

**THE BOOK WAS  
DRENCHED**

UNIVERSAL  
LIBRARY

OU 191093

UNIVERSAL  
LIBRARY



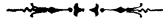




سلسلة كتب مكملاز المدرسية المصرية

---

# الهندسة التفاضلية



جزء الأول

مقرر السنة الأولى من التعليم الثانوي



تأليف

محمد خالد الحسينين

مدرس الرياضة بمدرسة المعلمين الخديوية



« حقوق الطبع محفوظة »

١٩١٢ - ١٣٣٠



مطبعة المغاريف بشارع البغاله بمصر





# بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سائر الانبياء والمرسلين  
( و بعد ) فلما قررت نظارة المعارف العمومية اعادة تدريس علم  
الهندسة المستوية وسائر العلوم الرياضية باللغة العربية طرق الرياضيون  
أبواب التأليف وسارعوا الى التصنيف وكثرت الكتب الرياضية باللغة  
العربية كما كثر غيرها من الكتب الادبية

غير أن أكثر هذه المؤلفات لا يتفق وروح البرنامج الذي سنته  
المعارف المصرية لمدارسها الثانوية لهذا أحسبت أن أضع كتاباً يكون  
شاملاً لما تقررت دراسته على الطلاب فقامت بتأليف هذا المختصر  
وجعلته على أحدث الطرق

ولما كان علم الهندسة المستوية يدرس في الثلاث السنين الاولى  
من التعليم الثانوى قسمت كتابى هذا الى ثلاثة اجزاء وجعلت كل

جزء منها خاصاً بما تفررت دراسته في كل سنة منها وقد اخترت ما وضعته  
نظارة المعارف العمومية من الاصطلاحات العربية واكثرت من التمارين  
وأضفت اليها بعضاً من المسائل المحلولة كي يستعين بها الطالب في حل  
غيرها وتكون نموذجاً له عند كتابة حلول المسائل التي تلقى عليه واسأل  
الله أن يجعله نافعاً أنه على ما يشاء قدير

محمد خالد حسنين

# محتويات الكتاب

الصفحة	الباب
٩ . . .	الاول - في التمهيدات والتعاريف الاولية
٩ . . . . .	الجسم والسطح والخط والنقطة
١٠ . . . . .	الخط المستقيم والسطح المستوي
١٢ . . . . .	الزوايا
١٣ . . . . .	الدعوى والبرهان
١٤ . . . . .	البدهييات
١٦ . . . . .	القضايا المسماة صحتها
١٧ . . . . .	الثانى - فى الخطوط والزوايا
٢٥ . . . . .	الثالث - فى المثلثات
٢٧ . . . . .	تساوى المثلثات
٤١ . . . . .	اختلاف اضلاع المثلث
٤٢ . . . . .	اختلاف زوايا المثلث
٤٨ . . . . .	العمود والمائل
٥٥ . . . . .	تساوى المثلثات القائمة الزوايا
٦٦ . . . . .	الرابع - فى المتوازيات
٦٧ . . . . .	تساوى الزوايا المتبادلة

- ٦٨ . . . . . تساوى الزوايا المتناظرة
- ٧٥ . . . . . الزاوية التى بوازي ضلعاها ضلعى زاوية اخرى
- ٧٨ . . . . . الزاوية التى ضلعاها عموديان على ضلعى زاوية اخرى
- ٨٢ . . . . . مجموع زوايا المثلث
- ٨٤ . . . . . مجموع زوايا المضلع
- ٨٨ . . . . . الخامس - فى الاشكال المتوازية الاضلاع
- ٨٩ . . . . . خواص متوازى الاضلاع
- ٩١ . . . . . متى يكون الشكل الرباعى متوازى اضلاع
- ١٠١ . . . . . السادس - فى الدعاوى العملية
- ١١٥ . . . . . السابع - فى المحال الهندسة
- ١١٩ . . . . . تقاطع المحال الهندسية

## الرموز المستعملة في الكتاب

الرمز	المدلول
<	اكبر من
>	اصغر من
∠	زاوية
△	مثلث



# المهندسة المتريسة



## الباب الأول

في التمهيدات والتعاريف الأولية

### ١ - الجسم والسطح وانحط والنقطة

الجسم - كل جسم يشغل محلاً معيناً فبالطوب مثلاً يشغل محلاً في الفراغ قدر حجمه وعند وضعه يقال ان له طولاً وعرضاً وسمكاً (ارتفاعاً)

(تعريف) الجسم هو ما يشغل محلاً معيناً وله عادة ابعاد ثلاثة الطول والعرض والارتفاع

السطح - لو اخذنا قطعة من الصابون وفرضنا انه باستعمالها أخذ ارتفاعها في النقصان تدريجاً الى ان صارت كورقة رقيقة فبالاستمرار في استعمال هذه القطعة يأتي وقت يعدم فيه الارتفاع والباقي بعد ذلك يقال له سطح وفي الحقيقة فان الحد الفاصل بين قطعة الصابون والهواء الذي يحيط بها يسمى بالسطح وليس له سمك أصلاً فله بعدان فقط الطول والعرض

(تعريف) السطح هو ما له طول وعرض مجرد عن الارتفاع

الخط - لو أخذنا قطعة ورق حمراء ثم لوّنا جزءاً منها باللون الاسود سمى الحد الفاصل بين اللونين بالخط فهو ليس بالاحمر ولا بالاسود وليس له عرض فله بعد واحد فقط وهو الطول (تعريف) الخط هو ما له طول مجرد عن العرض والارتفاع النقطة - ثم اذا لوّنا جزءاً آخر من الورقة الحمراء باللون الازرق بشرط أن يتقاطع مع اللون الاسود فان الخط الفاصل بين اللون الاحمر واللون الاسود يقطع الخط الفاصل بين اللون الاحمر واللون الازرق فيما يسمى بالنقطة وهي مجردة عن كل بعد (تعريف) النقطة الهندسية هي كل ما له وضع مجرد عن الطول والعرض والارتفاع

## ٢ - الخط المستقيم والسطح المستوي

الخط المستقيم - الخط اما أن يكون مستقيماً أو منحنيًا فالمستقيم ما حدث من تحرك نقطة في اتجاه واحد لا يتغير والمنحني ما حدث من تحرك نقطة في اتجاه يتغير على الدوام وتتميز الخطوط المستقيمة من غيرها بأنه لو اشترك مستقيمان في نقطتين انطبق أحدهما على الآخر ولا يكون بينهما أي مسافة فلو أخذنا أحد المستقيمين المرسومين (في شكل ١) وطبقناه على المستقيم الثاني كما في (شكل ٢) بحيث تقع نقطة ١ على نقطة ح



(شكل ٢)

(شكل ١)

ونقطة ب على نقطة و انطبق المستقيمان تمام الانطباق ولا يكون بينهما ادنى مسافة

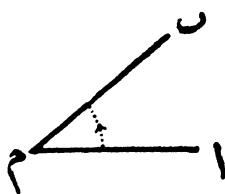
(ملاحظة) تطلق كلمة خط وخطوط على الخط المستقيم والخطوط المستقيمة للاختصار

السطح المستوي - السطح المستوي هو سطح لو أخذ فيه نقطتان ووصلا بخط مستقيم كان هذا المستقيم موجوداً بتمامه في هذا السطح وبعبارة أخرى هو سطح ينطبق عليه المستقيم تمام الانطباق مهما تغير وضعه

(ملاحظة) تطلق كلمة مستو على السطح المستوي للاختصار

### ٣ - الزوايا

إذا تلاقى مستقيمان في نقطة حدث من تلاقيهما ما يسمى زاوية



(شكل ٣)

ويسمى كل من المستقيمين بضلعى الزاوية ونقطة تلاقيهما برأس الزاوية فمثلاً إذا فرضنا ان الضلعين ب م و ا م تلاقيا في نقطة م (شكل ٣) فان مقدار ميل الضلع ب م على ا م

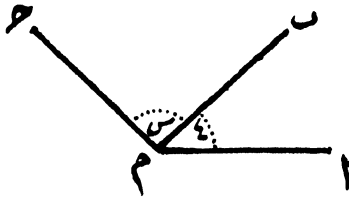
يسمى زاوية ويقدر هذا الميل بقدر الدوران الذي يدوره ب م حول نقطة م اذا ابتدأ يتحرك وهو منطبق على ا م الى أن يأخذ وضعه الثانى م م

قراءة الزاوية - تقرأ الزاوية بثلاثة أحرف بحيث يكون حرف الرأس فى الوسط فيقال زاوية ا م ب أو زاوية ب م ا (شكل ٣)

ويجوز قراءة الزاوية بحرف الرأس فقط اذا كانت مفردة فيقال  
زاوية م (شكل ٣)

وقد يحسن وضع حرف أرقام داخل الزاوية ليبدل عليها فيقال  
زاوية ٤ وزاوية س (شكل ٤)

الزاويتان المتجاورتان - اذا اتحدت زاويتان في الرأس وكان  
بينهما ضلع مشترك يقال لهما



(شكل ٤)

متجاورتان فمثلا الزاويتان

١ م ب ٦ ب م ح

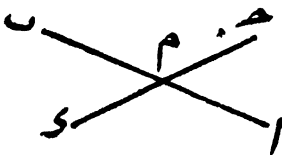
(شكل ٤) يقال لهما

متجاورتان لانهما اتحدتا

في الرأس م ولان الضلع

ب م مشترك بينهما

الزاويتان المتقابلتان بالرأس - اذا اتحدت زاويتان في  
الرأس وكان ضلعا احدهما على امتداد ضلعي الاخرى يقال للزاويتين  
متقابلتان بالرأس فمثلا اذا تقاطع المستقيمان ا ب و ج د في نقطة م



(شكل ٥)

(شكل ٥) يقال لكل من

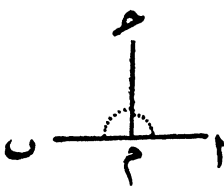
الزاويتين ١ م ب ٦ ب م و ا و

لكل من الزاويتين ب م ح ٦ ح ا

١ م و متقابلتان بالرأس

الزاوية القائمة والعمود - اذا تلاقي مستقيمان وكانت الزاويتان  
المتجاورتان الحادثتان متساويتين يقال لكل زاوية منهما قائمة ويقال

للمستقيمين متعامدان وان كلا منهما عمودى على الآخر فمثلا اذا

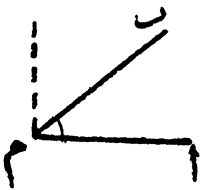


تلاقى ا ب و ح م في نقطة م (شكل ٦)  
وكانت  $\angle م ا ح = \angle م ب ح$  يقال  
لكل من هاتين الزاويتين قائمة ويكون  
ح م عمودياً على ا ب

(شكل ٦)

(ملاحظة) تنقسم الزاوية القائمة الى

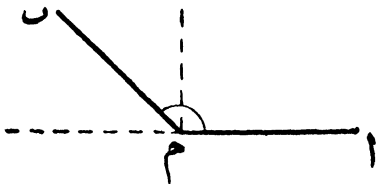
٩٠ جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى درجة وتنقسم الدرجة الى ٦٠  
جزءاً متساوية كل جزء منها يسمى دقيقة والدقيقة الى ٦٠ جزءاً  
متساوية كل جزء منها يسمى ثانية



ويرمز للدرجة بالرمز ( $^{\circ}$ ) وللدقيقة  
بالرمز ( $'$ ) وللثانية بالرمز ( $''$ )

الزاوية الحادة - يقال للزاوية  
حادة اذا كان مقدارها اقل من قائمة مثل  
زاوية م ا ب (شكل ٧)

(شكل ٧)



(شكل ٨)

الزاوية المنفرجة -  
يقال للزاوية منفرجة  
اذا كان مقدارها اكبر من  
قائمة واصغر من قائمتين مثل  
زاوية م ا ب (شكل ٨)

٤ - الدعوى والبرهان

يختص علم الهندسة المستوية بدراسة الاشكال المرسومة على

السطح المستوى ويشتمل ذلك على جملة دعاوى بعضها نظري وبعضها الآخر عملي ولا تثبت صحة هذه الدعاوى الا باقامة الدليل ( البرهان )  
الدعوى النظرية — هي دعوى حقيقية تنضح صحتها بواسطة  
برهان عقلي

الدعوى العملية — هي دعوى تتطلب انشاء عمل هندسى مع  
اقامة البرهان العقلي على صحته

ويشتمل منطوق الدعوى على مفروض ومطلوب  
مفروض الدعوى — هو الحقيقة التى تفرض فى الدعوى  
ويعترف بصحتها

مطلوب الدعوى — هو الحقيقة التى يراد اقامة البرهان على صحتها  
( ملاحظة ) وقد تستلزم اقامة البرهان العقلي رسم خطوط أولية  
تسمى بالعمل

النتيجة — هي حقيقة تستخرج من دعوى قام الدليل على صحتها  
البرهان — هو الدليل الذى بواسطته تنضح صحة الدعوى

## ٥ — البديهيات

البديهيات هي مبادئ بسيطة يدركها العقل لاول وهلة لسهولتها  
ووضوحها ولا تحتاج الى برهان للتسليم بصحتها وهالك مثلها  
بديهية ١ — الشيطان المساوى كل منهما لشيء واحد يكونان  
متساويين

بديهية ٢ — اذا أضفنا أشياء متساوية الى اخرى متساوية  
كانت الحواصل متساوية

بدئية ٣ — اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى متساوية كانت البواقي متساوية.

بدئية ٤ — اذا أضفنا أشياء متساوية الى أخرى غير متساوية كانت الحواصل غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بدئية ٥ — اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى غير متساوية كانت البواقي غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بدئية ٦ — المضاعفات الواحدة للشئ نفسه أو للأشياء المتساوية تكون متساوية

بدئية ٧ — الشئان اللذان يساويان نصف الشئ الواحد أو انصاف أشياء متساوية يكونان متساويين

بدئية ٧ — اذا ضربنا أشياء غير متساوية في مقدار واحد كانت الحواصل مختلفة وكان ناتج الاكبر أكبر

بدئية ٩ — اذا قسمنا أشياء غير متساوية على مقدار واحد كانت الخواارج غير متساوية وكان ناتج الاكبر أكبر

بدئية ١٠ — الكل أكبر من الجزء والجزء أصغر من الكل وهناك بدئيات غير التي ذكرت نخص منها بعض بدئيات تسمى بالبدئيات الهندسية وهالك مثالها

- (١) الاجسام التي ينطبق بعضها على بعض تكون متساوية
- (٢) المستقيمان اللذان يتحدان في نقطتين يكونان في اتجاه واحد
- (٣) المستقيم المحدود له نقطة تنصيف واحدة فقط

## ٦ - القضايا المسامة صحتها

ان الاشكال الهندسية التي يلزم رسمها في الهندسة المستوية تستلزم استعمال المسطرة والفرجار ( البرجل ) ولاجل الوصول الى رسم هذه الاشكال يجب تسليم صحة بعض قضايا عملية وهاك مثالها

( ١ ) يمكن رسم مستقيم من أى نقطة مفروضة الى أى نقطة أخرى معلومة .

( ٢ ) يمكن مد مستقيم على استقامته الى أن يبلغ أى طول

( ٣ ) يمكن رسم دائرة من أى نقطة نعتبرها مركزاً وبأى نصف قطر

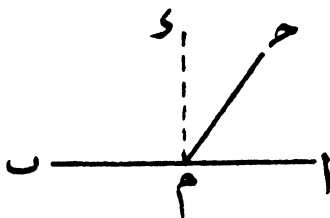
## الباب الثاني

## في الخطوط والزوايا



## « نظرية ١ »

إذا تلاقى مستقيم وآخر فان مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادثتين في جهة واحدة منه يساوي قائمتين



(شكل ١)

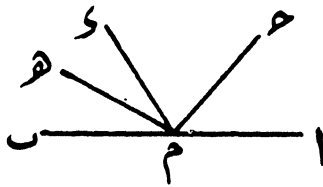
(المفروض) ان المستقيم ح م يتلاقى مع المستقيم ا ب في نقطة م ويصنع الزاويتين المتجاورتين ١ ح م و ٢ ح م في جهة واحدة من ا ب

(المطلوب اثباته) أن  $\angle ١ ح م + \angle ٢ ح م = ٩٠$  زاويتين قائمتين  
(البرهان) نقيم من نقطة م العمود م و على ا ب فتكون  $\angle ١ ح م = ٩٠$  قائمة وكذلك فتكون  $\angle ٢ ح م = ٩٠$  قائمة

من الشكل  $\angle ١ ح م + \angle ٢ ح م = ٩٠$

فتكون  $\angle م ح د + \angle م ا د =$   
 $\angle م د س + \angle م ح د + \angle م ا د =$   
 ولكن  $\angle م ا د = \angle م ح د + \angle م ا د$   
 فتكون  $\angle م د س + \angle م ا د = \angle م ح د + \angle م ا د$   
 $=$  زاويتين قائمتين وهو المطلوب

نتيجة ١ - مجموع الزاوية المجتمعة حول نقطة مفروضة على مستقيم وفي جهة واحدة منه يساوي قائمتين

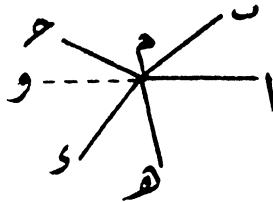


(شكل ١٠)

(البرهان)  $\angle م ح د + \angle م د س + \angle م س ه =$   
 $\angle م ح د =$   
 فتكون  $\angle م ح د + \angle م د س + \angle م س ه =$   
 $\angle م ح د + \angle م ا د =$   
 ولكن (نظرية ١)  $\angle م ا د = \angle م ح د + \angle م ا د$   
 فتكون  $\angle م د س + \angle م ا د + \angle م ح د =$   
 $=$  وهو المطلوب

نتيجة ٢ - مجموع الزاوية المتجاورة المجتمعة حول نقطة واحدة في جميع جهاتها يساوي أربع قوائم

( البرهان ) نمد  $\angle م$  على استقامته الى  $و$



( شكل ١١ )

فتكون  $\angle م١ + \angle م٢ + \angle م٣ + \angle م٤ = ٣٦٠$  ( نظرية ١ )

وتكون  $\angle م١ + \angle م٢ + \angle م٣ + \angle م٤ = ٣٦٠$  ( نظرية ١ )

وبالجمع تكون  $\angle م١ + \angle م٢ + \angle م٣ + \angle م٤ + \angle م١ + \angle م٢ + \angle م٣ + \angle م٤ = ٧٢٠$

ولكن من الشكل  $\angle م١ + \angle م٢ + \angle م٣ + \angle م٤ = ٣٦٠$

فتكون  $\angle م١ + \angle م٢ + \angle م٣ + \angle م٤ + \angle م١ + \angle م٢ + \angle م٣ + \angle م٤ = ٧٢٠$  وهو المطلوب

( تعريف ) يقال أن الزاويتين متكاملتان متى كان مجموعهما يساوي قائمتين وتسمى احدهما مكملة الاخرى مثل زاويتي  $\angle م١$  و  $\angle م٢$  ( شكل ٩ )

( تعريف ) ويقال أن الزاويتين متتامتان متى كان مجموعهما يساوي قائمة واحدة وتسمى احدهما متممة الاخرى مثل زاويتي  $\angle م١$  و  $\angle م٢$  ( شكل ٩ )

نتيجة ٣ - الزوايا المكملة لزاوية واحدة كلها متساوية

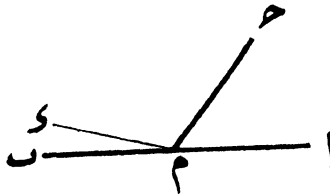
نتيجة ٤ - الزوايا المتممة لزاوية واحدة كلها متساوية

( تنبيه ) يقال ان النظريتين متعاكستان متى كان مفروض الاولى  
مطلوباً اثباته في الثانية والمطلوب اثباته في الاولى هو مفروض الثانية

« نظرية ٢ »

( وهي عكس نظرية ١ )

اذا كانت الزاويتان المتجاورتان متكاملتين كان ضلعاهما المتطرفان  
على استقامة واحدة



( شكل ١٢ )

( المفروض ) ان مجموع الزاويتين المتجاورتين  $\angle ١ + \angle ٢ = ١٨٠^\circ$   
يساوى قائمتين

( المطلوب اثباته ) ان ضلعيهما  $\angle ١$  و  $\angle ٢$  على استقامة واحدة

( البرهان ) ان لم يكن  $\angle ١$  و  $\angle ٢$  على استقامة  $\angle ١ + \angle ٢ > ١٨٠^\circ$  على استقامته

الى

وتكون  $\angle ١ + \angle ٢ > ١٨٠^\circ$  ( نظرية ١ )

ولكن  $\angle م ح د + \angle م ح و = ١٨٠^\circ$  ( بالفرض )  
 فتكون  $\angle م ح د + \angle م ح و = ١٨٠^\circ + \angle م ح د$   
 وتكون  $\angle م ح و = \angle م ح د$

وذلك لا يتأتى الا اذا انطبق المستقيمان م و م ح

ومن حيث ان م و على استقامة م ح ( بالعمل )

فيكون م ح على استقامة م ح ايضاً ( وهو المطلوب )

( تنبيه ) لا يقتصر في علم الهندسة على اعطاء النظريات

والدعاوى العملية لمجرد الحفظ وانما هناك تمارين تطبيقية تستلزم

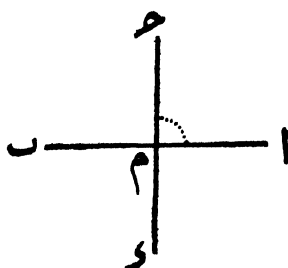
استخدام هذه الدعاوى وتلك البديهيات والقضايا المسماة صحتها

لايات حقيقتها الهندسية

### تمارين (١)

(١) اذا كانت احدى الزاوياء الاربع الحادثة من تقاطع مستقيمين

قائمة تكون كل من الثلاثة الاخرى قائمة كذلك



( شكل ١٤ )



