# الجامعة المصرية

# علم الطبيعة

## خواص المادة

مجموع المحاضرات التي ألقاها بالجامعة المصرية حضرة الفاضل

اسماعيل حسنين بك

استاذ علم الطبيعة بالجامعة المصرية وناظر مدرسة المعلمين الخديوية

## الجزء الثاني



مطبعة المعارف بشارع الفجالة بمصر

# الثقل

## عموميـات

(٦٥) تعريف الثقل — هو قوة ناشئة من جذب الارض للاجسام الموجودة على سطحها وهو الذي يسبب سقوط الأجسام المتروكة ونفسها نحو الأرض

وليس الجذب الواقع من الارض على الاجسام الا حالة خاصة من قانون أعمّ يسمى قانون الجذب العام وهو ان كل جسمين يجذب كلٌّ منهما الآخر بقوة مناسبة لحاصل ضرب كتلتيهما ولعكس مربع المسافة بينهما واذا كان أحد الجسمين المذكورين كرويًا يعتبر الجذب واقعاً من مركزه على فرض ان جميع مادة الجسم مجتمعة فيـهِ

وبما ان الثقل قوة لزم لتعيين تأثيره في جسم معرفة اتجاهِ ونقطة تأثيره وشدته

(٦٦) اتجاه الثقل - اتجاه الثقل هو الخط الذي يرسمهُ جسم ساقط من ارتفاع نحو الارض ويعين اتجـاه الثقل بواسطة المطمار ( خيط الرصاص ) وهو خيط رفيع مثبت من أحد طرفيهِ في نقطة ثابتـة ومعلق في طرفه الآخر جسم ثقيل مصنوع عادةً من النحاس الاصفر نصفه العلوي اسطواني والسفلي مخروطي وقد يكون الجسم المذكور كرة من الرصاص فمتى ترك المطمار ونفسه حتى يسكن كان اتجاه خيطه عين اتجاه الثقل لان رد الفعل الذي يكون واقعاً من الخيط على وزن الجسم لا يحدث معه توازناً الاّ اذا كان مساوياً وفي اتجاه مضاد له ويمكن التحقق من ذلك بالتجربة وذلك باسقاط كرة صغيرة من الرصاص بحيث يكون سقوطها من النقطة المجاورة لنقطة خيط المطمار الثابتة فيشاهد حينئذٍ انها تبقى موازية له اثناء سقوطها

واذا قارنّا اتجاه عدة مطامير بعضها ببعض ظهر لنا انهُ يمكن اخفاء جميعهـا على

التوالي خلف كلٍّ منها وهذا لا يتأتى الاّ اذا كانت اتجاهات جميعها متوازية او متقابلة في نقطة واحدة والحقيقة انها لو امتدت جميعاً لتلاقت في مركز الارض لاننا لو فرضنا تمرير مستوٍ بنقطة مادية حيثما كانت وبمركز الارض لقسم المستوي المذكور الارض الى نصفين متساويين ومتماثلين بالنسبة للمستوي المذكور وكان الجذب الواقع من أحدهما على النقطة المادية مساوياً للجذب الواقع من الآخر عليها ومماثلا له وبذا يكون اتجاه محصلة الجذبين في المستوي المذكور ومن حيث ان عدد المستويات الممكن تمريرها بالنقطة المذكورة وبمركز الارض لا نهاية له ينتج ان اتجاه محصلة تأثير جذب الارض على نقطة مادية هو المستقيم الواصل من النقطة المذكورة الى مركز الارض

وتظهر خيوط المطامير متوازية ويمكن اعتبارها كذلك اذا كان قريباً بعضها من بعض والسبب في ذلك ان الزوايا المتكونة منها تكاد تكون غير محسوسة اما المطامير المتباعدة فلا تكون متوازية وتزيد الزاوية المكونه من مطمارين كلما زاد البعد بينهما والزاوية التي يكونها خيطا مطمارين بينهما ثلاثون متراً تساوي ثانية تقريباً

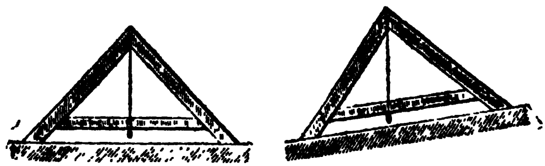
ويسمى اتجاه الثقل في اية نقطة من سطح الارض بالاتجاه الرأسي ويكون الاتجاه المذكور عموداً على سطح الماء الراكد المسمى بالسطح الافقي في النقطة المذكورة

وسطح الماء الراكد يكون مستوياً اذا كان قليل الاتساع وكروياً اذا كان غير ذلك اذ انهُ يكون حينئذ عموداً على مستقيمات تتقابل جميعها في مركز الارض

(٦٧) استعمال المطمار — يستعمل المطمار في البناء للتحقق من كون الحائط الذي يبنى رأسيًا ولذلك يترك الخيط ونفسه قريباً من الحائط فان كان الخيط موازياً للحائط كان الحائط رأسيًا والاّ فلا

ويستعمل المطمار ايضاً للتأكد من افقية المستويات ويستعمل لهذا الغرض

الجهاز المبين في الشكل وهو مكون من قطعتين من الخشب مكونتين زاوية معلق في رأسها مطمار والمستوي الذي يوضع عليهِ هذا الجهاز يكون افقيًا متى انطبق الخيط على خط مرسوم في خشبة ثالثة مثبتة بالعرض بين الخشبتين الاوليين وبالعكس



(٦٨) شدة الثقل ووزن الاجسام — اذا قسم جسم الى أجزاء صغيرة جدًا وترك كل جزء ونفسه فانهُ يسقط نحو الارض ويتبع الاتجاه الرأسي فيعلم من ذلك حينئذٍ ان تأثير الثقل واقع على كل الجزيئات المكون منها الجسم بمعنى ان كل جزئ من الجسم عبارة عن نقطة تأثير قوة صغيرة رأسية متجهة من أعلى الى أسفل وبما انهُ يمكن اعتبار جميع هذه القوى متوازية نظراً لقرب نقط تأثيرها بعضها من بعض فلا بد أن يكون لها محصلة في اتجاهها مساوية لمجموعها وهذه المحصلة هي ما يعبر عنهُ بوزن الجسم وبناء على ما ذكر يمكن تعريف وزن الجسم بالطريقة الآتية

وزن الجسم هو شدة محصلة جميع القوى الناتجة من تأثير الثقل في جزئياتهِ

ولبيان انه من الممكن تعويض جميع القوى الناشئة من جذب الارض في جزيئات جسم بقوة واحدة يعلق الجسم من احدى نقطه فيخيط فيلاحظ انهُ يأخذ بعد برهة وضعاً يكون فيه في حالة التوازن فمن الواضح ان رد الفعل الذي يقع من الخيط على الجسم وهو في هذا الوضع يتزن مع القوى الناشئة من تأثير الارض في جزيئاتهِ وهذا لا يكون الا اذا كانت للقوى المذكورة محصلة تساوي توتر الخيط واتجاهها مضاد لاتجاههِ

وبما ان وزن كل جسم عبارة عن قوة يجب تقديره اما بوزن الكيلو جرام او بالداين ويمكن تقدير وزن الجسم على وجه التقريب باستعمال احد الدينامومترات السابق شرحها

(٦٩) مركز الثقل — مركز ثقل الجسم هو نقطة تأثير محصلة جميع القوى الناتجة من تأثير الثقل في جزيئاته وبما ان مركز الثقل ليس الا مركز قوى متوازية يرى ان موضعه لا يتعلق باتجاه الجسم بالنسبة للخط الرأسي ولا بالنقطة الموجود فيها من سطح الارض وذلك لانهُ بتغير وضع الجسم بالنسبة للخط الرأسي يتغير اتجاه جميع القوى المؤثرة في جزيئات الجسم وتبقى مقاديرها ثابتة وبذا تبقى نقطة تأثير محصلتها في موضعها وكذلك بنقل الجسم من جهة الى اخرى من سطح الارض تتغير مقادير القوى المؤثرة في جزيئات الجسم بنسبة واحدة وبذا تبقى نقطة تأثيرها في موضعها ايضاً وبناء على ذلك يرى انهُ يمكن تعريف مركز الثقل كما يأتي

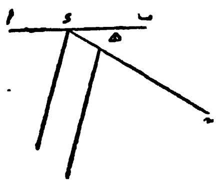
مركز ثقل الجسم هو النقطة الثابتة التي تمر بها محصلة جميع القوى الناتجة من تأثير الثقل في جزيئاته مهما كان وضع الجسم بالنسبة للخط الرأسي ومهما كانت النقطة الموجود فيها من سطح الارض

ومن الخطأ أن يقال مركز ثقل كتلة سائلة اذ انهُ بتغيير وضع السائلات بالنسبة للخط الرأسي يتغير شكلها وعندما يقال مركز ثقل سائل يفرض دائماً ان جزيئاته مرتبط بعضها ببعض بدون تغيير كجزئيات الاجسام الصلبة ويمكن أن يثبت بالتجربة ان محصلة تأثير الثقل في اي جسم تمرّ بنقطة واحدة وذلك بتعليقهِ على التوالي في خيط من عدة نقط فيلاحظ ان اتجاهات الخيط تمرّ في كل الاوضاع بنقطة واحدة يمكن فرضها نقطة تأثير المحصلة في أوضاع الجسم المختلفة بالنسبة للخط الرأسي

وتستعمل التجربة السابقة لتعيين مركز ثقل الاجسام مهما كان شكلها وطبيعة المادة المكونة منها وكيفية ذلك ان يعلق الجسم من احدى نقطه فمتى صار في حالة توازن كان الخيط رأسيًا وكان امتداده مارًا بمركز ثقل الجسم ثم يعلق الجسم من نقطة اخرى للحصول على اتجاه آخر يمرّ بمركز الثقل فنقطة تقاطع هذين الاتجاهين تعين مركز ثقل الجسم

ويمكن تطبيق قاعدة تركيب القوى المتوازية لايجاد مركز ثقل جسم مكون من عدة أجزاء معلوم مركز ثقل كلّ منها فاذا فرضنا جسماً مكوناً من ثلاثة أجزاء مراكز ثقلها ا ، ب ، حـ وأوزانها على التناظر و ، وَ ، و امكن ايجاد نقطة ء من التناسب

$$\frac{\text{ا ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{و}}{\text{و}}$$



ش ( ٥٠ )

ونقطة هـ اي مركز ثقل الجسم الكلي من التناسب

$$\frac{\text{ء هـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{\text{و}}{\text{و} + \text{و}}$$

( ٧٠ ) الاجسام المتجانسة الاجزاء وكثافتها — الجسم المتجانس الاجزاء هو ما كانت طبيعة جزيئاته واحدة وقد وضع للاجسام المتجانسة الاجزاء تعريف علمي اوسع دائرة من التعريف السابق وهو — الجسم المتجانس الاجزاء هو ما كانت اجزاؤه المتساوية الحجم مهما صغرت متساوية الوزن

وينتج من هذا التعريف ان الاحجام غير المتساوية في الجسم المتجانس الاجزاء تكون مناسبة لاوزانها

فاذا قسم جسم متجانس الاجزاء حجمهُ $\text{ع}$ ووزنه $\text{و}$ الى اجزاء غير متساوية احجامها $\text{ع}'$ ، $\text{ع}''$ ، $\text{ع}'''$ ، ... الخ وكانت اوزان الاجزاء المذكورة على التناظر $\text{و}'$ ، $\text{و}''$ ، $\text{و}'''$ ، ... الخ ينتج

$$\frac{\text{و}'}{\text{ع}'} = \frac{\text{و}''}{\text{ع}''} = \frac{\text{و}'''}{\text{ع}'''} = \cdots\cdots = \frac{\text{و}' + \text{و}'' + \text{و}''' + \cdots \text{الخ}}{\text{ع}' + \text{ع}'' + \text{ع}''' + \cdots \text{الخ}} = \frac{\text{و}}{\text{ع}}$$

أعني ان خارج قسمة وزن اي مقدار من جسم متجانس الاجزاء على حجمه يساوي عدداً ثابتاً ما دامت درجة حرارة الجسم لا تتغير وقد سميت هذه النسبة بالوزن النوعي المطلق للجسم ومن ذلك يستنتج التعريف الآتي

الوزن النوعي المطلق لجسم متجانس الاجزاء هو خارج قسمة وزنه وهو في درجة الصفر على حجمهِ ويعرف ايضاً بوزن وحدة احجامه وهو في درجة الصفر .

وبما انهُ تقدم ان $\text{و} = \text{حـ} \times \text{ك}$ ، $\text{و}' = \text{حـ} \times \text{ك}'$ ينتج

$$\frac{\text{ك}' \times \text{حـ}}{\text{ع}'} = \frac{\text{ك} \times \text{حـ}}{\text{ع}}$$

وبما ان مقدار $\text{حـ}$ يتغير في النقط المختلفة من سطح الارض ينتج ان الوزن النوعي لجسم يتغير ايضاً بتغير النقط التي يوجد فيها من سطحها

واذا قسم طرفا المتساوية السابقة على $\text{حـ}$ ينتج

$$\frac{\text{ك}'}{\text{ع}'} = \frac{\text{ك}}{\text{ع}} = \text{عدداً ثابتاً}$$

اعني ان خارج قسمة كتلة اي مقدار من جسم متجانس الاجزاء على حجمه يساوي عدداً ثابتاً وهو لا يتغير في النقط المختلفة من سطح الارض ما دامت درجة

حرارة الجسم لا تتغير وذلك لثبات كل من ك و كَ في النقط المذكورة وقد سميت هذه النسبة بالكتلة النوعية للجسم المتجانس الاجزاء ومن ذلك ينتج التعريف الآتي

الكتلة النوعية لجسم متجانس الاجزاء هي خارج قسمة كتلته وهو في درجة الصفر على حجمه وتعرف ايضاً بكتلة وحدة احجامه وهو في درجة الصفر فاذا رمزنا بالرمز ه للكتلة النوعية لجسم ورمزنا بالرمز ك لكتلة مقدار منه حجمه ع كان

$$\text{ه} = \frac{\text{ك}}{\text{ع}} \qquad (١)$$

الكثافة النسبية للاجسام المتجانسة الاجزاء — اذا طبقت المعادلة ( ١ ) على الماء الذي كتلته النوعية وهو في درجة + ٤ تساوي الوحدة ينتج ان

$$\text{ك} = \text{ع}$$

اعني ان العدد الدال على كتلة مقدار من الماء وهو في درجة + ٤ هو عين العدد الدال على حجمه فمثلا كتلة العشرة السنتيمترات المكعبة من الماء المقطر وهو في درجة + ٤ تساوي عشرة جرامات وبناء على ذلك يتضح انه يمكن تعويض حجم الجسم في المتساوية ( ١ ) بكتلة حجم من الماء وهو في درجة + ٤ يساوي حجمه فاذا رمز بالرمز كَ للكتلة المذكورة ينتج

$$\text{ه} = \frac{\text{ك}}{\text{كَ}} \qquad (٢)$$

وقد سميت النسبة السالفة الذكر اي النسبة بين كتلة الجسم وهو في درجة الصفر كتلة حجم من الماء وهو في درجة + ٤ يساوي حجمه بالكثافة النسبية للجسم يطلق عليها غالبا كثافة فقط ومن القانون ( ٢ ) يظهر ان العدد الدال على كثافة جسم هو عين العدد الدال على كتلته النوعية

الوزن النوعي النسبي — ذكرنا ان الوزن النوعي المطلق لجسم يتغير في النقط المختلفة من سطح الارض غير انه اذا اخذت النسبة بين الوزن النوعي لجسم والوزن النوعي للماء كانت هذه النسبة ثابتة في النقط المختلفة من الارض نظراً لامكان حذف ﻫ من كل من بسط النسبة ومقامها وقد اطلق على النسبة المذكورة اسم الوزن النوعي النسبي للجسم وبما ان العدد الدال عليها عين العدد الدال على الكثافة النسبية لنفس الجسم يطلق عادة احد الاسماء الوزن النوعي النسبي لجسم او كتلته النوعية او كثافته على النسبة بين كتلة هذا الجسم وهو في درجة الصفر وكتلة حجم مساو لحجمه من الماء المقطر الذي درجة حرارته + ٤

(٧١) مركز ثقل الاجسام المتجانسة الاجزاء — موضع مركز ثقل الاجسام المتجانسة الاجزاء لا يتعلق الا بشكلها والبرهنة على ذلك نفرض جسمين مختلفي المادة ومتجانسي الاجزاء ونفرض انهما متساويان في الحجم ومتحدان في الشكل فاذا قسمنا كلاً منهما الى احجام $ع'$ ، $ع''$ ، $ع'''$ ...... الخ بشرط ان يكون حجم كل من احجام احدهما يساوي نظيره من الاخر ورمزنا بالرموز $و'$ ، $و''$ ، $و'''$ ...... الخ لاوزان اجزاء الجسم الاول وبالرموز $و'_1$ ، $و''_1$ ، $و'''_1$ ...... الخ لاجزاء الجسم الثاني على التناظر ينتج

$$\frac{و'}{ع'} = \frac{و''}{ع''} = \frac{و'''}{ع'''} = \cdots\cdots$$

وكذلك

$$\frac{و'_1}{ع'} = \frac{و''_1}{ع''} = \frac{و'''_1}{ع'''} = \cdots\cdots$$

و بذلك يكون

$$\frac{و'}{و_{١}} = \frac{و''}{و_{١}} = \frac{و'''}{و_{١}} = \ldots\ldots$$

اعني ان القوى الناتجة من جذب الارض لجزئيات احد الجسمين تكون مناسبة للتي تنتج من جذبها لجزيئات الجسم الآخر ومن ذلك ينتج ان موضع مركز الثقل في كلا الجسمين واحد اذ ان مركز القوى المتوازية لا يتغير بتغير مقادير جميع القوى بنسبة واحدة و بناء على ما ذكر يرى ان مركز ثقل الاجسام المتجانسة الاجزاء خاصة هندسية للاجسام المذكورة

تعيين مركز ثقل الاجسام المتجانسة الاجزاء — للوصول لتعيين مركز ثقل الاجسام المتجانسة الاجزاء نبدأ بذكر القواعد العمومية الآتية التي تنتج مباشرة من قاعدة تركيب القوى المتوازية

اولاً — اذا امكن تقسيم الجسم الى عدة اجزاء مراكز ثقلها في مستوٍ واحد او على مستقيم واحد كان مركز ثقل الجسم في المستوي المذكور او على المستقيم المذكور

ثانياً — اذا كان للجسم مستوي تماثل او محور تماثل او مركز تماثل كان مركز ثقله في المستوي المذكور او على المحور المذكور او في المركز المذكور

ثالثاً — اذا وجد في الجسم مستوٍ قطري او قطر اعني مستوياً او مستقيماً ينصف جميع اوتاره الموازية لاتجاه مخصوص كان مركز ثقل الجسم في المستوي المذكور او على المستقيم المذكور

و بناء على ذلك يكون

(١) مركز ثقل الخط المستقيم في منتصفه

( ٢ ) مركز محيط وسطح متوازي الاضلاع في نقطة تقاطع قطريه

( ٣ ) مركز ثقل كل من محيط الدائرة وسطحها ومحيط المضلع المنتظم وسطحه ومحيط القطع الناقص وسطحه في مركز كل منها

( ٤ ) مركز ثقل كل من سطح متوازي السطوح وحجمه في نقطة تقاطع اقطاره

( ٥ ) مركز ثقل كل من سطح الكرة وحجمها وكل من سطح مجسم القطع الناقص وحجمه في مركز كل منهما

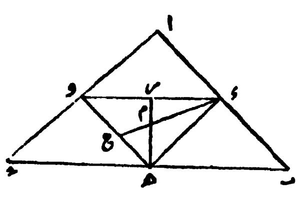
( ٦ ) مركز ثقل كل من سطح وحجم الاسطوانة القائمة والمائلة في منتصف محورها

( ٧ ) مركز ثقل كل من سطح وحجم الجسم الكعكي في مركزه

## تعيين مركز ثقل الاجسام الهندسية الشكل

### ( ١ ) مركز ثقل الخطوط

( ٧٢ ) مركز ثقل محيط المثلث — اذا فرض مثلث ا ب حـ وكان المراد تعيين مركز ثقل محيطه نقول . بما ان مراكز ثقل أضلاعه الثلاثة في منتصفاتها وهي ء ، هـ ، و يؤول الامر حينئذٍ الى تحصيل ثلاث قوى مؤثرة في النقط المذكورة ومناسبة لأطوال اضلاع المثلث لان اطوالها مناسبة لاوزانها فاذا فرض ان نقطة ر هي نقطة تأثير محصلة القوتين الاولين ينتج




ش ( ٥١ )

$$\frac{\text{ء ر}}{\text{ر و}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ا ب}}$$

ومن تشابه المثلثين ا ب حـ ، ء هـ و ينتج

$$\frac{ء هـ}{و هـ} = \frac{ا حـ}{ا ب}$$

وحينئذٍ يكون $\frac{ء ر}{ر و} = \frac{ء هـ}{و هـ}$

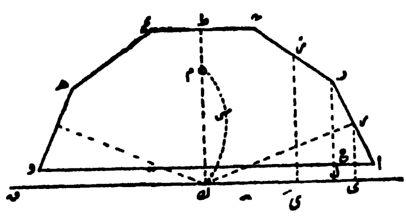
وهذا يدلنا على ان الخط هـ ر منصف لزاوية ء هـ و

وللحصول على نقطة تأثير المحصلة النهائية اي مركز ثقل المثلث نحصل المحصلة الجزئية المؤثرة في ر مع القوة الثالثة المؤثرة في هـ وبما ان نقطة تأثير المحصلة النهائية المذكورة على المستقيم هـ ر ينتج ان مركز ثقل محيط المثلث على المستقيم المذكور ويمكن أن يثبت بالطريقة عينها انه يكون ايضاً على المستقيم ء ع المنصف لزاوية هـ ء و وبذلك يكون في نقطة تقابل المستقيمين المذكورين

اعني ان مركز ثقل محيط مثلث يكون في نقطة تقابل منصفات زوايا المثلث الجامع لمنتصفات اضلاعه

(٧٣) مركز ثقل محيط مضلع حيثما اتفق — يمكن الحصول على مركز ثقل محيط مضلع حيثما كان بتحصيل القوى المتوازية المؤثرة في منتصفات اضلاعه والمناسبة لاطوالها فنقطة تأثير المحصلة الكلية تكون عبارة عن مركز ثقل محيط المضلع

(٧٤) مركز ثقل خط منكسر منتظم — تستعمل هنا نظرية عزوم القوى المتوازية بالنسبة لمستو ولنلاحظ اولاً ان مركز ثقل الخط المذكور يكون على محور التماثل ك ط فاذا مررنا بنقطة ك التي هي مركز الدائرة المرسومة على الخط المنتظم مستوياً عموداً على ط ك وعوضنا اوزان اجزاء الخط



ش (٥٢)

المنكسر بقوى موثرة في متصفاتها وفرضنا ان نقطة م هي مركز ثقل الخط المنكسر كان بناء على نظرية عزوم القوى المتوازية بالنسبة لمستو

ا ب ح د ه و × س = ا ب × ر ى + ب ح × ر ىَ + ح د × ط ك + ....

