UNIVERSAL LIBRARY
OU_224619
UNIVERSAL LIBRARY

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نصابِ ذیلی ریاضی

حصۂ اول

برائے طبیعیات بی۔ایس سی

تالیف

مولوی محمد عبد الرحمن خانصاحب، بی۔ایس سی آنرز (لندن)

اسوشیئٹ آف دی رائل کالج آف سائنس (لندن) فیلو آف دی رائل اسٹرونامیکل سوسائٹی۔ فیلو آف دی فزیکل سوسائٹی لندن

سابق صدر کلیہ جامعۂ عثمانیہ حیدرآباد دکن

١٣٥٥ھ مطابق ١٣٤٥ف مطابق ١٩٣٦ء

از دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

دیباچہ

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی کی تیاری میں زیادہ تر اس امر کی کوشش کی گئی ہے کہ جن طلبہ کا اصل مضمون طبیعیات ہو اور جو اعلیٰ ریاضی پر زیادہ وقت نہ صرف کر سکتے ہوں اُن کے لیے ایک ایسی جامع لیکن مختصر کتاب لکھی جائے جس کے مطالعہ سے اُنہیں ریاضی کے ضروری مضامین اور مفید طریقوں سے کافی واقفیت حاصل ہو سکے اور آگے چل کر شوق پیدا ہو کہ اساتذۂ فن کی مستند کتابوں کا تفصیلی مطالعہ کیا جائے۔

اس کے لکھنے میں مؤلف کو بڑی احتیاط برتنی پڑی۔ ایک طرف نصاب پورا کرنا تھا تو دوسری طرف کتاب کا حجم بھی گھٹانا تھا۔ مسائل کی تفہیم کے ساتھ چیدہ چیدہ مشقی سوالات کا شامل کرنا بھی ضروری تھا نہ اس قدر زیادہ کہ طالب علم گھبرا جائے اور نہ اتنے کم کہ مشق کافی نہ ہو۔

انگریزی، فرانسیسی اور جرمن زبانوں میں بھی اس طرز کی کتابیں بہت کم ہیں۔ اور جو ہیں اُن پر کسی نہ کسی پہلو سے اعتراض ہوا ہے۔ جیسے جیسے کام کی اہمیت معلوم ہو رہی ہے اعتراض کم ہوتے آ رہے ہیں۔ کسی خاص کتاب کا اگر ترجمہ کیا جاتا تو نہ نصاب ہی پورا ہوتا اور نہ حجم کم رہ سکتا۔

اس لیے مختلف مدرسی کتابوں سے مدد لینے کی ضرورت محسوس ہوئی حصۂ اول کی تالیف میں جن کتابوں سے خاص طور پر استفادہ کیا گیا اُن کے نام درج ذیل ہیں :—

1. F. G. W. BROWN'S Higher Mathematics.
2. F. S. WOODS AND F. H. BAILEY'S A Course in Mathematics, 2 Volumes.
3. HALL AND KNIGHT'S Higher Algebra.
4. C. SMITH'S Co-ordinate Geometry.
5. W. P. MILNE'S Higher Algebra.
6. D. HUMPHREY'S Advanced Mathematics.
7. LONEY'S Plane Trigonometry, Part II.
8. H. S. CARSLAW'S Plane Trigonometry.

محمد عبدالرحمن خاں

فہرست مضامین

نصاب ذیلی ریاضی - برائے طبیعیات بی - ایس سی جامعۂ عثمانیہ

حصۂ اول

سلسلۂ نشان	مضمون		صفحہ
۱	پہلا باب	مسئلۂ ثنائی	۱
۲	دوسرا باب	جزوی کسور	۲۸
۳	تیسرا باب	مقطعات	۴۴
۴	چوتھا باب	مسئلۂ قوت نما - لوکارتم اور لوکارتمی سلسلہ	۶۶
۵	پانچواں باب	ڈی مؤاور کا مسئلہ اور اس کے استعمال	۸۳
۶	چھٹا باب	قائم اور قطبی محدد - اُن کا استحالہ اور خطِ مستقیم کی مساواتیں	۱۱۰
۷	ساتواں باب	دائرہ کی مساواتیں	۱۴۲
۸	آٹھواں باب	خطِ مکافی کی مساواتیں	۱۷۰
۹	نواں باب	خطِ ناقص کی مساواتیں	۱۸۷
۱۰	دسواں باب	خطِ زائد کی مساواتیں	۲۱۶
۱۱	گیارھواں باب	ماسکہ کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات	۲۳۴
۱۲	بارھواں باب	درجۂ دوم کی عام مساوات	۲۴۲
۱۳	تیرھواں باب	کعبی اور عددی سروں کی مساواتوں کا عملی حل	۲۵۸
۱۴	چودھواں باب	مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع، جب لا اور جم لا کے سلسلے اور زائدی تفاعیل	۲۷۳

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

نصاب ریاضی

برائے

طبیعیات۔ بی۔ اے

پہلا باب

مسئلۂ ثنائی

BINOMIAL THEOREM

۱۔ مسئلۂ ثنائی سے مُراد ایک ضابطہ ہے جس کے ذریعہ کوئی دو رقمی جملہ جو $(\text{لا} + \text{ر})$ کی شکل کا ہو کسی بھی قوت تک بلند کیا جا سکتا ہے یعنی $(\text{لا} + \text{ر})^{\text{ن}}$ کا پھیلاؤ ہے جس میں ن کوئی ایک قوت نما ہے۔

پہلے ہم فرض کرینگے کہ ن ایک مثبت اور صحیح عدد ہے۔

$(\text{لا} + \text{ر})^{\text{ن}}$ واضح ہے کہ ن اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں ہر ایک $(\text{لا} + \text{ر})$ کے مساوی ہے اور اس پھیلاؤ میں ہر ایک رقم ن ابعاد کی ہے اس لئے کہ وہ ن حروف کو ن اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف کو لے کر آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے چنانچہ ہر وہ رقم جس میں $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}} \times \text{ر}^{\text{ر}}$ شریک ہے اس طرح بنتی ہے کہ کسی بھی ر اجزائے ضربی میں سے ر کو لیتے ہیں اور بقیہ ن-ر اجزائے ضربی میں سے لا کو لیتے ہیں اس لئے $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}} \times \text{ر}^{\text{ر}}$ والی رقموں کی تعداد ن اشیاء میں سے ر اشیاء کے طریقہ

انتخاب کی تعداد کے مساوی ہونی چاہیے - یعنی $\text{لا}^{\text{ن-ر}}\,\text{ر}^{\text{ر}}$ کا سر $^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہے - پس ر کو علی الترتیب ۰، ۱، ۲، ۳ ..... ن قیمتیں دینے سے جملہ کی تمام رقموں کے سر حاصل ہو جاتے ہیں - لہٰذا

$$(\text{لا}+\text{ر})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن-۱}}\,\text{ر} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن-۲}}\,\text{ر}^{۲} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن-ر}}\,\text{ر}^{\text{ر}} + \dots + \text{ر}^{\text{ن}}$$

کیونکہ $^{\text{ن}}\text{ج}_{۰}$ اور $^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}$ دونوں کی قیمت ۱ کے مساوی ہے۔

۴- مسئلہ ثنائی کی سادہ ترین شکل $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$ کا پھیلاؤ ہے - یہ شکل پہلی فصل کے عام ضابطہ میں لا کے بجائے ۱ اور ر کے بجائے لا لکھنے سے حاصل ہوتی ہے - لہٰذا

$$(۱+\text{لا})^{\text{ن}} = ۱ + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{۱}\,\text{لا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}} \dots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= ۱ + \text{ن لا} + \frac{\text{ن(ن-۱)}}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{۲} + \dots + \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}\dots\text{(ن-ر+۱)}}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}} + \dots + \text{لا}^{\text{ن}}$$

ہے - جس میں $\frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}\dots\text{(ن-ر+۱)}}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$ عام رقم ہے۔

کسی بھی دو رقمی جملہ کی قوت کو بلند کر کے پھیلانا مقصود ہو تو اس کا آسان ترین طریقہ یہ ہوگا کہ اس دو رقمی جملہ کو ایسی شکل میں بدل دیا جائے جس کی پہلی رقم اکائی ہو اور اس کے بعد مصرحۂ بالا طریقہ سے اسے پھیلا دیا جائے - مثلاً

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ن}} = \left\{\text{لا}\left(۱+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)\right\}^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\left(۱+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$$

بنظرِ سہولت $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کے عوض ی لکھ کر مسئلہ ثنائی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۳- طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ $(\text{لا}+\text{ر})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں جملہ ن + ۱ رقمیں ہوتی ہیں - (ر + ۱) ویں رقم جو کہ عام رقم کہلاتی ہے

$$^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن-ر}}\,\text{ر}^{\text{ر}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}\dots\text{(ن-ر+۱)}}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ن-ر}}\,\text{ر}^{\text{ر}} \quad \text{ہے}$$

اور لا اور ر کو ان کے مناسب قوت نما دینے سے کوئی بھی معیّنہ رقم معلوم

کرلی جا سکتی ہے۔ کسی بھی خاص صورت میں جب یہ ضابطہ استعمال کیا جائے تو یہ بات نگاہ میں رکھنی چاہیے کہ ر کا قوت نما اور ج کی علامت زیرین (Suffix) دونوں ایک ہی ہوتے ہیں اور لا اور ا کے قوت نماؤں کا حاصل جمع ن ہے۔

۴۔ اگر ا کی جگہ (– ا) لکھا جائے تو

$$(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1}(-\text{ا})\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2}(-\text{ا})^{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3}(-\text{ا})^{3}\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}(-\text{ا})^{\text{ن}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1}\,\text{ا}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2}\,\text{ا}^{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} - {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3}\,\text{ا}^{3}\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots + (-1)^{\text{ن}}\,{}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}$$

پس $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}}$ اور $(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کی رقمیں عدداً ایک ہی ہوتی ہیں لیکن $(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}$ میں وہ باری باری سے یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوتی ہیں اور آخری رقم مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔

۵۔ جملہ $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں اس کی ابتداء اور انتہا سے جو رقمیں مساوی بُعد پر واقع ہوتی ہیں ان کے سر مساوی ہوتے ہیں۔

جملہ کی ابتداء سے اگر شروع کریں تو (ر + ۱) ویں رقم کا سر ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہے۔ اور اس کی انتہا سے (ر + ۱) ویں جو رقم ہوتی ہے اس سے پہلے ن + ۱ – (ر + ۱) یا ن – ر رقمیں ہوتی ہیں۔ اس لئے اگر جملہ کی ابتداء سے ہم شمار کریں تو یہ آخرالذکر رقم (ن – ر + ۱) ویں رقم ہوتی ہے اور اس کا سر ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}-\text{ر}}$ ہوتا ہے جو کہ مجموعوں کے خواص کی رُو سے ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

