باعتبار أن سر د سر د $\frac{6}{6}$ و $\frac{6}{6}$ منسوبة الى نقطة التماس
في المنحنى ص = م (سر) فنجد

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \frac{6}{6}}{\frac{6}{6}} = د - ص \\ \frac{1 + \frac{6}{6}}{\frac{6}{6}} = سر - د \\ \frac{1 + \frac{6}{6}}{\frac{6}{6}} = نقي \end{array} \right.$$

وبواسطة هذه القوانين يوضع مركز الدائرة الاتصافية ويعد لمقدار نصف
قطرها اشارة القانون الاخير فاهم انه يكون + أو - على حسب كون
الموجبة أو سالبة
٠٨٦. ينتج من المعادلة

$$سر - د + (د - ص) \frac{6}{6} = ٠$$

ان احداني المركز (د د) يحققان المعادلة

$$ص - ص = \frac{1}{\frac{6}{6}} (سر - سر)$$

$$أو سر - سر + (ص - ص) \frac{6}{6} = ٠$$

وهي معادلة الصفر مود على المماس فاذا يكون مركز الدائرة الاتصافية
موضوعا على العمود المذكور وينتج لنا ايضا من ملاحظة ان للمنحنى والدائرة

أعني ان الخنء الدائرة يساوي عكس نصف قطرها

وانسبة $\frac{ق}{ن}$ التي تغير في أى منحني بتغير النوس $ن$ المفرضة تسمى

الخنء المتوسط لهذه النوس ويسمى نصف قطر الخنء المتوسط نصف قطر

الدائرة التي الخنء أو ما يعادل $\frac{ق}{ن}$ الذي يوجد بواسطة القانون $نق = \frac{ن}{\frac{ق}{ن}}$

واذا فرضنا ان النقطة ج تقرب جدا من ج فالنسبة المذكورة تقرب من
نهاية يقال لها الخنء المنحني في النقطة ج وهي مساوية لخنء الدائرة التي
نصف قطرها

$$نق = ج ه = \frac{ق}{ن}$$

ولا يحتاج مقدار $نق$ بواسطة احد اى النقطة ج للاحاطان الزاوية ذ
نساوي فرق زاويتين ج م س د ج م س فاذا فرضنا الاول بالمرف
ل تكون الثانية ل + فل واذا نصيرة = ف ل ويكون

$$نق = ج ه = \frac{ق}{ن} = \frac{ق}{ل}$$

وحيث ان ط ل = ل = $\frac{ق}{ل}$ = ص أو ل = قو ط ص

$$يحدث \quad \frac{\frac{ق}{ل}}{\frac{ق}{ل} + 1} = \frac{ق}{ل} = \frac{ق}{ل}$$

وحيث ان يكون

$$نق = \frac{ق}{ل} = \frac{ق}{\frac{ق}{ل} + 1} = \frac{ق}{\frac{ق}{ل} + 1}$$

وبشاهد من هه ان نصف قطر الخنء يعادل نصف قطر الدائرة لانه اقرب
فلذا تسمى هذه الدائرة دائرة الخنء أيضا وهي كزها من كز الخنء والزاوية

الصغيرة جدا $\angle$ زاوية القاس

الباب الرابع عشر

(في المنشورات والاتسارات)

٨٨ . المنحنى المنزهر هو المسمى بالهندسي اراكزا انحناءه منحنى معلوم وثمة بين معادلته بمعادلاتين s و d صر لقطعة المماس من معادلة المنحنى المقروض وهي $m (s, d) = 0$ ومن المعادلتين

$$(ب) \left\{ \begin{array}{l} s - d + (d - s) \frac{d}{s} = 0 \\ 1 + \frac{d^2}{s^2} + (d - s) \frac{d}{s^2} = 0 \end{array} \right.$$

فيهما نجد ارتباطا بين (s, d) يوافق جميع مراكز الانحناء وحينئذ يوافق معادلة المنحنى الذي هو مسيرها الهندسي

٨٩ . اذا اعتبرنا s متعلقة بالمتغيرة s ومعلومة بمعادلة المنحنى فالمعادلتان (ب) تعينان s و d بواسطة المتغيرة المذكورة فيمكن ان يستخرج منهما المشتقتان $\frac{ds}{ds}$ و $\frac{dd}{ds}$ وحينئذ توجد مشتقة المرتب d بالنسبة الى s فباخذ تفاضل الاولى يحدث

$$0 = 1 + \frac{d^2}{s^2} + (d - s) \frac{d}{s^2} - \frac{d}{s} \frac{ds}{ds} - \frac{d}{s} \frac{dd}{ds} + \frac{d}{s} \frac{ds}{ds}$$

وبحذف الحدود المتشابهة بموجب المعادلة الثانية تؤول هذه المعادلة الى

$$0 = \frac{d}{s} + \frac{d}{s} \frac{dd}{ds}$$

$$0 = 1 + \frac{d}{s} \frac{dd}{ds}$$

وننتج من هذه المعادلة ان المماس J م (ش ١٣) للمنحنى المقروض يكون عودا على مماس المنحنى المنشور في النقطة المقابلة اعني ان نصف قطار الانحناء J ه يس دائما المنشور

$$\text{ومنه } 6 \text{ نق} = \overline{6^{\text{د}} + 6^{\text{د}}}$$

وبالرمز بالحرف ن للقوس ب هـ المعبر من نقطة ثابتة ب السكائنة
على المنتشر يكون

$$6 \text{ ن} = \overline{6^{\text{د}} + 6^{\text{د}}}$$

ومنه $6 \text{ نق} = 6 \text{ ن}$ و $(\text{نق} - \text{ن}) = ٠$
فاذا يكون بقرض ث كية ثابتة

$$\text{نق} - \text{ن} = \text{ث}$$

ونجد أيضا بانسبة النقطة أخرى

$$\text{نق} - \text{ن} = \text{ث}$$

فيكون

$$\text{نق} - \text{ن} = \text{نق} - \text{ن} \text{ أو نق} - \text{نق} = \text{ن} - \text{ن}$$

أعني أن القوس هـ هـ السكائن بين نقطتين من المنتشر يساوى في المقدار
فرق نصفي قطري الانحناء المقابل في هاتين النقطتين

فاذا فرضنا خيطا ينأى غير قابل للشد طوله يساوى ج هـ ثم فرضنا ان
احد طرفيه ثابت في النقطة هـ وأنه هو منطبق على نصف القطر ج هـ

فاذا تحرك هذا الخط بحيث يبرز منه على القوس هـ هـ فطرفه المماس
يرسم المنحنى ج هـ أعني انه بواسطة نشر أقواس المنحنى ب هـ الى

خطوط مستقيمة يمكن رسم المنحنى ج هـ ولهذا معنى بالمنحنى المنتشر والمنحنى

ج هـ يسمى انتشاره

(ملحوظ) لا يكون المنحنى الامنتشر واحدا ويكون له عدة انتشارات لانه يمكن
اطالة الخط المذكور وتقصيره كما اراد

(نظريات)

٩١. لتكن معادلة القطع الناقص

$$ا' ص' + ب' س' = ا' ب'$$

فباخذ تفاضلاهما مرتين يحدث

$$ا' ص' + ب' س' = ٠$$

$$ا' ص' + ب' س' = ٠$$

ومن الاولى ينتج

وبوضع هذا المقدار في الثانية يحدث

$$ا' ص' + ب' س' = ٠$$

$$\frac{ا'}{ب'} = \frac{س'}{ص'}$$

فيكون نصف قطر الانحناء

$$\frac{ا' ص' + ب' س'}{ا' ب'} = \text{نق}$$

وبمقارنة هذا المقدار بمقدار العمود وهو

$$\frac{ا' ص' + ب' س'}{ا' ب'} = \frac{ا' ص' + ب' س'}{ا' ب'}$$

$$\frac{ا'}{ب'} = \frac{س'}{ص'} = \text{نق}$$

اعني أن نصف قطر الانحناء في القطع الناقص يعادل مكعب العمود مقسوما

$$\frac{ا'}{ب'} = \text{نق}$$

(١) تجد في المطالب طريقة هندسية سهلة لايجاد مركز الدائرة المتساوية
نصف قطرها في المنحنيات المخروطية

٩٢٠ اذ اوضعهما مقدارى $\frac{ب'ص}{ب'س}$ و $\frac{ا'ص}{ا'س}$ فى القانون (ب)
(مطلب ٨٨) يحدث

$$ص - و = \frac{ص (ا'ص + ب'ص)}{ب'ا'}$$

ومنه

$$و = \frac{ص [ا'ص - ب' (ا'ب - ب'س)]}{ب'ا'}$$

ويجعل $ا' - ب' = ج'$ فنجد

$$و = \frac{ص ج'}{ب'ا'}$$

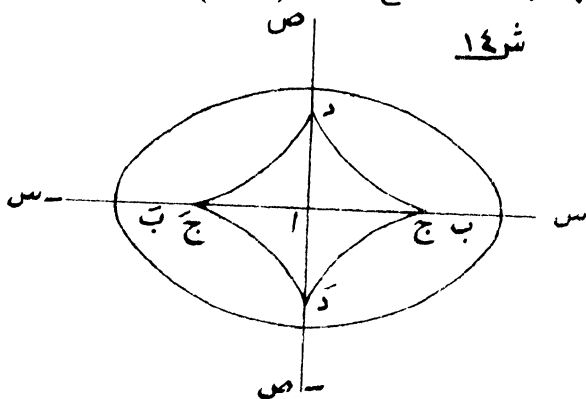
وبالمثل يكون $س = \frac{ص ج'}{ا'ب}$

واذا اخذنا مقدارى $س$ و $و$ من هاتين المعادلتين وضعهما فى معادلة المنحنى المفروض يكون

$$\frac{ا'ا}{ا'ب} = \frac{ا'ج}{ا'س} + \frac{ب'ج}{ب'س} و \frac{ا'ا}{ا'ب} = \frac{ا'ج}{ا'س} + \frac{ب'ج}{ب'س}$$

وهذه هى معادلة المنتشر

ويشاهد من هذا ان هذا المنحنى متكون من اربعة فروع موضوعة على نظم واحد بالانابة لعمودى النطح الناقص (ش ١٤)



ويجعل و = ٠ يحدث $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$ فنجد النقطتين ج د ج
الموضوعتين بين البورتين وإذا جعلنا $\frac{2}{3} = ٠$ نجد أن المنحنى يلقى محور
الرتبات في النقطتين د د وباختلاف المعادلة السابقة مرتين يحدث

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \\ & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

وبالنظر في المعادلة الأخيرة نجد أن $\frac{2}{3}$ و $\frac{2}{3}$ متحدان لعلامة فيكون
المنحنى محدياً من جهة محور السينات وفي النقطتين ج د ج يكون و = ٠
فإذا $\frac{2}{3} = ٠$ ثم في د و د يكون $\frac{2}{3} = ٠$ فتكون المنحنى
 $\frac{2}{3}$ لأنهما ثابتة وينتج من هنا أن المحورين يسانان المنتشر في نقطتين
الأربع به وفي رؤس القطع نصفان طرى الانحناء $\frac{2}{3}$ و $\frac{2}{3}$
وحيث أن قوس المنتشر يساوي فرق نصفى قطرى الانحناء فطول احد قروص
المنحنى يكون

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$$

٩٣ . إذا اردنا إيجاد النتائج السابقة بالنظر الى القطع الزائد يكفي ان تبدل

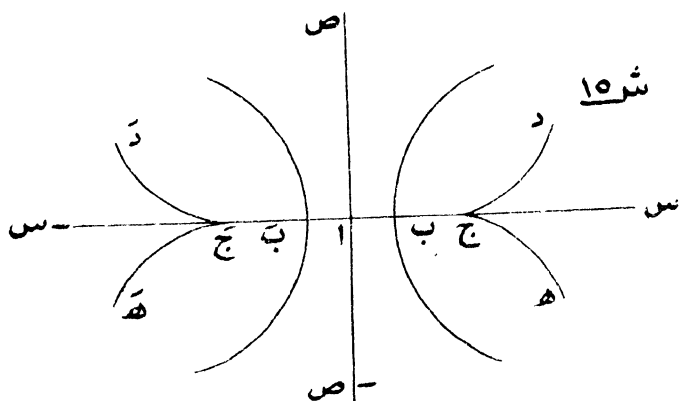
فيهما $\bar{p}$ بالكمية — $\bar{p}$ فنجد نصف قطر الانحناء

$$\text{نق} = \frac{\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}}}{\frac{1}{\bar{p}}} = \frac{2}{\bar{p}}$$

ومعادلة المنتشر

$$\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{\bar{p}}$$

ويمثل المناقشة السابقة نجد ان المنتشر يتكون من فرعين غير متيين $\bar{d}$ و $\bar{h}$ (ش ١٥) محاذيين من جهة محور القطع ويسان هذا المحور في النقطتين $\bar{b}$ و $\bar{c}$ الموضوعتين خارج البورتين $\bar{b}$ و $\bar{c}$



٩٤. لنكن $\bar{v} = \bar{c}$ ع $\bar{v}$ معادلة القطع المكافئ فيكون

$$\frac{\bar{v}}{\bar{c}} = \frac{\bar{v}}{\bar{c}} \quad \bar{d} = \frac{\bar{v}}{\bar{c}} \quad \bar{h} = \frac{\bar{v}}{\bar{c}} \quad \bar{v} = \frac{\bar{v}}{\bar{c}} \quad \bar{v} = \frac{\bar{v}}{\bar{c}}$$

ويوضع هذا المقدار في قانون نصف قطر الانحناء يحدث

$$\text{نق} = \frac{1}{\bar{c}} (\bar{c} + \bar{v}) \quad \text{أو} \quad \text{نق} = \frac{1}{\bar{c}}$$

