

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_220753

UNIVERSAL
LIBRARY

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No. 516.7/J 972 Pt-2 19065
Accession No.

Author Juvet. Gustave

Title Lecon's - - - - - Victorielle

This book should be returned on or before the date last marked below.
1935

**LEÇONS D'ANALYSE
VECTORIELLE**

LEÇONS D'ANALYSE VECTORIELLE

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATIONS DE L'ANALYSE VECTORIELLE
INTRODUCTION A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

GUSTAVE JUVET

PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'INGÉNIEURS ET A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

LAUSANNE
F. ROUGE & C^{IE},
LIBRAIRIE DE L'UNIVERSITÉ S. A.

PARIS
GAUTHIER - VILLARS & C^{IE}
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

1935

OUVRAGES DU MEME AUTEUR

Introduction au Calcul tensoriel et au Calcul différentiel absolu. Avec une préface de M. J. Hadamard, Membre de l'Institut. 1 vol. Paris, Blanchard, 1922.

Mécanique analytique et Théorie des Quanta. 1 vol. Paris, Blanchard, 1926.

Sur une équation aux dérivées fonctionnelles partielles et sur une généralisation du théorème de Jacobi. (Thèse.) 1 vol. Paris, Blanchard, 1926. *

Considérations sur la Relativité et sur les Théories physiques. 1 brochure. Lausanne, Rouge, 1929.

Quelques aspects de la Mécanique ondulatoire et de la Théorie des Quanta. 1 brochure. Lausanne, Rouge, 1929.

La structure des nouvelles théories physiques. 1 vol. de la Nouvelle Collection Scientifique, dirigée par M. E. Borel, Membre de l'Institut. Paris, Alcan, 1933.

Leçons d'Analyse vectorielle. Première partie. *Géométrie différentielle des courbes et des surfaces. Théorie mathématique des champs.* 1 vol. Lausanne et Paris, Rouge et Gauthier-Villars, 1933.

PRÉFACE

Dans la préface de la première partie de cet ouvrage, j'annonçais un nouveau volume traitant des applications de l'analyse vectorielle à la physique mathématique. D'autres charges m'ont empêché de le terminer plus tôt, et c'est seulement après deux ans que je puis tenir ma promesse. Je m'en excuse, et cela avec d'autant plus de sincérité que je n'ignore pas que l'exposé très formel que j'ai donné de l'analyse vectorielle ne peut être assimilé par la plupart des lecteurs que lorsqu'ils en voient des applications plus concrètes que celles que fournit la géométrie. En particulier, les formules de calcul intégral qui terminent cette première partie peuvent paraître très belles, mais d'une beauté froide et distante, à ceux qui étudient le calcul vectoriel, non pour son élégance mathématique, mais pour son utilité en physique et en technique. J'espère qu'ils trouveront, dans cette deuxième partie, assez d'applications concrètes pour être récompensés et de leur zèle et de leur patience.

On trouvera donc dans ce nouveau livre de nombreuses applications de l'analyse vectorielle à la physique, singulièrement aux théories suivantes : potentiel newtonien (et par suite coulombien aussi), hydrodynamique, électromagnétisme, propagation de la chaleur. M'adressant, dans ces leçons, à des élèves ingénieurs, qui, dans des cours de physique générale et de mécanique, étudient ces théories du point de vue de l'expérimentateur, il m'a paru, qu'en partant des faits connus les plus généraux : lois d'action à distance, équations du mouvement, théorème de l'induction, il était utile de décrire la *structure* des principales théories de la physique classique afin de les rendre plus immédiatement assimilables à qui veut ensuite les utiliser. Le calcul vectoriel s'y prête à merveille, d'abord par la facilité et l'élégance avec lesquelles

il permet de *décrire* tels ou tels phénomènes — qu'on pense aux tourbillons, par exemple — mais surtout par la rapidité avec laquelle il permet de *déduire* les équations différentielles, expressions parfaites de la théorie des champs, à partir des lois d'action à distance ou des lois intégrales, grâce aux formules convenablement interprétées d'Ostrogradzky, de Green et d'Ampère-Stokes.

Mais mon but n'est pas seulement d'obtenir les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique par des calculs intrinsèques, ni de faire de l'art pour l'art, c'est-à-dire de l'analyse vectorielle pour elle-même. Par la manière même dont ces équations aux dérivées partielles sont obtenues, il se pose immédiatement des problèmes relatifs à l'existence de leurs solutions dans telles ou telles circonstances et j'ai cherché à construire quelques-unes de ces solutions, ou à démontrer l'existence de quelques autres.

A propos de l'équation de Laplace et de l'équation de d'Alembert, j'ai montré comment se résolvent les problèmes de Dirichlet, de Neumann, les problèmes mixtes et celui de Cauchy. Il a fallu, pour les premiers, forger la méthode mathématique qui, se fondant sur les propriétés des potentiels de simple couche et de double couche, sur l'équation intégrale de Neumann, aboutit, grâce à la découverte de Fredholm que j'ai exposée d'après le mémoire de l'auteur, aux théorèmes d'existence qu'il n'est plus permis à un ingénieur d'ignorer. Ces développements montrent, sur des exemples précis, comment se justifie rigoureusement les procédés intuitifs imaginés par les physiciens ou les ingénieurs pour résoudre les problèmes que posent leur science ou leur art.

Reprenant la solution obtenue pour le problème de Dirichlet dans le plan, je l'ai appliquée à la représentation conforme des aires planes simplement connexes grâce à laquelle j'ai pu faire des incursions dans la théorie de la résistance des fluides, si importante en aérodynamique.

Cependant, la méthode de Fredholm ne s'appliquant aux problèmes de Dirichlet et de Neumann que lorsque les domaines n'ont pas de pointes, j'ai dû montrer comment, par son aide et grâce aux fonctions surharmoniques, on arrive à étendre le théorème d'existence à des domaines plus généraux. Je n'ai pas voulu cependant montrer tous les aspects du problème de Dirichlet et des solutions qu'en ont données MM. Lebesgue, Bouligand, Wiener et Kellogg ; je me suis borné à utiliser la notion de fonction barrière et à montrer ses applications dans les cas où la frontière du domaine est formée d'un nombre fini de courbes ou de surfaces analytiques et régulières ; la méthode est beau-

coup plus puissante et le lecteur, non seulement le devinera bien, mais il sera capable de faire des applications à des cas plus généraux.

La théorie de la représentation conforme que j'ai exposée au moyen des fonctions harmoniques peut l'être directement au moyen de la théorie des fonctions d'une variable complexe ; il m'a paru cependant que l'ancienne méthode qui n'aboutit qu'au théorème de Riemann, moins complet que le théorème de M. Carathéodory, présente de grands avantages dans un exposé comme celui-ci, d'abord parce qu'elle se fonde sur les propriétés des fonctions harmoniques dont elle est une application intéressante en soi, et parce qu'elle utilise la solution du problème de Dirichlet, établie dans l'ouvrage.

De la théorie des fonctions d'une variable complexe, je n'ai utilisé que ce qui est nécessaire pour le mouvement plan et le problème de Riemann. Cependant, il m'a paru utile de donner, en appendice, un exposé rapide de cette théorie dont l'ingénieur fait un usage de plus en plus grand.

Des problèmes assez nombreux donnent au lecteur l'occasion d'appliquer les théories exposées dans le cours de l'ouvrage et lui offrent parfois la possibilité d'en étendre la portée ; dans certains cas même, les exercices proposés ont pour but de faire connaître des méthodes différentes de celles du texte.

Pour rédiger ce cours, j'ai recouru à de nombreux mémoires originaux et aux principaux traités sur les questions exposées. Il m'est impossible d'énumérer toutes mes sources, mais je tiens à citer en tout premier lieu le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard et le *Cours d'Analyse mathématique* de M. E. Goursat dans lesquels tous les mathématiciens de notre temps ont appris l'analyse. L'ouvrage de M. O. D. Kellogg, le regretté professeur d'Harvard, *Foundations of Potential Theory*, m'a été fort utile en ce qui concerne la théorie des fonctions surharmoniques et l'existence de la solution du problème de Dirichlet pour des domaines dont les frontières ont des pointes. En hydrodynamique, les traités essentiels où j'ai puisé sont ceux de M. Appell : *Traité de Mécanique rationnelle*, vol. III et de M. H. Villat : *Mécanique des fluides*. Les ouvrages de M. L. Bloch : *Précis d'Electricité théorique*, de M. H. F. Biggs : *The Electromagnetic Field* ainsi que les exposés de MM. H. Weyl et P. Langevin dans leurs livres ou leurs cours sur la relativité m'ont parfois inspiré pour l'exposé de la théorie de Maxwell. Le mémoire de Fredholm que j'ai suivi fidèlement au chapitre IV, est paru aux *Acta Mathematica*, tome 27 (1903), il a pour titre : *Sur une classe d'équations fonctionnelles*.

MM. M. Gex et G. de Rham m'ont encore donné leur collaboration

pour la correction des épreuves et la confection des figures de ce livre ; M. C. Blanc s'est joint à eux et il a revu avec soin les calculs et les formules. Je tiens à leur dire ici mon affectueuse reconnaissance.

La librairie Rouge S. A., malgré les circonstances économiques difficiles, a tenu à ce que l'impression de ce second volume soit aussi soignée que celle du premier. En s'adressant à l'Imprimerie La Concorde, elle est parvenue à ses fins. Aux imprimeurs et aux éditeurs, tout particulièrement à M. Paul Feissly, j'exprime mes remerciements les plus vifs.

Lausanne, décembre 1934.

G. JUVET.

CHAPITRE PREMIER

Attraction et potentiels newtoniens.

Masses ponctuelles.

1. Considérons un point matériel fixe de masse M que nous supposons placé en O , origine des vecteurs au moyen desquels on fixe la position des points P de l'espace euclidien. Soit comme de coutume

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}.$$

Si en P se trouve une masse ponctuelle m , la physique newtonienne nous apprend qu'elle subit de la part de la masse M une force attractive \vec{F} , portée par la droite OP , proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance r :

$$\vec{F} = -f \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -f \frac{Mm}{r^3} \vec{r},$$

f étant une constante universelle dont la valeur dans le système C. G. S. est $6,658 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{g.}^{-1} \text{ sec}^{-2}$.

On appelle *champ* au point P , créé par la masse M , la force qui agit sur une masse unité placée en P ; on la représentera encore par \vec{F} . Le champ en P est donc

$$\vec{F} = -\frac{fM}{r^3} \vec{r}.$$

2. Supposons que la masse $m = 1$ se déplace sur une courbe Γ et proposons-nous de calculer le travail de \vec{F} dans ce déplacement. Il est manifestement

$$\mathcal{G} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

où il est entendu que Γ est parcourue dans un sens déterminé. Or :

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = -\frac{fM}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{dr} = -\frac{fM}{r^2} dr^1 = d\left(\frac{fM}{r}\right).$$

Le travail élémentaire du champ est donc une différentielle totale, le champ dérive de la *fonction de forces* ou du *potentiel*

$$U(P) = \frac{fM}{r};$$

le travail total le long de toute courbe Γ qui joint A à B ne dépend pas de Γ , mais de A et B seulement.

$$\mathcal{G} = \frac{fM}{r_B} - \frac{fM}{r_A}.$$

Si l'on imagine que l'origine de Γ est à l'infini, le travail du champ est alors $\frac{fM}{r_B}$. Le potentiel en P , $U = \frac{fM}{r}$, est donc le travail qu'il faut fournir pour éloigner la masse $m = 1$ de P à l'infini.

3. Le champ scalaire $U(P)$ ayant une différentielle en tout point de l'espace, sauf en O , aura un gradient (I, § 59) :

$$dU = \overrightarrow{\text{grad}} U \cdot \vec{dr} \text{ mais aussi } = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

donc

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U, \quad \text{ou} \quad \vec{F} = \vec{\nabla} U;$$

dans tout l'espace, sauf en O .

4. Il convient aussi de calculer le flux total de \vec{F} à travers une surface fermée Σ . Le flux élémentaire est

$$\vec{F} \cdot \vec{d\sigma} = -\frac{fM}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{d\sigma},$$

mais (I, § 64)

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{d\sigma} = \text{angle solide sous lequel de } O \text{ on voit } d\sigma,$$

donc :

flux total du champ à travers $\Sigma = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\sigma} = -fM \times (\text{angle solide sous lequel de } O \text{ on voit } \Sigma).$

Et l'on peut énoncer les résultats suivants :

si O est dans Σ , ce flux vaut $-4\pi fM$,

si O est hors de Σ , ce flux est nul,

¹ Ici dr n'est pas $|\vec{dr}|$, c'est la différentielle de la distance r ; il y a là une légère incohérence dans la notation, qui n'est pas dangereuse d'ailleurs.

si O est sur Σ , bien que le champ n'ait pas de sens en O , l'intégrale peut en avoir un : si O est un point ordinaire de Σ , le flux est $-2\pi fM$; il vaut $-\alpha fM$, si O est un point conique d'angle solide α . Ce théorème est dû à Gauss.

5. Soit P un point distinct de O ; entourons-le d'une surface Σ limitant un volume τ ; on sait que la divergence de \vec{F} est

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot \vec{F}}{\tau} ;$$

τ tendant vers zéro, il arrivera un moment où O ne sera pas dans τ , (on peut même supposer qu'il n'y soit jamais), l'intégrale du numérateur est dès lors nulle et l'on voit que

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0,$$

dans tout l'espace, sauf en O . Ou encore

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U = 0, \quad \text{ou} \quad \nabla^2 U = 0 ;$$

ce qu'on écrit aussi

$$\operatorname{lap} U = 0.$$

Le laplacien du potentiel newtonien est nul dans tout l'espace sauf au point attirant. L'équation du second ordre

$$\nabla^2 U = 0$$

s'appelle l'équation de Laplace.

6. Si, au lieu d'une seule masse ponctuelle attirante, on en considère n , M_1, M_2, \dots, M_n , placées aux points fixes O_1, O_2, \dots, O_n , le champ en P sera

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i$$

avec

$$\vec{F}_i = -\frac{fM_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (\vec{r}_i = \overrightarrow{O_iP}).$$

Le travail élémentaire est $\vec{F} \cdot \vec{dr}$; or

$$\vec{F}_i \cdot \vec{dr} = F_i dr_i,$$

par la définition même du produit scalaire ; par suite

$$d\mathcal{G} = \Sigma F_i dr_i = \Sigma d\left(\frac{fM_i}{r_i}\right) = d\Sigma \frac{fM_i}{r_i}.$$

Le champ total \vec{F} dérive d'un potentiel U qui est la somme des potentiels créés par chacun des points attirants. Si on éloigne la masse unité de P à l'infini, le travail qu'il faut fournir est toujours égal au potentiel $U(P)$. On a encore

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U.$$

Le flux élémentaire $\vec{F} \cdot \vec{d\sigma}$ est égal à la somme des flux élémentaires partiels $\vec{F}_i \cdot \vec{d\sigma}$. Le flux total à travers une surface fermée Σ sera donc égal au produit de $4\pi f$ par la somme des masses attirantes contenues dans Σ .

Il serait facile d'examiner les cas où Σ passe par l'un ou l'autre des points O_i .

Le calcul de la divergence de \vec{F} en un point P différent des O_i est bien simple ; on doit calculer $\iiint \vec{F} \cdot \vec{d\sigma}$ pour une surface Σ évanouissante, entourant P ; cette intégrale est nulle si Σ est assez petite et dès lors

$$\text{div } \vec{F} = 0$$

ou encore

$$\text{lap } U = 0.$$

Le potentiel newtonien de plusieurs masses ponctuelles satisfait à l'équation de Laplace en tout point de l'espace distinct des masses attirantes.

Masses continues.

7. Les masses continues que nous aurons à examiner dans la suite occuperont soit des volumes, soit des surfaces, soit des courbes. En chaque point P de ces ensembles, on se donne une *densité* ; c'est une grandeur scalaire positive qui est, par définition, la limite du rapport de la masse d'une petite région entourant P à la mesure du volume, de la surface ou de l'arc de ladite région, lorsque cette région devient infiniment petite dans toutes ses dimensions. On aura donc affaire à des densités de volume $\rho(P)$, à des densités superficielles $\mu(P)$ et à des densités linéaires $\sigma(P)$. On supposera que ces fonctions sont continues à l'intérieur des masses. Dans certains problèmes, la densité pourra être discontinue : sur des surfaces pour les densités de volumes,

sur des courbes pour les densités superficielles, en des points pour les densités linéaires ; si ce cas se présentait, nous le dirions explicitement. Dans la suite, nous admettrons que ρ , μ , σ sont des fonctions continues dans les régions où se trouvent des masses attirantes, et ces masses seront fixes.

8. Pour commencer, on traitera de masses occupant un volume V et l'on cherchera le champ qu'elles créent en un point de l'espace.

En un point P , hors de V , la force agissant sur une masse unité, c'est-à-dire le champ, est, par définition, l'intégrale triple

$$\vec{F}(P) = - \iiint_V \frac{\rho(M) \vec{r}}{r^3} d\tau_M$$

où M est un point variable dans V , $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$, $d\tau_M$ un élément de volume contenant M . Dorénavant on choisit l'unité de masse de manière que $f = 1$. \vec{F} est la limite de la somme des champs créés par des masses ponctuelles en des points M_i , dont la valeur est égale à la masse Δm_i , située dans un des volumes $\Delta\tau_i$ en lesquels on décompose V , lorsque les $\Delta\tau_i$ tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions. Soit N le nombre de volumes partiels à un moment donné. On a

$$F(\vec{P}) = \lim_{N=\infty} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\Delta m_i}{r_i^3} \vec{r}_i.$$

Soit F_N la somme en question ; on a évidemment, pour un déplacement élémentaire \vec{dr} de P ,

$$\vec{F}_N \cdot \vec{dr} = d \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\Delta m_i}{r_i},$$

cette dernière somme a pour limite la fonction

$$U(P) = \iiint_V \frac{\rho(M)}{r} d\tau_M.$$

A-t-on le droit d'écrire encore

$$\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} U(P) ?$$

Oui, car la fonction $\frac{\rho(M)}{r} = \frac{\rho(M)}{OP}$, considérée comme fonction de r , a un gradient continu en tout point P hors de V , donc (I, § 69)

$$\vec{\nabla} U = \iiint_V \vec{\nabla}_P \left(\frac{\rho(M)}{r} \right) d\tau_M = - \iiint_V \frac{\rho(M)}{r^3} \vec{r} d\tau_M = \vec{F}(P).$$

Dès lors, en partant de $U(P)$ considérée comme la limite de $\sum_{i=1}^{i=N} \frac{\Delta m_i}{r_i}$, on démontre immédiatement que

$$\text{lap } U = 0$$

en dehors de V ; il suffit pour le voir de calculer $\iint_{\Sigma} \vec{F}_N \cdot \vec{d\sigma}$.

Le potentiel créé par la masse répartie dans V satisfait à l'équation de Laplace en tout point qui n'est pas dans V .

Intégrales uniformément convergentes.

9. L'étude du champ \vec{F} en un point P intérieur au volume V présente quelques difficultés provenant de ce que

$$r = PM$$

s'annule lorsque le point courant M est en P . Il convient d'introduire ici une notion qui nous permettra de traiter de nombreux cas semblables, celle d'*intégrale uniformément convergente*.

Soit

$$g(P) = \int_D F(P, Q) d\zeta_Q$$

une intégrale étendue à une région D (courbe, surface ou volume) dont l'élément a pour mesure $d\zeta$; $F(P, Q)$ est une fonction continue de P et de Q sauf lorsque P et Q sont confondus, auquel cas elle est infinie. L'intégrale peut donc cesser d'avoir un sens si P est dans D . Supposons cependant que $g(P)$ existe si P est un point Q_0 de D . $g(P)$ qui est une fonction continue de P pour P extérieur à D peut cependant être discontinue en Q_0 . Un cas important où la continuité est assurée dans tout l'espace se présente si l'intégrale proposée est uniformément convergente.

On dit que $g(P)$ est *uniformément convergente* en Q_0 si, ε étant donné arbitrairement, on peut trouver sur D un domaine D' contenant Q_0 , et un nombre positif η , tels que pour tout point P pris à l'intérieur d'une sphère S_η de rayon η et de centre Q_0 , la valeur absolue de l'intégrale étendue à D' , soit

$$\left| \int_{D'} F(P, Q) d\zeta_Q \right|,$$

puisse être rendue inférieure à ε . Cela revient à dire que, l'intégrale

$g(P)$ ayant un sens, la contribution de l'élément en lequel F devient infini, non seulement est bornée, mais qu'elle est infiniment petite avec l'élément, pour tout P . Dès lors, l'intégrale $g(P)$ est continue en Q_0 , car si $PQ_0 < \eta$ et si $D = D' + D''$:

$$g(P) - g(Q_0) = \int_{D'} F(P, Q) d\zeta_Q - \int_{D'} F(Q_0, Q) d\zeta_Q + \\ + \int_{D''} F(P, Q) d\zeta_Q - \int_{D''} F(Q_0, Q) d\zeta_Q.$$

On peut supposer que D'' est à l'extérieur de S_η ; de plus, on peut s'arranger pour que l'on ait

$$\left| \int_{D''} F(P, Q) d\zeta_Q - \int_{D''} F(Q_0, Q) d\zeta_Q \right| < \varepsilon,$$

si P est suffisamment voisin de Q_0 , car si P est dans S_η , η assez petit, Q sur D'' ,

$$F(P, Q) - F(Q_0, Q)$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut. Enfin, chacune des intégrales sur D' est inférieure à ε si l'hypothèse de la convergence uniforme est vérifiée et l'on a

$$|g(P) - g(Q_0)| < 3\varepsilon$$

si

$$PQ_0 < \eta;$$

$g(P)$ est donc continue en Q_0 . Si l'intégrale est uniformément convergente en tout point de D , elle est continue dans tout l'espace.

Champ intérieur aux masses. Equation de Poisson.

10. Lorsque P est un point de V , les deux intégrales

$$\iiint_V \frac{\rho(M)}{r} d\tau_M, \quad \iiint_V \frac{\rho(M)}{r^3} \vec{r} d\tau_M$$

conservent un sens, car si on les évalue en prenant des coordonnées polaires spatiales d'origine P , $r = PM$, on aura

$$d\tau_M = r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi$$

et les éléments différentiels sont

$$\rho(M) r \sin \theta dr d\theta d\psi, \quad \rho(M) \vec{r}_1 \sin \theta dr d\theta d\psi$$

où \vec{r}_1 est le vecteur unité $\frac{\vec{r}}{r}$; il n'y a pas d'éléments infinis et les deux intégrales ont donc un sens.

Elles sont uniformément convergentes. Soit, en effet, un point M_0 dans V , P étant intérieur à la sphère S_η centrée en M_0 et de rayon η , on aura

$$\left| \iiint_{S_\eta} \frac{\rho(M)}{MP} d\tau_M \right| \leq \iiint_{S'_{\eta'}} \frac{\rho(M)}{MP} d\tau_M,$$

$S'_{\eta'}$ étant une sphère centrée en P et de rayon $\eta' = \eta + M_0P$, $S'_{\eta'}$ contient S_η . Si K est une borne supérieure de $\rho(M)$ dans V , l'intégrale sur $S'_{\eta'}$ est inférieure à

$$K \iiint r \sin \vartheta dr d\vartheta d\psi = 2K\pi\eta'^2,$$

ce qui est aussi petit que l'on veut si P est assez voisin de M_0 . De même

$$\left| \iiint_{S_\eta} \frac{\rho(M)}{MP^3} \vec{r} d\tau_M \right| \leq \iiint_{S'_{\eta'}} \frac{\rho(M)}{MP^2} d\tau_M \leq K \iiint_{S'_{\eta'}} \sin \vartheta dr d\vartheta d\psi = 4K\pi\eta'.$$

Donc

$$U(P) = \iiint_V \frac{\rho(M)}{r} d\tau_M$$

et

$$\vec{F}(P) = - \iiint_V \frac{\rho(M)}{r^3} \vec{r} d\tau_M$$

sont deux fonctions de P définies et continues dans tout l'espace.

11. A-t-on aussi

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U$$

à l'intérieur de V ?

Pour faire voir qu'il en est bien ainsi encore, divisons le volume V en deux volumes V_1 et V_2 ; V_2 étant une sphère centrée en P , V_1 le reste de V lorsqu'on a enlevé V_2 . La masse M_1 , contenue dans V_1 , crée en P un champ

$$\vec{F}_1 = - \iiint_{V_1} \frac{\rho(M)}{r^3} \vec{r} d\tau_M,$$

et l'on a, puisque P est hors de V_1 ,

$$\vec{F}_1 = \vec{\nabla} \iiint_{V_1} \frac{\rho(M)}{r} d\tau_M = \vec{\nabla} U_1.$$

Soit maintenant P' dans V_2 et posons

$$\overrightarrow{PP'} = \Delta s \cdot \vec{s}$$

\vec{s} étant un vecteur unité. Formons

$$U_2(P') = \iiint_{V_2} \frac{\rho(M)}{r'} d\tau_M, \quad (r' = MP'),$$

$$U_2(P) = \iiint_{V_2} \frac{\rho(M)}{r} d\tau_M, \quad (r = MP),$$

chacune de ces intégrales a un sens. On a ensuite

$$\left| \frac{U_2(P') - U_2(P)}{\Delta s} \right| < \frac{1}{|\Delta s|} \iiint_{V_2} \rho(M) \left| \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right| d\tau_M,$$

mais

$$\left| \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right| = \frac{|r - r'|}{rr'} \leq \frac{|r - r'|}{2} \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r^2} \right) \leq \frac{|\Delta s|}{2} \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r^2} \right);$$

par conséquent,

$$\left| \frac{U_2(P') - U_2(P)}{\Delta s} \right| \leq \frac{1}{2} \left[\iiint_{V_2} \frac{\rho(M)}{r^2} d\tau + \iiint_{V_2} \frac{\rho(M)}{r'^2} d\tau \right]$$

et chacune de ces intégrales peut être rendue aussi petite que l'on veut ; elles sont, en effet, inférieures à $4\pi Kd$, d étant le diamètre de V_2 .

Dès lors

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left| \frac{U_2(P') - U_2(P)}{\Delta s} \right| = 0,$$

donc

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{dU_2}{ds} = 0, \quad \lim_{d \rightarrow 0} \vec{\nabla} U_2 = 0,$$

et par suite,

$$-\iiint_V \frac{\rho(M)}{r^3} \vec{r} d\tau_M = \vec{\nabla} \iiint_V \frac{\rho(M)}{r} d\tau_M.$$

On a donc, puisque $\vec{F}_2 \rightarrow 0$:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U$$

en tout point de l'espace.

12. Le calcul du flux total de \vec{F} à travers une surface fermée Σ qui ne contient aucune portion de V est bien facile ; ce flux est nul parce

que le flux de \vec{F}_N est toujours nul dans ce cas quel que soit N ; à la limite, il est donc nul.

Supposons que Σ traverse V , le champ \vec{F} est défini et continu dans V , donc la contribution à $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{d\sigma}$ qui provient de la partie de Σ contenue dans V est finie et bien déterminée. Nous savons, d'autre part, que

$$\vec{F} = \lim_{N = \infty} \vec{F}_N.$$

Si, dans la division de V en N parties et dans la distribution des Δm_i en masses ponctuelles dans chaque élément $\Delta \tau_i$, on s'arrange pour qu'aucune de ces masses ne soit sur Σ , le flux total de \vec{F}_N à travers Σ sera $-4\pi \Sigma' \Delta m_i$, où Σ' indique que la sommation ne s'étend qu'à ces masses Δm_i qui sont intérieures à Σ . Si, d'autre part, on a effectué la division de V de manière que, dans l'intérieur de Σ , il n'y ait que des éléments $\Delta \tau_i$ complets et si l'on continue la division de V avec N croissant au delà de toute limite de manière qu'il en soit toujours ainsi, la somme $\Sigma' \Delta m_i$ est alors toujours égale à la masse contenue dans Σ et, à la limite, pour $N = \infty$, le flux total est toujours égal à $-4\pi \Sigma' \Delta m$, c'est-à-dire en fait à

$$-4\pi \iiint_{V'} \rho(M) d\tau_M,$$

où V' est la portion de V situé dans Σ . *Le théorème de Gauss est donc général et s'applique aussi dans le cas de masses attractives continues.*

On peut s'affranchir, dans la démonstration, de l'hypothèse que nous avons faite relative aux éléments $\Delta \tau_i$ complets ; Σ pourrait partager des éléments Δm_i et certains des points en lesquels on a concentré les masses Δm_i pourraient se trouver sur Σ . Il faudrait tenir compte, si chaque point de Σ est régulier, à chaque stade de la subdivision de V , d'une contribution de la forme $-2\pi \Sigma'' \Delta m_i$ où Σ'' indique une sommation sur les masses ponctuelles Δm_i situées sur la surface Σ , mais il est facile de voir, si Σ est une surface régulière (ou même une surface n'ayant qu'un nombre fini de lignes de points multiples) que cette contribution finit par être aussi petite que l'on veut et la conclusion du théorème de Gauss se déduit sans plus d'un passage à la limite évident.

13. En tenant compte du fait que $\rho = 0$ dans l'espace hors de V , on peut écrire le théorème de Gauss sous une forme intéressante et immédiate :

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = -4\pi \iiint_T \rho d\tau \quad (1)$$

où T désigne le volume limité par Σ . Or si \vec{F} a une divergence, on sait que

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} d\tau ; \quad (2)$$

mais les deux équations devant avoir lieu quel que soit T , on en déduit que \vec{F} a une divergence qui est précisément $-4\pi\rho$. Donc

$$\operatorname{div} \vec{F} = -4\pi\rho$$

ou encore

$$\operatorname{lap} U = -4\pi\rho. \quad (3)$$

On a vu que le potentiel a un laplacien nul en tout l'espace sauf aux points attirants lorsque l'on ne considère que des masses ponctuelles. L'équation (3) nous apprend qu'il en est encore ainsi pour le laplacien du potentiel créé par des masses continues, et de plus nous voyons que ce laplacien a un sens même à l'intérieur des masses, où il est proportionnel à la densité.

L'équation (3) est l'équation de Poisson, elle est vérifiée par le potentiel newtonien de masses continues quelconques.

14. Nous avons supposé que ρ est une fonction continue dans V . Les résultats précédents subsistent si ρ présente des discontinuités telles qu'il soit possible de décomposer V en un nombre fini de régions V_i — pouvant d'ailleurs empiéter — à l'intérieur desquelles on puisse définir une densité ρ_i continue, de manière que si P est un point appartenant aux régions V_e, V_k, V_m , par exemple, $\rho(P)$ soit égale à $\rho_e(P) + \rho_k(P) + \rho_m(P)$. Comme le champ et le potentiel sont des expressions additives, disons mieux *linéaires* en $\rho(P)$, le champ total et le potentiel total seront respectivement égaux aux sommes des champs et des potentiels dus aux distributions partielles. L'équation de Poisson sera donc encore valable ; en un point Q où ρ est discontinue il faudra entendre que

$$\lim_{P \rightarrow Q} \operatorname{lap} U = -4\pi \lim_{P \rightarrow Q} \rho(P).$$

Potential de simple couche.

15. Soit une surface Σ , fermée ou non, formée d'un nombre fini de portions de surfaces régulières ; imaginons qu'elle soit couverte d'une couche de matière de densité superficielle continue $\mu(M)$, c'est-à-dire que la masse d'un élément de surface en M soit

$$dm = \mu(M) d\sigma_M ;$$

cette couche crée un champ de gravitation dans l'espace et il est facile de voir que ce champ dérive d'un potentiel $\mathfrak{V}(P)$ défini, si l'on pose $\overrightarrow{MP} = \vec{r}$, par l'intégrale :

$$\mathfrak{V}(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu(M) d\sigma_M}{r} .$$

Cette intégrale est uniformément convergente dans le domaine de tout point M_o de Σ . En effet, soit en M_o , supposé point régulier de Σ , le plan Π tangent à Σ ; projetons les points M de Σ voisins de M_o sur Π , soit M' la projection de M et soit aussi P' la projection de P . La projection de $d\sigma$ est un élément de Π :

$$d\sigma' = d\sigma \vec{n} \cdot \vec{n}_o,$$

\vec{n} et \vec{n}_o étant les normales unités de Σ et Π .

Supposons maintenant que $\mu(M)$ soit borné par le nombre K , imaginons une sphère S_γ de rayon γ , centrée en M_o , et choisissons P à l'intérieur de S_γ . La surface étant régulière en M_o , il n'y a qu'un point M qui corresponde à un point M' de Π si γ est assez petit. Si M est un point quelconque de Σ intérieur à S_γ on aura

$$PM \geq P'M'$$

et $\frac{1}{\vec{n} \cdot \vec{n}_o}$ sera borné par un nombre ζ . La contribution à $\mathfrak{V}(P)$ de la portion de Σ contenue dans S_γ sera inférieure à

$$K\zeta \iint_{S'} \frac{d\sigma'}{P'M'} ,$$

S' étant la portion de Π intérieure à S_γ . Cette dernière intégrale est inférieure à

$$\iint_{S''} \frac{d\sigma'}{P'M'}$$

où S'' est le cercle centré en P' de rayon $R = r + P'M_0$. Au moyen de coordonnées polaires planes d'origine P' , on trouve que cette intégrale vaut $2\pi R$; or $R < 2r$, et l'uniformité de la convergence est démontrée.

Si M_0 n'est pas un point régulier, on fait, s'il y a lieu, le même calcul pour les petites régions de nappes régulières se coupant en M_0 , situées dans S_r ; pour un point conique, le résultat est le même; on supposera cependant que le cône tangent n'est pas infiniment délié.

Le potentiel de simple couche $\mathcal{Q}(P)$ est donc continu dans tout l'espace.

Il n'en est plus de même du champ

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\mathcal{Q}.$$

D'abord, il est facile de voir que cette dernière formule est vraie pour tout point P qui n'est pas sur Σ . Ensuite, on peut constater que l'intégrale

$$\vec{I}(P) = - \iint_{\Sigma} \frac{\mu(M)}{r^3} \vec{r} d\sigma_M$$

a encore un sens si P est sur Σ , mais la valeur de cette intégrale, dans ce cas, n'est pas la limite de la valeur qu'elle a lorsque P tend vers un point de Σ . Cela provient de ce que $\vec{I}(P)$ n'est pas *uniformément* convergente; qu'elle ait un sens, la cause en est due à la compensation des directions variables de r et la démonstration la plus simple qu'on en puisse donner revient à considérer le potentiel de simple couche comme un cas limite d'un potentiel de volume lorsque la région V contenant des masses attirantes est limitée par deux surfaces parallèles Σ_1 et Σ_2 qui se rapprochent de plus en plus et finissent par coïncider avec Σ , la densité de volume ρ étant supposée la même en chaque point d'une normale commune. Si ν est la portion de normale commune interceptée par Σ_1 et Σ_2 , on supposera que dans ce passage à la simple couche, le produit $\nu\rho$ soit toujours égal à $\mu(M)$. L'intégrale qui donne le champ dû au volume en un point intérieur est

$$- \iiint_V \frac{\rho(M)}{r^3} \vec{r} d\tau_M;$$

si ν est infiniment petit, on peut l'écrire :

$$- \iint_{\Sigma} \frac{\rho(M)}{r^3} \vec{r} \nu d\sigma,$$

expression qui a toujours un sens ; sa limite en est bien $-\iint_{\Sigma} \frac{\mu(M) \vec{r}}{r^3} d\sigma$, P étant sur Σ .

Il est clair cependant qu'on n'a plus $\vec{F} = \vec{\nabla} V$ sur Σ .

16. On se rend compte le mieux du monde de ces faits nouveaux en considérant l'exemple du potentiel de simple couche créé par une densité superficielle uniforme étendue sur une sphère de rayon R . Supposons que $\mu = 1$; on aura

$$\vec{F}(P) = - \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma_M}{MP^3} \vec{MP}.$$

On va montrer que cette dernière intégrale est nulle si P est intérieur à Σ , alors que, si P est extérieur à Σ , elle vaut $-\frac{4\pi}{OP^3} \vec{OP}$, c'est-à-dire que l'effet de la couche sur un point extérieur est le même que celui d'une masse ponctuelle égale à la masse totale placée au centre de la sphère. Dès lors, le champ \vec{F} est discontinu en Σ :

$$\lim_{P \rightarrow M} \vec{F} = 0 \quad (P \text{ intérieur})$$

$$\lim_{P \rightarrow M} \vec{F} = -\frac{4\pi}{R^3} \vec{OM} \quad (P \text{ extérieur}).$$

On verra enfin que

$$\vec{F}(M_o) = - \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma_M}{MM_o^3} \vec{MM}_o = -\frac{2\pi}{R^3} \vec{OM}_o.$$

α) P intérieur à Σ . Décomposons Σ en éléments au moyen de pyramides de sommet P de telle manière qu'à une pyramide découpant un élément $d\sigma_1$ en M_1 corresponde toujours une pyramide dont la surface latérale soit formée par les mêmes plans que la surface latérale de la précédente ; soit $d\sigma_2$ l'élément qu'elle découpe en M_2 . Le champ élémentaire créé par $d\sigma_1$ est

$$d\vec{F}_1 = \frac{d\sigma_1}{PM_1^3} \vec{PM}_1,$$

celui qui est créé par $d\sigma_2$ est

$$d\vec{F}_2 = \frac{d\sigma_2}{PM_2^3} \vec{PM}_2 ;$$

or les angles solides sous lesquels on voit, de P , $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ sont égaux entre eux et respectivement égaux à

$$-\frac{d\sigma_1}{PM_1^2} \cos \varphi_1 \quad \text{et} \quad -\frac{d\sigma_2}{PM_2^2} \cos \varphi_2 ;$$

de plus,

$$\frac{\vec{PM}_1}{PM_1} = -\frac{\vec{PM}_2}{PM_2} \quad \text{et} \quad \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2,$$

donc $d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = 0$, ce qui démontre l'assertion formulée plus haut ; dès lors $\mathcal{Q}(P) = \text{constante}$, si P est intérieur.

β) P est extérieur à Σ . Par raison de symétrie, la force en P est dirigée vers O et son intensité ne dépend que de la distance OP et non de la direction \vec{OP} . Le flux total à travers une sphère S de centre O et de rayon $r = OP$ est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{d\sigma} = -4\pi \cdot 4\pi = -16\pi^2, \quad (\Sigma M = 4\pi)$$

mais $\vec{F} \cdot \vec{d\sigma} = -F d\sigma$, où F est l'intensité de \vec{F} en P , qui est la même en tout point de S , donc

$$F \iint_S d\sigma = 16\pi^2,$$

$$F = \frac{4\pi}{r^2}$$

et notre seconde assertion est démontrée. Donc $\mathcal{Q}(P) = \frac{4\pi}{r}$, si P est extérieur.

γ) P est sur Σ . On peut évaluer l'intégrale $\vec{F}(M_o)$ en remarquant que, par raison de symétrie, le vecteur $\vec{F}(M_o)$ est dirigé vers O et que son intensité est indépendante de M_o . On décomposera Σ en zones élémentaires par des cônes de sommet M_o , on évaluera la contribution $d\vec{F}$ de chaque zone, mais on ne tiendra compte que de la projection de $d\vec{F}$ sur M_oO . Le calcul très simple, que nous laissons au lecteur le soin de faire, donne pour F précisément 2π . Mais on peut aussi appliquer ici le théorème de Gauss. On imagine un élément $d\sigma$ de Σ ; le flux total à travers Σ de la masse élémentaire $\mu(M)d\sigma = d\sigma$ est $-2\pi d\sigma$. La somme de ces flux est $-4\pi^2 R^2$. En raisonnant comme dans le cas α), on trouve $F = \frac{2\pi}{R^2}$

17. Le potentiel de simple couche satisfait à l'équation de Laplace

$$\text{lap } \mathcal{V} = 0$$

en tout point de l'espace qui n'est pas sur Σ . $\mathcal{V}(P)$ est continue dans tout l'espace, mais $\vec{F}(P)$ ne l'est que dans toute région qui ne contient aucun point de Σ . En particulier, si Σ est une surface non fermée, le champ varie continuellement le long de toute courbe qui ne traverse pas Σ . Si l'on imagine une courbe Γ partant d'un point P , situé d'un côté de Σ et aboutissant au point P' situé de l'autre côté de Σ , P et P' étant infiniment voisins, le champ en P' n'est pas le même que le champ en P , mais l'on imagine bien facilement que la différence ne doit dépendre que de la densité μ au point M de Σ infiniment voisin de P et P' . On étudiera plus loin quelques-unes des circonstances en question.

Potentiel de double couche.

18. Considérons deux surfaces parallèles Σ_1 et Σ_2 distantes de ν ; les normales communes établissent entre Σ_1 et Σ_2 une correspondance ponctuelle $P_1 \rightleftharpoons P_2$; soient $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ deux éléments correspondants. Imaginons de plus que sur chacune de ces deux surfaces, on ait étalé une densité superficielle $\mu_1(M_1)$ et $\mu_2(M_2)$, de manière que l'on ait

$$\mu_1 d\sigma_1 = \mu_2 d\sigma_2.$$

La différence des potentiels de simple couche sera en un point P :

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{\mu_2 d\sigma_2}{r_2} - \iint_{\Sigma_1} \frac{\mu_1 d\sigma_1}{r_1} = \iint_{\Sigma_1} \mu_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) d\sigma_1$$

avec $r_1 = M_1P$, $r_2 = M_2P$. Faisons tendre ν vers zéro et augmentons μ_1 au delà de toutes limites, mais de façon que $\mu_1\nu$ reste toujours égal à une fonction donnée de M_1 , soit $\mu(M_1)$. La différence des potentiels de simple couche tendra vers une intégrale $\mathcal{V}(P)$, étendue à $\Sigma_1 = \Sigma$, que l'on appelle le *potentiel de double couche* de la surface Σ , $\mu(M)$ en est encore appelée la *densité*. Posons $\nu = dn$, et orientons la normale à $\Sigma = \Sigma_1$, de Σ_1 vers Σ_2 ; on voit que

$$r_1 - r_2 = dn \cos \varphi$$

où φ est l'angle que forment les deux directions \vec{MP} et \vec{n} , et dès lors

$$\mathcal{V}(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu_2(M) \cos \varphi}{r^2} d\sigma_M = \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_M}{dn}.$$

On voit sans peine que le potentiel de double couche est une fonction continue dans toute région de l'espace qui ne contient aucun point de Σ , et l'on a partout, sauf en Σ ,

$$\text{lap } \mathfrak{W} = 0.$$

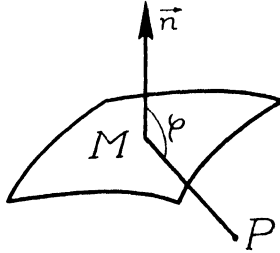


Fig. 1.

Si P est en M_o sur Σ , l'intégrale

$$\mathfrak{W}(M_o) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu(M) \cos \varphi}{r_o^2} d\sigma_M \quad (r_o = MM_o)$$

a un sens, car si $\mu_i(M) < K$

$$|\mathfrak{W}(M_o)| \leq K \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{r_o^2} d\sigma_M = \alpha K$$

où α est l'angle solide sous lequel de M_o on voit la surface Σ .

19. La fonction $\mathfrak{W}(P)$ est discontinue en chaque point de Σ . On le voit tout d'abord si $\mu = 1$; car le potentiel $\mathfrak{W}(P)$ est alors l'angle solide sous lequel de P on voit Σ , cet angle ayant un signe qui dépend du choix du sens de \vec{n} . En particulier, si Σ est fermée, et si \vec{n} est la normale extérieure, pour un point intérieur, ce potentiel de double couche particulier vaudra -4π , il sera zéro pour un point extérieur, et si P est en M_o , il sera $-\alpha$.

Il faut donc s'attendre à devoir considérer les trois valeurs *distinctes* suivantes :

$$\mathfrak{W}(M_o) = \mathfrak{W}_o$$

$$\lim_{P \rightarrow M_o} \mathfrak{W}(P) = \mathfrak{W}_o^+ \quad \text{si } P \text{ tend vers } M_o \text{ du côté positif de } \Sigma$$

$$\lim_{P \rightarrow M_o} \mathfrak{W}(P) = \mathfrak{W}_o^- \quad \text{si } P \text{ tend vers } M_o \text{ du côté négatif de } \Sigma.$$

Nous calculerons les différences de ces valeurs dans l'hypothèse où Σ est une *surface fermée*. Soit μ_o le nombre $\mu(M_o)$. L'intégrale

$$I(P) = \iint_{\Sigma} [\mu(M) - \mu_o] \frac{\cos \varphi}{r^2} d\tau$$

est uniformément convergente dans le domaine de M_o . En effet, si on prend une région Σ' de Σ , entourant M_o de façon que

$$|\mu(M) - \mu_o| < \varepsilon',$$

et si P est dans la sphère de centre M_o et de rayon η , l'angle solide sous lequel de P on verra Σ' est borné ; soit λ la borne supérieure de la valeur absolue de cet angle, alors

$$\left| \iint_{\Sigma'} [\mu(M) - \mu_o] \frac{\cos \varphi}{r^2} d\tau \right| < \varepsilon' \lambda,$$

ce qui peut être rendu aussi petit que l'on veut. La fonction $I(P)$ est donc continue en M_o ; mais

$$I(P) = \mathfrak{W}(P) - \mu_o \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{r_o^2} d\tau,$$

donc, si l'on choisit comme normale positive la normale extérieure

$$\mathfrak{W}_o^+ = \mathfrak{W}_o^- + 4\pi \mu_o = \mathfrak{W}_o + \alpha \mu_o.$$

En particulier, si M_o est un point régulier

$\begin{aligned} \mathfrak{W}_o^- &= \mathfrak{W}_o - 2\pi \mu_o \\ \mathfrak{W}_o^+ &= \mathfrak{W}_o + 2\pi \mu_o. \end{aligned}$	(4)
---	-----

Retour au potentiel de simple couche.

20. Il est utile de connaître les discontinuités de $(\vec{n} \nabla) \mathfrak{W}$, \vec{n} étant la normale à la surface Σ sur laquelle est étalée la densité qui crée le potentiel de simple couche \mathfrak{W} , lorsque Σ est une *surface fermée*.

Nous les calculerons pour un point M_o régulier de Σ , et même nous supposerons que les sections planes de Σ , passant par M_o , ont toutes en M_o une courbure bien déterminée, cela revient à dire que si l'on

développe $\vec{r}(u, \nu)$, représentant Σ , dans le voisinage de $M_o(u_o, \nu_o)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}$, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial \nu}$, $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \nu^2}$ existent en M_o . Prenons sur Σ , pour représenter le voisinage de M_o , les valeurs u et ν des coordonnées rectangulaires sur le plan tangent Π_o à Σ en M_o de la projection de M , et supposons, par exemple, que les axes, passant par M_o , soient tangents aux lignes de courbure. En posant $\overrightarrow{M_o M} = \vec{r}_o$, on aura

$$\vec{r}_o = \vec{a}u + \vec{b}\nu + \vec{c}u^2 + \vec{d}\nu^2 + \vec{g}(u, \nu);$$

$\vec{g}(u, \nu)$ étant un vecteur dont la grandeur est de l'ordre de u^3 ; $a = b = 1$, $c = \frac{1}{2R_1}$, $d = \frac{1}{2R_2}$, R_1 et R_2 étant les deux rayons de courbure principaux en M_o .

Nous allons voir tout d'abord que la dérivée normale de \mathcal{V} existe en tout point P voisin de M_o , et pour cela nous allons lui donner une forme qui fait intervenir un élément géométrique utile à considérer. Soit P un point de l'espace et P' un point voisin, $\overrightarrow{PP'} = \Delta l \vec{s}$.

$$\frac{\mathcal{V}(P') - \mathcal{V}(P)}{\Delta l} = \iint_{\Sigma} \mu(M) \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{\Delta l} d\sigma_M$$

d'où

$$\frac{d\mathcal{V}}{ds} = \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} d\sigma_M;$$

mais $\frac{d}{ds} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \cos \psi$, où ψ est l'angle des deux directions \overrightarrow{PM} et \vec{s} . Si P tend vers un point M_o de la surface, \vec{s} tendant vers la normale extérieure \vec{n}_e , $\frac{d\mathcal{V}}{ds}$ aura peut-être une valeur limite qu'on écrira $\left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^+$, tandis que si P tend vers M_o , \vec{s} vers \vec{n}_e , $\frac{d\mathcal{V}}{ds}$ aura peut-être une valeur limite que nous désignerons par $\left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^-$. Cependant si ψ_o est l'angle de $\overrightarrow{M_o M}$ avec la normale extérieure en M_o , il conviendra d'étudier la valeur de l'intégrale

$$J(M_o) = \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos \psi_o}{r_o^2} d\sigma_M \quad (\vec{r}_o = \overrightarrow{MM_o}).$$

Je dis qu'elle existe; si M est en M_o , $r_o = 0$, mais $\cos \psi_o = 0$ aussi,

ce qui est déjà un indice. Pour démontrer rigoureusement l'existence de $J(M_o)$, il suffit de calculer $\cos \psi_o$, lorsque M est voisin de M_o . Soit Σ_o une région de Σ entourant M_o et se projetant sur le plan Π_o à l'in-

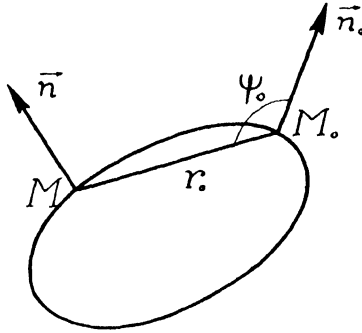


Fig. 2.

térieur d'un cercle C_ρ de rayon ρ . Si $d\tau_M$ se projette en $d\tau'_{M'}$, on peut trouver un nombre fini λ tel que

$$d\tau_M \leq \lambda d\tau'_{M'}$$

pour tout élément de Σ_o ; de plus $\mu < K$ sur Σ_o ; enfin si $r'_o = M_o M'$, $\frac{1}{r_o} \leq \frac{1}{r'_o}$, et dès lors

$$|J(M_o)| \leq \lambda K \iint_{C_\rho} \frac{\cos \psi_o}{r_o'^2} d\tau'_{M'}$$

D'autre part

$$r_o |\cos \psi_o| = |\vec{r}_o \cdot \vec{n}|,$$

et

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{(\vec{a} + 2\vec{c}u + \vec{g}'_u) \times (\vec{b} + 2\vec{d}v + \vec{g}'_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \\ &= \vec{n}_o + \vec{e}u + \vec{f}v + \vec{h}(u, v) \end{aligned}$$

\vec{h} étant du second ordre en u et v . Donc

$$r_o |\cos \psi_o| = [\vec{n}_o + \vec{e}u + \vec{f}v + \vec{h}(u, v)] \cdot [\vec{a}u + \vec{b}v + \vec{c}u^2 + \dots];$$

mais $\vec{a} \cdot \vec{n}_o = \vec{b} \cdot \vec{n}_o = 0$, car \vec{n}_o est perpendiculaire à Π_o , donc

$$r_o |\cos \psi_o| = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + D(u, v),$$

D étant du troisième ordre. On a de plus

$$r_o'^2 = A'u^2 + B'v^2 + D'(u, v)$$

et

$$d\tau'_{M'} = dudv$$

Il est visible dès lors que $\iint_{C_\rho} \frac{Au^2 + 2Buv + Cv^2 + D(u, v)}{[A'u^2 + B'v^2 + D'(u, v)]^{\frac{3}{2}}} dudv$ a un sens.¹

21. Pour étudier les discontinuités de $\frac{d\mathcal{V}}{dn}$, on va considérer l'intégrale suivante

$$L(P) = \iint_{\Sigma} \left[\mu(M) \frac{\cos \psi}{r^2} + \mu_o \frac{\cos \varphi}{r^2} \right] d\sigma_M$$

$\vec{r} = \vec{MP}$, $\cos \psi = \frac{\vec{PM} \cdot \vec{s}}{PM}$, \vec{s} étant la normale extérieure en M_o à Σ ,

μ_o est $\mu(M_o)$ et φ est l'angle de \vec{n}_e avec \vec{MP} . Cette intégrale est uniformément convergente dans le voisinage de M_o . Soit, en effet, en M le trièdre dont les arêtes sont \vec{MP} , \vec{n}_e et la parallèle à \vec{s} . Soit θ l'angle de \vec{n}_e et de \vec{s} , Ω le dièdre d'arête \vec{n}_e , l'angle de MP avec \vec{s} est $\pi - \psi$, soit φ celui de \vec{MP} avec \vec{n}_e , on aura donc :

$$\cos(\pi - \psi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos \Omega$$

et

$$L(P) = - \iint_{\Sigma} \left[\mu(M) \cos \theta - \mu_o \right] \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma_M - \iint_{\Sigma} \mu(M) \sin \varphi \cos \Omega \frac{\sin \theta d\sigma_M}{r^2};$$

la première intégrale est uniformément convergente, elle est du type de $I(P)$ (§ 19) avec une densité égale à $\mu \cos \theta$, car $\lim_{M \rightarrow M_o} \mu \cos \theta = \mu_o$,

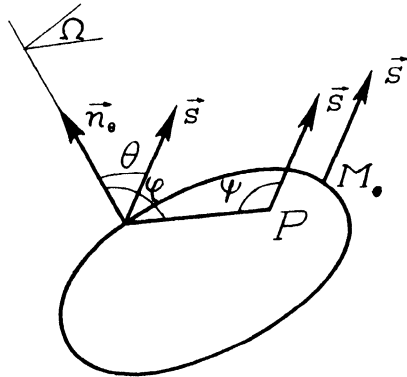


Fig. 3.

puisque $\lim_{M \rightarrow M_o} \theta = 0$; la seconde intégrale l'est aussi car $\iint \frac{\sin \theta d\sigma_M}{r^2}$ l'est, comme le montrerait immédiatement un calcul analogue à celui qui a été fait pour $J(P)$. On aurait $\sin \theta = \alpha u + \beta v +$ (termes du se-

¹ On s'en rend compte en changeant de variables : $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$.

cond ordre) et en passant à $d\sigma'_M$ exprimé en coordonnées polaires dans Π_o , on verrait que pour Σ_o suffisamment petit et pour P aussi voisin de Σ_o qu'on le veut, cette intégrale est aussi petite en valeur absolue qu'on le veut.

$L(P)$ est continue, elle est la somme d'un potentiel de double couche et d'une expression qui aura toujours un sens quand P tend vers M_o et qui est soit $\left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^+$, soit $\left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^-$. D'autre part, si P est en M_o , $L(M_o)$ a aussi un sens. A cause de la continuité, on pourra écrire, M_o étant un point régulier,

$$\left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^+ = \left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^- - 4\pi\mu_o = J(M_o) - 2\pi\mu_o ;$$

donc :

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} \left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^- = 2\pi\mu_o + \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos \psi_o}{r_o^2} d\sigma_M \\ \left(\frac{d\mathcal{V}}{dn_e}\right)_o^+ = -2\pi\mu_o + \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos \psi_o}{r_o^2} d\sigma_M \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\psi_o = \text{angle de } M_oM \\ \text{avec la normale ex-} \\ \text{térieure à } \Sigma \text{ en } M_o.) \end{array}$$

Nous laissons comme exercice au lecteur le soin de démontrer que les dérivées de \mathcal{V} dans une direction tangente à Σ sont toujours continues aux points réguliers.

Théorèmes de la moyenne.

22. Gauss a formulé deux très beaux théorèmes dont le premier est un cas particulier d'une proposition générale sur les fonctions harmoniques que nous retrouverons plus tard [§ 73], l'autre nous sera très utile pour la démonstration d'un théorème sur les fonctions surharmoniques [§ 111]. Ils sont fondés tous les deux sur le fait suivant : *le potentiel en P d'une masse unité placée en Q est égal au potentiel en Q d'une masse unité placée en P*¹.

Remarquons que le potentiel d'une couche sphérique Σ homogène, centrée en O , de masse totale égale à l'unité en un point P extérieur vaut $\frac{1}{r}$ ($r = OP$) et $\frac{1}{a}$ si P est intérieur ($a =$ rayon de la couche).

¹ Nous suivons ici la démonstration donnée par M. Kellogg dans son livre sur le potentiel (*loc. cit.* p. 82).

On a cependant pour tout P :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma}{r},$$

c'est la moyenne sur Σ du potentiel créé par une masse unité placée en O , donc :

1° la moyenne sur une sphère du potentiel créé par un point matériel de masse unité situé hors de la sphère est égale à la valeur de ce potentiel au centre de la sphère, soit $\frac{1}{r}$;

2° la moyenne sur une sphère du potentiel créé par un point matériel de masse unité situé à l'intérieur de la sphère est indépendante de la position de ce point intérieur ; elle est égale à la valeur du potentiel, en un point quelconque de la sphère, créé par le point matériel placé au centre, soit $\frac{1}{a}$.

Si, au lieu d'un seul point matériel, on en a plusieurs et même si au lieu de points, on considère une distribution continue, et si l'on rappelle que la valeur moyenne d'une somme de fonctions est égale à la somme des valeurs moyennes de ces fonctions, on peut formuler les deux théorèmes de Gauss :

La moyenne sur la surface d'une sphère du potentiel de masses extérieures à cette sphère est égale à la valeur de ce potentiel au centre de la sphère.

La moyenne sur la surface d'une sphère du potentiel de masses situées toutes à l'intérieur de la sphère est indépendante de leur distribution et elle est égale à leur somme multipliée par l'inverse du rayon de la sphère.

Exercices.

1. Trouver le potentiel et le champ newtoniens d'un cylindre de révolution homogène, en un point de son axe.

2. Trouver l'attraction newtonienne au foyer d'un segment de paraboloïde de révolution, déterminé par une section perpendiculaire à l'axe.

3. Le mouvement d'un point matériel lâché sans vitesse à l'extrémité d'un tunnel percé le long d'un diamètre de la terre, supposée homogène et sphérique, est un mouvement harmonique simple.

4. Les surfaces équipotentielles d'une barre homogène sont des ellipsoïdes de révolution dont les foyers sont aux extrémités de la barre ; les lignes de forces sont des hyperboles de mêmes foyers.

5. L'attraction d'une couche homogène, limitée par deux ellipsoïdes homothétiques, sur un point intérieur, est nulle.

6. Etudier la variation du potentiel newtonien créé par un solide homogène limité par deux sphères concentriques. Examiner le cas où les frontières sphériques ne sont plus concentriques.

7. La densité en chaque point d'un corps sphérique est une fonction $\rho(r)$ de la distance r au centre. Calculer le potentiel en un point intérieur ; montrer directement par le calcul que ce potentiel vérifie l'équation de Poisson.

8. On donne une sphère de rayon R ; en un point M de cette sphère, la densité δ est donnée par la formule

$$\delta = a + \frac{b}{\lambda}$$

a et b étant des constantes et λ la distance OM . Calculer l'attraction de la sphère sur un point P de masse unité, situé à la distance d du centre (Licence, Paris, juillet 1914).

9. L'attraction à l'origine du solide homogène limité par la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

et le cône

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - z^2 = 0$$

et pour les points duquel $z > 0$, a pour intensité

$$\frac{\pi \rho \alpha^2 \beta^2}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}. \quad (\text{Kellogg})$$

10. Si $U(x, y, z)$ est harmonique, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} U\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

l'est aussi (Lord Kelvin ; cf. Goursat, III, p. 243).

11. Si Σ est une surface équipotentielle d'un certain système attirant, montrer que le potentiel hors de Σ est le même que celui d'une simple couche, étalée sur Σ , de densité $\frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} V$ et que la masse totale de cette couche est égale à la masse du système qui est contenue dans Σ (Weatherburn).

CHAPITRE II

Dynamique des fluides parfaits.

Equations générales de l'équilibre.

23. Les fluides sont des milieux matériels continus déformables ; ils sont en équilibre si chacun de leurs éléments de volume est en équilibre. Il est bien évident cependant que l'on obtient des conditions nécessaires de l'équilibre en écrivant que tout le fluide donné est soumis à des forces extérieures dont la résultante générale et le moment résultant sont nuls.

Les forces extérieures sont de deux sortes :

1° les forces de volume, comme le poids, dont on se donne en chaque point P du fluide, et pour chaque élément de volume $d\tau$, la résultante sous la forme

$$\vec{F} \rho d\tau,$$

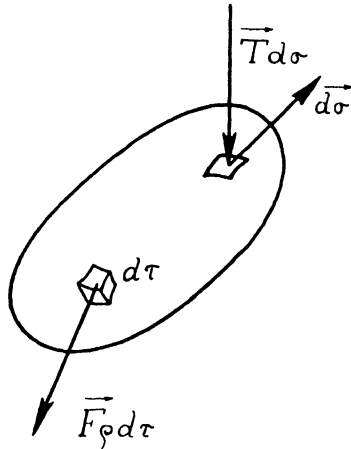


Fig. 4.

\vec{F} étant la force extérieure agissant sur le fluide en P , rapportée à l'unité de masse ; $\rho(P)$ est la densité du fluide en P .

2^o les forces de surface, c'est-à-dire les forces agissant sur chacun des éléments $d\sigma$ de la surface qui limite le fluide et qui sont données sous la forme

$$\vec{T}d\sigma ;$$

\vec{T} est l'effort agissant sur $d\sigma$ rapporté à l'unité d'aire. Si \vec{T} fait un angle aigu avec la normale extérieure, l'effort est une traction ; si l'angle est obtus, c'est une pression.

Repérons les points P du fluide au moyen d'un vecteur \vec{r} . Les conditions générales de l'équilibre s'écrivent, si V est le volume occupé par le fluide et Σ la surface qui le limite :

$$\iiint_V \vec{F}_\rho d\tau + \iint_\Sigma \vec{T} d\sigma = 0 \quad (1)$$

$$\iiint_V \vec{r} \times \vec{F}_\rho d\tau + \iint_\Sigma \vec{r} \times \vec{T} d\sigma = 0. \quad (2)$$

Mais ces conditions ne nous assurent pas qu'il y ait équilibre intérieur. Il convient de faire une analyse plus détaillée du fluide, et, en particulier, il convient d'écrire, suivant les principes de la statique des systèmes déformables, qu'une portion quelconque V' , limitée par une surface Σ' , est en équilibre. Mais, pour ce faire, il convient d'analyser les actions que le reste du fluide exerce sur la portion qu'on considère. Les forces extérieures de volume ne sont pas modifiées lorsqu'on imagine que dans l'état d'équilibre on enlève la portion du fluide hors de V' . On *admet* ensuite que l'action sur V' du reste du fluide est représentable par un système de forces de surface ¹ agissant sur les éléments $d\sigma$ de la surface Σ' ; soit dès lors $\vec{T}d\sigma$ l'effort exercé sur $d\sigma$.

Les équations (1) et (2) où V' remplace V et Σ' remplace Σ devront être satisfaites, dans l'état d'équilibre, et cela quelle que soit la portion considérée V' du fluide.

Définition du fluide parfait.

24. Un fluide est un milieu continu dont la *cohésion* est nulle, c'est-à-dire que deux éléments contigus du fluide n'opposent aucune résistance à des forces extérieures tendant à les séparer. Dès lors, les efforts intérieurs sont des *pressions*, jamais des *tractions*.

¹ Dans certains problèmes de mécanique céleste, où l'on tient compte de l'attraction des diverses parties du fluide les unes sur les autres, il faut modifier cette hypothèse.

Un fluide est *parfait* si les efforts intérieurs sont toujours *normaux* aux éléments de surface sur lesquels ils s'exercent, ce qui revient à dire que si des forces extérieures tendent à faire glisser deux éléments d'un fluide parfait le long d'une surface mitoyenne, ces éléments n'opposent aucune résistance à ce glissement ; ce que l'on exprime encore en disant que la *viscosité* d'un fluide parfait est nulle.

Il s'ensuit que, dans un fluide parfait, l'effort $\vec{T} d\sigma$ est normal à l'élément $d\sigma$; il a donc même support que $\vec{d}\sigma$, mais comme c'est une pression, il faudra, dans les équations (1) et (2), remplacer

$$\vec{F} d\sigma \quad \text{par} \quad - p \vec{d}\sigma$$

puisque nous avons l'habitude de prendre comme normale positive \vec{n} , celle qui est extérieure aux régions considérées. Par conséquent, nous dirons que l'effort agissant sur la face positive d'un élément $\vec{d}\sigma$ est égal à $- p \vec{d}\sigma$, où p est une fonction *positive* du point du fluide où l'on considère l'élément $\vec{d}\sigma$; elle ne dépend que de ce point et pas de l'orientation de $\vec{d}\sigma$.

Les équations (1) et (2) s'écrivent dès lors :

$$\iiint_{V'} \vec{F} \rho d\tau - \iint_{\Sigma'} p \vec{d}\sigma = 0 \quad (1')$$

$$\iiint_{V'} \vec{r} \times \vec{F} \rho d\tau - \iint_{\Sigma'} p \vec{r} \times \vec{d}\sigma = 0. \quad (2')$$

Le théorème du gradient (I, § 72) permet d'écrire

$$\iint_{\Sigma'} p \vec{d}\sigma = \iiint_{V'} \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau$$

car (1') permet précisément d'affirmer que p a un gradient, et celui du rotationnel (I, § 72) donne

$$\iint_{\Sigma'} p \vec{r} \times \vec{d}\sigma = - \iiint_{V'} \overrightarrow{\text{rot}} p \vec{r} d\tau.$$

Or

$$\overrightarrow{\text{rot}} p \vec{r} = p \overrightarrow{\text{rot}} \vec{r} - \vec{r} \times \overrightarrow{\text{grad}} p,$$

et comme $\vec{r} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} r^2}{2}$, on a $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{r} = 0$ (I, § 74) ; donc

$$\iint_{\Sigma'} p \vec{r} \times \vec{d}\sigma = \iiint_{V'} \vec{r} \times \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau.$$

Il faut donc, pour l'équilibre, qu'on ait quel que soit V' :

$$\iiint_{V'} (\vec{F}_\rho - \overrightarrow{\text{grad}} p) d\tau = 0$$

$$\iiint_{V'} \vec{r} \times \{ \vec{F}_\rho - \overrightarrow{\text{grad}} p \} d\tau = 0,$$

ce qui entraîne la seule équation vectorielle d'équilibre

$$\rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} p = 0. \quad (3)$$

On voit donc que l'hypothèse d'après laquelle l'effort est normal a pour effet de réduire le nombre des conditions d'équilibre.

A la condition (3) qui doit être satisfaite en tous les points du fluide, il faut ajouter la condition

$$p \geq 0.$$

Equation du mouvement.

25. On peut traiter formellement le problème le plus général de la dynamique des systèmes comme un problème de statique. Il suffit, comme on le sait, d'ajouter aux forces données les *forces d'inertie*. Ce sont, bien entendu, des forces de volume, car seul un élément de masse du fluide peut être doué d'inertie. Si l'on désigne par \vec{J} le vecteur accélération, défini relativement à un solide au repos par rapport aux étoiles fixes, de l'élément du fluide en P , à l'instant t , la force d'inertie de cet élément sera

$$- \rho \vec{J} d\tau$$

et comme à chaque instant, le système des forces données et des forces d'inertie agissant sur le volume V doit être équivalent à zéro, les équations (1) et (2), où l'on a remplacé

$$\vec{F} \text{ par } \vec{F} - \vec{J},$$

doivent être vérifiées. On trouve alors sans difficulté, en passant par une région V' quelconque du fluide, que les équations vectorielles se réduisent à une seule :

$$\rho (\vec{F} - \vec{J}) - \overrightarrow{\text{grad}} p = 0$$

ou encore

$$\vec{J} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p, \quad (4)$$

qui est l'équation du mouvement.

Il convient de remarquer cependant que \vec{F} , p et \vec{J} ne sont pas seulement des fonctions du point P dans le fluide, mais qu'elles dépendent aussi du temps t . On aura dès lors à considérer des fonctions scalaires $f(P; t)$ et des fonctions vectorielles $\vec{g}(P; t)$ où t figure comme paramètre à côté de l'argument P . Les considérations qui suivent ont pour but d'analyser cette dépendance et de définir rigoureusement le vecteur \vec{J} .

Variables de Lagrange et variables d'Euler.

26. La description du mouvement d'un fluide peut se faire par une méthode due à Lagrange. On admet qu'il est possible de suivre, dans leur mouvement, par la pensée tout au moins, les divers éléments que nous appellerons dorénavant les particules du fluide. Si l'on suppose que le liquide ou le gaz considéré a une structure moléculaire, cette méthode ne soulève conceptuellement aucune difficulté, mais alors le fluide n'est pas un milieu continu; et d'ailleurs la trajectoire d'une telle molécule est extrêmement compliquée (mouvement brownien); si, au contraire, on conserve la notion de milieu continu, il semble difficile de concevoir une particule individualisée et de la suivre dans son mouvement. Nous nous figurerons que l'on peut suivre les vicissitudes d'un élément de volume et ce que l'on nommera sa trajectoire sera celle de son centre de gravité; nous parlerons aussi malgré tout de la trajectoire d'une particule, et ce langage n'entraîne aucun inconvénient ¹.