ومن حيث ان المثلثين ا ل ب ى ا ر ك متشابهان يكون

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ر ك}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ر ى}} \quad \text{او}$$

ا ب × ر ى = ال × ر ك

اعني ان عزم كل ضلع يساوي حاصل ضرب نصف قطر الدائرة المرسومة داخل الخط المنكسر في مسقط الضلع المذكور على الوتر ا و وبناء على ذلك يكون مجموع عزوم جميع الاضلاع يساوي حاصل ضرب نصف قطر الدائرة المرسومة داخل الخط المنكسر في الوتر ا و بتمامه وحينئذ يكون

ا ب ح د ه و × س = ر ك × ا و أم

$$\text{س} = \frac{\text{ر ك × ا و}}{\text{ا ب ح د ه و}} = \frac{\text{نصف قطر الدائرة الداخلة × الوتر}}{\text{طول الخط المنكسر}}$$

اعني ان مركز ثقل الخط المنكسر المنتظم يكون على العمود المقام على منتصف وتره ببعد من المركز يساوي حاصل ضرب نصف قطر الدائرة الداخلة في الوتر مقسوماً على طول الخط المنكسر

(٧٥) مركز ثقل قوس دائرة — تطبق القاعدة السابقة على اقواس الدوائر اذ ان هذه الاخيرة لا تخرج عن كونها خطوطا منكسرة منتظمة تصغر اضلاعها الى ما لا

نهاية له فاذا رمزنا حينئذٍ لأطوال كل من القوس والوتر ونصف القطر بالرموز حـ ، ء ، ن ينتج

$$\text{س} = \frac{\text{ء} \times \text{ن}}{\text{حـ}}$$

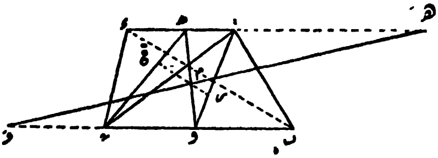
اعني ان مركز ثقل قوس دائرة يكون على نصف القطر العمودي على وتره ببعد من المركز يساوي حاصل ضرب الوتر في نصف القطر مقسوماً على طول القوس وفي الحالة الخصوصية التي يكون فيها القوس يساوي نصف المحيط يكون

$$\text{س} = \frac{٢\,\text{ن} \times \text{ن}}{\text{ط}\,\text{ن}} = \frac{٢\,\text{ن}}{\text{ط}}$$

## (٢) مركز ثقل السطوح

(٧٦) مركز ثقل سطح المثلث — بما ان منصف المثلث ينصف جميع المستقيمات الموازية للضلع الواصل اليه ينتج ان مركز ثقل المثلث هو نقطة تقاطع منصفاته

(٧٧) مركز ثقل سطح شبه المنحرف — اذا فرض ان ا ب حـ ء هو شبه المنحرف المفروض ومد المستقيم هـ و الجامع لمنتصفي ضلعيه المتوازيين كان مركز ثقله على



ش (٥٣)

المستقيم المذكور اذ انه ينصف جميع المستقيمات الموازية لقاعدتيه المتوازيتين واذا مد كذلك الخط ا حـ فانه يقسم شبه المنحرف الى مثلثين ا ب حـ ، ا حـ ء ومركز ثقل احدهما ر على الخط ا و ويقسمه الى جزئين ا ر ، ر و اولهما ضعف ثانيهما

ومركز ثقل الآخر ع على الخط حـ هـ ويقسمه ايضاً الى جزئين حـ ع ، ع هـ اولهما ضعف ثانيهما وحينئذٍ يكون مركز ثقل شبه المنحرف على ر ع ايضاً وبناء على ذلك يكون في نقطة تقابله مع هـ و وهي م وتوجد طريقة اخرى اسهل من هذه لايجاد مركز ثقل شبه المنحرف وهي مؤسسة على نظرية عزوم القوى المتوازية بالنسبة لمستوٍ فاذا فرضنا مستوياً مارًّا بالخط ا د عموداً على مستوى شبه المنحرف ورمزنا بالرمز س لبعد مركز ثقل شبه المنحرف عنه وبالرمز ع لارتفاع شبه المنحرف ينتج

$$\frac{(\text{ب حـ} + \text{ا د})\,\text{ع}}{٢}\ \text{س} = \frac{\text{ا د} \times \text{ع}}{٢} \times \frac{\text{ع}}{٣} + \frac{\text{ب حـ} \times \text{ع}}{٢} \times \frac{٢\,\text{ع}}{٣}$$

ومن ذلك ينتج

$$٣\,(\text{ب حـ} + \text{ا د})\ \text{س} = \text{ا د} \times \text{ع} + ٢\,\text{ب حـ} \times \text{ع}$$

وباعتبار مستوي العزوم هو المستوي المار بالمستقيم ب حـ عموداً علي مستوي شبه المنحرف المذكور ورمزنا بالرمز ص لبعد مركز ثقل شبه المنحرف عنه ينتج

$$٣\,(\text{ب حـ} + \text{ا د})\ \text{ص} = ٢\,\text{ا د} \times \text{ع} + \text{ب حـ} \times \text{ع}$$

وبقسمة طرفي المتساوية الاولى على طرفي المتساوية الثانيه ينتج

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ا د} + ٢\,\text{ب حـ}}{٢\,\text{ا د} + \text{ب حـ}} = \frac{\text{ب حـ} + \frac{\text{ا د}}{٢}}{\text{ا د} + \frac{\text{ب حـ}}{٢}}$$

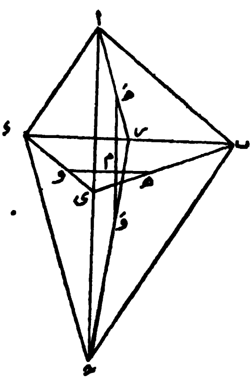
وذلك يؤدي لتعيين مركز ثقل شبه المنحرف بالطريقــة الرسمية الآتية وهي ان نمد د ا على استقامته ونأخذ عليه بعداً ا هـ يساوي ب حـ ثم نمد ب حـ على استقامته من الجهة الاخرى ونأخذ عليه بعداً حـ و = ا د ثم نصل المستقيم هـ و فهذا المستقيم يقطع المستقيم هـ و في نقطة م تكون هي مركز الثقل المطلوب

لانه ينتج من تشابه المثلثين هَ م ه ، و م وَ أن

$$\frac{\text{هَ ا} + \text{ا ه}}{\text{ح و} + \text{ح و}} = \frac{\text{ب ح} + \frac{\text{ا ى}}{٢}}{\text{ا ى} + \frac{\text{ب ح}}{٢}} = \frac{\text{ه م}}{\text{م و}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

وهذا التساوي هو عين السابق

(٧٨) مركز ثقل سطح شكل رباعي حيثما كان — اذا فرض ان ا ب ح ى هو الشكل الرباعي المفروض نصل قطري الشكل المذكور ثم ننصفهما بنقطتين ر ، ى ثم نصل المستقيمين ب ى ، ى ى ونأخذ عليهما نقطتين ه ، و على بعد من نقطة ى يساوي ثلث طول كل منهما فهاتان النقطتان تكونان حينئذٍ مركزي ثقل المثلثين ا ب ح ، ا ى ح فاذا مد بينهما مستقيم ه و كان هذا المستقيم مشتملاً على مركز ثقل الشكل الرباعي المطلوب ويثبت بالطريقة عينها ان المستقيم هَ وَ يكون مشتملاً عليه ايضاً وبذا يرى انه يكون في نقطة م التي هي نقطة تقابل المستقيمين المذكورين



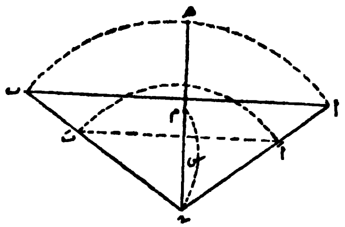
ش (٥٤)

(٧٩) مركز ثقل سطح كثير الاضلاع ايًّا كان — لايجاد مركز ثقل سطح كثير الاضلاع ايًّا كان يقسم الى جملة مثلثات ويعين بعد ذلك مساحة ومركز ثقل كل منها ثم تجري عليها الكيفية المتقدمة المختصة بتحصيل عدة قوى متوازية ومتحدة الجهة

مركز ثقل القطاع الدائري — اذا قسم القطاع المذكور الى قطاعات صغيرة جدًّا لا نهاية لعددها امكن اعتبارها مثلثات مركز ثقل كل منها على بعد من مركز القطاع يساوي ثلثي نصف القطر وبما ان المثلثات المذكورة متساوية المساحة فيكون مركز ثقل

القطاع في مركز ثقل القوس الذي مركزه مركز القطاع ونصف قطره ثلثا نصف قطر القطاع فاذا رمزنا بالحرف س لبعد مركز ثقل القطاع عن المركز ينتج

$$\text{س} = \frac{\text{حـ اَ} \times \text{الوتر اَ بَ}}{\text{القوس اَ بَ}}$$


ش (٥٥)

وبما ان $\text{حـ اَ} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}$

والوتر $\text{اَ بَ} = \frac{٢}{٣}\,\text{الوتر ا ب}$

والقوس $\text{اَ بَ} = \frac{٢}{٣}\,\text{القوس ا ب}$ ينتج

$$\text{س} = \frac{\frac{٢}{٣}\,\text{س} \times \text{الوتر}}{\text{القوس}}$$

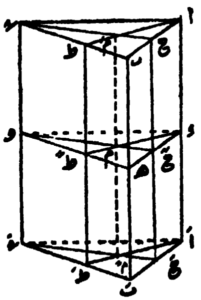
اعني ان مركز ثقل القطاع يكون على نصف القطر العمودي على وتره ببعد من المركز يساوي حاصل ضرب $\frac{٢}{٣}$ نصف القطر في الوتر مقسوماً على القوس

وفي حالة ما يكون القطاع نصف دائرة ينتج

$$\text{س} = \frac{\frac{٢}{٣}\,\text{س} \times ٢\,\text{س}}{\text{ط س}} = \frac{٤\,\text{س}}{٣\,\text{ط}}$$

## (٣) مركز ثقل المجسمات

(٨٠) مركز ثقل المنشور الثلاثي – اذا كان ا ب حـ اَ بَ حـَ هو المنشور الثلاثي المفروض كان مركز ثقله في نقطة م التي تتقابل فيها مستوياته القطرية الآتية



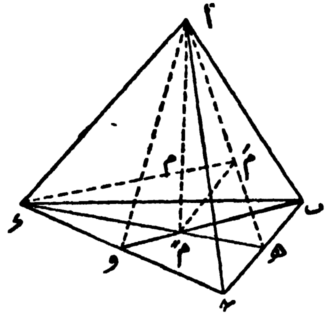
ش (٥٦)

(١) ء هـ و المار بمنتصفات احرفه (٢) ا اَ طَ ط المار بحرفه اا َ ومنتصف الضلع ب حـ (٣) حـ حـَ عَ ع المار بحرفه حـ حـَ ومنتصف الضلع ا ب وبما ان نقطة م التي تتقابل فيها المستويات المذكورة هي نقطة تقابل منصفات المثلث ء هـ و ينتج ان مركز ثقل المنشور الثلاثي هو نقطة تقابل منصفات المثلث المار بمنتصفات احرفه

ومن حيث ان نقطة م منصفة للخط مَ مَ الواصل بين مركزي ثقل قاعدتي المنشور ينتج ايضاً ان مركز ثقل المنشور الثلاثي في منتصف المستقيم الواصل بين مركزي ثقل قاعدتيه

(٨١) مركز ثقل منشور حيثما اتفق — اذا قسم المنشور المذكور الى منشورات ثلاثية كان مركز ثقل كل منها عبارة عن مركز ثقل المثلث المتساوي البعد عن قاعدتيه فيكفي حينئذٍ لايجاد مركز ثقل المنشور الكلي تحصيل القوى المؤثرة في مراكز ثقل المثلثات الجزئية وبما ان القوى المذكورة مناسبة لاحجام المنشورات الجزئية وهذه الاخيرة مناسبة لمساحات المثلثات ينتج ان مركز ثقل المنشور الكلي عبارة عن مركز ثقل القطاع المتساوي البعدين عن قاعدتيه . اعني انه في منتصف المستقيم الواصل بين مركزي ثقل قاعدتي المنشور

(٨٢) مركز ثقل الهوم الثلاثي – اذا كان ا ب حـ ء هو الهرم الثلاثي المفروض فالمستوي المـار بالحرف ا ب ونقطة و التي هي منتصف الحرف حـ ء يكون مستوياً قطرياً و بذا يكون شاملاً لمركز ثقل الهرم الذي يشمله ايضاً المستوي المار بالحرف ا ء ونقطة هـ التي هي منتصف الحرف ب حـ




ش (٥٧)

فينتج من ذلك حينئذٍ ان مركز ثقل الهرم على خط تقاطع المستويين المذكورين وهو ا م أي على المستقيم الواصل من رأس الهرم ا الى مركز ثقل المثلث المقابل له (الرأس) ويثبت بالطريقة عينهـا انه يكون ايضاً على المستقيم ء مَ الواصل من رأس الهرم ء الى مركز ثقل القاعدة ا ب حـ المقابلة له و بذا يكون في نقطة تقاطعهما م

فاذا وصلنا م مَ ينتج من تشابة المثلثين م م مَ ، ا م ء أن

$$\frac{م\,مَ}{ا\,ء} = \frac{م\,مَ}{ا\,م}$$

و ينتج ايضاً من تشابه المثلثين م هـ مَ ، هـ ا ء أن

$$\frac{مَ\,م}{ا\,ء} = \frac{هـ\,مَ}{هـ\,ء}$$

وحينئذٍ يكون

$$\frac{م\,مَ}{ا\,م} = \frac{هـ\,مَ}{هـ\,ء} = \frac{1}{3}$$

اعني ان م مَ = ⅓ ا م = ¼ ا مَ

ينتج من ذلك حينئذٍ ان مركز ثقل الهرم الثلاثي يكون على المستقيم الواصل من رأسه الى مركز ثقل القاعدة المقابلة له ببعد مساوٍ لربع ذلك المستقيم من جهة القاعدة او لثلاثة ارباعه من جهة الرأس

(٨٣) مركز ثقل هرم ايًّا كان — اذا قسم الهرم المذكور الى اهرام ثلاثية يوجد بالطريقة التي اتبعت لايجاد مركز ثقل المنشور غير الثلاثي ان مركز ثقل الهرم يكون في جميع الاحوال على المستقيم الواصل من رأسه الى مركز ثقل قاعدته ببعد مساوٍ لربع ذلك المستقيم من جهة القاعدة

(٨٤) مركز ثقل المخروط — من حيث ان المخروط هو النهاية التي يؤول اليها هرم مرسوم داخله حين يزيد عدد اوجهه الى ما لا نهاية له ينتج ان مركز ثقل المخروط يكون على المستقيم الواصل من رأسه الى مركز قاعدته ببعد مساوٍ لربع ذلك المستقيم من جهة القاعدة

(٨٥) مركز ثقل كثير الوجوه — لايجاد مركز ثقل مجسم كثير الوجوه يقسم الى مجسمات يسهل ايجاد مركز ثقل كل منها كاهرام مثلاً ثم تطبق نظرية عزوم القوى المتوازية على الحجم الكلي والاحجام الجزئية

## (٤) نظريتان هندسيتان

(٨٦) النظرية الاولى — اذا دار خط مستوٍ حول محور في مستويه فان السطح الحادث من الدوران يقدر بحاصل ضرب طول الخط الراسم في محيط الدائرة المرسومة بمركز ثقل الخط الراسم المذكور

ولكن مجموع ما هو محصور بين قوسين عبارة عن مجموع عزوم اجزاء الشكل بالنسبة للمستوي المار بالمحور س و عموداً على مستوي الشكل وهذا المجموع يساوي بناءً على ما سبق مساحة الشكل في بعد مركز ثقله عن محور الدوران

وحينئذٍ اذا رمز بالحرف ع لحجم الجسم المتولد من دوران الشكل الذي نرمز لمساحته بالرمز س يكون

ع = ٢ ط × س × م مَ = س × ٢ ط × م مَ

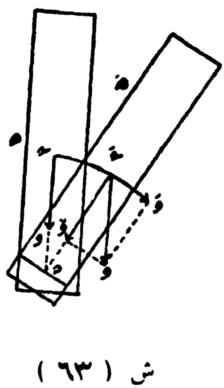
وهو المطلوب

نتيجة — ينتج من النظرية السابقة ان حجم الجسم الكعكي يساوي حاصل ضرب مساحة قطاعه العمودي في محيط الدائرة المرسومة بمركز القطاع المذكور حول المحور

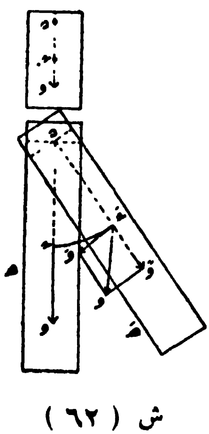
تنبيه — تستعمل النظريتان السابقتان لايجاد موضع مركز ثقل بعض المجسمات المستديرة

## توازن الاجسام بمحض تأثير الثقل

(٨٨) توازن الاجسام المعلقة من احدى نقطها — اذا عاق عائق جسماً ثقيلاً عن الحركة كان من الممكن بتطبيق خواص مركز الثقل تعيين الاحوال التي يتزن فيها الجسم المذكور فاذا كان الجسم معلقاً من احدى نقطه ه فلا يكون في حالة توازن الا اذا قابل الخط الرأسي المار بمركز ثقله ح النقطة الثابتة لاننا اذا فرضنا نقل نقطة



ش (٦٣)



ش (٦٢)

تأثير وزن الجسم وهو في هذا الوضع من ح الى ء انعدم تأثيره لوقوعه في نقطة ثابتة . وعند ما تكون الاجسام المعلقة من احدى نقطها في حالة توازن لا يكون لتأثير وزنها عليها سوى ضغطها على نقطة تعليقها بقوة مساوية له

( ٨٩ ) التوازن الثابت — اذا فرضنا مركز ثقل الجسم اسفل نقطة تعليقه وحولناه عن الموضع الذي يتزن فيه وهو ه بأن اعطيناه وضعاً آخر ه شكل ٦٢ كان من الممكن تحليل وزنه و وهو في هذا الموضع الى قوتين احداهما وَ في الاتجاه ء حَ لا يكون لها تأثير في الجسم سوى ضغطه على النقطة الثابتة والثانية وَ في اتجاه المماس للقوس ح حَ الذي يرسمه مركز الثقل وترد الجسم الى وضعه الاول اي الوضع الذي يتزن فيه ويسمى التوازن في الحالة التي يكون فيها مركز ثقل الجسم اسفل نقطة تعليقه بالتوازن الثابت نظراً لكون الجسم يرتد الى وضعهِ الذي يتزن فيه اذا حول عنه ثم ترك ونفسه

( ٩٠ ) التوازن المستمر — اذا كانت نقطة تعليق الجسم منطبقة على مركز ثقله كان الجسم متزناً في جميع الاوضاع التي تعطى اليه اذ ان قوة الثقل تمحى بمقاومة النقطة الثابتة في جميع أوضاع الجسم ويسمى التوازن عند ذلك مستمراً

( ٩١ ) التوازن غير الثابت — اذا كانت نقطة تعليق الجسم اعلى مركز ثقله شكل ٦٣ وحولناه عن الوضع الذي يتزن فيه وهو ه بأن اعطيناه وضعاً آخر هَ ثم حللنا وزنهُ و الى قوتين احداهما وَ في الاتجاه حَ ء والثانية وَ في اتجاه المماس للقوس ح حَ كانت نتيجة تأثير الاولى منهما ضغط الجسم على نقطة ء ونتيجة تأثير الثانية دوران الجسم حول نقطة ء الى ان يشغل الوضع الذي يكون فيه في حالة التوازن الثابت ويسمى التوازن في هذه الحالة توازناً غير ثابت

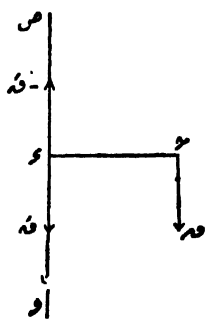
ملاحظة — يلاحظ مما سبق ان توازن الاجسام المعلقة من احدى نقطها يكون

ثابتاً اذا كان مركز ثقـل الجسم في اسفل وضع ممكن وغير ثابت اذا كان في اعلى وضع ممكن ومستمرًّا اذا كان ارتفاعه لا يتغير بادارة الجسم حول نقطة تعليقه وعلى العموم مركز ثقل الاجسام المعلقة يميل دائماً ان يشغل اسفل وضع ممكن

(٩٢) توازن الاجسام المعلقة من محور — يطبق جميع ما سبق على الاجسام المعلقة من محور اعني ان الاجسام المذكورة لا تكون في حالة توازن الا اذا قابل الخط الرأسي المار بمركز ثقلها محورها الثابت ويكون توازنها ثابتاً اذا كان مركز ثقلهـا شاغلاً اسفل وضع ممكن وغير ثابت اذا كان شاغلا اعلي وضع ممكن. ومستمرًّا اذا كان ثابت الارتفاع اي موجوداً على المحور الثابت

وتكون الاجسام المتحركة حول محور في حالة توازن مستمر ايضاً اذا كان المحور رأسيًّا ومارًّا او غير مار بمركز ثقلها فاذا كان المحور مارًّا بمركز ثقلها كان تأثير جذب الارض واقعاً في نقطة ثابتة وبذا لا ينشأ عنه اقل تأثير في الجسم في ايـ وضع من اوضاعه

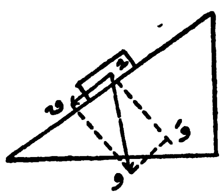
اما اذا كان مركز ثقل الجسم حـ بعيداً عن محور الدوران و م وانزلنـا من نقطة حـ عموداً حـ ء عليه ثم اوجدنا في نقطـة ء قوتين ق ، — ق في اتجاه المحور وفي جهتين متضادتين وتساوي كل منهما القوة ق كان الجسم مؤثراً بقوة ق وازدواج (ق . — ق) اما القوة ق فلا ينشأ عنهـا اقل تأثير في الجسم في اي وضع من اوضاعه نظراً لدوام وقوعها في احدى نقطه الثابتة واما الازدواج (ق . — ق) فنظراً لامكان نقل ذراع رافعته على اتجاه المحور الثابت من غير تغيير نتيجة تأثيره



ش ( ٦٤ )

لا ينتج عنه اقل تأثير ايضاً في أوضاعه المختلفة و بذا يكون توازن الاجسام المتحركة حول محور رأسي مستمرًّا وليلاحظ ان الارتفاع الرأسي لمركز ثقل الاجسام المتحركة حول محور رأسي لا يتغير اثناء تحريكها حوله

توازن الاجسام المرتكزة على سطح مستوٍ — اول الشروط الضرورية لاتزان الاجسام المرتكزة على سطح مستوٍ هو أن يكون السطح المذكور افقيًّا لاننا اذا فرضناه مائلاً أمكننا تحليل وزن الجسم و الى قوتين احداهما وَ عمودية على السطح المائل لايكون لها تأثير سوى ضغط الجسم على السطح المذكور وتتزن مع رد الفعل المتولد عنه والثانية ہ في اتجاه مواز للخط الاعظم ميلاً للسطح تحرك الجسم في اتجاهها ومن ذلك ينتج ان اتزان الاجسام على السطوح المائلة مستحيل



ش (٦٥)

هذا بخلاف ما اذا كان السطح المرتكز عليه الجسم افقيًّا فعند ذلك تكون المركبة الموازية للسطح المذكور معدومة و بذا يكون الاتزان ممكناً ولنبحث في شروطه

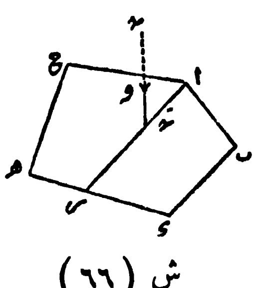
توازن الاجسام المرتكزة باحدى نقطها — اذا كان مستوي الارتكاز افقيًّا وكان الجسم مرتكزاً عليه باحدى نقطه فلا يكون في حالة التوازن الا اذا قابل الخط الرأسي المار بنقطة ارتكازه مركز ثقله لاننا اذا فرضنا نقل نقطة تأثير وزن الجسم على اتجاهه من مركز ثقله الى نقطة ارتكازه عدم تأثيره نظراً لوقوعه في نقطة ثابتة ويكون التوازن في هذه الحالة غير ثابت في الجملة لان مركز ثقل الجسم يكون عادة في الوضع الذي يتزن فيه اعلى نقطة الارتكاز ومع ذلك فمن السهل جعله ثابتاً وذلك بجعل مركز ثقل الجسم اسفل نقطة ارتكازه وذلك كما في الصورة التي من العاج ويكون توازن

الاجسام المرتكزة بنقطه مستمرًا اذا كان بعد مركز ثقلها عن مستوي الارتكاز لا يتغير ككرة

توازن الاجسام المرتكزة بنقطتين — اذا كان الجسم مرتكزاً بنقطتين او اكثر على استقامة واحدة فلا يكون في حالة توازن الا اذا قابل الخط الرأسي المار بمركز ثقله المستقيم الجامع لنقط ارتكازه ويكون التوازن هنا أيضاً في الجملة غير ثابت لان مركز ثقــل الجسم يكون عادة أعلى نقط الارتكاز ومع ذلك فمن الممكن جعله ثابتاً وذلك بجعل مركز ثقل الجسم اسفل مستقيم الارتكاز وذلك كما في قب الميزان المعتاد ويكون توازن الاجسام المرتكزة بخط مستمرًا اذا كان بعد مركز ثقلها عن مستوي الارتكاز لا يتغير كاسطوانة او مخروط مرتكز كل منها على احد احرفه

توازن الاجسام المرتكزة باكثر من نقطتين ليست على استقامة واحدة — اذا كان الجسم مرتكزاً على السطح الافقي بثلاث نقط فاكثر فانه لا يكون متزناً الا اذا مر الخط الرأسي المار بمركز ثقله داخل مضلع ارتكازه (مضلع ارتكاز الجسم هو الشكل المحدب الناتج من ايصال اكبر عدد ممكن من الخطوط بين نقط ارتكازه )

فلنفرض ان ا ب ء ﻫ ع مضلع الارتكاز ونقطة ﺣ مركز ثقل الجسم ونقطة ﺣ مسقطها على مستوي الارتكاز فاذا كانت نقطة ﺣَ اي مسقط مركز ثقل الجسم على مضلع الارتكاز داخل مضلع الارتكاز كان الجسم متزناً



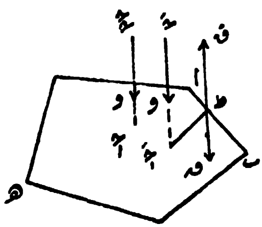
ش (٦٦)

وللبرهنة على ذلك نفرض نقــل نقطة تأثير وزن الجسم من ﺣ الى ﺣَ ثم نصل ا ﺣَ ونمده حتى يقابل احد أضلاع مضلع الارتكاز وليكن ء ﻫ في ر ثم نحلل و الواقعــة في ﺣَ الى قوتين ن ن نَ مؤثرتين على

التناظر في ا ں ر ثم نحلل القوة ںَ المؤثرة في ر الى اخريين مؤثرتين في ء ں ه فينتج حينئذٍ ثلاث قوى مؤثرة في ثلاث نقط ثابتة يمحي تأثيرها رد الفعل المتولد من مستوي الارتكاز و بذا يبقى الجسم متزناً

تنبيه — الحقيقة ان وزن الجسم يوزع بين جميع نقط ارتكازه لا بين ثلاثة منها

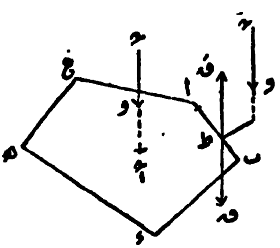
ولنبحث الآن عما يحدث اذا حول الجسم عن هذا الوضع فاذا ازلق على مستوي ارتكازه بقي مركز ثقله حافظاً ارتفاعه ووضعه بالنسبة لمضلع الارتكاز و بذا يبقى الجسم في حالة توازن اما اذا ادير حول احد اضلاع مضلع ارتكازه وليكن ا ں فان مركز ثقله حـ ينتقل من موضعه و يشغل موضعاً آخر وليكن حـَ فاذا فرضنا ان مسقط حـَ وهو جِ َ على مستوي الارتكاز داخل مضلع الارتكاز ومررنا بالاتجـاه الرأسي المار بهذه النقطة مستوياً عموداً على ا ں وأوجدنا في نقطة تقابلهما ط قوتين رأسيتين ں ں ںَ متضادتين وتساوي كل منهما وزن الجسم و أ مكن تحليل احداهما ں الى اخريين مؤثرتين في ا ں ں يمحي تأثيرهما لوقوعهما في نقطتين ثابتتين أما الاخرى فانها تكوّن مع وزن الجسم و ازدواجاً يرد الجسم الى وضعه الاول



ش (٦٧)

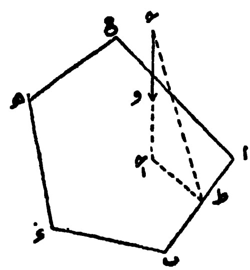
و بما ان عزم الازدواج الذي يرد الجسم الى وضعه الاصلي يساوي و × جِ َ ط ينتج ان عزم الازدواج المذكور يزيد بزيادة كل من و ں جِ َ ط أعني ان الاجسام المرتكزة على مستو افقي تكون أعظم ثباتاً كلما زاد وزنها واتساع مضلع ارتكازها وقد سمي عزم الازدواج المذكور عندما يكون الجسم في الوضع الذي يتزن فيه عزم ثبات الجسم وليلاحظ ان عزم ثبات جسم يتغير بالنسبة لكل ضلع من أضلاعه

واذا ادير الجسم حول ا ب حتى يقع الخط الرأسي المار بمركز ثقله خارج مضلع ارتكازه لايرتد الجسم الى وضعه الاول بل انهُ يقع على سطح الارتكاز فاذا فرضنا ان مركز ثقل الجسم أخذ الوضع حـَ ومررنا بالاتجاه الرأسي المار بهذه النقطة مستوياً عموداً على ا ب وأوجدنا في نقطة تقابلهما ط قوتين رأسيتين ن ، ن َ متضادتين وتساوي كل منهما وزن الجسم و امكن تحليل احداهما ن الى قوتين موءثرتين في ا ، ب يمحي تأثيرها لوقوعهما في نقطتين ثابتتين أما الاخرى فانها تكوّن مع وزن الجسم و ازدواجاً يوقعه على سطح الارتكاز



ش ( ٦٨ )