۶۔ جملہ $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑے یعنی اعظم سر کی تعیین۔

چونکہ جملہ کی عام رقم کا سر ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہے اس لئے ہمیں صرف یہی دریافت کرنا مقصود ہے کہ ر کی کس قیمت کے لئے ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ اعظم ہے۔ مجموعوں کے خواص سے ظاہر ہے کہ جب ن ایک جفت اعداد ہوتا ہے

تو اعظم سر $^{\text{ن}}\text{ج}_{\frac{\text{ن}}{2}}$ ہے اور جب ن ایک طاق عدد ہوتا ہے تو $^{\text{ن}}\text{ج}_{\frac{\text{ن}-1}{2}}$ اور $^{\text{ن}}\text{ج}_{\frac{\text{ن}+1}{2}}$ اعظم اور مساوی ہوتے ہیں۔

۷- جملہ $(\text{لا}+\text{ل})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں اعظم رقم کی تعیین۔

چونکہ $(\text{لا}+\text{ل})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{ل}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ اور $\text{لا}^{\text{ن}}$ جملہ $\left(1+\frac{\text{ل}}{\text{لا}}\right)$ کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم کو ضرب دیتا ہے اس لئے کافی ہوگا کہ آخرالذکر جملہ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑی رقم دریافت کی جائے۔

فرض کرو کہ (ر) ویں اور (ر + ۱) ویں رقمیں کوئی سی دو متواتر رقمیں ہیں۔ مسئلہ ثنائی سے ظاہر ہے کہ آخرالذکر اول الذکر کو $\left(\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\times\frac{\text{ل}}{\text{لا}}\right)$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے یعنی $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}-1\right)\frac{\text{ل}}{\text{لا}}$ سے ضرب دینے سے۔

جزوِ ضربی $\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}-1$ گھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے ر بڑھتا جاتا ہے۔

پس (ر + ۱) ویں رقم ر ویں رقم سے ہمیشہ بڑی نہیں ہوتی بلکہ صرف اُس وقت تک بڑی ہوتی ہے جس وقت تک کہ $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}-1\right)\frac{\text{ل}}{\text{لا}}$ کی قیمت ۱ کے مساوی یا اس سے کم ہوتی ہے۔

اب $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}-1\right)\frac{\text{ل}}{\text{لا}} > 1$ تا حالیکہ $\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}-1 > \frac{\text{لا}}{\text{ل}}$

یعنی $\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} > \frac{\text{لا}}{\text{ل}}+1$ یا $\frac{\text{ن}+1}{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}+1} > \text{ر}$

اگر $\frac{\text{ن}+1}{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}+1}$ ایک صحیح عدد ہے تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب اگر ر = پ تو ضرب دینے والا جزو ۱ ہو جاتا ہے اور (پ + ۱) ویں رقم پ ویں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور پھر دو رقمیں بقیہ سب رقموں سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر $\frac{\text{ن}+1}{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}+1}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو تو مصرحۂ بالا شرط (یعنی $\frac{\text{ن}+1}{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}+1} > \text{ر}$) کی تکمیل کے ساتھ ساتھ ر کی سب سے بڑی قیمت ق ہو سکتی ہے۔ پس اعظم رقم (ق + ۱) ویں رقم ہے۔
چونکہ یہاں اعظم رقم سے مراد عدداً اعظم رقم ہے اس لئے $(\text{لا}+\text{ل})^{\text{ن}}$

سے متعلق جو تحقیق عمل میں آئی وہی (لا - ا)$^{\text{ن}}$ پر بھی عائد کی جا سکتی ہے لہٰذا دیئے ہوئے دو رقمی جملہ کی دوسری رقم کی علامت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔ لیکن اس موضوع کے عددی سوالوں کے حل کرنے میں عام ضابطہ سے کام نہیں لینا چاہیے بلکہ ہر سوال کو مصرحۂ بالا طریقہ پر علیحدہ علیحدہ حل کرنا چاہیے۔

۸- جملہ (۱ + لا)$^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں اس کی رقموں کے سروں کے حاصل جمع کی تعیین۔

تماثل
$$(1+\text{لا})^{\text{ن}} = 1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_1\,\text{لا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2\,\text{لا}^2 + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$
میں لا کو ۱ کے مساوی لکھو۔ پس
$$2^{\text{ن}} = 1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_3 + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}$$
= جملہ کے پھیلاؤ کے سروں کا حاصل جمع

اس کا نتیجہ صریح ہے $ {}^{\text{ن}}\text{ج}_1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_3 + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}} = 2^{\text{ن}} - 1$

یعنی ن چیزوں کے مجموعوں کی کُل تعداد $2^{\text{ن}} - 1$ جو مجموعوں کے خواص کی رُو سے بھی ثابت کیا جاتا ہے۔

۹- جملہ (۱ + لا)$^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں طاق رقموں کے سروں کا حاصل جمع جفت رقموں کے سروں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

تماثل $(1+\text{لا})^{\text{ن}} = 1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_1\,\text{لا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2\,\text{لا}^2 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_3\,\text{لا}^3 + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ میں لا کو ۱- کے مساوی لکھو

تب
$$0 = 1 - {}^{\text{ن}}\text{ج}_1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2 - {}^{\text{ن}}\text{ج}_3 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_4 - {}^{\text{ن}}\text{ج}_5 + \cdots$$
$$\therefore\ 1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_4 + \cdots = {}^{\text{ن}}\text{ج}_1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_3 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_5 + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\ (\text{حاصل جمع تمام سروں کا})$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(2^{\text{ن}}) = 2^{\text{ن}-1}$$

۱۰- مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۲ رقموں سے زیادہ والے جملوں کو بھی پھیلا سکتے ہیں۔ بطور مثال

$(1 - \text{لا} + \text{لا}^2)^4 = \{1 - (\text{لا} - \text{لا}^2)\}^4$ ہے۔ اس کو بشکل $(1 - \text{ع})^4$ لکھو

یعنی $(لا - لا^{۲})$ کے عوض $ع$ لکھو۔

چونکہ $(۱ - ع)^{۴} = ۱ + ۴(-ع) + \frac{۴\times۳}{۲\times۱}(-ع)^{۲} + \frac{۲\times۳\times۴}{۳\times۲\times۱}(-ع)^{۳} + \frac{۱\times۲\times۳\times۴}{۴\times۳\times۲\times۱}(-ع)^{۴}$

$= ۱ - ۴ع + ۶ع^{۲} - ۴ع^{۳} + ع^{۴}$

$= ۱ - ۴(لا - لا^{۲}) + ۶(لا - لا^{۲})^{۲} - ۴(لا - لا^{۲})^{۳} + (لا - لا^{۲})^{۴}$

$= ۱ - ۴(لا - لا^{۲}) + ۶(لا^{۲} - ۲لا^{۳} + لا^{۴}) - ۴(لا^{۳} - ۳لا^{۴} + ۳لا^{۵} - لا^{۶})$
$+ لا^{۴} - ۴لا^{۵} + ۶لا^{۶} - ۴لا^{۷} + لا^{۸}$

$= ۱ - ۴لا + ۱۰لا^{۲} - ۱۶لا^{۳} + ۱۹لا^{۴} - ۱۶لا^{۵} + ۱۰لا^{۶} - ۴لا^{۷} + لا^{۸}$

سوالات ۔ (ا)

(۱) $(ا + لا)^{ن}$ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑی رقم کی قیمت دریافت کرو جبکہ $ا = \frac{۱}{۲}$، $لا = \frac{۱}{۴}$، $ن = ۹$

(۲) ثابت کرو کہ $(لا - \frac{۴}{لا^{۲}})^{۶}$ کے پھیلاؤ میں لا سے آزاد رقم ۲۴۰ ہے۔

(۳) بتاؤ کہ $(۱ + لا)^{۲ن}$ کی وسطی رقم کا سر $(۱ + لا)^{۲ن-۱}$ کی دو وسطی رقموں کے سروں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

(۴) $(۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳})^{۵}$ کے پھیلاؤ میں $لا^{۴}$ کا سر دریافت کرو۔

(۵) اگر $^{ن}ج_{.}$، $^{ن}ج_{۱}$، $^{ن}ج_{۲}$ .... $^{ن}ج_{ن}$، $(۱ + لا)^{ن}$ کے پھیلاؤ میں رقموں کے سروں کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$(^{ن}ج_{.})^{۲} + (^{ن}ج_{۱})^{۲} + (^{ن}ج_{۲})^{۲} + \dots + (^{ن}ج_{ن})^{۲} = \frac{(۲ن)!}{ن!\,ن!}$

۱۱۔ مسئلہ ثنائی کا اطلاق مثبت صحیح قوت نما کے علاوہ کسی بھی قوت نما کے ساتھ ہو سکتا ہے۔ لیکن ان صورتوں میں جملہ کے پھیلاؤ کی رقمیں بلحاظ تعداد محدود نہیں ہوتیں۔

ذیل میں عام صورت کے لئے آئیلر (Euler) کا ثبوت دیا جاتا ہے۔

صورت (ا) ــــ جبکہ قوت نما ایک مثبت کسر ہے۔

م کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو، مثبت یا منفی، صحیح یا کسری، فرض کرو کہ

علامت ف (م) سلسلہ $۱ + \text{م لا} + \frac{\text{م(م-۱)}}{۱\times۲}\text{لا}^۲ + \frac{\text{م(م-۱)(م-۲)}}{۱\times۲\times۳}\text{لا}^۳ + \cdots$ کو تعبیر کرتی ہے۔

تب علامت ف (ن) سلسلہ

$$۱ + \text{ن لا} + \frac{\text{ن(ن-۱)}}{۱\times۲}\text{لا}^۲ + \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}}{۱\times۲\times۳}\text{لا}^۲ + \cdots$$

کو تعبیر کریگی۔

اگر ہم ان دونوں سلسلوں کو باہمدیگر ضرب دینگے تو حاصل ضرب لا کی صعودی قوتوں کا ایک دوسرا سلسلہ ہوگا جس کے سر شکل کے اعتبار سے غیر متغیر ہونگے م اور ن خواہ کچھ ھی ھوں۔

اس حاصل ضرب کی یہ غیر متغیر شکل دریافت کرنے کے لئے ہم م اور ن کو موزوں اور سہل ترین قیمتیں دینگے۔ فرض کرو کہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں۔ اس حالت میں ف (م)، $(۱+\text{لا})^{\text{م}}$ کی پھیلائی ہوئی شکل ہوگی اور ف (ن)، $(۱+\text{لا})^{\text{ن}}$ کی پھیلائی ہوئی شکل۔ پس

$$\text{ف (م)} \times \text{ف (ن)} = (۱+\text{لا})^{\text{م}} \times (۱+\text{لا})^{\text{ن}} = (۱+\text{لا})^{\text{م+ن}}$$