Soit P_o la position à l'instant initial t_o de la particule considérée, et P sa position à l'instant t . Il est clair que si l'on connaît le vecteur $\vec{r} = \vec{OP}$, à chaque instant du temps et pour chaque particule du fluide, le mouvement de tout le fluide sera parfaitement connu. \vec{r} sera donc une fonction vectorielle de P_o et de t

$$\vec{r} = \vec{r}(P_o; t); \tag{5}$$

lorsque P_o parcourra tous les points du fluide à l'instant initial, l'équation précédente permettra de connaître la position du fluide à l'instant

¹ On sait que la théorie cinétique qui postule la discontinuité des gaz et des liquides aboutit, par des raisonnements statistiques, aux mêmes résultats que la théorie des fluides continus en ce qui concerne la conduite des phénomènes à l'échelle macroscopique. Il faut cependant admettre que les éléments de volume considérés par la théorie des fluides contiennent un très grand nombre d'atomes ou de molécules lorsqu'on veut établir une correspondance utile entre les deux conceptions.

t . Si P_o est fixe, l'équation (5) donne la trajectoire de la particule issue de P_o . Dès lors, sa vitesse à l'instant t sera

$$\vec{W}(P_o; t) = \frac{\partial \vec{r}(P_o; t)}{\partial t};$$

et son accélération

$$\vec{J}(P_o; t) = \frac{\partial^2 \vec{r}(P_o; t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{W}(P_o; t)}{\partial t};$$

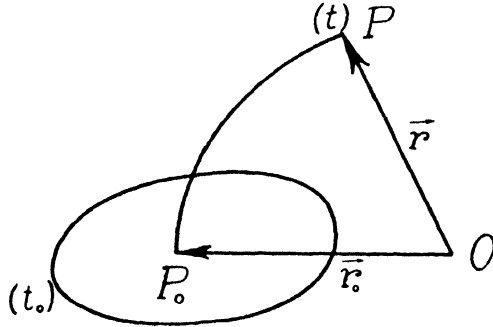


Fig. 5.

P_o et t , ou les coordonnées de P_o et t , sont les *variables de Lagrange*.

27. On peut décrire le mouvement d'une autre manière. On considère l'espace fixe dans lequel se meut le fluide, et, à l'instant t , on imagine que l'on connaisse en chaque point P de l'espace la vitesse $\vec{W}(P; t)$ de la particule de fluide qui y passe. C'est \vec{W} qui est la *variable vectorielle d'Euler*; les composantes de \vec{W} sont dites aussi les *variables d'Euler*.

Ce champ vectoriel permet de décrire l'état de mouvement du fluide à chaque instant, mais ne donne pas sans plus, comme le font immédiatement les variables de Lagrange, la possibilité de décrire le mouvement des particules du fluide. Pour y arriver, il suffit évidemment de retrouver $\vec{r} = \vec{r}(P_o; t)$ lorsqu'on connaît $\vec{W}(P; t)$, ce qui revient à intégrer l'équation

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{W}(P; t)$$

et à en trouver la solution $\vec{r}(P_o; t)$ qui pour $t = t_o$ définit le vecteur

$$\vec{r}_o = \vec{OP}_o = \vec{r}(P_o; t_o).$$

On ne peut bien saisir le sens de ce problème qu'après avoir défini l'accélération au moyen des variables d'Euler et plus généralement la

dérivée des fonctions $f(P; t)$ et $\vec{g}(P; t)$ relative à une particule passant en P à l'instant t :

28. Soit une particule qui, à l'instant t , est en P et, à l'instant t' , est en P' . Les vitesses de cette particule sont respectivement

$$\vec{W}(P; t) \text{ et } \vec{W}(P'; t');$$

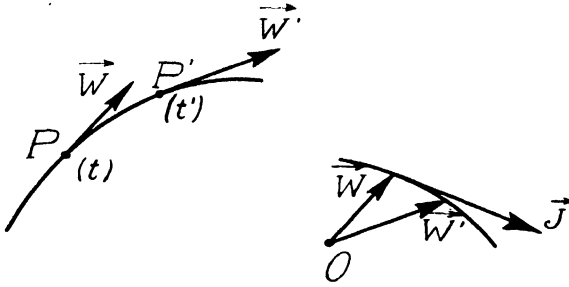


Fig. 6.

l'accroissement $d\vec{W}$ que subit cette vitesse, si l'on admet que $t' - t = dt$, peut s'écrire :

$$d\vec{W} = \vec{W}(P'; t') - \vec{W}(P'; t) + \vec{W}(P'; t) - \vec{W}(P; t)$$

et l'on a [I, § 68, formule (1)]

$$d\vec{W} = \frac{\partial \vec{W}(P; t)}{\partial t} dt + (d\vec{r} \nabla) \vec{W}(P; t).$$

Il s'ensuit que l'accélération \vec{J} de la particule considérée est

$$\vec{J} = \frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \nabla) \vec{W},$$

car $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{W}$.

La définition de \vec{J} est relative à la trajectoire suivie par une particule et à la manière dont cette trajectoire est parcourue, c'est pourquoi, lorsqu'on emploie la méthode eulérienne, il faut suivre le mouvement de la particule et ne pas se borner à étudier la variation avec le temps du champ de vitesses \vec{W} en P . Il y a donc lieu de bien distinguer les deux espèces de dérivées $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{d}{dt}$, dont la première mesure un taux de variation en un point de l'espace et dont la deuxième mesure un taux de variation le long d'une trajectoire d'une particule. Par exem-

ple, considérons la pression $p(P; t)$ dans le fluide. On peut se proposer de chercher la variation de p le long d'une trajectoire, comme on peut étudier aussi la variation de p en un point de l'espace occupé par le fluide. La première permettra de définir une *dérivée totale* qu'on écrira $\frac{dp}{dt}$ et la seconde une *dérivée partielle* $\frac{\partial p}{\partial t}$, et l'on aura comme ci-dessus

$$p(P'; t') - p(P; t) = p(P'; t') - p(P'; t) + p(P'; t) - p(P; t)$$

d'où

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t} dt + (\vec{dr} \vec{\nabla}) p$$

et

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{W} \vec{\nabla}) p.$$

De même pour un champ vectoriel $\vec{u}(P; t)$ définissant dans le fluide une grandeur vectorielle attachée aux particules :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{W} \vec{\nabla}) \vec{u}.$$

Il faut faire très attention à ne pas confondre la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$ en un point d'un champ défini en fonction de P et de t , avec la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$ d'un champ défini au moyen des variables de Lagrange.

29. Pour revenir à l'équation différentielle qui permet de passer des variables d'Euler aux variables de Lagrange, il faut remarquer que l'équation d'une trajectoire

$$\vec{r} = \vec{r}(P_o; t)$$

s'écrira, dans le cas où les conditions d'analyticité sont satisfaites :

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{a}(t - t_o) + \frac{\vec{b}}{2}(t - t_o)^2 + \frac{\vec{c}}{6}(t - t_o)^3 + \dots$$

et l'on a bien évidemment

$$\vec{r}_o = \vec{r}(P_o; t_o) = \vec{OP}_o$$

$$\vec{a} = \left[\frac{\partial \vec{r}(P_o; t)}{\partial t} \right]_{t=t_o} = \vec{W}(P_o; t_o)$$

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \left[\frac{\partial^2 \vec{r}(P_o; t)}{\partial t^2} \right]_{t=t_o} = \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \right)_{\substack{P=P_o \\ t=t_o}} \\ \vec{c} &= \left[\frac{\partial^3 \vec{r}(P_o; t)}{\partial t^3} \right]_{t=t_o} = \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{\substack{P=P_o \\ t=t_o}} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

de sorte que la manière de passer des variables lagrangiennes aux variables eulériennes est formellement bien précisée.

Equation de continuité.

30. Considérons un élément de volume $d\tau_o$ en P_o à l'instant t_o , et imaginons que le fluide qu'il contient occupe, à l'instant t , un élément de volume $d\tau$ en P ; on sait que

$$\vec{OP} = \vec{r}(P_o; t);$$

de plus, imaginons qu'on connaisse la densité ρ au point P à l'instant t en fonction des variables de Lagrange :

$$\rho = \rho(P_o; t).$$

Le principe de la conservation de la masse nous permettra d'écrire

$$\rho(P_o; t_o) d\tau_o = \rho(P; t) d\tau$$

ou pour simplifier

$$\rho_o d\tau_o = \rho d\tau.$$

La connaissance de la fonction $\vec{r}(P_o; t)$ permettra de calculer le rapport $D = \frac{d\tau}{d\tau_o}$, qui est en coordonnées cartésiennes $\frac{D(x, y, z)}{D(x_o, y_o, z_o)}$, (x, y, z) étant les coordonnées de P et (x_o, y_o, z_o) celles de P_o . On aura donc

$$\rho D = \rho_o;$$

c'est là l'équation dite de *continuité* en variables de Lagrange.

31. En variables d'Euler, la densité ρ est donnée par une fonction $\rho(P; t)$ du point P de l'espace et du temps t . La masse de fluide située à l'intérieur d'une surface *fixe* Σ limitant un volume V est une fonction du temps :

$$M(t) = \iiint_V \rho d\tau,$$

cette masse varie dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ de

$$\frac{dM}{dt} dt = dt \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau. \quad (6)$$

Mais, d'autre part, pendant le même temps, on peut mesurer la masse de fluide qui sort de Σ lorsqu'on connaît, à l'instant t , la vitesse $\vec{W}(P; t)$ du fluide en chaque point de l'espace. En effet, à travers un élément $\vec{d\sigma}$, il s'écoule un volume de fluide qui est bien évidemment égal au volume d'un cylindre dont la base est $d\sigma$ et dont les génératrices sont $\vec{W}dt$, c'est-à-dire égal à

$$d\tau = W dt d\sigma \cos \alpha,$$

α étant l'angle de la normale extérieure avec \vec{W} , on a donc

$$d\tau = \vec{W} \cdot \vec{d\sigma} dt.$$

La masse qui sort pendant le temps considéré de la surface Σ est donc

$$dt \iint_{\Sigma} \rho \vec{W} \cdot \vec{d\sigma},$$

ce qui, en vertu du théorème d'Ostrogradzky (I, § 72), est égal à

$$dt \iiint_V \operatorname{div} \rho \vec{W} d\tau; \quad (7)$$

les deux expressions (6) et (7) sont opposées car l'une mesure l'accroissement de masse dans le volume V pendant le temps dt et la seconde la perte de masse pendant le même temps. Comme de plus le volume V est quelconque, on en déduit la relation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{W}) = 0$$

valable en chaque point de fluide, à chaque instant. C'est l'équation de *continuité* en variables eulériennes.

Elle s'écrit aussi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{W} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{W} \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{W} = 0$$

c'est-à-dire (§ 28) :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{W} = 0.$$

L'équation de continuité, qui doit être vérifiée quelles que soient les forces agissant sur le fluide, figurera toujours à côté de l'équation du mouvement avec laquelle elle servira à déterminer les fonctions $\vec{W}(P; t)$, $p(P; t)$ et $\rho(P; t)$. Cependant, une équation vectorielle — celle du mouvement — une équation scalaire — celle de continuité — ne suffisent pas pour calculer une fonction vectorielle et deux fonctions scalaires.

Equation caractéristique.

32. Les liquides et les gaz réels ne sont pas parfaits, quelques liquides sont même très visqueux, de sorte que les équations que nous avons écrites plus haut ne donnent souvent qu'une très grossière approximation de la réalité physique. D'autre part, à côté de la pression et de la densité, il faut considérer la température dont la définition ne ressortit pas à la mécanique mais à la thermodynamique. Cette dernière science nous apprend encore que les fluides réels qui se rapprochent le plus des fluides parfaits se distinguent les uns des autres par leur équation d'état, c'est-à-dire par une relation entre la pression p , la densité ρ et la température T en chacun de leurs points :

$$F(\rho, p, T) = 0.$$

Cette relation, dite *équation caractéristique* ou encore *équation d'état*, vérifiée en tout point du fluide qu'elle *caractérise*, ne contient pas le temps t , ce qui veut dire qu'au cours du mouvement, il y a toujours en chaque point du fluide la même relation entre ρ , p et T .

Nous ne nous occuperons pas dans la suite des effets de la température¹ et nous ne traiterons que des fluides dont l'état est indifférent aux variations de température, ou que des fluides à température constante et uniforme. Les approximations de la réalité physique que nous obtiendrons ainsi seront utiles dans les cas où les variations de température ne sont pas considérables et dans les cas où leurs effets ne sont pas appréciables.

Nous considérerons des équations d'état de la forme

$$F(\rho, p) = 0$$

et nous supposerons que l'on peut les résoudre par rapport à ρ

$$\rho = f(p)$$

où $f(p)$ est une fonction *uniforme* de p .

¹ Sauf au § 41.

Un cas particulier qui nous arrêtera longuement à la fin de notre étude est celui des liquides incompressibles ; ils sont caractérisés par une densité uniforme et constante ; elle ne dépend pas de la pression et l'équation d'état est alors

$$\rho = \rho_0.$$

Equations indéfinies, conditions initiales, conditions aux limites.

33. Les équations que nous avons écrites jusqu'ici sont valables en tous les points du fluide ; elles sont indépendantes des circonstances particulières qui distinguent les divers mouvements que le fluide peut prendre. Nous les récrivons :

$$\vec{J} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \left(\vec{J} = \frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \nabla) \vec{W} \text{ ou } \vec{J} = \frac{\partial^2 \vec{r}(P_o; t)}{\partial t^2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{W}) = 0, \quad (9)$$

$$\rho = f(p); \quad (10)$$

elles sont censées devoir déterminer les fonctions \vec{W} , p , ρ de P et de t . Cependant, tout comme dans n'importe quel problème de dynamique, il convient de se donner les conditions initiales dans lesquelles se trouve le fluide. A l'instant t_0 , il faut se donner une description du fluide qui corresponde aux positions initiales et aux vitesses initiales qu'on se donne lorsqu'on étudie le mouvement d'un système à un nombre fini de degrés de liberté. D'abord, il faut connaître la région de l'espace occupée par le fluide à l'instant t_0 ; ce sera l'ensemble des points P_o qui entrent dans l'expression $\vec{r}(P_o; t)$; on devra connaître l'état initial des vitesses, c'est-à-dire la fonction vectorielle $\vec{W}(P_o; t_0)$ ou $\left[\frac{\partial \vec{r}(P_o; t)}{\partial t} \right]_{t=t_0}$; enfin on se donnera $p_o(P_o) = p(P_o; t_0)$ et $\rho_o(P_o)$ sera définie par (10).

34. Ces conditions initiales ne suffisent pas en général à déterminer tel mouvement réel. Le fluide peut être soumis à des liaisons dont il faut tenir compte à chaque instant et qu'il n'est pas aisé d'éliminer par un choix de paramètres, comme on le fait pour les systèmes à un nombre fini de degrés de liberté. En effet, ces conditions ne réduisent guère les degrés de liberté qui restent en nombre infini. Par exemple, le fluide est dans un récipient dont les parois sont données, fixes ou mobiles, par des équations du type

$$\omega(P; t) = 0 :$$

la vitesse \vec{W} aux points d'une telle surface ne peut être que tangente à la surface. On écrira que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) \varphi = 0,$$

pour $\varphi = 0$ et quel que soit t ; si la paroi est fixe, φ ne dépend pas de t et l'équation précédente se réduit à

$$\vec{W} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0$$

pour $\varphi = 0$.

Il se peut que le fluide ait une surface libre — dans ce cas c'est un liquide — sur laquelle la pression a une valeur donnée, par exemple zéro ou une constante, ou même une fonction donnée du lieu et du temps. Par exemple, sur la surface

$$\varphi(P) = 0,$$

la pression est

$$p = \psi(P; t);$$

on aura donc

$$\vec{W} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0$$

et

$$p = \psi(P; t)$$

pour tous les points P , tels que $\varphi(P) = 0$.

De telles conditions sont dites conditions aux limites.

Il est en général très difficile de résoudre de tels problèmes, c'est-à-dire de trouver un mouvement correspondant à des conditions initiales et à des conditions aux limites données. Ce n'est que dans des cas très particuliers qu'on obtient une solution explicite; dans plusieurs problèmes, on se contente même de savoir qu'il existe une solution.

Définition du tourbillon.

35. Soit $\vec{W}(P; t)$ le champ des vitesses dans un fluide. On nomme *tourbillon* le vecteur \vec{T} qui, en chaque point du fluide, est défini par la relation

$$\vec{T}(P; t) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{W} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot } W},$$

pour autant, bien entendu, que ce rotationnel existe.

On sait que, dans un corps solide, la distribution des vitesses est telle que son rotationnel est égal, en chaque point, à un moment donné,

au double du vecteur qui représente la vitesse instantanée de rotation du solide [I, p. 103, exercice 1], ce qui montre que le moment cinétique du solide est égal à son moment d'inertie relativement à l'axe instantané, multiplié par le demi-rotationnel du champ des vitesses.

Il est possible de donner au tourbillon dans un fluide une signification analogue. Soit une sphère Σ infiniment petite de centre P , nous allons voir que le moment cinétique total de la masse contenue dans Σ relativement à P a comme partie principale le vecteur $I\vec{T}$, I étant le moment d'inertie de cette masse, supposée homogène et rigide, relativement à un diamètre. En effet, ce moment cinétique est, pour une sphère finie,

$$\vec{\mathfrak{K}} = \iiint_V \rho \overrightarrow{PP'} \times \vec{W} d\tau_{P'}.$$

Prenons des coordonnées polaires et écrivons

$$d\tau = d\sigma \cdot dr$$

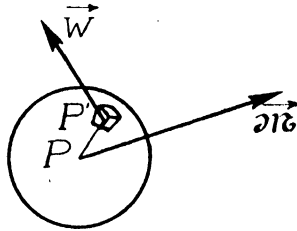


Fig. 7.

$d\sigma$ étant l'élément d'aire de la sphère Σ' de rayon $r = PP'$; or $\overrightarrow{PP'} = \vec{r} = r \vec{n}$ où \vec{n} est la normale extérieure à Σ' . La contribution à \mathfrak{K} de la couche sphérique d'épaisseur dr est

$$\rho r dr \iint \vec{d}\sigma \times \vec{W}$$

car $\vec{n} d\sigma = \vec{d}\sigma$; mais [I, § 72],

$$\iint_{\Sigma'} \vec{d}\sigma \times \vec{W} = \iiint_{V'} \vec{\nabla} \times \vec{W} d\tau.$$

Il faut prendre $\vec{\nabla} \times \vec{W}$ en un point générique de V' ; ce vecteur diffère de ce qu'il est en P d'une quantité infiniment petite $\vec{\gamma}$ de l'ordre de $\overrightarrow{PP'}$, si l'on admet que \vec{W} est analytique, par exemple.

Donc

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_0^R \rho r dr \cdot \vec{\nabla} \times \vec{W} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 + \int_0^R \rho r dr \vec{r} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 ;$$

de même $\rho(P') = \rho(P) + \zeta$, ζ étant de l'ordre de PP' . En considérant R comme infiniment petit, on voit que la partie principale de $\vec{\mathcal{M}}$ est

$$\frac{4}{15} \pi \rho R^5 \vec{\nabla} \times \vec{W} = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \vec{T}.$$

Or le moment d'inertie d'une sphère solide de rayon R et de densité ρ , relativement à un de ses diamètres, est précisément $\frac{8}{15} \pi \rho R^5$. Donc \vec{T} joue pour cette sphère infiniment petite le rôle que joue le vecteur $\vec{\omega}$ dans la dynamique du solide.

Stokes a donné une autre signification dynamique à \vec{T} en utilisant le principe dit de solidification et la théorie des percussions ; si l'on imagine qu'on solidifie dans le fluide en mouvement une sphère infiniment petite S de centre P et qu'on supprime du même coup tout le fluide extérieur à S , on montre, en supposant que les seules percussions appliquées à la petite sphère solide sont intérieures, que sa vitesse de rotation après la solidification est justement représentée par le vecteur \vec{T} .

Enfin, la théorie des déformations montre que le mouvement infiniment petit du fluide revient pour chaque élément de volume à une translation $\vec{W} dt$, suivie d'une rotation $\vec{T} dt$, le tout étant suivi d'une déformation.

Transformations des équations du mouvement. Potentiel.

36. On a trouvé et posé :

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F} - (\vec{W} \vec{\nabla}) \vec{W} - \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{W}) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div} \vec{W} = 0, \quad (\text{II})$$

$$\rho = f(p). \quad (\text{III})$$

On peut transformer ces équations en introduisant le tourbillon. Pour cela, calculons le gradient de W^2 . On a (I, § 70, 4^o).

$$\vec{\nabla} W^2 = \vec{\nabla} (\vec{W} \cdot \vec{W}) = \vec{W} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + \vec{W} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} + (\vec{W} \vec{\nabla}) \vec{W} + (\vec{W} \vec{\nabla}) \vec{W},$$

c'est-à-dire :

$$\vec{\nabla} W^2 = 2\vec{W} \times 2\vec{T} + 2(\vec{W}\vec{\nabla})\vec{W} ;$$

en remplaçant $(\vec{W}\vec{\nabla})\vec{W}$ dans (I), tiré de cette dernière relation, il vient

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} \frac{W^2}{2} + 2\vec{W} \times \vec{T} - \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}. \quad (I')$$

Imaginons que \vec{F} dérive d'une fonction de forces, c'est-à-dire que $\vec{F} \cdot \vec{dr}$ soit une différentielle totale exacte. On exprime ce fait en disant qu'il existe une fonction U de P et peut-être de t

$$U(P ; t)$$

qu'on appelle le *potentiel* ou la *fonction potentielle* ou encore justement la *fonction de forces* et telle que :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U.$$

Posons de plus ¹

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{f(p)},$$

ce qui entraîne

$$dP = \vec{dr} \cdot \vec{\nabla} P = \frac{dp}{\rho} = \frac{\vec{dr} \cdot \vec{\nabla} p}{\rho}$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \overrightarrow{\text{grad}} P.$$

Enfin introduisons la fonction

$$H = \frac{W^2}{2} + P - U ;$$

l'équation (I') devient

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - 2\vec{W} \times \vec{T} = - \overrightarrow{\text{grad}} H. \quad (I'')$$

Equation d'Helmholtz.

37. On va transformer encore (I'') de manière à obtenir une équation générale d'où tous les éléments dynamiques, sauf la densité ρ , soient éliminés et où il ne reste que la vitesse \vec{W} et le tourbillon \vec{T} . Le

¹ Nous employons ici une notation très courante ; il n'y a pas de confusion à craindre avec le point P .

second membre de (I'') étant un gradient, on l'élimine en prenant le rotationnel des deux membres, car (I, § 74)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} H = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} H = 0.$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{W}) = \frac{\partial}{\partial t} (2\overrightarrow{T}),$$

car, dans la dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$, t est un paramètre indépendant de P qui est seul intéressé par l'opération $\overrightarrow{\nabla} \times$; ensuite (I, § 70, 6°)

$$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{W} \times \overrightarrow{T}) = \overrightarrow{W} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{T} - \overrightarrow{T} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{W} + (\overrightarrow{T} \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{W} - (\overrightarrow{W} \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{T},$$

mais, d'après la définition de \overrightarrow{T} et en tenant compte de (I, § 74) :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{T} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{W} = 0;$$

et d'après la seconde forme de l'équation (II) :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{W} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Dès lors (I'') devient après division par 2 :

$$\frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \overrightarrow{T} - (\overrightarrow{T} \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{W} + (\overrightarrow{W} \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{T} = 0.$$

On voit apparaître ici

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial t} + (\overrightarrow{W} \overrightarrow{\nabla}) \overrightarrow{T};$$

donc, après division par ρ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\overrightarrow{T}}{dt} - \frac{\overrightarrow{T}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\overrightarrow{T}}{\rho} \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{W},$$

d'où l'équation vectorielle d'Helmholtz :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\overrightarrow{T}}{\rho} \right) = \left(\frac{\overrightarrow{T}}{\rho} \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{W}. \quad (\text{I}''')$$

Théorème de Lagrange.

38. L'équation d'Helmholtz permet de suivre la variation de la fonction $\frac{\overrightarrow{T}}{\rho}$ des divers points du fluide dans leur mouvement lorsqu'on

connaît le champ \vec{W} à chaque instant. Il est clair cependant que cette variation s'étudierait plus aisément encore sans passer par (I''') si l'on connaissait $\vec{W}(P; t)$; il suffirait de calculer $\frac{\vec{\nabla} \times \vec{W}}{2\rho}$. Mais l'équation (I''') est fort utile dans un cas particulier important, celui où \vec{T} , et par suite $\frac{\vec{T}}{\rho}$, est nul dans une portion du fluide à un instant donné. Nous allons montrer que \vec{T} est nul à tout instant dans ladite portion.

Considérons une particule de fluide à l'instant t_0 et supposons que $\frac{\vec{T}}{\rho}$ soit nul en cet instant pour cette particule, l'équation (I''') montre que la dérivée par rapport à t de $\frac{\vec{T}}{\rho}$, prise *en suivant* la particule, est nulle au même instant. Calculons

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\vec{T}}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\vec{T}}{\rho} \right) \vec{\nabla} \right] \vec{W} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\vec{T}}{\rho} \right) \vec{\nabla} \vec{W} + \frac{\vec{T}}{\rho} \mathfrak{Q}$$

où on a écrit \mathfrak{Q} pour une expression assez compliquée qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier. Cette équation montre que la dérivée seconde à l'instant t_0 de $\frac{\vec{T}}{\rho}$ est encore nulle. Ce procédé montre que toutes les dérivées $\frac{d^n}{dt^n}$ de $\frac{\vec{T}}{\rho}$ sont nulles à l'instant t_0 .

Or, si l'on considère la fonction $\frac{\vec{T}}{\rho}$ au cours du temps en suivant la particule, elle peut se développer en série de Taylor

$$\frac{\vec{T}}{\rho} = \left(\frac{\vec{T}}{\rho} \right)_0 + (t - t_0) \left(\frac{d}{dt} \frac{\vec{T}}{\rho} \right)_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\vec{T}}{\rho} \right)_0 + \dots$$

et dans les conditions initiales admises on voit que la fonction $\frac{\vec{T}}{\rho}$ est toujours nulle. Donc :

Dans un fluide parfait en mouvement, le champ \vec{F} dérivant d'une fonction de forces et la densité étant fonction de la pression seulement, si, à un instant donné, le tourbillon est nul dans une portion dudit fluide, il est nul en tout autre instant dans cette même portion.

Ce théorème, dû à Lagrange, est d'une grande importance. Il montre

que les particules d'un fluide parfait ne peuvent acquérir de moment cinétique au cours du mouvement lorsqu'elles en sont dépourvues à l'instant initial.

Potentiel des vitesses.

39. Le cas où $\vec{T} = 0$ présente donc un vif intérêt, puisqu'on est certain de sa réalisation à tout instant quand il est réalisé à l'instant initial. Nous allons l'étudier plus particulièrement, en conservant les hypothèses du § 36 sur F et sur ρ . On posera

$$R(P; t) = U - P = U - \int_{v_0}^v \frac{dp}{\rho},$$

et l'on admettra que $\vec{T} = 0$, ce qui veut dire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = 0.$$

On déduit de là [I, § 75] que $\vec{W} \cdot \vec{dr}$ est une différentielle totale exacte $d\varphi(P; t)$ à chaque instant, c'est-à-dire que

$$\vec{W} \cdot \vec{dr} = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{dr}$$

ou

$$\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi.$$

On exprime ce fait en disant qu'il existe à chaque instant un *potentiel des vitesses* φ , ou que le mouvement est *irrotationnel*.

L'équation (I) qui s'écrit

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) \vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} R$$

devient

$$\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \varphi = \overrightarrow{\text{grad}} R;$$

or (I, § 70, 4^o avec $\vec{u} = \vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$) :

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \varphi &= \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \varphi}{2} \right) - \vec{\nabla} \varphi \times (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \varphi = \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \frac{(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2}{2} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{W^2}{2}, \end{aligned}$$

et par suite :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{W^2}{2} - R \right] = 0.$$

La fonction entre crochets qui est

$$H + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

a un gradient nul, c'est-à-dire que sa différentielle, à temps constant, est nulle. Cela revient à dire que $H + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ne dépend pas de P , mais de t seulement :

$$H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi(t).$$

D'ailleurs φ n'est définie qu'à une fonction de t près, car

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{W}$$

ne détermine pas complètement $\varphi(P; t)$, on peut toujours lui ajouter une fonction arbitraire de t ; prenons justement pour φ la fonction de P et de t qui annule $H + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Les équations du mouvement deviennent alors

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - R = 0, \quad \left(R = U - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} \right) \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = 0, \quad (\text{B})$$

$$\rho = f(p). \quad (\text{C})$$

On les eût obtenues plus rapidement encore en partant de

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + 2\vec{T} \times \vec{W} = -\overrightarrow{\text{grad}} H ;$$

si $\vec{T} = 0$, $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ et

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = 0.$$

Les équations (A), (B), (C) qui sont valables quand il y a un potentiel des vitesses et une fonction de forces remplacent la détermination de

\vec{W} , p , ρ par celle de φ , p , ρ ; ce sont des équations scalaires ; (I) est devenue (A) grâce à l'intégrale première

$$H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

40. Si le fluide est un liquide incompressible,

$$\rho = \rho_0, \quad (C')$$

ce qui remplace (C) ; (B) devient

$$\rho_0 \operatorname{div} \vec{\operatorname{grad}} \varphi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{lap} \varphi = 0 \quad (B')$$

et (A) s'écrit

$$\frac{1}{2} (\vec{\operatorname{grad}} \varphi)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - U + \frac{p}{\rho_0} = 0. \quad (A')$$

Il suffira de connaître φ pour trouver p grâce à (A'). Le calcul de φ se fait en sachant que son laplacien est nul et en tenant compte des conditions aux limites. Par exemple, le long des parois du vase contenant le liquide, la vitesse leur est tangente, ce qui veut dire que le gradient de φ est tangent aux parois ou encore que la dérivée de φ suivant la normale à la paroi en chaque point est nulle :

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0, \quad \text{sur les parois du vase.}$$

S'il y a une surface libre, inconnue par exemple, on devra écrire qu'elle est déterminée par la même condition

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

à laquelle s'ajouteront peut-être des conditions relatives à la pression, par exemple,

$$p = p_0, \quad \text{en chaque point de la surface libre,}$$

et l'on voit encore que le problème, malgré les simplifications apportées par les hypothèses successives que l'on a formulées, reste difficile.

Petits mouvements. Equation du son.

41. Les équations A, B, C du § 39 se simplifient dans le cas où l'on imagine que les particules du fluide ont des vitesses assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés. De plus, admettons que les forces extérieures soient négligeables et que l'équation d'état soit

$$p = a\varphi\gamma$$

où a est une constante, ainsi que γ . C'est, en particulier, l'équation d'état d'un gaz dont les diverses particules ne peuvent échanger de l'énergie entre elles : le gaz est en régime adiabatique. (Cf. note p. 47).

Admettons enfin que la densité ρ diffère très peu de la densité à l'état d'équilibre ρ_0 et posons

$$\rho = \rho_0 (1 + \lambda),$$

λ étant un petit nombre, qu'on peut appeler la *condensation*, variable en chaque point avec le temps, dont nous négligerons le carré, son produit avec \vec{W} et le produit de son gradient par \vec{W} .

Ces hypothèses impliquent que

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

car

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\vec{W}\vec{\nabla})\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + W^2$$

et

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{W}\vec{\nabla})\rho_0\lambda,$$

le dernier terme étant en effet négligeable d'après nos hypothèses.

Puisque $U = 0$, les équations A, B, C s'écrivent alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0, \quad (\text{cf. éq. II, § 36})$$

$$p = a\rho^\gamma.$$

On va les transformer et, pour cela, il convient de calculer $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho}$.
On a :

$$dp = a\gamma\rho^{\gamma-1} d\rho, \quad \frac{dp}{\rho} = a\gamma\rho^{\gamma-2} d\rho$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho} a\gamma\rho^{\gamma-2} d\rho = \frac{a\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \text{const.}$$

Mais

$$a\rho^{\gamma-1} = a\rho_0^{\gamma-1} (1 + \lambda)^{\gamma-1} = a\rho_0^{\gamma-1} (1 + \overline{\gamma-1}\lambda) = \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \overline{\gamma-1}\lambda)$$

donc :

$$\int_{r_0}^p \frac{dp}{\rho} = \text{const.} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \lambda.$$

Or l'équation de dimensions de $\gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ est celle du carré d'une vitesse. En effet, γ est un nombre pur,

$$[p_0] = ML^{-1}T^{-2} \quad (\text{force par unité d'aire})$$

$$[\rho_0] = ML^{-3},$$

d'où

$$\left[\frac{p_0}{\rho_0} \right] = L^2T^{-2} = (LT^{-1})^2.$$

Posons
$$\gamma \frac{p_0}{\rho_0} = V^2.$$

Il vient alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i} + V^2 \lambda = \text{const.}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{lapp} \varphi = 0.$$

Rappelons que φ n'est définie qu'à une fonction du temps près, puisque c'est une fonction définie par son gradient; on peut modifier φ de manière que la constante soit nulle dans la première équation. D'autre part,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t_i} = \frac{\partial \log \rho}{\partial t} = \frac{\partial \log \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \log (1 + \lambda)}{\partial t};$$

mais ρ_0 est indépendant de t et $\log (1 + \lambda) = \lambda$ à l'approximation admise, dès lors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V^2 \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \text{lapp} \varphi = 0.$$

On élimine λ et l'on trouve

$$\text{lapp} \varphi - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Cette équation, dite *de d'Alembert*, est l'équation de propagation des ondes sonores, comme on s'en rendra compte dans le dernier chapitre de ce livre. Ces ondes se propagent avec la vitesse V .

Si, au lieu d'imaginer que le régime du gaz est adiabatique, on eût supposé que les petits mouvements se fissent isothermiquement, la vitesse de propagation eût été $\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$ au lieu de $\sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$. On sait que γ est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz

$$\gamma = \frac{\text{chaleur spécifique à pression constante}}{\text{chaleur spécifique à volume constant}}.$$

Si l'on sait intégrer l'équation de d'Alembert, et l'on verra pour quelles conditions aux limites il convient d'en chercher une intégrale, on tire immédiatement

$$\vec{W} = \vec{\nabla} \varphi$$

puis

$$\lambda = - \frac{1}{V^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

d'où ρ en chaque point, à chaque instant.

Mouvement permanent.

42. Nous dirons que le mouvement d'un fluide est *permanent* s'il est tel que le champ vectoriel \vec{W} , les champs scalaires ρ et p ne *dépendent pas du temps* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{W} = \vec{W}(P), \\ \rho = \rho(P), \\ p = p(P). \end{array} \right.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}$ de ces trois grandeurs sont nulles.

Si l'on considère une particule en P à l'instant t , elle sera en P' au temps $t + dt = t'$, et une nouvelle particule sera en P ; celle-ci, au temps $t' + dt$, sera de nouveau en P' alors que la première est en P'' , une troisième sera en P à cet instant $t' + dt = t''$. Au temps $t'' + dt$, la première particule sera en P''' , la seconde en P'' et la troisième en P' , et ainsi de suite. On voit que les trajectoires de deux particules qui passent en un point à deux instants quelconques sont les mêmes, lorsque le mouvement est permanent.

Si, dans un mouvement quelconque, on appelle *lignes de courant* à un instant t , les lignes qui sont en chacun de leurs points tangentes à la vitesse \vec{W} en ce point, à cet instant, on voit que, dans le cas du mouvement permanent, les lignes de courant ne changent pas avec

le temps. Leur équation différentielle vectorielle est $\vec{dr} \times \vec{W}(P) = 0$.

Les lignes de courant, issues des points d'un petit élément plan placé dans un fluide, en mouvement permanent, forment ce qu'on appelle un *filet fluide*. Dans un fluide réel, en mouvement permanent, on peut mettre en évidence les filets fluides au moyen de poussières en suspension. Les filets fluides transportent de la matière exactement comme si elle était contenue dans un tube fixe. Dans le cas d'un mouvement non-permanent, les particules ne s'avancent pas les unes derrière les autres comme elles le font dans un mouvement permanent, mais, en général, une particule en un point P est remplacée par une particule dont la vitesse a changé, et de grandeur, et de direction.

Théorème de Bernoulli.

43. Considérons un mouvement permanent et supposons que

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U(P),$$

$$\rho = f(p),$$

et posons comme plus haut

$$R(P) = U(P) - \int_{v_0}^{p(P)} \frac{dp}{\rho}.$$

L'équation (I) du § 36 s'écrit :

$$(\vec{W}\vec{\nabla})\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} R.$$

Considérons alors une ligne de courant Γ ,

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

où s est l'arc compté à partir d'une certaine origine ; on a

$$\vec{W} = W \frac{\vec{dr}}{ds},$$

où $\frac{\vec{dr}}{ds}$ est la tangente unité à la ligne Γ (I, § 29).

Dès lors

$$(\vec{W}\vec{\nabla})\vec{W} = W \left(\frac{\vec{dr}}{ds} \vec{\nabla} \right) \vec{W} = W \frac{d\vec{W}}{ds} = \vec{\nabla} R,$$

d'où

$$W \frac{d\vec{W}}{ds} \cdot \frac{\vec{dr}}{ds} = \frac{\vec{dr}}{ds} \vec{\nabla} R ;$$

et encore

$$\vec{W} \cdot \frac{d\vec{W}}{ds} = \frac{dR}{ds},$$

et par suite

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{W^2}{2} - R \right] = 0.$$

La dérivée dans la direction \vec{s} , c'est-à-dire la dérivée par rapport à l'arc s , de la fonction $\frac{W^2}{2} - R$ est nulle ; on en déduit que le long de Γ , c'est-à-dire le *long d'une ligne de courant*, et nous répétons que nous avons fait l'hypothèse de la *permanence du mouvement*, on a

$$\frac{W^2}{2} - R = \text{const.}$$

C'est cette équation qui exprime le *théorème de Bernoulli*.

44. On sait que le potentiel changé de signe représente l'énergie potentielle dans la dynamique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté, et l'on voit bien qu'avec la définition

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U,$$

U représente effectivement une énergie rapportée à l'unité de masse, car

$$d\bar{\mathcal{G}} = \rho \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

est le travail élémentaire de la force agissant sur l'élément de fluide $d\tau$ dans le déplacement $d\vec{r}$.

Or on a

$$d\bar{\mathcal{G}} = \rho d\tau dU$$

et par suite dU — et donc U — a pour équation de dimensions celle d'un travail divisée par $ML^{-3} \cdot L^3$, soit par M . U est donc bien une énergie rapportée à l'unité de masse.

D'autre part

$$dP = \frac{dp}{\rho}$$

est homogène à dU ; c'est au signe près le travail élémentaire, rapporté à l'unité de masse, de la pression lorsque le mouvement d'une particule a pour effet de modifier p de dp .

Enfin $\frac{W^2}{2}$ est une énergie cinétique rapportée à l'unité de masse.

Le théorème de Bernoulli affirme donc que, évaluée en ergs par

gramme de fluide, l'énergie cinétique, plus l'énergie potentielle, plus l'énergie interne acquise sous l'effet de l'augmentation de pression, forme une quantité constante le long d'une ligne de courant. Ou encore, si l'on appelle énergie totale d'un élément de masse la quantité

$$\rho d\tau \left[\frac{W^2}{2} - U + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right],$$

le théorème de Bernoulli affirme que l'énergie totale d'un élément de masse fluide reste constante pendant toute la durée d'un mouvement permanent.

45. Soit un liquide incompressible en mouvement permanent. Supposons que $\vec{F} = \vec{\nabla} U$; le théorème de Bernoulli affirme que

$$\frac{W^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = \text{const. le long d'une ligne de courant.}$$

Or $p \geq 0$, on voit que W^2 ne peut croître au delà d'une certaine limite sans que le liquide ne se divise. Pour qu'il reste toujours en une seule masse, il faut que

$$W^2 \leq 2(U + h)$$

Théorème de Torricelli.

46. Imaginons une grande masse de liquide incompressible et pesant contenue dans un réservoir. En un point de la paroi situé à une distance assez grande de la surface libre, détachons de ladite paroi une petite surface. On peut admettre que le fluide s'écoulant, il s'établit au bout d'un certain temps un régime constant dans le liquide dont le mouvement devient ainsi permanent. Il y a donc un filet fluide \mathcal{F} dont l'orifice est une section. La force \vec{F} dérive de la fonction

$$U(P) = - gh,$$

si h désigne la hauteur de P au-dessus d'un plan horizontal choisi comme plan de base.

Le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{W^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \frac{W_0^2}{2} + gh_0 + \frac{p_0}{\rho},$$

où l'indice zéro est relatif à un point origine quelconque sur le filet fluide \mathcal{F} . Prenons cette origine au point de la surface libre d'où part

le filet. Si l'on admet que la surface libre Σ est très grande vis-à-vis de celle de l'orifice, l'abaissement de Σ est pratiquement nul et dès lors $W_o = 0$; de plus admettons que la pression du fluide à l'orifice est sensiblement égale à la pression atmosphérique p_o qui règne sur la surface libre. L'équation précédente permet de trouver la vitesse du fluide à la sortie du réservoir, elle est

$$W = \sqrt{2ge}$$

où e est la profondeur de l'orifice à partir de la surface libre. On voit que cette vitesse est celle d'un projectile qui tombe verticalement de la hauteur e dans le vide.

L'expérience confirme bien l'approximation ci-dessus due à Torricelli. Si l'orifice est percé dans une paroi verticale, la vitesse est un peu plus grande que celle que donne la formule précédente ; si au contraire l'orifice est percé dans le fond horizontal du réservoir, la vitesse est un peu plus petite. Dans les deux cas, on constate que la veine liquide est légèrement contractée un peu après la sortie du réservoir.

Mouvement permanent irrotationnel.

47. Les équations (A) et (B) du mouvement irrotationnel se simplifient si l'on sait encore que le mouvement est permanent, car $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Ainsi donc, si un fluide est soumis à des forces dérivant d'un potentiel, et si l'on sait qu'il est le siège d'un mouvement irrotationnel et permanent, le potentiel des vitesses $\varphi(P)$, la densité $\rho(P)$ et la pression $p(P)$ sont définies par les équations

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 - R = 0, \quad \left(R = U - \int \frac{dp}{\rho(p)} \right) \quad (\text{A}')$$

$$\text{div} (\rho \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = 0, \quad (\text{B}')$$

$$\rho = f(p). \quad (\text{C}')$$

On voit donc que la fonction $\frac{W^2}{2} - R$, dont on savait que dans un mouvement permanent elle est constante le long d'une ligne de courant, se trouve être constante dans tout le fluide, c'est-à-dire qu'elle est la même pour toutes les lignes de courant, si le mouvement est en plus irrota-

tionnel. Cette constante peut-être prise égale à zéro, car U n'est définie qu'à une constante près.

Si, à toutes ces hypothèses, on ajoute celle de l'incompressibilité du fluide, on trouve

$$\begin{aligned} \text{lap } \varphi &= 0, \\ \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2 &= U + \frac{P}{\rho} = C. \end{aligned}$$

48. Il est intéressant de voir ce qui distingue, dans les mouvements permanents, ceux où le tourbillon n'est pas nul de ceux où il est nul, c'est-à-dire ce qui distingue les mouvements tourbillonnaires permanents des mouvements irrotationnels permanents.

Supposons donc qu'il y ait une fonction de forces et que le mouvement soit permanent. L'équation (I'') du § 36 s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}} H = 2\vec{W} \times \vec{T} \quad (I_\alpha)$$

où H est l'énergie totale rapportée à l'unité de masse du fluide au point P . H est donc un champ scalaire dont on connaît le gradient.

Or, si $\vec{T} = 0$, H est constant dans *tout le fluide*, c'est-à-dire que la constante du théorème de Bernoulli est la même pour toutes les lignes de courant. Ce cas se produit encore si les lignes de courant sont en chacun de leurs points tangentes au tourbillon \vec{T} , car alors $\vec{W} \times \vec{T} = 0$.

On peut d'ailleurs retrouver, si $\vec{W} \times \vec{T} \neq 0$, le théorème de Bernoulli en multipliant scalairement les deux membres de (I $_\alpha$) par $\frac{d\vec{r}}{ds}$, où $\vec{r} = \vec{r}(s)$ est l'équation d'une ligne de courant ; puisque $\frac{d\vec{r}}{ds}$ est parallèle à \vec{W} , le second membre donne un produit mixte nul et l'on obtient

$$\frac{dH}{ds} = 0,$$

H est un champ constant sur *une* ligne de courant. Donc les lignes de courant sont tracées sur les surfaces de niveau du champ scalaire H .

Théorie des tourbillons.

49. Il est utile de faire une théorie plus approfondie du champ du tourbillon \vec{T} , son caractère de permanence dans les fluides parfaits soumis à une force dérivant d'un potentiel et où la densité est fonction

de la seule pression lui confère une grande importance. D'autre part, il est agréable d'en faire un exposé au moyen de l'analyse vectorielle qui est particulièrement apte à en dérouler la suite des formules.

Prenons les variables de Lagrange et soit P la position au temps t d'une particule de fluide qui, au temps t_0 , était en P_0 ; la position de P est déterminée par l'équation

$$\vec{r} = \vec{r}(P_0; t)$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{grad}} R, \quad \left(R = U - \int_{P_0}^P \frac{dp}{\rho(p)} \right).$$

On va étudier le mouvement des particules qui se trouvent au même instant sur une ligne ou sur une surface; nous admettrons qu'au cours du mouvement les particules ne cessent pas d'être sur une ligne ou sur une surface. Nous supposons donc que le mouvement n'arrache pas les particules qui sont accolées, ou, plus précisément, nous supposons que le mouvement établit, entre les points d'un fluide à un instant et les points occupés par les mêmes particules à un autre instant, une correspondance topologique. On nomme *ligne fluide* et *surface fluide* des ensembles de particules fluides situés sur une ligne ou sur une surface à un instant donné; ce que nous venons de dire revient à affirmer qu'au cours du mouvement une ligne fluide reste une ligne fluide, une surface fluide reste une surface fluide.

50. Soit dès lors une courbe fermée Γ_0 tracée dans le fluide à l'instant t_0 et considérons-la comme une ligne fluide. A l'instant t elle sera encore une ligne fluide fermée Γ et l'on peut établir entre les points P_0 de Γ_0 et les points P de Γ une correspondance par l'équation

$$\vec{r} = \vec{r}(P_0; t). \tag{5}$$

Je dis que *la circulation du vecteur \vec{W} , ou tout simplement la circulation ci, sur Γ , est la même que sur Γ_0 , c'est-à-dire*

$$ci = \int_{\Gamma_0} \vec{W}_0 \cdot \vec{dr}_0 = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot \vec{dr}$$

quelle que soit Γ_0 et pour autant que le champ R est uniforme dans l'espace occupé par le fluide.

On peut se donner Γ_0 par une équation vectorielle de la forme

$$\vec{r}_0 = \vec{\psi}_0(\alpha),$$

α étant un paramètre variant de α_1 à α_2 . Γ est alors donnée par une équation

$$\vec{r} = \vec{\psi}(\alpha; t),$$

qui provient de (5) en tenant compte de ce que P_0 décrit Γ_0 .

Sur Γ_0 on aura

$$ci = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{W}_0 \cdot \frac{\vec{dr}_0}{d\alpha} d\alpha$$

et sur Γ :

$$ci = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{W} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha;$$

calculons $\frac{dci}{dt}$, en remarquant que t intervient dans \vec{W} et dans $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ seulement ; cette dérivation se fait en suivant les particules :

$$\frac{dci}{dt} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\frac{d\vec{W}}{dt} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha} + \vec{W} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} \right) d\alpha.$$

Or

$$\frac{d\vec{W}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \alpha} \cdot \vec{\nabla} R = \frac{\partial R}{\partial \alpha},$$

et

$$\vec{W} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \vec{W} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{W^2}{2} \right),$$

donc,

$$\frac{dci}{dt} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[R + \frac{W^2}{2} \right] d\alpha = \left[R + \frac{W^2}{2} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0,$$

car α_2 redonne sur Γ le même point que α_1 et l'on suppose que R est uniforme. On a donc le théorème :

La circulation le long d'une ligne fluide fermée est constante durant tout le mouvement.

51. Le théorème d'Ampère-Stokes (I, § 73) permet de transformer l'énoncé que nous venons d'obtenir. Soit une surface fluide Σ limitée par Γ , on a

$$ci = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot \vec{dr} = \iint_{\Sigma} d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}),$$

où $\vec{d\sigma}$ est dirigé comme il a été dit lors de la démonstration du théorème d'Ampère-Stokes. De plus

$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = 2\vec{T}$$

donc

ci = double du flux à travers Σ du champ \vec{T} .

On appellera *intensité tourbillonnaire* de Σ le flux de \vec{T} à travers Σ . On peut donc dire que l'*intensité tourbillonnaire d'une surface fluide est constante durant le mouvement*.

L'intensité tourbillonnaire d'une surface fluide *fermée* est nulle, car si Σ est fermée, le théorème d'Ostrogradzky permet d'écrire

$$\iint_{\Sigma} \vec{d\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}) = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}) d\tau = 0,$$

car $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{W}$ est identiquement nul.

52. De même qu'on a appelé lignes de courant les lignes tangentes au champ \vec{W} , on appellera *lignes de tourbillons* les lignes dont la tangente en chacun de leurs points portent le vecteur \vec{T} ; leur équation différentielle vectorielle s'écrit

$$\vec{dr} \times \vec{T} = 0,$$

et l'on appellera *surfaces de tourbillons* des surfaces dont le plan tangent en chacun de leurs points contient \vec{T} ; les surfaces de tourbillons sont bien évidemment engendrées par une ligne de tourbillons dont un point décrit une courbe quelconque (qui n'est pas ligne de tourbillons). En vertu de la définition même, par un point de l'espace, il passe une ligne de tourbillon et une seule. Helmholtz a démontré le théorème suivant :

53. *Les lignes de tourbillons et les surfaces de tourbillons se conservent dans le mouvement*; c'est-à-dire que si Γ est une ligne de tourbillons, elle reste ligne de tourbillons; de même la surface fluide Σ qui est une surface de tourbillons reste une surface fluide de tourbillons dans tout le cours du mouvement.

La démonstration est immédiate pour les surfaces de tourbillons. Soit Σ_0 et Σ deux positions d'une surface fluide, en t_0 et en t ; traçons sur Σ une courbe fermée quelconque Γ , il y correspond sur Σ_0 une courbe fermée Γ_0 . Si Σ_0 est une surface de tourbillons, la circulation le long de Γ_0 est nulle puisqu'elle est égale à l'intensité tourbillonnaire de

la portion de Σ_0 enclosé dans Γ_0 , et cette intensité tourbillonnaire est nulle, \vec{T} étant tangent à Σ_0 . La circulation le long de Γ est donc nulle, c'est-à-dire que l'intensité tourbillonnaire de toute portion de Σ est nulle, le tourbillon a donc un flux nul à travers toute portion de Σ , il est tangent à Σ . Σ est donc une surface de tourbillons.

Soit maintenant une ligne de tourbillons ; on peut la considérer comme l'intersection de deux surfaces de tourbillons. La ligne fluide correspondante reste l'intersection des deux surfaces fluides correspondantes, celles-ci restent des surfaces de tourbillons et leur intersection reste donc tangente au tourbillon qui est situé dans deux plans tangents à la fois, donc à leur intersection. Le théorème d'Helmholtz est complètement démontré.

54. Nous avons vu que lorsque

$$\vec{W} \times \vec{T} = 0,$$

H est constant dans tout le fluide si le mouvement est permanent, les hypothèses habituelles sur \vec{F} et sur ρ étant faites.

Considérons un filet fluide ayant une section normale $d\sigma$, en général variable. Dans un temps dt , il passe à travers $d\sigma$ une masse de fluide égale à

$$\rho W d\sigma dt,$$

mais cette quantité est indépendante de l'endroit où, sur le filet, on a mené la section normale, car le fluide ne sortant pas du filet et le mouvement étant permanent, la masse qui passe à travers une surface $d\sigma$ est égale à celle qui passe au même instant à travers une autre section; puisqu'il est impossible que des variations de la densité aient lieu avec le temps en un point quelconque du fluide. D'autre part, considérons $d\sigma$ comme une surface fluide, son intensité tourbillonnaire est

$$T d\sigma,$$

car \vec{T} est perpendiculaire à $d\sigma$, puisque $\vec{W} \times \vec{T} = 0$. A un autre instant, l'intensité tourbillonnaire n'aura pas changé et, comme le mouvement est permanent, on en déduit que l'intensité tourbillonnaire de toute section normale du filet est la même. Et par suite, si $\vec{W} \times \vec{T} = 0$, et si le mouvement est permanent, le rapport $\frac{T}{W}$ est proportionnel à la densité ρ du fluide.

Ce théorème intéressant est dû à *Beltrami*.

55. Un problème très important est celui qui consiste à déterminer le champ \vec{W} lorsqu'on connaît le champ \vec{T} . Nous supposons, pour simplifier, que le fluide est incompressible.

On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{W} &= 2\vec{T} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{W} &= 0 \quad (\text{équation de continuité})\end{aligned}$$

et certaines conditions aux limites, par exemple

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0,$$

sur les parois du vase contenant le fluide, \vec{n} étant la normale en un point quelconque de la paroi.

Voyons à quelles formes d'équations conduit ce problème, que nous ne résoudrons pas ici.

Cherchons à prendre pour \vec{W} le rotationnel d'un champ \vec{C} à déterminer ; en effet si

$$\vec{W} = \vec{\nabla} \times \vec{C}$$

l'équation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0$$

est automatiquement vérifiée. Il suffit de résoudre l'équation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = 2\vec{T}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C} = 2\vec{T}.$$

Comme $\text{div } \vec{T}$ doit être nulle on peut essayer d'assujettir \vec{C} à avoir une divergence nulle ; il suffira ensuite de résoudre l'équation

$$\text{lap } \vec{C} = -2\vec{T} ;$$

c'est-à-dire que chaque composante de \vec{C} vérifie une certaine équation du type de celle de Poisson.

Si notre hypothèse simplificatrice $\text{div } \vec{C} = 0$, assez plausible, n'est pas contradictoire, on retrouve une forme d'équations tout à fait identique à celle qu'on a trouvée dans la théorie du potentiel ; mais l'électromagnétisme posant un problème semblable, on en verra la solution au chapitre IX, § 152.

Potentiels multiformes.

56. La démonstration qui nous assure de la constance de la circulation le long d'une ligne fluide se simplifie lorsqu'on sait que le fluide est animé d'un mouvement irrotationnel, ou lorsqu'on considère une ligne dans une partie du fluide où le tourbillon est nul. On sait que, avec les hypothèses admises jusqu'ici, $\vec{V} = \vec{\nabla} U$, $\rho = f(p)$, ladite partie du fluide reste sans tourbillon durant tout le mouvement.

Soit précisément

$$ci = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot \vec{dr} ;$$

s'il n'y a pas de tourbillon, c'est que

$$\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(P; t); \quad \vec{W} \cdot \vec{dr} = (d\varphi) ;$$

t constant

et dès lors,

$$ci = \text{variation de } \varphi \text{ le long de } \Gamma.$$

Il y a donc à distinguer les cas :

1^o φ est, quel que soit t , une fonction uniforme de P , alors $ci = 0$;

2^o φ est, pour certains instants du temps t , ou pour toute la durée du mouvement, une fonction multiforme de P , alors la circulation le long de Γ peut n'être pas nulle ; elle est égale à l'une ou l'autre des périodes de φ , ou plus rigoureusement à l'un ou l'autre des *modules de périodicité* de φ .

Un exemple bien connu déjà par la mécanique du point permet de préciser ce fait. Soit, par exemple,

$$\varphi = \lambda,$$

λ étant l'angle d'un demi-plan origine avec le demi-plan qui passe par un axe fixe Δ et le point P . Si Γ est une courbe qui ne s'enroule pas autour de Δ , $ci = 0$; si Γ s'enroule autour de Δ , $ci = 2n\pi$, n étant le nombre de tours que fait autour de Δ le demi-plan limité par Δ et passant par P , lorsque P décrit Γ .

On peut obtenir un résultat général au moyen duquel il est facile de se rendre compte des raisons pour lesquelles φ est multiforme.

On a vu que

$$ci = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot \vec{dr} = 2 \iint_{\Sigma} \vec{T} \cdot \vec{ds},$$

Σ étant une surface limitée par Γ . Si l'on peut trouver une surface Σ

tout entière située dans la portion du fluide où le mouvement est irrotationnel, $\vec{T} = 0$, $ci = 0$. Or l'existence de Σ prouve qu'on peut, par déformation continue, réduire Γ à un point sans que jamais Γ ne passe par un point du fluide où \vec{T} cesse d'être défini et nul ; il suffit, en effet, de faire cette déformation en laissant Γ sur Σ .

Mais s'il est impossible de trouver une surface Σ limitée par Γ et tout entière dans la portion du fluide où \vec{T} est défini et nul, on n'est plus assuré que $ci = 0$, et il est aussi impossible de réduire Γ à un point par déformation continue sans passer par un ou plusieurs points situés hors de la région où \vec{T} est défini et nul.

Or on dit qu'une région est *simplement connexe* si toute courbe fermée qui y est tracée peut se réduire par déformation continue à un point sans cesser d'être entièrement dans la région.

On a donc ce théorème :

Si la portion R du fluide où le tourbillon est défini et nul est simplement connexe, la circulation le long de toute courbe fermée située entièrement dans R est nulle.

La raison, dès lors, pour laquelle le potentiel φ peut être multiforme provient de ce que le mouvement irrotationnel a lieu dans une région qui n'est pas simplement connexe : par exemple, le récipient est un tore, ou bien le fluide circule dans un canal au fond duquel est fixé un obstacle qui dépasse la surface libre.

L'exemple donné ci-dessus avec

$$\varphi = \lambda$$

est intéressant ; remarquons que λ n'est pas défini pour les points de l'axe Δ ; de plus, en coordonnées cartésiennes, l'axe des z étant Δ , on a

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x},$$

au point $P(x, y, z)$, et

$$\vec{W} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j};$$

on voit alors que \vec{T} n'est pas défini en $x = y = 0$, \vec{W} et ses dérivées par rapport à x et à y perdent tout sens sur Δ . On dit parfois que le tourbillon est infini sur Δ .

57. Lorsque le mouvement est irrotationnel dans une région qui n'est pas simplement connexe, la formule

$$ci = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot \vec{dr} = 2 \iint_{\Sigma} \vec{T} \cdot \vec{d\sigma}$$

montre que la circulation est la même pour toutes les courbes fermées Γ qui peuvent se réduire les unes aux autres par déformation continue sans passer par des points où \vec{T} cesse d'être défini et nul.

On peut voir, et nous prions le lecteur de faire la démonstration comme exercice, que la circulation le long d'une courbe Γ quelconque qui se trouve dans une région R du fluide où \vec{T} est défini et nul, est égale à une combinaison linéaire à coefficients entiers

$$n_1 C_1 + n_2 C_2 + \dots + n_k C_k$$

des circulations C_1, \dots, C_k le long de k courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ irréductibles les unes aux autres par déformation continue dans une région où le tourbillon est nul. Le potentiel φ a alors les k *modules de périodicité*

$$C_1, C_2, \dots, C_k$$

et l'*ordre de connexion* de R est un nombre entier dont la définition est semblable à celle qui est donnée pour une aire plane dans l'appendice (§ 28) ; cet ordre est au moins égal à $k + 1$.

Mouvement plan.

58. On a vu que ce n'est qu'en faisant des hypothèses très restrictives qu'on a pu tirer des équations générales de l'hydrodynamique quelques précisions sur les circonstances communes à certains mouvements. Ces hypothèses avaient trait à la nature des forces, ou à la nature des champs de vitesses (permanence, irrotationnalité) mais jusqu'ici nous n'avons pas fait d'hypothèses particulières sur les conditions initiales ou sur les conditions aux limites. Il est possible cependant de les imaginer telles que les intégrations soient très simplifiées grâce à la suppression d'une coordonnée d'espace.

Supposons, en effet, que le fluide que nous considérons soit contenu dans un canal de largeur constante et de profondeur si grande que l'effet du fond, supposé plan, ne se fasse guère sentir dans les parties supérieures du canal et supposons que les forces extérieures soient parallèles au fond et constantes sur les droites perpendiculaires au fond ; dès lors les particules du fluide qui se trouvent sur une même droite perpendiculaire au fond ont la même vitesse à un instant donné, si elles ont la même vitesse à l'instant initial, et cette vitesse est parallèle au fond, si elle l'est initialement ; il suffit de connaître l'état du champ \vec{W} dans un plan parallèle au fond pour avoir ce champ jusqu'à la profondeur où l'effet du fond commence à se faire sentir.

Plus précisément, nous supposons maintenant que le fluide a un mouvement tel que le champ \vec{W} soit rigoureusement le même en tous les points de toute droite parallèle à une direction fixe, et qu'il soit perpendiculaire à cette direction. On dit alors que le mouvement est *plan*.

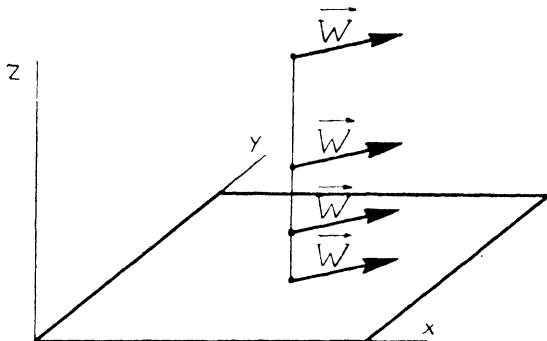


Fig. 8.

Si, dès lors, on prend des axes de coordonnées rectangulaires pour lesquels \vec{k} est parallèle à ladite direction, le champ \vec{W} en un point $P(x, y, z)$ à un instant t sera un vecteur de la forme :

$$\vec{W} = u(x, y; t)\vec{i} + v(x, y; t)\vec{j},$$

la fonction de forces U , la pression p et la densité ρ seront des fonctions de x, y et t , et le tourbillon \vec{T} qui ne dépendra aussi que de x, y et t sera parallèle à \vec{k} , puisque :

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(x, y; t) & v(x, y; t) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k},$$

et rien n'empêche alors de le considérer dans le plan (x, y) comme un scalaire au même titre que p et ρ .

59. Ecrivons alors en cartésien les équations du mouvement dans l'hypothèse où :

- 1° le mouvement est plan,
- 2° \vec{F} dérive d'une fonction de forces,
- 3° le fluide est incompressible,
- 4° le tourbillon est nul,
- 5° le mouvement est permanent.

On a donc

$$\vec{F}(P) = \vec{\nabla} U(P), \quad \rho = \rho_0.$$

$$\vec{W}(P) = \vec{\nabla} \varphi(P) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j},$$

c'est-à-dire :

$$u(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad v(x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}.$$

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{W}) = 0$$

devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

ce qui prouve qu'on peut trouver une fonction $\psi(x, y)$ telle que

$$-v dx + u dy = d\psi(x, y).$$

Puisque

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (C)$$

on voit que φ et ψ satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation de Laplace dans le plan, et qu'on peut aussi affirmer que φ et ψ sont respectivement les parties réelles et imaginaires d'une fonction *monogène* de la variable complexe

$$z = x + i y,$$

puisque les équations (C) de Cauchy sont vérifiées (*cf.* Appendice, § 47).

On a

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(x + iy),$$

ou si

$$Z = X + i Y = \varphi + i\psi :$$

$$Z = f(z).$$

Si l'on représente la vitesse \vec{W} par le nombre complexe

$$W = u + iv,$$

on voit que

$$u + iv = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}.$$

Si l'on reprend la première des équations du mouvement, elle s'écrit dans le cas particulier qui nous intéresse [§ 40, (A')]

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - U(x, y) + \frac{p(x, y)}{\rho_0} = 0, \quad (11)$$

ce qui permet de calculer p lorsque φ est connu.

La détermination de φ , puis de ψ , revient alors à la résolution de problèmes classiques de la théorie des fonctions dont il sera question plus loin.

60. Les deux fonctions φ et ψ permettent de décrire avec précision le champ \vec{W} . Tout d'abord, comme le montre la théorie des fonctions, mais comme on le vérifie grâce à l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

conséquence de (C), les courbes

$$\varphi(x, y) = \text{const.}$$

sont orthogonales aux courbes

$$\psi(x, y) = \text{const.},$$

ce qui revient à dire que les lignes de courant qui sont perpendiculaires aux surfaces (ici aux courbes) de niveau du potentiel φ , sont justement les courbes $\psi = \text{const.}$ La fonction $\psi(x, y)$ s'appelle la *fonction de courant*.

Les deux fonctions : le *potentiel des vitesses* et la *fonction de courant* satisfaisant à l'équation de Laplace, sont *harmoniques*, elles sont *conjuguées* l'une de l'autre au sens que la théorie des fonctions d'une variable complexe donne à ce mot ; la détermination de l'une entraîne la détermination de l'autre à une constante additive près. (Appendice § 8.)

Flux et circulation.

61. On peut donc représenter le mouvement plan permanent et irrotationnel d'un liquide par le moyen d'une fonction de la variable complexe

$$Z = f(z) = X + iY,$$

et l'on a

$$\vec{W} = \overline{f'(z)} = u + iv.$$

Si $f(z)$ est donnée, on aura un mouvement bien déterminé en variables d'Euler. Calculons la circulation le long d'une courbe fermée ; c'est

$$\oint_C u dx + v dy = \Re \oint_C f'(z) dz.$$

Le flux se calcule en faisant remarquer que l'élément $\vec{d\sigma}$ est à remplacer dans le mouvement plan par le vecteur $-idz$, dz étant le nombre complexe qui représente le vecteur élémentaire de longueur ds porté par la tangente à C dans le sens du parcours de C , qu'on suppose toujours être le sens positif de la théorie des fonctions. On a

$$dz = dx + idy.$$

Le flux élémentaire $\vec{W} \cdot \vec{d\sigma}$ est donc $-v dx + u dy$ et le flux total à travers C est

$$\oint_C -v dx + u dy = -\Im \oint_C f'(z) dz.$$

Si, dès lors, on introduit un nombre complexe Λ dont la partie réelle soit la circulation le long d'une courbe fermée et la partie imaginaire le flux à travers la même courbe fermée, on aura

$$\overline{\Lambda} = \oint_C f'(z) dz.$$

Par conséquent, si la fonction $f(z)$ est uniforme et holomorphe à l'intérieur de C et sur C , $f'(z)$ sera aussi holomorphe et uniforme et $\overline{\Lambda} = 0$. Ce résultat ne doit pas nous étonner car le flux doit être nul, puisque dans C la masse totale ne change pas, le fluide étant incompressible, et la circulation le long de C est nulle aussi puisque le tourbillon est nul à l'intérieur de C .

Puits et sources.

62. Considérons le cas où $f(z) = A \log z$, A étant un nombre complexe $\alpha + i\beta$. Si C est une courbe n'entourant pas l'origine, $\overline{\Lambda} = 0$, mais si C entoure l'origine une seule fois :

$$\oint_C f'(z) dz = A \times \text{variation de } \log z \text{ le long de } C = A \times 2\pi i.$$

et

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda} &= -2\pi\beta + 2\pi\alpha i, \\ \Lambda &= -2\pi\beta - 2\pi\alpha i ;\end{aligned}$$

le flux vaut $-2\pi\alpha$ et la circulation $-2\pi\beta$.

Il est clair que, dans cet exemple, l'origine $z = 0$ est un point singulier pour le champ \vec{W} . En ce point le tourbillon n'est pas défini.

Suivant que α est négatif ou positif, on dit que l'origine est une *source* ou un *puits*, et, par là, il faut entendre que du liquide jaillit ou est absorbé à l'origine : l'*intensité* de la source ou du puits est $\frac{|\alpha|}{2\pi}$. Si $\beta \neq 0$, le tourbillon est nul partout sauf à l'origine où l'on dit que son intensité est $-\frac{\beta}{2\pi}$ et qu'il crée une circulation dans le fluide.

On a évidemment $f'(z) = \frac{A}{z}$; $z = 0$ est un pôle de résidu A pour $f'(z)$.

Supposons alors que $f'(z)$ soit une fonction présentant à l'intérieur de C des singularités polaires $a_1, a_2 \dots a_k$. On a évidemment

$$\bar{\Lambda} = 2\pi i \times \Sigma \text{résidus de } f'(z) \text{ à l'intérieur de } C,$$

ce qui permet d'écrire que le flux total à travers C est la somme algébrique des flux dus aux sources ou aux puits intérieurs à C et que la circulation le long de C est la somme des circulations autour des points singuliers. On voit facilement de plus que

$$f(z) = \Sigma A_{-1}^{(k)} \log(z - a_k) + \text{fonction uniforme dans } C,$$

ce qui prouve bien que dans un champ \vec{W} uniforme, les sources, les puits et les circulations proviennent des singularités logarithmiques de $f(z)$. En aucune manière, une fonction $f(z)$ uniforme ne saurait représenter un mouvement avec sources, puits ou circulation quelles que fussent ses singularités : pôles ou points essentiels.

Doublets.

