

**THE BOOK WAS
DRENCHED**

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191139

UNIVERSAL
LIBRARY

حساب التفاضل والتكامل
ترجمة الفقير محمود بن أحمد مدرس العلوم
الفلكية بمدرسة المهندمخانة
الحدوية الكائناتية بولاق
مصر المحمية



(بسم الله الرحمن الرحيم)

نحمدك اللهم على تفضلك بتفاضل النسب والأُنساب * وتكرمك بتكامل
 مارزقته بغير حساب * ونصلي ونسلم على نبيك الذي جاء بالدوال القواطع *
 وبلغت النهاية الكبرى * مجزاته السواطع * هندوس انبياء الانبياء الام الخالية *
 ومهندس مجارى بحر الشريعة بالهندسة العاليه * من أقام بما ارشدنا اليه
 من اساس معرفتك الحدود * ورسم جيوب ظل كرمك الظليل الممدود * صلى
 الله وسلم عليه وعلى آله الواصلين الى طريق النهايات * واصحابه البالغين في كليات
 المعادلات اقصى الغايات * وبعد فيقول الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم
 الفلكيه * في مدرسة دار الهندسة الداورية الملكية * الكائنه بيولا ق مصر
 المحروسه * سرف الله عنها سكاره الدهر وبؤوسه * ان مكارم الحضرة الاصفية
 الخديويه * والدولة المحمدية العلويه * قد تدفق بحر احسانها المديد الكامل
 وعم الديار المصرية بفيضه العميم الشامل * فرد على مملكتها ضالتها * واعاد اليها

فيها على غيرها وادلتها * بانشاء ما أبدع من الآثار الحسنة الجميلة * والمآثر
 الجليلة الجليلة * التي لا تحصر ولا تحصى * ولا تستقرى ولا تستقصى * مع
 تحديد مدارس من معالم العلوم والفنون * واطهار ما خفي من سرها المصون
 المكتنون * حيث اوجدناها فيها بأسرها * واحياها بحشرها ونشرها * بعد ان
 محيت آثارها مددا مديده * وعفت رسومها ازمنة عديده * حتى ألبسها حلة
 الكمال * وأفرغها في قالب الحسن والجمال * فكانت سبيكة ابريز * وما ذلك
 على العزيز عزيز * ولما كان العلم الرياضي من أحسن تلك العلوم وإبهاها *
 وابهج هاتيك الفنون وازهاها * وكنت منذ دخلت هذه المدرسة وأنا فتي
 في عداد التلامذة * ما فتئت انعلم حتى صرت فيها من الأساتذة * وقت بوظيفة
 التدريس مدة سنين * مستظلا بظل الاحسان والله يحب المحسنين * تعاملت
 مع الطلبة احسن التعامل * وأقرأتهم كتاب الموسمو بوشارلا في حساب
 التفاضل والتكامل * وحيث اني لو حظت بأعين العناية * ويسرلى الله سبيل
 الهداية * بادرت الى عبارته الفرنسية بالترجمة والتعريب * ونظمها في سلك
 براعة التسهيل والتقريب * حيث بسطت بعض العبارات * ووضحتها زيادة على
 ما في الاصل من الاشارات * وجعلتها على طرف الثمام للمجتدى * لتتناولها
 يد الطالب المبتدى * ونزعتها عن العجر والجبر * ومثلتها طبعاً بطبعة الحجر
 ثم انى ضمنت اليها درر فوائده * تعدت في سمطها فرائده * يكثر نفعها في علم الميكانيك
 وغيره * مما يلوح وجه ثمرته وخيره * والحقت بها نبذة في علم الضوء جليلة
 الشأن * قد ألفها جناب ناظر مدرستنا الآن * وهو حضرة لامبيريك صاحب
 البراعة * المحرز لقصب السبق في ميادين البراعة * ولما كانت تلك الترجمة كتاباً
 عظيماً * وصارت بهاتين الصفتين عقد انظما * وكان الجناب العالى * ذو الهمم
 والمعالى * من هو الفرد الجامع بين المعارف والعوارف * والتالد من المجد
 والطارف * العارف بأفنان الفنون منظوقاً ومفهوماً * امير اللوآء ادهم بيك
 مدير المدارس عموماً * قد شرفها باطلاعه الشريف عليها * واسعدنا بنظره
 السعيد اليها * صدر امره الكريم بطبعها * ارادة لتكثير ثمرتها ونفعها * حيث

انس من ارشدها * وعلم انها قد بلغت اشدها * فدونهاها ايها الطالب * يسر الله
لى ولك كل المطالب * امين اللهم امين * يارب العالمين
(مقدمه)

قال المؤلف ان من نظري تاريخ المعارف وجد فيه ان القريحة البشرية تقف
اوقاتا بعد ان ترتقى الى أعلى الادراكات والاختراعات كأت مانعا يمنعها من
ارتقاها ثم تعود وترتقى ثانيا بقوة اخرى فتظهر باستكشاف عظيم من
الاستكشافات التي تتغير بها صورة العلم بالكلية * وان من هذا القبيل ما اخترعه
المعلم ديكارته اوديكارتوس من تطبيق الجبر على الهندسة فانه افتتح بذلك
طريقا كانت مجهولة لاسلافه من العلماء * ومنه ايضا ما غرّب به المعلم نوطون
والمعلم لبتز على علماء بلاد اوربا من اختراع تحليل اخر اعلى درجة من
هندسة المعلم ديكارته اذ لا يتيسر استكشاف اخر يكون به تشرىف العقل
البشرى مثله حيث صار الالذنهائى الذى هو مجرد تخيل مستطيعا للحساب
فنتجت منه الاعاجيب وقد اراد بعض من الفلاسفة ان يوقعوا التشكك فى صحة
هذا التحليل العجيب فلم يبلغوا ذلك ولم يتيسر لهم ان ينكروا نتائجها ولم يترتب
على ذلك الا زيادة حث علماء الهندسة على زيادة بذل الجهد فى البحث عن
حقيقة الوجود الفكرى للحسابات الجديدة وكان اول من علم هذا السر هو المعلم
نوطون حيث جعل حساب التفاضل طريقة للوصول الى اول نسب الكميات
واخرها اعنى جعلها طريقة للوصول الى نهايات النسب ثم جاء المعلم دلمير
فرأى ان تصورات المعلم نوطون مشتملة على حقيقة الوجود الفكرى
لحساب التفاضل واثبت انه يتيسر بواسطة طريقة النهايات ان يحصل التوضيح
الكافى للطريقة الموجودة عند الانكليز بقطع النظر عن التحرك الذى هو معنى
لا تعلق له بحساب التفاضل وقد تكلم فوج من علماء الهندسة قبل المعلم دلمير
فى مؤلفاتهم على طريقة النهايات منهم المعلم كوزان خصوصا ولكن لم يحصل
الانضاح التام وازالة الشك بالكلية عن الوجود الفكرى لطريقة الصغريات جذا
التي هى عبارة عن اختصار طريقة النهايات الامند حصل اثباتها بواسطة نظرية

المعلم تبلور

وبالنظر الى هذا المعنى ليست طريقة الصغريات جدًّا الا عبارة عن طريقة مستقربة لايجاد تفاضلات الدوال المتنوعة وبها تنطبع تلك التفاضلات في الاذهان بواسطة اشكال هندسية في غاية البساطة والاختصار تظهر للعقل على وجه اوضح من التصورات المطلقة التخيلية وبالجملة فهذه الطريقة تصير ضرورية لابتدئها ولا غنى عنها في الفروع العالية من علم الميكانيك والفلك اذ بدونها يكون حل المسائل العملية من المشكلات الصعبة في اغلب الاحيان ومن ثم كان افاضل علماء الهندسة يستعملونها كثيرا في مؤلفاتهم

وقد كان فيما سلف من الزمان لهذه الطريقة ولو في الوجود الفكرى محامون قد بذلوا الجهد في الذب عنها وذلك لما انه اذا التزم الانسان السلوك فيها على مقتضى بعض دعاوى مخصوصة تظهر عليها علامة الصحة والضبط الرياضى التام ويترأى عليها انها ناجمة بالطبع عن اصل عام وقاعدة كلية ترجع اليها وهذه القاعدة المذكورة لم تزل الى الآن معتبرة من الضروريات لكن لما رأيت اننا اذا اعتبرنا اللانهاى بالوجه المقرر فيها نجد انه ينتج عنها نتائج لا يمكن قبولها استحسنت ان ابرهن عليها جاعلا لطريقة الصغريات جدًّا اصلا آخر هو مبنى كذلك على ما علم لنا من الفوائد المتعلقة باللانهاى اذ هو اقرب الى الصواب بسبب تصور النهايات التى توجد فيه ضمنا

واذا كانت طريقة النهايات متممة لطريقة الصغريات جدًّا بسبب ما يوجد فيها من الخلل فان طريقة المعلم لاجرائه متممة كذلك لطريقة النهايات وذلك بربط المعاملات التفاضلية بالجبر المحض ولا بأس بجعل هذه الطرائق الاربع كأنها طريقة واحدة ولذلك اذا قابلتها ترى ان الاصول الناتجة عنها مشتركة بين جميعها وان من اراد فهمها كلها ليس عليه الا ان يضم شيئاً قليلا الى طريقة النهايات فقط وتقول طريقة المعلم لاجرائه حينئذ الى ان تكون عبارة عن نظرية صارت سهلة جدًّا حيث غيرت طريقة اثباتها

ولم التزم توضيح النظريات المتنوعة التى تتركب منها هذه الرسالة وانما التزمت

توضيح سائر العمليات كما سلكت هذا المسلك في سائر مؤلفاتي الرياضية لما انى متحقق ان تركها لا يترتب عليه زيادة الاعتقاد في كثرة معارف المؤلف وان المؤلف انما يعرف مقامه بما يديه من كيفية الدلالة على تصوراته وبما يقرره من الملحوظات المختصرة في مؤلفاته

ولنضم الى ما قترناه انه اذا التزم عدم ترك التصورات المتخالفة في صلب النظريات لا يمكن اجتناب التطويل المحل بها الا بواسطة الضبط والتحرير ويزيد الامر اشكالا اذا كان بعض الكتاب معدا للبرهنة على المسائل وابداء اسبابها ومن اطلع على كثرة المواد المتنوعة المقررة في هذا الكتاب عرف حق المعرفة ما يصدرلى من الموانع في تأليني له ومن الزيادات التي نسمتها الى هذا الكتاب في هذه الطبعة الجديدة مسألة النقط الغريبة والنهايات الكبرى والصغرى للدوال ذات المتغيرتين والمنحنيات القطبية ونظرية المتغيرة المستقلة او التي ليست بمعلقة والحلول الخصوصية للمعادلات التفاضلية وتكميب الاجسام المنتهية بالسطوح المنحنية وتربيع السطوح المذكورة وشروط تكامل الدوال ذات الثلاث متغيرات والمعادلات التفاضلية بدرجة ثانية والمعادلات المتماثلة وغير ذلك وبالجمله فقد ختمت هذا المؤلف بقضية تتعلق بالمعادلات التفاضلية الجزئية مع بعض ملحوظات عمومية على الدوال الاختيارية تتم بها تكاملات تلك المعادلات وبهذا توصلت الى شرح الطريقة التي تتعين بها الدالة الاختيارية التي تدخل في المعادلة عند توفر معادلات الشرط واعلامها

والطريقة التي بحثت بها عن تلك المسألة المهمة معتبرا السطوح المنحنية تشابه الطريقة التي استعملتها باعتبار الثوابت الاختيارية ولذا بينت بواسطة المنحنيات كيف توجد الثابتة بعينها للتكامل بعد ان حذفت تلك الثابتة عند اخذ التفاضل وهي مسألة يظهرلى انه لم يحظ بها احد قبلى

حساب التفاضل

تفاضل الكميات المجردة

* ١ * حساب التفاضل يبحث فيه عن النتائج التي تنشأ عن الكميات اذا اخذ بعض متغيراتها زيادة ما وملتغير ما صح تغيره في المعادلة كما ان الثابت ماثت على حالة غير متغيرة بطول العملية معلوما كان او مجهولا ويقال للمتغير دالة للمتغير اخر متى ساوى الاقل كمية حسابية يدخل فيها الثاني بارتباط اياها كان فان صه في معادلات

$$\text{صه} = \gamma - \text{ره} \text{ و } \text{صه} = \text{سه} - ٣ \text{ ب ره}$$

$$\text{و } \text{صه} = \text{ره} \text{ و } \text{صه} = \text{ب} + \text{ره} \text{ هي دالة سه}$$

* ٢ * ولنعبر دالة في حالة ازديادها بازدياد المتغير الشاملة هي له فان كل دالة للمتغير سه يمكن بيانها برأسى منحني - م م (شكل ١) وليكن لاجل ذلك اع = سه و ع م = سه ونفرض ان الاقنى اع يأخذ زيادة ع ح = هه فالراسى ع م يصير عند ذلك ع م = سه ولاجل ايجاد مقدار هذا الراسى الجديدي شاهد انه يلزم تغير سه بكمية سه + هه في معادلة المنحنى ومقدار سه الذي يستخرج منها يكون هو عين مقدار سه فاذا كانت معادلة سه = م سه مثلا يوجد سه بتغير سه بكمية سه + هه و سه باخر سه ويكون سه = م سه + ٢ م سه هه + م سه

* ٣ * ولناخذ الآن معادلة سه = سه ٢ (١) ونفرض فيها ان سه نصير سه حين تغير كمية سه بكمية سه + هه فيحدث لنا سه = (سه + هه) ٢ وبحلها يوجد

$$\text{صه} = \text{سه}^٢ + ٢ \text{ سه هه} + \text{سه هه}^٢ + \text{هه}^٢$$

وبطرح معادلة (١) من هذه المعادلة يوجد

$$\text{صه} - \text{سه} = ٢ \text{ سه هه} + \text{سه هه}^٢ + \text{هه}^٢ \text{ ونقسمها}$$

على ه يوجد

$\frac{ص}{ه} - \frac{ص}{ه} = ٣ سر + ٣ سه ه + ه' ٠٠٠٠٠٠ (٢)$
 وحيث كانت كمية $\frac{ص}{ه} - \frac{ص}{ه}$ تبين الزيادة التي تأخذها كمية $\frac{ص}{ه}$
 حين تزداد كمية $سر$ بمقدار $ه$ يعلم من ذلك ان كمية $\frac{ص}{ه} - \frac{ص}{ه}$ هي
 نسبة الزيادة التي تأخذها الدالة المفروضة $\frac{ص}{ه}$ الى الزيادة التي ياخذها
 متغير $سر$

واذا نظرنا الى الطرف الثاني من هذه المعادلة فنشاهد ان هذه النسبة تأخذ
 في النقصان كلما نقصت كمية $ه$ وحين تصير كمية $ه$ صفرا نقول هذه
 النسبة الى $٣ سر$ ويعلم من ذلك ان حد $٣ سر$ هو نهاية النسبة
 $\frac{ص}{ه} - \frac{ص}{ه}$ وهذا الحد هو الذي ينبغي نحوه كلما اخذ $ه$ في النقص
 ٤ لكنه بفرض $ه = ٠$ نقول كمية $\frac{ص}{ه} - \frac{ص}{ه}$ الى
 صفرا ايضا فمعادلة (٢) نقول حينئذ الى هذه

$$\div = ٣ سر ٠٠٠٠٠٠٠ (٣)$$

ولا استحالة في هذه المعادلة لانه يفهم من الجبر ان $\div$ قد يكون دالا على سائر
 انواع الكميات فتارة يستدل به على كمية محدودة وتارة يبين كمية غير محدودة
 وتارة يكون صفرا ولك ان تقول انه حيث كانت قيمة الكسر لا تتغير بقسمة
 حذيه على عدد واحد ينتج ان تصغير الحدين غير ضار في مقداره وينبئ على ذلك
 ان حقيقة الكسر لا تتغير اذا بالغ حذاه النهاية في الصغري يعني اذا انعدما
 وكسر $\div$ الذي يوجد في معادلة (٣) هو عبارة عن رسم حل محل نسبة زيادة
 الدالة الى زيادة المتغير وحيث لم يبق هذا الرسم اثرا للمتغير المذكور لزم ابداله برمز

$$\frac{ص}{ه} \text{ ليعلم به ان الدالة كانت } \frac{ص}{ه} \text{ والمتغير كان } سر$$

و $\frac{ص}{ه}$ و $\frac{ص}{ه}$ يتغير اعتبارهما في الحقيقة على حسب جنس المسألة
 فقد يعتبران اصفارا عدما وقد يعتبران كميات صغيرة جدا ويوجد اذا ذاك

$\frac{ص}{ه}$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٣ \text{ سه} \dots \dots \dots (٤)$$

كمية $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ او مقدارها الذي هو ٣ سه هو المسمى العامل او المكثر
التفاضلى للدالة المفروضة

* ٥ * وليتنبه انه حيث كان $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ هو الرمز الدال على كمية

٣ سه التي هي حد النسبة او نهايتها كما يتبينه معادلة (٤) فكان الواجب ان
يبقى $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ موضوعا تحت $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ لكن نظرا لسهولة العمليات الجبرية
يخذف مقام معادلة (٤) عند اللزوم ويحدث منها اذن $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٣ \text{ سه}$ واسه
وكمية ٣ سه هي التي تسمى تفاضل الدالة المفروضة صه

* ٦ * للبحث عن تفاضل دالة $٦ + ٣ \text{ سه}$ بالوجه المشروح
نضع صه $= ٦ + ٣ \text{ سه}$

ثم نغير كمية سه بكمية سه + ه و نرسم للناتج بحرف صه
فيوجد صه $= ٦ + ٣ \text{ سه} + ٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه}$

وبطرح معادلة صه $= ٦ + ٣ \text{ سه}$ من هذه المعادلة يوجد

صه - صه $= ٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه}$ وبالقسمة على ه يكون

$$\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{ه}} = ٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} \text{ ثم يجعل ه} = ٠ \text{ فيوجد}$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٦ \text{ سه} \text{ واذن يكون التفاضل المطلوب } \frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٦ \text{ سه}$$

* ٧ * ولنمثل بمثال ثالث فنبحث عن تفاضل صه $= ٣ \text{ سه} - ٢ \text{ سه}$
ولذلك نبدل سه بكمية سه + ه فيوجد

$$\text{صه} = ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} - ٢ \text{ سه} - ٢ \text{ سه} \text{ واذن يكون}$$

$$\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{ه}} = ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} - ٢ \text{ سه} - ٢ \text{ سه} \text{ وحين نرتقى الى النهاية نجد}$$

خاصة $\frac{3}{5} = 3 > 2$ وهذا هو الأكثر تفاضلي للدالة المفروضة والتفاضل

يكون $5 > 3 = 2$

* ٨ * نفرض ايضا ان المراد ايجاد تفاضل $5 = \frac{1-2}{2-1}$

ولذلك نجري عملية القسمة فيحدث لنا $5 = 1 + 2 + 3 = 6$

ثم نضع $5 + 6$ محل 5 و 6 محل 6 فيحدث

$5 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ وبترتيب هذه بالنسبة

الى 6 يكون $5 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ و $6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

ومن هذا يستخرج $\frac{5-6}{6-5} = 1 + 2 + 3 = 6$ وفي النهاية يوجد

$$\frac{5}{6} = 1 + 2 = 3$$

وتفاضل كمية $\frac{1-2}{2-1}$ يكون حينئذ $(1 + 2) = 3$

* ٩ * ولنمثل ايضا بهذا المثال

$5 = (2-1) > (3-2)$ ولذلك نحل الطرف الثاني فنجد

$5 = 2 - 1 = 1$ ونضع $2 + 1 = 3$ محل 5 و 3 محل 3

نحل 5 ثم نرتبه بالنسبة الى 6 فيوجد

$5 = 2 - 1 = 1$ و $6 = 3 - 2 = 1$ و $7 = 4 - 3 = 1$

$(1-2) > (2-3) > (3-4)$ واذن يكون

$5 = 2 - 1 = 1$ و $6 = 3 - 2 = 1$ و $7 = 4 - 3 = 1$

$5 + 6 + 7 = 18$ وبالارتقاء الى النهاية يوجد

$\frac{5}{6} = 1 - 2 = -1$ وبالضرب في 5 يظهر ان

التفاضل المطلوب يكون $5 = (4-3) - (3-2) = 1$

* ١٠ * 5 هي بنفسها تفاضل كمية 5 لانه اذا

فرض $5 = 5$ يوجد $5 = 5 + 6$ ويكون

صه - صه = هه وبالقسمة على هه يوجد $\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{هه}} = ١$

وحيث لم تكن كمية هه داخله في الطرف الثاني من هذه المعادلة يظهر أنه

يكفي لأجل الانتقال الى النهاية أن يغير $\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{هه}}$ برمز $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}}$ وعلى

ذلك يكون $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = ١$ ومنه $\text{واصه} = \text{واسه}$

* ١١ * وليتأمل انه في بعض الاوقات تكون زيادة المتغير سلبية وفي هذه الحالة يلزم استبدال كمية سه بكمية سه - هه وبفعل كما تقدم

فلايجاد تفاضل دسه^٣ مثلاً حين تكون الزيادة سلبية نغير سه بكمية سه - هه فيوجد

صه = دسه^٣ - دسه^٣ هه + دسه^٣ هه - دسه^٣ هه^٣ واذاً يكون

$\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{هه}} = - \frac{\text{دسه}^3 - \text{دسه}^3 \text{هه} + \text{دسه}^3 \text{هه} - \text{دسه}^3 \text{هه}^3}{\text{هه}}$

يوجد بالانتقال الى النهاية $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = - \frac{\text{دسه}^3}{\text{دسه}^3}$ ومنه

$\text{واصه} = - \frac{\text{دسه}^3}{\text{دسه}^3}$ وحيث انه لو كانت الزيادة موجبة

لوجد $\text{واصه} = \frac{\text{دسه}^3}{\text{دسه}^3}$

يفهم من ذلك انه لايجاد التفاضل حين تكون الزيادة سلبية يلزم تغيير اشارة

واسه في التفاضل الموجود بفرض الزيادة موجبة

* ١٢ * ولنتقدم قبل التجوّن في العلم تنبهاً لا بد منه وذلك انه اذا غيرت

سه بكمية سه + هه في معادلة بهذه الصورة

$$\text{صه} = \text{كوه} \quad (\text{سه})$$

بمعنى طرفها الثاني دالهذا المتغير ثم رتب الناتج بحسب الدرجات التصاعديّة

لكمية هه فالحد الاول منه يكون مساوياً لكمية صه

ولذلك نفرض انه بعد تغيير سه بكمية سه + هه وترتيب الناتج

وقد رمزت للدالة بأول حرف
منها وهو الدال هكذا ك
او هكذا د او هكذا د
وضعت فوقها او تحتها علامات
او ارقام على حسب المقام فتعتبر
كلها دوال متغايرة

* (١٢) *

يوجد الحل $\text{صه} = \text{ح} + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ}$
 فأقول انه لا بد وان يكون $\text{ح} = \text{صه}$

لانه بفرض $\text{هه} = ٠$ في المعادلة الاخيرة يؤول طرفها الثاني الى ح ويؤول طرفها الاول الى صه لان صه انما صارت صه بسبب التغير الذي لحقها من تغير سه بكمية سه + هه فبانعدام هه ترجع صه ضرورة الى حالتها الاولى وهى صه وينتج من ذلك ان $\text{صه} = \text{ح}$

* ١٣ * وبذلك يتوصل الى شرح كيفية تعميم طريقة التفاضل فانه اذا غيرنا سه بكمية سه + هه في معادلة $\text{صه} = \text{ك} (\text{سه})$ التى لم تعين فيها الكمية الميمنة برمز ك (سه) (بل صرف النظر عن تعيينها (زيادة التعميم) وفرضنا ان الناتج يكون مرتبا بحسب الدرجات التصاعدية لكمية هه وكان هذا الناتج

$$\text{صه} = \text{ح} + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ}$$

ثم وضع فيه صه بدلا عن ح المساوية لها كما تقدم برهانه في (١٢) وحدث $\text{صه} = \text{صه} + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ}$ أو

$$\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{هه}} = \frac{\text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ}}{\text{هه}}$$

$\text{هه} = ٠$ في النهاية كان $\frac{\text{صه}}{\text{هه}} = \text{هه}$

ومن هذا يفهم ان المكرر التفاضلى يساوى مكرر الحد المحتوى على كمية هه بدرجة اولى في حل $\text{ك} (\text{سه} + \text{هه})$ المرتب بحسب الدرجات التصاعدية لكمية هه

* (تفاضل حاصل ضرب متغيرين) *

* ١٤ * لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين نعتبر الدالتين مختلفتين لمتغير واحد سه ونرمز لهما بحرفى صه و ح ثم نغير فى كل منهما متغير سه بكمية سه + هه ونرمز للناتج بحرفى صه و ح ونفرض

* (15) *

ونفرض انما يكونان بعد الترتيب بالنسبة الى هـ هكذا

$$(٥) \quad \text{ص} = \text{ص} + \text{ه} + \text{د} + \text{ر} + \dots + \text{الخ}$$

ع' = ع + ح' + د' + ر' + ... الخ (٦)

$$(Y) \dots\dots\dots = \frac{ع}{س} , \dots = \frac{ص}{س}$$

وبضرب معاداتی (۵) و (۶) فی بعضهما یوجد

$$\text{عَص} = \text{عَص} + \text{عَص} + \text{عَص} + \text{عَص}$$

$$+ \text{ص}^{\text{ه}} + \text{ز}^{\text{ه}} + \text{ح}^{\text{ه}}$$

+ ص د ه + الخ

ثم انه اذا طرح ع صه من كل من الطرفين وقسم الخارج على ه يوجد

$$\frac{ع'ص - ع'ص}{ه} = ع' + ع' + (ع' + ع' + ع'ص) + ه + الخ$$

ولايجاد نهاية النسبة يفرض $h = 0$ فيحدث

$$\frac{\text{وا.ع.صه}}{\text{واسه}} = \text{ع} + \text{ح.صه}$$

(ووضع النقطة في و) ع صه يدل على أنه يراد أخذ تفاضل ع صه ثم نضع

في هذه المعادلة عوضا عن α و β مقاديرها المبينة بمعادلتى (٧) فنجد

$$\frac{60 \text{ ع.ص}}{1000} + \frac{20 \text{ ع.ص}}{1000} = \frac{80 \text{ ع.ص}}{1000} \text{ و يحذف المقام المشترك}$$

يوجد أن $ع \cdot ص = ع \cup ص + ص \cup ع$

ويفهم من ذلك انه لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين يلزم ضرب كل منهما

في تفاضل الاخر ثم تجمع الحواصل

* ١٥ * وبواسطة هذه الطريقة يوجد بالسهولة تفاضل حاصل ضرب

ثلاثة متغيرات ولذلك يفرض $r = 1$ مثلاً ويوضع $r = 1$

ومن بعد الذي تقدم يوجد

$$٠ \text{ ص ل} = \text{ص و ل} + \text{ل و ص} \dots \dots \dots (٨)$$

وحيث كان ل = ع ر فبأخذ تفاضله حكم المقرّر يكون

$$\text{و ل} = \text{ع و ر} + \text{ر و ع}$$

واذا وضعنا في معادلة (٨) عوضا عن ل و و ل المقادير الاخيرة

$$\text{يوجد أن } ٠ \text{ ص ع ر} = \text{ص ع و ر} + \text{ص ر و ع} + \text{ع ر و ص}$$

ويشاهد حينئذ أن الطريقة المتقدمة تجرى ايضا على تفاضل حاصل ضرب

ثلاث متغيرات يعنى انه لايجاد هذا التفاضل يكتب حاصل ضرب ص ع ر

ويغير فيه كل متغير بتفاضله على التوالى وحاصل جمع الحواصل الحادثة يكون

هو التفاضل المطلوب

* ١٦ * وهذه القاعدة عامة لايجاد تفاضل حاصل ضرب اى عدد

كان من المتغيرات

* ١٧ * حيث ان تفاضل كمية ح س ه هو ح و س يعلم من ذلك

انه متى توجد كمية ثابتة في حاصل ضرب ينبغى ان يؤخذ تفاضل حاصل الضرب

بصرف النظر عن المضروب الثابت ثم بعد أخذ التفاضل يضرب الناتج

في الكمية الثابتة ومن ثمة كان تفاضل كمية ح س ه مثلا

$$\text{ح و س} + \text{ح س و}$$

* ١٨ * والكمية الثابتة ليس لها تفاضل لانه اذا فرض

$$\text{ص ه} = \text{ح س} + \text{ب} \text{ ثم اجريت عملية (بند ٧) فظهر أن } \text{و ل} = \text{ح و س}$$

وهذا الناتج هو عين الناتج الذى ينتج اذا لم يكن للثابت ب وجود

(في تفاضل الكسر)

$$\text{ص و س} - \text{س و و} \quad \text{تفاضل كسر } \frac{\text{ص و س}}{\text{ص و و}} \text{ يساوى}$$

ولاثبات ذلك نفرض ان $\frac{\text{ص و س}}{\text{ص و و}} = \text{ع}$ ثم نحذف المقام فيوجد

$$\text{ص و س} = \text{ص و و} \text{ ع} \text{ وبموجب (بند ١٤) يكون } \text{و ل} = \text{ص و ع}$$

$$+ \text{ع و و} \text{ ويستخرج من ذلك } \text{ص و و} = \text{و ل} - \text{ع و و}$$

واذا

(١٦)

ومن بعد (بند ١٥) يوجدان $٠.١م = ١م$ و $١م = ١٠٠٠٠$ بعدد م فيكون
 $١م = ١٠٠٠٠م$ وهذه القاعدة تصدق ايضا على المتغير الذي يكون اسه
 * ٢٢ *

كسرا او سالبا والبرهنة على ذلك نأخذ أولا $\frac{١}{٢}م$ ونضع $صه = \frac{١}{٢}م$ ثم
 نرفع كلا من الطرفين الى ٢ فيحدث $صه = ٠.١م$ ونأخذ تفاضل
 كل من الطرفين (بند ٢١) نجد $\frac{١}{٢}صه = ٠.٠٥م$ و $٠.٠٥م = ١م$
 وينتج من ذلك $١م = \frac{١}{٢}صه$

واذا وضعنا في هذه المعادلة عوضا عن $١م$ و $٠.٠٥م$ كبتى $\frac{١}{٢}م$ و $\frac{١}{٢}صه$
 يكون $١م = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}صه = \frac{١}{٤}صه$ ومنه $١م = \frac{١}{٤}صه$

وحيث ان $صه = ٠.١م$ فتؤول المعادلة السابقة الى
 $١م = \frac{١}{٤} \times ٠.١م$ وبوضع مقدار $صه$ بدلا عنه يوجد
 $١م = \frac{١}{٤} \times ٠.٠٥م$ او $١م = \frac{١}{٨}م$
 وهذا ما أردنا اثباته ولاجل اثبات الحالة التي يكون فيها الأس سلبيا نفرض
 $صه = -١م$ وذلك يؤول الى $صه = -\frac{١}{٨}م$ ثم نأخذ التفاضل بقاعدة
 الكسور بناء على (بند ٢١) نجد

١٧٦

$$\frac{سم^١ - سم^١}{سمسم} = \text{واصة}$$

وبسبب كون تفاضل الكمية الثابتة صفراً تؤول هذه المعادلة الى

$$\frac{سمسم}{سمسم} = \text{واصة} \quad \text{ثم يعمل التفاضل المشار اليه بقاعدة (بند ٢١)}$$

$$\frac{سمسم}{سمسم} = \text{واصة} \quad \text{ولا جراه عمل القسمة يلزم ان}$$

يطرح أس كمية سم التي في المقسوم عليه من اس كمية سم التي

$$\text{في المقسوم فيوجد واصة} = م - سم^{١-٢} \text{ واصة أو}$$

$$\text{واصة} = م - سم^{١-٢} \text{ واصة وهو موافق لقاعدة (بند ٢١)}$$

وبه يتم المراد

(تفاضل المتغير الجذور)

* ٢٣ * لايجاد تفاضل متغير مجذور يحول هذا المتغير الى اس

كسرى وتجري عليه قاعدة (بند ٢١) فلايجاد تفاضل كمية

$$\sqrt[١]{سم} \text{ مثلا فنحولها الى } سم^{\frac{١}{٢}} \text{ وتفاضل هذه يكون}$$

$$\frac{١}{٢} سم^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢} سم^{-\frac{١}{٢}}$$

ويعلم من ذلك انه لايجاد تفاضل الجذر التربيعي لكمية متغيرة يلزم قسمة تفاضل

هذه الكمية على ضعف الجذر

(تنبيه) حيث انه بفرض م = ١ في معادلة

$$\frac{١}{٢} سم^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} سم^{-\frac{١}{٢}} \text{ واصة المينة في (بند ٢٢) يوجد}$$

$$\frac{١}{٢} سم^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} سم^{-\frac{١}{٢}} \text{ واصة وذلك عبارة عن}$$

فا

٥

الصورة

$$صه = د ع \text{ و } ع = دسه$$

يكفى ان تستخرج المكثرات $\frac{واصة}{وا ع}$ و $\frac{فاع}{واسه}$ التفاضلية من هاتين

المعادلتين ثم تضرب النواتج في بعضها وحاصل الضرب الحادث يكون هو مكثر

$$\frac{واصة}{واسه} \text{ التفاضلى المطلوب}$$

$$* ٢٥ * \text{ فاذا فرضنا مثلا ان } صه = ٣ ع \text{ و } ع = ٣ سه + دسه$$

$$\text{ فيحدث من ذلك } \frac{واصة}{واسه} = ٦ ع \text{ و } \frac{فاع}{واسه} = ٣ سه + ٢ دسه$$

وبضرب هذين المكثرين في بعضهما ما يكون

$$\frac{واصة}{واسه} = ٦ ع (٣ سه + ٢ دسه) = ٦ (سه + دسه) (٣ سه + ٢ دسه)$$

* ٢٦ * قانون (١٣) يستعمل بكثرة في أخذ تفاضل الكميات العسرة ولتمثل بعض منها فنقول

$$\text{ نبعث عن ايجاد تفاضل } صه = \sqrt{سه - سه} \text{ فذلك يؤول الى ايجاد}$$

$$\text{ المكثر التفاضلى } \frac{واصة}{واسه} \text{ ولذا نضع } سه - سه = ع \text{ فيكون بناء عليه}$$

$$صه = ع \sqrt{\frac{١}{سه}}$$

$$\text{ ومعادلتا } صه = د ع \text{ و } ع = دسه \text{ (بند ٢٤) تؤولان}$$

$$\text{ حينئذ الى } صه = ع \sqrt{\frac{١}{سه}} \text{ و } ع = سه - سه$$

فباخذ تفاضل كل من طرفيهما (بند ٢١) يوجد

$$\frac{واصة}{واسه} = \frac{١}{سه} \sqrt{\frac{١}{سه}} = \frac{١}{سه} (سه - سه) \sqrt{\frac{١}{سه}} = \frac{فاع}{واسه} = سه - سه$$

وبضرب

(٢١)

وبضرب هذين المكثرين التفاضليين في بعضهما يوجد

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{e^2 - s^2}}}{\frac{s}{\sqrt{e^2 - s^2}}} = \frac{1}{s} \quad \text{واذن يكون}$$

$$\frac{s}{\sqrt{e^2 - s^2}} = \frac{1}{s}$$

وليكن ايضا $e = (e + s)$ فلاجل ايجاد التفاضل نجعل

$$e + s = e$$

$$e = e \quad \text{و} \quad e + s = e \quad \text{واذن يكون}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

وبضرب هذين المكثرين التفاضليين في بعضهما يوجد

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

$$* ٢٧ * \quad \text{ولنقل بمثال ثالث فنفرض} \quad e = (e + s)$$

$$\text{ثم نضع} \quad e = e \quad \text{فيكون}$$

$$e = (e + s)$$

$$\text{وبأخذ تفاضل معادلة (١٤) يحدث} \quad e = e \quad \text{ومن}$$

$$\text{ذلك} \quad \frac{e}{s} = \frac{e}{s} \quad \text{ويحدث ايضا من معادلة (١٥)}$$

$$\frac{e}{s} = \frac{e}{s} \quad \text{و} \quad \frac{e}{s} = \frac{e}{s} \quad \text{و} \quad \frac{e}{s} = \frac{e}{s}$$

وباستبدال e بمقدارها تاؤول المعادلة الاخيرة الى

لأننا اثبتنا فيما مر أن الكميات الشابتة ليس لها تفاضل ولذا نتحدكميتنا
 m $s + s' + r$ و m $s + s' + r$ - h هو
 في التفاضل اذ تفاضل كل منهما m $s + s' + r$ s
 (في التفاضلات المتوالية)

* ٣٠ * التفاضلات المتوالية لدالة مفروضة هي عبارة عن تفاضل
 هذه الدالة وتفاضل المكرر التفاضلي لها وتفاضل المكرر التفاضلي - الاخير وهكذا
 حتى ينتهي الى m $s + s' + r$ ثابت يعنى انه اذا فرض ان s تكون دالة لمتغير
 s مثلا ثم اخذت تفاضل هذه الدالة وكان هذا التفاضل s s ثم اخذ
 تفاضل كمية s اذا اشتملت على متغير s وكان هذا التفاضل
 s s واخذ ايضا تفاضل كمية s اذا فرض انها اشتملت على متغير s
 وكان التفاضل الحادث s s واستمر هكذا الى أن يصير المكرر التفاضلي غير
 محتوم على متغير s فكميات s s و s s و s s الخ
 هي التي تسمى التفاضلات المتوالية لدالة s والاول منها يسمى التفاضل
 الاول والثاني يسمى التفاضل الثاني وهكذا الخ

فاذا فرض أن $s = s' + r$ مثلا حادث

$$s = s' + r$$

وهذا هو التفاضل الاول لكمية s

واذا وضع $s = s' + r$ واخذ التفاضل وجد

$$s = s' + r$$

واذا وضع ايضا $s = s' + r$ واخذ التفاضل فيوجد ان

$$s = s' + r$$

وقد انتهت التفاضلات المتوالية في هذا المثال الى هنا لان تفاضل كمية s

الثابتة صفر

والمكررات التفاضلية التي هي s و s و s الخ

للتفاضلات المتوالية تسمى المكررات التفاضلية المتوالية وليتنبه انه يمكن

حدوث هذه المكثرات باخذ تفاضلات المتوالية لكمية $\text{وا}^ص$ باعتبار
 كمية $\text{وا}^ص$ فيها ثابته وبيان ذلك ان نقول حيث ان $\text{وا}^ص = ع \text{وا}^ص$
 وبأخذ تفاضل كل من الطرفين باعتبار $\text{وا}^ص$ ثابت يوجد
 $\text{وا}^ص = \text{وا}^ص \cdot ع \times \text{وا}^ص$ وكان $\text{وا}^ص = ع \text{وا}^ص$ فيوجد
 $\text{وا}^ص = ع \text{وا}^ص \times \text{وا}^ص = ع \text{وا}^ص$ ومنه يستخرج
 $\frac{\text{وا}^ص}{\text{وا}^ص} = ع$ وكذا بأخذ تفاضل طرفي معادلة $\text{وا}^ص = ع \text{وا}^ص \times \text{وا}^ص$
 باعتبار $\text{وا}^ص$ ثابتة يوجد $\text{وا}^ص = \text{وا}^ص \times ع \text{وا}^ص$ وبسبب
 مساواة كمية $\text{وا}^ص$ الى $ع \text{وا}^ص$ يكون
 $\text{وا}^ص = ع \text{وا}^ص \times \text{وا}^ص = ع \text{وا}^ص$ ومنه يحدث
 $\frac{\text{وا}^ص}{\text{وا}^ص} = ع$ وهلم جرا

(تنبيه) رموز $\text{وا}^ص$ و $\text{وا}^ص$ الخ تدل على التفاضل الثاني
 والثالث الخ لكمية $ص$ وذلك عبارة عن تفاضل التفاضل وتفاضل تفاضل
 التفاضل الخ
 واما $\text{وا}^ص$ و $\text{وا}^ص$ الخ فتدل على تربيع او تكعيب الخ
 كمية $\text{وا}^ص$

(في نظرية مكوران)*

* ٣١ * لتكن $ص$ دالة لمتغير $س$ فاذا وبناهذه الدالة
 بالنسبة للقوى التصاعدية لهذا المتغير وكان الناتج
 $ص = ١ + ٢س + ٣س^٢ + ٤س^٣ + ٥س^٤ + ٦س^٥ + ٧س^٦ + ٨س^٧ + ٩س^٨ + ١٠س^٩ + ١١س^{١٠} + ١٢س^{١١} + ١٣س^{١٢} + ١٤س^{١٣} + ١٥س^{١٤} + ١٦س^{١٥} + ١٧س^{١٦} + ١٨س^{١٧} + ١٩س^{١٨} + ٢٠س^{١٩} + ٢١س^{٢٠} + ٢٢س^{٢١} + ٢٣س^{٢٢} + ٢٤س^{٢٣} + ٢٥س^{٢٤} + ٢٦س^{٢٥} + ٢٧س^{٢٦} + ٢٨س^{٢٧} + ٢٩س^{٢٨} + ٣٠س^{٢٩} + ٣١س^{٣٠}$
 ثم أخذنا التفاضلات المتوالية لهذه الدالة وجدنا بعد القسمة على $\text{وا}^ص$
 $\frac{\text{وا}^ص}{\text{وا}^ص} = ١ + ٢س + ٣س^٢ + ٤س^٣ + ٥س^٤ + ٦س^٥ + ٧س^٦ + ٨س^٧ + ٩س^٨ + ١٠س^٩ + ١١س^{١٠} + ١٢س^{١١} + ١٣س^{١٢} + ١٤س^{١٣} + ١٥س^{١٤} + ١٦س^{١٥} + ١٧س^{١٦} + ١٨س^{١٧} + ١٩س^{١٨} + ٢٠س^{١٩} + ٢١س^{٢٠} + ٢٢س^{٢١} + ٢٣س^{٢٢} + ٢٤س^{٢٣} + ٢٥س^{٢٤} + ٢٦س^{٢٥} + ٢٧س^{٢٦} + ٢٨س^{٢٧} + ٢٩س^{٢٨} + ٣٠س^{٢٩} + ٣١س^{٣٠}$
 $\text{وا}^ص$

$$\frac{واصة}{واسة} = ٢ + ٣ \times ٣ + ٤ \times ٤ + ٥ \times ٥ + \dots$$

$$\frac{واصة}{واسة} = ٢ + ٣ \times ٣ + ٤ \times ٤ + ٥ \times ٥ + \dots$$

واذا رمزنا برمز (واصة) لما تؤول اليه صه حين يفرض فيها سه = ٠

وبرمز $\left(\frac{واصة}{واسة}\right)$ لما تؤول اليه كبة حين يفرض فيها

سه = ٠ و برمز $\left(\frac{واصة}{واسة}\right)$ لما تؤول اليه كبة حين يفرض

فيها سه = ٠ وهكذا

فالعلامات السابقة تؤول الى (واصة) = ٢ و $\left(\frac{واصة}{واسة}\right) = ٣$

$$٢ = \left(\frac{واصة}{واسة}\right) \text{ و } ٣ = ٢ \times ٣$$

ومنها يستخرج

$$٣ = (واصة) \text{ و } ٤ = \left(\frac{واصة}{واسة}\right) \text{ و } ٥ = \frac{١}{٢} \left(\frac{واصة}{واسة}\right)$$

$$\text{و } ٦ = \frac{١}{٣ \times ٢} \left(\frac{واصة}{واسة}\right)$$

واذا وضعنا هذه المقادير في معادلة (١٦) فتؤول الى

$$صه = (واصة) + \left(\frac{واصة}{واسة}\right) سه + \frac{١}{٢} \left(\frac{واصة}{واسة}\right) سه + \dots$$

$$+ \frac{١}{٣ \times ٢} \left(\frac{واصة}{واسة}\right) سه + \dots \dots \dots (١٧)$$

وهذا هو قانون مكلوران ودستوره

• (المثال الاول) •

ص = $\frac{1}{s+1}$ فجد بأخذ تفاضل الطرفين

وبقصة الطرفين على واسه يوجد

$$\frac{1}{r(s+7)} - = \frac{\text{واحد}}{s+7}$$

وبأخذ التفاضل ثانياً والناسخ يحدث من بعد القصة على رأسه

$$\frac{r}{r(s+7)} = \frac{(s+7)r}{s(s+7)} = \frac{rs}{s^2}$$

$$\frac{r \times r}{s(r+7)} - = \frac{r(s+7)r \times r}{r(s+7)} - = \frac{r^3}{s}$$

ثم نفرض $s = 0$ في مقادير v و $\frac{v}{w}$ و $\frac{v}{w^2}$ الخ

$$\frac{r}{r_2} = \left(\frac{\text{فاصله}}{r_2} \right) \text{ و } \frac{1}{r_2} = \left(\frac{\text{فاصله}}{r_2} \right) \text{ و } \frac{1}{r_2} = (\text{فاصله})$$

$$\frac{r \times r}{2} = \left(\frac{r^2}{2} \right),$$

ثم نضع هذه المقادير ومقدار $\frac{1}{2}$ الحادث بفرض $\frac{1}{2} = 0$ أيضا،

فی قانون (۱۷) فیحد ثلثا

$$\frac{1}{x} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{32} + \frac{x^7}{128} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2+2}$$

• (المثال الثاني) •

* ۳۳ * $\sqrt{r+s} = \sqrt{r+s} \cdot 1 = \sqrt{r+s} \cdot \sqrt{\frac{1}{1}}$ ونجد

* (٢٧) *

$$\frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r} = s^{\frac{1}{r}} - (s^2 + r^2)^{\frac{1}{r}} = \frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$$

$$\frac{s^{\frac{1}{r}} \times \frac{1}{r}}{\sqrt{s^2 + r^2}} = s^{\frac{3}{r}} - (s^2 + r^2)^{\frac{1}{r}} \times \frac{1}{r} = \frac{\text{واسه}^2}{\text{واسه}^2}$$

$$\frac{s^{\frac{3}{r}} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{\sqrt{s^2 + r^2}} = s^{\frac{5}{r}} - (s^2 + r^2)^{\frac{3}{r}} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} = \frac{\text{واسه}^3}{\text{واسه}^3}$$

وإذا فرضنا أن $s = 0$. نؤول هذه المقادير إلى $\text{صه} = \left(\frac{1}{r}\right)$ و $r = \left(\frac{1}{r}\right)$

$$\frac{s^{\frac{1}{r}} \times \frac{1}{r}}{r} = \left(\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}^2}\right) \text{ و } \frac{s^{\frac{3}{r}} \times \frac{1}{r}}{r} = \left(\frac{\text{واسه}^2}{\text{واسه}^3}\right)$$

$$\text{و بوضعها في قانون (١٧) نؤول هذا} \quad \frac{s^{\frac{3}{r}} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{r} = \frac{\text{واسه}^3}{\text{واسه}^3}$$

القانون إلى

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + r^2}} = \frac{s^2}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} = \frac{s^2}{r^2} + 1$$