لیکن جبکہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہوتے ہیں تو $(۱+\text{لا})^{\text{م+ن}}$

$$۱ + \text{(م+ن) لا} + \frac{\text{(م+ن)(م+ن-۱)}}{۱\times۲}\text{لا}^۲ + \cdots$$ ہے

پس ف (م) × ف (ن) حاصل ضرب کی بہر صورت پھیلائی ہوئی شکل ہے، م اور ن کی قیمتیں خواہ کچھ ہی ہوں۔ اور ہمارے سابقہ طریق کتابت کے مطابق ہم اس حاصل ضرب کو ف (م + ن) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{ف (م)} \times \text{ف (ن)} = \text{ف (م + ن)}$$

معہذا $\text{ف (م)} \times \text{ف (ن)} \times \text{ف (پ)} = \text{ف (م + ن)} \times \text{ف (پ)}$

$$= \text{ف (م + ن + پ)}$$

اس استدلال سے ف (م) × ف (ن) × ف (پ) ..... کے اجزائے ضربی تک

$$= \text{ف}\,(\text{م} + \text{ن} + \text{پ} + \ldots\ldots \text{ ک رقموں تک})$$

م، ن، پ ..... مقادیر میں سے ہر ایک کو $\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}$ کے مساوی لو جہاں ھ اور ک مثبت صحیح اعداد ہیں

$$\therefore \quad \left\{\text{ف}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right)\right\}^{\text{ک}} = \text{ف}\,(\text{ھ})$$

مگر چونکہ ھ ایک مثبت صحیح عدد ہے ف (ھ) = $(۱ + \text{لا})^{\text{ھ}}$

$$\therefore \quad (۱ + \text{لا})^{\text{ھ}} = \left\{\text{ف}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right)\right\}^{\text{ک}}$$

$$(۱ + \text{لا})^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right)$$

لیکن ف $\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right)$ تعبیر ہے سلسلہ $۱ + \frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\,\text{لا} + \frac{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}} - ۱\right)}{۱ \times ۲}\,\text{لا}^{۲} \ldots\ldots$ کی

$$\therefore \quad (۱ + \text{لا})^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}} = ۱ + \frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\,\text{لا} + \frac{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}} - ۱\right)}{۱ \times ۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots$$

اس سے مسئلہ ثنائی کا ثبوت بہم پہنچایا جاتا ہے جبکہ قوت نما کوئی بھی مثبت کسر ہوتی ہے۔

واضح ہو کہ مسئلہ ثنائی کے ہر دو رقمی جملہ کو ہم $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت میں ڈھال سکتے ہیں پس اگر $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے لئے جو بات ثابت کی جاتی ہے اس کا اطلاق عام ہوتا ہے۔

صورت (ب)۔ جبکہ قوت نما کوئی بھی منفی مقدار ہے۔

یہ ثابت ہو چکا ہے کہ ف (م) × ف (ن) = ف (م + ن)، م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے۔ اگر م کے عوض - ن لکھا جائے جس میں ن مثبت ہے تو

$$\text{ف}\,(-\text{ن}) \times \text{ف}\,(\text{ن}) = \text{ف}\,(-\text{ن} + \text{ن}) = \text{ف}\,(۰) = ۱$$

اس لئے کہ پھیلاؤ کے سلسلہ کی تمام رقمیں سوائے پہلی رقم کے کالعدم ہو جاتی ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{۱}{\text{ف}\,(\text{ن})} = \text{ف}\,(-\text{ن})$$

لیکن ف (ن) = (ا + لا)^ن ، ن کی کسی بھی مثبت قیمت کے لئے

$$\therefore \quad \frac{1}{(1 + لا)^{ن}} = ف\,(-ن)$$

$$\text{یا} \quad (1 + لا)^{-ن} = ف\,(-ن)$$

لیکن از روئے قرار داد ف (-ن) سلسلہ

$$1 + (-ن)\,لا + \frac{(-ن)(-ن-1)}{1 \times 2}\,لا^{2}$$ کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\therefore \quad (1 + لا)^{-ن} = 1 + (-ن)\,لا + \frac{(-ن)(-ن-1)}{1 \times 2}\,لا^{2} + \cdots\cdots$$

جس سے مسئلۂ ثنائی کا کسی بھی منفی قوت نما کے لئے ثبوت مہیا ہو جاتا ہے۔ پس مسئلہ ثنائی کمل طور پر ثابت ہو جاتا ہے۔

۱۲- واضح ہو کہ مصرحۂ بالا ثبوت میں جو "معادل شکلوں کے استقلال" کے اصول پر مبنی ہے سلسلوں کے استدقاق و اتساع کی بحث نہیں کی گئی۔ ہم اس پہلو پر ایک سرسری نظر ڈالنا چاہتے ہیں۔

ف (م) کو پھیلانے سے جو جملہ حاصل ہوتا ہے اس کی رقموں کی تعداد متناہی ہوتی ہے جب تک کہ م ایک مثبت صحیح عدد ہے لیکن دوسری تمام صورتوں میں جیساکہ اس فصل کے آخری حصہ میں دیکھینگے اس جملہ کی رقموں کی تعداد نامتناہی ہوتی ہے۔ پس یہ معلوم ہونا چاہیے کہ ف (م) × ف (ن) = ف (م + ن) لکھتے ہیں تو اس کا مفہوم کیا ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ جب لا < ا ف (م)، ف (ن) اور ف (م + ن) یہ تینوں سلسلے مستدق ہوتے ہیں۔ اور ف (م + ن) {ف (م) × ف (ن)} کا صحیح حسابی معادل ہوتا ہے۔ لیکن جب لا > ا تو یہ تینوں سلسلے متسع ہوتے ہیں، اور ہم صرف یہی دعوے کر سکتے ہیں کہ اگر ہم ف (م) اور ف (ن) کے ذریعہ جن سلسلوں کی تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کو ایک دوسرے سے ضرب دیں تو حاصل ضرب

کی پہلی ر رقمیں ف (م + ن) سے تعبیر ہونے والے سلسلہ کی پہلی ر رقموں سے مطابقت رکھتی ہیں۔ ر کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو۔

استدقاق کے امتحان کے سب سے زیادہ موثر طریقوں میں ڈالمبیر (D'Alembert) کا طریقہ ہے جو سلسلہ کی متواتر رقموں کی نسبت کے امتحان پر مبنی ہے۔ اگر ع۱ + ع۲ + ع۳ + ... عن ایک ناتناہی سلسلہ ہے تو وہ مستدق یا متسع ہوگا بلحاظ اس کے کہ نہا $\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}+1}}{\text{ع}_{\text{ن}}}\right)_{\text{ن}\to\infty}$ عدداً ۱ سے کم یا زیادہ ہے۔ لیکن اگر وہ ۱ ہو تو مزید امتحان کی ضرورت ہوگی۔

ظاہر ہے کہ ن جب کسری یا منفی ہوتا ہے تو (۱ + لا)^ن کے پھیلاؤ میں عام رقم کو پوری صراحت کے ساتھ

$$\frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲)}\cdots\text{(ن-ر+۱)}}{|\text{ر}}\ \text{لا}^{\text{ر}}$$

لکھنا چاہیے اس لئے کہ علامت ن ج اب استعمال نہیں کی جاسکتی۔

معہذا عام رقم کا سر کبھی معدوم نہیں ہوسکتا ہے جب تک کہ اس کے شمارکنندہ کے اجزائے ضربی میں سے ایک جزو صفر نہ ہو۔ پس یہ سلسلہ ر-ویں رقم پر اس وقت ختم ہوجائیگا جبکہ ن - ر + ۱ صفر ہوگا۔ یعنی ر = ن + ۱۔ لیکن چونکہ ر ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ یہ مساوات صرف اسی وقت ممکن ہوگی جبکہ ن بھی ایک مثبت اور صحیح عدد ہوگا۔ پس اس سے واضح ہے کہ مسئلۂ ثنائی کے ذریعہ پھیلاؤ رقموں کی محدود تعداد میں (یعنی ن + ۱ رقموں تک) صرف ایسی صورت میں ہوتا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے لیکن بقیہ تمام صورتوں میں رقموں کی تعداد ناتناہی ہوتی ہے۔

سوالات ۱ (ب)

(۱) بتاؤ کہ (۱ - لا)^۵/۲ کو جب مسئلۂ ثنائی کے ذریعہ پھیلاتے ہیں تو اس کی تمام رقمیں بالآخر ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں۔ دریافت کرو کہ وہ علامت

کیا ہے، لا کہاں مثبت ہے اور کہاں سے وہ شروع ہوتا ہے۔

(۲) $(\text{۱} + \text{لا})^{\frac{\text{۱۳}}{\text{۲}}}$ کے پھیلاؤ میں سب سے پہلی منفی رقم کونسی ہے۔

(۳) $(\text{۳}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} + \text{۲}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\,\text{لا})^{\frac{\text{۱۱}}{\text{۲}}}$ کے پھیلاؤ میں ساتویں رقم کو اس کی سادہ ترین شکل میں لکھو۔

(۴) بسیط رقاص کے اہتزاز کا وقتِ دوران $\text{و} = \text{۲}\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ ہے جس میں فرض کرو و کی پیمائش ثانیوں میں ہوتی ہے، ل کی فٹوں میں اور ج = ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ۔ اگر اس رقاص کا طول لا فٹ بڑھ جائے (جہاں لا بمقابلہ ل ایک بہت ہی قلیل مقدار ہے) تو بتاؤ کہ وقتِ اہتزاز بقدر $\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{۱۲}\sqrt{\text{ل ج}}}$ بڑھ جائیگا، اگر چھوٹی مقادیر کے پہلے رتبہ تک ہی جواب صحیح نکالا جائے۔

(۵) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{۹}}{\text{۱۰}}\right)^{\frac{\text{۴}}{\text{۵}}} = \text{۰٫۹۱۹۱۶۶۲}$$

۱۳ — اگر ہم $(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۲}}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۲}} = \text{۱} + \text{۲لا} + \text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{۴لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots$$

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ یہ نتیجہ صرف اس صورت میں صحیح ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمت ۱ سے کم ہوتی ہے۔ پس ہمیں یہ دریافت کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے کہ کیا ہم ہمیشہ مندرجۂ ذیل پھیلاؤ

$$(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{ن لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{۱})}{\text{۱} \times \text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \ldots\ldots$$

کو صادق مان سکتے ہیں، اور اگر نہیں تو کن شرائط کے تحت یہ پھیلاؤ صحیح تصور ہو سکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ن = –۱