لان العموديساوى $\bar{v} + \bar{c}$

وبوضع مقدارى المشتقتين $\frac{6}{3}ص$ و $\frac{6}{3}د$ فى المعادلة الثانية (ب) المطلوب يكون ^{٨٨}

$$ص - د = \frac{6}{3}ص + \frac{6}{3}د$$

ومنه

$$ص - د = \frac{6}{3}$$

ويوجد أيضا

$$ص - د = \frac{6}{3}ص + \frac{6}{3}د$$

ومنه

$$ص - د = \frac{6}{3}$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج

$$ص = \frac{6}{3} د = \frac{6}{3} د$$

فإذا وضعنا هذين المقدارين فى معادلة القطع المكافئ يحدث بعد محو المامل ع

$$ع - د = \frac{6}{3} د = \frac{6}{3} د$$

أو

$$ع - د = \frac{6}{3} د = \frac{6}{3} د$$

وهى معادلة المتشعب

وإذا أخذنا فاضل المعادلة الأولى نجد

$$ع - د = \frac{6}{3} د = \frac{6}{3} د$$

وبعمل التفاضل مرة ثانية نجد

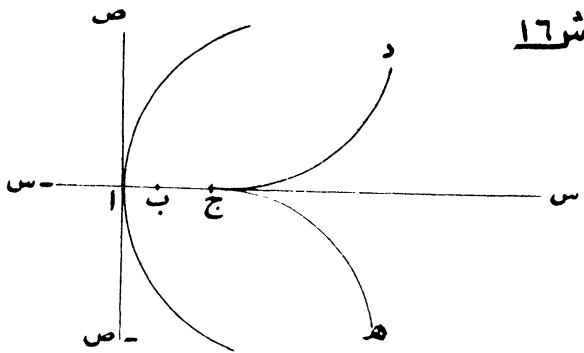
$$\frac{1}{3} = \frac{6}{3} د = \frac{6}{3} د$$

وبذا يظهر أن المشتريتين تكون من الفرعين ج د ر هـ (ش ١٦)

المحدد بين جهة محور العينان لأن $\frac{6}{3} د$ و $\frac{6}{3} د$ متغيرا العلامة وفى نقطة تلاقيه بالمحور المذكور يكون

$$د = ٠ د = ٠ د = ٠$$

ويؤخذ من هنا أن هذا المحور يكون مماسا للمنتشعب فى تلك النقطة



٩٥ . لنفرض الآن معادلة السيكلويد

$$س = ج + \frac{ج - ص}{٧} - ٧, ٢, ج - ص - ص$$

الموضوع فيها ج عوضا عن ا في

فحيث تقدم في المطالب ان^{٧٧}

$$\frac{٧}{٦} = \frac{ج - ص}{٧} - ٧, ٢, ج - ص - ص$$

وبعد ترتيب الطرفين يكون

$$١ - \frac{ج}{٧} = \frac{٢}{٦}$$

وبأخذ التفاضل

$$\frac{٢}{٦} = \frac{٢}{٦} \cdot \frac{٢}{٦} = \frac{٢}{٦}$$

$$\frac{٢}{٦} = \frac{٢}{٦}$$

ومنه

نصف قطار الانحناء يكون

$$٢ = \frac{٢}{٦} = \frac{٢}{٦}$$

الجديد أ يكونان γ د - ϵ ج فنجد

$$\epsilon = \gamma - \epsilon - \epsilon = \gamma - \epsilon - \epsilon + \epsilon = \gamma$$

بقرضان ϵ د γ احدانا النقطة ج بالنسبة الى المحورين الجديدين
فتؤول المعادلة السابقة الى

$$\gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon + \epsilon = \gamma - \epsilon + \epsilon - \epsilon = \gamma - \epsilon$$

أو $\epsilon = \gamma - \epsilon$ (γ - ϵ) فوجنا $\frac{\gamma - \epsilon}{\gamma} - \epsilon = \gamma - \epsilon$
وحيث ان جيبى متممى قوسين مكاملتين متساويان ومختلفان في العلامة
فيحدث

$$\gamma - \epsilon = \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma} = \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma} - \epsilon = \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma} - \epsilon$$

وتصير معادلة المنتشر

$$\epsilon = \gamma - \epsilon = \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma} - \epsilon = \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma} - \epsilon$$

ويؤخذ من هنا ان منتشر السيكلويد هو سيكلويد آخر مثل الاول
٩٧٠ بملاحظة ان نصف قطر الانحناء في النقطة أ معدوم يحدث (ش ١٧)

$$\gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon$$

وحيث ان $\gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon$ فاذا وضعنا اصل المحورين (أ س)

(أ - س) في النقطة أ يتعين طول القوس $\gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon$ بالقانون

$$\gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon$$

في النقطة أ يكون $\gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon = \gamma - \epsilon$ فيسارى حينئذ طول نصف
السيكلويد $\epsilon = \gamma - \epsilon$

(تجربات)

٠١ المطلوب نصف قطر المنحنى السلسلي (١)

$$\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2} \right) 2 = r$$

الجواب

$$نق = \frac{r}{2} = طع$$

(المنحنى السلسلي هو الشكل الذي يأخذه خيط متجانس بين غير قابل للتقدم طرفاه ثابتان)

٠٢ المطلوب منتشر المنحنى

$$\frac{r}{3} = \frac{r}{3} + \frac{r}{3}$$

ونصف قطر المنحنى

$$نق = 3 = (حس ص) \frac{1}{3} ف (٤ + د) \frac{r}{3} + (٤ - د) \frac{r}{3} = 3 \frac{r}{3}$$

٠٣ المطلوب منتشر السيسريد (٢)

$$ص = (٣ - ٢) - ص = ٠$$

ونصف قطر المنحنى

الجواب

$$٠ = ٤٠٩٣ + ٥٣ + ١١٥٢ + ٤ + ٢٧$$

$$نق = \frac{3(3-2)r}{(3-2)^3}$$

(١) اول من اشتغل بهذا المنحنى هو جالدير نولي وقد تقدم تاريخه

(٢) مخترع السيد ويد هو ديموكليس اليوناني ويظن انه كان في القرن السادس عشر من المياد

وهو المطلوب

(في المماس وتحت العمود)

٩٩. يتعين المماس ج م (ش^{١٨}) للمنفى ج ج في النقطة ج بمعرفة الزاوية ج ح س الناتجة من تلاقيه بالمحور القطبي فاذا رمزنا لها بالحرف ش^{١٨} يكون

$$\frac{\frac{\text{كانق} \text{ا ح نر}}{\text{كانق}} + \text{نق} \text{ا ح بار}}{\frac{\frac{\text{كانق} \text{ا ح نر}}{\text{كانق}} - \text{ح بار} - \text{نق} \text{ا ح نر}}{\text{كانق}}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ط ح}} = \text{ط ش}$$

$$\frac{\frac{\text{ط ا نر}}{\text{كانق}} + \text{نق} \text{ا ح بار}}{1 - \text{نق} \text{ا ح بار} \frac{\text{ط ا نر}}{\text{كانق}}} =$$

واذا اريد معرفة الزاوية ا ج م = ضه المادئة بين المماس ونصف قطار نقطة المماس نجد

$$\frac{\text{ط ا سه} - \text{ط ا نر}}{1 + \text{ط ا سه} \text{ط ا نر}} = \text{ط ا ضه} \quad \text{ضه} = \text{ش} - \text{نر}$$

وبوضع مقدار ط ا سه في المعادلة الاخيرة يحدث

$$\text{ط ا ضه} = \text{نق} \text{ا ح بار} \frac{\text{ط ا نر}}{\text{كانق}}$$

وهو المطلوب

وبطريقة أخرى نأخذ نقطة ثانية ج على المنحنى المفروض معينة بالاحداثين ف + ف نو ر نر + ف نر فاذا جعلنا اه = ا ج ينتج

$$\text{ج ه} = \text{ف ا ق} \quad \text{ج ا ج} = \text{نق} \text{ا ح بار} \text{ ف نر}$$

وفي المثلث ج ه ج يحدث

$$\frac{\text{ح}(\text{ج ه})}{\text{ح}(\text{ج ه})} = \frac{\text{ج ه}}{\text{ج ه}} = \frac{\text{ج ه}}{\text{ج ه}} = \frac{\text{ج ه}}{\text{ج ه}}$$

فاذا فرضنا ان النقطة ج تقرب جدا من ج فقترب الزاوية ج ه أى
 د ج ا من الزاوية م ج ا = ضه والزاوية ج ه ج من الزاوية القائمة
 فنهاية الزاوية ج ج ا تكون حينئذ ٩٠° - ضه ومن جهة أخرى
 قد علم ان نهاية نسبة ا للوتر ج ه لافوس نق x فنرا يكون واحدا
 فاذا يصير

$$\text{طا ضه} = \text{نق} \frac{\text{ح} \text{نق}}{\text{ح} \text{نق}}$$

وهو المطلوب

١٠٦ ليكن خط عم عمودا على نصف القطر ا ج فالفصل ام المحصور
 بين القطب ا ونقطة تلاقي العمود المذ كور بالماس يسمى تحت المماس
 والخط ا ع المحصور بين ا ونقطة تلاقيه بالعمود ح ع يسمى تحت
 العمود فاذا اعتبرنا المثلث ج ا م فيجدان

$$\begin{aligned} \text{ا م} &= \text{ا ج} \text{ طا ا ج م} \quad \text{د} \quad \text{ج م} = \text{ا ج} + \text{ا م} \\ \text{ا ع ن ا ن م} &= \text{نق} \frac{\text{ح} \text{نق}}{\text{ح} \text{نق}} \quad \text{د} \quad \text{ظ م} = \text{نق} \frac{\text{ح} \text{نق}}{\text{ح} \text{نق}} + \text{ا نق} \frac{\text{ح} \text{نق}}{\text{ح} \text{نق}} \end{aligned}$$

وباعتبار المثلث ا ج ع يحدث

$$\text{ا ع} = \text{طا ا ج} \frac{\text{ا ج}}{\text{ج ع}} \quad \text{د} \quad \text{ج ع} = \text{ا ج} + \text{ا ع}$$

$$\text{او} \quad \frac{\text{نق}}{\text{نق}} = \text{نع} \quad , \quad \frac{\text{نق}}{\text{نق}} = \text{طع} \quad \sqrt{\text{نق} + \frac{\text{نق}}{\text{نق}}}$$

(في تفاضل قوس المنحن)

١٠١ لايجاد تفاضل اقوس $\sqrt{\text{نق}}$ المنحنى مقروض بكفى ان نضع في القانون المعلوم

$$\sqrt{\text{نق} + \frac{\text{نق}}{\text{نق}}} = \text{نق}$$

مقدارى نق و نق السابقين فيحدث

$$\sqrt{\text{نق} + \frac{\text{نق}}{\text{نق}}} = \text{نق}$$

ويمكن أيضا الاستحصال على هذا القانون باعتبار المثلث هـ ح لاته فيجده فيه

$$\text{جـ ح} = \text{جـ هـ} + \text{هـ ح} - \text{جـ هـ} \cdot \text{جـ ح} \quad \text{جـ ح} \cdot \text{جـ ح} = \text{جـ ح} \cdot \text{جـ ح}$$

$$\left(\frac{\text{جـ ح}}{\text{هـ}} \right) = 1 + \left(\frac{\text{جـ ح}}{\text{هـ}} \right) - \frac{\text{جـ ح}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{جـ ح}}{\text{هـ}} \quad \text{جـ ح} \cdot \text{جـ ح} = \text{جـ ح} \cdot \text{جـ ح}$$

فاذا لاحظنا ان

$$\text{جـ ح} = 90^\circ \quad , \quad \frac{\text{جـ ح}}{\text{هـ}} = \frac{\text{وتر (جـ ح)}}{\text{قوس (جـ ح)}} = \frac{\text{قوس (جـ ح)}}{\text{قوس (جـ ح)}} = \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

نؤول للمعادلة الاخيرة الى

$$\frac{\text{نق}}{\text{نق}} + 1 = \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

$$\text{نق} = \text{نق} + \text{نق} \cdot \text{نق}$$

ومنه

وهو المطلوب

(في مركز الانحناء ونصف قطره)

١٠٢ اذا وضعنا مقدارى $\frac{\text{نق}}{\text{نق}}$ و $\frac{\text{نق}}{\text{نق}}$ السابقين بالمطلب في القانون ٩٨

المعلوم

$$\frac{\left(\frac{6^2}{6^2} + 1 \right)}{\frac{6^2}{6^2}} \pm = \text{نق}$$

نجد

$$\frac{\left(\frac{6^2}{6^2} + \frac{6^2}{6^2} \right)}{\frac{6^2}{6^2}} \pm = \text{نق}$$

$$\frac{6^2}{6^2} + \frac{6^2}{6^2} - \frac{6^2}{6^2} = \text{نق}$$

فبواسطة هذا القانون يتعين نصف قطر الانحناء وموضع مركزه على العمود

ويمكن التحصيل عليه بطر بقة أخرى - له وهي ان يقال قد علم في المطالب ان^{٩٦}

$$\frac{6}{6} = \text{نق}$$

وفي المطالب ان^{١٠٧}

$$\text{طا ضه} = \text{طا (سه - سر)} = \text{نق} \frac{6}{6}$$

$$\text{ومنه} \quad \text{طنا (مه - مر)} = \frac{6}{6} \text{نق} \quad \text{دشه} = \text{سر} + \text{قو طنا} \frac{6}{6} \text{نق}$$

وبأخذ النماضل يكون

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{6}{6} \frac{6}{6} - \frac{6}{6} \frac{6}{6} - \frac{6}{6} \frac{6}{6} = \frac{6}{6} \frac{6}{6} + \frac{6}{6} \frac{6}{6}$$

$$= \frac{\frac{\text{نق}^1}{1} + \frac{\text{نق}^2}{6} - \frac{\text{نق}^1}{1} \frac{\frac{\text{نق}^1}{1}}{\frac{\text{نق}^1}{1} + \frac{\text{نق}^2}{6}}}{\frac{\text{نق}^1}{1} + \frac{\text{نق}^2}{6}}$$

فإذا لاحظنا أن $ل = س$ ووضعنا في القانون

$$\text{نق} = \frac{\text{نق}^1}{6}$$

بدلاً من $س$ المقدار السابق وبدلاً من $ل$ ما سواه (المطلب ^{١٠١}) يحدث

$$\text{نق} = \frac{\left(\frac{\text{نق}^1}{1} + \frac{\text{نق}^2}{6} \right)}{\frac{\text{نق}^1}{1} + \frac{\text{نق}^2}{6} - \frac{\text{نق}^1}{1} \frac{\frac{\text{نق}^1}{1}}{\frac{\text{نق}^1}{1} + \frac{\text{نق}^2}{6}}}$$

وهو المطلوب

(تطبيقات)

في المنحنيات ذات الدرجة الثانية

١٠٣ إذا أخذنا إحدى البورتين قطباً والمحور البوري محوراً قطبياً فعدالة المنحنى تكون

$$\frac{1}{\text{نق}^1} = \frac{1 - لا جناح}{ع}$$

بفرض أن (لا) هي الاختلاف المركزي فبأخذنا ضلعا مرتين يحدث

$$\frac{1}{\text{نق}^1} \frac{\text{نق}^1}{6} = \frac{لا حائر}{ع}$$

وبوضع $\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{نق}^1}$ عوضا عن $\frac{\text{لا نق}^1}{\text{ع}}$ نؤول المعادلة الأخيرة إلى

$$\frac{1}{\text{نق}^1} = \frac{1}{\text{نق}^1} = \frac{\text{نق}^2}{\text{نق}^3} - \frac{\text{نق}^1}{\text{نق}^2}$$