(٥) من نقطة م المفروضة على المستقيم ا ب رسم م ح عمودياً على ا ب وفي احدى جهتيه ثم رسم م و عمودياً على ا ب ايضاً وفي الجهة الأخرى منه فبرهن على ان م ح على استقامة م و

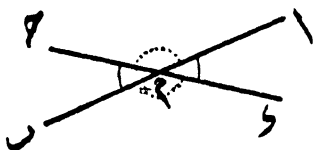
(٦) من نقطة م المفروضة على ح و رسم المستقيم ا م بحيث يصنع الزاوية ح م ا ومن نقطة م ايضاً رسم المستقيم م ب بحيث يصنع الزاوية م ب مساوية للزاوية ح م ا فبرهن على ان ا م على استقامة م ب

(٧) اذا كانت الزاوية الحادثة من منصفى زاويتين متجاورتين قائمة فبرهن على ان ضلعي الزاويتين المتطرفين على استقامة واحدة

(٨) ا ب ح م و مستقيمان متقاطعان معاً بالتعامد فبرهن على ان منصف زاوية ا م و على استقامة منصف زاوية ح م ب

### « نظرية ٣ »

الزاويتان المتقابلتان في الرأس متساويتان



( شكل ١٤ )

(المفروض) ان ا ب ح و تقاطعا في م وان الزاويتين ا م ح و م ب متقابلتان في الرأس وان الزاويتين ا م و م ب متقابلتان في الرأس كذلك

(المطلوب اثباته) ان  $\angle م ح د = \angle م ح ب$

وان  $\angle م ح د = \angle م ح ب$

(البرهان) بما ان المستقيم  $م ا$  يلاقى المستقيم  $ح د$  في نقطة  $م$

فتكون  $\angle م ح د + \angle م ح ب = ٢ ص$  (نظرية ١)

وكذلك  $م د$  يلاقى  $ا ب$  في نقطة  $م$

فتكون  $\angle م ح د + \angle م ح ب = ٢ ص$  (نظرية ١)

وعليه تكون  $\angle م ح د + \angle م ح ب = \angle م ح د + \angle م ح ب$

وتكون  $\angle م ح د = \angle م ح ب$

وبالطريقة نفسها يبرهن على ان  $\angle م ح د = \angle م ح ب$

وهو المطلوب

## تمارين (٢)

(١) اذا تقاطع المستقيمان  $ا ب$  و  $ح د$  في نقطة  $م$  وكان  $م س$

منصفاً  $\angle م ح ب$  و يبرهن على ان امتداد  $س م$  ينصف  $\angle م ح د$

(٢) برهن على ان منصفى زاويتين متقابلتين في الرأس على

استقامة واحدة

(٣) برهن على ان منصفات اربع الزوايا الحادثة من تقاطع

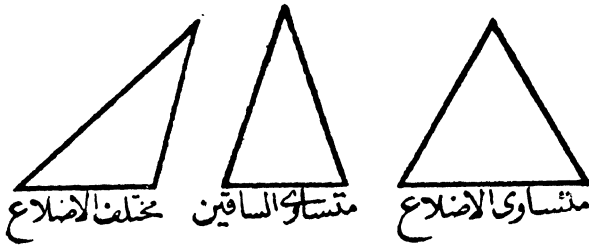
مستقيمين متعامدة

## الباب الثالث

### في المثلثات

- (١) الشكل المستوي هو جزء من السطح المستوي محاط بخط أو أكثر ويسمى مجموع الخطوط التي تحيط بالشكل بمحيطه ويسمى مقدار السطح المحصور في هذا المحيط بمساحته
- (٢) كثير المستقيمات هو شكل مستو محاط بخطوط مستقيمة ومتى كان عدد المستقيمات التي تحيط بالشكل أكثر من ثلاثة سمي مضلعاً وتسمى الاضلاع التي تحيط بالشكل بأضلاع المضلع والزوايا الناتجة من تقاطع الاضلاع بزوايا المضلع
- (٣) يقال للمضلع انه متساوي الاضلاع اذا تساوت اضلاعه ومتساوي الزوايا اذا تساوت زواياه ومنظم اذا كان متساوي الزوايا والاضلاع
- (٤) يقال للمضلع انه محدودب اذا لم يزد مقدار احدى زواياه على قائمتين
- (ملاحظة) تطلق كلمة مضلع على المضلع المحدودب للاختصار لان المضلع غير المحدودب ليس من مباحثنا الآن
- (٥) الشكل الرباعي هو مضلع يحيط به اربعة اضلاع
- (٦) المثلث هو شكل مستو محدود بثلاثة مستقيمات
- (٧) وتسمى المستقيمات باضلاع المثلث والزوايا الناتجة من تقاطع الاضلاع زوايا المثلث ورءوس هذه الزوايا برءوس المثلث
- (٢)

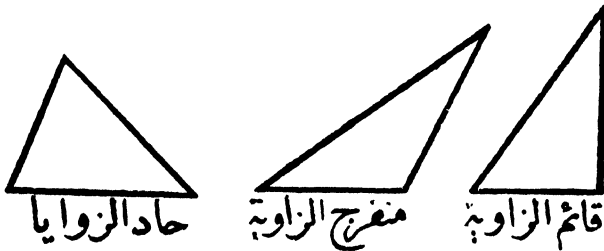
(٨) والمثلث يسمى متساوي الاضلاع اذا تساوت اضلاعه ومتساوي الساقين اذا تساوى فيه ضلعان ومختلف الاضلاع اذا كانت اضلاعه مختلفة الطول كما في شكل (١٥)



(شكل ١٥)

(٩) ويمكن اعتبار اى رأس من رؤوس زوايا المثلث رأساً له ويعتبر عادة الضلع المقابل لهذا الرأس قاعدة له (١٠) وفي المثلث المتساوي الساقين تعتبر عادة نقطة تقاطع ساقيه رأساً له وضلعه الثالث قاعدة له

(١١) والمثلث يسمى قائم الزاوية اذا كانت احدى زواياه قائمة ومنفرج الزاوية اذا كانت احدى زواياه منفرجة وحاد الزوايا اذا كانت زواياه الثلاث حادة كما في (شكل ١٦)

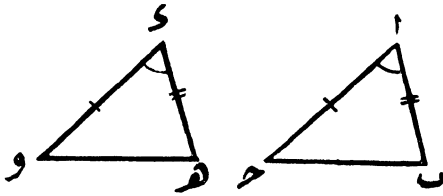


(شكل ١٦)

(١٢) المستقيم الذي يصل رأس المثلث بمنتصف قاعدته يسمى  
بالمستقيم المتوسط أو بمنتصف المثلث

« نظرية ٤ »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما ضلعان  
والزاوية المحصورة بينهما كل مع نظيره



(شكل ١٧)

(المفروض) أن المثلثين  $\triangle H$  و  $\triangle S$  فيهما الضلع  $H$  و  $S$  =  $H$  و  $S$  =  $H$  والضلع  $H$  =  $S$  والزاوية المحصورة  $H$  =  $S$  الزاوية المحصورة  $H$  و  $S$

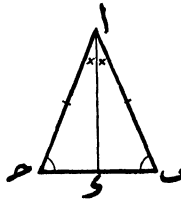
(المطلوب اثباته) ان المثلث  $\triangle H$  = المثلث  $\triangle S$  و  $H$  و  $S$  من  
عامة الوجوه

(البرهان) نطبق  $\triangle H$  و  $\triangle S$  على  $\triangle H$  و  $\triangle S$  على شرط ان  
النقطة  $H$  تقع على النقطة  $S$  وبأخذ الضلع  $H$  الاتجاه  $S$  و  $H$   
ومن حيث أن  $S$  =  $H$  فتقع نقطة  $H$  على نقطة  $S$

ومن حيث أن  $\angle 1 = \angle 2$  انطبق على  $\angle 3 = \angle 4$  و  
 فيقع الضلع  $1$  ح على  $2$  و  
 ومن حيث أن  $\angle 5 = \angle 6$  وفتقع نقطة  $ح$  على نقطة  $و$   
 ومن حيث أن نقطة  $ب$  وقعت على  $هـ$  ونقطة  $ح$  وقعت على  $و$   
 فالضلع  $ب$  ح ينطبق على  $هـ$  و  
 فينتطبق اذن المثلث  $1$  ب ح على المثلث  $2$  هـ و و بذلك يتساويان  
 من عامة الوجوه وهو المطلوب

## تمارين ( ٣ )

( ١ ) المطلوب البرهنة على ان المستقيم الذى ينصف زاوية الرأس  
 فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها



( شكل ١٨ )

( المفروض ) ان المثلث  $1$  ب ح متساوى الساقين ( $\angle 1 = \angle 2$ )  
 وأن المستقيم  $1$  د ينصف زاوية  $ب$  ح  
 ( المطلوب اثباته ) ان  $\angle 3 = \angle 4$  و ان  $1$  د عمودى على  $ب$  ح  
 ( البرهان ) فى المثلثين  $1$  ب د و  $2$  ح د

بالبفرض  $\left. \begin{array}{l} \text{بما ان} \\ \text{مشارك بين المثلثين} \\ \text{بالبفرض} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ب} = \text{ب} \\ \text{ا} = \text{ا} \\ \text{ب} > \text{ب} = \text{ا} > \text{ا} \end{array}$

ينطبق  $\triangle$  ب ا و على  $\triangle$  ح ا و ( نظرية ٤ )  
ويكون  $\text{ب} = \text{ب}$

$$\text{ب} > \text{ب} = \text{ا} > \text{ا}$$

وبما ان  $\text{ب} > \text{ب} + \text{ا} > \text{ا} = \text{ب} > \text{ب}$  فتكون كل  
منهما قائمة ويكون ا و عمودياً على ب ح وبذلك يثبت المطلوب  
( ٢ ) في المسألة السابقة اذا أخذنا على ا و نقطة مثل ه و وصلنا  
بينها وبين ب و ح فبرهن على ان ه ب = ه ح

( ٣ ) اذا فرضت نقطة مثل و على منتصف الزاوية ب ا ح فبرهن  
على ان  $\text{ب} > \text{ا} = \text{ب} > \text{ا}$  اذا كان الضلع ا ب = ا ح  
( ٤ ) ا ب ح مثلث متساوي الساقين نصفنا ساقيه ا ب و ا ح  
بالنقطتين و و ه ثم وصلنا و ح و ه ب والمطلوب البرهنة على  
ان و ح = ه ب

( ٥ ) زاوية رأسها ا أخذ على أحد ضليعيها النقطتان ب و و  
وأخذ على الضلع الثاني النقطتان ح و ه بشرط ان ا ب = ا ح  
وان ا و = ا ه والمطلوب البرهنة على ان ب ه = ح و

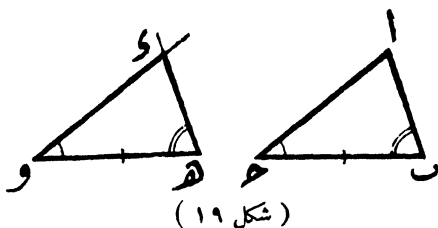
( ٦ ) ا ب ح و مربع ونقطة ه منتصف الضلع ا ب فاذا وصل  
بينها وبين نقطتي ح و و فبرهن على أن ه ح = ه و

( ٧ ) ا ب ح و مربع ونقطة ه منتصف الضلع ا ب فاذا أخذنا  
على الضلعين ا و ب ح البعدين المتساويين ا س و ب ص و وصلنا

بين نقطة  $هـ$  وبين نقطتي  $س$  و  $ص$  فبرهن على ان  $هـ س = هـ ص$   
 (٨)  $ا ب ح$  و  $ا ب ح$  شكل رباعي فيه  $ا ب = س د$  و  $ب ح = د ح$  و  $ا ح = د ح$   
 ونقطة  $هـ$  منتصف الضلع  $ب ح$  والمطلوب البرهنة على ان  $هـ ا = هـ س$   
 (٩)  $ا ب ح$  و  $ا ب ح$  و  $ا ب ح$  مثلثان متساويان من عامة الوجوه فاذا  
 فرض ان نقطة  $س$  منتصف  $ب ح$  ونقطة  $ص$  منتصف  $هـ و$  فبرهن  
 على ان  $ا س = ا ص$  و  $ب س = د ح$  و  $ا س = ا ص$   
 (١٠) اذا فرض ان نقطة  $د$  هي منتصف الضلع  $ب ح$  في  
 $\triangle ا ب ح$  ومد  $ا د$  الى  $هـ$  بحيث كان  $د هـ = ا د$  فبرهن على ان  
 $ا ب = ا ح$

## « نظرية هـ »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما ضلع ومجاوراه  
 من الزوايا كل مع نظيره



(المفروض) ان المثلثين  $ا ب ح$  و  $ا ب ح$  و  $هـ و$  وفيهما الضلع  $ب ح$   
 $هـ و = ا ب ح$  و  $ا ب ح = ا ب ح$  و  $ا ب ح = ا ب ح$  و  $ا ب ح = ا ب ح$

(المطلوب اثباته) ان المثلث  $ا ب ح =$  المثلث  $ه و ه$  من  
 عامة الوجوه

(البرهان) نطبق  $\triangle ا ب ح$  على  $\triangle ه و ه$  و على شرط ان  
 النقطة  $ب$  تقع على النقطة  $ه$  وبأخذ الضلع  $ب ح$  الاتجاه  $ه و$

ومن حيث ان  $ب ح = ه و$  وفتقع نقطة  $ح$  على نقطة  $و$   
 ومن حيث ان  $ب ح$  انطبق على  $ه و$  و  $\angle ا ب ح = \angle ه و ه$   
 فيقع الضلع  $ب ا$  على  $ه و$

وكذلك من حيث ان  $ب ح$  انطبق على  $ه و$  و  $\angle ا ب ح =$   
 $\angle ه و ه$  و فيقع الضلع  $ح ا$  على  $ه و$

ومن حيث ان كل مستقيمين لا يتلاقيان الا في نقطة واحدة  
 فبانطباق الضلع  $ب ا$  على  $ه و$  والضلع  $ح ا$  على  $ه و$  يجب ان تقع  $ا$   
 (نقطة تلاقي الضلعين  $ب ا$  و  $ح ا$ ) على  $ه و$  (نقطة تلاقي الضلعين  
 $ه و$  و  $ه و$ )

فينطبق اذن المثلث  $ا ب ح$  على المثلث  $ه و ه$  و وبذلك يتساويان  
 من عامة الوجوه وهو المطلوب

### تمارين (٤)

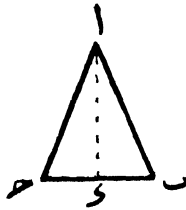
(١)  $ا ب ح$  مثلث فيه  $\angle ب = \angle ح$  فاذا نصفت القاعدة  
 $ب ح$  في  $ه$  وكان  $ا ه$  عمودياً على  $ب ح$  فبرهن على ان  $ا ب = ا ح$   
 وان  $ا ه$  ينصف  $\angle ا$

(٢) اذا كان منصف زاوية رأس مثلث عمودياً على القاعدة فان  
 المثلث يكون متساوي الساقين

(٣)  $\angle C = \angle B$  و مثلثان متساويان من عامة الوجوه فاذا  
فرض ان  $\angle C = \angle B$  وينصف  $\angle C$  و يقابل  $\angle B$  في نقطة  $S$  وان  $\angle C = \angle B$   
ينصف  $\angle C$  و يقابل  $\angle B$  و في نقطة  $S$  فبرهن على ان  $\angle C = \angle B$

« نظرية ٦ »

الزاويتان المقابلتان لاساق مثلث متساوي الساقين متساويتان



(شكل ٢٠)

(المفروض) ان  $\angle C = \angle B$  مثلث متساوي الساقين فيه  $\angle C = \angle B$

(المطلوب اثباته) ان  $\angle C = \angle B$

(البرهان) نرسم المستقيم  $\angle C$  وينصف  $\angle C$

ففي المثلث  $\angle C$  والمثلث  $\angle B$

بالفرض

$$\angle C = \angle B$$

من حيث ان  $\angle C = \angle B$  مشترك بين المثلثين

$$\angle C = \angle B$$

بالعمل

ينطبق  $\triangle C$  و  $\triangle B$  على  $\triangle C$  (نظرية ٤)

وبذلك  $\angle C = \angle B$  وهو المطلوب

(نتيجة) المثلث المتساوي الاضلاع يكون متساوي الزوايا

## تمارين (٥)

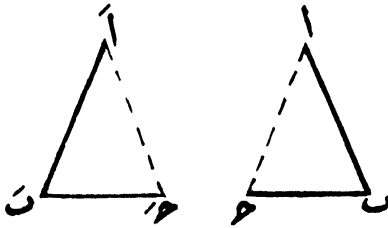
- (١)  $\angle C = \angle B$  مثلث متساوي الساقين فاذا مد كل من ساقيه  $CA$  الى  $S$  و  $CB$  الى  $S'$  فبرهن على ان  $\angle S = \angle S' = \angle C$   $\angle C = \angle S = \angle S'$
- (٢)  $\angle C = \angle B$  مثلث متساوي الساقين فاذا اخذ على قاعدته  $BC$  البعد  $CS = CB$  فبرهن على ان  $\angle S = \angle C$   $\angle C = \angle S$
- (٣) برهن على ان المستقيمين اللذين يصلان منتصف قاعدة مثلث متساوي الساقين بمنتصفي ضلعيه متساويان
- (٤)  $\angle C = \angle B$  مثلث متساوي الساقين فاذا نصف الساق  $CA$  في نقطة  $S$  والساق  $CB$  في نقطة  $S'$  فبرهن على ان  $\angle S = \angle S'$   $\angle S = \angle S'$
- (٥) منصف زاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين متساويان
- (٦)  $\angle C = \angle B$  مثلث متساوي الساقين ( $\angle C = \angle B$ ) فاذا تقاطع منصف زاويتي  $CA$  و  $CB$  في نقطة  $M$  فبرهن على ان  $\angle M = \angle C$  ينصف زاوية  $C$

## « نظرية V »

(وهي عكس نظرية ٦)

اذا تساوت زاويتان في مثلث فان الضلعين المقابلين لهما يكونان

متساويين



( شكل ٢١ )

(المفروض) ان  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

(المطلوب اثباته) ان الضلع  $AB = A'B'$

(البرهان) نرسم المثلث  $A'B'C'$  مقلوب الوضع بأن يأخذ الضلع

$AB$  الوضع  $A'B'$  والضلع  $BC$  الوضع  $A'C'$

من حيث ان  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  بالفرض

٦  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  بالعمل

$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$  فتكون

وبالمثل نبرهن على أن  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

ومن حيث أن الضلع  $BC = B'C'$  في الطول

فينطبق المثلث  $ABC$  على المثلث  $A'B'C'$  وهو في وضعه

المقلوب (نظرية ٥)

وبذلك يتساوى المثلثان من عامة الوجوه

ويكون  $AB = A'B'$

ولكن  $AB = A'B'$  بالعمل

اذن  $AB = A'B'$  وهو المطلوب

(نتيجة) المثلث المتساوي الزوايا يكون متساوي الاضلاع

تمارين (٦)

(١) اذا مد كل من الضلعين  $ا ب$   $ا ج$  الى  $ا د$  من  $ا ب$   $ا ج$  الى  $ا د$  وكانت  $ا ب = ا ج$  فبرهن على ان المثلث  $ا ب ج$  متساوي الساقين

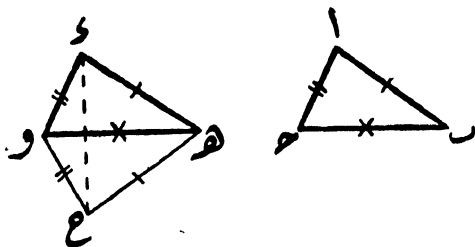
(٢)  $ا ب ج$  مثلث متساوي الساقين ( $ا ب = ا ج$ ) فاذا تقاطع منصفا الزاويتين المتساويتين في نقطة  $د$  فبرهن على ان  $ا ب ج$  متساوي الساقين ايضاً

(٣) في المسألة السابقة فبرهن على أن  $ا د$  ينصف  $ا ب ج$

(٤)  $ا ب ج د$  شكل رباعي فيه  $ا ب = ا ج$  و  $ا د = ا ب$  و  $ا ب ج د$  برهن على أن  $ا ب ج د$

« نظرية (٨) »

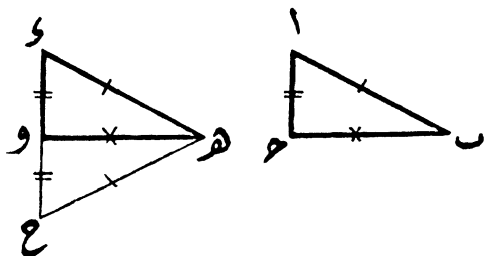
يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوت فيهما الثلاثة الاضلاع كل مع نظيره



(شكل ٢٢)



(الحالة الاولى) عندما يكون المثلثان قائمي الزاوية كما في شكل (٢٣)



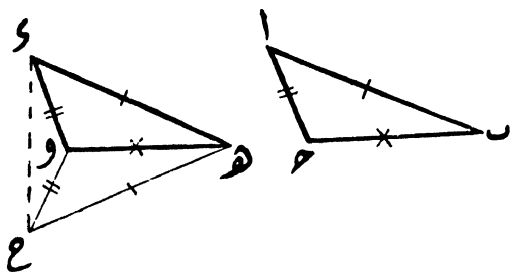
( شكل ٢٣ )

( البرهان ) بعد وضع المثلث ا ب ح أسفل المثلث س ه و نرى في هذه الحالة أن س ح يمر بنقطة و

وفي  $\triangle س ه و$  الضلع  $س ه = ه و$   
 فتكون  $\triangle س ه و = \triangle ح ه و$   
 أي ان  $\triangle س و ح = \triangle ا ب ح$

وبذلك يتساوى المثلثان ا ب ح و س ه و من عامة الوجوه (الحالة الثانية) عندما يكون المثلثان منفرجي الزاوية كما في

شكل (٢٤)



