

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_220442

UNIVERSAL
LIBRARY



GÖSCHENS LEHRBÜCHEREI

Mit diesem Unternehmen bezwecken wir eine Sammlung von ausgesprochenen Lehrbüchern aus den Gebieten der Mathematik, der exakten Naturwissenschaften und der Technik, die wissenschaftliche Gründlichkeit, leichte Verständlichkeit und klaren Aufbau in sich vereinen und ganz besonders für Studierende der Universitäten und technischen Hochschulen, für Lehramtskandidaten und Lehrer mittlerer und höherer Schulen, zur Benutzung an pädagogischen Akademien und Lehrerseminaren, sowie auch für das Selbststudium gleichartig vorgebildeter Leser geeignet sind. Jeder Band wird einen Umfang von 10 bis 20 Druckbogen haben (im allgemeinen etwa 15 bis 16 Bogen) und ungefähr den Inhalt einer einsemestrigen Vorlesung umfassen.



Göschens Lehrbucherei

Bis Ende 1930 erschienen *die* nachstehend verzeichneten Bände der Gruppe 1: Reine und angewandte Mathematik

- Band 1: Irrationalzahlen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. (VIII, 186 Seiten.) Broschiert 6.—, geb. 7.—
- Band 2: Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. RUNGE, o. Prof* an der Univ. Göttingen. Zweite, verbess. Aufl. Mit 8 Fig. 1921. (V, 172 Seiten.) Broschiert 6.—, geb. 7.—
- Band 3: Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Prof. Dr. PAUL BACHMANN. Zweite, verbess. Aufl. Herausgeg. von Dr. ROBERT HAUSSNER, ord. Prof. a. d. Univ. Jena. Mit 10 Fig. 1921. (XVI, 252 Seiten.) Brosch. 8.50, geb. 9.50
- Band 4: Synthetische Zahlentheorie. Von Dr. RUDOLF FUETER, ord. Prof. an der Universität Zurich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. (VIII, 277 Seiten.) Broschiert 10.—, geb. 12.—
- Band 5: Automorphe Funktionen. Von Dr. L. SCHLESINGER, ord. Professor an der Universität Gießen. 1924. (X, 205 Seiten.) Broschiert 8.—, geb. 9.20
- Band 6: Einführung in die Axiomatik der Algebra. Von Dr. H. BECK, ord. Prof. an der Univers. Bonn. 1926. (X, 198 Seiten.) Broschiert 9.—, geb. 10.50
- Band 7: Mengenlehre. Von Dr. F. HAUSDORFF, ord. Prof. an der Univ. Bonn. Zweite, neubearb. Aufl. Mit 12 Fig. 1927. (285 Seiten.) Broschiert 12.—, geb. 13.50
- Band 8: Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Prof. an der Univ. München. Mit 4 Fig. 1927. (VIII, 307 Seiten.) Broschiert 10.—, geb. 11.50
- Band 9: Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. 8. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. 1937. (VIII, 243 Seiten.) Broschiert 8.—, geb. 9.50
- Band 10: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. HORN, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. (VIII, 197 Seiten.) Broschiert 9.—, geb. 10.50
- Band 11: Elliptische Funktionen. Von Dr. R. KÖNIG, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. KRAFFT, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 1928. (263 Seiten.) Broschiert 13.—, geb. 14.50
- Band 12: Methoden der praktischen Analysis. Von Dr. FR. A. WILLERS, o. Professor an der Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. 1928. (344 Seiten.) Broschiert 20.—, geb. 21.50
- Band 13: Punkt- und Vektor-Rechnung. Von Dr. ALFRED LOTZE, Privatdozent für Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart. Mit 7 Figuren. 1929. (192 Seiten.) Broschiert 12.—, geb. 13.—
- Band 14: Partielle Differentialgleichungen. Von Dr. J. HORN, o. Prof. an der Techn. Hochsch. Darmstadt. Zweite, umgearb. Aufl. Mit 8 Fig. 1929. (VIII, 228 Seiten.) Brosch. 11.—, geb. 12.—
- Band 15: Geometrische Transformationen. Von Dr. KARL DOEHLEMANN, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgegeben von Dr. WILHELM OLBRICH, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Fig. im Text u. 4 Abbildungen. 1930. (254 Seiten.) Brosch. 13.—, geb. 14.50
- Band 16: Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Von Prof. Dr. MAX ZACHARIAS, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 1929. (252 Seiten.) Brosch. 13.—, geb. 14.50
- Band 17: Grundlagen der Geometrie. Von Prof. Dr. GERHARD HESSENBERG. Herausgegeben von Dr. W. SCHWAN. Mit 77 Fig. 1930. (143 Seiten.) Broschiert 6.50, geb. 7.80
- Band 18: Integralgleichungen. Von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, o. Prof. an der Technischen Hochschule Dresden. Mit II Figuren. 1930. (303 Seiten.) Brosch. 15.—, geb. 16.50

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Wir liefern unter Bezugnahme auf diese Anzeige einen ausführlichen Prospekt kostenlos

Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10, Genthiner Str. 38

Göschens Lehrbücherei

1. Gruppe

Reine und angewandte Mathematik

Band 15

Geometrische Transformationen

Von

Prof. Dr. Karl Doehlemann

Herausgegeben von

Prof. Dr. Wilhelm Olbrich



Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschensche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung—Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Geometrische Transformationen

Von

Dr. Karl Doehlemann

weil. Professor an der Technischen Hochschule München

Zweite, umgearbeitete Auflage

Herausgegeben von

Dr. Wilhelm Olbrich

Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien

Mit 89 Figuren und 4 Abbildungen im Text



Walter de Gruyter & Co.

vormal's G. J. GOSCHEN'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg-
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Vorwort.

Der Verlag, der in seiner Lehrbuchsammlung „Göschens Lehrbücherei“ das Streben verfolgt, in nicht zu umfangreichen Darstellungen in alle Gebiete der mathematischen Wissenschaften einzuführen, hatte auch den Verfasser der in der Sammlung Schubert in zwei Bänden (XXVII und XXVIII) erschienenen „Geometrischen Transformationen“ für eine Umarbeitung dieser umfassenderen Darstellung auf den Umfang eines Lehrbuches der neuen Sammlung gewonnen. Dieser gewünschten Kürzung mußten viele Kapitel über quadratische und Cremonasche Transformationen in der Ebene und im Raum geopfert werden. Das Manuskript der von Professor Doehlemann selbst so wesentlich gekürzten „Geometrischen Transformationen“ lag vor, als der Verfasser plötzlich starb. Dem Wunsche des Verlages entsprechend hat es nun der Unterzeichnete unternommen, eine noch weitere, dem oben angeführten Zwecke der „Lehrbücherei“ entsprechende Kürzung vorzunehmen, bei der in erster Linie die von Doehlemann stärker berücksichtigten Anwendungen in der darstellenden Geometrie weggelassen wurden; dies geschah mit der Begründung, daß für einen, dem die darstellende Geometrie bekannt ist, die gegebenen kurzen Hinweise genügen können, daß aber bei demjenigen, der die Elemente der darstellenden Geometrie nicht beherrscht, durch einige wenige Figuren und Beispiele in orthogonaler, schiefer und zentraler Projektion ein entsprechendes Verstehen dieses Gebietes doch nicht erzielt werden kann.

An dem Aufbau der Doehlemannschen Darstellung wurde jedoch nichts geändert; auf eine dem Fachmann etwa erwünschte systematische Darstellung aller Sonderfälle wurde deshalb verzichtet, weil eine eingehendere Ausführung bei dem vorgeschriebenen Umfang des Lehrbuches nicht Platz finden konnte und wir auch strenge Darstellungen in guten Büchern besitzen.

Über den Begriff der geometrischen Transformationen sagt Doehlemann im Vorwort zur ersten Auflage des Buches:

„Als ‚geometrische‘ Transformationen bezeichne ich im folgenden solche Verwandtschaften, welche, abgesehen von der analytischen Festlegung, auch durch übersichtliche, geometrische Konstruktionen vermittelt werden können und welche weiter in erster Linie zur Erforschung geometrischer Eigenschaften der Gebilde dienen. Nach dieser allerdings nicht strengen Begriffsbestimmung werden z. B. die konformen Abbildungen

nicht mehr in das von uns begrenzte Gebiet gehören. Denn bei diesen verfolgt man wesentlich funktionen-theoretische Interessen. Ebenso dürfen die in der Kartographie gebräuchlichen Abbildungen unberücksichtigt bleiben, da sie der überwiegenden Mehrzahl nach nicht durch rein geometrische Operationen abzuleiten sind."

In diesem Lehrbuche sind demnach nur behandelt: Die projektiven Transformationen, wozu die projektiven Koordinaten zunächst eingeführt werden mußten, die Kollineationen und Korrelationen in den Grundgebilden erster, zweiter und dritter Stufe und die einfachsten quadratischen Transformationen, wobei neben der analytischen Darstellung stark die zeichnerische Auswertung berücksichtigt erscheint. Dadurch blieb auch der Wunsch Professor Doeblemanns erfüllt, zwischen den mathematischen und technischen Wissenschaften — bei denen ja das Konstruieren starker betont erscheint — einen engeren Zusammenhang herzustellen. Aus dem gleichen Grunde sind auch einfache Vorrichtungen beschrieben, welche Transformationen in mechanischer Weise herstellen.

Auf die Anwendungsgebiete der projektiven Abbildungen in Kunst, Kinematik, Optik und Kristallographie wurde hingewiesen und ein weiteres Eingehen in diese Gebiete durch Literaturangaben ermöglicht

Da das Buch — im Doeblemannschen Geiste — nicht zu abstrakt gehalten wurde und die Anwendungsgebiete starke Beachtung fanden, so könnte diese Einführung sowohl Studierenden an Universitäten wie an Technischen Hochschulen nützlich werden.

Wien, Pfingsten 1929.

W. Olbrich.

Für erfolgreiche Mithilfe bei der Durchsicht des Lehrbuches danke ich herzlichst meinem früheren Assistenten, jetzt Professor an der Universität Freiburg (Schweiz), Herrn Dr. A. Huber sowie meinem gegenwärtigen Assistenten, Herrn F. Hölzl.

W. Olbrich.

Inhale.

Erster Abschnitt.

Projektive Koordinaten.

Erstes Kapitel. Das Doppelverhältnis. Die koordinaten-Bestimmung auf der Geraden und im Strahlenbüschel.

	Seite
§ 1. Sätze über das Doppelverhältnis	9
§ 2. Die Koordinaten-Bestimmung in den Grundgebilden erster Stufe . . .	13
§ 3. Ausdrücke für das Doppelverhältnis. Einige Aufgaben	16

Zweites Kapitel. Die Koordinaten-Bestimmung in der Ebene und im Raume.

§ 4. Die Koordinaten-Bestimmung in den Grundgebilden zweiter Stufe . . .	22
§ 5. Die Koordinaten-Bestimmung im Raume	33
§ 6. Das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe	46

Zweiter Abschnitt.

Die projektive Transformation auf der Geraden und im Strahlenbüschel.

Drittes Kapitel. Die projektive Verwandtschaft zwischen getrennten Trägern.

§ 7. Die projektive Beziehung als lineare Transformation	48
§ 8. Die projektive Beziehung in der Parameterdarstellung	55

Viertes Kapitel. Die projektive Verwandtschaft auf dem gleichen Träger.

§ 9. Die Doppelemente	58
§ 10. Die Koordinatentransformation	61
§ 11. Die involutorische Beziehung	65

Dritter Abschnitt.

Die projektiven Transformationen in der Ebene.

Fünftes Kapitel. Die projektiven Transformationen auf verschiedenen Trägern.

§ 12. Die kollineare und reziproke Beziehung der Grundgebilde zweiter Stufe	74
§ 13. Spezielle Fälle der kollinearen Beziehung zweier Ebenen	87

Sechstes Kapitel. Die projektiven Transformationen auf dem gleichen Träger.

§ 14. Die kollineare Beziehung der Grundgebilde zweiter Stufe auf sich selbst	95
§ 15. Die Zentralkollineation	104
§ 16. Besondere Kollineationen	112
§ 17. Die reziproke Beziehung der Grundgebilde zweiter Stufe auf sich selbst	118

Siebentes Kapitel. Anwendungen der kollinearen Beziehung in anderen Gebieten.

§ 18. Apparate zur mechanischen Beschreibung kollinearer Figuren . . .	123
§ 19. Anwendungen in der darstellenden Geometrie (Parallelprojektionen) . .	132
§ 20. Anwendungen in der darstellenden Geometrie, Zentralprojektion (Perspektive).	138
§ 21. Anwendungen der Zentralkollineation zur Konstruktion von Kegelschnitten	139

Vierter Abschnitt.

Die projektiven Transformationen im Raume.

Achtes Kapitel. Kollineare und reziproke räumliche Systeme in getrennter Lage.

seite

§ 22. Die kollineare und reziproke Beziehung im Raume	.153
§ 23. Spezielle Fälle der kollinearen Beziehung	.161

Neuntes Kapitel Kollineare und reziproke räumliche Systeme in vereinigter Lage,

§ 24. Ausgezeichnete Elemente einer Kollineation	.166
§ 25. Ausgezeichnete Elemente einer Korrelation	.181

Fünfter Abschnitt.

Die quadratischen Transformationen in der Ebene und im Raume.

Zehntes Kapitel. Die allgemeinen quadratischen Transformationen in der Ebene.

§ 26. Die quadratische Transformation in einfachster Darstellung	.184
§ 27. Entsprechende Gebilde der beiden Ebenen	.188
§ 28. Die quadratische Transformation in allgemeinsten Darstellung	.194

Elftes Kapitel. Die Transformation durch reziproke Radien.

§ 29. Die absoluten Kreispunkte und die aus ihnen abgeleiteten Transformationen.	.198
§ 30. Die Inversion in der Ebene	.206
§ 31. Apparate zur mechanischen Herstellung einer Inversion.	.217
§ 32. Die Inversion im Raume	.221
§ 33. Anwendungen der Inversion im Raume	.227

Zwölftes Kapitel. Die Kreisverwandtschaften.

§ 34. Zerlegung einer Kreisverwandtschaft in einfachere Transformationen	235
§ 35. Das komplexe Doppelverhältnis von vier Punkten in der Ebene	243

Literaturverzeichnis.	246
-------------------------------	-----

Sachverzeichnis.	251
--------------------------	-----

Erster Abschnitt.

Projektive Koordinaten.

Erstes Kapitel.

Das Doppelverhältnis. Die koordinaten-Bestimmung auf der Geraden und im Strahlenbüschel.

§ 1. Sätze über das Doppelverhältnis.

Der Begriff der Transformation.

1. Der Ausdruck „Transformation“ wird in der Mathematik in verschiedenem Zusammenhang gebraucht.

1st z. B.:

$$f(x,y,z) = 0$$

die Gleichung einer Fläche, bezogen auf ein beliebiges Koordinatensystem OX,OY,OZ , so kann man verlangen, die Gleichung derselben Fläche in bezug auf ein anderes Koordinatensystem $O'X', O'Y', O'Z'$ aufzustellen. Hat ein Punkt (x, y, z) in bezug auf dieses neue Koordinatensystem die Koordinaten x', y', z' so werden x, y, z Funktionen von x', y', z' sein in der Art, daß etwa:

$$(1) \quad x = \varphi(x', y', z'), \quad y = \psi(x', y', z'), \quad z = \chi(x', y', z').$$

Die Gleichung der Fläche, bezogen auf das neue Koordinatensystem, erhalten wir dann, wenn wir in $f = 0$ an Stelle von x, y, z eben diese Ausdrücke in den neuen Koordinaten einführen. Diesen Übergang von dem einen Koordinatensystem zu dem anderen bezeichnet man als eine Koordinaten-Transformation.

Eine andere Bedeutung des Begriffes der Transformation, wie sie im folgenden fast ausschließlich benutzt werden wird, möge an dem einfachsten Beispiel einer Punkttransformation erläutert werden. Es seien wieder x, y, z die Koordinaten eines Punktes in einem Koordinatensystem, ferner seien f_1, f_2, f_3 gegebene Funktionen von x, y, z . Ist nun im Raume ein zweites Koordinatensystem gegeben, in bezug auf welches

ein Punkt durch die Koordinaten x', y', z' festgelegt wird, so mögen die Gleichungen bestehen:

$$(2) \quad x' = f_1(x, y, z), \quad y' = f_2(x, y, z), \quad z' = f_3(x, y, z).$$

Zu jedem Wertsystem x, y, z erhält man aus diesen Gleichungen im allgemeinen ein Wertsystem x', y', z' oder eine Reihe solcher Wertsysteme.

Ist man ferner imstande, die Gleichungen (2) auch nach x, y, z aufzulösen, so daß man hat:

$$(3) \quad x = \varphi_1(x', y', z'), \quad y = \varphi_2(x', y', z'), \quad z = \varphi_3(x', y', z'),$$

so werden durch diese Gleichungssysteme die Punkte des Raumes einander zugeordnet. Irgend einer Fläche, z. B.

$$F(x, y, z) = 0,$$

entspricht eine andere, die man erhält, wenn man in $F = 0$ die Werte von x, y, z aus den Gleichungen (3) einführt. Diese Fläche wird also in eine andere verwandelt. Auch diesen Übergang von dem einen Gebilde zu dem anderen nennt man eine Transformation. Während im ersten Falle das räumliche Gebilde in bezug auf ein neues Koordinatensystem eine andere Form der Darstellung annahm, geht im zweiten Falle das geometrische Gebilde in ein anderes über. In beiden Fällen aber vollzieht sich die Transformation dadurch, daß man an Stelle der Koordinaten neue Ausdrücke einführt, also durch eine Substitution. Scheinbar ist der zweite Vorgang von dem ersten ganz verschieden. Wir werden aber später sehen, daß der erste Fall als spezieller des zweiten aufgefaßt werden kann. Wie ferner die Gleichungen (2) und (3) die Punkte zweier ineinander transformierter Gebilde einander zuordnen, also eine Punkttransformation vorstellen, so kann man durch entsprechende Änderungen einem Punkte etwa eine Ebene zuweisen oder auch irgend welche andere Gebilde.

2, Die Beziehung oder „Verwandtschaft“, welche zwischen solchen ineinander transformierten Gebilden besteht, kann selbst Gegenstand der Untersuchung sein und zur Gewinnung geometrischer Sätze dienen. Andererseits können wir auch die analytische Seite der Transformation, die Veränderungen, Umformungen, Reduktionen der Gleichungen in den Vordergrund der Betrachtung stellen.

Als „geometrische Transformationen“ — ein im übrigen nicht strenge zu definierender Begriff — sollen im folgenden solche Transformationen betrachtet werden, bei welchen der — meistens zuerst analytisch definierte — geometrische Zusammenhang zwischen den aufeinander bezogenen Gebilden in einfacher Weise übersehen werden kann, so daß uns überhaupt die geometrischen Beziehungen in erster Linie interessieren.

Um eine weitere Abgrenzung zu gewinnen, mögen zunächst die **projektiven** Transformationen behandelt werden, d. h. solche Verwandt-

schaften, welche die projektiven Eigenschaften der Gebilde unverändert lassen. Bei diesen wird der Begriff des Doppelverhältnisses eine wichtige Rolle spielen.

Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin, die Elemente der Geometrie, Punkt, Gerade, Ebene, in ihrer Lage durch Koordinaten festzulegen, die im Sinne der projektiven Geometrie möglichst allgemein ausgedrückt sind.

Das Doppelverhältnis.

3. Vier Elemente eines Grundgebildes erster Stufe*), also vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe, vier Strahlen a, b, c, d eines Strahlenbüschels oder vier Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Ebenenbüschels, bilden ein Doppelverhältnis, das man in folgender Weise darzustellen pflegt:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, **)$$

$$(a b c d) = \frac{\sin (ac)}{\sin (bc)} : \frac{\sin (ad)}{\sin (bd)},$$

$$(\alpha \beta \gamma \delta) = \frac{\sin (\alpha \gamma)}{\sin (\beta \gamma)} : \frac{\sin (\alpha \delta)}{\sin (\beta \delta)}.$$

Sind die vier Elemente und ihre Zuordnung gegeben, so ist der Wert des Doppelverhältnisses, auch dem Vorzeichen nach, bestimmt. Wenn die beiden Paare von Elementen, z. B. A, B und C, D , sich trennen, so ist der Wert des Doppelverhältnisses negativ. Trennen sich die beiden Paare nicht, so hat das Doppelverhältnis einen positiven Wert. Liegen die beiden Paare, z. B. A, B und $0, 2$, harmonisch, so entspricht dies dem Werte -1 für das Doppelverhältnis $(ABCD)$. Ferner gilt noch folgender wichtige

Satz 1. Sind drei Elemente eines Grundgebildes erster Stufe gegeben sowie ihre Zuordnung, z. B. die Punkte A, B, C einer Punktreihe, und ist λ irgend eine reelle (positive oder negative) Zahl, so gibt es bloß einen Punkt D der Punktreihe, der mit A, B, C das Doppelverhältnis λ bildet, so daß also $(ABCD) = \lambda$ ist.

4. Aus vier Elementen, z. B. vier Punkten A, B, C, D , kann man 24 Doppelverhältnisse bilden, die aber nur sechs verschiedene Werte haben. Bezeichnet man einen derselben, etwa $(ABCD)$, mit λ , so lassen sich die übrigen fünf Werte rational durch ihn ausdrücken, wie die folgenden Formeln angeben, welche gleichzeitig die für das Rechnen mit

*) Über hier benutzte und nicht erklärte Begriffe findet man Näheres z. B. in dem im Literaturverzeichnis unter 1. angegebenen Buche.

**) Die Querstriche über den Endpunkten einer Strecke, z. B. $A.C$, wurden in diesem Buche weggelassen.

Doppelverhältnissen nötigen Gesetze der Umformung solcher Ausdrücke enthalten:

- (1) $(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = \lambda,$
- (2) $(ABDC) = (BACD) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\lambda},$
- (3) $(ACBD) = 1 - (ABCD) = 1 - \lambda,$
- (4) $(ACDB) = \frac{1}{1 - \lambda},$
- (5) $(ADCB) = \frac{(ABCD)}{(ABCD) - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$
- (6) $(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$

Darstellung des Doppelverhältnisses von vier Punkten, wenn diese selbst durch Doppelverhältnisse in bezug auf drei feste Punkte gegeben sind.

5. Es seien jetzt beliebig viele Punkte $A, B, C, D, \dots$ einer Punktreihe gegeben. Wir sondern drei derselben aus, A, B, C , und legen vier weitere Punkte, D, E, F, G , je durch das Doppelverhältnis fest, das sie mit A, B, C bilden. Es sei also:

$$\begin{aligned} (ABCD) &= \delta, & (ABCF) &= \varphi, \\ (ABCE) &= \varepsilon, & (ABCG) &= \chi. \end{aligned}$$

Wie läßt sich dann das Doppelverhältnis $(DEFG)$ durch diese Werte ausdrücken?

Zunächst überzeugt man sich ohne weiteres durch Ausrechnung, daß für fünf Punkte A, B, C, D, E die Beziehung gilt:

$$(7) \quad (ABCD) \{ABDE\} (ABEC) = 1.$$

Durch Anwendung von Formel (2) geht diese Gleichung über in:

$$\frac{(ABCD) (ABDE)}{(ABCE)} = 1$$

oder:

$$(8) \quad (ABDE) = \frac{(ABCE)}{(ABCD)} = \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Diese Formel zeigt, wie man aus zwei Doppelverhältnissen, in denen die ersten drei Elemente die nämlichen sind, das dritte dieser Elemente (C) eliminieren kann. Vermöge (8) erhalten wir dann:

$$(ABEF) = \frac{(ABCF)}{(ABCE)} = \frac{\varphi}{\varepsilon}.$$

Die Formeln (6) und (3) liefern weiter:

$$(AEBD) = \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon}, \quad (AEBF) = \frac{\varepsilon - \varphi}{\varepsilon}.$$

Daraus ergibt sich $\frac{(AEBF)}{(AEBD)} = (AEDF) = \frac{\varepsilon - \varphi}{\varepsilon - \delta}.$

Ganz ebenso wird aber: $(AEDG) = \frac{\varepsilon - \chi}{\varepsilon - \delta}.$

Man hat zu entnehmen: $(DEAF) = (AFDE) = \frac{(AEDF)}{(AEDF) - 1} = \frac{\varepsilon - \varphi}{\delta - \varphi}$, Buchstaben A nicht: ebenso:

$$(DEAG) = \frac{\varepsilon - \chi}{\delta - \chi}$$

und daraus endlich nach (8):

$$(9) \quad (DEFG) = \frac{(DEAG)}{(DEAF)} = \frac{\varepsilon - \chi}{\delta - \chi} : \frac{\varepsilon - \varphi}{\delta - \varphi} = \frac{\delta - \varphi}{\varepsilon - \varphi} : \frac{\delta - \chi}{\varepsilon - \chi}.$$

In der gleichen Weise kann man offenbar jedes aus irgend vier Punkten gebildete Doppelverhältnis darstellen durch die auf A, B, C bezogenen Doppelverhältnisse.

§ 2. Die Koordinaten-Bestimmung in den Grundgebilden erster Stufe.

Die Punktreihe.

6. Um die einzelnen Elemente eines Grundgebildes erster Stufe — und zwar zunächst die Punkte einer Punktreihe — durch Zahlenwerte in ihrer Lage zu bestimmen, wählen wir auf der Geraden drei Punkte A_1, A_2, E . Irgend ein Punkt P bildet mit diesen drei Punkten ein Doppelverhältnis:

$$(A_1 A_2 EP) = \frac{A_1 E}{A_2 E} : \frac{A_1 P}{A_2 P}.$$

Für jede Lage des Punktes P auf der Geraden nimmt dieses Doppelverhältnis einen, auch dem Vorzeichen nach, bestimmten Wert an, Für die Punkte A_1, A_2, E erhalten wir die Werte $\infty, 0, 1$. Wird umgekehrt irgend ein Zahlenwert angenommen, so gibt es nach Satz 1 in 3. bloß einen und immer einen Punkt, der mit A_1, A_2, E dieses Doppelverhältnis bildet. Da also durch das Doppelverhältnis eine eindeutige Zuordnung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten einer Geraden hergestellt wird, kann man es als Koordinate eines Punktes der Geraden benutzen.

Es liegt aber im Interesse der Rechnung, die Lage eines Punktes nicht durch eine Zahl, sondern durch das Verhältniszweier Zahlen zu bestimmen, Dementsprechend schreiben wir das obige Doppelverhältnis in folgender Form:

$$(A_1 A_2 E P) = \frac{A_2 P : A_2 E}{A_1 P : A_1 E} = \frac{x_2}{x_1},$$

indem wir setzen:

$$\varrho x_1 = \frac{A_1 P}{A_1 E} = \frac{p_1}{e_1},$$

$$\varrho x_2 = \frac{A_2 P}{A_2 E} = \frac{p_2}{e_2}.$$

Die Vorzeichen von x_1 und x_2 werden positiv oder negativ genommen, je nachdem die beiden Strecken im Zähler und Nenner im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden, wenn sich der an erster Stelle angegebene Punkt gegen den an zweiter Stelle angegebenen Punkt bewegt. Die p_1 , p_2 und e_1 , e_2 sind die Abstände der Punkte P und E von den Punkten A_1 und A_2 ; $\varrho \neq 0$ bedeutet einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor.*) Wir nennen die beiden Zahlen x_1 , x_2 , die nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, die homogenen Koordinaten des Punktes (x_1, x_2) , die Punkte A_1 und A_2 die Fundamentalpunkte (F.-P.) und den Punkt E den Einheitspunkt. Der Grund für die letztere Bezeichnung ist klar: wenn P nach E fällt, so werden die Koordinaten x_1 und x_2 je der Einheit proportional. Wir können also sagen:

Satz 2. Jede der beiden homogenen Koordinaten eines Punktes ist proportional dem mit dem entsprechenden Vorzeichen versehenen Quotienten aus dem Abstand des Punktes und dem Abstand des Einheitspunktes von dem betreffenden Fundamentdelpunkt.

Oder kürzer: Jede der beiden homogenen Koordinaten eines Punktes ist proportional dem Abstand des Punktes von einem Fundamentalpunkt, gemessen durch den entsprechenden Abstand des Einheitspunktes.

7. Ist eine lineare, in x_1 und x_2 homogene Gleichung gegeben:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

wobei nicht zugleich $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ sein darf, so bestimmt diese einen Punkt, da aus ihr folgt:

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Die Gleichung stellt also den Punkt $(-a_2, a_1)$ dar. Liegt allgemein eine in x_1 und x_2 homogene Gleichung (in der Algebra binäre Form genannt) vom n^{ten} Grad:

*) Wie hier, so sollen auch die später auftretenden Proportionalitätsfaktoren stets $\neq 0$ vorausgesetzt werden.

$$\sum_{k=0}^n a_k x_1^{n-k} x_2^k = 0$$

vor und sind ihre Wurzeln, d. h. die dieser Gleichung genügenden Werte von $\frac{x_2}{x_1}$, alle reell, so werden durch sie n Punkte auf der Geraden dargestellt. Wie man allenfalls auftretenden komplexen Wurzeln eine geometrische Bedeutung geben kann, bedarf weiterer Überlegungen. Die Betrachtung von in solcher Weise dargestellten Punktgruppen, überhaupt die Geometrie auf der Geraden (und die ihr dualentsprechende im Strahlenbüschel) ist Gegenstand der Theorie der binären Formen.

Wählen wir A_1 im Unendlichen, A_2 als Koordinatenanfang einer X -Achse, E in der Entfernung $+1$, so daß also $A_2E = +1$ ist, ferner $A_2P = x$, so wird:

$$(A_1 A_2 EP) = \frac{x_2}{x_1} = \frac{A_1 E}{A_1 P} \cdot \frac{A_2 P}{A_2 E} = x.$$

Unsere Koordinaten-Bestimmung geht also in die gewohnte Abszissenmessung über.

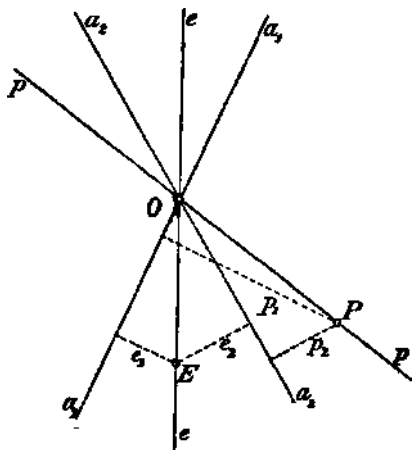


Fig. 1.

Das Strahlenbüschel.

8. In einem Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt O (Fig. 1) nehmen wir ganz in der gleichen Weise zwei Strahlen a_1, a_2 als Fundamentalstrahlen und einen Einheitsstrahl e an. Jeden Strahl p können wir dann festlegen durch das Doppelverhältnis $(a_1 a_2 ep)$. Für die Rechnung ist es wieder bequemer, einen Strahl durch das Verhältnis zweier Zahlen zu bestimmen. Wählen wir zu diesem Zwecke auf e einen Punkt E und auf p einen Punkt P (Fig. 1) und fällen von diesen Punkten auf a_1 und a_2 die Senkrechten e_1, e_2, p_1, p_2 so ist nach 3.;

$$(a_1 a_2 ep) = \frac{\sin(a_1 e)}{\sin(a_2 e)} \cdot \frac{\sin(a_1 p)}{\sin(a_2 p)} = \frac{\sin(a_2 p) : \sin(a_2 e)}{\sin(a_1 p) : \sin(a_1 e)} = \frac{\xi_2}{\xi_1},$$

wobei also gesetzt wurde:

$$\varrho \xi_1 = \frac{\sin(a_1 p)}{\sin(a_1 e)} = \frac{p_1}{e_1} \frac{OE}{OP},$$

$$\varrho \xi_2 = \frac{\sin(a_2 p)}{\sin(a_2 e)} = \frac{p_2}{e_2} \frac{OE}{OP},$$

so daß;

$$\xi_2 : \xi_1 = \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_1}{e_1}.$$

ξ_1 und ξ_2 können wir wieder als homogene Koordinaten des Strahles p benutzen.

Die Vorzeichen von ξ_1 und ξ_2 werden positiv oder negativ genommen, je nachdem die beiden Winkel im Zähler und Nenner im gleichen oder entgegengesetzten Sinn durchlaufen werden, wenn sich der an erster Stelle angegebene Strahl gegen den an zweiter Stelle angegebenen Strahl bewegt.

Es ist z. B. das Vorzeichen von ξ_1 positiv, wenn die Winkeldrehungen $(a_1 p)$ und $(a_1 e)$ im gleichen Sinne laufen, negativ, wenn diese Drehungen verschiedenen Sinn haben.¹⁾

Eine lineare homogene Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_2 , etwa:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 0,$$

stellt einen Strahl dar; eine in ξ_1 und ξ_2 homogene Gleichung n^{ten} Grades:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \xi_1^{n-k} \xi_2^k = 0,$$

bestimmt dann n Strahlen des Büschels, wenn wir den komplexen Wurzeln „imaginäre“ Strahlen zuweisen.

Im Ebenenbüschel ist eine durchaus entsprechende Koordinaten-Bestimmung ebenso durchführbar. Schneidet man das Ebenenbüschel mit einer zu seiner Achse senkrechten Ebene, so kann die Koordinaten-Bestimmung in dem dadurch entstehenden Strahlenbüschel sofort auf das Ebenenbüschel übertragen werden.

§ 3. Ausdrücke für das Doppelverhältnis. Einige Aufgaben.

Das Doppelverhältnis, ausgedrückt durch die Koordinaten.

9. Sind vier Elemente eines Grundgebildes erster Stufe gegeben, z. B. vier Punkte X, Y, Z, T durch ihre Koordinaten $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (t_1, t_2)$ so hat man die Doppelverhältnisse:

$$(A_1 A_2 E X) = \xi = \frac{x_2}{x_1},$$

$$(A_1 A_2 E Y) = \eta = \frac{y_2}{y_1},$$

$$(A_1 A_2 E Z) = \zeta = \frac{z_2}{z_1},$$

$$(A_1 A_2 E T) = \tau = \frac{t_2}{t_1}.$$

1) Siehe Literaturverzeichnis unter 1.

Nach Formel (9) von 5. folgt daraus:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (XYZT) &= \frac{\xi - \zeta}{\eta - \zeta} : \frac{\xi - \tau}{\eta - \tau} = \frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{z_2}{z_1}}{\frac{y_2}{y_1} - \frac{z_2}{z_1}} : \frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{t_2}{t_1}}{\frac{y_2}{y_1} - \frac{t_2}{t_1}} = \\ &= \frac{(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{(y_2 z_1 - y_1 z_2)} : \frac{(x_2 t_1 - x_1 t_2)}{(y_2 t_1 - y_1 t_2)}. \end{aligned} \right.$$

Schreiben wir abkürzend:

$$x_2 z_1 - x_1 z_2 = (xz)$$

und entsprechend (yz) , (xt) und (yt) , so wird:

$$(2) \quad (XYZT) = \frac{(xz)}{(yz)} : \frac{(xt)}{(yt)}.$$

Das Doppelverhältnis, ausgedrückt durch die Parameter.

10. Zwei Punkte A und B einer Punktreihe seien gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_x &\equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \\ b_x &\equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Bilden wir für irgend einen Zahlenwert λ die lineare Verbindung $a_x - \lambda b_x$ und setzen dieselbe $= 0$, so wird diese Gleichung befriedigt durch die Werte:

$$x_2 : x_1 = -(a_1 - \lambda b_1) : (a_2 - \lambda b_2)$$

und stellt also ebenfalls einen Punkt C vor.

Wird als kürzere Schreibweise für diese Gleichung der Ausdruck c_x gewählt, so ist demnach ein Punkt C gegeben durch:

$$c_x \equiv a_x - \lambda b_x = 0.$$

Die Größe λ , welche durch ihre Werte die Punkte der Punktreihe liefert, heißt ein „Parameter“. Ein weiterer Punkt D der Punktreihe sei nun gegeben durch den Parameterwert μ , so daß:

$$d_x \equiv a_x - \mu b_x = 0.$$

Wir fragen nach dem Wert des Doppelverhältnisses $(ABCD)$.

Für die Doppelverhältnisse ξ, η, ζ, τ , welche diese vier Punkte A, B, C, D mit unseren Fundamentalpunkten bilden, haben wir die Werte:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{a_1}{a_2}, & \eta &= -\frac{b_1}{b_2}, \\ \zeta &= -\frac{a_1 - \lambda b_1}{a_2 - \lambda b_2}, & \tau &= -\frac{a_1 - \mu b_1}{a_2 - \mu b_2}. \end{aligned}$$

Die Formel (1) von 9. liefert dann nach einer leichten Rechnung:

$$(3) \quad (ABCD) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Zusatz: Wenn wir das Grundgebilde erster Stufe in der Form:

$$a_x - \lambda b_x = 0$$

schreiben, so sind dabei die „Grund“-Elemente:

$$a_x = 0 \quad \text{und} \quad b_x = 0$$

doch in keiner Weise ausgezeichnet. Wir können vielmehr ebensogut irgend zwei andere Elemente:

$$p_x \equiv a_x - \lambda_1 b_x = 0 \quad \text{und} \quad q_x \equiv a_x - \lambda_2 b_x = 0$$

als Grundelemente benutzen. Denn ein beliebiges Element des Grundgebildes läßt sich auch als lineare Zusammensetzung aus p_x und q_x darstellen. Wird nämlich gesetzt:

$$a_x - \lambda b_x \equiv v p_x + \varrho q_x.$$

so ergeben sich durch Einsetzen der obigen Werte für p_x und q_x in (4) die Bestimmungsgleichungen:

$$v + \varrho = 1,$$

$$v \lambda_1 + \varrho \lambda_2 = \lambda,$$

also

$$v = \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \varrho = -\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Demnach erhalten wir die auch direkt erkennbare Umformung:

$$a_x - \lambda b_x \equiv \frac{(\lambda_2 - \lambda)(a_x - \lambda_1 b_x) - (\lambda_1 - \lambda)(a_x - \lambda_2 b_x)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Das Grundgebilde kann also auch in der Form:

$$p_x - \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1} q_x = 0$$

geschrieben werden, und die Veränderung der Grundelemente hat nur die Folge, daß an Stelle des Parameters λ der neue Parameter $\mu = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}$ tritt.

11. Das soeben gefundene Ergebnis dient weiter zur Lösung der folgenden allgemeinen Aufgabe:

Gegeben seien vier Punkte einer Punktreihe:

$$(5) \quad \begin{cases} L_1 \equiv a_x - \lambda_1 b_x = 0, & L_3 \equiv a_x - \lambda_3 b_x = 0, \\ L_2 \equiv a_x - \lambda_2 b_x = 0, & L_4 \equiv a_x - \lambda_4 b_x = 0. \end{cases}$$

Wir fragen nach dem Doppelverhältnis, das diese vier Punkte bilden, und bezeichnen dasselbe einfach durch $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$.

Die beiden links stehenden der Gleichungen (5) können wir benutzen, um a_x und b_x durch L_1 und L_2 auszudrücken, Wir finden:

$$\lambda_2 L_1 - \lambda_1 L_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) a_x,$$

$$L_1 - L_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) b_x,$$

folglich:

$$a_x = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} L_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} L_2$$

und

$$b_x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} L_1 - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} L_2.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die beiden letzten Gleichungen von (5) ein, so ergibt sich:

$$L_3 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} L_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} L_2,$$

$$L_4 = \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_1} L_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_1} L_2.$$

Statt der ursprünglich gegebenen Gleichungen (5) können wir daher folgende wählen:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0, & L_2 &= 0, \\ L_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} L_2 &= 0, & L_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} L_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Schreibweise setzt uns in den Stand, das Doppelverhältnis der gegebenen vier Punkte nach dem unmittelbar vorhergehenden Satze zu bestimmen, und es ist danach:

$$(6) \quad (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Diese Formel gilt, wie leicht zu sehen ist, ganz ebenso für Strahlen. An Stelle der Ausdrücke $a_x, \dots$ treten dann Gleichungen von der Form;

$$\alpha_\xi = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 0.$$

Das Doppelverhältnis ist mithin unabhängig vom Koordinatensystem bloß durch die Parameter der einzelnen Elemente ausgedrückt.

Harmonische Lage zweier Elementenpaare.

12. Sind in einem Grundgebilde erster Stufe zwei Paare von Elementen gegeben, jedes durch eine quadratische Gleichung, also etwa die Punktepaare:

$$(7) \quad \begin{cases} a_0 x_2^2 + 2a_1 x_2 x_1 + a_2 x_1^2 = 0 \\ \text{und } b_0 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_1 + b_2 x_1^2 = 0, \end{cases}$$

so wird verlangt, die Bedingung dafür aufzustellen, daß die beiden Elementenpaare sich harmonisch trennen.

Die beiden Paare von Gleichungen liefern die Wurzeln:

$$\alpha_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0}, \quad \beta_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_0 b_2}}{b_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0}, \quad \beta_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_0 b_2}}{b_0}$$

Sollen die beiden Elementenpaare harmonisch zueinander liegen, so muß der Wert des Doppelverhältnisses $= -1$ sein oder es muß nach Formel (6):

$$\frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2 - \beta_1} : \frac{\alpha_1 - \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} = -1$$

$$D_{ab} \equiv a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0.$$

$$(\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) = \frac{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)}{(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)}.$$

$$\begin{cases} D_a \equiv a_1^2 - a_0 a_2, \\ D_b \equiv b_1^2 - b_0 b_2, \end{cases}$$

$$(\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) = \frac{D_{ab} + 2\sqrt{D_a D_b}}{D_{ab} - 2\sqrt{D_a D_b}} = D.$$

D_a und D_b sind die Diskriminanten der quadratischen Gleichungen (7). Sind sie positiv, so stellen die Gleichungen reelle Elementenpaare dar. Ist aber eine solche Diskriminante negativ, so können wir kein solches Elementenpaar angeben. Daß man in diesem Falle von „imaginären“ Elementen sprechen darf, die unabhängig vom Koordinatensystem eine geometrische Berechtigung haben, hat erst v. Staudt²⁾ bewiesen, indem er als geometrischen Repräsentanten solcher imaginären Elemente die Involutionen einführte. Darauf kann hier nur verwiesen werden. Die

²⁾ Bfieri mit wird — wie im folgenden — auf die gleiche Zahl des Literaturverzeichnisses verwiesen.

Gleichung (10) gibt uns aber, wenigstens rein formal, auch für imaginäre Elementenpaare die Werte der zugehörigen Doppelverhältnisse.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) $D_{ab}=0$. Dann liegen die beiden Elementenpaare harmonisch, das Doppelverhältnis D wird $=-1$, ganz unabhängig davon, ob die beiden Elementenpaare reell oder imaginär sind.

b) $D_{ab} \neq 0$. Entweder haben dann D_a und D_b gleiches oder ungleiches Vorzeichen. Im ersten Falle sind entweder beide Elementenpaare reell (D_a und $D_b > 0$) oder beide imaginär (D_a und $D_b < 0$). Das Doppelverhältnis D der vier Elemente ist aber wegen $D_a D_b > 0$ in beiden Fällen reell. Bei ungleichen Vorzeichen von D_a und D_b jedoch ist das eine Elementenpaar reell, das andere imaginär und wegen $D_a D_b < 0$ nimmt das Doppelverhältnis D einen komplexen Wert an.

Zweites Kapitel.

Die koordinaten-Bestimmung in der Ebene und im Raume,

§ 4. Die Koordinaten-Bestimmung in den Grundgebilden zweiter Stufe.

Hilfssätze.

14. Bevor wir dazu übergehen, die Lage eines Punktes in einer Ebene durch möglichst allgemeine Koordinaten festzulegen, müssen wir einige bekannte Sätze der Geometrie vorausschicken. In einer Ebene seien drei Punkte A_1, A_2, A_3 gegeben (Fig. 2) sowie ein Punkt E , der auf keiner Seite des Dreiecks $A_1A_2A_3$ liegen darf, und eine Gerade e , die durch keinen der Eckpunkte A_1, A_2, A_3 gehen darf. Die Verbindungslinien von E mit A_1, A_2, A_3 mögen die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in E_1, E_2, E_3 schneiden, die Schnittpunkte der Geraden e mit den Dreiecksseiten seien bezüglich E_1, E_2, E_3 .

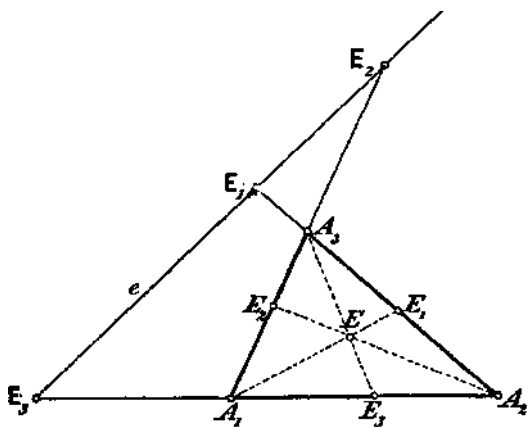


Fig. 2.

Dann gilt für die durch die Gerade auf den Dreiecksseiten erzeugten Abschnitte die als der Satz des Menelaos bekannte Beziehung (Menelaos 98 n. Chr.):

$$\frac{A_1E_3}{A_3E_1} \cdot \frac{A_2E_1}{A_1E_2} \cdot \frac{A_3E_2}{A_2E_3} = 1$$

Für die drei durch einen Punkt gehenden Linien A_1E_1, A_2E_2, A_3E_3 aber haben wir nach dem Satz des Ceva (1699):

$$\frac{A_1E_2}{A_2E_3} \cdot \frac{A_2E_1}{A_3E_1} \cdot \frac{A_3E_2}{A_1E_2} = -1.$$

Dividiert man die untere durch die obere der beiden Gleichungen, so ergibt sich die Beziehung:

$$(A_1A_2E_3E_3)(A_2AE_1E_1)(A_3A_1E_2E_2) = -1 \cdot$$

Wenn also die Gerade e und der Punkt E auch ganz beliebig angenommen werden, so gilt immer der Satz, daß das Produkt dieser drei Doppelverhältnisse gleich der negativen Einheit ist.

Daraus können wir folgende Folgerung ziehen: Sind zwei dieser Doppelverhältnisse je $= -1$, so ist das dritte auch $= -1$. Wenn also:

$$(A_1 A_2 E_3 E_3) = -1$$

sowie:

$$(A_2 A_3 E_1 E_1) = -1,$$

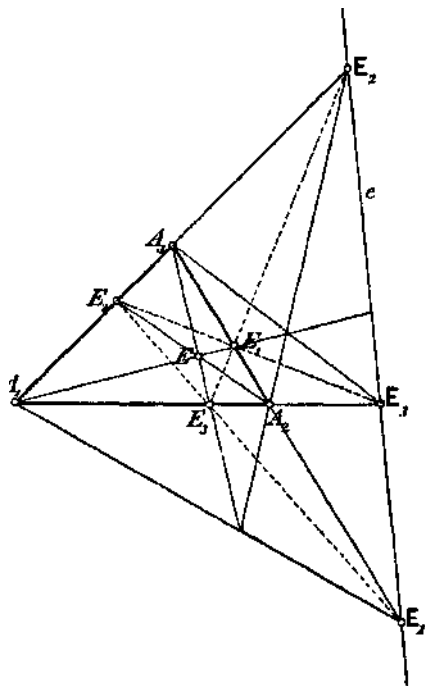
so ist auch:

Um sich einen Punkt E und eine Gerade e in solcher gegenseitigen Lage zu verschaffen, daß diese Beziehungen gelten, kann man entweder E beliebig wählen und dazu e konstruieren oder umgekehrt von der Geraden ausgehend den Punkt E finden.

Hat man etwa E willkürlich angenommen, so erhält man durch Projektion aus den drei Ecken die Punkte E_1, E_2, E_3 (Fig. 3). Dann liefern aber die Verbindungslinien $E_1 E_2, E_2 E_3$ und $E_3 E_1$ in den Schnittpunkten mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ die Punkte E_3, E_1, E_2 , welche — wie man aus den Eigenschaften des vollständigen Vierecks erkennt¹⁾ — den eben angeschriebenen Gleichungen genügen; die Verbindungslinie dieser drei Punkte ist dann die zugehörige Gerade e . Durch eine ähnliche Konstruktion ergibt sich zu einer beliebigen Geraden e ein zugehöriger Punkt E .³⁾

Wenn eine solche Gerade e und ihr zugehöriger Punkt (Pol) E diese Eigenschaft haben, so sagen wir, daß sie sich harmonisch trennen in bezug auf alle Ecken und alle Seiten des Dreiecks. Die Gerade e heißt auch Harmonikale des Punktes E .

Ist E der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, so werden E_1, E_2, E_3 die Mitten seiner Seiten und die zugehörige Harmonikale geht in die unendlich ferne Gerade der Ebene über.



Die Koordinaten eines Punktes.

15. Um nun die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, wählen wir in ihr vier Punkte A_1, A_2, A_3, E beliebig, so daß also keine

drei dieser vier Punkte auf einer Geraden liegen. Die Punkte A_1, A_2, A_3 bilden das „Fundamentaldreieck“ (F.-Dreieck). Den Punkt E projizieren wir aus den Ecken dieses Dreiecks auf die Seiten, wodurch wir (Fig. 4) die Punkte E_1, E_2, E_3 erhalten. Ein weiterer, beliebiger Punkt P liefert ebenso die Projektionen P_1, P_2, P_3 . Die senkrechten Abstände der Punkte E und P von den Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 des F.-Dreiecks seien ferner e_1, e_2, e_3 und p_1, p_2, p_3 .

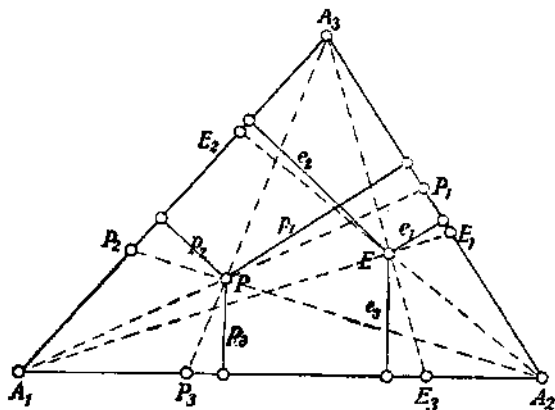


Fig. 4.

In Figur 4 gehen jetzt durch jede Ecke des Dreiecks vier Strahlen, z. B. durch A_1 die Strahlen $A_1A_2, A_1A_3, A_1E_1, A_1P_1$. Wir bezeichnen das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen kurz durch:

Jedes dieser drei Doppelverhältnisse läßt sich durch die Größen e_i und p_i allein ausdrücken.

Es ergeben sich also (vgl. 8.) die Werte:

$$(1) \quad \begin{cases} n_1 = (A_2A_3E_1P_1) = A_1(A_2A_3E_1P_1) = \frac{p_2 \cdot e_2}{p_3 \cdot e_3}, \\ n_2 = (A_3A_1E_2P_2) = A_2(A_3A_1E_2P_2) = \frac{p_3 \cdot e_3}{p_1 \cdot e_1}, \\ n_3 = (A_1A_2E_3P_3) = A_3(A_1A_2E_3P_3) = \frac{p_1 \cdot e_1}{p_2 \cdot e_2}. \end{cases}$$

Daraus folgt die Beziehung:

$$n_1 n_2 n_3 = 1.$$

Nimmt man zwei dieser Werte beliebig an, so ist mithin der dritte vermöge dieser Beziehung bestimmt. Dies entspricht geometrisch dem Umstande, daß man einen beliebigen Punkt P schon als Schnittpunkt zweier Strahlen, z. B. durch A_1 und A_2 , erhält. Man könnte also n_1 und n_2 als Koordinaten eines Punktes P benutzen.

16, Es ist aber auch hier wieder vorteilhafter, einen Punkt durch die Verhältnisse dreier Zahlen festzulegen. Wir setzen daher:

$$(2) \quad o x_1 = \frac{p_1}{e_1}, \quad o x_2 = \frac{p_2}{e_2}, \quad o x_3 = \frac{p_3}{e_3},$$

wobei o ein Proportionalitätsfaktor ist. Für den Punkt E werden diese drei Zahlen je gleich der Einheit. Er heißt deshalb der „Einheitspunkt“ und bildet mit den Punkten A_1, A_2, A_3 das „Fundamentalsystem“. Die x_i werden die homogenen, trimetrischen oder projektiven Koordinaten (Dreieckskoordinaten) des Punktes P genannt. Wir haben also (vgl. Satz 2 in 6.):

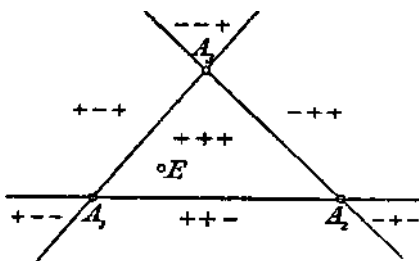


Fig. 5.

Satz 3. Die trimetrischen Koordinaten eines Punktes sind proportional den Abständen des Punktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks, gemessen durch die entsprechenden Abstände des Einheitspunktes.

Für die drei Doppelverhältnisse ergeben sich daraus die Werte:

$$(3) \quad n_1 = \frac{x_2}{x_3}, \quad n_2 = \frac{x_3}{x_1}, \quad n_3 = \frac{x_1}{x_2}.$$

Bezüglich der Vorzeichen der Koordinaten kommt es nur auf die Verhältnisse an, und zwar ist: $\frac{x_i}{x_k} \leq 0$, je nachdem die Verbindungsgeraden $(A_iE), (A_iP)$ von den Geraden $(A_iA_j), (A_iA_k)$ getrennt werden oder nicht; dabei bedeuten i, k, I drei verschiedene Zeiger 1, 2, 3.

Wählen wir — was uns ja freisteht — den Einheitspunkt E im Innern des Dreiecks $A_1A_2A_3$, so gibt die Figur 5 die Vorzeichen der drei Koordinaten für Punkte in den verschiedenen Gebieten der Ebene. So oft eine Seite des Fundamentaldreiecks überschritten wird, ändert sich das Vorzeichen der auf diese Seite bezogenen Koordinate.

Sind z. B. für einen Punkt die Zahlen:

$$1, \quad -2, \quad \frac{1}{3}$$

gegeben, so erhält man:

$$n_2 = \frac{1}{3}, \quad n_3 = -\frac{1}{2}.$$

Der gleiche Punkt wird aber auch bestimmt durch die Zahlen:

$$-3, \quad 6, \quad -1.$$

Dreieit $a_1 a_2 a_3$ mit den Ecken A_1, A_2, A_3 ; die Gerade e schneidet die drei Seiten in E_1, E_2, E_3 , eine beliebige Gerade p schneide sie in P_1, P_2, P_3 . Wir fällen von den Ecken A_1, A_2, A_3 die Senkrechten sowohl auf e als auf p und nennen diese $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ u π_1, π_2, π_3 . Dann zeigt Fig. 6, daß das Doppelverhältnis:

$$(A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{A_2 E_1}{A_3 E_1} : \frac{A_2 P_1}{A_3 P_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} : \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\varepsilon_2 \pi_3}{\varepsilon_3 \pi_2} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_2 : \varepsilon_2} \text{ ist.}$$

Wir erhalten mithin folgende drei Doppelverhältnisse:

$$(7) \quad \begin{cases} v_1 = (A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_2 : \varepsilon_2}, \\ v_2 = (A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_3 : \varepsilon_3}, \\ v_3 = (A_1 A_2 E_3 P_3) = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_1 : \varepsilon_1}. \end{cases}$$

Zwischen diesen drei Werten besteht die Beziehung:

$$v_1 v_2 v_3 = 1.$$

Nimmt man zwei derselben beliebig an, z. B. v_1 und v_2 , so sind damit die Punkte P_1 und P_2 bestimmt, also ist auch die Gerade p als deren Verbindungslinie gegeben. Man könnte wieder v_1 und v_2 als Koordinaten der Geraden p einführen. Um aber die Rechnung homogen zu gestalten, führt man die Verhältnisse dreier Zahlen ein und setzt (mit ϱ als Proportionalitätsfaktor):

$$\varrho \xi_1 = \frac{\pi_1}{\varepsilon_1}, \quad \varrho \xi_2 = \frac{\pi_2}{\varepsilon_2}, \quad \varrho \xi_3 = \frac{\pi_3}{\varepsilon_3}.$$

$$v_1 = \frac{\xi_3}{\xi_2}, \quad v_2 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad v_3 = \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

Für die Gerade e stehen die ξ_i in den Verhältnissen 1:1:1, weswegen sie die „Einheitsgerade“ heißt. Sie bildet zusammen mit den Geraden a_1, a_2, a_3 das „Fundamentalsystem“.

Bezüglich der Vorzeichen der Koordinaten kommt es nur auf die Verhältnisse an, und zwar ist: $\frac{\xi_i}{\xi_k} \neq 0$, je nachdem die Schnittpunkte $(a_i e)$, $(a_i p)$ von den Punkten $(a_i a_j)$, $(a_i a_k)$ getrennt werden oder nicht; dabei bedeuten i, k, l drei verschiedene Zeiger 1, 2, 3.

Die ξ_i werden die „homogenen“, „trimetrischen“ oder „projektiven“ Koordinaten der Geraden p genannt. Wir haben also (vgl. Satz 2 in 6. und Satz 3 in 16.):

Satz 4. Die trimetrischen Koordinaten einer Geraden sind proportional den Abständen der Geraden von den Ecken des Fundamentaldreiecks, gemessen durch die entsprechenden Abstände der Eiriheitsgeraden.

Die Seiten a_1, a_2, a_3 des F.-Dreiecks selbst haben die Koordinaten $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0; \xi_3 = 0, \xi_1 = 0; \xi_1 = 0, \xi_2 = 0$. Die jedesmal fehlende Koordinate ist $\neq 0$. Für Gerade durch die Ecken A_1, A_2, A_3 des F.-Dreiecks muß eine Koordinate also $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$ oder $\xi_3 = 0$ sein.

Zur Untersuchung metrischer Beziehungen müssen wir in den Gleichungen (8) dem Faktor q einen bestimmten Zahlenwert geben, etwa $q = 1$. Dann heißen:

$$(10) \quad \xi_1 = \frac{\pi_1}{\varepsilon_1}, \quad \xi_2 = \frac{\pi_2}{\varepsilon_2}, \quad \xi_3 = \frac{\pi_3}{\varepsilon_3}$$

die wahren Koordinaten der Geraden.

Punkt und Gerade in vereinigter Lage.

18. Wir stellen jetzt die Bedingung auf, daß ein Punkt P mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 auf einer Geraden p mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 gelegen ist. Dabei beziehen sich diese Koordinaten auf das gleiche Fundamentaldreieck $A_1A_2A_3$, dessen Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 bezüglich a_1, a_2, a_3 sind. Um diese Bedingung in der einfachsten Form zu erhalten, wollen wir den Einheitspunkt E und die Einheitsgerade e in einer gewissen Abhängigkeit voneinander annehmen. Zu irgend einem Punkte E kann in bezug auf ein Dreieck $A_1A_2A_3$ (Fig. 7) in folgender Weise eine bestimmte Gerade e gefunden werden: wir projizieren den Punkt E aus A_1, A_2, A_3 auf die gegenüberliegenden Dreiecksseiten und nennen diese Punkte E, E_2, E_3 ; zu jedem dieser Punkte konstruieren wir den vierten harmonischen in bezug auf die beiden Dreiecksseiten (dieser Sonderfall ist in Fig. 7 nicht gezeichnet); wir erhalten 3 Punkte E_1, E_2, E_3 , so daß also (vgl. 14.) die Beziehungen bestehen:

$$(11) \quad \begin{cases} (A_1A_2E_3E_3) = -1, \\ (A_2A_3E_1E_1) = -1, \\ (A_3A_1E_2E_2) = -1. \end{cases}$$

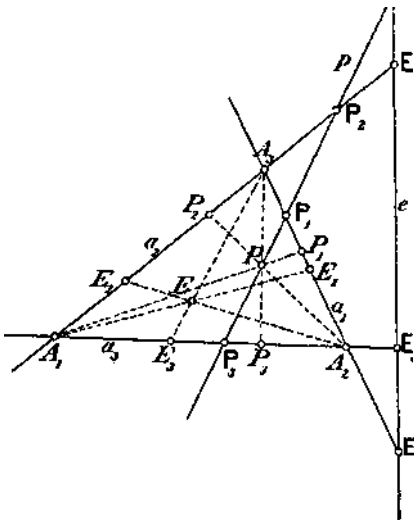


Fig. 7.

Der beliebige Punkt P mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 liefert nach 15. und 16. die Beziehungen:

$$(12) \quad \begin{cases} (A_1 A_2 E_3 P_3) = \frac{x_1}{x_2}, \\ (A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{x_2}{x_3}, \\ (A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{x_3}{x_1}, \end{cases}$$

während für die Gerade p mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 nach 17. die Gleichungen gelten:

$$(13) \quad \begin{cases} (A_1 A_2 E_3 P_3) = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \\ (A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{\xi_3}{\xi_2}, \\ (A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{\xi_1}{\xi_3}. \end{cases}$$

Greifen wir jetzt die fünf Punkte A_1, A_2, E_3, P_3, E_3 heraus, so gilt die Gleichung (7) von 5.:

$$(14) \quad (A_1 A_2 E_3 P_3) (A_1 A_2 P_3 E_3) (A_1 A_2 E_3 E_3) = 1.$$

Benutzen wir noch, um das erste Doppelverhältnis in (14) zu eliminieren, die Gleichung (8) von 5., wonach

$$\frac{(A_1 A_2 E_3 P_3)}{(A_1 A_2 E_3 P_3)} = (A_1 A_2 P_3 P_3)$$

ist, so ergibt sich aus (14) unter Benutzung der Gleichungen (11), (12) und (13) sofort die folgende Gleichung:

$$(15) \quad \begin{cases} (A_1 A_2 P_3 P_3) = -\frac{x_2 \xi_2}{x_1 \xi_1} \\ \text{ebenso ist dann: } (A_2 A_3 P_1 P_1) = -\frac{x_3 \xi_3}{x_2 \xi_2} \\ (A_3 A_1 P_2 P_2) = -\frac{x_1 \xi_1}{x_3 \xi_3} \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten noch für jede Lage von P und p . Die Bedingung, daß P auf p liegen soll, können wir nun dadurch einführen, daß unter dieser Voraussetzung durch Projektion aus P die Punkte A, A_2, P_3, P_3 übergehen in die Punkte P_1, A_2, P_1, A_3 , und da das Doppelverhältnis bei jeder Projektion seinen Wert beibehält, so erhält man:

$$(A_1 A_2 P_3 P_3) = (P_1 A_2 P_1 A_3) = 1 - (P_1 P_1 A_2 A_3) = 1 - (A_2 A_3 P_1, P_1),$$

also:

$$(16) \quad (A_1 A_2 P_3 P_3) + (A_2 A_3 P_1 P_1) = 1 \cdot$$

Führt man in diese Beziehung die in den Gleichungen (15) erhaltenen Werte ein, so wird:

$$(17) \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

Dies ist also die Bedingung dafür, daß der Punkt (x_1, x_2, x_3) auf der Geraden (ξ_1, ξ_2, ξ_3) liegt. Diese Bedingung nahm deshalb diese einfachste Form an, weil wir e als die Harmonikale (14.) von E wählten. Dies soll aber im folgenden immer vorausgesetzt werden.

Hat man jetzt eine Gerade mit den Koordinaten:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3,$$

so liegt ein Punkt x_1, x_2, x_3 stets auf ihr, wenn

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Dies ist aber dann die Gleichung dieser geraden Linie.

Gehen wir andererseits aus von einem festen Punkte:

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3,$$

so gilt für jede Gerade, welche durch ihn hindurch geht:

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung des Punktes (a_1, a_2, a_3) . Natürlich wird:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

die Gleichung der Einheitsgeraden und:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

die Gleichung des Einheitspunktes.

Übergang von Dreieckskoordinaten zu schiefwinkligen.

19. Ohne auf besondere Fälle trimetrischer Koordinaten einzugehen, wollen wir jetzt ableiten, wie man von solchen Koordinaten zu gewöhnlichen (schief- oder rechtwinkligen) Koordinaten übergehen kann. Wir lassen zu diesem Zwecke eine Seite des F.-Dreiecks, etwa a_3 oder $A_1 A_2$, ins Unendliche fallen.

Die Punkte A_1, A_2, E_3, P_3 liegen dann im Unendlichen (Fig. 8) und wir können wie in 15. die Doppelverhältnisse n_1, n_2, n_3 bilden, nur haben wir bei dem letzten $\frac{A_3 P_3}{A_3 E_3}$ statt $\frac{A_3 P_1}{A_3 E_1}$ zu setzen. Setzen wir weiter:

so wird:

$$\begin{aligned}n_1 &= (A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{A_3 P_1}{A_3 E_1} = y = \frac{x_2}{x_3}, \\n_2 &= (A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{A_3 E_2}{A_3 P_2} = \frac{1}{x} = \frac{x_3}{x_1}, \\n_3 &= (A_1 A_2 E_3 P_3) = \frac{E_3 E_2}{E_3 E_1} : \frac{P P_2}{P P_1} = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{x_2}\end{aligned}$$

Wie früher ist:

$$n_1 n_2 n_3 = 1$$

Wird E auf der Halbierungslinie des Winkels $A_1 A_3 A_2$ angenommen und macht man:

$$A_3 E_2 = A_3 E_1 = +1,$$

so werden:

$$x = A_3 P_2, \quad y = A_3 P_1$$

die gewöhnlichen, schiefwinkligen (Cartesischen) Koordinaten für die Gerade $A_3 A_1$ als X-Achse und $A_3 A_2$ als Y-Achse.

Um den Übergang von diesem trimetrischen Koordinatensystem zu dem gewöhnlichen durchzuführen, haben wir also zu setzen:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

20. Wir wollen nun auch die Koordinaten einer Geraden p unter Voraussetzung dieses Koordinatensystems ableiten. Wir haben dann zu E die Harmonikale zu konstruieren. Machen wir demnach (Fig. 8)

$$E_2 A_3 = A_3 E_2 \quad \text{und} \quad E_1 A_3 = A_3 E_1,$$

so ist die Verbindungslinie der Punkte E_1 und E_2 die Einheitsgerade e (18.). Auf ihr liegt in unendlicher Ferne der Punkt E_3 . Wir können die Doppelverhältnisse ν_1, ν_2, ν_3 von 17. ansetzen, nur der letzte Ausdruck, in dem vier unendlich ferne Punkte vorkommen, erfordert eine Umformung. Man ersetzt nämlich die Punkte durch die aus A_3 nach ihnen zielenden Strahlen und schneidet diese vier Strahlen mit der Geraden e . Sodann ergibt sich aus Fig. 8:

$$(A_1 A_2 E_3 P_3) = (E_3 E_1 E_2 P_3) = \frac{E_3 E_2}{E_1 E_3} : \frac{E_3 P_3}{E_1 P_3} = \frac{E_1 P_3}{E_3 P_3}$$

Es ist aber:

$$E_1 P_3 = \frac{E_1 A_3}{\sin \alpha} \sin \beta, \quad E_3 P_3 = \frac{E_3 A_3}{\sin \alpha} \sin \gamma$$

und (s. Fig. 8):

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{A_3 P_1}{A_3 P_2},$$

daher:

$$\frac{E_1 P_3}{E_3 P_3} = \frac{A_3 E_1}{A_3 E_2} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{A_3 E_1}{A_3 E_2} \cdot \frac{A_3 P_2}{A_3 P_1} = \frac{A_3 E_1}{A_3 P_1} : \frac{A_3 E_2}{A_3 P_2}$$

Setzen wir endlich noch:

$$u = \frac{A_3 E_2}{A_3 P_2}, \quad v = \frac{A_3 E_1}{A_3 P_1}$$

so wird:

$$v_1 = (A_2 A_3 E_1 P_1) = \frac{A_3 P_1}{A_3 E_1} = \frac{1}{v} = \frac{\xi_3}{\xi_1},$$

$$v_2 = (A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{A_3 E_2}{A_3 P_2} = u = \frac{\xi_1}{\xi_3},$$

$$v_3 = (A_1 A_2 E_3 P_3) = \frac{A_3 E_1}{A_3 P_1} : \frac{A_3 E_2}{A_3 P_2} = \frac{v}{u} = \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

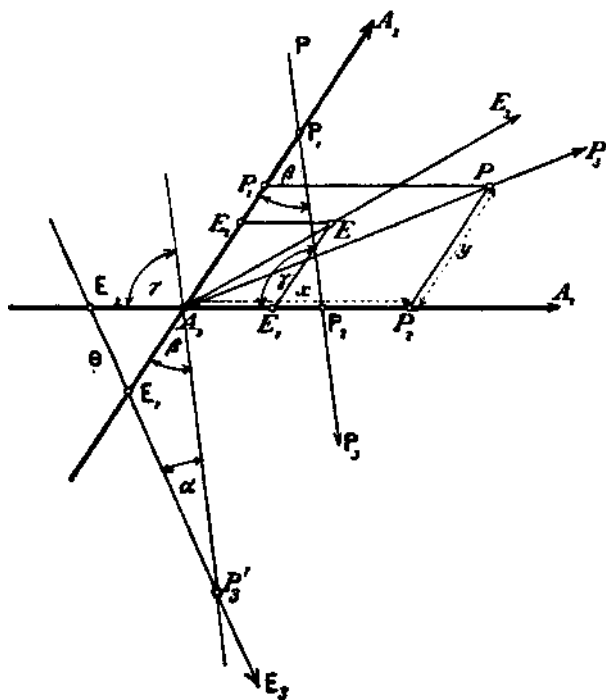


Fig. 8.

Wie früher ist:

$$v_1 v_2 v_3 = 1.$$

Die Quotienten u und v sind die Koordinaten der Geraden p . Liegen E_2 und E_1 je in der Entfernung $+1$ von A_3 auf der X - und Y -Achse, so wird:

$$A_3 E_2 = A_3 E_1 = -1$$

und:

$$u = -\frac{1}{A_3 P_2}, \quad v = -\frac{1}{A_3 P_1}$$

sind die gewöhnlichen *Plückerschen* Linienkoordinaten. Der Übergang zu ihnen wird also vermittelt durch die Gleichungen:

$$u = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad v = \frac{\xi_2}{\xi_3}.$$

Der Annahme des Einheitspunktes bei den homogenen Koordinaten entspricht mithin in den metrischen Koordinatensystemen die Festsetzung der Längeneinheit sowie der positiven Richtungen der Achsen. Die Bedingung für das Ineinanderliegen des Punktes x, y und der Geraden u, v (für die vereinigte Lage) wird dann nach 18. (17):

$$ux + vy + l = 0.$$

Die Koordinaten-Bestimmung im Bündel.

21. Um in dem zweiten Grundgebilde 2. Stufe, dem Strahlen- oder Ebenen-Bündel, einen Strahl oder eine Ebene durch möglichst allgemeine Koordinaten festzulegen, sind wesentlich neue Überlegungen nicht erforderlich. Wir können schon durch Projektion etwa der Figur 7 aus einem Punkte des Raumes die entsprechende Betrachtung im Bündel ableiten.

Gehen wir aus von vier festen Strahlen a_1, a_2, a_3, e eines Bündels s , dann wird jeder Strahl p des Bündels aus a_1, a_2, a_3 durch Ebenen projiziert, die mit den nach dem Strahl e gehenden Ebenen und den Ebenen des Fundamentaldreikants $a_1 a_2 a_3$ drei Doppelverhältnisse bilden, deren Produkt = 1 ist.

Durch a_1 z. B. gehen die Ebenen $(a_1 a_2), (a_1 a_3), (a_1 e), (a_1 p)$. Wählen wir auf der Ebene $(a_1 e)$ irgend einen Punkt und bezeichnen dessen senkrechte Abstände von den beiden ersten Ebenen mit e_3 und e_2 , sind ferner p_3 und p_2 die senkrechten Abstände eines Punktes P der Ebene $(a_1 p)$ von den gleichen Ebenen, so ist das Doppelverhältnis der vier genannten Ebenen

$$a_1(a_2 a_3 e p) = \frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3}.$$

Die weiteren Überlegungen bleiben die gleichen; doch haben wir damit auch schon die Darstellung eines Punktes im Raum vorbereitet.

§ 5. Die Koordinaten-Bestimmung im Raume.

Die Koordinaten eines Punktes.

22. Um einen Punkt P im Raume zu bestimmen, nehmen wir vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 beliebig an, so daß sie ein Tetraeder bilden; E sei ein beliebiger, in keiner Seitenfläche des Tetraeders liegender fünfter Punkt. Wir projizieren denselben aus den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 in die gegenüberliegenden Tetraederflächen und nennen diese Projektionen

E_1, E_2, E_3, E_4 (Fig. 9). Ferner schneide etwa die Ebene durch E und die Kante A_1A_4 die Gegenkante A_2A_3 in einem Punkte, den wir E_{23} nennen. Er ist die Projektion der Ebene E auf die Kante A_2A_3 . Auf der gleichen Weise erhalten wir die Projektionen E_{12} usw. auf den übrigen Kanten.

Ist nun weiter ein beliebiger Punkt P gegeben, so zeichnen wir auch seine Projektionen aus den Ecken ($P_1, P_2, \dots$) und aus den Kanten

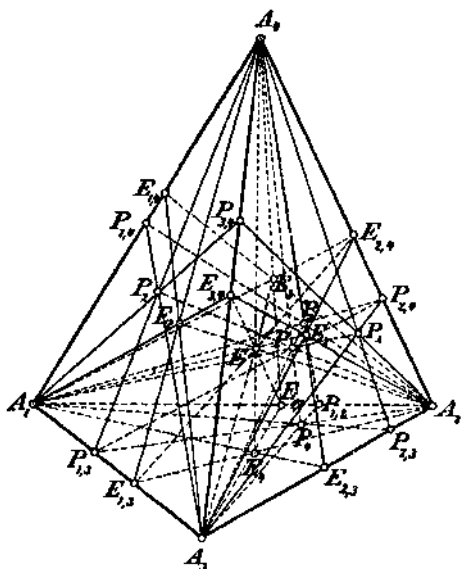


Fig. 9.

($P_{12}, P_{13}, \dots$). Dann gehen durch jede Kante des Tetraeders vier Ebenen, z.B. durch A_1A_4 die Ebenen:

$$A_1A_4A_2, \quad A_1A_4A_3, \\ A_1A_4E, \quad A_1A_4P.$$

Wir bezeichnen deren Doppelverhältnis durch n_{23} , wobei der Doppelindex auch die Reihenfolge der Ebenen nach A_2 und A_3 angibt, und schreiben dies:

$$n_{23} = \overline{A_1A_4}(A_2A_3EP) = \\ = (A_2A_3E_{23}P_{23}).$$

Entsprechend den sechs Tetraederkanten erhalten wir also 12 Größen n_{ik} (wo i und k die Werte 1, 2, 3, 4 annehmen und $i \neq k$ ist); da $a \ b \ n_{ki} = \frac{1}{n_{ik}}$ so haben wir nur 6 wesentlich verschiedene Doppelverhältnisse n_{ik} .

Bezeichnen wir andererseits die senkrechten Abstände der Punkte E und P von den Ebenen $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$ der Reihe nach mit e_1, e_2, e_3, e_4 und mit p_1, p_2, p_3, p_4 , so kann man jedes dieser Doppelverhältnisse nach 21. durch diese Abstände ausdrücken; es ist z. B.:

$$n_{23} = \frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3}.$$

Setzen wir jetzt weiter:

$$(1) \quad \varrho x_1 = \frac{p_1}{e_1}, \quad \varrho x_2 = \frac{p_2}{e_2}, \quad \varrho x_3 = \frac{p_3}{e_3}, \quad \varrho x_4 = \frac{p_4}{e_4},$$

so werden die genannten Doppelverhältnisse:

$$\begin{aligned} n_{12} &= \frac{x_1}{x_4}, & n_{23} &= \frac{x_2}{x_3}, \\ n_{13} &= \frac{x_1}{x_3}, & n_{24} &= \frac{x_2}{x_4}, \\ n_{14} &= \frac{x_1}{x_4}, & n_{34} &= \frac{x_3}{x_4}. \end{aligned}$$

Sind die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 und E gegeben und nimmt man irgend 3 Werte der n_{ik} , welche zu solchen Tetraederkanten gehören, die ein Dreieck bilden, beliebig an, so ist umgekehrt durch diese drei Zahlenwerte ein Punkt bestimmt. Denn sind z. B.:

$$n_{34} = \overline{A_1 A_2} (A_3 A_4 E P) = (A_3 A_4 E_{34} P_{34}) = \frac{x_3}{x_4},$$

$$n_{14} = \overline{A_2 A_3} (A_1 A_4 E P) = (A_1 A_4 E_{14} P_{14}) = \frac{x_1}{x_4},$$

$$n_{24} = \overline{A_3 A_1} (A_2 A_4 E P) = (A_2 A_4 E_{24} P_{24}) = \frac{x_2}{x_4}$$

die gegebenen Zahlenwerte, die zusammen alle vier Indizes enthalten müssen, so ist durch jede der drei Kanten: $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$ je eine Ebene bestimmt, die mit den drei durch diese Kante nach den übrigen Eckpunkten und ϵ gehenden Ebenen ein Doppelverhältnis von dem vorgegebenen Werte bildet. Diese drei Ebenen schneiden sich dann in dem zugehörigen Punkte P . Die fehlenden n_{ik} können wir leicht berechnen. Denn zu drei Kanten des Tetraeders, welche durch einen Punkt gehören, gehören Werte der n_{ik} deren Produkt = 1 ist. In der Tat gelten ja die Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{cases} n_{23} \cdot n_{34} \cdot n_{42} = 1, & n_{13} \cdot n_{34} \cdot n_{41} = 1, \\ n_{12} \cdot n_{24} \cdot n_{41} = 1, & n_{12} \cdot n_{23} \cdot n_{31} = 1. \end{cases}$$

23. Da Koordinaten allgemein Zahlen sind, welche die Lage eines Punktes bestimmen, so könnte man drei der Werte n_{ik} von der erwähnten Eigenschaft als Koordinaten eines Punktes einführen. Es ist aber — wenigstens für die Untersuchung projektiver Eigenschaften — bequemer, einen Punkt statt durch drei Zahlen durch die Verhältnisse von vier Zahlen zu bestimmen. Nachdem sich die n_{ik} als Quotienten der x_i darstellen, so ist ein Punkt auch festgelegt, wenn man weiß, daß sich x_1, x_2, x_3, x_4 wie vier gegebene Zahlen verhalten sollen. Wir nennen die x_4 die homogenen oder tetrametrischen oder projektiven Koordinaten (Tetraederkoordinaten) eines Punktes. Die Gleichungen (1) stellen dieselben durch die Quotienten der senkrechten Abstände der Punkte P und E von den Tetraederflächen dar.

Der Punkt E hat Koordinaten, die sich wie 1:1:1:1 verhalten. Er heißt der „Einheitspunkt“; das Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ wird „Fundamentaltetraeder“ (F.-Tetraeder) genannt. Also folgt

Satz 5. Die tetrametrischen Koordinaten eines Punktes sind proportional den Abständen des Punktes von den Flächen des Fundamentaltetraeders, gemessen durch die entsprechenden Abstände des Einheitspunktes.

Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 des F-Tetraeders selbst haben die Koordinaten:

$$\begin{array}{lll} x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = 0; \\ x_3 = 0, & x_4 = 0, & x_1 = 0; \\ x_4 = 0, & x_1 = 0, & x_2 = 0; \\ x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 0. \end{array}$$

Die jedesmal fehlende Koordinate ist $\neq 0$.

Für Punkte der Seitenflächen a_1, a_2, a_3, a_4 des F-Tetraeders muß eine Koordinate also $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ oder $x_3 = 0$ oder $x_4 = 0$ sein.

Um die Lage eines Punktes in bezug auf die fünf Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, E festzusetzen sowie überhaupt um Lagenbeziehungen zu untersuchen, genügt es, die Verhältnisse der Koordinaten x_i eines Punktes zu kennen. Will man aber auch metrische Beziehungen zum Ausdruck bringen, so muß man in den Gleichungen (1) dem Proportionalitätsfaktor q einen bestimmten Wert beilegen, am einfachsten den Wert 1. Dann werden

$$(3) \quad x_1 = \frac{p_1}{e_1}, \quad x_2 = \frac{p_2}{e_2}, \quad x_3 = \frac{p_3}{e_3}, \quad x_4 = \frac{p_4}{e_4}$$

die sogenannten „wahren“ Koordinaten des Punktes P.

Zwischen den allgemeinen Koordinaten eines Punktes kann natürlich kein Zusammenhang bestehen; wohl aber ist dies der Fall für die wahren Koordinaten oder für die senkrechten Abstände. Um diese Relation abzuleiten, erinnern wir uns daran, wie man — nach dem Vorgange von Möbius — das Vorzeichen eines Tetraedervolumens definiert. Ist $A_1 A_2 A_3 A_4$ der Ausdruck für das Volumen, so denken wir uns bekanntlich einen Beobachter langs der Kante $A_1 A_2$ so angebracht, daß er seine Füße in A_1 , den Kopf in A_2 hat. Wird dann die Kante $A_3 A_4$ von A_3 nach A_4 durchlaufen und muß sich dabei dieser Beobachter von links nach rechts drehen, so bezeichnen wir das in diesem Sinne durchstrichene Volumen als positiv. Wendet sich der Beobachter aber von rechts nach links, während die Kante von A_3 nach A_4 durchlaufen wird, so ist das Volumen negativ.

Ändert man in der Permutation $A_1 A_2 A_3 A_4$ einmal zwei Buchstaben, so wechselt das Volumen sein Vorzeichen. Die Tetraeder $A_1 A_2 A_3 P$ und $A_1 A_2 A_3 P'$ haben darnach gleiches oder ungleiches Vorzeichen, je nachdem P und P' auf der gleichen Seite der Ebene $A_1 A_2 A_3$ liegen oder auf verschiedenen Seiten.

Bezeichnen die positiven Zahlen f_1, f_2, f_3, f_4 die Flächeninhalte der den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 gegenüberliegenden Dreiecksflächen, ist ferner V das positive Volumen des Fundamentaltetraeders, so läßt sich aus (3) für die wahren Koordinaten die Beziehung ableiten:

$$(4) \quad e_1 f_1 x_1 + e_2 f_2 x_2 + e_3 f_3 x_3 + e_4 f_4 x_4 = 3V.$$

Sind h_1, h_2, h_3, h_4 die Längen der vier Höhen des Tetraeders, so ist weiter:

$$3V = h_1 f_1 = h_2 f_2 = h_3 f_3 = h_4 f_4$$

und Gleichung (4) kann auch geschrieben werden:

$$(5) \quad \frac{e_1 x_1}{h_1} + \frac{e_2 x_2}{h_2} + \frac{e_3 x_3}{h_3} + \frac{e_4 x_4}{h_4} = 1.$$

Die Vorzeichen, welche die vier Koordinaten für jede Lage des Punktes P im Raume erhalten, sind dann leicht zu bestimmen. Im Innern des

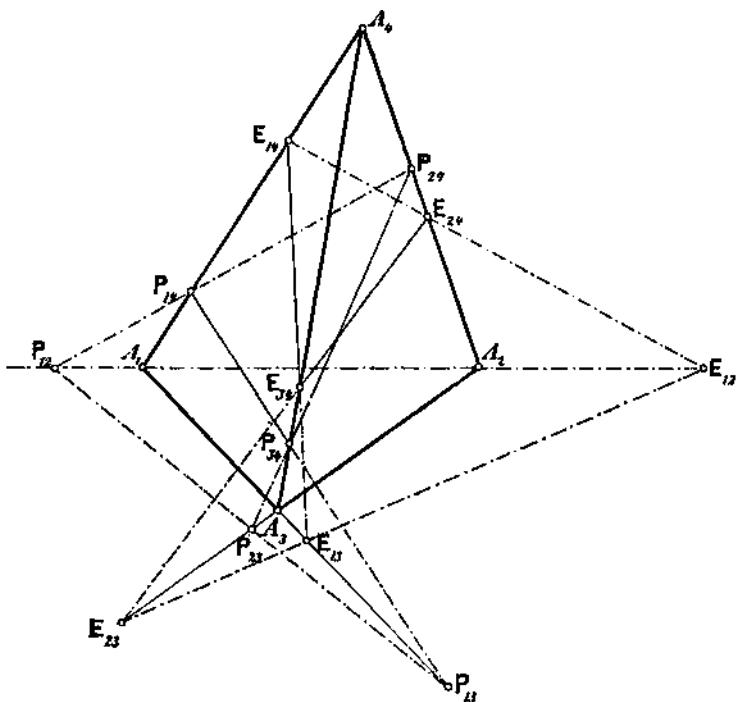


Fig. 10.

Fundamentaltetraeders sind x_1, x_2, x_3, x_4 alle positiv (+ + + +). Überschreitet man, aus dem Tetraeder heraustretend, eine der Ebenen desselben, so ändert diejenige Koordinate, welche sich auf diese Ebene bezieht, ihr Vorzeichen.

Ein Punkt z. B., der in dem von den Verlängerungen der Kanten A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 über A_4 hinaus gebildeten Scheiteldreieck liegt, ist in bezug auf seine Vorzeichen charakterisiert durch die Kombination (—+).

Die Koordinaten einer Ebene.

24. Um eine Ebene π zu bestimmen, gehen wir aus von vier festen Ebenen a_1, a_2, a_3, a_4 , die sich zu dreien in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 schneiden mögen in der Weise, daß A_1 der Ebene a_1 oder A_2, A_3, A_4 gegenüberliegt usw. Eine fünfte feste Ebene ε liefert auf jeder der Kanten des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ einen Schnittpunkt, und zwar auf der Kante $A_1 A_2$ den Punkt E_{12} usw. (Fig. 10). Die beliebige Ebene π liefert ebenso auf den Kanten die Punkte P_{12}, P_{13} usw. Die senkrechten Abstände der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 von den Ebenen ε und π seien mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ und $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ bezeichnet. Auf jeder der Kanten des Tetraeders liegen jetzt vier Punkte und wir drücken wieder die Doppelverhältnisse derselben durch die ε_i und π_i aus; es ist z. B.:

$$\nu_{12} = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} : \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_1 : \varepsilon_1}.$$

Führen wir statt der auftretenden Teilquotienten neue Größen ein vermöge der Gleichungen:

$$(6) \quad \varrho \xi_1 = \frac{\pi_1}{\varepsilon_1}, \quad \varrho \xi_2 = \frac{\pi_2}{\varepsilon_2}, \quad \varrho \xi_3 = \frac{\pi_3}{\varepsilon_3}, \quad \varrho \xi_4 = \frac{\pi_4}{\varepsilon_4},$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= (A_1 A_2 E_{12} P_{12}) = \frac{\xi_2}{\xi_1}, & \nu_{23} &= (A_2 A_3 E_{23} P_{23}) = \frac{\xi_3}{\xi_2}, \\ \nu_{13} &= (A_1 A_3 E_{13} P_{13}) = \frac{\xi_3}{\xi_1}, & \nu_{24} &= (A_2 A_4 E_{24} P_{24}) = \frac{\xi_4}{\xi_2}, \\ \nu_{14} &= (A_1 A_4 E_{14} P_{14}) = \frac{\xi_4}{\xi_1}, & \nu_{34} &= (A_3 A_4 E_{34} P_{34}) = \frac{\xi_4}{\xi_3}. \end{aligned}$$

Zu drei Kanten des Tetraeders, die ein Dreieck bilden, gehören Werte der ν_{ik} , deren Produkt demnach = 1 ist. Dies liefert die Beziehungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \nu_{23} \nu_{34} \nu_{42} &= 1, & \nu_{13} \nu_{24} \nu_{41} &= 1, \\ \nu_{13} \nu_{34} \nu_{41} &= 1, & \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} &= 1. \end{aligned}$$

Sind jetzt die Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und die Ebenen gegeben und wählt man für drei der Größen ν_{ik} , die zu solchen Kanten des Tetraeders gehören, welche durch einen Punkt gehen, beliebige Zahlenwerte, so daß also z. B. $\nu_{14}, \nu_{24}, \nu_{34}$ willkürlich angenommen werden, so sind dadurch auch die Punkte P_{14}, P_{24}, P_{34} auf den drei durch A_4 gehenden Tetraederkanten festgelegt und damit ist die Ebene bestimmt, welche diese drei Punkte verbindet. Die übrigen ν_{ik} ermitteln wir aus den Gleichungen (7). Drei solche Werte der ν_{ik} können also als Koordinaten einer Ebene dienen. Statt dessen kann man auch wieder die Verhältnisse von vier Zahlen, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, geben; dann sind die ν_{ik} ja ebenfalls bestimmt. Die ξ_i bezeichnet man als „homogene“,

„tetrametrische“ oder „projektive“ Ebenenkoordinaten. Die Ebene ε hat Koordinaten, die sich wie 1:1:1:1 verhalten; sie heißt daher die „Einheitsebene,“ während die Ebenen a_1, a_2, a_3, a_4 das Fundamentaltetraeder (F.-Tetraeder) bilden.

Es ergibt sich also

Satz 6. Die tetrametrischen Koordinaten einer Ebene sind proportional den Abständen der Ebene von den Ecken des Fundamentaltetraeders, gemessen durch die entsprechenden Abstände der Einheitsebene.