تب $(1-\text{لا})^{-1} = 1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \text{لا}^4 + \dots\dots$

اگر اس مساوات میں ہم لا = ۲ لکھیں تو

$(-1)^{-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots\dots$

لیکن یہ نتیجہ صریحاً غلط ہے - پس اس سے صاف ظاہر ہوتا ہے کہ ہم

$$1 + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{لا}^2 + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{1\times 2\times 3}\text{لا}^3 + \dots\dots$$

کو ہر صورت میں $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کا صحیح حسابی معادل نہیں تصور کر سکتے ہیں۔

$1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \dots$ چونکہ ایک ہندسی سلسلہ ہے۔ اس سلسلہ کی پہلی ر رقموں کا حاصل جمع $= \frac{1-\text{لا}^{\text{ر}}}{1-\text{لا}}$

$$= \frac{1}{1-\text{لا}} - \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{1-\text{لا}}$$

اور جب لا عدداً ۱ سے چھوٹا ہوتا ہے تو ر کو کافی بڑا لینے سے ہم $\frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{1-\text{لا}}$ کو جس قدر چھوٹا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ یعنے اسی سلسلہ کی اگر کافی رقمیں لی جائیں تو اُن کے حاصل جمع کو $\frac{1}{1-\text{لا}}$ سے جس قدر کم مختلف کہ ہم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ لیکن جب لا عدداً ۱ سے بڑا ہوتا ہے تو $\frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{1-\text{لا}}$ کی قیمت ر کے ساتھ بڑھتی جاتی ہے اور اس لئے سلسلۂ مصرحہ بالا کی خواہ کتنی بھی رقمیں لی جائیں اس کے حاصل جمع کی قیمت $\frac{1}{1-\text{لا}}$ کے تقریباً مساوی نہیں ہو سکتی ہے۔

بذریعہ مسئلہ ثنائی جب $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جاتا ہے تو اس کا سلسلہ متدق اور اس لئے حساباً قابلِ فہم ہوتا ہے صرف اس صورت میں جبکہ لا کی قیمت ۱ سے کم ہوتی ہے اگر ہم ڈالیمبر والا متواتر رقموں کی نسبت کے امتحان کا طریقہ استعمال کریں تو معلوم ہوگا کہ چونکہ (ر + ۱) ویں رقم (جس کو ہم $\text{ع}_{\text{ر}+1}$ لکھینگے) اور (ر) ویں رقم (جس کو $\text{ع}_{\text{ر}}$ لکھینگے)

میں نسبت $\frac{\text{ع}_{\text{ر}+1}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \dfrac{\dfrac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots\dots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\text{ر}!}\text{لا}^{\text{ر}}}{\dfrac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots\dots(\text{ن}-\text{ر}+2)}{(\text{ر}-1)!}\text{لا}^{\text{ر}-1}}$

$$-\frac{(\text{ن} - \text{ر} + 1)\,\text{لا}}{\text{ر}} = \left\{\frac{(\text{ن}+1) - \text{ر}}{\text{ر}}\right\}\text{لا}$$

$$= \left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1\right)\text{لا}$$

اس لئے $\lim\limits_{\text{ر}\to\infty} \frac{\text{ع}_{\text{ر}+1}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \lim\limits_{\text{ر}\to\infty}\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1\right)\text{لا} = -\text{لا}$

کیونکہ ن ایک محدود عدد مانا گیا ہے اور ر نا متناہی بڑا ہو سکتا ہے۔ یہ نسبت عدداً ۱ سے چھوٹی ہوتی ہے جبکہ لا ۱ سے کم ہوتا ہے۔ بدیں وجہ $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ لا عدداً ۱ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

لیکن اگر لا کی قیمت ۱ سے بڑی ہو تو چونکہ اس سلسلہ کی عام رقم میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ شامل ہے اس لئے ر کو کافی بڑا لینے سے $\text{لا}^{\text{ر}}$ کو ہم کسی بھی معین محدود مقدار سے زیادہ بڑا بنا سکتے ہیں۔ پس سلسلۂ مذکور کی قیمت غیر محدود ہوتی ہے۔ لہٰذا $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کو لا کی صعودی طاقتوں میں ایک نا متناہی سلسلہ کی شکل میں پھیلانے کا حسابی مفہوم کچھ نہیں جبکہ لا کی قیمت ۱ سے بڑی ہوتی ہے۔

یہ بات یاد رکھنے کے قابل ہے کہ ہم $(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ن}}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ہمیشہ پھیلا سکتے ہیں اس لئے کہ اگر لا سے ما بڑا ہو تو $(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ن}}$ کو $\text{ما}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)^{\text{ن}}$ لکھ کر اور اگر ما سے لا بڑا ہو تو $\text{لا}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ لکھ کر پھیلا سکتے ہیں۔

۱۴۔ $(1-\text{لا})^{-\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم کی سادہ ترین شکل۔

واضح ہے کہ اس کی (ر + ۱) ویں رقم $= \frac{(-\text{ن})(-\text{ن}-1)(-\text{ن}-2)\cdots(-\text{ن}-\text{ر}+1)}{\lfloor\text{ر}}(-\text{لا})^{\text{ر}}$

$$= (-1)^{\text{ر}}\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-1)}{\lfloor\text{ر}}(-1)^{\text{ر}}\text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= (-۱)^{۲ر} \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots(ن+ر-۱)}{|\underline{ر}} لا^{ر}$$

$$= \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots\ldots(ن+ر-۱)}{|\underline{ر}} لا^{ر}$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $(۱-لا)^{-ن}$ کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم مثبت ہوتی ہے۔

مندرجۂ ذیل پھیلاؤ قابلِ یادداشت ہیں:—

$$(۱-لا)^{-۱} = ۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳} + \ldots\ldots + لا^{ر} + \ldots\ldots$$

$$(۱-لا)^{-۲} = ۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۴لا^{۳} + \ldots\ldots (ر+۱) لا^{ر} + \ldots\ldots$$

$$(۱-لا)^{-۳} = ۱ + ۳لا + ۶لا^{۲} + ۱۰لا^{۳} + \ldots\ldots + \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۱\times۲} لا^{ر} + \ldots\ldots$$

۱۵۔ تقریبی پھیلاؤ —— عملی حسابوں میں مندرجۂ ذیل تقریبی ضابطے عموماً کافی ہوتے ہیں جبکہ لا اور ما بمقابلۂ اکائی بہت ہی چھوٹے ہوتے ہیں:—

$$(۱ \pm لا)^{ن} = ۱ \pm ن لا$$ ن مثبت ہوسکتا ہے یا منفی

$$(۱ \pm لا)(۱ \pm ما) = ۱ \pm لا \pm ما$$

مثال (۱) — اگر لا اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کا مکعب اور اس سے زیادہ قوتیں ناقابلِ لحاظ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(۱-لا)^{-\frac{۵}{۲}} + (۱۶+۸لا)^{\frac{۱}{۲}}}{(۱+لا)^{\frac{۱}{۲}} + (۲+لا)^{۲}} = ۱ + \frac{۲۳}{۳۲} لا^{۲}$$ [جامعۂ لندن]

مثال کے ہر ثنائی جملہ کو علیحدہ علیحدہ $لا^{۲}$ تک پھیلانے سے

$$(۱-لا)^{-\frac{۵}{۲}} = ۱ + \left(-\frac{۵}{۲}\right)(-لا) + \frac{\left(-\frac{۵}{۲}\right)\left(-\frac{۵}{۲}-۱\right)}{|\underline{۲}} (-لا)^{۲} + \ldots$$

$$= ۱ + \frac{۵}{۲}\text{لا} + \frac{۳۵}{۸}\text{لا}^{۲} + \cdots$$

$$(۱۶ + ۸\text{لا})^{\frac{۱}{۲}} = ۱۶^{\frac{۱}{۲}}\left(۱ + \frac{\text{لا}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۴\left(۱ + \frac{۱}{۴}\text{لا} - \frac{۱}{۳۲}\text{لا}^{۲} + \cdots\right)$$

$$(۱ + \text{لا})^{-\frac{۱}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۲} \cdots$$

$$(۲ + \text{لا})^{۲} = ۴ + ۴\text{لا} + \text{لا}^{۲}$$

$$\text{پس دی ہوئی کسر} = \frac{۱ + \frac{۵}{۲}\text{لا} + \frac{۳۵}{۸}\text{لا}^{۲} + \cdots + ۴ + \text{لا} - \frac{۱}{۸}\text{لا}^{۲} + \cdots}{۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۲} - \cdots + ۴ + ۴\text{لا} + \text{لا}^{۲}}$$

$$= \frac{۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \cdots}{۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۱}{۸}\text{لا}^{۲} + \cdots}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \cdots\right)\left(۱ + \frac{۷}{۱۰}\text{لا} + \frac{۱۱}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \cdots\right)^{-۱}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \cdots\right)\left\{۱ - \left(\frac{۷}{۱۰}\text{لا} + \frac{۱۱}{۴۰}\text{لا}^{۲}\right) + \left(\frac{۷}{۱۰}\text{لا} + \frac{۱۱}{۴۰}\text{لا}^{۲}\right)^{۲} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \cdots\right)\left\{۱ - \left(\frac{۷}{۱۰}\text{لا} - \frac{۴۳}{۲۰۰}\text{لا}^{۲}\right) + \cdots\right\}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} - \frac{۴۹}{۲۰}\text{لا}^{۲} + \frac{۴۳}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \cdots\right)$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۱۱۵}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \cdots\right) = ۱ + \frac{۲۳}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \cdots$$

مثال (۳)۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$۱ + \frac{۲۱}{۸} + \left(\frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶}\right) + \left(\frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶} \times \frac{۳۳}{۲۴}\right) + \left(\frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶} \times \frac{۳۳}{۲۴} \times \frac{۳۹}{۳۲}\right) + \cdots$$

ایک دو رقمی سلسلہ ہے اور اس کی قیمت دریافت کرو۔ (جامعہ لندن)

فرض کرو کہ پہلی تین رقمیں $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کی رقمیں ہیں۔

تب $\text{ن لا} = \frac{۲۱}{۸}$ اور $\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!} \times \text{لا}^{۲} = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶}$

یعنی $ن لا = \frac{٢١}{٨}$ اور $\frac{ن^٢ لا^٢}{|\underline{٢}} - \frac{ن لا^٢}{|\underline{٢}} = \frac{٢١}{٨} \times \frac{٢٧}{١٦}$

پس $\left(\frac{٢١}{٨}\right)^٢ \frac{١}{|\underline{٢}} - \frac{٢١}{٨} لا \frac{١}{|\underline{٢}} = \frac{٢١}{٨} \times \frac{٢٧}{١٦}$