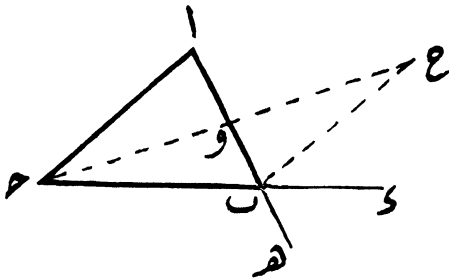
( شكل ٢٤ )



ا ح = ب و ي برهن على ان  $\angle 1 > \angle 2$  و  $\angle 3 > \angle 4$

« نظرية ٩ »

اذا مد احد اضلاع مثلث على استقامته فان الزاوية الخارجة الحادثة تكون اكبر من أى زاوية من زواياه الداخلة ما عدا المجاورة لها



( شكل ٢٥ )

( المفروض ) ان  $\angle 1$  ح مثلث ومددنا ضلعه ح ب على استقامته الى و

( المطلوب اثباته ) ان الزاوية الخارجة  $\angle 1$  و  $\angle 2$  أكبر من كل من  $\angle 3 > \angle 4$  و  $\angle 3 > \angle 4$

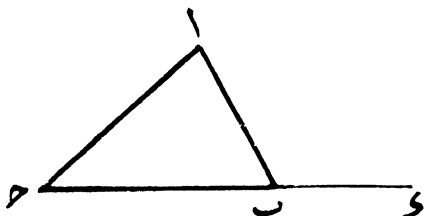
( البرهان ) لذلك نقرض أن و منتصف  $\angle 1$  ونصل ح و ونعده على استقامته ونأخذ على امتداده البعد و ح = ح و ثم نصل ح ب ففي المثلثين  $\triangle ح و ب$  و  $\triangle ح و ح$

من حيث ان  $\left. \begin{array}{l} \text{بالعمل} \quad \angle 1 = \angle 2 \\ \text{بالعمل} \quad \angle 3 = \angle 4 \\ \angle 1 > \angle 3 \text{ و } \angle 2 > \angle 4 \text{ لتقابلهما بالرأس} \end{array} \right\}$

ينطبق  $\triangle ١ و ح$  على  $\triangle ب و ح$  ( نظرية ٤ )  
 فتكون  $\angle ح ا و = \angle و ب ح$   
 لكن  $\angle و ب ح$  أكبر من  $\angle و ب ح$   
 فتكون  $\angle ا ب و$  أكبر من  $\angle ا ب ح$   
 وبالطريقة عينها يمكننا أن نبرهن على ان  $\angle ا ب و$  أكبر من  
 $\angle ا ح ب$  وبذلك يثبت المطلوب

## « نظرية ١٠ »

مجموع أى زاويتين فى المثلث أصغر من قائمتين



( شكل ٢٦ )

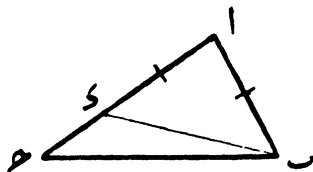
( المفروض ) ان المثلث  $ا ب ح$  مثلث أيا كان  
 ( المطلوب اثباته ) ان  $\angle ا ب ح + \angle ا ح ب$  أقل من قائمتين  
 ( البرهان ) نمد  $ح ب$  الى  $و$

فتكون  $\angle ا ح ب$  أصغر من  $\angle ا ب و$  ( نظرية ٩ )  
 وبأضافة  $\angle ا ب ح$  الى طرفى المتباينة يكون  
 $\angle ا ح ب + \angle ا ب ح$  أصغر من  $\angle ا ب و + \angle ا ب ح$   
 أى ان  $\angle ا ب ح + \angle ا ح ب$  أصغر من زاويتين قائمتين

- نتيجة ١ - يجب ان يكون في كل مثلث زاويتان حادتان على الاقل  
 نتيجة ٢ - لا يمكن ان يرسم من نقطة خارج مستقيم الا مستقيم واحد عمودي عليه

« نظرية ١١ »

اذا اختلف ضلعان في المثلث فالضلع الاكبر تقابله الزاوية الكبرى

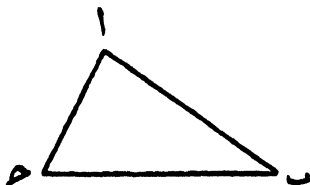


( شكل ٢٧ )

- ( المفروض ) في المثلث  $ABC$  الضلع  $AC$  اكبر من الضلع  $AB$   
 ( المطلوب اثباته ) ان  $\angle C > \angle B$  من  $AC > AB$   
 ( البرهان ) نأخذ على  $AC$  البعد  $AD = AB$  ونصل  $BD$   
 فمن حيث ان  $AD = AB$   
 تكون  $\angle ADB = \angle ABD$  ( نظرية ٦ )  
 ولكن  $\angle ADB > \angle C$  خارجة بالنسبة الى المثلث  $BCD$   
 اذن  $\angle ADB > \angle C$  اكبر من  $\angle C$  التي هي  $\angle A > \angle C$   
 اى ان  $\angle A > \angle C$  اكبر من  $\angle A > \angle C$   
 ومن باب اولى  $\angle A > \angle C$  اكبر من  $\angle A > \angle C$  وهو المطلوب  
 ( ٣ )

## « نظرية ١٢ »

إذا اختلفت زاويتان في مثلث فالزاوية الكبرى يقابلها الضلع الأكبر



(شكل ٢٨)

(المفروض) المثلث  $أ ب ح$  فيه الزاوية  $أ ح ب$  أكبر من الزاوية

$أ ح ب$

(المطلوب اثباته) أن الضلع  $أ ب$  أكبر من الضلع  $أ ح$

(البرهان) ان لم يكن  $أ ب$  أكبر من  $أ ح$  فاما ان يساويه واما

أن يكون أصغر منه

فان كان  $أ ب = أ ح$

لزم أن تكون  $أ ح ب = أ ح ب$

وهذا خلاف الفرض

وان كان  $أ ب$  أصغر من  $أ ح$

لزم أن تكون  $أ ح ب > أ ح ب$  أصغر من  $أ ح ب$

وهذا خلاف الفرض ايضا

وعلى ذلك فالضلع  $أ ب$  لا يمكن أن يساوي  $أ ح$  كما أنه لا يمكن

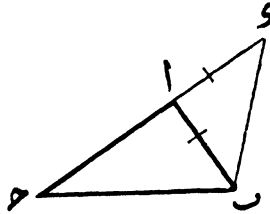
أن يكون أصغر منه

اذن يجب أن يكون  $أ ب$  أكبر من  $أ ح$

وهو المطلوب

« نظرية ١٣ »

أى ضلع في المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين



( شكل ٢٩ )

( المفروض ) أن  $ا < سب$  مثلث

( المطلوب اثباته ) أن احد الاضلاع وليكن  $س$  اصغر من

$$س + ا < س$$

( البرهان ) نمد  $ا$  على استقامته ونأخذ على امتداده البعد  $ا$  و

يساوى  $ا$  ثم نصل  $س$  و

$$فن حيث أن  $ا = س$$$

( نظرية ٦ )

$$تكون  $س + ا > س$  و  $س + ا > س$$$

ولكن  $س + ا < س$  أصغر من  $س + ا < س$  و

اذن  $س + ا < س$  أصغر من  $س + ا < س$  و

اي ان  $س + ا < س$  اصغر من  $س + ا < س$  و

وعلى ذلك ففي  $\triangle س ب د$

( نظرية ١٢ )

يكون  $س + ا < س$  أصغر من  $س + ا < س$

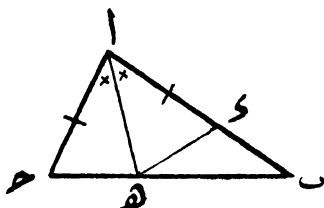
$$ولكن  $س + ا = س + ا$$$

اذن  $س + ا < س$  أصغر من  $س + ا = س + ا$

اي ان  $س + ا < س$  أصغر من  $س + ا = س + ا$  وهو المطلوب

« نظرية ١٤ »

اى ضلع فى المثلث اكبر من فرق الضلعين الآخرين



( شكل ٣٠ )

( المفروض ) ان  $ا ب ح$  مثلث مختلف الاضلاع

( المطلوب اثباته ) ان أحد الاضلاع وليكن  $ب ح < ا ب - ا ج$

( البرهان ) نصف  $ا ب ح$  بالمستقيم  $ا هـ$  ثم نقيس على  $ا ب$

البعد  $ا د = ا ح$  ونصل من  $د$  الى  $هـ$

فى المثلثين  $ا د هـ$  و  $ا ج هـ$

بالعمل

$$ا د = ا ج$$

مشارك بين المثلثين

بما أن

$$ا د > ا ج = ا د > ا ج$$

بالعمل

يتساوى المثلثان  $ا د هـ$  و  $ا ج هـ$  من عامة الوجوه ( نظرية ٤ )

ويكون  $د هـ = ج هـ$

وفى  $\Delta د ب هـ$

( نظرية ١٣ )

$$ب هـ + د هـ < د ب$$

$$ب هـ + ج هـ < د ب$$

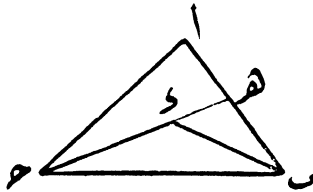
اى أن  $ب ح < د ب$

ولكن  $د ب = ا ب - ا ج = ا ب - ا ج$

اذن  $ب ح < ا ب - ا ج$  وهو المطلوب

« نظرية ١٥ »

إذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصلت بطرفي احد اضلاعه كان مجموع المستقيمين اللذين وصلاهما أصغر من مجموع ضلعي المثلث المحيطين بهما وكانت الزاوية المحصورة بين هذين المستقيمين أكبر من الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث



( شكل ٣١ )

( المفروض ) ان  $ا ب ح$  مثلث وان نقطة  $و$  داخله

( المطلوب اثباته ) ان  $و ح + ح ب + ب ا > ا ح + ح ب + ب ا$

وان  $ب ح > ح ا$  أكبر من  $ب ا > ح ا$

( البرهان ) اولاً - نمد  $ح و$  الى ان يقابل  $ب ا$  في نقطة  $هـ$

في  $\triangle ا ح هـ$   $ح هـ > ا ح + ا هـ$

أو  
وفي  $\triangle ب ح هـ$   $ب هـ > ح ب + ح هـ$  وبالجمع

يكون  $هـ و + و ح + ح ب + ب ا > ا ح + (ا هـ + هـ ب) + ح و + و ح + ح ب + ب ا$

وبحذف المشترك  $هـ و$  من طرفي المتباينة مع مراعاة ان

$$ا هـ + هـ ب = ا ب$$

يكون  $و ح + ح ب + ب ا > ا ح + ح ب + ب ا$  وهو المطلوب

- ثانياً - في  $\triangle ا ه ح$   
 الزاوية الخارجة ب ه ح < زاوية ا ( نظرية ٩ )  
 وفي  $\triangle ب و ه$   
 الزاوية الخارجة ح و ب < زاوية و ه ب ( نظرية ٩ )  
 فن باب أولى تكون زاوية ح و ب < زاوية ا  
 وهو المطلوب

## تمارين (٨)

- (١) ا ب ح مثلث نصفت زواياه ب و ح بمستقيمين تلاقيا في نقطة و فاذا كان ا ب < ا ح فبرهن على أن و ب < و ح
- (٢) برهن على ان الوتر أكبر الاضلاع في المثلث القائم الزاوية
- (٣) ا ب ح و شكل رباعي ا ب أصغر اضلاعه و ح و أكبرها والمطلوب البرهنة على ان ا > ا أكبر من ا ح و ب أكبر من ا و ح
- (٤) برهن على ان كلا من ساقى المثلث المتساوى الساقين أكبر من نصف قاعدته
- (٥) ا ب ح مثلث فاذا فرضت نقطة مثل و على ب ح فبرهن على أن ا و اصغر من نصف مجموع اضلاعه
- (٦) ا ب ح مثلث فاذا فرضت أى نقطة مثل و فبرهن على ان و + ا + ب + ح < نصف مجموع اضلاعه
- (٧) استخدم العمل المتبع في اثبات نظرية ١٤ لاثبات نظرية ١١
- (٨) برهن على ان اطول اضلاع المثلث المنفرج الزاوية هو الضلع المقابل للزاوية المنفرجة

(٩)  $a < b$  ح مثلث فاذا رسم من  $a$  العمود  $a$  و  $a$  على  $b$  ح فبرهن على أن  $a < b < c$  و  $a < c < b$  و

(١٠)  $a < b$  ح مثلث رسم فيه عمودان احدهما من  $b$  على  $a$  ح والثانى من  $c$  على  $a$  ح فاذا تلاقى هذان العمودان فى نقطة  $s$  داخل المثلث وكان  $a < b < c$  ح فبرهن على ان  $s < b < c$  ح

(١١)  $a < b$  ح مثلث مد ضلعا  $a$  و  $a$  ح على استقامتهما ثم نصفت الزاويتان الخارجتان فاذا تلاقى هذا المنصفان فى نقطة  $h$  وكان  $a < b < c$  ح فبرهن على ان  $h > b > c$  ح

(١٢) اذا قطع مستقيم ساقى مثلث متساوى الساقين  $a$  و  $a$  ح فى نقطتى  $s$  و  $s$  ح وقطع القاعدة  $b$  ح ممتدة نحو  $c$  فبرهن على ان  $a < s < a$  ح

(١٣) برهن على ان المستقيم الذى يصل رأس مثلث متساوى الساقين بنقطة على امتداد قاعدته اكبر من كل من ساقى المثلث

(١٤) برهن على ان المستقيم الذى يصل رأس مثلث متساوى الساقين بنقطة على قاعدته اصغر من كل من ساقيه

(١٥) اثبت نظرية ١٤ باستخدام العمل المتبع فى اثبات نظرية ١١

(١٦) مجموع أى ثلاثة اضلاع فى شكل رباعى أكبر من ضلعه الرابع

(١٧)  $a < b$  ح مثلث فرضت داخله نقطة مثل  $w$  فاذا كان  $a < b < c$  ح ثم نصفت زاوية  $b$  و  $b$  ح بمستقيم قطع  $b$  ح فى نقطة مثل  $h$

فبرهن على ان  $b < h = h < c$  و  $a < c < b$  و

(١٨)  $a < b$  ح مثلث فاذا فرضت نقطة مثل  $w$  على  $a$  ح فبرهن على ان  $a < a + b < c + a$  ح

(١٩) مجموع اضلاع الشكل الرباعي اكبر من مجموع قطريه واصغر من ضعف هذا المجموع

(٢٠) اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى رؤوس زواياه بمستقيمت كان مجموع هذه المستقيمت أصغر من مجموع اضلاعه

(٢١) مجموع اى ضلعين فى المثلث اكبر من ضعف المستقيم المتوسط المنصف للضلع الثالث

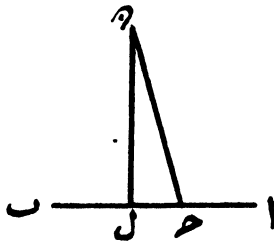
(٢٢) مجموع المستقيمت المتوسطة فى مثلث اصغر من مجموع اضلاعه واكبر من نصف هذا المجموع

(٢٣) برهن على ان مجموع قطرى الشكل الرباعي اكبر من مجموع اى ضلعين متقابلين فيه

(٢٤) برهن على ان مجموع قطرى الشكل الرباعي اصغر من مجموع المستقيمت الاربعة الواصلة من اى نقطة مفروضة ( عدا نقطة تقاطع قطريه ) الى رؤوس الشكل

### « نظرية ١٦ »

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها مستقيم وعدة موازى فان العمود يكون اقصر من كل مائل



( شكل ٢٢ )

(المفروض) أن  $\angle$  هو العمود النازل من النقطة المفروضة  $\angle$  على المستقيم المعلوم  $\angle$  وأن  $\angle$   $\angle$  احد الموائل الواصلة منها الى  $\angle$  (المطلوب اثباته) أن  $\angle$  أقصر من  $\angle$   $\angle$  (البرهان) في  $\triangle$   $\angle$   $\angle$

$\angle$   $\angle$  +  $\angle$   $\angle$  اصغر من قائمتين (نظرية ١٠) وبما أن  $\angle$   $\angle$   $\angle$  قائمة بالفرض

فتكون  $\angle$   $\angle$  اصغر من قائمة (حادة)

أى ان  $\angle$   $\angle$  اصغر من  $\angle$   $\angle$

ويكون  $\angle$  اصغر من  $\angle$   $\angle$  (نظرية ١٢) وهو المطلوب

« نظرية ١٧ »

(وهى عكس نظرية ١٦)

إذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها جملة مستقيمتين تقابل المستقيم المفروض فان اقصر هذه المستقيمتين هو العمود المرسوم من النقطة على المستقيم المفروض

(المفروض) ان  $\angle$  (شكل ٣٢) أقصر من كل مستقيم واصل من نقطة  $\angle$  الى  $\angle$

(المطلوب اثباته) ان  $\angle$  عمودى على  $\angle$

( البرهان ) أن لم يكن  $\angle$  عموديا على  $AB$  نرسم مستقيما آخر مثل  $\angle$  عموديا عليه ( شكل ٣٢ )

ومما تقدم في نظرية ١٦ يكون  $\angle$  أقصر المستقيمت المرسومة من  $\angle$  الى  $AB$

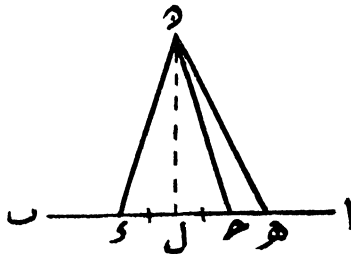
ولكن  $\angle$  أقصر المستقيمت المرسومة من  $\angle$  الى  $AB$  بالفرض اذن  $\angle = \angle$

وذلك لا يتأتى الا اذا انطبق المستقيمان  $\angle$  و  $\angle$

ويكون على ذلك  $\angle$  عموديا على  $AB$  وهو المطلوب

### « نظرية ١٨ »

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها عدة موازات فان المائلين المتساويين البعد عن موقع العمود متساويان والمائلين المختلفي البعد عن موقع العمود مختلفان وأكبرهما ما كان بعده أكبر



( شكل ٣٣ )

( المفروض ) ان  $\angle$  و  $\angle$  و  $\angle$  و  $\angle$  موازات مرسومة من نقطة

هـ الى ا ب وان ل ح = ل و ل هـ < ل و مع العلم بأن هـ ل  
هو العمود النازل من هـ على ا ب

(المطلوب اثباته) ان هـ ح = هـ و وان هـ هـ < هـ و

(البرهان) أولا - في المثلثين ح هـ ل و هـ ل هـ

بما ان  $\left. \begin{array}{l} ل ح = ل و \\ ح هـ ل \\ ح ل هـ = ح ل و \\ بالقياس \\ مشترك بين المثلثين \\ بالفرض \end{array} \right\}$

يتساوى المثلثان ح هـ ل و هـ ل هـ ل من عامة الوجوه (نظرية ٤)  
ويكون هـ ح = هـ و وهو المطلوب

ثانيا - في  $\triangle هـ ل ح$  بما ان  $\angle هـ ل ح$  قائمة يجب ان تكون  
 $\angle هـ ل ح$  حادة (نظرية ١٠)

وكذلك في  $\triangle هـ ل هـ$  بما ان  $\angle هـ ل هـ$  قائمة يجب ان تكون  
 $\angle هـ ل هـ$  حادة (نظرية ١٠)

ومن حيث ان  $\angle هـ ل ح$  حادة فتكون مجاورتها  $\angle هـ ح هـ$   
منفرجة (نظرية ١)

اذن في  $\triangle هـ ح هـ$  تكون  $\angle هـ ح هـ$  أكبر من  $\angle هـ هـ ح$   
ويكون هـ هـ < هـ ح (نظرية ١٢)

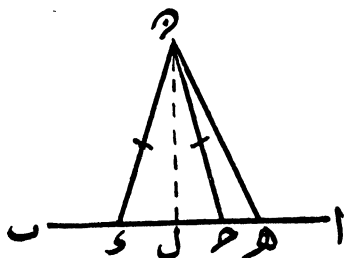
أو هـ هـ < هـ و وهو المطلوب

« نظرية ١٩ »

(وهي عكس نظرية ١٨)

اذا فرضت نقطة خارج مستقيم ورسم منها عدة موازات فكل مائلين

متساويين يكون بعداهما عن موقع العمود متساويين وكل مائلين مختلفين يكون بعداهما عن موقع العمود مختلفين واكبر المائلين بعده اكبر



( شكل ٣٤ )

( المفروض ) ان  $د و = د ح$  و  $و ل < ح ل$  مائل مرسومة من نقطة  $د$  الى  $ب$  وان  $د و = د ح$  و  $و ل < ح ل$  مع العلم بان  $ل$  هو العمود النازل من  $د$  على  $ب$

( المطلوب اثباته ) ان  $ل و = ل ح$  وان  $ل و < ل ح$  ( البرهان ) أولا — ان لم يكن  $ل و$  مساويا ل  $ل ح$  فاما ان يكون اكبر منه وأما ان يكون اصغر منه

فان كان  $ل و < ل ح$

( نظرية ١٨ )

لزم ان يكون  $د و < د ح$

وهذا خلاف الفرض

وان كان  $ل و > ل ح$

( نظرية ١٨ )

لزم ان يكون  $د و > د ح$

وهذا خلاف الفرض ايضا

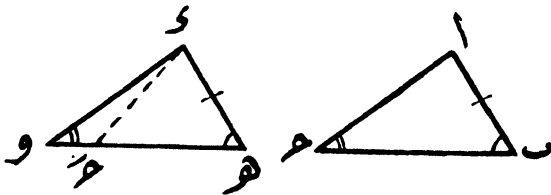
وعلى ذلك فالبعد  $ل ح$  لا يمكن ان يكون اكبر من  $ل و$  كما انه