Die Flächen a_1, a_2, a_3, a_4 des F.-Tetraeders selbst haben die Koordinaten:

$$\begin{array}{lll} \xi_2 = 0, & \xi_3 = 0, & \xi_4 = 0; \\ \xi_3 = 0, & \xi_4 = 0, & \xi_1 = 0; \\ \xi_4 = 0, & \xi_1 = 0, & \xi_2 = 0; \\ \xi_1 = 0, & \xi_2 = 0, & \xi_3 = 0. \end{array}$$

Die jedesmal fehlende Koordinate ist $\neq 0$. Für Flächen durch die Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 des F.-Tetraeders muß eine Koordinate also $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$ oder $\xi_3 = 0$ oder $\xi_4 = 0$ sein.

Die Zahlen ε_i genügen, um die Lage einer Ebene in bezug auf das Fundamentaltetraeder und die Einheitsebene zu bestimmen. Will man aber auch metrische Zusammenhänge darstellen, so muß man in den Gleichungen (6) dem Faktor Q einen bestimmten Wert, am einfachsten den Wert 1, beilegen. Dann werden

$$(8) \quad \xi_1 = \frac{\pi_1}{\varepsilon_1}, \quad \xi_2 = \frac{\pi_2}{\varepsilon_2}, \quad \xi_3 = \frac{\pi_3}{\varepsilon_3}, \quad \xi_4 = \frac{\pi_4}{\varepsilon_4}$$

die „wahren“ Koordinaten der Ebene.

Vereinigte Lage von Punkt und Ebene.

25. Da sowohl ein Punkt im Raume als auch eine Ebene durch die Verhältnisse von 4 Zahlen bestimmt ist, so sagt man, die Punkte und Ebenen des Raumes bilden ein quaternäres Gebiet. Um gleichzeitig Punkte und Ebenen zu betrachten, gehen wir aus von einem Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ dessen Ecken wir als Fundamentalpunkte nehmen, während seine Ebenen $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4$ usf. die Ebenen a_1, a_2 usf. sind.

Wir denken uns nun einen Punkt E (Fig. 11) — etwa im Innern des Tetraeders — beliebig gewählt, dann sind auch seine Projektionen E_1, E_2, E_3, E_4 aus den Ecken und seine Projektionen E_{12}, E_{13} usf. aus den Kanten bestimmt. Wir konstruieren nun zu jedem dieser Punkte E_{ik} den vierten harmonischen $\mathbf{E}_{ik}$ in bezug auf die beiden Tetraederecken A_i und A_k . Dies läßt sich auch in unserer Figur ausführen. Zum Punkte E_{23} z. B. erhalten wir den harmonischen in bezug auf A_2 und A_3 , indem wir die **Verbindungsline** E_2E_3 mit A_2A_3 **zum** Schnitte **bringen**. Dies ergibt

sich ja sofort aus dem Viereck $A_2A_3E_2E_3$, dessen Ebene in E_{14} der Kante A_1A_4 begegnet. Die sechs auf diese Weise zu konstruierenden Punkte E_{ik} liegen nun in einer Ebene. Rein geometrisch folgt dies ohne weiteres aus unserer Figur. Denn da die Verbindungslinien A_1E_1

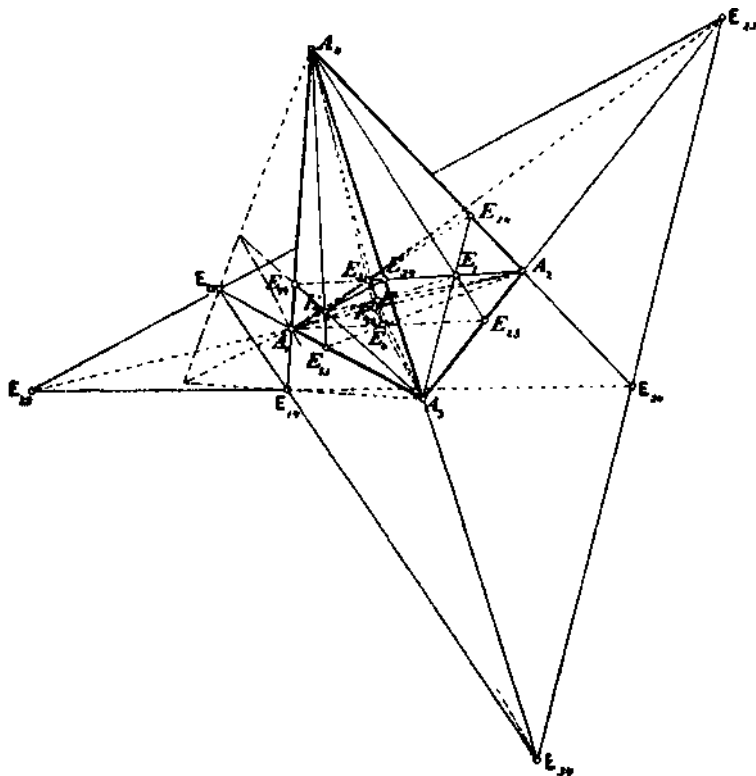


Fig. 11.

A_2E_2 , A_3E_3 , A_4E_4 durch den Punkt E gehen, so sind die beiden Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $E_1E_2E_3E_4$ perspektiv.

Für perspektive Tetraeder gilt aber der Satz, daß die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen (wie $A_1A_2A_3$ und $E_1E_2E_3$ usw.) in einer Ebene liegen.

Nennen wir die Ebene dieser Punkte E_{ik} die Harmonikalebene ε , so wollen wir sagen, daß der Punkt E und diese Ebene ε durch das Tetraeder überall harmonisch getrennt werden, ganz ebenso wie die Harmonikale in bezug auf ein Dreieck die analoge Eigenschaft hatte (vgl. 14.).

Den Punkt E und diese Harmonikalebene ε wählen wir nun als Einheitspunkt und als Einheitsebene.

Ein Punkt P habe nun die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 , eine Ebene π die Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Welche Beziehung muß zwischen den x_i und ξ_i erfüllt sein, wenn der Punkt P in der Ebene π liegen soll?

Wir haben für den Punkt P nach 22.:

$$(9) \quad \begin{cases} (A_1 A_4 E_{14} P_{14}) = \frac{x_1}{x_4}, \\ (A_2 A_4 E_{24} P_{24}) = \frac{x_2}{x_4}, \\ (A_3 A_4 E_{34} P_{34}) = \frac{x_3}{x_4} \text{ usf.,} \end{cases}$$

ferner für die Ebene π nach 24.:

$$(10) \quad \begin{cases} (A_1 A_4 E_{14} P_{14}) = \frac{\xi_4}{\xi_1}, \\ (A_2 A_4 E_{24} P_{24}) = \frac{\xi_4}{\xi_2}, \\ (A_3 A_4 E_{34} P_{34}) = \frac{\xi_4}{\xi_3} \text{ usf.} \end{cases}$$

Falls ε die Harmonikalebene zu E ist, dann gelten die Beziehungen:

$$\begin{cases} (A_1 A_4 E_{14} E_{14}) = -1, \\ (A_2 A_4 E_{24} E_{24}) = -1, \\ (A_3 A_4 E_{34} E_{34}) = -1. \end{cases}$$

Für die fünf auf der Kante $A_1 A_4$ gelegenen Punkte $A_1, A_4, E_{14}, P_{14}, E_{14}$ haben wir dann nach (7) von 5.:

$$(A_1 A_4 E_{14} P_{14}) (A_1 A_4 P_{14} E_{14}) (A_1 A_4 E_{14} E_{14}) = 1$$

Ersetzen wir das erste Doppelverhältnis vermöge der Beziehung (8) von 5.:

$$\frac{(A_1 A_4 E_{14} P_{14})}{(A_1 A_4 E_{14} P_{14})} = (A_1 A_4 P_{14} P_{14})$$

und führen die obigen Werte ein, so erhalten wir die erste der drei folgenden Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} -\frac{\xi_1 x_1}{\xi_4 x_4} = (A_1 A_4 P_{14} P_{14}), \text{ ebenso ist:} \\ -\frac{\xi_2 x_2}{\xi_4 x_4} = (A_2 A_4 P_{24} P_{24}) \text{ und:} \\ -\frac{\xi_3 x_3}{\xi_4 x_4} = (A_3 A_4 P_{34} P_{34}). \end{cases}$$

Jetzt ist die Bedingung einzuführen, daß der Punkt P in der Ebene π liegen soll. Dann muß (Fig. 12) z. B. die Verbindungslinie PP_{14} der Ebene π angehören, ihr Schnittpunkt P'_{14} mit der Ebene $A_2 A_3 A_4$ muß folglich auf der Schnittlinie $P_{24} P_{34}$ gelegen sein. Projizieren wir den Punkt P'_{14} aus A_2 und A_3 nach X und Y , so können wir auf das Drei-

eck $A_2 A_3 A_4$, den Punkt P'_{14} und die Gerade $P_{24} P_{34}$ in 18. Gleichung (16) abgeleitete Beziehung anwenden. Demnach ist:

$$(12) \quad (A_2 A_4 P_{24} Y) + (A_4 A_3 X P_{34}) = 1$$

Ersetzt man aber vermittels der Beziehungen (7) in 5.:

$$(A_2 A_4 P_{24} Y) (A_2 A_4 Y P_{24}) (A_2 A_4 P_{24} P_{34}) = 1 \text{ und} \\ (A_4 A_3 X P_{34}) (A_4 A_3 P_{34} P_{34}) (A_4 A_3 P_{34} X) = 1$$

die in (12) stehenden Doppelverhältnisse und beachtet (siehe Fig. 12), daß auch noch

$$(A_2 A_4 Y P_{24}) = (P_{23} A_4 P'_{14} P_1) = \\ = (P_{14} A_4 P_{14} A_1)$$

und

$$(A_4 A_3 X P_{34}) = (A_4 P_{23} P_1 P'_{14}) = \\ = (A_4 P_{14} A_1 P_{14}),$$

so erhält man aus (12) nach Umformung:

$$1 = (A_4 P_{14} P_{14} A_1) [(A_2 A_4 P_{24} P_{24}) + \\ + (A_3 A_4 P_{34} P_{34})]$$

oder

$$(A_4 P_{14} A_1 P_{14}) = (A_2 A_4 P_{24} P_{24}) + \\ + (A_3 A_4 P_{34} P_{34})$$

oder

$$(13) \quad \begin{cases} 1 = (A_1 A_4 P_{14} P_{14}) + \\ + (A_2 A_4 P_{24} P_{24}) + \\ + (A_3 A_4 P_{34} P_{34}) \end{cases}$$

In Verbindung mit den Formeln (11) gibt dies als die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$(14) \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

Im folgenden wird immer vorausgesetzt werden, daß E und e sich in der angenommenen harmonischen Lagenbeziehung befinden.

Sind nun a_1, a_2, a_3, a_4 die Koordinaten eines Punktes und soll eine Ebene mit den Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ durch diesen Punkt hindurchgehen, so müssen die ξ_i stets der Bedingung genügen:

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung des Punktes $(a_1 a_2 a_3 a_4)$, sofern er als Einhüllende (Envelope) aller durch ihn hindurchgehenden Ebenen aufgefaßt werden kann.

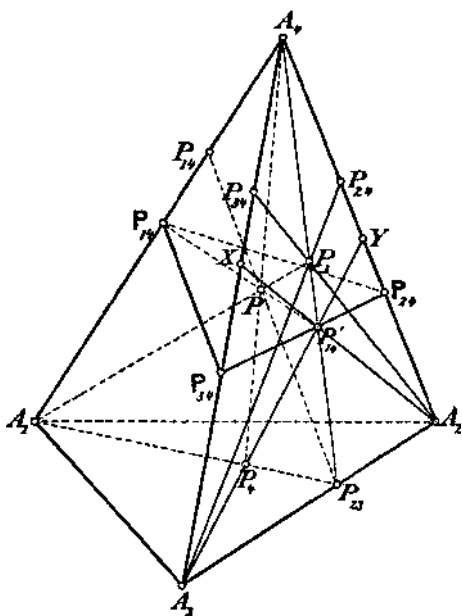


Fig. 12.

Hat andererseits eine feste Ebene die Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, so müssen die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines beliebigen in ihr gelegenen Punktes stets die Bedingung erfüllen:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0.$$

Also ist dies die Gleichung der Ebene ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$). Der Einheitspunkt hat natürlich die Gleichung:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$$

und die Einheitsebene wird:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Nachdem so bewiesen ist, daß eine lineare Gleichung in den x_i oder ξ_i eine Ebene oder einen Punkt vorstellt, ist leicht zu erkennen, daß eine homogene Gleichung vom Grade n in den x_i

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

eine Fläche n^{ter} Ordnung darstellt, die mit einer beliebigen Ebene eine Kurve n^{ter} Ordnung als Schnitt liefert.

Eine homogene Gleichung vom n^{ten} Grade in den ξ_i

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$$

wird geometrisch durch eine Fläche n^{ter} Klasse dargestellt, die alle die n^2 Ebenen umhüllen, deren Koordinaten der Gleichung $\varphi = 0$ genügen. Diejenigen unter diesen Ebenen, welche überdies durch einen beliebigen Punkt hindurchgehen, bilden einen Kegel von der n^{ten} Klasse, den von diesem Punkte an die Fläche φ gehenden „Berührungskegel“ oder „Tangentialkegel“.

Die unendlich ferne Ebene.

26. Wir haben in 23. gesehen, daß zwischen den wahren Koordinaten eines jeden im endlichen Raum gelegenen Punktes die Beziehung (4) bestand. Schreiben wir jetzt die Gleichung an:

$$(15) \quad e_1 f_1 x_1 + e_2 f_2 x_2 + e_3 f_3 x_3 + e_4 f_4 x_4 = 0$$

so kann man sicher n^2 Verhältnisse zwischen den x_i angeben, die dieser Gleichung genügen; dabei müssen wenigstens zwei x_i unendlich groß sein. Da für alle im Endlichen gelegenen Punkte die Gleichung (4) von 23. gelten muß, so müssen wir für diese nicht mehr im Endlichen liegenden Punkte eine neue Bezeichnung einführen und nennen sie „uneigentliche“ oder „unendlich ferne“ Punkte. Da ferner die Gleichung (15) auch eine lineare ist, so sagen wir, „siestelledie unendlich ferne oder uneigentliche Ebene des Raumes dar“. Damit kann in keiner Weise eine geometrische Vorstellung verbunden werden. Es handelt sich vielmehr bloß um eine Ausdrucks-

weise, die es uns ermöglicht, uneigentliche Elemente formal ebenso zu behandeln wie eigentliche Elemente. Die unendlich ferne Ebene kann auch in der Form geschrieben werden:

$$(16) \quad \frac{e_1}{h_1} \cdot x_1 + \frac{e_2}{h_2} x_2 + \frac{e_3}{h_3} x_3 + \frac{e_4}{h_4} x_4 = 0.$$

Übergang von Tetraeder-Koordinaten zu schiefwinkligen.

27. Der späteren Anwendung wegen soll noch erörtert werden, wie man von Tetraeder-Koordinaten zu gewöhnlichen (schiefwinkligen oder

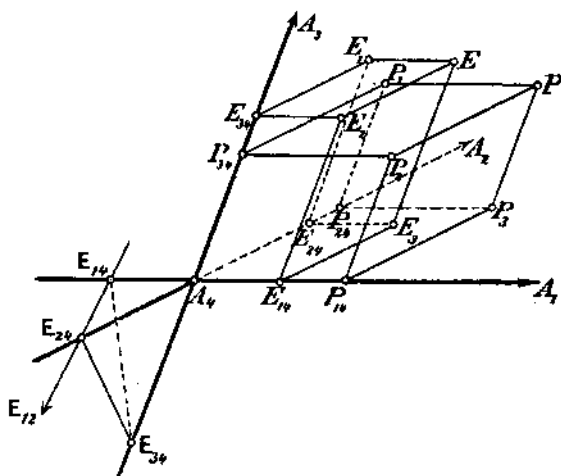


Fig. 13.

rechtwinkligen) Koordinaten übergeht. Wir lassen zu diesem Zwecke eine Ebene des F.-Tetraeders, etwa α_4 oder $A_1A_2A_3$, mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen.

Wie in 22. können auch jetzt wieder die Größen n_{ik} gebildet werden. Setzen wir (Fig. 13):

$$x = \frac{A_4 P_{14}}{A_4 E_{14}}, \quad y = \frac{A_4 P_{24}}{A_4 E_{24}}, \quad z = \frac{A_4 P_{34}}{A_4 E_{34}},$$

so wird:

$$n_{14} = (A_1 A_4 E_{14} P_{14}) = \frac{A_4 P_{14}}{A_4 E_{14}} = x = \frac{x_1}{x_4},$$

$$n_{24} = (A_2 A_4 E_{24} P_{24}) = \frac{A_4 P_{24}}{A_4 E_{24}} = y = \frac{x_2}{x_4},$$

$$n_{34} = (A_3 A_4 E_{34} P_{34}) = \frac{A_4 P_{34}}{A_4 E_{34}} = z = \frac{x_3}{x_4},$$

$$n_{12} = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}) = \frac{A_4 E_{34}}{A_4 E_{14}} : \frac{A_4 P_{24}}{A_4 P_{14}} = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{x_2} \text{ (vgl. 19.)}.$$

usf.

Es ist wieder z. B.:

$$n_{12} n_{23} n_{31} = 1 \text{ usf.}$$

Der Einheitspunkt war bis jetzt noch ganz willkürlich. Wählen wir ihn so, daß:

$$A_4 E_{14} = A_4 E_{24} = A_4 E_{34} = +1,$$

so werden:

$$x = A_4 P_{14}, \quad y = A_4 P_{24}, \quad z = A_4 P_{34}$$

die schiefwinkligen oder Cartesischen Koordinaten des Punktes P.

Urn also von dem Fundamentaltetraeder mit der unendlich fernen Seitenfläche $A_1 A_2 A_3$ ($x_4 = 0$) zu dem schiefwinkligen Koordinatensystem, dessen Ursprung die Ecke A_4 ist und dessen Achsen mit den durch diese Ecke gehenden Tetraederkanten zusammenfallen, haben wir die Formeln zu benutzen:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Will man auch die Umformung der Ebenenkoordinaten verfolgen, so brauchen wir wieder die Harmonikalebene des Punktes E. Für diese wird nach 25. (s. auch Fig. 13):

$$E_{14} A_4 = A_4 E_{14}, \quad E_{24} A_4 = A_4 E_{24}, \quad E_{34} A_4 = A_4 E_{34}.$$

Eine beliebige Ebene möge die Punkte $P_{12}, P_{13}, \dots$ auf den Kanten $A_1 A_2, A_1 A_3, \dots$ ausschneiden. Wir setzen ferner:

$$u = \frac{A_4 E_{14}}{A_4 P_{14}}, \quad v = \frac{A_4 E_{24}}{A_4 P_{24}}, \quad w = \frac{A_4 E_{34}}{A_4 P_{34}}.$$

Die Berechnung der Größen v_{ilt} kann wie früher (24.) erfolgen, wobei auch die Bemerkungen von 20. zu beachten sind. Es wird dann:

$$v_{14} = (A_1 A_4 E_{14} P_{14}) = \frac{A_4 P_{14}}{A_4 E_{14}} = \frac{1}{u} = \frac{\xi_4}{\xi_1},$$

$$v_{24} = (A_2 A_4 E_{24} P_{24}) = \frac{A_4 P_{24}}{A_4 E_{24}} = \frac{1}{v} = \frac{\xi_4}{\xi_2},$$

$$v_{34} = (A_3 A_4 E_{34} P_{34}) = \frac{A_4 P_{34}}{A_4 E_{34}} = \frac{1}{w} = \frac{\xi_4}{\xi_3},$$

$$v_{12} = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}) = \frac{A_4 E_{24}}{A_4 P_{24}} : \frac{A_4 E_{14}}{A_4 P_{14}} = \frac{v}{u} = \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

usf.

Wieder gelten die Beziehungen:

$$v_{12} v_{24} v_{41} = 1 \text{ usf.}$$

Die oben formulierte Annahme für den Einheitspunkt hat zur Folge, daß:

$$A_4 E_{14} = A_4 E_{24} = A_4 E_{34} = -1$$

so daß dann:

$$u = -\frac{1}{A_4 P_{14}}, \quad v = -\frac{1}{A_4 P_{24}}, \quad w = -\frac{1}{A_4 P_{34}}$$

die Plücker'schen Koordinaten der Ebene werden.

Den Übergang vermitteln also die Formeln:

$$u = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad v = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad w = \frac{\xi_3}{\xi_4}.$$

Die Bedingung dafür, daß der Punkt x, y, z in der Ebene u, v, w liegt, wird dann nach 25.:

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

§ 6. Das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe.

28. Betrachten wir vier Ebenen eines Ebenenbüschels:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \alpha_x - \lambda_1 \beta_x = 0, & A_3 &\equiv \alpha_x - \lambda_3 \beta_x = 0, \\ A_2 &\equiv \alpha_x - \lambda_2 \beta_x = 0, & A_4 &\equiv \alpha_x - \lambda_4 \beta_x = 0 \end{aligned}$$

und fragen wir nach dem Doppelverhältnis dieser vier Ebenen, das wir kurz in $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ bezeichnen.

Die in 11. im binären Gebiete schon durchgeführte Betrachtung liefert uns auch hier sofort das Resultat, daß dieses Doppelverhältnis gegeben ist durch:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Die entsprechenden Überlegungen für die Punktreihe brauchen bloß angedeutet zu werden. Sind nämlich:

$$\begin{aligned} a_x &\equiv a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0 \\ b_x &\equiv b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3 + b_4 \xi_4 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen zweier Punkte A und B, so stellt:

$$a_x - \lambda b_x = 0$$

einen Punkt C auf der Verbindungslinie AB dar und für jede durch C gehende Ebene ist das Verhältnis ihrer senkrechten Abstände von A und B gegeben durch den Quotienten AC:BC. Analytisch läßt sich dieser Ausdruck bis auf einen konstanten Faktor durch den Parameter λ des Punktes C darstellen. Daraus folgt, daß sich auch das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Punktreihe ganz ebenso durch die Parameter dieser Punkte ausdrücken läßt. Um endlich das Strahlenbüschel zu erhalten, hat man lediglich statt der Gleichung einer Ebene die einer Geraden einzuführen. Die Elemente des Grundgebildes erster Stufe werden dabei immer durch die verschiedenen Werte eines Zahlen-

faktors λ geliefert, den wir den Parameter nennen. Es folgt also ganz allgemein

Satz 7. *Sind vier Elemente eines Grundgebildes erster Stufe gegeben durch:*

$$\begin{aligned}\alpha_x - \lambda_1 \beta_x &= 0, & \alpha_x - \lambda_3 \beta_x &= 0, \\ \alpha_x - \lambda_2 \beta_x &= 0, & \alpha_x - \lambda_4 \beta_x &= 0,\end{aligned}$$

so ist das Doppelverhältnis dieser vier Elemente:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Die Verwendung des Doppelverhältnisses (Wurfes) zur Bestimmung der Elemente eines einförmigen Grundgebildes findet sich schon bei v. Staudt; die hier durchgeführte Darstellung der Koordinaten-Bestimmung mittels projektiver Koordinaten rührt von Fiedler her.³⁾

Zweiter Abschnitt.

Die projektive Transformation an der Geraden und im Strahlenbüschel.

Drittes Kapitel.

Die projektive Verwandtschaft zwischen getrennten Trägern.

§ 7. Die projektive Beziehung als lineare Transformation.

Erzeugung der projektiven Verwandtschaft.

29. Die im ersten Abschnitte für die Grundgebilde erster Stufe (für das binäre Gebiet) durchgeführte Koordinaten-Bestimmung setzt uns in den Stand, jedem Element eines Grundgebildes gewisse Zahlenwerte zuzuordnen und umgekehrt zu beliebig gegebenen Zahlenwerten ein Element zu bestimmen, das ihnen entspricht. Es hat sich gezeigt, daß in den Grundgebilden erster, zweiter und dritter Stufe zwei, drei und vier Zahlen oder homogene Koordinaten zur Bestimmung eines Elementes notwendig und hinreichend sind.

Wir benutzen dies, um jetzt zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe eine Beziehung herzustellen, bei welcher jedem Element des ersten Grundgebildes ein einziges Element des zweiten Grundgebildes zugeordnet ist und ebenso auch jedem Element des zweiten Grundgebildes ein und nur ein Element des ersten Grundgebildes entspricht. Eine solche Beziehung soll eine „eineindeutige“ heißen. Zu diesem Zwecke beziehen wir jedes der beiden Grundgebilde auf ein homogenes Koordinatensystem und ordnen diejenigen Elemente in den beiden Grundgebilden einander zu, die den gleichen Koordinaten entsprechen. Die auf diese Weise zu begründenden „Verwandtschaften“ der Grundgebilde gleicher Stufe werden als projektive bezeichnet und sie stellen die einfachsten eineindeutigen Beziehungen dieser Gebilde vor.

Wir beginnen mit den Grundgebilden erster Stufe und denken uns etwa zwei Punktreihen g und g' gegeben. Auf g sind A_1, A_2, E , auf g' die Punkte A'_1, A'_2, E' je zur Durchführung einer Koordinaten-

Bestimmung beliebig angenommen. Jeden Punkt P von g legen wir fest durch das Doppelverhältnis:

$$(A_1 A_2 E P) = \frac{x_2}{x_1} = \xi.$$

Er hat die projektiven Koordinaten (x_1, x_2) .

Für die andere Punktreihe gilt die entsprechende Beziehung:

$$(A'_1 A'_2 E' P') = \frac{x'_2}{x'_1} = \xi',$$

wobei der Punkt P' durch die projektiven Koordinaten (x'_1, x'_2) bestimmt ist. Unserer Absicht entsprechend ordnen wir nun solche Punkte auf g und g' einander zu, die auf diesen Trägern die gleichen Koordinaten haben. Damit ist die Beziehung eine eindeutige. Irgend einem Punkt P auf g gehören ja zwei Koordinaten zu und zu diesen gehört auf g' ein und nur ein Punkt P' als der entsprechende.

Analytisch besagt dies, daß zwischen den Koordinaten (x_1, x_2) eines Punktes P und den Koordinaten (x'_1, x'_2) des entsprechenden Punktes P' die Beziehung besteht:

$$(1) \quad x_2 : x_1 = x'_2 : x'_1$$

oder:

$$(2) \quad \varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2;$$

ϱ ist dabei ein Proportionalitätsfaktor. In der Tat kommt es ja bloß auf das Verhältnis der Koordinaten x_1 und x_2 an.

Natürgemäß drängt sich nun die Frage auf, wie sich die Punkte A_1 , A_2 , E und A'_1 , A'_2 , E' in diese Zuordnung einfügen. Der Quotient $\frac{x_2}{x_1}$ nimmt aber sowohl für die drei erstgenannten wie für die letzteren die Werte ∞ , 0, 1 an, also entsprechen den Punkten A_1 , A_2 , E die Punkte A'_1 , A'_2 , E' in unserer Beziehung. Ferner gilt auch die Beziehung:

$$(A_1 A_2 E P) = (A'_1 A'_2 E' P')$$

so daß mithin je zwei entsprechende Punkte P und P' mit den das Koordinatensystem darstellenden Punkten das gleiche Doppelverhältnis bilden. Doch ist dies nur ein spezieller Fall einer allgemeineren Eigenschaft. Sind nämlich irgend vier Punkte X , Y , Z , T von g gegeben durch die Werte:

$$(A_1 A_2 E X) = \xi = \frac{x_2}{x_1}, \quad (A_1 A_2 E Z) = \zeta = \frac{z_2}{z_1},$$

$$(A_1 A_2 E Y) = \eta = \frac{y_2}{y_1}, \quad (A_1 A_2 E T) = \tau = \frac{t_2}{t_1},$$

so ist für die entsprechenden Punkte X' , Y' , Z' , T' :

$$(A'_1 A'_2 E' X') = \xi \quad \text{usf.}$$

und es ergibt sich nach Formel (9) von 5.:

$$(XYZT) = (X'Y'Z'T') = \frac{\xi - \zeta}{\eta - \zeta} : \frac{\xi - \tau}{\eta - \tau}$$

Irgend vier Punkte und ihre vier entsprechenden bilden also das gleiche Doppelverhältnis.

Statt zweier Punktreihen hätten wir ebenso auch zwei Strahlenbüschel oder ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe in der eben durchgeführten Art aufeinander beziehen können.

Zwei Grundgebilde erster Stufe, die Element für Element eineindeutig so aufeinander bezogen sind, daß das Doppelverhältnis von irgend vier Elementen des einen gleich dem Doppelverhältnis der vier entsprechenden Elemente des anderen ist, heißen projektiv. Das Zeichen dafür ist $\overline{\wedge}$.

Da nun die Annahme der Punkte A_1, A_2, E und A'_1, A'_2, E' genügt, um die Beziehung zu bestimmen, und da diese Punkte in keiner Weise ausgezeichnet sind, so folgt noch

Satz 8. Die projektive Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe ist vollständig bestimmt, wenn man irgend drei Elemente des einen Oebildes annimmt und ihnen drei beliebige Elemente des anderen Oebildes als entsprechende zuordnet.

Die lineare Substitution.

30. Die durch die Gleichungen (2) gegebene projektive Beziehung zeigt als erste charakteristische Eigenschaft die Eineindeutigkeit in der Zuordnung entsprechender Elemente. Dies eineindeutige Entsprechen bleibt nun auch dann noch erhalten, wenn wir statt der Gleichungen (2) die etwas allgemeineren wählen:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \varrho x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

wobei die a_{ik} ganz willkürliche Zahlenkoeffizienten sein sollen. Denn zu jedem Punkte (x_1, x_2) des Trägers g liefern diese Gleichungen (3) ja unmittelbar den entsprechenden Punkt (x'_1, x'_2) auf g' . Andererseits können wir das System (3) auch nach x_1, x_2 auflösen und erhalten:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho} x_1 = \frac{+a_{22} x'_1 - a_{12} x'_2}{D}, \\ \frac{1}{\varrho} x_2 = \frac{-a_{21} x'_1 + a_{11} x'_2}{D}. \end{cases}$$

Dabei ist:

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Soil die Auflösung der Gleichungen (3) möglich sein, so muß $D \neq 0$ sein.

Wäre $D = 0$, also $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = k$, so wäre die rechte Seite der zweiten Gleichung von (3) das k -fache der rechten Seite der ersten Gleichung, die Gleichungen (3) wären nicht voneinander unabhängig. Diesen Ausnahmefall wollen wir einstweilen ausschließen.

Die Gleichungen (3) oder (4) stellen eine „homogene, lineare Substitution“ vor und D nennen wir die „Determinante der Substitution“, die zunächst von Null verschieden sein soil.

Auch durch die Gleichungen (3) oder (4) wird eine Verwandtschaft zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe hergestellt, die wir als eine lineare Transformation bezeichnen, weil die Gleichungen (3) und (4) linear, d. h. vom ersten Grade sind.

Diese Verwandtschaft ist aber, wie jetzt gezeigt werden soll, identisch mit der bereits behandelten projektiven Beziehung. Denn drücken wir das Doppelverhältnis von vier beliebigen Punkten X, Y, Z, T , wie wir sie in 29. angenommen haben, durch die homogenen Koordinaten aus, so treten nach 9. nur Determinanten auf, wie z. B.:

$$(xz) = x_2 z_1 - x_1 z_2 = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

Die entsprechenden Punkte $(x'_1, x'_2), (z'_1, z'_2)$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2, & \varrho z'_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2, \\ \varrho x'_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2, & \varrho z'_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2. \end{aligned}$$

Bilden wir z. B. die Determinante:

$$(x' z') = \begin{vmatrix} z'_1 & z'_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varrho^2} \begin{vmatrix} a_{11} z_1 + a_{12} z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{vmatrix}$$

so folgt nach dem bekannten Multiplikationssatz für Determinanten:

$$(x' z') = \frac{1}{\varrho^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

oder:

$$(x' z') = \frac{D}{\varrho^2} \cdot (xz)$$

In dem Ausdruck für $D(X' Y' Z' T')$ fällt demnach der auftretende Faktor $\frac{D}{\varrho^2}$ heraus und man erhält:

$$(XYZT) = (X' Y' Z' T')$$

Die Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Quadrupel war aber als Definition der Projektivität (29.) aufgestellt worden; wir haben also bewiesen:

Satz 9. Die allgemeine lineare Transformation (3) stellt eine projektive Beziehung der betreffenden Grundgebilde erster Stufe dar.

Bemerkung. Wird eine eindeutige Beziehung zweier Grundgebilde durch lineare Gleichungen von der Form (3) gegeben, so folgt also daraus schon die Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Quadrupel. Dagegen kann man nicht behaupten, daß jede eindeutige Beziehung der Grundgebilde erster Stufe eine Projektivität sei. Vielmehr kann man andere eindeutige Beziehungen zwischen den reellen Elementen zweier Grundgebilde herstellen, die nicht durch lineare Gleichungen von der Form (3) vermittelt werden.

Darstellung in nicht homogenen Koordinaten.

31. Wollen wir statt der homogenen Koordinaten metrische einführen, so haben wir das Verhältnis $\frac{x_2}{x_1}$ zu bilden. Bei entsprechender Wahl von A_1, A_2, E (vgl. 7.) liefert dieser Quotient die gewöhnliche Abszisse. Dividieren wir also die zwei Gleichungen (3), so wird:

$$\xi' = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{a_{21} + a_{22} \frac{x_2}{x_1}}{a_{11} + a_{12} \frac{x_2}{x_1}} = \frac{a_{21} + a_{22} \xi}{a_{11} + a_{12} \xi}$$

Es ergibt sich demnach

Satz 1ft. In nicht homogenen Koordinaten wird die projektive Beziehung durch eine linear-gebrochene Funktion zum Ausdruck gebracht.

Multiplizieren wir die Gleichung aus, so erhalten wir:

$$a_{12} \xi \xi' - a_{22} \xi + a_{11} \xi' - a_{21} = 0$$

Statt der Koeffizienten a_{ik} führen wir bei dieser Form der Gleichung bequemer andere ein und schreiben:

$$(5) \quad a \xi \xi' + b \xi + c \xi' + d = 0$$

Aus dieser Beziehung ergeben sich dann als Ausdrücke für ξ und ξ' :

$$(6) \quad \xi = -\frac{c \xi' + d}{a \xi' + b}$$

$$(6a) \quad \xi' = -\frac{b \xi + d}{a \xi + c}$$

Die Gleichung (5), welche mit den Gleichungen (6) und (6 a) gleichwertig ist, enthält jede der Variablen bloß im ersten Grade. Sie heißt deswegen bilinear in bezug auf diese Größen. Auch eine solche bilineare Gleichung kann also zur Darstellung einer projektiven Beziehung verwendet werden. Die für die projektive Beziehung charakteristische Gleichheit des Doppel-

verhältnisses entsprechender Quadrupel von Elementen folgt auch aus der Gleichung (6 a) ohne weiteres.

Es seien nämlich $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die metrischen Koordinaten von irgend vier Elementen, $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$ die der vier entsprechenden Elemente, so bestehen die Gleichungen:

$$\xi'_1 = -\frac{b\xi_1 + d}{a\xi_1 + c}, \quad \xi'_3 = -\frac{b\xi_3 + d}{a\xi_3 + c}$$

Nachzuweisen ist die Beziehung:

$$(7) \quad \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} : \frac{\xi'_1 - \xi'_3}{\xi'_2 - \xi'_3} = \frac{\xi_1 - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} : \frac{\xi_1 - \xi_4}{\xi_2 - \xi_4}$$

Eine leichte Rechnung ergibt aber:

$$\xi'_1 - \xi'_3 = \frac{(ad - bc)(\xi_1 - \xi_3)}{(a\xi_1 + c)(a\xi_3 + c)}$$

ebenso:

$$\xi'_2 - \xi'_3 = \frac{(ad - bc)(\xi_2 - \xi_3)}{(a\xi_2 + c)(a\xi_3 + c)} \text{ usf.}$$

Daraus leitet man aber unmittelbar die Gleichung (7) ab.

Die Ausartung der projektiven Beziehung.

82. Auch in den letzten Rechnungen trat wieder die Determinante $ad - bc$ auf, der in der homogenen Schreibweise der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ entsprach und von dem wir voraussetzten, daß er von Null verschieden sei. Wir wollen uns jetzt darüber klar werden, was es bedeutet, wenn die Determinante der Substitution verschwindet.

Ist $ad - bc = 0$ oder:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und bezeichnen wir den Wert dieser Quotienten mit $\frac{\gamma}{\delta}$, so können wir setzen:

$$\begin{aligned} a &= \alpha \gamma, & c &= \beta \gamma, \\ b &= \alpha \delta, & d &= \beta \delta. \end{aligned}$$

Die Gleichung (5) geht dann aber über in:

$$(8) \quad (\alpha \xi + \beta) (\gamma \xi' + \delta) = 0.$$

Es zerfällt demnach die bilineare Gleichung in zwei lineare Faktoren, von denen der eine bloß ξ , der andere bloß ξ' enthält. Setzen wir $\xi = -\frac{\beta}{\alpha}$,

so wird die Gleichung (8) stets erfüllt, während ξ' noch jeden beliebigen Wert annehmen kann. Andererseits genügt es, dem ξ' den Wert $\xi' = -\frac{\delta}{\gamma}$ zu geben; die Gleichung wird dann befriedigt, ganz unabhängig von dem Werte der Größe ε .

Die Beziehung der beiden Grundgebilde ist folglich eine derartige, daß in jedem derselben ein ausgezeichnetes (singuläres) Element vorhanden ist. Diesem Elemente entsprechen alle Elemente des anderen Gebildes. Eine solche uneigentliche projektive Beziehung heißt eine „ausgeartete“ oder „singuläre“ und wir können sagen:

Satz 11. *Das Verschwinden der Determinante der linearen Substitution ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Ausartung der projektiven Beziehung.*

Um davon auch eine geometrische Anschauung zu gewinnen, schneiden wir etwa ein Strahlenbüschel mit einer beliebigen Geraden, die in seiner Ebene liegt. Die entstehende Punktreihe und das Strahlenbüschel sind perspektiv. Bringen wir beide Gebilde aus ihrer Lagenbeziehung, ohne die Zuweisung der Elemente zu ändern, so sind beide Gebilde projektiv. Schneiden wir aber das Strahlenbüschel mit einer Geraden seiner Ebene, die überdies durch den Mittelpunkt (Scheitel) des Strahlenbüschels geht und verfahren im übrigen ganz ebenso, so erhalten wir eine ausgeartete Projektivität zwischen Punktreihe und Strahlenbüschel.

Die projektive Beziehung zweier Punktreihen.

33. Als Beispiel werde eine X -Achse auf eine X' -Achse projektiv bezogen durch die Gleichung:

$$a x x' + b x + c x' + d = 0.$$

Es ist dann:

$$x = -\frac{c x' + d}{a x' + b}, \quad x' = -\frac{b x + d}{a x + c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Für } x = \infty \text{ wird } x' = -\frac{b}{a}, \\ \text{für } x' = \infty \text{ wird } x = -\frac{c}{a}. \end{array} \right.$$

Diese im Endlichen liegenden Punkte sind die „Fluchtpunkte“ der beiden Reihen.

Würde man die x und x' von entsprechenden Punkten der projektiven Beziehung aus rechnen, so müßte für $x = 0$ auch $x' = 0$ werden, also wäre $d = 0$. Die Beziehung:

$$(9) \quad a x x' + b x + c x' = 0$$

stellt demnach auch noch eine ganz allgemeine Projektivität vor.

Sollen sich in den beiden Punktreihen die unendlich fernen Punkte entsprechen, so muß für $x =$ auch $x' =$ werden; dividieren wir also Gleichung (9) vorerst durch $x \ x'$ so ist diese Forderung nur erfüllt, wenn auch $a = 0$ ist. Die obige Gleichung nimmt dann die Form an:

$$b \ x + c \ x' = 0.$$

Man nennt die durch diese Gleichung dargestellten Punktreihen ähnlich, weil je zwei entsprechende Strecken in konstantem Verhältnis stehen. Das folgt für zwei je vom Koordinatenanfang ausgehende und also auch für beliebige Strecken direkt aus der Gleichung:

$$\frac{x}{x'} = -\frac{c}{b}$$

Ist endlich $-\frac{c}{b} = 1$, so sind die Punktreihen kongruent.

§ 8. Die projektive Beziehung in der Parameterdarstellung.

Bilineare Gleichung zwischen den Parametern.

34. Die bilineare Gleichung, die, wie wir soeben sahen, als andere Form der linearen Substitution die Projektivität der Grundgebilde erster Stufe analytisch zum Ausdruck bringt, kann zu diesem Zwecke in noch allgemeinerer Weise verwendet werden, wenn wir uns die Grundgebilde in Parameterform (vgl. 10.) geben.

Es seien:

$$a_x = 0, \quad b_x = 0$$

zwei Elemente eines Grundgebildes erster Stufe (z. B. zwei Punkte) und dann durch:

$$a_x - \lambda b_x = 0$$

das Grundgebilde selbst (speziell also die Punktreihe) in Parameterform gegeben, so daß der Parameter λ durch seine verschiedenen Werte die einzelnen Elemente des Grundgebildes liefert.

Ein zweites Grundgebilde erster Stufe sei gegeben durch die Gleichungen:

$$a_{x'} = 0, \quad b_{x'} = 0, \\ a_{x'} - \lambda' b_{x'} = 0.$$

Wenn nun zwischen den Parametern λ und λ' eine bilineare Beziehung besteht:

$$(1) \quad a \lambda \lambda' + b \lambda + c \lambda' + d = 0,$$

die auch in den Formen:

$$(2) \quad \lambda = -\frac{c \lambda' + d}{a \lambda' + b}, \quad \lambda' = -\frac{b \lambda + d}{a \lambda + c}$$

geschrieben werden kann, so sind dadurch zunächst die Parameterwerte λ und λ' einander eineindeutig zugeordnet. Da weiter die Elemente eines jeden Grundgebildes den Parameterwerten wiederum eineindeutig entsprechen, so gibt die Gleichung (1) jedenfalls eine eineindeutige Verwandtschaft der beiden Grundgebilde.

Für das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe fanden wir nun in 28. den Ausdruck:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Dieser Ausdruck entsteht aber wiederum bei Anwendung der linearen Transformationen (2), wie wir dies an den Formeln (5) und (6) von 31. bereits gesehen haben. Also ist:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\lambda'_1 - \lambda'_3}{\lambda'_2 - \lambda'_3} : \frac{\lambda'_1 - \lambda'_4}{\lambda'_2 - \lambda'_4},$$

und wir erhalten

Satz 12. Die bilineare Gleichung (1) zwischen den Parametern vermittelt ebenfalls eine projektive Beziehung der beiden Grundgebilde.

35. Die Zahl der willkürlichen Konstanten in der Gleichung (1) beträgt, da man durch eine derselben dividieren kann, drei; dies drücken wir so aus:

Zwischen zwei Grundgebilden gibt es ³ projektive Beziehungen.

Wir erhalten eine Projektivität, sobald zu drei Elementen des einen Grundgebildes die entsprechenden des zweiten Grundgebildes gegeben sind oder wenn drei Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Parameterwerte $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ als entsprechende zugeordnet werden. Denn dann müssen weitere entsprechende Parameterwerte λ, λ' durch die Beziehung verknüpft sein:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda} = \frac{\lambda'_1 - \lambda'_3}{\lambda'_2 - \lambda'_3} : \frac{\lambda'_1 - \lambda'}{\lambda'_2 - \lambda'}$$

Diese Gleichung liefert ausmultipliziert die gesuchte bilineare Beziehung.

Auch in Determinantenform können wir die Gleichung dieser projektiven Beziehung ohne weiteres anschreiben.

Ist sie nämlich von der Form (1), so muß sie erfüllt sein, wenn man gleichzeitig $\lambda = \lambda_1$ u. $\lambda' = \lambda'_1$ f. . setzt. Das Resultat der Elimination der a, b, c, d aus der Gleichung (1) und den so entstehenden drei weiteren Gleichungen ist aber*):

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda & \lambda' & 1 \\ \lambda_1 & \lambda'_1 & \lambda_1 & \lambda'_1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda'_2 & \lambda_2 & \lambda'_2 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda'_3 & \lambda_3 & \lambda'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

*) Über Determinanten siehe z. B. P. B. Fischer, Determinanten, 2. Aufl., Berlin 1928 (Sammlung Götschen Bd. 402).

Diese Determinante liefert nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt die gesuchte Gleichung. Es ist folglich:

$$a = \lambda_1 (\lambda'_2 - \lambda'_4) + \lambda_2 (\lambda'_3 - \lambda'_1) + \lambda_3 (\lambda'_1 - \lambda'_2),$$

$$b = \lambda_1 \lambda'_1 (\lambda'_3 - \lambda'_2) + \lambda_2 \lambda'_2 (\lambda'_1 - \lambda'_3) + \lambda_3 \lambda'_3 (\lambda'_2 - \lambda'_1),$$

$$c = \lambda_1 \lambda'_1 (\lambda'_4 - \lambda'_3) + \lambda_2 \lambda'_2 (\lambda'_3 - \lambda'_1) + \lambda_3 \lambda'_3 (\lambda'_1 - \lambda'_2),$$

$$d = \lambda_1 \lambda'_1 (\lambda'_2 \lambda'_3 - \lambda'_2 \lambda'_4) + \lambda_2 \lambda'_2 (\lambda'_1 \lambda'_3 - \lambda'_3 \lambda'_1) + \lambda_3 \lambda'_3 (\lambda'_2 \lambda'_1 - \lambda'_1 \lambda'_2)$$

Die einfachste Form, die die Gleichung (1) annehmen kann, ist:

$$\lambda - \lambda' = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \lambda'$$

und jede Projektivität läßt sich durch leichte Umformungen auf diese Form bringen, so daß folgt:

Satz 13. *Die Grundgebilde erster Stufe:*

$$a_a - \lambda b_a = 0 \quad \text{und} \quad a'_a - \lambda b'_a = 0$$

sind projektiv aufeinander bezogen, wenn in ihnen diejenigen Elemente einander zugeordnet werden, die den gleichen Werten des Parameters entsprechen.

Viertes Kapitel.

Die projektive Verwandtschaft auf dem gleichen Träger.

§ 9. Die Doppelemente.

36. Denken wir uns zwei gleichartige, projektive Grundgebilde erster Stufe, deren Träger zusammenfallen, oder — mit anderen Worten — transformieren wir ein Grundgebilde erster Stufe projektiv in sich selbst, dann können die Koordinatensysteme für die beiden Koordinaten-Bestimmungen entweder verschieden sein oder die Koordinaten, z. B. die x_i und x'_i , werden auf das gleiche Koordinatensystem bezogen. Im letzteren Falle deutet man durch die Unterscheidung der Koordinaten lediglich an, zu welchem der beiden projektiven Systeme man das Element rechnet.

Auch jetzt stehen uns wieder die beiden Darstellungen der Projektivität (30. und 34.) zur Verfügung. Nach Satz 9 in 30. haben wir als analytischen Ausdruck die lineare Substitution:

$$(1) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ \varrho x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

zu betrachten. Oder wir schreiben das Grundgebilde in der Form:

$$a_x - \lambda b_x = 0$$

und gleichzeitig, sofern es das projektive Gebilde trägt:

$$a'_x - \lambda' b'_x = 0.$$

Eine bilineare Gleichung:

$$(2) \quad a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

vermittelt dann wieder die projektive Beziehung.

Soweit entsprachen diese Betrachtungen durchaus den früheren. Ein neuer Gesichtspunkt bietet sich nun aber insofern dar, als wir bei einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger auch die Möglichkeit ins Auge fassen können, daß ein Element mit seinem entsprechenden zusammenfalle. Elemente dieser Art, deren Existenz wir sofort beweisen werden, heißen „Doppelemente“, so daß wir also von Doppelpunkten zweier projektiven Punktreihen auf dem gleichen Träger, von Doppelstrahlen zweier konzentrischer, projektiver Strahlenbüschel usw. sprechen.

Nehmen wir an, daß sich die x_i und x'_i auf das gleiche Koordinatensystem beziehen, so muß für ein solches Doppelement die Bedingung erfüllt sein:

$$(3) \quad x'_i = \mu x_i \quad (i = 1, 2) \quad \text{oder} \quad \frac{x'_1}{x'_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

Drücken wir dementsprechend x'_1 und x'_2 durch μx_1 und μx_2 aus, so liefern uns die Gleichungen (1), wenn wir für $\varrho \mu$ wieder ϱ schreiben:

$$(4) \quad \begin{cases} (a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 = 0 \end{cases}$$

Die Koordinaten eines Doppelementes müssen also diesen beiden Gleichungen genügen; damit aber diese Gleichungen ein vom trivialen System $x_1 = x_2 = 0$ verschiedenes Lösungssystem haben, muß die Determinante des Systems verschwinden, d. h. es muß sein:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

Zur Bestimmung des Proportionalitätsfaktors ϱ ergibt sich folglich die quadratische Gleichung:

$$\varrho^2 - (a_{11} + a_{22}) \varrho + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0$$

Die Wurzeln derselben:

$$\varrho_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}}{2}$$

geben, in eine der Gleichungen (4) eingesetzt, die Koordinaten der Doppelemente. Im allgemeinen existieren also zwei Doppelemente, die reell oder imaginär sein oder im Grenzfalle sich in eines vereinigen können.

Daß mit dem Auftreten von drei Doppelementen die projektive Beziehung überhaupt in eine identische übergeht, zeigt unter der Voraussetzung reeller Elemente folgende Überlegung:

Betrachten wir etwa zwei Punktreihen auf dem gleichen Träger. Zwei der Doppelpunkte seien als Fundamentalpunkte A_1 und A_2 gewählt. Die Gleichungen (1), die diese Projektivität darstellen, müssen dann die Eigenschaft zeigen, daß für $x_1 = 0$ auch $x'_1 = 0$ und ebenso für $x_2 = 0$ auch $x'_2 = 0$ wird; sie können demnach bloß von der Form sein:

$$(5) \quad \varrho x'_1 = a_{11} x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{22} x_2.$$

Verlegen wir weiter in den dritten Doppelpunkt den Einheitspunkt (1,1), so muß auch noch

$$a_{11} = a_{22}$$

sein und die Gleichungen (5) gehen über in die Gleichungen (3), d. h. jeder Punkt deckt sich mit dem entsprechenden, also folgt

60 Zweiter Abschnitt. Die projektive Transformation auf der Geraden usw.

Satz 14. Wenn in einem projektiv auf sich selbst bezogenen Grundgebilde erster Strife drei Elemente mit ihren entsprechenden zusammenfallen, 80 hat jedes Element diese Eigenschaft und die projektive Beziehung geht in eine Identität über (Fundamentalsatz der neueren Geometrie).

Endlich lassen sich auch aus der Parameterdarstellung (2) die Doppelselemente ableiten. Denn da für dieselben $\lambda = \lambda'$, so entsprechen sie den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(6) \quad a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d = 0;$$

wobei vorausgesetzt ist, daß sowohl die F.-Punkte und der Einheitspunkt als auch die Grundelemente in den beiden Grundgebilden dieselben sind.

Die Invariante einer Projektivität.

37. Die Elementenpaare einer Projektivität auf dem gleichen Träger gruppieren sich nun in merkwürdiger Weise zu den Doppelselementen, die ausgesprochen wird durch

Satz 15. Irgend ein Paar entsprechender Elemente einer projektiven Beziehung auf dem gleichen Träger bildet mit den Doppelselementen ein unveränderliches Doppelverhältnis.

Dieser Satz gilt, die Doppelselemente mögen reell oder imaginär sein. Um ihn ganz allgemein, d. h. ohne Rücksicht auf die Realität der Doppelselemente, zu beweisen, nehmen wir an, die Projektivität sei wie in 31. gegeben durch eine bilineare Gleichung von der Form (5) mit den am Ende von 36. ausgesprochenen Voraussetzungen. Geben wir dem ξ den beliebigen Wert λ , so wird:

$$\xi' = -\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c}$$

Die quadratische Gleichung, deren Wurzeln λ und $-(b\lambda + d):(a\lambda + c)$ sind, wird dann aber:

$$(a\lambda + c)\xi^2 - \{\lambda(a\lambda + c) - (b\lambda + d)\}\xi - \lambda(b\lambda + d) = 0$$

Die Doppelselemente der projektiven Beziehung andererseits sind gegeben durch die Gleichung:

$$a\xi^2 + (b + c)\xi + d = 0$$

Die Formel (10) von 13. gestattet uns, das Doppelverhältnis, das diese beiden Elementenpaare bilden, zu berechnen. Für die hierbei auftretenden Größen D_a , D_b , D_{ab} findet man:

$$D_a = \left[\frac{\lambda(a\lambda + c) + (b\lambda + d)}{2} \right]^2,$$

$$D_b = \frac{(b + c)^2 - 4ad}{4},$$

$$D_{ab} = (c - b) \cdot \frac{\lambda(a\lambda + c) + (b\lambda + d)}{2}$$

In dem Ausdrucke D für das Doppelverhältnis der beiden Elementenpaare fällt dann aber der die GröÙe λ enthaltende Faktor:

$$\frac{\lambda(a\lambda + c) + b\lambda + d}{2}$$

ganz hinaus und es wird:

$$(7) \quad D = \frac{b - c - \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}}{b - c + \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}} = j$$

Damit ist der Beweis des in Frage stehenden Satzes erbracht. Diese für die Projektivität charakteristische Invariante j hat folglich einen reellen oder imaginären Wert, je nachdem die Doppелеlemente der projektiven Beziehung reell oder imaginär sind. Fallen dieselben zusammen, so wird $j = 1$.

Ist die Projektivität durch die Gleichungen (5) von 36. gegeben, so wird nach 6. für irgend ein Paar entsprechender Punkte P, P' mit den Koordinaten x_i, x'_i ($i = 1, 2$):

$$(A_1 A_2 E P) = \frac{x_2}{x_1}, \quad (A_1 A_2 E P') = \frac{x'_2}{x'_1}$$

und es ergibt sich für die Invariante (vgl. (8) in 5.):

$$\frac{(A_1 A_2 E P')}{(A_1 A_2 E P)} = (A_1 A_2 P P') = \frac{a_{22}}{a_{11}} = j$$

Bemerkung: Verbinden wir die lineare Substitution (6a) von 31. mit einer weiteren:

$$\xi'' = -\frac{b' \xi' + d'}{a' \xi' + c'}$$

so erhalten wir aus beiden Gleichungen:

$$\xi'' = -\frac{(a d' - b b') \xi + (c d' - b' d)}{(a c' - b a') \xi + (c c' - a' d)}$$

oder:

$$\xi'' = -\frac{b'' \xi + d''}{a'' \xi + c''}.$$

Dies ist aber wiederum eine lineare Substitution der gleichen Art. Es liefern demnach irgend zwei projektive Transformationen nacheinander angewandt abermals eine projektive Transformation, eine Tatsache, die man in folgender Weise zum Ausdruck bringt: Die projektiven Transformationen auf demselben Grundgebilde erster Stufe bilden eine „Gruppe“.

§10. Die Koordinatentransformation.

Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen.

38. Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß eine lineare Substitution geometrisch gedeutet eine Projektivität vermittelt.

Die andere in 1. bereits erwähnte Fragestellung ist folgende: Wir haben auf einem Grundgebilde erster Stufe zwei Koordinatensysteme. Irgend ein Element des Grundgebildes wird dann in bezug auf das erste Koordinatensystem die Koordinaten (x_1, x_2) haben, dagegen in bezug auf das zweite Koordinatensystem durch die Koordinaten (x'_1, x'_2) bestimmt sein. Zu jedem Wertepaar (x_1, x_2) gehört also ein Wertepaar (x'_1, x'_2) und umgekehrt. Gesucht wird der Zusammenhang zwischen diesen Koordinaten des gleichen Elementes in bezug auf zwei verschiedene Koordinatensysteme.

Es seien — etwa in einer Punktreihe — A_1, A_2, E und A'_1, A'_2, E' die beiden Koordinatensysteme. Die Punkte A'_1, A'_2, E' mögen in bezug auf das erste Koordinatensystem durch ihre Koordinaten $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (e_1, e_2)$ festgelegt sein. Es ist also:

$$(A_1 A_2 E A'_1) = \frac{a_2}{a_1} = \alpha,$$

$$(A_1 A_2 E A'_2) = \frac{b_2}{b_1} = \beta,$$

$$(A_1 A_2 E E') = \frac{e_2}{e_1} = \varepsilon,$$

$$(A_1 A_2 E P) = \frac{x_2}{x_1} = \xi.$$

Der beliebige Punkt $P \equiv P'$ hat in bezug auf das neue Koordinatensystem die Koordinaten (x'_1, x'_2) und es ist:

$$(A'_1 A'_2 E' P') = \frac{x'_2}{x'_1} = \xi'$$

Andererseits finden wir für dieses Doppelverhältnis nach Formel (2) von 9.:

$$\frac{x'_2}{x'_1} = \frac{(ae)}{(be)} : \frac{(ax)}{(bx)} = \frac{a_2 e_1 - a_1 e_2}{b_2 e_1 - b_1 e_2} : \frac{a_2 x_1 - a_1 x_2}{b_2 x_1 - b_1 x_2},$$

so daß auch:

$$(1) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = \frac{a_2 x_1 - a_1 x_2}{a_2 e_1 - a_1 e_2} = \frac{a_2}{(ae)} x_1 - \frac{a_1}{(ae)} x_2, \\ \varrho x'_2 = \frac{b_2 x_1 - b_1 x_2}{b_2 e_1 - b_1 e_2} = \frac{b_2}{(be)} x_1 - \frac{b_1}{(be)} x_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben den gewünschten Zusammenhang zwischen den beiden projektiven Koordinaten-Bestimmungen. Man nennt sie die „Transformationsformeln der Koordinaten“ und die ganze Umformung eine „Koordinatentransformation“. Formal betrachtet stellen die Gleichungen (1) aber auch eine lineare Substitution vor. In nicht homogenen Koordinaten tritt ebenso wie früher an Stelle der Gleichungen (1) die einzige Gleichung:

$$(2) \quad \xi' = \frac{(\alpha - \varepsilon)(\beta - \xi)}{(\beta - \varepsilon)(\alpha - \xi)} = \frac{\beta(\alpha - \varepsilon) - (\alpha - \varepsilon)\xi}{\alpha(\beta - \varepsilon) - (\beta - \varepsilon)\xi},$$

wonach ξ' eine linear-gebrochene Funktion von ξ ist. Die Gleichungen, die in entsprechender Weise x_1, x_2 und ξ liefern, kann man entweder aus (1) durch Auflösung nach x_1 und x_2 [aus (2) durch Auflösung nach ξ] finden oder man schreibt die analogen Gleichungen an, wobei dann die Konstanten $\frac{a'_2}{a'_1} = \alpha'$ usf. vorkommen.

Statt dies im einzelnen auszuführen, geben wir noch die Sonderfälle der Formeln (2) für metrische Koordinaten.

Nehmen wir an, es gehe die Koordinaten-Bestimmung, die sich auf A'_1, A'_2, E' bezieht, in die einfache Abszissenmessung über (7.) mit der Strecke $A'_2 E'$ als Einheitsstrecke, so wird $\frac{x'_2}{x'_1} = x'$ und:

$$(3) \quad x' = \frac{\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{e_2}{e_1}\right) \left(\frac{b_2}{b_1} - \frac{x_2}{x_1}\right)}{\left(\frac{b_2}{b_1} - \frac{e_2}{e_1}\right) \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Dabei muß n o $\frac{a_2}{a_1} = \frac{A_1 E}{A_2 E}$ e t z t werden.

Diese Formel gibt den Übergang von einer projektiven Koordinaten-Bestimmung zu einer metrischen.

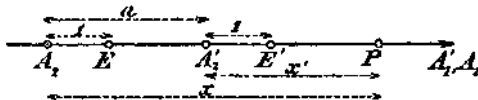


Fig. 14.

Ist endlich auch die Koordinaten-Bestimmung A_1, A_2, E eine Abszissenmessung, wobei auch $A_2 E = A'_2 E'$ sein soll, so wird:

$$\alpha = \infty, \quad \beta = a, \quad \varepsilon = a + 1, \quad \xi = x$$

und

$$(4) \quad x' = x - a,$$

was geometrisch (Fig. 14) ohne weiteres einzusehen ist.

Die Koordinatentransformation, aufgefaßt als projektive Beziehung.

39. Die Formeln (1) der Koordinatentransformation 38. stellten sich als eine lineare Substitution dar; jede solche Substitution liefert aber nach dem Früheren eine Projektivität. Es muß also möglich sein, auch die Koordinatentransformation als eine spezielle projektive Beziehung aufzufassen.

64 Zweiter Abschnitt. Die projektive Transformation auf der Geraden usw.

In der Tat denken wir uns ein Grundgebilde erster Stufe projektiv auf sich selbst bezogen, so daß dem Element (x_1, x_2) das Element (x'_1, x'_2) entspricht, wobei diese Koordinaten sich auf zwei verschiedene Koordinatensysteme A_1, A_2, E und A'_1, A'_2, E' beziehen. Machen wir dann ferner die Annahme, die Projektivität gehe in eine Identität über, so fällt jedes Element mit dem ihm entsprechenden zusammen und die Abhängigkeit, wie sie durch diese Projektivität zwischen (x_1, x_2) und (x'_1, x'_2) gegeben wird, geht über in den Zusammenhang der Koordinatentransformation. Es folgt also

Satz 16. Eine Koordinatentransformation kann als Darstellung einer Identität (identischen Projektivität) in bezug auf zwei verschiedene Koordinatensysteme aufgefaßt werden.

Um dies auch rechnerisch zu verfolgen, seien:

$$(5) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ \varrho x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

die Gleichungen der projektiven Beziehung des Grundgebildes (36.). Den Punkten A_1 oder $x_1 = 0$, A_2 oder $x_2 = 0$ und E oder $(1,1)$ entsprechen im anderen System der Reihe nach die Punkte $(A_1)'$ *) oder (a_{12}, a_{22}) , $(A_2)'$ oder (a_{11}, a_{21}) und $(E)'$ oder $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$. Die Projektivität geht nach 36. in eine Identität über, wenn drei Elemente mit den ihnen entsprechenden zusammenfallen, wenn also z. B. im vorliegenden Falle:

$$(A_1)' \equiv A_1, \quad (A_2)' \equiv A_2, \quad (E)' \equiv E$$

Sind nun die Koordinaten der Punkte A_1, A_2, E in bezug auf das Koordinatensystem A'_1, A'_2, E' : (a'_1, a'_2) , (b'_1, b'_2) , (e'_1, e'_2) , so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichungen (5) eine identische Projektivität, d. h. eine Koordinatentransformation, vorstellen, durch die Erfüllung folgender Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} a_{12} : a_{22} &= a'_1 : a'_2, \\ a_{11} : a_{21} &= b'_1 : b'_2, \\ (a_{11} + a_{12}) : (a_{21} + a_{22}) &= e'_1 : e'_2. \end{aligned}$$

Aus ihnen können wir die Koeffizienten a_{ik} der Transformation berechnen. Die beiden ersten Beziehungen liefern:

$$a_{12} = \frac{a'_1}{a'_2} a_{22} \quad \text{und} \quad a_{21} = \frac{b'_2}{b'_1} a_{11}.$$

Führen wir diese beiden in $a_{11} + a_{12} = \nu e'_1$ ein:

$$a_{21} + a_{22} = \nu e'_2$$

*) Wobei im allgemeinen z. B. $a_{12} \neq 0$ sein wird.

ein, so ermöglichen diese die Berechnung von a_{11} und a_{22} und wir erhalten auf diesem Wege:

$$\begin{aligned} a_{11} : a_{12} : a_{21} : a_{22} = \\ = (e'_1 a'_2 - a'_1 e'_2) b'_1 : (e'_2 b'_1 - e'_1 b'_2) a'_1 : (e'_1 a'_3 - a'_1 e'_3) b'_2 : \\ : (e'_2 b'_1 - e'_1 b'_2) a'_2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Koordinatentransformation werden schließlich:

$$\varrho x'_1 = (e'_1 a'_2 - a'_1 e'_2) b'_1 x_1 + (e'_2 b'_1 - e'_1 b'_2) a'_1 x_2,$$

$$\varrho x'_2 = (e'_1 a'_3 - a'_1 e'_3) b'_2 x_1 + (e'_2 b'_1 - e'_1 b'_2) a'_2 x_2$$

oder kürzer:

$$(6) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = (a' e') b'_1 x_1 + (e' b') a'_1 x_2, \\ \varrho x'_2 = (a' e') b'_2 x_1 + (e' b') a'_2 x_2. \end{cases}$$

Dies sind nun allerdings nicht die Gleichungen (1), weil hier als konstante Koeffizienten auf der rechten Seite die gestrichenen Koordinaten der Punkte A_1, A_2, E in bezug auf A'_1, A'_2, E' stehen. Lösen wir aber die

Gleichungen (6) nach x_1, x_2 auf, so ergibt sich, wenn wir für $\frac{(a' b')}{\varrho} = \varrho'$ setzen:

$$(7) \quad \begin{cases} \varrho' x_1 = \frac{a'_2 x'_1 - a'_1 x'_2}{a'_2 e'_1 - a'_1 e'_2} = \frac{a'_2}{(a' e')} x'_1 - \frac{a'_1}{(a' e')} x'_2, \\ \varrho' x_2 = \frac{b'_2 x'_1 - b'_1 x'_2}{b'_2 e'_1 - b'_1 e'_2} = \frac{b'_2}{(b' e')} x'_1 - \frac{b'_1}{(b' e')} x'_2 \end{cases}$$

Diese Formeln aber stellen in bezug auf die Darstellung der x_i durch die x'_i das genaue Gegenstück der Gleichungen (1) dar.

§ 11. Die involutorische Beziehung.

Definition zyklisch-projektiver Gebilde.

40, Es sei ein projektiv auf sich selbst bezogenes Grundgebilde erster Stufe gegeben, beispielsweise eine Punktreihe. Irgend einem Elemente X_1 desselben wird in der projektiven Beziehung ein Element X'_1 entsprechen. Betrachten wir dieses Element als zum ersten Gebilde gehörig und bezeichnen es dementsprechend mit X_2 , so werden wir ein entsprechendes Element X'_2 finden können. Nehmen wir das Element X'_2 wieder als ein Element X_3 im ersten Gebilde, so liefert uns die projektive Beziehung dazu ein entsprechendes Element X'_3 usw. Im allgemeinen, d. h. bei einer beliebigen projektiven Beziehung, wird sich dieser Prozeß ins Endlose fortsetzen lassen.*)

Wir stellen nun die Frage, ob es möglich ist, daß die so entstehende Reihe von Elementen sich nach einer endlichen Zahl von Operationen

*) Hat die projektive Beziehung reelle Doppelemente, so nähert man sich bei unbegrenzter Fortsetzung dieser Reihe den Doppelementen, und zwar dem einen oder anderen, je nachdem das zuerst ausgewählte Element dem einen oder anderen der projektiven Gebilde zugerechnet wird.⁴⁾

schließt, daß also eines der neu sich ergebenden Elemente mit dem ursprünglich herausgegriffenen zusammenfällt. Wir wollen annehmen, daß wir nach w -maliger Anwendung unserer Transformation zu einem Element X_n gekommen seien, das wir gleichzeitig mit X_{n+1} bezeichnen, und daß dieses Element mit X_1 zusammenfalle (vgl. Fig. 15, die dem Falle $n = 4$ entspricht). Es bilden dann die n Elemente:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

einen sogenannten „Zyklus“, d. h. die Reihe schließt sich, in dem X_n mit X_1 zusammenfällt. Tritt in einer Projektivität ein solcher Zyklus auf, so gibt es, wie man zeigt, immer unendlich viele solcher Zyklen. Die Projektivität heißt dann „zyklisch“⁵⁾. Wir müssen uns auf die Behandlung des speziellsten Falles beschränken, der dem Werte $n = 2$ entspricht. Dann fällt bereits X_n mit X_1 zusammen, der Zyklus beschränkt

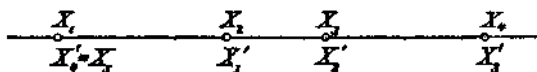


Fig. 15.

sich auf ein Paar von Elementen. Jedes dieser Elemente hat die Eigenschaft, daß ihm das andere entspricht, man mag das erste Element zum einen oder andern System rechnen. Wir wollen das als „doppeltes Entsprechen“ bezeichnen. Nun beweisen wir

Satz 17. *Ist in einer Projektivität auf dem gleichen Träger ein Elementenpaar vorhanden, das sich doppelt entspricht, so tritt das Doppelt-Entsprechen für jedes Element ein.*

Die Projektivität sei — unter den am Ende von 36. ausgesprochenen Voraussetzungen — gegeben durch die Gleichung:

$$(1) \quad a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0$$

Einem Elemente λ_0 entsprechen, wenn man es zu dem einen oder andern System rechnet, die beiden Elemente:

$$-\frac{c\lambda_0 + d}{a\lambda_0 + b} \quad \text{oder} \quad -\frac{b\lambda_0 + d}{a\lambda_0 + c}$$

Sollen diese beiden Elemente identisch sein, so ist:

$$\frac{c\lambda_0 + d}{a\lambda_0 + b} = \frac{b\lambda_0 + d}{a\lambda_0 + c}$$

oder:

$$[c - b][a\lambda_0^2 + (b + c)\lambda_0 + d] = 0.$$

Der zweite Faktor verschwindet für die Doppelemente der projektiven Beziehung, die selbstverständlich die genannte Bedingung erfüllen. Soll für ein anderes Element das Doppelt-Entsprechen eintreten, so muß:

$$(2) \quad c - b = 0$$

sein, so daß die Bedingung dann durchweg erfüllt ist. Die Gleichung (1) nimmt infolgedessen die Form an:

$$(3) \quad a\lambda\lambda' + b(\lambda + \lambda') + d = 0$$

Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß sie sich in bezug auf λ und λ' symmetrisch verhält. Es versteht sich von selbst, daß auch die analoge Gleichung (5) von 31. in den Koordinaten ξ und ξ' unter dieser Voraussetzung die gleiche Veränderung erleidet. Man nennt diese spezielle projektive Beziehung eine „involutorische“ oder eine „Involution“. Die Projektivität zerfällt in Elementenpaare. Jedem Element des Gebildes, aufgefaßt als zum einen oder andern System gehörig, entspricht ein und nur ein zweites Element.

Auch hier treten wieder Doppelemente (Ordnungselemente) auf, die gegeben werden durch die Gleichung:

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + d = 0$$

Diese können, wie bei der Projektivität, reell oder imaginär sein oder zusammenfallen: die Involution heißt dann hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch. Die Invariante j (37.) nimmt wegen (2) für die Involution den Wert -1 an. Es folgt mithin

Satz 18. Jedes Elementenpaar einer Involution liegt harmonisch zu den Doppelementen und die Involution besteht aus der Gesamtheit aller zu den Doppelementen harmonisch gelegenen Elementenpaare.

Aufgabe 1: Man beweise, daß bei der parabolischen Involution von jedem Elementenpaare ein Element in das Doppelement fällt, daß also jedem Element dieses Doppelement entspricht.

Isotrope Gerade und die absoluten Kreispunkte.

41. Um noch ein Beispiel zu geben, betrachten wir eine Projektivität im Strahlenbüschel. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit dem Anfang O seien die Geraden:

$$(4) \quad y = kx \quad \text{und} \quad y = k'x$$

gegeben. Setzen wir voraus, daß zwischen k und k' eine Beziehung besteht:

$$(5) \quad akk' + bk + ck' + d = 0,$$

so wird dadurch das Strahlenbüschel O projektiv auf sich bezogen. Die Doppelstrahlen ergeben sich aus:

$$(6) \quad ak^2 + (b + c)k + d = 0.$$

Betrachten wir nun die Gleichung:

$$(7) \quad x^2 + y^2 = 0$$

so können wir dieselbe auch ersetzen durch die beiden Gleichungen:

$$y = ix \quad \text{und} \quad y = -ix$$

Sie stellt also zwei imaginäre Gerade durch den Koordinatenanfang dar. Man nennt diese Geraden die durch O gehenden „Minimal“-Geraden

oder „isotropen“ Geraden und ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden die unendlich fernen, imaginären Kreispunkte oder absoluten Kreispunkte. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei solche Minimal-Gerade.

Wir wollen nun eine Projektivität bestimmen, welche die durch 0 gehenden Minimalgeraden zu Doppelstrahlen hat. Setzen wir $k = \frac{y}{x}$, so wird die Gleichung der Doppelstrahlen [aus dem allgemeinen Falle (6)]:

$$a y^2 + (b + c) x y + d x^2 = 0;$$

diese geht in (7) über, wenn wir:

$$(8) \quad b + c = 0 \quad \text{und} \quad a = d$$

setzen. Es ergibt sich also für eine solche Projektivität die Beziehung:

$$(9) \quad a(1 + k k') + b(k - k') = 0,$$

wobei a und b beliebig sind. Soll weiter die Projektivität in eine Involution übergehen, so muß nach (2) ferner:

$$(10) \quad b - c = 0$$

sein, woraus in Verbindung mit (8) folgt, daß :

$$b = 0 \quad \text{und} \quad c = 0$$

sein muß. Die Gleichung (9) geht aber dann über in:

$$1 + k k' = 0$$

Das besagt aber, daß je zwei einander entsprechende Gerade aufeinander senkrecht stehen. Die Gesamtheit der rechtwinkligen Strahlenpaare durch einen Punkt bezeichnet man als eine „Rechtwinkel-Involution“ oder auch als „zirkuläre Involution“. Ihre Doppelstrahlen sind also die durch den Büschelmittelpunkt gehenden Minimalgeraden.

Aufgabe 2: Dreht man ein Strahlenbüschel um seinen Mittelpunkt in seiner Ebene um einen beliebigen Winkel δ , so ist das zweite Strahlenbüschel zum ersten kongruent und gleichsinnig. Man beweise, daß diese Projektivität die Minimalgeraden durch 'den Büschelmittelpunkt zu Doppelstrahlen hat und daß umgekehrt projektive Strahlenbüschel in der gleichen Ebene und mit dem gleichen Mittelpunkt kongruent und gleichsinnig sein müssen, wenn ihre Doppelstrahlen die Minimalgeraden durch den Mittelpunkt sind.

Bestimmung einer Involution.

42. Die bilineare Gleichung (3) der Involution enthält drei homogene, also zwei wesentliche Konstante. Zur Bestimmung einer involutorischen Beziehung genügt es also, wenn zwei Paare von Elementen gegeben sind, deren Parameter etwa λ_1, λ'_1 und λ_2, λ'_2 seien. Denn dann müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$(11) \quad \begin{cases} a\lambda_1\lambda'_1 + b(\lambda_1 + \lambda'_1) + d = 0 \\ a\lambda_2\lambda'_2 + b(\lambda_2 + \lambda'_2) + d = 0 \end{cases}$$

Daraus bestimmen sich die Verhältnisse der a, b, d . Direkt können wir die Gleichung der Involution in Determinantenform anschreiben, indem wir aus den Gleichungen (3) und (11) die a, b, d eliminieren. Das Ergebnis ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda + \lambda' & 1 \\ \lambda_1 & \lambda'_1 & \lambda_1 + \lambda'_1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda'_2 & \lambda_2 + \lambda'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Für die a, b, d finden wir daraus die Werte:

$$\begin{aligned} \varrho a &= (\lambda_1 + \lambda'_1) - (\lambda_2 + \lambda'_2), \\ \varrho b &= \lambda_2\lambda'_2 - \lambda_1\lambda'_1, \\ \varrho d &= \lambda_1\lambda'_1(\lambda_2 + \lambda'_2) - \lambda_2\lambda'_2(\lambda_1 + \lambda'_1) \end{aligned}$$

Es hat sich also ergeben:

Satz 19. Eine Involution ist durch zwei Paare von Elementen bestimmt.

Drei Elementenpaare müssen einer Bedingung genügen, wenn sie einer Involution angehören sollen. Wir behandeln diese Frage in der Form der folgenden

Aufgabe 3: Gegeben sind drei Elementenpaare auf einer X -Achse (12.):

$$\begin{aligned} a_0 x_2^2 + 2a_1 x_2 x_1 + a_2 x_1^2 &= 0 \\ b_0 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_1 + b_2 x_1^2 &= 0 \\ c_0 x_2^2 + 2c_1 x_2 x_1 + c_2 x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Welche Bedingung wird erfüllt sein müssen, wenn diese einer Involution angehören sollen?

Es muß dann ein reelles oder imaginäres Elementenpaar, die Doppelpunkte der Involution, existieren:

$$d_0 x_2^2 + 2d_1 x_2 x_1 + d_2 x_1^2 = 0$$

das zu jedem der drei gegebenen Elementenpaare harmonisch liegt. Also müssen nach 12, Formel (8) die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a_0 d_2 - 2a_1 d_1 + a_2 d_0 &= 0, \\ b_0 d_2 - 2b_1 d_1 + b_2 d_0 &= 0, \\ c_0 d_2 - 2c_1 d_1 + c_2 d_0 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

als die gesuchte, notwendige und hinreichende Bedingung.

Die Büscheldarstellung der Involution.

43. Sind ganz allgemein zwei Paare von Elementen eines Grundgebildes erster Stufe gegeben:

$$(13) \quad \begin{cases} a_x^2 \equiv a_0 x_2^2 + 2a_1 x_2 x_1 + a_2 x_1^2 = 0 \\ b_x^2 \equiv b_0 x_2^2 + 2b_1 x_2 x_1 + b_2 x_1^2 = 0 \end{cases}$$

und bilden wir die lineare Zusammensetzung:

$$(14) \quad a_x^2 + \lambda b_x^2 = (a_0 + \lambda b_0) x_2^2 + 2(a_1 + \lambda b_1) x_2 x_1 + (a_2 + \lambda b_2) x_1^2 = 0$$

wobei λ irgend ein Zahlenfaktor ist, so stellt diese Gleichung für jeden Wert von λ ein Elementenpaar dar. Die Werte $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ liefern die zwei gegebenen Paare. Entsprechend den ∞^1 Werten von λ erhalten wir demnach ∞^1 Elementenpaare und es soll jetzt gezeigt werden, daß diese eine Involution bilden. Dies ist bewiesen, wenn alle diese Elementenpaare ein und dasselbe reelle oder imaginäre Elementenpaar, die Doppelselemente, harmonisch trennen. Nehmen wir an, die Gleichung dieses zu suchenden Elementenpaares wäre:

$$d_0 x_2^2 + 2d_1 x_2 x_1 + d_2 x_1^2 = 0$$

so muß dasselbe auch zu den Paaren (13) je harmonisch liegen. Wir haben also nach 12.:

$$d_0 a_2 - 2d_1 a_1 + d_2 a_0 = 0$$

$$d_0 b_2 - 2d_1 b_1 + d_2 b_0 = 0$$

Daraus berechnen wir die Werte:

$$d_0 : d_1 : d_2 = 2(a_1 b_0 - a_0 b_1) : (a_2 b_0 - a_0 b_2) : 2(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

Das dadurch bestimmte Elementenpaar:

$$(15) \quad (a_1 b_0 - a_0 b_1) x_2^2 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) x_2 x_1 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) x_1^2 = 0$$

liegt dann aber auch harmonisch zu jedem durch (14) dargestellten Elementenpaar. Denn es ist für jeden Wert von λ :

$$\begin{aligned} (a_1 + \lambda b_1) d_0 - 2(a_1 + \lambda b_1) d_1 + (a_0 + \lambda b_0) d_2 &= \\ = (a_2 d_0 - 2a_1 d_1 + a_0 d_2) + \lambda (b_2 d_0 - 2b_1 d_1 + b_0 d_2) &= 0 \end{aligned}$$

Folglich stellt die Gleichung (14) in der Tat eine Involution dar, deren (reelle oder imaginäre) Doppelselemente durch die Gleichung (15) gegeben sind.

Die gegebenen Paare (13), aus denen wir die Involution zusammensetzen, spielen in der Involution keine besondere Rolle, Irgend zwei andere Paare:

$$p_x^2 \equiv a_x^2 + \lambda_1 b_x^2 = 0$$

$$q_x^2 \equiv a_x^2 + \lambda_2 b_x^2 = 0$$

können an ihre Stelle treten und ein beliebiges Elementenpaar der Involution läßt sich auch als lineare Kombination von p_x^2 und q_x^2 darstellen, so daß:

$$a_x^2 + \lambda b_x^2 = \nu p_x^2 + \varrho q_x^2$$

Der Beweis dafür ist bereits in 10., Zusatz, erbracht. Denn die dort durchgeführte Betrachtung war ganz unabhängig von der speziellen Natur der Ausdrücke a_x .

Die Bedingung (12) ferner sagt, wie eine leichte Betrachtung zeigt, auch nichts anderes aus, als daß zwischen den Ausdrücken a_x^2 , b_x^2 , c_x^2 ein linearer Zusammenhang besteht.

Schreibt man die Ausdrücke a_x^2 , b_x^2 , ... in trimetrischen Koordinaten, so stellt die Gleichung (14) ein Büschel von Kegelschnitten vor. Im Anschluß daran mag auch im binären Gebiet diese Gleichung als die „Büscheldarstellung“ einer Involution bezeichnet werden.

Verallgemeinerung für einen beliebigen rationalen Träger.

44. Die bisherigen Betrachtungen über die projektive und involutorische Beziehung galten für die drei Grundgebilde erster Stufe. Die Grundlagen derselben bildeten die beiden folgenden Sätze:

Erstens ließen sich die Elemente eines Grundgebildes erster Stufe eineindeutig den Werten eines Parameters zuordnen, so daß jedem Element ein Wert des Parameters und umgekehrt jedem Wert des Parameters ein einziges Element entsprach.

Zweitens konnten wir das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes erster Stufe bloß durch die den Elementen entsprechenden Parameter darstellen und der sich ergebende Ausdruck erwies sich als invariant gegenüber linear en Transformationen dieser Parameter.

Die zuerst erwähnte Eigenschaft kommt aber nicht bloß den Grundgebilden erster Stufe zu, sondern noch unzähligen anderen Gebilden der Geometrie. Man nennt jedes Gebilde, dessen Elemente sich in der angegebenen Weise zu einem Parameter in eine wechselseitig eindeutige Beziehung bringen lassen, ein „einförmiges“ oder „unikursales“. Dies kann man auch wie folgt ausdrücken: Die Elemente eines unikursalen Gebildes müssen den Elementen eines Grundgebildes erster Stufe in wechselseitig eindeutiger Weise zugeordnet werden können durch eine bilineare Gleichung, die also vom ersten Grade ist in bezug auf die beiden Parameter, die die Elemente der beiden Gebilde bestimmen.

Ist das einförmige Gebilde eine Kurve oder Fläche, so heißt es auch „rational“. So ist z. B. das allgemeinste einförmige Punktgebilde im Raume eine rationale Raumkurve.

Besitzt eine Raumkurve n^{ter} Ordnung R^n eine $(n - 1)$ -fache Sekante g , welche also $n - 1$ Punkte mit der R^n gemein hat, so schneidet jede Ebene des Ebenenbüschels g noch einen Punkt aus der R^n aus. Eine solche R^n ist demnach rational.

Ebenso ist ein Kegelschnitt eine rationale Kurve. Denn wählt man in seiner Ebene ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel auf dem Kegelschnitt liegt, so werden die Punkte des Kegelschnittes den Strahlen dieses Büschels in der oben definierten Weise eineindeutig zugeordnet.

Einförmige Gebilde sind ferner die Büschel von Kurven oder Flächen, die Elementenpaare einer Involution usw.

Wir sind nun imstande, den Begriff der projektiven Verwandtschaft auf rationale Kurven überhaupt zu übertragen. Für das Doppelverhältnis von vier Punkten einer solchen Kurve haben wir allerdings nur eine rein formale Definition. Ob sich dafür eine geometrische Deutung gewinnen läßt, bleibt bei jedem Gebilde einer besonderen Untersuchung vorbehalten. Beispielsweise hat man unter dem Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kegelschnittes das Doppelverhältnis der vier Strahlen zu verstehen, durch welche die vier gegebenen Punkte aus jedem Punkte des Kegelschnittes projiziert werden, wobei als bekannt vorausgesetzt wird, daß dieses Doppelverhältnis für jede beliebige Lage des Scheitels des Büschels einen konstanten Wert hat.

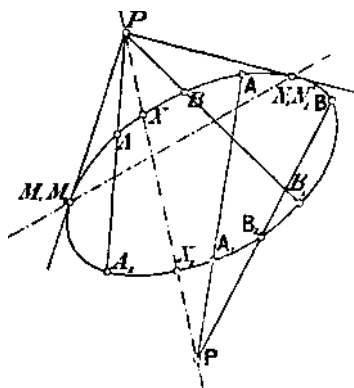


Fig. 16.

Denken wir uns, daß die Parameter λ und λ' zur Festlegung der einzelnen Punkte eines gegebenen Kegelschnittes k verwendet werden, so wird die Gleichung (3) von 40. eine involutorische Beziehung des Kegelschnittes in sich zum Ausdruck bringen. Wenn dann nach 42. zwei Paare von Elementen eine Involution bestimmten, so dürfen wir zur Bestimmung der Involution auf dem Kegelschnitt k zwei Punktepaare A, A_1 , B, B_1 beliebig annehmen (Fig. 16). Bringen wir die Verbindungslinie AA_1 mit der Verbindungslinie BB_1 in P zum Schnitt, so schneidet das Strahlenbüschel mit P als Scheitel aus dem Kegelschnitt eine Involution aus, für die jeder Strahl durch P ein Punktepaar liefert. Diese Involution muß aber mit der durch die Punktepaare A, A_1 , B, B_1 bestimmten zusammenfallen, da durch zwei Punktepaare bloß eine Involution bestimmt ist. Es folgt demnach

Satz 20. Sind die Punkte eines Kegelschnittes involutorisch einander zugeordnet, so gehen alle Geraden, die die Punkte je eines Paares verbinden, durch einen Punkt.

Liegt der Mittelpunkt (Scheitel) P dieses Strahlenbüschels außerhalb des Kegelschnittes, so hat die Involution zwei reelle Doppelpunkte M, N , nämlich die Berührungspunkte der von P aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten. Die Involution heißt in diesem Falle hyperbolisch. Liegt P innerhalb des Kegelschnittes, so sind die Doppelpunkte imaginär, die Involution ist eine elliptische. Fällt P auf den Kegelschnitt, so tritt der Übergangsfall der parabolischen Involution ein.

Im Vergleich zur Darstellung der Involution auf der Geraden liefert die auf einem Kegelschnitt (Kreis) gegebene nicht nur ein weit anschaulicheres Bild, sondern sie ist auch für die Lösung von Aufgaben bequemer und fruchtbarer, wie folgende Aufgabe zeigen mag.

Aufgabe 4: Gegeben sind zwei Involutionen A, A_1, B, B_1 und A, A_1, B, B_1 auf dem gleichen Träger. Man konstruiere das ihnen gemeinsame Punktepaar.

Übertragen wir auch die zweite Involution auf den Kegelschnitt, so erhalten wir (Fig. 16) ein Zentrum P . Die Linie PP schneidet dann aus dem Kegelschnitt das beiden Involutionen gemeinsame Punktepaar X, X_1 aus.

Dritter Abschnitt.

Die projektiven Transformationen in der Ebene.

Fünftes Kapitel.

Die projektiven Transformationen auf verschiedenen Trägern.

§ 12. Die kollineare und reziproke Beziehung der Grundgebilde zweiter Stufe.

Kollineare Ebenen.

45. Wenn für die Untersuchung der Verwandtschaften rationaler, einstufiger Mannigfaltigkeiten die projektive Beziehung den naturgemäßen Ausgangspunkt bildete, so werden wir nunmehr zunächst nach einer der Projektivität entsprechenden Beziehung der Grundgebilde zweiter Stufe (der ternären Gebiete) fragen.

Betrachten wir zwei Ebenen ε und ε' , in denen die Fundamentalsysteme A_1, A_2, A_3, E und A'_1, A'_2, A'_3, E' angenommen seien. Greifen wir irgend einen Punkt P von ε heraus, dem die homogenen Koordinaten x_i zugehören, so können wir die Koordinaten x'_i eines Punktes P' der Ebene ε' diesen drei Zahlenwerten proportional setzen, wodurch ein und nur ein Punkt P' in dem zweiten Punktfeld bestimmt ist. Auch umgekehrt finden wir auf diese Weise zu jedem Punkte von ε' einen einzigen in der ersten Ebene, so daß also dadurch in folgender Art eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte der beiden Ebenen hergestellt ist:

„Es entsprechen sich diejenigen Punkte der beiden Ebenen, die in jedem der beiden Koordinatensysteme zu den gleichen Koordinaten gehören.“

Zwischen den Koordinaten x_i und x'_i entsprechender Punkte P und P' bestehen demnach die Beziehungen:

$$(1) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : x_3$$

oder auch:

$$(2) \quad \varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3$$

Die vier Punkte A_1, A_2, A_3, E entsprechen zufolge dieser Zuordnung der Reihe nach den Punkten A'_1, A'_2, A'_3, E' . Es sind ja z. B. die Koordinaten von A_1 und A'_1 :

$$\left(\frac{p_1}{e_1}, 0, 0\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{p'_1}{e'_1}, 0, 0\right)$$

Wenn aber ganz allgemein zwei Ebenen Punkt für Punkt eindeutig aufeinander bezogen sind, so kann eine solche Punkttransformation noch von der verschiedensten Art sein. Zur vollständigen Charakterisierung derselben führt erst folgende weitere Überlegung. Läßt man einen Punkt P in der einen Ebene eine Gerade durchlaufen, so erfüllen die entsprechenden Punkte P' in der anderen Ebene eine gewisse Kurve. Die soeben abgeleitete Punkttransformation gehört nun insofern zu den einfachsten, als bei ihr einer geradlinigen Bahn eines Punktes in der Ebene ε wieder eine solche Bahn in der Ebene ε' entspricht. Wird irgend eine Gerade der ersten Ebene dargestellt durch:

$$(3) \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

wobei wir uns unter den ξ_i konstante Zahlenwerte denken, und führt man aus (2) die Koordinaten der entsprechenden Punkte von ε' ein, so besteht zwischen ihnen — nach Unterdrückung des Proportionalitätsfaktors ϱ — die Gleichung:

$$\xi_1 x'_1 + \xi_2 x'_2 + \xi_3 x'_3 = 0$$

Dies ist aber wiederum die Gleichung einer Geraden der Ebene ε' . Schreiben wir dieselbe in der Form:

$$(4) \quad \xi'_1 x'_1 + \xi'_2 x'_2 + \xi'_3 x'_3 = 0$$

so besteht zwischen den Koordinaten ξ_i und ξ'_i entsprechender Geraden folgender Zusammenhang:

$$(5) \quad \xi'_1 : \xi'_2 : \xi'_3 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$$

oder auch:

$$(6) \quad \varrho \xi_1 = \xi'_1, \quad \varrho \xi_2 = \xi'_2, \quad \varrho \xi_3 = \xi'_3$$

Demnach sind auch solche Gerade in den beiden Ebenen einander zugewiesen, deren Koordinaten den gleichen Zahlenverhältnissen entsprechen. Man erhält also die gleiche Transformation, wenn man statt der Punkte die Geraden der beiden Ebenen nach dem erwähnten Prinzip einander zuordnet.