ويمكن ان يلاحظ بعد الوصول الى هذه النتيجة ان الاجسام المرتكزة باكثر من نقطتين تكون اكثر ثباتاً كلما كان مركز ثقلها اكثر انخفاضاً لان النهاية العظمى للزاوية الواجب ادارة الجسم بمقدارها حول ا ب حتى يعود الى وضعه الاصلي هي المتممة للزاوية حـ ط حـ ، وبما ان زاوية حـ ط حـ ، تصغر بانخفاض نقطة حـ ينتج ان متممتها تكبر وتبعاً لها تزيد درجة ثبات الجسم



ش ( ٦٩ )

تطبيقات — لتأثير موضع مركز الثقل على درجة ثبات الاجسام المختلفة عدة تطبيقات منها تأثيره على الانسان السائر على قدميه فانه يجب ان يكون على الدوام في وضع بحيث يكون الخط الرأسي المار بمركز ثقله المتغير الوضع مارّا داخل المضلع المكوّن من حافتي القدمين الخارجيتين وأطراف الاصابع والعقبين ولذلك يميل

الانسان الى الامام اذا كان حاملاً ثقلاً على ظهره او كان صاعداً منحدراً ويميل الى الخلف اذا كان حاملاً ثقلاً على صدره او نازلاً من منحدر وكذلك اذا حمل ثقلاً في احدى يديه مال بجسمه الى جهة اليد الاخرى التي يبعدها غالباً عن جسمه

ويزداد ثبات العربات كلما كان مركز ثقلها اكثر انخفاضاً وتبقى المباني القديمة ومداخن المعامل الى غير ذلك ثابتة ما دام الخط الرأسي المار بمركز ثقلها ماراً داخل القاعدة التي ترتكز عليها وكثير من لعب الاطفال مؤسس على شروط التوازن وذلك كقطعة العملة المثبت بها شوكتان الممكن وضعها على حد سكين او على حافة كوب واللعبة التي من العاج والزجاجات التي لا تنسكب والمخروط المزدوج الذي يصعد سطحاً مائلاً الخ

## ( ٤ ) تأثير القوى في الاجسام وعزم القصور

تأثير القوى في الاجسام — ليست خواص مركز الثقل قاصرة على الحالة التي تكون فيها الاجسام مجذوبة بالارض بل انها عامة ولا تتغير مهما كان جنس القوى الواقعة عليها وكان الاوفق تسمية مركز ثقل الاجسام مركز كتلها ولنبحث بهذه المناسبة عن نتيجة تأثير قوة أياً كانت في جسم اذ ان التأثير الذي ينتج من قوة منفردة في جسم لا يكون كالذي ينتج من تأثيرها في نقطة مادية

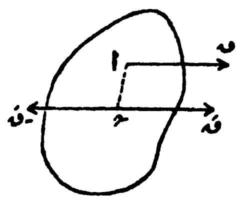
فاذا فرضنا جسماً كتلته ك موضوعاً على سطح افقي املس أثرت فيه قوة افقية ن يمر اتجاهها بمركز ثقله ورمزنا بالاحرف ك′ ، ك″ ، ك‴ و . . . الخ الى كتل جزيئاته امكن تحليل القوة المذكورة الى اخرى موازية لها مقاديرها ن′ ، ن″ ، ن‴ الخ واقعة على التناظر في جزيئات الجسم ومناسبة لكتلها وذلك لان مركز ثقل الجسم

عبارة عن نقطة تأثير محصلة قوى متوازية واقعة في جزيئاته ومقاديرها مناسبة لتلك الجزيئات

و بذا يكون

$$\frac{\text{ن}'}{\text{ك}'} = \frac{\text{ن}''}{\text{ك}''} = \frac{\text{ن}'''}{\text{ك}'''} = \cdots\cdots = \frac{\text{ن}}{\text{ك}} = \text{ع}$$

اعني ان جميع جزيئات الجسم تتحرك موازياً بعضها بعضاً حركة منتظمة العجلة وتكون عجلة جميعها واحدة اعني ان القوى التي تمر اتجاهاتها بمركز ثقل الاجسام تؤثر فيها كجذب الارض لها



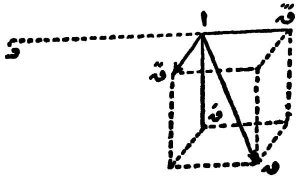
ش ( ٧٠ )

أما اذا كانت القوة ن مؤثرة في نقطة من الجسم بعيدة عن مركز ثقله حـ فلبيان نتيجة تأثيرها نوجد في نقطة حـ قوتين متضادتين ن' ، – ن' توازي كل منهما القوة ن وتساويها فتحدث احداهما ن' كما سبق بيانه حركة مشتركة ومنتظمة العجلة في جميع جزيئات الجسم أما الاخرى – ن' فباجتماعها مع القوة ن تكوّن ازدواجاً ( ن ، – ن ) يدير الجسم حتى ينطبق الخط ا حـ على اتجاه القوة ن' اي يصير اتجاه القوة ن مارّا بمركز ثقل الجسم وليلاحظ انه بوصول الجسم الى الوضع المذكور يتعداه نظراً لطاقة الحركة التي تتولد فيه ثم يرتد اليه و يتعداه ثانية وهكذا بمعنى انه يحصل في الجسم اثناء حركته في الاتجاه ن' عده ذبذبات قبل ان يأخذ وضعه النهائي . ويمكن مشاهدة حالات من هذا القبيل في الاجسام الساقطة في الهواء وذلك عند ما تكون مقاومة الهواء لها غير مضادة لاتجاه وزنها فلا تمرّ حينئذٍ محصلة هاتين القوتين بمركز ثقل الجسم ويحصل فيه التذبذب السالف الذكر عند سقوطه ويمكن عمل

تجربة من هذا القبيل بتثبيت قطعة من الرصاص في طرف ريشة ثم اسقاطها في الهواء

عزم قصور الاجسام المتحركة حول محور — لنبحث الآن فيما اذا كان من الممكن تعويض قوة مؤثرة في جسم متحرك حول محور باخرى تقوم مقامهـا بحيث يسهل بهذا التعويض البحث في حركة الجسم المتحرك

فاذا فرضنا ان المحور المتحرك حوله الجسم عموداً على مستوي الشكل وان مسقطه في و وفرضنا قوة أياً كانت ں مؤثرة في الجسم في نقطة منه ا موجودة في المستوي المذكور وحللنا القوة المذكورة الى ثلاث قوى متعامدة احداها ںً على امتداد و ا والثانية ںَ في مستوي الشكل وعمودية على ںً والثالثة ںَ عمودية على مستوي الشكل اي موازية لمحور الدوران نتج ان القوتين ںً و ں لايحدث عنهما تأثير ما في الجسم اذ انهما




ش ( ٧١ )

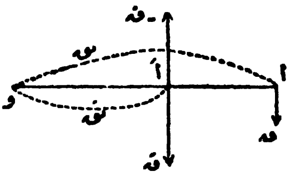
يؤثران فيه في اتجاهين لايتحرك فيهما وكانت القوة ںَ المحدثة للحركة بمفردها و بالتأمل يرى ان القوة المذكورة مماسة للقوس الذي ترسمه نقطة ا اثناء دورانها اعني انه يلزم للحصول على جميع فعل قوة مؤثرة في جسم يدور حول محور ان يكون اتجاهها على الدوام في اتجاه المماس لمحيط الدائرة الذي ترسمه نقطة تأثيرها

فاذا فرضنا قوة ں من هذا القبيل مؤثرة في جسم متحرك حول محور مسقطه في و شكل ٧٢ امكن تعويضها باخرى ںَ مؤثرة في نقطة اَ على شرط ان يكون عزماها بالنسبة للمحور متساويين

أي ان يكون ں × ا و = ںَ × اَ و

اما $\frac{\text{ن}}{\text{نَ}} = \frac{\text{اَو}}{\text{او}} = \frac{\text{سَ}}{\text{س}}$ (١)

والدليل على ذلك اننا لو اوجدنا في نقطة ا قوتين متضـــاربتين نَ و — نَ تساوي كل منهما القوة نَ التي تنتج من المتساوية السابقة وحصلنا القوتين ن و — نَ لنتج ان محصلتهمــا تمر بنقطة و التي هي احدى نقط المحور الثابت وبذا لا يحدثان عملاً ما في الجسم ويكون التأثير بتمامه ناتجاً من القوة ن التي تعمل حينئذٍ عمل القوة ن



ش (٧٢)

واذا فرضنا الآن ان كتلة النقطة المادية ا تساوي ك وكان المراد تعيين المقدار كَ من المادة اللازم اجتماعه في ا لتبقى الحركة على ما كانت عليه نرمز بالرمزين ع و عَ للعجلتين الحادثتين في كلتا الحركتين فينتج بناء على ما سبق ان

$\frac{\text{ن}}{\text{ك}} = \text{ع}$ (٢)

وكذلك

$\frac{\text{نَ}}{\text{كَ}} = \text{عَ}$ (٣)

وبما ان عجلات النقط المختلفة البعد عن محور الدوران تناسب ابعادها عنه ينتج

$\frac{\text{عَ}}{\text{ع}} = \frac{\text{سَ}}{\text{س}}$ (٤)

وبتعويض $عَ$ بما يساويها في (٣) ينتج

$$\frac{قَ}{كَ} = ع \times \frac{سَ}{س} \qquad (٥)$$

وينتج من (١) ان

$$قَ = ق \times \frac{س}{سَ} \qquad (٦)$$

ومن (٥) و (٦) ان

$$ق \times \frac{س}{سَ} = كَ \times ع \times \frac{سَ}{س}$$

وحينئذ يكون

$$كَ = \frac{ق}{ع} \times \frac{س^{٢}}{سَ^{٢}} = ك \times \frac{س^{٢}}{سَ^{٢}}$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها ا و اي $سَ =$ الوحدة يكون

$$كَ = ك س^{٢}$$

وكذلك $\qquad قَ = ق \times س$

اي انه اذا كانت قوة $ق$ مؤثرة في نقطة مادية كتلتها $ك$ تبعد عن محور الدوران بمسافة تساوي $س$ وكان تأثيرها على الدوام في اتجاه المماس للقوس الذي ترسمه النقطة المادية امكن تعويضها باخرى تساوي $ق \times س$ مؤثرة بالشروط عينها في نقطة اخرى كتلتها $ك س^{٢}$ تبعد عن محور الدوران بمسافة تساوي وحدة الاطوال

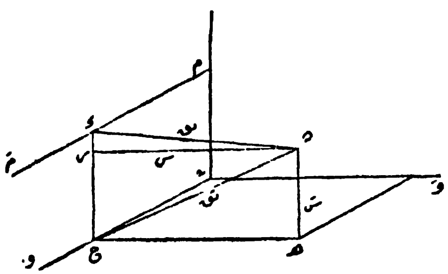
وبما انه يمكن اجراء هذه العملية في جميع نقط الجسم الدائر ينتج انه يمكن تعويض

جميع نقط كل جسم يدور حول محور بنقطة واحدة على شرط ان تكون كتلتها مساوية الى ‌‌ ‌ مجـ ك ىٓ٢

وقد اطلق على المجموع السابق عزم قصور الجسم بالنسبة لمحور دورانه

ويتغير عزم قصور جسم بالنسبة لوضع المحور الذي يدور حوله والنظرية الآتيـة توصلنا الى تعيين عزم قصور الجسم بالنسبة لمحور ما اذا علم عزم قصوره بالنسبة لمحور موازٍ له ومار بمركز ثقله

نظرية — عزم قصور جسم بالنسبة لمحور أيًا كان م مَ يساوي عزم قصوره بالنسبة لمحور حـ و موازٍ له ومار بمركز ثقل الجسم مضافاً اليه حاصل ضرب كتلة الجسم ك في مربع البعد بين المحورين



ش (٧٣)

وللبرهنـة على ذلك نمرر بالمستقيمين م مَ ، حـ و مستوياً وبالمستقيم حـ و آخر عموداً عليه ونرسم فيه المستقيم حـ وَ عموداً على حـ و ثم نمرر باحدى نقط الجسم ولتكن ن مستوياً عموداً على هذين المستويين يقطع اولهما في ء ع والثاني في ع هـ ثم نرسم المستقيمين ن ء ، ن ع وننزل من ن عمودين ن ر ، ن هـ على المستقيمين ء ع ، هـ ع فيكون ن ء بعد النقطة ن عن المحور م م ، ن ع بعدها عن المحور حـ و ، ء ع البعد بين المحورين المرموز له بالحرف ب .

فاذا رمزنا بالرموز ى الى ن ء ، ىَ الى ن ع ، س الى ن ر ، س الى ن هـ وفرضنا ان كتلة النقطة ن تساوي كَ ينتج من المثلث ن ر ء ان

$$\text{ى}^{2} = \text{س}^{2} + (\text{ب} - \text{سَ})^{2}$$

وحينئذٍ يكون عزم القصور ص بالنسبة للمحور م مَ

$$\text{ص} = \text{مجـ ك ى}^{2} = \text{مجـ ك} \left[ \text{س}^{2} + (\text{ب} - \text{سَ})^{2} \right]$$

$$= \text{مجـ كَ} \left( \text{س}^{2} + \text{ب}^{2} - ٢ \, \text{ب سَ} + \text{سَ}^{2} \right) \qquad (١)$$

ويكون كذلك عزم القصور $\text{ص}_{\text{حـ}}$ بالنسبة للمحور حـ و

$$\text{ص}_{\text{حـ}} = \text{مجـ كَ ىَ}^{2} = \text{مجـ كَ} \left( \text{س}^{2} + \text{سَ}^{2} \right) \qquad (٢)$$

وبطرح طرفي المتساوية ( ٢ ) من طرفي المتساوية ( ١ ) ينتج

$$\text{ص} - \text{ص}_{\text{حـ}} = \text{مجـ كَ ب}^{2} - ٢ \, \text{ب مجـ كَ سَ}$$

وحينئذ يكون $\text{ص} = \text{ص}_{\text{حـ}} + \text{مجـ ك ب}^{2} + ٢ \, \text{ب مجـ ك س}$

$$= \text{ص}_{\text{حـ}} + \text{ك ب}^{2} + ٢ \, \text{ب مجـ ك س}$$

و بالتأمل في الطرف الثاني من المتساوية الاخيرة يعلم ان الحد الاخير منه يساوي صفراً لان حـ مجـ كَ سَ عبارة عن المجموع الجبري لعزوم القوى الناتجة من جذب الارض لجزيئات الجسم بالنسبة للمستوي وَحـ و وهذا المجموع يساوي عزم المحصلة بالنسبة للمستوي المذكور الذي يساوي مقداره صفراً نظراً لوجود مركز ثقل الجسم في مستوي العزوم وحينئذٍ يكون

$$\text{ص} = \text{ص}_{\text{حـ}} + \text{ك ب}^{2}$$

وهو المطلوب

## سقوط الاجسام

سقوط الاجسام في الفراغ — لتعيين قانون سقوط الاجسام يجب ان نثبت اولا ان حركة الاجسام الساقطـة في الفراغ لا تتغير بتغير الاجسام ومتى ثبت ذلك امكن تعيين قانون حركة اي جسم منها فاذا تعين كان قانوناً عامًّا لحركة سقوط جميع الاجسام ويظهر بادئ بدء ان حركة الاجسام الساقطة تتغير بتغير الجسم الساقط لاننا اذا اسقطنا في وقت واحد ومن ارتفاع واحد قطعة طباشير وقطعة ورق رأينـا قطعة الطباشير تصل الى الارض قبل قطعـة الورق غير ان ذلك لا ينافي ما ذكرناه اذ ان الفرق الذي يشاهد في زمن سقوط كل من الجسمين لم يكن ناشئاً من اختلاف وزنيهما بل من اختلاف مقاومة الهواء لهما والدليل على ذلك اننا اذا كوّرنا قطعة الورق وأعدنا اسقاطها مع قطعة الطباشير رأينا انهمـا تصلان الى الارض تقريباً في آن واحد وما ذلك الا لتصغير سطحها الذي نجم عنه نقص مقاومة الهواء لها

ولزيادة الايضاح نفرض جسمين تساوي كتلة أحدهما ضعفي كتلة الآخر فتكون القوة التي تنشأ من جذب الارض للجسم الاول تساوي ضعفي التى تنشأ من جذبهـا الآخر وبذا يتحركان حركة واحدة لان حالتهما تكون كقطار مكوّن من عشر عربات تجره قاطرة وآخر مكون من عشرين عربة تجره قاطرتان

فاذا كانت كتلة احد الجسمين ٢ ك وكتلة الآخر ك والقوة الناشئة من جذب الارض للاول منهما ٢ ن كانت القوة الناشئة من جذبها للآخر ن ونتج بناء على ما سبق ان

$$\frac{\text{٢ ن}}{\text{٢ ك}} = \frac{\text{ن}}{\text{ك}} = \text{ع}$$

اعني ان عجلة حركة الجسمين تكون واحدة و بذا يبقيان متلازمين اثناء سقوطهما

واول من فكر في ان حركة سقوط الاجسام واحدة في الفراغ هو غلّيلي وقد استعمل لاثبات ذلك عدة كرات كبيرة الحجم مصنوعة من مواد مختلفة كان يسقطها في وقت واحد من أعلي منارة مرتفعة وقد لاحظ عدم وصولها الى الارض في آن واحد غير انه لم يتردد في الحكم بأن تأخر بعضها عن الآخر لم ينشأ الا من اختلاف مقاومة الهواء لها

واول من اثبت بطريقة قطعية ان حركة سقوط الاجسام في الفراغ واحدة وان ما يعوق بعضها اثناء السقوط انما هو مقاومة الهواء هو نيوتن وقد استعمل لهذا الغرض انبوبة من البللور يبلغ طولها مترين تقريباً فيها قطع من اجسام مختلفة كالرصاص والفلين والورق وزغب الريش واحد طرفيها مسدود و بطرفها الآخر حنفية فاذا فرغ هواؤها ثم نكست دفعة واحدة شوهد وصول الاجسام سالفة الذكر الى طرفها الآخر في وقت واحد واذا ادخل قليل من الهواء فيها ثم نكست ثانيـة لوحظ تأخر الاجسام الخفيفة قليلاً عن الاخرى ويكون التأخير واضحاً متى ملأها الهواء

ومقاومة الهواء للاجسام الساقطة تكون واضحة على الاخص في السائلات فهي التي تسبب تجزؤها عند سقوطها وتجعلهـا تصل الى الارض على هيئة قطرات ولولا مقاومة الهواء لسقط السائل بدون تجزئة كانه كتلة صلبة و يستدل على ذلك بواسطة المطرقة المائية وهي انبوبة من الزجاج تنتهي من احد طرفيها بانتفاخ فاذا صب فيهـا ماء الى نصفها ثم سدت فتحتها التي تعلو الانتفاخ بعد اخراج الهواء منها بالغلي وعكس وضع الانبوبة فجأة بحيث يصير عاليها سافلها شوهد ان السائل الذي فيهـا يقع الى اسفل دفعة واحدة كانه كتلة صلبة وعند سقوطه يحدث على قاعها طرقاً بسببه سميت بالمطرقة المائية

مقـاومة الهواء — اذا تحرك جسم في وسط مادة سائلة او غازية فان جزءًا من القوة المؤثرة فيه لتحريكه يعمل لازاحة جزء من المادة التى يتحرك فيهـا ليحل محله مع توليد حركة فيه سرعتها تساوي سرعة الجسم المتحرك ومن ذلك ينتج ان وزن الجسم يستعمل لتحريك مادته ليس الا اذا كان ساقطاً في الفراغ اما اذا كان ساقطاً في الهواء فان وزنه يستعمل لتحريك مادته وازاحة الهواء الذي يحل محله مع احداث حركة فيه سرعتها تساوي سرعة الجسم الساقط وقد اطلق على الجزء الذي يستعمل من وزن الجسم لازاحة الهواء وتحريكه اسم مقاومة الهواء

وتزيد مقاومة الهواء لجسم ساقط كلما زادت سرعته وتكون في كل لحظـة مناسبة لمربع هذه السرعة لاننـا اذا فرضنا ان سرعة الجسم ضعفين فان كلاً من كمية الهواء المزاح والسرعة التي تتولد فيه تصير ضعفين وحينئذ تصير المقاومة بعد تضعيف السرعة اربعة أمثالها قبله

ومع ذلك قد لوحظ انه اذا كانت حركة المتحرك بطيئة كحركة البندول كانت المقاومة منـاسبة للسرعة فقط أما اذا كانت الحركة سريعة جداً كحركة مقذوفات المدافع فان تغير المقاومة يكون اعظم من مربع تغير السرعة وذلك لكون السرعة العظيمة التي تتحرك بها المقذوفات المذكورة ينشأ عنها تكاثف في الهواء الموجود امامها وتخلخل في الموجود خلفها فيزيد حينئذٍ الضغط عليهـا من الامام وينقص من الخلف وبذا تبطؤ حركتها

وتتغير مقاومة الهواء للاجسام الساقطة ايضاً بتغير شكل الجسم الساقط فاذا كان قطاع الجسم في الاتجاه الذي يتحرك فيه متسعاً زادت مقاومة الهواء له فاذا اسقطنا قطعة من الورق حرفيًا وهي رأسية كانت سرعة سقوطها اعظم منها لو ألقيناها سطحياً وهي افقية

واذا كانت سطوح الاجسام الساقطة متساوية واوزانها مختلفة فان مقاومة الهواء تؤخر كثيراً الخفيفة منها عن الاخرى وذلك لكون الجزء من وزن الجسم الخفيف الذي يستعمل لازاحة الهواء وتحريكه يكون عظيماً بالنسبة للوزن المذكور بخلاف الجسم الثقيل فان الجزء من وزنه الذي يستعمل لازاحة الهواء وتحريكه يكاد يكون غير محسوس بالنسبة لوزنه فاذا اخذنا مثلا قرصين متساويين احدهما من النحاس والآخر من الورق واسقطناهما من نقطة واحدة ومن ارتفاع واحد بعد جعل سطح كل منهما افقيًا نرى ان القرص المعدني يصل الى الارض قبل قرص الورق

ولزيادة الايضاح نفرض ان القرصين تحركا مسافة صغيرة جدًّا تكون اثناءها مقاومة الهواء لهما واحدة ثم نرمز بالرمزين و ، وَ لوزن كل من القرصين وبالرمز ح لعجلة حركة سقوط كليهما في الفراغ وبالرمزين حَ ، حً لعجلتي حركتي سقوطهما في الهواء وبالرمز ه لمقاومة الهواء لكل منهما في المسافة القصيرة التي يتحركان فيها فينتج بناء على ما سبق ان

$$\frac{\text{حَ}}{\text{ح}} = \frac{\text{و} - \text{ه}}{\text{و}}$$ وحينئذٍ يكون

$$\text{حَ} = \text{ح}\left(1 - \frac{\text{ه}}{\text{و}}\right)$$

وينتج كذلك ان

$$\text{حً} = \text{ح}\left(1 - \frac{\text{ه}}{\text{وَ}}\right)$$

وبما ان $\frac{\text{ه}}{\text{و}}$ اكبر بكثير من $\frac{\text{ه}}{\text{وَ}}$ ينتج ان حَ تكون اصغر بكثير من حً اعني ان حركة قرص الورق تكون أبطأ بكثير من حركة قرص النحاس

واذا وضع قرص الورق فوق قرص النحاس وصل الاثنان الى الارض في آن واحد لانهما يكونان حينئذٍ جسماً واحداً عجلة حركته في الهواء

$$\text{ح}''' = \text{ح}\left(\text{١} - \frac{\text{هـ}}{\text{و} + \text{و}}\right)$$

وبما ان سرعة الاجسام الساقطة في الهواء تزيد مع الزمن وتزيد تبعاً لها مقاومة الهواء ينتج ان سرعة جميع الاجسام الساقطة في الهواء تنتهي ان تكون منتظمة وذلك حينما تصير مقاومة الهواء مساوية لوزن الجسم الساقط ويستعمل ابتداء من هذه اللحظة وزن الجسم بتمامه لازاحة الهواء وتحريكه

ونتيجة ذلك ان الاجسام الخفيفة تسقط في الهواء بسرعة منتظمة وبطيئة جداً وهذا ما يوضح لنا سبب بقاء العفر والسحب معلقة في الهواء وحقيقة الحال ان العفر والسحب تسقط كغيرها الا ان سقوطها بطيء لدرجة تكاد تكون غير محسوسة

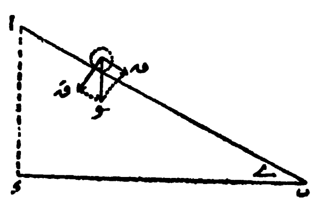
وتستعمل مقاومة الهواء لمنع حركة بعض الاجهزة من الازدياد وذلك باستعمال عجلة ذات اجنحة يديرها الجهاز فتزيد مقاومة الهواء لها كلما زادت سرعتها وينتهي الحال بأن تنتظم الحركة كما ان بعض راكبي المناطيد اذا ارادوا احداث بعض تأثيرات نفسانية على الناظرين رموا بانفسهم الى الارض من طياراتهم وهي مرتفعة في الجو ليصلوا الى الارض فيما يسمونه مانعة السقوط وهم يعلمون انهم آمنون على انفسهم لان مقاومة الهواء لمانعة السقوط تجعل حركة سقوطهم بطيئة ومنتظمة فيصلون الى الارض سالمين

ومن امثلة مقاومة الهواء ان الطيور وهي في الجو تجد في مقاومة الهواء سنداً لها وان الحوَّم (المراكب الهوائية) مؤسسة عليه

قانون سقوط الاجسام — يظهر بادئ بدء انه لتعيين قانون حركة الاجسام اثناء سقوطها يكفي اسقاط جسم امام قائم مقسم وتعيين مواضعه في الاوقات المتتالية غير ان ذلك من اصعب الامور اذ ان الاجسام السريعة الحركة كالاجسام الساقطة ترى في آن واحد شاغلة عدة من مواضعها نظراً لبقاء صور المرئيات على شبكية العين مدة قصيرة بعد انتقال الجسم من موضعه ومع ذلك فقد توصلوا اخيراً لتعيين قانون سقوط الاجسام بالصفة السابقة وذلك باستعمال شرارات كهربائية متعاقبة لا تدوم اضاءة كل منها اكثر من $\frac{1}{\dots}$ من الثانية وسنشرح هذه الطريقه فيما سيأتي

وتنحصر الطرق المستعملة لتعيين قانون سقوط الاجسام في اثنتين الاولى ابطاء حركة الجسم الساقط حتى يمكن بسهولة مشاهدته في أوضاعه المختلفة وقياس سرعته والثانية جعل الجسم الساقط يعين بنفسه اثناء سقوطه الاوضاع التي يشغلها في اللحظات المتتالية

السطح المائل — ان اقدم الاجهزة المستعملة لابطاء حركة الاجسام الساقطة هو السطح المائل الذي تصوَّره واستعمله غليلي لاثبات قانون سقوط الاجسام



ش (٧٤)

