UNIVERSAL LIBRARY
OU_224665
UNIVERSAL LIBRARY

سلسلۂ مطبوعات جامعۂ عثمانیہ

صغاری احصاء

جلد سوم

تصنیف
ہوریس لیمب ایم۔ اے ایل ایل ڈی ایس۔ سی۔ ڈی ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ
قاضی محمد حسین ایم۔ اے و کشن چند ایم۔ اے
پروفیسران کلیہ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۸ھ م سنہ ۱۳۳۹ف م سنہ ۱۹۳۰ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے
جن کو حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ
کرکے طبع و شائع کی گئی ہے

۱۹۶۷ء

دیباچہ (از مصنف)

اِس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصا کے اُن حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں اُسوقت اِسکی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اس ایڈیشن کی مکمل نظرثانی کیگئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کردینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کردیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کیگئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فر}\,ها}{\text{فر}\,لا} = ها$$

کا معیاری حل ہے۔ اِس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اِس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جا سکتا لیکن

یہ کہنا بیجا ہوگا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصا کے تعلق کے مدنظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لامتناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور تکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پہلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر یکساں استدقاق کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی' احصا کی کتاب میں اس وقت اس نظریہ کا داخل کرلینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اس کو ترک کردیا گیا ہے۔ اس کی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کرجائے۔

کمیت کے مرکزوں' دودرجی معیاروں' اور اسی قسم کی دیگر چیزوں میں اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کردیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کردیا گیا ہے فقط

جون سنہ ۱۹۱۹ء

ہوریس لیمب

فہرست مضامین

دفعہ	مضمون	صفحہ
	گیارہواں باب	
	پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں	
۱۵۱	تفرقی مساواتوں کی تکوین۔	۵۲۱
۱۵۲	پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں	۵۲۴
۱۵۳	حل کرنے کے طریقے۔ ایک متغیر غائب۔	۵۲۶
۱۵۴	متغیر جدائی پذیر۔	۵۲۷
۱۵۵	ٹھیک مساواتیں۔	۵۳۰
۱۵۶	متجانس مساواتیں	۵۳۳
۱۵۷	مستقل سروں والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات	۵۳۵
۱۵۸	پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات	۵۳۹

۱۵۹	قائم خطوط رمی۔	۵۴۱
۱۶۰	ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں	۵۴۵
۱۶۱	کلیدی صورت	۵۴۶
	امثلہ نمبری ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴	۵۴۹

بارھواں باب

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۱۶۲	نمونہ $\frac{د^2 ما}{د لا^2}$ = ف(لا) کی مساواتیں	۵۶۳
۱۶۳	$\frac{د^2 ما}{د لا^2}$ = ف(ما) کے نمونہ کی مساواتیں۔	۵۶۵
۱۶۴	تفرقی مساواتیں جنمیں صرف پہلے اور دوسرے رتبہ کے مشتق موجود ہوں	۵۷۱
۱۶۵	مساواتیں جن میں ایک متغیر موجود نہیں ہے۔	۵۷۵
۱۶۶	دوسرے رتبہ کی خطی مساوات	۵۷۸
	امثلہ نمبری ۵۵	۵۸۳

تیرھواں باب

مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۱۶۷	دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔ متمم تفاعل	۵۹۰
۱۶۸	خاص تکملہ کی تعئین	۵۹۶
۱۶۹	عامل عف کی خاصیتیں	۶۰۳
۱۷۰	مستقل سروں والی عام تفرقی مساوات۔ متمم تفاعل	۶۰۴
۱۷۱	خاص تکملہ	۶۰۹
۱۷۲	متجانس خطی مساوات	۶۱۴
۱۷۳	ہمزاد تفرقی مساواتیں	۶۱۸
	امتلہ نمبری ۵۶، ۵۷، ۵۸	۶۲۸

چودھواں باب

قوتی سلسلوں کا تفرق اور تکمل

۱۷۴	سوال کا بیان	۶۳۷
۱۷۵	توکارتی سلسلہ کی دریافت	۶۳۹
۱۷۶	گریگوری کا سلسلہ	۶۴۴
۱۷۷	قوتی سلسلوں کا استقاق	۶۴۷
۱۷۸	قوتی سلسلوں کی تسلسل	۶۵۱
۱۷۹	قوتی سلسلہ کا تفرق	۶۵۲
۱۸۰	قوتی سلسلوں کا تکمل	۶۵۴
۱۸۱	تفرقی مساوات کا حل سلسلوں کے ذریعہ	۶۵۵
۱۸۲	تفرقی مساوات کی مدد سے پھیلاؤ	۶۵۸
	امتلہ نمبری ۵۹، ۶۰، ۶۱	۶۶۳

پندرھواں باب

ٹیلر کا مسئلہ

۱۸۳	پھیلاؤ کی شکل	۶۷۱
۱۸۴	خاص صورتیں	۶۷۳
۱۸۵	میکلورن اور ٹیلر کے مسائل کا ثبوت :۔ ن رقموں کے بعد باقی۔	۶۷۷
۱۸۶	متبادل ثبوت	۶۸۳
۱۸۷	کوشی کی باقی کی شکل	۶۸۵
۱۸۸	بعض پھیلاؤ	۶۸۷
۱۸۹	مسئلہ ٹیلر کا اطلاق ۔ منحنیات کا رتبۂ تماس	۶۹۰
۱۹۰	اعظم اور اقل قیمتیں	۶۹۳
۱۹۱	مستوی منحنیات کا صغاری ہندسہ۔	۶۹۶
	امثلہ نمبری ۶۲، ۶۳	۶۹۸

سولھواں باب

متعدد متبوع متغیروں کے تفاعلات

۱۹۲	مختلف رتبوں کے جزوی مشتقات	۷۰۵
۱۹۳	خاصیت مبادلہ کا ثبوت	۷۰۷
۱۹۴	ٹیلر کے مسئلہ کی توسیع	۷۱۱
۱۹۵	پھیلاؤ میں عام رقم	۷۱۴
۱۹۶	دو متغیروں کے تفاعل کی اقل اور اعظم قیمتیں اور انکی ہندسی تعبیر	۷۱۶

۱۹۷	مشروط تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں	۴۲۲
۱۹۸	لفافہ	۴۲۵
۱۹۹	جزوی تفرق کے اطلاقات	۴۲۷
۲۰۰	تضمینی تفاعل کا تفرق	۴۳۰
۲۰۱	متغیر کا بدلنا	۴۳۲
	امثلہ نمبری ۶۴، ۶۵، ۶۶	۴۳۵
	ضمیمہ جات	۴۴۳

کتب خانہ
کلیۂ جامعہ عثمانیہ

حصۂ سوم

گیارہواں باب

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۱۵۱۔ تفرقی مساواتوں کی تکوین۔

متبوع متغیر لا، تابع متغیر ما اور ایک یا زیادہ مشتق تفاعلوں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{2}}$، $\frac{\text{فر}^{3}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{3}}$ .... میں کوئی رشتہ تفرقی مساوات کہلاتا ہے*۔

مساوات کا "رتبہ" اس کے اعلیٰ ترین تفرقی سر سے مقرر کیا جاتا ہے پس لا، ما اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ میں کوئی رشتہ پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہوگی۔ حل دریافت کرنیکے طریقوں پر غور کرنے سے پہلے مساوات کے پیدا ہونے کے کم از کم ایک طریقہ پر بحث کرنا مفید ہوگا۔

اگر متغیروں لا، ما اور ایک اختیاری مستقل ج میں رشتہ دیا ہوا ہے تو اس کو تفرق کرنے سے لا، ما، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور ج میں ایک اور مساوات

* "جزوی" تفرقی مساوات سے تمیز کرنیکے لئے عموماً اسے "معمولی" تفرقی مساوات کہا جاتا ہے۔ جزوی تفرقی مساوات میں دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل کے جزوی مشتق شامل ہوتے ہیں

حاصل ہو جائے گی۔ ان دونوں مساواتوں میں ج کو ساقط کرنے سے پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات حاصل ہوگی۔ زیادہ عام صورت میں اگر متغیروں لا، ما اور ن اختیاری مستقلات ج۱، ج۲، ...... جن میں رشتہ دیا ہوا ہو تو بلحاظ لا کے اس کو ن مرتبہ سلسلہ وار تفرق کرنے سے کل (ن + ۱) مساواتیں حاصل ہونگی جن میں سے ن اختیاری مستقل ساقط کئے جا سکتے ہیں۔ حاصل اسقاط ن ویں رتبہ کی تفرقی مساوات ہوگی۔ اس نقطہ نظر سے پہلے رشتہ کو ہم "ابتدائی حل" یا محض "ابتدائی" کہینگے۔

مثال (۱)۔ اگر ابتدائی ما = م لا + ج ...... (۱)

ہو تو تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{م} \quad \ldots\ldots (۲)$$

۳۸۲ مثال (۲)۔ ابتدائی $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا}\,\text{لا} + \text{ج}$ ...... (۳) سے

مساوات $۲\,\text{ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۲\times۲\,\text{ا}$ ...... (۴) حاصل ہوتی ہے۔

مثال (۳) اگر ابتدائی لا جم عہ + ما جب عہ = ا ...... (۵)

ہو جہاں "عہ" اختیاری مستقل ہے تو مساوات

$$\text{جم عہ} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\,\text{جب عہ} = ۰$$ حاصل ہوتی ہے۔

ان سے $\left(\text{ما} - \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)\text{جب عہ} = \text{ا}$ ، $\left(\text{ما} - \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)\text{جم عہ} = -\text{ا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

حاصل ہوتے ہیں۔ اور انکا مربع لیکر جمع کرنے سے مساوات

$$\left(\text{ما} - \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲} = \text{ا}^{۲}\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\} \quad \ldots\ldots (۶)$$ حاصل ہوتی ہے

مثال (۴) اگر ابتدائی ما = ا لا + ب ...... (۷) میں سے مستقلات ا اور ب ساقط کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر^2 صا}{فر لا^2} = ٠ \quad \ldots\ldots (۸)$$

مثال ۵۔ ابتدائی $(لا - عہ)^2 + (صا - بہ)^2 = ا^2$ ……(۹)
میں سے عہ اور بہ ساقط کرنے سے مساوات

$$ا^2 \left(\frac{فر^2 صا}{فر لا^2}\right)^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{فر صا}{فر لا}\right)^2 \right\}^3 \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

حاصل ہوتی ہے ۔عمل کی تفصیل دفعہ ۱۸۹ میں دیگئی ہے۔

اوپر کے اعمال کی ہندسی تعبیر ہوسکتی ہے۔ ابتدائی میں اختیاری مستقلوں کے بدلنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں وہ منحنیوں کے کسی قبیل یا نظام کو ظاہر کرتی ہیں۔ تفرقی مساوات (جس میں یہ مستقلات نہیں شریک ہوتے) ان تمام منحنیوں کی کسی خاص مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے۔ مثلاً مثال (۲) میں ابتدائی 'مساوی مکافیوں کے ایسے قبیل کو ظاہر کرتا ہے جنکے محور، لا محور پر منطبق ہوتے ہیں لیکن انکے راس مختلف نقطوں پر ہیں۔ تفرقی مساوات (۴) ان تمام منحنیوں کی ایک مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے اور وہ مشترک خاصیت یہ ہے کہ زیر عماد دئے ہوئے مستقل ۲ ا کے مساوی ہے۔

نیز مثال (۵) کے ابتدائی میں اگر عہ اور بہ کو بدلا جائے تو دئے ہوئے ۱۰۳
نصف قطر ا کے دائروں کا ایک دوہرا لامتناہی نظام حاصل ہوتا ہے ان دائروں کے مرکز مستوی لا صا میں کہیں بھی ہوسکتے ہیں۔ تفرقی مساوات اس خاصیت کو ظاہر کرتی ہے کہ نصف قطر انحنا ہر جگہ مستقل ا کے مساوی ہے۔ دفعہ ۱۳۵ دیکھو۔

حرکیات سے اور مثالیں دیجا سکتی ہیں۔

مثال ۷۔ اگر ابتدائی $لا = \frac{1}{2} ج ت^2 + ا ت + ب$ ……(۱۱)
میں ا اور ب کو بدلا جائے تو خطی حرکتوں کا ایک خاص گروہ یا جماعت حاصل ہوتی ہے
تفرقی مساوات $\frac{فر^2 لا}{فر ت^2} = ج$ ……(۱۲)

اس گروہ کی اس مشترک خاصیت کو ظاہر کرتی ہے کہ اسراع کی مستقل قیمت ج ہے۔

مثال ۷۔ نیز ابتدائی لا = ا جتا ن ت + ب جب ن ت ...(۱۳)

سے مساوات $\frac{فر^2 لا}{فرت^2} = -ن^2 لا$ ....(۱۴)

حاصل ہوتی ہے۔ یہ تفرقی مساوات اس بات کو بیان کرتی ہے کہ ابتدائی حل سے حاصل شدہ حرکت میں اسراع، لا کے مبداء کی جانب ہے اور اسراع کو مبدأ سے فاصلہ کیساتھ مستقل نسبت $ن^2$ ہے۔

مذکورۂ بالا مثالوں سے یہ بالکل ظاہر ہے کہ کسی ایسے ابتدائی رشتہ سے جس میں لا، ما اور ایک یا ایک سے زیادہ اختیاری مستقل ت شامل ہوں ابتدائی تفرقی مساوات کس طرح حاصل ہوسکتی ہے۔ عملی طور پر عموماً اس سوال کا عکس درپیش ہوتا ہے یعنی متغیروں میں عام سے عام ایسا رشتہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے جو دی ہوئی تفرقی مساوات کو پورا کرے۔

مثلاً اگر ہندسہ کی یا حرکیات کی کوئی عام خاصیت ہو جس کو تفرقی مساوات کی شکل میں بیان کیا گیا ہے تو ہم منحنیوں کے اس پورے قبیل کو یا حرکتوں کے اس گروہ کو دریافت کرنا چاہتے ہیں جو یہ خاصیت رکھتے ہوں۔

دی ہوئی تفرقی مساوات سے، متغیروں میں عام رشتہ دریافت کرنیکے عمل کو مساوات کا "حل کرنا" یا "تکمیل کرنا" کہتے ہیں۔ اس عام رشتہ میں مستقلوں کی مناسب تعداد کا موجود ہونا ضروری ہے۔ اس "نتیجہ" کو ہم "عام حل" یا "کامل ابتدائی" کہینگے۔ متغیروں میں کوئی خاص رشتہ جو مساوات کو پورا کرے "خاص حل" کہلاتا ہے۔

۱۵۲ — پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

پہلے رتبہ کی عام تفرقی مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$ف\left(لا، ما، \frac{فرما}{فرلا}\right) = \quad ......(۱)$$

اس مساوات میں یہ مضمر ہے کہ ما متغیر لا کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ مسلسل ہے۔

ایک اختیاری مستقل والے ابتدائی سے پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات کے بنانیکے طریقے سے (جو دفعہ ۱۵۱ میں بتایا گیا ہے) یہ خیال پیدا ہوتا ہے کہ مساوات (۱) کا عام حل ہر صورت میں لا، ما اور ایک اختیاری مستقل پر مشتمل ہوگا۔ اور دراصل یہ بات صحیح ہے۔ مگر بعض صورتوں میں مساوات کا نادر حل (دفعہ ۱۶۱) ہوتا ہے جس میں اختیاری مستقل نہیں ہوگا۔ اس امر کا باقاعدہ ثبوت مشکل ہے۔ اور اسکو یہاں نظر انداز کرنا بیجا نہ ہوگا کیونکہ اُن تمام صورتوں میں جنکے تکمل کے عملی طریقے دریافت ہو چکے ہیں ان کے عمل سے ظاہر ہو جاتا ہے کہ حل مذکورہ بالا نوعیت کا ہے۔

عام سوالات میں مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کا منطق صحیح جبریہ تفاعل ہوگا یا اسی شکل میں لایا جا سکیگا۔ مساوات کا "درجہ" اس میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی بڑی سے بڑی قوت سے مقرر کیا جاتا ہے۔

پہلے درجہ کی عام مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{م} + \text{ن}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0 \qquad (۲)$$

یا

$$\text{م فر لا} + \text{ن فر ما} = 0 \qquad (۳)$$

جس میں م اور ن متغیرون لا، ما کے دئے ہوئے تفاعل ہیں نیز شکل (۲) اس کے معادل ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{فہ}\,(\text{لا، ما}) \qquad (۴)$$

اگر لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے فہ (لا، ما) حقیقی اور وحید القیمت ہے تو مستوی لا ما کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں مساوات (۴) سے

ایک خاص سمت حاصل ہوگی۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ ایک نقطہ مستوی کے کسی مقام سے شروع ہوکر ہمیشہ اس طور پر حاصل شدہ سمت میں حرکت کرتا جائے تو یہ ایک منحنی مرتسم کریگا جو دی ہوئی تفرقی مساوات کا ایک خاص حل ہوگا۔ ایسے منحنیوں کے مجموعہ سے ایک واحد لاتناہی نظام حاصل ہوگا۔ اس نظام کے ہر منحنی کا تعین اس نقطہ سے ہوسکیگا جہاں پر یہ منحنی ایک اختیاری خط مستقیم کو قطع کرتا ہے۔ نیز اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں نظام کے کوئی دو منحنی ایک دوسرے کو قطع نہیں کرینگے۔

۴۸۵ پس ہمیں اس امر کا کچھ ذہنی ثبوت حاصل ہوگیا کہ مساوات (۴) کے حل میں صرف ایک اختیاری مستقل ہوگا*۔

اب ہم مختلف صورتوں میں مساوات (۴) کے حل کے معلومہ طریقوں پر غور کرینگے۔

۱۵۳۔ حل کرنے کے طریقے۔ ایک متغیر غائب۔

(آ) شکل $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف (لا)}$ .... (۱)

جس میں ما تصریحی طور پر موجود نہیں ہے صرف سادہ تکمل سے حل ہوسکتا ہے۔ مثلاً $\text{ما} = \int \text{ف (لا) فر لا} + \text{ج}$ .... (۲)

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

(ب) مساوات $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف (ما)}$ .... (۳)

جس میں لا تصریحی طور پر موجود نہیں ہے ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{ف (ما)}} = \text{فر لا}$$

[* اس کا باقاعدہ ثبوت کوشی نے دیا ہے۔]

جس سے $$\int \frac{\text{فرما}}{\text{ف (ما)}} = \text{لا} + \text{ج} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مثال :- وہ منحنی دریافت کرو جن میں زیر مماس مستقل ا ہے۔

اب دفعہ ۶۰ سے $$\text{ما} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ا}$$

یا $$\frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اس لئے $$\text{لوک ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

یا $$\text{ما} = \text{ب}\ \text{ھو}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

جہاں $\text{ب} = \text{ھو}^{\text{ج}}$ اختیاری مستقل ہے۔

۱۵۴- متغیر جدائی پذیر-

اس کی عام شکل ہے $$\text{فا (لا)} + \text{ف (ما)} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad \ldots (۱)$$

یا $$\text{فا (لا) فرلا} + \text{ف (ما) فرما} = ۰ \quad \ldots (۲)$$

اگر مساوات اس شکل میں لائی جا سکتی ہے تو کہتے ہیں کہ متغیر جدائی پذیر ہیں ۳۸۶
ظاہر ہے کہ اس کا حل ہے

$$\int \text{فا (لا) فرلا} + \int \text{ف (ما) فرما} = \text{ج} \quad \ldots (۳)$$

مثال ۱- وہ منحنی دریافت کرو جنکے تمام عماد ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

اگر اس نقطہ کو قائم محوروں کا مبدأ مان لیں تو دی ہوئی شرط سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$$

یا لا فر لا + ما فر ما = ۰ ....(۴)

اس لئے لا² + ما² = ج ....(۵)

پس مطلوبہ منحنی ایسے دائرے ہیں جنکا مرکز مبدا ہے۔

مثال ۲۔ ایسا منحنی دریافت کرو کہ کسی بیرونی نقطہ سے اس کے تمام مماسں مساوی ہوں۔

اگر اس کے ایک ثابت مماس کو ابتدائی خط فرض کریں اور نقطہ تماس کو مبداء تو ابتدائی خط کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے دونوں مماس کے مساوی ہونے کی شرط دفعہ ۶۳ کی ترقیم کے مطابق فما = طما ہے

اور اس لئے (ر فر طما) / (فر ر) = مس طما ....(۶)

پس (فر ر) / ر = مم طما فر طما ....(۷)

اور لوک ر = لوک جب طما + ج

یا ر = ا جب طما ....(۸)

جہاں ا اختیاری مستقل ہے۔

اس لئے صرف دائرہ ہی ایسا منحنی ہے جو دی ہوئی شرط کو پورا کرتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک ذرہ ایسی قوت کشش کے زیر عمل جو ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہے۔ اس کی حرکت کی

مساوات یہ ہے

$$\text{ع}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{مہ}}{\text{لا}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{ع}^{2} = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}} + \text{مر} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)\ \text{مر (مستقل)}$$

اگر لا = ∞ کے لئے ع صفر ہو تو مر = ۰

ایسی صورت میں قوت کے مرکز سے فاصلہ ر پر ذرہ کی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۲مہ}}{\text{ر}}}$

یا $\sqrt{\text{۲ج ر}}$ ہوگی اگر ج = $\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^{2}}$

پس حالت سکون سے، بہت بڑے فاصلے سے گزرنے والا ذرہ جسکے خلاف ۳۸۷
کوئی مزاحمت عمل نہ کرے اس رفتار سے سطح زمین پر پہنچیگا جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے اور ج سطح پر اسراع بجاذبہ ارض ہے۔

مثال ۴ — یکساں افقی بوجھہ والے معلق پل میں زنجیر کی شکل اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ منحنی کے کوئی دو مماس وتر تماس کی تنصیف کرنے والے انتصابی پر قطع کرتے ہیں۔

اگر زیر ترین نقطہ قائم محوروں کا مبدأ لیا جائے اور اس نقطہ کا مماس لا محور ہو تو منحنی کے کسی نقطہ کا زیر مماس نصف فصلہ کے مساوی ہوگا۔

$$\text{پس}\quad \text{ما} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2}\,\text{لا}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = ۲\,\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

اس کا تکمل ہے لوگ ما = ۲ لوگ لا + مر (مستقل)

$$\text{یا}\quad \text{ما} = \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

جہاں لر اختیاری ہے۔
یعنی زنجیر کی شکل قطع مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے۔

۱۵۵۔ ٹھیک مساواتیں۔

دفعہ گذشتہ دراصل ٹھیک مساوات کے عنوان کے ماتحت آتی ہے۔

مساوات م فرلا + ن فرما = ۰ .... (۱)

اس صورت میں "ٹھیک" تفرقی مساوات کہلائے گی جبکہ م اور ن بالترتیب $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ کی شکل کے ہوں۔

مساوات $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ فرلا + $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ فرما = ۰ .... (۲)

معادل ہے فرع = ۰ .... (۳)

کے اور اسکا تکمل ہے ع = ج .... (۴)

جہاں ج اختیاری مستقل* ہے۔

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ (۱) کے نمونہ کی ہر مساوات یا تو 'ٹھیک' ہے یا مناسب تکمل جزو ضربی سے ضرب دیکر "ٹھیک" بنائی جا سکتی ہے' نیز ایسے اجزائے ضربی کی تعداد غیر محدود ہے' کیونکہ اگر ہم فرض کرلیں کہ مساوات (۱) شکل (۳) میں لائی جا چکی ہے تو اسے ف′ (ع) سے ضرب دینے پر بھی یہ 'ٹھیک' رہے گی. جہاں ف (ع)' متغیر ع کا کوئی تفاعل ہے۔

ف′ (ع) فرع = ۰ .... (۵)

کا تکملہ ہے ف (ع) = ج .... (۶)

اور یہ صریحاً (۴) کے معادل ہے۔

[* اس بات کے دریافت کرنیکا قاعدہ کہ پہلے درجہ کی دی ہوئی مساوات ٹھیک ہے یا نہیں دفعہ ۱۹۳ میں دیا گیا ہے]

۳۸۸ مثال ۱ — $(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} + \text{گ})\,\text{فرلا} + (\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ف})\,\text{فرما} = 0$ .... (۷)

یہ معادل ہے

$$\text{فر}(\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ما}) = 0 \quad \text{.......(۸)}$$

کہ پس $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + 2\,\text{گ}\,\text{لا} + 2\,\text{ف}\,\text{ما} = \text{ج}$ ...... (۹)

مثال ۲ — $\text{لا}\,\text{فرلا} + \text{ما}\,\text{فرما} = \text{ک}\,(\text{لا}\,\text{فرما} - \text{ما}\,\text{فرلا})$ ...... (۱۰)

یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\text{فر}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) = 2\,\text{ک}\,\text{لا}^2\,\text{فر}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) \quad \text{..........(۱۱)}$$

اور اس لئے $(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$ سے تقسیم کرنے پر ٹھیک مساوات بنجاتی ہے ۔ پس

$$\frac{\text{فر}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \frac{2\,\text{ک}\,\text{فر}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)}{\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}^2} + 1} \quad \text{........(۱۲)}$$

اس لئے تکمل کرنے پر

$$\text{لوک}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) = 2\,\text{ک}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) + \text{ج} \quad \text{.....(۱۳)}$$

مساوات (۱۰) ذیل کیطرح بھی حل کیجا سکتی ہے ۔

ابدال $\text{لا} = \text{ر}\,\text{جم}\,\text{طہ}$ اور $\text{ما} = \text{ر}\,\text{جب}\,\text{طہ}$ ...... (۱۴)

سے $\text{لا}\,\text{فرلا} + \text{ما}\,\text{فرما} = \text{ر}\,\text{فرر}$ اور $\text{لا}\,\text{فرما} - \text{ما}\,\text{فرلا} = \text{ر}^2\,\text{فرطہ}$ ...... (۱۵)

اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فرر}}{\text{ر}} = \text{ک}\,\text{فرطہ} \quad \text{...........(۱۶)}$$

پس $\text{لوک}\,\text{ر} = \text{ک}\,\text{طہ} + \text{ج}$ .... (۱۷)

اور یہ صریحاً (۱۳) کے معادل ہے ۔

مثال ۳ — ایسے گردشی مجسم کی شکل دریافت کرو جس میں کسی عمودی تراش سے

کٹے ہوئے حجم کا اوسط مرکز سطح تقاطع سے محور کے طول کے $\frac{۱}{\text{ن}}$ فاصلے پر واقع ہو۔
اگر محور تشاکل کو لا محور لیا جائے اور ما مکون منحنی کا معین ہو تو دفعہ ۱۱۶ (۱۱) کی رو سے

$$\frac{\int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{لا}\ \text{ما}^2\ \text{فرلا}}{\int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{ما}^2\ \text{فرلا}} = \left(۱ - \frac{۱}{\text{ن}}\right) \text{ضا}$$

یا $$\int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{لا}\ \text{ما}^2\ \text{فرلا} = \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\ \text{ضا} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{ما}^2\ \text{فرلا} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

۴۸۹ جہاں ضا کاٹنے والے عمودی مستوی کا فاصلہ ہے۔
پس اگر "عا" اس سطح تقاطع کا نصف قطر ہو تو دفعہ ۹۲ کے قاعدے کی رو سے بلحاظ ضا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ضا}\ \text{عا}^2 = \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}}\ \text{ضا}\ \text{عا}^2 + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}} \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{ما}^2\ \text{فرلا}$$

یا $$\text{ضا}\ \text{عا}^2 = (\text{ن}-۱) \int_{\text{ب}}^{\text{ضا}} \text{ما}^2\ \text{فرلا} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

دوبارہ تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرضا}}(\text{ضا}\ \text{عا}^2) = (\text{ن}-۱)\ \text{عا}^2 \quad \ldots\ldots (۲۰)$$

جس سے $$\frac{\text{فر}(\text{ضا}\ \text{عا}^2)}{\text{ضا}\ \text{عا}^2} = (\text{ن}-۱) \frac{\text{فرضا}}{\text{ضا}} \quad \ldots\ldots (۲۱)$$

اور تکمل کرنے سے $\text{ضا}\ \text{عا}^2 = \text{ا}\ \text{ضا}^{\text{ن}-۱}$

اس لئے ابتدائی منحنی $\text{ما}^2 = \text{ا}\ \text{لا}^{\text{ن}-۲}$ ...... (۲۲) کے نمونے کا ہے۔
چونکہ ہم نے بلحاظ ضا کے دو مرتبہ تفرق کیا ہے، اس لئے حل کردہ تفرقی مساوات

ابتدائی سوال سے ذرا زیادہ عام ہے۔ درحقیقت اگر (۱۸) سے دونوں محدود تکملوں کے نیچے کی حدود بجائے صفر کے کچھ اور مستقل کر دئے جائیں تو بھی تفرقی مساوات وہی حاصل ہوگی۔ اس لئے تجربی طور پر اس بات کی تصدیق ضروری ہے کہ آیا حاصل شدہ حل ابتدائی مساوات کو پورا کرتا ہے یا نہیں۔ یہ تصدیق ن > ۲ کے لئے آسانی سے ہو سکتی ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ن = ۳ تو جسم گردشی مکافی نما ہے اور اگر ن = ۴ تو یہ مخروط ہے۔

۱۵۶۔ متجانس مساواتیں۔

فرض کرو کہ مساوات $\text{م} + \text{ن} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$ میں م اور ن متغیرات لا، ما کے ایک ہی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔

اس صورت میں کسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ صرف $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کا تفاعل ہے۔ اور اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) \quad \cdots\cdots (۱)$$

اگر $\text{ما} = \text{لا و}$ تو

$$\text{لا} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و} = \text{ف(و)} \quad \cdots\cdots (۲)$$

۸۹۰ اس میں متغیر لا، و جدائی پذیر ہیں اور اسلئے

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فر و}}{\text{ف(و)} - \text{و}} \quad \cdots\cdots (۳)$$

پس

$$\text{لوک لا} = \int \frac{\text{فر و}}{\text{ف(و)} - \text{و}} + \text{ج} \quad \cdots\cdots (۴)$$

تکمل کے بعد اس میں $\text{و} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ لکھنا ہوگا۔

مثال:۔ $(\text{لا}^2 - \text{ما}^2)\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲\,\text{لا}\,\text{ما} = \ldots\ldots\ (۵)$

اس میں $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \dfrac{۲\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}}{۱ - \dfrac{\text{ما}^2}{\text{لا}^2}} \ldots\ldots\ (۶)$

اس لئے $\text{لا}\dfrac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و} = \dfrac{۲\,\text{و}}{۱ - \text{و}^2}$

یعنی $\text{لا}\dfrac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \dfrac{\text{و}(۱ + \text{و}^2)}{۱ - \text{و}^2}$

اس لئے $\dfrac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \dfrac{(۱ - \text{و}^2)\,\text{فرو}}{\text{و}(۱ + \text{و}^2)} = \left[\dfrac{۱}{\text{و}} - \dfrac{۲\,\text{و}}{۱ + \text{و}^2}\right]\text{فرو} \ldots (۷)$

تکمل کرنے سے لوک لا = لوک و ـ لوک (۱ + و²) + مستقل

یا مساوی ہے $\text{لا}(۱ + \text{و}^2) = \text{ج}\,\text{و}$

یعنی $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}\,\text{ما} \ldots\ldots\ (۸)$

اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ متجانس تفرقی مساوات کا عام حل ' متشابہ ' اور متشابہ طور پر رکھے ہوئے منحنیوں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جس میں متشابہت کا مرکز مبداء ہے کیونکہ مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ جہاں منحنیات ' مبداء میں گزرنے والے کسی اختیاری خط $\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{م}$ کو قطع کرتے ہیں وہاں $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت ہر منحنی کے لئے وہی ہے یعنے مماس متوازی ہیں۔

مثلاً مذکورہ بالا مثال میں مساوات کا حل ' دائروں کے ایک قبیل کو ظاہر کرتا ہے جو لا محور کو مبداء پر مس کرتے ہیں۔

اب اگر (۴) میں ج = لوک ج رکھیں تو $\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}$ یا و ' متغیر $\dfrac{\text{لا}}{\text{ج}}$ کے تفاعل کی شکل میں دریافت ہوتا ہے۔ بالفاظ دیگر ابتدائی حل لا ' ما اور ج میں متجانس ہے

اور اِس لئے یہ شکل ذیل کا ہوگا

$$\text{فا}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ج}} ، \frac{\text{ما}}{\text{ج}}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots (۹)$$

یہ امر مذکورۂ بالا ہندسی خاصیت کے مطابق ہے کیونکہ اگر لا ، ما اور ج کو ایک ہی نسبت میں بدلا جائے تو مساوات (۹) میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔ یعنی ج کی قیمت کے بدل دینے سے منحنی کا صرف پیمانہ بدل جاتا ہے۔

۳۹۱ ## ۱۵۷ — مستقل سروں والی پہلے رتبہ کی خطی مساوات۔

کوئی مساوات جس میں ما اور اسکے مشتق صرف پہلے درجہ میں شریک ہوتے ہیں، خطی مساوات کہلاتی ہے۔ پس پہلے رتبہ کی خطی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جہاں پ اور ق ، لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔

پہلے ہم اِس صورت پر غور کرینگے جبکہ پ مستقل ہو کیونکہ بعد میں یہ صورت کارآمد ثابت ہوگی۔

اب مساوات ہے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ا ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (۲)$

اگر ق = ۰ تو دفعہ ۳۸ سے حل ہے

$$\text{ما} = \text{ج قو}^{\text{ا لا}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جزو ضربی $\text{قو}^{-\text{ا لا}}$ مساوات (۲) کے دائیں جانب کو ٹھیک مشتق بنا دیتا ہے۔ اِس سے عام صورت (جبکہ ق $\neq$ ۰) کے حل کی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

پس مساوات (۲) معادل ہے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{ما}\right) = \text{ق قو}^{-\text{ا لا}} \quad \ldots\ldots (۴)$

کے اور اسلئے $\text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{ما} = \int \text{ق}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{فرلا} + \text{ج}$

یعنی $\text{ما} = \text{قو}^{\text{ا لا}} \int \text{ق}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{فرلا} + \text{ج}\ \text{قو}^{\text{ا لا}}$ ...... (۵)

مروجہ دستور (دیکھو دفعہ ۱۶۶) کے مطابق (۵) کے بائیں جانب کی پہلی رقم کو خاص تکملہ اور دوسری رقم کو متمم تفاعل کہتے ہیں۔

ذیل کی صورتیں اہم ہیں

(آ) اگر $\text{ق} = \text{ح}\ \text{قو}^{\text{ب لا}}$ .... (۶)

تو $\int \text{ق}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{فرلا} = \text{ح} \int \text{قو}^{(\text{ب}-\text{ا})\text{لا}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{ح}}{\text{ب}-\text{ا}} \times \text{قو}^{(\text{ب}-\text{ا})\text{لا}}$

اور $\text{ما} = \frac{\text{ح}}{\text{ب}-\text{ا}} \times \text{قو}^{\text{ب لا}} + \text{ج}\ \text{قو}^{\text{ا لا}}$ .... (۷)

دیکھنے سے فوراً تصدیق ہو سکتی ہے کہ بائیں جانب کی پہلی رقم، دی ہوئی مساوات کا خاص تکملہ ہے۔

(ب) نتیجہ (۷) کی تصحیح کی ضرورت ہوگی جبکہ $\text{ب} = \text{ا}$

یعنی $\text{ق} = \text{ج}\ \text{قو}^{\text{ا لا}}$ .... (۸)

اس صورت میں $\int \text{ق}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{فرلا} = \text{ح} \int \text{فرلا} = \text{ح}\ \text{لا}$ ۹۲

اور $\text{ما} = \text{ح}\ \text{لا}\ \text{قو}^{\text{ا لا}} + \text{ج}\ \text{قو}^{\text{ا لا}}$ .... (۹)

(ج) اگر $\text{ق} = \text{ح}\ \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{قو}^{\text{ا لا}}$ .... (۱۰)

تو $\int \text{ق}\ \text{قو}^{-\text{ا لا}}\ \text{فرلا} = \text{ح} \int \text{لا}^{\text{ن}}\ \text{فرلا} = \text{ح} \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$

اور $\text{ما} = \text{ح} \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \times \text{قو}^{\text{ا لا}} + \text{ج}\ \text{قو}^{\text{ا لا}}$ .... (۱۱)

مثال (۱)۔ اگر کسی ذرہ پر مزاحمت رفتار کے متناسب ہو اور وقت کے معلومہ تفاعل کے مساوی کوئی قوت اس پر عمل کر رہی ہو تو اس حرکت کی مساوات ذیل کی شکل کی ہوگی۔

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} + \text{ک ع} = \text{ف(ت)} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

اس کا تکملہ ہے

$$\text{ع} = \text{م}\,\text{قو}^{-\text{ک ت}} + \text{قو}^{-\text{ک ت}} \int \text{قو}^{\text{ک ت}}\, \text{ف(ت)}\, \text{فرت} \quad \ldots (۱۳)$$

مثلاً اگر $\text{ف(ت)} = \text{ج}$

$$\text{تو} \quad \text{ع} = \text{م}\,\text{قو}^{-\text{ک ت}} + \frac{\text{ج}}{\text{ک}} \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

یہ نتیجہ تفرقی مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھنے سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\text{ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right) + \text{ک}\left(\text{ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{ع} - \frac{\text{ج}}{\text{ک}} = \text{م}\,\text{قو}^{-\text{ک ت}} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

جیسے ت بڑھتا ہے ع متقارباً انتہائی قیمت $\frac{\text{ج}}{\text{ک}}$ اختیار کرتا ہے۔

مثال (۲)۔ اگر (لا) طاقت کی برقی رو ایک دور میں سے بہہ رہی ہو اور دور کی ذاتی امالیت کی شرح ل ہو اور مزاحمت ز اور دور میں قوت محرکۂ برقی ق ہو تو مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{ل}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ز لا} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

اگر ق مستقل ہو تو اس کا حل ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ز}} + \text{ج}\,\text{قو}^{-\frac{\text{زت}}{\text{ل}}} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

اس لئے رو کی مقدار انتہائی مستقل قیمت $\frac{ق}{ز}$ کی طرف مائل ہوتی ہے۔

اب مثلاً فرض کرو کہ وقت ت = ۰ پر دور مکمل کر دیا گیا ہے، تو ج کو اس شرط سے دریافت کرنا ہے کہ لا = ۰ جبکہ ت = ۰۔ اس سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{ق}{ز} - \frac{ق}{ز} قو^{-\frac{زت}{ل}} \qquad \ldots\ldots (۱۹)$$

بائیں جانب کی دوسری رقم دور کے عین مکمل کرنے کے وقت کی زائد رو کو ظاہر کرتی ہے۔

۲۹۴ نیز اگر $ق = ق_{.}\ جم(پ ت + ظہ) \qquad \ldots\ldots (۲۰)$

$$تو \quad \frac{د}{دت}\left(لا\ قو^{\frac{زت}{ل}}\right) = \frac{ق_{.}}{ل} قو^{\frac{زت}{ل}} جم(پ ت + ظہ)$$

اور اسکو مکمل کر کے $قو^{\frac{زت}{ل}}$ سے تقسیم کرنے پر

$$لا = ج\ قو^{-\frac{زت}{ل}} + \frac{ق_{.}}{ل} قو^{-\frac{زت}{ل}} \int قو^{\frac{زت}{ل}} جم(پ ت + ظہ)\, دت$$

$$= ج\ قو^{-\frac{زت}{ل}} + \frac{ق_{.}}{ز^{۲} + پ^{۲} ل^{۲}} \left[ز\ جم(پ ت + ظہ) + پ ل\ جب(پ ت + ظہ)\right] \qquad \ldots\ldots (۲۱)$$

دفعہ ۸۰ (۱۴) دیکھو۔

پس جیسے ت بڑھتا ہے رو ذیل کی یکساں اہتزازی قیمت اختیار کر لیتی ہے

$$لا = \frac{ق_{.}}{\sqrt{ز^{۲} + پ^{۲} ل^{۲}}} جم(پ ت + ظہ - ظہ_{۱}) \qquad \ldots\ldots (۲۲)$$

$$جہاں \quad ظہ_{۱} = مس^{-۱} \frac{پ ل}{ز} \qquad \ldots\ldots (۲۳)$$

اس لئے ذاتی امالیت ل کا اثر یہ ہے کہ یہ رو کے حیطہ کو نسبت $\frac{ز}{(ز^{۲} + پ^{۲} ل^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$ میں

کم کر دیتی ہے اور ہیئت کو بطور ظلہا کے پیچھے ہٹا دیتی ہے -

۱۵۸- پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات -

اب ہم پہلے رتبہ کی عام خطی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (1)$$

پر غور کرینگے -

$$\text{اگر ق} = 0 \text{ تو } \frac{1}{\text{ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ} = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\text{اس لئے لوگ ما} + \int \text{پ فر لا} = \text{ا}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ما فو}^{\int \text{پ فرلا}} = \text{ج} \quad \ldots\ldots (3)$$

اس سے ظاہر ہے کہ $\text{فو}^{\int \text{پ فرلا}}$ نتیجہ (۱) کا متکمل جزو ضربی ہے کیونکہ

$$\text{فو}^{\int \text{پ فرلا}} \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{پ ما} \right) = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \left(\text{ما فو}^{\int \text{پ فرلا}} \right)$$

اس لئے مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \left(\text{ما فو}^{\int \text{پ فرلا}} \right) = \text{ق فو}^{\int \text{پ فرلا}} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\text{اور تکمل کرنے سے} \quad \text{ما فو}^{\int \text{پ فرلا}} = \int \text{ق فو}^{\int \text{پ فرلا}} \text{ فرلا} + \text{ج} \quad \ldots (5)$$

متکمل جزو ضربی عموماً مساوات کے صرف دیکھنے سے ہی معلوم ہو سکیگا اور اوپر کے قاعدہ کی ضرورت نہیں ہوگی -

$$\text{مثال (۱)-} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما ہم لا} = \text{۲ جم لا} \quad \ldots\ldots (6)$$ ۲۹۴

یہاں $\text{پ} = \text{مم لا}$ ، $\int \text{پ فرلا} = \text{لوک جب لا}$ ،

$$\text{و}^{\int \text{پ فرلا}} = \text{جب لا}$$

اس لئے جب لا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{ما جب لا}) = \text{۲ جب لا جم لا} \quad \ldots\ldots(۷)$$

یا $\text{ما جب لا} = \text{جب}^{۲}\,\text{لا} + \text{ج}$

$$\text{اس لئے}\quad \text{ما} = \text{جب لا} + \frac{\text{ج}}{\text{جب لا}} \quad \ldots\ldots(۸)$$

$$\text{مثال (۲)} - (۱ - \text{لا}^{۲})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا ما} = ۱ \quad \ldots\ldots(۹)$$

$(۱ - \text{لا}^{۲})$ سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}\,\text{ما} = \frac{۱}{۱ - \text{لا}^{۲}} \quad \ldots\ldots(۱۰)$$

یہاں $\text{پ} = \frac{-\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$ ، $\int \text{پ فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(۱ - \text{لا}^{۲})$ ، $\text{و}^{\int \text{پ فرلا}} = \sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}$

نتیجہ (۱۰) کو متکمل جزو ضربی کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}\,\text{ما} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}\,\text{ما}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} \quad \ldots\ldots(۱۱)$$

اور تکمیل کرنے سے $\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}\,\text{ما} = \text{جب}^{-۱}\,\text{لا} + \text{ج}$

$$\text{یعنی}\quad \text{ما} = \frac{\text{جب}^{-۱}\,\text{لا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}} \quad \ldots\ldots(۱۲)$$

$$\text{مثال (۳)}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ن}\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{لا}^{۳} \quad \ldots\ldots(۱۳)$$

متکمل جزو ضربی واضح ہے اور عمل یہ ہے

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ما} = \text{لا}^{\text{م}+\text{ن}}$$

یا

$$\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ما} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+\text{ن}+1}}{\text{م}+\text{ن}+1} + \text{ج}$$

اس لئے

$$\text{ما} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+1}}{\text{م}+\text{ن}+1} + \text{ج}\,\text{لا}^{-\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

۱۵۹۔ قائم خطوط رمی۔

۳۹۵

فرض کرو کہ واحد لاتناہی منحنیات کا ایک قبیل ہے

$$\text{فا}(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \text{ج}) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں ج متبدل ہے۔ ایسے منحنیات کی مساوات دریافت کرنی ہے جو اِس قبیل کو ہر جگہ زاویہ قائمہ پر قطع کریں۔

پہلے ہم قبیل کی تفرقی مساوات مرتب کرتے ہیں اس کے لئے (۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کرکے ج کو ساقط کرنا چاہیئے۔ دفعہ (۱۵) دیکھو۔

اگر دو منحنی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں اور اگر نقاط تقاطع پر اِن کے مماس لا محور سے زاویہ سا اور سا' بنائیں تو

$$\text{سا} - \text{سا}' = \pm\frac{\pi}{2}$$

اور اسلئے

$$\text{مس}\ \text{سا} = -\ \text{مم}\ \text{سا}'$$

پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے $-\frac{1}{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}}$ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

بطریق دیگر:۔ اگر فر لا اور فر ما، قبیل (۱) کے کسی منحنی کے چھوٹے جزو کے ظل ہوں تو

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\text{فر لا} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\text{فر ما} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

پس اگر فرلا اور فرما علی الترتیب منحنی کے نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنیوالے چھوٹے سے جزو کے ظل ہوں تو

$$\frac{\text{فرلا}}{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}} = \frac{\text{فرما}}{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}} \quad \ldots\ldots(۳)$$

اور قائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات (۱) اور (۳) میں سے ج کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر منحنیات کے دئے ہوئے قبیل کی مساوات قطبی محددوں میں یہ ہو

$$\text{ف (ر، طہ، ج)} = ۰ \quad \ldots\ldots(۴)$$

اور اگر منحنی اور خط رمی کے مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ بالترتیب زاویہ فہ اور فہ‌ا بنائیں تو مذکورہ بالا طریقہ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{مس فہ} = -\text{مم فہ‌ا}$$

پس ایک قبیل کی تفرقی مساوات دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات میں $\text{ر}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}}$ کی بجائے $-\frac{۱}{\text{ر}}\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}$ لکھنے سے حاصل ہوگی

اب (۴) کو تفرق کرنے سے ۳۹۶

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}}\ \text{فرر} + \frac{۱}{\text{ر}}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}} \times \text{رفرطہ} = ۰ \quad (۵)$$

اس لئے خط رمی کے لئے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ر}}\ \text{رفرطہ} - \frac{۱}{\text{ر}}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}}\ \text{فرر} = ۰ \quad (۶)$$

ج کو (۴) اور (۶) میں سے ساقط کرنے سے مطلوبہ قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مثال (۱) قائم زائدوں $\text{لا ما} = \text{ج} \quad \ldots\ldots(۷)$

کے قائم خطوط رمی دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے $\text{لا فرما} + \text{ما فرلا} = ۰ \quad \ldots\ldots(۸)$

پس خطوط رمی کے لئے   لا فرلا − ما فرما = ۰ .... (۹)

اس لئے   لا^{2} − ما^{2} = ج .... (۱۰)

یہ مساوات قائم زائدوں کے قبیل کو ظاہر کرتی ہے جس کے محاور سمت میں پہلے قبیل کے متقاربوں پر منطبق ہوتے ہیں۔

مثال (۲) دائروں   لا^{2} + ما^{2} + ۲ مہ ما − ک^{2} = ۰ ...... (۱۱)

(جہاں مہ متبدل ہے) کے قائم خطوط رمی دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے   لا فرلا + (ما + مہ) فرما = ۰

پس رمی کے لئے   لا فرما − (ما + مہ) فرلا = ۰

اس مساوات اور (۱۱) میں سے مہ کے ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۲ لا ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + لا^{2} − ما^{2} − ک^{2} = ۰ ...... (۱۲)

یا   لا $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ (ما^{2}) − ما^{2} = − لا^{2} + ک^{2} ...... (۱۳)

تابع متغیر ما^{2} کے لحاظ سے یہ خطی مساوات ہے۔ دفعہ ۱۵۰ کے ضابطہ سے، یا صرف دیکھنے سے ظاہر ہے کہ تکمل جزو ضربی $\frac{1}{\text{لا}^{2}}$ ہے۔ پس اسکی مدد سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{ما}^{2}}{\text{لا}}\right) = -1 + \frac{\text{ک}^{2}}{\text{لا}^{2}}$$

اس لئے $\frac{\text{ما}^{2}}{\text{لا}}$ = − لا − $\frac{\text{ک}^{2}}{\text{لا}}$ + ۲ ل

یعنی   لا^{2} + ما^{2} − ۲ ل لا + ک^{2} = ۰ ...... (۱۴)

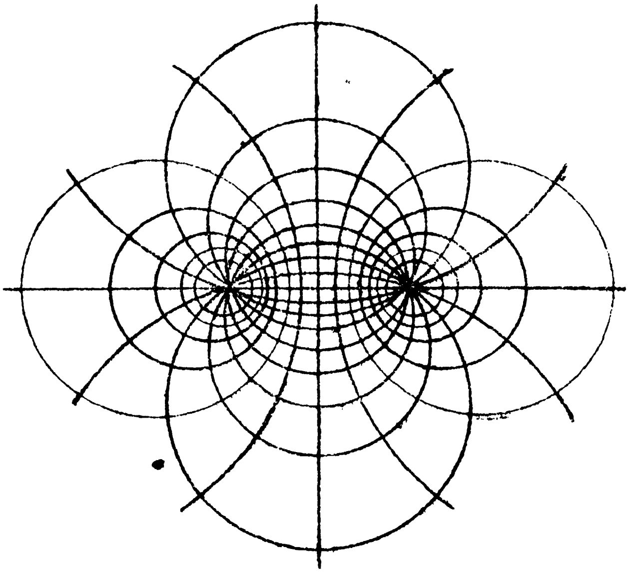
جہاں ل اختیاری ہے۔

۲۹۷ ابتدائی مساوات ہم محور دائروں کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے جو لا محور کو نقاط (± ک، ۰) پر قطع کرتے ہیں، خطوط رمی (۱۴) ہم محور دائروں کا ایک دوسرا نظام ہے جس کے "انتہائی نقطے" یہ نقطے ہیں۔ یعنی اگر رکھیں

لمہ = ± ک تو نقطے دائرے حاصل ہوتے ہیں

(لا ∓ ک)² + ما² = ۰ .... (۱۵)

شکل ۱۳۵ دیکھو۔



شکل (۱۳۵)

مثال (۳) دائرے ر = ج جم طہ .... (۱۶)

مبدا میں سے گزرتے ہیں اور انکا مرکز ابتدائی خط پر ہے اور

فر ر / ر = ـ سس طہ فر طہ .... (۱۷)

پس خطارسی کے لئے ر فر طہ = سس طہ فر ر

یعنی فر ر / ر = مم طہ فر طہ .... (۱۸)

تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لوگ ر = لوگ جب طہ + مستقل

یا ر = ج جب طہ .... (۱۹)

یہ مساوات دائروں کے ایک دوسرے نظام کو ظاہر کرتی ہے جو مبداء میں سے گزرتے ہیں اور ابتدائی خط کو مس کرتے ہیں۔

۱۶۰ - ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں - ۳۹۸

پہلے رتبہ اور ن ویں درجہ کی عام تفرقی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\text{ع}^{\text{ن}} + \text{ف}_{۱}\,\text{ع}^{\text{ن}-۱} + \text{ف}_{۲}\,\text{ع}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ف}_{\text{ن}-۱}\,\text{ع} + \text{ف}_{\text{ن}} = ۰$$

.... (۱)

جہاں $\text{ع} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ .... (۲)

اور $\text{ف}_{۱}$، $\text{ف}_{۲}$، ...... ، $\text{ف}_{\text{ن}}$ متغیروں لا، ما کے معلوم تفاعل ہیں اور عموماً یہ مان لیا جاتا ہے کہ یہ تفاعل جبریہ اور منطق ہیں۔

چونکہ مساوات (۱) ع میں ن ویں درجہ کی ہے، اس سے ظاہر ہے کہ مستوی لا ما میں کے ہر مقررہ نقطہ میں سے ابتدائی منحنیات کی ن شاخیں گزرتی ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ ان میں سے چند شاخیں خیالی ہوں یا لا اور ما کے خاص حدود کے لئے سب شاخیں خیالی ہوں نیز ممکن ہے کہ ایسے نقاط کا طریق جہاں ع کی دو مساوی قیمتیں ہیں حقیقی ہو۔ تفرقی مساوات کی اعلیٰ تحقیقات میں یہ طریق خاص اہمیت رکھتا ہے۔

مثال - دوسرے درجہ کی مساوات

$$\text{ع}^{۲} + \text{ف}\,\text{ع} + \text{ق} = ۰$$ .... (۳)

میں ع کی اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہونگی یا منطبق یا خیالی بموجب اسکے کہ $\text{ف}^{۲} \gtreqless ۴\,\text{ق}$ - اور ع کی دو مساوی قیمتوں کے نقاط کا طریق

منحنی $\text{ف}^2 = 4\text{ق}$ ہوگا۔

اگر (۱) کا دایاں رکن، بلحاظ ع کے خطی اجزاء میں تحویل ہوسکے تو

$$(\text{ع} - \text{ع}_1)(\text{ع} - \text{ع}_2)\cdots\cdots(\text{ع} - \text{ع}_\text{ن}) = 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

جہاں ع_1، ع_2 ..... $\text{ع}_\text{ن}$ متغیروں لا، ما کے معلومہ تفاعل ہیں تو

مکمل حل ذیل کی جداگانہ مساواتوں کے حل کا مجموعہ ہوگا:-

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع}_1،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع}_2 \cdots\cdots \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع}_\text{ن} \qquad \cdots\cdots(5)$$

مثال:- $\text{لا ما ع}^2 - (\text{لا}^2 - \text{ما}^2)\text{ع} - \text{لا ما} = 0 \qquad \cdots\cdots(6)$

یہ اس کے معادل ہے

$$(\text{لا ع} + \text{ما})(\text{ما ع} - \text{لا}) = 0 \qquad \cdots\cdots(7)$$

اور $\text{لا ع} + \text{ما} = 0$، $\text{ما ع} - \text{لا} = 0$ کے حل بالترتیب ہیں

$$\text{لا ما} = \text{ج}،\quad \text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ج} \qquad \cdots\cdots(8)$$

(۶) سے دی ہوئی ع کی دو قیمتوں کا حاصل ضرب (-۱) ہے اس سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ لا، ما میں سے گزرنیوالے ابتدائی منحنیات کی دو شاخیں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ دفعہ ۱۵۹ کی مثال (۱) دیکھو۔

۱۶۱ - کلیروی صورت۔ (۲۹۹)

جب دفعہ ۱۶۰ کی مساوات (۱) آسانی سے خطی اجزاء میں تحویل نہ ہوسکے تو خاص صورتوں میں اور طریقے استعمال کئے جا سکتے ہیں، لیکن ان طریقوں کا استعمال بہت محدود ہے اور اس لئے انہیں یہاں بحث میں نہیں لایا جائیگا۔ مگر کلیروی صورت کو اس سے مستثنےٰ کیا جاتا ہے کیونکہ اس کا اصول بہت سادہ ہے اور ایسے منحنیوں کی صورت میں جنکی تعریف کسی مماسی خاصیت کی بناء پر کیگئی ہو یہ شکل اکثر پیدا ہوتی ہے۔ اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے ع لکھیں تو زیر غور صورت ہوگی

ما = لا ع + ف (ع) .... (۱)

دفعہ ۶۰ میں ثابت کیا گیا ہے کہ منحنی کے مماس کے مقطوعے لا اور ما محوروں پر عا، بما ہوں تو

عا = (لا ع - ما) / ع اور بما = ما - لا ع .... (۲)

پس (۱) کی صورت کی مساوات کسی ایک مقطوعہ اور مماس کی سمت میں ربط یا دونوں مقطوعوں میں ربط کو ظاہر کرتی ہے *

اب ظاہر ہے کہ کسی خط مستقیم کی مساوات جبکہ مقطوعوں میں دیا ہوا رشتہ ہے مذکورۂ بالا ربط کو پورا کرے گی۔ ایسے خط کے ہر نقطہ پر

ع = ج .... (۳)

اور اس لئے حل ہے

ما = ج لا + ف (ج) .... (۴)

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

لیکن اس مساوات کو وہ منحنی بھی پورا کریگا جس کے مماس، قبیل (۴) کے خطوط ہیں یعنی بہ الفاظ دیگر وہ منحنی جو اس قبیل کا لفاف ہے۔ لفاف کی مساوات اس شرط سے حاصل ہوتی ہے کہ ج میں مساوات (۴) کی دو اصلیں برابر ہیں یعنی (۴) اور

لا + فَ (ج) = ۰ .... (۵)

میں ج کو ساقط کرنے سے لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ دفعہ ۱۳۹ دیکھو۔

مذکورۂ بالا حل کو دریافت کرنیکا عام طریقہ یہ ہے کہ مساوات (۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کیا جائے۔

[* مساوات معادل ہے بما = ف(- بما/عا) یا فا(عا، بما) = ۰ کے]

پس ع = فر ما / فر لا = ع + [لا + ف َ (ع)] فر ع / فر لا

اس لئے [لا + ف َ (ع)] فر ع / فر لا = ۰ .... (۶)

۴۰. اِس لئے ضروری ہے کہ فر ع / فر لا = ۰ .... (۷)

یا لا + ف َ (ع) = ۰ .... (۸)

(۷) سے حاصل ہوتا ہے کہ

ع = ج اور اس لئے ما = ج لا + ف (ج) ... (۹)

دوسرے نتیجہ (۸) اور (۱) میں سے ع کو ساقط کرنے سے لا اور ما میں ایک خاص ربط حاصل ہوتا ہے ۔ چونکہ (۱) اور (۸) میں سے ع کا حاصل اسقاط وہی ہے جو (۴) اور (۵) میں سے ج کا ہے اسلئے دوسرا حل مذکورۂ بالا لفاف ہوگا ۔

حل (۹) جس میں ایک اختیاری مستقل ج ہے "مکمل ابتدائی" کہلاتا ہے ۔ دوسرا حل یعنی لفافی حل مکمل ابتدائی میں شامل نہیں ہے یعنی ج کو کوئی خاص قیمت دینے سے یہ حاصل نہیں ہو سکتا اِس لئے اِس کو "نادر حل" کہتے ہیں*۔

مثال :۔ ایسے منحنی دریافت کرو جن کا پائیں منحنی بلحاظ نقطہ (ا ، ۰) کے جس کو قطب مانا جائے لا = ۰ ہو ۔

اِس خاصیت کا اظہار ا = ع ب ہے ۔ جہاں ب ، محور ما پر مقطوعہ ہے ۔

اس لئے ما = لا ع + ا / ع .... (۱۰)

[* ایک سے اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساوات کے نادر حل کا عام نظریہ تفرقی مساوات کی خاص کتابوں میں مل سکتا ہے ۔ لفاف کے نظریہ سے اسکو خاص تعلق ہے اگرچہ یہ اسقدر وسیع نہیں ہے]

اور اوسکا حل خطوط کا قبیل

$$ما = ج لا + \frac{ا}{ج} \quad \text{(۱۱)}$$

ہے۔ نیز لفاف $ما^۲ = ۴ ا لا$ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱۲)

بھی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ دفعہ ۱۴۰ مثال (۲) دیکھو۔

امثلہ ۵۰
(تفرقی مساوات کی تکوین)

(۱) اگر $ما = ا لا^۲ + ب$ تو ثابت کرو کہ $لا \frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - \frac{فر ما}{فر لا} = ۰$

(۲) اگر $ما = ا لا^۲ + ب لا$ تو ثابت کرو کہ $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - \frac{۲}{لا} \frac{فر ما}{فر لا} + \frac{۲ ما}{لا^۲} = ۰$

(۳) اگر $ما = ا فو^{ک لا} + ب فو^{-ک لا}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - ک^۲ ما = ۰$

(۴) اگر $ما = ا فو^{عا لا} + ب فو^{بہ لا}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - (عا + بہ) \frac{فر ما}{فر لا} + عا بہ ما = ۰$$

(۵) اگر $ما = (ا + ب لا) فو^{ک لا}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{فر^۲ ما}{فر لا^۲} - ۲ ک \frac{فر ما}{فر لا} + ک^۲ ما = ۰$

(۶) اگر $لا = فو^{-\frac{۱}{۲} ک ت} (ا جم ن ت + ب جب ن ت)$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{فر^۲ لا}{فر ت^۲} + ک \frac{فر لا}{فر ت} + (ن^۲ + \frac{۱}{۴} ک^۲) لا = ۰$$