Die Gleichung (3) ist nichts anderes als die Bedingung dafür, daß ein Punkt x_i auf einer Geraden ε_i gelegen ist; aus ihr folgt (4), d. h.:

Satz 21, *Wenn in der Transformation (2) ein Punkt auf einer Geraden liegt, so liegt der entsprechende Punkt auch auf der entsprechenden Geraden.*

In betreff der unendlich fernen Punkte einer Ebene haben wir den Ausdruck gebraucht, daß sie auf der „unendlich fernen“ Geraden der Ebene liegen. Die Gleichung derselben für die Ebene ε wird (16., Zusatz):

$$a e_1 x_1 + b e_2 x_2 + c e_3 x_3 = 0$$

Ihr entspricht in ε' :

$$a e_1 x'_1 + b e_2 x'_2 + c e_3 x'_3 = 0$$

das ist aber im allgemeinen Falle eine im Endlichen gelegene Gerade. Ebenso entspricht der unendlich fernen (uneigentlichen) Geraden:

$$a' e'_1 x'_1 + b' e'_2 x'_2 + c' e'_3 x'_3 = 0$$

von ε' die im Endlichen liegende Gerade:

$$a' e'_1 x_1 + b' e'_2 x_2 + c' e'_3 x_3 = 0$$

Diese beiden Geraden nennt man die „Fluchtlinien“ der Ebenen ε' und ε . Die beiden Ebenen heißen kollinearverwandt oder kurz „kollinear“, die Beziehung selbst nennt man eine „Kollineation“. Diese Bezeichnungen hat Möbius in seinem grundlegenden Werke „Der barycentrische Calcul“, Leipzig 1827, zuerst angewendet; sie beziehen sich auf die charakteristische Eigenschaft einer solchen Transformation, daß 6 Punkten, die durch eine gerade Linie verbunden werden (= collineantur), wieder die Punkte einer Geraden entsprechen. Chasles hat später dafür die Ausdrücke „homographisch“ und „Homographie“ benutzt.

46. Der Zusammenhang dieser kollinearen Beziehung mit der Projektivität der Grundgebilde erster Stufe wird nun ohne weiteres vermittelt durch folgenden

Satz 22. In einer kollinearen Beziehung zweier Ebenen tragen entsprechende Gerade projektive Punktreihen und entsprechende Punkte projektive Strahlenbüschel.

Für die drei Fundamentalpunkte einer jeden Ebene folgt die letztere Eigenschaft unmittelbar aus unseren Voraussetzungen. Denn es ist z. B. für irgend zwei entsprechende Punkte P und P' :

$$(A_3 A_2 E_1 P_1) = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x'_3}{x'_2} = (A'_3 A'_2 E'_1 P'_1)$$

oder:

$$A_1 (A_3 A_2 E P) = A'_1 (A'_3 A'_2 E' P').$$

Es werden mithin entsprechende Punkte P und P' aus A_1 und A'_1 oder auch aus A_2 und A'_2 usf. durch entsprechende Strahlen projiziert und das Strahlenbüschel A_1 ist projektiv zum Strahlenbüschel A'_1 .

Sind aber dann g und g' einander entsprechende Gerade, ferner X, Y, Z, T vier Punkte auf g und X', Y', Z', T' ihre entsprechenden auf g' , so ist:

$$(X Y Z T) = A_1 (X Y Z T) = A'_1 (X' Y' Z' T') = (X' Y' Z' T')$$

Die Punktreihen auf irgend zwei entsprechenden Geraden sind also projektiv. Dies gilt auch für die Seiten der Fundamentaldreiecke, z. B. für die Verbindungslinien A_1A_2 und $A'_1A'_2$. Daraus folgt weiter, daß irgend zwei entsprechende Punkte P und P' projektive Strahlenbüschel tragen. Denn diese Büschel projizieren z. B. die auf A_1A_2 und $A'_1A'_2$ gelegenen projektiven Punktreihen. Die kollineare Beziehung der beiden ebenen Systeme, also der beiden Grundgebilde zweiter Stufe, besteht demnach darin, daß alle Elemente, nämlich Punkte und Gerade, in den beiden Ebenen einander eineindeutig entsprechen und daß ferner alle diese entsprechenden Elemente projektive Grundgebilde tragen.

Die Tatsache, daß durch die Wahl des Koordinatensystems in jeder Ebene die Kollineation vollständig gegeben ist, bringen wir zum Ausdruck in

Satz 23. Die kollineare Beziehung zweier ebenen Systeme ist bestimmt, wenn man zu vier beliebigen Punkten oder Geraden der einen Ebene die entsprechenden vier Punkte oder Geraden der anderen Ebene beliebig annimmt.

Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß von den vier Punkten keine drei in einer Geraden liegen und von den vier Geraden keine drei durch einen Punkt gehen. Denn dann kann man immer ein allgemeines projektives Koordinatensystem in die gegebenen Elemente der einen Ebene legen und in die entsprechenden Elemente der anderen Ebene das zweite Koordinatensystem.⁶⁾

Aufgabe 5. In einer Ebene ε sind die Punkte A, B, C, D gegeben, die ein Parallelogramm bilden; in einer zweiten Ebene ε' , die der Bequemlichkeit wegen als mit ε zusammenfallend angenommen werden mag, die beliebigen Punkte A', B', C', D' , die den ersten in der angegebenen Reihenfolge entsprechen sollen. In der dadurch festgelegten kollinearen Beziehung konstruiere man zu einem beliebig in ε angenommenen Punkte P und zu einer beliebig durch P in ε gezogenen Geraden g den entsprechenden Punkt P' und die entsprechende Gerade g' in ε' . Man zeichne ferner die Fluchtlinien von ε und ε' .

Lösung: Wir benutzen den Satz 22; danach tragen entsprechende Punkte der Kollineation, z. B. A und A' , projektive Strahlenbüschel. Ist P' der gesuchte, dem Punkte P entsprechende Punkt, so entsprechen den Strahlen von A nach den Punkten B, C, D, P die Strahlen von A' nach den Punkten B', C', D', P' und es sind also auch folgende Doppelverhältnisse gleich:

$$A(BCDP) = A'(B'C'D'P')$$

Die 4 Strahlen der linken Seite sind gegeben und bilden ein bestimmtes Doppelverhältnis. Auf der rechten Seite sind 3 Strahlen, nämlich die von A' nach B', C', D' , bekannt. Dann kann man aber nach bekannten

Sätzen nur einen Strahl p' konstruieren, der mit den 3 gegebenen Strahlen eingegebenes Doppelverhältnis bildet. Auf diesem Strahl p' muß also P' jedenfalls liegen. Führt man für B und B' die gleiche Betrachtung durch, so erhält man eine Gerade durch B' als zweiten Ort für P' . Dieser Punkt ist also als Schnittpunkt der zwei Strahlen bestimmt. Die Aufgabe läßt sich mit dem Lineal allein durchführen.

Die allgemeine lineare Substitution.

47, Die ganze Betrachtung drängt uns nun aber zur Beantwortung der Frage, ob die durch die Gleichungen (1) oder (2) gegebene Kollineation auch die allgemeinste eindeutige Punkttransformation vorstellt, die bei geradliniger Bahn eines Punktes in der einen Ebene den entsprechenden Punkt in der anderen Ebene wieder eine Gerade durchlaufen läßt. Ganz allgemein wird die Transformation:

$$\varrho x'_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \quad \varrho x'_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3), \quad \varrho x'_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3)$$

eine beliebige Gerade der Ebene ε' :

$$\xi'_1 x'_1 + \xi'_2 x'_2 + \xi'_3 x'_3 = 0$$

überführen in die Kurve:

$$\xi'_1 \varphi_1 + \xi'_2 \varphi_2 + \xi'_3 \varphi_3 = 0$$

der Ebene ε . Hierbei sind die φ_i Funktionen der Variable x_i . Soll aber diese Kurve für ganz beliebige Werte der Konstanten ξ'_i in eine Gerade übergehen, so müssen die φ_i offenbar lineare Funktionen der x_i sein, wobei ein allenfalls auftretender gemeinsamer Faktor unterdrückt werden kann. Die allgemeinste Transformation, die Geraden wieder Gerade entsprechen läßt, wird demnach:

$$(7) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases}$$

Hierbei bedeuten die x_i die Koordinaten eines Punktes P in der einen Ebene, die x'_i die Koordinaten des entsprechenden Punktes P' in der anderen Ebene, die a_{ik} sind ganz beliebige Zahlen. Zufolge dieser Gleichungen entspricht ersichtlich jedem Punkte P ein und nur ein Punkt P' ; um Aufschluß darüber zu gewinnen, ob auch jedem Punkte P' ein Punkt P zugewiesen wird, lösen wir die Gleichungen (7) nach den x_i auf. Zu diesem Zwecke führen wir die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ein und bezeichnen ferner die Unterdeterminante des Elementes a_{ik} in Δ mit α_{ik} . Bei beliebiger Wahl der a_{ik} wird Δ von Null verschieden sein.

Wir wollen dies im übrigen ausdrücklich zunächst voraussetzen. Auf den Fall, wo Δ verschwindet und infolgedessen x'_1, x'_2, x'_3 nicht voneinander unabhängig sind, kommen wir (73.) zurück. Aus den Gleichungen (7) leiten wir dann das neue System von Gleichungen ab.

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{\varrho} x_1 = \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{21} x'_2 + \alpha_{31} x'_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} x_2 = \alpha_{12} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_{32} x'_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} x_3 = \alpha_{13} x'_1 + \alpha_{23} x'_2 + \alpha_{33} x'_3 \end{cases}$$

Unter Benutzung dieser Gleichungen ergibt sich also auch zu jedem Punkt P' ein einziger Punkt P . — Die Gleichungen, welche zwischen den Koordinaten ξ_i und ξ'_i entsprechender Geraden bestehen, können wir jetzt ohne weiteres anschreiben. Denn die Gerade:

$$\xi'_1 x'_1 + \xi'_2 x'_2 + \xi'_3 x'_3 = 0$$

geht unter Benutzung der Gleichungen (7) direkt über in folgende:

$$(a_{11} \xi'_1 + a_{21} \xi'_2 + a_{31} \xi'_3) x_1 + (a_{12} \xi'_1 + a_{22} \xi'_2 + a_{32} \xi'_3) x_2 + (a_{13} \xi'_1 + a_{23} \xi'_2 + a_{33} \xi'_3) x_3 = 0$$

so daß die Koordinaten ξ_x dieser Geraden die Werte haben:

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho \xi_1 = a_{11} \xi'_1 + a_{21} \xi'_2 + a_{31} \xi'_3 \\ \varrho \xi_2 = a_{12} \xi'_1 + a_{22} \xi'_2 + a_{32} \xi'_3 \\ \varrho \xi_3 = a_{13} \xi'_1 + a_{23} \xi'_2 + a_{33} \xi'_3 \end{cases}$$

Die entsprechende Betrachtung für eine Gerade der Ebene ε liefert die Gruppe von Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{\varrho} \xi'_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \alpha_{13} \xi_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} \xi'_2 = \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2 + \alpha_{23} \xi_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} \xi'_3 = \alpha_{31} \xi_1 + \alpha_{32} \xi_2 + \alpha_{33} \xi_3 \end{cases}$$

Die durch die Gleichungen (7) gegebene Beziehung zwischen zwei Systemen von Koordinaten bezeichnet man als eine lineare, homogene Substitution; Δ heißt die Substitutionsdeterminante oder der Substitutionsmodul. Denkt man an die geometrische Deutung der Gleichungen (7), so sagt man, daß sie eine lineare Transformation darstellen. Die Koeffizienten der Gleichungen (9) unterscheiden sich von denen der Gleichungen (7) nur dadurch, daß die Koeffizienten a_{ik} statt nach Horizontalreihen nach Vertikalreihen in der Determinante Δ

angeordnet sind. Man nennt diese Substitution die „transponierte“; in der gleichen Weise geben die Gleichungen (10) die transponierte Substitution zu den Gleichungen (8).

48. In den Gleichungen (2) von 45. erkennt man einen ganz speziellen Fall der allgemeinen linearen Substitution (7) und wir werden jetzt zu untersuchen haben, ob die durch die Gleichungen (7) gegebene Verwandtschaft nicht etwa allgemeinerer Natur ist als die durch die Gleichungen (1) oder (2) bestimmte Kollineation.

Denken wir uns zu diesem Zwecke zwei Ebenen, die durch eine lineare Transformation, wie sie die Gleichungen (7) geben, aufeinander abgebildet sind. Dann muß sich diese Verwandtschaft doch auch dann noch durch lineare Gleichungen von der Form (7) darstellen lassen, wenn man das Koordinatensystem in jeder der beiden Ebenen in bestimmter, sofort näher zu bezeichnender Weise annimmt. Wir wollen uns nämlich zwei entsprechende Punkte in den beiden Ebenen herausgegriffen denken und in den einen die Ecke A_1 in den anderen die Ecke A'_1 verlegen. Es entspricht also nun dem Punkte A_1 oder $x_1 = 0, x_2 = 0$ (16.) der Punkt A'_1 oder $x'_1 = 0, x'_2 = 0$, was kurz durch $A_1 \sim A'_1$ ausgedrückt werden möge. In den Gleichungen, welche die Verwandtschaft bei dieser Lage der Koordinatensysteme darstellen, muß demnach $a_{21} = 0$ und $a_{31} = 0$ sein, also:

$$A_1 \sim A'_1; \quad a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0$$

Verlegen wir nun auch die Ecken A_2 und A'_2 in entsprechende Punkte der Ebenen, so ergibt sich ebenso, daß $a_{12} = 0$ und $a_{32} = 0$ ist oder:

$$A_2 \sim A'_2; \quad a_{12} = 0, \quad a_{32} = 0$$

Wenn endlich A_3 und A'_3 sich entsprechen, so ist:

$$A_3 \sim A'_3; \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0.$$

Die lineare Transformation, in der die drei Ecken der beiden Koordinatendreiecke einander entsprechen, wird also durch die Gleichungen gegeben:

$$\varrho x'_1 = a_{11} x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{22} x_2, \quad \varrho x'_3 = a_{33} x_3$$

Soll endlich auch der Einheitspunkt der einen Ebene dem der anderen entsprechen, so muß man haben:

$$a_{11} : a_{22} : a_{33} = 1 : 1 : 1$$

und die Gleichungen reduzieren sich auf die Form (2).

Es hat sich damit gezeigt, daß die Gleichungen (7) auch bloß eine Kollineation liefern, nur ist dabei das Koordinatensystem in jeder Ebene ganz willkürlich angenommen; wir haben also bewiesen:

Satz 24. *Die allgemeine lineare, homogene Substitution zwischen den Punktkoordinaten der beiden Ebenen oder auch zwischen den Linienkoordinaten der beiden Ebenen stellt eine Kollineation dar.*

Kollineare Ebenen in perspektiver Lage.

49. Auch aus dem Bündel können wir unter Anwendung der bekannten Operationen der neueren Geometrie (Schneiden und Projizieren) kollineare Ebenen in einfacher Weise herleiten. Schneiden wir nämlich ein Strahlenbündel S mit zwei Ebenen ε und ε' , so liefert jeder Strahl des Bündels in seinen Schnittpunkten mit ε und ε' entsprechende Punkte A und A' usw. (Fig. 17) und jede Ebene des Bündels schneidet entsprechende Gerade g und g' aus den beiden Ebenen aus. Man überzeugt sich leicht, daß die beiden Ebenen dadurch kollinear aufeinander bezogen werden; aber die Strahlenbüschel in entsprechenden Punkten (wie A und A') und die Punktreihen auf entsprechenden Geraden (wie g und g') sind in diesem Falle nicht nur projektiv, sondern perspektiv.¹⁾ In dieser Lage bezeichnet man die beiden Ebenen selbst als „*überspektiv*“ und den Prozeß der Zentralprojektion auch als „*Perspektive*“. Denkt man sich die Beziehung der Punkte

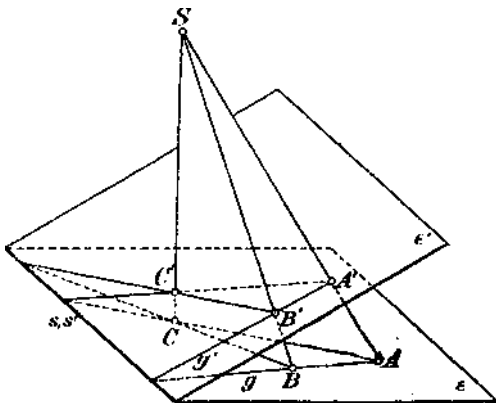


Fig. 17.

und Geraden in den beiden Ebenen festgelegt, die Ebenen selbst aber in eine beliebige Lage gegeneinander gebracht, so sind die beiden Ebenen offenbar noch kollinear aufeinander bezogen. Dabei bleibt es allerdings noch dahingestellt, ob diese beiden Ebenen nicht etwa in einer speziellen kollinearen Beziehung zueinander stehen. Dies ist nicht der Fall. Denn man kann zeigen, daß sich umgekehrt zwei kollineare Ebenen — sogar noch auf unendlich viele Arten — in perspektive Lage bringen lassen.⁷⁾

Ausartungen der Kollineationen.

50. Endlich erhalten wir auch zwei Ausartungen der kollinearen Beziehung, wenn wir bei der perspektiven Lage den Mittelpunkt S des Bündels auf der einen Ebene oder in der Schnittlinie der beiden Ebenen wählen. Liegt im ersten Falle S etwa in ε' und denken wir uns die Ebenen dann wieder aus dem perspektiven Zusammenhang gebracht, so ist in ε eine singuläre Gerade s , in ε' ein singulärer Punkt S gegeben. Die Punktreihe s ist projektiv auf das Strahlenbüschel S bezogen. Jedem beliebigen Punkte von ε entspricht stets wieder der Punkt S der anderen Ebene, einem Punkte der singulären Geraden s dagegen entsprechen alle Punkte des Strahles von S , der dem Punkte zugewiesen ist. Einem

Punkte X' von ε' ferner entspricht der Punkt auf s , der in der projektiven Beziehung von S und s dem Strahle $X'S$ zugeordnet ist.

Wird im zweiten Falle das Zentrum S der Perspektivität auf der Schnittlinie s der beiden Ebenen angenommen, so liefern die in beliebige Lage gebrachten Ebenen folgende Ausartung der kollinearen Beziehung: In jeder der beiden Ebenen liegt eine singuläre Gerade s bzw. s' und auf ihr je ein singulärer Punkt S bzw. S' . Jedem beliebigen Punkte der einen Ebene entspricht stets der singuläre Punkt der anderen Ebene, jeder Geraden der einen Ebene immer die singuläre Gerade der anderen Ebene. Einem beliebigen Punkte auf der singulären Geraden der einen Ebene entsprechen die sämtlichen Punkte der singulären Geraden der anderen Ebene. Einem beliebigen Strahle durch den singulären Punkt der einen Ebene sind alle Strahlen durch den singulären Punkt der anderen Ebene zugewiesen. Auf weitere Ausartungen der Kollineation gehen wir nicht ein.

Kollineare und reziproke Grundgebilde 2. Stufe.

51. Wir haben bisher immer nur von zwei Ebenen gesprochen und von ihrer Beziehung aufeinander durch die Gleichungen (7) und (8) oder auch (9) und (10) in 47. Ganz ebenso können wir nun aber auch von zwei Bündeln ausgehen und ihre Strahlen eineindeutig aufeinander beziehen. Wenn ein Strahl im einen Bündel dann eine Ebene beschreibt, so hat der entsprechende Strahl im anderen Bündel die gleiche Eigenschaft. Man nennt diese Bündel auch wieder kollinear aufeinander bezogen.

Es liegt dann aber folgende Verallgemeinerung nahe. Unter Festhaltung der bisherigen Bezeichnungen schreiben wir für zwei Ebenen ε und ε' die Gleichungen an:

$$(11) \quad \begin{cases} \varrho \xi'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho \xi'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho \xi'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases}$$

Durch diese wird jedem Punkte der Ebene ε eine Gerade von ε' zugewiesen. Ferner folgen daraus wiederum die neuen Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{\varrho} x_1 = \alpha_{11} \xi'_1 + \alpha_{21} \xi'_2 + \alpha_{31} \xi'_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} x_2 = \alpha_{12} \xi'_1 + \alpha_{22} \xi'_2 + \alpha_{32} \xi'_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} x_3 = \alpha_{13} \xi'_1 + \alpha_{23} \xi'_2 + \alpha_{33} \xi'_3 \end{cases}$$

wonach umgekehrt jeder Geraden von ε' auch wieder ein Punkt von ε entspricht. Transformiert man weiter die Bedingung für die vereinigte

Lage eines Punktes und einer Geraden, so ergeben sich wie früher die Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{cases} \varrho \xi_1 = a_{11} x'_1 + a_{21} x'_2 + a_{31} x'_3 \\ \varrho \xi_2 = a_{12} x'_1 + a_{22} x'_2 + a_{32} x'_3 \\ \varrho \xi_3 = a_{13} x'_1 + a_{23} x'_2 + a_{33} x'_3 \end{cases}$$

und:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\Delta}{\varrho} x'_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \alpha_{13} \xi_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} x'_2 = \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2 + \alpha_{23} \xi_3 \\ \frac{\Delta}{\varrho} x'_3 = \alpha_{31} \xi_1 + \alpha_{32} \xi_2 + \alpha_{33} \xi_3 \end{cases}$$

wonach auch den Punkten von ε' eindeutig Gerade in e und den Geraden von ε eindeutig Punkte von ε' entsprechen. Zwei solche Ebenen heißen „reziprok“ oder „korrelativ“ aufeinander bezogen; die Beziehung selbst wird als „Korrelation“ bezeichnet. Ebenso können wir zwei Bündel reziprok aufeinander beziehen, wobei dann den Strahlen und Ebenen des einen die Ebenen und Strahlen des andern entsprechen. Danach sind also in kollinearen Gebilden gleichartige, in reziproken Gebilden ungleichartige Elemente einander zugewiesen.

Um Anhaltspunkte zu gewinnen, wie wir für die Beziehung von Bündel und Ebene die Bezeichnung folgerichtig wählen, machen wir uns vorher klar, wie sich der Begriff der „perspektiven Beziehung“ für die Grundgebilde 2. Stufe überhaupt zum Ausdruck bringen läßt.

Projiziert man die Punkte einer Ebene aus zwei Punkten S und S' , so sind die dadurch entstehenden Bündel „perspektiv“, wenn man diejenigen Strahlen einander zuordnet, die nach dem gleichen Punkte gehen; die Geraden der Ebene mit S und S' verbunden, liefern entsprechende Ebenen der Bündel. Je zwei entsprechende Gerade der beiden Bündel tragen perspektive Ebenenbüschel, je zwei entsprechende Ebenen perspektive Strahlenbüschel. Denkt man sich nun weiter die Zuordnung der Strahlen und Ebenen in den beiden Bündeln markiert, löst aber die gewissermaßen als materiell gedachten Gebilde aus ihrem geometrischen Zusammenhange und bringt sie in beliebige Lage im Raume, so sind die Bündel noch kollinear aufeinander bezogen. Entsprechende Elemente tragen projektive Grundgebilde erster Stufe.

Schneidet man ein Strahlenbündel mit einer Ebene, so nennt man das Punktfeld der Ebene wieder „perspektiv“ zum Strahlenbündel. Durch Auseinandernehmen beider ergeben sich dann Gebilde, die wir wieder als „kollinear“ bezeichnen. Wir gewinnen aber damit die Definition, daß ein Bündel und eine Ebene kollinear heißen sollen, wenn den Strahlen und Ebenen im Bündel die Punkte und Geraden der Ebene

entsprechen. Bei der reziproken Beziehung dieser beiden Grundgebilde werden also dann den Strahlen und Ebenen des Bündels die Geraden und Punkte des Feldes zugewiesen. Vom analytischen Standpunkt aus sind die Aufgaben der Kollineation und Korrelation zunächst wenigstens überhaupt die gleichen; für die Kollineationen liefern die perspektiven Beziehungen ein einfaches Beispiel; für die Korrelationen läßt sich ein solches Beispiel nicht angeben. Die Kollineation und Korrelation finden ihren gemeinsamen Ausdruck in der linearen Substitution. Beide Beziehungen können als „projektive“ bezeichnet werden, sofern in jedem Falle die eineindeutig einander zugewiesenen Elemente der beiden Grundgebilde 2. Stufe projektive Grundgebilde 1. Stufe tragen.

Aufgabe 6: Zwei Ebenen werden dadurch aufeinander reziprok bezogen, daß 4 Punkte der einen 4 Geraden der anderen zugewiesen sind. Man bestimme durch Konstruktion und Rechnung den Punkt in jeder Ebene, der der unendlich fernen Geraden der einen und der anderen Ebene entspricht.

Projektive Eigenschaften. Dualität.

52. Welche Eigenschaften der geometrischen Gebilde sind es nun, die man mittels kollinear Transformationen untersucht? Denken wir uns etwa zwei Ebenen, die kollinear aufeinander bezogen sein mögen. Einer in der ersten Ebene gelegenen Kurve n^{ter} Ordnung C^n entspricht in der zweiten Ebene eine Kurve C'^n von der gleichen Ordnung; denn die lineare Substitution läßt den Grad der Kurvengleichung ungeändert. Auch die Klasse der Kurve bleibt die gleiche, weil die Transformation der Linienkoordinaten ebenfalls eine lineare ist. Dagegen werden die Beziehungen der Kurve zum Unendlichfernen im allgemeinen eine Änderung erleiden. Unendlich ferne Punkte der C^n gehen bei einer allgemeinen Kollineation in endliche Punkte der C'^n über usw.

Ist C^n eine rationale Kurve, so gilt das gleiche von der Kurve C'^n und beide Kurven sind projektiv aufeinander bezogen. Auf diese Weise kann man aus einer ebenen Kurve durch lineare Transformationen oder, anschaulich geometrisch ausgesprochen, durch Zentralprojektionen in andere und andere Ebenen unendlich viele neue Kurven herleiten. (Ausgeführt z. B. in: *Neutoni genesis curvarum per umbras* [1746] von Patrick Murdoch.) Gibt es nun Eigenschaften, die allen diesen Kurven gemeinsam sind, die also durch lineare Transformationen oder durch Zentralprojektionen nicht zerstört werden? Solche Eigenschaften heißen projektive und zum Studium derselben können wir irgend eine der unendlich vielen Kurven benutzen, sofern sie sich etwa durch irgend welche Eigenschaften als dazu geeignet erweist.

Das bekannteste Beispiel für diese Untersuchungsmethode bieten die Kegelschnitte, die sich durch Zentralprojektion oder auch durch eine

Kollineation aus dem Kreise ableiten lassen; er gibt in diesem Falle den für die Konstruktion einfachsten Typus der Kurve zweiter Ordnung. Wir kommen später darauf zurück, wenn wir eine für konstruktive Zwecke bequemere Form der kollinearen Beziehung kennen lernen (§ 21.).

In der Möglichkeit, zwei Grundgebilde zweiter Stufe reziprok aufeinander zu beziehen, liegt der Beweis für das Dualitäts- oder Reziprozitäts-Gesetz¹⁾ in der Ebene und im Bündel. Eine Korrelation zwischen zwei Ebenen führt eine Kurve n^{ter} Ordnung, den Ort eines Punktes im einen Feld, über in eine Kurve n^{ter} Klasse im zweiten Felde, die von den entsprechenden Geraden umhüllt wird. Jedem mehrfachen Punkte des ersten Ortes entspricht eine ebensovielfache Tangente der entsprechenden Klassenkurve, also z. B. einem Doppelpunkt eine Doppeltangente usw.

Die reziproke Beziehung zweier ebenen Systeme kann in sehr verschiedener Weise ausarten. Aus den in 50. erwähnten Beispielen der Ausartung einer Kollineation ergeben sich solche für die Korrelation, wenn man an Stelle der einen der beiden Ebenen ihr korrelatives Bild setzt.

Darstellung in nicht homogenen (schiefwinkligen) Koordinaten.

53. Wenn wir die kollineare Beziehung zweier Ebenen durch die Gleichungen (7) von 47. zum Ausdruck brachten, so entsprachen sich dabei weder die Seiten der beiden Fundamentaldreiecke noch die unendlich fernen Geraden der beiden Ebenen. Wir dürfen also, ohne dadurch eine speziellere Beziehung zu erhalten, auch in den beiden Ebenen Fundamentaldreiecke wählen, von denen etwa die Seiten a_3 und a'_3 mit den unendlich fernen Geraden der beiden Ebenen zusammenfallen. Die homogene Koordinatenbestimmung geht dann, wie früher (19.) gezeigt wurde, über in ein System gewöhnlicher, schiefwinkliger Koordinaten in der Weise, daß:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

und analog:

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3}, \quad y' = \frac{x'_2}{x'_3}$$

gesetzt wird. Aus den Gleichungen (7) in 47. erhalten wir aber die folgenden:

$$\frac{x'_1}{x'_3} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3} \quad \text{und} \quad \frac{x'_2}{x'_3} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}$$

oder auch:

$$(15) \quad x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}$$

wenn wir $a_{11}, a_{12}, \dots$ durch $a_1, b_1, \dots$ ersetzen. Diese Gleichungen (15) geben die allgemeinste Darstellung der Kollineation in gewöhnlichen, schiefwinkligen Koordinaten. Aus ihnen ergeben sich die folgenden:

$$(16) \quad x = \frac{\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3}{\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3}, \quad y = \frac{\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3}{\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3}$$

Hierbei bedeutet wieder α_i die Unterdeterminante, die in:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

zu dem Elemente a_i gehört, usw.

Der Vollständigkeit wegen mögen auch noch die Formeln (vgl. 20. und 47.) Platz finden, welche die Linienkoordinaten u, v und u', v' ineinander transformieren. Man erhält wie oben:

$$(17) \quad \begin{cases} u = \frac{a_1 u' + a_2 v' + a_3}{c_1 u' + c_2 v' + c_3} \\ v = \frac{b_1 u' + b_2 v' + b_3}{c_1 u' + c_2 v' + c_3} \end{cases}$$

und:

$$(18) \quad \begin{cases} u' = \frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3} \\ v' = \frac{\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3} \end{cases}$$

In jeder dieser vier Gruppen (15), (16), (17), (18) tritt in beiden Gleichungen der nämliche Nenner auf. Es sind:

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

und:

$$\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 = 0$$

die „Fluchtgeraden“ der Ebenen ε und ε' , denen die unendlich fernen Geraden der anderen Ebene entsprechen. Das Auftreten dieses gleichen Nenners erscheint aber als eine notwendige Bedingung. Denn die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} = \frac{A}{C} \\ y' &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} = \frac{B}{C} \end{aligned}$$

liefern zwar auch eine eindeutige Punkttransformation, aber einer Geraden:

$$p x' + q y' + r = 0$$

entspricht vermöge derselben der Kegelschnitt:

$$p \cdot A \cdot D + q \cdot B \cdot C + r \cdot C \cdot D = 0$$

54. Ganz in der gleichen Weise kann man von den früher (51.) aufgestellten Gleichungen für die Korrelation ausgehen und daraus die Dar-

stellung dieser Verwandtschaft in nicht homogenen Koordinaten gewinnen; man erhält unter Rücksicht auf 19. und 20, die entsprechenden Systeme:

$$(19) \quad \begin{cases} u' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \\ v' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}. \end{cases} \quad (20) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3}{\gamma_1 u' + \gamma_2 v' + \gamma_3} \\ y = \frac{\beta_1 u' + \beta_2 v' + \beta_3}{\gamma_1 u' + \gamma_2 v' + \gamma_3} \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} u = \frac{a_1 x' + a_2 y' + a_3}{c_1 x' + c_2 y' + c_3}, \\ v = \frac{b_1 x' + b_2 y' + b_3}{c_1 x' + c_2 y' + c_3}. \end{cases} \quad (22) \quad \begin{cases} x' = \frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3} \\ y' = \frac{\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3} \end{cases}$$

Den Geraden:

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

und:

$$c_1 x' + c_2 y' + c_3 = 0$$

entsprechen in den Ebenen ε' und ε je die Koordinatenanfänge $u' = \infty$, $v' = \infty$ und $u = \infty$, $v = \infty$. Als Endergebnis finden wir demnach

Satz 25. Die Verwandtschaften der Kollineation und Korrelation werden in schiefwinkligen (gewöhnlichen) Koordinaten durch eine linear-gebrochene Substitution mit dem gleichen Nenner dargestellt.

§ 13. Spezielle Fälle der kollinearen Beziehung zweier Ebenen.

Affine Systeme.

55. Bei der bisher behandelten, allgemeinen kollinearen Beziehung zweier Felder entsprach der unendlich fernen Geraden einer jeden Ebene eine im Endlichen gelegene Gerade der andern Ebene, nämlich die „Fluchtgerade“ (45. und 53.). Wir erhalten dagegen eine speziellere Kollineation, wenn wir in bezug auf das Unendlich-Ferne eine besondere **Annahme** machen. Diese möge darin bestehen, daß wir die unendlich fernen Geraden der beiden Ebenen einander zuweisen. Lassen wir wieder die Seiten a_3 und a'_3 der Fundamentaldreiecke ins Unendliche fallen (19.), so müssen unter dieser neuen Voraussetzung die Gleichungen dieser Kollineation werden [vgl. (7) von 47.]:

$$\varrho x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

$$\varrho x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$

$$\varrho x'_3 = a_{33} x_3.$$

Führen wir dafür schiefwinklige Koordinaten ein, so nehmen diese Beziehungen die Form an:

$$\frac{x'_1}{x'_3} = \frac{a_{11}}{a_{33}} \frac{x_1}{x_3} + \frac{a_{12}}{a_{33}} \frac{x_2}{x_3} + \frac{a_{13}}{a_{33}}$$

$$\frac{x'_2}{x'_3} = \frac{a_{21}}{a_{33}} \frac{x_1}{x_3} + \frac{a_{22}}{a_{33}} \frac{x_2}{x_3} + \frac{a_{23}}{a_{33}}$$

oder:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2. \end{cases}$$

Dabei beziehen sich x, y sowie x', y' je auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem (Fig. 8) mit beliebigem Achsenwinkel. Um zunächst wieder die sämtlichen Formeln zusammenzustellen, lösen wir die Gleichungen (1) nach x und y auf und erhalten:

$$(2) \quad \begin{cases} x = A_1 x' + B_1 y' + C_1 \\ y = A_2 x' + B_2 y' + C_2 \end{cases}$$

wobei:

$$A_1 = \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad B_1 = \frac{-b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad C_1 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$A_2 = \frac{-a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad B_2 = \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad C_2 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Ferner erhält man für die Linienkoordinaten [vgl. (9) von 47.]:

$$(3) \quad \begin{cases} u = \frac{a_1 u' + a_2 v'}{c_1 u' + c_2 v' + 1} \\ v = \frac{b_1 u' + b_2 v'}{c_1 u' + c_2 v' + 1} \end{cases}$$

und:

$$(4) \quad \begin{cases} u' = \frac{A_1 u + A_2 v}{C_1 u + C_2 v + 1} \\ v' = \frac{B_1 u + B_2 v}{C_1 u + C_2 v + 1} \end{cases}$$

Diese spezielle Art der Kollineation wird als „Affinität“ bezeichnet; die Ebenen heißen „affin“ aufeinander bezogen. In den obigen Systemen von Gleichungen ist zu beachten, daß in den Formeln für die Punktkoordinaten (1) und (2) kein Nenner auftritt, während ein solcher bei den Ausdrücken für die Linienkoordinaten (3) und (4) vorhanden ist. Umgekehrt müssen offenbar die Transformationsgleichungen in den Punktkoordinaten durch ganze lineare Funktionen gegeben werden, wenn jedem unendlich fernen Punkt wieder ein unendlich ferner Punkt entsprechen soll. Es folgt also

Satz 26. Die affine Beziehung zweier Ebenen wird durch eine lineare ganze Substitution in den gewöhnlichen Punktkoordinaten dargestellt.

Die Gleichungen (1) können noch eine einfachere Gestalt annehmen, wenn die beiden Koordinatensysteme passend gewählt werden. Verlegen

wir die Koordinatenanfänge in entsprechende Punkte der affinen Felder, so muß für $x = 0$, $y = 0$ auch $x' = 0$, $y' = 0$ werden; die Gleichungen werden demnach:

$$(5) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

Nehmen wir ferner an, daß der X-Achse ($y = 0$) die X'-Achse ($y' = 0$) entspricht, so muß $a_2 = 0$ sein, und wenn in gleicher Weise auch die Y- und Y'-Achse einander zugewiesen sind, so gewinnen wir für die affine Beziehung folgende einfachste Form der Darstellung:

$$(6) \quad x' = ax, \quad y' = by$$

Dabei beziehen sich die Koordinaten auf zwei beliebige schiefwinklige Koordinatensysteme. Wir könnten übrigens auch zwei rechtwinklige Achsenkreuze benutzen. Denn die Strahlenbüschel in entsprechenden Punkten affiner Ebenen sind ja auch projektiv und in zwei projektiven Strahlenbüscheln gibt es immer ein Paar entsprechender rechter Winkel.*)

56. Wenden wir uns jetzt zur Untersuchung der geometrischen Eigenschaften affiner Systeme. Zu ihrer Bestimmung genügt offenbar die Angabe von drei Paaren entsprechender im Endlichen liegender Geraden a, b, c, a', b', c' , zu denen als viertes Paar die beiden unendlich fernen Geraden der Ebenen hinzutreten. Dann sind auch die Ecken dieser beiden Dreiecke einander zugewiesen und in diesem Sinne kann man also auch drei Punktpaare beliebig annehmen.

Die beiden unendlich fernen Geraden der affinen Felder tragen als entsprechende Gebilde projektive Punktreihen, d. h. jedem unendlich fernen Punkte entspricht wieder ein unendlich ferner oder jeder Richtung wieder eine Richtung. Wir drücken dies aus durch den

Satz 27. In affinen Ebenen entspricht einem Büschel von Parallelstrahlen wieder ein dazu projektives Parallelstrahlenbüschel.

Die Punktreihen auf irgend zwei einander entsprechenden Geraden der affinen Felder sind infolgedessen ähnlich.

Durchläuft ein Punkt in der einen Ebene eine vollständig im Endlichen gelegene Kurve, so kann auch die Bahn des entsprechenden Punktes nicht ins Unendliche gehen, muß also ebenfalls ganz im Endlichen verlaufen. Einer Ellipse z. B. entspricht also wieder eine Ellipse oder gegebenenfalls etwa ein Kreis, einer Hyperbel oder Parabel wieder eine solche Kurve.

Begrenzt eine geschlossene Kurve in dem einen Felde einen Flächeninhalt, so gilt das gleiche von der ebenfalls geschlossenen Kurve im anderen Felde. Solche entsprechende Flächeninhalte stehen, wie jetzt gezeigt werden soll, in einem unveränderlichen Verhältnis.

*) Siehe z. B. R. Haußner, Darstellende Geometrie, Bd. 1. 4. Aufl. Berlin 1929. (Sammlung Götschen Bd. 142.).

Zu diesem Zwecke sei zunächst ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$ in der einen Ebene beliebig angenommen, $P'_1 P'_2 P'_3$ möge das entsprechende Dreieck in der anderen Ebene sein. Die Koordinaten der Ecken bezeichnen wir mit (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) und (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) , (x'_3, y'_3) , wobei

$$\begin{aligned} x'_1 &= a x_1, & x'_2 &= a x_2, & x'_3 &= a x_3 \\ y'_1 &= b y_1, & y'_2 &= b y_2, & y'_3 &= b y_3 \end{aligned}$$

Nach bekannten Formeln ist dann:

$$2\Delta(P_1 P_2 P_3) = \sin \alpha \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

und:

$$2\Delta(P'_1 P'_2 P'_3) = \sin \alpha' \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

Dabei bedeuten a und a' die Winkel der betreffenden Koordinatenachsen. Durch Division folgt:

$$\frac{\Delta(P_1 P_2 P_3)}{\Delta(P'_1 P'_2 P'_3)} = \frac{\sin \alpha}{a b \sin \alpha'}$$

Die rechte Seite enthält die Koordinaten der betrachteten Punkte nicht mehr, sondern bloß die Konstanten, die durch die Wahl der beiden Koordinatensysteme bedingt waren. Das Verhältnis der beiden Dreiecksinhalte muß aber unabhängig sein von der Lage der beiden Koordinatensysteme, also ist der Ausdruck:

$$\frac{\sin \alpha}{a b \sin \alpha'} = c$$

eine Konstante und hat den gleichen Wert, wenn man ihn für irgend zwei entsprechende Punkte O und O' und entsprechende Gerade der affinen Ebenen bildet.

Eine rein geometrische Deutung der Konstanten c läßt sich überdies durch einen Sonderfall des vorangehenden in folgender Weise gewinnen. Tragen wir vom Ursprung O aus auf der X - und Y -Achse je die Streckeneinheit ab, so erhalten wir die Punkte X_0 und Y_0 . Dem Dreieck OX_0Y_0 entspricht dann ein Dreieck $O'X'_0Y'_0$ mit den Seiten a und b . Die Konstante c gibt das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke und es ist:

$$c = \frac{\Delta(OX_0Y_0)}{\Delta(O'X'_0Y'_0)} = \frac{\Delta(P_1P_2P_3)}{\Delta(P'_1P'_2P'_3)}$$

Man ist aber imstande, diese Eigenschaft affiner Ebenen noch allgemeiner auszusprechen.

Denken wir uns irgend eine geschlossene Kurve in der einen Ebene, die einen Flächeninhalt f begrenzt (z. B. in Fig. 18 den durch O gehenden Kreis) und es sei f' der von der entsprechenden Kurve begrenzte Flächeninhalt (in der Figur ist diese Kurve eine Ellipse).

Der Inhalt f wird dargestellt durch eine Summe oder das Integral:

$$f = \int df$$

wobei df , das Differential der Fläche f , als ein unendlich kleines Dreieck betrachtet werden darf.

Es ist aber auch:

$$df = c df',$$

wenn df' das Differential der Fläche f' ist, mithin überhaupt:

$$f = c f'.$$

Also folgt

Satz 28. In affinen Feldern stehen die Flächeninhalte, die von entsprechenden Kurven begrenzt werden, in konstantem Verhältnis.

In der Fig. 18 ist die Ellipse gezeichnet, in die der im ersten System gezeichnete Kreis durch die affine Verwandtschaft:

$$x' = x,$$

$$y' = 2y$$

transformiert wird.

Dagegen stehen zwei beliebige entsprechende Strecken affiner Felder in einem Verhältnis, das noch von der Lage der sie tragenden

Geraden, d. h. von deren Richtungen abhängt. Für die X - und X' -Achse z. B. hat das Verhältnis zugeordneter Strecken den Wert a . Nehmen wir irgend eine Strecke PQ , welche parallel der X -Achse verläuft, so ist die entsprechende Strecke $P'Q'$ parallel der X' -Achse. Zieht man durch die Endpunkte P und Q Parallele zur T -Achse, so entsprechen ihnen die Parallelen durch P' und Q' zur F' -Achse und man erkennt leicht, daß auch:

$$P'Q' = a \cdot PQ.$$

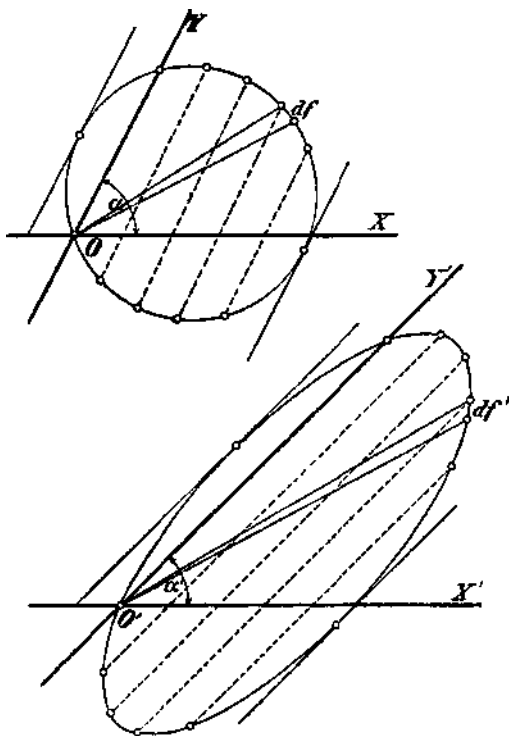


Fig. 18.

Für jede Parallele zur X-Achse ist also das Verhältnis entsprechender Strecken ebenfalls $= a$. Da die X- und X'-Achse als irgend zwei entsprechende Gerade der affinen Ebenen betrachtet werden dürfen, so gilt dies für jedes Büschel von Parallelstrahlen; also folgt

Satz 29. In affinen Ebenen stehen Strecken, die auf parallelen Geraden liegen, zu den ihnen entsprechenden Strecken in gleichem Verhältnis, das für alle Strahlen des Parallelstrahlenbüschels das nämliche bleibt. Zu zwei einander entsprechenden Richtungen gehört je ein Wert dieses Verhältnisses.

Gleichheit und Ähnlichkeit ebener Systeme.

57. Die Konstante c , welche das Verhältnis entsprechender Flächeninhalte in affinen Feldern gab, kann speziell auch den Wert 1 annehmen, d. h. also:

$$\frac{\sin \alpha}{a b \sin \alpha'} = 1$$

Dann sind entsprechende Figuren flächengleich und dies gilt auch noch für die kleinsten Teile und für jede Zerlegung. Solche Systeme heißen „affingleich“ und wir erhalten dieselben, wenn wir die zur Bestimmung der Affinität nötigen Dreiecke ABC und $A'B'C$ als flächengleich voraussetzen. Endlich können wir fragen, ob es affine Felder gibt, in denen nicht nur die Flächeninhalte entsprechender Figuren, sondern auch entsprechende Strecken in einem von der Richtung unabhängigen, konstanten Verhältnis stehen. Dann ist jedenfalls:

$$a = b.$$

Irgend zwei entsprechende Dreiecke müssen ähnlich sein, so daß zwei beliebige Gerade und ihre entsprechenden den gleichen Winkel einschließen. Mit Zugrundelegung zweier rechtwinkligen Koordinatensysteme werden solche Felder dargestellt durch die Gleichungen:

$$(7) \quad x' = a x, \quad y' = a y$$

Die Systeme heißen „ähnlich“; sie sind nur dem Maßstab nach verschieden. Entsprechende Strecken stehen im Verhältnis a , entsprechende Flächen im Verhältnis a^2 .

Nehmen wir $a = 1$, so geben die Formeln:

$$(8) \quad x' = x, \quad y' = y$$

kongruente Systeme.

58. Aus dem Strahlenbündel lassen sich die speziellen Fälle der Kollineation ableiten, wenn man entweder den Scheitel des Bündels oder die Schnittlinie der beiden Ebenen in besonderer Weise wählt. So schneidet ein Parallelstrahlenbündel aus zwei beliebigen Ebenen affine Systeme aus, die sich überdies in perspektiver Lage befinden. Nimmt man die Ebenen

auseinander, ohne die Zuordnung der Elemente zu ändern, so hat man zwei Ebenen in affiner Beziehung. Doch könnte man daraus nicht die Affinität definieren, Denn man kann zeigen, daß sich zwei nach unserer allgemeinen Definition affin aufeinander bezogene Felder nicht immer auch umgekehrt in perspektive Lage bringen lassen.

Projiziert man insbesondere ein ebenes System orthogonal in eine andere Ebene, so erhält man affine Felder, wie sie in der darstellenden Geometrie häufig auftreten. Das Verhältnis der Flächeninhalte entsprechender Figuren wird dann durch den Kosinus des Neigungswinkels der beiden Ebenen ausgedrückt.

Ähnliche Felder ergeben sich z. B. als Schnitte zweier paralleler Ebenen mit einem Strahlenbündel, sie gehen in kongruente über, wenn der Mittelpunkt des Bündels unendlich fern angenommen wird usf.

Ähnliche und kongruente Systeme lassen sich immer in perspektive Lage bringen.

Die kollineare Beziehung in der Umgebung entsprechender Punkte.

59. Ist eine kollineare Beziehung gegeben durch die Gleichungen (15) von 53., so wollen wir jetzt nicht die beiden Felder in ihrer ganzen Ausdehnung ins Auge fassen, sondern uns auf zwei einander entsprechende Punkte (x, y) , (x', y') und auf deren nächste Nachbarschaft beschränken. Ein dem Punkte (x, y) benachbarter Punkt hat die Koordinaten $x + dx$, $y + dy$ und es wird ihm ein Punkt $x' + dx'$, $y' + dy'$ entsprechen, so daß zwischen den Änderungen dx , dy , dx' , dy' die Beziehungen bestehen:

$$dx' = \frac{(a_3x + b_3y + c_3)(a_1dx + b_1dy) - (a_1x + b_1y + c_1)(a_3dx + b_3dy)}{(a_3x + b_3y + c_3)^2}$$

$$dy' = \frac{(a_3x + b_3y + c_3)(a_2dx + b_2dy) - (a_2x + b_2y + c_2)(a_3dx + b_3dy)}{(a_3x + b_3y + c_3)^2}$$

Setzen wir $dx = \xi$, $dy = \eta$, $dx' = \xi'$, $dy' = \eta'$, so nehmen diese Gleichungen die Form an:

$$\xi' = A_1 \xi + B_1 \eta$$

$$\eta' = A_2 \xi + B_2 \eta$$

Dabei sind die Größen A und B Funktionen von x und y , welche also für die Betrachtung der beiden kleinen Gebiete denselben Wert beibehalten. Wir haben demnach eine Transformation vor uns, wie sie in 55. durch die Gleichungen (5) charakterisiert wurde, d. h. eine Affinität, so daß daraus folgt:

Satz 30. *Beschränken wir uns in einer Kollineation auf die nächste (unendlich kleine) Umgebung zweier entsprechender Punkte, so kann die kollineare Beziehung in diesen kleinen Gebieten durch eine Affinität ersetzt werden.*

Wir fügen hier noch folgende allgemeine Bemerkung bei. Ist eine beliebige Punkttransformation zwischen zwei Ebenen gegeben:

$$(9) \quad \begin{cases} x' = \varphi(x, y) \\ y' = \psi(x, y) \end{cases}$$

und nehmen wir an, daß φ und ψ differenzierbare Funktionen ihrer Argumente sind, so können wir bilden:

$$dx' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

$$dy' = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

und:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx}}$$

Halten wir wieder einen Punkt (x, y) und den ihm entsprechenden (x', y') fest, so sind die partiellen Ableitungen Konstante, die $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx'}$ bestimmen Richtungen durch diese Punkte. Da die letzte Beziehung aber eine bilineare ist, so folgt

Satz 31. Bei jeder durch differenzierbare Gleichungen (9) gegebenen Punkttransformation bilden entsprechende Richtungen (Linien-elemente) in entsprechenden Punkten projektive Strahlenbüschel

Ferner können wir das frühere Ergebnis von 48. jetzt noch schärfer fassen in

Satz 32. Jede durch differenzierbare Gleichungen gegebene Punkttransformation zwischen zwei Ebenen, die Gerade in Gerade überführt, ist eine Kollineation.

Ein Analogon zur Affinität kann man in der Geometrie des Bündels nicht angeben. Denn im Bündel existiert keine Ebene, die zum Uneigentlichen in einer solchen Beziehung steht wie die unendlich ferne Gerade eines Feldes. Dagegen können zwei Bündel zur unendlich fernen Ebene perspektiv liegen: entsprechende Strahlen und Ebenen derselben laufen dann parallel und die Bündel lassen sich durch eine Parallelverschiebung zur Deckung bringen, sie sind also „kongruent“.

Sechstes Kapitel.

Die projektiven Transformationen auf dem gleichen Träger.

§ 14. Die kollineare Beziehung der Grundgebilde zweiter Stufe auf sich selbst.

Übersicht der möglichen Fälle.

60, Die Träger zweier kollinear aufeinander bezogener Grundgebilde zweiter Stufe können auch zusammenfallen; dann wird das Grundgebilde, z. B. das ebene Feld, kollinear in sich selbst transformiert. Die Koordinaten x_i und x'_i entsprechender Punkte P und P' der gewissermaßen doppelt zu denkenden Ebene beziehen sich entweder auf zwei verschiedene Koordinatensysteme oder auf das gleiche. Im ersten Falle ist diese Kollineation darstellbar sowohl durch die allgemeinen Gleichungen (7) von 47. als auch durch die speziellen Gleichungen (2) von 45. Legt man dagegen nur ein Koordinatensystem für die x_i und x'_i zugrunde, so geben lediglich die Gleichungen (7) eine wirkliche kollineare Transformation. Denn die Gleichungen (2) ordnen unter dieser Voraussetzung jedem Punkte P den gleichen Punkt als P' zu, so daß die kollinearen Systeme in identische übergehen. Durch den ersten Fall werden wir veranlaßt, zu untersuchen, ob es in kollinearen Systemen auf dem gleichen Träger einzelne Elemente gibt, die sich mit den ihnen entsprechenden vereinigen. Dieselben mögen als Doppelemente bezeichnet werden. Bei kollinearen Systemen der gleichen Ebene sind also Doppelpunkte und Doppelgerade denkbar.

Aus der obigen Überlegung folgt aber ohne weiteres

Satz 33. *Haben zwei kollineare Systeme in der gleichen Ebene vier Punkte oder vier Gerade, die sich in allgemeiner Lage befinden, entsprechend gemein, so sind die beiden Systeme identisch, d. h. jedes Element liegt mit dem entsprechenden vereinigt.*

In der Tat steht es uns ja frei, diese vier Punkte oder Geraden als Koordinatensystem zu benutzen und die kollinearen Felder durch die genannten Gleichungen (2) von 45. darzustellen.

Demnach kann die Zahl der möglichen Doppelemente in kollinearen Systemen 0, 1, 2 oder 3 sein. Wie man dieselben ermitteln kann, soll folgende geometrische Konstruktion der Doppelpunkte kollinearer Felder zeigen.

Sind L und L' zwei entsprechende Punkte zweier kollinear, der gleichen Ebene angehörender Systeme, so entspricht jeder Geraden durch L eine solche durch L' , d. h. die Punkte L und L' tragen projektive Strahlenbüschel. Bringt man jeden Strahl mit dem entsprechenden zum Schnitt, so erfüllen alle diese Punkte einen Kegelschnitt, der durch L und L' hindurchgeht und kurz mit $[LL']$ bezeichnet werden möge.¹⁾ Irgend zwei andere entsprechende Punkte M, M' erzeugen in der gleichen Weise einen Kegelschnitt $[M M']$. Dem Verbindungsstrahl LM entspricht die Verbindungsgerade $L' M'$ und durch den Schnittpunkt U dieser beiden Geraden gehen die beiden Kegelschnitte hindurch. Ist nun aber X ein weiterer, nicht mit U identischer Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte $[LL']$ und $[M M']$, so entsprechen den Strahlen LX, MX in der Kollineation die Strahlen $L' X, M' X$ und folglich entspricht auch dem Schnittpunkt der erstgenannten Strahlen der des zweiten Strahlenpaares oder m. a. W. der Punkt X entspricht sich selbst, ist ein Doppelpunkt der kollinearen Felder. U kann dagegen kein Doppelpunkt sein, weil sich in ihm ja nur ein einziges Paar entsprechender* Strahlen schneidet.

Da sich die beiden Kegelschnitte $[LL']$ und $[M M']$ außer in U noch in drei Punkten schneiden können, so haben wir damit die Doppelpunkte der Systeme konstruiert.

Daß endlich die Maximalzahl von drei getrennt liegenden, reellen Doppelpunkten auch wirklich erreicht werden kann, zeigen wir, indem wir von diesen Doppelpunkten ausgehend — eine Kollineation bestimmen.

61. Durch die Angabe von vier Paaren entsprechender Punkte war (46.) eine Kollineation eindeutig bestimmt: es hindert uns nichts, A mit A', B mit B', C mit C' zusammenfallen zu lassen, während D und D' beliebig angenommen werden. Dann ist dadurch die Kollineation vollständig festgelegt. Jeder der drei Doppelpunkte, z. B. A , erscheint als Träger eines Strahlenbüschels, der Mittelpunkt A' des entsprechenden Strahlenbüschels fällt wieder nach A . Die Doppelstrahlen dieser projektiven Strahlenbüschel sind die Strahlen von A nach B und nach C und in ihnen erkennt man gleichzeitig zwei Doppelgerade der Verwandtschaft. Durch jeden Doppelpunkt gehen zwei Doppelgerade und jede Doppelgerade verbindet zwei Doppelpunkte. Ganz in der gleichen Weise trägt jede Doppelgerade projektive Punktreihen, als deren Doppelpunkte die Doppelpunkte der Kollineation auftreten. Das von den Doppelpunkten gebildete Dreieck ABC heißt das Hauptdreieck der Kollineation.

Beziehen wir auf dasselbe und auf einen beliebigen Einheitspunkt sowohl die x_i als auch die X'_i , so wird die kollineare Beziehung gegeben durch die Gleichungen (vgl. 48.):

$$(1) \quad \varrho x'_1 = a_{11} x_1, \quad \varrho x'_2 = a_{21} x_1, \quad \varrho x'_3 = a_{31} x_1,$$

Projiziert man irgend zwei entsprechende Punkte P, P' der beiden Felder (wie z. B. die Punkte D, D' der Fig. 19) aus den Ecken des Haupt-

dreieckes auf dessen Seiten, so erhält man in dessen Ecken und auf den Seiten Projektivitäten, die durch die Konstanten j_1, j_2, j_3 charakterisiert sein mögen. Trifft ferner die Verbindungslinie PP' (in Fig. 19 DD') in A, B, C die Dreieckseiten und beachtet man die Gleichungen (1) von 15., wonach:

$$(BCE_1P_1) = \frac{x_2}{x_3} \quad \text{und} \quad (BCE_1P'_1) = \frac{x'_2}{x'_3}$$

sowie Gleichung (9) von 5., so gelten die Beziehungen:

$$(2) \quad \begin{cases} j_1 = (BCP_1P'_1) = (CBPP') = \frac{a_{23}}{a_{33}}, \\ j_2 = (CAP_2P'_2) = (ACPP') = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \\ j_3 = (ABP_3P'_3) = (BAPP') = \frac{a_{11}}{a_{22}}. \end{cases}$$

Die drei Zahlen j_1, j_2, j_3 heißen die Invarianten der Kollineation;

zwischen ihnen besteht der Zusammenhang:

$$(3) \quad j_1 j_2 j_3 = 1$$

Zwei derselben sind beliebig wählbar; sie bestimmen in Verbindung mit dem Hauptdreieck die ganze Beziehung.

Halten wir A, B, C sowie A', B', C' fest, und lassen D hinbewegt, so entspricht jeder

Es steht nun nichts im Wege, D' auf einer der drei Linien DA, DB, DC , z. B. auf DC , anzunehmen. Dann erhält aber das Strahlenbündel C drei Doppelstrahlen, da jetzt auch CD mit dem entsprechenden Strahle CD' vereinigt ist: mithin muß jeder Strahl dieses Bündels mit dem ihm entsprechenden sich decken. Eine unmittelbare Folge davon ist, daß auch jeder Punkt der Doppelgeraden AB mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Es treten also unendlich viele Doppelpunkte, die eine Gerade (AB) erfüllen, und gleichzeitig unendlich viele Doppelstrahlen, die ein Bündel ((7) bilden, in der Kollineation auf. Die bei einer kollinearen Beziehung auf dem gleichen Träger möglichen Fälle lassen sich demnach wie folgt unterscheiden:

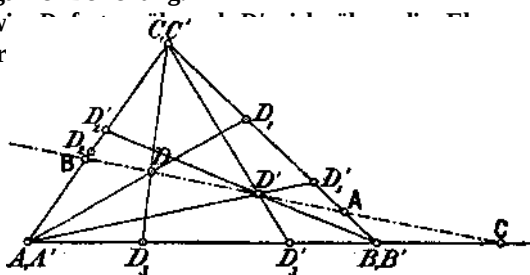


Fig. 19.

a) Doppелеlemente treten nur in endlicher Zahl (diskret) auf;
b) es gibt unendlich viele Doppелеlemente, die zwei Grundgebilde erster Stufe erfüllen.

Nachdem auf diese Weise geometrisch ein Überblick über die möglichen Fälle gewonnen ist, wollen wir dieselben aus den allgemeinen Formeln der kollinearen Transformation ableiten.

Die Kollineation mit einer endlichen Zahl von Doppelpunkten.

62. Beziehen sich die Koordinaten x_i und x'_i auf das gleiche Koordinatensystem und ist eine Kollineation gegeben durch die Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases}$$

so gilt für einen Doppelpunkt die Beziehung:

$$x'_i = \mu x_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Führen wir diese Werte in die Gleichungen (4) ein, so erhalten wir, wenn für $\varrho\mu$ wieder ϱ geschrieben wird:

$$(5) \quad \begin{cases} (a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 + a_{23} x_3 = 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \varrho) x_3 = 0 \end{cases}$$

Diese drei homogenen Gleichungen liefern nur dann ein vom trivialen ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) verschiedenes Lösungssystem für die x_i , wenn die Determinante des Systems verschwindet, d. h. wenn man hat:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

Entwickelt man dieselbe nach Potenzen von ϱ , so resultiert für ϱ die Gleichung dritten Grades:

$$(6) \quad \varrho^3 + A_1 \varrho^2 + A_2 \varrho + A_3 = 0$$

Dabei ist:

$$A_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}),$$

$$A_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$A_3 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die a_{ik} sind wieder die Unterdeterminanten, welche in der Determinante der Substitution zu den a_{ik} gehören.

Jede Wurzel der Gleichung (6) liefert, in das System der Gleichungen (5) eingesetzt, einen Doppelpunkt der Kollineation, der reell oder imaginär sein wird, je nachdem die Wurzel reell oder imaginär ist. Nehmen wir also

an, daß die Gleichung (6) drei reelle Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ besitzt, so ergeben sich dementsprechend drei Doppelpunkte D_1, D_2, D_3 .

63. Um ferner die Doppelgeraden der kollinearen Beziehung zu ermitteln, gehen wir aus von der transponierten Substitution (47.):

$$(7) \quad \begin{cases} \varrho \xi_1 = a_{11} \xi'_1 + a_{21} \xi'_2 + a_{31} \xi'_3 \\ \varrho \xi_2 = a_{12} \xi'_1 + a_{22} \xi'_2 + a_{32} \xi'_3 \\ \varrho \xi_3 = a_{13} \xi'_1 + a_{23} \xi'_2 + a_{33} \xi'_3 \end{cases}$$

Aus der Bedingung:

$$\xi_i = \mu \xi'_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

ergibt sich dann genau die nämliche Gleichung (6). Die drei Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ derselben bestimmen also, wenn sie alle drei reell sind, auch drei Doppelgerade d_1, d_2, d_3 . Die Lagenbeziehung der drei Doppelpunkte und drei Doppelgeraden ist leicht aufzuklären: Berechnet man z. B. zu einem Wurzelwerte ϱ_1 aus dem System (5) den zugehörigen Doppelpunkt D_1 sowie zu einer Wurzel ϱ_2 aus dem entsprechenden System in Linienkoordinaten die zugeordnete Doppelgerade d_2 , so finden wir durch Multiplikation der Gleichungen (5) mit ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 und der anderen entsprechenden Gleichungen mit $-x_1, -x_2, -x_3$ und Addition aller Gleichungen:

$$(\varrho_1 - \varrho_2) (x_1 \xi'_1 + x_2 \xi'_2 + x_3 \xi'_3) = 0$$

Wenn folglich:

$$\varrho_1 \neq \varrho_2^*),$$

so muß der zweite Faktor verschwinden, d. h. D_1 liegt auf d_2 . Je zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Doppelemente liegen mithin ineinander, d_2 enthält D_1 und D_3 usw. Je zwei Doppelemente, die aus gleichen Wurzelwerten hervorgehen, liegen auseinander. Damit haben wir wieder das Hauptdreieck D_1, D_2, D_3 mit den diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten d_1, d_2, d_3 abgeleitet. Wird dasselbe als Koordinatendreieck gewählt, so kommen wir auf die frühere Darstellung durch die Gleichungen (1) von 61. zurück.

Nun brauchen allerdings nicht alle drei Wurzeln der Gleichung (6) reell zu sein: eine reelle aber ist stets vorhanden. Es folgt also

Satz 34. *Bei einer Kollineation sind ein Doppelpunkt und eine nicht durch ihn gehende Doppelgerade unter allen Umständen reell.*

Sind die beiden übrigen Wurzeln der Gleichung (6) imaginär, so gehen durch den einen reellen Doppelpunkt zwei imaginäre Doppelgerade und die eine reelle Doppelgerade trägt zwei weitere imaginäre Doppelpunkte.

*) Über $\varrho_1 = \varrho_2$ (Doppelwurzel) siehe 66;

Dies sind wieder die (imaginären) Doppелеlemente der in den betreffenden Gebilden liegenden Projektivitäten.

Als ein spezieller Fall könnte betrachtet werden, daß z. B. zwei reelle Ecken des Hauptdreiecks und damit auch die zwei Doppelgeraden durch die gegenüberliegende Ecke zusammenfallen.

Affine und ähnliche Systeme.

64. Trägt eine Ebene affine Systeme, so wird die unendlich ferne Gerade derselben in sich übergeführt, also fallen jedenfalls zwei Doppelpunkte ins Unendliche. Der unendlich fernen Doppelgeraden ist ferner ein im Endlichen gelegener Doppelpunkt zugeordnet.

Derselbe läßt sich durch lineare Konstruktionen ermitteln, indem wir die Eigenschaft affiner Felder benutzen, daß einem Parallelstrahlenbüschel

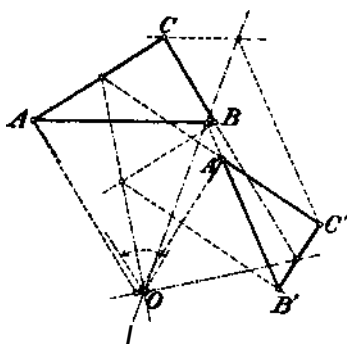


Fig. 20.

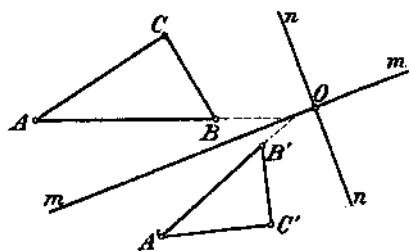


Fig. 21.

wieder ein dazu projektives Parallelstrahlenbüschel zugeordnet ist. Beide Büschel haben aber die Verbindungslinie der Scheitel, nämlich die unendlich ferne Gerade, entsprechend gemein, sind also überdies perspektiv¹⁾, so daß entsprechende Strahlen sich auf einer Geraden, der Perspektivitätsachse, begegnen. Konstruiert man aber für zwei Paare entsprechender Parallelstrahlenbüschel diese Achsen, so ist ihr Schnittpunkt, wie man sofort erkennt, der im Endlichen gelegene Doppelpunkt der affinen Systeme. (Vgl. auch 60.)

Sind zwei affine Systeme durch die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ bestimmt (Fig. 20), so entspricht dem Strahl BC der Strahl $B'C'$ und der Parallelen durch A zu BC ist zugeordnet die Parallele durch A' zu $B'C'$. Damit läßt sich die Perspektivitätsachse zeichnen, welche zu den Richtungen BC und $B'C'$ gehört. Die gegebenen Dreiecke liefern demnach drei solche Achsen, als deren gemeinsamer Schnittpunkt O sich der im Endlichen gelegene Doppelpunkt der affinen Systeme ergibt. Die durch O nach den unendlich fernen Doppelpunkten laufenden Doppelgeraden können wie die ersteren reell oder imaginär sein.

Sollen die Systeme ähnlich sein, so müssen wir von zwei ähnlichen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ausgehen. Durch die Reihenfolgen ABC und $A'B'C'$ werden zwei Drehungssinne in der Ebene festgelegt. Die Systeme heißen gleichsinnig ähnlich, wenn diese Sinne übereinstimmen (Fig. 20), dagegen ungleichsinnig ähnlich, wenn beide Sinne entgegengesetzt gerichtet sind (Fig. 21).

Im ersten Falle tragen entsprechende Punkte der beiden Felder projektive Strahlenbüschel, die im gleichen Sinne laufen und kongruent sind, da ja irgend zwei Gerade den gleichen Winkel einschließen wie die entsprechenden.

In Fig. 20 ist nach der oben angegebenen Methode der im Endlichen gelegene Doppelpunkt O der gleichsinnig ähnlichen Systeme gezeichnet. Die in O vereinigten projektiven, gleichlaufenden, kongruenten Strahlenbüschel liefern als Doppelstrahlen (nach 41.) die isotropen Geraden (Minimalgeraden); es folgt also

Satz 35. Gleichsinnig ähnliche Systeme in einer Ebene besitzen einen im Endlichen gelegenen reellen Doppelpunkt und als reelle Doppelgerade die unendlich ferne Gerade. Die übrigen (imaginären) Doppelemente sind die durch den reellen Doppelpunkt gehenden isotropen Geraden (Minimalgeraden) und die absoluten Kreispunkte.

Der Punkt O bildet mit entsprechenden Punkten der äbenen ähnliche Figuren, so daß z. B.:

$$\Delta(OAB) \sim \Delta(OA'B') \text{ usf.}$$

Eine Drehung um den Winkel AOA' bringt das eine System in perspektive Lage zu dem zweiten.

Sind die Systeme ungleichsinnig ähnlich (Fig. 21), so läßt sich der Doppelpunkt O auf die gleiche Weise konstruieren. Die in ihm vereinigten kongruenten Strahlenbüschel laufen jetzt aber nach entgegengesetzten Richtungen und liefern also zwei reelle, auf einander senkrechte Doppelstrahlen m und n . In diesem Falle gehen durch den im Endlichen gelegenen Doppelpunkt stets zwei reelle Doppelgerade, welche im Verein mit der unendlich fernen Geraden das Hauptdreieck bilden.

Kongruente Systeme.

65. Zeichnet man kongruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$, so werden die dadurch bestimmten Systeme kongruent und sie können wieder gleichsinnig oder ungleichsinnig sein.

Bei der ersten Voraussetzung (Fig. 22) läßt sich der eine reelle Doppelpunkt wieder auf die gleiche Art konstruieren. Derselbe ist aber überdies der gemeinsame Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten, die man auf den Strecken AA' , BB' , CC' usf. errichten kann. Eine Drehung um den Winkel AOA' bringt die Systeme zur Deckung.

Sind ungleichsinnig kongruente Systeme gegeben (Fig. 23), so gewinnen wir über die Doppelemente auch durch folgende einfachere Betrachtung einen Aufschluß. Es sei nämlich m eine im Endlichen gelegene Doppelgerade des Systems, so muß sie jedenfalls mit entsprechenden Geraden, z. B. AB und $A'B'$, gleiche Winkel bilden. Fallen wir also von den Punkten A und A' aus Lote auf m , so entsprechen sich dieselben und ebenso

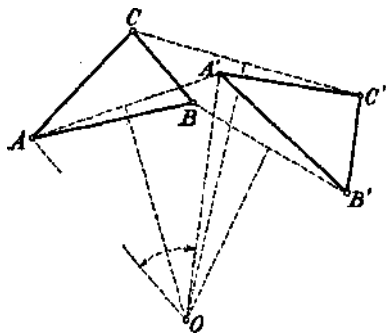


Fig. 22.

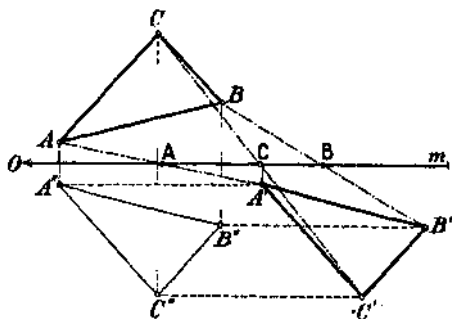


Fig. 23.

ihre Fußpunkte. Also sind die Lote gleich lang, woraus weiter folgt, daß m durch die Mitte A der Strecke AA' hindurchgeht. Eine Doppelgerade finden wir demnach, wenn wir die Mitten der Strecken AA' , BB' , CC' , verbinden. Der unendlich ferne Punkt O von m ist als Schnittpunkt mit der unendlich fernen Geraden sicher ein Doppelpunkt: es fällt mit ihm aber auch der zweite auf m vorhandene Doppelpunkt zusammen; denn wäre auf m noch ein Doppelpunkt X vorhanden, so hätte man:

$$XA = XA', \quad XB = XB' \text{ usw.},$$

was nicht möglich ist.

Auch die zweite Doppelgerade durch O vereinigt sich infolgedessen mit der unendlich fernen Geraden.

Will man die Systeme zur Deckung bringen, so kann man die Ebene zuerst um m umlegen, wodurch das Dreieck ABO in die Lage $A''B''C''$ gelangt. Dann ist noch eine Parallelverschiebung in der Richtung von m um die Strecke $A''A'$ auszuführen.

Die Kollineation mit unendlich vielen Doppelementen.

66. Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten Falle der kollinearen Beziehung, wo unendlich viele, auf einer Geraden angeordnete Doppelpunkte vorhanden sind. Dann muß notwendigerweise eine Wurzel $q = 1$ der Gleichung (6) in 62, derart vorkommen, daß sich für sie aus den drei Gleichungen (5) eine einzige ergibt, die diese Gerade der Doppelpunkte vorstellt. Ist also diese Gerade gegeben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

so gehen die Gleichungen (5) aus ihr etwa dadurch hervor, daß man diese Gleichung mit drei Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ multipliziert. Dies bedingt aber weiter folgende Zusammensetzung der Koeffizienten a_{ik} der Kollineation:

$$\begin{aligned} a_{11} - r &= \beta_1 \alpha_1, & a_{12} &= \beta_1 \alpha_2, & a_{13} &= \beta_1 \alpha_3 \\ a_{21} &= \beta_2 \alpha_1, & a_{22} - r &= \beta_2 \alpha_2, & a_{23} &= \beta_2 \alpha_3 \\ a_{31} &= \beta_3 \alpha_1, & a_{32} &= \beta_3 \alpha_2, & a_{33} - r &= \beta_3 \alpha_3 \end{aligned}$$

und die Gleichungen der Kollineation werden:

$$(8) \quad \begin{cases} \varrho x'_1 = r x_1 + \beta_1 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \\ \varrho x'_2 = r x_2 + \beta_2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \\ \varrho x'_3 = r x_3 + \beta_3 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \end{cases}$$

Die Gleichungen (7) der transformierten Substitution nehmen ferner für die obigen Werte der Koeffizienten a_{ik} die Form an:

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho \xi_1 = r \xi'_1 + \alpha_1 (\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2 + \beta_3 \xi'_3) \\ \varrho \xi_2 = r \xi'_2 + \alpha_2 (\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2 + \beta_3 \xi'_3) \\ \varrho \xi_3 = r \xi'_3 + \alpha_3 (\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2 + \beta_3 \xi'_3) \end{cases}$$

Aus ihnen erkennt man direkt, daß:

$$\beta_1 \xi'_1 + \beta_2 \xi'_2 + \beta_3 \xi'_3 = 0$$

ein Doppelpunkt von der Eigenschaft ist, daß alle durch ihn hindurch gehenden Strahlen sich selbst entsprechen. Seine Punktkoordinaten sind $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Die Determinante zur Berechnung von ϱ wird ferner:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 \alpha_1 + r - \varrho & \beta_1 \alpha_2 & \beta_1 \alpha_3 \\ \beta_2 \alpha_1 & \beta_2 \alpha_2 + r - \varrho & \beta_2 \alpha_3 \\ \beta_3 \alpha_1 & \beta_3 \alpha_2 & \beta_3 \alpha_3 + r - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(10) \quad (\varrho - r)^2 \{ \varrho - r - (\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3) \} = 0.$$

Es zeigt sich also, daß $\varrho = r$ eine Doppelwurzel der Gleichung dritten Grades wird; die dritte Wurzel derselben ist:

$$\varrho = r + \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_3.$$

Ihr entspricht der Doppelpunkt $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ und die Doppelgerade $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

67. Um diese Transformation in möglichst einfacher Darstellung zu erhalten, können wir die isolierte Doppelgerade als Koordinatenseite $x_3 = 0$ wählen, was $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bedeutet, während der isolierte Doppelpunkt in die Ecke A_3 oder $\xi'_3 = 0$ fällt, also $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ist. Die

Gleichungen (8) verwandeln sich dann in die folgenden, wenn wir $\varrho' = \frac{\varrho}{r}$ und $c = \left(1 + \frac{\alpha_3 \beta_3}{r}\right)$ setzen:

$$(11) \quad \varrho' x'_1 = x_1, \quad \varrho' x'_2 = x_2, \quad \varrho' x'_3 = c x_3$$

oder auch:

$$(Ha) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : c x_3.$$

Sie ergeben sich auch aus den Gleichungen (1) von 61 • für $a_{11} = a_{22}$. In Linienkoordinaten lauten sie:

$$(12) \quad \varrho' \xi_1 = \xi'_1, \quad \varrho' \xi_2 = \xi'_2, \quad \varrho' \xi_3 = c \xi'_3$$

Da übrigens die Form der Gleichungen (8) die der Gleichungen (9) bedingt, so ist damit abgeleitet:

Satz 36. Enthält eine Kollineation drei in einer Geraden gelegene Doppelpunkte,⁸⁰ daß demnach jeder Punkt dieser Geraden sich selbst entspricht, so enthält sie immer auch ein Büschel sich selbst entsprechender Strahlen und umgekehrt.

Wir behandeln diese Beziehung nun noch ausführlicher im folgenden.

§ 15. Die Zentralkollineation.

Bestimmung einer Zentralkollineation.

Die Fluchtlinien.

68. Die soeben abgeleitete, kollineare Beziehung in einer Ebene nennen wir eine „Zentralkollineation“ (oder auch Homologie, ebene

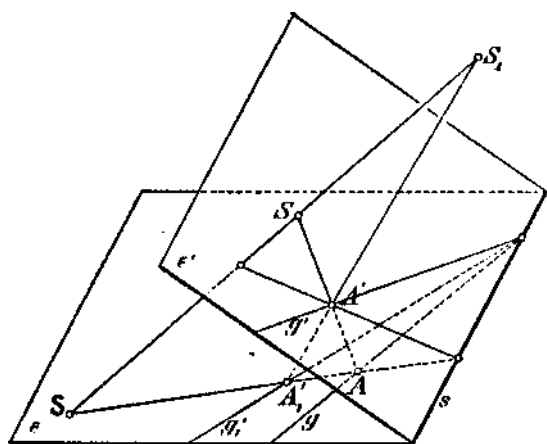


Fig. 24.

Perspektive), die Systeme selbst „perspektiv-kollinear“, auch zentral-kollinear (zentrisch-kollinear) oder kurz „perspektiv“ (homolog). Die Gerade, die sich Punkt für Punkt selbst entspricht, heißt die „Achse“ (Kollineationsachse), der Mittelpunkt des Strahlenbüschels der sich selbst entsprechenden Strahlen das „Zentrum“ (Kollineationszentrum) der zentralkollinearen Systeme.

Den Prozeß der Zentralprojektion oder Perspektive müssen wir zweimal im Raume zur Anwendung bringen, um eine Ebene perspektiv-kollinear auf sich selbst zu beziehen. Denn projizieren wir (Fig. 24) eine Ebene ε aus dem Zentrum S auf eine andere Ebene ε' , so geht ein Punkt A in A' , eine Gerade g in g' über. Wählen wir sodann irgend ein zweites Zentrum S_1 und projizieren aus diesem das ebene System ε' wieder auf ε

zurück, so werden A' und g' in A' , und g'_1 übergeführt und man erkennt ohne weiteres, daß g und g' , sich auf der Schnittlinie s von ε und ε' begegnen, während die Verbindungslinie von Punkten wie AA'_1 stets durch den Punkt S geht, worin die Gerade SS_1 die Ebene ε trifft. Demnach sind die Systeme A, A'_1 perspektiv und es folgt der

Satz 37. Projiziert man ein und dasselbe ebene System aus zwei verschiedenen Punkten in eine neue Ebene, so erhält man in dieser perspektive Systeme. Die Schnittlinie der beiden Ebenen wird die Achse, der Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der beiden Punkte wird das Zentrum dieser Zentralkollineation.

Von diesem einfachen Satze werden wir später zahlreiche Anwendungen machen, indem wir S_1 und auch S ins Unendliche fallen lassen. Ein Beispiel sei angeführt. Hat man eine Pyramide, deren Grundfläche in der Zeichenebene, z. B. in der Grundrißebene Π_1 , liegt, und wird diese Pyramide von einer Ebene geschnitten, so sind der Grundriß des Schnittes und die Grundfläche (Schnitt der Pyramide mit Π_1) perspektive Figuren. Der Grundriß der Pyramidenspitze ist das Zentrum, die Spur der Ebene (auf π_1) ist die Achse dieser Zentralkollineation.

Solche perspektiven Systeme in einer Ebene zeigen alle Eigenschaften räumlich-perspektiver Ebenen, bieten aber außerdem noch den Vorteil einer bequemen konstruktiven Behandlung. Wir wollen dies näher ausführen und beweisen zunächst

Satz 38. Eine Zentralkollineation ist vollständig bestimmt durch Zentrum, Achse und ein Paar entsprechender Punkte oder entsprechender Geraden.

In Figur 25 und 26 sei s die Achse, S das Zentrum, A, A' ein Punktepaar der zentral-kollinearen Systeme, das natürlich auf einem Strahle durch das Zentrum S gelegen sein muß. Daß die Verwandtschaft dadurch gerade bestimmt ist, folgt aus den Betrachtungen von 61., wo wir eine Kollineation durch das Hauptdreieck der Doppelpunkte und ein Punktepaar D, D' festlegten. Giebt man DD' durch den Doppelpunkt C , so erhielten wir eine Zentralkollineation, deren Achse AB und deren Zentrum C war.

Um nun weitere Elemente der zentral-kollinearen Beziehung zu konstruieren, müssen wir die beiden charakteristischen Eigenschaften derselben im Auge behalten:

1. Je zwei entsprechende Punkte liegen auf einem Kollineationsstrahle durch das Zentrum.
2. Je zwei entsprechende Gerade schneiden sich auf der Kollineationsachse.

Denn ist X irgend ein Punkt, so entspricht der Strahl SX sich selbst, muß also auch den Punkt X' tragen; haben wir aber irgend eine Gerade x , so fällt der Schnittpunkt ($s x$) mit seinem entsprechenden zusammen, d. h. x und x' begegnen sich auf der Achse 8.

69. Wir lösen nun, ausgehend von dieser Bestimmung einer Zentral-kollineation, folgende

Aufgabe 7: Eine Zentralkollineation ist gegeben durch ihr Zentrum, ihre Achse und ein Paar entsprechender Punkte; man zeichne:

- zu einem beliebig gegebenen Punkte oder zu einer beliebig gegebenen Geraden das entsprechende Element;
- die beiden Fluchtlinien (vgl. 45.).

Zu a) Ist zu einem Punkte B der entsprechende zu finden (Fig. 25), so verbinden wir B mit dem gegebenen Punkte A und zeichnen den Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit der Achse s . Durch diesen muß auch die Verbindungslinie $A'B'$ gehen; der Strahl SB schneidet demnach aus ihr den gesuchten Punkt B' aus.

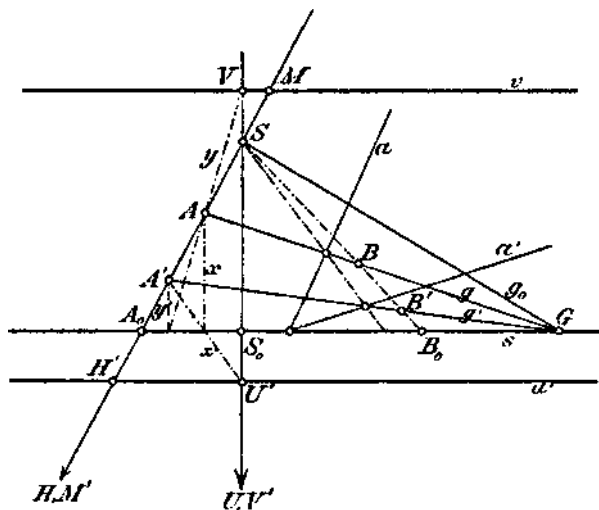


Fig. 25.

Ist dagegen zu einer beliebig gegebenen Geraden a die entsprechende a' zu zeichnen, so verschaffen wir uns (durch A und A') irgend zwei entsprechende Gerade (z. B. AB und $A'B'$). Dem Schnittpunkt von a mit AB entspricht der Schnittpunkt von a' mit $A'B'$ und da a' außerdem durch den Schnittpunkt (as) gehen muß, so ist diese Gerade damit gefunden.

Wie man verfährt, wenn die Zentralkollineation statt durch zwei entsprechende Punkte durch zwei entsprechende Gerade (z. B. a und a') festgelegt ist, ergibt sich durch gleichartige Überlegungen.

Zu b) Die Fluchtlinien (oder auch Gegenachsen) sind diejenigen Geraden, welche der unendlich fernen Geraden der Ebene in den beiden Systemen entsprechen. Bezeichnen wir also die uneigentliche Gerade der Ebene mit u oder v' je nachdem wir sie zu dem einen oder anderen

zwei entsprechende Elemente mit den Doppelementen bilden, einen unveränderlichen Wert hat. Wir können demnach aus Figur 25 die Beziehungen ableiten:

$$\begin{aligned} j &= (SA_0A_1A') = (SA_0A_1A'_1) \quad \text{usf.} \\ &= (SB_0B_1B') = (SB_0B_1B'_1) \quad \text{usf.} \\ &= (g_0g_1g') = (g_0g_1g'_1) \quad \text{usf.} \\ &= (SS_0UU') = \frac{S_0U'}{SU'}, \\ &= (SS_0VV') = \frac{SV}{S_0V}. \end{aligned}$$

Es folgt mithin

Satz 40. Eine Zentralkollineation besitzt eine Invariante; diese gibt das konstante Doppyelverhältnis, das sowohl irgend zwei entsprechende Punkte als auch irgend zwei entsprechende Strahlen mit dem Zentrum und der Achse der Kollineation bilden. Der Wert dieser Invariante wird auch durch die Quotienten $\frac{S_0U'}{SU'}$ oder $\frac{SV}{S_0V}$ dargestellt

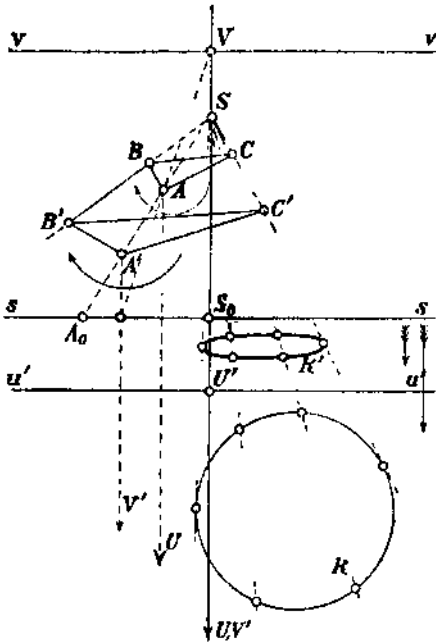


Fig. 27.

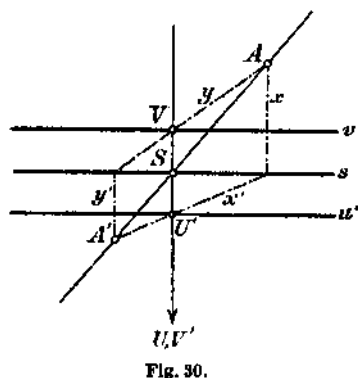
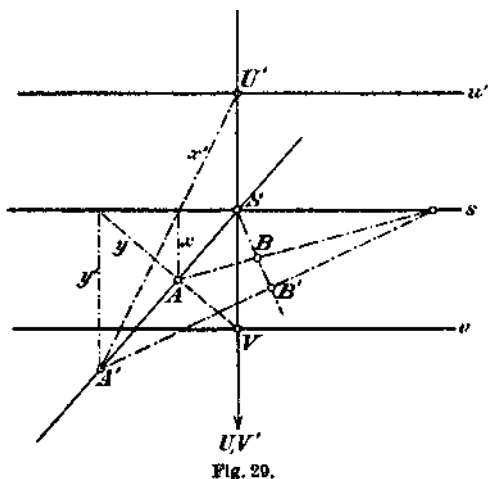
In den Gleichungen (11a) von 67., welche in der einfachsten Form eine Zentralkollineation zum Ausdruck bringen, ist die Konstante c identisch mit der Invarianten j . Gleichzeitig gibt c den Wert der Determinante dieser Substitution. Die Invariante j heißt auch die „Charakteristik“ der Kollineation.