* (المثال الثالث) *

* ٣٤ * ولناخذ $\text{صه} = (s + r)$ مثلاً ثالثاً فيجاء بإجراء

التفاضل

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = m (s + r)^{1-m}$$

$$\frac{\text{واسه}^2}{\text{واسه}^2} = m (1-m) (s + r)^{1-2m}$$

$$\frac{\text{واسه}^3}{\text{واسه}^3} = m (1-m) (2-m) (s + r)^{1-3m}$$

* (٢٨) *

ونجعل $s = 0$. يؤول مقدار s الى r يعنى انه يوجد $(s) = r$

وتؤول المكثرات التفاضلية $\frac{(s)}{(r)}$ و $\frac{(s^2)}{(r^2)}$ الخ الى

$$\frac{(s)}{(r)} = \frac{(s^2)}{(r^2)} = \frac{(s^3)}{(r^3)} = \dots = \frac{(s^r)}{(r^r)} = (1-s)^{r-1} \quad \text{و} \quad \frac{(s)}{(r)} = \frac{(s^2)}{(r^2)} = \frac{(s^3)}{(r^3)} = \dots = \frac{(s^r)}{(r^r)} = (1-s)^{r-1}$$

$$\text{و} \quad \frac{(s)}{(r)} = \frac{(s^2)}{(r^2)} = \frac{(s^3)}{(r^3)} = \dots = \frac{(s^r)}{(r^r)} = (1-s)^{r-1} \quad \text{وتوضع هذه المقادير في}$$

قانون (١٧) فيوجد

$$(s+r) = \frac{(s)}{(r)} + \frac{(s^2)}{(r^2)} + \frac{(s^3)}{(r^3)} + \dots + \frac{(s^r)}{(r^r)} = (1-s)^{r-1}$$

$$+ \frac{(s)}{(r)} + \frac{(s^2)}{(r^2)} + \frac{(s^3)}{(r^3)} + \dots + \frac{(s^r)}{(r^r)} = (1-s)^{r-1}$$

* (في تفاضل الكميات العالمية) *

* ٣٥ * الكمية العالمية هي التي تكون متبوعة باس متغير

اوبلوغاريتم اوجيب اوجيب تمام وما اشبه ذلك

* ٣٦ * ولنفرض اولان المراد ايجاد تفاضل هذه الكمية s

ولذلك نضع $s = r$ ثم نغير كمية s بكمية $s + h$ وبتغير كمية s بكمية s' وتؤول هذه المعادلة الى

$$s = s + h \quad \text{أو} \quad s' = s \times r$$

ثم نحل كمية s بالنسبة لقوى h ولايسر ذلك بقانون الكمية ذات

الحدين الابعجل $s = 1 + s$ ومن ثم يكون

$$s = (1+s) = \frac{s}{1} + \frac{s}{1} + \frac{s}{1} + \dots + \frac{s}{1} = \frac{s}{1} (1-h) + \frac{s}{1} (1-h) + \dots + \frac{s}{1} (1-h)$$

$$+ \frac{s}{1} (1-h) + \frac{s}{1} (1-h) + \dots + \frac{s}{1} (1-h) + \frac{s}{1} (1-h) + \dots + \frac{s}{1} (1-h)$$

وترتب

الى صه = $\frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \dots$ الحدود المحتوية على ه^١ وعلى ه^٢ وعلى ه^٣ الخ
واذا طرحنا المعادلة الاولى التي هي صه = $\frac{ص}{\gamma}$ من هذه المعادلة يبقى
صه - صه = $\frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \dots$ الحدود المحتوية على ه^١ و ه^٢ و ه^٣ ٠٠ الخ
وبالارتقاء الى النهاية يوجد $\frac{ص}{\gamma} = \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \dots$ وبوضع مقدار صه

$$\frac{ص}{\gamma} = \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \dots (١٩)$$

كمية ح الثابتة تتعلق بكمية γ لانه اذا وضعنا عوضا عن γ
مقدارها الذي هو $1 - \gamma$ في معادلة

$$\gamma = (1 - \gamma) + \frac{(1 - \gamma)^2}{2} + \frac{(1 - \gamma)^3}{3} + \frac{(1 - \gamma)^4}{4} + \dots$$

$$\gamma = (1 - \gamma) + \frac{(1 - \gamma)^2}{2} + \frac{(1 - \gamma)^3}{3} + \frac{(1 - \gamma)^4}{4} + \dots (٢٠)$$

* ٣٧ * ولنشرع في كيفية ايجاد مقدار اخر سهل للكمية ح

الثابتة ولذلك نبحث عن حل كمية γ بواسطة قضية مكلوران فيكون

$$\gamma = \frac{ص}{\gamma}$$

$$\frac{ص}{\gamma} = \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \dots$$

$$\frac{ص}{\gamma} = \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \dots$$

$$\frac{ص}{\gamma} = \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \frac{ص}{\gamma} + \dots$$

وبجعل

متسلسلة ١ + ١ + $\frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \dots$ الخ
ويوجد حينئذ $هـ = ٢٧١٨٢٨١٨$ تقريباً واذا رمزنا برمز
لوح

لوح للوغاريتم γ في الجملة الطبيعية والرائدة نجد $\gamma = (٢٧١٨٢٨١٨)$

واختصارا $\gamma = هـ$ واذن $لوح \gamma = لوح هـ$ ولوح $\gamma = لوح لوح هـ$
* لوح

ويستخرج من ذلك $\frac{لوح \gamma}{لوح هـ} = لوح$ وبهذا تؤول معادلة (٢١) الى

$ع = لوح$ ومن ثم يستخرج من معادلة (١٩)

$لوح \gamma = لوح$ و $لوح \gamma = لوح$ (٢٢)

* (في التفاضلات اللوغاريتمية) *

* ٣٨ * لتكن $ص$ لوغاريتم لكمية $ص$ في الجملة التي اساسها

γ فيوجد $ص = \gamma$ وبأخذ تفاضل الطرفين (بند ٣٦) يحدث

$لوح ص = ع$ و $لوح ص = ع$ ومنه يستخرج

وبضرب كيتي الكسر الكلي في $\frac{لوح ص}{لوح ع} = \frac{لوح ص}{لوح ع} \times \frac{لوح ع}{لوح ص}$

لوح هـ يوجد

$لوح ص = ع$ و $لوح ص = ع$ وبما ان $ص = ع$ وكانت $ص = لوح ص$

تؤول المعادلة السابقة الى $لوح ص = ع$ و $لوح ص = ع$

وفي الحالة التي تؤخذ فيها اللوغاريتمات من جملة نيبيير يكون $\gamma = هـ$

ويوجد $لوح هـ = لوح هـ$ واذن يكون $لوح هـ = لوح هـ$

هذا

هذا بالنسبة للوعار يتم الطبيعى الذى اساسه هـ
اما اذا كان هذا الاساس حينما اتفق بأن كان > مثلا فانه يوجد

$$\text{لوعا} > = ١ \text{ فقط ويكون } \frac{\text{لوصه}}{\text{لوصه}} = \frac{\text{لوعا}}{\text{لوعا}}$$

فى تفاضل الجيوب وجيوب التمام وكذا باقى الخطوط المساحية
او فى تفاضل الدوال القوسية

* ٣٩ * القوس اكبر من جيبه واصغر من ظله ابدا ولا ثبات ذلك
نفرض قوسه اب (شكل ٢) نجيب هذا القوس يكون - و وظله
يكون دا ثم نأخذ قوس - مساويا - لنقط - يكون خطا
مستقيما فهو اصغر من خط - واذن يكون نصف هذا المستقيم وهو
الجيب - و اصغر من نصف هذا المنحنى وهو - اعنى قوس الجيب
واما اثبات كون الظل اكبر من قوسه فهو ان تقول حيث ان مثلث دد ع
اكبر من قطاع - ع يوجد دد ع $\times \frac{1}{4}$ ع < قوس - ع $\times \frac{1}{4}$ ع
وباسقاط $\frac{1}{4}$ ع من الطرفين يبقى دد ع < قوس - ع وبتنصيف
الطرفين يوجد دا < قوس - وهذا ما أردنا اثباته

* ٤٠ * وينتج مما سبق ان نهاية نسبة الجيب الى قوسه
واحد لانه متى يكون قوس - صفرا ينطبق الجيب على الظل
فينطبق الجيب على القوس من باب الاولى ويعلم من ذلك انه يوجد فى النهاية
 $\frac{\text{حـ}}{\text{قوس}} = ١$ وبالرمز بحرف هـ لقوس - يكون
 $\frac{\text{حـ}}{\text{هـ}} = ١$

* ٤١ * ولايجاد تفاضل الجيب الذى قوسه - نفرض ان هذا
القوس يزيد اذ زيادة قدرها هـ فيحدث بواسطة حساب المثلثات
جا (س + هـ) = جاسه جتاه + جاه جتاسه ٠٠٠ (٢٣)
وبطرح جاسه يعنى حالة الجيب الاولى من كل من طرفى هذه المعادلة

ثم بالقسمة على الزيادة هـ للمغير يوجد

$$\frac{\text{جاسه} + \text{هـ} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه} + \text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{هـ}}$$

وبأخذ جاسه مضروباً مشتركاً في الطرف الثاني للمعادلة الأخيرة يوجد

$$\frac{\text{جاسه} + \text{هـ} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاسه} (\text{جاسه} - ١)}{\text{هـ}} + \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} \quad (٢٤)$$

ومتى نصير هـ صفراً ينعدم جاسه - ١ ويؤول $\frac{\text{جاسه} - ١}{\text{هـ}}$

الى ٠ والاصلح حينئذ أن يوضع هذا الحد بصورة أخرى ولذلك يستخرج

من معادلة جاسه + جاسه = ١

جاسه - ١ = - جاسه أو (جاسه - ١) (جاسه + ١) = - جاسه

ومنه يستخرج جاسه - ١ = $-\frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١}$

فنضع هذا المقدار في معادلة (٢٤) فتؤول تلك المعادلة الى

$$\frac{\text{جاسه} + \text{هـ} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} + \frac{\text{جاسه}}{\text{هـ} (\text{جاسه} + ١)} + \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} \quad (٢٥)$$

وحين يفرض هـ = ٠ يوجد $\frac{\text{جاسه}}{\text{هـ}} = ١$ و $\frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١} = \frac{٠}{١} = ٠$

ومعادلة (٢٥) تؤول بهذا السبب الى $\frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١} = \text{جاسه}$

ويستخرج منه $\frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١} = \text{جاسه}$ وهو المطلوب

* ٤٢ * هذا اذا كان نصف قطر الجدول مساوياً لواحد فاذا لم يكن

كذلك بان كان نق مثلاً فستعمل عوضاً عن معادلة (٢٣) هذه المعادلة

$$\frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{نق}} = \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{نق}}$$

ومن ثم يلزم ابقاء ثابتة نق في الناتج السابق ويوجد

$\frac{\text{جاسه}}{\text{نق}} = \frac{\text{جاسه}}{\text{نق}}$ لتفاضل جيب القوس الذي نصف قطره نق

* ٤٣ * ويمكن ايجاد تفاضل جاسه بواسطة الاعتبار

الهندسية لانه اذا رمزنا بجرف سه لقوس ا- (شكل ٣) وبجرف

هـ لقوس م-م كان عمود ح-ح هو جاسه وعمود م-م هو

جا (سه + هـ) هذا وكما قل قوس هـ كبرت زاوية مـ ح الى ان نصير قائمة حين يصير قوس هـ صفرا وبعلم من ذلك انه يمكن اعتبار زاوية مـ ح قائمة في حالة النهاية ويصير مثلث مـ د حينئذ مشابها لمثلث مـ ح لان اضلاع هذه المثلثات تكون اعمدة على بعضها في هذه الحالة وتحدث اذن هذه المتناسبة مـ ح : ح : م : مـ د أو نق : جتاسه :: مـ : جا (سه + هـ) — جاسه ومنها يستخرج

$$\frac{\text{جا (سه + هـ)}}{\text{مـ}} = \frac{\text{جتاسه}}{\text{نق}}$$

وفي النهاية يمكن تغيير وتر مـ بقوسه الذي هو مـ = هـ فاذا اعتبرنا ذلك فتؤول المعادلة السابقة الى

$$\frac{\text{و. جاسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{جتاسه}}{\text{نق}} \text{ او}$$

$$\frac{\text{و. جاسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{جتاسه}}{\text{نق}} \text{ وباعتبار نصف القطر واحدا يكون}$$

$$\text{و. جاسه} = \text{جتاسه واسه}$$

* ٤٤ * ولا يجاد تفاضل جيب التمام جتاسه نأخذ تفاضل

معادلة جاسه + جتاسه = ١ أو وهو الاول

(جاسه) + (جتاسه) = ١ (بند ٢١) فيوجد

٢ جاسه و. جاسه + ٢ جتاسه و. جتاسه = ٠ ويستخرج من

ذلك و. جتاسه = $\frac{\text{جاسه}}{\text{جتاسه}}$ و. جاسه ثم نضع في هذه بدلا عن

و. جاسه مقداره و. سه جتاسه المميز في (بند ٤١) ونختصر

فيوجد و. جتاسه = — جاسه واسه وهو المطلوب

* ٤٥ * ولا يجاد تفاضل الظل نعتبر معادلة ظاسه = $\frac{\text{جاسه}}{\text{جتاسه}}$

ثم نأخذ تفاضلا (بند ١٩) فنجد

$$\frac{\text{جتاسه} \times \text{و. جاسه} - \text{جاسه} \times \text{و. جتاسه}}{\text{جتاسه}} = \text{و. ظاسه}$$

* (٣٦) *

ونضع عوضا عن و. جاسه و. جاسه مقادير جتاسه و. جاسه
و - جاسه و. جاسه فيحدث من ذلك

$$\frac{(\text{جتاسه} + \text{جاسه})}{\text{جتاسه}} = \text{و. ظاسه}$$

$$\text{واذن يكون و. ظاسه} = \frac{\text{و. جاسه}}{\text{جتاسه}} \text{ لأن جتاسه} + \text{جاسه} = ١$$

* ٤٦ * يعرف من حساب المثلثات ان نصف القطر وسط متناسب
بين الظل وظل التمام وبين جيب التمام والقاطع ومن ثمة صكان

ظتاسه = $\frac{\text{ظاسه}}{\text{جتاسه}}$ و قاسه = $\frac{١}{\text{جتاسه}}$ فاذا اخذتفاضل الاولى
(ببند ١٩) حدث

$$\text{و. ظتاسه} = \frac{\text{و. ظاسه}}{\text{ظتاسه}} = \frac{\text{و. جاسه}}{\text{جتاسه ظتاسه}} = \frac{\text{و. جاسه}}{\text{جتاسه}}$$

لانه يستخرج من معادلة $\frac{\text{جاسه}}{\text{جتاسه}} = \text{ظا أن جتاظا} = \text{جا}$

* ٤٧ * واذا اخذتفاضل المعادلة الثانية التي هي قاسه = $\frac{١}{\text{جتاسه}}$

$$\text{حدث و. قاسه} = \frac{\text{و. جتاسه}}{\text{جتاسه}} = \frac{\text{جاسه و. جاسه}}{\text{جتاسه}}$$

$$= \frac{\text{جاسه}}{\text{جتاسه}} \frac{١}{\text{جتاسه}} = \text{و. ظاسه قاسه و. جاسه}$$

* ٤٨ * ولايجاد تفاضل قاطع التمام نأخذ تفاضل معادلة

$$\text{قتاسه} = \frac{١}{\text{جتاسه}} \text{ فيوجد}$$

$$\text{و. قتاسه} = \frac{\text{جتاسه و. جاسه}}{\text{جاسه}} = \frac{\text{جتاسه}}{\text{جاسه}} \frac{١}{\text{جاسه}} = \frac{\text{جتاسه}}{\text{جاسه}}$$

= ظتاسه قتاسه و. جاسه

* ٤٩ * واما لايجاد تفاضل الجيب المنكوس وهو جزء نصف القطر
المحصور بين موقع الجيب والقوس فيمكن ان يؤخذ تفاضل هذه المعادلة

* (२४) *

جامنکوس سه + جتاسه = ۱ فیض من ذلک
 و۰ جامنکوس سه + و۰ جتاسه = ۰ او
 و۰ جامنکوس سه - جاسه و۰ سه = ۰ او
 و۰ جامنکوس سه = جاسه و۰ سه

*** (في تفاضل بعض دوال عالية عسرة) ***

* ۰ ۰ * القواعد السابقة تكفي لمعرفة تفاضل أي دالة متبوعة

بكمية عالية لانه اذا فرضنا مثلاً أن $\frac{ص}{ز} = \frac{س}{ع}$ ووضعنا $\frac{س}{ز} = ع$
وجدنا $\frac{ص}{ز} = ع$ وبأخذ التفاضل (بند ۳۷) يكون

وامہ = $\frac{ع}{7}$ لود واع او

$$\log_s s = \log_s e = \frac{\text{واحد}}{e}$$

و کا وجود باخذ تفاضل طرفی معادله $\bar{s} = c$ ان

$$6e = s^2 \text{ لود واسه او}$$
$$\frac{w_e}{w_m} = \frac{d \text{ سولہ واژن یکون (بند ۴۴)}}{}$$
$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} \times \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$$

* ٥١ * لیکن ایضا $\text{ص} = \text{ع}'$ (ع و ر یکیات متغیر)

فأخذوا رايتم كل من الطرفين فيحدث

لو غا ص = ر لو غا ع ثم نأخذ التفاضل فيجد

$$G \cdot \text{لونا صه} = R \cdot \text{لوعاع} + \text{لوعاع وار}$$

* (٣٨) *

ونضع عوضا عن التفاضلات اللوغاريتمية مقاديرها (ببند ٢٨) فيكون

$$\frac{وا}{ص} = ر \frac{وا}{ع} + لو غا ع وار وبناء على ذلك يكون$$

$$وا ص = ص (ر \frac{وا}{ع} + لو غا ع وار) ع = ع (ر \frac{وا}{ع} + لو غا ع وار)$$

وبواسطة هذا التفاضل يوجد بالسهولة تفاضل $ص = ع$

(وكيات ع و و و و س كلها متغيرة) لانه اذا وضعنا $و = ر$ الت

المعادلة الى $ص = ع$

ومعادلتنا $ص = ع$ و $و = ر$ الشبهتان بالمعادلة المأخوذ

تفاضلها انفا ينشأ عنهما

$$وا ص = ع (ر \frac{وا}{ع} + لو غا ع وار)$$

$$وار = و (س \frac{وا}{و} + لو غا و و س)$$

كما في المثال السابق في اول البند

واذا وضعنا في مقدار $وا ص$ المبين بالمعادلة التي قبل الاخيرة عوضا عن

$وار$ و $و$ مقاديرها وجدنا

$$وا ص = ع \left[س \frac{وا}{ع} + لو غا ع و (س \frac{وا}{و} + لو غا و و س) \right]$$

$$وا ص = ع س \left(\frac{وا}{ع} + س لو غا ع و + لو غا ع لو غا و و س \right)$$

* (في قضية تيلور) *

* ٥٢ * قبل التجوّن ننبه ان الكمية التي كـ كمية $\frac{وا}{ص}$

في حساب التفاضل تدل على انه أخذ تفاضل دالة $ص$ المتعلقة بمتغير واحد

او بجملة

أوجبه له متغيرات وهذا الاخذ كان بالنسبة الى متغير $س$ ثم قسم الناتج على $واس$ كما لو كان $صه = د س ع ر$ مثلاً فان كمية $\frac{واس}{واس}$ فيها توجد باخذ التفاضل بحسب $س$ يعنى باعتبار كيتى $ع$ و $ر$ ثابتين ثم يقسم التفاضل على $واس$ فيحدث من ذلك

$$\frac{واس}{واس} = د ع ر س \text{ وكذا يوجد أن}$$

$$\frac{واس}{واس} = د س ع ر \text{ و } \frac{واس}{واس} = د س ع ر \text{ و } \frac{واس}{واس} = د س ع ر$$

واذا فرض $صه = س + ع$ فانه يوجد

$$\frac{واس}{واس} = د س \text{ و } \frac{واس}{واس} = د س$$

* ٥٣ * اذا غير متغير $س$ بكمية $س + ه$ في دالة بهذه الصورة $صه = د س$ ثم اخذ تفاضل طرفيها باعتبار كمية $ه$ ثابتة وكمية $س$ متغيرة فأقول أن المكرر التفاضلى لها في هذه الحالة يساوى المكرر التفاضلى لها حين يؤخذ تفاضلها باعتبار كمية $ه$ متغيرة وكمية $س$ ثابتة وبرهان ذلك هو أنه حيث كان بتغيير $س$ بكمية $س + ه$ يوجد

$$صه = د (س + ه) \text{ او}$$

$$صه = د س + د ه \text{ بفرض } س + ه = س \text{ فبأخذ تفاضل الطرفين يكون } \frac{واس}{واس} = د س \text{ لكن تفاضل دالة } س \text{ يتركب من حاصل ضرب دالة اخرى الى } س \text{ في } \frac{واس}{واس}$$

فاذا فرض ان هذه الدالة تكون $د س$ حدث من ذلك

$$\frac{واس}{واس} = د س + د ه \text{ وبوضع } س + ه = س \text{ عوضا عن } س \text{ يكون}$$

$$\frac{واس}{واس} = د (س + ه) \text{ و } \frac{واس}{واس} = د (س + ه)$$

ومن البين ان التغير الذى يتسبب من جعل $س$ متغيرة و $ه$ ثابتة في هذا

التفاضل لم يخرج عن مضروب و (س + هـ) الذي يؤول في هذه الحالة الى و س فن اجل ذلك يكون

$$\text{واصة} = \text{د} (س + هـ) \text{ و س ومنه يستخرج}$$

$$\text{واصة} = \frac{\text{د} (س + هـ)}{\text{واس}} \dots \dots \dots (٢٦)$$

واما اذا كانت س هي الثابتة وكية هـ هي المتغيرة فان مضروب

$$\text{و} (س + هـ) \text{ يؤول الى و هـ ويكون}$$

$$\text{واصة} = \text{د} (س + هـ) \text{ و هـ ومنه ينتج}$$

$$\text{واصة} = \frac{\text{د} (س + هـ)}{\text{واه}} \dots \dots \dots (٢٧)$$

وبمساواة مقدارى د (س + هـ) ببعضهما يكون

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واس}} = \frac{\text{واصة}}{\text{واه}} \text{ وهو المطلوب بيانه واثباته}$$

مثال ذلك ص = ٢ س فانه يحدث بوضع (س + هـ) محل س

ص = ٢ (س + هـ) وبأخذ التفاضل بفرض س متغيرة

وعكسه يوجد

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واس}} = ٢ (س + هـ) = \frac{\text{واصة}}{\text{واه}} \text{ ومن ثم } \frac{\text{واصة}}{\text{واس}} = \frac{\text{واصة}}{\text{واه}}$$

* ٥٤ * حيث انه بأخذ تفاضل معادلتى (٢٦) و (٢٧)

بالنسبة الى س + هـ توجد ايضا نتائج متساوية

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واس}} = \frac{\text{د} (س + هـ)}{\text{واس}} \text{ و } \frac{\text{واصة}}{\text{واه}} = \frac{\text{د} (س + هـ)}{\text{واه}}$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واس}} = \frac{\text{د} (س + هـ)}{\text{واس}} \text{ و } \frac{\text{واصة}}{\text{واه}} = \frac{\text{د} (س + هـ)}{\text{واه}}$$

فاذا جعلنا هـ ثابتة فى الاولى و س ثابتة فى الثانية يحدث

* (1) *

$$\frac{\text{واَصَّ}}{\text{واس}} = \text{س} (\text{ه} + \text{س}) \text{ أو } \frac{\text{واَصَّ}}{\text{واس}} = \text{س} (\text{ه} + \text{س})$$

$$\frac{\text{وَصَّ}}{\text{وَاوْ}} = \text{وَاوْ} (هـ + س) \text{ أو } \frac{\text{وَصَّ}}{\text{وَاوْ}} = \text{وَاوْ} (هـ + س)$$

وينتج من ذلك أن $\frac{واصة}{واسر} = \frac{واصة}{واه}$

وبمثل هذا ثبت أن

$$\frac{واحد}{واحد} = \frac{واحد}{واحد} , \frac{واحد}{واحد} = \frac{واحد}{واحد} \text{ واهم جراً}$$

* ○ ○ * هذا واتكن صَ دالة الى سَ + هـ فحل هذه الدالة

بالنسبة الى قوى ه ونفرض انه يوجد

$$\text{ص} = \text{ه} + \text{ه}^1 + \text{ه}^2 + \text{ه}^3 + \text{ه}^4 + \text{خ} \quad (28)$$

وکیات صہ ، ہ ، ہ ، و الخ ہی دوال

إلى كمية ∞ مجهولة ولنشرع في تعيينها بأن نأخذ تفاضل طرفي معادلة

(٢٨) بالنسبة الى متغير ه وتنقسم النتائج على و ه فيوجد

$$\frac{\text{واحد}}{٥} = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + \dots + \text{الخ}$$

ونأخذ تفاضلها بالنسبة الى متغير s ايضا ونقسم الناتج على $(s - 1)$

فہرست

$$\frac{واص}{واس} + \frac{واص}{واس} + \frac{واص}{واس} + \frac{واص}{واس} + \frac{واص}{واس} = \frac{واص}{واس}$$

ولما كان الطرفان الاوّلان لهاتين المعادلتين متساويين بمقتضى (بند ٥٣)

لزم ان يكون الطرفان الشانان متطابقين اعني متساويين تساويا تساوي فيه

مکثرات قوی ه المتناظرۃ بحیث یکون

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

ثم نوضع هذه المقادير في قانون تبلور فيوجد

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

* ٥٧ * ليكن صه = جا (سه + هه) فينتج من ذلك أن

صه = جاسه واذن يتيسر تشكيل المكثرات التفاضلية المتوالية هكذا

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{جتاسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{جاسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{جتاسه}$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{جاسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{جتاسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{جتاسه}$$

وبوضع هذه في قانون تبلور يوجد

$$\text{جا (سه + هه)} = \text{جاسه} + \text{جتاسه} - \frac{\text{هه}}{1} - \frac{\text{جاسه}}{2} - \frac{\text{جتاسه}}{3} - \frac{\text{هه}}{4}$$

$$+ \text{جاسه} + \frac{\text{هه}}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \text{جتاسه} + \frac{\text{هه}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} + \text{الخ}$$

واذا فرضنا ان سه = ٠ يكون جاسه = ٠ و جتاسه = ١

والنتائج الاخيرة تؤول الى

$$\text{جاه} = \text{هه} - \frac{\text{هه}}{3 \times 2} + \frac{\text{هه}}{5 \times 4 \times 3 \times 2} - \text{الخ}$$

واذا اخذت صه = جتا (سه + هه) وجدت بعد اجراء عمل مشابه

للسابق أن

$$\text{جتاه} = ١ - \frac{\text{هه}}{2 \times 1} + \frac{\text{هه}}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - \text{الخ}$$

* ٥٨ * نبحث ابضاعن حل لونا (سه + هه) ولذلك نضع

صه = لونا (سه + هه) فيكون

ص = لو غاسه و باخذ التفاضل يحدث

$$\text{واحد} = 0.6 \cdot \text{لوفاسه} = \frac{\text{واسه}}{\text{سه}} \text{ ومنه ينتج .}$$

ثم يوجد بالتفاضلات المتوالية $\frac{1}{s} = \frac{واص}{واس}$

$$\frac{r}{r_s} = \frac{r_{\text{ص}}}{r_{\text{س}}} \text{ و } \frac{1}{r_s} - \frac{1}{r} = \frac{r_{\text{ص}}}{r_{\text{س}}}$$

ووضع هذه المقادير في قانون تياور يوجد

$$\text{لونا (س+ه)} = \text{لونا س} + \frac{\text{ه}}{\text{س}} - \frac{\text{ه}}{\text{س}^2} + \frac{\text{ه}^2}{\text{س}^3} - \frac{\text{ه}^3}{\text{س}^4} + \dots$$

* ٥٩ * يمكن بالسهولة ايجاد تفاضل اللوغاريتم بواسطة القانون

الاخبر اللوغاريتمى اذا فرض ان هذا القانون موجود بواسطة الجبر فقط كما هو

مبين في المخطوطة الاولى في آخر هذا الكتاب وبالحقيقة فانه يحدث منه

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\text{لونا (س+ه) - لونا س}}{x^2}$$

و حين نرتقي الى النهاية نجد

$$\frac{1}{s} = \frac{\text{وا. لو غامه}}{\text{واسه}} \quad \text{ومنہ یحدث}$$

$$\frac{\text{واس}}{\text{سہ}} = \text{وا لو غاس}$$

وحيث انه قد علم تفاضل اللوغاريتم فيسهل من بعده ايجاد تفاضل ^س لانه

بفرض $\mu = \mu^*$ واخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من الطرفين يوجد

لوصه = لود^س = سه لود وبأخذ التفاضل يحدث

$$\frac{\text{واصة}}{\text{ص}} = \text{واصة لوح وينتج من ذلك}$$

وامہ = صہ واسہ لوہ وپوضع ۶ عوضائن صہ یکون

$$و.ه = د.س = و.س = و.ه$$

* ٦٠ * يمكن استنتاج قانون مكلوران من قانون تيلور بالوجه الآتي وهو ان يجعل $س = ٠$ في قانون تيلور الذي هو

$$د(س+ه) = دس + ه \frac{و.د.س}{و.س} + \frac{و.د.س^2}{و.س^2} \times \frac{ه^2}{٢} + \dots$$

وترمز برمز (دس) لما تقول اليه دس حين يفرض فيها $س = ٠$

وبرمز $\left(\frac{و.د.س}{و.س}\right)$ لما تقول اليه كمية $\frac{و.د.س}{و.س}$ حين يفرض فيها

$س = ٠$ وهلم جرا نظرا لباقي المصطلحات التفاضلية فالقانون المذكور يقول حينئذ الى

$$د ه = د(س) + ه \left(\frac{و.د.س}{و.س}\right) + \frac{و.د.س^2}{و.س^2} \left(\frac{ه^2}{٢}\right) + \dots$$

و ه في هذه المعادلة تدخل في د ه كما تدخل س في دس بحيث لو غيرت ه بكمية س آت د ه الى دس وحيث لم يبق اثر الى س في المعادلة الاخيرة فلا سبيل لعدم التغير وبالحقيقة فلا فرق بين وضع اى حرف مكان ه وبين ه ومن ثم يوجد باجراء هذا التغير

$$د س = د(س) + س \left(\frac{و.د.س}{و.س}\right) + \frac{و.د.س^2}{و.س^2} \left(\frac{س^2}{٢}\right) + \dots$$

وهذا هو قانون مكلوران

* (في تفاضل المعادلات التي بمتغيرين) *

$$* ٦١ * \text{ لتكن } د(س+ه) = ٠ \quad (٢٩)$$

معادلة بمتغيرين فبحلها بالنسبة الى ه يوجد

ه = دس واذا وضعنا هذا المقدار في معادلة (٢٩) فتؤول الى

$$\begin{aligned} \text{ك} (\text{س و د س}) &= \text{و} \text{ أو الى} \\ \text{د س} &= \text{و} \text{ اختصارا} \end{aligned}$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي متطابقة وجميع حدودها يعو بعضها بعضا باخذ
س اى مقدار كان فاذالم تزد هذه المعادلة عن الدرجة الثالثة مثلا يمكن
وضعها هكذا $\text{ح}^3 + \text{د}^3 + \text{س}^3 + \text{ب س} + \text{و} = \text{و}$

وحيث انها لا تزال متحققة بأخذ متغير س اى مقدار كان فتتحقق بوضع
س + ه فيها عوضا عن س ويوجد حينئذ

$$\text{ح} (\text{س} + \text{ه})^3 + \text{د} (\text{س} + \text{ه})^2 + \text{ب} (\text{س} + \text{ه}) + \text{و} = \text{و}$$

ويعلم من ذلك انه متى كان $\text{د س} = \text{و}$ فلا بد وان يكون

$$\text{د} (\text{س} + \text{ه}) = \text{و} \text{ ايضا مهما كانت كمية س هذا اذا طرحت من}$$

هذه المعادلة معادلة $\text{د س} = \text{و}$ بقى

$$\text{د} (\text{س} + \text{ه}) - \text{د س} = \text{و} \text{ أو}$$

$$\text{د} (\text{س} + \text{ه}) - \text{د س} = \text{و}$$

$$\text{ولكن د} (\text{س} + \text{ه}) = \text{د س} + \text{د ه} + \text{د ه}^2 + \text{ب ه}^2 + \text{الخ}$$

$$\text{فيستخرج منه} \frac{\text{د} (\text{س} + \text{ه}) - \text{د س}}{\text{ه}} = \text{د ه} + \text{ب ه}^2 + \text{الخ}$$

وحيث كان الطرف الاول لهذه المعادلة صفرا فيكون

$$\text{د ه} + \text{ب ه}^2 + \text{الخ} = \text{و} \text{ كذلك وبالاتقاء}$$

الى النهاية يكون

$$\frac{\text{و د س}}{\text{و س}} = \text{د} = \text{و} \text{ وبمحذف المقام يوجد}$$

$$\text{و د س} = \text{د و س} = \text{و} \text{ وبإبقاء صه يوجد}$$

$$\text{و ك} (\text{س و ص}) = \text{د و س} = \text{و}$$

ويعلم من ذلك انه اذا اخذ تفاضل معادلة ك (س و ص) = و باعتبار

كمية صه فيها دال متغير س امكن مساواة الناتج بصفر ويستعين

بذلك على ايجاد مقدار مكرر $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ التفاضلي كما استراه في المثال الا ترى

وهو ان تفرض $س$ (س و $ص$) $= س^2 + ٣ص - ص^2 = ٠$ (٣٠)
فتأخذ تفاضلا بالطرق المعتادة وتلاحظ مساواة الناتج بصفر كما تقدم
برهانه فتجد

$$٢س \text{ واحد} + ٣ص \text{ واحد} - ٢ص \text{ واحد} = ٠ \quad (٣١)$$

$$\text{ومنها يحدث} \quad \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{س^2}{٣ص - ص^2} \quad \dots \dots \dots (٣٢)$$

* ٦٢ * لمطابقة الطريقة التي استعملت لايجاد هذا المقدار مع
الطريقة التي استعملناها من اول الامر الى الان ينظر انه يلزم اولا للعمل
بالطريقة الاولى ان توضع معادلة (٣٠) بهذه الصورة
 $ص = دس$

يعنى انه ينبغي حلها بالنسبة الى $ص$ ليستخرج منها بواسطة التفاضل مقدار

$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} \text{ فبسبب هذه الطريقة نجد اولا}$$

$$ص = \frac{٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤} + س^2} \text{ ثم نجد بواسطة التفاضل}$$

$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{س}{\frac{٣}{٢} + \sqrt{\frac{٩}{٤} + س^2}}$$

$$\text{ومقدار} \quad \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} \text{ هذا متبين بصورة مخالفة للتي في معادلة (٣٢)}$$

لكن اذا وضع مقدار $ص$ المستخرج من (٣٠) في معادلة (٣٢)
يوجد

$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{س^2}{\frac{٣}{٢} + \sqrt{\frac{٩}{٤} + س^2}} \pm = \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$$

وهو كالمتبين قبل ومعادلة (٣١) هي التفاضل الاول لمعادلة (٣٠)

ولايجاد المعادلة التي يعلم بها المـ كـ ر التفاضلي بدرجة ثانية يعنى $\frac{واصة}{واسر}$

تقسم حدود معادلة (٣١) على $\frac{واسر}{واسر}$ ويجعل $ع = \frac{واصة}{واسر}$

فتؤول هذه المعادلة الى $ع^٢ + ع^٣ - ع^٢ = ٠$
واذا اعتبرنا فيها بعد ذلك كيتى $ع$ و $ع$ كدالتين لمتغير $ع$ نجد
بواسطة التفاضل

$ع^٢ + ع^٣ - ع^٢ = ٠$
وبالقسمة على $\frac{واسر}{واسر}$ ووضع $ع$ عوضا عن $\frac{واسر}{واسر}$ يوجد

$ع^٢ + ع^٣ - ع^٢ = ٠$ ومنها
يستخرج $\frac{واسر}{واسر} = \frac{ع^٢ - ع^٢}{ع^٢ - ع^٣} \dots\dots (٣٣)$

لكن حيث ان $ع = \frac{واسر}{واسر}$ فيستخرج منه $\frac{واسر}{واسر} = \frac{ع}{واسر}$

وبوضع هذه المقادير في معادلة (٣٣) عوضا عن $ع$ و $\frac{واسر}{واسر}$
يوجد بعد حذف المقام

$\frac{واسر}{واسر} = (ع^٢ - ع^٣) = (ع^٢ - ع^٢) \dots\dots (٣٤)$
وهذا هو التفاضل الثانى لمعادلة (٣٠) ولاجل ايجاد التفاضل الثالث

نجعل $ع = \frac{واسر}{واسر}$ فتؤول معادلة (٣٣) بعد حذف مقامها الى

$$ع^٢ - ع^٣ = ع^٢ - ع^٢$$

ثم نعتبر كيتان $ع$ و $ع$ و $ع$ كدوال لمتغير $ع$ ويؤخذ

التفاضل وتكمل العملية كما في إيجاد التفاضل الثاني فيحدث التفاضل الثالث وهلم جرا

* ٦٣ * وعوضا عن استعمال حروف ح و ع و ع والخ
لأجل اجراء العمليات يؤخذ تفاضل معادلة (٣١) ويوضع فيها $\frac{1}{\text{ع}}$
بدلا عن تفاضل $\frac{1}{\text{ع}}$ و $\frac{1}{\text{ع}}$ بدلا عن تفاضل $\frac{1}{\text{ع}}$ و $\frac{1}{\text{ع}}$
بدلا عن تفاضل $\frac{1}{\text{ع}}$ وهكذا باعتبار $\frac{1}{\text{ع}}$ كمية ثابتة
فينتهي الى ناتج كالسابق ويوجد بهذه الكيفية
 $\frac{1}{\text{ع}} + \frac{1}{\text{ع}} + \frac{1}{\text{ع}} - \frac{1}{\text{ع}} - \frac{1}{\text{ع}} - \frac{1}{\text{ع}} = 0$
وهذه المعادلة هي كمعادلة (٣٤)

* ٦٤ * ولنبحث الآن عن المقدار العمومي لتفاضل معادلة
د (س و ع) = ٠

ولذلك نرمز لكمية د (س و ع) بحرف ع فتجد باخذ
تفاضل هذه الدالة بالنسبة الى متغير س هذا الحد $\frac{\text{ع}}{\text{س}}$ و

ونجد ايضا باخذ تفاضلها بالنسبة الى متغير ع هذا الحد الثاني
 $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ و $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ ويكون حينئذ $\frac{\text{ع}}{\text{س}} + \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = 0$ (س و ع) أو

$\frac{\text{ع}}{\text{س}} + \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = 0$ و اذا كانت ص
معتبرة دالة لمتغير س فانه يوجد باخذ تفاضلها $\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}}$ و

وبوضع هذا المقدار في كمية $\frac{\text{ع}}{\text{س}}$ يكون

$$\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} + \frac{\text{ع}}{\text{ع}}$$

* ٦٥ * واذا راجعت القضية المثبوتة في (بند ٢٤) شاهدت ان

* (٥٠) *

كمية ϵ معتبرة كدالة لمتغير ν و ν معتبرة كدالة لمتغير μ
 وحاصل ضرب $\frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\nu}$ ليس التفاضل ϵ المأخوذ بنسبة
 μ الداخلة في ν

* ٦٦ * لما كان التفاضل الكلي لدالة محتوية على μ و ν يعلم بمعادلة

$$\nu = \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu + \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu \quad \text{سميت كميات}$$

$\frac{\nu}{\mu}$ و $\frac{\nu}{\mu}$ و $\frac{\nu}{\mu}$ بالتفاضلات الجزئية للدالة ϵ
 وكذلك اذا كانت ϵ دالة لمتغيرات μ و ν و μ الثلاث التي
 ليست بمعلقة فانه يوجد

$$\nu = \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu + \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu + \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu$$

$$\text{والحدود } \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu \text{ و } \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu \text{ و } \frac{\nu}{\mu} \cdot \mu$$

تكون هي التفاضلات الجزئية للدالة ϵ

* ٦٧ * قد ذكرنا في (بند ٥٢) ان الكمية التي ككمية $\frac{\nu}{\mu}$

تبين انه اخذ تفاضل دالة ν بالنسبة لمتغير μ وقسم الناتج بعد ذلك

$$\text{على } \frac{\nu}{\mu} \text{ فينتج من ذلك انه اذا وجدت معادلة } \frac{\nu}{\mu} = \epsilon$$

$$\text{واستخرج منها } 1 = \frac{\epsilon}{\frac{\nu}{\mu}}$$

فلا يمكن ان يستنتج منها $1 = \epsilon \cdot \frac{\nu}{\mu}$ بدون برهان لان التفاضل

في المعادلة الاخيرة لم يكن مأخوذا بالنسبة الى صه بل هو مأخوذ بالنسبة الى صه ولا يعرف هل التفاضل في الحالة الاخيرة كالتفاضل في الحالة الاولى اولا ورفع هذا الاشكال نقول انه قد ثبت في (بند ٢٤) ان

$$\frac{\text{ع}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ع}}{\text{واسه}} \cdot \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

فاذا فرضنا ان $\text{ع} = \text{صه}$ فتؤول هذه المعادلة الى

$$1 = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \cdot \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \quad \text{ومنه يحدث} \quad \frac{1}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

وهذا يبين ان تغيير فرضية المفاضل تتوافق مع الجبر وقواعده

* ٦٨ * ولنثبت القضية المتقدمة من اقل وهلة باثبات آخر فنقول

$$\text{ليكن} \quad \frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{صه} - \text{صه}} = \text{ع} + \text{ده} + \text{ده}^1 + \text{ده}^2 + \text{الخ}$$

$$\text{فيحدث منه} \quad \frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{صه} - \text{صه}} = \frac{1}{\text{ع} + \text{ده} + \text{ده}^1 + \text{ده}^2 + \text{الخ}}$$

وباجراء عملية القسمة على الطرف الثاني او بجعله بواسطة قانون مكثور ان يوجد

$$\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{صه} - \text{صه}} = \frac{1}{\text{ع}} - \frac{\text{ده}}{\text{ع}} + \frac{\text{ده}^2}{\text{ع}} - \frac{\text{ده}^3}{\text{ع}} + \dots$$

$$\text{وفي النهاية يوجد} \quad \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{1}{\text{ع}} \quad \text{وحيث ان} \quad \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \quad \text{ينتج}$$

$$\text{من ذلك ان} \quad \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{1}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}} \quad \text{ويثبت المطلوب}$$

(في طريقة المماسات)*

* ٦٩ * الطريقة التي يوجد بها المقدار التفاضلي للمماس وتحت المماس

والخط العمودي وتحت العمودي تسمى بطريقة المماسات وليكن ابيان ذلك

صه و صه بعدا نقطة م المأخوذة من نقطة منحنا ما (شكل ٤)

* (٥٣) *

فيستخرج من المعادلة الأخيرة

$$ع ط = \frac{ص}{\frac{واس}{واس}} \text{ ومن بعد (بند ٦٧) يكون}$$

$$ع ط = ص \frac{واس}{واس} \text{ أو وهو الأولي}$$

$$ع ط = ص \frac{واس}{واس} = \text{تحت المماس بالرمز بحرفي س و ص}$$

لبعدى نقطة م

* ٧٠ * إذا رسمنا من نقطة م (شكل ٥) خط م د عمودا على م ط ف تحت العمودى يكون ع د ولتعيينه نعتبر تناسب

$$ع ط : ع م :: ع م : ع د \text{ أو}$$

$$ص \frac{واس}{واس} : ص :: ص : ع د \text{ فيحدث منه}$$

$$ع د = ص \frac{واس}{واس} = \text{تحت العمودى}$$

وأما من قبل الخط المماس والخط العمودى فنعتبر معادلتى

$$م ط = \sqrt{ع ط + ع م}$$

$$م د = \sqrt{ع د + ع م}$$

فيحدث من الأولى

$$م ط = \sqrt{ص \frac{واس}{واس} + ع م} = \sqrt{ص + ع م} = \text{المماس}$$

ويحدث من الثانية

$$م د = \sqrt{ص \frac{واس}{واس} + ع م} = \sqrt{ص + ع م} = \text{العمودى}$$

* ٧١ * ولا يجاد معادلة الخط المماس نفرض ان $صه$ و $صه$ يكونان ابعاد نقطة التماس التي هي $م$ فمعادلة مستقيم $م ط$ المار بنقطة $م$ يمكن بيانها برسم $صه - صه = د$ ($سه - سه$) وكية $د$ في هذه المعادلة نعين ظل زاوية $م ط ح$ ومقدار هذا الظل هو $\frac{م ح}{ط ح}$ لانه يحدث من متناسبة $ح ط : ح م :: ١ : طام ط ح$

$$\frac{م ح}{ط ح} = \text{ظام ط ح}$$
ويتضح من بعد ذلك أن

$$\frac{\text{ظام ط ح}}{ح ط} = \frac{صه}{\text{تحت المماس}} = \frac{صه}{\frac{صه}{\frac{م ح}{ط ح}}} = \frac{م ح}{ط ح}$$

فاذا وضعنا مقدار $د$ هذا في معادلة الخط المماس تؤول تلك المعادلة الى
 $صه - صه = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} (سه - سه)$ وهي معادلة الخط المماس المطلوبة
ومعادلة الخط العمودي تكون حينئذ

$$صه - صه = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} (سه - سه)$$

* (تطبيق القوانين اوالدساتير السابقة على الامثلة) *

(المثال الاول)

* ٧٢ * المراد ايجاد تحت المماس للقطع المكافى ولذلك نأخذ تفاضل طرفي معادلة القطع المكافى التي هي $صه = ح سه$ بحسب نقطة التماس فيوجد $صه واسه = ح واسه$ ومنه يحدث

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{ح}{\text{واسه}} \text{ و } \frac{\text{واسه}}{ح} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$
وبوضع هذا المقدار في معادلة

(٥٥)

$$ع ط = ص \frac{واس}{واس} \text{ يوجد}$$

$$\frac{ص^2}{ع} = ع ط$$

واذا وضعت في المعادلة الاخيرة ع س عوضا عن ص حدث لك

$$ع ط اوتحت المماس = س^2$$

(المثال الثاني)

المراد ايجاد تحت العمودى للقطع الناقص ولذلك ناخذ تفاضل طرفى معادلة القطع الناقص التى هى $واس + م^2 = م^2 + م^2$ يجعل النقطة الاصلية مركزه فيوجد $2 واس + م^2 = م^2 + م^2$ ويستخرج من

$$\text{ذلك } \frac{واس}{واس} = \frac{واس}{م^2} \text{ ثم نضع هذا المقدار فى تحت العمودى}$$

$$ع فيكون ع اوتحت العمودى = م^2 - م^2$$

(المثال الثالث)