(۷) اگر $\text{و} = \frac{\text{ا}}{\text{ر}} + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}^{۲}\text{و}}{\text{فر}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فر}} = ۰$

(۸) اگر $\text{ق} = \text{ا لوک ر} + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}^{۲}\text{ق}}{\text{فر}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرق}}{\text{فر}} = ۰$

(۹) اگر $\text{فہ} = \frac{\text{ا قو}^{\text{ک ر}} + \text{ب قو}^{-\text{ک ر}}}{\text{ر}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف}^{۲}\text{فہ}}{\text{فر}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فر}} - \text{ک}^{۲}\text{فہ} = ۰$$

(۱۰) اگر $\text{فہ} = \frac{\text{ا جم ک ر} + \text{ب جب ک ر}}{\text{ر}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف}^{۲}\text{فہ}}{\text{فر}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرفہ}}{\text{فر}} + \text{ک}^{۲}\text{فہ} = ۰$$

(۱۱) اگر $\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\,\text{جم ک لا} + (\text{ج} + \text{د لا})\,\text{جب ک لا}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}^{۴}\text{ما}}{\text{فلا}^{۴}} + ۲\text{ک}^{۲}\frac{\text{ف}^{۲}\text{ما}}{\text{فلا}^{۲}} + \text{ک}^{۴}\text{ما} = ۰$

(۱۲) اگر $\text{ما} = \text{ا جمز ک لا} + \text{ب جبز ک لا} + \text{ج جم ک لا} + \text{د جب ک لا}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}^{۴}\text{ما}}{\text{فلا}^{۴}} = \text{ک}^{۴}\text{ما}$

(۱۳) اگر $\text{ما} = \left(\text{ا جمز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}} + \text{ب جبز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{جم}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}$ ۴۰۲

$$+ \left(\text{ج جمز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}} + \text{د جبز}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{جب}\frac{\text{ک لا}}{\sqrt{۲}}$$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ف}^{۴}\text{ما}}{\text{فلا}^{۴}} + \text{ک}^{۴}\text{ما} = ۰$

(۱۴) اگر $\text{ما} = \text{ا جب}^{-۱}\text{لا} + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}) \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} - \text{لا} \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \text{۰}$$

(۱۵) اگر $\text{ما} = (\text{جب}^{-\text{۱}}\text{لا})^{\text{۲}} + \text{ا}\,\text{جب}^{-\text{۱}}\text{لا} + \text{ب}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}) \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} - \text{لا} \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \text{۲}$$

(۱۶) اگر $\text{ما} = \text{ا}\,\text{جم}(\text{لوگ}\,\text{لا}) + \text{ب}\,\text{جب}(\text{لوگ}\,\text{لا})$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{\text{۲}} \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{لا} \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ما} = \text{۰}$$

(۱۷) اگر $\text{ما} = \text{ا}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}}\right\}^{\text{ن}} + \text{ب}\left\{\text{لا} - \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}}\right\}^{\text{ن}}$

تو ثابت کرو کہ $(\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}) \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{لا} \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} - \text{ن}^{\text{۲}}\,\text{ما} = \text{۰}$

(۱۸) ثابت کرو کہ ابتدائی $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{م}}$ سے جہاں م اختیاری ہے

تفرقی مساوات $\text{لا}\left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)^{\text{۲}} - \text{ما} \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{۱} = \text{۰}$ حاصل ہوتی ہے

(۱۹) اگر $\text{۲}\,\text{ج}\,\text{ما} + \text{ج}^{\text{۲}} = \text{لا}^{\text{۲}}$ جہاں ج اختیاری ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}\left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)^{\text{۲}} - \text{۲}\,\text{ما} \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} - \text{لا} = \text{۰}$$

(۲۰) ثابت کرو کہ ان مکافیوں کی تفرقی مساوات جنکے محاور ما محور کے متوازی ہیں $\frac{\text{فر}^{\text{۳}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۳}}} = \text{۰}$ ہے۔

(۲۱) ثابت کرو کہ ان تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات جنکے محاور تماثل محور لا پر منطبق ہوتے ہیں

$$\text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = 0$$ ہے

۴۰۳ (۲۲) ثابت کرو کہ اُن تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جن کے صدری محور محددوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں

$$\text{لا ما}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{لا}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 - \text{ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$$ ہے۔

(۲۳) محور لا کو مبدا پر مس کرنے والے تمام دائروں کی تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{2\,\text{لا ما}}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}$$ ہے

(۲۴) ثابت کرو کہ اُن تمام مخروطیوں کی تفرقی مساوات جو محور ما کو مبدا پر مس کرتے ہیں اور جن کے مرکز محور لا پر ہیں

$$\text{لا}^2\,\text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \left(\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما}\right)^2 = 0$$ ہے

(۲۵) اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}{\text{لا}^2 + \text{ب}^2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}\,(\text{ما}-1)\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = 2\,\text{لا}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 + (\text{ما}-1)\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

(۲۶) ثابت کرو کہ اُن تمام زائدوں کی تفرقی مساوات جو مبدا میں سے گزرتے ہیں اور جن کے متقارب محددوں کے محوروں کے متوازی ہیں

$$\text{لا ما}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} - 2\,\text{لا}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 + 2\,\text{ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$$ ہے

(۲۷) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر ت}^2} + \text{ن}^2\,\text{ما} = \text{ف}(\text{ت})$ کو ربط

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{جب ن ت}\int \text{ف}(\text{ت})\,\text{جم ن ت فرت}$$
$$- \frac{1}{\text{ن}}\,\text{جم ن ت}\int \text{ف}(\text{ت})\,\text{جب ن ت فرت}$$

پورا کرتا ہے اور یہی اُس کا مکمل حل ہے۔

امثلہ ۵۱

(رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں)

(۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کو تکمیل کرو [$\text{ما} = \text{ج لا}$]

(۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}^{۲} - ۱}$ کو تکمیل کرو [$\text{ما}^{۲} = \text{ج} \frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا} + ۱}$]

(۳) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{مم لا مم ما}$ کو تکمیل کرو [$\text{جب لا جم ما} = \text{ج}$]

(۴) $\text{لا}^{۲} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = ۱$ کو تکمیل کرو [$\text{ما} = ۱ + \text{ج فو}^{\frac{۱}{\text{لا}}}$]

۴۰۴ (۵) $\text{م} (\text{ما} + \text{ب}) \text{فر لا} + \text{ن} (\text{لا} + \text{ا}) \text{فر ما} = ۰$ کو حل کرو
[$(\text{لا} + \text{ا})^{\text{م}} (\text{ما} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ج}$]

(۶) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱ + \text{ما}^{۲}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$ کو حل کرو [$\text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ج}}{۱ - \text{ج لا}}$]

(۷) $(۱ + \text{ما}^{۲}) \text{فر لا} - \text{لا ما} (۱ + \text{لا}^{۲}) \text{فر ما} = ۰$ کو حل کرو
[$(۱ + \text{لا}^{۲})(۱ + \text{ما}^{۲}) = \text{ج لا}^{۲}$]

(۸) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما} (۱ - \text{ما}^{۲})}{\text{لا} (۱ - \text{لا}^{۲})}$ کو حل کرو [$\text{ما}^{۲} (۱ - \text{لا}^{۲}) = \text{ج لا}^{۲} (۱ - \text{ما}^{۲})$]

(۹) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = (\text{لا} + \text{ما})^{۲}$ کو حل کرو [$\text{لا} + \text{ما} = \text{مس} (\text{لا} + \text{ج})$]

(۱۰) $(\text{لا} + \text{ما})^{۲} \left(\text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} \right) = \text{لا ما} \left(۱ + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \right)$ کو حل کرو۔

(۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان کا زاویہ سمتی زاویہ طہ کا نصف ہو۔
[صنوبری ر = ا (۱ - جم طہ)]

(۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں مبدا سے مماس پر کا عمود، نقطہ تماس کے فصلہ کے مساوی ہو۔ [دائرے ر = ۲ ا جم طہ]

(۱۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے مماس کا وہ حصہ جو محددوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہو جائے۔
[زائد لا ما = ج]

(۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں زیر مماس فصلہ کے متناسب ہے۔
[$ما = ج\ لا^{۲}$]

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر کسی منحنی میں، زیر عماد کو فصلہ سے مستقل نسبت ہو تو یہ منحنی ایک مخروطی تراش ہو گی۔

(۱۶) ایسے منحنی دریافت کرو جن میں معین کے قدم سے اگر مماس پر عمود کھینچا جائے تو اس کا طول مستقل (ا) ہو۔ [زنجیرے $ما = ا\ جمز \frac{لا - عہ}{ا}$]

(۱۷) ایسے منحنی دریافت کرو جن کا قطبی زیر مماس مستقل ا ہے۔

[$ر = \frac{ا}{طہ - عہ}$]

(۱۸) وہ منحنی دریافت کرو جن میں قطبی زیر عماد مستقل ہو [ر = ا (طہ - عہ)]

(۱۹) وہ منحنی دریافت کرو جنکے کسی دو معینوں کا درمیانی رقبہ، مقطوعہ قوس کے متناسب ہو۔ [زنجیرے $ما = ا\ جمز \frac{لا - عہ}{ا}$]

(۲۰) ایسے منحنی دریافت کرو جن کے کسی معین ما محور لا اور منحنی سے گھرا ہوا رقبہ، معین اور متناظر فصلے کے حاصل ضرب کا ن واں حصہ ہو۔
[$ما = ج\ لا^{ن-۱}$]

(۲۱) ایسے گردشی مجسم کی شکل دریافت کرو جس کے کسی عمودی مقطوعے کا حجم تراش کے رقبہ اور محور کے طول کے حاصل ضرب کا ن واں حصہ ہے۔

[مکون منحنی کی مساوات $ما^{۲} = ر\, لا^{ن-۱}$ ہے]

(۲۲) ایک یکساں طاقت والی لٹکی ہوئی سلاخ میں عمودی تراش کا رقبہ (س) اس میں کے کل زور کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ اگر لا انتصاباً نیچے کی طرف ناپا جائے تو س اور لا میں رشتہ ذیل کی شکل کا ہے

$$س = ا - ب \int_{۰}^{لا} س\, فرلا$$

پس ثابت کرو کہ سلاخ کی شکل اس گردشی مجسم کی سی ہوگی جو

$ما = ب\, قو^{\frac{لا}{ر}}$ کے منحنی کو محور لا کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲۳) ایسے منحنی کی شکل دریافت کرو جو بلحاظ محور لا کے متشاکل ہے اور جس میں کسی دو گئے معین سے کٹے ہوئے رقبہ کا اوسط مرکز معین سے محور کے طول کے $\frac{۱}{ن}$ فاصلے پر ہو۔ [$ما = ج\, لا^{ن-۲}$]

سوالات ۲۴ تا ۳۲ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

(۲۴) $(لا^{۳} + ۳\, لا\, ما^{۲})\, فرلا + (ما^{۳} + ۳\, لا^{۲}\, ما)\, فرما = ۰$

(۲۵) $لا\, فرلا + ما\, فرما = ر^{۲}\, \frac{لا\, فرما - ما\, فرلا}{لا^{۲} + ما^{۲}}$

[$لا^{۲} + ما^{۲} = ۲\, ر^{۲}\, مس^{-۱} \frac{ما}{لا} + ج$]

(۲۶) $لا \frac{فرما}{فرلا} - ما = \frac{لا}{ر} \sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}$ [$ما = لا\, جتز \frac{لا - ا}{ر}$]

(۲۷) $لا \frac{فرما}{فرلا} - ما = ما \sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}$

تفرقی مساوات اور اسکے ابتدائی کی ہندسی تعبیریں بیان کرو۔

$[\text{لا}^2 = ٢\,\text{ج}\,\text{ما} + \text{ج}^2]$

(٢٨) $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 - ٢\,\text{لا ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}^2 - ٢\,\text{لا ما}}$ $[\text{لا ما}(\text{لا} - \text{ما}) = \text{ج}]$

(٢٩) $\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{لا ما}$ $[\text{لا ما} = \text{ج قو}^{\text{لا}}]$

(٣٠) $\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = \text{لا ما}$ $[\text{ما} = \text{ج لا قو}^{\text{لا}}]$

(٣١) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}(\text{لا} + \text{ما})}{\text{لا}(\text{ما} - \text{لا})}$ $[\text{لا ما} = \text{ج قو}^{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}}]$

(٣٢) $(\text{لا}^2 - ٣\,\text{ما}^2)\,\text{لا فرلا} = (\text{ما}^2 - ٣\,\text{لا}^2)\,\text{ما فرما}$

$[(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2 = \text{ج}(\text{لا}^2 - \text{ما}^2)]$ ٢٠٦

(٣٣) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ}}$

ذیل کے ابدال سے متجانس بنائی جاسکتی ہے۔

$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = \text{ضا}$ اور $\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ} = \text{عا}$

(٣٤) ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{ا لا} + \text{ب ما})$ کی صورت کی مساوات

ابدال $\text{ا لا} + \text{ب ما} = \text{ی}$ سے حل کیجا سکتی ہے۔

(٣٥) بتاؤ کہ ذیل کی صورت کی مساوات کو کس طرح حل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ}}\right)$$

امثلہ ۵۲

(خطی مساوات)

سوالات ۱ تا ۹ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما مس لا} = \text{قط لا}$ [ما = جب لا + ج جم لا]

(۲) $(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا ما} = \text{ا لا}$ [$\text{ما} = \text{ا} + \text{ج} \sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$]

(۳) $\text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا} + \text{ما} = \text{۰}$ [$\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۲ لا ما} = \text{ج}$]

(۴) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{۱}$ [$\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۲ لا ما} = \text{ج}$]

(۵) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۲ لا ما} = \text{۱} + \text{۲ لا}^{\text{۲}}$ [$\text{ما} = \text{لا} + \text{ج قو}^{-\text{لا}^{\text{۲}}}$]

(۶) $\text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}} \text{ما} = \text{۱}$

(۷) $\text{ا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}} + \text{ا ع مس طہ} = \text{مس طہ}$ [ا ع = ۱ + ج جم طہ]

(۸) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما مس لا} - \text{۲ جب لا}$ [ما = جم لا + ج قط لا]

(۹) $\text{لا}(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (\text{۲ لا}^{\text{۲}} - \text{۱}) \text{ما} = \text{لا}^{\text{۳}}$

[$\text{ما} = \text{لا} + \text{ج لا} \sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$]

۲۰۷ (۱۰) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما} = \text{ق ما}^{\text{ن}}$

ابدال $\text{ما}^{-(\text{ن}-\text{۱})} = \text{ی}$ سے خطی بنائی جا سکتی ہے

[برنولی کی مساوات]

(۱۱) حل کرو $لا \frac{فرما}{فرلا} + ما = ما^۲ لوک لا$، $\left[\frac{۱}{ما} = ۱ + لوک لا + ج لا \right]$

(۱۲) حل کرو $جم لا \frac{فرما}{فرلا} - ما جب لا + ما^۲ = ۰$، $\left[\frac{۱}{ما} = جب لا + ج جم لا \right]$

(۱۳) اگر گنجائش (گ) والے مکثفہ کی دونوں تختیوں کو ایسے تار سے ملا دیا جائے جسکی مزاحمت (ز) ہے اور ذاتی امالہ کی شرح صفر ہے تو برقی بار (بھ) اور قوت محرکہ برق (ق) میں ذیل کا رشتہ ہے۔

$$ق = ز \frac{فربھ}{فرت} + \frac{بھ}{گ}$$

اس مساوات کو تکمیل کرو جبکہ ق = ۰، ق = مستقل،

$$ق = ق. جم (پ ت + صہ)$$

امثلہ ۵۳

علی القوائم خطوط رمی

(۱) خطوط ما = ج لا کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔
$\left[دائرے\ لا^۲ + ما^۲ = ج \right]$

(۲) منحنیات $ا^{ن-۱} ما = لا^ن$ کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو
$\left[مخروطات\ لا^۲ + ن ما^۲ = ج \right]$

(۳) دائروں $لا^۲ + ما^۲ = ۲ ج ما$ کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔
$\left[دائرے\ لا^۲ + ما^۲ = ۲ ج لا \right]$

(۴) کن منحنیات کے لئے $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما^۳ + ۳ لا^۲ ما}{لا^۳ + ۳ لا ما^۲}$، نیز ان کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔
$\left[(لا^۲ - ما^۲)^۲ = ج لا ما \right]$، $\left[لا^۴ + ۶ لا^۲ ما^۲ + ما^۴ = ج \right]$

(۵) ثابت کروکہ ہم ماسکہ مکافیوں ما^{2} = ۴ ا (لا + ا) کی تفرقی مساوات ہے

ما ع^{2} + ۲ لا ع − ما = ۰ . جہاں ع = فرما/فرلا

ثابت کروکہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور اِس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

(۶) ثابت کروکہ ہم ماسکہ مخروطیوں لا^{2}/(ا^{2} + ل) + ما^{2}/(ب^{2} + ل) = ۱ کی تفرقی مساوات ۴۰۸

لا ما ع^{2} + (لا^{2} − ما^{2} − ا^{2} + ب^{2}) ع − لا ما = ۰ ہے۔

ثابت کروکہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔ اور نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۷) قائم زائد قطعات کا ایک نظام ثابت نقطوں (± ا، ۰) میں سے گزرتا ہے اور ان کا مرکز مبداء ۶ پر ہے۔ ثابت کروکہ ان کے علی القوائم خطوط رمی کیسینی کے بیضوی ہیں

$(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2})^{2}$ = ۲ ا^{2} (لا^{2} − ما^{2}) + ج

(۸) ثابت کروکہ مکافی ما^{2} = ۴ ا لا کے دریچوں کی تفرقی مساوات ہے

لا + ما (فرما/فرلا) + ا $(\text{فرما/فرلا})^{2}$ = ۰

(۹) ثابت کروکہ دائرہ لا^{2} + ما^{2} = ا^{2} کے دریچہ کی تفرقی مساوات ہے

لا^{2} − ا^{2} + ۲ لا ما (فرما/فرلا) + (ما^{2} − ا^{2}) $(\text{فرما/فرلا})^{2}$ = ۰

(۱۰) خطوط صنوبری ر = ا (۱ − جم طہ) کے علی القوائم خطوط رمی دریافت کرو۔

[صنوبری ر = ب (۱ + جم طہ)]

(۱۱) ثابت کروکہ منحنیات $\text{ر}^{\text{م}}$ = $\text{ا}^{\text{م}}$ جم م طہ کے علی القوائم خطوط رمی

$\text{ر}^{\text{م}}$ = $\text{ب}^{\text{م}}$ جب م طہ ہیں۔

خاص صورتوں م = ۱، −۱، ۲، −۲، ۱/۲، −۱/۲ میں نتیجہ کی ہندسی

تعبیر بتاؤ ۔

(۱۲) ثابت کرو کہ منحنیات ر^۲ = ا جم طہ کے علی القوائم خطوط رمی ر = ب جب^۲ طہ ہیں ۔

(۱۳) اگر دو قطبی محددوں میں (دفعہ ۱۳۲) منحنیات کے قبیل کی مساوات ف (ر، رَ) = ج ہو تو ثابت کرو کہ علی القوائم خطوط رمی کی تفرقی مساوات

ر (جف ف / جف ر) فرطہ = رَ (جف ف / جف رَ) فرطہَ ہوگی ۔

پس دکھاؤ کہ دائرے ر / رَ = ج کے علی القوائم خطوط رمی دوسرے دائرے طہ + طہَ = ج ہیں ۔

(۱۴) ثابت کرو کہ کیسینی کے بیضوی ر رَ = ج کے علی القوائم خطوط رمی قائم زائد طہ ۔ طہَ = ج ہیں ۔ ۴۰۹

(۱۵) ثابت کرو کہ ہم قوہ منحنیات ۱/ر ۔ ۱/رَ = ج کے علی القوائم خطوط رمی متقناطیسی منحنیات جم طہ + جم طہَ = ج ہیں ۔

امثلہ ۵۴

(اعلیٰ درجہ کی تفرقی مساواتیں)

سوالات ۱ تا ۱۰ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو ۔

(۱) (فر ما / فر لا)^۲ ۔ (عا + با) (فر ما / فر لا) + عا با = ۰ ۔

[ما = عا لا + ج ، ما = با لا + ج]

(۲) (فر ما / فر لا)^۲ = جب^۲ لا   [ما = ج ± جم لا]

(۳) $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = \text{م}^2\,\text{ما}^2$　　$\left[\text{ما} = \text{ج}\ \text{قو}^{\pm\text{م}\,\text{لا}}\right]$

(۴) $\text{ما}^2 \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = ۴\,\text{ا}^2$　　$\left[\text{ما}^2 = \text{ج} \pm ۴\,\text{ا}\,\text{لا}\right]$

(۵) $\text{لا} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = \text{ا}$　　$\left[\text{ما} = \text{ج} \pm ۲\sqrt{\text{ا}\,\text{لا}}\right]$

(۶) $(۱-\text{لا}^2)\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = ۱$　　$\left[\text{ما} = \text{ج} \pm \text{جب}^{-1}\text{لا}\right]$

(۷) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما}\right) = \text{لا}\,(\text{لا} + \text{ما})$

$\left[\text{ما} = \tfrac{1}{2}\text{لا}^2 + \text{ج}،\ \text{ما} = ۱ - \text{لا} + \text{ج}\ \text{قو}^{-\text{لا}}\right]$

(۸) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا}\right) = (\text{لا} + \text{ما})\,\text{ما}$

$\left[\text{ما} = \text{ج}\ \text{قو}^{\text{لا}}،\ \text{ما} = ۱ - \text{لا} + \text{ج}\ \text{قو}^{-\text{لا}}\right]$

(۹) $\text{لا}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 - ۲\,\text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا} = ۰$　　$\left[\text{لا}^2 = ۲\,\text{ج}\,\text{ما} + \text{ج}^2\right]$

(۱۰) $\text{ما}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 + ۲\,\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$　　$\left[\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \text{ج} \pm \text{لا}\right]$

۴۱۰ (۱۱) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محددوں کے محوروں سے کے مماس کے منقطعوں کا حاصل ضرب مستقل ک^2 کے مساوی ہو۔　　[زائد $۴\,\text{لا}\,\text{ما} = \text{ک}^2$]

(۱۲) ایسے منحنی دریافت کرو کہ مبداء سے کسی مماس پر عمود ا کے مساوی ہو۔　　[دائرے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$]

(۱۳) حل کرو $\text{ما} = \text{لا}\,\text{ع} + \sqrt{\text{ب}^2 + \text{ا}^2\text{ع}^2}$　　[نادرحل $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$]

(۱۴) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقطوں $(\pm\text{ج}،\ ۰)$ سے کسی مماس پر عمودوں کا

حاصل ضرب ب^2 کے مساوی ہو۔ [مخروطات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2+\text{ج}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ،
$\frac{\text{لا}^2}{\text{ج}^2-\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$]

(۱۵) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نقاط ($\pm$ ا ، ۰) کے معینون پر مماس جو حصے کاٹتا ہے اُن کا حاصل ضرب ب^2 کے مساوی ہو۔

[مخروطیاں $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} \pm \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$]

(۱۶) حل کرو $\text{ما} = \text{لا}\,\text{ع} + \text{ا}\,\text{ع}\,(1 - \text{ع})$

[نادر حل $(\text{لا}+\text{ا})^2 = 4\,\text{ا}\,\text{ما}$]

(۱۷) حل کرو $(\text{لا}-\text{ا})\,\text{ع}^2 + (\text{لا}-\text{ما})\,\text{ع} - \text{ما} = 0$

[نادر حل $(\text{لا}+\text{ما})^2 = 4\,\text{ا}\,\text{ما}$]

(۱۸) ایسے منحنی دریافت کرو کہ محددوں کے محوروں پر مماس کے مقطوعوں کا حاصل جمع ا کے مساوی ہو۔ [مکافی $(\text{لا}-\text{ما})^2 - 2\text{ا}(\text{لا}+\text{ما}) + \text{ا}^2 = 0$]

(۱۹) ثابت کرو کہ $\text{لا} + \text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)$ کی قسم کی تفرقی مساوات متوازی منحنیات کے ایک نظام کو ظاہر کرتی ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ $\text{ف}\left(\text{لا} ، \text{ما} ، \text{ع} - \frac{1}{\text{ع}}\right) = 0$ کی قسم کی تفرقی مساوات قائم منحنیات کے دو نظاموں کو ظاہر کرتی ہے۔

۴۱۱

بارہواں باب

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۱۶۲ – نمونہ $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} = \text{ف}(\text{لا})$ کی مساواتیں –

یہ باب زیادہ تر دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتوں کے لئے مخصوص ہے اور اس میں خصوصاً ایسے نمونہ کی مساواتوں پر غور کیا جائے گا جو احصاء کے ہندسی اور طبیعی اطلاقات میں عموماً کام آتی ہیں۔ بعض صورتوں میں اعلیٰ رتبہ کی مساواتوں کے لئے ان طریقوں کی توسیع ہوسکیگی۔

پہلے ہم چند خاص صورتوں پر غور کرینگے اور پھر دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات پر۔ مستقل سروں والی ن۔ ویں رتبہ کی عام خطی مساوا پر اگلے باب میں بحث کیجائے گی۔

سب سے پہلے صورت $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} = \text{ف}(\text{لا})$ ..... (۱) پر غور کرو۔
اسکو حل کرنے کے لئے بلحاظ لا کے صرف دو سادہ تکملوں کی ضرورت ہے

یعنی
$$\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \int \text{ف}(\text{لا})\,\text{فر}\,\text{لا} + \text{ا}$$

اور
$$\text{ما} = \int \left[\int \text{ف}(\text{لا})\,\text{فر}\,\text{لا} \right] \text{فر}\,\text{لا} + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب} \quad .....(۲)$$

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

مثال (۱)۔ حرکیاتی مساوات $\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ف}(\text{ت})$ ....(۳)

ایک ذرہ کی ایسی خطی حرکت کو بیان کرتی ہے جس میں قوت، وقت کا معلومہ تفاعل ہے۔ یہ مساوات مذکورۂ بالا صورت کی ہے صرف ترقیم میں ذرا سا فرق ہے
مستقل اسراع (ج) والے ذرہ کی صورت میں مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ج} \quad \ldots\ldots(۴)$$

۳۱۲ اس لئے

$$\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فرت}} = \text{ج ت} + \text{ا}$$

اور

$$\text{لا} = \tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^2 + \text{ا ت} + \text{ب} \quad \ldots\ldots(۵)$$

نیز اگر

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ک جب ن ت} \quad \ldots\ldots(۶)$$

یعنی قوت، وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے تو

$$\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{ک}}{\text{ن}}\,\text{جم ن ت} + \text{ا}$$

اور

$$\text{لا} = -\frac{\text{ک}}{\text{ن}^2}\,\text{جب ن ت} + \text{ا ت} + \text{ب} \quad \ldots\ldots(۷)$$

اس سوال کے مستقلات ا اور ب اس شرط سے مقرر کئے جا سکتے ہیں کہ کسی خاص آن یہ ذرہ دئے ہوئے مقام پر ہو اور اس کی رفتار کسی دی ہوئی مقدار کے مساوی ہو۔

مثال (۲)۔ مساوات $\text{ب}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - \text{و}(\text{ل} - \text{لا}) = 0$ .....(۸)

کا ایسا حل دریافت کرو جو ذیل کی شرائط کو پورا کرے۔

$$\text{لا} = 0 \text{ کے لئے } \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} = 0$$

دراصل یہ سوال ایک ایسی سلاخ کے خم دریافت کرنے کا ہے جس کا ایک سرا لا = ۰ افقی وضع میں جکڑ دیا گیا ہے اور دوسرے سرے لا = ل سے معلومہ وزن (و) لٹک رہا ہے۔

(۸) کو دو مرتبہ متواتر تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}\left(\text{ل لا} - \frac{1}{2}\text{لا}^2\right) + \text{ا}$$

اور $\text{ب ما} = \text{و}\left(\frac{1}{2}\text{ل لا}^2 - \frac{1}{6}\text{لا}^3\right) + \text{ا لا} + \text{ج}$ ...... (۹)

جہاں ا اور ج اختیاری ہیں۔

اور حدودی شرائط سے حاصل ہوتا ہے کہ ا = ۰ اور ج = ۰

اِس لئے $\text{ما} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}}{\text{ب}}\,\text{لا}^2\left(\text{ل} - \frac{1}{3}\text{لا}\right)$ .... (۱۰)

۱۶۳ — $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \text{ف}(\text{ما})$ کے نمونہ کی مساواتیں۔

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \text{ف}(\text{ما}) \quad \text{..........} \quad (۱)$$

کے نمونہ کی مساوات کا پہلا تکملہ دو طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے۔

پہلے طریقہ میں دونوں جانب کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ سے ضرب دیکر بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\right) = \text{ف}(\text{ما})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

یعنی $\frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = \int \text{ف}(\text{ما})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} + \text{ا}$

$$= \int \text{ف}(\text{ما})\,\text{فرما} + \text{ا} \quad \text{......} \quad (۲)$$

دوسرے طریقہ میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لئے علامت (ع) رکھو، چونکہ ۱۴۳

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اس لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} = \text{ف}(\text{ما}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یہ تابع متغیر ع اور متبوع متغیر ما میں پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے۔
(۴) کو بلحاظ ما کے تکمل کرنے سے

$$\frac{۱}{۲}\,\text{ع}^2 = \int \text{ف}(\text{ما})\,\text{فرما} + \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اور یہ (۲) کے معادل ہے۔

حل تکمل کرنیکے لئے (۲) کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\sqrt{۲\int \text{ف}(\text{ما})\,\text{فرما} + ۲\,\text{ا}}} = \pm\,\text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

یہاں متغیر الگ الگ ہیں (دفعہ ۱۵۴) لیکن نسب نما میں جذر کی موجودگی کی وجہ سے تفاعل ف (ما) کی آسان شکلوں کے لئے بھی اس کو تکمل کرنا دشوار ہوتا ہے۔

اس مساوات کی ایک ضروری شکل وہ ہے جس میں ف (ما)، متغیر ما کا خطی تفاعل ہو، یہ مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{ا}\,\text{ما} = \text{ب} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

تابع متغیر ما کی بجائے $\text{ما}_1 + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ لکھکر بعد میں ما_1 کا آخری نشان نکالدینے سے مساوات (۷) آسان تر شکل

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ا ما} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ (۸)$$

میں تحویل ہوجاتی ہے۔

اس کا پہلا تکملہ ہے $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 + \text{ا ما}^2 = \text{ج}$ .... (۹)

اگر ا مثبت ہے تو لکھو $\sqrt{\text{ا}} = \text{م}$ اور $\text{ج} = \text{م}^2\,\text{عا}^2$ .... (۱۰)

اور یہ ظاہر ہے کہ اگر ہم صرف حقیقی مقداروں پر ہی توجہ محدود رکھیں تو ج لازماً مثبت ہوگا۔

پس

$$\frac{\text{فر ما}}{\sqrt{\text{عا}^2 - \text{ما}^2}} = \pm\,\text{م فر لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱۱)$$

یعنی $\text{جم}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{عا}} = \pm(\text{م لا} + \text{صہ})$ ۴:۴

یا $\text{ما} = \text{عا جم}\,(\text{م لا} + \text{صہ})$ .... (۱۲)

یہ مساوات (۸) کا مکمل حل ہے اور اس میں دو اختیاری مستقل عا اور صہ ہیں۔

اگر $\text{عا جم صہ} = \text{ا}$ اور $-\,\text{عا جب صہ} = \text{ب}$ ..(۱۳)

رکھیں تو حل کی معادل شکل

$$\text{ما} = \text{ا جم م لا} + \text{ب جب م لا} \quad \ldots\ldots\ (۱۴)$$

حاصل ہوتی ہے۔ یہ نتیجے بہت اہم ہیں اور انہیں یاد رکھنا چاہیئے۔

ا کے منفی ہونے کی صورت میں فرض کرو کہ $\text{ا} = -\,\text{م}^2$ اور اسی طرح عمل کرنے پر مکمل حل حاصل ہوگا

$$\text{ما} = \text{ا جمز م لا} + \text{ب جبز م لا} \quad \ldots\ldots\ (۱۵)$$

جہاں $\text{م} = \sqrt{-\,\text{ا}}$.

اس صورت کے حل کرنے کا زیادہ آسان طریقہ آگے دیا جائیگا۔

نمونہ (۱) کی مساوات حرکیات میں بہت عام ہے مثلاً ایک ذرہ کی

خطی حرکت کی مساوات جس پر ایک ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو ذرہ کے مقام کے معلومہ تفاعل کے متناسب ہے ذیل کی شکل کی ہے

$$\frac{\text{ف}^{2}\text{لا}}{\text{فت}^{2}} = \text{ف}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱۶})$$

اور یہ (۱) کے متطابق ہے اگر مختلف ترقیم کا لحاظ رکھا جائے۔

تکمل کے پہلے طریقے میں طرفین کو $\frac{\text{فلا}}{\text{فت}}$ سے ضرب دیا جاتا ہے

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فلا}}{\text{فت}} \times \frac{\text{ف}^{2}\text{لا}}{\text{فت}^{2}} = \text{ف}(\text{لا}) \frac{\text{فلا}}{\text{فت}}$$

اور بلحاظ ت کے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{فلا}}{\text{فت}}\right)^{2} = \int \text{ف}(\text{لا}) \frac{\text{فلا}}{\text{فت}} \, \text{فت} + \text{ج}$$

$$= \int \text{ف}(\text{لا}) \, \text{فلا} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۷})$$

جو "توانائی کی مساوات" کہلاتی ہے۔

دوسرے طریقے میں $\frac{\text{فلا}}{\text{فت}}$ کی بجائے (ع) لکھتے ہیں اور اس لئے

$\frac{\text{ف}^{2}\text{لا}}{\text{فت}^{2}}$ کی بجائے $\text{ع} \frac{\text{فع}}{\text{فلا}}$ (دفعہ ۳۲ دیکھو)

$$\text{پس} \quad \text{ع} \frac{\text{فع}}{\text{فلا}} = \text{ف}(\text{لا})$$

اور بلحاظ لا کے تکمل کرنے سے

$$\frac{1}{2}\text{ع}^{2} = \int \text{ف}(\text{لا}) \, \text{فلا} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۸})$$

اور یہ نتیجہ (۱۷) کے مطابق ہے۔

۱۴۵ مثال (۱)۔ اگر ایک ذرہ پر مبداء کی جانب، فاصلہ کے متناسب قوت کشش

عمل کر رہی ہے تو اسکی حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{مہ لا} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱۹)$$

یہ مساوات خاص صورت (۸) کی ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$\text{لا} = \text{ا جم}\left(\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت} + \text{صہ}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲۰)$$

یہ سادہ موسیقی حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔ لا اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ کی قیمتیں تکرار پاتی ہیں جبکہ $\sqrt{\text{مہ}}\ \text{ت}$ کی قیمت میں 2π کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لئے مدت اہتزاز $\frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}}}$ ہے۔ اس حل کے اختیاری مستقلات ا اور صہ بالترتیب حیطہ اور آن کہلاتے ہیں۔

ایک درجہ کی آزادی والے کسی "بقائی" حرکیاتی نظام کی مساوات حرکت بھی جب نظام کو قائم توازن کی حالت سے ذرہ سا ہٹا دیا جاتا ہے (۱۹) کی صورت کی ہوتی ہے۔

مثلاً رقاص کی صحیح مساوات حرکت

$$\text{ل}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{طہ}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{ج جب طہ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲۱)$$

ہے۔ جہاں ج اسراع بجاذبہ ارض ہے اور ل ایک خاص طول ہے جو رقاص کی بناوٹ پر منحصر ہے۔ سادہ رقاص کی صورت میں ل ڈوری کا طول ہے۔ اگر حالت توازن سے انتہائی زاویہ ہٹاؤ ایک چھوٹا زاویہ ہو تو جب طہ کی بجائے طہ لکھ سکتے ہیں اور

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{طہ}}{\text{فرت}^{2}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ل}}\ \text{طہ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲۲)$$

اس مساوات کا حل ہے $\quad \text{طہ} = \text{عا جم}\left(\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}\ \text{ت} + \text{صہ}\right) \quad \ldots \quad (۲۳)$

اور اس لئے دور $2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ ہے۔

صحیح مساوات (۲۱) مذکورۂ بالا طریقہ سے ایک مرتبہ تکمل کی جا سکتی ہے جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\,\text{ل}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{ج جم طہ} + \text{ا} \quad\text{......}\quad (۲۴)$$

لیکن (سوائے خاص صورت ا = ج کے) دوسرا تکمل ناقصی تفاعلوں کی مدد کے بغیر دریافت نہیں ہو سکتا۔

مثال (۲) اگر ایک ذرہ سیدھے خط میں حرکت کر رہا ہو اور اس پر قوت کشش مبداء سے فاصلہ کے مربع کی معکوس نسبت میں بدلتی ہو تو

$$\frac{\text{فر}^2\text{ا}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ا}^2} \quad\text{............}\quad (۲۵)$$

اس لئے دفعہ ۱۵۴ کی مثال (۳) سے

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{ا}} + \text{ج} \quad\text{........}\quad (۲۶)$$

۴۱۶ اور اگر ذرہ فاصلہ ا_0 پر سکون سے حرکت شروع کرے تو

$$\text{ج} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ا}_0} \quad\text{اور}\quad \frac{\text{فرا}}{\text{فرت}} = -\sqrt{\frac{2\,\text{مہ}}{\text{ا}_0}} \times \sqrt{\frac{\text{ا}_0 - \text{ا}}{\text{ا}}} \quad\text{.....}\quad (۲۷)$$

منفی علامت لینے کی وجہ یہ ہے کہ رفتار مبداء کی طرف ہے۔ دوسرے تکمل میں ابدال

$$\text{ا} = \text{ا}_0\,\text{جم}^2\,\text{طہ} \quad\text{..........}\quad (۲۸)$$

سہولت دہ ہے۔ متغیروں کو جدا کرنے پر

$$(1 + \text{جم}\,2\,\text{طہ})\,\text{فرطہ} = \left(\frac{2\,\text{مہ}}{\text{ا}_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}\text{فرت} \quad\text{........}\quad (۲۹)$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{طہ} + \frac{1}{2}\,\text{جب}\,2\,\text{طہ} = \left(\frac{2\,\text{مہ}}{\text{ا}_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}\text{ت} + \text{ج} \quad\text{......}\quad (۳۰)$$

اور جیسے لا ، ا سے صفر تک گھٹتا ہے ویسے طہ ، صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے۔ پس مقام سکون سے جو فاصلہ ا پر ہے مرکز کشش تک گرنے کا وقت (ت۱) ذیل کے جملہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت}_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\text{مہ}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

۱۶۴۔ تفرقی مساواتیں جن میں صرف پہلے اور دوسرے رتبہ کے مشتق موجود ہوں

اگر مساوات ذیل کی صورت کی ہو

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

جس میں متغیر لا اور ما صریحی طور پر شریک نہیں ہوتے تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے (ع) لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} ، \text{ع}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اور یہ تابع متغیر (ع) میں پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مساوات (۱) دفعہ ۱۶۳ کے مطابق $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ کی بجائے ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}$ لکھنے سے بھی پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو سکتی ہے۔ اس میں ما متبوع متغیر ہوگا۔

اس طرح

$$\text{فہ}\left(\text{ع}\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} ، \text{ع}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

مثال (۱)۔ ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحنا مستقل (ل) ہے۔

دفعہ ۱۳۵ سے

$$\frac{\frac{\text{فر}^2\text{صا}}{\text{فرلا}^2}}{\left\{1+\left(\frac{\text{فرصا}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{1}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

یا

$$\frac{\text{فرع}}{\left\{1+\text{ع}^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{\text{فرلا}}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$ ۴۱۷

اِس کو تکمل کرنے سے (دفعہ ۷، نتیجہ ۱۳)

$$\frac{\text{ع}}{\left\{1+\text{ع}^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{\text{لا}-\text{حا}}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

جہاں حا اختیاری مستقل ہے

اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرصا}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \pm\frac{\text{لا}-\text{حا}}{\left\{\text{ر}^2-(\text{لا}-\text{حا})^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (7)$$

اِس لئے $\text{صا}-\text{با} = \pm\left\{\text{ر}^2-(\text{لا}-\text{حا})^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (8)$

جہاں با آخری تکمل کا اختیاری مستقل ہے۔
یہ نتیجہ ذیل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\text{لا}-\text{حا})^2+(\text{صا}-\text{با})^2 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

جو نصف قطر ر والے دائروں کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ مذکورۂ بالا عمل عام طریقہ کی مثال کے طور پر دیا گیا ہے اگرچہ اِس سوال کا حل اور طریقوں سے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال (۲)۔ ذرہ کی خطی حرکت دریافت کرو جس پر ایسی قوت عمل کر رہی ہے جو رفتار کا ایک معلومہ تفاعل ہے۔

اسلئے حرکت کی مساوات ہے $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ف}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right) \quad \ldots\ldots (10)$

ظاہر ہے کہ یہ صورت (۱) کے تحت آتی ہے۔ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ کی بجائے (و) لکھنے سے $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ف(و)}$

یا $\frac{\text{فرو}}{\text{ف(و)}} = \text{فرت}$

اس لئے $\int \frac{\text{فرو}}{\text{ف(و)}} = \text{ت} + \text{ج}$ ....(۱۱)

مثلاً اگر ذرہ پر کل مزاحمت رفتار کے متناسب ہے تو

$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = -\text{ک و}$ ....(۱۲)

اس لئے $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \text{ا قو}^{-\text{ک ت}}$

اور $\text{لا} = -\frac{1}{\text{ک}} \times \text{ا قو}^{-\text{ک ت}} + \text{ب}$ ....(۱۳)

اب ذرہ کو خواہ کسی طرح پھینکا جائے، جیسے ت بڑھتا ہے لا متقارباً انتہائی قیمت ب کے قریب آتا جاتا ہے۔

نیز اگر مزاحمت رفتار کے مربع کی طرح بدلے تو

$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = -\text{ک و}^2$

یا $-\frac{\text{فرو}}{\text{و}^2} = \text{ک فرت}$

اس لئے $\frac{1}{\text{و}} = \text{ک ت} + \text{ا}$ ....(۱۴)

لہذا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{و} = \frac{1}{\text{ک ت} + \text{ا}}$

اور لا = ۱/ک لوگ (ک ت + ا) + ب ......(۱۵)

(۲) سے ظاہر ہے کہ اگرچہ رفتار (و) متقارباً صفر ہوتی ہے تاہم طے شدہ فاصلہ کی کوئی انتہا نہیں ہے۔

اگر ہم دوسرا طریقہ استعمال کریں تو (۱۰) کی بجائے ۴۱۸

مساوات و فرو/فرلا = ف (و) ....(۱۶)

حاصل ہوتی ہے۔ اب اِس صورت میں جبکہ مزاحمت رفتار کے متناسب ہے

فرو/فرلا = -ک اور و = -ک لا + ج ......(۱۷)

پس فرلا/فرت + ک لا = ج ....(۱۸)

اور دفعہ ۱۵۷ سے لا = ج/ک + د قو^(-ک ت) ....(۱۹)

جہاں ج اور د اختیاری مستقل ہیں۔ یہ نتیجہ (۱۳) کے مطابق ہے۔
نیز اگر مزاحمت رفتار کے مربع کے متناسب ہو تو

فرو/فرلا = -ک و اور و = ج قو^(-ک لا) ....(۲۰)

پس قو^(ک لا) فرلا/فرت = ج

اس لئے ۱/ک قو^(ک لا) = ج ت + د ....(۲۱)

یعنی ک لا = لوگ (ک ج ت + ک د) ....(۲۲)

(۱۵) میں ا = ک د/ج اور ک ب = لوگ ج رکھنے سے اس امر کی

تصدیق ہوسکتی ہے کہ یہ نتیجہ (۱۵) سے مختلف نہیں ہے۔

۱۶۵۔ مساواتیں جن میں ایک متغیر موجود نہیں ہے۔

(آ) اگر تابع متغیر صریحاً موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}،\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}،\ \text{لا}\right) = ۰ \quad \text{..........(۱)}$$

اِس میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے ع لکھنے سے، ع میں پہلے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ یعنی

$$\text{فہ}\left(\text{ع}،\ \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}،\ \text{لا}\right) = ۰ \quad \text{..........(۲)}$$

اگر اِس کا حل

$$\text{ع} = \text{ف}(\text{لا}،\ \text{ا}) \quad \text{..........(۳)}$$

کی شکل میں رکھا جا سکتا ہے جہاں ا اختیاری مستقل ہے، تو دوسرے تکمل سے حاصل ہوگا

$$\text{ما} = \int \text{ف}(\text{لا}،\ \text{ا})\,\text{فر لا} + \text{ب} \quad \text{.....(۴)}$$

اِس میں ایک اختیاری مستقل ما کے ساتھ بطور اضافہ کے شریک ہے۔ یہ بات ابتدا ہی سے ظاہر تھی کیونکہ ما کی بجائے (ما + ج) لکھنے سے مساوات (۱) میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔

(ب) اگر متبوع متغیر صریحاً موجود نہ ہو تو مساوات ذیل کی صورت کی ہوگی ۴۱۹

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}،\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}،\ \text{ما}\right) = ۰ \quad \text{...(۵)}$$

اور دفعہ ۱۶۳ (۳) کے مطابق

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} \text{ ، } \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \text{ع}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} \quad \ldots\ldots (٦)$$

لکھنے سے حاصل ہوگا

$$\text{فہ}\left(\text{ع}\text{ ، }\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}\text{ ، ع ، ما}\right) = ۰ \quad \ldots\ldots (٧)$$

جو ع اور ما میں پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔ اگر اس کا حل ذیل کی شکل میں لکھا جا سکے

$$\text{ع} = \text{ف}(\text{ما ، ا}) \quad \ldots\ldots (٨)$$

تو دوسرے تکمل سے حاصل ہوگا

$$\int \frac{\text{فرما}}{\text{ف}(\text{ما ، ا})} = \text{لا} + \text{ب} \quad \ldots\ldots (٩)$$

یہاں بھی مساوات (۵) کی شکل سے نتیجہ نکالا جا سکتا تھا کہ ایک اختیاری مستقل لا کے ساتھ بطور اضافہ کے شریک ہوگا۔

مثال (۱)

$$(۱ - \text{لا}^{2})\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad \ldots\ldots (١٠)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۱}{\text{ع}}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{2}}$$

اس لئے

$$\text{لوک ع} = -\tfrac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(۱ - \text{لا}^{2}) + \text{مستقل}$$

یا

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{2}}} \quad \ldots\ldots (١١)$$

اسلئے

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{جب}^{-1}\text{لا} + \text{ب} \quad \ldots\ldots (١٢)$$

مثال (۲) تجاذب کے نظریہ میں مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ف}}{\text{فرر}^{2}} + \frac{۲}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرف}}{\text{فرر}} = ۰ \quad \ldots\ldots (١٣)$$

اکثر نمودار ہوتی ہے، $\frac{فرق}{فرر}$ کو تابع متغیر ماننے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\;\frac{فر^{2}ق}{فرر^{2}}\;}{\frac{فرق}{فرر}} + \frac{2}{ر} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اِس لئے $لوک\ \frac{فرق}{فرر} + 2\,لوک\ ر = مستقل$

یا

۴۲۰ $$\frac{فرق}{فرر} = \frac{ا}{ر^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۵)$$

دوبارہ تکمیل کرنے سے

$$ق = -\frac{ا}{ر} + ب \quad \ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

مثال (۳) ایسے منحنی دریافت کرو جن کا نصف قطر انحنا عماد کے مساوی ہے لیکن منحنی کے دوسرے جانب واقع ہے۔

دفعات ۶۰ اور ۱۳۵ کے دیکھنے سے ظاہر ہے کہ مذکورۂ بالا شرط سے ذیل کی مساوات حاصل ہوگی

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{فر^{2}ما}{فرلا^{2}}} = ما\left\{1+\left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

مختصر کرکے ابدال (۶) کے استعمال سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ع}{1+ع^{2}}\,\frac{فرع}{فرما} = \frac{1}{ما} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

اس لئے $\frac{1}{2}\,لوک\,(1+ع^{2}) = لوک\ ما + مستقل$

اس لئے $1 + \text{ع}^2 = \dfrac{\text{ما}^2}{\text{ج}^2}$ .... (۱۹)

جہاں ج^2 اختیاری مستقل کے طور پر لیا گیا ہے کیونکہ یہ لازماً مثبت ہے۔

اس لئے $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ع} = \pm \dfrac{\sqrt{\text{ما}^2 - \text{ج}^2}}{\text{ج}}$ .... (۲۰)

متغیروں کو جدا کرنے سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\sqrt{\text{ما}^2 - \text{ج}^2}} = \pm \frac{\text{فر لا}}{\text{ج}}$$

$\text{جمز}^{-1} \dfrac{\text{ما}}{\text{ج}} = \pm \dfrac{\text{لا} - \text{عم}}{\text{ج}}$ .... (۲۱)

جہاں عم دوسرا اختیاری مستقل ہے۔

پس $\text{ما} = \text{ج}\ \text{جمز}\ \dfrac{\text{لا} - \text{عم}}{\text{ج}}$ .... (۲۲)

جو زنجیرہ کے قبیل کو ظاہر کرتا ہے۔ دفعہ ۱۳۴ مثال (۱) دیکھو۔

۱۶۶ — دوسرے رتبہ کی خطی مساوات۔

ایسی تفرقی مساوات جس میں تابع متغیر اور اس کے پہلے ن مشتقوں کی صرف پہلی قوتیں موجود ہوں اور انکا کوئی حاصل ضرب موجود نہ ہوں وہ ن رتبہ کی تفرقی مساوات کہلاتی ہے لہذا دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات یہ ہوگی

$\dfrac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف} \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = \text{ر}$ .... (۱)

جہاں ف، ق اور ر متغیر لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔

چند اہم خواص تمام خطی مساواتوں میں مشترک ہیں۔ ہم دوسرے رتبہ کی مساوات کے لئے انکے ثبوت دینگے لیکن عمل سے ظاہر ہوگا

کہ عام شکل کے لئے بھی اس کی توسیع بآسانی ہو سکتی ہے۔

۴۲۱ (آ) مساوات (۱) کا مکمل حل

$$\text{ما} = \text{ع} + \text{ط} \qquad \ldots\ldots (۲)$$

کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں (ط) ایسا تفاعل ہے کہ یہ مساوات (۱) کی موجودہ صورت کو پورا کرتا ہے اور (ع) مساوات

$$\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} + \text{ف}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ما} = ۰ \qquad \ldots\ldots (۳)$$

کا عام حل ہے جہاں مساوات (۳) مساوات (۱) کے بائیں جانب کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب اس مفروضہ کی بناء پر کہ ما = ع + ط جہاں ط مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اور ع دریافت طلب ہے مساوات (۱) میں اندراج سے

$$\frac{\text{فر}^۲\,\text{ع}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} + \text{ف}\,\frac{\text{فر}\,\text{ع}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ع} + \frac{\text{فر}^۲\,\text{ط}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} + \text{ف}\,\frac{\text{فر}\,\text{ط}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ط} = \text{ر}$$

اور چونکہ مفروض سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^۲\,\text{ط}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} + \text{ف}\,\frac{\text{فر}\,\text{ط}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ط} = \text{ر} \qquad \ldots\ldots (۴)$$

اس لئے

$$\frac{\text{فر}^۲\,\text{ع}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} + \text{ف}\,\frac{\text{فر}\,\text{ع}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ع} = ۰ \qquad (۵)$$

یعنی تفاعل ع مساوات (۳) کو پورا کرتا ہے۔

مساوات (۱) کے مکمل حل کے دو حصے ط اور ع کو بالترتیب "خاص تکملہ" اور "متمم تفاعل" کہتے ہیں۔ یہ واضح رہے کہ خاص تکملہ ابتدائی تفرقی مساوات کا کوئی حل ہے اور جتنا سادہ ہو بہتر ہوگا۔ برخلاف اس کے متمم تفاعل مساوات (۳) کا عام سے عام حل ہے اور اس لئے اس میں دو اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

(۲) اگر ع_1، ع_2 مساوات (۳) کے کوئی دو حل ہوں تو

$$\text{ی} = \text{ج}_1\,\text{ع}_1 + \text{ج}_2\,\text{ع}_2 \quad \ldots\ldots (6)$$

مساوات کو پورا کرے گا۔ اس میں ج_1 اور ج_2 اختیاری مستقل ہیں۔ مساوات میں درج کرنے سے بآسانی اس امر کی تصدیق ہو سکتی ہے لہذا اگر تفاعل ع_1 اور ع_2 ایک دوسرے کے تابع نہ ہوں یعنی ایک تفاعل دوسرے کا محض مستقل ضعف نہ ہو تو ضابطہ (٦) سے مساوات (۳) کا ایسا حل حاصل ہوتا ہے جس میں دو اختیاری مستقل موجود ہیں۔

(۳) اگر مساوات (۳) کا کوئی خاص تکملہ (و) معلوم ہو تو ابدال $\text{ی} = \text{ی}\,\text{و}$ سے مساوات (۱)، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ میں پہلے رتبہ کی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے اور اس لئے مساوات (۱) کا مکمل حل اس پہلے رتبہ کی مساوات کے تکمل پر آکے منحصر ہوتا ہے۔ کیونکہ مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\text{و}\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2} + \left(2\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ف}\,\text{و}\right)\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \left(\frac{\text{فر}^2\text{و}}{\text{فرلا}^2} + \text{ف}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ق}\,\text{و}\right)\text{ی} = \text{ر}$$

جو مفروضہ کی بنا پر ۴۲۲

$$\text{و}\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2} + \left(2\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ف}\,\text{و}\right)\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ر} \quad \ldots\ldots (8)$$

میں تحویل ہو جاتی ہے۔ یہ تابع متغیر $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ میں پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ بالخصوص اگر $\text{ر} = 0$ تو

$$\frac{\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2}}{\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}} + \frac{2}{\text{و}}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{ف} = 0 \quad (9)$$

اِس لئے $\text{لوک}\ \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲\ \text{لوک و} + \int \text{ف فرلا} = \text{مستقل}$

یا $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{و}^{۲}}\ \text{قو}^{-\int \text{ف فرلا}}$ .... (۱۰)

پس $\text{ی} = \text{ا} \int \frac{۱}{\text{و}^{۲}}\ \text{قو}^{-\int \text{ف فرلا}}\ \text{فرلا} + \text{ب}$ ...... (۱۱)

اور اِس لئے (۳) کا مکمل حل ہے

$\text{ما} = \text{ا و} \int \frac{۱}{\text{و}^{۲}}\ \text{قو}^{-\int \text{ف فرلا}}\ \text{فرلا} + \text{ب و}$ ..... (۱۲)

اب خطی مساواتوں کو مختلف ترکیبوں سے تکمل کرنے کی چند مثالیں دیجائیں گی۔ سلسلوں میں تکمل کرنے کے طریقوں پر چودھویں باب میں غور کیا جائے گا۔

مثال (۱) آواز کے نظریہ میں اور طبیعیاتی ریاضی کی دیگر شاخوں میں ذیل کی مساوات اکثر واقع ہوتی ہے

$\frac{\text{فر}^{۲}\ \text{فہ}}{\text{فر ر}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ر}}\ \frac{\text{فر فہ}}{\text{فر ر}} + \text{ک}^{۲}\ \text{فہ} = ۰$ ...... (۱۳)

اگر اسے ر سے ضرب دیں تو یہ مساوات اِس طرح لکھی جاسکتی ہے

$\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فر ر}^{۲}}\ (\text{ر فہ}) + \text{ک}^{۲}\ (\text{ر فہ}) = ۰$ ... (۱۴)

اِس لئے دفعہ ۱۶۳ کی رو سے

$\text{ر فہ} = \text{ا جم}\ (\text{ک ر}) + \text{ب جب}\ (\text{ک ر})$

یا $\text{فہ} = \frac{\text{ا جم}\ (\text{ک ر}) + \text{ب جب}\ (\text{ک ر})}{\text{ر}}$ ... (۱۵)

مثال (۲) $(۱ - \text{لا}^{۲})\ \frac{\text{فر}^{۲}\ \text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - \text{لا}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$. (۱۶)

ظاہر ہے کہ ما = لا اسکا ایک خاص حل ہے۔
اس لئے ما = لا ی رکھنے سے

(۱۷)

$$\text{لا}(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2}+(2-3\text{لا}^2)\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}=0 \quad \ldots\ldots (18)$$ ۴۲۳

اب متغیروں کو جدا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2}}{\dfrac{\text{فری}}{\text{فرلا}}}+\frac{2}{\text{لا}}-\frac{\text{لا}}{1-\text{لا}^2}=0 \quad \ldots\ldots (19)$$

اس لئے

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}=\frac{\text{ا}}{\text{لا}^2\sqrt{1-\text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots (20)$$

اور

$$\text{ی}=-\frac{\text{ا}\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لا}}+\text{ب} \quad \ldots\ldots (21)$$

اس لئے (۱۶) کا مکمل حل ہے

$$\text{ما}=\text{ا}\sqrt{1-\text{لا}^2}+\text{ب}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots (22)$$

مثال (۳)

$$(1+\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}+3\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ما}=0 \quad (23)$$

اتفاق سے یہ "ٹھیک" مساوات ہے۔ یعنی دایاں رکن، لا، ما، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے ایک تفاعل کا ٹھیک تفرقی سر ہے، کیونکہ مساوات لکھی جاسکتی ہے

$$\left\{(1+\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}+2\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right\}+\left\{\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ما}\right\}=0$$

پس اس کا تکملہ ہے

$$(1+\text{لا}^2)\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{لا}\,\text{ما}=\text{ا} \quad \ldots\ldots (24)$$

یہ پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ اور ظاہر ہے کہ اس کا مکمل جزو ضربی

$\frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$ ہے۔ اس لئے

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}\left\{\sqrt{1+\text{لا}^2}\times\text{ما}\right\}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$$

$$\therefore\ \sqrt{1+\text{لا}^2}\times\text{ما}=\text{ا جیبز}^{-1}\text{لا}+\text{ب}\quad\ldots\ldots(25)$$

امثلہ ۵۵

(۱) $\text{لا}\,\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}=1$ $\left[\text{ما}=\text{لا لوک لا}+\text{ا لا}+\text{ب}\right]$

(۲) $\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{ف لا}^2}=\text{لا قو}^{\text{لا}}$ $\left[\text{ما}=(\text{لا}-2)\text{قو}^{\text{لا}}+\text{ا لا}+\text{ب}\right]$

(۳) $\text{لا}^2\,\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{ف لا}^2}=\text{ر}$ $\left[\text{ما}=\text{ر لوک}\,\frac{\text{ر}}{\text{لا}}+\text{ا لا}+\text{ب}\right]$

۴۲۴ (۴) ایک افقی سلاخ پر صرف اس کا وزن اور اس کے ٹیکوں کے دباؤ عمل کر رہے ہیں سلاخ کے انصراف کے لئے تفرقی مساوات یہ ہے

$$\text{ب}\,\frac{\text{ف}^4\text{ما}}{\text{ف لا}^4}=\text{و}$$

جہاں 'و' وزن فی اکائی طول ہے۔
و کو مستقل مانکر اس مساوات کو تکمل کرو اور مستقلات کو ذیل کے شرایط کے تحت دریافت کرو

$$\text{ما}=\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}=0\ \text{جبکہ لا}=0\ \text{۔ اور نیز جبکہ لا}=\text{ل}$$

[یہ صورت (ل) طول والی یکساں سلاخ میں پیدا ہوگی جو سروں پر ٹکی ہوئی ہے]

$$\left[\text{ب ما} = \frac{1}{24}\,\text{و لا}\,(\text{ل} - \text{لا})(\text{ل}^2 + \text{ل لا} - \text{لا}^2)\right]$$

(۵) مذکورۂ بالا سوال کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

$$\text{ما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \text{جبکہ لا} = 0 \text{ اور نیز لا} = \text{ل}$$

[یہ صورت ایک سلاخ کی ہے جو دونوں سروں پر جکڑی ہوئی ہے]

$$\left[\text{ب ما} = \frac{1}{24}\,\text{و لا}^2(\text{ل} - \text{لا})^2\right]$$

(۶) سوال (۴) کی مساوات کو ذیل کے شرائط کے ماتحت حل کرو

$$\text{لا} = 0 \text{ کے لئے ما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0 \text{ اور لا} = \text{ل کے لئے } \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فرلا}^3} = 0$$