71. In der Tat kann man vermittle der Werte von j die verschiedenen Typen dieser Verwandtschaft unterscheiden. So

besteht der Unterschied zwischen den in den Figuren 25 und 26 zur Anschauung gebrachten Fällen lediglich in dem Vorzeichen von j : im ersten Falle werden entsprechende Punkte wie A und A' durch S und s nicht getrennt, ebensowenig entsprechende Gerade g und g' , j ist positiv: im zweiten Falle dagegen trennen S und s jedes Paar entsprechender Elemente, j hat einen negativen Wert.

jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfallen, wir erhalten also eine Identität.

Es ist aber auch möglich, daß S auf s angenommen wird; das ändert nichts an der oben durchgeführten Bestimmung der Systeme. Auf jedem Strahle durch S und für jeden Punkt von s fallen die Doppelemente mit S oder mit der Achse a zusammen und j hat den Wert $+1$. Man erkennt ohne Mühe (Fig. 29 oder 30), daß die Fluchtlinien gleich weit von 8 entfernt sind.



Ausartung der Kollineation.

73. Dagegen führt die Annahme $j = 0$, d. h. das Verschwinden der Determinante Δ der Substitution (11a) in 67., zu einer ausgearteten Zentralkollineation. Dann entspricht jedem Punkte A der Schnittpunkt A_0 von SA mit s , jeder Geraden stets die Achse s . Es wird:

$$S_n U' = 0 \quad \text{und} \quad S V = 0$$

der vorhin genannte Streifen (Fig. 27 und 28) ist auf die Achse zusammengeschrunft. Alle Punkte und Geraden werden aus S auf s projiziert: die ganze Ebene wird auf die Gerade s abgebildet. S und s entsprechen sich selbst. Wir erwähnen diese Substitution mit verschwindender Determinante namentlich deswegen, weil ihr räumliches Analogon (die Perspektive im Raum) die künstlerisch wichtigste geometrische Transformation liefert.

Die involutorische Zentralkollineation.

74. Wenn endlich $j = -1$, so „trennen“ je zwei entsprechende Punkte und je zwei entsprechende Gerade S und 8 harmonisch. Wir sprechen dann von „harmonisch perspektiven Systemen“ oder von einer „harmonischen Zentralkollineation“ oder „harmo-

nischen Homologie". Auch der unendlich fernen Geraden muß involutorisch eine einzige Gerade entsprechen, die beiden Fluchtlinien fallen zusammen, dem unendlich fernen Punkt U , V' entspricht der gleiche Punkt U', V (vgl. Fig. 31), und wegen:

$$(SS_0UU') = -1$$

muß:

$$SU' = U'S_0$$

sein, d. h. die Fluchtlinie verlauft in der Mitte zwischen S und S_0 .

Die Gleichungen (11) und (11a) von 67. endlich gehen für involutorische Systeme über in:

$$\varrho' x'_1 = x_1, \quad \varrho' x'_2 = x_2, \quad \varrho' x'_3 = -x_3$$

oder:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : -x_3.$$

Liegt S im Unendlichen, so erhält man affin-involutorische Systeme in schief symmetrischer Lage. Es wird (vgl. 75 a.):

$$AA_0 = A_0A', \quad BB_0 = B_0B' \text{ usf.}$$

Es zeigt sich, daß die involutorische Zentralkollineation die einzige Möglichkeit darstellt, wie man eine Ebene kollinear und gleichzeitig involutorisch auf sich beziehen kann. Zu dieser Einsicht gelangt man durch folgenden Satz, dessen Beweis gestellt sei als

Aufgabe 9: Wenn in einer kollinearen Beziehung in einer Ebene auf zwei nicht zusammenfallenden Geraden je ein involutorisch sich entsprechendes Punktepaar vorhanden ist, so ist die Beziehung durchweg involutorisch und besteht in einer harmonischen Zentralkollineation.

Aufgabe 10: Wenn ein Kegelschnitt durch eine harmonische Zentralkollineation in sich selbst übergeführt wird, so müssen Zentrum und Achse der Kollineation Pol und Polare in bezug auf den Kegelschnitt sein.

Aufgabe 11: Von einem Kegelschnitt liegt ein Stück gezeichnet vor; man entscheide, ob derselbe eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

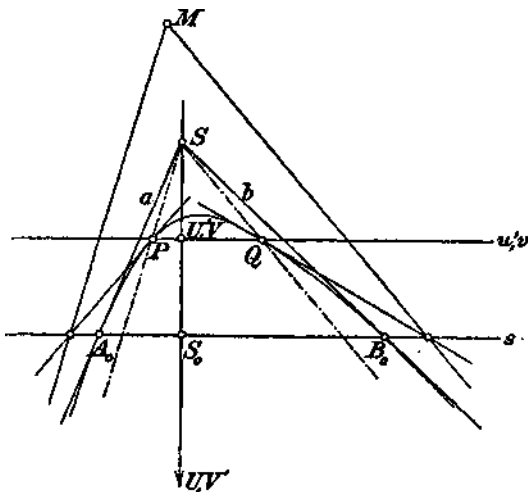


Fig. 31.

Wählen wir (Fig. 31) auf dem gegebenen Bogen zwei Punkte A_0 und B_0 und zeichnen in ihnen die Tangenten a und b , die sich in S treffen mögen. Die Verbindungslinie A_0B_0 oder s und dieser Punkt S mögen als Achse und Zentrum einer involutorischen Zentralkollineation genommen werden, die dann den Kegelschnitt jedenfalls in sich selbst überführt (Aufgabe 10). Die Fluchtlinie u', v dieser Kollineation verläuft in der Mitte zwischen S und s und der Kegelschnitt ist nun eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel, je nachdem diese Gerade den gegebenen Bogen in 2 Punkten trifft, ihn nicht schneidet oder bertührt. Dieses Kennzeichen gab schon Poncelet.

In der Fig. 31 liegt ein Stück einer Hyperbel vor und es sind noch deren Asymptoten gezeichnet als die Geraden, die den Tangenten des Kegelschnittes in den Schnittpunkten P und Q entsprechen.

§ 16. Besondere Kollineationen.

Besondere Fälle der Zentralkollineation.

75. Spezialisierungen der Zentralkollineation im metrischen Sinne ergeben sich, wenn wir das Zentrum oder die Achse der Kollineation

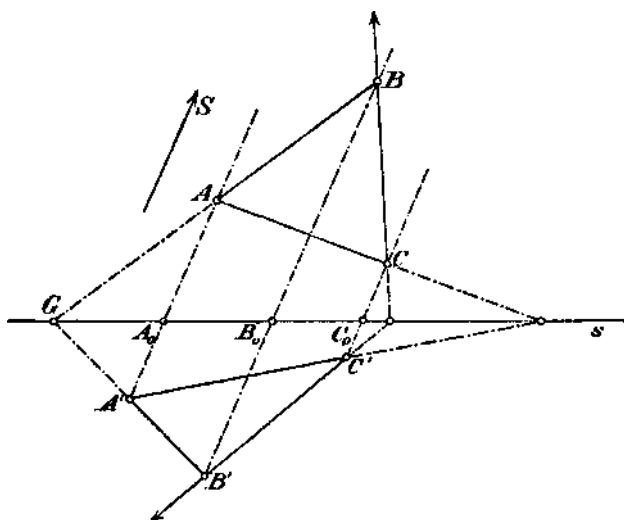


Fig. 32.

zum Unendlichfernen in eine besondere Beziehung bringen. Dies kann auf folgende Weise geschehen:

- a) das Zentrum S liegt im Unendlichen;
- b) die Achse s liegt im Unendlichen;
- c) Zentrum und Achse liegen im Unendlichen.

Zu a): Bei einem unendlich **fernen** Kollineationszentrum S (Fig. 32) laufen alle Verbindungslinien entsprechender Punkte $A A', B B', \dots$

der kollinearen Systeme zu einer gegebenen Richtung parallel. Unter den sich selbst entsprechenden Strahlen des Büschels S befindet sich aber auch die unendlich ferne Gerade oder mit anderen Worten: die unendlich fernen Geraden der beiden Felder entsprechen einander; jedem unendlich fernen Punkte, z. B. dem von BC , entspricht wieder ein unendlich ferner Punkt, nämlich der von $B'C'$. Mithin sind die beiden Systeme affin: wir bezeichnen sie als „perspektiv-affin“. Die parallelen Linien AA' , BB' , ... geben die sogenannte „Richtung der Affinität“, die „Affinitätsstrahlen“, während s die „Affinitätsachse“ genannt wird.

Für die Invariante j dieser Zentralkollineation erhalten wir:

$$j = (SA_0AA') = \frac{A_0A'}{A_0A} = \frac{B_0B'}{B_0B} = \dots = \text{konst.}$$

Je zwei entsprechende Punkte bilden also in diesem Falle mit der Achse s ein konstantes Streckenverhältnis.

Da die Ebenen affin aufeinander bezogen sind, so muß nach 56. das Verhältnis der Flächeninhalte entsprechender Figuren einen unveränderlichen Wert haben: derselbe ist gegeben durch (Fig. 32):

$$\frac{\Delta(AA_0G)}{\Delta(A'A_0G)} = \frac{A_0A}{A_0A'} = \frac{1}{j}$$

Die Richtung, in der das Zentrum S liegt, können wir auch senkrecht zur Achse s wählen. Dies liefert die affinen Systeme, wie sie in der darstellenden Geometrie sehr bekannt sind. Sie entstehen dadurch, daß man ein ebenes System in eine zweite Ebene orthogonal projiziert und gleichzeitig in diese Ebene umlegt.

Ist j negativ und $= -1$, so wird:

$$A_0A = -A_0A', \quad B_0B = -B_0B', \dots,$$

die beiden ebenen Systeme sind „schief symmetrisch“ für s als Symmetrieachse. Die Flächeninhalte entsprechender Figuren unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

Steht die Richtung, in der S liegt, senkrecht auf der Achse s , so geht diese schiefe Symmetrie in die gerade über: die beiden Systeme werden kongruent mit entgegengesetztem Sinne. Dreht man die eine Ebene um die Achse s durch 180° , so decken sich die Systeme Element für Element.

Wählen wir S auf der Achse s im Unendlichen, so entspricht dies dem Werte 1 der Invariante j . In der Tat ist (Fig. 33):

$$\frac{\Delta(AGH)}{\Delta(A'GH)} = 1 = \frac{1}{j}.$$

Die beiden Systeme sind affin-gleich und gleichzeitig in perspektiver Lage. Entsprechende Figuren bestimmen, auch dem Sinne nach, den gleichen Flächeninhalt.

Zu b): Benutzen wir die unendlich ferne Gerade als Achse s der Kollineation, so werden (Fig. 34 und 35) entsprechende Gerade wie AB

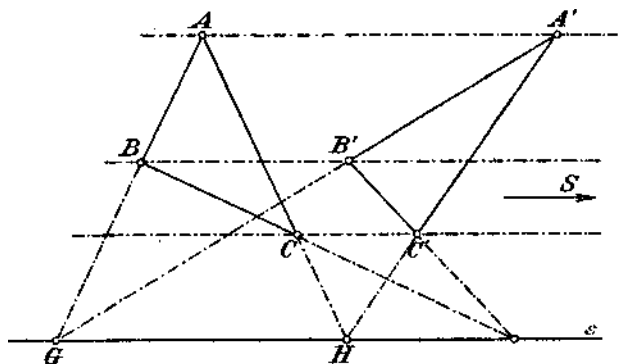


Fig. 33.

und $A'B$, BC und $B'C'$ usw. sich stets auf der unendlich fernen Geraden begegnen müssen, d. h. es ist:

$$AB \parallel A'B', \quad AC \parallel A'C' \quad \text{usf.}$$

Die ebenen Systeme sind „ähnlich“ und liegen perspektiv. Sie heißen ähnlich und ähnlich gelegen oder perspektiv ähnlich. Nur der

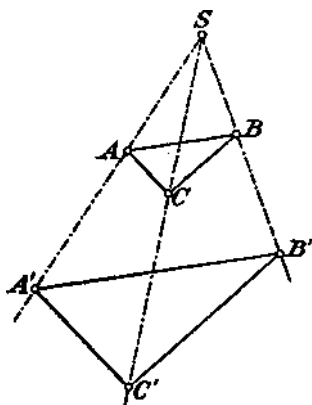


Fig. 34.

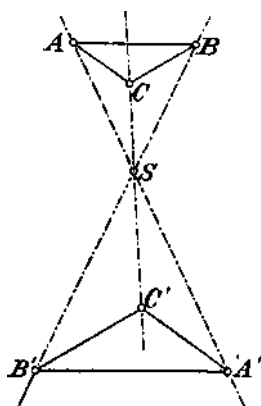


Fig. 35.

Maßstab unterscheidet die beiden Ebenen, und zwar gibt:

$$j = (SA_0 A A') = \frac{SA}{SA'}$$

die „Verjüngung“ an. Ist j positiv, so haben die Systeme S als äußeren Ähnlichkeitspunkt (Fig. 34); für ein negatives j ist S innerer Ähnlichkeitspunkt (Fig. 35); für $J = -1$ werden die Systeme kongruent; eine in der Ebene auszuführende Drehung durch 180° um S genügt, sie zur Deckung zu bringen (Symmetrie in bezug auf einen Punkt).

Zu c): Liegen S und s im Unendlichen, so sind wieder entsprechende Gerade parallel, also (Fig. 36):

$$AB \parallel A'B', \quad AC \parallel A'C' \quad \text{usf.}$$

und die beiden Systeme werden kongruent. Eine Verschiebung (Translation) um die Strecke AA' bringt sie zum Zusammenfallen.

Auf diese Weise haben sich die elementaren Verwandtschaften der Ähnlichkeit, Gleichheit, Kongruenz und Symmetrie als spezielle Fälle der kollinearen Beziehung herausgestellt.

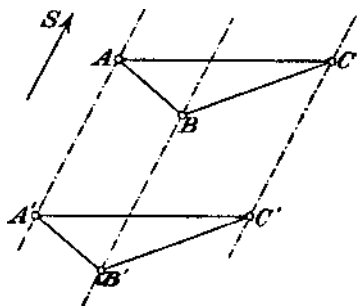


Fig. 36.

Ein Satz über perspektive Ebenen.

76. Endlich wollen wir noch einen Satz kennen lernen, der einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen zwei räumlich perspektiven Ebenen und zwischen perspektiven Systemen in einer Ebene aufdeckt, indem er zeigt, wie diese letzteren aus räumlich perspektiven Ebenen als Grenzfall hervorgehen.

Denken wir uns zunächst zwei kollineare Ebenen ε und ε' im Raume so gelegen, daß jeder Punkt der Schnittlinie s der beiden Ebenen sich selbst entspricht. Sicher müssen dann entsprechende Gerade g und g' von ε und ε' sich im gleichen Punkte von s begegnen (vgl. etwa Fig. 17 in 49.) und die Punktreihen auf g und g' werden mithin perspektiv sein, da im Schnittpunkte der beiden Träger entsprechende Punkte vereinigt liegen. Die Verbindungslinien zugeordneter Punkte von g und g' laufen demnach durch einen Punkt, das Zentrum der Perspektivität. Greifen wir nun aber drei Paare entsprechender Geraden heraus, g, g', h, h', i, i' , und beachten, daß dem Schnittpunkt zweier Geraden g und h in der kollinearen Beziehung wiederum der Schnittpunkt der entsprechenden Geraden g' und h' zugewiesen sein muß, so folgt ohne weiteres, daß der Schnittpunkt S der drei Ebenen (gg') , (hh') , (ii') für die drei Geradenpaare das gemeinsame Perspektivitätszentrum sein muß. Die gleiche Schlußweise zeigt dann aber auch, daß für jedes weitere Paar entsprechender Geraden l, l' das Zentrum der perspektiven Beziehung wieder nach S fällt oder mit andern Worten: die beiden Ebenen liegen selbst perspektiv.

Wie früher für einer Ebene angehörige Systeme haben wir jetzt also auch für zwei getrennt liegende Ebenen (67. und 68.) gefunden:

Satz 42. *Haben zwei im Raum liegende kollineare Ebenen ihre Schnittlinie Punkt für Punkt entsprechend gemein, so liegen sie perspektiv, d. h. alle Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt.*

77. Diese Betrachtung war ganz unabhängig von dem Winkel, den die beiden Ebenen einschlossen: sie gilt immer, sofern die Ebenen nur nicht zusammenfallen. Es ist auch nicht schwer, den Ort der Zentren der Perspektivität für alle möglichen Neigungen anzugeben.

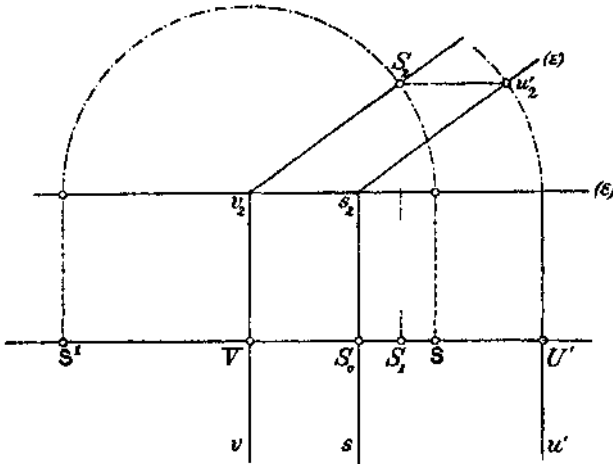


Fig. 37. *)

Denken wir uns für irgend eine Lage der beiden Ebenen ϵ und ϵ' das Zentrum S der Perspektivität konstruiert und legen wir durch dasselbe eine Ebene normal zur Schnittlinie s der beiden Ebenen. Der in dieser Ebene entstehende Durchschnitt findet sich in der Figur 37 oben (als Aufriß) gezeichnet, während die feste Ebene ϵ als Grundrißebene dient. S_1 und S_2 sind die beiden Risse des Zentrums S . Die durch diesen Punkt gehenden Parallelebenen zu ϵ und ϵ' liefern die Fluchtlinien in diesen beiden Ebenen; sie erscheinen als die Punkte v_2 und u_2 in unserer Zeichnung. Da nun die Zuweisung der einzelnen Elemente der beiden Ebenen überhaupt eine feste ist, so bleiben auch die Fluchtlinien in den Ebenen ϵ und ϵ' unveränderlich und es ist, wie man auch die Ebene ϵ' in ihrer Stellung festlegt:

$$S_2 v_2 = u_2' s_2 = \text{konst.}$$

*) In Fig. 37 u. 38 wurde die weniger gebräuchliche Bezeichnungsweise: Zeiger 1 für Grundriß, Zeiger 2 für Aufriß beibehalten, z. B. S_1 und S_2 statt S' und S''

Demnach beschreibt der Punkt S einen Kreis, der in der genannten Lotebene liegt und den Punkt V zum Mittelpunkt, die unveränderliche Distanz $u'_2 s_2$ der Fluchtlinie von S_0 aber zum Radius hat. Dieser Kreis begegnet der festen Ebene in zwei Punkten S und S' , die den Lagen entsprechen, wo die gedrehte Halbebene ε' auf der einen oder andern Seite mit der festen Ebene ε zusammenfällt. In diesem Falle verlieren die soeben durchgeführten Betrachtungen ihre Gültigkeit, dafür tritt der

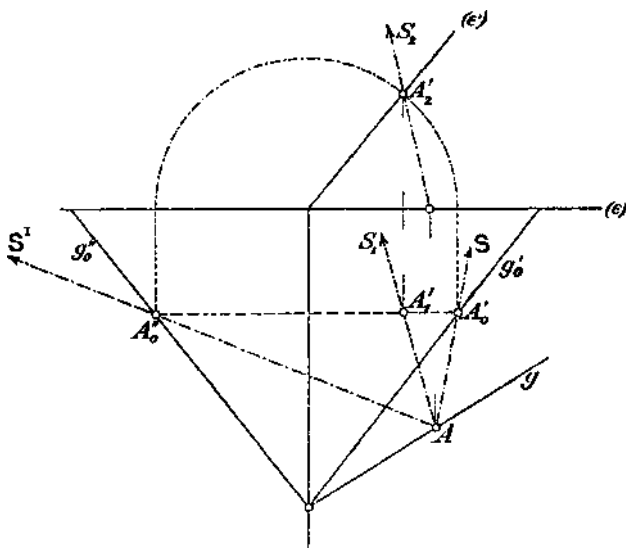


Fig. 38.*)

Satz 36 in 67. in seine Rechte, nach dem die Systeme wieder perspektiv sein müssen. Da ferner aus der Figur folgt, daß:

$$SV = U'S_0 \quad \text{und} \quad SU' = VS_0$$

und gleiches für S^1 gezeigt werden kann, so können wir daraus schließen, daß die Schnittpunkte S und S^1 des erwähnten Kreises mit der Ebene ε auch für diese Übergangsfälle je ein Zentrum der Perspektivität liefern. Man übersieht auch unschwer, wie sich dieser Satz verändert, wenn man zwischen den Ebenen ε und ε' eine affine Verwandtschaft voraussetzt, wobei die Schnittlinie s sich wieder Punkt für Punkt selbst entspricht. Dann liegt das Zentrum S der Perspektivität für jede Lage der Ebene ε' im Unendlichen. Denn betrachten wir (Fig. 38) eine Gerade g der Ebene ε und die entsprechende Gerade g' der Ebene ε' . Einem Punkte A von g ist ein Punkt A' von g' zugewiesen. Bei der Drehung der Ebene ε' beschreibt der Punkt A' einen Kreis, dessen Bild (im Auf- und Grundriß)

*) Siehe Anmerkung zu Fig. 37.

in der Figur eingetragen ist. Das unendlich ferne Zentrum S der Perspektivität erhalten wir für jede Lage der Ebene ε' in dem unendlich fernen Punkte der Verbindungslinie AA' . Vereinigt sich die Ebene ε' auf der einen oder anderen Seite mit ε , so nimmt das Zentrum der auch in diesem Falle perspektiven Systeme die Lagen S bzw. S^1 an. Die Linien von A nach den Punkten des Kreises, den A' beschreibt, erfüllen einen Kegel zweiter Ordnung und auf ihm liegt in unendlicher Ferne der Ort der Zentra S . Diese Ergebnisse können wir zusammenfassen in

Satz 43. *Liegen zwei Ebenen im Raume perspektiv und dreht man die eine Ebene um die Schnittlinie der beiden in die andere, ohne die Punkte der Schnittlinie aus ihrer Lage zu bringen, so sind die Systeme in dieser Ebene wiederum perspektiv und das Zentrum dieser Zentralkollineation liegt im Endlichen oder Unendlichen, je nachdem das gleiche bei den räumlich-perspektiven Ebenen der Fall war.*

Oder kürzer:

Projiziert man ein ebenes System aus einem Punkte in eine zweite Ebene und legt es auch in diese um, so sind die beiden dadurch entstehenden Systeme perspektiv-kollinear und werden bei Anwendung einer Parallelprojektion perspektiv-affin.

In der letzteren Form kommt der Satz in der darstellenden Geometrie zur Anwendung.

§ 17. Die reziproke Beziehung der Grundgebilde zweiter Stufe auf sich selbst.

Reziproke Systeme in der gleichen Ebene.

78. Bevor wir zu Anwendungen der kollinearen Beziehung in anderen Gebieten übergehen, wollen wir, der späteren Entwicklungen wegen, noch in aller Kürze die reziproke Beziehung auf dem gleichen Träger besprechen. Ein und dieselbe Ebene sei als ε und gleichzeitig als ε' bezeichnet und durch die Gleichungen (11) von 51. reziprok in sich selbst transformiert. Die Koordinaten x_i und ξ_i ebenso wie x'_i und ξ'_i mögen sich auf ein einziges Koordinatensystem beziehen. Einen Punkt des Punktfeldes können wir als zur einen oder anderen Ebene gehörig betrachten. Er heißt dann P oder Q' und seine Koordinaten erhalten die Bezeichnung x_i oder ξ'_i . Aus den Gleichungen (11) und den am genannten Orte daraus abgeleiteten (13) ergibt sich als entsprechendes Gebilde eine Gerade p' und q . Ebenso sind jeder Geraden des Feldes vermöge der Gleichungen (12) und (14) von 51. zwei Punkte zugeordnet.

Damit werden wir bereits auf die ausgezeichneten Elemente hingewiesen, nach denen wir im Gegensatze zur Kollineation hier zu fragen haben:

a) Gibt es in jedem der beiden Systeme Elemente, die mit ihren entsprechenden vereinigt liegen?

b) Gibt es Elemente, für die sich die beiden ihnen entsprechenden Elemente vereinigen, die diesen folglich in jedem der beiden Systeme, d. h. involutorisch, entsprechen?

Um die erste Frage zu beantworten, haben wir die Bedingung dafür aufzustellen, daß z. B. ein Punkt x_i der Ebene ε in der ihm vermöge der genannten Gleichungen (11) entsprechenden Geraden ξ'_i gelegen sei; es muß also sein:

$$\xi'_1 x_1 + \xi'_2 x_2 + \xi'_3 x_3 = 0$$

und dies gibt [nach Multiplikation jeder Zeile von (11) mit x_i ($i = 1, 2, 3$) und Addition] für die x_i die Gleichung:

$$(1) \quad \begin{cases} K_p \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + \\ + (a_{13} + a_{31}) x_1 x_3 + (a_{23} + a_{32}) x_2 x_3 = 0. \end{cases}$$

Ganz die nämliche Beziehung ergibt sich, wenn wir den gleichen Punkt als zur Ebene ε' gehörig betrachten und wieder verlangen, daß die ihm entsprechende Gerade durch ihn hindurchgehe.

Soll andererseits eine Gerade den ihr entsprechenden Punkt selbst enthalten, so müssen ihre Koordinaten, wie eine analoge Rechnung sofort zeigt, die Gleichung befriedigen:

$$(2) \quad \begin{cases} K_g \equiv \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{22} \xi_2^2 + \alpha_{33} \xi_3^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21}) \xi_1 \xi_2 + \\ + (\alpha_{13} + \alpha_{31}) \xi_1 \xi_3 + (\alpha_{23} + \alpha_{32}) \xi_2 \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Damit ist also bewiesen:

Satz 44. *Hat ein Element, zur einen Ebene gerechnet, die Eigenschaft, das entsprechende Element zu enthalten, so kommt ihm die gleiche Eigenschaft auch zu, wenn es als zur anderen Ebene gehörig betrachtet wird.*

Und:

Alle Punkte (der einen oder andern Ebene), welche die ihnen entsprechenden Geraden enthalten, liegen auf einem Kegelschnitt K_p ; alle Geraden (der einen oder andern Ebene), welche die ihnen entsprechenden Punkte tragen, umhüllen einen Kegelschnitt K_g .

79. Die Kurven K_p und K_g können imaginär sein; dann enthält das Punktfeld überhaupt keine reellen Elemente von der unter a) geforderten Eigenschaft. Bei reeller Existenz dieser Kegelschnitte können wir ihre gegenseitige Lagenbeziehung rein geometrisch weiter verfolgen. Ist P, Q' ein Punkt von K_p (Fig. 39), so gehen die beiden ihm entsprechenden Geraden p', q durch ihn hindurch. Diese enthalten aber auch die ihnen zugeordneten Punkte, folglich berühren sie den Kegelschnitt K_g , d. h.:

Satz 45. *Jedem Punkte von K_p entsprechen die von ihm aus an K_g gehenden Tangenten und jeder Geraden, welche K_g berührt, sind die Schnittpunkte derselben mit K_p zugeordnet.*

Nehmen wir weiter an, die beiden Ortskurven K_p und K_g hätten einen Punkt gemein, den wir mit X, Y' bezeichnen (Fig. 39). Die beiden ihm entsprechenden Geraden x', y vereinigen sich mithin in der Tangente in X on K_g . Diese Gerade x', y hat aber dann auch die Eigenschaft, daß die beiden ihr entsprechenden Punkte X, Y' in einen zusammen-

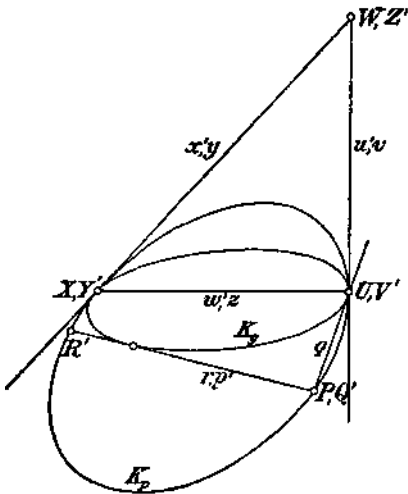


Fig. 39.

fallen. Das kann nach dem Obigen nur eintreten, wenn die betreffende Gerade auch den Kegelschnitt K_p berührt. Also berühren sich K_p und K_g in dem Punkte X . Damit ist bewiesen:

Satz 46. Wenn sich K_p und K_g in reellen Punkten begegnen, so berühren sie sich in diesen Schnittpunkten.

Die beiden Kegelschnitte berühren sich mithin doppelt, in X und in U . Allerdings können diese beiden Punkte auch konjugiert imaginär sein: dann haben die beiden (reellen) Kegelschnitte in ihnen eine ideelle Berührung; die Rechnung macht zwischen diesen Fällen keinen Unter-

schied. Wir wollen bloß den in der Figur gezeichneten Fall ins Auge fassen. Die Tangenten in X und U begegnen sich in einem Punkte W, Z' und ihm, als Schnittpunkt von y, v und x', u' , entspricht stets die Polare $y' V'$ oder XU , die also mit $w'z$ zu bezeichnen ist. Dem Punkte W ist folglich w' involutorisch, d. h. in jedem der beiden Systeme, zugeordnet. Damit haben wir ein Elementenpaar gefunden, das der unter b) gestellten Frage entspricht. Auch die Punkte X und U haben die gleiche Eigenschaft, aber bei diesen tritt noch der weitere Umstand hinzu, daß die ihnen involutorisch entsprechenden Geraden durch diese Punkte hindurchgehen.

Wählen wir das (als reell vorausgesetzte) Dreieck XUW als Koordinatendreieck $A_1A_2A_3$, so gewinnen wir für die Korrelation aus den Gleichungen (11), (12) und (13), (14) in 51. folgende Darstellung:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho \xi_1 = a_{12} x_2, & \varrho \xi_2 = a_{11} x_1, & \varrho \xi_3 = a_{13} x_3, \\ \frac{\Delta}{\varrho} x_1 = a_{21} \xi_2, & \frac{\Delta}{\varrho} x_2 = a_{12} \xi_1, & \frac{\Delta}{\varrho} x_3 = a_{33} \xi_3 \end{cases}$$

oder:

$$(4) \quad \begin{cases} \varrho \xi_1 = a_{11} x'_1, & \varrho \xi_2 = a_{12} x'_1, & \varrho \xi_3 = a_{13} x'_3, \\ \frac{\Delta}{\varrho} x'_1 = a_{12} \xi_2, & \frac{\Delta}{\varrho} x'_2 = a_{21} \xi_1, & \frac{\Delta}{\varrho} x'_3 = a_{33} \xi_3 \end{cases}$$

und die beiden Kurven K_p und K_g , werden:

$$(5) \quad K_p \equiv (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{33} x_3^2 = 0,$$

$$(6) \quad K_g \equiv (\alpha_{12} + \alpha_{21}) \xi_1 \xi_2 + \alpha_{33} \xi_3^2 = \alpha_{33} (a_{12} + a_{21}) \xi_1 \xi_2 + a_{12} a_{21} \xi_3^2 = 0.$$

Das Polarfeld.

80. Um direkt die involutorischen Elementenpaare korrelativer Systeme zu ermitteln, finden wir als Bedingung dafür, daß einem Punkte x_i die gleiche Gerade ξ_i in beiden Feldern entspreche, das System der Gleichungen:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = \mu (a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = \mu (a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3)$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = \mu (a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3)$$

wobei μ ein Proportionalitätsfaktor ist. Für dessen Bestimmung ergibt sich die kubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(1-\mu) & a_{12}-\mu a_{21} & a_{13}-\mu a_{31} \\ a_{21}-\mu a_{12} & a_{22}(1-\mu) & a_{23}-\mu a_{32} \\ a_{31}-\mu a_{13} & a_{32}-\mu a_{23} & a_{33}(1-\mu) \end{vmatrix} = 0$$

Im allgemeinen können folglich höchstens drei solche involutorische Elementenpaare auftreten. Eine Wurzel dieser Gleichung ist immer reell; ihr entspricht, wie eine nähere Untersuchung zeigt, ein Elementenpaar von der Art W, w' (79.), das also in jedem Fall reell ist.

Daran knüpft sich unmittelbar die weitere Frage: Ist es möglich, daß alle Elementenpaare der Korrelation einander involutorisch entsprechen und wann tritt dieser spezielle Fall ein?

Eine jedenfalls hinreichende Bedingung dafür können wir sofort angeben: wenn

$$(7) \quad a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

so entspricht jedem Punkte die gleiche Gerade, da die obigen Gleichungen (für $\mu = 1$) dann identisch erfüllt sind. Die beiden Kegelschnitte K_p und K_g werden jetzt:

$$(8) \quad \begin{cases} K_p \equiv a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{13} x_1 x_2 + \\ \quad + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0 \end{cases}$$

sowie:

$$(9) \quad \begin{cases} K_g \equiv \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{21} \xi_1 \xi_2 + \alpha_{31} \xi_1 \xi_3 + 2 \alpha_{12} \xi_1 \xi_2 + \\ \quad + 2 \alpha_{13} \xi_1 \xi_3 + 2 \alpha_{23} \xi_2 \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Der zweite stellt — wie man durch Einsetzen der entsprechenden Gleichungen (11) oder (13) von 51. nachweisen kann — den ersten K_v vor, geschrieben in Linienkoordinaten: es fallen also beide Kegelschnitte

zusammen in einen Ordnungskegelschnitt K . Einem Punkte x_i^0 entspricht die Gerade:

$$(a_{11} x_1^0 + a_{12} x_2^0 + a_{13} x_3^0) x_1 + (a_{21} x_1^0 + a_{22} x_2^0 + a_{23} x_3^0) x_2 \\ + (a_{31} x_1^0 + a_{32} x_2^0 + a_{33} x_3^0) x_3 = 0.$$

Sie wird die Polare des Punktes x_i^0 in bezug auf den Kegelschnitt K genannt. Die Korrelation geht mithin über in die polar-reziproke Beziehung in bezug auf einen Kegelschnitt. Die Punkte und Tangenten dieses „Ordnungskegelschnittes“ haben allein die Eigenschaft, daß für sie entsprechende Elemente ineinander liegen. Die polar-reziproke Beziehung ist übrigens ganz unabhängig von der reellen Existenz dieses Kegelschnittes definiert. Sie besteht ebenso, wenn der Ordnungskegelschnitt imaginär wird und dient dann umgekehrt dazu, ihn zu definieren.

Um rein geometrisch den Übergang aus der Korrelation in die Polarreziprozität zu verfolgen, hat man folgende Eigenschaft zu beweisen:

Kommt es in einer reziproken Beziehung zweimal vor, daß sich zwei Elemente involutorisch entsprechen, ohne ineinander zu liegen, so ist die Beziehung durchweg eine involutorische.

Dem Schnittpunkte der beiden Geraden, die involutorisch den zwei Punkten entsprechen, muß dann ja auch involutorisch die Verbindungslinie dieser beiden Punkte zugewiesen sein. Man kann sich folglich, dies vorausgesetzt, eine polar-reziproke Beziehung geometrisch geben, indem man in einem Dreieck jeder Ecke die gegenüberliegende Seite und außerdem einem beliebigen Punkte eine beliebige Gerade zuordnet.

Anwendungen der kollinearen Beziehung in anderen Gebieten.

§ 18. Apparate zur mechanischen Beschreibung kollinearer Figuren.

Der Storchschnabel oder Pantograph.

81. Um eine ebene Figur (Zeichnung, Karte) in eine ihr ähnliche zu verwandeln, um sie also aus einem Verhältnis in ein anderes zu übertragen, d. h. sie zu vergrößern oder zu verkleinern, kann man sich der bekannten Vorrichtung des Storchschnabels oder Pantographen bedienen. Bei der einfachsten Form desselben sind vier Stangen in vier

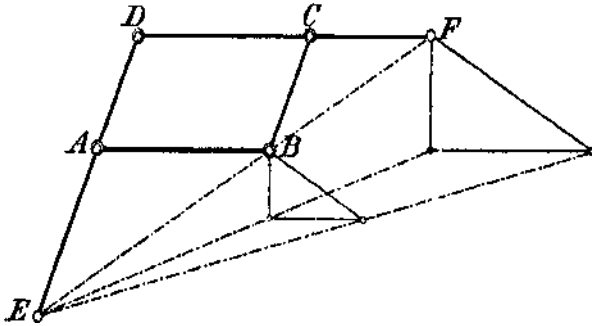


Fig. 40.

Gelenken drehbar zusammengefügt, so daß diese Drehpunkte A, B, C, D ein Parallelogramm mit festen Seiten, aber veränderlichen Winkeln bilden (Fig. 40). Zwei der Seiten dieses „Gelenkparallelogramms“, AD und CD, sind verlängert. Fixiert man auf ihnen bei irgendeiner Stellung dieses Mechanismus zwei Punkte E und f, so daß sie mit der Ecke B in einer geraden Linie liegen, so gilt die Proportion:

$$\frac{DF}{AB} = \frac{DE}{AE}$$

woraus wiederum folgt, daß die Punkte E und F bei jeder Stellung des Apparates eine durch B gehende Verbindungslinie liefern. Befestigt man also den Punkt E auf der Zeichenebene und bringt in F einen Stift (Führungsstift) an, mit dem man die gegebene Zeichnung nachfährt, so zeichnet

ein in B befestigter Stift (Zeichenstift) eine dazu ähnliche und ähnlich gelegene Figur. E ist äußerer Ähnlichkeitspunkt (Fig. 40). Die Verjüngung ist gegeben durch:

$$EB:EF=EA:ED.$$

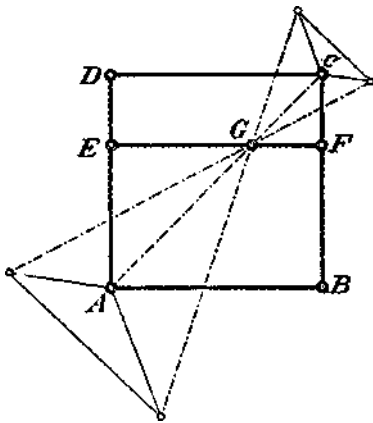


Fig.41.

Bei einer andern, ebenfalls sehr bekannten Form des Storchschnabels (Fig. 41) trägt ein Gelenkparallelogramm $ABCD$ ein verschiebbares Stegglieđ EF . Ist dieses, parallel AB , festgestellt und bezeichnet man bei irgend einer Stellung des Mechanismus den Schnittpunkt von EF und der Diagonale AC mit G , so bleibt wegen:

$$GF:AB = CF:CB$$

der Punkt G bei jeder Stellung des Parallelogramms auf der Diagonale gelegen.

Stellt man also den Punkt G des Stegglieđes fest und läßt A eine Figur durchlaufen, so beschreibt C eine dazu ähnliche und ähnlich

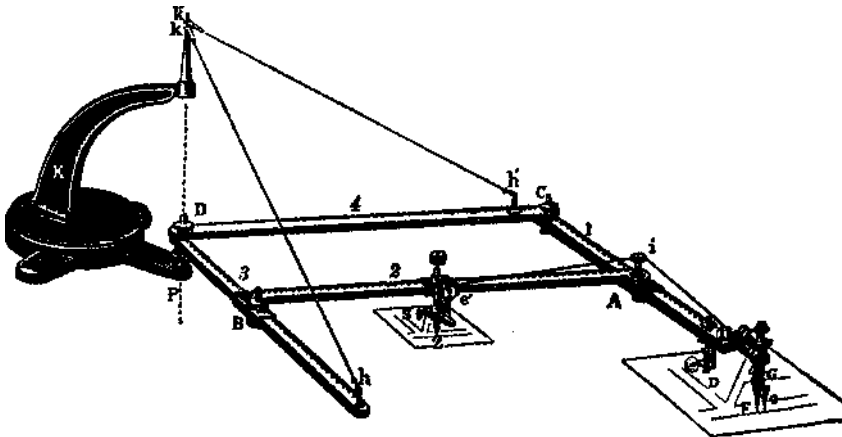


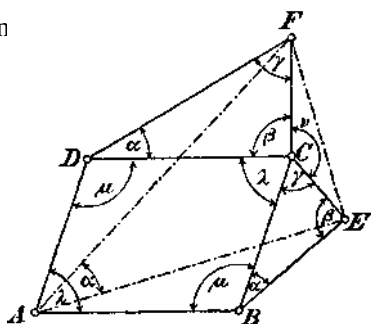
Abb. 1.

gelegene. G ist in diesem Falle für beide Systeme ein innerer Ähnlichkeitspunkt.

Um noch Beispiele zu geben, erinnern wir daran, wie man die Schattenrisse von Personen oder Silhouetten, die namentlich in der 1. Hälfte des 18. Jahrhunderts sehr beliebt waren, durch Verkleinerung mittels des Storchschnabels aus den direkt nach dem Modell gezeichneten herstellte oder wie bei den Stickmaschinen durch Nachfahren des

vergrößerten Musters — wiederum unter Anwendung eines Storchschnabels — dem Stickrahmen die richtige Bewegung erteilt wird.

Wir geben noch zwei Abbildungen struierten, freischwebenden Pantographen von G. Coradi, Zürich. Bei dem in Abbildung 1 dargestellten Apparat ist eine Ecke (D) des Gelenkparallelogramms fest. Während diese Vorrichtungen schon lange bekannt sind⁸⁾, stammt folgende Verallgemeinerung des Pantographen erst aus neuerer Zeit.⁹⁾ An ein Gelenkparallelogramm $ABCD$ (Fig. 42) sind in der Art, wie es die Figur zeigt, ähnliche Dreiecke BCE und DFC angegliedert. Folgender Überlegung läßt dann erkennen, daß $\triangle(AEF) \sim \triangle(BEC) \sim \triangle(DCF)$



ist. Denn unter Benutzung der aus der Figur erkennbaren Bezeichnungen haben wir:

$$\sphericalangle FCE = \nu = 360^\circ - \lambda - (\beta + \gamma) = 360^\circ - (180^\circ - \mu) - (180^\circ - \alpha)$$

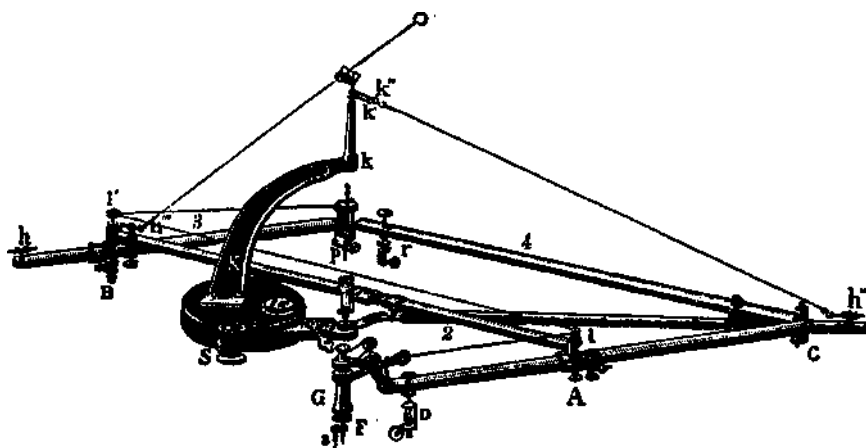


Abb. 2.

also:

$$\nu = \alpha + \mu.$$

Weiter gilt die Proportion:

$$BC:EC = DF:CF$$

Oder, da $AD=BC$:

$$AD:DF = EC:CF$$

und

$$DC:DF = BE:BC$$

oder, da $AB = DC$ und $AD = BC$:

$$AB:BE = DF:AD$$

Also folgt daraus:

$$\triangle(ECF) \sim \triangle(ADF) \sim \triangle(EBA).$$

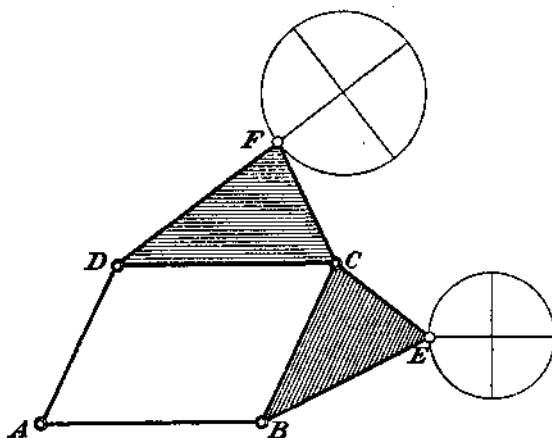


Fig. 43.

Dann ist aber:

$$\sphericalangle DFA = \sphericalangle CFE,$$

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle CEF$$

folglich auch:

$$\sphericalangle AFE = \gamma$$

$$\sphericalangle AEF = \beta$$

und also:

$$\sphericalangle EAF = \alpha.$$

Damit ist die obige Behauptung erwiesen und es ergibt sich:

$$AF:AE = \sin \beta : \sin \gamma$$

$$AF = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} AE.$$

Hält man also den Punkt A fest (Fig. 43) und läßt E eine Figur durch - laufen, so beschreibt F eine dazu ähnliche, die aber um den Winkel α gedreht ist. A ist der eine reelle Doppelpunkt der ähnlichen Systeme, $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ gibt die Verjüngung. Vorrichtungen dieser Art können dann auch dazu dienen, eine Bewegung in eine ähnliche zu transformieren,

Beispiele aus der Kinematik.

82. Die Kinematik, in deren Bereich diese Betrachtungen fallen, bietet zahlreiche Beispiele für kongruente und ähnliche Systeme. Bewegt sich z. B. ein starres, ebenes System in einem anderen und greift man irgend zwei Lagen des bewegten Systems heraus, die durch die kongruenten und gleichsinnigen Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ angedeutet seien (Fig. 44), so kann das starre System auch durch eine bloße Drehung aus der ersten Lage in die zweite übergeführt werden. Man findet das Zentrum O_{12} derselben, indem man auf den Verbindungslinien A_1A_2 und B_1B_2 die Mittelsenkrechten errichtet, die sich in O_{12} begegnen. Man beweist leicht, daß dieser Pol O_{12} mit $A_1B_1C_1 \dots$ und $A_2B_2C_2 \dots$ kongruente Figuren bildet. Die Größe der Drehung ist gegeben durch;

$$\sphericalangle A_1O_{12}A_2 = \sphericalangle B_1O_{12}B_2 = \dots$$

Der Punkt O_{12} ist der einzige des Systems, welcher bei dieser Überführung in Ruhe bleibt. Geometrisch gesprochen ist er der eine reelle Doppelpunkt der kongruenten Systeme $A_1B_1C_1\dots$ und $A_2B_2C_2\dots$. Es gibt nur einen solchen Pol für irgend zwei Lagen. Alle Mittelsenkrechten zu den Verbindungslinien irgend zweier entsprechender Punkte gehen durch ihn hindurch. (Vgl. 65. und Fig. 22.)

Läßt man die zweite Lage des nach einem bestimmten Gesetze bewegten Systems der ersten unendlich nahekommen, so geht O_{12} über in das sogenannte „Momentanzentrum“ O , das zu diesem Momente der Bewegung gehört. Durch O gehen (Fig. 45) die Normalen an alle die Kurven, die von den Punkten des bewegten Systems beschrieben werden. Die Angabe zweier Normalen genügt demgemäß, um die Normale für die Bahn eines jeden Punktes der Ebene zu bestimmen.

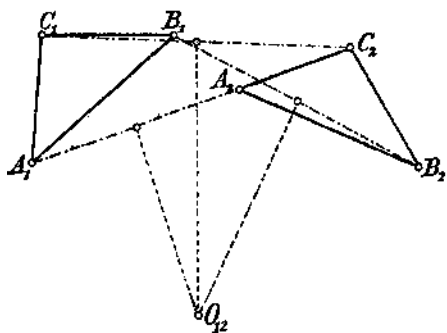


Fig.

44.

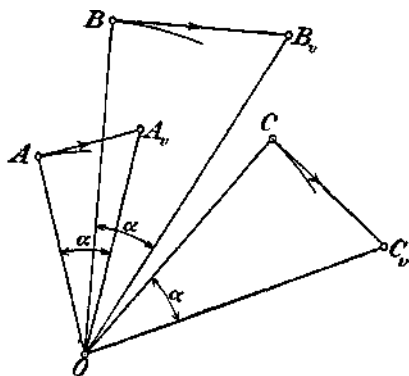


Fig. 45.

Während des unendlich kleinen Zeitintervalles dt kann die Bewegung des starren Systems ersetzt werden durch eine unendlich kleine Drehung um den Winkel $d\varphi$. Setzt man:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{tg} \alpha$$

so sind die Geschwindigkeiten der Punkte $A, B, C, \dots$:

$$AA_v = OA \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad BB_v = OB \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad CC_v = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Trägt man dieselben als Strecken auf den Tangenten an, so bilden die Punkte $A_v, B_v, C_v, \dots$ offenbar ein dem Punktfeld $A, B, C, \dots$ ähnliches und zwar gleichsinniges System (Fig. 45). Das Momentanzentrum O ist wieder der einzige reelle Doppelpunkt der beiden Ebenen (vgl. 64.). Das Momentanzentrum O hat die Geschwindigkeit 0, Durch die Angabe eines einzigen Punktes, z. B. von A_v , sind die Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte bestimmt.

Trägt man in ähnlicher Weise die Beschleunigungen der Punkte eines starren, ebenen Systems in den ihnen zukommenden Richtungen als Strecken $\mathbf{AA}_j, \mathbf{BB}_j, \dots$ an, so bilden die Punkte $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j$ usf. abermals ein zu dem ursprünglichen ähnliches System. Der Doppelpunkt dieser Systeme liefert den einzigen Punkt des bewegten Systems, der die Beschleunigung 0 besitzt. Er heißt der Beschleunigungspol.¹⁰⁾

Der Perspektograph von H. Ritter.

83. Auch die perspektive Beziehung zweier im Raume gelegener Ebenen kann man mittels gewisser Mechanismen, die als Perspektographen bezeichnet werden, mechanisch durchführen. Durch seine Einfachheit zeichnet sich der von dem Architekten Hermann Ritter erdachte Apparat aus, der im folgenden beschrieben werden soll.¹¹⁾

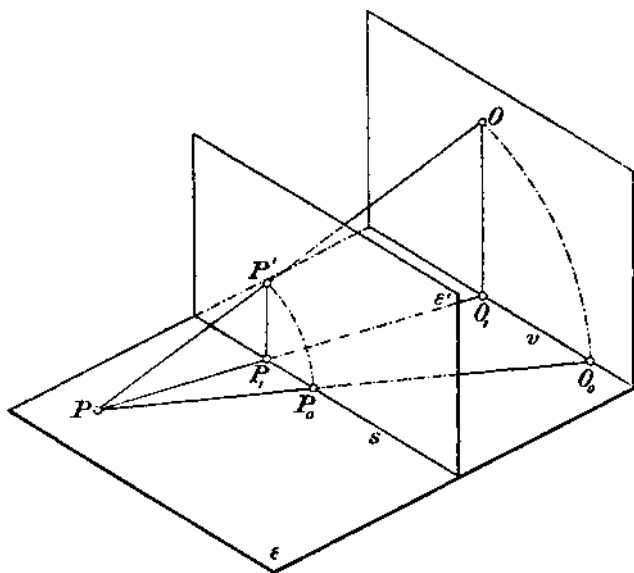


Fig. 46.

In Figur 46 möge die Ebene ε durch Zentralprojektion aus dem Punkte O , dem Auge, auf die Bildebene ε' abgebildet werden. In dieser Perspektive entspricht also einem Punkte P von ε der Schnittpunkt P' des Strahles OP mit ε' . Zu diesem Bildpunkte P' kann man dann aber auch auf folgendem Wege gelangen: wir legen durch O eine Ebene parallel zu ε' , die der Ebene ε in v begegnet, wobei v parallel sein wird zur Schnittlinie s von ε und ε' . Vom Auge O aus fallen wir in dieser Parallelebene eine Senkrechte OO_1 auf v und machen ferner:

$$O_1O_0 = OO_1$$

Treffen die Verbindungslinien PO_0 und PO_1 in P_0 und P_1 die Gerade δ , so steht auch $P'P_x$ senkrecht auf δ und weiter ist:

$$P_1P_0 = P'P_1$$

Legen wir demnach die Ebene ε' um die Spur s in die Ebene ε um und sind in dieser letzteren die Linien v , s und die Punkte O_1 und O_0 gegeben, so finden wir (Fig. 47) das Bild P'_0 eines Punktes P nach der Umklappung, indem wir P mit den festen Punkten O_1 und O_0 verbinden, dadurch auf δ die Punkte P_1 und P_0 erhalten und in P_1 eine Senkrechte von der Länge P_1P_0 errichten, so daß also:

$$P_1P'_0 = P_1P_0$$

Konstruiert man zu alien Punkten P einer Figur nach dieser Vorschrift die zugehörigen Punkte P'_0 , so bilden sie die Perspektive der genannten Figur. Soll ein Apparat diese Perspektive zeichnen, wenn P das Original durchläuft, so muß er mithin folgendes leisten:

Erstens hat er für jede Lage des Punktes P die zugehörige Strecke P_1P_0 der Länge und Lage nach auf der festen Geraden s zu markieren.

Zweitens muß er diese Strecke P_1P_0 in P_1 senkrecht antragen. Im Interesse der praktischen Ausführung liegt es dann noch, die Strecke P_1P_0 nicht im Punkte P_1 selbst anzutragen, sondern sie, eventuell noch mit einem Faktor multipliziert, um ein konstantes Stück auf s zu verschieben, damit die Figuren auseinandergerückt werden.

84, Die erste Aufgabe leistet der in Rede stehende Perspektograph, indem (Fig. 47) zwei Lineale an zwei Führungspunkten (O_0, O_1) hingeleiten, die auf einer Schieberführung verstellbar angebracht sind. Der Schnittpunkt der beiden Lineale trägt den Führungsstift (P) und die Punkte P_1 und P_0 werden auf einer zweiten Schieberführung markiert.

Den zweiten Teil der Konstruktion führt ein sogenanntes „Froschschenkelsystem“ aus. Zwei Rhomben $ABCD$ und $AEFG$ (Fig. 48) haben eine Ecke A gemeinsam. Indem man die Seiten BA und EA einerseits, DA und GA andererseits je aus einem Stücke herstellt, wird erreicht, daß BA stets senkrecht auf EA und ebenso DA stets senkrecht auf GA steht. Im übrigen sind beide Rhomben als Gelenkparallelogramme konstruiert. Die obere Hälfte des Apparates findet man in der Figur angedeutet. Die Stange BC ist um die eigene Länge verlängert, so daß $CB = BH$. Dann ergibt sich unmittelbar, daß $AH \perp AC$. Die Seiten Doehlemann-Olb

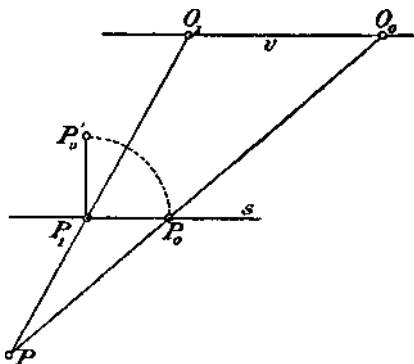


Fig. 47.

der beiden Rhomben können in einem beliebigen Verhältnis stehen, so daß also: $AB = k \cdot AE$; natürlich ist mithin auch:

$$AH = k \cdot AF$$

Den einfachsten und gewöhnlichen Fall liefert $k = 1$.

An dem Apparate ist nun der Ort A durch eine Stange mit dem Punkte P_1 , der Punkt F ebenfalls durch eine feste Stange mit dem Punkte P_0 verbunden. Wir erhalten dann:

$$AH = k \cdot AF = k (AP_1 - FP_1) = k (AP_1 - FP_0 + P_1P_0)$$

$$AH = c + k \cdot P_1P_0.$$

Werden die Punkte P_1 und P_0 auf der Schieberführung in bestimmter Weise festgelegt, so richten sich danach auch die Punkte A und F und der

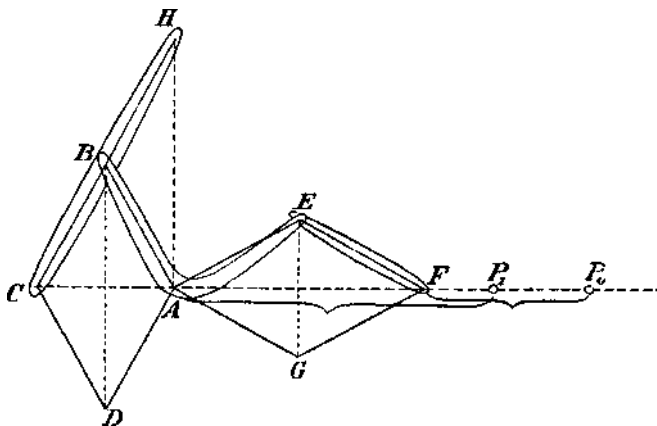


Fig. 48.

Endpunkt H liefert den dem Punkte P'_0 entsprechenden Punkt der Zeichnung. Ein in H angebrachter Zeichenstift beschreibt demnach die um die Strecke AP_1 nach links und um das Stück c nach oben verschobene und im Maßstabe k geänderte Perspektive der von P durchlaufenen Figur.

85. Der ganze Apparat, wie ihn die beigegebene Abbildung 3 zeigt, enthält demnach folgende Bestandteile: a) Zwei Lineale, durch deren Schnittpunkt der Führungsstift P hindurchgeht; b) zwei feste Führungspunkte, die auf einer Schieberführung v (in der Abbildung oben) verstellbar angebracht sind und längs der die Lineale gleiten; c) eine weitere Schieberführung s (in der Abbildung unten), die parallel zur oberen Schieberführung angebracht ist. Diese untere Schieberführung enthält einen doppelten Schieber: ein hölzernes Schieberlineal, das selbst wieder zwei verstellbare Ösen trägt. Durch diese erhält eine runde Eisenstange ihre Führung; d) zwei Führungspunkte ($a, /$), die auf der unteren Schieberführung bewegt werden. Der

eine, a , ist mit dem hölzernen Schieber s , der andere, f , mit der Eisenstange fest verbunden. Die beiden Lineale, die um diese Führungspunkte sich drehen und längs derselben sich verschieben können, regeln die Lage dieser beiden Punkte; e) die Froschschenkel mit dem Zeichenstift: die rechte äußerste Ecke F des Froschschenkelsystems ist mit dem hölzernen Schieber und infolgedessen mit dem Führungspunkte a starr verbunden; der gemeinsame Eckpunkt A der beiden Rhomben dagegen wird an der eisernen Stange befestigt, also mit dem Führungspunkt f in feste Verbindung gebracht. Übrigens sind zwei der Seiten des einen Rhombus verlängert und jede derselben kann den Zeichenstift aufnehmen.

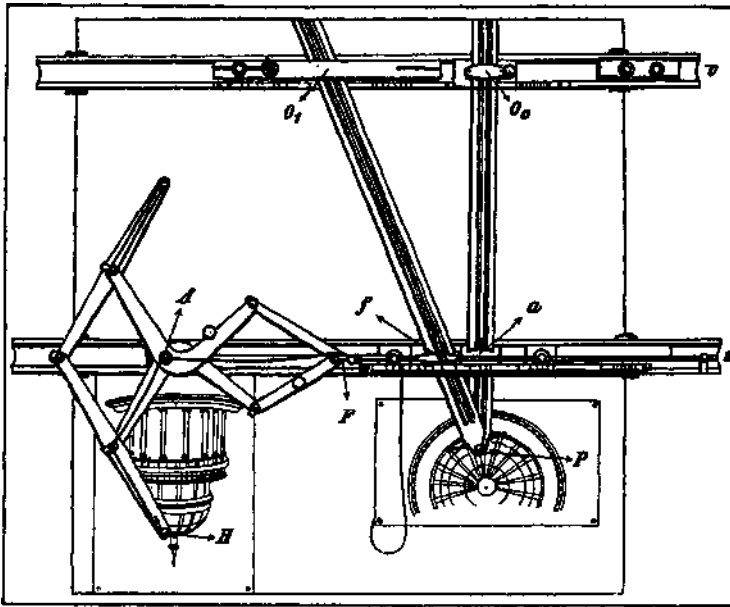


Abb. 3.

In welcher Weise der Apparat zu orientieren ist, ergibt sich ohne weiteres. Es mag noch hinzugefügt werden, daß unsere ganze Betrachtung durchaus unabhängig von dem Winkel ist, den (Fig. 46) die Ebene ε mit der Bildebene ε' bildet. Die genannten Konstruktionen gelten für jede beliebige Lage der abzubildenden Ebene ε . Auf die weitere Verwendung des Apparates zur Abbildung räumlicher Objekte kommen wir noch zurück. (133.)

Erwähnt kann bloß werden, daß G. Hauck einen Apparat konstruiert hat, der es ermöglicht, aus Grund- und Aufriß eines räumlichen Objektes eine Perspektive desselben zu ermitteln. E. Brauer hat diesen Apparat in konstruktiver Hinsicht verbessert.¹²⁾

§ 19. Anwendungen in der darstellenden Geometrie (Parallelprojektionen).

Bild und Umlegung einer ebenen Figur,

86. Da es nicht Aufgabe dieses Lehrbuches sein kann, in die Elemente der darstellenden Geometrie einzuführen, so sei in den nächsten Nummern bloß auf die Anwendung der vorher besprochenen Verwandtschaften für den konstruierenden Geometer aufmerksam gemacht, wobei dem Kenner der darstellenden Geometrie¹³⁾ entsprechende Aufgaben in Erinnerung gebracht werden.

Zur Ermittlung der (wahren) Gestalt einer ebenen Figur, die durch zugeordnete Normalrisse gegeben ist, wird im Auf- und Grundrißverfahren die Ebene der Figur um eine Spur in die betreffende Bildebene umgelegt oder es wird die Ebene um eine Hauptlinie (Spurparallele) zur betreffenden Rißebe parallel gedreht; die Projektion des Risses und die so entstandene Umlegung sind perspektiv-affine Figuren; die Spur oder die Hauptlinie ist die Affinitätsachse, die dazugehörigen Falllinien (Spurnormalen) sind die Affinitätsstrahlen, ein Paar entsprechender Punkte besteht aus der Projektion und der Umlegung eines Punktes (vgl. Satz 43 in 77.).

Aufgabe 12: Ein ebenes Sechseck ist durch seine Risse gegeben; dessen (wahre) Gestalt zu zeichnen.

Die beiden zugeordneten Normalrisse stehen aber selbst in perspektiv-affiner Beziehung, bezüglich der Schnittlinie der Ebene mit der Koinzidenzebene (Ebene, die den Winkel zwischen der positiven Halbebene der Aufrißebe und der negativen Halbebene der Grundrißebe halbiert). Die Affinitätsstrahlen sind in diesem Falle die Ordnungslinien (Ordner) zwischen den zugeordneten Rissen.

87. Ebenso treten perspektiv-affine Systeme auf, wenn wir Bilder ebener Figuren im Schrägriß (in schiefer Projektion, schiefer Axonometrie) zeichnen und von diesen die Originalgrößen aufsuchen.

Aufgabe 13: Eine Ebene ist im Schrägriß (in schiefer Projektion) gegeben sowie von einem in ihr gelegenen Viereck der Schräg-Grundriß. Man zeichne den Schrägriß des Vierecks sowie die (wahre) Gestalt des Grundrisses und des Vierecks selbst.

In diesem Beispiel, in dem eine vertikale Bildebene und eine horizontale Grundebene $\mathbf{F}$ angenommen sind, erscheint der gegebene Schräg-Grundriß perspektiv-affin zum Schrägriß des Vierecks in der gegebenen Ebene mit dem Schrägriß der Spur der Ebene auf der Grundebene $\mathbf{F}$ als Affinitätsachse und den Geraden senkrecht zum Schnitt der Grundebene $\mathbf{F}$ mit der Bildebene als Affinitätsstrahlen; außerdem sind der Schräg-Grundriß der Figur und seine (wahre) Gestalt perspektiv-affine Figuren mit der Spur der Grundebene auf der Bildebene als Affinitätsachse und einem Paar

entsprechender Punkte, das aus dem Schräg-Grundriß eines Punktes und seiner Umlegung besteht. Ebenso bilden der Schrägriß des Viereckes und seine (wahre) Gestalt perspektiv-affine Systeme mit der Spur der Ebene auf der Bildebene als Affinitätsachse und dem Schrägriß eines Punktes und seiner — mittels des Aufrisses herstellbaren — Umlegung als einem Paare zugeordneter Punkte dieser Affinität.

Die bisher besprochenen geometrischen Verwandtschaften, wie sie zwischen den Rissen und Umlegungen eines ebenen Systems auftreten, führen, wenn statt des im Raume gelegenen Polygons ein Kreis der Be-

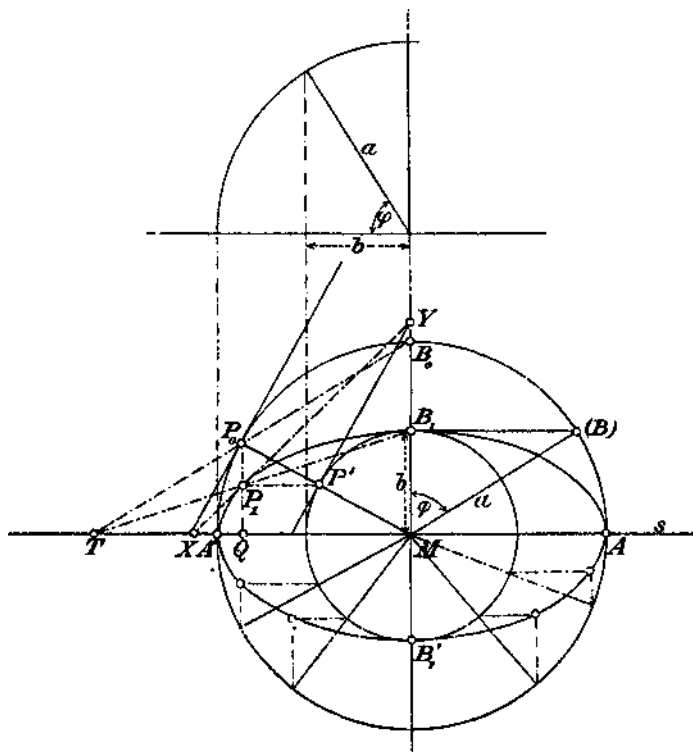


Fig. 49.

trachtung zugrunde gelegt wird, zu affin-perspektiven Beziehungen zwischen einem Kreise und einer Ellipse oder zwischen zwei Ellipsen. Statt dies näher auszuführen, sollen im folgenden einige Ellipsenkonstruktionen behandelt werden.

Die Ellipse als affines Bild des Kreises.

88. In einer unter dem Winkel φ gegen die Zeichenebene geneigten Ebene liege ein Kreis vom Radius a , dessen Mittelpunkt M in der Zeichenebene, also auf der Spur 8 (Fig. 49) sich befinden möge. Diese Spur ent-

halt den Durchmesser AA' des Kreises. Projiziert man den Kreis orthogonal in die Bildebene, so erhält man nach bekannten Sätzen eine Ellipse, deren große Achse mit AA' zusammenfällt, während die kleine Achse die Projektion des zu AA' senkrechten Kreisdurchmessers wird. Bezeichnen wir deren halbe Länge mit b , so ist:

$$b = MB_1 = a \cos \varphi.$$

Um eine Konstruktion der Ellipse zu erhalten, legen wir den Kreis in die Zeichenebene um und benutzen die affine Beziehung zwischen der Umlegung und der Ellipse. Dem Punkte B_0 z. B. entspricht B_1 , s ist die Affinitätsachse. Demnach können wir zu einem Punkte P_0 des umgelegten Kreises den zugehörigen Ellipsenpunkt P_1 finden, indem wir B_0P_0 mit s zum Schnitt bringen und diesen Punkt T mit B_1 verbinden. Auf dieser Linie B_1T schneidet die Senkrechte P_0Q zu s den Ellipsenpunkt P_1 aus.

Um diese Konstruktion von dem Punkte T unabhängig zu machen, ziehen wir durch P_1 eine Parallele zu s_1 die mit dem Radius P_0M den Schnittpunkt P' bestimmt. Dann folgt aus:

$$\frac{P'M}{P_0M} = \frac{P_1Q}{P_0Q} = \frac{B_1M}{B_0M}$$

$$P'M = B_1M = b.$$

Alle Punkte P' liegen folglich auf einem Kreise über der kleinen Achse der Ellipse. Geht man von den beiden konzentrischen Kreisen mit den Radien a und b aus, so ergeben sich Punkte der Ellipse durch folgende Konstruktion: wir ziehen irgend einen Halbmesser der beiden Kreise, der die Schnittpunkte P_0 und P' liefert; die Parallelen durch P_0 zur kleinen Achse und durch P' zur großen schneiden sich in dem Punkte P_1 der Ellipse. In der Figur 49 sind einige Punkte des unteren Bogens der Ellipse auf diese Weise konstruiert.

Diese punktweise Konstruktion der Ellipse stellt nichts anderes vor als einen konstruktiv bequemeren Ausdruck für die Projektion der Ellipse aus dem Kreise über AA' oder auch für die affine Beziehung beider Kurven. Diese gibt uns auch die Möglichkeit, Aufgaben, die sich auf die Ellipse beziehen, dadurch zu behandeln, daß man dieselben auf das affine System des Kreises überträgt, für diesen die Lösung durchführt und diese dann wieder in das gegebene System zurückführt.

89. Dieser Gedankengang führt zu einfachen Lösungen bei folgender Aufgabe 14: Von einer Ellipse sind die beiden Hauptachsen der Lage und Größe nach gegeben. Man zeichne:

- a) in einem gegebenen Punkte der Ellipse die Tangente und Normale;
- b) zu einem gegebenen Durchmesser der Ellipse den konjugierten;
- c) die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit der Ellipse;
- d) die Tangenten, die parallel zu einer gegebenen Geraden an die Ellipse gehen;

- e) die Tangenten, die durch einen gegebenen Punkt an die Ellipse gehen;
- f) zu einem gegebenen Punkte die Polare;
- g) zu einer gegebenen Geraden den Pol.

Als Beispiel sei der Fall c) behandelt: Die Schnittpunkte der gegebenen Geraden g_1 mit der Ellipse zu konstruieren, deren Hauptachsen $A_1A'_1$ und $B_1B'_1$ sind (Fig. 50). Zunächst verschaffen wir uns die Gerade g_0 , die in dem affinen System des Kreises über $A_1A'_1$ als Durchmesser der Geraden g_1 entspricht. Ziehen wir in B_1 an die Ellipse die Tangente t_1 , die parallel $A_1A'_1$ verläuft, so wird dieser Geraden die Parallele t_0 durch B_0 zugeordnet sein und dem Schnittpunkte T_1 von g_1 und t_1 entspricht der Schnittpunkt T_0 der Senkrechten zu $A_1A'_1$ mit t_0 . Da weiter g_1 und g_0 sich auf der Achse $A_1A'_1$ begegnen, so ist g_0 bestimmt. Die Schnittpunkte M_0 , N_0 von g_0 mit dem Kreise liefern auf g_1 zurückgeführt die verlangten Schnittpunkte M_1 und N_1 der Geraden g_1 mit der Ellipse. Sie sind mit der gleichen Genauigkeit konstruiert, mit der man die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise graphisch ermittelt.

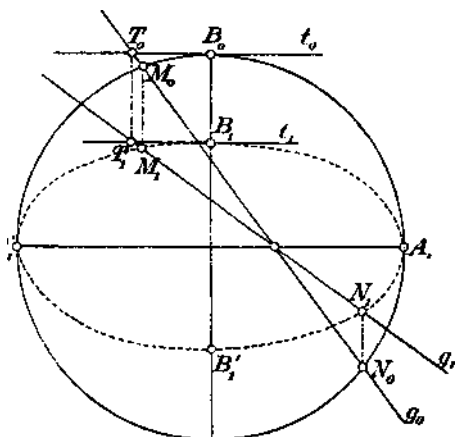


Fig. 50.

90. Die Fig. 49 läßt endlich noch eine andere Auffassung zu. Denken wir uns den Kreis über $B_1B'_1$ in der Zeichenebene liegend, die Ellipse dagegen aus derselben herausgedreht und zwar um die Gerade $B_1B'_1$. Man kann zeigen, daß für jeden Winkel, den die Ebene der Ellipse mit der Zeichenebene bildet, stets die Orthogonalprojektion der Ellipse in diese wieder eine Ellipse ist, deren eine Achse mit $B_1B'_1$ sich deckt. Wählt man den Neigungswinkel φ , der durch die Beziehung gegeben ist:

$$\cos \varphi = \frac{b}{a},$$

so wird (Fig. 49 oben) auch die andere Achse der Projektion $= 2b$, und diese selbst geht in den Kreis über $B_1B'_1$ über. Demnach kann die Ellipse auch zu diesem Kreise in eine affine Beziehung gebracht werden. Dem Punkte P_1 entspricht P' usw. und $B_1B'_1$ ist die Achse für diese Affinität.

Auch diese Eigenschaft läßt sich in konstruktiver Hinsicht verwerten. Z. B. muß die Tangente im Punkte P_1 der Ellipse einerseits durch den Punkt X gehen, worin die Kreistangente in P_0 die Achse a trifft,

andererseits aber auch durch den Punkt Y , den die Tangente in P' an den kleinen Kreis auf $B_1B'_1$ bestimmt. Schließlich kann man die Ellipse der Figur 49 auch noch als eine Parallelprojektion (einen Schrägriß, eine schiefe Projektion) des um $B_1B'_1$ gedrehten kleinen Kreises betrachten, was zu der gleichen affinen Beziehung führt.

91. Setzen wir die Tatsache als bekannt voraus, daß auch eine beliebige Parallelprojektion eines Kreises eine Ellipse liefert, so können wir daraus eine Konstruktion dieser Kurve aus zwei beliebigen konjugierten Durchmessern ableiten. Denn sind PP' und QQ' zwei solche (Fig. 51), so denken wir uns einen Kreis über PP' als Durchmesser beschrieben und denselben unter irgend einem Winkel gegen die Zeichenebene geneigt. Der Durchmesser QQ' wird dann unter allen Umständen das Bild des zu

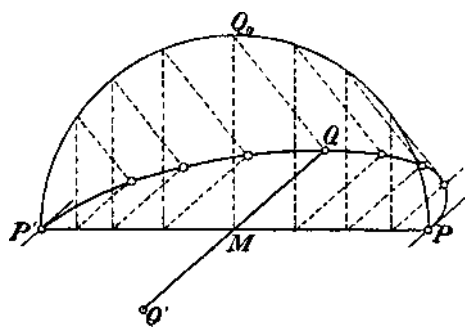


Fig. 51.

PP' senkrechten Kreisdurchmessers sein, wodurch die Richtung der Projektionsstrahlen bestimmt ist. Im übrigen interessiert uns die Lage des Kreises im Raume nicht weiter, da wir denselben doch in die Zeichenebene umlegen und beachten, daß nach 77. der Kreis und die Ellipse perspektiv-affin sind. Ist $MQ_0 = MP$ und senkrecht zu diesem Halbmesser,

so kennen wir in der Verbindungslinie QQ_0 die Richtung, in PP' die Achse dieser Affinität. Aus den Punkten dieses Kreises leitet man dann weitere Punkte der Ellipse durch Parallele zu den Seiten des Dreiecks MQQ_0 leicht ab, wie dies Fig. 51 zeigt.

Damit haben wir die Mittel, um die in Aufgabe 14 (89.) genannten Konstruktionen auch dann zu erledigen, wenn die Ellipse statt durch die Hauptachsen in allgemeiner Weise durch ein Paar konjugierter Durchmesser gegeben ist. Die Fig. 52 gibt die vollständige Konstruktion für den Fall e), wobei es sich darum handelt, von dem Punkte A aus die Tangenten an die durch die konjugierten Durchmesser PP' und QQ' bestimmte Ellipse zu zeichnen. Man wird sich dann zunächst den Punkt A_0 im affinen Punktfeld des Kreises verschaffen, von ihm aus an den Kreis über PP' als Durchmesser die Tangenten ziehen, die, samt ihren Berührungspunkten in das Punktfeld der Ellipse übertragen, die gesuchten Tangenten AX und AY der Ellipse mit den Berührungspunkten U und V liefern.¹³⁾

Schnitte von Kegeln und Zylindern mit den Rißebenen.

92. Bezieht ein Strahlenbündel mit endlichem oder unendlich fernem Mittelpunkt zwei Ebenen perspektiv aufeinander und greift man aus

dem Bündel eine einfache Mannigfaltigkeit von Strahlen heraus, die einen Kegel oder Zylinder bilden, so befinden sich die beiden Schnittkurven mit den Ebenen als Bestandteile der perspektiven Ebenen auch wieder in perspektiver Lage. Dadurch wird es möglich, die Sätze über perspektive Punktfelder für die Schnitte von Kegeln und Zylindern (Pyramiden und Prismen) nutzbar zu machen. Wir wollen dies an einigen Beispielen ertftrern:

Aufgabe 15: In der Grundrißebene Π_1 (ersten Tafel) ist ein Kreis gegeben; man legt durch ihn in beliebiger Richtung einen Zylinder. Den Schnitt desselben mit der Aufrißebene Π_2 (zweiten Tafel), die zweite Spur, zu zeichnen.

Die Schnittlinie des Zylinders dieser Aufgabe mit der Aufrißebene Π_2 ist perspektiv-affin mit dem Kreis in der Grundrißebene, die Affinitätsachse ist in diesem Falle die Riß- (Bild-) Achse, die Richtung der Affinitäts-

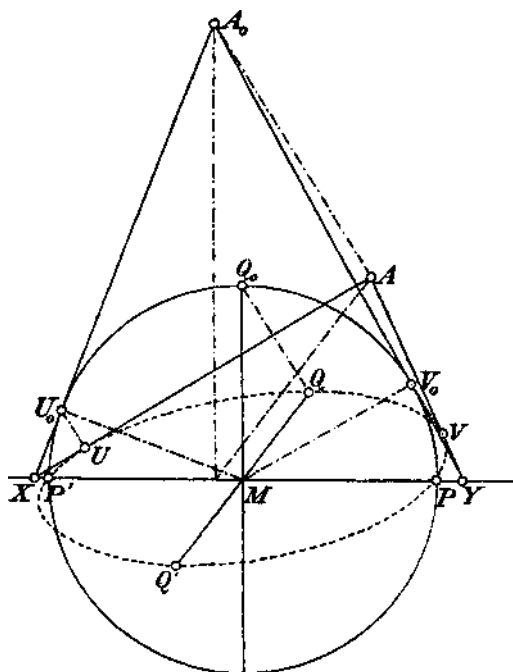


Fig. 52.

strahlen ergibt sich, wenn wir zu einem Punkt des Basisfeldes, etwa dem Kreis-Mittelpunkt, den entsprechenden im Schnittfeld (als Durchstoßpunkt der parallel zu den Zylindererzeugenden durch den Kreis-Mittelpunkt gelegten Geraden mit Π_2) aufsuchen. Werden die entsprechenden rechten Winkel der Strahlenbüschel in diesem Punktepaar aufgesucht, so gehen aus dem Kreisdurchmesserpaar die Achsen der Ellipse hervor.

93. Wenn ein Kegel mit der Grund- und Aufrißebene geschnitten wird, so sind diese beiden Schnittfiguren perspektiv-kollineare Figuren.

Aufgabe 16: Ein in der Grundrißebene gelegener Kreis wird aus einem Punkte S projiziert; man zeichne den Schnitt des dadurch entstehenden Kegels mit der Aufrißebene (die zweite Spur).

In dieser Aufgabe ist die Kollineationsachse die Rißachse, jedoch ist natürlich nicht ein Riß der Spitze das Kollineationszentrum, sondern dieses sowie die Fluchtlinien sind auffindbar mit Benutzung von 77. und Satz 39 in 69.

Schnitte von Zylindern und Kegeln mit beliebigen Ebenen.

94. In den vorangehenden Aufgaben waren als besondere Schnittebenen die Reiß- (Bild-, Projektions-) Ebenen eingeführt; ist nun eine beliebige Ebene als schneidende Ebene gegeben, so ist im Falle eines Zylinders die Schnittfigur mit jeder Basisfigur perspektiv-affin mit der Schnittlinie von Basis- und Schnittebene als Affinitätsachse.

Aufgabe 17: Ein in der Grundrißebene gelegener Kreis dient als Leitlinie für einen (elliptischen) Zylinder, dessen Erzeugende zu einer Geraden parallel sind; den Schnitt mit einer beliebigen Ebene zu zeichnen.

In dieser Aufgabe sind ein Paar entsprechender Punkte: der Kreismittelpunkt und der Schnittpunkt der durch den Mittelpunkt parallel zu den Erzeugenden gelegten Geraden mit der Schnittebene.

Für den Aufriß artet in diesem Falle die perspektiv-affine Beziehung aus und läßt sich nicht unmittelbar benutzen. Im Grundriß können wieder entsprechende Rechtwinkelpaare zur Konstruktion der Achsen verwendet werden.

95. Liegt ein Kegel vor, so sind jeder ebene Schnitt und die Basisfigur perspektiv-kollineare Figuren mit der Schnittlinie zwischen Basis- und Schnittebene als Kollineationsachse und den Erzeugenden als Kollineationsstrahlen.

Aufgabe 18: Auf der Grundrißebene steht ein Kreiskegel; dessen Schnitt mit einer zweitprojizierenden Ebene (Lotebene zur zweiten Tafel) zu zeichnen.

In diesem Beispiel läßt sich der Pol der Spur der Fluchtebene (Fluchtlinie) auffinden, dessen entsprechender Punkt der Mittelpunkt der Schnittfigur ist. Beachte auch Satz 49 in 100.

§ 20. Anwendungen in der darstellenden Geometrie, Zentralprojektion (Perspektive).

Perspektives Bild einer in der Grundebene liegenden Figur. Umlegung einer horizontalen Ebene.

96. Der Kenner der Anfangsgründe der Zentralprojektion weiß, daß die eine Fluchtlinie einer horizontalen Ebene (Grundebene) der Horizont ist, während die Schnittlinie der durch das Auge parallel zur Bildebene π gelegten Ebene mit der Grundebene, die um die Bildspur umgelegt wird, die zweite Fluchtlinie oder Verschwindungslinie ist; ebenso ist bekannt, daß das Zentralbild jeder in der Grundebene liegenden Figur und ihre Umlegung um die Bildspur zwei perspektiv-kollineare Systeme liefern, für die das Kollineationszentrum das um den Horizont umgelegte Auge und die Kollineationsachse die „Grundlinie“ (Schnitt der horizontalen Ebene mit π) ist (Satz 43 in 77.). Ein Paar entsprechender Punkte sind Zentralbild eines Punktes und seine Umlegung. Allen unendlichfernen

Punkten der Grundebene entsprechen die Punkte des Horizontes. Z. B. entsprechen den parallelen Geraden der Grundebene senkrecht zur Bildebene die durch den Hauptpunkt (Fußpunkt des Lotes vom Auge auf die Bildebene) gehenden Geraden.

Aufgabe 19: In der Grundebene ist ein quadratisches Fußbodenmuster gegeben, das sich an die Grundlinie anschließt; man zeichne das Zentralbild desselben.

Perspektives Bild einer in einer beliebigen Ebene liegenden Figur. Umlegung einer beliebigen Ebene.

97. Aufgabe 20: Eine Ebene ist durch ihre Spur und Fluchtlinie gegeben. Man zeichne das Bild einer in dieser Ebene liegenden Figur (eines Sechseckes).

Bei allgemeiner Lage der Ebene sind wieder Zentralriß und Umlegung der Ebene um die Bildspur perspektiv-kollineare Systeme mit der Spur der Ebene als Kollineationsachse und dem um die Fluchtspur in die Bildebene hineingedrehten Auge als Kollineationszentrum. Ein Paar entsprechender Punkte sind Zentralriß und Umlegung eines Punktes. Die zweite Fluchtlinie (Verschwindungslinie) erhält man durch Anwendung des Satzes 39 in 69.

98. Ist ein Prisma oder ein Zylinder in Zentralprojektion darzustellen und mit einer beliebigen Ebene zu schneiden, so sind im allgemeinen Basisfigur und Schnittfigur zwei perspektiv-kollineare Gebilde mit der Schnittlinie der beiden Ebenen als Kollineationsachse und dem Fluchtpunkt der Prismenkanten (Zylindererzeugenden) als Kollineationszentrum.

Ein Punkt der Basis und der Schnittpunkt der nach diesem Punkt führenden Kante (Erzeugenden) mit der Schnittebene liefert ein Paar entsprechender Punkte. Wenn eine Pyramide oder ein Kegel vorliegt, so ist das Kollineationszentrum das Zentralbild der Spitze.

Aufgabe 21: Von einem Prisma ist die in der Grundebene gelegene Grundfläche durch ihr Bild gegeben, außerdem der Fluchtpunkt der Prismenkanten. Man zeichne den Schnitt des Prismas mit einer zur Grundebene parallelen Ebene, die durch ihre Spur gegeben ist.

In dieser Aufgabe ist der Horizont die Kollineationsachse (als Bild der Schnittlinie der beiden parallelen Ebenen).¹⁴⁾

§ 21. Anwendungen der Zentralkollineation zur Konstruktion von Kegelschnitten.

Perspektive Kegelschnitte.

99. Betrachten wir zwei Kegelschnitte k und k' , die sich in einer Zentralkollineation entsprechen. Wir wollen dieselben kurz als „per-

spektive" Kegelschnitte bezeichnen; in den Figuren 53 und 54 ist der größeren Bequemlichkeit wegen der Kegelschnitt k' durch einen Kreis ersetzt und zu diesem das zentralkollineare Bild k konstruiert. Die perspektive Beziehung wurde festgelegt durch die Annahme des Zentrums S und der Achse g sowie des Punktepaares U, U' . In Figur 53 ist zunächst zum Kreise k' das zentralkollineare Bild gezeichnet unter der Voraussetzung, daß g außerhalb des Kreises liegt und die Achse s den Kreis k' in reellen Punkten trifft.

Da alle Strahlen durch S sowie alle Punkte auf δ sich selbst entsprechen, so muß der entsprechende Kegelschnitt k die von S aus an K'

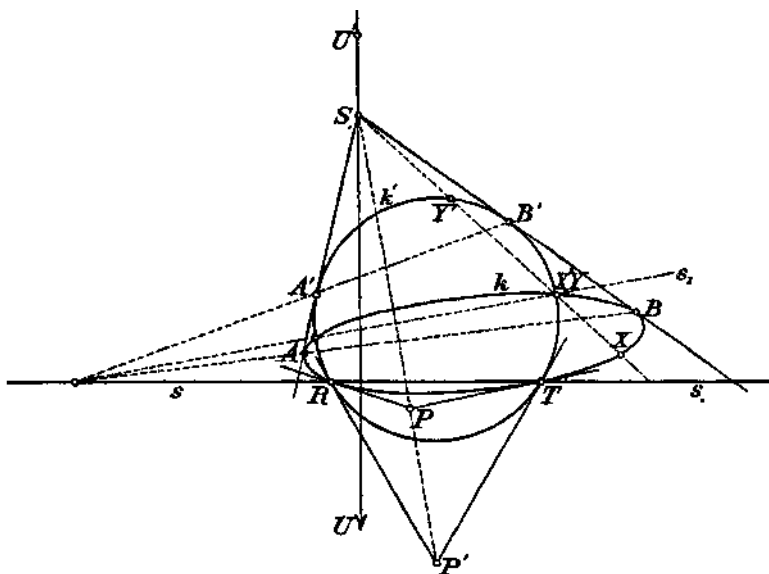


Fig. 53.

gehenden Tangenten ebenfalls berühren und durch die Schnittpunkte von g und k' hindurchgehen.

Sind A' und B' die Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Kreise k' , A, B die entsprechenden Berührungspunkte von K , so schneiden sich die Verbindungslinien AB und $A'B'$ (die Polaren von δ in bezug auf k und k') auf der Achse s .

Konstruiert man andererseits in den Schnittpunkten R und T von δ und k' die Tangenten, die sich im Pole P' von δ in bezug auf k' begegnen und ist P der Pol von δ in bezug auf k , also der Schnittpunkt der Tangenten an k in denselben Punkten R und T , so geht die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte P und P' durch S .

Die beiden Kegelschnitte können auch noch zwei weitere, reelle Schnittpunkte besitzen. Ist X', Y der eine derselben, so entsprechen ihm die in der Figur 53 angegebenen Punkte X, Y' .