المراد ايجاد كمية الخط المماس للدائرة وذلك ناخذ تفاضل معادلة الدائرة التى

هى $س^2 + ص^2 = نق$ بحسب نقطة التماس فيوجد

$$2 س واس + 2 ص^2 = 2 ص^2 + 2 ص^2$$

$$\frac{واس}{واس} = \frac{س}{ص} - \frac{واس}{ص} = \frac{س}{ص} - \frac{واس}{ص}$$

ثم يوضع هذا المقدار فى معادلة

$$م ط = ص \left(1 + \frac{واس}{ص} \right) \text{ فتؤول تلك المعادلة الى}$$

$$م ط = ص \left(1 + \frac{ص^2}{س^2} \right) = ص \left(\frac{س^2 + ص^2}{س^2} \right) = \frac{ص نق}{س} = \text{المماس}$$

(فى الخطوط المجاورة للخطوط المنحنية ويقال لها المقتربة)

* ٧٣ * مقدار اط (شكل ٦) الذي هو بعد راس المنحنى عن نقطة تقابل الخط المماس بالخط الافقى يستخرج بالسهولة من معادلة الخط المماس لانه اذا جعلت رأس المنحنى التى هى ١ نقطة اصلية كان خط اط هو بعد هذه الرأس عن النقطة التى يكون فيها الراسى م ح صفرا وحيث ان معادلة المماس م ط هى صه - صه = $\frac{قاصه}{واسه} (سه - سه)$ فيكفى ان يجعل فى هذه المعادلة صه = ٠ ليكون مقدار سه الحادث منها مقدارا لخط اط ويوجد اذا ذلك

اط = سه = سه - صه = $\frac{قاصه}{واسه}$ وهذا المقدار يكون هو بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الافقى ولايجاد بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الرأسى نبحث عن مقدار اب بان نقول انه لما كان هذا الخط هو الرأسى الموافق الى سه = ٠ فى معادلة الخط المماس فيجب وضع سه = ٠ حينئذ فى هذه المعادلة ليحدث منها صه = اب = صه - $\frac{قاصه}{واسه}$ ونفرض الآن ان سه تصير غير منتهية وابعاد اط و اب لاتزال منتهية المقدار محدودة نخط ط ل (شكل ٧) ليقطع المنحنى حينئذ الاعلى بعد غير محدود فهو الخط المقربى للمنحنى المفروض

* ٧٤ * ولنتخذ هذه المعادلة صه = م سه + سه = م سه + سه فنستخرج منها $\frac{قاصه}{واسه} = \frac{م سه + سه}{واسه}$ واذن يكون

$$\begin{aligned} \text{اط} = سه - \frac{قاصه}{واسه} &= \frac{قاصه}{واسه} - \frac{قاصه}{واسه} = \frac{قاصه - قاصه}{واسه} = \frac{قاصه - قاصه}{واسه} \\ \text{اب} = صه - \frac{قاصه}{واسه} &= \frac{قاصه - قاصه}{واسه} = \frac{قاصه - قاصه}{واسه} \end{aligned}$$

وبوضع مقدار صه عوضا عنها يوجد بعد الاختصار

$$\text{اط} = - \frac{مسه}{م + ٢ص} \text{ و اب} = \frac{مسه}{٢ص + م} \text{ وحين تقسم}$$

كيتا كل من هذه الكسور على سه يوجد

$$\text{اط} = - \frac{م}{٢ص + م} \text{ و اب} = \frac{م}{٢ص + م}$$

ثم يجعل سه = ∞ في هذه المقادير فيكون

$$\text{اط} = - \frac{م}{٢ص} \text{ و اب} = \frac{م}{٢ص} \dots \dots \dots (٣٥)$$

ويعلم من ذلك انه يوجد للمنحنى المفروض مقربات مالم تكن كمية د صفرا
اوسالبة لانه حين تكون كمية د سالبة يصير مقدار اب المين ثنائية
معادلات (٣٥) تخيليا ومن البين انه متى كانت د سالبة انتسبت
المعادلة الى قطع ناقص وتكون المعادلة بعينها معادلة قطع مكافئ متى كان
مقدار د صفرا وفي هذه الحالة يتبين من معادلات (٣٥) ان اط و اب
يصيران غير منتهيين ويؤخذ منه ان القطع المكافئ لامقرب له ولا محانب

في معادلة المستوى المماس بسطح منحن ومعادلة

الخط العمودي لهذا السطح

$$* ٧٥ * \text{ لتكن د (سه و صه و ع) = ٠ معادلة سطح}$$

$$\text{منحن و ع سه + ط صه + ع ع + ك = ٠ معادلة}$$

مستوفاذار من نابجروف سه و صه و ع لا بعد نقطة التماس التي

هي م فمعادلة المستوى بالنسبة الى هذه النقطة تكون

$$\text{ع سه + ط صه + ع ع + ك = ٠}$$

وبحذف ك من بين هاتين المعادلتين توجد المعادلة

$$\text{ع (سه - سه) + ط (صه - صه) + ع (ع - ع) = ٠ (٣٦)}$$

وهي معادلة المستوى المار بنقطة سه و صه و ع ولترسم مستويا

موازيا للمستوى (سه و ع) مارا بنقطة التماس سه و صه و ع

فهذا المستوى يقطع السطح المنحنى المفروض في منحنى م (شكل ٨) ويقطع المستوى المماس في مستقيم مل والمستقيم مل يكون مماسا للمنحنى م والقاطع السطح المماس السطح المنحنى

ويمكن انتاج معادلة مستقيم مل من معادلة (٣٦) لانه حيث كان هذا المستقيم وهو تقاطع المستوى المماس بالمستوى المار بنقطة التماس موازيا لسطح (س و ع) الاحداثى وكانت نقطة م توجد عليه فيوجد اذالك جميع نقطه ص = ص أو ص - ص = ص = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى $ع (س - س) + ع (ع - ع) = ٠$ ولما كانت هذه المعادلة تبين النسب الواقعة بين بعدى س و ع لاي نقطة من مستقيم مل تكون هى معادلة هذا المستقيم ويمكن وضعها هكذا

$$ع - ع = ع (س - س) \quad (٣٧)$$

هذا اذا اعنت النظر فظهر لك ان معادلة السطح المنحنى المفروض التى هى د (س و ص و ع) = ٠ تؤول الى معادلة منحنى م اذا اعتبرت فيها ص ثابتة فاذا اردنا الان معرفة شرط تماس مستقيم مل بمنحنى م نراجع (بند ٧١) ومنه نتحقق انه يجب ان يكون مكرر كمية

$$(س - س) من معادلة (٣٧) مساويا لمقدار $\frac{ع}{ع}$ المستخرج$$

من معادلة المنحنى م ولا يفتنى ان معادلة هذا المنحنى هى معادلة السطح معتبرا فيها ص ثابتة ومن ثم يكتفى ان يؤخذ تناضل معادلة السطح المذكور

$$ويسـتخرج منها $\frac{ع}{ع}$ لانه يعلم من بعد (بند ٥٢) ان الزمن $\frac{ع}{ع}$$$

يبين أن ص اعبرت ثابتة فى اخذ التناضل وينتج من ذلك انه بتشكيل س و ص هكذا س و ص بعد اجراء العملية يكون شرط تماس

مل بالمنحنى م هكذا

$$- \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع} \text{ أو } ع = - \frac{ع}{ع} \dots (٣٨)$$

واذا رسمنا كذلك من نقطة م مستويا موازيا لمستوى (صه وع) الاحداثي فيقطع هذا المستوى السطح المفروض في منحني م د ويقطع المستوى المماس في مستقيم م د ويكون هذا المستقيم مماسا لمنحني م د وجميع نقطه تكون متساوية البعد عن مستوى (صه وع) يعني تكون اقصياتها كلها متساوية فيكون $س = س$ أو $س = س = *$ ونؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى المعادلة

$$ط (صه - صه) + ع (ع - ع) = ٠ \text{ التي يستخرج منها } ع - ع = ط (صه - صه) \text{ وهذه المعادلة هي معادلة المستقيم م د فيكون شرط تماس هذا المستقيم بالمنحني م د بمساواة مكرركية صه - صه للمكرر } \frac{ع}{ع} \text{ التفاضل الى المستخرج من}$$

$$\text{معادلة السطح المفروض يعني انه يوجد } - \frac{ط}{ع} = \frac{ع}{ع} \text{ ومن ثم}$$

$$\text{يكون } ط = - \frac{ع}{ع} \dots (٣٩)$$

واذا وضعت مقادير ع و ط المبينة بمعادلتى (٣٨) و (٣٩) في معادلة (٣٦) الت هذه المعادلة الى

$$- \frac{ع}{ع} (س - س) - \frac{ع}{ع} (صه - صه) + ع (ع - ع) = ٠$$

ومن هذه يستخرج

$$ع - ع = \frac{ع}{ع} (س - س) + \frac{ع}{ع} (صه - صه) \dots (٤٠)$$

وهذه المعادلة هي معادلة المستوى المماس في نقطة $س$ و $صه$ وع

* ٧٦ * ولنبحث عن معادلة المستوى المماس بالكرة مثلاً ولذلك

نرمز لابعاد مركز الكرة بحروف هـ و و ر فمعادلتها تكون

$$(س - هـ) + (ص - و) + (ع - ر) = \text{نق}$$

ثم نعتبر ص ثابتة في هذه المعادلة ونأخذ التفاضل فيوجد

$$٢(س - هـ) + (ص - و) + (ع - ر) = ٠ \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{ع - ر}{ص - و} = \frac{هـ - س}{و - و} \text{ وكذا نعتبر س ثابتة ونأخذ تفاضل معادلة}$$

الكرة المذكورة فيوجد

$$٢(ص - و) + (ص - و) + (ع - ر) = ٠ \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{ع - و}{ص - و} = \frac{ع - ر}{و - و} \text{ ومعادلة السطح المماس للكرة في نقطة}$$

س و و ع تكون حينئذ

$$ع - ع = \frac{هـ - س}{و - و} + \frac{و - و}{ع - ر} (ص - و) \text{ * ٧٧ *}$$

وإذا كان هذا السطح يمر بنهاية القطر الرأسى يوجد

$$س = هـ \text{ و } ص = و \text{ و } ع = ر + \text{نق} \text{ وتؤول}$$

معادلة السطح في هذه الحالة الى ع = ر + نق وهذه هي معادلة

المستوى الموازى لسطح (س و ص) الاحداثى

* ٧٨ * معادلات الخط العمودى في نقطة س و و ع

يمكن حدودها بالسهولة من معادلة السطح المماس وبيان ذلك ان تقول حيث انه

يعلم من الهندسة التحليلية المسماة بالثلاثة ابعاد ان الشرط الواقع ليعكون

المستقيم الذى معادلتها

$$(٤١) \begin{cases} س + ع = س \\ س + ع = ص \end{cases}$$

عمود على المستوى الذى معادلته

(٦١)

$$ع + س + ط + ص = ك + ع + (٤٢)$$

هو أن يوجد $ع = ط$ و $ك = ط$

فإذا حولنا جميع حدود معادلة (٤٠) في الطرف الاقل وطابقنا بعد ذلك حدودها بحدود معادلة (٤٢) يحدث لنا بمساواة ~~مكررات~~ كيات $س$ و $ص$ و $ع$ ببعضها

$$ع = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} = ط - \frac{ع}{ع} \quad و \quad ١ = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع}$$

ويعلم من ذلك انه يكون $ع = ط$ و $ك = ط$ و $ع = ط$ في معادلات (٤١) يوجد

$$س = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} + ع + د$$

$$ص = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} + ع + ١$$

وحيث ان نقطة (س و ص و ع) تحقق هذه المعادلات لانها من جملة نقط المستقيم المستدل عليه بها يوجد ايضا

$$س = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} + ع + د$$

$$ص = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} + ع + ١$$

وبجذف د و ١ من هذه المعادلات الاربع يوجد

$$س - س = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} (ع - ع)$$

$$ص - ص = \frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} (ع - ع)$$

وهاتان المعادلتان هما معادلتا الخط العمودي في نقطة (س و ص و ع)

* (في الدوال التي تؤول الى ÷ باحد المقادير التي يأخذها المتغير) *

* ٧٩ * اذا آل كسر ك كسر $\frac{ك}{د}$ الى ÷ باخذ متغير س مقدار ايرمز اليه بحرف γ مثلاً كان ذلك دليلاً على وجود مضروب مشترك هو س - γ أو (س - γ)^٢ على جهة العموم لكمية الكسر المفروض واذا اسقط هذا المضروب المشترك ان امكن حدث المقدار الحقيقي للكسر المفروض

ولنفرض لبيان ذلك ان س - γ يكون مضروباً في γ س م مرة وفي د س م مرة (مالم يقتضى الحال الى جعل م و د مساويين الى الوحدة او الى صفر) فيمكننا ان نضع

$$\gamma س = ح (س - \gamma)^{\cdot م} و د س = ك (س - \gamma)^{\cdot م}$$

$$\text{ومنه يحدث } \frac{\gamma س}{د س} = \frac{ح}{ك} (س - \gamma)^{-\cdot م} \dots\dots\dots (٤٣)$$

وباخذ تفاضل المعادلة الاولى وقسمة جميع حدودها بعد ذلك على (و س) يوجد

$$\frac{\gamma \cdot ك س}{\gamma س} = \frac{ح}{\gamma س} (س - \gamma)^{\cdot م} + ح م (س - \gamma)^{\cdot م - ١}$$

ومن المشاهد ان مقدار $\frac{\gamma \cdot ك س}{\gamma س}$ يتركب من حدين يحتوي احدهما

على مضروب س - γ بأصغر من أسه في الدالة المفروضة بواحد

واذا اخذنا المكثر التفاضلي لكمية $\frac{\gamma \cdot ك س}{\gamma س}$ شوهد بهذا المنوال انه يحتوي

على حدين متبوع بكمية (س - γ) وحداً اخر متبوع بكمية (س - γ)^{١ - م}

وحد ثالث متنوع بكمية (م - ٧) وهذا الحد الثالث يكون

م (م - ١) ع (م - ٧) وبأدامة عملية أخذ التفاضل يشاهدان كل تفاضل مستجد يحتوى على كمية م - ٧ بأسس كأسسها في الدالة التي حدث منها هذا التفاضل بلا واسطة زائدًا أحدًا يحتوى على م - ٧ بأس اصغر من ذلك الواحد وبعلم منه أنه بأخذ المكرران التفاضلية المتوالية يكون الحد المحتوى على أقل قوى م - ٧ هو

م ع (م - ٧) في التفاضل الاول

و م (م - ١) ع (م - ٧) في التفاضل الثانى

و م (م - ١) (م - ٢) ع (م - ٧) في التفاضل الثالث

و م (م - ١) (م - ٢) ع (م - ٧) في التفاضل النونى

واذن يكون المكرر التفاضلى بدرجة ر لكمية م - ٧ هكذا

$$\frac{\text{ف. م. م.}}{\text{و. م.}} = \frac{\text{س (م - ٧)} + \text{س (م - ٧)} + \text{س (م - ٧)}}{\text{م (م - ١) (م - ٢) ع (م - ٧)}}$$

وما ذكر في شان م - ٧ يمكن تطبيقه على م - ٨ فيحدث منها

$$\frac{\text{ف. م. م. م.}}{\text{و. م. م.}} = \frac{\text{ع (م - ٧)} + \text{ع (م - ٧)} + \text{ع (م - ٧)}}{\text{ك (م - ٧) (م - ٢) (م - ١)}}$$

وبقسمة هذين المكررين على بعضهما يوجد

$$\frac{\text{ف. م. م. م.}}{\text{و. م. م. م.}}$$

$$\frac{\text{٤) ... } \frac{\text{س (م - ٧)} + \text{س (م - ٧)} + \text{س (م - ٧)}}{\text{ك (م - ٧) (م - ٢) (م - ١)}}}{\frac{\text{ع (م - ٧)} + \text{ع (م - ٧)} + \text{ع (م - ٧)}}{\text{ك (م - ٧) (م - ٢) (م - ١)}}} = \frac{\text{ف. م. م. م. م.}}{\text{و. م. م. م. م.}}$$

وهذا يستدل على ان معادلة (٤٣) تؤول الى صفر حين يكون $m < 0$
 واما الحالة الثالثة وهى الاخيرة التى فيها $m > 0$ فان جميع الحدود
 تنحذف فيها ما عدا حد $m(1-m)$ (٢-٢) 0.000 (٣-٣)
 بأخذ عدد التفاضلات الذى هو m مساويا الى m ويبقى حينئذ

$$\frac{0.000}{(1-m)^m} = \frac{m(1-m)(1-m) \dots (1-m)}{(1-m)^m} = \frac{0.000}{(1-m)^m}$$

وهذا المقدار يدل على ان الطرف الثانى لمعادلة (٤٣) يصير غير منته
 فى الحالة التى يكون فيها $m > 0$

* ٨١ * ونتيج هذه القاعدة مما سبق وهى متى يراد تعيين المقدار

الحقيقى لكسر $\frac{0.000}{(1-m)^m}$ الذى يصير $\div$ بأحد المقادير التى ياخذها المتغير

يؤخذ تفاضل كل من كىفى هذا الكسر على حدته ثم ينظر هل يؤول ناتجا

$\frac{0.000}{(1-m)^m}$ و $\frac{0.000}{(1-m)^m}$ الى صفر بالمقدار الذى يجعل $\frac{0.000}{(1-m)^m}$ آيلا الى

$\div$ اولافان الا الى صفر اخذ المـ كـر التفاضلى لهما الى كىفى $\frac{0.000}{(1-m)^m}$

و $\frac{0.000}{(1-m)^m}$ وينظر ايضا هل يؤول كل من النواتج الحادثة الى صفر

بالفرض المذكور او لا وهكذا اتمام العملية فان وجد بعد جملة عمليات ناتجان

لا يؤول كل منهما الى صفر بالفرض السابق فالكسر المتكون منهما يكون هو

المقدار الحقيقى للكسر المفروض واذا آل احدهما هو البسط الى صفر فالمقدار

الحقيقى للكسر المفروض يكون صفرا ويكون مقدار هذا الكسر غير محدود اذا

إل المقام وحده الى صفر

(المثال الاول)

* ٨٢ * المراد معرفة المقدار الحقيقي لكسر $\frac{س٢-س٣}{س٢-س٣}$ الذي
 يؤول الى $\div$ بفرض $س٢ = س٣$ ولذلك نأخذ تفاضل كل من كيتي هذا
 الكسر فيوجد $\frac{س٣-س٣}{س٣-س٣}$ وحيث ان كيتي هذا الكسر الاخير لا يؤلان الى صفر
 بفرض $س٢ = س٣$ فالمقدار الحقيقي لكسر $\frac{س٢-س٣}{س٢-س٣}$ حين يفرض
 $س٢ = س٣$ يكون $\frac{س٢-س٣}{س٢-س٣}$ وهو المطلوب

(المثال الثاني)

* ٨٣ * لمعرفة المقدار الحقيقي لكسر $\frac{س٢-س٣-س٤}{س٢-س٣-س٤}$
 حين يفرض $س٢ = س٣ = س٤$ الذي يجعل هذا الكسر ايا الى $\div$ يؤخذ
 تفاضل البسط والمقام كل منهما على حدته ثم تقسم النواتج على بعضها فيوجد
 $\frac{س٢-س٣-س٤}{س٢-س٣-س٤}$ وحيث ان كلا من كيتي هذا الكسر الاخير يؤول الى
 صفر بالفرض السابق الذي هو $س٢ = س٣ = س٤$ فيؤخذ التفاضل ثانيا فيحدث
 $\frac{س٢-س٣-س٤}{س٢-س٣-س٤}$

ولما كان مقام هذا الكسر يؤول وحده الى صفر بفرض $س٢ = س٣ = س٤$ علم
 من ذلك ان مقدار الكسر المفروض غير محدود

(المثال الثالث)

* ٨٤ * يفرض لكسر $\frac{س٢-س٣}{س٢-س٣}$ الذي يؤول الى $\div$ بفرض
 $س٢ = س٣$ فيؤخذ تفاضل كل من البسط والمقام على حدته فيؤول هذا
 الكسر الى $\frac{س٢-س٣}{س٢-س٣}$

وهو كسر يؤول الى $\div$ ولا تؤول كيتاه الى صفر يجعل

١ = ٢ ٠ فيعلم من ذلك ان المقدار الحقيقي للكسر المقروض حين يفرض
 ٢ = ٢ ٠ هو ١ - ٢ ٠ وقيمة ٢ - ٠ أو ٢
 تكون هي المضروب المشترك لقيمة ذلك الكسر ولاظهار هذا المضروب
 في البسط الذي هو ٢ - ٢ ٠ تنظر أنه يوجد من بعد (بند ١٢٧) ان

$$\frac{٢}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٢}{١} + ١ = ٢$$

$$\frac{٢}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٢}{١} + ١ = ٢$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$\frac{٢}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٢}{١} = ٢ - ٢$$

وبهذا يشاهد وجوده مضروب ٢ في ٢ - ٢

* ٨٥ * حيث ان القاعدة التي ذكرناها لايجاد المقدار الحقيقي للكسر
 الذي يؤول الى ÷ بأحد المقادير التي يأخذها المتغير مؤسسة على فرضية
 م و ٢ عددين صحيحين فلا يمكن استعمالها في الحالات التي تكون فيها
 هاتان الكميتان كسورا اذ لا يمكن الوقوف على حد كحد ٢ - ٢
 يكون مرفوعا الى أس صفر ومن ثمة لا يمكن تخليص المضروب المشترك من كيتي
 الكسر المقروض واسقاطه منهما
 ولنفرض لعمومية هذه الطريقة أن

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢(٢-٢) + ٢(٢-٢) + ٢(٢-٢) + ٢(٢-٢)}{٢(٢-٢) + ٢(٢-٢) + ٢(٢-٢) + ٢(٢-٢)}$$

وان كميات ٢ و ٢ و ٢ و ٢ و ٢ موجبة
 ومتزايدة فهذا الكسر يؤول الى ÷ بوضع ٢ = ٢ ويمكننا ان نغير
 كمية ٢ بكمية ٢ + ه عوضا عن تغييرها بكمية ٢ فقط لكن

بعد انتهاء العملية نفرض $ه = ٠$ والناتج الحادث يكون كالناتج من تغيير $س$ بكمية $ز$ من أول وهلة ونجد حينئذ

$$\frac{كس}{وس} = \frac{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots (٤٥) الخ}{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots الخ}$$

وباعتبار كون $ز$ و $د$ يسكونان اصغرا لأسس الداخلة في هاتين المتسلسلتين يمكن وقوع هذه الثلاث حالات

$$د < ز \quad \text{و} \quad د = ز \quad \text{و} \quad د > ز$$

ففي الحالة الاولى اذا قسمت كيتا كسر (٤٥) على $ه$ يحدث

$$\frac{كس}{وس} = \frac{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots (٤٦) الخ}{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots الخ}$$

وحيث ان $د < ز$ فرضا فعدد $ز$ يكون موجبا ومن باب اولي تكون كيات $ب - ز$ و $و - د$ الخ و $ب - د$ و $و - ز$ الخ موجبة كذلك لان $د$ و $ب$ و $و$ الخ و $ز$ و $ه$ و $و$ الخ متزايدة واذا جعلنا الآن $ه = ١٠$ انخذت جميع حدود الطرف الثاني للمعادلة (٤٦) ماعدا $ح$ ويعلم من ذلك ان هذه المعادلة تؤول الى

$$٠ = \frac{ز}{ح} = \frac{كس}{وس}$$

وفي الحالة الثانية وهي التي يكون فيها $د = ز$ يؤول حد $ح ه$

الى $ح ه = ح$ ويعلم من ذلك انه حين يجعل $س = ز$ تؤول معادلة (٤٦) الى $\frac{ح}{ح}$

وفي الحالة الثالثة وهي التي فيها $د > ز$ تقسيم كيتا كسر (٤٥) على

ثم تجرى عليه العمليات اللازمة لمعرفة مقدار الحقيق حيث انه قد آل الى ÷
 * ٨٨ * وبالجمله متى جعل فرض م = ٠ احد مضروبى
 حاصل ضرب م ÷ آىلا الى صف و جعل المضروب الاخر غير منته و اريد
 معرفة المقدار الحقيق لهذا الحاصل يحوّل الحاصل المذكور الى صورة كسر
 بالكيفية الاتية وهى ان يفرض اولا أن حاصل المضرب المقروض يكون
 م × ÷ وان مضروب م هو الذى يصير صفرا بقرض م = ٠
 ومضروب ÷ يصير غير منته ثم يوضع هذا الحاصل هكذا

$$\frac{r}{1-\phi} = 2 \times r$$

ولما كان فرض $\frac{1}{2}$ = يجعل مضروب $\frac{1}{2}$ غير منته لزم ان يكون $\frac{1}{2}$ = ويؤول حاصل الضرب السابق حينئذ الى $\frac{1}{2}$ فبحري علمه العملة السابقة

• (في النهايات الكبرى والصغرى للدوال التي يمتنع واحد) •

۸۹ • • • • • يمكن اعطاء كمية هـ في متسلسلة تيلور مقداراً بحيث يصير
 اى حد يراد من حدودها اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه ولبيان ذلك
 نكتب المتسلسلة وهى

$$\frac{ص}{واصه} + ه + \frac{واصه ه}{واسه} + \frac{واصه ه}{واسه} + \frac{واصه ه}{واسه} + الخ$$
 ونقول اذا اردنا ان يكون حد $\frac{واصه}{واسه}$ مثلاً $\frac{واصه}{واسه}$ من حاصل جمع

الحدود التي تليه نضع جزء المتسلسلة المعتمد من ابتداء هذا الحد هكذا

$$(47) \dots \left(x + \frac{r_1}{r_1 r_2} \frac{w_1}{w_2} + \frac{r_2}{r_1} \frac{w_2}{w_1} + \frac{w_1}{w_2} \right)$$

لكنه بفرض $h = 0$. ينعدم جزء $\frac{h}{2} \frac{v^2}{v_s^2} + \frac{h}{2 \times r} \frac{v^2}{v_s^2}$ + الخ
 فمن ثمة يمكن اخذ كمية h صغيرة جداً لتقاربها من صفر ليصير هذا الجزء صغيراً

بحسب الإرادة ويعلم من ذلك أنه يمكن إعطاء كمية ه مقداراً بحيث يكون

ذلك الجزء أصغر من كمية $\frac{واصة}{واس}$ التي ليست محتوية على ه ولكن ع

و رمز المأثور الیه حاصل جمع $\frac{واصة}{واس} \cdot \frac{ه}{٢} + \frac{واصة}{واس} \cdot \frac{ه}{٢ \times ٢} + الخ$

في هذه الحالة تتوول متسلسلة (٤٧) الى

$\left(\frac{واصة}{واس} + ع \right)$ ه وحيث أنه يوجد

$\frac{واصة}{واس} < ع$ فبضرب الطرفين في ه يحدث

$\frac{واصة}{واس} ه < ع ه$ او

$\frac{واصة}{واس} ه < \left(\frac{واصة}{واس} \cdot \frac{ه}{٢} + \frac{واصة}{واس} \cdot \frac{ه}{٢ \times ٢} + الخ \right) ه$ او

$\frac{واصة}{واس} ه < \frac{واصة}{واس} \cdot \frac{ه}{٢} + \frac{واصة}{واس} \cdot \frac{ه}{٢ \times ٢} + الخ$

وهذا ما اردنا اثباته وبمثله يبرهن على اى حد بالنسبة لجميع ما يليه

• ٩٠ • لكن ص = د ه معادلة بمتغيرين فيمكن دائماً

اعتبار هذه المعادلة كمعادلة منحني رأسياته هي المقادير المختلفة للدالة ص

ويقال ان دالة ص هذه في نهايتها الصغرى متى مالت للزيادة بعد تناقصها

شياً فشيأ ومثاله منحنى م-٤ (شكل ٩) الذي معادلته ص

= ٢ + دس فانه يشاهد ان رأسياته التي هي م ع و م ع ٠٠٠ الخ

تأخذ في النقصان الى نقطة - ومن ابتداء هذه النقطة تأخذ الرأسيات

ك د و ك د ٠٠٠ الخ في الزيادة وعلى هذا يكون الرأسى - هـ

النهاية الصغرى للدالة ص

* ٩١ * ويقال ايضا ان الدالة صه أتت الى نهايتها الكبرى متى انتهت بعد تزايدها الى نقطة تأخذ في النقص من ابتدائها ويكفيك (شكل ١٠) مثلا اذا رأيت منحنى ح د و الذي معادلته $\text{صه} = \text{هه}$ — دسه المنتسب له تأخذ في النقص من ابتداء نقطة د من الجانبين فرأيت ان فيه هو النهاية الكبرى للدالة صه

* ٩٢ * وهناك منحنيات ليس لها الانهاية الكبرى فقط ومنحنيات ليس لها الانهاية صغرى ومنحنيات فيها النهايتان ومنحنيات ليس لها نهايات بالكلية فان منحنى م ر ع (شكل ٩) الذي معادلته $\text{صه} = \text{ر} + \text{دسه}$ لا توجد له نهاية كبرى لانه يعلم من بعد معادلته ان رأسياته تأخذ في التزايد ابدا

ودائرة ح د و (شكل ١١) التي معادلتها $\text{نق} = (\text{صه} - \text{هه}) + (\text{سه} - \text{وه})$ توجد لها النهايتان الكبرى والصغرى متحدتين في افق ا ح واكبرهايتين النهايتين د ع واصغرها ح ع

* ٩٣ * متى توجد نهاية كبرى او صغرى للدالة صه التي بتغير واحد رمزه سه فتعين هذه النهاية اذا علم الافق الموافق لها لانه اذا علم مقدار سه الموافق لنهاية كبرى او صغرى للمحنى المستدل عليه بمعادلة $\text{صه} = \text{دسه}$ وكان ذلك المقدار ر مثلا يكفي ان تجعل $\text{سه} = \text{ر}$ في معادلة $\text{صه} = \text{دسه}$ ليكون مقدار صه الحادث منها هو النهاية الكبرى او الصغرى المطلوبة

* ٩٤ * وليكن $\text{صه} = \text{دسه}$ رأسي هو م ح (شكل ١٢) ويكون في نهايته الكبرى فاذا اخذنا في ا ح زيادة هه المتينة بخط ح ع وقطع $\text{ح ع} = \text{هه}$ ايضا فالشروط الواقعة ليكون م ح نهاية كبرى تكون

$$\text{ع} > \text{م} \text{ و } \text{ع} > \text{م} > \text{أ د}$$

حد $\frac{واصة}{واسر}$ ه وحده كاشارة الناتج من ارتباطه بجميع الحدود التي تليه
 فاذا كان هذا الحد موجبا في احد حلى (٤٨) و (٤٩) فذلك الحلى
 يكون اكبر من صه ويكون اصغر من صه اذا كان الحد المذكور
 وهو $\frac{واصة}{واسر}$ ه سلبيا وحيث ان اشارة حد $\frac{واصة}{واسر}$ ه متعاكسة
 في هذين الحلين يعنى موجبة في احدهما وسالبة في الاخر فينتج من ذلك انه
 لا بد وان تكون احدى كيتي ك (سه + ه) و ك (سه - ه) اكبر
 من ك سه والاخرى اصغر

وقد ظهر من هذا انه اذا لم يكن $\frac{واصة}{واسر}$ صفرا فلا توجد نهاية $\equiv$ كبرى

ولا صغرى اما اذا كان $\frac{واصة}{واسر} = 0$ فان حلى (٤٨) و (٤٩)
 يتوعلان حينئذ الى

$$ك (سه + ه) = صه + \frac{واصة}{واسر} \frac{ه^2}{2} + \frac{واصة}{واسر} \frac{ه^3}{3 \times 2} + \dots الخ$$

$$ك (سه - ه) = صه - \frac{واصة}{واسر} \frac{ه^2}{2} + \frac{واصة}{واسر} \frac{ه^3}{3 \times 2} - \dots الخ$$

واشارة الحدود التي تلى صه تتعلق في هذه الحالة باشارة $\frac{واصة}{واسر}$ اذا

اخذت كية ه مقدارا صغيرا كافيا لان يكون $\frac{واصة}{واسر}$ ه اكبر من

حاصل الجمع الجبرى للحدود الايجابية بعده وحيث ان اشارة $\frac{واصة}{واسر}$ متحدة

في الحلين فاذا كانت هذه الاشارة هي الزائد فالتسا (سه + ه) و (سه - ه)

تكونان

تكونان اكبر من كسره وتكون كسره في هذه الحالة نهاية صغرى وكذا اذا كان $\frac{واسه}{واسه}$ سالبا شوهد أن كسره تكون نهاية كبرى

* ٩٦ * ولتقيم هذه القضية تنبئه انه قد يكون $\frac{واسه}{واسه}$ صفرا مع

$$وجود \frac{واسه}{واسه} = ١٠$$

وفي هذه الحالة لا توجد نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا كان $\frac{واسه}{واسه} = ١٠$

ايضا لان اشارة الحدود التي تلي صه تكون عند ذلك متعلقة باشارة $\frac{واسه}{واسه}$ حين تؤخذ ه صغيرة جدا ويثبت انه اذا كان $\frac{واسه}{واسه}$ موجبا تكون كسره نهاية صغرى واذا كان سلبيا تكون نهاية كبرى وهلم جرا

وعلى العموم متى يكون المكرر التفاضلي الاول الذي لم ينحذف بدرجة مزدوجة فانه يوجد نهاية صغرى اذا كان موجبا ونهاية كبرى اذا كان سالبا

(المثال الاول)

* ٩٧ * لمعرفة نهايات هذه الدالة $ز - دسه + سه$ نضع

$$اولا صه = ز - دسه + سه$$

ثم نأخذ التفاضل ونقسم على $واسه$ فيجد

$$\frac{واسه}{واسه} = ز - دسه + سه$$

$$\frac{واسه}{واسه} = ١٢$$

وبايجاب مقدار $\frac{واسه}{واسه}$ يستدل على انه يوجد للدالة المفروضة نهاية صغرى

ولتعيين الاتفاق الموافق لهذه النهاية نساوى مقدار $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ بصفر فيحدث

منه $\text{سه} = \frac{\text{د}}{\text{ر}}$ وإذا وضع هذا المقدار في مقدار صه بدلا عن سه حدث $\text{صه} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}}$ وهذا المقدار هو مقدار النهاية الصغرى المطلوبه
 (المثال الثانى)

* ٩٨ * لتكن $\frac{\text{د}}{\text{ر}} + \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}} = \text{سه}$ كية يراد معرفة
 نهايتها فنضع
 $\text{صه} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} + \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}}$ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على
 $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$ فنجد

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}} \text{ و } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}}$$

وحيث ان $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$ سالب فيوجد للدالة المقروضة نهاية كبرى يستخرج
 الاتفاق الموافق لهما من معادلة $\frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}} = \text{سه}$ فيوجد

$\text{سه} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}}$ وبوضع هذا المقدار في مقدار صه بدلا عن سه يوجد
 $\text{صه} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} + \frac{\text{د}}{\text{ر}}$ وهو مقدار النهاية الكبرى المراد إيجادها

(المثال الثالث)

* ٩٩ * لتكن ايضا معادلة $\frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}} = \text{سه}$ فنأخذ التفاضل ونقسم على $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$ فنجد كما تقدم

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}} \text{ و } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}}$$

ثم نساوى مقدار المكثرت التفاضلى $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$ بصفر فيوجد

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} - \frac{\text{د}}{\text{ر}}$$

$$\frac{\text{د}}{\text{ر}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}}$$

وإذا

واذا وضعنا مقدار $\frac{ص}{س}$ في مقدار $\frac{ص}{س}$ على التوالي بدلا عن

$$س \text{ يوجد } \frac{ص}{س} = ٦ + س \text{ و } \frac{ص}{س} = ٦ - س$$

وبهذا يستدل على انه يوجد للدالة المفروضة نهاية صغرى موافقة الى افق

$$س = ٦ + \frac{ص}{س} \text{ ونهاية كبرى موافقة الى افق } س = ٦ - \frac{ص}{س}$$

وبوضع هذه المقادير في مقدار $\frac{ص}{س}$ يوجد اقلا $ص = ٦ - س$

$$\text{وهو مقدار النهاية الصغرى ويوجد ثانيا } ص = ٦ + س$$

وهو مقدار النهاية الكبرى

(تطبيق نظرات النهايات على حل جملة اسئلة)

(المسئلة الاولى)

* ١٠٠ * لنا ان نقسم عددا مفروضا الى قسمين بشرط ان يكون

حاصل ضربهما اعظم ما يمكن

ولاجل ذلك نفرض العدد ٦ واحد القسمين المطلوبين $س$ فالقسم

الآخر يكون $٦ - س$ وكية $س(٦ - س)$ تكون هي الكمية التي

يراد معرفة نهايتها الكبرى فنضع

$$ص = س(٦ - س) \text{ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على } س \text{ فيوجد}$$

$$\frac{ص}{س} = ٦ - س \text{ و } \frac{ص}{س} = ٦ - س$$

وحيث ان $\frac{ص}{س}$ سالب فيتحقق انه يوجد نهاية كبرى بخلاف ما اذا كان

هذا المقدار موجبا فان المسئلة تكون غير ممكنة ثم انه بمساواة مقدار $\frac{ص}{س}$

بصفر يحدث منه $س = ٦$ ويعلم من ذلك انه يجب قسمة العدد المفروض

قسمين متساو بين ليكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن او نهاية كبرى

(المسئلة الثانية)

* ١٠١ * لسان نعين اعظم الاسطوانة الممكن رسمها داخل مخروط قائم

ولذلك نرمز لخط ع و الذى هو ارتفاع المخروط (شكل ١٤) بحرف ح ونرمز بحرف د لخط او الذى هو نصف قطر القاعدة ثم نرمز بحرف س لخط ع د الذى هو بعد رأس المخروط عن مركز الدائرة العليا للأسطوانة فيحدث لسان من تشابه مثلثى ع ا و و ع ه د هذه المتناسبة

$$ع و : ا و :: ع د : ه د \text{ أو}$$

$$ح : د :: س : ه د \text{ ومنها يحدث}$$

$$ه د = \frac{د س}{ح}$$

ولنفرض ان ط تكون نسبة القطر الى محيطه فمساحة دائرة ه ح ف التى نصف قطرها يساوى $\frac{د س}{ح}$ تكون $\frac{ط د س}{ح}$ وبضرب هذه المساحة فى ارتفاع الاسطوانة الذى هو ح - س يحدث حجم تلك الاسطوانة ويكون ذلك الحجم $\frac{ط د س}{ح} (ح - س)$ وهذه الكمية ~~تكون~~ هى التى يراد ايجاد نهايتها الكبرى فتساويها بحرف ص ليجد

$$ص = \frac{ط د س}{ح} (ح - س) \text{ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على (ص) فيوجد}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ط د}{ح} (٢ - ٣ س) \text{ و}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ط د}{ح} (٢ - ٦ س)$$

وبساواة مقدار $\frac{ص}{ص}$ بصفر يوجد

$$\frac{ط د}{ح} (٢ - ٦ س) = ٠ \text{ أو}$$

* (٧٩) *

$$٢٢ س = ٣ س - ٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = ٠ \text{ و } ٢٢ س = ٣ س$$

فمقدار س = ٠ لا يوافق نهاية كبرى لان $\frac{١٢ س}{٣ س}$ يؤول به الى

$\frac{٢٢ س}{٣ س}$ وهو عدد موجب فيوافق حينئذ الى نهاية صغرى وبالحقيقة متى يفرض س = ٠ تؤول الاسطوانة الى محور المخروط (فانه كلما ارتفعت

الاسطوانة قل نخز حجمها) ومقدار س = $\frac{٢٢}{٣}$ يكون هو الموافق

للمسئلة وحده لان مقدار $\frac{١٢ س}{٣ س}$ يؤول به الى $\frac{٢٢ س}{٣ س}$ وهو عدد

سالب فاذا طرح ع د = س = $\frac{٢}{٣}$ ع و من ارتفاع المخروط بقي

ود = $\frac{١}{٣}$ ع و ويعلم من ذلك ان حجم الاسطوانات الممكن رسمها داخل

مخروط قائم ما كان ارتفاعها ثلث ارتفاع ذلك المخروط

* (المسئلة الثالثة) *

* ١٠٢ * لئان نقسم مستقيم ا - (شكل ١٥) الى قسمين

ا د و د - بشرط ان يكون حاصل ضرب ا د x د - نهاية كبرى

ولذلك نرمز بحرف د لخط ا - الكلى وبحرف س لقسم د -

فالمعادلة التي ينتهي اليها ليؤخذ تفاضلا تكون

$$ص = س = (د - س) \text{ ثم يوجد بأخذ التفاضل والقسم على } (١٢ س)$$

$$\frac{١٢ س}{٣ س} = ٢٢ س - ٣ س = ٤ س \text{ و}$$

$$\frac{١٢ س}{٣ س} = ٦ س - ١٢ س$$

وبمساواة مقدار $\frac{١٢ س}{٣ س}$ بصفر يستخرج منه س = ٠ او س = $\frac{٢٢}{٤}$

والمقدار الثاني لمجهول س° هو الذي يوافق المسئلة فقط لان مقدار $\frac{\text{وا}^{\circ}\text{ص}^{\circ}}{\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}}$

يقول به الى ناتج سالب وهو $-\frac{29}{4}$

* ١٠٣ * وليتنبه انه متى يوجد مضروب ثابت موجب في مقدار

مكرر $\frac{\text{وا}^{\circ}\text{ص}^{\circ}}{\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}}$ التفاضلي يمكن اسقاط هذا المضروب لانه اذا وجدنا $\frac{\text{وا}^{\circ}\text{ص}^{\circ}}{\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}}$

$= \text{ح}^{\circ}\text{س}^{\circ}$ استخرجنا منه $\frac{\text{وا}^{\circ}\text{ص}^{\circ}}{\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}} = \text{ح}^{\circ}\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}$ وحيث

كانت هذه المعادلة الاخيرة لانقيدها الا ببيان اشارة مقدار $\frac{\text{وا}^{\circ}\text{ص}^{\circ}}{\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}}$ وهذه

الاشارة لاتتعلق بالاشارة $\frac{\text{وا}^{\circ}\text{ص}^{\circ}}{\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}}$ لان ح° مضروب ثابت موجب

يعلم من ذلك انه يمكن اسقاط مضروب ح° من هذه المعادلة وكذا يمكن اسقاطه

من معادلة $\frac{\text{وا}^{\circ}\text{ص}^{\circ}}{\text{وا}^{\circ}\text{س}^{\circ}} = \text{ح}^{\circ}\text{س}^{\circ}$ لانه حيث كان اللازم مساواة الطرفين

الثاني لهذه المعادلة بصفر ليس يستخرج منها س° فمعادلة $\text{ح}^{\circ}\text{س}^{\circ} = ١٠$

تحدث $\text{س}^{\circ} = ٠$ وينتج من ذلك انه يمكن اسقاط الثابتة

(المسئلة الرابعة)

* ١٠٤ * المراد تعيين الاناء الاسطوانى الذى يسع كمية معلومة الحجم

من الماء ويكون سطحه الداخلى اصغرا ما يمكن ولذلك

نرمز لحجم الماء المعلوم بحرف ح° ولنصف قطر قاعدة الاسطوانة بحرف

س° فكمية $\text{ط}^{\circ}\text{س}^{\circ}$ تكون هي مساحة قاعدة هذه الاسطوانة وحيث انه

بضرب الارتفاع فى مساحة القاعدة يحدث حجم الاسطوانة يوجد

ارتفاع الاسطوانة $\times \text{ط}^{\circ}\text{س}^{\circ} = \text{ح}^{\circ}$ ومنه يستخرج

ارتفاع الاسطوانة $= \frac{\text{ح}^{\circ}}{\text{ط}^{\circ}\text{س}^{\circ}}$

وبضرب

وبضرب هذا الارتفاع في محيط القاعدة الذي هو ٢ ط س هـ يوجد

$$\frac{ع^٢}{س هـ} = ٢ ط س هـ$$

وهذا الحاصل يبين مساحة السطح المخدب للاسطوانة فاذا اضيف عليه كمية

ط س هـ التي هي مساحة قاعدة تلك الاسطوانة يحدث

$\frac{ع^٢}{س هـ} + ط س هـ$ وهذه الكمية تكون هي التي يراد معرفة نهايتها الصغرى

فنضع لاجل ذلك

$$ص هـ = \frac{ع^٢}{س هـ} + ط س هـ \text{ فيحدث منه}$$

$$\frac{واص هـ}{واس هـ} = \frac{ع^٢}{س هـ} + ط س هـ \text{ و}$$

$$\frac{واص هـ}{واس هـ} = \frac{ع^٤}{س هـ} + ط$$

ثم نساوي مقدار $\frac{واص هـ}{واس هـ}$ بصفر فيحدث منه

$$\sqrt[٣]{\frac{ع}{ط}} = س هـ$$

وحيث ان هذا المقدار يوافق لنهاية صغرى لانه يجعل $\frac{واص هـ}{واس هـ}$ موجبا يعلم

من ذلك ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المطلوبة يساوي $\sqrt[٣]{\frac{ع}{ط}}$ واذا وضع

هذا المقدار في الكمية الميينة مقدار الارتفاع يوجد

$$\text{ارتفاع الاسطوانة} = \frac{ع}{\frac{واس هـ}{واص هـ}} = \frac{ع}{\frac{\frac{ع}{\sqrt[٣]{\frac{ع}{ط}}}}{\frac{ع}{\sqrt[٣]{\frac{ع}{ط}}} + ط}} = \frac{ع}{\frac{ع}{\sqrt[٣]{\frac{ع}{ط}}} + ط}$$

وتجربى هذه المسئلة في عمل المدافع لانه يقال

المعلوم مقدار من البارود والمراد معرفة الانساع اللازم لها ونذى خزنة
اسطوانية يكون فعل قوة البارود على حائط هذه الخزنة اصغر ما يكون ويتظر
ان هذه المسئلة تقول الى تعيين اصغر السطوح التي تأخذها الخزنة
وبالنظر الى ما سبق يعلم انه ينبغي ان يكون نصف قطر قاعدتها مساويا الى
ارتفاعها

(المسئلة الخامسة)