[یہ صورت ایسی سلاخ کی ہے جسکا ایک سرا جکڑا ہوا ہے اور دوسرا آزاد ہے]

$$\left[\text{ب ما} = \frac{1}{24}\,\text{و لا}^2(6\text{ل}^2 - 4\text{ل لا} + \text{لا}^2)\right]$$

(۷) مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{مہ لا} + \text{ف}$ کو حل کرو اور حل کی طبیعی تعبیر بتاؤ۔

$$\left[\text{لا} = \frac{\text{ف}}{\text{مہ}} + \text{ع جم}(\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت} + \text{صہ})\right]$$

(۸) ایک ذرہ کی خطی حرکت کی تفرقی مساوات جس پر فاصلہ کے متناسب قوتِ اندفاع عمل کر رہی ہے $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ لا}$ ہے۔ ثابت کرو کہ اسکا حل ذیل کی تین شکلوں میں سے کوئی ایک ہے اور نتیجوں کی طبیعی تعبیر بتاؤ

$$\text{لا} = \text{ا جمز}(\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت} + \text{صہ}),\quad \text{لا} = \text{ا جبز}(\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت} + \text{صہ}),\quad \text{لا} = \text{ا قو}^{\pm\sqrt{\text{مہ}}\,\text{ت} + \text{صہ}}$$

(۹) ایک ذرہ حالت سکون سے فاصلہ (ا) سے قوت کے مرکز کی طرف حرکت کرتا ہے۔ کشش کا اسراع مساوی ہے مہ (فاصلہ)$^{-3}$ کے۔ ثابت کرو کہ مرکز تک گرنے کا وقت $\frac{\text{ا}^2}{\sqrt{\text{مہ}}}$ ہے۔

(۱۰) مرکزی مدار کی عام تفرقی مساوات

$\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرط}^2}+\text{ع}=\frac{\text{ف}}{\text{ھ}^2\text{ع}^2}$ ہے جہاں ف، ع کا معلومہ تفاعل ہے۔

اس کا پہلا تکمل دریافت کرو۔

$$\left[\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}\right)^2+\text{ع}^2=2\int\frac{\text{ف}}{\text{ھ}^2\text{ع}^2}\,\text{فرع}+\text{ج}\right]$$

(۱۱) مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرت}^2}=\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^3}$ کو حل کرو اور ثابت کرو کہ حل حسب ذیل ہے

$$\text{ر}^2=\text{ا}+2\,\text{ب}\,\text{ت}+\text{ج}\,\text{ت}^2$$

جہاں مستقلات ا، ب اور ج میں ذیل کا ربط ہے

$$\text{ا}\,\text{ج}-\text{ب}^2=\text{مہ}$$

(۱۲) $\text{ا}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}=\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ $\left[\text{ما}=\text{ا}+\text{ب}\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right]$ ۴۲۵

(۱۳) $2\,\text{ا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}=1$ $\left[\text{ا}(\text{ما}-\text{بہ})^2=\frac{4}{9}(\text{لا}-\text{عہ})^3\right]$

(۱۴) $\text{ا}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2=0$ $\left[\text{ما}=\text{ا}\,\text{لوگ}\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{بہ}}\right]$

(۱۵) $\text{ا}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}=\left[1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ $\left[\text{ما}-\text{بہ}=\text{ا}\,\text{جمز}\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ا}}\right]$

(۱۶) $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2+1=0$ $\left[\text{ما}=\text{بہ}+\text{لوگ}\,\text{جم}(\text{لا}-\text{عہ})\right]$

(۱۷) $\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فرلا}^4}=\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}}$ $\left[\text{ما}=\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}\,\text{و}^{\text{لا}}+\text{د}\,\text{و}^{-\text{لا}}\right]$

(۱۸) $\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فرلا}^4}+\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}=0$ $\left[\text{ما}=\text{ا}+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}\,\text{جم}\,\text{لا}+\text{د}\,\text{جب}\,\text{لا}\right]$

(۱۹) $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ق}}{\text{فر ر}^{2}} + \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر ق}}{\text{فر ر}} = 0$ [ق = ا لوگ ر + ب]

(۲۰) $\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} = 2\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ [ما = الا^۳ + ب]

(۲۱) $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ [ما = ۲ ب مسز ب (لا - ع)]

(۲۲) $(1+\text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2} = 0$

[ما = ب + $(1 + \frac{1}{\text{ع}^{2}})$ لوگ (۱ + ع لا) $- \frac{\text{لا}}{\text{ع}}$]

(۲۳) $(1+\text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ [ما = ا + ب جنز$^{-1}$ لا]

(۲۴) $(\text{لا}^{2}-1)\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ [ما = ا + ب جمز$^{-1}$ لا]

(۲۵) $(1+\text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 2\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ [ما = ا مس$^{-1}$ لا + ب]

(۲۶) $(1-\text{ما})\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 2\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2} = 0$ [ما = $\frac{\text{لا} + \text{ا}}{\text{لا} + \text{ب}}$]

(۲۷) $\text{ما}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} = 2\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2}$ [ما = $\frac{\text{ا}}{\text{لا} + \text{ب}}$]

(۲۸) $\text{ما}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} = 1 - \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{2}$ [ما^{2} = لا^{2} + الا + ب]

(۲۹) $(1-\text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 2$ ۴۲۶

[ما = (جب$^{-1}$ لا)^{2} + ا جب$^{-1}$ لا + ب]

(۳۰) $$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left\{(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right\}=\text{۰} \qquad [\text{ع}=\text{ا}+\text{ب مس}^{-\text{۱}}\text{لا}]$$

(۳۱) $$\frac{\text{فر}}{\text{فرمہ}}\left\{(\text{۱}-\text{مہ}^{\text{۲}})\frac{\text{فرع}}{\text{فرمہ}}\right\}+\text{۲مہ}=\text{۰}$$

$$[\text{ع}=\text{ا مہ}+\text{ب}(\text{۱}-\text{مہ مس}^{-\text{۱}}\text{مہ})]$$

(۳۲) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحنا عماد کے مساوی ہے اور یہ دونوں منحنی کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔

$$[\text{دائرے } (\text{لا}-\text{عہ})^{\text{۲}}+\text{ما}^{\text{۲}}=\text{بہ}^{\text{۲}}]$$

(۳۳) ایسے منحنی دریافت کرو کہ نصف قطر انحنا عماد کا دوچند ہے اور یہ دونوں منحنی کے مخالف جانب واقع ہیں۔

$$[\text{مکافی } (\text{لا}-\text{عہ})^{\text{۲}}=\text{۴ بہ}(\text{ما}-\text{بہ})]$$

(۳۴) ایسے منحنی دریافت کرو کہ ما محور پر نصف قطر انحنا کا ظل مستقل ا کے مساوی ہے۔

$$[\text{ما}=\text{بہ لوک قط}\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ا}}]$$

(۳۵) ایسے منحنی دریافت کرو جنکا نصف قطر انحنا عماد کے مکعب سے متناسب ہے

[مخروطی تراشیں جنمیں لا محور، محور تشاکل ہے]

(۳۶) $$(\text{۱}+\text{لا})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+\text{لا}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{۲}}=\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$\left[\text{ما}=\text{بہ}+\text{لوک}(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{عہ}^{\text{۲}})-\frac{\text{۱}}{\text{عہ}}\text{لوک}\left(\frac{\text{لا}+\text{عہ}}{\text{لا}-\text{عہ}}\right)\right]$$

(۳۷) $$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}-\frac{\text{۱}}{\text{لا}}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{لا}^{\text{۲}}=\text{۰}$$

$$\left[\text{ما}=\text{ا}+\text{ب}\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}}\right]$$

(۳۸) $$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+\text{ف}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}}\text{ما}=\text{۰}$$

$$\left[\text{ما} = \text{فو}^{-\text{۲ف فرلا}}\left(\text{۱}\int \text{فو}^{\text{۲ف فرلا}}\,\text{فرلا} + \text{ب}\right)\right]$$

(۳۹) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \frac{۲}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \frac{\text{۱فو}^{\text{لا}} + \text{ب قو}^{-\text{لا}}}{\text{لا}}\right]$

(۴۰) $(۱ + \text{لا}^{۲})\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۲\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\text{ما} = ۰$

$\left[\text{ما} = \text{۱لا} + \text{ب}(۱ - \text{لا}^{۲})\right]$

(۴۱) $(۱ + \text{لا}^{۲})\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}$ $\left[\text{ما} = \text{۱لا} + \text{ب}\sqrt{۱ + \text{لا}^{۲}}\right]$

(۴۲) مساوات $(\text{لا}^{۲} - ۱)\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۲\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\text{ما} = ۰$ کو حل کرو

اس کا ایک حل $\text{ما} = \text{لا}$ معلوم ہے $\left[\text{ما} = \text{۱لا} + \text{ب}(\text{لا}^{۲} + ۱)\right]$

(۴۳) مساوات $\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - (\text{ن} - \text{لا})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ن ما} = ۰$ کو حل کرو ۲۲۷

جبکہ ایک حل $\text{ما} = \text{قو}^{-\text{لا}}$ ہے $\left[\text{ما} = \text{۱قو}^{-\text{لا}} + \text{ب قو}^{-\text{لا}}\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{\text{لا}}\,\text{فرلا}\right]$

(۴۴) مساوات $(\text{لا}^{۲} - ۱)\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$ میں ابدال

$\text{ی} = \text{جمز}^{-۱}\text{لا}$ سے متغیر کو (ی) میں تبدیل کرو اور اسکو حل کرو

$\left[\text{ما} = \text{۱جم ی} + \text{ب جب ی}\right]$

(۴۵) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۲\text{ن ممم}(\text{ن لا})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (\text{م}^{۲} - \text{ن}^{۲})\,\text{ما} = ۰$

$$\left[\text{ما} = \frac{\text{۱جم م لا} + \text{ب جب م لا}}{\text{جب ن لا}}\right]$$

(۴۶) $$(1-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} - 3\,\text{لا}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} - \text{ما} = 0$$

$$\left[\text{ما} = \frac{\text{ا}\,\text{جب}^{-1}\,\text{لا} + \text{ب}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}\right]$$

(۴۷) $$\text{لا}^2\,\text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} + \left(\text{ما} - \text{لا}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)^2 = 0 \qquad \left[\text{ما}^2 = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{لا}^2\right]$$

(۴۸) $$\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} + \text{لا}\left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\right)^2 - \text{ما}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = 0 \qquad \left[\text{ما}^2 = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\right]$$

(۴۹) $$3\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} \times \frac{\text{فر}^4\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^4} = 5\left(\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^3}\right)^2$$

$$\left[(\text{ما} - \text{ا}\,\text{لا} - \text{ب})^2 = \text{ج}\,\text{لا} + \text{د}\right]$$

(۵۰) $$2\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} \times \frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^3} = 3\left(\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2}\right)^2$$

$$\left[\text{ما} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} + \text{ج}}\right]$$

تیرہواں باب ۴۲۸

مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۱۶۷ — دوسرے رتبہ کی مساواتیں ۔ متمم تفاعل ۔

مستقل سروں والی خطی مساواتیں ریاضی طبیعیات میں اس کثرت سے واقع ہوتی ہیں کہ اِن پر تفصیل سے غور کرنا مناسب ہوگا ۔ اس تحقیق میں تبوع متغیر لا کے لحاظ سے عامل عف یا فر/فرلا کی چند خاصیتوں کو استعمال کرنے سے بہت سہولت پیدا ہوتی ہے ۔

دفعہ ۲۹ میں ثابت کردیا گیا ہے کہ عف کا عمل ، تقسیمی ہے یعنی اگر ع اور و متغیر لا کے تفاعل ہوں تو

عف (ع + و) = عف ع + عف و ...... (۱)

نیز اگر ا مستقل ہو تو

(عف + ا) ع = عف ع + ا ع = ا ع + عف ع = (ا + عف) ع ..(۲)

اور　عف (ا ع) = ا فرع/فرلا = ا عف ع ..... (۳)

اس لئے عف مستقل ضعف کی شرکت میں قانون تبادلہ کے تابع ہے ۔ علاوہ ازیں عف قوت نمائی قانون کے بھی تابع ہے یعنی

عف^م عف^ن ع = عف^(م+ن) ع .... (۴)

پس عامل عف بذات خود اور مستقل ضعف کے ساتھ معمولی جبر و مقابلہ کے اساسی قوانین کو مانتا ہے۔ اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ جبر و مقابلہ کے وہ نتائج جو اوپر کے قوانین سے حاصل ہوتے ہیں موجودہ اطلاق کے لئے بھی درست ہونگے بشرطیکہ عف کی رقوم میں انکے کوئی معنی موجود ہوں بطور مثال اگر لا۱، لا۲ مستقل ہوں تو

$$(\text{عف}-\text{لا}_1)(\text{عف}-\text{لا}_2)\text{ع} = (\text{عف}-\text{لا}_1)\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}-\text{لا}_2\text{ع}\right)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}-\text{لا}_2\text{ع}\right)-\text{لا}_1\left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}-\text{لا}_2\text{ع}\right)$$

$$= \frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2}-(\text{لا}_1+\text{لا}_2)\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}+\text{لا}_1\text{لا}_2\text{ع}$$

$$= [\text{عف}^2-(\text{لا}_1+\text{لا}_2)\text{عف}+\text{لا}_1\text{لا}_2]\text{ع} \quad \ldots\ldots (۵)$$

۲۹ اب ہم دوسرے رتبہ کی مساوات پر غور کرینگے۔ یہ مساوات حرکیاتی سوالات میں اکثر نمودار ہوتی ہے۔

متمم تفاعل دریافت کرنیکے لئے ذیل کے نمونے کی مساوات کو حل کرنا ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}+\text{ا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ب ما}=0 \quad \ldots\ldots (٦)$$

یعنی $(\text{عف}^2+\text{ا عف}+\text{ب})\text{ما}=0 \quad \ldots\ldots (۷)$

اگر $\frac{1}{4}\text{ا}^2 > \text{ب}$ تو اِس کے معادل ہے

$$(\text{عف}-\text{لا}_1)(\text{عف}-\text{لا}_2)\text{ما}=0 \quad \ldots\ldots (۸)$$

جہاں لا_1، لا_2 مساوات $\text{لا}^2+\text{ا لا}+\text{ب}=0$ کی اصلیں ہیں۔

یعنی $\text{لا}_1, \text{لا}_2 = -\frac{1}{2}\text{ا} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\text{ا}^2-\text{ب}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$

اگر لکھیں $(\text{عف}-\text{لا}_2)\text{ما}=\text{ی} \quad \ldots\ldots (۱۱)$

تو مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

(عف - لم$_۱$) ی = ... (۱۲)

جو پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے، دفعہ (۱۵۷) سے اس کا حل ہے

ی = ا قو$^{لم_۲ لا}$ .... (۱۳)

اور نتیجہ (۱۱) میں درج کرنے سے

(عف - لم$_۱$) ما = ا قو$^{لم_۲ لا}$ .... (۱۴)

اس لئے دفعہ (۱۵۷) (آ) سے

ما = ج$_۱$ قو$^{لم_۱ لا}$ + ج$_۲$ قو$^{لم_۲ لا}$ .... (۱۵)

جہاں ج$_۱$ = $\frac{ا}{لم_۱ - لم_۲}$ ،

چونکہ ا ایک اختیاری مستقل ہے اس لئے ج$_۱$ ، ج$_۲$ بھی اختیاری مستقل ہونگے۔ اور عمل سے ظاہر ہے کہ (۱۵) مساوات (۶) کا عام سے عام حل ہے

اگر $\frac{۱}{۴}$ ا$_۱^۲$ = ب تو مساوات (۹) کی لم میں اصلیں مساوی ہیں اور (۱۴) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

(عف - لم) ما = ا قو$^{لم لا}$ .... (۱۶)

اس کا عام حل دفعہ ۱۵۷ (۲) کے مطابق ہے

ما = (ا لا + ب) قو$^{لم لا}$ .... (۱۷)

اگر $\frac{۱}{۴}$ ا$_۱^۲$ < ب ہے تو (۹) کو پورا کرنے والی لم$_۱$ ، لم$_۲$ کی قیمتیں خیالی ہیں تاہم مذکورہ بالا طریقہ سے مساوات (۶) کا ایسا علاماتی حل دریافت

کر سکتے ہیں جس میں √-۱ موجود ہو۔

اس سوال پر کہ ایسے حل کو کیا معنی دئے جائیں یہاں غور کرنے کی چنداں ضرورت نہیں ہے کیونکہ ذیل کے طریقہ پر ہم اس مشکل سے بچ سکتے ہیں۔

۴۳۰ اگر ما = قو^م لا × ی .... (۱۸)

لکھیں جہاں م ابھی غیر معین ہے تو

عف ما = قو^م لا (عف + م) ی،

عف² ما = قو^م لا (عف² + ۲م عف + م²) ی .... (۱۹)

اس لئے تفرقی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

{عف² + (۲م + ا) عف + م² + ا م + ب} ی = ۰ (۲۰)

اب اگر م = - ½ ا رکھیں تو یہ دفعہ ۱۶۳ (۸) کی شکل میں تحویل ہو جاتا ہے

فر²ی / فرلا² + (ب - ¼ ا²) ی = ۰ (۲۱)

اگر ب > ¼ ا² تو دفعہ ۱۶۳ میں دکھایا گیا ہے کہ اس کا حل ہے

ی = ا جم بہ لا + ب جب بہ لا ...... (۲۲)

جہاں بہ = √(ب - ¼ ا²) .... (۲۳)

پس موجودہ صورت میں مساوات (۶) کا حل ہے

ما = قو^(-½ ا لا) (ا جم بہ لا + ب جب بہ لا) .... (۲۴)

یہ اسکے معادل ہے ما = ج قو^(-½ ا لا) × جم (بہ لا + صہ) ...... (۲۵)

اس میں ج اور صہ اختیاری مستقل ہیں۔ مذکورۂ بالا نتائج کو ذیل کی شکل میں اکٹھا کر سکتے ہیں۔

(و) اگر $\frac{1}{4}\text{ا}^{2} > \text{ب}$ تو (٦) کا حل ہوگا

$\text{ما} = \text{ج}_1\,\text{قو}^{\text{لہ}_1\text{لا}} + \text{ج}_2\,\text{قو}^{\text{لہ}_2\text{لا}}$ جہاں لہ_1، لہ_2 مساوات

$\text{لہ}^{2} + \text{ا}\,\text{لہ} + \text{ب} = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

(ب) اگر $\frac{\text{ا}^{2}}{4} = \text{ب}$ تو حل ہوگا

$$\text{ما} = (\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})\,\text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ا}\,\text{لا}}$$

(ج) اگر $\frac{1}{4}\text{ا}^{2} < \text{ب}$ تو حل ہوگا

$$\text{ما} = \text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ا}\,\text{لا}} \times (\text{ا}\,\text{جم}\,\text{بہ}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{بہ}\,\text{لا})$$

جہاں $\text{بہ}^{2} = \text{ب} - \frac{1}{4}\text{ا}^{2}$

مثال (۱) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} + \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} - ٦\,\text{ما} = ۰$ ....(۲٦)

لہ میں مساوات $\text{لہ}^{2} + \text{لہ} - ٦ = ۰$ ہوگی۔

اس سے لہ = ۲ اور -۳

پس $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{۲\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-۳\text{لا}}$ ....(۲۷)

مثال (۲) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} + ۴\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + ۴\,\text{ما} = ۰$

لہ میں مساوات $(\text{لہ} + ۲)^{2} = ۰$ ہوگی

اس کی دوہری اصل (-۲) ہے۔

اس لئے $\text{ما} = (\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})\,\text{قو}^{-۲\text{لا}}$ ....(۲۸)

مثال (۳) رقاص کی آزاد اہتزازی حرکت ایسے واسطے میں جس کی مزاحمت رفتار کے ۴۲۱

متناسب ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{مہ لا} = 0 \quad \ldots\ldots (۲۹)$$

جہاں ک رگڑ کی قدر ہے ۔ یہی مساوات روپیما کی سوئی کی حرکت کو بھی ظاہر کرتی ہے جبکہ اس پر ہوا کی لزوجت کا اور اس امالی رو کا برق مقناطیسی عمل ہو رہا ہو جو سوئی کی حرکت سے پاس کی دھات کی اشیا میں پیدا ہوتی ہے ۔

مختلف ترقیم کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات (۲۹) کا حل جبکہ رگڑ کی قدر ایک خاص مقدار سے کم ہے یہ ہے

$$\text{لا} = \text{ج}\ \text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}} \times \text{جم}\,(\text{ن}_1\text{ت} + \text{صہ}) \quad \ldots\ldots (۳۰)$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ن}_1 = \sqrt{\text{مہ} - \tfrac{1}{4}\text{ک}^2} \quad \ldots\ldots (۳۱)$$

نتیجہ (۳۰) سے جو حرکت تعبیر ہوتی ہے اسے ایسی سادہ موسیقی حرکت خیال کیا جا سکتا ہے جسکا دور $\frac{2\pi}{\text{ن}_1}$ ہے اور جس کا حیطہ قانون $\text{قو}^{-\frac{1}{2}\text{ک ت}}$ کے مطابق متقارباً صفر تک کم ہوتا ہے ۔ حل (۳۰) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ $\text{ک}^2 < 4\,\text{مہ}$ ۔ اگر $\text{ک}^2 > 4\,\text{مہ}$ تو مناسب حل یہ ہوگا

$$\text{لا} = \text{ا}\ \text{قو}^{\text{لہ}_1\text{ت}} + \text{ب}\ \text{قو}^{\text{لہ}_2\text{ت}} \quad \ldots\ldots (۳۲)$$

جہاں لہ_1، لہ_2 مساوات $\text{لہ}^2 + \text{ک لہ} + \text{مہ} = 0$ (۳۳)

کی اصلیں ہیں ۔ مفروضہ کی بنا پر یہ اصلیں حقیقی ہیں اور چونکہ ان کا حاصل ضرب (مہ) مثبت ہے اس لئے یہ ایک ہی علامت کی ہونگی ۔ نیز چونکہ ان کا حاصل جمع (-ک) منفی ہے اس لئے دونوں اصلیں منفی ہونگی ۔ اس لئے ہٹاؤ لا زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ صفر قیمت اختیار کرنے کے بعد متقارباً صفر کی طرف مائل ہوتا ہے ۔ یہ صورت سست گام روپیما میں یا بہت زیادہ لزج مایع میں حرکت کرنے والے رقاص میں نمودار ہوتی ہے ۔

انتہائی صورت میں جبکہ $\text{ک}^2 = 4\,\text{مہ}$

$$لا = (ا + ب ت)\ قو^{-\frac{1}{2}ک ت} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۳۴)$$

پہلا جزو ضربی، مطلق قیمت کے لحاظ سے ت کے ساتھ ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور دوسرا گھٹتا ہے۔ لیکن چونکہ دوسرے جزو ضربی کا گھٹاؤ پہلے کے بڑھاؤ سے زیادہ تیز ہے اس لئے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ت ← ∞ کے لئے صفر ہے دفعہ ۴۳ (۲) دیکھو۔

۱۶۸ — خاص تکملہ کی تعیین۔

اب ہم مستقل سروں والی، دوسرے رتبہ کی خطی مساوات کا خاص تکملہ دریافت کرینگے جبکہ مساوات کا بایاں جانب بھی وجود رکھتا ہو۔

پس $(عف^2 + ا_1 عف + ب)\ ما = ر$ .... (۱)

جہاں ر متغیر ا کا ایک معلوم تفاعل ہے۔

جیسے اوپر بیان ہو چکا ہے اس کا کوئی بھی خاص تکملہ، خواہ کسی طرح دریافت ہوا ہو، حل کے لئے کافی ہوگا۔

پس خاص تکملہ میں سے ایسی رقموں کو نظر انداز کر سکتے ہیں جو متمم تفاعل میں واقع ہوتی ہیں کیونکہ یہ مساوات (۱) کے دائیں جانب میں کسی رقم کا ۴۴۲
اضافہ نہیں کرینگی۔ برعکس اس کے ضرورت کے لحاظ سے ہم خاص تکملہ میں متمم تفاعل کی کتنی بھی رقمیں جمع کر سکتے ہیں۔

نیز اگر ر رقموں کا مجموعہ ہو تو ما کی وہ قیمتیں دریافت کرنی ہیں جنکو مساوات (۱) کی دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی مختلف رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔ خاص تکملہ ما کی ان قیمتوں کا مجموعہ ہوگا یہاں صرف نہایت کارآمد صورتوں پر غور کرنا کافی ہوگا۔

(ا) اگر ر میں اس نمونہ $ح\ قو^{عا}$ .... (۲)

کی رقم موجود ہو تو خاص تکملہ میں متناظر رقم ہوگی

$$\text{ما} = \frac{\text{ح}}{\text{عم}^2 + \text{ا}\,\text{عم} + \text{ب}} \times \text{قو}^{\text{عم}\,\text{لا}} \quad \text{(۳)}$$

کیونکہ اگر (۳) کی بائیں جانب پر عامل (عف^2 + ا عف + ب) سے عمل کریں تو (۲) حاصل ہوتا ہے۔

یہ ضابطہ ناکام رہتا ہے اگر عم^2 + ا عم + ب = ۰

یعنی اگر $\text{قو}^{\text{عم}\,\text{لا}}$ متمم تفاعل کی ایک رقم ہو۔

پچھلے دفعہ کی ترقیم میں فرض کرو کہ عم = لم$_1$ یعنی ذیل کی مساوات کو حل کرنا ہے

$$(\text{عف} - \text{لم}_1)(\text{عف} - \text{لم}_2)\,\text{ما} = \text{ح}\,\text{قو}^{\text{لم}_1\,\text{لا}} \quad \text{(۴)}$$

اگر $(\text{عف} - \text{لم}_2)\,\text{ما} = \text{ی}$ ... (۵)

لکھیں تو اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{عف} - \text{لم}_1)\,\text{ی} = \text{ح}\,\text{قو}^{\text{لم}_1\,\text{لا}} \quad \text{(۶)}$$

دفعہ ۱۵۷ (۲) میں یہ بتایا گیا ہے کہ (۶) کا خاص تکملہ ہے

$$\text{ی} = \text{ح}\,\text{لا}\,\text{قو}^{\text{لم}_1\,\text{لا}} \quad \text{(۷)}$$

اب صرف مساوات $(\text{عف} - \text{لم}_2)\,\text{ما} = \text{ح}\,\text{لا}\,\text{قو}^{\text{لم}_1\,\text{لا}}$ ... (۸)

کا حل مطلوب ہے۔ اس کا تکمیل جزو ضربی $\text{قو}^{-\text{لم}_2\,\text{لا}}$ ہے

اس لئے $\text{عف}(\text{ما}\,\text{قو}^{-\text{لم}_2\,\text{لا}}) = \text{ح}\,\text{لا}\,\text{قو}^{(\text{لم}_1 - \text{لم}_2)\,\text{لا}}$ ... (۹)

بائیں جانب کو بالحصص تکمیل کرنے سے اور متمم تفاعل میں جو رقمیں حاصل ہو چکی ہیں انکو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما فو}^{-\text{م}_2\text{لا}} = \frac{\text{ح}}{\text{م}_1 - \text{م}_2} \times \text{لا فو}^{(\text{م}_1 - \text{م}_2)\text{لا}}$$

یعنی $$\text{ما} = \frac{\text{ح}}{\text{م}_1 - \text{م}_2}\ \text{لا فو}^{\text{م}_1\text{لا}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

۴۲۳ اگر م مساوات $\text{عف}^2 + \text{ا عف} + \text{ب} = 0$ کی دوہری اصل ہو تو مزید ترمیم کی ضرورت ہے۔

اب حل طلب مساوات اس شکل کی ہے

$$(\text{عف} - \text{م})^2\ \text{ما} = \text{ح فو}^{\text{م لا}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$$

عمل کا پہلا قدم وہی ہے لیکن اب بجائے (۸) کے مساوات ہے

$$(\text{عف} - \text{م})\ \text{ما} = \text{ح لا فو}^{\text{م لا}} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

دفعہ ۱۵۷ (۳) میں دریافت کیا گیا تھا کہ اس کا خاص تکملہ ہے

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\ \text{ح لا}^2\ \text{فو}^{\text{م لا}} \quad \ldots\ldots (۱۳)$$

نتائج کی صورتیں ایک دفعہ قائم کر دینے کے بعد، طالب علم اس میں بہت سہولت پائیگا کہ حسب موقع

$$\text{ما} = \text{م فو}^{\text{ع لا}}،\ \text{ما} = \text{م لا فو}^{\text{ع لا}}\ \text{یا}\ \text{ما} = \text{م لا}^2\ \text{فو}^{\text{ع لا}}، \quad \ldots\ldots (۱۴)$$

میں سے مناسب حل کو فرض کرے اور مساوات

$$(\text{عف}^2 + \text{ا عف} + \text{ب})\ \text{ما} = \text{ح فو}^{\text{ع لا}} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

میں درج کر کے م کی قیمت دریافت کرے۔

دفعہ ۱۶۹ میں جو ضابطے دئے جائینگے اِن کی وجہ سے عمل میں بہت آسانی واقع ہوگی۔

(۲) اگر س میں ح جم عہ لا + ک جب عہ لا ..... (۱۶)
کے نمونہ کی رقم موجود ہو تو فرض کرو کہ

ما = ا جم عہ لا + ب جب عہ لا .... (۱۷)

مساوات (۱) میں درج کرنے سے دائیں جانب مساوی ہے

(- عہ^۲ ا + ا عہ ب + ب ا) جم عہ لا

+ (- عہ^۲ ب - ا عہ ا + ب ب) جب عہ لا

کے۔ پس جملہ (۱۶) کی رقوم پیدا ہونگی بشرطیکہ

(- عہ^۲ + ب) ا + ا عہ ب = ح ، - ا عہ ا + (- عہ^۲ + ب) ب = ک .... (۱۸)

سوائے اُس خاص صورت کے جبکہ ا = ۰ ، عہ^۲ = ب (جس پر ابھی غور کیا جائیگا) ان مساواتوں سے ا ، ب دریافت ہو سکتے ہیں۔

پس ا = ((- عہ^۲ + ب) ح - ا عہ ک) / ((عہ^۲ - ب)^۲ + ا^۲ عہ^۲) ، ب = (ا عہ ح + (- عہ^۲ + ب) ک) / ((عہ^۲ - ب)^۲ + ا^۲ عہ^۲) .... (۱۹)

اگر تفرقی مساوات میں سر (ا) صفر ہے تو مذکورۂ بالا نتائج میں اختصار ہو سکتا ہے۔ ظاہر ہے کہ مساوات

ف^۲ ما / ف لا^۲ + ب ما = ح جم عہ لا + ک جب عہ لا .... (۲۰)

کا خاص تکملہ ہوگا

ما = ح / (ب - عہ^۲) جم عہ لا + ک / (ب - عہ^۲) جب عہ لا .... (۲۱)

لیکن اگر عہ^۲ = ب تو حل میں مشکل پیدا ہوتی ہے۔ اس صورت میں حل کی مناسب شکل کے لئے فرض کرو کہ

ما = ء جم عہ لا + و جب عہ لا .... (۲۲)

اس کو درج کرنے سے

فر^۲ ما / فر لا^۲ + عہ^۲ ما = (۲ عہ عف و + عف^۲ ع) جم عہ لا ۲۳۴

+ (-۲ عہ عف ع + عف^۲ و) جب عہ لا ...... (۲۳)

پس اس صورت میں مساوات (۲۰) پوری ہوگی بشرطیکہ

عف ع = - ک / ۲ عہ ، عف و = ح / ۲ عہ

یعنی ع = - ک لا / ۲ عہ ، و = ح لا / ۲ عہ .... (۲۴)

اسلئے خاص تکملہ ہے ما = ح / ۲ عہ لا جب عہ لا - ک / ۲ عہ لا جم عہ لا ...(۲۵)

مثال (۱) فر^۲ ما / فر لا^۲ + فر ما / فر لا - ۶ ما = قو^{۳لا} + قو^{-۳لا} .... (۲۶)

دفعہ ۱۶۰ مثال (۱) کے مطابق اسکا متمم تفاعل ہے

ما = ا قو^{۲لا} + ب قو^{-۳لا}

اگر فرض کیا جائے کہ ما = م قو^{۳لا} تو مساوات (۲۶) کے دائیں جانب میں درج کرنے سے بائیں جانب کی پہلی رقم حاصل ہوتی ہے بشرطیکہ م = ۱/۶ ، بائیں جانب کی دوسری رقم مذکورۂ بالا مستثنیٰ صورتوں میں سے ہے کیونکہ (-۳) جبریہ مساوات لما^۲ + لما - ۶ = ۰ کی اصل ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ ما = م لا قو^{-۳لا} تو درج کرنے پر زیر غور دوسری رقم حاصل ہوتی ہے بشرطیکہ م = - ۱/۵

اسلئے (۲۶) کا مکمل حل ہے

ما = ا قو^{۲لا} + ب قو^{-۳لا} + ۱/۶ قو^{۳لا} - ۱/۵ لا قو^{-۳لا} ......(۲۷)

مثال (۲) فر^۲ ما / فر لا^۲ + ۴ فر ما / فر لا + ۴ ما = قو^{۲لا} + قو^{-۲لا} .... (۲۸)

دفعہ ۱۶۷ مثال (۲) میں متمم تفاعل دریافت کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے

ما = (ا لا + ب) قو$^{-۲لا}$

بائیں جانب کی پہلی رقم حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ ما = م قو^{۲لا} اور اس سے حاصل ہوگا م = $\frac{۱}{۱۶}$، دوسری رقم لا میں مساوات کی دوہری اصل کے جواب میں ہے اسلئے ما = م لا^{۲} قو$^{-۲لا}$ فرض کرنے سے حاصل ہوگا م = $\frac{۱}{۲}$

اس لئے (۲۸) کا مکمل حل ہے

ما = (ا لا + ب) قو$^{-۲لا}$ + $\frac{۱}{۱۶}$ قو^{۲لا} + $\frac{۱}{۲}$ لا^{۲} قو$^{-۲لا}$ ...... (۲۹)

مثال (۳) مساوات

$\frac{ف^{۲}لا}{فت^{۲}}$ + ک $\frac{فلا}{فت}$ + مالا = ف جم (پ ت + صہ) ... (۳۰)

کا خاص تکملہ دریافت کرو۔

یہ رقاص کی حرکت کی مساوات ہے جبکہ اس پر مزاحمت رفتار کے متناسب عمل کر رہی ہے اور قوت، وقت کا سادہ موسیقی تفاعل ہے۔

فرض کرو کہ لا = ا جم (پ ت + صہ) + ب جب (پ ت + صہ) ۲۳۵

...... (۳۱)

اسکو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

- پ^{۲} ا + ک پ ب + ما ا = ف
- پ^{۲} ب - ک پ ا + ما ب = ۰ ...... (۳۲)

اس لئے ا = $\frac{(ما - پ^{۲}) ف}{(ما - پ^{۲})^{۲} + ک^{۲} پ^{۲}}$، ب = $\frac{ک پ ف}{(ما - پ^{۲})^{۲} + ک^{۲} پ^{۲}}$

...... (۳۳)

اگر رکھیں ا = ر جم صہ، ب = ر جب صہ ...... (۳۴)

تو حل (۳۱) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\text{لا} = \text{ر}\ \text{جم}\left(\text{پ}\,\text{ت} + \text{صہ} - \text{صہ}_{1}\right) \quad \ldots\ldots (۳۵)$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ر} = \frac{\text{ف}}{\left\{(\text{مہ} - \text{پ}^{2})^{2} + \text{ک}^{2}\,\text{پ}^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}}\ ,\quad \text{صہ}_{1} = \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{ک}\,\text{پ}}{\text{مہ} - \text{پ}^{2}} \quad \ldots (۳۶)$$

پس معلومہ دوری قوت کی وجہ سے جو "قسری اہتزاز" پیدا ہوتا ہے وہ دریافت ہوگیا۔ "آزاد اہتزاز" جو عموماً اِن کے علاوہ اِن کے ساتھ موجود ہوتے ہیں متمم تفاعل سے ملینگے (دفعہ ۱۶۷ مثال (۳) دیکھو)۔

لیکن سوا اِس صورت کے جبکہ ک = ۰ آزاد اہتزاز ت کے بڑھنے کے ساتھ آہستہ آہستہ کم ہوکر معدوم ہو جائینگے۔

مثال (۴) ایک رقاص پر کوئی بیرونی مزاحمت عمل نہیں کررہی ہے اسکے قسری اہتزاز معلوم کرو جو مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{2}} + \text{ن}^{2}\,\text{لا} = \text{ف}\ \text{جم}\left(\text{پ}\,\text{ت} + \text{صہ}\right) \quad \ldots\ldots (۳۷)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{اس کا خاص تکملہ ہے}\quad \text{لا} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}^{2} - \text{پ}^{2}}\ \text{جم}\left(\text{پ}\,\text{ت} + \text{صہ}\right) \quad \ldots (۳۸)$$

یہ حل درست نہیں رہتا جبکہ پ = ن ۔ اِس صورت میں فرض کروکہ

$$\text{لا} = \text{ج}\ \text{ت}\ \text{جب}\left(\text{ن}\,\text{ت} + \text{صہ}\right) \quad \ldots\ldots (۳۹)$$

یہ درج کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۳۷) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$۲\,\text{ن}\,\text{ج} = \text{ف} \quad \text{یعنی}\quad \text{ج} = \frac{\text{ف}}{۲\,\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۴۰)$$

(۳۹) کی تعبیر یہ ہے کہ اگر بلا مزاحمت والے رقاص پر ایک ایسی دوری قوت عمل کررہی ہو جس کا دور رقاص کے طبیعی دور کے مساوی ہے تو ابتدا* میں

[* عموماً طبیعی حالات میں مساوات (۳۷) محض تقریبی ہوتی ہے اور لا کی ایک سے اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس لئے جب حیطہ ایک خاص حد سے بڑھ جاتا ہے تو بعد کی حرکت کے لئے یہ مساوات تقریبی طور پر بھی صحیح نہیں رہتی]

تیسری اہتزاز کا حیطہ ت کے تناسب سے بڑھے گا۔

۱۶۹۔ عامل عف کی خاصیتیں۔

دفعہ ۱۶۷، ۱۶۸ کے طریقوں کی توسیع مستقل سروں والی عام خطی مساوات

$$\text{ا}_0 \frac{\text{فر}^{ن} \text{ما}}{\text{فر لا}^{ن}} + \text{ا}_1 \frac{\text{فر}^{ن-1} \text{ما}}{\text{فر لا}^{ن-1}} + \cdots + \text{ا}_{ن-1} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ا}_{ن}\,\text{ما} = \text{س} \quad \cdots (1)$$

کے لئے ہو سکتی ہے۔ اختصار کے لئے مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں ۴۳۶

$$\text{ف (عف) ما} = \text{س} \quad \cdots\cdots (2)$$

جہاں ف (عف)، عف کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ ہم صرف یہ بتاد ینگے کہ س = ۰ کے لئے (۱) کا عام حل جس میں ن جداگانہ اختیاری مستقل ہیں کس طرح دریافت ہو سکتا ہے۔ نیز س کی چند شکلوں کے لئے خاص تکملہ کیسے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس امر کا ثبوت کہ اس طرح سے حاصل شدہ حل مساوات کا عام حل ہے یہاں نہیں دیا جائیگا۔ کیونکہ عملی اطلاقات میں ہمیں اختیاری مستقلات کی صرف اس مناسب تعداد سے سروکار ہے جو سوال کے باقی ماندہ شرائط پورا کردیں۔

عامل عف کی ذیل کی خاصیتیں کارآمد ہونگی۔

(آ) اگر سا (عف)، عف کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو مثلاً

$$\text{سا (عف)} \equiv \text{ا}_0 \text{عف}^{ن} + \text{ا}_1 \text{عف}^{ن-1} + \text{ا}_2 \text{عف}^{ن-2} + \cdots + \text{ا}_{ن-1} \text{عف} + \text{ا}_{ن}$$

$$\cdots\cdots (3)$$

$$\text{تو سا (عف) قو}^{\text{لم لا}} = \text{سا (لم) قو}^{\text{لم لا}} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\text{کیونکہ}\quad \text{عف}^{ر} \text{قو}^{\text{لم لا}} = \text{لم}^{ر} \text{قو}^{\text{لم لا}}$$

اس لئے سا (عف) کی مختلف رقموں سے، سا (لم) کی مختلف رقمیں قو^لم لا کے ضعف کے طور پر حاصل ہونگی۔

(۲) سا (عف) کے انہیں معنوں کے مطابق اگر ع، لا کا کوئی تفاعل ہو تو

سا (عف) فو^لہلا^ ع = فو^لہلا^ سا (عف + لہ) ع .... (۵)

کیونکہ ترتیب وار حاصل ہوتا ہے

عف فو^لہلا^ ع = فو^لہلا^ (عف + لہ) ع

عف^۲^ فو^لہلا^ ع = عف {فو^لہلا^ (عف + لہ) ع}

= فو^لہلا^ (عف + لہ) (عف + لہ) ع

= فو^لہلا^ (عف + لہ)^۲^ ع

اور اسی طرح عام طور پر

عف^ر^ فو^لہلا^ ع = فو^لہلا^ (عف + لہ)^ر^ ع

پس عامل سا (عف) کی مختلف رقموں سے نتیجہ (۵) کی متناظر رقمیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۳) اگر سا (عف) میں عف کی صرف جفت قوتیں ہوں تو اسے فہ (عف^۲^) سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۶۴ سے معلوم ہے کہ اگر

ع = ا جم عہ لا + ب جب عہ لا .... (۶)

تو عف^۲^ ع = - عہ^۲^ ع

اور اسلئے فہ (عف^۲^) ع = فہ (- عہ^۲^) ع .... (۷)

۱۷۰۔ مستقل سروں والی عام تفرقی مساوات۔ متمم تفاعل۔ ۴۳۷

مساوات ف (عف) ما = ۰ .... (۱)

کا عام حل دریافت کرنا ہے۔

اب اگر ف(عف) دو منطق صحیح اجزائے ضربی میں تحویل ہو سکتا ہے

یعنی ف(عف) ≡ فا(عف) سا(عف) . . . . . (۲)

تو ظاہر ہے کہ سا(عف) ما = ۰ . . . . . (۳)

کا کوئی حل مساوات (۱) کو پورا کریگا۔

نیز چونکہ اجزاء مبادلہ پذیر ہیں اس لئے

فا(عف) ما = ۰ . . . . . (۴)

کا کوئی حل بھی مساوات کو پورا کرے گا۔ پس (۳) اور (۴) کے حل کا مجموعہ (۱) کو پورا کریگا۔ دیگر اجزاء میں تحلیل کرنے سے ظاہر ہے کہ اگر

ف(عف) ≡ فا۱(عف) × فا۲(عف) × فا۳(عف) . . .(۵)

تو مساوات (۱)، ذیل کی مساواتوں کے مختلف حل کے مجموعہ سے پوری ہوگی

فا۱(عف) ما = ۰، فا۲(عف) ما = ۰، فا۳(عف) ما = ۰ (۶)

جبر و مقابلہ کے ایک ضابطہ کی بناء پر (جسکا ذکر دفعہ ۸۵ میں ہو چکا ہے) تفاعل ف(عف) ہمیشہ پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزاء میں تحویل ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس کے سر حقیقی ہوں۔ نیز ان مختلف اجزاء کے درجوں کا مجموعہ، تفاعل کے درجے (مثلاً ن) کے مساوی ہوگا۔ علاوہ اس کے پہلے درجہ کے اجزاء ذیل کی شکل کے ہونگے

عف ـ لا۱، عف ـ لا۲، عف ـ لا۳ . . . . . .

جہاں لا۱، لا۲، لا۳ . . .، ف(لا) = ۰ (۷)

کی حقیقی اصلیں ہیں اگر لا۱، مساوات (۷) کی اکہری اصل ہے تو نظام (۶) میں سے ایک مساوات ذیل کے نمونہ کی ہوگی

(عف ـ لا۱) ما = ۰ . . . . . . (۸)

اس کا حل ہے ما = ج ہو^لا۱لا . . . . (۹)

اب اگر (۷) کی تمام اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہوں یعنی لا۱، لا۲، . . . لان تو

مساوات (۱) کا حل جس میں ن اختیاری مستقل شریک ہیں یہ ہوگا

ما = ج$_{۱}$ قو$^{لا_۱ لا}$ + ج$_{۲}$ قو$^{لا_۲ لا}$ + ... + ج$_{ن}$ قو$^{لا_ن لا}$ ....(۱۰)

دفعہ ۱۶۷ (۱۵) دیکھو۔

اگر مساوات (۷) کی ضعفی اصلیں ہیں تو (۱۰) کے بائیں جانب کی دو یا زیادہ رقمیں ایک دوسرے سے مل کر ایک ہو جاتی ہیں اور جداگانہ حلوں کی تعداد ن سے کم ہو جاتی ہے۔ کمی پورا کرنے کے لئے ہمیں معلوم ہے کہ ۴۴۸

اگر لا مساوات (۷) کی ر رتبہ کی اصل ہے تو ف (عف) میں ایک جزو ضربی (عف - لا)^{ر} ہوگا۔

مساوات (عف - لا)^{ر} ما = ۰ ....(۱۱)

کو حل کرنے کے لئے فرض کرو کہ

ما = قو$^{لا لا}$ ی ....(۱۲)

اور (۱۱) میں درج کرنے سے دفعہ ۱۶۲ (۲) سے حاصل ہوتا ہے

(عف - لا)^{ر} ما = (عف - لا)^{ر} (قو$^{لا لا}$ ی) = قو$^{لا لا}$ × عف^{ر} ی

ظاہر ہے کہ عف^{ر} ی = ۰ کا حل ی = ب + ب$_{۱}$ لا + ... + ب$_{ر-۱}$ لا$^{ر-۱}$ ہوگا

اس لئے ما = قو$^{لا لا}$ (ب + ب$_{۱}$ لا + ب$_{۲}$ لا^{۲} + ... + ب$_{ر-۱}$ لا$^{ر-۱}$) ....(۱۳)

پس ف (عف) کے ر رتبہ کے جزو ضربی کے جواب میں اس حل میں ر اختیاری مستقل ہیں۔ دفعہ ۱۶۷ (۱۷) دیکھو۔

اگر ف (عف) کا ایک جزو ضربی دو درجی جملہ ہو جو نا قابل تحلیل ہو مثلاً عف^{۲} + ا عف + ب ہو جہاں ¼ ا^{۲} < ب تو (۱) کے متمم تفاعل کا ایک حصہ ذیل کی مساوات کا حل ہوگا

(عف^{۲} + ا عف + ب) ما = ۰ ....(۱۴)

اگر اس میں رکھیں

ما = قو^(-½ ر لا) ی اور بہ² = ب - ¼ ر² .... (۱۵)

تو دفعہ ۱۶۹ (۵) سے

(عف² + ر عف + ب) ما = {(عف + ½ ر)² + بہ²} قو^(-½ ر لا) ی

= قو^(-½ ر لا) {عف² + بہ²} ی

اور چونکہ (عف² + بہ²) ی = ۰ کا حل ی = گ₁ جم بہ لا + گ₂ جب بہ لا

ہے اسلئے ما = قو^(-½ ر لا) (گ₁ جم بہ لا + گ₂ جب بہ لا) .... (۱۶)

اور یہ نتیجہ دفعہ ۱۶۷ (۲۴) کے مطابق ہے۔ پس ف (عف) کے ہر جداگانہ ناقابل تحویل دو درجی جزو ضربی کے جواب میں دو اختیاری مستقلوں والا حل حاصل ہوتا ہے۔

بالآخر اگر ف (عف) میں ایسے ناقابل تحویل دو درجی جملے ہیں جو رٗ مرتبہ واقع ہوتے ہیں تو مساوات

(عف² + ر عف + ب)^ر ما = ۰ .... (۱۷)

کو حل کرنا ہوگا۔ ابدال (۱۵) کو پھر استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(عف² + بہ²)^ر ی = ۰ .... (۱۸)

اس کا حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

ی = ۶ جم بہ لا + و جب بہ لا .... (۱۹)

اب تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(عف² + بہ²) ۶ جم بہ لا = ۲ بہ (عف ۶) جم (بہ لا + ½ π) + ...

(عف² + بہ²)² ۶ جم بہ لا = (۲ بہ)² (عف² ۶) جم (بہ لا + π) + ...

اور عام طور پر

(عف^{2} + به^{2})^{ر} ع جم به لا = (۲ به)^{ر} (عف^{ر} ع) جم (به لا + $\frac{ر\pi}{2}$) + ... (۲۰)

اسمیں ع کے کم سے کم رتبہ والے مشتق کی رقم کو لکھا گیا ہے۔
اسی طرح

(عف^{2} + به^{2})^{ر} و جب به لا = (۲ به)^{ر} (عف^{ر} و) جب (به لا + $\frac{ر\pi}{2}$) + ... (۲۱)

پس رشتہ (۱۹) مساوات (۱۸) کو پورا کریگا بشرطیکہ

عف^{ر} ع = ۰ ، عف^{ر} و = ۰ ..... (۲۲)

یعنی ع = ھ$_{0}$ + ھ$_{1}$ لا + ھ$_{2}$ لا^{2} + ... + ھ$_{ر-1}$ لا$^{ر-1}$

اور و = گ$_{0}$ + گ$_{1}$ لا + گ$_{2}$ لا^{2} + ... + گ$_{ر-1}$ لا$^{ر-1}$ ..... (۲۳)

اس لئے مساوات (۱۷) کا مکمل حل جس میں ۲ ر اختیاری مستقل ہیں یہ ہوگا

ما = (ھ$_{0}$ + ھ$_{1}$ لا + ھ$_{2}$ لا^{2} + ... + ھ$_{ر-1}$ لا$^{ر-1}$) قو$^{-\frac{ل}{2} لا}$ جم به لا

+ (گ$_{0}$ + گ$_{1}$ لا + گ$_{2}$ لا^{2} + ... + گ$_{ر-1}$ لا$^{ر-1}$) قو$^{-\frac{ل}{2} لا}$ جب به لا ..... (۲۴)

مثال (۱) $\frac{فر^{3} ما}{فر لا^{3}} = \frac{فر^{2} ما}{فر لا^{2}}$ .... (۲۵)

اسکو عف^{2} (عف - ۱) ما = ۰ کی طرح لکھ سکتے ہیں۔
اور اسلئے اسکا مکمل حل مساوات عف^{2} ما = ۰ ، (عف - ۱) ما = ۰ کے حل کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

پس ما = ا + ب لا + ج قو^{لا} .... (۲۶)

مثال (۲) $\frac{فر^{4} ما}{فر لا^{4}}$ = م^{4} ما .... (۲۷)

اس کو ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں

(عف - م) (عف + م) (عف^{2} + م^{2}) ما = ۰

پس مساواتوں (عف - م) ما = ۰ ، (عف + م) ما = ۰ ، (عف۲ + م۲) ما = ۰
کے حلوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ما = ا قو^(م لا) + ب قو^(-م لا) + ہ جم م لا + گ جب م لا ....(۲۸)

مثال (۳) فر۴ ما / فر لا۴ + فر۲ ما / فر لا۲ + ما = ۰ .....(۲۹)

یہ معادل ہے (عف۲ + عف + ۱) (عف۲ - عف + ۱) ما = ۰ کے ۔

اس لئے ما = قو^(-لا/۲) (ا جم (√۳/۲) لا + ب جب (√۳/۲) لا)

+ قو^(لا/۲) (اَ جم (√۳/۲) لا + بَ جب (√۳/۲) لا) ....(۳۰)

مثال (۴) فر۴ ما / فر لا۴ + ۲ م۲ فر۲ ما / فر لا۲ + م۴ ما = ۰ (۳۱) ۴۴۰

اس کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں

(عف۲ + م۲)۲ ما = ۰

اسلئے ما = (ھ۰ + ھ۱ لا) جم م لا + (گ۰ + گ۱ لا) جب م لا .... (۳۲)

۱۷۱ — خاص تکملہ ۔

اب ہم مساوات ف (عف) ما = ر .... (۱)
کے خاص تکملہ کی ذیل کی دو اہم صورتوں پر غور کرینگے ۔

(اَ) اگر ر میں ح قو^(عما لا) .... (۲)
کے نمونے کی ایک رقم شریک ہے تو خاص تکملہ کی متناظر رقم ہوگی

ما = ح / ف(عما) قو^(عما لا) .... (۳)

کیونکہ دفعہ ۱۶۹(۴) سے

ف(عف) ما = ح / ف(عا) · ف(عف) فو^(عالا) = ح فو^(عالا)

لیکن اگر عا مساوات ف(عف) = ۰ .... (۴)
کی اصل ہو تو یہ ضابطہ صحیح نہیں رہتا۔
اگر یہ اکہری اصل ہو تو لکھہ سکتے ہیں

ف(عف) ≡ فا(عف)(عف - عا) .... (۵)

جہاں فا(عف) میں عف - عا بطور جزو ضربی کے شریک نہیں ہے

اب مساوات فا(عف)(عف - عا) ما = ح فو^(عالا) پوری ہوگی

بشرطیکہ (عف - عا) ما = ح / فا(عا) · فو^(عالا) پوری ہو۔

دفعہ ۱۵۰(۲) میں ثابت کیا گیا ہے کہ اسکا خاص تکملہ ہے

ما = ح / فا(عا) · لا فو^(عالا) .... (۷)

اگر عا مساوات (۴) کی ر' رتبہ کی اصل ہو تو لکھہ سکتے ہیں

ف(عف) ≡ فا(عف)(عف - عا)^ر .... (۸)

جہاں فا(عف) میں (عف - عا) بطور جزو ضربی کے شریک نہیں ہے۔

پس مساوات فا(عف)(عف - عا)^ر ما = ح فو^(عالا) .... (۹)

پوری ہوگی بشرطیکہ (عف - عا)^ر ما = ح فو^(عالا) / فا(عا) پوری ہو۔ ۱۴۱س

اب اگر ما = فو^(عالا) × ی درج کریں تو دفعہ ۱۶۹(۵) سے حاصل ہوتا ہے

(عف - عا)^ر ما = فو^(عالا) عف^ر ی

اس لئے عف^ر ی = ح / فا^ر (عما)

ظاہر ہے کہ اسکا خاص حل ہے ی = ح / (لکیا فا^ر (عما)) لا^ر

اس لئے مساوات (٩) کا خاص تکملہ ہوگا

ما = ح / (لکیر فا^ر (عما)) لا^ر قو^{عما لا} ....(١٠)

(٢) فرض کرو کہ ر میں ح جم عما لا + ک جب عما لا کے نمونہ کی رقوم شریک ہیں۔

اب اگر ما = ا جم عما لا + ب جب عما لا ....(١٢)

پر عامل ف(عف) سے عمل کیا جائے تو ظاہر ہے کہ اسی قسم کا جملہ مختلف سروں کے ساتھ حاصل ہوگا۔ اس لئے عموماً خاص تکملہ دریافت کرنیکے لئے ما کی اس قیمت کو مساوات

ف(عف) ما = ح جم عما لا + ک جب عما لا .....(١٣)

میں درج کیا جاتا ہے اور پھر مساوات کے دونوں جانب جم عما لا اور جب عما لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے مستقلات ا اور ب کی قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں۔

ایک خاص صورت اکثر استعمال ہوتی ہے اور اس میں ا اور ب کی قیمتیں فوراً لکھی جا سکتی ہیں۔

یہ صورت ذیل کے نمونہ کی مساواتوں میں پیدا ہوتی ہے

فا(عف^٢) ما = ح جم عما لا + ک جب عما لا ....(١٤)

یعنی ف(عف) میں عف کی صرف جفت قوتیں موجود ہیں۔

دفعہ ١٢٩ (٣) سے

ما = ح / فا(− عما^٢) جم عما لا + ک / فا(− عما^٢) جب عما لا .....(١٥)

یہ ضابطہ بے کار ہو جاتا ہے اگر فم(- عم^{۲}) = ۰ یعنی جبکہ فم(عف^{۲}) میں
عف^{۲} + عم^{۲} بطور جزو ضربی کے شریک ہے۔ اس صورت میں (۱۱) کے
نمونے کی رقمیں منضم تفاعل میں موجود ہوں گی۔

اگر جزو ضربی (عف^{۲} + عم^{۲}) صرف ایک مرتبہ واقع ہو تو لکھ سکتے ہیں

فم(عف^{۲}) = سا(عف^{۲})(عف^{۲} + عم^{۲}) ....(۱۶)

اب مساوات ٣٤٢

سا(عف^{۲})(عف^{۲} + عم^{۲}) ما = ح جم عم لا + ک جب عم لا ...(۱۷)

پوری ہوگی بشرطیکہ

(عف^{۲} + عم^{۲}) ما = ح / سا(- عم^{۲}) جم عم لا + ک / سا(- عم^{۲}) جب عم لا ...(۱۸)

لہٰذا یہ سوال دفعہ ۱۶۸ (ج) کی حل شدہ صورت میں تحویل ہو جاتا ہے۔
پس خاص تکملہ ہوگا

ما = ح / ۲ عم سا(- عم^{۲}) لا جب عم لا - ک / ۲ عم سا(- عم^{۲}) لا جم عم لا

........(۱۹)

اگر فم(عف^{۲}) میں (عف^{۲} + عم^{۲}) بطور جزو ضربی ر مرتبہ شریک ہو تو

فم(عف^{۲}) ≡ سا(عف^{۲})(عف^{۲} + عم^{۲})^{ر} ....(۲۰)

اور زیر غور سوال ذیل کی مساوات کے خاص تکملہ دریافت کرنے میں تحویل ہو جاتا ہے

(عف^{۲} + عم^{۲})^{ر} ما = ح / سا(- عم^{۲}) جم عم لا + ک / سا(- عم^{۲}) جب عم لا ....(۲۱)

اگر فرض کیا جائے کہ

** ما = ع جم (عم لا - رπ/۲) + و جب (عم لا - رπ/۲) ......(۲۲)

[** مفروضہ ما = ع جم عم لا + و جب عم لا بھی اتنا ہی کارگر ہوگا لیکن اوپر کے مضمون میں مختلف شکل اس وجہ سے منتخب کی گئی ہے کہ اس کی مدد سے آخری نتیجہ نہایت برجستہ شکل میں لکھا جا سکتا ہے]

تو دفعہ ۱۷۰ (۲۰)، (۲۱) سے

(عف^2 + عما^2)^ر ما = (۲ عما)^ر × عف^ر ع × جم عما لا + (۲ عما)^ر × عف^ر و × جب عما لا + ...