وبضرب الطرفين في نق^3 يحدث

$$\text{نق}^3 + 1 = \frac{\text{نق}^1}{\text{نق}^2} - \frac{\text{نق}^1}{\text{نق}^2}$$

فيكون نق^3 نصف قطر الانحناء

$$\text{نق}^3 = \frac{\left(\frac{\text{لا نق}^4}{\text{ع}} + \text{نق}^1 \right)}{\frac{1}{\text{ع}}} = \left(\frac{\text{لا نق}^4}{\text{ع}} + 1 \right) \text{ع}$$

وبجد أيضا

$$\text{طا} - \text{نق}^1 = (\text{طا} - \text{نق}^1) = \frac{\text{ع}}{\text{لا نق}^1 \text{ حان}^1}$$

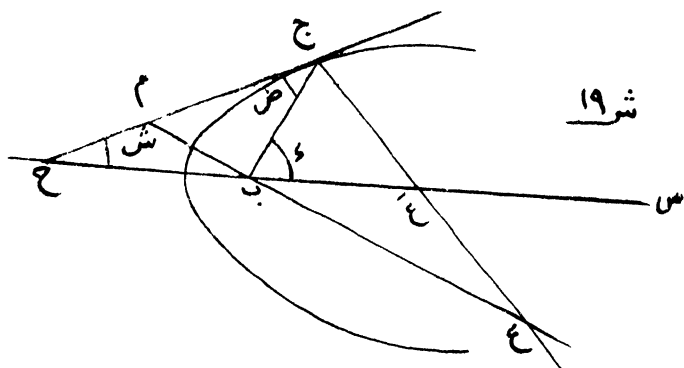
ومنها

$$\text{طا} - \text{نق}^1 = (\text{طا} - \text{نق}^1) = \frac{\text{لا نق}^1 \text{ حان}^1}{\text{ع}}$$

فاذا يكون نق^1

$$\text{طا} - \text{نق}^1 = (\text{طا} - \text{نق}^1) = \frac{\text{لا نق}^1 \text{ حان}^1}{\text{ع}}$$

واذا



وإذا رمزنا بالحرف γ للزاوية β ج γ بحث

$$\frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{E}} = \frac{E}{2}$$

فنصف قطر الانحناء يكون - حيث

نقۃ = $\frac{ع}{۳}$ حیا ی

وبمقارنة هذا القانون بما وجدناه في المطاب^{١٠٠} يحدث

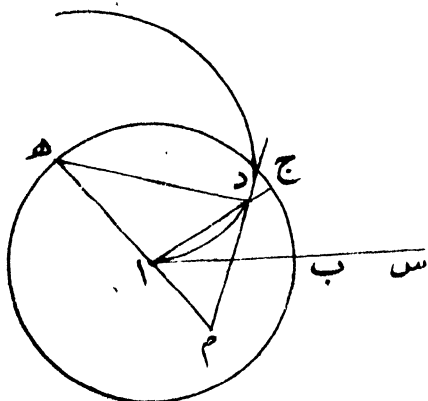
$$\frac{\text{ع}^{\text{طع}}}{\text{ع}^{\text{ر}}} = \frac{\text{ع}^{\text{حزای}}}{\text{ع}^{\text{حزای}}}$$

اعني ان مسقط العمود ج ر على نصف القطر البوري كية ثابتة تساوي نصف العميار ع (١)

(١) تنسب هذه النظرية لباحث المسمى بالتخمين في النورة الفرنسية التي كانت سنة ١٨٤٨

فاذا اخذنا على نصف القطر البورى ا ج البعد ا د مساويا لقوس ب ج
يكون مسير النقطة د الهندسى مخنيا يسمى بجائزون ارشيميدس

ش ٢١



لنرض بالحرف نر للزاوية ب ا ج فيكون قوس ب ج = ج نر ومنه
ا د = تق = ج نر

وهي معادلة الجائزون وبأخذ التقاضل يحدث $\frac{ا تق ١}{ج نر} = ج$ فاذا يكون

$$طا صه = طا ادم = تق = \frac{ج نر}{ا تق ١} = \frac{تق}{ج} = ر$$

ومن هنا ينتج ان طا صه يكبر جدا كلما زادت نر فنهاية الزاوية صه
تكون حينئذ ٩٠ درجة وفي القطب ا تكون نر معدومة وكذا
صه فالمحور اس يمر بالنصف في حانه النقطة ونجد ايضا ان

$$\frac{نق ١}{ا تق ١} = ج نر = \frac{نق ١}{ا تق ١} = ام = تم = \frac{نق ١}{ا تق ١} = \frac{١}{ج}$$

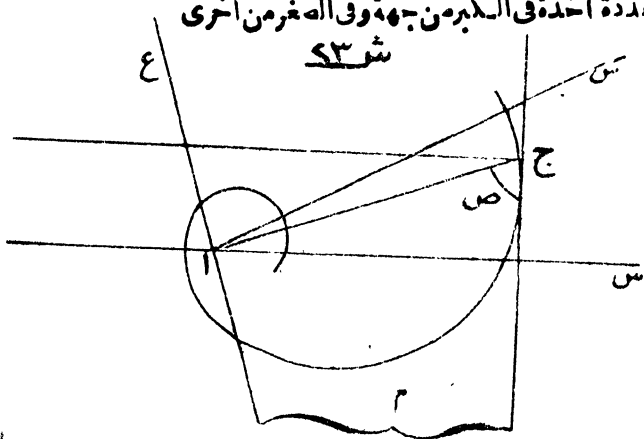
$$نع = اه = \frac{ا تق ١}{ج نر} = ج$$

فيبين من ذلك ان تحت العمود كية ثابتة مساوية لنصف القطر ج ومن هذا
تستخرج طريقة رسمه لرسم المماس في أى نقطة من الجائزون

١٠٧ معادلة هذا المنحنى هي $نر = لغا \frac{نق}{ر}$ وإذا فرضنا ان $ح$ اساس
اللوغار يتم يمكن كتابتها

$$نق_١ = ر_١$$

فإذا جعلنا $نر = ٠$ يكون $نق_١ = ح$ وحيث ان $ح$ عدد موجب
الكبر من الواحد فاذا زادت $نر$ بزيادات موجبات يأخذ $نق$ مقاديراً كبر
من $ح$ واذا زادت $نر$ بزيادات سالبات يأخذ $نق$ مقاديراً أصغر من $ح$
ويقترب جداً من الصفر فالمنحنى (ش ٢٢) يكون حينئذ متربكاً من حلزونات
متعددة آخذة في الكبر من جهة وفي الصغر من أخرى



لنأخذ تفاضل المعادلة $نق_١ = ر_١$ مرتين فنجد

$$\frac{٦نق_١}{٦ر_١} = ر_١ ح_١ = ٠ ح_١ = نق_١$$

$$\frac{٦نق_٢}{٦ر_٢} = ر_٢ (ح_٢) = نق_٢$$

فاذا يكون

$$\frac{١}{ح_٢} = \frac{٦نق_٢}{٦ر_٢}$$

اعني ان زاوية المماس ونصف القطر البؤري في أي نقطة من المنحنى كية ثابتة

(تجدأبضان $\text{تم} = \frac{\text{نق}^1}{\text{لع}^7} \text{ ذ ثع} = \text{نق}^1 \text{ لع}^7$)

فيكون حينئذ

$$\text{طع} = \text{نق}^1 + \text{نق}^1 (\text{لع}^7) = \text{نق}^1 (1 + \text{لع}^7)$$

وأبضا

$$\text{نق}^1 = \frac{[\text{نق}^1 + \text{نق}^1 (\text{لع}^7)]}{1 + \text{لع}^7} = \frac{\text{نق}^1 (1 + \text{لع}^7)}{1 + \text{لع}^7}$$

اعني ان نصف قطر الانحناء يساوي العمود فاذا جعلنا (ش ٢٣) $\text{اع} = \text{نق}^1$

$\text{نق}^1 \text{ لع}^7 = \text{نق}^1 + \frac{8}{4}$ نر يكون نق^1 و نر احدهما في النقطة ع وهي مركز انحناء الجزون المقابل للنقطة ج ويقع من المعادلتين

$$\text{نق}^1 = \frac{\text{نق}^1}{\text{لع}^7} \text{ د نر} = \text{نر} - \frac{8}{4}$$

فاذا وضهنا هذين المقدارين في معادلة المخفى يحدث

$$\text{نق}^1 = \text{م لع}^7 = \text{نر} - \frac{8}{4} + \text{لغا} (\text{لع}^7)$$

وهي معادلة المنتشر

واذا أخذنا اسه محورا قطبيا بقرض ان الزاوية الحادثة بينه وبين اسه

نعادل $\frac{8}{4} - \text{لغا} (\text{لع}^7)$ نمرضنا بالارض نر للزاوية سه اع يحدث

$$\text{نر} - \frac{8}{4} = [\text{لغا} (\text{لع}^7)] = \text{نر}$$

$$\text{نق}^1 = \text{م} = \text{نر}$$

قصير معادلة المنتشر

اعني ان منتشر الجزون اللوغاريتمي هو جزون لوغاريتمي آخر يساوي الاول

واذا فرضنا ان ∞ يكون $\text{لع}^7 = 1$ و $\text{لع}^7 (\infty) = 0$

ويستفاد من هذا ان محورا الجزون وهو منتشر معامدان

(تمرين)

لتكن نقا = ٢ ج (١ + حنا سر) معادلة الكارديو بيد تجد

$$\text{طاضه} = - \text{طنا} \frac{\sqrt{}}{٢} \text{ ومنها } \frac{\sqrt{}}{٢} + \frac{٨}{٢} = \text{ضه}$$

في هذا رسم المماس وتجد ايضا

$$\text{تم} = - \text{نقا} \frac{\sqrt{}}{٢} \text{ ر } \text{نع} = - ٢ ج حنا$$

$$\text{طم} = \frac{\text{نقا}}{\frac{\sqrt{}}{٢} \text{ حنا}} \text{ رطم} = \frac{\text{نقا}}{\frac{\sqrt{}}{٢} \text{ حنا}}$$

الباب السادس عشر

(في التفاضلات الجزئية والكمية المتعلقة بعدة متغيرات مستقلة)

١٠٨. لتكن ط = م (سر ص) متعلقة بمتغيرين مستقلين سر و ص
 فاذا اخذنا مشتقتهم بالنسبة الى سر باعتبار ص كمية ثابتة تسمى هذه
 المشتقة المشتقة الجزئية بالنسبة الى سر ويرمز لها بالرمز

$$\frac{\text{ط}}{\text{سر}} \text{ او } \frac{\text{م (سر ص)}}{\text{سر}} \text{ او } \frac{\text{م}}{\text{سر}} \text{ او } \text{م} \text{ (سر ص)}$$

وبضربها في ص نجد التفاضل الجزئي وهو

$$\frac{\text{ط}}{\text{سر}} \text{ ص او } \frac{\text{م (سر ص)}}{\text{سر}} \text{ ص او } \frac{\text{م}}{\text{سر}} \text{ ص او } \text{م} \text{ (سر ص) ص}$$

يرمز بمثل هذا للمشتقة الجزئية وللتفاضل الجزئي بالنسبة الى ص

(تنبیه) حيث ان ط في $\frac{\text{ط}}{\text{سر}}$ تدل على مشتقة ط بالنسبة الى سروفي $\frac{\text{ط}}{\text{ص}}$ تدل على مشتقتهم بالنسبة الى ص فقدرها يختلف في الكميتين

السابقةين واذا لا ينبغي اختصار النفاضين

$$\frac{ط}{ص} \text{ سر } د \frac{ط}{ص} \text{ سر}$$

لاجل عدم الابهام

١٠٩ . اذا زدت المستقلتان سر و ص بالزيادتين سر و ف ص يكون

كاهو واضح

$$ط = م (سر + ف + ص) - م (سر + ص)$$

و بموجب ما تقدم في المطالب يحدث

$$ط = م (سر + ص) + [د + سر + م (سر + ف + ص)] ف ص$$

بقرض د و د كبتين تنعدمان مع سر و ف ص وحيث ان

$$م (سر + ف + ص) = م (سر + ص)$$

يمكن ان يكتب

$$م (سر + ف + ص) = م (سر + ص) + د$$

بقرض ان د تنعدم مع سر . فاذا جعلنا د + د = د نقول

المعادلة السابقة الى

$$ط = م (سر + ف + ص) + م (سر + ص) + د + د$$

او

$$ط = م (سر + ف + ص) + م (سر + ص) + د + د$$

فاذا اعتبرنا سر و ف ص كبتين صغيرتين جدا ورضي فاهما بالرضي

سر و ص

$$0 = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط}$$

ومنها

$$ط = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} - \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} - \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط}$$

وهو تناضل ط الكلى

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة

$$ط = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط}$$

فجدان

$$\frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} - \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط}, \quad \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} - \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط}$$

اعني ان مشتق ط الجزئين بتعريف بواسطة المعادلتين

$$0 = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} \quad , \quad 0 = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط}$$

الناجيتين من اخذنا هذه المعادلة المفروضة م (سرد صر ط) = 0 بالنسبة

لكل من المتغيرين سرد صر ليكن مثلاً

$$0 = 1 - \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط}$$

فجد

$$0 = \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} \frac{ط}{ط}$$

ومنها

ومنها

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

هو التفاضل السكلي واما المشتقتان الجزئيتان فهما

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \text{ و } \frac{\text{ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

وهو المطلوب

(في التفاضلات الجزئية ذات المراتب المختلفة للمعاملات بمجمولة مستقلة)

١١١ لتكن $\text{ط} = \text{م} (\text{س د ص})$ متعلقة بالمستقلين س د ص فإذالاحظنا ان مشتقتي الجزئيتين $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ و $\frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ متعلقتان أيضا بالمتغيرتين س د ص يمكن أخذ مشتقاتهما بالنسبة لكل من هاتين المشتقتين فنجد

المشتقات الجزئية ذات المرتبة الثانية وهي

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

الاشارة $\frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ تدل على الناتج من أخذ مشتقة ط بالنسبة الى س ثممشتقة هذه المشتقة بالنسبة الى ص ولاجل الاختصار يكتب $\frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ وكذا يكتب $\frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ عوضا عن $\frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$ فمشتقات ط ذات المرتبة

الثانية تكون حيتئذ

$$\frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$$

١١٣ قد وجدنا فيما سبق ان

$$\frac{\text{ط}}{\text{سر}} = \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