* ١٠٥ * نريد ان نرسم مخروطا داخل كرة بشرط ان يكون سطحه
المحذب اكبر ما يكون بالنسبة للخاريط الممكن رسمها داخل هذه الكرة
ولذلك نفرض ان نصف دائرة ام - (شكل ١٦) تدور حول محور
ا - فيحدث وتر ام في هذه الدورة مخروطا ارتفاعه اح ونصف قطر
قاعدته م ح ومساحة السطح المحذب لهذا المخروط تكون مساوية الى
محيط ح م $\times$ $\frac{1}{4}$ ام = 2 ط ح م $\times$ $\frac{1}{4}$ ام = ط ح م $\times$ ام
فريد الآن تعيين ح م و ام ولذلك نفرض ان ا - = 2
و ا ح = م فيحدث من توسط ح م في التناسب بين ا ح و م ح
هذه التناسبة

$$م : م :: م : 2 + م \text{ ومنها يحدث}$$

$$م = \sqrt{2م - م^2}$$

وكذا من توسط ام في النسبة بين ا ح و ا - يوجد

$$م : ام :: ام : 2 \text{ ويحدث من ذلك}$$

$$ام = \sqrt{2م}$$

وبوضع هذه المقادير عوضا عن ح م و ام في الكمية التي تبين السطح
المحذب للمخروط يوجد

$$السطح المحذب للمخروط = ط \sqrt{2م - م^2} - ط \sqrt{2م} = ط \sqrt{2م - م^2}$$

وبالزم بحرف صه لهذه الكمية يكون

$$صه = ط \sqrt{2م - م^2}$$

(٨٣)

ثم يجري التفاضل بناء على (بند ١٠٣) فيكون

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^3}{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^4}}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

يكون

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^3}{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^4}}}{\text{واسه}} \dots \dots (٥٠)$$

ولاجل ان يكون هذا المقدار مساويا الى صفر يوضع

$$\text{واسه}^2 - \text{واسه}^3 = ٠ \text{ فيستخرج منه}$$

$$\text{واسه} = \frac{\text{واسه}^2}{\text{واسه}}$$

وهذا المقدار يوافق نهاية كبرى لانه يجعل $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ سالبا

* ١٠٦ * وقبل البحث عن تعيين مقدار $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ نشرح طريقة

يختصر بها الحساب في بعض الحالات وليتأمل أولا انه اذا الت دالة لكمية
سه الى صفر بمقدار أخذته متغير سه فلا يلزم منه ان يكون
مكررهما التفاضلي صفر ايضا فان المكرر التفاضلي $\text{سه} - ٠$ للدالة
 $\text{سه} - ٠$ $\text{سه} + ٦$ التي تؤول الى صفر بفرض $\text{سه} = ٢$
أو $\text{سه} = ٣$ لا يؤول الى صفر بهذه الفروضات

* ١٠٧ * قد يمكن في بعض الاوقات اختصار العمليات المستعملة لمعرفة
هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى لائنا اذا فرضنا انه يراد

تعيين المكرر التفاضلي لمعادلة $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \text{سه} \times \text{سه}$ التي فيها

سه و سه دوال متغير سه واحدها ما وهي سه تؤول الى صفر
ببعض المقادير التي ياخذها متغير سه وأخذنا تفاضل هذه المعادلة كافي

* (٨٤) *

(بند ١٤) وممناعلى $\frac{و}{س}$ يوجد

$$\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}} + \frac{\frac{س}{و}}{\frac{و}{س}} = \frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$$

وحيث ان $\frac{و}{س}$ تؤول الى صفر بالمقدار الذى تأخذه كمية $\frac{و}{س}$ فتؤول

تلك المعادلة الى $\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}} = \frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$ ويفهم من ذلك انه لايجاز

$\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$ يلزم ضرب المـكـررات التفاضلى للمضروب الذى يصير صفرا

فى المضروب الآخر [وهذه القاعدة ليست خالية عن العوارض فان $\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$

قد يكون صفرا ايضا ومثاله معادلة $\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}} = \frac{س}{س} (س - س)$ التى

تحتوى على جذور متساوية فان حدى مقدار $\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$ فيها يصير ان اصفارا

ويجب البحث عن المـكـررات التفاضلية التى بدرجة عليها حينئذ عوضا عن

اسقاط المضروب المتبين برمز $\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$ كما فى (بند ٩٦) ليعرف

هل يوجد للدالة المفروضة نهاية $\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$ او نهاية صغيرة واذا صار $\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}}$

غير محدود فقد آل الامر الى حالة (بند ٨٧)]

* ١٠٨ * واذا اردنا مثلا معرفة المـكـررات التفاضلى بدرجة ثانية الى

$\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}} = \frac{\frac{س - س}{س}}{\frac{و}{س}}$ بفرض $\frac{س - س}{س} = س$ نضع المعادلة أولا هكذا

$\frac{\frac{و}{س}}{\frac{و}{س}} = \frac{1}{س} \times (س - س)$ ويوجد من بعد البند المتقدم

$$\frac{١٠}{٧س} = \frac{(س-٧)}{س} \times \frac{١}{٧س} = \frac{واس}{س}$$

* ١٠٩ * نعود الآن الى معادلة (٥٠) التي يراد استخراج

$$\frac{واس}{س} منها في حالة فرضية س = \frac{٧٤}{٣} فحل البسط فيها الى$$

مضروبيه فيوجد

$$\frac{واس}{س} = \frac{س(س-٧٤-٣س)}{\sqrt{٣س٤-٢س٢-٣س٣}} \text{ او}$$

$$\frac{واس}{س} = \frac{س}{\sqrt{٣س٤-٢س٢-٣س٣}} \times (س-٧٤-٣س)$$

ثم نقول حيث ان مضروب (س-٧٤-٣س) يساوى صفرا في هذه الحالة يوجد من بعد (بند ١٠٧)

$$\frac{واس}{س} = \frac{س}{\sqrt{٣س٤-٢س٢-٣س٣}} \times \frac{(س-٧٤-٣س)}{س}$$

$$= \frac{س٣}{\sqrt{٣س٤-٢س٢-٣س٣}}$$

واذا قسم بسط ومقام هذا الكسر الاخير على س يحدث

$$\frac{واس}{س} = \frac{س٣}{\sqrt{٣س٤-٢س٢-٣س٣}} \text{ ثم يحدث بوضع مقدار س}$$

الذي هو \frac{٧٤}{٣} عوضا عنه

$$\frac{واس}{س} = \frac{س٣}{\sqrt{\frac{٣٨}{٣}-٢س٢-٣س٣}} = \frac{س٣}{\sqrt{\frac{٣٤}{٣}}}$$

وحيث ان هذا المقدار سالب فيوافق مقدار س الى نهاية كبرى

(المسئلة السادسة)

* ١١٠ * نريد ان نثبت من نقطة مفروضة داخل زاوية قائمة خطأ مستقيماً يكون جزؤه المحصور بين ضلعي هذه الزاوية نهاية صغرى ولذلك نفرض ان الزاوية تكون سه (شكل ١٧) والنقطة المفروضة داخلها تكون ح ثم نفرض ان المستقيم المطلوب يكون وه ونرمز له بـ ا بحرف هـ ولبعد هـ ح بحرف د ولبعد هـ و بحرف س فنحدث من تشابه مثلثي هـ ح و او هـ و القائمي الزاوية هذه المناسبة

$$\text{هـ} : \text{ح} :: \text{ا هـ} : \text{او أو}$$

$$\text{س} : \text{د} :: \text{د} + \text{س} : \text{س} \text{ او ومنها يحدث}$$

$$\text{او} = \frac{\text{د}}{\text{س}} (\text{س} + \text{د})$$

وبتربيع الطرفين يكون

$$\text{او}^2 = \frac{\text{د}^2}{\text{س}^2} (\text{س} + \text{د})^2 \text{ وغير ذلك يوجد}$$

$$\text{ا هـ}^2 = (\text{س} + \text{د})^2$$

فتوضع هذه المقادير في دستور وه = $\sqrt{\text{او}^2 + \text{ا هـ}^2}$ فيحدث من ذلك

$$\text{وه} = \sqrt{\frac{\text{د}^2}{\text{س}^2} (\text{س} + \text{د})^2 + (\text{س} + \text{د})^2} = \sqrt{\frac{\text{د}^2}{\text{س}^2} (\text{س} + \text{د})^2 + (\text{س} + \text{د})^2}$$

وباتحاد المقام في المضروب الاول الذي تحت الجذر يوجد

$$\text{وه} = \sqrt{\frac{\text{د}^2 + \text{س}^2}{\text{س}^2} (\text{س} + \text{د})^2} = \frac{\sqrt{\text{د}^2 + \text{س}^2}}{\text{س}} (\text{س} + \text{د}) = \text{صه}$$

وباعتبار هذه الكمية حاصل ضرب مضروب $\frac{\text{س} + \text{د}}{\text{س}}$ في مضروب

$$\sqrt{\text{د}^2 + \text{س}^2} \text{ نجري التفاضل على مقتضى (بند ١٤) فيوجد}$$

$$\text{صه} = \frac{\text{س} + \text{د}}{\text{س}} \cdot \sqrt{\text{د}^2 + \text{س}^2} + \frac{\text{س} + \text{د}}{\text{س}} \cdot \frac{\text{د} \cdot \text{س}}{\sqrt{\text{د}^2 + \text{س}^2}}$$

$$\frac{دواسه}{س^2} \times \frac{س^2}{س^2 + د^2} + \frac{س(س + د)}{س^2} \frac{س^2}{س^2 + د^2} = واسه$$

ثم نترك المقامات بان نضرب كيتي الكسر الاول في س وكيتي الكسر الثاني في $\sqrt{س^2 + د^2}$ فيحدث لنا

$$واسه = \frac{س(س + د)}{س^2} \frac{س^2}{س^2 + د^2} + \frac{دواسه}{س^2} \frac{س^2}{س^2 + د^2} \times س - دواسه$$

ثم نجعل البسوط ونختصر حدودها ونقسم على واسه فيوجد اخيرا

$$\frac{واسه}{واسه} = \frac{س^3 - د^3}{س^2 \sqrt{س^2 + د^2}}$$

وبساواة البسط بصفر يستخرج منه

$$س^3 = د^3$$

ولاجل ان ثبت ان هذا المقدار يوافق الى نهاية صغرى يكفي ان نضع بموجب

(بند ١٠٧) محل البسط الذي هو المضروب العدم مكرره التفاضلي فنجد

على هذه الصورة

$$\frac{واسه}{واسه} = \frac{س^3}{س^2 \sqrt{س^2 + د^2}} = \frac{س^3}{س^2 \sqrt{س^2 + د^2}} \text{ وهو مقدار موجب}$$

بالطبع ولم يجز وضع مقدار س لان المربع س موجب أبدا

(المسئلة السابعة)

* ١١١ * المراد معرفة اكبر المثلثات القائمة الزاوية الممكن رسمها

على مستقيم مفروض معتبرا وترها

ولذلك نفرض ان هذا المستقيم يكون ا- (شكل ١٨) ثم نرمز له بجرف د

ونرمز لاحد الضلعين بجرف س فالضلع الاخر يصير $\sqrt{د^2 - س^2}$

ومقدار مساحة المثلث تكون حينئذ $\frac{س}{2} \sqrt{د^2 - س^2}$ فاذا رمزنا لهذه

المساحة بجرف صه وراجعنا (بند ١٠٣). وجدنا ان المعادلة المنتهى اليها لو أخذتفاضلها تكون هي

$$\text{صه} = \text{سه} \sqrt{\text{ح}^2 - \text{س}^2} \text{ أو وهو الاول}$$

$$\text{صه} = \text{سه} \sqrt{\text{ح}^2 - \text{س}^2} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\frac{\text{ق}^2 \text{صه}}{\text{ق}^2 \text{سه}} = \frac{\text{ح}^2 - \text{س}^2}{\text{ح}^2 - \text{س}^2}$$

وحين تساوى هذا المقدار بصفر نجد

$$\text{ح}^2 - \text{س}^2 = 0 \text{ أو}$$

$$\text{سه} (\text{ح}^2 - \text{س}^2) = 0 \text{ ومنها يحدث}$$

$$\text{سه} = 0 \text{ أو } \text{س}^2 = \text{ح}^2$$

وحيث انه لا يمكن ان يكون مقدار سه صفر فيستخرج ذلك المقدار من

المعادلة الثانية يعنى الاخيرة فيوجد سه = $\sqrt{\text{ح}^2 - \text{س}^2}$ وبهذا المقدار

يستدل على ان ضلعي ا د و د ي يكونان متساويين

هذا وبأخذ تفاضل مضروب ح - س^٢ يوجد كما في (بند ١٠٧) أن

$$\frac{\text{ق}^2 \text{صه}}{\text{ق}^2 \text{سه}} = \frac{\text{سه} (\text{ح}^2 - \text{س}^2)}{\text{ق}^2 \text{سه}} = \frac{\text{ح}^2 - \text{س}^2}{\text{ح}^2 - \text{س}^2}$$

وبسبب سلب هذا المقدار يتحقق ان فرضية ح - س^٢ = ٠

تحدث لمجهول سه مقداراً يوافق الى نهاية كبرى

(في المدلول الهندسى للمكترات التفاضلية)

* ١١٢ * قد علمنا من (بند ٧١) ان $\frac{\text{ق}^2 \text{صه}}{\text{ق}^2 \text{سه}}$ بين ظل الزاوية

التي تقع بين الخط المماس في نقطة (سه و صه) وبين الخط الافقى وحيث كانت هذه القضية اساساً لما يراد البحث عنه فلنثبتها من اول وهلة بالوجه الآتى وهو أن نرمز الى ح م (شكل ٤) بجرف صه والى ح ح

بجرف

(٨٩)

بحرف ه ثم نرم م موازيا الى محور الاقطاب فيجد لنا
 $\bar{م} \bar{ع} = د (س + ه) و$

$$\bar{م} \bar{ك} = د (س + ه) - د س = \frac{واصة ه}{واسه} + \frac{واصة ه}{واسه} + الخ$$

واذا وضعنا في معادلة ظاع $\frac{\bar{م} \bar{ك}}{\bar{م} \bar{ع}}$ الحادثة من التناسب

$$\bar{م} \bar{ك} : \bar{م} \bar{ع} :: ١ : ظاع$$

عوضا عن $\bar{م} \bar{ك}$ و $\bar{م} \bar{ع}$ ما ساواهما نجد

$$\frac{واصة ه}{واسه} + \frac{واصة ه}{واسه} + \frac{واصة ه}{واسه} + \dots = ظاع$$

$$= \frac{واصة ه}{واسه} + \frac{واصة ه}{واسه} + \frac{واصة ه}{واسه} + \dots$$

وحين نرمق الى النهاية تصير ه صفرا وبؤول ظاع الى ظاط ويوجد اذن

$$\frac{واصة ه}{واسه} = ظاط$$

هذا واذا صار ع م (شكل ١٩) نهاية كبرى صار تماس م ط موازيا
 الى محور الاقطاب فيجعل بينه وبين هذا المحور زاوية قدرها صفرا وبهذا

$$\frac{واصة ه}{واسه} = ٠$$

وبمثل ذلك ثبت انه متى كان م ع نهاية صغرى كان الظل صفرا ايضا يعنى انه

$$\frac{واصة ه}{واسه} = ٠$$

وبعلم من ذلك ان معادلة $\frac{واصة ه}{واسه} = ٠$ لاتبين الا شرط توازي التماس

في نقطة م التي ابعادها س ه و صه الى محور الاقطاب

* ١١٣ * نبحث الآن عن الحالات التي يكون فيها $\frac{واصة ه}{واسه}$ موجبا او سالبا

ولذلك نعتبر أولا الحالة التي يكون فيها المنحنى (شكل ٢٠) محدبا نحو
محور الاقنيات فنفرض ان $ا = س = م = ح = ص = ع = ح' = ع' = ه'$
ثم نمرق قاطع $م م'$ بنقطتي $م$ و $م'$ ونعد مستقيمي $م$ و $م'$ موازيين
الى محور الاقنيات فلنجد $م' = م - ح' = م - ح = د - (س + ه) - د = ه'$
وذلك عبارة عن

$$م' = ه' + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس} + \dots + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس}$$

وحيث انه يحدث من تشابه مثلثي $م م' و م ع$ هذه التناسبة

$$\begin{array}{l} م : م' :: م : ع \quad \text{أو} \\ ه' : ه' :: م' : ع \end{array}$$

التي يستخرج منها

$$ع = م'$$

فيبدل فيها $م'$ بمقداره ليوجد

$$ع = ه' + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس} + \dots + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس}$$

وغير ذلك عندنا $م' = د - (س + ه)$

و $ع = م'$
وبطرح الثانية من الاولى يوجد

$$م' = د - (س + ه) - ص = ص + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس} + \dots + \frac{واصة}{واس} + \frac{واصة}{واس}$$

ثم انك اذا اسقطت من هذا المقدار $ع$ بقي لك (شكل ٢٠)

$$م' = ع + \frac{واصة}{واس} + \dots + \frac{واصة}{واس} \quad (٥١)$$

وفي الحالة التي يكون فيها تعبير المنحنى نحو محور الاقنيات (شكل ٢١)
يلزم أن يطرح من مقدار $ع$ مقدار $م'$ عكس ما سلف ليسخرج

(٩١)

مقدار م' ع و يوجد حينئذ

$$م' ع = \frac{واصة}{واسر} ه' + ٠٠٠٠ الخ (٥٢)$$

وبتقارن مقداري م' ع المستدل عليهما بمعادلتى (٥١) و (٥٢)

يشاهد أن $\frac{واصة}{واسر}$ فى احدهما متبوع بإشارة + وفى الآخر بإشارة -

هذا وبناء على امكان جعل اشارة الحد الاقل لحل م' ع كاشارة ناتج هذا الحل بتمامه وكون المربع ه' الذى هو موجب بالطبع لا يؤثر فى اشارة

$\frac{واصة}{واسر} ه'$ يكون المكثر التفاضلى $\frac{واصة}{واسر}$ حائزا وحده اشارة حاصل جمع

جميع حدود مقدار م' ع وحينئذ يعلم انه اذا لم تعتبر معادلتنا (٥١)

و (٥٢) الا بالنسبة للاشارات المتمتعة بها اطرافهما يمكن اسقاط ه'

مع الحدود التى تلى $\frac{واصة}{واسر}$ ونصير هاتان المعادلتان هكذا

$$م' ع = \frac{واصة}{واسر} + م' ع = \frac{واصة}{واسر} - م' ع = \frac{واصة}{واسر}$$

ومنهما يحدث

$$(٥٣) \left\{ \begin{array}{l} م' ع + \frac{واصة}{واسر} = م' ع \\ م' ع - \frac{واصة}{واسر} = م' ع \end{array} \right.$$

واذا اعتبرت صه كمـية موجبة وقع م' ع (شكل ٢٠) فى جهة

واحدة معها فيكون موجبا وتبين المعادلة الاولى من معادلتى (٥٣) حينئذ

انه متى كان تحديد المخفى متجها نحو محور الافقيات (شكل ٢٠) كان

$\frac{واصة}{واسر}$ موجبا

واذا اعتبرنا بعد ذلك ثانية معادلتى (٥٣) مع (شكل ٢١) المنتسب لهما

شاهدنا ان — م ع بين خطا مستقيما تعاكس في الاشارة مع ص

ويعلم من ذلك ان $\frac{v}{s}$ يكون سالبا في حالة (شكل ٢١) يعنى متى يكون

تغير المنحنى متجهها نحو محور الاقنيات

* ١١٤ * قد فرضنا فيما مر أن المنحنى ممتد فوق محور الاقنيات والآن

نبحث عما يقع حين يمتد هذا المنحنى تحت المحور المذکور كما في (شكل ٦٧)
فتقول من المحقق من بعد ما سبق انه حيث كان المنحنى محدبا نحو محور

الاقنيات في نقطة م فكمية $\frac{v}{s}$ أو م تكون موجبة لكن مستقيما

م و م ع الموجدان في جهة واحدة من مماس ط ط يجب
أن يكونا متحدى الاشارة ومن ثمة يكون م ع موجبا كما أن م

موجب وينتج من ذلك ان $\frac{v}{s}$ في نقطة م المقعر فيها المنحنى نحو محور

الاقنيات يكون مختلفا في الاشارة مع الرأسى م ح المتبوع باشارة السلب
وبالعكس فانه يكون المنحنى محدبا نحو محور الاقنيات متى كان

و $\frac{v}{s}$ متحدى الاشارة واذن يمكن أن يقال في العموم أن $\frac{v}{s}$

يكون متحدا في الاشارة مع ص متى كان المنحنى موجهها تحديه نحو
محور الاقنيات بوقوعه في اى جهة كانت وبأخذ اشارة عكس اشارة

متى كان المنحنى موجهها تغيره نحو المحور المذکور

ويعلم ان المنحنى يكون محدبا او مقعرا نحو محور الاقنيات بحسب كون الرأسى

أبلا الى نهايته الصغرى او نهايته الكبرى ويتضح السبب في ان $\frac{v}{s}$

موجب في الحالة الاولى وسالب في الثانية

* ١١٥ * ويقال ايضا انه يمكن أن توجد نهاية كبرى او نهاية صغرى

متى يكون $\frac{v}{s} = \infty$ ولشرح مدلول هذا الشرط نفرض أن

صه = دسه معادلة منحنى م د (شكل ٢٢) ثم نقول من المعلوم انه اذا اخذ متغير سه مقدار اع انتجت هذه المعادلة الرأسى م ع واذا حلت هذه المعادلة بعد ذلك بالنسبة الى صه واستخرج منها سه = دسه ثم جعل صه = اع (وهو المقدار السابق لمتغير صه) انتجت المعادلة المذكورة سه = ع م وفي هذه الحالة تعتبر صه كائفى وسه كراسى ويرسم المنحنى نفسه بأخذ الراسيات على محور اسه والافقيات على محور اصه

وبهذه المنهابة يمكن البحث عن النهاية الكبرى او الصغرى للدالة سه (التي هي

دالة الى صه) ولذلك يستخرج من المعادلة المفروضة $\frac{واصه}{قاصه} = م$

ثم يفرض $م = ٠$ ومن ثمة ينتج $\frac{واصه}{قاصه} = \frac{١}{م}$ من معادلة

$\frac{واصه}{قاصه} = م$ ويشاهد أنه متى يكون $م = ٠$ يوجد $\frac{واصه}{قاصه} = \infty$

ويعلم من ذلك ان الشرط اللازم لوقوع نهاية كبرى او صغرى فى جهة الافقيات

هو أن يكون $\frac{واصه}{قاصه} = \infty$

* ١١٦ * ولتمثل بمعادلة

$$صه = دسه - د$$

قنسه -تخرج منها $\frac{واصه}{قاصه} = \frac{د}{قاصه}$ وبمساواة هذا المقدار بصفر

يكون صه = ∞ ويتبين من ذلك انه لا يوجد للمنحنى نهاية كبرى نحو الراسيات الاعلى بعد غير محدود من محور اسه

ولاجل أن يعرف هل توجد له نهايات نحو الافقيات اولا

(والنهايات تشمل الكبرى والصغرى) بفرض مقدار

قاصّة $\frac{\text{قاصّة}}{\text{قاصّة}}$ غير منته فيوجد $\frac{7}{\text{قاصّة}} = \infty$ وهو شرط يتحقق متى يجعل $\text{قاصّة} = 0$.

وبهذا يؤول مقدار $\frac{\text{قاصّة}}{\text{قاصّة}}$ الى $\frac{7}{7}$ وهو ناتج موجب ويعلم من ذلك ان مقدار $\text{قاصّة} = 0$ يصلح الى نهاية صغرى لكمية قاصّة وتعين هذه النهاية بجعل $\text{قاصّة} = 0$ في المعادلة المفروضة فتؤول الى $\text{قاصّة} = 0$ ومنها يحدث $\text{قاصّة} = \frac{7}{7}$ وهو مقدار النهاية الصغرى المطلوبة وهى مبينة بخط ام في (شكل ٢٣)

* ١١٧ * وليتأمل ان معادلة $\frac{\text{قاصّة}}{\text{قاصّة}} = \infty$ تدل على ان $\text{قاصّة} = 0$

مط (شكل ٢٣) ظل زاوية قائمة ومن ثم يكون عموديا على محور الاقنيات * (كلام كل على اللقط الفريدة او الغريبة للمنحنيات) *

* ١١٨ * في حساب التفاضل فائدة عظيمة لمعرفة صورة او شكل المنحنى المعلوم المعادلة وقد انتهت لنا قضايا النهايات الكبرى والصغرى طرق تعيين حدود المنحنى في جهة الاقنيات والراسيات ولكن هذا غير كاف في تعيين صورة المنحنى او شكله فانك تشاهد مثلا عدم تشابه منحنيات اشكال (٦٨) و (٦٩) و (٧٠) التي لها نهايات متحدة وهى و ع و د في جهة الراسيات و او و و ب في جهة الاقنيات فان منحنى (شكل ٦٨) يتميز عن منحنى (شكل ٦٩) بكون انه لا يوجد في الاخير الانقطة تحديب واحدة ونقطة التحديب هى التى يتحول المنحنى فيها من التحديب الى التقعر او عكسه واما المنحنى الاول وهو الموافق الى (شكل ٦٨) فانه يحتوى على نقطتين من نقط التحديب احدهما فى ه والاخرى فى د ويحتوى على نقطة قلبية او عكسية فى ح والمراد بهذه النقطة كل نقطة يعطل المنحنى فيها على طريق سيره دفعة واحدة

* ١١٩ * وعلى العموم كل نقطة وقع للمنحنى فيها تغير في سيره تسمى

نقطة

نقطة فريدة او غريبة واذا علمنا مواضع هذه النقط امكن مع السهولة تتبع المنحنى في سيره

مثاله اذا فرض انه يوجد لمنحنى (شكل ٧٠) نقطتا تحديب احدهما في هـ والاخرى في شـ ونقطتان عكسيتان في ف و ح امكن تشكيل المنحنى بالكيفية الآتية وهى أن نقول بالابتداء من نقطة ا التى هى التحديب فى جهة الافقيات يتقعر المنحنى اولاً نحو محور الافقيات الى نقطة هـ التى توجد فيها نقطة تحديب أعنى يتحول المنحنى فيها من التعبير الى التحديب ومن هذه النقطة الى ف يكون قوس هـ ف من المنحنى محديبا نحو المحور المذكور وفى نقطة ف التى هى نقطة عكسية يعطل المنحنى عن طريق سيره ومن بعدها يكون محديبا ايضا فى جزء ف شـ ليصير مقعرا فى الجهة الثانية لنقطة التحديب شـ ويمتد هكذا الى نقطة ح التى هى التحديب نحو الراسيات ويتركب المنحنى اخيرا من قوسى ح-و و ا-د من ابتدا ح الى د ومن ابتدا ا الى د وهذان القوسان يتقعران نحو محور الافقيات ويتلاقيان فى نقطة عكسية ويمرّان بنقطتى س و د الدالة احدهما على التحديب جهة الافقيات والاخرى على التحديب جهة الراسيات * ١٢٠ * ومن بعد ما تقرّر تعلم مزية تعيين ابعاد النقط الغريبة بواسطة معادلة المنحنى وحيث بينا آتفا طرق ايجاد النهايات الكبرى والصغرى فلم يبق علينا الا ان نشغّل بمبحث ما بقى من النقط وهى الغريبة فنقول

(فى نقط التحديب)

* ١٢١ * قد علمنا مسبقا ان نقطة التحديب هى التى يتحول المنحنى فيها من التحديب الى التقعير أو من التقعير الى التحديب فنحنى م م م (شكل ٧١) يحتوى على نقطة من هذا الجنس فى م فنحنى من هذه النقطة هـ اس ط ط ثم نعتبر كافة الراسيات المحصورة بين م ح و م ح فنشاهد أن الامتداد م ح للرأسى يأخذ فى النقص وينعدم فى نقطة م. واذا اعتبرنا الراسيات البقى بعد وهى الكائنة عن يسار م ح شاهدنا وقوع الامتداد م ح

تحت المماس ومن ثم تتغير اشارته يعنى انه اذا كان $\dot{M}$ موجباً يكون $\dot{M}$ سالباً وهذا هو الشرط الذى هانحن نشرحه بالمعادلة فنقول
ليكن فى (شكل ٧١) $\dot{C} = \dot{H} = \dot{C}$ فن المعلوم انه يوجد

$$\dot{M} = \dot{C} - \dot{C} \text{ أو}$$

$$\dot{M} = \dot{C} - (\dot{S} + \dot{H}) - \dot{C} \dots\dots\dots (٥٤)$$

ولتعيين مقدار $\dot{C}$ نضع

$$\dot{C} = \dot{M} + \dot{C} \text{ أو}$$

$$\dot{C} = \dot{C} + \dot{S} \dots\dots\dots (٥٥)$$

ولاستخراج مقدار $\dot{C}$ ننظر انه يحدث من مثلث $\dot{C}$ والفاقم الزاوية

$$\dot{C} = \dot{M} \text{ ووظا } \dot{C}$$

وحيث انه بعلم من بند (٧١) ان ظل زاوية $\dot{C}$ هو الواقعة بين المماس

والخط المرسوم من نقطة التماس $\dot{M}$ موازياً للخط الافقى يساوى $\frac{\dot{C}}{\dot{S}}$

فاذا ابدلنا $\dot{C}$ في المعادلة الاخيرة بهذا المقدار ووضعنا $\dot{H}$ بدلا
عن $\dot{M}$ نجد ان

$$\dot{C} = \dot{H} \frac{\dot{C}}{\dot{S}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (٥٥) عوضا عن $\dot{C}$ ووضع مقدار

$\dot{C}$ الحادث بعد ذلك فى معادلة (٥٤) يوجد

$$\dot{M} = \dot{C} - (\dot{S} + \dot{H}) - \dot{C} \frac{\dot{C}}{\dot{S}} \dots\dots\dots (٥٦)$$

ويمكن استخراج مقدار $\dot{M}$ من مقدار $\dot{C}$ بدون احتياج الى

حساب لانه اذا قدرنا سيران الرامى بالتوازى لنفسه يشاهد ان $\dot{M}$

يؤول الى $\dot{M}$ متى تغير $\dot{H}$ بكمية — $\dot{H}$ ويعلم من ذلك انه اذا

غيرنا كمية + $\dot{H}$ بكمية — $\dot{H}$ فى معادلة (٥٦) يوجد

$$م' د' = د(س-ه) - ص + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} (٥٧)$$

واذا أبدلنا الآن كيتي د(س+ه) و د(س-ه) بالحلول المكافئة لهما يكون

$$م' د' = (ص + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}}) - (خ + \frac{ه}{\frac{ه}{س}}) - ص - \frac{ص}{\frac{ه}{س}}$$

$$م' د' = (ص - \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}}) - (خ - \frac{ه}{\frac{ه}{س}}) - ص + \frac{ص}{\frac{ه}{س}}$$

وباختصار هاتين المعادلتين يحدث

$$م' د' = \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + ... الخ (٥٨)$$

$$م' د' = \frac{ص}{\frac{ه}{س}} - \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + \frac{ص}{\frac{ه}{س}} - \frac{ص}{\frac{ه}{س}} + ... الخ (٥٩)$$

لكن لوقوع نقطة تحديد في م يجب أن يكون احد خطي م' و م' د' واقعا فوق مماس ط ط' والاخر تحته متى تأخذ ه مقدارا صغيرا جدا فيعلم من ذلك انه يلزم معا كسة م' د' و م' د' في الاشارة وهذا

$$\text{لا يمكن الا اذا كان الحد الاقل وهو } \frac{ص}{\frac{ه}{س}} \text{ من متسلسلتي (٥٨)}$$

و (٥٩) صفرا لانه اذا لم يكن هذا الحد مساويا الى صفرا ~~ممكن~~ اعطاء

$$\text{كمية ه مقدارا صغيرا كافيا لان يجعل } \frac{ص}{\frac{ه}{س}} \text{ فائقا حاصل}$$

الجمع الجبري للحدود التي تليه في المتسلسلة واشارة هذا الحد تكون في هذه

الحالة كإشارة ناتج المتسلسلة وحيث كان هذا الحد متحد الإشارة
في المتسلسلتين يكون $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ (شكل ٧١) متحدى الإشارة أيضا
ومن أجل ذلك يعلم أنه ليكون $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ مختلفى الإشارة يلزم أن يوجد

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ أو هو الأول}$$

$$= \frac{1}{2}$$

* ١٢٢ * إذا جعل مقدار $\frac{1}{2}$ الجاعل $\frac{1}{2}$ صفرا مقدار

$\frac{1}{2}$ ايلا الى صفر أيضا يجب لوجود نقطة تحذيب أن يكون $\frac{1}{2}$

مساويا الى صفر كذلك وإذا صار في هذه الحالة $\frac{1}{2}$ صفرا يجب

أن يكون أيضا $\frac{1}{2}$ مساويا الى صفر لتوجد نقطة تحذيب وعلى هذا

فقس واذن يجب أن يكون المكرر التفاضلى الاخير الذى يكون صفرا برتبة
مزدوجة

* ١٢٣ * متى يجعل مقدار $\frac{1}{2}$ المتحد فى حلى (٥٨) و (٥٩)

$\frac{1}{2}$ غير محدود يكون هذان الحلان غير محدودين ايضا ولا ينتج شئ حينئذ

من الاثبات السابق المؤسس على امكانية هذين الحلين وينبغى أن يعلم فى هذا

الحالة أن شرط $\frac{1}{2} = 0$ يستدل به فى العموم على وجوب

تغيير إشارة $\frac{1}{2}$ فى نقطة التحذيب وهذا يوافق ما هو مشروح

فى بند (١١٣) ويمكن تغيير هذه الإشارة أيضا حين يصير هذا المكرر

التفاضلى

* (٩٩) *

التفاضلي غير منته ولنمثل بمثال موضع لهذه المشكلة فنقول

$$\text{ليكن } \frac{واصة}{واسر} = \frac{ز}{س-هـ}$$

فاذا ابدلت س بهذه المقادير

$$\frac{ز}{هـ} - = \frac{واصة}{واسر} \quad \text{منه } = ز - هـ \text{ يوجد}$$

$$\infty = \frac{واصة}{واسر} \quad \text{منه } = ز$$

$$\frac{ز}{هـ} + = \frac{واصة}{واسر} \quad \text{منه } = ز + هـ$$

ثم يشاهد ان مقام مقدار $\frac{واصة}{واسر}$ هو الذي تتغير اشارته في المكثر التفاضلي بعد نقطة التحديب

* ١٢٤ * وينتج مما سبق انه لا يمكن وجود نقطة تحديب في منحن يلزم ان يوجد لافق هذه النقطة

$$\frac{واصة}{واسر} = 0 \quad \text{او} \quad \frac{واصة}{واسر} = \infty$$

ومتى يؤكّد وقوع احد هذين الشرطين تزداد وتقص على التوالي من افق

النقطة الموافقة لهذا الشرط كمية صغيرة جدًا هـ فاذا صار مقدارا $\frac{واصة}{واسر}$

الحادثان مختلفي الاشارة كان للمنحنى نقطة تحديب لانه متى يكون $\frac{واصة}{واسر}$

موجباً يكون تحديب المنحنى متجهاً نحو محور الافاق ومتى يكون سلبياً يكون تغير المنحنى متجهاً نحو المحور المذكور .

* (المثال الاول) *

* ١٢٥ * لتطبيق القضايا السابقة على امثلة ننظر هل يوجد للمنحنى المستدل عليه بمعادلة

(١٠٠)

صه = ٣ + ٢ (سه - ٢) (٦٠)
 نقطة تحديد ولذلك نأخذ التفاضل فيوجد بعد القسمة على (سه)

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = ٣ \times ٢ (سه - ٢) \text{ ثم يوجد}$$

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}^٢} = ١٢ (سه - ٢) \text{ و}$$

$$\frac{\text{واصه}^٣}{\text{واسه}^٣} = ١٢$$

ولاجل أن يمكن وجود نقطة تحديد للمنحنى يجب أن يكون لمتغير سه

مقدار يجعل $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}^٢}$ ايل الى صفر وحيث كانت سه كمية متغيرة

فيتعين احد مقاديرها بشرط وجود ١٢ (سه - ٢) = ٠ ويوجد
 حينئذ سه = ٢ لاجل الافق الذى يمكن أن يصلح لنقطة تحديد
 ولأن كيد وجود هذه النقطة فى المنحنى يتقص من افق ٢ كمية صغيرة جدًا
 رمزها ه ثم يوضع ٢ - ه محل سه فتكون نقطة م
 (شكل ٧٢) التى افقها ٢ - ه موافقة الى

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = ١٢ - ه$$

ثم يوضع ٢ + ه محل سه فتوافق نقطة م' التى افقها ٢ + ه
 الى $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = ١٢ + ه$ وبسبب اختلاف هذين الحالىن فى

الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديد فى المنحنى المفروض فى م وحيث
 كان فرض سه = ٢ يجعل $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}}$ ايل الى صفر ايضا فيتحقق

توازى المماس فى نقطة التحديد بالمحور الافقى

(المثال الثانى)

١٢٦ * ولينبه انه لا يتيسر دائما مساواة مقدار $\frac{v}{s^2}$ الى صفر

فانه للبحث عن وجود نقط التحديب في المنحنى الذى معادلته $v = s + s^2$ اولاً يجرى التفاضل ويستخرج منه

$$\frac{v}{s^2} = s \quad \text{و} \quad \frac{v}{s^2} = s$$

ولا شك انه لا يمكن مساواة مقدار $\frac{v}{s^2}$ بصفر (لانه كمية ثابتة)

ومن ثمة يعلم ان المنحنى المستدل عليه بمعادلة $v = s + s^2$ حال عن نقط التحديب ولا رية في ذلك حيث ان هذا المنحنى قطع مكافى وانما

يستدل بسبب ايجاب مقدار $\frac{v}{s^2}$ على ان هذا المنحنى محدب فى جميع

نقطه نحو محور الاقاف

(المثال الثالث)

١٢٧ * ولتمثل بهذه المعادلة $v = s^3$ فنحلها بالنسبة الى v ثم نأخذ تفاضلها فيوجد

$$v = s^3$$

$$\frac{v}{s^3} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{s^3} \times \frac{3}{4} = \frac{v}{s^3}$$

$$\text{ثم يوضع } \frac{1}{s^3} \times \frac{3}{4} = 0 \quad \text{أو}$$

$$0 = \frac{1}{s^3}$$

ليبحث عن مقدار s الموافق الى نقطة التحديب فيرى ان هذه المعادلة

(١٠٢)

أعني الأخيرة لا تحقق الإوضاع $\infty = \infty$ وهذا لا يستدل على شيء
لكنه حيث يتيسر لنا أيضاً جعل مقدار $\frac{1}{\sqrt{r}}$ غير منته فتتحقق معادلة

$$\infty = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

بوضع $\infty = 0$ وهذا المقدار يستدل على أنه يمكن أن يكون للمنحنى
المفروض نقطة تحديب في النقطة الأصلية ولتأكد وجود هذه النقطة تبدل
 ∞ بكميتي $0 + \infty$ و $0 - \infty$ أعني $+$ و $-$
على التعاقب وننظر هل يكون $\frac{1}{\sqrt{r}}$ في هاتين الحالتين متبوعاً بإشارتين
مختلفتين والاولى أن تفعل هاتان العليتان معا بإبدال ∞ بمقدار
 $\pm \infty$ فيؤول المكرر التفاضلي الذي بدرجة ثانية الى

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \times \frac{1}{r} \pm = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

والمقدار العلوى وهو المتبوع بإشارة $+$ يتسبب الى افق اكبر من افق
نقطة التحديب والسفلى وهو المتبوع بإشارة $-$ يتسبب الى افق أصغر من
افق هذه النقطة وبسبب تخالف هذين المقدارين في الإشارة يتحقق
وجود نقطة التحديب في المنحنى المستدل عليه بمعادلة $\infty = \infty$ في النقطة
الأصلية انظر (شكل ٧٣)

(المثال الرابع وهو الأخير)

* ١٢٨ * لتكن هذه المعادلة

$$(\infty - s) = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\infty = s + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \pm = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

(١٠٣)

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{سر}} \times \frac{1}{\text{سر}} \pm} = \frac{\text{سر}}{\text{سر}}$$

وحيث انه يجعل سر = ٠ يوجد $\frac{\text{سر}}{\text{سر}} = \infty$ فيستدل

بذلك على انه يمكن أن توجد نقطة تحديب في النقطة الاصلية ولتحقق وجودها او عدمه نجعل أولا سر = + ه ونضع هذا المقدار في مقدار

$$\frac{\text{سر}}{\text{سر}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{سر}} \times \frac{1}{\text{سر}} \pm} = \frac{\text{سر}}{\text{سر}}$$

ثم نجعل سر = - ه فيصير مقدار $\frac{\text{سر}}{\text{سر}}$ تخيليا وكذا يكون

مقدار سر وذلك يدل على ان المنحنى لا يمتد جهة الافاق السالبة واذن لا توجد

نقطة تحديب ولو أن $\frac{\text{سر}}{\text{سر}}$ في النقطة الاصلية غير محدود وستعرف

بالاثر أن النقطة الاصلية أ (شكل ٧٤) هي من طبة النقطة المسماة بالعكسية

ولنشرحها فنقول

(في النقطة العكسية)

* ١٢٩ * اذا امتنع المنحنى عن طريق سيره دفعة واحدة وانقلب على

عقبه كانت له نقطة عكسية فاذا اتخذت احدى طبعيه نحو محور الافاق

وكانت الطيبة الاخرى متعرة فنحوه كما يرى في (الشكل ٧٤) يقال للانقلاب

او الانعكاس من الجنس الاول ويكون هذا الانعكاس من الجنس الثاني متى

كان تعبيرها تبين المايتيز في جهة واحدة كما في (شكل ٧٥)

* ١٣٠ * ويمتنع المنحنى عن طريق سيره هكذا لان المقادير التي

ياخذها افق سر في الجهة الاخرى لنقطة > العكسية يحدث منها

مقادير تخيلية للرأسي سر ويلزم ذلك أن يكون $\frac{\text{سر}}{\text{سر}}$ محتويا على كمية

جذرية بالنسبة الى متغير s واذا احدث $\frac{v}{s^2}$ قبل أن يمتنع

المنحنى عن طريق سيره مقدارين احدهما له اشارة v والاخر عكسه استدل بذلك على وجود طينين للمنحنى مجتمعتين في نقطة c (شكل ٧٤) محدبة احدهما نحو محور الآفاق والاخرى مقعرة وهذه العلامات يمكن الاستدلال على نقطة عكسية من الجنس الاول للمنحنى واذا كان العكس

بان كان مقدارا $\frac{v}{s^2}$ متعدى الاشارة فالطينان المجتمعتان في نقطة c

(شكل ٧٥) لا يمكن أن يكونا الا متحدتين في جهة التقعر او التحديب وبعلم من ذلك ان الانعكاس في هذه الحالة يكون من الجنس الثانى

(المثال الاول)

* ١٣١ * تنظر هل يوجد للمنحنى الذى معادلته

$$(v - s) = s^2 = s^9$$

نقط عكسية ولذلك نستخرج من هذه المعادلة

$$v = s \pm s^2 \dots \dots \dots s^{91} \quad (٦١)$$

فنشاهد أنه كلما اخذ متغير s مقدارا سلبيا حدث لمتغير v مقداراً

تخياليا واذن يمتنع المنحنى عن طريق سيره في النقطة الاصلية التى ابعادها

$$s = 0 \text{ و } v = 0 \text{ ولكن هذا غير كاف لتأكيد إيجاد نقطة}$$

عكسية في النقطة الاصلية لانه يحتمل أن لا يوجد في هذه النقطة الاقوسا

من منحنى يمتد تقعره على الدوام في جهة واحدة كما يكون في رأس القطع الزائد

ولذا ينبغي لمعرفة كون $s = 0$ يصلح لنقطة عكسية أن يعرف

ما يؤول اليه المكرر التفاضلى الذى بدرجة ثانية قرب النقطة الاصلية فيؤخذ

$$\text{تفاضل معادلة } v = s \pm s^2 \text{ ثم يقسم الناتج على } v \text{ فيوجد}$$

* (١٠٥) *

$$(٦٢) \quad \frac{v}{s} = 1 \pm \frac{9}{r} \times \frac{7}{s}$$

$$\frac{v}{s} = 1 \pm \frac{9}{r} \times \frac{7}{s} = 1 \pm \frac{9}{r} \times \frac{7}{s} = 1 \pm \frac{9}{r} \times \frac{7}{s}$$

والدلالة على تعبير المنحنى فهو محور الافاق وتحديد قريبا من النقطة التي يمنع
عن طريق سيره فيها يزداد افق هذه النقطة كمية صغيرة هـ بأن يجعل

سـ = ٠ هـ أعنى سـ = هـ ويوضع هذا المقدار في مقدار $\frac{v}{s}$ فيحدث

$$\frac{v}{s} = 1 \pm \frac{9}{r} \times \frac{7}{h}$$

وحيث ان هذين المقدارين مختلفا الاشارة يستدل بهما على طيتين احدهما
ام (شكل ٧٦) تتحدب نحو محور الافاق والاخرى ان تتقعرن نحوه ويعلم
من ذلك ان النقطة الاصلية نقطة عكسية من النوع الاول

* (المثال الثاني) *

* ١٣٢ * لتكن هذه المعادلة

$$(ص - د) = (س - د) \quad \text{فيستخرج منها}$$

$$ص = د \pm (س - د) \dots\dots\dots (٦٣)$$

واذا جعلنا سـ = د يوجد صـ = د لكن اذا اخذ متغير سـ
مقادير اصغر من د حدث الى متغير صـ مقادير تخيلية لانه بوضع د - هـ
محل سـ يوجد صـ = د $\pm$ هـ = د $\pm$ هـ = هـ
وهو مقدار تخيلي ويعلم من ذلك ان المنحنى يمنع عن طريق سيره في نقطة د
(شكل ٧٤) التي ابعادها د د ولعرفة كيفية امتداد طيات هذا
المنحنى بعد نقطة د نبدل سـ بمقدار د + هـ في مقدار

$$\frac{v}{s} \text{ فيحدث لنا}$$

(١٠٦)

$$\frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ويستدل بالإشارة العليا على طية ح م المحذبة نحو محور الآفاق
وبالإشارة السفلى على طية ح د المقعرة نحو المحور المذكور واذن توجد
قطعة عكسية من الجنس الأول في ح

(المثال الثالث)

* ١٣٣ * ولناخذ المنحنى المستدل عليه بمعادلة

$$ص = ح + د + \sqrt{3} د$$

حيث أنه يجعل ص = ٠ يوجد ص = ٠ ويجعل ص = ٠
سالباً يكون ص تخليفاً يدل أن المنحنى يتنع عن طريق سيره في النقطة
الاصلية فنبحث عما يؤول إليه $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ولذلك نضع المعادلة السابقة

بهذه الصورة

$$ص = ح + د + \sqrt{3} د$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ثم نعطي الى متغير ص مقداراً موجباً صغيراً جداً وليكن ه جزء

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

من ذلك ان مقدارى $\frac{1}{\sqrt{2}}$ المستدل عليهما بمعادلة

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

يكونان

ينكسر ونان موجبان وينتج من ذلك انه يوجد في النقطة الاصلية طيتان
مقعرتان معا نحو محور الآفاق واذن تكون هذه النقطة نقطة عكسية
من الجنس الثاني

* ١٣٤ * النقطة العكسية ليست الا طبقة من النقط المسماة
نقطا مكررة وهي الآتى شرحها

*(في النقط المكررة) *

* ١٣٥ * النقطة التي تجتمع فيها جلة طيات من منحني تسمى نقطة
مكررة فان كانت الطيات اثنتين سميت هذه النقطة نقطة مضعفة وان كانت
ثلاثة سميت نقطة مثلثة وهلم جرا نظرا لعدد الطيات المجمعة فيها