لا يمكن ان يكون اصغر منه

اذن يجب ان يكون ل ح مساوياً ل و  
 ثانياً - ان لم يكن ل ه اكبر من ل و  
 فاما ان يساويه واما ان يكون اصغر منه  
 فان كان  $ل = ه$   
 لزم ان يكون  $ه = ه$   
 وهذا خلاف الفرض  
 وان كان  $ل > ه$   
 لزم ان يكون  $ه > ه$   
 وهذا خلاف الفرض ايضا  
 وعلى ذلك فالبعد ل ه لا يمكن ان يساوى ل و كما انه لا يمكن  
 ان يكون اصغر منه  
 اذن يجب ان يكون ل ه اكبر من ل و وهو المطلوب

« نظرية ٢٠ »

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما زاويتان وضلع  
 مقابل لاحدى هاتين الزاويتين كل مع نظيره



(شكل ٢٠)

(المفروض) ان  $\angle$  ح  $\angle$  و  $\angle$  ه و مثلثان فيهما  $\angle$  ب =  $\angle$  ه  
 $\angle$  ح =  $\angle$  و والضلع  $\angle$  ب =  $\angle$  ه  
 (المطلوب اثباته) ان  $\triangle$  ا ب ح =  $\triangle$  و ه و من عامة الوجوه  
 (البرهان) نطبق  $\triangle$  ا ب ح على  $\triangle$  و ه و على شرط ان تقع  
 النقطة ا على النقطة و ويأخذ الضلع ا ب الاتجاه و ه  
 وبما ان  $\angle$  ب =  $\angle$  ه فتقع نقطة ب على نقطة ه  
 وبما ان  $\angle$  ب انطبق على  $\angle$  و  $\angle$  ح =  $\angle$  و ه و  
 فيقع ب ح على ه و

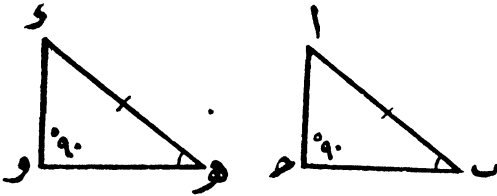
وبعد ذلك ان وقعت نقطة ح على نقطة و انطبق المثلثان  
 وثبت المطلوب

وان لم تقع نقطة ح على نقطة و وقعت على ه و أو على امتداده  
 حسبما يكون ب ح اصغرا و اكبرا من ه و  
 وللسهولة في العمل نقرض ان ب ح  $\angle$  ه و وان نقطة ح  
 وقعت على ه و واخذت الوضع ح' والضلع ا ح اخذ الوضع  
 و ح'

في  $\triangle$  و ح' و الزاوية ه ح' و الخارجة اكبر من  $\angle$  و ح'  
 اي ان  $\angle$  ح' اكبر من  $\angle$  و ه و وهذا خلاف الفرض  
 وكذلك ان وقعت نقطة ح عند التطبيق على امتداد ه و  
 اختلفت الزاويتان ا ح ب و و ه في المقدار وكانت  $\angle$  ح ب  
 اصغر من  $\angle$  و ه وهذا خلاف الفرض ايضاً

وعلى ذلك فالنقطة ح لا يمكن ان تقع الا على نقطة و  
 وبذلك ينطبق  $\triangle$  ا ب ح على  $\triangle$  و ه و ويتساويان من  
 عامة الوجوه وهو المطلوب

( نتيجة ) يتساوى المثلثان القائمًا الزاوية من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما وتر وزاوية حادة كل مع نظيره



( شكل ٣٦ )

( المفروض ) ان المثلثين ا ب ح و س هـ و قائما الزاوية الاول في ح والثاني في و وأن الوتر ا ب = س هـ والزاوية الحادة ا ب ح = س هـ و

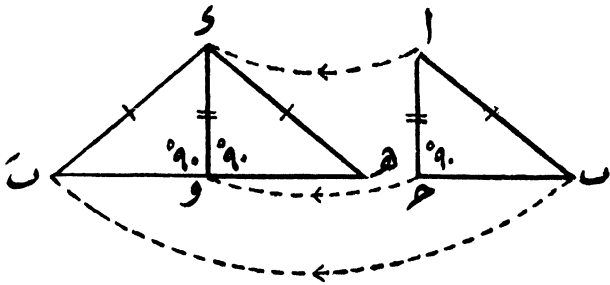
( المطلوب اثباته ) ان المثلث ا ب ح = المثلث س هـ و من عامة الوجوه  
( البرهان ) في المثلثين ا ب ح و س هـ و

$$\left. \begin{array}{l} \text{بالقيام} \\ \text{بالفرض} \\ \text{بالفرض} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle \text{ح} = \angle \text{و} \\ \angle \text{ب} = \angle \text{هـ} \\ \text{ا ب} = \text{س هـ} \end{array}$$

فيطبق  $\triangle$  ا ب ح على  $\triangle$  س هـ و  
وبذلك يتساويان من عامة الوجوه  
( نظرية ٢٠ )  
( وهو المطلوب )

« نظرية ٢١ »

يتساوى المثلثان القائمًا الزاوية من عامة الوجوه اذا تساوى فيهما وتر وضلع كل مع نظيره



(شكل ٣٧)

(المفروض) ان المثلثين  $ABC$  و  $A'B'C'$  و قائما الزاوية الاول  
 في  $C$  والثاني في  $C'$  وان الوتر  $AB = A'B'$  والوتر  $BC$  والضلع  $AC$   
 $= A'C'$

(المطلوب اثباته) ان المثلث  $ABC = A'B'C'$  و  $C = C'$  و  $B = B'$   
 عامة الوجوه

(البرهان) نضع المثلث  $A'B'C'$  بجانب المثلث  $ABC$  و بحيث  
 يقع الضلع  $A'B'$  على امتساويه  $BC$  و يأخذ المثلث  $A'B'C'$  ح الوضع  
 $C'$  و  $B'$

بما ان كلا من  $BC$  و  $B'C'$  قائمة

يكون المستقيم  $CC'$  على استقامة و  $C$  ويكون  $BC = B'C'$  مثلثا فيه

الضلع  $BC = B'C'$  (لان كلا منهما  $AB$ )

اذن  $BC = B'C'$  و  $C = C'$  (نظرية ٦)

أى ان  $ABC = A'B'C'$  و  $BC = B'C'$

وعلى ذلك ففي المثلثين  $ABC$  و  $A'B'C'$  و  $C = C'$  و  $B = B'$

$\left. \begin{array}{l} \angle ا ح ب = \angle و ه ب \text{ بالقيام} \\ \angle ا ح ب = \angle و ه ب \text{ بالاثبات} \\ \angle ا ح ب = \angle و ه ب \text{ بالفرض} \end{array} \right\} \text{من حيث ان}$

فينطبق المثلث ا ب ح على المثلث و ه ب ( نظرية ٢٠ )  
 وبذلك يتساويان من عامة الوجوه وهو المطلوب

### تمارين (٩)

(١) نقطة ح هي منتصف المستقيم ا ب والمطلوب البرهنة على ان العمودين النازلين من ا ب على اى مستقيم آخر يمر بها متساويان

(٢) ا ب ح و و ه و مثلثان متساويان من عامة الوجوه فاذا رسم ا س عموديا على ب ح ورسم و ص عموديا على ه و فبرهن على ان ا س = و ص

(٣) اذا فرضت نقطة على منتصف زاوية فبرهن على ان العمودين النازلين منها على ضلعي الزاوية متساويان

(٤) ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح فاذا نصفت القاعدة ب ح فى نقطة و فبرهن على ان العمودين النازلين من هذه النقطة على ساقى المثلث متساويان

(٥) ا ب ح مثلث متساوى الساقين فيه ا ب = ا ح والمطلوب البرهنة على ان العمودين النازلين من ب ح على ساقى المثلث متساويان

(٦) في المسألة السابقة اذا فرض ان العمودين تلاقيا في نقطة س فبرهن على أن  $س ب = س ح$

(٧) ا ب ح مثلث متساوي الساقين رسم فيه المستقيم ا و عموديا على ب ح والمطلوب البرهنة على ان المثلث ب ا و = المثلث ح ا و من عامة الوجوه

(٨) اذا فرضت نقطة مثل د وكان العمودان النازلان منها على ضلعي زاوية مفروضة ب ا ح متساويين فبرهن على ان د ا ينصف هذه الزاوية

(٩) اذا نصفت قاعدة مثلث بنقطة وكان العمودان النازلان منها على ضلعي المثلثين الآخرين متساويين فبرهن على ان المثلث متساوي الساقين

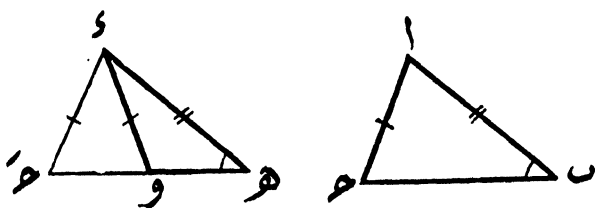
(١٠) اذا كان العمودان النازلان من نهايتي قاعدة مثلث على ضلعيه الآخرين متساويين فبرهن على ان المثلث متساوي الساقين

« نظرية ٢٢ »

اذا ساوى ضلعان في مثلث نظيريهما في مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث الاول أكبر من نظيرتها في الثاني كان الضلع الثالث من المثلث الاول أكبر من نظيره في المثلث الثاني

(المفروض) ان المثلثين ا ب ح و ا ب ه و فيهما الضلع ا ب = و ه ا ح = و و ب ا ح أكبر من د ه و و  
المطلوب اثباته) ان ب ح < ه و

(البرهان) قبل الشروع في اثبات هذه النظرية تجب معرفة ما تساويه  $\Delta$  بالنسبة الى نظريتها  $\Delta$  ه فتارة نفرض انهما متساويتان وتارة نفرض ان  $\Delta$  ب اكبر من  $\Delta$  ه وتارة نفرض ان  $\Delta$  ب اصغر من  $\Delta$  ه لان لكل حالة طريقة خاصة ووضع خاص لاثباتها  
الحالة الاولى - عندما تكون  $\Delta$  ب =  $\Delta$  ه (شكل ٣٨)



(شكل ٣٨)

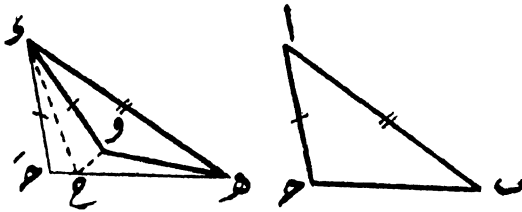
نطبق المثلث  $\Delta$  ب ح على  $\Delta$  ه و بحيث تقع النقطة ا على النقطه  $\Delta$  و يقع الضلع  $\Delta$  ب ح على مساويه  $\Delta$  ه  
وبما ان الضلع  $\Delta$  ب ح وقع على  $\Delta$  ه وكانت  $\Delta$  ب اكبر من  $\Delta$  ه و بالفرض فلا بد ان يقع ا ح على يسار  $\Delta$  و و يأخذ  
الوضع  $\Delta$  ح'

وبما ان  $\Delta$  ب ح وقع على  $\Delta$  ه وقد سلمنا بأن  $\Delta$  ب =  $\Delta$  ه  
فلا بد أن يقع ب ح على ه و و يأخذ المثلث  $\Delta$  ب ح الوضع  
 $\Delta$  ه ح'

ويكون ه ح' < ه و (لان الكل اكبر من الجزء)

اي ان ب ح < ه و وهو المطلوب

(الحالة الثانية) عندما تكون  $\Delta$  ب اكبر من  $\Delta$  ه (شكل ٣٩)



( شكل ٣٩ )

نطبق المثلث  $أ ب ح$  على المثلث  $أ ه و$  فبعد ان تقع النقطة  $أ$  على النقطة  $أ$  ويقع الضلع  $أ ب$  على  $أ ه$  ويقع  $أ ح$  على يسار  $أ و$  ويأخذ الوضع  $أ ح$  نقول

بما ان  $أ ب$  وقع على  $أ ه$  وقد سألنا بأن  $أ ب$  اكبر من  $أ ه$  فلا بد ان يقع  $ب$  ح أسفل  $ه و$  ويأخذ المثلث  $أ ب ح$  الوضع  $أ ه ح$  ثم ننصف  $أ و$  ح' بالمستقيم  $أ ح$  الذي يقابل  $ه ح$  في  $ع$  ونصل بين  $ع و$

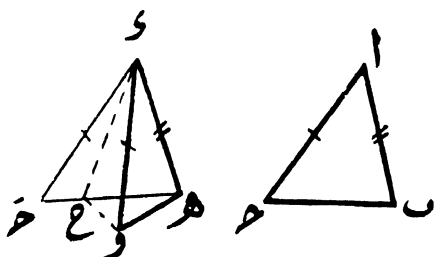
ففي المثلثين  $أ و ع$  و  $أ ح' ع$

بما ان  $\left. \begin{array}{l} و ع = ح' ع \\ ع و ع \\ \text{بالفرض} \\ \text{مشارك بين المثلثين} \\ \text{بالعمل} \end{array} \right\}$

( نظرية ٤ ) يتساوى المثلثان من عامة الوجوه  
وينتج من تساويهما ان  $و ع = ح' ع$   
وفي  $\triangle ه و ع$

( نظرية ١٣ )  $ه ح + ع و < ه و$

فيكون  $ه ح + ح < ه$  و  
 أى ان  $ه ح < ه$  و  
 أو  $ب ح < ه$  و  
 (الحالة الثالثة) عند ما تكون  $\triangle$  اصغر من  $\triangle ه$  (شكل ٤٠) وهو المطلوب



(شكل ٤٠)

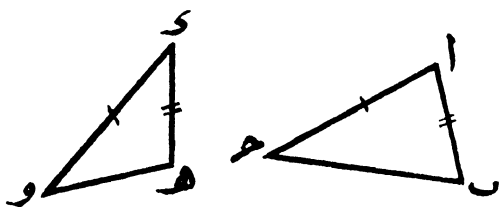
نطبق المثلث  $ا ب ح$  على المثلث  $ه و$  و كما تقدم في الحالتين السابقتين فبعد ان تقع النقطة  $ا$  على النقطة  $ه$  ويقع الضلع  $ا ب$  على مساويه  $ه و$  ويقع  $ح$  على يسار  $و$  ويأخذ الوضع  $ه ح$  نقول بما ان  $ا ب$  وقع على  $ه و$  وقد سلمنا بأن  $\triangle ب$  اصغر من  $\triangle ه$  فيقع الضلع  $ب ح$  أعلى  $ه و$  ويأخذ المثلث  $ا ب ح$  الوضع  $ه ح$

ثم نستمر في البرهنة بنفس الطريقة المتعبة في اثبات الحالة الثانية وبذلك يكون  $ب ح < ه و$  وهو المطلوب

## « نظرية ٢٣ »

(وهي عكس نظرية ٢٢)

إذا تساوى ضلعان في مثلث نظيريهما في مثلث آخر وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من نظيره في المثلث الثاني كانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من نظيرتها في المثلث الثاني



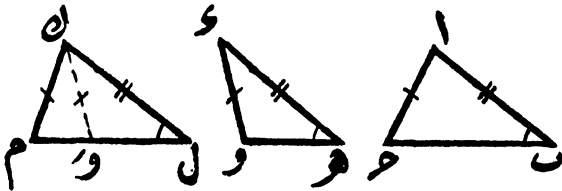
(شكل ٤١)

(المفروض) ان المثلثين  $ا ب ح$  و  $و هـ س$  وفيهما الضلع  $ا ب = و هـ س$  و  $ب ح < س هـ و$   
 (المطلوب اثباته) ان  $ا ب ح$  أكبر من  $و هـ س$   
 (البرهان) ان لم تكن  $ا ب ح$  أكبر من  $و هـ س$  فاما ان  
 تساويها واما ان تكون اصغر منها  
 فان كانت  $ا ب ح = و هـ س$   
 كان المثلث  $ا ب ح =$  المثلث  $و هـ س$  (نظرية ٤)  
 ولزم ان يكون  $ب ح = و هـ س$   
 وهذا خلاف الفرض  
 وان كانت  $ا ب ح$  اصغر من  $و هـ س$

لزم ان يكون  $\angle B$  ح اصغر من  $\angle H$  و  
 وهذا خلاف الفرض ايضاً  
 وعلى ذلك فالزاوية  $\angle B$  ح لا يمكن ان تساوى الزاوية  $\angle H$  و  
 كما انه لا يمكن ان تكون اصغر منها  
 اذن يجب ان تكون  $\angle B$  ح اكبر من  $\angle H$  و  
 وهو المطلوب

« نظرية ٢٤ »

اذا ساوى ضلعان في مثلث نظريهما في مثلث آخر وكانت احدى  
 الزوايا المقابلة للضلع من الضلعين المتساويين تساوى نظريتها في المثلث  
 الثانى كانت الزاوية المقابلة للضلع الآخر تساوى نظريتها أو تكملها  
 وفي حالة التساوى يكون المثلثان متساويين من عامة الوجوه



( شكل ٤٢ )

( المفروض ) ان المثلثين  $\triangle KLM$  و  $\triangle SHW$  وفيهما الضلع  $KL = SH$   
 $\angle L = \angle S$  و  $\angle K = \angle H$  و  
 ( المطلوب اثباته ) ان  $\triangle M$  تساوى  $\triangle W$  أو تكملها وانه في حالة  
 التساوى ينطبق المثلث  $\triangle KLM$  على المثلث  $\triangle SHW$

( البرهان ) الزاوية ل ك م المحصورة بين الضامعين المشار اليهما  
 اما ان تساوى نظيرتها د ه و اولا تساويها  
 فان كانت د ل ك م = د ه و  
 كان المثلث ل ك م = المثلث ه و م  
 وتكون د م = د ه و

[ يحسن بالطالب هنا ان يرجع الى المثلثين المتساويين ل ك م ا ب ح  
 (شكل ٤٢) اللذين فيهما ا ب = ك ل ا ح = ك م ب د = د ه و  
 وان كانت د ل ك م لا تساوى د ه و و بأن كانت الاولى  
 اكبر من الثانية مثلا نطبق المثلث ه و م على المثلث ل ك م كما فعلنا  
 عند اثبات الحالة الاولى من نظرية ٢٢ فيأخذ المثلث ه و م  
 الوضع ك ل و'

ومن حيث ان د ه و = ك ل و'

فيكون ك م = ك ل و'

وتكون د ك و' م = د م

ولكن د ك و' م تكمل د ك و' ل (نظرية ١)

اذن د م تكمل د ك و' ل

اي ان د م تكمل د ه و وهو المطلوب

### تمارين (١٠)

(١) ا ب ح د شكل رباعي فيه ا د = ب ح ا > ب ح ا ح ا كبر

من د ب ح د والمطلوب البرهنة على ان ا ح < ب د

(٢) ا ب ح مثلث اخذ على ضاميه ا ب ا ح البعدان المتساويان

ب و ج ه فاذا كان  $a < b$  ج فبرهن على ان  
 $b < c$

(٣) ا ج مثلث مد ضلعا ا ج الى و ج بحيث  
 ان ب و ج = ج ه فاذا كان  $a < b$  ج فبرهن على ان  
 $c < b$

(٤) ا ج مثلث فيه  $a < b$  ج فاذا فرض ان و منتصف  
 ب ج فبرهن على ان  $a > c$  حادة

(٥) ا و المستقيم المتوسط للمثلث ا ج فاذا فرضت أى نقطة  
 ه على ا و وكان  $a < b$  ج فبرهن على ان  $b < c$  ح

(٦) ا ج مثلث اخذ على ضلعيه ا ج و ا ج البعدان المتساويان  
 ب و ج ه فاذا كان  $b < c$  ج فبرهن على ان  $a < c$  ح

(٧) ا ج ح و شكل رباعي فيه  $a = b$  ج و  $a < b$  و  
 والمطلوب البرهنة على ان  $a > c$  ح اكبر من  $b > c$  ح

(٨) ا ج ح و شكل رباعي فيه  $a = b$  ج و  $a > b$  ح و  
 والمطلوب البرهنة على ان  $a > c$  ح اكبر من  $b > c$  ح

(٩) ا ج ح و شكل رباعي فيه  $a = b$  ج و  $a > b$  ح اكبر  
 من  $b > c$  ح والمطلوب البرهنة على ان  $a > b$  ح اكبر  
 من  $b > c$  ح

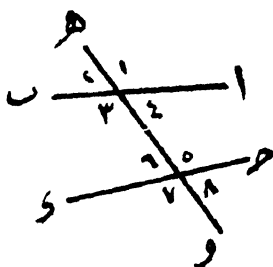
(١٠) ا ج ح مثلث مد ضلعا ا ج الى و ج بحيث ان ب و  
 $=$  ج ه فاذا كان  $c < b$  ح فبرهن على ان  $a < c$  ح

## الباب الرابع في المتوازيات

(تعريف) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان في مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدا

(بديهية) لا يمكن ان يمدن نقطة خارج مستقيم الامستقيم واحد يوازيه

(تعريف) اذا قطع المستقيم هـ و المستقيمين ا ب و جـ و د نشأ عن هذا التقاطع ثمانى زوايا تعرف باسماء خاصة اصطلاح بها على تسميتها



(شكل ٤٣)

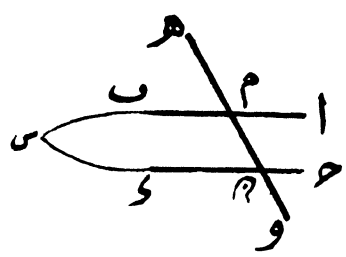
ففى شكل (٤٣)

- (١) الزوايا ١ و ٢ و ٧ و ٨ تسمى خارجة
- (٢) والزوايا ٣ و ٤ و ٥ و ٦ تسمى داخلية
- (٣) والزوايا ١ و ٧ و ٢ و ٨ تسمى متبادلتين من الخارج وكذا الزوايا ٣ و ٥ و ٤ و ٦ تسمى متبادلتين من الداخل

- (٤) والزائتان ٣ و ٥ تسميان متبادلتين من الداخل وكذا ٤ و ٦
- (٥) والزائتان ١ و ٥ تسميان متناظرتين وكذا ٢ و ٦ و ٣ و ٧
- (٦) والزائتان ١ و ٨ تسميان متجانبتين من الخارج وكذا ٢ و ٧
- (٧) والزائتان ٤ و ٥ تسميان متجانبتين من الداخل وكذا ٣ و ٦