63. Imaginons un puits et une source placés aux points $z = a$ et $z = -a$ et supposons que

$$\begin{aligned}\text{résidu } f'(z) &= \alpha, \\ z &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{résidu } f'(z) &= -\alpha. \\ z &= -a\end{aligned}$$

On aura, pour tout point z tel que $|z| > |a|$:

$$\log(z + a) = \log z \left(1 + \frac{a}{z}\right) = \log z + \frac{a}{z} - \frac{a^2}{2z^2} + \dots$$

$$\log(z - a) = \log z \left(1 - \frac{a}{z}\right) = \log z - \frac{a}{z} - \frac{a^2}{2z^2} - \dots$$

et

$$\log \frac{z + a}{z - a} = \frac{2a}{z} + \frac{2a^3}{3z^3} + \dots$$

La partie multiforme de $f(z)$ sera donc, au signe près :

$$\alpha \log(z - a) - \alpha \log(z + a) = \frac{2\alpha a}{z} + \frac{2\alpha a^3}{3z^3} + \dots ;$$

imaginons que a tende vers zéro et α vers l'infini de façon que

$$\lim 2\alpha a = S,$$

$f(z)$ deviendra, dans le voisinage de $z = 0$, au signe près :

$$\frac{S}{z} + \text{fonction holomorphe.}$$

On dit que le fluide contient au point $z = 0$, un *doublet de moment* $\frac{S}{2\pi}$.
Considérons le cas particulier où

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2};$$

les lignes de courant sont les lignes

$$\psi = \frac{y}{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

et les lignes de niveau du potentiel des vitesses sont les lignes :

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

Ce sont deux faisceaux de cercles orthogonaux, l'un dont tous les cercles sont tangents à l'axe réel à l'origine, l'autre dont tous les cercles sont tangents à l'axe imaginaire à l'origine aussi. Les lignes de courant semblent se déverser dans le puits O , qui fonctionne aussi comme une source d'où les lignes de courant repartent.

64. Un cas fort intéressant est celui où à un doublet s'ajoute une circulation. On aura

$$f(z) = \frac{A}{z} + i\beta \log z + \text{fonction uniforme et régulière.}$$

Prenons, pour fixer les idées, et aussi à cause de son importance

$$f(z) = A\left(z + \frac{1}{z}\right) + i\beta \log z \quad (A \text{ réel et positif, } \beta \text{ réel}).$$

On verra sans peine que le cercle $|z| = 1$ est une ligne de courant, c'est celle pour laquelle $\psi(x, y) = 0$. Puisque

$$f'(z) = A\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{i\beta}{z},$$

on voit qu'à l'infini le nombre complexe qui représente la vitesse est A , c'est-à-dire que cette vitesse est parallèle à l'axe des x . Les lignes de courant parallèles à l'axe des x à l'infini arrivent dans les régions accessibles du plan et contournent le cercle $\Gamma : |z| = 1$. Il y a trois cas à considérer pour les lignes $\psi = a > 0$. Nous les décrivons brièvement, et nous prions le lecteur de faire lui-même la figure et les calculs.

$|\beta| < 2A$, une ligne de courant arrive en un point P_1 de Γ et repart d'un point P_2 symétrique de P_1 par rapport à Oy . Cette ligne partage les lignes de courant en deux groupes. Les unes contournent Γ en passant en dessus, les autres en passant en dessous. En P_1 et P_2 , $W = 0$.

$|\beta| = 2A$; P_1 et P_2 sont confondus sur l'axe imaginaire, l'allure des autres lignes qui se partagent en deux groupes est la même que ci-dessus.

$|\beta| > 2A$; une ligne de courant tourne autour de Γ , se recoupe et divise le plan en trois régions : la boucle qu'elle forme et qui contient Γ à l'intérieur de laquelle les lignes de courant entourent Γ ; la région opposée par le sommet de la dite boucle où les lignes de courant s'infléchissent en venant de l'infini et en y repartant ; enfin le reste du plan, où les lignes de courant contournent Γ sans se couper.

Les lignes $\psi = a < 0$ sont intérieures à Γ , nous n'avons pas à les considérer car, dans les applications, Γ est le profil d'un obstacle contre lequel le courant plan arrive de l'infini.

On retrouvera ce mouvement au chapitre VIII où sont traitées des applications de la théorie du mouvement plan que nous venons d'exposer.

Exercices.

1. Un liquide pesant de densité ρ est animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical fixe. Peut-il prendre un état d'équilibre relatif ? Si oui quelle sera sa surface libre ?

2. Trouver la variation de la pression atmosphérique avec l'altitude ; on supposera que l'air est un gaz parfait satisfaisant à l'équation de Gay-Lussac. On tiendra compte de la variation de g avec l'altitude.

3. En tout point d'une masse fluide en mouvement, il y a au moins un élément de surface fluide dont le plan reste parallèle à lui-même pendant le temps dt ; il peut en exister trois (Bertrand ; cf. Appell, III, p. 321).

4. Etudier le mouvement d'un fluide incompressible dans l'hypothèse d'une symétrie autour d'un axe Δ ; cela signifie que le champ de vitesses \vec{W} ne dépend que de la distance à l'axe et de la cote relativement à un plan perpendiculaire au dit axe. Soit s la composante de \vec{W} suivant le rayon vecteur r (du système de coordonnées cylindriques) et soit w , la composante parallèle à l'axe Δ ; montrer qu'il existe une fonction ψ telle que

$$rw = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad rs = - \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Particulariser encore en supposant qu'il existe un potentiel des vitesses (Appell).

5. Soit $\vec{J}(P; t)$ le champ d'accélération dans un fluide. Le vecteur

$$\vec{\Omega}' = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{J}$$

s'appelle l'*accélération rotatoire*. Démontrer que la dérivée de la circulation le long d'une courbe fermée est égale au flux de l'accélération rotatoire à travers une surface dont la courbe est la frontière.

Si $d\sigma$ est un élément superficiel fluide en mouvement, et s'il existe un potentiel des accélérations ($\vec{J} = \vec{\nabla} S(P; t)$) montrer que l'intensité tourbillonnaire de $d\sigma$ est constante (Appell).

6. Pour que les lignes de tourbillons soient des lignes fluides dans un mouvement, il faut et il suffit que l'accélération rotatoire $\vec{\Omega}'$ soit con-

fondue en direction avec le tourbillon \vec{T} . Pour que l'intensité tourbillonnaire d'un élément superficiel fluide normal à \vec{T} ne change pas avec le temps, il faut et il suffit que \vec{T} et $\vec{\Omega}$ soient rectangulaires (Appell).

7. Montrer que l'étude du mouvement plan d'un liquide coulant entre deux parois parallèles et infiniment minces et débouchant dans un espace ouvert revient à l'étude de la fonction $\omega(z)$ définie par l'équation

$$z = \omega + e^{\omega}. \quad (\text{Lamb}).$$

8. Étudier le mouvement plan d'un liquide sachant que

$$\varphi + i\psi = Az^n \quad A \text{ constante réelle.}$$

On montrera que la ligne de courant $\psi = 0$ est formée de deux droites ; le mouvement en question est celui d'un liquide qui contourne un obstacle limité par deux parois planes.

9. *Méthode des images.* Dans un liquide indéfini, admettons qu'on puisse tracer une surface S continue, fixe, séparant l'une de l'autre deux régions R_1 et R_2 de telle façon que, dans les mouvements des deux portions du liquide, aucun élément de R_1 ne traverse S ni aucun élément de R_2 ; on dit d'après Lord Kelvin que le mouvement de R_2 est l'image du mouvement de R_1 par rapport à S et inversement.

On peut donc, sans changer le mouvement de R_1 , supprimer le liquide de R_2 à condition de réaliser matériellement la surface S sous forme de cloison.

Exemples : 1^o Image d'une source par rapport à un plan. Une source O crée un potentiel des vitesses $\varphi = -\frac{A}{r}$, $r = OP$. Montrer que si le point O' symétrique de O par rapport à un plan est une source créant le potentiel $-\frac{A}{r'}$ ($r' = O'P$), le mouvement du fluide résultant des deux sources est tel que d'un côté du plan, il est l'image de ce qu'il est de l'autre côté. On peut ainsi résoudre le problème :

Trouver le mouvement irrotationnel d'un liquide indéfini remplissant tout l'espace situé d'un côté d'un plan fixe, sachant que la vitesse est nulle à l'infini et qu'il y a une source dans le liquide (Appell).

2^o Ecoulement permanent irrotationnel d'un liquide par le fond d'un vase indéfini limité par deux plans parallèles.

On considère un vase indéfini limité par les trois plans $x = a$, $x = -a$,

$z = 0$. On perce en O le fond du vase d'un petit trou circulaire ; O est alors une source négative et on suppose le mouvement permanent établi. On trouve le mouvement en considérant les symétriques de O par rapport aux parois, puis les symétriques de ces symétriques, etc.

Le potentiel des vitesses dans le vase doit être de la forme

$$\varphi = \frac{A}{r} + \psi(P)$$

$\psi(P)$ vérifiant l'équation de Laplace. Si on considère tous les symétriques qu'on a formés ci-dessus, soient les points $\pm 2na$ sur l'axe des x , la fonction

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{A}{r} + A \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - 2na)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2na} \right] + \\ + A \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x + 2na)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2na} \right] \end{aligned}$$

est convergente et dans le vase elle représente le mouvement cherché (Appell).

CHAPITRE III

Fonctions harmoniques dans l'espace et dans le plan. Potentiels logarithmiques.

Définitions (fonctions harmoniques, domaines, frontières).

65. L'équation de Laplace, nous l'avons vu, joue un rôle important dans la physique mathématique ; il convient d'étudier d'une manière particulière les fonctions qui y satisfont.

Nous dirons que le champ scalaire $f(P)$, défini dans un domaine D de l'espace, y est *harmonique*, ou que la fonction $f(P)$ est harmonique dans ce domaine, si, dans D , $f(P)$ a un gradient $\vec{\nabla}f$, si $(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{\nabla}f$ existe dans D , quelle que soit la direction \vec{a} , enfin si

$$\text{lap } f = 0$$

dans D . Si on exprime $f(P)$ en coordonnées cartésiennes : $f(P) = F(x, y, z)$, F sera harmonique dans D si, dans ce domaine, les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ existent, sont continues, si les dérivées secondes $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ existent, et si

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

66. Il faut préciser un peu ce qu'il faut entendre par domaine D . C'est un ensemble de points de l'espace qui est *connexe*, c'est-à-dire tel que l'on puisse joindre deux quelconques de ses points par une courbe dont tous les points appartiennent à l'ensemble. Un point de l'espace est dit *intérieur* au domaine si l'on peut décrire autour de ce point comme centre

une sphère de rayon fini — qui pourrait d'ailleurs être très petit — ne contenant à son intérieur et sur sa surface que des points de l'ensemble. Un point est *extérieur* au domaine, si l'on peut décrire autour de lui comme centre une sphère de rayon fini — parfois très petit — ne contenant à son intérieur et sur la surface que des points qui ne font pas partie de l'ensemble D . Enfin, un point est *frontière* si dans toute sphère dont il est le centre, il y a des points de D et des points ne faisant pas partie de D . L'ensemble des points frontières est la *frontière* de D .

Un domaine peut avoir une frontière très compliquée. Nous ne nous occuperons que des cas où elle est formée d'un nombre fini de surfaces fermées, chacune de ces surfaces étant formée elle-même d'un nombre fini de morceaux de surfaces *analytiques et régulières* [I, § 46]. De même, les courbes dont il s'agit dans la définition de la connexion et dont il s'agira dans la suite seront formées d'un nombre fini d'arcs analytiques et réguliers [I, § 27].

Problèmes fondamentaux (de Dirichlet, de Neumann, mixtes).

67. Rappelons la formule de Green

$$\iiint_V (\psi \operatorname{lap} \varphi - \varphi \operatorname{lap} \psi) d\tau = \iint_{\Sigma} \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn} \right) d\sigma,$$

où φ et ψ sont deux scalaires définis dans une région de l'espace contenant le domaine V dont Σ est la frontière ; la dérivée normale est prise suivant la normale extérieure à Σ (I, § 76).

Il convient de faire ici une remarque : il peut arriver parfois que l'on doive appliquer la formule de Green, ou telle autre formule qui en dérive, à tout le domaine V où les fonctions qui y figurent sont définies. La dérivée suivant la normale extérieure n'est pas définie hors de V . Elle est sur Σ la limite de la dérivée, en un point P qui s'approche de Σ , de la fonction considérée suivant la *direction* de la normale extérieure au point vers lequel P tend ; c'est donc aussi la dérivée changée de signe, suivant la normale intérieure à Σ au point considéré.

Appliquons la formule de Green à la fonction $\psi(P)$ et à la fonction $\varphi = 1$; on a

$$\iiint_V \operatorname{lap} \psi d\tau = \iint_{\Sigma} \frac{d\psi}{dn} d\sigma,$$

ce qui n'est pas autre chose que la formule d'Ostrogradzky appliquée

au champ $\overrightarrow{\text{grad}} \psi$. Mais si ψ est harmonique dans V , ces deux intégrales sont nulles et en particulier :

$$\iint_{\Sigma} \frac{d\psi}{dn} d\sigma = 0. \quad (1)$$

Ce qui revient à dire que le flux, à travers une surface Σ à l'intérieur de laquelle une fonction est harmonique, du gradient de cette fonction est nul, et, de plus, si cette propriété est vraie quelle que soit Σ dans un certain domaine, alors

$$\text{lap } \psi = 0$$

dans ce domaine.

68. La formule de Green résultait d'une transformation opérée sur l'identité :

$$\iiint_V \overrightarrow{\nabla} \psi \cdot \overrightarrow{\nabla} \varphi d\tau + \iiint_V \psi \text{lap } \varphi d\tau = \iint_{\Sigma} \psi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma$$

[I, § 76] ; posons $\varphi = \psi =$ fonction harmonique dans V , alors :

$$\iiint_V (\overrightarrow{\nabla} \psi)^2 d\tau = \iint_{\Sigma} \psi \frac{d\psi}{dn} d\sigma.$$

On tire de là les conséquences suivantes :

I. Si $\psi = 0$ sur Σ et harmonique à l'intérieur, on aura

$$\overrightarrow{\nabla} \psi = 0$$

en tout point de V , donc $\psi = \text{const.} = 0$.

II. Soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions harmoniques dans V qui prennent sur Σ les mêmes valeurs : $\psi_1 - \psi_2 = \psi = 0$ sur Σ .

Donc, d'après I, $\psi_1 = \psi_2$ en tout point de V . On a le théorème très important :

Il n'y a pas deux fonctions harmoniques dans un domaine V et prenant des valeurs données sur la frontière Σ de V .

Si le problème, dit de Dirichlet, qui consiste à déterminer une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine limité par la frontière Σ , sachant que sur Σ , elle a des valeurs données, est résoluble, il n'admet qu'une solution.

III. Si $\frac{d\psi}{dn} = 0$ sur Σ et ψ harmonique à l'intérieur, alors $\psi = \text{const.}$ à l'intérieur ; si donc, on se donne sur Σ les valeurs de la dérivée normale d'une fonction ψ harmonique à l'intérieur de Σ , cette fonction ψ ne

peut être déterminée par cette donnée qu'à une constante additive près.

Si le problème, dit de *Neumann*, qui consiste à *déterminer une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine limité par la frontière Σ , sachant que sur Σ sa dérivée normale a des valeurs données* est résoluble, il admet une *infinité de solutions différant deux à deux d'une constante*.

IV. Supposons que sur Σ , au lieu de connaître ψ ou $\frac{d\psi}{dn}$, on sache que

$$\frac{d\psi}{dn} + h\psi = g,$$

où h et g sont deux fonctions du point courant M de Σ , dont la première n'est jamais négative, et supposons que ψ soit harmonique dans V ; y a-t-il plusieurs fonctions ψ jouissant de ces propriétés, et qui sont dès lors solutions de ce qu'on appelle un *problème mixte* ?

S'il y en avait deux, leur différence χ serait harmonique et l'on aurait sur Σ

$$\frac{d\chi}{dn} = -h\chi;$$

dès lors

$$\iiint_V (\nabla\chi)^2 d\tau = - \iint_{\Sigma} h\chi^2 d\sigma,$$

ce qui est impossible à moins que $\chi = 0$, car $h \geq 0$.

Le problème mixte n'a donc qu'une seule solution, s'il est résoluble.

Propagation de la chaleur.

Signification intuitive des problèmes de Dirichlet et de Neumann.

69. Il sera particulièrement simple de se figurer la signification des problèmes dont nous venons de voir les énoncés lorsque nous aurons établi l'équation de propagation de la chaleur et celle de l'équilibre thermique.

Dans un conducteur, la chaleur passe des parties où la température est élevée à celles où elle est basse. On peut se figurer la chaleur comme un fluide et représenter ses déplacements, ses mouvements, par un champ de vecteurs $\vec{W}(P; t)$. Comme la quantité de chaleur qui entre dans un volume en un temps dt est égale à la quantité qui en sort, augmentée de ce dont s'est accrue la quantité qui y était primitivement¹, on pourra obtenir une équation de continuité du champ \vec{W} analogue à l'équation de continuité de l'hydrodynamique.

¹ Pour autant que le milieu en question est le siège de phénomènes uniquement calorifiques.

Soit alors Q la quantité de chaleur contenue dans un volume quelconque V , limité par une surface Σ . Soit T la température absolue en un point P à l'instant t . La quantité de chaleur contenue dans V est

$$Q = \iiint_V cT\rho d\tau$$

où c est la chaleur spécifique de la substance conductrice remplissant V et ρ , sa densité. Or, dans le temps dt , Q varie de dQ par suite du mouvement du fluide calorifique, et l'on a

$$dQ = dt \iiint_V \frac{\partial T}{\partial t} c\rho d\tau.$$

Mais la quantité de chaleur perdue par V est, si l'on a recours à l'hypothèse d'un champ \vec{W} :

$$dQ = dt \iint_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{d\sigma}$$

donc :

$$\iiint_V \frac{\partial T}{\partial t} c\rho d\tau = - \iint_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{d\sigma} = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{W} d\tau,$$

à cause du théorème d'Ostrogradzky. Par conséquent :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{W} = 0.$$

Or, Fourier a montré que le champ \vec{W} est représenté à un facteur négatif près par le gradient de la fonction T :

$$\vec{W} = -k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$$

où k est le coefficient de conductibilité. Cette relation veut dire simplement que la quantité de chaleur qui passe dans le temps dt à travers un élément de surface $d\sigma$ quelconque, tracé dans V , est $-k \frac{dT}{da} d\sigma dt$, \vec{a} étant la normale à $d\sigma$, et c'est au fond cette loi élémentaire qui justifie à la fois l'hypothèse de l'existence d'un courant de chaleur \vec{W} dans un conducteur isotrope et son expression précédente.

Supposons que le conducteur considéré soit homogène, on aura

$$\operatorname{div} \vec{W} = -k \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} T = -k \operatorname{lap} T.$$

L'équation fondamentale de la propagation de la chaleur s'écrit donc

$$\nu \frac{\partial T}{\partial t} - \text{lap } T = 0, \quad \left(\nu = \frac{c\rho}{k} \right).$$

Si des conditions favorables à l'établissement d'un régime stationnaire ont été assurées autour du conducteur, c'est-à-dire, si l'on peut être certain que le mouvement de la chaleur est permanent, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, et $\text{lap } T = 0$.

La température à l'intérieur d'un conducteur homogène et isotrope en régime permanent est une fonction harmonique.

70. Soit dès lors ψ la fonction harmonique qui représente la solution de l'un ou l'autre des problèmes que nous nous sommes posés plus haut (Dirichlet, Neumann, mixte). Imaginons que ψ est la température en chaque point du domaine considéré, supposé occupé par un conducteur homogène et isotrope, en régime thermique permanent.

Si l'on connaît la température en chaque point de Σ (problème de Dirichlet), elle est univoquement déterminée à l'intérieur ; si l'on connaît le flux de chaleur sur la surface $\frac{d\psi}{dn}$ (problème de Neumann), la température est déterminée à l'intérieur à une constante près.

En effet, dans le premier cas, s'il y avait deux solutions ψ_1 et ψ_2 , la différence $\psi_1 - \psi_2$ serait une température stationnaire, *nulle* sur Σ , et physiquement, il est bien clair que cette température $\psi_1 - \psi_2$ doit être nulle à l'intérieur de Σ . Dans le second cas, la différence de deux solutions serait une température stationnaire dont la dérivée normale serait nulle sur Σ , c'est-à-dire que le volume serait *isolé* thermiquement ; mais un conducteur homogène isolé thermiquement ne peut avoir une température stationnaire que si elle est constante, donc $\psi_1 - \psi_2 = \text{const}$.

Pour le problème mixte, la signification calorifique des données est un peu plus compliquée ; nous laissons au lecteur le soin de la trouver.

Formule fondamentale.

71. Appliquons la formule de Green aux deux fonctions, ψ harmonique dans V , et $\varphi = \frac{1}{r}$, avec $r = PM$, M étant le point courant dans V , et P , un point de l'espace. Si P est hors de V , la formule ne donne rien de particulièrement intéressant. Si P est intérieur, elle est inapplicable.

Cependant, si l'on enlève de V l'intérieur d'une sphère S , centrée en P et de rayon ρ , on pourra appliquer la formule de Green au domaine V' restant, limité par la frontière formée de Σ et S . Dans V' , $\text{lap } \psi = \text{lap } \frac{1}{r} = 0$, car $\frac{1}{r}$ est un potentiel newtonien dont le laplacien est nul en tout point différent de P . Dès lors :

$$\iint_{\Sigma} \left(\psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} \right) d\tau + \iint_S \left(\psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} \right) d\tau = 0,$$

la dérivée normale étant prise suivant la normale extérieure à V' ; en particulier, le long de S , c'est la dérivée suivant la normale intérieure à S .

Or, sur S :

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dn} = \frac{1}{\rho^2}$$

et

$$\iint_S \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} d\tau = \frac{1}{\rho} \iint_S \frac{d\psi}{dn} d\tau = 0,$$

comme le montre l'équation (1).

Donc,

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_S \psi d\tau = \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\tau,$$

mais le second membre est indépendant de ρ ; le premier doit l'être aussi. Or sur S

$$\psi = \psi(P) + \varepsilon$$

ε tendant vers zéro lorsque ρ tend vers zéro, on a donc :

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_S \psi d\tau = 4\pi\psi(P) + \frac{1}{\rho^2} \iint_S \varepsilon d\tau,$$

et la dernière intégrale, pouvant être rendue aussi petite que l'on veut puisque, si $|\varepsilon| < \gamma$, elle est inférieure à $4\pi\gamma$, est nulle.

On a la formule très importante :

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\tau, \quad (2)$$

qui prouve que la valeur d'une fonction harmonique en un point du domaine V est connue, si l'on connaît ses valeurs et les valeurs de sa dérivée normale sur la frontière Σ de V .

Mais il y a plus. Si l'on considère les deux fonctions sur Σ :

$$\begin{aligned}\mu(M) &= \frac{1}{4\pi} \frac{d\psi}{dn}, \\ \nu(M) &= -\frac{\psi}{4\pi}.\end{aligned}$$

comme deux densités superficielles, $\psi(P)$ se trouve être égale à la somme de deux potentiels l'un de simple couche, l'autre de double couche, étalées sur Σ .

Remarquons cependant que μ et ν ne sont pas forcément positives, mais rien n'empêche d'étendre le sens du terme « potentiel newtonien » au cas de « masses » et de « densités » négatives. L'électrostatique en donne une image physique simple, et tous les raisonnements du chapitre I s'appliquent immédiatement aux cas où les densités ont un signe quelconque.

On a donc le théorème suivant :

Toute fonction harmonique dans un domaine V est la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche dus à des densités étalées sur la surface frontière de V .

Equation de Poisson.

72. Si ψ n'est pas une fonction harmonique, l'application de la formule de Green à ψ et à $\varphi = \frac{1}{r}$ donne immédiatement

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\text{lap } \psi}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\tau,$$

ce qui prouve que toute fonction ψ dont le laplacien est défini dans quelque région de l'espace est la somme de trois potentiels : l'un dû à une densité de volume, les deux autres étant respectivement de simple couche et de double couche.

Dans cette représentation, le volume V en les points duquel on calcule ψ peut être quelconque (à cela près que $\text{lap } \psi$ doit y être défini partout). Supposons qu'on calcule $\psi(P)$ avec un certain choix de V et

de Σ ; réduisons le volume à un volume intérieur V' limité par Σ' , la formule change, mais $\psi(P)$ ne doit pas changer. On voit donc que les intégrales de surface représentent en quelque manière l'action de masses continues réparties hors des frontières du volume.

Plus précisément, imaginons une distribution de matière créant dans l'espace un certain potentiel ψ^1 . On sait que ψ n'est pas harmonique mais qu'on a

$$\text{lap } \psi = -4\pi\rho,$$

ρ étant la densité de la distribution.

On sait, d'autre part, qu'un tel potentiel est donné en tout point de l'espace par la formule

$$\psi(P) = \iiint_W \frac{\rho(M)}{r} d\tau_M \quad (r = PM) \quad (3)$$

où W représente un volume contenant toute la matière attirante. Cette fonction satisfait à l'équation de Poisson.

Si on considère maintenant un volume V intérieur à W , et limité par Σ , on pourra écrire en P , intérieur à V :

$$\psi(P) = \iiint_V \frac{\rho}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma \quad (4)$$

et l'on voit bien maintenant que l'intégrale de surface représente l'action de la matière extérieure à V .

Entre les deux représentations de $\psi(P)$, il y a une différence fondamentale. L'une donne $\psi(P)$ dans tout l'espace, l'autre seulement dans V . On est sûr que ces deux représentations sont identiques dans V pourvu qu'on définisse ψ et $\frac{d\psi}{dn}$ sur Σ au moyen de (3) ; cette remarque permettra de préciser les conditions d'existence des solutions de l'équation de Poisson.

L'équation de Poisson admet la solution (3). Si le volume W est tout entier à distance finie, on voit que $\psi(P)$ tend vers zéro lorsque P s'éloigne indéfiniment dans n'importe quelle direction. Il en est ainsi d'ailleurs de tout potentiel newtonien dû à des masses attirantes placées à distance finie. Toute autre solution de l'équation de Poisson est évidemment égale à la précédente augmentée d'une fonction harmonique.

Si donc l'on cherche les solutions de l'équation de Poisson, continues dans tout l'espace et nulles à l'infini, il faut ajouter à $\psi(P)$, donnée par

¹ Il faut remarquer que cette matière est entièrement à distance finie.

(3), une fonction harmonique dans tout l'espace et nulle à l'infini. Une telle fonction est nulle partout comme le montre le théorème de la moyenne qu'on va démontrer au prochain paragraphe. Dès lors, *il n'y a qu'une solution de l'équation de Poisson, continue dans tout l'espace et nulle à l'infini.*

Théorème de la moyenne.

73. La formule (2), qui donne la valeur de la fonction harmonique $\psi(P)$ en un point quelconque intérieur à V , donne dans le cas particulier où V est intérieur à une sphère S et où P est le centre O de cette sphère :

$$\psi(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S \psi d\tau,$$

car $\frac{1}{R} \iint_S \frac{d\psi}{dn} = 0$ et $\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{1}{R^2}$. Donc :

La valeur d'une fonction harmonique en un point est la moyenne des valeurs que cette fonction prend sur toute sphère centrée au point considéré. Il est bien entendu que la sphère doit être située dans la région où la fonction est harmonique ; à cela près, son rayon est quelconque.

Il s'ensuit qu'à l'intérieur de tout domaine où une fonction est harmonique, elle n'y admet ni maximum, ni minimum. Car, si en P , ψ était maximum, $\psi(P)$ ne pourrait être la moyenne des valeurs de ψ sur une sphère, centrée en P , de rayon assez petit puisque, en chaque point M de sa surface, on aurait $\psi(M) \leq \psi(P)$.

On en déduit immédiatement une autre démonstration de ce que le problème de Dirichlet n'a qu'une solution. Soit en effet Σ la frontière de D ; on se donne $\psi(M)$ sur Σ et on cherche $\psi(P)$ harmonique dans V prenant sur Σ les valeurs $\psi(M)$. S'il y a deux solutions de ce problème, leur différence est une fonction harmonique dans V , nulle sur Σ ; elle est nulle alors dans V , sinon elle y aurait un maximum ou un minimum, ce qui est impossible.

Solution du problème de Dirichlet pour la sphère.

74. La formule

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\tau \tag{2}$$

représente la fonction ψ harmonique à l'intérieur de Σ , si l'on connaît ψ et $\frac{d\psi}{dn}$ sur Σ . Il y a là une donnée superflue si l'on veut résoudre le problème de Dirichlet ; on doit se donner seulement ψ et non $\frac{d\psi}{dn}$ sur Σ . Il est possible d'éliminer $\frac{d\psi}{dn}$ d'une manière très simple lorsque Σ est une sphère.

On introduit le point P_1 , inverse de P par rapport à la sphère S , c'est-à-dire tel que P et P_1 vérifient la relation

$$OP \cdot OP_1 = R^2,$$

O étant le centre de la sphère, R le rayon, P et P_1 sont alignés avec O . La sphère S est le lieu des points M dont le rapport des distances aux deux points P et P_1 est constant :

$$\frac{MP}{MP_1} = \frac{OP}{R}.$$

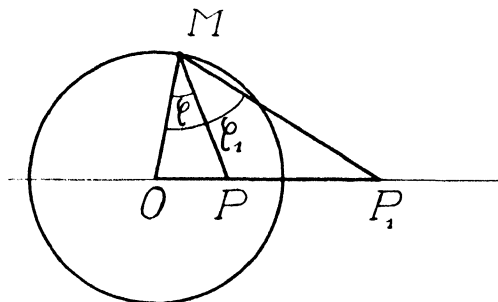


Fig. 9.

D'autre part, l'application de la formule de Green à la fonction $\psi(Q)$ et à la fonction harmonique dans S : $\varphi(Q) = \frac{1}{r_1}$, avec $r_1 = P_1Q$, donne

$$0 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d}{dn} \frac{1}{r_1} \right) d\sigma_M. \quad (5)$$

On élimine $\frac{d\psi}{dn}$ en remarquant que

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{l} \cdot \frac{1}{r_1} = 0; \quad (l = OP)$$

c'est-à-dire qu'on multiplie les deux membres de (5) par $-\frac{R}{l}$ et qu'on

ajoute l'équation obtenue membre à membre à (2). Il vient :

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \psi(M) \left[\frac{R}{l} \frac{d}{dn} \frac{1}{r_1} - \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right] d\sigma_M.$$

Or, on a

$$\frac{dr}{dn} = \cos \varphi, \quad \frac{dr_1}{dn} = \cos \varphi_1$$

avec $\varphi = \widehat{PMO}$, $\varphi_1 = \widehat{P_1MO}$; d'autre part :

$$l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi, \quad l_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \varphi_1; \quad (l_1 = OP_1) \quad (6)$$

et rappelons que $ll_1 = R^2$, $\frac{r_1}{r} = \frac{R}{l}$ d'où : $l_1 = \frac{R^2}{l}$, $r_1 = \frac{rR}{l}$.

Dès lors, le facteur de $\psi(M)$ dans l'intégrale ci-dessus s'écrit, en remplaçant $\cos \varphi$ et $\cos \varphi_1$ par leurs valeurs tirées de (6) :

$$\begin{aligned} & - \frac{R}{l} \frac{1}{r_1^2} \cos \varphi_1 + \frac{1}{r^2} \cos \varphi = - \frac{R^2 + r_1^2 - l_1^2}{2r_1^3 l} + \frac{R^2 + r^2 - l^2}{2Rr^3} = \\ & = - \frac{R^2 + \frac{r^2 R^2}{l^2} - \frac{R^4}{l^2}}{2l \frac{r^3 R^3}{l^3}} + \frac{R^2 + r^2 - l^2}{2Rr^3} = - \frac{l^2 + r^2 - R^2}{2Rr^3} + \\ & + \frac{R^2 + r^2 - l^2}{2Rr^3} = \frac{R^2 - l^2}{Rr^3}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - l^2}{r^3} \psi(M) d\sigma_M; \quad (7).$$

l'intégrale du second membre est dite *intégrale de Poisson*.

75. Vérifions que les transformations que nous avons fait subir à l'intégrale (2) ne lui ont pas fait perdre sa propriété d'être harmonique et démontrons que lorsque P tend vers un point M_o de S , $\psi(P)$ tend vers $\psi(M_o)$.

Comme

$$R^2 - l^2 = 2Rr \cos \varphi - r^2,$$

on voit que

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \psi(M) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma_M - \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{\psi(M)}{r} d\sigma_M. \quad (8)$$

C'est la différence de deux fonctions harmoniques : un potentiel de double couche et un potentiel de simple couche.

Lorsque P tend vers M_o , le potentiel de simple couche, qui est continu, tend vers

$$\frac{1}{4\pi R} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\psi(M)}{r_o} d\sigma_M. \quad (r_o = \overline{MM_o})$$

D'autre part, la densité du potentiel de double couche, si l'on prend les notations du § 19, est

$$\mu(M) = -\frac{\psi(M)}{2\pi}$$

car φ dans (8) est le supplément du φ des §§ 18 et 19. Or

$$\mathfrak{Q}\mathcal{V}_o^- = \mathfrak{Q}\mathcal{V}_o - 2\pi\mu_o;$$

donc :

$$\lim_{P \rightarrow M_o} \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}} \psi(M) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma_M \right\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}} \psi(M) \frac{\cos \varphi_o}{r_o^2} d\sigma_M + \psi(M_o),$$

mais $\cos \varphi_o = \frac{r_o}{2R}$, et la limite précédente est :

$$\psi(M_o) + \frac{1}{4\pi R} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\psi(M)}{r_o} d\sigma_M.$$

Enfin

$$\lim_{P \rightarrow M_o} \psi(P) = \psi(M_o) + \frac{1}{4\pi R} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\psi(M)}{r_o} d\sigma_M - \frac{1}{4\pi R} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\psi(M)}{r_o} d\sigma_M = \psi(M_o).$$

La formule (7) résoud bien le problème de Dirichlet pour l'intérieur de la sphère.

Potentiel logarithmique.

76. Si l'on considère dans l'espace les fonctions $\psi(P)$ dont les valeurs ne changent pas lorsque P décrit une droite parallèle à une même direction δ , il revient au même de ne s'occuper que des fonctions d'un point variable P dans un plan Π perpendiculaire à cette direction.

Les théorèmes du chapitre V s'appliquent à ces fonctions, mais ils prennent une forme simple si les volumes qu'on utilise pour les intégrales triples sont des cylindres droits à génératrices parallèles à δ , de hauteur unité. On aura, en effet,

$$d\sigma = ds$$

et les intégrales sur la surface latérale deviendront des intégrales curvilignes prises sur la section droite du cylindre par Π . Les intégrales sur les bases s'entre-détruiront, les fonctions prenant des valeurs égales en des points situés sur une parallèle à δ , et les $\vec{d\sigma}$ y étant opposés, ainsi que les dérivées normales qui pourraient y figurer.

La formule de Green en particulier s'écrira, pour deux fonctions $\psi(P)$ et $\varphi(P)$ définies dans un domaine D du plan et sur sa frontière C :

$$\iint_D (\psi \operatorname{lap} \varphi - \varphi \operatorname{lap} \psi) d\sigma = \int_C \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn} \right) ds ;$$

le sens de parcours sur C laisse l'aire D à droite, la dérivée normale est prise suivant la normale extérieure à D . D'ailleurs on peut tirer aussi cette formule de la formule de Riemann [I, § 73] :

$$\int_C Xdx + Ydy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy.$$

77. Le rôle joué dans l'espace par la fonction $\frac{1}{r}$ est joué dans le plan par la fonction $\log \frac{1}{r}$. On considère un point O attirant suivant une force proportionnelle à l'inverse de la distance ; soit P , tel que $O\vec{P} = \vec{r}$, et l'on prend

$$\vec{F} = - \frac{\vec{r}}{r^2}, \tag{9}$$

on a

$$d\bar{\omega} = \vec{F} \cdot \vec{dr} = - \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \vec{dr} = - \frac{dr}{r} = - d \log r = d \log \frac{1}{r}.$$

Les expressions

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \log \frac{1}{r_i}, \quad \iint_D \mu(M) \log \frac{1}{r} d\sigma_M \quad (r_i = \overline{O_i P}, r = MP)$$

sont des *potentiels logarithmiques* de masses ponctuelles placées en O_1, \dots, O_n , et de masses continues réparties sur D suivant la densité $\mu(M)$. On en déduit les champs analogues à \vec{F} en en prenant le gradient.

On démontre sans peine que le flux total du champ (9) à travers une courbe fermée est égal à

$$- 2\pi \times \text{somme des masses contenues dans } C.$$

car

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \int_C \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_C \frac{\cos \varphi}{r} ds$$

où φ est l'angle de \vec{n} avec \vec{OM} , M étant le point courant sur C . Or $\frac{\cos \varphi}{r} ds$ est, au signe près, l'angle sous lequel on voit de O l'élément ds . L'intégrale précédente vaut donc

$$-2\pi, \quad 0, \quad -\pi, \quad -\alpha$$

suivant que O est dans C , hors de C , sur C en un point régulier, sur C en un point anguleux où les tangentes font l'angle α .

Les potentiels logarithmiques que nous venons de considérer vérifient l'équation de Laplace en tout point du plan où n'existent pas de masses. Ce sont donc des fonctions harmoniques dans tout domaine du plan à l'intérieur duquel ne se trouvent pas de masses. C'est ce qu'on voit immédiatement avec la relation :

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_C X dy - Y dx = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} \right) dx dy = \iint_D \text{lap} \log \frac{1}{r} d\sigma$$

où $\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} = -\frac{\vec{r}}{r^2} = \text{grad} \log \frac{1}{r}$. Donc, si C n'entoure pas de masse, le flux est nul et le laplacien est nul aussi car C peut être une courbe *quelconque* ne contenant pas de masse.

On voit que $\iint_D \mu(M) \log \frac{1}{r} d\sigma_M$ est continu dans tout le plan, son

gradient aussi mais son laplacien est égal à $-2\pi\mu$. C'est l'équation de Poisson pour le plan qui se démontre comme dans le cas de l'espace.

On définit aussi des potentiels logarithmiques de simple couche et de double couche :

$$\mathfrak{N}(P) = \int_C \sigma(M) \log \frac{1}{r} ds_M, \quad \mathfrak{N}(P) = \int_C \sigma(M) \frac{\cos \varphi}{r} ds_M; \quad (\varphi = \text{angle de } \vec{MP} \text{ avec } \vec{n}).$$

Ce sont des fonctions harmoniques dans toute région du plan ne contenant pas des points de C .

C est une ligne où $\mathfrak{N}(P)$ et le gradient de $\mathfrak{N}(P)$ sont discontinus en général. On peut établir les formules suivantes, comme dans le cas de l'espace, et valables si C est fermée :

$\begin{aligned} \mathfrak{N}_o^- &= \mathfrak{N}_o - \pi\sigma_o \\ \mathfrak{N}_o^+ &= \mathfrak{N}_o + \pi\sigma_o \end{aligned}$	(10)
--	------

si M_o est un point régulier de C et, dans les mêmes conditions :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{U}}{dn_e}\right)_o^- &= \pi\sigma_o + \int_C \sigma(M) \frac{\cos \psi_o}{r} ds_M \\ \left(\frac{d\mathcal{U}}{dn_e}\right)_o^+ &= -\pi\sigma_o + \int_C \sigma(M) \frac{\cos \psi_o}{r} ds_M \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (11) \\ \psi_o = \text{angle de } M_oM \text{ avec la} \\ \text{normale extérieure en } M_o. \end{array}$$

Les théorèmes de Gauss relatifs aux valeurs moyennes des potentiels newtoniens sur une sphère [§ 22] ont des énoncés analogues pour les potentiels logarithmiques et leurs valeurs moyennes sur une circonférence. Cela tient à ce que le potentiel logarithmique d'une circonférence homogène est constant à l'intérieur de la couche et qu'à l'extérieur, il est égal à celui d'une masse ponctuelle placée au centre de la couche et égale à la masse de la couche. Il faut remarquer cependant que dans l'énoncé du second théorème, il faut remplacer l'inverse du rayon par le logarithme de l'inverse du rayon.

Problèmes plans.

78. On tire de la formule de Green (I, § 76) des égalités semblables à celles qu'on a obtenues pour l'espace.

$$\iint_D \text{lap } \psi \, d\sigma = \int_C \frac{d\psi}{dn} ds ;$$

donc si ψ est harmonique dans D et sur C

$$\int_C \frac{d\psi}{dn} ds = 0,$$

$$\iint_D (\vec{\nabla} \psi)^2 d\sigma = \int_C \psi \frac{d\psi}{dn} ds,$$

et par suite, on retrouve les mêmes conséquences relativement à l'unicité des solutions (lorsqu'elles existent) des problèmes de Dirichlet, de Neumann et des problèmes mixtes.

On a aussi une formule fondamentale permettant de calculer une fonction harmonique en un point intérieur d'un domaine connaissant

les valeurs de cette fonction et de sa dérivée normale sur la frontière :

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\log \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} \right) ds \quad (\vec{n} = \text{normale extérieure}).$$

Appliquée à un cercle C et pour le centre O de ce cercle, cette formule donne

$$\psi(O) = \frac{1}{2\pi R} \int_C \psi(M) ds_M,$$

qui montre qu'une fonction harmonique prend au centre d'un cercle la moyenne des valeurs qu'elle prend sur la circonférence. On en déduit encore les mêmes propriétés relatives aux extrema d'une fonction harmonique dans un domaine ; les points en lesquels une telle fonction atteint un extremum sont sur la frontière du domaine.

Enfin, le problème de Dirichlet est résolu pour le cercle par l'intégrale de Poisson :

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_C \frac{R^2 - l^2}{r^2} \psi(M) ds_M,$$

où $r = PM$, $l = OP$.

Ces considérations sur les fonctions harmoniques dans le plan ont d'étroites relations avec la théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous laissons au lecteur le soin de les établir.

Convergence de suites de fonctions harmoniques.

79. Il convient, avant d'abandonner la théorie générale des fonctions harmoniques, de donner quelques résultats importants pour les applications et relatifs aux suites, ou aux séries, de fonctions harmoniques. Nous nous bornerons au cas des fonctions harmoniques dans le plan. Établissons d'abord le théorème suivant dit *théorème de Harnack*.

Soit une suite

$$u_1(P), u_2(P), \dots, u_n(P), \dots \tag{12}$$

de fonctions harmoniques dans un domaine D dont C est la frontière et supposons que sur C cette suite converge uniformément. En d'autres termes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(M) = u(M),$$

pour M sur C et

$$|u_n(M) - u_{n+p}(M)| < \varepsilon, \quad (13)$$

si $n > N(\varepsilon)$, quel que soit M sur C , et quel que soit p . La suite (12) converge alors uniformément dans D et sa limite est une fonction harmonique dans D .

En effet, ε étant donné, on peut trouver $N(\varepsilon)$ tel que pour $n > N$, on ait pour tout point M sur C l'inégalité (12). Mais la fonction harmonique dans D :

$$u_n(P) - u_{n+p}(P)$$

prend ses valeurs extrêmes sur la frontière, donc, quel que soit P dans D , on a

$$|u_n(P) - u_{n+p}(P)| < \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite $u_n(P)$ converge uniformément à l'intérieur de D . Soit $u(P)$ la fonction limite. Je dis que $u(P)$ est harmonique à l'intérieur de D .

Choisissons un point P intérieur ; on peut l'imaginer dans un cercle Γ intérieur à D , sur la circonférence duquel la suite u_n converge uniformément. Or, si R est le rayon de ce cercle et O son centre :

$$u_n(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - l^2}{r^2} u_n(M) ds_M,$$

en appliquant l'intégrale de Poisson à la fonction u_n , M étant le point courant sur Γ , et $r = PM$, $l = OP$.

Mais, à cause de la convergence uniforme de la suite $u(M)$, on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - l^2}{r^2} u_n(M) ds_M = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - l^2}{r^2} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(M) ds_M,$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P) = u(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - l^2}{r^2} u(M) ds_M,$$

ce qui montre bien, puisque l'intégrale de Poisson représente une fonction harmonique, que $u(P)$ est harmonique en tout point P intérieur à D .

80. Soit une suite $u_1(P), u_2(P), \dots, u_n(P), \dots$ de fonctions harmoniques dans un domaine D , et supposons que pour chaque point P de D on ait

$$u_n(P) \leq u_{n+1}(P),$$

alors si la suite converge en un point O à l'intérieur de D , elle converge en tous les points de D et sa limite est une fonction harmonique à l'intérieur de D . Cette proposition est encore due à Harnack.

On décrit, pour la démontrer, un cercle Γ de centre O et de rayon R , contenu tout entier dans D . Soit P un point tel que $OP = l < R$. L'intégrale de Poisson donne

$$u_n(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - l^2}{r^2} u_n(M) ds_M, \quad (r = MP).$$

Ajoutons à toutes les fonctions $u_n(P)$, si $u_1(P)$ est négative, une constante et considérons les nouvelles fonctions obtenues, que nous appellerons encore $u_n(P)$ mais qui peuvent être considérées toutes comme positives, si la constante a été choisie assez grande¹. On voit facilement que

$$u_n(P) < \frac{R+l}{R-l} u_n(O).$$

Si donc $u_n(O)$ a une limite $u(O)$, on aura

$$u_n(P) < \frac{R+l}{R-l} u(O),$$

car $u_n(O) \leq u(O)$, et comme $u_n(P)$ ne décroît jamais lorsque n croît, $u_n(P)$ a une limite $u(P)$.

De plus, l'intégrale de Poisson, appliquée à $u_{n+p} - u_n$, donne :

$$u_{n+p}(P) - u_n(P) < \frac{R+l}{R-l} [u_{n+p}(O) - u_n(O)],$$

ce qui montre que $u_n(P)$ converge uniformément vers sa limite lorsque P est intérieur à un cercle Γ' intérieur à Γ . Donc $u(P)$ est harmonique dans Γ . On fera jouer ensuite le rôle du point O à un point quelconque situé dans Γ et on pourra étendre la démonstration à tout le domaine D . On revient aux fonctions données en soustrayant la constante.

Remarquons que si les $u_n(O)$ forment une suite bornée supérieurement, celle-ci converge nécessairement à cause de $u_n(O) \leq u_{n+1}(O)$; le théorème énoncé est donc immédiat si l'on sait que la suite est bornée en un point de D . On peut énoncer un théorème tout semblable pour les suites telles que $u_{n+1}(P) \leq u_n(P)$; on utilise l'inégalité

$$u_n(P) \geq \frac{R-l}{R+l} u_n(O).$$

¹ Cela suppose que u_n est bornée sur la frontière; si ce n'était pas le cas on raisonnerait sur un domaine intérieur à D et nos conclusions seraient encore valables.

Prolongement des fonctions harmoniques.

81. Nous savons (Appendice §§ 7 et 8) que la partie réelle d'une fonction monogène est une fonction harmonique et qu'inversement toute fonction harmonique peut être considérée comme la partie réelle d'une fonction monogène. Or on sait qu'une fonction monogène dans une région est *analytique* dans cette région, c'est-à-dire que dans le voisinage de tout point z_0 de cette région elle est développable en série de Taylor :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Par conséquent, toute fonction harmonique dans un domaine est développable, dans le voisinage de chaque point de ce domaine en une série de la forme

$$u(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \beta_1(y - y_0) + \alpha_2(x - x_0)^2 + \\ + \gamma_2(x - x_0)(y - y_0) + \beta_2(y - y_0)^2 + \dots$$

procédant suivant les puissances et les produits des puissances des différences $x - x_0$ et $y - y_0$, c'est-à-dire, en fait, que toute fonction harmonique est développable en série de Taylor. C'est ce qu'on exprime en disant qu'une *fonction harmonique est analytique*.

Il se pose, à propos des fonctions harmoniques, un problème tout semblable à celui qui se pose pour les fonctions de variable complexe, celui de leur *prolongement*.

Une fonction $u(x, y)$ étant harmonique dans un domaine D du plan, peut-on trouver une fonction $U(x, y)$ harmonique dans un domaine plus grand que D et contenant D , qui se confonde dans D avec $u(x, y)$? S'il en est ainsi, $U(x, y)$ réalise le prolongement analytique de $u(x, y)$ hors de D , et précisément dans le domaine nouveau qui, ajouté à D , est le domaine d'existence de U .

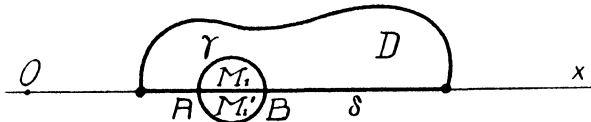


Fig. 10.

Nous allons résoudre trois problèmes de prolongement, importants pour la suite, mais très particuliers tout de même.

1° $u(x, y)$ est définie dans un domaine D situé au-dessus de l'axe des x , dont une partie de la frontière est un segment δ de l'axe des x sur lequel

$u = 0$. Décrivons une série de cercles dont les diamètres sont sur δ et dont les moitiés supérieures sont entièrement dans D . Soit γ l'un d'eux ; la fonction $u(x, y)$ est définie dans sa moitié supérieure M_1 et sur le diamètre horizontal. Je dis que la fonction $U(x, y)$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= u(x, y) && \text{dans } M_1 \\ U(x, y) &= -u(x, -y) && \text{dans } M'_1 \text{ symétrique de } M_1 \end{aligned}$$

est une fonction harmonique dans γ qui réalise le prolongement de $u(x, y)$ à travers le diamètre considéré. En effet, si on introduit l'angle θ pour caractériser un point de la circonférence de γ et si l'on remarque que U est sur cette circonférence une fonction $f(\theta)$ vérifiant la condition

$$f(\theta) = -f(2\pi - \theta),$$

l'intégrale de Poisson

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - l^2}{r^2} f(\theta) d\theta$$

définit une fonction *harmonique* de P qui est égale à zéro sur le diamètre AB et qui prend sur la demi-circonférence les valeurs $f(\theta)$, c'est-à-dire les mêmes que celles que prend u ; elle est donc identique à u dans le demi-cercle supérieur ; elle vaut aussi $-u(x, -y)$ au point (x, y) situé dans la partie inférieure. Elle est $U(x, y)$. On peut raisonner ainsi pour tous les cercles considérés et l'on a donc prolongé $u(x, y)$ à travers δ dans un domaine situé au-dessous de l'axe réel.

2° $u(x, y)$ est définie dans le même domaine, mais elle prend sur δ une suite de valeurs $v(x)$ analytique en x , c'est-à-dire développable en série :

$$v(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

convergente dans un intervalle de l'axe des x contenant x_0 et pour toutes les valeurs de x_0 situées à l'intérieur de δ .

La fonction

$$v(z) = a_0 + a_1(z - x_0) + a_2(z - x_0)^2 + \dots$$

est holomorphe dans un cercle de centre x_0 et par suite elle est un élément analytique d'une fonction holomorphe dans une bande dont δ est un axe de symétrie. Si on pose

$$v(z) = X(x, y) + iY(x, y)$$

la fonction X est harmonique dans ladite bande tandis que la fonction

$$v(x, y) = u(x, y) - X(x, y)$$

est définie et harmonique dans la moitié supérieure de cette bande. Or cette dernière fonction est nulle sur δ . On est ramené au cas précédent. On prolonge $v(x, y)$ en $V(x, y)$ dans toute la bande en question, où $X(x, y)$ est définie et harmonique. Dès lors

$$U(x, y) = V(x, y) + X(x, y)$$

réalise le prolongement de $u(x, y)$ au delà de δ .

3° $u(x, y)$ est définie dans un domaine dont une partie de la frontière est un arc A analytique et régulier, c'est-à-dire dont le \vec{r} et par suite les coordonnées sont des fonctions analytiques d'un paramètre réel t :

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \alpha_1(t - t_0) + \alpha_2(t - t_0)^2 + \dots \\ y &= \beta_0 + \beta_1(t - t_0) + \beta_2(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

tels que α_1 et β_1 ne soient pas nuls à la fois. On suppose que $u(x, y)$ prend sur A une suite de valeurs représentée par une fonction analytique de t , soit

$$a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots$$

Soit la variable complexe $\zeta = t + is$; la fonction

$$z = f(\zeta)$$

définie par l'équation

$$z = \alpha_0 + i\beta_0 + (\alpha_1 + i\beta_1)(\zeta - t_0) + (\alpha_2 + i\beta_2)(\zeta - t_0)^2 + \dots$$

établit une correspondance conforme biunivoque entre un petit domaine, autour du point $\alpha_0 + i\beta_0$, du plan z et un petit domaine du plan ζ autour du point $\zeta = t_0$; la biunivocité est garantie par le fait que $f'(t_0) \neq 0$, la fonction inverse $\zeta = \varphi(z)$ existe bien dans le voisinage de $z = \alpha_0 + i\beta_0$ ¹. Or à l'axe A correspond dans cette représentation conforme un segment δ de l'axe réel du plan ζ . La fonction harmonique donnée $u(x, y)$ devient une fonction harmonique $v(t, s)$ qu'on sait pro-

¹ On fait appel ici à un théorème qui généralise pour les fonctions de variables complexes le théorème d'existence des fonctions implicites et des fonctions inverses. Si l'on a

$$z = z_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots$$

avec $A_1 \neq 0$, on pourra toujours trouver une fonction $\zeta(z)$ holomorphe dans le voisinage de z_0 , et par conséquent développable sous la forme :

$$\zeta = B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Si $A_1 = 0$, il y a en général plusieurs fonctions qui réalisent l'inversion, c'est-à-dire que la fonction inverse est multiforme.

Ces propositions se démontrent tout comme dans le domaine réel.

longer au delà de δ car elle prend sur δ une suite de valeurs représentée par une fonction analytique. On revient de $V(t, s)$ à $U(x, y)$ qui réalise le prolongement de $u(x, y)$ au delà de A .

On a donc démontré le théorème suivant : *Si une fonction harmonique dans un domaine D prend sur une partie de la frontière de D qui est un arc analytique et régulier une suite de valeurs qui soit fonction analytique du paramètre de représentation de cet arc, elle est prolongeable à travers cet arc.*

En particulier, si la frontière de D est une courbe C , fermée, analytique et régulière et si $u(x, y)$ prend sur cette frontière une suite de valeurs qui soit, au voisinage de chaque point, analytique par rapport au paramètre, la fonction $u(x, y)$ est prolongeable au delà de C ; c'est-à-dire que la fonction harmonique u est définie non seulement dans D mais dans un certain domaine dont tous les points de C sont des points intérieurs.

Exercices.

1. Montrer que l'équation de Laplace dans l'espace admet $2n + 1$ solutions linéairement indépendantes qui sont des polynômes homogènes de degré n en x, y, z .

2. Ecrire l'équation de Laplace en coordonnées polaires et en coordonnées cylindriques.

3. Montrer que les fonctions harmoniques dans tout l'espace sont des constantes.

4. Calculer les potentiels logarithmiques de simple couche

$$\int_0^{2\pi} \cos n\psi \log \frac{1}{r} d\psi, \quad \int_0^{2\pi} \sin n\psi \log \frac{1}{r} d\psi$$

où r est la distance du point P au point du cercle de rayon un, d'argument ψ . (Goursat.)

5. Calculer les potentiels logarithmiques de double couche

$$\int_0^{2\pi} \cos n\psi \frac{\cos \varphi}{r} d\psi, \quad \int_0^{2\pi} \sin n\psi \frac{\cos \varphi}{r} d\psi. \quad (\text{Goursat})$$

6. Montrer comment le potentiel logarithmique découle du potentiel newtonien d'un cylindre de révolution indéfini, dont la densité a une valeur constante le long de chaque parallèle aux génératrices.

FONCTIONS SPHÉRIQUES.

7. Soit $Y_n(x, y, z)$ un polynôme harmonique homogène de degré n ; en posant

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \qquad y = r \sin \theta \sin \varphi \qquad z = r \cos \theta,$$

il prend la forme $r^n Y_n(\theta, \varphi)$. En utilisant l'équation de Laplace écrite en coordonnées polaires, montrer que Y_n vérifie l'équation

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0.$$

8. Démontrer en utilisant la formule de Green pour un volume limité par deux sphères concentriques que $Y_n(\theta, \varphi)$ et $Y_{n'}(\theta, \varphi)$ sont orthogonales sur la sphère de rayon un si $n \neq n'$:

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta, \varphi) Y_{n'}(\theta, \varphi) d\tau = 0.$$

Les fonctions Y_n s'appellent les fonctions sphériques d'ordre n , il y en a $2n + 1$ linéairement indépendantes.

9. Posons $\cos \theta = \mu$ dans l'expression de Y_n , montrer que Y_n devient un polynôme de degré n en

$$\mu, \qquad \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \qquad \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi,$$

qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial Y_n}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n = 0.$$

10. On considère les polynômes X_n de degré n qui vérifient l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial X_n}{\partial \mu} \right] + n(n+1) X_n = 0 ;$$

montrer qu'ils sont tous multiples de l'un d'eux, qui est le coefficient de μ^n dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\mu + \alpha^2}}$ suivant les puissances de α . Ces polynômes sont les *polynômes de Legendre*.

11. Montrer alors que la fonction $Y_n(\theta, \varphi)$ la plus générale est

$$A_n X_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^{m=n} (A_n^{(m)} \cos m\varphi + B_n^{(m)} \sin m\varphi) X_n^m(\cos \theta)$$

où

$$X_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n(\mu)}{d\mu^m},$$

les $A_n, A_n^{(m)}, B_n^{(m)}$ étant des constantes.

12. Chercher à résoudre le problème de Dirichlet pour la sphère de rayon un, en supposant que la donnée est développable en série de fonctions sphériques :

$$f(M) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi).$$

On essaie un développement $\sum V_n$ où V_n est un polynôme en x, y, z homogène de degré n et on passe aux coordonnées polaires.

13. Dans la formule de Poisson pour la sphère, dont on suppose le rayon égal à un, on considère $r^2 = 1 - 2l \cos \gamma + l^2$, où $\gamma = \widehat{OP, OM}$. Si l'on remarque que [cf. ex. 10]

$$\frac{1 - l^2}{r^3} = X_0 + 3X_1(\cos \gamma)l + \dots + (2n + 1)X_n(\cos \gamma)l^n + \dots$$

on pourra retrouver la solution développée en séries de fonctions sphériques et l'on verra que

$$\psi(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{4\pi} l^n \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} X_n(\cos \gamma) f(M) \sin \theta' d\varphi'$$

M ayant les coordonnées θ' et φ' sur la sphère. En déduire que

$$\iint_{\Sigma} P_n(\cos \gamma) Y_n(\theta', \varphi') d\sigma = \begin{cases} 0 & (\text{si } n \neq m) \\ \frac{4\pi}{2m + 1} Y_m(\theta, \varphi) & (\text{si } n = m) \end{cases}$$

(on a $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$). (cf. p. ex. Goursat III, p. 260-264.)

14. Montrer que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{k(z + ix \cos u + iy \sin u)} \cos mu \, du$$

est une fonction harmonique de x, y, z ; k étant constant et m entier.

15. On pose

$$x = \rho \cos \zeta \qquad y = \rho \sin \zeta$$

montrer que $e^{kz} \cos m\zeta J_m(k\rho)$ est une solution de l'équation de Laplace avec

$$J_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\lambda - \rho \sin \lambda) \, d\lambda.$$

La fonction $J_m(\rho)$ est la fonction de Bessel d'ordre m .

16. Montrer que

$$e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n$$

$J_n(x)$ étant la fonction de Bessel d'ordre n si n est positif. On a

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

17. Montrer que $J_n(x)$ vérifie l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0.$$

CHAPITRE IV

L'équation de Fredholm.

*Réduction du problème de Dirichlet à la résolution
d'une équation intégrale.*

82. On a vu que la solution du problème de Dirichlet serait obtenue si l'on pouvait éliminer la dérivée normale de la fonction à chercher de la formule fondamentale [ch. III, § 72 (2)]. Il existe cependant une voie plus facile à suivre dans laquelle Neumann s'est engagé et que Fredholm a rendue tout à fait praticable, grâce à une méthode d'une remarquable élégance.

Prenons le cas de l'espace. Proposons-nous de trouver une fonction $\psi(P)$, harmonique dans un domaine V limité par une surface Σ , et prenant sur Σ des valeurs données $F(M)$. Il y a deux points à vérifier si, par hasard, on a quelque raison de croire qu'une fonction construite par tel ou tel procédé est la solution de notre problème : 1° il faut voir qu'elle est bien harmonique, 2° il faut montrer que lorsque le point argument P tend vers un point M de Σ , la solution présumée tend vers la valeur $F(M)$.

L'idée de Neumann est alors de mettre en œuvre un procédé où l'on n'a à se préoccuper que de la seconde condition seulement, la première étant vérifiée d'emblée. Puisque $\psi(P)$ est harmonique, essayons de la représenter par un potentiel de double couche relatif à Σ , dont la densité $\mu(M)$ est à déterminer :

$$\psi(P) = \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\tau_M. \quad (1)$$

Il reste à écrire, pour que le problème de Dirichlet soit résolu, que

$$\lim_{P \rightarrow M} \psi(P) = F(M_o).$$

On utilise pour cela les équations (4) du chapitre I (§ 19) relatives aux

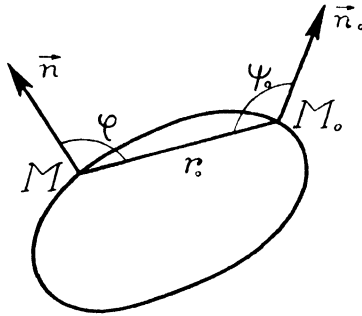


Fig. 11.

discontinuités des potentiels de double couche ; nous supposons tout d'abord que Σ n'a que des points réguliers.

Le potentiel de double couche que nous avons écrit vaut, si P est en M_o :

$$\mathfrak{V}_o = \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos \varphi}{r_o^2} d\sigma_M, \quad (r_o = MM_o),$$

mais si P tend vers M_o, le potentiel tend vers

$$\mathfrak{V}_o = 2\pi \mu(M_o) ;$$

il faut donc écrire que cette dernière quantité est égale à F(M_o). Donc :

$$\iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos \varphi}{r_o^2} d\sigma_M = 2\pi \mu(M_o) = F(M_o) ;$$

ou encore, la fonction $\mu(M)$, inconnue sur Σ, grâce à laquelle le problème de Dirichlet est résolu par la formule (1), doit satisfaire à l'équation intégrale :

$$\mu(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{2\pi r_o^2} \mu(M) d\sigma_M = - \frac{F(M_o)}{2\pi}. \quad (2)$$

Le but de ce chapitre est précisément d'établir les conditions qui assurent l'existence de la solution de cette équation.

Pour le problème plan, on utiliserait un potentiel logarithmique de double couche :

$$\psi(P) = \int_C \sigma(M) \frac{\cos \varphi}{r} ds_M$$

et l'on aurait à résoudre l'équation intégrale

$$\sigma(M_o) = \int_C \frac{\cos \varphi}{\pi r_o} \sigma(M) d\tau_M = - \frac{F(M_o)}{\pi} \quad (3)$$

pour trouver $\sigma(M)$, comme on s'en rend compte en recourant aux équations (9) du chapitre III, § 77.

83. Les deux équations intégrales que nous venons d'obtenir sont d'un type qu'on peut caractériser par les considérations suivantes. Soit un champ d'intégration R , M et M_o des points de ce champ. Donnons-nous une fonction réelle f définie en chaque point de R et une fonction réelle de 2 variables $K(M_o, M)$ définie pour chaque couple (M_o, M) de points de R . Considérons alors l'équation

$$\varphi(M_o) = \lambda \int_R K(M_o, M) \varphi(M) dv_M = f(M_o),$$

où $\varphi(M)$ est une fonction inconnue des points de R et λ un paramètre quelconque, dv_M est l'élément d'étendue de R . Une telle équation, *linéaire en φ* , est relative à un *domaine fixe*, elle est dite *équation intégrale à limites fixes* ou *équation de Fredholm* ; K en est le *noyau*.

Une méthode de résolution de cette équation consiste, lorsque λ est petit, à procéder par approximations successives. La solution se développe suivant les puissances successives de λ :

$$\varphi(M_o) = \varphi_o(M_o) + \lambda \varphi_1(M_o) + \lambda^2 \varphi_2(M_o) + \dots + \lambda^n \varphi_n(M_o) + \dots$$

où les fonctions $\varphi_i(M_o)$ se déterminent de proche en proche. Un tel développement n'est convergent que pour λ assez petit en général et la méthode en question n'est pas suffisamment puissante pour la solution des problèmes de la physique mathématique.

Fredholm en a imaginé une autre, dont le grand avantage permet d'obtenir des théorèmes d'existence presque immédiatement applicables aux problèmes qui nous occupent, et à un très grand nombre de problèmes encore. La découverte de Fredholm est une des plus importantes découvertes mathématiques du début de ce siècle.

Pour rendre les calculs plus simples et surtout l'écriture plus aisée, nous allons supposer que le domaine R est l'intervalle $(0,1)$ d'un axe, sur lequel l'abscisse sera désignée par x . On considérera l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

et l'on cherchera une solution $\varphi(x)$ entre 0 et 1. Il est préférable, pour simplifier encore, d'écrire l'équation de la manière suivante, comme Fredholm l'a fait lui-même :

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \tag{4}$$

en posant $F(x, y) = -\lambda K(x, y)$. Le paramètre λ est très utile à considérer, mais la forme (4) est particulièrement simple pour les calculs. Si l'intervalle est quelconque (a, b) , un changement linéaire de variables le ramène à $(0, 1)$.

Théorème de M. Hadamard.

84. La solution de Fredholm se fonde sur un théorème de M. Hadamard relatif au maximum du module d'un déterminant.

Proposons-nous de calculer le maximum du module du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & \dots, & l_1 \\ a_2, & b_2, & \dots, & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n, & b_n, & \dots, & l_n \end{vmatrix},$$

sachant que

$$a_i^2 + b_i^2 + \dots + l_i^2 = H_i. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Cela revient à calculer le maximum de la fonction Δ de n^2 variables liées par les relations précédentes.

Développons Δ suivant les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\Delta = A_i a_i + B_i b_i + \dots + L_i l_i;$$

les grandes lettres représentent les mineurs correspondant aux petites lettres.

La méthode des multiplicateurs consiste à trouver les valeurs des variables a_1, \dots, l_n pour lesquelles les dérivées partielles de

$$U = \Delta + \lambda_1 (a_1^2 + b_1^2 + \dots + l_1^2 - H_1) + \dots + \lambda_n (a_n^2 + b_n^2 + \dots + l_n^2 - H_n)$$

sont nulles, les λ étant des indéterminées.

Ecrivons que $\frac{\partial U}{\partial a_i} = \frac{\partial U}{\partial b_i} = \dots = \frac{\partial U}{\partial l_i} = 0$; il vient :

$$A_i + 2\lambda_i a_i = 0, \quad B_i + 2\lambda_i b_i = 0, \quad \dots, \quad L_i + 2\lambda_i l_i = 0 ;$$

soit :

$$\frac{a_i}{A_i} = \frac{b_i}{B_i} = \dots = \frac{l_i}{L_i} .$$

Or, si on remarque que

$$A_i a_k + B_i b_k + \dots + L_i l_k = 0, \quad (i \neq k)$$

on voit que Δ est maximum si

$$a_i a_k + b_i b_k + \dots + l_i l_k = 0,$$

c'est-à-dire s'il est un déterminant *orthogonal*.

Dans ce cas, il est facile de calculer sa valeur. On forme son carré en faisant le produit par lignes ; ce carré est un déterminant dont tous les termes sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont les sommes des carrés des éléments de la ligne correspondante de Δ , c'est-à-dire les H_i précisément. Donc si Δ est orthogonal, il vaut $\sqrt{H_1 H_2 \dots H_n}$.

Dès lors

$$|\Delta| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \dots + l_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + \dots + l_2^2} \dots \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \dots + l_n^2}.$$

Supposons maintenant que l'on sache seulement que les éléments de Δ sont inférieurs en module à un nombre M , alors

$$|\Delta| \leq \sqrt{n^n} M^n.$$

On a donc le théorème suivant qui est précisément le théorème de M. Hadamard :

Si les éléments d'un déterminant d'ordre n sont en module inférieurs à un nombre M , ce déterminant lui-même est inférieur en module à $\sqrt{n^n} M^n$.

qui est convergente quel que soit λ , et qui est donc une fonction entière de λ .

86. On forme encore les séries, dites les *mineurs* de D , ou de $D(\lambda)$. Elles représentent des fonctions d'un nombre pair de variables. Soit :

$$D\left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \end{matrix}\right) = F\left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \end{matrix}\right) + \int_0^1 F\left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, x \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, x \end{matrix}\right) dx + \\ + \dots + \frac{1}{\nu!} \int_0^1 \dots \int_0^1 F\left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, x_2, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, x_1, x_2, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_\nu + \dots$$

C'est encore une série convergente, car si on néglige son premier terme, elle est majorée par la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sqrt{(n+\nu)^{n+\nu}}}{\nu!} M^{n+\nu}$$

qui est manifestement convergente (rapport de d'Alembert tendant vers zéro).

En remplaçant $F(x, y)$ par $-\lambda K(x, y)$, cette égalité, après division par $(-\lambda)^n$, définit une fonction :

$$D\left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \\ = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-\lambda)^\nu}{\nu!} \int_0^1 \dots \int_0^1 K\left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_\nu$$

pour toutes les valeurs de λ ; c'est le mineur d'ordre n de $D(\lambda)$.

On voit donc que $D(\lambda)$ et ses mineurs sont des fonctions entières [Appendice, § 32] de la variable complexe λ .

Relations entre les mineurs.