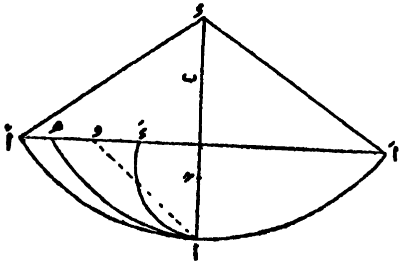
فاذا وضعنا جسماً ثقيلاً وليكن كرة ملساء من العاج على سطح مائل يصنع مع المستوي الافقي زاوية ى وفرضنا ان مستوي الشكل هو المستوي الرأسي المار بمركز كرة العاج عموداً على خط تقاطع المستوي المائل والمستوي الافقي امكننا تحليل وزن الجسم و الى قوتين احداهما ىَ عمودية على السطح المائل ليس لها تأثير سوى ضغط الجسم على السطح المذكور وتتزن مع رد الفعل المتولد عنه والثانية ن في اتجاه موازٍ للخط ا ب الاعظم ميلاً للسطح تحرك الجسم في اتجاهها و بما ان

ن= و حا ـــ وتصغر كلما صغرت ـــ ينتج ان الحركة الحادثة تكون ابطأ مما لو اسقط الجسم على الاتجاه الرأسي وانه يمكن ابطاؤها بقدر ما يراد

قانون المسافات – كان يضع غليلي لتعيين قانون المسافات في هذه الحركة البطيئية كرة من العاج في قناة ملساء محفورة في اتجاه المستقيم الاعظم ميلاً للمستوي المائل ملصق بجوارها مسطرة مقسمة ثم يعين الزمن الذي تقطع فيه الكرة القناة بتمامها ثم ربعها ثم تسعها وهلمَّ جرًّا فوجد ان الزمن الذي تقطع فيه ربع القناة يساوي نصف الذي تقطعها بتمامها فيه والزمن الذي تقطع فيه تسعها يساوي ثلث الذي تقطعها فيه وهلمَّ جرًّا اي ان المسافات التي يقطعها المتحرك مناسبة لمربع الازمنة التي تقطع فيها مهما كان ميل السطح المائل

فينتج من ذلك ان الحركة الناتجة من تأثير الثقل في الاجسام حركة منتظمة العجله

قانون السرع — قانون المسافات السابق ايجاده بواسطة السطح المائل كاف من جميع الوجوه لتعيين حركة الاجسام الساقطة غير انه اذا امكننا تعيين قانون سرع الاجسام الساقطة بالتجربة ايضاً كان ذلك مفيداً جدًّا اذ اننا نضيف بذلك طريقة ثانية لاثبات النتيجة التي وصلنا اليها بتعيين قانون المسافات ولم يتعرض غليلي لاثبات قانون السرع بالتجربة مباشرة غير انه حقق احدى نتائجه المتعلقة بالسطح المائل وهي ان سرعة الجسم الساقط لا تتعلق الا بالارتفاع الذي يسقط منه سواء كان سقوطه على الاتجاه الرأسي او على اي اتجاه مغاير له

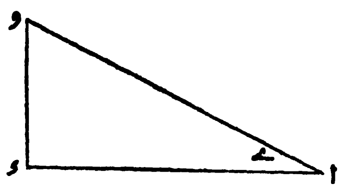


ش (٧٥)

وكيفية ذلك ان يثبت مسمار في حائط

رأسي و يعلق فيه ببعـد من الحائط يساوي خمسة سنتيمترات تقريباً مطار مكون من خيط طوله متر و ٥٠ سنتيمتراً تقريباً وكرة زنتها خمسون جراماً تقريباً ثم تحول الكرة الى الوضع اَ ثم تترك ونفسها فيلاحظ انه بعد عودتها الى وضعها الذي تتزن فيه وهو ا تتعداه الى ان تصل تقريباً الى نقطة اَ (موجودة ) على الخط الافقي المار بنقطة اَ فاذا وقفنا حينئذٍ حركة المطار وثبتنا مسماراً طويلاً في ب ثم حولنا كرة المطار الى اَ وتركناها فعند عودتها يقابل خيط المطار المسمار المثبت في ب وترسم الكرة قوس دائرة مركزه ب ويلاحظ انها ترتفع الى نقطة هـ (موجودة) ايضاً على الخط الافقي اَ اَ واذا ثبتنا المسمار في حـ واعدنا التجربة يلاحظ ان الكرة ترسم قوساً مركزه حـ وتصل كذلك الى نقطة ءَ على الخط اَ اَ

ومن حيث ان السرعة التي تكتسبها الكرة اثناء نزولها على قوس تساوي السرعة اللازمة لرفعها على قوس مساوٍ له وان السرعة التي جعلت الكرة تصعد على الاقواس ا اَ ، ا هـ ، ا ء واحدة ينتج ان السرعة التي تكتسبها الكرة اثناء نزولها على الاقواس المذكورة واحدة ايضاً اعني ان السرعة المكتسبة اثناء سقوط نقطة مادية على قوس لا تتعلق الا بالارتفاع الذي تسقط منه وقد زاد غليلي على ذلك ان هذه القاعدة عامة سواء كان المتحـرك ساقطاً على قوس او على سطح مائل كالسطح و ا او على الاتجـاه الرأسي



ش (٧٦)

فاذا رمزنا بالرمز حـ لعجلة حركة الجسم اذا كان ساقطاً على الاتجاه الرأسي وبالرمز حـَ لعجلته اذا كان ساقطاً على سطح مائل يصنع مع الافق زاوية مقدارها ك ينتج ان

$$\text{حـَ} = \text{حـ}\ \text{حا}\ \text{ـــے}$$

فاذا كانت س سرعة المتحرك وقت وصوله الى نقطة ا ينتج

$$\text{س}^{٢} = ٢\ \text{حـ}\ \text{حا}\ \text{ـــے} \times \text{ا و}$$

وبما انه ينتج من المثلث ا و ء ان

$$\text{و ء} = \text{ا و} \times \text{حا ـــے}$$

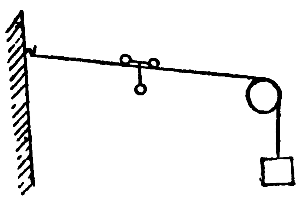
حينئذٍ يكون

$$\text{س}^{٢} = ٢\ \text{حـ} \times \text{و ء} \qquad \text{او}$$

$$\text{س} = \sqrt{٢\ \text{حـ} \times \text{و ء}}$$

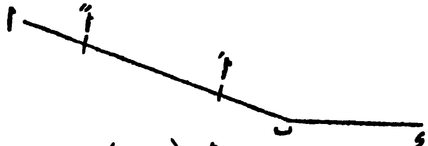
اعني ان سرعة المتحرك وقت وصوله الى نهاية المستوي المائل لا تتعلق بميل المستوي المذكور على المستوي الافقي بل تتعلق فقط بالارتفاع الذي يسقط منه

الجهاز الدرامي — يستعمل في الدراسة الآن لعمل تجربة السطح المائل خيط من الحرير مائل الوضع يتحرك عليه جهاز مكوّن من بكرتين صغيرتين تحملان ثقلاً الغرض منه جعل مركز ثقل الجهاز اسفل نقطتي ارتكازه فباستعمال هذا الجهاز يثبت قانون المسافات بغاية السهولة ويمكن ان يثبت بواسطته ايضاً (وذلك بتغيير ميل الخيط) ان عجلة الحركة الحادثة مناسبة لجيب زاوية ميل الخيط على الافق



ش (٧٧)

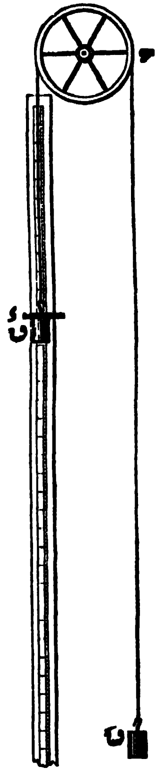
ولاثبات قانون السرع يكفي جعل الخيط افقيًّا ابتداءً من نقطة معينة ب وبهذه الطريقة لا يكون




ش (٧٨)

لجذب الارض تأثير على الجهاز المتحرك ابتداءً من هذه النقطة

فاذا تركنا الجهاز يتحرك على الخيط ابتداءً من نقطة اَ بحيث يقطع المسافة اَ ب في ثانية كانت حركته على الاتجاه ب ء بعد ان يتعدى النقطة ب منتظمة وتساوي سرعتها على وجه التقريب سرعة الجهاز وهو في الوضع ب فيكفي حينئذٍ للحصول على سرعة المتحرك على السطح المائل بعد ثانية من الزمن تعيين المسافة التي يقطعها على ب ء في ثانية ثم تعاد التجربة ابتداء من نقطة اً بحيث يقطع الجهاز المسافة اً ب في ثانيتين فنحصل بهذه الطريقة على سرعة المتحرك على السطح المائل بعد ثانيتين وهكذا فيلاحظ ان السرع الناتجة مناسبة للازمنة تقريباً



ش ( ٧٩ )

آلة اتوود — ان ابسط الآلات المستعملة لتعيين قانون سقوط الاجسام بكل دقة وبساطة هي آلة اتوود وهي تتركب من بكرة خفيفة جداً وسهلة الحركة يمر في محزها خيط رفيع من الحرير يحمل في طرفيه ثقلين متساويي الوزن فالمجموع المكوّن من هذين الثقلين يكون متزناً مهما كان وضع كل منهما بالنسبة للاخر اذ ان وزن الخيط يكاد يكون غير محسوس بالنسبة لوزنيهما

فاذا رفعنا احد الثقلين قريباً من العجلة ووضعنا فوقه ثقلا اضافيًّا ء تحرك المجموع بتمامه وكانت الحركة ناتجة من تأثير الوزن ء على الانفراد

وبما ان مقدار الكتلة التي يحركها الوزن ء وهو موضوع على احد الثقلين السافي الذكر تساوي $\frac{٢ن + ء}{ح}$ والكتلة التي يحركها اذا كان ساقطاً على الانفراد تساوي $\frac{ء}{ح}$ ينتج بناءً على ما سبق اذا

رمزنا بالرمز حـَ لعجلة حركة المجموع المكون من ء ه ن ه ن َ ان

$$\frac{حـ}{حـَ} = \frac{٢ن + ء}{ء}$$

ومن ذلك ينتج ان

$$حـَ = حـ \frac{ء}{٢ن + ء}$$

اعني ان طبيعة الحركة الناتجة عند اسقاط الجسم في الآلة تكون كطبيعتها فيما لو اسقط الجسم منفرداً غير انها تكون بطيئة وبذا يسهل قياس المسافات التي يقطعها المجموع في الازمنة المختلفة وينقص الخطأ الذي ينجم من مقاومة الهواء

ويختار عادة في آلة اتوود الثقل ن مساوياً الى ٢٤٠ جراماً والثقل الاضافي ء مساوياً ١٠ (جرامات)

وبناء على ذلك تكون

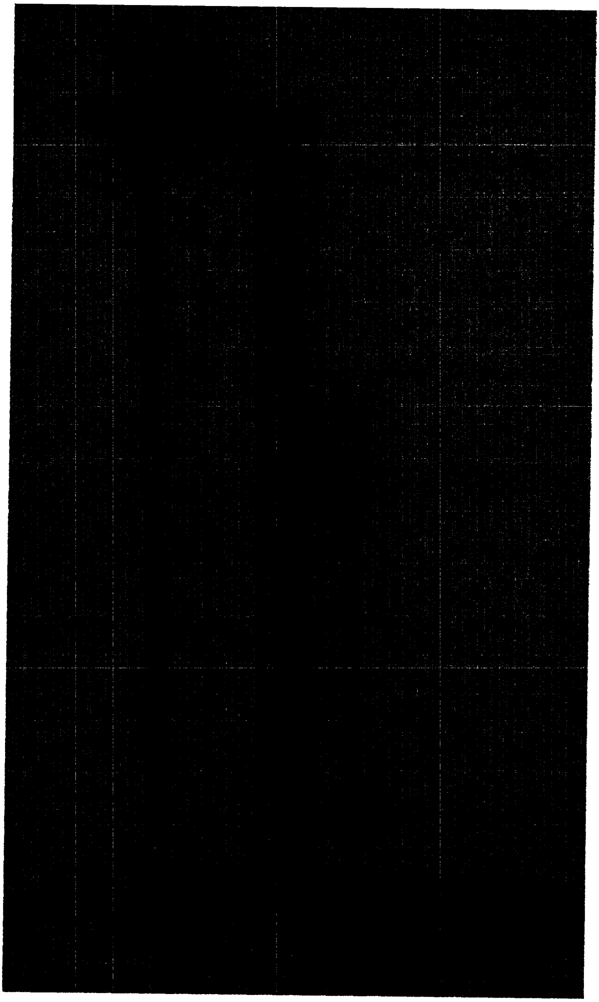
$$حـَ = حـ \times \frac{١٠}{٤٨٠ + ١٠} = \frac{١}{٤٩}$$

ومن حيث ان حـ = ٩٨٠ تقريباً ينتج ان

$$حـَ = \frac{٩٨٠}{٤٩} = ٢٠$$

وبما ان المسافة التي تقطع في الثانية الاولى اذا كان الجسم الساقط مبتدئاً من سكون تساوي نصف العجلة ينتج ان المسافة التي تقطع في الثانية الاولى في آلة اتوود الجامعة للشروط السابقة تساوي ١٠ سنتيمترات وعجلة الحركة الناتجة تساوي ٢٠ سنتيمتراً وزيادة على ما ذكر فنظراً لابطاء الحركة الى هذه الدرجة يمكن اهمال مقاومة الهواء كلية

واضبط انواع آلة اتوود المستعملة الآن مكوَّن من بكرة من الالومينيوم يرتكز طرفا محورها على نقطتي تقابل اربع بكرات كل اثنتين منها في جهة من العجلة الاولى وبهذه الصفة لا يحصل احتكاك محورها في علبتين كما هي العادة بل على اجزاء متحركة تدور معه وبذلك ينقص مقدار الاحتكاك نقصاً عظيماً رغماً عن احتكاك محاور الاربع العجلات المرتكزة عليها العجلة الاولى في نقط ارتكازها



والمجموعة المكوَّنة من الخمس العجلات السالفة الذكر موضوعة على لوحة مثبتة في اعلى قائم من الخشب مرتكز على قاعدة يمكن جعلها افقية بواسطة اربعة مسامير بريمية ويمر في محز البكرة الوسطى خيط رفيع من الحرير يحمل في طرفيه الثقلين ن ه نَ

ويوجد بجوار القائم مسطرة موازية له

ش ( ٨٠ )

مقسمة الى سنتيمترات يتحرك بحذائها الثقلان ں ہ ںَ ويزلق عليها بواسطة فكين قرص ھ يمكن تثبيته في اي نقطة منها بواسطة مسمار بريمي وحلقة و تزلق عليها ايضاً ويمكن تثبيتها في اي نقطة منها بالطريقة السابقة

قانون المسافات — لاجل تعيين قانون المسافات يوضع على الثقل ں الثقل الاضافي ء ويرفع حتى يصير محاذياً لصفر تدريج المسطرة ثم يوقف في هذا الوضع بوضعه على قرص ـہ وعندما يدل دق الساعة على مبدأ ثانية يجذب خيط متصل برافعة حاملة للقرص ـہ فيسقط حينئذٍ ويترك الثقل ں + ء يتحرك بحذاء المسطرة وفي بعض الآلات الحديثة يسقط القرص ـہ من نفسه عند ابتداء الثانية

فمتى تحركت الاثقال في الجهاز يبحث بالتحسس عن النقطة من المسطرة اللازم تثبيت القرص ھ فيها بشرط ان تحصل الصدمة بينه و بين الثقل ں + ء في اللحظة التي تدق فيها الساعة الدقة الدالة على نهاية الثانية فالبعد بين القرصين ھ ہ ـہ يعين حينئذٍ المسافة المقطوعة في ثانية واحدة ثم تعاد التجربة بتعيين الموضع اللازم وضع القرص المتحرك ھ فيه حتى يحصل الصدم بعد ثانيتين وهكذا فيوجد

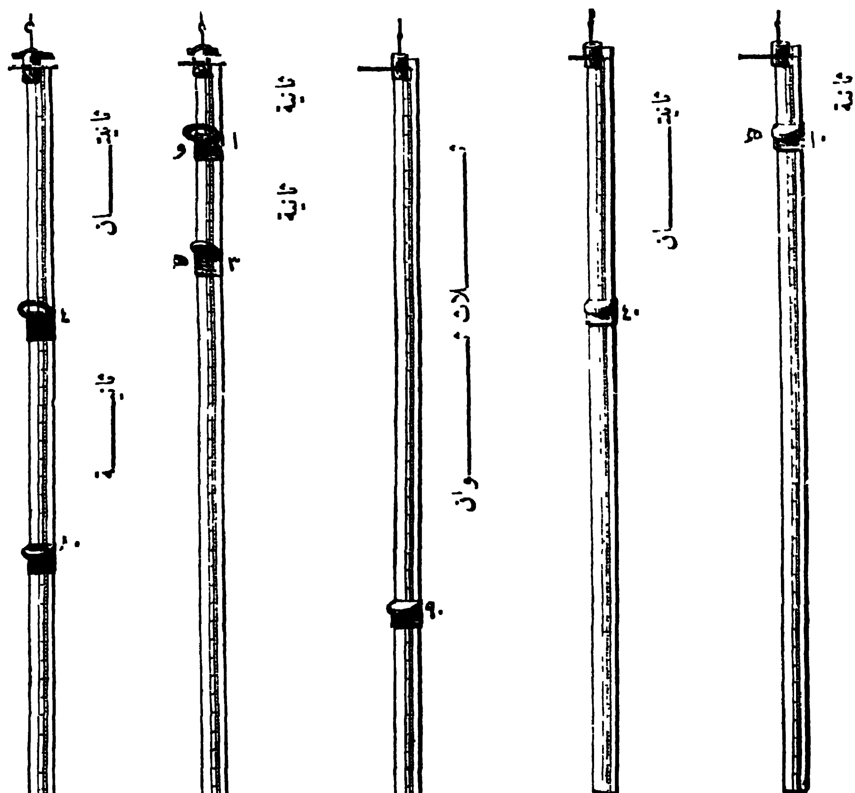
| ازمنة | مسافات سنتيمترات |
| --- | --- |
| ثانية | ١٠ = ١٠ × ١ |
| ثانيتان | ٤٠ = ١٠ × ٢^٢ |
| ثلاث ثوان | ٩٠ = ١٠ × ٣^٢ |
| اربع ثوان | ١٦٠ = ١٠ × ٤^٢ |
| وعلى العموم ں | « ١٠ × ں^٢ |

اعني ان المسافات المقطوعة مناسبة لمربع الازمنة التي تقطع فيها

فاذا رمزنا بالرمز حـَ لضعف المسافة التي تقطع في الثانية الاولى وبالرمز م للمسافة التي تقطع في زمن ما ر ينتج

م = ½ حـَ ر²

قانون السرع — لتعيين قانون السرع المؤيد لقانون المسافات السابق تعيينه تستعمل الحلقة و التي تسمح بمرور الثقل ن منها من غير ان يلامسها وتعوق سير الثقل الاضافي ء الذي يختار طويل الشكل فتوضع اولاً الحلقة و على القسم ١٠ حتى تمنع الثقل الاضافي من السقوط بعد الثانية الاولى فيتحرك حينئذٍ الثقل ن ابتداء من



قانون المسافات — قانون السرع

ش ( ٨١ )

هذه اللحظة حركة منتظمة بالسرعة التي كان متمتعاً بها وقت حذف الثقل ء فيحث حينئذٍ كما سبق عن النقطة من المسطرة اللازم وضع القرص ﻫ فيها حتى يسمع صوت مصادمة الثقل ى له بعد ثانية تمضي من ايقاف القرص ء فالبعد بين النقطتين و ى ﻫ يكون عبارة عن المسافة المقطوعة في ثانية اثناء هذه الحركة المنتظمة اعني السرعة التي اكتسبها الجسم بوصوله الى نقطة و وحفظها اثناء تحركه من و الى ﻫ ثم تعين بهذه الطريقة السرع المكتسبة بعد ثانيتين ثم ثلاث ثوان وهكذا فيوجد

| ازمنة | سرع سانتيمترات | |
|---|---|---|
| ثانية | ٢٠ | = ٢٠ × ١ |
| ثانيتان | ٤٠ | = ٢٠ × ٢ |
| ثلاث ثوان | ٦٠ | = ٢٠ × ٣ |
| أربع ثوان | ٨٠ | = ٢٠ × ٤ |
| وعلى العموم ر ثوان | | ٢٠ × ر |

اعني ان السرع تناسب الازمنة التي تكتسب اثناءها

فاذا رمز للمقدار ٢٠ الذي تزيد به السرعة بعد ثانية بالرمز حـَ ينتج ان

س = حـَ ر

تنبيه — بما ان وحدة الزمن اختيارية ينتج أنه اذا اثرت قوة في جسم ثم حذفت بعد زمن ما فان المسافة التي يقطعها في زمن مساو له تساوي ضعف المسافة التي قطعها اثناء تأثير القوة فيه

استعمال آلة اتوود لتعيين العجلة الحادثة من جذب الارض للاجسام — يمكن ان يستخرج من القانون

$$\frac{\text{حـ}}{\text{حـَ}} = \frac{٢ى + ء}{ء} \quad (١)$$

مقدار حـ بعد تعيين مقدار حـَ بالتجربة الا ان الناتج لا يكون مضبوطاً ضبطاً تاماً

وذلك لكون الثقل الاضافي ء يحرك زيادة على الثقلين ن و نَ البكرة ويولد فيها حركة منتظمة العجلة فلايجاد مقدار ح مقرباً بقدر الامكان يفرض تعويض كتل جميع جزيئات البكرة بكتلة واحدة على بعد من محورها يساوي نصف قطرها س وكتلتها $\frac{\text{مح ك سَ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$ ثم يضاف وزنها الى مجموع الاوزان المتحركة فيؤول حينئذٍ القانون (١) الى

$$\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{٢ن} + \text{ء} + \text{ح}\,\frac{\text{مح ك سَ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}{\text{ء}}$$

فاذا فرض ان $\text{ح}\,\frac{\text{مح ك سَ}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = \text{هـ}$ ينتج

$$\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{٢ن} + \text{ء} + \text{هـ}}{\text{ء}}$$

ويمكن ايجاد مقدار هـ في الالة المستعملة ولذلك تغير مقادير الاثقال ن و نَ و ء وتعين العجلتان الناتجتان حَ و حً فيحدث

$$\text{حَ} = \text{ح} \times \frac{\text{ء}}{\text{٢ن} + \text{ء} + \text{هـ}} \qquad (١)$$

$$\text{حً} = \text{ح} \times \frac{\text{ءَ}}{\text{٢نَ} + \text{ءَ} + \text{هـ}} \qquad (٢)$$

وبقسمة طرفي المتساوية (١) على طرفي المتساوية (٢) ينتج

$$\frac{\text{حَ}}{\text{حً}} = \frac{\text{ء}\,(\text{٢نَ} + \text{ءَ} + \text{هـ})}{\text{ءَ}\,(\text{٢ن} + \text{ء} + \text{هـ})}$$

فيستخرج مقدار هـ من هذه المتساوية ويوضع في المتساوية (١) التي يمكن ان يستخرج منها حينئذٍ مقدار ح ومع ذلك لا تكون النتيجة مضبوطة ضبطاً تاماً

نظراً لاهمال كل من الاحتكاك ووزن الخيط وعلى كل حال فالطريقة الوحيدة الممكن استعمالها لتعيين مقدار ح بالضبط هي طريقة استعمال البندول

طريقة موران — يجعل في هذه الطريقة الجسم الساقط يعين بنفسه الاوضاع التي يشغلها في اللحظات المتتالية ولهذه الطريقة فائدة وهي تعيين قانون الحركة في جميع اللحظات التي يسقط فيها الجسم ولذا اطلق موران على الجهاز الذي وضعه لذلك اسم الجهاز ذي الدلالات المستمرة

شكل (٨٢)

قانون المسافات — لتوضيح طريقة موران نفرض جسماً ثقيلا ساقطاً امام سبورة بيضاء رأسية وحاملاً لقلم يتكئ سنه الراسم على السبورة فاذا كانت ثابتة رسم القلم على سطحها خطاً مستقيماً رأسياً اما اذا كانت متحركة حركة افقية منتظمة فيرسم عليها القلم خطاً منحنياً يمكن بواسطته تعيين قانون الحركة والدليل على ذلك اننا اذا اعتبرنا احدى نقط الخط المذكور ولتكن و ظهر لنا انه في اللحظة التي كان فيها سن القلم في النقطة المذكورة كان الخط الرأسي و وَ من السبورة شاغلاً للوضع الذي كان فيه ا ب وقت ابتداء التحرك وبما ان حركة السبورة منتظمة يكون الخط ب وَ دالاً على الزمن من وقت ابتداء سقوط الجسم فاذا رمزنا بالحرف س لسرعة السبورة اي لمقدار انتقالها في الثانية وبالحرف ر لزمن السقوط كان

$$\text{ر} = \frac{\text{ب وَ}}{\text{س}}$$

اما المسافة التي يكون قطعها الجسم في الزمن المذكور فتكون عبارة عن ا ب

ولتعيين قانون الحركة نرسم مستقيمات موازية للمستقيم ا ب وعلى مسافات متساوية مثل حـ حَ ء ءَ هـ هَ و وَ ثم نرسم من نقط تقابلها مع المنحني

مستقيمات م مَ ، ﻫ ﻫَ ، ط طَ ، و ب فتكون المسافات المقطوعة والازمنة التي تقطع فيها مبينة بما يأتي

| مسافات | ازمنة |
|---|---|
| ا مَ | $\frac{\text{مَ م}}{\text{س}}$ |
| ا ﻫَ | $\frac{\text{ﻫَ ﻫ}}{\text{س}}$ |
| ا طَ | $\frac{\text{طَ ط}}{\text{س}}$ |
| ا ب | $\frac{\text{ب وَ}}{\text{س}}$ |

فنجد انه اذا كانت الازمنة مبينة بالاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ الخ كانت المسافات مبينة بالاعداد ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، الخ

اعني ان المسافات المقطوعة تناسب مربعات الازمنة التي تقطع فيها اي ان

$$\text{ا ب} = \text{هـ} \times \text{ب و}^{٢}$$

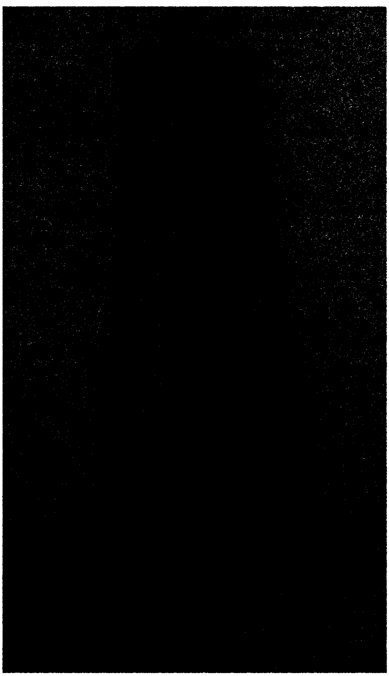
وبما ان القانون السابق عبارة عن معادلة القطع المكافئ بالنسبة لمحوره والمماس من رأسه ( ينتج ان محصلة الحركة المستقيمة الافقية المنتظمة والحركة الرأسية المنتظمة العجلة قطع مكافئ )