« نظرية ٢٥ »

إذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك ان زاويتين متبادلتين داخلتين أو خارجتين متساويتان كان المستقيمان متوازيين



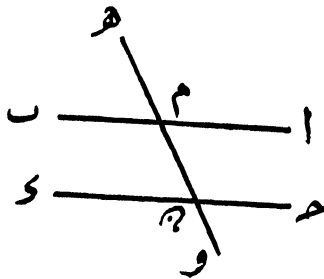
( شكل ٤٤ )

(المفروض) ان المستقيم هـ و يقطع المستقيمين ا ب و ح و د في م و س وان الزاويتين المتبادلتين الداخليتين م ب و د ح و م متساويتان (المطلوب اثباته) ان ا ب يوازي ح د (البرهان) ان لم يكن ا ب ح د متوازيين فلا بد أن يتلاقيا في نقطة مثل س ويكون س م د مثلثاً

في المثلث س م ه الزاوية الخارجة ح م ه < الزاوية م ب ه  
 وهذا يستحيل اذ انهما متساويتان بالفرض  
 وقد نشأ المستحيل بفرضنا ان ا ب يتلاقى مع ح و  
 اذن لا يمكن تلاقيهما وبذا يكونان متوازيين وهو المطلوب  
 ( تنبيه ) عند ما يفرض تساوى زاويتين متبادلتين من الخارج مثل  
 زاويتي م ا ه و م و ه و نستمر في الاثبات بأن نقول  
 ان  $\angle م ا ه = \angle م و ه$  بالتقابل بالرأس  
 و  $\angle م و ه = \angle م ح و$  « »  
 اذن  $\angle م ا ه = \angle م ح و$   
 وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل  
 اذن ا ب يوازي ح و وهو المطلوب

« نظرية ٢٦ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك ان زاويتين متناظرتين  
 متساويتان أو ان مجموع اى زاويتين متجانبتين داخلتين أو خارجتين  
 يساوى قائمتين كان المستقيمان فى كلتا الحالتين متوازيين



( شكل ٥٤ )

(الفروض) ان المستقيم ه و يقطع المستقيمين ا ب و ج ح د في  
 ٢ ٦ و كانت

$$\angle ٢ = \angle ١$$

$$\text{أو } \angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤$$

$$\text{أو } \angle ٢ = \angle ٥ + \angle ٦$$

(المطلوب اثباته) انه في كل حالة من الاحوال الثلاثة يكون  
 المستقيمان ا ب و ج ح د متوازيين

(الحالة الاولى)  $\angle ٢ = \angle ١$  بالتقابل بالرأس

$$\text{٦ } \angle ٢ = \angle ١ \text{ بالفرض}$$

$$\text{اذن } \angle ٢ = \angle ٣$$

وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل

اذن ا ب يوازي ج د وهو المطلوب

(الحالة الثانية)  $\angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤$  (نظرية ١)

$$\text{٦ } \angle ٢ = \angle ٣ + \angle ٤ \text{ بالفرض}$$

$$\text{اذن } \angle ٢ = \angle ٥$$

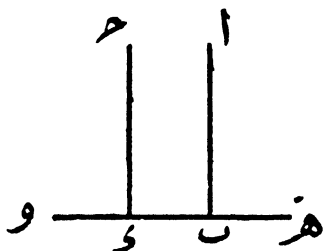
وهاتان الزاويتان متبادلتان من الداخل

اذن ا ب يوازي ج د وهو المطلوب

(الحالة الثالثة) نستخدم في اثبات الحالة الثالثة نفس الطريقة

المتبعة في اثبات الحالة الثانية وبذلك يثبت المطلوب

(نتيجة) المستقيمان العمودان على ثالث يكونان متوازيين



( شكل ٤٦ )

( المفروض ) ان كلا من  $ا ب$  و  $ح د$  عمودى على  $و$  و

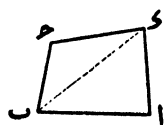
( المطلوب اثباته ) أن  $ا ب$  يوازى  $ح د$

( البرهان )  $\sphericalangle ه ب ا = \sphericalangle د ح و$  بالقيام

وهاتان الزاويتان متناظرتان

اذن  $ا ب$  يوازى  $ح د$  ( نظرية ٢٦ ) ويثبت المطلوب

تعريف



( شكل ٤٧ )

١ - علمنا فيما مضى ان الشكل الرباعى

هو مضلع يحيط به اربعة اضلاع مثل  $ا ب ح د$

( شكل ٤٧ )

ويقال للمستقيم الذى يصل رأسين متقابلين فيه القطر مثل  $ب د$

٢ - يقال للشكل الرباعى أنه

متوازى اضلاع اذا كانت اضلاعه

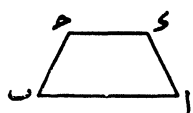
المتقابلة متوازية مثل  $ا ب ح د$



( شكل ٤٨ )

( شكل ٤٨ )

ففي هذا الشكل الرباعي ا ب يوازي ح و و ا يوازي ح ب



(شكل ٤٩)

٣ - يقال للشكل الرباعي انه شبه

منحرف اذا كان فيه ضلعان متوازيان

وضلعان غير متوازيين مثل ا ب ح و

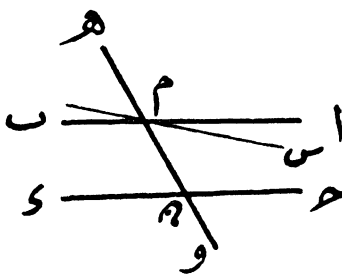
(شكل ٤٩)

ففي هذا الشكل ا ب يوازي ح و ولكن ا لا يوازي ح ب

« نظرية ٢٧ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين حدث من ذلك ان كل

زاويتين متبادلتين داخلتين او خارجتين متساويتان



(شكل ٥٠)

(المفروض) ان المستقيم ا ب يوازي ح و وأن المستقيم ه و

يقطعهما في م و ن

(المطلوب اثباته) ان  $\angle m = \angle n$  و  $\angle o = \angle p$

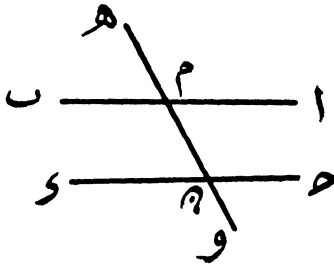
(البرهان) ان لم تكن الزاوية  $\angle m = \angle n$  تساوى الزاوية  $\angle o = \angle p$

نرسم  $\angle م س ح$  كي يصنع مع  $\angle م ح و$  الزاوية  $\angle م س و =$  الزاوية  $\angle م ح و$   
 فيكون  $\angle م س و$  يوازي  $\angle م ح و$  ( نظرية ٢٦ )  
 ولكن  $\angle م ح و$  يوازي  $\angle م س و$  بالفرض  
 وبذلك يكون قد أمكن رسم مستقيمين يوازيان المستقيم  $\angle م ح و$  من  
 نقطة واحدة وهذا مستحيل بداهة

اذن  $\angle م س و$  لا بد ان تساوى  $\angle م ح و$  وهو المطلوب  
 (ملاحظة) الزوايا المتبادلة من الخارج تساوى الزوايا المتبادلة من  
 الداخل بالتقابل بالرأس فتي ثبت تساوى الاولى يثبت تساوى الثانية

« نظرية ٢٨ »

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين حدث من ذلك ان كل  
 زاويتين متناظرتين متساويتان وان مجموع اى زاويتين متجاورتين  
 داخليتين أو خارجيتين يساوى قائمتين



( شكل ٥١ )

( المفروض ) ان المستقيم  $ا ب$  يوازي  $ب و$  وان المستقيم  $و$   
 يقطعهما في  $\angle م و$

(المطلوب اثباته) ان  $\angle م ح د = \angle م ا ب$  هـ

وان  $\angle م ح د + \angle م ب د = ٢٠٠$

وان  $\angle م ا ب + \angle م ب د = ٢٠٠$

(البرهان) اولاً -  $\angle م ا ب = \angle م ح د$  بالتقابل بالرأس

٦  $\angle م ح د = \angle م ب د$  بالتبادل (نظرية ٢٧)

اذن  $\angle م ح د = \angle م ا ب$  وهو المطلوب

ثانياً -  $\angle م ح د + \angle م ب د = ١٢٠$  (نظرية ١)

$\angle م ب د = \angle م ح د$  بالتبادل (نظرية ٢٧)

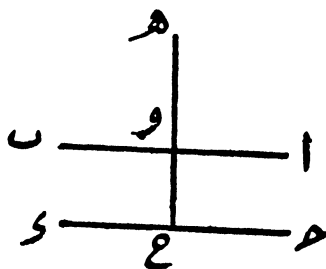
اذن  $\angle م ح د + \angle م ب د = ٢٠٠$  وهو المطلوب

ثالثاً - يمكن بنفس الطريقة المتبعة في الحالة الثانية اثبات ان

$$\angle م ح د + \angle م ب د = ٢٠٠$$

(نتيجة) كل مستقيم عمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون

عمودياً على الآخر



(شكل ٥٢)

(المفروض) ان  $ا ب$  يوازي  $ح د$  وان  $هـ و ح$  عمودي على  $ا ب$

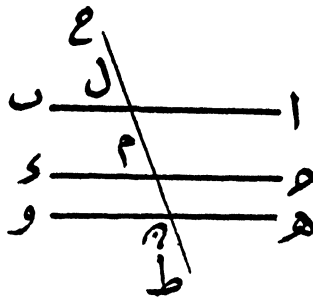
(المطلوب اثباته) ان  $هـ و ح$  عمودي على  $ح د$  ايضاً

(٥)

( البرهان )  $\angle ح ح و = \angle ا و ه$  بالتناظر  
 ولكن  $\angle ا و ه =$  قائمة بالفرض  
 اذن  $\angle ح ح و =$  قائمة كذلك  
 وبذا يكون  $ه و ح$  عمودياً على  $ح و$   
 وهو المطلوب

« نظرية ٢٩ »

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان



( شكل ٥٣ )

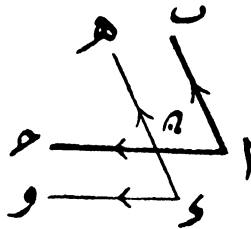
( المفروض ) ان كلا من  $ا ب و$   $ح و$  يوازي  $ه و$   
 ( المطلوب اثباته ) ان  $ا ب$  يوازي  $ح و$   
 ( البرهان ) نرسم المستقيم  $ح ط$  كي يقطع  $ا ب$  في  $ل$   $ح و$  في  $م$   
 $و$  في  $ه$

فما ان  $ا ب$  يوازي  $ه و$  بالفرض  
 تكون  $\angle ه ه ل = \angle ا ل ح$  بالتناظر  
 وكذلك بما ان  $ح و$  يوازي  $ه و$  بالفرض

تكون  $\angle م ه د = \angle م ح ل$  بالتناظر  
 اذن  $\angle ا ل ح = \angle ا م ل$   
 وهاتان الزاويتان متناظرتان  
 اذن  $ا ب$  يوازي  $ح د$  ( نظرية ٢٨ ) وهو المطلوب

« نظرية ٣٠ »

اذا وازى ضلعاً زاوية ضلعي زاوية اخرى وكان اتجاه ضلعي  
 الزاوية الاولى في اتجاه ضلعي الزاوية الثانية كانت الزاويتان متساويتين



( شكل ٥٤ )

( المفروض ) ان  $ا ب$  و  $ح د$  يوازيان فيهما الضلع  $ا ب$   
 يوازي  $ح د$  والضلع  $ا ح$  يوازي  $ا و$  وان  $ا ب$  و  $ح د$  مرسومان في  
 اتجاه واحد وكذا  $ا ح$  و  $ا و$  مرسومان في اتجاه واحد  
 ( المطلوب اثباته ) ان  $\angle ا ب ح = \angle ا ح د$

( البرهان )  $\angle ا ب ح = \angle ا ح د$  بالتناظر

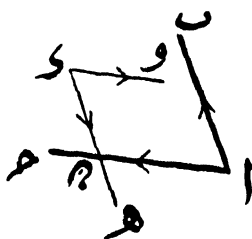
$\angle ا ح د = \angle ا و د$  بالتناظر

اذن  $\angle ا ب ح = \angle ا و د$

اي ان  $\angle ا ب ح = \angle ا ح د$  وهو المطلوب

« نظرية ٣١ »

إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى وكان اتجاه ضلعي  
الزاوية الاولى يضاد اتجاه ضلعي الزاوية الثانية كانت الزاويتان متساويتين



( شكل ٥٥ )

(المفروض) ان  $\angle A = \angle D$  و  $\angle C = \angle F$  و  $\angle B = \angle E$  فيهما الضلع  $AC = DF$   
يوازى  $AB \parallel DE$  والضلع  $AC \parallel DF$  و  $\angle A = \angle D$  وان  $AB \parallel DE$  و  $\angle C = \angle F$  مرسومان في  
اتجاهين متضادين وكذا  $AC \parallel DF$  و  $\angle C = \angle F$  مرسومان في اتجاهين متضادين

(المطلوب اثباته) ان  $\angle A = \angle D$  و  $\angle C = \angle F$

البرهان (  $\angle A = \angle D$  و  $\angle C = \angle F$  بالتناظر

$\angle A = \angle D$  و  $\angle C = \angle F$  بالتبادا

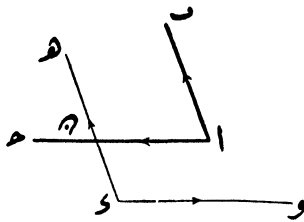
اذن  $\angle A = \angle D$  و  $\angle C = \angle F$

اي ان  $\angle A = \angle D$  و  $\angle C = \angle F$

وهو المطلوب

« نظرية ٣٢ »

إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى وكان اتجاه أحد ضلعي الزاوية في اتجاه الضلع الذي يوازيه واتجاه الضلع الثاني في اتجاه يصاد اتجاه الضلع الذي يوازيه كانت الزاويتان متكاملتين



( شكل ٥٦ )

( المفروض ) ان  $\angle 1$   $\parallel$   $\angle 2$  و  $\angle 3$  و  $\angle 4$  زاويتان فيهما الضلع  $ا$  يوازي  $س$  و  $هـ$  والضلع  $ا$  يوازي  $س$  و ان  $\angle 1$   $\parallel$   $\angle 2$  و  $هـ$  مرسومان في اتجاه واحد والضلعين  $ا$   $ح$  و  $س$  و مرسومان في اتجاهين متضادين

( المطلوب اثباته ) ان  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

( البرهان )  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

( نظرية ٢٨ )

ولكن  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  بالتناظر

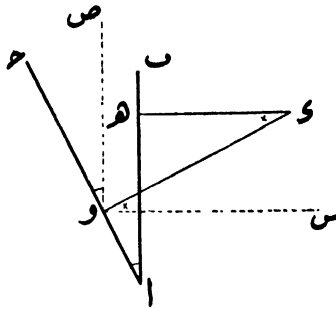
اذن  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

اي ان  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

وهو المطلوب

« نظرية ٣٣ »

إذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعي زاوية أخرى وكانت كل منهما حادة كانت الزاويتان متساويتين



( شكل ٥٧ )

( المفروض ) ان  $\angle AOB = \angle COD$  و  $\angle A$  و  $\angle C$  زاويتان فيهما الضلع  $OB$  و  $OD$  عمودى على  $OB$  والضلع  $OA$  و  $OC$  عمودى على  $OA$  وان كلا من الزاويتين حادة

( المطلوب اثباته ) ان  $\angle AOB = \angle COD$  و  $\angle A = \angle C$

( البرهان ) نرسم من نقطة  $O$  المستقيم  $CV$  يوازي  $OB$  والمستقيم  $OS$  يوازي  $OD$  فيكون  $CV$  عمودياً على  $OS$

$$\angle COV = \angle OSO + \angle SOD = \angle OSO + \angle AOB$$

بالفرض ولكن  $\angle COV = \angle OSO + \angle COD$

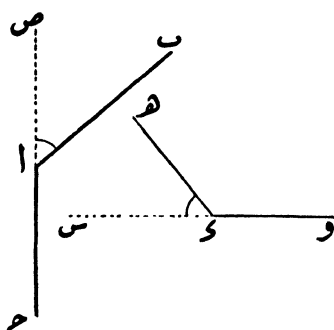
$$\angle OSO = \angle OSO$$

بالتناظر ولكن  $\angle COV = \angle OSO + \angle AOB$

بالتبادل	$\angle ه و = \angle و ه و$	٦
	$\angle و ه و = \angle و ا و$	اذن
وهو المطلوب	$\angle و ه و = \angle ا ح و$	اى ان

« نظرية ٣٤ »

اذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعي زاوية أخرى وكانت كل منهما منفرجة كانت الزاويتان متساويتين



( شكل ٥٨ )

(المفروض) ان  $\angle ا ح و$  و  $\angle و ه و$  زاويتان فيهما الضلع  $و ه$  عمودى على  $ا ب$  والضلع  $و و$  عمودى على  $ا ح$  وان كلا من الزاويتين منفرجة

(المطلوب اثباته) ان  $\angle ا ح و = \angle و ه و$

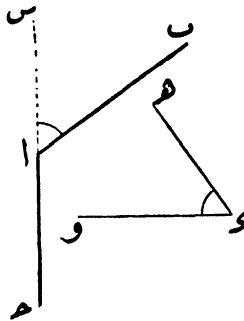
(البرهان) نمد الضلع  $ح ا$  الى  $ص$  والضلع  $و و$  الى  $س$  فيكون

$و س$  عمودياً على  $ا ص$

ومن حيث ان كلا من الزاويتين  $\angle ا ص ٦$  و  $\angle ه و س$  حادة  
 فتكون  $\angle ا ص ٦ = \angle ه و س$  ( نظرية ٣٣ )  
 ولكن  $\angle ا ص ٦ = \angle ا ح ٦ + \angle ا ح و$   
 $\angle ه و س = \angle ه و ا + \angle ا ح و$   
 اذن  $\angle ا ح ٦ = \angle ه و ا$  وهو المطلوب

## « نظرية ٣٥ »

اذا كان ضلعا زاوية عموديين على ضلعي زاوية اخرى وكانت  
 احدهما حادة والاخرى منفرجة كانت الزاويتان متكاملتين



( شكل ٥٩ )

( المفروض ) ان  $\angle ا ب ا ح ٦$  و  $\angle ه و س$  زاويتان فيهما الضلع  $ا ه$   
 عمودى على  $ا ب$  والضلع  $ا ه$  وعمودى على  $ا ح$  وأن  $\angle ا ح ٦$  منفرجة  
 $\angle ه و س$  و حادة  
 ( المطلوب اثباته ) ان  $\angle ا ح ٦ + \angle ه و س = ١٨٠$

( البرهان ) نمد ح إلى س فيكون  $\angle$  و عموديا على  $\angle$  س

وبما أن كلا من زاويتي  $\angle$  و  $\angle$  ب  $\angle$  س حادة

فتكون  $\angle$  ه  $\angle$  و  $\angle$  ب  $\angle$  س ( نظرية ٣٣ )

ولكن  $\angle$  ب  $\angle$  ح +  $\angle$  ب  $\angle$  س =  $\angle$  ٢ ( نظرية ١ )

اذن  $\angle$  ب  $\angle$  ح +  $\angle$  ه  $\angle$  و =  $\angle$  ٢ وهو المطلوب

### تمارين (١١)

( ١ )  $\angle$  ب ح  $\angle$  و شكل رباعي رسم فيه القطر  $\angle$  ح فاذا كانت

$\angle$  ب  $\angle$  ح =  $\angle$  ب  $\angle$  ح و  $\angle$  ب  $\angle$  ح =  $\angle$  ب  $\angle$  ح فبرهن

على ان هذا الشكل الرباعي متوازي الاضلاع

( ٢ )  $\angle$  ب ح  $\angle$  و متوازي اضلاع رسم فيه القطر  $\angle$  ح ثم مد  $\angle$  ب ح إلى ه

والمطلوب بيان ازواج الزوايا المتساوية مع بيان السبب

( ٣ )  $\angle$  ب ح مثلث فاذا رسم المستقيم  $\angle$  ه يوازي  $\angle$  ب ح ويقطع  $\angle$  ب

في  $\angle$  و  $\angle$  ب  $\angle$  ح في ه وكانت  $\angle$  ب =  $\angle$  ب  $\angle$  ح فبرهن على

ان  $\angle$  ب  $\angle$  و ه =  $\angle$  ب  $\angle$  ح و

( ٤ ) برهن على ان مجموع زوايا متوازي الاضلاع يساوى اربع قوائم

( ٥ ) برهن على ان كل زاويتين متقابلتين في متوازي الاضلاع

متساويتان

( ٦ ) اذا كانت احدى زوايا متوازي الاضلاع قائمة فبرهن على ان

كلا من زواياه الثلث الباقية قائمة كذلك

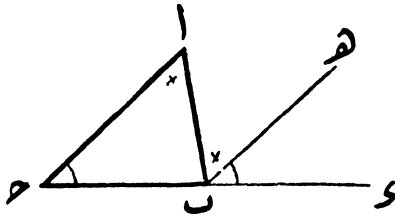
( ٧ )  $\angle$  ب ح  $\angle$  و شكل رباعي فاذا كانت فيه  $\angle$  ب =  $\angle$  ب  $\angle$  ح و

فبرهن على ان  $\angle$  ب  $\angle$  ح +  $\angle$  ب  $\angle$  ح =  $\angle$  ٢ كذلك

- (٨) اذا فرضت نقطة على منتصف زاوية ورسم منها مستقيم يوازي احد ضلعها فبرهن على ان المثلث الحادث متساوي الساقين
- (٩) ا ب ح و شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان والمطلوب البرهنة على ان مجموع زواياه يساوي اربع قوائم
- (١٠) اذا رسم من نقطة على منتصف زاوية مستقيمان يوازيان ضلعها ويقابلانها فبرهن على ان اضلاع الشكل الرباعي الحادث متساوية