فاذا اعتبرنا $\frac{\text{ط}}{\text{سر}}$ و $\frac{\text{ط}}{\text{ص}}$ كميتين ثابتتين وأخذنا تفاضل $\frac{\text{ط}}{\text{سر}}$ الكلي يحدث

$$\frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} = \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} = \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \left(\frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \right) + \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \left(\frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \right) + \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \left(\frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}}{\text{ص}} \right)$$

وبالاحظة ان

$$\frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} = \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2}$$

$$\text{نجد } \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} = \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

وهو تفاضل $\frac{\text{ط}}{\text{سر}}$ الكلي ذو المرتبة الثانية

وبأخذنا تفاضل هذه المعادلة نجد

$$\frac{\text{ط}^3}{\text{سر}^3} = \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{ط}^3}{\text{سر}^3} = \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

وهو التفاضل ذو المرتبة الثالثة

وبالمشاهدة يرى ان

$$\frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} = \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}}{\text{سر}} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

بشرط ان نجعل في نشر الطرف الثاني اسس $\frac{\text{ط}}{\text{سر}}$ علامات تفاضلية

$$\frac{\text{ط}^3}{\text{سر}^3} = \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

وان

$$\frac{\text{ط}^3}{\text{سر}^3} = \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{سر}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{سر}^2} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ص}}$$

وعموما

وهذه القاعدة تجرى على متعلقة بغيرات اياما كان عددها

(في المشتقات ذات المراتب المختلفة المتعلقة مضمرة)

بمسئله واحدة

١١٤ لتكن المعادلة م (سرد ص) = ٠ المفروض فيها ان ص متعلقة بالمسئلة سر فاذا اريد ايجاد مشتقاتهم بالنسبة بواسطة المسئلة الجزئية للمتعلقة م (سرد ص) فخذ تفاضل هذه المعادلة هي أولى فيحدث

$$٠ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$$

ومنها

$$\frac{\frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{ص}{ص}$$

وهي المشتقة الاولى

وبأخذ التفاضل مرة ثانية وملاحظة ان $\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$ يحدث $٠ = \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}$ واذا وضعنا فيه مقدار $\frac{ص}{ص}$ السابق ينتج

$$\frac{\frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص}}{\frac{ص}{ص}} = \frac{ص}{ص}$$

وبأخذ التفاضل مرة ثالثة فنجد $\frac{ص}{ص}$ وهم جرا

الباب السابع عشر

(في تعميم قانون نيوتن)

١١٥ لتكن م (سرد ص) متعلقة بالتغيرتين المستقلتين سرد ص فاذا زادتا المفدارين سره صه نصير المتعلقة المفروضة م (سر + سره + صه) ولا يمكن المطلوب نشرها على حسب قوى الزايتين سره صه ولهذا نبديل فيها سره صه بالكميتين سره صه فنصير م (سر + سره + صه) + صه = م (ع) ثم نصير هذه المتعلقة على حسب قوى د بواسطة قانون ما كلوران فنجد

$$\frac{1-2}{1!} + \dots + (0)^{\text{م}} \frac{2^{\text{ر}}}{1!} + (0)^{\text{م}} 2 + (0)^{\text{م}} = (2)^{\text{م}}$$

$$(1) \quad (0)^{\text{م}} \frac{2^{\text{ر}}}{1!} + \frac{1-2}{(0)^{\text{م}}}$$

واذا جعنا الاجل الاختصار

$$\text{ط} = \text{ر} + \text{د} = \text{د} + \text{ص} = 2 + \text{ص}$$

يكون

$$(2)^{\text{م}} = (2 + \text{ط})^{\text{م}}$$

وبأخذ التفاضل يحدث

$$(2)^{\text{م}} 6 = \frac{\text{ط}}{6} 6 + \frac{\text{ص}}{6} 6$$

وبسبب ان

$$\text{ط} = \text{ر} = 2 \quad \text{د} = 2 = \text{ص}$$

نؤول المعادلة الاخيرة الى

$$(2)^{\text{م}} = \frac{\text{ط}}{6} 6 + \frac{\text{ص}}{6} 6$$

وحيث ان تفاضل ط د ذوى المرتبة الثانية منعدم ان يحدث

$$(2)^{\text{م}} 6 = \frac{\text{ط}}{6} 6 + \frac{\text{ص}}{6} 6$$

$$+ \frac{\text{ط}}{6} 6$$

ومنه

$$(2)^{\text{م}} = \frac{\text{ط}}{6} 6 + \frac{\text{ص}}{6} 6 + \frac{\text{ط}}{6} 6$$

وبأخذ التفاضل مرة ثالثة يحدث

فإذا وضعنا هذه المقادير في القانون (١) وجعلنا $s = 1$ يكون

$$\begin{aligned}
 & m(s + s^2 + s^3 + \dots) = m(s + s^2 + s^3 + \dots) + \frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \\
 & \left(\frac{1}{1!} \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \right) + \dots \right) \\
 & \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \right) = \frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \\
 & \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \right) = \frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots
 \end{aligned}$$

وهو قانون تيلور في الحالة المذكورة لكن يشترط ان نبدل في الحد الاخير وهو باقي المتسلسلة s بالكمية $s + s^2 + s^3 + \dots$ بالكمية $s + s^2 + s^3 + \dots$ ونبناء على ما قلناه في المطابق يمكن وضعه على الصورة الآتية

$$\begin{aligned}
 & m(s + s^2 + s^3 + \dots) = m(s + s^2 + s^3 + \dots) + \frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \\
 & \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \right) + \dots \\
 & \left(\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots \right) = \frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{6} + \frac{s^6}{6} + \dots
 \end{aligned}$$

وهذه القاعدة تجري على متعاقبه بتغيرات ياما كان عددها
ولاجل استعمال القانون (ت) فينبغي ان مشتقات م (س و ص) الجزئية لغاية
الترتيبها ١ - ٢ تكون محسوبة ودون التي ترتيبها ٣ تكون خلاف
ذلك مستمرة بين النهايات س و ص + س و ص + ص + ص
(تعميم قانون ماكاران)

١١٦ اذا جعلنا في القانون (ت) س = ٠ و ص = ٠ ووضعنا س و ص

عوضا عن س و ص ثم رمزنا بالرموز $\frac{٠.٢٦}{٦س}$ و $\frac{٠.٢٦}{٦ص}$ و $\frac{٠.٢٦}{٦٣س٦ص}$

لما قول اليه المشتقات الجزئية $\frac{٢٦}{٦س}$ و $\frac{٢٦}{٦ص}$ و $\frac{٢٦}{٦٣س٦ص}$

حينئذ يحصل فيها س = ٠ و ص = ٠ فيحصل

م (س و ص) = م (٠ و ٠) + $\frac{٠.٢٦}{٦س}$ + $\frac{٠.٢٦}{٦ص}$ + $\frac{٠.٢٦}{٦٣س٦ص}$ + $\frac{١}{١٢}$

$\left(\frac{٠.٢٦}{٦س} + \frac{٠.٢٦}{٦٣س٦ص} + \frac{٠.٢٦}{٦٣ص} + \dots \right)$

$+ \frac{١}{(١+٢)!} \left(\frac{١-٢}{١-٢} \frac{٠.٢٦}{٦س} (١+٢) + \frac{١-٢}{١-٢} \frac{٠.٢٦}{٦٣س٦ص} \right)$

$\left(\frac{١-٢}{١-٢} \frac{٠.٢٦}{٦ص} + \dots + \frac{٢-٢}{٢-٢} \right)$

$+ \frac{١}{٢!} \left(\frac{٢-٢}{٢-٢} \frac{٠.٢٦}{٦٣س٦ص} + \frac{٢-٢}{٢-٢} \frac{٠.٢٦}{٦٣ص} \right)$

$\left(\frac{٢-٢}{٢-٢} \frac{٠.٢٦}{٦٣س٦ص} + \dots + \right)$

فينبغي تبديل ط و ع بالكيتين س و ص

(في النهايات الكبرى والصغرى للمتعلقات بجملة متغيرات مستقلة)

١١٧ لتكن m (س د ص) متعلقة بالمستقلين س د ص فيقال انها في نهايتها الكبرى اذا كانت أكبر من m (س ± س د ص ± ص) بفرض س د ص زيادةً في صغريتين بقدر ما يراد فالعلامة المميزة للنهاية الكبرى هي حينئذ ان الفرقين

$$m (س + س د ص + ص) - m (س د ص) د م (س - س د ص - ص) \\ - m (س د ص)$$

يكونان سالبين

ويقال انها في نهايتها الصغرى اذا كانت أصغر من m (س ± س د ص ± ص) فالترقان المذكوران يكونان موجبيين

لنفرض ان المشتقات الثانية ليست لانها ثابتة فنجد بواسطة قانون تيلور (ت)

$$m (س + س د ص + ص) - m (س د ص) = \frac{m}{6} س^2 + \frac{m}{6} س د ص + \frac{m}{6} ص^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{m}{6} س^3 + \frac{m}{6} س^2 د ص + \frac{m}{6} س د ص^2 + \frac{m}{6} ص^3 \right) + ب$$

واذا أخذنا س د ص صغيرين صغرا كافيا تكون علامة الطرفين الثانيين علامة حاصل الجمع

$$\frac{m}{6} س^2 + \frac{m}{6} س د ص$$

ليكن علامة هذه الكمية تنغير بتغير علامتي س د ص فينبغي حينئذ ان يكون

$$0 = \frac{m}{6} س^2 + \frac{m}{6} س د ص$$

وحيث ان س د ص زيادتان اختياريان غير متعلقتا احدهما بالآخرى نؤول المعادلة لسابقة الى

$$(١) \quad 0 = \frac{m}{6} س \quad , \quad 0 = \frac{m}{6} د$$

فبواسطة هاتين المعادلتين يمكن تعيين سر د ص

١١٨ الشرطان (١) اللذان يحددان في النهايات الكبرى والصغرى يدلان على ان التفاضل الكلي للمعلقة المفروضة يكون معدوماً ما كانت سر د ص واذا تحقق ما يحدث

$$م (س + سر د ص + صه) - م (سر د ص) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left(\frac{م}{ص} \right)$$

$$سه + ٢ \frac{م}{ص} سه + \frac{م}{ص} سه + صه \left(\frac{م}{ص} \right) + ب$$

ويجب ان مقادير سر د ص الناتجة من (١) اذا وضعت في هذه المعادلة يحفظ طرفها الثاني علامته (ياخذ سر د ص صغيرين جداً) واذا فرضنا ان المشتقات ذات المرتبة الثانية لاتعتمد به هذه المقادير تكون علامة الطرف المذكور عين علامة الكمية

$$\frac{م}{ص} سه + ٢ \frac{م}{ص} سه + صه \frac{م}{ص} سه + \frac{م}{ص} سه$$

فيلزم حينئذ ان هذه الكمية أو هذه الاخرى الناتجة من قسمة الاولى على صه

$$\frac{م}{ص} سه + ٢ \frac{م}{ص} سه + \left(\frac{سه}{صه} \right) \frac{م}{ص}$$

تكون دائماً موجبة ارسالية مهم ما كانت النسبة $\frac{سه}{صه}$ ولذا يتربط كاهو موضع في مبادئ الجبر ان يكون

$$\frac{م}{ص} سه - \left(\frac{م}{ص} سه \right) < ٠$$

ويحقق هذا الشرط اذا اتحدت علامتا $\frac{م}{ص}$ و $\frac{سه}{صه}$ فتهكون حينئذ المتعلقة المفروضة في نهايتها الكبرى اذا كانت هاتان المشتقتان سالتين وفي نهايتها الصغرى اذا كانتا موجبتين

فاذا فرضنا ان المشتقات ذات المرتبة الثانية تنعدم بمقادير سر د ص الناتجة من (١) فلا يكون للمعلقة نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا انعدمت أيضاً

المشتقات ذات المرتبة الثالثة وكان حاصل جمع المشتقات ذات المرتبة الرابعة لا تتغير علامته

ولو كان عندنا من علامة باكثر من متغيرين لاجرىنا العمل كما سبق
لتكن مثلاً المتعلقة

$$م (س ر ص) = (س - ١) + (ص - ب) + (ص - س) \quad \text{فنجد}$$

$$٦م = (س - ١ - ص - س) + (ص - ٢ - س - ب) + (ص - ٢ - س - ب) \quad \text{ومن المعادلتين}$$

$$٢ س - ص - ١ = ٠ \quad ٢ ص - س - ب = ٠$$

$$\text{يستخرج} \quad س = \frac{١ + ب}{٣} \quad ر = \frac{ب + ١}{٣}$$

وبأخذ التفاضل الكلي ذى المرتبة الثانية يعطى

$$٦م = ٤ س - ٤ ص - ٤ م$$

فيشاهد بسهولة ان $\frac{٤م}{٦} = \frac{٤س}{٦}$ من هذا العلامة وانهم ماموجبان وان

$$\frac{٤م}{٦} = \frac{٤س}{٦} \quad (١ - س) + ٢ = ٢ \quad ٠ <$$

فاذا تكون المتعلقة المفروضة في نهايتها الصغرى بمقدارى س و ص السابقتين
وتساوى النهاية المذكورة $\frac{١ - س}{٣}$

تقرينات

$$١ م (س ر ص) = س (١ - س - ص) \quad \text{فنجد} \quad س = ٢ \quad ر = ٢ \quad \frac{١}{٣}$$

$$م = \frac{١}{٤٣٢} \quad \text{وهى نهاية كبرى}$$

$$٢ م (س ر ص) = س (٢ - س - ٢) + س (٢ - س - ٢) + س (٢ - س - ٢) \quad \text{فنجد}$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{l} \sqrt{\frac{٢}{٣}} = س \\ \sqrt{\frac{٢}{٣}} = ص \end{array} \\ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{٢}{٣}} - = س \\ \sqrt{\frac{٢}{٣}} = ص \end{array} \end{array} \right\} \text{الجواب}$$

٣. المطلوب أقصر بعد خطين مستقيمين أياما كان وضعهما في الفراغ

لتكن $س = ج ط + د ر ص = ه ط + ز و س = ج$
 $ط + د ر ص = ه ط + ز$ معادلات المستقيمين المقروطين
 فبعدهما يكون

$$\frac{(س - د) (ه - ز) - (ز - و) (ج - د)}{(ج - د) + (ه - ز) + (ج - د - ه)} = ب$$

وهو المطلوب

١١٩ لتكن م (س د ر ط و . . . ع) متعلقة بتغيرات عددها ج
 + مرتبط بعضها ببعض بمعادلات مثل

$$(١) \left\{ \begin{array}{l} م_1 (س د ر ط و . . . ع) = ٠ \\ م_2 (س د ر ط و . . . ع) = ٠ \\ \dots \\ م_7 (س د ر ط و . . . ع) = ٠ \end{array} \right.$$

عددها ج فموجب ما تقدم فيبقى ان يكون

$$(٢) \quad ٠ = \frac{م_1}{ج} + \dots + \frac{م_7}{ج} + \frac{ط}{ج} + \frac{د}{ج} + \frac{ر}{ج} + \frac{و}{ج} + \frac{س}{ج}$$

لناخذ تفاضل المعادلات (١) فنجب

$$(٣) \left\{ \begin{array}{l} ٠ = \frac{م_1}{ج} + \dots + \frac{م_7}{ج} + \frac{ط}{ج} + \frac{د}{ج} + \frac{ر}{ج} + \frac{و}{ج} + \frac{س}{ج} \\ ٠ = \frac{م_2}{ج} + \dots + \frac{م_7}{ج} + \frac{ط}{ج} + \frac{د}{ج} + \frac{ر}{ج} + \frac{و}{ج} + \frac{س}{ج} \\ \dots \\ ٠ = \frac{م_7}{ج} + \dots + \frac{م_7}{ج} + \frac{ط}{ج} + \frac{د}{ج} + \frac{ر}{ج} + \frac{و}{ج} + \frac{س}{ج} \end{array} \right.$$

فاذا محو نأمن المعادلة (٢) ج متغيرات بواسطة المعادلات (٣) يبقى فيها

د ع الق عددها ج + د .