یعنی $\frac{٢١}{٨} - لا = \frac{٢٧}{٨}$

اور $لا = \frac{٢١}{٨} - \frac{٢٧}{٨} = -\frac{٣}{٤}$

اس قیمت کو پہلی مساوات میں داخل کرنے سے $ن = -\frac{٧}{٢}$

اب $\left(١ - \frac{٣}{٤}\right)^{-\frac{٧}{٢}} = ١ + \left(-\frac{٧}{٢}\right)\left(-\frac{٣}{٤}\right) + \frac{-\frac{٧}{٢}\left(-\frac{٧}{٢} - ١\right)}{|\underline{٢}}\left(-\frac{٣}{٤}\right)^٢$

$+ \frac{-\frac{٧}{٢}\left(-\frac{٧}{٢} - ١\right)\left(-\frac{٧}{٢} - ٢\right)}{|\underline{٣}}\left(-\frac{٣}{٤}\right)^٣$

$+ \frac{-\frac{٧}{٢}\left(-\frac{٧}{٢} - ١\right)\left(-\frac{٧}{٢} - ٢\right)\left(-\frac{٧}{٢} - ٣\right)}{|\underline{٤}}\left(-\frac{٣}{٤}\right)^٤ + \cdots$

$= ١ + \frac{٢١}{٨} + \left(\frac{٢١}{٨} \times \frac{٢٧}{١٦}\right) + \left(\frac{٢١}{٨} \times \frac{٢٧}{١٦} \times \frac{٣٣}{٢٤}\right) + \left(\frac{١١}{٨} \times \frac{٤٣}{١٤} \times \frac{٣٩}{٣٢}\right) + \cdots$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ زیر بحث $\left(١ - \frac{٣}{٤}\right)^{-\frac{٧}{٢}}$ اور اس لئے اس کی قیمت

$\left(\frac{١}{٤}\right)^{-\frac{٧}{٢}} = (٤)^{\frac{٧}{٢}} = (٢)^٧ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$

$= ١٢٨$ ہے۔

سوالات عـ (ج)

اعشاریہ کے پانچویں مقام تک مندرجہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

(١) $\sqrt[٣]{١٠٠٣}$　　(٢) $(٦٣٠)^{-\frac{١}{٣}}$

اگر لا اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بلند تر قوتیں ناقابلِ لحاظ سمجھی جا سکتی ہیں تو ذیل کے جملوں کی قیمت دریافت کرو:-

(۳) $$\frac{\left(\text{۱} + \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\text{لا}\right)^{\text{۵}} \times \left(\text{۴} + \text{۳لا}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۴}}}}{\left(\text{۴} + \text{لا}\right)^{\frac{\text{۵}}{\text{۴}}}}$$

(۴) $$\frac{\sqrt[\text{۴}]{\text{۱} - \frac{\text{۳}}{\text{۵}}\text{لا}} + \left(\text{۱} + \frac{\text{۵}}{\text{۶}}\text{لا}\right)^{-\text{۲}}}{\sqrt[\text{۳}]{\text{۱} + \text{۲لا}} + \sqrt[\text{۵}]{\text{۱} - \frac{\text{لا}}{\text{۲}}}}$$

(۵) ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{ن}\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right) + \frac{\text{ن(ن+۱)}}{\text{۲}!}\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{۲}} + \cdots$$

(۶) $\left(\text{۲لا}^{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{۲ر}}$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{۱} + \text{لا}}$ کو اگر $\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{۲}}$ کے مساوی لکھیں تو جو خطا واقع ہوگی $\frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۸}}$ سے کم ہوگی۔

(۸) اگر لا چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{\left(\text{۱} - \text{لا}\right)^{-\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} - \left(\text{۱} + \text{لا}\right)^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}{\text{۶} + \text{۹لا}}$ کے لئے $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱۳}}{\text{۳۲}}\text{لا}^{\text{۳}}$ ایک تقریبی جملہ ہے۔

۱۶ - $\left(\text{۱} + \text{لا}\right)^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں عدداً سب سے بڑی رقم دریافت کرو جبکہ ن کوئی سی منطق قیمت رکھتا ہو۔

چونکہ یہاں سب سے بڑی رقم کی عددی قیمت سے بحث ہے ہم لا کو سارے پھیلاؤ میں مثبت تصور کرینگے۔

صورت (۱)۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ پھیلاؤ کی (ر + ۱) ویں رقم ر- ویں رقم کو $\frac{\text{ن} - \text{ر} + \text{۱}}{\text{ر}}$ لا یعنی $\left(\frac{\text{ن} + \text{۱}}{\text{ر}} - \text{۱}\right)$ لا کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

اور اس لیئے رقمیں بڑی ہوتی جاتی ہیں تاوقتیکہ

$\left(\frac{ن+۱}{ر}-۱\right)$ لا > ۱ یعنی $\frac{(ن+۱)لا}{ر}$ > ۱ + لا یا $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ > ر

اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب اگر ر = پ تو ضرب دینے والا جزوِ ضربی ۱ ہوتا ہے اور اس لئے (پ + ۱) ویں رقم پ۔ویں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور یہ رقمیں کوئی ہی اور رقم سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ ایک صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصّہ کو ق سے تعبیر کرو تب ر کی سب سے بڑی قیمت ق ہوگی اور (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۲)۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت کسر ہے۔

مثل سابق ر۔ویں رقم کو ($\frac{ن+۱}{ر}$ - ۱) کے ساتھ ضرب دینے سے (ر + ۱) ویں رقم حاصل ہوتی ہے۔

(ا) اگر لا اکائی سے بڑا ہو تو ر کو بڑھانے سے متذکرہ بالا ضرب دینے والے جزوِ ضربی کو ہم۔لا کے جس قدر قریب بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ پس ایک معیّن رقم کے بعد ہر ایک رقم اس سے ٹھیک پیشتر کی رقم کا عدداً لا گنا ہوتی ہے۔ لہٰذا پھیلاؤ کی رقمیں مسلسل بڑی ہوتی جائینگی اور سب سے بڑی کوئی رقم نہ ہو سکیگی۔

(ب) اگر لا اکائی سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ضرب دینے والا جزوِ ضربی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ ر > ن + ۱ - اس کے بعد سے وہ منفی ہو جاتا ہے لیکن ہمیشہ عدداً ۱ سے کم رہتا ہے۔ اس لئے پھیلاؤ میں ایک سب سے بڑی رقم ہوگی۔

ضرب دینے والا جزوِ ضربی ۱ سے بڑا ہوگا تاوقتیکہ $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ > لا۔

اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب صورت (۱) کی طرح (پ + ۱)۔ ویں رقم پ۔ویں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ

دونوں رقمیں دوسری سب رقموں سے بڑی ہونگی۔

اگر (ن + ۱) لا / (۱ + لا) صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ اس کا صحیح حصّہ ق ہے۔

تب (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۳)۔ فرض کرو ن منفی ہے اور = ۔ مَ اِس لئے مَ مثبت ہے۔ تب ضرب دینے والے جزوِ ضربی کی عددی قیمت (مَ + ر - ۱) / ر لا ہے یعنی ((مَ - ۱) / ر + ۱) لا ہے۔

(ا) اگر لا اِکائی سے بڑا ہو تو صورت (۲) کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ پھیلاؤ کے سلسلہ میں سب سے بڑی رقم کوئی موجود نہیں ہے۔

(ب) اگر لا اکائی سے چھوٹا ہو تو ضرب دینے والا جزوِ ضربی ۱ سے بڑا ہوگا تاوقتیکہ

((م - ۱) / ر + ۱) لا < ۱ یعنی (م - ۱) لا / ر < ۱ - لا

یا (م - ۱) لا / (۱ - لا) < ر

اگر (م - ۱) لا / (۱ - لا) ایک مثبت صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب (پ + ۱)۔ ویں رقم پ۔ ویں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ سلسلہ کی کسی دوسری رقم سے زیادہ بڑی ہونگی۔

اگر (م - ۱) لا / (۱ - لا) مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو۔ تب (ق + ۱)۔ ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

اگر (م - ۱) لا / (۱ - لا) منفی ہو تو م اِکائی سے کم ہوگی۔ اور ضرب دینے والے جزوِ ضربی کو (۱ - (۱ - م) / ر) لا کی شکل میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

وہ ہمیشہ ۱ سے چھوٹا ہوگا۔ اس لئے ہر رقم اس سے پیشتر کی رقم سے چھوٹی ہے۔ پس پہلی رقم ہی سب سے بڑی ہے۔

۱۷- ن حروف ا، ب، ج،... اور ان کی قوتوں سے ر ابعاد کے جو متجانس حاصل ضرب تیار ہوسکتے ہیں اُن کی تعداد کی تعیین۔

ہمیں معلوم ہے کہ معمولی تقسیم سے یا مسئلہ ثنائی کی مدد سے

$$\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} = 1 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2\text{لا}^2 + \text{ا}^3\text{لا}^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} = 1 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ب}^2\text{لا}^2 + \text{ب}^3\text{لا}^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} = 1 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{ج}^2\text{لا}^2 + \text{ج}^3\text{لا}^3 + \cdots\cdots$$

. . . .