قانون السرع — لايجاد قانون السرع نقول ان السرعة في وقت ما كالوقت الذي يكون فيه الجسم الساقط في الوضع ع تقدر بظل الزاوية ع ل و المكونة من المماس للمنحني في نقطة ع والخط الافقي ا و فاذا عين مقدار السرعة س في هذا الوقت بتعيين ظل الزاوية المذكورة ثم عين مقدارها سَ في وقت آخر نجد ان

$$\frac{س}{س'} = \frac{ر}{ر'}$$

اي ان السرع تناسب الازمنة التي تكتسب فيها

و يمكن ايضاً استعمال جهاز موران لتعيين العجلة ح الناشئة من جذب الارض للاجسام الساقطة وذلك بتعيين المسافة التي يقطعها الجسم الساقط في الثانية الاولى من سقوطه وضربها في ٢ غير ان الناتج لا يكون الا تقريبيًّا



ش (٨٣)

وصف جهاز موران — لصعوبة عمل سبورة تتحرك حركة منتظمة تعوض باسطوانة رأسية ارتفاعها متران تقريباً وقطرها ١٥ سنتيمتراً و يلف عليها شريط من الورق وتدار الاسطوانة المذكورة بواسطة ثقل ب مثبت في طرف حبل ملفوف حول محور مار بمركز اطار مسنن اسنانه معشقة من جهة في طيات بريمة محورها محور الاسطوانة ومن اخرى في اطار مسنن افقي في محوره ساق يحمل اجنحة رأسية فاذا اسقط الثقل ب فانه يولد في الاسطوانة حركة دوران تأخذ في الازدياد غير ان الاجنحة بدورانها اثناء ذلك تزيد مقاومة الهواء كلما زادت سرعة الدوران و ينتهي الحال ان تكون مقاومة الهواء للاجنحة مساوية للجذب الواقع من الارض على الثقل ب وتنتظم حينئذ حركة دوران

الاسطوانة ابتداء من هذه اللحظة ويتخب عادة اتساع الاجنحة السالفة الذكر بحيث تنتظم حركة الاسطوانة متى وصل الثقل ب تقريباً الى ثلثي ارتفاعهـا وعندما يراد اعادة التجربة يرفع الثقل ب بادارة المحور الملفوف عليه الحبل بواسطة يد هـ مثبتة فيه

اما الثقل ء الذي يستعمل لبيان طبيعة الحركة فمصنوع من حديد الظهر وهو اسطواني ومنتهٍ من اسفله بمخروط لاضعاف مقاومة الهواء له وعلى جانبي الثقل المذكور حلقتان يمر في وسطهما سلكان رأسيان من الحديد يبعدان قليلاً عن الاسطوانة ويصلحان كدليلين للثقل عند سقوطه وذلك لمنع احتكاك القلم الراسم بالاسطوانة عند دورانها من تحويل الثقل ء عن وضعه الرأسي

ويكون الثقل الراسم في مبدأ التجربة في الجزء العلوي من الاسطوانة وممسكاً بملقاط فمتى انتظمت حركة الاسطوانة يشد خيط مثبت في الملقاط من حلقة و فينفتح ويسقط الثقل فيرسم القلم الراسم على الاسطوانة المنحني المبين للحركة وبعد وصول الثقل الراسم الى اسفل الاسطوانة توقف حركتها ثم يبسط فرخ الورق الذي كان مغطياً سطحها فيوجد عليه المنحني المبين للحركة


ش (٨٤)

حركة الاجسام المقذوفة من اسفل الى اعلى — يستعمل جهاز موران ايضاً لتعيين حركة الاجسام المقذوفة من اسفل الى اعلى على الاتجاه الرأسي وكيفية ذلك ان يستقبل الثقل الراسم على قرص من الصمغ المرن يقذفه متى وصل اليه من اسفل الى اعلى فيحصل على منحنٍ جزءاه متماثلان بالضبط يرسم احدهما عند صعود الجسم الراسم والآخر عند سقوطه فينتج من ذلك ان حركة الاجسام المقذوفة من اسفل الى اعلى على الاتجاه الرأسي منتظمة التقصير

استعمال الشرر الكهربائي المتعاقب — ان اساس الطريقة التي يستعمل فيها الشرر الكهربائي المتعاقب هو اضاءة الجسم الساقط زمناً قصيراً جداً لا يتغير فيه وضعه بمقدار محسوس فتراه العين حينئذٍ شاغلاً هذا الوضع دون سواه

فاذا فرضنا جسماً ساقطاً وليكن كرة من العاج واضأناه كل عشر ثانية ابتداء من اللحظة التي يبتدئ فيها في السقوط وكانت مدة اضاءته لا تدوم اكثر من $\frac{1}{1000}$ من الثانية لرأيناه على التوالي في الاوضاع التي يشغلها بعد كل عشر من الثانية وزيادة على ما ذكر فنظراً لبقاء صور المرئيات على شبكية العين بعد زوال الاضاءة عنها نرى الكرة وهي في عدة من اوضاعها ومن الممكن عمل صورة فوتوغرافية لها وهي في هذه الاوضاع فيلاحظ في الصورة المأخوذة ان المسافات التى تقطعها الكرة اثناء سقوطها تناسب مربع الازمنة التي تقطع فيها

النتيجة — ينتج من جميع ما سبق ما يأتي

اولا — تأثير الثقل في الاجسام واحد في النقطة الواحدة من سطح الارض

ثانياً — الحركة الحادثة من تأثير الثقل في الاجسام منتظمة العجلة

وهاتان النتيجتان تدلان على ان الثقل في النقطة الواحدة من سطح الارض قوة ثابتة المقدار والاتجاه

وتقدر شدة الثقل بمقدار ﺟ اي بشدة القوة الناتجة من جذب الارض لكتلة الجرام لاننا اذا فرضنا في القانون

$$ق = ك ﺟ$$

ان $ك = ١$ كانت $ق = ﺟ$

حركة المقذوفات في الفراغ — اذا ترك جسم ونفسة في الفراغ فان المسافة م

التي يقطعها في زمن $\text{ز}$ والسرعة $\text{س}$ التي يكتسبها اثناء الزمن المذكور تبين بالقوانين الآتية

$$\text{م} = \tfrac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{ز}^{2}$$

$$\text{س} = \text{ح}\,\text{ز}$$

$$\text{س} = \sqrt{2\,\text{ح}\,\text{م}}$$

اما اذا قذف الجسم من اعلى الى اسفل في الاتجاه الرأسي وكانت سرعته وقت قذفه $\underset{\cdot}{\text{س}}$ فيكون

$$\text{م} = \underset{\cdot}{\text{س}}\,\text{ز} + \tfrac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{ز}^{2} \qquad (1)$$

$$\text{س} = \underset{\cdot}{\text{س}} + \text{ح}\,\text{ز} \qquad (2)$$

$$\text{س} = \sqrt{\underset{\cdot}{\text{س}}^{2} + 2\,\text{ح}\,\text{م}} \qquad (3)$$

واذا كان الجسم ساقطاً على سطح مائل تعوض $\text{ح}$ في القوانين بالمقدار $\text{ح}$ حا $\text{ى}$ ( $\text{ى}$ تدل على زاوية ميل السطح المائل على المستوي الافقي )

وتستعمل القوانين (١) و (٢) و (٣) في حالة ما يقذف الجسم من اسفل الى أعلى انما يجب في هذه الحالة مراعاة قاعدة العلامات ومع ذلك فالاوفق لبيان التقهقر الذي يحصل في حركة الجسم اثناء صعوده بتأثير جذب الارض ان توضع القوانين السابقة بالصورة الآتية

$$\text{م} = \underset{\cdot}{\text{س}}\,\text{ز} - \tfrac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{ز}^{2} \qquad (4)$$

$$\text{س} = \underset{\cdot}{\text{س}} - \text{ح}\,\text{ز} \qquad (5)$$

$$\text{س} = \sqrt{\underset{\cdot}{\text{س}}^{2} - 2\,\text{ح}\,\text{م}} \qquad (6)$$

والاجسام التي تقذف من اسفل الى اعلى في الاتجاه الرأسي يصل ارتفاعها ه

الى نهاية عظمى ثم تعود بعد وصولها اليه فتسقط ثانية ولايجاد مقدار الارتفاع المذكور نقول انه عند وصول الجسم الى هذا الارتفـاع تكون سرعته معدومة ويتنتج حينئذٍ بتطبيق القانون ( ٥ ) ان

$$٠ = \text{س}_{٠} - \text{حـ}\,\text{ر} \quad \text{او}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{س}_{٠}}{\text{حـ}}$$

ويوضع بدل $\text{ر}$ في ( ٤ ) ما يساويها وهو $\frac{\text{س}_{٠}}{\text{حـ}}$ ينتج

$$\text{م} = \text{هـ} = \text{س}_{٠} \times \frac{\text{س}_{٠}}{\text{حـ}} - \frac{١}{٢}\,\text{حـ}\,\frac{\text{س}_{٠}^{٢}}{\text{حـ}^{٢}} = \frac{\text{س}_{٠}^{٢}}{٢\,\text{حـ}}$$

ومتى وصل الجسم الى هذا الارتفاع عاد الى السقوط وكانت سرعته $\text{س}'$ وقت وصوله الى النقطة التي قذف منها مبينة بالمتساوية

$$\text{س}' = \sqrt{٢\,\text{حـ}\,\text{هـ}}$$

وبما ان $\text{هـ} = \frac{\text{س}_{٠}^{٢}}{٢\,\text{حـ}}$ ينتج ان

$$\text{س}' = \sqrt{٢\,\text{حـ}\,\frac{\text{س}_{٠}^{٢}}{٢\,\text{حـ}}} = \sqrt{\text{س}_{٠}^{٢}} = \text{س}_{٠}$$

اعني ان سرعة الجسم متى وصل الى النقطة التي قذف منها تكون مساوية وفي اتجاه مضاد الى السرعة التي قذف بها ويمكن ان يقال ايضاً ان كل مقذوف من اسفل الى اعلى في الاتجاه الرأسي يصل للارتفاع الذي لو اسقط منه لاكتسب عند وصوله الى نقطة قذفه السرعة التى قذف بها

اما الزمن نَ الذي يصل فيه الجسم عند عودته الى السقوط من اعلى ارتفاع يصل اليه الى نقطة القذف فيستخرج من المتساوية

$$ه = \frac{1}{2} ح نَ^{2}$$

و بتعويض ه بما تساويه وهو $\frac{س^{2}}{2ح}$ ينتج

$$\frac{س^{2}}{2ح} = \frac{1}{2} ح نَ^{2}$$ او

$$نَ = \frac{س}{ح} = ن$$

اعني ان الزمن الذي يسقط فيه الجسم يساوي الزمن الذي يرتفع فيه

و بما انه لا فرق بين نقطة القذف واي نقطة من نقط الخط الرأسي الذي يتحرك عليه المقذوف ينتج ان سرعتي المتحرك تكونان متساويتين ومختلفتي الاتجاه في اللحظتين اللتين يمر فيهما بنقطة واحدة وان الزمن الفاصل لهاتين اللحظتين من اللحظة التي يكون فيها المقذوف في نهاية ارتفاعه واحد


ش ( ٨٥ )

و يمكننا اثبات ذلك مباشرة وذلك بان نرمز بالرمز ن للزمن الذي يصعد فيه المقذوف من ا الى ب ثم يسقط من ب الى ء وبالرمز نَ للزمن الذي يصعد فيه من ا الى ب وبالرمز $ن_{1}$ للزمن الذي يرتفع فيه من ا الى ء وبالرمز ن للزمن الذي يسقط فيه من ب الى ء وبالرمز ه للارتفاع ا ب وبالرمز م للمسافة ا ء وبالرمز مَ للمسافة ب ء وبالرمز س لسرعة المقذوف وقت مروره بنقطة ء وهو صاعد وبالرمز سَ لسرعته وقت مروره بها وهو ساقط فينتج

$$\text{مَ} = \tfrac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{رَ}^{2} \qquad (1)$$

$$\text{سَ} = \text{ح}\,\text{رَ} \qquad (2)$$

وبما ان $\quad \text{رَ} = \text{ر} - \text{رَ} = \text{ر} - \frac{\text{سب}}{\text{ح}}$

وكذلك $\quad \text{مَ} = \text{هـ} - \text{م} = \frac{\text{سب}^{2}}{2\,\text{ح}} - \text{م}$

فاذا عوضنا في (٢) $\text{رَ}$ بما يساويها ينتج

$$\text{سَ} = \text{ح}\,\text{ر} - \text{سب} = -\,\text{س}$$

اعني ان سرعة المتحرك وقت مروره بنقطة ء وهو صاعد تساوي وفي اتجاه مضاد لسرعته وقت مروره بها وهو نازل وبذا يرى انه يمكن استعمال القانون $\text{س} = \text{سب} - \text{ح}\,\text{ر}$ لايجاد سرعة المتحرك سواء كان المقذوف صاعداً او نازلا

واذا عوضنا في (١) $\text{مَ}$ و $\text{رَ}$ بما يساويهما ينتج

$$\frac{\text{سب}^{2}}{2\,\text{ح}} - \text{م} = \frac{\text{ح}}{2}\left(\text{ر}^{2} - \frac{2\,\text{ر}\,\text{سب}}{\text{ح}} + \frac{\text{سب}^{2}}{\text{ح}^{2}}\right) \qquad \text{او}$$

$$\frac{\text{سب}^{2}}{2\,\text{ح}} - \text{م} = \frac{\text{ح}\,\text{ر}^{2}}{2} - \text{ر}\,\text{سب} + \frac{\text{سب}^{2}}{2\,\text{ح}}$$

وحينئذٍ يكون

$$\text{م} = \text{سب}\,\text{ر} - \frac{\text{ح}\,\text{ر}^{2}}{2}$$

اعني ان المعادلة التي نستخرج منها مقدار الزمن $\text{ر}$ الذي يقطع فيه المقذوف

المسافة ﻫ صعوداً والمسافة مَ هبوطاً عين المعادلة التي يستخرج منها الزمن زً الذي يقطع فيه المتحرك المسافة م صعوداً اي ان اكبر جذري المعادلة $م = \underset{\cdot}{س}\, ز - \frac{1}{2} ح\, ز^2$ يعين ز واصغرها يعين زً

اما مقدار س الذي يستخرج من القانون

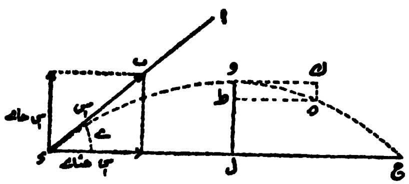
$$س^2 = \underset{\cdot}{س}^2 - 2\, ح\, م$$

وهو

$$س = \pm \sqrt{\underset{\cdot}{س}^2 - 2\, ح\, م}$$

فيعين ايضاً مقداري السرعة اثنـاء مرور الجسم صعوداً وهبوطاً بنقطة واحدة والمقـداران الناتجان متساويان ومختلفا العلامة اي ان السرعتين متساويتان ومتضادتا الاتجاه

حركة المقذوفات في اتجاه غير الرأسي — ذكرنا عند التكلم على طريقة موران التي يثبت بها قانون سقوط الاجسام ان محصلة حركتي السبورة والجسم الساقط قطع مكافئ فاذا فرضنا الآن ان السبورة ثابتة وان الجسم الساقط يتحرك اثناء سقوطه حركة منتظمة مساوية وفي اتجاه مضاد لحركة السبورة كان المنحني الذي يرسم عليها بعينه فينتج من ذلك حينئذٍ انه اذا قذف جسم في اتجاه غير الرأسي كان خط سيره قطعاً مكافئاً



ش ( ٨٦ )

ولنبحث الآن عن هذه النتيجة مباشرة وذلك بان نفرض مقذوفاً ء قذف في الاتجاه ء ا بسرعة مقدارها $\underset{\cdot}{س}$ فلايجاد الحركة الحاصلة تحلل سرعته $\underset{\cdot}{س}$ الى اخريين احداها $\underset{\cdot}{س}$ حتا ى في الاتجاه الافقي والآخر $\underset{\cdot}{س}$ حا ى في الاتجاه الرأسي

فتكون حينئذٍ الحركة الحاصلة عبارة عن محصلة حركتين احداهما افقية ومنتظمة سرعتها س. حتا ـــ والثانية رأسية منتظمة التقصير ناتجة من حركة منتظمة سرعتها س. حا ـــ ومن جذب الارض

فاذا رمزنا بالرمزين م ه مَ للمسافتين المقطوعتين في هذين الاتجاهين على التناظر في زمن ر ينتج

$$\text{م} = \text{س}_{\cdot}\ \text{حتا}\ \text{ـــ}\ \text{ر}\quad \text{ه}$$

$$\text{مَ} = \text{س}_{\cdot}\ \text{حا}\ \text{ـــ}\ \text{ر} - \tfrac{1}{2}\ \text{حـ}\ \text{ر}^{2}$$

فمن هاتين المعادلتين يمكن ايجاد وضع المقذوف على خط سيره في اي لحظة ورسم الخط المذكور نقطة فنقطة ومن الممكن ايضاً ايجاد سرعة المقذوف مقداراً واتجاهاً بعد مضي زمن ما ر وذلك بايجاد محصلة سرعتي المقذوف بعد الزمن المذكور فاذا رمزنا للسرعتين المذكورتين بالرمزين س ه سَ ينتج

$$\text{س} = \text{س}_{\cdot}\ \text{حتا}\ \text{ـــ}$$

$$\text{سَ} = \text{س}_{\cdot}\ \text{حا}\ \text{ـــ} - \text{حـ}\ \text{ر}$$

فبعد تعيين موضع المقذوف على خط سيره بعد مضي الزمن ر يرسم متوازي اضلاع السرعتين في الوضع المذكور فقطره يدل طولا واتجاهاً على سرعة المقذوف بعد مضي الزمن المذكور

وبما ان السرعة سَ اي السرعة في الاتجاه الرأسي تأخذ في النقصان فيأتي وقت تصير فيه مساوية الصفر يبتدئ الجسم من بعده في الهبوط اعني ان الارتفاع الرأسي مَ للمقذوف يأخذ في الزيادة الى ان يصل الى نهاية عظمى ثم يأخذ في في النقصان الى ان يقابل الجسم عائق يعوقه عن الحركة

ولنبحث الآن عن بعض الاوضاع الشهيرة التي يمر بها المقذوف ولنبدأ بالبحث عن اعظم ارتفاع يصل اليه

متى وصل المقذوف الى اعلى ارتفاع كانت سرعته في الاتجاه الرأسي معدومة فاذا رمزنا حينئذٍ بالرمز $\text{ن}_{١}$ للزمن الذي يمضي قبل وصول المقذوف الى اعظم ارتفاع وبالرمز $\text{هـ}$ للارتفاع المذكور وبالرمز $\text{م}_{١}$ للبعد الذي يصل اليه في الاتجاه الافقي ينتج

$$٠ = \text{س حا ى} - \text{ح ن}_{١} \qquad \text{او}$$

$$\text{ن}_{١} = \frac{\text{س حا ى}}{\text{ح}}$$

وبتعويض $\text{ن}_{١}$ بما يساويها في معادلتي المسافتين المقطوعتين في الاتجاهين الافقي والرأسي ينتج

$$\text{م}_{١} = \frac{\text{س}^{٢}\,\text{حا ى حتا ى}}{\text{ح}} \qquad (٢)$$

$$\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}\,\text{حا}^{٢}\,\text{ى}}{\text{ح}} - \tfrac{١}{٢}\,\text{ح}\,\frac{\text{س}^{٢}\,\text{حا}^{٢}\,\text{ى}}{\text{ح}^{٢}} = \frac{\text{س}^{٢}\,\text{حا}^{٢}\,\text{ى}}{٢\,\text{ح}}$$

ولايجاد الزمن الذي يمضي حتى يصل المقذوف الى المستوي الافقي الذي قذف منه يقال ان ارتفاعه الرأسي يكون عند ذلك مساوياً للصفر اي ان

$$٠ = \text{س حا ى ن}_{٢} - \tfrac{١}{٢}\,\text{ح ن}_{٢}^{٢}$$

ولهذه المعادلة حلان وهما

$$\text{ن}_{٢} = ٠ \text{ ، } ٥$$

$$\text{ن}'_{٢} = \frac{٢\,\text{س حا ى}}{\text{ح}}$$

والحل الاول يعين لحظة القذف والثاني لحظة الوصول

ولايجاد المسافة التي يقطعها حتى يصل الى المستوي الافقي السالف الذكر يعوض $\text{ن}_{٢}$ في معادلة المسافات المقطوعة في الأتجاه الافقي بما يساويه فينتج

$$\text{ں} = \text{س حتا ى} \times \frac{\text{٢ س حا ى}}{\text{جـ}} = \frac{\text{س}^{٢}\ \text{حا ٢ ى}}{\text{جـ}}$$

ويلاحظ هنا ان المسافة المقطوعة تساوي ضعف المسافة التي يتم قطعها في الأتجاه الافقي وقت وصوله الى اعلى ارتفاع ويستدل من ذلك على ان خط سير الحركة متماثل بالنسبة للخط الرأسي المار بالنقطة التي يكون فيها المقذوف في اعلى ارتفاع

وليلاحظ ايضاً ان ں تصل الى نهايتها العظمى حينما تكون ى = ٤٥° وتكون عند ذلك

$$\text{ں} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{جـ}}$$

اعني انه لايصال مقذوف الى ابعد مسافة ممكنة يجب قذفه في اتجاه يصنع مع الأتجاه الافقي ٤٥° ويكون عند ذلك البعد الذي يصل اليه مساوياً لضعف اعلى ارتفاع يصل اليه اذا قذف في اتجاه رأسي

لاننا اذا بحثنا عن اعظم ارتفاع يصل اليه المقذوف في هذا الأتجاه نجد

$$\text{هـ}_{٢} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢ جـ}}$$

اي نصف المسافة التي تقطع في الأتجاه الافقي

ويؤخذ من المتساوية الاخيرة ان اعلى ارتفاع يصل اليه مقذوف قذف على

على اتجاه يصنع مع الافق زاوية تساوي ٤٥° يساوي الارتفاع الذي يصل اليه لو قذف على الاتجاه الرأسي وللوقوف علي طبيعة خط سير الحركة الناتجة نقول انه بوصول المقذوف الى نقطة و تكون سرعته في الاتجاه الافقي تساوي سٖ حتا ـــى وسرعته في الاتجاه الرأسي معدومة و بعد مضي زمن ر تكون المسافة و ك التي قطعها في الاتجاه الافقي تساوي سٖ حتا ـــى ر والمسافة و ط التي قطعها في الاتجاه الرأسي تساوي ½ ح ر^٢ وحينئذٍ يكون

$$\frac{\text{وك}^{2}}{\text{وط}} = \frac{\text{سٖ}^{2}\ \text{حتا}^{2}\ \text{ـــى}\ \text{ر}^{2}}{\frac{1}{2}\ \text{ح}\ \text{ر}^{2}} = \frac{2\ \text{سٖ}^{2}\ \text{حتا}^{2}\ \text{ـــى}}{\text{ح}} = \text{عدداً ثابتاً}$$

اى ان الشكل الناتج قطع مكافئ

ومن الممكن ايضاً تعيين الزاوية ـــى اذا علمت سرعة المقذوف وكان المراد ايصاله الى بعد معين ں لانه سبق ان

$$\text{ں} = \frac{\text{سٖ}^{2}\ \text{حا}\ 2\ \text{ـــى}}{\text{ح}}$$

ومن ذلك ينتج

$$\text{حا}\ 2\ \text{ـــى} = \frac{\text{ح} \times \text{ں}}{\text{سٖ}^{2}}$$

ولكي تكون المسألة ممكنة الحل يجب ان يكون

$$\text{ح} \times \text{ں} < \text{سٖ}^{2} \quad \text{او}$$

$$\text{سٖ} > \sqrt{\text{ح} \times \text{ں}}$$

فمتى تم هذا الشرط نتج لزاوية ـــى مقدارين ـــىَ و ـــىً يتمم احدهما

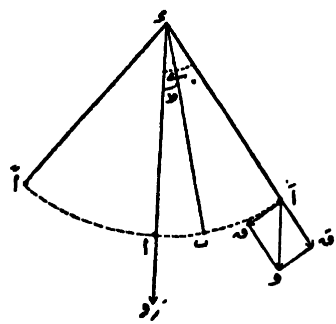
الآخر اي انه للوصول لنقطة معينة يمكن قذف المقذوف في اتجاهين مختلفين يصنعان مع المستوي الافقي زاويتين متممة احداهما للاخرى

## البندول

تعريف — نظراً لاهمية العجلة ح الناتجة من جذب الارض للاجسام لدخولها في كثير من المسائل الميكانيكية كان من المهم جدًّا تعيينها بغاية الدقة وقد ذكرنا فيما مضى انه من الممكن تعيينها باستعمال كل من آلتي اتوود وموران غير ان الناتج في كلتا الحالتين لا يكون مضبوطاً ضبطاً كافياً والطريقة الوحيدة لتعيين مقدار ح بغاية الدقة هي طريقة استعمال البندول

والبندول جسم ثقيل متحرك حول محور افقي غير مار بمركز ثقله كرقاص الساعة الدقاقة وقب الميزان المعتاد ومن المعلوم ان الاجساد المعلقة بهذه الصفة تكون في حالة توازن اذا كان الخط الرأسي المار بمركز ثقلها ماراً ايضاً بمحور تعليقها فاذا حولت عن هذا الوضع وتركت ونفسها تولدت فيها حركات ذهاب واياب متتالية في جهتي موضع توازنها

البندول البسيط — للوقوف على طبيعة حركة البندول السابق تعريفه وهو البندول المركب يفرض وجود بندول تخيلي يسمى البندول البسيط مكوناً من نقطة مادية ثقيلة معلقة في طرف خيط عديم الثقل قابل للثني وغير قابل للامتداد ولامكان عمل بندول يجمع هذه الشروط بقدر المستطاع تستعمل كرة صغيرة ا معلقـة في طرف خيط



ش (٨٧)

رفيع جداً مثبت طرفه الآخر في نقطة ثابتة ء

فاذا تصورنا بندولاً بسيطاً جامعاً للشروط السابقة كان في حالة توازن ما دام الخيط رأسياً الا انه اذا حول عن هذا الوضع الى وضع آخر كالوضع ء اَ وترك ونفسه فتأثير الثقل على النقطة المادية يحركها في مستو رأسي اذ ان اتجاهه كذلك وتكون حركتها على قوس دائرة مركزها ء لانها مرتبطة بالنقطة المذكورة

اعني ان المسألة تؤول الى البحث في طبيعة حركة نقطة مادية تتحرك على قوس من محيط دائرة رأسية

فاذا حللنا وزن النقطة المادية و وهي في الوضع اَ الى قوتين احداهما ںَ في اتجاه الحركة غير الممكنة اي في اتجاه الخيط ء ا والثانية ں في اتجاه الحركة الممكنة اي في اتجاه المماس للقوس ا ا اً ينتج