پس مساوات (۲۱) پوری ہوگی بشرطیکہ

عف^ر ع = ح / ((۲ عما)^ر سا(− عما^2))، عف^ر و = ک / ((۲ عما)^ر سا(− عما^2)) ......(۲۳)

یعنی ع = ح لا^ر / (لر (۲ عما)^ر سا(− عما^2))، و = ک لا^ر / (لر (۲ عما)^ر سا(− عما^2)) ......(۲۴)

اس لئے خاص تکملہ ہوگا

ما = لا^ر / (لر (۲ عما)^ر سا(− عما^2)) {ح جم (عما لا − ر π/۲) + ک جب (عما لا − ر π/۲)}

........(۲۵)

عام صورت میں ف(عف) میں عف کی جفت اور طاق دونوں قوتیں موجود ہوتی ہیں اور اسی طرح مفروضہ (۱۲) کارگر نہیں ہوتا جبکہ ف(عف) میں عف^2 + عما^2 بطور جزو ضربی کے شریک ہے۔ اس لئے لکھو

ف(عف) = سا(عف) (عف^2 + عما^2)^ر ......(۲۶)

جہاں سا(عف) میں (عف^2 + عما^2) بطور جزو ضربی شریک نہیں ہے۔

سب سے پہلے مساوات

سا(عف) ما = ح جم عما لا + ک جب عما لا ......(۲۷)

کا خاص تکملہ ذیل کی شکل میں حاصل ہوتا ہے

ما = ح$_1$ جم عما لا + ک$_1$ جب عما لا ....(۲۸)

۴۴۳ اب صرف یہ مساوات حل کرنا باقی ہے

(عف^2 + عما^2)^ر ما = ح$_1$ جم عما لا + ک$_1$ جب عما لا ......(۲۹)

اور اس پر اوپر غور ہو چکا ہے۔

(۳) ایک اور صورت جس کا خاص تکملہ دریافت ہو سکتا ہے وہ ہے

ف(عف) ما = لا ....(۳۰)

جہاں لا سطلق صحیح تفاعل ہے اور فرض کرو ر درجہ کا ہے۔ اب فرض کرو $\text{ما} = \text{لا}^{\text{م}}\,\text{و}$ جہاں ف (عف) میں حف کا کم سے کم قوت نما (م) ہے اور و' لا کا ر' درجہ کا مطلق صحیح تفاعل ہے۔ اب اندراج سے و کے سروں کو دریافت کیا جا سکتا ہے۔

۱۷۲۔ متجانس خطی مساوات۔

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} + \text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-1}} + \dots + \text{ا}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}\frac{\text{فر}^{\text{ر}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ر}}} + \dots$$

$$+\ \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ما} = \text{ر} \quad \dots\dots (1)$$

کے نمونہ کی مساوات بعض اوقات متجانس خطی مساوات کہلاتی ہے۔ اس صورت میں عموماً متمم تفاعل میں م لا^م کے نمونے کی رقمیں ہوتی ہیں جہاں م اختیاری مستقل ہے اور م کی قیمتیں ... سے دریافت ہو سکتی ہیں۔ نیز اگر ر میں ایک رقم ح لا^پ ہے تو خاص تکملہ میں ماثل رقم ب لا^پ ہوگی بشرطیکہ ب کو مناسب قیمت دیجائے

مذکورہ بالا بیان کی صداقت کے لئے ہم دوسرے رتبہ کی متجانس خطی مساوات پر غور کرینگے۔

$$\text{مساوات}\quad \text{لا}^2\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ا}\,\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ب}\,\text{ما} = 0 \qquad (2)$$

کو حل کرنے کے لئے

$$\text{فرض کرو کہ}\quad \text{ما} = \text{م}\,\text{لا}^{\text{م}} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

یہ رشتہ مساوات کو پورا کریگا بشرطیکہ

$$\{\text{م}(\text{م}-1) + \text{ا}\,\text{م} + \text{ب}\}\,\text{م}\,\text{لا}^{\text{م}} = 0 \qquad (4)$$

خطوط وحدانی { } کے اندر کے جملے کو صفر رکھنے سے م میں دوسرے

درجے کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اگر م₁، م₂ اسکی اصلیں ہوں تو حل ہوگا

$$\text{ما} = \text{م}_1 \text{لا}^{\text{م}_1} + \text{م}_2 \text{لا}^{\text{م}_2} \quad \ldots\ldots (۵)$$

نیز مساوات $\text{لا}^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{ا}\,\text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ب}\,\text{ما} = \text{ح}\,\text{لا}^{\text{پ}} \quad \ldots (۶)$

کا خاص تکملہ

$$\text{ما} = \text{ک}\,\text{لا}^{\text{پ}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

ہوگا بشرطیکہ

$$\{\text{پ}(\text{پ}-۱) + \text{ا}\,\text{پ} + \text{ب}\}\,\text{ک} = \text{ح} \quad \ldots (۸)$$ ۴۴۴

اگر م میں مساوات کی اصلیں خیالی ہوں یا مساوی ہوں تو مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔

نیز اگر ح میں $\text{لا}^{\text{پ}}$ کے نمونے کی رقم شریک ہے جبکہ م میں مساوات کی ایک اصل پ ہے تو خاص تکملہ کے دریافت کرنے میں مزید مشکلات پیدا ہوتی ہیں۔ ہر صورت میں خاص تحقیقات سے بچنے کے لئے ہم ثابت کرینگے کہ متبوع متغیر کو بدلنے سے مساوات (۱) مستقل سروں والی خطی تفرقی مساوات میں ہمیشہ تحویل کی جاسکتی ہے۔

اگر رکھیں $\text{لا} = \text{فو}^{\text{ط}} \quad \ldots\ldots (۹)$

تو لا کے کسی تفاعل ع کے لئے

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرط}} \div \frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}} = \text{فو}^{-\text{ط}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرط}}$$

یعنی $\text{لا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرط}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$

ہم عامل $\frac{\text{فر}}{\text{فرط}}$ کو (جو $\text{لا} \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ کے معادل ثابت کیا گیا ہے) طا سے ظاہر کرینگے۔

اب حسب معمول فر/فرلا کے لئے عف استعمال کرنے سے

لا عف (لا^{م} عف^{م} ع) = لا$^{م+۱}$ عف$^{م+۱}$ ع + م لا^{م} عف^{م} ع

یعنی لا$^{م+۱}$ عف$^{م+۱}$ ع = (لا عف - م)(لا^{م} عف^{م} ع) = (طا - م)(لا^{م} عف^{م} ع)
.... (۱۱)

اس ضابطہ میں م = ۰، ۱، ۲، .... رکھنے سے

لا عف ع، لا^{۲} عف^{۲} ع، لا^{۳} عف^{۳} ع، لا^{۴} عف^{۴} ع، ......

بالترتیب طا ع، طا^{۲} ع، طا^{۳} ع، .... کے رقوم میں ظاہر کئے جا سکتے ہیں

اب چونکہ عامل طا = فر/فرطہ کا عمل مبادلہ پذیر ہے اس لئے

لا عف ع = طا ع

لا^{۲} عف^{۲} ع = طا(طا-۱)ع

لا^{۳} عف^{۳} ع = طا(طا-۱)(طا-۲)ع

اور اسی طرح عام ضابطہ ہے

لا^{ر} عف^{ر} ع = طا(طا-۱)(طا-۲)....(طا-ر+۱)ع ....(۱۲)

اب اگر مساوات (۱) کی مختلف رقموں میں ضابطہ (۱۲) سے حاصل شدہ قیمتیں درج کی جائیں تو ما اور طہ میں مستقل سروں والی خطی مساوات ذیل کے نمونے کی حاصل ہوتی ہے

ف(طا) ما = س یا ف(فر/فرطہ) ما = س ....(۱۳)

مثال (۱) فر^{۲}ق/فرر^{۲} + ۲/ر فرق/فرر = ۰ ....(۱۴)

اگر مساوات کو ر^{۲} سے ضرب دیا جائے تو یہ (۱) کی شکل اختیار کرتی ہے

پس ر^{۲} فر^{۲}ق/فرر^{۲} + ۲ر فرق/فرر = ۰ ....(۱۵)

۴۴۵ فرض کروکہ $\text{ق} = \text{ج}\,\text{ر}^{\text{م}}$

مساوات میں درج کرنے سے $\text{م}(\text{م}-۱) + ۲\text{م} = ۰$ یعنی $\text{م}(\text{م}+۱) = ۰$ حاصل ہوتا ہے

پس م کی قابل قبول قیمتیں صفر اور ‎-۱‎ ہیں اور اس لئے حل ہوگا

$$\text{ق} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

دفعہ ۱۶۵ مثال (۲) دیکھو۔

مثال (۲) $$\text{لا}^۲ \frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + ۲\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲\text{ما} = \text{لا}^۲ \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

تتمہ تفاعل دریافت کرنے کے لئے فرض کروکہ $\text{ما} = \text{ج}\,\text{لا}^{\text{م}}$

تو $\text{م}(\text{م}-۱) + ۲\text{م} - ۲ = ۰$ یعنی $(\text{م}-۱)(\text{م}+۲) = ۰$

اس لئے $\text{م} = ۱،\ -۲$

نیز $\text{ما} = \text{ج}\,\text{لا}^۲$ خاص تکملہ ہوگا بشرطیکہ $(۲-۱)(۲+۲)\text{ج} = ۱$ یا $\text{ج} = \frac{۱}{۴}$

اس لئے $$\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}^۲} + \frac{۱}{۴}\text{لا}^۲ \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

مثال (۳) $$\text{لا}^۲ \frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{لا} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\{\text{طا}(\text{طا}-۱) - \text{طا} + ۱\}\,\text{ما} = \text{قو}^{\text{طا}}$$

یا $$(\text{طا}-۱)^۲\,\text{ما} = \text{قو}^{\text{طا}}$$

مختلف ترقیم کا خیال کرتے ہوئے دفعہ ۱۶۷ سے اسکا حل ہوگا

$$\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب}\,\text{طا})\,\text{قو}^{\text{طا}} + \frac{۱}{۲}\text{طا}^۲\,\text{قو}^{\text{طا}}$$

یعنی لا کی رقوم میں

$$\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لوک}\,\text{لا})\,\text{لا} + \frac{۱}{۲}\text{لا}\,(\text{لوک}\,\text{لا})^۲ \quad \ldots (۲۰)$$

مثال (۴)۔ $\text{لا}^{2}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ما}=\text{لا}^{3}$ ....(۲۱)

اس لئے $(\text{طا}^{2}+1)\,\text{ما}=\text{قو}^{3\text{طہ}}$

پس $\text{ما}=\text{ا جم طہ}+\text{ب جب طہ}+\frac{\text{قو}^{3\text{طہ}}}{10}$

$=\text{ا جم (لوک لا)}+\text{ب جب (لوک لا)}+\frac{1}{10}\times\text{لا}^{3}$ ...(۲۲)

۱۷۳ — ہمزاد تفرقی مساواتیں۔

حرکیات اور دیگر مضامین کے سوالات میں اکثر ہمزاد تفرقی مساواتوں کے ایسے نظاموں سے واسطہ پڑتا ہے جنہیں ایک متبوع متغیر کے دو یا زیادہ تفاعل اور انکے تفرقی سر موجود ہوتے ہیں۔ لیکن ہمیشہ مساواتوں کی تعداد تابع متغیروں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

ہم تابع متغیروں کو حروف لا، ما .... سے اور متبوع متغیر کو ت سے ظاہر کرینگے۔

عام نظریہ کے مسائل پر غور کرنے کی بجائے، یہاں چند مثالیں دے دینا کافی ہوگا جن سے عام طور پر کثیر الاستعمال طریقوں کی توضیح ہوگی۔

اول یہ ممکن ہے کہ ہر ایک دی ہوئی مساوات میں صرف ایک ۶۴۴ تابع متغیر موجود ہو اور اس لئے ان پر علٰحدہ علٰحدہ غور ہو سکتا ہو۔

مثال (۱)۔ جاذبہ ارض کے زیر عمل مرمی کی صورت میں اگر لا اور ما محور افقی اور محور انتصابی ہوں تو

$\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}}=0\text{، }\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرت}^{2}}=-\text{ج}$ ....(۱)

پس $\text{لا}=\text{ا}+\text{اَ ت}\text{ ، }\text{ما}=\text{ب}+\text{بَ ت}-\frac{1}{2}\text{ج ت}^{2}$ ......(۲)

اختیاری مستقلوں ا، اَ، ب، بَ سے مقام اور رفتار کے بارے میں چار ابتدائی شرائط پوری ہو سکتی ہیں۔

مثال (۲) ۔ ایک ذرہ کی صورت میں، جس پر ایک ثابت مرکز (مبدأ) سے فاصلہ کے متناسب، قوت کشش عمل کر رہی ہے

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{مم}\,\text{لا} \;،\; \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = -\text{مم}\,\text{ما} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اِس لئے $\text{لا} = \text{ا}_1\,\text{جم}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت} + \text{ا}_2\,\text{جب}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت}$ ،

$$\text{ما} = \text{ب}_1\,\text{جم}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت} + \text{ب}_2\,\text{جب}\sqrt{\text{مم}}\,\text{ت}$$

ان میں سے ت کو ساقط کرنے سے

$$(\text{ب}_1\text{لا} - \text{ا}_1\text{ما})^2 + (\text{ب}_2\text{لا} - \text{ا}_2\text{ما})^2 = (\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1)^2 \ldots (۴)$$

اس سے ظاہر ہے کہ حرکت کا طریق قطع ناقص ہے ۔

اگر دی ہوئی مساواتیں جو تعداد میں ن ہیں اس سادہ نمونے کی نہ ہوں تو تفرق اور جبریہ عمل کی مدد سے تمام متبوع متغیروں، لا، ما، ی، ... کو سوائے ایک متغیر (مثلاً لا کے) ساقط کیا جا سکتا ہے ۔ محصلہ مساوات کو تکمل کرنے کے بعد، اگر لا کی عام قیمت، مساواتوں کے ابتدائی نظام میں درج کی جائے تو معلوم ہوگا کہ نظام میں (ن ۔ ۱) مساواتیں باقی رہ جاتی ہیں جنمیں (ن ۔ ۱) تابع متغیر ما، ی، ... شریک ہیں ۔ اس عمل کو بار بار دہرایا جا سکتا ہے حتی کہ ہر ایک تابع متغیر، ت اور اختیاری مستقلوں کی رقوم میں بیان ہو جائے ۔ خاص صورتوں میں زیادہ متشاکل عمل استعمال ہو سکتا ہے ۔ ہم طبیعی سوالات کی چند مثالوں پر اکتفا کرینگے ۔

مثال (۳) ۔ اگر مبدا کے گرد، زاویی رفتار ن سے گھومنے والے مستوی کے کسی ایک نقطہ کے محدد لا، ما ہوں

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = -\text{ن}\,\text{ما} \;،\; \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{ن}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots (۵)$$

ما کو ساقط کرنے سے $\dfrac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ن}\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = -\text{ن}^2\,\text{لا}$

اسلئے لا = ا جم (ن ت + صہ) .... (۶)

جہاں ا اور صہ اختیاری مستقل ہیں ۔ ۴۴۷

(۵) کی پہلی مساوات میں لا کی اس قیمت کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ما = ا جب (ن ت + صہ) .... (۷)

نتیجوں (۶) اور (۷) سے ظاہر ہے کہ ہر نقطہ مبدا کے گرد زاوی رفتار ن سے دائرے بناتا ہے ۔

مثال (۴) :- برق، مقناطیسی امالہ کے نظریہ میں ذیل کی مساواتیں نمودار ہوتی ہیں

ل فرلا/فرت + م فرما/فرت + ر لا = ق

م فرلا/فرت + ن فرما/فرت + س ما = ف .... (۸)

یہاں لا، ما باہم متاثر دو دوروں میں برقی روؤں کو ظاہر کرتے ہیں ۔ ر اور س دوروں کی مزاحمتیں ہیں، ل اور ن ذاتی امالوں کی شرحیں، م باہمی امالہ کی شرح، اور ق، ف بیرونی محرکہ برق قوتیں ہیں ۔

اول فرض کرو کہ ق = ۰، ف = ۰، تب

لا = ا قو$^{\text{لہ ت}}$، ما = ب قو$^{\text{لہ ت}}$ .... (۹)

سے مساواتیں (۸) پوری ہونگی بشرطیکہ

(ل لہ + ر) ا + م لہ ب = ۰

م لہ ا + (ن لہ + س) ب = ۰ .... (۱۰)

ان میں سے نسبت ا : ب کو ساقط کرنے سے

(ل لہ + ر)(ن لہ + س) − م^2 لہ^2 = ۰

یعنی (ل ن − م^2) لہ^2 + (ل س + ن ر) لہ + ر س = ۰ (۱۱)

چونکہ (ل س + ن ر)^2 − ۴ ر س (ل ن − م^2) = (ل س − ن ر)^2 + ۴ م^2 ر س

جو ایک مثبت مقدار ہے، اس لئے ظاہر ہے کہ دو درجی مساوات (۱۱) کی اصلیں ہمیشہ حقیقی ہونگی۔

نیز طبیعی وجوہات پر ل ن لازماً $م^2$ سے بڑا ہے۔ پس (۱۱) سے ظاہر ہے کہ لہ کی دونوں اصلوں کی علامت ایک ہی ہوگی کیونکہ ان کا حاصل ضرب مثبت ہے اور یہ علامت منفی ہوگی کیونکہ انکا حاصل جمع منفی ہے۔

پس اصلوں کو $-لہ_1$، $-لہ_2$ لکھنے سے حل حاصل ہوتے ہیں

$$\left.\begin{aligned} لا &= ا_1 قو^{-لہ_1 ت}، \quad ما = ب_1 قو^{-لہ_1 ت} \\ لا &= ا_2 قو^{-لہ_2 ت}، \quad ما = ب_2 قو^{-لہ_2 ت} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (۱۲)$$

جہاں مستقلوں $ا_1، ب_1$ یا $ا_2، ب_2$ میں رشتہ (۱۰) میں سے کسی ایک مساوات میں لہ کی بجائے $-لہ_1$ یا $-لہ_2$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی دراصل اختیاری مستقلوں کی تعداد صرف دو رہ جاتی ہے۔ مساواتیں (۸) کے خطی ہونے کی وجہ سے اس صورت میں جبکہ ق = ف = ۰۔
یہ مساواتیں بالترتیب لا اور ما کی مذکورہ بالا قیمتوں کے مجموعے سے پوری ہوتی ہیں، حل، دور کی ابتدائی آزاد بہتی رو کے کم ہونے جانے کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر ق اور ف صفر نہ ہوں بلکہ معلومہ مستقل ہوں تو ظاہر ہے کہ (۸) کا ۲۴۸
خاص تکملہ ہوگا

$$لا = \frac{ق}{ر} \quad \text{اور} \quad ما = \frac{ف}{س}$$

اس لئے مکمل حل ہوگا

$$\left.\begin{aligned} لا &= \frac{ق}{ر} + ا_1 قو^{-لہ_1 ت} + ا_2 قو^{-لہ_2 ت} \\ ما &= \frac{ف}{س} + ب_1 قو^{-لہ_1 ت} + ب_2 قو^{-لہ_2 ت} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (۱۳)$$

جہاں ا، ب میں اور ا، ب میں رشتوں کا ذکر اوپر ہو چکا ہے۔
لا اور ما کی ان قیمتوں میں پہلی رقمیں ان قائم برقی رووں کو ظاہر کرتی ہیں جو دی ہوئی محرکہ برق قوتوں کی وجہ سے وجود میں آتی ہیں۔ باقی ماندہ قیمیں امال کے اثر کو ظاہر کرتی ہیں۔ چونکہ درحقیقت دو اختیاری مستقل تحریک ہیں اس لئے انکی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ برقی رووں کی کوئی بھی دی ہوئی ابتدائی قیمتیں ہوں۔

دوسری اہم صورت وہ ہے جسمیں ق وقت کا سادہ موسیقی تفاعل اور ف صفر ہوتا ہے۔

اس طرح ق = ق جم پ ت اور ف = ۰ (۱۴)

رکھنے سے مساوات (۸) کا خاص تکملہ ذیل کے مفروض سے حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = \text{ا جم پ ت} + \text{اَ جب پ ت} \\ \text{ما} = \text{ب جم پ ت} + \text{بَ جب پ ت} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

لا اور ما کی ان قیمتوں کو درج کر کے جم پ ت اور جب پ ت کے سروں کو علحدہ علحدہ صفر رکھنے سے

$$\left\{\begin{array}{l} \text{پ ل اَ} + \text{پ م بَ} + \text{ر ا} = \text{ق.} \\ -\text{پ ل ا} - \text{پ م ب} + \text{ر اَ} = ۰ \\ \text{پ م اَ} + \text{پ ن بَ} + \text{س ب} = ۰ \\ -\text{پ م ا} - \text{پ ن ب} + \text{س بَ} = ۰ \end{array}\right. \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

ان رشتوں سے ا، اَ، ب، بَ دریافت ہو سکتے ہیں۔ اس طرح معلومہ دوری قوت محرکہ برق کے زیر اثر دونوں دوروں میں پیدا شدہ برقی اہتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ آزاد روئیں (۱۲) کی شکل کی رقموں سے حاصل ہوتی ہیں۔ ان کی قیمت، ابتدائی حالات پر منحصر ہے لیکن ہر صورت میں جیسے ت بڑھتا ہے یہ نابود ہو جاتی ہیں۔

مثال (۵)۔ بطور آخری مثال کے ذیل کی مساوات پر غور کرو۔

$$\left.\begin{array}{l}\text{ا}\,\dfrac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}+\text{ح}\,\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}+\text{د لا}+\text{ھ ما}=0\\[2ex]\text{ح}\,\dfrac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}+\text{ٮ}\,\dfrac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}+\text{ھ لا}+\text{ب ما}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(17)$$

۲۴۹ یہ ایسے بقائی حرکیاتی نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے جسے توازن کے مقام کی قربت میں دو درجے کی آزادی حاصل ہو۔ آزاد حرکت دریافت کرنے کے لئے $\text{لا}=\text{ما}=0$ رکھو اور فرض کرو کہ

$$\text{لا}=\text{ف}\ \text{ڡو}^{\text{لہ ت}}\text{،}\quad \text{ما}=\text{گ}\ \text{ڡو}^{\text{لہ ت}}\cdots\cdots(18)$$

اسلئے

$$\left.\begin{array}{l}(\text{ا لہ}^2+\text{د})\,\text{ف}+(\text{ح لہ}^2+\text{ھ})\,\text{گ}=0\\(\text{ح لہ}^2+\text{ھ})\,\text{ف}+(\text{ٮ لہ}^2+\text{ب})\,\text{گ}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(19)$$

ان میں سے نسبت ف : گ کو ساقط کرنے سے

$$(\text{ا لہ}^2+\text{د})(\text{ٮ لہ}^2+\text{ب})-(\text{ح لہ}^2+\text{ھ})^2=0\qquad(20)$$

$$\text{یا}\quad(\text{ا ٮ}-\text{ح}^2)\,\text{لہ}^4+(\text{ا ب}+\text{د ٮ}-2\,\text{ھ ح})\,\text{لہ}^2+(\text{د ب}-\text{ھ}^2)=0\cdots\cdots(21)$$

یہ لہ^2 میں دو درجی مساوات ہے

$$\text{جملات}\quad \tfrac{1}{2}\left\{\text{ا}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2+2\,\text{ح}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\times\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}+\text{ٮ}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2\right\}\cdots(22)$$

$$\text{اور}\quad \tfrac{1}{2}\left(\text{د لا}^2+2\,\text{ھ لا ما}+\text{ب ما}^2\right)\cdots\cdots(23)$$

بالترتیب نظام کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کو ظاہر کرتے ہیں۔ ان میں سے پہلا جملہ لازماً مثبت ہے پس ا، ٮ مثبت ہیں اور $\text{ا ٮ}>\text{ح}^2$ ۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۲۰) یا (۲۱) کا دایاں جانب $\text{لہ}^2=+\infty$ اور $\text{لہ}^2=-\infty$ دونوں کے لئے مثبت ہوگا۔ اور $\text{لہ}^2=0$ کے لئے علامت وہی ہوگی جو $(\text{د ب}-\text{ھ}^2)$ کی ہے۔ نیز (۲۰) سے ظاہر ہے کہ دایاں جانب $\text{لہ}^2=-\dfrac{\text{د}}{\text{ا}}$ اور $\text{لہ}^2=-\dfrac{\text{ب}}{\text{ٮ}}$ کے لئے منفی ہوگا۔

پس اگر جملہ (۲۳) فی نفسہٖ منفی ہو یعنی د اور ج منفی ہوں اور اب - ھ^۲ مثبت ہو تو مساوات (۲۱) لما^۲ کی دو مثبت اصلوں سے پوری ہوگی جنمیں سے ایک اصل ہر دو مقدار - د/ا اور - ب/ج سے بڑی ہے اور دوسری اصل چھوٹی ہے۔

ان اصلوں کو لما۱^۲، لما۲^۲ سے ظاہر کرنے سے حل حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ف}_1 \text{قو}^{\text{لما}_1 \text{ت}} + \text{فَ}_1 \text{قو}^{-\text{لما}_1 \text{ت}} + \text{ف}_2 \text{قو}^{\text{لما}_2 \text{ت}} + \text{فَ}_2 \text{قو}^{-\text{لما}_2 \text{ت}}$$

$$\text{ما} = \text{گ}_1 \text{قو}^{\text{لما}_1 \text{ت}} + \text{گَ}_1 \text{قو}^{-\text{لما}_1 \text{ت}} + \text{گ}_2 \text{قو}^{\text{لما}_2 \text{ت}} + \text{گَ}_2 \text{قو}^{-\text{لما}_2 \text{ت}} \quad \ldots(۲۴)$$

ان آٹھ سروں میں سے اختیاری مستقل صرف چار ہیں نسبت ف۱ : گ۱ (جو فَ۱ : گَ۱ کے مساوی ہے) (۱۹) میں لما^۲ کی بجائے لما۱^۲ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح نسبت ف۲ : گ۲ یا فَ۲ : گَ۲ مساوات (۱۹) میں لما^۲ کی بجائے لما۲^۲ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ باقی ماندہ چار اختیاری مستقلوں کی مدد سے لا، ما، فرلا/فرت، فرما/فرت کو کوئی بھی ابتدائی قیمت دیجا سکتی ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ لا اور ما، ت کے ساتھ بے حد بڑھتے جائیں گے سوائے اس صورت کے کہ ابتدائی حالات کو اس طرح مرتب کیا جائے کہ ف۱ اور ف۲ صفر ہوں۔

پس اگر مقام توازن میں کی توانائی بالقوہ قریب کے کسی اور مقام کی توانائی سے زیادہ ہے تو کوئی خفیف اختیاری ہٹاؤ عموماً بڑھتا جائے گا پس مقام توازن، غیر قائم ہے۔

اگر اسکے برخلاف جملہ (۲۳) بذاتہ مثبت ہو یعنی د، ب، اب - ھ^۲ مثبت ہوں تو لما^۲ میں دو درجی مساوات کی اصلیں دونوں منفی ہونگی اور ان میں سے ایک اصل صفر اور - د/ا، - ب/ج میں سے مقداریں چھوٹی کے درمیان واقع ہوگی

اور دوسری اصل اِن دونوں میں سے مقدار میں بڑی اور - ∞ کے درمیان ہوگی۔ اِس سے ظاہر ہے کہ بجائے (۱۸) کے مناسب مفروضہ یہ ہے کہ

لا = ف جم پ ت + فَ جب پ ت ،

ما = گ جم پ ت + گَ جب پ ت ......(۲۵)

اس سے (۱۹) اور (۲۱) کی شکل کی مساواتیں حاصل ہونگی جنمیں لما^2 کی بجائے پ^2 لکھدیا گیا ہے - نیز اس سے ثابت ہوتا ہے کہ پ^2 میں دو درجی مساوات کی اصلیں حقیقی اور مثبت ہونگی - انہیں پ$_1^2$ اور پ$_2^2$ سے ظاہر کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ حل ہے

لا = ف$_1$ جم پ$_1$ت + فَ$_1$ جب پ$_1$ت + ف$_2$ جم پ$_2$ت + فَ$_2$ جب پ$_2$ت

ما = گ$_1$ جم پ$_1$ت + گَ$_1$ جب پ$_1$ت + گ$_2$ جم پ$_2$ت + گَ$_2$ جب پ$_2$ت ...(۲۶)

جہاں نسبتیں ف$_1$/گ$_1$ ، فَ$_1$/گَ$_1$ ، ف$_2$/گ$_2$ ، فَ$_2$/گَ$_2$ مذکورۂ بالا طریقہ پر دریافت ہوسکتی ہیں -

نیز چونکہ فَ$_1$/گَ$_1$ = ف$_1$/گ$_1$ اور فَ$_2$/گَ$_2$ = ف$_2$/گ$_2$ اس لئے نتیجے ذیل کی طرح بھی لکھے جاسکتے ہیں

لا = ف$_1$ جم (پ$_1$ت + طہ$_1$) + ف$_2$ جم (پ$_2$ت + طہ$_2$)

ما = گ$_1$ جم (پ$_1$ت + طہ$_1$) + گ$_2$ جم (پ$_2$ت + طہ$_2$) ...(۲۷)

جہاں ف$_1$/گ$_1$ اور ف$_2$/گ$_1$ قابل تعین ہیں۔ اِس سے ظاہر ہے کہ اگر مقام توازن میں توانائی بالقوہ قریب مقاموں سے کم ہے تو خفیف ہٹاؤ کی صورت میں نظام مقام توازن کے گرد اہتزازی حرکت کریگا۔ اور اس لئے توازن قائم ہوگا۔

اِس امر کو فرض کرلیا گیا ہے کہ لما^2 (یا پ^2) میں دو درجی مساوات کی اصلیں

الگ الگ ہیں۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اصلیں مساوی نہیں ہو سکتیں سوائے اس صورت کے جبکہ ب/ا = ھ/ب = ج/ج ، اور اگر یہ شرائط پوری ہوں تو حل ذیل کے دو نمونوں میں سے کسی ایک نمونے کا ہوگا

لا = ف قو^لمت + فَ قو^-لمت ، ما = گ قو^لمت + گَ قو^-لمت ... (۲۸)

یا لا = ف جم پ ت + فَ جب پ ت ،

ما = گ جم پ ت + گَ جب پ ت .. (۲۹)

جہاں ہر دو صورتوں میں چاروں مستقل ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں۔

آخر میں ہمیں اس صورت پر غور کرنا ہے جبکہ توانائی بالقوہ کے لئے جملہ (۲۲) کبھی مثبت ہے اور کبھی منفی۔ اس صورت میں ا ب - ھ^۲ منفی ہوگا اور لمّا میں دو درجی مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی اور دوسری اصل منفی۔ اب مکمل حل ذیل کے نمونے کا ہوگا

لا = ف قو^لمت + فَ قو^-لمت + فً جم پ ت + فٌ جب پ ت
ما = گ قو^لمت + گَ قو^-لمت + گً جم پ ت + گٌ جب پ ت } ... (۳۰)

اس سے ظاہر ہے کہ کوئی اختیاری خفیف ہٹاؤ عموماً بے حد بڑھتا جائیگا، اس لئے اس مقام توازن کو غیر قائم شمار کرنا چاہیئے۔

اس سوال کو حل کرنے کے ذرا دوسرے طریقے میں فرض کرو کہ

ما = مما لا . . . . (۳۱)

زیر غور مساواتیں اب ذیل کی شکل اختیار کرتی ہیں

(ا + مما ج) ذ^۲لا/ذت^۲ + (ا + مماھ) لا = ۰
(ج + مماب) ذ^۲لا/ذت^۲ + (ھ + مماب) لا = ۰ } ...... (۳۲)

یہ دونوں مساوات   لا = ف قو^لہ ت .... (۳۳) ۴۵۱

سے پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ

(ا + مہ ح) / (ا + مہ ھ) = (ح + مہ ب) / (ھ + مہ ب) = − ۱ / لہ² .... (۳۴)

پس مہ دو درجی مساوات

(ح ب − ب ھ) مہ² + (ا ب − ب ا) مہ + (ا ھ − ح ا) = ۰

.... (۳۵)

سے دریافت ہوسکتا ہے۔ اگر مہ₁ اور مہ₂ اسکی اصلیں ہوں تو لہ² کی مماثل قیمتیں (۳۴) سے ملتی ہیں۔ اس طرح سے دو حل حاصل ہوتے ہیں جنکو تفرقی مساوات کے خطی ہونے کی وجہ سے ایک دوسرے کے ساتھ شریک کرسکتے ہیں

اگر (۳۴) میں سے مہ کو ساقط کردیا جائے تو لہ² میں وہی اوپر والی دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے پس (۳۵) کی اصلوں کے حقیقی ہونیکی شرطیں وہی ہونگی جو (۲۱) کی صورت میں تھیں۔ اس امر کی باسانی تصدیق ہوسکتی ہے۔

اگر لہ² منفی ہے تو حل ذیل کے نمونے کا ہوگا

لا = ف₁ جم (پ₁ ت + طہ₁)، ما = مہ₁ ف₁ جم (پ₁ ت + طہ₁)
لا = ف₂ جم (پ₂ ت + طہ₂)، ما = مہ₂ ف₂ جم (پ₂ ت + طہ₂) ..(۳۶)

جہاں ف₁، ف₂، طہ₁، طہ₂ اختیاری مستقل ہیں۔

ان میں سے ہر ایک حل بذات خود نظام کے ایسے اہتزاز کو ظاہر کرتا ہے جسے اسکی طبیعی کیفیت کہہ سکتے ہیں۔

قسری اہتزاز دریافت کرنیکے لئے جبکہ ذیل کے شکل کی قوتیں لا اور ما عمل کررہی ہیں

لا = عہ جم (ن ت + طہ)، ما = بہ جب (ن ت + طہ) ..(۳۷)

فرض کرو کہ لا = ف جم (ن ت + طہ)، ما = گ جب (ن ت + طہ) - (۳۸)

اب مستقل ف اور گ، (۷) میں اندراج سے حاصل ہوسکتے ہیں۔ اسکے ناکام رہنے کی ایک صورت وہ ہوگی جبکہ جملہ (۲۳) لازماً مثبت ہو اسکی وجہ سے

ن^۲ ، پ^۲ میں کی دو درجی مساوات کی ایک اصل سے منطبق ہو جائے گا۔

امثلہ ۵۶

(مستقل سر)

(۱) $\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + \frac{ف ما}{ف لا} = ۰$ [$ما = ا + ب قو^{-لا}$]

(۲) $\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} - ۳\frac{ف ما}{ف لا} - ۱۰ ما = ۰$ [$ما = ا قو^{۵لا} + ب قو^{-۲لا}$]

(۳) $۲\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} - ۳\frac{ف ما}{ف لا} + ما = ۰$ [$ما = ا قو^{لا} + ب قو^{\frac{۱}{۲}لا}$]

(۴) $\frac{ف^{۳} ما}{ف لا^{۳}} - ۶\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + ۱۱\frac{ف ما}{ف لا} - ۶ ما = ۰$

[$ما = ا قو^{لا} + ب قو^{۲لا} + ج قو^{۳لا}$]

(۵) $\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} = م^{۲} ما$ [$ما = ا قو^{م لا} + ب قو^{-م لا}$ ج جم م لا + د جب م لا] ۳۶۲

(۶) $\frac{ف^{۳} ما}{ف لا^{۳}} - \frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + \frac{ف ما}{ف لا} - ما = ۰$

[$ما = ا قو^{لا}$ + ب جم لا + ج جب لا]

(۷) $\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} - ۲م\frac{ف ما}{ف لا} + (م^{۲} + ن^{۲}) ما = ۰$

[$ما = قو^{م لا}$ (ا جم ن لا + ب جب ن لا)]

(۸) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۴\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۳\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{قو}^{۲\text{لا}}(\text{ا جم ۳لا} + \text{ب جب ۳لا})\right]$

(۹) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۲\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۵\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{قو}^{-\text{لا}}(\text{ا جم ۲لا} + \text{ب جب ۲لا})\right]$

(۱۰) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۶\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۳\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{قو}^{۳\text{لا}}(\text{ا جم ۲لا} + \text{ب جب ۲لا})\right]$

(۱۱) $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} + \text{م}^{۴}\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \left(\text{ا جم}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}} + \text{ب جب}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{قو}^{\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}}\right.$

$\left.+\left(\text{ج جم}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}} + \text{د جب}\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}\right)\text{قو}^{-\frac{\text{م لا}}{\sqrt{۲}}}\right]$

(۱۲) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} + \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = \text{ا قو}^{\text{لا}} + (\text{ب} + \text{ج لا})\text{قو}^{-\text{لا}}\right]$

(۱۳) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} - \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ج قو}^{-\text{لا}}\right]$

(۱۴) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} - ۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۴\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\text{قو}^{۲\text{لا}} + \text{ج قو}^{-\text{لا}}\right]$

(۱۵) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} - ۳\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا})\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ج قو}^{-۲\text{لا}}\right]$

(۱۶) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} - ۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۳\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$ $\left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لا} + \text{ج لا}^{۲})\text{قو}^{\text{لا}}\right]$

(۱۷) $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} + (\text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲})\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{م}^{۲}\text{ن}^{۲}\,\text{ما} = ۰$

$\left[\text{ما} = \text{ا جم}(\text{م لا} + \text{حہ}) + \text{ب جم}(\text{م لا} + \text{بہ})\right]$

(۱۸) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{ک}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{مہ ما} = ۰$ کا حل ذیل کی

شکل کا ہے

$$\text{لا} = \text{ا قو}^{-\text{عہ ت}} + \text{ب قو}^{-\text{بہ ت}}$$

جہاں عہ اور بہ دونوں مثبت ہیں (اگر ک اور مہ مثبت ہیں) اور عہ > بہ

۳۶۲ (۱۹) $$\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{فلا}^2} - 2\text{م}\frac{\text{فما}}{\text{فلا}} + \text{م}^2\text{ما} = \text{جب ن لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{(\text{م}^2 - \text{ن}^2)\,\text{جب ن لا} + 2\text{م ن جم ن لا}}{(\text{م}^2 + \text{ن}^2)^2} + \dots \text{تتمم تفاعل}\right]$$

(۲۰) $$\frac{\text{ف}^3\text{ما}}{\text{فلا}^3} - \frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{فلا}^2} - \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} + \text{ما} = \text{جمز لا} \quad \left[\text{ما} = \tfrac{1}{4}\text{لا}^2\text{قو}^{\text{لا}} + \tfrac{1}{8}\text{لا قو}^{-\text{لا}} + \text{تتمم تفاعل}\right]$$

(۲۱) $$\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{فلا}^2} + \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} = 1 + \text{جمز لا} \quad \left[\text{ما} = \text{لا} + \tfrac{1}{4}\text{قو}^{\text{لا}} - \tfrac{1}{2}\text{لا قو}^{-\text{لا}} + \dots\right]$$

(۲۲) $$\frac{\text{ف}^2\text{ما}}{\text{فلا}^2} - \text{م}^2\text{ما} = \text{جم ک لا} + \text{جمز ک لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{1}{\text{ک}^2 - \text{م}^2}(\text{جم ک لا} + \text{جمز ک لا}) + \dots\right]$$

(۲۳) $$(\text{عف}^2 - \text{م}^2)\,\text{ما} = \text{جمز م لا} + \text{جم م لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{\text{لا}}{2\text{م}}(\text{جمز م لا} - \text{جب م لا}) + \dots\right]$$

(۲۴) $$\text{عف}^2(\text{عف}^2 - 1)\,\text{ما} = \text{جمز لا} \quad \left[\text{ما} = \tfrac{1}{2}\text{لا جمز لا} + \dots\right]$$

(۲۵) $$(\text{عف}^2 + \text{م}^2)^2\,\text{ما} = \text{جمز م لا} + \text{جم م لا}$$

$$\left[\text{ما} = \frac{1}{2\text{م}^4}\text{جمز م لا} - \frac{1}{8\text{م}^2}\text{لا}^2\text{جم م لا} + \dots\right]$$

(۲۶) مساوات $\frac{فر^2 لا}{فرت^2} + ۲ن \frac{فرلا}{فرت} + ن^2 لا = ف جب پ ت$ سے لا اور $\frac{فرلا}{فرت}$ کی قیمتیں ذیل کی شرائط کے ماتحت دریافت کرو

ت = ۰ کے لئے $\frac{فرلا}{فرت} = ۰$ اور لا = ۰.

$$\left[لا = \frac{ف}{ر^2}\left\{جب(پ ت - ۲صہ) + (پ ت + جب ۲صہ) قو^{-ن ت}\right\}\right.$$

$$اور \frac{فرلا}{فرت} = \frac{ف جب صہ}{ر}\left\{جم(پ ت - ۲صہ) - (ن ت - جم ۲صہ) قو^{-ن ت}\right\}$$

جہاں $ر = \sqrt{پ^2 + ن^2}$ اور $صہ = مس^{-1}\left(\frac{پ}{ن}\right)$

امثلہ ۵

(متجانس مساواتیں)

(۱) $لا^2 \frac{فر^3 ما}{فرلا^3} + لا \frac{فر^2 ما}{فرلا^2} - ۴ \frac{فرما}{فرلا} = ۰$ $\left[ما = ا + \frac{ب}{لا} + ج لا^3\right]$

(۲) $\frac{فر^2 ق}{فرر^2} + \frac{1}{ر}\frac{فرق}{فرر} = ۰$ کو بطور متجانس خطی مساوات کے حل کرو

$[ق = ا لوک ر + ب]$

(۳) $لا^2 \frac{فر^3 ما}{فرلا^3} - ۲ \frac{فرما}{فرلا} = ۰$ $[ما = ا + ب لوک لا + ج لا^3]$ ۴۵۲

(۴) $لا^2 \frac{فر^2 ما}{فرلا^2} - ۲ما = لا$ $\left[ما = ا لا^2 + \frac{ب}{لا} - \frac{لا}{۲}\right]$

(۶) $\text{لا}^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = \text{لا}^3 \quad \left[\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \frac{1}{8}\text{لا}^3\right]$

(۷) $\text{لا}^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - 3\,\text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 4\,\text{ما} = \text{لا}^3 \quad \left[\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب لوک لا})\,\text{لا}^2 + \text{لا}^3\right]$

(۸) $\text{لا}^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + 3\,\text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} \quad \left[\text{ما} = \frac{\text{ا} + \text{ب لوک لا}}{\text{لا}}\right]$

(۹) $\left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فرر}^2} - \frac{2}{\text{ر}^2}\right)^2 \text{ف(ر)} = 0$

$\left[\text{ف(ر)} = \frac{\text{ا}}{\text{ر}} + \text{ب ر} + \text{ج ر}^2 + \text{د ر}^4\right]$

(۱۰) ثابت کرو کہ $\text{ف}\left(\text{لا}\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{لا}^{\text{م}}\text{ع} = \text{لا}^{\text{م}}\,\text{ف}\left(\text{لا}\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} + \text{م}\right)\text{ع}$

(۱۱) ثابت کرو کہ $\text{ف}\left(\text{لا}\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{لا}^{\text{م}}\,\text{لوک لا}$

$= \text{لا}^{\text{م}}\left\{\text{ف(م)}\,\text{لوک لا} + \text{ف}'\text{(م)}\right\}$

امثلہ ۵۸

ہمزاد مساواتیں

(۱) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + 7\,\text{لا} - \text{ما} = 0 ، \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + 2\,\text{لا} + 5\,\text{ما} = 0$

$\left[\text{ما} = (\text{ا جم ت} + \text{ب جب ت})\,\text{قو}^{-6\text{ت}}\right.$

$\left.\text{لا} = \frac{1}{2}\{(\text{ا} + \text{ب})\,\text{جب ت} + (\text{ا} - \text{ب})\,\text{جم ت}\}\,\text{قو}^{-6\text{ت}}\right]$

(۲) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = 3\,\text{لا} - \text{ما} ، \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{لا} + \text{ما}$

[لا = (ا + حب ت) قو^{۲ت} ، ما = (ا - حب + حب ت) قو^{۲ت}]

(۳) فرلا/فرت + ۵لا + ما = قو^{ت} ، فرما/فرت + ۳ما - لا = قو^{۲ت}

[لا = (ا + ب ت) قو$^{-۴ت}$ + ۴/۲۵ قو^{ت} - ۱/۳۶ قو^{۲ت} ،

ما = -(ا + ب + ب ت) قو$^{-۴ت}$ + ۱/۲۵ قو^{ت} + ۷/۳۶ قو^{۲ت}]

۴۵۵ (۴) حل کرو فرلا/فرت = لا^{۲} + لا ما ، فرما/فرت = ما^{۲} + لا ما

[لا = (ا + حب)/(ا - ۲ت) ، ما = (ا - حب)/(ا - ۲ت)]

(۵) فر^{۲}لا/فرت^{۲} + ۳لا - ۴ما + ۳ = ۰ ، فر^{۲}ما/فرت^{۲} + لا - ما + ۵ = ۰

[لا = (ا + حب ت) جم ت + (اَ + حبَ ت) جب ت - ۱۷ ،

ما = ½ (ا + بَ + حب ت) جم ت + ½ (اَ - ب + بَ ت) جب ت - ۱۲]

(۶) ثابت کرو کہ مساوات فرلا/فرت = ا لا + ھ ما ، فرما/فرت = ھ لا + ب ما

کے تکملے لا = ا$_{۱}$ قو$^{لم_{۱}ت}$ + ا$_{۲}$ قو$^{لم_{۲}ت}$ اور ما = مم$_{۱}$ ا$_{۱}$ قو$^{لم_{۱}ت}$ + مم$_{۲}$ ا$_{۲}$ قو$^{لم_{۲}ت}$ ہیں

جہاں مم$_{۱}$ اور مم$_{۲}$ جبریہ مساوات مم^{۲} + (ا - ب)/ھ مم - ۱ = ۰ کی

اصلیں ہیں

اور لم$_{۱}$ = ا + ھ مم$_{۱}$ ، لم$_{۲}$ = ا + ھ مم$_{۲}$

(۷) حل کرو $\frac{ف^{2} لا}{فت^{2}} + م^{2} ما = ۰$ ، $\frac{ف^{2} ما}{فت^{2}} - م^{2} لا = ۰$

$$لا = ا \, قو^{\frac{مت}{\sqrt{۲}}} جم\left(\frac{مت}{\sqrt{۲}} + عہ\right) + ب \, قو^{-\frac{مت}{\sqrt{۲}}} جم\left(\frac{مت}{\sqrt{۲}} + بہ\right)$$

$$ما = ا \, قو^{\frac{مت}{\sqrt{۲}}} جب\left(\frac{مت}{\sqrt{۲}} + عہ\right) - ب \, قو^{-\frac{مت}{\sqrt{۲}}} جب\left(\frac{مت}{\sqrt{۲}} + بہ\right)$$

(۸) حل کرو $\frac{ف^{2} لا}{فت^{2}} = ا لا + ھ ما$ ، $\frac{ف^{2} ما}{فت^{2}} = ھ لا + ب ما$

(۹) حل کرو $\frac{ف^{2} لا}{فت^{2}} + م^{2} لا - ن^{2} ما = ۰$ ، $\frac{ف^{2} ما}{فت^{2}} + م^{2} ما - ن^{2} لا = ۰$

[$لا + ما = ا \, جم \sqrt{(م^{2} - ن^{2})} \, ت + اَ \, جب \sqrt{(م^{2} - ن^{2})} \, ت$

$لا - ما = ب \, جم \sqrt{م^{2} + ن^{2}} \, ت + بَ \, جب \sqrt{م^{2} + ن^{2}} \, ت$]

(۱۰) ہمزاد مساواتوں $\frac{ف^{2} لا}{فت^{2}} = مہ \, لا$ ، $\frac{ف^{2} ما}{فت^{2}} = مہ \, ما$ کے حل میں مستقلات، ذیل کے شرائط سے دریافت کرو ت = ۰ کے لئے

$$لا = ا ، ما = ۰ ، \frac{ف لا}{فت} = ۰ ، \frac{ف ما}{فت} = و$$

[$لا = ا \, جمز \sqrt{مہ} \, ت$ ، $ما = \frac{و}{\sqrt{مہ}} \, جبز \sqrt{مہ} \, ت$]

(۱۱) ایک دور کے ذاتی امالہ کی شرح ل اور مزاحمت ر ہے اس کے ۲۵۶
درمیان میں گنجائش گ والا مکثفہ حائل ہے۔ اسمیں برقی رو کی
حرکت کی مساوات

ل $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ر لا} = -\frac{\text{ق}}{\text{گ}}$ اور $\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}} = \text{لا}$ ہے جہاں لا برقی رو ہے اور ق کثیفہ کا برقی بار ہے۔ خروج کے اہتزازی ہونے کی شرط دریافت کرو۔ $[\text{ل} > \frac{1}{4}\text{ر}^2\text{گ}]$

(۱۲) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = 0$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ما}^2}$ اور ثابت کرو کہ حل ایسے مخروطی کو ظاہر کرتا ہے جو بلحاظ لا محور کے متشاکل ہے۔

(۱۳) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = 0$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = \text{مہ ما}^{3}$

اور ثابت کرو کہ مساوات کو پورا کرنیوالے منحنیوں میں زائدوں کا ایک قبیل بھی شریک ہے۔

(۱۴) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{ن}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ف}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} = \text{ن}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$

$[\text{لا} = \text{عہ} + \text{اجم}(\text{ن ت} + \text{صہ})$، $\text{ما} = \text{بہ} + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}\text{ت}$
$+ \text{اجب}(\text{ن ت} + \text{صہ})]$

(۱۵) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} - 2\text{ن}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{م}^2\text{لا} = 0$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} + 2\text{ن}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{م}^2\text{ما} = 0$

$[\text{لا} = \text{اجم}(\text{پ ت} + \text{صہ}) + \text{اَجم}(\text{پَ ت} + \text{صہَ})$
$\text{ما} = -\text{اجب}(\text{پ ت} + \text{صہ}) + \text{اَجب}(\text{پَ ت} + \text{صہَ})]$

جہاں $\text{پ}، \text{پَ} = \sqrt{\text{م}^2 + \text{ن}^2} \pm \text{ن}$

(۱۶) حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + (\text{مہ} + 1)\frac{\text{ج}}{\text{ب}}\text{لا} - \text{مہ}\frac{\text{ج}}{\text{ب}}\text{ما} = 0$

$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{ج}}{\text{ب}}\text{ما} = 0$

یہ دوہرے رقاص کے حرکت کی مساوات ہے جس کی اوپر کی اور نیچے کی ڈوریوں کے طول بالترتیب ا اور ب ہیں اور م نیچے اور اوپر کے ذروں کی کمیتوں کی نسبت ہے۔ ثابت کرو کہ طبعی اہتزاز کے دور $\frac{2\pi}{پ_1}$ اور $\frac{2\pi}{پ_2}$ ہونگے اگر $پ_1^2$ اور $پ_2^2$ مساوات

$$پ^4 - (1+م)\, ج \left(\frac{1}{ا} + \frac{1}{ب}\right) پ^2 + (1+م) \frac{ج^2}{ا\,ب} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اس مساوات کی $پ^2$ میں اصلیں حقیقی، مثبت اور جداگانہ ہونگی۔

کتب خانہ کلیہ جامعہ عثمانیہ

۴۵۰

چودھواں باب

قوتی سلسلوں کا تفرق اور تکمل

۱۷۴- سوال کا بیان - اس باب کا اصل مقصد اس امر کے ثبوت کی رہنمائی کرنا ہے کہ مناسب شرائط کے ماتحت تفرق اور تکمل کے عمل کو ایسے تفاعلوں پر استعمال کر سکتے ہیں جو قوتی سلسلوں سے بیان ہوں مثلاً اس نمونہ کے سلسلوں سے

$$\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \cdots + \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن} + \cdots \quad (1)$$

جہاں سر مستقل ہیں پس اگر ص (لا) اس سلسلہ کے حاصل جمع کو ظاہر کرے اور یہ فرض کر لیا جائے کہ کسی خاص وقفہ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سلسلہ مستدق ہے تو ہمیں وہ شرائط دریافت کرنا ہیں کہ جن کے ماتحت یہ بیان کیا جا سکتا ہے کہ ص (لا) متغیر لا کا مسلسل اور قابل تفرق تفاعل ہے اور علاوہ اس کے

$$\text{ص}'(\text{لا}) = \text{ا}_1 + 2\,\text{ا}_2\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_3\,\text{لا}^2 + \cdots + \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots \quad (2)$$

اور

$$\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{ص}(\text{لا})\,\text{ذلا} = \text{ا}_0\,\text{لا} + \frac{1}{2}\,\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + \frac{1}{3}\,\text{ا}_2\,\text{لا}^3 + \cdots + \frac{1}{\text{ن}+1}\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}+1} + \cdots \quad (3)$$

اگر (۱) میں رقموں کی تعداد محدود ہوتی تو زیرِ غور مسئلے کے ثبوت کی ضرورت نہ ہوتی اور جو کتاب میں اب تک بتایا جا چکا ہے (دیکھو دفعہ ۲۹ اور ۴۷) وہی کافی ہوتا۔ لیکن اس امر کو اچھی طرح خیال میں رکھنا چاہئے کہ لا انتہا سلسلوں کے متعلق اصطلاح "حاصل جمع" کے معنے کچھ مصنوعی سے ہوتے ہیں، اور بغیر تحقیق کے اس امر کو فرض کرنے کا ہمیں کوئی مجاز نہیں ہے کہ اگر ایک مسئلہ اصطلاح کے ایک معنی میں صحیح ہے تو وہ دوسرے معنی میں بھی صحیح ہوگا۔

سلسلہ (۱) کی پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کے لئے کوئی علامت اختیار کرنے سے سہولت ہوگی اس لئے ہم لکھتے ہیں

$$\text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \text{ا} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} \qquad (۴)$$

جو لا میں (ن-۱) درجے کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اسے ہم جزوی حاصل جمع کہینگے اور اس کی ترسیمی تعبیر "تقریبی منحنی" کہلائیگا۔ ایسے منحنیات کی ایک مثال شکل ۱۳۶ میں دی ہوئی ہے۔ نیز اگر فرض کریں کہ

$$\text{ص}(\text{لا}) = \text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا}) + \text{ر}_{\text{ن}}(\text{لا}) \qquad (۵)$$

تو مقدار $\text{ر}_{\text{ن}}(\text{لا})$ کو ن رقموں کے بعد کا "باقی" کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ $\text{ر}_{\text{ن}}(\text{لا})$ سلسلہ ۴۵۸

$$\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{لا}^{\text{ن}+1} + \cdots \qquad (۶)$$

کا حاصل جمع ہے۔

مفروضہ کی بنا پر تواتر

$$\text{ص}_{1}(\text{لا}),\ \text{ص}_{2}(\text{لا}),\ \text{ص}_{3}(\text{لا}) \cdots \qquad (۷)$$

کی انتہائی قیمت (لا) کی ایسی قیمت کے لئے جس کے لئے ابتدائی سلسلہ

سندق ہے) ص (لا) ہے، اسی سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تواترہ

$$\text{ک}_{1}(\text{لا})\text{،}\ \text{ک}_{2}(\text{لا})\text{،}\ \text{ک}_{3}(\text{لا})\text{،} \ldots\ldots\ldots\ (8)$$

کی انتہائی قیمت صفر ہے۔

اس امر کو ملحوظ رکھنا چاہئے کہ مذکورہ بالا تمام مسائل میں ہمیں دوہری انتہا سے واسطہ پڑتا ہے۔ لہذا ص (لا) کا تسلسل ثابت کرنے کے لئے جبکہ لا ← ا ہمیں یہ دکھانا ہے کہ

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}}\ \text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}}\ \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا}) \ldots\ldots (9)$$

نیز ضابطے (۲) اور (۳) بالترتیب اس طرح لکھے جا سکتے ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا})\right] = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا})\right] \ldots (10)$$

$$\text{اور}\quad \int_{\text{ا}}^{\text{لا}}\left[\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا})\right]\text{فرلا} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\int_{\text{ا}}^{\text{لا}}\text{ص}_{\text{ن}}(\text{لا})\ \text{فرلا} \ldots (11)$$

چونکہ مشتق تفاعل، خارج قسمت کی انتہا ہے اور محدود تکملہ حاصل جمع کی انتہا ہے اس لئے (۱۰) اور (۱۱) کے جملات بھی دوہری انتہا کے تحت میں آتے ہیں۔ یہ فرض نہیں کر لینا چاہئے اور نہ ہی یہ ہمیشہ درست ہوتا ہے کہ نتیجہ انتہا لینے کی ترتیبوں پر منحصر نہیں ہے*۔

۱۷۵ ـ لوکارتمی سلسلہ کی دریافت:۔ ایک یا دو مثالیں ایسی ہیں جن کی صورت میں مذکورۂ بالا سوالات کا جواب بغیر کسی مشکل کے دیا جا سکتا ہے کیونکہ ایسی صورتوں میں $\text{ک}_{\text{ن}}(\text{لا})$ کی شکل معلوم ہوتی ہے۔ اور ان سے جو نتائج مرتب ہوتے ہیں وہ بہت اہم ہیں۔

سلسلہ ہندسیہ کے نظریہ میں سادہ تقسیم کے عمل سے ظاہر ہے کہ

* [بطور مثال دفعہ ۱۹۳ دیکھو]

$$\frac{1}{1+ت} = 1 - ت + ت^2 - \ldots + (-1)^{ن-1} ت^{ن-1} + (-1)^{ن} \frac{ت^{ن}}{1+ت} \quad \ldots (1)$$

بشرطیکہ ت $\neq -1$۔ فرض کرو کہ لا مثبت ہے تو (۱) سے

$$لوگ\,(1+لا) = \int_0^{لا} \frac{فرت}{1+ت} = لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{3} \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{ن-1} \frac{لا^{ن}}{ن} + (-1)^{ن} \int_0^{لا} \frac{ت^{ن} فرت}{1+ت} \ldots\ldots (2)$$

۴۵۹ آخری رقم میں تکملہ کی قیمت بڑھ جائے گی اگر تکمل کے نسب نما میں اسکی کم سے کم قیمت یعنی ایک درج کردیجائے۔ اسلئے تکملہ کم ہے $\int_0^{لا} ت^{ن} فرت$ سے یعنی $\frac{لا^{ن+1}}{ن+1}$ سے۔

اگر لا ایک سے کم ہو یا ایک کے مساوی بھی ہو تو جیسے ن بڑھتا ہے اسکی انتہا صفر ہوتی ہے۔ پس اگر لا مثبت ہو اور $\not> 1$ تو

$$لوگ\,(1+لا) = لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{3} - \ldots + (-1)^{ن-1} \frac{لا^{ن}}{ن} + \ldots\ldots (3)$$

جہاں سلسلہ لا متناہی تک پھیلتا ہے۔

بالخصوص لا = ۱ رکھنے سے

$$لوگ\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots (4)$$

اس نتیجہ سے اگرچہ صحیح جواب حاصل ہو سکتا ہے لیکن سلسلہ کے بہت آہستہ متندق ہونے کی وجہ سے یہ ضابطہ عددی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہے' یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اعشاریہ کے ن مقام تک صحیح نتیجہ نکالنے کے لئے تقریباً $10^{ن}$ ارقام درکار ہونگی۔ عملی طور پر زیادہ مفید ضابطہ ذیل میں درج ہے۔ (۱۲)

پھر

$$\frac{1}{1-ت} = 1 + ت + ت^2 + \ldots + ت^{ن-1} + \frac{ت^{ن}}{1-ت} \quad \ldots\ldots (5)$$

بشرطیکہ ت $\neq 1$، پس اگر لا ایک سے کم مثبت مقدار ہے تو

$$\int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{فرت}}{1-\text{ت}} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^{2}}{2} + \frac{\text{لا}^{3}}{3} + \dots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{1-\text{ت}}\,\text{فرت} \;\dots\dots (6)$$

بائیں جانب کے تکملہ کی قیمت بڑھ جاتی ہے اگر نسب نما کی بجائے اسکی کم سے کم قیمت جو تکمل کے حدود کے اندر واقع ہوتی ہے اس میں درج کردی جائے یعنی نسب نما کی بجائے (۱-لا) لکھ دیا جائے

$$\text{پس} \int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{1-\text{ت}}\,\text{فرت} < \frac{1}{1-\text{لا}} \int_{0}^{\text{لا}} \text{ت}^{\text{ن}}\,\text{فرت} < \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)(1-\text{لا})} \;\dots (7)$$

چونکہ مفروض کی رو سے لا ایک سے کم ہے اس لئے جیسے ن بڑھتا ہے اس کی انتہا صفر ہوتی ہے۔

$$\text{نیز چونکہ} \int_{0}^{\text{لا}} \frac{\text{فرت}}{1-\text{ت}} = \Big[-\text{لوک}(1-\text{ت})\Big]_{0}^{\text{لا}} = -\text{لوک}(1-\text{لا}) \;\dots\dots (8)$$

$$\text{اس لئے}\ \text{لوک}(1-\text{لا}) = -\text{لا} - \frac{\text{لا}^{2}}{2} - \frac{\text{لا}^{3}}{3} - \dots - \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} \dots \text{لاانتہا تک} \;\dots (9)$$

ضابطوں (۳) اور (۹) کو ذیل کے ایک ضابطہ سے بیان کیا جاسکتا ہے ۴۷۰

$$\text{لوک}(1+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{2}}{2} + \frac{\text{لا}^{3}}{3} - \frac{\text{لا}^{4}}{4} + \dots + (-1)^{\text{ن}-1}\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \dots\dots (10)$$

جہاں یہ ضابطہ لا کی ۱- سے ۱+ تک کی تمام قیمتوں کے لئے برقرار رہتا ہے بشرطیکہ (۱-) کو حدود سے خارج کردیا جائے اور (۱+) کو شریک کرلیا جائے بائیں جانب کا سلسلہ "لوکارثمی سلسلہ" کہلاتا ہے†۔

اگر لا مثبت ہو اور ایک سے کم ہو تو (۳) میں سے (۱۰) کو تفریق کرنے سے

† ایسا معلوم ہوتا ہے کہ پہلے پہل اس سلسلہ کو این مرکیٹر (N. Mercater) نے ۱۶۶۸ء میں دیا تھا

$$\text{لوک}\ \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = 2\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} + \cdots\right) \quad \cdots\cdots (11)$$

اس نتیجہ میں اگر $\text{لا} = \frac{1}{2\text{م}+1}$ درج کریں تو

$$\text{لوک}\ (\text{م}+1) - \text{لوک}\ \text{م} = \text{لوک}\ \frac{\text{م}+1}{\text{م}}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{2\text{م}+1} + \frac{1}{3(2\text{م}+1)^3} + \frac{1}{5(2\text{م}+1)^5} + \cdots\right\} \quad \cdots\cdots (12)$$