Gehen von S aus an k' keine reellen Tangenten und schneidet s den Kreis k' nicht in reellen Punkten (Fig. 54), so bleiben diese Betrachtungen immer noch richtig und wir können die Lagenbeziehung zweier perspektiver Kegelschnitte unabhängig von der Realität dieser Elemente wie folgt zum Ausdruck bringen:

Satz 47. Entsprechen sich zwei Kegelschnitte in einer Zentralkoileation, so bestimmen sie sowohl für das Zentrum als auch für die Achse derselben die gleiche Strahlen- und Punktinvolution konjugierter Elemente und sie enthalten beide die reellen oder imaginären Doppelemente dieser Involutionen.

100. In Fig. 54 ist die zweite (ideelle) gemeinschaftliche Sehne s_1 der beiden Kegelschnitte sowie der zweite Schnittpunkt S_1 imaginärer gemeinsamer Tangenten konstruiert; wie dies auszuführen ist, soll nicht weiter erörtert werden.

Aus Satz 47 lassen sich ferner noch einige nicht uninteressante Folgerungen ziehen. Gehört zu einem Punkte S in bezug auf einen Kegelschnitt eine Rechtwinkelinvolution, bei der also jeder Strahl auf dem zugeordneten senkrecht steht, so ist bekanntlich¹⁾ der Punkt S ein Brennpunkt für den Kegelschnitt. Transformieren wir den Kegelschnitt durch eine Zentralkoileation mit S als Zentrum, so gehört diese Rechtwinkelinvolution auch zu dem kollinearen Bilde und es folgt daher

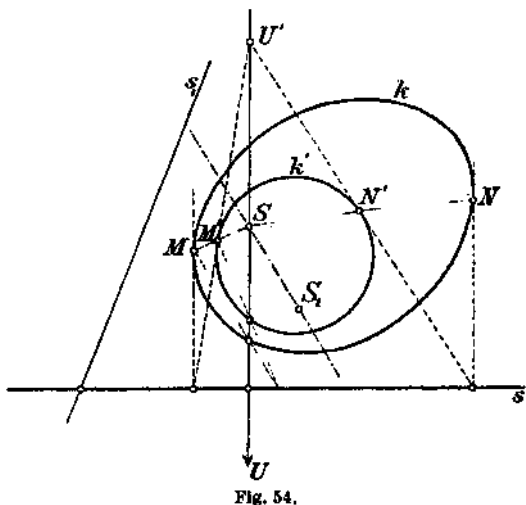


Fig. 54.

Satz 48. Hat ein Kegelschnitt das Zentrum einer Zentralkoileation im Brennpunkt, so ist dieses Zentrum auch für den ihm entsprechenden Kegelschnitt ein Brennpunkt.

Zum Mittelpunkt eines Kreises gehört ebenfalls eine Rechtwinkelinvolution; in speziellerer Form lautet also der vorige Satz wie folgt:

Satz 49. Beschreibt man um das Zentrum einer Zentralkoileation einen Kreis, so entspricht diesem ein Kegelschnitt, für den ein Brennpunkt in das Zentrum fällt.

Ein Beispiel für diesen Satz liefert Aufgabe 18 von 95.

Herstellung einer perspektiven Beziehung zwischen zwei gegebenen Kegelschnitten.

101. Liegen zwei Kegelschnitte gegeben vor, so kann man umgekehrt nach Zentralkoileationen fragen, die beide ineinander überführen. Wir

wissen bereits, daß das Zentrum einer solchen perspektiven Beziehung jedenfalls in einen Schnittpunkt zweier gemeinsamer Tangenten, die Achse in eine gemeinsame Sehne der beiden Kegelschnitte zu verlegen ist. Es hängt also diese Untersuchung zusammen mit der Frage nach den zwei Kegelschnitten gemeinsamen Punkten oder Tangenten oder auch mit der Bestimmung des den beiden Kurven gemeinschaftlichen Polar-

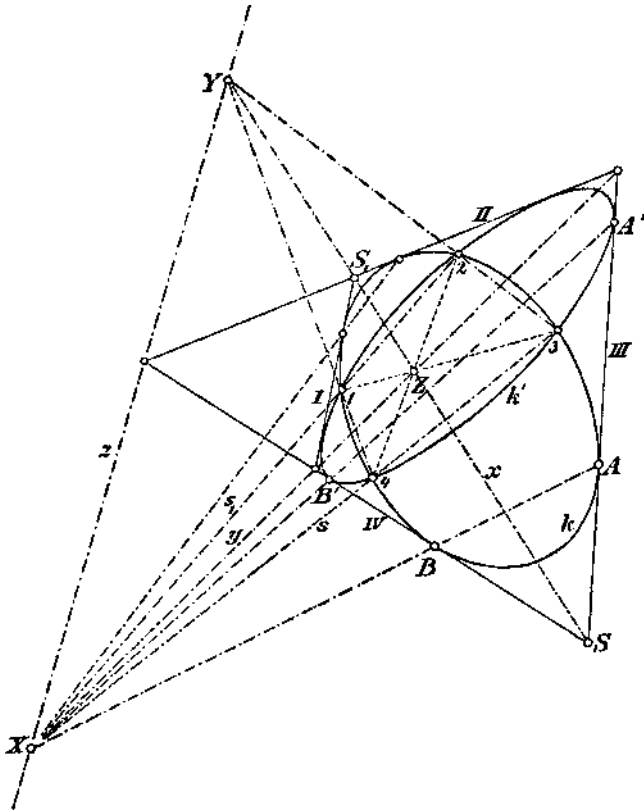


Fig. 55.

dreiecks. Wir entnehmen der Theorie der Kegelschnitte folgende bekannte Tatsachen¹⁾:

Satz 50. Zwei Kegelschnitte k und k' bestimmen ein und nur ein gemeinsames Polardreieck XYZ . Dies ist in Figur 55 dargestellt für den Fall, daß sowohl die vier Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 von k und k' als auch die gemeinsamen Tangenten I, II, III, IV der beiden Kurven alle reell sind. Dann kann man zu dem Polardreieck gelangen, sowohl ausgehend von dem vollständigen Viereck 1, 2, 3, 4 als auch unter Zugrundelegung des vollständigen Vierseits I, II, III, IV. Im ersten Falle ist das Polardreieck identisch mit dem Dreieck XYZ der Nebenecken (Diagonalepunkte) dea

Vierecks, im zweiten Falle mit dem Dreieck x, y, z der Nebenseiten (Diagonalen) dieses Vierecks.

Die fundamentale Eigenschaft des Polardreiecks läßt sich nun in folgender Weise zum Ausdruck bringen: jeder seiner Ecken sind alle Punkte der gegenüberliegenden Seite konjugiert in bezug auf die beiden Kegelschnitte, also z. B. dem Punkte X alle Punkte von x . Ebenso sind zu jeder Seite (z. B. x) des Polardreiecks alle durch die gegenüberliegende Ecke (X) gehenden Strahlen konjugiert in bezug auf beide Kegelschnitte. Dies besagt zunächst, daß jede Seite des gemeinschaftlichen Polardreiecks der beiden Kegelschnitte die Polare der gegenüberliegenden Ecke in bezug auf beide Kegelschnitte ist. Weiter aber leiten wir daraus noch folgende allgemeinere Eigenschaft ab: wählt man auf einer Seite des Polardreiecks, z. B. auf x , einen Punkt, so fallen seine beiden Polaren in bezug auf k und k' zwar nicht zusammen, wohl aber gehen sie beide durch die gegenüberliegende Ecke X . Der dual entsprechende Satz ist leicht auszusprechen.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir in Figur 55 etwa den Schnittpunkt S der Tangenten III und IV, der auf der Seite x des Polardreiecks liegt. Sind A und B die Berührungspunkte dieser Tangenten mit k , A', B' die mit k' , so müssen nach dem eben Bemerkten die Polaren AB und $A'B'$ durch X gehen, in welchem Punkte gleichzeitig die gemeinschaftlichen Sehnen 1 2 und 3 4 oder s_1 und s zusammentreffen. Wählt man S als Zentrum und s als Achse einer Zentralkollineation und entsprechen sich ferner noch A und A' in dieser Beziehung, so ist diese Kollineation dadurch bestimmt. Der Kegelschnitt k wird dann in einen zweiten Kegelschnitt k'' übergeführt und man erkennt leicht, daß k'' mit k' identisch sein muß. Denn k'' geht durch die Punkte 3 und 4 und berührt die Tangenten III und IV in A' und B' , hat also mit k' sechs Punkte gemein. Statt der Sehne s können wir aber auch s_1 als Achse der perspektiven Beziehung annehmen.

Geht man umgekehrt von einer gemeinsamen Sehne, etwa s , aus, so lassen sich zwei Punkte S und S_1 derart auffinden, daß für s als Achse entweder S oder S_1 Zentren von Kollineationen sein können, die die beiden Kegelschnitte ineinander transformieren. Mithin folgt

Satz 51. *Haben zwei Kegelschnitte vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinsame Tangenten, so gibt es 12 Zentralkollineationen, in denen die beiden Kurven einander entsprechen. Zu jedem Schnittpunkt zweier gemeinsamer Tangenten, der als Zentrum einer solchen Zentralkollineation genommen wird, gibt es zwei gemeinsame Sehnen, die als Achsen der Beziehung dienen können, und zu jeder gemeinsamen Sehne der beiden Kegelschnitte, in die die Achse einer solchen Zentralkollineation verlegt wird, kann man zwei Lagen für das Zentrum angeben.*

102. Berühren sich die beiden Kegelschnitte k und k' in einem Punkte, so kann man entweder diesen Berührungspunkt als Zentrum einer Kol-

lineation wählen, deren Achse dann als die gemeinsame Sehne eindeutig bestimmt erscheint, oder es steht uns frei, in die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt die Achse einer Kollineation fallen zu lassen. Dann ist deren Zentrum als Schnittpunkt der zwei gemeinsamen Tangenten wiederum eindeutig festgelegt.

Werden die gemeinsamen Elemente der beiden Kegelschnitte k und k' zum Teil oder alle vier imaginär, so treten gewisse Änderungen ein: man kann beweisen, daß die beiden Kegelschnitte immer noch auf vier verschiedene Arten perspektiv liegen. Es mag hier die Bemerkung genügen, daß auch durch zwei Paare konjugiert imaginärer Punkte immer

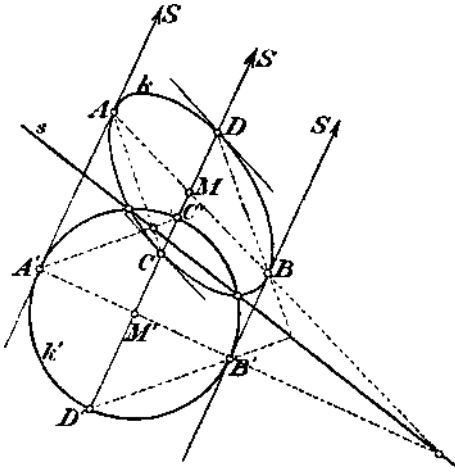


Fig. 56.

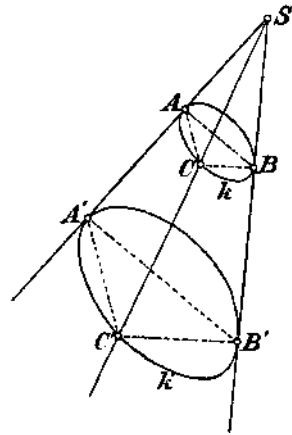


Fig. 57.

ein reelles Geradenpaar geht (S und S_1 in Fig. 54) und daß zwei Paare konjugiert imaginärer Gerade immer ein reelles Punktepaar enthalten (S und S_1 in Fig. 54).

Lassen die beiden Kegelschnitte zwei gemeinsame Tangenten zu, die parallel laufen, und liegen beide innerhalb dieser Tangenten, so liegt ein Schnittpunkt δ im Unendlichen (Fig. 56). Benutzt man diesen Punkt/ S als Zentrum sowie eine der zugehörigen Sehnen als Achse s einer Zentralkollineation, so werden durch diese Verwandtschaft die beiden Kegelschnitte perspektiv-affin aufeinander bezogen. Der Mittelpunkt des einen geht in den des andern über,

Zwei ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte k und k' (Fig. 57), die einander in einer Ähnlichkeitstransformation entsprechen, bestimmen auf der unendlich fernen Geraden, der Achse δ dieser Zentralkollineation, dieselben beiden Schnittpunkte. Gehen umgekehrt zwei Kegelschnitte durch dieselben zwei unendlich fernen Punkte, so ist dies die hinreichende Bedingung für diese Lagenbeziehung. Man kann zwei Ähnlichkeitspunkte auffinden.

Aufgaben über Kegelschnitte, durchgeführt mittels einer Zentralkollineation.

103. Soil ein Kegelschnitt aus bestimmten, gegebenen Elementen konstruiert werden oder wird verlangt, gewisse Konstruktionsaufgaben für ihn durchzuführen, wie z. B. das Aufsuchen der Schnittpunkte mit einer gegebenen Geraden oder der Tangenten von einem Punkte aus, so kann man in vielen Fällen folgenden Weg einschlagen: man zeichnet sich einen zweiten Kegelschnitt und zwar, der konstruktiven Bequemlichkeit wegen, stets einen Kreis, der perspektiv auf den gesuchten Kegel-

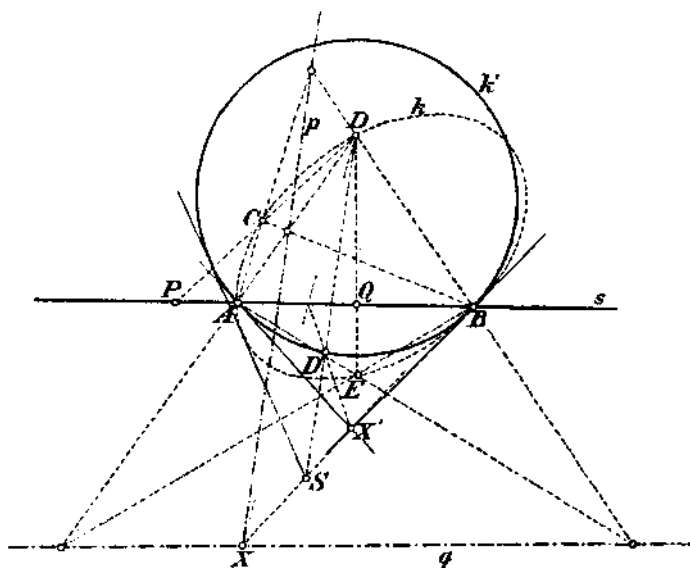


Fig. 58.

schnitt bezogen wird. Gelingt es, diese Zentralkollineation, also ihre Achse und ihr Zentrum, zu bestimmen, so kann nun die Aufgabe für den Kreis gelöst und die Lösung aus dem System des Kreises in das des Kegelschnittes übertragen werden (vgl. auch 88., 89.). Wir wollen dies an einigen Beispielen durchführen, indem wir zunächst behandeln:

Aufgabe 22: Fünf Punkte eines Kegelschnittes sind gegeben, man beziehe einen Kreis perspektiv auf ihn.

Sind A, B, C, D, E die gegebenen Punkte (Fig. 58), so wählen wir die Verbindungslinie AB als Kollineationsachse s und legen durch A und B irgend einen Kreis k' . Dann ist das Zentrum dieser perspektiven Beziehung aufzusuchen. Bringen wir die Verbindungslinie CD in P zum Schnitte mit s , so können wir die Polare p von P in bezug auf den gesuchten Kegelschnitt k zeichnen; in der gleichen Weise finden wir die

Polare q des Schnittpunktes Q von DE und s . Der Schnittpunkt X von p und q ist der Pol von s in bezug auf den Kegelschnitt k . Ihm muß entsprechen der Pol X' von s in bezug auf den Kreis k' den wir als Schnitt der beiden Tangenten an k' in A und B sofort erhalten. Die Verbindungsline XX' gibt einen Ort für das gesuchte Zentrum.

Verbinden wir aber weiter X mit Z), so muß durch den Schnittpunkt dieser Linie mit S auch XD' gehen. D' ist also einer der Schnittpunkte, welche diese letztgenannte Linie und k' liefert. DD' bestimmt endlich auf XX' das Zentrum S . Die perspektive Beziehung erlaubt dann in einfacher Weise die Konstruktion weiterer Elemente des Kegelschnittes k aus den entsprechenden Elementen des Kreises k' . In ähnlicher Weise

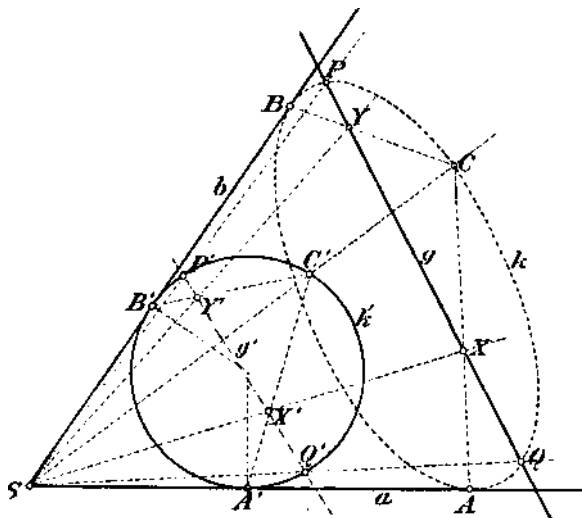


Fig. 59.

kann die duale Aufgabe erledigt werden, einen Kegelschnitt aus fünf Tangenten zu konstruieren.¹⁵⁾

Noch bequemer gestaltet sich die Durchführung für folgenden Fall:

Aufgabe 23: Von einem Kegelschnitt kennt man zwei Tangenten a und b und ihre Berührungspunkte A und B sowie einen weiteren Punkt C ; die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einer gegebenen Geraden zu zeichnen.

Wir werden (Fig. 59) den Kreis so annehmen, daß er die beiden Tangenten a und b in A' und B' berührt und in dem gleichen Winkelraum liegt wie der Kegelschnitt k . Der Schnittpunkt S von a und b wird das Zentrum der Kollineation; mit C verbunden, liefert er auf dem Kreise zwei Schnittpunkte. Ist C' einer derselben, so bestimmen die beiden perspektiven Dreiecke ABC und $A'B'C$ die Achse 8 . Für unseren Zweck ist dieselbe übrigens nicht nötig, da wir bloß die der gegebenen

Geraden g entsprechende Gerade g' zu zeichnen brauchen. Dies gelingt unter Benutzung der Schnittpunkte X, Y von g mit den Geraden AC und BC . Die Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte X', Y' ist g' und die Schnittpunkte P', Q' von g' mit dem Kreise geben, aus S auf g projiziert, die verlangten Schnittpunkte P, Q . Daran schließen wir endlich noch folgende

Aufgabe24: Von einer Hyperbel sind gegeben die beiden Asymptoten sowie ein Punkt. Man konstruiere die Schnittpunkte der Hyperbel mit einer gegebenen Geraden.

Jetzt sind (Fig. 60) A und B die unendlich fernen Punkte der Asymptoten a und b , im übrigen ändert sich nichts in der Durchführung der Konstruktion.

104. In den bisherigen Beispielen war der Kegelschnitt durch die gegebenen Elemente eindeutig bestimmt. Wir fügen noch zwei Bei-

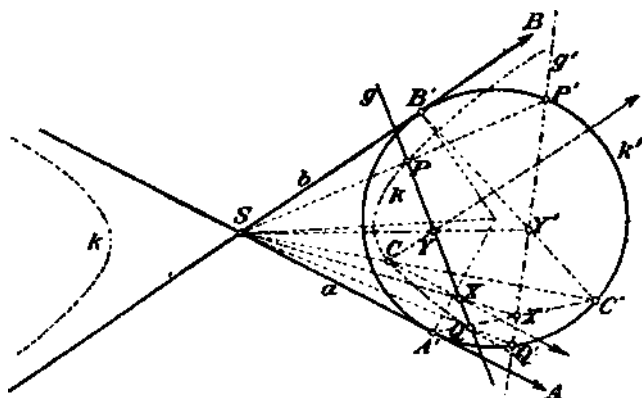


Fig. 60.

spiele bei, wo es mehrere Kegelschnitte gibt, welche die gegebenen Bestimmungsstücke enthalten. Dies wird sich bei unserer Methode in der Weise äußern, daß sich für die Bestimmung des Zentrums und der Achse der Zentralkollineation verschiedene Lösungen ergeben. Zunächst wenden wir uns zu der

Aufgabe25: Es ist ein Kegelschnitt zu konstruieren, von dem 3 Punkte A, B, C und zwei beliebige Tangenten a und b gegeben sind.

Wir wählen einen Kreis, der die Tangenten a und b berührt (Fig. 61), und den Schnittpunkt S derselben als Zentrum der Kollineation. Die Strahlen von S nach A, B, C schneiden den Kreis je in den Punkten $A', A'', B', B'', C', C''$. Ordnen wir den Punkten A, B, C die Punkte A', B', C' zu, so ist durch diese beiden perspektiven Dreiecke die Achse s der Kollineation bestimmt. Dann ist es leicht, von dem Kegelschnitt k weitere Elemente, z. B. die Bertirhungspunkte auf a und b , zu konstruieren.

In diesem Falle gibt es nun vier Kegelschnitte mit den gegebenen Elementen.

Zunächst können wir den Punkten A, B, C auf acht verschiedene Arten drei der Punkte $A', B', C', A'', B'', C''$ zuordnen, aber je zwei solche Zuordnungen führen zwar zu verschiedenen Achsen s , aber zu dem gleichen Kegelschnitt. Wenn wir z. B. in der Figur den Punkten A, B, C die Punkte A'', B'', C'' entsprechen lassen, so erhalten wir den nämlichen Kegelschnitt K , nur ist die zweite gemeinsame Sehne s_1 als Achse der Zentralkollineation zugrunde gelegt worden. Die dual entsprechende Aufgabe, einen Kegelschnitt aus drei Tangenten und zwei Punkten zu konstruieren, ist leicht durch die entsprechenden Betrachtungen zu erledigen. Dagegen soll noch folgender spezielle Fall der obigen Aufgabe behandelt werden:

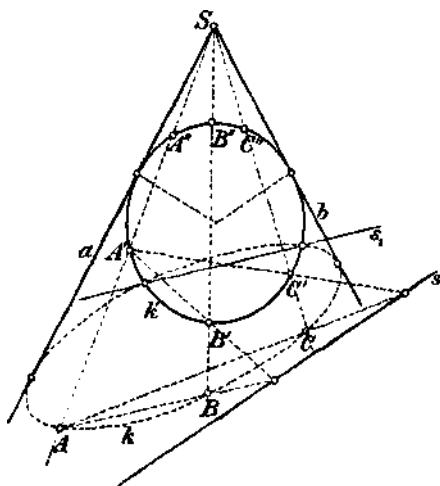


Fig. 61.

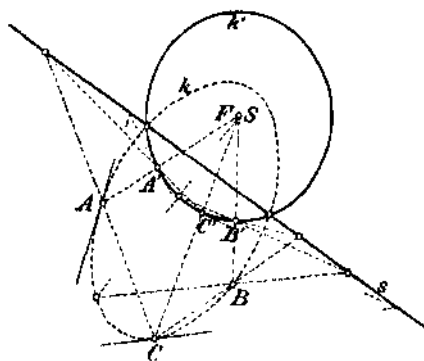


Fig. 62.

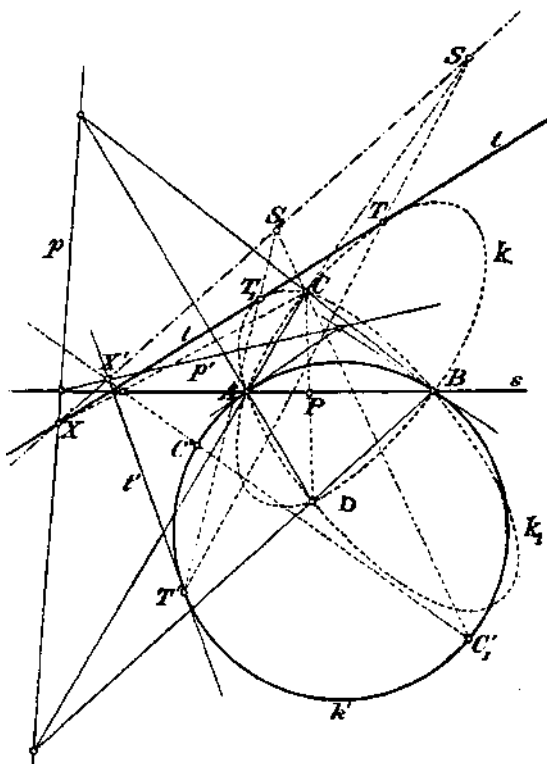
Aufgabe 26: Einen Kegelschnitt zu konstruieren aus drei Punkten und einem Brennpunkt.

Ist F der gegebene Brennpunkt (Fig. 62), so wird durch denselben auch die Rechtwinkelinvolution festgelegt, welche zu ihm in bezug auf den gesuchten Kegelschnitt gehört. Mithin sind auch die von F aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten, d. h. die imaginären Doppelstrahlen dieser Involution, d. s. die isotropen Geraden, als gegeben anzusehen. Konstruktiv verwenden wir dies in der Weise, daß wir das Zentrum S einer Kollineation nach F verlegen und nun nach Satz 49 in 100. irgend einen Kreis mit F als Mittelpunkt auf den gesuchten Kegelschnitt perspektiv beziehen. Es gibt wieder vier Kegelschnitte von der verlangten Eigenschaft.

Aufgabe 27: Einen Kegelschnitt zu konstruieren aus vier Punkten und einer Tangente.

Es seien A, B, C, D die gegebenen Punkte, t die gegebene Tangente (Fig. 63). Die Verbindungslinie AB werde als Achse s gewählt und irgend ein Kreis durch A und B gelegt. Trifft CD die Achse s in P , so liefert das vollständige Viereck $ABCD$ durch seine beiden übrigen Nebenecken (Diagonalepunkte) die Polare p von P in bezug auf den gesuchten Kegelschnitt k . Die Polare p' von P in bezug auf den Kreis k' können wir aber sofort zeichnen; p und p' müssen sich auf s begegnen. Der Tangente t ordnen wir eine der Tangenten zu, die vom Schnittpunkte von s und t aus an den Kreis k' gehen, also etwa die Tangente t' . Dann muß dem Schnittpunkt X von t und p der Schnittpunkt X' von t' und p' entsprechen, so daß die Verbindungslinie XX' das gesuchte Kollineationszentrum enthalten wird.

Um dasselbe zu konstruieren, verbinden wir X etwa mit C ; die entsprechende Linie geht durch X' und den entstehenden Schnittpunkt auf s und schneidet den Kreis in zwei Punkten C und C_1 . Jeden derselben können wir dem Punkte C zuordnen. Die Verbindungsstrahlen CC' und CC_1 geben dann in ihren Schnittpunkten mit XX'



zwei Fig. 63.

Kollineationszentren S und S_1 . Eine genauere Untersuchung zeigt, daß es nur zwei Lösungen gibt. Die Berührungspunkte T und T_1 dieser beiden Kegelschnitte sind in der Figur unter Benutzung des Berührungspunktes T' ermittelt.

Die duale Aufgabe, einen Kegelschnitt aus vier Tangenten und einem Punkte zu konstruieren, erledigt sich in ähnlicher Weise.

Kollineationszentrum auf dem Kegelschnitt.

105. Enthält in einer Zentralkollineation irgend eine Kurve das Zentrum S , so läuft die entsprechende Kurve ebenfalls durch S und beide Kurven besitzen überdies in S die gleiche Tangente, da ja alle

Strahlen des Büschels S sich selbst entsprechen. Kennen wir nun von einem Kegelschnitt eine Tangente und deren Berührungspunkt, so vereinfacht sich die Betrachtung noch etwas, wenn wir das Zentrum der zu benutzenden Kollineation in diesen Berührungspunkt verlegen. Als perspektives Bild des Kegelschnittes müssen wir dann einen Kreis wählen, der die gegebene Tangente in dem Berührungspunkt ebenfalls berührt. Die Achse der Kollineation ist in diesem Falle eindeutig bestimmt. Es

möge folgendes Beispiel durchgeführt werden, bei dem als zu bestimmender Kegelschnitt eine Parabel auftritt:

Aufgabe 28: Von einer Parabel kennt man die Scheiteltangente a , den Scheitel A und einen Punkt C ; man zeichne die Tangente, die parallel zu einer gegebenen Geraden g an die Parabel gelegt werden kann.

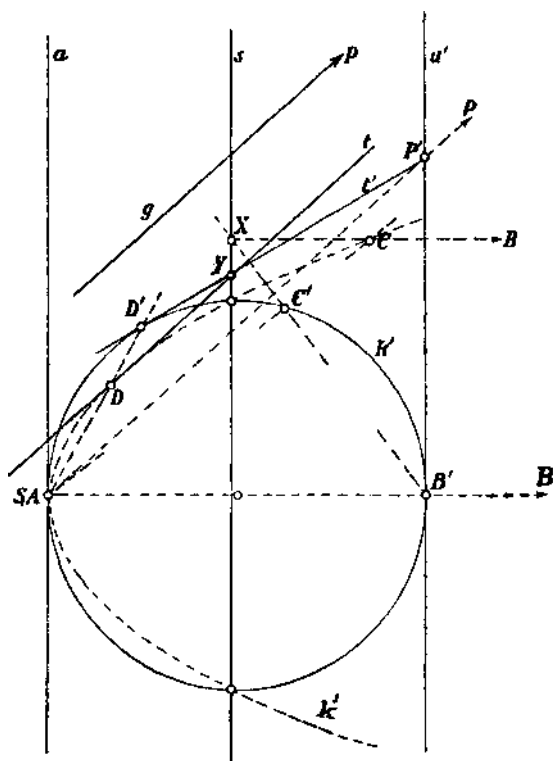


Fig. 64.

muß also die Fluchtlinie u' sein. Der gegebene Punkt C liefert, mit S verbunden, den Punkt C' auf dem Kreise. BC und $B'C'$ schneiden sich in einem Punkte X der Kollineationsachse a , durch den diese parallel zu u' gelegt werden kann. Damit ist die Zentralkollineation bestimmt.

Eine Tangente der Parabel, die zu g parallel ist, geht durch den unendlich fernen Punkt P von g . Diesem entspricht der Punkt P' , der durch die Parallele zu g durch S auf u' ausgeschnitten wird. Von P' geht noch eine Tangente t' an den Kreis K' die ihn in D berührt.

Die Kreistangente t' schneidet S in einem Punkte Y , durch den dann die gesuchte Tangente t parallel zu g geht. D' liefert, mit S verbunden, auf t den Berührungspunkt D .

Konstruktion der Achsen eines Kegelschnittes.

106. Es gibt unendlich viele Kreise, welche einen festen Kegelschnitt k in einem gegebenen Punkte A berühren. Alle diese Kreise bilden ein Büschel. Besitzt der Kegelschnitt k einen Mittelpunkt, so können wir zu A die in bezug auf die Achsen symmetrisch gelegenen Punkte A_1 und A_2 (Fig. 65) aufsuchen. Die Kreise des Büschels, welche entweder durch A_1 oder A_2 gehen, müssen wegen der Symmetrie der Figur auch in diesen Punkten den Kegelschnitt berühren. Jeder dieser beiden Kreise berührt demnach den Kegelschnitt k doppelt; die Verbindungslinie A_1A_2 ist ein Durchmesser von k und es ist selbstverständlich, daß die Achsen des Kegelschnittes die Winkel der Tangenten a und a_1 in A und A_1 sowie a und a_2 in A und A_2 halbieren.

Verwenden wir zur Bestimmung des Kegelschnittes etwa den Punkt A und die Tangente a sowie die Punkte B, C, D und wählen irgend einen die Gerade a in A berührenden Kreis K' als perspektives Bild des gesuchten Kegelschnittes, so ist

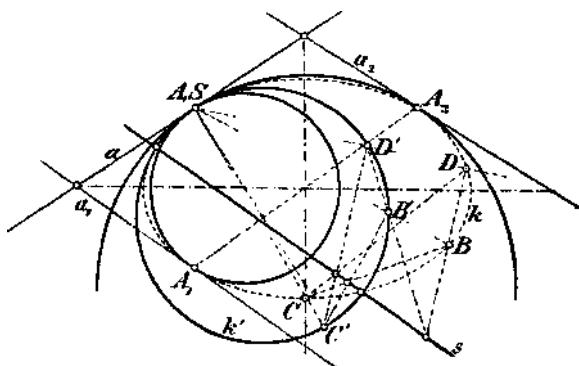


Fig. 65.

durch die perspektiven Dreiecke BCD und $B'C'D'$ die Achse der Zentralkollinoation festgelegt, während ihr Zentrum S mit A zusammenfällt. Diese Achse s geht durch die beiden weiteren Schnittpunkte von k' mit dem Kegelschnitt. Durchläuft der Kreis k' das genannte Kreibüschel, so kann man zeigen, daß die Punktpaare, die er auf dem Kegelschnitt k noch ausschneidet, eine Involution bilden. Zu jedem Kreise gehört ein solches Punktpaar und auch umgekehrt zu jedem Punktpaar ein Kreis. Die Verbindungslinien der Punkte eines Paares, oder anders ausgedrückt, alle Achsen s der ¹ Kollinoationen, laufen mithin nach Satz 20 in 44. durch einen Punkt. Daß dies ein unendlich ferner sein muß, ist folgenderweise einzusehen: Greift man statt k' einen andern Kreis k'' des Büschels heraus, auf dem die Punkte B'', C'', D'' durch die Kollinoationsstrahlen aus A ausgeschnitten werden — die dann mit B, C, D die neue Achse s' liefern —, so sind die Dreiecke $B'C'D'$ und $B''C''D''$ perspektiv ähnlich (75. b); ihre Perspektivitätsachse (Kollinoationsachse) ist daher die un-

endlichferne Gerade. Nun gilt der Satz, daß sich die Perspektivitätsachsen von drei in bezug auf dasselbe Zentrum (in diesem Falle A) perspektiv liegenden Dreiecken (die je zwei bestimmen) in einem Punkte schneiden. Die unendlich ferne Gerade und die Achse s treffen sich in einem unendlichfernen Punkte, durch den dann auch die Achse s' gehen muß, sie muß also parallel zu s sein. Parallel zur Richtung s gibt es aber zwei Tangenten an k und diese berühren eben in den Punkten A_1 und A_2 .

Die Richtungen der Aehsen des Kegelschnittes sind mithin auch zu erhalten als die Geraden, die die Winkel von s und a halbieren. Es ist also bewiesen

Satz 52. *Bezieht man einen Mittelpunktskegelschnitt derart perspektiv auf einen Kreis, daß das Zentrum der Kollineation auf dem Kegelschnitt liegt, so werden die Richtungen der Aehsen durch die Halbierungslinien des Winkels*

gegeben, den die Achse der Kollineation mit der gemeinsamen Tangente im Zentrum bildet.

Damit ist eine Konstruktion der Aehsen gegeben, die wir im folgenden Beispiel durchführen; vorher aber wollen wir aus den obigen Sätzen noch eine weitere Folgerung ziehen.

107. In dem Büschel von Parallelstrahlen, das die zu dem Kreisbüschel gehörigen Aehsen s bilden, ist auch ein Strahl enthalten, der durch A , d. h. durch das Zentrum S ,

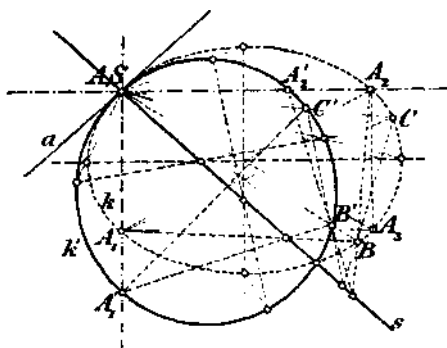


Fig. 66.

hindurchgeht. Der zu dieser Achse gehörige Kreis muß mit dem Kegelschnitt k drei Punkte in A gemeinsam haben, ist also der Krümmungskreis desselben. Wir gehen auf Konstruktionen desselben, die leicht abzuleiten wären, nicht weiter ein, sondern wollen dieses Resultat bloß noch verwenden in folgender

Aufgabe 29: Von einem Kegelschnitt sind gegeben ein Punkt A , seine Tangente a , der Krümmungskreis in A , sowie zwei weitere Punkte B und C . Man konstruiere die Aehsen des Kegelschnittes.

Die Zentralkollineation hat ihr Zentrum S im Punkte A ; SB und SC liefern auf dem Kreise die Punkte B' und C' (Fig. 66). Im Schnittpunkte der Linien BC und $B'C'$ erhalten wir einen Punkt der Achse S , die auch durch A gehen muß. Die Symmetralen der Winkel, die a und s bilden, geben die Richtungen der Aehsen. Auf dem Kreise bestimmen diese Linien die Punkte A'_1, A'_2 , deren entsprechende A_1 und A_2 mit A drei Ecken eines dem gesuchten Kegelschnitt eingeschriebenen Rechteckes geben. Der Schnittpunkt der Diagonalen dieses Rechteckes $AA_1A_2A_3$ ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes, die Längen der beiden Hauptachsen ergeben sich durch Aufsuchung der entsprechenden Sehnen im perspektiven Bilde.

Vierter Abschnitt.

Die projektiven Transformationen im Raume.

Achtes Kapitel.

Kollineare und reziproke räumliche Systeme in getrennter Lage.

§ 22. Die kollineare und reziproke Beziehung im Raume.

Kollineare und reziproke Systeme,
definiert durch die Zuordnung der Elemente mit den
gleichen projektiven Koordinaten.

108, Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung der Verwandtschaft räumlicher Systeme, so tritt zunächst der Unterschied zutage, daß solche Systeme, genau genommen, immer dem gleichen Träger angehören, sofern sie sich eben in dem einen uns zur Verfügung stehenden Raume befinden. Doch wollen wir uns einstweilen vorstellen, daß wir zwei sozusagen getrennte Gebiete unseres Raumes aufeinander beziehen. Später sollen sich daran die Überlegungen schließen, die damit zusammenhängen, daß diese Raumgebiete erweitert werden und sich sogar vollständig durchsetzen.

In jedem der beiden räumlichen Systeme oder „Räume“, die wir mit Σ und Σ' bezeichnen wollen, wählen wir je ein Fundamentalsystem A_1, A_2, A_3, A_4, E und $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, E'$. Die projektiven Koordinaten x_i eines Punktes P von Σ und die Koordinaten x'_i eines Punktes P' des Systems Σ' beziehen sich auf diese Fundamentaltetraeder. Die einfachste Möglichkeit, die Punkte der beiden Systeme einander zuzuordnen, besteht nun wieder darin, daß wir solche Punkte in Σ und Σ' einander entsprechen lassen, die in jedem der beiden Koordinatensysteme proportionale Koordinaten haben. Offenbar ist die Verwandtschaft der Punktsysteme dann eine eindeutige und sie wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$\varrho x'_1 = x_1, \quad \varrho x'_2 = x_2, \quad \varrho x'_3 = x_3, \quad \varrho x'_4 = x_4,$$

die wir in die eine zusammenfassen:

$$(i) \quad \varrho x'_i = x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Die Verschiedenheit der beiden räumlichen Systeme wird lediglich durch die Verschiedenheit der beiden Gruppen von Fundamentalpunkten bedingt.

109. Das eindeutige Entsprechen der Punkte genügt aber noch nicht zur vollst 2ndigen Charakterisierung einer solchen Verwandtschaft. Es findet vielmehr statt bei alien eineindeutigen Punkttransformationen. Wir gewinnen dagegen ein weiteres Unterscheidungsprinzip, wenn wir einen Punkt P des einen Systems eine Ebene beschreiben lassen. Dann wird bei einer allgemeinen Verwandtschaft der entsprechende Punkt P' eine Fläche von irgend welcher Ordnung durchlaufen. In unserm Falle ist diese Fläche aber wieder eine Ebene, wie sich aus den Gleichungen (1) durch Einsetzen in eine lineare Gleichung unmittelbar ergibt. Es entspricht mithin jeder Ebene wieder eine Ebene und folglich auch einer Geraden, dem Schnitt zweier Ebenen, wieder eine Gerade, der Schnitt der zwei entsprechenden Ebenen.

Vergleicht man die Ebenen, die durch die Substitution (1) einander zugewiesen werden, so leitet man zwischen den Koordinaten ξ_i und ξ'_i solcher entsprechenden Ebenen den Zusammenhang ab:

$$(2) \quad \rho \xi'_i = \xi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Demnach haben auch entsprechende Ebenen der beiden Systeme die Eigenschaft, daß ihre Koordinaten durch die gleichen Zahlenverhältnisse dargestellt werden. Ob wir also von den Punkten oder Ebenen ausgehen, wir gelangen zu der gleichen Verwandtschaft.

Liegt ein Punkt in einer Ebene, so enthält auch die entsprechende Ebene den entsprechenden Punkt. Gleichbezeichnete Punkte A_i und A'_i tragen kollineare Bündel, was daraus leicht gefolgert werden kann, daß beide Bündel sich nur durch die Vertauschung von x'_i mit x_i unterscheiden. In der gleichen Weise sind die Ebenenbüschel aus entsprechenden Kanten der beiden Fundamentaltetraeder projektiv.

Für irgend zwei Ebenen ε und ε' , die einander in Σ und Σ' entsprechen, folgt dann aber, daß sie kollinear aufeinander bezogen werden. Denn die kollinearen Bündel aus zwei Punkten A_i und A'_i schneiden aus ihnen entsprechende Elemente der Verwandtschaft aus.

Entsprechende Gerade der beiden Räume tragen projektive Punktreihen und projektive Ebenenbüschel.

Durch die Zuweisung von Elementen mit den gleichen projektiven Koordinaten werden also die beiden Systeme Σ und Σ' in folgender Weise aufeinander bezogen:

Satz 53. Jedem Punkte des einen Systems entspricht ein und nur ein Punkt im zweiten und umgekehrt. Beschreibt der Punkt eine Ebene oder Gerade, so gilt das gleiche von dem entsprechenden Punkte und die dadurch entstehenden Orundgebilde zweiter oder erster Stufe sind kollinear oder projektiv. Irgend vier Elemente eines Grundgebildes erster Stufe und die vier ihnen entsprechenden bilden also das gleiche Doppelverhältnis.

Die beiden Systeme nennt man „kollinear“ und die Beziehung selbst eine „Kollineation“.

110. Benutzen wir die gleichen Zahlenverhältnisse, um durch dieselben im System Σ einen Punkt x_i , im System Σ' aber eine Ebene ξ_i zu bestimmen, so erhalten wir, durch die Gleichungen:

$$(3) \quad \varrho \xi_i = x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

definiert, die zweite projektive Verwandtschaft räumlicher Systeme, die sogenannte „Korrelation“.

Legen wir durch den Punkt x_i irgend eine Ebene, deren Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \xi_i x_i = 0$$

sei, und wenden auf sie die Substitution (3) an, so werden die Punkte des Σ' -Raumes mit den Ebenen des Σ -Raumes durch die Formeln verknüpft:

$$(4) \quad \varrho \xi_i = x'_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Dem Ebenenbündel x_i entspricht das Punktfeld in der Ebene ξ_i usw.

Diese so aufeinander bezogenen „reziproken“ oder „korrelativen“ Systeme haben, abgesehen von dem Umstände, daß sich ungleichartige Elemente — Punkt und Ebene — entsprechen, genau die nämlichen Eigenschaften wie die kollinearen: entsprechende Grundgebilde zweiter oder erster Stufe sind reziprok oder projektiv. Durch die Möglichkeit, solche reziproke Systeme herzustellen, wird das Dualitätsgesetz in seiner Formulierung für den Raum bewiesen.

Die Bestimmung einer Kollineation oder Korrelation ist damit gleichzeitig erledigt. Denn da fünf Punkte oder fünf Ebenen in allgemeiner Lage stets als ein Koordinatensystem benutzt werden können, so folgt:

Satz 54. Eine Kollineation im Raume ist eindeutig bestimmt, wenn irgend fünf Punkten des einen Systems oder auch irgend fünf Ebenen desselben ebenso viele Punkte oder Ebenen des zweiten Systems zugeordnet werden, wobei sich diese Elemente in allgemeiner Lage befinden müssen.

Eine Korrelation wird bestimmt, wenn man zu irgend fünf Punkten des einen Systems fünf Ebenen des anderen Systems, je in allgemeiner Lage, als entsprechend annimmt.

Die allgemeine lineare Substitution.

111. Die Gleichungen (1) stellen nun wieder den speziellsten Fall folgender allgemeinen linearen Substitution vor:

$$\begin{aligned} \varrho x'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4, \\ \varrho x'_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4, \\ \varrho x'_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4, \\ \varrho x'_4 &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4. \end{aligned}$$

Diese ganze Gruppe von Gleichungen ersetzen wir durch die eine:

$$(5) \quad \varrho x'_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Wir können damit zu jedem Punkte P mit den Koordinaten x_i den entsprechenden P' mit den Koordinaten x'_i angeben; daß aber auch umgekehrt zu jedem Punkte P' ein Punkt P sich ergibt, wird klar, wenn wir die Gleichungen (5) nach den x_i auflösen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dies möglich sei, wird aber dadurch gegeben, daß die Determinante der Substitution:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sei, d. h. $\Delta \not\equiv 0$. Machen wir also die Voraussetzung, daß Δ nicht verschwindet, so liefert das Gleichungssystem (5), nach den x_i aufgelöst, bekanntlich:

$$(6) \quad \frac{\Delta}{\varrho} x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ki} x'_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Hierbei ist α_{ik} die dreireihige Unterdeterminante, die in Δ zu dem Element a_{ik} gehört. Demnach läßt sich auch umgekehrt zu jedem Punkte P' oder x'_i nur ein Punkt P oder x_i ermitteln. Beschreibt ferner P oder P' eine Ebene, so ist der entsprechende Punkt auf eine Ebene angewiesen und die Vergleichung der Koeffizienten führt zu den transponierten Substitutionen (vgl. 47.):

$$(7) \quad \varrho \xi_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ki} \xi'_k$$

$$(8) \quad \frac{\Delta}{\varrho} \xi'_i = \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ik} \xi_k \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (7) \\ (8) \end{matrix}} \right\} (i = 1, 2, 3, 4)$$

112. Aber auch die Gleichungen (5) bis (8) stellen keine allgemeinere Verwandtschaft dar wie die Gleichungen (1) und (2): vielmehr lassen sich zwei durch die Gleichungen (5) aufeinander bezogene Systeme bei passender Wahl der Koordinatentetraeder wieder in der Form (1) darstellen: man hat nämlich nur nötig, in entsprechende Punkte der beiden Systeme auch einander zugeordnete Fundamentalpunkte zu verlegen. So stellen z. B. die Gleichungen:

$$(9) \quad \varrho x'_i = a_{ii} x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

zwei kollineare Räume dar, bei denen zwar die vier Ecken der Fundamentaltetraeder, nicht aber die Einheitspunkte einander entsprechen. Sind auch

die Einheitspunkte einander zugewiesen, so erhält man eben die Form der Gleichungen (1). (Vgl. übrigens 61. und 48.).

Ganz ebenso liefern die Gleichungen [vgl. 51. (11) bis (14)]:

$$(10) \quad \varrho \xi_i = \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sowie die daraus abgeleiteten:

$$(11) \quad \frac{\Delta}{\varrho} x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ki} \xi_k \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$(12) \quad \varrho \xi_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ki} x'_k \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$(13) \quad \frac{\Delta}{\varrho} x'_i = \sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

die korrelative Beziehung, wie sie auch schon durch die Gleichungen (3) und (4) gegeben war, in allgemeinsten Darstellung.

Der unendlich fernen Ebene im einen oder anderen System ordnet eine Kollineation im allgemeinen je eine im Endlichen gelegene Ebene, die sog. „Fluchtebene“, zu, deren Gleichung aufzustellen keine Schwierigkeit bereitet (vgl. 45.).

Eine Korrelation läßt ebenso der unendlich fernen Ebene von Σ und Σ' je einen im Endlichen gelegenen Punkt (den „Mittelpunkt“) entsprechen. In betreff der Gebilde, die in kollinearen oder korrelativen Räumen einander entsprechen, kann auf das Frühere (52.) verwiesen werden.

Zusammenfassend bemerken wir:

Satz 55. Die allgemeine lineare homogene Substitution im quaternären Gebiet mit nicht verschwindender Determinante stellt je nach der Verknüpfung der Koordinaten eine räumliche Kollineation oder Korrelation, also eine projektive Transformation, dar.

Aufgabe 30: Gegeben sind im Raume zwei Gruppen von je 5 Punkten, $A_1, A_2, \dots, A_5$ und $A'_1, A'_2, \dots, A'_5$ je in allgemeiner Lage, die sich der Reihe nach entsprechen sollen; in der dadurch gegebenen Kollineation konstruiere man:

a) Zu irgend einem Punkte, einer Ebene oder einer Geraden des einen Systems das entsprechende Element des andern Systems.

b) Die beiden Fluchtebenen.

c) Unendlich ferne Punkte des einen Systems, denen wieder unendlich ferne Punkte im andern System entsprechen.

Darstellung in nicht-homogenen Koordinaten.

113. Beabsichtigen wir, eine projektive Transformation in nicht-homogenen, schiefwinkligen Koordinaten darzustellen, so können wir die zugrunde gelegten Fundamentaltetraeder zum Unendlich-Fernen in eine besondere Lage bringen, indem wir etwa die Koordinatenebenen $\alpha_4 (x_4 = 0)$ und $\alpha'_4 (x'_4 = 0)$ mit der unendlich fernen Ebene in jedem der beiden Systeme zusammenfallen lassen. Die übrigen drei Koordinatenebenen liefern dann je ein gewöhnliches, schiefwinkliges Koordinatensystem und die in 112. aufgestellten Formeln gehen (vgl. 27. und 53.) vermittlems der Umformungen:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

über in die folgenden:

$$(14) \quad \begin{cases} x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \\ y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}, \\ z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}. \end{cases}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach x, y, z läßt sich leicht bewerkstelligen und ebenso die Auflösung der Beziehungen zwischen den Linienkoordinaten (53.). Es mag bemerkt werden, daß der unendlich fernen Ebene verschiedene Ebenen entsprechen, je nachdem man sie als zum einen oder anderen System gehörig betrachtet. Die „Fluchtebenen“ sind:

$$a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \quad \text{und} \quad \delta_1 x' + \delta_2 y' + \delta_3 z' + \delta_4 = 0.$$

Es zeigt sich also

Satz 56. *In nicht-homogenen (schiefwinkligen) Koordinaten werden die projektiven Raumtransformationen durch eine linear-gebrochene Substitution mit dem gleichen Nenner dargestellt.*

Daß die projektiven Transformationen, sowohl die in der Ebene als auch die räumlichen, eine Gruppe bilden, folgt in ähnlicher Weise wie früher. (Vgl. die Bemerkung von 37.)

Die Ausartungen der Kollineation und Korrelation.*)

114. Unerledigt blieb bisher noch der Fall, wo die Determinante Δ einer linearen Substitution den Wert 0 hatte, ohne daß die zugehörigen Unterdeterminanten sämtlich verschwinden. Das Verschwinden dieser

*) Diese kurz gehaltenen Ausführungen mögen vom Anfänger übergangen werden.

Größe hat zur Folge, daß zwischen den Gleichungen (5) eine lineare Abhängigkeit besteht. In der Tat können wir doch für ganz beliebige Werte der x_i folgende Umformung durchführen, indem man die erste Spalte in Δ durch die rechten Seiten von (5) ersetzt:

$$\begin{vmatrix} \varrho x'_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \varrho x'_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \varrho x'_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \varrho x'_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} x_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} x_1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} x_1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} x_1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = x_1 \Delta = 0$$

oder:

$$\alpha_{11} x'_1 + \alpha_{21} x'_2 + \alpha_{31} x'_3 + \alpha_{41} x'_4 = 0,$$

eine Beziehung, die in der Form geschrieben werden kann:

$$\sum_{k=1}^{k=4} \alpha_{ki} x'_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dadurch wird eine „singuläre“ Ebene δ' im System Σ' dargestellt und einem beliebigen Punkte x_i in Σ entspricht demnach ein Punkt in dieser Ebene. Betrachten wir andererseits die Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so sind dies vier Ebenen im System Σ und wegen $\Delta = 0$ gehen dieselben durch einen Punkt 0 . Seine Koordinaten X_i befriedigen diese vier Gleichungen und bei Benutzung dieser Werte erhalten wir folglich aus dem System der Gleichungen (5) für die x'_i die Zahlen 0, d. h. die x'_i werden unbestimmt. Der Punkt 0 ist ein singulärer Punkt des Systems Σ und ihm entsprechen alle Punkte des anderen Raumes Σ' . Ordnet man aber dem Koordinatenquadrupel $(0, 0, 0, 0)$ — wie dies meist geschieht — keinen Punkt zu, so können wir sagen, daß dem singulären Punkt G kein Punkt entspricht.

Verbinden wir ferner irgend einen Punkt von Σ mit den Koordinaten x_i mit G durch eine Gerade, so werden die Koordinaten eines Punktes dieser Verbindungslinie die Werte haben:

$$\lambda x_i + \mu X_i$$

Da die X_i die linken Seiten der Gleichungen (5) zu Null machen, so ist der entsprechende Punkt x'_i immer der gleiche, nämlich der Punkt in der Ebene δ' , der dem Punkte x_i zugewiesen ist. Man erkennt auf diesem Wege, daß das Strahlenbündel G auf das Punktfeld δ' kollinear bezogen ist, worin wir die charakteristische Eigenschaft dieser „ausgearteten“ Kollineation zu erblicken haben.

Wir haben vorausgesetzt, daß $\Delta = 0$ war, dagegen sollten die dreireihigen Unterdeterminanten α_{ik} nicht sämtlich verschwinden. Die dadurch entstehende Ausartung einer Kollineation ordnet demnach die räumlichen Systeme in folgender Weise einander zu:

In Σ existiert ein singulärer Punkt G , in Σ' eine singuläre Ebene δ' . Das Strahlenbündel O und das Punktfeld δ' sind kollinear aufeinander bezogen. Einem beliebigen Punkt P von Σ entspricht der Punkt in δ' , der dem Strahle PG zugewiesen ist; dem Punkte O entsprechen alle Punkte von Σ' .

115. Sind außer Δ auch alle dreireihigen Unterdeterminanten $= 0$, während die zweireihigen nicht alle verschwinden mögen, so bestehen zwischen den Gleichungen (5) zwei lineare Beziehungen, wie die folgende Umformung zeigt; es ist (vgl. die entsprechende Bemerkung in 114):

$$\begin{vmatrix} \varrho x'_1 & a_{13} & a_{14} \\ \varrho x'_3 & a_{33} & a_{34} \\ \varrho x'_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \alpha_{23} x_1 - \alpha_{21} x_2 = 0$$

oder:

$$A x'_1 + C x'_3 + D x'_4 = 0$$

In ähnlicher Weise würde man z. B. die Beziehung ableiten:

$$A' x'_1 + B' x'_2 + D' x'_4 = 0$$

Zwei der Gleichungen (5) sind eine Folge der zwei übrigen. In jedem der beiden Systeme gibt es eine singuläre Gerade, in Σ heiße sie g , in Σ' h' . Das Ebenenbüschel g ist projektiv auf die Punktreihe h' bezogen. Jedem Punkte von g entsprechen alle Punkte von Σ' , den sämtlichen Punkten einer Ebene durch g entspricht der zugeordnete Punkt auf h' usf.

Würden endlich auch alle zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden, so wäre von den vier Gleichungen (5) nur eine unabhängig, die drei anderen Gleichungen sind durch Multiplikation der einen Gleichung mit bestimmten Zahlen hervorgegangen.

Im Raume Σ haben wir eine singuläre Ebene δ , etwa:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = 0,$$

im System Σ' einen singulären Punkt H' , dessen Koordinaten durch die obigen Zahlen bestimmt sind. Jedem Punkte von Σ entspricht der Punkt H' , da in dem Verhältnis der x'_i bloß die konstanten Zahlen stehen bleiben. Jedem Punkte der Ebene δ entsprechen alle Punkte von Σ' .

Die Ausartungen der Korrelation lassen sich in ähnlicher Weise unmittelbar ableiten oder auch dadurch, daß man in den ausgearteten kollinearen Systemen das eine durch ein reziprokes ersetzt. Bei der einfachsten Ausartung der Korrelation z. B. erhält man in jedem Raume zwei singuläre Punkte und die Bündel in denselben sind reziprok aufeinander bezogen.¹⁶⁾

§ 23. Spezielle Fälle der kollinearen Beziehung.

Die Affinität im Raume.

116. Auf einen speziellen Fall der Kollineation werden wir geführt, wenn wir eine kollineare Beziehung zweier Systeme so bestimmen, daß wir das Unendliche auszeichnen, indem wir die unendlich fernen Ebenen der beiden Räume einander entsprechen lassen oder mit andern Worten eine Kollineation zu ermitteln suchen, welche die unendlich ferne Ebene des Raumes in sich überführt.

Wir werden uns dann noch in jedem der beiden Systeme z. B. vier Ebenen oder vier Punkte geben dürfen, können also etwa zwei Tetraeder einander beliebig zuordnen. Die dadurch festgelegte Kollineation nennt man „Affinität“, die Systeme „affin“.

Machen wir Gebrauch von dem Vorteil, den für diesen Fall die Einführung nicht-homogener Koordinaten bietet, so können wir uns zwei schiefwinkelige Achsensysteme im Raume festgelegt denken: wir ordnen die gleich bezeichneten Koordinatenebenen einander zu, außerdem die unendlich fernen Ebenen beider Systeme, womit vier Punkte, nämlich der Koordinatenanfang und die unendlich fernen Punkte der drei Achsen den entsprechenden im andern System zugewiesen sind. Dies gibt die Gleichungen (vgl. 55.):

$$(1) \quad x' = a x, \quad y' = b y, \quad z' = c z.$$

Die Konstanten a, b, c lassen sich noch so bestimmen, daß einem vorgegebenen Punkte des einen Systems ein gegebener Punkt im andern System entspricht. Ordnen wir z. B. die beiden Einheitspunkte einander zu, so werden diese Konstanten je der Einheit gleich und wir erhalten:

$$(2) \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Die beiden räumlichen Systeme wären identisch, wenn nicht die Koordinatenkreuze voneinander verschieden, etwa das eine rechtwinkelig, das andere schiefwinkelig, angenommen würden.

Als wichtigste Eigenschaft affiner Räume erkennt man dann, daß jedem unendlich fernen Punkte wieder ein unendlich ferner Punkt, jeder unendlich fernen Geraden wieder eine unendlich ferne Gerade entspricht oder auch: einem Parallelstrahlenbündel oder -büschel entspricht wieder ein solches Gebilde und ebenso einem Parallelebenenbüschel.

Irgend zwei ebene Systeme, die in den affinen Räumen einander entsprechen, sind folglich affin (vgl. 55.).

117. Entspricht der Geraden g die Gerade g' so werden die Punktreihen auf ihnen ähnlich sein. Entsprechende Strecken AB auf g und $A'B'$ auf g' stehen in einem Verhältnis K , das zunächst für die beiden Geraden g und g' den gleichen Wert beibehält, so daß also:

$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

Ist aber l irgend eine zu g parallele Gerade, so wird die entsprechende Gerade $l' \parallel g'$. Wählen wir zwei Punkte C und D so auf Z , daß $AC \parallel BD$, so müssen diesen Parallelen wieder Parallele entsprechen, d. h. es wird $A'C' \parallel B'D'$. Da ferner:

$$AB = CD$$

und:

$$A'B' = C'D',$$

so folgt:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = k.$$

Demnach bleibt für alle Parallelen zu g das Verhältnis entsprechender Strecken das nämliche, daher:

Satz 57. In affinen Bäumen entspricht jedem Bündel von Parallelstrahlen wieder ein solches Bündel und das Verhältnis k entsprechender Strecken ist unveränderlich für alle Geraden dieser Bündel. Es gehört zu jeder Richtung und zu der ihr entsprechenden ein solcher Wert der Konstanten k .

118. Noch einfacher gestaltet sich die Beziehung, die in affinen Systemen zwischen einander entsprechenden Raumteilen besteht. Sind nämlich P_1, P_2, P_3, P_4 vier Punkte mit den Koordinaten $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ usf., so wird das sechsfache Volumen des von ihnen gebildeten Tetraeders gegeben durch den Ausdruck:

$$6 \text{ Vol. } (P_1 P_2 P_3 P_4) = \sin(xyz) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dabei bedeutet $\sin(xyz)$ den durch v. Staudt eingeführten sog. „Sinus der Ecke^{*4*)}“ des Koordinatensystems und es ist:

$$\sin^2(xyz) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(xy) & \cos(xz) \\ \cos(xy) & 1 & \cos(yz) \\ \cos(xz) & \cos(yz) & 1 \end{vmatrix}.$$

Für das Volumen des entsprechenden Tetra. $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$, dessen Ecken durch die Koordinaten:

$$x'_1 = a x_1, \quad y'_1 = b y_1, \quad z'_1 = c z_1 \quad \text{usf.}$$

bestimmt sind, erhalten wir in gleicher Weise:

$$6 \text{ Vol. } (P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = a b c \sin(x' y' z') \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

*) Vgl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, II. Bd., 3. Aufl., Leipzig 1916, S. 366.

Daraus folgt:

$$\frac{\text{Vol. } (P_1 P_2 P_3 P_4)}{\text{Vol. } (P'_1 P'_2 P'_3 P'_4)} = \frac{\sin(x y z)}{a b c \sin(x' y' z')}.$$

Wird auf den drei Achsen des ersten Koordinatensystems vom Koordinatenanfang O aus je die Einheit aufgetragen, so bilden die Endpunkte $X_0 Y_0 Z_0$ mit O ein Tetraeder, dem im affinen System ein zweites $O' X'_0 Y'_0 Z'_0$ entspricht. Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt das Verhältnis der Volumina dieser beiden Tetraeder vor, und da das Verhältnis der beiden ursprünglichen Tetraeder nicht von der Wahl der Koordinatensysteme abhängen kann, so muß dieser Ausdruck eine Konstante sein, also:

$$\frac{\text{Vol. } (P_1 P_2 P_3 P_4)}{\text{Vol. } (P'_1 P'_2 P'_3 P'_4)} = k = \text{konst.}$$

Weil ferner eine Affinität unendlich ferne Elemente wieder in unendlich ferne überführt, so wird einer ganz im Endlichen gelegenen Fläche, die einen bestimmten Raumteil begrenzt, eine Fläche von derselben Eigenschaft entsprechen. Jedes Volumen läßt sich weiter in unendlich kleine Tetraeder zerlegen, für die der obige Satz Geltung hat. Unter Benutzung der bekannten Methoden der Infinitesimalrechnung folgt daraus dann der allgemeine

Satz 58. In affinen Räumen ist das Verhältnis entsprechender Volumina eine konstante, vom Ort unabhängige Zahl oder-, irgend zwei Volumina in einem System stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie die entsprechenden beiden Volumina im andern System.

119. Haben wir für die Gleichungen (1) das eine der beiden Koordinatensysteme als ein rechtwinkeliges gewählt, so wird das andere im allgemeinen ein schiefwinkeliges sein. Im übrigen sind die Strahlenbündel in den Zentren O und O' kollinear. Man kann zeigen, daß es in kollinearen Bündeln immer zwei einander entsprechende rechtwinkelige Dreikante gibt. Legen wir diese als Koordinatensysteme zugrunde, so können wir durch die Gleichungen (1) unter Benutzung zweier rechtwinkliger Achsenkreuze die allgemeine affine Beziehung zur Darstellung bringen.

Verzichten wir auf die einfachste Form der Darstellung, d. h. verlegen wir die Koordinatenanfänge und Achsen nicht in entsprechende Punkte und Gerade der affinen Räume, so stellt sich die Affinität ganz allgemein durch folgende Gleichungen dar (vgl. 55.):

$$(3) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3. \end{cases}$$

Es ist nicht schwer, dieselben durch entsprechende Wahl neuer Koordinatensysteme auf die Form (1) zurückzuführen sowie das ganze System der Formeln, die Auflösungen nach x, y, z und die Gleichungen in Linienkoordinaten abzuleiten (vgl. 55.). Es folgt dann

Satz 59. *In schiefwinkligen Punktkoordinaten wird die affine Beziehung räumlicher Systeme durch die lineare ganze Substitution vermittelt.*

Geometrische Gebilde, die durch affine Transformationen auseinander abgeleitet sind, werden zum Unendlichfernen die gleiche Beziehung zeigen. Es wird also in affinen Räumen einer Kugel ein Ellipsoid entsprechen, einem ein- oder zweischaligen Hyperboloid wieder ein solches, einem elliptischen oder hyperbolischen Paraboloid eine Fläche der gleichen Art usw.

Gleichheit, Ähnlichkeit, Kongruenz, Symmetrie.

120. Es steht uns frei, eine Affinität dadurch zu bestimmen, daß wir zwei volumengleiche Tetraeder einander zuordnen: dann ist das Verhältnis entsprechender Volumina immer der Einheit gleich, d.h.:

$$\frac{\sin(xyz)}{abc \sin(x'y'z')} = 1$$

Die beiden Systeme zeigen Gleichheit der Volumina in allen entsprechenden (auch unendlich kleinen) Raumteilen: sie heißen „affin-gleich“ (vgl. 57.).

Von den ebenen Systemen, die zwei in solchen gleichen Räumen einander zugeordnete Ebenen tragen, werden wir dagegen im allgemeinen nur behaupten können, daß sie affin sind und nur für besondere Annahmen werden sie affin-gleich sein.

Führen wir die Bedingung ein, daß in affinen Systemen das Verhältnis entsprechender Strecken nicht mehr von der Lage der sie tragenden Geraden abhängig, sondern überhaupt konstant sei, so muß jedem Dreieck ein ähnliches im andern System entsprechen, so daß entsprechende Gerade gleiche Winkel einschließen. Wir werden also zwei Koordinatensysteme wählen mit gleichen entsprechenden Winkeln, z. B. zwei rechtwinkelige. Die Gleichungen (1) gehen dann über in (vgl. 57.):

$$x' = ax, \quad y' = ay, \quad z' = az.$$

Die beiden Systeme sind nur dem Maßstabe nach verschieden und heißen „ähnlich“.

Einander zugeordnete Ebenen solcher ähnlichen Räume tragen wieder ähnliche ebene Systeme.

Wird endlich $a = 1$, so unterscheiden wir noch die Fälle, ob die beiden Koordinatensysteme durch Parallelverschiebung zur vollständigen Deckung oder bloß in symmetrische Lage gebracht werden können. Die räumlichen Systeme heißen im ersten Falle „kongruent“, im zweiten „symmetrisch“⁴⁴.

Anwendung in der Kristallographie und in der Theorie der optischen Instrumente.

121. Affine Systeme treten z. B. auf bei der Ausdehnung eines Kristalls durch die Wärme. Machen wir die durch die Beobachtung hinreichend

sichergestellten Voraussetzungen, daß Punkte eines Kristalls, die bei einer bestimmten Temperatur in einer Geraden liegen, auch bei jeder anderen Temperatur diese Eigenschaft bewahren, daß also Gerade (Kanten) des Kristalls bei der Erwärmung wieder in Gerade übergehen und daß ferner parallele Gerade des Kristalls für alle Temperaturen parallel bleiben, so erkennt man unmittelbar, daß die verschiedenen Formen, die ein Kristall bei Änderung seiner Temperatur annimmt, alle untereinander affin sind.¹⁷⁾

Eine weitere Anwendung findet die kollineare Beziehung in der geometrischen Optik und in der Theorie der optischen Instrumente. Denken wir uns eine beliebige Anzahl verschiedener Medien, die in irgend welchen Flächen aneinanderstoßen, so zeigt die Physik, daß ein Lichtstrahl, der an den verschiedenen Grenzflächen gebrochen wird, als geradliniger Lichtstrahl das letzte Medium verläßt. Von den Reflexionen an den Medien wird dabei abgesehen. Gehen ferner im ersten System — dem „Diagramm“ — von einem Punkte Strahlen aus, so werden diese nach der Brechung im letzten System — dem „Bildraum“ — im allgemeinen nicht mehr durch einen Punkt gehen. Wir wollen nun folgende rein mathematische Annahme machen:

a) Jedem Strahle im Diagramm soll ein Strahl im Bildraum entsprechen;

b) allen von einem Punkte im Diagramm ausgehenden Strahlen sollen im Bildraum Strahlen entsprechen, die wieder durch einen Punkt gehen.

Dann führen die von uns durchgeführten Entwicklungen mit Leichtigkeit zu dem Ergebnis, daß entsprechend dieser Eineindeutigkeit der Zuordnung der Strahlen und Punkte die Punktabbildung eine Kollineation ist. Dabei bleibt, wie Abbe zuerst ganz allgemein erkannt hat, noch ganz außer Betracht, in welcher Weise die bewußte Abbildung optisch hergestellt wird. In den Fluchtebenen dieser Kollineation, die „Brennebenen“ genannt werden, und nur in diesen zeigt die Abbildung eine Unstetigkeit. Diese Kollineation kann aber (z. B. beim Fernrohr) auch in eine Affinität übergehen. Dann liegen die Brennebenen im Unendlichen und die Abbildung heißt „brennpunktlos“ (auch afokal oder teleskopisch).¹⁸⁾

Neuntes Kapitel.

Kollineare und reziproke räumliche Systeme in vereinigter Lage.

§ 24. Ausgezeichnete Elemente einer Kollineation.

Die Doppelemente. Vorläufige Übersicht.

122. Erinnern wir uns jetzt, daß kollineare räumliche Systeme in getrennter Lage überhaupt nicht bestehen, daß wir uns vielmehr richtiger so ausdrücken müssen: durch eine lineare Transformation werde der Raum kollinear auf sich selbst bezogen. Bei dieser Auffassung liegt dann am nächsten die Frage nach allenfalls vorhandenen „Doppelementen“⁴⁴, m. a. W. nach Elementen, die sich mit ihren entsprechenden decken. In einem „Doppelpunkt“ z. B. liegen demnach entsprechende Punkte der beiden Systeme vereinigt. Derselbe trägt kollineare Bündel entsprechender Strahlen und im allgemeinen drei „Doppelstrahlen“ und drei „Doppelebenen“. In gleicher Weise wird eine „Doppelebene“⁴⁴ der Systeme durch die Kollineation in sich transformiert, so daß nur drei „Doppelpunkte“ und drei „Doppelstrahlen“⁴⁴ in ihr fest bleiben. Würde noch ein vierter Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfallen, so bliebe jeder Punkt der Ebene bei der Transformation unverändert: alle Punkte des Punktfeldes wären Doppelpunkte.

Eine obere Grenze für die Anzahl der isolierten Doppelpunkte einer Kollineation gewinnen wir sofort aus dem Satze, daß diese Beziehung durch fünf Paare entsprechender Punkte bestimmt war. Wählen wir mithin fünf Punkte als Doppelpunkte beliebig und legen in sie das Fundamentaltetraeder und den Einheitspunkt, indem wir die x_i und x'_i auf das gleiche Koordinatensystem beziehen, so stellen die Gleichungen (1) von **108.** jetzt eine Identität dar, weil jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfällt. Folglich können höchstens vier getrennte Doppelpunkte vorhanden sein. Die Gleichungen (9) von **112.** jedoch geben unter der gleichen Voraussetzung unmittelbar eine Kollineation mit vier Doppelpunkten und ebensoviel Doppelebenen, die in die Ecken und Flächen des gemeinschaftlichen Fundamentaltetraeders fallen. Dem Einheitspunkte entsprechen verschiedene Punkte, je nachdem man ihn als zum einen oder anderen Systeme gehörig betrachtet. Die Doppelemente **bilden das** sogenannte „Haupttetraeder“. Nehmen wir dasselbe als

gegeben an, so dürfen wir außerdem noch zwei Punkte P und P' beliebig einander zuordnen. Es werden dann folgende Fälle zu unterscheiden sein:

a) Die Verbindungslinie PP' trifft keine der Kanten des Haupttetraeders;

b) sie trifft eine Kante;

c) sie trifft zwei Kanten;

d) sie trifft drei Kanten desselben.

Die erste Annahme gibt die allgemeinste Kollineation.

Jede der sechs Kanten des Haupttetraeders $ABCD$ (oder $A_1A_2A_3A_4$) entspricht sich selbst und trägt projektive Ebenenbüschel. Es möge die zur Kante CD (oder A_3A_4) gehörige projektive Beziehung der Ebenen durch die Invariante j_{12} (37.) gekennzeichnet werden. Sind weiter P, P' irgend zwei entsprechende Punkte der Kollineation und schneidet die Verbindungslinie PP' die Flächen BCD, ACD, ABD, ABC in den Punkten A, B, C, D , so erhält man [vgl. 61. für das Hauptdreieck 22. und (9) in 112.]:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{12} = \overline{A_3A_4} (A_1A_2PP') = (BAPP') = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}}, \\ j_{13} = \overline{A_2A_4} (A_1A_3PP') = (CAPP') = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{23}}, \\ j_{14} = \overline{A_2A_3} (A_1A_4PP') = (DAPP') = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}}, \\ j_{23} = \overline{A_1A_4} (A_2A_3PP') = (CBPP') = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}}, \\ j_{24} = \overline{A_1A_3} (A_2A_4PP') = (DBPP') = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}}, \\ j_{34} = \overline{A_1A_2} (A_3A_4PP') = (DCPP') = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{44}}. \end{array} \right.$$

Diese sechs Größen heißen die Invarianten der Kollineation. Man findet sofort die Beziehung:

$$j_{12}j_{23} = j_{13} \quad \text{usf.}$$

Mithin sind nur drei dieser Größen, z. B.:

$$j_{12}, \quad j_{23}, \quad j_{34},$$

vollständig unabhängig und diese drei bestimmen in Verbindung mit dem Haupttetraeder die Verwandtschaft.

Zusatz. Fügen wir zu den Gleichungen f j_{12}, j_{13}, j_{14} c h die selbstverständliche hinzu:

$$(AAP') = (PP'AA) = 1$$

so ergibt sich nach Formel (9) in 5.:

$$(ABCD) = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{22} - a_{33}} : \frac{a_{11} - a_{44}}{a_{22} - a_{44}}, \quad \text{d. h.}$$

Satz 60. *Die Verbindungslinien entsprechender Punkte kollinearer Räume treffen das Haupttetraeder in vier Punkten von konstantem Doppelverhältnis.*

123. Im Gegensatz zu dieser allgemeinen Kollineation führt die Annahme b) zu einer speziellen kollinearen Beziehung. Begegnet nämlich PP' der Kante CD des Haupttetraeders, so fällt die Ebene CDP mit der ihr entsprechenden Ebene CDP' zusammen, und da außerdem die Ebenen CDA und CDB die Doppelebenen der projektiven Ebenenbüschel sind, die die Kante CD trägt, so müssen (36.) entsprechende Ebenen dieser Büschel zusammenfallen. Man erhält mithin ein ganzes Büschel von Doppelebenen. Für die gegenüberliegende Kante AB , die durch die Kollineation jedenfalls in sich transformiert wird, hat dies zur Folge, daß offenbar jeder Punkt derselben ein Doppelpunkt wird. Wir haben also zwei Achsen mit je ¹ Doppelementen: die eine (AB) trägt bloß Doppelpunkte, die andere (CD) bloß Doppelebenen. Jede Gerade, die irgend zwei entsprechende Punkte verbindet, muß CD schneiden; jede Schnittpunktlinie zweier entsprechender Ebenen hat mit AB einen Punkt gemein. Diese Verwandtschaft wird als „axiale“⁴⁴ Kollineation bezeichnet. Wir erhalten den analytischen Ausdruck für dieselbe, wenn wir in den Gleichungen (9) von 112.:

$$a_{11} = a_{22}$$

setzen, wodurch $j_{13} = j_{23}$, $j_{14} = j_{24}$ und $j_{12} = 1$ wird.

124. Im Falle c) soll die Linie PP' zwei Kanten des Haupttetraeders schneiden. Liegen diese in einer Tetraederfläche, z. B. in ABC , so wird durch P und P' bloß die ebene Kollineation in dieser Doppelebene festgelegt. Um die räumliche Kollineation zu bestimmen, können wir noch irgend zwei Punkte einander zuordnen, sofern sie nur aus der dieser Tetraederfläche gegenüberliegenden Ecke (D) auf dieselbe (ABC) projiziert entsprechende Punkte der genannten ebenen Kollineation liefern. Wir erhalten mithin keinen neuen Fall. Dagegen führt die andere Annahme, daß PP' zwei Gegenkanten, etwa AB und CD , des Haupttetraeders schneidet, zu einem dritten, wesentlich verschiedenen Typus der Kollineation. Die eben angewandte Schlußweise läßt wieder erkennen, daß unter dieser Voraussetzung jede der zwei Gegenkanten sowohl unendlich viele Doppelpunkte als auch unendlich viele Doppelebenen trägt. Jede Verbindungslinie entsprechender Punkte und jede Schnittpunktlinie entsprechender Ebenen begegnet den beiden Achsen AB und CD und entspricht sich selbst. Diese Verbindungslinien bilden eine „lineare Kongruenz“⁴⁴ (nach Plücker). Die Transformation wird als „gescharte“⁴⁴ Kollineation (auch als „windschiefe Perspektive“⁴⁴) bezeichnet.

Um diese kollineare Beziehung analytisch darzustellen, haben wir in den obigen Gleichungen:

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{und} \quad a_{33} = a_{44}$$

zu setzen, wodurch $j_{13} = j_{23} = j_{14} = j_{24}$ und $j_{12} = j_{34} = 1$ wird. Wir können nun auch schreiben:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : j x_3 : j x_4,$$

wobei die Konstante $j = \frac{a_{33}}{a_{11}}$ die einzige absolute Invariante der Transformation ist, die eine sehr anschauliche und einfache geometrische Deutung zuläßt. Trifft nämlich die Verbindungslinie irgend zweier entsprechender Punkte P, P' die Kanten AB und CD des Haupttetraeders (das als Fundamentaltetraeder gleichzeitig mit $A_1 A_2 A_3 A_4$ bezeichnet ist) in M und N , so geht die dritte der Gleichungen (1) in 122. über in:

$$j = j_{41} = \overline{A_2 A_3} (A_4 A_1 P P') = (N M P P') = \frac{a_{44}}{a_{11}}$$

oder:

$$j = (N M P P') = \text{konst.},$$

d.h.

Satz 61. *Irgend zwei entsprechende Punkte oder auch irgend zwei entsprechende Ebenen der gescharten Kollineation bilden mit den beiden Achsen ein konstantes Doppelverhältnis.*

125. Soll endlich im Falle d) die Verbindungslinie PP' drei Kanten des Haupttetraeders schneiden, so können wir nach dem Obigen annehmen, daß sie durch eine Ecke desselben, etwa D , geht. Der Strahl DP fällt mit dem ihm entsprechenden DP' zusammen und da DA, DB, DC ebenfalls Doppelstrahlen sind, so muß das Bündel D überhaupt aus Doppelstrahlen bestehen. Die Folge davon ist, daß jeder Punkt der Ebene ABC ein Doppelpunkt wird. Irgend zwei entsprechende Punkte liegen auf einem Strahle durch D und irgend zwei entsprechende Ebenen begegnen sich in einer Geraden der Ebene ABC . Man hat an Doppelementen: ein ebenes System mit Doppelpunkten und Doppelgeraden und ein Bündel mit Doppelsebenen und Doppelgeraden. Wir nennen diese Systeme „perspektiv kollinear“ oder kurz „perspektiv“ und sprechen von einer „Zentral-kollineation“, von „zentrischer Kollineation“ oder auch von einer „Relief Perspektive“.

Die Gleichungen dieser Perspektiven Verwandtschaft ergeben sich, wenn wir setzen:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}$$

und sie können für $j = \frac{a_{44}}{a_{11}}$ auch geschrieben werden:

$$(2) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : x_3 : j x_4.$$

Dabei ist $x_4 = 0$ oder ABC die Ebene der Doppelpunkte oder die sogenannte „Kollineationsebene“, während der Mittelpunkt D des Bündels

der Doppelemente als „Zentrum“ der Kollineation bezeichnet wird. Aus dem Ausdrucke für $j_{41} = \overline{A_2 A_3} (A_4 A_1 P P') = (D M P P') = j = \text{konst.}$ beweist man ebenso wie oben

Satz 62. *Die Zentralkollineation besitzt eine absolute Invariante; je zwei entsprechende Elemente bilden mit dem Zentrum und mit der Ebene der Kollineation ein Doppelverhältnis, dessen Wert gleich dieser Invariante ist.*

Die involutorischen Kollineationen.

126. Ohne auf alle möglichen Fälle einzugehen, wollen wir hier gleich die Frage beantworten, welche dieser vier Fälle auch involutorisch werden können. Entspricht irgend einem Punkte, den wir als P und gleichzeitig als Q' bezeichnen, der gleiche Punkt als P' und Q , so geht die Verbindungslinie PQ über in $P'Q'$, entspricht sich also selbst und zwar (nach 40., vgl. auch Aufgabe 9 in 74.) involutorisch. Solcher sich selbst entsprechenden Geraden muß es also ³ geben. Das tritt aber nur im Falle c) und d) ein und in der Tat nehmen diese Abbildungen involutorischen Charakter an, sobald man der Invariante j den Wert -1 gibt. Im Falle c) nennt man die Systeme dann „geschart involutorisch“ oder man spricht auch von einer „windschiefen Involution“.

Im Falle d) trennen für $j = -1$ je zwei entsprechende Punkte oder Ebenen das Zentrum S und die Ebene σ der Kollineation harmonisch. Der unendlich fernen Ebene entspricht die Ebene, die in der Mitte zwischen S und σ parallel zu σ verläuft. Man bezeichnet diese Beziehung auch als „harmonische Zentral-Kollineation“, „zentrische Involution“ oder „harmonische Homologie“. Diese beiden Fälle stellen die einzigen Möglichkeiten vor, den Raum kollinear und gleichzeitig involutorisch auf sich selbst zu beziehen.

Analytische Darstellung.*)

127. Dieser geometrischen Ableitung der verschiedenen Fälle der Kollineation fehlt deswegen die wünschenswerte Allgemeinheit, weil sie die Realität der Ecken und Flächen des Haupttetraeders zur Voraussetzung hat. Wir befreien uns von dieser Beschränkung, indem wir die Aufgabe rein algebraisch behandeln.

Aus den allgemeinen Gleichungen (5) der linearen Substitution von 111. erhalten wir die Doppelpunkte, wenn wir $x'_i = x_i$ setzen, so daß sich das folgende System von Gleichungen ergibt:

$$(3) \quad \begin{cases} (a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = 0, \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \varrho) x_3 + a_{34} x_4 = 0, \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + (a_{44} - \varrho) x_4 = 0. \end{cases}$$

*) Kann vom Anfänger übergangen werden.

Sollen dieselben eine Lösung zulassen, so muß die Bedingung erfüllt sein:

$$f(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Diese „charakteristische Gleichung“ läßt sich durch Entwicklung der Determinante auch wie folgt schreiben:

$$(4) \quad f(\varrho) = \varrho^4 - A_1 \varrho^3 + A_2 \varrho^2 - A_3 \varrho + A_4 = 0,$$

wobei (vgl. 111.):

$$A_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$

$$A_4 = A.$$

Jeder Wurzel der Gleichung (4) entspricht ein System (3) von Gleichungen, das sich auflösen läßt und einen Doppelpunkt liefert. Benutzt man ferner zur Ermittlung der Doppelebenen die Gleichungen (7) der transponierten Substitution von 111., so erhält man ein transponiertes System von Gleichungen, aber die gleiche Determinante. Jede Wurzel von $f(\varrho) = 0$ liefert also auch eine Doppelebene. Ohne alle Einzelheiten zu besprechen, wollen wir bloß die geometrisch interessanten Fälle erwähnen.

Die Gleichung $f(\varrho) = 0$ hat vier reelle Wurzeln: dann erhalten wir ein ganz reelles Haupttetraeder (Fall a in 122.).

Alle Wurzeln von $f(\varrho) = 0$ sind komplex, d. h. es treten zwei Paare konjugiert imaginärer Wurzeln auf. Unter dieser Voraussetzung werden die Doppelpunkte und Doppelebenen zwar alle imaginär, aber die Verbindungslinie von zwei konjugiert imaginären Doppelpunkten und ebenso die Schnittlinie konjugiert imaginärer Doppelebenen fällt reell aus. Das Haupttetraeder besitzt im Reellen bloß zwei Gegenkanten.

Endlich können noch zwei Wurzeln reell und zwei konjugiert imaginär sein; in diesem Falle werden zwei Doppelpunkte reell und zwei konjugiert imaginär und ebenso verhalten sich die Doppelebenen. Das Haupttetraeder besteht aus zwei Gegenkanten und aus den beiden auf der einen derselben liegenden reellen Ecken.

Die Anzahl der reellen Doppelpunkte oder Doppelebenen beträgt folglich 0 oder 2 oder 4.

Hätte die Gleichung $f(\varrho) = 0$ eine Doppelwurzel, so würden zwei Doppelpunkte zusammenrücken usw.

128. Dagegen ist die Erfüllung weiterer Bedingungen nötig, wenn wir zu Kollineationen mit unendlich vielen Doppelementen gelangen wollen.

Es müssen nämlich dann für eine Wurzel ϱ von den Gleichungen (3) zwei oder drei überflüssig werden.

Soll sich das System der Gleichungen (3) für einen Wurzelwert ϱ auf zwei unabhängige reduzieren, so müssen alle dreireihigen Unterdeterminanten desselben verschwinden, während die zweireihigen nicht alle Null sein sollen. Die Determinante $f(\varrho)$ verschwindet dann ganz von selbst. Ein solcher Wert ϱ entspricht aber mindestens einer Doppelwurzel von $f(\varrho) = 0$. Denn die Ableitung $\frac{df}{d\varrho}$ läßt sich ja unmittelbar als Summe solcher dreireihigen Unterdeterminanten darstellen. Machen wir also folgende zwei (voneinander unabhängige) Voraussetzungen:

1. $f(\varrho) = 0$ habe eine Doppelwurzel $\varrho_1 = \varrho_2$;
2. für diesen Wert ϱ_1 mögen in dem Gleichungssystem (3) alle dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden, während die zweireihigen nicht alle $= 0$ sein sollen.

Dann sind zwei der Gleichungen (3) eine Folge der übrigen, die Doppelpunkte, welche der Wurzel $\varrho_1 = \varrho_2$ entsprechen, haben zwei lineare Gleichungen zu erfüllen, sind also auf einer Geraden angeordnet. Der entsprechende Ansatz für die Doppelebenen führt zur Bestimmung einer Geraden, welche ¹ Doppelebenen trägt. Wir sind damit zu dem Fall b) in 122. gelangt.

Besitzt die Gleichung $f(\varrho) = 0$ zwei Doppelwurzeln $\varrho_1 = \varrho_2$ und $\varrho_3 = \varrho_4$ und ist für jede derselben die Voraussetzung 2 erfüllt, so erhalten wir natürlich die gescharte Kollineation. Doch können wir aus dieser allgemeineren Ableitung einen Fall erhalten, der uns bisher entgangen ist. Die beiden Doppelwurzeln können nämlich auch konjugiert imaginär sein. Dann werden die beiden Achsen, die sich als Träger der Doppelemente ergaben, zwei imaginäre Gerade zweiter Art, die weder einen reellen Punkt noch eine reelle Ebene tragen. Die Kollineation besteht trotzdem und auch das Strahlensystem aller Geraden, die den beiden Achsen begegnen, ist reell.

Endlich bleibt noch der Fall zu erwähnen, daß $f(\varrho) = 0$ eine dreifache Wurzel $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ besitzt und daß für diesen Wert in dem Gleichungssystem (3) alle zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden, während für die vierte Wurzel ϱ_4 nichts Besonderes eintreten soll. Nun ist für $\varrho = \varrho_1$ das System (3) durch eine einzige Gleichung zu ersetzen; wir erhalten eine Ebene, die mit Doppelpunkten erfüllt ist. Die vierte Wurzel ϱ_4 dagegen liefert einen isolierten Doppelpunkt, den Träger eines Bündels von Doppelebenen. Dies ist der Fall der Zentralkollineation.

Damit fanden die geometrisch interessanten Fälle der Kollineation ihre analytische Erledigung, eine erschöpfende Darstellung aller möglichen Fälle muß weitere Eigenschaften des Systems der Unterdeterminanten einer Determinante von der allgemeinen Form:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \varrho b_{11} & a_{12} + \varrho b_{12} & \dots & a_{1n} + \varrho b_{1n} \\ a_{21} + \varrho b_{21} & a_{22} + \varrho b_{22} & \dots & a_{2n} + \varrho b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + \varrho b_{n1} & a_{n2} + \varrho b_{n2} & \dots & a_{nn} + \varrho b_{nn} \end{vmatrix}$$

benutzen, wie dies die von Weierstraß begründete Theorie der „Elementarteiler“ lehrt.¹⁹⁾

Es sei erwähnt, daß man im ganzen vierzehn Typen der räumlichen Kollineation mit nicht verschwindender Determinante erhält. Singuläre Kollineationen, für welche die Determinante und die Unterdeterminanten verschwinden, lassen sich neunzehn aufzählen.

Für die Ebene liefert diese Betrachtung sechs gewöhnliche und sieben singuläre Kollineationen.

Affine, ähnliche, kongruente Systeme.

129. Wir betrachten noch die besonderen Fälle der Kollineation, die auch eine ausgezeichnete Lage der Doppelemente zeigen.

In affinen Räumen entspricht die unendlich ferne Ebene sich selbst, ist also eine Ebene des Haupttetraeders. Ihr wird ein im Endlichen gelegener Doppelpunkt O zugewiesen sein. Durch O gehen im allgemeinen drei Doppelgerade und drei Doppelebenen, von denen je eine stets reell sein muß.