ںَ = و حتا ـــے

ں = و حا ـــے

فتتحرك حينئذٍ النقطة اَ على القوس اَ ا اَ بتأثير القوة ں

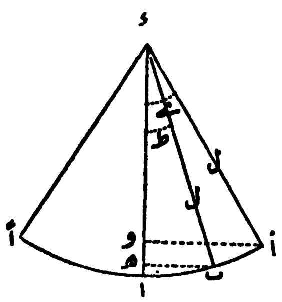
وللوقوف على طبيعة الحركة الناتجة نفرض ان النقطة المادية في وضع آخر ں من اَ ا فتكون القوة المؤثرة فيها عند ذلك تساوي ں حا ط اعني ان القوة التي تؤثر في النقطة المادية اثناء حركتها على القوس اَ ا تكون مناسبة لجيب الزاوية المكونة من اتجاه الخيط والخط الرأسي و بذا تأخذ في النقصان حتى تنعدم متى وصلت النقطة المادية الى ا فينتج من ذلك ان سرعة الحركة تأخذ في الازدياد الذي يكون مقداره اقل من ازدياد سرعة الحركة المنتظمة العجلة ومتى وصلت النقطة المادية الى الوضع ا كانت سرعتها في نهايتها العظمى ولا تثبت النقطة المادية في هذا الوضع بناء على قاعدة

القصور الذاتي بل تتعداه مستمرة في حركتها وتكون القوة المؤثرة فيها اثناء ذلك في اتجاه مضاد لحركتها وآخذة في الازدياد اي ان الحركة تكون تقهقرية وتقهقرها اقل مما في الحركة المنتظمة التقصير و يستمر التحرك حتى تصل النقطة المادية الى الوضع اً المماثل للوضع اَ بالنسبة للخط الرأسي ء ا وذلك لان الشغل الذي احدثه الثقل اثناء السقوط ولد في النقطة المادية حركة قادرة على احداث شغل مساوٍ له ولذا ترفعها بقدر الارتفاع الذي سقطت منه من الوضع اَ

وقد اطلق اسم رجة على حركة البندول من احد الوضعين المتطرفين الى الوضع الآخر وسميت الزاوية ا ء اً اتساع الرجة

واذا فرضنا ان القوس الذي ترسمه النقطة المادية صغير جدّاً كانت جيوب زوايا الانحراف عن الخط الرأسي مناسبة لاقواس الزوايا المذكورة وحينئذ يكون تغير القوة مناسباً لتغير القوس الذي ترسمه النقطة المادية ويمكن في هذه الحالة ايضاً اي عند ما يكون القوس صغيراً جدّاً اعتباره خطاً مستقيماً وحينئذٍ تكون حركة البندول ناشئة من تأثير قوة مستقيمة اتجاهها اتجاه الحركة وشدتها مناسبة لبعد النقطة المادية عن الخط الرأسي

سرعة النقطة المادية — لنبحث الآن عن مقدار سرعة النقطة المادية وهي في نقطة ايّاً كانت ولتكن ٮ من القوس الذي تتحرك عليه ولذلك ننزل من نقطتي ا ٥ ٮ عمودين على ء ا ونرمز لمقدار الشغل اللازم لانزال النقطة المادية من ا الى ٮ بالرمز ش ولكتلة النقطة المادية بالرمز ك ولسرعتها وهي في الوضع ٮ بالرمز س فيكون



ش ( ٨٨ )

$$ش = ح ك \times وهـ = \frac{١}{٢} ك \times س^{٢}$$

وينتج من ذلك ان

$$س^{٢} = ٢ ح \times وهـ \quad \text{او}$$

$$س = \sqrt{٢ ح \times وهـ}$$

ومن الممكن ايضاً ايجاد مقدار س بالنسبة للزاويتين ـــ ه ط لان

$$وهـ = ءهـ - ءو$$

وحينئذٍ يكون

$$س = \sqrt{٢ ح (ءهـ - ءو)}$$

فاذا فرضنا ان طول البندول يساوي ل ينتج

$$ءهـ = \text{حتا } ط \times ل \quad ه \quad ءو = \text{حتا } ـــ \times ل$$

وحينئذٍ يكون

$$س = \sqrt{٢ ح ل (\text{حتا } ط - \text{حتا } ـــ)}$$

سرعة النقطة المادية في الرجات صغيرة الاتساع – لنفرض الآن ان القوس ا اَ صغير جدًّا حتى يمكن اعتباره متحداً مع وتره فيكون حينئذٍ وسطاً متناسباً بين ٢ ل ه ا و ويكون ب ا كذلك وسطاً متنـاسباً بين ا هـ ه ٢ ل فاذا رمزنا بالرمزين م ه ﻫ لطولي القوسين المذكورين على التناظر ينتج

$$ا و = \frac{م^{٢}}{٢ ل} \quad ه \quad ا هـ = \frac{ﻫ^{٢}}{٢ ل}$$

وبما ان

$$س^{٢} = ٢ ح \times وهـ$$

ينتج ان

$$\text{س}^{٢} = ٢\,\text{ح}\,(\text{و ا} - \text{ه ا}) \qquad \text{او}$$

$$\text{س}^{٢} = ٢\,\text{ح}\left(\frac{\text{م}^{٢}}{٢\,\text{ل}} - \frac{\text{ن}^{٢}}{٢\,\text{ل}}\right)$$

$$= \frac{\text{ح}}{\text{ل}}\left(\text{م}^{٢} - \text{ن}^{٢}\right)$$

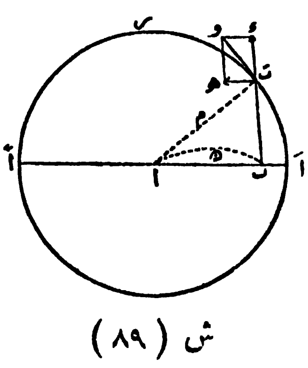
وحينئذٍ يكون

$$\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ل}}\left(\text{م}^{٢} - \text{ن}^{٢}\right)}$$

ويتنج من هذا القانون ان سرعة النقطة المادية تزيد كلما قربت من ا وتصير في نهايتها العظمى متى وصلت الى النقطة المذكورة ثم تأخذ في النقصان حتى تصل الى نقطة ا وتكون حينئذٍ معدومة ويكون مقدارها س عند ما تكون النقطة المادية في ا مبيناً بالمتساوية

$$\text{سَ} = \text{م}\sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ل}}}$$

مدة الرجات الصغيرة الاتساع – لايجاد مدة الرجة الصغيرة الاتساع نبسط قوسها الذي يكون طوله مساوياً ٢ م ونرسم عليه دائرة يكون قطراً لها ثم نتصور نقطة تتحرك حركة منتظمة سرعتها $\text{م}\sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ل}}}$ على محيط الدائرة المذكورة مبتدئة من اَ فمتى وصلت النقطة المذكورة الى الوضع بَ بعد ان تقطع قوساً مسقطه ا ب من شكل ٨٩ يساوي اَ ب من شكل ٨٨ كانت



ش (٨٩)

سرعتها في هذا الوقت في اتجاه المماس ىَ و لمحيط الدائرة فاذا حللنا السرعة المذكورة الى سرعتين احداهما ىَ ء عمودية على اَ ا والاخرى ىَ هـ موازية له ينتج

$$\frac{\text{ىَ هـ}}{\text{ىَ و}} = \frac{\text{ى ىَ}}{\text{ىَ ا}}$$

ومن ذلك ينتج

$$\text{ىَ هـ} = \text{م} \sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ل}}} \times \frac{\sqrt{\text{م}^{2} - \text{ع}^{2}}}{\text{م}}$$

$$\text{ىَ هـ} = \sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ل}} (\text{م}^{2} - \text{ع}^{2})}$$

اعني ان سرعة النقطة ىَ في الاتجاه الافقي اي سرعة مسقطها ى على اتجاه القطر ا ا تساوي سرعة النقطة المادية من البندول وهو في الوضع ء ى ( شكل ٨٨ ) اعني ان سرعة النقطة ـ على الخط اَ ا تكون مساوية لسرعة النقطة المادية من البندول متى كان بعداها عن نقطة ا في الشكلين متساويين فينتج من ذلك حينئذٍ ان الزمن الذي تتحرك فيه نقطة ا حركة منتظمة سرعتها م $\sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ل}}}$ على نصف محيط الدائرة ا ر ا يتحرك فيه مسقطها ى على القطر ا اَ حركة تشبه من جميع الوجوه حركة البندول

فاذا رمزنا حينئذٍ بالرمز ر لزمن رجة البندول ينتج

$$\text{ر} = \frac{\text{ط م}}{\text{م}\sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ل}}}} = \text{ط} \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ح}}}$$

ويمكن اعتبار المتساوية السابقة مضبوطة ضبطاً كافياً ان لم يتعد اتساع الرجة درجتين وهي تدل على ان مدة الرجات الصغيرة الاتساع لا تتعلق باتساعها ولا بكتلة

النقطة المادية المكوّن منها البندول اما اذا كان اتساع الرجة زاوية حيثما كانت ى كان زمنها ميناً بالمتساوية الآتية

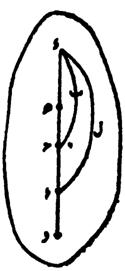
$$\text{ر} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ح}}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\text{حا}^{2}\frac{\text{ى}}{2} + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^{2}\text{حا}^{4}\frac{\text{ى}}{2} + \left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^{2}\text{حا}^{6}\frac{\text{ى}}{2} + \dots\right]$$

واخيراً ان لم يتعد اتساع الرجة ست درجات فمن الممكن الاكتفاء بالحدين الاول والثاني من المتسلسلة مع تعويض جيوب الزوايا بها اي ان القانون يكون

$$\text{ر} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ح}}}\left(1 + \frac{\text{ى}^{2}}{16}\right)$$

تنبيه — عند تعويض الجيوب بالزوايا تعتبر الزاوية النصف القطرية وحدة للزوايا وتقدر الزوايا حينئذ بخارج قسمة قوسها على نصف قطرها

البندول المركب — بما انه من المستحيل عمل بندول بسيط جامع للشروط السابقة كانت البناديل المستعملة مكونة من اجسام ثقيلة لا نقط مادية تتحرك حول محور ثابت غير مار بمركز ثقلها يسمى محور تعليقها وتسمى البناديل المذكورة بناديل مركبة



ع

فاذا فرضنا بندولاً مركباً ع متحركاً حول محور مسقطه في ء واحلناه عن الوضع الذي يتزن فيه حصلت فيه عدة رجات كما سبق لنا بيانه ولا يمكننا الحكم بأن الرجات المذكورة تتبع تماماً القواعد السابق شرحها الا اذا اثبتنا انه يوجد بندول بسيط يرتج تماماً كالبندول المركب السالف الذكر

ش (٩٠)

ولنلاحظ اولاً ان حركة البندول المذكور عبارة عن حركة دوران حول محور حادثة من تأثير قوة ثابتة و مؤثرة في مركز ثقله ه وقد ذكرنا فيما

مضى انه اذا كان جسم متحرك حول محور فمن الممكن نقل جميع جزيئاته الى نقطة هـ تبعد عن محور تعليقه بمسافة تساوي وحدة الاطوال بشرط ان تكون كتلتها مساوية مح كَ س٢ (عزم قصور الجسم) مع نقل القوة و الى النقطة المذكورة بَعد ضربها في بُعد نقطة تأثيرها عن محور الدوران حتى تصير شدتها ك حـ ب بفرض ان ب بعد مركز ثقل البندول عن محور تعليقه

و بناء على ذلك تَكون حركة البندول المركب السالف الذكر تشبه تماماً حركة بندول بسيط مكون من نقطة مادية تبعد عن محور التعليق بمسافة تساوي وحدة الاطوال وكتلتها تساوي مح كَ س٢ وواقع عليها تأثير قوة ثابتة شدةً واتجاهاً مقدارها ك حـ ب

و بما ان العجلة التي تحدث من تأثير هذه القوة هي

$$\text{حـَ} = \frac{\text{ك حـ ب}}{\text{مح كَ س}^{2}}$$

ينتج ان زمن الرجة القليلة الاتساع هو

$$\text{ر} = \text{ط}\sqrt{\frac{1}{\text{حـَ}}} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{مح كَ س}^{2}}{\text{ك حـ ب}}}$$

تنبيه — اذا احدثت قوة في نقطة مادية متحركة حول محور حركة تشبه حركة لبندول الذي رجاته قليلة الاتساع امكن ايجاد عزمها ن × ب بالنسبة المحور المتحركة حوله من القانون

$$\text{ر} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{مح كَ س}^{2}}{\text{ن} \times \text{ب}}}$$

وذلك بتعيين زمن الرجة

ولنبحث الآن عن طول البندول البسيط الذي يتذبذب بتأثير جذب الارض

كالبندول السالف الذكر فاذا فرضنا ان طوله ل كان

$$\text{ر} = \text{ط} \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ح}}}$$

وحينئذٍ يكون

$$\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ح}}} = \sqrt{\frac{\text{مح كَ س}^{٢}}{\text{ك ح ى}}}$$

ومن ذلك ينتج

$$\text{ل} = \frac{\text{مح كَ س}^{٢}}{\text{ك ى}}$$

فاذا فرضنا ان ء ءَ هو طول البندول المذكور سميت نقطة ءَ مركز ارتجاج البندول لان حركتها تكون كما لو كان البندول بسيطاً ومكوّناً منها

ومن حيث ان مح كَ س٢ عبارة عن عزم قصور البندول بالنسبة للمحور ء فاذا رمزنا بالرمز ص لعزم قصوره بالنسبة لمحور مار بمركز ثقله وموازٍ للمحور ء ينتج بناء على ما سبق

$$\text{مح كَ س}^{٢} = \text{ص} + \text{ك ى}^{٢}$$

و بما ان

$$\text{ل} = \frac{\text{مح كَ س}^{٢}}{\text{ك ى}}$$

ينتج ان

$$\text{ل} = \frac{\text{ص}}{\text{ك ى}} + \text{ى} \qquad (١)$$

فاذا فرضنا الآن ان البندول السالف الذكر يتحرك حول محور مواز للمحور ء ومار بالنقطة ءَ كان طول البندول الذي يتذبذب مثله مبيناً بالمتساوية الآتية

$$\text{ل}' = \frac{\text{ص}}{\text{ك}\,(\text{ل} - \text{ى})} + \text{ل} - \text{ى} \qquad \text{اما}$$

$$\text{ل}' = \frac{\text{ص}}{\text{ك ل} - \text{ك ى}} + \text{ل} - \text{ى} \;.$$

وبتعويض ل بما يساويها في ( ١ ) ينتج

$$\text{ل}' = \frac{\text{ص}}{\text{ك}\frac{\text{ص}}{\text{ك ى}} + \text{ك ى} - \text{ك ى}} + \frac{\text{ص}}{\text{ك ى}} + \text{ى} - \text{ى} \qquad \text{اي}$$

$$\text{ل}' = \text{ى} + \frac{\text{ص}}{\text{ك ى}} = \text{ل}$$

اعني ان طول البندول البسيط الذي يتذبذب كالبندول المركب ع حينما يكون محور تذبذبه في ءَ هو عين طول البندول البسيط الذي يتذبذب مثله حينما يكون محور تذبذبه في ء وان طول البندول البسيط المذكور هو ء ءَ

فينتج حينئذٍ مما سبق انه اذا علق البندول المركب ع على احد المحورين المارين بالنقطتين ء و ءَ فان زمن رجته لا يتغير وكانت المسافة بين المحورين المذكورين مساوية لطول البندول البسيط الذي يتذبذب ككل منهما وقد استعملت هذه الطريقة لتعيين طول البندول البسيط الذي يتذبذب كبندول مركب بطريقة التحسس وذلك بانشاء بناديل تسمى بالبناديل القابلة للقلب بها سكينان يمكن استعمال كل منهما محوراً لارتكاز البندول

قوانين البندول — اولاً — يستنتج من القانون

$$\text{ر} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$$

ان اتساع الرجة متى كان صغيراً لا يؤثر على الزمن الذي تحصل فيه

ويمكن اثبات ذلك باستعمال بندول طويل نوعاً مكوّن من كرة صغيرة معلقة في طرف خيط رفيع يحول عن الوضع الذي يتزن فيه بمقدار صغير ثم تقدر المدة التي يعمل فيها مائة رجة ثم ينتظر حتى يصير اتساع الرجة نصف ما كان عليه تقريباً وتقدر المدة التي يعمل فيها مائة رجة اخرى وهكذا حتى يسكن البندول فيعلم ان المدة المذكورة لا تتغير في كل حالة

ويطبق هذا القانون عندما يراد تعيين زمن الرجة القليلة الاتساع ولذلك تقدر المدة التي يرتج فيها البندول عدداً عظيماً من المرات وتقسم على عدد الرجات فتنتج مدة الرجة الواحدة وبهذه الصفة يكون الخطأ غير محسوس اذ انه لا يقع الا في المبدأ والنهاية ويقسم على عدد الرجات

ثانياً يستنتج من القانون السابق ايضاً ان زمن الرجة لا يتعلق بالمادة المصنوع منها البندول

ويمكن التحقق من ذلك باستعمال عدة بناديل طولها واحد وكراتها ذات قطر واحد ومكونة من مواد مختلفة كالنحاس والرصاص والعاج والخشب فيشاهد ان مدة رجة جميعها واحدة وهذه النتيجة تؤيد ما ذكرناه سابقاً من ان العجلة الناشئة من تأثير الثقل على الاجسام المختلفة الطبيعة واحدة في النقطة الواحدة من سطح الارض

ثالثاً — في النقطة الواحدة من سطح الارض زمنا رجة بندولين مختلفي الطول يكونان مناسبين للجذرين التربيعيين لطوليهما

ويستنتج هذا القانون ايضاً من قانون مدة الرجات القليلة الاتساع

لاننا اذا فرضنا بندولاً طوله ل ومدة رجته ر وآخر طوله لَ ومدة رجته رَ ينتج

$$ن = ط \sqrt{\frac{ل}{ج}}$$

$$نَ = ط \sqrt{\frac{لَ}{ج}}$$

وحينئذٍ يكون

$$\frac{ن}{نَ} = \sqrt{\frac{ل}{لَ}}$$

ويمكن اثبات ذلك بالتجربة باستعمال بندولين طول احدهما اربعة امثال طول الآخر فيرى ان الاول يرتج مرة كلما ارتج الثاني مرتين واذا كان طول البندول الاول تسعة امثال طول الثاني يرى انه يرتج مرة كلما ارتج الثاني ثلاث مرات وهكذا

رابعاً — مدد رجات البندول القليلة الاتساع في النقط المختلفة من سطح الارض مناسبة تناسباً عكسيًّا للجذور التربيعية لشدة الثقل في النقط المذكورة

ويستنتج هذا القانون ايضاً من قانون مدة الرجات القليلة الاتساع

فاذا فرضنا ان شدتي الثقل في بقعتين مختلفتين من سطح الارض ج و جَ وكانت مدتا رجة بندول طوله ل فيهما ن و نَ ينتج

$$ن = \sqrt{\frac{ل}{ج}}$$

$$نَ = \sqrt{\frac{ل}{جَ}}$$

وحينئذٍ يكون

$$\frac{ن}{نَ} = \sqrt{\frac{جَ}{ج}}$$

ويمكن التحقق من هذه النتيجة بعمل التجربة في نقط من سطح الارض تختلف عروضها

و بما انه يمكن وضع المتساوية الاخيرة بالصورة

$$\text{ن} \times \sqrt{\text{ح}} = \text{ن}' \times \sqrt{\text{ح}'} = \text{عدداً ثابتاً}$$

ينتج ان حاصل ضرب مدة رجة بندول معين في الجذر التربيعي لشدة الثقل في النقطة الموجود فيها يساوي عدداً ثابتاً و بما ان شدة الثقل تتغير بتغير الارتفاع عن سطح البحر ينتج ان مدة رجة البندول تتغير بتغير علوه عن سطح البحر

تعيين العجلة الناشئة من جذب الارض للاجسام — يطبق لهذا الغرض القانون

$$\text{ن} = \text{ط} \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ح}}}$$

الذي يستخرج منه

$$\text{ح}\,\text{ن}^{٢} = \text{ط}^{٢}\,\text{ل} \quad \text{او}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ط}^{٢}\,\text{ل}}{\text{ن}^{٢}}$$

فاذا علم كل من ل اي طول البندول البسيط الذي يتحد في الرجة مع البندول المركب المستعمل و ن اي مدة رجة البندول المذكور امكن بسهولة استخراج مقدار ح من القانون السابق


ش (٩١)

واول من عين مقدار ح بغاية الدقة هو بوردا وكان ذلك في سنة ١٧٩٢ وقد استعمل لهذا الغرض بندولا مكوناً من كرة من البلاتين قطرها سنتيمتران تقريباً معلقة في سلك رفيع طوله يقرب من المتر وكان محور تعليق البندول المذكور احد احرف منشور من الصلب ا مثبت اعلاه بريمة ب يتحرك عليها مأوى ء واسفله في منتصف حرف ارتكازه ساق صغيرة هـ يمكن تثبيته بمأوى و في

بريمة ع ينفذ من وسطها احد طرفي سلك التعليق الذي ينفذ طرفه الآخر من بريمة ثالثة ط تربط في طربوش معدني رقيق جداً و ملصق بواسطة طبقة رقيقة جداً من الشحم في كرة البلاتين اما مستوي ارتكاز محور التعليق فهو مكوَّن من مستويين صغيرين من الصلب مثبتين في حامل متين وقد ذكرنا فيما مضى ان طول البندول البسيط الذي يتحد في الرجة مع البندول المركب هو

$$\text{ل} = \frac{\text{ص}}{\text{ك ب}} + \text{ب}$$

وتدل ص في هذه المعادلة على عزم قصور البندول المركب بالنسبة لمحور مار بمركز ثقله وموازٍ لمحور تعليقه و ك على كتلته و ب على بعد مركز ثقله عن محور التعليق

وقبل ذكر كيفية ايجاد ص نذكر الطريقة التي اتبعها بوردا لمحو تأثير السكين والقطع المتصلة به في زمن رجة البندول فكان يرفع لهذا الغرض المأوى ء او يخفضها حتى يصل بالتحسس الى جعل زمن رجة السكين وتوابعه منفردة مساوياً لزمن رجة البندول بعد ايصالها به وقد توصل بهذه الطريقة الى جعل البندول يتذبذب كما لو كان السكين وتوابعه غير موجودة وقد تحقق من ذلك بوردا بالتجربة وذلك بتعيين مدة رجة البندول مع استعمال سكينين مختلفين فظهر له انها واحدة في كلتا الحالتين

ويمكن اثبات هذه النتيجة مباشرة وذلك بأن نرمز بالرمز صَ لعزم قصور الكرة والسلك بالنسبة لمحور التعليق و بالرمز بَ لبعد مركز ثقلهما عنه و بالرمز صً لعزم قصور الجزء الحامل للسلك والكرة بالنسبة لنفس المحور و بالرمز بً لبعد مركز ثقله عنه و بالرمز ر لزمن رجة كل من البندولين المكون احدهما من الحامل والسلك والكرة والثاني من الحامل فقط و بالرمز رَ لزمن رجة البندول المكون من الكرة والسلك فقط و بالرمز كَ لكتلة

الكرة والسلك و بالرمز كً لكتلة السكين وتوابعه فينتج ان

$$\text{ر} = \text{ط} \sqrt{\frac{\text{صَ} + \text{صً}}{\text{كَ ح فَ} + \text{كً ح فً}}}$$

وكذلك

$$\text{ر} = \text{ط} \sqrt{\frac{\text{صً}}{\text{كً ح فً}}}$$

وحينئذٍ يكون

$$\frac{\text{صَ} + \text{صً}}{\text{كَ ح فَ} + \text{كً ح فً}} = \frac{\text{صَ}}{\text{كَ ح فَ}} = \frac{\text{صً}}{\text{كً ح فً}}$$

و بما ان

$$\text{رَ} = \text{ط} \sqrt{\frac{\text{صَ}}{\text{كَ ح فَ}}}$$

ينتج ان $\text{رَ} = \text{ر}$

و بذا يثبت المطلوب

فينتج من ذلك حينئذ انه لا تأثير للسكين وتوابعه على زمن رجة البندول وان البندول يرتج كما لو كانت غير موجودة ولنفرض الآن ان البندول مكوّن من كرة البلاتين ليس الا ونهمل السلك والطربوش موءقتاً نظراً لكون كتلتهما تكاد تكون غير محسوسة بالنسبة لكتلة الكرة

و بما ان عزم قصور الكرة بالنسبة لمحور مار بمركز ثقلها يساوي $\frac{\text{٢ نق}^{٢}}{\text{٥}}$ وان طول البندول البسيط ل الذي يتحد في الرجة مع البندول المركب مبين بالقانون

$$\text{ل} = \frac{\text{ص}}{\text{ك ٮ}} + \text{ٮ}$$

ينتج ان

$$\text{ل} = \frac{\text{٢ ى}^{\text{٢}}}{\text{٥ ٮ}} + \text{ٮ}$$

ومن هذا القانون ينتج أنه يكفي لايجاد ل البحث عن نصف قطر كرة البلاتين ى و بعد مركز ثقلها ٮ عن محور تعليق البندول والطريقة التي استعملها بوردا لايجاد نصف قطر الكرة تنحصر في تعيين ما تفقده من وزنها بغمرها في مقدار من الماء معلومة درجة حرارته اما الطريقة التي اتبعها في ايجاد بعد مركز ثقلها عن محور التعليق فتنحصر في استعمال مستوٍ افقي من الصلب موضوع اسفل الكرة يمكن رفعه بواسطة بريمة ميكرومترية حتى يصير مماساً لها وكان يحكم بحصول التماس بوضع لهب شمعة خلف الكرة فمتى اختفى لهبها وامكن رج البنـدول بحيث لا يسمع الا احتكاك خفيف بينه و بين مستوي التماس كان المستوي المذكور مماساً تماماً لكرة البندول ومتى تم ذلك يرفع البندول با كمله ثم يعوض بسكين آخر حامل مسطرة مقسمة الى ملليمترات يوجد صفر تدريجها بالضبط في حذاء سن السكين و يحمل طرفها الآخر لساناً قابلاً للحركة عليها يكوّن معهـا ورنيه فكان يحرك اللسان على المسطرة حتى يلامس طرف السطح الافقي فيحصل بهذه الصفة على ٮ + ى الذي كان يستخرج منه مقدار ٮ

وقد امكنت البرهنة على انه لعدم اهمال الطر بوش والسلك يكفي ان يطرح من المقدار السابق كمية صغيرة جداً و يمكن ايجادها بالحساب والقياس و بذا يؤول القانون الى