87. Développons $F\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right)$ suivant les éléments de la première ligne, il vient :

$$\begin{aligned}
 F\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) &= F\left(\begin{matrix} \xi_1, \gamma_1 \\ \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_2, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) - \\
 &- F\left(\begin{matrix} \xi_1, \gamma_2 \\ \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) + \dots \\
 &- (-1)^n F\left(\begin{matrix} \xi_1, \gamma_n \\ \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) + \quad (5) \\
 &+ (-1)^n F\left(\begin{matrix} \xi_1, x_1 \\ \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, x_2, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n, x_2, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) - \dots \\
 &- (-1)^{n+\nu} F\left(\begin{matrix} \xi_1, x_\nu \\ \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n, \dots, x_{\nu-1} \end{matrix}\right).
 \end{aligned}$$

On multiplie les deux membres par $dx_1 dx_2 \dots dx_\nu$ et on intègre entre 0 et 1 ; on trouve la formule :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \dots \int_0^1 F\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_\nu = \\
 &= F\left(\begin{matrix} \xi_1, \gamma_1 \\ \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_\nu - \\
 &- F\left(\begin{matrix} \xi_1, \gamma_2 \\ \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_\nu \\ \gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_\nu \end{matrix}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_\nu + \dots \\
 &- \nu \int_0^1 \dots \int_0^1 F\left(\begin{matrix} \xi_1, \tau \\ \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_{\nu-1} \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, x_1, \dots, x_{\nu-1} \end{matrix}\right) d\tau dx_1 \dots dx_{\nu-1},
 \end{aligned}$$

car les ν derniers termes de (5) donnent des intégrales égales puisqu'on sait que dans le calcul des intégrales définies, les noms des variables indépendantes n'interviennent pas dans les résultats.

Multiplions les deux membres par $\frac{1}{\nu!}$ et sommions par rapport à ν de 0 à l'infini ¹, on trouve alors, en passant dans le premier membre le

¹ On pose $0! = 1$.

résultat de la somme des derniers termes du second membre, la relation très importante :

$$\begin{aligned}
 & D\left(\xi_1, \dots, \xi_n\right) + \int_0^1 F\left(\xi_1, \tau\right) D\left(\tau, \xi_2, \dots, \xi_n\right) d\tau = \\
 & = F\left(\xi_1, \gamma_1\right) D\left(\xi_2, \dots, \xi_n\right) - F\left(\xi_1, \gamma_2\right) D\left(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\right) + \dots \quad (6) \\
 & \quad - \left(-1\right)^n F\left(\xi_1, \gamma_n\right) D\left(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\right).
 \end{aligned}$$

On aurait trouvé aussi :

$$\begin{aligned}
 & D\left(\xi_1, \dots, \xi_n\right) + \int_0^1 F\left(\tau, \gamma_1\right) D\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right) d\tau = \\
 & = F\left(\xi_1, \gamma_1\right) D\left(\xi_2, \dots, \xi_n\right) - F\left(\xi_2, \gamma_1\right) D\left(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_n\right) + \dots \quad (7) \\
 & \quad - \left(-1\right)^n F\left(\xi_n, \gamma_1\right) D\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\right),
 \end{aligned}$$

si l'on avait développé d'abord suivant les éléments de la première colonne.

88. En remplaçant $F(x, y)$ par $-\lambda K(x, y)$, on trouve les deux relations :

$$\begin{aligned}
 & D\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) - \lambda \int_0^1 K\left(\xi_1, \tau\right) D\left(\tau, \xi_2, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) d\tau = \\
 & = K\left(\xi_1, \gamma_1\right) D\left(\xi_2, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) - K\left(\xi_1, \gamma_2\right) D\left(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) + \dots \quad (8) \\
 & \quad - \left(-1\right)^n K\left(\xi_1, \gamma_n\right) D\left(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n \mid \lambda\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) - \lambda \int_0^1 K\left(\tau, \gamma_1\right) D\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) d\tau = \\
 & = K\left(\xi_1, \gamma_1\right) D\left(\xi_2, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) - K\left(\xi_2, \gamma_1\right) D\left(\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_n \mid \lambda\right) + \dots \quad (9) \\
 & \quad - \left(-1\right)^n K\left(\xi_n, \gamma_1\right) D\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1} \mid \lambda\right).
 \end{aligned}$$

Si $n = 1$, on a :

$$D\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) + \int_0^1 F(\xi, \tau) D\left(\begin{matrix} \tau \\ \eta \end{matrix}\right) d\tau = F(\xi, \eta) D. \quad (10)$$

$$D\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right) + \int_0^1 F(\tau, \eta) D\left(\begin{matrix} \xi \\ \tau \end{matrix}\right) d\tau = F(\xi, \eta) D; \quad (11)$$

et :

$$D\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \lambda \int_0^1 K(\xi, \tau) D\left(\begin{matrix} \tau \\ \eta \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\tau = K(\xi, \eta) D(\lambda), \quad (12)$$

$$D\left(\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \lambda \int_0^1 K(\tau, \eta) D\left(\begin{matrix} \xi \\ \tau \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\tau = K(\xi, \eta) D(\lambda). \quad (13)$$

89. La définition du mineur d'ordre n de $D(\lambda)$ permet d'écrire après avoir fait $\eta_i = \xi_i$ et intégré de 0 à 1 :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 D\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \\ & = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^\nu}{\nu!} \int_0^1 \dots \int_0^1 K\left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+\nu} \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+\nu} \end{matrix}\right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n+\nu} = (-1)^n \frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n} = (-1)^n \int_0^1 \dots \int_0^1 D\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

On voit par là que si λ est une valeur qui annule $D(\lambda)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m - 1$, c'est-à-dire si λ est racine de $D(\lambda)$ d'ordre m de multiplicité, les mineurs de $D(\lambda)$ ne peuvent être identiquement nuls pour cette valeur λ , quelles que soient les valeurs des $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ jusqu'à l'ordre m , sinon $\frac{d^m D(\lambda)}{d\lambda^m}$ serait nulle pour cette même valeur de λ ce qui est impossible d'après l'hypothèse.

Solution de l'équation intégrale; théorèmes de Fredholm.

90. Soit l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (14)$$

$\varphi(x)$ étant donc inconnue, et $f(x)$ étant une fonction donnée finie et intégrable.

Considérons cette équation comme faisant correspondre par une transformation T_F à la fonction $\varphi(x)$ la fonction $f(x)$:

$$T_F \varphi(x) = f(x).$$

Résoudre (14), c'est trouver la transformation inverse de T_F .

Soit une autre équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 G(x, y) \varphi(y) dy = g(x),$$

elle fait correspondre à φ , par la transformation T_G , la fonction $g(x)$:

$$T_G \varphi(x) = g(x).$$

Formons

$$T_G f(x) = T_G T_F \varphi(x);$$

on aura :

$$\begin{aligned} T_G T_F \varphi(x) &= T_F \varphi(x) + \int_0^1 G(x, t) T_F \varphi(t) dt = \varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy + \\ &+ \int_0^1 G(x, t) \varphi(t) dt + \int_0^1 dt \int_0^1 G(x, t) F(t, y) \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi(x) + \int_0^1 H(x, y) \varphi(y) dy = T_H \varphi(x),$$

avec

$$H(x, y) = F(x, y) + G(x, y) + \int_0^1 G(x, t) F(t, y) dt,$$

et l'on voit que le « produit » des deux transformations $T_G T_F \varphi(x)$ est une transformation du même type $T_H \varphi(x)$ construite avec une fonction H bien définie.

Formons D et $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ au moyen de $F(x, y)$ et posons (si $D \neq 0$)

$$G(x, y) = -\frac{D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{D}.$$

Que vaut H ?

$$H(x, y) = F(x, y) - \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{D} - \frac{1}{D} \int_0^1 D\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right) F(t, y) dt = 0,$$

d'après (11). Donc

$$T_G T_F \varphi(x) = \varphi(x).$$

La fonction $\varphi(x)$ est donnée par la formule

$$\varphi(x) = T_G f(x)$$

puisque $T_F \varphi(x) = f(x)$, c'est-à-dire que l'inversion de la transformation T_F ou la résolution de l'équation intégrale proposée est donnée par la relation

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^1 \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{D} f(y) dy$$

si $D \neq 0$.

Pour être sûr que l'inversion de T_F a été parfaitement réalisée, il faut montrer que (14) n'a pas d'autre solution que celle qu'on vient d'obtenir. Or la différence de deux solutions, s'il y en avait deux, satisfait à l'équation *homogène* :

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = 0; \quad (15)$$

multiplions ses deux membres par $G(t, x) dx$ et intégrons de 0 à 1 :

$$\int_0^1 G(t, x) \varphi(x) dx + \int_0^1 \int_0^1 G(t, x) F(x, y) \varphi(y) dx dy = 0;$$

or si

$$G(t, x) = -\frac{D\left(\begin{smallmatrix} t \\ x \end{smallmatrix}\right)}{D},$$

on pourra écrire :

$$\int_0^1 \left[-\frac{D\left(\begin{smallmatrix} t \\ x \end{smallmatrix}\right)}{D} - \int_0^1 \frac{D\left(\begin{smallmatrix} t \\ u \end{smallmatrix}\right)}{D} F(u, x) du \right] \varphi(x) dx = 0$$

mais le crochet est $-F(t, x)$, donc :

$$\int_0^1 F(t, x) \varphi(x) dx = 0$$

et par suite de (15), $\varphi = 0$. Il n'y a donc qu'une solution, et l'on peut formuler le *premier théorème de Fredholm* :

Si le déterminant D d'une équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

est différent de zéro, cette équation a une solution et une seule donnée par la formule :

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^1 \frac{D(x, y)}{D} f(y) dy.$$

Si on remplace F par $-\lambda K$, on a l'équation¹

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (16)$$

et si $D(\lambda) \neq 0$, la solution est unique et s'écrit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x, y; \lambda) f(y) dy \quad (17)$$

avec

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)}. \quad (18)$$

La fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ s'appelle la résolvante de Fredholm pour l'équation (16) ; elle est le quotient de deux fonctions entières en λ , ses points singuliers sont les zéros de $D(\lambda)$, ce sont des pôles de Γ qui est ainsi une fonction méromorphe.

91. Supposons que $D = 0$. On sait alors (§ 89, *in fine*), qu'il existe un mineur non-nul identiquement, soit

$$D\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \dots, \eta_n \end{matrix}\right)$$

ce mineur. Puisque les mineurs d'ordre inférieur sont nuls, la formule (6) s'écrit :

$$D\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \dots, \eta_n \end{matrix}\right) + \int_0^1 F(\xi_1, \tau) D\left(\begin{matrix} \tau, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \end{matrix}\right) d\tau = 0 \quad (19)$$

c'est-à-dire que

$$\varphi(x) = D\left(\begin{matrix} x, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \end{matrix}\right)$$

est une solution de l'équation homogène

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = 0.$$

Il semble que, les variables $\xi_2, \dots, \xi_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ pouvant prendre toutes les valeurs qui n'annulent pas $D\left(\begin{smallmatrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n \end{smallmatrix}\right)$, l'on ait ainsi peut-être ∞^{2n-1} solutions, et rien ne prouve de plus qu'on les ait toutes.

Pour préciser, soit φ une solution de

$$T_F \varphi(x) = 0$$

et posons

$$G(x, y) = - \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x, \xi_1, \dots, \xi_n \\ y, \gamma_1, \dots, \gamma_n \end{smallmatrix}\right)}{D\left(\begin{smallmatrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n \end{smallmatrix}\right)};$$

en choisissant les ξ et les γ de manière que le dénominateur ne soit pas nul. On aura

$$T_G T_F \varphi(x) = T_H \varphi(x) = 0,$$

avec

$$H_i(x, y) = G(x, y) + \int_0^1 G(x, z) F(z, y) dz.$$

Or, d'après (7), avec $n + 1$ au lieu de n , on aura, en remarquant que $F(x, y)$ disparaît,

$$H(x, y) = \frac{1}{D\left(\begin{smallmatrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \dots, \gamma_n \end{smallmatrix}\right)} \left[F(\xi_1, y) D\left(\begin{smallmatrix} x, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \end{smallmatrix}\right) - F(\xi_2, y) D\left(\begin{smallmatrix} \xi_1, x, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \end{smallmatrix}\right) - \dots \right. \\ \left. - (-1)^n F(\xi_n, y) D\left(\begin{smallmatrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n \end{smallmatrix}\right) \right]$$

ou d'une façon abrégée :

$$H(x, y) = - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F(\xi_\nu, y) \Phi_\nu(x).$$

Or $\varphi(x)$ satisfait à l'équation $T_H \varphi(x) = 0$, c'est-à-dire qu'on a :

$$\varphi(x) = - \int_0^1 H(x, y) \varphi(y) dy = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Phi_\nu(x) \int_0^1 F(\xi_\nu, y) \varphi(y) dy = \sum A_\nu \Phi_\nu(x).$$

On voit de même que $\Sigma A_\nu \Phi_\nu(x)$ vérifie l'équation $T_F \varphi(x) = 0$ quels que soient les coefficients A_ν .

Enfin les $\Phi_\nu(x)$ sont linéairement indépendantes ; en effet

$$\int_0^1 F(\xi_\lambda, x) \Phi_\mu(x) dx = (-1)^\mu \int_0^1 \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_{\mu-1}, x, \xi_{\mu+1}, \dots, \xi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)} F(\xi_\lambda, x) dx$$

ce qui vaut 1, si $\lambda = \mu$, d'après (19) ; et 0, si $\lambda \neq \mu$, car en développant le déterminant $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ suivant les éléments d'une ligne et les mineurs d'une autre ligne, on obtiendrait par un calcul semblable à celui qui a donné la formule (6), une formule qui dégénérerait justement en

$$\int_0^1 F(\xi_\lambda, x) \Phi_\mu(x) dx = 0 \quad (\text{si } \lambda \neq \mu).$$

Dès lors, si l'on avait

$$a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + \dots + a_n \Phi_n = 0,$$

on en tirerait :

$$\int_0^1 \Sigma a_\nu F_\nu(\xi_\nu, x) \cdot \Sigma a_\nu \Phi_\nu(x) dx = \Sigma a_\nu^2 = 0 ;$$

les a_ν sont donc nuls car les Φ_ν sont réelles ; les Φ_ν sont donc linéairement indépendantes.

On peut énoncer le *deuxième théorème de Fredholm*.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution non nulle de l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = 0, \tag{15}$$

est que $D = 0$. Si n est l'ordre du premier mineur de D qui soit différent de zéro, l'équation homogène aura précisément n solutions linéairement indépendantes.

Ou encore :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution non nulle de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \tag{15'}$$

est que $D(\lambda) = 0$. Si n est l'ordre du premier mineur $D\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \dots, \eta_n \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ qui ne soit pas identiquement nul, l'équation (15') aura précisément n solutions linéairement indépendantes.

Les valeurs de λ qui annulent $D(\lambda)$ s'appellent les *valeurs propres*, ou *fondamentales*, ou *caractéristiques* du noyau K pour l'intervalle $(0, 1)$. Les fonctions Φ_i solutions de (19) sont les *fonctions propres*, *fondamentales* ou *caractéristiques*, relatives à la valeur propre λ considérée.

92. Le troisième théorème de Fredholm est relatif à la résolution de l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (14)$$

lorsque $D = 0$, le premier mineur non-nul étant d'ordre n .

Remarquons d'abord que la fonction

$$\alpha(x) = D\left(\begin{matrix} x, a_2, a_3, \dots, a_n \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \end{matrix}\right)$$

satisfait à l'équation

$$T_F \alpha(x) = 0,$$

ou

$$\alpha(x) + \int_0^1 F(x, y) \alpha(y) dy = 0 \quad (20)$$

donc $\alpha(x)$ est une combinaison linéaire des $\Phi_\nu(x)$.

D'autre part, nous l'avons vu, $\alpha(x)$ vérifie aussi l'équation

$$T_H \alpha(x) = 0;$$

ce qui s'écrit

$$\alpha(x) = - \int_0^1 H(x, y) \alpha(y) dy;$$

or

$$H(x, y) = - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F(\xi_\nu, y) \Phi_\nu(x),$$

donc

$$\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \int_0^1 F(\xi_\nu, y) \Phi_\nu(x) \alpha(y) dy = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Phi_\nu(x) \int_0^1 F(\xi_\nu, y) \alpha(y) dy;$$

mais

$$\alpha(\xi_\nu) = - \int_0^1 F(\xi_\nu, y) \alpha(y) dy$$

donc

$$\alpha(x) = - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha(\xi_\nu) \Phi_\nu(x).$$

Au lieu de développer suivant les éléments de la première ligne, utilisons la formule (7) obtenue en développant suivant les éléments de la première colonne ; on trouve que la fonction

$$\beta(x) = D \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ x, b_2, \dots, b_n \end{matrix} \right)$$

vérifie l'équation

$$\beta(x) + \int_0^1 F_1(y, x) \beta(y) dy = 0$$

qu'on appelle l'équation *associée* de (20), et l'on voit que

$$\beta(x) = - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \beta(\gamma_\nu) \Psi_\nu(x) \tag{21}$$

avec

$$\Psi_\nu(x) = (-1)^\nu \frac{D \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\nu-1}, x, \gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_n \end{matrix} \right)}{D \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \end{matrix} \right)},$$

ces n fonctions étant linéairement indépendantes ; ce qui montre que le deuxième théorème de Fredholm est valable dans les mêmes termes pour l'équation associée.

Reprenons l'équation (15), multiplions ses deux membres par $D \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ x, b_2, \dots, b_n \end{matrix} \right) dx$ et intégrons de 0 à 1 ; on trouve en changeant le nom d'une des variables d'intégration :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(y) D \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ y, b_2, \dots, b_n \end{matrix} \right) dy + \int_0^1 \int_0^1 \varphi(y) F(x, y) D \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ x, b_2, \dots, b_n \end{matrix} \right) dx dy = \\ = \int_0^1 f(x) D \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ x, b_2, \dots, b_n \end{matrix} \right) dx. \end{aligned} \tag{22}$$

Mais

$$\int_0^1 F(x, y) D \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ x, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix} dx = - D \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ y, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix}$$

en vertu de la relation (7) et parce que les mineurs d'ordre $n-1$ sont nuls ; donc le premier membre de (22) est nul et l'on voit que

$$\int_0^1 f(x) D \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ x, b_2, \dots, b_n \end{pmatrix} dx = 0,$$

soit, d'après (21) et d'après la définition de $\beta(x)$:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \beta(\gamma_\nu) \int_0^1 f(x) \Psi_\nu(x) dx = 0$$

et comme les nombres γ_ν sont quelconques dans l'intervalle $(0, 1)$

$$\int_0^1 f(x) \Psi_\nu(x) dx = 0. \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad (23)$$

On voit donc que $f(x)$ ne peut être arbitraire ; pour que (15) ait une solution si $D = 0$, il faut que $f(x)$ vérifie les équations (23). Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Considérons, en effet, l'équation (15) qui s'écrit $T_F \varphi(x) = f(x)$ et appliquons-lui la transformation T_G ; on trouve

$$T_G T_F \varphi(x) = T_H \varphi(x) = T_G f(x) ;$$

or

$$T_H \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu \Phi_\nu(x) ;$$

donc

$$\varphi(x) = T_G f(x) + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu \Phi_\nu(x). \quad (24)$$

Vérifions que cette fonction satisfait à (15) ; comme $T_F \Phi_\nu(x) = 0$, on n'aura qu'à voir si

$$T_F T_G f(x) = f(x).$$

Or

$$T_F T_G f(x) = T_E f(x).$$

avec

$$E(x, y) = F(x, y) + G(x, y) + \int_0^1 F(x, t) G(t, y) dt,$$

ce qui peut s'écrire grâce aux relations des mineurs :

$$E(x, y) = - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F(x, r_\nu) \Psi_\nu(y),$$

d'où

$$\int_0^1 E(x, y) f(y) dy = 0,$$

puisque $f(x)$ satisfait aux équations (23) par hypothèse. Dès lors

$$T_E f(x) = f(x) \quad \text{ou} \quad T_F \varphi(x) = f(x).$$

Donc les conditions (23) sont nécessaires et suffisantes et la solution la plus générale de (15) est donnée par (24). On a donc le *troisième théorème* de Fredholm :

Pour que l'équation (15) ait une solution, lorsque $D = 0$, il faut et il suffit que $f(x)$ vérifie les n conditions

$$\int_0^1 f(x) \Psi_\nu(x) dx = 0,$$

où les $\Psi_\nu(x)$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée ; la solution la plus générale de (15) est alors :

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^1 \frac{D \begin{pmatrix} x, \xi_1, \dots, \xi_n \\ y, r_1, \dots, r_n \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \\ r_1, r_2, \dots, r_n \end{pmatrix}} f(y) dy + \sum A_\nu \Phi_\nu(x)$$

où les A_ν sont des constantes arbitraires, et les $\Phi_\nu(x)$, n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène obtenue en faisant $f \equiv 0$ dans (15).

Si l'on dit que les deux fonctions $\mu(x)$ et $\rho(x)$ réelles, continues et intégrables dans l'intervalle $(0, 1)$ sont *orthogonales* dans cet intervalle quand

$$\int_0^1 \mu(x) \rho(x) dx = 0,$$

la condition énoncée dans le troisième théorème de Fredholm revient à dire que $f(x)$ doit être orthogonale aux n solutions $\Psi_i(x)$ dans $(0, 1)$.

Si l'on considère l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

avec $D(\lambda) = 0$, le théorème s'énonce de la même manière ; la solution générale dépend de n constantes arbitraires si $f(x)$ vérifie les conditions

$$\int_0^1 f(x) \Psi_\nu(x) dx = 0,$$

les $\Psi_\nu(x)$ étant n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(y, x) \varphi(y) dy = 0.$$

93. On voit aisément comment toute la théorie de Fredholm se transporte à l'équation :

$$\varphi(M_0) - \lambda \int_R K(M_0, M) \varphi(M) d\nu_M = f(M_0).$$

On rapporte R à des coordonnées x_1, x_2, \dots, x_k ; par exemple, si R est une surface, on prend des coordonnées u, ν ; l'élément $d\nu_M$ est alors

$$d\tau = \sqrt{EG - F^2} du d\nu$$

et l'équation précédente s'écrira :

$$\Phi(u_0, \nu_0) - \lambda \iint_{(D)} \Xi(u_0, \nu_0 ; u, \nu) \Phi(u, \nu) du d\nu = F(u_0, \nu_0)$$

où (D) est un domaine du plan des (u, ν) qui est supposé *borné*. On devra considérer des déterminants dont nous écrirons le plus simple :

$$\begin{vmatrix} \Xi(u_1, \nu_1 ; u_1, \nu_1), & \Xi(u_1, \nu_1 ; u_2, \nu_2) \\ \Xi(u_2, \nu_2 ; u_1, \nu_1), & \Xi(u_2, \nu_2 ; u_2, \nu_2) \end{vmatrix}$$

et des intégrales $2n$ -uples. On forme la série D ou $D(\lambda)$ et toutes les circonstances de la solution dans le cas d'une variable s'appliquent ici ; nous n'y insisterons pas davantage.

Noyaux discontinus et noyaux non-bornés.

94. On voit qu'à l'hypothèse

$$|F| < M,$$

nous avons implicitement ajouté des conditions d'intégrabilité pour les

déterminants $F(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$. Elles sont naturellement satisfaites si $F(x, y)$ est continue ; mais $F(x, y)$ peut avoir des discontinuités d'un certain type sans que les déterminants en question cessent d'être intégrables. $F(x, y)$, tout en restant bornée, peut avoir dans le plan (x, y) des points de discontinuité de première espèce, isolés (donc en nombre fini), ou répartis sur des lignes en nombre fini, $y = \text{const.}$, ou $x = \text{const.}$, ou $y = f(x)$, mais dans ce dernier cas, la ligne $y = f(x)$ ne doit être coupée qu'en un nombre fini de points par une parallèle aux axes.

95. Il y a de plus des cas où, bien que $F(x, y)$ ne soit pas bornée, l'équation de Fredholm est résoluble par une méthode à peine différente de la précédente. Supposons que

$$F(x, y) = (x - y)^{-\alpha} I(x, y),$$

α étant un nombre positif, inférieur à l'unité, et $I(x, y)$ une fonction bornée de x, y pour $0 \leq x \leq y \leq 1$. On dit que $F(x, y)$ appartient à l'exposant α .

Calculons les fonctions :

$$F_2(x, y) = \int_0^1 F(x, t) F(t, y) dt,$$

$$F_3(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 F(x, t) F(t, s) F(s, y) dt ds,$$

.....

$$F_\nu(x, y) = \int_0^1 \dots \int_0^1 F(x, t_1) F(t_1, t_2) \dots F(t_{\nu-1}, y) dt_1 dt_2 \dots dt_{\nu-1};$$

.....

elles existent, mais ne sont pas bornées en général ; les intégrations sont en effet possible, car l'exposant α est inférieur à 1. A quels exposants appartiennent les F_ν ? Remarquons tout d'abord que

$$\int_0^1 \frac{dt}{|x - t|^\alpha |t - y|^\beta} < \frac{\Psi(\alpha, \beta)}{|x - y|^{\alpha + \beta - 1}},$$

où $\Psi(\alpha, \beta)$ est une fonction finie pour autant que

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad \alpha + \beta < 1,$$

car si

$$t = x + (y - x) s,$$

l'intégrale devient, avec la nouvelle variable :

$$\int_A^B \frac{(y-x) ds}{|x-y|^{\alpha+\beta} s^\alpha |1-s|^\beta} \quad \text{qui est inférieure en valeur absolue à}$$

$$\frac{1}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}} \int_{-x}^{+\infty} \frac{ds}{s^\alpha |1-s|^\beta}$$

et cette dernière intégrale a un sens si $\alpha + \beta < 1$. La fonction F_2 appartient donc au plus à l'exposant $\alpha + \alpha - 1 = 2\alpha - 1$, F_3 à $3\alpha - 2, \dots$

$$F_\nu \text{ à } \nu\alpha - \nu + 1,$$

c'est-à-dire que

$$F_\nu(x, y) = (x-y)^{\nu\alpha - \nu + 1} H_\nu(x, y)$$

avec $H_\nu(x, y)$ bornée.

Cherchons le nombre entier n pour lequel

$$0 < (n-1)\alpha - (n-1) + 1 < 1$$

et

$$n\alpha - n + 1 < 0.$$

$F_{n-1}(x, y)$ n'est pas bornée en général, mais $F_n(x, y)$ l'est.

96. Soit maintenant la fonction :

$$G(x, y) = -F(x, y) + F_2(x, y) - F_3(x, y) + \dots + (-1)^{n-1} F_{n-1}(x, y);$$

effectuons la transformation

$$S_G S_F = S_H.$$

On trouve d'abord que

$$S_G S_F = S_F S_G$$

et l'on voit que

$$H(x, y) = (-1)^{n-1} F_n(x, y).$$

Si $F = -\lambda K$, on aura

$$G(x, y) = \lambda K + \lambda^2 K_2 + \lambda^3 K_3 + \dots + \lambda^{n-1} K_{n-1},$$

et

$$H(x, y) = \lambda^n K_n(x, y).$$

On sait alors résoudre l'équation

$$S_H \varphi = g,$$

et nous allons voir quelle aide on peut obtenir de cette solution pour résoudre l'équation

$$S_F \varphi = f.$$

On tire de cette dernière équation

$$S_G S_F \varphi = S_H \varphi = S_G f.$$

Remarquons que si $f(x)$ est continue et bornée, $S_G f$ est bornée ; elle est même continue si $I(x, y)$ l'est.

$$\int_0^1 F_\nu(x, s) f(s) ds$$

existe puisque $\nu x - \nu + 1 < 1$, pour $\nu \leq n - 1$.

Soit donc

$$S_G f = g(x).$$

On sait résoudre l'équation

$$S_H \varphi = g(x),$$

si D relatif à H est différent de zéro. S_H a donc dans ce cas une inverse ; on sait la former avec la résolvante. Soit S_H^{-1} cette inverse, on aura

$$S_H^{-1} S_H \varphi(x) = \varphi(x) = S_H^{-1} g(x) \tag{25}$$

c'est la seule solution, car de $S_H \varphi = g$, soit

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -(-1)^{n-1} \int_0^1 F_n(x, y) \varphi(y) dy + f(x) - \int_0^1 F(x, y) f(y) dy + \\ & + \int_0^1 F_2(x, y) f(y) dy - \dots + (-1)^{n-1} \int_0^1 F_{n-1}(x, y) f(y) dy, \end{aligned}$$

on tire

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy - f(x) = \\ = (-1)^n \int_0^1 F_n(x, y) [\varphi(y) - f(y)] dy + (-1)^n \int_0^1 F_{n+1}(x, y) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

car

$$\int_0^1 F_\nu(x, y) \varphi(y) dy = - \int_0^1 F_{\nu+1}(x, y) \varphi(y) dy + \int_0^1 F_\nu(x, y) f(y) dy.$$

Si, dès lors, on pose

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

on voit que

$$\Phi(x) = (-1)^n \int_0^1 F_n(x, y) \Phi(y) dy ;$$

si D formé avec H est différent de zéro, $\Phi \equiv 0$, et par conséquent la fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à $S_H \varphi = g$, vérifie l'équation :

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x).$$

La solution (25) est donc la seule, et on l'obtient par la méthode de Fredholm appliquée au noyau borné $H(x, y)$.

97. Si D relatif à H est nul, l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 H(x, y) \varphi(y) dy = 0 \tag{26}$$

aura n solutions non-nulles. Qu'en est-il de l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = 0 ? \tag{27}$$

Il est manifeste tout d'abord que toute solution de (27) est solution de (26). De plus, si les $\Phi_i(x)$ sont des solutions de (26), les fonctions

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) = & \Phi_i(x) - \int_0^1 F(x, y) \Phi_i(y) dy + \int_0^1 F_2(x, y) \Phi_i(y) dy - \dots \\ & \dots + (-1)^{n-1} \int_0^1 F_{n-1}(x, y) \Phi_i(y) dy \end{aligned} \tag{28}$$

satisfont à l'équation (27). Si elles ne sont pas identiquement nulles, le deuxième théorème de Fredholm est encore vrai, mais on n'a pas démontré que *toutes* les solutions de (27) sont ainsi obtenues.

Il y a un cas important pour les applications que nous ferons où il est

possible d'obtenir toutes les solutions de (27) avec les solutions de (26) ¹. Désignons par α une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, qui soit primitive, c'est-à-dire telle que la puissance α^k ne soit égale à 1 pour aucune valeur de k inférieure à n . Soit $\Phi_i(x)$ une solution de (26), la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_{i,\nu}(x) = & \Phi_i(x) - \alpha^\nu \int_0^1 F(x, y) \Phi_i(y) dy + \alpha^{2\nu} \int_0^1 F_2(x, y) \Phi_i(y) dy + \dots \\ & + (-1)^{n-1} \alpha^{(n-1)\nu} \int_0^1 F_{n-1}(x, y) \Phi_i(y) dy \end{aligned}$$

où ν est un entier quelconque inférieur à n , est une solution de l'équation

$$\chi(x) + \alpha^\nu \int_0^1 F(x, y) \chi(y) dy = 0 \quad (29)$$

comme on le voit immédiatement. Les $n - 1$ fonctions $\varphi_{i,\nu}(x)$ et la fonction $\varphi_i(x)$ (28) qu'on peut écrire $\varphi_{i,0}(x)$ ne sont pas toutes nulles identiquement car leur somme est $n \Phi_i(x)$; on sait en effet que la somme de puissances

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \alpha^{k \cdot \nu} = \alpha^{k \cdot 0} + \alpha^{k \cdot 1} + \alpha^{k \cdot 2} + \dots + \alpha^{k(n-1)} = 0$$

pour $0 < k < n$, alors que pour $k = 0$, cette somme est n .

Il y a donc parmi les $\varphi_{i,\nu}(x)$ une fonction au moins qui n'est pas identiquement nulle et, par conséquent, chaque solution de (26) donne *au moins* une solution d'une équation (29).

Si l'on est assuré, par une méthode particulière, qu'aucune des équations (29) où $\nu = 1, 2, \dots, n - 1$ n'admet de solution non-nulle, alors $\varphi_{i,0}(x) = n \Phi_i(x)$ et les équations (26) et (27) admettent les *mêmes solutions*. La conclusion est la même pour les équations associées, car les équations associées aux équations (29) n'ont que des solutions nulles si celles-ci n'ont que des solutions nulles.

98. Le troisième théorème est relatif à l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (30)$$

¹ Cf. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 399 (note 1).

lorsque le déterminant D relatif à H est nul. On est ramené à la résolution de l'équation :

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^1 H(x, y) \varphi(y) dy = f(x) - \int_0^1 F(x, y) f(y) dy + \dots \\ + (-1)^{n-1} \int_0^1 F_{n-1}(x, y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (31)$$

Il est manifeste d'abord que ce second membre $g(x)$ doit vérifier les conditions

$$\int_0^1 g(x) \Psi_i(x) dx = 0$$

où les $\Psi_i(x)$ sont les solutions de l'équation associée de (26), mais il est visible que cela revient à dire que

$$\int_0^1 g(x) \psi_i(x) dx = 0$$

où

$$\psi_i(x) = \Psi_i(x) - \int_0^1 F(y, x) \Psi_i(y) dy + \dots + (-1)^{n-1} \int_0^1 F_{n-1}(y, x) \Psi_i(y) dy.$$

La solution générale de (31) est

$$\Phi(x) = \Phi_o(x) + \sum_{i=1}^{i=n} a_i \Phi_i(x)$$

où $\Phi_o(x)$ en est une solution particulière. Formons

$$\varphi(x) = \Phi(x) - \int_0^1 F(x, y) \Phi(y) dy + \dots + (-1)^{n-1} \int_0^1 F_{n-1}(x, y) \Phi(y) dy$$

et calculons $S_F \varphi$. On a, par un calcul bien facile :

$$\varphi(x) + \int_0^1 F(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

mais

$$\varphi(x) = \Phi_o(x) - \int_0^1 F(x, y) \Phi_o(y) dy + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \int_0^1 F_{n-1}(x, y) \Phi_o(y) dy + \sum a_i \varphi_i(x)$$

ou encore

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum a_i \varphi_i(x),$$

c'est-à-dire que la solution de (30) est égale à l'une quelconque d'entre elles augmentée d'une combinaison linéaire des solutions de l'équation homogène (27).

Dès lors, si l'on est placé dans le cas très particulier où les équations (29) et leurs associées n'ont de solutions non-nulles que si $\nu = 0$, le troisième théorème de Fredholm se formule exactement pour le noyau non-borné $F(x, y)$ comme pour un noyau borné.

L'étude des cas plus généraux où l'on ne peut rien dire a priori des équations (29) et de ceux où le noyau présente de plus grandes singularités sort du cadre de cet ouvrage.

99. Lorsque l'équation intégrale est à plusieurs variables, si le noyau devient infini, il est encore possible, dans des cas particuliers fort importants pour les applications, de former une nouvelle équation intégrale à noyau borné. Soit, par exemple,

$$\varphi(M_0) + \int_{\Sigma} F(M_0, M) \varphi(M) d\sigma_M = f(M_0)$$

une équation intégrale relative à une surface Σ . Si F n'est pas bornée, mais devient infinie pour $M_0 = M$, on peut, si

$$F(M_0, M) = \overline{M_0 M}^{-\alpha} I(M_0, M),$$

avec $I(M_0, M)$ bornée et α positif, inférieur à 2, former des fonctions

$$F_2(M_0, M) \dots F_\nu(M_0, M) \dots$$

par un procédé d'itération analogue à celui du § 95.

Disons que F appartient à l'exposant α , alors

$$F_2(M_0, M) = \int_{\Sigma} F(M_0, M_1) F(M_1, M) d\sigma_{M_1}$$

appartient au plus à l'exposant $2\alpha - 2$, c'est-à-dire que

$$F_2(M_0, M) = \overline{M_0 M}^{2-2\alpha} I^{(2)}(M_0, M)$$

avec $I^{(2)}$ borné.

Tout revient, en effet, à évaluer l'intégrale

$$R(M_0, M) = \int_{\Sigma} \frac{d\sigma_{M_1}}{\overline{M_0 M_1}^\alpha \overline{M_1 M}^\alpha} \cdot$$

Si Σ est plane, on trace le cercle de centre M_o , de rayon $2M_oM$ qui divise Σ en deux parties, l'une intérieure Σ' , l'autre extérieure Σ'' . L'intégrale étendue à Σ'' est de l'ordre de grandeur, si M_o et M sont très voisins, de $\int_{\Sigma''} \frac{d\sigma}{\rho^{2\alpha}}$, ρ_o étant la distance du point variable M_1 à M_o ,

car si $\rho = \overline{M_1M}$, $\frac{\rho}{\rho_o}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ lorsque M_1 décrit Σ'' .

Comme $d\sigma = \rho d\rho d\theta$, on voit que cette intégrale est de l'ordre de

$$\int_{2M_oM}^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$$

soit de l'ordre de $\left(\frac{1}{\overline{M_oM}}\right)^{2\alpha-2}$.

Transformons l'intégrale $\int_{\Sigma'} \frac{d\sigma}{\rho_o^\alpha \rho^\alpha}$ par le changement de variables qui exprime la correspondance par homothétie de Σ' avec un cercle Γ de rayon un et de centre M_o , cette homothétie étant de rapport $\frac{1}{2\overline{M_oM}}$; elle devient

$$\frac{4(\overline{M_oM})^2}{2^{2\alpha}(\overline{M_oM})^{2\alpha}} \int_{\Gamma} \frac{d\Sigma}{R_o^\alpha R^\alpha}$$

car, dans l'homothétie, à $d\sigma$ correspond $4(\overline{M_oM})^2 d\Sigma$; l'intégrale sur Γ est finie et indépendante de M_oM . Donc $\int_{\Sigma''} \frac{d\sigma}{\rho_o^\alpha \rho^\alpha}$ est infinie comme $\left(\frac{1}{\overline{M_oM}}\right)^{2\alpha-2}$ lorsque M tend vers M_o , si $2\alpha - 2 > 0$.

En résumé, on voit que F_2 appartient bien à $2\alpha - 2$, si Σ est une portion de plan. Si Σ est une surface qui admet en chacun de ses points un plan tangent variant continuellement, on obtiendra le même résultat. L'évaluation de l'intégrale se fera en décomposant Σ en $\Sigma' + \Sigma''$. Σ' se projetant sur le plan tangent à M_o à l'intérieur d'un cercle γ de rayon $2\overline{M_oM}$, cela établit entre Σ' et γ une correspondance $M_1 \rightarrow m$, telle que $\frac{m_1 M_o}{\overline{M_1 M_o}}$ reste compris entre deux limites positives. Les ordres

de grandeurs des intégrales restent les mêmes.

La fonction F_ν appartient donc à l'exposant

$$\nu\alpha - 2(\nu - 1)$$

si ce nombre est positif.

Choisissons n de manière que

$$0 < (n - 1) \alpha - 2(n - 2) < 2$$

et

$$n\alpha - 2(n - 1) < 0.$$

Le noyau $F_n(M_o, M)$ est borné et la théorie développée plus haut pour le cas d'une variable s'applique encore ici. On imagine aisément de quelle manière ces résultats se généralisent si le domaine d'intégration est à k dimensions.

Résumé.

100. Il convient de résumer les résultats obtenus de manière qu'ils soient aisément applicables. Nous écrivons l'équation de Fredholm avec le paramètre λ :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (\mathfrak{F})$$

1. K borné.

On forme la fonction entière $D(\lambda)$. Si $D(\lambda) \neq 0$, l'équation (\mathfrak{F}) a une solution et une seule. Elle se calcule au moyen de la fonction $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right)$ par la formule :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)} f(y) dy.$$

L'équation associée

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(y, x) \varphi(y) dy = f(x) \quad (\mathfrak{F}^*)$$

admet, dans les mêmes conditions, la solution

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{D\left(\begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)} f(y) dy.$$

Si $D(\lambda) = 0$, et si $D\left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right)$ est le premier mineur de $D(\lambda)$ qui soit différent de zéro, l'équation homogène

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

admet précisément n solutions linéairement indépendantes : $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$.

L'équation homogène associée

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(y, x) \varphi(y) dy = 0$$

en admet aussi n : $\Psi_1(x), \dots, \Psi_n(x)$.

Enfin, si $D(\lambda) = 0$, l'équation non-homogène admet une solution dépendant de n constantes si les n conditions suivantes sont vérifiées :

$$\int_0^1 \Psi_i(x) f(x) dx = 0 ; \quad (i = 1, \dots, n)$$

on a alors

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{i=n} a_i \Phi_i(x)$$

où $\Phi(x)$ est une solution quelconque de l'équation non-homogène ; on en obtient d'ailleurs une par la formule

$$\Phi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \eta_1, \dots, \eta_n \end{matrix} \middle| \lambda \right)} \int_0^1 f(y) D\left(\begin{matrix} x, \xi_1, \dots, \xi_n \\ y, \eta_1, \dots, \eta_n \end{matrix} \middle| \lambda \right) dy.$$

Si le domaine d'intégration est à plusieurs variables, le problème est formellement le même.

2. K non-borné.

I. Il existe un nombre positif $\alpha < 1$, tel que

$$(x - y)^\alpha K(x, y)$$

soit borné. On forme la fonction $K_n(x, y)$, dite le *noyau itéré d'ordre n* en choisissant n de manière qu'il soit le premier des nombres ν pour lesquels l'expression :

$$\nu\alpha - (\nu - 1)$$

soit négative, les précédentes étant positives ou nulles et inférieures à 1. La résolution de l'équation (F) revient à la résolution de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_0^1 K_n(x, y) \varphi(y) dy + F(x), \quad (\mathfrak{F}_n)$$

avec

$$\begin{aligned} F(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_0^1 K_2(x, y) f(y) dy + \dots \\ \dots + \lambda^{n-1} \int_0^1 K_{n-1}(x, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Le noyau $K_n(x, y)$ étant borné, on est ramené au cas 1. Si $D_n(\lambda^n) \neq 0$, D_n étant formé avec K_n , l'équation non-homogène proposée n'a qu'une solution,

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \Phi(y) dy + \dots + \lambda^{n-1} \int_0^1 K_{n-1}(x, y) \Phi(y) dy,$$

$\Phi(y)$ étant la solution de (\mathfrak{F}_n) .

Si aucune des équations

$$\varphi(x) = \lambda^\nu \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy \quad (\nu = 1, \dots, n-1)$$

n'a de solutions non-nulles, lorsque $D_n(\lambda^n) = 0$, chaque solution $\Phi_i(x)$ de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_0^1 K_n(x, y) \varphi(y) dy$$

donne une solution de

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy$$

par la formule

$$\varphi_i(x) = \Phi_i(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \Phi_i(y) dy + \dots + \lambda^{n-1} \int_0^1 K_{n-1}(x, y) \Phi_i(y) dy$$

et on obtient ainsi *toutes* ses solutions.

Dans ce cas-là, le troisième théorème de Fredholm a un énoncé identique à celui qu'il a pour un noyau borné.

II. Le domaine d'intégration est à deux dimensions et le noyau $K(M_o, M)$ est infini, si $M_o = M$, mais il existe un nombre positif $\alpha < 2$, tel que

$$\overline{M_o M}^\alpha F(M_o, M)$$

soit borné sur le domaine. On détermine l'entier n , tel que l'expression

$$\nu\alpha - 2(\nu - 1)$$

soit nulle ou comprise entre 0 et 2 pour $\nu = n - 1$ et soit négative pour $\nu = n$. On est ramené à la résolution d'une équation à noyau borné $K_n(M_o, M)$ et les circonstances sont les mêmes que pour I.

Exercices.

1. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xy\varphi(y) dy = x;$$

on formera

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3} \quad D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \lambda xy$$

(Whittaker et Watson)

2. Résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (xy + y^2)\varphi(y) dy = x.$$

$D(\lambda)$ est un polynôme du second degré en λ , $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ aussi, les coefficients étant des polynômes en x et y .

(Whittaker et Watson)

3. Montrer que la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ vérifie les équations :

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_0^1 K(x, t)\Gamma(t, y; \lambda) dt$$

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_0^1 K(t, y)\Gamma(x, t; \lambda) dt.$$

On le fait en remarquant que si λ est assez petit, on peut développer la solution de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y) dy = f(x)$$

en série de puissances de λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) + \dots$$

avec

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 K_n(x, y)f(y) dy \quad (\varphi_0(x) = f(x))$$

et

$$K_{i+j}(x, y) = \int_0^1 K_i(x, s) K_j(s, y) ds, \quad (K_1 = K).$$

On montrera que la convergence de la série précédente a lieu pour autant que $|\lambda| < \frac{1}{M}$.

4. *Equations de Volterra.* Ce sont des équations intégrales de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x V(x, s) \varphi(s) ds = f(x).$$

Elles se ramènent au type de Fredholm si, $0 \leq x \leq 1$, on prend pour noyau $K(x, y)$ la fonction :

$$\begin{aligned} K(x, y) &= V(x, y) & \text{si } y \leq x \\ K(x, y) &= 0 & \text{si } y > x. \end{aligned}$$

Si V est borné, K l'est. La solution de Fredholm s'applique au cas du noyau discontinu $K(x, y)$ qui vient d'être défini. Montrer que la résolvante est une fonction entière de λ . En particulier, montrer que la solution développée suivant les puissances de λ est convergente quel que soit λ .

5. *Noyaux symétriques réels.* Ce sont les noyaux réels pour lesquels

$$K(x, y) = K(y, x)$$

quelles que soient les valeurs de x et y .

Démontrer, en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\left[\int_0^1 f(x) \varphi(x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \cdot \int_0^1 \varphi^2(x) dx, \quad ^1$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux fonctions de carré intégrable, que l'équation intégrale à noyau symétrique

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

¹ On obtient cette inégalité en écrivant que la forme quadratique

$$Q(\lambda, \mu) = \int_0^1 [\lambda f(x) + \mu \varphi(x)]^2 dx$$

est définie positive.

a au moins une valeur propre. Il suffit de montrer que si l'on écrit

$$\varphi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^1 K_n(x, s) f(s) ds,$$

cette série ne peut représenter une fonction entière en λ (cf. Goursat III, p. 439-440).

6. Toutes les valeurs singulières d'un noyau symétrique sont réelles. (*Idem*, p. 441).

7. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ sont les valeurs propres d'un noyau symétrique pour l'intervalle $(0, 1)$, et si $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots$ sont les fonctions fondamentales relatives aux λ_i correspondants (on répétera les λ autant de fois qu'il est nécessaire s'il y a plusieurs fonctions fondamentales linéairement indépendantes pour une même valeur de λ), on montrera que, si $\varphi_i(x)$ et $\varphi_k(x)$ sont relatives à deux valeurs différentes λ_i et λ_k , on a

$$\int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

et que si elles sont relatives à la même valeur λ_i , on pourra toujours faire en sorte, en prenant des combinaisons linéaires convenables des fonctions fondamentales, qu'il en soit encore ainsi.

Les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ forment un *système orthogonal* (S) ; ce système est dit encore *normal* si l'on a

$$\int_0^1 \varphi_i^2(x) dx = 1.$$

On démontrera dès lors le *théorème d'Hilbert-Schmidt* :

8. Toute fonction de la forme

$$f(x) = \int_0^1 K(x, s) h(s) ds,$$

où $h(x)$ est une fonction du carré intégrable, est développable en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales :

$$f(x) = f_1 \varphi_1(x) + f_2 \varphi_2(x) + \dots + f_n \varphi_n(x) + \dots$$

où

$$f_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx$$

est le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier-Bessel de $f(x)$, relativement au système (S).

9. La solution de l'équation intégrale :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

est développable en série de fonctions fondamentales sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_1^{\infty} \frac{f_n \varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda}$$

avec $f_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx$. (Cf. Goursat, III, p. 446-449.)

10. Les deux problèmes précédents supposent qu'on connaisse l'inégalité de Bessel :

$$f_1^2 + \dots + f_n^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx$$

avec

$$f_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx,$$

qu'on démontre en remarquant que

$$\int_0^1 [f(x) - f_1 \varphi_1(x) - f_2 \varphi_2(x) \dots - f_n \varphi_n(x)]^2 dx \geq 0.$$

PROBLÈME BILOCAL POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE.

(Cf. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, p. 39 et sq.)

11. On pose

$$L(y) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + qy$$

p et q étant deux fonctions de x ; $p > 0$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Démontrer la *formule de Green* :

$$\int_0^1 [zL(y) - yL(z)] dx = \left| p \left(z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} \right) \right|_0^1 \quad (1)$$

y et z étant deux fonctions de x continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

12. Soit $\gamma(x, \xi)$ une fonction de x et du paramètre ξ telle que : 1^o pour les valeurs de x comprises dans $(0, 1)$ et différentes de ξ , elle soit dérivable deux fois et qu'on ait :

$$L(\gamma) = 0,$$

puis, 2^o $\gamma(x, \xi)$ continue en $x = \xi$, mais sa dérivée discontinue

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d\gamma}{dx} \right)_{x=\xi+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{d\gamma}{dx} \right)_{x=\xi-\varepsilon} = -1.$$

Une telle fonction est dite *solution fondamentale* de l'équation $L(y) = 0$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

Montrer que

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2} \frac{|x - \xi|}{x - \xi} \frac{u_2(\xi) u_1(x) - u_1(\xi) u_2(x)}{u_2(\xi) \frac{du_1(\xi)}{d\xi} - u_1(\xi) \frac{du_2(\xi)}{d\xi}}$$

est une solution fondamentale si $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de $L(y) = 0$.

Exemples :

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2} |x - \xi|$$

est solution fondamentale de $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

13. Montrer que les équations différentielles

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0,$$

possèdent respectivement les solutions fondamentales :

$$-\frac{1}{2} \xi |\log x - \log \xi|; \quad -\frac{1}{2} (1 - \xi^2) \left| \log \left(\frac{1+x}{1-x} \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) \right|$$

$$-\frac{1}{2} \sin(|x - \xi|); \quad -\frac{1}{2} e^{|x-\xi|}.$$

14. Considérons l'équation

$$L(y) = 0$$

et cherchons-en une solution fondamentale $\gamma(x, \xi)$ telle que

$$\gamma(0, \xi) = 0 \quad \gamma(1, \xi) = 0 \quad (\text{I})$$

ou telle que

$$\left(\frac{d\gamma}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{d\gamma}{dx} \right)_{x=1} = 0 \quad (\text{II})$$

ou telles conditions homogènes, entre γ et $\frac{d\gamma}{dx}$ en $x = 0$ et en $x = 1$, que l'on voudra. La fonction

$$G(x, \xi) = \frac{\gamma(x, \xi)}{p(\xi)}$$

s'appelle la *fonction de Green* de $L(y)$ pour les conditions posées (I) ou (II), etc.

Démontrer que

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

On emploie la formule de Green (1) et on tient compte de la discontinuité de $\frac{d\gamma}{dx}$.

15. Montrer que la fonction

$$f(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

vérifie l'équation

$$L(y) + \varphi(x) = 0$$

et satisfait aux conditions bilocales (I) ou (II) etc. comme le fait $G(x, \xi)$. Réciproque.

16. Soient

$$y(x) = G(x, \xi) \quad z(x) = \Gamma(x, \xi)$$

les fonctions de Green relatives aux *mêmes* conditions bilocales, mais pour

$$L(y) = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda(z) = L(z) + \lambda z = 0;$$

montrer que $\Gamma(x, \xi)$ est la résolvante de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x).$$

Il suffit de montrer que

$$\Gamma(x, \xi) - G(x, \xi) = \lambda \int_0^1 G(x, s) \Gamma(s, \xi) ds.$$

Ces résultats permettent de ramener les problèmes bilocaux aux équations de Fredholm.

17. Soit l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

examiner ce que donnent les théorèmes de Fredholm lorsqu'on tient compte des résultats précédents (valeurs propres). On voit immédiatement que dans le cas du problème bilocal

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

λ doit avoir des valeurs particulières, discrètes. Qu'arrive-t-il si l'équation différentielle proposée a un second membre?

18. Montrer que les solutions de

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n(x - \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0$$

sont $\varphi(x) = \cos(n - 2r)x$ et $\sin(n - 2r)x$, où r prend toutes les valeurs entières positives (et zéro) ne dépassant pas $\frac{n}{2}$. (Whittaker et Watson).

19. Montrer que

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n(x + \xi) \varphi(\xi) d\xi = 0$$

a les mêmes solutions que ci-dessus ; montrer que les valeurs correspondantes de λ donnent toutes les racines de $D(\lambda)$.

(Whittaker et Watson.)

20. Les fonctions caractéristiques de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{1}{4\pi} (x-y)^2 - \frac{1}{2} |x-y| \right\} \varphi(y) dy = 0$$

sont

$$\varphi(x) = \frac{\cos mx}{\sin mx}$$

avec $\lambda = m^2$, m entier quelconque. (Whittaker et Watson)

21. Si $|h| < 1$, les fonctions caractéristiques de l'équation

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-h^2}{1-2h \cos(\xi-x) + h^2} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

sont 1 , $\cos mx$, $\sin mx$, les valeurs propres correspondantes étant 1 , $\frac{1}{h^m}$, $\frac{1}{h^m}$, m entier positif quelconque. (Whittaker et Watson.)

CHAPITRE V

Problèmes de Dirichlet, problèmes de Neumann et problèmes mixtes.

Conditions aux limites généralisées.

101. Le potentiel de double couche :

$$\varpi\mathcal{V}(P) = \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma_M,$$

où $\mu(M)$ vérifie l'équation intégrale

$$\mu(M_o) - \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{2\pi r_o^2} \mu(M) d\sigma_M = - \frac{F(M_o)}{2\pi},$$

est une fonction harmonique à l'intérieur de la surface régulière et fermée Σ , dont la valeur tend vers $F(M_o)$ lorsque P tend vers le point M_o de Σ . Ce potentiel de double couche est donc la solution du problème de Dirichlet.

Il est commode, comme Poincaré l'a montré, d'introduire un paramètre λ et de considérer l'équation intégrale

$$\mu(M_o) - \lambda \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{2\pi r_o^2} \mu(M) d\sigma_M = G(M_o), \quad (1)$$

dont le noyau est $K(M_o, M) = \frac{\cos \varphi}{2\pi \overline{MM}_o^2}$, $\varphi =$ angle de \overline{MM}_o avec la normale extérieure en M (fig. 11).

Si $\mu(M)$ satisfait à cette équation, la fonction $\mathfrak{V}(P)$ vérifie la condition aux limites :

$$\mathfrak{V}_o^- - \mathfrak{V}_o^+ + \lambda [\mathfrak{V}_o^- + \mathfrak{V}_o^+] = -4\pi G(M_o) \quad (2)$$

car cette condition s'écrit [ch. I § 19, éq. (4)] :

$$-4\pi\mu_o + 2\lambda \mathfrak{V}_o = -4\pi G(M_o)$$

d'où précisément (1). Pour $\lambda = 1$, la condition (2) n'est pas autre chose que la condition de Dirichlet

$$\mathfrak{V}_o^- = \text{fonction donnée.}$$

Il est intéressant de voir à quel problème correspond la solution de l'équation associée :

$$\mu(M_o) - \lambda \iint_{\Sigma} K(M, M_o) \mu(M) d\sigma_M = G(M_o) \quad (1^*)$$

On voit que $K(M, M_o) = \frac{\cos \psi}{2\pi r_o^2}$ où ψ est l'angle de $\overrightarrow{M_oM}$ avec la normale extérieure en M_o , (fig. 11). On se rappelle que l'intégrale

$$\iint_{\Sigma} \frac{\cos \psi}{r_o^2} \mu(M) d\sigma_M$$

joue un rôle dans la théorie du potentiel de simple couche [chap. I, § 21, éq. (5) où ψ_o est notre actuel angle ψ].

Le potentiel de simple couche

$$\mathfrak{V}(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu(M)}{r} d\sigma_M \quad (r = \overrightarrow{MP})$$

vérifie la condition aux limites :

$$\left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)_o^+ (1 + \lambda) - \left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)_o^- (1 - \lambda) = -4\pi G(M_o) \quad (3)$$

comme le montrent immédiatement les relations rappelées du § 21.

Or, si $\lambda = -1$, cette condition revient à

$$\left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)_o^- = \text{fonction donnée,}$$

c'est-à-dire au problème de Neumann.

On traitera donc à la fois le problème de Dirichlet et le problème de Neumann en considérant l'équation intégrale (1) et son associée (1*).

Problèmes extérieurs.

102. Mais il y a plus. Appelons *problème de Dirichlet extérieur* le problème qui consiste à trouver une fonction harmonique à l'extérieur de la surface fermée Σ , prenant sur Σ des valeurs données, et tendant vers zéro lorsque l'argument P tend vers l'infini. Il correspond au cas de $\lambda = -1$ dans l'équation intégrale (1). *Le problème de Neumann extérieur* est celui qui consiste à déterminer une fonction harmonique à l'extérieur de la surface fermée Σ , tendant vers zéro lorsque P tend vers l'infini, la dérivée normale de cette fonction prenant sur Σ des valeurs données. Ce problème correspond au cas de $\lambda = 1$ dans l'équation (1*).

Considérations sur les équations intégrales des problèmes généralisés.

103. Les noyaux $K(M_o, M)$ et $K(M, M_o)$ contiennent $r_o = MM_o$ au dénominateur et cela à la deuxième puissance. Cependant $\cos \varphi$ et $\cos \psi$ s'annulent pour $r_o = 0$ si tous les points de Σ sont réguliers, ce que nous supposons dans tout ce chapitre. Il est facile de voir que dans ce cas

$$\lim_{r_o = 0} \frac{\cos \varphi}{r_o} \quad \text{et} \quad \lim_{r_o = 0} \frac{\cos \psi}{r_o}$$

existent. Le noyau de l'équation (1) appartient donc à l'exposant $\alpha = 1$. Or $2\alpha - 2 = 0$ et $3\alpha - 4 < 0$. C'est dire que le noyau

$$K_3(M_o, M) = \iiint K(M_o, M_1) K(M_1, M_2) K(M_2, M) d\sigma_{M_1} d\sigma_{M_2}$$

est borné. On est donc ramené à la résolution de l'équation intégrale

$$\mu(M_o) - \lambda^3 \int_{\Sigma} K_3(M_o, M) \varphi(M) d\sigma_M = H(M_o) \quad (4)$$

ou de son associée ; $H(M_o)$ est une fonction qu'il est facile de calculer, elle dépend linéairement de $G(M_o)$, elle n'est pas identiquement nulle.

On doit donc former la fonction $D_3(\lambda^3)$ et chercher les valeurs de λ qui l'annulent. Pour toutes les autres valeurs λ , on pourra résoudre sans ambiguïté l'équation (1) et par conséquent l'équation (1*).

Valeurs propres.

104. Il n'y a pas de valeurs non-réelles de λ pour lesquelles l'équation intégrale

$$\mu(M_o) - \lambda \iint_{\Sigma} \frac{\cos \psi}{2\pi r_o^2} \mu(M) d\sigma_M = 0 \quad (5)$$

ait une ou plusieurs solutions non-nulles qui seraient donc non-réelles; les *valeurs propres* de notre noyau ne peuvent être que *réelles*. Soit, en effet, par impossible,

$$\mu_1 + i\mu_2$$

une solution imaginaire, correspondant à une valeur propre complexe. Le potentiel de simple couche formé avec cette fonction serait complexe aussi :

$$\varpi_1 + i\varpi_2,$$

et, d'après (3), on aurait, puisqu'alors $G = 0$:

$$\left(\frac{d\varpi_1}{dn_e} + i \frac{d\varpi_2}{dn_e} \right)_o^+ = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \left(\frac{d\varpi_1}{dn_e} + i \frac{d\varpi_2}{dn_e} \right)_o^- \quad (6)$$

Comme ϖ_1 et ϖ_2 sont harmoniques dans Σ , on sait qu'on a :

$$\iint_{\Sigma} \left(\varpi_1 \frac{d\varpi_2}{dn_e} - \varpi_2 \frac{d\varpi_1}{dn_e} \right)^- d\sigma = 0$$

et

$$\iint_{\Sigma} \left(\varpi_1 \frac{d\varpi_2}{dn_e} - \varpi_2 \frac{d\varpi_1}{dn_e} \right)^+ d\sigma = \iint_S \left(\varpi_2 \frac{d\varpi_1}{dn_e} - \varpi_1 \frac{d\varpi_2}{dn_e} \right)^+ d\sigma,$$

où S est une sphère de très grand rayon R , contenant Σ ; si $R \rightarrow \infty$, l'intégrale le long de S tend vers zéro, car ϖ_1 et ϖ_2 sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$ et les dérivées normales de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$; l'intégrale du premier membre est donc nulle aussi.

On tire de (6) en multipliant par $\varpi_1 - i\varpi_2$ et en tenant compte des relations précédentes :

$$\iint_{\Sigma} \left(\varpi_1 \frac{d\varpi_1}{dn_e} + \varpi_2 \frac{d\varpi_2}{dn_e} \right)^+ d\sigma = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \iint_{\Sigma} \left(\varpi_1 \frac{d\varpi_1}{dn_e} + \varpi_2 \frac{d\varpi_2}{dn_e} \right)^- d\sigma.$$

Or les deux intégrales sont réelles, $\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$ doit l'être ce qui oblige λ

à l'être. Ce raisonnement serait en défaut, si les intégrales étaient nulles ; or, dans ce cas [chap. III, § 68] on sait que, si ψ est harmonique,

$$\iiint_{V'} (\vec{\nabla}\psi)^2 d\tau = \iint_{\Sigma} \psi \frac{d\psi}{dn} d\sigma$$

et alors

$$\iiint_{V'} [(\vec{\nabla}\varpi_1)^2 + (\vec{\nabla}\varpi_2)^2] d\tau = \iint_{\Sigma} \left(\varpi_1 \frac{d\varpi_1}{dn_e} + \varpi_2 \frac{d\varpi_2}{dn_e} \right)^+ d\sigma = 0$$

d'où $\vec{\nabla}\varpi_1 = \vec{\nabla}\varpi_2 = 0$, $\varpi_1 = \text{const.}$, $\varpi_2 = \text{const.}$, et ces constantes sont nulles puisque $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$ à l'infini et que ϖ_1 et ϖ_2 sont continus dans tout l'espace. Puisque

$$\left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)_o^+ - \left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)_o^- = -4\pi\mu(M_o) = -4\pi(\mu_1 + i\mu_2)_o$$

les densités μ_1 et μ_2 sont nulles aussi, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse dont nous sommes partis.

105. On peut voir encore qu'aucune valeur propre de K ne peut être comprise entre -1 et 1 , car, d'une solution non-nulle $\varpi(M)$ de l'équation homogène (5), on tire un potentiel ϖ de simple couche satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)^+ = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)^-$$

d'où :

$$\iint_{\Sigma} \varpi \left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)^+ d\sigma = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \iint_{\Sigma} \varpi \left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)^- d\sigma ;$$

or les deux intégrales sont de signes contraires, car on voit aisément que :

$$\iint_{\Sigma} \varpi \left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)^- d\sigma = \iiint_{V'} (\vec{\nabla}\varpi)^2 d\tau$$

et

$$\iint_{\Sigma} \varpi \left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)^+ d\sigma = - \iiint_{V'} (\vec{\nabla}\varpi)^2 d\tau, \quad (V' \text{ étant le volume extérieur à } \Sigma).$$

(Elles ne pourraient être nulles que si $\mu = 0$ ce qui n'est pas conforme à l'hypothèse.) Or $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} > 0$ si $|\lambda| < 1$. Il y aurait contradiction, donc $|\lambda| \geq 1$.

106. Il est impossible aussi que $\lambda = 1$ soit valeur propre pour K car alors on aurait une fonction μ , densité d'un potentiel \mathfrak{V} de simple couche, tel que (3) donnerait :

$$\left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)^- = 0$$

d'où $\iint_{\Sigma} \mathfrak{V} \left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)^- d\sigma = 0$ et par suite $\mathfrak{V} = 0$ et $\mu = 0$, ce qui ma-

nifeste la contradiction.

Mais, au contraire, $\lambda = -1$ est valeur propre car l'équation

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{2\pi r_o^2} \mu(M) d\sigma = 0$$

admet la solution $\mu(M) = 1$; l'intégrale est en effet dans ce cas, au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près, l'angle solide changé de signe sous lequel on voit Σ de M_o , elle vaut -1 . On a donc aussi $D_3(-1) = 0$.

Nous sommes ainsi placé dans le cas où, par suite de la réalité des valeurs propres, les équations

$$\mu(M_o) + \alpha^\nu \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} \mu(M) d\sigma_M = 0, \quad (\nu = 1, 2)$$

où α est une racine cubique imaginaire de -1 , n'ont que la solution $\mu(M) \equiv 0$; par conséquent toute solution de

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} K(M_o, M) \mu(M) d\sigma_M = 0 \quad (7)$$

est solution de

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} K_3(M_o, M) \mu(M) d\sigma_M = 0 \quad (8)$$

et réciproquement.

D'autre part, l'équation homogène correspondant à (1*) admet au moins une solution non-nulle, qui fournit un potentiel de simple couche \mathfrak{V} pour lequel on a sur Σ [cf. (3)],

$$\left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)^- = 0$$

et par suite $\mathfrak{V} = \text{const.}$ à l'intérieur. Soit μ_1 cette solution ; je dis qu'il ne saurait y en avoir une autre μ_2 , sinon on aurait un autre potentiel

constant. Il existerait donc une relation linéaire et homogène entre les deux potentiels, donc entre μ_1 et μ_2 , et μ_2 ne serait pas distincte de μ_1 .

Dès lors, l'équation homogène (7) et son associée n'ont qu'une solution chacune ; il en est donc de même pour l'équation (8) et son associée.

107. Il convient de formuler maintenant les résultats obtenus en les précisant et en les étendant.

1^o Le problème de Dirichlet intérieur ($\lambda = 1$) est toujours résoluble ; il n'a qu'une solution.

2. Le problème de Neumann extérieur ($\lambda = 1$, dans l'équation associée) est toujours résoluble ; il n'a qu'une solution.

3^o Le problème de Neumann intérieur correspond au troisième théorème de Fredholm, mais pour une équation intégrale à noyau non borné. Il faut trouver la couche du potentiel \mathfrak{Q} qui satisfasse à l'équation

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} K(M, M_o) \mu(M) d\sigma_M = f(M_o), \quad (9)$$

$f(M_o)$ doit être orthogonale sur Σ à la solution de l'équation (7), c'est-à-dire, puisque cette solution est une constante et puisque $f(M_o)$ est à un facteur constant près la valeur de la dérivée normale $\left(\frac{d\psi}{dn_e}\right)_o^-$ de la solution sur Σ : [cf. ch. III, § 67, éq. (1)].

$$\iint_{\Sigma} f(M) d\sigma_M = 0.$$

On sait que cette condition est suffisante pour que l'équation

$$\begin{aligned} \mu(M_o) + \iint_{\Sigma} K_3(M, M_o) \mu(M) d\sigma_M = f(M_o) - \iint_{\Sigma} K(M, M_o) f(M) d\sigma_M + \\ + \iint_{\Sigma} K_2(M, M_o) f(M) d\sigma_M \end{aligned}$$

ait des solutions qui sont précisément celles de (9). Ces solutions dépendent d'une constante arbitraire :

$$\mu(M) = \mu_o(M) + a\psi(M),$$

ψ étant la solution de l'équation homogène

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} K(M, M_o) \mu(M) d\sigma_M = 0.$$

Le potentiel de simple couche qui résoud le problème de Neumann intérieur est alors

$$\mathfrak{V}(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu_o(M)}{r} d\sigma_M + a \iint_{\Sigma} \frac{\psi(M)}{r} d\sigma_M;$$

mais $\psi(M)$ donne, comme on l'a vu, un potentiel de simple couche constant et l'on redémontre ainsi que la solution du problème de Neumann intérieur dépend d'une constante arbitraire additive.

4° Le problème de Dirichlet extérieur correspond aussi au troisième théorème de Fredholm. Il faut trouver la densité de la double couche du potentiel $\mathfrak{V}(P)$ qui vérifie l'équation

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} K(M_o, M) \mu(M) d\sigma_M = f(M_o) \quad (10)$$

où $f(M_o)$ ou, à un facteur près, la donnée du problème de Dirichlet sur Σ , doit être orthogonale à la fonction $\psi(M)$ définie l'instant d'avant :

$$\iint_{\Sigma} f(M) \psi(M) d\sigma = 0. \quad (11)$$

S'il en est ainsi, la solution générale de (10) est

$$\mu(M) = \mu_o(M) + a,$$

car la solution de l'équation homogène correspondant à (10) est une constante quelconque, par conséquent, la solution du problème de Dirichlet extérieur est

$$\mathfrak{V}(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu_o(M) \cos \varphi}{2\pi r^2} d\sigma_M + a \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} d\sigma_M,$$

mais la deuxième intégrale est nulle (théorème sur l'angle solide). Le problème de Dirichlet extérieur n'a qu'une seule solution.

Il faut remarquer cependant que la condition de possibilité (11) n'est en jeu que parce qu'on a voulu représenter la solution du problème de Dirichlet extérieur par un potentiel de double couche qui est bien nul à l'infini, mais comme $\frac{1}{R^2}$. On peut montrer que le problème de

Dirichlet extérieur a *toujours* une solution qui s'exprime par la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche. Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

Problème de Dirichlet dans le plan.

108. Toutes les considérations précédentes se transportent au cas du plan avec des modifications de détail pour lesquelles nous renvoyons le lecteur au traité de M. Goursat (III, p. 516-518).