* ١٣٦ * لتكن ا (شكل ٧٧) نقطة مضعفة حادثة من طيتي
ح و ا - المماس بهما ط و اط فاذا رمزنا للمعادلة منحنى
هاتين الطيتين بهذا الرمز ك (سه و صه) = ٠ وكانت هذه المعادلة
عارية عن الككميات الجذرية كان تفاضلها وهو الكائن بهذه الصورة
ح و سه + ك و صه = ٠ غير محتوي على جذر اصلا لانه لم يدخل في
هذه الدالة تفاضل كمية جذرية وينتج من ذلك ان كيات ح و ك تكون
كميات غير جذرية هذا و يوجد من المعادلة السابقة

$$\frac{و صه}{و سه} = - \frac{ح}{ك} \dots\dots\dots (٦٤)$$

ويجب أن يكون للمكرر $\frac{و صه}{و سه}$ التفاضلي مقداران مختلفان حيث انه

يوجد خطان مماسان ويلزم أن يتعين $\frac{ح}{ك}$ بواسطة هذا الشرط وذلك
يكون متى اشتمل $\frac{ح}{ك}$ على جذر لكن ذلك غير ممكن لان $\frac{ح}{ك}$ غير جذري
ففي هذه الحالة يلزم أن يكون $\frac{ح}{ك}$ آيلا الى هذه الصورة $\frac{ح}{ك} = \frac{ح}{ك}$ لان هذه
الصورة غير متعينة فتتحقق بجملة مقادير كما يعلم من الجبر
* ١٣٧ * وهاهي كيفية اثبات هذه القضية

* (١٠٨) *

نفرض ان γ و δ يمينان مقداري ظلي الزاويتين الواقعتين بين مماسي
طبق المنحنى وبين المحور الافقي فنلزام ان تحقق هذه المقادير معادلة

$$c + k \frac{v}{w} = 0$$

بوضع اى منها محل $\frac{v}{w}$ ويوجد حينئذ

$$c + k \gamma = 0$$

$$c + k \delta = 0$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$k(\gamma - \delta) = 0$$

ولما كان مضروب $\gamma - \delta$ يتركب من كيتين غير متساويتين
وهما γ و δ فلا يكون صفرا ولتحقيق المعادلة الاخيرة يجب أن يكون
 $k = 0$ وهذا نؤول معادلة $c + k \gamma = 0$ الى

$$c = 0 \text{ ونؤول معادلة } c + k \frac{v}{w} = 0 \text{ أو هو الاولى}$$

$$\frac{v}{w} = \frac{c}{k} \text{ الى } \frac{v}{w} = \frac{c}{k}$$

* ١٣٨ * اذا كان محل الطيتين المجمعتين فى نقطة واحدة جملة

طيات يكنى أن تعتبر اثنتان منها فقط ولاجل أن تتقاطع جميع الطيات فى ملقى

$$c + k \frac{v}{w} = 0$$

وليتأمل انه متى وجدت جملة طيات من منحن لها مماس مشترك كانت هذه
الطريقة عاجزة عن التوصيل الى نواتج كالسابقة لكن يجب أن يكون فى هذه

المسألة ايضا المكرر $\frac{v}{w}$ التفاضلى ممكن الايلولة الى هذه الصورة $\frac{v}{w} = \frac{c}{k}$

وحيث

وحيث كان اثبات هذه القضية يتأسس على اعتبار تماس المنحنيات فشرح
في بند (١٧٠) حين تكلم على المنحنيات الالتصاقية فتأمل

* ١٣٩ * من المعلوم ان اثبات بند (١٣٧) مؤسس على خلو
المعادلة الاولى من الجذور $\leq$ كن اذا اخذ تفاضل تلك المعادلة من غير
ان تحذف هذه الجذور يمكن أن لا تحدث المعادلة التي يستدل بها على نقط

مكررة $\frac{واصة}{واس} = ٠$ كما يظهر لك من معادلة بند (١٣١) فان لها

نقطة مضعة في النقطة الاصلية ولم تؤل معادلة (٦٢) الى ÷

بفرض $سه = ٠$ ولكن تؤول الى $\frac{واصة}{واس} = ١$

* ١٤٠ * وبالجمله فلنضم الى ما ذكر أن معادلة $\frac{واصة}{واس} = \div$

وان تحققت بوجود النقطة المكررة فليست مستلزمة لها لان الاثبات
السابق لا يدل على انه يلزم من وجود هذه المعادلة وجود النقطة وانما ايلولة

$\frac{واصة}{واس}$ الى ÷ تبين فقط احتمال وجود نقطة مكررة في المنحنى المفروض

* ١٤١ * وما ذكر يكفي لبيان طريقة معرفة هل يمكن أن توجد
للمنحنى المستدل عليه بمعادلة مفروضة نقط مكررة اولا ولذلك يفرض ان

هذه المعادلة تكون $ع = ٠$ ثم يؤخذ تفاضلها فيوجد
 $ع + ك واصة = ٠$

وينظر هل تحقق مقادير $سه و صه$ معامع ادلتى $ع = ٠$ و $ك = ٠$
مع المعادلة المفروضة اولا فان كان ذلك كان هذا دليلا على احتمال وجود

نقطة مكررة في المنحنى يستدل على بعددتها بمقدارى $سه و صه$
ولرفع الشك يبحث عن كيفية المنحنى حول هذه النقطة فهذا البحث يتحقق

كون هذه النقطة مكررة

(١١٠)

(في النقط المزدوجة)

* ١٤٢ * النقطة التي تطابق لبعدين حقيقيين في الجزء الذي تكون فيه ابعاد المنحنى المفروض كلها تخيلية ماعدا هذين البعدين الاثنين تكون الاحالة منفصلة بالكلية عن المنحنى ومن اجل ذلك يقال انها نقطة منفصلة او مزدوجة نظرا لازدواج بعديها الحقيقيين المحصورين بين ابعاد تخيلية

ولنرمز الآن بالرمز $v = d$ لمعادلة منحن مشتمل على نقطة مزدوجة ولتكن ابعاد هذه النقطة v و $-v$ فيلزم أن تكون الابعاد حول هذه النقطة تخيلية والا لم تكن منفصلة ويفهم من ذلك انه اذا زاد افاق v كمية صغيرة جدا ولتكن h كان الرأى المطابق لذلك $d(v + h)$ تخيليا لكن يحدث من متسلسلة تبلور في العموم

$$d(v+h) = v + \frac{v}{v^2}h + \frac{v^2}{v^3}h^2 + \frac{v^3}{v^4}h^3 + \dots$$

فاذا جعلنا فيها $v = h$ كان الرأى الموافق وهو v آيلا الى $-v$ وبناء عليه يغير في هذه المتسلسلة v بكمية $-v$ ويرض بهذه الرموز

$$\left(\frac{v}{v^2}\right) \text{ و } \left(\frac{v^2}{v^3}\right) \text{ و } \left(\frac{v^3}{v^4}\right) + \dots$$

لما نؤول اليه المكررات التفاضلية في هذه الحالة فيوجد

$$d(v+h) = -v + \frac{v}{v^2}h + \frac{v^2}{v^3}h^2 + \dots$$

ولاجل أن تكون $d(v+h)$ كمية تخيلية يلزم بالاقول أن تكون احدى كميات

$$\left(\frac{v}{v^2}\right) \text{ و } \left(\frac{v^2}{v^3}\right) \text{ و } \left(\frac{v^3}{v^4}\right) \dots$$

يعنى ان فرضية $v = h + h$ تجعل احدى المكررات التفاضلية

آيلة

أبلة الى صفر فاذا وقع هذا الشرط كان وجود النقطة المزدوجة في المنحنى محتملا ولكن هذه المعادلة $\pm = (س + -) \sqrt{س}$ مثلا فيؤخذ تفاضلاها فيوجد

$$\left(\frac{\sqrt{س}}{س} + \frac{\sqrt{س}}{س} \right) \pm = \frac{\sqrt{س}}{س}$$

وحيث ان هذا المقدار يزول الى كمية تخيلية متى يجعل $س = -$ ويؤول مقدار $س$ الى $س = ٠$ يعلم من ذلك ان نقطة ١ التي ابعادها $س = -$ و $س = ٠$ (شكل ٧٨) يحتمل أن تكون نقطة مزدوجة وتعرف كون هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق بإضافة كمية اصغر من $-$ على بعد $-$ وكذا بطرح هذه الكمية من $-$ على الولا فاذا فعلنا هكذا وجدنا في هاتين الحالتين مقدارين تخيليين لمتغير $س$ وهذا يستدل على ان هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق

* ١٤٣ * النقط المزدوجة كالنقط المكررة يحتمل وجودها في المنحنى

متى آل مكرر $\frac{\sqrt{س}}{س}$ التفاضلي الى $\div$ لانه اذا اخذ تفاضل معادلة

$$ك = \frac{\sqrt{س}}{س} + ح = ٠ \text{ وقسم الناتج على } \sqrt{س} \text{ يوجد}$$

$$ك = \frac{\sqrt{س}}{س} + \frac{\sqrt{س}}{س} + \frac{\sqrt{س}}{س} = ٠$$

ويرى ان مكرر الحد المتبوع بكمية $\frac{\sqrt{س}}{س}$ هو $ك$ فاذا أخذ

التفاضل مرة اخرى شوهد أن $ك$ تكون مكرر الحد المحتوى على

$$\frac{\sqrt{س}}{س}$$

يوجد ناتج بهذه الصورة

$$ك = \frac{قاصه}{د} + \frac{ز}{١} \quad (٦٥)$$

وينبني على ذلك انه يوجد بالاقول احد المكررات التفاضلية ايل الى كمية تخيلية بمقدار يأخذه متغير سه ومن ثم يكون هذا المكرر التفاضلي محتويا

$$على كمية جذرية واذا رمزنا لذلك المكرر التفاضلي برمز $\frac{قاصه}{د}$ لزم$$

أن يكون لدالة سه المحدثه هذه الكمية از يد من مقدار واحد وذلك يكفي لان ينتج منه كافي بند (١٣٧) ان $ك = ٠$ ونقول معادلة

$$ك + ز = \frac{قاصه}{د} \quad ٠ = \text{هذا المقدار}$$

الى $ك = ٠$ وينبني على ذلك أن يكون

$$\div = \frac{قاصه}{د}$$

* (في المنحنيات الالتصاقية) *

* ١٤٤ * لتكن $صه = د$ سه $وصه = ك$ سه معادلتنا منحنين يتقاطعان في نقطة م. التي ابعادها $اح = سه$ و $ح = م = صه$ (شكل ٢٤) فيوجد لاحالة لاجل هذه النقطة

$$د سه = ك سه$$

واذا فرضنا ان سه تصبح بعد ذلك سه٢ + هـ احدثت المعادلتان السابقتان

$$م ع = د (سه + هـ) = د سه + \frac{قاصه}{د} هـ + \frac{قاصه}{د} \frac{هـ}{٢ \times ١} + ٠ \quad \text{الح (٦٦)}$$

$$م ع = ك (سه + هـ) = ك سه + \frac{قاصه}{د} هـ + \frac{قاصه}{د} \frac{هـ}{٢ \times ٢} + ٠ \quad \text{الح (٦٧)}$$

فانذا

فإذا تطابقت أو اتحدت جميع الحدود المتناظرة لهذين الحلين كان المنحنيان المفروضان منطبقين على بعضهما وأما إذا كان $كس = دس = فس$ فقط فلا تكون لهذين المنحنيين النقطة واحدة مشتركة وهي $م$ كما عرفت

وإذا وجد $كس = دس = فس$ و $كس = فس = دس$ معاً فإن

المنحنيين يتقاربان من بعضهما زيادة ويعظم تقاربهما ويشتد متى كان

$كس = فس = دس$ زيادة على المعادلات المتقدمة وهلم جراً لان الفرق

بين كى $م$ و $م$ ح يقل كلما كثرت الحدود المتساوية في الحلول المطابقة لهما

ولتكن بناء على ذلك $د$ و $و$ و $ر$ و $و$ و $ر$ و $و$ الخ ثوابت معادلة $ص = كس$

فيمكن أن تأخذ هذه الثوابت مقاديراً ما من غير أن يتغير جنس المنحنى لان

معادلة $ص = م$ $س + دس$ مثلاً التي يستدل بها على قطع

ناقص لا تنتفي الدلالة بها على القطوع الناقصة حين تأخذ ثابتاً $م$ و $د$

أى مقدارين لان صورة المعادلة لا تختلف (بناء على عدم تغيير اشارتى $م$ و $د$

وعدم اخذهما مقادير صفر)

ويمكن من بعد ذلك نظراً لثوابت $د$ و $و$ و $ر$ و $و$ الخ الداخلة في معادلات

$ص = كس = دس = فس = كس = دس = فس = كس = دس = فس$ الخ

كثوابت حيث ما اتفقت أعنى اختيارية وبأخذ عدة من هذه المعادلات كعدة

ما يوجد فيها من الثوابت تتعين تلك الثوابت بالشروط الذى تكون به هذه

المعادلات متحققة مثلاً اذا لم تختمو معادلة $ص = كس$ الاعلى ثوابت $د$ و $و$ و

الثلاث بوضع

$كس = دس = فس = كس = دس = فس = كس = دس = فس$

ويستخرج من هذه المعادلات مقادير $د$ و $و$ و $ر$ بدلالة $ص$ و $كس = دس = فس$ الخ

ونضع تلك المقادير في معادلة $صه = كسه$ فتقتنع هذه المعادلة بهذه الخاصية وهي انه متى تغيرت قيم $صه$ بكمية $سه$ + ه تكون الثلاث حدود الاول من الطرف الثاني لمعادلة (٦٧) التي توجد بواسطة قانون تبالول مساوية بالتوالي للثلاث حدود الاول من الطرف الثاني لمعادلة (٦٦) وما ذكر بخصوص المعادلة التي لا تحتوى الاعلى ثلاث ثوابت يمكن تطبيقه على المعادلة التي تحتوى على اكثر من ذلك من الثوابت

* ١٤٥ * ولناخذ الحالة التي تدل فيها معادلة $صه = كسه$ على خط مستقيم مثالا فتكون تلك المعادلة حينئذ مستعوضة بهذه

$$صه = كسه + - (٦٨)$$

ومعادلات الشرط اللازمة لحذف ثوابت $ك$ و $ه$ تكون

$$كسه = كسه' + - و \frac{ك}{ك'} = ... (٦٩)$$

وحيث كانت $كسه'$ تبين الرأسى في نقطة $م$ للمنحنى الذى معادلته $صه = كسه$ وكانت $كسه'$ توافق $صه'$ أمكن تغيير $كسه'$ بكمية $صه'$ ونؤول معادلات (٦٩) حينئذ الى

$$صه' = كسه' + - و \frac{ك}{ك'} = \frac{صه'}{صه}$$

وبحذف $ك$ يوجد

$$صه' = كسه' + - \frac{ك}{ك'} = كسه'$$

وبوضع مقدار $ك$ المستخرج من هذه المعادلة ومقدار $ك$ في معادلة (٦٨) التي هي معادلة الخط المستقيم تؤول تلك المعادلة الى

$$صه - كسه' = كسه' (سه - سه') (٧٠)$$

وهذه المعادلة هي معادلة مماس $م ط$ في نقطة $م$ التي ابعادها $سه'$

بـ و صـ (شكل ٥) وستعرف أنه تماس هذا المستقيم

* ١٤٦ * ولنعود للقضية السابقة ولأقدم التطويل في العبارة ندع

المنحنيات بمعادلاتها فنقول قدر أي بنا في بند (١٤٤) أنه متى تكون

للمنحنيين صـ = دـ سـ و صـ = كـ سـ نقطة واحدة مشتركة مرموز

لأبعادها بـ رموز سـ و صـ تكون معادلة هذا الشرط كـ سـ = كـ سـ

وبنعمين ثابتين لمعادلة صـ = كـ سـ بواسطة شروط كـ سـ = دـ سـ

$$\text{و } \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} = \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} \text{ يتبدى هذان المنحنيان في التقارب}$$

ولترمز بـ رمز صـ = دـ سـ لما نتوّل إليه صـ = كـ سـ بعد

ما يوضع فيها مقادير هاتين الثابتتين فنحنى صـ = دـ سـ يقال له الالتصاق

برتبة أولى لمنحنى صـ = دـ سـ وكذا إذا حذف بموجب المقادير

الحيث ما اتفقت الممكن اعطاها للثوابت ثلاث فوابت من معادلة صـ = دـ سـ

بواسطة المعادلات الثلاث الآتية أعني

$$\text{كـ سـ} = \text{دـ سـ} \text{ و } \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} = \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} \text{ و } \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} = \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} \quad (٧١)$$

ورمز بـ رمز لـ سـ لما نتوّل إليه كـ سـ بعد وضع مقادير هذه الثوابت

فيها كان منحنى صـ = لـ سـ الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى صـ = دـ سـ

وهو أشدّ قرباً له من الالتصاق الذي برتبة أولى وعلى هذا فقس واذن توجد

لأجل الالتصاق الذوى الرتبة معادلات

$$\text{كـ سـ} = \text{دـ سـ} \text{ و } \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} = \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} = \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} \text{ و } \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} = \frac{\text{كـ سـ}}{\text{دـ سـ}} \quad (٧٢)$$

* ١٤٧ * ولنثبت أن أحد الالتصاقين الموجودين بهذه الكيفية

أعني بتغيير ثوابت معادلة واحدة وهو الذى برتبة أقل لا يمكن أن يمرّ بين

الالتصاق الآخرو بين المنحنى المنسوب له هذان الالتصاقان ولاجل ذلك

نفرض مثلاً ان م = (شكل ٢٤) يكون منحنى ص = دس
وم = وهو الذى معادلته ص = لسه يكون التصاقه برتبة ثانية وتزيد
الآن أن ثبت ان الالتصاق ص = دس الذى برتبة اولى لا يمكن
ان يمر بين منحنى م = ر م و لذلك نضع ص = ه + ه محل م في
هذه المعادلات فيوجد

$$\text{ع م} \text{ أو } د (س + ه) = دس + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \dots \text{ الخ و}$$

$$\text{ع م} \text{ أول } (س + ه) = لسه + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \dots \text{ الخ و}$$

$$د (س + ه) = دس + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} + \dots \text{ الخ و}$$

وحيث ان منحنى ص = لسه هو الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى
ص = دس فيكون

$$لسه = دس + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} = \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} = \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه}$$

وغير ذلك توجد بسبب كون منحنى ص = دس هو الالتصاق برتبة
اولى لمنحنى ص = دس هاتان المعادلتان ايضا

$$دس = دس + \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه} = \frac{ه}{ه} \frac{ه}{ه}$$

وبمقتضى هذه المعادلات تكون

$$دسه' = لسه' = دسه'$$

$$\frac{وا دسه'}{واسه'} = \frac{والسه'}{واسه'} = \frac{واسه'}{واسه'}$$

ويكون

$$\frac{وا دسه'}{واسه'} = \frac{واسه'}{واسه'} \text{ فقط}$$

واذا جعلنا لاجل الاختصار

$$دسه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' = ك$$

$$\frac{وا دسه'}{واسه'} = ر$$

أمكن وضع الثلاث حلول السابقة هكذا .

$$ع' م' أو د (سه' + هه') = ك + ر هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + ٠٠ الخ$$

$$ع' م' أو ل (سه' + هه') = ك + ر هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + ٠٠ الخ$$

$$د (سه' + هه') = ك + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + ٠٠ الخ$$

وبالنظر الى ان جميع الحدود من ابتدا الحد المتبوع بكمية هه' يوجد لها هه' مضروباً مشتركاً كما يمكن أن يفرض

$$\frac{واسه'}{واسه'} هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + \frac{واسه'}{واسه'} هه' + ٠٠ : الخ = م هه'$$

وباجراء هذا الاختصار في المعادلات الاخرى يكون

$$د (سه' + هه') = ك + ر هه' + م هه'$$

$$ل (س + ه) = ك + ر + ه + د$$

$$د (س + ه) = ك + \frac{1}{2} \frac{وا د س}{واس} + ه + د$$

وحيث كان منحنيا ص = د س و ص = ل س التصاقين
احدهما برتبة اولى والاخر برتبة ثانية يلزم من ذلك أن تخالف كمية ر مقدار

$$\frac{وا د س}{واس} \text{ يعنى انه يكون } > \frac{وا د س}{واس} \text{ أو } < \frac{وا د س}{واس}$$

$$\text{فاذا كانت } ر \text{ اصغر من } \frac{1}{2} \frac{وا د س}{واس} \text{ وكانت } ه \text{ هى زيادة } \frac{1}{2} \frac{وا د س}{واس}$$

عن ر وجد

$$ر + ه = \frac{1}{2} \frac{وا د س}{واس}$$

واذا كان الامر بالعكس بان كانت ر اكبر من $\frac{1}{2} \frac{وا د س}{واس}$ كانت

كمية ه سالبة فاذا وضع مقدار $\frac{1}{2} \frac{وا د س}{واس}$ هذا فى مقدار د (س + ه)

ولوحظ اشتراك مضروب ه فى الثلاث حلول السابقة الى

$$د (س + ه) = ك + (ر + م + ه)$$

$$ل (س + ه) = ك + (ر + ن + ه)$$

$$د (س + ه) = ك + (ر + ه + ع + ه)$$

لكن يجعل ه صغيرة جدا تكون كمية ه غير المشقة لانه على ه اكبر
من كميات م ه و ن ه التى تقبل نحو الصفر فاذا كانت ه موجبة
عند ذلك فاق د (س + ه) د التى د (س + ه) و ل (س + ه)
ويعلم من ذلك انه يكون فى هذه الحالة د (س + ه) أو ع م (شكل ٢٤)
اكبر من ع م ومن ع م وهنذا بين ان منحنى ص = د س

المتبين

المتبين بخط م م لا يمكن أن يمرّ بين المنحنيين الآخرين
وكذا لو كانت كمية ع سالبة فإنه يكون د (سـ + هـ) او ح م
اصغر من ح م ومن ح م ويكون حينئذ منحني م م هو الذي يقرب
من محور الآفاق زيادة فلا يمكن أن يكون محصورا بين الآخرين وهذا
ما أردنا اثباته

* ١٤٨ * يمكن الآن أن نبين السبب الموجب ليكون الخط المستقيم
(شكل ٥) الذي في بند (١٤٥) وهو الالتصاق برتبة اولى مماسا
بالمنحنى لانه ينتج من القضية السابقة عدم امكان مرور مستقيم اخر بين ذلك
الخط المستقيم وبين المنحنى المفروض وهذه هي خاصية التماس لاحتمال
ويقال ان هذا التماس تماس برتبة اولى مع المنحنى وعلى العموم يقال
للالتصاق النوني الرتبة مماس بالمنحنى الذي هو الالتصاق له تماسا نوني الرتبة
ويعلم من ذلك انه متى وجدت بين منحنيين هذه المعادلات الثلاث

$$دس = كس و واس = واس = واس \cdot واس = واس = واس$$

كان لاهذين المنحنيين تماس برتبة ثانية ويكون هذا التماس برتبة
ثالثة متى توجد زيادة على الثلاث معادلات السابقة هذه المعادلة

$$\frac{واس^3}{واس^3} = \frac{واس^3}{واس^3} \text{ وقس على هذا}$$

* ١٤٩ * حيث ان معادلة الدائرة التي هي

$$(ص - و) + (س - ر) = نق$$

تحتوى على ثلاث ثوابت فيمكن أن نعين الدائرة التي يكون لها تماس برتبة ثانية
مع اى منحنى وليكن م م (شكل ٢٥) المعلوم المعادلة ولذلك نفرض ان
سـ و صـ يكونان بعدى نقطة م من محيط هذه الدائرة فمقدار صـ
يعلم بواسطة معادلة (صـ - و) + (سـ - ر) = نق (٧٣)

* (١٢٠) *

وينبغي استعراض كسرة به في معادلات التماس التي هي

$$س = كسرة = كسرة \text{ و } كسرة = كسرة \text{ و } كسرة = كسرة$$

واذا رمزنا بـ رموز س و ص لابعاد منحني ص = س = س

في نقطة التماس الت المعادلات السابقة الى

$$ص = ص = كسرة = كسرة = كسرة = كسرة \dots\dots\dots (٧٤)$$

ويلزم حينئذ ان نوضع عوضا عن كميات ص و كسرة و كسرة

مقاديرها المستخرجة من معادلة (٧٣) ومن تفاضلاتها المتوالية التي هي

$$(ص - و) كسرة + س - ر = ٠ \dots\dots\dots (٧٥)$$

$$(ص - و) كسرة + كسرة + كسرة = ١ \dots\dots\dots (٧٦)$$

لكن نضع مقادير ص و كسرة و كسرة الحادثة من معادلات

(٧٣) و (٧٥) و (٧٦) في معادلات (٧٤) ليس الا حذف

هذه الكميات من بين معادلات (٧٣) و (٧٤) و (٧٥) و (٧٦)

وذلك يؤول الى مسح العلامات من معادلات (٧٣) و (٧٥) و (٧٦)

بان يتأمل مع ذلك انه متى يكون ص = ص يوجد س = س

فاذا مسحت العلامات كما ذكر كان

$$(ص - و) + (س - ر) = نقي \dots\dots\dots (٧٧)$$

$$(ص - و) كسرة + س - ر = ٠ \dots\dots\dots (٧٨)$$

(ص)

* (١٢١) *

$$(٧٩) \dots\dots\dots = ١ + \frac{واصر}{واسر} + \frac{واصر}{واسر} (و - و) \dots\dots\dots$$

ومن المعادلة الاخيرة يستخرج

$$(٨٠) \dots\dots\dots \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + ١ \right)}{\frac{واصر}{واسر}} - = (و - و)$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٧٨) يحدث

$$(٨١) \dots\dots\dots \frac{\frac{واصر}{واسر} \left(\frac{واصر}{واسر} + ١ \right)}{\frac{واصر}{واسر}} = ر - سه$$

واذا وضعت مقادير صه - و و سه - ر هذه في معادلة (٧٧) حدث

$$نق = \frac{\frac{واصر}{واسر} \left(\frac{واصر}{واسر} + ١ \right)}{\left(\frac{واصر}{واسر} \right)} + \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + ١ \right)}{\left(\frac{واصر}{واسر} \right)}$$

واذا جمعت البسوط التي وجدناها مضروب مشترك يكون

$$نق = \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + ١ \right) \left(\frac{واصر}{واسر} + ١ \right)}{\left(\frac{واصر}{واسر} \right)}$$

$$نق = \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + ١ \right)}{\left(\frac{واصر}{واسر} \right)} \text{ و باخذ الجذر التربيعي يوجد}$$

* (١٢٢) *

$$\frac{\left(\frac{v^2}{s^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{v^2}{s^2}} \pm = \text{نق}$$

* ١٥٠ * تضعيف الإشارة متعلق بوضع نق فإذا كان تعبير

المنحنى متجهاً نحو محور الآفاق كان $\frac{v^2}{s^2}$ سالباً على ما في بند (١١٣)

ولاجل أن يكون نق عند ذلك موجباً يؤخذ نق بإشارة السلب ويوضع

$$\text{نق} = - \frac{\left(\frac{v^2}{s^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{v^2}{s^2}} \dots\dots\dots (٨٢)$$

لأنه متى يتجه تعبير المنحنى نحو محور الآفاق يقوم $\frac{v^2}{s^2}$ مقام الكمية

السلبية التي إذا وضعت في مقدار نق جعلته موجباً

* ١٥١ * الدائرة التي اعتبرناها يقال لها الدائرة الالتصاقية ويقال

لنصف قطرها نصف قطر الانحناء ويعلم من ذلك أنه لا يلزم لايجاد نصف قطر

الانحناء لاى منحنى لمعرفة معادلة هذا المنحنى لنستخرج منها المعادلات

التفاضلية اللازم وضعها في قانون (٨٢)

وإذا لزم أنه يوجه المنحنى تحديده نحو محور الآفاق يجعل مقدار نق متبوعاً

بإشارة موجبة

* ١٥٢ * وقد يرسم مقدار نق أحياناً بهذه الصورة

$$\text{نق} = \frac{(v^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}{v^2 s^2}$$

وهذا

* (١٢٣) *

وهذا المقدار يستخرج بسهولة من معادلة (٨٢) لانه اذا اشركت مقامات
الحدين الموضوعين بين الحافظتين (ونعني بالحافظتين القوسين الحاصرتين
للعدين المتركب منهن- ما البسط في قانون ٨٢) ولوحظ ان قوة $\frac{3}{4}$ لكمية
واسه هي واسه يحدث

$$\frac{\frac{3}{4}(\text{واسه} + \text{واسه}^2)}{\text{واسه}^3} - \frac{\frac{3}{4}(\text{واسه} + \text{واسه}^2)}{\frac{\text{واسه}^3}{\text{واسه}^2}} = \text{نق}$$

* ١٥٣ * ولنتطبق قانون (٨٢) على الامثلة نبحث عن نصف قطر
الانحناء للقطع المكافئ (نظام (شكل ٢٦) وهو الذي معادلته
 $\text{س}^2 = \text{ع}^2$

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلة فيوجد $\text{س}^2 \text{واسه} = \text{ع}^2 \text{واسه}$
ومنه يحدث

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}^2} = \frac{\text{س}^2}{\text{ع}^2} \text{ ثم يوجد}$$

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}^2} = \frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2}$$

وهذا يؤول قانون (٨٢) الى

$$\frac{\frac{3}{4} \left[\left(\text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2} \right) \frac{1}{\text{ع}^2} \right]}{\frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2}} = \frac{\frac{3}{4} \left(\frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2} + 1 \right)}{\frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2}} = \text{نق}$$

وباجراء رفع المضروبين الى قوة $\frac{3}{4}$ يوجد

$$\frac{\frac{3}{4} \left(\text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2} \right)}{\frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2}} = \frac{\frac{3}{4} \left(\text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2} \right)}{\frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2}} \quad \text{نق} = \frac{1}{\text{ع}^2} \quad (٨٣) \dots$$

ولكن مقدار الخط العمودي للقطع المكافئ يساوى $\frac{1}{\text{ع}^2} \left(\text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2} \right)$

فيتضح من هذا وذاك أن نصف قطر الانحناء المقطع المكافئ يساوى لمكعب الخط العمودى مقسوما على مربع نصف الخط القياسى له (وبالبحث عن نصف قطر الانحناء لمعادلة ص^٢ = م^٢ س + د^٢ س^٣ الدالة على جميع الخطوط المنحنية التى بدرجة ثانية بحسب كمية د يتحقق صحة ما ذكره لجمع المنحنيات التى بدرجة ثانية)

* ١٥٤ * ويمكن استعمال الدائرة الالتصاقية فى تقدير انحناء أى منحنى فى أى نقطة ولتكن م (شكل ٢٥) لانه اذا رسمنا من هذه النقطة قوسا صغيرة جدا ولتكن م ل بنصف قطر يساوى نصف قطر الانحناء فى هذه النقطة أمكن اعتبار هذه القوس كفوس من المنحنى لانه يكاد أن ينطبق عليه لكن حيث ان انحناء م ل يكبر كلما صغر نصف قطره يعلم من ذلك انه يمكن ادراك انحناء المنحنى وصغره بواسطة صغر نصف قطر انحنائه وكبره

فاذا اعتبرنا مثلا معادلة (٨٣) التى يحدث منها نصف قطر الانحناء المقطع المكافئ شاهدنا انه يكون فى رأس المنحنى التى فيها س = ٠ مقدار نصف قطر الانحناء هكذا نق = $\frac{c}{f}$ وحيث انه متى تزداد س على التوالى تزداد كمية نق يستبدل بذلك على ان انحناء المقطع المكافئ يأخذ فى النقص كلما بعد عن رأسه

* ١٥٥ * حيث ان كمية $\frac{واص}{واس}$ تبين ظل الزاوية التى تقع بين المماس فى نقطة م (شكل ٢٧) وبين محور الاتفاق لمعادلة الخط العمودى المماس بالنقطة التى ابعادها ر و تكون

$$ص - و = \frac{واص}{واس} (س - ر)$$

وهذه المعادلة هى كمعادلة (٧٨) التى فيها ر و يبينان بعدى مركز الدائرة الالتصاقية فىرى من ذلك ان نصف قطر هذه الدائرة هو خط عمودى

على المنحنى

* ١٥٦ * اذا رسمنا الآن من جميع نقط منحني وليكن مم مم' .. الخ
(شكل ٢٨) انصاف أقطارا مخرائية مم وم' وم' وم' .. الخ احدثت
نقط و و و و و ... الخ التي هي مراكز الدوائر الالتصاقية
المارة بنقط مم وم' وم' وم' .. الخ خطا مخرائيا جميع نقطه
توجد تحت قاعدة واحدة (داخله في معادلة منحنى مم مم' .. الخ
لانه متى يعلم هذا المنحنى تنتج منه مواضع جميع تلك النقط) وذلك المنحنى
يعنى المتركب من نقط و و و و و .. الخ يسمى مفرد منحنى مم مم' .. الخ
ومنحنى مم مم' .. الخ يقال له الانفرا اذا اعتبر بالنسبة الى المفرد

* ١٥٧ * متى ينتقل من نقطة الى أخرى من المفرد فلا تتغير كيتا سه و صه فقط ولكن تتغير ايضا كيات ر و و نق معالان كيتي ر و و هم على وجه العموم بعدا مركز الدائرة الالتصاقية وحيث ان المفرد متكون من جله هذه المراكز يعلم ان كيتي ر و و هما بعدا هذا المنحنى يعنى بعدا اى نقطة منه فيتغيران من نقطة الى اخرى من المنحنى وكذا تتغير كية نق التى هى نصف قطر الدائرة الالتصاقية وتبين بعد اى نقطة من المفرد الى أخرى من الافراد ومن ثم يكون بأخذ تفاضل معادلة (٧٨) بالنسبة الى جميع الحروف [ولا يمكن أخذ تفاضل معادلة (صه - و) + (سه - ر)] = نق^٢ ومشتقاتها بخلاف ذلك وما يترأى من العمل بخلاف ذلك فى استنتاج معادلات (٧٥) (٧٦) من معادلة (٧٣) يجاب عنه انه حيث كانت هذه المعادلة تحتوى على ثابتين غير متعينتين لزم أن تعين هذه الثوابت بواسطة شرط كون الدوال المتبينة بالاطراف الاول للمعادلات (٧٥) و (٧٦) تجعل مساوية لصفر وبدون ذلك لم تكن نستدل على انه يستلزم من وقوع معادلة (٧٣) وقوع معادلات (٧٥) و (٧٦) وبالقسمه على (و) سه

$$\therefore = \frac{وا}{واسه} - 1 + \frac{واد}{واسه} \frac{واصه}{واسه} - \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} (د - د)$$

* (١٢٦) *

وبطرح معادلة (٧٩) من هذه المعادلة يبقى

$$0 = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واو}}{\text{واسه}}$$

ويستخرج من ذلك

$$\frac{1}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}} \times \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - = \frac{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}} - = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

وحيث يعلم من بند (٦٧) ان $\frac{1}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واو}}$ يكون

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \times \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

ويكون بموجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} - = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

واذا وضعنا مقدار $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$ هذا في معادلة (٧٨) حدث

$$\text{صه} - \text{و} = \frac{\text{واو}}{\text{واو}} (\text{سه} - \text{ر}) \dots \dots \dots (٨٤)$$

* ١٥٨ * قد رأينا في بند (١٥٥) ان معادلة

$$\text{صه} - \text{و} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} (\text{سه} - \text{ر})$$

هي معادلة نصف قطر الانحناء المأثر بالنقطة التي ابعادها سه و صه

فتبديل $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$ بكمية $\frac{\text{واو}}{\text{واو}}$ لم تزل هذه المعادلة دالة على نصف

قطر

* (157) *

قطر الانحناء المذكور لكن معادلة (٨٤) هي أيضا معادلة المماس المماس بنقطة من المقروء ابعادها r و $و$ [وليتأمل انه حيث كان r و $و$ رمزاً في العموم لبعدي نقطة ما من المنحنى المقروء لمعادلة هذا المنحنى تكون

و = کر ومن ثمة تبين كمية $\frac{قار}{وار}$ على موجب ما هو مقرر في بند (٧١)

الزاوية التي يحدتها المماس في نقطة (ر و) مع محور الآفاق [فيعلم من ذلك ان نصف قطر الانحناء بمماس المفرد

* ١٥٩ * بحث كانت المواد الآتية تتعلق تفاضل القوس لای

فنحن يجب علينا أن نقدم هذه القضية فنقول لتكن كمية $ح ع = هـ$ ما نفرض زيادتها على أفق $ا ح = مـ$ المبين في (شكل ٣١) فإذا

رسمنا خط مو موازی محور الافاق کان وتر مم = $\sqrt{م^2 + م^2}$

$$\overline{m} + h =$$
$$\text{ولكن م د} = \text{ك} - (\text{ه} + \text{و}) = \frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} + \frac{\text{فاصة}}{\text{واسه}} + \frac{\text{ه}}{\text{واسه}} + \frac{\text{و}}{\text{واسه}} + \frac{\text{خ}}{\text{واسه}}$$

فنضع هذا المقدار في كمية م م ونرمز بـ موز ٢ و ٤ و ٥ الخ
للكثرات كميات ه^٢ و ه^٤ و ه^٥ الخ ليحدث لنا

$$M = \gamma + \frac{\gamma}{\gamma} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

وبقصة الطرفين على ه يكون

$$\frac{d}{dt} = 1 + \frac{\text{فاصله}}{\text{فاصله}} + a_2^2 + a_3^2 + \dots + x$$

وبناء على ان القوس الذي يرمز له برمز قو ينطبق على وتره في حالة التحديد
يوجد من المعادلة الاخيرة

$$\frac{\text{واصفه}}{\text{واسه}} + 1 = \frac{\text{وافو}}{\text{واسه}}$$

* (١٢٨) *

ويسـنخرج من ذلك بواسطة ضرب الطرفين في (و)سـهـ

$$\sqrt{\text{و}^2\text{و}^2 + \text{و}^2\text{و}^2} = \text{و}^2\text{و}^2 \text{ وهو المطلوب}$$

* ١٦٠ * وهذه الكيفية يوجد لاجل المفرد الذي ابعاده ر و

$$\sqrt{\text{و}^2\text{و}^2 + \text{و}^2\text{و}^2} = \text{و}^2\text{و}^2$$

* ١٦١ * نأخذ الآن تفاضل معادلة (٧٧) بالنسبة لجميع

الحروف فيحدث لنا

$$(\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) + (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) = (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و})$$

ويحدث من معادلة (٧٨)

$$(\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) + (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) = ٠$$

فاذا طرحنا هذا الناتج من المعادلة السابقة بقى لنا

$$(\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) - (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) = (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) \dots \dots \dots (٨٥)$$

واذا وضعنا في معادلة (٨٥) هذه في معادلة (٧٧) مقدار و - و

المستخرج من معادلة (٨٤) حدثت لنا هاتان المعادلتان

$$\frac{\text{و}^2\text{و}^2}{\text{و}^2\text{و}^2} = (\text{و} - \text{و}) - (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) = (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و})$$

$$\frac{\text{و}^2\text{و}^2}{\text{و}^2\text{و}^2} = (\text{و} - \text{و}) + (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و}) = (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و})$$

ولما يوضع و - و مضروباً بـ و مشتركاً ويؤخذ الجذر التربيعي لـ و المعادلة

الثانية تؤول هاتان المعادلتان الى

$$(\text{و} - \text{و}) - \frac{\text{و}^2\text{و}^2 + \text{و}^2\text{و}^2}{\text{و}^2\text{و}^2} = (\text{و} - \text{و}) (\text{و} - \text{و})$$

$$(\text{و} - \text{و}) = \frac{\text{و}^2\text{و}^2 + \text{و}^2\text{و}^2}{\text{و}^2\text{و}^2} (\text{و} - \text{و})$$

* (١٢٩) *

وبقسمة الاولى من هاتين المعادلتين على الثانية يوجد

$$\frac{قو}{قو} = \frac{قو + قو}{قو + قو}$$

وحيث انه يوجد في بند (١٦٠) بالرمز برمز قو لقوس من المفرد

$$قو = قو + قو$$

فإذا طوبقت هذه المعادلة بالسابقة حدث من ذلك

$$قو = قو + قو$$

$$قو + قو = قو + قو$$

$$قو + قو = قو + قو$$

وبسبب كون كل دالة تفاضلها صفر هي كمية ثابتة يعلم ان حاصل جمع
قو + قو يبين كمية ثابتة وينبى على ذلك انه بازدياد نصف قطر الانحناء ينقص
القوس المرموز له برمز قو بمقدار تلك الزيادة والعكس بالعكس وتشرح هذه
القضية بهذه الكيفية وهي ان نصف قطر الانحناء يتغير بفروقات مساوية
للفروقات التي تحدث عند تغير القوس من المفرد

* ١٦٢ * ليكن (شكل ٢٩) م و = قو و قو = قو

و م و = قو و قو = قو فيجد لاجل نصف قطر الانحناء م و
قو + قو = قو ثابتة أو

$$م و + قو = قو = ثابتة (٨٦)$$

وكذا توجد لاجل نصف قطر الانحناء م و هذه المعادلة

$$قو + قو = قو = ثابتة أو$$

$$م و + قو = قو = ثابتة (٨٧)$$

وحيث ان الاطراف الثانية لمعادلتى (٨٦) و (٨٧) تبين كمية ثابتة
واحدة على ما بينه البند المتقدم يوجد من ذلك

$$م و + قو = قو = م و + قو = قو أو$$

$$م و - قو = قو - قو = قو - قو = قو أو$$

وبعلم من ذلك ان الفرق بين اى نصفي قطرين من انصاف الاقطار الانحنائية يساوى القوس المحصور بينهما أبدا

* ١٦٣ * وينتج من ذلك انه اذا ثنى خيط على المقروء الذى هو θ (شكل ٢٩) واتهى بمماسبه وكان ممبنا فى نقطة μ من الانفراد الذى هو μ ثم فرد هذا الخيط بابقائه مشدودا على الدوام رسم طرفه μ فى تحركه منحنى الانفراد μ لانه اذا ألقى فى موضع ω متحركه يزداد بقدر قوس ω ومن ثمة يساوى فى الطول نصف قطر الانحناء الذى يمر بنقطة ω ومنه يفهم ان طرف μ لهذا الخيط يكون موجودا على المنحنى الانفرادى

* ١٦٤ * وهماهى كيفية ايجاد معادلة المنحنى المقروء يستخرج اولاً من معادلة المنحنى المراد ايجاد مقروءه مقادير θ والمكثرات

التفاضلية $\frac{\partial \theta}{\partial \mu}$ و $\frac{\partial \theta}{\partial \omega}$ الخ ثم توضع هذه المقادير فى معادلات (٧٨) و (٧٩) فيحدث من ذلك معادلتان مشتملتان على متغير θ فيحذف هذا المتغير من بينهما فتنشأ عن ذلك معادلة محتوية على ω و μ فتكون هى معادلة المنحنى المقروء المطلوبة

* ١٦٥ * ولنعين بهذه الطريقة مقروء القطع المكافى الذى معادلته $\theta = \mu$ فنأخذ تفاضل هذه المعادلة ليستخرج منه

$$\theta = \mu \quad \text{ومن ثمة} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{\partial \mu}{\partial \mu} = 1$$

$$\text{و} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \omega} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega}$$

فتوضع فى معادلات (٧٨) و (٧٩) مقادير θ و $\frac{\partial \theta}{\partial \mu}$ و $\frac{\partial \theta}{\partial \omega}$ هذه لتحديث المعادلتان المشتملتان على θ

(١٣١)

$$(٨٨) \dots\dots\dots ٠ = ر - سه + \frac{سه^٢}{ع} (و - \frac{ر}{ع})$$

$$(٨٩) \dots\dots\dots ٠ = ١ + \frac{سه^٢}{ر ع} + \frac{سه}{ع} (و - \frac{ر}{ع})$$

ثم نطرح معادلة (٨٨) من معادلة (٨٩) بعد ضربها في سه فيبقى

$$(٩٠) \dots\dots\dots ٠ = \frac{سه^٣}{ر ع} + ر$$

وغير ذلك يوجد بضرب معادلة (٨٩) في ع واختصارها

$$سه^٦ - ع^٢ و + ع^٢ و منه يستخرج$$

$$(٩١) \dots\dots\dots \frac{ع}{ر} + \frac{سه^٣}{ع} = و$$

ويحذف سه من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) توجد معادلة المفرد

لكن قبل أن تعمل هذه العملية ننبه ان معادلتى (٩٠) و (٩١)

يؤولان لاجل النقطة الاصلية التى فيها سه = ٠ الى ر = ٠ و و = \frac{ع}{ر}

فناخذ ان ا - ع = (شكل ٣٢) فتوجد نقطة ر من المفرد

ثم يرى بواسطة معادلة (٩١) انه بأخذ متغير سه مقادير موجبة

اوسالبة يزداد متغير و كلما ازدادت هذه المقادير وينتج من ذلك ان المفرد

يتركب من طيتين ر و و

* ١٦٦ * ولجل حذف سه من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) نربع

الاولى بعد أن يستخرج منها سه فيوجد

$$سه^٦ = ر^٢ \frac{ع}{١٦}$$

ثم يستخرج من معادلة (٩١)

$$سه^٦ = (و - \frac{ع}{ر}) \frac{ع}{ر} \text{ وبكعب الطرفين يكون}$$

$$سه^٦ = (و - \frac{ع}{ر})^٣ \frac{ع^٣}{ر^٣}$$

وبساواة مقدارى سه ببعضهما وقسمة الناتج على ع^٣ يوجد

$$ر^٣ (و - \frac{ع}{ر})^٣ = \frac{ع}{١٦}$$

واذا رمزنا برمز و لكمية و - \frac{ع}{ر} وضربنا طرفى هذه المعادلة فى ٢٧ يحدث

$$و^٢ = ر^٢ \frac{٢٧}{١٦} = و^٢$$

لا فاق واحد $\text{ه}^{\text{ه}}$ + ه يكون

$$(\text{ه}^{\text{ه}} - \text{ه}^{\text{ه}}) + \text{ه}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{ه}} \dots \dots \dots (٩٣)$$

واذا فرضنا الآن ان الافق يصير $\text{ه}^{\text{ه}}$ - ه يلزم تغيير كية ه بكمية - ه
في فضل الراسيين فيقول الى

$$- (\text{ه}^{\text{ه}} - \text{ه}^{\text{ه}}) + \text{ه}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{ه}} \dots \dots \dots (٩٤)$$