یہ سلسلہ م = ۱ کے لئے بھی بہت جلد مستدق ہوتا ہے۔ م = ۱، ۲، ۳، ... رکھنے سے لوک ۲، لوک ۳ ـ لوک ۲، لوک ۴ ـ لوک ۳، ... کی سلسلہ وار قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں، اور اس سے طبعی اعداد ۲، ۳، ... کے لوکارتموں کی قیمتیں اساس قو کے لحاظ سے حاصل ہو جائینگی جب لوک ۱۰ کی قیمت معلوم ہو جائے تو اس کا الٹ مقیاس مہ کو ظاہر کرتا ہے جس کے ساتھ ضرب دینے سے اساس قو کے لوکارتم اساس ۱۰ کے لوکارتموں میں تبدیل ہو جاتے ہیں +۔

مثال (۱) :- اگر ن > ۱ تو $\text{لوک}\ \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}} = \text{لوک}\ \left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right) = \frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{2\text{ن}^2} + \frac{1}{3\text{ن}^3} - \cdots\cdots (13)$

چونکہ ارقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہیں اور ان کی انتہا صفر ہے، اسلئے ان کا حاصل جمع دفعہ ۵ کی رو سے $\frac{1}{\text{ن}}$ سے بڑا ہوگا۔

+ مہ کے دریافت کرنیکا سریع طریقہ ذیل کی متماثلہ مساوات کے ذریعہ ہے

$$\text{لوک}\ 10 = 3\ \text{لوک}\ 2 + \text{لوک}\ \frac{5}{4}$$

بائیں جانب کے لوکارتم ضابطہ (۱۲) میں م = ۱ اور م = ۴ رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں

نیز $\text{لوک}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}-۱}\right) = -\text{لوک}\left(۱-\frac{۱}{\text{ن}}\right) = \frac{۱}{\text{ن}} + \frac{۱}{۲\text{ن}^۲} + \frac{۱}{۳\text{ن}^۳} + \ldots\ldots \quad (۱۴)$

جو ظاہر ہے کہ $\frac{۱}{\text{ن}}$ سے بڑا ہے

اس لئے $\frac{۱}{\text{ن}} > \text{لوک}\,\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}} > \frac{۱}{\text{ن}+۱} \quad \ldots\ldots (۱۵)$

۴۶۱ **مثال ۲۔** فرض کرو کہ

$$\left.\begin{aligned} \text{ع}_{\text{ن}} &= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{\text{ن}} - \text{لوک ن} \\ \text{و}_{\text{ن}} &= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{\text{ن}} - \text{لوک}(\text{ن}+۱) \end{aligned}\right\} \ldots (۱۶)$$

جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے۔ تو (۱۵) سے

$$\text{ع}_{\text{ن}} - \text{ع}_{\text{ن}+۱} = \text{لوک}\,\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}} - \frac{۱}{\text{ن}+۱} > ۰ \quad (۱۷)$$

اور $\text{و}_{\text{ن}+۱} - \text{و}_{\text{ن}} = \frac{۱}{\text{ن}+۱} - \text{لوک}\,\frac{\text{ن}+۲}{\text{ن}+۱} > ۰ \quad (۱۸)$

نیز $\text{ع}_{\text{ن}} - \text{و}_{\text{ن}} = \text{لوک}\,\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۱۹)$

جس کی قیمت صفر اور $\frac{۱}{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہے۔

اس لئے مقادیر $\text{ع}_۱،\ \text{ع}_۲،\ \text{ع}_۳ \ldots\ldots \text{ع}_{\text{ن}} \ldots\ldots (۲۰)$

ایک مسلسل گھٹنے والا سلسلہ بناتی ہیں

اور $\text{و}_۱،\ \text{و}_۲،\ \text{و}_۳ \ldots\ldots \text{و}_{\text{ن}} \ldots\ldots (۲۱)$

ایک بڑھنے والے سلسلے کو ظاہر کرتی ہیں۔ نیز چونکہ (۲۰) کا ہر رکن ضابطہ (۱۹) کے مطابق (۲۱) کے مماثل رکن سے بڑا ہے اس لئے سلسلہ (۲۰) کی ایک نچلی انتہا ہے (دفعہ ۲) اور سلسلہ (۲۱) کی ایک اوپر کی انتہا ہے۔

نیز چونکہ $\lim_{ن \to \infty} (ع_ن - ف_ن) = ۰$ .... (۲۲)

اس لئے یہ دونوں انتہائیں مساوی ہیں ۔ پس

$$\lim_{ن \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{ن} - لوک\ ن\right) = جما \ldots (۲۳)$$

جہاں جما کی ایک خاص مستقل قیمت ہے اور یہ یولر کا مستقل کہلاتا ہے ۔ نیز $و_۱ = ۱ - لوک\ ۲ > ۰$ ۔ اس لئے جما مثبت ہے ۔ اس کی قیمت ۰٫۵۷۷۲۱۵۶۶..... دریافت ہوئی ہے* ۔

۱۷۶ ۔ گریگوری کا سلسلہ ۔

چونکہ $\frac{۱}{۱+ت^۲} = ۱ - ت^۲ + ت^۴ \ldots (-۱)^{ن-۱} ت^{۲ن-۲} + (-۱)^ن \frac{ت^{۲ن}}{۱+ت^۲}$ ...(۱)

اس لئے $\int_۰^{لا} \frac{فرت}{۱+ت^۲} = لا - \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} \ldots + (-۱)^{ن-۱} \frac{لا^{۲ن-۱}}{۲ن-۱}$

$+ (-۱)^ن \int_۰^{لا} \frac{ت^{۲ن}}{۱+ت^۲} فرت$ .... (۲)

اگر لا مثبت ہے اور $\ngtr ۱$ تو آخرالذکر تکملہ $\int_۰^۱ ت^{۲ن} فرت$ یعنی $\frac{۱}{۲ن+۱}$ ...(۳) سے کم ہے اور اسلئے جیسے ن بڑھتا ہے یہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے ۔

پس $مس^{-۱} لا = لا - \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} \ldots + (-۱)^{ن-۱} \frac{لا^{۲ن-۱}}{۲ن-۱} + \ldots$ (۴)

اسمیں $مس^{-۱} لا$ کی وہ قیمت لینی چاہیئے جو لا کے ساتھ صفر سے شروع ہوتی ہے ۔ یہ سلسلہ گریگوری کا سلسلہ† کہلاتا ہے ۔ نیز چونکہ (۴) کے دونوں جانب کی

* اس کے دریافت کرنے کا طریقہ اس کتاب کی حدود سے باہر ہے

† اسکے دریافت کنندہ گریگوری (۱۶۷۱) کے نام کی بنا پر ۔

علامت لا کے ساتھ بدلتی ہے اس لئے مساوات، لا کی ‎-۱ سے ‎+۱ تک (دونوں حدود شریک ہیں) کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح رہتی ہے۔

لا = ۱ رکھنے سے
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \ldots \quad (5)$$

یہ سلسلہ بہت آہستہ مستدق ہوتا ہے اسلئے π کی قیمت دریافت کرنیکے لئے دیگر سلسلے استعمال کئے جاتے ہیں۔ یولر نے ذیل کی مساوات متطابقہ استعمال کی
$$\frac{\pi}{4} = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3} \quad \ldots\ldots (6)$$

جس سے
$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 3^3} + \frac{1}{5\times 3^5} \ldots\right) \ldots (7)$$

اس سے پیشتر میچن (Machin) نے ضابطہ
$$\frac{\pi}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239} \quad \ldots\ldots (8)$$
استعمال کیا تھا۔ (۶) اور (۸) کا ثبوت علم مثلث کی اکثر ابتدائی کتابوں میں دیا جاتا ہے۔

(۸) سے
$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5\times 5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\times 239^3} + \frac{1}{5\times 239^5} - \ldots\right) \ldots (9)$$

مسئلہ کی اہمیت کی وجہ سے یہ مناسب ہوگا کہ میچن کے ضابطہ سے π کی قیمت دریافت کرنیکا عمل توضیح کے ساتھ دیا جائے۔ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}$ دریافت کرنیکے لئے ہم پہلے ذیل کی جدول بناتے ہیں۔

ن	$\frac{1}{5^{ن}}$	$\pm \frac{1}{ن \times 5^{ن}}$
۱	٫۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰	+ ٫۲۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۳	۸۰۰۰۰۰۰۰۰	− ۲۶۶۶۶۶۶۷
۵	۳۲۰۰۰۰۰۰	+ ۶۴۰۰۰۰
۷	۱۲۸۰۰۰۰	− ۱۸۲۸۶
۹	۵۱۲۰	+ ۵۶۹
۱۱	۲۰۵	− ۱۹
۱۳	۸	+ ۱

آخری کالم کی مثبت رقموں کا حاصل جمع ۲،۰۰۰۶۴۰۵۷۰۰ ہے ۴۶۳
اور منفی رقموں کا مجموعہ ۰۰۲۶۶۸۴۹۷۲، ہے۔

اس لئے $\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} =$ ۱۹۷۳۹۵۵۵۹۸،

نیز $\text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$ کی قیمت دریافت کرنے کے لئے ذیل کی جدول ہے

ن	$\frac{1}{239^{n}}$	$\pm\frac{1}{n \times 239^{n}}$
۱	۰۰۴۱۸۴۱۰۰۴،	+ ۰۰۴۱۸۴۱۰۰۴،
۳	۷۳۲	− ۲۴۴

اس لئے $\text{مس}^{-1}\frac{1}{239} =$ ۰۰۴۱۸۴۰۷۶۰،

پس $\frac{\pi}{4} = 4\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{5} - \text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$

= + ۷۸۹۵۸۲۲۳۹۲،

− ۰۰۴۱۸۴۰۷۶۰،

= ۷۸۵۳۹۸۱۶۳۲،

∴ π = ۳،۱۴۱۵۹۲۶۵۲۸

ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا ہو سکتی ہے۔ آخری نتیجہ میں خطا کا اندازہ کرنیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{مس}^{-1}\frac{1}{5}$ کی دریافت میں پانچ جگہ خطا کا امکان ہے لیکن ہر جگہ اعشاریہ کے آخری مقام میں خطا نصف اکائی سے بڑی نہیں ہو سکتی اور اسی طرح $\text{مس}^{-1}\frac{1}{239}$ میں ایسی خطا دو جگہ ہو سکتی ہے۔ پس π کی دریافت شدہ قیمت میں اگر تمام خطائیں جمع بھی ہو جائیں تو یہ اعشاریہ کے آخری مقام میں $4 \times (4 \times 5 \times \frac{1}{2} +$

۲× $\frac{1}{2}$) = ۴۴ سے زیادہ نہیں ہو سکتیں۔ اس لئے اس کا اعشاریہ کے پہلے سات مقام تک اثر نہیں پڑیگا۔ نیز ہم کہہ سکتے ہیں کہ اعشاریہ کے آخری تین عدد ۴۸۴ اور ۵۷۲ کے درمیان واقع ہونگے۔

درحقیقت خطائیں سب ایک سمت میں نہیں ہیں اور π کی صحیح قیمت اعشاریہ کے دس مقامات تک یہ ہے

$$\pi = ۳٫۱۴۱ ۵۹۲ ۶۵۳۶$$

۱۷۷ ـ قوتی سلسلوں کا استدقاق ـ دفعہ ۴۷ ایں

جو عام سوال پیش کئے گئے ہیں ان کو بحث میں لانے سے پیشتر استدقاق پر غور کرنا ضروری ہے۔ اگر کسی لا انتہا سلسلے کی رقمیں متغیر لا کے تفاعل ہوں تو یہ ممکن ہے کہ کوئی سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے بغیر کسی رکاوٹ کے مستدق ہو جیسا کہ قوت نمائی سلسلہ کی صورت میں دیکھا گیا ہے (دفعہ ۳۷) یا یہ سلسلہ لا کی صرف اُن قیمتوں کے لئے مستدق ہو جو ایک خاص مسلسل وسعت کے ساتھ تعلق رکھتی ہیں۔ اگر یہ احاطہ یا وسعت لا = ا سے لا = ب تک بشمول ہر دو حدود ہو تو احاطہ بند کہلاتا ہے اور اسے (ا، ب) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر دونوں حدود کے
نقطے ا اور ب احاطہ سے باہر ہوں تو احاطہ دونوں سروں پر کھلا کہلاتا ۴۶۴
ہے اور اسے [ا، ب] سے ظاہر کرتے ہیں، اگر صرف پہلے یا دوسرے حدودی نقطہ کو احاطہ سے خارج کر دیا گیا ہے تو اسے بالترتیب [ا، ب) یا (ا، ب] سے ظاہر کرتے ہیں*۔ مثلاً لوگارثمی سلسلہ احاطہ [-۱، ۱) کے لئے مستدق ثابت کیا گیا ہے اور گریگوری کا سلسلہ احاطہ (-۱، ۱) میں مستدق ہے۔

قوتی سلسلہ $ا_{۰} + ا_{۱}لا + ا_{۲}لا^{۲} + \dots + ا_{ن}لا^{ن} + \dots\dots$ (۱)

کی صورت میں استدقاق کی عموماً مفید ترین جانچ "نسبتی جانچ" ہے۔

[* یہ ترقیم پروفیسر ایف ایس کیری نے رائج کی۔]

ظاہر ہے کہ اگر ارقام کی محدود تعداد کے بعد، ہر رقم اور اسکی پہلی رقم کی نسبت کی مطلق قیمت کسی مقدار ک سے کم ہے جو خود ایک سے کم ہے تو سلسلہ لازماً مستدق ہوگا۔ کیونکہ ایسی صورت میں سلسلہ کی متواتر رقمیں، مشترک نسبت ک والے ہندسی سلسلہ کی رقموں کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے گھٹتی ہیں۔ بالخصوص سلسلہ (۱) لازماً مستدق ہوگا اگر

↑

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{ا_{ن+۱}}{ا_{ن}} \, لا \right| < ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

کیونکہ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے اور زیر غور انتہا کَ ہے تو ن کو کافی بڑا لینے سے ہم اطمینان کر سکتے ہیں کہ ن کی اس اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے کسر $\left| \frac{ا_{ن+۱}}{ا_{ن}} \, لا \right|$ کسی مقررہ مقدار ک سے (جو کَ اور ایک کے درمیان ہے) کم ہے۔

اگر شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو سلسلے

$$ا_{۱} + ۲\, ا_{۲}\, لا + ۳\, ا_{۳}\, لا^{۲} + \ldots\ldots + ن\, ا_{ن}\, لا^{ن-۱} + \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$ا\, لا + \frac{ا_{۱}}{۲} لا^{۲} + \frac{ا_{۲}}{۳} لا^{۳} + \ldots\ldots + \frac{ا_{ن}}{ن+۱} لا^{ن+۱} + \ldots\ldots (۴)$$

جنکی ارقام سلسلہ (۱) کو بالترتیب تفرق اور تکمیل کرنے سے حاصل ہوئی ہیں لازماً مستدق ہونگے۔ کیونکہ (۳) کی صورت میں

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{(ن+۱)\, ا_{ن+۱}}{ن\, ا_{ن}} \, لا \right| = \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left(۱ + \frac{۱}{ن}\right) \times \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{ا_{ن+۱}}{ا_{ن}} \, لا \right| = کَ \ldots (۵)$$

↑ جانچ کی یہ شکل ڈی لامبرٹ کے نام سے مشہور ہے

سلسلہ (۴) کے مستدق ہونے کا ثبوت اس سے بھی زیادہ ظاہر ہے۔
۴۶۵ نیز نسبتی جانچ سے قطع نظر کر کے صرف فرض کرو کہ سلسلہ (۱) لا کی مخصوص قیمت عہ کے لئے مستدق ہے۔ اب چونکہ ارقام کو لا انتہا گھٹنا چاہیئے اس لئے ضروری ہے کہ

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} | ا_ن عہ^ن | = ۰ \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلۂ لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جن کے لئے $|لا| < |عہ|$، لازماً مستدق ہوگا کیونکہ سلسلہ ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$ا_۰ + ا_۱ عہ \left(\frac{لا}{عہ}\right) + ا_۲ عہ^۲ \left(\frac{لا}{عہ}\right)^۲ + \ldots + ا_ن عہ^ن \left(\frac{لا}{عہ}\right)^ن + \ldots (۷)$$

اب $| ا_ن عہ^ن |$ کی بڑی سی بڑی قیمت کو م سے ظاہر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (۷) کی مختلف رقمیں ذیل کے مستدق ہندسی سلسلہ کی متناظر رقموں سے مطلق قیمت میں کم ہیں

$$م (۱ + ت + ت^۲ + ت^۳ + \ldots + ت^ن + \ldots) \ldots\ldots (۸)$$

جہاں $ت = \frac{لا}{عہ}$.

اس لئے سلسلہ (۷) بھی لازماً مستدق ہوگا۔

پس اگر سلسلہ (۱) لا کی کسی ایک قیمت (عہ) کے لئے جو صفر نہیں ہے مستدق ہو تو یہ سلسلہ احاطہ [- عہ، عہ) میں مستدق ہوگا اور احاطہ [- عہ، عہ] میں لازماً مستدق ہوگا۔

نیز (۶) سے ظاہر ہے کہ سلسلے (۳) اور (۴) بھی احاطہ [- عہ، عہ] میں لازماً مستدق ہونگے۔ کیونکہ اگر بہ مطلق قیمت میں عہ سے کم کوئی مقدار ہو تو

(۳) کی صورت میں

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left|\text{ان لی بہ}^{\text{ن}-۱}\right| = \frac{۱}{|\text{بہ}|}\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left|\text{الن عہ}^{\text{ن}}\right| \times \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ن}\left|\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}\right|^{\text{ن}} \quad \text{.........} (۹)$$

بائیں جانب کی دو انتہاؤں میں سے پہلی مفروض کی رو سے صفر ہے اور دوسری دفعہ ۴۳ (۳) کی بنا پر صفر ہے۔

(۴) کی صورت میں بدرجہ اولےٰ

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left|\frac{\text{الن عہ}^{\text{ن}+۱}}{\text{ن}+۱}\right| = |\text{عہ}|\ \text{نہا}\left|\frac{\text{الن عہ}^{\text{ن}}}{\text{ن}+۱}\right| = ۰ \qquad (۱۰)$$

مثال (۱) سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\text{لا}^{۲} + \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}\text{لا}^{۳} + \text{.....} \quad (۱۱)$

دفعہ (۵) سے لا = -۱ کے لئے مستدق ہے۔ اس لئے |لا| < ۱ کے لئے یہ لازماً مستدق ہے۔

ثابت کیا جا سکتا ہے کہ لا = ۱ کے لئے یہ متسع ہے۔ پس یہ احاطہ (-۱، ۱] میں مستدق ہے لیکن لازماً مستدق صرف احاطہ [-۱، ۱] میں ہے

مثال (۲) — سلسلہ $\frac{\text{لا}}{۱\times۲} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲\times۳} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳\times۴} + \text{........} \quad (۱۲)$ ۴۶۶

جانچ (۲) کی رو سے |لا| < ۱ کے لئے مستدق ہے۔ نیز بہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ لا = ± ۱ کے لئے بھی یہ مستدق ہے۔ اس لئے یہ پورے احاطے (-۱، ۱) میں مستدق ہے۔ لیکن مذکورہ بالا دلائل کی بنا پر ہم صرف اس بات کا دعوےٰ کر سکتے ہیں کہ سلسلہ

$$\text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \text{..............} \quad (۱۳)$$

جو سلسلہ (۱۲) کو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے احاطہ [-۱، ۱] میں مستدق ہے۔ نیز دفعہ ۵ سے یہ سلسلہ لا = -۱ کے لئے مستدق ہے اور دفعہ ۵، اسے

لا = ۱ کے لئے متسع ہے۔

۱۷۸۔ قوتی سلسلوں کا تسلسل

:- اب فرض کرو کہ سلسلہ

$$\text{ص}(\text{لا}) = \text{ا}_\cdot + \text{ا}_۱\,\text{لا} + \text{ا}_۲\,\text{لا}^۲ + \ldots + \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن} + \ldots\ldots \quad (۱)$$

احاطہ [-ع، ع] میں لازماً مستدق ہے۔ اگر لا اور لاَ اس احاطہ کے کوئی دو نقاط ہوں تو دفعہ ۵ (آ) اور (۳) سے

$$\text{ص}(\text{لاَ}) - \text{ص}(\text{لا}) = (\text{لاَ} - \text{لا})\Big\{\text{ا}_۱ + ۲\,\text{ا}_۲\,\frac{\text{لا} + \text{لاَ}}{۲} + ۳\,\text{ا}_۳\,\frac{\text{لا}^۲ + \text{لا}\,\text{لاَ} + \text{لاَ}^۲}{۳} + \ldots$$

$$+ \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن}\,\frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{لاَ} + \ldots + \text{لاَ}^{\text{ن}-۱}}{\text{ن}} + \ldots\Big\} \ldots (۲)$$

اگر لا اور لاَ کی علامت ایک ہی ہو تو کسر $\frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{لاَ} + \ldots + \text{لاَ}^{\text{ن}-۱}}{\text{ن}}$

کی قیمت $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ اور $\text{لاَ}^{\text{ن}-۱}$ کے درمیان واقع ہوگی۔ اس لئے خطوط وحدانی { } کے اندر کی مختلف رقمیں مطلق قیمت میں ذیل کے دو سلسلوں کی متناظر رقموں کے درمیان واقع ہونگی:-

$$\text{ا}_۱ + ۲\,\text{ا}_۲\,\text{لا} + ۳\,\text{ا}_۳\,\text{لا}^۲ + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \ldots\ldots \quad (۳)$$

اور

$$\text{ا}_۱ + ۲\,\text{ا}_۲\,\text{لاَ} + ۳\,\text{ا}_۳\,\text{لاَ}^۲ + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لاَ}^{\text{ن}-۱} + \ldots\ldots \quad (۴)$$

یہ ثابت کر دیا گیا ہے کہ مذکورہ بالا مفروضہ پر یہ دونوں سلسلے لازماً مستدق ہیں۔ اسلئے (۲) میں { } کے درمیان کا جملہ محدود ہے پس

$$\underset{\text{لاَ} \to \text{لا}}{\text{نہا}} \{\text{ص}(\text{لاَ}) - \text{ص}(\text{لا})\} = \cdot \quad (۵)$$

یعنی احاطہ [- عہ، عہ]* میں لا کی تمام درمیانی قیمتوں کے لئے ص (لا) مسلسل ہے۔

اس سے یہ اخذ کرسکتے ہیں کہ قوتی سلسلے (۳) اور (۴) احاطہ [- عہ، عہ] میں مسلسل ہیں۔

۲۶۷ **۱۷۹ — قوتی سلسلہ کا تفرق** :- گذشتہ دفعہ کی ترقیم کے مطابق اور اسی مفروضہ کی بنا پر

$$\frac{ص(لاَ)-ص(لا)}{لاَ-لا} = ا_{1} + ۲ا_{2}\frac{لا+لاَ}{۲} + ۳ا_{3}\frac{لا^{2}+لا\,لاَ+لاَ^{2}}{۳} + \dots$$

$$+ ن ا_{ن}\frac{لا^{ن-1}+لا^{ن-2}لاَ+\dots+لاَ^{ن-1}}{ن}+\dots \quad (۱)$$

چونکہ آخر میں لاَ کو لا کے مساوی کرنا ہے، اسلئے ان دونوں کو ہم علامت فرض کرسکتے ہیں۔

سب سے پہلے فرض کرو کہ تمام سر $ا_{ن}$ مثبت ہیں اور لا بھی مثبت ہے۔ تو (۱) کے بائیں جانب کا سلسلہ قیمت کے لحاظ سے گذشتہ دفعہ کے سلسلوں (۳) اور (۴) کے درمیان واقع ہوگا اور چونکہ (۳) کا حاصل جمع لا کا مسلسل تفاعل ہے اس لئے

$$صَ(لا) = \underset{لاَ \to لا}{نہا}\frac{ص(لاَ)-ص(لا)}{لاَ-لا} = ا_{1} + ۲ا_{2}لا + ۳ا_{3}لا^{2} + \dots$$

$$+ ن ا_{ن} لا^{ن-1} + \dots\dots\dots \quad (۲)$$

* ممکن ہے کہ سلسلے (۱) اور (۳) لازماً مستدق ہوں جبکہ لا سلسلہ (۱) کے احاطۂ استدقاق کا حدودی نقطہ ہو۔ ایسی صورت میں ہم یقینی طور پر بیان کرسکتے ہیں کہ ص (لا)، لا کی اس قیمت تک (بشمول اس قیمت کے) مسلسل ہے۔

اور یہ نتیجہ احاطہ [- عم، عم] کے تمام نقاط کے لئے صحیح ہے۔

ظاہر ہے کہ یہی نتیجہ حاصل ہوگا اگر تمام سر $\text{ا}_{\text{ن}}$ منفی ہوں۔

اب فرض کرو کہ لا منفی ہے اور سر $\text{ا}_{\text{ن}}$ مثبت ہیں اس صورت میں ص (لا) میں ایک ایک رقم چھوڑ کر جو دو ذیل کے سلسلے بنتے ہیں ان پر مذکورہ بالا دلائل عائد ہو سکینگے

$$\text{ا}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ا}_{\text{۴}}\,\text{لا}^{\text{۴}} + \ldots + \text{ا}_{\text{۲ن}}\,\text{لا}^{\text{۲ن}} + \ldots\ldots \quad (\text{۳})$$

$$\text{ا}_{\text{۱}}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{۳}}\,\text{لا}^{\text{۳}} + \text{ا}_{\text{۵}}\,\text{لا}^{\text{۵}} + \ldots + \text{ا}_{\text{۲ن+۱}}\,\text{لا}^{\text{۲ن+۱}} + \ldots\ldots \quad (\text{۴})$$

کیونکہ (۲) کی تمام رقمیں مثبت ہیں اور (۴) کی منفی۔ اب ان کا مشتق تفاعل ان سلسلوں کو بالترتیب رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے پس ان کو جمع کرنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوگا کیونکہ ہر دو سلسلے لازماً مستدق ہیں۔

آخر الامر اگر سر $\text{ا}_{\text{ن}}$ تمام ایک ہی علامت کے نہیں ہیں تو ص (لا) کو دو ایسے سلسلوں کے ماحصل جمع میں تحویل کیا جا سکتا ہے کہ ان میں سے ایک کے تمام سر مثبت ہوں اور دوسرے کے منفی۔ اب مذکورۂ بالا دلائل ان میں سے ہر ایک پر عائد ہو سکتے ہیں اور اس لئے ان کے مجموعے پر بھی عائد ہو سکینگے۔

اوپر کے بیان میں اس امر کا مشاہدہ کرنا ہوگا کہ زیر غور سلسلہ کا لازماً مستدق ہونا اوپر کے استدلال کے لئے بیحد ضروری ہے۔

۴۶۸ مثال:- یہ معلوم ہے کہ $|\text{لا}| < \text{۱}$ کے لئے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۳}} + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}} + \ldots\ldots \quad (\text{۵})$$

دونوں جانبوں کو تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{۱}}{(\text{۱} - \text{لا})^{\text{۲}}} = \text{۱} + \text{۲لا} + \text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{۴لا}^{\text{۳}} + \ldots + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن-۱}} + \ldots\ldots \quad (\text{۶})$$

نیز دو بارہ تفرق کرنے سے

$$\frac{1}{(1-\text{لا})^{3}} = \frac{1}{2}\left[1\times 2 + 2\times 3\,\text{لا} + 3\times 4\,\text{لا}^{2} + \ldots + \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\right] \quad \ldots(7)$$

١٨٠ — **قوتی سلسلوں کا تکمل** :- دفعات ١٧٧-١٧٩ کی ترقیم کے موافق فرض کرو کہ

$$\text{ع}(\text{لا}) = \text{ا}_{0}\,\text{لا} + \text{ا}_{1}\frac{\text{لا}^{2}}{2} + \text{ا}_{2}\frac{\text{لا}^{3}}{3} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \ldots \quad (1)$$

اس مفروضہ کی بنا پر کہ ص (لا) احاطہ [- حـ، حـ] میں لازماً مستدق ہے سلسلہ (١) بھی اسی احاطہ میں لازماً مستدق ہوگا۔ پس دفعہ ١٧٩ کی رو سے

$$\text{ع}'(\text{لا}) = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{لا} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \ldots = \text{ص}(\text{لا}) \quad \ldots(2)$$

$$\text{اس لئے} \quad \int_{0}^{\text{لا}} \text{ص}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \left[\text{ع}(\text{لا})\right]_{0}^{\text{لا}} = \text{ع}(\text{لا}) \quad \ldots(3)$$

مثال (١) اگر $|\text{لا}| < 1$ تو مسئلہ ثنائی (دفعہ ١٨٢) سے

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^{2}}} = 1 + \frac{1}{2}\text{لا}^{2} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\text{لا}^{4} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\text{لا}^{6} + \ldots \quad (4)$$

پس حدود صفر اور لا کے درمیان رقم بہ رقم تکمل کرنے سے

$$\text{جب}^{-1}\text{لا} = \text{لا} + \frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}^{3}}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{\text{لا}^{5}}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\times\frac{\text{لا}^{7}}{7} + \ldots \quad (5)$$

یہ سلسلہ نیوٹن کا دریافت کیا ہوا ہے۔

اس میں اگر $\text{لا} = \frac{1}{2}$ رکھیں تو

$$\pi = 6\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 3\times 2^{3}} + \frac{1\times 3}{2\times 4\times 5\times 2^{5}} + \ldots\right] \quad \ldots(6)$$

جس سے π کی قیمت بہ آسانی دریافت ہو سکتی ہے۔

مثال (۲)۔ اگر |لا| < ۱ تو لوگ (۱+لا) = لا − لا^۲/۲ + لا^۳/۳ … (۷)

٤٦٩ اسکو حدود صفر اور لا کے درمیان رقم بہ رقم تکمل کرنے سے

(۱+لا) لوگ (۱+لا) − لا = لا^۲/(۱×۲) − لا^۳/(۲×۳) + لا^۴/(۳×۴) …… (۸)

دفعہ ۸۰ اکے حاشیہ میں یہ دکھایا گیا ہے کہ بائیں جانب کا تفاعل لا = ۱ تک سلسل ہے۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

۱/(۱×۲) − ۱/(۲×۳) + ۱/(۳×۴) …… = ۲ لوگ ۲ − ۱ = …۳۸۶۲۹ء

۱۸۱۔ تفرقی مساوات کا حل سلسلوں کے ذریعہ۔

اگر کوئی تفرقی مساوات دی ہوئی ہو جس کے سر تبوع متغیر (لا) کے منطق صحیح تفاعل ہوں تو صعودی قوتی سلسلہ

ما = ا. + ا۱ لا + ا۲ لا^۲ + …… + ان لا^ن + …… (۱)

کی شکل میں اکثر حل دریافت ہو سکتا ہے۔ اب اگر تھوڑی دیر کے لئے فرض کرلیا جائے کہ لا کے کسی خاص احاطہ میں سلسلہ لازماً مستدق ہے تو دفعہ ۱۷۹ کے ضابطہ سے یہ لا کے لحاظ سے ایک، دو…. یا زیادہ دفعہ تفرق کیا جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات میں سلسلہ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ مساوات پوری ہو سکتی ہے بشرطیکہ سروں ا.، ا۱، ا۲ …… میں چند رشتے ہوں۔

اس طریقے سے ایک یا زیادہ اختیاری مستقل والا سلسلہ حاصل ہوجائیگا اور اگر یہ ثابت ہو جائے کہ سلسلہ لازماً مستدق ہے تو یہ اس تفرقی مساوات کا ایک حل ہوگا۔ بلا شبہ یہ الگ سوال ہے کہ آیا یہ حل مکمل حل ہے یا مکمل حل بنانے کے لئے اسمیں کچھ اور اضافہ ہونا چاہئے

اس پر ابھی غور کرنا باقی ہے۔

ذیل کی مثال اہم ہے

فرض کرو کہ مساوات ہے $\frac{ف^{2} ما}{ف لا^{2}} + ما = ٠$ .... (۲)

نمونہ (۱) کا حل ما کو مساوات میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱\times۲\, ا_{۲} + ا_{٠}) + (۲\times۳\, ا_{۳} + ا_{۱}) لا + (۳\times۴\, ا_{۴} + ا_{۲}) لا^{۲} + \ldots\ldots$$

$$+ \{(ن-۱)\, ن\, ا_{ن} + ا_{ن-۲}\} لا^{ن-۲} + \ldots = ٠ \quad (۳)$$

یہ مساوات متماثلاً پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$ا_{۲} = -\frac{۱}{۱\times۲} ا_{٠} ، \quad ا_{۳} = -\frac{۱}{۲\times۳} ا_{۱}$$

$$ا_{۴} = -\frac{۱}{۳\times۴} ا_{۲} = \frac{۱}{|\underline{۴}} ا_{٠} ، \quad ا_{۵} = -\frac{۱}{۴\times۵} ا_{۳} = \frac{۱}{|\underline{۵}} ا_{۱}$$

اور عام طور پر ۴۷۰

$$\left.\begin{aligned} ا_{۲ن} &= -\frac{۱}{(۲ن-۱)\,۲ن} ا_{۲ن-۲} = (-۱)^{ن} \frac{۱}{|\underline{۲ن}} ا_{٠} \\ \text{اور}\quad ا_{۲ن+۱} &= -\frac{۱}{۲ن(۲ن+۱)} ا_{۲ن-۱} = (-۱)^{ن} \frac{۱}{|\underline{۲ن+۱}} ا_{۱} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۴)$$

پس حاصل ہوتا ہے کہ حل ہے

$$ما = ا_{٠}\left(۱ - \frac{لا^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{لا^{۴}}{|\underline{۴}} - \ldots\right) + ا_{۱}\left(لا - \frac{لا^{۳}}{|\underline{۳}} + \frac{لا^{۵}}{|\underline{۵}} - \ldots\right) \ldots\ldots (۵)$$

بہ آسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ خطوط وحدانی میں کے سلسلے لا کی تمام قیمتوں کے لئے لازماً مستدق ہیں اور اس لئے اِن کا حاصل جمع مسلسل ہے۔

دفعہ ۱۶۳ میں دکھایا گیا ہے کہ (۲) کا مکمل حل ہے

ما = ا جم لا + ب جب لا .... (۶)

پس اگر ا. اور ا۱ کی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ا اور ب کی ایسی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں کہ جملے (۵) اور (۶) تماثلاً مساوی ہوں۔

مثالاً ا. = ۱ اور ا۱ = ۰ درج کرو

تو ۱ − لا۲/|۲ + لا۴/|۴ − لا۶/|۶ + ... = ا جم لا + ب جب لا

لا کی علامت بدلنے سے

۱ − لا۲/|۲ + لا۴/|۴ − لا۶/|۶ + ... = ا جم لا − ب جب لا

پس ضروری ہے کہ ب = ۰، اب لا = ۰ رکھنے سے ا = ۱ دریافت ہوتا ہے۔

اِس سے ذیل کا ضابطہ حاصل ہوتا ہے

جم لا = ۱ − لا۲/|۲ + لا۴/|۴ − .... (۷)

اسی طرح اگر ا. = ۰ اور ا۱ = ۱ رکھیں تو حاصل ہوتا ہے

ا = ۰ اور ب = ۱

اور اسلئے جب لا = لا − لا۳/|۳ + لا۵/|۵ − .... (۸)

کئی وجوہات سے تفرقی مساوات کے حل کرنے کا طریقہ بالا عملی طور پر کارآمد نہیں ہے، اور یہ بھی ممکن ہے کہ اس سے نامکمل حل حاصل ہو۔ مثلاً دوسرے رتبے کی خطی تفرقی مساوات کی صورت میں ممکن ہے کہ صرف ایک ہی سلسلہ حاصل ہو اور اسلئے ایک ہی اختیاری مستقل ہو۔ اس مضمون کے طبیعی اطلاقات میں اکثر ایسا ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں حل کم از کم علامات کی رقوم میں دفعہ ۱۶۶ (۳) کے طریقے سے مکمل

کیا جا سکتا ہے

۱۸۲ — تفرقی مساوات کی مدد سے پھیلاؤ:- ۲۷۱

بعض اوقات گذشتہ دفعہ کا طریقہ ایک دئے ہوئے تفاعل کو قوتی سلسلہ میں پھیلانے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ ایسی مساوات مرتب ہو سکے جس کے سر منطق صحیح تفاعل ہوں* اور جو اصلی تفاعل کے اندراج سے پوری ہو جائے۔

مثلاً فرض کرو کہ $\text{ما} = (\text{۱} + \text{لا})^{\text{م}}$ .... (۱)

جہاں م مثبت منفی صحیح عدد یا کسر ہے۔ دونوں جانب کا لوکارثم لیکر تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{۱}}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{م}}{\text{۱} + \text{لا}}$$

یعنی $(\text{۱} + \text{لا})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{م ما} = \text{۰}$ .... (۲)

اب فرض کرو کہ

$$\text{ما} = \text{ا}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{۱}}\text{لا} + \text{ا}_{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \dots \quad (\text{۳})$$

اس کو مساوات میں درج کرنے سے

$$(\text{۱} + \text{لا})(\text{ا}_{\text{۱}} + \text{۲}\,\text{ا}_{\text{۲}}\text{لا} + \dots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}} + \dots)$$

$$-\text{م}(\text{ا}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{۱}}\text{لا} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \dots) = \text{۰}$$

* یہ طریقہ ابتدا میں نیوٹن نے استعمال کیا تھا نیز جم لا، جب (لا) کے سلسلے بھی اُنہی نے حاصل کئے تھے اگرچہ سلسلے حاصل کرنیکا طریقہ مختلف تھا

$$\text{یا}\ (\text{ا}_۱ - \text{م}\,\text{ا}_۰) + \{۲\,\text{ا}_۲ - (\text{م} - ۱)\,\text{ا}_۱\}\,\text{لا} + \{۳\,\text{ا}_۳ - (\text{م} - ۲)\,\text{ا}_۲\}\,\text{لا}^۲ + \ldots$$

$$+ \{\text{ن}\,\text{ا}_\text{ن} - (\text{م} - \text{ن} + ۱)\,\text{ا}_{\text{ن}-۱}\}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \ldots = ۰ \quad (۴)$$

یہ متماثلاً پوری ہوتی ہے بشرطیکہ

$$\text{ا}_۱ = \frac{\text{م}}{۱}\,\text{ا}_۰$$

$$\text{ا}_۲ = \frac{\text{م}-۱}{۲}\,\text{ا}_۱ = \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۱ \times ۲}\,\text{ا}_۰$$

$$\text{ا}_۳ = \frac{\text{م}-۲}{۳}\,\text{ا}_۲ = \frac{\text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳}\,\text{ا}_۰$$

اور عام طور پر

$$\text{ا}_\text{ن} = \frac{\text{م}-\text{ن}+۱}{\text{ن}}\,\text{ا}_{\text{ن}-۱} = \frac{\text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times \text{ن}}\,\text{ا}_۰ \ldots (۵)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_۰\Big\{۱ + \frac{\text{م}}{۱}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{|\underline{۲}}\,\text{لا}^۲ + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)}{|\underline{۳}}\,\text{لا}^۳ + \ldots$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\ldots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{|\underline{\text{ن}}}\,\text{لا}^\text{ن} + \ldots\Big\} \ldots (۶)$$

جو مساوات (۲) کا حل ہے۔ بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ سلسلہ $|\text{لا}| < ۱$ کے لئے مستدق ہے۔

اب اگر تفرقی مساوات (۳) کے مرتب کرنے کے طریقے کو الٹیں تو ۴۷۲
ظاہر ہے کہ اس کا مکمل حل ہے

$$\text{ما} = \text{ج}\,(۱ + \text{لا})^\text{م} \ldots\ldots\ldots (۷)$$

جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔ پس (٦) اور (٧) ایک دوسرے کے معادل ہونگے اور دونوں میں لا = ٠ رکھنے سے ظاہر ہے کہ ج = ا

اسلئے

$$(\text{١}+\text{لا})^{\text{م}} = \text{١} + \frac{\text{م}}{\text{١}}\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})}{\lfloor\text{٢}}\text{لا}^{\text{٢}} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}-\text{١})\cdots(\text{م}-\text{ن}+\text{١})}{\lfloor\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots \quad (\text{٨})$$

یہ پھیلاؤ |لا| < ١ کے لئے صحیح ہے اور یہ مسئلہ ثنائی کے نام سے مشہور ہے*

مثال ۷۔ بطور دوسری مثال کے تفاعل

$$\text{ما} = \frac{\text{جب}^{-\text{١}}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{١}-\text{لا}^{\text{٢}}}} \cdots\cdots \quad (\text{٩})$$

پر غور کرو۔

$\sqrt{\text{١}-\text{لا}^{\text{٢}}}$ سے ضرب دیکر تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\sqrt{\text{١}-\text{لا}^{\text{٢}}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{١}-\text{لا}^{\text{٢}}}}\,\text{ما} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١}-\text{لا}^{\text{٢}}}}$$

یعنی

$$(\text{١}-\text{لا}^{\text{٢}})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا}\,\text{ما} = \text{١} \cdots\cdots \quad (\text{١٠})$$

فرض کرو کہ

$$\text{ما} = \text{ا}_{\text{٠}} + \text{ا}_{\text{١}}\text{لا} + \text{ا}_{\text{٢}}\text{لا}^{\text{٢}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots\cdots \quad (\text{١١})$$

اسکو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{١}-\text{لا}^{\text{٢}})(\text{ا}_{\text{١}} + \text{٢}\text{ا}_{\text{٢}}\text{لا} + \text{٣}\text{ا}_{\text{٣}}\text{لا}^{\text{٢}} + \cdots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}-\text{١}} + \cdots)$$

$$-\text{لا}(\text{ا}_{\text{٠}} + \text{ا}_{\text{١}}\text{لا} + \text{ا}_{\text{٢}}\text{لا}^{\text{٢}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} + \cdots) = \text{١} \cdots\cdots \quad (\text{١٢})$$

* نیوٹن (١٦٧٦)، لا = ± ا کی صورتوں پر خاص تحقیقات کرنی ہوگی

یا $(ا_۱ - ۱) + (۲ ا_۲ - ا_۰)لا + (۳ ا_۳ - ۲ ا_۱)لا^۲ + \ldots\ldots$

$+ \{ن ا_ن - (ن-۱) ا_{ن-۲}\} لا^{ن-۱} + \ldots\ldots = ۰$ (۱۳)

یہ مساوات متماثلاً پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\left.\begin{array}{ll} ا_۱ = ۱ \text{ ،} & ا_۲ = \frac{۱}{۲} ا_۰ \\ ا_۳ = \frac{۲}{۳} ا_۱ = \frac{۲}{۳} \text{ ،} & ا_۴ = \frac{۳}{۴} ا_۲ = \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} ا_۰ \\ ا_۵ = \frac{۴}{۵} ا_۳ = \frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۳} & ا_۶ = \frac{۵}{۶} ا_۴ = \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} ا_۰ \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (۱۴)$$

اس سے یہ حل حاصل ہوتا ہے

$$ہ = لا + \frac{۲}{۳} لا^۳ + \frac{۴ \times ۲}{۵ \times ۳} لا^۵ + \frac{۶ \times ۴ \times ۲}{۷ \times ۵ \times ۳} لا^۷ + \ldots\ldots$$

$$+ ا_۰ \left(۱ + \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} لا^۴ + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} لا^۶ + \ldots\right) \ldots (۱۵)$$

۴۷۳ اب اگر ہم خطی مساوات (۱۰) کے بنانے کے عمل کو الٹیں تو ظاہر ہے کہ اس کا عام حل ہوگا

$$ہ \sqrt{۱ - لا^۲} = جب^{-۱} لا + ا \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۶)^{*}$$

$$\text{یا}\quad ہ = \frac{جب^{-۱} لا}{\sqrt{۱ - لا^۲}} + \frac{ا}{\sqrt{۱ - لا^۲}} \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

سوال کی نوعیت سے اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ (۱۵) کو نتیجہ (۱۷) میں شامل ہونا چاہیئے۔ اگر (۱۵) اور (۱۷) میں لا = ۰

* دفعہ ۱۵۸ مثال ۲ بھی دیکھو

رکھیں تو حاصل ہوتا ہے ا = ۱، اب ما کے لئے جو دو جملے ہیں اُن کے مثلاً مساوی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ

$$\frac{\text{جب}^{-1}\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}} = \text{لا} + \frac{۲}{۳}\text{لا}^۳ + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\text{لا}^۵ + \dots\dots \quad (۱۸)$$

اور

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}} = ۱ + \frac{۱}{۲}\text{لا}^۲ + \frac{۳\times۱}{۴\times۲}\text{لا}^۴ + \dots\dots \quad (۱۹)$$

دونوں سلسلے مستندق ہیں جبکہ $|\text{لا}| < ۱$ - نتیجہ (۱۹) صرف $(۱-\text{لا}^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$ کا ثنائی پھیلاؤ ہے اب اگر لا = جب طھ رکھیں تو پہلا سلسلہ ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\text{طھ} = \text{جب طھ جم طھ}\left(۱ + \frac{۲}{۳}\text{جب}^۲\text{طھ} + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\text{جب}^۴\text{طھ} + \dots\right) \quad (۲۰)$$

نیز اگر اس میں مس طھ = ی درج کریں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}^{-1}\text{ی} = \frac{\text{ی}}{۱+\text{ی}^۲}\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\times\frac{\text{ی}^۲}{۱+\text{ی}^۲} + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\left(\frac{\text{ی}^۲}{۱+\text{ی}^۲}\right)^۲ + \dots\right\} \quad (۲۱)$$

یہ سلسلہ π کی قیمت دریافت کرنے کے لئے کئی عمدہ طریقوں کی بنا ہے مثلاً یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\pi}{۴} = ۵\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷} + ۲\,\text{مس}^{-1}\frac{۳}{۷۹}$$

جس سے

$$\pi = \frac{۲۸}{۱۰}\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\left(\frac{۲}{۱۰۰}\right) + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\left(\frac{۲}{۱۰۰}\right)^۲ + \dots\right\}$$

$$+ \frac{۳۰۳۳۶}{۱۰۰۰۰۰}\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱۴۴}{۱۰۰۰۰۰}\right) + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\left(\frac{۱۴۴}{۱۰۰۰۰۰}\right)^۲ + \dots\right\} \quad (۲۲)$$

یہ سلسلہ بہت جلد مستندق ہوتا ہے۔ اسکے علاوہ نسب نمائیں ۱۰ کی قوتیں ہونے کی وجہ سے عددی حسابات کے لئے بہت موزوں ہے*۔

* ان سلسلوں کی تاریخ کے لئے گلیشر (Mess. of Math) جلد ۲ صفحہ ۱۱۹ سنہ ۱۸۷۳ء دیکھو

(۱۸) کو تکمل کرنے سے ایک مشہور سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^۲=\frac{\text{لا}^۲}{۲}+\frac{۲}{۳}\cdot\frac{\text{لا}^۴}{۴}+\frac{۴\times۲}{۵\times۳}\cdot\frac{\text{لا}^۶}{۶}+\ldots\ldots\quad(۲۳)$$

۴۰۴

امثلہ ۵۹

(لوکارتمی سلسلے)

(۱) اگر م اور ن دو مثبت مقداریں ہوں اور ۲ن > م > ن تو ثابت کرو کہ لوگ $(\frac{\text{م}}{\text{ن}})$ کی قیمت $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}}$ اور $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہے۔

(۲) دفعہ ۱۷۵ کے سلسلے کی مدد سے ذیل کے نتیجے حاصل کرو۔

لوگ ۲ = ۰٫۶۹۳ ۱۴۷ ۱۸۱ ، لوگ ۷ = ۱٫۹۴۵ ۹۱۰ ۱۴۹

لوگ ۳ = ۱٫۰۹۸ ۶۱۲ ۲۸۹ ، لوگ ۸ = ۲٫۰۷۹ ۴۴۱ ۵۴۲

لوگ ۴ = ۱٫۳۸۶ ۲۹۴ ۳۶۱ ، لوگ ۹ = ۲٫۱۹۷ ۲۲۴ ۵۷۷

لوگ ۵ = ۱٫۶۰۹ ۴۳۷ ۹۱۲ ، لوگ ۱۰ = ۲٫۳۰۲ ۵۸۵ ۰۹۳

لوگ ۶ = ۱٫۷۹۱ ۷۵۹ ۴۶۹ ، مع = ۰٫۴۳۴ ۲۹۴ ۴۸۲

(۳) ثابت کرو کہ لوگ ۲ = ۷ا − ۲ب + ۳ج

لوگ ۳ = ۱۱ا − ۳ب + ۵ج

لوگ ۵ = ۱۶ا − ۴ب + ۷ج

اور پھر لوگ ۱۰ = ۲۳ا − ۶ب + ۱۰ج

جہاں $\text{ا}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲\times۱۰^۲}+\frac{۱}{۳\times۱۰^۳}+\ldots=۰٫۱۰۵۳۶۰۵۱۵۷$ ،

$\text{ب}=\frac{۴}{۱۰۰}+\frac{۴^۲}{۲\times۱۰۰^۲}+\frac{۴^۳}{۳\times۱۰۰^۳}+\ldots=۰٫۰۴۰۸۲۱۹۹۴۵$ ،

$$ج = \frac{1}{80} - \frac{1}{2 \times 80^{2}} + \frac{1}{3 \times 80^{3}} - \dots = ۰٫۰۱۲۴۲۲۵۲۰۰$$

اسکی مدد سے لوک ۱۰ دریافت کرو۔ (Adams)

(۴) ثابت کرو کہ $لوک\, ۲ = ۷\, حپ + ۵\, ق + ۳\, ر$

$$لوک\, ۳ = ۱۱\, حپ + ۸\, ق + ۵\, ر$$

$$لوک\, ۵ = ۱۶\, حپ + ۱۲\, ق + ۷\, ر$$

اور $لوک\, ۱۰ = ۲۳\, حپ + ۱۷\, ق + ۱۰\, ر$

جہاں $حپ = ۲\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3 \times 31^{3}} + \frac{1}{5 \times 31^{5}} + \dots\right) = ۰٫۰۶۴۵۳۸۵۲۱۱$

$$ق = ۲\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3 \times 49^{3}} + \frac{1}{5 \times 49^{5}} + \dots\right) = ۰٫۰۴۰۸۲۱۹۹۴۵$$

$$ر = ۲\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3 \times 161^{3}} + \frac{1}{5 \times 161^{5}} + \dots\right) = ۰٫۰۱۲۴۲۲۵۲۰۰$$

اِس ضابطہ کی مدد سے لوک ۱۰ کی قیمت دریافت کرو۔ (Glaisher)

(۵) اگر $|لا| < ۱$ تو ثابت کرو کہ ۴۷۵

$$مسنر^{-1} لا = لا + \frac{لا^{3}}{3} + \frac{لا^{5}}{5} + \dots\dots$$

(۶) ثابت کرو کہ

$$\underset{ن \to \infty}{نہا}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2ن - 1} - \frac{1}{2}\, لوک\, ن\right) = \frac{1}{2}\, جم + لوک\, ۲$$

(۷) اگر پ، ق دو مثبت مقداریں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\underset{ن \to \infty}{نہا}\left(\frac{1}{ن پ + 1} + \frac{1}{ن پ + 2} + \dots + \frac{1}{ن ق}\right) = لوک\, \frac{ق}{پ}$$

(۸) ثابت کرو کہ اگر لا مثبت ہو اور بڑا ہو تو تقریباً $لوک\, جمز\, لا = لا - لوک\, ۲ + قو^{-۲لا}$

(۹) نیز ثابت کرو کہ تقریباً لوگ مسن لا = − ۲ قو$^{-۲\text{لا}}$

امثلہ ۹۰

(سلسلوں کا تفرق اور تکمل)

(۱) متماثلہ $\frac{۱}{۱-\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳} + \dots\dots\dots$

کو جبکہ |لا| < ۱ ہو تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ اگر م مثبت صحیح عدد ہے تو

$$(۱-\text{لا})^{-\text{م}} = ۱ + \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}+۱)}{۱\times۲}\text{لا}^{۲} + \frac{\text{م}(\text{م}+۱)(\text{م}+۲)}{۱\times۲\times۳}\text{لا}^{۳} + \dots\dots$$

(۲) اگر |لا| < ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{۱\times۲} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۳\times۴} + \frac{\text{لا}^{۶}}{۵\times۶} \dots\dots = \text{لا مس}^{-۱}\text{لا} - \frac{۱}{۲}\text{لوگ}(۱+\text{لا}^{۲})$$

نیز دکھاؤ کہ $۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \dots\dots = ۰٫۴۳۸۸۲\dots$

(۳) ثابت کرو کہ اگر |لا| < ۱ تو

$$\frac{\text{لا}^{۳}}{۱\times۳} - \frac{\text{لا}^{۵}}{۳\times۵} + \frac{\text{لا}^{۷}}{۵\times۷} - \dots\dots = \frac{۱}{۲}(۱+\text{لا}^{۲})\text{مس}^{-۱}\text{لا} - \frac{\text{لا}}{۲}$$

(۴) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۱}{۱\times۳\times۵} + \frac{۱}{۵\times۷\times۹} + \frac{۱}{۷\times۹\times۱۱} + \dots\dots\dots\dots$$

کا حاصل جمع ۰٫۰۷۱۳۴۹ .... ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱\times۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴\times۵} + \frac{۱}{۵\times۶\times۷} + \dots\dots = ۰٫۱۹۳۱۴۷$ ۴۷۶

اور $\frac{1}{1\times2\times3} - \frac{1}{3\times4\times5} + \frac{1}{5\times6\times7} - \dots = 0.153426\dots$

(۶) ثابت کرو کہ

$$\int_0^1 \frac{لا^{م-1}}{1+لا^{ن}}\, فرلا = \frac{1}{م} - \frac{1}{م+ن} + \frac{1}{م+2ن} - \frac{1}{م+3ن} + \dots$$

(۷) ثابت کرو کہ

$$\int_0^{لا} \frac{جب\, لا}{لا}\, فرلا = لا - \frac{لا^3}{3\times\underline{3}} + \frac{لا^5}{5\times\underline{5}} - \dots$$

اور

$$\int_0^{لا} \frac{جبز\, لا}{لا}\, فرلا = لا + \frac{لا^3}{3\times\underline{3}} + \frac{لا^5}{5\times\underline{5}} + \dots$$

(۸) ثابت کرو کہ

$$\int_0^1 \frac{فرلا}{\sqrt{1-لا^4}} = 1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{5} + \frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{1}{9} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{1}{13} + \dots$$

(۹) ثابت کرو کہ

$$\int_{ا}^{ب} \frac{قو^{لا}}{لا}\, فرلا = لوک\frac{ب}{ا} + (ب-ا) + \frac{ب^2-ا^2}{2\times\underline{2}} + \frac{ب^3-ا^3}{3\times\underline{3}} + \dots$$

(۱۰) ثابت کرو کہ

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\times3} + \frac{1}{3^2\times5} - \frac{1}{3^3\times7} + \dots\right)$$

امثلہ ۱۶

(سلسلوں کی مدد سے تفرقی مساوات کا حل)

(۱) جب لا کے سلسلے کو مانکر دائرہ کی قوس کے تقریبی طول دریافت کرنیکے لئے ہائی گن (Huyghens) کا ضابطہ ثابت کرو۔ ضابطہ یہ ہے "نصف قوس کے وتر کے آٹھ گنے میں سے پوری قوس کا وتر گھٹاؤ اور

حاصل تفرقی کو تین سے تقسیم کرو"۔
نیز ثابت کرو کہ ۵ ۴° کی قوس میں، متناسب خطا ۰۰۰۰۰۲ میں ایک سے کم ہے

(۲) مساوات $\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{م}\,\text{ما}=0$ کا خاص حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$\text{ما}=\text{ا}\left(1-\frac{\text{م لا}}{1^{2}}+\frac{\text{م}^{2}\text{لا}^{2}}{1^{2}\times 2^{2}}-\frac{\text{م}^{3}\text{لا}^{3}}{1^{2}\times 2^{2}\times 3^{2}}+\cdots\cdots\right)$$

۴۷۷ (۳) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\text{فما}}{\text{فرر}^{2}}+\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرفما}}{\text{فرر}}+\text{ک}^{2}\,\text{فما}=0$ کا خاص حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$\text{فما}=\text{ا}\left(1-\frac{\text{ک}^{2}\text{ر}^{2}}{2^{2}}+\frac{\text{ک}^{4}\text{ر}^{4}}{2^{2}\times 4^{2}}-\cdots\cdots\right)$$

(۴) مساوات $(1-\text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}-\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=0$ کا حل سلسلہ میں دریافت کرو اور اس سے $\text{جب}^{-1}\text{لا}$ کا پھیلاؤ حاصل کرو [دیکھو دفعہ ۱۰۸ (۵)]

(۵) ثابت کرو کہ $\text{ما}=\text{جبز}^{-1}\text{لا}$ تفرقی مساوات $(1+\text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=0$ کو پورا کرتا ہے۔
پس دکھاؤ کہ $|\text{لا}|<1$ کے لئے

$$\text{لوک}\left\{\text{لا}+\sqrt{1+\text{لا}^{2}}\right\}=\text{لا}-\frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}^{3}}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\,\frac{\text{لا}^{5}}{5}-\cdots\cdots$$

(۶) مساوات $\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+(\text{عا}-\text{لا})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}=0$ کا ایک حل $\text{ما}=\text{ج}\,\text{ع}^{\text{ر}}$ کی شکل میں دریافت کرو، جہاں

$$\text{ع} = ۱ + \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{لا}^۲}{\text{عہ}(\text{عہ}+۱)} + \frac{\text{لا}^۳}{\text{عہ}(\text{عہ}+۱)(\text{عہ}+۲)} + \dots$$

نیز ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + (\text{عہ}+\text{لا})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما} = ۰$
رشتہ $\text{ما} = \text{ج}\ \text{قو}^{\text{لا}}\ \text{ع}$ سے پوری ہوتی ہے۔

(۷) مساوات $\frac{\text{فر}}{\text{فرمہ}}\left\{(۱-\text{مہ}^۲)\frac{\text{فرع}}{\text{فرمہ}}\right\} + \text{ن}(\text{ن}+۱) = ۰$ کا حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$\text{ع} = \text{ا}\left[۱ - \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{\lfloor ۲}\text{مہ}^۲ + \frac{(\text{ن}-۲)\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۳)}{\lfloor ۴}\text{مہ}^۴ - \dots\right]$$

$$+ \text{ب}\left[\text{مہ} - \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}+۲)}{\lfloor ۳}\text{مہ}^۳ + \frac{(\text{ن}-۳)(\text{ن}-۱)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۴)}{\lfloor ۵}\text{مہ}^۵ - \dots\dots\right]$$

(۸) مساوات $(۱-\text{لا}^۲)\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + \text{ن}(\text{ن}-۱)\text{ما} = ۰$ کا ایک حل سلسلہ ۴۷۸
میں دریافت کرو اور مکمل حل کے لئے علامتی جملہ لکھو۔

(۹) مساوات $\text{لا}(۱-\text{لا})\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + \{\text{جہ} - (\text{عہ}+\text{بہ}+۱)\text{لا}\}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$
$-\ \text{عہ}\,\text{بہ}\,\text{ما} = ۰$ کا ایک حل ذیل کی شکل میں دریافت کرو

$$\text{ما} = \text{ا}\left[۱ + \frac{\text{عہ}\,\text{بہ}}{۱\times\text{جہ}}\text{لا} + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+۱)\text{بہ}(\text{بہ}+۱)}{۱\times۲\times\text{جہ}(\text{جہ}+۱)}\text{لا}^۲\right.$$

$$\left. + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+۱)(\text{عہ}+۲)\text{بہ}(\text{بہ}+۱)(\text{بہ}+۲)}{۱\times۲\times۳\times\text{جہ}(\text{جہ}+۱)(\text{جہ}+۲)}\text{لا}^۳ + \dots\right]$$

(۱۰) مساوات $\frac{\text{فر}^۲\text{فہ}}{\text{فرر}^۲} + \frac{۱}{\text{ر}}\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرر}} + \left(\text{ک}^۲ - \frac{\text{ن}^۲}{\text{ر}^۲}\right)\text{فہ} = ۰$ کا ایک حل

ذیل کی شکل کا ہوگا

$$\text{فا} = \text{ا}\,\text{ر}^{\text{ن}}\left[\text{۱} - \frac{\text{ک}^{۲}\text{ر}^{۲}}{\text{۲(۲ن+۲)}} + \frac{\text{ک}^{۴}\text{ر}^{۴}}{\text{۲×۴(۲ن+۲)(۲ن+۴)}} - \cdots\right]$$

(۱۱) مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ی}}{\text{فر ر}^{۲}} + \frac{\text{۲(ن+۱)}}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر ر}} + \text{ک}^{۲}\text{ی} = ۰$ کا مکمل حل ذیل کی شکل میں حاصل کرو

$$\text{ی} = \text{ا}\left[\text{۱} - \frac{\text{ک}^{۲}\text{ر}^{۲}}{\text{۲(۲ن+۳)}} + \frac{\text{ک}^{۴}\text{ر}^{۴}}{\text{۲×۴(۲ن+۳)(۲ن+۵)}} - \cdots\right]$$

$$+\,\text{ب}\,\text{ر}^{-\text{۲ن}-۱}\left[\text{۱} - \frac{\text{ک}^{۲}\text{ر}^{۲}}{\text{۲(۱−۲ن)}} + \frac{\text{ک}^{۴}\text{ر}^{۴}}{\text{۲×۴(۱−۲ن)(۳−۲ن)}} - \cdots\right]$$

(۱۲) اگر $\text{ما} = \text{جب}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱}-\text{لا}^{۲})\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - \text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{م}^{۲}\text{ما} = ۰$$

پس دکھاؤ کہ $\frac{\text{جب م طہ}}{\text{م جب طہ}} = \text{۱} - \frac{\text{م}^{۲}-۱}{\lfloor ۳}\text{جب}^{۲}\text{طہ} + \frac{(\text{م}^{۲}-۱)(\text{م}^{۲}-۳^{۲})}{\lfloor ۵}\text{جب}^{۴}\text{طہ}$ ....