On voit cependant sans difficulté que le potentiel logarithmique de double couche

$$\mathfrak{N}(P) = \int \sigma(M) \frac{\cos \varphi}{r} ds_M \quad (12)$$

résoudra le problème de Dirichlet intérieur si la densité $\sigma(M)$ vérifie l'équation intégrale :

$$\sigma(M_o) - \int_C \frac{\cos \varphi}{\pi r_o} \sigma(M) ds_M = -f(M_o)$$

avec

$$\lim_{P \rightarrow M_o} \mathfrak{N}(P) = \pi f(M_o).$$

Le noyau $K(M_o, M) = \frac{\cos \varphi}{\pi r^2}$ n'est pas borné, mais le noyau K_2 l'est.

Les valeurs propres sont réelles, aucune n'est inférieure à 1 en valeur absolue. La démonstration est la même que pour l'espace. Enfin on voit aussi par des considérations analogues que $\lambda = 1$ n'est pas valeur propre. Le problème de Dirichlet intérieur est donc résolu par la formule (12), la fonction $\sigma(M)$ s'obtenant en appliquant la méthode de Fredholm à l'équation

$$\sigma(M_o) - \int_C K_2(M_o, M) \sigma(M) ds_M = -f(M_o) - \int_C K(M_o, M) f(M) ds_M,$$

où

$$K_2(M_o, M) = \int_C K(M_o, M_1) K(M_1, M) ds_{M_1}.$$

Problèmes mixtes.

109. Il s'agit, dans ces problèmes, on se le rappelle (ch. III, § 68, IV), de déterminer une fonction $\psi(P)$ harmonique à l'intérieur d'une surface Σ et telle que, sur cette surface, on ait la relation

$$\frac{d\psi}{dn_e} + h\psi = g$$

où h et g sont des fonctions données sur Σ , la première $h(M_o)$ n'étant jamais négative.

Cherchons à représenter la solution par un potentiel de simple couche

$$\mathfrak{V}(P) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu(M)}{r} d\sigma_M, \quad (r = MP),$$

qui est continu dans tout l'espace, mais dont la dérivée normale discontinue sur Σ , vérifie, comme on sait, les équations (5) du § 21, chap. I. On veut que

$$\left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)_o^- + h(M_o)\mathfrak{V}_o = g(M_o),$$

soit :

$$2\pi\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} \mu(M) \frac{\cos\psi_o}{r_o^2} d\sigma_M + h(M_o) \iint_{\Sigma} \frac{\mu(M)}{r_o} d\sigma_M = g(M_o)$$

ce qui montre que $\mu(M_o)$ vérifie l'équation intégrale

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} \left[\frac{\cos\psi_o}{2\pi r_o^2} + \frac{h(M_o)}{2\pi r_o} \right] \mu(M) d\sigma_M = \frac{g(M_o)}{2\pi}$$

où $r_o = MM_o$, ψ_o = angle de M_oM avec la normale extérieure à Σ en M_o (cf. fig. 11).

Le noyau

$$K(M_o, M) = \frac{\cos\psi_o}{2\pi r_o^2} + \frac{h(M_o)}{2\pi r_o}$$

n'est pas borné, mais K_3 l'est certainement. Il faut montrer que $\lambda = -1$ n'est pas valeur propre. S'il en était ainsi l'équation

$$\mu(M_o) + \iint_{\Sigma} K(M_o, M) \mu(M) d\sigma_M = 0$$

aurait une solution non-nulle et la fonction harmonique $\mathfrak{V}(P)$ vérifierait sur Σ la condition

$$\frac{d\psi}{dn_e} + h\psi = 0$$

c'est-à-dire que sur Σ , on aurait :

$$\left(\frac{d\mathfrak{V}}{dn_e}\right)_o^- = -h\mathfrak{V}(M_o)$$

et, par conséquent, on aurait

$$\iint_{\Sigma} \varpi_o \left(\frac{d\varpi}{dn_e} \right)_o d\sigma_{M_o} = - \iint_{\Sigma} h(M_o) \varpi^2(M_o) d\sigma_{M_o} < 0.$$

Le premier membre ne peut être négatif car il est égal à $\iiint_V (\vec{\nabla} \varpi)^2 d\tau$,

et la relation précédente n'est possible que si $\varpi_o = 0$, et par suite, $\varpi(P) = 0$, d'où $\mu(M) = 0$.

Le problème mixte intérieur a donc toujours une solution et nous savons alors qu'il n'en a qu'une.

La conclusion est la même pour le plan.

Exercices.

FONCTION DE GREEN.

1. Dans l'espace. Soit un domaine V , Σ sa frontière, formée d'une ou de plusieurs surfaces fermées, la fonction de Green de ce domaine est une fonction du point courant P dans le domaine et d'un point intérieur Q : $G(P, Q)$, définie par les conditions suivantes :

a) $G(P, Q)$ est harmonique en P à l'intérieur de V , sauf dans le domaine du point Q , où :

b) $G(P, Q)$ est de la forme $\frac{1}{PQ} + g(P, Q)$, $g(P, Q)$ étant harmonique en P ,

c) $G(P, Q) = 0$ si P est sur Σ .

Si cette fonction existe, elle est unique¹ ; montrer que la formule

$$\psi(Q) = - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} F(M) \frac{dG(M, Q)}{dn_e} d\sigma_M \quad (1)$$

résoud le problème de Dirichlet pour le domaine V , $F(M)$ étant la fonction donnée sur la frontière. On applique la formule de Green en ayant soin d'isoler Q dans une petite sphère dont on fait tendre le rayon vers zéro.

Pour le problème extérieur, on peut définir aussi une fonction de Green $G(P, Q)$ nulle sur Σ et à l'infini, harmonique hors de Σ , singu-

¹ L'existence de la fonction de Green dépend de la résolution d'un problème de Dirichlet avec des valeurs particulières sur le contour ; si on a démontré qu'elle existe, alors les problèmes de Dirichlet avec des données continues quelconques sont résolus par les formules (1) ou (2).

lière en Q comme on l'a dit ; le problème extérieur a dès lors la solution

$$\psi(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} F(M) \frac{dG(M, Q)}{dn_e} ds_M. \quad (2)$$

Montrer que la fonction de Green pour l'intérieur d'une sphère de rayon R est :

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} - \frac{R}{l} \frac{1}{r_1}$$

où, si O est le centre, on a $OQ = l$, $QP = r$ et $Q_1P = r_1$ (Q_1 est l'inverse de Q par rapport à la sphère). De même

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} - \frac{l}{R} \frac{1}{r_1}$$

est la fonction de Green pour l'extérieur de la sphère. Retrouver par ce moyen la formule de Poisson qui résoud le problème de Dirichlet pour l'intérieur de la sphère et établir celle qui le résoud pour l'extérieur.

2. Dans le plan. Pour un domaine borné, la fonction de Green $G(P, Q)$ se définit de la même manière que pour l'espace, sauf à remplacer la singularité en Q de la forme $\frac{1}{r} + g(P, Q)$ par $\log \frac{1}{r} + g(P, Q)$.

La formule

$$\psi(Q) = - \frac{1}{2\pi} \int_C f(M) \frac{dG(M, Q)}{dn_e} ds_M$$

résoud le problème intérieur, $f(M)$ étant la donnée sur la frontière C .

La fonction $\log \left(\frac{lr_1}{Rr} \right)$ est la fonction de Green $G(P, Q)$ du cercle de rayon R , si $OQ = l$, $QP = r$, $Q_1P = r_1$, Q_1 étant l'inverse de Q relativement au cercle. Retrouver la formule de Poisson.

3. Dans l'espace ou dans le plan on a toujours

$$G(P, Q) = G(Q, P).$$

On démontre ce fait en considérant deux fonctions $G(P, Q)$ et $G(P, Q')$ relatives à deux points Q et Q' et on applique la formule de Green avec les précautions ordinaires.

4. Si l'équation

$$\text{lap } \varphi + \lambda \varphi = g(P) \quad (1)$$

admet à l'intérieur d'un domaine une solution qui prend sur sa frontière des valeurs données, cette solution est fournie par la résolution d'une équation intégrale dont le noyau est la fonction de Green du domaine en question. On remarque que si, sur la frontière, φ prend les valeurs $F(M)$, on remplacera la recherche de φ par celle de $\psi(P) = \varphi(P) - H(P)$, $H(P)$ étant une fonction régulière dans D prenant sur la frontière les valeurs $F(M)$. ψ satisfait donc à une équation analogue à (1), et ses valeurs sur la frontière sont nulles. On utilise ensuite la formule de Green pour les deux fonctions ψ et G ; on trouve pour le cas de l'espace, $f(P)$ étant une fonction connue :

$$\psi(Q) - \frac{\lambda}{4\pi} \iiint_V G(P, Q) \psi(P) d\tau_P = - \frac{1}{4\pi} \iiint_V G(P, Q) f(P) d\tau_P.$$

5. En utilisant la transformation de Lord Kelvin, montrer que le problème de Dirichlet extérieur se ramène à un problème intérieur.



CHAPITRE VI

Extension à des domaines dont les frontières ont des points anguleux.

Fonctions surharmoniques.

110. Il est nécessaire, pour les applications, de savoir résoudre le problème de Dirichlet relatif à des domaines dont la frontière présente des points en lesquels la tangente n'est pas unique, ou en lesquels le plan tangent, si on est dans le cas de l'espace, n'est pas déterminé. Nous développerons la théorie pour le problème plan. Elle fait intervenir des considérations de convergence dont l'exposé se simplifie par l'introduction des fonctions *surharmoniques* et par celle des fonctions *barrières*. Nous nous inspirons, dans ce chapitre, des travaux de Kellogg et, en particulier, de l'exposé qu'il a donné dans son livre sur le potentiel.

Soit un domaine D ; une fonction $S(P)$ continue dans D , y est dite *surharmonique*, si, étant donnée une ou plusieurs courbes simples fermées C' dont tous les points sont intérieurs à D , limitant un domaine D' intérieur à D , on a

$$S(P) \geq U(P)$$

en tout point P intérieur à D' , et quelle que soit la fonction U harmonique dans D' pour laquelle la relation précédente est vérifiée sur C' .

On peut interpréter géométriquement cette définition. Soit un axe Oz perpendiculaire au plan contenant D , dont le point courant est P ; considérons les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 d'équations

$$z_1 = S(P), \quad z_2 = U(P).$$

Elles se correspondent point par point, Q_1 correspondant à Q_2 si Q_1 a même projection P que Q_2 . $S(P)$ est surharmonique dans D , si, pour

tout P intérieur à D' , Q_1 n'est jamais au-dessous de Q_2 lorsque pour P sur C' , Q_1 n'est jamais au-dessous de Q_2 . Il faut que ces conditions soient vérifiées pour toute courbe C' fermée intérieure à D et pour toute surface Σ_2 dont les points ont une cote fonction harmonique de leur projection.

Si, dans D' , on a

$$S(P) \leq U(P),$$

lorsqu'il en est ainsi sur C' , la fonction $S(P)$ est *sous-harmonique*.

Cette définition n'assure pas l'existence des fonctions surharmoniques. Les propriétés que nous allons en déduire établiront cependant cette existence.

111. Tout d'abord, si S est surharmonique dans D , sa valeur en tout point P de D est supérieure ou égale à sa valeur moyenne sur toute circonférence Γ centrée en P , intérieure à D et dont tous les points intérieurs sont intérieurs à D . On doit donc démontrer que

$$S(P) \geq \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} S(M) ds_M. \quad (R = \text{rayon de } \Gamma)$$

Soit, en effet, une fonction harmonique U telle que

$$S(M) = U(M) \quad (M \text{ sur } \Gamma);$$

l'intégrale de Poisson en assure l'existence ; on aura alors

$$S(P) \geq U(P),$$

mais

$$U(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} U(M) ds_M = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} S(M) ds_M,$$

d'où l'inégalité à établir.

Inversement, si $S(P)$ est continue dans D , et si, pour chaque point P de D , on peut déterminer un nombre $\alpha > 0$ telle que la valeur de $S(P)$ soit supérieure ou égale à la valeur moyenne de S sur toute circonférence centrée en P et de rayon moindre que α , alors S est surharmonique dans D .

En effet, soit C' la frontière intérieure à D , limitant le domaine D' intérieur à D , et soit U , harmonique dans D' avec

$$S(M) \geq U(M), \quad (M \text{ sur } C');$$

on a, par hypothèse, pour les circonférences Γ définies plus haut :

$$S(P) - U(P) \geq \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} [S(M) - U(M)] ds_M$$

car

$$U(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} U(M) ds_M.$$

Or la différence $S(P) - U(P)$ étant continue et plus grande que sa valeur moyenne sur des circonférences entourant P , il est évident que cette différence ne peut atteindre son minimum que sur C' , jamais à l'intérieur de C' ; or elle n'est pas négative sur C' , donc elle ne peut l'être dans D' , et l'on a

$$S(P) \geq U(P), \quad (P \text{ dans } D')$$

ce qui assure la conclusion énoncée.

Si $S(P)$ est surharmonique dans D , si elle y admet un gradient $\vec{\nu}(P)$ et si $(\vec{a} \nabla) \vec{\nu}$ existe dans D quelle que soit la direction \vec{a} , alors lap S existe et l'on a

$$\text{lap } S \leq 0$$

en tout point intérieur à D .

Car, soit U harmonique dans D' et sur C' , on a, par la formule de Green :

$$-\iint_{D'} U \text{ lap } S d\sigma = \int_{C'} \left(S \frac{dU}{dn_e} - U \frac{dS}{dn_e} \right) ds_M ;$$

choisissons U de façon que

$$U(M) = S(M) ; \quad (M \text{ sur } C')$$

comme

$$S(P) \geq U(P), \quad (P \text{ dans } D')$$

on en déduit :

$$\frac{dS}{dn_i} \geq \frac{dU}{dn_i} \quad (n_i \text{ normale intérieure à } C')$$

et par suite $\frac{dS}{dn_e} \leq \frac{dU}{dn_e}$, donc :

$$-\iint_{D'} U \text{ lap } S d\sigma \geq \int_{C'} U(M) \frac{dU}{dn_e} ds_M ;$$

or cette dernière intégrale est positive ou nulle; elle vaut, en effet, $\iint_{D'} (\overrightarrow{\text{grad}} U)^2 d\sigma$, donc, on doit avoir *quel que soit* D' dans D :

$$\iint_{D'} U \text{ lap } S d\sigma \leq 0.$$

Il est possible, d'autre part, d'ajouter à U et à S une constante qui rende $U > 0$, le laplacien de S n'est pas changé et l'on a

$$\text{lap } S \leq 0.$$

La réciproque est vraie aussi; c'est-à-dire que si S a un gradient continu dans D , si $(\overrightarrow{a} \nabla) \nabla S$ existe quel que soit \overrightarrow{a} et si $\text{lap } S \leq 0$, S est surharmonique.

En effet, on peut écrire alors

$$\text{lap } S = -2\pi\mu$$

où $\mu(P)$ est une fonction — une densité superficielle — qui n'est jamais négative. S est donc égale au potentiel logarithmique dû à cette densité augmenté d'une fonction harmonique arbitraire.

Or, de même que pour le cas de l'espace, une fonction $S(P)$ du plan peut toujours se mettre sous la forme suivante valable dans le domaine D' [cf. chap. III, première équation du § 72] :

$$S(P) = \iint_{D'} \frac{\text{lap } S}{2\pi} \log \frac{1}{r} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left(\frac{dS}{dn_e} \log \frac{1}{r} - S \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn_e} \right) ds.$$

Considérons maintenant une fonction harmonique U égale ou supérieure à S sur C' , on pourra écrire

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left(\frac{dU}{dn_e} \log \frac{1}{r} - U \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn_e} \right) ds,$$

et la différence s'écrit

$$S(P) - U(P) = \iint_{D'} \frac{\text{lap } S}{2\pi} \log \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_{C'} (S - U) \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left(\frac{dS}{dn_e} - \frac{dU}{dn_e} \right) \log \frac{1}{r} ds. \tag{1}$$

Faisons décrire à P une circonférence γ de centre O , située entièrement dans D' , et prenons la valeur moyenne des deux membres, les

intégrales simples ont une valeur en O précisément égale à leur valeur moyenne sur γ , de même $U(O)$. Si l'on désigne par $\mathfrak{M}_\gamma S(O)$ la valeur moyenne de S sur γ , on aura, après soustraction membre à membre de l'équation (1) et de celle qu'on obtient en prenant la moyenne :

$$\mathfrak{M}_\gamma S(O) - S(O) = \mathfrak{M}_\gamma I(O) - I(O) \quad (2)$$

où l'on pose

$$I(P) = - \iint_{D'} \frac{\text{lap } S}{2\pi} \log \frac{1}{r} d\sigma.$$

Décomposons l'intégrale sur D' en deux parties, l'une relative à l'intérieur de γ , l'autre au domaine obtenu en ôtant le cercle γ de D' . On aura

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P),$$

mais $I_1(P)$ est harmonique à l'intérieur de γ et c'est une fonction continue sur γ ; on aura

$$\mathfrak{M}_\gamma I_1(O) = I_1(O)$$

et comme

$$\mathfrak{M}_\gamma I(O) = \mathfrak{M}_\gamma I_1(O) + \mathfrak{M}_\gamma I_2(O)$$

il s'ensuit que le second membre de (2) devient

$$\mathfrak{M}_\gamma I_1(O) - I_1(O).$$

Or la valeur moyenne du potentiel logarithmique de masses continues dans γ , prise sur γ , est égale à la masse totale M multipliée par $\log \frac{1}{\rho}$ [cf. ch. I, § 22 ; le passage de l'espace au plan est aisé] et il est manifeste que le potentiel en O , $I_2(O)$ qui est de la forme $\sum m_i \log \frac{1}{r_i}$, est en valeur absolue supérieur à $M \log \frac{1}{\rho}$, car $\frac{1}{r_i} > \frac{1}{\rho}$ et $M = \sum m_i$; de plus, les masses sont positives ou nulles, donc

$$\mathfrak{M}_\gamma I_2(O) - I_2(O) \leq 0,$$

et dès lors

$$\mathfrak{M}_\gamma S(O) - S(O) \leq 0 ;$$

S est bien surharmonique dès que son laplacien n'est pas positif.

Ces deux dernières propriétés prouvent donc qu'il existe des fonctions surharmoniques dans un domaine ; il suffit pour en construire de calculer le potentiel logarithmique de masses continues (à densité positive) réparties dans une région D , ce potentiel est précisément surharmonique dans D .

112. Une dernière propriété utile pour la suite permet de construire des fonctions surharmoniques dans un domaine D lorsqu'on en connaît qui le sont dans une certaine région de D .

Soient $S(P)$ surharmonique dans D , C' une courbe limitant un domaine D' situé dans D , et considérons une fonction U harmonique dans D' égale à S sur C' . La fonction S_1 qui coïncide avec U dans D' et avec S dans le reste de D est surharmonique dans D .

Il suffit de montrer que pour tout point O intérieur à D on a

$$\varpi_{\mathcal{K}_\gamma} S_1(O) \leq S_1(O)$$

ce qui est très facile ; le lecteur le verra bien.

Solution du problème de Dirichlet pour un domaine dont la frontière a des points anguleux.

113. La méthode que nous allons développer est d'une très grande puissance, elle permet de résoudre le problème de Dirichlet pour des domaines extrêmement variés, mais comme pour les applications que nous avons en vue, il suffit d'en connaître les résultats pour un domaine dont la frontière est formée d'un nombre fini d'arcs analytiques et réguliers, nous nous bornerons à indiquer la marche à suivre pour le cas général, en cherchant à être rigoureux pour le cas qui nous occupe. On verra que les hypothèses que nous formulerons s'appliquent à d'autres domaines que ceux que nous considérons, parfois cependant les propositions que nous énoncerons, presque évidentes pour notre cas simple, doivent être démontrées assez laborieusement pour les cas plus compliqués.

Un domaine D , limité par une frontière C , formée d'un nombre fini d'arcs analytiques et réguliers, peut toujours être considéré comme la limite d'une suite de domaines $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ fermés pour lesquels le problème de Dirichlet est résoluble et tels que chaque point *intérieur* à D puisse être le centre d'une circonférence qui soit intérieure à une infinité de domaines D_i . Il suffit d'imaginer des courbes $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ sans points anguleux dont C soit limite, par exemple. Quelquefois même les D_i peuvent ne pas être distincts, c'est ce qui arrive si l'on imagine que D est le domaine limité par deux cercles D_a et D_b qui se coupent. On fera $D_1 = D_a, D_2 = D_b, D_3 = D_a, D_4 = D_b, \dots$ Dans ce dernier cas, la méthode de résolution que nous allons donner se confond dans ses grandes lignes avec le *procédé alterné* de Schwarz ¹.

¹ Cf. PICARD, *Traité d'Analyse*, II, p. 81 et GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, III, p. 207.

114. Soit une fonction $S_o(P)$ surharmonique dans D et sur sa frontière, c'est-à-dire surharmonique dans un domaine contenant D et sa frontière.

Formons la suite de fonctions $S_1(P), S_2(P), \dots, S_n(P), \dots$, définies par les règles que voici :

$$S_1(P) = S_o(P) \quad \text{si } P \text{ est dans } D - D_1,$$

$S_1(P)$ = la fonction harmonique dans D_1 , qui prend sur C_1 les valeurs que S_o y prend ;

$$S_2(P) = S_1(P), \quad \text{si } P \text{ est dans } D - D_2,$$

$S_2(P)$ = la fonction harmonique dans D_2 , qui prend sur C_2 les valeurs que S_1 y prend ;

.....

$$S_n(P) = S_{n-1}(P), \text{ si } P \text{ est dans } D - D_n,$$

$S_n(P)$ = la fonction harmonique dans D_n , qui prend sur C_n les valeurs que S_{n-1} y prend.

.....

Il convient donc de résoudre un problème de Dirichlet pour chaque S_i , mais comme il s'agit du domaine D_i de frontière C_i , nous savons qu'il est possible d'en trouver la solution.

Les $S_i(P)$ sont continues et surharmoniques dans D . Je dis qu'on a $S_{i+1}(P) \leq S_i(P)$, quel que soit P intérieur à D , car si P est dans $D - D_{i+1}$ il y a égalité, et si P est dans D_{i+1} , comme S_{i+1} est harmonique dans D_{i+1} , elle y est inférieure ou égale en chaque point à la fonction surharmonique S_i qui prend sur C_{i+1} les mêmes valeurs que S_{i+1} .

Enfin, comme on peut choisir $S_o(P)$ bornée dans les deux sens dans D et sur sa frontière, la suite $S_n(P)$ ne devient jamais inférieure en aucun point P de D au minimum de $S_o(P)$, car le minimum d'une fonction surharmonique ne peut être que sur la frontière du domaine où elle est surharmonique ; comme il en est de même pour les fonctions harmoniques, en un point P intérieur à D_i , $S_i(P)$ est supérieure ou égale à son minimum qui est sur C_i , lequel minimum est supérieur ou égal à celui de S_{i-1} , etc... lequel est supérieur ou égal à celui de S_o .

115. La suite $S_n(P)$ converge donc en chaque point P intérieur à D . Le passage à la limite définit donc une fonction à l'intérieur de C . Je dis que cette fonction est *harmonique* dans D .

En effet, chaque point P intérieur à D est le centre d'un cercle γ dont tous les points, périphérie comprise, sont intérieurs à une infinité de domaines D_i , soient $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_n}, \dots$

Or les fonctions $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_n}, \dots$, sont harmoniques dans γ et sur sa circonférence, en vertu de leur définition même. Comme, dans γ ,

$$S_{i_{n+1}}(P) \leq S_{i_n}(P),$$

et comme la suite S_{i_n} est bornée, la proposition due à Harnack (chap. III, § 80) nous permet d'affirmer, d'une part, que la convergence des S_{i_n} est uniforme dans tout domaine intérieur à γ et, d'autre part, que la fonction limite est harmonique dans γ . On peut donc énoncer les résultats obtenus dans le théorème suivant :

La suite $S_0(P), S_1(P), S_2(P), \dots, S_n(P), \dots$ converge en tout point de D vers une fonction $U(P)$ harmonique à l'intérieur de D ; la convergence est uniforme à l'intérieur de toute courbe fermée Γ complètement intérieure à D .

Fonctions barrières.

115. M. Lebesgue ¹ a introduit une notion, celle de *fonction barrière*, qui permet de simplifier les discussions relatives aux points de la frontière ; en voici la définition, d'après Kellogg :

Un domaine D étant donné, et un point M de sa frontière étant considéré, la fonction $B(P, M)$ est dite fonction barrière de D en M si, par rapport à P , elle est continue et surharmonique dans D , si elle tend vers zéro lorsque P tend vers M , et si, hors de toute circonférence centrée en M , elle a dans D , une borne inférieure positive.

On démontre un théorème extrêmement général : *La condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Dirichlet soit résoluble pour D , quelle que soit la suite continue de valeurs données sur la frontière C , est qu'il existe une fonction barrière de D en chaque point de sa frontière.*

Nous allons d'abord démontrer que cette condition est nécessaire. Si le problème de Dirichlet est possible pour D , quelle que soit la suite continue de valeurs données sur C , il est possible pour la donnée

$$f(M) = r = MP.$$

M étant fixe, la fonction r de P a un laplacien positif $\frac{1}{r}$, donc elle est sous-harmonique dans D , et la fonction harmonique $B(P, M)$ qui a les mêmes valeurs frontières n'est jamais inférieure à r . Si P tend vers M , $B(P, M)$ tend vers zéro. Donc $B(P, M)$ est une fonction barrière de D en M .

¹ Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 154, 1912.

116. La démonstration qui assure la suffisance de cette condition est simple, si l'on admet qu'il est possible de trouver une fonction S_o sur-harmonique dans D et sur C , donc dans un domaine qui déborde un peu hors de C et qui prenne sur C des valeurs données formant une suite continue. Il existe évidemment une infinité de telles fonctions, le procédé que nous allons donner pour résoudre le problème de Dirichlet conduira dans notre cas à une solution qui est indépendante du choix de S_o parce que nous savons que si le problème de Dirichlet est possible, sa solution est unique avec le domaine très simple auquel nous nous tenons [chap. III, § 68, II].

Supposons en effet qu'une fonction barrière existe pour chaque point frontière de D . Nous allons montrer alors que la fonction $U(P)$, qui est la limite des $S_n(P)$ du § 114, si l'on a choisi S_o comme on vient de le dire, est précisément la solution cherchée et unique du problème de Dirichlet.

Soit $\varepsilon > 0$, il y a une circonférence γ centrée en M telle que si P est à son intérieur

$$|S_o(P) - S_o(M)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

si P est hors de γ , le quotient

$$\frac{S_o(P) - S_o(M)}{PM}$$

est borné supérieurement par un nombre N . Donc

$$S_o(P) \leq S_o(M) + Nr. \quad (r = PM)$$

De plus, soit $B(P, M)$ la fonction barrière supposée existante pour chaque M ; lorsque P est hors de γ , mais dans D , $B(P, M)$ a une borne inférieure positive et $\frac{B(P, M)}{r}$ est aussi borné inférieurement par un nombre positif b .

Donc, pour tout point P situé dans D , mais hors de γ ,

$$Nr \leq \frac{N}{b} B(P, M)$$

puisque $\frac{B}{b} \geq 1$; par suite,

$$S_o(P) - S_o(M) \leq \frac{N}{b} B(P, M),$$

et comme $B(P, M) \geq 0$, on aura en tous les points de D :

$$S_o(P) \leq S_o(M) + \frac{N}{b} B(P, M) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le second membre est (en P) surharmonique dans D ; l'inégalité subsistera encore, avec le cas limite de l'égalité, si l'on remplace le premier membre, dans tout domaine fermé D' intérieur à D , par la fonction harmonique qui coïncide avec lui sur la frontière C' de D' . En prenant pour C' successivement les courbes $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ on aura au premier membre successivement $S_1(P), S_2(P), \dots, S_n(P), \dots$ et par suite

$$U(P) \leq S_o(M) + \frac{N}{b} B(P, M) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout point P intérieur à D . Si enfin, P' , point intérieur à D , est dans un cercle γ_1 centré en M pour chaque point P duquel

$$B(P, M) < \frac{b\varepsilon}{2N}$$

on a

$$U(P) \leq S_o(M) + \varepsilon.$$

De plus, $U(P)$ est la limite d'une suite de fonctions surharmoniques dont les valeurs S_n sur les contours C_n appartiennent à des fonctions continues dans D et sur C , ces valeurs diffèrent de moins de ε en des points suffisamment voisins. Si on considère alors sur C la fonction $S_o(M) - \varepsilon$, on aura par la définition des fonctions surharmoniques :

$$U(P) \geq S_o(M) - \varepsilon$$

si P , point intérieur à D , est dans une circonférence γ_2 de centre M et de rayon assez petit. $U(P)$ vérifie donc les deux inégalités précédentes dans le plus petit des cercles γ_1 et γ_2 et par suite

$$\lim_{P \rightarrow M} U(P) = S_o(M).$$

Le théorème est démontré, mais on voit par la démonstration un fait de plus. Appelons *points réguliers de Dirichlet* de la frontière (ou points réguliers, sans plus, s'il n'y a pas d'équivoque) ceux pour lesquels une fonction barrière existe et *points exceptionnels* les autres. On peut dire alors :

La fonction harmonique $U(P)$ construite au moyen de la suite $S_n(P)$ tend vers la valeur de la donnée en tout point régulier de Dirichlet M sur le contour si P tend vers M .

Exemples de fonctions barrières.

117. La définition de la fonction barrière fait intervenir tout le domaine D , puisqu'on suppose que $B(P, M)$ a dans D une limite infé-

rière positive. On peut cependant s'affranchir de cette condition globale, et la remplacer par une condition locale.

On voit bien que la fonction barrière $B(P, M)$ pour D en M est aussi une fonction barrière pour tout domaine intérieur à D qui a M comme point frontière.

Soit, d'autre part, un domaine D' contenant D mais coïncidant avec D à l'intérieur d'un cercle γ arbitrairement petit centré en M . Si $B(P, M)$ est une fonction barrière pour D en M , il sera possible de construire une fonction barrière pour D' en M de la manière suivante. Soit b la borne inférieure (qui est positive) de $B(P, M)$ dans D , mais hors de γ . La fonction $B'(P, M)$, égale dans γ à la plus petite des deux fonctions $B(P, M)$ et b , et égale hors de γ à b , est évidemment continue et surharmonique dans D , elle tend vers zéro si P tend vers M , et dans D , elle a une borne inférieure positive.

Grâce à cette extension, la régularité de M sur C dépend de circonstances purement locales.

118. Nous allons démontrer le théorème suivant qui donne un exemple de fonction barrière.

Le problème de Dirichlet est résoluble pour le domaine D si chacun de ses points frontières se trouve sur une circonférence dont aucun autre point ne se trouve dans D .

Soit γ une telle circonférence passant par le point frontière M .

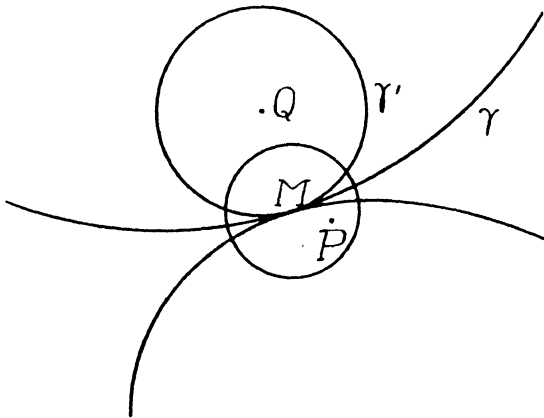


Fig. 12.

Construisons la circonférence γ' , tangente à γ et intérieure à γ , de centre Q et de rayon a . La fonction

$$B(P, M) = \log \frac{1}{a} - \log \frac{1}{r} = \log \frac{r}{a},$$

où $r = PQ$, est une fonction barrière pour D en M . On peut trouver, en effet, un cercle Γ centré en M tel que pour ses points qui sont intérieurs à D , $B(P, M)$ ait une borne inférieure positive — il suffit de prendre le rayon de Γ moindre que a — de plus $B(P, M)$ est harmonique — donc surharmonique — dans D et, si P tend vers M , B tend vers zéro.

On voit donc, en particulier, qu'un contour C formé d'un nombre fini d'arcs analytiques et réguliers ne contient que des points réguliers si les pointes, c'est-à-dire les points en lesquels se rencontrent deux arcs analytiques différents, ne sont pas *rentrantes*.

119. Pour traiter le cas des sommets rentrants, on peut encore trouver une fonction barrière ; celle-ci s'appliquera même au cas des pointes sortantes.

Le problème de Dirichlet est résoluble pour le domaine D si chacun de ses points frontières se trouve au sommet d'un angle à l'intérieur et sur les côtés duquel ne se trouve aucun point de D .

Comme la régularité est purement locale, il faut atténuer la rigidité de l'énoncé précédent en faisant remarquer qu'il suffit qu'aucun point de D ne se trouve dans la portion de l'angle en question qui est voisine du sommet M ; autrement dit, il n'y a pas de point de D dans le secteur déterminé par cet angle dans un cercle de centre M et de rayon fini.

La démonstration est simple : soit donc un point M et un angle AMB ne contenant aucun point de D ni de C . Comptons les angles de AM vers BM et soit α la mesure de AMB . Considérons un point P du plan

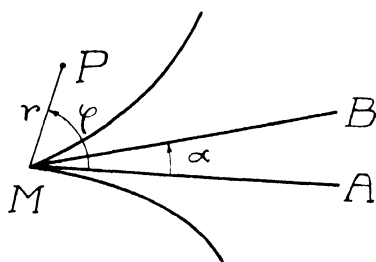


Fig. 13.

et soient r et φ ses coordonnées polaires relativement au pôle M et à l'axe MA . La fonction

$$B(P, M) = r^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}} \sin \frac{\pi}{2\pi - \alpha} (\varphi - \alpha)$$

est la fonction barrière cherchée, car

$$r^{\gamma} \cos \gamma \varphi \text{ et } r^{\gamma} \sin \gamma \varphi$$

sont deux fonctions harmoniques de P , quelle que soit la constante réelle γ , elles sont en effet ¹ les parties réelles et imaginaires d'une branche de z^γ ; de plus $\lim_{P \rightarrow M} B(P, M) = 0$, car $2\pi - \alpha > 0$; enfin,

hors de la circonférence de rayon ρ , centrée en M , elle a pour P dans D une borne inférieure positive puisque hors de AMB , c'est-à-dire pour $\alpha < \varphi < 2\pi$, le sinus de $\frac{\pi}{2\pi - \alpha}(\varphi - \alpha)$ est positif; on trouvera facilement cette borne si les points de D (voisins de M) sont tels que $\alpha < \alpha_1 < \varphi < 2\pi - \alpha_2 < 2\pi - \alpha$.

On voit donc que les pointes rentrantes sont encore des points réguliers de la frontière C pour le problème de Dirichlet, pour autant que ce ne sont pas des points de rebroussement de C . Mais même ces points sont des points réguliers de Dirichlet, comme on pourrait le montrer, mais nous n'aurons pas à utiliser ce résultat. Dans l'espace, au contraire, la pointe rentrante parfaitement effilée, *l'épine*, comme on dit parfois, présente des complications telles que l'on ne peut pas trouver de fonction barrière pour son extrémité.

120. Il convient de remarquer que l'extension qui a été donnée à la méthode de Fredholm repose sur une hypothèse dont nous n'avons pas démontré le bien-fondé.

Est-il possible de trouver une fonction surharmonique dans D qui prenne sur C des valeurs données?

Remarquons que toute fonction f de deux variables (x, y) , donc du point P courant dans un plan, définie dans un domaine D où elle est continue ainsi que sur la frontière C , est représentable par un polynôme en x et y dans D et sur C avec l'approximation que l'on veut, autrement dit, il existe un polynôme $\Pi(P)$ tel que

$$|f(P) - \Pi(P)| < \varepsilon$$

pour P quelconque situé dans D ou sur C ².

Comme il est possible — et d'une infinité de manières — de trouver une fonction $f(P)$ continue dans D et qui prenne sur C les valeurs

¹ Cf. Appendice, § 24.

² On peut donner de ce théorème de Weierstrass une démonstration très simple due à M. Lebesgue.

On part d'une fonction $f(x)$ continue, on peut l'approcher d'aussi près qu'on veut par une fonction $\varphi(x)$, telle que la courbe $y = \varphi(x)$ soit un polygone inscrit dans la courbe $y = f(x)$. On va s'occuper des fonctions $\varphi(x)$; chacune d'elles est la somme de fonctions continues représentées chacune par les deux côtés d'un angle; la plus simple de ces fonctions est $|x|$, et il suffit de savoir représenter celle-ci pour en déduire la représentation de toutes. Or si $u = 1 - x^2$, on aura

$$|x| = + \sqrt{x^2} = + \sqrt{1 - u}$$

$f(M)$ ¹, (donnée du problème de Dirichlet) et comme, d'autre part, $f(P)$ peut être remplacée à l'approximation que l'on veut par un polynôme $\Pi(P)$, tout revient à prendre pour la fonction $S_o(P)$ un polynôme surharmonique dans D .

Mais on peut même faire tomber la condition pour ce polynôme d'être surharmonique. Soit, en effet, un polynôme dont on puisse affirmer seulement qu'il est la différence de deux polynômes surharmoniques Π_1 et Π_2 . Si l'on prend dans la méthode de Kellogg, $S_o = \Pi_1$, puis $S_o = \Pi_2$, on trouve deux fonctions harmoniques U_1 et U_2 comme fonctions limites; or la même méthode eût donné, appliquée à $S_o = \Pi_1 - \Pi_2$, la fonction limite $U_1 - U_2$.

Soit, dès lors, $\Pi(P)$ le polynôme qui donne l'approximation de $f(P)$ à moins de ε . S'il est surharmonique, par hasard, on fait $S_o(P) = \Pi(P)$ et $U(P)$ est la fonction qui résoud le problème de Dirichlet à ε près. Sinon, on forme le laplacien de $\Pi(P)$, ce sera un polynôme en x et y , il est borné dans D et sur C par un nombre K .

Formons alors les deux polynômes

$$\Pi_1(P) = \Pi(P) - \frac{K(x^2 + y^2)}{4}, \quad \Pi_2(P) = -\frac{K(x^2 + y^2)}{4};$$

on a $\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$ et d'autre part

$$\text{lap } \Pi_1 \leq 0 \quad \text{lap } \Pi_2 \leq 0 \quad (\text{dans } D)$$

car $\text{lap } (x^2 + y^2) = 4$.

Donc, si l'on prend $S_o(P) = \Pi(P)$, le procédé de Kellogg converge vers une fonction harmonique qui résoud le problème de Dirichlet à l'approximation que l'on désire.

On recourra au livre de Kellogg pour se rendre compte de l'extension

et la formule du binôme donne le développement en série entière de u , donc en série de polynômes de x .

Pour le cas des fonctions de deux variables $f(x, y)$, on considère les points $x = m a$, $y = n b$, a et b étant deux constantes, m et n tous les entiers possibles. Ces points sont les sommets d'un réseau formé de rectangles; soit l'un de ces rectangles, par exemple, celui dont $(0, 0)$, (a, b) sont des sommets opposés. Il existe une fonction

$$z = Axy + Bx + Cy + D$$

et une seule, égale à $f(x, y)$ aux quatre sommets; elle est représentée pour les points du rectangle par un morceau de parabolôïde elliptique. Ces morceaux forment une surface $z = \varphi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ est une fonction d'autant plus approchée de $f(x, y)$ que a et b sont plus petits. Or $\varphi(x, y)$ est une somme de fonctions dont les plus simples sont $|xy|$, $x|y|$, $|x|y$ et nous savons représenter ces fonctions de façon approchée par des polynômes. [LEBESGUE, *Notice sur ses Travaux scientifiques*, Toulouse, Privat, 1922, p. 52-53.]

¹ Avec les frontières que nous considérons, ce fait est géométriquement évident.

que peut prendre cette méthode : la frontière C peut s'étendre à l'infini, des fonctions barrières de types divers peuvent être construites qui donnent de nouveaux critères de régularité des points frontières, etc., etc.

Il est cependant possible de résoudre le problème de Dirichlet pour un domaine dont la frontière a des pointes par le moyen d'une équation intégrale, mais elle est singulière et sa résolution met en œuvre des méthodes mathématiques très difficiles ; on se reportera aux travaux de M. Carleman qui donnent justement cette solution ¹.

Exercices.

Domaines multiplement connexes. La solution du problème de Dirichlet donnée par la méthode de Fredholm suppose que le domaine est simplement connexe, parce que l'équation intégrale repose sur les propriétés du potentiel de double couche et particulièrement sur ses discontinuités près de la couche lorsque celle-ci recouvre *une surface fermée* dont tous les points sont réguliers. Le texte établit que la solution peut s'étendre par des passages à la limite aux cas où le contour simple a des points anguleux, mais la même méthode permet de traiter les domaines multiplement connexes.

Montrer qu'on peut tracer des coupures dans un domaine plan multiplement connexe de manière à limiter des domaines simplement connexes pour lesquels le problème de Dirichlet est résoluble (soit par la méthode de Fredholm, soit déjà par l'extension dont le chapitre précédent expose les principes). Construire de tels domaines, par exemple, R_1 et R_2 , si le domaine est doublement connexe. On considère alors la suite infinie

$$R_1, R_2, R_1, R_2, R_1, R_2, \dots$$

à laquelle on applique la méthode du texte. Démontrer alors que le problème de Dirichlet est résoluble pour des domaines multiplement connexes et limités par des contours formés chacun d'un nombre fini d'arcs analytiques et réguliers.

2. Extension de la méthode de Kellogg au cas de l'espace. On cherchera à généraliser les exemples de fonctions barrières. [*Cf.* Bouligand, Bulletin des Sciences mathématiques, Vol. 48].

¹ Inaugural-Dissertation : *Ueber das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken*, Uppsala, 1916 et aussi Uppsala Universitets Årsskrift 1923 (Matematik och Naturvetenskap, 3).

CHAPITRE VII

Représentation conforme des aires planes.

Problème de Riemann.

121. Plusieurs problèmes d'hydrodynamique plane se simplifient lorsqu'on ramène les domaines auxquels ils se rapportent à des cercles. Ces réductions se font par le moyen d'une représentation conforme, c'est-à-dire par l'établissement, entre les points d'un domaine donné et les points d'un cercle, d'une correspondance qui conserve les angles. Or, on sait que toute représentation conforme d'une partie d'un plan complexe z sur une partie d'un plan complexe Z s'obtient par le moyen d'une fonction monogène $f(z)$:

$$Z = f(z).$$

Riemann a formulé un théorème dont la démonstration complète n'a été obtenue qu'après lui. Soit un domaine D simplement connexe que nous supposerons limité par une courbe C pour laquelle le problème de Dirichlet est résoluble. Voici l'énoncé du *problème de Riemann* :

Etablir entre les points du domaine D et les points intérieurs à un cercle Γ de rayon égal à un, une correspondance biunivoque qui soit conforme.

Le théorème de Riemann affirme que ce problème est résoluble.

Représentation conforme d'un cercle sur lui-même.

122. Si le problème précédent a une solution, il en a une infinité comme le prouve le lemme suivant :

La fonction

$$Z' = \frac{Z - a}{1 - \bar{a}Z} e^{iz} \quad (1)$$

où a est un nombre complexe de module inférieur à un, \bar{a} le nombre conjugué et α une constante, transforme l'intérieur du cercle de rayon un en lui-même.

Il suffit de montrer que si $|Z| < 1$, on a aussi $|Z'| < 1$; comme la transformation est homographique, on peut la résoudre univoquement :

$$Z = \varphi(Z'),$$

φ étant d'ailleurs homographique aussi et, si le problème posé plus haut fait correspondre au point z de D le point Z de Γ par la relation

$$z = F(Z),$$

la relation

$$z = F[\varphi(Z')]$$

fera correspondre au point z de D le point Z' de Γ .

La démonstration du lemme précédent est immédiate, car

$$Z'\bar{Z}' = \frac{Z - a}{1 - \bar{a}Z} e^{i\alpha} \frac{\bar{Z} - \bar{a}}{1 - a\bar{Z}} e^{-i\alpha} = \frac{Z\bar{Z} - a\bar{Z} - \bar{a}Z + a\bar{a}}{1 - \bar{a}Z - a\bar{Z} + a\bar{a}Z\bar{Z}}$$

et si $Z\bar{Z} = 1$,

$$Z'\bar{Z}' = \frac{1 + a\bar{a} - a\bar{Z} - \bar{a}Z}{1 + a\bar{a} - a\bar{Z} - \bar{a}Z} = 1;$$

les deux circonférences se correspondent point par point et, comme au point a correspond $Z' = 0$, les intérieurs des cercles se correspondent biunivoquement.

123. De plus, si deux cercles C_1 et C_2 se correspondent conformément (avec conservation du sens des angles), il y a entre Z_1 et Z_2 une relation homographique.

Comme on peut toujours transformer C_1 et C_2 par deux homographies convenables dans le cercle Γ centré en O de rayon 1, il suffit de démontrer que toute transformation conforme du cercle Γ en lui-même est une homographie.

Soit, en effet,

$$Z = f(z)$$

une transformation conforme de Γ en lui-même, $f(z)$ est holomorphe. En vertu de l'extension du principe de symétrie (Appendice, § 42), on peut prolonger $f(z)$ hors de Γ , car Z décrit précisément un arc de cercle (et même une circonférence tout entière) lorsque z décrit la circonférence de Γ . Or le domaine symétrique de Γ relativement à sa frontière est l'extérieur de Γ tout entier.

La fonction

$$Z = F(z)$$

vaut donc en un point z extérieur à C_1 :

$$F(z) = \text{conjugué de } \frac{1}{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

car $\frac{1}{\bar{z}}$ est le symétrique de z par rapport à Γ . Soit $a \neq 0$, le point pour lequel $f(a) = 0$. En $\frac{1}{\bar{a}}$, $F(z)$ a un pôle, c'est le seul point singulier de $F(z)$ qui prend d'ailleurs toute valeur finie une et une seule fois. $\frac{1}{\bar{a}}$ est un pôle simple car $\frac{1}{F(z)}$ a un zéro d'ordre un en ce point, sinon $F(z)$ prendrait certaines valeurs plus d'une fois, comme le montrerait la transformation $z = \varphi(Z)$. La fonction

$$\left(z - \frac{1}{\bar{a}}\right) F(z)$$

est holomorphe en $z = \frac{1}{\bar{a}}$, et la fonction

$$\left(z - \frac{1}{\bar{a}}\right) \frac{F(z)}{z - a}$$

n'a ni pôle, ni zéro dans tout le plan ; elle est régulière à l'infini, car si $z \rightarrow \infty$, $F(z) = \frac{1}{f(0)}$; elle est donc bornée dans tout le plan ; en vertu du théorème de Liouville (Appendice, § 32), c'est une constante, et même une constante de module unité. Donc

$$F(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - \frac{1}{\bar{a}}}.$$

Si $f(0) = 0$, $F(z)$ est infinie en $z = \infty$, $\frac{F(z)}{z}$ est bornée et l'on a

$$F(z) = e^{i\alpha} z.$$

124. La transformation homographique qui permet de représenter conformément le cercle unité, et, par suite, tout cercle sur lui-même et tout cercle C_1 sur un cercle C_2 , dépend du nombre complexe a et du nombre réel α ; il y a donc trois indéterminées, trois paramètres réels, dans l'équation de la transformation. On voit qu'ils sont fixés lorsqu'on

sait, d'une part, quel point correspond au centre du cercle, c'est justement, pour Γ sur lui-même, $a = A + Bi$, et, d'autre part, lorsqu'on se donne deux points correspondants sur la frontière, puisqu'en effet en modifiant α , on fait tourner le cercle transformé par $\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ autour de son centre.

On peut voir aussi que ces paramètres sont déterminés par la donnée d'une paire de points correspondants (z_0, Z_0) ou (z_1, z_2) et, en ces points, d'une paire de tangentes correspondantes (\vec{t}_0, \vec{T}_0) ou (\vec{t}_1, \vec{t}_2) . Il faut entendre par là que toute courbe c_0 qui passe par z_0 et qui admet \vec{t}_0 comme tangente se transforme dans la correspondance en une courbe C_0 passant bien entendu par Z_0 et dont la tangente en ce point est \vec{T}_0 . Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce théorème.

Enfin, notre démonstration prouve aussi que l'on peut représenter un cercle conformément sur son extérieur et que toute transformation de cette nature est donnée par une fonction homographique

$$Z' = e^{i\beta} \frac{z - \bar{b}}{z - b}$$

où b est l'affixe du point intérieur au cercle qui correspond au point à l'infini.

Résolution du problème de Riemann.

125. Tout d'abord, si ce problème a une solution, il en a une infinité. En effet, si D est représenté conformément sur Γ , par la fonction

$$Z = f(z),$$

en faisant subir à Z une transformation homographique qui conserve l'intérieur de Γ , on obtient encore une solution du problème de Riemann.

On peut donc se donner le point du domaine D qui doit correspondre au centre de Γ , et en ces deux points correspondants, on peut fixer deux directions correspondantes ¹, ou bien si l'on sait établir la correspondance entre les points des frontières qui résulte de la correspondance entre les points intérieurs des domaines, on pourra se donner une paire de points correspondants sur les frontières.

Il existe des méthodes directes, fondées uniquement sur la théorie des fonctions d'une variable complexe, pour résoudre le problème de Rie-

¹ Nous ne disons pas deux droites correspondantes. (Appendice, § 10.)

mann. Nous emploierons une méthode moins directe, qui utilise les propriétés des fonctions harmoniques et qui ramène ce problème au problème de Dirichlet. Le domaine D que nous considérerons sera un domaine pour lequel nous savons résoudre le problème de Dirichlet. Il sera limité par *une* courbe fermée C formée d'un nombre fini d'arcs analytiques et réguliers qui se rejoignent deux à deux en des points que nous appellerons des *pointes*. Le cercle Γ sera un cercle de rayon un, dont le centre sera à l'origine du plan de Γ .

126. Soit alors z la variable représentant les points de D et Z celle qui donne les affixes des points de Γ . La solution du problème, si elle existe, sera donnée par la formule

$$Z = f(z),$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans D .

Au point m , $z = a$, correspond le point $Z = 0$, c'est dire que

$$f(a) = 0,$$

et, par suite,

$$f(z) = (z - a)^\alpha g(z),$$

où $g(z)$ est une fonction qui ne s'annule pas dans D , sinon il y aurait au moins deux points de D qui correspondraient au centre de Γ ; de plus $\alpha = 1$, sinon la fonction inverse de $f(z)$:

$$z = \varphi(Z)$$

ne serait pas holomorphe dans Γ . (*Cf.* Appendice, § 10, III et la note p. 105). Puisque $g(z)$ ne s'annule pas dans D , son logarithme a une infinité de branches qui sont toutes uniformes dans D , soit $G(z)$ l'une d'elles; posons donc:

$$G(z) = \log g(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

$U(x, y)$ et $V(x, y)$ sont des fonctions harmoniques dans D . On aura:

$$f(z) = (z - a) e^{U + iV},$$

et si l'on pose

$$z - a = r e^{i\theta},$$

il viendra:

$$f(z) = e^{\log r + U + i(V + \theta)}.$$

Astreignons cette fonction à représenter les affixes des points de la circonférence de Γ lorsque z tend vers les points de la frontière de D . Il faut pour cela que

$$|f(z)| = 1,$$

si z est sur C . Il faut donc qu'on ait

$$\log r + U + i(V + \theta) = 0,$$

lorsque $z = a + re^{i\varphi}$ est sur C , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\log r \\ V(x, y) &= -\theta. \end{aligned}$$

La première de ces équations apprend que la fonction $U(x, y)$, harmonique dans D , prend sur C une suite continue de valeurs représentées par la fonction $-\log r = -\log \overline{mp}$, p étant un point courant sur C .

La fonction $U(x, y)$ est donc la solution du problème de Dirichlet pour le domaine D , la suite des valeurs données sur D étant définie immédiatement lorsqu'on connaît la distance du point m à l'un quelconque des points de C . Nous savons que cette fonction existe. La méthode de Kellogg (chap. VI) permettrait même de la construire, si C a des pointes, par un passage à la limite opéré sur les solutions d'une infinité d'équations intégrales.

Cette fonction $U(x, y)$ étant connue, il est possible de trouver la fonction $V(x, y)$ qui lui est conjuguée, c'est-à-dire qui est telle que

$$U + iV$$

soit une fonction monogène de $z = x + iy$. Les formules du § 8 de l'Appendice, permettent d'écrire :

$$V(x, y) = -\int_{x_0}^x \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial U(x_0, y)}{\partial x} dy + V_0$$

et l'on peut fixer la constante V_0 de manière que V ait une valeur donnée lorsque $\theta = \theta_0$, ce qui assure la correspondance de deux points, l'un sur la circonférence de Γ d'argument θ_0 , l'autre sur C .

Donc, s'il est possible de résoudre le problème de Riemann, la solution en est de la forme

$$Z = f(z) = (z - a) e^{U(x, y) + iV(x, y)},$$

U et V étant définies comme on vient de le dire.

127. Il faut montrer qu'effectivement la fonction $f(z)$ dont on vient de déterminer la forme résoud le problème de Riemann, c'est-à-dire qu'elle établit la correspondance biunivoque et conforme cherchée entre les intérieurs de D et de Γ .

Que la correspondance soit conforme, la monogénéité de $f(z)$ l'as-

sure. Il reste à voir qu'à tout point du domaine Γ ne correspond qu'un point du domaine D .

Posons

$$f(z) = e^{P+iQ};$$

avec

$$P(x, y) = U(x, y) + \log|z - a|.$$

$$Q(x, y) = V(x, y) + \theta.$$

La fonction P est harmonique dans D sauf en m où elle devient infinie comme $\log|z - a|$, c'est-à-dire que, près de m , P est négative et très grande en valeur absolue; en m , $P = -\infty$.

L'équation

$$P(x, y) = k,$$

où k est une constante représente une famille de courbes à un paramètre. Pour $k = 0$, on a la frontière C de D . D'autre part, remarquons que tout point (x, y) de D rend $P(x, y)$ négatif, sinon dans le domaine D' , obtenu en ôtant de D un petit voisinage de m , P harmonique dans D' prendrait en quelque point une valeur supérieure à celles qu'elle prend sur la frontière de D' , ce qui est impossible [chap. III, § 73]. Par conséquent, les courbes

$$P(x, y) = k \quad (k < 0)$$

sont des lieux de points intérieurs à D . De plus, ce sont des courbes fermées, ne se coupant pas elles-mêmes, entourant le point m d'abscisse a , et telles que chacune d'elles contient à son intérieur toutes celles pour lesquelles k a une valeur absolue supérieure.

On démontre ce fait important en remarquant que la surface représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$\zeta = P(\xi, \eta)$$

pour (ξ, η) intérieur à D , est tout entière au-dessous du plan des ξ, η , elle est formée d'une nappe qui se perd à l'infini au-dessous du point m ; les lignes de plus grande pente de cette surface descendent vers l'infini; elles partent du bord et leur cote varie toujours dans le même sens. Il en est ainsi parce que les plans

$$\zeta = k \quad (k < 0)$$

coupent la surface suivant des courbes fermées, qui évidemment ne se coupent pas entre elles, car P est uniforme. La courbe C_1 ($k = k_1$) contient à son intérieur la courbe C_2 ($k = k_2$) si $k_2 < k_1$, sinon C_2 lui serait extérieure et dans le domaine limité par C_1 et C , la fonction P prendrait

des valeurs inférieures à celles qu'elle prend sur la frontière. Le point m est donc intérieur à chaque courbe de la famille. Enfin aucune de ces courbes ne peut se couper elle-même, ni être formée de deux branches fermées, sinon il y aurait, dans le premier cas, une région contenant m , et une région à l'intérieur de laquelle V serait harmonique et prendrait sur la frontière une valeur constante ; V serait constante alors dans toute l'aire D' déjà considérée, ce qui n'est pas ; dans le second cas, les deux courbes délimiteraient une sorte de couronne sur les bords de laquelle P aurait une valeur constante et comme elle serait harmonique à son intérieur, elle y serait encore constante.

Considérons une de ces courbes, celle pour laquelle k vaut k_1 , soit C_1 . A C_1 correspond alors par la formule

$$Z = f(z)$$

un cercle Γ_1 concentrique à Γ , car

$$|Z| = e^{\log |z-a| + U} = e^P = e^{k_1}.$$

Lorsque z décrit C_1 , Z décrit Γ_1 ; nous allons voir que si C_1 est décrit dans un sens déterminé, Γ_1 est décrit dans un sens bien déterminé aussi.

En effet

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

et si $\cos \alpha$ et $\cos \beta$ sont les cosinus directeurs de la normale intérieure à C_1 , $\cos \beta$ et $-\cos \alpha$ seront ceux de la tangente à C_1 ; on aura :

$$\frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial P}{\partial y} \cos \beta = -\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial Q}{\partial y} \cos \alpha$$

c'est-à-dire

$$\frac{dP}{dn} = -\frac{dQ}{ds},$$

l'arc s étant compté positivement dans le sens trigonométrique. Or, sur C_1 , $\frac{dP}{dn}$ est négatif, car P décroît lorsque (x, y) entre dans le domaine limité par C_1 ; donc $\frac{dQ}{ds}$ est positif : Q varie sur C_1 toujours dans le même sens, lorsque le point (x, y) décrit C_1 dans le sens positif. Mais

$$Q(x, y) = V(x, y) + \theta,$$

et comme V reprend la même valeur lorsque le mobile est revenu à son point de départ, il faut que θ ait augmenté de 2π pour que Q , cons-

tamment croissante, ait repris une valeur au point de départ qui fasse reprendre à la fonction uniforme $f(z)$ sa valeur primitive.

La correspondance entre les points intérieurs de D et les points intérieurs de Γ est donc bien biunivoque.

128. Il reste à voir comment les contours se correspondent. Si le contour C est formé d'un seul arc analytique et régulier, on sait que la fonction $P(x, y)$ peut être prolongée un peu au delà de C , [chap. III, § 81] la courbe

$$P(x, y) = k$$

pour k positif, mais assez petit, correspond à une circonférence extérieure à Γ et lorsque l'on décrit C dans le sens positif, le point correspondant Z décrit Γ dans le sens positif sans jamais revenir en arrière. La correspondance entre les points de C et ceux de Γ est encore biunivoque, et notre démonstration est achevée pour autant donc que C est formé d'un seul arc analytique et régulier.

129. Si C a des pointes, le problème est différent ; on peut bien prolonger $P(x, y)$ un peu au delà de chaque arc analytique, mais on ne peut rien dire de ce qui se passe à la pointe. Voici comment M. E. Picard

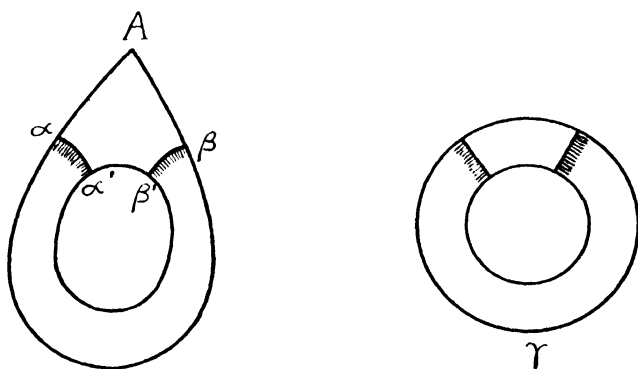


Fig. 14.

traite ce problème¹. On considérera pour simplifier un contour C avec une seule pointe A . Les courbes

$$P(x, y) = k \tag{2}$$

ont des trajectoires orthogonales ($Q = \text{constante}$) ; considérons celles qui partent de deux points α et β voisins de A et situés de part et

¹ *Traité d'Analyse*, t. II, p. 305 de la 2^e édition.

d'autre de A . Si k est très petit et négatif, la courbe (2) coupe ces deux trajectoires en deux points α' et β' très voisins de α et β . Considérons la ligne brisée formée par les arcs $\alpha\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\beta$ et $\beta\alpha$, ce dernier étant le contour auquel on a enlevé αA , et $A\beta$; il y correspond dans le plan Z une portion de la circonférence Γ , deux segments de rayons et un arc intérieur. Comme

$$\frac{dP}{dn} = - \frac{dQ}{ds}$$

et comme $\frac{dP}{dn}$ est négatif sur $\beta\alpha$, les points de cet arc correspondent à des points différents de Γ qui forment un arc γ . Si α et β tendent vers A , γ grandit et finit par recouvrir tout Γ , sinon il y aurait sur Γ un arc γ' qui correspondrait à A ; z , considéré comme fonction de Z , serait une fonction holomorphe dans Γ et tendrait vers une valeur toujours la même, lorsque Z tendrait vers un point quelconque de γ' .

De

$$z = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y),$$

on déduirait que Φ et Ψ pourraient être prolongées au delà de γ' sur quoi elles sont constantes [Appendice, § 40] et $z = \varphi(Z)$ serait donc prolongeable dans la même région. Cependant, une fonction holomorphe dans une aire qui prend la valeur a sur un arc de longueur finie située dans cette aire y est forcément constante, puisque la fonction $\varphi(Z) - a$ ne peut avoir que des zéros isolés si $\varphi(Z) \neq a$. Dès lors, $\varphi(Z)$ serait constante dans toute la région où elle est définie, c'est-à-dire à l'intérieur de Γ . La correspondance est bien biunivoque entre les points des contours.

La démonstration est immédiatement applicable au cas d'un contour à plusieurs pointes.

130. En hydrodynamique, ce n'est pas la représentation conforme d'un domaine sur l'intérieur d'un cercle qu'il est utile de connaître, c'est au contraire la représentation conforme de l'extérieur de C sur l'extérieur de Γ .

Cependant ce nouveau problème se ramène immédiatement au problème de Riemann. Soit, en effet, un cercle γ intérieur à D . Plaçons l'origine du plan z à l'intérieur de γ et considérons la transformation

$$z' = \frac{1}{z}.$$

Elle fait correspondre à la frontière C de D , une courbe fermée c intérieure à γ , et l'intérieur d' de c correspond à l'extérieur de C . Faisons

la représentation conforme de d' sur l'intérieur du cercle Γ de rayon un du plan des Z' ; soit

$$Z' = g(z')$$

la formule de la transformation. Au point Z' faisons correspondre le point

$$Z = \frac{1}{Z'},$$

l'intérieur de Γ se transforme en l'extérieur de Γ . Ainsi donc l'équation

$$Z = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$$

fait correspondre à tout point z extérieur à D , un point Z extérieur à Γ et réciproquement ; les frontières se correspondent point par point si c est un contour formé d'un nombre fini d'arcs analytiques et réguliers, ce qui est le cas si C est de ce type. On sait donc faire la représentation conforme de l'extérieur d'un domaine sur l'extérieur d'un cercle.

Il est visible que du moment où l'on peut choisir une paire de points correspondants à l'intérieur de d' et de γ , on peut s'arranger pour que le point à l'infini du plan z corresponde au point à l'infini du plan Z . La correspondance pourra donc s'écrire dans le voisinage de $z = \infty$:

$$Z = kz + \text{fonction régulière pour } z = \infty.$$

Exercices.

1. Etudier quelques représentations conformes au moyen des fonctions monogènes

$$z^\alpha, e^z, \cos z, \left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

2. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, faire la représentation conforme d'une bande infinie limitée par deux droites parallèles sur un cercle de rayon un.

3. La représentation conforme du demi-plan supérieur, $\Im z > 0$, dans l'intérieur du cercle de rayon un est donnée par :

$$\zeta = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - \bar{a}}$$

a étant un nombre complexe tel que $\Im a > 0$.

4. On considère la fonction $\zeta(z)$ définie par l'équation

$$\zeta(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

où k est un nombre réel, compris entre zéro et un, et où l'on prend la détermination du radical qui vaut $+1$ si $z = 0$, puis on la suit par continuité.

On fait décrire à z l'axe réel en évitant les points $z = 1$ et $z = \frac{1}{k}$ par une demi-circonférence de rayon très petit tracée au-dessus de l'axe réel. Montrer que ζ décrit dans son plan un certain segment de l'axe réel $(O, K - \varepsilon)$ puis un petit arc de courbe autour du point K puis une droite parallèle à l'axe imaginaire de $K + i\varepsilon$ à $K + iK' - i\varepsilon_1$, puis un petit arc de courbe autour de $K + iK'$, puis un segment de droite parallèle à l'axe réel. K et K' sont deux constantes réelles.

On imagine ensuite que z décrit une demi-circonférence de très grand rayon R centrée en O et située au-dessus de l'axe réel, ζ décrit alors un petit arc autour du point iK' .

Enfin on montrera que ζ décrit l'intérieur d'un rectangle lorsque z décrit tout le demi-plan supérieur. Ce rectangle a les sommets :

$$K, K + iK', \quad -K + iK', \quad -K$$

où l'on a précisément posé :

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

Déduire de ce résultat la représentation conforme d'un rectangle sur un cercle.

5. Intégrale de Christoffel-Schwarz.

Soit un polygone de sommets

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n,$$

d'angles

$$\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \dots, \alpha_n \pi.$$

On considère l'intégrale

$$\zeta(z) = \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des constantes réelles telles que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Montrer que si z décrit le demi-plan supérieur, ζ décrit l'intérieur d'un polygone dont les angles sont ceux du polygone donné. Si $n = 3$, on a une représentation conforme du demi-plan $\Im z > 0$ sur l'intérieur d'un triangle semblable à un triangle donné, donc sur l'intérieur du triangle donné si l'on fait un déplacement suivi d'une homothétie convenables.

Si $n > 3$, on peut se proposer de déterminer les a_i connaissant les ζ_i , mais ce problème est très difficile. De plus, si $n > 3$, le polygone qu'on obtient avec l'intégrale précédente peut se recouvrir partiellement de sorte que la représentation n'est pas en général biunivoque. (Voir le livre de M. G. Julia : *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes* ; on trouvera dans cet ouvrage de nombreux exemples de représentation conforme.)

CHAPITRE VIII

Résistance des fluides parfaits. Théorème de Kutta-Joukowski.

Transformation conforme.

131. Un des problèmes les plus importants que la technique pose à l'hydrodynamique est relatif à la résistance qu'oppose un fluide au mouvement d'un solide.

On simplifie le problème en supposant que le solide est au repos et que c'est le fluide qui se meut, puis on le particularise en supposant que le solide est un cylindre indéfini et que le fluide a un mouvement plan, la vitesse de chaque particule étant parallèle à la section droite du cylindre, enfin que le mouvement est permanent, irrotationnel et que le fluide est incompressible.

Soit donc un obstacle dont la section droite D est limitée par la courbe C . Un liquide dont la vitesse à l'infini est \vec{V} (ce serait la vitesse, changée de signe, du solide mobile dans un liquide au repos à l'infini) se meut autour de l'obstacle. Il y a un potentiel des vitesses, par hypothèse :

$$\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi,$$

ou

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

D'autre part, $\rho = \text{const.}$, d'où

$$\text{div } \vec{W} = 0,$$

ce qui permet d'écrire

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Le mouvement se décrit le mieux du monde si l'on connaît la fonction monogène

$$f(z) = \varphi + i\psi, \quad (z = x + iy).$$

On sait que [chap. II, § 59]

$$u - iv = f'(z).$$

Enfin on trouve la pression par le théorème de Bernoulli, c'est-à-dire par l'équation (11) du § 59 ; si l'on suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures agissant sur le fluide, c'est-à-dire si $U = 0$, on aura :

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho W^2. \quad (1)$$

132. Tout revient à calculer φ . Supposons que l'axe des x soit parallèle à la vitesse \vec{V} à l'infini. On doit avoir à l'infini

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 ;$$

de plus la frontière C de l'obstacle doit être une ligne de courant, ce qui s'écrit :

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad \text{sur } C.$$

$\varphi(x, y)$ est une fonction harmonique hors de D , $\varphi_1 = \varphi - Vx$ aussi. Mais, à l'infini :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0,$$

et, si α est l'angle de la normale extérieure à C avec l'axe des x , on aura :

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = -V \cos \alpha, \text{ sur } C.$$

On devra donc résoudre un *problème de Neumann extérieur* pour trouver φ_1 , puis φ .

133. La représentation conforme remplace ce problème pour la courbe C par un problème semblable pour un cercle Γ , et dont la solution est immédiate.

Soit donc Γ le cercle unité du plan ζ . Il y a une fonction

$$\zeta = g(z)$$

qui transforme l'extérieur de D en l'extérieur de Γ , avec correspondance des frontières si C n'a que des points réguliers et un nombre fini de pointes, ce que nous supposons être le cas. [§ 130]. On sait qu'on peut résoudre l'équation précédente :

$$z = h(\zeta).$$

$h(\zeta)$ étant uniforme dans Γ .