وحيث كان الحد الاول من متسلسلتى (٩٣) و (٩٤) يمكن أن يفوق مجموع الحدود الباقية بأخذ كية ه صغيرة على قدر الكفاية ينتج من هان فضل الراسيين يتغير في الاشارة متى يصير الافق $\text{ه}^{\text{ه}}$ - ه بعد ان كان $\text{ه}^{\text{ه}}$ + ه وينبئ على ذلك انه اذا كان فرق الراسيات الموافقة لافق $\text{ه}^{\text{ه}}$ + ه كية موجبة بأخذ (شكل ٣٦) $\text{ه}^{\text{ه}} = \text{ه}^{\text{ه}} = \text{ه}^{\text{ه}}$ معناها انه اذا كان الرأسى $\text{ه}^{\text{ه}}$ للمنحنى يفوق $\text{ه}^{\text{ه}}$ يكون الرأسى $\text{ه}^{\text{ه}}$ للاتصاقى فائقا الرأسى $\text{ه}^{\text{ه}}$ للمنحنى وينتج من ذلك ان الالتصاقى يوجد في احد الوجهين فوق المنحنى وفي الوجه الآخر تحته فاذن يقطعه وهذا ما أردنا اثباته

وما ذكر بخصوص الدائرة التي هي التصاقى برتبة ثانية يمكن تطبيقه على جميع الالتصاقات المزدوجة الرتبة

* ١٦٩ * ويتضح من بعد الاثبات السابق انه متى كان الالتصاقى

برتبة مفردة كان مماسا بالمنحنى ولا يقطعه وهو ظاهر من بعد الاثبات السابق

* ١٧٠ * ولنذكر القضية الموعود باثباتها في بند (١٧٠) على

النقط المارة على ما هو مشروح في بند (١٣٨) فنقول اذا كانت المنحنيات المتجمعة في احدى هذه النقط لها مماس مشترك ولتكن معادلته $\text{ه}^{\text{ه}} = \text{ه}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{ه}}$ تغير $\text{ه}^{\text{ه}}$ بكمية $\text{ه}^{\text{ه}}$ + $\text{ه}^{\text{ه}}$ في ثانية معادلتى (٩٢) فيحدث من ذلك $\frac{\text{ه}^{\text{ه}}}{\text{ه}^{\text{ه}}}$ أو $\text{ه}^{\text{ه}} = \text{ه}^{\text{ه}}$ وجميع المكررات

الاخر لهذه المعادلة تكون اصفارا وبسبب كون المماس التصاقيا برتبة

اولى تساوى كمية دس + هـ كمية كرس + حـ وبذلك يؤول
فرق معادلتى (٩٢) الى

ص - ص = ص^١ ه^١ + ص^٢ ه^٢ + ... الخ
وفرق الراسيين هذا يلزم أن يوجد له مقداران كم و ك^١م (شكل ٣٠)
ولذلك يجب أن يكون لاحد المكررات التفاضلية المتينة بهذه الرموز

١ و ٢ الخ مقداران وليكن $\frac{ق^١ص^١}{ق^٢ص^٢}$ هو هذا المكرر

التفاضلى لكن حيث انه اذا أخذت التفاضلات المتوالية لمعادلة ح/ص^١
+ ك/ص^٢ = ٠ لا يزال حد ك باقيا مضروبا فى التفاضل برتبة
عليا للكمية ص^١ فى كل تفاضل فعل على ما قرئ فى بند (١٤٣) يعلم
من ذلك ان التفاضل برتبة د للدالة المفروضة يمكن وضعه هكذا

$\frac{ق^١ص^١}{ق^٢ص^٢} + \frac{ق^١ص^١}{ق^٢ص^٢} = ٠$ ويلزم أن يوجد للمكرر $\frac{ق^١ص^١}{ق^٢ص^٢}$ التفاضلى

مقداران ويثبت ان كمية ك تكون صفرا كما فى بند (١٣٧) وبمقدار ك

هذا يؤول مقدار ح الى صفرا ايضا وتوول معادلة $\frac{ق^١ص^١}{ق^٢ص^٢} = \frac{ع}{ك}$

حينذ الى $\frac{ق^١ص^١}{ق^٢ص^٢} = \div$ وهو المراد اثباته

(تطبيق قضية تبلور على الدوال المتزايدة التى بمتغيرين)

* ١٧١ * متى يتغير فى دالة ع المشتقة على متغيرين س و ص^١

غير المرتبة طين متغير س بكمية س + هـ ومتغير ص بكمية ص + ك
يمكن حل هذه الدالة بواسطة قضية تبلور لانه اذا استبدلت اولا كمية س
بكمية س + هـ يوجد

(١٣٥)

$$\text{ذ}(\text{سه} + \text{هه} + \text{صه}) = \text{ع} + \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \dots + \text{الخ} \dots (٩٥)$$

وكيفية هه توجد لا محالة في هذا الحل و صه لا تدخل الا في دوال

$$\text{ع} \text{ و } \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} \text{ و } \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} \text{ و } \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} \dots \text{الخ}$$

فاذا غيرت صه بكمية صه + ك في هذه الدوال (لزم أن تغير في معادلة (٩٥)

$$\text{بضع بكمية ع} + \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \dots + \text{الخ}$$

$$\frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} + \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \dots + \text{الخ}$$

$$\frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} + \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \dots + \text{الخ}$$

الخ و الخ و الخ و الخ و الخ

وترقم سطور بقدر ما في معادلة (٩٥) من الحدود فيوجد

$$\left\{ \begin{aligned} \text{ذ}(\text{سه} + \text{هه} + \text{صه}) + \text{ك} &= \text{ع} + \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \dots + \text{الخ} \\ \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} + \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} + \text{ك} &+ \text{الخ} \quad (٩٦) \\ \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} + \frac{\text{ع}^2}{\text{واسه}} &+ \text{الخ} \\ \frac{\text{ع}^2 \text{هه}^2}{\text{واسه}^3} + \frac{\text{ع}^2 \text{هه}}{\text{واسه}^2} &+ \text{الخ} \end{aligned} \right.$$

(١٣٦)

* ١٧٢ * واذا فعل هذا التبديل بوجه معا كس يو جدا أولا بتغيير

صه بكمية صه + ك

$$د(سه + صه + ك) = ع + \frac{ك}{واصه} + \frac{ك}{واصه} + \frac{ك}{واصه} + \dots + الخ$$

ثم ينتهي بوضع سه + ه محل سه في كل حد الى هذا الناتج

$$د(سه + ك + ه) = ع + \frac{ه}{واصه} + \frac{ه}{واصه} + \frac{ه}{واصه} + \dots + الخ$$

$$(٩٧) \left\{ \begin{array}{l} \frac{ه}{واصه} + \frac{ه}{واصه} + \frac{ه}{واصه} + \dots + الخ \\ \frac{ك}{واصه} + \frac{ك}{واصه} + \frac{ك}{واصه} + \dots + الخ \\ \frac{ع}{واصه} + \frac{ع}{واصه} + \frac{ع}{واصه} + \dots + الخ \end{array} \right.$$

وحيث كان الترتيب الذي فعلت به هذه التبديلات بالاختيار لانه يجب وضع سه + ه في جميع المحلات التي تدخل فيها سه ووضع صه + ك في جميع المواضع التي تدخل فيها صه فلا تؤثر هذه العمليات على بعضها ومنه ينتج وجوب تطابق حلي (٩٦) و (٩٧) وعليه ينبنى اتحاد مقادير الحدود المتبوعة بجواصل ضروب متحدة في ه و ك فاذا ساوينا

$$\frac{ه}{واصه} = \frac{ه}{واصه} \quad \text{الحدود المضروبة في ه ك ببعضها نجد}$$

$$\frac{ع}{واصه} = \frac{ع}{واصه} \quad \text{او وهو الاولى}$$

و يفهم من هذه المعادلة ان ترتيب التفاضل في اخذ التفاضل الثاني لحاصل

ضرب

* (١٣٧) *

ضرب متغيرين أو دالة بمتغيرين اختياري ويعرف أيضا ان ترتيب
المكثرات التفاضلية بدرجة علميا هو اختياري بمساواة المكثرات التفاضلية
للحدود الاخرى من معادلتى (٩٦) و (٩٧) ببعضها والله اعلم
* (في النهايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغيرين) *

* ١٧٣ * قد رأينا فى بند (١٧١) انه اذا غير s بكمية
 $s + h$ و متغير s بكمية $s + k$ فى الدالة المشتملة
على متغيري s و s غير المرتبطين بعلم حل k ($s + h$ و $s + k$)
بمعادلة (٩٦) فاذا بينا k ($s + h$ و $s + k$) فى هذه المعادلة

$$p \text{ برمز } s \text{ و } k \text{ برمز } h \text{ و } \frac{f(s+h, k)}{f(s, k)} \text{ برمز } \frac{f(s, k+h)}{f(s, k)} \text{ نجد}$$

$$f(s, k) = f(s, k) + \left(\frac{f(s, k+h)}{f(s, k)} - 1 \right) f(s, k) + \left(\frac{f(s+h, k)}{f(s, k)} - 1 \right) f(s, k) + \left(\frac{f(s+h, k+h)}{f(s, k)} - 1 \right) f(s, k)$$

+ الحدود المحتوية على h^2 و h^3 الخ ... (٩٨)

ولاجل أن تكون f نهاية كبرى او صغرى يلزم أن تجعل بعض المقادير
المعطاة الى h و k كمية f اكبر من f ابدا أو اصغر منها ابدا

ولا يقع ذلك الا اذا كان حد f ($\frac{f(s+h, k)}{f(s, k)} + \frac{f(s, k+h)}{f(s, k)} - 2$) صفرالا انه اذا لم يكن

كذلك أمكن صيرورة هذا الحد اكبر من حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود
التي تليه بواسطة مقدار لايق لكمية h كما فى بند (٨٩) وبأخذ هذا
المقدار على التعاقب موجبا وسالبا تصير f فى احدى الحالتين اكبر من كمية
 f وفى الاخرى اصغر منها وبعلم حينئذ انه لتكون دالة f هذه نهاية كبرى
او نهاية صغرى يلزم ان يوجد

$$f = \left(\frac{f(s+h, k)}{f(s, k)} + \frac{f(s, k+h)}{f(s, k)} - 2 \right) f \text{ أو وهو الاول}$$

* (١٣٨) *

$$٠ = \frac{ع}{واس} + ٢ \frac{ع}{واس}$$

وحيث كانت الزيادة ك حيث ما اتفقت تكون م كذلك ولا تزال المعادلة
حينئذ واقعة مهما كانت م وذلك يقتضى أن تنقسم هذه المعادلة الى هاتين

$$٠ = \frac{ع}{واس} \text{ و } ٠ = \frac{ع}{واس}$$

* ١٧٤ * نبحث الآن عما يميز النهاية الكبرى من الصغرى ولذلك
ننبه انه حيث كان الحد المشتق على ه صفرا فالحد المحتوى على ه
يكون هو المتمتع بإشارة حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود التى تأتى بعد ع
ويلزم حينئذ أن الحد المشتق على ه أن كان غير صفر لا يكون متعينا
بواسطة مقادير ه و ك موجباتارة وسالبا أخرى والالكانت ع
فى احدى الحالتين اصغر من ع وفى الحالة الاخرى اكبر منها وحيث كان
الامر كذلك فنشرع فى البحث عن الشرط اللازم وقوعه ليحفظ الحد المشتق
على ه إشارة واحدة مهما كانت المقادير المعطاة الى كيتى ه و ك
وفى هذا المبحث نبين الحد المحتوى على ه من معادلة (٩٨) بهذا الرمز

$$\frac{1}{f} \text{ ه } (م' + ٢ - م + ع)$$

وبوضع ٧ مضروبا مشتركا يقول هذا الحد الى

$$\frac{1}{f} \text{ ه } (م' + ٢ - م + \frac{ع}{٢} + \dots + \frac{ع}{٢}) \quad (٩٩)$$

وبإضافة كمية $\frac{1}{٢} - \frac{1}{٢}$ التى مقدارها صفر على ما بين الحافظتين
يمكن وضع كمية (٩٩) هكذا

$$\frac{1}{f} \text{ ه } (م' + \frac{ع}{٢} + (\frac{1}{٢} - \frac{ع}{٢}) + \dots + \frac{ع}{٢}) \quad (١٠٠)$$

ويرى انها تكون بإشارة ٧ متى اتحد ع و ٧ فى الإشارة وكان
 $\frac{ع}{٢} < \frac{1}{٢}$ يعنى ع < ١ لان الكمية المضروبة فى $\frac{1}{f} \text{ ه } (م' + \frac{ع}{٢} + (\frac{1}{٢} - \frac{ع}{٢}) + \dots + \frac{ع}{٢})$ حينئذ

تكون

تكون موجبة وإشارة كمية (١٠٠) تتعلق بإشارة γ واذن توجد
بنهاية كبرى او بنهاية صغرى بحسب كون γ سالبة أو موجبة يعنى

بحسب إشارة $\frac{واحد}{واحد}$ المتخذة مع إشارة $\frac{ع}{واحد}$ حيث انه شوه دأن

ح و γ يفرضان بإشارة واحدة

(فى تحويل الاحداثيات المستقيمة الى احداثيات قطبية)

* ١٧٥ نعتبر منحنى γ (شكل ٧٩) المتعين فيه موضع
نقطة م بواسطة الاحداثيات المستقيمة $اح = سم$ و $ام = ص$
وهذه النقطة يمكن تعيينها كذلك اذا علمت زاوية $ماح$ والنصف
قطر الاحتراق $ام$ ولما كانت الزوايا تقاس بالاقواس عادة استبدلت
زاوية $ماح$ بقوس $م$ و المرسوم بنصف قطر مأخوذ وحدة ومن ثم يمكن
استعواض الاحداثيات القطبية التى هى $م$ و $ع = و$ ام $= ع$
بالاحداثيات المستقيمة $اح = سم$ و $ام = ص$

* ١٧٦ * ولينأمل ان مبدأ الآفاق قد يكون بعض الاوقات غير
نقطة و لانه يمكن تعيين نقطة م كذلك اذا اعتبرت نقطة و نقطة
الابتداء وعلم قوس و $م$ ونصف قطر $ام$ الاحتراق وفى هذه الحالة
يمكن أن نرسم قوس و $م$ برمز $ع$ وحينئذ فجميع الآفاق المحسوبة
من مبدأ و تختلف عن الآفاق المحسوبة من مبدأ و بكمية ثابتة
هى و و توجد بينها اى بين تلك الآفاق المتخالفة هذه المعادلة
 $ع = ع' - و$

وحيث انه يمكن بواسطة هذه المعادلة تغيير المبدأ بما يناسب نفرض ان هذا
المبدأ يكون و لاجل السهولة

* ١٧٧ * ولتكن الآن $د$ (سم و $ص$) = ٠ المعادلة التى يراد
أن تتغير فيها الاحداثيات المستقيمة $اح = سم$ و $ام = ص$
بالاحداثيات القطبية و $م = ع$ و $ام = ع$ فنبحث عن

* (١٤٠) *

التعادل والارتباط الذي يقع بين هذه الاحداثيات ولذلك ننظر انه يوجد

$$\begin{aligned} \text{ع} &= \text{ام جتا ماع} \text{ و } \text{ع م} = \text{ام جاماع} \text{ أو} \\ \text{س} &= \text{ع جتا ع} \text{ و } \text{ص} = \text{ع جا ع} \dots\dots (١٠١) \\ \text{وينبغي حينئذ وضع هذه المقادير في معادلة د (س و ص) = ٠} \\ \text{لتحدث المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه} \end{aligned}$$

* ١٧٨ اذا كانت النقطة الاصلية للاحداثيات المستقيمة س و ص ليست في مركز ا للمنحنى (شكل ٨٠) وكانت ر و و الاحداثيات المركز اوسه و ص الاحداثيات المحسوبة من ا حدث

$$\begin{aligned} \text{اع} &= \text{اك} - \text{ار} \text{ و } \text{مع} = \text{مك} - \text{ام} \\ \text{أو} \quad \text{س} &= \text{س} - \text{ر} \text{ و } \text{ص} = \text{ص} - \text{و} \end{aligned}$$

ويلزم وضع هذه المقادير في القوازين السابقة

* (في تحويل الاحداثيات القطبيه الى اخرى مستقيمة وتعيين الكمية التفاضلية لقوس في منحن قطبي) *

* ١٧٩ * المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه تبينها

$$\text{د (ع و ع) = ٠}$$

وبشاهد اولاً كما في (شكل ٧٩) انه يمكن ابدال ع بمقدارها المستخرج من معادلة

$$\begin{aligned} \text{ام} &= \text{اع} + \text{ع م} \text{ أو} \\ \text{ع} &= \text{س} + \text{ص} \dots\dots (١٠٢) \end{aligned}$$

وبالنظر الى ع نقسم معادلتى (١٠١) على بعضهما فيوجد

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{طا}}{\text{حنا}} = \text{ظا ع} \text{ ويسـتخرج من ذلك}$$

$$\text{ع} = \text{قوس} (ظا) = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

وبوضع مقدار ع هذا مع مقدار ع في معادلة

$$\text{د (ع و ع) = ٠} \text{ يوجد}$$

$$\text{د [قوس (ظا) = } \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ و } \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}] = ٠ \text{ (١٠٣)}$$

وهذه

(١٤١)*

وهذه معادلة مشقة على س و ص وعلى كمية عالية
 * ١٨٠ * ويمكن ايضا إيجاد معادلة بين س و ص غير محتوية
 على الكمية العالية التي هي قوس (ظا = ص) لكنها تكون
 مشقة على كميات تفاضلية وذلك نأخذ تفاضل معادلة (١٠٣)
 أو نستعمل الطريقة الآتية حيث كانت هي المعادة ونرمز برمز
 (ع و س) = ٠ للمعادلة المراد تحويلها الى معادلة ذات احداثيات
 مستقيمة س و ص والسبب الموجب لجعلنا اولا عن حذف س
 من بين معادلة (س و ع) = ٠ وتفاضل هذه المعادلة المرموز له برمز
 (س و ع و س و ع) = ٠ هو كون مقدار ع يمكن
 بيلانه على موجب بند (١٧٩) بتغيري س و ص بدون كمية
 عالية ولا يمكن بيان مقدار س كذلك وبالحقيقة متى تحذف كمية س
 تكون المعادلة الحادثة مشقة على س و ص وهذه التفاضلات
 يمكن بيانها بدلالة متغيرات س و ص و س و س و ص
 هذا ونستخرج من معادلة (١٠١)

جنا س = ع و حا س = ص (١٠٤)
 ونقسم احدى هاتين المعادلتين على الاخرى فيوجد

حنا س أو ظا س = ص ثم نأخذ تفاضل الطرفين فيجد

$$\frac{س و ص - ص و س}{س} = \frac{و}{جنا س}$$

وبدل حنا س بمقداره المستخرج من المعادلة الاولى من معادلتى (١٠٤)
 ثم نسقط القامم المشترك س فينشأ عن ذلك .

$$ع و س = س و ص - ص و س \text{ ومنه يستخرج}$$

$$و = \frac{س و ص - ص و س}{ع} \text{ (١٠٥)}$$

وبوضع مقدار غ عوضا عنه في هذه المعادلة الأخيرة يكون

$$\frac{س^۱ و^۱ - ص^۱ و^۱}{س^۲ + ص^۲} = و^۱$$

وتفاضل المتغير الآخر يوجد ايضا باعظم سهولة لانه يحدث من معادلة (١٠٢)

ع = ص^٢ + ص^٢ وبأخذ التفاضل يوجد

$$\frac{\text{صدا} + \text{سراسر}}{\text{صدا} + \text{سراسر}} = 46$$

وبواسطة مقادير α و β و γ السابقة تتغير المعادلة الحادثة
من حذف ϵ بمعادلة أخرى لا تحتوى إلا على α و β و γ و ϵ
واذن تنسب إلى احداثيات مستقيمة وتكون هي المعادلة المبحوث عنها
* ١٨١ * قد رأينا في بند (١٥٩) ان كمية تفاضل القوس المرموز له
برمز Q المنسوب إلى احداثيات مستقيمة هي

۱۰۶) ۷۲ = ۷۲ + ۷۲

فيمكن تعيين تفاضل هذا القوس متى تكون الاحداثيات قطبيه وفي هذه الحاله
توضع في معادله (١٠٦) مقادير α و β المستخرجه من معادلاته

سہ = ع جتاے و صہ = ع حائے

ويوجد ياخذ تفاضل هذه المعادلات

وامہ = ع - ح اے واے + ج ناے واے

خاص = ع جتا + ع با + ع باع

قرب هذه المعادلات ونختصرها بمساعدة معادلة

خاے + جتاے = ا فینشاً عن ذلک

$$\overline{\gamma} = \overline{\epsilon' \epsilon} + \overline{\epsilon \epsilon'}$$

وهو تفاضل القوس بدلالة الاحداثيات القطبية

(ف)

* (١٤٣) *

(في تحت المماس ومحب العمودي والعمودي والمماس للمنحنيات القطبية)

* ١٨٢ * حقيقة تحت المماس ع (شكل ٨١) في المنحنيات ذات الاحداثيات المستقيمة هو الجزء المحصور بين موقع ح للرأسي وبين نقطة ع التي يقطع فيها خط ا ع العمودي على هذا الرأسي مماس م ط وهذا التعريف يتماد في المنحنيات القطبية التي ليس للرأسي فيها ح ولكنه النصف قطر الاحتراق ام فتحت المماس يكون حينئذ عمود ا ط المحصور بين نقطة ا ونقطة ط التي يقطع فيها المماس هذا العمود ويعلم من ذلك ان تحت المماس يأخذ في المنحنيات القطبية موضعا يخالف ما يأخذه في المنحنيات غير القطبية وهذا واضح حيث ان تحت المماس في المنحنيات غير القطبية يعد دائما على محور الآفاق بخلاف ما اذا كانت المنحنيات قطبية فانه يتغير في الموضع في كل نقطة من المنحني لان محور الآفاق المذكور لا يوجد هناك

* ١٨٣ * نبحث الآن عن الكمية الحسابية لتحت المماس في المنحنيات القطبية ولذلك نفرض ان ام و ام يكونان نصفي قطرين احتراقين (شكل ٨٢) ثم نرسم من نقطة م خط م ح عمودا على نصف القطر الاحتراق ام ونرسم ا ط موازيا لهذا العمود فيحدث من تشابه مثلثي ا ط م و ع م م هذا التناسب

$$ع م : ع م :: ا م : ا ط$$

$$\frac{ع م \times ا م}{ع م} = ا ط$$

وبمراعاة كون ع م هو أحد اضلاع مثلث ع م م القائم الزاوية يصير مقدار ا ط هذا

$$ا ط = \frac{ع م \times ا م}{ع م - ع م}$$

وفي حالة التحديد والتأية يكون ام مساويا ام يعني ع وينطبق ع م على قوس م د ووتر م م على قوس م م ويصير ا ط تحت

المماس ولم يبق حينئذ إلا البحث عن مقدارى $\overline{م م}$ و $\overline{م د}$ في حالة التعميد
فلاقول ليس الاتفاضل قوس المنحنى فيكون على موجب بند (١٨١)

$$\overline{م م} = \overline{ع ع} + \overline{ع و}$$

والثاني وهو $\overline{م د}$ يبحث عنه بالكيفية الآتية وهو أن يقال حيث أنه يحدث
من قطاعى $\overline{ام س}$ و $\overline{ام د}$ هذا التناسب

$$\overline{ام} : \overline{ام} :: \overline{ام} : \overline{ام} \text{ أو}$$

$$١ : \overline{ام} :: \overline{ام} : \overline{ام}$$

يكون $\overline{م د} = \overline{ع ع} \times \overline{ام س}$ وهذه الكمية تؤول في حالة التعميد
الى $\overline{ع و}$ فنضع مقادير $\overline{م د}$ و $\overline{م م}$ هذه في مقدار $\overline{اط}$ بعلم
أن يغير $\overline{ام}$ بكمية $\overline{ع و}$ و $\overline{ع م}$ بكمية $\overline{م د}$ ونختصر فنجد

$$\overline{اط} = \frac{\overline{ع و}}{\overline{ع و}} \text{ وهى كمية تحت المماس}$$

* ١٨٤ * ولتعيين تحت العمودى نراعى أنه حيث كان عمودى $\overline{ع م}$
(شكل ٨١) عموديا على المماس فرأى $\overline{ام}$ يكون وسطا متناسبا بين
تحت المماس وتحت العمودى ومن أجل ذلك يوجد

$$\overline{اط} : \overline{ام} :: \overline{ام} : \text{تحت العمودى أو}$$

$$\frac{\overline{ع و}}{\overline{ع و}} : \overline{ع} :: \overline{ع} : \text{تحت العمودى ومنه يستخرج}$$

$$\text{تحت العمودى} = \frac{\overline{ع و}}{\overline{ع و}}$$

وبالنظر الى الخط العمودى والخط المماس نراعى مثلثى $\overline{م ا ع}$ و $\overline{م ا ط}$ القائمى
الزاوية فيحدث لنا منهما

$$\overline{م م} = \overline{م ا} + \overline{ا ع} \text{ و } \overline{م ط} = \overline{م ا} + \overline{ا ط}$$

ثم نضع فى هاتين المعادلتين مقادير $\overline{م ا}$ و $\overline{ا ع}$ و $\overline{ا ط}$ فيوجد

العمودى

* (١٤٥) *

$$\frac{ع^2}{ع^2 + ١} = \frac{ع^2}{ع^2 + ١} \text{ والمماس } ع = \frac{ع^2}{ع^2 + ١}$$

* ١٨٥ ولايجاد المقدار الحسابى للقطاع فى المنحنىات القطبية ننظر مثلث امم (شكل ٨٢) فيحدث منه

$$\text{مساحة امم} = \frac{ع \times ع}{٢}$$

وفى النهاية تكون مساحة مثلث امم (شكل ٨٢) عبارة عن مساحة قطاع عنصرى وعمود ع يتغير بقوس م الذى وجدناه يساوى ع وع و ام يؤول الى ع فنضع هذه المقادير فى المعادلة السابقة فنجد

$$\text{مساحة القطاع العنصرى} = \frac{ع^2}{٢}$$

ويمكن ايضا بيان القطاع العنصرى بدلالة الاحداثيات المستقيمة لانه بوضع مقادير ع و ع المستخرجة من معادلات (١٠٢) و (١٠٥) فى هذه المعادلة نصير

$$\text{مساحة القطاع العنصرى} = \frac{ص - ص}{٢} \text{ وهو المراد بيانه}$$

* (فى تعيين كمية نصف قطر الانحناء فى منحنى قطبى) *

* ١٨٦ * قد بينا فى بند (١٤٩) مقدار نصف قطر الانحناء بنسبة الاحداثيات المستقيمة ورفعنا الاشكال بلحوق هذا المقدار بإشارة تجعل نى موجبا ولذلك وضعناه هكذا

$$\text{نى} = \frac{\left(\frac{ع}{ع} + ١ \right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ع}{ع}} \dots \dots \dots (١٠٧)$$

فلمعرفة مقدار نى هذا بدلالة الاحداثيات القطبية لا يلزم الا حذف المكررات التفاضلية الداخلة فى هذا المقدار بواسطة المعادلات الآتية وهى

$$ص = ع \text{ جتا } ع \text{ و } ص = ع \text{ حـ}$$

* (١٤٦) *

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلات ثم نقسم النواتج الحادثة على بعضها فيجد ثلثنا

$$\frac{\text{واصه} + \text{واع حاء} + \text{ع جتاء واع}}{\text{واسه} - \text{واع جتاء} - \text{ع حاء واع}} =$$

وزمن لكميتي هذا الكسر برمزي م و د فيجد

$$\left. \begin{aligned} \text{م} &= \text{واع حاء} + \text{ع جتاء واع} \\ \text{د} &= \text{واع جتاء} - \text{ع حاء واع} \end{aligned} \right\} \dots (١٠٨)$$

واذن يكون

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{م}}{\text{د}} \dots \dots \dots (١٠٩) \text{ أو}$$

$$\frac{\text{م}^{\frac{2}{3}}}{\text{د}^{\frac{2}{3}}} = \frac{\text{واصه}^{\frac{2}{3}}}{\text{واسه}^{\frac{2}{3}}}$$

وبواسطة هذه المعادلة يوجد بخصوص بسط مقدار نق

$$\left(\frac{\text{م}^{\frac{2}{3}} + \text{د}^{\frac{2}{3}}}{\text{د}^{\frac{2}{3}}} \right) = \left(\frac{\text{واصه}^{\frac{2}{3}}}{\text{واسه}^{\frac{2}{3}}} + ١ \right)$$

ثم نرفع كل كمية من كميتي هذا الكسر الى قوة $\frac{3}{2}$ والقوة $\frac{3}{2}$ لكمية د هي $\text{د}^{\frac{3}{2}}$ فيجد

$$\dots \dots \dots (١١٠) \quad \frac{\text{م}^{\frac{3}{2}} + \text{د}^{\frac{3}{2}}}{\text{د}^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{\text{واصه}^{\frac{2}{3}}}{\text{واسه}^{\frac{2}{3}}} + ١ \right)$$

ونأخذ تفاضل معادلة (١٠٩) فيوجد

$$\frac{\text{واصه} - \text{واسه}}{\text{د}} =$$

ثم نقسم الطرف الاول لهذه المعادلة على واسه والطرف الثاني على د المكافئة الى واسه فيجد

وا

* (١٤٧) *

$$(١١١) \dots\dots \frac{و^٢م - م^٢و}{و^٢} = \frac{و^٢}{و^٢}$$

وبواسطة المقادير المعلومه بمعادلتى (١١٠) و (١١١) تؤول معادلة (١٠٧)

$$(١١٢) \dots\dots\dots \frac{و^٣(م + و)}{و^٢م - م^٢و} = \text{نق} \quad \text{الى}$$

ولم يبق حينئذ الا تحويل هذه المعادلة الى دالة للمتغيرى و و ع ولذلك يعين اولا مقدار و + م باضافة مربعات معادلات (١٠٨) على بعضها وباختصار الناتج بمساعدة معادلة ح + جتا = ا فيوجد

$$(١١٣) \dots\dots\dots و + م = و^٢ع + ع^٢و$$

وبالنظر الى مقام معادلة (١١٢) نأخذ تفاضل معادلات (١٠٨) على التعاقب باعتبار و كية ثابتة ثم نضرب الناتج الاول فى و والثانى فى م فنجد

$$\begin{aligned} و^٢م = و^٢ع^٢ + و^٢عجتا - و^٢عح - و^٢عجتا \\ م^٢و = م^٢و^٢عجتا - م^٢و^٢عح - م^٢و^٢عجتا \end{aligned}$$

وحين تطرح المعادلة الثانية من الاولى يوجد

$$\left. \begin{aligned} و^٢م - م^٢و = و^٢ع(و^٢ح - مجتا) \\ + و^٢ع(و^٢ح + مجتا) - \\ - ع^٢و(و^٢ح - مجتا) \end{aligned} \right\} (١١٤)$$

واذا ضربنا ثانية معادلتى (١٠٧) فى ج و الاولى فى جتا وطرحناهما من بعضهما واختصرنا الناتج بواسطة معادلة ح + جتا = ا فنجد

$$و^٢ح - مجتا = ع$$

وبعمل مشابه لهذا العمل يوجد

$$و^٢جتا + م^٢ج = و^٢ع$$

واذا وضعت هذه المقادير فى معادلة (١١٤) صارت تلك المعادلة

$$(١١٥) و^٢م - م^٢و = و^٢ع(و^٢ع + و^٢ع + و^٢ع + و^٢ع + و^٢ع + و^٢ع) (١١٥)$$

* (١٤٨) *

وبواسطة المقادير التي نعينت يعنى (١١٣) و (١١٥) تتغير معادلة (١١٢) بمعادلة

$$\text{نق} = \frac{(ع^2 + ع^2) \sqrt[3]{2}}{ع^2 - ع + ع^2 + ع^2} \text{ وهى المطلوبة}$$

* (فى المنحنىات العالية) *

* ١٨٧ * تسمى بهذا الاسم المنحنىات التى تحتوى معادلاتها على كميات عالية او مكررات تفاضلية وعلى العموم جميع المنحنىات التى لا يمكن أن تبين معادلاتها بعدد محدود من الحدود الجبرية يقال لها منحنىات عالية ولنبين الشهير من هذه المنحنىات فنقول

* (فى حلزونى ارشميدس أو كوفون) *

* ١٨٨ * إذا دار نصف قطر ا - (شكل ٣٧) حول مركز ا وكانت نقطة ا تتحرك على هذا المستقيم فحرك كما مستقيماً بحيث تأتى فى منتهاه وهو نقطة - عند تمام دورته بعد ان كانت فى ابتداء التحرك فى مركز ا رسمت تلك النقطة فى هذا التحرك خطاً منحنياً هو حلزونى ارشميدس وليكن ا - = نق و قوس - = ع و ا م = ع فيوجد من بعد التعريف السابق

$$\text{ام : ا} :: \text{قوس} : ع :: \text{قوس} : ع$$

$$\text{ع : نق} :: ع : ٢ ط نق ومنه يستخرج$$

$$\frac{ع}{٢ ط} = ع$$

وهذا المنحنى ليس له احداثيات مستقيمة على ما يشاهد فاذا دار ا - دورة تامة كافي قوس - المحيط ويكون حينئذ ع = ٢ ط نق ومن ثمة تتحول المعادلة السابقة الى

$$\frac{٢ ط نق}{٢ ط} = ع \text{ أو } ع = نق$$

واذا استمرت نقطة ا فى تحركها على الاتساق رسم نصف قطر ا - دورة

* (١٤٩) *

دورة ثانية حول مركز ا واذا أخذ $r = r$ كانت النقطة المتحركة واقعة في r في آخر هذه الدورة الثانية وتكون حينئذ r مساوية الى r ط نق وبذلك تؤول معادلة

$$r = r = r \text{ الى } r = r \text{ نق وهلم جرا}$$

* (في الحلزوني اللوغاريتمى) *

* ١٨٩ * الحلزوني اللوغاريتمى هو منحن قطبي فيه زاوية ام ط (شكل ٨١) الحادثة بين نصف قطر ام الاحتراقى وبين خط م ط المماس بالمتخفى ثابتة واذن يوجد بالرمز بحرف r لظل زاوية ام ط
ظا ام ط = r

وحيث انه يحدث من قيام مثلث ط م ا في ا هذا التناسب

$$a : r = r : r :: r : r$$

$$r = r$$

واذا غيرنا نصف القطر الاحتراقى ام برمز r و r بكمية

$$\frac{r}{r} \text{ الموجودة في بند (١٨٣) لاجل تحت المماس لمنحن قطبي نجد}$$

$$r = r \text{ أو } r = r \text{ الذى يسـتخرج منه}$$

$$\frac{r}{r} = r \dots\dots\dots (١١٦)$$

وبأخذ تكامل هذه المعادلة على ماسية أى يوجد

$$r = r + \text{ ثابتة}$$

ولتكن هـ أساس الجملة اللوغاريتمية للمهندس نبيير فاذا نظرت r كلوغاريتم لكمية هـ في جملة لوغاريتمية ما أمكن ابدال r بكمية لو هـ وتكون حينئذ كمية لو هـ لوغا ع مبينة لوغاريتم ع

* (١٥١) *

القطبية المتبين في بند (١٨٦) بهذا الرمز

$$\text{نق} = \frac{\frac{3}{2}(\epsilon^1 \epsilon^2 + \epsilon^3 \epsilon^4)}{\epsilon^1 \epsilon^2 + \epsilon^3 \epsilon^4 - \epsilon^1 \epsilon^3 + \epsilon^2 \epsilon^4}$$

مقادير ϵ^1 و ϵ^2 المستخرجة من معادلة الحزوني اللوغاريتمي عوضاً عنها وذلك نستخرج من معادلة (١١٦)

$$\epsilon^1 = \frac{\epsilon^2}{\epsilon^3} \text{ و } \epsilon^2 = \frac{\epsilon^3}{\epsilon^4} \text{ و } \epsilon^3 = \frac{\epsilon^4}{\epsilon^1}$$

ثم نضع هذه المقادير في مقدار نق فيوجد

$$\text{نق} = \frac{\frac{3}{2}(\epsilon^1 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^3})}{\epsilon^1 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^3}} = \frac{3}{2}(\epsilon^1 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^3})$$

وإذا وضعت في كمية الخط العمودي التي هي على ما في بند (١٨٤)

$$\sqrt{\epsilon^1 \epsilon^2 + \epsilon^3 \epsilon^4}$$

مقدار $\frac{\epsilon^1 \epsilon^2}{\epsilon^3 \epsilon^4}$ حدث كذلك $\sqrt{\epsilon^1 \epsilon^2 + \epsilon^3 \epsilon^4}$ ويعلم من ذلك ان الخط

العمودي يساوي في هذا المنحنى نصف قطر الانحناء وحيث ان نصف قطر الانحناء هذا يتجه على هذا الخط العمودي على ما في بند (١٥٥) ينتج من ذلك ان هذه الخطوط تنطبق على بعضها

* ١٩٢ * وبواسطة هذه الخاصية يثبت ان مفروض الحزوني

اللوغاريتمي هو حلزوني لوغاريتمي ايضاً ولاجل ذلك نعتبر نقطة د

(شكل ٨٤) من الخط العمودي التي هي من نقط نصف قطر الانحناء ايضاً

اذ هي نهايته الحقيقية وتوجد لا محالة على المفروض ثم نرمز لابعاها القطبية

برموز ϵ^1 و ϵ^2 فيسهل تعيين هذه الابعاد بدلالة ابعاد ϵ^3 و ϵ^4

النقطة م من المنحنى لانه اذا فرضنا ان ϵ^1 يكون قوساً من الدائرة

المرسومة بنصف قطر مساو للواحد كانت آفاق نقطتي م و د تختلف
عن بعضها بهذا القوس وبسبب قيام زاوية م ا د يكون ذلك القوس مساويا
الى ربع المحيط ولعدم الخلاف في المستعملات نبين برمز $\frac{\pi}{4}$ ربع المحيط المرسوم
بنصف قطر يساوى الواحد فنجد $\epsilon = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ وبأخذ تفاضل
هذه المعادلة يوجد

$$\epsilon = \frac{\pi}{2}$$

وغير ذلك حيث ان بعد ϵ' القطبي لنقطة د من المفرد يساوى

$$\text{تحت العمودى } \frac{\epsilon}{\epsilon'} \text{ للجزونى اللوغارىتمى تغير } \frac{\epsilon}{\epsilon'} \text{ بكمية } \epsilon'$$

في معادلة هذا المنحنى فنجد $\epsilon = \epsilon'$ وعلى ذلك يدون
 $\epsilon = \epsilon' = \frac{\pi}{2}$ فبوضع مقادير ϵ و ϵ' هذه في معادلة (١١٦)
للجزونى اللوغارىتمى نجد

$$\epsilon = \frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

وهذه المعادلة متحدة الشكل مع المعادلة السابقة فبها يفهم ان مفرد
الجزونى اللوغارىتمى هو جزونى آخر لوغارىتمى وهذا ما أردنا بيانه

* (في الجزونى الزائدى والجزونيات الكامنة في معادلة $\epsilon = \epsilon'$) *
* ١٩٣ * الخاصية التى يتميز بها الجزونى الزائدى هى ثبوت أو عدم
تغير تحت المماس فيه فاذا رمزنا لثحت المماس هذا برمز ϵ وساوينا
بمقدار تحت المماس لمنحنى قطبي وهو المتبين فى بند (١٨٣) كانت معادلة
هذا المنحنى يعنى الجزونى الزائدى هكذا

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1$$

واخذت

(١٥٣)

وأخذت ثابتة ٦ بإشارة الناقص لانه يوجد عند ذلك

$$\frac{6}{7} = \frac{6}{7} -$$

التي هي معادلة يحدث منها من بعد أخذ تكاملها على ماسياتي

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

وتقول هـ هذه المعادلة بتغيير كمية ث غير المتعينة بكمية اخرى $\frac{1}{7}$ غير متعينة الى

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

واذا أخذت النقطة الاصلية او الابتدائية للآفاق ٥ بحيث يكون آفق ٥ + ث مساويا الى آفق جديد ٥ الت المعادلة السابقة الى

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} \text{ أو وهو الاول.}$$

$$6 = \frac{1}{7} \dots\dots\dots (١١٧)$$

وتبين هذه المعادلة انه يوجد ∞ متى يكون ٥ = ٥ وينتج من ذلك ان نصف قطر الاحتراق الموافق الى النقطة التي يكون فيها ٥ = ٥ هو خط مقربى للمنحنى

* ١٩٤ * معادلة (١١٧) تبين ايضا ان نصف قطر الاحتراق يتناسب للآفاق عكسا واذا جعلنا ٥ = ٢ ط و ٥ = ٤ ط و ٥ = ٦ ط والخ نجد بخصوص ٥ هذه المقادير المتوالية $\frac{7}{6}$ و $\frac{7}{4}$ و $\frac{7}{2}$ ط والخ ويعلم من ذلك ان نصف القطر الاحتراقي يؤول الى نصف ما كان في آخر الدورة الاولى عند تمام دورتين ويؤول الى ثلث ما كان عند تمام ثلاث دورات وهلم جرا نظرا لعدة الدورات التي يدورها حول النقطة القطبية

* ١٩٥ * معادلة الحلزوني الزائدى هي ومعادلة حلزوني ارشميدس ليست الاحالات خصوصية من معادلة ٥ = ٥ لانه

يجعل $\varnothing = ١$ و $\varnothing = \frac{1}{\varnothing}$ تحدث المعادلة الثانية ويجعل $\varnothing = ١$ تحدث الاولى ومن الخزوينات التي تبين بهذه المعادلة الخزويني المكافي وهو الموافق الى فرض $\varnothing = ٢$

(في اللوغاريتمى)

* ١٩٦ * اللوغاريتمى منحني بإحداثيات مستقيمة وفيه الافتراض لوغاريتمى لأساسيه واذن تكون معادلة هذا المنحنى بهذه الصورة

$$ص = لوغا ص$$

$$ص = \frac{1}{ص}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{1}{ص} لوغا ص$$

* ١٩٧ * للبحث عن بعض خواص هذا المنحنى نجعل $ص = ١$ فنجد $ص = ١$ واذا أعطينا بعد ذلك مقاديراً متزايدة وموجبة الى متغير $ص$ أخذ متغير $ص$ في الازدياد واذا أخذ متغير $ص$ مقداراً سالباً $ص = ع$ يوجد $ص = ع = \frac{1}{ع}$ ويرى ان الرأسى يتناقص كلما بعد عن النقطة الاصلية في جهة الآفاق السالبة وان المنحنى لا يقابل محور الآفاق الاعلى بعد غير محدود في الحالة التي نصير فيها معادلة $ص = \frac{1}{ع}$ آيلة الى

$$ص = \frac{1}{\infty} = ٠$$

خط مقربى للمنحنى

* ١٩٨ * اذا أخذنا من ابتداء النقطة الاصلية الآفاق المتساوية (شكل ٣٨) $ع = ع$ و $ع = ع$ يوجد

$$ع = ع = ع$$

$$ع \times ع = ع$$

* ١٩٩ * الخاصية الشهيرة لهذا المنحنى هي ثبوت اعنى عدم

تغير تحت المماس فيه لانه يوجد بأخذ تفاضل معادلة اللوغاريتمى

$$\frac{ص}{واص} = \frac{س}{لوا} و يستخرج من ذلك$$

$$\frac{س}{واص} = \frac{١}{لوا} أو$$

$$\frac{ص}{واص} = \frac{١}{لوا}$$

وحيث ان الطرف الاول لهذه المعادلة يبين تحت المماس للمنحنى كفى بند (٦٩)

فهو ثابت لمساواته كمية $\frac{١}{لوا}$ الثابتة وهو المراد ببيان

* (فى السكويد) *

* ٢٠٠ * السكويد منحنى يرسم بنقطة م (شكل ٣٩)

الكائنة على محيط الدائرة المتدرجة على مستقيم س ر ومن المحقق ان

جميع نقط قوس س ر تنطبق على التعاقب على مستقيم س ا فتطبق

نقطة م فى قوتها على ا فى هذا التحرك الاخذ من س نحو ر ويكون

قوس س ر مساويا لمستقيم س ا

وحيث كانت جميع النقط التى تمر عليها م فى هذا التدرج توجد على

السكويد فرضا فنقطة ا تكون كذلك على هذا المنحنى فمأخذها مبدأ

للافاق او نقطة أصلية وننزل عمود م ه على قطر س ر ونجعل

ا ح = س ر و م = ص ر = س ر و قوس م ر = ز و م ه = ع فيجد

$$ا ح = ا ر - ح ر أو$$

$$س ر = قوس م ر - م ه أو$$

$$س ر = ز - ع \dots\dots\dots (١١٨)$$

ونبحث اقلا عن حذف قوس ز بالكيفية الاتية وهى أن نأخذ تفاضل

بالمعادلة السابقة فيوجد

$$\text{واسه} = \text{وار} - \text{واع} \dots\dots\dots (١١٩)$$

ولايجاد مقدار وار بدلالة ع نراى انه يوجد جد بين ع و و
هذا التعادل

$$\text{ع} = \text{جاز}$$

وبأخذ تفاضل هذه المعادلة على ما فى بند (٤٢) يوجد

$$\text{واع} = \text{واز} \frac{\text{جتاز}}{\text{ع}} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$\text{وار} = \frac{\text{واع}}{\text{جتاز}}$$

ويلزم تغيير مقدار جتاز فى هذه المعادلة بالمقدار الذى يحدث من معادلة

$$\text{جار} + \text{جتاز} = \text{ع} \text{ أو وهو الاولى}$$

$$\text{ع} + \text{جتاز} = \text{ع}$$

ويحدث بذلك

$$\text{وار} = \frac{\text{واع}}{\text{ع} - \text{ع}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (١١٩) يكون

$$\text{واسه} = \frac{\text{واع}}{\text{ع} - \text{ع}} - \text{واع} \dots\dots\dots (١٢٠)$$

ولم يبق الا بيان ع بدلالة صه ولاجل ذلك نفرض ان و يكون
مركز الدائرة الراسمة - م - (شكل ٣٩) فنجد

$$\text{وه} = \text{م} - \text{م}$$

$$\text{ع} - \text{صه} = \frac{\text{واع}}{\text{ع} - \text{ع}} \dots\dots\dots (١٢١)$$

وبترتيب هذه المعادلة واختصارها يسـتخرج منها

$$\text{ع} = \frac{\text{ع} - \text{صه}}{\text{ع} - \text{ع}} \dots\dots\dots (١٢٢)$$

وبأخذ

وباختار التفاضل يكون

ثم تقول معادلة (١٢٠) بواسطة معادلتى (١٢١) و (١٢٣) الى

و باختصار هذ یو جد

* ٢٠١ * ويمكن ايضا بيان معادلة السكاويد بدلالة القوسى
بالكيفية الآتية وهى ان تستخرج من معادلة $E = JAR$