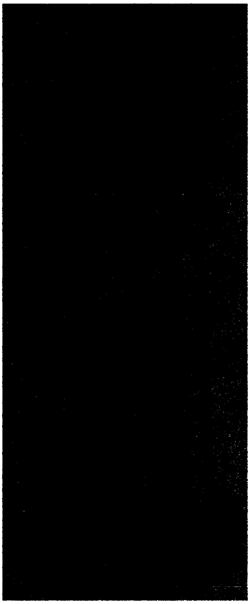
$$\text{ل} = \frac{\text{٢ ى}^{\text{٢}}}{\text{٥ ٮ}} + \text{ٮ} - \text{و}$$

وقد وجد بوردا بتطبيق القانون السابق ان طول البندول الذي استعمله لايختلف كثيراً عن طول البندول البسيط المتحد معه في الرجة لاننـا لو صرفنا النظر عن و وفرضنا ان س = سنتيمترين ، ں = متراً ينتج

$$ل = ١ + \frac{٢ \times (٠,٠٢)^{٢}}{٥} = ١ + \frac{٠,٠٠٠٨}{٥} = ١,٠٠٠١٦$$

ومن ذلك ينتج ان الفرق ضعيف الى درجة يمكن معها اهمال تأثير كل من الطربوش والسلك

تعيين مدة الرجة — الطريقة التي اتبعها بوردا لتعيين مدة رجة البندول هي تعيين الزمن الذي يرتج فيه عدداً عظيماً من المرات وقسمة العدد الناتج على الزمن المذكور وبذا كان يحصل على زمن الرجة غير انه نظراً لصعوبة عد الرجات خصوصاً اذا كانت كثيرة العدد . استعمل بوردا للتخلص من هذه الصعوبة طريقة اطلق عليها اسم طريقة الانطباق والطريقة المذكورة تنحصر في وضع البندول امام رقاص ساعة فلكية يتحد معه في الرجة تقريباً داخل صندوق من الزجاج لوقايتهما من تأثير حركات الهواء بعد ان يلصق في رقاص الساعة السالفة الذكر قرص من الورق مرسوم عليه في اتجاه محور الرقاص خط رفيع رأسي فمتى تم ذلك توضع نظارة بعيدة عن القفص وتوجه بكيفية بحيث يختفي الخط الرأسي المرسوم في الورقة الملصقة على الرقاص خلف سلك البندول اذا نظر اليهما في النظارة وهما في حالة التوازن ثم بعد جعلهما يرتجان تعين الاوقات التي يمر فيها كل من البندول والرقاص بالخط الرأسي المذكور اي اوقات الانطباق ومن الواضح انه في كل انطباق يزيد عدد رجات احدهما عن عدد رجات الآخر بمقدار رجة فاذا رمزنا بالرمز ﻫ لعدد رجات الرقاص بين انطباقين

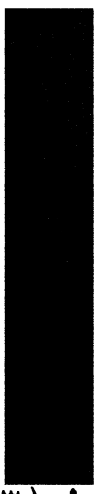


ش (٩٢)

متتالين كان عدد رجات البندول ع + ١ او ع − ١ وقد كان بوردا يعين عدداً عظيماً من الانطباقات ويستخرج متوسط الجميع فكان يحصل على مقدار ع بضبط تام ويستخرج منه مقدار ر

طريقة كاتير — يستعمل في هذه الطريقة البندول القابل للقلب وهذه الطريقة ابسط بكثير من طريقة بوردا وتستعمل على الاخص اذا كان المراد تعيين ء في النقط المختلفة من سطح الارض والبندول المذكور مصنوع من مسطرة من النحاس يحمل احد طرفيها عدسة ثقيلة ء ومثبت قريباً من طرفيها سكينان هـ و حداهما متقابلان ومعلوم البعد بينهما تماماً ومختار بشرط ان تتحد مدتا رجته تقريباً سواء كان معلقاً على احد السكينين او على الآخر فيكفي حينئذٍ ان يجعل بالتحسس مدة هاتين الرجتين واحدة تماماً حتى يكون البعد بين السكينين مساوياً لطول البندول البسيط الذي يتحد معه في الرجة ويتوصل لذلك بواسطة جهاز مركب على المسطرة بين السكينين مكون من قطعتين ا و ب اولاهما ثقيلة نوعاً ويمكن تحريكها على المسطرة في آنٍ واحد مع الاخرى وتثبيتها بواسطة بريمة ضغط والثانية خفيفة وممكن تقريبها او ابعادها عن الاولى بواسطة بريمة اخرى

ولاجراء العمل يبتدأ بتحريك المجموع المكون من القطعتين ثم تقرب القطعة الخفيفة من الثقيلة او تبعد عنها بعد تثبيت هذه الاخيرة



ش (٩٣)

على المسطرة بواسطة بريمتها حتى تتحد مدتا الرجتين فيكون عنـد ذلك البعد بين السكينين مساوياً بالضبط لطول البندول البسيط الذي يتحد في الرجة مع البندول المستعمل

ولايجاد مدة الرجة تستعمل طريقة الانطباق السابق شرحها

تأثير الهواء في زمن رجة البندول — يؤثر الهواء في زمن رجة البندول بكيفيتين احداهما تنتج من دفع الهواء له من اسفل الى اعلى والثانية تنتج من مقاومة الهواء لحركته

و بما ان دفع الهواء للبندول يقدر بوزن الهـواء الذي يزيغه فاذا رمزنا بالرمز ك لكتلة البندول و بالرمز ع لحجمه مقداراً بالسنتيمتر المكعب وبالرمز ه لكثافته وبالرمز ء لكتلة السنتيمتر المكعب من الهواء و بالرمز حـ للعجلة في الهواء و بالرمز حـَ للعجلة في الفراغ كان الوزن الظاهري ك حـ للبندول في الهواء مبيناً بالمتساوية

$$\text{ك حـ} = \text{ك حـَ} - \text{ع ء حـَ} \qquad \text{؟١}$$

$$\text{ك حـ} = \text{ك حـَ} - \frac{\text{ك}}{\text{ه}}\,\text{ء حـَ} \qquad \text{؟١}$$

$$\text{حـ} = \text{حـَ}\left(١ - \frac{\text{ء}}{\text{ه}}\right)$$

اذن

$$\text{حـَ} = \frac{\text{حـ}}{١ - \frac{\text{ء}}{\text{ه}}} \qquad (١)$$

وعندما تكون ه كبيرة يكون $\frac{\text{ء}}{\text{ه}}$ صغيراً ولذا يفضل استعمال البناديل الكثيفة المادة

اما مقاومة الهواء لحركة البندول فتحصل بالكيفية الآتية

عند هبوط البندول من اَ الى ا يستعمل جزء من وزنه في ازاحة الهواء حتى يحل محله وفي تحريكه فينتج من ذلك حينئذٍ ان سرعة البندول في كل لحظة تكون

اقل مما لو كان يتذبذب في الفراغ و بناء على ذلك يستغرق في النصف الاول من الرجة زمناً اطول مما يستغرقه في الفراغ وعند صعوده النصف الثاني من الرجة فانه لا يصل الى الارتفاع الذي ابتدأ منه نظراً لكون سرعته وهو في أوطأ اوضاعه تكون اقل منها في الفراغ هذا خلاف مقاومة الهواء له وهو صاعد ومن ذلك ينتج ان مقاومة الهواء تنقص اتساع الرجات المتتالية وتكون نتيجتها النهائية ايقاف حركة البندول

ولا تغير مقاومة الهواء زمن الرجة بمقدار محسوس اذ ان الزمن الذي يزيد به زمن نصف الرجة اثناء الهبوط يعادل تقريباً الزمن الذي ينقص به زمن نصف الرجة اثناء الصعود وقد ظهر انه للحصول على نتيجة مضبوطة يجب ضرب $\frac{ء}{ه}$ من القانون ( ١ ) في عدد ثابت يتغير بتغير شكل البندول والعدد الثابت المذكور يساوي $\frac{٣}{٢}$ عندما يكون البندول المستعمل هو بندول بوردا

نتائج — قد نتج من تجارب بوردا وكاتير وغيرهما ان شدة الثقل ح تختلف باختلاف العروض وانها تزيد من خط الاستواء الى القطبين واليك بعض مقاديرها في بعض العروض

| | | | |
|---|---|---|---|
| على خط الاستواء | | ٩٧٨,٠٧ | سنتيمتراً |
| « عرض القاهرة | | ٩٧٩,١٢ | « |
| « « | ٤٥° | ٩٨٠,٩٦ | « |
| « « | ٨٠° | ٩٨٣,١٥ | « |

تعيين طول البندول الذي يدق كل ثانية — يمكن ان يستخرج من القانون $ز = ط \sqrt{\frac{ل}{ح}}$ طول البندول الذي يدق كل ثانية في النقط المختلفة من سطح الارض فيوجد

$$\text{١} = \text{ط}^{\text{٢}}\,\frac{\text{ل}}{\text{ح}}$$

وينتج من ذلك ان

$$\text{ل} = \frac{\text{ح}}{\text{ط}^{\text{٢}}}$$

فيكون حينئذ طول البندول الذي يدق كل ثانية بمدينة القاهرة هو

$$\text{ل} = \frac{\text{٩٧٩,١٢}}{(\text{٣,١٤١٦})^{\text{٢}}} = \text{٩٩٢.٠٦ سنتيمتراً}$$

طريقة ايجاد عزوم قصور الاجسام أياً كان شكلها — بما انه من المستحيل ايجاد عزم قصور جسم شكله اياً كان بالنسبة لمحور مار بمركز ثقله بطريقة الحساب فلا بد من ايجاده بطريقة التجربة وذلك بتعيين طول البندول البسيط الذي يتحد معه في الرجة

فاذا اردنا مثلا تعيين عزم قصور قب ميزان بالنسبة لمحور مار بمركز ثقله تعين مدة رجته $\text{ر}$ فيكون طول البندول البسيط الذي يتحد معه في الرجة مبيناً بالقانونين

$$\text{ل} = \frac{\text{ح}\,\text{ر}^{\text{٢}}}{\text{ط}^{\text{٢}}} \qquad \text{،}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ب}} + \text{ب}$$

وينتج من ذلك ان

$$\text{ص} = (\text{ل} - \text{ب})\,\text{ب}\,\text{ك} = \left(\frac{\text{ح}\,\text{ر}^{\text{٢}}}{\text{ط}^{\text{٢}}} - \text{ب}\right)\text{ب}\,\text{ك}$$

واذا طبقنا هذا القانون مع فرض ان مدة رجة القب تساوي ٣ ثوان وان بعد

مركز ثقله عن محور تعليقه يساوي سنتيمتراً نجد ان المقدار $\frac{\text{ص}}{\text{ں ك}}$ الذي كان صغيراً جداً بالنسبة للبعد بين مركز الكرة ومحور التعليق في حالة بندول بوردا كبيراً جداً بالنسبة لهذا البعد في حالة قب الميزان لان

$$\frac{\text{ص}}{\text{ں ك}} = \frac{\text{ح ر}^{٢}}{\text{ط}^{٢}} - \text{ں} = \frac{٩٧٩٫١٢ \times ٩}{(٣٫١٤١٦)^{٢}} - ١ = \frac{٨٨١٢٫٠٨}{٩٫٨٧} - ١ = ٨٩١٫٨١ \text{ سنتيمتراً}$$

## الجذب العام

قوانين كپلر وقانون الجذب العام — ذكرنا فيما مضى ان الثقل لم يخرج عن كونه حالة خاصة من قانون اعم وهو قانون الجذب العام والواضع لهذا القانون هو اسحاق نيوتن بعد ان اثبت صحته وحققها بطريقة واضحة وقد امكن الفلكيين بتطبيق قانون الجذب العام توضيح حركة الكواكب السيارة والاضطرابات التي تحصل فيها وهي الناشئة من جذب البعيدة منها عن الشمس بعضها لبعض بمقادير محسوسة وقد توصل بعض الفلكيين ايضاً بتطبيق هذا القانون الى كشف بعض الكواكب السيارة ومنها نپتون . وقانون الجذم العام هو ان كل جسمين ينجذبان بقوة مناسبة طرداً لحاصل ضرب كتلتيهما وعكساً لمربع المسافة بينهما

فاذا فرضنا جسمين كتلة احدهما ك وكتلة الآخر كَ ورمزنا بالرمز ں للمسافة بينهما كان مقدار انجذابهما بعضهما الى بعض مبيناً بالقانون

$$\text{ٯ} = \frac{\text{ثا ك} \times \text{كَ}}{\text{ں}^{٢}}$$

والرمز ثا يدل على عدد ثابت يسمى ثابت الجذب العام

ولايجاد ما يدل عليه الرمز ثا نفرض ان كلاً من ك ، ك َ يساوي وحدة الكتل اي كتلة الجرام وان د يساوي وحدة الاطوال اي السنتيمتر فينتج ان ق = ثا

و بناءً على ذلك يكون ثابت الجذب العام هو القوة التي تنتج من تأثير وحدة الكتل على وحدة الكتل حينما يكون البعد بينهما مساوياً وحدة الاطوال

ولبيان الطريقة التي اوصلت نيوتن الى كشف قانون الجذب العام نقول ان كثيراً من الفلكيين ونخص بالذكر منهم بتشو براهي ( ١٥٤٦ — ١٦٠٠ ) اجروا عدة ارصاد فلكية استنتج منها كپلر ( ١٥٧١ — ١٦٣٠ ) بعد مجهودات دامت تسع سنوات ثلاثة قوانين خاصة بالكواكب السيارة وهي

القانون الاول — كل سيار يرسم حول الشمس قطعاً ناقصاً يقرب من محيط الدائرة تشغل الشمس احدى بورتيه

القانون الثاني — المساحات المرسومة بانصاف الاقطار البورية لسيار حول البورة الشمسية مناسبة للازمنة التي ترسم فيها

وينتج من هذين القانونين ان سرعة الكواكب السيارة على مداورها غير منتظمة وان سرعتها تزيد كلما كانت اقل بعداً عن الشمس وهذا هو سبب عدم تساوي الفصول الارضية وكون اطولها في نصف الكرة الشمالي هو فصل الصيف واقصرها هو فصل الشتاء

القانون الثالث — مربعات مدد دورات السيارات حول الشمس مناسبة لمكعبات المحاور الكبرى لمداورها

وقد فكر نيوتن طويلاً في الكيفية التي يمكن بها توضيح القوانين السالفة الذكر فاثبت اولا ان كل متحرك يدور حول الشمس طبقاً لقوانين كپلر يجب ان يكون

مجذوباً بقوة واقعـة عليه من مركز المساحات واستنتج من ذلك ان الشمس تجذب جميع السيارات

ولايجاد مقدار الجذب الواقع منها على كل سيار فرض مبدئياً ان مداور السيارات محيطات دوائر تشغل الشمس مراكزها وان حركة السيارات على مداورها منتظمة وهذا جائز اذ انه يقرب من الحقيقـة خصوصاً بالنسبة لبعض السيارات مثل الزهرة ونپتون والارض فان مداورها تقريباً مستديرة وحركتها تكاد تكون منتظمة

فاذا رمزنا بالرمز ں لقوة جذب الشمس لكوكب كتلة ك وبالرمز س لنصف قطر المدار اي للبعد بين الكوكب والشمس وبالرمز ر للزمن الذي يدور فيه السيار دورة كاملة حول الشمس ينتج بناء على ما سبق ان

$$\text{ں} = \text{ك} \times \frac{\text{٤ ط}^{٢}\,\text{س}}{\text{ر}^{٢}} \qquad (١)$$

واذا رمزنا ايضاً بالرمز ںَ لقوة جذب الشمس لكوكب آخر كتلته كَ وبالرمزين سَ ، رَ لنصف قطر المدار والزمن الذي يقطع فيه السيار مداره ينتج

$$\text{ںَ} = \text{كَ} \times \frac{\text{٤ ط}^{٢}\,\text{سَ}}{\text{رَ}^{٢}} \qquad (٢)$$

وبقسمة طرفي المتساوية ( ١ ) على طرفي المتساوية ( ٢ ) ينتج

$$\frac{\text{ں}}{\text{ںَ}} = \frac{\text{ك}}{\text{كَ}} \times \frac{\text{س}}{\text{سَ}} \times \frac{\text{رَ}^{٢}}{\text{ر}^{٢}}$$

وينتج من قانون كيلر الثالث ان

$$\frac{\text{رَ}^{٢}}{\text{ر}^{٢}} = \frac{\text{سَ}^{٣}}{\text{س}^{٣}}$$

وحينئذٍ يكون

$$\frac{\text{ق}}{\text{ق}'} = \frac{\text{ك}}{\text{ك}'} \times \frac{\text{ب}'^{2}}{\text{ب}^{2}}$$

اي ان قوة جاذبية الشمس لكل كوكب مناسبة طرداً لكتلته وعكساً لمربع بعدها عنه

و بما انه يمكن وضع المتساوية الاخيرة على الصورة

$$\frac{\text{ق}}{\frac{\text{ك}}{\text{ب}^{2}}} = \frac{\text{ق}'}{\frac{\text{ك}'}{\text{ب}'^{2}}} = \text{ء}$$ اي عدداً ثابتاً

ينتج ان

$$\text{ق} = \frac{\text{ك} \times \text{ء}}{\text{ب}^{2}}$$ اما

$$\text{ق}' = \frac{\text{ك}' \times \text{ء}}{\text{ب}'^{2}}$$ وهكذا

وهذه هي الطريقة البسيطة التي توصل بها نيوتن لايجاد قانون الجذب العـام الذي خلد اسمه

بيان ان جذب الارض للاجسام التي على سطحها حالة خاصة من قانون الجذب العام — لما رأى نيوتن ان القمر يدور حول الارض طبقاً للقوانين التي تدور تبعاً لها السيارات حول الشمس اختار هذه الخاصة للبرهنة على ان جذب الارض للاجسام التى على سطحها حالة خاصة من قانون الجذب العام ومدار القمر وان كان اختلاف مركزه يزيد قليلا عن اختلاف مركز السيارات اذ ان بعده عن الارض يتغير بين

٦٤ و ٥٦ مرة من طول نصف قطـر الارض فان هذا لا يمنع من فرضه محيط دائرة نصف قطرها يساوي نصف قطر الارض ٦٠ مرة وانه يتحرك عليه حركة منتظمة

اذا تقرر ذلك ورمزنا بحرف ں لقوة جاذبية الارض لوحدة كتل القمر ينتج ان

$$\text{ں} = \frac{\text{٤ ط}^{\text{٢}}\ \text{س}}{\text{ر}^{\text{٢}}}$$

واذا فرضنا ان نصف قطر الارض يساوي سَ وعوضنا ر بما يساويها ينتج

$$\text{ں} = \frac{\text{٤ ط}^{\text{٢}} \times \text{٦٠ سَ}}{\left(\text{١١}'' \ .\ \text{٤٣}' \ .\ \overset{\text{ساعة}}{\text{٧}} \ .\ \overset{\text{يوم}}{\text{٢٧}}\right)^{\text{٢}}}$$

و بما ان القوة ك تساوي الكتلة المجذوبة في العجلة ع والكتلة المجذوبة تساوي وحدة الكتل ينتج ان

$$\text{ع} = \frac{\text{٤ ط}^{\text{٢}} \times \text{٦٠ سَ}}{\left(\text{١١}'' \ .\ \text{٤٣}' \ .\ \overset{\text{ساعة}}{\text{٧}} \ .\ \overset{\text{يوم}}{\text{٢٧}}\right)^{\text{٢}}} \qquad (\text{١})$$

فاذا فرضنا الآن كتلتين تساوي كل منهما وحدة الكتل احداهما على سطح الارض اي على بعد من مركز الجذب يساوي نصف قطر الارض والاخرى على بعد من مركز الارض يساوي ٦٠ سَ اي يساوي بعـد القمر عن مركز الارض ينتج مع فرض ان الثقل حالة خاصة من قانون الجذب العام ان

$$\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{٦٠}^{\text{٢}}}{\text{١}^{\text{٢}}} \qquad \text{اي}$$

$$\text{حَ} = \frac{\text{ح}}{\text{٦٠}^{\text{٢}}} \qquad (\text{٢})$$

فاذا اجرينا العمل في كل من المتساويتين ( ١ ) و ( ٢ ) يلاحظ ان الناتج واحد وهذا يؤيد ان الثقل حالة خاصة من قانون الجذب العام وان الحافظ للقمر على مداره هو قوة جذب الارض له

و بناء على ذلك تكون شدة الثقل حـ اي قوة جذب الارض لوحدة الكتل التي على سطحها مبينة بالقانون الآتي اذا فرض ان كتلة الارض تساوي ك

$$\text{حـ} = \frac{\text{ثا ك}}{\text{س}^{٢}}$$

ويكون وزن اي جسم على سطحها كتلة كَ مبيناً بالقانون

$$\text{و} = \text{ك حـ} = \frac{\text{ثا ك كَ}}{\text{س}^{٢}}$$

فاذا امكن حينئذٍ تعيين كتلة الارض ك امكن تعيين ثابت الجذب العام

## تغير شدة الثقل على سطح الارض

تغير شدة الثقل بتغير الارتفاع — اذا فرضنا ان حـ العجلة الناشئة من جذب الارض لجسم موجود في احدى نقطها في محاذاة سطح البحر و حَ العجلة الناشئة من جذبها له حينما يكون في النقطة عينها و بعيداً عن سطح البحر بمسافة هـ يكون

$$\frac{\text{حَ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{س}^{٢}}{(\text{س} + \text{هـ})^{٢}} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س هـ} + \text{هـ}^{٢}} \qquad (١$$

$$\frac{\text{حَ}}{\text{حـ}} = \frac{١}{١ + \frac{٢\,\text{هـ}}{\text{س}} + \frac{\text{هـ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}$$

وبما ان $\frac{\text{ه}}{\text{س}}$ صغير جداً يرى انه ممكن من غير الوقوع في خطأ محسوس اهمال $\frac{\text{ه}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$ وبذا يكون

$$\frac{\text{ح}'}{\text{ح}} = \frac{١}{١ + \frac{٢\,\text{ه}}{\text{س}}}$$

وبضرب حدى الطرف الثاني من المتساوية الاخيرة في $١ - \frac{٢\,\text{ه}}{\text{س}}$ ينتج

$$\frac{\text{ح}'}{\text{ح}} = \frac{١ - \frac{٢\,\text{ه}}{\text{س}}}{١ - \frac{٤\,\text{ه}^{٢}}{\text{س}^{٢}}} = ١ - \frac{٢\,\text{ه}}{\text{س}}$$

اذ ان $\frac{٤\,\text{ه}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$ صغير جداً ويمكن اهماله من غير وقوع اقل خطأ

فينتج حينئذ من المتساوية الاخيرة ان

$$\text{ح}' = \text{ح}\left(١ - \frac{٢\,\text{ه}}{\text{س}}\right)$$

وبما ان متوسط خارج قسمة الوحدة على متوسط طول نصف قطر الارض هو ٠,٠٠٠٠٠٠١٥٧ يكون

$$\text{ح}' = \text{ح}\,(١ - ٠,٠٠٠٠٠٠٣١٤\ \text{ه})$$

تغير شدة الثقل بتغير العروض — تتغير شدة الثقل في محاذاة سطح البحر بتغير العروض لسببين

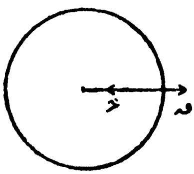
اولا — القوة المركزية الطاردة الناشئة من دوران الارض حول محورها

ثانياً — تفلطح الارض عند قطبيها وانتفاخها عند خط الاستواء

ومقدار تغير شدة الثقل الحادث من هذين السببين يساوي $\frac{٥}{٩٨٠}$ او $\frac{١}{٢٠٠}$ تقريباً اي ان الاجسام تفقد اذا نقلت من القطب الى خط الاستواء بقدر $\frac{١}{٢٠٠}$

من وزنها فاذا طرحنا من مقدار التغير السالف ما ينشأ من حركة دوران الارض امكن باستعمال البندول تعيين شكل خط نصف النهار وقد وجد باتباع هذه الطريقة ان تفلطح الارض يساوي تقريباً $\frac{١}{٣٠٠}$ وهذه النتيجة توافق تماماً النتيجة التي حصل عليها بسّيل بطريقة القياس

ولايجاد مقدار التغير الذي ينشأ من دوران الارض حول محورها وهو الاكثر اهمية نفرض جسماً على خط الاستواء فاذا كانت الارض ثابتة كان الجسم المذكور متزناً بتأثير جذب الارض ورد الفعل الذي يقع عليه منها أما اذا كانت متحركة حول محورها فيتزن بتأثير جذب الارض والقوة المركزية الطاردة ورد الفعل الذي يقع عليه من الارض



ش (٩٤)

فاذا رمزنا لشدة الثقل في الحالة الاولى بالرمز ح وفي الحالة الثانية بالرمز ج ولمقدار القوة المركزية الطاردة التي تنتج على وحدة الكتل الموجودة على خط الاستواء بالرمز ن ينتج

$$\text{ج} = \text{ح} - \text{ن} \qquad \text{١؟}$$

$$\text{ج} = \text{ح} - \frac{\text{٤ ط}^{٢}\,\text{ن}}{\text{ر}^{٢}} \qquad \text{١؟}$$

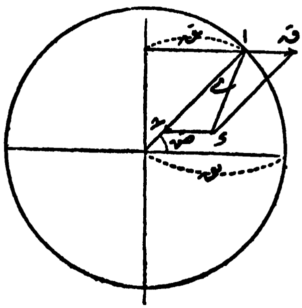
$$\text{ج} = \text{ح}\left(\text{١} - \frac{\text{٤ ط}^{٢}\,\text{ن}}{\text{ح ر}^{٢}}\right)$$

وبما ان $\frac{\text{٤ ط}^{٢}\,\text{ن}}{\text{ح ر}^{٢}} = \frac{١}{٢٨٩}$ ينتج

$$\text{ج} = \text{ح}\left(\text{١} - \frac{١}{٢٨٩}\right)$$

اعني ان القوة المركزية الطاردة تنقص شدة الثقل على خط الاستواء بقدر $\frac{١}{٢٨٩}$

من مقدارها ومن حيث ان ٢٨٩ = ١٧² ينتج انه اذا كانت الارض دائرة بسرعة تساوي سرعتها الحالية سبع عشرة مرة كانت شدة الثقل على خط الاستواء معدومة واذا زادت عن ذلك كانت النتيجة قذف الاجسام التي عند خط الاستواء بعيداً عن الارض



ش (٩٥)

وللوقوف على نتيجة تأثير القوة المركزية الطاردة في نقطة ايًّا كانت ا من سطح الارض نفرض ان شكل الارض كروي اذ لا ينتج من ذلك خطأ محسوس على النتيجة وان عرض النقطة المذكورة ص فتكون وحدة الكتل الموجودة في هذه النقطة متزنة بتأثير القوة المركزية الطاردة نَ وجذب الارض ح ورد الفعل الذي يقع عليها من الارض

فاذا رمزنا بالرمز ن لتأثير القوة المركزية الطاردة في خط الاستواء ينتج

$$\text{نَ} = \frac{\text{٤ ط}^{٢}\ \text{نَ}}{\text{ر}^{٢}} = \frac{\text{٤ ط}^{٢}\ \text{ن حتا ص}}{\text{ر}^{٢}} = \text{ن حتا ص}$$