Sind ähnliche Systeme gegeben und ist ε eine durch den Doppelpunkt O gehende Doppelebene, l eine ihn enthaltende Doppelgerade, so kann aus der Gleichheit der Winkel zwischen entsprechenden Gebilden gezeigt werden, daß l auf ε senkrecht stehen muß. Ferner ergibt eine leichte Überlegung, daß die kongruenten Ebenenbüschel, welche l trägt, in jedem Falle in der gleichen Richtung laufen, die Systeme mögen gleichsinnig oder ungleichsinnig sein, wobei die Bedeutung dieser Ausdrücke aus der in 23. gegebenen Definition des Vorzeichens eines Volumens ohne weiteres zu entnehmen ist. Demnach sind die durch l gehenden Doppelebenen sowie die durch O in ε laufenden Doppelgeraden stets imaginär.

Sind die Systeme kongruent und zunächst ungleichsinnig, so enthält die Doppelebene ε die Mitten aller Verbindungsstrecken AA' , BB' , ... (Fig. 67). Denn die von entsprechenden Punkten wie A, A' auf ε gefällten Lote AA_0 , $A'A'_0$ müssen gleich lang und entgegengesetzt gerichtet sein. Die in der Ebene ε liegenden kongruenten Systeme haben gleichen Sinn.

Gleichsinnig kongruente Systeme dagegen können keine im Endlichen gelegene Doppelebene besitzen. Denn die von entsprechenden Punkten A', A' auf eine solche Doppelebene ε gefällten Senkrechten AA_0 , $A'A'_0$ müßten in diesem Falle gleich und gleich gerichtet sein, so daß diese Doppelebene zu allen Verbindungsstrecken AA' , BB' , ... parallel

liefe. Dies ist — besondere Fälle ausgenommen — nur möglich, wenn ε ins Unendliche rückt. Als einziges im Endlichen gelegenes Doppелеlement bleibt mithin die Doppelgerade l übrig. Füllen wir (Fig. 68) von zwei entsprechenden Punkten A, A' die Senkrechten $AA', A'A'$ auf l , so müssen diese sich entsprechen, also gleich lang sein. Ferner bilden die Ebenen durch l und A (lA) und durch l und B (lB) den gleichen Winkel wie die Ebenen (lA') und (lB'). Es ist demnach auch der Winkel der Ebenen (lA) und (lA') ebenso groß wie der Winkel der Ebenen (lB), (lB'). Dreht man das eine System um l als Drehachse um diesen Winkel φ und verschiebt es sodann parallel der Geraden l um das Stück AA' , so decken sich, wie man leicht beweist, die beiden Systeme Punkt für Punkt. Man bezeichnet die gleichzeitige Ausführung der Drehung und der Parallelverschiebung in

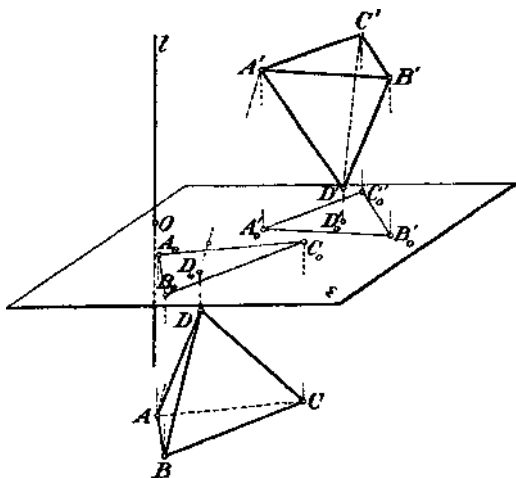


Fig.

67.

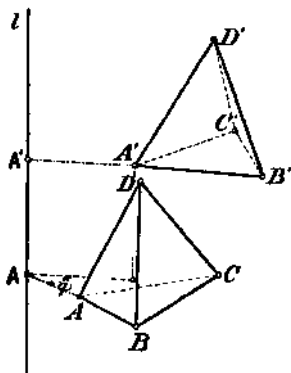


Fig.

68.

der Richtung der Drehachse als eine „Schraubenbewegung“¹⁾ oder „Schraubung“, die Gerade dann als „Schraubenachse“.

Irgend zwei Lagen eines starren Körpers bestimmen kongruente, gleichsinnige Systeme und wir folgern weiter aus dem Obigen, daß ein starrer Körper aus einer ersten Lage in eine zweite stets durch eine Schraubung um eine bestimmte Achse übergeführt werden kann.

Aufgabe 31: Eine affine Beziehung im Raume ist durch 4 Ebenen und ihre entsprechenden bestimmt. Man konstruiere den im Endlichen gelegenen Doppelpunkt. Betrachtet man ein Büschel paralleler Ebenen in dem einen Raum, so entspricht ihm ein zu ihm perspektives Büschel von Parallelebenen im andern Raum. Der Perspektive Schnitt beider Büschel besteht in einem Büschel von Parallelstrahlen. Wählt man 3 Paare solcher Parallelebenenbüschel, so liefern sie drei Perspektive Schnitte und der Schnittpunkt dieser drei Ebenen ist der gesuchte Doppelpunkt.

Die Zentralkollineation. Reliefperspektive.
Allgemeine Eigenschaften.

130. Wenden wir uns nun zur ausführlicheren Betrachtung der im Fall d) in 125. besprochenen Perspektivsysteme. Dieselben zeichneten sich aus durch das Auftreten einer Punkt für Punkt fest bleibenden Ebene, der „Kollineationsebene“ σ , und eines Bündels von Doppelsebenen, dessen Mittelpunkt S das „Kollinationszentrum“ heißt. Je zwei entsprechende Punkte A und A' liegen auf einem Strahle a durch S . Derselbe wird durch die Transformation in sich übergeführt. Die Doppelpunkte der auf a liegenden, projektiven Punktreihen sind θ und der Schnittpunkt A_0 von a mit σ .

Irgend eine Ebene a begegnet der ihr entsprechenden Ebene a' in einer Geraden g_a , die der Kollineationsebene σ angehört. Das Ebenenbündel g_a wird projektiv auf sich bezogen. Die Doppelsebenen werden gebildet von σ und von der Ebene α_0 , die g_a und S verbindet.

Die unendlich ferne Ebene kann als zum einen oder andern System gehörig betrachtet und dementsprechend mit w oder χ' bezeichnet werden. Es entsprechen ihr dann die beiden „Fluchtebenen“ ω' und χ (auch Gegenebenen genannt). Da sich aber $\omega(\chi')$ und $\omega'(\chi)$ in einer Geraden von σ schneiden müssen, so folgt daraus, daß die Fluchtebenen zur Kollineationsebene σ parallel laufen, also:

$$\omega' \parallel \chi \parallel \sigma$$

In jeder durch S hindurchgelegten Ebene liegt eine ebene Zentralkollineation, für die S das Zentrum ist, während die Schnittlinie mit σ die Achse dieser Kollineation sein wird. Füllen wir von θ aus eine Senkrechte auf σ , die σ in S_0 treffen und die Ebenen ω' und χ in U' und V durchsetzen möge, so wird auch für jede Ebene durch diese Senkrechte das eben Gesagte gelten. Die Figuren 27 und 28 können wir dann als „Schnitte“ einer räumlichen Zentralkollineation auffassen und zur Veranschaulichung der räumlichen Verwandtschaft benutzen. Sind B, B' zwei entsprechende Punkte auf einem Strahle b , dessen Spur in σ der Punkt B_0 sei, β, β' zwei entsprechende Ebenen, so ist wie früher (70.):

$$\begin{aligned} j &= (SA_0AA') = (SB_0BB') = (\alpha_0\sigma\alpha\alpha') = (\beta_0\sigma\beta\beta') = \\ &= (SS_0VV') = \frac{SV}{S_0V} = (SS_0UU') = \frac{S_0U'}{SU'}, \end{aligned}$$

ferner (69.):

$$SV = U'S_0 \quad \text{und} \quad SU' = VS_0.$$

Wir fassen das zusammen in

Satz 63. Die beiden Fluchtebenen einer Zentralkollineation sind parallel zur Kollineationsebene; die eine derselben steht ebensoweit vom Kollinationszentrum ab wie die andere von der Kollineationsebene. Die Zentralkollineation

besitzt eine charakteristische Invariante j ; je zwei entsprechende Punkte und je zwei entsprechende Ebenen bilden mit dem Zentrum und mit der Kollineationsebene ein Doppelverhältnis, dessen Wert gleich dieser Invariante ist.

131. Wiederum sind auch hier zwei verschiedene Fälle möglich, je nachdem j positiv oder negativ ist. Im ersten Falle liegen die beiden Fluchtebenen auf verschiedenen Seiten von σ (Fig. 27), im zweiten auf der gleichen Seite von σ (Fig. 28).

Wir können eine zentralkollineare Beziehung bestimmen durch die Angabe des Kollineationszentrums, der Kollineationsebene und eines Paares

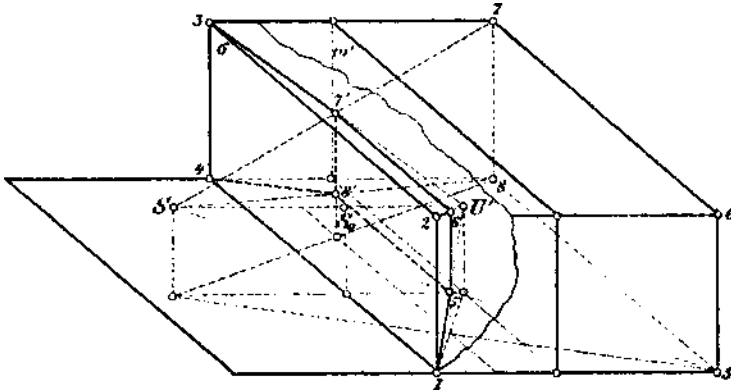


Fig. 09.

entsprechender Punkte oder Ebenen. Speziell dürfen wir z. B. eine der Fluchtebenen (parallel zur Kollineationsebene) annehmen.

Ist demnach in Fig. 69 σ die Kollineationsebene, ω' die eine Fluchtebene und S das Zentrum, so genügen diese Elemente zur Festlegung der Verwandtschaft.

Betrachten wir ein Bündel paralleler Geraden im Raume Σ . Dem gemeinsamen unendlich fernen Punkt derselben wird ein Punkt der Fluchtebene ω' entsprechen, den wir erhalten, wenn wir durch 8 eine Parallele zu der gegebenen Richtung ziehen und deren Schnittpunkt mit ω' aufsuchen. Durch diesen Fluchtpunkt gehen die sämtlichen entsprechenden Geraden im System Σ' hindurch.

Beispielsweise bilden sich in Fig. 69 alle Senkrechten zur Kollineationsebene, genommen im Raume Σ , in Gerade ab, die durch den Fluchtpunkt U' in ω' laufen. Nur parallele Gerade, die überdies zur Kollineationsebene parallel laufen, gehen bei dieser Transformation wieder in parallele Gerade über.

Die Reliefperspektive.

132. Liegen die zentralkollinearen Systeme so, daß sich die beiden Fluchtebenen auf verschiedenen Seiten der Kollineationsebene befinden,

in welchem Falle die projektiven Punktreihen auf den Strahlen des Bündels $\mathcal{B}$ im gleichen Sinne laufen und j positiv ist, so wird der ganze von σ bis ins Unendliche reichende Raum, der den Punkt S nicht enthält, abgebildet in den Raum zwischen σ und der Fluchtebene ω' . Irgend ein Körper, z. B. eine Kugel, die sich in dem ersten Raume, dem „Originalraum“ befindet, geht durch die Transformation über in einen andern Körper, im genannten Fall in ein Ellipsoid (vgl. Fig. 27), das ganz in dem zweiten Raum, dem „Bildraum“ liegt. Dieser zweite Körper wird, gemessen nach der Tiefenrichtung SS_0 , eine geringere Ausdehnung zeigen, flacher, platter sein. Die damit gegebene Methode, von einem Raumobjekt ein „Modell“ oder ein „Relief“ herzustellen, wird als „Reliefperspektive“ bezeichnet. $\mathcal{B}$ heißt das „Auge“, σ die „Bildebene“, der Abstand $S_0 U'$ der Bildebene von der Fluchtebene ω' die „Tiefe“ des Reliefs (Fig. 69). Die charakteristische Invariante j ist ein echter Bruch, für den man einen einfachen Wert wählen kann. In Fig. 69 findet man das Reliefbild 1 2 3 4 5' 6' 7' 8' des rechtwinkelig begrenzten Raumes 1 2 3 4 5 6 7 8 gezeichnet. Die Tiefenlinien 15', 26', 37' und 48' konvergieren nach U' .

Auch die bildende Kunst macht von dieser Modellierungsmethode Gebrauch. Sehen wir nämlich ab von den Wirkungen des Lichtes und der Farbe und beschränken uns auf die Linien des Raumobjektes, so wird auf ein in $\mathcal{B}$ befindliches Auge das nach dieser Kollinearverwandtschaft konstruierte Relief annähernd den gleichen Eindruck machen wie das Original. Es hat aber vor dem letzteren den Vorzug geringerer Tiefe. Es kann nun vorkommen, daß dem Künstler, der an irgend einem Objekt einen plastischen Schmuck anbringen will, die nötige Tiefe nicht zur Verfügung steht. Man denke etwa an plastische Darstellungen, die ein Portal, ein Bogenfeld, eine Altarwand schmücken sollen. Das flache Reliefbild läßt sich dagegen auch in einem solchen Falle noch anbringen.

Einen großen Nachteil solcher Reliefs dürfen wir nicht verschweigen. Sie werden durch das Tageslicht beleuchtet, während doch auch die einfallenden Lichtstrahlen kollinear zu transformieren wären. Infolgedessen bilden sich die Schatten in ganz unrichtiger Weise aus. Diesem Mißstand könnte man durch Anbringung einer künstlichen Lichtquelle einigermaßen abhelfen, immer aber bleibt der noch größere bestehen, daß die Beleuchtung, d. h. die Verteilung der Helligkeit, namentlich auf krummen Flächen, nicht der Natur entspricht, so daß das Auge nicht den Eindruck voll gewölbter Formen erhält.

Im übrigen wird ohnedies niemand verlangen, daß der Künstler sich strenge an eine mathematische Regel halte. Sie gibt ihm nur die allgemeinen Gesetze, den Verlauf der Linien im großen; im Interesse einer besseren Wirkung kann er auch von ihr abweichen. Denn seine Absicht besteht ja darin, beim Beschauer eine lebhaftere Vorstellung anzuregen, und es kann sein, daß er dieses Ziel durch bewußtes Abgehen von der Regel in höherem Maße erreicht. Namentlich menschliche Figuren ge-

statten eine freiere Behandlung, sie werden häufig im Vordergrund in voller Rundung dargestellt; geometrische und architektonische Formen müssen strenger dem mathematischen Gesetze entsprechend modelliert sein. Es ist auch gar nicht zu verwundern, daß der Künstler erst einen Ausgleich zwischen der Theorie und seinem Formengefühl finden muß. Gibt doch die Zentralprojektion nur die einfachste Abstraktion aus dem komplizierten Vorgange des Sehens.

Endlich ist noch zu erwähnen, daß die Reliefperspektive auch Anwendung findet in der Bühnentechnik (Theaterperspektive) und beim Panorama.

Der hier beschriebene Reliefstil wurde zuerst rein praktisch, aber bereits in hoher Vollendung von Lorenzo Ghiberti (1378—1455) zur Anwendung gebracht in seinen Reliefs an der östlichen Bronzetür des Baptisteriums in Florenz, die er in der Zeit von 1425—1452 anfertigte. Die ersten theoretischen Begründungen gaben Daniele Barbaro (etwa 1520—1570) (*La pratica della prospettiva*. Venetia 1569) und namentlich Guido Ubaldi (1545—1607) (*Perspectivae libri sex*, Pisauri 1600).

Sehr bekannt ist auch das „Teatro Olimpico“ von Andrea Palladio (1518—1580) in Vicenza, vollendet 1583 von Scamozzi, dessen Bühne eine solche Perspektive Architektur zeigt. Diesseits der Alpen sind als Beispiele für diese Technik anzuführen die Marmorreliefs an dem Grabdenkmale Maximilian I. in der Hofkirche in Innsbruck, die von dem niederländischen Bildhauer Alexander Colin (1526—1612) vom Jahre 1564 an ausgeführt wurden.

Einen ganz anderen Stil hat übrigens in neuerer Zeit B. Thorwaldsen (1770—1844) in seinen Reliefs zur Anwendung gebracht.²⁰⁾

Die Perspektive.

133. Lassen wir den Bildraum eines Reliefs immer mehr und mehr zusammenschrumpfen und nehmen schließlich die Tiefe $S_0 U' = 0$, so wird der ganze Raum Σ auf die Bildebene σ in der Weise abgebildet, daß man irgend einem Punkte P den Schnittpunkt P' von SP mit σ zuordnet. Es verschwindet dann die Determinante der linearen Substitution und es ist [vgl. die Gleichungen (2) von **125.** sowie **130.**]:

$$j = \Delta = 0.$$

Wir haben also den Fall der singulären Kollineation (114.), wobei das Bündel im einen Raum und das ihm kollineare Punktfeld des andern perspektiv liegen. Das ist die Perspektive, die der Maler anwendet. Schneidet man in ein Raumobjekt mit einer Reihe paralleler Ebenen ein und überträgt die einzelnen Schnittkurven in das Perspektive Bild, so kann man daraus das Bild des Objektes ermitteln.

Mechanisch leistet dies schon der 83. ff. beschriebene Rittersche Apparat, Man hat nur nötig, z. B. im Grundriß die horizontalen Linien

mit dem Fahrstift zu verfolgen. Die Verbindungslinien der einzelnen Schichten werden dann aus freier Hand eingetragen. Vgl. Abbildung 3 in 85.

Für die Kunst ist die Perspektive als die Lehre von der Darstellung räumlicher Objekte auf einer Ebene von ungleich größerer Bedeutung als die Reliefperspektive. Sie gibt dem Künstler eine erste Norm und eine allgemeine Orientierung und ihr großer erzieherischer Wert wird durch den Umstand nicht vermindert, daß Schönheits- und Kunstgefühl die strengen Gesetze dieser Disziplin in entsprechender Weise abändern.

Auch diese Linearperspektive ist eine Errungenschaft der Renaissance. Der Florentiner Baumeister Filippo Brunnelleschi (1377—1446) hat zuerst das Wesen der Perspektiven Abbildung erkannt und architektonische Veduten aus Florenz konstruiert, die der Beschauer vom richtigen Standpunkt aus wie in einem Diorama betrachtete, Masaccio, der erste Maler der Renaissance, scheint von ihm unterwiesen worden zu sein. Der erste Theoretiker der Perspektive, Leon Battista Alberti (1404—1472), widmete seinen Traktat „De pictura“ (1435) Brunnelleschi.

Besondere Fälle der Zentralkollineation.

134. Die metrischen Spezialisierungen der Perspektiven Systeme erhalten wir ganz in der gleichen Weise wie bei der ebenen Kollineation (vgl. 75.), nur haben wir anstelle der Kollineationsachse die Kollineationsebene treten zu lassen.

Liegt das Zentrum S im Unendlichen, so werden die Systeme perspektiv-affin. Die Richtung von δ heißt Affinitätsrichtung. Es wird jetzt:

$$j = (SA_0AA') = \frac{A_0A'}{A_0A} = \frac{B_0B'}{B_0B} = \text{konst.}$$

Der einfachste Fall ergibt sich, wenn die Affinitätsrichtung auf der Affinitätsebene senkrecht steht. Wählen wir ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, so daß die XF-Ebene in die Affinitätsebene fällt, die Z-Achse folglich auf ihr senkrecht steht, so werden die perspektiv-affinen Systeme dargestellt durch die Gleichungen:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = kz.$$

Ist $k < 1$, aber > 0 , so geht eine geschlossene Fläche des Raumes Σ über in eine ebenfalls geschlossene Fläche Σ' , die in der Richtung der Z-Achse zusammengedrückt ist. Eine Kugel z. B. wird in ein abgeplattetes Rotationsellipsoid transformiert. Wir erhalten wieder ein Relief eines Raumobjektes, der positive Bruch k gibt die Verkürzung an. Die Bildhauer benutzen diese Art der Umformung („Bildhauerperspektive“). Professor Paul Pfeifer hat einen Apparat konstruiert, der es ermöglicht, von einem vollplastischen Original in mechanischer Weise ein solches Relief herzustellen.

Dieser „Relief-Modellierapparat“, D. R. P. 92898, besteht (Abbildung 4) aus einem Holzgestell, das auf seiner unteren Platte den mittels eines Schraubenantriebs in wagrechten Schlittenführungen verschiebbaren Werk-tisch trägt. Dieser kann links in dem Hohlraum das abzubildende Original, rechts auf der Platte die Modelliermasse aufnehmen, aus welcher das Relief geschnitten werden soll. Der Fühlstift, welcher die vollrunde Form, z. B. einen Kopf, nachfährt, und das Messer, das das Relief schneidet, sind in Gleitstangen an einem aus gezogenen Metallrohren hergestellten Rahmen befestigt, an dem sich auch der Hebel befindet, womit die Größe der Verkürzung eingestellt werden kann. Man hat die Verkürzungen von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{8}$ zur Verfügung. Der ganze Rahmen ist durch eine sehr feine Rollenführung in wagrechter Richtung verschiebbar, dabei

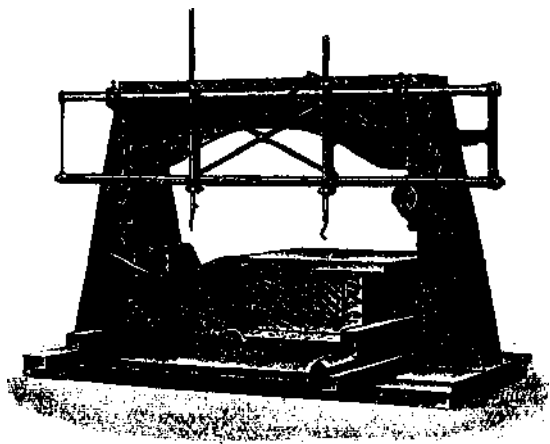


Abb. 4.

gleitet der Fühlstift über das Original hinweg und das Messer beschreibt die dazu affine Kurve. Nachdem der Stift über die Form hinweg geführt ist, wird der Werk-tisch ein wenig verstellt und nun abermals der Rahmen verschoben. So erhält man, Schicht für Schicht, das Relief. Auf diese Weise mechanisch hergestellte Reliefs zeigen ohne weitere Nacharbeit schon eine vorzügliche Flächenwirkung.

Liegt S im Endlichen, dagegen σ unendlich fern, so erhalten wir ähnliche und ähnlich gelegene Systeme; die Konstante:

$$j = \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'}$$

gibt die Veränderung (Verjüngung) an. Man vgl. Fig. 34 und 35. Der Wert $j = -1$ führt zu Systemen, die symmetrisch in bezug auf den Punkt S liegen.

Endlich kommen wir zu kongruenten Systemen (Fig. 36), wenn S und σ beide im Unendlichen sich befinden.

§ 25. Ausgezeichnete Elemente einer Korrelation.

Die inzidenten und involutorischen Elemente.

135. Wie bei einer Kollineation lediglich die Doppelemente eine gewisse Sonderstellung in der durchaus gleichartigen Beziehung einnehmen, so werden als die einzig ausgezeichneten Elemente einer Korrelation diejenigen zu bezeichnen sein, die die ihnen entsprechenden Elemente enthalten. Diese mögen als „inzidente“ Elemente bezeichnet werden. Die Untersuchung verläuft der für ebene Systeme durchgeführten (78.) analog, so daß wir uns darauf beschränken können, die Resultate aufzuzählen:

Satz 64. *Alle Punkte des einen oder anderen Systems, die in den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, erfüllen eine Fläche zweiter Ordnung F_p , und alle Ebenen, welche die ihnen entsprechenden Punkte tragen, umhüllen eine Fläche zweiter Klasse F_e .*

Diese beiden sogenannten „Kernflächen“ durchsetzen sich in den vier Seiten eines räumlichen Vierecks, des „Hauptvierseits“ der Korrelation, dessen Ecken ein Tetraeder bilden. Beide Flächen berühren in den Ecken die Tetraederflächen.

Die Ecken dieses Hauptvierseits sind gleichzeitig die einzigen Punkte, denen involutorisch die gleiche, überdies noch durch sie hindurchgehende, Ebene entspricht.

Die Gleichungen der Kernflächen werden:

$$\begin{aligned} (1) \quad F_p &\equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + \dots = 0, \\ (2) \quad F_e &\equiv \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{22} \xi_2^2 + \dots + (\alpha_{12} + \alpha_{21}) \xi_1 \xi_2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß das Hauptvierseit der reziproken Beziehung vollständig reell ist, so können wir dasselbe als Koordinatentetraeder benutzen und die Korrelation wie folgt darstellen (vgl. 79.):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho \xi'_1 = a_{12} x_2, \quad \varrho \xi'_2 = a_{21} x_1, \quad \varrho \xi'_3 = a_{34} x_4, \quad \varrho \xi'_4 = a_{43} x_3, \\ \frac{\Delta}{\varrho} x_1 = \alpha_{21} \xi'_2, \quad \frac{\Delta}{\varrho} x_2 = \alpha_{12} \xi'_1, \quad \frac{\Delta}{\varrho} x_3 = \alpha_{43} \xi'_4, \quad \frac{\Delta}{\varrho} x_4 = \alpha_{34} \xi'_3 \end{array} \right.$$

sowie:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho \xi_1 = a_{21} x'_2, \quad \varrho \xi_2 = a_{12} x'_1, \quad \varrho \xi_3 = a_{43} x'_4, \quad \varrho \xi_4 = a_{34} x'_3, \\ \frac{\Delta}{\varrho} x'_1 = \alpha_{21} \xi_2, \quad \frac{\Delta}{\varrho} x'_2 = \alpha_{12} \xi_1, \quad \frac{\Delta}{\varrho} x'_3 = \alpha_{43} \xi_4, \quad \frac{\Delta}{\varrho} x'_4 = \alpha_{34} \xi_3. \end{array} \right.$$

Die beiden Kernflächen werden:

$$\begin{aligned} (5) \quad F_p &\equiv (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + (a_{34} + a_{43}) x_3 x_4 = 0, \\ (6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_e \equiv (\alpha_{12} + \alpha_{21}) \xi_1 \xi_2 + (\alpha_{34} + \alpha_{43}) \xi_3 \xi_4 = \\ = a_{34} a_{43} (a_{12} + a_{21}) \xi_1 \xi_2 + a_{12} a_{21} (a_{34} + a_{43}) \xi_3 \xi_4 = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Sie durchdringen sich in dem Hauptvierseit:

$$A_1 A_4 A_2 A_3.$$

Die involutorischen Korrelationen.

136. Ist in den Gleichungen (10) bis (13) der korrelativen (reziproken) Verwandtschaft (112.):

$$a_{ik} = a_{ki}$$

und folglich auch:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki},$$

so stimmt die transponierte Substitution mit der ursprünglichen überein und es leuchtet unmittelbar ein, daß das involutorische Entsprechen je zweier zugeordneter Elemente durchweg eintritt. Einem Punkte z. B., dessen Koordinaten man mit x_i oder mit x'_i bezeichnet, wird immer die gleiche Ebene zugewiesen. Die beiden Flächen F_p und F_t vereinigen sich in eine einzige Fläche φ und die Korrelation geht über in die polare Beziehung bezüglich dieser Fläche: jedem Punkte entspricht also seine Polarebene hinsichtlich φ . Dieses räumliche Polarsystem existiert auch in dem Falle, daß die Ordnungsfläche φ ganz imaginär ist. Man definiert umgekehrt durch ein solches Polarsystem eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung.

Aber es gibt noch eine zweite Möglichkeit, eine durchaus involutorische reziproke Beziehung im Raume herzustellen. Setzen wir nämlich in den Gleichungen (10) in 112.:

$$a_{ii} = 0 \quad \text{und} \quad a_{ik} = -a_{ki},$$

so verschwinden die Gleichungen (1) und (2) in 135. für F_p und F_t identisch und jedes Element liegt in dem ihm entsprechenden. Die Gleichungen für diese Korrelation werden dann aber:

$$(7) \quad \begin{cases} \mu \xi'_1 = & + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4, \\ \mu \xi'_2 = - a_{12} x_1 & + a_{23} x_3 + a_{24} x_4, \\ \mu \xi'_3 = - a_{13} x_1 - a_{23} x_2 & + a_{34} x_4, \\ \mu \xi'_4 = - a_{14} x_1 - a_{24} x_2 - a_{34} x_3. \end{cases}$$

Ebenso ergeben sich aus den Gleichungen (12) in 112. die folgenden:

$$(8) \quad \begin{cases} \nu \xi_1 = & - a_{12} x'_2 - a_{13} x'_3 - a_{14} x'_4, \\ \nu \xi_2 = a_{12} x'_1 & - a_{23} x'_3 - a_{24} x'_4, \\ \nu \xi_3 = a_{13} x'_1 + a_{23} x'_2 & - a_{34} x'_4, \\ \nu \xi_4 = a_{14} x'_1 + a_{24} x'_2 + a_{34} x'_3. \end{cases}$$

Es haben sich also die Gleichungen (7) wieder ergeben, woraus der involutorische Charakter der Verwandtschaft ohne weiteres hervorgeht. Ferner ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = \{a_{12} a_{34} - a_{13} a_{24} + a_{23} a_{14}\}^2.$$

Die Determinante der Substitution verschwindet also im allgemeinen nicht. Dagegen verschwindet jede Determinante dieser Art von ungeradem Grade, so daß sich ein Analogon zu dieser Verwandtschaft im ternären Gebiet, d. h. im Punktfeld oder im Bündel, nicht angeben läßt. Die durch die obigen Gleichungen gegebene involutorische Korrelation, die neben der räumlichen Polarreziprozität die einzig mögliche, involutorisch-reziproke Beziehung vorstellt, wird als das „Nullsystem“ bezeichnet. Jedem Punkte entspricht eine durch ihn gehende Ebene, jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt. Beschreibt der Punkt eine Gerade, so dreht sich die zugehörige Ebene um die entsprechende Gerade. Es gibt

³ Gerade, die sich selbst entsprechen: sie bilden einen linearen Komplex.

Das Nullsystem kommt zur Anwendung, wenn ein beliebiges System von Kräften im Raume vereinfacht, z. B. durch zwei Kräfte ersetzt werden soll. In dem sich dann ergebenden Nullsystem haben die sich selbst entsprechenden Geraden die Eigenschaft, daß in bezug auf dieselben die Summe der Momente der gegebenen Kräfte Null ist. Die durch einen Punkt gehenden Geraden dieser Eigenschaft bilden eine Ebene, die Möbius die „Nullebene“ dieses Punktes nannte. Ebenso gehört zu irgend einer Ebene ein „Nullpunkt“, weil wieder alle Geraden der genannten Eigenschaft, die in dieser Ebene liegen, durch diesen Punkt gehen. Die dadurch gegebene, besondere reziproke Beziehung hat dann v. Staudt als „Nullsystem“ bezeichnet.²¹⁾

Fünfter Abschnitt.

Die quadratischen Transformationen in der Ebene und im Raume.

Zehntes Kapitel.

Die allgemeinen quadratischen Transformationen in der Ebene.

§ 26. Die quadratische Transformation in einfachster Darstellung.

Geometrische Erzeugung.

137. Als die einfachsten Transformationen haben wir in den bisherigen Betrachtungen die projektiven, d. h. die Kollineation und die Korrelation, kennengelernt. Jetzt wollen wir, und zwar zunächst für zwei Punktfelder, eine allgemeinere, aber auch noch eineindeutige Punktverwandtschaft untersuchen, wobei wir auf geometrische Anschaulichkeit der Ableitung Wert legen.

Einen Punkt können wir als Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen. Es seien nun in der einen Ebene ε die Strahlenbüschel A_1 und A_2 beliebig

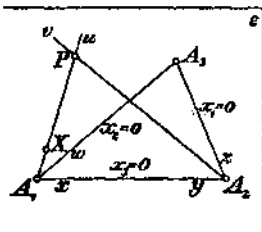


Fig. 70 a.

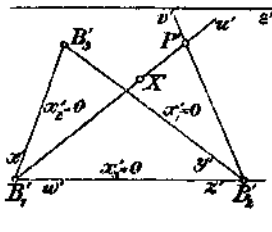


Fig. 70 b.

angenommen (Fig. 70 a), ferner in dem zweiten Felde ε' die Strahlenbüschel B'_1 und B'_2 (Fig. 70 b). Das Strahlenbüschel A_1 möge projektiv auf das Strahlenbüschel B'_1 bezogen sein und ebenso das Büschel A_2 projektiv auf das

Büschel B'_2 . Irgend ein Punkt P in ε kann dann als Schnittpunkt der Strahlen u und v betrachtet werden, die ihn mit A_1 und A_2 verbinden. Diesen entsprechen in den projektiven Büscheln die Strahlen u' , v' , die sich im Punkte P' begegnen. In der gleichen Weise kann man zu jedem Punkte von ε' im allgemeinen einen Punkt in ε konstruieren. Zwischen den beiden Punktfeldern ε und ε' ist dadurch offenbar eine wechselseitig eindeutige Punktverwandtschaft hergestellt, die schon

Seydewitz²²⁾ in dieser Weise ableitete. Daß diese bei allgemeiner Lage der projektiven Büschel keine Kollineation sein wird, zeigt ohne weiteres die folgende Überlegung. Lassen wir den Punkt P auf einer Geraden g von ε fortrücken, so beschreiben die Strahlen u und v Perspektive Büschel. Die Büschel der entsprechenden Strahlen u' und v' sind folglich projektiv aufeinander bezogen und der zugehörige Punkt P' durchläuft einen Kegelschnitt K'_g in ε' , der auch durch B'_1 und B'_2 hindurchgeht. Im Gegensatz zur kollinearen Beziehung entsprechen mithin den Geraden einer jeden Ebene Kegelschnitte in der andern. Ein zweiter, nicht weniger wichtiger Unterschied besteht darin, daß bei der Kollineation das eindeutige Entsprechen der Punkte für die beiden Punktfelder ohne Ausnahme stattfand, während sich bei der vorliegenden Beziehung sofort Punkte angeben lassen, denen wir unendlich viele Punkte im andern Punktfeld zuordnen müssen. Es sind das diejenigen Punkte, für die unsere Konstruktion unbestimmt wird. In der Tat können wir den Verbindungsstrahl A_1A_2 sowohl dem Büschel A_1 als dem Büschel A_2 zuteilen und dementsprechend mit x oder y bezeichnen. Es entsprechen ihm dann im allgemeinen Falle zwei verschiedene Strahlen x' , y' . Dem Schnittpunkt B'_3 dieser Strahlen (Fig. 70 b) ist aber dann jeder Punkt von A_1A_2 zuzuweisen, da x und y zusammenfallen. Ebenso kann die Verbindungsgerade $B'_1B'_2$ als w' oder z' zum Büschel B'_1 oder B'_2 gerechnet werden und der Schnittpunkt A_3 der entsprechenden Strahlen w , z hat alle Punkte von $B'_1B'_2$ zu entsprechenden.

Nimmt man die Strahlen x' , y' , w , z willkürlich an und außerdem u , u' , v , v' beliebig, so ist durch die Strahlenpaare x , x' , w , w' , u , u' und durch y , y' , z , z' , v , v' die projektive Beziehung der beiden Büschelpaare und damit die Verwandtschaft der beiden Ebenen vollständig festgelegt.

Die gleiche Eigenschaft wie A_3 und B_3 haben ferner auch die Punkte A_1 , A_2 , B'_1 , B'_2 . Denn fällt der bewegliche Punkt P z. B. nach A_1 , ohne daß etwa bemerkt ist, in welcher Richtung er sich A_1 nähert, so wird der Verbindungsstrahl PA_1 gänzlich unbestimmt. Es kann jeder durch A_1 gehende Strahl als solcher angesehen werden. Die entsprechenden Strahlen bilden das ganze Büschel B'_1 . Da ferner dem Strahle A_2A_1 oder y der Strahl $B'_2B'_3$ oder y' entspricht, so werden wir dem Punkte A_1 alle Punkte der Geraden $B'_2B'_3$ zuordnen. Wir erhalten also folgende Zuweisung der ausgezeichneten Elemente: es entspricht

dem Punkte A_1	die Gerade $B'_1B'_2$,
„ „ A_2	„ „ $B'_1B'_2$,
„ „ A_3	„ „ $B'_1B'_2$,
„ „ B'_1	„ „ A_2A_3 ,
„ „ B'_2	„ „ A_1A_3 ,
„ „ B'_3	„ „ A_1A_2 .

Da eine beliebige Gerade g in ε mit der Verbindungslinie A_1A_2 einen Schnittpunkt gemein hat, so muß der der Geraden g entsprechende Kegelschnitt K'_g in ε' (s. o.) auch durch B'_1 hindurchgehen. Den Geraden von s

entsprechen mithin Kegelschnitte durch die drei Punkte B'_1, B'_2, B'_3 . Diese Kegelschnitte bilden also ein Netz und das gleiche gilt für die Kegelschnitte, die sich in ε als Bilder der Geraden von ε' ergeben.

Einstweilen fehlt noch der Beweis, daß die Punkte A_3 und B'_3 die gleiche Rolle wie A_1, A_2, B'_1, B'_2 spielen, d. h. projektive Strahlenbüschel tragen; derselbe wird sich ganz von selbst ergeben, wenn wir jetzt die Formeln für diese Transformation ableiten.

Analytische Darstellung.

138. Wählen wir die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B'_1 B'_2 B'_3$ als Koordinatendreiecke und bezeichnen in bezug auf dieselben die homogenen (trimetrischen) Koordinaten eines Punktes P der Ebene ε mit x_1, x_2, x_3 , die eines Punktes P' des anderen Punktfeldes ε' mit x'_1, x'_2, x'_3 . Es ist dann das Strahlenbüschel A_1 oder:

$$x_2 - \lambda x_3 = 0$$

projektiv so auf das Strahlenbüschel B'_1 oder:

$$x'_2 - \mu x'_3 = 0$$

zu beziehen, daß dem Strahle $A_1 A_3$ oder $x_2 = 0$ der Strahl $B'_1 B'_3$ oder $x'_2 = 0$ entspricht und ferner dem Strahle $A_1 A_2$ oder $x_3 = 0$ der Strahl $B'_1 B'_2$ oder $x'_2 = 0$; es muß also für $\lambda = 0, \mu = \infty$ werden und für $\lambda = \infty, \mu = 0$ sein. Die bilineare Gleichung zwischen λ und μ , welche die projektive Beziehung zum Ausdruck bringt, kann demnach bloß von der Form sein:

$$\lambda \mu = \frac{b}{c},$$

wo $\frac{b}{c}$ eine Konstante ist. Die beiden projektiven Büschel werden also:

$$(1) \quad x_2 - \lambda x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x'_2 - \frac{b}{c} \frac{1}{\lambda} x'_3 = 0.$$

Ganz ebenso findet man für die projektiven Strahlenbüschel A_2 und B'_2 die Darstellung:

$$(2) \quad x_1 - \lambda x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x'_1 - \frac{a}{c} \frac{1}{\lambda} x'_3 = 0,$$

wobei die auftretende Konstante in der Form $\frac{a}{c}$ geschrieben wurde.

Eliminiert man λ aus dem System (1) und λ aus dem System (2), so ergeben sich die gewünschten Formeln:

$$(3) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{a}{x'_1} : \frac{b}{x'_2} : \frac{c}{x'_3}$$

oder auch:

$$(4) \quad x_1 : x_2 : x_3 = a x'_1 : b x'_2 : c x'_3$$

oder:

$$(5) \quad \varrho x_1 = a x'_1 x'_2, \quad \varrho x_2 = b x'_1 x'_3, \quad \varrho x_3 = c x'_2 x'_3,$$

wobei ein Proportionalitätsfaktor ist. Aus diesen leiten wir ohne weiteres die folgenden nach x' aufgelösten Gleichungen ab:

$$(6) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{a}{x_1} : \frac{b}{x_2} : \frac{c}{x_3},$$

die wir auch in der Form schreiben können:

$$(7) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = a x_2 x_3 : b x_1 x_3 : c x_1 x_2$$

oder auch:

$$(8) \quad \varrho' x'_1 = a x_2 x_3, \quad \varrho' x'_2 = b x_1 x_3, \quad \varrho' x'_3 = c x_1 x_2.$$

Die von uns betrachtete Verwandtschaft ist also analytisch dadurch definiert, daß man an Stelle der Veränderlichen der einen Ebene spezielle Ausdrücke zweiten Grades in den Veränderlichen des zweiten Feldes einführt. Sie gehört deswegen zu den quadratischen Transformationen. Die Formeln zeigen — was geometrisch schon erkannt wurde —, daß im allgemeinen jedem Punkte des einen Feldes ein und nur ein Punkt des andern entspricht, daß also die Transformation eineindeutig ist. Eine neue Eigenschaft dagegen leiten wir aus dem Umstande ab, daß die Formeln (3) bis (8) ganz symmetrisch in bezug auf die drei Koordinaten gestaltet sind. Folglich müssen auch die Punkte A_3 und B'_3 projektive Strahlenbüschel, gebildet von entsprechenden Strahlen, tragen und die drei Punkte jeder Ebene spielen die gleiche Rolle, irgend zwei derselben können zur Konstruktion der Verwandtschaft benutzt werden.

Die in jeder Ebene gelegenen „singulären“ Punkte A_1 usw. sollen die Fundamentalpunkte (F.-Punkte) oder Hauptpunkte, ihre Verbindungslinien die Fundamentalgeraden (F.-Geraden), ihre Gesamtheit das Fundamentalsystem (F.-System) der betreffenden Ebene heißen. Jedem Fundamentalpunkt der einen Ebene ist ein bestimmter der anderen Ebene zugewiesen, dem Punkte A_1 der Punkt B'_1 , dem Punkte A_2 der Punkt B'_2 , dem Punkte A_3 der Punkt B'_3 . Solche Punkte mögen „zugeordnete“ genannt werden.

Im Sinne der Rechnung ist die Transformation bestimmt, wenn für die Konstanten a, b, c der Formel (3) nur die Verhältnisse gegeben sind. Dies ist der Fall, sofern man zu einem Punkte P von ε einen Punkt P' von ε' als entsprechenden annimmt. Es folgt also

Satz 65. *Die quadratische Transformation ist bestimmt, wenn in jeder Ebene das Fundamentalsystem gegeben ist und außerdem zu einem beliebigen Punkt der einen Ebene irgend ein Punkt der anderen Ebene als entsprechender angenommen wird.*

Speziell könnten wir die Einheitspunkte eines jeden der beiden Koordinatensysteme (16.) einander zuweisen und erhielten **dann die** Formeln:

$$(9) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x'_1} : \frac{1}{x'_2} : \frac{1}{x'_3}$$

oder:

$$(10) \quad x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 x'_3 : x'_1 x'_2 : x'_2 x'_3 \quad \text{usw.}$$

Die unendlich fernen Punkte der beiden Ebenen fügen sich sehr einfach in diese Zuordnung ein. Denn da die uneigentlichen Punkte der Ebene ε als auf einer unendlich fernen Geraden u liegend angenommen werden müssen, so erfüllen die entsprechenden Punkte in der Ebene ε' einen bestimmten Kegelschnitt K'_u des in dieser Ebene gelegenen Netzes durch die drei F.-Punkte und ebenso gehen alle unendlich fernen Punkte des Feldes ε' in Punkte eines Kegelschnittes K_v über, der der unendlich fernen Geraden v' entspricht. Den unendlich fernen Punkten von K , d. h. den Schnittpunkten von K_v' mit u , entsprechen die unendlich fernen Punkte von K'_u (die Schnittpunkte von K'_u mit v'). Diese sind im allgemeinen Fall die einzigen zwei unendlich fernen Punkte des einen Feldes, die wieder in unendlich ferne Punkte im andern Feld übergehen.

Befinden sich die F.-Systeme dem Unendlich-Fernen gegenüber in besonderer Lage, so können natürlich andere Verhältnisse stattfinden. Wählen wir z. B. in jeder der beiden Ebenen ε und ε' je ein schiefwinkeliges Koordinatensystem $0, X, Y$ und $0', X', Y'$ und ergänzen es durch die unendlich ferne Gerade je zu einem Dreieck. Dann erhält man für die spezielle quadratische Transformation, die diese beiden (uneigentlichen) Dreiecke als F.-Systeme hat, und zwar als zugeordnete F.-Punkte 0 und $0'$ einerseits sowie die unendlich fernen Punkte der gleichbenannten Achsen andererseits, nach 19. aus den Formeln (6) oder (7) die Gleichungen:

$$x' = \frac{A}{x}, \quad y' = \frac{B}{y},$$

wobei A und B beliebige Zahlenwerte sein können.

In diesem Falle entspricht allen unendlich fernen Punkten der einen Ebene der im Endlichen gelegene F.-Punkt der anderen Ebene.

§ 27. Entsprechende Gebilde der beiden Ebenen.

Entsprechende Elemente der Fundamentalsysteme.

139. Jedem F.-Punkt entsprach eine F.-Gerade, z. B. dem Punkte A_1 die Gerade $B_2 B'_3$. Um diese Zuordnung aber genauer zu erkennen, ziehen wir durch A_1 irgend eine Gerade u (Fig. 70a) und lassen einen Punkt X sich auf ihr dem singulären Punkte A_1 mehr und mehr nähern. Der entsprechende Punkt X' bewegt sich dann auf der Geraden u' fort, die in der projektiven Beziehung der Strahlenbüschel A_1 und B'_1 der Geraden u entspricht. Verbindet man ferner X mit A_2 sowie X' mit B'_2 , so entsprechen sich diese Strahlen in der projektiven Beziehung der Büschel A_2 und B'_2 . Je mehr aber X sich A_1 nähert, um so mehr fällt der Ver-

bindungsstrahl A_2X mit y zusammen. Also entspricht dem Punkte, der auf u unendlich nahe an A_1 herangerückt ist, der Schnittpunkt von u' und y' . Es hat sich mithin ergeben:

Satz 66. Den einem F.-Punkt unendlich benachbarten Punkten oder kürzer, den durch einen F.-Punkt gehenden „Linienelementen“ entsprechen die einzelnen Punkte der zugehörigen F.-Geraden. Diese Punkte werden ausgeschnitten durch diejenigen Strahlen aus dem zugeordneten F.-Punkt, die den durch die Linienelemente bestimmten Strahlen in der projektiven Beziehung dieser beiden Strahlenbüschel entsprechen. Das Büschel der Linienelemente des F.-Punktes ist also projektiv zur Punktreihe der entsprechenden F.-Geraden.

Analytisch sind die singulären Punkte der beiden Ebenen dadurch ausgezeichnet, daß für sie die Transformationsformeln (4) oder (7) in 138. zunächst ein unbestimmtes Ergebnis liefern. Setzt man z. B. die Koordinaten $x_1 = 0, x_2 = 0$ des F.-Punktes A_3 in die Formel (7) ein, so erhält man für den entsprechenden Punkt $0:0:0$. Um den oben geometrisch durchgeführten Grenzprozeß analytisch zu verfolgen, hätte man zunächst einen zum Punkte $x_1 = 0, x_2 = 0$ benachbarten Punkt mit den Koordinaten $\delta x_1, \delta x_2, x_3 + \delta x_3$ einzuführen, diese Werte in die Ausdrücke $a x_2 x_3, b x_1 x_3, c x_1 x_2$ einzusetzen und die letzteren etwa nach dem Taylorschen Satze zu entwickeln. Man bestätigt dann leicht das obige Ergebnis.

Entsprechende Kurven der beiden Systeme.

140. Irgend einer Kurve n -ter Ordnung K^n in ε , die durch keinen F.-Punkt hindurchgeht, entspricht auf Grund der Formeln (5) in 138. in der Ebene ε' eine Kurve $(2n)$ -ter Ordnung K'^{2n} . Dieselbe hat die F.-Punkte von ε' zu n -fachen Punkten. Um dies zu beweisen, ziehen wir z. B. durch B'_1 irgend eine Gerade u' und zählen ab, wie viele von den $2n$ Schnittpunkten derselben mit der K'^{2n} außerhalb B'_1 liegen. Dies gelingt dadurch, daß wir uns vergegenwärtigen, daß jedem nicht auf dem F.-System der einen Ebene gelegenen Punkte in der anderen Ebene wieder ein Punkt entsprechen muß, der ebenfalls nicht dem F.-System dieser Ebene angehört. Nun entspricht der Geraden u' eine Gerade u durch A_1 die mit der K^n nach unserer Voraussetzung n außerhalb des F.-Systems gelegene Schnittpunkte liefern wird. Auf u' müssen ihnen folglich n außerhalb des F.-Systems gelegene Punkte entsprechen, so daß B'_1 ein w -facher Punkt der Kurve K'^{2n} sein muß.

Denken wir uns weiter eine Tangente t' an die K'^{2n} im n -fachen Punkte B'_1 gefunden, so fallen für sie $n + 1$ der $2n$ Schnittpunkte nach B'_1 die entsprechende Gerade t des Büschels A_1 kann also bloß $n - 1$ nicht dem F.-System angehörige Punkte mit der K^n gemein haben. Nun geht K^n nicht durch A_1 , also muß die Gerade t nach einem der Schnittpunkte

von K^n mit der F.-Geraden $A_2 A_3$ laufen. Das stimmt auch mit den Betrachtungen der vorigen Nummer überein. Wir sehen also:

Satz 67. *Einer Kurve n -ter Ordnung der einen Ebene, die durch keine der Ecken des F.-Dreiecks hindurchgeht, entspricht eine Kurve $(2n)$ -ter Ordnung der anderen Ebene, die die F.-Punkte zu n -fachen Punkten hat; die Tangenten in einem solchen n -fachen Punkte entsprechen in der projektiven Beziehung zugeordneter Büschel den Strahlen, welche vom zugeordneten F.-Punkte aus nach den Schnittpunkten der ersten Kurve mit der gegenüberliegenden F.-Geraden laufen.*

Einer Geraden entspricht demnach ein Kegelschnitt, der dem F.-Dreieck der anderen Ebene umschrieben ist; einem beliebigen Kegelschnitt ist eine Kurve 4. Ordnung zugeordnet, die in den F.-Punkten Doppelpunkte hat, usf.

Betrachten wir noch den Fall, daß eine Kurve n -ter Ordnung K^n der Ebene s durch die F.-Punkte dieser Ebene hindurchgeht, also etwa v_1 -mal durch A_1 , v_2 -mal durch A_2 , v_3 -mal durch A_3 . Dann spalten sich von der entsprechenden Kurve $(2n)$ -ter Ordnung gewisse Teile ab, nämlich die F.-Gerade $B'_2 B'_3$ v_1 -mal die Gerade $B'_1 B'_3$ v_2 -mal und die Gerade $B'_1 B'_2$ v_3 -mal gerechnet. Die übrigbleibende Kurve ist also noch von der Ordnung:

$$2n - (v_1 + v_2 + v_3)$$

und sie geht noch:

$$\begin{aligned} &\text{durch } B'_1 \dots \{n - (v_2 + v_3)\}\text{-mal,} \\ &,, \quad B'_2 \dots \{n - (v_1 + v_3)\}\text{-mal,} \\ &,, \quad B'_3 \dots \{n - (v_1 + v_2)\}\text{-mal} \end{aligned}$$

hindurch. Denn B'_1 z. B. ist für die Gesamtheit der entsprechenden Kurven ein n -facher Punkt und die F.-Geraden $B'_1 B'_2$ und $B'_1 B'_3$ gehen v_3 - und v_2 -mal gerechnet durch B'_1 hindurch.

Aufgabe 32: Man beweise: Einem Kegelschnitte, der durch A_1 hindurchgeht, entspricht eine Kurve dritter Ordnung, die in B'_1 einen Doppelpunkt, in B'_2 und B'_3 noch einfache Punkte hat.

Einem Kegelschnitte durch A_1 und A_2 entspricht ein Kegelschnitt durch B'_1 , B'_2 .

Einem Kegelschnitte durch A_1 , A_2 , A_3 entspricht eine Gerade in der anderen Ebene.

Punkt auf einer F.-Geraden und Abbildung seiner Umgebung.

141. Hat eine Kurve einen vielfachen Punkt X irgend welcher Art, der aber nicht in einem F.-Punkte und nicht auf einer F.-Geraden, also kurz außerhalb des F.-Systems gelegen sein soll, so wird die entsprechende Kurve im entsprechenden Punkte X' einen vielfachen Punkt von gleicher Vielfachheit besitzen, wie man leicht beweist. Jedem Zweige der ersten Kurve durch X wird wieder ein Zweig der entsprechenden Kurve

durch X' zugeordnet sein, so daß also auch die Zahl der Tangenten in X und X' übereinstimmt. Dagegen wird ein Wendepunkt J der Kurve sich nicht wieder in einen solchen transformieren. Man kann zeigen, daß der entsprechende Punkt J' im allgemeinen bloß die Eigenschaft hat, daß ein dem Hauptdreieck der Ebene $\mathfrak{s}'$ umschriebener Kegelschnitt in ihm die Kurve oskuliert.

Wesentlich anders gestaltet sich dagegen die Sache, wenn die Singularität der betrachteten Kurve auf dem F.-System gelegen ist; sie kann dann durch die Transformation sehr verändert, ja ganz aufgehoben werden. Es sei W (Fig. 71a) der auf der F.-Geraden A_1A_2 gelegene

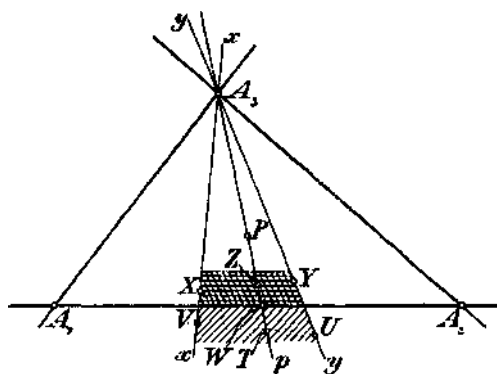


Fig. 71a.

Punkt, in dem die zu betrachtende Kurve n -ter Ordnung K^n eine Singularität besitzen soll. Es wird dann jedenfalls von Vorteil sein, vor allem eine Anschauung darüber zu gewinnen, wie sich die dem Punkte W benach-

barten Teile der Ebene in die andere Ebene abbilden. Zu diesem Zwecke wurde in den Figuren 71a und 71b die Transformation durch Annahme der beiden F.-Dreiecke und der Punkte P, P' festgelegt. Dem Strahle A_3P oder p entspricht dann der Strahl p' , welcher P' mit B'_3 verbindet, und dem Schnittpunkte W von p und A_1A_2 der auf p' gelegene Nachbarpunkt zu B'_3 ; (140.). Zuden Strahlen x, y und den Punkten X, V, Z, T, Y, U sind die entsprechenden

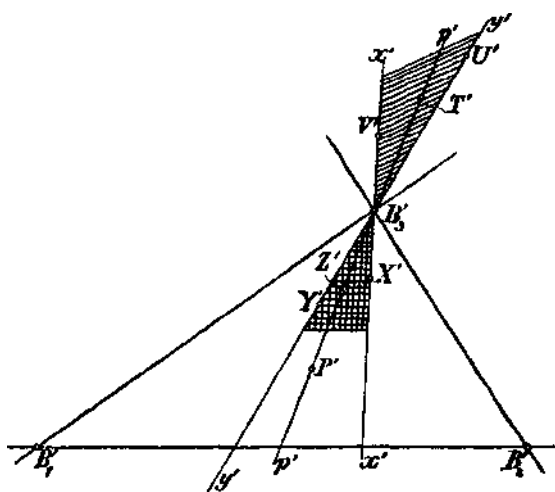


Fig. 71b.

Elemente $x', y', X', \dots U'$ gezeichnet. Beschränkt man sich auf die der F.-Geraden benachbarten Streifen, so gehen die in den Figuren gleicher Art schraffierten Gebiete bei der Transformation ineinander

über. Bei anderer Wahl der Punkte P und P' ändern sich natürlich die Figuren in sinngemäßer Weise. Jedem durch W gehenden Kurvenzuge entspricht im andern Feld ein Zweig, der den Strahl p' in B'_3 berührt. Unsere Darstellung ermöglicht dann bereits eine Beurteilung der gestaltlichen Verhältnisse. Verläuft z. B. ein Kurvenzweig von X über W nach y , so daß er in W die F.-Gerade A_1A_2 berührt, so geht der entsprechende

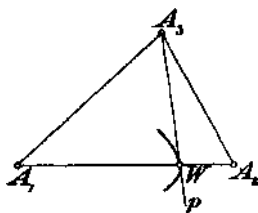


Fig. 72a.

Fig. 72 b.

Kurvenzweig im anderen Felde von X' über B'_3 nach Y' , während p' berührt wird; er zeigt also den Typus einer Spitze (Rückkehrpunkt 1. Art). Erstreckt sich dagegen die Kurve von X über W nach $E7$, so bleibt der entsprechende Kurvenzug $X'B'_3U'$ auf der gleichen Seite der Tangente p' . Hat die durch W (aber nicht durch A_3) gehende Kurve K^n mit der Linie A_3W oder p in W z. B. μ aufeinanderfolgende Punkte gemeinsam, so liefert der Strahl p mit der K^n noch $n - \mu$ Schnittpunkte,

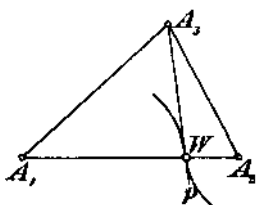


Fig. 73a.

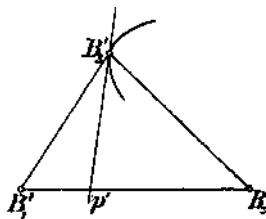


Fig. 73b.

die nicht dem F.-System angehören. Folglich muß der Strahl p' mit der entsprechenden Kurve K^{2n} ebenso viele, dem F.-System nicht angehörige Punkte gemein haben und in B'_3 werden demgemäß $2n - (n - \mu) = n + \mu$ Schnittpunkte vereinigt liegen. Die F.-Gerade A_1A_2 hat aber außer W noch $n - 1$ Schnittpunkte mit der K^n gemein, denen ebenso viele Durchgänge der K^{2n} durch B'_3 entsprechen. Der dem Durchgange W zugeordnete Kurvenzweig wird folglich mit der Tangente p' $n + \mu + 1$ aufeinanderfolgende Punkte in B'_3 gemein haben.

In den Figuren 72 a und 72 b ist der Fall $\mu = 2$ gezeichnet; die Kurve K^n berührt den Strahl p in W einfach; die Kurve K^{2n} besitzt dann in B'_3 einen Wendepunkt mit p' als Wendetangente.

Die Figuren 73 a und 73 b bringen noch den Fall $\mu = 3$ zur Anschauung. Die Kurve K^n hat in W einen Wendepunkt mit p als Wendetangente; die entsprechende Kurve K^{2n} hat mit dem Strahle p' in B'_3 vier aufeinanderfolgende Punkte gemein, was einer sog. „Undulation“ (einem Flachpunkt) entspricht. In allen Figuren ist nur die Umgebung des Punktes W und das ihr entsprechende Gebiet der anderen Ebene berücksichtigt.

Liegt die Singularität der gegebenen Kurve weiter in einem F.-Punkt, so ergeben sich neue Besonderheiten.²³⁾

Nimmt man in unseren Betrachtungen die Kurve K^{2n} als gegeben an, so geht dieselbe durch die rationale quadratische Transformation in die Kurve K^n über, die Singularität im Punkte B'_3 ist also in eine andere, einfachere transformiert worden. Durch die eventuell wiederholte Anwendung einer solchen Transformation ist man imstande, jede Singularität einer Kurve „aufzulösen“, d.h. die Zahl der Doppelpunkte und Rückkehrpunkte anzugeben, welche einer solchen Singularität in bezug auf das Geschlecht der Kurve „äquivalent“ ist. Doch kann die Auflösung einer Singularität in verschiedener Weise erfolgen. Deswegen muß die vollständige Erörterung der Theorie der algebraischen Kurven vorbehalten bleiben.²⁴⁾

Anwendungen der quadratischen Transformation.

142. Sind zwei Ebenen durch eine Transformation der soeben betrachteten Art aufeinander abgebildet und hat man für eine Figur der ersten Ebene einen Satz aus dem Gebiete der Geometrie der Lage bewiesen, der also keine metrischen Begriffe benutzt, so kann man die Figur durch unsere quadratische Transformation in die zweite Ebene übertragen und für diese neue Figur ohne weiteres einen entsprechenden Satz aussprechen. Durch fortgesetzte Transformationen könnte man auf diese Weise aus einem lagengeometrischen Satze unendlich viele neue Sätze ableiten, die freilich immer schwieriger werden und sich auf immer höhere Kurven beziehen. Oder es gelingt unter Umständen, eine Aufgabe der ebenen Geometrie dadurch zu lösen, daß man die Ebene quadratisch in eine andere abbildet, die in der zweiten Ebene sich ergebende Aufgabe erledigt und die Lösung dann wieder in das erste Feld überträgt. Wir geben für beide Arten der Anwendung je ein Beispiel.

Ein sehr bekannter Satz der projektiven Geometrie lautet: Ist einem Dreieck ein Kegelschnitt eingeschrieben und verbindet man die auf den Dreiecksseiten gelegenen Berührungspunkte desselben mit den gegenüberliegenden Ecken, so gehen diese drei Verbindungslinien durch einen Punkt. Transformiert man diese Figur quadratisch in eine zweite Ebene, indem man das gegebene Dreieck als F.-Dreieck einführt, so geht der Kegelschnitt in eine Kurve vierter Ordnung der anderen Ebene über,

die in den drei F.-Punkten dieser Ebene Spitzen hat (141.). Die drei Geraden nach den Berührungspunkten des Kegelschnittes gehen über in die drei Tangenten in diesen Spitzen (Satz 67 in **140.**), also müssen auch diese sich in einem Punkte begegnen. Dieser Satz gilt aber dann für jede Kurve dieser Art. Denn liegt irgend eine Kurve vierter Ordnung mit drei Spitzen vor, so wählen wir das Dreieck der Spitzen als F.-Dreieck einer quadratischen Transformation. Die entsprechende Kurve im anderen Feld ist ein Kegelschnitt, der dem F.-Dreieck dieser Ebene eingeschrieben sein muß. Also gilt wieder die obige Schlußfolgerung. Wir haben damit allgemein den Satz gefunden, daß die drei Rückkehrtangente (Spitzen-tangenten) einer Kurve vierter Ordnung mit drei Spitzen sich in einem Punkte begegnen.

Zweitens möge es sich um die Aufgabe handeln, die Zahl der Kegelschnitte zu ermitteln, die durch drei gegebene Punkte gehen und zwei Gerade g und h berühren. Wir verlegen wieder die F.-Punkte einer quadratischen Transformation in die drei gegebenen Punkte. Die Geraden g und h gehen sodann in zwei Kegelschnitte K'_g und K'_h des anderen Feldes über. Denken wir uns irgend einen Kegelschnitt gefunden, der durch die drei Punkte geht und g und h berührt, so muß ihm in der anderen Ebene offenbar eine Gerade entsprechen, welche K'_g und K'_h berührt, und andererseits muß jede gemeinsame Tangente von K'_g und K'_h in einen Kegelschnitt übergeführt werden, der den genannten Bedingungen genügt. Folglich gibt es vier Kegelschnitte, die durch drei Punkte gehen und zwei Gerade berühren.

§ 28. Die quadratische Transformation in allgemeiner Darstellung.

Verallgemeinerung der bisherigen Resultate.

143. Die im bisherigen durchgeführte Abbildung zweier Ebenen aufeinander zeichnete sich durch zwei Eigenschaften aus: erstens durch die im allgemeinen in beiderlei Sinn eindeutige Zuordnung der Punkte und zweitens dadurch, daß einer beliebigen Geraden der einen Ebene in der anderen ein Kegelschnitt entsprach. Der letzteren Eigenschaft wegen nannten wir die Transformation eine quadratische. Es ist leicht, quadratische Transformationen anzugeben, die diese Eigenschaft der Eindeutigkeit nur in einem Sinne besitzen. Bestehen z. B. zwischen den Koordinaten x_i und x'_i der Punkte P und P' zweier Ebenen ε und ε' die Beziehungen:

$$(1) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = a^2 x_1^2 : b^2 x_2^2 : c^2 x_3^2,$$

so ordnen diese zwar jedem Punkte P oder x_i einen Punkt P' oder x'_i zu, die inversen Gleichungen jedoch:

$$(2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \pm \frac{1}{a} \sqrt{x'_1} : \pm \frac{1}{b} \sqrt{x'_2} : \pm \frac{1}{c} \sqrt{x'_3}$$

bestimmen unter Berücksichtigung aller möglichen Kombinationen der Vorzeichen der Quadratwurzeln zu jedem Punkte P' der Ebene ε' vier zugehörige Punkte in der Ebene ε . Diese quadratische Transformation ist also ein-vierdeutig. Allgemein können wir setzen:

$$(3) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = X_1 : X_2 : X_3,$$

wo die X_i ganze homogene Funktionen zweiten Grades in den Koordinaten x_1, x_2, x_3 sein mögen. Irgend einer Geraden a' der Ebene ε' , deren Gleichung:

$$a' \equiv a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3 = 0$$

sein möge, entspricht vermöge dieser Transformation der Kegelschnitt $K_{a'}$, dessen Gleichung:

$$K_{a'} \equiv a'_1 X_1 + a'_2 X_2 + a'_3 X_3 = 0 \text{ ist.}$$

Ebenso erhalten wir zu einer zweiten Geraden b' den Kegelschnitt:

$$K_{b'} \equiv b'_1 X_1 + b'_2 X_2 + b'_3 X_3 = 0$$

Dem Schnittpunkte P' der Geraden a' und b' sind also die vier Schnittpunkte zuzuordnen, welche $K_{a'}$ und $K_{b'}$ liefern werden. Man erkennt nun auch die Bedingung, unter welcher die Beziehung dem Punkte P' bloß einen Punkt in ε zuweist: es müssen dann von den vier Schnittpunkten der obigen Kegelschnitte drei überhaupt fest sein, während bloß einer noch beweglich ist. Dies tritt aber sicher ein, wenn die Kegelschnitte:

$$(4) \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

selbst drei feste Punkte gemeinsam haben. Denn durch jeden diesen drei Kurven gemeinsamen Punkt gehen alle Kurven des Netzes:

$$(5) \quad a'_1 X_1 + a'_2 X_2 + a'_3 X_3 = 0$$

für ganz beliebige Werte der a'_i hindurch. Diese drei gemeinsamen Schnittpunkte der Kegelschnitte (4) können wir aber, vorausgesetzt daß sie alle drei reell sind, als Ecken des Koordinatensystems wählen und das aus den Kegelschnitten (4) gebildete Netz nimmt dann die Form an:

$$(6) \quad A'_1 x_2 x_3 + A'_2 x_1 x_3 + A'_3 x_1 x_2 = 0.$$

Dieses nun läßt sich durch eine Substitution von der Form:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = a x_2 x_3 : b x_1 x_3 : c x_1 x_2$$

auf das System der Geraden von ε' beziehen. Das sind aber die Formeln von 138., aus denen durch Umkehrung die entsprechenden für x_1, x_2, x_3 folgen. Es hat sich also ergeben:

Salz 68. Sieht man von der Möglichkeit ab, daß die F.-Punkte auch "paarweise imaginär sein können, so stellen die Gleichungen (3) und (6) von 138. die allgemeinste eineindeutige oder birationale quadratische Transformation zweier Ebenen vor.

Spricht man ohne weiteren Zusatz von einer „quadratischen Transformation“, so versteht man darunter gewöhnlich eben diese eineindeutig umkehrbare Beziehung.

Darstellung durch zwei bilineare Gleichungen.

144. Gehen wir aus von den zwei in x_i und x'_i linearen Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)x'_2 + \\ \quad + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)x'_3 = 0, \\ (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)x'_1 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)x'_2 + \\ \quad + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)x'_3 = 0, \end{cases}$$

die wir kürzer schreiben:

$$(7a) \quad \begin{cases} A_1x'_1 + A_2x'_2 + A_3x'_3 = 0, \\ B_1x'_1 + B_2x'_2 + B_3x'_3 = 0, \end{cases}$$

wobei also:

$$\begin{aligned} A_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \\ B_i &= b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + b_{i3}x_3, \end{aligned} \quad \{i = 1, 2, 3\}$$

so liefern dieselben zu jedem Wertsystem x_i ein bestimmtes System x'_i , nämlich:

$$(8) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = (A_2B_3 - A_3B_2) : (A_3B_1 - A_1B_3) : (A_1B_2 - A_2B_1).$$

Ordnen wir die Gleichungen (7) nach den x_i , so ergeben sich ganz ähnliche Formeln, die zu jedem Punkte x'_i einen zugehörigen Punkt x_i bestimmen. Setzen wir weiter:

$$\begin{aligned} X_1 &= A_2B_3 - A_3B_2, \\ X_2 &= A_3B_1 - A_1B_3, \\ X_3 &= A_1B_2 - A_2B_1, \end{aligned}$$

so geben diese in den x_i quadratischen Ausdrücke, je $= 0$ gesetzt, drei Kegelschnitte, von denen man erkennt, daß sie drei Punkte gemeinsam haben. Denn die Gleichungen dieser Kegelschnitte können wir auch so schreiben:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_3}{B_3}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1}{B_1}.$$

Denken wir uns aber einen Schnittpunkt der ersten zwei Kegelschnitte gefunden, so nimmt für die Koordinaten dieses Punktes der Quotient A_3/B_3 in den ersten zwei Gleichungen den gleichen Wert an, also folgt aus diesen Gleichungen die dritte, d. h. der genannte Schnittpunkt liegt auch auf dem dritten Kegelschnitte. Nur für den Schnittpunkt $A_3 = 0$, $B_3 = 0$ ist dieser Schluß unzulässig. Denn für ihn wird der genannte Quotient unbestimmt und die dritte Gleichung folgt nicht mehr aus den ersten zwei. Demnach geben die Gleichungen (8) nach 143. die

eindeutige quadratische Transformation, und da hier über die Realität der Schnittpunkte der Kegelschnitte des Netzes nichts vorausgesetzt wird, so ist diese Bestimmung der Transformation durch zwei bilineare Gleichungen ganz allgemeiner Natur.²⁵⁾

Quadratisch verwandte Systeme in der gleichen Ebene.

145. Liegen quadratisch verwandte Systeme in der gleichen Ebene, so kann man nach ihren Doppelpunkten oder nach sich involutorisch entsprechenden Punkten fragen. Die Systeme können auch durchweg involutorisch sein. Dann ist notwendig, daß entweder alle F.-Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen, also $A_1 \equiv B'_1$, $A_2 \equiv B'_2$, $A_3 \equiv B'_3$, oder es fällt nur ein F.-Punkt mit dem zugeordneten zusammen, die übrigen decken sich verkehrt, d. h. $A_1 \equiv B'_1$, $A_2 \equiv B'_3$, $A_3 \equiv B'_2$.

Aufgabe 33: Man zeige, daß quadratisch verwandte Systeme im allgemeinen vier Doppelpunkte und ein Paar sich involutorisch entsprechender Punkte besitzen und konstruiere diese Elemente.

Aufgabe 34: In einer Ebene sind zwei Kegelschnitte gegeben; jedem Punkte wird der Schnittpunkt seiner Polaren in bezug auf die beiden Kegelschnitte zugeordnet. Man beweise, daß dadurch eine quadratisch involutorische Transformation entsteht und ermittle die F.-Punkte.

Elftes Kapitel.

Die Transformation durch reziproke Radien.

§29. Die absoluten Kreispunkte und die aus ihnen abgeleiteten Transformationen,

Die absoluten Kreispunkte.

146. Wir gehen jetzt dazu über, gewisse imaginäre Gebilde zu betrachten, die wir im folgenden benutzen werden, um aus der allgemeinen quadratischen, birationalen Transformation speziellere Verwandtschaften abzuleiten. Dabei möge lediglich die Rechnung Verwendung finden, indem wir als bekannt voraussetzen, wie nach v. Staudt den imaginären Elementen eine vom Koordinatensystem unabhängige, geometrische Bedeutung verliehen werden kann.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sei die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkte a, b und dem Radius r gegeben durch:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

oder:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Denken wir uns die beiden Koordinatenachsen durch Hinzunahme der unendlich fernen Geraden zu einem homogenen Koordinatensystem ergänzt und setzen wir:

$$x = \frac{X}{U}, \quad y = \frac{Y}{U},$$

so wird die unendlich ferne Gerade durch $U = 0$ dargestellt, während für alle im Endlichen gelegenen Punkte $U = 1, X = x, Y = y$ zu setzen ist. Die Gleichung(1) des Kreises wird dann aber:

$$X^2 + Y^2 - 2(aX + bY)U + (a^2 + b^2 - r^2)U^2 = 0.$$

Die Schnittpunkte des Kreises mit der unendlich fernen Geraden ergeben sich demnach aus dem System:

$$X^2 + Y^2 = 0, \quad U = 0$$

oder:

$$(2) \quad x^2 + y^2 = 0, \quad u = 0,$$

wenn wir der Einfachheit wegen wieder kleine Buchstaben benutzen. Sie bleiben für alle Kreise der Ebene die nämlichen.

Das Gebilde (2) kann man in folgender Weise deuten: wir erhalten dasselbe aus der Kreisgleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

wenn $r = 0$ gesetzt wird. Es stellt also die Gleichung (2) zunächst einen Kreis vom Radius 0, einen sog. „Nullkreis“⁴⁴ oder „Punktkreis“⁴⁴ vor. Andererseits können wir die linke Seite von (2) auch in lineare Faktoren zerspalten und schreiben:

$$(x + i y)(x - i y) = 0,$$

wodurch wir die beiden Geraden erhalten:

$$(3) \quad y = i x, \quad y = -i x.$$

Dieselben sind konjugiert imaginär, ihr reeller Schnittpunkt ist der Koordinatenanfang. Der beliebige Punkt (a, b), als Mittelpunkt eines Nullkreises genommen, liefert:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

oder die Geraden:

$$(4) \quad y = i x - i a + b, \quad y = -i x + i a + b.$$

Jeder Nullkreis zerfällt mithin in zwei konjugiert imaginäre Gerade, deren reeller Schnitt der Mittelpunkt des Kreises ist.

Man nennt die Schnittpunkte des Gebildes (2), durch die alle Kreise der Ebene, auch die Nullkreise, hindurchgehen, die „absoluten Kreispunkte“ (41.) und wir wollen uns erlauben, dieselben, wie wenn sie reelle Punkte wären, mit I und J zu bezeichnen. Natürlich sind die absoluten Kreispunkte konjugiert imaginär und ihre reelle Verbindungslinie ist die unendlich ferne Gerade der Ebene.

Geht ein Mittelpunktskegelschnitt der Ebene durch I und J hindurch, so muß seine Gleichung sich für $u = 0$ auf:

$$x^2 + y^2 = 0$$

vereinfachen. Das besagt:

Satz 69. Jeder Kegelschnitt einer Ebene, der durch die absoluten Kreispunkte dieser Ebene hindurchgeht, ist ein Kreis.

Die Minimalgeraden.

147. Jeden reellen Punkt (a, b) der Ebene können wir mit I und J verbinden und erhalten dadurch die Geraden (4). Dieselben heißen die durch diesen Punkt gehenden „Minimalgeraden“⁴⁴ oder auch „Gerade von der Länge Null“⁴⁴ oder „isotrope“⁴⁴ Gerade. Der Grund für die zweite Bezeichnung mag sofort erwähnt werden. Betrachten wir etwa die erste der beiden Minimalgeraden (3), so ist für sie:

$$dy = i dx \quad \text{und} \quad (dy)^2 = -(dx)^2$$

also:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = 0.$$

Die Entfernung zwischen irgend zwei auf einer Minimalgeraden gelegenen Punkten ist demnach als das Integral über ds stets gleich Null.

Um noch weitere Eigenschaften dieser Minimalgeraden zu erwähnen, erinnern wir uns daran, daß die Geraden:

$$y = kx, \quad y = k_1 x$$

eine Involution bilden, wenn zwischen k und k_1 eine symmetrisch-bilineare Beziehung gegeben ist (40.). Ist dieselbe von der Form:

$$1 + k k_1 = 0,$$

so steht jeder Strahl auf dem entsprechenden senkrecht und wir haben eine Rechtwinkelinvolution vor uns (41.),

Für die Parameter der Doppelstrahlen dieser Involution ist $k = k_1$ zu setzen, so daß:

$$1 + k^2 = 0, \quad k = \pm i;$$

die Geraden (3) geben aber diese Werte. Da ferner die Doppelemente jeder Involution jedes Elementenpaar harmonisch trennen, so müssen irgend zwei rechtwinklige Strahlen harmonisch liegen zu den durch ihren Schnittpunkt gehenden Minimalgeraden oder auch, kürzer ausgedrückt, zu den absoluten Kreispunkten I und J.

Zu den Kreisen der Ebene stehen die Minimalgeraden weiter in folgender Beziehung: Ist x', y' irgend ein Punkt der Ebene, so wird das von ihm aus an den Kreis (1) gehende Tangentenpaar bekanntlich durch:

$$ff' - p^2 = 0$$

gegeben, wobei $f' = f(x', y')$, während p die homogen geschriebene Polare von x', y' ist, also der Ausdruck:

$$p \equiv \frac{1}{2} \left\{ X \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)' + Y \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \right)' + U \left(\frac{\partial f}{\partial U} \right)' \right\}.$$

Betrachtet man mit Rücksicht darauf das vom Mittelpunkt a, b an den Kreis (1) gehende Tangentenpaar, so erhält man für diese „Asymptoten“ des Kreises:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0.$$

Es sind dies also wiederum die durch a, b gehenden Minimalgeraden. Sie berühren den Kreis in den Punkten I und J. Denn die Polare des Mittelpunktes fällt ja ins Unendliche. Da ferner diese Kreisasymptoten bloß die Koordinaten a, b des Mittelpunktes, den Radius r des Kreises dagegen gar nicht enthalten, so sind sie die gleichen für alle Kreise mit demselben Mittelpunkt. Konzentrische Kreise berühren sich demnach doppelt in den absoluten Kreispunkten. Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

Satz 70. Alle Kreise einer Ebene gehen durch zwei bestimmte, unendlich ferne, imaginäre Punkte I und J, die absoluten Kreispunkte dieser Ebene.

Jeder reelle Punkt der Ebene liefert, mit I und J verbunden, zwei konjugiert imaginäre Gerade, die „Minimalgeraden“, die zusammen auch als der Kreis vom Radius 0 oder als der Nullkreis gelten können, der seinen Mittelpunkt in diesem Punkte hat. Jede Minimalgerade deckt sich mit der auf ihr senkrechten. Irgend zwei aufeinander senkrechte, reelle Gerade trennen die absoluten Kreispunkte harmonisch. Die durch einen Punkt gehenden Minimalgeraden berühren jeden um diesen Punkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreis in den absoluten Kreispunkten.

Die Brennpunkte.

148. Ist irgend eine Kurve v -ter Klasse gegeben, die zunächst nicht durch I und J hindurchgeht, so kann man sich von jedem der absoluten Kreispunkte aus v Tangenten an die Kurve gelegt denken. Beide Gruppen von Geraden schneiden sich in v^2 Punkten, die man als die „Brennpunkte“ der Kurve bezeichnet. Jeder Brennpunkt hat also die Eigenschaft, daß von ihm aus je eine Tangente der Kurve nach den absoluten Kreispunkten geht. Von den v^2 Brennpunkten, die wir soeben gefunden haben, sind v reell; denn jeder Geraden durch I , welche die Kurve berührt, muß eine konjugiert imaginäre Tangente durch J entsprechen, falls die Kurvengleichung reelle Koeffizienten hat. Zwei solche konjugiert imaginäre Gerade schneiden sich aber in ihrem reellen Punkte.

Geht eine Kurve v -ter Klasse 0-mal durch den einen Kreispunkt I hindurch, so ist der andere Kreispunkt J ebenfalls ein a -facher Punkt dieser Kurve, wieder unter der Voraussetzung, daß die Gleichung der Kurve reelle Koeffizienten hat. Die durch I und J gehenden Tangenten an diese Kurve zerfallen dann in solche, die die Kurve in I oder J berühren, und in solche, deren Berührungspunkte von den Kreispunkten verschieden sind. Tangenten der ersten Art, d. h. also Asymptoten in den Kreispunkten, erhalten wir im allgemeinen Falle demnach je σ , die sich im ganzen in σ^2 Brennpunkten besonderer Art, sog. „singulären“ Brennpunkten, begegnen; σ derselben sind wieder reell und können als Nullkreise aufgefaßt werden, die die Kurve doppelt berühren, und zwar in den Kreispunkten selbst.

Außer diesen singulären Brennpunkten hat die Kurve noch gewöhnliche. Da die Tangente in einem Kurvenpunkt doppelt zu zählen ist, so gehen von dem σ -fachen Punkt I oder J noch je $v - 2\sigma$ Tangenten an die Kurve, die sich in $(v - 2\sigma)^2$ Brennpunkten, darunter $(v - 2\sigma)$ reellen, begegnen. Endlich können wir noch die in I oder J berührenden Tangenten mit den außerhalb der Kreispunkte berührenden Tangenten zum Schnitt bringen, was zu $2\sigma(v - 2\sigma)$ Brennpunkten führt. Zusammen sind dies $(v - \sigma)^2$ Brennpunkte. In ähnlicher Weise zählt man die Brennpunkte ab, wenn die unendlich ferne Gerade mehrfache Tangente der Kurve ist oder wenn I und J Spitzen, Wendepunkte usw. sind.

Beispielsweise hat ein Mittelpunktskegelschnitt vier Brennpunkte, von denen zwei reell sind. Der Mittelpunkt eines Kreises ist ein singulärer Brennpunkt.

Eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung, d. h. eine Kurve, die in I und J Doppelpunkte besitzt, ist von der achten Klasse, so daß durch I und J noch je vier nicht in diesen Punkten berührende Tangenten gehen. Diese liefern sechzehn gewöhnliche Brennpunkte, darunter vier reelle; ferner ergeben sich vier singuläre Brennpunkte, darunter zwei reelle usw.

Die möglichen Fälle der aus den absoluten Kreispunkten abgeleiteten Transformationen.

149. Wir wollen nun zwei Ebenen ε und ε' quadratisch aufeinander beziehen, indem wir die in ihnen gelegenen absoluten Kreispunkte I und J und J' und J' als Fundamentalpunkte benutzen. Das dürfen wir, da

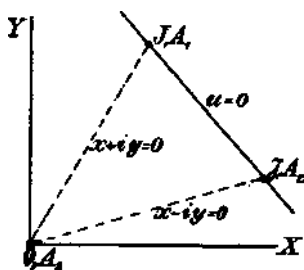


Fig. 74 a.

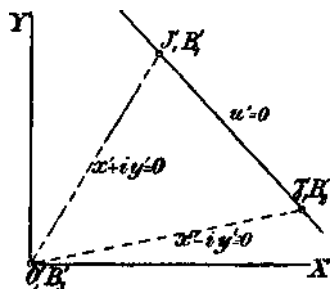


Fig. 74 b.

wir ja wissen, daß von den drei F.-Punkten in jeder Ebene zwei konjugiert imaginär sein können (144.). Verlegen wir also A_1 und A_2 nach I und J , B'_1 und B'_2 nach V und J' (Fig. 74a und 74b). In jeder Ebene ist dann noch ein reeller F.-Punkt A_3 und B'_3 anzunehmen und in diesem befinde sich der Anfang je eines rechtwinkligen Koordinatensystems, auf das sich die Koordinaten x, y in ε und x', y' in ε' beziehen. Im übrigen verfahren wir ganz wie in 138. Zwischen den Strahlenbüscheln A_1 oder I und B'_1 oder I' einerseits sowie zwischen den Strahlenbüscheln A_2 (J) und B'_2 (J') andererseits werde je eine projektive Beziehung hergestellt. Ein beliebiger reeller Punkt von ε wird mit I und J verbunden, die entsprechenden Strahlen der Büschel I' und J' schneiden sich im entsprechenden Punkte P' . Damit derselbe reell sei, sind die projektiven Beziehungen so zu bestimmen, daß diese beiden Strahlen konjugiert imaginäre werden; eine Bedingung, die wir am Schlusse der Rechnung einführen werden.

Der Strahl durch A_3 und I habe nun die Gleichung:

$$y = ix,$$

die wir in der Form schreiben $x = -i y$. Für das Büschel von Parallelstrahlen durch I erhalten wir demnach die Gleichung:

$$(1) \quad x = -i y + \lambda,$$

wo λ einen veränderlichen Parameter bezeichnet. Ist nun $y' = i x'$ der Strahl $B'_3 I'$, so wird ebenso das Strahlenbüschel I' :

$$(2) \quad x' = -i y' + \mu,$$

wobei eine bilineare Gleichung zwischen den Parametern λ und μ die projektive Beziehung der beiden Büschel vermittelt. Führen wir homogene Koordinaten $X, Y, U, \dots$ ein, so ergibt sich:

$$X + i Y - \lambda U = 0,$$

$$X' + i Y' - \mu U' = 0.$$

Diese Gleichungen stimmen aber dann mit den ersten zwei Gleichungen von 138. überein, wenn man dort x_2, x_3, x'_1, x'_2 ersetzt durch $X + i Y, U, X' + i Y', U'$.

Der Strahl $A_3 J$ hat ferner die Gleichung $y = -i x$ und das Strahlenbüschel J wird:

$$(3) \quad x = i y + A,$$

während das Strahlenbüschel B'_3 oder J' dann zu schreiben ist:

$$(4) \quad x' = i y' + M,$$

wo A und M wieder die Parameter bedeuten. Durch Einführung homogener Koordinaten erhalten wir demnach:

$$X - i Y - A U = 0.$$

$$X' - i Y' - M U' = 0$$

und der Vergleich mit den Gleichungen (2) von 138. läßt erkennen, daß neben den oben genannten Änderungen noch x_1 und x'_1 durch $X - i Y$ und $X' - i Y'$ ersetzt sind. Wir haben also nicht nötig, die ganze Betrachtung auch hier durchzuführen, sondern können ohne weiteres das frühere Ergebnis, nämlich die Formeln (3) bis (6) von 138., benutzen, nur haben wir an Stelle von:

$$x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$$

der Reihe nach zu setzen:

$$X - i Y, X + i Y, U, X' - i Y', X' + i Y', U'.$$

Dann liefert Gleichung (7) von 138.:

$$(5) \quad \begin{cases} X' - i Y' : X' + i Y' : U' = \\ = a (X + i Y) U : b (X - i Y) U : c (X - i Y) (X + i Y). \end{cases}$$

Dagegen dürfen wir nicht außer acht lassen, daß es ganz in unserer Willkür liegt, welches Vorzeichen von i wir dem Punkte I und welches dem

Punkte J zuordnen. Wir können also dem Büschel J , das durch (1) gegeben ist, statt des Büschels (2) auch zuweisen das Strahlenbüschel:

$$(6) \quad x' = +i y' + \mu,$$

so daß die beiden projektiven Strahlenbüschel A_1 und B'_1 jetzt werden:

$$X + iY - \lambda U = 0,$$

$$X' - iY' - \mu U' = 0.$$

Das soll in den Figuren 75 veranschaulicht werden, in denen ebenso wie in den Figuren 74 die abstrakten, imaginären Gebilde als reelle gezeichnet

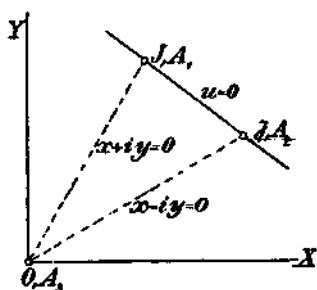
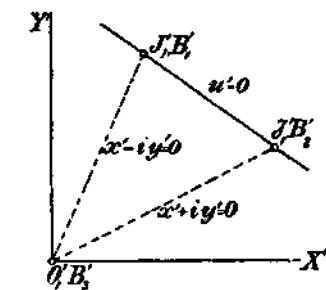


Fig.

75



a.