ثم نضع في هذه المعادلة عوضا عن ع مقدارها المستخرج من معادلة (١٢٢) فتجد

وحين يوضع هذا المقدار ومقدار ع في معادلة (١١٨) يكون

القطر فيه واحد فانه يكون

وإذا أريد إدخال هذا الجيب يجب وضع

* ٢٠٢ * وللبحث عن بعض خواص هذا المنحنى ثبت أولان صه
لاتهكون سالبة ولا اكبر من ٥٢ لانه اذا جعل صه = - صه

تؤول كمية قوس (جا = γ ٢٢ صه - صر) الى قوس (جا = γ ٢٢ صه - صر) وهي كمية تخيلية وثانيا اذا جعل صه = ٢٢ + ل آلت كمية قوس (جا = γ ٢٢ صه - صر) الى قوس (جا = γ ٢٢ ل - ل) وهو مقدار تخيلي ايضا فاذن يكون المنحنى محصورا بين متوازيي د و ا - بمدا - (شكل ٤٠) موازيا الى د على بعد هف = ٢٢ عن محور الاتاف

واكبر مقدار يكون لمتغير صه هو ٢٢ لانه اذا دخرجت الدائرة الراسمة من ا نحو د (شكل ٤١) أخذت نقطة م التي كانت اقلا في ا في الارتفاع على الولا الى ان تصير في - التي هي طرف قطر د فيكون عند ذلك اتق ا د مساويا الى ده - يعني نصف محيط الدائرة الراسمة وهذا الناتج يطابق ما يحدث من معادلة (١٢٤) حيث انه يجعل صه = ٢٢ فيها يوجد سه = قوس (جا = ٠) والقوس الذي جيبه صفر هو واحد ده - هذه القسي ٠ ده - و ٢ ده - و ٣ ده - والخ ويرى ان القوس في هذه الحالة هو ده -

ويعلم من ذلك انه حين تأتى نقطة م في - تكون قدر سمت قوس ا ب من السكويد فاذا استقرت هذه النقطة في تحركها سمت قوسا آخر د - مشابها للاول وبالجملة متى استقرت الدائرة الراسمة في تدحرجها على محور الاتاف حدثت نقطة م قسما من السكويد لا حصر لعدددها وهي د - د و د - د و د - د الخ انظر (شكل ٤٢) ويمكن أن تتحرك الدائرة الراسمة في جهة ا نحو ا وتحدث نقطة م حينئذ اقواسا غير محصورة العدد ا - د و ا - د الخ وجهة الاقواس الموجودة في الجهة المرادة هي المركبة للسكويد

* ٢٠٣ * الخط العمودى في النقطة التي ابعادها سه و صه (شكل ٤٣) متعين على ما في بند (٧٠) بهذا القانون

العمودى

* (١٥٩) *

$$\text{العمودى} = \text{صه} \sqrt{1 + \frac{\text{واصة}^2}{\text{واسه}^2}}$$

فاذا وضعنا فى هذا القانون مقدار $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$ المستخرج من معادلة السكلويد

نجيد

$$\overline{\text{العمودى}} = \text{صه} \sqrt{1 + \frac{\text{صه}^2 - \text{واسه}^2}{\text{واسه}^2}} \quad \text{ولاجل رسم هذا المقدار نوصل وتر م د (شكل ٤٣) فنجد}$$

ده : م د :: م د : د س أو

صه : م د :: م د : د س ومنها يحدث

$$\text{وتر م د} = \overline{\text{د س}}$$

وحيث ان زاوية ر م د قائمة من خاصية الدائرة فوتر م ر يكون عمودا على الخط العمودى م د فى طرفه ويعلم من ذلك ان وتر م ر الممدود يمس السكلويد فى نقطة م لان الخط المماس والخط العمودى يشكلا ن بينهما زاوية قائمة ابدا

واذن يكون امتداد الخط المماس للسكلويد فى نقطة م برسم نصف الدائرة الراسمة م ر د ومدور م ر ولعدم تشكيل هذه الدائرة الراسمة فى كل نقطة من المنحنى يكفى رسم نصف الدائرة الراسمة على اكبر الراسيات وهو ر د (شكل ٤٤) ومدخط م ه من النقطة المفروضة م عمودا على ر د ووصل وتر ر د نقط م ط المرسوم من نقطة م موازيا لهذا الوتر يكون هو المماس المطلوب وذلك لم يكن النتيجة من السابق

* ٢٠٤ * لمعرفة مقدار نصف قطر الانحناء للسكلويد يلزم أن تستخرج

$$\text{مقادير } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \text{ و } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \text{ من معادلة هذا المنحنى ثم توضع تلك المقادير}$$

فى كية نصف قطر الانحناء التى هى

(١٦٠)

$$\text{نق} = - \frac{\left(\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}} \text{ على مافي بند (١٥٠)}$$

الماخوذة بإشارة سالبة لاننا نعلم ان هذا المنحنى يتغير نحو محور ال' فاق
هذا ويحدث اقلام من معادلة السكوايد

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\sqrt{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^2}}{\text{واسه}} \dots \dots \dots (١٢٥)$$

$$\text{ولايجاد } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \text{ نجعل } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \text{ع} \text{ فنجد ايضا}$$

$$\frac{\sqrt{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^2}}{\text{واسه}} = \frac{\sqrt{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^2}}{1 - \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}} = \text{ع}$$

وبأخذ التفاضل على مافي بند (٢٣) يوجد

$$\frac{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}}{\frac{\sqrt{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^2}}{\text{واسه}}} = - \frac{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}}{1 - \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}} = \text{ع}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ع}}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}} = - \frac{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}}{\frac{\sqrt{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^2}}{\text{واسه}}}$$

ثم نضرب هذه المعادلة في معادلة (١٢٥) فنجد على مافي بند (٢٤)

$$\frac{\text{ع}}{\text{واسه}} = - \frac{\text{ع}}{\text{واسه}} \text{ أو } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = - \frac{\text{ع}}{\text{واسه}}$$

وبواسطة هذه المقادير توول كمية نصف قطر الانحناء الى

$$\text{نق} = \frac{\frac{\frac{3}{2} \left(\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \right)}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}}}{\frac{\frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}}}{\frac{1}{\text{واسه}}}} = \frac{\frac{3}{2} (\text{واسه})}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}}$$

ويجعل

(١٦١)

ويجعل صه في البسط يكون

$$\overline{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} = \text{نق}$$

ويعلم من ذلك ان نصف قطر الانحناء مم (شكل ٤٥) للسكويدهو
ضعف الخط العمودي مـ

* ٢٠٥ * وتستخرج معادلة المفرد بوضع مقادير

$$\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} \text{ و } \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} \text{ في قوانين بند (١٤٩) التي هي}$$

$$\frac{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}}{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} + 1 = \text{صه} - \text{و} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

$$\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} = \frac{\left(\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} + 1 \right) \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}}{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} = \text{صه} - \text{و} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

فيوجد

$$\text{صه} - \text{و} = \frac{\frac{23}{2}}{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} = \frac{23}{2} \text{ صه}$$

$$\text{سه} - \text{ر} = \sqrt{2} \sqrt{2} \text{ صه} - \text{صه}$$

واذن يكون

$$\text{و} = \text{صه} - \text{و} = \text{سه} + \sqrt{2} \sqrt{2} \text{ صه} - \text{صه}$$

او (شكل ٤٦)

$$\text{كم} = \text{م} \text{ و } \text{ر} = \text{ا} + \text{م} + \text{م}$$

فا

* (١٦٢) *

وبمراعاة كون $اح + مه = ار = قوس مر$ يمكن وضع
المعادلة الأخيرة هكذا

$$ر = قوس مر + مه \dots\dots\dots (١٢٦)$$

وإذا مددنا $سر$ وأخذنا $رل = سر = ر٢$ ورسمنا نصف
محيط $رمل$ على $رل$ مَرَّ هذا النصف محيط بنقطة $م$ بسبب تساوي
وترى $مَـر$ و $مَـس$ ويوجد اذذاك

قوس $مَـر = قوس مَـس$ و $مه = مَـه$
فنضع هذه المقادير في معادلة (١٢٦) فيوجد

$$ر = قوس مَـس + مَـه \text{ واذن يكون}$$

$$ر = قوس مَـس + مَـه - و٢ - و١ \dots\dots\dots (١٢٧)$$

وهذه هي المعادلة التي توجد بين ابعاد $اك = ر$ و $كم = و$
لنقطة $ما مَـ$ من المفرد فنقول الآن الرأسى $د = ر٢$ (شكل ٤٦)
بكمية $دا$ مساوية ايضا الى $د٢$ ونرسم من نقطة $ا$ خط $ا١$
موازيا لخط $اد$ ونحوّل النقطة الاصلية $ا$ في $ا١$ وليكن لاجل ذلك
 $ا١ كَ = ر$ و $كَ مَ = د$ فنجد لاجل الافق $ا١ كَ = اد - اك$ أو

$$رَ = \frac{1}{r} \text{ المحيط الراسم } - اك \text{ أو}$$

$$رَ = طد - ر$$

وبالنظر الى الرأسى $دَ$ يوجد

$$مَ كَ = ا١ د - كم \text{ أو}$$

$$دَ = د٢ - و$$

ويمستخرج من هذه المعادلات

$$ر = طد - رَ \text{ و } رَ = و - دَ$$

وبواسطة هذه المقادير نقول معادلة (١٢٧) الى

طد

* (١٦٣) *

$$\begin{aligned} \text{ط} - \text{ر} &= \text{قوس م} \text{ر} + \sqrt{\text{و} - \text{و}^2} \text{ أو} \\ \text{ط} - \text{ر} &= \text{قوس م} \text{ل} - \text{قوس م} \text{ل} + \sqrt{\text{و} - \text{و}^2} \\ &= \text{ط} - \text{قوس م} \text{ل} + \sqrt{\text{و} - \text{و}^2} \end{aligned}$$

وعلى ذلك يكون

$$\text{ر} = \text{قوس م} \text{ل} - \sqrt{\text{و} - \text{و}^2}$$

وهذه المعادلة هي معادلة سكلويد فيعلم من ذلك ان مفرد السكلويد سكلويد اخر

* ٢٠٦ * ويمكن الاثبات بالوجه الآتى على ان المفرد (شكل ٤٦) سكلويد ولذلك نقول عندنا

$$\begin{aligned} \text{قوس ل} \text{م} + \text{قوس م} \text{ر} &= \text{ط} \text{ فيكون} \\ \text{قوس ل} \text{م} &= \text{ط} - \text{قوس م} \text{ر} \end{aligned}$$

وغير ذلك

قوس م} \text{ر} = \text{قوس م} \text{ر} = \text{ار} كما في بند (١٩٩)
فاذا وضعنا هذا المقدار في المعادلة السابقة حدث

$$\begin{aligned} \text{قوس ل} \text{م} &= \text{ط} - \text{ار} = \text{ا} - \text{ار} \text{ أو} \\ \text{قوس ل} \text{م} &= \text{ل} \text{ا} \end{aligned}$$

وهذه هي خاصية السكلويد

* (في تغيير المتغير غير المعلق) *

* ٢٠٧ * متى يفرض قانون مشتملا على مكررات تفاضلية فلا يمكن حذف تلك المكررات الا بمساعدة معادلة المنحنى الذى يراد تطبيق هذا القانون عليه ومثاله ان يطلب ما يتوول اليه قانون

$$\frac{\left(1 + \frac{\text{واصة}^2}{\text{واصة}^2}\right)}{\frac{\text{واصة}^2}{\text{واصة}^2}}$$

مق يكون المنحني قطعاً مكافئاً فإنه يلزم أن يسـ تخريج من معادلة القطع المكافئ

التي هي $صه = ع سه$ مقادير $\frac{واصه}{واسه}$ و $\frac{واصه}{واسه}$ ثم توضع هذه المقادير

في ذلك القانون لتحذف المكررات التفاضلية حينئذ وإذا نظرت كميات

$\frac{واصه}{واسه}$ و $\frac{واصه}{واسه}$ كجهولة يلزم غالباً معادلتان لحذفها من أيـ

قانون كان وتدرج هاتان المعادلتان بأخذ تفاضل معادلة المنحني مرتين على التوالي

• ٢٠٨ • مق تزال $واسه$ بواسطة العمليات الجبرية من أن تكون موجودة تحت $واصه$ كما في القانون الآتي

$$\frac{صه(واسه + واسه)}{واسه + واسه - صه واسه} \dots\dots\dots (١٢٨)$$

فالوضع يفعل بنظر كميات $واسه$ و $واصه$ و $واصه$ كجهولة وحيث أنه يلزم لحذفها على العموم معادلات عدتها كعدتها فلا يترأى أولاً أن الحذف ممكن حيث كان تفاضل معادلة المنحني لا يحدث إلا معادلتين بين $واسه$ و $واصه$ و $واصه$ لكن يلزم التأمل أنه حين تحذف $واصه$ و $واصه$ بواسطة هاتين المعادلتين يوجد في القانون مضروب مشترك $واسه$ ينحذف ويسقط فإذا كان المنحني قطعاً مكافئاً معادلته $صه = ع سه$ مثلاً فإنهم بأخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين بالتوالي يوجد

$$واصه = ع سه واسه \text{ و } واسه = ع سه واسه$$

وبوضع هذه المقادير في قانون (١٢٨) يوجد بعد اسقاط المضروب المشترك $واسه$

$$\frac{صه(ع سه + ١)}{ع سه - ع سه}$$

* ٢٠٩ * ويمكن بسهولة ادراك السبب في صيران $\frac{1}{\text{واصة}}$ مضروباً

مشتركالانه متى يحذف مقام $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ في القانون الذى كان محتوياً قولاً

على $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ و $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ تكسب جميع الحدود ماعدا المحتوية

على $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ و $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ مضروباً مشتركاً $\frac{1}{\text{واصة}}$ وحينئذ

لا تحتوى الحدود التى كانت متبوعة بكمية $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ على $\frac{1}{\text{واصة}}$ بخلاف

الحدود التى كانت متبوعة بكمية $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ فانها تحتوى على $\frac{1}{\text{واصة}}$ برتبة

اولى لان حاصل ضرب $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ فى $\frac{1}{\text{واصة}}$ يؤول الى $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$

ومتى يؤخذ تفاضل معادلة المنحنى بعد ذلك وتحدث نواتج بهذه الصورة

$\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}} = \text{م} \frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ و $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}} = \text{ن} \frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ وتوضع هذه المقادير

فى الحدود المحتوية على $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ و $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$ تتغير تلك الحدود كالحدود

الباقية بحواصل ضرب للكمية $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$

* ٢١٠ * وما ذكرناه بخصوص القانون الذى يحتوى على التفاضلات

برتبة اولى وثانية يمكن تطبيقه على القوانين التى توجد فيها هذه التفاضلات

برتبة اعل من ذلك وينبئ عليه انه بأخذ تفاضل معادلة المنحنى مراراً على

قدر اللازم يمكن دائماً حذف التفاضلات المحتوى عليها القانون المفروض

* ٢١١ * ولا يكون كذلك اذا احتوى القانون المفروض حدوداً

فيها $\frac{1}{\text{واصة}}$ و $\frac{1}{\text{واصة}}$ و الخ زيادة على التفاضلات التى اعتبرناها

لانه اذا قرنا مثلا انه يكون داخل في هذا القانون التفاضلات
 $و^ص و^ص و^ص و^ص و^ص$ واخذنا تفاضل المعادلة
 المتبينة برمز $ص = د$ مرتين على التوالي حدث منها هاتان المعادلتان
 $و(و^ص و^ص و^ص و^ص و^ص) = و(و^ص و^ص و^ص و^ص و^ص)$
 ولا يمكن هاتين المعادلتين الا حذف اثنين من التفاضلات $و^ص و^ص و^ص$
 و $و^ص$ الثلاث ويشاهد عدم امكان حذف جميع التفاضلات الداخلة
 في القانون المفروض ويوجد اذن في هذه الحالة شرط مقدر متبين
 بالتفاضل $و^ص$ وهذا الشرط هو أن متغير $ص$ معتبر بنفسه كدالة
 لمتغير ثالث لا يظهر في القانون ويسمى بالمتغير غير المعلق وبصير ذلك في غاية
 الوضوح اذ لو حظ كون معادلة $ص = د$ يمكن اشتقاقها
 من جملة معادلاتي

$$ص = د \quad و = د$$

اللازم حذف $د$ من بينهما ولذا تقول معادلة $ص = د$
 الى جملة معادلاتي

$$ص = د + ه \quad و = د$$

ويدرك ان $ص$ و $و$ يجب أن يتغيرا على مقتضى الزيادة التي يمن
 ان تأخذها كمية $د$ ولكن هذه الفرضية يعني كون $ص$ و $و$
 يتغيران من بعد الزيادة المفروضة للمتغير $د$ تقتضى وقوع معادلات بين
 $ص$ و $د$ وبين $و$ و $د$ واحدى هذه المعادلات تكون بالاختيار
 لانه اذا فرض ان المعادلة التي نرمز لها على العموم برمز $ص = د$

$$تكون $ص = د + \frac{(ص-ه)}{د}$ مثلا ونظمت بين $د$ و $ص$$$

$$معادلة $ص = د + \frac{ص}{د}$ الحيث ما اتفقت ووضع هذا$$

$$المقدار في معادلة $ص = د + \frac{(ص-ه)}{د}$ غيرها الى معادلة$$

* (۱۶۷) *

ص = $\frac{۲(۳هـ - ۳هـ)}{۳هـ - ۳هـ}$ التي اذا وقت مع س = $\frac{۲}{۳هـ}$
 احدثت بواسطة الحذف ص = $\frac{۲(س - ۳هـ)}{۳هـ}$ وهو الشرط الواجب
 مراعاته في انتخاب متغير ے

* ۲۱۲ * واذن یمکن تعیین متغیر ے غیر المعلق
 بالاختیار فیؤخذ له وتر أو قوس أو أفق أو رأسی مثلاً فاذا بین ے
 قوساً من المنحنی يجب أن یوجد و = $\sqrt{۳ + ۳هـ}$ + و ص
 واذا كانت ے تبین وتراً وكانت النقطة الاصلیة رأس المنحنی
 یکون ے = $\sqrt{۳ + ۳هـ}$ واخیراً یمکن ان تكون ے الافق
 اوالرأسی ویوجد عند ذلک ے = س او ے = ص

* ۲۱۳ * قد یکون انتخاب أحد هذه الفروضات او غیرها ضرورياً
 لاجل أن یکون القانون المشتکل علی التفاضلات عاریاً عن اى عن هذه
 التفاضلات والغالب انه اذا لم یفعل هذا الانتخاب یفرض تقدیراً ان المتغیر
 غیر المعلق کان متعیناً ومثاله ان الفرضیة فی الحالة المعتادة التي لا یحتوی
 القانون فیها الا علی تفاضلات و = و ص و و = و ص و الخ
 هی ان متغیر ے غیر المعلق کان مأخوذاً لاجل الافق لانه ینتج من ذلک حینئذ

$$ے = س \text{ و } و = \frac{و}{و} = ۱ \text{ و } و = \frac{و}{و} = \frac{و}{و} = ۰ \text{ الخ}$$

ویری ان القانون لا یشتمل علی التفاضلات الثانیة والثالثة و الخ
 لکمیة س

* ۲۱۴ * ولتدبیر القانون فی عمومہ یلزم من بعد ما سبق ان تكون
 س و ص دوالاً لمتغیر ثالث غیر معلق ے ویوجد علی موجب بند (۲۴)

$$\frac{و}{و} = \frac{و}{و} = \frac{و}{و}$$

ويستخرج من هذه المعادلة

$$(١٢٩) \dots\dots\dots \frac{\frac{واص}{وا}}{\frac{واس}{وا}} = \frac{واس}{واس}$$

ثم نأخذ التفاضل الثاني الى $ص$ ونفعل بالطرف الثاني كما فعل بالكسور في بند (١٩) فيوجد

$$\frac{\frac{واس}{وا} - \frac{واص}{وا}}{\frac{واس}{وا}} = \frac{واص}{واس}$$

ولمن $وا$ في هذه الكمية استعمالان احدهما بيان ما يكون المتغير غير المعلق $ص$ والاخر دخوله في الكمية المذكورة كعلامة جبر (والمراد بعلامة الجبر هنا كمية جبرية) ويمكن أن لا نعتبر $وا$ الا بالمعنى الثاني مادامت $ص$ هي المتغير غير المعلق هذا والكمية السابقة تختصر باسقاط المضروب المشترك $وا$ بكتابة هكذا

$$\frac{واسواس - واصلوا}{واس} = \frac{واص}{واس}$$

واذا قسمنا على $واس$ صارت

$$\frac{واسواس - واصلوا}{واس} = \frac{واص}{واس}$$

* ٢١٥ * وبالعمل هكذا على معادلة (١٢٩) يرى انه باخذ $ص$ متغيرا غير معلق يصير الطرف الثاني للمعادلة مطابقا للاول (ومعنى مطابق للاول عينه حد ابجذ) ويعلم من ذلك انه متى تؤخذ $ص$ للمتغير غير المعلق لا يكون

* (١٦٩) *

لا يكون الا تغير واحد ينبغي فعله في القانون المشتغل على المـكـررات

التفاضلية $\frac{ص^٢}{س^٢}$ و $\frac{ص^٢}{س^٢}$ وذلك عبارة عن تبديل المكرر التفاضلي الثاني بهذا

$$\frac{ص^٢ س^٢ - ص^٢ س^٢}{س^٢}$$

والتطبيق هذه الاعتبار على نصف قطر الانحناء الذي هو على ما في بند (١٨٦)

$$\frac{\frac{٣}{٢} \left(\frac{ص^٢}{س^٢} + ١ \right)}{\frac{ص^٢}{س^٢}} = \text{نق}$$

نقول انه لمعرفة مقدار نق في الحالة التي تكون فيها $\frac{ص}{س}$ مبينة للمتغير غير المعلق ينبغي تغيير هذه المعادلة بهذه

$$\frac{\frac{٣}{٢} \left(\frac{ص^٢}{س^٢} + ١ \right)}{\frac{ص^٢ س^٢ - ص^٢ س^٢}{س^٢}} = \text{نق}$$

وبمراعاة كون البسط يؤول الى $\frac{٣}{٢} \left(\frac{ص^٢}{س^٢} + ١ \right)$ يوجد

$$\frac{\frac{٣}{٢} (ص^٢ + س^٢)}{ص^٢ س^٢ - ص^٢ س^٢} = \text{نق} \dots\dots\dots (١٣٠)$$

* ٢١٦ * واذا يلزم مقدار نق هذا كون $\frac{ص}{س}$ و $\frac{ص}{س}$ تكون دوالا لمتغير ثالث غير معلق فاذا كان $\frac{ص}{س}$ هو هذا المتغير يعني اذا وجد $\frac{ص}{س} =$ $\frac{ص}{س}$ كان $\frac{ص}{س} = ٠$ ويعود هذا القانون

$$\frac{\frac{3}{2} \left(\frac{v^2}{v^2} + 1 \right)}{\frac{v^2}{v^2}} = \frac{3}{2} \frac{(v^2 + v^2)}{v^2} = \text{نق}$$

* ٢١٧ * ولكن اذا كان يراد أن يكون الرأسى صه يبين المتغير غير المعلق عوضا عن أخذ سه لذلك المتغير ننظر أن هذا الشرط يكون متبينا بمعادلة صه = ٤ وباخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

$$0 = \frac{v^2}{v^2} = 1 = \frac{v^2}{v^2}$$

وتبين المعادلة الاولى من هاتين المعادلتين ان صه هو المتغير غير المعلق وهذا لا يغير القانون ولكن الثانية تبين ان (v^2) يجب أن يكون صفرا وتؤول معادلة (١٣٠) حينئذ الى

$$\frac{3}{2} \frac{(v^2 + v^2)}{v^2} = \text{نق}$$

* ٢١٨ * وليتنبه انه متى تكون سه مبينة للمتغير غير المعلق ووجد بناء على ذلك (v^2) = ٠ استدل بهذه المعادلة على ان (v^2) ثابتة وينتج من ذلك عموما أن تفاضل المتغير المنظور ومتغير غير معلق كـ ميثب ثابتة

* ٢١٩ * واخيرا اذا أخذ القوس للدلالة على المتغير غير المعلق يوجد

$$v^2 = v^2 + v^2$$

وتتبع الطرفين وقسمهم ما بعد ذلك على (v^2) يوجد

$$1 = \frac{v^2}{v^2} + \frac{v^2}{v^2}$$

واذا

* (١٠٧١) *

وإذا أخذنا تفاضل هذه المعادلة واعتبرنا $\frac{1}{\omega}$ ثابتة على ما في بند (٤١٨) حيث كانت $\frac{1}{\omega}$ هي المتغير غير المعلق وأجرينا العمل كافي قاعدة الاسس وجدنا

$$1 = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} + \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}}$$

ومنه يستخرج

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

وإذا وضعنا حينئذ مقدار $\frac{1}{\omega^2}$ أو مقدار $\frac{1}{\omega^2}$ المستخرج من هذه المعادلة في معادلة (١٣٠) يوجد في الحالة الاولى

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}}$$

وفي الحالة الثانية

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}}$$

* ٢٢٠ * لم نعتبر فيما سبق الا المـ $\frac{1}{\omega^2}$ من التفاضلين

$\frac{1}{\omega^2}$ و $\frac{1}{\omega^2}$ ولكن اذا كان القانون يحتوى على مكررات تفاضلية

نرتب عليها نعين مقادير $\frac{1}{\omega^2}$ و $\frac{1}{\omega^2}$ الخ

التي تنسب للحالة التي يكون فيها $\frac{1}{\omega^2}$ و $\frac{1}{\omega^2}$ دوال لمتغير ثالث غير معلق بكيفيات مشابهة للتي استعملت

(في طريقة الصغيرات جدًّا)

* (١٧٢) *

* ٢٢١ * تعريف اللانهاى واعتباره يؤول الى تقرير هذه القضية
وهى أن كمية قبلت الزيادة لا تكون غير منتهية او غير محدودة ولذا يجب
اسقاط ∞ من كمية $\infty + \infty$ اذا اعتبرت ∞ غير منتهية والا
لقبلت كمية ∞ الزيادة ايضا وهذا يخالف تقريرنا

* ٢٢٢ * وحيث كانت هذه القضية هى الاساس لزم أن نثبتها
بأبواب كاف فنقول
لتكن معادلة

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m \quad (١٣١) \quad \dots\dots\dots$$

فنضرب هذه المعادلة فى ∞ يحدث

$$\infty + \infty = m \infty \quad (١٣٢) \quad \dots\dots\dots$$

هذا واذا فرضنا ان ∞ تصير غير منتهية وصل كسر $\frac{1}{x}$ الى غاية درجة
نقصانه فيؤول لا محالة الى صفر وتصبح معادلة (١٣١) حينئذ هكذا

$$m = \frac{1}{x}$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة (١٣٢) حدث

$$\infty + \infty = \infty$$

وذلك يورى ان كمية $\infty + \infty$ تؤول الى ∞ متى تكون ∞
غير منتهية وهذا ما أردنا اثباته

* ٢٢٣ * كمية ∞ التى تكون ∞ بالنسبة اليها غير منتهية هى
المسماة صغيرة جدا بالنسبة الى ∞

* ٢٢٤ * حيث انا لانعتبر هنا الانسب الكميات فالاثبات السابق
يقع ايضا متى يكون لكمية ∞ مقدار منته بشرط ان مقدار ∞ يكون
صغيرا جدا بالنسبة الى كمية ∞ وقضايا ~~ال~~كسور تجعل هذه الدعوة
فى غاية الوضوح لانه اذا قارنا كمية ∞ المتناهية بكسر $\frac{1}{x}$ يتحقق انه كلما

زادت

* (١٧٣) *

زادت ع نقص الكسر واذن يصير هذا الكسر على الاطلاق صفرا
مقي نصير ع غير منتهية ولذا يسقط نظرا الى - التي تكون غير منتهية
بالنظر الى ح

* ٢٢٥ * الكميّتان الصغيرتان جدّا لا تكون نسبتهما صفرا
لانه يوجد

$$\frac{\infty}{\infty} :: \frac{\infty}{\infty} :: -$$

وزيادة على ذلك يعرف ان الكميّتين الصغيرتين جدّا يمكن اعتبارهما كالكميّتين

الكبيرتين جدّا ولذا لا تكون النسبة $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ للكميّتين الصغيرتين جدّا

المرموز لهما برموز $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ و $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ صفرا وهذا الناتج يطابق ما وجدناه
باعتبار النهايات

* ٢٢٦ * متى تكون كمية $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ صغيرة جدّا بالنسبة الى مقدار منته
رمزه $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ فالمرجع $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ يكون صغيرا جدّا بالنسبة الى $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ لانه يستدل بتناسب

$$1 : \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} :: \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} : \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$$

ان $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ تدخل في $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ مرارا عدتها كعدّة دخول $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ في الواحد
يعنى عدد مرار غير منته

ويثبت كذلك بواسطة تناسب $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} : \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} :: \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} : \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ انه متى كان $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$
صغيرا جدّا بالنسبة الى $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ كان ايضا حد $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ صغيرا جدّا بالنسبة الى $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$
ولذلك انقسمت الصغيرات جدّا الى درجات او مراتب مختلفة فكمية $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$
في الامثلة السابقة هي صغير جدّا بدرجة اولى و $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ صغير جدّا
بدرجة ثانية و $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ صغير جدّا بدرجة ثالثة وهكذا

* ٢٢٧ * وايضا قل انه متى كانت $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ صغيرة جدّا
بالنسبة الى $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ فكان كذلك $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ مضروبة في كمية محدودة
- واثبات ذلك أن تقول حيث ان كمية $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$ يمكن اعتبارها

كسرامقامه يكون غير محدود وقمرز لها بهذا الرمز $\frac{هـ}{\infty}$ ومعلوم ان $\frac{هـ}{\infty}$ او $\frac{هـ}{\infty}$ شيأ واحدا وهذه الكميات ليست الا عدما بالنسبة الى $هـ$
 * ٢٢٨ * الصغير جدا بدرجة اولى يسقط متى يكون جانب كمية
 محدودة لانها لا تزداد به وكذا يسقط الصغير جدا بدرجة ثانية الذي يكون
 في جانب صغير جدا بدرجة أولى وهلم جرا
 مثلا اذا كانت هذه الكمية

$$هـ + هـ + هـ + هـ$$

وكان فيها هـ صغيرا جدا بدرجة أولى كان هـ صغيرا جدا
 بدرجة ثانية و هـ صغيرا جدا بدرجة ثالثة ويجب حينئذ اسقاط
 هـ لان هـ لا يمكن أن يتزود هـ وحيث ان هـ
 لا يزيد هـ فيحذف ايضا وبالجملة يحذف هـ كذلك حيث ان
 هذا الصغير جدا الذي هو بدرجة أولى لا يمكن أن تزداد به كمية $هـ$ المحدودة
 واذن يبقى $هـ$ فقط

* ٢٢٩ * الكميتان الصغيرتان جدا هـ و هـ حاصل
 ضربهما يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية لانه يحدث من حاصل ضرب
 هـ $\times$ هـ هذا التناسب
 ١ : هـ :: هـ : هـ

وبه يستدل انه حيث كان هـ صغيرا جدا بالنسبة الى ١ فحاصل
 الضرب هـ هـ يكون صغيرا جدا بالنسبة الى هـ واذن يكون
 صغيرا جدا بدرجة ثانية

* ٢٣٠ * ويثبت ايضا ان حاصل ضرب الثلاث صغيرات جدا بدرجة
 أولى يبين صغيرا جدا بدرجة ثالثة

* ٢٣١ * يكمل الآن شرح نظر التفاضل من بعد طريقة الصغيرات
 جدا ولاجل ذلك نفرض ان متغير هـ ياخذ في دالة تما زيادة صغيرة جدا
 تبين برمز $هـ$ بحيث تتغير هـ بكمية هـ + هـ والفرق بين

الناج

* (١٧٥) *

النتائج المستجدة والاوّل يكون هو تفاضل هذه الدالة

* ٢٣٢ * فلايجاد تفاضل $ح$ سه مثلاً نغير في هذه الدالة سه
بكمية $سه + و$ سه فتصير $ح (سه + و) سه = ح سه + و سه$
واذا طرح منها $ح سه$ كان الباقي وهو $و سه$ هو التفاضل المطلوب
* ٢٣٣ * نبحث ايضا عن تفاضل $ح سه$ ولذلك نغير سه بكمية
 $سه + و سه$ فيوجد $ح (سه + و سه)$ ثم نطرح من هذا النتائج
كمية $ح سه$ ونحل ونختصر فنجد اولا

$$ح سه + و سه + ح سه و سه + و سه$$

وفي هذا يجب اسقاط كمية $ح سه$ حيث انها صغيرة جدا بدرجة ثالثة
ولا يمكن أن تزدادها $ح سه و سه$ وحيث ان $ح سه و سه$ صغيرة
جدا بدرجة ثانية فينبغي اسقاطها كذلك من جانب $ح سه و سه$ التي هي
صغيرة جدا بدرجة أولى ويبقى $ح سه و سه$ لاجل التفاضل المطلوب
* ٢٣٤ * يؤخذ تفاضل اى دالة لمتغير سه من بعد القاعدة السابقة
بأن تسقط الصغريات جدا بدرجة عليا ويؤول هذا الى حفظ الحد الاوّل من
الحل كما فعل في طريقة النهايات

ومثاله لايجاد تفاضل $ك سه$ ينظر أنه عوضا عن العمل بطريق النهايات هكذا

$$ك (سه + ه) - ك سه = \frac{ك سه + ه ك سه - ك سه}{ه} = ح + ح ه + ح ه ه + ح ه ه ه + \dots$$

الذى يحدث منه في حالة التحديد والنهاية $\frac{ك سه}{سه} = ح$

لاجل التفاضل يفعل بطريق الصغريات جدا هكذا

$ك (سه + و سه) = ك سه + و سه + ح سه + ح سه و سه + \dots$
وبطرح الدالة الاولى يبقى

$$ح سه + ح سه و سه + ح سه و سه و سه + \dots$$

* (١٧٦) *

وحيث انه يجب اسقاط الصغيرات جدًا بدرجات عالية فلا يحفظ الاحد
ع و س الذي يكون هو التفاضل المطلوب

* ٢٣٥ * ولايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين صه و ع
يفرضان صه نصير صه + و صه و ع نصير ع + و ع
متى تتغير سه بكمية سه + و سه فحاصل الضرب صه ع يصير
حينئذ محمول الى (صه + و صه) (ع + و ع) وبجمله وطرح صه ع
منه يبقى صه و ع + ع و صه + و صه و ع وحيث ان الحد الاخير
لهذا الناتج صغير جدًا بدرجة ثانياً فيسقط ويوجد لتفاضل صه ع
كمية صه و ع + ع و صه

* ٢٣٦ * ويستخرج من بعد ذلك تفاضل حاصل ضرب جملة
مضارب وبعده تفاضل سه بالـكـيفيات التي اتبعناها حين استعملنا
طريقة النهايات

* ٢٣٧ * تفاضل كمية سه يستخرج ايضا بسهولة متى نحل
كمية سه + و سه وهذا الحل ينال لكل كمية سه + هـ من بعد بند (٣٦)

ثم يبحث عن مقدار سه + و سه سه ولا يحفظ منه الا حده

الاول ونسقط الحدود الباقية حيث انها صغيرات جدًا بدرجات واطية عن
درجة الحد المحفوظ ويستخرج من بعد هذا تفاضل لوغا سه كما بين

* ٢٣٨ * وبالنظر لتفاضل جاسه يوجد

حـا (سه + و سه) - حاسه = حاسه جتا و سه + جا و سه جتا سه - حاسه
وبسبب كون قوس و سه صغيرا جدًا يكون

جتا و سه = أ و جا و سه = و سه

ويوجد بواسطة هذه المقادير

وـا جاسه = و سه جتا سه

* ٢٣٩ * لما كانت ثمرة مسألة المماسات ومزيتها لا تتم
في حساب التفاضل التزمت أن اثبتها بطريقة الصغريات جدًا فأقول ليكن
م ح م و ح م (شكل ٤٧) رأسيان متقاربان جدًا و م و خطا
موازيًا لمحور الآفاق فمماس م ط يمكن اعتباره كامتداد عنصر م م
من المنحنى لانه حيث كان هذا العنصر صغيرا جدًا يمكن نظره مستقيمًا
فلذا رمزنا لبعده ح بحرف س. و لبعده م ح بحرف ص. صارت
زيادة س التي هي ح ح عبارة عن (س) وزيادة ص تكون
م و = (ص) ومثلث م م و الصغير جدًا يحدث منه لمشايبته مثلث م ح ط

$$\begin{array}{l} \text{م و : م ح :: م ح : ح ط} \quad \text{أو} \\ \text{(ص) : (س) :: (ص) : ح ط} \quad \text{ومنه يكون} \end{array}$$

$$\text{ح ط} = \text{ص} \frac{\text{(س)}}{\text{(ص)}}$$

ثم يوجد العمودي والمماس ومعادلات هذه الخطوط كما في بندى
(٧٠) و (٧١)

* ٢٤٠ * ولعرفة تفاضل قوس يعتبر القوس المحصور بين الرأسين
ح م و ح م القريبين من بعضهم ما جدًا كخط مستقيم فن عمه يحدث من
مثلث م م و القائم الزاوية

$$\text{م م} = \text{م و} + \text{م و}$$

وبالرمز برمز قو للقوس الكلى يكون م م ممينابر من (قو) ونؤول
المعادلة السابقة الى

$$\text{(قو)} = \text{(س)} + \text{(ص)}$$

وباخذ الجذر التربيعى للطرفين يوجد

$$\text{(قو)} = \sqrt{\text{(س)}^2 + \text{(ص)}^2}$$

* ٢٤١ تفاضل القوس من منحني ذي احدائيات قطبية يوجد ايضا بغاية السهولة باعتبار الصغيرات جدًا ولذلك نفرض (شكل ٨٢) ان $\text{سر} \text{ و } \text{م}$ يكونان قوسين أحدهما وهو الأول من الدائرة المرسومة بنصف قطريساوي الواحد وثانيهما من الدائرة المرسومة بنصف قطريساوي ع ويكونان محصورين في الزاوية الصغيرة جدًا $\text{م} \text{ ا م}$ المتشكلة من نصفي قطرين احتراقين فثلث $\text{م} \text{ م} \text{ م}$ يمكن نظره كمثلث مستقيم قائم زاوية م ويوجد حينئذ

$$\overline{\text{م} \text{ م}} = \overline{\text{م} \text{ م}} + \overline{\text{م} \text{ م}}$$

وبرعاية كون $\text{م} \text{ م} = \text{ع} \text{ و } \text{م} \text{ م}$ يساوي $\text{ع} \text{ و} \text{ع}$ على

مقتضى تناسب $١ : \text{ع} :: \text{ع} : \text{م} \text{ م}$
يمكن أن نبدل $\text{م} \text{ م} \text{ و } \text{م} \text{ م}$ بمقاديرها ونضع $\text{ع} \text{ و} \text{ع}$ محل $\text{م} \text{ م}$ فنجد

$$\overline{\text{ع} \text{ و} \text{ع}} = \overline{\text{ع} \text{ و} \text{ع}} + \overline{\text{ع} \text{ و} \text{ع}}$$

وبمقارنته بمثلث $\text{م} \text{ م} \text{ م}$ المذكور بمثلث $\text{م} \text{ ا ط}$ يحدث لنا تحت الظل للمنحنى القطبي بواسطة تناسب

$$\text{م} \text{ م} : \text{م} \text{ م} :: \text{ا} \text{ م} : \text{ا ط}$$

واذا افيرنا $\text{ا} \text{ م}$ في هذا التناسب بنقط ا م الذي لا يختلف عنه الا بالصغير جدًا حدث

$$\text{ع} \text{ و} \text{ع} : \text{ع} \text{ و} \text{ع} :: \text{ع} : \text{ا ط} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$\text{ا ط} = \frac{\text{ع} \text{ و} \text{ع}}{\text{ع} \text{ و} \text{ع}}$$

طريقة لاخراج لاثبات اصول حساب التفاضل من غير اعتبار النهايات والصغيرات جدًا او كل كمية يجري حذفها

* ٢٤٢ * لما كانت قضية تيلور كثيرة الفوائد والمنافع خصوصا عند ارادة حل الدوال الى متسلسلات لاح للمعلم لاجرايج كون اصول حساب التفاضل تنحصر في هذه القضية او تحدث منها ومن ثم اثبتنا من غير استعمال حساب التفاضل بالطريقة الآتية وهى هذه

$$\text{لتكن صه} = \text{د}(\text{سه} + \text{هه})$$

فهذه الدالة تؤول بالطبع الى دسه متى يجعل فيها هه = ٠ ويكون لذلك وقعا متى كان الجزء المحتوى على هه فى هذه المعادلة مكررا لكمية هه ولتيسنه برمز حه فن ثم يكون

$$\text{د}(\text{سه} + \text{هه}) = \text{دسه} + \text{حه}$$

و ح يمكن أن تكون دالة لكمية هه فاذا رمزنا برمز حه لما تؤول اليه ح حين يفرض فيها هه = ٠ وكان كه هو الجزء الذى يتعلق او يرتبط بكمية هه نجد ايضا حه = حه + كه وبداومة هذا التبيان توجد هذه المعادلات المتوالية

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{حه}$$

$$\text{ح} = \text{كه} + \text{ح}$$

$$\text{ك} = \text{كه} + \text{كه}$$

$$\text{الخ} \quad \text{الخ} \quad \text{الخ}$$

وبوضع مقدار حه المعلوم بالمعادلة الثانية فى المعادلة الاولى يحدث

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{حه} + \text{كه} + \text{هه}$$

ثم يوجد بوضع مقدار كه المعلوم بالمعادلة الثالثة فى هذا الناتج

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{حه} + \text{كه} + \text{كه} + \text{هه}$$

وبالدأومة هكذا ووضع د(سه + هه) محل صه يوجد عموما

$$d(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1 \quad (133)$$

* ٢٤٣ * وكية د (س + هـ) تبين على العيوم الدالة التي لم تزل غير محمولة الى متسلسلة فاذا غيرت في هذه الدالة سـ بكمية سـ + هـ حدث ناتج كمالو غيرت هـ بكمية هـ + هـ لان هذه الدالة لا يمكن أن تحتوى على متغير سـ من غير أن يكون هذا المتغير متبوعا بكمية هـ بلا واسطة فالحد الذي كحد لـ (س + هـ) ^١ مثلا يصير لـ (س + هـ + هـ) ^٢ متى تتغير سـ بكمية سـ + هـ ولا شان هـ هذا الناتج كـ كـ كـ كـ لـ (س + هـ + هـ) ^٣ التي تنتج من وضع هـ + هـ محل هـ في دالة لـ (س + هـ) ^٤ وما ذكر في شأن هذا الحد يطبق على ما بقى من الحدود ويتضح من ذلك أن الطرف الاول لمعادلة (١٣٣) يحدث نواتج متطابقة في الحالتين وينبئ عليه انه ينتج من حل دـ سـ + هـ ^٥ + كـ هـ ^٦ + هـ ^٧ الخ نواتج متحدة بوضع سـ + هـ محل سـ أو بوضع هـ + هـ محل هـ

* ٢٤٤ * فبوضع هـ + هـ اول محل هـ في حل

درسہ + h_1 + h_2 + h_3 + ... الخ يوجد

$$(134) \quad 1 + (e+h)^1 + (e+h)^2 + (e+h)^3 + (e+h)^4 + \dots$$

وبكتابة الحديثين الاولين فقط من كل من هذه الكميات ذات الحديثين يحدث

[illegible]

ثم لايجاد الناتج من وضع سه + ٤ محل سه في كمية دسه + ٢ هـ
 + ١ كه + ٢ هـ + ١ هـ + ١ هـ الخ نراعي ان الزيادة هـ موجودة لا محالة في هذه
 المتسلسلة ولا تدخل في دسه ولا في المـكررات ع ك هـ د ا ا ا ا ا ا ا الخ
 التي هي كميات لا يمكن أن تحتوى الا على سه ولذلك يمكن اعتبارها دوال
 لهذا المتغير أعني سه وحيث كانت معادلة (١٣٣) تقع لاي دالة متغير سه
 فوضع سه + ٤ في محل سه يغير

دسه بكمية دسه + ع^١ + ك^١ + ح^١ + د^١ + الخ
 و ع^٢ بكمية ع^١ + ع^٢ + ح^٢ + ح^١ + ع^٣ + ع^٢ + الخ
 و ك^١ بكمية ك^١ + ك^٢ + ح^٢ + ح^١ + ك^٣ + ك^٢ + الخ
 و ح^١ بكمية ح^١ + ح^٢ + ح^٢ + ح^١ + ح^٣ + ح^٢ + الخ
 و د^١ بكمية د^١ + د^٢ + د^٢ + د^١ + د^٣ + د^٢ + الخ
 الخ الخ الخ الخ الخ الخ
 واذا وضعنا مقادير دسه و ع^١ و ك^١ و ح^١ و د^١ الخ هذه في

متسلسلة دسه + ع^١ + ح^١ + ك^١ + ح^٢ + الخ يوجد

دسه + ع^١ + ك^١ + ح^١ + الخ + (ع^١ + ع^٢ + ع^٣) + (خ^١ + خ^٢ + خ^٣) +

(ك^١ + ك^٢ + ك^٣) + (ح^١ + ح^٢ + ح^٣) + (د^١ + د^٢ + د^٣) الخ (١٣٦)

* ٢٤٥ * وينبغي أن يكون هذا الحل مطابقا للحل المتبين برمز

(١٣٥) على ما في بند (٢٤٣) فيلزم أن تكون الحدود المتسلسلة على هـ

بقوى متحدة في هذين الحلين متساوية (انظر الملحوظة الثانية) واذن يوجد

بمطابقة الحدود المتبوعة بكميات هـ و هـ^٢ و هـ^٣ الخ

في هذين الحلين

$$ع^١ = ك^١ و ك^٢ = ح^١ و ح^٣ = د^١ و الخ (١٣٧)$$

* ٢٤٦ * قد رأينا في بند (٢٤٤) ان ع^١ هي على العموم دالة

لتنغير سم ومن اجل ذلك نرمز لها برمز دسمه و نرمز برمز دسمه للعد

الذي يضرب في المكرر هـ في حل دسمه (سمه + هـ) و برمز دسمه للعد الذي

يضرب في المكرر هـ في حل دسمه (سمه + هـ) وهلم جرا فنجد هذه المعادلات

(١٨٢)

$$\left. \begin{aligned} \text{د}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{د}^{\text{س}}+\text{ه}^{\text{د}}+\text{س}+\text{ه}+\text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ} \\ \text{د}^{\text{س}}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{د}^{\text{س}}+\text{ه}^{\text{د}}+\text{س}+\text{ه}+\text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ} \\ \text{د}^{\text{س}}(\text{س}+\text{ه}) &= \text{د}^{\text{س}}+\text{ه}^{\text{د}}+\text{س}+\text{ه}+\text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ} \end{aligned} \right\} (١٣٨)$$

* ٢٤٧ * وحيث كان $\text{ع} = \text{د}^{\text{س}}$ بالفرض بند (٢٤٦)