« نظرية ٣٦ »

مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين



( شكل ٦٠ )

( المفروض ) ان ا ب ح مثلث

( المطلوب اثباته ) ان

$$\angle د = \angle ا + \angle ب + \angle ج$$

( البرهان ) نمد ح ب على استقامته الى س ونرسم ب هـ يوازي ح ا

فتكون  $\angle ا = \angle د = \angle ب$

بالتبادل  $\angle ا = \angle د = \angle ب$

بالتناظر

$$\begin{aligned} \text{اذن } \angle \text{ح س د} + \angle \text{ح ا ب} &= \angle \text{ح ا ب} + \angle \text{ح ا ب} \\ \text{وبإضافة } \angle \text{ح ا ب} &\text{ الى كل من طرفي هذه المتساوية ينتج ان} \\ &= \angle \text{ح ا ب} + \angle \text{ح ا ب} + \angle \text{ح ا ب} \\ &\angle \text{ح ا ب} + \angle \text{ح س د} + \angle \text{ح ا ب} \end{aligned}$$

$$\text{ولكن } ١٨٠ = \angle \text{ح ا ب} + \angle \text{ح س د} + \angle \text{ح ا ب}$$

$$\text{اذن } ١٨٠ = \angle \text{ح ا ب} + \angle \text{ح ا ب} + \angle \text{ح ا ب}$$

وهو المطلوب

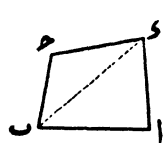
نتيجة ١ - الزاوية الخارجة في أي مثلث تساوي مجموع زواياه الداخلة ما عدا المجاورة لها

نتيجة ٢ - اذا سوت زاويتان في مثلث نظيرتيهما في مثلث آخر كانت الزاوية الثالثة في المثلث الاول مساوية نظيرتها في المثلث الثاني

نتيجة ٣ - مجموع زوايا أي شكل رباعي يساوي اربع قوائم (المفروض) ان ا ب ح د شكل رباعي

(المطلوب اثباته) ان مجموع زوايا الشكل تساوي أربع قوائم

(البرهان) نرسم س د فيقسم الشكل الرباعي الى المثلثين ا ب د و س د ح



(شكل ٦١)

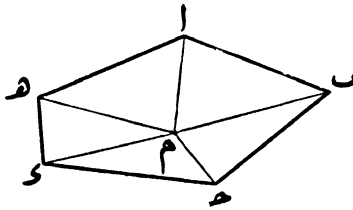
ومجموع زوايا الشكل ا ب ح د

$$= \text{مجموع زوايا } \triangle \text{ ا ب د} + \text{مجموع زوايا } \triangle \text{ ب د ح}$$

$$= ٤ \text{ قوائم وهو المطلوب}$$

« نظرية ٣٧ »

مجموع زوايا المضلع تساوى زوايا قوائمه بقدر ضعف عدد اضلاعه ناقصاً أربع قوائمه



(شكل ٦٢)

(المفروض) أن  $ا ب ح د هـ$  مضلع عدد اضلاعه خمسة (المطلوب اثباته) ان مجموع زوايا المضلع  $= (٢ \times ٥ - ٤)$  من القوائمه

(البرهان) نأخذ نقطة داخل المضلع مثل  $م$  ونصل بينها وبين رؤوس المضلع بالمستقيمات  $ا م ب م ج م د م هـ م$  فينقسم الشكل الى خمسة مثلثات

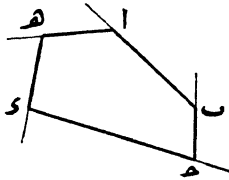
ويكون مجموع زوايا خمسة المثلثات الناشئة  $= ٢ \times ٥$  قوائمه ولكن مجموع زوايا المثلثات الخمسة هذه يزيد على مجموع زوايا المضلع بمقدار الزوايا المتجمعة حول نقطة  $م$

وبما أن مجموع الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى  $٤$  قوائمه فمجموع زوايا المضلع ذى خمسة الاضلاع  $ا ب ح د هـ = ٢ \times ٥ - ٤$  من القوائمه

( تنبيه ) هذا البرهان عام للمضلعات المحدودة مهما كان عدد أضلاعها فلو رمزنا اذن الى عدد الاضلاع بالرمز  $n$  تكون مجموع زوايا مضلع عدد اضلاعه  $n = 2 \times n - 4$  من القوائم

« نظرية ٣٨ »

اذا مدت اضلاع أى مضلع بالترتيب من جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة اربع قوائم



( شكل ٦٣ )

( المفروض ) ان  $a, b, c, d$  مضلع عدد أضلاعه خمسة مدت أضلاعه على الترتيب فى جهة واحدة  
( المطلوب اثباته ) ان مجموع الزوايا الخارجة  $= 4$  قوائم  
( البرهان ) عدد الزوايا الخارجة يساوى عدد زوايا المضلع الداخلة وكل زاوية داخلة تكمل الزاوية الخارجة التى تجاورها  
اذن مجموع زوايا المضلع الداخلة

+ مجموع زواياه الخارجة  $= 2 \times 5 - 4$  قوائم

وتقدم ان مجموع زوايا المضلع الداخلة  $= 2 \times 5 - 4$  من القوائم

اذن مجموع الزوايا الخارجة = ٤ قوائم وهو المطلوب  
(تنبيه) هذا البرهان عام للمضلعات المحدودة مهما كان عدد اضلاعها

## تمارين (١٢)

- (١) المطلوب اثبات نظرية (٣٦) يرسم المستقيم س ١ ص يمر  
بنقطة ١ ويوازي ب ح
- (٢) ١ ب ح مثلث فيه  $\angle 1 = \angle 2$  فاذا مد ب ح على استقامته  
الى د فبرهن على ان  $\angle 3 = \angle 4$  ضعف  $\angle 1$
- (٣) ما مجموع زوايا المضلع ذي خمسة الاضلاع وذى ستة الاضلاع  
وذى ثمانية الاضلاع
- (٤) ١ ب ح مثلث فيه  $\angle 1 = 58^\circ$   $\angle 2 = 62^\circ$  والمطلوب  
معرفة ما تساويه  $\angle 3$  ح
- (٥) ١ ب ح و شكل رباعي فيه  $\angle 1 = 37^\circ$   $\angle 2 = 111^\circ$   
فاذا كانت  $\angle 3 = \angle 4$  فأوجد ما تساويه كل منهما
- (٦) اذا مدت قاعدة مثلث من نهايتها وكانت الزاويتان الخارجتان  
الحادثتان هما  $105^\circ$  و  $112^\circ$  فأوجد ما تساويه كل من  
زوايا المثلث
- (٧) ١ ب ح مثلث متساوى الساقين ( $\angle 1 = \angle 2$  ح) فاذا كانت  
 $\angle 3 = 46^\circ$  فأوجد ما تساويه كل من زاويتي ب و ج ح
- (٨) المطلوب ايجاد ما تساويه كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى  
الاضلاع

(٩) ما مقدار ما تساويه كل زاوية داخلية وكل زاوية خارجة  
في خمس منتظم

(١٠) ا ب ح د شكل رباعي مد ضلعا ا ب و ب ح على استقامتهما

فاذا تلاقيا في نقطة ه فبرهن على ان  $\angle ه ب ح + \angle ه ح ب$

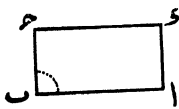
$$\angle د + \angle ا =$$

## الباب الخامس

### في الاشكال المتوازية الاضلاع

#### تعريف

١ - علمنا فيما مضى أن متوازي الاضلاع شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

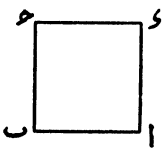


(شكل ٦٤)

٢ - يقال لمتوازي الاضلاع أنه مستطيل إذا كانت زواياه قوائم مثل  $a = b = c = d$

(شكل ٦٤)

ففي هذا الشكل كل من  $a > b > c > d$  يساوي قائمة

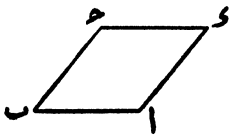


(شكل ٦٥)

٣ - يقال للمستطيل انه مربع اذا كانت اضلاعه كلها متساوية مثل  $a = b = c = d$  (شكل ٦٥)

ففي هذا الشكل  $a = b = c = d$

$$a = b = c = d$$



(شكل ٦٦)

٤ - يقال للربيع انه معين اذا كانت زواياه غير قوائم مثل

$a = b = c = d$  (شكل ٦٦)

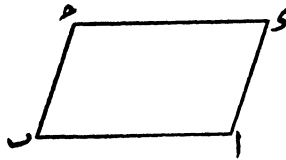
ففي هذا الشكل  $a = b = c = d$

$a = b = c = d$  ولكن زواياه  $a > b > c > d$  ليست بقوائم

٥ — يقال لشبه المنحرف أنه متساوي الساقين اذا كان ضلعاؤه غير المتوازيين متساويين

« نظرية ٣٩ »

في متوازي الاضلاع كل زاويتين متقابلتين متساويتان



( شكل ٦٧ )

(المفروض) أن  $AB \parallel CD$  و  $AD \parallel BC$  متوازي اضلاع

(المطلوب اثباته) أن  $\angle A = \angle C$  و  $\angle B = \angle D$

(البرهان)  $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$  (نظرية ٢٨)

$\angle 2 = \angle 3 + \angle 4$  (نظرية ٢٨)

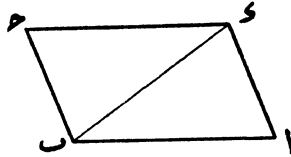
$\angle 4 = \angle 1$  اذن

وبالمثل ثبت أن  $\angle A = \angle C$  وهو المطلوب

« نظرية ٤٠ »

في متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان والقطر يقسمه الى مثلثين متساويين

(٦)



( شكل ٦٨ )

( المفروض ) أن  $AB \parallel CD$  و  $AD \parallel BC$  متوازي اضلاع رسم قطره  $AC$

( المطلوب اثباته ) أن  $AB = CD$  و  $AD = BC$

$$\triangle ABC = \triangle CDA$$

( البرهان ) في المثلثين  $ABC$  و  $CDA$

بالتبادل

$$\angle BAC = \angle DCA$$

بالتبادل

$$\angle BCA = \angle DAC$$

الضلع  $AC$  مشترك بين المثلثين

بما أن

( نظرية ٥ )

يتساوى المثلثان  $ABC$  و  $CDA$

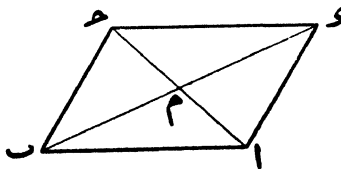
وهو المطلوب

ويكون  $AB = CD$  و  $AD = BC$

( نتيجة ) المستقيمان المتوازيان على بعد واحد في جميع امتدادهما

« نظرية ٤١ »

قطرا متوازي الاضلاع ينصف أحدهما الآخر



( شكل ٦٩ )

( المفروض ) ان  $AB \parallel CD$  و متوازي أضلاع رسم قطراه  $AC$  و  $BD$  و تقاطعا في نقطة  $M$

( المطلوب اثباته ) ان  $AM = CM$  و  $BM = DM$

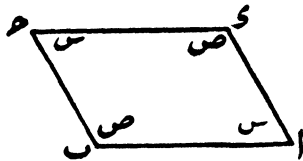
( البرهان ) في المثلثين  $AMB$  و  $CMD$  و

( نظرية ٤٠ )  
 بالتبادل  $\angle AMB = \angle CMD$   
 بالتبادل  $\angle BAM = \angle DCM$  بما أن

يتساوى المثلثان  $AMB$  و  $CMD$  من عامة الوجوه ( نظرية ٥ )  
 ويكون  $AM = CM$  و  $BM = DM$  وهو المطلوب

« نظرية ٤٢ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا تساوى فيه كل زاويتين متقابلتين



( شكل ٧٠ )

( المفروض ) ان  $AB \parallel CD$  و شكل رباعي وان  $\angle A = \angle C$

و  $\angle B = \angle D$

( المطلوب اثباته ) ان  $AB \parallel CD$  و متوازي اضلاع

( البرهان ) نرسم الى كل من زاويتي  $\alpha$  و  $\beta$  المتساويتين بالرمز  $\delta$  والزاويتين  $\gamma$  و  $\epsilon$  المتساويتين بالرمز  $\nu$

فما ان مجموع زوايا اى شكل رباعي يساوى قائمتين

$$\text{تكون } \nu \epsilon = \delta + \delta + \nu + \nu$$

$$\text{ويكون } \nu \epsilon = \delta + \delta + \nu + \nu$$

$$\text{أى أن } \nu \epsilon = \delta + \delta + \nu + \nu$$

$$\text{اذن } \nu \epsilon = \delta + \delta + \nu + \nu$$

$$\text{و } \nu \epsilon = \delta + \delta + \nu + \nu$$

ولكن زاويتي  $\alpha$  و  $\beta$  متجاورتان من الداخل وكذا زاويتي  $\alpha$  و  $\beta$

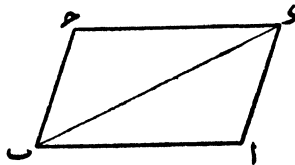
اذن  $\alpha$  و  $\beta$  يوازي  $\gamma$  و  $\delta$  و  $\epsilon$  و  $\zeta$

ويكون  $\alpha$  و  $\beta$  متوازي اضلاع وهو المطلوب

« نظرية ٤٣ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا تساوى وتوازي فيه

ضلعان متقابلان



( شكل ٧١ )

( المفروض ) ان  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  شكل رباعي فيه  $\alpha$  و  $\beta$  يساوى

ويوازي  $\gamma$  و  $\delta$

(المطلوب اثباته) ان  $ا ب ح د$  متوازي اضلاع  
 (البرهان) نرسم القطر  $ب د$  فيحدث المثلثان  $ا ب د$  و  $ب ح د$   
 في هذين المثلثين

$ا ب د = ب ح د$  بالفرض  
 بما أن  $ب د$  مشترك بين المثلثين  
 $ا ب د = ب ح د$  بالتبادل

يتساوى المثلثان  $ا ب د$  و  $ب ح د$  من عامة الوجوه (نظرية ٤)  
 وتكون  $ا ب د = ب ح د$   
 وهاتان الزاويتان متبادلتان  
 اذن  $ا ب$  و  $ب ح$  يوازي  $ب ح$

ويكون  $ا ب ح د$  متوازي اضلاع وهو المطلوب  
 (نتيجة) اذا رسم عمودان متساويان على مستقيم وكانا في جهة  
 واحدة منه فان المستقيم الذي يصل طرفيهما يوازي المستقيم الاصلى

« نظرية ٤ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا تساوى فيه كل ضلعين  
 متقابلين

(المفروض) ان الشكل  $ا ب ح د$  (شكل ٧١) رباعي

وأن  $ا ب = ب ح$  و  $ب ح = ح د$  و  $ح د = د ا$

(المطلوب اثباته) أن  $ا ب ح د$  متوازي اضلاع

(البرهان) نرسم القطر  $ب د$  فيحدث المثلثان  $ا ب د$  و  $ب ح د$   
 في هذين المثلثين

$$\left. \begin{array}{l} \text{بالمفروض} \quad \angle \text{ح د} = \angle \text{ا ب} \\ \text{بالمفروض} \quad \angle \text{ب ح} = \angle \text{ا د} \\ \text{مشارك بين المثلثين} \quad \angle \text{ب د} \end{array} \right\} \text{بما أن}$$

يتساوى المثلثان  $\triangle \text{ا ب د}$  و  $\triangle \text{ح د ب}$  من عامة الوجوه ( نظرية ٨ )

$$\text{وتكون} \quad \angle \text{ا د} = \angle \text{ح د} \quad \text{و}$$

$$\angle \text{ب د} = \angle \text{د ح} \quad \text{و}$$

ولكن زاويتي  $\angle \text{ا ب د}$  و  $\angle \text{ح د ب}$  متبادلتان وكذا زاويتي

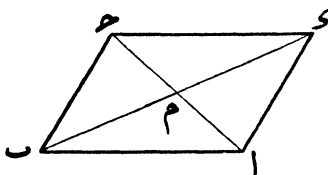
$$\angle \text{ا د} \quad \text{و} \quad \angle \text{ح د}$$

اذن  $\text{ا د}$  يوازي  $\text{ح د}$  و  $\text{ا ب}$  يوازي  $\text{ح د}$

ويكون  $\text{ا ب ح د}$  متوازي اضلاع وهو المطلوب

« نظرية ١٥ »

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا نصف أحد قطريه الآخر



( شكل ٧٢ )

( المفروض ) أن  $\text{ا ب ح د}$  شكل رباعي وان  $\text{ا م} = \text{م د}$

$$\text{ب} \text{ م} = \text{م د}$$

( المطلوب اثباته ) أن  $\text{ا ب ح د}$  متوازي اضلاع

( البرهان ) في المثلثين  $\triangle ABC$  و  $\triangle DEF$

بالفرض	$\angle A = \angle D$	} بما ان
بالفرض	$\angle B = \angle E$	
بالتقابل بالرأس	$\angle C = \angle F$	

يتساوى المثلثان  $\triangle ABC$  و  $\triangle DEF$  من عامة الوجوه ( نظرية ٤ )

ويكون  $\angle A = \angle D$  و  $\angle B = \angle E$

وهاتان الزاويتان متبادلتان

اذن  $AB \parallel DE$  و  $BC \parallel EF$  كما انه يساويه

اي ان  $AB \parallel DE$  و  $BC \parallel EF$  متوازي اضلاع ( نظرية ٤٣ ) وهو المطلوب

### تمارين ( ١٣ )

( ١ )  $AB \parallel CD$  مثلث متساوي الساقين ( $\angle A = \angle B$ ) فاذا رسم

المستقيم  $EF$  يوازي القاعدة ويقطع الضلع  $AB$  في نقطة  $E$

والضلع  $BC$  في  $F$  فبرهن على ان  $\angle E = \angle F$

( ٢ )  $AB \parallel CD$  متوازي اضلاع يشترك مع متوازي الاضلاع  $BC$  و  $AD$

في القاعدة  $BC$  والمطلوب البرهنة على ان المثلثين  $\triangle ABC$  و  $\triangle DCB$

$AB \parallel CD$  و  $BC$  متساويان

( ٣ ) برهن على ان منصفى زاويتين متجاورتين في متوازي اضلاع

متعامدان

( ٤ ) برهن على ان منصفى زاويتين متقابلتين في متوازي اضلاع

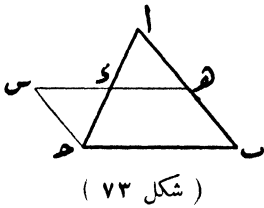
متوازيان

( ٥ )  $AB \parallel CD$  متوازي اضلاع فاذا تقاطع قطراه في نقطة  $M$  فبرهن

على انها تنصف أي مستقيم يمر بها وينتهي بضلعين متقابلين

(٦) برهن على ان المستقيم الذي يصل منتصفى ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث

(المفروض) ان  $ا ب ح$  مثلث وان نقطة  $هـ$  منتصف  $ا ب$  ونقطة  $و$  منتصف  $ا ح$



(المطلوب اثباته)

ان  $هـ و$  يوازي  $ب ح$

(البرهان) نمد  $هـ و$  الى  $س$

ونقيس البعد  $س و = هـ و$  ونصل

$ح و$   $س$  بالمستقيم  $ح س$  فيحدث

المثلثان  $ا هـ و$  و  $و ح س$  و

في هذين المثلثين

$هـ و = س و$  بالعمل

$ا هـ = و ح$  بالفرض

$ا هـ = و ح$  بالتقابل بالرأس

يتساوى المثلثان  $ا هـ و$  و  $و ح س$  و من عامة الوجوه (نظرية ٤)

وينتج من تساويهما ان  $س و = ا هـ$  و  $ا هـ = و ح$

ولكن  $ا هـ = هـ ب$  بالفرض والزواويتين  $و ح س$  و  $ا هـ و$

متبادلتان

اذن  $ح س$  يساوي ويوازي  $هـ ب$

(نظرية ٤٣) أى ان  $ب ح س$   $هـ$  متوازي اضلاع

ويكون  $هـ و$  يوازي  $ب ح$  وهو المطلوب

(٧)  $ا ب ح$  و  $س$  شبه منحرف متساوى الساقين ( $ا ب = ح ب$ )

والمطلوب البرهنة على ان  $ا ب = ح ب$  و

(٨)  $ا ب ح د$  شبه منحرف متساوى الساقين ( $ا ب = ب ح$ )  
 فاذا نصف الضلع  $ا ب$  فى نقطة  $هـ$  والضلع  $ح د$  فى نقطة  $و$   
 فبرهن على ان  $هـ و$  عمودى على  $ا ب$

(٩) برهن على ان المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين متوازيين  
 فى متوازى الاضلاع يوازى ضلعيه الآخرى

(١٠)  $ا ب ح د$  متوازى اضلاع فاذا نصف الضلع  $ا ب$  فى نقطة  $س$   
 والضلع  $ح د$  فى نقطة  $ص$  فبرهن على ان  $ب س د$  متوازى  
 اضلاع

(١١) برهن على ان قطرى المعين متعامدان

(١٢) برهن على ان المستقيمت المتوازية المحصورة بين مستقيمين  
 متوازيين كلها متساوية

(١٣) اذا تلاقى مستقيمان متساويان بمستقيم ثالث وكانا متوازيين وفى  
 جهة واحدة منه فان المستقيم الذى يصل طرفيهما يوازى  
 المستقيم الثالث

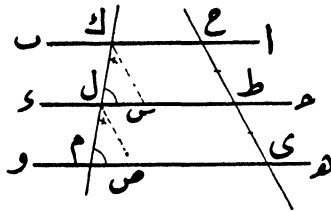
(١٤) برهن على أن المستقيم الذى يصل منتصفى ضلعين فى مثلث  
 يساوى نصف الضلع الثالث