Considérons alors la relation

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(z)$$

qui s'écrit

$$\Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta) = f[h(\zeta)] = F(\zeta),$$

lorsqu'on exprime z (ou x et y) en fonction de ζ (ou ξ et η). Aux courbes $\varphi = \text{const.}$ et $\psi = \text{const.}$ du plan z correspondront respectivement des courbes $\Phi = \text{const.}$ et $\Psi = \text{const.}$ du plan ζ ; c'est-à-dire que, dans le plan ζ , on peut considérer $F(\zeta)$ comme définissant un certain mouvement irrotationnel et permanent d'un liquide. Mais il y a plus : on établit ainsi entre les lignes de niveau du plan z et celles du plan ζ une correspondance :

$$\Phi(\xi, \eta) = a \text{ correspond à } \varphi(x, y) = a ;$$

de même

$$\Psi(\xi, \eta) = b \text{ correspond à } \psi(x, y) = b.$$

Or la courbe C est une ligne de courant, c'est-à-dire que l'on peut écrire son équation sous la forme

$$\psi(x, y) = b_0$$

et par suite Γ est aussi une ligne de courant pour le mouvement dans le plan ζ qu'on vient de construire :

$$\Psi(\xi, \eta) = b_0.$$

Cherchons encore à préciser la fonction $g(z)$, afin d'avoir, du point de vue de l'hydrodynamique, les calculs les plus simples. On peut, avons-nous vu, déterminer les constantes qui entrent dans $g(z)$ de manière que les points à l'infini des deux plans se correspondent ; en faisant au besoin une translation de Γ dans son plan et une rotation des axes, on peut faire en sorte que, dans le voisinage de $z = \infty$,

$$\zeta = \lambda z + \frac{a_1}{z} + \dots$$

avec λ réel. On aura donc :

$$z = \frac{\zeta}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \dots$$

Or, à l'infini du plan z , les lignes de courant sont sensiblement des droites parallèles à l'axe des x ,

$$y = \text{const.},$$

et les lignes de niveau, des parallèles à l'axe des y :

$$x = \text{const.}$$

Donc, on pourra écrire dans le voisinage de $z = \infty$:

$$f(z) = Vz + \mu_0 + \frac{\mu_1}{z} + \dots$$

puisqu'on a alors :

$$f'(z) = V + \varepsilon = u - iv.$$

Par suite, dans le voisinage de $\zeta = \infty$,

$$\Phi + i\Psi = \frac{V}{\lambda} \zeta + \mu_0 + \frac{\mu_1'}{\zeta} + \dots$$

$$\Phi = \frac{V}{\lambda} \xi + \dots, \quad \Psi = \frac{V}{\lambda} \eta + \dots,$$

et par conséquent le mouvement que nous avons construit dans le plan ζ a des lignes de courant qui, à l'infini, sont sensiblement parallèles à l'axe des ξ , et la vitesse à l'infini, parallèle à cet axe, vaut

$$\mathfrak{V} = \frac{V}{\lambda}.$$

Supposons alors qu'on sache trouver la fonction $F(\zeta)$ qui résolve le problème de l'obstacle circulaire, avec la vitesse à l'infini $\frac{V}{\lambda}$, on saura, par le retour au plan z , résoudre le problème pour un obstacle quelconque.

134. Tout revient donc, pour les problèmes du type considéré dans ce chapitre, à déterminer une fonction $F(\zeta) = \Phi + i\Psi$, jouissant des propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{V}{\lambda}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{à l'infini}$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Or la fonction

$$F(\zeta) = \frac{V}{\lambda} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

satisfait évidemment à la question ; pour l'infini c'est visible ; pour Γ , on peut écrire en décomposant F en ses parties réelle et imaginaire :

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{V}{\lambda} \left(\eta - \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right);$$

or la courbe $\Psi = 0$ se décompose en

$$\eta = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1$$

ce qui prouve bien que la ligne de courant $\Psi = 0$ est formée de l'axe des ξ jusqu'au cercle Γ , de la circonférence de Γ puis de l'axe des ξ jusqu'à l'infini. Il n'en faut pas plus pour affirmer que, sur Γ , $\frac{d\Phi}{dn} = 0$.

La vitesse, dans ce mouvement, représentée par le nombre complexe \mathcal{V} , est égale à $\overline{F}'(\zeta)$; or

$$F'(\zeta) = f'(z) \frac{dz}{d\zeta},$$

donc :

$$\mathcal{V} = W \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}},^1$$

qui est une égalité entre nombres complexes, où

$$W = u + iv.$$

Paradoxe de d'Alembert.

135. On a vu que la pression est donnée par la formule

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \mathcal{V}^2 ;$$

on peut trouver alors la force due à la pression du fluide agissant sur l'obstacle. Elle a deux composantes :

$$\mathfrak{R}_{\xi} = \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta$$

$$\mathfrak{R}_{\eta} = \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta ;$$

car on a sur Γ ,

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad \text{et} \quad d\sigma = d\theta ;$$

la seconde est nulle pour des raisons de symétrie dynamique, ce que le calcul confirme, mais on trouve aussi zéro pour la première.

Il est donc certain que la méthode employée n'est pas exacte puisque l'expérience apprend qu'un obstacle subit une poussée de la part d'un fluide qui le frappe. Ce désaccord, qui est connu sous le nom de *paradoxe de d'Alembert*, provient de ce que les hypothèses explicitement formulées au début de la solution, ou implicitement cachées dans le calcul, sont fausses ou trop restrictives.

¹ Il faut entendre ici que $\frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}}$ est la quantité conjuguée de $h'(\zeta)$.

Tout d'abord, nous avons trouvé une fonction $F(\zeta)$ sans nous inquiéter de savoir s'il n'y en a pas d'autres. On peut se rendre compte de ce que $\frac{V}{\lambda} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ est la seule fonction *uniforme* à l'extérieur de Γ qui satisfasse aux conditions posées, mais il existe des fonctions non-uniformes, solutions de notre problème, et, parmi celles-ci, il en est qui augmentent d'une constante lorsque ζ tourne autour de Γ , ce qui ne rend pas $\mathcal{Q}(\zeta)$ multiforme. Ce sera à ces nouvelles solutions que nous recourrons. Elles jouent un grand rôle dans l'hydrodynamique appliquée et tout particulièrement dans l'aérodynamique, car elles donnent des résultats qui ont permis ensuite le développement de la théorie de Prandtl dont les conséquences se sont fort bien vérifiées.

Mais il y a une autre hypothèse cachée ; nous avons supposé que la vitesse \vec{W} est continue. Or elle pourrait être discontinue sans que p le fût, car, bien entendu, il n'est pas question de renoncer à la continuité de la pression dans un fluide dont le mouvement est permanent. On admettra, et ce sera un second moyen d'échapper au paradoxe de d'Alembert, qu'il y a, de part et d'autre de Γ , deux lignes de discontinuité pour \vec{W} .

La détermination de ces lignes de *sillage* pose des problèmes très difficiles à l'analyste et nous nous bornons à renvoyer aux traités spéciaux pour l'étude de ces questions qui dépassent le cadre de notre ouvrage.

Théorème de Kutta-Joukowski.

136. Proposons-nous de déterminer une fonction $F(\zeta)$ multiforme, mais dont la dérivée $F'(\zeta)$ soit uniforme, et telle que si l'on pose

$$F = \Phi + i\Psi,$$

Φ et Ψ étant multiformes, on ait encore

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \frac{V}{\lambda}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{à l'infini,}$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Comme toutes les conditions sont linéaires en F , il suffit d'ajouter à la solution trouvée précédemment une solution multiforme G telle que sa dérivée à l'infini et sa dérivée normale sur Γ soient nulles.

La fonction

$$G(\zeta) = A \log \zeta$$

est multiforme, sa dérivée est uniforme, elle est nulle à l'infini. De plus si $A = \alpha + i\beta$,

$$G(\zeta) = \alpha \log r - \beta\varphi + i(\alpha\varphi + \beta \log r) = \Phi^* + i\Psi^*$$

et sur Γ , où $r = 1$,

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Phi^*}{dr} = \frac{\alpha}{r} = \alpha,$$

ce qui exige que $\alpha = 0$ pour que toutes les conditions soient remplies. Dès lors, la fonction

$$F(\zeta) = \frac{V}{\lambda} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + i\beta \log \zeta$$

où β est une constante réelle satisfait aux desiderata nouvellement formulés.

137. Rappelons que, pour un mouvement plan, on a posé

$$\bar{\Lambda} = \oint f'(z) dz \quad (f = \varphi + i\psi)$$

où Λ est un nombre complexe dont la partie réelle est la circulation le long du chemin d'intégration L et dont la partie imaginaire est le flux à travers la même courbe. Je dis que *ce nombre est invariant dans une transformation conforme*, c'est-à-dire qu'il conserve la même valeur si on le calcule dans le plan ζ , sur la courbe \mathcal{L} qui correspond à L . En effet, on a dans le plan ζ pour la fonction qui décrit le mouvement :

$$F(\zeta) = f[h(\zeta)]$$

si la transformation conforme est définie par l'équation

$$z = h(\zeta).$$

Dès lors

$$F'(\zeta) d\zeta = f'(z) h'(\zeta) d\zeta = f'(z) dz,$$

et, par suite :

$$\oint_{\Gamma} f'(z) dz = \oint_{\mathcal{L}} F'(\zeta) d\zeta.$$

La circulation, en particulier, est invariante. Dans le cas dont nous nous occupons, elle est évidemment nulle pour toute courbe fermée qui n'entoure pas C et dont la transformée, par conséquent, n'entoure pas Γ . Pour une courbe entourant C une seule fois, il est évident que

le résultat sera le même que pour C , car $F'(\zeta)$ est holomorphe à l'extérieur de Γ . Calculons donc :

$$\bar{\Lambda} = \oint_{\Gamma} F'(\zeta) d\zeta = \oint_C f'(z) dz.$$

On a :

$$F'(\zeta) = \frac{V}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{i\beta}{\zeta},$$

donc, en vertu du théorème des résidus, et en vertu aussi des calculs déjà effectués au § 62, chap. II, on a

$$\bar{\Lambda} = -2\pi\beta;$$

le flux à travers une courbe fermée entourant C est nul, la circulation est $-2\pi\beta$.

138. Si Λ est invariant, il n'en est pas de même du nombre complexe dont les coordonnées sont les composantes de l'effort total exercé par le fluide sur l'obstacle.

Si p est la pression, ce nombre est défini par les relations :

1. Dans le plan z , comme nombre complexe :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\xi + i\mathfrak{R}_\eta,$$

et comme vecteur :

$$\vec{\mathfrak{R}} = - \int_{\Gamma} p \vec{d\sigma}.$$

On passe de la seconde à la première en se rappelant que, dans le cas du mouvement plan,

$$\vec{d\sigma} = \vec{n} ds;$$

or le vecteur $\vec{n} ds$ a pour composantes

$$d\eta \text{ et } -d\xi,$$

donc, en nombres complexes,

$$\mathfrak{R} = - \int_{\Gamma} p (d\eta - id\xi).$$

Mais il est préférable de calculer le nombre conjugué :

$$\bar{\mathfrak{R}} = - \int_{\Gamma} p (d\eta + id\xi);$$

puisque l'intégrale du terme p_0 donne évidemment zéro, on trouve immédiatement d'après (1),

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} \mathfrak{W}^2 (dz - id\tau).$$

2. Dans le plan z , on trouverait :

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\sigma} W^2 (dx - idy).$$

On va transformer cette dernière expression en remarquant que

$$dx - idy = \bar{dz}$$

et que sur C

$$W^2 = (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi)^2.$$

Mais on sait que

$$|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi| = \text{dérivée de } \varphi \text{ suivant la normale à la courbe } \varphi = \text{const.},$$

donc, puisque C est une ligne de courant :

$$W^2 = \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2,$$

la dérivée étant prise suivant l'arc de C . D'ailleurs sur C , $\frac{d\psi}{ds} = 0$ et par conséquent

$$W^2 = \left[\frac{d(\varphi + i\psi)}{ds} \right]^2 = \left(\frac{df}{ds} \right)^2,$$

D'autre part, sur C

$$ds^2 = dz \bar{dz}$$

donc :

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_C [f'(z)]^2 dz$$

c'est la formule dite de *Blasius*.

Elle suppose essentiellement que la dérivée de $f(z)$ est déterminée parfaitement en tous les points de C , c'est-à-dire : il faut que $f(z)$ soit régulière sur C , car on sait déjà qu'elle l'est à l'extérieur de C . On peut être assuré par la théorie des fonctions harmoniques que si C est un contour analytique et régulier, il en sera bien ainsi. Il faudra donc examiner à part les contours à points anguleux.

On trouverait de même

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} [F'(z)]^2 dz ;$$

Comme

$$F'(\zeta) d\zeta = f'(z) dz \quad (2)$$

et puisque

$$F'(\zeta) \neq f'(z)$$

en des points correspondants des deux plans, on comprend pourquoi \bar{R} n'est pas un invariant.

139. Il est cependant possible de ramener le calcul de \bar{R} à celui d'une intégrale étendue à Γ , et précisément en vertu de (2), car

$$[f'(z)]^2 dz = [F'(\zeta)]^2 \frac{d\zeta}{\lambda} dz$$

donc :

$$\bar{R} = \frac{i\mathcal{C}}{2} \oint_{\Gamma} [F'(\zeta)]^2 \frac{d\zeta}{\lambda} dz.$$

Or la fonction de ζ qui multiplie $d\zeta$ est holomorphe dans toute l'aire extérieure à Γ ; on peut ramener, en vertu du théorème de Cauchy, le calcul de l'intégrale le long de Γ au calcul de l'intégrale de la même fonction le long d'un cercle de très grand rayon \mathcal{C} .

On a vu que, dans le voisinage de l'infini,

$$\zeta = \lambda z + \frac{a_1}{z} + \dots, \quad z = \frac{\zeta}{\lambda} + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \dots$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \lambda - \frac{a_1}{z^2} - \dots = \lambda - \frac{a_1 \lambda^2}{\zeta^2} - \dots :$$

d'autre part,

$$F(\zeta) = \frac{V}{\lambda} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + i\beta \log \zeta,$$

d'où

$$F'(\zeta) = \frac{V}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{i\beta}{\zeta},$$

$$[F'(\zeta)]^2 = \frac{V^2}{\lambda^2} + \frac{2i\beta V}{\lambda \zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \dots$$

et

$$[F'(\zeta)]^2 \frac{d\zeta}{dz} = \frac{V^2}{\lambda} + \frac{2i\beta V}{\zeta} + \frac{\beta_2}{\zeta^2} + \dots$$

Si on intègre le second membre multiplié par $d\zeta$ le long de \mathcal{C} , le

théorème des résidus apprend que le résultat est égal au coefficient de $\frac{1}{\zeta}$ multiplié par $2\pi i$, donc :

$$\bar{R} = -4\beta\pi V \frac{i\rho}{2} = -2\beta\pi\rho Vi$$

ou encore

$$\bar{R} = \rho V \bar{\Lambda} i.$$

Comme le flux à travers C est nul, $\bar{\Lambda}$ est la circulation Σ autour de C et l'on peut écrire

$$R_x = 0, \quad R_y = -\rho V \Sigma. \quad (3)$$

Résumons ce résultat qui constitue précisément le théorème de *Kutta-Joukowski* :

Si la circulation du champ \vec{W} autour d'un obstacle cylindrique est Σ , la pression totale exercée par un liquide dans les conditions où nous nous sommes placé (irrotationnalité, permanence, vitesse à l'infini donnée) est normale à la vitesse à l'infini, et elle vaut $\rho V \Sigma$.

Les formules (3) précisent nettement son sens.

Obstacle anguleux.

140. Tous les calculs supposent que le contour C n'a pas de points anguleux. Ces points ne présentent aucun inconvénient, nous le savons, pour ce qui est de l'existence de la fonction qui réalise la représentation conforme, mais sa dérivée $\frac{dz}{d\zeta}$ peut fort bien présenter des discontinuités qui modifient le résultat énoncé par le théorème de *Kutta-Joukowski*.

Il est bien clair qu'en un point anguleux z_0 de C , la dérivée de la fonction $\zeta = g(z)$ doit être nulle ou infinie. Une analyse délicate montre que $\frac{dz}{d\zeta}$, dans le voisinage de ζ_0 correspondant à z_0 , est de l'ordre de $(\zeta - \zeta_0)^\beta$, $\beta\pi$ étant l'angle des tangentes dirigées dans le sens des arcs croissants au point z_0 ; si cet angle est saillant dans le fluide et non-rentrant, β est compris entre 0 et 1, le cas limite de $\beta = 1$ correspondant à un point de rebroussement¹. Dès lors $\frac{dz}{d\zeta} \sim \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^\beta}$. Dans le calcul de

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} [F'(\zeta)]^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta,$$

¹ Pour cette analyse délicate, on se reportera au livre de M. H. VILLAT, *Mécanique des fluides*, p. 86 et suivantes.

la présence des points anguleux qui ne sont pas de rebroussement, donc pour lesquels $\beta < 1$, ne présente pas d'inconvénient et \bar{R} conserve un sens. Mais il y a un inconvénient considérable si $\beta = 1$; nous supposons dans la suite que les seuls angles du contour C sont *saillants*, et qu'ils ne sont pas infiniment effilés.

141. Il y a cependant encore quelques difficultés à examiner en ce qui concerne le voisinage des points anguleux. On a pour le plan ζ une fonction $F(\zeta)$ au moyen de laquelle le mouvement autour de Γ est parfaitement décrit ¹. Lorsqu'on revient au plan z , il faut former

$$j(z) = F[g(z)],$$

et l'on a pour la vitesse W l'équation suivante qui définit le nombre conjugué \bar{W} :

$$\bar{W} = j'(z) = F'(\zeta) \frac{d\zeta}{dz}.$$

Or, \bar{W} , et par suite p , deviennent infinis en $z = z_0$, c'est-à-dire près de chaque point anguleux. Pour éviter un tel inconvénient physique, il suffit de supposer que $F'(\zeta)$ est nul, c'est-à-dire que la vitesse \mathcal{Q} est nulle aux points ζ_0 qui correspondent aux points anguleux. Or

$$F'(\zeta) = \frac{V}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{i\beta}{\zeta};$$

et cette fonction ne peut s'annuler qu'en *deux points*. On a en effet :

$$\zeta^2 + \frac{i\beta\lambda}{V} \zeta - 1 = 0 \tag{4}$$

et pour que les racines soient sur Γ , il faut que

$$\left| \frac{\beta\lambda}{2V} \right| \leq 1;$$

dans ce cas, il y a deux points sur Γ , symétriques par rapport à l'axe imaginaire en lesquels $\mathcal{Q} = 0$. *Il ne peut donc pas y avoir plus de deux points anguleux sur C , si l'on veut éviter l'inconvénient de $W = \infty$ et de $p = \infty$.*

D'autre part, on sait par le théorème de Riemann que la correspondance qui dépend de trois paramètres arbitraires réels peut être précisée par la donnée d'un couple de points correspondants à l'intérieur des domaines et par un couple de points correspondants sur les frontières. Nous avons fait correspondre les points à l'infini, il est possible

¹ Cf. VILLAT, *loc. cit.*

de faire correspondre à un point anguleux z_0 de C l'un des points racines de (4) lorsque ceux-ci sont sur Γ , mais on ne peut rien dire du second. Dès lors, si celui-ci n'est pas précisément le correspondant de l'autre racine de (4), on aura dans son voisinage $W = \infty$ et $p = \infty$.

Les profils d'obstacles qui ne présenteront pas de difficultés sont donc ceux qui n'ont pas plus d'un seul point anguleux saillant et non-rebroussant et ceux qu'on obtient en faisant des transformations conformes de Γ qui font correspondre aux deux racines de (4) situées par hypothèse sur Γ des points anguleux dudit type sur C .

Nous proposons comme exercices des déterminations d'obstacles dont la forme est semblable à celle des ailes d'avion. En aérodynamique, pour les vitesses auxquelles on a affaire, il est possible de négliger, dans le voisinage de l'aile, la compressibilité de l'air. D'autre part, si l'aile a une grande envergure, on peut considérer le problème comme un problème plan. Le théorème de Kutta-Joukowski appliqué à de tels profils donne la *portance* de l'aile. Si peu satisfaisante que soit, du point de vue physique, la théorie de la résistance des fluides que nous venons d'esquisser, elle a joué et joue encore un grand rôle dans les théories aérodynamiques précisément parce qu'elle conduit très simplement à une formule qui donne la *portance*. Si l'obstacle a un profil circulaire, nous avons vu que $R_z = 0$, il n'y a pas de *traînée*, comme on dit ; il n'y a qu'une portance, c'est ce qui est choquant. Il faut compliquer la théorie par des hypothèses nouvelles pour avoir une traînée, c'est-à-dire une résistance dans le sens du courant. Les ouvrages d'aérodynamique que nous citons ci-après conduiront le lecteur au cœur même des théories nouvelles dont nous avons l'intention de lui faire entrevoir la portée.

Exercices.

1. Calculer le moment résultant des pressions exercées par un fluide incompressible sur un obstacle cylindrique quelconque. On trouve la *seconde formule de Blasius* :

$$M + iN = -\frac{\rho}{2} \oint_C [f'(z)]^2 z dz.$$

(Cf. Villat : *Mécanique des fluides*, p. 94.)

2. On considère : 1^o le cercle centré en O de rayon a , 2^o les cercles concentriques au précédent de rayon $R > a$, 3^o les droites passant par

l'origine, 4^o les cercles passant par les points $z = a$, $z = -a$. La transformation

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

fait correspondre à ces figures : 1^o le segment de l'axe réel ($-a, +a$) compté doublement, 2^o des ellipses homofocales dont les foyers sont les points de l'axe réel ($-a, +a$), 3^o des hyperboles homofocales aux ellipses précédentes (on en cherchera les asymptotes). 4^o Un arc de cercle compté deux fois passant par les foyers précédents (*cf.* p. ex. Foch : *Introduction à la mécanique des fluides*, p. 90-92).

3. La même transformation est appliquée au domaine limité par un cercle passant par les points $z = a$, $z = -a$ et un cercle tangent au précédent au point $z = a$, et le contenant dans son intérieur. Montrer que le domaine transformé ressemble à un profil d'aile d'avion (profils Joukowski) et appliquer à un tel obstacle les théorèmes du texte. (*idem*, p. 92-93.)

4. *Mouvement d'un fluide autour d'une sphère (ou résistance d'un obstacle sphérique)*. On considère une sphère dans un liquide dont la vitesse à l'infini est \vec{V} . Le mouvement du fluide est de révolution autour de l'axe qui passe par le centre de la sphère et qui est parallèle à \vec{V} . On peut trouver un mouvement irrotationnel et permanent de potentiel des vitesses :

$$\varphi = Vx \left[1 + \frac{a^3}{2r^3} \right],$$

où x est l'abscisse dans un système d'axes dont le centre de la sphère est l'origine et dont l'axe des x est l'axe de révolution ; r est la longueur du rayon vecteur \vec{OP} .

Chercher les lignes de courant. Calculer la résistance de la sphère (elle est nulle, paradoxe de d'Alembert) (*cf.* Bouasse : *Hydrodynamique générale*, p. 140-150).

BIBLIOGRAPHIE.

- L. PRANDTL et A. BETZ. *Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik*.
M. ROY. *Sur la Théorie des surfaces portantes*.
H. BOUASSE. *Résistance des fluides*.
H. GLAUERT. *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*.
H. VILLAT. *Mécanique des fluides*.

CHAPITRE IX

Eléments de la théorie du champ électromagnétique.

Electrostatique. Cas du vide.

142. La loi de Coulomb qui donne l'attraction — ou la répulsion — de deux charges électriques placées dans le vide a la même forme que la loi d'attraction newtonienne.

Deux charges ponctuelles mesurées dans un certain système d'unités par m_1 et m_2 , placés l'une en O , l'autre en P , exercent l'une sur l'autre une force proportionnelle au produit $m_1 m_2$ et à l'inverse du carré de la distance OP . Cependant, il convient de remarquer que les deux nombres m_1 et m_2 ne sont plus essentiellement positifs, et l'on sait que la force de Coulomb est attractive si m_1 et m_2 sont de signes contraires, tandis qu'elle est répulsive si m_1 et m_2 ont le même signe. Si l'on pose $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, et si l'on désigne par k une constante positive, propre au système d'unités choisi, la force agissant sur m_2 sera

$$\vec{E} = k \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Si $m_2 = +1$, cette force mesurera le *champ* électrostatique créé en P par la charge m_1 .

Le *potentiel électrostatique* sera par définition

$$V = \frac{km_1}{r}$$

et l'on a, pour le champ :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V ;$$

le champ est dirigé normalement aux surfaces de niveau de V , mais vers les potentiels décroissants.

Comme auparavant, mais au signe près bien entendu, en posant $m_1 = M$, on trouvera

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = + 4\pi kM, \text{ si } O \text{ est dans } \Sigma; \text{ sinon zéro.}$$

On aura aussi

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ ou } \operatorname{lap} V = 0, \text{ (sauf en } O).$$

Le cas de plusieurs charges ponctuelles se traite sans difficulté, ainsi que celui d'une répartition continue d'électricité¹ en équilibre. Et l'on a encore en particulier une équation semblable à celle de Poisson; si ρ est la densité, positive ou négative, de l'électricité au point considéré, il est clair que :

$$\operatorname{div} \vec{E} = + 4\pi k\rho,$$

d'où

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} V = - 4\pi k\rho$$

ou

$$\operatorname{lap} V = - 4\pi k\rho. \tag{1}$$

Dans le vide, on prend d'habitude $k = 1$, ce qui correspond à un choix bien déterminé de l'unité de charge. Un autre choix d'unité, proposé par Heaviside, consiste à poser $k = \frac{1}{4\pi}$, c'est celui que nous ferons, sauf mention expresse du contraire. Les lois du champ, sous forme différentielle, c'est-à-dire sous une forme qui permet de décrire les effets des charges de proche en proche et non plus par des actions à distance, s'écrivent :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho.$$

Elles expriment bien que \vec{E} dérive d'un potentiel et que ce potentiel satisfait à l'équation de Poisson (1). En ajoutant que ce potentiel doit

¹ Si l'on admet que l'électricité a une structure discontinue (théorie électronique de Lorentz), il n'est pas difficile de définir statistiquement une densité continue ρ , pas plus qu'il n'est difficile en hydrodynamique de considérer les fluides comme continus bien que la matière dont ils sont formés soit composée d'atomes. A l'échelle macroscopique où nous considérons ici les phénomènes, la discontinuité électronique n'intervient pas, pas plus qu'en hydrodynamique nous n'avons fait intervenir la discontinuité atomique.

être nul à l'infini, les équations précédentes le déterminent parfaitement [ch. III, § 72]. On trouvera en effet

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho}{r} d\tau_M, \quad (r = MP)$$

l'intégrale étant prise sur tout le volume contenant des charges, c'est-à-dire sur tout le volume où $\rho \neq 0$, et M étant précisément le point courant dans ce volume.

143. A une configuration de n charges ponctuelles e_1, e_2, \dots, e_n correspond bien évidemment une *énergie potentielle* U dont la différentielle est au signe près la somme des travaux élémentaires des charges dans un déplacement infiniment petit.

Soit r_{ik} la distance de e_i à e_k . On a évidemment

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_i \sum_k \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

où la somme doit être prise de manière que i ne soit jamais égal à k , car si, par exemple, e_1 se déplace, on trouve

$$\delta_1 U = - \frac{1}{4\pi} \sum_k \frac{e_1 e_k}{r_{1k}^2} \delta r_{1k} = - e_1 \sum_k \vec{E}_k \cdot \delta \vec{r}_{1k} = e_1 \sum \delta_1 V_k$$

avec $V_k = \frac{e_k}{4\pi r_{1k}}$ = potentiel de e_k au point P_1 où est située la charge e_1 . Or $e_1 \sum_k \vec{E}_k \cdot \delta \vec{r}_{1k}$ est le travail élémentaire des forces électriques $e_1 \vec{E}_k$ dans le déplacement infinitésimal de e_1 ; puisqu'on a

$$\delta_1 U = - \delta_1 \mathcal{C},$$

U est bien l'énergie potentielle du champ.

Si, au lieu de charges ponctuelles, on considère une répartition continue, à distance finie, de densité $\rho(P)$, l'énergie potentielle sera une intégrale sextuple, provenant de deux triples intégrations étendues chacune à tout l'espace (à tout l'espace où $\rho \neq 0$) :

$$U = \iiint \iiint \frac{\rho(P)\rho(P')}{8\pi PP'} d\tau_P d\tau_{P'};$$

il n'est pas nécessaire d'éviter le lieu géométrique $P = P'$, sa contribution à l'intégrale est nulle. On peut écrire

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(P) V(P) d\tau_P = \frac{1}{2} \iiint_V V \operatorname{div} \vec{E} d\tau.$$

On a :

$$\operatorname{div} (V\vec{E}) = V \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V ;$$

de plus l'intégrale étendue à V de la divergence de $V\vec{E}$ est égale au flux total à travers la surface d'une sphère de rayon très grand (hors de laquelle n'existe aucune charge) du champ $V\vec{E}$. Or cette intégrale est nulle puisque V et \vec{E} tendent vers zéro, V comme $\frac{1}{R}$, E comme $\frac{1}{R^2}$.

Dès lors

$$U = -\frac{1}{2} \iiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \, d\tau = \iiint \frac{1}{2} E^2 \, d\tau.$$

On voit donc que la répartition, avec la densité ρ , de charges électriques continues crée une énergie potentielle dont la densité est égale à la moitié du carré du champ qu'elles engendrent. (Cette densité est $\frac{E^2}{8\pi k}$ avec les unités du début.)

Conducteurs et densité superficielle.

144. On sait qu'il existe des corps sur, ou dans lesquels, l'électricité se déplace ; ce sont des *conducteurs*. On voit immédiatement que si un conducteur en équilibre est chargé, l'électricité qu'il contient est répartie sur sa surface Σ et que le champ électrique à son intérieur est nul, sinon il n'y aurait pas équilibre. Il faut donc que, si l'on place un conducteur dans un champ, celui-ci développe à sa surface une densité électrique *superficielle* $\mu(M)$ telle que précisément cette distribution soit sans action à l'intérieur du conducteur. Le potentiel est constant dans tout le conducteur jusqu'à sa surface, qui est une *surface de niveau* pour le potentiel créé par la densité μ . Le champ extérieur est donc, en un point infiniment voisin de Σ , *normal* à Σ . Je dis que *ce champ vaut précisément* μ ($4\pi k\mu$ si on prend les unités de charge du début). Soit, en effet, un volume limité par deux surfaces infiniment voisines, parallèles à un élément $d\sigma$ de Σ , l'une intérieure, l'autre extérieure au conducteur et par une bande cylindrique normale à Σ . Le flux total est $E d\sigma$, car à travers la surface intérieure il est nul puisque $E = 0$ dans le conducteur, et à travers la bande cylindrique, il est nul aussi puisque le champ est dirigé le long des génératrices à l'extérieur du conducteur. D'autre part, la quantité totale d'électricité contenue dans le volume considéré est $\mu d\sigma$. Donc

$$E = \mu.$$

Diélectriques.

145. Dans les corps dont la matière n'est pas conductrice, les lois de l'électrostatique sont un peu plus compliquées. Un diélectrique, placé dans un champ, est le siège d'un phénomène qui a pour effet de créer une orientation particulière des charges que la présence du champ fait surgir d'un état primitivement neutre.

Considérons d'abord deux charges opposées $+e$ et $-e$ placées en deux points O_1 et O_2 . Le potentiel de ces deux charges sera en P :

$$\frac{e}{4\pi} \left(\frac{1}{O_1P} - \frac{1}{O_2P} \right).$$

Faisons tendre O_1 et O_2 vers leur milieu O suivant la droite qui les joint et faisons, en même temps, croître e de telle façon que le produit $e\overline{O_1O_2}$ reste constant. A la limite on obtient un *doublet*. Son *moment* est le vecteur $\vec{\Pi}$ qui est égal à $e\overline{O_2O_1}$. Le potentiel qu'il crée en un point P est manifestement égal à

$$\frac{\vec{\Pi}}{4\pi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \quad (\vec{r} = \overrightarrow{OP})$$

Un champ électrique, dans lequel on plonge un diélectrique, paraît créer des *doublets* à l'intérieur des éléments de volume du diélectrique : il *polarise* le diélectrique, et, dans la théorie phénoménologique, on se borne à constater cette polarisation dont les effets sont ceux que nous décrivons ci-dessous.

Soit $d\tau$ un élément de volume,

$$\frac{1}{4\pi} \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} d\tau$$

est le potentiel du doublet créé dans $d\tau$. On dit plus précisément que $\vec{\Pi}$ est la *densité du moment électrique* des doublets créés dans le diélectrique. Dès lors le potentiel total est égal au potentiel d'où dérive le champ donné augmenté du potentiel des doublets :

$$V = \frac{1}{4\pi} \left[\iiint \frac{\rho}{r} d\tau + \iiint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} d\tau \right],$$

la première intégrale s'étendant à toutes les régions où la densité d'électricité n'est pas nulle, la seconde à tous les diélectriques ¹.

¹ Dans la théorie de Lorentz, on se représente les choses ainsi : on imagine que l'électricité est attachée à la matière par charges élémentaires, les atomes formés d'électrons et de protons (charges respectivement négatives et positives) sont-

146. On admet que le vecteur $\vec{\Pi}$, qu'on nomme aussi la *polarisation*, est proportionnel au champ polarisant \vec{E} . On écrira même, pour des diélectriques isotropes et homogènes :

$$\vec{\Pi} = \alpha \vec{E},$$

où α est une constante qui dépend de la nature du diélectrique.

On peut écrire dès lors

$$V = \iiint \rho \frac{\text{div } \vec{\Pi}}{4\pi r} d\tau, \quad (2)$$

l'intégrale étant prise dans tout l'espace, car

$$\vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = \text{div} \left(\frac{\vec{\Pi}}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div } \vec{\Pi}$$

et par suite du théorème d'Ostrogradzky, l'intégrale, prise dans tout l'espace, de $\text{div} \left(\frac{\vec{\Pi}}{r} \right)$ est nulle.

Le champ résultant de V , que l'on appellera encore \vec{E} , vérifie l'équation de Poisson, où, cette fois, la densité n'est plus ρ mais $\rho - \text{div } \vec{\Pi}$; d'après (2) :

$$\text{lap } V = -(\rho - \text{div } \vec{\Pi}),$$

donc, puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, et que $\text{lap } V = \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} V$:

$$\text{div } \vec{E} = \rho - \text{div } \vec{\Pi}.$$

Le vecteur

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{\Pi}$$

s'appelle le *déplacement électrique* et les équations de l'électrostatique, à l'intérieur du diélectrique, prennent alors la forme :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = \rho ;$$

rappelons, puisqu'on a affaire à des diélectriques isotropes et homogènes que :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

avec $\varepsilon = 1 + \alpha =$ *constante diélectrique*.

neutres. Placés dans un champ, les atomes d'un diélectrique sont déformés par ce champ, les charges positives et les charges négatives ont tendance à s'éloigner dans les deux sens différents de la direction du champ ; une analyse détaillée de cette polarisation conduit statistiquement aux mêmes résultats que ceux qui sont donnés dans le texte.

Ces considérations montrent que la force agissant entre deux charges ponctuelles placées dans un diélectrique est $\frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon r^2}$ et l'on verra sans peine que la densité d'énergie potentielle est $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$. Dans le vide, $\kappa = 0$, $\vec{D} = \vec{E}$.

Champ magnétique et courant électrique.

147. Il n'est pas nécessaire de répéter pour les pôles d'aimant les calculs qu'on a donnés pour les charges électriques. Dans le vide, le champ magnétique \vec{H} créé par des pôles d'aimant au repos dérive d'un potentiel ; son rotationnel est donc nul. Mais on sait qu'il est impossible d'isoler un pôle d'aimant ; en cassant un aimant, on obtient des morceaux qui ont toujours deux pôles. Il n'y a pas de magnétisme vrai, dit-on parfois. Plus précisément, la densité moyenne des charges magnétiques est toujours nulle quelle que soit la grandeur des aimants sur lesquels on prend cette moyenne. On pourra donc écrire

$$\text{div } \vec{H} = 0. \text{ } ^1$$

148. Mais un champ magnétique peut provenir aussi d'un *courant électrique* d'après la loi élémentaire de Laplace.

On dit qu'un conducteur est le siège d'un courant électrique s'il existe en deux de ses points une différence de potentiel. On peut admettre, sans entrer dans le détail de la structure de la matière et de l'électricité, qu'un tel courant est dû au mouvement du fluide électrique dans le milieu matériel supposé continu et conducteur.

Soit $\vec{W}(P)$ la vitesse de l'électricité en un point P et soit $\rho(P)$ la densité de charge en ce point ; on dira que le vecteur

$$\vec{C} = \rho \vec{W}$$

représente la *densité de courant* ; ainsi donc la quantité d'électricité qui passe à travers une surface $d\vec{\sigma}$ est $\vec{C} \cdot d\vec{\sigma} = \rho \vec{W} \cdot d\vec{\sigma}$; l'analogie hydrodynamique est évidente. Il convient de remarquer, pour être précis, que le champ \vec{W} est précisément défini par la relation

$$dq = \rho \vec{W} \cdot d\vec{\sigma} dt$$

¹ La théorie électronique de Lorentz suppose que le magnétisme des aimants est dû aux mouvements des charges élémentaires dans la matière. Les corps non-aimantés sont formés d'atomes où les charges se meuvent également dans toutes les directions ; dans les corps aimantés, il y a des directions privilégiées pour ces mouvements.

où dq est la quantité d'électricité qui passe à travers $d\vec{\sigma}$ dans le temps dt et que sa direction est celle du gradient du potentiel V . La propagation de l'électricité, c'est-à-dire la présence d'un courant dans un conducteur, se fait selon des lois exactement semblables aux lois de la propagation de la chaleur [cf. § 69] ; on doit avoir

$$\vec{W} = -\alpha \overrightarrow{\text{grad}} V$$

α étant une constante propre au milieu conducteur [cf. éq. (12), § 156].

En écrivant que la charge du fluide se conserve dans les déplacements qu'il effectue, on trouve, comme en hydrodynamique, et par le même raisonnement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{W}) = 0$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{C} = 0. \quad (3)$$

Dans ce qui suit, on suppose que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que le courant est permanent ou comme on dit stationnaire.

149. Le champ \vec{C} crée un champ magnétique \vec{H} .

Il faut fixer les unités pour écrire exactement la loi suivant laquelle \vec{H} est déterminé par \vec{C} . Nous les choisissons telles que deux pôles d'aimant de masses magnétiques égales à $+1$, situés à 1 cm. l'un de l'autre, se repoussent dans le vide avec une force de $\frac{1}{4\pi}$ dynes. Dès lors, la loi de Laplace, relative à un courant stationnaire, c'est-à-dire à un courant \vec{C} qui ne dépend que de P et non du temps, se formule de la manière suivante :

Un élément $d\vec{s}$ de filet fluide en P à travers la section droite $d\sigma$ duquel passe en une seconde une charge

$$i = C d\sigma$$

crée en un point Q , tel que $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}$, un champ magnétique infiniment petit ¹

$$d\vec{H} = \frac{i}{c} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3},$$

où c est un facteur de proportionnalité. La dimension de c est celle

¹ Le sens de ce champ élémentaire est donné par le produit vectoriel qui traduit mathématiquement la règle des trois doigts.

d'une vitesse. En effet, soit $[Q]$ l'équation de dimension d'une charge électrique et $[Q']$ celle d'une masse magnétique. On aura :

$$[dH][Q'] = MLT^{-2}, \quad (\text{force})$$

$$[i] = [Q]T^{-1}.$$

D'ailleurs

$$[Q] = [Q'] = \sqrt{MLT^{-2} \cdot L^2} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}.$$

Dès lors

$$[c] = \frac{[Q]T^{-1}[Q']}{MLT^{-2}} \cdot \frac{L^2}{L^3} = \frac{ML^5T^{-3}}{ML^4T^{-2}} = LT^{-1}.$$

La constante c a bien les dimensions d'une vitesse. En général, on remplace $\frac{i}{c}$ par i' qu'on nomme l'intensité de courant linéaire évaluée en *unités électromagnétiques* de Heaviside, et l'on a la relation :

$$1 \text{ unité électromagnétique de charge} \\ = c \text{ unités électrostatiques de charge.}$$

Pour calculer le champ créé par le mouvement de toute l'électricité considérée dans l'hypothèse où \vec{C} est stationnaire, il faut intégrer $d\vec{H}$ dans tout l'espace. Remarquons alors qu'en unités électrostatiques :

$$C d\sigma dt = \rho d\tau$$

où $d\tau$ est l'élément de volume d'un filet. De plus,

$$d\vec{s} = \vec{W} dt \quad \text{et} \quad \rho \vec{W} = \vec{C};$$

il vient donc

$$d\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\vec{C} \times \vec{r}}{4\pi r^3} d\tau,$$

et par conséquent

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \iiint \frac{\vec{C} \times \vec{r}}{4\pi r^3} d\tau.$$

Equations différentielles du champ stationnaire.

150. On a ainsi :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi c} \iiint \frac{\vec{C} \times \vec{r}}{r^3} d\tau; \quad (4)$$

le champ magnétique stationnaire est la somme des champs infini-

ment petits $d\vec{H}$ dus aux éléments de courant $\frac{\vec{C}}{c} d\tau$ qui circulent dans les éléments de volume $d\tau$:

$$d\vec{H} = \frac{\vec{C}}{c} \times \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} d\tau.$$

Cette équation exprime une loi élémentaire d'action à distance ; cependant, si l'effet de cette action est inversement proportionnel au carré de la distance, elle n'est pas du type newtonien étudié au chapitre Ier ; elle exprime une loi newtonienne *vectorielle*.

Elle s'écrit

$$d\vec{H} = \frac{d\tau}{4\pi c} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{C}}{r}$$

où il faut entendre que dans l'opération $\vec{\nabla} \times$, r seul est variable. On a, par conséquent, en intégrant dans tout l'espace ¹ :

$$\vec{H} = \iiint \frac{d\tau}{4\pi c} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{C}}{r}$$

qui peut s'écrire

$$\vec{H}(P) = \frac{1}{4\pi c} \iiint \left(\vec{\nabla}_P \times \frac{\vec{C}(M)}{r} \right) d\tau_M. \quad (r = MP)$$

Or un raisonnement fondé sur la notion d'intégrale uniformément convergente nous permettrait d'écrire, pour tout point P de l'espace :

$$\vec{H}(P) = \vec{\nabla} \times \iiint \frac{\vec{C}(M)}{4\pi cr} d\tau_M.$$

Il existe donc un champ vectoriel :

$$\vec{f}(P) = \frac{1}{4\pi c} \iiint \frac{\vec{C}(M)}{r} d\tau_M, \quad (r = MP)$$

dont le rotationnel est le champ \vec{H} . On dit que $\vec{f}(P)$ est un *potentiel vecteur*, par analogie avec ce qu'on connaît en électrostatique. Mais alors que le potentiel scalaire d'où dérive le champ électrique est défini à une constante près, le potentiel vecteur est défini à un champ vectoriel près dont le rotationnel est nul, c'est-à-dire qu'il est défini *au gradient près* d'un champ scalaire.

¹ Bien entendu on suppose qu'il n'y a pas de charges mobiles à l'infini, pas plus qu'il n'y a de charges fixes à l'infini dans la théorie du champ électrostatique.

Il est évident que le flux de \vec{H} à travers une surface fermée est toujours nul et, par suite, à cause du théorème d'Ostrogradzky :

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 ;$$

ou comme on dit aussi : le champ magnétique n'a pas de source¹.

Remarquons que le potentiel vecteur a un laplacien en tout point de l'espace et que l'on a, en utilisant le théorème de Gauss pour $\vec{a} \cdot \vec{f}$, \vec{a} étant un vecteur unité constant quelconque :

$$\begin{aligned} \operatorname{lap} \vec{f} &= -4\pi \cdot \frac{\vec{C}}{4\pi c}, \\ \operatorname{lap} \vec{f} &= -\frac{\vec{C}}{c} = -\vec{j}; \end{aligned} \quad (5)$$

avec

$$\vec{j} = \frac{\vec{C}}{c}.$$

\vec{j} est la densité de courant exprimée en unités électromagnétiques. Réciproquement, la solution de (5) qui s'annule à l'infini est définie, à un gradient près, nul à l'infini, par la relation :

$$\vec{f}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{r} d\tau.$$

151. Calculons la circulation de \vec{H} le long d'une courbe fermée ; on a, d'après le théorème d'Ampère-Stokes,

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\operatorname{rot} H} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{f}} - \operatorname{lap} \vec{f}) \cdot d\vec{\sigma}.$$

car

$$\overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} \times \vec{f}) = \overrightarrow{\nabla} (\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{f}) - (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{f}.$$

Or il est possible de profiter de l'indétermination de \vec{f} , défini à un gradient près $\overrightarrow{\nabla} a$, en posant

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0,$$

(ce qui n'est pas contradictoire avec $\operatorname{lap} \vec{f} = -\frac{\vec{C}}{c}$, puisque $\operatorname{div} \vec{C} = 0$),

¹ On a vu que la cause d'un champ newtonien ou d'un champ électrostatique est la présence de masses ou de charges de densité ρ ; la divergence de ces champs est proportionnelle à ρ ; si $\rho = 0$, la source est nulle ; c'est ce qui explique le terme du texte.

² Il ne saurait y avoir de confusion avec le vecteur unité \vec{j} .

car si

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}}{r} d\tau + \vec{\nabla} a = \vec{f}_0 + \vec{\nabla} a,$$

il suffira de résoudre l'équation

$$\text{lap } a = - \text{div } \vec{f}_0.$$

Or on en connaît la solution nulle à l'infini

$$a = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div } \vec{f}_0}{r} d\tau.^1$$

Dès lors

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot } H} \cdot d\vec{\sigma} = - \iint_{\Sigma} \text{lap } \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}.$$

On tire de là la loi importante :

La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée Γ est égale au flux du courant à travers toute surface dont Γ est la frontière. Le courant est exprimé en unités électromagnétiques et les conventions pour les signes du flux et de la circulation sont celles que nous avons faites à propos du théorème d'Ampère-Stokes.

Mais on voit aussi, puisque Σ est une surface quelconque, que

$$\overrightarrow{\text{rot } H} = j.$$

152. Remarquons que le passage des lois d'action à distance aux équations différentielles se fait par le moyen de relations intégrales où interviennent des flux. C'est par de telles relations qu'on a trouvé les équations différentielles des champs newtoniens, de l'hydrodynamique, du champ électrique. Il faut voir dans ce procédé une méthode très générale pour passer des lois à l'échelle macroscopique, révélées par l'observation ou l'expérience, aux lois à l'échelle différentielle d'où l'action à distance, physiquement incompréhensible, est absolument bannie. Remarquons que l'échelle atomique est encore au-dessous de l'échelle différentielle que l'on doit adopter ici.

On passe aux lois d'action à distance en intégrant. En particulier, la solution des équations

$$\overrightarrow{\text{rot } H} = \vec{j}, \quad \text{div } \vec{H} = 0,$$

¹ Nous avons résolu ici un cas particulier du problème général posé dans le premier volume de cet ouvrage [§ 77] : trouver un champ connaissant son rotationnel et sa divergence.

qui s'annule à l'infini est précisément

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} d\tau.^1$$

153. Il convient de remarquer qu'à l'intérieur de la matière, on doit introduire quelques modifications aux équations du champ magnétique. Un raisonnement tout semblable à celui qui a introduit, pour le champ électrostatique, le vecteur polarisation, conduit à définir un vecteur *aimantation* \vec{J} représentant l'effet d'une création de *dipôles* à l'intérieur de la matière². Au vecteur déplacement, correspondra le vecteur *induction magnétique* \vec{B} . Dès lors, les lois s'écriront

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

et l'on a encore dans la matière isotrope et homogène :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

μ étant la *perméabilité magnétique* ; c'est une constante, sauf pour les corps ferromagnétiques dont nous ne nous occuperons pas.

Enfin, il est évident que la présence d'un champ magnétique est liée à une densité d'énergie potentielle. S'il n'y a, dans un milieu de perméabilité μ , que des pôles d'aimants ponctuels, on aura pour l'énergie potentielle totale³ :

$$U = \frac{1}{8\pi\mu} \sum_i \sum_k \frac{m_{ik}}{r_{ik}}, \quad (i \neq k)$$

qui correspond à une densité $\frac{1}{2} \vec{H}\vec{B}$. S'il y a des courants électriques,

¹ Remarquons que si l'on pose

$$\vec{H} = \vec{W}, \quad \vec{j} = 2 \vec{T}$$

les équations du champ sont les mêmes que les équations de la théorie des tourbillons [chap. II, § 55]. Le vecteur \vec{C} , introduit dans ce §, est le potentiel vecteur \vec{J} ; on a posé

$$\text{div } \vec{C} = 0 \quad \text{comme } \text{div } \vec{j} = 0.$$

La formule

$$\vec{W} = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\vec{T} \times \vec{r}}{r^3} d\tau$$

résout le problème du § 55, dans l'hypothèse où la seule condition aux limites est $\vec{W} = 0$ à l'infini.

² Dans la théorie électronique, le raisonnement est bien simple, le lecteur le fera lui-même.

³ On suppose ici que l'énergie interne des aimants est invariable et que seules les variations de U suffisent à représenter les transformations énergétiques.

c'est encore cette expression qui représente la densité d'énergie potentielle, mais ce n'est que plus tard qu'on pourra la justifier.

Feuillets magnétiques et courants fermés.

154. Il est intéressant de remarquer que le *champ magnétique créé par un courant fermé*, c'est-à-dire par un courant dû au déplacement de charges dans un filet fermé, est le même que celui que crée un potentiel de double couche magnétique étendue sur une surface Σ dont le courant est la frontière.

On a d'abord pour le champ créé par ce courant

$$\vec{H} = \frac{i}{c} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3};$$

mais on sait que [I; § 73]

$$\oint d\vec{s} \times \vec{u} = \iint_{\Sigma} (d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{u},$$

par suite

$$\vec{H}(P) = \frac{i}{4\pi c} \iint_{\Sigma} (d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Or

$$(d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \left(\frac{d\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) - d\vec{\sigma} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right).$$

Il est visible que, pour $\vec{r} \neq 0$,

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0;$$

de plus, si P n'est pas sur Σ :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \left(\frac{d\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \vec{\nabla} \iint_{\Sigma} \frac{d\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \iint_{\Sigma} \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma$$

avec les notations que nous avons employées dans la théorie du potentiel newtonien. Il vient donc

$$\vec{H}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} \iint_{\Sigma} \frac{i}{4\pi c} \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma,$$

et l'on voit que le champ magnétique créé par un courant fermé est

le même que le champ magnétique créé par une double couche de densité magnétique $\mu = \frac{i}{4\pi c}$. On dit aussi qu'un *courant fermé est équivalent à un feuillet magnétique*.

Il est à remarquer que le potentiel, en P , d'un feuillet magnétique est, à un facteur près, égal à l'angle solide sous lequel on voit du point P la surface du feuillet.

155. On peut calculer la circulation de \vec{H} le long d'une courbe fermée; ce sera le travail du champ magnétique dans le déplacement d'une masse magnétique $+1$. Les courbes qui ne donnent pas zéro sont celles qui s'enroulent autour du circuit fermé. Le travail le long d'une courbe qui fait un seul tour autour du circuit est égal à la variation du potentiel de double couche que nous venons de calculer. Si on imagine deux points voisins de Σ , l'un P près de la face positive, l'autre P' près de la face négative, comme l'angle solide est discontinu quand on passe de P' en P et que la discontinuité est 4π , on voit que le travail total cherché est

$$4\pi \frac{i}{4\pi c} = \frac{i}{c}.$$

Il est à prendre avec le signe $+$ si on tourne dans le sens des lignes de forces de \vec{H} , sinon il est négatif. Le lecteur en précisera facilement les conditions.

*Analogies et différences dans les champs électrostatiques
et magnétiques constants.*

156. Il est utile de grouper les lois que nous avons obtenues jusqu'ici pour les comparer et aussi pour qu'il soit plus aisé de les citer.

Soit un champ scalaire $\rho(P)$ et un champ vectoriel $\vec{C}(P) = \rho\vec{W}$. Les lois du champ électrique dans le vide s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (6) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho; \quad (7)$$

celles du champ magnétique ont la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad (8) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\vec{C}}{c} = \vec{j}. \quad (9)$$

Il y a une dissymétrie bien nette dans ces deux groupes d'équations; les rôles de $\vec{\nabla} \cdot$ et de $\vec{\nabla} \times$ y sont échangés.

Il y a une similitude de forme dans les définitions :

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (10) \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (11)$$

et les équations différentielles s'écrivent dans un milieu isotrope et homogène :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (6') \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho; \quad (7')$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (8') \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\vec{C}}{c} = \vec{j}. \quad (9')$$

On voit que, en passant du vide à un milieu matériel, d'une part, les lois avec $\vec{\nabla} \times$ ne changent pas, d'autre part, les lois avec $\vec{\nabla} \cdot$ portent sur les vecteurs déplacement et induction au lieu de porter sur les champs, mais à cela près leurs formes sont les mêmes.

Il est intéressant de remarquer que la dissymétrie des lois se poursuit dans les expressions des forces pondéromotrices. L'action d'un champ \vec{E} sur des charges se représente par une force, dite pondéromotrice, dont l'intensité rapportée à l'unité de volume est :

$$\vec{F}_E = \rho \vec{E} \quad (\rho = \text{densité de charge})$$

alors que l'action d'un champ électromagnétique sur des charges en mouvement est représentée par une force dont la densité est

$$\vec{F}_M = \frac{\vec{C}}{c} \times \vec{H};$$

cette dernière équation traduit la seconde loi de Laplace ; c'est une conséquence immédiate de la première loi, imposée par le principe d'égalité de l'action et de la réaction.

La densité d'énergie potentielle dans un milieu où règnent des champs constants est

$$\frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}].$$

Enfin, il convient d'énoncer la loi qui permet de trouver l'intensité d'un courant permanent dans un conducteur homogène où l'électricité se déplace sous la seule action des différences du potentiel électrostatique qui y règnent. Un tel courant est dit de *conduction*. Il est bien évident que l'on doit maintenir artificiellement ces différences de potentiel afin que le courant soit permanent. Ce sont des générateurs d'électricité, de la structure desquelles nous ne pouvons pas parler, qui ont cette fonction. Comme nous l'avons dit [§ 148], ce courant est évidemment d'autant plus intense que le potentiel varie plus rapidement d'un point à l'autre du conducteur, son intensité peut donc être proportionnelle au gradient du potentiel, donc à \vec{E} . On posera

$$\vec{C} = \sigma \vec{E} \quad (12)$$

où σ est la *conductibilité*. Cette relation généralise la *loi d'Ohm*, qui n'exprime pas autre chose que la proportionnalité de l'intensité de courant à la différence de potentiel qui lui donne naissance ¹.

Champ électromagnétique variable. I. Loi de Faraday.

157. Le champ magnétique créé par des aimants mobiles ou par des courants non-stationnaires est représenté par un vecteur $\vec{H}(P; t)$. On sait qu'il crée dans un conducteur un courant électrique dont Faraday a découvert l'existence et la loi. Pour l'énoncer dans toute sa généralité, il convient de faire intervenir le champ d'induction magnétique $\vec{B}(P; t)$. D'autre part, on peut imaginer que le courant induit \vec{C} (ou $\vec{j} = \frac{\vec{C}}{c}$ suivant les unités) est équivalent à un courant de conduction entretenu par une différence de potentiel fictive qu'on appellera la *force électromotrice induite*. Or, si l'on considère un conducteur linéaire L , la différence de potentiel aux extrémités est

$$V_2 - V_1 = - \int_L \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (\text{car } \vec{E} = -\vec{\nabla}V)$$

\vec{E} étant le champ électrique qui crée le courant de conduction $\vec{C} = \sigma \vec{E}$. C'est la différence $V_1 - V_2$ qui est dite la force électromotrice dans le conducteur L , elle vaut donc

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

et elle est la circulation le long de L du champ électrique \vec{E} . Or, il est manifeste que dans un champ électrique dont le rotationnel est nul, ce qui est le cas en régime stationnaire, la circulation de \vec{E} le long d'une courbe fermée est nulle. Il n'y a donc pas de force électromotrice dans un circuit linéaire fermé en régime stationnaire si le potentiel V

¹ Il convient de faire une remarque sur les lois dites phénoménologiques où interviennent les constantes matérielles ϵ , μ , σ . Elles résultent d'hypothèses faites sur la conduite du fluide électrique dans la matière ou sur la manière dont la matière réagit sous l'influence des champs. Ces hypothèses semblent liées au fait qu'on s'est figuré l'électricité comme un fluide continu et la matière comme un milieu continu et fixe dans lequel ce fluide se meut. Répétons qu'il est possible de montrer que si l'on admet que la matière et l'électricité ont une structure discontinue, les lois obtenues avec l'hypothèse de la continuité résultent des *lois élémentaires dans le vide* par des considérations statistiques où le jeu des grands nombres et des moyennes finit par créer précisément l'apparence de la continuité, comme en hydrodynamique.

est uniforme. On peut se demander si le courant induit est en rapport avec une polydromie du potentiel. Physiquement la chose est impen-
sable et mathématiquement elle est inutile dès qu'on connaît la loi
intégrale de Faraday et sa traduction différentielle. On verra même
que \vec{E} ne dérive plus d'un potentiel scalaire.

Posons $\vec{E}' = c\vec{E}$; \vec{E}' est le champ électrique en unités électromagné-
tiques de Heaviside. En effet, la densité de charge est, avec ces unités,
 $\rho' = \frac{\rho}{c}$; de plus le produit $\rho\vec{E} = \rho'\vec{E}'$ doit être une force par unité de
volume, exprimée par des dynes cm^{-3} , dont la définition n'a aucun rap-
port avec la distinction entre les deux systèmes d'unités électriques,
donc

$$\vec{E}' = \frac{\rho}{\rho'} \vec{E} = c\vec{E}.$$

*La loi de Faraday dit que la force électromotrice induite dans un conduc-
teur homogène, linéaire, fermé Γ , est égale, au signe près, à la dérivée par
rapport au temps du flux d'induction magnétique à travers une surface
fermée dont Γ est la frontière. La loi de Lenz précise le signe; cette force
électromotrice correspond à un courant qui créerait un champ magné-
tique s'opposant à l'accroissement de flux considéré.*

158. En formule, avec des unités électromagnétiques :

$$\int_{\Gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (13)$$

Il faut remarquer que l'équation (13) pourrait être contradictoire,
mais si l'on prend une autre surface Σ , le second membre ne change
pas si

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad (14)$$

c'est là, en effet, la condition pour que l'intégrale $\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$ ne dépende
que de la frontière de Σ et non du reste de Σ , comme le théorème d'Os-
trogradzky le montre immédiatement. Donc, l'équation (13) oblige à poser
(14), aussi bien en régime variable qu'en régime stationnaire.

De (13), on tire par le théorème d'Ampère-Stokes :

$$\iint_{\Sigma} \left(\text{rot } \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\sigma} = 0,$$

ce qui doit être une identité quelle que soit la surface Σ , donc .

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

On voit bien par là que le rotationnel de \vec{E} n'est plus nul, et par suite que l'on ne peut plus écrire que \vec{E} est le gradient d'un scalaire, lorsque le champ \vec{B} n'est plus constant.

Champ électromagnétique variable. II. Courant de déplacement.

159. On a posé

$$\vec{C} = \rho \vec{W}$$

et le théorème de conservation de l'électricité se traduit par l'équation de continuité [§ 148, éq. (3) :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0. \quad (15)$$

Si le courant n'est plus stationnaire, \vec{j} n'a pas une divergence nulle et par suite le rotationnel de \vec{H} ne peut être égal à \vec{j} . Or, on a

$$\rho = \text{div} \vec{D},$$

par conséquent, c'est le vecteur

$$\vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16)$$

qui, d'après (15), a une divergence nulle et qui, par conséquent, est le rotationnel d'un certain champ de vecteurs.

On donne le nom de *densité de courant de déplacement* ou, plus brièvement, de *courant de déplacement* au vecteur

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Maxwell a admis, et c'est là une hypothèse géniale, que ce courant a les mêmes effets magnétiques qu'un courant de conduction. En écrivant que le courant total (16) a une divergence nulle, on écrit simplement une conséquence du théorème qui dit que le flux du vecteur déplacement \vec{D} à travers une surface fermée est égal à la somme des charges contenues dans la surface :

$$\iint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{d\sigma} = \iiint_V \rho d\tau,$$

ou ce qui revient au même :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

En effet, on a

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{\rho}{c} d\tau = - \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{D}}{c} \cdot d\vec{\sigma} = - \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

ou encore

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

et d'après le théorème d'Ostrogradsky :

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

La notion de courant de déplacement n'est pas contradictoire avec le théorème de Gauss ; elle sert même à conserver ce théorème en régime variable et à assurer que l'on a toujours

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.^1$$

160. Enfin, nous admettrons, comme Maxwell l'a fait, que le rotationnel du champ magnétique est égal au *courant total*, alors que dans le cas du régime stationnaire il est égal au courant \vec{j} . On obtient ainsi l'équation

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$$

dont les conséquences seules sont vérifiables.

Remarquons cependant que l'hypothèse de Maxwell se justifie comme suit ; posons

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{K}}{\partial t}$$

¹ On dit parfois que la théorie de Maxwell n'admet que des courants fermés ; un courant ordinaire dans un fil à travers lequel se décharge un condensateur est accompagné d'un courant de déplacement entre les plateaux du condensateur.

où $\frac{\partial \vec{K}}{\partial t}$ est un champ à déterminer et dont la valeur est nulle en régime stationnaire. Puisque $\text{div } \overrightarrow{\text{rot } \vec{H}} = 0$, on aura :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \text{div } \vec{K}}{\partial t} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\text{div } \vec{K} - \frac{\rho}{c} \right] = 0.$$

On peut donc poser

$$\text{div } \vec{K} = \frac{\rho}{c} = \frac{1}{c} \text{div } \vec{D} = \text{div } \frac{\vec{D}}{c}. \quad (17)$$

Tant que \vec{K} n'est pas soumis à d'autres conditions, on peut écrire

$$\vec{K} = \frac{\vec{D}}{c}, \quad (18)$$

mais on pourrait ajouter à cette solution un champ dont la divergence est nulle. Ce qui caractérise la théorie de Maxwell, c'est le choix (18) parmi toutes les solutions possibles de (17).

Equations de Maxwell.

161. Les équations que nous venons d'obtenir forment un système parfaitement cohérent et dont les conséquences, d'une extraordinaire importance, ont été vérifiées, d'une part, par l'électrotechnique moderne, d'autre part, par la T. S. F.

Il convient de les récrire, de manière à les avoir en tableau synoptique, pour pouvoir préciser leur rôle du point de vue mathématique.

\vec{E} , \vec{D} et ρ sont exprimées en unités électrostatiques \vec{H} , \vec{B} , \vec{j} en unités électromagnétiques de Heaviside. Dans l'espace où se trouvent des milieux isotropes et homogènes non-ferromagnétiques, de constante diélectrique ϵ , de perméabilité constante μ et de conductibilité σ , constante aussi, les équations du champ électromagnétique, dites *équations de Maxwell*, s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (19) \quad \text{div } \vec{D} = \rho; \quad (20)$$

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{H}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (21) \quad \text{div } \vec{B} = 0; \quad (22)$$

avec

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0, \quad (23)$$

et l'on admet qu'on a encore pour tous les cas :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (10) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (11)$$

et

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (12')$$

pour autant que les charges ne sont en mouvement que sous l'influence du champ et cela dans des conducteurs immobiles. Si les corps à l'intérieur et autour desquels on étudie le champ électromagnétique sont mobiles, il faut ajouter à \vec{j} un champ dû à la convection de l'électricité entraînée par la matière ; l'électrodynamique des corps en mouvement pose des problèmes difficiles que nous n'aurons pas à étudier ici et dont l'étude a conduit à la théorie de la relativité ¹.

162. Nous allons démontrer le théorème suivant qui précise du point de vue du déterminisme la signification des équations de Maxwell :

Si, à un instant donné, on connaît les champs \vec{E} et \vec{H} (donc \vec{D} et \vec{B}), on peut, grâce aux équations de Maxwell, les trouver à un instant ultérieur.

En effet, on peut écrire :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon} \overrightarrow{\text{rot } H} - \frac{c\sigma}{\varepsilon} \vec{E},$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{c}{\mu} \overrightarrow{\text{rot } E},$$

et les théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles nous assurent qu'on peut trouver $\vec{E}(P; t)$ et $\vec{H}(P; t)$ si on connaît $\vec{E}(P; t_0)$ et $\vec{H}(P; t_0)$.

Pour achever la démonstration, il faut montrer que l'équation

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

est vérifiée à tout instant, si elle l'est, et elle doit l'être évidemment, à l'instant t_0 . C'est bien le cas, car

$$\frac{\partial \text{div } \vec{H}}{\partial t} = - \frac{c}{\mu} \text{div } \overrightarrow{\text{rot } E} \equiv 0,$$

¹ Dans la théorie électronique, tous les courants de conduction sont des courants de convection : les charges élémentaires circulent dans les conducteurs et l'on peut définir statistiquement la densité du courant \vec{C} et par suite \vec{W} . Cette vitesse \vec{W} est déterminée par rapport à la matière considérée macroscopiquement et supposée au repos. En fait, les équations de Maxwell définissent, à la fois, le système de référence dans lequel on repère les champs et la mesure du temps grâce auxquelles elles sont physiquement vérifiées. Si la matière est en mouvement, on peut conserver les équations de Maxwell mais le courant \vec{j} doit être modifié et les champs ne se transforment pas comme des vecteurs ; les éléments de la théorie de la relativité restreinte sont assez connus pour qu'on n'ait pas besoin d'insister davantage.

donc

$$\operatorname{div} \vec{H} = \text{const.} = \operatorname{div} \vec{H}(P; t_0) = 0.$$

163. La distribution des milieux matériels dans lesquels règne le champ électromagnétique pose des problèmes aux limites très variés que nous ne pouvons songer à aborder ici.

Dans la suite, nous supposons que le champ règne dans le vide, à l'exception de certaines régions à l'intérieur desquelles se trouvent des charges de densité ρ ou circulent des courants \vec{j} . On aura donc :

$$\vec{E} = \vec{D}, \quad \vec{H} = \vec{B},$$

et l'on va se proposer de déterminer \vec{E} et \vec{H} en tout point de l'espace et pour chaque instant du temps.

Il conviendra d'écrire les équations de Maxwell sous une forme plus propre au calcul en utilisant systématiquement le symbole $\vec{\nabla}$.

On aura donc :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad (19') \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad (22')$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (21') \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho. \quad (20')$$

Energie dans le champ électromagnétique.

164. Nous savons que la densité de la force pondéromotrice provenant du champ électrique et du champ magnétique est

$$\vec{F} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{H}.$$

Calculons le travail, rapporté encore à l'unité de volume, par unité de temps, que le champ fournit à l'électricité mobile dans le courant

$\vec{j} = \frac{c\vec{W}}{c}$. Le travail élémentaire est

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} \, d\tau$$

pour un petit volume $d\tau$ qui se déplace de \vec{dr} . Rapporté à l'unité de volume et à l'unité de temps, ce sera

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{W},$$

\vec{W} est la vitesse du fluide électrique au point considéré où l'on a pris le volume $d\tau$.

Puisque \vec{W} est parallèle à \vec{j} , le produit mixte $\vec{W} \cdot (\vec{j} \times \vec{H})$ est nul; dès lors

$$\vec{F} \cdot \vec{W} = \rho \vec{E} \cdot \vec{W} = c \vec{j} \cdot \vec{E};$$

on sait que ce travail se retrouve dans l'échauffement du conducteur et si on rappelle que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, on retrouve la loi de Joule d'après laquelle la quantité de chaleur est proportionnelle au carré de l'intensité du courant, le facteur $\frac{1}{\sigma}$ montre encore que pour les conducteurs à faible conductibilité, c'est-à-dire à grande résistance, cette quantité de chaleur est plus considérable que pour les bons conducteurs.

Les équations du champ vont permettre d'établir une relation entre l'expression de cette énergie et certaines expressions qui représenteront d'autres aspects de l'énergie électromagnétique. Remarquons, en effet, que [I, § 70, 5°]

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \vec{\nabla} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}].$$

Dès lors, en multipliant scalairement les deux membres de (21') par \vec{E} et les deux membres de (19') par $-\vec{H}$ et additionnant, il vient :

$$-c \vec{\nabla} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{E^2 + H^2}{2} \right] = c \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (24)$$

Nous retrouvons l'expression de l'énergie du champ dans le vide, et ce sera justement la suite qui justifiera avec rigueur notre induction du § 153; posons donc

$$\frac{E^2 + H^2}{2} = U \cdot$$

et désignons par \vec{P} le vecteur $\vec{E} \times \vec{H}$ dit *vecteur de Poynting*. Multiplions les deux membres de (24) par $d\tau$ et intégrons dans une région D de l'espace limitée par une surface fermée Σ . En vertu du théorème d'Ostrogradzky, l'intégrale de $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ se ramènera à un flux à travers Σ et l'on trouve :

$$- \frac{d}{dt} \iiint_D U d\tau - c \iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{d\sigma} = \iiint_D c \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

Une telle équation exprime bien évidemment un bilan d'énergie. Le second membre est l'énergie fournie aux charges mobiles dans D par unité de temps. Elle est égale à l'énergie cédée par le champ dans l'unité de temps, — c'est le premier terme du premier membre, — *augmentée*

du flux de $c\vec{P}$ qui *pénètre* à travers Σ dans le volume D . Ce vecteur $c\vec{P}$ représente donc un *flux d'énergie* dans le champ électromagnétique. Il y a quelque arbitraire à interpréter, avant toute expérience, comme nous le faisons, et le premier terme du premier membre qu'une induction rapide nous avait conduit à traiter comme une énergie, et surtout le second. Mais si nous admettons que le principe de la conservation de l'énergie régit aussi les transformations du champ électromagnétique, notre interprétation s'impose presque et elle est la plus simple de celles qu'on peut donner de (24). L'expérience a d'ailleurs confirmé ces vues.

Intégration des équations de Maxwell. Ondes électromagnétiques.