فاذا جعلنا في هذه المعادلة $\text{س} = \text{س} + \text{ه}$ حدث

$$\text{ع} + \text{ع} + \text{ه} + \text{ع}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{ع}} + \text{ه}^{\text{ه}} + \text{س}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{س}} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ} = \text{د}^{\text{س}}(\text{س}+\text{ه}) \dots (١٣٩)$$

وبوضع مقدار $\text{د}^{\text{س}}(\text{س}+\text{ه})$ المعلوم بثانية معادلات (١٣٨) في هذه المعادلة يوجد

$$\text{ع} + \text{ع} + \text{ه} + \text{ع}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{ع}} + \text{ه}^{\text{ه}} + \text{س}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{س}} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ} = \text{د}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{د}} + \text{س} + \text{ه} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ}$$

وحيث ان هذه المعادلة لا تزال حقيقية مهما كانت كمية ه يلزم ان تكون الحدود المطابقة لقوى واحدة لحرف ه متساوية واذن يوجد

$$\text{ع} = \text{د}^{\text{س}}$$

ومقدار ع هذا يغير الاولى من معادلات (١٣٧) الى $\text{د}^{\text{س}} = \text{ك}^{\text{ه}}$ الذي يستخرج منه

$$\frac{1}{\text{ه}} \text{د}^{\text{س}} = \text{ك}$$

واذا غيرنا في هذه المعادلة س بكمية $\text{س} + \text{ه}$ حدث

$$\text{ك} + \text{ك} + \text{ه} + \text{ك}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{ك}} + \text{ه}^{\text{ه}} + \text{س}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{س}} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ} = \frac{1}{\text{ه}} \text{د}^{\text{س}}(\text{س}+\text{ه})$$

ثم نضع محل $\text{د}^{\text{س}}(\text{س}+\text{ه})$ حلها المعلوم بثالثة معادلات (١٣٨) فنجد

$$\text{ك} + \text{ك} + \text{ه} + \text{ك}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{ك}} + \text{ه}^{\text{ه}} + \text{س}^{\text{ه}} + \text{ه}^{\text{س}} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ} = \frac{1}{\text{ه}} (\text{د}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{د}} + \text{س} + \text{ه} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{ه}} \text{ و ه}^{\text{س}} \text{ الخ})$$

ونطابق الحدود المضروبة في القوة الاولى لكمية ه فنجد $\frac{1}{\text{ه}} \text{د}^{\text{س}} = \text{ك}$

وبوضع هذا المقدار في ثانية معادلات (١٣٧) يوجد $\frac{1}{\text{ه}} \text{د}^{\text{س}} = \text{ك}^{\text{ه}}$ الذي يستخرج منه

• (١٨٣) •

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

ونسمة هكذا فنجد على التعاقب جميع مكثرات معادلة (١٣٣) فنضع في تلك المعادلة مقادير $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{27}$ الخ فنجد

$$د(س+ه) = دس + هس + دس \times \frac{1}{3} + هس \times \frac{1}{3} + دس \times \frac{1}{9} + هس \times \frac{1}{9} + \dots$$

* ٢٤٨ *

شاهد أن دس هي المكثر لكمية ه في حل د(س+ه) وهي التي

تبين برمن $\frac{دس}{هس}$ أو $\frac{دس}{هس}$ وكذلك باعتبار ثمانية معادلات (١٣٨)

يعرف أن المكثر دس للقوة الاولى لكمية ه في حل د(س+ه)

$$\frac{دس}{هس} = \frac{دس}{هس} + \frac{دس}{هس} \times \frac{1}{3} + \frac{دس}{هس} \times \frac{1}{9} + \dots$$

وهكذا

هذا اذا وضعت مقادير دس ودس ودس الخ هذه في معادلة (١٤٠) حدث

$$د(س+ه) = دس + هس + دس \times \frac{1}{3} + هس \times \frac{1}{3} + دس \times \frac{1}{9} + هس \times \frac{1}{9} + \dots$$

* ٢٤٩ * فها هو قد بين قانون تيلور من غير استعمال حساب التفاضل

وكمية $\frac{دس}{هس}$ الداخلة في هذا القانون تشير للعلية التي يستخرج منها مكثر ه في حل

$$د(س+ه) = دس + هس + دس \times \frac{1}{3} + هس \times \frac{1}{3} + دس \times \frac{1}{9} + هس \times \frac{1}{9} + \dots$$

ان العملية المذكورة اذا كررت وأديت تستخرج منها مكثرات باقي قوى ه

واذن لم نحتاج للمعرفة معنى $\frac{دس}{هس}$ وحقيقته في كل دالة بطرق جبرية فاذا

طلب مثلاً حقيقة $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ في الدالة $\text{سه} + \text{سه} + \text{سه}$ تحلل $(\text{سه} + \text{هه})$ بقانون الكمية ذات

الحدتين فيوجد $\text{سه} + \text{سه} + \text{سه}^1 + \text{الخ}$ وحيث ان $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$ يجب أن يكون

مبيناً مكثر القوة الاولى لكمية هه في هذا الحل يوجد $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \text{سه}^1 - \text{سه}^1$

ومن ثم يؤول الامر الى امكان ايجاد حل الدوال المتنوعة الممكن بيانها بالجبر بواسطة الطرق الحسابية وهذه الطرق لا تختلف عن الطرق التي شرحناها لحل الدوال على اختلافها والتي ينتج منها ما بقي بـ عشرة هاهي بعضها وبذلك بينا حلول

$\text{سه} + \text{هه}$ و $\text{لوغا} (\text{سه} + \text{هه})$ و $\text{جتا} (\text{سه} + \text{هه})$ و الخ

* ٢٥٠ * ومن ثم صارت هذه الطريقة طريقة ثالثة من بعدهما توجد اصول حساب التفاضل مبينة بوجه غير متعلق باعتبار النهايات والصغيرات جداً وكل كمية يحكم بحذفها ومع ذلك كله فلا غنى لهذه الطريقة عن طريقة النهايات لانه متى يجرى تطيبتها ويراد مثلاً تعيين الاجسام او السطوح وتعديل المنحنيات او ايجاد كميات تحت المماس وتحت العمودي الخ يستلزم الدخول في النهايات أو الصغيرات جداً

* ٢٥١ * لاعتبار حلول الدوال المتنوعة $(\text{سه} + \text{هه})$ و $\text{سه} + \text{هه}$

و $\text{لوغا} (\text{سه} + \text{هه})$ و $\text{جا} (\text{سه} + \text{هه})$ و الخ التي تعلم من علم الجبر يقال حيث ان هذه الدوال محدودة العدد بسهل معرفة كون مكثر القوة الاولى لكمية هه في حلواها لا يكون صفراً ولا غير منته مادام الى سه مقدارها غير المعين وذلك ينتج من الاثبات السابق لانه اذا فرضنا $\text{هه} = 0$ في معادلة

$$\text{د} (\text{سه} + \text{هه}) = \text{د سه} + \text{هه}^1 + \text{هه}^2 + \text{هه}^3 + \text{الخ}$$

تقع حالتان وهما اما أن يعلم مقدار سه الداخل في هه بمعادلة

متطابقة

تكون الدالة المذكورة متطابقة أو ثابتة لأنه يعرف أنه إذا كانت دسـ
بهذه الصورة سـ - سـ مثلا وكانت على صورة ث + سـ - سـ
فان وضع سـ + هـ محل سـ يحدث ناتجا واحدا أبدا ويشاهد أن
الدالة تكون في الحالة الاولى متطابقة وتؤول في الثانية الى كمية ثابتة ث
وينبني على هذا وذاك ان مكرّر القوة الاولى لكمية هـ لا يمكن أن يكون صفرا
في الحل العمومي لدالة (سـ + هـ)

ولا يستحيل فرض هذا المـ مكرّر غير محدود لأنه حين يكون الطرف
الثاني لمعادلة (١٣٣) غير محدود يكون الطرف الاوّل كذلك
يعنى انه يكون د (سـ + هـ) = ∞ وحيث ان د (سـ + هـ)
تركب من سـ + هـ كما تركب دسـ من سـ فالحدّ الداخل
في د (سـ + هـ) الذي يجعلها غير محدودة يجعل ايضا دسـ غير محدودة
ومثاله انه اذا كانت د (سـ + هـ) تحتوى على حدّ غير محدود وليكن
سـ + هـ - (سـ + هـ) يقتضى أن تكون دسـ محتوية ايضا على حدّ
سـ - سـ يكون غير محدود كذلك وينتج من ذلك أن الدالة المفروضة تكون
غير محدودة ولا نفرض ذلك

* ٢٥٢ * كميات دسـ و دسـ و دسـ والخ
هى التى سماها لاجرائج الدالة الاولى والدالة الثانية والدالة الثالثة والخ
لدالة سـ وعلى العموم تسمى بالدوال المشتقة وقد بين لاجرائج المذكور
ايضا الدوال المشتقة بوجه اخر بابدال $\frac{واصة}{واسـ}$ برمز صـ و $\frac{واصة}{واسـ}$

برمز صـ و $\frac{واصة}{واسـ}$ برمز صـ وهلم جرا

(في الحالات التى يختل فيها قانون تيلور)

* ٢٥٣ * عموما متى توضع سـ + هـ محل سـ في دالة
لمتغير سـ فان صورة هذه الدالة تبقى متحدة حيث ان سـ + هـ تدخل

• (1 NY) •

فجميع المواضع التي كانت فيها سه ولذا متى احتوت سه على جذر كانت د (سه + هـ) مشتملة على هذا الجذر ايضا

فإذا كانت $دس = رس + \frac{2}{\sqrt{س}}$ مثلاً فإن الجذر يوجد نفسه في كمية

$$\frac{2}{s+s'} + (s+s') = (s+s')2$$

* ٢٥٤ ولا يكون كذلك دائما اذا اخذت سه مقدارا مخصوصا

(والمراد به متعینا) مثلاً اذا كان ٣ سه - ٧ بدخل فی دسه بلزم
أن نشتمل د (سه + هـ) علی حد

$$\frac{2 - 5 + 3}{Y^2}$$

واکن γ^3 سه- γ یخذف من دسه بفرض سه = γ

ولا ينفذ ٧^3 سه - ٦ هـ الداخل في د (سه + هـ) بهذا الفرض يل

یروول الی $\gamma^3 = \overline{h} = \frac{1}{h}$ واذن یشتمل حل د (سه + هـ) علی جذر

ولا يمكن حله بحسب القوى الصحية لكمية هـ

وعدم الامكانية هذه تحقق بالمقادير غير المحدودة التي تأخذها المكررات.

التفاضلية مثلًا إذا وجدت معادلة

$$\overline{2 - 3} \gamma^3 = 2$$

فانه يكون باخذ تفاضلاها

$$\frac{1}{r(r-s)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r-s} = \frac{1}{r-s} - \frac{1}{r}$$

ویری ان مقدار هذا المکرر التفاضلی بصیر غیر محدود متی تجعل $\theta = 0$

* ٢٥٥ * وليكن على العموم

$$(12r) \frac{1}{c} + \dots + r = (n+r)c$$

٥٧١٩٨

وذلك يكفى لتعيين المكررات $ح$ و $ح'$ و $ح''$ لمعادلة (١٤٢)
 هذا ومن بعد النظر في معادلات (١٤٤) و (١٤٥) يعلم ان
 تنقص واحدا في كل مرة فعل التفاضل متى ينتهى الى التفاضل النوفى يوجد

$$\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega})$$

ونجد لاجل التفاضل الا تى بعد

$$\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega})$$

وحيث كان $\frac{1}{\omega}$ أقل من الواحد فكمية $1 - \frac{1}{\omega}$ تدل على عدد سالب
 ويمكن حينئذ كتابة المعادلة السابقة هكذا

$$\frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega})$$

وعلى موجب ذلك متى يجعل $\omega = 0$ لاجل تعيين مكرر احد حدود
 معادلة (١٤٢) يوجد

$$\infty = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} (1 + \frac{1}{\omega})$$

ويكون كذلك متى يراد تعيين المكررات التفاضلية بدرجة عليا وينتج
 من هذه القضية انه متى يجعل $\omega = 0$ في حل $(1 + \frac{1}{\omega})$
 ان وجدت قوة كسرية لكمية ω في هذا الحل وكانت محصورة بين الحدود

المتبوعة بكميتى ω و ω' فلا يمكن تعيين حدود متسلسلة تيلور الا الى

درجة δ وهو اى الحد الذى درجته δ من ضمنها وجميع الحدود
الآخر تصير غير محدودة

* ٢٥٦ * المقروض دالة للتغير m متينة برمز δ
ويراد تعيين حل δ ($m + \delta$) فى حالة فرضية $m = \delta$ ولذلك
يلزم كما تبين ان نحسب حدود متسلسلة

$$\delta m + \frac{\delta^2}{\delta^2} + \frac{\delta^3}{\delta^3} + \dots$$

ولكن اذا صار يعمل هذا الحساب احد المكثرات التفاضلية غير محدود فى حال
فرضية $m = \delta$ فلا يبحث عن حل δ ($m + \delta$) بمتسلسلة تبلور
وهاهى الطريقة اللازم استعمالها

يوضع $m + \delta$ محل m فى δm فحينئذ يحتوى الحد الذى كان
يشتمل على $\delta - m$ فى المقام على $m - \delta + \delta$ ولا يصير غير محدود
متى يجعل $m = \delta$ لكنه ينشأ عنه حد متبوع بقوة كسرية لكمية δ
* ٢٥٧ * وليكن مثلاً

$$\delta m = \delta^2 m - \delta^2 m + \delta^2 m - \delta^2 m + \dots$$

فبأخذ التفاضل يوجد

$$\frac{\delta^2 m}{\delta^2 m - \delta^2 m} + (\delta - m) = \frac{\delta^2 m}{\delta^2 m}$$

وبوضع هذه المقادير ومقادير $\frac{\delta^2 m}{\delta^2 m}$ و $\frac{\delta^2 m}{\delta^2 m}$ الخ

فى قانون تبلور بند (٥٥) يوجد

$$\delta (m + \delta) = \delta^2 m - \delta^2 m + \delta^2 m - \delta^2 m + \dots + \frac{\delta^2 m}{\delta^2 m - \delta^2 m} + (\delta - m)$$

وحيث ان الحد المضروب فى δ يصير غير محدود متى يجعل $m = \delta$

فهذا

فهذا الحل يكون غير ممكن

وفي هذه الحالة يوضع من بعد القاعدة السابقة $س + ه$ محل $س$

في معادلة $د س = ٢٢ س - س٢ + ٧ س - س٢$ فيوجد

$$د(س + ه) = ٢٢ س + ٢٢ ه - س٢ - س٢ - ٧ س - ٧ ه + س٢ + س٢ = ١٥ س + ١٥ ه$$

وهذه المعادلة تصبح بفرض $س = ٧$

$$د(٧ + ه) = ١٠٥ + ١٠ ه - ٧٢ - ٧٢ = ٣٣ + ١٠ ه$$

$$د(٧ + ه) = ٣٣ + ١٠ ه - ٧٢ - ٧٢ = ٣٣ + ١٠ ه$$

ونحل بقانون الكمية ذات الحدين الجذر الداخل في هذه المعادلة ونرمز لاجل

الاختصار للمكثرات التي تحدث بذلك القانون برموز $ع$ و $ح$ و $ع$ و $ح$ والخ

فيوجد

$$١٠ ه + ٣٣ = ٢٢(٧ + ه) = ١٥٤ + ٢٢ ه$$

ونضع هذا المقدار في المعادلة الأخيرة فنصير

$$د(٧ + ه) = ١٠ ه + ٣٣ - ١٥٤ - ٢٢ ه = -١٢١ - ١٢ ه$$

ويشاهد من هذا المثال انه بوضع $س + ه$ في الدالة وجعل $س = ٧$

يمكن ادخال قوة او جلة قوى كسرية لكمية $ه$ وتحل بعد ذلك بالاتفاق

الحدود القابلة لان تكون كذلك سواء كان قانون الكمية ذات الحدين

او بخلافه وتوضع هذه الحدود في مقدار $د(٧ + ه)$ فيوجد الحل المطلوب

* ٢٥٨ * وقد اثبت لاجرا ان حل $د(س + ه)$ لا يمكن أن يحتوي على

حدود منبوعة بقوة كسرية الى $ه$ متى كانت $س$ باقية غير معينة

ولذلك يفرض $د(س + ه) = ١٠ ه + ٣٣ - ١٥٤ - ٢٢ ه = -١٢١ - ١٢ ه$

وحيث كان $ك$ $١٠ ه + ٣٣ - ١٥٤ - ٢٢ ه = -١٢١ - ١٢ ه$ يقبل ثلاث مقادير ولكن $م$ و $ن$ و $ع$

توجد هذه الحلول الثلاث لدالة $د(س + ه)$

$$د(س+ه) = دس + ع_١ + ك_١ ه + ... م$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٢ + ك_٢ ه + ... د$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٣ + ك_٣ ه + ... ع$$

لكن دس ينبغي أن تحتوى على جذور واحدة كدالة (س + ه)
كما في بند (٢٥٣) فيلزم أن يكون لدالة س ايضا ثلاث مقادير مختلفة
ك و س و و وبوضع هذه المقادير على التوالي محل دس يوجد حينئذ

$$د(س+ه) = دس + ع_١ + ك_١ ه + ... م$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٢ + ك_٢ ه + ... د$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٣ + ك_٣ ه + ... ع$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٤ + ك_٤ ه + ... م$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٥ + ك_٥ ه + ... د$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٦ + ك_٦ ه + ... ع$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٧ + ك_٧ ه + ... م$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٨ + ك_٨ ه + ... د$$

$$د(س+ه) = دس + ع_٩ + ك_٩ ه + ... ع$$

واذن توجد لدالة (س+ه) بجملها تسع مقادير مختلفة بخلافها غير
محلولة فانه لا يوجد لها الا بقدر ما لدالة س من المقادير وعلى ذلك يكون لها
ثلاثة في الحالة الاتية وحينئذ لا يمكن أن يفرض ان حل د(س+ه)
يحتوى على أس كسرى لكمية ه من غير الوقوع في المناقضة

* ٢٥٩ * ونسهل البرهنة ايضا على ان د(س+ه) لا يمكن
أن تشتتل في حلها على حد متبوع بأس سلبى لكمية ه لانها اذا كانت
تحتوى على حد كحد م ه يوجد

$$د(س+ه) = دس + ع_١ + ك_١ ه + ... م$$

ويجعل

* (١٩٣) *

ويجعل هـ = ٠ يتغير الطرف الأول بدالة سـ والطرف الثاني
عوضاً عن إيلولته إلى دسـ بصير غير محدود بسبب حـ^٢ هـ^٢ الذي
يحتوى عليه

* ٢٦٠ * ويكون كذلك متى كان الحل مشتملاً على حـ متبوع
بلوغاريتم هـ لانه اذا وجد مثل حـ^٢ هـ^٢ لوغا هـ فان هذا الحد
يصير حـ لوغا ٠ متى يجعل هـ = ٠ وبسبب كون لوغاريتم الصفر
غير محدود بالسلب يكون حـ^٢ هـ^٢ لوغا هـ حينئذ غير محدود ويلزم من
ذلك أن تكون دسـ كذلك غير محدودة وهذا يخالف الفرض

انتهى حساب التفاضل

وتم

ولما كان هذا آخر ما أورده المؤلف في حساب التفاضل ان لنا أن نشرح
المحفوظتين المعبر عنهما في باطن هذا الكتاب ثم نلقيهما بقضايا لطيفة
للمفردات الماثلة تتعلق بعلم الضوء للامير بيك ناظر مدرسة المهندسخانة
الخدوية ببولاق فنقول

المحفوظة الاولى (بند ٥٩)

على كيفية إيجاد حل لوغاريتم $s + h$

هاهي أحد الطرق المستعملة لإيجاد لوغاريتم $s + h$

يبحث أولاً عن لوغا (١ + s) بالكيفية الآتية وهي أن يساوي لوغا (١ + h)
بجملة حدود مرتبة بحسب قوى s بأن يراعى أولانه لا يوجد في هذه
المتسلسلة حد غير متعلق بمتغير s لانه اذا وجد

$$\text{لوغا } (1 + s) = c + s + s^2 + s^3 + \dots + x$$

فهذه المعادلة لا تزال متحققة مهما كان متغير s وينتج منها انه يجعل
 $s = 0$ فيما يوجد

$$c = \text{لوغا } 1 = 0$$

ولذا نضع

$$\text{لوغا } (1 + s) = c + s + s^2 + s^3 + s^4 + \dots + x \quad (1)$$

وبتغيير s بكمية z يوجد كذلك

$$\text{لوغا } (1 + z) = c + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + x$$

وحيث كانت z حيث ما اتفقت فيمكن فرض هذه المعادلة (١ + s) أو
 $1 + s^2 + s^3 = 1 + z$ بين s و z ثم يستخرج منها مقدار z
ويوضع في معادلة (١) فيوجد

$$\text{لوغا } (1 + s) = c + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^7 + s^8 + s^9 + s^{10} + \dots + x$$

وبواسطة الحل والترتيب بحسب قوى s يكون

لوغا

$$(r) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \right\} = (r+1)$$

وغير ذلك حيث ان خاصية اللوغاريتم مبينة في هذه المعادلة $\log_a a = 1$ لوغاريتم

$$\text{لوغا}(1+s) = {}^2_1 = (e^s + e^{2s} + e^{3s} + \dots + x)$$

وبوضع مقدار لوغا (١ + س) هذا في الطرف الاقل لمعادلة (٢) نجد معادلة تتحقق بجميع المقادير التي تعطى الى متغير س واذن يحدث بمساواة الحدود المتبوعة بقوى متحدة لحرف س بعضها

$z^2 = z^2$ و $z^2 = z^4 + z$ و $z^2 = z^8 + z^4$ الخ
ويستخرج من ذلك

$$\frac{1}{x}, \frac{2}{x} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}, \frac{2}{x} = \frac{2}{x}$$

وبوضع هذه المقادير نجد

$$\text{لوعا (ا + سه)} = \text{ع (سه + ٢ + ٣ + ٤ + ٥)} + \text{ش}$$

ومتى يكون $s = 0$. يوجد لو غا $1 = 0 = \theta$ ويعلم من ذلك انه لا يوجد كمية ثابتة ينبغي اضافتها

وإذا جعلنا $s = \frac{5}{3}$ نجد

لوغا (۱ + $\frac{h}{s}$) أولوغا ($\frac{s+h}{s}$) او

$$\text{لوغا}(س+ه) - \text{لوغا}س = \left(\frac{ه}{س} + \frac{ه^2}{س^2} + \frac{ه^3}{س^3} + \dots \right) \times$$

وبالقصة على ه يكون

$$\text{لوعا}^{\text{س}} + \text{لوعا}^{\text{ه}} = \frac{\text{لوعا}^{\text{س}} - \text{لوعا}^{\text{ه}}}{\text{ه}} \times \left(\frac{1}{\text{س}} + \frac{\text{ه}}{\text{س}^2} + \frac{\text{ه}^2}{\text{س}^3} + \dots \right)$$

وبالارتقاء الى النهاية نجد

(١٩٦)

$$\frac{ع}{س} = \frac{ع لو غا س}{و ا س}$$

ومن ثم يكون تفاضل لو غا س هكذا ع $\frac{ع س}{و س}$ ويتظر ان ثابته ع ليست

الا القياس

* الملاحظة الثانية (بند ٢٤٥) *

على القاعدة الاساسية لطريقة المـكـتـرـرات الغير المتعينة
يمكن الاثبات بالوجه الآتى على انه متى تكون المعادلة التى كعادلة

$$ع س + ح س + د س + ه س + و س = ٠ \quad (٣) \quad \text{مثلا}$$

متحققة مهما كانت س يلزم أن يكون كل من المكتررات ع و ح و د و ه و و
صفرا لانه حيث كانت س تقبل اى مقدار كان يمكن وضع س = ١٠
وتؤول معادلة (٣) حينئذ الى ٠ = ٠

ولما كانت و غير معلقة بمتغير س فتكون صفرا ايضا متى لا تكون س
صفرا وينتج من ذلك ان معادلة (٣) تختصر الى هذه

$$ع س + ح س + د س + ه س = ٠$$

وباسقاط المضروب المشترك س يبقى

$$ع س + ح س + د س + ه س = ٠$$

ثم نطبق ما ذكر بخصوص معادلة (٣) على هذه المعادلة فيتضح لنا ان
تكون صفرا وبالمداومة هكذا يظهر على التعاقب كون المكتررات الاخرى
تكون كذلك

* (في المفردات المائلة للامبير) *

أفى البحث عن منحنيات الانعكاس المستوية السمما كوسنيك
الملف المشترك لجميع الخطوط العمودية على خط منحني مستوي هو المستوي
مفرو هذا المنحنى ونقطة تماس هذا الملف بكل عمود يقال لها مركز
الانحناء

الاختنا في النقطة المطابقة لها من المنحنى المفروض والمستقيم الموصل لهاتين
النقطتين يقال له نصف قطر الاختنا في النقطة نفسها
وبالمناسبة يقال للملف الذي يحدث من تقاطع الخطوط المستقيمة الممتدة
من جميع نقط المنحنى المفروض جاعلة بين عمده في النقط بعينها زوايا ثابتة
أو متغيرة بحسب شرط ما ريانى مفردا مائلا للمنحنى المفروض ويمكن
أن يقال لنقط تماس هذا الملف المستجد بكل من الخطوط المستقيمة الحادث هو
منها مراكز الاختنا المائلة في النقط المطابقة لها من المنحنى الاصلى وبالجملة
يمكن أن يقال للمستقيم الموصل لهاتين النقطتين نصف قطر الاختنا المائل
لهذا المنحنى في النقطة المذكورة

فاذا كان المنحنى المفروض دائرة مثلا وكانت الزوايا التي تجعلها انصاف أقطار
الاختنا المائلة مع انصاف أقطار الاختنا الاعتيادية أو العمودية ثابتة
فالمفرد المائل يكون لا محالة دائرة متحدة المركز مع الاولى ولاجل
أن يكون المفرد المائل في الحالة بعينها بثبوت الزاوية تقطعة يجب أن يكون
المنحنى المفروض حلزونيًا لو غاريتيا وإذا آل هذا المنحنى المفروض الى خط
مستقيم وكانت الزوايا تزداد بنسبة بعد الاعمدة عن نقطة ثابتة عليه
فالمفرد المائل يكون عين المفرد العمودى للسكلويد واذن يكون هذا
المفرد سكلويدا وهلم جرا

القضية العامة للمفردات المائلة التي يترأ عدم وقوف المهندسين عليها
والتي يمكن تحصيلها بمبحث آخر تؤول بغاية ما يكون من السهولة الى جملة نواتج
غريبة لا تستخرج عادة بواسطة الطرق المعتادة الا بوجه شاق ولنقتصر
على تبين القوانين الاصلية التي تربط المفردات المائلة بالمفردات العمودية
ونجرب عملها على مثال خاص بعلم الضوء فنقول

لتكن موم (شكل اثناني) نقطتان من منحنى مفروض و ح النقطتان
المطابقتان لهاتين النقطتين من مفروده العمودى وتلك النقطتان يعنى
ح و ح يكونان مراكز الاختنا في نقطتي موم وليكن ا و ا مراكز

الانحناء المطابقة لاحد مفردات هذا المنحنى المائل وليكن و تقاطع
 Γ و Γ م هذا وتجعل نقطة م مركزا ويعد هاعن نقطة م يرسم
 قوسا من دائرة ينتهى في ا على امتداد Γ م ثم يرسم برمز قو للقوس
 من المنحنى م م المعدود من م نحو م و برمز قو للقوس من المنحنى
 Γ م المحسوب من ا نحو Γ م و برمز نق لنصف قطر الانحناء العمودى
 م و برمز نق لنصف قطر الانحناء المائل Γ م و برمز ب لزاوية م Γ م
 الواقعة بين نصفي قطري الانحناء هذين و برمز ع لذى الاربعه اضلاع
 المهدود بخطوط مستقيمة ومنحنية م Γ م و برمز ع لذى الاربعه
 اضلاع م Γ م

فاذا فرضنا نقطة م قريبة جدا من نقطة م فنقط Γ و Γ تكون
 كذلك قريبة جدا لنقط Γ و Γ واقواس Γ و Γ يمكن
 اعتبارها كالاتدادات المستقيمة لخطى م Γ و م Γ على الولا
 ومساحات م Γ م و م Γ م يمكن اعتبارها ايضا كقطاعات بسيطة
 او كثلثات كذلك وما كخط عمودى على Γ م او على Γ م فيوجد
 في هذه الحالة

$$\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma \text{ و } \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma \text{ و } \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma$$

$$\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma + \Gamma\Gamma \text{ و } \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma + \Gamma\Gamma \text{ و } \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma + \Gamma\Gamma$$

ثم بعد ذلك يوجد

$$\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma \text{ و } \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma \text{ و } \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma$$

ولكن

$$\Gamma\Gamma + \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma + \Gamma\Gamma$$

فيوجد بالوضع حينئذ

* (١٩٩) *

$$\text{نق} + \text{واقو} = \text{نق} + \text{واق} + \text{واقو} \text{ وبالاختصار يحدث}$$

$$\text{واقو} = \text{واق} + \text{جاب واقو} \dots\dots\dots (١)$$

ويوجد ايضا

$$\frac{\text{واقو جتاب}}{\text{نق} + \text{واقو}} = \frac{\text{واقو}}{\text{نق} + \text{واق}} \text{ وزاوية م}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}} = \frac{\text{واقو}}{\text{نق} + \text{واق}} \text{ وزاوية م}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}}$$

ولكن بسبب تساوى زاويتي مثلثي موح و م و ا التين في ويوجد

$$\text{زاوية م}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}} + \text{زاوية وح}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}} = \text{زاوية م}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}} + \text{زاوية و}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}}$$

واذن يكون بالاستبدال

$$\text{ب} + \frac{\text{واقو}}{\text{نق} + \text{واق}} = (\text{ب} + \text{واق}) + \frac{\text{واقو جتاب}}{\text{نق} + \text{واقو}} \text{ وبإسقاط}$$

المشترك من الطرفين يكون

$$\frac{\text{واقو}}{\text{نق} + \text{واق}} = \text{واق} + \frac{\text{واقو جتاب}}{\text{نق} + \text{واقو}} \text{ وبحذف المقامات يكون}$$

$$(\text{نق} + \text{واقو}) \text{ واقو} = (\text{نق} + \text{واق}) (\text{نق} + \text{واقو}) + \text{واق} (\text{نق} + \text{واقو}) \text{ واقو جتاب}$$

وبجمل هذه الضروب واسقاط الحدود المشتملة على التفاضلات بدرجات

دون الواحد وقسمة جميع الحدود على واقو يحدث

$$\frac{\text{واب}}{\text{واقو}} = \text{نق} - \frac{\text{جتاب}}{\text{نق}} \dots\dots\dots (٢)$$

ويوجد أخيرا

$$\text{قطاع م}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}} = \frac{1}{\text{م}^{\text{ا}}} \times \text{م}^{\text{ا}} \text{ و قطاع م}^{\text{ا}}\text{م}^{\text{ا}} = \frac{1}{\text{م}^{\text{ا}}} \times \text{م}^{\text{ا}} \text{ يعني}$$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق)$ و باسقاط الحدود المشتملة على القوى الثانية للقواضل يكون

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) \quad (٤)$$

وهذه القوانين الاربع الصعبة الایجاد بواسطة الطرق الاعتيادية الهندسية الحساسة تطابق للشكل كما هو مشروح رسمه ولكن يتيسر في جميع الحالات أن تغير فيها العلامات التي تستدعي احوالا خصوصية يمكن ايجادها فيها

و يوجد لاجل المفرودين المائلين لمنحن واحد مفروض جلتان من المعادلات المتماثلة يعنى انه بالتأشير بالعلامات على الصور المتعلقة بالمفرد الثاني المائل نجد بين القوانين الاخر هذه الاربع معادلات

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) \quad (١)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) \quad (٢)$$

ويمكن فرض كون انصاف أقطار الانحناء لا احد الجملتين تكون الاشعة الساقطة المماس جميعها الا احد المفروقات المائلة والمنحنى المفروض يكون هو المنحنى المعكس او الفارق للمادتين المتجانستين بشدة مختلفة وكون انصاف الاقطار الانحنائية المائلة للجملة الاخرى تكون هي الاشعة المنعكسة او المنكسرة عند مقابلتها هذا المنحنى والمماس جميعها بالمفرد المائل الآخر الذي يكون بهذا الوجه هو الكوستيك بالانعكاس او بالانكسار حال كونه متكوّن من انصاف الاقطار هذا

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) = \frac{1}{4} (نق + ونق) \quad (٥)$$

التي فيها رمزا ف و ف يبينان عددين ثابتين لا يختلفان في حالة الانعكاس الخصوصية عن بعضهما الا في الاشارة بالاربع معادلات المرقومة

• (٢٠١) •

اعلاه فباخذ تفاضل معادلة (٥) يوجد

$$\text{واب جاب جتاب} - \text{واب جاب جتاب} = ٠$$

$$\frac{\text{واب}}{\text{واقو}} \text{ جاب جتاب} - \frac{\text{واب}}{\text{واقو}} \text{ جاب جتاب} = ٠$$

وبوضع مقادير $\frac{\text{واب}}{\text{واقو}}$ و $\frac{\text{واب}}{\text{واقو}}$ المستخرجة من معادلات ٢ و (٢)

في هذه المعادلة عوضا عنها يوجد

$$\frac{\text{جاب جتاب}}{\text{نق}} - \frac{\text{جاب جتاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{جا (ب-ب)}}{\text{نق}} \dots \dots (٦)$$

وبواسطة هذا القانون الاخير يرسم بسهولة بواسطة النقطة الكوستيك بالانكسار المطابق لمنحن مفروض فاصل لمادتين معروف رسم نصف قطر انحنائية في اى نقطة منه وجميع الاشعة الساقطة له مماسة بمنحن مفروض ايضا ولتدل لاجل ذلك مستقيما بمماس المنحنى الاخير ونطوله حتى يصل الى نقطة تقابله بالمنحنى الفاصل ونرسم له خطا عموديا في هذه النقطة فيعلم طول نق للشعاع الساقط وتعلم زاوية السقوط ب ومن ثم تعلم زاوية ب بواسطة معادلة (٥) ويمكن حينئذ رسم جهة الشعاع المنكسر ثم يعلم بسهولة بمعادلة (٦) طول نق وتبين بهذه الكيفية نقطة من نقط الكوستيك المبحوث عنه

واذا فرض منحن تكون جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه عوضا عن معرفة المنحنى المماسية به جميع الاشعة الساقطة فان تلك الاشعة تكون مماسة بالمفرد العمودى لذلك المنحنى وبذلك تؤول المسئلة الى الحالة السابقة

وفي الحالة الخصوصية التى تكون فيها جميع الاشعة عمودية على محيط دائرة واحدة تمر تلك الاشعة بمركزها واذن يؤول المفرد المائل الاول الى النقطة الشعاعية ويصير نق الصورة العمومية لابعاد هذه النقطة عن جميع نقط

المخنى الفاصل

واذا وضعنا معادلة (٦) بهذه الصورة

$$\frac{\text{جـ ب جـ تـ ا ب} - \text{جـ ا ب جـ تـ ا ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{جـ ا ب جـ تـ ا ب}}{\text{نق}} - \frac{\text{جـ ا ب جـ تـ ا ب}}{\text{نق}}$$

ووضع فيها مقدار جـ ا ب المستخرج من معادلة (٥) عوضا عنه صارت تلك المعادلة منقسمة على جـ ا ب وتؤول الى

$$\frac{\text{ب جـ ا ب} - \text{ب جـ ا ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب جـ ا ب}}{\text{نق}} - \frac{\text{ب جـ ا ب}}{\text{نق}} \dots \dots (٧)$$

واذا فرضنا الآن ان زاوية السقوط تكون صفرا فمعادلة (٥) تبين ان زاوية الانكسار تكون كذلك ولذا يوجد

جـ تـ ا ب = جـ تـ ا ب = ١ وبه تؤول معادلة (٧) الى

$$(٨) \dots \dots \dots \frac{\text{ب} - \text{ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب}}{\text{نق}} - \frac{\text{ب}}{\text{نق}}$$

وحينئذ متى تكون الاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة فان هذه المعادلة تحدث بالسهولة التامة النقطة التى يوجد على نصف القطر العمودى من الكوسيتيك بالانكسار وهذه النقطة هى التى تسمى بالنقطة الاحترافية متى يكون المخنى الفاصل دائرة

واذا فرض فى حالة الدائرة ان النقطة الشعاعية تكون على بعد غير محدود فمعادلة (٨) تؤول الى

$$\frac{\text{ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب} - \text{ب}}{\text{نق}} \text{ الذى يستخرج منه } \frac{\text{ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب}}{\text{نق}} - \frac{\text{ب}}{\text{نق}} (٩)$$

وبهذا تعرف موضع النقطة الاحترافية للاشعة المتوازية وتسمى هذه النقطة الاحترافية فى هذه الحالة النقطة الاحترافية الاصلية

واذا فرض فى معادلة (٨) ايضا ان الخط الفاصل يصير خطا مستقيما

أوان نق يكون غير محدود آت تلك المعادلة بالاختصار الى

$$\frac{ب}{نق} - \frac{ب}{نق} = ٠ \text{ الذي يحدث منه } \frac{نق}{نق} = \frac{ب}{ب} \cdot ٠٠٠ (١٠)$$

وحينئذ تكون ابعاد النقطة الشعاعية والنقطة الاحتراقية عن المستقيم الفاصل في هذه الحالة في نسبة معا كسبة لنسبة جيب السقوط الى جيب الانكسار

واذا كانت الاشعة بعد انكسارها الاول في الحالة العمومية تصير منكسرة مرة او جملة مرات أخر بمصادمتها منحن او جملة منحنيات اخر فواصل يتظر انه حيث كان يعرف قبل كل انكسار يستجد على ماذكر الكوسينيك الذي تكون الاشعة الساقطة تماسه به فيتوصل بالانتقال من كوسينيك الى آخر بواسطة الطرق التي شرحناها الى رسم الكوسينيك الاخير بالنقط واذن يمكن اعتبار معادلتى (٥) و (٦) كخاصيتين لان يعرف بهما بواسطة النقط الكوسينيك الناتج من انكسارات متعاقبة كيف ما يراد

ولاجل أن نقف على كيفية سهلة تنتهى لنا امثلة مفيدة زيادة على ما تقدم نفرض سطحين فاصلين فقطبان نرمز برمز نق لبعده نقطة السقوط المستجدة عن النقطة التي يماس فيها الشعاع الثانى الساقط المفرد المائل الثانى وبرمز نق لنصف قطر الانحناء للمحنى الفاصل المستجدة في نقطة السقوط وبرمز نق لطول الشعاع المنكسر ثانيا والمحسوب من نقطة السقوط الثانية الى نقطة تماسه بالمفرد الثالث المائل وبالجملة نرمز برمز ب و ب الثانية الى نقطة تماسه بالمفرد الثانى والانكسار الثانى وهى التي نفرض جيوها مناسبة الى ف ف فيجد بناء على (٥) و (٧) هذه الاربع معادلات

(٢٠٤)

$$\frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \text{ن} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \text{ن}$$

$$\frac{\text{ن جَاب} - \text{ن جَاب}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}} - \frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}}$$

$$\frac{\text{ن جَاب} - \text{ن جَاب}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}} - \frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}}$$

ويستخرج من الأخيرتين

$$\frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}} + \frac{\text{ن جَاب} - \text{ن جَاب}}{\text{ن}}$$

$$\frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}} = \frac{\text{ن جَاب}}{\text{ن}} - \frac{\text{ن جَاب} - \text{ن جَاب}}{\text{ن}}$$

ولكن هنا ن و ن لهم جهة واحدة تشتمل على نقطتي السقوط
فاذن يكون البعد بين هاتين النقطتين الأخيرتين مساويا لجمعهما او لفرقهما
وبالرمز بحرف هـ لهذا البعد يوجد حينئذ

$$\text{هـ} = \frac{\text{ن جَاب} + \text{ن جَاب} - \text{ن جَاب} - \text{ن جَاب}}{\text{ن} + \text{ن}} \quad (١١)$$

وهو القانون الذي يخدم باعتبار ن فيه مجهولا لايجاد الكوسينك
الذي يحدث من انكسارين متواليين بالنقط بلا واسطة من غير الاحتياج
الى رسم الكوسينك المتوسط

اذا كان السطحان الفاصلان وجهين لجسم واحد شفاف يلزم أن تربط
بمعادلة (١١) المعادلة المضاعفة هذه

جَاب

$$\frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}} \dots\dots (١٢)$$

واذن يمكن اعتبار جلة هاتين المعادلتين كداخل فيها جميع قضايا العدسات
بأى جنس يراد تعيين نقط الاحتراق فيه من غير اهمال اعتبار سمكها كما يفعل
في العادة

ويستخرج من معادلتى (١) و (١) بالتحويل وبالقسمة

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}} \text{ الذى يستخرج منه}$$

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} \text{ ويحدث من ذلك باخذ التكامل}$$

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} \text{ ث}$$

و ث هي الثابتة الحيث ما تنقفت فاذا ابتدأ قوسا قو و قو معا
ويبت الاشعة الساقطة والمنعكسة الموازية الى مبدأيهما برمزى
بق و بق يوجد

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} \text{ الذى يستخرج منه بالاسقاط والتحويل}$$

واذا طاب ما يكون المنحنى الفاصل حتى تجتمع الاشعة الصادرة من نقطة
وتتلاقى بعد انكسارها فى نقطة اخرى يلزم وضع قو = ٠ و قو = ٠

تصير معادلة (١٣) بهذا السبب ايلة الى

(٢٠٦)

$$\frac{نق}{ن} - \frac{نق}{ن} = \frac{نق}{ن} - \frac{نق}{ن} = ثابتة \dots\dots (١٤)$$

وهذه هي المعادلة او الارتباط الكائن بين ابعاد نق و نق ل نقط مختلفة من المنحنى المطلوب عن نقطتين ثابتتين معلومتين فينتج من ذلك بسهولة ان معادلة ذلك المنحنى باحداثيات عمودية ترتفع الى الدرجة الرابعة وانواع هذه المنحنيات كانت مسماة خطوط ابلانتيك للمعلم كئلى الذى هيا لها جملة مباحث غريبة فى مراسلاته وفى كتبه أودفاته الخاصة
وجميع ما ذكر يطبق بلا واسطة على الانعكاس بفرض ب = - ب فقط الذى ينتج منه

$$جاب = - جاب و جتاب = جتاب و ف = - ف$$

وحينئذ متى كانت الاشعة الساقطة مماسة بكميتها المنحنى واحد ورمزنا برمز نق لطول الشعاع العاقط المحسوب من ابتداء هذا المنحنى الى نقطة السقوط و برمز نق لطول الشعاع المنعكس المحسوب من ابتداء نقطة السقوط الى الكوستيك و رمزنا اخيرا برمز نق لنصف قطر الانحناء للمنحنى المعكس فى نقط السقوط توجد معادلة (٦) هكذا

$$\frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} = \frac{1}{نق حتاب} \dots\dots (١٥)$$

وهو قانون سهل لا جل رسم الكوستيك بالانعكاس بواسطة النقط متى يعلم المنحنى المعكس والمنحنى الذى تماسه الاشعة الساقطة وترجع الى هذه المسئلة المسئلة التى يعلم فيها منحنى جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه واذا اعتبرنا الشعاع الساقط العمودى على المنحنى المعكس بمعدته توجد معادلة (٨) هكذا

$$\frac{1}{نق} + \frac{1}{نق} = \frac{1}{نق} \dots\dots\dots (١٦)$$

وبذلك

* (٢٠٧) *

وبذلك تتعين النقطة الاحتراقية في المرايبات الدائرية وإذا أريد النقطة الاحتراقية الاصلية او النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية توجد معادلة (٩)

$$\text{نق}_1 = \frac{\text{نق}_2}{\dots} \quad (١٧)$$

وإذا صار الخط المعكس مستقيما وكانت النقطة الشعاعية حيث ما اتفقت حدث

$$\text{نق}_1 = - \text{نق}_2 \quad (١٨)$$

وبالجملة فيتوصل بواسطة معادلة (١٥) الى تعيين جهة الكوسنيك الذي يحدث من عدد انعكاسات متوالية حيث ما اتفق بدون الاحتياج الى رسم الكوسنيكات المتوسطة واما من قبل الخط الاپلانيك بالانعكاس فانه يكون معلوما (١٤) بمعادلة

$$\text{نق}_1 + \text{نق}_2 = \text{ثابتة}$$

يعنى ان هذا الخط يكون قطعاً ناقصاً او قطعاً زائداً بحسب كونه نق_1 و نق_2 متحدة في الاشارة او مختلفة فيها وعلى ذلك يكون قطعاً

مكافئاً متى كانت احدى النقطتين الثابتتين بعيدة للغاية والنهاية

اذا فرض نق_1 ثابتاً في قوانين (٦) و (٧) ووضع $\text{نق}_2 = 0$ فيها

فان هذه القوانين تدخل وتختصر في قوانين المعلم پوتيت المشهورة في مراسلته للمعلم هاشيت في شأن الحالة التي يكون فيها المنحنى المعكس او الفاصل دائرة والاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة ولكن يرى هنا كذلك ان تكون هذه القوانين لها مدلولات متسعة .

ومن العجايب ان پوتيت لم يفكر في شرحها وبسطها على ما ينبغي فانه كان يمكنه ان يعتبر في الحقيقة انه متى تنعكس او تنكسر الاشعة الساقطة المماسية بمنحنى ما بمقابلتها منحنى آخر حيث ما اتفق يمكن نظراً احد هذه الاشعة كصادر من

نقطة تماسه بالاول من هذين المخنيين ونقطة سقوطه كاحدى نقط الدائرة
الاتصافية للمخنى الثانى بمعنى أن القوانين المنشئة لاجل الدائرة
ولاجل الاشعة الساقطة من نقطة واحدة لاتزال موجودة أيضا بابداله
نصف قطر الدائرة بنصف قطر الانحناء فى نقطة السقوط للمخنى الذى هى
الدائرة الاتصافية له وبابدال بعد نقطة السقوط عن النقطة الشعاعية بعد
نقطة السقوط هذه عن نقطة تماس الشعاع الا ترى ان المخنى المحيط بجميع
الاشعة الساقطة وبغاية الضبط ينتقل من قضية التحرك فى الدائرة فى علم
الميكانيكا الى قضية التحرك بطول منحنى ما بالوجه المشروح عنه

اتمنى

المهندسون الاولون الذين اشتغلوا
بقضية الكوسنيكات لم يصيبوا
فى ظنهم حيث تخيل لهم امكان
ابدال المخنى المعكس او الفاصل
بالمماس له فى نقطة السقوط وانما
تبين مطابقة قوانين لاسير بقوانين
بوتيت جواز ابدال هذا المخنى
بدائره الاتصافية فى نقطة
السقوط