ليكن مثلاً م (س د ص د ط) = س ص ط بفرض ان س + ص
+ ط = ١ فنجد

$$\text{ص ط ج} + \text{س} + \text{س ط ج} + \text{س ط ج} = \text{ط} .$$

$$\text{ج} + \text{س} + \text{ص} + \text{ط} = \text{ط} .$$

ويضرب المعادلة الأخيرة في ك وضمها الى الاولى فيحدث

$$(\text{ك} + \text{ص ط ج}) + \text{س} + (\text{ك} + \text{س ط ج}) + \text{ص} + (\text{ك} + \text{س ص ط}) = \text{ط} = \text{ج}$$

$$\text{ك} + \text{ص} + \text{ط} = \text{ج} .$$

$$\text{ك} + \text{س} + \text{ط} = \text{ج} .$$

$$\text{ل} + \text{س} + \text{ص} = \text{ج} .$$

فن هذه المعادلات والمعادلة س + ص + ط = ١ يستخرج

$$\frac{1}{3} = \text{ط} = \text{ص} = \text{س}$$

وهو المطلوب

تمرين

(مسئلة) المطلوب إيجاد السطح المستوي الذي يمر بنقطة معلومة الوضع
في الفراغ ويصنع مع المستويات الاحداثيات أصغرهم

ليكن س د ص د ط احدائيات المنقطة المفروضة فمعادلة كل مستوي
ماريهاتكون

$$(\text{س} - \text{س}') + (\text{د} - \text{د}') + (\text{ص} - \text{ص}') + (\text{ط} - \text{ط}') = 0 .$$

وحجم الهرم يكون

$$\text{ح} = \frac{(\text{س} + \text{د} + \text{ص} + \text{ط}) - (\text{ط}')}{-1}$$

فموجب ما تقدم تجدان

$$\frac{\text{س}'}{\text{ص}} = \text{د} = \text{ح} = \frac{9}{2} \text{ س} \text{ ص} \text{ ط}$$

الباب الثامن عشر
(في النقطة الممتازة)

نقط ضمن الممتازة هي التي تنازع عن سواها ببعض خواص خصوصية وتنفذ سم
الى ستة أقسام وهي

١. نقط التغير

١٢٠ نقطة التغير هي النقطة التي فيها يصير المنحنى مجوفا بعد ان كان محدبا
وبعبارة أخرى هي النقطة التي فيها يقطع المماس المنحنى بشرط وجودها
حينئذ ان تتغير علامة المشتقة الثانية m'' (س) ولا يتحقق هذا الاجرورها
بالصغر أو بالانهاية فإذا ∞ في تعيين النقط المذكورة ان نحل المعادلة

$$m'' = 0 \text{ أو المعادلة } m'' = \infty$$

يمكن مثلا

$$v = b + 2(s - j)^3$$

فبأخذ التفاضل يحدث

$$\frac{v}{s} = \frac{6}{s} (s - j)^2 \text{ و } \frac{v}{s} = \frac{6}{s} (s - j)^2 \text{ و } 12 = \frac{6}{s} (s - j)^2 \text{ و } 12 = \frac{6}{s} (s - j)^2$$

$$\text{ويجعل } 0 = (s - j)^2 \text{ و } 12 = \frac{6}{s} (s - j)^2$$

يحدث $s = j$ وهو من نقطة التغير ومرتبها يكون حينئذ $v = b$

ونأخذ الوجودها نضع $s + s - s = s$ بدل s في $\frac{v}{s} = \frac{6}{s} (s - j)^2$ فنجد

$$\frac{v}{s} = \frac{6}{s} (s - j)^2 \text{ و } 12 = \frac{6}{s} (s - j)^2 \text{ و } 12 = \frac{6}{s} (s - j)^2$$

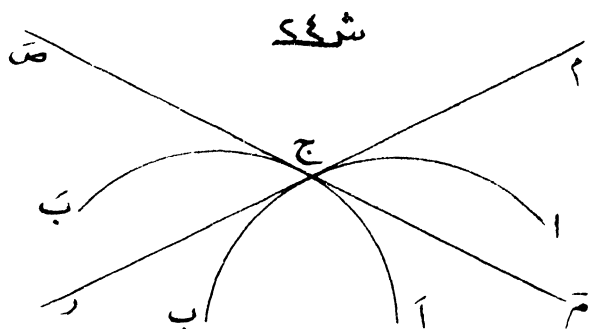
وننتج من اختلاف علامتي هاتين الكميتين ان النقطة المعتبرة هي نقطة تغير

٢. نقط التكرور

١٢١. نقطة التكرور هي النقطة التي يمر بها عدة فروع للحنى وله فيها جـ لـ

عناصر مختلفة (ش ٢٤) وتسمى ثنائية اذا مر بها افرعان وثلاثية اذا مر بها

ثلاثة فروع وهـ جـ رـ



لتكن مثلاً المعادلة

$$ص = ح \pm (س - س) \sqrt{س}$$

فإذا أخذت $س$ مقداراً كبيراً $س$ قليلاً ثم مقداراً آخر أصغر منها تأخذ
 $ص$ مقدارين حقيقيين يؤولان إلى واحد إذا صارت $س = س$ وعليه
 فلامنحني فرعان يمران بالنقطة $س = س$ $ر = ص$ $س = س$ وبأخذ مشتقة
 المعادلة نجد

$$\frac{ص}{س} = \pm (س - س) \sqrt{س} + \frac{س}{س}$$

وبجعل $س = س$ يحدث

$$\frac{ص}{س} = \pm (س - س) \sqrt{س}$$

أعني أن المنحني المفروض مماسين مختلفين في النقطة $(س, ح)$ فهي حينئذ
 نقطة تكرر ثنائية وعلى العموم لتكن المعادلة الجبرية $م(س, ر) = ٠$
 فيحدث منها

$$\frac{\frac{ص}{س}}{\frac{م}{س}} = \frac{\frac{ص}{س}}{\frac{م}{س}}$$

وحيث أن في كل نقطة تكرر للمشتقة مقدارين بالاقبل وأتأخذ ههنا الواحد
 فقط فيلزم حينئذ أن هذا المقدار يكون غير معين أعني أنه يؤول إلى الصورة $\frac{ص}{م}$
 فإذا يكون

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦ص} \text{ د } \cdot = \frac{٢٦}{٣٦}$$

فالنقطة المطلوبة هي التي احداً ~~كل~~ منها يوافقان هاتين المعادلتين والمعادلة
م (سر د ص) = ٠ ولتعيين اتجاه المماسات نأخذ التفاضل الكلي ذا المرتبة

$$\text{الثانية فنجد بلا حطة ان } \cdot = \frac{٢٦}{٦ص}$$

فاذا كانت النقطة ثنائية يلزم ان يكون جذر هذه المعادلة حقيقية ومختلفين
وأما ان كانت ثلاثية فينبغي ان يكون

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦ص} \text{ د } \cdot = \frac{٢٦}{٦ص} \text{ د } \cdot = \frac{٢٦}{٦ص}$$

ونجد المماسات بجعل المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الثالثة وهكذا
يمكن مثلاً المعادلة

$$\cdot = ص - ٢ سر ص - ٣ سر + ٣ سر - سر = ٠$$

فنجد

$$\cdot = ٢ (ص - سر) - \frac{٦ص}{٦ص} - ٢ ص - ٣ سر + ٣ سر - سر = ١$$

ومن المعادلتين

$$\cdot = ص - سر \text{ د } \cdot = ٢ ص - ٣ سر + ٣ سر - سر + ١ = ١$$

يسـتخرج سر = ١ د ص = ١ وهما مقداران يناسبان للمعادلة

المفروضة ولتعيين $\frac{٢٦}{٦ص}$ نأخذ التفاضل الثاني فنجد

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦ص} - \frac{٢٦}{٦ص}$$

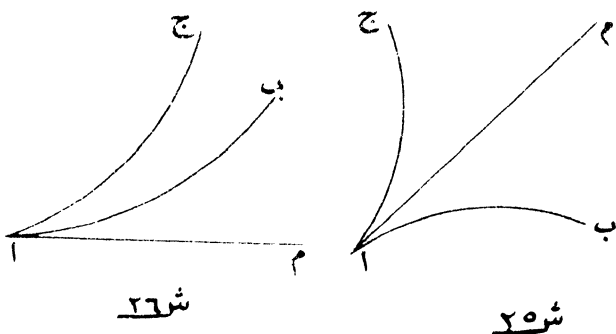
ومنها

$$\cdot = \frac{٢٦}{٦ص} \text{ د } ٢ = \frac{٢٦}{٦ص}$$

فالنقطة سر = ١ د ص = ١ تكون حينئذ ثنائية

٣. نقطة الرجوع

١٢٢. نقطة الرجوع هي نقطة يقف فيها فرعان للمنحنى ولهما انحناء مشترك وتسمى ذات النوع الاول اذا كان المماس بينهما (ش ٢٠) وذات النوع الثاني اذا وجد الفرعان من احدى جهتي المماس (ش ٢٢)



لنكن مثلاً المعادلة

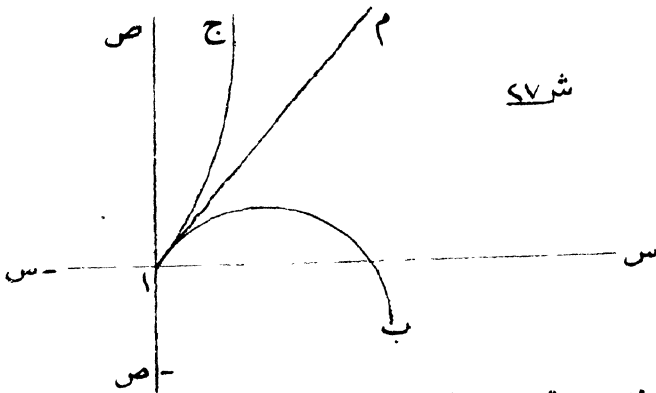
$$x^3 = y \pm x$$

فبحدث

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2} \pm 1 = \frac{y \pm x^2}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{y \pm x^2}{x^3} = \frac{y}{x^3} \pm \frac{1}{x}$$

ويرى بسهولة انه من جهة المعينات الموجبة (ش ٢٧) ص اهم مقداران حقيقيان ويصيران حقيقيين اذا اخذت ص مقادير سالبة فاذا للمنحنى فرعان اب و ا ج منتهيان في نقطة الاصل ولهما مماس مشترك يتعين لتجاهاه بالمعادلة $\frac{y}{x^3} = 1$ ويرى ايضا ان هذه النقطة ذات النوع الاول لانه اذا اخذت ص مقادير صغيرة جدا كان للمشتقة الثانية $\frac{y}{x^3}$ مقادير مختلفة العلامة

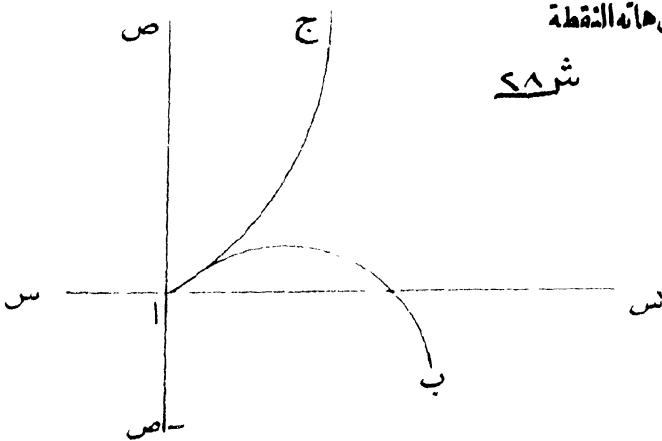


ش ٢٧

وكذا يرى ان للمنفق (ش ٢٨) المميز بالمعادلة

$$٢ ص - ١ ص - ٢ ص + ١ ص - ٢ ص = ٠$$

نقطة رجوع ذات النوع الثاني في الاصل وان محور المميزان مماس للفرعين في هاتئ النقطة



ش ٢٨

وعلى العموم اذا كانت م (س د ص) = ٠ معادلة تجزئية لمنحن وكان المرام الحصول على نقط الرجوع فاننا نبعد عن النقط التي احداثياتها كافية المعادلات

$$٠ = (س د ص) د م = \frac{٢٦}{٦ ص} د ٠ = \frac{٢٦}{٣٦}$$

ثم تختبر المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الثانية اذا كانت تعطي للمشتقة $\frac{٢٦}{٣٦}$

مقدارين متساويين وأخيرا نبحث عما إذا كان المنحني يعتمد من جهتي المماس
المشترك أو من جهة واحدة ففي الحالة الأخيرة تكون النقطة المعنية نقطة
رجوع وتبين نوعها بواسطة علامة المشتقة الثانية

٠٤ النقطة المنفردة

١٢٣ النقطة المنفردة هي نقطة احداها يكافئان معادلة المنحني بدون ان
تكون على فرع من فروعه تسكن مثلا المعادلة