اور $\text{جم م طہ} = \text{۱} - \frac{\text{م}^{۲}}{\lfloor ۲}\text{جب}^{۲}\text{طہ} + \frac{\text{م}^{۲}(\text{م}^{۲}-۲^{۲})}{\lfloor ۴}\text{جب}^{۴}\text{طہ} - \cdots$

۴۷۹ (۱۳) اگر $\text{لوک ما} = \text{ا جب}^{-۱}\text{لا}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱}-\text{لا}^{۲})\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ا}^{۲}\text{ما}$$

نیز ما کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$$\left[\text{ما} = \text{۱} + \text{ا لا} + \frac{\text{ا}^{۲}\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{ا(ا}^{۲}+۱^{۲})}{\lfloor ۳}\text{لا}^{۳} + \frac{\text{ا}^{۲}(\text{ا}^{۲}+۲^{۲})}{\lfloor ۴}\text{لا}^{۴} + \cdots\right]$$

(۱۴) اگر $\text{ما} = \dfrac{\text{لوک}(۱+\text{لا})}{(۱+\text{لا})}$ تو ثابت کرو کہ $(۱+\text{لا})^{۲}\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + (۱+\text{لا})\,\text{ما} = ۱$

پس حاصل کرو کہ $\text{ما} = \text{لا} - (۱ + \tfrac{۱}{۲})\,\text{لا}^{۲} + (۱ + \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۱}{۳})\,\text{لا}^{۳} - \ldots\ldots$

اور دکھاؤ کہ سلسلہ $|\text{لا}| < ۱$ کے لئے مستدق ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر $|\text{لا}| < ۱$ تو

$(\text{مس}^{-۱}\text{لا})^{۲} = \text{لا}^{۲} - \tfrac{۱}{۲}(۱ + \tfrac{۱}{۳})\,\text{لا}^{۴} + \tfrac{۱}{۳}(۱ + \tfrac{۱}{۳} + \tfrac{۱}{۵})\,\text{لا}^{۶} \ldots$

۴۸۰

پندرھواں باب

ٹیلر کا مسئلہ

۱۸۳ — پھیلاؤ کی شکل ۔ فرض کرو کہ ف (لا) متغیر لا کا ایسا تفاعل ہے جو خاص حدود ± عا میں، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق قوتی سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ دفعہ ۱۷۹ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ مشتق تفاعل فَ (لا) اُس مشابہ سلسلے سے بیان ہوگا جو ابتدائی سلسلہ کو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور ± عا کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے یہ نتیجہ صحیح ہوگا۔

مذکورۂ بالا مسئلہ کے دوبارہ اطلاق سے، لا کی انہیں حدود میں، فً (لا)، سلسلہ فَ (لا) کو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے حاصل ہوگا۔ اور اسی طرح اس سے اعلیٰ تفرقی سروں کے لئے۔

پس اگر
$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{لا} + \text{ا}_2\text{لا}^2 + \cdots + \text{ا}_\text{ن}\text{لا}^\text{ن} + \cdots \quad (1)$$

تو
$$\begin{cases} \text{فَ}(\text{لا}) = \text{ا}_1 + 2\text{ا}_2\text{لا} + \cdots\cdots + \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots \\ \text{فً}(\text{لا}) = 2\times1\,\text{ا}_2 + \cdots\cdots + \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{ا}_\text{ن}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{ن}(\text{ن}-1)\cdots2\times1\,\text{ا}_\text{ن} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad (2)$$

ان مساواتوں میں لا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}_{\circ} = \text{ف}(\cdot)\text{،}\quad \text{ا}_{1} = \text{فَ}(\cdot)\text{،}\quad \text{ا}_{2} = \frac{\text{فً}(\cdot)}{\lfloor 2}\text{،} \quad \ldots\ldots \quad \text{ا}_{\text{ن}} = \frac{\text{ف}^{(\text{ن})}(\cdot)}{\lfloor \text{ن}} \quad \ldots\ldots (3)$$

جہاں علامات ف(۰)، فَ(۰)، فً(۰)، .... اس امر کو ظاہر کرتی ہیں کہ تفرق کرنے کے بعد لا = ۰ رکھا گیا ہے۔

ابتدائی پھیلاؤ اب ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\cdot) + \text{لا}\,\text{فَ}(\cdot) + \frac{\text{لا}^{2}}{\lfloor 2}\text{فً}(\cdot) + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}}\text{ف}^{(\text{ن})}(\cdot) + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

ابتداً اس مسئلہ کی تحقیق میکلورن نے کی*۔

٤٨١ ظاہر ہے کہ ثبوت کاملاً اس ابتدائی مفروضہ پر مبنی ہے کہ ف (لا) متدق قوتی سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے۔ اس سوال پر کہ کن صورتوں میں اور کن شرائط کے ماتحت یہ پھیلاؤ ممکن ہے دفعات ۱۸۵ - ۱۸۷ میں غور کیا جائیگا۔

اگر لکھیں $\text{فا}(\text{ا} + \text{لا}) = \text{ف}(\text{لا})$ .... (۵)

تو مذکورہ بالا ضابطہ کی مدد سے فا (ا + لا) کا پھیلاؤ (جب کبھی یہ ممکن ہو) قوتی سلسلہ میں دریافت کر سکتے ہیں۔

کیونکہ تھوڑی دیر کے لئے فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{ا} + \text{لا}$

تو $\text{ف}(\text{لا}) = \text{فا}(\text{ع})$

$$\text{فَ}(\text{لا}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\text{فا}(\text{ع}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرع}}\text{فا}(\text{ع}) \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{فاَ}(\text{ع})$$

$$\text{فً}(\text{لا}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\text{فاَ}(\text{ع}) = \frac{\text{فر}}{\text{فرع}}\text{فاَ}(\text{ع}) \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{فاً}(\text{ع})$$

* (Treatise on Fluxions) (1742) یہ مسئلہ اس سے پہلے سٹرلنگ کی نگاہ میں آیا تھا

اور علیٰ ہذا القیاس دیکھو دفعہ ۳۲ (آ)۔ پس لا = ۰ یعنی ع = ا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(۰) = \text{فہ}(\text{ا})،\ \text{ف}'(۰) = \text{فہ}'(\text{ا})،\ \text{ف}''(۰) = \text{فہ}''(\text{ا}) \ldots\ldots،$$

$$\text{ف}^{(\text{ن})}(۰) = \text{فہ}^{(\text{ن})}(\text{ا}) \ldots\ldots (۶)$$

اس لئے مساوات (۴) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$$\text{فہ}(\text{ا}+\text{لا}) = \text{فہ}(\text{ا}) + \text{لا}\ \text{فہ}'(\text{ا}) + \frac{\text{لا}^۲}{۱\times۲}\text{فہ}''(\text{ا}) + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\text{فہ}^{(\text{ن})}(\text{ا}) + \ldots\ldots\ldots (۷)$$

یہ ٹیلر* کا مسئلہ کہلاتا ہے۔ ہم نے اسے میکلورن کے مسئلہ سے حاصل کیا ہے۔ دراصل دونوں مسائل ایک ہی نتیجہ کی دو مختلف شکلیں ہیں۔ پس اگر (۷) کو صحیح مان لیا جائے تو میکلورن کا پھیلاؤ ا = ۰† رکھنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۱۸۴۔ خاص صورتیں۔ گذشتہ دفعہ میں مذکورہ سوال پر اصولی طور پر غور کرنے سے پہلے طالب علم کے لئے زیادہ مناسب ہوگا کہ وہ سلسلہ بنانیکے طریقے سے پوری واقفیت حاصل کرلے۔ ذیل کی مثالوں میں ابتدا ہی سے فرض کرلیا جاتا ہے کہ پھیلانا ممکن ہے اور اس لئے ظاہر ہے کہ اس طریقے سے حاصل شدہ نتائج کو ثابت کیا ہوا نہیں مانا جا سکتا۔

(آ) اگر $\text{فہ}(\text{ا}) = \text{ا}^{\text{م}} \ldots\ldots\ldots (۱)$

تو $\text{فہ}'(\text{ا}) = \text{م}\ \text{ا}^{\text{م}-۱}،\ \text{فہ}''(\text{ا}) = \text{م}(\text{م}-۱)\ \text{ا}^{\text{م}-۲} \ldots\ldots$

---

* ذرا مختلف شکل میں یہ نتیجہ کتاب (Methodus Incrementorum 1716) میں محدود فرقوں کے مسئلہ کی فرع کے طور پر دیا گیا تھا۔

† میکلورن نے اپنے ضابطہ (۴) اور ٹیلر کے مسئلہ کی مماثلت کا پورا اعتراف کرلیا تھا۔

$$\text{فما}^{(\text{ن})}(\text{ا}) = \text{م}(\text{م}-۱)\cdots(\text{م}-\text{ن}+۱)\,\text{ا}^{\text{م}-\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

۴۸۲ اب ٹیلر کے ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{ا}+\text{لا})^{\text{م}} = \text{ا}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{ا}^{\text{م}-۱}\,\text{لا} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۱\times۲}\,\text{ا}^{\text{م}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}-۱)\cdots(\text{م}-\text{ن}+۱)}{۱\times۲\times\cdots\times\text{م}}\,\text{ا}^{\text{م}-\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \ldots\ldots (۳)$$

یہ پھیلاؤ مسئلہ ثنائی کے نام سے مشہور ہے۔

ٹیلر کا ضابطہ ہر صورت میں بغیر شروط کے صحیح نہیں ہے۔ یہ امر اس بات سے بھی واضح ہے کہ نتیجہ (۳) کی بائیں جانب کا سلسلہ $|\text{لا}| > \text{ا}$ کے لئے متسع ہے اگرچہ $|\text{لا}| < \text{ا}$ کے لئے وہ مستدق ہے تاہم دفعہ ۱۸۳ کی تحقیقات کی بناء پر اس کے حاصل جمع کو $(\text{ا}+\text{لا})^{\text{م}}$* کے مساوی جائز سمجھنا مناسب نہ ہوگا۔ اس امر کا صحیح ثبوت دفعہ ۱۸۴ میں دیا گیا ہے۔

(۲) دفعہ ۲۶ میں قوت نما تفاعل ق(لا) کی تعریف مساوات

$$\text{ق}'(\text{لا}) = \text{ق}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

کے ایسے حل سے کی گئی تھی جو لا = ۰ کے لئے ایک کے مساوی ہے۔ اس سے فوراً حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ق}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{ق}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

$$\text{پس}\quad \text{ق}(۰) = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ق}^{(\text{ن})}(۰) = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

اس لئے میکلورن کے پھیلاؤ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ق}(\text{لا}) = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۱\times۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۱\times۲\times۳} + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} + \ldots\ldots (۷)$$

(۳) فرض کرو کہ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{جم}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$

* فی الواقعی ایسی صورتیں ہیں جن میں ٹیلر کا پھیلاؤ مستدق ہوتا ہے حالانکہ حاصل جمع (ا + لا) کے مساوی نہیں ہوتا۔

دفعہ ٦٤ میں ثابت کیا گیا تھا کہ

$$ف^{(ن)}(لا) = جم\left(لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$$

اس لئے $ف(۰) = ۱$، $ف^{(ن)}(۰) = جم \frac{ن\pi}{۲}$ ...... (۹)

پس $ف^{(ن)}(۰)$ صفر ہوگا جبکہ ن طاق ہے اور ± ۱ کے مساوی ہوگا جبکہ ن جفت ہے اس میں مثبت یا منفی کی علامت $\frac{ن}{۲}$ کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔

میکلورن کے ضابطہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$جم لا = ۱ - \frac{لا^۲}{\underline{|۲}} + \frac{لا^۴}{\underline{|۴}} - \ldots\ldots + (-۱)^ن \frac{لا^{۲ن}}{\underline{|۲ن}} + \ldots \quad (۱۰)$$

(۴) فرض کرو کہ $ف(لا) = جب لا$

اس لئے $ف^{(ن)}(لا) = جب\left(لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$ ...... (۱۱)

اور $ف(۰) = ۰$، $ف^{(ن)}(۰) = جب \frac{ن\pi}{۲} = جب\left\{\frac{ن-۱}{۲}\pi + \frac{\pi}{۲}\right\}$

.... (۱۲)

۴۸۲ پس $ف^{(ن)}(۰)$ صفر ہوگا جبکہ ن جفت ہے اور ± ۱ کے مساوی ہوگا جبکہ ن طاق ہے نیز مثبت یا منفی کی علامت $\frac{ن-۱}{۲}$ کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہوگی۔ اس لئے میکلورن کے ضابطے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$جب لا = لا - \frac{لا^۳}{\underline{|۳}} + \frac{لا^۵}{\underline{|۵}} - \ldots\ldots + (-۱)^ن \frac{لا^{۲ن+۱}}{\underline{|۲ن+۱}} + \ldots \quad (۱۳)$$

نتائج (۱۰) اور (۱۳) دفعہ (۱۸۱) میں باقاعدہ طور پر ثابت کئے جا چکے ہیں۔

(۵) فرض کرو کہ $ف(لا) = لوگ(۱ + لا)$ ...... (۱۴)

اسلئے ف'(لا) = ۱/(۱+لا) اور ن > ۱ کیلئے ف$^{(ن)}$(لا) = (−۱)$^{ن-۱}$ |ن−۱ / (۱+لا)^{ن}

پس ف(۰) = ۰، ف'(۰) = ۱ اور ن > ۱ کیلئے ف$^{(ن)}$(۰) = (−۱)$^{ن-۱}$ |ن−۱ ... (۱۵)

میکلورن کے ضابطے میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

لوگ(۱+لا) = لا − لا^{۲}/۲ + لا^{۳}/۳ − .... + (−۱)$^{ن-۱}$ لا^{ن}/ن + ... (۱۶)

دفعہ ۱۰۵ دیکھو۔

جب کبھی دئے ہوئے تفاعل کے ن ویں مشتق کے لئے عام ضابطہ معلوم نہ ہو تو ایسی صورت میں متواتر مشتقات حسب ضرورت دریافت کر لینے چاہئیں۔ بعض اوقات حسب ضرورت حل کی آخری سطریں ایسی رقموں کو نظر انداز کرنے سے مجمل کی جا سکتی ہیں جن رقموں سے آخری نتیجہ میں کچھ حاصل نہیں ہوتا۔

مثال ۔ مس لا کو لا^{۶} تک پھیلاؤ۔

ف(لا) = مس(لا)

رکھنے سے بالترتیب حاصل ہوتا ہے کہ

ف'(لا) = ۱ + مس^{۲} لا

ف''(لا) = ۲ مس لا قط^{۲} لا = ۲ مس لا + ۲ مس^{۳} لا

ف'''(لا) = (۲ + ۶ مس^{۲} لا) قط^{۲} لا = ۲ + ۸ مس^{۲} لا + ۶ مس^{۴} لا

ف$^{(۴)}$(لا) = (۱۶ مس لا + ۲۴ مس^{۳} لا) قط^{۲} لا

= ۱۶ مس لا + ۴۰ مس^{۳} لا + ۲۴ مس^{۵} لا

ف$^{(۵)}$(لا) = (۱۶ + ۱۲۰ مس^{۲} لا + ۱۲۰ مس^{۴} لا) قط^{۲} لا

= ۱۶ + ۱۳۶ مس^{۲} لا + ۲۴۰ مس^{۴} لا + ۱۲۰ مس^{۶} لا

ف$^{(۶)}$(لا) = ۲۷۲ مس لا قط^{۲} لا + وغیرہ وغیرہ

ف$^{(۷)}$(لا) = ۲۷۲ قط^{۴} لا + ...

۴۸۴ آخری دو سطروں میں وہ رقمیں چھوڑ دی گئی ہیں جن سے $ف^{(ن)}(٠)$ کی قیمت میں کچھ فرق نہیں آئیگا۔

پس

$ف(٠) = ٠$　　$ف'(٠) = ١$

$ف''(٠) = ٠$　　$ف'''(٠) = ٢$

$ف^{(٤)}(٠) = ٠$　　$ف^{(٥)}(٠) = ١٦$

$ف^{(٦)}(٠) = ٠$　　$ف^{(٧)}(٠) = ٢٧٢$

اور پھیلاؤ ہوگا

$$مس\ لا = لا + \frac{٢\ لا^٣}{\lfloor ٣} + \frac{١٦\ لا^٥}{\lfloor ٥} + \frac{٢٧٢\ لا^٧}{\lfloor ٧} + \ldots\ldots$$

$$= لا + \frac{لا^٣}{٣} + \frac{٢\ لا^٥}{١٥} + \frac{١٧\ لا^٧}{٣١٥} + \ldots\ldots \quad (١٧)$$

پھیلاؤ میں صرف طاق قوتیں واقع ہوتی ہیں۔ یہ امر اس بات سے بھی واضح ہے کہ مس لا کی علامت لا کے ساتھ بدلتی ہے۔

۱۸۵۔ میکلورن اور ٹیلر کے مسائل کا ثبوت: ن رقموں کے بعد باقی

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے (ن-١) مشتق، متغیر لا کے مسلسل تفاعل ہیں جبکہ لا حدود صفر اور ھ کے درمیان بشمول طرفین واقع ہے اب فرض کرو کہ

$$ف(لا) = ف_ن(لا) + ط_ن(لا) \ldots\ldots (١)$$

جہاں $ف_ن(لا) = ف(٠) + لا\ ف'(٠) + \frac{لا^٢}{\lfloor ٢} ف''(٠) + \ldots\ldots$

$$+ \frac{لا^{ن-١}}{\lfloor ن-١} ف^{(ن-١)}(٠) \ldots\ldots (٢)$$

یعنی $ف_ن(لا)$ میکلورن کے پھیلاؤ کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع ہے اور $ط_ن(لا)$ فی الحال تفاعلات ف (لا) اور $ف_ن(لا)$ کے فرق کیلئے

(خواہ وہ کچھ ہی ہو) صرف ایک علامت ہے۔ میکلورن کے مسئلہ کی باضابطہ تحقیقات میں یہ کوشش کی جاتی ہے کہ حتی الامکان ح ن (لا) کی قیمت کے حدود دریافت کئے جائیں۔ بالفاظ دیگر ف (لا) کی بجائے، میکلورن کے پھیلاؤ کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع کرنے میں جو خطا پیدا ہوتی ہے اسکے حدود دریافت کئے جائیں۔ اگر کسی دئے ہوئے سوال میں ہم ثابت کردیں کہ ن کو کافی بڑا لینے سے ایسا نظام حاصل ہوسکتا ہے کہ اس کے بعد ح ن (لا) کی قیمت کسی دی ہوئی مقدار سے (خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہو) ہمیشہ کم ہوگی تو ایسی صورت میں میکلورن کا سلسلہ لازماً مستدق ہوگا اور اس لاانتہا سلسلہ کا حاصل جمع ف (لا) ہوگا۔ ظاہر ہے کہ مذکورہ بالا دلیل سے یہی نتیجہ اخذ نہیں ہوسکتا اگر حدود کے اندر لا کی کسی قیمت کیلئے ف (لا) یا اسکا کوئی مشتق غیر مسلسل ہو۔

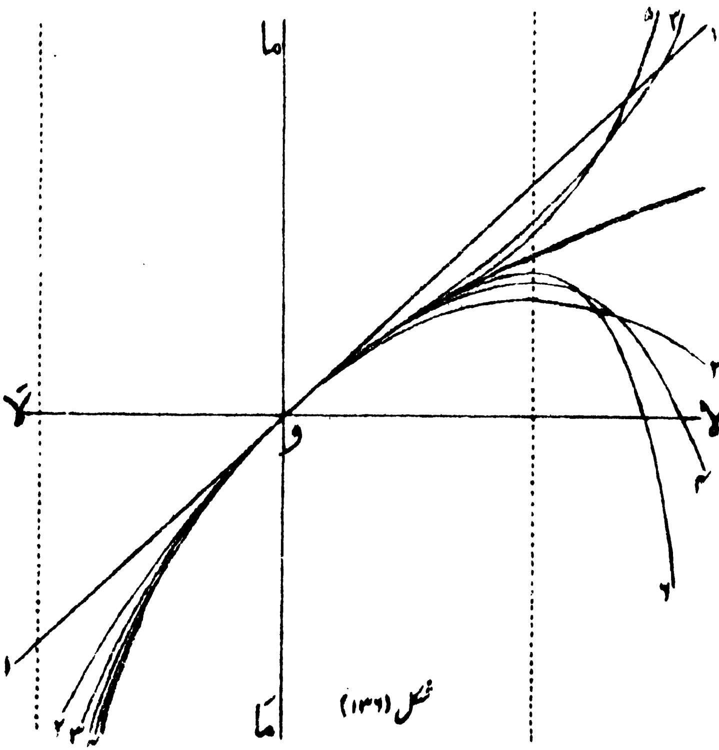
تفاعل ف (لا) کو کسی معینہ درجہ کے منطبق صحیح تفاعل سے

یعنی ا. + ا۱ لا + ا۲ لا۲ + ... + ان-۱ لان-۱ ..... (۳)

سے، تقریبی طور پر ظاہر کرنیکا تخیل، دفعہ ۱۱۴ میں کام میں لایا جاچکا ہے۔ اس دفعہ میں ذیل کا طریقہ استعمال کیا گیا تھا۔ ن مستقلات ا.، ا۱، ا۲ .... ان-۱
۴۸۵ کی قیمتیں ان شرائط سے دریافت کی گئی تھیں کہ حدود کو مساوی دفقوں پر تقسیم کرنے والی لا کی ن قیمتوں کے لئے، (۳) کا حاصل جمع ف (لا) کے مساوی ہو۔ موجودہ صورت میں، لا کی ن قیمتیں، انتہائی حالت میں صفر پر منطبق ہوجاتی ہیں۔ یعنی بالفاظ دیگر مستقلات ان شرائط سے دریافت کئے جاتے ہیں کہ (۳) اور اس کے پہلے (ن-۱) مشتق بالترتیب، ف (لا) اور اس کے پہلے (ن-۱) مشتقات کے مساوی ہیں جبکہ لا کو خاص قیمت صفر دی جائے۔ اس تحقیق کا نتیجہ دفعہ ۱۸۲ کی رو سے تفاعل فن (لا) ہے۔

ترسیمی نقطہ نظر سے، ایسا مکانی منحنی ما = فن (لا) دریافت کیا جاتا ہے

که نقطه لا = ۰ پر دئے ہوئے منحنی ما = ف (لا) سے اس کا (ن - ۱) رتبه کا (دیکھو دفعه ۱۸۹) تماس ہو۔ اب سوال یہ ہے کہ ایک خاص وسعت کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے، ایک منحنی کے ممکن ہٹاؤ کے تحدود، دوسرے منحنی سے دریافت کئے جائیں، اس ہٹاؤ کا تعین منحنیوں کے معینوں کے فرق سے کیا جاتا ہے۔ شکل ۱۳۶ میں اس امر کی توضیح کی گئی ہے موٹی لکیر سے منحنی ما = لوک (۱ + لا) کی ترسیم دکھائی گئی ہے اور باریک لکیروں سے ذیل کے "تقریبی منحنی" دکھائے گئے ہیں۔



شکل (۱۳۶)

$$ما = لا \text{،} \quad ما = لا - \frac{لا^{۲}}{۲} \text{،} \quad ما = لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} \text{،} \quad \ldots\ldots \quad (۵)$$

جو لوکارتمی سلسلہ [دفعہ ۱۸۴ (۱۶)] کی ۱، ۲، ۳، ..... رقمیں لینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ نقطوں والے خط $\text{لا} = \pm ۱$ کو ظاہر کرتے ہیں اور اس لئے یہ لوکارتمی سلسلے کے حدود استدقاق کی نشان دہی کرتے ہیں۔

جن شرائط کو فہ(لا) پورا کرتا ہے اُن سے ظاہر ہے کہ جب (لا) اور اس کے پہلے (ن - ۱) مشتق لا = ۰ سے لا = ھ تک کے لئے مسلسل ہیں اور لا = ۰ کے لئے صفر ہو جاتے ہیں۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ کوئی تفاعل جو ان شرائط کو پورا کرے اور جس کا ن واں مشتق محدود ہو لازماً

$\text{ا}_۱ \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{|\text{ن}}$ اور $\text{ا}_۲ \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{|\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوگا جہاں $\text{ا}_۱$ اور $\text{ا}_۲$ دفعہ صفر سے ھ میں ن ویں مشتق کی قیمت کی نچلی اور اوپر کی حدود ہیں۔

کیونکہ فرض کرو کہ فا(لا) ایسا تفاعل ہے، تو مفروضہ کی رو سے

$$\text{فا}(۰) = ۰،\ \text{فا}'(۰) = ۰،\ \text{فا}''(۰) = ۰،\ .....\ \text{فا}^{(\text{ن}-۱)}(۰) = ۰ \quad ..... (۶)$$

اور

$$\text{ا}_۱ < \text{فا}^{(\text{ن})}(\text{لا}) < \text{ا}_۲ \quad .... (۷)$$

موخرالذکر شرط لا = ۰ اور لا = ھ کے درمیان کی قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔ اس لئے نتیجہ (۷) سے مطابق دفعہ ۹۱ (۴) حاصل ہوتا ہے

$$\int_۰^{\text{لا}} \text{ا}_۱\, \text{فرلا} < \int_۰^{\text{لا}} \text{فا}^{(\text{ن})}(\text{لا})\, \text{فرلا} < \int_۰^{\text{لا}} \text{ا}_۲\, \text{فرلا} \ *$$

اور چونکہ $\text{فا}^{(\text{ن}-۱)}(۰) = ۰$، اس لئے

$$\text{ا}_۱ \text{لا} < \text{فا}^{(\text{ن}-۱)}(\text{لا}) < \text{ا}_۲ \text{لا} \quad ... (۸)$$

مذکورہ بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے ظاہر ہے کہ

---

* بشرطیکہ لا مثبت ہو۔ اگر لا منفی ہو تو نامساوات کو الٹ دینا ہوگا لیکن آخری نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑیگا

$$\int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{ا}_1\,\text{لا}\,\text{فرلا} < \int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{فا}^{(\text{ن}-1)}(\text{لا})\,\text{فرلا} < \int_{\text{ب}}^{\text{لا}} \text{ا}_2\,\text{لا}\,\text{فرلا}$$

اور چونکہ $\text{فا}^{(\text{ن}-2)}(0) = 0$

اس لئے
$$\text{ا}_1 \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} < \text{فا}^{(\text{ن}-2)}(\text{لا}) < \text{ا}_2 \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} \quad \ldots\ldots (9)$$

اسی قسم کی دلیل سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ا}_1 \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} < \text{فا}^{(\text{ن}-3)}(\text{لا}) < \text{ا}_2 \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} \quad \ldots\ldots (10)$$

اور اسی طرح دیگر نتیجے حاصل کئے جا سکتے ہیں حتیٰ کہ ہم ذیل کے نتیجے پر پہنچتے ہیں۔

$$\text{ا}_1 \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} < \text{فا}(\text{لا}) < \text{ا}_2 \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} \quad \ldots\ldots (11)$$

۴۸۰ پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{فا}(\text{لا}) = \text{ج} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} \quad \ldots\ldots (12)$$

جہاں ج کوئی مقدار ا_1 اور ا_2 کے درمیان ہے۔
موجودہ اطلاق میں چونکہ $\text{فم}_{\text{ن}}(\text{لا})$، درجہ (ن-۱) کا مشتق صحیح تفاعل ہے اس لئے اسکا ن-واں مشتق دفعہ ۶۴ کی رو سے صفر ہوگا اور اسلئے $\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})$ کا ن-واں مشتق نتیجہ (۱) سے $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$ کے مساوی ہوگا بشرطیکہ آخر الذکر مشتق وجود رکھتا ہو۔
اس سے اخذ ہوتا ہے کہ

$$\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \text{ج} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor \text{ن}} \quad \ldots\ldots (13)$$

جہاں ج وقفہ صفر سے ھ میں مشتق $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})$ کی بڑی سے بڑی

قیمت اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت کے درمیان واقع ہے۔ اور اب ہم فرض کرتے ہیں کہ $\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا})$ وقفہ لا = ۰ سے لا = ھ کے درمیان مسلسل ہے اس لئے صفر اور ھ کے درمیان لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی کہ $\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}) = \text{ج}$۔ اگر اس قیمت کو ھ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\ \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{طا ھ}) \quad \ldots\ldots \ (۱۴)$$

جہاں طا کی قیمت کے بارے میں ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ صفر اور ایک کے درمیان ہے۔

نتیجہ (۱۴) لا = ۰ اور لا = ھ کے وقفہ میں بشمول طرفین صحیح ہے، اور اسمیں لا = ھ درج کر کے $\text{ف}_{\text{ن}}(\text{لا})$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}(\text{لا})$ کی قیمتیں (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{ھ}) = \text{ف}(۰) + \text{ھ}\ \text{ف}'(۰) + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\lfloor۲}\ \text{ف}''(۰) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\text{ھ}^{\text{ن}-۱}}{\lfloor\text{ن}-۱}\ \text{ف}^{(\text{ن}-۱)}(۰) + \frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\ \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{طا ھ}) \quad (۱۵)$$

اس شکل میں مسئلہ میکلورن بالکل ٹھیک ہے۔ ہمیں مفروضہ یہ ہے کہ ف(لا) اور اس کے ن۔ ویں مشتق تک تمام مشتق وقفہ صفر اور ھ کے درمیان مسلسل ہیں۔ لیکن ان شرائط میں کہ $\text{ف}^{\text{ن}}(\text{لا})$ وجود رکھتا ہو اور پورے وقفہ میں مسلسل ہو باقی تمام شرائط شامل ہیں۔

اگر ہم لکھیں کہ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{فہ}(\text{ا} + \text{لا})$ .... (۱۶)

تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فہ}(\text{ا} + \text{ھ}) = \text{فہ}(\text{ا}) + \text{ھ}\ \text{فہ}'(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^{۲}}{\lfloor۲}\ \text{فہ}''(\text{ا}) + \ldots$$

$$+\ \frac{\text{ھ}^{\text{ن-۱}}}{\underline{|\text{ن-۱}}}\ \text{فا}^{(\text{ن-۱})}(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\ \text{فا}^{(\text{ن})}(\text{ا}+\text{طہ ھ}) \quad (۱۷)$$

۴۸۸ جہاں پہلے کی طرح ۱ > طہ > ۰ ۔

یہ مسئلہ ٹیلر کی صحیح شکل ہے۔ اس مسئلہ میں یہ مان لیا گیا ہے کہ فا^(ن) (لا) وقفہ لا = ا اور لا = ا + ھ میں بشمول طرفین وجود رکھتا ہے اور مسلسل ہے۔

نتائج (۱۵) اور (۱۷) میں آخری رقمیں بالترتیب میکلورن اور ٹیلر کے مسائل میں لنگرانج کی "باقی" کی شکلیں کہلاتی ہیں۔ اس کتاب میں چند ایسے نتائج حاصل کئے گئے ہیں جن کی عام شکل ضابطہ (۱۷) ہے۔

مثلاً ن = ۱ رکھنے سے

$$\text{فا}(\text{ا}+\text{ھ}) = \text{فا}(\text{ا}) + \text{ھ}\ \text{فاَ}(\text{ا}+\text{طہ ھ}) \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

اور ن = ۲ رکھنے سے

$$\text{فا}(\text{ا}+\text{ھ}) = \text{فا}(\text{ا}) + \text{ھ}\ \text{فاَ}(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^۲}{۲}\ \text{فاً}(\text{ا}+\text{طہ ھ}) \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

اور یہ بالترتیب دفعہ ۵۶ (۹) اور دفعہ ۷۰ (۲۲) کے مطابق ہیں۔

۱۸۶ ـ متبادل ثبوت۔

ٹیلر (یا میکلورن) کے مسئلہ کا ثبوت جو اکثر دیا جاتا ہے وہ دفعہ (۲) کے طرز ثبوت کے موافق ہوتا ہے۔ کسی دئے ہوئے منحنی

$$\text{ما} = \text{ف}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

کا متقابلہ منحنی

$$\text{ما} = \text{ا}_۰ + \text{ا}_۱\text{لا} + \text{ا}_۲\text{لا}^۲ + \ldots + \text{ا}_{\text{ن-۱}}\text{لا}^{\text{ن-۱}} + \text{ا}_\text{ن}\text{لا}^\text{ن} \ldots (۲)$$

سے کیا جاتا ہے۔ یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ دوسرے منحنی کے (ن + ۱) سر اس شرط سے دریافت کئے جاتے ہیں کہ دونوں منحنی نقاط لا = ۰ اور لا = ھ پر

ایکدوسرے کو قطع کرتے ہیں، نیز نقطہ لا = ۰ پر دونوں منحنیوں کے مشتقات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\text{،}\quad \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}\text{،}\quad \cdots\cdots \quad \frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-1}}$$

کی قیمتیں مساوی ہیں ۔ اِن شرائط سے، پہلے نتیجہ کے مطابق، حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}_{0}=\text{ف}(0)\text{،}\ \text{ا}_{1}=\text{ف}'(0)\text{،}\ \text{ا}_{2}=\frac{1}{\lfloor 2}\text{ف}''(0)\text{،}\ \cdots\cdots$$

$$\text{ا}_{\text{ن}-1}=\frac{1}{\lfloor \text{ن}-1}\text{ف}^{(\text{ن}-1)}(0)\ \cdots\cdots\cdots\ (3)$$

$$\text{اور}\quad \text{ف}(\text{ھ})=\text{ا}_{0}+\text{ا}_{1}\text{ھ}+\text{ا}_{2}\text{ھ}^{2}+\cdots+\text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ھ}^{\text{ن}-1}+\text{ا}_{\text{ن}}\text{ھ}^{\text{ن}}\ \cdots\cdots\ (4)$$

اس آخری مساوات سے $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے ۔

اگر فا(لا) سے دونوں منحنیوں کے معینوں کا فرق تعبیر کیا جائے تو ظاہر ہے کہ

$$\text{فا}(0)=0\text{،}\ \text{فا}'(0)=0\text{،}\ \text{فا}''(0)=0\text{،}\ \cdots\ \text{فا}^{(\text{ن}-1)}(0)=0\text{،}\ \cdots\ (5)$$

$$\text{اور}\quad \text{فا}(\text{ھ})=0\text{،}\ \cdots\cdots\cdots\ (6)$$

چونکہ فا(لا) صفر ہے جبکہ لا = ۰ اور لا = ھ اس لئے ظاہر ہے کہ ٤٨٩
مناسب شرائط کے زیر عمل $\text{فا}'(\text{لا})$ بھی صفر اور ھ کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ قیمت $\text{لا}=\text{طا}_{1}\text{ھ}$ ہے جہاں $1>\text{طا}_{1}>0$ ۔

نیز چونکہ $\text{فا}'(\text{لا})$ صفر ہے جبکہ لا = ۰ اور $\text{لا}=\text{طا}_{1}\text{ھ}$، $\text{فا}''(\text{لا})$ صفر ہوگا لا کی ایک ایسی قیمت کے لئے جو صفر اور $\text{طا}_{1}\text{ھ}$ کے درمیان واقع ہے، فرض کرو کہ $\text{لا}=\text{طا}_{2}\text{ھ}$ جہاں $\text{طا}_{1}>\text{طا}_{2}>0$ ۔

اسی طرح عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{فا}^{(\text{ن}-1)}(\text{لا})$ صفر ہوگا جبکہ

لا = ۰ اور لا = طہ₋₁ ھ جہاں ۱ > طہ₋₁ > ۰

پس فا^(ن) (طہ ھ) = ۰ .... (۷)

جہاں ۱ > طہ > ۰

اب (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ

فا^(ن) (لا) = ف^(ن) (لا) − |ن ا_ن .... (۸)

اس لئے (۷) کو استعمال کرنے سے

ا_ن = ۱/|ن ف^(ن) (طہ ھ) .... (۹)

اس لئے (۳) اور (۹) کو (۴) میں درج کرنے سے پہلے کی طرح حاصل ہوتا ہے

ف (ھ) = ف (۰) + ھ فَ (۰) + ھ²/|۲ فً (۰) + ...

+ ھ^(ن-۱)/|ن-۱ ف^(ن-۱) (۰) + ھ^ن/|ن ف^(ن) (طہ ھ) ...(۱۰)

اس مسئلہ کی صداقت کے شرائط وہی ہیں جو دفعہ ۱۸۵ میں نتیجہ (۱۵) کے بعد درج کئے گئے ہیں۔*

۱۸۷ — کوشی (Cauchy) کی باقی کی شکل۔

ن رقموں کے بعد باقی کی رقم کو دوسری شکل میں ذیل کے طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

* مذکورہ بالا ثبوت کا زیادہ تر حصہ وہی ہے جو ہومرشیام کاکس (Homersham Cox) نے کیمبرج اور ڈبلن کے رسالہ ریاضی (Cam. and Dub. Math. Journ) سنہ ۱۸۵۱ء میں دیا تھا

اگر فا(لا) پر ذیل کی شرائط عائد ہوں یعنی

$$\text{فا}(٠)=٠،\ \text{فاَ}(٠)=٠،\ \ldots\ldots\ \text{فا}^{(ن-١)}(٠)=٠ \ldots\ldots(١)$$

تو تکمل بالحصص سے

$$\int_٠^{ھ}\left(١-\frac{\text{لا}}{ھ}\right)^{ن-١}\text{فا}^{(ن)}(\text{لا})\,\text{فرلا}=\left[\left(١-\frac{\text{لا}}{ھ}\right)^{ن-١}\text{فا}^{(ن-١)}(\text{لا})\right]_٠^{ھ}$$

$$+\frac{ن-١}{ھ}\int_٠^{ھ}\left(١-\frac{\text{لا}}{ھ}\right)^{ن-٢}\text{فا}^{(ن-١)}(\text{لا})\,\text{فرلا}=\frac{ن-١}{ھ}\int_٠^{ھ}\left(١-\frac{\text{لا}}{ھ}\right)^{ن-٢}\text{فا}^{(ن-١)}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

$$\ldots\ldots\ldots(٢)$$

کیونکہ تکمل شدہ رقم دونوں حدود پر صفر ہے۔ اس عمل کو (ن-١) مرتبہ استعمال کرنے حاصل ہوتا ہے

$$\int_٠^{ھ}\left(١-\frac{\text{لا}}{ھ}\right)^{ن-١}\text{فا}^{(ن)}(\text{لا})\,\text{فرلا}=\frac{\underline{|ن-١}}{ھ^{ن-١}}\int_٠^{ھ}\text{فاَ}(\text{لا})\,\text{فرلا}=\frac{\underline{|ن-١}}{ھ^{ن-١}}\,\text{فا}(ھ)$$

یعنی
$$\text{فا}(ھ)=\frac{ھ^{ن-١}}{\underline{|ن-١}}\int_٠^{ھ}\left(١-\frac{\text{لا}}{ھ}\right)^{ن-١}\text{فا}^{(ن)}(\text{لا})\,\text{فرلا}\ \ldots\ldots(٣)$$

۴۹۰ اور چونکہ متکمل مسلسل ہے، اس لئے دفعہ ۱۹ (۳) سے اخذ ہوتا ہے کہ

$$\text{فا}(ھ)=\frac{ھ^{ن}}{\underline{|ن-١}}(١-\text{طہ})^{ن-١}\,\text{فا}^{(ن)}(\text{طہ}\,ھ)\ \ldots\ldots(۴)$$

جہاں $١>\text{طہ}>٠$۔

اس سے ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۸۵ نتیجہ (۱۵) کی آخری رقم کی بجائے ذیل کی رقم لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{ھ^{ن}}{\underline{|ن-١}}(١-\text{طہ})^{ن-١}\,\text{ف}^{(ن)}(\text{طہ}\,ھ)\ \ldots\ldots\ldots(۵)$$

اور نتیجہ (۱۷) کی آخری رقم کی بجائے ذیل کی رقم لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{ھ^{ن}}{\lfloor ن-۱}\,(۱-طا)^{ن-۱}\,فا^{(ن)}\,(ا+طا\,ھ) \quad ..... (۶)$$

باقی کی رقم کی یہ شکلیں ابتداً میں کوشی نے حاصل کیں۔

۱۸۸۔ بعض پھیلاؤ:۔ اب ہم ف (لا) یا فا (لا) کی مختلف صورتوں میں، باقی کی رقم کی قیمت دریافت کرینگے۔ اور بالخصوص اُن شرائط پر غور کرینگے جنکے ماتحت ن کے بڑھنے کے ساتھ اسکی انتہا صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ اس طرح چند اہم پھیلاؤں کی صداقت کی تصدیق کرسکیں گے۔ لیکن طالب علم کو یہاں بتانا ضروری ہے کہ اس طریقہ کا استعمال بہت محدود ہے کیونکہ کسی دئے ہوئے تفاعل کے ن ویں مشتق کی عام شکل صرف خاص صورتوں میں ہی حاصل ہوسکتی ہے۔ علاوہ ازیں اگر یہ طریقہ کامیاب بھی ہو تب بھی اصل نتیجہ حاصل کرنے کا یہ آتنا علم آموز طریقہ نہیں ہے۔

(۱) اگر $\quad ف(لا) = جم\, لا \quad .... (۱)$

تو $\quad \frac{لا^{ن}}{\lfloor ن}\, ف^{(ن)}(طا لا) = \frac{لا^{ن}}{\lfloor ن}\, جم\left(طا لا + \frac{ن\pi}{۲}\right) \quad .... (۲)$

کسر $\frac{لا^{ن}}{\lfloor ن}$ کی انتہائی قیمت صفر ہے اور چونکہ جیب التمام کی قیمت ہمیشہ ±۱ کے درمیان رہتی ہے اس لئے دفعہ ۱۴۰ کا پھیلاؤ (۱۰) لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

جب لا کی صورت میں بھی استدلال کا یہی طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے

(۲) اگر $\quad ف(لا) = (۱+لا)^{م} \quad .... (۳)$

تو $\quad \frac{لا^{ن}}{\lfloor ن}\, ف^{(ن)}(طا لا) = \frac{م(م-۱)....(م-ن+۱)}{۱\times۲\times۳\times...\times ن}\, \frac{لا^{ن}}{(۱+طا لا)^{ن-م}}$

$(۴) ....$

اسے $(1+\text{ط}\,\text{لا})^{\text{م}}$ اور ذیل کے نمونے کے ن اجزاء کا حاصل ضرب خیال کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{م}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\cdot\frac{\text{لا}}{1+\text{ط}\,\text{لا}} \quad \text{یا} \quad \left(-1+\frac{\text{م}+1}{\text{ر}}\right)\frac{\text{لا}}{1+\text{ط}\,\text{لا}} \quad \dots\dots (5)$$

اگر $0 < \text{لا} < 1$ تو کسر $\frac{\text{لا}}{1+\text{ط}\,\text{لا}}$ کی قیمت صفر اور لا کے درمیان ۲۹۱
ہوگی اور چونکہ (۵) کا پہلا جزو ضربی ر کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ انتہائی قیمت -۱ کی طرف مائل ہوتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ن کو کافی بڑا لینے سے جملہ (۴) کی قیمت کو کسی مخصوص چھوٹی مقدار سے کم کیا جا سکتا ہے۔

اس لئے اگر $0 < \text{لا} < 1$ تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$(1+\text{لا})^{\text{م}} = 1+\text{م}\,\text{لا}+\frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\text{لا}^2+\dots \infty \text{ تک} \quad \dots (6)$$

لیکن لا کے منفی ہونے کی صورت میں مذکور بالا نتیجہ نہیں حاصل ہوتا اگرچہ $|\text{لا}| < 1$ کیونکہ $\text{لا} = -\text{لا}_1$ درج کرنے سے کسر $\frac{\text{لا}_1}{1-\text{ط}\,\text{لا}_1}$ کی قیمت

ایک سے صرف اسوقت کم ہے جبکہ $\text{ط} < \frac{1-\text{لا}_1}{\text{لا}_1}$

اور اگر $\text{لا}_1 > \frac{1}{2}$ ہے تو ط کو اس قیمت سے کم فرض کرنیکے واسطے کوئی دلیل نہیں ہے۔

اس صورت میں باقی کی رقم کو کوشی کی شکل [دفعہ ۱۸۷ (۵)] میں لکھنا مفید ہوگا۔ اب (۴) کی بجائے ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{م}(\text{م}-1)\dots(\text{م}-\text{ن}+1)}{1\times 2\times\dots\times(\text{ن}-1)}\cdot\frac{(1-\text{ط})^{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{(1+\text{ط}\,\text{لا})^{\text{ن}-\text{م}}} \quad \dots\dots (7)$$

یہ $\text{م}\,\text{لا}(1+\text{ط}\,\text{لا})^{\text{م}-1}$ اور ذیل کے نمونے کے (ن-۱) اجزاء کا حاصل

ضرب ہے

$$\left(-۱ + \frac{م}{ر}\right) \frac{لا - طہ لا}{۱ + طہ لا} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۸)$$

اگر لا مثبت ہے تو اس جملہ کی انتہا صفر اور - لا کے درمیان ہوگی
پس اگر لا < ۱ تو باقی کی انتہا پہلے کی طرح صفر ہے۔
اگر لا = - لا، جبکہ ۱ > لا، > ۰ تو جملہ (۸) ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\left(-۱ - \frac{م}{ر}\right) \frac{۱ - طہ}{۱ - طہ لا_۱} لا_۱ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۹)$$

جس کی انتہا صفر اور لا، کے درمیان ہے۔
اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ باقی کی رقم (۷) کی انتہا - ۱ اور + ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہے۔

(۳) اگر $ف(لا) = لوک(۱ + لا) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱۰)$

تو $$\frac{لا^ن}{\underline{ن}} ف^{(ن)}(طہ لا) = \frac{(-۱)^{ن-۱}}{ن} \left(\frac{لا}{۱ + طہ لا}\right)^ن \quad \ldots\ldots \quad (۱۱)$$

پہلے جزو ضربی کی انتہائی قیمت صفر ہے اور اگر لا مثبت ہو اور ≯ ۱ ہے

تو $\frac{لا}{۱ + طہ لا} \not> ۱$ پس (۱۱) کی انتہائی قیمت جبکہ ن ← ∞ صفر ہے اور دفعہ ۱۸۴ کا پھیلاؤ (۱۶) لا = ۰ سے لا = ۱ کے لئے بشمول طرفین صحیح ہے
شکل ۱۳۶ دیکھو۔
باقی کی رقم کی اوپر والی شکل سے لا کی ان منفی قیمتوں پر بھی غور نہیں کر سکتے جن کے لئے |لا| < ۱، اس لئے بجائے (۱۱) کے کوشی کی باقی کی رقم یہ حاصل ہوتی ہے

$$(-۱)^{ن-۱} \frac{لا}{۱ + طہ لا} \left(\frac{لا - طہ لا}{۱ + طہ لا}\right)^{ن-۱} \quad \ldots\ldots \quad (۱۲)$$

۴۹۲ اسمیں $\text{لا} = -\text{لا}_1$ درج کرنے سے جہاں $1 > \text{لا}_1 > 0$ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{-\text{لا}_1}{1-\text{طہ}\,\text{لا}_1} \times \left(\frac{\text{لا}_1-\text{طہ}\,\text{لا}_1}{1-\text{طہ}\,\text{لا}_1}\right)^{\text{ن}-1} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

اور چونکہ $\frac{\text{لا}_1-\text{طہ}\,\text{لا}_1}{1-\text{طہ}\,\text{لا}_1} > \text{لا}_1$ ہے اسلئے ن کے بڑھنے کے ساتھ اسکی انتہا صفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔

۱۸۹۔ مسئلۂ ٹیلر کا اطلاق۔ منحنیات کا رتبۂ تماس۔

اگر دو منحنی دو نقاط پر قطع کریں اور ان میں سے ایک منحنی کو اس طور پر مسلسل بدلا جائے کہ دونوں نقطے ایک نقطہ ن پر منطبق ہو جائیں تو ایسی صورت میں کہتے ہیں کہ دونوں منحنیوں کا نقطہ ن پر پہلے رتبہ کا تماس ہے۔ اسکی ایک مثال منحنی اور اس کے مماسی خط کا تماس ہے۔ اور جب کبھی دو منحنیوں میں پہلے رتبہ کا تماس ہوتا ہے تو ایک مشترک مماسی خط ہوتا ہے۔

نیز اگر دو منحنی ایک دوسرے کو تین نقاط پر قطع کریں اور ان میں سے ایک منحنی کو اسطور پر بدلا جائے کہ یہ تینوں نقاطِ تقاطع ایک ہی نقطہ ن پر منطبق ہو جائیں تو ایسی صورت میں نقطہ ن پر منحنیوں کا دوسرے رتبہ کا تماس ہوتا ہے اسکی ایک مثال، کسی منحنی اور اس کے انحنائی دائرہ کا تماس ہے (دفعہ ۱۲۰)۔

فرض کرو کہ منحنیات

$$\text{ما} = \text{فہ}(\text{لا}) \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \text{خہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

تین نقاط پر جن کے فصلے بالترتیب لا، لا_1، لا_2 ہیں ایکدوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

اب تفاعل

$$\text{فا}(\text{لا}) \equiv \text{فہ}(\text{لا}) - \text{خہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

جو دونوں منحنیوں کے فرق کو ظاہر کرتا ہے $\text{لا} = \text{لا}_1$، لا_1، لا_2 کے لئے صفر ہوگا۔ پس $\text{فا}(\text{لا})$ اور $\text{فا}'(\text{لا})$ کے مسلسل ہونے کے مفروضہ پر مشتق تفاعل $\text{فا}'(\text{لا})$ مطابق دفعہ ۹۴، لا اور لا_1 کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے لئے

صفر ہوگا، فرض کرو کہ یہ قیمت لا = لاَ ہے، اور اسی طرح لا_1 اور لا_2 کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے لئے صفر ہوگا جو فرض کرو کہ لا = لاً ہے۔ اب مذکورہ بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے اگر فاً (لا) وقفہ لاَ اور لاً میں مسلسل ہے تو یہ صفر ہوگا لا کی کسی خاص قیمت کے لئے جو لاَ اور لاً کے درمیان واقع ہے، فرض کرو کہ یہ لا = لاَ ہے، پس اگر منحنیات (۱) میں سے کسی ایک منحنی کو اسطور پر مسلسل بدلا جائے کہ تینوں نقطے $\text{لا} = \text{لا}_1$، لا_0، لا_2 ایک ہی نقطہ $\text{لا} = \text{لا}_0$ پر منطبق ہو جائیں تو فا(لا_0)، فاَ(لا_0)، فاً(لا_0) کی قیمت بھی صفر ہوگی یعنی $\text{لا} = \text{لا}_0$ کے لئے ذیل کی مساواتیں ایک ساتھ پوری ہونگی

فما(لا_0) = خما(لا_0)، فماَ(لا_0) = فاَ(لا_0)، فماً(لا_0) = خماً(لا_0) ...(۳)

بالفاظ دیگر اگر دو منحنیوں کا کسی نقطہ پر دوسرے رتبہ کا تماس ہو تو اس نقطہ پر ما، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ کی قیمتیں دونوں منحنیوں کے لئے مساوی ہونگی

۴۹۳ مثال:- منحنی ما = فما (لا) ....(۴)

سے کسی دئے ہوئے نقطہ پر دوسرے رتبہ کے تماس رکھنے والے دائرہ کی مساوات دریافت کرو۔

مرکز (لا_1، ما_1) اور نصف قطر ر والے دائرہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_1)^2 = \text{ر}^2 \quad \ldots\ldots(۵)$$

اگر اسے بلحاظ لا، دو مرتبہ تفرق کیا جائے تو

$$\text{لا} - \text{لا}_1 + (\text{ما} - \text{ما}_1)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰ \quad \ldots\ldots(۶)$$

اور

$$۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_1)\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = ۰ \quad \ldots\ldots(۷)$$

ان نتائج میں ما کو لا کا تفاعل فرض کیا جاتا ہے جس کی تعیین مساوات (۵) سے ہوتی ہے لیکن اگر دائرہ کا منحنی (۴) کے ساتھ نقطہ (لا، ما) پر دوسرے رتبہ کا تماس ہو تو ما، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ کی قیمتیں منحنی اور دائرہ کے لئے ایک ہی ہونگی۔

اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مساوات (۵)، (۶)، (۷) میں لا، ما، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ کی قیمتیں منحنی (۴) سے حاصل کی گئی ہیں۔ ان مساواتوں سے دائرہ یگانہ طور پر متعین ہوجاتا ہے یعنی مرکز کے محدد اور نصف قطر ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لا}_{۱} = \text{لا} - \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\left\{۱+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}\right\}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}}\ ،\quad \text{ما}_{۱} = \text{ما} + \frac{۱+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}} \quad \ldots\ (۸)$$

$$\text{اور نصف قطر ر} = \frac{\left[۱+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}} \quad \ldots\ (۹)$$

دفعہ ۱۳۵ دیکھو۔

مذکورہ بالا بحث کی توسیع کی جاسکتی ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر دو منحنی ن+۱ متصل نقطوں پر قطع کریں یعنی ن ویں رتبہ کا تماس رکھیں تو

$$\text{ما}\ ،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\ ،\ \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\ ،\ \ldots\ldots\ ،\ \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$$

کی قیمتیں زیر غور نقطہ پر دونوں منحنیوں کے لئے مساوی ہونگی، دفعات ۱۸۵ اور ۱۸۶ کی تحقیقات سے، ن ویں رتبہ کے نقطہ تماس کی پڑوس میں، دونوں منحنیوں کے باہم قریب ہونے کے ناپ کا تعین کیا جاسکتا ہے۔ مفروضہ کے رو سے نقطہ لا = ا پر

$$\text{فما}(ا) = \text{خما}(ا)\ ،\ \text{فما}'(ا) = \text{خما}'(ا)\ \ldots\ \text{فما}^{(\text{ن})}(ا) = \text{خما}^{(\text{ن})}(ا) \quad \ldots\ (۱۰)$$

اس لئے اگر فا(لا) کی تعریف (۲) کے مطابق کی جائے تو

$$\text{فا}(ا) = ۰\ ،\ \text{فا}'(ا) = ۰\ ،\ \ldots\ \text{فا}^{(\text{ن})}(ا) = ۰ \quad \ldots\ (۱۱)$$

اس سے اخذ ہوتا ہے کہ مناسب شرائط کے ماتحت

$$\text{فا}(\text{ا}+\text{ھ}) = \frac{\text{ھ}^{\text{ن}+1}}{\lfloor \text{ن}+1} \, \text{فا}^{(\text{ن}+1)}(\text{ا}+\text{ط}\text{ھ}) \quad \ldots\ldots (12)$$

جہاں ۰ < ط < ۱، پس اگر ھ لاانتہا چھوٹا ہو تو معینوں کا فرق (ن+۱) ویں رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ علاوہ ازیں اس کی علامت کا ھ کے ساتھ بدلنا یا نہ بدلنا ن کے جفت یا طاق ہونے پر منحصر ہے۔

مثلاً منحنی کا مماسی خط سے ہٹاؤ نقطہ تماس کی پڑوس میں اکثر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے عموماً منحنی اس نقطہ پر مماسی خط کو عبور نہیں کرتا۔ منحنی کا انحنی دائرہ سے ہٹاؤ تیسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے اور اس لئے اکثر منحنی دائرہ کو عبور کرتا ہے۔ صفحہ ۴۷۹ پر شکل ۱۱۶ دیکھو۔ لیکن اگر دائرہ سے تماس چوتھے رتبہ کا ہو جیسا کہ مخروطی کے راس پر ہوتا ہے تو منحنی دائرہ کو عبور نہیں کرتا۔ اسی بات کی مزید مثالیں صفحہ ۶۷۹ پر شکل ۱۳۶ میں دکھائی گئی ہیں، منحنیات ۱، ۳، ۵ منحنی ما = لوک (۱+لا) کو عبور نہیں کرتے لیکن منحنیات ۲، ۴، ۶ عبور کرتے ہیں۔

۱۹۰ - اعظم اور اقل قیمتیں۔

اگر فا(لا) متغیر لا کا ایسا تفاعل ہو جس کے پہلے اور دوسرے مشتق، متغیر کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہوں تو

$$\text{فا}(\text{ا}+\text{ھ}) - \text{فا}(\text{ا}) = \text{ھ}\,\text{فا}'(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2}\,\text{فا}''(\text{ا}+\text{ط}\text{ھ}) \quad \ldots (1)$$

جہاں ۱ > ط > ۰، اس میں ھ کو کافی چھوٹا لینے سے بائیں جانب کی دوسری رقم کو عموماً مقدار میں پہلی رقم سے چھوٹا بنایا جا سکتا ہے اور اس صورت میں فا(ا+ھ) - فا(ا) کی علامت وہی ہوگی جو ھ فا'(ا) کی ہے یعنی ھ کے ساتھ اس کی علامت بدلے گی۔ اب اگر فا(ا) تفاعل فا(لا) کی اعظم یا اقل قیمت ہو تو فرق فا(ا+ھ) - فا(ا) کی علامت ھ کی

کافی چھوٹی قیمتوں کے لئے، ایک ہی ہوگی خواہ وہ مثبت ہو یا منفی۔

پس موجودہ شرائط کے ماتحت تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے لئے ضروری ہے کہ فہ′(ا) = ۰۔

اب فرض کرو کہ فہ′(ا) = ۰۔ تو نتیجہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

فہ(ا + ھ) - فہ(ا) = (ھ² / ۲!) فہ″(ا + طہ ھ) ...... (۲)

جب، ھ کافی چھوٹا ہو تو بائیں جانب کی علامت وہی ہوگی جو فہ″(ا) کی ہے۔ پس اگر فہ″(ا) مثبت ہے تو فہ(ا + ھ) > فہ(ا) سے خواہ ھ مثبت ہو یا منفی یعنی فہ(ا) اقل قیمت ہے۔

اسی طرح اگر فہ″(ا) منفی ہے تو فہ(ا) اعظم قیمت ہے۔

اگر فہ″(ا) بھی فہ′(ا) کے ساتھ صفر ہو جائے تو (۱) کے پھیلاؤ میں ۴۹۵
زائد رقوم لینا ضروری ہوگا۔

عام صورت پر غور کرنے کے لئے فرض کرو کہ

فہ′(ا) = ۰، فہ″(ا) = ۰، ..... فہ^(ن-۱)(ا) = ۰ ...... (۳)

لیکن فہ^(ن)(ا) ≠ ۰ .... (۴)

تو فہ(ا + ھ) - فہ(ا) = (ھ^ن / ن!) فہ^(ن)(ا + طہ ھ) ... (۵)

اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو اس کی علامت وہی ہے جو ھ^ن فہ^(ن)(ا) کی ہے۔ اگر ن طاق ہے تو اسکی علامت ھ کی علامت پر منحصر ہے اور اس لئے اس نقطہ پر تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت نہیں ہے۔ لیکن اگر ن جفت ہے تو اس نقطہ کا اعظم یا اقل ہونا فہ^ن(ا) کے منفی یا مثبت ہونے پر منحصر ہے۔

عبارت میں اسے ذیل کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔ لا کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے تفاعل فہ(لا) کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس صورت میں