165. Il est possible de ramener l'intégration des équations de Maxwell à celle d'équations du second ordre d'un type que nous avons déjà rencontré en hydrodynamique et dont le dernier chapitre de ce livre traitera avec quelque détail.

On utilise l'artifice du potentiel vecteur et du potentiel scalaire. Puisque

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad \text{on peut poser} \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{f},$$

\vec{f} étant un champ vectoriel défini à un gradient près. Dès lors, on a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{f}}{\partial t} = 0,$$

soit

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \right] = 0.$$

Donc

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi,$$

φ étant un scalaire défini à une fonction de t près.

On assujettit \vec{f} à avoir une divergence donnée, ce qui est possible [cf. § 151], et le plus simple est d'écrire

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0. \tag{25}$$

Dès lors, les deux équations non utilisées encore :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho,$$

s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \right] = \vec{j} \quad (26)$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot \left[-\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \right] = \rho. \quad (27)$$

Or, d'une part :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{f}$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \vec{f} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{f}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \varphi}{\partial t} = 0;$$

et, d'autre part, en vertu de (25) :

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Par conséquent, les deux équations (26) et (27) s'écrivent

$$- (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{f} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = \vec{j}$$

$$- (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \rho$$

on encore

$$\text{lap } \vec{f} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = \vec{j},$$

$$\text{lap } \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \rho.$$

On appelle ces équations les équations des *potentiels retardés*. Si on sait les intégrer, ρ et \vec{j} étant donnés, on calculera ensuite très aisément \vec{H} et \vec{E} . Notre calcul permet donc de résoudre le problème suivant :

Connaissant en chaque point de l'espace la densité ρ et la vitesse \vec{W} du fluide électrique, ou le courant électrique \vec{j} , trouver les champs, \vec{H} et \vec{E} , créés par ce fluide.

166. Un cas particulier fort important est celui où $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$, dans la région de l'espace qu'on étudie. Les équations de Maxwell se simplifient, elles s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0;$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0.$$

On peut éliminer \vec{H} ou \vec{E} sans passer par les potentiels. Un calcul simple que le lecteur fera bien aisément conduit aux deux équations :

$$\text{lap } \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (28)$$

$$\text{lap } \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (29)$$

qui sont des *équations de d'Alembert*.

Elles admettent la solution banale $\vec{E} = \vec{H} = 0$, mais si les champs existent dans la région que nous étudions, cette existence étant assurée, par exemple, par des conditions aux limites convenables, les équations (28) et (29) nous apprennent, ce que nous confirmerons dans le prochain chapitre, que les champs \vec{E} et \vec{H} se propagent sous forme d'ondes à la vitesse c .

Or ce nombre c qui est le rapport des unités de charges dans les deux systèmes, a d'abord bien la dimension d'une vitesse ; ensuite sa valeur, donnée par l'expérience, est sensiblement $3 \cdot 10^{10}$ cm. sec⁻¹, c'est-à-dire égale à la vitesse de la lumière. De là à penser que la lumière est une propagation d'ondes électromagnétiques, il n'y avait qu'un pas que Maxwell a hardiment franchi. Les conséquences tirées de cette remarque ont été très nombreuses et les confirmations expérimentales qu'on a obtenues ne se comptent plus. La théorie électromagnétique de la lumière représente une partie importante des phénomènes optiques.

Exercices.

1. La charge $4e$ et la charge $-e$ sont placées respectivement en A et B . Soit C la position d'équilibre dans le champ que créent ces charges ; montrer que la ligne de force qui passe par C coupe AB sous un angle de 60° en A et à angle droit en C (Jeans).

2. Soit, dans un champ électrostatique, une surface fermée Σ ne contenant à son intérieur aucune charge, montrer qu'en chaque point d'une certaine ligne fermée de Σ , la surface de niveau qui y passe coupe Σ à angle droit (Jeans).

3. Traduire physiquement les théorèmes qui affirment l'unicité de la solution des problèmes de Dirichlet et de Neumann en supposant que les données sont : ou bien les potentiels sur des conducteurs, ou bien la charge totale sur chaque conducteur. (On admet qu'il n'y a pas

d'autres sources du champ que les densités superficielles de chaque conducteur.)

4. La méthode des images, en hydrodynamique, s'applique aux problèmes à potentiels harmoniques. On la traduira en électrostatique : une surface équipotentielle est remplacée par un conducteur, les charges extérieures sont les *images* des charges intérieures.

5. Soit un système de n conducteurs placés dans le vide ; on connaît leur charge à chacun, trouver leur potentiel et inversement. On imagine un état possible du système où le potentiel en chaque point est Φ' et un autre état avec Φ'' . Dans le premier cas,

$$\vec{E}' = - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi',$$

dans le second,

$$\vec{E}'' = - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi''.$$

Evidemment l'état dans lequel $\Phi = \Phi' + \Phi''$ est aussi un état possible, et le champ est

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''.$$

Le potentiel Φ est constant sur la surface de chaque conducteur comme le sont Φ' et Φ'' et l'on a $\text{div } \vec{E} = 0$ comme on avait $\text{div } \vec{E}' = \text{div } \vec{E}'' = 0$. Mais la charge de chaque conducteur est (pour le $k^{\text{ième}}$)

$$e_k = \iint_{\Sigma_k} d\vec{\tau}_k \cdot \vec{E} = \iint_{\Sigma_k} d\vec{\tau}_k (\vec{E}' + \vec{E}'') = e'_k + e''_k,$$

ce qu'on généralise aisément si l'on connaît un nombre quelconque d'états possibles du système.

La détermination des charges, e_1, \dots, e_n correspondant aux potentiels Φ_1, \dots, Φ_n des conducteurs, va dès lors être aisée si l'on connaît la solution des n problèmes plus simples suivants : trouver les charges quand les potentiels donnés sont :

$$\begin{array}{l} 1, 0, 0, \dots 0 \\ 0, 1, 0, \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0, 0, 0, \dots 1. \end{array}$$

Ces n problèmes sont des problèmes de Dirichlet extérieurs, ils n'ont chacun qu'une seule solution.

Supposons que la solution donne les charges

$$\begin{aligned} & p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n} \\ & p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n} \\ & \dots\dots\dots \\ & p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nn} \end{aligned}$$

alors les charges pour les potentiels Φ_1, \dots, Φ_n seront respectivement

$$e_i = \sum_{k=1}^{k=n} p_{ik} \Phi_k, \quad (i = 1, \dots, n)$$

d'où l'on tire en résolvant par rapport aux Φ_i :

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{k=n} q_{ik} e_k, \quad (i = 1, \dots, n)$$

où q_{ik} sera le potentiel du $i^{\text{ième}}$ conducteur quand le $k^{\text{ième}}$ a la charge 1, alors que tous les autres n'ont pas de charge.

Montrer que

$$q_{ik} = q_{ki}$$

et que

$$p_{ik} = p_{ki}.$$

On part de l'expression de l'énergie totale du champ

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2} (q_{11} e_1 + q_{22} e_2^2 + \dots + q_{nn} e_n^2) + (q_{12} + q_{21}) e_1 e_2 + \\ + (q_{n-1, n} + q_{n, n-1}) e_{n-1} e_n \end{aligned}$$

et de l'équation aisée à démontrer

$$\Phi_k = \frac{\partial A}{\partial e_k}.$$

(Lorentz : *Lectures on Theoretical Physics*, vol. III, p. 106-109.)

CHAPITRE X

Equations de d'Alembert et potentiels retardés.

Cordes vibrantes.

167. Nous avons trouvé, à deux reprises, une équation de la forme

$$\text{lap } u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

où a est une grandeur qui a la dimension d'une vitesse.

Il est utile de connaître d'abord la théorie de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

puis celle de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

avant de passer au cas où le laplacien est relatif aux trois variables x, y, z .

On trouve (2) dans la théorie des cordes vibrantes et (3) dans celle des membranes vibrantes.

Soit une corde ¹ homogène, flexible et élastique. Imaginons-la tendue entre deux points fixes A et B et supposons que la tension soit assez grande pour que le poids de la corde soit négligeable. Partant de cette position d'équilibre, nous déformons la corde, les extrémités A et B restant fixes, en faisant en sorte qu'elle reste dans un plan et nous communiquons à chaque élément de la corde une vitesse dans ce plan, perpendiculaire à AB .

¹ On devrait plutôt dire un fil, le mot corde a cependant prévalu à cause de la terminologie des instruments de musique.

La corde va dès lors prendre un certain mouvement dans le plan en question, dont on peut aisément étudier les circonstances pour autant que la déformation et les vitesses initiales ont été assez petites, et pour autant que la tension puisse être considérée comme constante.

Prenons la droite AB comme axe des x , l'origine en A ; et soit l l'abscisse de B . Le plan dans lequel vibre la corde sera le plan des x, y . Soit $y = f(x)$ l'équation de la corde déformée : on suppose y petit ainsi que $\frac{\partial y}{\partial t}$, de telle manière que $y^2, y \frac{\partial y}{\partial t}$, etc... soient négligeables, et on admet que chaque point de la corde se déplace sur une parallèle à l'axe des y , c'est-à-dire qu'on se borne à étudier les vibrations *transversales* de la corde. Dès lors, soit PP' un élément ds de la corde (avec $P(x, y)$ et $P'(x + dx, y + dy)$). Soient enfin ρ la densité linéaire de la corde et T sa tension. L'élément ds se meut et, à chaque instant, il y a équilibre entre la force d'inertie élémentaire

$$-\rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

et la projection sur l'axe des y de la résultante des deux forces appliquées aux extrémités de ds provenant de la tension de la corde. Or, si α est l'angle de la tangente en P avec Ax , on a pour cette projection :

$$p = -T \sin \alpha + T \sin (\alpha + d\alpha).$$

Or, en confondant $\sin \alpha$ avec $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \sin (\alpha + d\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

donc

$$p = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Aux infiniment petits d'ordre supérieur près :

$$ds = dx,$$

donc l'équation du mouvement est

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

a étant un nombre constant qui a la dimension d'une vitesse, car

$$[a^2] = \frac{[T]}{[\rho]} = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-1}} = L^2T^{-2}.$$

Cette équation régit les petits mouvements transversaux des cordes, quelles que soient les circonstances particulières auxquelles elles peuvent être soumises.

Intégrales de l'équation des cordes vibrantes.

a) SOLUTION GÉNÉRALE DE D'ALEMBERT.

168. Posons

$$\lambda = x + at, \quad \mu = x - at,$$

et cherchons à exprimer l'élongation y en fonction des deux nouvelles variables λ et μ . Représentons encore par y cette fonction de λ et μ . On a immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \mu} \right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu}, & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} \right) \end{aligned}$$

et, dès lors, l'équation (2) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} = 0. \tag{4}$$

Or la solution la plus générale de cette équation est

$$y = \varphi(\lambda) + \psi(\mu); \tag{5}$$

donc la solution la plus générale de (2) est

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \tag{6}$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires.

Supposons que $\varphi \equiv 0$, alors

$$y = \psi(x - at); \tag{7}$$

les valeurs de x et t pour lesquelles

$$x - at = \text{const.} = \mu_0$$

donnent à y une même valeur $\varphi(\mu_0)$. Géométriquement, au point mobile d'abscisse

$$x = \mu_0 + at$$

correspond une élongation constante. Si ψ est définie pour toutes les valeurs réelles de μ_0 (corde indéfinie), l'équation (7) représente une

famille de courbes dépendant du paramètre t ; on passe d'une courbe C_1 à une courbe C_2 par une translation parallèle à l'axe des x de grandeur $a(t_2 - t_1)$. Physiquement, la *déformation de la corde indéfinie se propage*, en restant identique à elle-même, avec la vitesse a .

On verrait que

$$y = \varphi(x + at)$$

représenté la propagation d'une déformation avec la vitesse a mais vers les x négatifs.

Appelons *somme* de deux déformations, la déformation dont l'élongation en chaque point est la somme des élongations dues à chaque déformation. *La déformation d'une corde vibrante est la somme de deux déformations se propageant avec la vitesse a , chacune dans un sens différent.*

b) PROBLÈME DE CAUCHY.

169. La corde a été considérée comme un système matériel formé d'une infinité d'éléments, soumis en particulier à la condition de se mouvoir parallèlement à Ay . Or le mouvement d'un système à un nombre fini de degrés de liberté est déterminé par les équations du mouvement et par la donnée des valeurs initiales des paramètres qui fixent la position du système et de leurs dérivées par rapport au temps. On peut se demander si, pour un système à un nombre infini de degrés de liberté comme la corde (et plus tard on se posera la même question pour la membrane ou pour un fluide vibrant), il n'y a pas détermination du mouvement par l'équation (2) et les *conditions initiales* suivantes :

pour $t = s$, la forme de la corde est donnée par l'équation

$$y = f(x) \tag{8}$$

et l'état des vitesses est donné par la relation :

$$v_0 = \frac{\partial y}{\partial t} = g(x). \tag{9}$$

Il s'agit de voir si les fonctions φ et ψ dans (6) sont déterminées par ces conditions.

Bien entendu, on doit supposer $f(x)$ continue, des discontinuités correspondraient physiquement à un tronçonnement de la corde.

Ecrivons alors que pour $t = 0$, $y = f(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t} = g(x)$, ce qui exige.

la dérivabilité de φ et de ψ par rapport à leur argument λ ou μ . On aura :

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \psi(x) &= f(x), \\ a[\varphi'(x) - \psi'(x)] &= g(x).\end{aligned}$$

Or, si $g(x)$ est intégrable sur tout intervalle où la solution a un sens physique, on aura

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x g(x) dx. \quad (x_0 = \text{const.})$$

Par addition et soustraction, il vient :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2} \left[f(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x g(x) dx \right], \\ \psi(x) &= \frac{1}{2} \left[f(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x g(x) dx \right].\end{aligned}$$

Ces relations doivent avoir lieu quel que soit x . Remplaçons-y x par $x + at$ dans la première et par $x - at$ dans la seconde, on trouvera alors, en se rappelant que dans une intégrale définie le nom de la variable d'intégration n'a aucune importance :

$$y = \frac{1}{2} \left[f(x + at) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x+at} g(x) dx + f(x - at) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x-at} g(x) dx \right],$$

soit :

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x + at) + f(x - at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} g(x) dx \right], \quad (10)$$

ce qui ne suppose que l'intégrabilité de $g(x)$; mais physiquement, $y(x, t)$ devant être continue en x , pour chaque t , $f(x)$ doit l'être comme nous l'avons dit.

170. Nous avons ainsi résolu le *problème de Cauchy* dans le cas particulier de l'équation (2) : trouver l'intégrale y de cette équation qui, pour $t = 0$, se réduise à $f(x)$ et dont la dérivée par rapport à t , $\frac{dy}{dt}$, se réduise, au même instant, à $g(x)$. La théorie générale des équations aux dérivées partielles affirme l'existence et l'unicité de la solution de ce problème sous des conditions de régularité qui sont précisément satisfaites ici. Notre construction nous donne la solution et nous en prouve l'unicité car l'intégrale la plus générale de (2), c'est-à-dire celle dont toutes les autres sont des cas particuliers, est précisément (6).]

On trouve une formule simple si $g(x) = 0$, c'est-à-dire si l'on abandonne la corde déformée à l'instant $t = 0$ sans lui communiquer de vitesse initiale :

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)].$$

La déformation est la moyenne de deux déformations identiques à la déformation initiale, se propageant en sens inverse avec la vitesse a .

c) CORDE FIXÉE A SES EXTRÉMITÉS.

171. La corde indéfinie dont nous venons de nous occuper est un mythe physique. Il est temps de revenir à des problèmes réels et en particulier à celui-là même qui nous a conduit à l'équation de d'Alembert (2). *Trouver le mouvement d'une corde dont les extrémités sont fixes.*

En plus des conditions initiales (8) et (9), il faut se donner les *conditions aux limites* : $y = 0$, si $x = 0$ et si $x = l$, qui doivent être vérifiées pour toutes les valeurs de t . Les vitesses de A et B sont toujours nulles.

On peut traiter ce problème par un artifice assez élégant.

Imaginons une corde indéfinie formée de segments de longueur $2l$ tous congruents à un instant quelconque, c'est-à-dire tels qu'on passe de l'un à l'autre par une translation de grandeur $2l$. Considérons le segment $(-l, +l)$ et imaginons que sa position initiale et l'état initial de ses vitesses soient définis par les conditions suivantes :

$$t = 0 : \left\{ \begin{array}{l} y = F(x), \quad \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ y = -F(-x), \quad \text{si } -l \leq x \leq 0, \\ \frac{dy}{dt} = G(x), \quad \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{dy}{dt} = -G(-x), \quad \text{si } -l \leq x \leq 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} F(0) = F(l) = F(-l) = 0, \\ G(0) = G(l) = G(-l) = 0, \end{array}$$

On prendra donc $f(x)$ et $g(x)$, dans les formules (8) et (9), périodiques et de période $2l$; de plus ce sont des fonctions impaires ; elles se confondent respectivement avec $F(x)$ et $G(x)$ dans l'intervalle $(0, l)$.

La formule

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x + at) + f(x - at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} g(x) dx \right]$$

représente bien la solution de notre problème.

En effet, pour $t = 0$,

$$y = f(x).$$

Si l'on suppose f dérivable, on aura, en appliquant la formule de [dérivation sous le signe \int :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{a}{2} [f'(x + at) - f'(x - at)] + \frac{a}{2a} [g(x + at) + g(x - at)],$$

d'où pour $t = 0$,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0 = g(x).$$

Enfin, pour $x = 0$, y est toujours nul et, pour $x = l$, on a

$$y(l, t) = \frac{1}{2} \left[f(l + at) + f(l - at) + \frac{1}{a} \int_{l-at}^{l+at} g(x) dx \right];$$

mais

$$f(l + at) = f(-l + at) = -f(l - at);$$

de plus, comme

$$\int_{x_0}^{x_0+2t} g(x) dx = \int_0^{2t} g(x) dx = \int_{-l}^l g(x) dx = 0$$

à cause de la périodicité et de l'imparité de $g(x)$, on aura

$$\int_{l-at}^{l+at} g(x) dx = \int_{l-at}^{-l+at} g(x) dx = 0.$$

Donc $y(l, t) = 0$, quel que soit t .

d) CORDE FIXÉE A SES EXTRÉMITÉS (suite). DÉVELOPPEMENTS DE FOURIER.

172. La solution que nous venons d'écrire, en particulierisant la solution générale du problème de Cauchy, peut s'obtenir par une voie différente au moyen de solutions particulières à *variables séparées*.

Cherchons, en effet, une solution de (2) qui ait la forme suivante :

$$y(x, t) = \alpha(x) \beta(t).$$

Il faut que

$$\alpha''(x) \beta(t) - \frac{1}{a^2} \alpha(x) \beta''(t) = 0,$$

ou

$$\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}.$$

Une fonction de x ne peut être égale à une fonction de t , (x et t étant deux variables indépendantes) pour tous les x et pour tous les t , que si chacune d'elles est constante. Donc, si ω^2 est la valeur constante de chaque membre de l'équation précédente, on aura :

$$\alpha''(x) + \omega^2\alpha(x) = 0, \quad (11)$$

$$\beta''(t) + a^2\omega^2\beta(t) = 0. \quad (12)$$

On obtiendra autant de solutions de (2) qu'on le voudra en multipliant une solution quelconque de (11) par une solution quelconque de (12). Comme (2) est linéaire, toute combinaison linéaire à coefficients constants de solutions particulières est encore une solution de (2).

Proposons-nous de chercher une solution qui soit nulle en $x = 0$ et en $x = l$, quel que soit t . Pour cela, cherchons des solutions de (11) telles que

$$\alpha(0) = \alpha(l) = 0.$$

Toute combinaison linéaire et homogène de ces solutions satisfera aux conditions aux limites de la corde fixée.

Or l'intégrale générale de (11) est

$$\alpha(x) = A \sin(\omega x + \varepsilon).$$

Il faut donc que l'on ait, à la fois :

$$A \sin \varepsilon = 0,$$

$$A \sin(l\omega + \varepsilon) = 0,$$

soit

$$\sin \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad \sin l\omega = 0.$$

Cette dernière équation montre que ω ne peut être pris arbitrairement :

$$\omega = \frac{k\pi}{l}. \quad (k \text{ entier})$$

Il existe ainsi une suite discrète de nombres ω tels que l'équation (11) ait des solutions du type cherché. Ces solutions sont de la forme

$$\sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Dès lors, l'équation (12) s'écrit

$$\beta''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} a^2\beta(t) = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$A_k \sin \frac{k\pi at}{l} + B_k \cos \frac{k\pi at}{l}. \quad (A_k, B_k \text{ constantes})$$

Une solution particulière de (2), à variables séparées, comme on dit, sera donc

$$y_k(x, t) = \sin \frac{k\pi x}{l} \left[A_k \sin \frac{k\pi a t}{l} + B_k \cos \frac{k\pi a t}{l} \right].$$

173. Peut-on déterminer les coefficients arbitraires A_k et B_k de manière que les conditions initiales de Cauchy soient satisfaites ? Il faut que

$$\sum_k y_k(x, 0) = f(x),$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial y_k}{\partial t} \right)_{t=0} = g(x),$$

et l'on n'a pas à s'inquiéter des conditions aux limites qui sont automatiquement satisfaites grâce à la forme particulière des y_k .

En général, la sommation \sum_k porte sur une infinité de termes y_k . Supposons qu'une solution de la forme $\sum y_k$ existe, la série étant donc convergente. On aura, en supposant encore que la série des dérivées est convergente et qu'elle représente la dérivée de la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x), \tag{13}$$

$$\frac{\pi a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} A_k k \sin \frac{k\pi x}{l} = g(x). \tag{14}$$

Or, si l'on sait représenter $f(x)$ et $g(x)$ par des séries trigonométriques, les coefficients A_k et B_k sont immédiatement connus. Remarquons cependant que les développements précédents ne contiennent que des sinus. Il convient donc de compléter le domaine d'existence de $f(x)$ et de $g(x)$ en définissant ces fonctions dans l'intervalle $(-l, 0)$; elles doivent être impaires et puisqu'elles sont censées être représentées par (13) et (14), elles ont $2l$ pour période. Dès lors :

$$B_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \tag{15}$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \tag{16}$$

Et l'on a le résultat suivant :

Le problème de Cauchy pour la corde fixée à ses extrémités est résolu par la formule :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \left[A_k \sin \frac{k\pi at}{l} + B_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right]$$

où les coefficients A_k et B_k sont donnés par les formules (16) et (15), pour autant que $f(x)$ et $g(x)$ sont développables en séries de Fourier.

174. Il est intéressant de faire quelques remarques d'ordre physique sur les solutions à variables séparées. $y_k(x, t)$ est une solution, périodique en t , de l'équation des cordes vibrantes. Si l'on pose

$$A_k \sin \frac{k\pi at}{l} + B_k \cos \frac{k\pi at}{l} = C_k \sin \left(\frac{k\pi at}{l} + \varepsilon_k \right)$$

on voit que tous les points de la corde ont un mouvement harmonique simple et la phase est la même pour chaque point.

D'autre part, à un instant t quelconque, la courbe dessinée par la corde dans une solution y_k est une sinusoïde à $k + 1$ nœuds.

La solution y_1 correspond au son fondamental de la corde. La durée d'une vibration est

$$2\pi : \frac{\pi a}{l} = \frac{2l}{a}$$

et sa fréquence $\frac{a}{2l}$. Or

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

par conséquent la *fréquence du son fondamental*, ou sa *hauteur*, émis par une corde est inversement proportionnelle à la longueur de la corde et à la racine carrée de sa densité et directement proportionnelle à la racine carrée de sa tension.

Les autres sons, correspondant aux solutions y_2, y_3, \dots , s'appellent les *harmoniques* du son fondamental. Leurs fréquences (ou leurs hauteurs) forment une progression arithmétique de raison $\frac{a}{2l}$.

Membranes vibrantes.

175. Soit une membrane homogène, flexible et élastique. Imaginons-la tendue sur un cadre C et supposons que la tension soit assez grande pour qu'on puisse négliger le poids de la membrane. On déformera la

membrane et cela d'une manière si faible qu'on puisse considérer la tension constante ¹ en tous les points et à chaque instant ; on imagine ensuite qu'on donne à la membrane déformée une vitesse en chacun de ses points normale au plan de la membrane non déformée. Elle prendra un certain mouvement dont nous allons montrer que l'équation générale, c'est-à-dire indépendante des circonstances initiales, est

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

où x, y sont les coordonnées dans le plan de la membrane en équilibre et z l'élongation normale au plan.

Il suffit de prendre un élément $d\sigma$ de masse $\mu d\sigma$ (μ étant la densité superficielle) et d'écrire qu'il y a équilibre à chaque instant entre la force d'inertie

$$-\mu d\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

et la projection p sur l'axe des z de la résultante des tensions en chaque point du contour de $d\sigma$; comme nous nous bornons à l'étude des vibrations *transversales* de la membrane, les composantes suivant les axes perpendiculaires à l'axe des z sont des infiniment petits d'ordre supérieurs à l'ordre de p . Or, si T est la tension supposée constante, il faut évaluer l'intégrale

$$\int_c T \vec{n} ds$$

qui est la résultante des tensions appliquées sur le contour c de $d\sigma$; \vec{n} est un vecteur unité normal à c et situé dans le plan tangent de la membrane au point considéré. Soit \vec{N} la normale à la surface qui fait avec Oz un angle aigu, et désignons par \vec{t} le vecteur unité tangent à c . Si on parcourt c dans le sens positif, relativement à \vec{N} , on aura

$$\vec{n} = \vec{t} \times \vec{N},$$

et puisque $\vec{t} ds = \vec{dr}$, notre intégrale s'écrira :

$$T \int_c \vec{dr} \times \vec{N}$$

¹ La tension d'une membrane se définit de la façon suivante : si l'on découpe une portion de membrane en équilibre le long d'une courbe γ , celle-ci restera en équilibre si l'on applique dans le plan tangent à la membrane, normalement à chaque élément ds de γ , une force $T ds$, T est la tension, son équation de dimension est donc MT^{-2} .

Faisons le calcul en supposant que l'équation de la membrane est à l'instant t^1 :

$$z = z(x, y),$$

$z, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ étant petits (infinitement petits du premier ordre).

On a :

$$\vec{N} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \vec{i} - \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \vec{k},$$

$$\vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + (p dx + q dy) \vec{k},$$

$$T \int_{\sigma} \vec{dr} \times \vec{N} = T \int_{\sigma} \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} [(pq dx + dy + q^2 dy) \vec{i} + (-dx - p^2 dx - pq dy) \vec{j} + (-q dx + p dy) \vec{k}].$$

En appliquant la formule de Riemann à chaque composante de ce vecteur, on trouve, en négligeant p^2, pq, q^2 :

$$T \int_{\sigma} \vec{dr} \times \vec{N} = T \iint \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy = T \text{lap } z d\sigma.$$

L'équation du mouvement de la membrane est donc

$$\text{lap } z - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

avec $a^2 = \frac{\mu}{T}$, et a a encore les dimensions d'une vitesse.

Intégrales de l'équation des membranes vibrantes.

176. On peut se proposer, pour une membrane indéfinie, de déterminer l'intégrale de (3) qui résolve le problème de Cauchy : trouver une fonction $z(x, y, t)$ solution de (3) qui, pour $t = 0$, se réduise à une fonction $f(x, y)$ donnée, et dont la dérivée $\frac{\partial z}{\partial t}$ se réduise, pour $t = 0$, à une autre fonction $g(x, y)$ donnée. Nous laissons au lecteur le soin de résoudre ce problème par une méthode directe, nous nous proposons d'en résoudre d'autres et d'abord d'examiner deux cas particuliers fort instructifs.

¹ L'emploi des axes s'impose ici où les conditions sont très particulières, le calcul est alors plus simple que si l'on considérait la surface sous la forme générale $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

a) MEMBRANE A CONTOUR RECTANGULAIRE FIXÉ.

177. Cherchons comme auparavant des solutions à variables séparées ; plus précisément cherchons des solutions périodiques en t de la forme

$$z = u(x, y) \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t};$$

puisque $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 z$, on aura à déterminer u par l'équation

$$\text{lap } u + \lambda^2 u = 0, \tag{17}$$

où

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

La fonction u doit donc satisfaire, d'une part, à l'équation (17) et, d'autre part, elle doit être nulle sur le contour qui est un rectangle, dont les côtés ont comme équations :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Il est naturel de chercher des solutions de la forme

$$u(x, y) = p(x) q(y),$$

ce qui exige que

$$p''(x) q(y) + p(x) q''(y) + \lambda^2 p(x) q(y) = 0$$

ou encore

$$\frac{p''(x)}{p(x)} + \frac{q''(y)}{q(y)} + \lambda^2 = 0.$$

Il faut donc que

$$\frac{p''(x)}{p(x)} = -\mu^2$$

$$\frac{q''(y)}{q(y)} = -\nu^2$$

avec $\mu^2 + \nu^2 = \lambda^2$; μ et ν étant bien entendu des constantes.

On cherche alors les solutions $p(x)$ et $q(y)$ telles que

$$p(0) = p(\alpha) = 0, \quad q(0) = q(\beta) = 0 ;$$

on ne trouve évidemment que les suivantes :

$$p(x) = \sin \frac{j\pi x}{\alpha} \quad (j \text{ entier})$$

$$q(y) = \sin \frac{k\pi y}{\beta} \quad (k \text{ entier})$$

car μ et ν ne peuvent prendre respectivement que les valeurs multiples de $\frac{\pi}{\alpha}$ et de $\frac{\pi}{\beta}$.

On aura une intégrale particulière de (17), nulle sur la frontière, en faisant les produits ; elle sera de la forme :

$$u_{jk}(x, y, t) = (A_{jk} \cos \omega_{jk}t + B_{jk} \sin \omega_{jk}t) \sin \frac{j\pi x}{\alpha} \sin \frac{k\pi y}{\beta},$$

avec

$$\omega_{jk} = a\pi \sqrt{\frac{j^2}{\alpha^2} + \frac{k^2}{\beta^2}}.$$

La période de la solution est déterminée par le choix des entiers quelconques j et k .

On trouve encore une intégrale satisfaisant aux conditions imposées en additionnant un nombre quelconque de solutions particulières.

178. Est-il possible de déterminer A_{jk} et B_{jk} de manière que, pour $t = 0$,

$$u = \sum_j \sum_k u_{jk}$$

se réduise à une fonction donnée $f(x, y)$ et que $\frac{\partial u}{\partial t}$ soit égale au même instant à $g(x, y)$. Il faut, bien entendu, que f et g soient nulles sur la frontière. Il faut donc que, s'il en est ainsi et si l'on a le droit de dériver terme à terme la série en question,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{jk} \sin \frac{j\pi x}{\alpha} \sin \frac{k\pi y}{\beta} = f(x, y)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{jk} \omega_{jk} \sin \frac{j\pi x}{\alpha} \sin \frac{k\pi y}{\beta} = g(x, y).$$

Or on sait que toute fonction de x et de y impaire en x , impaire en y , périodique en x de période 2α et en y de période 2β , moyennant certaines conditions de régularité, peut se développer en série double trigonométrique, le terme général étant

$$C_{jk} \sin \frac{j\pi x}{\alpha} \sin \frac{k\pi y}{\beta}$$

où C_{jk} est donnée par une intégrale double qui généralise les formules de Fourier.

On peut compléter la définition de $f(x, y)$ et de $g(x, y)$ dans le domaine

$$- \alpha \leq x \leq \alpha$$

$$- \beta \leq y \leq \beta$$

de manière à avoir deux fonctions impaires en x et en y respectivement. Si f et g , ainsi prolongées, sont développables en séries doubles de Fourier, on aura précisément :

$$A_{jk} = \frac{4}{\alpha\beta} \int_0^\alpha \int_0^\beta f(x, y) \sin \frac{j\pi x}{\alpha} \sin \frac{k\pi y}{\beta} dx dy,$$

$$B_{jk} = \frac{4}{\alpha\beta\omega_{jk}} \int_0^\alpha \int_0^\beta g(x, y) \sin \frac{j\pi x}{\alpha} \sin \frac{k\pi y}{\beta} dx dy.$$

Nous avons ainsi résolu le *problème de Cauchy* avec des *conditions aux limites supplémentaires* pour la *membrane rectangulaire*.

b) MEMBRANE A CONTOUR CIRCULAIRE FIXÉ.

179. Il est tout naturel de prendre ici les coordonnées polaires r et θ au lieu de x et y . Les solutions périodiques de la forme

$$u(r, \theta) \frac{\sin}{\cos} \omega t \tag{18}$$

de l'équation (3) sont telles que u vérifie l'équation (17) qui s'écrit, comme un calcul simple le montre immédiatement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda^2 u = 0,$$

avec

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

D'autre part, il est naturel, pour que u soit uniforme, de chercher des solutions u qui soient périodiques en θ et de périodes 2π ou $\frac{2\pi}{k}$, et même de chercher s'il y a de telles solutions à variables séparées :

$$u(r, \theta) = v(r) \frac{\sin}{\cos} k\theta.$$

Cette forme de u impose à $v(r)$ la condition

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} v + \lambda^2 v = 0.$$

Pour donner à cette équation une forme simple, où il n'y ait qu'un paramètre au lieu des deux paramètres k et λ , posons :

$$\rho = \lambda r ;$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \lambda \frac{\partial v}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2},$$

et l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{k^2}{\rho^2}\right) v = 0.$$

C'est une *équation de Bessel*, dont la seule solution, régulière à l'origine puisque k est entier, est :

$$v(\rho) = J_k(\rho) \quad ^1$$

$J_k(\rho)$ étant la *fonction de Bessel d'ordre k* , dont l'expression par un développement en série, convergent pour tout ρ , est :

$$J_k(\rho) = \frac{\rho^k}{2^k \cdot k!} \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{2^2 \cdot 1 \cdot (k+1)} + \frac{\rho^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (k+1)(k+2)} - \dots \right\}$$

Cependant, ce qui est utile en l'occurrence, c'est une solution v qui, pour la valeur de ρ correspondant à $r = R$, rayon de la membrane, prenne précisément la valeur zéro.

Or, puisque $\rho = \lambda r$, il faut que

$$J_k(\lambda R) = 0.$$

On apprend, dans la théorie des fonctions de Bessel, que la fonction d'ordre k a une infinité de zéros réels ; soient

$$\rho_1^{(k)}, \rho_2^{(k)}, \dots, \rho_n^{(k)}, \dots$$

ceux qui sont positifs (les autres sont les nombres opposés) ; dès lors, il existe une infinité de valeurs de λ telles que $\omega = a\lambda$ soit la pulsation d'une solution périodique de (3) de la forme (18) lorsqu'on a fixé l'entier k . On aura donc une solution particulière, satisfaisant à la condition sur la circonférence, de la forme :

$$z_{k,n}(r, \vartheta, t) = (A_{kn} \cos k\vartheta + B_{kn} \sin k\vartheta) J_k \left(\frac{\rho_n^{(k)}}{R} r \right) (C_{kn} \cos \omega_{kn} t + D_{kn} \sin \omega_{kn} t),$$

$$\omega_{kn} = a \frac{\rho_n^{(k)}}{R}.$$

¹ Cf. p. ex. Goursat, *Cours d'Analyse*, II, p. 465.

Il y a une double infinité de *sous partiels* mais les fréquences ne sont plus en progression arithmétique, comme pour la corde vibrante.

Il faut remarquer que les fréquences des sons partiels, tant pour la membrane rectangulaire que pour la membrane circulaire, sont déterminées par les conditions aux limites, c'est-à-dire par des conditions relatives à la forme du facteur d'espace $u(x, y)$ ou $u(r, \theta)$ de la solution.

Que l'on puisse représenter la solution du problème de Cauchy par un développement de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z_{k,j}$$

avec des coefficients A_{kn} , B_{kn} , C_{kn} et D_{kn} convenables, cela découle des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques et de la relation

$$\int_0^R J_k \left(\frac{\rho_n^{(k)}}{R} r \right) J_k \left(\frac{\rho_p^{(k)}}{R} r \right) r dr = \begin{cases} 0, & (\text{si } n \neq p) \\ \frac{R^2}{2} J_{k+1} \left(\frac{\rho_n^{(k)}}{R} a \right), & (\text{si } n = p) \end{cases}$$

que nous ne démontrerons pas. Grâce à cela, le lecteur trouvera les coefficients A , B , C , D , mais la théorie qui traite de la convergence des développements obtenus est hors du cadre de cet ouvrage.

On trouvera dans les exercices des indications pour ramener dans le cas général le problème de la détermination des valeurs de λ au problème des valeurs propres d'une équation intégrale.

Equation du son.

180. L'équation de propagation du son

$$\text{lap } \psi - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

se ramène dans certains cas particuliers à l'une ou l'autre des *équations* que nous venons d'étudier. Par exemple, une source très éloignée produit des effets qui semblent identiques au même instant sur un certain plan Π , l'instant d'après, sur un certain plan Π' parallèle au précédent. Si l'on prend comme axe des x une perpendiculaire à Π , tout se passe comme si le phénomène ne dépendait que de t et x , et l'équation se réduira à celle des cordes vibrantes. Mais il y a un cas plus important encore où l'équation (1) se réduit à celle des cordes, c'est celui des vibra-

tions de l'air dans un tuyau. Si le tuyau est long et très étroit, on peut négliger l'effet des parois, en première approximation, et traiter la masse d'air comme une masse unidimensionnelle dont les petits mouvements dérivent d'un potentiel qui satisfait à l'équation des cordes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

si l'axe des x est parallèle au tuyau. Nous ne reparlerons pas de cette équation, au moyen de laquelle on peut retrouver les diverses circonstances des phénomènes que l'expérience a rendus familiers à tous ceux qui ont suivi un cours de physique.

181. Il est plus intéressant de chercher des solutions de (1) qui soient à symétrie sphérique. Ce seraient des solutions représentant un phénomène dont la cause réside dans une source ponctuelle, ou mieux dans une sphère pulsante. Quelle que soit cette cause d'ailleurs, ces solutions φ sont des fonctions de la seule coordonnée polaire r et du temps t .

Il convient dès lors d'écrire le laplacien de φ en coordonnées polaires ; on trouve facilement, comme application de la théorie des changements de variables :

$$\text{lap } \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right),$$

où ψ est la longitude et ϑ la latitude. Or, si φ n'est censée dépendre que de r , l'équation des ondes sonores se simplifie et devient

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = 0 ;$$

si l'on traite cette équation comme nous avons traité celle des cordes (§ 168), on trouve que l'intégrale générale est

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} [\alpha(r - Vt) + \beta(r + Vt)],$$

α et β étant deux fonctions arbitraires de leur argument respectif.

On voit, et cela découle déjà des prémisses, que la solution particulière

$$\frac{\alpha(r - Vt)}{r}$$

est constante, à l'instant t , sur la sphère de rayon r . On ne peut plus dire cependant qu'un « ébranlement » se propage identiquement à lui-même, le long du rayon vecteur avec la vitesse V . Mais il est naturel d'imaginer que la présence du facteur $\frac{1}{r}$ qui « dilue » en quelque manière l'ébranlement dans l'espace provient de ce que les ébranlements initiaux, se propageant avec la vitesse V dans toutes les directions à partir du centre O , mettent en mouvement des masses de fluide de plus en plus grandes, mais naturellement avec des vitesses ($\vec{W} = \vec{\nabla}\varphi$) de plus en plus faibles. Cette solution particulière représente le potentiel des vitesses d'une *onde sphérique divergente*, alors que la solution $\frac{\xi(r + Vt)}{r}$ représente celui d'une *onde sphérique convergente*.

Nous laissons au lecteur le soin de résoudre les problèmes physiques en rapport avec les ondes sphériques sonores ; nous préférons étudier l'équation (1) d'un autre point de vue.

Equations des ondes électromagnétiques dans le vide.

182. Nous avons vu que les composantes des champs \vec{E} et \vec{H} vérifient toutes une même équation de la forme

$$\text{lap } u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Il est intéressant, en supposant que chacune de ces équations est intégrée, de voir comment se comportent les deux vecteurs \vec{E} et \vec{H} l'un par rapport à l'autre. Nous allons examiner cette conduite dans un cas très particulier. Rappelons que, dans le vide, on a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad (19) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad (20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (21) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0; \quad (22)$$

d'où l'on a déduit

$$\text{lap } \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{lap } \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Cherchons les solutions qui représentent une propagation *d'ondes planes*, c'est-à-dire des solutions \vec{E} et \vec{H} constantes, à un instant donné, sur tout plan d'une famille de plans parallèles, la valeur constante de chacun d'eux se « propageant » d'un plan à l'autre avec la vitesse c . On pourrait prendre ces plans perpendiculaires à l'axe des x , mais pour traiter un problème élégant d'analyse vectorielle, nous ne particulariserons pas de cette façon les plans ¹. Soit \vec{s} un vecteur unité qui sera le vecteur normal à nos plans, dirigé dans le sens de la propagation. Soit P le point courant, $\vec{OP} = r$ le vecteur qui va d'un point fixe O à P . L'équation d'un plan de la famille est

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = \text{constante.}$$

Désignons par Q le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le dit plan et imaginons que Q se déplace avec la vitesse c

$$OQ = ct,$$

l'équation du plan de la famille qui passe par Q est donc

$$\vec{r} \cdot \vec{s} - ct = \text{constante.}$$

Nous nous proposons donc de chercher des solutions des équations (19) à (22) qui soient de la forme

$$\vec{E} = \vec{\Phi}(\vec{r} \cdot \vec{s} - ct)$$

$$\vec{H} = \vec{\Psi}(\vec{r} \cdot \vec{s} - ct)$$

où $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Psi}$ sont des fonctions vectorielles du seul argument $\vec{r} \cdot \vec{s} - ct$.

Le lecteur vérifiera, au moyen des formules de définition de $\vec{\nabla}$ que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Phi} = \vec{s} \times \vec{\Phi}' \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \vec{s} \cdot \vec{\Phi}'$$

où $\vec{\Phi}'$ est la dérivée de $\vec{\Phi}$ par rapport à son argument. Dès lors, les équations (19) à (22) s'écrivent

$$\vec{s} \times \vec{\Phi}' - \vec{\Psi}' = 0, \quad \vec{s} \cdot \vec{\Phi}' = 0,$$

$$\vec{s} \times \vec{\Psi}' + \vec{\Phi}' = 0, \quad \vec{s} \cdot \vec{\Psi}' = 0.$$

Les équations de droite sont une conséquence des équations de gauche ; on le voit en multipliant les deux membres de celles-ci scalairement par \vec{s} .

¹ Nous suivons ici l'exposé de M. Max Born : *Optik*, p. 12.

Il est possible d'intégrer les équations de gauche. On trouve en effet

$$\begin{aligned}\vec{s} \times \vec{\Phi} - \vec{\Psi} &= \vec{a} \\ \vec{s} \times \vec{\Psi} + \vec{\Phi} &= \vec{b},\end{aligned}$$

\vec{a} et \vec{b} étant des vecteurs constants. Or on peut toujours, en respectant les équations et les conditions du début, ajouter à $\vec{\Phi}$ et à $\vec{\Psi}$ des vecteurs constants de telle manière que $\vec{a} = \vec{b} = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\vec{s} \times \vec{\Phi} - \vec{\Psi} &= 0 & \text{ou} & & \vec{s} \times \vec{E} - \vec{H} &= 0, \\ \vec{s} \times \vec{\Psi} + \vec{\Phi} &= 0 & \text{ou} & & \vec{s} \times \vec{H} + \vec{E} &= 0;\end{aligned}$$

on déduit de là,

$$\vec{s} \cdot \vec{H} = 0 \quad \vec{s} \cdot \vec{E} = 0$$

et

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = 0.$$

Si une propagation par ondes planes est possible, les deux champs \vec{E} et \vec{H} sont normaux à la direction de propagation, les ondes sont *transversales* et de plus *les deux champs sont toujours perpendiculaires entre eux*.

Éliminons \vec{H} ;

$$\vec{H} = \vec{s} \times \vec{E},$$

d'où

$$\vec{s} \times \vec{H} = (\vec{s} \times \vec{s}) \times \vec{E} = -\vec{E},$$

et l'équation

$$\vec{s} \times \vec{H} + \vec{E} = 0$$

est identiquement satisfaite. Remarquons que si l'on n'eût pas connu le sens physique de la constante c dans les équations de Maxwell, on eût pu chercher des solutions dépendant de

$$\vec{r} \cdot \vec{s} - c_1 t$$

c_1 étant une certaine vitesse. Le calcul que nous venons de faire eût alors donné avec cette hypothèse

$$-\vec{E} + \frac{c_1}{c} \vec{E} = 0$$

et l'on en eût déduit que des ondes planes ne peuvent exister dans le vide que si elles se propagent avec la vitesse $c_1 = c$.

183. Donc \vec{E} est une fonction vectorielle *arbitraire* de $\vec{r} \cdot \vec{s} - ct$.

$$\vec{E} = \vec{\Phi}(\vec{r} \cdot \vec{s} - ct),$$

$$\vec{H} = \vec{s} \times \vec{E},$$

$$|E| = |H|.$$

Les deux champs sont d'égale intensité. Le vecteur de Poynting est $\vec{E} \times \vec{H} = \Phi^2 \vec{s}$.

Les solutions les plus intéressantes sont celles pour lesquelles $\vec{\Phi}$ est périodique. Par exemple,

$$\vec{\Phi} = \vec{a} \cos \left[2\pi\nu \left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{c} \right) + \delta \right], \quad (23)$$

où \vec{a} est un vecteur constant. La constante ν est la fréquence, $\lambda = c\nu$ la longueur d'onde, et δ est une constante, dite constante de phase. Les ondes planes de l'optique ne sont pas autre chose que les ondes électromagnétiques planes périodiques pour lesquelles \vec{E} est la fonction vectorielle (23) et $\vec{H} = \vec{s} \times \vec{E}$. Le scalaire a^2 est l'*intensité lumineuse*, car c'est l'*intensité du vecteur de Poynting* qui mesure la densité de l'énergie rayonnante, donc en chaque point l'intensité du phénomène lumineux.

Le lecteur trouvera sans difficulté les champs pour une onde sphérique et il verra de même que le vecteur de Poynting a une intensité qui décroît comme l'inverse du carré de la distance, dans le cas où l'on considère des champs périodiques par rapport à t .

Equation des potentiels retardés.

184. Nous avons vu que dans les régions où règnent les champs $\vec{j}(P; t)$ et $\rho(P; t)$, les champs électriques et magnétiques s'obtiennent à partir de deux champs \vec{f} et φ , les potentiels, vecteur et scalaire, vérifiant les équations

$$\text{lap } \vec{f} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = -\vec{j},$$

$$\text{lap } \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho.$$

Considérons la seconde de ces équations, elle est par rapport à celle de d'Alembert, ce que l'équation de Poisson est à celle de Laplace. Si

ρ ne dépend que de P et pas de t , on peut chercher une solution φ ne dépendant que de P et ce sera précisément une intégrale de l'équation de Poisson :

$$\text{lap } \varphi = -\rho,$$

dont la forme est $\varphi = \iiint \frac{\rho}{4\pi r} d\tau$.

Dans le cas où le régime de la distribution des charges n'est pas permanent, l'intégration est plus compliquée, mais on peut l'effectuer en utilisant les remarques que nous avons faites sur les ondes sphériques.

Supposons qu'au temps zéro¹, on place en O une charge ponctuelle variable $e(t)$.

Le champ qu'elle crée dérive d'un potentiel $\varphi(P; t)$, mais comme elle ne le crée pas instantanément en tous les points de l'espace, ce n'est pas l'équation de l'électrostatique qui sert à déterminer φ mais bien l'équation de d'Alembert

$$\text{lap } \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0;$$

on en va chercher une solution à symétrie spatiale sphérique, dont l'origine sera probablement une singularité. Or nous savons que l'onde sphérique divergente est représentée par une expression de la forme

$$\frac{f(r - ct)}{r}$$

où f est arbitraire. Cherchons donc à déterminer f de manière que

$$\varphi(P; t) = \frac{f(r - ct)}{r}$$

soit la solution de notre problème. Il est bien évident que, physiquement, l'onde convergente n'a pas à intervenir si l'espace ne contient aucun obstacle. (On la ferait intervenir s'il y avait, par exemple, un obstacle sphérique centré en O contre lequel l'onde divergente se réfléchirait).

Pour trouver la fonction f , écrivons que le flux du gradient de φ à travers une sphère de rayon infiniment petit, centrée en O , est $-e(t)$ (avec les unités primitives ce serait $-4\pi ke(t)$).

On a

$$\vec{\nabla} \varphi = \left[-\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{r^2} \right] \vec{r}.$$

¹ Cf. BIGGS, *The Electromagnetic Field*, p. 107.

Le flux élémentaire à travers une sphère de rayon r est

$$\vec{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \frac{\vec{r}}{r} \left[-\frac{f}{r^3} + \frac{f'}{r^2} \right] \vec{r} d\sigma = \left(-\frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} \right) d\sigma.$$

A travers une sphère de rayon infiniment petit, en supposant que f et f' sont régulières pour un argument quelconque, on trouvera

$$\lim_{r=0} \iint \vec{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} \varphi = -4\pi f(0 - ct).$$

Donc $f(-ct) = \frac{1}{4\pi} e(t)$. Ou encore

$$f(u) = \frac{1}{4\pi} e\left(-\frac{u}{c}\right),$$

et par suite

$$f(r - ct) = \frac{1}{4\pi} e\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

La solution cherchée est donc

$$\varphi(P; t) = \frac{e\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r}.$$

185. Le potentiel créé par la charge ponctuelle $e(t)$ au point P à l'instant t est de la forme $\frac{e}{r}$, mais e est la valeur de la charge, non pas au temps t , mais au temps $t - \frac{OP}{c}$; l'instant en lequel on prend e est antérieur à l'instant en lequel on calcule φ .

On peut imaginer 2, 3, ... n charges ponctuelles variables et chercher le potentiel qu'elles créent en un point P à un instant t . Le potentiel total est la somme de n potentiels retardés :

$$\varphi(P; t) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i\left(t - \frac{r_i}{c}\right)}{4\pi r_i}, \quad (r_i = O_i P).$$

Si, au lieu d'avoir des charges ponctuelles, on a des charges continues de densité $\rho(M; t)$, le potentiel $\varphi(P; t)$ sera une intégrale de potentiels retardés :

$$\varphi(P; t) = \iiint \frac{\rho\left(M; t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} d\tau_M, \quad (r = MP)$$

le domaine d'intégration est l'espace entier, mais l'intégrale a toujours un sens si $\rho = 0$ à l'extérieur d'une sphère de rayon R .

Il est manifeste qu'en tout point de l'espace en lequel ρ est toujours nul on a

$$\text{lap } \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

D'autre part, en un point P qui, à l'instant t_0 , est intérieur aux charges, on a

$$\text{lap } \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho(P; t).$$

On le voit facilement en isolant P et son voisinage par une sphère S centrée en P et de rayon λ . La contribution au premier membre, c'est-à-dire au *dalembertien*, de la partie de l'intégrale étendue au volume hors de S , est nulle. D'autre part, dans S , on a

$$\rho\left(M; t - \frac{r}{c}\right) = \rho(M; t_0) + \frac{\partial \rho}{\partial t_{M, t_0}} \left(t - t_0 + \frac{r}{c}\right) + \dots;$$

si ρ et ses dérivées successives sont finies, on peut trouver un nombre λ , tel que, si $r < \lambda$, on ait :

$$\left| \rho\left(M; t - \frac{r}{c}\right) - \rho(M; t_0) \right| < \varepsilon(t)$$

$\varepsilon(t)$ étant une fonction donnée de t qui est, ainsi que ses dérivées, arbitrairement petite, tant que $t < \frac{\lambda}{c}$.

D'autre part, étant donné ε , on peut choisir λ de façon que

$$\left| \rho\left(M; t - \frac{r}{c}\right) - \rho(P; t) \right| < \varepsilon,$$

si $r < \lambda$, et si $t < \frac{\lambda}{c}$.

On voit donc que la contribution de l'intérieur de S au dalembertien se compose essentiellement du laplacien de

$$\iiint_S \frac{\rho(M; t_0)}{4\pi r} d\tau_M \tag{24}$$

car la dérivée $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$ pouvant être rendue aussi petite que l'on veut, son intégrale dans S tend vers zéro avec λ . Mais le laplacien de (24)

tend vers $-\rho$ comme on le sait, et notre démonstration est ainsi achevée.

Il est donc possible d'intégrer l'équation des potentiels retardés, grâce à une intégration portant sur des éléments de volume en lesquels on considère la densité juste à l'instant où son effet, se propageant avec la vitesse c , peut se faire sentir au point P considéré. La solution obtenue est unique comme le montrerait un raisonnement très simple que le lecteur fera sans peine.

186. Les équations de d'Alembert et les équations aux potentiels retardés sont dites du *type hyperbolique*, celles de Laplace ou Poisson du *type elliptique*. Les problèmes que la physique pose naturellement sont du type Cauchy pour les premières et du type Dirichlet-Neumann pour les dernières. Il serait intéressant de comparer les théorèmes d'existence des solutions de ces équations en se plaçant à un point de vue général, mais le cadre de cet ouvrage ne permet pas de faire une telle comparaison.

L'équation de la chaleur, du type parabolique :

$$\text{lap } T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

dont le cas le plus simple, celui qui est donné par la propagation de la chaleur dans un mur indéfini, est

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

pose des problèmes dont on trouvera quelques types dans les exercices placés à la fin de ce chapitre.

Exercices.

FORMULES DE GREEN POUR DES ÉQUATIONS LINÉAIRES QUELCONQUES DU SECOND ORDRE.

1. Soit

$$L(u) \equiv A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

une équation linéaire de second ordre dont les coefficients sont des fonctions données de x et y . On forme

$$M(v) \equiv \frac{\partial^2 (Av)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial (Dv)}{\partial x} - \frac{\partial (Ev)}{\partial y} + Fv;$$

montrer que

$$\iint_D [\nu L(u) - uM(\nu)] \, dx dy \quad (G)$$

se ramène à une intégrale curviligne prise sur la frontière du domaine D . (Goursat III, p. 146.)

2. Généraliser au cas de trois variables indépendantes.

3. Montrer que l'intégrale curviligne dont il est question dans l'exercice 1 est de la forme

$$\int \left[P \left(u \frac{d\nu}{ds} - \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) + Qu\nu \right] ds$$

où $\frac{d}{ds}$ est la dérivée suivant une direction qu'on appelle la *conormale*.

(D'Adhémar, *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles*, p. 38.)

4. Même remarque pour l'espace (*id.* p. 60).

5. On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

qui est l'équation des cordes dans laquelle on a fait $a = 1$ en changeant l'unité de temps. Appliquer la formule de Green (G) relative à cette équation et au domaine triangulaire limité par un segment de la droite

$$y = 0$$

et par deux parallèles aux bissectrices des axes se coupant en $P(x, y)$. On fera $\nu = 1$ et on prendra pour u la fonction égale à $f(x)$ si $y = 0$,

et telle que $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{a} g(x)$ pour $y = 0$ aussi. Montrer qu'on obtient immédiatement alors la solution (10) du § 170 du problème de Cauchy.

EQUATION DE LA CHALEUR.

6. Dans certains cas, il est possible de simplifier l'équation de propagation de la chaleur et de la mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

où u est la température, t le temps et x une coordonnée suivant laquelle u est variable, y et z n'intervenant pas pour des raisons dues à la

symétrie du phénomène, (par exemple, mur de Fourier) ou parce qu'on se borne à une approximation que la forme du conducteur rend plausible (deux dimensions très petites par rapport à la troisième). Chercher la solution de (1) qui, pour $x = 0$, se réduise à $f(t)$ et dont la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ soit égale à $g(t)$. (Physiquement on se donne la température en un point et son gradient à chaque instant); on développera en série de Taylor.

7. Chercher la solution de (1) qui, pour $t = 0$, se réduit à la fonction $f(x)$ (on se donne la température initiale en chaque point du corps). On développera encore en série de Taylor. Pour les questions de convergence qui sont assez délicates, dans l'un comme dans l'autre de ces problèmes, on se reportera au Cours de M. Goursat (III, chap. 29).

8. Trouver la solution de (1) avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{pour } x = 0, \\ u &= 0 && \text{pour } x = l, \\ u &= f(x) && \text{pour } t = 0. \end{aligned}$$

On cherche des solutions de la forme

$$g(t) \sin \frac{m\pi x}{l},$$

et on en fait la somme. On trouve $u(x, t)$ par un développement en série :

$$u(x, t) = \sum a_m e^{-\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{m\pi x}{l},$$

les a_m sont les coefficients de Fourier de $f(x)$.

9. Trouver l'intégrale de (1) avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 && \text{pour } x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 && \text{pour } x = l, \\ u &= f(x) && \text{pour } t = 0. \end{aligned}$$

Interpréter physiquement les données de ces deux problèmes.

10. On considère une sphère homogène, montrer que l'équation de la chaleur pour les problèmes où les données sont à symétrie sphérique s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Faire le changement de variable $\varphi = ru$. Etudier le refroidissement d'une sphère dont la surface est maintenue à la température zéro.

EQUATIONS INTÉGRALES ET PROBLÈMES AUX LIMITES.

11. Soit une courbe fermée C , dans le plan des (x, y) , limitant un domaine D . On cherche une solution de l'équation des membranes vibrantes de la forme

$$u(x, y) e^{i\sigma t},$$

$u(x, y)$ étant nulle sur C . On sait que $u(x, y)$ satisfait à l'équation

$$\text{lap } u + \mu u = 0$$

où $\mu = \frac{\sigma^2}{a^2}$.

On forme la fonction de Green (chap. V, exercice 2) relative à C et au point P ; soit $G(M, P)$. La solution de l'équation intégrale

$$\varphi(P) - \frac{\lambda}{2\pi} \iint_D G(M, P) \varphi(M) d\sigma_M = -\frac{1}{2\pi} \iint_D G(M, P) j(M) d\sigma_M,$$

pour λ différent d'une valeur propre du noyau G , est l'intégrale de l'équation

$$\text{lap } u + \lambda u = j(P)$$

qui s'annule sur le bord C de D (cf. chap. V, exercice 4).

La résolvante Γ de l'équation intégrale précédente est la fonction de Green de l'équation

$$\text{lap } u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

relative au contour C et au point P , c'est-à-dire la solution de (1) qui s'annule sur C et qui en P est singulière comme $\log \frac{1}{r}$:

$$\Gamma(M; P; \lambda) = \log \frac{1}{r} + \text{fonction régulière,} \quad (r = MP).$$

Les nombres μ déterminant une valeur σ acceptable pour la solution particulière de l'équation des membranes vibrantes sont les valeurs propres du noyau $G(P, M)$. Elles sont réelles car $G(P, M)$ est symétrique.

12. Examiner, du point de vue de l'exercice précédent, le problème de la membrane circulaire.

APPENDICE

Éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Revue rapide des opérations algébriques sur les nombres complexes.

1. La théorie des nombres complexes $a + bi$, que nous rappellerons très brièvement, peut prendre une forme vectorielle, si l'on remarque que i est un symbole qui sert à distinguer chacune des composantes du nombre $a + bi$. L'égalité, la somme et la différence de deux nombres complexes se définissent comme dans le cas des vecteurs, et, géométriquement, on représente $a + bi$ comme un vecteur qui, dans un système cartésien rectangulaire plan Ox, Oy , a les deux composantes a et b ; l'extrémité du vecteur ayant O comme origine est un point dont on dit que son *affiche* est $a + bi$.

On confond souvent dans le langage l'affixe et le point; on dit le point z . On pose souvent $a = \Re z$, $b = \Im z$: a est la partie réelle et b la partie imaginaire de z .

Le produit

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$$

est, au contraire, tout à fait différent de l'un ou l'autre des produits que nous avons étudiés au tome premier de cet ouvrage. Il représente encore un vecteur, ou un nombre complexe; il est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition.

La division est toujours possible sauf par le nombre dont les deux composantes sont nulles et qui est le nombre zéro.

2. $a - bi$ est dit le *nombre conjugué* de $a + bi$; un nombre est dit réel lorsqu'il est égal à son conjugué; il est représenté par un vecteur parallèle à l'axe Ox , qu'on appelle *l'axe réel*; l'axe Oy est dit *l'axe imaginaire*.

On peut écrire

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

On pose encore :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

on voit que r est la longueur du vecteur $a + bi$, on l'appelle son *module*, et θ , déterminé à un multiple de 2π près, est dit son *argument*. On aura donc :

$$a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta);$$

deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même module et si leurs

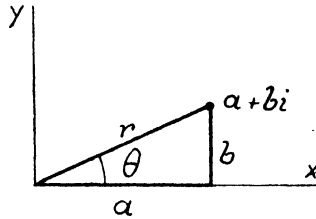


Fig. 15.

arguments sont égaux ou diffèrent d'un multiple entier de 2π . On écrit $|z| = r, \arg z = \theta$.

3. Un calcul très simple montre que si

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{et} \quad z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta'),$$

on aura

$$zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')];$$

le module d'un produit est égal au produit des modules des facteurs, et son argument est égal à la somme des arguments des facteurs.

D'autre part,

$$\frac{z'}{z} = \frac{r' \cos \theta' + i \sin \theta'}{r \cos \theta + i \sin \theta} = \frac{r' (\cos \theta' + i \sin \theta') (\cos \theta - i \sin \theta)}{r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

$$= \frac{r'}{r} [\cos(\theta' - \theta) + i \sin(\theta' - \theta)];$$

le module d'un quotient est égal au module du dividende divisé par le module du diviseur, et son argument est égal à l'argument du dividende moins l'argument du diviseur.

Il est dès lors facile de calculer z^n , n étant un entier positif ou négatif. On trouve

$$z^n = r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

$$z^{-m} = r^{-m} [\cos m\theta - i \sin m\theta].$$

En particulier, on a les formules dites de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta.$$

4. L'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ offre un grand intérêt. Soit $\zeta^n = z$, écrivons

$$\zeta = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi);$$

il faut que

$$\rho^n = r \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

d'où

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \quad (k \text{ entier quelconque}).$$

Il semblerait que l'on dût obtenir une infinité de racines correspondant à toutes les valeurs entières de k , mais si l'on remarque que deux valeurs de k qui diffèrent d'un multiple de n donnent deux valeurs de φ qui diffèrent d'un multiple de 2π , on se rend compte alors que ζ a n valeurs distinctes seulement :

$$\zeta_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right),$$

$$\zeta_1 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{n} \right),$$

.....

$$\zeta_{n-1} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + \overline{n-1} 2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + \overline{n-1} 2\pi}{n} \right),$$

qui sont représentées par n vecteurs de longueur $\sqrt[n]{r}$, dont les extrémités sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés.

Fonction homographique.

5. Soient quatre nombres a, b, c, d , tels que $ad - bc \neq 0$, et soit le nombre Z , correspondant à z par la formule :

$$Z = \frac{az + b}{cz + d};$$

on dit que Z est *fonction homographique* de z .

Lorsque z décrit une courbe γ ou une région ρ du plan Ox, Oy , Z décrit, soit dans le même plan, soit dans un autre plan $O'X, O'Y$, une courbe Γ ou une région P qui sont dites les transformées de γ ou de ρ par la fonction homographique donnée.

Prenons d'abord des cas simples et imaginons que Z reste dans le plan de z .

$$1^{\circ} \quad Z = az,$$

$$|Z| = |a||z|, \quad \arg Z = \arg a + \arg z.$$

On passe de z à Z en faisant tourner le vecteur Oz de l'angle $\arg a$ et en multipliant sa longueur par $|a|$. Si z décrit une figure f , Z décrit une autre figure F provenant de la première, qu'on a fait tourner autour de O de l'angle $\arg a$, et à laquelle on a fait subir ensuite une homothétie de rapport $|a|$.

$$2^{\circ} \quad Z = z + b;$$

on passerait de f à F par une translation représentée par le vecteur \vec{Ob} .

$$3^{\circ} \quad Z = \frac{1}{z},$$

$$\arg Z = -\arg z, \quad |Z||z| = 1.$$

On prend le conjugué \bar{z} de z , et on cherche l'inverse de \bar{z} , le centre d'inversion étant O , la puissance un ; on trouve Z ; \bar{z} et z sont alors inverses par rapport au cercle de centre O et de rayon un. On passe donc de f à F en faisant subir à f une symétrie par rapport à l'axe réel, puis une inversion relativement au cercle unité. On appelle souvent cette dernière opération une *symétrie* par rapport au cercle unité.

6. Revenons alors à

$$Z = \frac{az + b}{cz + d};$$

formons

$$z_1 = z + \frac{d}{c},$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1},$$

$$z_3 = \frac{bc - ad}{c^2} z_2,$$

d'où

$$Z = z_3 + \frac{a}{c}.$$

La figure F est alors la transformée de f par une translation, suivie d'une symétrie relativement à Ox , et d'une inversion par rapport au

cercle unité, d'une rotation et d'une homothétie, enfin d'une translation. Si f est un cercle quelconque, F sera un cercle ou une droite ; ce dernier cas se produit lorsque le cercle dont on fait l'inversion à la troisième opération passe par O . La transformation homographique fait correspondre aux cercles du plan z des cercles du plan Z (si l'on convient de considérer les droites comme des cercles de rayon infini) et comme

$$z = \frac{-dZ + b}{cZ - a},$$

aux cercles du plan Z correspondent des cercles du plan z ; à deux points inverses relativement à un cercle, correspondent deux points inverses relativement au cercle transformé du premier. Si l'un de ces cercles est une droite, la correspondance entre deux points inverses est une symétrie par rapport à cette droite.

D'autre part, les transformations : translation, rotation, homothétie, inversion, conservent les angles, c'est-à-dire que deux lignes de f sont transformées en deux lignes de F qui font le même angle, non seulement en valeur absolue, mais en signe aussi. Or une transformation ponctuelle qui conserve les angles est dite *conforme*. La transformation homographique du plan complexe est donc conforme.

Fonctions monogènes.

7. On dit que Z est fonction de z si, à tout point d'une région du plan z , correspond un point du plan Z , et l'on dit que cette fonction est définie dans ladite région.

Cette définition très générale ne contient rien de plus que l'affirmation suivante :

X et Y sont fonctions de x et y :

$$Z = X(x, y) + iY(x, y).$$

Il ne serait pas utile de dire que $Z = X + iY$ peut être considérée comme fonction de $z = x + iy$, si l'on se tenait à un point de vue aussi général.

Cauchy a restreint singulièrement la définition en exigeant qu'on puisse définir la *dérivée* de Z . Pour cela, il convient de former le rapport

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y) + i[Y(x + \Delta x, y + \Delta y) - Y(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

qui est celui de l'accroissement ΔZ de la fonction à l'accroissement Δz

de la variable. Puis on fait tendre Δz vers zéro, ce qui peut se faire d'un très grand nombre de manières. Si, au point (x, y) , les fonctions X et Y sont continues et dérivables, le numérateur ΔZ tendra aussi vers zéro et l'on aura

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right)}{dx + i dy};$$

or ce rapport dépend de $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire de la direction suivant laquelle le point $P'(z + \Delta z)$ tend vers le point $P(z)$. Pour que ce rapport soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$, il faut que les valeurs qu'il prend pour $\frac{dy}{dx} = 0$ et pour $\frac{dy}{dx} = \infty$ soient égales, c'est-à-dire que :

$$\frac{\frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial X}{\partial y} + i \frac{\partial Y}{\partial y}}{i},$$

d'où, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = - \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (C)$$

Inversement, si ces égalités sont satisfaites et si l'on admet que les quatre dérivées partielles de X et Y sont continues en (x, y) , on voit sans peine que le rapport $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ tend vers une limite bien déterminée lorsque Δz tend vers zéro d'une manière quelconque. Les équations (C) restreignent donc singulièrement le choix de X et de Y pour que $X + i Y$ soit une fonction de z ayant une dérivée unique au point z ; on les appelle les *équations* ou les *conditions de Cauchy*. Si elles sont satisfaites, on dit que $X + i Y$ est une fonction *monogène* ou *synectique* de z .

Remarquons qu'en éliminant Y de (C) puis X , on trouve

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

X et Y doivent satisfaire à l'équation de Laplace. Si l'on se borne à ne considérer que des fonctions $f(z)$ pour lesquelles X et Y ont des dérivées partielles continues et dérivables à leur tour, X et Y sont alors *harmoniques*.

8. Si l'on se donne arbitrairement $X(x, y)$ harmonique, peut-on déterminer $Y(x, y)$ telle que $X + iY$ soit monogène ? La réponse est affirmative, car le système (C) où Y est inconnue est complètement intégrable, la condition d'intégrabilité étant précisément

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0.$$

On trouve alors, en ne tenant compte d'abord que de la seconde équation (C) :

$$Y(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx + \psi(y),$$

$\psi(y)$ étant une fonction de y seulement qu'on détermine en tenant compte de la première équation (C) :

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = - \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \psi'(y) = \frac{\partial X}{\partial x} :$$

or $\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, donc,

$$\psi'(y) = \frac{\partial X}{\partial x} - \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx = \frac{\partial X}{\partial x} - \left[\frac{\partial X}{\partial x} \right]_{x_0}^x,$$

d'où

$$\psi'(y) = \left(\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} \right)_{x=x_0}$$

et par suite

$$\psi(y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial X(x_0, y)}{\partial x} dy + C;$$

C étant une constante réelle ; enfin :

$$Z = X + iY = f(z) = X(x, y) - i \int_{x_0}^x \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx + i \int_{y_0}^y \frac{\partial X(x_0, y)}{\partial x} dy + iC.$$

Donc, si l'on se donne la partie réelle, forcément harmonique, d'une fonction monogène de z , la fonction est parfaitement déterminée à une constante purement imaginaire près. Si l'on se donne $Y(x, y)$, on trouvera X par un procédé semblable à une constante réelle près. Les fonctions X et Y sont dites *conjuguées*.