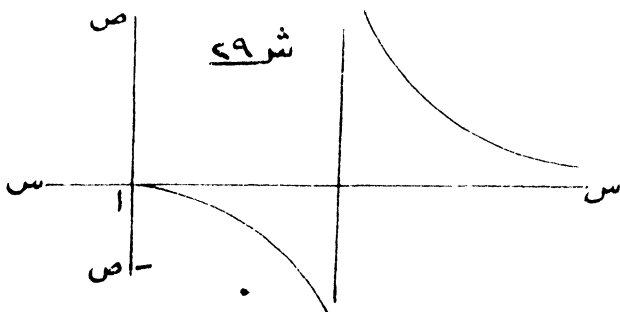
$$ص = (س - ج) \sqrt{س - د}$$

فاذا فرضنا ان $ج > د$ نرى ان $ص$ تصبح تخيلية اذا أخذت $س$ مقدارا
أصغر من $د$ غير المقدار $س = ج$ فان $ص$ تكون صفرا واذا انكون
النقطة $س = ج$ $د = ص$. نقطة منفردة واذا فرضنا $ج > د$
تكون النقطة المذكورة تنائية

٠٥ نقط الوقوف

١٢٤ اذا كان للمعلقة $م (س)$ مقدار يصير صفرا فالمحني المبين بالمعادلة
 $ص = م (س)$ يقف بعنقته نقطة تسمى نقطة الوقوف

لتكن مثلا المعادلة $ص = \frac{1}{لغا س}$ فبكل مقادير $س$ الموجبة تكون $ص$
حقيقية وبكل مقاديرها السالبة تكون $ص$ تخيلية واذا جعلنا $س = ٠$
يكون $ص = ٠$ فالمحني نقطة وقوف في الاصل (شر ٢٩)



٥٦. النقطة المنزوية

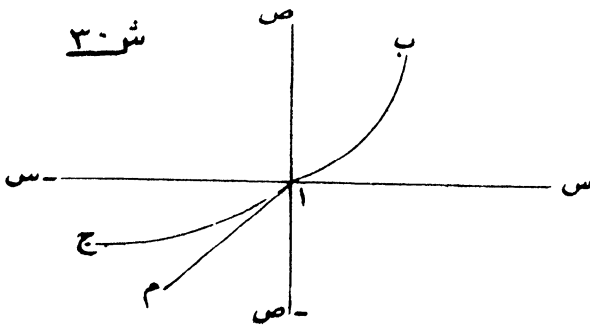
١٢٤ اذا اجتمع فرعان المنحني في نقطة حيث يكون الهماقها بمماسان مختلفان
فسمى تلك النقطة بالنقطة المنزوية فلا تحصيل علمها بكني إيجاد مقدار s الذي
به يكون للمشتقة $\frac{v}{s}$ مقداران مختلفان
ايكن مملا (ش ٣٥) المنحني الممين بالمعادلة

$$\frac{1}{s} = \frac{v}{s} + 1$$

فنجده انه يمر باصل المحورين وله فيه نقطة منزوية ولايجاد معادله في هذه النقطة
يكني بموجب ما قلناه في حاشية المطالب ان تعين نهاية النسبة $\frac{v}{s}$

$$\frac{1}{s} = \frac{v}{s} + 1$$

١٢٥ بفرض ان $s = 0$ فنقول اذا قربت s من الصفر قربت اليكمية $\frac{1}{s}$
منه أيضا ومن $\infty + 1$ على حسب كون



س موجبة او سالبة فيكرر المعادلتى المماسين يكونان حينئذ $\frac{1}{s}$ و $\frac{v}{s}$
وعليه يكون المنحني مكونا من فرعين احدهما موضوع في زاوية المحورين

الموجبين ويسمى محور المعينات في نقطة الاصل والاخر في زاوية المحورين
 السالبيين ويسمى فيها ايضا منصف الزاوية المذكورة
 تعريفات

٥١ على نقط التغير

٥١ ص = خاس (تجدد هذا المسمى نقط تغير لا يخصى عددها موضوع على
 محور المعينات)

$$٥٢ ص = \frac{س}{ج} - \frac{س}{ج} \quad \left(\text{تجدد نقطة تغير احداها} \right) \quad \frac{س}{ج} = \frac{س}{ج} \quad \text{د ص}$$

$$\left(\frac{٨}{٢٧} = \right)$$

$$٥٣ ص = ج ص + د س = ج س + د س فبوضع \frac{٦}{٦} ص = ٠$$

$$\left(\text{تجدد النقطة} \right) ص = ٠ د ص = \sqrt[٣]{٠} = ٠$$

$$\text{وبوضع } \frac{٦}{٦} ص = \infty \quad \left(\text{تجدد نقطة أخرى} \right) ص = \sqrt[٣]{٠} د ص = ٠$$

٥٢ على نقط التكرار

$$٥١ (١ - ص) - (١ + س) س = ٠ \quad \left(\text{نقطة الاصل نقطة ثلاثية} \right)$$

$$٥٢ س + س + س - ٩ ج س + ج ص = ٠ \quad \left(\text{نقطة الاصل نقطة ثلاثية} \right)$$

٥٣ على نقط الرجوع

$$٥١ ص = ج \pm \sqrt[٣]{(س - س)} \quad \left(\text{نقطة رجوع من النوع الاول} \right)$$

وهي س = س د ص = ج

$$٥٢ ص = س (١ \pm \sqrt[٣]{س}) \quad \left(\text{الاصل نقط رجوع من النوع الثاني} \right)$$

٥٤ على النقط المفردة

$$٥١ ص = \pm (س + ج) \sqrt[٣]{س} \quad \left(\text{نقطة مفردة وهي} \right) ص = -$$

$$ج د ص = ٠$$

٥٢. $(س + ص) = ج' = ج' س' + د' ج'$ (الاصل نقطة منفردة)
 ٥٥. على نقط الوقوف

٥١. $ص = \frac{1}{س}$ (الاصل نقطة وقوف)

٥٢. $ص = س$ لغا س (الاصل نقطة وقوف)

٥٦. على النقطة المتروية

٥١. $ص = س$ قو ظا $\frac{1}{س}$ (الاصل نقطة منزوية)

(في تحليل المنحنيات)

١٢٥٠. قد تبصر اننا الآن بواسطة ما قدمناه لكل ما يلزم لتحليل المنحنيات بمناقشة معادلاتها فلذا نحلها ان أمكن بالنسبة الى س أو ص فيتمين لنا من تغير المتعلقة مسير المنحنى وعدد فروعه ونقط تناطعه بالمحورين الاحداثيين الخ ثم تكون معادلة المماس فتعلمنا على النقط التي فيها المماس موازى لمحور

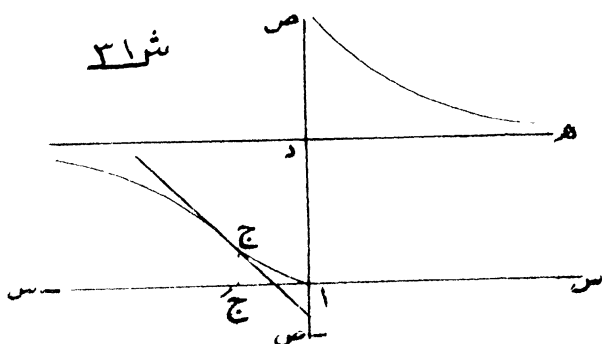
المعينات أو لمحور المرتبان على حسب كون المشتقة $\frac{ص}{س} = ٠$ أو ∞

فغالباً هذه النقط تكون في النهايات الكبرى أو الصغرى وإذا كان للمنفى عدة فروع غير نهائية نجد الخطوط التقريبية بالقواعد الموضحة في الهندسية الجبرية (١) ثم نبعث عن ص وهذا لمعرفة جهة التحديب والتجويف ونقط التغير واخير انعين النقط الممتازة بالقواعد المذكورة في هذا الباب. لتكن مثلاً المعادلة

(١) لتكن $ص = ل + س$ ل معادلة خط تقريبي غير مواز لمحور المرتبان فيمكن وضع معادلة فرع المنحنى الذى يقرب من الخط المذكور على الصورة $ص = ل + س + م$ (س) فتعني ل + ل يجعل $س = \infty$ في $\frac{ص}{س} = \frac{ل + س + م}{س}$ فيحدث بها $\frac{ص}{س} = ل$ ثم في $ص - ل = س + م$ (س) فيحدث بها $(ص - ل) س = م$ وأما الموازى لمحور المرتبان فيتعين بمقادير س التي بها تصبح ص لانها ثابتة

$$\frac{1}{\text{سر}} = \text{ص}$$

فإذا فرضنا أن $\text{سر} = 0$ نصير $\text{ص} = \infty$ وإذا يكون محور المرتبات
(ش ٣١) خطاً تقريباً الاحد فروع المنحنى وكلما زادت سر من هذا المقدار
الى ∞ تنقص ص من ∞ الى الواحد فالحظ هـ الموازي لمحور



المعينات وبعده منه يساوى واحد دايكون خطاً تقريباً أيضاً ويتضح
بسهولة أن الفرع المذکور مجوف من جهة الصادات الموجبة لأن المنطقة
الاولى وهى

$$\frac{1}{\text{سر}} = \frac{\text{ص}}{6}$$

متصاعدة دائماً ولنفرض الآن أن سر تنقص من الصفر الى ∞
فلذا تبدل سر بالكمية سر فى المعادلة المقروضة ونفرض انما تزيد
من الصفر الى ∞ فنجد

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{سر}}} = \text{ص}$$

ويجعل $\text{سر} = 0$ نصير $\text{ص} = 0$ وكلما نقصت سر تنصاعد
أيضاً ص وتساوى الواحد إذا صارت سر لانهاية فنجد فرعاً يخرج من نقطة

$$٠٣ \text{ ص} - ٣ \text{ ج} \text{ ص} + \text{ص}^٣ = ٠ \quad (\text{ورقة ديكرت})$$

$$٠٤ \text{ ص} - ٩٦ \text{ ج} \text{ ص} + ١٠٠ \text{ ج} \text{ ص}^٢ - \text{ص}^٤ = ٠ \quad (\text{الخفي العفريق})$$

الباب التاسع عشر

(في المنحنى ذات الانحنائين)

١٢٦ . المنحنى ذو الانحنائين هو الذي لا يوجد كل نقطه في سطح مستوى (١)

وقد علم في الهندسة الجبرية ان كل معادلة ذات ثلاث متغيرات كالمعادلة

$$\text{ص} = (\text{ص} \text{ د} \text{ ط})$$

تبين سطحاً منسوماً بالنسبة لثلاثة محاور ص د ط وشكله

متعلق بالارتباط الكائن بين المتغيرات ص د ط

وان كل معادلة ذات متغيرتين مثل

$$\text{ص} = (\text{ص} \text{ د})$$

تبين سطحاً اسطوانياً اضلاعه موازية لمحور الاحداثات المحذوفة

وان كل معادلتين مثل

$$\text{ص} = (\text{ص} \text{ د} \text{ ط}) \quad \text{و} \quad \text{د} = (\text{ص} \text{ د} \text{ ط})$$

اذاعتبرتاني آن واحد دللتا على الخط المشترك للسطحين المميزين بكلمتهم - ما

مستقيماً كان أو منحنياً فالمنحنيات ذات الانحنائين تتعين - بمنتهى معادلتين

كالمعادلتين الاخرتين أو بواسطة معادلتين مثل

$$\text{ص} = \text{م} (\text{ط}) \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{م} (\text{ط})$$

وهي أسهل طريقة

(في المماس)

١٢٧ . لتعتبر ط متغيرة مستقلة وانسكن

$$\text{ص} = \text{م} (\text{ط}) \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{م} (\text{ط}) \quad (١)$$

معادلتى مخفى في الفراغ فيرى بسهولة انهما يبينان مسقطى الخفي المذكور على

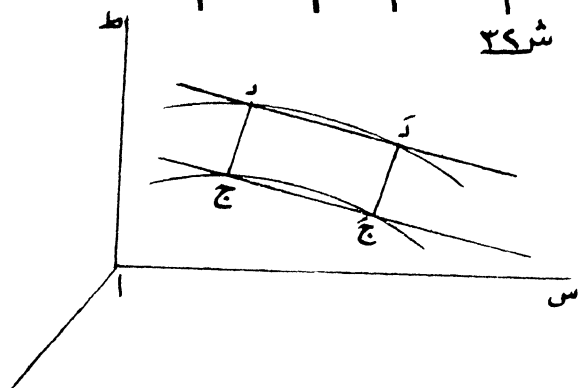
المستويين الاحداثيين $\text{ص} \text{ ط}$ $\text{د} \text{ ط}$.

١٣١
سترى في المطلب سبب هذه التسمية

لتكن سر د ص د ط احداثات نقطة ج مثلا (ش ٣٢) و سر

$$+ \text{سر د ص د ط} + \text{سر د ط} + \text{سر د ص}$$

ش ٣٢



احداثات نقطة أخرى ج فعادلنا المقاطع ج ج تكونان حينئذ

$$\text{سر} - \text{سر} = \frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}} \text{سر} = \text{سر} - \text{سر} = \frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}} \text{سر}$$

فاذا فرضنا ان النقطة ج تقرب من ج يقرب الخط ج ج من المماس

في ج وتقرب $\frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}}$ و $\frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}}$ من نهايتهم $\frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}}$ و $\frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}}$ الاثني توجدان

باخذهم مشتقتي المعادلتين المفروضتين (١) فعادلنا المماس تكونان حينئذ

$$\text{سر} - \text{سر} = \frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}} \text{سر} = \text{سر} - \text{سر} = \frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}} \text{سر} \quad (٢)$$

ومن شكلهما يرى ان مساقط المماس عماسا مساقط المنحني

واذا اريد بيان المنحني بمعادلتين ذات ثلاث متغيرات مثل

$$\text{م} = (\text{سر د ص د ط}) = \text{د} \text{ م} = (\text{سر د ص د ط})$$

فيجد للمماس المعادلتين

$$0 = \frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}} \text{سر} + (\text{سر} - \text{سر}) \frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}} + (\text{سر} - \text{سر}) \frac{\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}}$$

ونجد أيضا

$$\text{حنا صه} = \frac{\frac{\text{صه}}{\text{ط}}}{1 + \left(\frac{\text{صه}}{\text{ط}}\right) + \left(\frac{\text{سر}}{\text{ط}}\right)}$$

$$\text{حنا ظ} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\text{صه}}{\text{ط}}\right) + \left(\frac{\text{سر}}{\text{ط}}\right)}$$