[ فى متوازى الاضلاع  $ب ح س هـ$  (شكل ٧٣) الضلع  
 $س هـ = ح ب$  ولكن  $هـ د$  يساوى نصف  $هـ س$  اذن  $هـ د$   
 $=$  نصف  $ب ح$  ]

(١٥) المطلوب البرهنة على ان المستقيمت التى تصل بين منتصفات  
 اضلاع مثلث تقسمه الى أربعة مثلثات متساوية

« نظرية ٤٦ »

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمت متوازية وكانت اجزائه المحصورة بينها متساوية فإن الاجزاء المحصورة لأي مستقيم آخر يقطع هذه المتوازيات تكون متساوية كذلك



(شكل ٧٤)

(المفروض) أن  $ا ب و ح و د و هـ$  و مستقيمت متوازية وأن  $ح ط ي$  يقطعها بحيث أن الجزء  $ح ط = ط ي$  وأن  $ك ل م$  يقطع هذه المتوازيات

(المطلوب اثباته)  $ك ل = ل م$

(البرهان) نرسم من نقطة  $ك$  المستقيم  $ك س$  يوازي  $ح ي$  ومن  $ل$  المستقيم  $ل ص$  يوازي  $ح ي$  أيضا فيحدث المثلثان  $ك ل س$  و  $ل م ص$  ومن حيث أن كلا من  $س ك$  و  $ح ط$  و  $ط و$  و  $ل ط ي$  متوازي اضلاع

$$\left. \begin{array}{l} ك س = ح ط \\ ل ص = ط ي \end{array} \right\} \text{فيكون}$$

ولكن  $ح ط = ط ي$  بالفرض

اذن  $ك س = ل ص$

في المثلثين  $ك ل س$  و  $ل م ص$

بما أن

$$\left. \begin{array}{l} \text{ك س} = \text{ل ص} \\ \text{ك ل} = \text{ص ل} \\ \text{ك ل} = \text{ص ل} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بالتناظر} \\ \text{بالتناظر} \end{array}$$

بالاتبات

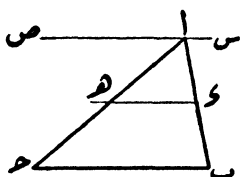
يتساوى المثلثان ك ل س و ل م ص (نظرية ٢٠)

وينتج من تساويهما أن ك ل = ل م وهو المطلوب

### تمارين (١٤)

(١) برهن على ان المستقيم الذي ينصف أحد أضلاع مثلث ويوازي قاعدته ينصف ضلعه الثاني

(المفروض) ان ا ب ح مثلث وان نقطة د منتصف ا ب وان



(شكل ٧٥)

د ه يوازي ب ح ويقطع ا ح في ه

(المطلوب اثباته) أن ا د = د ه ح

(البرهان) نرسم من نقطة ا المستقيم

س ا ص يوازي ب ح

فتكون المستقيمتان س ص و د ه

و ب ح كلها متوازية

ولكن نعلم فرضاً ان ا د = د ه ح

اذن ا د = د ه ح (نظرية ٤٦)

وهو المطلوب

(٢) برهن على ان المستقيم الذي يصل منتصفى ضلعين في مثلث

ينصف أى مستقيم يصل ضلعه الثالث والرأس المقابل له

(٣) اذا وصلت منتصفات الاضلاع المتجاورة في شكل رباعي

فبرهن على ان الشكل الناتج متوازي اضلاع

(٤) اذا وصل منتصفاً كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي

- فبرهن على ان المستقيمين الواصلين ينصف أحدهما الآخر
- (٥) ا ح و متوازي اضلاع ونقطة س منتصف الضلع ا ب ونقطة ص منتصف الضلع المقابل و ح والمطلوب البرهنة على ان و س و ب ص يقسمان القطر ا ح الى ثلاثة أقسام متساوية
- (٦) المطلوب البرهنة على أن المستقيم الذى يصل منتصفى الضلعين غير المتوازيين فى شبه المنحرف يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين ويوازيهما
- (٧) اذا انزل عمودان من نهايتى قطر متوازي اضلاع على مستقيم خارج عنه فبرهن على أن مجموع هذين العمودين يساوى ضعف العمود النازل من منتصف هذا القطر على المستقيم المفروض
- (٨) اذا أنزلت أعمدة من رؤوس متوازي أضلاع على مستقيم خارج عنه فبرهن على ان مجموع العمودين النازلين من رأسين متقابلين يساوى مجموع العمودين الآخرين
- (٩) اذا فرضت نقطة على قاعدة مثلث متساوى الساقين وانزل منها عمودان على ساقيه فبرهن على أن مجموع هذين العمودين يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له
- (١٠) اذا فرضت نقطة على امتداد قاعدة مثلث متساوى الساقين وانزل منها عمودان على ساقيه فبرهن على ان فرق هذين العمودين يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له
- (١١) اذا فرضت نقطة داخل مثلث متساوى الاضلاع وأنزل منها أعمدة على اضلاعه الثلاثة فبرهن على ان مجموع هذه الاعمدة يساوى العمود النازل من احد رؤوس المثلث على الضلع المقابل له

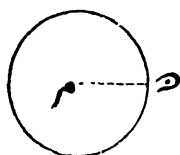
## الباب السادس

### في الدعاوى العملية

الدعاوى العملية هي مجرد عمليات هندسية

وتستلزم هذه العمليات استعمال المسطرة والفرجار (البرجل) وسنردف كل عملية ببرهان نظري تطبيقاً على ما تقدم من الدعاوى

النظرية



(تعريف) الدائرة هي شكل مستوي يحيط به خط جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخلية تسمى مركزاً

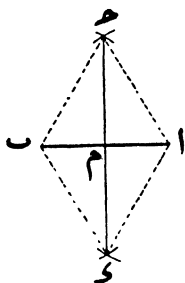
ففي شكل (٧٦) النقطة م ابعادها عن (شكل ٧٦)

جميع نقط الخط الذي حولها متساوية وتسمى م بمركز الدائرة ويسمى م بنصف قطر الدائرة والخط المحدد الدائرة بمحيطها

(ملاحظة) يمكن بواسطة الفرجار رسم الدائرة وذلك بأن نركز بأحدى شعبتيه في نقطة ثابتة مثل م ثم نحرك شعبته الثانية حولها

« عملية ١ »

المطلوب تنصيف مستقيم محدود



( شكل ٧٧ )

( المفروض ) ان  $ا ب$  هو المستقيم  
 ( المطلوب عمله ) تنصيف المستقيم  $ا ب$   
 ( العمل ) نركز في  $ا$  وبعده مناسب نرسم قوساً فوق  $ا ب$  وآخر أسفله  
 ثم نركز في  $ب$  وبنفس البعد الاول نرسم قوسين تقطعان الاولين في  
 $ح ٦$  و  $ح ٥$  ثم نصل  $ح ٥$  فيقطع  $ا ب$  في نقطة  $م$  فتكون  $م$  منتصف  $ا ب$   
 ( البرهان ) نصل  $ا ح ٦$  و  $ا ح ٥$  و  $ب ح ٥$  و  $ب ح ٦$

ففي المثلثين  $ا ح ٥$  و  $ا ح ٦$

بالعمل

$$ا ح = ب ح$$

بالعمل

$$ب ح = ا ح$$

$ا ح ٥$  و  $ا ح ٦$  مشترك بين المثلثين

بما أن

( نظرية ٨ )

يتساوى المثلثان  $ا ح ٥$  و  $ا ح ٦$

وينتج ان  $\triangle ا ح و = \triangle ب ح و$

أى ان  $\triangle ا ح م = \triangle ب ح م$

وكذلك فى المثلثين  $\triangle ا ح م$  و  $\triangle ب ح م$

بالعمل

$$\triangle ا ح م = \triangle ب ح م$$

بما ان  $\triangle ا ح م$  و  $\triangle ب ح م$  مشترك بين المثلثين

بالاثبات  $\triangle ا ح م = \triangle ب ح م$

يتساوى المثلثان  $\triangle ا ح م$  و  $\triangle ب ح م$  ( نظرية ٤ )

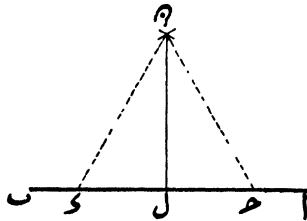
وينتج ان  $ا م = ب م$

وهو المطلوب

أى ان  $م$  منتصف  $ا ب$

« عملية ٢ »

المطلوب اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه



شكل ( ٧٨ )

( المفروض ) ان  $ا ب$  هو المستقيم المعلوم وان  $ل$  النقطة المفروضة عليه

( المطلوب عمله ) اقامة عمود من  $ل$  على  $ا ب$

( العمل ) نركز فى  $ل$  و بنصف قطر مناسب نعين النقطتين  $ح$  و  $و$

على  $ا ب$

ثم نركز في كل من  $ح ٦$  و  $و ٦$  وينصف قطر مناسب نرسم قوسين تتقاطعان في  $د$  ثم نصل  $د ل$  فيكون عموداً على  $ا ب$

( البرهان ) نصل  $د ح ٦$  و  $د و ٦$

ففي المثلثين  $د ل ح ٦$  و  $د ل و ٦$

ح ل = و ل	} بما ان
بالعمل	
د ل مشترك بين المثلثين	}
بالعمل	
د ح = د و	

يتساوى المثلثان  $د ل ح ٦$  و  $د ل و ٦$  ( نظرية ٨ )

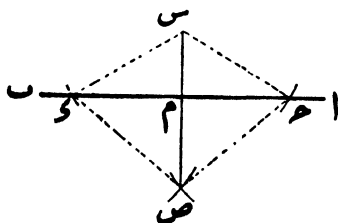
وينتج ان  $د ل ح > د ل و >$

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

اي ان  $د ل$  عمودى على  $ا ب$  وهو المطلوب

« عملية ٣ »

المطلوب اسقاط عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة خارجة



( شكل ٧٩ )

( المفروض ) أن  $ا ب$  مستقيم وأن نقطة  $س$  خارجة عنه

( المطلوب عمله ) اسقاط عمود من  $س$  على  $ا ب$

(العمل) نركز في س و بنصف قطر مناسب نعين النقطتين ح و و على ا ب ثم نركز في كل من ح و و بنصف قطر مناسب نرسم قوسين أسفل المستقيم ا ب تتقاطعان في نقطة ص ثم نصل س ص قاطعاً للمستقيم ا ب في م فيكون س م عموداً على ا ب

(البرهان) نصل ح س و و س و ح ص و و ص

ففي المثلثين ح س و و ح س ص

ح س = و س بالعمل  
 و ح ص = و س بالعمل  
 و س ص مشترك بين المثلثين

(نظرية ٨) يتساوى المثلثان ح س و و ح س ص

وينتج أن  $\angle ح س و = \angle و س ص$

أى ان  $\angle ح س م = \angle و س م$

وفي المثلثين ح س م و و س م

ح س = و س بالعمل  
 و س م مشترك بين المثلثين

$\angle ح س م = \angle و س م$  بالاثبات

(نظرية ٤) يتساوى المثلثان ح س م و و س م

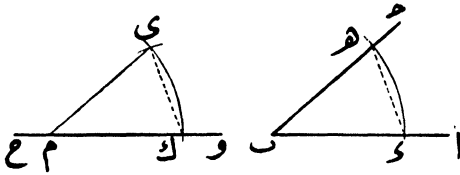
وينتج أن  $\angle ح س م = \angle و س م$

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

أى ان س م عمودى على ا ب وهو المطلوب

## « عملية ع »

المطلوب رسم زاوية تساوى زاوية معلومة



( شكل ٨٠ )

( المفروض ) ان  $\angle A B C$  الزاوية المعلومة

( المطلوب عمله ) رسم زاوية تساوى الزاوية المعلومة

( العمل ) نفرض مستقيماً مثل  $W C$  ونعين عليه نقطة مثل  $M$  ثمنركز في نقطة  $B$  وبنصف قطر مناسب نرسم قوساً تقطع  $B A$  في  $G$  $B C$  في  $H$ ونركز في  $M$  وبالبعد عينه نرسم قوساً تقطع  $W C$  في  $K$  ونركز في $K$  وبنصف قطر يساوى  $G H$  نرسم قوساً تقطع الاولى في  $I$  ثم نصل $M I$  فتكون  $\angle I M K$  هى الزاوية المطلوبة( البرهان ) فى المثلثين  $\triangle M K G$  و  $\triangle M H B$ 

بالعمل

$$M B = M H$$

بالعمل

$$G K = B H$$

بالعمل

$$\angle G = \angle H$$

من حيث ان

( نظرية ٨ )

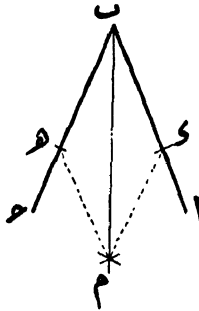
يتساوى المثلثان  $\triangle M K G$  و  $\triangle M H B$ وينتج ان  $\angle I M K = \angle H B C$ 

وهو المطلوب

اى ان  $\angle I M K = \angle A B C$

« عملية ه »

المطلوب تنصيف زاوية معلومة



(شكل ٨١)

(المفروض) ان  $\angle$  ه ب و الزاوية المعلومة

(المطلوب عمله) تنصيف هذه الزاوية

(العمل) نركز في ب و بنصف قطر مناسب نرسم قوساً تقطع

ب ا في و ب ا ح في ه

ثم نركز في كل من و ب ه و نصف قطر مناسب نرسم قوسين

تتقاطعان في م ونصل ب م فيكون هو منصف الزاوية ه ب و

(البرهان) نصل م ب و م ه م

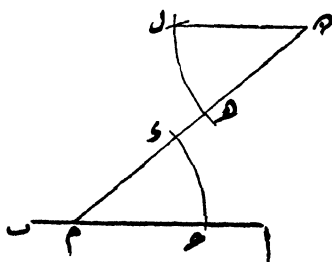
فتى المثلثين م ب و م ه م

بالعمل  $\angle م ه م = \angle م ب و$ بالعمل  $\angle م ه م = \angle م ب و$  } بما أن $\angle م ب و$  مشترك بين المثلثين

( نظرية ٨ ) يتساوى المثلثان  $\triangle م ب ٦$  و  $\triangle م ب ٧$  وينتج أن  $\angle م ب ٧ = \angle م ب ٦$  أى ان  $م ب$  ينصف  $\angle ا ب ح$  وهو المطلوب

« عملية ٦ »

المطلوب رسم مستقيم يوازي آخر معلوما من نقطة مفروضة خارجه



( شكل ٨٢ )

( المفروض ) ان  $ا ب$  المستقيم المعلوم وان  $د$  النقطة المفروضة خارجه ( المطلوب عمله ) رسم مستقيم من نقطة  $د$  يوازي  $ا ب$  ( العمل ) نقرض نقطة مثل  $م$  على  $ا ب$  ونصل  $د م$  ثم نرسم من نقطة  $د$  المستقيم  $د ل$  كي يصنع مع  $د م$  زاوية  $\angle د م ل$  تساوى زاوية  $\angle م ا ب$  كما تقدم بعملية ( ٤ ) فيكون  $د ل$  هو المستقيم الذى يوازي  $ا ب$

بالعمل ( البرهان )  $\angle د م ل = \angle م ا ب$

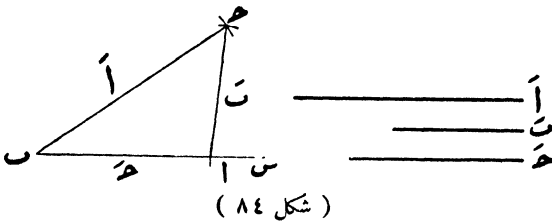
وهاتان الزاويتان متبادلتان

اذن  $د ل$  يوازي  $ا ب$  ( نظرية ٢٧ ) وهو المطلوب



## « عملية ٨ »

المطلوب رسم مثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة



(المفروض) أن  $a$  و  $b$  و  $c$  أطوال الاضلاع الثلاثة للمثلث

$a$  و  $b$

(المطلوب عمله) رسم المثلث  $a$  و  $b$  و  $c$

(العمل) نرسم المستقيم  $BS$  ونأخذ عليه البعد  $b = c$  ثم نركز في  $B$  وبنصف قطر  $= a$  نرسم قوسا ونركز في  $S$  وبنصف قطر  $= b$  نرسم قوسا اخرى تقطع الاولى في  $C$  ثم نصل  $C$  و  $a$  و  $b$  و  $c$  فيكون  $a$  و  $b$  و  $c$  المثلث المطلوب

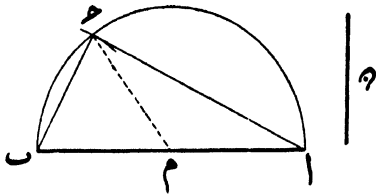
(البرهان) بما ان الاضلاع  $b$  و  $c$  و  $a$  و  $b$  و  $c$  تساوى بالعمل

$a$  و  $b$  و  $c$  فيكون  $a$  و  $b$  و  $c$  المثلث المطلوب رسمه

## « عملية ٩ »

المطلوب رسم مثلث اذا علم منه ضلع والزائويتان المجاورتان له





( شكل ٨٦ )

( المفروض ) ان  $AB$  الوتر وان  $M$  أحد الضلعين الآخرين  
 ( المطلوب عمله ) رسم المثلث القائم الزاوية  
 ( العسل ) نضع  $M$  في  $C$  ونركز فيها ونضع قطر يساوي  $MC$   
 نرسم نصف محيط دائرة ثم نركز في  $B$  ونضع قطر يساوي  $MC$  نرسم  
 قوساً تقطع نصف المحيط في  $C$  ثم نصل  $C$  ب  $A$  فيكون  $ABC$   
 المثلث المطلوب

( البرهان ) نصل  $MC$

$$BC = MC = MA$$

$$\angle C = \angle B = \angle A$$

$$\angle C = \angle A$$

$$\angle C + \angle A = \angle B + \angle A$$

$$\angle C + \angle A = \angle B + \angle A$$

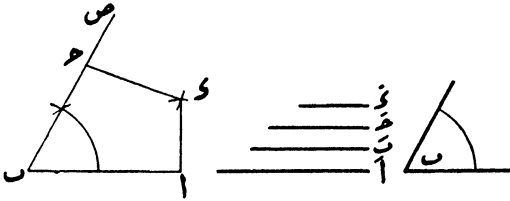
وبما أن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين

فتكون  $\angle C = \angle A$  وبذلك يكون  $ABC$  المثلث

المطلوب رسمه

« عملية ١١ »

المطلوب رسم الشكل الرباعي المعلوم منه زاوية واضلاعه الاربعة



( شكل ٨٧ )

( المفروض ) أن  $ا' ب' ح' د'$  أطوال اضلاع الشكل الرباعي وان  $ب$  هي الزاوية المعلومه المحصورة بين الضلعين  $ا' ب'$

( المطلوب عمله ) رسم الشكل الرباعي  $ا ب ح د$

( العمل ) نرسم مستقيما مثل  $ا ب =$  الطول  $ا'$  ثم نرسم  $د ا ب ص =$  المعلومه ونأخذ على  $ب ص$  البعد  $د ح =$  الطول  $ب'$  ثم نرسم قوسا قطره  $= ح'$  ونرسم قوسا وتركزي في  $ا$  وبنصف قطر  $= د'$  ونرسم قوسا أخرى تقطع الاولى في  $د$  ثم نصل  $د ح$  و  $د ا$  فيكون  $ا ب ح د$  الشكل الرباعي المطلوب

( البرهان ) الشكل  $ا ب ح د$  الناتج فيه  $ا ب = ا' ب'$  و  $ب ح = ب' ح'$  و  $ح د = ح' د'$  و  $د ا = د' ا'$  المعلومه اذن  $ا ب ح د$  هو الشكل الرباعي المطلوب رسمه

تمارين (١٥)

( ١ ) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

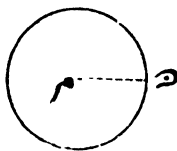
- ( ٢ ) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه زاويتان والضلع المقابل لاحدهما
- ( ٣ ) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما
- ( ٤ ) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر وزاوية حادة
- ( ٥ ) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر ومجموع الضلعين الآخرين
- ( ٦ ) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر والفرق بين الضلعين الآخرين
- ( ٧ ) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه المحيط وزاويتا القاعدة
- ( ٨ ) المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين اذا علمت زاوية رأسه وطول العمود النازل من الرأس على القاعدة
- ( ٩ ) المطلوب رسم المثلث  $ABC$  اذا علمت الزاويتان  $B$  و  $C$  وطول العمود النازل من  $A$  على  $BC$
- ( ١٠ ) المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين اذا علمت زاوية رأسه وطول قاعدته
- ( ١١ ) المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين اذا علمت قاعدته ومجموع احدى ساقيه وارتفاعه
- ( ١٢ ) المطلوب رسم متوازي الاضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزاوية المحصورة بينهما
- ( ١٣ ) المطلوب رسم المربع المعلوم ضلعه
- ( ١٤ ) المطلوب رسم متوازي الاضلاع اذا علم طول قطرية والزاوية التي بينهما
- ( ١٥ ) المطلوب رسم المعين اذا علم طول قطريه

## الباب السابع

### في المحال الهندسية

( تعريف ) المحل الهندسى لنقطة هو الطريق الذى تتحرك فيه هذه النقطة وهى مقيدة بشرط أو جملة شروط ولادراك معنى المحل الهندسى نذكر بعض أمثلة بسيطة وفى كل منها سنتخذ البرهان النظرى دليلا حتى نتحقق ان كل نقطة من نقط المحل الهندسى تفى بالشرط المذكور

مثال ١ - المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير وهى حافظة لبعده معين بينها وبين نقطة اخرى ثابتة

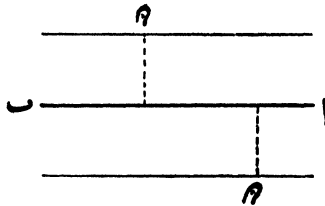


( شكل ٨٨ )