پس باہمدیگر ضرب دینے سے $\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} \times \cdots\cdots$

$$= (1+\text{ا}\,\text{لا}+\text{ا}^2\text{لا}^2+\cdots)(1+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ب}^2\text{لا}^2+\cdots)(1+\text{ج}\,\text{لا}+\text{ج}^2\text{لا}^2+\cdots)\cdots$$

$$= 1+\text{لا}\,(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\cdots)+\text{لا}^2(\text{ا}^2+\text{اب}+\text{اج}+\text{ب}^2+\text{بج}+\text{ج}^2+\cdots)+$$

$$= 1+\text{س}_1\,\text{لا}+\text{س}_2\,\text{لا}^2+\text{س}_3\,\text{لا}^3+\cdots\cdots$$ فرض کرو

جس میں س_1، س_2، س_3 ..... ایک، دو، تین ..... ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کے حاصل جمع ہیں جو ا، ب، ج ..... اور ان کی قوتوں سے تیار کئے جاسکتے ہیں۔

اِن حاصل ضربوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ا، ب، ج، ..... میں سے ہر ایک کو ۱ کے مساوی لکھو۔

س_1، س_2، س_3 ..... کی اس طرح جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ایک، دو، تین ... ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد دیتی ہیں۔

معہذا $\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} \times \cdots\cdots$

$\frac{1}{(1-\text{لا})^{\text{ن}}} = (1-\text{لا})^{-\text{ن}}$ ہوجاتا ہے۔

پس سر $= (\text{۱} - \text{لا})^{-\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})\cdots(\text{ن}+\text{ر}-\text{۱})}{\underline{|\text{ر}}}$$

$$= \frac{\underline{|\text{ن}+\text{ر}-\text{۱}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{۱}}}$$

۱۸۔ کسی کثیر رقمی جملہ کے پھیلاؤ میں رقموں کی تعداد کی تعیین جبکہ قوت نما ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔

$$(\text{ل}_{\text{۱}} + \text{ل}_{\text{۲}} + \text{ل}_{\text{۳}} + \cdots + \text{ل}_{\text{ر}})^{\text{ن}}$$

کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم ن ابعاد کی ہے۔ اس لئے رقموں کی تعداد وہی ہے جو ن ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد ہے جو ر مقادیر $\text{ل}_{\text{۱}}$، $\text{ل}_{\text{۲}}$، ..... $\text{ل}_{\text{ر}}$ اور اُن کی قوتوں کی ہے۔ اور اس لئے سابقہ فصل کی رُو سے

$$= \frac{\underline{|\text{ر}+\text{ن}-\text{۱}}}{\underline{|\text{ن}}\ \underline{|\text{ر}-\text{۱}}}$$

مثال ۔ $\frac{(\text{۱}-\text{۲لا})^{\text{۲}}}{(\text{۱}+\text{لا})^{\text{۳}}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر دریافت کرو۔

جملہ $= (\text{۱} - \text{۴لا} + \text{۴لا}^{\text{۲}})(\text{۱} + \text{پ}_{\text{۱}}\text{لا} + \text{پ}_{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \cdots + \text{پ}_{\text{ر}}\text{لا}^{\text{ر}} + \cdots)$ بالفرض۔

واضح ہے کہ $\text{پ}_{\text{ر}}$، $\text{پ}_{\text{ر}-\text{۱}}$، $\text{پ}_{\text{ر}-\text{۲}}$ کو علی الترتیب ۱، -۴، ۴ کے ساتھ ضرب دینے اور نتائج کو جمع کرنے سے $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر دریافت ہوگا۔

پس مطلوب سر $= \text{پ}_{\text{ر}} - \text{۴پ}_{\text{ر}-\text{۱}} + \text{۴پ}_{\text{ر}-\text{۲}}$

لیکن $\text{پ}_{\text{ر}} = (-\text{۱})^{\text{ر}} \frac{(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲})}{\text{۲}}$

اِس لئے کہ $(\text{۱}+\text{لا})^{-\text{۳}}$ کی $(\text{ر}+\text{۱})$- ویں رقم $= \dfrac{(-\text{۳})(-\text{۴})(-\text{۵})\cdots(-\text{۳}-\text{ر}+\text{۱})}{|\underline{\text{ر}}} \text{لا}^{\text{ر}}$

$$= (-\text{۱})^{\text{ر}} \frac{\text{۳}\times\text{۴}\times\text{۵}\cdots\times(\text{ر}+\text{۲})}{|\underline{\text{ر}}} \text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= (-\text{۱})^{\text{ر}} \frac{(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}}$$

پس مطلوب سر

$$= (-\text{۱})^{\text{ر}} \frac{(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲})}{\text{۲}} + \text{۴}(-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۱}} \frac{\text{ر}(\text{ر}+\text{۱})}{\text{۲}} + \text{۴}(-\text{۱})^{\text{ر}-\text{۲}} \frac{\text{ر}(\text{ر}-\text{۱})}{\text{۲}}$$

$$= \frac{(-\text{۱})^{\text{ر}}}{\text{۲}} \left\{ (\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲}) + \text{۴}\,\text{ر}(\text{ر}+\text{۱}) + \text{۴}\,\text{ر}(\text{ر}-\text{۱}) \right\}$$

$$= \frac{(-\text{۱})^{\text{ر}}}{\text{۲}} (\text{۹}\,\text{ر}^{\text{۲}} + \text{۳}\,\text{ر} + \text{۲})$$

سوالات (۱) د

(۱) $\dfrac{(\text{۲}+\text{لا}+\text{لا}^{\text{۲}})}{(\text{۱}+\text{لا})^{\text{۳}}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر دریافت کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{ن}}$ کا پھیلاؤ ذیل کے سلسلہ کی شکل میں ڈھالا جا سکتا ہے :-

$$(\text{۱}-\text{لا})^{\text{۲ن}} + \text{۲ن}\,\text{لا}(\text{۱}-\text{لا})^{\text{۲ن}-\text{۲}} + \frac{\text{۲ن}(\text{۲ن}-\text{۳})}{\text{۱}\times\text{۲}} \text{لا}^{\text{۲}} (\text{۱}-\text{لا})^{\text{۲ن}-\text{۴}} + \cdots\cdots$$

(۳) ثابت کرو کہ اگر ن ایک جفت صحیح عدد ہے تو

$$\frac{\text{۱}}{|\underline{\text{۱}}\;|\underline{\text{ن}-\text{۱}}} + \frac{\text{۱}}{|\underline{\text{۳}}\;|\underline{\text{ن}-\text{۳}}} + \frac{\text{۱}}{|\underline{\text{۵}}\;|\underline{\text{ن}-\text{۵}}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{|\underline{\text{ن}-\text{۱}}\;|\underline{\text{۱}}} = \frac{\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}}{|\underline{\text{ن}}}$$

۱۹- اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم کثیر رقمی جملہ کے پھیلاؤ میں

کسی معیّن رقم کا سر معلوم کرنے کا طریقہ بیان کرینگے۔

$(ا + ب + ج + د + \dots)^{پ}$ کے پھیلاؤ میں کسی معیّن رقم $ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{ضہ}$ کا سر معلوم کرنا جبکہ پ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

یہ پھیلاؤ پ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے ہر جزوِ ضربی $(ا + ب + ج + د + \dots)$ ہے اور اس پھیلاؤ کی ہر ایک رقم ان پ اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف لے کر ضرب دینے سے بنتی ہے پس کوئی رقم $ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{ضہ} \dots$ جتنے طریقوں سے آخری حاصل ضرب میں صورت پذیر ہوگی ان کی تعداد، پ حروف کو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد کے مساوی ہے جبکہ ان میں سے عہ حروف ا ہونے چاہئیں، بہ حروف ب، جہ حروف ج اور اس طرح بقیہ دیگر حروف یعنی

$ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{ضہ} \dots$ کا سر $\dfrac{\lfloor پ}{\lfloor عہ \; \lfloor بہ \; \lfloor جہ \; \lfloor ضہ \dots}$ ہے

جس میں $عہ + بہ + جہ + ضہ + \dots = پ$

نتیجۂ صریح — $(ا + ب لا + ج لا^{۲} + د لا^{۳} + \dots)^{پ}$ کے پھیلاؤ میں $ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{ضہ} \dots$ کو اپنے میں شامل رکھنے والی رقم

$$\dfrac{\lfloor پ}{\lfloor عہ \; \lfloor بہ \; \lfloor جہ \; \lfloor ضہ \dots} \; ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} د^{ضہ} \dots لا^{بہ + ۲ جہ + ۳ ضہ + \dots}$$

ہے، جس میں $عہ + بہ + جہ + ضہ + \dots = پ$

اس رقم کو ہم پھیلاؤ کی عام رقم کہہ سکتے ہیں۔

مثال — $(ا + ب لا + ج لا^{۲})^{پ}$ کے پھیلاؤ میں $لا^{ن}$ کا سر دریافت کرو۔

اس پھیلاؤ کی عام رقم $\dfrac{\lfloor پ}{\lfloor عہ \; \lfloor بہ \; \lfloor جہ} \; ا^{عہ} ب^{بہ} ج^{جہ} لا^{بہ + ۲ جہ}$ ہے۔

جس میں عہ + بہ + جہ = ۱۱

اب ہمیں چاہیئے کہ آزمائش سے بہ اور جہ کی وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کریں جو مساوات بہ + ۲ جہ = ۷ کے لئے صادق آتی ہیں۔ اس کے بعد عہ کی قیمتیں ذیل کی مساوات سے معلوم کر لی جا سکتی ہیں:۔

عہ + بہ + جہ = ۱۱

جہ = ۳ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے بہ = ۱، اور اس لئے عہ = ۷

جہ = ۲	〃	〃	بہ = ۳،	〃	عہ = ۶
جہ = ۱	〃	〃	بہ = ۵	〃	عہ = ۵
جہ = ۰	〃	〃	بہ = ۷	〃	عہ = ۴

مطلوبہ سر، پھیلاؤ کی عام رقم کے لئے اوپر جو جملہ لکھا گیا ہے اس کی نظیری قیمتوں کا حاصل جمع ہوگا۔

پس مطلوبہ سر =

$$\frac{\lfloor 11}{\lfloor 7\,\lfloor 1\,\lfloor 3}\,\text{ا}^{7}\,\text{ب}\,\text{ج}^{3} + \frac{\lfloor 11}{\lfloor 6\,\lfloor 3\,\lfloor 2}\,\text{ا}^{6}\,\text{ب}^{3}\,\text{ج}^{2} + \frac{\lfloor 11}{\lfloor 5\,\lfloor 5\,\lfloor 1}\,\text{ا}^{5}\,\text{ب}^{5}\,\text{ج} + \frac{\lfloor 11}{\lfloor 4\,\lfloor 7\,\lfloor 0}\,\text{ا}^{4}\,\text{ب}^{7}$$

$$= 1320\,\text{ا}^{7}\,\text{ب}\,\text{ج}^{3} + 4620\,\text{ا}^{6}\,\text{ب}^{3}\,\text{ج}^{2} + 2772\,\text{ا}^{5}\,\text{ب}^{5}\,\text{ج} + 330\,\text{ا}^{4}\,\text{ب}^{7}$$

۲۰۔ پھیلاؤ $(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{2} + \text{د}\,\text{لا}^{3} + \cdots)^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم کی تعیین جبکہ ن کوئی ایک منطق مقدار ہو۔

مسئلہ ثنائی سے، عام رقم

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن}-\text{پ}+1)}{\lfloor \text{پ}}\,\text{ا}^{\text{ن}-\text{پ}}\,(\text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{2} + \text{د}\,\text{لا}^{3} + \cdots)^{\text{پ}}$$

ہے، جس میں پ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

فصل (۱۲) سے، $(\text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{2} + \text{د}\,\text{لا}^{3} + \cdots)^{\text{پ}}$ کے پھیلاؤ کی

عام رقم

$$\frac{\underline{|پ}}{\underline{|ب}\;\underline{|ج}\;\underline{|ض}\ldots}\; ب^{ب}\, ج^{ج}\, د^{ض}\ldots لا^{ب+۲ج+۳ض+\ldots}$$ ہے۔