9. Une fonction $f(z)$ est dite *holomorphe* ou *analytique* dans un domaine ¹ D du plan z si :

1. à tout point z de D correspond une valeur déterminée de $f(z)$;
2. $f(z)$ admet en chaque point de A une dérivée unique $f'(z)$.

On étendra sans difficulté aux fonctions holomorphes d'une variable complexe les règles de dérivation des fonctions d'une variable réelle : somme, produit, quotient, fonction de fonction, etc. Si l'on remarque que $\frac{dz^m}{dz} = mz^{m-1}$, on sera à même de calculer les dérivées de toutes les fonctions rationnelles de z .

Représentation conforme.

10. Soit une fonction $f(z)$, holomorphe dans un domaine D . On peut, bien entendu, définir la *différentielle* de $f(z)$ comme pour une fonction de variable réelle. Si

$$Z = f(z),$$

on écrira :

$$dZ = f'(z) dz.$$

Supposons qu'une courbe c passe par le point P d'affixe z , et que dz soit défini par le mouvement d'un point P' décrivant c et passant en P . Le nombre infiniment petit dz aura donc comme argument celui de la tangente à c en P , dirigée vers P' . Or dans le plan Z le point $Z = f(z)$ décrit, lorsque z décrit c , une courbe C et dZ a aussi comme argument celui de la tangente à C en Q d'affixe Z , dirigée vers $Z' = f'(z)$. Une seconde courbe γ , passant par P , aura pour correspondante, dans le plan Z , une courbe Γ passant par Q , et si δz est le vecteur infiniment petit qui va de P vers P'' sur γ , on aura pour la différentielle δZ correspondant à la variation δz :

$$\delta Z = f'(z) \delta z,$$

à cause de l'unicité de la dérivée, et les arguments de δz et δZ donnent encore les directions des tangentes à γ et Γ . L'angle de deux courbes étant l'angle de leurs tangentes, et cet angle étant précisé comme d'habitude, à un multiple de 2π près, en prenant les tangentes orientées, on voit que l'angle de c avec γ est égal à l'argument de $\frac{\delta z}{\delta Z}$, celui

¹ On définira les domaines plans comme on a défini au § 66 les domaines spatiaux ; au lieu de sphères, on emploiera des cercles.

de C avec Γ est égal à l'argument de $\frac{\partial Z}{\partial z}$; or les deux équations écrites ci-dessus donnent

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial Z},$$

ce qui prouve que : *la correspondance ponctuelle du plan z sur le plan Z , par le moyen de la fonction holomorphe $f(z)$, transforme deux courbes se coupant en P sous un angle φ en deux courbes se coupant au point correspondant de P sous le même angle φ . On dit que les angles sont conservés ; la transformation est conforme ; on obtient ainsi une généralisation du résultat exposé plus haut pour la fonction homographique.*

Remarques. I. On se rendra compte de ce que les angles sont conservés en grandeur et en *signe*.

II. Une figure infiniment petite du plan z est transformée en une figure directement semblable du plan Z .

III. La démonstration précédente n'est évidemment plus valable si $f'(z) = 0$; autrement dit, les courbes qui passent par un point en lequel $f'(z)$ est nulle se transforment en courbes passant par le point correspondant, mais leurs angles n'y sont plus les mêmes en général. Qu'on examine le cas $Z = z^2$; les deux axes Ox et Oy ont respectivement pour courbes correspondantes dans le plan Z , le demi-axe réel positif et le demi-axe réel négatif ; l'angle a doublé.

IV. Les courbes du plan z définies par $X(x, y) = \text{const.}$ et $Y(x, y) = \text{const.}$ sont orthogonales, car elles correspondent aux droites parallèles aux axes du plan Z .

Séries.

11. Les notions relatives aux séries à termes réels se transportent immédiatement aux séries à termes complexes. On dira d'abord que la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u_k = a_k + ib_k) \quad (\text{S})$$

est *convergente* si les deux séries à termes réels Σa_k et Σb_k sont convergentes.

Puisque $|a_k| \leq |u_k|,$

$$|b_k| \leq |u_k|,$$

la convergence est assurée si

$$\Sigma |u_k| \text{ converge.}$$

On aura donc pour les séries à termes complexes des théorèmes analogues à ceux qui régissent les séries à termes réels quelconques, pourvu qu'on y remplace l'expression *valeur absolue* par l'expression *module*.

On dira encore que la série (S) est *absolument convergente*, si la série des modules est convergente. Dès lors, dans une série absolument convergente, on peut modifier, comme on veut, l'ordre des termes, la série reste convergente et sa somme est la même.

Les critères de d'Alembert et de Cauchy sont valables. La série (S) est absolument convergente si, à partir d'un certain indice, les nombres

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{|u_n|}$$

restent inférieurs à un nombre $q < 1$.

Rappelons encore qu'on peut additionner ou soustraire terme à terme deux séries convergentes ; la somme de la nouvelle série est la somme ou la différence des sommes des séries proposées.

Enfin, si les deux séries

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \\ v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \end{aligned}$$

sont absolument convergentes, la série

$$w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots$$

avec

$$w_k = u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + u_2 v_{k-2} + \dots + u_k v_0$$

est absolument convergente et elle a pour somme le produit des sommes des deux séries proposées. La démonstration de ce théorème, pour des séries à termes complexes, est la même que celle qui est relative aux séries à termes réels.

Si $\sum u_k$ est absolument convergente, $\sum v_k$ étant simplement convergente, $\sum w_k$ est encore le produit, cette dernière série étant simplement convergente, en général.

12. Si les termes d'une série sont des fonctions d'une variable z , et si pour certaines valeurs de z couvrant un domaine D , la série est convergente, elle représente une fonction $f(z)$ dans le domaine D .

Une série est *uniformément convergente* dans un domaine D , si à tout nombre positif ε , on peut faire correspondre un nombre N tel que, pour $n > N$, on ait

$$|u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots + u_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

quel que soit p et *quel que soit le point z dans le domaine D .*

C'est la même définition que pour les séries de fonctions réelles, à cela près que le mot *intervalle* y est remplacé par le mot *domaine*.

Soit

$$f(z) = u_0(z) + u_1(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

dans un domaine D , les $u_k(z)$ étant holomorphes dans D ; si

$$f_1(z) = u'_0(z) + u'_1(z) + \dots + u'_n(z) + \dots,$$

la convergence du second membre étant uniforme dans D , on aura ;

$$f_1(z) = f'(z).$$

La démonstration est *mutatis mutandis* la même que celle qu'on donne de la proposition correspondante dans la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Par ailleurs, si la série qui définit $f(z)$ est uniformément convergente, $f(z)$ est holomorphe, car, d'une part, la convergence uniforme d'une série de fonctions continues assure la continuité de la fonction qui en est la somme (même démonstration que dans la théorie des fonctions d'une variable réelle), d'autre part, la convergence uniforme de la série des dérivées assure que la somme en est la dérivée de $f(z)$; donc $f(z)$ est holomorphe dans D .

Séries entières.

13. Une classe fort importante de séries est la classe des *séries entières* :

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (\text{E})$$

les a_k étant des nombres complexes.

Posons

$$A_k = |a_k|, \quad r = |z|,$$

et considérons la série

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n + \dots, \quad (\text{M})$$

si elle est convergente pour r_1 , elle l'est pour $r < r_1$; si elle est divergente pour r_2 , elle l'est pour $r > r_2$. Il y a donc un nombre positif R tel que pour $r < R$, la série (M) converge alors qu'elle diverge pour $r > R$. La série (E) converge alors absolument si $|z| < R$.

D'autre part, pour montrer qu'elle diverge pour $|z| > R$, montrons que si, pour un z dont le module r_1 est supérieur à R , la série (E) con-

vergeait, la série (M) convergerait pour $r < r_1$. Ce fait résulte du *théorème d'Abel* :

Si (E) converge pour $z = z_0$, elle converge absolument pour tout z , tel que

$$|z| < |z_0|.$$

En effet, le terme général $a_n z_0^n$ est borné en module :

$$|a_n z_0^n| \leq P,$$

c'est-à-dire

$$A_n r_0^n \leq P ;$$

de plus

$$A_n r^n = A_n r_0^n \cdot \frac{r^n}{r_0^n} \leq P \frac{r^n}{r_0^n},$$

et $\sum A_n r^n$ converge puisque $\sum \frac{r^n}{r_0^n}$ est une progression géométrique de raison inférieure à 1.

Ainsi donc, la série (E) converge absolument à l'intérieur du cercle centré en O et de rayon R ; elle diverge à l'extérieur de ce cercle.

Ce cercle, que nous désignerons par $\mathcal{C}(R)$, est dit le *cercle de convergence* de (E). On voit immédiatement que (E) converge uniformément dans tout cercle \mathcal{C}' de rayon $R' < R$, centré en O , car si $|z| < R'$:

$$\begin{aligned} & |a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots + a_{n+p} z^{n+p}| \\ & \leq A_{n+1} R'^{n+1} + A_{n+2} R'^{n+2} + \dots + A_{n+p} R'^{n+p} \end{aligned}$$

quel que soit z dans \mathcal{C}' ; or cette dernière somme est moindre que ε si n est supérieur à un nombre bien choisi N et quel que soit p .

Remarque. Quelquefois $R = 0$; c'est le cas pour

$$1 + z + 2! z^2 + \dots + n! z^n + \dots,$$

cette série ne converge que pour $z = 0$.

Parfois $R = \infty$; c'est le cas pour

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots;$$

une fonction définie par une telle série est dite *fonction entière*.

14. Reprenons (E) et supposons que $\mathcal{C}(R)$ existe avec $R > 0$. Formons la série

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + na_n z^{n-1} + \dots ; \quad (\text{E}_1)$$

elle a même rayon de convergence que la série donnée (M), car

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n-1} \left| \frac{a_n z^{n-1}}{a_{n-1} z^{n-2}} \right| = \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n z^n}{a_{n-1} z^{n-1}} \right|,$$

et dès lors (E) et (E₁) sont convergentes ou divergentes dans le même cercle.

La série (E₁) est uniformément convergente dans l'intérieur de C(R), c'est-à-dire dans tout domaine intérieur à C(R); sa somme f₁(z) est donc la dérivée à l'intérieur de C(R) de la fonction f(z) représentée par (E). On a le théorème :

La série entière (E) représente une fonction holomorphe f(z) à l'intérieur de son cercle de convergence; la dérivée f'(z) s'obtient en faisant la somme des dérivées des termes de f(z), et elle a le même cercle de convergence que (E); toutes les dérivées f''(z), ... f⁽ⁿ⁾(z), ... existent donc et elles ont le même cercle de convergence C(R) que la série proposée.

Fonctions élémentaires.

15. Les séries entières permettent de définir des fonctions nouvelles différentes des polynômes et différentes, en général, des fonctions rationnelles. L'exemple le plus utile, et l'un des plus simples, est le suivant :

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots;$$

ici $R = \infty$, la fonction est entière. Si $z = x$, la série représente e^x . Posons, par définition,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots;$$

cette égalité définit une fonction — la *fonction exponentielle* — pour toutes les valeurs de z. En voici quelques propriétés.

La dérivée de e^z est e^z ; c'est l'évidence même.

On a

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'};$$

en effet, le terme général du produit est

$$\begin{aligned} w_n &= 1 \cdot \frac{z'^n}{n!} + \frac{z}{1!} \cdot \frac{z'^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z^2}{2!} \cdot \frac{z'^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{z^n}{n!} \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{n!} \left(z'^n + \frac{n}{1!} z'^{n-1} \cdot z + \frac{n(n-1)}{2!} z'^{n-2} \cdot z^2 + \dots + z^n \right) = \frac{(z+z')^n}{n!}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $e^{nz} = (e^z)^n$, n entier positif; mais de $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, on déduit que la propriété est vérifiée aussi pour n entier négatif.

Par conséquent :

$$e^s = e^{x+iy} = e^x \left\{ 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots \right\}$$

et puisque la convergence est absolue, on peut modifier l'ordre des termes :

$$e^s = e^x \left\{ 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \dots \right. \\ \left. + i \left[y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right] \right\}$$

et, par conséquent,

$$e^s = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Le module de e^s est $e^x = e^{\Re z}$; l'argument en est $y = \Im z$.

16. On peut définir de la même façon les fonctions

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

pour z complexe quelconque. Ce sont deux fonctions entières. Un calcul simple montre que

$$\cos z + i \sin z = e^{iz},$$

$$\cos z - i \sin z = e^{-iz},$$

d'où, les formules d'Euler :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Les dérivées se calculent aisément :

$$\frac{d \sin z}{dz} = \cos z,$$

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

17. Les trois fonctions e^s , $\cos z$, $\sin z$ ont des propriétés de périodicité que nous allons établir.

e^s admet la période $2i\pi$, c'est-à-dire

$$e^{s+2i\pi} = e^s,$$

car ajouter $2i\pi$ à z revient à ajouter 2π à y , l'argument de e^z a augmenté de 2π ; e^z n'a pas changé.

Ensuite

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z,$$

$\cos z$ et $\sin z$ admettent donc encore la période 2π , comme dans le domaine réel.

Il suffit, pour connaître e^z , de savoir comment cette fonction se comporte dans une bande de largeur 2π , parallèle à l'axe réel. Une translation de grandeur 2π de cette bande le long de l'axe imaginaire, établit une correspondance entre les points des deux bandes pour lesquelles e^z prend la même valeur.

e^z prend toutes les valeurs sauf zéro et l'infini. Soit, en effet, A un nombre complexe $r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$; pour que

$$e^z = A,$$

il faut que

$$e^x = r, \quad \text{soit} \quad x = \log r$$

et

$$y = \vartheta + 2k\pi;$$

ce qui établit notre assertion; on voit même que dans une bande de largeur 2π et parallèle à l'axe réel, e^z ne prend qu'une fois chaque valeur.

Pour $\sin z$ et $\cos z$, on doit considérer des bandes parallèles à l'axe imaginaire et de largeur 2π , mais puisque

$$\cos(2\pi - z) = \cos z$$

et

$$\sin(\pi - z) = \sin z$$

comme on le voit par les formules d'Euler, on se rend compte que $\sin z$ et $\cos z$ prennent deux fois toutes les valeurs dans une telle bande, sauf la valeur ∞ , qu'elles ne prennent jamais.

18. On définira les autres fonctions de la trigonométrie pour un argument complexe par les formules

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cot} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

qui montrent que $\operatorname{tg} z$ est holomorphe dans toute région du plan qui ne contient aucune racine de l'équation

$$\cos z = 0,$$

c'est-à-dire aucun point $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entier), et que $\operatorname{cot} z$ est holomorphe dans toute région qui ne contient aucun point $z = k\pi$ (k entier).

Fonctions multiformes.

19. Les fonctions *inverses* des fonctions que nous venons de définir sont multiformes, c'est-à-dire qu'elles ont plusieurs déterminations. Nous allons les passer en revue, mais tout d'abord, il convient d'examiner le cas de $z^{\frac{1}{n}}$, fonction inverse de z^n .

Soit donc

$$Z = \sqrt[n]{z}, \quad z = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta);$$

à toute valeur de $z \neq 0$, correspondent n valeurs distinctes de Z soient Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1} , avec

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right)$$

ou encore

$$Z_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\vartheta}{n}i + k \frac{2\pi}{n}i}. \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

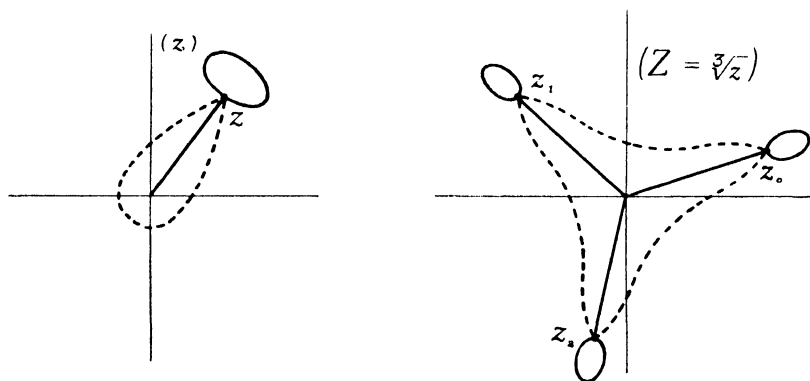


Fig. 16.

Lorsque z décrit une courbe γ dans son plan, les n déterminations Z_k décrivent chacune une courbe dans le plan Z . Considérons l'une d'elles, celle que décrit Z_j , par exemple ; lorsque γ est fermée, z revient à son point de départ ; que fait Z_j ? Pour le voir, il faut suivre son argument variable ; si ϑ varie sur γ et reprend la même valeur, c'est-à-dire si γ est une courbe fermée ne contenant pas l'origine, l'argument de Z_j reprend la même valeur qu'au départ, c'est-à-dire que la courbe Γ_j décrite par Z_j est fermée, la détermination Z_j revient à la valeur initiale ; il en est ainsi de toutes les déterminations qui ont décrit n courbes fermées.

Si, au contraire, la courbe γ entoure l'origine une fois et qu'on la

suive dans le sens positif de rotation autour de O , l'argument de z a passé de θ à $\theta + 2\pi$, l'argument de Z_j a varié de $\frac{2\pi}{n}$ et lorsque le point z a parcouru γ , Z_j a décrit une courbe qui l'amène à Z_{j+1} . Toutes les déterminations ont changé ; elles ont décrit des courbes dont l'origine et l'extrémité sont différentes.

D'une manière générale, une courbe γ qui entoure l'origine fait subir aux Z_k une substitution qui les échange :

$$Z_k \text{ devient } Z_{k+l}$$

l étant le nombre de tours, algébriquement comptés, que γ décrit autour de O .

Pour éviter les complications que la considération des échanges entre les déterminations fait naître, il est utile parfois d'imaginer qu'on a coupé le plan z suivant une courbe issue de O et partant pour l'infini — le demi-axe réel, par exemple. On s'astreint alors à ne pas faire franchir à z la coupure en question ; dès lors, dans le plan coupé, les n déterminations de $\sqrt[n]{z}$ sont n fonctions uniformes de z , les n branches de la fonction multiforme $\sqrt[n]{z}$. En deux points infiniment voisins, situés de part et d'autre de la coupure, $\sqrt[n]{z}$ a deux valeurs qui diffèrent par le facteur $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

20. L'équation

$$z = e^Z$$

définit Z comme fonction de z , mais puisque la fonction exponentielle a la période $2\pi i$, à toute valeur de z correspondent une infinité de valeurs de Z de la forme

$$Z + 2k\pi i, \quad (k \text{ entier}),$$

Z étant l'une quelconque d'entre elles.

Z est donc une fonction multiforme de z , c'est la fonction logarithmique, on la représente par le symbole

$$Z = \log z,$$

et l'on voit [Appendice, § 18] que si $z = re^{i\varphi}$, le logarithme a une infinité de déterminations Z_k définies par les équations :

$$\begin{aligned} \Re Z_k &= \log r = \log |z| \\ \Im Z_k &= \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi . \end{aligned} \quad \left(k \text{ entier } \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \right).$$

Lorsque z décrit une courbe fermée γ n'entourant pas l'origine, les déterminations de $\log z$ décrivent une infinité de courbes fermées iden-

tiques, les points correspondants étant sur une parallèle à l'axe imaginaire à une distance égale à un multiple de 2π .

Si z décrit une courbe fermée γ entourant l'origine, les déterminations de $\log z$ décrivent des courbes qui ne sont plus fermées. Les diverses déterminations s'échangent ; si γ tourne l fois autour de l'origine dans

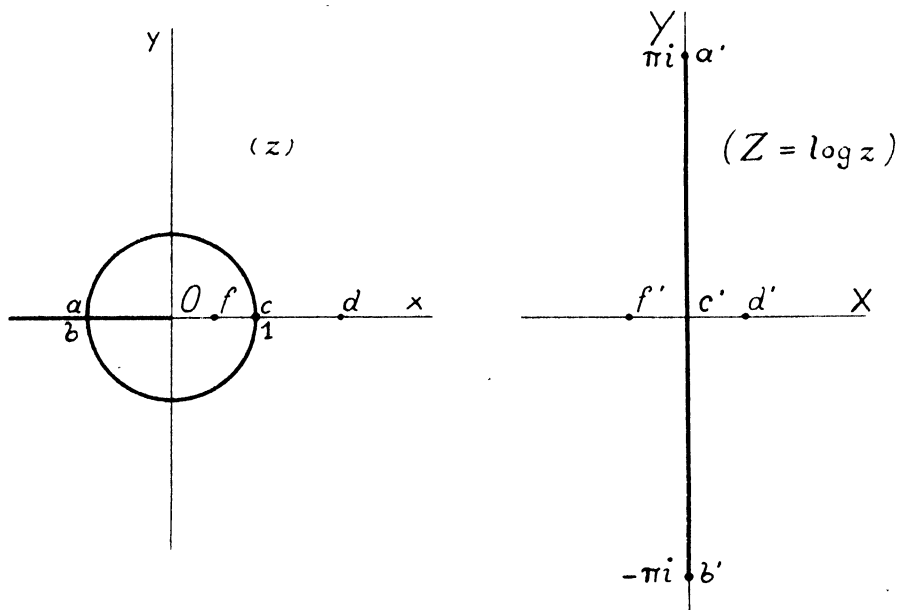


Fig. 17.

le sens positif, Z_k se transforme et devient après ce circuit la détermination Z_{k+l} .

On rend les branches de la fonction $\log z$ uniformes, en coupant le plan z suivant l'axe réel négatif par exemple. Chaque détermination de $\log z$ est uniforme dans le plan coupé. Aux deux bords de la coupure en deux points infiniment voisins, $\log z$ prend deux valeurs qui diffèrent de $2\pi i$.

La détermination de $\log z$ qui est nulle pour $z = 1$ s'appelle la *valeur principale* de $\log z$.

21. Soit $f(z)$ une fonction uniforme et holomorphe. Que peut-on dire de $Z = \log f(z)$ lorsque z décrit une courbe γ ?

Supposons que $f(z)$ soit de la forme

$$f(z) = (z - z_0)^l \varphi(z)$$

et que $\varphi(z)$ ne s'annule pour aucune valeur de z dans un domaine D simplement connexe contenant γ , à l'intérieur duquel $f(z)$ soit holo-

morphe ; $\varphi(z)$ sera aussi holomorphe dans ce domaine et si $\zeta = f(z)$, l'on aura dans le plan ζ pour image de γ , une courbe qui tourne l fois autour de $\zeta = 0$. Il est facile de voir alors qu'une quelconque des déterminations de $\log f(z)$ ne reprend pas la même valeur mais augmente de $2l\pi i$. Au contraire, si $f(z)$ ne s'annule pas sur γ ni à son intérieur, $\log f(z)$ revient à sa valeur initiale. Si donc on connaît les points du plan z en lesquels $f(z)$ s'annule, on pourra uniformiser la fonction $\log f(z)$ en coupant le plan z par des lignes partant des affixes des racines de $f(z) = 0$ et se perdant à l'infini sans se couper, ou se dirigeant vers la frontière du domaine où $f(z)$ est holomorphe.

22. On définira, de la même manière et avec des précautions semblables, les fonctions arc cos z , arc sin z , arc tg z , arc cot z . Par exemple, de

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i},$$

on tire, en posant $\sin u = z$, et $e^{iu} = y$,

$$y^2 - 2izy - 1 = 0$$

d'où

$$y = iz \pm \sqrt{1 - z^2};$$

à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de y , qui ne sont jamais nulles. Dès lors, à chaque valeur y correspondent une infinité de valeurs de $u = \frac{1}{i} \log y$. En résumé, z étant donné, il y correspond une double infinité de valeurs de u telles que $\sin u = z$ — ce que nous savions déjà — elles sont les déterminations de la fonction arc sin z et l'on a

$$\text{arc sin } z = \frac{1}{i} \log [iz \pm \sqrt{1 - z^2}].$$

Puisque

$$iz - \sqrt{1 - z^2} = \frac{-1}{iz + \sqrt{1 - z^2}},$$

à une détermination α de $\frac{1}{i} \log [iz + \sqrt{1 - z^2}]$ correspond une détermination α' de $\frac{1}{i} \log [iz - \sqrt{1 - z^2}]$ qui est égale à $\pi - \alpha$. Comme les déterminations de $\frac{1}{i} \log y$ diffèrent d'un multiple de 2π , on voit que toutes les déterminations de arc sin z sont de la forme

$$\alpha + 2k\pi \quad \text{et} \quad \pi - \alpha + 2k'\pi.$$

On peut montrer que chaque branche d'arc $\sin z$ est uniforme dans le plan z , coupé le long de l'axe réel de $-\infty$ à -1 et de $+1$ à $+\infty$, car chaque branche des fonctions

$$y_1(z) = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

$$y_2(z) = iz - \sqrt{1 - z^2},$$

est uniforme dans ce plan coupé et ne s'y annule jamais.

23. On aura de même :

$$\text{arc cos } z = \frac{1}{i} \log (z \pm \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\text{arc tg } z = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1 + iz}{1 - iz}},$$

$$\text{arc cot } z = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{iz - 1}{iz + 1}}.$$

Si une détermination d'arc $\cos z$ est α , les autres seront $\pm \alpha + 2k\pi$; pour $\text{arc tg } z$, et $\text{arc cot } z$, elles sont de la forme $\alpha + k\pi$, α étant l'une d'elles.

Nous laissons au lecteur le soin de voir comment on peut couper le plan z pour uniformiser chaque branche de ces fonctions.

24. Nous avons défini z^n pour n entier, puis pour $n = \frac{1}{q}$, q entier; nous savons donc comment se comporte la fonction $z^{\frac{p}{q}}$; elle a q déterminations si p et q n'ont pas de facteurs communs.

Si n est un nombre quelconque, irrationnel ou complexe, on définit z^n par la formule

$$z^n = e^{n \log z}.$$

Cette fonction se réduit à la fonction $z^{\frac{p}{q}}$ définie plus haut si n est rationnel, elle a une infinité de déterminations si n n'est pas rationnel.

En effet, puisque $\log z = \log r + i(\varphi + 2k\pi)$ on aura si $n = \lambda + i\mu$:

$$z^n = e^{n \log z} = e^{(\lambda + i\mu)[\log r + i(\varphi + 2k\pi)]} =$$

$$e^{\lambda \log r - \mu\varphi - 2k\mu\pi} [\cos (\mu \log r + \lambda\varphi + 2k\lambda\pi) + i \sin (\mu \log r + \lambda\varphi + 2k\lambda\pi)].$$

Si $\mu \neq 0$, tous les modules en sont différents; si λ est irrationnel, tous les arguments en sont différents. On peut voir que, pour $\mu \neq 0$, ces déterminations sont sur une spirale logarithmique. Si $\mu = 0$, elles sont sur un cercle de rayon $e^{\lambda \log r}$, et sur chaque arc de ce cercle, si petit soit-il, il y en a toujours une infinité, quand λ est irrationnel.

Chaque détermination est uniforme dans le plan z coupé suivant une ligne allant de l'origine à l'infini.

Remarquons que si n est réel, positif, on aura, pour la branche $k = 0$:

$$\Re z^n = r^n \cos n\varphi \qquad \Im z^n = r^n \sin n\varphi.$$

25. Pour définir la dérivée de ces fonctions multiformes, ou plus précisément la dérivée de chacune de leurs déterminations, on remarquera que

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{du}},$$

par conséquent :

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z}$$

qui est uniforme.

Puis :

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin z}{dz} = \frac{1}{\cos u}, \qquad z = \sin u;$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos z}{dz} = -\frac{1}{\sin u}, \qquad z = \cos u.$$

De cette manière, il n'y a aucune ambiguïté. Mais pour les deux dernières, si z est donné, u n'est pas déterminé et l'on trouve en fonction de z

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos z}{dz} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}},$$

et les radicaux sont ambigus. Cependant, en calculant ces dérivées au moyen du théorème de la dérivation des fonctions de fonction, et en remarquant que $\frac{d \log f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$, si $f(z)$ est uniforme, on trouve pour une branche déterminée

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin z}{dz} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}}{iz + \sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

et l'on doit prendre pour le radical précisément la détermination qu'on a choisie dans $iz + \sqrt{1-z^2}$.

On passe aisément aux autres fonctions multiformes ; en particulier, si

$$Z = z^n,$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{nZ}{z} \quad \text{qui est aussi } nz^{n-1};$$

cette seconde notation est ambiguë alors que $\frac{nZ}{z}$ ne l'est pas.

Calcul intégral. Théorème de Cauchy.

26. Soit une courbe C rectifiable, située dans une aire D , où une fonction donnée $f(z)$ est holomorphe. Soient

$$f(z) = X(x, y) + iY(x, y),$$

$$dz = dx + idy;$$

formons le produit

$$f(z) dz = Xdx - Ydy + i(Ydx + Xdy).$$

Par définition, l'intégrale de $f(z)$ le long de C , qu'on écrira $\int_C f(z) dz$, sera :

$$\int_C f(z) dz = \int_C Xdx - Ydy + i \int_C Ydx + Xdy, \quad (A)$$

les deux intégrales curvilignes réelles du second membre ont toujours un sens si les conditions du début de ce paragraphe sont vérifiées.

Il est facile de voir que cette intégrale est la limite d'une somme obtenue de la manière suivante : on divise C en n parties par des points de division z_0, z_1, \dots, z_n , z_0 et z_n étant les affixes de l'origine et de l'extrémité de C (si C est fermée, $z_0 = z_n$) ; on prend sur chaque arc un point arbitraire : ζ_i sur l'arc $z_{i-1} z_i$, et on forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\zeta_i) (z_i - z_{i-1});$$

si on augmente n indéfiniment, chaque segment de C tendant vers zéro, cette dernière somme a une limite qui est précisément celle qui est écrite au second membre de (A) ; on le voit en effectuant les produits $f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1})$.

On voit facilement que

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < ML,$$

où M est une borne du module de $f(z)$ sur C et L la longueur de C .

27. Le *théorème de Cauchy* qui domine toute cette théorie s'énonce ainsi :

L'intégrale $\int_C f(z) dz$ prise le long d'une courbe rectifiable fermée, à l'intérieur de laquelle et sur laquelle $f(z)$ est holomorphe, a une valeur nulle ; on écrit cela de la manière suivante :

$$\int_C f(z) dz = 0,$$

le signe \int_C voulant précisément dire que le chemin d'intégration C est fermé.

La démonstration est simple puisque les fonctions $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont dérivables par rapport à x et y . On appliquera la formule de Riemann [I, § 73] à chacune des intégrales du second membre de (A) ; c'est possible parce que, dans la portion Σ du plan entourée par C , les fonctions X et Y sont définies et dérivables. Dès lors :

$$\int_C X dx - Y dy = \iint_{\Sigma} \left(-\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$\int_C Y dx + X dy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy,$$

pourvu que le sens de parcours sur C soit le sens positif de la trigonométrie ; un observateur qui parcourt C dans ce sens a l'aire Σ à sa gauche.

Or les conditions de Cauchy qui assurent la monogénéité de $f(z)$ s'écrivent :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} ;$$

dès lors les intégrales doubles précédentes sont nulles et le théorème est démontré.

28. On peut généraliser ce théorème. Soit une aire Σ limitée par plusieurs courbes, mais supposons-la connexe, c'est-à-dire telle qu'on puisse toujours joindre deux quelconques de ses points par une courbe tout entière située dans Σ . Soient C la courbe extérieure et $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$, $n - 1$ courbes fermées constituant avec C la frontière totale de Σ .

Comme il est évident qu'une intégrale prise le long d'une courbe a une valeur opposée à celle de l'intégrale prise le long de la même

courbe mais dans le sens contraire, on pourra toujours ajouter, à une intégrale prise le long d'une courbe Γ quelconque, deux intégrales opposées comme il vient d'être dit. Considérons dès lors le domaine Σ , et coupons-le suivant des courbes ab, cd, \dots ne se coupant pas et joignant un point de chaque γ_i à un point de C (sur la figure, $n-1 = 2$). Sur C et sur les γ_i , $f(z)$ est holomorphe ainsi que dans Σ . Dès lors, la frontière de Σ , parcourue de manière que Σ soit à gauche, se compose de $bd, dc, c\gamma_2c', c'd', d'b', b'a', a'\gamma_1a, ab$, où a' , par exemple, est le point a considéré comme faisant partie de l'autre bord de la coupure. Dès lors, puisque certaines intégrales sont opposées, il reste

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_{n-1}} f(z) dz = 0;$$

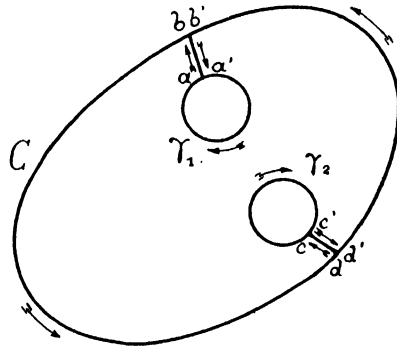


Fig. 18.

mais on remarque que les intégrales le long des γ_i se prennent dans le sens négatif de la trigonométrie, qui est celui qui laisse Σ à gauche.

Souvent on conserve le sens positif de la trigonométrie pour toutes les intégrales le long des courbes fermées et, avec cette convention qui sera celle que nous admettrons et que nous indiquerons avec le signe \oint , on aura :

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_{n-1}} f(z) dz.$$

Remarques. I. Il est clair que si, au lieu d'une fonction holomorphe dans Σ , on prend une branche $f(z)$ d'une fonction multiforme, le théorème précédent n'est plus valable en général. Mais si l'une des coupures ab, cd, \dots a pour effet de rendre $f(z)$ uniforme dans Σ , le théorème de

Cauchy reste vrai à condition qu'on ajoute aux chemins d'intégration $C, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, la coupure en question prise elle-même dans les deux sens avec deux déterminations distinctes de $f(z)$; ces deux contributions ne s'annulent pas en général.

II. Le domaine Σ est connexe. S'il est limité par une seule courbe C , il est dit *simplement connexe*. Lorsqu'il est limité par n courbes, on dit que son *ordre de connexion est n* .

29. Soit un chemin C joignant dans un domaine connexe Σ deux points A et B . L'intégrale le long de C de $f(z)$ aura la même valeur que l'intégrale le long de C' joignant A et B , C' étant tel qu'avec C ils limitent ensemble une portion A simplement connexe de Σ . Ce fait est une conséquence du théorème de Cauchy, car $\int_C f(z) dz - \int_{C'} f(z) dz = 0$.

Si B est le point d'affixe z , l'intégrale $\int_{C'} f(z) dz$ définit donc une certaine fonction $F(z)$ dont la valeur est indépendante du chemin C choisi parmi tous les chemins possibles joignant A à B , situés dans Σ , et réductibles par déformation continue les uns aux autres sans passer jamais par un point frontière de Σ . Un raisonnement très simple montre que $F(z)$ est holomorphe et que sa dérivée est $f(z)$. On calcule en effet

$$\Delta F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(z) dz.$$

Or sur le segment rectiligne $(z, z + \Delta z)$, on peut écrire

$$f = f(z) + \varepsilon,$$

ε étant de l'ordre de Δz . Comme $\int_z^{z+\Delta z} dz$ est manifestement Δz , il vient

$$\Delta F(z) = f(z) \Delta z + \int_z^{z+\Delta z} \varepsilon dz,$$

$$\lim_{\Delta z=0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z) + \lim_{\Delta z=0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} \varepsilon dz;$$

la dernière intégrale a un module moindre que $\eta |\Delta z|$, η étant la borne supérieure de ε et $|\Delta z|$ étant justement la longueur du chemin recti-

ligne $(z, z + \Delta z)$. Δz tendant vers zéro, η tend aussi vers zéro et dès lors

$$\lim_{\Delta z=0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z);$$

$F(z)$ est holomorphe et sa dérivée est $f(z)$.

Il convient de remarquer que $F(z)$ pourrait être multiforme si l'aire Σ n'était pas simplement connexe. En effet, deux chemins C et C' joignant A à B ne donneraient plus forcément la même valeur à l'intégrale s'ils ne limitaient une portion de Σ qu'avec l'aide d'un ou plusieurs contours γ_i . Notre précédente démonstration prouve cependant que toutes les déterminations possibles de $F(z)$ ont même dérivée $f(z)$.

Les diverses déterminations de $F(z)$ proviennent de ce que des intégrales, prises le long de contours fermés dans Σ , ne se réduisant pas par déformation continue à un point, mais à l'un ou l'autre des γ_i , par exemple, ont des valeurs non-nulles en général.

Intégrales de Cauchy.

30. Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans une aire A ; traçons dans cette aire une courbe fermée C et considérons un point d'affixe x dans la région D limitée par C . Notre propos est de calculer

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z - x}.$$

La fonction $\frac{f(z)}{z - x}$ est holomorphe dans D et sur C , sauf en $z = x$.

Entourons x d'un petit cercle c de rayon r et de centre x précisément. Dès lors, dans la région limitée par C et c , $\frac{f(z)}{z - x}$ est holomorphe et le théorème de Cauchy permet d'écrire :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - x} dz = \oint_c \frac{f(z)}{z - x} dz,$$

les deux intégrales étant prises dans le sens positif de la trigonométrie. On voit que la valeur de la seconde ne dépend pas du rayon r puisqu'elle est égale à la première. Sur c , on peut écrire

$$f(z) = f(x) + \varepsilon,$$

$$z - x = re^{i\theta}, \quad dz = ire^{i\theta} d\theta,$$

où ε est une fonction infiniment petite avec r ; c'est-à-dire que, pour un r donné, on peut trouver un nombre positif η tel que

$$|\varepsilon| < \eta$$

et $\lim_{r=0} \eta = 0$. Dès lors :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(x) + \varepsilon}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} [f(x) + \varepsilon] d\theta = 2\pi i f(x) + i \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta.$$

La limite de cette dernière intégrale est nulle, et comme le premier membre ne dépend pas de r , il vaut $2\pi i f(x)$.

On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

et c'est là la formule qui permet d'évaluer la première *intégrale de Cauchy*.

On n'a pas le droit sans plus de dériver sous le signe \oint relativement au paramètre x . On a cependant

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)^2} dz,$$

ce qu'on peut vérifier en toute rigueur en calculant $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

et en faisant tendre h vers zéro ; le lecteur fera ce calcul sans peine.

On trouve ensuite, pour les autres *intégrales de Cauchy* :

$$f''(x) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)^3} dz$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz.$$

31. *Remarques.* I. Si x est un point extérieur à C , on a $\oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz = 0$, d'après le théorème de Cauchy.

II. Si l'on considère une région multiplement connexe D , limitée par n courbes $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ dont l'ensemble sera appelé C , la formule de Cauchy est encore exacte pourvu que x soit dans D et qu'on parcoure l'ensemble des courbes Γ et γ_i de manière que la région D soit toujours à gauche d'un observateur décrivant la frontière dans le sens d'intégration.

III. Il convient d'attirer l'attention sur ce fait très important : la valeur d'une fonction holomorphe dans une région D connexe est connue dès qu'on se donne la suite de ses valeurs sur la frontière de D , mais cette suite n'est pas arbitraire.

IV. Lorsque le point x tend vers un point ζ du contour C , l'on voit que l'intégrale de Cauchy tend vers $f(\zeta)$; d'autre part, si l'on imagine que sur C on se soit donné une suite $g(z)$ de valeurs qui ne soit pas une suite de valeurs prises par une fonction monogène, la fonction définie par l'égalité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{z-x} dz$$

est holomorphe dans toute région intérieure à C , car elle y est continue et y admet une dérivée unique :

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z-x)^2} dz,$$

puis une dérivée seconde, ... une dérivée $n^{\text{ième}}$... Mais il n'est pas certain que la limite de l'intégrale, si $x \rightarrow \zeta$ soit $g(\zeta)$; c'est inexact en général.

V. La représentation d'une fonction holomorphe par une intégrale du type de Cauchy montre que la dérivée d'une fonction holomorphe est elle-même une fonction holomorphe ; une fonction holomorphe possède donc des dérivées de tous les ordres.

Représentation d'une fonction holomorphe dans un cercle. Série de Taylor.

32. Soit un cercle C à l'intérieur et sur la circonférence duquel une fonction $f(z)$ est holomorphe. Soit x un point intérieur à C , on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz;$$

mais remarquons que si a est le centre de C :

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a-(x-a)} = \frac{1}{z-a} \left[1 + \frac{x-a}{z-a} + \left(\frac{x-a}{z-a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x-a}{z-a} \right)^n + \dots \right];$$

la série entre crochets est uniformément convergente car $\left| \frac{x-a}{z-a} \right| < 1$;

on peut l'intégrer terme à terme, après multiplication par $\frac{f(z)}{z-a}$, et la

somme de la série des termes intégrés est égale à l'intégrale de $\frac{f(z)}{z-x}$; on trouve donc :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz + \frac{x-a}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz + \frac{(x-a)^2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz + \\ + \dots + \frac{(x-a)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz + \dots;$$

mais, d'après les formules de Cauchy, on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots,$$

série absolument et uniformément convergente dans le cercle C .

Une autre démonstration consiste à évaluer le reste de la série qui donne $\frac{1}{z-x}$ et de montrer que l'intégrale de ce reste multiplié par $f(z)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

La série qu'on vient d'obtenir est une série entière en $x-a$; c'est la *série de Taylor* de la fonction holomorphe $f(x)$ développée dans le *voisinage* du point a . Les coefficients de cette série sont donnés par des intégrales dont la valeur ne dépend guère du contour d'intégration. On peut remarquer en effet que C peut être tout cercle de centre a , intérieur au plus grand cercle Γ centré en a , à l'intérieur duquel la fonction $f(z)$ ne cesse pas d'être holomorphe. La série de Taylor admet précisément Γ pour cercle de convergence. Ainsi donc le cercle de convergence de la série de Taylor d'une fonction $f(z)$ dans le voisinage de a , passe par le ou les points les plus voisins de a en lesquels $f(z)$ cesse d'être holomorphe; si le rayon de convergence est infini, la fonction $f(z)$ est dite *entière*.

Le coefficient de $(x-a)^n$ est

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz;$$

on a, si $|f(z)| < M$ sur C , de rayon r :

$$|A_n| < \frac{M}{r^n}.$$

Dès lors, si une fonction uniforme est bornée dans tout le plan, c'est-

à-dire si $|f(z)| < M$, on aura pour un cercle de rayon r aussi grand qu'on veut

$$|A_n| < \frac{M}{r^n}$$

donc $A_n = 0$. D'où le théorème très important dû à Liouville :

Une fonction uniforme, holomorphe et bornée dans tout le plan est une constante.

*Représentation d'une fonction holomorphe dans une couronne circulaire.
Série de Laurent.*

33. Imaginons qu'une fonction $f(z)$ cesse d'être holomorphe en des points qu'on peut enfermer dans un cercle C' de centre a , et en des points qui sont extérieurs à un cercle C de même centre, C' étant contenu dans C et limitant avec lui une couronne circulaire de rayons R' et R . Soit x un point intérieur à la couronne. La formule de Cauchy donne :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(z)}{x-z} dz$$

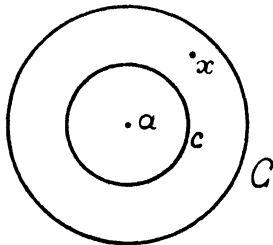


Fig. 19.

C et C' étant parcourus dans le sens positif de la trigonométrie. La première intégrale se développe en série de puissances de $(x-a)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-x} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz + \frac{x-a}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz + \dots \\ &+ \frac{(x-a)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz + \dots \\ &= A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n + \dots, \end{aligned}$$

avec

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz.$$

On n'a pas le droit d'appliquer les formules de Cauchy, car on ne sait pas comment se comporte $f(z)$ à l'intérieur de C' et en particulier en $z = a$. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que la série qu'on vient d'écrire converge absolument et uniformément, tant que x est intérieur à la couronne, et qu'elle représente l'intégrale du premier membre. On peut encore le démontrer en calculant le reste de la série qui donne $\frac{1}{z-x}$.

D'autre part, z étant sur C' , on a :

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-a} \left[1 + \frac{z-a}{x-a} + \left(\frac{z-a}{x-a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{x-a} \right)^n + \dots \right],$$

et cette série converge absolument et uniformément, si x est dans la couronne, car $\left| \frac{z-a}{x-a} \right| < 1$.

On peut de nouveau intégrer terme à terme après multiplication par $f(z)$ et l'on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(z)}{x-z} dz &= \frac{(x-a)^{-1}}{2\pi i} \oint_{C'} f(z) dz + \frac{(x-a)^{-2}}{2\pi i} \oint_{C'} f(z)(z-a) dz \\ &+ \dots + \frac{(x-a)^{-n}}{2\pi i} \oint_{C'} f(z)(z-a)^{n-1} dz + \dots \end{aligned}$$

$$= A_{-1}(x-a)^{-1} + A_{-2}(x-a)^{-2} + \dots + A_{-n}(x-a)^{-n} + \dots$$

avec

$$A_{-j} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(z)(z-a)^{j-1} dz.$$

Dès lors, la fonction $f(x)$ est développable en une somme de deux séries, l'une procédant suivant les puissances entières et positives de $x-a$, l'autre suivant les puissances entières et négatives de $x-a$, ce qui donne la *série de Laurent* :

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n + \dots \\ &+ \frac{A_{-1}}{x-a} + \frac{A_{-2}}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_{-n}}{(x-a)^n} + \dots; \end{aligned}$$

formée de deux parties qui sont chacune absolument et uniformément convergentes dans la couronne considérée ; les coefficients A_k et A_{-j} ,

sont données par des intégrales prises respectivement sur C et C' , mais en vertu du théorème de Cauchy on peut les écrire :

$$A_r = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{r+1}} dz$$

pour r entier positif, négatif ou nul, Γ étant un cercle quelconque de centre a et situé dans la couronne.

34. Toute couronne de centre a à l'intérieur de laquelle la fonction $f(z)$ est développable en série de Laurent peut être définie au moyen de deux cercles C et C' sur les circonférences desquelles se trouvent des points en lesquels $f(z)$ cesse d'être holomorphe.

Supposons en particulier que a soit le seul point singulier de $f(z)$ dans C' , alors R' pourra être arbitrairement petit et R sera le rayon du cercle qui passe par le point singulier de $f(z)$ le plus proche de a .

✱ Occupons-nous particulièrement de ce cas, où l'on voit que la série de Laurent représente $f(x)$ dans le *voisinage* de $x = a$. Les intégrales qui donnent les A_r sont prises le long d'un cercle quelconque intérieur à C . Le fait qu'il y a un nombre fini ou un nombre infini de A_r ($r < 0$) différents de zéro permettra de caractériser la nature de la singularité de $f(z)$ en $z = a$.

Singularités des fonctions analytiques.

35. Un point singulier d'une fonction $f(z)$ est un point en lequel $f(z)$ n'est pas définie, ou n'admet pas de dérivée unique, ou autour duquel elle n'est pas uniforme. Prenons le cas des fonctions uniformes dans une aire et étudions leurs singularités *isolées*. Un point singulier a d'une fonction uniforme est isolé s'il est le centre d'un cercle C de rayon fini R à l'intérieur duquel il n'y a pas d'autres points singuliers de $f(z)$ que a lui-même.

Développons $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = a$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k (z-a)^k + \sum_{j=1}^{j=\infty} \frac{A_{-j}}{(z-a)^j}.$$

Deux cas sont à distinguer :

I. Il n'y a qu'un nombre fini de A_{-j} qui soient non-nuls ; le point a est dit un *pôle* de la fonction $f(z)$. Il existe alors un nombre entier positif l tel que

$$\lim_{z=a} (z-a)^l f(z) \text{ existe et soit différente de zéro,}$$

c'est le plus grand indice j tel que A_{-j} soit différent de zéro et la limite précédente est évidemment A_{-l} . On dit que $f(z)$ possède en $z = a$, un pôle d'ordre l . On voit aisément alors que le module de $f(z)$ croît au delà de toute limite lorsque z tend vers a .

On voit encore que $\frac{1}{f(z)}$ s'annule pour $z = a$.

II. Il y a une infinité de A_{-j} différents de zéro, le développement contenant les puissances de $\frac{1}{z-a}$ contient une infinité de termes. On dit que le point $z = a$ est un point singulier essentiel isolé.

Une fonction est dite méromorphe dans une aire si les seules singularités qu'elle admet dans cette aire sont des pôles.

36. Une fonction régulière en $z = a$ y est dite posséder un zéro d'ordre α si elle est développable dans le voisinage de $z = a$ en série de Taylor dont les α premiers termes manquent :

$$f(z) = A_\alpha (z - a)^\alpha + A_{\alpha+1} (z - a)^{\alpha+1} + \dots$$

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_{\alpha-1} = 0.$$

On peut écrire

$$f(z) = (z - a)^\alpha \varphi(z - a)$$

et $\varphi(z - a)$, holomorphe en $z = a$, ne s'y annule pas. Remarquons que $f'(z)$ possède en $z = a$ un zéro d'ordre $\alpha - 1$.

On voit, par conséquent, que si $f(z)$ a un pôle d'ordre α en $z = a$, l'inverse $\frac{1}{f(z)}$ a un zéro d'ordre α en $z = a$ et vice-versa. Dès lors, les zéros d'une fonction analytique sont des points isolés, car ce sont des pôles de l'inverse de la fonction, et les pôles sont forcément isolés.

Mentionnons que dans le voisinage d'un de ses points singuliers essentiels, une fonction prend des valeurs aussi voisines qu'on veut de toute valeur donnée (Weierstrass) et même prend une infinité de fois toute valeur donnée, sauf une au plus (Picard).

37. Il convient aussi d'étudier la fonction $f(z)$ pour les valeurs de la variable dont le module croît indéfiniment. Cette étude se ramène, par définition, à l'étude de la fonction

$$g(z') \equiv f\left(\frac{1}{z'}\right)$$

pour les valeurs de z' très petites en module.

La transformation

$$z' = \frac{1}{z}$$

fait correspondre aux valeurs de module très grand de z , le voisinage de l'origine du plan z' , on dit inversement qu'au voisinage de l'origine du plan z' , c'est-à-dire à un cercle de petit rayon centré à l'origine, cette transformation fait correspondre le *voisinage du point à l'infini du plan z* , c'est-à-dire l'extérieur d'un cercle de grand rayon ; à l'origine, $z' = 0$, correspond le *point à l'infini*, $z = \infty$, et réciproquement.

Dès lors, $f(z)$ a un zéro d'ordre α en $z = \infty$ si $g(z')$ a un zéro d'ordre α à l'origine $z' = 0$; $f(z)$ a un pôle d'ordre α en $z = \infty$, si $g(z')$ a un pôle d'ordre α en $z' = 0$; enfin le point $z = \infty$ est un point singulier essentiel si $g(z')$ a en $z' = 0$ un point singulier essentiel.

Résidus.

38. Lorsqu'on calcule une intégrale le long d'un contour fermé à l'intérieur duquel se trouvent des points singuliers de la fonction sous le signe \oint , les développements de Laurent sont apparemment d'une grande utilité ; on va voir cependant que les termes en $\frac{1}{z-a}$ donnent seuls une contribution à l'intégrale.

Supposons qu'à l'intérieur de C (qui peut être formée de plusieurs courbes fermées) la fonction uniforme $f(z)$ ait les seuls points singuliers suivants a_1, a_2, \dots, a_n . Enfermons-les dans de petits cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, qui ne se coupent pas. Le théorème de Cauchy permet d'écrire

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z) dz,$$

les intégrales étant toutes prises dans le sens positif de la trigonométrie.

Dans le voisinage de a_k , on peut écrire :

$$f(z) = \sum_j A_j^{(k)} (z - a_k)^j + \sum_j \frac{A_{-j}^{(k)}}{(z - a_k)^j},$$

et, à cause de la convergence uniforme des deux développements sur les cercles γ_i supposés assez petits, on peut intégrer terme à terme ; mais $(z - a_k)^j$ est la dérivée d'une fonction uniforme, quel que soit l'entier j , positif, négatif ou nul, sauf $j = -1$. Donc l'intégration de tous les termes donnera zéro, sauf celle de $\frac{A_{-1}^{(k)}}{z - a_k}$ qui donnera $A_{-1}^{(k)} \times$ variation de $\log(z - a_k)$ le long de γ_k , c'est-à-dire $2\pi i A_{-1}^{(k)}$.

Si on appelle *résidu* de la fonction $f(z)$ pour le point singulier $z = a_k$, le coefficient de $\frac{1}{z - a_k}$ dans le développement de Laurent autour du point a_k , on voit que

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \times \text{somme des résidus de } f(z) \text{ pour les points singuliers situés à l'intérieur de } C.$$

Ce théorème remarquable permet de calculer très simplement de nombreuses intégrales sans qu'on ait besoin de recourir à la fonction primitive.

Prolongement analytique. Principe de la symétrie.

39. Le développement de Taylor d'une fonction holomorphe est valable dans un cercle. Il arrive souvent que l'on connaisse une fonction holomorphe dans un domaine limité par une frontière C et il est utile alors de savoir s'il est possible d'étendre le domaine où la fonction existe. D'une manière précise, soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D et sur sa frontière. Existe-t-il un domaine D' contenant D à l'intérieur duquel on puisse définir une fonction holomorphe qui se confonde dans D avec $f(z)$? Si oui on dira qu'on a *prolongé* la fonction hors de D , ou qu'on a réalisé un *prolongement analytique* de $f(z)$ hors de D .

40. Un premier cas, auquel d'ailleurs se ramènent des cas plus compliqués, est celui où une portion de la frontière de D est un segment de l'axe réel AB le long duquel la fonction $f(z)$ est *réelle*.

Soit \bar{D} le domaine symétrique de D relativement à Ox ; construisons une fonction $F(z)$ dans le domaine D' formé de D et de \bar{D} ; en un point z de D , elle vaudra :

$$F(z) = f(z) ;$$

en un point z de \bar{D} , elle vaudra

$$F(z) = \bar{f}(\bar{z}), \tag{1}$$

c'est-à-dire qu'en \bar{P} , conjugué de P dans D , $F(z)$ aura la valeur conjuguée de celle que prend $f(z)$ en P .

Tout d'abord, $F(z)$ est holomorphe dans \bar{D} , car, en un point de \bar{D} , on aura :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{\bar{f}(\bar{z} + \bar{h}) - \bar{f}(\bar{z})}{\bar{h}} = \text{conjugué de } \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

le dernier membre a une limite déterminée lorsque $h \rightarrow 0$, le premier aussi, par conséquent.

Ensuite, soit un contour Γ quelconque tracé dans D' . L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-x} dz \quad (2)$$

qui représente une fonction holomorphe de x à l'intérieur de Γ doit être égale à $F(x)$. Si Γ est tout entier dans D , l'intégrale vaut $f(x)$, si Γ est tout entier dans \bar{D} , elle vaut, en tenant compte de (1) et de l'holomorphie de $F(z)$ sur Γ , précisément $\bar{f}(\bar{x}) = F(x)$. Enfin si Γ coupe l'axe réel en A' et B' — le cas d'un plus grand nombre de points d'intersection se ramène immédiatement au cas de deux — on aura, en désignant, par Γ_1 et Γ_2 les deux arcs dont se compose Γ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{A'B'\Gamma_1A'} \frac{F(z)}{z-x} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{A'\Gamma_2B'A'} \frac{F(z)}{z-x} dz ;$$

la première intégrale vaut $f(x)$, soit donc $F(x)$, si x est intérieur à $A'B'\Gamma_1A'$, et la seconde vaut zéro ; au contraire, si x est intérieur à $A'\Gamma_2B'A'$, la première est nulle et la seconde vaut $\bar{f}(\bar{x}) = F(x)$. L'intégrale (2) représente donc toujours $F(x)$, qui est ainsi holomorphe dans D' et qui réalise le prolongement analytique de $f(z)$ à travers AB . Si x tend vers un point de $A'B'$, $F(x)$ tend bien vers $f(x)$ [Appendice, § 31, IV], car il faut remarquer que l'on a supposé $f(z)$ holomorphe sur AB , ce qui veut dire que $f(z)$ est définie un peu au delà de AB déjà. Le procédé employé pour définir $F(z)$ étend donc le domaine d'existence de $f(z)$.

41. Un second cas fort important du prolongement analytique est celui où une partie de la frontière de D est un arc de cercle AB sur lequel $f(z)$ est réelle. Soient z_1 et z_2 les affixes de A et B et désignons par α l'argument constant de $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ lorsque z décrit l'arc AB .

Considérons un plan complexe ζ et ζ_1, ζ_2 deux points A' et B' sur l'axe réel de ce plan ; la transformation

$$\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} = e^{-i(\alpha+\pi)} \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

qu'on peut écrire :

$$\zeta = \varphi(z) \quad \text{ou} \quad z = \psi(\zeta),$$

fait correspondre au domaine D un certain domaine \mathfrak{D} du plan ζ dont le segment $A'B'$ est une portion de frontière, car lorsque z décrit AB , l'argument de $\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}$ est $-\pi - \alpha + \alpha = -\pi$ et ζ est en ligne droite avec A' et B' , entre A' et B' .

La fonction $f(z)$ devient une fonction $g(\zeta) = f[\psi(\zeta)]$, définie dans \mathfrak{D} ; elle prend des valeurs réelles sur $A'B'$. On prolonge $g(\zeta)$ sur $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \overline{\mathfrak{D}}$, comme on l'a vu ci-dessus. On a une fonction $G(\zeta)$ définie sur \mathfrak{D}' :

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= g(\zeta), & \text{si } \zeta \text{ est dans } \mathfrak{D}, \\ G(\zeta) &= \overline{g(\overline{\zeta})}, & \text{si } \zeta \text{ est dans } \overline{\mathfrak{D}}. \end{aligned}$$

Or, à deux points P et \overline{P} du plan ζ , symétriques relativement à Ox , correspondent dans le plan z deux points Q et \overline{Q} inverses relativement au cercle dont AB est un arc. De plus la fonction $G(\zeta)$ est dans le plan z une fonction $F(z)$

$$F(z) = G[\varphi(z)]$$

qui est définie et holomorphe dans le domaine D' obtenu en ajoutant à D l'ensemble des points conjugués de ceux de D par rapport à l'arc AB , c'est-à-dire par rapport au cercle dont AB est un arc.

Le prolongement analytique à travers un arc de cercle AB d'une fonction holomorphe et réelle sur AB se fait donc en donnant des valeurs conjuguées à $F(z)$ en deux points inverses relativement à l'arc.

On dit aussi que deux points inverses relativement à un cercle sont *symétriques* par rapport à ce cercle; la règle que nous avons donnée pour un segment rectiligne AB est la même que pour un arc de cercle; *en deux points symétriques, la fonction prolongée prend deux valeurs conjuguées.*

Tel est le *principe de la symétrie* de Schwarz.

42. Ce principe est susceptible d'une extension importante. Supposons que la fonction $f(z)$, au lieu d'être réelle sur l'arc de cercle AB , y prend des valeurs

$$Z = f(z)$$

qui, sur le plan Z , sont les affixes des points d'un arc de cercle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Il existe une transformation homographique

$$Z' = \chi(Z) \quad \text{ou} \quad Z = \xi(Z'),$$

qui fait correspondre à l'arc $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ un segment $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ de l'axe réel du plan Z' . Passons d'autre part au plan ζ du § 41,

$$z = \psi(\zeta), \quad \zeta = \varphi(z)$$

et considérons la fonction Z' de ζ que ces transformations définissent :

$$Z' = \gamma(Z) = \gamma[f(z)] = \gamma\{f[\psi(\zeta)]\} = \lambda(\zeta) ;$$

elle est réelle sur $A'B'$, on peut la prolonger par le principe de la symétrie, soit $\Lambda(\zeta)$ définie dans \mathfrak{D}' du plan ζ . La fonction

$$Z = \zeta \{ \Lambda[\varphi(z)] \} = F(z)$$

est alors holomorphe dans D' et réalise le prolongement de $f(z)$ à travers AB .

On voit que $f(z)$ en \bar{Q} symétrique de Q n'a pas une valeur conjuguée de celle que prend $f(z)$ en Q , mais ces deux valeurs sont les affixes de deux points symétriques relativement au cercle dont le point Z décrit dans son plan un arc quand z décrit AB .

Exercices.

1. Représenter graphiquement, après les avoir calculées, les racines suivantes :

$$\sqrt[5]{i}, \quad \sqrt[4]{1+i}, \quad \sqrt[6]{1-i}.$$

2. Trouver les fonctions monogènes $f(z)$ dont les parties réelles sont $x^2 - y^2$, $e^x \cos y$, $\frac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}$.

3. Montrer que si $f(z)$ est une fonction monogène, on a :

$$\operatorname{lap} |f(x + iy)|^2 = 4 |f'(x + iy)|^2.$$

4. Développer en série de Laurent la fonction

$$f(z) = \frac{z(z+1)}{(z^2+1)(z+2)}$$

dans la couronne limitée par les cercles $|z| = 1$ et $|z| = 2$. Quels développements peut-on donner de cette fonction pour $|z| < 1$ et pour $|z| > 2$?

5. Calculer l'intégrale $\oint \frac{dz}{1+z^4}$ le long de l'ellipse $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$.

6. Soit $\frac{P(z)}{Q(z)}$ le quotient de deux polynômes : le degré de Q surpasse celui de P de deux unités au moins, et Q n'a pas de zéros réels. On considère l'intégrale $\oint \frac{P(z)}{Q(z)} dz$ étendue au segment $(-R, +R)$ de l'axe réel et au demi-cercle dont ce segment est le diamètre. Mon-

trer que si R tend vers l'infini, la contribution due au demi-cercle tend vers zéro. Calculer alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

en utilisant la théorie des résidus.

7. Montrer qu'on peut calculer les intégrales de la forme

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

où R est une fonction rationnelle de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$, en utilisant le résultat du problème précédent (on pose $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = x$).

8. Si, dans le problème précédent, on pose

$$e^{i\theta} = z,$$

l'intégrale I est ramenée à une intégrale prise le long du cercle de rayon un ; on en calculera la valeur.

9. Exemples relatifs aux problèmes précédents :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^n}, \quad (n \text{ entier } > 0)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos x dx}{(a - \cos x)^2}, \quad (0 > a > 1), \quad \int_0^{\pi} \frac{x dx}{\sin^2(x-a)}, \quad (a = p + iq).$$

10. Trouver les points singuliers de la fonction

$$\frac{z - \pi}{z \sin z} e^{\operatorname{tg} z}$$

et indiquer leur nature. (Sorbonne.)

11. Déterminer le cercle de convergence de la série

$$1 + z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + \dots + n^2 z^n + \dots$$

et la valeur de sa somme (Sorbonne).

12. Soit $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$; la fonction

$$Z = (e^{-i\alpha} z)^{\frac{2\pi}{\beta - \alpha}}$$

transforme l'angle $\alpha < \arg z < \beta$ en une certaine région du plan Z ;
quelle est cette région ? (Polya et Szegö.)

13. Montrer comment la fonction

$$Z = \left(\frac{z - \alpha}{z - \beta} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (\lambda \text{ réel})$$

transforme le domaine limité par deux arcs de cercles de même rayon se coupant en z_1 et z_2 . (Julia, *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes*, p. 57.)

14. La relation, convenablement interprétée,

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right),$$

permet d'effectuer la représentation conforme de l'aire comprise entre deux ellipses homofocales sur une couronne circulaire.

15. Etudier les diverses déterminations de

$$\sqrt{\log z}, \quad \sqrt{1 - \cos z}, \quad \sqrt{\log z}, \quad e^{\text{arc sin } z}.$$

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PRÉFACE	9
CHAPITRE PREMIER	
Attraction et potentiel newtoniens.	
Masses ponctuelles	13
Masses continues	16
Intégrales uniformément convergentes.	18
Champ intérieur aux masses. Equation de Poisson	19
Potentiel de simple couche.	24
Potentiel de double couche	28
Retour au potentiel de simple couche	30
Théorèmes de la moyenne	34
Exercices	35
CHAPITRE II	
Dynamique des fluides parfaits.	
Equations générales de l'équilibre.	37
Définition du fluide parfait.	38
Equation du mouvement	40
Variables de Lagrange et variables d'Euler.	41
Equation de continuité	45
Equation caractéristique	47
Equations indéfinies, conditions initiales, conditions aux limites	48
Définition du tourbillon	49
Transformations des équations du mouvement. Potentiel	51
Equation d'Helmholtz	52
Théorème de Lagrange	53
Potentiel des vitesses	55
Petits mouvements. Equation du son	57
Mouvement permanent	60
Théorème de Bernoulli	61
Théorème de Torricelli	63
Mouvement permanent irrotationnel	64
Théorie des tourbillons	65
Potentiels multiformes	71

	Pages
Mouvement plan	73
Flux et circulation	76
Puits et sources	77
Doublets	78
Exercices	81

CHAPITRE III

Fonctions harmoniques dans l'espace et dans le plan. Potentiels logarithmiques.

Définitions (fonctions harmoniques, domaines, frontières)	84
Problèmes fondamentaux (de Dirichlet, de Neumann, mixtes)	85
Propagation de la chaleur. Signification intuitive des problèmes de Dirichlet et Neumann.	87
Formule fondamentale	89
Equation de Poisson	91
Théorème de la moyenne	93
Solution du problème de Dirichlet pour la sphère	93
Potentiel logarithmique	96
Problèmes plans	99
Convergence de suites de fonctions harmoniques	100
Prolongement des fonctions harmoniques	103
Exercices :	106
Fonctions sphériques	107

CHAPITRE IV

L'équation de Fredholm.

Réduction du problème de Dirichlet à la résolution d'une équation intégrale	110
Théorème de M. Hadamard	113
Les séries de Fredholm	115
Relations entre les mineurs	116
Solution de l'équation intégrale ; théorèmes de Fredholm	119
Noyaux discontinus et noyaux non-bornés	129
Résumé	138
Exercices :	141
Problème bilocal pour les équations différentielles du second ordre	144

CHAPITRE V

Problèmes de Dirichlet, problèmes de Neumann et problèmes mixtes.

Conditions aux limites généralisées	149
Problèmes extérieurs	151
Considérations sur les équations intégrales des problèmes généralisés.	151
Valeurs propres	152

	Pages
Problème de Dirichlet dans le plan	157
Problèmes mixtes.	157
Exercices :	
Fonction de Green	159

CHAPITRE VI

Extension à des domaines dont les frontières ont des points anguleux.

Fonctions surharmoniques	162
Solution du problème de Dirichlet pour un domaine dont la frontière a des points anguleux	167
Fonctions barrières	169
Exemples de fonctions barrières	171
Exercices	176

CHAPITRE VII

Représentation conforme des aires planes.

Problème de Riemann.	177
Représentation conforme d'un cercle sur lui-même	177
Résolution du problème de Riemann	180
Exercices	187

CHAPITRE VIII

Résistance des fluides parfaits. Théorème de Kutta-Joukowski.

Transformation conforme	190
Paradoxe de d'Alembert.	194
Théorème de Kutta-Joukowski	195
Obstacle anguleux	200
Exercices	202
Bibliographie	203

CHAPITRE IX

Eléments de la théorie du champ électromagnétique.

Electrostatique. Cas du vide	204
Conducteurs et densité superficielle	207
Diélectriques.	208
Champ magnétique et courant électrique	210
Equations différentielles du champ stationnaire	212
Feuillets magnétiques et courants fermés	217
Analogies et différences dans les champs électrostatiques et magnéti- ques constants	218
Champ électromagnétique variable. I. Loi de Faraday	220
Champ électromagnétique variable. II. Courant de déplacement	222

	Pages
Equations de Maxwell	224
Energie dans le champ électromagnétique	226
Intégration des équations de Maxwell. Ondes électromagnétiques	228
Exercices	230

CHAPITRE X

Equations de d'Alembert et potentiels retardés.

Cordes vibrantes	233
Intégrales de l'équation des cordes vibrantes :	
<i>a)</i> Solution générale de d'Alembert	235
<i>b)</i> Problème de Cauchy	236
<i>c)</i> Corde fixée à ses extrémités	238
<i>d)</i> Corde fixée à ses extrémités (suite). Développements de Fourier	239
Membranes vibrantes	242
Intégrales de l'équation des membranes vibrantes	244
<i>a)</i> Membrane à contour rectangulaire fixé	245
<i>b)</i> Membrane à contour circulaire fixé	247
Equation du son	249
Equations des ondes électromagnétiques dans le vide	251
Equation des potentiels retardés	254
Exercices :	
Formules de Green pour des équations linéaires quelconques du second ordre	258
Equation de la chaleur	259
Equations intégrales et problèmes aux limites	261

APPENDICE

Eléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Revue rapide des opérations algébriques sur les nombres complexes	262
Fonction homographique	264
Fonctions monogènes	266
Représentation conforme	269
Séries	270
Séries entières	272
Fonctions élémentaires	274
Fonctions multiformes	277
Calcul intégral. Théorème de Cauchy	283
Intégrales de Cauchy	287
Représentation d'une fonction holomorphe dans un cercle. Série de Taylor	289
Représentation d'une fonction holomorphe dans une couronne circulaire. Série de Laurent	291
Singularités des fonctions analytiques	293
Résidus	295
Prolongement analytique. Principe de la symétrie	296
Exercices	299