( المفروض ) ان م نقطة ثابتة وان البعد المعين سنتيمتران ( المطلوب عمله ) ايجاد المحل الهندسى لنقطة تسير بحيث يكون بعدها عن م يساوى سنتيمترين على الدوام ( العمل ) نركز فى م و بنصف قطر يساوى سنتيمترين نرسم محيط دائرة فيكون هذا المحيط هو المحل الهندسى المطلوب

( البرهان ) نأخذ أى نقطة من نقط الحل الهندسى مثل  $\omega$  ونصلها بنقطة  $m$  فن حيث أن  $m$  مركز الدائرة المرسومة ونقطة  $\omega$  احدى نقط المحيط يكون  $m\omega$  مساوياً سنتيمترين  
اذن محيط الدائرة هو الحل الهندسى المطلوب

مثال ٢ - المطلوب تعيين الحل الهندسى لنقطة تسير على بعد ثابت من مستقيم معلوم



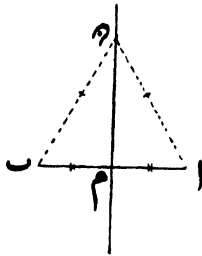
( شكل ١٩ )

( المفروض ) ان  $a$  مستقيم معلوم وان البعد المعين سنتيمتر واحد ( المطلوب عمله ) ايجاد الحل الهندسى لنقطة تسير بحيث يكون بعدها عن  $a$  يساوى سنتيمتراً على الدوام

( العمل ) نرسم مستقيماً أعلى  $a$  وعلى بعد سنتيمتر منه وكذلك نرسم مستقيماً اسفل  $a$  وعلى بعد سنتيمتر منه فيكون المستقيم الاعلى الحل الهندسى للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر أعلى المستقيم  $a$  ويكون المستقيم الاسفل الحل الهندسى للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر اسفل  $a$

( البرهان ) نأخذ أى نقطة من نقط الخط الاعلى مثل  $\omega$  وننزل منها عموداً على  $a$  فن حيث أن المستقيمين المتوازيين على بعد واحد فى جميع امتدادهما يكون طول العمود سنتيمتراً واحداً

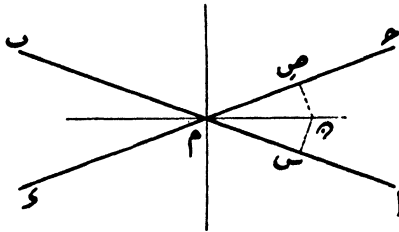
ويكون المستقيم الموازي هو المحل الهندسى المطلوب  
 وبالمثل نبرهن على ان المستقيم الاسفل هو كذلك المحل الهندسى  
 للنقطة التى تسير على بعد سنتيمتر اسفل المستقيم ١ ب  
 مثال ٣ - المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى بعدها عن  
 نقطتين ثابتتين متساويان



( شكل ٩٠ )

( المفروض ) ان ١ ب و ٢ ب نقطتان ثابتتان  
 ( المطلوب عمله ) ايجاد المحل الهندسى للنقطة التى بعدها عن  
 ١ ب دائماً متساويان  
 ( العمل ) نضع المستقيم ١ ب فى نقطة م ثم نقيم من م عموداً على  
 ١ ب فيكون هذا العمود هو المحل الهندسى المطلوب  
 ( البرهان ) نأخذ أى نقطة على العمود ( سواء كانت أعلى ١ ب  
 أو اسفله ) مثل د ونصل ١ د و ٢ د  
 فيما ان ١ م = ٢ م يكون المائلان ١ د و ٢ د متساويين البعد  
 عن موقع العمود د م  
 ويكون ١ د = ٢ د  
 اذن د م هو المحل الهندسى المطلوب  
 ( نظرية ١٨ )

مثال ٤ - المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن مستقيمين متقاطعين متساويان



( شكل ٩١ )

( المفروض ) ان المستقيمين  $a$  و  $b$  ح  $ص$  و يتقاطعان فى نقطة  $م$   
 ( المطلوب عمله ) ايجاد المحل الهندسى للنقطة التى بعداها عن  
 $a$  و  $b$  ح  $ص$  متساويان

( العمل ) ن نصف الزاويتين  $ا م ح$  و  $ب م و$  وكذلك نصف  
 الزاويتين  $ب م ح$  و  $ا م و$  فيكون كل من المنصفين هو المحل الهندسى  
 المطلوب

( البرهان ) نأخذ أى نقطة على أحد المنصفين ولتكن نقطة  $د$   
 داخل الزاوية  $ا م ح$  ونزل العمودين  $د س$  و  $د و$  ص على  $ا م$  و  $ب م$  ح  $م$   
 فى المثلثين  $د س م$  و  $د و م$  ص  $م$

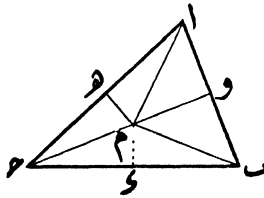
$$\left. \begin{array}{l} \text{بالقيام} \\ \text{والتوجه } م \text{ مشترك بين المثلثين} \\ \text{بالمعمل} \end{array} \right\} \text{ بما ان } \begin{array}{l} \angle د س م = \angle د و م \\ \angle د م و = \angle د م س \end{array}$$

يتساوى المثلثان  $د س م$  و  $د و م$  ص  $م$  ( نظرية ٢٠ )  
 وينتج ان  $د س = د و$  ص

اذن كل من المستقيمين اللذين ينصفان الزوايا المحصورة بين المستقيمين العلومين هو المحل الهندسى المطلوب

### تقاطع المحال الهندسية

نستخدم تقاطع المحال الهندسية فى حل كثير من العمليات الهندسية ويمكن تعيين موضع نقطة تقيد بشرطين بإيجاد نقطة تقاطع المحلين الهندسيين المرتبطين بالشروط المذكورين واليك المثال  
مثال ١ - المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن رؤوس مثلث متساوية



( شكل ٩٢ )

( المفروض ) ان  $أ ب ح$  مثلث

( المطلوب عمله ) إيجاد نقطة تكون ابعادها عن  $أ ب ج$  ح

متساوية

( العمل ) ن نصف المستقيمين  $أ ب$   $أ ج$  فى  $و$   $هـ$  ثم نقيم

من  $و$  عموداً على  $أ ب$  ومن  $هـ$  عموداً على  $أ ج$  فيتلاقى العمودان فى

نقطة  $م$  فتكون هذه هى النقطة المطلوبة بمعنى ان  $أ م = ب م = ج م$

( البرهان ) من حيث ان  $م$  هو العمود المقام على منتصف  $أ ب$

يكون  $١٢ = ٢٠$

ومن حيث أن  $هـ$  هو العمود المقام على منتصف  $١$  ح

يكون  $١٢ = ٢٠$  ح

اي ان  $١٢ = ٢٠ = ٢٠$  ح

وعلى ذلك تكون نقطة  $م$  هي النقطة المطلوب تعيينها

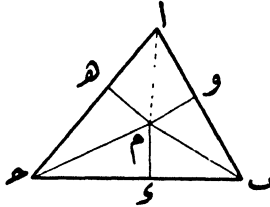
(ملاحظة) من حيث ان  $٢٠ = ٢٠$  ح تكون نقطة  $م$  احدى

نقط العمود المقام على منتصف  $٢$  ح وبذلك يتعين ان الاعمدة

المقامة من منتصفات اضلاع مثلث تتلاقى في نقطة واحدة

مثال ٢ - المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن اضلاع

مثلث متساوية



(شكل ٩٣)

(المفروض) ان  $١$  ح مثلث

(المطلوب عمله) إيجاد نقطة تكون ابعادها عن الاضلاع  $١$  ح  $٢$  ح

$٣$  ح متساوية

(العمل) تنصف زاويتي  $٢$  ح  $٣$  ح بمستقيمين يتلاقيان في نقطة

$م$  فتكون هذه هي النقطة المطلوبة أي ان العمود  $م$  و  $م = هـ$  و  $م = و$

(البرهان) من حيث ان  $م$  ينصف زاوية  $٢$  ح

يكون  $س م = م ه$   
 ومن حيث ان  $ح م$  ينصف زاوية  $ح$   
 يكون  $س م = م و$   
 اى ان  $س م = م ه = م و$

وعلى ذلك تكون نقطة  $م$  هي النقطة المطلوب تعيينها  
 (ملاحظة) من حيث ان العمود  $م ه = م و$  تكون نقطة  $م$   
 احدى نقط المستقيم الذى ينصف زاوية  $ا$  وبذلك يتعين ان منصفات  
 زوايا المثلث الثلاث تتلاقى فى نقطة واحدة

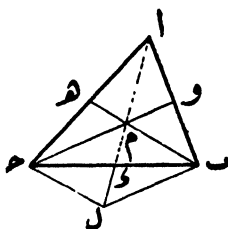
### تمارين (١٦)

- (١) المطلوب تعيين المحل الهندسى للنقطة التى تكون على بعدين  
متساويين من مستقيمين متوازيين
- (٢) المطلوب تعيين المحل الهندسى لرأس الزاوية القائمة من مثلث  
قائم الزاويه وتره ثابت
- (٣) المطلوب تعيين المحل الهندسى لنقطة تسير وبعدها عن محيط  
دائرة معلومة ثابت
- (٤) المطلوب تعيين المحل الهندسى لرأس مثلث متساوى الساقين  
قاعدته ثابتة
- (٥) المطلوب تعيين نقطة على بعد معلوم من نقطة اخرى مفروضة  
وعلى بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين
- (٦) المطلوب تعيين نقطة تكون ابعادها عن ثلاث نقط مفروضة  
متساوية

- (٧) عين نقطة على مستقيم معلوم بحيث يكون بعدها عن نقطتين مفروضتين خارج المستقيم متساويين
- (٨) عين نقطة على مستقيم بحيث يكون بعدها عن مستقيمين آخرين متقاطعين متساويين
- (٩) المطلوب تعيين نقطة على بعد معين من مستقيم معلوم ويكون بعدها عن نقطتين معلومتين متساويين
- (١٠) المطلوب تعيين نقطة يكون بعدها عن نقطتين معلومتين متساويين وكذا يكون بعدها عن مستقيمين متوازيين متساويين
- (١١) المطلوب تعيين نقطة يكون بعدها عن نقطتين معلومتين متساويين وأيضاً يكون بعدها عن مستقيمين متقاطعين متساويين
- (١٢) المطلوب رسم المثلث معلوم منه القاعدة والارتفاع بحيث يكون رأسه على مستقيم معلوم
- (١٣) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه قاعدته وارتفاعه وطول المستقيم المتوسط النصف للقاعدة
- (١٤) المطلوب تعيين المحل الهندسي لنقطة يكون مجموع بعدها عن ضلعي زاوية ثابتاً

## تمارين عامة

( ١ ) المستقيمت المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة وهذه النقطة تقسم كلا منها الى الثلث من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس



( شكل ٩٤ )

( المفروض ) ان  $AD$  مثلث  
 ( المطلوب اثباته ) ان المستقيمت المتوسطة تتلاقى في نقطة واحدة  
 ( البرهان ) اولاً - نضع الضلعين  $AB$  و  $AC$  في  $O$  و  $H$   
 ونفرض ان المستقيمتين المتوسطين يتلاقيان في نقطة  $M$  ثم نصل  $AM$   
 ونمده الى ان يقابل  $B$  ح في  $E$  فتكون نقطة  $E$  منتصف  $BC$   
 وذلك لاننا اذا رسمنا من نقطة  $B$  مستقيماً يوازي  $OC$  ويقابل  
 امتداد  $AM$  في  $L$

يكون في  $\triangle ABL$  الضلع  $AM$  ينصف  $BL$  ويوازي  $BL$   
 اذن نقطة  $M$  تنصف  $AL$   
 واذا وصلنا  $L$  ح يكون في المثلث  $ALC$  المستقيم  $AM$  يقطع  
 ضلعيه وينصفهما

اذن  $م ه$  يوازي  $ل ح$

اي أن  $ب م$  يوازي  $ل ح$

ويكون الشكل  $ب ل ح م$  متوازي اضلاع

ومن حيث ان قطري متوازي الاضلاع ينصف احدهما الاخر فتكون نقطة  $و$  منتصف  $ب ح$

وبذلك يثبت ان المستقيمت المتوسطة الثلاثة تتلاقى في  $م$

ثانيا - لاثبات ان نقطة  $م$  تقسم كلا من المستقيمت المتوسطة الى الثلث من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس نقول

$$\left. \begin{aligned} ١م &= ١م \\ ١م و &= \text{نصف } م ل \end{aligned} \right\} \text{ بما ان}$$

$$\text{اذن } م و = \text{نصف } ١م$$

اي ان  $م و$  ثلث  $١م و$  ثلثا  $١م و$

وبالمثل نبرهن على ان  $م ه$  ثلث  $ب ه$   $م و$  ثلثا  $ب ه$

$$١م و = ١م و$$

(٢)  $١ ب ح و$   $١ ب ح و$  مثلثان بينهما قاعدة مشتركة  $ب ح$  وفي

جهة واحدة منها فاذا كان  $١ ب = ١ ب$   $١ و = ١ و$

فبرهن على ان  $١ ب$  يوازي  $ب ح$

(٣) اذا مدت إحدى ساقى مثلث متساوى الساقين من جهة الرأس

ونصفت الزاوية الخارجة فبرهن على ان المنصف يوازي القاعدة

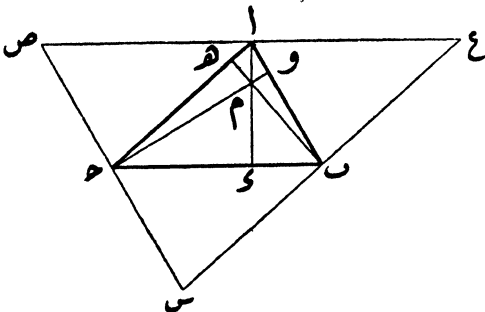
(٤)  $١ ب ح$  مثلث متساوى الساقين ( $١ ب = ١ ب$ ) نصفت

زاويتاه  $ب و$  فاذا قطع منتصف  $ب و$  الضلع  $١ ب$  في  $و$

وقطع منتصف  $ب و$  الضلع  $١ ب$  في  $ه$  فبرهن على ان  $و ه$

$$\text{يوازي } ب ح \text{ وأن } ح و = ح و \text{ و } ه = ه ب$$

- (٥)  $ا ب ح$  مثلث متساوي الاضلاع فاذا مد ضلعه  $ب ح$  الى  $و$  وكان  $ح و = ح ب$  فبرهن على ان  $ا و$  عمودى على  $ا ب$
- (٦) اذا فرضت نقطة  $د$  داخل مثلث  $ا ب ح$  وكان  $ا د = ا ب$  فبرهن على ان  $ا ح < ا ب$
- (٧) برهن فى المثلث القائم الزاوية على ان المستقيم الذى يصل رأس القائمة ومنتصف الوتر يساوى نصف هذا الوتر
- (٨) برهن فى المثلث الذى مقدار زواياه  $٩٠$  °  $٦٠$  °  $٣٠$  ° على ان اصغر اضلاعه يساوى نصف اكبرها
- (٩)  $ا ب ح$  مثلث مد ضلعه  $ا ب$  الى  $س$  وضلعه  $ا ح$  الى  $ص$  فاذا كان  $ب س = ح ص = ب ح$  وتقاطع  $ب ص$   $ح س$  فى  $ع$  فبرهن على ان  $ا ب > ا ح = ١/٢ (ب س + ح ص) = ٩٠$  °
- (١٠)  $ا ب ح$  مثلث مد ضلعه  $ب ح$  الى  $و$  فاذا قطع منتصف  $ا ب$  الضلع  $ب ح$  فى  $هـ$  فبرهن على ان ضعف  $ا هـ = ا ب + ا ح$
- (١١) برهن على ان الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها تتلاقى فى نقطة واحدة



(شكل ٩٥)

(المفروض) ان  $a \parallel b$  ح مثلث  
(المطلوب اثباته) ان الاعمدة النازلة من  $a$  و  $b$  ح على الاضلاع  
المقابلة لها تتلاقى في نقطة واحدة

(البرهان) نرسم من  $a$  مستقيما يوازي  $b$  ح ونرسم من  $b$  مستقيما  
يوازي  $a$  ح ونرسم من  $c$  مستقيما يوازي  $a$  ح ونفرض ان هذه  
المستقيمات تتقاطع وتكون المثلث  $s$  ح ص ع  
كل من الشكلين  $a$  ح  $b$  ح  $a$  ح  $b$  ح ص متوازي اضلاع لان  
الاضلاع المتقابلة في كل منهما متوازية بالعمل  
اذن  $a = b = c$  ح  $a = c$   
اي أن نقطة  $a$  منتصف  $c$  ح

وبالمثل تثبت أن نقطة  $b$  منتصف  $s$  ح ونقطة  $c$  منتصف  $s$  ح  
فلو أنزلنا أعمدة من  $a$  و  $b$  و  $c$  ح على الاضلاع المقابلة في  $\triangle$   
 $a$  ح تكون هذه الاعمدة بمثابة أعمدة مقامة من منتصفات الاضلاع  
في  $\triangle s$  ح ص ع

وسبق ان برهنا أن هذه الاعمدة تتلاقى في نقطة واحدة وبذلك  
يثبت المطلوب

(١٢) برهن على أن مجموع المستقيمات المتوسطة في مثلث أكبر من  
ثلاثة أرباع محيطه

(١٣)  $a$  ح مثلث نصف ضلعه  $b$  ح في  $m$  و نرسم من  $b$  و  $c$  ح  
عمودان على مستقيم يمر بنقطة  $a$  فاذا فرض أن موقعي العمودين  
هم  $l$  و  $m$  فبرهن على أن  $m = l$  ح

(١٤)  $a$  ح مثلث مد ضلعه  $a$  و  $b$  ح الى  $s$  و  $c$  ح فاذا نصفت

الزاويتان الخارجتان  $\angle \text{ح} \text{ب} \text{ح}$  و  $\angle \text{ح} \text{ا} \text{ح}$  وتقاطع المنصفان في نقطة  $\text{ه}$  فبرهن على أن  $\angle \text{ب} \text{ه} \text{ح} = \frac{1}{2} (\angle \text{ب} + \angle \text{ا})$  (١٥)  
 $\text{ا} \text{ب} \text{ح}$  و متوازي اضلاع مد قطراه  $\text{ا} \text{ح}$  الى  $\text{ه}$  بحيث كان  $\text{ح} \text{ه} = \text{ا} \text{ح}$  ومن نقطة  $\text{ه}$  رسم المستقيم  $\text{ه}$  و يوازي  $\text{ح} \text{ب}$  ويقابل امتداد  $\text{ح} \text{ا}$  في  $\text{و}$  والمطلوب البرهنة على ان  $\text{ا} \text{ب} \text{و} \text{ح}$  متوازي اضلاع

$\text{ا} \text{ب} \text{ح}$  مثلث متساوي الساقين نصفت قاعدته  $\text{ب} \text{ح}$  في نقطة  $\text{و}$  فاذا فرضت أى نقطة على  $\text{ا} \text{ح}$  مثل  $\text{ه}$  فبرهن على ان  $\text{ا} \text{ب} - \text{ا} \text{ه} < \text{و} \text{ه} - \text{و} \text{ح}$

(١٧) المستقيم الذى يصل وسطى الضلعين غير المتوازيين فى شبه المنحرف يمر بمنتصفى قطريه

(١٨) المستقيم الذى يصل منتصفى قطري شبه منحرف يساوى نصف الفرق بين قاعدتيه

(١٩) اذا نصفت زوايا متوازي اضلاع فبرهن على ان الشكل الناتج من تقاطع هذه المنصفات مستطيل قطراه يوازيان اضلاع متوازي الاضلاع

(٢٠)  $\text{ا} \text{ب} \text{ح} \text{و} \text{متوازي اضلاع}$  فرضت على قطره  $\text{ا} \text{ح}$  النقطتان  $\text{س} \text{و} \text{ص}$  فاذا كان  $\text{ا} \text{س} = \text{ح} \text{ص}$  فبرهن على ان  $\text{ب} \text{س} \text{و} \text{ص} \text{ب}$  متوازي اضلاع

(٢١)  $\text{ا} \text{ب} \text{ح} \text{و} \text{شكل رباعي}$  فيه  $\text{ا} \text{ب} = \text{ح} \text{و}$  فاذا كانت  $\angle \text{ب} = \angle \text{ا}$  فبرهن على ان  $\text{ا} \text{ب}$  و يوازي  $\text{ب} \text{ح}$

(٢٢)  $\text{ا} \text{ب} \text{ح} \text{و} \text{متوازي اضلاع}$  مد قطره  $\text{ا} \text{ح}$  الى  $\text{ه}$  بحيث كان

- ح ه = ح ا ثم رسم من ه مستقيم يوازي ح ب ورسم  
من ب مستقيم يوازي ا ح فاذا تقاطع المتوازيان في نقطة و  
فبرهن على ان ا ب و ح متوازي اضلاع
- (٢٣) ا ب ح د مربع فاذا وصل من ا الى منتصفى ب ح و ج د  
ثم وصل من ح الى منتصفى د ا و ا ب فبرهن على ان الشكل  
الناتج من تقاطع هذه المستقيمتين معين
- (٢٤) ا ب ح مثلث مد ضلعه ح ا الى س ونصفت الزاوية الخارجة  
ب ا س فاذا فرضت اى نقطة ه على هذا المنصف فبرهن  
على ان ا ب + ا ح > ب ه + ح ه
- (٢٥) ا ب ح مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا ح) فرضت  
نقطة د على ساقه ا ب ومد ح ا الى ه بحيث كان ه ا =  
ا د فاذا وصل ه د ومد الى ان تقاطع مع ب ح فى و فبرهن  
على ان ه و عمودى على ب ح

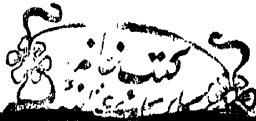
« تم الجزء الاول ويليه الجزء الثانى »  
(مقرر السنة الثانية من التعليم الثانوى)











آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار  
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی  
صورت میں ایک آنہ یومیہ دیرانہ لیا جائے گا۔