جس میں ب، ج، ض ..... مثبت صحیح اعداد ہیں جن کا حاصل جمع پ ہے۔
پس، دئے ہوئے جملہ کے پھیلاؤ کی عام رقم

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots(ن-پ+۱)}{\underline{|ب}\;\underline{|ج}\;\underline{|ض}\ldots}\; ا^{ن-پ}\, ب^{ب}\, ج^{ج}\, د^{ض}\ldots لا^{ب+۲ج+۳ض+\ldots}$$ ہے

جس میں ب + ج + ض + ... = پ

۲۱۔ چونکہ $(ا+ب\,لا+ج\,لا^{۲}+د\,لا^{۳}+\ldots)^{ن}$ کو ہم ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$ا^{ن}\left(۱+\frac{ب}{ا}لا+\frac{ج}{ا}لا^{۲}+\frac{د}{ا}لا^{۳}+\ldots\right)^{ن}$$

اس لئے کافی ہوگا اگر ہم صرف ایسی صورت پر غور کریں جس میں کثیر رقمی جملہ کی پہلی رقم اکائی ہے۔

چنانچہ $(۱+ب\,لا+ج\,لا^{۲}+د\,لا^{۳}+\ldots)^{ن}$ کے پھیلاؤ کی عام رقم

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots(ن-پ+۱)}{\underline{|ب}\;\underline{|ج}\;\underline{|ض}\ldots}\; ب^{ب}\, ج^{ج}\, د^{ض}\ldots لا^{ب+۲ج+۳ض+\ldots}$$ ہے

جس میں ب + ج + ض + ... = پ

مثال — $(۱-۳لا-۲لا^{۲}+۶لا^{۳})^{\frac{۲}{۳}}$ کے پھیلاؤ میں $لا^{۳}$ کا سر دریافت کرو۔

اس کی عام رقم

$$\frac{\frac{۲}{۳}(\frac{۲}{۳}-۱)(\frac{۲}{۳}-۲)\ldots(\frac{۲}{۳}-پ+۱)}{\underline{|ب}\;\underline{|ج}\;\underline{|ض}}\;(-۳)^{ب}(-۲)^{ج}(۶)^{ض}\, لا^{ب+۲ج+۳ض}$$ ہے

ہمیں چاہیئے کہ آزمائش کے ذریعہ بہ، جہ، ضہ کی وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کریں جو مساوات بہ +۲ جہ + ۳ ضہ = ۳ کے لیئے صادق آتی ہیں۔ تب مساوات پ = بہ + جہ + ضہ سے پ کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔ مطلوبہ سر مندرجۂ بالا جملہ کی نظیری قیمتوں کا حاصل جمع ہوگا۔

بہ، جہ، ضہ کی تعیین میں انسب ہوگا کہ ضہ کو یکے بعد دیگرے جو مثبت صحیح قیمتیں دی جائینگی اِن میں سب سے پہلی قیمت اعظم ممکن ہو۔ موجودہ مثال میں یہ قیمتیں اس طرح معین ہونگی:—

ضہ = ۱، جہ = ۰، بہ = ۰، پ = ۱

ضہ = ۰ جہ = ۱ بہ = ۱ پ = ۲

ضہ = ۰ جہ = ۰ بہ = ۳ پ = ۳

ان قیمتوں کو عام رقم کے جملہ میں تعویض کرنے سے مطلوبہ سر

= (۲/۳)(۶) + (۴/۳)(-۱/۳)(-۳)(-۲) + [(۲/۳)(-۱/۳)(-۴/۳) / ۳!] (-۳)^۳

= ۴ - ۴/۳ - ۴/۳ = ۴/۳

نوٹ ۔ طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ بعض اوقات مسئلہ ثنائی کا راست استعمال زیادہ آسان اور زود اثر ثابت ہوتا ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

مثال ـــــ (۱- ۲ لا + ۳ لا^۲)^-۳ کے پھیلاؤ میں لا^۴ کا سر دریافت کرو۔

(۱ - ۲ لا + ۳ لا^۲)^-۳ = {۱ - (۲ لا - ۳ لا^۲)}^-۳

مسئلہ ثنائی کے ذریعہ اس کو پھیلائیں تو اس کی پہلی چند رقمیں حسب ذیل ہونگی:—

۱ + ۳ (۲ لا - ۳ لا^۲) + ۶ (۲ لا - ۳ لا^۲)^۲ + ۱۰ (۲ لا - ۳ لا^۲)^۳ + ۱۵ (۲ لا - ۳ لا^۲)^۴

اس سے آگے بڑھنے کی ہمیں اس لئے ضرورت نہیں کہ بعد کو آنے والی تمام رقموں میں لا کی قوت لا^{۶} سے زائد ہوگی۔

پس مطلوبہ سر = ۶ × ۹ + ۱۰ × ۳ (۲)^{۲} (-۳) + ۱۵ (۲)^{۴} = -۶۶

سوالات ۵ (ھ)

(۱) (ا + ب - ج - د)^{۸} کے پھیلاؤ میں ا^{۲} ب^{۵} د کا سر معلوم کرو۔

(۲) (۱ - ۲ لا + ۳ لا^{۲} - ۴ لا^{۳})^{۴} کے پھیلاؤ میں لا^{۸} کا سر معلوم کرو۔

(۳) (۱ - $\frac{لا^{۲}}{۲}$ + $\frac{لا^{۲}}{۹}$)$^{-۲}$ کے پھیلاؤ میں لا^{۸} کا سر دریافت کرو۔

(۴) (۱ + ۳ لا^{۲} - ۶ لا^{۳})$^{-\frac{۲}{۳}}$ کو لا^{۵} تک پھیلاؤ۔

(۵) اگر (۱ + لا + لا^{۲})^{ن} کا پھیلاؤ

ا$_{۰}$ + ا$_{۱}$ لا + ا$_{۲}$ لا^{۲} + ... ا$_{ر}$ لا^{ر} + ... + ا$_{۲ن}$ لا^{۲ن} ہو

تو ثابت کرو کہ

ا$_{۰}$ + ا$_{۳}$ + ا$_{۶}$ + ... = ا$_{۱}$ + ا$_{۴}$ + ا$_{۷}$ + ... = ا$_{۲}$ + ا$_{۵}$ + ا$_{۸}$ + ...

= ۳$^{ن-۱}$

دوسرا باب

جزوی کسور

۲۲- متعدد کسور کا حاصل جمع آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے۔ اس کا معکوس عمل یعنے ایسی کسروں کا دریافت کرنا جن کے نسب نما کسی دی ہوئی کسر کے نسب نما سے چھوٹے ابعاد کے ہوں اور جن کا جبری مجموعہ اس دی ہوئی کسر کے مساوی ہو اعلیٰ ریاضی میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ ان کسروں کو دی ہوئی کسر کی جُزوی کسریں کہتے ہیں۔

جس کسر کی جزوی کسریں مطلوب ہیں اس کے شمار کنندہ کو کسی معین حرف کے لحاظ سے نسب نما سے چھوٹے ابعاد کا تصور کرسکتے ہیں۔ اگر ابتداءً فی الواقع ایسا نہ بھی ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرکے اس کو بالآخر اس حالت میں لاسکتے ہیں۔ ایسی صورت میں دی ہوئی کسر ایک صحیح جملہ اور ایسی کسر کے مجموعہ کے مساوی لکھی جائیگی جس میں شمار کنندہ کے ابعاد نسب نما کے ابعاد سے کمتر ہونگے۔

۲۳- کوئی کسر جس کا نسب نما درجۂ اول کے متعدد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ڈھالا جاسکتا ہے، جُزوی کسور کے ایک سلسلہ میں تحویل ہوسکتی ہے جس کے نسب نما درجۂ اول کے انہی متعدد اجزائے ضربی ہونگے۔

فرض کرو کہ دی ہوئی کسر کا نسب نما ن اجزائے ضربی (لا - ا)، (لا - ب)، (لا - ج) ...... کا حاصل ضرب ہے۔ اور فرض کرو کہ شمار کنندہ ف(لا) سے تعبیر کیا جاتا ہے، جس میں ف(لا) ایسا کوئی ایک جملہ ہے جس کے ابعاد بلحاظ لا، (ن - ۱) سے بالاتر نہیں ہیں۔

پس
$$\frac{ف(لا)}{(لا-ا)(لا-ب)(لا-ج)\ldots} \equiv \frac{ا}{لا-ا} + \frac{ب}{لا-ب} + \frac{ج}{لا-ج} + \ldots$$

ہمیں ا، ب، ج وغیرہ (جو لا کے غیر تابع ہیں) کی قیمتیں دریافت کرنا ہے۔

(لا - ر) (لا - ب) (لا - ج) .... سے ضرب دینے سے

ف (لا) = ا (لا - ب) (لا - ج) ..... + ب (لا - ر) (لا - ج) .....

+ ج (لا - ر) (لا - ب) .... (۱)

رابطہ (۱) ایک تماثل ہونے کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ مساوات کے دونوں جانب لا کی مشابہ قوتوں کی رقموں کے سر مساوی ہوں ۔ ہمیں معلوم ہے کہ ف (لا) زیادہ سے زیادہ (ن - ۱) درجہ کا ہوگا ۔ اور (۱) کے سیدھے جانب کی تمام رقمیں (ن - ۱) درجہ کی ہیں ۔ پس (۱) کے دونوں جانب کے لا، لا^۱ ..... لا^ن-۱ کے سروں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے سے ہمیں ن مساواتیں مل جاتی ہیں جو ن مقداروں ا، ب، ج ...... کی تعیین کے لئے کافی ہیں۔

ہم ا، ب، ج وغیرہ کی قیمتیں علیحدہ علیحدہ بھی مندرجۂ ذیل طریقہ سے دریافت کرسکتے ہیں ۔ چونکہ رابطہ (۱) لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہونا چاہیئے اس لئے وہ لا = ر کے لئے بھی صحیح ہوگا ۔ پس لا کو ر کے مساوی لکھنے سے ف (ر) = ا (ر - ب) (ر - ج) ..... اور اس لئے

ا = ف (ر) / ((ر - ب) (ر - ج)) اسی طرح ب = ف (ب) / ((ب - ر) (ب - ج)) اور ایسا ہی

ج، د ..... کی قیمتیں تعین ہوسکتی ہیں۔

ہم نے یوں ا، ب، ج ..... کی قیمتیں دریافت کریں جو رابطہ (۱) کو لا کی ان قیمتوں ر، ب، ج، ..... کے لئے صحیح بناتی ہیں ۔ اور چونکہ رابطہ (۱) کے دونوں جانب کے جملے (ن - ۱) سے بڑے درجہ کے نہیں ہیں اس لئے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ رابطہ (۱)، لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے ۔