Fig. 75 b.

sind und die deswegen als schematische bezeichnet werden. Dem Strahlenbüschel (3) muß dann zugewiesen werden das Büschel:

$$(7) \quad x' = -i y' + M,$$

was zu den Gleichungen führt:

$$X - iY - \lambda U = 0,$$

$$X' + iY' - M U' = 0.$$

Der Unterschied besteht mithin lediglich darin, daß im letzteren Falle:

$$x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$$

der Reihe nach zu ersetzen sind durch:

$$X - iY, X + iY, U, X' + iY', X' - iY', U',$$

so daß neben die Formel (5) die folgende tritt:

$$(8) \quad \begin{cases} (X' + iY'):(X' - iY'):U' = \\ = a(X + iY)U:b(X - iY)U:c(X - iY)(X + iY), \end{cases}$$

womit aber auch alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Behandeln wir zunächst (5) weiter, so ergibt sich:

$$\frac{X' - iY'}{U'} = \frac{a}{c} \frac{(X + iY)U}{X^2 + Y^2},$$

$$\frac{X' + iY'}{U'} = \frac{b}{c} \frac{(X - iY)U}{X^2 + Y^2}$$

oder nicht homogen geschrieben:

$$(9) \quad x' - i y' = \frac{a}{c} \frac{x + i y}{x^2 + y^2}, \quad x' + i y' = \frac{b}{c} \frac{x - i y}{x^2 + y^2}.$$

Um auf reelle Gleichungen zu kommen, vergleichen wir die von i freien Glieder sowie die mit i multiplizierten und erhalten:

$$x' = \frac{a}{c} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{a}{c} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

sowie:

$$x' = \frac{b}{c} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{b}{c} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Diese Gleichungen sind zur Übereinstimmung zu bringen, wenn $a = b$ gesetzt wird, was zugleich die obenerwähnte Bedingung ist. Schreiben wir:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = k,$$

so erhalten wir also im ersten Falle die Gleichungen:

$$(10) \quad x' = k \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -k \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Bilden wir daraus noch:

$$x' + i y' = k \frac{x - i y}{x^2 + y^2} = \frac{k}{x + i y}$$

sowie:

$$x' - i y' = k \frac{x + i y}{x^2 + y^2} = \frac{k}{x - i y},$$

so wird:

$$(11) \quad x + i y = k \frac{x' - i y'}{x'^2 + y'^2}, \quad x - i y = k \frac{x' + i y'}{x'^2 + y'^2}$$

und es ergeben sich für x, y die Ausdrücke:

$$(12) \quad x = k \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = -k \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Gleichung (8) liefert, ganz ebenso behandelt:

$$(13) \quad x' + i y' = \frac{a}{c} \frac{x + i y}{x^2 + y^2}, \quad x' - i y' = \frac{b}{c} \frac{x - i y}{x^2 + y^2}$$

und weiter unter Einführung der gleichen Größe k :

$$(14) \quad x' = k \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = k \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Wie oben findet man ferner:

$$(15) \quad x = k \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = k \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

150. Bezeichnen wir mit r den Abstand eines Punktes P von A_3 , mit r' den des entsprechenden Punktes P' von B'_3 , so daß also:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad r' = +\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

so geben die Formeln (10) und (12) oder (14) und (15) ohne weiteres:

$$r^2 r'^2 = k^2,$$

also:

$$(16) \quad r r' = k \quad \text{oder auch} \quad r' = \frac{k}{r}.$$

Es ist also das Produkt der Abstände OP , $O'P'$ entsprechender Punkte vom jedesmaligen reellen F.-Punkt von unveränderlicher Größe.

Beiden Verwandtschaften gemeinsam ist ferner die Eigenschaft, daß jeder Geraden ein Kreis im anderen Felde entspricht, der durch den reellen F.-Punkt hindurchgeht. Aber auch einem Kreise der einen Ebene entspricht ein Kreis der anderen (**140.**, Satz 69 in **146.**). Betrachtet man eine Gerade als einen besonderen Fall des Kreises, so kann man allgemein sagen: Jeder Kreis geht wieder in einen Kreis über.

Endlich ist es auch leicht, die Transformation (10) mit der Transformation (14) in einen direkten Zusammenhang zu bringen. Entspricht in der letzteren einem Punkte P der Punkt P' , so wollen wir die Ebene ε' nochmals auf sich selbst abbilden unter Benutzung der Formeln:

$$(17) \quad x'' = x', \quad y'' = -y'$$

Dadurch wird einem Punkte P' ein Punkt P'' zugeordnet, der zu P' symmetrisch liegt in bezug auf die X' -Achse. Rein geometrisch erreichen wir dies dadurch, daß wir die Ebene ε' um die X' -Achse durch einen Winkel von 180° drehen. Physikalisch können wir diese Abbildung (17) als eine „Spiegelung“ an der X' -Achse bezeichnen. Führen wir nun die Transformation (14) aus und danach diese Spiegelung in der Ebene ε' , so bestehen zwischen den Punkten P und P'' die Beziehungen:

$$(18) \quad x'' = k \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y'' = -k \frac{y}{x^2 + y^2}$$

und das ist die Transformation (10). Es folgt also

Satz 71 • Die Transformation (10) läßt sich zusammensetzen aus der Transformation (14) und aus einer Spiegelung an der X -Achse.

§ 30. Die Inversion in der Ebene.

Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen.

151. Nach diesen Ergebnissen können wir uns im wesentlichen auf die Betrachtung der durch die Gleichungen (14) gegebenen Beziehung beschränken. Lassen wir ferner noch die Ebenen ε und ε' zusammenfallen in der Weise, daß die Koordinatensysteme sich decken, so daß

sich also x, y und x', y' auf das gleiche Koordinatensystem beziehen, so geben die Gleichungen (14) eine durchweg involutorische Beziehung. Mit Rücksicht auf die Gleichung (16) ist sie schon von Liouville als „Transformation durch reziproke Radien“ bezeichnet worden. Sie heißt aber auch „Inversion“, der Koordinatenanfang „Inversionsmittelpunkt“, die Größe k die „Potenz“ der Inversion. Dem Inversionsmittelpunkt entspricht die unendlich ferne Gerade; alle Geraden durch ihn entsprechen sich selbst. Die Potenz k kann positiv oder negativ sein. Wir leiten zunächst einige Eigenschaften ab, die für beide Fälle richtig bleiben.

Ein Punkt P habe die Koordinaten x, y , ein ihm unendlich benachbarter Q die Koordinaten $x + dx, y + dy$. Diesen Punkten entsprechen die Punkte P', Q' mit den Koordinaten $(x', y'), (x' + dx', y' + dy')$. Dann liefern die Gleichungen (14):

$$(19) \quad \begin{cases} dx' = k \frac{(y^2 - x^2) dx - 2xy dy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ dy' = k \frac{-2xy dx + (x^2 - y^2) dy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{cases}$$

Für die Entfernungen PQ und $P'Q'$, also für die Größen:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \text{und} \quad (ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2$$

erhalten wir dann

$$(ds')^2 = \frac{k^2}{(x^2 + y^2)^2} (ds)^2,$$

oder wenn:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2$$

gesetzt und Gleichung (16) benutzt wird:

$$(20) \quad ds' = \frac{k}{r^2} ds = \frac{r'^2}{k} ds$$

und:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{k}{r^2} = \frac{r'^2}{k}.$$

Das Verhältnis ds'/ds zweier einander entsprechender Linienelemente können wir als den „Maßstab“ der Abbildung bezeichnen. Wird P , also auch P' , festgehalten, während die durch P und P' hindurchgehenden Elemente verändert werden, so bleibt das Verhältnis ds'/ds unverändert. Es ändert sich aber auch nicht, wenn P einen Kreis um den Inversionsmittelpunkt beschreibt. Im übrigen wechselt der Maßstab von Punkt zu Punkt.

Ist ferner R ein zweiter, dem Punkte P unendlich benachbarter Punkt mit den Koordinaten $x + \delta x, y + \delta y$ und ist die Entfernung $PR = \delta s$, so gilt auch die Beziehung:

$$\delta s' = \frac{k}{r^2} \delta s.$$

Die beiden Elemente ds und δs mögen einen Winkel α einschließen, die entsprechenden Linienelemente ds' und $\delta s'$ einen Winkel α' . Dann ist bekanntlich:

$$\cos \alpha' = \frac{dx' \delta x' + dy' \delta y'}{ds' \delta s'}.$$

Bildet man aber diesen Ausdruck nach (19) und (20), so finden wir ohne Mühe, daß α und α' gleich groß sind.

Die Transformation gehört also zu der großen Familie der „winkel-treuen“, „isogonalen“ oder „konformen“ Abbildungen.

Gehen durch einen reellen Punkt P (der nicht im Koordinatenanfang gelegen ist) irgend zwei Kurven der einen Ebene und suchen wir die Bilder dieser Kurven in der anderen Ebene, so bilden diese im entsprechenden Punkte P' den gleichen Winkel wie die gegebenen Kurven in P .

Um auch noch den Sinn zu bestimmen, worin entsprechende Winkel durchlaufen werden, betrachten wir das unendlich kleine Dreieck PQR und das ihm entsprechende $P'Q'R'$. Der doppelte Flächeninhalt des letzteren ist, (56.) auch dem Sinne nach:

$$2 \Delta (P'Q'R') = \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x' + dx' & y' + dy' & 1 \\ x' + \delta x' & y' + \delta y' & 1 \end{vmatrix} = dx' \delta y' - \delta x' dy'.$$

Rechnen wir unter Benutzung von (19) die linke Seite aus, so finden wir:

$$\Delta (P'Q'R') = -\frac{k^2}{r^4} \Delta (PQR),$$

oder wenn wir mit $d\omega$ und $d\omega'$ zwei entsprechende, unendlich kleine Flächeninhalte bezeichnen (vom Vorzeichen abgesehen):

$$(21) \quad d\omega' = \frac{k^2}{r^4} d\omega = \frac{r'^4}{k^2} d\omega.$$

Es werden also für positive oder negative Werte von k entsprechende unendlich kleine Flächen im entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Dies veranschaulichen die Figuren 76 und 78 für die sich entsprechenden unendlich kleinen Dreiecke $P12$ und $P'1'2'$. Die Gleichung (21) gibt endlich noch den Wert für das Verhältnis $d\omega'/d\omega$ entsprechender unendlich kleiner Flächen. Derselbe ist gleich dem Quadrat des Maßstabes für die Längenelemente. Im Koordinatenanfang und seiner Nachbarschaft, die sich ja ins Unendliche abbilden, erleidet die sonst überall in der Ebene vorhandene Stetigkeit der Abbildung eine Ausnahme.

Die Inversion mit positiver Potenz.

152. Nehmen wir jetzt an, die Potenz k sei positiv, so daß wir $k = r_0^2$ setzen können. Wir fragen zunächst nach den Punkten, die sich selbst

entsprechen. Für sie ist $x = x'$, $y = y'$ und es ergibt sich aus beiden Gleichungen (14):

$$x^2 + y^2 = r_0^2.$$

Alle diese Koinzidenzpunkte liegen also auf einem Kreise, dem sog. „Inversionskreise“ K_0 . Ist P irgend ein Punkt der Ebene, der außerhalb dieses Kreises gelegen sein mag, so liegt der ihm entsprechende Punkt P' zunächst einmal auf dem Durchmesser OP (Fig. 76). Schneidet derselbe den Inversionskreis in M und N , so findet man P' , indemman von P aus die Tangenten PT und PU an den Inversionskreis zeichnet. Die Gerade TU , die Polare von P in bezug auf den Inversionskreis, schneidet dann auf PO den entsprechenden Punkt P' aus, wobei noch bemerkt

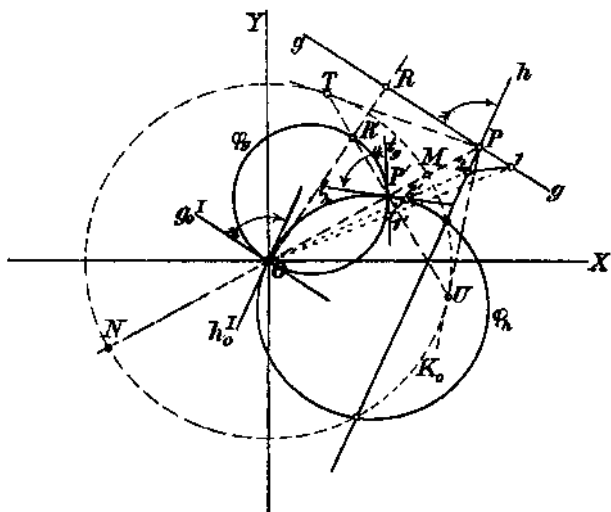


Fig. 76.

werden mag, daß TU auf dem Durchmesser OP senkrecht steht. Diese letzte Eigenschaft zeigt dann gleichzeitig, wie man zu einem innerhalb des Inversionskreises gelegenen Punkt P' den entsprechenden P konstruiert. Aus der Figur lesen wir sofort die Beziehung ab:

$$OP \cdot OP' = r_0^2 = k$$

oder:

$$OP' = k \frac{1}{OP}.$$

Die ganze außerhalb des Inversionskreises gelegene Ebene bildet sich in das Innere dieses Kreises ab, die unendlich ferne Gerade in den Mittelpunkt desselben. Jedem unendlich fernen Punkte Q entspricht jener Punkt Q' des Durchmessers OQ , der O unendlich benachbart liegt. Der Inversionskreis, der sich Punkt für Punkt selbst entspricht, vermittelt

den Übergang. Linien-oder Flächenelemente, die von ihm ausgehen, sind nach den Gleichungen (20) und (21) ebenso groß wie ihre entsprechenden.

Einer Geraden g entspricht ein Kreis φ_g (Fig. 76); dem unendlich fernen Punkte von g ist zugeordnet der auf der Parallelen g_o^I zu g durch O gelegene und zu O unendlich benachbarte Punkt. Es berührt demnach φ_g in O die Gerade g_o^I ; auf der von O auf g gefällten Senkrechten liegt ein Durchmesser des Kreises φ_g und der dem Fußpunkte R dieser Senkrechten entsprechende Punkt R' liefert in OR' den Durchmesser von φ_g . Den geometrischen Zusammenhang zwischen der Geraden g , dem Kreise φ_g und dem Inversionskreise K_0 gibt die Beziehung:

$$(PT)^2 = PP' \cdot PO = PM \cdot PN,$$

die besagt, daß die Gerade g die Potenzlinie oder Radikalachse der beiden Kreise K_0 und φ_g ist, was auch durch die Rechnung unmittelbar zu erweisen ist. Es geht also φ_g durch die Schnittpunkte von g mit dem Inversionskreise hindurch. Dies ist selbstverständlich für eine Gerade, die, wie z. B. h, den Inversionskreis in reellen Punkten trifft. Um zu zeigen, wie diese Abbildung die Winkel erhält, aber ihren Sinn ändert, ist in der Fig. 76 zu dem einen der Winkel, die g und h in P bilden, der auch dem Sinne nach gleiche Winkel der parallelen Kreistangenten g_o^I und h_o^I in O gezeichnet. Der Winkel der Kreise im Punkte P' , d. h. der Winkel den t_g und t_h einschließen, zeigt den entgegengesetzten Sinn.

Wir können also sagen:

Satz 72. *Einer beliebigen Geraden g entspricht in der (gewöhnlichen) Inversion ein Kreis φ_g durch den Inversionsmittelpunkt, der dort eine zu g parallele Tangente hat. Der Kreis φ_g und der Inversionskreis haben g zur Potenzlinie.*

Entsprechende Kreise.

153. Einem beliebigen Kreise mit dem Mittelpunkte M (Fig. 77) entspricht wieder ein Kreis und es folgt aus der Symmetrie der Figur ohne weiteres, daß der Mittelpunkt N' dieses zweiten Kreises auf der Geraden OM gelegen sein muß. Beide Kreise haben den Inversionsmittelpunkt O zum Ähnlichkeitspunkt. Denn ist P' der dem Punkte P entsprechende, P^1 der zweite Schnittpunkt von OP mit dem ersten Kreise (Fig. 77), bezeichnet man ferner die Potenz des Punktes O in bezug auf den Kreis (M) mit p^2 , so gelten die Beziehungen:

$$PO \cdot P'O = r_o^2,$$

$$PO \cdot P^1O = p^2,$$

also

$$\frac{P'O}{P^1O} = \frac{r_o^2}{p^2} = \text{konst.}$$

Demnach erhält man die Punkte P' aus den Punkten P^1 des Kreises (M) , indem man jeden Radiusvektor im bestimmten Verhältnis verändert,

d. h. durch eine Ähnlichkeitstransformation; O ist also ein Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. In dieser Ähnlichkeitstransformation entsprechen sich aber die Mittelpunkte der beiden Kreise, also ist auch:

$$\frac{N'O}{MO} = \frac{P'O}{P'O} = \frac{r_o^2}{p^2},$$

so daß folglich:

$$MP^1 \parallel N'P'.$$

Mittels dieser Eigenschaft findet man leicht den Mittelpunkt N' , indem man zu dem beliebigen Punkte P des gegebenen Kreises (M) den entsprechenden P' sowie den Hilfspunkt P^1 ermittelt und durch P' eine

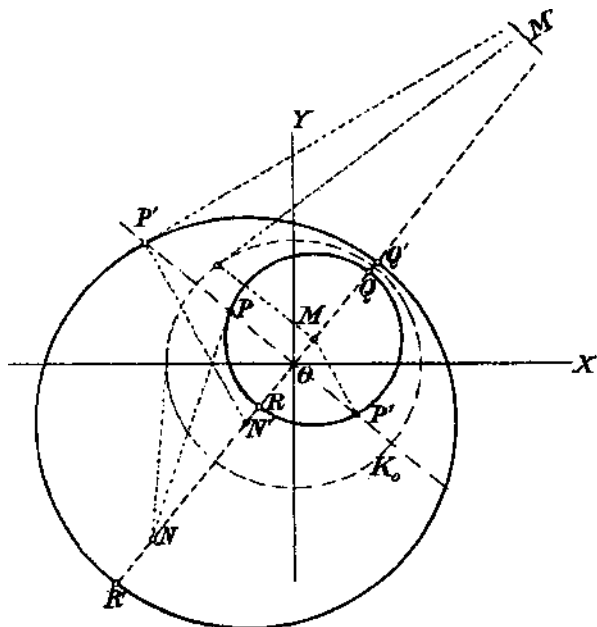


Fig. 77.

Parallele zu MP^1 zieht. Diese liefert auf OM den gesuchten Mittelpunkt N' des entsprechenden Kreises. In der Inversion entsprechen sich die Kreismittelpunkte M und N' natürlich keineswegs, was (unter Benutzung von 148.) direkt bewiesen werden kann. (Vgl. auch 155.) Doch läßt sich ein einfacher Zusammenhang angeben. Entspricht nämlich dem Punkte M in der Inversion der Punkt M' und schneidet der Durchmesser OM den Kreis (M) in Q und R , den Kreis (N') in Q' und R' , so liegt M harmonisch zu Q und R bezüglich des unendlich fernen Punktes von OM . Da nun aber auf jedem Strahle durch O sich involutorische Punktreihen ausbilden, da ferner dem unendlich fernen Punkte der Inversionsmittelpunkt O entspricht, so ist auch M' der vierte harmonische zu O bezüglich R' , Q' ;

M' entspricht also dem Punkte 0, wenn der Kreis (N') zu einer Inversion benutzt wird. Eine analoge Beziehung gilt für den Punkt N .

Die beiden einander entsprechenden Kreise (M) und (N') haben ferner noch die Eigenschaft, daß sie in Verbindung mit dem Inversionskreis ein Büschel bilden. Der Beweis hierfür ergibt sich durch die Rechnung sehr einfach. Die Gleichung des Kreises (M) sei:

$$K \equiv (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - r^2 = 0.$$

Führen wir, unter Anwendung der Formeln (14) in 149., die Transformation wirklich aus, so ergibt sich, nach Unterdrückung des Faktors $x^2 + y^2$, der, $= 0$ gesetzt, die F.-Geraden OI und OJ liefert:

$$(x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - 2k(\alpha x + \beta y) + k^2 = 0,$$

was sich auch in folgender Form schreiben läßt:

$$k\{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2\} + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2 - k)(x^2 + y^2 - k) = 0$$

oder:

$$(22) \quad kK + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2 - k)K_0 = 0.$$

Es geht also der entsprechende Kreis durch die Schnittpunkte von $K = 0$ und $K_0 = 0$ hindurch, womit die vorige Behauptung erwiesen ist. Schneidet der gegebene Kreis (M) den Inversionskreis in reellen Punkten, so versteht sich der Satz von selbst.

Aus der Gleichung (22) folgt aber noch weiter, daß:

$$(23) \quad \alpha^2 + \beta^2 - r^2 - k = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür gibt, daß ein Kreis durch die Inversion in sich selbst transformiert werde. Da ferner im vorliegenden Falle $k = r_0^2$, so hat die Bedingung:

$$(24) \quad \alpha^2 + \beta^2 = r^2 + r_0^2$$

die geometrische Bedeutung, daß ein solcher Kreis den Inversionskreis orthogonal schneidet. Denn sie besagt, daß das Dreieck OMS rechtwinkelig ist, wenn S einer der Schnittpunkte des Kreises mit dem Inversionskreis ist. Die Strahlen durch den Inversionsmittelpunkt O können als spezielle derartige Kreise betrachtet werden.

Sind ferner P und P' zwei einander entsprechende Punkte der Inversion, so wird irgend ein Kreis durch diese Punkte den Inversionskreis in reellen Punkten W , U treffen, da ja von zwei entsprechenden Punkten der eine innerhalb, der andere außerhalb des Inversionskreises gelegen ist. Dem Kreise durch P , W , U entspricht mithin ein Kreis durch die Punkte P' , W , U , d. h. der erwähnte Kreis geht in sich selbst über und schneidet also den Inversionskreis orthogonal.

Ist Q , Q' ein zweites Paar entsprechender Punkte, so gilt für den Kreis durch P , P' , Q die gleiche Überlegung. Derselbe enthält deswegen auch den Punkt Q' .

Wir erhalten demnach weiter

Satz 73. Jedem Kreise entspricht in der gewöhnlichen Inversion wieder ein Kreis', für beide Kreise ist der Inversionsmittelpunkt ein Ähnlichkeitspunkt und beide Kreise gehören mit dem Inversionskreise einem Büschel an. Jeder Kreis, der den Inversionskreis orthogonal schneidet, geht in sich selbst über und umgekehrt. Irgend ein Kreis durch zwei entsprechende Punkte schneidet den Inversionskreis orthogonal und irgend zwei Paare entsprechender Punkte liegen auf einem solchen Kreise.

Nach Satz 67 in 140, wird allgemein einer Kurve n -ter Ordnung, die nicht durch den Inversionsmittelpunkt hindurchgeht, eine Kurve von der Ordnung $2n$ entsprechen, die O sowie die absoluten Kreispunkte I und J zu n -fachen Punkten hat. Einem Wendepunkt W einer Kurve entspricht im allgemeinen nicht wieder ein Wendepunkt. Vielmehr geht die Wendetangente in den Krümmungskreis des entsprechenden Punktes W über, wobei ersterer nur die Eigenschaft hat, durch O zu gehen. Dagegen entspricht jedem Krümmungskreis einer Kurve im allgemeinen wieder der Krümmungskreis des entsprechenden Punktes.

Aufgabe 35: Einen Kreis zu zeichnen, der drei durch einen Punkt gehende Kreise berührt. Man transformiere die Ebene durch eine Inversion, die den gegebenen Punkt zum Mittelpunkt hat; dann geht die Aufgabe in die andere über: Einen Kreis zu finden, der drei Gerade berührt.

Aufgabe 36: Zwei Kreise sind gegeben und ein Punkt. Einen Kreis zu zeichnen, der durch den Punkt geht und die zwei Kreise berührt.

Aufgabe 37: Gegeben sind zwei Gerade x und y und ein Punkt P . Durch den Punkt eine Gerade so zu zeichnen, daß $PX \cdot PY = a^2$, wenn X und Y die Schnittpunkte der Geraden mit x und y sind und a eine gegebene Strecke ist.

Man verallgemeinere die Aufgabe, wenn an Stelle der Geraden andere Kurven, z. B. Kreise, treten.

Aufgabe 38: Gegeben sind ein Kreis und zwei Punkte; man zeichne einen Kreis, der durch die zwei Punkte geht und den gegebenen Kreis orthogonal schneidet.

Die Inversion mit negativer Potenz.

154. Ist k negativ, also etwa:

$$k = -r_0^2,$$

so ergibt sich als Ort der Koinzidenzpunkte der „imaginäre Kreis“:

$$x^2 + y^2 = -r_0^2$$

und reelle Koinzidenzpunkte fehlen gänzlich. Zunächst werden wir fragen, wie man in diesem Falle zu einem beliebigen Punkte P den ent-

sprechenden P' durch eine Konstruktion ermittelt. Wir führen zu diesem Zwecke die Inversion ein, welche den reellen Inversionskreis vom Radius r_0 besitzt; entspricht in dieser Inversion dem Punkte P der Punkt P'' (Fig. 78), so erhalten wir für P'' die Koordinaten [(14) in 149.]:

$$x'' = r_0^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y'' = r_0^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Nehmen wir dazu die Transformation:

$$(25) \quad x'' = -x', \quad y'' = -y',$$

so entspricht in ihr dem Punkte P'' ein Punkt P' ; dieser ist auch der dem Punkte P durch die Gleichungen (14) von 149. zugeordnete. Der

Punkt P' liegt aber auf der Geraden OP'' , sodaß $OP' = OP''$. Die durch die Gleichungen (25) gegebene Abbildung der Ebene kann man daher als eine Symmetrie in bezug auf den Punkt O bezeichnen. Wir kommen aber auch durch zwei Umlegungen, eine erste um die X-Achse, eine zweite um die Y-Achse, vom Punkte P'' zu P' ; es folgt demnach

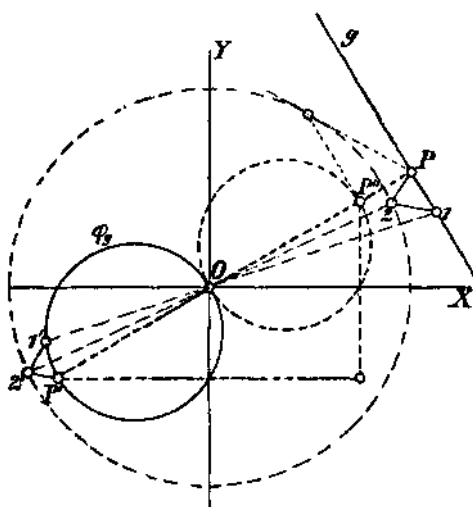


Fig. 78.

Satz 74. Die Inversion mit imaginärem Inversionskreis oder mit negativer Potenz läßt sich zusammensetzen aus einer gewöhnlichen Inversion mit der absolut gleichen, aber positiven Potenz und aus zwei Spiegelungen an zwei zueinander senkrechten Achsen durch den Inversionsmittelpunkt.

Der Geraden g entspricht z. B. der Kreis φ_g (Fig. 78). Der Kreis:

$$(26) \quad x^2 + y^2 = r_0^2$$

geht bei dieser Inversion in der Weise in sich selbst über, daß jedem seiner Punkte der diametral gegenüberliegende entspricht. Die Transformation führt aber noch ² Kreise in sich selbst über, nämlich alle diejenigen, die den Kreis (26) in den Endpunkten eines seiner Durchmesser schneiden. In der Tat ist dies der geometrische Sinn der Bedingung (23), welche für $k = -r_0^2$ die Form annimmt:

$$\alpha^2 + \beta^2 = r_0^2 - r_0^2$$

Die invariable Natur der Brennpunkte.

155. Die Transformationen (10) und (14) in **149.** hatten, sowohl auf getrennte als auch auf vereinigte Ebenen bezogen, die Eigenschaft, daß sie die Strahlenbüschel der absoluten Kreispunkte ineinander oder in sich überführten. Nun war aber ein Brennpunkt einer Kurve der reelle oder imaginäre Schnittpunkt zweier durch die absoluten Kreispunkte der betreffenden Ebene gehender Tangenten dieser Kurve. Also geht er wieder in einen Brennpunkt der entsprechenden Kurve über. Nennen wir die in einer Inversion einer Kurve entsprechende Kurve kurz deren „Inverse“, so gilt mithin der

Satz 75. In einer Inversion, deren Mittelpunkt sich in bezug auf eine, Kurve in allgemeiner Lage befindet, transformieren sich die gewöhnlichen Brennpunkte einer Kurve in die der Inversen.

Für die singulären Brennpunkte, welche Schnittpunkte von in I oder J berührenden Tangenten waren, trifft dies nicht mehr zu. In der Tat entsprach ja auch in einer Inversion z. B. dem Mittelpunkt eines Kreises nicht der Mittelpunkt des entsprechenden Kreises (153.).

Nehmen wir beispielsweise einen Kegelschnitt, der durch keinen der F .-Punkte geht, so entspricht ihm (Satz 67 in **140.**) in einer Inversion eine rationale Kurve vierter Ordnung, die in 0 , I , J Doppelpunkte besitzt, also eine „bizirkulare“ Kurve. Im Inversionsmittelpunkt 0 sind reelle oder imaginäre Tangenten vorhanden, je nachdem der Kegelschnitt

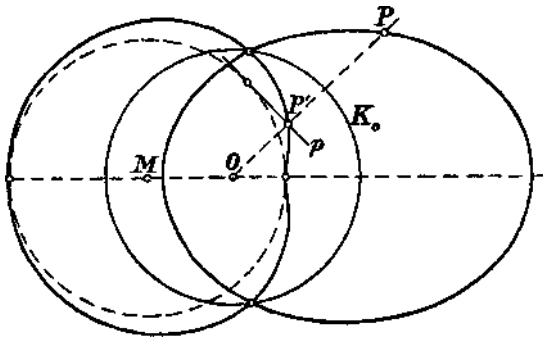


Fig. 79 a.

eine Hyperbel oder Ellipse ist. Für eine Parabel erhält die Kurve vierter Ordnung in 0 eine Spitze (141.). Den vier Brennpunkten des Kegelschnittes entsprechen vier Brennpunkte der Kurve vierter Ordnung. Dieselbe läßt sich auch auf folgende Art erzeugen. Zu einem Punkte P des Kegelschnittes finden wir doch den entsprechenden P' (Fig. 79a), indem wir die Polare p von P in bezug auf den Inversionskreis K_0 mit der Linie OP (in P') zum Schnitt bringen (vgl. 152.). Durchläuft nun P den Kegelschnitt, den wir kurz mit $[P]$ bezeichnen wollen, so umhüllen die

Polaren p einen zweiten Kegelschnitt $[p]$, der in der polar-reziproken Beziehung, die durch den Inversionskreis K_0 bestimmt wird (80.), dem Kegelschnitt $[P]$ entspricht. Die Punkte P' lassen sich mithin auch auf andere Art auffinden: als Ort der Fußpunkte der von O auf die Tangenten des Kegelschnittes $[p]$ gefällten Senkrechten; dieser Ort heißt dann die Fußpunktkurve von $[p]$ in bezug auf den Pol O .

Geht man umgekehrt von irgend einem Kegelschnitt $[p]$ aus und konstruiert für O als Pol die zugehörige Fußpunktkurve $[P']$, so ist der Ort der Pole P der entsprechenden Tangenten in bezug auf den Inversionskreis ein Kegelschnitt, der in der Inversion dem Orte $[P']$ entspricht. Da

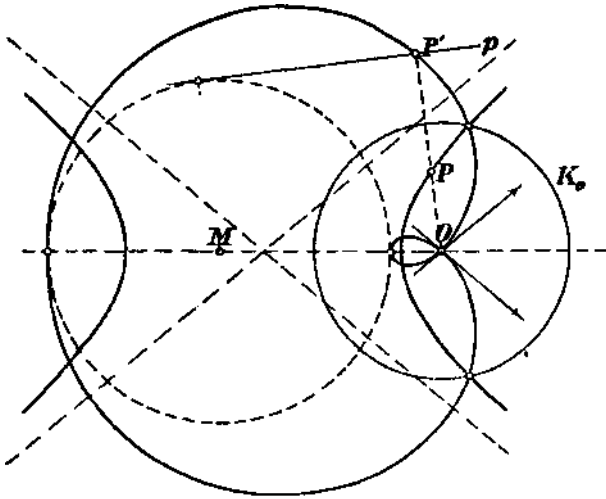


Fig. 70b.

die Kurve $[P']$ von der vierten Ordnung ist, so muß sie also in O , I , J Doppelpunkte besitzen, damit ihr ein Kegelschnitt entsprechen kann. Es folgt demnach

Satz 76. *Die Inverse eines Kegelschnittes in bezug auf einen beliebigen Inversionsmittelpunkt ist identisch mit der Fußpunktkurve eines zweiten Kegelschnittes, wenn der Inversionsmittelpunkt als Pol derselben benutzt wird. Dieser zweite Kegelschnitt entspricht dem ersten polar-reziprok in bezug auf den Inversionskreis.*

Eine weitere Besonderheit tritt ein, wenn der Kegelschnitt $[P]$ den Inversionsmittelpunkt O zum Brennpunkt hat. Unter dieser Voraussetzung berühren die Geraden OI und OJ diesen Kegelschnitt und folglich (141., 148.) hat die entsprechende Kurve vierter Ordnung $[P']$ in I und J Spitzen. Im Punkte O verhält sie sich ebenso wie im allgemeinen Falle.

Was nun die zweite Erzeugung dieser Kurven vierter Ordnung anbelangt, so erkennt man leicht, daß nun auch der zweite Kegelschnitt $[p]$

ein Kreis wird. Denn die Linie Ol , die den Kegelschnitt $[P]$ berührt, ist auch Tangente des Inversionskreises K_0 und es entspricht ihr also der Berührungspunkt, d. h. der Punkt I . Andererseits gehen die Tangenten des Kegelschnittes $[P]$ durch die polar-reziproke Beziehung über in die Punkte des Kegelschnittes $[p]$, folglich geht dieser Kegelschnitt durch I und auch durch J hindurch, muß demnach ein Kreis sein. Es ergibt sich

Satz 77. *Die Inversen eines Kegelschnittes, der den Inversionsmittelpunkt im Brennpunkt hat, sind identisch mit den Fußpunktkurven eines Kreises. Sie haben in den absoluten Kreispunkten Spitzen und im Inversionsmittelpunkt einen Doppelpunkt mit imaginären oder reellen Tangenten oder eine Spitze, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist*

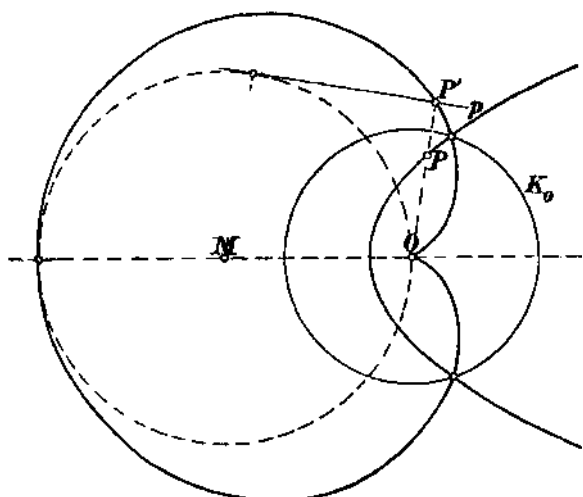


Fig. 79 c.

Die Figuren 79a, 79b, 79c zeigen diese drei Fälle und die Lage des Kreises $[p]$ und des Poles O .

Roberval hat diese Kurven nach dem älteren Stephan Pascal, dem Vater des Blaise Pascal, Pascalsche „Schnecken“ (Limaçon de Pascal) genannt. Die den Übergang vermittelnde Kurve mit drei Spitzen (Fig. 79c) heißt auch „Herzkurve“ oder „Kardioiden“.

§ 31. Apparate zur mechanischen Herstellung einer Inversion.

Der Peaucelliersche Inversor.

156. Der älteste Apparat, der mechanisch die Beziehung der Inversion herstellt, ist der von Peaucellier²⁶⁾. Vier Stäbe von der Länge b sind durch Gelenke zu einem Rhombus $PQ P'Q'$ verbunden (Figuren 80 a und 80 b), außerdem ist in den Ecken Q und Q' noch ein aus den zwei gleich langen Stäben $OQ = OQ' = a$ bestehendes Knie an-

geschlossen in der Art, daß O, P, P' auf einer Geraden liegen. Dabei kann O auf der Verlängerung von PP' angenommen werden (Fig. 80 a) oder auch auf der Strecke PP' selbst (Fig. 80b), je nachdem $a \gtrless b$.

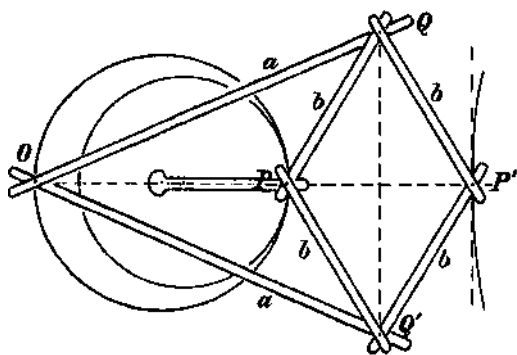


Fig. 80 a.

Zeichnen wir um Q als Mittelpunkt mit b als Radius einen Kreis und bringen OQ mit ihm in R und S zum Schnitt, so ist beide Male:

$$OP \cdot OP' = OR \cdot OS$$

und daraus folgt für die Fig. 80 a:

$$(1) \quad OP \cdot OP' = a^2 - b^2,$$

dagegen für die Fig. 80 b:

$$(2) \quad OP \cdot OP' = b^2 - a^2.$$

Halten wir O fest, während wir den Punkt P innerhalb der durch den Mechanismus vorgeschriebenen Grenzen auf einer Kurve führen, so beschreibt zufolge dieser Beziehung P'

die inverse Kurve; im ersten Falle erhalten wir eine Inversion mit positiver, im zweiten eine mit negativer Potenz. Doch können wir ebensogut im ersten Falle P festhalten und die von O und P' durchlaufenen Figuren benutzen.

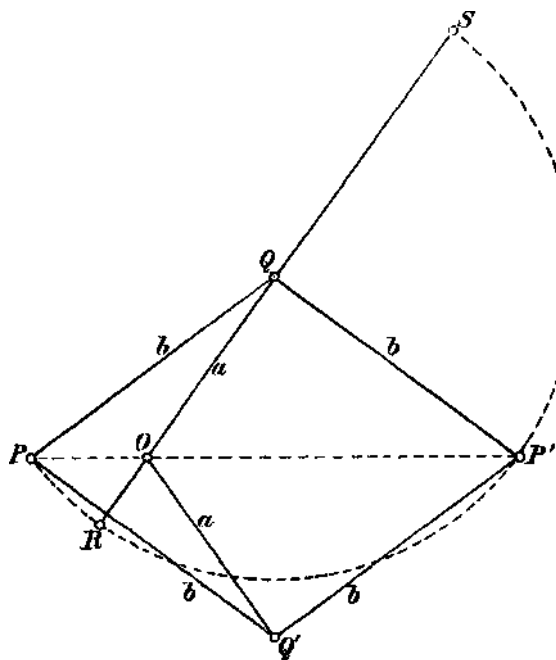


Fig. 80b.

Bringt man einen weiteren Stab so an, daß P einen durch O gehenden Kreis beschreibt (Fig. 80 a), so wird dadurch P' auf einer Geraden geführt. Der Apparat verwandelt also diese kreisförmige Bewegung in eine geradlinige, er gibt eine mathematisch richtige Ge-

radführung, während die berühmte, von James Watt (1784) bei seiner Dampfmaschine angewandte, nur eine angenäherte ist.

Führt man den Punkt P auf einem Kreise, der nahe an O vorbeigeht, so beschreibt P' einen Kreis von großem Radius.

Durch passende Verbindung zweier solcher Mechanismen hat Peaucellier auch für die Kegelschnitte, die Pascalsche Schnecke, die Konchoide und Cissoide (Kissoide) mechanische Erzeugungsweisen gefunden.

Der Hartsche Inversor.

157. Ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez (Fig. 81), also $AB = CD = a$, $AC = BD = b$ und $AD \parallel BC$, so hat das überschlagene Viereck $ABDC$, das aus in den Ecken durch Gelenke verbundenen Stäben zusammengesetzt ist und als gelenkiges Antiparallelogramm bezeichnet wird, folgende bekannte Eigenschaft:

Das Produkt der Diagonalen eines Antiparallelogramms ist konstant und gleich der Differenz der Quadrate der Seiten.

Denn ziehen wir durch C eine Parallele zu AB , die der Seite AD in E begegnet, so ergibt sich wiederum mit Rücksicht auf den Kreis, der C zum Mittelpunkt hat und durch E und D geht, da $BC = AE$:

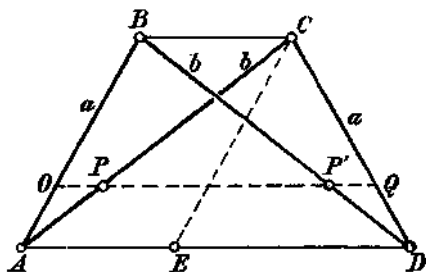


Fig. 81.

$$(3) \quad AD \cdot BC = AD \cdot AE = b^2 - a^2.$$

Ziehen wir jetzt in irgend einer Stellung zu den parallelen Diagonalen eine Parallele, welche die Seiten in O , P , P' , Q trifft, so liegen wegen der Proportionalität der Seitenabschnitte diese vier Punkte bei jeder Stellung des Mechanismus in einer Parallelen zu den Diagonalen und es ist:

$$\frac{OP}{BC} = \frac{AO}{AB}, \quad \frac{OP'}{AD} = \frac{BO}{AB},$$

also:

$$OP \cdot OP' = \frac{AO \cdot BO \cdot AD \cdot BC}{AB^2}$$

oder nach (3):

$$(4) \quad OP \cdot OP' = \frac{(b^2 - a^2)}{a^2} AO \cdot BO.$$

Es kann also auch dieser von Hart²⁷⁾ erfundene Apparat dazu dienen, eine Inversion zu beschreiben; stellt man den Punkt O fest, so beschreiben P und P' entsprechende Kurven einer Inversion mit positiver Potenz. Hält man dagegen P fest, so liefern O und P' stets Punkte, die sich in einer Inversion mit negativer Potenz entsprechen.

Der Inversor von Sylvester und Kempe.

158. Die vorangehenden Betrachtungen lassen sich nun noch sehr verallgemeinern. Konstruieren wir über den Seiten eines gelenkigen Antiparallelogramms (157.) ähnliche Dreiecke **ABO**, **DBP**, **DCQ**, **ACP'** in der durch Fig. 82 veranschaulichten Weise und fassen die Ähnlichkeitstransformation ins Auge, die zusammengesetzt ist aus einer Drehung um den Punkt A durch den Winkel **BAO** = α und aus einer Streckung, die AO in AB verwandelt. Dann führt dieselbe Transformation AP' in AC und dadurch OP' in BC über, so daß also OP' gegen BC um den Winkel α gedreht ist. Für D als Drehungspunkt einer zweiten gleichartigen Ähnlichkeitstransformation folgt ebenso, daß PQ gegen BC den Winkel α bildet, also ist:

$$OP' \parallel PQ.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$OP \parallel P'Q.$$

Unter Berücksichtigung des Sinnes der Drehungen α und β erkennt man

ferner, daß **OP** und **OP'** den Winkel $\alpha + \beta$ einschließen.

Weiter ist aber:

$$\triangle(BDP) \sim \triangle(BAO)$$

und:

$$BD:BP = BA:BO,$$

folglich auch:

$$\triangle(BOP) \sim \triangle(BAD)$$

und:

$$PO:BO = DA:BA$$

oder:

$$PO = \frac{AD \cdot BO}{AB}.$$

In ähnlicher Weise finden wir:

$$P'O = \frac{BC \cdot AO}{AB},$$

mithin:

$$PO \cdot P'O = \frac{AD \cdot BC \cdot AO \cdot BO}{AB^2}$$

oder mit Rücksicht auf (3):

$$(5) \quad PO \cdot P'O = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cdot AO \cdot BO.$$

Damit ist aber der elegante Satz bewiesen:

*) BC soll parallel AD sein.

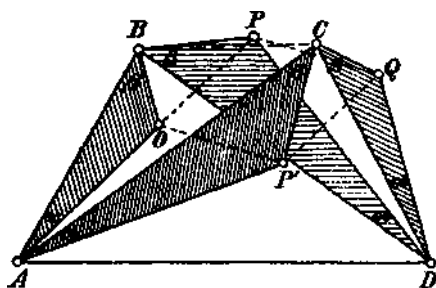


Fig. 82*)

Die vier Ecken $OPQP'$ der angefügten Dreiecke bilden in jeder Lage ein Parallelogramm von konstantem Flächeninhalte.

Halten wir wieder den Punkt O fest, so beschreiben demnach Punkt P' inverse Figuren, von denen die eine gegen die andere um den Winkel $\alpha + \beta$ um das Inversionszentrum O gedreht ist. Dies ist der Inversor von Sylvester²⁸⁾ und Kempe²⁹⁾.

§ 32. Die Inversion im Raume.

Die Gleichungen der Transformation.

159. Die Eigenschaften, die die Inversion in der Ebene charakterisierten, lassen sich ihrem geometrischen und analytischen Inhalte nach ohne weiteres auf den Raum übertragen. Beziehen sich die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und x', y', z' zweier Punkte P und P' auf das gleiche Koordinatensystem mit dem Anfang O , so gehen wir aus von den beiden Gruppen:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = k \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, & x = k \frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ y' = k \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, & y = k \frac{y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ z' = k \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}, & z = k \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \end{cases}$$

Sie haben die Eigenschaft, daß aus der einen Gruppe die andere folgt und stellen eine involutorische Beziehung des Raumes in sich dar. Je zwei einander entsprechende Punkte P und P' liegen auf dem gleichen Strahle durch O und es gilt wieder die Beziehung:

$$OP \cdot OP' = k \quad \text{oder} \quad rr' = k.$$

Man nennt diese Beziehung eine „räumliche Inversion“ oder auch eine „Transformation durch reziproke Radien im Raume“. Die Größe k kann wieder positiv oder negativ sein. Im ersten Falle, wenn also $k = r_0^2$, liegen die Koinzidenzpunkte auf der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2.$$

Für negative Werte von k , also wenn $k = -r_0^2$, gibt es keine Punkte, die sich selbst entsprechen. Die Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$$

geht durch die Transformation in sich über, indem jedem ihrer Punkte der andere Endpunkt des durch den Punkt gehenden Durchmessers entspricht.

Jedem unendlich fernen Punkte entspricht der Punkt O ; dabei ist dem unendlich fernen Punkte X der Punkt zugeordnet, der auf dem Strahle OX zum Punkte O unendlich benachbart liegt.

Wir führen noch einige Betrachtungen durch, bei denen wir über das Vorzeichen von k keine bestimmte Annahme zu machen brauchen.

Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen.

160. Ein dem beliebigen Punkte P unendlich benachbarter Punkt Q habe die Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, das Linienelement PQ werde mit ds bezeichnet. Dem Punkte Q entspricht dann ein Punkt Q' mit den Koordinaten $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$ und $P'Q' = ds'$ ist das entsprechende Linienelement. Durch Differenzieren der Gleichungen (1) finden wir, wenn wir für $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ setzen:

$$(2) \quad \begin{cases} dx' = \frac{k}{r^4} \{ (y^2 + z^2 - x^2) dx - 2xy dy - 2xz dz \}, \\ dy' = \frac{k}{r^4} \{ -2yx dx + (x^2 + z^2 - y^2) dy - 2yz dz \}, \\ dz' = \frac{k}{r^4} \{ -2zx dx - 2zy dy + (x^2 + y^2 - z^2) dz \}. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2.$$

Bilden wir mittels der Gleichungen (2) den Ausdruck für $(da')^2$, so ergibt sich durch eine einfache Rechnung

$$(3) \quad ds' = \frac{k}{r^2} ds = \frac{r'^2}{k} ds.$$

Es ändert sich demnach das Verhältnis entsprechender Linienelemente mit der Lage der Punkte P und P' , doch bleibt es bei festgehaltenem P das gleiche für alle durch P und P' gehenden entsprechenden Elemente. Ist also R ein weiterer zu P benachbarter Punkt mit den Koordinaten $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ und $PR = \delta s$ das zu ihm führende Linienelement, während wieder R' der entsprechende Punkt, $\delta s'$ das entsprechende Linienelement ist, so gilt auch die Beziehung:

$$\delta s' = \frac{k}{r^2} \delta s = \frac{r'^2}{k} \delta s.$$

Die Elemente ds und δs schließen ferner einen Winkel α ein, der bestimmt ist durch die Beziehung:

$$\cos \alpha = \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{ds \delta s}.$$

Die entsprechenden Elemente ds' und $\delta s'$ sind unter einem Winkel α' gegeneinander geneigt, so daß:

$$\cos \alpha' = \frac{dx' \delta x' + dy' \delta y' + dz' \delta z'}{ds' \delta s'}.$$

Bilden wir den rechtsstehenden Ausdruck unter Benutzung der Gleichungen (2) und der entsprechenden in den δx , δy , ... geschriebenen, so erhalten wir nach entsprechender Vereinfachung:

$$\frac{dx' \delta x' + dy' \delta y' + dz' \delta z'}{ds' \delta s'} = \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{ds \delta s}.$$

Es sind also die Winkel α und α' einander gleich und folglich die Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ ähnlich. Auch die letzten Seiten QR und $Q'R'$ derselben stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie ds und ds' .

Allgemein ist damit bewiesen, daß durch die Inversion irgend eine Fläche und die ihr entsprechende konform, d. h. ähnlich in den kleinsten Teilen, aufeinander abgebildet werden.

Nehmen wir aber weiter noch einen dritten zu P unendlich benachbarten Punkt S , dessen entsprechender S' sein möge, bezeichnen das Linienelement PS mit Δs und $P'S'$ mit $\Delta s'$, so muß das unendlich kleine Tetraeder $PQRS$ dem entsprechenden $P'Q'R'S'$ offenbar ähnlich sein, so daß auch der Winkel zweier Ebenen des einen gleich dem Winkel ist, den die entsprechenden Ebenen des anderen Tetraeders bilden. Es läßt sich aber auch über den Sinn zweier derartiger unendlich kleiner, sich entsprechender Tetraeder etwas aussagen. Drücken wir nämlich das sechsfache Volumen des Tetraeders $P'Q'R'S'$ durch die bekannte Determinante aus, so gibt diese (vgl., 118.) gleichzeitig das Volumen in einem bestimmten Sinne. Es ist aber:

$$6\text{Vol. } (P'Q'R'S') = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x' + dx' & y' + dy' & z' + dz' & 1 \\ x' + \delta x' & y' + \delta y' & z' + \delta z' & 1 \\ x' + \Delta x' & y' + \Delta y' & z' + \Delta z' & 1 \end{vmatrix} \equiv$$

$$\begin{vmatrix} dx' & dy' & dz' \\ \delta x' & \delta y' & \delta z' \end{vmatrix}.$$

Unter Be

$$\frac{k^3}{r^{12}} \begin{vmatrix} (y^2 + z^2 - x^2) dx' - 2xy dy - 2xz dz, \\ -2yx dx + (x^2 + z^2 - y^2) dy - 2yz dz, \\ -2zx dx - 2zy dy + (x^2 + y^2 - z^2) dz *) \\ (y^2 + z^2 - x^2) \delta x - 2xy \delta y - 2xz \delta z, \\ -2yx \delta x + (x^2 + z^2 - y^2) \delta y - 2yz \delta z, \\ -2zx \delta x - 2zy \delta y + (x^2 + y^2 - z^2) \delta z \\ (y^2 + z^2 - x^2) \Delta x - 2xy \Delta y - 2xz \Delta z, \\ -2yx \Delta x + (x^2 + z^2 - y^2) \Delta y - 2yz \Delta z, \\ -2zx \Delta x - 2zy \Delta y + (x^2 + y^2 - z^2) \Delta z \end{vmatrix} \quad \text{ir:}$$

Diese Determinante läßt sich als das Produkt zweier Determinanten darstellen, so daß wir erhalten:

*) Aus Mangel an Raum mußten die Glieder jeder Horizontalreihe der Determinante in drei Zeilen gesetzt werden.

$$\frac{k^3}{r^{12}} \begin{vmatrix} -(y^2 + z^2 - x^2) & 2xy & 2xz \\ 2yx & -(x^2 + z^2 - y^2) & 2yz \\ 2zx & 2zy & -(x^2 + y^2 - z^2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -dx & -dy & -dz \\ -\delta x & -\delta y & -\delta z \\ -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{vmatrix}.$$

Die erste Determinante gibt ausgerechnet den Ausdruck $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = r^6$ und es wird

$$\text{Vol. } (P'Q'R'S') = -\frac{k^3}{r^6} \text{Vol. } (PQRS). \quad \text{SCHNEEBICH.}$$

Bei der Inversion mit positivem k sind also entsprechende unendlich kleine Tetraeder stets ungleichsinnig, bei der Transformation mit negativer Potenz haben sie immer gleichen Sinn.

Entsprechende Oberflächenelemente $d\omega$ und $d\omega'$ sowie entsprechende Raumelemente dv und dv' erfüllen folglich (abgesehen vom Vorzeichen) die Beziehungen:

$$(4) \quad d\omega' = \frac{k^2}{r^4} d\omega = \frac{r'^4}{k^2} d\omega,$$

$$(5) \quad dv' = \frac{k^3}{r^6} dv = \frac{r'^6}{k^3} dv.$$

Der den „Maßstab“ der Verjüngung liefernde Ausdruck $\frac{k}{r^2}$ nimmt für die gewöhnliche Inversion ($k > 0$) den Wert 1 bloß dann an, wenn $r^2 = k = r_0^2$, d. h. für Elemente, die von Punkten der Inversionskugel ausgehen. Wir haben somit gefunden

Satz 78. Die Transformation durch reziproke Radien bildet den Raum konform, d. h. in den kleinsten Teilen ähnlich auf sich ab; jeder Fläche entspricht eine neue Fläche, die konform auf die erste bezogen ist. Der Maßstab für die Abbildung ändert sich mit der Lage im Raume und ist dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt der Transformation umgekehrt proportional. Entsprechende Linien-, Flächen- oder Raumelemente, die durch zwei entsprechende Punkte gehen, stehen in konstantem Verhältnis, das abgesehen vom Vorzeichen der ersten, zweiten oder dritten Potenz dieses Maßstabes gleich ist. Im Mittelpunkt der Transformation hört die Stetigkeit der Abbildung auf. Irgend zwei entsprechende, unendlich kleine Tetraeder sind gleichsinnig oder ungleichsinnig, je nachdem k negativ oder positiv ist.

Die Bilder von Ebenen und Kugeln.

161. Untersuchen wir nun im einzelnen, welche Gebilde die Transformation durch reziproke Radien ineinander überführt, wobei wir uns auf den Fall $k > 0$ beschränken wollen. Einer beliebigen Ebene entspricht eine Kugel. In der Tat verwandelt sich die Ebene:

$$ax + by + cz + d = 0$$

durch die Substitution (1) von 159. in:

$$k(\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + d) + d(x'^2 + y'^2 + z'^2 - k) = 0$$

und diese Kugel geht ersichtlich durch den Schnitt der gegebenen Ebene mit der Inversionskugel:

$$S_0 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - k = 0$$

hindurch. Es folgt also

Satz 79. *Einer beliebigen Ebene entspricht eine Kugel, die durch den Mittelpunkt O der Inversion hindurchgeht. Diese Kugel gehört dem Büschel an, das durch die Ebene und die Inversionskugel bestimmt ist; sie geht also durch einen bestimmten reellen oder imaginären Kreis.*

Jede Ebene durch den Mittelpunkt O jedoch wird durch die Inversion in sich selbst übergeführt; es bildet sich in ihr eine ebene Inversion aus. Im übrigen können wir gleich allgemeiner aussprechen:

Satz 80. *Irgend einer Kugel entspricht wieder eine Kugel und beide Kugeln gehören mit der Inversionskugel einem Büschel an.*

Denn ist die gegebene Kugel:

$$S \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - r^2 = 0,$$

so entspricht ihr nach Weglassung des F a $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$ i e Kugel:

$$S' \equiv (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2k(\alpha x' + \beta y' + \gamma z') + k^2 = 0,$$

deren Gleichung sich leicht auf die Form bringen läßt:

$$[(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 + (z' - \gamma)^2 - r^2] + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 - k}{k}(x'^2 + y'^2 + z'^2 - k) = 0.$$

Es ist also S' von der Form:

$$S' \equiv S + \lambda S_0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Sich selbst entsprechende Kugeln.

162. Wir können dieses Resultat übrigens noch benutzen, um die Frage zu beantworten: Gibt es Kugeln, welche durch die Inversion in sich selbst übergeführt werden? Soll S' mit S identisch werden, so muß der Faktor λ den Wert Null annehmen, folglich:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 - r_0^2 = 0$$

sein. Diese Bedingung besagt aber, daß das Dreieck, das der Inversionsmittelpunkt O , der Mittelpunkt (α, β, γ) der Kugel S und ein Punkt des

Schnittkreises bilden, ein rechtwinkeliges ist, oder mit anderen Worten, daß die Kugel S die Inversionskugel S_0 orthogonal schneidet. Es folgt daraus

Satz 81. *Alle Kugeln, die die Inversionskugel orthogonal schneiden, und nur diese gehen durch die Inversion in sich über.*

Dabei gehen die Punkte einer solchen Kugel ineinander über, nur die Punkte des Schnittkreises mit der Inversionskugel entsprechen sich selbst.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, solche Kugeln zu bestimmen: Sind P, P' irgend zwei entsprechende Punkte und legen wir durch sie eine Kugel, so ist k deren Potenz in bezug auf den Mittelpunkt O und sie schneidet also die Inversionskugel orthogonal. Alle die ² Kugeln durch die zwei entsprechenden Punkte P, P' , die ein „Kugelbündel“ oder „Kugelnetz“ bilden, haben die gleiche Eigenschaft.

Betrachten wir zwei Paare entsprechender Punkte P, P', Q, Q' , so liegen dieselben (Satz 73 in 153.) auf einem Kreise. Jede Kugel durch die beiden Punktepaare enthält demnach diesen Kreis und alle derartigen Kugeln bilden ein „Kugelbüschel“

Sind endlich irgend drei Paare entsprechender Punkte gegeben, P, P', Q, Q', R, R' , so geht durch P, P', Q, Q' ein erster, durch P, P', R, R' ein zweiter Kreis und durch diese beiden Kreise läßt sich eine einzige Kugel legen, die folglich die drei Punktepaare enthält. Es hat sich demnach gezeigt

Satz 82. *Durch ein Paar entsprechender Punkte ist ein Netz, durch zwei Paare entsprechender Punkte ein Büschel von Kugeln bestimmt. Irgend drei Paare entsprechender Punkte liegen auf einer Kugel. Alle so bestimmten Kugeln schneiden die Inversionskugel orthogonal.*

Die Bilder von Geraden, Kreisen und beliebigen Flächen.

163. Einer (reellen) Geraden g entspricht ein Kreis, der — in der Ebene ($0g$) gelegen — in O eine zu g parallele Tangente hat. Jede Gerade durch O entspricht sich selbst und trägt eine Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte mit der Inversionskugel sind.

Irgend einem Kreise durch O entspricht umgekehrt eine in seiner Ebene gelegene Gerade.

Hat man dagegen einen nicht durch O gehenden Kreis, so erhalten wir als sein Bild stets wieder einen Kreis. Dies braucht nur noch für den Fall bewiesen zu werden, daß die Ebene des Kreises nicht durch O geht. Aber dann können wir den Kreis als Schnitt seiner Ebene mit einer durch ihn und O gelegten Kugel auffassen. Dieser Kugel entspricht eine Ebene, der Ebene des Kreises wieder eine Kugel und beide Flächen liefern in ihrem Schnitt den entsprechenden Kreis.

Einer beliebigen Fläche m^{ter} Ordnung f^m , die allgemein gelegen ist, entspricht, wie unschwer zu zeigen ist, eine Fläche f'^{2m} von der Ordnung $2m$. Auf deren weitere Besonderheiten können wir nicht eingehen.³⁰⁾

§ 33. Anwendungen der Inversion im Raume.

Die stereographische Projektion.

164. Eine Ebene wird durch die Inversion in eine Kugel übergeführt. Wählen wir speziell eine die Inversionskugel in A berührende Ebene ε , so berührt auch die entsprechende Kugel in A diese Ebene (Fig. 83) und ihr Durchmesser $2a$ wird gleich dem Radius r_0 der Inversionskugel, also:

$$a = \frac{r_0}{2}.$$

Da zwei entsprechende Punkte P und P' stets auf einem Strahle durch O liegen, erhalten wir die Abbildung dieser Kugel auf die Ebene ε ganz unabhängig von der Raumtransformation, indem wir die Kugel-
fläche aus O auf die Ebene ε projizieren. Dabei ist die Bildebene ε zur Tangentialebene in O an die Kugel parallel und berührt selbst die Kugel. Diese Abbildung der Kugel auf die Ebene bezeichnet man als die gewöhnliche stereographische Projektion. Die Abbildung ändert sich nur dem Maßstabe nach, wenn man die Ebene ε parallel verschiebt, sie z. B. durch den Mittelpunkt der Kugel legt.

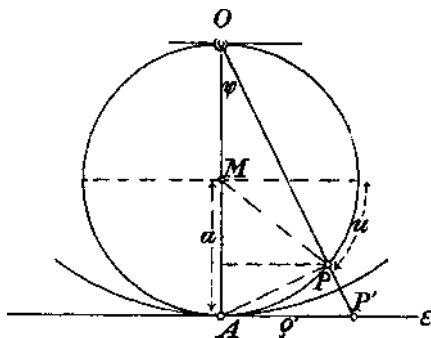


Fig. 83.

Alle ebenen Schnitte der Kugel, d. h. ihre Kreise, gehen folglich nach **163.** wieder in Kreise der Ebene ε über. Die Abbildung ist konform und für den Maßstab oder die Längenverzerrung erhalten wir nach Formel (3) von **160.:**

$$\frac{k}{r^2} = \frac{r_0^2}{r_0^2 \cos^2 \psi} = \frac{1}{\cos^2 \psi},$$

wenn ψ der Winkel ist, den der Durchmesser OA mit dem Strahle OP bildet. Führen wir den Winkel u ein, den MP mit der Horizontalen einschließt, so ist $\psi = 45^\circ - \frac{u}{2}$ und die Längenverzerrung wird auch gegeben durch:

$$\frac{1}{\cos^2 \left(45^\circ - \frac{u}{2} \right)}.$$

Es hat sich also ergeben:

Satz 83, *Bei der stereographischen Projektion gehen alle Kreise der Kugel wieder in Kreise der Bildebene über und umgekehrt. Die Abbildung ist konform, jedes Orthogonalsystem auf der Kugel geht in ein Orthogonalsystem der Ebene über.*

Ohne Beweis sei noch angeführt, daß die stereographische Projektion die einzige und allgemeinste konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene ist, die jeden Kreis wieder in einen Kreis überführt.

Aufgabe 39: Ist eine Kugel stereographisch auf eine Ebene abgebildet, so findet man den Mittelpunkt des Kreises, der einem auf der Kugel gelegenen Kreise entspricht, in folgender Weise: man bestimmt den Kegel, der die Kugel längs des gegebenen Kreises berührt; die Spitze dieses Kegels gibt, stereographisch projiziert, den Mittelpunkt des Bildkreises in der Ebene.

Aufgabe 40: Will man die stereographische Projektion zur Abbildung eines Teiles der Erdoberfläche, also zur Herstellung einer Karte, verwenden, so ist das Zentrum der Projektion in bestimmter Weise gegenüber dem System der Längen- und Breitenkreise anzunehmen. Man zeichne die Bilder dieser Kreise, etwa in Winkelabständen von je 15° , wenn

- a) das Zentrum im Nordpol und die Bildebene die Tangentialebene im Südpol ist (stereographische Polarprojektion oder auch azimutale Polarprojektion);
- b) das Zentrum auf dem Äquator liegt, während als Bildebene eine Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel gewählt wird (stereographische Äquatorialprojektion).

Stereographische Projektion eines Kristalles.

166. Auch in der Kristallographie wird die stereographische Projektion verwendet, namentlich um die Zonenverhältnisse eines Kristalles übersichtlich zur Darstellung zu bringen. Die Gesamtheit der Flächen eines Kristalles, die einander in parallelen Kanten durchschneiden, nennt man bekanntlich eine „Zone“, derartige Flächen selbst „tautozonal“ und die Richtung, zu der alle Flächen einer Zone parallel sind, die „Achse“ der Zone. Um nun die stereographische Projektion eines Kristalles, die auch als „sphärische“ bezeichnet wird, zu zeichnen, denkt man sich zunächst um einen Punkt des Kristalles als Mittelpunkt eine Kugel von beliebigem Radius gelegt. Vom Mittelpunkte werden sodann Senkrechte auf die Kristallflächen gefällt und deren Schnittpunkte mit der Kugel ermittelt. Jeder Fläche entspricht demnach der eine oder andere Endpunkt eines Durchmessers, den man den Pol der Fläche nennt. Die Flächen einer Zone liefern Lote, die der Ebene angehören, die durch den kugelmittelpunkt senkrecht zur Achse der Zone geht. Die Pole der

Flächen einer Zone liegen folglich auf einem Hauptkreise der Kugel. Diese Kugel wird nun stereographisch in eine Ebene abgebildet, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Man wählt zu dem Zwecke etwa die Zone aus, welche die meisten Flächen enthält, und legt die Bildebene senkrecht zur Achse dieser Zone. Die Pole dieser Zone liegen dann auf dem größten Kreise, wonach diese Ebene die Kugel schneidet. Als Zentrum der Projektion wählt man einen der Endpunkte des Durchmessers, der auf der Bildebene senkrecht steht, und projiziert die unterhalb der Ebene gelegenen Pole aus dem oberhalb der Ebene gelegenen Punkte und analog die oberhalb der Ebene befindlichen Punkte der Kugel aus dem anderen Durchmesserendpunkte. In der Bildebene erhält man dadurch an Stelle der Pole neue Punkte, an Stelle der Zonen Kreise und die Flächen einer Zone liefern auch im Bilde Pole, die dem Bildkreise der Zone angehören.³¹⁾

Die Methode der elektrischen Bilder.

166. Wenn wir im folgenden eine Anwendung der Inversion in der mathematischen Physik erwähnen, so kommen wir damit auf die Geschichte dieser Abbildungsmethode überhaupt zurück. Schon Plücker³²⁾ gab in einer Ende Oktober 1831 geschriebenen Abhandlung den Grundgedanken der Transformation durch reziproke Radien, indem er zu einem Kreise und zu einer Geraden die inversen Bilder bestimmte und damit Sätze über Gerade und Kreise in andere über Kreise übertrug. Wohl unabhängig davon hat W. Thomson³³⁾ gelegentlich der Behandlung gewisser Aufgaben der Physik (1845) die Inversion angewandt und als das „Prinzip der elektrischen Bilder“ bezeichnet. Die Bezeichnung Transformation durch reziproke Radien stammt von Liouville.³⁴⁾ Unter Benutzung der Begriffe „Potential“ und „Niveaufläche“ gelangt man zum Prinzip der elektrischen Bilder in folgender Weise:

In einem gleichförmigen, dielektrischen Medium von unendlicher Ausdehnung mögen sich zwei Punkte A und A' befinden mit den Elektrizitätsmengen ε und ε' . Dann ist das Potential irgend eines Punktes P , der von A und A' die Abstände p und p' besitzt, bekanntlich:

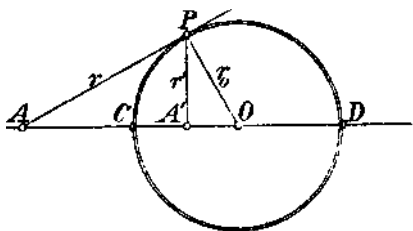
$$(1) \quad V = \frac{\varepsilon}{p} + \frac{\varepsilon'}{p'}.$$

Erteilen wir V einen konstanten Wert, so beschreibt P eine Fläche gleichen Potentials oder eine Niveaufläche. Greifen wir diejenige unter diesen Flächen heraus, für welche $V = 0$ ist, und setzen wir weiter voraus, daß die in A' befindliche Elektrizitätsmenge das entgegengesetzte Vorzeichen habe wie die in A , setzen wir also $\varepsilon = e$, $\varepsilon' = -e'$, so wird für diese Fläche:

$$(2) \quad \frac{p}{p'} = \frac{e}{e'}.$$

und dies ist eine Kugel, da jede Ebene durch die Verbindungslinie AA' als Schnitt einen Kreis liefert; derselbe möge in C und D (Fig. 84) der Geraden AA' begegnen und sein Radius sei r_0 , sein Mittelpunkt O . Die Punkte C und D liegen harmonisch zu A und A' . Nun können wir uns die Kugelfläche durch eine metallene Kugelschale ersetzt denken, die durch einen dünnen Draht zur Erde abgeleitet ist. Auf der Kugel haben wir dann immer noch das Potential Null, aber die Elektrizität wird sich auf ihr verteilen, wie es der von den Punkten A und A' ausgeübten Influenz oder Induktion entspricht. Das Potential in irgend einem Punkte des Raumes, sowohl innerhalb wie außerhalb der Kugel, also auch die elektrische Wirkung im ganzen Raume wird durch diese materielle Kugel nicht geändert.

Entfernen wir jetzt den Punkt A' , so wird das Potential innerhalb der Kugel überall den Wert Null annehmen, während sich außerhalb der Kugel nichts ändert (Greenscher Satz). Dann können wir aber folgendes behaupten: Wird eine Kugelschale von einem außerhalb derselben gelegenen Punkte A influenziert, so ist in bezug auf außerhalb der Kugel gelegene Punkte die Wirkung dieser Kugelschale in Verbindung mit der des Punktes A gleich der Wirkung des Punktes A' wieder in Verbindung mit der des Punktes A . Es ist also



die Wirkung der Kugel durch diejenige des innerhalb derselben gelegenen Punktes A' ersetzt worden.

Hat man andererseits einen Punkt A' , der, innerhalb einer Schale gelegen, dieselbe influenziert, so kann in bezug auf innerhalb der Kugel gelegene Punkte dessen Wirkung zusammen mit derjenigen dieser Kugel ersetzt werden durch die Wirkung des außerhalb der Kugel gelegenen Punktes A in Verbindung mit der des Punktes A' .

In Analogie mit den virtuellen Bildern der Optik nennt nun Thomson jeden der Punkte A und A' das „elektrische Bild“ des anderen in bezug auf die Kugel.

Elektrische Massen und Dichten.

167. A und A' entsprechen einander in einer Inversion, für die O der Mittelpunkt ist; es ist also:

$$OA \cdot OA' = k = r_0^2.$$

Das Verhältnis der in A und A' konzentrierten Massen e und e' können wir durch den Radius r_0 der Inversionskugel ausdrücken. Errichten wir in A' die Senkrechte, die in P den Kreis treffen möge, so ist wegen

der Ähnlichkeit der Dreiecke APO , $AA'P$ und $PA'O$, wenn $AP = r$, $A'P = r'$:

$$\frac{r_0}{AO} = \frac{AO}{r_0} = \frac{r}{r'} = \frac{e}{e'},$$

also:

$$(3) \quad e' = e \frac{r_0}{AO} = e \frac{A'O}{r_0}.$$

Dadurch ist also die elektrische Masse bestimmt, die in dem Punkte A' anzubringen ist, wenn der Punkt A die Masse e trägt. Hat man irgend eine endliche Masse M , so wird man zu jedem einzelnen Massenteilchen, das in einem Punkte konzentriert gedacht wird, das entsprechende ermitteln können und man erhält so eine entsprechende Masse m' , das elektrische Bild der ersten.

Auch die Dichten, die in der abgebildeten Figur vorhanden sind, ergeben sich ohne weiteres, wenn wir die Formeln (3), (4), (5) von 160. benutzen, die in der Transformation durch reziproke Radien zwischen entsprechenden Linien-, Flächen- und Raumelementen bestehen. Bezeichnen wir nämlich mit λ , ϱ , σ eine Linien-, Flächen- oder Raumdichte, während dm eine unendlich kleine Masse sein möge, die in dem Linien-, Flächen- oder Raumelement verteilt ist, so ist:

$$\lambda = \frac{dm}{ds}, \quad \varrho = \frac{dm}{d\omega}, \quad \sigma = \frac{dm}{dv}.$$

Nun ist z. B. die Liniendichte λ' im entsprechenden Elemente ds' gegeben durch:

$$\lambda' = \frac{dm'}{ds'}.$$

Ferner hat man, wenn jetzt mit r und r' die Entfernungen der einander entsprechenden Massenteilchen dm und dm' vom Inversionszentrum O bezeichnet werden:

$$\frac{dm'}{dm} = \frac{r'}{r_0} = \frac{r_0}{r},$$

Daraus findet man:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = \frac{r_0}{r'} \lambda = \frac{r}{r_0} \lambda \\ \varrho' = \frac{r_0^3}{r'^3} \varrho = \frac{r^3}{r_0^3} \varrho, \\ \sigma' = \frac{r_0^5}{r'^5} \sigma = \frac{r^5}{r_0^5} \sigma. \end{array} \right. \quad \text{und ebenso:}$$

Endlich erörtern wir noch den Zusammenhang, der zwischen dem Potential V einer gegebenen Masse m für irgend einen Punkt P und dem

Potential V der transformierten Masse m' in bezug auf den entsprechenden Punkt P' besteht. (Der Leser zeichne die entsprechende Figur selbst.)

Greifen wir irgend einen Punkt A der einen Masse heraus, in dem sich die Masse dm befinden möge, während im entsprechenden Punkte A' die unendlich kleine Masse dm' konzentriert ist, sind ferner v und v' die Potentiale dieser Massenpunkte in bezug auf P und P' , so bestehen die Beziehungen:

$$dm : dm' = AO : r_0 = r_0 : A'O,$$

$$v = \frac{dm}{AP}, \quad v' = \frac{dm'}{A'P'}$$

und daraus:

$$v : v' = \frac{dm}{dm'} \frac{A'P'}{AP} = \frac{AO}{r_0} \frac{A'P'}{AP}.$$

Da aber $AO \cdot A'O = PO \cdot P'O$ oder $AO : PO = P'O : A'O$, so ist $\triangle (PAO) \sim \triangle (A'P'O)$, also:

$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{A'O}{PO}$$

und damit:

$$v' = \frac{v \cdot PO}{r_0} = \frac{v r_0}{P'O}.$$

Diese Ausdrücke enthalten aber die Entfernungen der Punkte P und P' von A und A' nicht mehr, also gilt auch für die Gesamtmassen m und m' die Beziehung:

$$(5) \quad V' = \frac{V \cdot PO}{r_0} = \frac{V r_0}{P'O}.$$

Anwendungen der Methode der elektrischen Bilder.

168. Thomson hat von der Methode der elektrischen Bilder zahlreiche Anwendungen auf Probleme der Elektrizitätslehre, Wärmeverteilung usw. gemacht; einige einfache Beispiele mögen davon einen Begriff geben.³⁵⁾

Denken wir uns zunächst eine irgendwie mit elektrischer Masse belegte Kugelschale. V sei das Potential derselben in bezug auf irgend einen im Inneren derselben gelegenen Punkt P . Benutzen wir die Kugel und ihren Mittelpunkt O dazu, eine Inversion zu bestimmen, so geht P in P' über, während die Kugel ungeändert bleibt. Das Potential V von P' in bezug auf die Kugelschale wird demnach:

$$V' = \frac{V r_0}{P'O}.$$

Ist z. B. die Kugelschale gleichmäßig mit Masse belegt, so ist $V = \text{konst.}$, und es folgt

Satz 84. *Das Potential einer gleichmäßig mit Masse belegten Kugelschale in bezug auf einen außerhalb derselben gelegenen Punkt P' ist dem Abstände dieses Punktes vom Mittelpunkte umgekehrt proportional.*

Weiß man, daß das Potential im Innern einer gleichmäßig mit der Maße m belegten Kugelschale:

$$V = \frac{m}{r_0}$$

ist, so ergibt sich für das obige Potential:

$$V' = \frac{m}{P'O}.$$

Es ist mithin ebenso groß, als wenn die Masse der Schale in ihrem Mittelpunkte konzentriert wäre. Da man eine Vollkugel aus solchen Schalen zusammensetzen kann, so folgt auch noch

Satz 85. *Das Potential einer Vollkugel, die gleichmäßig mit Masse erfüllt ist, in bezug auf einen außerhalb derselben gelegenen Punkt ist das gleiche, als wenn die Masse der ganzen Kugel im Mittelpunkte konzentriert wäre.*

Betrachten wir endlich noch eine Vollkugel k , die gleichmäßig mit Masse erfüllt sein möge, so daß also $\sigma = \text{konst.}$ In bezug auf einen außerhalb der Kugel gelegenen Inversionsmittelpunkt O wird das Bild der Kugel eine zweite Kugel K' die aber nicht gleichmäßig mit Masse erfüllt ist. Vielmehr ist die Dichte σ' in einem Punkte P' nach Formel (4) in 167. der fünften Potenz des Abstandes $P'O$ umgekehrt proportional. Bezeichnet m wieder die Gesamtmasse der Kugel, M ihren Mittelpunkt, so ist das Potential derselben in bezug auf irgend einen außerhalb gelegenen Punkt P nach dem soeben Bemerkten:

$$V = \frac{m}{PM}.$$

Ist weiter M' das Bild von M , so fällt M' nach dem Früheren (153.) zusammen mit dem Bilde von O in bezug auf die Kugel K' . Das Potential von K' für den Punkt P' wird dann aber:

$$V' = \frac{V r_0}{P'O} = \frac{m r_0}{P'O \cdot PM}.$$

Führen wir eine Masse m' ein, welche gegeben ist durch:

$$m' = \frac{m r_0}{MO} = \frac{m \cdot M'O}{r_0},$$

und konzentrieren dieselbe im Punkte M' , so wird das Potential von P' in bezug auf diese Masse:

$$\frac{m'}{P'M'} = \frac{m r_0}{MO \cdot P'M'} = \frac{m r_0}{P'O \cdot PM} = V'.$$

Wenn also die Dichte einer Vollkugel in jedem Punkte P' der fünften Potenz der Entfernung $P'O$ proportional ist, wobei O ein außerhalb der Vollkugel gelegener Punkt ist, so ist das Potential und also auch die Anziehung dieser Kugel in bezug auf außerhalb derselben gelegene Punkte das gleiche, wie wenn die Masse m' im Punkte M' konzentriert wäre, und M' ist das elektrische Bild von O in bezug auf diese Kugeloberfläche.

169. Endlich sei noch erwähnt, daß die Inversion auch in der Elastizitätslehre Anwendung findet, und zwar bei der Untersuchung der Spannungsverteilung in einem ebenen System. Führt man die sog. Airy'sche Spannungsfunktion ein, durch deren Ableitungen sich die Spannungen in einem ebenen System darstellen lassen, so kann man nach dem Vorgange von Michell³⁶⁾ durch das Prinzip der Inversion aus jeder bekannten Lösung neue Lösungen ableiten. Weitere elastische Probleme hat Timpe³⁷⁾ im Anschluß an diese Untersuchungen behandelt.

Zwölftes Kapitel.

Die Kreisverwandtschaften.

§ 34. Zerlegung einer Kreisverwandtschaft in einfachere Transformationen.

Darstellung einer Punktverwandtschaft durch komplexe Veränderliche.

170. Indem wir die absoluten Kreispunkte als F.-Punkte wählten, erhielten wir die besondere quadratische Verwandtschaft der Inversion; außerdem ergab sich noch eine weitere Transformation, die aus der Inversion durch Hinzufügung einer Spiegelung abzuleiten war. Diese wurde in 149. durch die Gleichungen (10) oder auch (11) dargestellt. Die Form der letzteren läßt es naheliegend erscheinen, statt der Veränderlichen x, y und x', y' deren Verbindungen:

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy'$$

einzuführen und wir erhalten:

$$(1) \quad z' = \frac{k}{z}.$$

Bei der Transformation (14) in 149. dagegen ist eine solche Darstellung durch eine einzige Gleichung zwischen den neuen Variablen z und z' nicht möglich. Damit gewinnen wir einen neuen Gesichtspunkt, indem wir jetzt ganz allgemein diejenigen Transformationen ins Auge fassen wollen, die sich in dieser Weise durch eine Gleichung zwischen den komplexen Variablen z und z' darstellen lassen, wobei wir uns allerdings auf den einfachsten Fall der eindeutigen Beziehung beschränken müssen.

Haben wir in zwei Ebenen ε und ε' je ein rechtwinkeliges Koordinatensystem angenommen, so können wir eine komplexe Zahl von der Form $z = x + iy$ durch den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y darstellen und umgekehrt gehört zu jedem Punkte der Ebene ε dann eine bestimmte komplexe Zahl. Ebenso verfahren wir in der Ebene ε' mit der komplexen Variablen $z' = x' + iy'$. Soll nun durch eine algebraische Beziehung zwischen z und z' eine eindeutige Punktverwandtschaft der Ebenen ε und ε' hergestellt werden, so muß diese Beziehung in bezug auf z und z' vom ersten Grade sein: sie ist also eine bilineare Gleichung von der Form:

$$(2) \quad cz' - az + dz' - b = 0,$$

wo a, b, c, d konstante Zahlenwerte sind, die nun auch komplex sein können. Aus ihr ergeben sich für z' und z die Ausdrücke:

$$(3) \quad z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{und} \quad z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}.$$

In dieser allgemeinen Transformation, die jedem Werte der einen Variablen einen und nur einen Wert der anderen Variablen und somit auch jedem Punkte der Ebene ε einen Punkt der Ebene ε' und umgekehrt zuordnet, ist die durch (1) gegebene Punktverwandtschaft ersichtlich als spezieller Fall enthalten, nämlich für:

$$a = 0, \quad b = k, \quad c = 1, \quad d = 0.$$

Wir wollen nun die geometrische Natur der durch die allgemeine Gleichung (3) gegebenen Beziehung der beiden Punktfelder untersuchen und die für sie charakteristischen Eigenschaften kennen lernen.

Formen wir (3) wie folgt um:

$$z' = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{cz + d}$$

und setzen wir der Reihe nach:

$$(4) \quad z'' = cz + d,$$

$$(5) \quad z''' = \frac{\frac{bc - ad}{c}}{z''} = \frac{A}{z''},$$

so wird schließlich:

$$(6) \quad z' = z''' + \frac{a}{c}$$

und die durch die allgemeine linear-gebrochene Substitution (3) gegebene Beziehung der beiden Ebenen läßt sich folglich ersetzen durch die Reihenfolge der Transformationen (4), (5) und (6). Die letztere ist ein spezieller Fall von (4); wir wenden uns also zunächst zur Untersuchung der Transformation (4) und der in ihr enthaltenen besonderen Fälle. Bemerkt sei noch, daß die Transformation (5) in dieser Reihe nur dann fehlt, wenn:

$$bc - ad = 0 \text{ ist.}$$

Dannartet aber die Transformation (3) aus.

Die kongruenten Abbildungen und die Ähnlichkeits-
transformation.

171. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, d. h. die durch:

$$(7) \quad z' = z + a$$

gegebene Abbildung, und schicken wir die allgemeine Bemerkung voraus, daß die geometrische Deutung dieser Transformationen sich unmittel-

bar daraus ergibt, wie man in der Funktionentheorie³⁸⁾ die einfachsten arithmetischen Rechnungsoperationen für komplexe Zahlen definiert. Beide Ebenen ε und ε' sowie die beiden rechtwinkligen Koordinatensysteme mögen der Einfachheit halber als zusammenfallend angenommen werden.

Die komplexe Konstante:

$$a = \alpha + i\beta$$

von (7) wird dann durch einen Punkt A dargestellt (Fig. 85), z durch den Punkt Z ; den Punkt Z' , der den Wert:

$$z' = x + \alpha + i(y + \beta)$$

darstellt, finden wir ohne weiteres, indem wir das Parallelogramm $AOZZ'$ zeichnen oder — was das gleiche bedeutet — den „Vektor OA “ seiner Länge und Richtung nach in Z antragen. Wir gelangen also ganz von

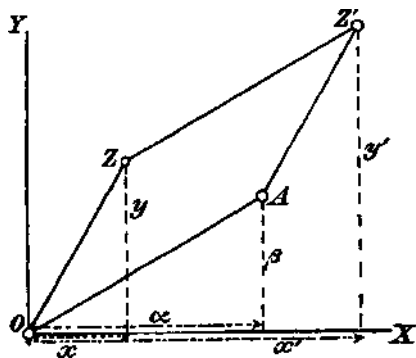


Fig. 85.

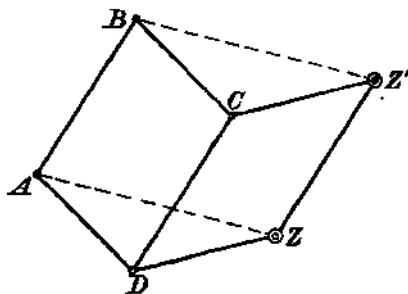


Fig. 86.

selbst dazu, die komplexen Zahlen als „Vektoren“ oder gerichtete Größen aufzufassen, d. h. als den Ausdruck einer Fortbewegung um eine gewisse Strecke in einer gewissen Richtung. Alle Punkte Z' leiten wir demnach aus den Punkten Z ab unter Anwendung dieser durch den Punkt A festgelegten Parallelverschiebung. Das System der Punkte Z' wird folglich kongruent und zwar gleichsinnig zu dem der Punkte Z ; im Sinne der Mechanik stellt die Gleichung (7) eine „Parallelverschiebung“ oder „Translation“ des starren Systems der Punkte Z um den Vektor a dar.

Es ist leicht, einen Apparat anzugeben, der mechanisch diese Verwandtschaft herstellt. Wir haben z. B. nur nötig²⁹⁾, zwei Gelenkparallelogramme $ABCD$ und $CDZZ'$ mit einer gleichen Seite (Fig. 86) zusammenzufügen. Halten wir das Glied AB fest, so bleibt $ABZ'Z$ bei allen Veränderungen des Mechanismus ein Parallelogramm und die Ecken Z und Z' beschreiben solche Systeme.

Ganz in der gleichen Weise wird aus der für die Multiplikation komplexer Zahlen geltenden Regel unmittelbar die geometrische Natur der Transformation:

$$(8) \quad z' = bz$$

erschlossen werden können. Denn erscheinen z und b , durch Modul (absoluten Betrag) und Argument dargestellt, in der Form:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$b = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

so ist:

$$z' = bz = r r_1 \{\cos (\varphi + \varphi_1) + i \sin (\varphi + \varphi_1)\}$$

und der Punkt Z' , der bz oder z' darstellt, wird gefunden, indem man (Fig. 87) das Argument φ_1 von dem Vektor OZ aus anträgt und die

Länge $OZ' = r r_1$ macht. Schneidet man noch auf der positiven JC-Achse die Länge $OA = 1$ ab, so ist:

$$\triangle(OZZ') \sim \triangle(OAB).$$

Man erhält mithin das System der Punkte Z' aus dem der Punkte Z , indem man jeden Radiusvektor OZ zunächst um den unveränderlichen Winkel φ , dreht und dann auf ihm die mit r multiplizierte Länge von OZ anträgt. Es ist das ebene System Z' also gleichsinnig ähnlich dem System Z und O ist der im Endlichen gelegene Doppelpunkt

der beiden Felder. Die Gleichung (8) stellt eine Ähnlichkeitstransformation dar (64.).

Ist b reell, also $\varphi_1 = 0$, so liegen die beiden Systeme perspektiv; wird der Modul von b oder $r_1 = 1$, während $\varphi_1 \neq 0$, so erhält man eine

reine „Drehung“ oder „Rotation“ um den Punkt O und die Systeme sind wieder kongruent.

Da ferner:

$$z = \frac{z'}{b},$$

so erhalten wir die geometrische Deutung der Division, wenn wir uns klar machen, wie wir in der

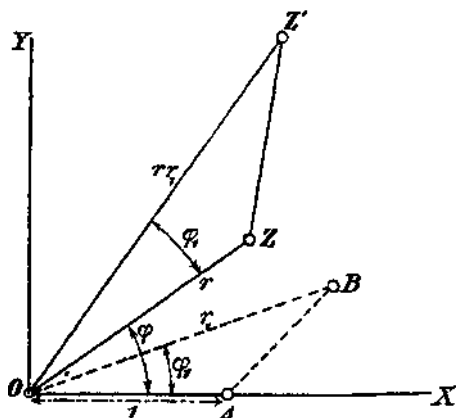


Fig. 87.

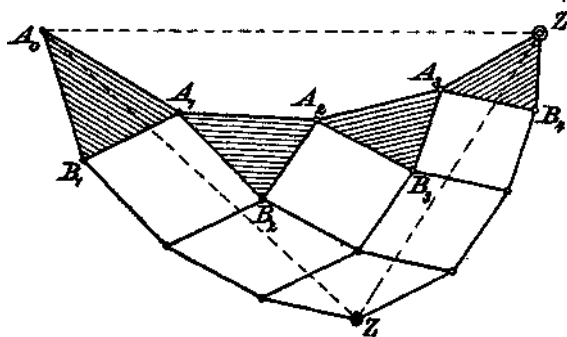


Fig. 88.

Figur vom Punkte Z' zum Punkte Z gelangen können.

Um die Ähnlichkeitstransformation (8), also die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, durch einen Gelenkmechanismus herzustellen,

benutzt Kleiber²⁹⁾ eine beliebige Anzahl ähnlicher Dreiecke — in der Figur 88 sind deren vier, $A_0A_1B_1$, $A_1A_2B_2$, $A_2A_3B_3$, $A_3Z'B_4$, gewählt —, die durch die gezeichneten gelenkigen Parallelogramme verbunden werden. Leicht beweist man dann, daß:

$$\triangle(A_0Z'Z) \sim \triangle(A_0A_1B_1).$$

Hält man also A_0 fest, so beschreiben die Ecken Z und Z' ähnliche Systeme. A_0A_1/A_0B_1 gibt die Längenänderung, die Drehung des einen Systems gegen das andere wird durch den Winkel $A_1A_0B_1$ gemessen.

Nimmt man $A_0B_1 = A_0A_1$, so liefert der Mechanismus eine reine Rotation.

Im einfachsten Falle, d. h. für zwei Dreiecke und ein Parallelogramm, erhält man den zuerst von Sylvester²⁸⁾ und Kempe²⁹⁾ angegebenen sog. Plagiographen oder Pantographen.

Damit ist nun auch die Transformation (4) geometrisch gedeutet: denn sie kann angesehen werden als das Ergebnis einer Parallelverschiebung (7) und einer Ähnlichkeitstransformation (8), sie ist also eine Ähnlichkeitstransformation in allgemeiner Darstellung. Ihren Doppelpunkt erhalten wir, wenn wir $z = z''$ setzen; für ihn wird:

$$z = \frac{d}{1 - c}.$$

Aufgabe 41: Man stelle die Parallelverschiebung und die Drehung eines Koordinatensystems in komplexen Zahlen dar.