فإذا قربت فط من الصفر تقرب ج من ح وتقرب الزوايا سه د سه
د ظ من الزوايا سه د سه د ظ الحاصلة بين المماس والمحاور فإذا يكون

$$\text{جنا سه} = \frac{\frac{\text{صه}}{\text{ط}}}{\frac{\text{صه}}{\text{ط}} + \frac{\text{سر}}{\text{ط}}} + \text{د حنا سه} = \frac{\frac{\text{صه}}{\text{ط}}}{1 + \frac{\text{صه}}{\text{ط}} + \frac{\text{سر}}{\text{ط}}}$$

$$\text{د حنا ظ} = \frac{1}{1 + \frac{\text{صه}}{\text{ط}} + \frac{\text{سر}}{\text{ط}}}$$

ومنه

$$(٣) \text{ حنا سه} = \frac{\text{سر}}{\text{صه} + \text{ط} + \frac{\text{سر}}{\text{ط}}} \text{ د حنا سه} = \frac{\text{صه}}{\text{صه} + \text{ط} + \frac{\text{سر}}{\text{ط}}}$$

$$\text{د جنا ط} = \frac{\text{ط}}{\text{صه} + \text{ط} + \frac{\text{سر}}{\text{ط}}}$$

(في المستوى العمودي)

١٢٩ • المستوى العمودي لمنحن هو المستوى العمودي على المماس في نقطة التماس

لنكن سر د ص د ط احداً فانقطة القاسم في كل مسة متوابعها يكون له معادلة كهذه

$$٠ = (س - س) + ب (ص - ص) + ج (ط - ط)$$

ولكي يكون عودا على المماس المميز بالمعادلتين

$$س - س = \frac{ج}{ط} (ط - ط) \quad د - ص = \frac{ب}{ط} (ط - ط)$$

$$\frac{ج}{ط} = \frac{ب}{ج} \quad \frac{د}{ط} = \frac{ا}{ج}$$

فمعادلة المستوى العمودي نصير حينئذ

$$٠ = ط - ط + \frac{ج}{ط} (ص - ص) + \frac{د}{ط} (س - س)$$

أو

$$(٤) \quad ٠ = ط (ط - ط) + ج (ص - ص) + د (س - س)$$

وهو المطلوب

(في تفاضل قوس المنحن)

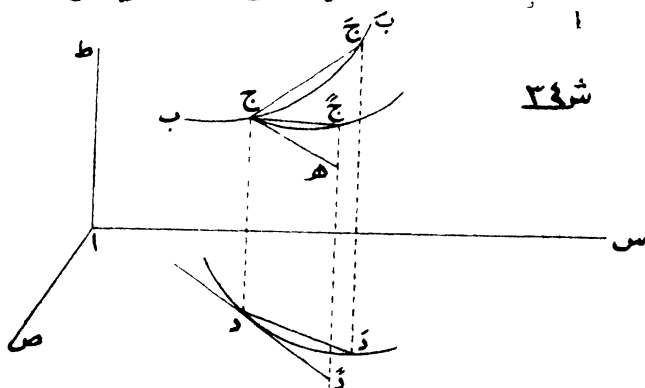
١٣٠. ليكن (ش ٣٤) ب ب منحنيا مرسوما بالنسبة للمعايير ا س د

ا ص د و ا ط فاذا مررنا بالحرف و لطول القوس المعتبر من نقطة ثابتة

ب الى النقطة ج ذات الاحداثان س د و ط تكون و متعاقبة

بالتغيرات المذكورة ولنفرض ان س + د + ص + ط

+ ط تكون احداثان نقطة ثانية مثل ج تكون قرينة من الاولى و دد



مسقط القوس ج ح على المستوى م ص وانرسم المستوى المار بالمستقيم
ج د والمماس للاسطوانة السقطية ج ح د د في هذا الخط فيشتمل هذا
المستوى على المماس ج ح للمنفخ ج ح وعلى الخط د د المماس للمنفخ
د د واذا بسطنا الاسطوانة عليه فالقوس ج ح يصير القوس المستوى ج ح
والقوس د د يتحول الى الخط المستقيم د د واتجهل قوس ج ح = ف ح د
قوس د د = ف ح ونرسم ج ه موازيا للخط د د فحيث ان بعدى
القطعتين ج د ج من السطح م ص متساويان يكون ج ه = ف ط
ولكن ج ه = د د = ف ح فاذا يكون وتر ج ح = ف ح + ف ط

ونجد بسبب مولة ان وتر د د = ف ح + ف ص وقد تقدم لسان نم اية
نسبة قوس مستوى لوتره تساوى واحد انما اية الكميتين

$$\frac{\text{ف ح}}{\text{ف ح} + \text{ف ص}} \text{ و } \frac{\text{ف ح}}{\text{ف ح} + \text{ف ط}}$$

تكونان منتهذا واحدا

انفرض ان الثانية تكون مساوية للكمية ع مثلا فيحدث

$$\text{ف ح} = \text{ع} (\text{ف ص} + \text{ف ط})$$

وبوضع هذا المقدار في الاولى فيخرج

ف ح

$$\text{ع} (\text{ف ص} + \text{ف ط}) + \text{ف ط}$$

ف ح

$$\text{ع} (\text{ف ص} + \text{ف ط}) + \text{ف ط}$$

و

$$1 = \frac{\frac{\text{ف ح}}{\text{ف ط}}}{1 + \frac{\text{ف ص}}{\text{ف ط}} + \frac{\text{ف ص}}{\text{ف ط}}}$$

ومنها

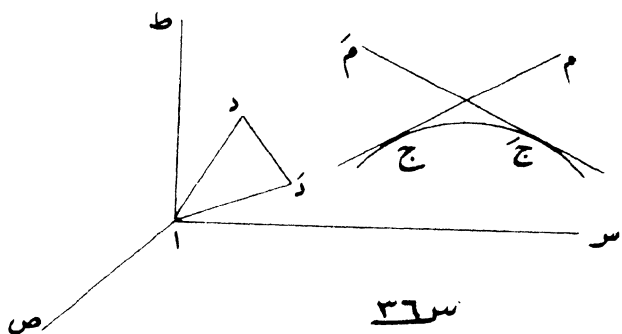
في الفراغ انحناء آن الاول هو انحناءه في مستوية الالتصاق ويتعين نصف قطره بالقانون المعلوم

$$\frac{نق}{ص} = \frac{١}{ن}$$

والثاني هو نسبة الزاوية ز (وتسمى زاوية الالتواء) الحاصلة بين المستويين الالتصاقيين في ج ر ج الى القوس ج ج = ص فيتعين نصف قطره بالمعادلة

$$\frac{ز}{نق} = \frac{١}{ص}$$

١٣٢ . لنبحث عن مقدار نق ولذا ينبغي انما ان نعين زاوية التماس سر فبقولنا يمكن سر د ص د زوايا المماس للحنق في النقطة ج مع المماسير الاحداثية (ش ٣٦)



و سر + فر د ص + فر ص د + فر د ج + فر ج د = ١
ج م مع المماسير المذكورة وليكن اد ر اد خطين موازيين لهماذين
المماسين فاذا جعلنا اد = اد = ١ يكون المثلث اد د متساوي
المساقيين والزاوية د اد تعادل الزاوية سر ويحدث

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{د د}$$

وبفرض نر كمية صغيرة يمكن ان يجعل

$$\text{د د} = \text{د د}$$

ويرى بسهولة ان احداثات النقطة د هي جناسه و جناسه و جناسه

فاحداثات د تكون حينئذ

$$\text{جناسه} + 6 \text{ جناسه}$$

$$\text{جناسه} + 6 \text{ جناسه}$$

$$\text{جناسه} + 6 \text{ جناسه}$$

واذا بهما يكون

$$\text{د د} = \text{نر} = \sqrt{(6 \text{ جناسه}) + (6 \text{ جناسه}) + (6 \text{ جناسه})}$$

فبوضع هذا المقدار في القانون

$$\frac{\text{نر}}{6} = \frac{1}{\text{نق}}$$

نجد

$$\sqrt{\left(\frac{6 \text{ جناسه}}{6}\right) + \left(\frac{6 \text{ جناسه}}{6}\right) + \left(\frac{6 \text{ جناسه}}{6}\right)} = \frac{1}{\text{نق}}$$

وهو المطلوب

(نظريات على المنحنى البرمى)

١٣٣ • المنحنى البرمى هو من مرسوم على اسطوانة قائمة ذات قاعدتي

مستديرة بحيث يقطع اضلاعها فيحدث معها اى الاضلاع زوايا متساوية

وكيفية انشاؤه انه ياف على الاسطوانة مستو مرسوم فيه مستقيم ليس عمودا

على الاضلاع المذكورة

انفرض ان المحاور الاحداثية تكون (ش ٣٧) محورا الاسطوانة ط

والمستقيم اب (المار بالنقطة ب التي فيها يلاقى المنحنى ب ج المستوى

ومنها $\frac{ص}{ط} = - \frac{ص}{ع} \text{ نق} \quad \text{و} \quad \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ع} \text{ نق}$

١٣٤. لنضع في القانونين (٢) من مطالب مقدار $\frac{ص}{ط}$ و $\frac{ص}{ط}$

السابقين فيحدث لمعادتي المماس في النقطة ج

$\frac{ص}{ط} - ص = - \frac{ص}{ع} \text{ نق} (ط - ط) \quad \text{و} \quad \frac{ص}{ط} - ص = \frac{ص}{ع} \text{ نق} (ط - ط)$
وبمحو $ط - ط$ نجد

$(ص - ص) ص + (ص - ص) ص = ٠ \quad \text{أو} \quad ص ص + ص ص = \text{نق}$

فيعلم من المعادلة الأخيرة أن مسقط المماس على المستوى $ص ص$ مماس بقاعدة الاسطوانة في النقطة هـ لتكن م نقطة تلاقي المستوي $ص ص$

بالمماس للبرمي فيجذب المثلثين الزائغين الزاوية ب ج هـ د م ج هـ ان م هـ

$= ب هـ$ أعني ان م هـ مساوية لوس ب هـ ومن هنا يظهر ان المنحنى م ج

الذي ترسمه النقطة م حينما يتحرك المماس م ج يكون منتشره محيط طاءة

الاسطوانة فهو حينئذ دائرة محيط الدائرة المذكورة ولايجاد معادلته نفرض

$ط = ٠$ في معادتي المماس ثم نغني الكميات $ص$ و $ط$ بواسطة

معادلات المنحنى البرمي فيجد

$ص جتا = \frac{ص + ص - \text{نق}}{\text{نق}} + ص ط \quad \text{و} \quad \frac{ص + ص - \text{نق}}{\text{نق}} = \text{نق}$

(ملحوظ) المنحنى م ج المذكور هو أيضا خط تقاطع السطح المسمى بالسطح

البرمي قابل البسط وهو سطح ناقص من قعر المماس على المنحنى البرمي

١٣٥. اذا وضعنا مقادير $ص$ و $ط$ و $ط$ المعلومه من المعادلات

(٢) في القانون (٥) من المطالب نجد

$$\sqrt{6} = \text{نق} \sqrt{1 + \epsilon^2} \quad (٤)$$

وهو تفاضل طول قوس من البرمى لجيوب متجهات الزاوية الناتجة منه والمحاور الاحداثية تكون حينئذ

$$\frac{\text{حنا ص}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \text{حنا ص} \quad \frac{\text{حنا ح}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \text{حنا ح}$$

$$\text{حنا ظ} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{6}} \quad (٥)$$

فن المعادلة الاخيرة لم تكن قدم في التعريف اذ زاوية المماس والمحور ا ط الموازي لاضلاع الاسطوانة كمية ثابتة ومن المعادلات (٤) و (٥) يستخرج

$$\frac{\sqrt{6} \text{ حنا ص}}{\sqrt{6}} = \frac{\text{حنا ص}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad \frac{\sqrt{6} \text{ حنا ح}}{\sqrt{6}} = \frac{\text{حنا ح}}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad \frac{\sqrt{6} \text{ حنا ظ}}{\sqrt{6}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}$$

فاذا وضعنا هذه المقادير في قانون نصف قطر الانحناء الاول اتى أنه يعادل $(1 + \epsilon^2) \text{ نق}$ أعني أنه كمية ثابتة

الباب العشرون

(في المستوى المماس للسطوح المنحنية)

١٣٦ • لتكن م د ص د ط احداثيات النقطة ج القائمة على

السطح المنحني المبين بالمعادلة $\text{م}(\text{م د ص د ط}) = ٠$ فاذا فرضنا ان سطحاً آخر $\text{م}(\text{م د ص د ط}) = ٠$ يمر من النقطة المذكورة فيمقطع السطحان على خط منحنى يتعين بالمعادلتين

$$\text{م}(\text{م د ص د ط}) = ٠ \quad \text{م}(\text{م د ص د ط}) = ٠$$

واذا رسمنا في النقطة ج مماساً لهذا المنحنى فتمكون معادلاته (مطلب)

$$(١) \quad \frac{\text{م}}{\sqrt{6}} + \frac{\text{ص}}{\sqrt{6}} + \frac{\text{ط}}{\sqrt{6}} = ٠$$

$$(٢) \quad ٠ = \frac{م}{ط} (ط - ط) + \frac{م}{ص} (ص - ص) + \frac{م}{س} (س - س)$$

وكتاهما تبين مستويا مارا بالذاماس

وحيث ان المعادلة (١) خالصة من المتعلقة م فالستوى المبين بها غير متعلق بالمنحنى المار بالنقطة ج ومن هنا يعلم انه اذا رسم على السطح المنحنى المفروض عدة خطوط منحنية مارا بالنقطة ج فان كل المماسات لهذه المنحنيات تكون في المستوى المبين بالمعادلة (١) وهو حينئذ المستوى المماس

١٣٧. الخط العمودي على السطح في ج هو العمود على المستوى المماس في تلك النقطة

لتكن

$$س - س = ج (ط - ط) \quad د - د = ز (ط - ط)$$

معادلتيه فلتعبر عن الكميتين $ز$ و $د$ نلاحظ ان مسقطيه على المستويين $س$ و $د$ عموديان على أثرى المستوى المماس في المستويين المذكورين فاذا يكون

$$\frac{\frac{م}{ص}}{\frac{م}{ط}} = د \quad \frac{\frac{م}{س}}{\frac{م}{ط}} = ز$$

وبهذا تصبح المعادلتان السابقتان

$$س - س = \frac{\frac{م}{س}}{\frac{م}{ط}} (ط - ط) \quad د - د = \frac{\frac{م}{ص}}{\frac{م}{ط}} (ط - ط)$$

ويمكن وضعهما على الصورة

$$\frac{س - س}{\frac{م}{س}} = \frac{د - د}{\frac{م}{ص}} = \frac{ط - ط}{\frac{م}{ط}}$$