ہوگی جبکہ لا کی اس قیمت کے لئے سب سے پہلا صفر نہ ہونے والا مشتق جفت رتبہ کا ہو، ورنہ نہیں ہوگی۔
تفاعل کا اعظم یا اقل ہونا اس مشتق کے منفی یا مثبت ہونے پر مبنی ہے۔

مثال ۱ :- فا (لا) = جمز لا + جم لا .... (۶)

اس لئے فاَ (لا) = جبز لا − جب لا ، فاً (لا) = جمز لا − جم لا
فاًً (لا) = جبز لا + جب لا ، فا^(۴) (لا) = جمز لا + جم لا

لا = ۰ کے لئے صفر نہ ہونے والا پہلا مشتق فا^(۴) (لا) چوتھے رتبہ کا ہے اور چونکہ فا^(۴) (۰) مثبت ہے، لہذا فا (۰) تفاعل فا (لا) کی اقل قیمت ہے
یہ امر فا (لا) کے پھیلاؤ سے بھی ظاہر ہے

فا (لا) = ۲ (۱ + لا^۴ / |۴ + لا^۸ / |۸ + ...) .... (۷)

مثال ۲ :- فرض کرو کہ ق = ب جم طا − ج جم ۲ طا .... (۸)

اس سے دق / دطا = − ب جب طا + ۲ ج جب ۲ طا

= جب طا (۴ ج جم طا − ب)

د²ق / دطا² = − ب جم طا + ۴ ج جم ۲ طا

= جم طا (۴ ج جم طا − ب) − ۴ ج جب² طا

د³ق / دطا³ = ب جب طا − ۸ ج جب ۲ طا

د⁴ق / دطا⁴ = ب جم طا − ۱۶ ج جم ۲ طا

اختصار کے لئے صرف پہلے ربع کے زاویوں پر غور کرو۔ اگر ب > ۴ ج تو ق کی بقیم قیمت صرف طا = ۰ کی صورت میں ہے اور طا = ۰ کیلئے

$\frac{\text{فرق}}{\text{فرطہ}^2} > 0$ اس لئے ق کی اس مقام پر اعظم قیمت ہے۔

۶۹۶ اگر ب > ۴ ج تو ق اقل ہے جبکہ طہ = ۰ اور اعظم ہے جبکہ طہ = جم$^{-1}$ $\frac{\text{ب}}{\text{۴ ج}}$،

اگر ب = ۴ ج تو طہ = ۰ کے لئے $\frac{\text{فرق}}{\text{فرطہ}}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ق}}{\text{فرطہ}^2}$، $\frac{\text{فر}^3\text{ق}}{\text{فرطہ}^3}$ صفر ہیں اور

$\frac{\text{فر}^4\text{ق}}{\text{فرطہ}^4}$ منفی ہے۔ پس ق اعظم قیمت ہے۔

یہ مثال ذیل کے سوال کی تحقیقات میں نمودار ہوتی ہے۔ ایک مربع تیرا انتصابی مستوی میں واقع ہے اور دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں ٹنگا ہوا ہے۔ توازن کے مقامات پر غور کرو۔ اگر ب مربع کے وتر یا بین زاوی کا طول ہے اور ج میخوں کے درمیان فاصلہ ہے تو ق توانائی بالقوہ کے متناسب ہے جبکہ میخوں کو ملانے والے خط کو کاٹنے والا بین زاوی انتصابی خط سے طہ کا زاویہ بناتا ہے۔ توازن کے لئے ق کی مقیم قیمت ہونی چاہئے اور قائم توازن کے لئے ق کو اقل ہونا چاہئے۔

۱۹۱۔ مستوی منحنیات کا صغاری ہندسہ۔

فرض کرو کہ مستوی منحنی کے کسی نقطہ و کو مبدا مان لیا جاتا ہے اور نقطہ و پر کے مماس اور عماد کو محددوں کے محور مانا جاتا ہے۔ مبدأ کے متصل منحنی کے کسی نقطہ ن کے محددوں کو قوس و ن = س کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے۔

اگر اختصار کے لئے تفرقات بلحاظ س کے زبر سے ظاہر کئے جائیں تو دفعہ ۱۱۱ کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

لاَ = جم فہ، مَا = جب فہ ....(۱)

اس لئے لا″ = - جب فا × فا′ ، لا‴ = - جم فا × فا′^۲ - جب فا × فا″
ما″ = جم فا × فا′ ، ما‴ = - جب فا × فا′^۲ + جم فا × فا″ ...... (۲)

اور اسی طرح ۔

اب مسئلہ میکلورن سے

$$لا = لا_{٠} + \frac{س}{۱} لا'_{٠} + \frac{س^{۲}}{۲×۱} لا''_{٠} + \cdots$$
$$ما = ما_{٠} + \frac{س}{۱} ما'_{٠} + \frac{س^{۲}}{۲×۱} ما''_{٠} + \cdots \quad (۳)$$

جہاں کہ حرف کے لاحقہ سے اسکی وہ قیمت ظاہر کی گئی ہے جو یہ س = ۰ کے لئے اختیار کرتا ہے۔

لیکن (۱) اور (۲) میں فا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا'_{٠} = ۱ ، لا''_{٠} = ۰ ، لا'''_{٠} = - \frac{۱}{ر^{۲}} \cdots$$
$$ما'_{٠} = ۰ ، ما''_{٠} = \frac{۱}{ر} ، ما'''_{٠} = - \frac{۱}{ر^{۲}} \frac{فر ر}{فر س} \cdots \quad (۴)$$

جہاں $\frac{فر فا}{فر س}$ کی بجائے $\frac{۱}{ر}$ لکھا گیا ہے۔

$$پس\ لا = س - \frac{س^{۳}}{۶ ر^{۲}} + \cdots ، ما = \frac{س^{۲}}{۲ ر} - \frac{س^{۳}}{۶ ر^{۲}} \frac{فر ر}{فر س} + \cdots \quad (۵)$$

جہاں ر اور $\frac{فر ر}{فر س}$ مبدا پر قیمتیں ہیں۔

یہ ضوابط صغاری ہندسہ کے اکثر سوالات میں مفید ثابت ہونگے۔

مثال (۱) نتیجہ (۵) میں دوسرے ضابطہ سے ظاہر ہے کہ انتہا میں نقطہ ... ۲۹۷
منحنی کا لمسی دائرہ سے ہٹاؤ ہے

$$\frac{۱}{۶} \frac{س^{۳}}{ر^{۲}} \frac{فر ر}{فر س} \cdots \quad (۶)$$

کیونکہ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ دائرہ کے لئے صفر ہے۔

اور عموماً ان تمام صورتوں میں جنمیں $\text{س}^{۲}$ نظر انداز ہو سکتا ہے منحنی کی بجائے اسکا انحنائی دائرہ رکھا جا سکتا ہے۔

مثال ۲ - نیز نقطہ ن کا عماد نقطہ و کے عماد کو ایسے نقطہ پر کاٹتا ہے جسکا و سے فاصلہ ما + لا مم فما ہے۔ اگر ہم س میں دوسرے رتبہ کی رقموں کو نظر انداز کر دیں تو

$$\text{ما} + \text{لا مم فما} = \frac{\text{س}}{\frac{\text{س}}{\text{ر}} - \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{س}^{۲}}{\text{ر}^{۲}}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}} = \text{ر}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{س}}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}\right)$$

پس نقطہ تقاطع کا نقطہ س کے مرکز انحنا سے فاصلہ انتہا میں ہے

$$\frac{۱}{۲}\,\text{س}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} \quad \text{.........} \quad (۷)$$

اگر ر کی قیمت اعظم یا اقل ہے تو عموماً $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = ۰$ اور فاصلہ اعلیٰ تر رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اور برپیچہ پر و کا مماثل نقطہ قرنی نقطہ ہے۔

امثلہ نمبر ۶۲

پھیلاؤ

(۱) $\text{جمز لا جم لا} = ۱ - \frac{۲^{۲}\,\text{لا}^{۴}}{|\underline{۴}} + \frac{۲^{۴}\,\text{لا}^{۸}}{|\underline{۸}} - \text{.........}$

$\text{جبز لا جب لا} = \text{لا}^{۲} - \frac{۲^{۳}\,\text{لا}^{۶}}{|\underline{۶}} + \frac{۲^{۵}\,\text{لا}^{۱۰}}{|\underline{۱۰}} - \text{.........}$

(۲) $\text{جمز لا جب لا} = \text{لا} + \frac{۲\,\text{لا}^{۳}}{|\underline{۳}} - \frac{۲^{۲}\,\text{لا}^{۵}}{|\underline{۵}} - \text{.........}$

$$\text{جنر لا جم لا} = \text{لا} - \frac{٢\,\text{لا}^{٣}}{|\underline{٣}} + \frac{٢^{٢}\,\text{لا}^{٥}}{|\underline{٥}} - \cdots\cdots$$

(٣) $$\text{ه}^{\text{لا}}\,\text{جم لا} = ١ + \text{لا} - \frac{٢\,\text{لا}^{٣}}{|\underline{٣}} - \frac{٢^{٢}\,\text{لا}^{٤}}{|\underline{٤}} - \frac{٢^{٢}\,\text{لا}^{٥}}{|\underline{٥}} + \frac{٢^{٣}\,\text{لا}^{٧}}{|\underline{٧}} + \cdots\cdots$$

$$\text{ه}^{\text{لا}}\,\text{جب لا} = \text{لا} + \text{لا}^{٢} + \frac{٢\,\text{لا}^{٣}}{|\underline{٣}} - \frac{٢^{٢}\,\text{لا}^{٥}}{|\underline{٥}} - \frac{٢^{٣}\,\text{لا}^{٦}}{|\underline{٦}} - \frac{٢^{٣}\,\text{لا}^{٧}}{|\underline{٧}} + \cdots\cdots$$

(٤) $$\text{قط لا} = ١ + \frac{\text{لا}^{٢}}{|\underline{٢}} + \frac{٥\,\text{لا}^{٤}}{|\underline{٤}} + \frac{٦١\,\text{لا}^{٦}}{|\underline{٦}} + \cdots\cdots$$

(٥) $$\text{لوک قط لا} = \frac{\text{لا}^{٢}}{٢} + \frac{\text{لا}^{٤}}{١٢} + \frac{\text{لا}^{٦}}{٤٥} + \cdots\cdots$$

(٦) $$\text{لوک جمز لا} = \frac{١}{٢}\,\text{لا}^{٢} - \frac{١}{١٢}\,\text{لا}^{٤} + \frac{١}{٤٥}\,\text{لا}^{٦} - \cdots\cdots$$

٤٩٨ (٧) $$\text{مسنر لا} = \text{لا} - \frac{١}{٣}\,\text{لا}^{٣} + \frac{٢}{١٥}\,\text{لا}^{٥} - \frac{١٧}{٣١٥}\,\text{لا}^{٧} + \cdots\cdots$$

(٨) $$\text{جم}^{٢}\,\text{لا} = ١ - \text{لا}^{٢} + \frac{٢^{٣}\,\text{لا}^{٤}}{|\underline{٤}} - \frac{٢^{٥}\,\text{لا}^{٦}}{|\underline{٦}} + \cdots\cdots$$

(٩) $$\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{لا} = ١ - \frac{\text{ن}}{|\underline{٢}}\,\text{لا}^{٢} + \frac{\text{ن}(٣\text{ن}-٢)}{|\underline{٤}}\,\text{لا}^{٤} - \cdots\cdots$$

(١٠) $$\left(\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} = ١ - \frac{\text{ن}}{|\underline{٣}}\,\text{لا}^{٢} + \frac{\text{ن}(٥\text{ن}-٢)}{٣\,|\underline{٥}}\,\text{لا}^{٤} - \cdots\cdots$$

(١١) $$\frac{\text{لا}}{\text{جب لا}} = ١ + \frac{\text{لا}^{٢}}{|\underline{٣}} + \frac{١٤\,\text{لا}^{٤}}{|\underline{٦}} + \cdots\cdots$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{جنر لا}} = ١ - \frac{\text{لا}^{٢}}{|\underline{٣}} + \frac{١٤\,\text{لا}^{٤}}{|\underline{٦}} - \cdots\cdots$$

(۱۲) $\frac{\text{لا}}{\text{فو}^{\text{لا}}-1} = 1 - \frac{1}{2}\text{لا} + \frac{1}{6}\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} - \frac{1}{30}\frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \ldots\ldots$

(۱۳) $\text{مس}\left(\frac{\pi}{4}+\text{لا}\right) = 1 + 2\text{لا} + 2\text{لا}^2 + \frac{8}{3}\text{لا}^3 + \frac{10}{3}\text{لا}^4 + \ldots\ldots$

(۱۴) $\text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{4}+\text{لا}\right) = 2\text{لا} + \frac{4}{3}\text{لا}^3 + \frac{4}{3}\text{لا}^5 + \ldots\ldots$

(۱۵) $\text{لوک}(1+\text{جب لا}) = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{6} - \frac{\text{لا}^4}{12} + \frac{\text{لا}^5}{24} - \ldots\ldots$

(۱۶) $\text{لوک}(1+\text{فو}^{\text{لا}}) = \text{لوک }2 + \frac{1}{2}\text{لا} + \frac{1}{8}\text{لا}^2 - \frac{1}{192}\text{لا}^4 + \ldots\ldots$

(۱۷) $\frac{3\,\text{جب لا}}{2+\text{جم لا}} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^5}{180} + \ldots\ldots$

(۱۸) $\text{لوک قط}^2\,\frac{\text{طہ}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{جب}^2\text{طہ}}{2\times} + \frac{1\times 3}{4\times 2}\,\frac{\text{جب}^4\text{طہ}}{4} + \frac{1\times 3\times 5}{6\times 4\times 2}\times\frac{\text{جب}^6\text{طہ}}{6} + \ldots\ldots$

(۱۹) اگر $\text{عف} = \frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{عف}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{\text{لا جم عا}}\,\text{جم}(\text{لا جب عا}) = \text{فو}^{\text{لا جم عا}}\,\text{جم}(\text{لا جب عا}+\text{ن عا})$$

پس حاصل کرو کہ $\text{فو}^{\text{لا جم عا}}\,\text{جم}(\text{لا جب عا}) = 1 + \text{لا جم عا}$

$+ \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}\,\text{جم }2\text{عا} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3}\,\text{جم }3\text{عا} + \ldots\ldots$

(۲۰) تفاعلات لا، $\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3}$، $\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^5}{\lfloor 5}$ کی ترسیمیں کھینچو

اور انکا جب لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو۔

(۲۱) تفاعلات $۱ - \frac{\text{لا}^{2}}{\underline{|۲}}$ ، $۱ - \frac{\text{لا}^{2}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{4}}{\underline{|۴}}$ کی ترسیمیں کھینچو اور انکا جم لا کی ترسیم سے مقابلہ کرو۔

(۲۲) ثابت کرو کہ دفعہ ۱۸۵ کے ضابطہ (۱۷) میں طھا کی انتہائی قیمت جبکہ ھ کو بے حد چھوٹا کردیا جائے عموماً $\frac{۱}{\text{ن}+۱}$ ہے۔

(۲۳) ثابت کرو کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو سمپسن کے تقریبی تکمل کے ضابطے (۲۹۹) میں [دفعہ ۱۱۴ (۸)] خطا تقریباً $\frac{۱}{۹۰}\,\text{ھ}^{5}\,\frac{\text{فر}^{4}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{4}}$ ہے۔

(۲۴) ثابت کرو کہ فا(لا) کی اوسط قیمت حدود لا = ا − ھ اور لا = ا + ھ کے درمیان ہے

$$\text{فا}(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^{2}}{\underline{|۳}}\,\text{فا}''(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^{4}}{\underline{|۵}}\,\text{فا}^{(4)}(\text{ا}) + \dots$$

نیز ثابت کرو کہ یہ قیمت حدود کی قیمتوں کے حسابی اوسط سے بقدر ذیل کے کم ہوگی

$$\frac{\text{ھ}^{2}}{۱\times۳}\,\text{فا}''(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^{4}}{۵\times\underline{|۳}}\,\text{فا}^{(4)}(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^{6}}{۷\times\underline{|۵}}\,\text{فا}^{(6)}(\text{ا}) + \dots$$

(۲۵) ایک دیے ہوئے منحنی سے دوسرا منحنی اس طرح بنایا جاتا ہے کہ دوسرے منحنی کا معین لا کی کسی قیمت ا کے لئے حدود لا = ا ± ھ میں پہلے منحنی کے معینوں کے اوسط کے مساوی ہے، یہاں ھ مقررہ چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرے منحنی کا معین پہلے منحنی کے معین سے اتنا بڑا ہے جتنا کہ قوس (جس کے حدود لا = ا ± ھ ہیں) کے ذُبیل (Sagitta) کا ایک تہائی ہے۔

امثلہ ۶۳

ہندسی استعمال

(۱) ثابت کرو کہ اگر دفعہ ۱۹۱ کے پھیلاؤ (۴) کو س^4 تک پھیلایا جائے تو

$$\text{لا} = \text{س} - \frac{1}{6}\,\frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2} + \frac{1}{8}\,\frac{\text{س}^4}{\text{ر}^3}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}} + \ldots\ldots$$

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{س}^2}{\text{ر}} - \frac{1}{6}\,\frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}$$

$$- \frac{1}{24}\,\frac{\text{س}^4}{\text{ر}^3}\left[1 - 2\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}\right)^2 + \text{ر}\,\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرس}^2}\right] + \ldots\ldots$$

(۲) اگر کسی منحنی کے نقطہ و پر مماس اور عماد کو لا محور اور ما محور بالترتیب مانا جائے اور منحنی کے کسی نقطہ لا، ما کے محددوں کو فہا کی رقوم میں جہاں فہا مماس کا لا محور کے ساتھ میلان ہے پھیلایا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ر}\,\text{فہا} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرفہا}}\,\text{فہا}^2 - \frac{1}{6}\left(\text{ر} - \frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرفہا}^2}\right)\text{فہا}^3 + \ldots\ldots$$

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{ر}\,\text{فہا}^2 + \frac{1}{3}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرفہا}}\,\text{فہا}^3 + \ldots\ldots$$

(۳) ثابت کرو کہ گذشتہ سوال کے محوروں کے مطابق مرکز انحنا کے محدد ذیل سے حاصل ہونگے

$$\text{لا}_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرفہا}}\,\text{فہا}^2 - \frac{1}{3}\,\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرفہا}^2}\,\text{فہا}^3 + \ldots\ldots$$

$$\text{ما}_1 = \text{ر} + \frac{\text{فرر}}{\text{فرفہا}}\,\text{فہا} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{فر}^2\text{ر}}{\text{فرفہا}^2}\,\text{فہا}^2 + \ldots\ldots$$

(۴) اگر و اور ن منحنی کے دو متصل نقطے ہوں اور ن ق وتر و ن پر ۵۰۰

عمود کھینچا جائے اس طرح کہ وہ نقطہ و پر کے عماد کو ق پر ملے تو ثابت کرو کہ انتہا میں و ق = ۲ ر۔

(۵) اگر منحنی کی قوس پر و ن چھوٹی سی قوس لی جائے اور و ت نقطہ و کے مماس پر چھوٹا سا فاصلہ ہو اور اگر ن ت ممدودہ نقطہ و کے عماد سے انتہا میں ج پر ملے تو ثابت کرو کہ و ج = ۳ ر۔

(۶) اگر ن، ق منحنی پر دو متصل نقطے ہوں اور نقطہ ن کے مماس پر ت ایسا نقطہ لیا جائے کہ ن ت = وتر ن ق اور ت ق نقطہ ن کے عماد کو ج پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ن ج کی انتہائی قیمت ۴ ر ہوگی۔

(۷) ثابت کرو کہ وتر و ن کا وسطی عمود ہ و پر کے عماد کو ایسے نقطہ پر کاٹتا ہے جس کا مرکز انحنا سے انتہائی فاصلہ $\frac{1}{3}$ س $\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}$ ہے جہاں س = و ن

(۸) منحنی کے دو متصل نقطوں ن، ق کے مماس ت پر قطع کرتے ہیں اور و وتر ن ق کا وسطی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ ت و منحنی کے عماد سے

زاویہ $\text{س}^{-1}\left(\frac{1}{3}\frac{\text{فرر}}{\text{فرس}}\right)$ بناتا ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ اگر ن ق منحنی کی ایک چھوٹی قوس ہے تو وتر کے مقابلہ میں قوس بقدر $\frac{1}{24}\frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2}$ کے بڑی ہے اور ن اور ق پر کے مماسوں کے طولوں کا حاصل جمع، قوس سے بقدر $\frac{1}{12}\frac{\text{س}^3}{\text{ر}^2}$ بڑا ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ نقطۂ قرن کے قریب منحنی کی شکل تقریباً $\text{ا ما}^2 = \text{لا}^3$ سے ظاہر ہو سکتی ہے جہاں $\text{ا} = \frac{9}{8}\frac{\text{فرر}}{\text{فرما}}$ ۔

(۱۱) ثابت کرو کہ نقطہ عطف کے قریب منحنی کی شکل تقریباً $\text{ما} = \frac{1}{6}\frac{\text{فرج}}{\text{فرس}}\text{لا}^3$

سے ظاہر ہو سکتی ہے جہاں ج انحنا کی قدر ہے ۔

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر ن منحنی کا کوئی نقطہ ہے تو ن کے قریب کے حصہ کے برپیچہ کی شکل (جبکہ نقطہ ن کا مرکز انحنا بعید ہے)

$$ا\,ما = لا^{۲}$$ سے بیان کی جا سکتی ہے جہاں $ا = ۲\frac{فر ر}{فر فہ}$ ۔

(۱۴) ثابت کرو کہ اگر ن اقل یا اعظم انحنا کا نقطہ ہو تو برپیچہ کی شکل تقریباً

$$ا\,ما^{۲} = لا^{۳}$$

ہے، جہاں

$$ا = \frac{۹}{۸}\,\frac{فر^{۲} ر}{فر فہ^{۲}}$$

(۵۰۱)

سولھواں باب

متعدد متبوع متغیروں کے تفاعلات

۱۹۴ ـ مختلف رتبوں کے جزوی مشتقات: ـ اگر ع دو یا زیادہ متبوع متغیروں لا ، ما ...... کا تفاعل ہو تو جزوی مشتقات

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{ ، } \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \quad \ldots\ldots \text{(۱)}$$

بھی عموماً لا ، ما ...... کے تفاعل ہونگے اور ان متغیروں کے لحاظ سے انکا تفرق نکالا جا سکتا ہے ـ پس اگر

$$\text{ع} = \text{فا (لا ، ما)} \quad \ldots\ldots \text{(۲)}$$

تو دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بنائے جا سکتے ہیں

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) \text{ ، } \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right) \text{ ، } \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right) \text{ ، } \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)$$

اور انہیں اکثر اس طرح لکھا جاتا ہے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} \text{ ، } \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}} \text{ ، } \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} \text{ ، } \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} \quad \ldots\ldots \text{(۳)}$$

اس میں ظاہر ہوگا کہ دوسری اور تیسری علامتوں میں معنی کا اصولی فرق ہے ، دونوں صورتوں میں دو عمل مختلف ترتیب میں یکے بعد دیگرے

استعمال کئے جاتے ہیں۔ تاہم دفعہ ۱۹۳ میں ثابت کیا جائیگا کہ چند شرائط کے ماتحت جو عملی سوالات میں عموماً پوری ہوتی ہیں دونوں نتائج ایک دوسرے کے متماثلاً مساوی ہیں۔ تفاعل ف (لا، ما) کے پہلے جزوی مشتقات کو بعض موقعوں پر

$$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا}،\text{ما}) \ \text{اور}\ \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا}،\text{ما}) \quad \ldots\ldots(۴)$$

سے تعبیر کیا جائیگا۔ اور دوسرے رتبہ کے مشتقات (۳) کو

$$\text{ف}_{\text{لالا}}(\text{لا}،\text{ما})،\ \text{ف}_{\text{مالا}}(\text{لا}،\text{ما})،\ \text{ف}_{\text{لاما}}(\text{لا}،\text{ما})،\ \text{ف}_{\text{ماما}}(\text{لا}،\text{ما}) \ \text{سے} \quad \ldots(۵)$$

انکو اکثر برائے اختصار بالترتیب

$$\text{ف}_{\text{لا}}،\ \text{ف}_{\text{ما}} \quad \ldots\ldots(۶)$$

$$\text{اور}\ \text{ف}_{\text{لالا}}،\ \text{ف}_{\text{مالا}}،\ \text{ف}_{\text{لاما}}،\ \text{ف}_{\text{ماما}} \quad \ldots\ldots(۷)$$

لکھا جاتا ہے۔

(۵۰۲) **مثال ۱ـ** اگر

$$\text{ع} = \text{ا}\,\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}} \quad \ldots\ldots(۸)$$

$$\text{تو}\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{م ا}\,\text{لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ما}^{\text{ن}}،\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{ن ا}\,\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱} \quad \ldots\ldots(۹)$$

$$\frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف لا}^۲} = \text{م}(\text{م}-۱)\,\text{ا}\,\text{لا}^{\text{م}-۲}\,\text{ما}^{\text{ن}}،\ \frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف ما}^۲} = \text{ن}(\text{ن}-۱)\,\text{ا}\,\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۲}$$

$$\frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}} = \text{م ن ا}\,\text{لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱} = \frac{\text{جف}^۲\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} \quad \ldots(۱۰)$$

مثال ۲ـ اگر

$$\text{ی} = \text{ا ماس}^{-۱}\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \quad \ldots\ldots(۱۱)$$

$$\text{تو}\ \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{ا ما}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲}،\ \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{ا لا}}{\text{لا}^۲+\text{ما}^۲} \quad \ldots\ldots(۱۲)$$

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2} = \frac{۲\,\text{لا ما}}{(\text{لا}^2+\text{ما}^2)^2} \,،\, \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{لا}(\text{ما}^2-\text{لا}^2)}{(\text{لا}^2+\text{ما}^2)^2}$$

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} \,،\, \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = \frac{-۲\,\text{لا ما}}{(\text{لا}^2+\text{ما}^2)^2} \quad \ldots\ldots(۱۳)$$

۱۹۳ – خاصیت مبادلہ کا ثبوت –

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فا}(\text{لا}\,،\,\text{ما}) \quad \ldots\ldots\ldots(۱)$

اور تفاعلات $\text{ع}\,،\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,،\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,،\,\frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\,،\,\frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف ما}^2} \quad \ldots(۲)$

وجود رکھتے ہیں اور متغیروں کے محدود احاطہ میں جنہیں زیر غور قیمتیں شریک ہیں مسلسل ہیں۔ ہم ثابت کرینگے کہ ان شرائط کے ماتحت

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف ما جف لا}} \quad \ldots\ldots(۳)$$

اس مقصد کے لئے ذیل کی کسر پر غور کرو

$$\text{خا}(\text{ھ}\,،\,\text{ک}) = \frac{\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ}\,،\,\text{ما}+\text{ک}) - \text{فا}(\text{لا}+\text{ھ}\,،\,\text{ما}) - \text{فا}(\text{لا}\,،\,\text{ما}+\text{ک}) + \text{فا}(\text{لا}\,،\,\text{ما})}{\text{ھ ک}} \quad \ldots\ldots(۴)$$

اس میں لا اور ما کو ثابت مانا گیا ہے لیکن ھ، ک کو آخر میں لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائیگا۔

کچھ دیر کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{فا}'(\text{لا}) = \text{فا}(\text{لا}\,،\,\text{ما}+\text{ک}) - \text{فا}(\text{لا}\,،\,\text{ما}) \quad \ldots(۵)$$

دفعہ ۵۶ (۹) کے مسئلہ اوسط قیمت سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فا}'(\text{لا}+\text{ھ}) - \text{فا}'(\text{لا}) = \text{ھ}\,\text{فا}''(\text{لا}+\text{طا}_۱\text{ھ}) \quad \ldots(۶)$$

اس میں فا′(لا) کی قیمت درج کرنے سے

{فہ(لا + ھ، ما + ک) - فہ(لا + ھ، ما)} - {فہ(لا، ما + ک) - فہ(لا، ما)}

= ھ {فہ لا (لا + طہ۱ ھ، ما + ک) - فہ لا (لا + طہ۱ ھ، ما)} ... (۷)

(۵۰۳) جہاں ۱ > طہ۱ > ۰ اور اس عمل میں ما کی قیمت میں کچھہ تغیر نہیں کیا گیا۔

پس خہ(ھ، ک) = [فہ لا (لا + طہ۱ ھ، ما + ک) - فہ لا (لا + طہ۱ ھ، ما)] / ک (۸)

اب اگر لکھا جائے

ف(ما) = فہ لا (لا + طہ۱ ھ، ما) .... (۹)

تو مذکورہ بالا مسئلہ کے مکرر استعمال سے

ف(ما + ک) - ف(ما) = ک فَ(ما + طہ۲ ک) .....(۱۰)

یعنی فہ لا (لا + طہ۱ ھ، ما + ک) - فہ لا (لا + طہ۱ ھ، ما)

= ک فہ ما لا (لا + طہ۱ ھ، ما + طہ۲ ک) ..... (۱۱)

اس لئے خہ(ھ، ک) = فہ ما لا (لا + طہ۱ ھ، ما + طہ۲ ک) .... (۱۲)

جہاں طہ۱، طہ۲ صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔
بالکل اسیطرح ثابت کر سکتے ہیں کہ

خہ(ھ، ک) = فہ لا ما (لا + طہَ۱ ھ، ما + طہَ۲ ک) .... (۱۳)

جہاں طہَ۱، طہَ۲ بھی صفر اور ایک کے درمیان ہیں۔

یہ نتائج ٹھیک ہیں بشرطیکہ لا + ھ، ما + ک متغیروں کے اُس احاطہ میں واقع ہوں جس کے بارہ میں مذکورہ بالا شرائط بیان کی گئی ہیں۔
اب اگر ھ اور ک کو لاانتہا چھوٹا بنا دیا جائے تو (۱۲) اور (۱۳) کا مقابلہ کرنے سے اور مشتقات کے تسلسل کی رو سے ظاہر ہے کہ

$$\text{فہ}_{\text{ما لا}}(\text{لا، ما}) = \text{فہ}_{\text{لا ما}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اور یہی ثابت بھی کرنا تھا۔*

اوپر کے مسئلہ سے اخذ ہوتا ہے کہ متبوع متغیروں لا، ما، ی.... کی کسی تعداد کے تفاعل کی صورت میں عمل

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}، \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}، \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}، \ldots\ldots\ldots$$

یا جن کو اختصار کے لئے $\text{عف}_{\text{لا}}$، $\text{عف}_{\text{ما}}$، $\text{عف}_{\text{ی}}$...... سے ظاہر کیا جا سکتا ہے **عموماً مبادل** ہیں یعنی ان میں سے کتنے ہی عملوں کا نتیجہ عمل کی ترتیب پر منحصر نہیں ہے۔

مثلاً $\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{عف}_{\text{ی}}\,ع = \text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}_{\text{ما}}\,\text{عف}_{\text{ی}}\,ع)$

$= \text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}_{\text{ی}}\,\text{عف}_{\text{ما}}\,ع) = \text{عف}_{\text{ی}}\,\text{عف}_{\text{لا}}(\text{عف}_{\text{ما}}\,ع)$

$= \text{عف}_{\text{ی}}\,\text{عف}_{\text{لا}}\,\text{عف}_{\text{ما}} =$ وغیرہ وغیرہ نتیجہ (۴) سے ظاہر ہے کہ

(۵۰۴) $$\underset{\text{ھ}\to\cdot}{\text{نہا}}\ \text{خہ}(\text{ھ، ک}) = \frac{1}{\text{ک}}\ \underset{\text{ھ}\to\cdot}{\text{نہا}}\ \frac{\text{فہ}(\text{لا}+\text{ھ، ما}+\text{ک}) - \text{فہ}(\text{لا، ما}+\text{ک})}{\text{ھ}}$$

$$- \frac{1}{\text{ک}}\ \underset{\text{ھ}\to\cdot}{\text{نہا}}\ \frac{\text{فہ}(\text{لا}+\text{ھ، ما}) - \text{فہ}(\text{لا، ما})}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{\text{فہ}_{\text{لا}}(\text{لا، ما}+\text{ک}) - \text{فہ}_{\text{لا}}(\text{لا، ما})}{\text{ک}} \quad \ldots (۱۵)$$

* غالباً ثبوت اوسین بونٹ (Ossian Bonnet) کا دیا ہوا ہے۔ اس کا متبادل ثبوت دفعہ ۱۹۴ میں دیا جائیگا۔

پس نہا نہا خہ(ھ، ک) = فہا (لا، ما) ۔ ۔ ۔ ۔ (۱۶)
ک←۰ ھ←۰ ما لا

اسی طرح حاصل ہو سکتا ہے

نہا نہا خہ(ھ، ک) = فہا (لا، ما) ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱۷)
ھ←۰ ک←۰ لا ما

پس اگر ہم فرض کر سکتے ہوں کہ کسر (۴) کی انتہائی قیمت جبکہ ھ اور ک کو لاانتہا چھوٹا کر دیا جاتا ہے یگانہ ہے اور ھ ک کے صفر ہونے کی ترتیب پر منحصر نہیں ہے تو مسئلہ (۳) فوراً حاصل ہوتا ہے۔ لیکن ایک آسان مثال سے ظاہر ہو جائیگا کہ ہر صورت میں بغیر مزید غور کے یہ فرض کر لینا صحیح نہیں ہے

اگر ف (ھ، ک) = $\frac{ھ^2 - ک^2}{ھ^2 + ک^2}$

تو نہا نہا ف (ھ، ک) = -۱ اور نہا نہا ف (ھ، ک) = +۱
ک←۰ ھ←۰ ھ←۰ ک←۰

مثال: م فرلا + ن فرما = ۰ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱۸)
کے ٹھیک تفرقی ہونے کی ضروری شرط دفعہ ۱۵۵ کے مطابق ہے

$\frac{جفا م}{جفا ما} = \frac{جفا ن}{جفا لا}$ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱۹)

کیونکہ اگر جملہ (۱۸) فرع کے مساوی ہو تو

م = $\frac{جفا ع}{جفا لا}$ اور ن = $\frac{جفا ع}{جفا ما}$ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (۲۰)

اور اس لئے (۱۹) کے دونوں جزوی تفرقات میں سے ہر ایک

$\frac{جفا^2 ع}{جفا ما جفا لا}$ یا $\frac{جفا^2 ع}{جفا لا جفا ما}$

کے مساوی ہے۔ اس مسئلہ کے عکس کے طور پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر شرط (۱۹) صحیح ہے تو جملہ (۱۸) ٹھیک تفرقی ہوگا۔

فرض کرو کہ و تفاعل ∫ م فرلا کو جسمیں تکمل، ما کو مستقل مانکر نکالا گیا ہے ظاہر کرتا ہے

اس لئے جف و / جف لا = م .... (۲۱)

اور جف ن / جف لا = جف م / جف ما = جف² و / جف لا جف ما

یعنی جف / جف لا (ن − جف و / جف ما) = ۰ .... (۲۲)

اب دفعہ ۵۶ کے مطابق اس سے ظاہر ہے کہ لا کے لحاظ سے ن − جف و / جف ما ۵۰۵
مستقل ہے، یعنی صرف ما کا تفاعل ہے۔ اسکی قیمت فَ(ما) سے ظاہر ہو تو

ن = جف و / جف ما + فَ(ما) .... (۲۳)

اب اگر ہم لکھیں ع = و + ف(ما) .... (۲۴)

تو نتائج (۲۱) اور (۲۳) سے حاصل ہوتا ہے

جف ع / جف لا = م اور جف ع / جف ما = ن .... (۲۵)

اور اس لئے م فرلا + ن فرما = فرع .... (۲۶)

۱۹۴ ۔ ٹیلر کے مسئلہ کی توسیع :۔

فرض کرو کہ فہ(لا، ما) متغیروں لا اور ما کا ایسا تفاعل ہے جو متغیروں کی زیر غور قیمتوں کے لئے مسلسل ہے اور کسی خاص نمبر تک اس کے مشتقات بھی مسلسل ہیں اور

فہ(ا + ھ، ب + ک) .... (۱)

کا پھیلاؤ ھ اور ک کی صعودی قوتوں میں درکار ہے۔ پہلے ہم ھ اور ک

ہیں دوسرے درجے کی رقموں تک پھیلاؤ کے حاصل کرنے کے سیدھے طریقے کو بیان کرینگے۔ سب سے پہلے مسئلہ ٹیلر کی رو سے ھ کی قوتوں میں پھیلانے سے

$$\text{فہ}(\text{ا}+\text{ھ}،\ \text{ب}+\text{ک}) = \text{فہ}(\text{ا}،\ \text{ب}+\text{ک}) + \text{ھ}\ \text{فہ}_{\text{لا}}(\text{ا}،\ \text{ب}+\text{ک}) + \frac{\text{ھ}^{۲}}{۲}\ \text{فہ}_{\text{لالا}}(\text{ا}،\ \text{ب}+\text{ک}) + \cdots \quad (۲)$$

نیز اسی مسئلہ سے

$$\left.\begin{aligned} \text{فہ}(\text{ا}،\ \text{ب}+\text{ک}) &= \text{فہ}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \text{ک}\ \text{فہ}_{\text{ما}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \frac{\text{ک}^{۲}}{۲}\ \text{فہ}_{\text{ماما}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \cdots \\ \text{فہ}_{\text{لا}}(\text{ا}،\ \text{ب}+\text{ک}) &= \text{فہ}_{\text{لا}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \text{ک}\ \text{فہ}_{\text{مالا}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \cdots \\ \text{فہ}_{\text{لالا}}(\text{ا}،\ \text{ب}+\text{ک}) &= \text{فہ}_{\text{لالا}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \cdots \end{aligned}\right\} \cdots (۳)$$

(۳) کے نتائج کو (۲) میں درج کرنے سے

$$\text{فہ}(\text{ا}+\text{ھ}،\ \text{ب}+\text{ک}) = \text{فہ}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \{\text{ھ}\ \text{فہ}_{\text{لا}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \text{ک}\ \text{فہ}_{\text{ما}}(\text{ا}،\ \text{ب})\}$$
$$+ \frac{۱}{۲}\left[\text{ھ}^{۲}\ \text{فہ}_{\text{لالا}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + ۲\ \text{ھ}\ \text{ک}\ \text{فہ}_{\text{مالا}}(\text{ا}،\ \text{ب}) + \text{ک}^{۲}\ \text{فہ}_{\text{ماما}}(\text{ا}،\ \text{ب})\right] + \cdots \quad (۴)$$

اگر ہم ابتدائی پھیلاؤ میں دفعہ ۱۰۵ کے مطابق مختلف باقی رقموں کی شکل پر غور کریں تو ظاہر ہے کہ (۴) کی باقی رقم ذیل کے نمونہ کی ہوگی

$$\frac{۱}{۳!}\{\text{ج}_{۱}\ \text{ھ}^{۳} + ۳\ \text{ج}_{۲}\ \text{ھ}^{۲}\ \text{ک} + ۳\ \text{ج}_{۳}\ \text{ھ}\ \text{ک}^{۲} + \text{ج}_{۴}\ \text{ک}^{۳}\} \cdots (۵)$$

جہاں $\text{ج}_{۱}$، $\text{ج}_{۲}$، $\text{ج}_{۳}$، $\text{ج}_{۴}$ ایسے تفاعل ہیں ا، ب، ھ، ک کے جو ھ اور ک کو لاانتہا چھوٹے کرنے پر محدود رہتے ہیں پس باقی ھ، ک میں تیسرے رتبہ کا ہے۔

مذکورہ بالا نتیجہ کی صداقت کی شرائط یہ ہیں کہ فہ(لا، ما) اور اسکے ۵۰۶
تیسرے رتبہ تک کے مشتقات متغیروں کی زیر غور تمام قیمتوں کے لئے

مسلسل ہیں۔ نتیجہ (۴) کو ذرا مختلف ترقیم میں ذیل کی طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$فا (لا + ھ، ما + ک) = فا (لا، ما) + (ھ جف فا/جف لا + ک جف فا/جف ما)$$

$$+ ½ (ھ² جف² فا/جف لا² + ۲ ھ ک جف² فا/جف لا جف ما + ک² جف² فا/جف ما²) + .. (۶)$$

جہاں بائیں جانب اختصار کے لئے فا (لا، ما) کی بجائے صرف فا لکھا گیا ہے۔ اس سے بھی زیادہ مختصر شکل یہ ہے

$$فا (لا + ھ، ما + ک) = فا (لا، ما) + (ھ فا_{لا} + ک فا_{ما})$$

$$+ ½ (ھ² فا_{لالا} + ۲ ھ ک فا_{لاما} + ک² فا_{ماما}) + ... (۷)$$

نیز اگر ع متبوع متغیروں لا اور ما کا کوئی تفاعل ہو اور دفعہ ۷۵ کے مطابق متغیروں میں مف لا، مف ما کے اضافہ کی وجہ سے ع میں مف ع کا اضافہ ہو تو ضابطہ (۷) ذیل کے معادل ہے

$$مف ع = جف ع/جف لا مف لا + جف ع/جف ما مف ما$$

$$+ ½ [جف² ع/جف لا² (مف لا)² + ۲ جف² ع/جف لا جف ما مف لا مف ما + جف² ع/جف ما² (مف ما)²] + ... *$$

$$...... (۸)$$

اس امر پر توجہ ڈالنا مناسب ہوگا کہ (۴) کے ثبوت میں

$$فا_{مالا} (ا، ب) = فا_{لاما} (ا، ب) ...... (۹)$$

کے فرض کرنے کی ضرورت نہیں ہوئی۔

اگر ہم نے (۱) کے پھیلاؤ کو ھ کی بجائے پہلے ک کی قوتوں میں

* ان صورتوں میں جن میں تین یا زیادہ متبوع متغیر شریک ہوں اس دفعہ کی تحقیقات کی توسیع بالکل عیاں ہے

پھیلایا ہوتا تو (۴) کے مماثل نتیجہ حاصل ہوتا لیکن اسمیں فما لا (ا، ب) کی بجائے فما لا ما (ا، ب) نمودار ہوتا۔ اُن دو شکلوں کے مقابلہ سے دفعہ ۱۹۴ کے مسئلہ کا ایک مختلف ثبوت حاصل ہوجاتا ہے۔

۱۹۵ – پھیلاؤ میں عام رقم :– پھیلاؤ (۷) میں عام رقم دریافت کرنے کے لئے ایک مختلف طریقہ ذیل میں درج ہے۔

فرض کرو کہ ھ = عا ت، ک = بہ ت اور

فا (ت) = فما (لا + ھ، ما + ک) = فما (لا + عا ت، ما + بہ ت) .. (۱)

اس کو ت کا تفاعل فرض کرکے میکلورن کے مسئلہ سے پھیلایا جا سکتا ہے اور اسکی عام رقم ہوگی

ت^ن / لن فا^(ن) (۰) .... (۲)

۵۰۷ اب اگر تھوڑی دیر کے لئے ہم لا + عا ت = ع اور ما + بہ ت = و فرض کریں تو

جف فما / جف لا = جف فما / جف ع · جف ع / جف لا = جف فما / جف ع

جف فما / جف ما = جف فما / جف و · جف و / جف ما = جف فما / جف و ...... (۳)

جس میں فما (ع، و) کی بجائے صرف فما لکھا گیا ہے۔

اِس لئے فاَ (ت) = جف فما / جف ع · جف ع / جف ت + جف فما / جف و · جف و / جف ت

= عا جف فما / جف لا + بہ جف فما / جف ما = (عا جف / جف لا + بہ جف / جف ما) فما (ع، و)

.... (۴)

آخری نتیجہ صریحاً ع اور و کا تفاعل ہے اور اوپر کی دلائل کے مکرر استعمال سے

$$\text{فا}(\text{ت}) = \left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)\left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)\text{فا}(\text{ع}،\text{و})$$

$$= \left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{2}\text{فا}(\text{ع}،\text{و}) \quad ..(۵)$$

اور عموماً $$\text{فا}^{(\text{ن})}(\text{ت}) = \left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}\text{فا}(\text{ع}،\text{و}) \quad ..(۶)$$

جہاں کہ عامل $\left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}$ کو عاملات $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ کی خاصیت مبادل کی وجہ سے مسئلہ ثنائی سے پھیلایا جاسکتا ہے۔ چونکہ ت صرف مرکبات لا + عا ت اور ما + با ت میں نمودار ہوتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ (۶) میں بائیں جانب کے تفرقوں کے عمل سے پہلے یا بعد ت = ۰ رکھنے سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔ اس لئے پھیلاؤ میں عام رقم ہو گی

$$\frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{فا}^{(\text{ن})}(۰) = \frac{\text{ت}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\left(\text{عا}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{با}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}\text{فا}(\text{لا}،\text{ما})$$

$$= \frac{1}{\underline{|\text{ن}}}\left(\text{ھ}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \text{ک}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)^{\text{ن}}\text{فا}(\text{لا}،\text{ما})$$

$$= \frac{1}{\underline{|\text{ن}}}\Big[\text{ھ}^{\text{ن}}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}}} + \text{ن}\,\text{ھ}^{\text{ن}-1}\text{ک}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-1}\text{جف ما}}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{ھ}^{\text{ن}-2}\text{ک}^{2}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فا}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-2}\text{جف ما}^{2}} + \cdots\Big] \quad \cdots(۷)$$

جہاں فا(لا، ما) کی بجائے فا لکھا گیا ہے۔

مثال :- ثابت کرو کہ اگر فا(لا، ما) متغیر لا، ما کا درجہ م کا متجانس

تفاعل ہے، تو $\text{لا}\ \text{فہ}_{\text{لا}} + \text{ما}\ \text{فہ}_{\text{ما}} = \text{م}\ \text{فہ}$ .... (۸)

اور $\text{لا}^{2}\ \text{فہ}_{\text{لالا}} + ۲\ \text{لا ما}\ \text{فہ}_{\text{لاما}} + \text{ما}^{2}\ \text{فہ}_{\text{ماما}} = \text{م}(\text{م}-۱)\ \text{فہ}$ .... (۹)

درجہ م کے متجانس تفاعل کی عام تعریف یہ ہے کہ اگر لا اور ما کو کسی نسبت مہ میں بدلا جائے تو تفاعل $\text{مہ}^{\text{م}}$ کی نسبت میں بدل جاتا ہے۔

یعنی $\text{فہ}(\text{لا مہ}،\ \text{ما مہ}) = \text{مہ}^{\text{م}}\ \text{فہ}(\text{لا}،\ \text{ما})$ ... (۱۰)

اِس مساوات میں $\text{مہ} = ۱ + \text{ت}$ درج کرو۔ اب نتیجہ (۸) سے ۵۰۸

$$\text{فہ}(\text{لا} + \text{لات}،\ \text{ما} + \text{مات}) = \text{فہ}(\text{لا}،\ \text{ما})$$

$$+\ \text{ت}(\text{لا}\ \text{فہ}_{\text{لا}} + \text{ما}\ \text{فہ}_{\text{ما}}) + \frac{۱}{۲}\text{ت}^{2}(\text{لا}^{2}\ \text{فہ}_{\text{لالا}} + ۲\ \text{لا ما}\ \text{فہ}_{\text{لاما}} + \text{ما}^{2}\ \text{فہ}_{\text{ماما}}) + \dots\dots$$

اور مسئلہ ثنائی سے

$$(۱+\text{ت})^{\text{م}}\ \text{فہ}(\text{لا}،\ \text{ما}) = \left[۱ + \text{م ت} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{۲\times۱}\text{ت}^{2} + \dots\right]\text{فہ}$$

اِن دو نتیجوں میں ت اور ت^{2} کے سروں کو مساوی رکھنے سے ضابطہ (۹) اور (۱۰) حاصل ہو سکتے ہیں۔

عام طور پر، $\text{ت}^{\text{ن}}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے اور پھر (۷) استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فہ}}{\text{جف لا}^{\text{ن}}} + \text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-۱}\text{ما}\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فہ}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-۱}\text{جف ما}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\text{لا}^{\text{ن}-۲}\text{ما}^{2}\times\frac{\text{جف}^{\text{ن}}\text{فہ}}{\text{جف لا}^{\text{ن}-۲}\text{جف ما}^{2}} + \dots\dots = \text{م}(\text{م}-۱)(\text{م}-۲)\dots(\text{م}-\text{ن}+۱)\ \text{فہ} \quad (۱۱)$$

یہ دو متبوع متغیروں کی صورت میں "متجانس تفاعلوں کا مسئلہ یولر" ہے۔ تین یا زیادہ متبوع متغیروں کی صورت میں اسکی توسیع بالکل عیاں ہے۔

۱۹۶ـ دو متغیروں کے تفاعل کی اقل اور اعظم قیمتیں اور انکی ہندسی تعبیر۔

مسئلہ ٹیلر کی توسیع شدہ شکل کی مدد سے ہم دفعہ ۵۲ کے مطابق دو متبوع متغیر لا، ما کے تفاعل ع کی اعظم اور اقل قیمتوں کی بحث کی توسیع کر سکتے ہیں۔ دفعہ ۱۹۴ (۸) سے ظاہر ہے کہ مف لا، مف ما کی مطلق قیمت کو مسلسل کم کیا جائے لیکن انکی نسبت کو مستقل رکھا جائے تو انتہا میں مف ع کی علامت وہی ہے جو ذیل کی ہے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{مف لا}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{مف ما} \quad \cdots\cdots\cdots (۱)$$

لیکن اگر $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ دونوں صفر نہیں تو (۱) کی علامت مف لا اور مف ما کی علامت بدلنے سے بدل جاتی ہے۔ پس چند تغیرات کے لئے مف ع مثبت ہوگا اور باقی کے لئے منفی۔ بہ الفاظ دیگر ع کی اعظم یا اقل قیمت صرف اس وقت ہوگی جبکہ ایکساتھ

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}=۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}=۰ \quad \cdots\cdots\cdots (۲)^{*}$$

اب فرض کرو کہ شرط (۲) پوری ہوتی ہے تو

$$\text{مف ع}=\frac{۱}{۲}\left[\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف لا}^{۲}}(\text{مف لا})^{۲}+۲\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\,\text{مف لا مف ما}+\frac{\text{جف}^{۲}\text{ع}}{\text{جف ما}^{۲}}(\text{مف ما})^{۲}\right]+\cdots\cdots\cdots (۳)$$

اگر مف لا اور مف ما کافی چھوٹے ہیں تو مف ع کی علامت (۳) میں ۵۰۹
درج شدہ رقوم پر ہی منحصر ہوگی اور اعلیٰ تر رتبہ کی رقموں کا کوئی اثر نہیں پڑیگا۔

---

* دفعہ ۱۹۴ کی تحقیقات میں فرض کر لیا گیا ہے کہ دونوں مشتق مسلسل ہیں اور اسلئے محدود ہیں۔ یعنی ہم شروع ہی سے دفعہ ۵۱ میں غور کردہ صورت کی مشابہ دو ابعادی صورت کو خارج کر دیتے ہیں۔

اب علم الجبرا سے معلوم ہے کہ تجانس درجہ دوم کے تفاعل

$$\text{ا}\,\text{طا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{طا}\,\text{ضا} + \text{ب}\,\text{ضا}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

کی علامت ناتغیر پذیر ہے صرف اگر

$$\text{ا}\,\text{ب} > \text{ھ}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

اور اس صورت میں جملہ کی علامت ا یا ب کی علامت ہے۔

اس سے اخذ ہو سکتا ہے کہ جب شرط (۲) پوری ہو تو |مف لا| اور |مف ما| کی کسی قیمتوں کے لئے جو ایک احاطہ سے باہر نہ ہوں مف ع کی علامت ایک ہی رہے گی بشرطیکہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} > \left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (۶)$$

اور اس صورت میں مف ع کی علامت وہی ہوگی جو $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}$ یا $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}$ کی ہے۔ اور ع کی اعظم یا اقل قیمت $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}$ کے منفی یا مثبت ہونے پر منحصر ہوگی۔

اگر

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} < \left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (۷)$$

تو کسر $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی چند قیمتوں کے لئے ع کا اضافہ مثبت ہوگا اور چند کے لئے منفی۔ اس لئے ع کی قیمت اگرچہ دفعہ ۵۱ کے مطابق مقیم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔

اگر

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (۸)$$

تو (۳) کی بائیں جانب کی رقمیں مف لا اور مف ما میں ایک خطی جملہ کے مربع کے مثبت یا منفی کے مساوی ہیں اور اس لئے کسر

$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی ایک خاص قیمت کے لئے یہ صفر ہو گی۔ اب چونکہ مف ع تیسرے رتبہ کی مقدار ہے اس لئے عموماً اعظم یا اقل قیمت نہیں ہو گی لیکن اس سوال کا قطعی فیصلہ پھیلاؤ کی مزید رقموں پر غور کرنے کے بغیر نہیں کیا جا سکتا۔

اگر دوسرے رتبہ کے جزوی مشتق $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}$ ، $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}$ سب صفر ہوں تو اس صورت میں بھی یہی نتیجہ نکلتا ہے۔

مذکورہ بالا تحقیقات کی ہندسی تعبیر بہت دلچسپ ہے۔ اگر دفعہ ۴۳ کے مطابق ی سطح کا عمودی معین ہو اور لا، ما افقی مستوی میں مستطیلی محدد ہوں تو اعظم یا اقل بلندی والے نقطہ کے لئے پہلی شرط ہے

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۰ \quad \ldots\ldots \quad (۹)$$

چونکہ ان مساواتوں سے لازم ہو جاتا ہے کہ مف ی، اضافوں مف لا اور مف ما میں دوسرے رتبہ کی مقدار ہے اسلئے نتیجہ نکلتا ہے کہ زیرِ غور نقطہ ن پر ہر عمودی تراش کا مماسی خط افقی ہو گا یعنی مماسی مستوی افقی ہو گا۔

۵۱۰ اس کے بعد ہمیں غور کرنا ہے کہ آیا سطح نقطہ ن کے مماسی مستوی کو کاٹتی ہے یا نہیں۔ اگر کوئی ایسا خطِ تقاطع ہے تو اس پر مف ی = ۰ اور اگر (۳) میں مف ما = م مف لا درج کریں اور انتہا میں مف لا کو صفر کر دیں تو نقطہ ن پر منحنی تقاطع کے مماسی خطوط کی سمتیں ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2} + ۲\,\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\,\text{م} + \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2}\,\text{م}^2 = ۰ \quad (۱۰)$$

م میں اس دو درجی مساوات کی اصلیں خیالی ہوں گی اگر

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}\;\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} > \left(\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (11)$$

اس صورت میں ن کی عین قربت میں زیر غور سطح مماسی مستوی کے صرف ایک طرف واقع ہوگی اور ن پر کا ہم ارتفاعی خط (Contour-line) صرف ایک نقطہ میں تحویل ہو جاتا ہے - اس لئے نقطہ ن پر بلندی کی اعظم قیمت یا اقل قیمت کا ہونا $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ اور $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2}$ کے منفی یا مثبت ہونے پر منحصر ہے یعنی دفعہ ۶۷ کے مطابق اعظم قیمت ہوگی اگر مستوی ی لا اور ی ما کے متوازی عمودی تراشیں اوپر کی طرف محدب ہیں اور اقل قیمت اگر تراشیں مقعر ہیں - اگر لا اور ما محوروں کو افقی مستویوں میں گھمایا جائے تو اخذ ہوتا ہے کہ اس صورت میں ن میں سے گزرنے والی ہر عمودی تراش اوپر کی طرف بالترتیب محدب یا مقعر ہوگی -

لیکن اگر
$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}\;\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} < \left(\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (12)$$

تو مساوات (۱۰) کی اصلیں حقیقی اور جداگانہ ہیں - ہم ارتفاعی خط پر نقطہ ن عقدہ ہے اور اسکی دو شاخیں سطح کو دو حصوں میں بانٹ دیتی ہیں، سطح کا ایک حصہ مماسی مستوی کے اوپر واقع ہوگا اور ایک حصہ نیچے -

اگر
$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2}\;\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = \left(\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\right)^2 \quad \ldots\ldots (13)$$

تو مساوات (۱۰) کی اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں - ہم ارتفاعی خط پر نقطہ ن عموماً قرن نقطہ ہے اور اس سوال کا جواب کہ اس صورت میں ن کی بلندی اعظم ہے یا اقل، بغیر مزید تحقیق کے نہیں دیا جاسکتا -

مثال ۱ - فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{لا}^3 - ۳\,\text{ا لا}^2 - ۴\,\text{ا ما}^2 + \text{ج} \quad \ldots\ldots (14)$

اس سے $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۳\,\text{لا}(\text{لا} - ۲\,\text{ا})$، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = -۸\,\text{ا ما} \quad \ldots (15)$

اور $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} = ۶(\text{لا} - \text{ا})$ ، $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = ۰$ ، $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2} = -۸\text{ا}$ .. (۱۶)

شرائط (۹) پوری ہوتی ہیں جبکہ لا = ۰ ، ما = ۰ یا لا = ۲ا ، ما = ۰ ۔ اصلوں کا پہلا جوڑا لاتساوات (۱۱) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2}$ منفی ہے اس لئے اِس نقطہ پر ی کی اعظم قیمت ہے ۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا لاتساوات (۱۲) کو پورا کرتا ہے اِس لئے ی کی اعظم یا اقل قیمت نہیں ہے ۔ اس مثال کے ہم ارتفاعی خطوط جلد دوم صفحہ ۳۹۲ شکل ۶۹ میں دکھائے گئے ہیں ۔

سوال ۲ :۔ فرض کرو کہ $\text{ی} = (\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2 - ۲\text{ا}^2(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) + \text{ج}$ .... (۱۷)

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۴\text{لا}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2) ، \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۴\text{ما}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ا}^2) \quad ... (۱۸)$$

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} = ۴(۳\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ا}^2) ، \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = ۸\text{لا ما} ، \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2}$$
$$= ۴(\text{لا}^2 + ۳\text{ما}^2 + \text{ا}^2) \quad ..... (۱۹)$$

۵۱۱ اِس صورت میں مساوات (۹) کی حقیقی اصلیں یہ ہیں لا = ۰ ، ما = ۰ اور لا = ا ، ما = ۰ ۔ اصلوں کا پہلا جوڑا رشتہ (۱۲) کو پورا کرتا ہے اور اس لئے ی کی اعظم یا اقل قیمت اس نقطہ پر نہیں ہے ۔ اصلوں کا دوسرا جوڑا لا = ± ا ، ما = ۰ ۔ شرط (۱۱) کو پورا کرتا ہے اور چونکہ ان قیمتوں کے لئے $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ مثبت ہے اِس لئے ی کی اقل قیمت ہوگی ۔ سطح (۱۷) کے ہم ارتفاعی خطوط جلد دوم صفحہ ۴۰۸ کی شکل ۱۰۶ میں دکھائے گئے ہیں سطح میں دو شاخ خلائیں[۱] ہیں اور ان کے درمیان ایک ڈنڈا[۲] ہے اگر مساوات (۱۷) کی بائیں جانب کی علامت بدل دی جائے تو خلا کی بجائے سطح کی دو چوٹیاں[۳] ہونگی اور انکے درمیان گزرگاہ ہوگی ۔

Peaks ۵۳   Bar ۵۲   Hollows ۵۱

۱۹۷۔ مشروط تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں۔

سوال یہ ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یعنی مقیم قیمتیں ایسے تفاعل کی دریافت کیجائیں جو ن متغیروں کا تفاعل ہو لیکن اس کے تمام متغیر غیر تابع نہ ہوں بلکہ م معلومہ رشتوں سے وابستہ ہوں (ن > م) اقل اور اعظم کے امتیاز کرنے کے طریقہ پر اس دفعہ میں غور نہیں کیا جائیگا۔ ان مقیم قیمتوں میں اصولاً م معلومہ رشتوں کی مدد سے تفاعل میں سے م متغیروں کو ساقط کرسکتے ہیں اور تب تفاعل صرف (ن ۔ م) متبوع متغیروں کا تفاعل رہ جائے گا لیکن عملی طور پر یہ طریقہ اگر ناممکن نہ بھی ہو تو بھی بہت طویل ہوگا۔ اس مشکل کو حل کرنے کے لئے غیر معین ضاربوں کا طریقہ ابتدا میں لگرانج نے دریافت کیا تھا۔ اُن صورتوں میں جبکہ دیا ہوا تفاعل اور معلومہ رشتے متشاکل سے جملے ہیں یہ طریقہ از حد مفید ہے۔

ذیل کی مثالوں سے یہ طریقہ کافی طور پر واضح ہو جائیگا۔

(آ) فرض کرو کہ ع ایک تفاعل ہے

ع = فا (لا، ما، ی) .... (۱)