ويكون قطر متوازي الاضلاع المنشأ على نَ ، ح معيناً لاتجاه الخط الرأسي في نقطة ا ولشدة الثقل ثص الناتجة من تأثير جذب الارض والقوة المركزية الطاردة معاً وبما ان ا ء لا يمر بمركز الارض وان سطح مياه البحار يجب ان يكون عموداً على الاتجاه الرأسي في النقط المختلفة من سطحها ينتج ان سطح مياه البحار ليس كرويًّا

ولايجاد مقدار ا ء اي ثص نقول انه ينتج من المثلث ا ء ح ان .

$$\text{ثص} = \sqrt{\text{ح}^{٢} + \text{ن}^{٢}\ \text{حتا}^{٢}\ \text{ص} - \text{٢ ح ن حتا}^{٢}\ \text{ص}} \qquad \text{او}$$

$$\text{ح}_{\text{ص}} = \sqrt{1 - 2\,\frac{\text{ن}}{\text{ح}}\,\text{حتا}^2\,\text{ص} + \frac{\text{ن}^2}{\text{ح}^2}\,\text{حتا}^2\,\text{ص}}$$

وباهمال قوى $\frac{\text{ن}}{\text{ح}}$ التي تزيد على القوة الاولى نظراً لصغرها وبتعويض $\frac{\text{ن}}{\text{ح}}$ بما يساويه وهو $\frac{1}{289}$ ينتج

$$\text{ح}_{\text{ص}} = \text{ح}\left(1 - \frac{1}{289}\,\text{حتا}^2\,\text{ص}\right)$$

وبما ان $$\text{ج} = \text{ح}\left(1 - \frac{1}{289}\right)$$

ينتج ان

$$\text{ح}_{\text{ص}} = \text{ج}\left(1 + \frac{1}{289}\,\text{حا}^2\,\text{ص}\right)$$

ولايجاد مقدار الزاوية ى التي يصنعها ا د مع المستقيم الواصل من نقطة ا الى مركز الارض نقول انه ينتج من المثلث ا د ح ان

$$\frac{\text{حا ى}}{\text{حا ص}} = \frac{\text{ن}}{\text{ح}} = \frac{\text{ن حتا ص}}{\text{ح}}$$ وبذلك يكون

$$\text{حا ى} = \frac{\text{ن}}{\text{ح}}\,\text{حا ص حتا ص} = \frac{1}{289}\,\text{حا ص حتا ص}$$ او

$$\text{حا ى} = \frac{1}{2\cdot 289}\,\text{حا 2 ص} = \frac{1}{578}\,\text{حا 2 ص}$$

تنبيه — نتج من خواص القطع الناقص ان زيادة شدة الثقل من خط الاستواء الى القطبين تتغير بمقدار جبري يدخل فيه $\text{حا}^2\,\text{ص}$ ولذا قد امكن بيان تغير شدة الثقل الناتج من القوة المركزية الطاردة وتفلطح الارض بمعادلة واحدة وهي الآتية

$$\text{ح}_{\text{ص}} = \text{ج}\left(1 + \frac{1}{193}\,\text{حا}^2\,\text{ص}\right)$$

وبما ان ج = ٩,٧٨٠٧ من الامتار ينتج

$$ج_س = ٩,٧٨٠٧^م \left(١ + \frac{١}{١٩٣} حا^٢ س\right).$$

ومن حيث ان الكسر $\frac{١}{١٩٣}$ = ٠,٠٠٥١٩ اي انه يزيد قليلاً عن ٠,٠٠٥ ينتج ان الوزن المطلق للكيلو جرام يزيد اذا نقل من خط الاستواء الى احد القطبين بقدر وزن خمسة جرامات تقريباً

ويمكن تطبيق القانون السابق لتعيين طول البندول الذي يدق الثانية في اي نقطة محاذية لسطح البحر متى علم عرضها اذ سبق ان

$$ل = \frac{ج}{ط^٢}$$

وحينئذٍ يكون

$$ل_س = ل_٠ \left(١ + \frac{١}{١٩٣} حا^٢ س\right). \quad او$$

$$ل_س = ٠,٩٩١^م \left(١ + \frac{١}{١٩٣} حا^٢ س\right)$$

وينتج من القانون السابق ان طول البندول الذي يدق الثانية في احد القطبين يزيد تقريباً خمسة ملليمترات عن الذي يدقها عند خط الاستواء

وتستعمل احياناً شدة الثقل في عرض ٤٥° لايجاد شدته في عرض ما ويمكن ايجاد القانون المعد لذلك ببعض تحويلات بسيطة في القانون الذي تدخل فيه ج فيوجد

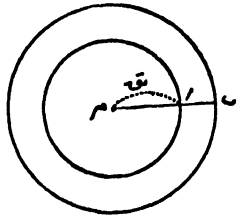
$$ج_س = ج_{٤٥} \left(١ - \frac{١}{٣٨٦} حتا ٢ س\right) \quad او$$

$$ج_س = ٩,٨٠٦١^م \left(١ - \frac{١}{٣٨٦} حتا ٢ س\right)$$

ويكون طول البندول الذي يدق الثانية في عرض ما يساوي

$$ل_س = ٠,٩٩٣٥٧^م \left(١ - \frac{١}{٣٨٦} حتا ٢ س\right)$$

تغير شدة الثقـل في باطن الارض — اذا فرضت الارض متجانسة الاجزاء وكروية امكن بسهولة ايجاد شدة الثقل في اي نقطة داخلها فاذا تصورنا نقطة ا في باطن الارض ومررنا بها سطح كرة متحدة مع الارض في المركز لا يكون للطبقة الارضية المحصورة بين ب و ا تأثير ما على نقطة ا وكان التأثير الواقع عليهـا ناتجاً فقط من الكرة التي نصف قطرها ا م وبما ان تأثير الكرة المذكورة على النقطـة ا يكون كما لو كانت جميع مادتها مجتمعة في مركزها م فاذا رمزنا لنصف قطرها بالرمز سَ ولكثافتها بالرمز $\rho$ كان مقدار العجلة حَ في نقطة ا اي مقدار الجذب الواقع على وحدة الكتل الموجودة في هذه النقطة مبيناً بالمتساوية



ش ( ٩٦ )

$$\text{حَ} = \frac{\text{ثا}\ \frac{4}{3}\ \text{ط}\ \text{سَ}^{3} \times \rho}{\text{سَ}^{2}} = \frac{4}{3}\ \text{ثا}\ \text{ط}\ \rho \times \text{س}$$

اي ان مقدار الجذب يكون مناسباً لبعد النقطة عن مركز الارض

ويمكن ان يستنتج من ذلك انه اذا ترك جسم في فتحة قناة تخترق الارض في اتجاه احد اقطارها كانت حركته فيها كحركة بندول رجته قليلة الاتساع اي ان سرعته تزيد حتى يصل الى مركز الارض ثم تنقص حتى تنعدم متى وصل الى النهاية الاخرى للقناة ثم يعود الى التحرك في جهة مضادة وهكذا

غير انه نظراً لكون الارض غير متجانسة الاجزاء ولكون كثافة اجزائها البعيدة عن سطحها تزيد كثيراً على كثافة طبقاتها القريبة منه فالنتيجة السابقة غير حقيقية وقد وضع احد الطبيعيين القانون الآتي لايجاد شدة الثقل في باطن الارض على بعد ما من سطحها

$$\text{حَ} = \text{ح} \times \text{١٩٩٢}\,\text{سَ}\left(\text{١} - \tfrac{\text{١٢}}{\text{٢٥}}\,\text{سَ}^{\text{٢}}\right)$$

وينتج من هذا القانون ان شدة الثقل تزيد الى مسافة من سطح الارض تساوي سدس نصف قطرها ثم تأخذ في النقصان الى ان تصل المسافة المذكورة الى الثلث ولا يبعد ان يكون القانون السالف الذكر غير مضبوط ولو ان التجارب التي اجراها ايري في منجم فحم بهورتن (كورنويل) ايدته

## تعيين كتلة الارض

تعيين كتلة الارض باستعمال البندول على سطح الارض وفي قاع منجم — كان الغرض من تجارب ايرى السالفة الذكر تعيين كثافة الارض فاذا عينت شدة الثقل حَ في قاع منجم وشدته ح على سطح الارض امكن اذا علمت كثافة الطبقة الارضية المحصورة بين سطح الكرة المارة بقاع المنجم وسطح الارض تعيين كثافة الارض

لاننا اذا رمزنا بالرمز سَ لنصف قطر الكرة المار سطحها بقاع المنجم وبالرمز $\varrho$ لكثافتها المتوسطة وبالرمز ه لعمق المنجم وبالرمز $\bar{\varrho}$ لكثافة القشرة ينتج بناء على ما سبق ان

$$\text{ح} = \text{ثا}\,\tfrac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ط}\,\text{سَ} \times \varrho \qquad (\text{١})$$

وينتج ايضاً ان

$$\text{ح} = \text{ثا}\,\frac{\tfrac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ط}\left\{\text{سَ}^{\text{٣}}\varrho + \left[(\text{سَ}+\text{ه})^{\text{٣}} - \text{سَ}^{\text{٣}}\right]\bar{\varrho}\right\}}{(\text{سَ}+\text{ه})^{\text{٢}}} \qquad \text{او}$$

$$\text{ح} = \text{ثا}\,\tfrac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ط}\left[\frac{\text{سَ}\,(\varrho - \bar{\varrho})}{\left(\text{١} + \frac{\text{ه}}{\text{سَ}}\right)^{\text{٢}}} + (\text{سَ}+\text{ه})\,\bar{\varrho}\right]$$

فاذا اهملنا جميع قوى $\frac{\text{ه}}{\text{سَ}}$ التي تزيد عن القوة الاولى نظراً لصغرها ولعدم تأثيرها

في النتيجة امكن تعويض $\left(\text{١} + \frac{\text{ه}}{\text{نَ}}\right)^{\text{٢}}$ بالمقدار $\frac{\text{١}}{\text{١} + \frac{\text{٢ه}}{\text{نَ}}}$ وهذا الاخير بالمقدار $\text{١} - \frac{\text{٢ه}}{\text{نَ}}$

و بذا يكون

$$\text{ح} = \text{ثا}\,\tfrac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ط}\left[\text{نَ}\,(\text{ر} - \text{رَ})\left(\text{١} - \frac{\text{٢ه}}{\text{نَ}}\right) + (\text{نَ} + \text{ه})\,\text{رَ}\right] \quad \text{او}$$

$$\text{ح} = \text{ثا}\,\tfrac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ط}\left[(\text{ر} - \text{رَ})(\text{نَ} - \text{٢ه}) + (\text{نَ} + \text{ه})\,\text{رَ}\right] \quad \text{او}$$

$$\text{ح} = \text{ثا}\,\tfrac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ط}\left[(\text{نَ} - \text{٢ه})\,\text{ر} - (\text{نَ} - \text{٢ه})\,\text{رَ} + (\text{نَ} + \text{ه})\,\text{رَ}\right] \quad \text{او}$$

$$\text{ح} = \text{ثا}\,\tfrac{\text{٤}}{\text{٣}}\,\text{ط}\left[(\text{نَ} - \text{٢ه})\,\text{ر} + \text{٣ه}\,\text{رَ}\right] \qquad (\text{٢})$$

و بقسمة طرفي المتساوية (٢) على طرفي المتساوية (١) ينتج

$$\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{(\text{نَ} - \text{٢ه})\,\text{ر} + \text{٣ه}\,\text{رَ}}{\text{نَ}\,\text{ر}} \quad \text{او}$$

$$\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{\text{١}}{\text{نَ}}\left[(\text{نَ} - \text{٢ه}) + \text{٣ه}\,\frac{\text{رَ}}{\text{ر}}\right]$$

و بحل هذه المعادلة نجد ان

$$\text{ر} = \frac{\text{رَ}}{\frac{\text{٢}}{\text{٣}} - \left(\text{١} - \frac{\text{ح}}{\text{حَ}}\right)\frac{\text{نَ}}{\text{٣ه}}}$$

فبفحص الاراضي المجاورة للمنجم التي تؤثر على الاخص في البندول الخارجي وجد ان كثافتها تساوي ٢,٥ اما البندول وهو في قاع المنجم فقد وجد انه يتقدم بقدر ٢ ¼ ً في كل اربع وعشرين ساعة اي ان

$$\frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \left(\frac{٨٦٤٠٠}{٨٦٤٠٢,٢٥}\right)^{٢}$$

وكان عمق المنجم الذي اجريت فيه التجربة السابقة ٣٨٣ متراً اي ان

$$\frac{\text{نق}}{\text{هـ}} = ١٦٠٠٠$$

فبتعويض ϱَ و $\frac{\text{ح}}{\text{حَ}}$ و $\frac{\text{نق}}{\text{هـ}}$ بما يساويها في القانون السابق ينتج ان

$$\varrho = ٦,٥٧$$

و بضرب هذا المقدار في حجم الارض تنتج كتلتها

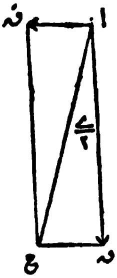
طريقة انحراف المطمار بتأثير جبل — الطريقة الثانية التي استعملت لتعيين كثافة الارض ϱ مؤسسة ايضاً على مقارنة الجذب الواقع من جزء محدود من الارض على جسم بالجذب الذي يقع من باقيها على نفس الجسم فاذا علق مطمار بجوار جبل فانه ينحرف عن الاتجاه الرأسي لجذب الجبل له وقد امكن ماسكيلين بتعيين مقدار هذا الانحراف تعيين مقدار تقريبي لكثافة الارض وقد اختار لهذه الغاية جبلاً منعزلاً في سكوتلاندا متجهاً من الشرق الى الغرب والمادة المكون منها معلومة بغاية الضبط و بهذه الطريقة امكنه تعيين كتلته وموضع مركز ثقله ثم اختار نقطتين ا و ب في مستوى خط نصف النهار المار بمركز ثقل الجبل احداهما شماله والثانية جنوبه ولنفرض لاجل السهولة ان النقطتين المذكورتين توجدان على بعدين متساويين من مركز ثقل الجبل وفي المستوي الافقي المار به

فاذا فرض ان لا وجود للجبل وعين ارتفاع القطب ء عن الافق في كل من النقطتين ا و ب كان الفرق بين الارتفاعين ء ا ف َ و ءَ ب ں يساوي الفرق بين عرضيهما الجغرافيين اي ں — ںَ اما اذا وجد الجبل فنتيجة جذبه تكون امالة

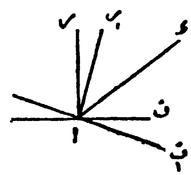
الخطين الرأسيين ر ا ه رَ ب جهته فيأخذان الوضعين رَ١ ا ه رَ١ ب وبذا يزيد ارتفاع القطب عن الافق في ا ويصير ء ا بَ١ وينقص في ب ويصير ءَ ب ب١ ويكون حينئذٍ الفرق بين ارتفاعي القطب في النقطتين عبارة عن

$$\text{ء ا بَ}_{1} + \text{ءَ ب ب}_{1} = \text{ص} - \text{صَ} + \text{ے}$$

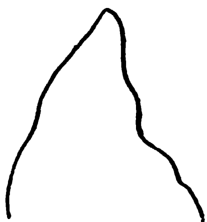
فيعلم حينئذٍ برصد ارتفاع القطب في النقطتين ا ه ب مقدار الزاوية ے وقد وجد ماسكيلن انها تساوي ١١٫٦٦



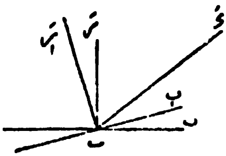
ش (٩٧)



ش (٩٨)



ش (٩٩)



ش (١٠٠)

فاذا فرضنا الآن ان ا ن هو الاتجاه الذي يتزن فيه المطمار اذا كان الجبل غير موجود ه ا ع الاتجاه الذي يتزن فيه مع وجوده كان ا ع عبارة عن محصلة قوتين ن ه نَ موءثرتين في وحدة الكتل الموجودة في ا احداهما ن ناشئة من جذب الارض والثانية نَ ناشئة من جذب الجبل

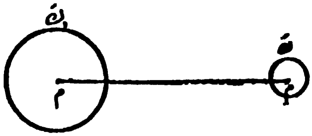
وبما ان

$$\text{ظا}\frac{\text{ے}}{2} = \frac{\text{نَ}}{\text{ن}} = \frac{\;\frac{\text{ثا كَ}}{\text{ب}^{2}}\;}{\frac{\text{ثا ك}}{\text{س}^{2}}} = \frac{\text{كَ} \times \text{س}^{2}}{\text{ك} \times \text{ب}^{2}}$$

مع فرض ان ك كتلة الارض ، ى نصف قطرها ، كَ كتلة الجبل ، ب البعد بين مركز ثقله ونقطة ا

ومن السهل ايجاد ك اي كتلة الارض من هذه المعادلة متى علمت كتلة الجبل ومتى علمت كتلة الارض امكن ايجاد كثافتها ع بقسمة كتلتها على حجمها وقد وجد ماسكيلين باتباع هذه الطريقة ان كثافة الارض تساوي ٤٫٧ تقريباً

طريقة كافانديش — يتوصل لتعيين كثافة الارض بهذه الطريقة بتعيين مقدار الجذب الناتج من كتلتين معلومتين احداها على الاخرى




ش (١٠١)

فاذا فرضنا كرة معدنية كتلتها كَ يبعد مركزها مَ عن مركز كرة معدنية اخرى كتلتها كَ١ مسافة مَ م = ب كان الجذب الواقع من كل من هاتين الكرتين على الاخرى مبيناً بالقانون

$$\text{ن} = \frac{\text{ثا كَ كَ}_1}{\text{ب}^2} \qquad (١)$$

ويكون الجذب الواقع من الارض على الكرة كَ مبيناً بالقانون

$$\text{كَ حـ} = \frac{\text{ثا ك كَ}}{\text{ى}^2} \qquad (٢)$$

مع فرض ان ك كتلة الارض ، ى نصف قطرها

وبقسمة طرفي المتساوية (١) على طرفي المتساوية (٢) ينتج

$$\frac{\text{ن}}{\text{كَ حـ}} = \frac{\text{كَ}_1\ \text{ى}^2}{\text{ك ب}^2} \qquad (٣)$$

فاذا علمت ن في هذه المعادلة امكن تعيين ك اي كتلة الارض

ولتعيين مقدار القوة ن تستعمل قوة اخرى تحدث معها توازناً وهي قوة لي سلك معدني رفيع جداً وقد نتج من تجارب كولومب ان لي سلك رفيع يحدث ازدواجاً عزمه يناسب زاوية لي السلك مقدرة بالزاوية النصف القطرية فاذا عين مقدار عزم هذا الازدواج حينما تكون زاوية لي السلك تساوي الوحدة امكن تعيين عزمه مهما كان مقدار زاوية لي السلك

والجهاز الذي استعمله كافانديش مكوّن

اولا — من سلك رفيع من الفضة مثبت في حامل يمكن تحريكه من خارج غرفة صغيرة يوجد داخلها جميع الجهاز

ويحمل الطرف السفلي من السلك السالف الذكر رافعة افقية طويلة وخفيفة من خشب الصنوبر مثبت في طرفيها كرتان صغيرتان من البلاتين تزن كل منهما ٧٥٠ جراماً

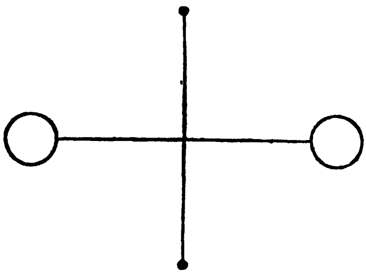
ثانياً — كرتان كبيرتان من الرصاص تزن كل منهما ١٥٨ كيلوجراماً مثبتتان في ساقين رأسيين من الخشب تحملهما عرضة افقية تدار من الخارج بحبل و بكرة

ثالثاً — مسطرة من العاج مقسمة الى اجزاء متساوية يعين بواسطتها مقدار لي السلك وذلك باستعمال نظارة مثبته في جدار الغرفة

رابعاً — مصباح موضوع في جدار الغرفة معد لاضاءة المسطرة السالفة الذكر

وكيفية استعمال هذا الجهاز هي ان يعين مبدئياً مقدار عزم ازدواج السلك عندما تكون زاوية ليهِ تساوي الوحدة اي الزاوية النصف القطرية وللوصول الى ذلك تجعل الكرتان الكبيرتان على بعدين متساويين من الصغيرتين وذلك بجعل اتجاه الرافعة الحاملة للكرتين الصغيرتين عموداً علي الخط الواصل بين مركزي الكرتين الكبيرتين و بهذه

الصفة لا تؤثر الكرتان الكبيرتان في الصغيرتين فتحول حينئذٍ الرافعة عن الوضع التي تتزن فيه فتتذبذب بتأثير قوة اللي فاذا كانت $ر$ مدة رجتها ينتج بناء على ما سبق ان



ش ( ١٠٢ )

$$ر = ط \sqrt{\frac{ص}{ب}} \qquad (١)$$

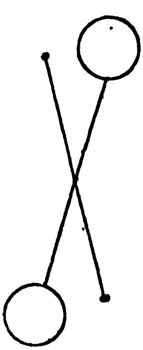
وتدل $ب$ في هذا القانون على عزم ازدواج لي السلك حينما تكون زاوية ليهِ تساوي الوحدة اما $ص$ فتدل على عزم قصور الرافعة والكرتين الصغيرتين بالنسبة لمحور تعليقها ولمناسبة ان الرافعة خفيفة جدًّا بالنسبة لوزن الكرتين يمكن اهمال عزم قصورها اما الكرتان فلمناسبة صغر حجميهما يمكن اعتبارهما من غير الوقوع في خطأ محسوس نقطتين مادتين تبعد كل منهما عن محور الدوران بمسافة $ل$ تساوي طول ذراع الرافعة و بناء على ذلك يكون

$$ص = ٢ \, كَ \, ل^٢$$

و بتعويض $ص$ بما يساويها في ( ١ ) ينتج

$$ر = ط \sqrt{\frac{٢ \, كَ \, ل^٢}{ب}} \qquad \text{او}$$

$$ب = \frac{٢ \, ط^٢ \, كَ \, ل^٢}{ر^٢}$$



ش ( ١٠٣ )

فمتى علم مقدار $ب$ تقرب الكرتان الكبيرتان من الكرتين الصغيرتين فتجذب الاوليان الاخيرتين و بعد قليل يحصل التوازن فيعين حينئذٍ عدد الاقسام $ع$ التي تنتقل بها كل من الكرتين الصغيرتين فاذا

كان طول كل قسم يساوي د كانت زاوية اللي تساوي $\frac{ع د}{ل}$ وكان عزم ازدواج اللي يساوي $ف \times \frac{ϱ د}{ل}$

فاذا رمزنا الآن بالرمز ں لشدة كل من القوتين الناتجتين من الجذب الواقع من كل من الكرتين الكبيرتين على الكرتين الصغيرتين كان

$$٢ ں ل = ف \times \frac{ع د}{ل}$$

وبتعويض ف بما يساويها ينتج

$$ں = \frac{ط^٢ كَ ع د}{ر^٢}$$

واذا وضعنا مقدار ں هذا في المتساوية ( ٣ ) ينتج

$$\frac{ط^٢ ع د}{هـ ر^٢} = \frac{كَ_١ سَ^٢}{ك ب^٢}$$

فيستخرج مقدار ك اي كتلة الارض من هذه المعادلة

ولتعيين كثافة الارض تعوض ك بحاصل ضرب حجم الكرة الارضية في كثافتها ϱ اي بالمقدار $\frac{٤}{٣} ط س^٣ ϱ$ وكتلة كرة الرصاص $كَ_١$ بحاصل ضرب حجمها في كثافة الرصاص ϱَ اي بالمقدار $\frac{٤}{٣} ط سَ^٣ \times ϱَ$ فينتج

$$\frac{ط^٢ ع د}{هـ ر^٢} = \frac{سَ^٣ ϱَ}{ب^٢ س ϱ}$$

وبذلك يكون

$$ϱ = \frac{هـ ر^٢ سَ^٣ ϱَ}{ط^٢ ع د ب^٢ س}$$

وقد وجد كافانديش بهذه الطريقة ان ϱ = ٥٫٤٨

وقد اعاد بعض العلماء الذين اتوا بعد كافانديش ونخص بالذكر منهم ( ١ ) ريش ( ٢ ) بيلي ( ٣ ) كورني وباى ( ٤ ) بويس وهذه هي النتائج التي حصلوا عليها

| | |
|---|---|
| ريش | ٥,٥٨ |
| بيلى | ٥,٦٧ |
| كورنى وباى | ٥,٥٣ |
| بويس | ٥,٥٣ |

وبما ان هذه النتائج تزيد كثيراً عن كثافة الطبقة المكوّنة لسطح الكرة الارضية ( الماء والاحجار ) التي تنحصر كثافتها المتوسطة بين ٢ و ٣ ينتج ان كثافة المواد المكونة لباطن الارض تزيد كثيراً على المواد المكونة لقشرتها الخارجية

مقدار ثابت الجذب العام — يمكن باستعمال مقدار كتلة الارض تعيين ثابت الجذب العام لانه سبق ان

$$\text{ج} = \frac{\text{ثا ك}}{\text{ن}^{٢}} = \frac{\text{ثا } \frac{٤}{٣} \text{ ط ن}^{٣} \text{ ع}}{\text{ن}^{٢}}$$

ومن ذلك ينتج

$$\text{ثا} = \frac{٣}{٤} \times \frac{\text{ج}}{\text{ط ن ع}}$$

وباجراء العمل وجد ان $\text{ثا} = ٦,٦٥ \times ١٠^{-٨}$

# مطبوعات

# الجامعة المصرية

## في سنة ١٩٠٩ — ١٩١٠ « المكتبية »

---

| | عدد الاجزاء |
|---|---|
| **﴿ باللغة العربية ﴾** | |
| تاريخ الأدب أو حياة اللغة العربية لحضرة حفني ناصف بك . مزين برسوم (ظهر منه جزءآن والباقي مائل للطبع) | ٤ |
| علم الطبيعة (خواص المادة) لحضرة اسماعيل حسنين بك . مزين برسوم (ظهر منه جزءآن والباقي مائل للطبع) | ٤ |
| تاريخ علم الفلك عند العرب في القرون الوسطى لحضرة السنيور كرلو نلّينو (ظهر منه الجزء الاول والباقي مائل للطبع) | ٤ |
| **﴿ باللغة الانكليزية ﴾** | |
| تاريخ آداب اللغة الانكليزية (تاريخ التمثيل) للمستر شارل سيشن (تم طبعه) | ١ |
| **﴿ باللغة الفرنسية ﴾** | |
| تاريخ آداب اللغة الفرنسية (تاريخ التمثيل) للمسيو بوفيليه (ظهر منه جزءان والباقي مائل للطبع) | ٤ |
| علم الاقتصاد السياسي للمسيو جرمان مارتان (تم طبعه) | ٤ |
| المرأة وحالتها في الماضي والحاضر لمدموازيل كوفرور (تم طبعه) | ٤ |

---