Sind α, β die Koordinaten des neuen Systems, ist $a = \alpha + i\beta$, ferner θ der Drehungswinkel, so erhält man für die Parallelverschiebung $z' = z + a$, für die Drehung $z' = e^{i\theta} z$.

$$\text{Die Transformation } z' = \frac{A}{z}.$$

172. Die Verwandtschaft (5) endlich, in der A eine komplexe Zahl ist, läßt sich darstellen durch die Ähnlichkeitstransformation:

$$z' = A z''$$

unter Hinzunahme der weiteren Abbildung:

$$(9) \quad z'' = \frac{1}{z}.$$

Dies ist aber, wie wir soeben (170.) sahen, eine Transformation durch reziproke Radien für $k = 1$ in Verbindung mit einer Umlegung um die X -Achse.

Damit ist nun aber auch gezeigt, daß sich die allgemeine Abbildung (3) ersetzen läßt durch zwei Ähnlichkeitstransformationen in Verbindung mit einer Transformation (1) und zwei Parallelverschiebungen.

Nun führen die Ähnlichkeitstransformationen — was ja selbstverständlich ist — jeden Kreis wieder in einen Kreis über und auch der Transformation (1) kam diese Eigenschaft zu, wenn wir auch die Geraden als Kreise mit unendlich großem Radius betrachten. Es ergibt sich also

Satz 86. *Die linear-gebrochene Substitution (3) in komplexen Variablen hat die Eigenschaft, jeden Kreis wieder in einen Kreis überzuführen.*

Deswegen wird diese Abbildung nach Möbius³⁰⁾ eine „Kreisverwandtschaft“ genannt.

Ferner lassen die betrachteten Ähnlichkeitstransformationen sowie die kongruenten Abbildungen die Winkel und ihren Sinn unverändert; von der Transformation (1) zeigt 151. zusammen mit Satz 71 in 150., daß sie ebenfalls den Sinn der Winkel erhält. Folglich gibt auch die Kreisverwandtschaft eine konforme, in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung, wobei der Sinn der Winkel erhalten bleibt.

Führt man noch die Verbindung:

$$\bar{z} = x - iy$$

in die Betrachtung ein, so läßt sich auch die durch die Gleichungen (14) in 149. gegebene Inversion vermittlels der einzigen Gleichung:

$$z' = \frac{k}{\bar{z}}$$

zur Darstellung bringen. Allgemein gibt eine Gleichung:

$$(10) \quad z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

eine Verwandtschaft, die sich von der durch die Gleichung (3) dargestellten nur dadurch unterscheidet, daß der Sinn der Winkel geändert ist. In der Tat führen wir durch Hinzunahme der Abbildung:

$$z'' = \bar{z},$$

d. h. durch eine Spiegelung an der X-Achse, diese Transformation auf die soeben behandelte zurück. Zu den Kreisverwandtschaften im allgemeinen Sinne haben wir demnach auch die durch die Gleichung (10) definierten zu rechnen und wir können nach dem Vorgange von Möbius zwischen direkten (gleichsinnigen) und indirekten (ungleichsinnigen) Kreisverwandtschaften unterscheiden, je nachdem der Sinn der Winkel erhalten oder geändert wird.

Zentralpunkte, Doppelpunkte.

173. Für einen unendlich fernen Punkt der Z-Ebene ist $x = \infty$, $y = \infty$ und es wird also auch $z = \infty$. Nehmen wir jetzt keine Rücksicht darauf, daß die verschiedenen unendlich fernen Punkte sich durch den endlichen Wert unterscheiden, den der Quotient $y:x$ auch für die un-

endlich großen Werte der Variablen besitzt, so können wir von einem unendlich fernen Punkte U oder $z = \infty$ der Z -Ebene sprechen und ebenso von dem unendlich fernen Punkt Q' oder $z' = \infty$. Aus der Gleichung (3) ergeben sich dann die Wertepaare:

$$\begin{aligned} z = \infty, & \quad z' = \frac{a}{c}, \\ z = -\frac{d}{c}, & \quad z' = \infty. \end{aligned}$$

Die Punkte $z' = \frac{a}{c}$ oder U' und $z = -\frac{d}{c}$ oder Q , die den unendlich fernen Punkten U von ε und Q' von ε' entsprechen, hat Möbius die „Zentralpunkte“ genannt. Man erkennt leicht, daß sie zu den Punkten A_3, B_3 oder 0 und $0'$ von 149. (Fig. 74, a, b) zurückführen, woraus dann weiter abzuleiten ist, daß die kreisverwandten Systeme sich nicht wesentlich von der Inversion unterscheiden.

Liegen die beiden Ebenen ineinander, so liefert die Beziehung (2) für $z = z'$ die Doppelpunkte entsprechend der Gleichung:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Diese sind immer reell vorhanden. Jedem Kreise durch die beiden entspricht wieder ein Kreis durch die gleichen Punkte.

Die bisherigen Ergebnisse fassen wir zusammen in

Satz 87. *In zwei kreisverwandten Ebenen entspricht jeder Geraden des einen Feldes ein Kreis durch den Zentralpunkt des anderen, jeder Geraden durch den einen Zentralpunkt eine Gerade durch den anderen, jedem beliebigen Kreise wieder ein Kreis. Irgend zwei Kurven schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die entsprechenden Kurven. Die Abbildung ist konform, also in den kleinsten Teilen ähnlich, und der Sinn der Winkel ist der gleiche oder entgegengesetzte, je nachdem die Transformation durch eine Gleichung von der Form (3) oder (10) gegeben wird. Die Verwandtschaft ist durch drei Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt, wenn noch hinzugefügt wird, ob sie gleichsinnig oder ungleichsinnig sein soll.*

Man kann zeigen, daß jede Punkttransformation der Ebene, die Kreise stets in Kreise überführt, eine Kreisverwandtschaft ist, also durch Gleichungen von der Form (3) oder (10) darstellbar ist. Alle diese Transformationen bilden — wie die projektiven — eine Gruppe,

Die involutorische Kreisverwandtschaft.

174. Zwei kreisverwandte Ebenen liegen involutorisch, wenn in der Verwandtschaftsgleichung (2) (entsprechend wie in 40.):

$$a = -d \quad \text{oder} \quad a + d = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Zentralpunkte vereinigen sich in dem Punkt 0, für den $z = \frac{a}{c}$.

Aufgabe 42: Sind A, A' und B, B' irgend zwei Paare entsprechender Punkte einer involutorischen Kreisverwandtschaft und ist O der Zentralpunkt, so sind die Dreiecke OAB' und OBA' gleichsinnig ähnlich.

Aufgabe 43: Eine involutorische Kreisverwandtschaft durch zwei Punktepaare A, A' und B, B' geometrisch und analytisch zu bestimmen.

Den Zentralpunkt O findet man wie folgt: die Geraden AB' und $A'B$ schneiden sich in X ; dann liefern die Kreise durch A, B, X und A', B', X in ihrem zweiten Schnittpunkt den Punkt O . Dem Punkte X entspricht in der Involution der Schnittpunkt X' von AB und $A'B'$.

Darstellung ebener Kurven durch Vektoren.

175. Die Betrachtungen von 170. lassen sich noch in anderer Weise verwenden: sie zeigen, wie man die Summe, Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Vektoren derselben Ebene oder komplexer Zahlen durch einen neuen Vektor ersetzen kann, von dem man noch voraussetzt, daß sein Anfangspunkt im Koordinatenanfang liegt. Damit haben wir aber die Mittel in der Hand, um jede algebraische Funktion von ebenen Vektoren als einen neuen Vektor zu deuten. Enthält die algebraische Funktion nun noch einen reellen Parameter t , so entspricht jedem Werte von t ein Vektor und die Endpunkte aller dieser Vektoren für alle möglichen Werte von t bilden eine Kurve, die damit in Parameterform dargestellt ist.

Ist z. B. gegeben die Gleichung:

$$z' = a + b t,$$

wo a und b komplexe Zahlen sind, so erkennt man unmittelbar, daß die dargestellte Kurve eine Gerade ist. Man findet dieselbe wie folgt: sind A und B die den Zahlen a und b entsprechenden Punkte der Zahlenebene, so geht die Gerade durch A parallel zum Vektor OB .

Aufgabe 44: Man bestimme die Kurven, die folgenden Gleichungen entsprechen:

$$\text{a) } z' = \frac{1}{a + b t},$$

$$\text{b) } z' = \frac{a + b t}{c + d t},$$

$$\text{c) } z' = a + b t + c t^2.$$

Im ersten Falle setze man $z = a + b t$; dann erhält man eine Gerade und es wird:

$$z' = \frac{1}{z'}.$$

Diese Verwandtschaft stellt eine Inversion in Verbindung mit einer Umklappung vor. Die Punkte Z' liegen also auf der Kurve, die einer Geraden in dieser Transformation entspricht, also auf einem Kreise. Die

Gleichung b) stellt ebenfalls einen Kreis, c) eine Parabel dar. Diese Betrachtungen finden z. B. in der Wechselstromtechnik Verwendung bei sogenannten Arbeitsdiagrammen, die ein Bild von der Leistung einer Maschine geben. Der Parameter t kann dabei z. B. die Geschwindigkeit des Motors sein oder überhaupt die Veränderung irgend einer anderen Größe (Widerstand, Kapazität usw.) messen.⁴⁰⁾

§ 35. Das komplexe Doppelverhältnis von vier Punkten in der Ebene.

Vier Punkte in der Ebene.

176. Die durch die bilineare Beziehung zwischen z und z' gegebene Analogie der Kreisverwandtschaft und der projektiven Beziehung der Grundgebilde erster Stufe läßt es als zweckmäßig erscheinen, auch den Begriff des Doppelverhältnisses auf komplexe Werte auszudehnen. Rein

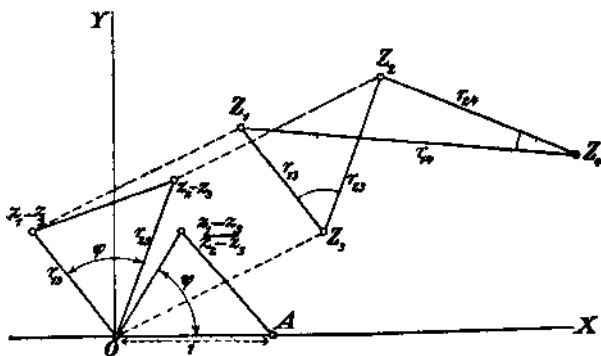


Fig. 89.

formal bietet dies nicht die geringsten Schwierigkeiten. Besteht zwischen zwei Ebenen eine Kreisverwandtschaft, ausgedrückt durch die Beziehung:

$$(1) \quad z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

und entsprechen vier Punkten z_1, z_2, z_3, z_4 mit den komplexen Werten z_1, z_2, z_3, z_4 die Punkte z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 , als Bildpunkte der zugehörigen Werte z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 , so wird man genau wie früher (31.) die Beziehung ableiten:

$$(2) \quad \frac{z'_1 - z'_3}{z'_2 - z'_3} : \frac{z'_1 - z'_4}{z'_2 - z'_4} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Es fragt sich jetzt aber, welche geometrische Deutung einem solchen Doppelquotienten:

$$(3) \quad (z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

in bezug auf die Gruppe der vier Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 zukommt, Stellen wir die einzelnen Quotienten des Ausdrucks (3) in der Ebene dar, so erhalten wir den Punkt, welcher die Differenz $(z_1 - z_3)$ darstellt, indem wir (Fig. 89) an den Vektor OZ_1 den Vektor $-z_3$, d.h. Z_3O , ansetzen. Der dadurch sich ergebende Punkt soll in der Figur kurz mit $z_1 - z_3$ bezeichnet werden. Ist dann r_{13} die Länge der Strecke Z_3Z_1 und φ_{13} der Winkel, den sie mit der positiven X-Achse bildet, so wird:

$$z_1 - z_3 = r_{13} \{\cos \varphi_{13} + i \sin \varphi_{13}\}.$$

Ganz in der gleichen Weise konstruieren wir den Punkt $(z_2 - z_3)$ als letzte Ecke des durch OZ_3Z_2 bestimmten Parallelogrammes und erhalten:

$$z_2 - z_3 = r_{23} \{\cos \varphi_{23} + i \sin \varphi_{23}\},$$

wenn r_{23} die Entfernung Z_3Z_2 und φ_{23} der Winkel dieser Richtung mit der X-Achse ist. Daraus konstruieren wir nach der Regel für die Division komplexer Größen (171.) den Punkt:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3},$$

indem wir den Winkel:

$$\psi = \varphi_{13} - \varphi_{23} = \widehat{Z_2Z_3Z_1}$$

von der X-Achse aus in gleichem Sinne antragen und auf dessen zweiten Schenkel die Länge $r_{13} : r_{23}$ abschneiden. Es ist also:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_{13}}{r_{23}} \{\cos \widehat{Z_2Z_3Z_1} + i \sin \widehat{Z_2Z_3Z_1}\}.$$

Ganz ebenso ergibt sich:

$$\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{r_{14}}{r_{24}} \{\cos \widehat{Z_2Z_4Z_1} + i \sin \widehat{Z_2Z_4Z_1}\}$$

und schließlich:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \\ \text{oder:} \quad = \frac{r_{13} : r_{23}}{r_{14} : r_{24}} \{\cos (\widehat{Z_2Z_3Z_1} - \widehat{Z_2Z_4Z_1}) + i \sin (\widehat{Z_2Z_3Z_1} - \widehat{Z_2Z_4Z_1})\} \end{array} \right.$$

Satz 88. Das komplexe Doppelverhältnis $(z_1 z_3 z_3 z_4)$ von vier (in zwei Gruppen geteilten) Punkten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 einer Ebene hat einen Modul, der gleich ist dem Doppelverhältnis der Strecken, welche die beiden letzten Punkte mit den beiden ersten bilden, und ein Argument, das gleich ist der Differenz der Winkel, welche die beiden letzten Punkte mit den beiden ersten einschließen.

Entsprechen nun den Punkten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 in der Kreisverwandtschaft die Punkte Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4 , so werden die Verbindungslinien der Punkte Z_i in Kreise übergehen, die alle durch den Zentralpunkt U' des Feldes ε' hindurchgehen. Bezeichnen wir die Strecke $Z'_1 Z'_3$ wieder mit r'_{13} , usf., so können wir für das Doppelverhältnis (z'_1, z'_3, z'_2, z'_4) den analogen Ausdruck bilden wie in (4) und die Gleichung (2) liefert dann folgende zwei Beziehungen zwischen den reellen Größen:

$$(5) \quad \frac{r_{13}}{r_{23}} : \frac{r_{14}}{r_{24}} = \frac{r'_{13}}{r'_{23}} : \frac{r'_{14}}{r'_{24}},$$

ferner:

$$(6) \quad \widehat{Z_1 Z_3 Z_2} - \widehat{Z_1 Z_4 Z_2} = \widehat{Z'_1 Z'_3 Z'_2} - \widehat{Z'_1 Z'_4 Z'_2}$$

oder:

Satz 89. *In zwei einander entsprechenden Punktquadrupeln kreisverwandter Ebenen sind die analog gebildeten Doppelverhältnisse der Strecken und die entsprechenden Winkeldifferenzen einander gleich,*

Aufgabe 45. Man beweise folgenden Satz⁴¹⁾: Irgend vier Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 einer komplexen Ebene gehen durch eine Kreisverwandtschaft in die Punkte Z'_1, Z'_2, Z'_3, Z'_4 über. Konstruiert man zu einem der 4 Punkte, z. B. zu Z_4 , in bezug auf das Dreieck $Z_1 Z_2 Z_3$ das Fußpunktendreieck und ebenso zu Z'_4 in bezug auf $Z'_1 Z'_2 Z'_3$, so sind die beiden Fußpunktendreiecke ähnlich.

Literaturverzeichnis.

Die in [] angeführten Zahlen geben die Seiten des Lehrbuches an, wo sich der
Literaturverweis befindet.

1. Näheres darüber findet sich in
DoeMemann, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. I. Teil, 5. Aufl., Berlin 1922 (Sammlung Göschen Nr. 72), II. Teil, 5. Aufl., Berlin 1924 (Sammlung Göschen Nr. 876). [16, 81, 85, 141, 142]
2. v. *Staudt, K. O. Chr.*, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856, 1857, 1860, [20]
Clebsch, A. u. Lindemann, F., Vorlesungen über Geometrie, 2. Bd., 1. Teil, Leipzig 1891, S. 104, wo auch weitere Literatur angegeben ist. [20]
3. v. *Staudt, K. G. Chr.*, Beiträge zur Geometrie der Lage, I I . Heft, Nürnberg 1857, § 29. Von den Abscissen. [47]
Fiedler, W., Darstellende Geometrie, I I I . Teil, Leipzig 1888, § 14 ff. [47]
Gerlach, R., Die Metrik in projektivischen Koordinaten. Inaug.-Dissertation, Zürich 1899. [47]
Killing, W., Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. I. Teil: Die ebene Geometrie, Paderborn 1900, 2. Teil: Die Geometrie des Raumes, Paderborn 1901. [47]
4. *Steiner, J.*, Vorlesungen, II. Teil, 3. Aufl., Leipzig 1898, Nr. 14 u. 15, S. 506. [65]
Weyr, E., Über die Doppelemente projektivischer Gebilde und deren Bedeutung für Kurven 3. Ordnung und Klasse. Sitz.-Ber. der k. böhmischen Ges. d. Wiss., Prag 1869, S. 1. [65]
5. Man findet eine eingehendere Behandlung z. B. in
Sturm, R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 1. Bd., Leipzig 1908, S. 187 ff. [66]
Die Bezeichnung zyklisch stammt von
Clebsch, A., Journal f. Math., 68 (1868), S. 167. [66]
6. Eine andere Methode, entsprechende Elemente kollinearier Ebenen zu konstruieren, das sog. *Möbius'sche* Netz, wurde behandelt in
DoehUmann, K., Geometrische Transformationen, 1. Teil, Leipzig 1902 (Sammlung Schubert XXVII), S. 127. [77]
7. In Betreff dieser Aufgabe sowie dieser Umkehrprobleme überhaupt vergleiche man
Sturm, R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, 2. Bd., Leipzig 1908, S. 22, 24, 37, 44, 45. [81]
8. Als Erfinder gilt der Jesuit *Chr. Scheiner*, der sie in seinem Werke beschrieb: „Pantographice seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanicum, mobile“, Romae 1631. [125]

9. *Sylvester, J. J.*, „On the Plagiograph aliter the Skew Pantigraph". *Nature*. July 1, 1875. Vol. XII, S. 168. [125]
10. Eine eingehende Erörterung dieser Dinge findet sich in *Burmester, L.*, „Lehrbuch der Kinematik", Leipzig 1888. [128]
11. *Ritter, H.*, *Perspektograph*, 2. Aufl., Frankfurt a. M. [128]
12. Man vergl. „Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin" zur Feier der Einweihung ihres neuen Gebäudes am 2. November 1884, S. 213, sowie „Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure", Bd. 35, 1891, Nr. 28, S. 782. [131]
Mach, K., Eine neue Methode und ein neues Gerät zur Konstruktion von Perspektiven. Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Abt. IIa, 127 (1918), 5. Heft S. 699ff. [131]
Es mag hier auch verwiesen werden auf
Dyck, W., *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, München 1892. [131]
13. *Fiedler, W.*, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, I. Teil, 4. Aufl., Leipzig 1904, I I . Teil, 3. Aufl., Leipzig 1885, I I I . Teil, 3. Aufl., Leipzig 1888. [132, 136]
Müller, E., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Technische Hochschulen*, 3. Aufl., Leipzig 1920, 1923. [132, 136]
Peschka, G. A. V., *Freie Perspektive*, 2. Aufl., Leipzig 1888. [132, 136]
Bohrt, K. u. Papperitz, E., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 4. Aufl., Leipzig 1913, 1916, 1923. [132, 136]
Schmid, Th., *Darstellende Geometrie*, I. Teil, 3. Aufl., Berlin 1922 (Sammlung Schubert LXV), I I . Teil, 2. Aufl., Berlin 1923 (Sammlung Schubert LXVI). [132, 136]
Wiener, Chr., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Leipzig 1884, 1887. [132, 136]
14. Zahlreiche weitere Anwendungen der Perspektivität z. B. auf Schattenkonstruktionen sowie weitere Eigenschaften perspektiver Systeme findet man bei *Scheffers, G.*, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, I I . Bd., Berlin 1920, S. 99ff. und in den im Literaturverzeichnis unter 13 genannten Werken. [139]
15. Lösungen für beide Aufgaben findet man z. B. in:
Schloemilch, O., *Die Kegelschnitte als Kollinearverwandte des Kreises*, Ztschr. f. Math. u. Phys., 1 (1856), S. 19. [146]
Schloemilch, O., Über die Konstruktion von Kegelschnitten aus fünf Punkten oder fünf Tangenten. Ztschr. f. Math. u. Phys. 39 (1894), S. 117. [146]
Schloemilch, O., Über die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck. Ztschr. f. Math. u. Phys. 39 (1894), S. 245. [146]
Schur, F., Über die Projektion von fünf Punkten einer Ebene in fünf Punkte eines Kreises. Ztschr. f. Math. u. Phys. 39 (1894), S. 247. [146]
16. Auf eine andere Möglichkeit, die Punkte einer Kollineation durch lineare Konstruktionen zu bestimmen, das sog. *Möbiussche Netz*, kann hier nicht eingegangen werden. Man vergl. Literaturverzeichnis 6, S. 258 ff. [160]
17. Man vgl. darüber
Blasius, E., Die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme, *Wiedemanns Ann. d. Phys. u. Chem.* 22, 1884, S. 528. [165]
Groth, P., *Physikalische Krystallographie*, 4. Aufl., Leipzig 1905, S. 205 ff. [165]
Liebisch, Th., *Physikalische Krystallographie*, Leipzig 1891, S. 51 ff. [165]
Liebisch, Th., *Grundriß der physikalischen Krystallographie*, Leipzig 1896, S. 183ff. [165]
Niggli, P., *Lehrbuch der Mineralogie*, 2. Aufl., Berlin 1924, S. 257 ff. [165]

18. *Czapski, 8. u. Eppenstein, 0.*, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl., Leipzig 1924, S.33ff., 213 ff. [165]
19. *Weierstraß, K.*, Über Scharen bilinearer und quadratischer Formen. Berl.Monateb. 1868, S. 119 oder auch Ges.-Werke, Bd. II, S. 19. [173]
Segre, C., Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Rom. Line. Mem. (3) 19 (1884), S.6. [173]
Muth, P., Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899, S. 198 ff. [173]
20. *Wiener, Chr.*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 1. Bd., Leipzig 1884. [178]
Hauch, G., Die Grenzen zwischen Malerei und Plastik und die Gesetze des Reliefs, Berlin 1885. [178]
Burmester, L., Grundzüge der Relief Perspektive, Leipzig 1883. [178]
21. *Möbius, A. F.*, Lehrbuch der Statik, I. Teil, Leipzig 1837, V., VI. Kap., auch abgedruckt in den Ges. Werken, Bd. 3, Leipzig 1886. [183]
v. Staudt, K. O. Chr., Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, Art. 321. [183]
Sturm, R., Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie, I. Teil, Leipzig 1892, S. 62 ff. [183]
Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik, 2. Bd., Graphische Statik, 7. Aufl., Leipzig 1926, S. 130. [183]
Zindler, K., Liniengeometrie mit Anwendungen, 1. Bd., Leipzig 1902 (Sammlung Schubert XXXIV), 2. Bd., Leipzig 1906 (Sammlung Schubert LI). [183]
22. *Seydewitz, F.*, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Kurven, Arch. d. Math. u. Phys., 7. Teil, 1846, S. 113—148. [185].
23. Weitere Ausführungen findet man in
Doehlemann, K., Geometrische Transformationen, II Teil, Leipzig 1908 (Sammlung Schubert XXVIII), S. 10 ff. [193]
24. *Noether, M.*, Über die algebraischen Funktionen einer und zweier Variabeln. Note 2, 'Gott. Nachr. 1871, S. 267—278. [193]
Noether, M., Über die singulären Wertsysteme einer algebraischen Funktion und die singulären Punkte einer algebraischen Kurve, Math. Ann., 9 (1876), S. 166—182. [193]
Noether, M., Les combinaisons caracteristiques dans la transformation d'un point singulier, Palermo Rend., T. 4, 1890, S. 89—108. [193]
Wieleitner, H., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Leipzig 1905, S. 43, 164ff. [193]
25. *Magnus, L. J.*, Nouvelle méthode pour découvrir des théorems de géométrie, Journ. f. Math. 8 (1832), S. 51—63. [197]
Magnus, L. J., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie 1. (der Ebene) als 3. Teil von Meier Hirschs Sammlung geometrischer Aufgaben erschienen, Berlin 1833, S. 229—241. [197]
26. *Peaucellier, M.*, Lettre de M. Peaucellier, capitaine du Génie. Nouv. Ann., 2. Sér., Tome 3, 1864, S. 414—415. [217]
und ausführlicher als in dieser bloßen Ankündigung
Peaucellier, M. Note sur une question de géométrie de compas. Nouv. Ann., 2. Sér., Tome 12, 1873, S. 71—78. [217]
27. , *Hart*, On certain conversions of motion. Messenger of Mathematics 1875, Vol. 4, S.82—88, 97—100. [219]

- Sylvester, J. J.*, History of the plagiograph. Nature, Vol. 12, 1875, S. 214—216. [221, 239]
29. *Kempe*, How to draw a straight line? Nature, Vol. 16, 1877, S. 65—67, 86—89, 125—127, 145—146. [221, 237, 239]
- Noch allgemeinere Betrachtungen dieser Art stellt an:
- Kleiber, J.*, Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen, Ztschr. f. Math. u. Phys. 36 (1891), 8.296—301 [221, 237, 239]
- Kleiber, J.*, Beitrag zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen, Ztschr. f. Math. u. Phys. 36 (1891), S. 329—338 sowie 41 (1896), S. 177—198, 233—257, 281—304. [221, 237, 239]
- Endlich sei noch die zusammenfassende Studie erwähnt
- Hessenberg, G.*, Gelenkmechanismen zur Kreisverwandtschaft, Tübinger naturwiss. Abhandlungen, 6. Heft, Tübingen 1924. [221, 237, 239]
30. Auch die projektive Verallgemeinerung der räumlichen Inversion kann nicht erörtert werden. Vgl. Literaturverzeichnis 23, S. 180 ff. [227]
31. *Groth, F.*, Physikalische Krystallographie, 4. Aufl., Leipzig 1905, S. 314. [229]
- Niggli, F.*, Lehrbuch der Mineralogie, 2. Aufl., Berlin 1924, S. 97 ff. [229]
- Rinne, F.*, Einführung in die kristallographische Formenlehre, 4. u. 5. Aufl., Leipzig 1922, S. 9 ff. [229]
32. *Plücker, J.*, Analytisch-geometrische Aphorismen. V. Über ein neues Übertragungsprinzip. Journ. f. Math., Bd. 11, 1834, S. 219—225. [229]
33. *Thomson, W.*, Extrait d'une lettre de M. William Thomson á M. Liouville. Journ. de Math., Tome 10, 1845, S. 364r-367. — On the mathematical theory of electricity in equilibrium. The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. 3, 1848, S. 131—148, 266—274. — Extraits de deux lettres adressées á M. Liouville, Journ. de Math., Tome 12, 1847, S. 256—264. [229]
34. *Liouville, J.*, Note au sujet de l'article précédent, Journ. de Math., Tome 12, 1847, S. 256—264. [229]
35. *Wrinch, D.*, On the Electric Capacity of Certain Solids of Rotation, Phil. Mag. 50 (1925), S.60—70. [232]
- Wrinch, D.*, Laplaces Equation and the Inversion of Coordenates, Phil. Mag. 50 (1925), S. 1049—1058, insbes. 1054. [232]
36. *Michell*, The inversion of plane stress. Lond. M. S. Proc, Vol. 34, 1901/1902, S. 134—142. [234]
37. *Timpe*, Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, Dissertation, Göttingen 1905. [234]
38. *Burkhardt, H.*, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Bd. 1, 2. Heft, 5. Aufl., Berlin 1921. [237]
- Rose, M.*, Einleitung in die Funktionentheorie, 2. Aufl., Berlin 1918 (Sammlung Göschen Nr. 581). [237]
39. *Möbius, A.F.*, Über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen, Leipz. Ber. 4 (1852), S. 41—54, auch abgedruckt im Journ. f. Math., 52 (1856), S. 229—242 oder Ges. Werke, Bd. 2, Leipzig 1886, S. 189—204. [240]
- Möbius, A. F.*, Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren. Leipz. Ber. 5 (1853), S. 14—24, auch abgedruckt im Journ. f. Math. 52 (1856), S. 218—228 oder Ges. Werke, Bd. 2, S. 205—218. [240]
- Möbius, A. F.*, Über die Involution von Punkten in einer Ebene. Leipz. Ber. 5 (1853), S. 176—190 oder Ges. Werke, Bd. 2, S. 219—236. [240]

- Möbius, A. F.*, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. Leipz. Abh. 2 (1855), S. 529-595 oder Ges. Werke Bd. 2, S. 243 bis 314. [240]
- v. *Weber, E.*, Zur Theorie der Kreisverwandtschaften in der Ebene. Münch. Ber. 31 (1901), S. 367—408. [240]
40. *Bloch, O.*, Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik. Zürich 1917. [243]
- v. *Rziha, E.* u. *Seidener, J.*, Starkstromtechnik, Taschenbuch für Elektrotechniker, 6. Aufl., 1. Bd., Berlin 1922, S. 65ff. [243]
41. *Schick, J.*, Beziehungen zwischen Isogonalzentrik und Invariantentheorie. Sitz.-Ber. d. Münch. Akad. d. Wiss. 30 (1909), S. 249—272. [245]

Sachverzeichnis.

Die Ziffern bedeuten die Seiten des Buches.

- absolute Kreispunkte 68, 199.
Achse der Kollineation 104, — der Zone 228.
affin, —e Systeme, ebene 88, räumliche 161, —gleiche Systeme 92, 164, perspektiv —e 113, 179.
Affinität 88, 161, —sachse 113, Richtung der —, —strahlen 113.
afokale oder brennpunktlose Abbildung 165.
ähnlich, —e Punktreihen, —e Systeme, ebene 92, räumliche 164, 173, — und — gelegene oder perspektiv —e 114, gleichsinnig und ungleichsinnig —e 101.
Ähnlichkeitstransformation 238.
Airysehe Spannungsfunktion 234.
Äquatorialprojektion, stereographische — 228.
Auge 177.
ausgeartete, — oder singulare Kollineation 159, 173, — projektive Transformation 54.
axiale Kollineation 168.
azimutale Polarprojektion 228.

Berührungskegel 43.
Beschleunigungspol 128.
Bildebene 177, —raum 165.
bilinare Gleichung 52, 55.
binäre Form 14.
bizirkuläre Kurve 4.0., 215.
Brennebenen 165.
Brennpunkte 201, singulare — 201.
brennpunktlose Abbildung 165.
Büscheldarstellung einer Involution 71.

Cartesische Koordinaten 31, 45.
Ceva, Satz des — 22.
Charakteristik der Kollineation 108.
charakteristische Gleichung 171.

Determinante einer Substitution 51, 79.
Diagonalepunkte des vollständigen Vierecks 142.

Diagramm 165.
direkte KreisVerwandschaft 240.
Doppelemente, —ebenen 166, —punkte 58, 95, 166, 241, —strahlen 58, 95, 166.
Doppelverhältnis 11.
Drehung 238.
Dreieckskoordinaten 25.
Dualitätsgesetz der Ebene 85, — des Raumes 155.

Ebene, Bild- 177, Einheits- 39, 43, Flucht- 157, 175, Gegen- 175, Gleichung der — 43, Harmonikai- 40, homogene Koordinaten der — 38, Kollineations- 169, 175, Null- 183, perspektiv kollineare —n 81, singuläre — 159, uneigentliche, unendlichferne — 43, wahre Koordinaten der — 39.
eindeutige Verwandschaft 48.
einförmiges Gebilde 71.
Einheitspunkt 14, 25, 35, seine Gleichung 30, 43, —ebene 39, ihre Gleichung 43, —gerade 27, ihre Gleichung 30.
elektrische Bilder 229.
Ellipse, als Kreisbild 133 s. auch Kegelschnitte.
elliptische Involution 67, 73.

Fläche, — n. Ordnung 43, — v. Klasse 43.
Flachpunkt 193.
Flucht ebene 157, 175, —gerade, —linie 76, 106, —punkt 54.
Fundamentaldreieck 24, —gerade 187, —punkte 14, 187, —satz der neueren Geometrie 60, —System 25, 27, 187, —tetraeder 35, 39.
Fußpunktkurve 216.

Gegenachsen 106, —ebenen 175.
geometrische Transformation 10.
gerade symmetrische Systeme 113, **164**, 180.
Gerade, Einheits- 27, 30, Flucht- 76, 106, Fundamental- 187, Gleichung der

- n 30, homogene Koordinaten der — 27, imaginäre — 2. Art 172, isotrope — 68, 199, Minimal-, — von der Länge Null 67, 199, singulare — 160, unendlich-ferne, uneigentliche — 26, wahre Koordinaten der —n 28.
- Geradführung 218.
- geschart involutorische Systeme 170, —e Kollineation 168.
- gewöhnliche, schiefwinkelige oder Cartesische Koordinaten 31, 45.
- gleichlaufend kongruente Strahlbüschel 101.
- gleichsinnig ähnliche Systeme 101, — kongruente Systeme 101, 173, — Perspektiv Systeme 109.
- Gleichung, bilineare — 52, 55, charakteristische — 171, — der Ebene, — der Einheitsebene 43, der geraden Linie, — der Einheitsgeraden 30, — des Punktes, — des Einheitspunktes 30, 42, 43.
- Green scher Satz 230.
- Grundelemente 18.
- Grundgebilde, proj. — 1. Stufe 13, 50.
- Gruppe von Transformationen 61, 158, 241.
- Harmonikale 23.
- Harmonikaiebene 40.
- harmonisch Hegende Punktpaare 11, 20, — Perspektiv Systeme 110, —e Homologie oder —e Zentralkollineation 110, 170.
- Hauptdreieck 96, -punkte 187, -tetraeder 166, -vierseit 181.
- Herzkurve oder Kardioiden 217.
- homogene Koordinaten des Punktes 14, 25, 27, 35, des Strahles 16, der Geraden 27, der Ebene 38, — lineare Substitution 51, 79.
- Homographie, homographisch 76.
- homologe Systeme 104.
- Homologie 104, harmonische — 110, 170.
- hyperbolische Involution 67, 73.
- Identität, identische Beziehung 59, 60, 64, 95, 110.
- imaginäre Gerade 2. Art 172.
- indirekte Kreisverwandtschaft 240.
- Invariante der Projektivität 61, —n der Kollineation 97, 167.
- Inversion, ebene — 207, räumliche — 221, -skreis 209, -smittelpunkt 207, Potenz der — 207.
- Inversor von Hart 219, — von Peaucellier 217, — von Sylvester und Kempe 221.
- Involution auf einem Kegelschnitt 72, Büscheldarstellung der — 71, elliptische, hyperbolische, parabolische — 67, 73, Rechtwinkel- 68, 141, 200, windschiefe — 170, zentrische — 170, zirkulare — 68.
- involutorisch 67, geschart — 170.
- inzidenten Elemente 181.
- isogonale Transformation 208.
- isotrope Gerade 68, 199.
- Kardioiden 217.
- Kegelschnitte, Achsenkonstruktion eines —s 151, Aufgaben über — 134ff., 145ff, Involution auf einem — 72, Krümmungskreis eines —s 152, Ordnungs- 122, perspektiv affine — 144, Perspektiv — 139.
- Kernflächen 181.
- kollineare Systeme, ebene — 76, perspektiv — 81, 104, 169, räumliche — 155.
- Kollineation, -achse 104, ausgeartete — 159, 173, axiale — 168, Bestimmung der —, in der Ebene 74, im Raume 155, Charakteristik der — 108, Doppelemente der — 166, ebene — 76, -ebene 169, 175, Fluchtlinien der — 76, gescharte — 168, harmonische Zentral- 170, Hauptdreieck der — 96, Haupttetraeder der — 166, Invarianten der — 97, 167, räumliche — 155, singulare — 159, 173, zentrische — 169, Zentrum der — 104, 169, 175.
- konforme Transformation 208, 223, 240.
- kongruente Punktreihe 55, — Strahlbüschel 101, — Systeme 92, 101, 115, 164, 173, 180.
- Kongruenz, lineare — 168.
- Koordinaten, Dreiecks- 25, — der Ebene 46, gewöhnliche, schiefwinkelige oder Cartesische — 31, 45, homogene, trimetrische oder projektive —, des Punktes 25, der Geraden 27, homogene, tetrametrische oder projektive —, des Punktes 35, der Ebene 39, Plücker'sche Linien- 33, Tetraeder- 35, —Trans-

- formation 9, 62, wahre —, eines Punktes 26, 36, einer Geraden 28, einer Ebene 39.
- Korrelation, ebene — 83, räumliche — 155, Bestimmung einer räumlichen — 155, Hauptvierseit der — 181, Kernflächen der — 181, Mittelpunkt einer — 157.
- korrelative ebene Systeme 83, — räumliche Systeme 155.
- Kreis, Inversion*-209, Null-, Punkt-199.
- Kreispunkte, absolute — 68, 199.
- Kreisverwandtschaft, direkte und indirekte — 240.
- Krümmungskreis eines Kegelschnittes 152.
- Kugelbündel oder -netz, -büschel 226.
- Kurven, Ordnung 43.
- Limaçon de Pascal 217.
- lineare Kongruenz 168, — Substitution, — Transformation 61, 79, 155.
- Linienkoordinaten, Plückersche — 33
- Maßstab oder Verjüngung 114, 207, 224.
- Menelaos, Satz von — 22.
- Minimalgerade 67, 199.
- Mittelpunkt einer Inversion 207, — einer Korrelation 157.
- Modul einer Substitution 79.
- Momentanzentrum 127.
- Niveaulfläche 229.
- Nullbene 183, -kreis 199, -punkt 183, -System 183.
- Ordnungselement 67, -kegelschnitt 122.
- Pantograph 123, 239.
- parabolische Involution 67, 73.
- Parameter 17.
- Pascalsche Schnecken 217.
- perspektiv, — ähnliche Systeme 114, -affine Kegelschnitte 144, — affine Systeme 113, 179, —e Kegelschnitte 139, -kollineare Ebenen 81, -kollineare Systeme 104, 169, -e Lage von Punktreihe und Strahlbüschel 54.
- Perspektive 81, ebene — 104, räumliche — 169, Relief- 169, 177, Theater- 178, windschiefe — 168.
- Perspektivitätsachse 100.
- Perspektograph 128.
- Plagiograph 239.
- Plückersche Koordinaten 33, 46.
- Poldardreieck, -feld 121, stereographische -Projektion 228.
- polarreziproke Systeme 122, 155.
- Potential 229.
- Potenz der Inversion 207, -linie 210,
- Projektion, sphärische — 228, Stereo -graphische — 227, Polar- und Äquatorial- 228.
- projektive Eigenschaften 84, — Grundgebilde 1. Stufe 13, 50, — Koordinaten 25, 27, 35, 39, — Transformation 10, 54, — Verwandtschaft 48.
- Projektivität 51, Invariante der — 61, zyklische — 66.
- Punkt, Brenn- 201, Einheits- 14, 25, 30, 36, 43, Flach- 193, Flucht- 54, Fundamental- 14, 187, Gleichung des —es 30, 42, 43, Haupt-187, homogene Koordinaten des —es 14, 25, 27, 35, -kreis 199, singuläre —e 159, -transformation 9, unendlichferne, uneigentliche —e 43, wahre Koordinaten des —es 26, 36, Zentral—e 241.
- Punktpaare, harmonisch liegende — 11.
- Punktreihen, ähnliche — 55, kongruente — 55.
- Quadratische Transformation 187, 194, 195.
- Quaternäres Gebiet 39.
- Radikalachse 210.
- rationales Gebilde 71.
- Rechtwinkelinvolution 68, 141, 200, Doppelstrahlen der — 200.
- Relief 177, -Perspektive 169, 177, Tiefe des —s 177.
- reziproke Radien 207, 221, — ebene Systeme 83, — räumliche Systeme 155,
- Reziprozitätsgesetz der Ebene 85, — des Raumes 155.
- Richtung der Affinität 113.
- Rotation 238.
- Rückkehrpunkt 1. Art oder Spitze 192.
- schief symmetrische Systeme 113.
- schief winkelige Koordinaten 31, 45.
- Schraubung, Schraubenbewegung, Schraubenachse 174.
- singuläre Brennpunkte 201, — Punkte, Gerade und Ebenen 159, 160, — Transformation 54.

- Sinus der Ecke 162.
 sphärische Projektion 228.
 Spitze, Rückkehrpunkt 1. Art 192.
 stereographische Projektion 227, —
 Äquatorialprojektion, — Polarprojek-
 tion 228.
 Storchschnabel 123, 239.
 Strahlbüschel, kongruente — 101.
 Substitution 10, allgemeine lineare —
 155, Determinante der — 51, 79, homo-
 gene lineare — 51, 79, Modul der —
 79, transponierte — 80.
 Symmetrie, gerade und schiefe — 113.
 Systeme, ähnliche— 92, 164, ähnlich
 und ähnlich gelegene —, perspektiv-
 ähnliche — 114, gleichsinnig und un-
 gleichsinnig ähnliche — 101, affine —
 161, affingleiche — 92, 164, perspektiv-
 affine — 113, 179, geschart involuto-
 rische — 170, harmonisch Perspektive
 — 110, homologe— 104, identische —
 95, kollineare —, ebene 76, räumliche
 155, perspektiv kollineare — 104, 169,
 kongruente — 92, 101, 115, 164, 173,
 180, gleichsinnig und ungleichsinnig
 kongruente — 101, 173, gleich- und un-
 gleichsinnig Perspektive — 109, polar-
 reziproke —, ebene 122, räumliche
 155, schief und gerade symmetrische
 — 113, 164, 180, zentralkollineare,
 zentrischkollineare — 104.
 Tangentialkegel 43.
 tautozonale Flächen 228.
 teleskopische Abbildung 165.
 ternäres Gebiet 74.
 Tetraederkoordinaten 35.
 tetrametrische Koordinaten 35, 39.
 Theaterperspektive 178.
 Tiefe des Reliefs 177.
 Transformation, Ähnlichkeit- 238,
 ausgeartete oder singulare — 54, —
 durch reziproke Radien, in der Ebene
 207, im Raum 221, geometrische —
 10, Gruppe von -en 61, 158, 241,
 isogonale, winkeltreue, konforme oder
 in den kleinsten Teilen ähnliche —
 208, 223, 240, Koordinaten- 9, 62,
 lineare — 51, 79, 155, projektive — 10,
 48, 54, Punkt- 9, quadratische — 187,
 194, 195.
 Translation 115, 237.
 transponierte Substitution 80.
 trimetrische Koordinaten 25, 27.
 ündulation 193.
 uneigentliche, unendlich ferne Ebene
 43, — Gerade 26, — Punkte 43.
 ungleichlaufend kongruente Strahl-
 büschel 101.
 ungleichsinnig ähnliche,— kongruente
 Systeme 101, — Perspektive Systeme
 109.
 unikursales Gebilde 71.
 Vektor 237.
 Verwandtschaft 10, Kreis- 240, pro-
 jektive — 48.
 Verschwindungslinie 138.
 Vollständiges Viereck 23, 142.
 wahre Koordinaten 26, 28, 36, 39.
 windschiefe Perspektive 168, — In-
 volution 170.
 winkeltreue Transformation 208.
 Wurf 47.
 Zentralkollineation 104, 169, har-
 monische — 110, 170.
 Zentralpunkte 241.
 zentrische Involution 170.
 Zentrum der Kollineation 104, 169, 175.
 zirkuläre Involution 68.
 Zone, Achse der — 228.
 Zyklus, zyklische Projektivität 66.

MATHEMATIK

Frühjahr



1930

VERLAG WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W10 UND LEIPZIG

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. CRELLE 1826. Herausgegeben von K. HENSEL, H. HASSE, L. SCHLESINGER. Wissenschaftlicher Beirat: H. Brandt, M. Dehn, G. Doetsch, A. Fraenkel, O. Haupt, F. Hausdorff, E. Hellinger, G. Kowalewski, H. Rademacher, K. Reidemeister, A. Rosenthal, C. Schaefer, W. Schmeidler, F. Schottky, O. Toeplitz. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je 16.—, Band 145—147 je 12.—, Band 148—151 je 10.—, Band 152 12.—, Band 153 17.50, Band 154 30.—, Band 155—156 je 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband I/II), Band 159—161 je 36.—

Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von KARL OHRTMANN und FELIX MÜLLER, fortgeführt von EMILLAMPE. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von H. Hahn, E. Hecke, G. Herglotz, O. Hölder, A. Loewy, L. Neder, O. Perron, E. Salkowski, G. Szegö, A. Wangerin, H. Weyl herausgegeben von LEON LICHTENSTEIN. Band 1—50: Jahrgang 1868—1924. Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 75.—, Band 46. 92.—, Band 47: 74.—, Band 48: 121.—, Band 49: 77.—, Band 50: 78.—. Von Band 51 ab (Jahrgang 1925 u. folg.) erfolgt die Herausgabe durch die Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin. Im Druck: Band 51 (1925) und Band 53 (1927).

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik, Mechanik, Relativitätstheorie, Astronomie und mathematischen Physik. Auch die Geschichte und Philosophie der Mathematik wie die Fragen der Didaktik finden sorgfältige Berücksichtigung.

Geschichte der Mathematik. Von Oberstud.-Dir. Dr. H. WIELEITNER. 2 Bde. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. 136 Seiten. 1922. II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. 154 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 226, 875.) Geb. je 1.80

„Zum erstenmal ist hier in deutscher Sprache eine zusammenhängende Darstellung der Geschichte der Mathematik versucht worden. Trotz des engen Raumes ist sie durchaus lesbar und keineswegs eine bloße Aufzählung“ Deutsches Philologen-Blatt.

Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. GÜNTHER in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Sammlung Schubert Bd. 18.) Geb. 17.40

II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudien-direktor Dr. H. WIELEITNER in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra, Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Sammlung Schubert Bd. 63.) Geb. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Fig. VI, 222 Seiten. 1921. (Sammlung Schubert Bd. 64) Geb. 3.50

„Es zeigt sich auch in diesem Buche wieder die große Meisterschaft des Verfassers in der bewußten Auswahl und klaren, anregenden Darstellung eines großen Stoffes, die auch seine anderen größeren Compendien auszeichnen“ Monatshefte für Mathematik und Physik.

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. JOHANNES TROPFKE, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Lex.-Oktav.

- Band1: Rechnen. VII, 177 Seiten. 1921. 7.20, geb. 8.2a
 Band2: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 1921. 8.50, geb. 9.50
 Band3: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 1922. 6.—, geb. 7.—
 Band4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 1922. 9.—, geb. 10.—
 Band5: I.EbeneTrigonometrie. II.SphärikundsphärischeTrigono-
 metrie. IV, 185 Seiten. 1923. 7.50, geb. 8.50
 Band6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 1924. 7.—, geb. 8.—
 Band7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 1924. 6.50, geb. 7.5a

„Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz int Bücherschrank eines Jeden Mathematikers.“
Naturwissenschaften.

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem GANESH PRASAD. Ausdem Englischen übersetzt von Dr. FRIEDRICH LANGE. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923. 0.80

In leichtverständlicher Darstellung berichtet der Verfasser über den Aufbau der Theorie der Integralgleichungen und ihre Anwendungen, die Erforschung der Grundlagen der mathematischen Physik, die Verallgemeinerung des Begriffs der konvergenten Reihen und die Entwicklung der modernen Relativitätstheorie.

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. PETERS, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909. Geb. 20.—
 Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben. Je geb. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. SEELIGER. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 501 Seiten. Folio. 1930. Geb. 26.—
 Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in französischer wie englischer Ausgabe vor. Je geb. 26.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. ADLER. Zweite Auflage. 117 Seiten u. 1 Tafel. 1929. (Samml. Götschen Bd. 423.) Geb. 1.80

Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitssekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. PETERS, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lex.-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912. 6.—, geb. 7.—

In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benutzung des wertvollen Materials, dar ihn als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der 8 stelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.*

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. AUGUST, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Achtundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. AUGUST, weiland Prof.a. d. Artillerie- u. Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 S. 1927. Geb. 2.—

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein,“ Allgemeine Vermessungs-Nachrichten,

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Neue Ausgabe von Dr. ROBERT HAUSSNER. o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neudruck 1926. (Samml. Götschen Bd. 81.) Geb. 1.80

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten,“ Zeitschrift d. österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. MAX ZACHARIAS, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. PAUL METH, Studienrat a. d. Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927. Geb. 1.50

„Diese Logarithmentafel zeichnet sich durch übersichtliche Anordnung und Reichtum des Gebotenen aus.“ Deutsche Schulzeitung in Polen.

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. KÜSTER †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet sowie mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. THIEL, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Fünfunddreißigste bis vierzigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 188 Seiten und eine Tafel. 1929. Geb. 7.50

„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehrten Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die New Auflage erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“

Zeitschrift für angewandte Chemie.

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. KEIICHI HAYASHI, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1928. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschieden großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“ Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Von Dr. F. G. MEHLER. Neu bearbeitet von Oberstudiendirektor A. SCHULTE-TIGGES. Oktav.

Ausgabe A. 31. Auflage des Stammbuches. Mit 107 Figuren im Text und auf r Tafel. XII, 280 Seiten. 1921. 2.80

Ausgabe B mit Übungen. Unterstufe. 13. Auflage. Mit 6 Tafeln. IX, 223 Seiten. 1927. 2.80

Ausgabe B ohne Übungen. 12. Auflage. (Sonst wie die vorige.) Unterstufe. Mit 3 Tafeln. 166 Seiten. 1923. 1.80

Oberstufe. 8. Auflage. Mit 6 Tafeln. VII, 254 Seiten. 1925. 4.—

Geometrische Aufgaben und Übungen (aus der Ausgabe B). Unterstufe. Mit 2 Tafeln. 58 Seiten. 1923. 0.60

Oberstufe. 89 Seiten. 1925. 1-50

Hierzu sind erschienen:

Rechentafeln für höhere Lehranstalten. 2. Auflage. 18 Seiten. 1929. 0.30

Arithmetische Aufgabensammlung (aus der Ausgabe B).

Unterstufe. Mit 4 Tafeln. V, 100 Seiten. 1927. 2.50

Oberstufe. 106 Seiten. 1929. 3—

Ergebnisse zur Unterstufe. 42 Seiten. 1928. 3—

Auflösungen zur Oberstufe. IV, 92 Seiten. 1929. 4.—

Ferner folgende Einzelteile der Oberstufe mit Übungen:

Grundzüge und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit I Tafel. 63 Seiten. 1925. 1.—

Grundzüge der darstellenden Geometrie mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit 4 Tafeln. 63 Seiten. 1925. 1-50

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. TH. BÜRKLEN†. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. RINGLEB. Mit 36 Figuren. 241 Seiten. 1928. (Sammlung Götschen Bd. 51.) Geb. 1.80

„Eint sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgeegnet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den RePetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben.“

Fortschritte der Mathematik.

Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldsspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Vierte Auflage, neubearbeitet von Professor Dr. F. FITTING, München-Gladbach. Oktav. 245 Seiten. 1924. Geb. 6.—

„Das kleine, auch äußerlich hübsch ausgestattete Buch wird allen Lesern Freude machen, und insbesondere der Lehrer wird in ihm eine Fülle von Anregungen für den Unterricht vorfinden. Wir empfehlen die ‚Mußestunden‘ allgemeiner Beachtung.“ *Zeitschrift für das Realschulwesen.*

Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Dritte Auflage, neubearbeitet von Professor P. B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 5 Figuren. 132 Seiten. 1923. (Sammlung Götschen Bd. 47.) Geb. 1.80

Die neue Bearbeitung des vorliegenden Bandes ist durch einen Abschnitt über Kombinatorik bereichert.

Lehrbuch der Algebra. Von Dr. ALFRED LOEWY, o. Professor an der Universität in Freiburg i. Br. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. VI, 398 Seiten. 1915. 12.—, geb. 13.20

Elementare Algebra. Von Professor P. B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. 1926. (Samml. Götschen Bd. 930.) Geb. 1.80

„Der erste Teil des Bandes behandelt die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, der zweite besondere Gleichungen und Lösungsverfahren. Dem Text sind gut gewählte Zahlenbeispiele beigegeben.“ *Allgem. Vermessungs-Nachrichten.*

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 307 Seiten. (Götschens Lehrbücherei Bd. 8.) 10.—, geb. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. 1927. VIII, 243 Seiten. (Götschens Lehrbücherei Bd. 9.) 8.—, geb. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Beispietsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. 1926. (Samml. Götschen Bd. 48.) Geb. 1.80

Die bekannte Beispietsammlung zur Arithmetik und Algebra von H. Schubert erscheint hiermit in einer neuen Bearbeitung. Änderungen gegen die alten Auflagen sind neben unerheblichen Kürzungen und mehrfachen Verbesserungen insofern eingetreten, als die Aufgaben zur Algebra ganz erheblich erweitert wurden.

Irrationalzahlen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. VIII, 186 Seiten. (Götschens Lehrbücherei Bd. 1.) 6.—, geb. 7.—

Inhalt: Die Grundlagen — Der Begriff der Grenze — Potenzen und Logarithmen — Verschiedene Darstellungsformen irrationaler Zahlen — Approximation irrationaler Zahlen durch rationale — Algebraische und transzendente Zahlen.

Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10 und Leipzig

Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. RUNGE, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. 1921. V, 172 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2.) 6.—, geb. 7.—

Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nicht-linearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, Dient das Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.

Höhere Algebra. Von Dr. HELMUTH HASSE, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Halle.

I: Lineare Gleichungen. 160 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 931.) Geb. 1.80

II: Gleichungen höheren Grades. 160 Seiten. 1927. (Samml. Göschens Bd. 932.) Geb. 1.80

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der „allgemeinen“ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“ Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.

Einführung in die Axiomatik der Algebra. Von Dr. H. BECK, o. Professor an der Universität Bonn. 1926. X, 198 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6.) 9.—, geb. 10.50

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, o. Prof. an der Techn. Hochsch. in Dresden. Zweite, verk. Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 S. 1925. 14.—, geb. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ Schulwart.

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen. Von Dr. ARTHUR HAAS, a. o. Professor an der Universität Wien. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 147 Seiten. 1929. 5.—, geb. 6.—

Das Buch stellt die Grundzüge der Vektoranalyse in engstem Zusammenhange mit ihrer Anwendung auf Mechanik, Hydrodynamik, Elektrizitätslehre und Relativitätstheorie dar.

Vektoranalysis. Von Dr. SIEGFRIED VALENTINER, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschens Bd. 354.) Geb. 1.80

Zahlentheorie. Von Dr. KURT HENSEL, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. 10.—, geb. 12.—

Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Professor Dr. PAUL BACHMANN. Zweite, verbesserte Auflage. Herausgegeben von Dr. ROBERT HAUSSNER, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. 1921. XV, 246 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3.) 8.50, geb. 9.50

Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.

Synthetische Zahlentheorie. Von Dr. RUDOLF FUETER, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. VIII, 277 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4.) 10.—, geb. 12.—

Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf

Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. Von Professor Dr. PAUL BACHMANN. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919. 2.50

In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Themen, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben,

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. GEORG SCHEFFERS, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1925. 30.—, geb. 33.—

Diets vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Determinanten. Von Professor Studienrat PAUL B. FISCHER. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 402.) Geb. 1.80

Der in einer wesentlich umgearbeiteten Auflage vorliegende Band soll die Studierenden der Mathematik, Physik und technischen Wissenschaften in die Grundzüge der Determinanten einführen.

Gruppentheorie. Von Dr. LUDWIG BAUMGARTNER in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschens Bd. 837.) Geb. 1.80

Elementare Reihenlehre. Von Dr. HANS FALCKENBERG, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 943.) Geb. 1.80

Das Bündchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z.B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an

Fouriersche Reihen. Von Dr. W. ROGOSINSKI, a. o. Professor an der Universität Königsberg i. Pr. Mit 4 Figuren. 1930. (Samml. Göschens Bd. 1022.) Geb. 1.80

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. PLESSNER. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926. 14.—, geb. 16.—

„Das System ist so durchgeführt, daß fast keine Vorkenntnisse gefordert und trotzdem das volle Beherrschen des Materials erzielt werden kann.“ Allgemeine Österr. Chemiker' u. Techniker-Zeitung.

Methoden der praktischen Analysis. Von Dr. FR. A. WILLERS, o. Professor an der Bergakademie Freiberg (Sachsen). 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12.) 20.—, geb. 21.50

Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.

Niedere Analysis. Von Professor Dr. BENEDIKT SPORER. Mit 5 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Sechster Abdruck. 179 Seiten. 1919. (Samml. Göschens Bd. 53.) Geb. 1.80

Ohne den wissenschaftlichen Boden zu verlassen, war es das Bestreben des Verfassers, alle Ableitungen in den verschiedenen Kapiteln dieses umfangreichen Gebietes so einfach und verständlich wie möglich darzustellen und durch Beispiele klarer zu machen.

Höhere Analysis. Von Dr. FR. JUNKER, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen (Württemberg). Erster Teil: Differentialrechnung. Mit 167 Übungsbeispielen und 67 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 204 Seiten. 1929. (Samml. Göschens Bd. 87.) Geb. 1.80
Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Vierte, verbesserte Auflage. Neudruck. 132 Seiten. 1929. (Samml. Göschens Bd. 88.) Geb. 1.80

„Die Bändchen sind eine wahre Hochschule des abstrakten Denkens, und das Werk genießt in Fachkreisen mit Recht das höchste Ansehen.“ Magazin für Pädagogik.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. FR. JUNKER. Vierte, verbesserte Auflage von Oberstudienrat Professor Dr. A. WITTING. Mit 47 Figuren im Text. 130 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 146.) Geb. 1.80

Der Band, der sich als vorzügliches Mittel zur Einübung der elementaren Sätze und Formeln der Differentialrechnung bewährt hat, erfuhr bei seiner Neuauflage eine bedeutende Verbesserung und Erweiterung.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Rektor Dr. FR. JUNKER. Mit 52 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 135 Seiten. 1929. (Samml. Göschens Bd. 147.) Geb. 1.80

„Die reichhaltige Aufgabensammlung ist für den Selbstunterricht sehr geeignet. Das nützliche Büchlein wird weiterhin die verdiente große Verwendung finden.“ Schweizer Pädagogische Zeitschrift.

Lehrbuch der Differentialgleichungen. Von Dr. HEINRICH LIEBMANN, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901. 6.—, geb. 7.20

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. LUDW. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten. 1922. 10.—, geb. 11.—

Es war das Bestreben des Verfassers, durch die hier gegebene Darstellung die Theorie der Differentialgleichungen auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. G. HOHEISEL. 159 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 920.) Geb. 1.80

Der Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. Bei der Auswahl des Stoffes wurden Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt,

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. HORN, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10.) 9.—, geb. 10.50

Inhalt: Elementare Integrationsmethoden, Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung, numerische und graphische Näherungsmethoden, lineare Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden und weitere Untersuchungen im reellen Gebiet, Existenzbeweise im komplexen Gebiet, Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten, Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.

Partielle Differentialgleichungen. Von Dr. G. HOHEISEL. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 1003.) Geb. 1.80

Das Buch enthält alle wichtigen Lehrsätze und Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen, Trotz der Kürze sind alle wesentlichen Ideen und Wege aufgezeigt.

Partielle Differentialgleichungen. Von Dr. J. HORN, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 8 Figuren. VIII, 228 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 14.) 11.—, geb. 12.—

In diesem einführenden Lehrbuch, das seine Eigenart ganz aus dem bewährten Programm von „Göschens Lehrbücherei“ herleitet, werden sowohl lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie sie in der mathematischen Physik vorkommen als auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung behandelt, sowohl Randwert- als auch Anfangswertprobleme, durchweg unter Beschränkung auf zwei unabhängige Veränderliche; es wird auch eine Einführung in die häufig benutzte Theorie der Integralgleichungen gegeben,

Mengenlehre. Von Professor Dr. E. KAMKE. Mit 6 Figuren. 160 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 999.) Geb. 1.80

Der Band behandelt die grundlegenden Tatsachen der Mengenlehre, die für alle Zweige der Mathematik so große Bedeutung gewonnen hat. Die Definition der Menge erfolgt im Anschluß an Cantor. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt.

Mengenlehre. Von Dr. F. HAUSDORFF, o. Professor an der Universität Bonn. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. 1927. 285 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 7.) 12.—, geb. 13.50

Das Lehrbuch setzt beim Lesen keine höheren mathematischen Kenntnisse als die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, allerdings aber eine gewisse Schärfe des abstrakten Denkens voraus und wird von Studierenden in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden können.

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von HEINRICH BURKHARDT. Neu herausgegeben von Dr. GEORG FABER, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule in München. I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920. 6.—, geb. 7.20
1. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921. 9.—, geb. 10.50
II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920. 14.—, geb. 15.50

Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen,

Einleitung in die Funktionentheorie. (Die komplexen Zahlen und ihre elementaren Funktionen.) Von MAX ROSE, Oberlehrer an der Goetheschule zu Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 135 Seiten. 1918. (Samml. Göschen Bd. 581.) Geb. 1.80

Der Verfasser gibt eine systematische Darstellung aller derjenigen Hilfsmittel, deren die Funktionentheorie nur Entwicklung ihrer Prinzipien bedarf. Im Anhang werden die Grundsätze der konformen Abbildung erörtert und an Beispielen erläutert.

Punktionentheorie. Von Dr. KONRAD KNOPP, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 140 Seiten. 1926. (Sammlung Göschen Bd. 668.) Geb. 1.80

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 703.) Geb. 1.80

„Die beiden vollständig neu bearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“ Monatschrift für Mathematik und Physik,

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. KONRAD KNOPP, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 136 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 877.) Geb. 1.80

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878.) Geb. 1.80

Die Mehrzahl der in den beiden Bänden enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf Knopps „Funktionentheorie“ (Samml. Göschen Bd. 668 und 703). Sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen beigegeben.

Automorphe Funktionen. Von Dr. L. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen. X, 205 Seiten. 1924. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5.)

8.—, geb. 9.20

Im ersten Abschnitt wird die Kernfrage an einfachen Beispielen behandelt, darauf die notwendigsten Sätze aus der nichteuklidischen Geometrie unter Heranziehung der Kreisverwandtschaften. Es folgt der Diskontinuitätsbeweis der zugehörigen Gruppe von Verschiebungen und der Existenzbeweis für die zu einem Normalpolygon gehörigen automorphen Funktionen

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. KÖNIG, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. KRAFFT, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11.)

13.—, geb. 14.50

Das Buch will dem Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von HEINRICH W. E. JUNG, o. ö. Prof. an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abb. im Text. Groß-Oktav. VI, 246 S. 1923. 3.50, geb. 4.—

„Das überaus klar und anschaulich geschriebene Buch wird allen denjenigen, die sich mit den grundlegenden Methoden der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen vertraut machen wollen, von Nutzen sein.“ Zeitschrift für mathem. u. naturwiss. Unterricht.

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. WANGERIN in Halle a.d.S.

I. Teil: Mit 46 Fig. VIII, 255 S. Unveränd. Neudr. 1922. (Slg. Schub. Bd. 58.) Geb. 4.—

II. Teil: Mit 17 Fig. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59.) Geb. 4.—

„Wer in die Potentialtheorie eindringen will, findet in dem leichtverständlichen Buch einen zuverlässigen und angenehmen Führer.“ Zeitschrift f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht

Potentialtheorie. Von Dr. W. STERNBERG, a. o. Professor in Breslau.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925.
(Samml. Göschen Bd. 901.) Geb. 1.80

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926.
(Samml. Göschen Bd. 944.) Geb. 1.80

„Die Bände geben einen klaren Einblick in die Gedankengänge und Beweismethoden der Potentialtheorie. Da es dem Verfasser gelungen ist, trotz der räumlichen Enge alle erforderlichen Beweise exakt durchzuführen, ist das Werk als Hilfsbuch neben einer Vorlesung durchaus zu empfehlen.“
Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterricht

Numerische Integration. Von Professor Dr. FR. A. WILLERS. Mit 2 Figuren.
116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864.) Geb. 1.80

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.

Graphische Integration. Von Professor Dr. FR. A. WILLERS. Mit 53 Figuren.
142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801.) Geb. 1.80

Der Verfasser versucht, einem weiteren Kreise die immer noch zu wenig benutzten zeichnerischen Methoden bekanntzumachen. Er setzt dabei so wenig Vorkenntnisse wie möglich voraus,

Taschenbuch für praktische Geometrie. Von Dr. H. LÖSCHNER, o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Mit 10 Figuren im Text.
Klein-Oktav. X, 147 Seiten. 1922. Geb. 2.—

Der vorliegende Band enthält die wichtigsten Formeln der praktischen Geometrie, die Konstanten und Genauigkeitsangaben, Leitsätze für die Beobachtungen und Merkgeln für die Behandlung, Beförderung und Aufbewahrung geodätischer Instrumente und Geräte.

Grundzüge der ebenen Geometrie. Von Professor Dr. FR. BOHNERT in Hamburg. Mit 220 Fig. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2.) Geb. 3.90

Ebene Geometrie. Von G. MAHLER, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Mit 110 zweifarbigen Figuren. Vierte, verbesserte Auflage.
Neudruck. 166 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 41.) Geb. 1.80

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. F. BOHNERT in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten.
1919. (Samml. Schubert Bd. 3.) Geb. 4.40

Das Buch enthält die Grundbegriffe der Trigonometrie. Die beigegebenen Beispiele sollen den unentbehrlichen Übungsstoff liefern und gleichzeitig einen Überblick über die vielfache Verwendbarkeit und Bedeutsamkeit der Trigonometrie gewähren. Das letzte Kapitel bietet die wichtigsten Anwendungen der Sphärik auf die mathematische Geographie.

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Dr. GERHARD HESSENBERG, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. 1926.
(Samml. Göschen Bd. 99.) Geb. I-80

„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.“
Archiv der Mathematik und Physik.

Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie.
Von Dr. FRITZ HEILAND, Studienrat am Gymnasium in Jena. Mit 26 Figuren.
152 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 848.) Geb. 1.80

Die Sammlung schließt sich nach Anordnung und Bezeichnung dem Lehrbuch Hessenbergs (Samml. Göschen Bd. 99) an. Wichtigere Formeln sind vorangestellt, zum Teil mit Ableitung. Zu sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen angegeben.

Stereometrie. Von Professor Dr. ROBERT GLASER. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. Mit 81 Figuren. 139 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 97.) Geb. 1.80

Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Professor Dr. ROBERT GLASER. Mit 54 Figuren. 168 Seiten. 1917. (Samml. Göschen Bd. 779.) Geb. 1.80

Aufgaben über Prisma und Zylinder — Projektionszeichnen — Pyramiden und Kegel — Kugel und Kugelteile — konoidartige Körper — Prismatoide — schief abgeschnittene Prismen und Zylinder — Guldinsche Regel.

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. GERHARD KOWALEWSKI. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929. Geb. 11.20

Das aus Vorlesungen entstandene Buch ist namentlich zum Gebrauch für Studierende bestimmt.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Dr. FRIEDRICH SCHUR, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912. 6.50, geb. 7.70

Analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. R. HAUSSNER, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Nr. 65.) Geb. 1.80

Die Darstellung beginnt elementar und setzt nur die nötigsten planimetrischen und algebraischen Schulkenntnisse voraus. Es ist nicht nur die allgemeine Theorie der analytischen Gebilde ersten und zweiten Grades vollständig gegeben, sondern auch eine größere Zahl von speziellen Sätzen, vornehmlich über die Kegelschnitte,

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. R. HAUSSNER, o. ö. Professor an der Universität Jena. 1930. (Samml. Göschen Bd. 256.) Geb. 1.80

Analytische Geometrie des Raumes. Von Professor Dr. MAX SIMON, Straßburg i. E. Mit 28 Abbildungen. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 208 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 89.) Geb. 1.80

Das Werk besitzt den Charakter eines ausführlichen Lehrbuches; es gibt eine übersichtliche und abgeschlossene Darstellung der analytischen Geometrie des Raumes nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung und bietet zuverlässige Belehrung über die analytisch-geometrischen Theorien.

Aufgaben zur analytischen Geometrie des Raumes. Von O. TH. BÜRKLEN, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. 109 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 309.) Geb. 1.80

Die vorliegende Sammlung ist für die erste Einführung bestimmt. Sie soll dem Schüler oder Studierenden Gelegenheit geben, die analytischen Methoden anzuwenden, die Gebilde in ihren verschiedenen Lagen und ihren besonderen Fällen, sowie ihre Beziehungen zueinander zu erfassen und zugleich seine Raumanschauung zu bilden,

Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Von Professor Dr. MAX ZACHARIAS in Berlin. Mit 196 Figuren im Text. 252 Seiten. 1929. (Göschens Lehrbücherei Bd. 16.) 13.—, geb. 14.50

Die Elementargeometrie wird nicht vom Standpunkte des Schulunterrichts, sondern von dem der Wissenschaft aus behandelt. Ausgangspunkt ist das (etwas modifizierte) Hilbertsche Axiomensystem. In der Darstellung treten zwei Momente in den Vordergrund: die geschichtliche Entwicklung und die prinzipielle Begründung der einzelnen Gebiete.

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. LIEBMANN in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. 6.—, geb. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. RICHARD BALDUS. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 970.) Geb. 1.80

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiete Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

Kreis und Kugel. Von Dr. WILHELM BLASCHKE, o. Prof. an der Universität Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 Seiten. 1916. 4.40, geb. 5.50

Einführung in die konforme Abbildung. Von Dr. LUDWIG BIEBERBACH, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. 131 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 768.) Geb. 1.80

„Der Autor faßt seine Aufgabe, eine Einführung in die konforme Abbildung zu geben, in doppeltem Sinne auf. Er vermittelt dem Leser die eigentlich elementaren Teile der Theorie der konformen Abbildung; andererseits eröffnet er durch Eingehen auf einzelne neue Entwicklungen den Zugang zu den modernsten und tiefsten Untersuchungen der gesamten Funktionentheorie.“

Jahrbuch übet die Fortschritte der Mathematik.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Von Dr. GEORG SCHEFFERS, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XI, 482 Seiten. 1923. 13.—, geb. 14.50

II. Mit 110 Fig. Dritte, verbesserte Aufl. XI, 582 Seiten. 1922. 15.—, geb. 16.50

Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigefügten Formeltafeln und Register erhöhen den Wert des Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flähen. Von Oberstudiendirektor Dr. VIKTOR KOMMERELL in Tübingen und Prof. Dr. KARL KOMMERELL in Tübingen. I. Teil. Dritte Auflage. Mit 28 Figuren. VIII, 184 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 29.) Geb. 3.—

II. Teil. Dritte Aufl. Mit 13 Fig. IV, 196 S. 1921. (Samml. Schubert Bd. 44-) Geb. 3.—

In der neuen Auflage werden u. a. die Untersuchungen Salkowskis über die Raumkurven und die Bertrandschen Kurven berücksichtigt.

Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme. Von Oberstudiendirektor Dr. VIKTOR KOMMERELL in Tübingen und Prof. Dr. KARL KOMMERELL in Tübingen. Mit 9 Figuren. VI, 171 Seiten. 1911. (Samml. Schubert Bd. 62.) Geb. 7.30

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. KONRAD ZINDLER in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. Neudruck. VIII, 380 Seiten. 1928. (Samml. Schubert Bd. 34.) Geb. 18.—

II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51.) Geb. 9.50

Ein besonderer Vorzug dieses vorliegenden Lehr- und Einführungsbuches sind die jedem Bande beigegebenen Übungsaufgaben, zu deren Lösung sich am Schluß eine Anleitung befindet.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. KARL DOEHLEMANN, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Fünfte Auflage.

Erster Teil. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 72.) Geb. 1.80

Zweiter Teil. Mit 55 Figuren. 138 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 876.) Geb. 1.80

„Die Darstellung ist musterhaft klar und leichtverständlich und wird durch übersichtliche Zeichnungen und zahlreiche Aufgaben aufs trefflichste illustriert.“ Bayerische Blätter für das Gymnasialschulwesen.

Geometrische Transformationen. Von Dr. KARL DOEHLEMANN, weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Auflage, herausgeg. von Dr. WILHELM OLBRICH, Prof. an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Figuren im Text und 4 Abbildungen. VIII, 246 Seiten. 1930. (Göschens Lehrbücherei Bd. 15.) Im Druck.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. KARL ROHN, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. ERWIN PAPPERITZ, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1913. Anastatischer Nachdruck. 16.50, geb. 18.—

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916. 6.20, geb. 7.20

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923. 10.80, geb. 12.—

Darstellende Geometrie. Von THEODOR SCHMID, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 Seiten. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65.) Geb. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66.) Geb. 7.50

„Unter den zahlreichen guten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie steht das vorliegende mit in erster Reihe. Ausgezeichnete Figuren, klare Darstellung, reicher Inhalt sind seine besonderen Kennzeichen.“

Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw.

Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10 und Leipzig

Darstellende Geometrie. Von Dr. ROBERT HAUSSNER, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena. Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Vierte, verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. 207 Seiten. 1929. (Samml. Götschen Bd. 142.) Geb. 1.80

Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. 168 Seiten. 1929. (Samml. Götschen Bd. 143.) Geb. 1.80

In vier Abschnitten werden die Parallelprojektion ebener und räumlicher Gebilde, die Darstellung von Punkt, Geraden und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen sowie ebenflächige Gebilde behandelt.

Koordinatensysteme. Von Professor PAUL B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Götschen Bd. 507.) Geb. 1.80

Der Verfasser versucht den Koordinatenbegriff von einem allgemeinen Standpunkt aus darzustellen. Durch sorgfältig ausgewählte, zahlreiche Literaturangaben wird der Wert des Bandes erhöht.

Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von Dr. H. WIELEITNER, Oberstudiendirektor in München.

Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Durchgesehener Neudruck. 146 Seiten. 1930. (Samml. Götschen Bd. 435.) Geb. 1.80

Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 123 Seiten. 1919. (Samml. Götschen Bd. 436.) Geb. 1.80

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. WERKMEISTER in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Götschen Bd. 405.) Geb. 1.80

Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. FR. A. WILLERS. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Götschen Bd. 922.) Geb. 1.80

Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs, sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.

Vermessungskunde. Von Dr.-Ing. P. WERKMEISTER, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

I: Stückmessung und Nivellieren. Mit 140 Figuren. Vierte Auflage. 156 Seiten. 1926. (Samml. Götschen Bd. 468.) Geb. 1.80

II: Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem. Absteckungen. Mit 93 Figuren. Dritte Auflage. 136 Seiten. 1930. (Samml. Götschen Bd. 469.) Geb. 1.80

III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. Mit 61 Figuren. Zweite Auflage. 136 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 862.) Geb. 1.80

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. MARCELLO PIRANI, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 58 Figuren. Neudruck. 126 Seiten. 1922. (Samml. Götschen Bd. 728.) Geb. 1.80

Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fuchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien,

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. OTTO KNOPF, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. Mit 10 Figuren. 112 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 508 und 871.) Geb. je 1.80

Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von WILHELM WEITBRECHT, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.

I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschel Bd. 302.) Geb. 1.80

II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschel Bd. 641.) Geb. 1.80

Jeder der beiden Teile bildet ein das ganze Gebiet umfassendes, für sich geschlossenes Ganzes. Der erste enthält die Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln, während im zweiten die fertigen Ergebnisse dieser Ableitungen zusammengestellt und auf hauptsächlich dem Gebiet der Geodäsie entnommene Zahlenbeispiele angewendet werden.

Versicherungsmathematik. Von Dr. FRIEDRICH BOEHM, Professor an der Universität München.

I: Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. 1925. (Samml. Göschel Bd. 180.) Geb. 1.80

II: Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschel Bd. 917.) Geb. 1.80

Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.

Politische Arithmetik. (Zinseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.) Von Dr. EMIL FOERSTER, Honorarprofessor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 155 Seiten. 1924. (Samml. Göschel Bd. 879.) Geb. 1.80

In 6 Kapiteln wird der Reihe nach die einfache Zinsenrechnung, die Zinseszinsenrechnung für Einzelkapitalien und Renten, das Rechnen mit vorschüssigen Zinsen, die Schuldentilgung sowie die Kurs- und Rentabilitätsrechnung behandelt.

Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. HAUBER in Stuttgart.

I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Sechster Neudruck. 148 Seiten. 1921. (Samml. Göschel Bd. 178.) Geb. 1.80

II. Teil: Angewandte (techn.) Statik. Mit 61 Figuren. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschel Bd. 179.) Geb. 1.80

Mit dem ersten Teil ist beabsichtigt, eine kurze Darstellung der wichtigsten der technischen Statik zugrunde liegenden allgemeinen statischen Gesetze zu geben. Der zweite Teil umfaßt die statische Berechnung starrer Stabverbindungen, der statisch bestimmten Fachwerkträger für Dächer und Brücken, der Spreng- und Hängwerke, enthält die Lehre über die Standfestigkeit der Mauern und Tonnengewölbe und gibt das Wichtigste aus der Theorie des Erddrucks und dem Gebiet des Gleichgewichts der seilartigen Körper.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. OTTO HENKEL, Bauingenieur und Studienrat an der Baugewerkschule in Erfurt.

I. Teil: Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Schwerpunkte. Trägheitsmomente. Spannungen in geraden Stäben. Der einfache Vollwand- und Fachwerkträger. Der Dreigelenkbogen. Gewölbe. Erddruck und Wasserdruck. Mit 127 Figuren. Zweite Auflage. 150 Seiten. 1929. (Samml. Göschel Bd. 603.) Geb. 1.80

II. Teil: Durchgehende Gelenkträger. Dreigelenkbogen. Formänderungen gerader Träger. Durchlaufende (kontinuierliche) Träger. Formänderungen gebogener Träger. Zweigelenkbogen und Zweigelenkrahmen. Eingespannter Bogen und Stützrahmen. Mit 91 Figuren. Zweite Auflage. 176 Seiten. 1928. (Samml. Göschel Bd. 695.) Geb. 1.80

Der erste Band enthält die Zerlegung der Kräfte in einer Ebene, graphische Schwerpunktsbestimmungen ebener Gebilde, Trägheitsmomente, Spannungen in geraden Stäben, den einfachen Vollwand- und Fachwerkträger, Dreigelenkbogen und das Gewölbe. Der zweite Band behandelt die durchgehenden Gelenkträger, Dreigelenkbogen, Formänderungen gerader und gebogener Träger, Zweigelenkbogen, den eingespannten Bogen Erddruck- und Wasserdruck.

Analysis der ebenen Bewegung. Von Dr. MARTIN KRAUSE, Geheimrat, Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Unter Mitwirkung von Dr. phil. et rer. techn. Alexander Carl in Leisnig. Oktav. VII, 216 Seiten. 1920. 3.—

Das Buch beschäftigt sich mit den analytischen Beziehungen zwischen den Punkten zweier, in der gleichen Ebene gelegener Koordinatensysteme, von denen das eine fest, das andere bewegt ist, ausgehend von den Transformationsgleichungen.

Geschichte der Physik. Von Prof. A. KISTNER in Karlsruhe. 2 Bände.

I: Die Physik bis Newton. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 13 Figuren. 126 Seiten. 1919. (Samml. Götschen Bd. 293.) Geb. 1.80

II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 3 Figuren. 149 Seiten. 1919. (Samml. Götschen Bd. 294.) Geb. 1.80

Kristallographie. Von Dr. W. BRUHNS, Prof. an der Bergakademie Clausthal. Zweite Auflage, Neubearb. von Dr. P. RAMDOHR, o. Prof. an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 184 Figuren. 114 Seiten. 1926. (Samml. Götschen Bd. 210.) Geb. 1.80

Einführung in die Kristalloptik. Von Dr. EBERHARD BUCHWALD, Privatdozent der Physik an der Universität Breslau. Mit 124 Figuren. Neudruck. 124 Seiten. 1920. (Samml. Götschen Bd. 619.) Geb. 1.80

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. HINRICHS, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1924. (Samml. Götschen Bd. 532.) Geb. 1.80

Nach der Einleitung über die Grundgesetze der geometrischen Optik folgen die Abschnitte über die Reflexion an ebenen Flächen und sphärischen Flächen. Dann wird die Brechung an ebenen Flächen, an einer Kugelfläche und durch ein zentriertes System von Kugelflächen behandelt. In Kapitel VI finden die Linsen und Linsensysteme Beachtung.

Theoretische Physik. Von Dr. GUSTAV JÄGER, Professor der Physik an der Universität Wien. 5 Bände.

I. Band: Mechanik. Mit 25 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1930. (Samml. Götschen Bd. 76.) Geb. 1.80

II. Band: Schall und Wärme. Mit 7 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 133 Seiten. 1930. (Samml. Götschen Bd. 77.) Geb. 1.80

III. Band: Elektrizität und Magnetismus. Mit 35 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1930. (Samml. Götschen Bd. 78.) Geb. 1.80

IV. Band: Optik. Mit 44 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 148 Seiten. 1930. (Samml. Götschen Bd. 374.) Geb. 1.80

V. Band: Wärmestrahlung, Elektronik und Atomphysik. Mit 16 Figuren. Sechste, umgearbeitete und vermehrte Auflage. 128 Seiten. 1930. (Samml. Götschen Bd. 1017.) Geb. 1.80

Allen, welche sich ein Kompendium der theoretischen Physik anschaffen wollen, seien diese Bändchen empfohlen. Der Verfasser hat den Stoff aus dem Gesamtgebiet sorgfältig ausgewählt und dabei die neuesten Resultate der Forschung berücksichtigt.

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. CLEMENS SCHAEFER, Professor an der Universität Breslau. 3 Bände.

I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929. 45,— geb. 48.—

II. Band: Theorie der Wärme, Molekular-kinetische Theorie der Materie. Mit 88 Figuren im Text. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. X, 660 Seiten. 1929. 28.—, geb. 30.—

III. Band. Erscheint Mitte 1930.

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretisch Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die V*rw*ndung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche* auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“* Annalen der Physik.

Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von ARTHUR HAAS, a. o. Professor a. d. Universität Wien. I. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 58 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 307 Seiten. 1923. 7.50, geb. 9.—

II. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 72 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 379 Seiten, 1924. 3.50, geb. 10.—

„Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfangs, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw. vertraut macht.“ Monatshefte für Mathem. u. Physik.

Atomphysik. Von Dr. HANS LESSHEIM in Breslau. I. Band. Mit 36 Abbildungen. 134 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 1009.) Geb. 1.80

Zur einheitlichen Feldtheorie. Von Professor Dr. ALBERTEINSTEIN, 8 Seiten. 1.—
Neue Begründung der Relativitätstheorie.

Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. Von E. BUDDÉ. 2 Bände. Oktav.

I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 418 Seiten. 1890. 7.—
II. Band: Mechanische Summen und deren starre Gebilde. Seite 419—968. 1891. 8.—

Physikalische Formelsammlung. Von Prof. G. MAHLER †. Fünfte, völlig umgearbeitete Auflage, besorgt von Prof. K. MAHLER in Aalen. Mit 71 Figuren. 162 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 136.) Geb. 1.80

Physikalische Aufgabensammlung. Von Prof. G. MAHLER † Mit den Resultaten. Neubearbeitet von Prof. K. MAHLER in Aalen. Vierte, verbesserte Auflage. 136 Seiten. 1930. (Samml. Göschen Bd. 243.) Geb. 1.80

Physikalische Messungsmethoden. Von Prof. Dr. WILHELM BAHRDT in Berlin-Lichterfelde. Mit 54 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 147 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 301.) Geb. 1.80

Physikalische Tabellen. Von Dr. A. LEICK. Zweite Auflage, neubearbeitet von Prof. Dr. W. LEICK in Berlin-Lichterfelde. 96 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 650.) Geb. 1.80

Luftelektrizität. Von Dr. KARL KÄHLER, Privatdozent für Meteorologie an der Universität Berlin. Zweite Auflage. Mit 19 Figuren. 134 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 649.) Geb. 1.80

Röntgenstrahlen (Physik, Technik und Anwendungen). Von Dr. phil. nat. RICHARD HERZ in Frankfurt a. M. Mit 48 Figuren im Text und 36 Abbildungen auf 16 Tafeln. 136 Seiten und 16 Tafeln. 1927. (Samml. Göschen Bd. 950.) Geb. 1.80

Theorie des Schlickschen Massenausgleichs bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Lexikon-Oktav. 132 Seiten. 1901. 8.—

Das vorliegende Buch behandelt den Massenausgleich vom rein mathematischen Standpunkt aus. Die Anforderungen, welche die Praxis stellt, werden als gegebene Nebenbedingungen den Gleichungen hinzugefügt, deren Erfüllung notwendig ist, um den Ausgleich zu ermöglichen.

Kinematik. Von Dr.-Ing. HANS POLSTER, Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik Merseburg-Leuna. Mit 76 Abbildungen. Zweite Auflage. 151 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 584.) Geb. 1.80

Der Band bietet dem Studierenden eine Einführung, will aber darüber hinaus den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die sich in die schwierigen Bewegungsverhältnisse von Nocken-, Schwingdaumen- und wäls-Hebelsteuerungen oder von anderen Gebieten tieferen Einblick verschaffen wollen, ein bequemer Führer sein.

Ballistik. Von Dr. THEODOR VAHLEN, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Greifswald. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922. 9,— geb. 10.—

Im Gegensatz zu anderen Werken über Ballistik bringt dieses neue Buch gerade den mathematischen Gehalt der Ballistik zur Darstellung. Es gewinnt dadurch noch erhöhte Bedeutung, daß es seine Entstehung den praktischen Erfahrungen verdankt, die der Verfasser im Kriege machte. U. a. weist es als neu die zwischen innerer und äußerer Ballistik einzuschaltende Übergangsballistik und als Ballistik in großen Höhen die kosmische Ballistik auf.

Festigkeitslehre. Von Professor Dipl.-Ing. W. HAUBER in Stuttgart. Mit 56 Figuren und I Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten u. 1 Tafel. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288.) Geb. 1.80

In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen,

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen. Von R. HAREN. Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage von JOSEF FURTMAYR, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 43 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 491.) Geb. 1.80

Der Band bietet in 8 Abschnitten 66 Aufgaben nebst Lösungen über Zug, Druck, Biegung, Schub, Verdrehung, Knickung, Festigkeit plattenförmiger Körper und zusammengesetzte Festigkeit; in einem Anhang sind die benötigten Zahlenwerte kurz zusammengestellt.

Hydraulik. Von Professor Dipl.-Ing. W. HAUBER in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 156 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397.) Geb. 1.80

Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik; Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder Prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.

Elastizitätslehre für Ingenieure. Von Professor Dr.-Ing. MAX ENSSLIN an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen.

I. Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion, gekrümmte Träger. Mit 65 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 147 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 519.) Geb. 1.80

II. Statisch unbestimmte Konstruktionen, Sätze von Castigliano und Maxwell, Dreimomentensatz, Vorspannungen, Temperaturspannungen, Fachwerke mit überzähligen Stützpunkten und überzähligen Stäben, Prinzip der virtuellen Verdickungen, Verschiebungsplan. Mit 44 Figuren. 120 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 957.) Geb. 1.80

Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger. Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.

Vorlesungen über Thermodynamik. Von Dr. MAX PLANCK, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Neunte Auflage. Groß-Oktav. XI, 288 Seiten. 1930. Geb. 11.50

Das vorliegende Buch geht von einigen allgemeinen Erfahrungstatsachen aus, namentlich von den beiden Hauptsätzen der Wärmelehre, und entwickelt hieraus die wichtigsten physikalischen und chemischen Sätze. Zunächst werden die Grundtatsachen und Begriffserklärungen für Temperatur, Molgewicht und Wärmemenge erläutert, dann die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie aufgestellt und bewiesen, endlich die Anwendungen auf die besonderen Gleichgewichtszustände ausführlich besprochen.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper. Von A. F. MÖBIUS. Bearbeitet von Dr. HERM. KÖBOLD, o. Hon.-Professor an der Universität Kiel.

I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren. Elfte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 11.) Geb. 1.80

II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Dreizehnte Auflage. 128 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 529.) Geb. 1.80

Der erste Teil beschränkt sich auf die Darstellung der Bewegungsschemen und der Größenverhältnisse der Planeten und ihrer Trabanten. Im zweiten Teil leitet die zunächst gegebene Behandlung der Sonnensysteme weniger innig verbundenen Glieder, der Kometen und Meteore, zu dem Hauptgegenstände der Betrachtung, dem Fixsternsystem, über. Im letzten Kapitel wird der Leser mit den Theorien über die Entwicklungsvorgänge im Universum bekanntgemacht

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper. Von Professor Dr. W. F. WISLICENUS. Neubearbeitet von Professor Dr. H. LUDENDORFF. Vierte Auflage. Min 14 Abbildungen. 136 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 91.) Geb. 1.80

In dem Band werden Sonne, Mond, Planeten und ihre Trabanten behandelt. Die Physik der Fixsterne, der veränderlichen Sterne, Nebel und Sternhaufen ist vollständig neubearbeitet. Neben den reinen Beobachtungstatsachen werden auch die Hypothesen über die Energiequellen der Sonne, die Entstehung der Mondgebirge usw., besprochen.