واذا رسمنا بالحروف $س$ و $د$ و $ط$ للزوايا الحاصلة بين العمود والمحاور الاحداثية نجد

$$\begin{array}{c}
 \text{حناصة} \quad \text{حناصة} \quad \text{حناظ} \\
 = \frac{٢٦}{٦٥} = \frac{٢٦}{٦٥} = \frac{٢٦}{٦٥} \\
 \text{حناصة} + \text{حناصة} + \text{حناظ} \\
 = \left(\frac{٢٦}{٦٥} \right) + \left(\frac{٢٦}{٦٥} \right) + \left(\frac{٢٦}{٦٥} \right)
 \end{array}$$

(في الوشور والاسطوانة الهبطية بسطح منحنى)

١٣٨. اتسكن ج (ح د هـ) د ج (ح د هـ) نقطة معلومتين
 باحداثياتهما وليكن المرام نعين المستوي المار بهما اماما للسطح المجين
 بالمعادلة م (س ر ص ط) = . فنقول ان كل مستوي مماس للسطح
 المقروض تكون معادلته

$$= \frac{٢٦}{٦٥} (س - س) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - ص) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - ط)$$

وحيث انه يلزم ان يمر بالنقطة ج د ج ينبغي ان يكون

$$= \frac{٢٦}{٦٥} (س - هـ) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - د) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - هـ)$$

$$= \frac{٢٦}{٦٥} (س - هـ) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - د) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - هـ)$$

فبواسطة هاتين المعادلتين والمعادلة م (س ر ص ط) = . نجد مقادير

س ر ص ر ط التي هي احداثيات نقطة التماس

ومن هنا يتضح انه نقطة واحدة ج (ح د هـ) غير غالبة اماما للسطح
 مماسات لا يحصى عددها وان احداثيات نقطة التماس توافق المعادلتين

$$(٣) \quad = \frac{٢٦}{٦٥} (س - هـ) + \frac{٢٦}{٦٥} (ص - د) + \frac{٢٦}{٦٥} (ط - هـ)$$

• = م (سر و صد و ط)

الذين يذبحون ذبائحهم في القاص

ويظهر بسهولة ان المستقيمات التي تصل النقطة ج بنقطه المضي المذكور
تمس السطح المقرض وانما تشكل موشور محيطه طابه تعين معادته أى الموشور
بحوض $\delta \delta \delta$ من معادلاتي أحدها ان المستقيمات $\delta \delta$ معادلتى منحى المماس
١٣٩ . افترض ان النقطة ج ($\delta \delta \delta$) تكبر على المستقيم المبين

ماداد لکھیں

(۱) ط غ = م ، ط ع = س

نمکون $\gamma = \epsilon$, $\delta = \zeta$

وتصير المعادلة (٣)

$$= \frac{16}{9} \left(\frac{9}{8} - 1 \right) + \frac{16}{27} \left(\frac{27}{8} - 9 \right) + \frac{16}{81} \left(\frac{81}{8} - 27 \right)$$

فلو فرض ان هـ نزداد الى ما لانهاية لآت هذه المعادلة الى

$$\cdot = \frac{m}{p} + \frac{m}{q} \varepsilon + \frac{m}{s} \varepsilon^2$$

وهي مع مادة السطح بينان المنخفض الذي يكون فيه السطح ممسوسا

• بالامطوارة التي اضلاعها موازية للخط (١)

و يرى بسهولة ان المعادلة الاخيرة تدل على ان المستوى الامامى مواز للخط

المذكور (١) فهي تبين حيث لا سطحاً محتوياً على كل نقطة التماس فلا تصيل

على معادلة الاسطوانة المحيطة بالسطح يمكن حذف σ_r و σ_θ من المعادلتين

$$(p - p_1) \varepsilon = s - s_1, (p - p_2) \varepsilon = s - s_2$$

اللاتين يمينان أحدهما لاع الاسطوانة ومن معاداتي منصف القماس

(تطبیق)

يمكن المعادلة ذات الدرجة الثمانية

اسرّا + اصوّا + اطاّا + ۲ ب س + ۲ ب ص + ۲ ب ط + ف = .

فقد

$\frac{6}{6} = \frac{6}{6} (ب + ص) \quad \frac{6}{6} = \frac{6}{6} (ب + ط) \quad \frac{6}{6} = \frac{6}{6} (ب + ا)$
 فعادة المتوى المماس تكون حينئذ

$$+ (ا_1 ص - ص_1 ب) + (ا_2 س - س_1 ب)$$

$$= (ا_1 ط - ط_1 ب)$$

ويعكس وضعها على الصورة

(ا س ب) + (ا ص ب) + (ا ط ب) +

• = ف + ب + ص + س +

و بتبدیل سر در صراط بالکمبات حریر و حریر

$$h(\bar{a} + \bar{b}) + s(\bar{a} + \bar{b}) + z(\bar{a} + \bar{b})$$

• = ف + بَ + بَ + بَ + بَ +

وهي ذات الدرجة الاولى بالنسبة الى σ و ρ و τ فينتج من ههنا ان

الموشور المحيط بالسطح ذي الدرجة الثانية يسمى على منحني مستو .

والاسطوانة لمخيطات التي اضلاعها موازية للمستقيم

سر = طء ، ص = طع

تمس السطح المفروض على من وجود في المستوى

$$\cdot = \bar{b} + \bar{a} + \bar{c} (\bar{b} + \bar{a}) + \bar{e} (\bar{b} + \bar{a})$$

وتكون معاملة التاجر مع العميل على السطح

$$\frac{b-b}{b+b} = \frac{m-m}{m+m} = \frac{s-s}{s+s}$$

الباب الحادى والعشرون

في المنحنيات الغلافية

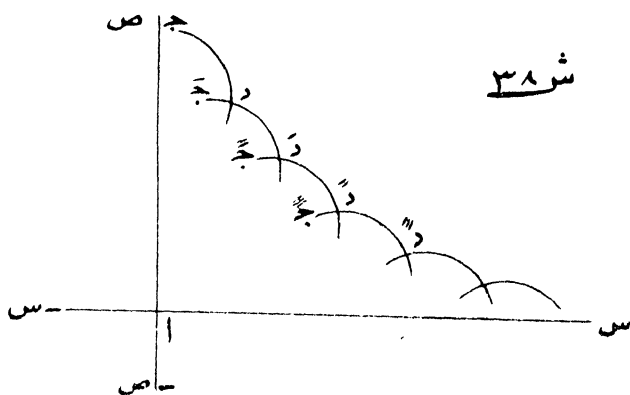
١٤٠. لیکن م (سر و ص ر ج) = • معادله منحن مستقیمه

على كمية غير معينة ج. واتسكن د. كمية صغيرة موجبة أو سالبة فإذا فرضنا
على التوالي ان هـ. تأخذ المقادير

ॐ नमो भगवते वासुदेवाय ॥ १ ॥

نجدث عدة مضنيان (شہ ۳۸) ج ر ج ر ج ر ... تقاطع غالباً

اثنين اثنين في النقط د د د د د



ويتعين احداثا للنقطة ج بواسطة المعادلتين

$$(1) \quad \bullet = (s + \text{سرد صرد ج}) \text{ م } \bullet = (\text{سرد صرد ج}) \text{ م}$$

وبتبدیل : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ فیہما علی التوالی بالمقادیر : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

+ ٣٥٠٠ يعين احدا منا كل من النقط الاخر ج ر ج د ر
فبنتج من هـ انا انه اذا صحونا من المعادلتين السابقتين المكمية ج فحدث معادلة

كهذه م (س ر ص ر س) = . تبين منحني سايير بالنقط د ر د ر

د د د ... واذا فرضنا ان د تتناقص جدا فاقرب هذه النقطة

بعضهم امن بهض وتشكل في النهاية مسير هندسيات تكون معادلاته

$$\bullet = م (س و ص) = \bullet$$

و يسمى هذا المسير غلاف المتحنيات المبينة بالمعادلة المقروضة وتسمى هذه المتحنيات بالمغلوقات

ويرى بسهولة انه يمكن ايجاد المعادلة الاخيرة بحذف الكمية ج في المعادلة المقروضة ومن مشتقاتها بالنسبة الى ج لانه من المعلوم ان

$$م (س و ص و ج + س) = م (س و ص و ج) + س م$$

$$(س و ص و ج + س)$$

فالمعادلتان (١) تصيران

$$م (س و ص و ج) = \bullet د م (س و ص و ج + س) = \bullet$$

وباخذ النهاية يحدث

$$م (س و ص و ح) = \bullet د م (س و ص و ج) = \bullet \quad (١)$$

وهو ما اردنا بيانه

(نظرية) الغلاف يس كل المغلوقات

لتكن ج نقطة مشتركة للغلاف والمغلف ما قبل المماس للمنفى الثاني في هذه النقطة يكون

$$\frac{\frac{م}{س}}{\frac{م}{ص}} - = \frac{م}{س}$$

وميل مماس الغلاف في النقطة المذكورة يوجد باخذ مشتقة المعادلة م (س و ص) = \bullet لكن حيث ان هذه المعادلة ناشئة من حذف ج

بين المعادلتين (١) فنحصل على المشتقة المطلوبة باعتبار ج في أولهما متعلقة بالمشتقتين س و ص مبينة بثانيتها فاذا ايدى كفى اخذ مشتقة

م (سر د ص د ج) = . السكينة فيحدث

$$. = \frac{م}{ص} + \frac{م}{ص} \frac{م}{ج} + \frac{م}{ص} \frac{م}{ج}$$

وحيث ان $\frac{م}{ج}$ أو م (سر د ص د ج) = . نؤل هذه المعادلة الى

$$. = \frac{م}{ص} + \frac{م}{ص} \frac{م}{ج}$$

ومنها

$$\frac{\frac{م}{ص}}{\frac{م}{ص}} - = \frac{م}{ص}$$

وهو عين المقدار السابق فلان محنيين المذكورين في النقطة ج مما س واحد
فهما حيت من ماسان وهو المطلوب

(نطبق)

المطلوب غلاف المستقيمات المبينة بالمعادلة

$$ص = ج + سر + \frac{م}{ج}$$

المقروض فيها ان ج كية غير معينة

لناخذ مشتقاتها نسبة الى ج فيحدث

$$. = \frac{م}{ج} + \frac{م}{ج} \frac{م}{ج}$$

وبجذف ج من هاتين المعادلتين نجد معادلة الغلاف وهي

$$أ' ص' + ب' س' = أ' ب'$$

أعنى انه قطع ناقص

(تعميمات)

١. المطلوب غلاف المستقيمات المبينة بالمعادلة

$$. = ص + ج + س$$

$$س' = ٤ ص$$

الجواب

٢. غلاف مستقيم طوله l وطرفاه منحركا على ضلعي زاوية قائمة

$$\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{r}{3} + \frac{r}{3} \quad (\text{الجواب})$$

٣. غلاف العواميد للمنحنى $ص = م (س)$

(الجواب) هو منتهى المنحنى المنعروض

(في السطوح الغلافية)

١٤١. لتكن $م (س د ص ر ط د ج) = ٠$ معادلة سطح تحتوي على كمية $ج$ غير معينة فيرى كما تقدم انه اذا انحوت هذه الكمية بين المعادلتين

$$م (س د ص ر ط د ج) = ٠$$

$$م (س د ص ر ط د ج + د) = ٠$$

تحدث معادلة كهذه $م (س د ص ر ط) = ٠$ تبين سطحين بخطوط تقاطع السطوح الناشئة من المعادلة المقروضة واذا تناقصت $د$ فتقرب هذه

الخطوط بعضها من بعض وتشكل سطحاتكون معادلتها $م (س د ص ر ط) = ٠$ وهي ناتجة من حذف $ج$ بين المعادلتين

$$م (س د ص ر ط د ج) = ٠$$

$$م (س د ص ر ط د ج) = ٠$$

فهذا السطح يسمى بالغلاف وخطوط التقاطع المذكورة سماها المهندسون الشهير موليج (١) بالخطوط التعريفية وهي تبين بالمعادلتين السابقتين

لا يمكن مثلا المطلوب غلاف الكرة التي مركزها يتحرك على محيط دائرة معلومة لنفرض ان هذه الدائرة تكون في المستوى الاحداثي $ص ص$ ومركزها في الاصل فتكون معادلتها

$$ج^2 = د^2 + د^2 \quad (١)$$

وتكون معادلة الكرة

(١) هو أحد الرياضيين القروساويين البكار ولد سنة ١٧٤٦ ومات في سنة

١٨١٨ وهو مخترع الهندسة الوصفية

(٢) $(س - ج) + (ص - د) + ط = نق$
 فاذا محونا د من هاتين المعادلتين نحصل معادلة تحتوي على المتغيرات س و
 ص و ط و ج فلنأخذ مشتقة المعادلة (٢) باعتبار د متعلقة بالمتغيرة
 ج مبنية بالمعالة (١) فيحدث

$$س - ج = \frac{د}{ص} (ص - د) + ج$$

ومن (١) ينتج

$$\frac{د}{ص} - = \frac{د}{ص}$$

فتقول المعادلة السابقة الى

$$س - ج = د (ص - د) = د$$

أو $س - د = ص - د$ (٣)

فاذا محونا من (١) د (٢) د (٣) السكيتين ج د يحدث

$$(س + ص + ج) = نق - د = د (س + ص)$$

وهي معادلة الغلاف المطلوب

(تقرينان)

١. المطلوب غلاف المستويات المماسية للشجبيين أحدهما موجود
 في المستوى الاخرى س ط والاخرى ص ط
 (الجواب)

$$ط = د + س + ج$$

٢. المطلوب غلاف مستوي ومركزه مار بنقطة معلومة وبعده من نقطة أخرى
 معلومة أيضاً يكون ثابتاً اذا كانت ب هي البعد المقروض وكانت

$$م = س + د + ص + ط - ه$$

معادلة المستوى فيكون الجواب

$$(ه - ب) (س + ص) - ب (ط - ه) =$$

قد تم طبع الجزء الاول من حساب التفاضل بطبعة بولاق الاميرية في أوائل
 شهر ربيع الاول سنة ألف ومائتين وتسع وتسعين هجرية وبليمة الجزء الثاني في
 حساب التكامل هذا ولما كانت التأليف هدفها تهتم الامتداد والاعتراض
 أتيت راجيا من الواقفين على كتابي هذا من اهل العلم ان يسدوا سدا للاعضاء
 على ما عساهم أن يعثروا عليه مما لا أبرئ نفسي منه من الغلات والفاط لاسيما
 وانه في ما علم أول تأليف عربي في هذا العلم ظهر بالبلاد الشرقية

وكما يقال كل شيء صعب في أوله ولهذا الرجوع من اهل

الفضل عو ما واخواني المصير بين خصوصا

ان يتلقوه بيد القبول وينظروه بعين

الرضا التي لا يراهم الا بها

صادق الاخاء

شفيع