جبکہ لا، ما، ی رشتہ

ف (لا، ما، ی) = ۰ ..... (۲)

سے وابستہ ہیں۔ اس امر سے کہ مف ع = ۰ حاصل ہوتا ہے

(جف فا / جف لا) مف لا + (جف فا / جف ما) مف ما + (جف فا / جف ی) مف ی = ۰ (۳)

لاانتہا چھوٹے تغیرات مف لا، مف ما، مف ی سب ایکدوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں بلکہ ذیل کے رشتہ سے وابستہ ہیں

(جف ف / جف لا) مف لا + (جف ف / جف ما) مف ما + (جف ف / جف ی) مف ی = ۰ (۴)

کیونکہ مف ف = ۰۔

ان نتائج میں سے مف ی کو ساقط کر سکتے ہیں۔ تب حاصل اسقاط میں مف لا، مف ما کو غیر تابع فرض کر سکتے ہیں اور انکے سروں کو علیحدہ علیحدہ صفر رکھ سکتے ہیں۔ اس سے زیادہ متشاکل طریقہ یہ ہوگا کہ (۳) اور (۴) سے ذیل کی مساوات بنائی جائے

$$\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \text{لہ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\right)\text{مف لا} + \left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} - \text{لہ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\right)\text{مف ما}$$

$$+\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} - \text{لہ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)\text{مف ی} = ۰ \quad (۵)$$

اس وقت تک لہ کوئی بھی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔ لیکن اب ہم فرض ۵۱۲
کرتے ہیں کہ لہ کی قیمت اس شرط سے دریافت کی جاتی ہے کہ ان محدود فرقوں میں سے ایک کا سر صفر ہو۔ فرض کرو کہ مف ی کا سر صفر ہے۔ اب چونکہ مف لا اور مف ما میں کوئی لازمی تعلق نہیں ہے اس لئے ان کے سر بھی جداگانہ صفر ہونگے۔ اس سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \text{لہ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}،\quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \text{لہ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}،\quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} = \text{لہ}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

ان تین مساواتوں اور مساوات (۲) سے چار ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار غیر معلوم مقداریں لا، ما، ی، لہ دریافت ہو سکتے ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فہ}(\text{لا، ما، ی}) \quad \ldots\ldots (۷)$

جبکہ متغیرات ان دو رشتوں سے وابستہ ہیں

$$\text{فا}(\text{لا، ما، ی}) = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{ف}(\text{لا، ما، ی}) = ۰ \quad \ldots\ldots (۸)$$

مذکورہ بالا طریقہ پر عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}}-\text{لما}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}-\text{مما}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\right)\text{مف لا}+\left(\frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}}-\text{لما}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right.$$

$$\left.-\text{مما}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\right)\text{مف ما}+\left(\frac{\text{جف فما}}{\text{جف ی}}-\text{لما}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}-\text{مما}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)\text{مف ی}=۰$$

.........(۹)

جہاں لما اور مما غیر معیّن ضارب ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ انہیں اس طرح چُن لیا گیا ہے کہ مف ما اور مف ی کے سر صفر ہیں۔ اسلئے مف لا کا سر بھی صفر ہوگا۔ اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}}=\text{لما}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}+\text{مما}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}،\ \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}}=\text{لما}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}$$

$$+\text{مما}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}،\ \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ی}}=\text{لما}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}+\text{مما}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\quad\text{....(۱۰)}$$

اِن تین مساواتوں اور (۸) کی دو مساواتوں سے پانچ غیر معلوم مقداریں لا، ما، ی، لما، مما دریافت ہوسکتی ہیں۔

مثال (۱)　　$\text{ع}=\text{لا}^{۲}+\text{ما}^{۲}$ .... (۱۱)

کی قائم قیمتیں اس شرط کے ماتحت دریافت کرو کہ

$$\text{ا لا}^{۲}+۲\text{ھ لا ما}+\text{ب ما}^{۲}=۱\quad\text{.......(۱۲)}$$

یہ سوال مرکزی مخروطیوں کے صدر محوروں کو دریافت کرنے کا ہے۔

اس طریقہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}=\text{لما}(\text{ا لا}+\text{ھ ما})،\ \text{ما}=\text{لما}(\text{ھ لا}+\text{ب ما})\quad\text{.......(۱۳)}$$

انہیں بالترتیب لا اور ما سے ضرب دیکر جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع}=\text{لما}\quad\text{..........(۱۴)}$$

پس $(\text{ا ع}-۱)\text{لا}+\text{ھ ع ما}=۰$ اور $\text{ھ ع لا}+(\text{ب ع}-۱)\text{ما}=۰$ (۱۵)

نسبت لا : ما کو ساقط کرنے سے ۵۱۲

$$(\text{ا ب}-\text{ھ}^{۲})\text{ع}^{۲}-(\text{ا}+\text{ب})\text{ع}+۱=۰\quad\text{.....(۱۶)}$$

نیز ع کو ساقط کرنے سے

$$\text{ھ}(\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2}) = (\text{ا} - \text{ب})\,\text{لا ما} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

مثال (۲)

$$\text{ع} = \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

کی قائم قیمتیں دریافت کرو جبکہ

$$\text{ا لا}^{2} + \text{ب ما}^{2} + \text{ج ی}^{2} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = ۰ \quad (۱۹)$$

یہ سوال مخروطی نما سطح کی مرکزی مستوی تراش کے صدر محاور دریافت کرنیکا ہے
ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\text{لا} = \text{لہ ا لا} + \text{مہ ل}،\ \text{ما} = \text{لہ ب ما} + \text{مہ م}،\ \text{ی} = \text{لہ ج ی} + \text{مہ ن} \quad \ldots (۲۰)$$

انہیں بالترتیب لا، ما، ی سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\text{ع} = \text{لہ} \quad \ldots\ldots (۲۱)$$

پس

$$\text{لا} + \frac{\text{مہ ل}}{\text{اع} - ۱} = ۰،\ \text{ما} + \frac{\text{مہ م}}{\text{ب ع} - ۱} = ۰،\ \text{ی} + \frac{\text{مہ ن}}{\text{ج ع} - ۱} = ۰ \quad (۲۲)$$

انہیں بالترتیب ل، م، ن سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\frac{\text{ل}^{2}}{\text{اع} - ۱} + \frac{\text{م}^{2}}{\text{ب ع} - ۱} + \frac{\text{ن}^{2}}{\text{ج ع} - ۱} = ۰ \quad \ldots\ldots (۲۳)$$

جو ع میں دو درجی مساوات ہے۔ اگر ع اسکی ایک اصل ہو تو لا : ما : ی نسبتوں کی مماثل قیمتیں (۲۲) سے حاصل ہو سکتی ہیں

یعنی

$$\text{لا} : \text{ما} : \text{ی} = \frac{\text{ل}}{\text{اع} - ۱} : \frac{\text{م}}{\text{ب ع} - ۱} : \frac{\text{ن}}{\text{ج ع} - ۱} \quad \ldots (۲۴)$$

۱۹۸ — لفاف :۔ گذشتہ دفعہ کے طریقہ کے بالکل مماثل طریقہ ایسے منحنی کے لفاف دریافت کرنے میں استعمال ہوسکتا ہے جس کی مساوات میں ن متبدل ہیں جو (ن - ۱) رشتوں سے وابستہ ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ فا (لا ' ما ' عا ' با) = ۰ .... (۱)
کا لفاف مطلوب ہے جبکہ عا اور با رشتہ ف (عا ' با) = ۰
سے وابستہ ہیں۔ منحنی (۱) اور اس کے متصل منحنی کے مقام تقاطع پر
فا (لا ' ما ' عا + مف عا ' با + مف با) - فا (لا ' ما ' عا ' با) = ۰
...... (۳)

یعنی انتہا میں (جف فا / جف عا) مف عا + (جف فا / جف با) مف با = ۰ (۴)

اب تغیرات مف عا اور مف با میں یہ رشتہ ہے ۵۱۴

(جف ف / جف عا) مف عا + (جف ف / جف با) مف با = ۰ ..... (۵)

اسلئے ((جف فا / جف عا) - لہ (جف ف / جف عا)) مف عا + ((جف فا / جف با)

- لہ (جف ف / جف با)) مف با = ۰ (۶)

اگر لہ کو ہم اس شرط سے دریافت کریں کہ مف با کا سر صفر ہو تو ظاہر ہے کہ مف عا کا سر بھی صفر ہوگا۔ تب

(جف فا / جف عا) - لہ (جف ف / جف عا) = ۰ ، (جف فا / جف با) - لہ (جف ف / جف با) = ۰ (۷)

انتہائی نقاطِ تقاطع کے طریق کی مساواتیں (۱)، (۲) اور (۷) میں سے عا، با، لہ ساقط کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال (۱): — خط (لا / عا) + (ما / با) = ۱ .... (۸)
کے لفاف کی مساوات دریافت کرو جبکہ
عا^۲ + با^۲ = ک^۲ .... (۹)
اس طریقہ سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{لا}{عہ^2} = لہ\,عہ \,،\, \frac{ما}{بہ^2} = لہ\,بہ$ ...... (۱۰)

اِس لئے $لہ(عہ^2 + بہ^2) = \frac{لا}{عہ} + \frac{ما}{بہ} = 1$

یعنی $لہ = \frac{1}{عہ^2 + بہ^2} = \frac{1}{ر^2}$ ...... (۱۱)

پس $عہ^3 = ر^2 لا \,،\, بہ^3 = ر^2 ما$ ...... (۱۲)

اِس سے حاصل شدہ عہ اور بہ کی قیمتیں (۹) میں درج کرنے سے $لا^{\frac{2}{3}} + ما^{\frac{2}{3}} = ر^{\frac{2}{3}}$ (دیکھو دفعہ ۱۴۵ کی مثال ۲)۔

مثال ۲:۔ $عہ\,لا + بہ\,ما = 1$ ...... (۱۳)

کا لفاف دریافت کرو جبکہ

$عہ\,بہ + ا\,عہ + ب\,بہ + ج = 0$ ...... (۱۴)

ہمیں ان مساواتوں اور ذیل کی دو مساواتوں میں سے عہ، بہ اور لہ کو ساقط کرنا ہے

$لا = لہ(بہ + ا) \,،\, ما = لہ(عہ + ب)$ ...... (۱۵)

لہ کو ساقط کرنے سے $عہ\,لا - بہ\,ما = ا\,ما - ب\,لا$

اسے (۱۳) کے ساتھ شریک کرنے سے

$عہ\,لا = \frac{1}{2}(ا\,ما - ب\,لا + 1) \,،\, بہ\,ما = \frac{1}{2}(ب\,لا - ا\,ما + 1)$ ...... (۱۶)

عہ اور بہ کی ان قیمتوں کو (۱۴) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$(ب\,لا - ا\,ما)^2 + 4\,ج\,لا\,ما + 2(ا\,ما + ب\,لا) + 1 = 0$ ...... (۱۷)

جو مطلوب لفاف کی مساوات ہے۔

۱۹۹۔ جزوی تفرق کے اطلاقات:۔ ہندسی اور ۵:۵
طبیعی سوالات میں جزوی تفرق کے متعدد مسئلے اکثر پیش آتے ہیں

بطور قاعدہ کے کہا جاسکتا ہے کہ جیسے یہ پیدا ہوں انکے حل پر غور کرنا مفید ہوگا۔ اب ہم ایک دو اسان صورتوں پر غور کریں کے جن سے چند ایسی باتیں واضح ہوجائینگی جنکو ہمیشہ مدنظر رکھنا چاہئیے۔

(۱) فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فہ}(\text{و})$ .... (۱)

جہاں و متبوع متغیر لا، ما کا تفاعل ہے۔ اور فرض کرو کہ ع کے متواتر جزوی مشتقات بلحاظ لا، ما کے مطلوب ہیں۔

اب دفعہ ۳۲ سے $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ ،

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

نیز $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} = \left[\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\text{فہ}'(\text{و})\right]\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا}^2}$

$$= \text{فہ}''(\text{و})\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right)^2 + \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا}^2} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}} = \left[\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\text{فہ}'(\text{و})\right]\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا جف ما}}$$

$$= \text{فہ}''(\text{و})\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا جف ما}} \quad \ldots (۴)$$

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \left[\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\text{فہ}'(\text{و})\right]\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ما}^2}$$

$$= \text{فہ}''(\text{و})\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right)^2 + \text{فہ}'(\text{و})\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ما}^2} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اور علیٰ ہذا۔

(۲) فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فہ}(\text{لا، ما})$ .... (۶)

جہاں لا اور ما متبوع متغیر ت کے دئے ہوئے تفاعل ہیں۔ اور ع کے مشتقات بلحاظ ت کے دریافت طلب ہیں۔

اب دفعہ ۵۹ (آ) سے

$$\frac{\text{فر}\,\text{ع}}{\text{فر}\,\text{ت}} = \frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}}\,\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}} + \frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

دوبارہ تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ع}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} = \frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} + \frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}^2}$$

$$+ \frac{\text{فر}}{\text{فر}\,\text{ت}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}} + \frac{\text{فر}}{\text{فر}\,\text{ت}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}} \quad \ldots (۸)$$

اب مذکورہ مسئلہ سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر}\,\text{ت}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ما}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}}$$

اور

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر}\,\text{ت}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{لا}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}$$

$$+ \frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ما}}\left(\frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}}\right)\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}}$$

۵۱۶ اب (۸) میں درج کر کے دفعہ ۱۹۳ کے مطابق قانون متبادلہ کے استعمال سے

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ع}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} = \frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} + \frac{\text{جف}\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}^2}\left(\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}\right)^2$$

$$+ 2\,\frac{\text{جف}^2\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{لا}\,\text{جف}\,\text{ما}}\,\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}} + \frac{\text{جف}^2\,\text{فا}}{\text{جف}\,\text{ما}^2}\left(\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}}\right)^2 \quad \ldots (۹)$$

اس طریقہ کو جاری رکھا جا سکتا ہے لیکن اس سے زیادہ بڑھنے کی شاذ ہی ضرورت پڑتی ہے۔

بعض اوقات حرکیاتی سوال میں محددوں کے تبدیل کرنے میں اس کی ضرورت پڑتی ہے۔ بطور مثال فرض کرو کہ دو ابعاد میں کارٹیزی محددوں سے قطبی محددوں میں تبدیل کرنا ہے یعنی

لا = رجم طہ ، ما = رجب طہ

مذکورہ بالا طریقہ سے جز^۲ لا / جز ت^۲ اور جز^۲ ما / جز ت^۲ کو ر اور طہ کے مشتقات (بلحاظ ت کے) کی رقموں میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

مثال :- فرض کرو کہ ی = فہ (لا - ج ت) + خہ (لا + ج ت) ...(۱۰)

جہاں متغیرات لا اور ت غیر تابع ہیں۔

اختصار کیلئے لا - ج ت = ع اور لا + ج ت = و رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

جف ی / جف لا = فہ َ(ع) + خہ َ(و) ، جف ی / جف ت = -ج فہ َ(ع) + ج خہ َ(و) .... (۱۱)

اور جف^۲ ی / جف لا^۲ = فہ ً(ع) + خہ ً(و) ، جف^۲ ی / جف ت^۲ = ج^۲ فہ ً(ع) + ج^۲ خہ ً(و) .... (۱۲)

اس لئے جف^۲ ی / جف ت^۲ = ج^۲ جف^۲ ی / جف لا^۲ .... (۱۳)

۲۰۰ - تضمینی تفاعل کا تفرق :-

فرض کرو کہ ما متغیر لا کا تفاعل ہے جو تضمینی طور پر مساوات

فہ (لا ، ما) = ۰ .... (۱)

سے بیان کیا گیا ہے۔ ما کے متواتر مشتقات بلحاظ لا کے دریافت طلب ہیں دفعہ ۵۹ کے مطابق

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

اگر اسے بلحاظ لا کے تفرق کریں تو

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\right) + \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۳})$$

۵۱۷ اب دفعہ ۵۹ سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

اس لئے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{فہ}}{\text{جف لا}^{\text{۲}}} + \text{۲}\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{فہ}}{\text{جف لا جف ما}} \cdot \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{فہ}}{\text{جف ما}^{\text{۲}}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{۲}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۴})$$

اگر (۲) سے حاصل شدہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت اسمیں درج کردیں تو

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} = -\frac{\text{فہ}_{\text{لالا}}\,\text{فہ}_{\text{ما}}^{\text{۲}} - \text{۲}\,\text{فہ}_{\text{لاما}}\,\text{فہ}_{\text{لا}}\,\text{فہ}_{\text{ما}} + \text{فہ}_{\text{ماما}}\,\text{فہ}_{\text{لا}}^{\text{۲}}}{\text{فہ}_{\text{ما}}^{\text{۳}}} \quad \ldots\ldots (\text{۵})$$

(۴) کو پھر تفرق کرکے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور $\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}}$ کی قیمت درج کرنے سے $\frac{\text{فر}^{\text{۳}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۳}}}$ کی قیمت دریافت ہوسکتی ہے اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ کے مشتقوں کیلئے ضابطہ (۵) سے ایسے منحنیات کے انحنا کے لئے جملہ حاصل ہوجاتا ہے جنکی مساوات قائم محددون میں (۱) سے بیان کی گئی ہو۔

یعنی $\frac{۱}{ر} = \frac{\text{فہ}_{\text{لل}}\,\text{فہ}_{\text{ما}}^{۲} - ۲\,\text{فہ}_{\text{لما}}\,\text{فہ}_{\text{ل}}\,\text{فہ}_{\text{ما}} + \text{فہ}_{\text{ماما}}\,\text{فہ}_{\text{ل}}^{۲}}{(\text{فہ}_{\text{ل}}^{۲} + \text{فہ}_{\text{ما}}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$ .... (۶)

نقطہ انعطاف کے لئے شرط (۵) کی بائیں جانب کے شمار کنندہ کو صفر رکھنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

یہ ظاہر ہوگا کہ ضابطہ (۴) گذشتہ دفعہ ۱۹۹ کے ضابطہ (۹) میں ت = ل اور ع = ۰ رکھنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۰۱ ۔ متغیر کا بدلنا

(آ) ایک متغیر کے تفاعل کی صورت میں تابع اور غیر تابع متغیروں کو باہم بدل دینا مطلوب ہے۔

دفعہ ۳۲ سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ل}} = \left(\frac{\text{فر ل}}{\text{فر ما}}\right)^{-۱}$ .... (۱)

اس لئے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر ل}^{۲}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر ل}}\left(\frac{\text{فر ل}}{\text{فر ما}}\right)^{-۱} = \frac{\text{فر}}{\text{فر ما}}\left(\frac{\text{فر ل}}{\text{فر ما}}\right)^{-۱}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ل}}$

$= -\left(\frac{\text{فر ل}}{\text{فر ما}}\right)^{-۳}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ل}}{\text{فر ما}^{۲}}$ .... (۲)

اور اسی طرح اعلیٰ مشتقوں کے لئے۔

(۲) فرض کرو کہ ع = فہ (طا، عا) .... (۳)

جہاں طا، عا متبوع متغیر ل اور ما کے معلومہ تفاعل ہیں اور ع کے دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بلحاظ ل اور ما دریافت طلب ہیں۔

اب $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ل}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ل}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ل}}$ ، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ ۵۱۸

$= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}$ ..... (۴)

اس لئے

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}=\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف لا}^2}+\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف لا}^2}$$

$$+\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}$$

$$=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\left(\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\right)^2+۲\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\left(\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)^2+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف لا}^2}$$

(۵) ....

اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\left(\frac{\text{جف طا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}+\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\right)$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف لا جف ما}}$$

$$+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف لا جف ما}}$$ (۶) ...

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2}\left(\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}\right)^2+۲\,\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا جف عا}}\cdot\frac{\text{جف طا}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}$$

$$+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}\left(\frac{\text{جف عا}}{\text{جف ما}}\right)^2+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{طا}}{\text{جف ما}^2}+\frac{\text{جف ع}}{\text{جف عا}}\cdot\frac{\text{جف}^2\text{عا}}{\text{جف ما}^2}$$

(۷) ....

مثال ۱:- ایک ذرہ رفتار کے مکعب کے متناسب مزاحمت کے زیر عمل حرکت کر رہا ہے اس کی مساوات حرکت ہے

$$\frac{\text{ف}^2\text{لا}}{\text{فت}^2} = -\text{ک}\left(\frac{\text{فلا}}{\text{فت}}\right)^3 \quad \dots\dots\dots (۸)$$

اگر ترقیم کے فرق کو مدنظر رکھا جائے تو (۲) سے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}^2\text{ت}}{\text{فلا}^2} = +\text{ک} \quad \dots\dots\dots (۹)$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{ت} = \tfrac{1}{2}\,\text{ک}\,\text{لا}^2 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب} \quad \dots\dots\dots (۱۰)$$

$$\text{مثال ۲:- جملہ}\quad \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} \quad \dots\dots\dots (۱۱)$$

کو قائم محددوں سے قطبی محددوں میں تبدیل کرو۔

لا = ر جم طہ اور ما = ر جب طہ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} &= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ر}} = \text{جم طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{جب طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\\
\frac{\text{جف ع}}{\text{جف طہ}} &= \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}} = \text{ر}\left(-\text{جب طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{جم طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right)
\end{aligned}\right\} \dots (۱۳)$$

$$\text{اس لئے}\quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{جم طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} - \text{جب طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{ر جف طہ}},$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{جب طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} + \text{جم طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{ر جف طہ}} \quad \dots\dots (۱۴)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{اسلئے}\quad \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} &= \left(\text{جم طہ}\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}} - \text{جب طہ}\frac{\text{جف}}{\text{ر جف طہ}}\right)\left(\text{جم طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} - \text{جب طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{ر جف طہ}}\right)\\
\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2} &= \left(\text{جب طہ}\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}} + \text{جم طہ}\frac{\text{جف}}{\text{ر جف طہ}}\right)\left(\text{جب طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}} + \text{جم طہ}\frac{\text{جف ع}}{\text{ر جف طہ}}\right)
\end{aligned}\right\} \dots (۱۵)$$

اس میں مندرجہ تمام عاملوں کا عمل کرنا ضروری نہیں ہے کیونکہ جملہ (۱۱) کے

حاصل جمع میں بہت سی رقمیں کٹ جائیں گی۔ باقی رقموں سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}=\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ر}^2}+\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ر}}+\frac{1}{\text{ر}^2}\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طہ}^2}\quad\ldots\ldots(۱۲)$$

امثلہ نمبر ۶۴
(جزوی تفرق اور ٹھیک تفرقے)

(۱) اگر $\text{ع}=\frac{\text{لا ما}}{\text{لا}+\text{ما}}$ تو تصدیق کرو کہ $\text{لا}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}+\text{ما}\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}=\text{ع}$

اور $\text{لا}^2\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}+2\,\text{لا ما}\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا جف ما}}+\text{ما}^2\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}=0$

(۲) اگر $\text{ی}=\text{لا}^2\,\text{سں}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}}-\text{ما}^2\,\text{سں}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}=\frac{\text{لا}^2-\text{ما}^2}{\text{لا}^2+\text{ما}^2}$

(۳) اگر $\text{ی}=\text{فا}(\text{لا})+\text{ف}(\text{ما})$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}=0$

نیز اسکا عکس ثابت کرو یعنی اگر $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}=0$ تو ی مذکورہ بالا شکل کا ہوگا

(۴) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف ر}^2}+\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}}+\frac{1}{\text{ر}^2}\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف طہ}^2}=0$ پوری ہوتی ہے

اگر $\text{فہ}=\left(\text{ا ر}^{\text{ن}}+\frac{\text{ب}}{\text{ر}^{\text{ن}}}\right)\text{جم ن}(\text{طہ}-\text{عہ})$

۵۲۰ (۵) ثابت کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}^2+\text{ما}^2)(\text{لا فرلا}+\text{ما فرما})+\text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)(\text{لا فرما}-\text{ما فرلا})=0$

کے نمونے کی مساوات $(\text{لا}^2+\text{ما}^2)$ سے تقسیم کرنے سے ٹھیک مساوات بن جاتی ہے

(۶) ثابت کرو کہ $\frac{\text{جیب ما فر لا} - \text{جب لا فر ما}}{\text{جمم ما} - \text{جمم لا}}$ ٹھیک تفرقی ہے تفاعل ع کا، نیز ع دریافت کرو۔

(۷) اگر $\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف ما}^2} = ۰$ تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خہ وجود رکھتا ہے جسکے لئے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف خہ}}{\text{جف ما}} \text{ ، } \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = +\frac{\text{جف خہ}}{\text{جف لا}}$$

اور

$$\frac{\text{جف}^2\text{خہ}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{خہ}}{\text{جف ما}^2} = ۰$$

(۸) اگر $\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف ر}^2} + \frac{۱}{\text{ر}}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}} + \frac{۱}{\text{ر}^2}\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف طہ}^2} = ۰$

تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خہ وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}} = -\frac{\text{جف خہ}}{\text{ر جف طہ}} \text{ ، } \frac{\text{جف فہ}}{\text{ر جف طہ}} = \frac{\text{جف خہ}}{\text{جف ر}}$$

اور تفاعل خہ بھی اسی جزوی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے جسکو فہ پورا کرتا ہے۔

(۹) اگر $\frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{فہ}}{\text{جف ما}^2} + \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = ۰$

تو ثابت کرو کہ ایک تفاعل خہ ایسا وجود رکھتا ہے جس کے لئے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = -\frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف خہ}}{\text{جف ما}} \text{ ، } \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف خہ}}{\text{جف لا}}$$

اور

$$\frac{\text{جف}^2\text{خہ}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{خہ}}{\text{جف ما}^2} - \frac{۱}{\text{ما}}\frac{\text{جف خہ}}{\text{جف لا}} = ۰$$

امثلہ ۶۵

(اعظم اور اقل قیمتیں)

(۱) ۔ ثابت کرو کہ سطح ا ی = $لا^۲ - ما^۲$ کا معین (ی) نقطہ لا = ۰، ما = ۰ پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔

اِس سطح کے اہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔

(۲) دفعہ ۱۹۶ کے ضابطہ سے ثابت کرو کہ کم از کم سطح والا متوازی السطوح جبکہ حجم دیا ہوا ہو ایک مکعب ہوتا ہے۔

(۳) اگر ا، ب، ج ایک مثلث کے راس ہوں اور ن کوئی متغیر نقطہ ہو تو $ن ا^۲ + ن ب^۲ + ن ج^۲$ کا حاصل جمع اقل ہوگا جب کہ ن نقاط ا، ب، ج کے اوسط مرکز پر منطبق ہوگا۔ ۵۲۱

(۴) سوال (۳) کی ترمیم سے $م_۱ × ن ا^۲ + م_۲ × ن ب^۲ + م_۳ × ن ج^۲$ کی قیمت اقل ہوگی جبکہ ن، نقاط ا، ب، ج پر واقع تین ذروں $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$ کے مرکز ثقیمت پر منطبق ہوگا۔

(۵) بتاؤ کہ لا، ما کی کس قیمت کے لئے سطح ی = $لا^۳ + ما^۳ - ۳ ا لا ما$ کا معین قائم ہوگا۔

[یہ قیمتیں (ا، ا) اور (۰، ۰) ہیں۔ لیکن دوسری قیمت کے لئے ی اعظم یا اقل نہیں ہے]

(۶) ثابت کرو کہ سطح $ج^۲ ی = ۱ ما^۲ - لا^۳$ کا معین نقطہ لا = ۰، ما = ۰ پر قائم ہے لیکن اعظم یا اقل نہیں ہے۔ اہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔

(۷) بتاؤ کہ لا، ما کی کن قیمتوں کے لئے تفاعل $لا^۴ + ما^۴ - ۲ (لا - ما)^۲$ قائم ہے۔

[تفاعل کی قائم قیمت ہے جبکہ لا = ۰ ، ما = ۰ اور دو اقل قیمتیں ہیں جبکہ لا = ± $\sqrt{2}$ ، ما = ∓ $\sqrt{2}$]

(۸) ثابت کرو کہ تفاعل (لا۲ + ما۲) قو^(لا۲ - ما۲) کی اقل قیمت ہے جبکہ لا = ۰ ، ما = ۰ اور قائم قیمت ہے جو اعظم یا اقل نہیں ہے جبکہ لا = ۰ ، ما = ±۱]

(۹) ثابت کرو کہ سطح ی = ف (ل لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲) کا معین عموماً قائم ہے جبکہ لا = ۰ ، ما = ۰ - اور اس کے اعظم یا اقل ہونے پر غور کرو مختلف صورتوں میں ہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔

(۱۰) تفاعل (لا۲ - ل۲)۲ + (لا۲ - ل۲) (ما۲ - ب۲) + (ما۲ - ب۲)۲ کی قائم قیمتوں پر غور کرو اور انہیں اعظم اور اقل کا امتیاز کرو۔ تفاعل کے ہم ارتفاعی خطوط کھینچو۔

(۱۱) اگر لا۱ ، لا۲ ، لا۳ ، . . . . . . لان ، کوئی ن مثبت مقداریں ہوں جو رشتہ لا۱ + لا۲ + ... + لان = مستقل سے وابستہ ہوں تو ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ سب مقداریں مساوی ہوں۔ اسلئے ثابت کرو کہ ن مثبت مقداروں کا حسابی اوسط انکے ہندسی اوسط سے بڑا ہوتا ہے سوائے اس صورت کے جبکہ سب مقداریں مساوی ہوں۔ ۵۴۲

(۱۲) ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا حجم والا متوازی السطوح جسکی سطح کا رقبہ دیا ہوا ہے ایک مکعب ہوتا ہے۔

(۱۳) ثابت کرو کہ ایک کرہ کے اندر بنایا ہوا بڑے سے بڑا مستطیلی متوازی السطوح ایک مکعب ہوگا۔

امثلہ ۶۶

(متغیروں کی تبدیلی، وغیرہ...)

(۱) اگر لا = جب طہ تو مساوات (۱ - لا۲) $\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ - لا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ + ل۲ ما = ۰

تبدیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر طہ}^2} + \text{ا}^2\,\text{ما} = 0$$

(۲) $\text{لا}^2 = 4\,\text{ت}$ رکھنے سے مساوات $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \frac{1}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = 0$
تبدیل ہو جاتی ہے اس مساوات میں

$$\text{ت}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر ت}^2} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} + \text{ما} = 0$$

(۳) اگر $\text{ا لا}^2 + 2\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + 2\,\text{گ لا} + 2\,\text{ف ما} + \text{ج} = 0$
تو ثابت کرو کہ $\text{ع} - \frac{3\,\text{ق}^2}{\text{ر}} = \frac{(\text{اب} - \text{ھ}^2)\,\text{ما} + \text{اف} - \text{گ ھ}}{(\text{اب} - \text{ھ}^2)\,\text{لا} + \text{ب گ} - \text{ھ ف}}$

جہاں $\text{ع} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ، $\text{ق} = \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ اور $\text{ر} = \frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3}$

(۴) اگر $\text{ع} = \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$ تو ثابت کرو کہ $\text{لا}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = 0$

اور $\frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \frac{1}{\text{لا}^4}\left\{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)\,\text{ف}''\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right) + 2\,\text{لا ما}\,\text{ف}'\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)\right\}$

(۵) اگر $\text{ی} = \text{ف}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ما}^2}$
$= 4(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)\,\text{ف}''(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) + 4\,\text{ف}'(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$

(۶) اگر $\text{ع} = \text{ف}(\text{ر})$ جہاں $\text{ر} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ تو ثابت کرو کہ ۵۲۳

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = \text{ف}''(\text{ر}) + \frac{1}{\text{ر}}\,\text{ف}'(\text{ر})$$

(۷) اگر عامل $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما}^2}$ کے لئے علامت لف_1^2 استعمال کی جائے تو ثابت کرو کہ

$\text{لف}_1^2\,\text{لوگ ر}=0$ جہاں $\text{ر}=\sqrt{(\text{لا}-\text{عہ})^2+(\text{ما}-\text{بہ})^2}$

(۸) اگر $\text{ع}=\text{ف}\,(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2)$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ی}^2}$

$=4(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2)\,\text{ف}''(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2)+6\,\text{ف}'(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2)$

(۹) اگر $\text{ع}=\text{ف}\,(\text{ر})$ جہاں $\text{ر}=\sqrt{\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ی}^2}=\text{ف}''(\text{ر})+\frac{2}{\text{ر}}\,\text{ف}'(\text{ر})$

(۱۰) اگر لف^2 عامل $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما}^2}+\frac{\text{جف}^2}{\text{جف ی}^2}$ کو ظاہر کرے تو ثابت کرو کہ

$\text{لف}^2\,\text{ر}=\frac{2}{\text{ر}}$ اور $\text{لف}^2\,\frac{1}{\text{ر}}=0$

جہاں $\text{ر}=\sqrt{(\text{لا}-\text{عہ})^2+(\text{ما}-\text{بہ})^2+(\text{ی}-\text{جہ})^2}$

(۱۱) اگر لف^2 کے وہی معنی ہوں جو سوال (۱۰) میں ہیں اور اگر

$\text{لف}^2\text{ع}=0$، $\text{لف}^2\text{و}=0$، $\text{لف}^2\text{ھ}=0$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}+\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ی}}=0$

تو $\text{لف}^2(\text{لا ع}+\text{ما و}+\text{ی ھ})=0$

(۱۲) اگر ع، و متغیر لا، ما، ی کے دو ایسے تفاعل ہوں جو مساوات لف² ع = ۰ اور لف² و = ۰ کو پورا کریں اور و تفاعل ہو ع کا تو ثابت کرو کہ و کی شکل ا ع + ب ہوگی۔

(۱۳) اگر لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ جہاں ر اور طہ متغیر ت کے تفاعل ہیں تو ثابت کرو کہ

(فر² لا / فر ت²) جم طہ + (فر² ما / فر ت²) جب طہ = (فر² ر / فر ت²) − ر (فر طہ / فر ت)²

− (فر² لا / فر ت²) جب طہ + (فر² ما / فر ت²) جم طہ = (۱ / ر) (فر / فر ت) (ر² فر طہ / فر ت)

۵۲۴ (۱۴) اگر ع = (۱ / ر) فہ (ج ت − ر) + (۱ / ر) خہ (ج ت + ر)

تو ثابت کرو کہ (جف² ع / جف ت²) = ج² ((جف² ع / جف ر²) + (۲ / ر) (جف ع / جف ر))

(۱۵) اگر ع = ت^(−½) ھو^(−لا² / ۴ک ت) تو ثابت (جف ع / جف ت) = ک (جف² ع / جف لا²)

(۱۶) اگر ع = ت^(−³⁄₂) ھو^(−ر² / ۴ک ت) تو ثابت کرو کہ (جف ع / جف ت) = ک ((جف² ع / جف ر²) + (۲ / ر) (جف ع / جف ر))

(۱۷) ع = لاⁿ فہ (ما / لا) تو تصدیق کرو کہ لا (جف ع / جف لا) + ما (جف ع / جف ما) = ن ع

اور لا² (جف² ع / جف لا²) + ۲ لا ما (جف² ع / جف لا جف ما) + ما² (جف² ع / جف ما²) = ن (ن − ۱) ع

(۱۸) اگر ما − ن ی = ف (لا − م ی) تو ثابت کرو م (جف ی / جف لا) + ن (جف ی / جف ما) = ۱

(۱۹) اگر $\text{ی} - \text{جہ} = (\text{لا} - \text{عہ})\ \text{فہ}\left(\frac{\text{ما} - \text{بہ}}{\text{لا} - \text{عہ}}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{لا} - \text{عہ})\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + (\text{ما} - \text{بہ})\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ی} - \text{جہ}$$

(۲۰) اگر $\text{لا} = \text{ج جمز طا جم عا}$، $\text{ما} = \text{ج جمز طا جب عا}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف طا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف عا}^2}$

$$= \frac{\text{ج}^2}{۲}(\text{جمز ۲طا} - \text{جم ۲عا})\left(\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ما}^2}\right)$$

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر منحنی $\text{فہ}(\text{لا}، \text{ما}) = ۰$ کے کسی نقطہ پر ایک ساتھ $\text{فہ}_{\text{لا}} = ۰$، $\text{فہ}_{\text{ما}} = ۰$ تو منحنی کی دو شاخیں (حقیقی یا خیالی) اس نقطہ میں سے گزرتی ہیں اور ان شاخوں کی سمتیں ذیل کی دو درجی مساوات سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{فہ}_{\text{لالا}} + ۲\ \text{فہ}_{\text{لاما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{فہ}_{\text{ماما}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = ۰$$

پس ثابت کرو کہ نقطہ "عقدہ یا قرن یا اکیلا نقطہ" ہے بموجب اس کے کہ

$$(\text{فہ}_{\text{لاما}})^2 > \text{یا} = \text{یا} < \text{فہ}_{\text{لالا}}\ \text{فہ}_{\text{ماما}}$$

تمت

ضمیمہ

عددی جدول

۱: ۔ طبیعی اعداد ۱۰ تا ۱۰۰ کے مربع

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱۰۰	۱۲۱	۱۴۴	۱۶۹	۱۹۶	۲۲۵	۲۵۶	۲۸۹	۳۲۴	۳۶۱
۲	۴۰۰	۴۴۱	۴۸۴	۵۲۹	۵۷۶	۶۲۵	۶۷۶	۷۲۹	۷۸۴	۸۴۱
۳	۹۰۰	۹۶۱	۱۰۲۴	۱۰۸۹	۱۱۵۶	۱۲۲۵	۱۲۹۶	۱۳۶۹	۱۴۴۴	۱۵۲۱
۴	۱۶۰۰	۱۶۸۱	۱۷۶۴	۱۸۴۹	۱۹۳۶	۲۰۲۵	۲۱۱۶	۲۲۰۹	۲۳۰۴	۲۴۰۱
۵	۲۵۰۰	۲۶۰۱	۲۷۰۴	۲۸۰۹	۲۹۱۶	۳۰۲۵	۳۱۳۶	۳۲۴۹	۳۳۶۴	۳۴۸۱
۶	۳۶۰۰	۳۷۲۱	۳۸۴۴	۳۹۶۹	۴۰۹۶	۴۲۲۵	۴۳۵۶	۴۴۸۹	۴۶۲۴	۴۷۶۱
۷	۴۹۰۰	۵۰۴۱	۵۱۸۴	۵۳۲۹	۵۴۷۶	۵۶۲۵	۵۷۷۶	۵۹۲۹	۶۰۸۴	۶۲۴۱
۸	۶۴۰۰	۶۵۶۱	۶۷۲۴	۶۸۸۹	۷۰۵۶	۷۲۲۵	۷۳۹۶	۷۵۶۹	۷۷۴۴	۷۹۲۱
۹	۸۱۰۰	۸۲۸۱	۸۴۶۴	۸۶۴۹	۸۸۳۶	۹۰۲۵	۹۲۱۶	۹۴۰۹	۹۶۰۴	۹۸۰۱

ب: ۔ ٫۱ کے وقفوں پہ صفر سے ۱۰ تک تمام اعداد کے جذرالمربع

	٫۰	٫۱	٫۲	٫۳	٫۴	٫۵	٫۶	٫۷	٫۸	٫۹
۰	۰	٫۳۱۶	٫۴۴۷	٫۵۴۸	٫۶۳۲	٫۷۰۷	٫۷۷۵	٫۸۳۷	٫۸۹۴	٫۹۴۹
۱	۱٫۰۰۰	۱٫۰۴۹	۱٫۰۹۵	۱٫۱۴۰	۱٫۱۸۳	۱٫۲۲۵	۱٫۲۶۵	۱٫۳۰۴	۱٫۳۴۲	۱٫۳۷۸
۲	۱٫۴۱۴	۱٫۴۴۹	۱٫۴۸۳	۱٫۵۱۷	۱٫۵۴۹	۱٫۵۸۱	۱٫۶۱۲	۱٫۶۴۳	۱٫۶۷۳	۱٫۷۰۳
۳	۱٫۷۳۲	۱٫۷۶۱	۱٫۷۸۹	۱٫۸۱۷	۱٫۸۴۴	۱٫۸۷۱	۱٫۸۹۷	۱٫۹۲۴	۱٫۹۴۹	۱٫۹۷۵
۴	۲٫۰۰۰	۲٫۰۲۵	۲٫۰۴۹	۲٫۰۷۴	۲٫۰۹۸	۲٫۱۲۱	۲٫۱۴۵	۲٫۱۶۸	۲٫۱۹۱	۲٫۲۱۴
۵	۲٫۲۳۶	۲٫۲۵۸	۲٫۲۸۰	۲٫۳۰۲	۲٫۳۲۴	۲٫۳۴۵	۲٫۳۶۶	۲٫۳۸۷	۲٫۴۰۸	۲٫۴۲۹
۶	۲٫۴۴۹	۲٫۴۷۰	۲٫۴۹۰	۲٫۵۱۰	۲٫۵۳۰	۲٫۵۵۰	۲٫۵۶۹	۲٫۵۸۸	۲٫۶۰۸	۲٫۶۲۷
۷	۲٫۶۴۶	۲٫۶۶۵	۲٫۶۸۳	۲٫۷۰۲	۲٫۷۲۰	۲٫۷۳۹	۲٫۷۵۷	۲٫۷۷۵	۲٫۷۹۳	۲٫۸۱۱
۸	۲٫۸۲۸	۲٫۸۴۶	۲٫۸۶۴	۲٫۸۸۱	۲٫۸۹۸	۲٫۹۱۵	۲٫۹۳۳	۲٫۹۵۰	۲٫۹۶۶	۲٫۹۸۳
۹	۳٫۰۰۰	۳٫۰۱۷	۳٫۰۳۳	۳٫۰۵۰	۳٫۰۶۶	۳٫۰۸۲	۳٫۰۹۸	۳٫۱۱۴	۳٫۱۳۰	۳٫۱۴۶
۱۰	۳٫۱۶۲									

ب۲:- ایک کے وقفوں پر ۱۰ سے ۱۰۰ تک کے طبعی اعداد کے جذر المربع

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۳٫۱۶۲	۳٫۳۱۷	۳٫۴۶۴	۳٫۶۰۶	۳٫۷۴۲	۳٫۸۷۳	۴٫۰۰۰	۴٫۱۲۳	۴٫۲۴۳	۴٫۳۵۹
۲	۴٫۴۷۲	۴٫۵۸۳	۴٫۶۹۰	۴٫۷۹۶	۴٫۸۹۹	۵٫۰۰۰	۵٫۰۹۹	۵٫۱۹۶	۵٫۲۹۲	۵٫۳۸۵
۳	۵٫۴۷۷	۵٫۵۶۸	۵٫۶۵۷	۵٫۷۴۵	۵٫۸۳۱	۵٫۹۱۶	۶٫۰۰۰	۶٫۰۸۳	۶٫۱۶۴	۶٫۲۴۵
۴	۶٫۳۲۵	۶٫۴۰۳	۶٫۴۸۱	۶٫۵۵۷	۶٫۶۳۲	۶٫۷۰۸	۶٫۷۸۲	۶٫۸۵۶	۶٫۹۲۸	۷٫۰۰۰
۵	۷٫۰۷۱	۷٫۱۴۱	۷٫۲۱۱	۷٫۲۸۰	۷٫۳۴۸	۷٫۴۱۶	۷٫۴۸۳	۷٫۵۵۰	۷٫۶۱۶	۷٫۶۸۱
۶	۷٫۷۴۶	۷٫۸۱۰	۷٫۸۷۴	۷٫۹۳۷	۸٫۰۰۰	۸٫۰۶۲	۸٫۱۲۴	۸٫۱۸۵	۸٫۲۴۶	۸٫۳۰۷
۷	۸٫۳۶۷	۸٫۴۲۶	۸٫۴۸۵	۸٫۵۴۴	۸٫۶۰۲	۸٫۶۶۰	۸٫۷۱۸	۸٫۷۷۵	۸٫۸۳۲	۸٫۸۸۸
۸	۸٫۹۴۴	۹٫۰۰۰	۹٫۰۵۵	۹٫۱۱۰	۹٫۱۶۵	۹٫۲۲۰	۹٫۲۷۴	۹٫۳۲۷	۹٫۳۸۱	۹٫۴۳۴
۹	۹٫۴۸۷	۹٫۵۳۹	۹٫۵۹۲	۹٫۶۴۴	۹٫۶۹۵	۹٫۷۴۷	۹٫۷۹۸	۹٫۸۴۹	۹٫۸۹۹	۹٫۹۵۰

ج:- ۱ء کے وقفوں پر ۱ سے ۱۰ تک کے اعداد کے متکافیات

	٫۰	٫۱	٫۲	٫۳	٫۴	٫۵	٫۶	٫۷	٫۸	٫۹
۱	۱٫۰۰۰	٫۹۰۹	٫۸۳۳	٫۷۶۹	٫۷۱۴	٫۶۶۷	٫۶۲۵	٫۵۸۸	٫۵۵۶	٫۵۲۶
۲	٫۵۰۰	٫۴۷۶	٫۴۵۵	٫۴۳۵	٫۴۱۷	٫۴۰۰	٫۳۸۵	٫۳۷۰	٫۳۵۷	٫۳۴۵
۳	٫۳۳۳	٫۳۲۳	٫۳۱۳	٫۳۰۳	٫۲۹۴	٫۲۸۶	٫۲۷۸	٫۲۷۰	٫۲۶۳	٫۲۵۶
۴	٫۲۵۰	٫۲۴۴	٫۲۳۸	٫۲۳۳	٫۲۲۷	٫۲۲۲	٫۲۱۷	٫۲۱۳	٫۲۰۸	٫۲۰۴
۵	٫۲۰۰	٫۱۹۶	٫۱۹۲	٫۱۸۹	٫۱۸۵	٫۱۸۲	٫۱۷۹	٫۱۷۵	٫۱۷۲	٫۱۶۹
۶	٫۱۶۷	٫۱۶۴	٫۱۶۱	٫۱۵۹	٫۱۵۶	٫۱۵۴	٫۱۵۲	٫۱۴۹	٫۱۴۷	٫۱۴۵
۷	٫۱۴۳	٫۱۴۱	٫۱۳۹	٫۱۳۷	٫۱۳۵	٫۱۳۳	٫۱۳۲	٫۱۳۰	٫۱۲۸	٫۱۲۷
۸	٫۱۲۵	٫۱۲۳	٫۱۲۲	٫۱۲۰	٫۱۱۹	٫۱۱۸	٫۱۱۶	٫۱۱۵	٫۱۱۴	٫۱۱۲
۹	٫۱۱۱	٫۱۱۰	٫۱۰۹	٫۱۰۸	٫۱۰۶	٫۱۰۵	٫۱۰۴	٫۱۰۳	٫۱۰۲	٫۱۰۱

د:- ربع کے بیسویں حصہ کے وقفوں پر تمام زاویوں کی مثلثی نسبتیں

ط / ½π	جب ط	قم ط	مس ط	ظم ط	قط ط	جم ط	
٫۰	۰	∞	۰	∞	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰
٫۰۵	٫۰۷۸	۱۲٫۷۴۵	٫۰۷۹	۱۲٫۷۰۶	۱٫۰۰۳	٫۹۹۷	٫۹۵
٫۱۰	٫۱۵۶	۶٫۳۹۲	٫۱۵۸	۶٫۳۱۴	۱٫۰۱۲	٫۹۸۸	٫۹۰
٫۱۵	٫۲۳۳	۴٫۲۸۴	٫۲۴۰	۴٫۱۶۵	۱٫۰۲۸	٫۹۷۲	٫۸۵
٫۲۰	٫۳۰۹	۳٫۲۳۶	٫۳۲۵	۳٫۰۷۸	۱٫۰۵۱	٫۹۵۱	٫۸۰
٫۲۵	٫۳۸۳	۲٫۶۱۳	٫۴۱۴	۲٫۴۱۴	۱٫۰۸۲	٫۹۲۴	٫۷۵
٫۳۰	٫۴۵۴	۲٫۲۰۳	٫۵۱۰	۱٫۹۶۳	۱٫۱۲۲	٫۸۹۱	٫۷۰
٫۳۵	٫۵۲۲	۱٫۹۱۴	٫۶۱۳	۱٫۶۳۲	۱٫۱۷۳	٫۸۵۳	٫۶۵
٫۴۰	٫۵۸۸	۱٫۷۰۱	٫۷۲۷	۱٫۳۷۶	۱٫۲۳۶	٫۸۰۹	٫۶۰
٫۴۵	٫۶۴۹	۱٫۵۴۰	٫۸۵۴	۱٫۱۷۱	۱٫۳۱۵	٫۷۶۰	٫۵۵
٫۵۰	٫۷۰۷	۱٫۴۱۴	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۴۱۴	٫۷۰۷	٫۵۰
	جم ط	قط ط	ظم ط	مس ط	قم ط	جب ط	ط / ½π

ع:۔ ؍۱ کے وقفوں پر صفر سے ۲؍۵ تک تمام اعداد کے قوت نما اور زائدی تفاعلوں کی قیمتیں

لا	قولا	قو-لا	جمزلا	جیبزلا	مماسزلا
۰	۱؍۰۰۰	۱؍۰۰۰	۱؍۰۰۰	۰	۰
؍۱	۱؍۱۰۵	؍۹۰۵	۱؍۰۰۵	؍۱۰۰	؍۱۰۰
؍۲	۱؍۲۲۱	؍۸۱۹	۱؍۰۲۰	؍۲۰۱	؍۱۹۷
؍۳	۱؍۳۵۰	؍۷۴۱	۱؍۰۴۵	؍۳۰۵	؍۲۹۱
؍۴	۱؍۴۹۲	؍۶۷۰	۱؍۰۸۱	؍۴۱۱	؍۳۸۰
؍۵	۱؍۶۴۹	؍۶۰۷	۱؍۱۲۸	؍۵۲۱	؍۴۶۲
؍۶	۱؍۸۲۲	؍۵۴۹	۱؍۱۸۵	؍۶۳۷	؍۵۳۷
؍۷	۲؍۰۱۴	؍۴۹۷	۱؍۲۵۵	؍۷۵۹	؍۶۰۴
؍۸	۲؍۲۲۶	؍۴۴۹	۱؍۳۳۷	؍۸۸۸	؍۶۶۴
؍۹	۲؍۴۶۰	؍۴۰۷	۱؍۴۳۳	۱؍۰۲۷	؍۷۱۶
۱؍۰	۲؍۷۱۸	؍۳۶۸	۱؍۵۴۳	۱؍۱۷۵	؍۷۶۲
۱؍۱	۳؍۰۰۴	؍۳۳۳	۱؍۶۶۹	۱؍۳۳۶	؍۸۰۱
۱؍۲	۳؍۳۲۰	؍۳۰۱	۱؍۸۱۱	۱؍۵۰۹	؍۸۳۴
۱؍۳	۳؍۶۶۹	؍۲۷۳	۱؍۹۷۱	۱؍۶۹۸	؍۸۶۲
۱؍۴	۴؍۰۵۵	؍۲۴۷	۲؍۱۵۱	۱؍۹۰۴	؍۸۸۵
۱؍۵	۴؍۴۸۲	؍۲۲۳	۲؍۳۵۲	۲؍۱۲۹	؍۹۰۵
۱؍۶	۴؍۹۵۳	؍۲۰۲	۲؍۵۷۷	۲؍۳۷۶	؍۹۲۲
۱؍۷	۵؍۴۷۴	؍۱۸۳	۲؍۸۲۸	۲؍۶۴۶	؍۹۳۵
۱؍۸	۶؍۰۵۰	؍۱۶۵	۳؍۱۰۷	۲؍۹۴۲	؍۹۴۷
۱؍۹	۶؍۶۸۶	؍۱۵۰	۳؍۴۱۸	۳؍۲۶۸	؍۹۵۶
۲؍۰	۷؍۳۸۹	؍۱۳۵	۳؍۷۶۲	۳؍۶۲۷	؍۹۶۴
۲؍۱	۸؍۱۶۶	؍۱۲۲	۴؍۱۴۴	۴؍۰۲۲	؍۹۷۰
۲؍۲	۹؍۰۲۵	؍۱۱۱	۴؍۵۶۸	۴؍۴۵۷	؍۹۷۶
۲؍۳	۹؍۹۷۴	؍۱۰۰	۵؍۰۳۷	۴؍۹۳۷	؍۹۸۰
۲؍۴	۱۱؍۰۲۳	؍۰۹۱	۵؍۵۵۷	۵؍۴۶۶	؍۹۸۴
۲؍۵	۱۲؍۱۸۲	؍۰۸۲	۶؍۱۳۲	۶؍۰۵۰	؍۹۸۷

ف: لوکارثم بلحاظ اساس قو

	ر۰	ر۱	ر۲	ر۳	ر۴	ر۵	ر۶	ر۷	ر۸	ر۹
۱	۰	۰۹۵ر	۱۸۲ر	۲۶۲ر	۳۳۶ر	۴۰۵ر	۴۷۰ر	۵۳۱ر	۵۸۸ر	۶۴۲ر
۲	۶۹۳ر	۷۴۲ر	۷۸۸ر	۸۳۳ر	۸۷۵ر	۹۱۶ر	۹۵۶ر	۹۹۳ر	۱ر۰۳۰	۱ر۰۶۵
۳	۱ر۰۹۹	۱ر۱۳۱	۱ر۱۶۳	۱ر۱۹۴	۱ر۲۲۴	۱ر۲۵۳	۱ر۲۸۱	۱ر۳۰۸	۱ر۳۳۵	۱ر۳۶۱
۴	۱ر۳۸۶	۱ر۴۱۱	۱ر۴۳۵	۱ر۴۵۹	۱ر۴۸۲	۱ر۵۰۴	۱ر۵۲۶	۱ر۵۴۸	۱ر۵۶۹	۱ر۵۸۹
۵	۱ر۶۰۹	۱ر۶۲۹	۱ر۶۴۹	۱ر۶۶۸	۱ر۶۸۶	۱ر۷۰۵	۱ر۷۲۳	۱ر۷۴۰	۱ر۷۵۸	۱ر۷۷۵
۶	۱ر۷۹۲	۱ر۸۰۸	۱ر۸۲۵	۱ر۸۴۱	۱ر۸۵۶	۱ر۸۷۲	۱ر۸۸۷	۱ر۹۰۲	۱ر۹۱۷	۱ر۹۳۲
۷	۱ر۹۴۶	۱ر۹۶۰	۱ر۹۷۴	۱ر۹۸۸	۲ر۰۰۱	۲ر۰۱۵	۲ر۰۲۸	۲ر۰۴۱	۲ر۰۵۴	۲ر۰۶۷
۸	۲ر۰۷۹	۲ر۰۹۲	۲ر۱۰۴	۲ر۱۱۶	۲ر۱۲۸	۲ر۱۴۰	۲ر۱۵۲	۲ر۱۶۳	۲ر۱۷۵	۲ر۱۸۶
۹	۲ر۱۹۷	۲ر۲۰۸	۲ر۲۱۹	۲ر۲۳۰	۲ر۲۴۱	۲ر۲۵۱	۲ر۲۶۲	۲ر۲۷۲	۲ر۲۸۲	۲ر۲۹۳

لوک ۱۰ = ۲ر۳۰۳، لوک $۱۰^{۲}$ = ۴ر۶۰۵، لوک $۱۰^{۳}$ = ۶ر۹۰۸

فہرست اصطلاحات

صغاری احصا

(حصہ سوم)

A

Amplitude	حیطہ، سعت
Approximation	تقرب
Asymptotes	متقارب

B

Binomial Theorem	مسئلہ ثنائی

C

Charge	بار
Circuit	دور
Commutative property	خاصیت مبادلہ
Complementary function	متمم تفاعل
Complete solution	مکمل یا پورا حل

D

Deflection	انصراف
Degree	درجہ
Differential equation	تفرقی مساوات
Differentiation	تفرق

Double limit	دوہری انتہا
Dynamics	حرکیات، علم حرکت
E	
Electromotive force	قوت محرکہ برق
Envelope	لفافہ
Epoch	آن
Equilibrium	توازن
Equipotential	ہم قوہ
Essentially convergent	لازماً مستدق
Evolute	برپیچ
Exact equation	ٹھیک، مساوات
Expansion	پھیلاؤ
F	
Forced Oscillation	قسری اہتزاز
H	
Harmonic	موسیقی
Homogeneous equation	متجانس مساوات
I	
Induction	امالہ
Integrating factor	متکمل جزو ضربی
Integration	تکمل
Involute	درپیچ
M	
Maximum	اعظم
Minimum	اقل
Multiple	ضعفی
N	
Normal mode	طبعی کیفیت
O	
Operater (D)	عامل (عف)
Order	رتبہ
Orthogonal trajectories	قائم خطوط رمی

P	
Partial	جزوی
Particular Integral	خاص تکملہ
Particular solution	خاص حل
Pendulum	رقاص
Period	دور
Phase	ہیئت
Point of inflexion	نقطہ عطف
Pontential	قوہ
Potential energy	توانائی بالقوہ
Power series	قوتی سلسلہ
Primitive	ابتدائی
Projection	ظل
R	
Rectilinear motion	مستقیم حرکت
Repulsion	اندفاع
Resistance	مزاحمت
S	
Self-induction	خود امالہ
Simultaneous	ہمزاد
Singular solution	نادر حل
Solid of revolution	گردشی مجسم
Stable	قائم
Subnormal	زیر عماد
Subtangent	زیر مماس
Suspension bridge	جھولا پل
U	
Unstable	غیر قائم
V	
Variables Separable	متغیر جدائی پذیر

اہتزاز	Vibration
لزوجیت	Viscosity

اشاریہ

اعداد صفحوں کے لحاظ سے

ابتدائی، تفرقی مساوات کا، ۵۲۲

استدقاق، لامتناہی سلسلوں کا، ۶۴۷

اسقاط، اختیاری مستقلوں کا، ۵۲۲

انحناد، ۷۹۲، ۷۳۱

انعطاف، نقاط، ۷۳۲

باقی، ٹیلر اور میکلورن کے مسئلوں میں، ۶۷۷، ۶۸۵

پھیلاؤ، تفرقی مساواتوں کے ذریعہ، ۶۵۸

میکلورن کے مسئلہ کے ذریعہ، ۶۷۳، ۶۸۶

تفرق، قوتی سلسلہ کا، ۶۵۲

تفرقی مساواتیں، ۵۲۱

پہلے درجہ اور پہلے رتبہ کی، ۵۲۴

پہلے رتبہ اور اعلیٰ درجہ کی، ۵۴۵

ٹھیک، ۵۳۰

خطی، ۵۳۵، ۵۳۹

دوسرے رتبہ کی، ۵۶۳، ۵۹۱
سلسلوں کے ذریعہ تکمل، ۶۵۵
متجانس، ۵۳۳
ہمزاد، ۶۱۸
تکمل، قوتی سلسلوں کا، ۶۵۴
ٹھیک تفرقی، اسکی شرط، ۷۱۰
ٹھیک تفرقی مساواتیں، ۵۲۰
ٹیلر کا مسئلہ، ۶۷۱
اس کی توسیع، ۷۱۱
جب لا کا پھیلاؤ، ۶۵۷
جتا لا کا پھیلاؤ، ۶۵۴
جزوی تفرق کی خاصیت مبادلہ، ۷۰۷، ۷۱۳
خطی تفرقی مساواتیں، پہلے رتبہ کی، ۵۳۵، ۵۳۹
دوسرے رتبہ کی، ۵۷۸
مستقل سروں والی، ۵۹۰
درجہ، تفرقی مساوات کا، ۵۲۵
رتبہ، تفرقی مساوات کا، ۵۲۱
زنجیرہ، مکانی، ۵۲۹
صغاری ہندسہ، ۶۹۶
قیمت، ہ کی، ۶۴۵
قوتی سلسلہ کا تسلسل، ۶۵۱
اس کا تفرق، ۶۵۲
اس کا تکمل، ۶۵۴
قائم خطوط رسی، ۵۴۱
کلیروی تفرقی مساوات، ۵۴۷

گریگوری کا سلسلہ، ۶۴۴
لفاف، ۷۲۵
لوکارتمی سلسلہ، ۶۳۹، ۶۸۹
متجانس تفاعل، یولر کا مسئلہ، ۷۱۶
متمم تفاعل، ۵۳۶، ۵۷۹، ۵۹۱، ۶۰۴
متواتر تفرق، ۷۰۶
مسئلہ ثنائی، ۶۶۰، ۶۸۷
مقیم قیمتیں، تفاعلوں کی، ۷۱۶، ۷۲۲
میکلورن کا مسئلہ، ۶۷۱، ۶۷۷، ۶۸۳
نادر حل، ۵۴۸
ہم ارتفاعی خط، ۷۲۰
ہمزاد تفرقی مساواتیں، ۶۱۸