پس ف (لا) / ((لا - ر) (لا - ب) (لا - ج) ....) = Σ ف (ر) / ((ر - ب) (ر - ج) ....) · ۱ / (لا - ر)

مندرجۂ بالا بیان میں یہ فرض کیا گیا تھا کہ نسب نما کے تمام اجزائے ضربی معلوم اور ایک دوسرے سے مختلف تھے ۔ عام مسئلہ حسب ذیل ہے :-

اگر $\frac{\text{ن}}{\text{پ ق}}$ کوئی کسر ہے جس میں ن، پ، ق، لا کے منطق صحیح تفاعل ہیں اور ن کے ابعاد پ ق سے کم درجہ کے ہیں۔ تو بشرطیکہ پ اور ق بلحاظ لا کے، ایک دوسرے کے لئے مفرد ہوں، دو اَلف تفاعل ا اور ب، لا کے لحاظ سے منطق اور صحیح ایسے دریافت کئے جا سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ن}}{\text{پ ق}} \equiv \frac{\text{ا}}{\text{پ}} + \frac{\text{ب}}{\text{ق}}$$

چونکہ پ اور ق بلحاظ یکدیگر مفرد ہیں ہمیشہ لا کے ایسے دو صحیح تفاعل فرض کرو (ج اور د) دریافت ہو سکتے ہیں جن کے لئے

$$\text{ج ق} + \text{د پ} = ۱$$

اور اس لئے $\frac{\text{ج ن}}{\text{پ}} + \frac{\text{د ن}}{\text{ق}} \equiv \frac{\text{ن}}{\text{پ ق}}$ .... (عہ)

اب فرض کرو $\frac{\text{ج ن}}{\text{پ}} = \text{ل} + \frac{\text{ا}}{\text{پ}}$ جس میں ل، لا کی رقموں میں ایک صحیح جملہ ہے اور ا میں لا کے ابعاد پ سے کمتر ہیں اور اس طرح فرض کرو $\frac{\text{د ن}}{\text{ق}} = \text{م} + \frac{\text{ب}}{\text{ق}}$۔ چونکہ ن کے ابعاد پ ق سے کمتر ہیں اس لئے تماثل (عہ) سے یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ ل + م = ۰ اور

$$\frac{\text{ن}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{ا}}{\text{پ}} + \frac{\text{ب}}{\text{ق}} \quad .... (\text{بہ})$$

مساوات (بہ) سے یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ اگر عہ، بہ، جہ .... تمام بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو ہم ہمیشہ ا، ب، ج .... بلحاظ لا عہ، بہ، جہ .... سے کمتر ابعاد کے ایسے تفاعل دریافت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ن}}{\text{عہ، بہ، جہ}\ldots} \equiv \frac{\text{ا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ج}}{\text{جہ}} + \cdots\cdots$$

مثال (۱) — کسر $\frac{\text{لا} + ۲}{(\text{لا} + ۱)^۲ (\text{لا}^۲ + ۳\,\text{لا} + ۴)}$ پر غور کرو۔

نسب نما کے اجزائے ترکیبی (لا^{۲} + ۲ لا + ۱) اور (لا^{۲} + ۳ لا + ۴) لکھے جا سکتے ہیں۔

اور لا^{۲} + ۲لا + ۱) لا^{۲} + ۳ لا + ۴ (۱
لا^{۲} + ۲ لا + ۱
لا + ۳) لا^{۲} + ۲ لا + ۱ (لا − ۱
لا^{۲} + ۲ لا − ۳
۴

پس لا + ۳ = لا^{۲} + ۳ لا + ۴ − (لا^{۲} + ۲ لا + ۱)

۴ = لا^{۲} + ۲ لا + ۱ − (لا + ۳) (لا − ۱)

= لا^{۲} + ۲ لا + ۱ − {لا^{۲} + ۳ لا + ۴ − (لا^{۲} + ۲ لا + ۱)} (لا − ۱)

= (لا^{۲} + ۲ لا + ۱) لا − (لا^{۲} + ۳ لا + ۴) (لا − ۱)

اس لئے ۴ (لا + ۲) = (لا^{۲} + ۲ لا + ۱) لا (لا + ۲) − (لا^{۲} + ۳ لا + ۴) (لا − ۱) (لا + ۲)

∴ $\frac{\text{لا + ۲}}{\text{(لا + ۱)}^{۲}\text{(لا}^{۲}\text{ + ۳لا + ۴)}} = \frac{\text{لا (لا + ۲)}}{\text{۴ (لا}^{۲}\text{ + ۳لا + ۴)}} - \frac{\text{(لا − ۱) (لا + ۲)}}{\text{۴ (لا}^{۲}\text{ + ۲لا + ۱)}}$

= $\frac{۱}{۴}$ {۱ − $\frac{\text{لا + ۴}}{\text{لا}^{۲}\text{ + ۳لا + ۴}}$} − $\frac{۱}{۴}$ {۱ − $\frac{\text{لا + ۳}}{\text{لا}^{۲}\text{ + ۲لا + ۱}}$}

= $\frac{\text{لا + ۳}}{\text{۴ (لا}^{۲}\text{ + ۲لا + ۱)}} - \frac{\text{لا + ۴}}{\text{۴ (لا}^{۲}\text{ + ۳لا + ۴)}}$

مثال (۲) — $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{(لا + ۲)}^{۳}\text{(لا + ۳)}^{۲}}$

یہاں نسب نما کے اجزائے ترکیبی (لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۱۲ لا + ۸) اور (لا^{۲} + ۶ لا + ۹) پر غور کرو۔

لا^{۲} + ۶ لا + ۹) لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۱۲ لا + ۸ (لا
لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۹ لا
۳ لا + ۸) ۹ لا^{۲} + ۵۴ لا + ۸۱ (۳ لا + ۱۰
۹ لا^{۲} + ۵۴ لا + ۸۰
۱

پس $۳لا + ۸ = (لا + ۲)^۳ - لا\,(لا + ۳)^۲$

اور $۱ = ۹(لا + ۳)^۲ - (۳لا + ۸)(۳لا + ۱۰)$

$= ۹(لا + ۳)^۲ - \left\{(لا + ۲)^۳ - لا\,(لا + ۳)^۲\right\}(۳لا + ۱۰)$

$= (۳لا^۲ + ۱۰لا + ۹)(لا + ۳)^۲ - (۳لا + ۱۰)(لا + ۲)^۳$

لہذا $\frac{لا^۲}{(لا + ۲)^۳(لا + ۳)^۲} = \frac{لا^۲(۳لا^۲ + ۱۰لا + ۹)}{(لا + ۲)^۳} - \frac{لا^۲(۳لا + ۱۰)}{(لا + ۳)^۲}$

$= ۳لا - ۸ + \frac{۲۱لا^۲ + ۷۲لا + ۶۴}{(لا + ۲)^۳} - ۳لا + ۸ - \frac{۲۱لا + ۷۲}{(لا + ۳)^۲}$

$= \frac{۲۱لا^۲ + ۷۲لا + ۶۴}{(لا + ۲)^۳} - \frac{۲۱لا + ۷۲}{(لا + ۳)^۲}$

مصرحۂ بالا مثالوں سے معلوم ہوگیا کہ بالعموم $\frac{ن}{ع\,ب\,ج\ldots} = \frac{ا}{ع} + \frac{ب}{ب} + \frac{ج}{ج} + \ldots$

اس طریقۂ عمل سے ہم چند مثالوں کو حل کر کے بتائینگے :-

(۱) کسر $\frac{لا^۲ + ۱۱لا + ۱۴}{(لا + ۳)(لا^۲ - ۴)}$ کو جزئی کسروں میں علحدہ کرو -

چونکہ شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے کمتر ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ

$\frac{لا^۲ + ۱۱لا + ۱۴}{(لا + ۳)(لا^۲ - ۴)} = \frac{ا}{لا - ۲} + \frac{ب}{لا + ۲} + \frac{ج}{لا + ۳}$

جس میں ا، ب اور ج مستقل ہیں -

مساوات کے دونوں جانب $(لا + ۳)(لا^۲ - ۴)$ سے ضرب دینے سے

$لا^۲ + ۱۱لا + ۱۴ = ا(لا + ۲)(لا + ۳) + ب(لا - ۲)(لا + ۳) + ج(لا - ۲)(لا + ۲)$

یعنی $لا^۲ + ۱۱لا + ۱۴ = (ا + ب + ج)\,لا^۲ + (۵ا + ب)\,لا + ۶ا - ۶ب - ۴ج$

چونکہ آخری مساوات لا کی تمام قیمتوں کے لیئے صادق آنی چاہیئے -

$ا + ب + ج = ۱$، $۵ا + ب = ۱۱$، $۶ا - ۶ب - ۴ج = ۱۴$

جس سے $ا = ۲$، $ب = ۱$ اور $ج = -۲$

پس (لا² + ۱۱لا + ۱۴)/((لا + ۳)(لا² − ۴)) = ۲/(لا − ۲) + ۱/(لا + ۲) − ۲/(لا + ۳)

اگر نسب نما کے اجزائے ضربی سب کے سب خطی اور ایک دوسرے سے مختلف ہوں جیسا کہ مثالِ بالا میں ہم دیکھتے ہیں تو ذیل کا خاص طریقہ زیادہ سہل ہوگا۔

مساوات لا² + ۱۱لا + ۱۴ = ا(لا + ۲)(لا + ۳) + ب(لا − ۲)(لا + ۳) + ج(لا − ۲)(لا + ۲) میں لا کو باری باری سے ایسی قیمت دی جائے کہ اصل کسر کے نسب نما کے اجزائے ضربی میں سے ایک ایک جزو صفر ہو جائے یعنی لا = ۲، لا = −۲ اور لا = −۳

جب، لا = ۲ تو مساوات ہو جاتی ہے ۴۰ = ۲۰ا جس سے ا = ۲،
جب لا = −۲ تو مساوات ہو جاتی ہے −۴ = −۴ب جس سے ب = ۱
اور جب لا = −۳ تو مساوات ہوتی ہے −۱۰ = ۵ج، جس سے ج = −۲

مثال — (لا² + ۱۵)/((لا − ۱)(لا² + ۲لا + ۵)) کو جزئی کسروں میں تحلیل کرو۔

فرض کرو (لا² + ۱۵)/((لا − ۱)(لا² + ۲لا + ۵)) = ا/(لا − ۱) + (ب لا + ج)/(لا² + ۲لا + ۵)

[یہاں یہ بات یاد رکھنی چاہیئے کہ بائیں جانب کے جملہ کی دوسری رقم کا نسب نما بلحاظ لا دوم درجہ کا ہے اور شمار کنندہ پہلے درجہ کا۔]

پس لا² + ۱۵ = ا(لا² + ۲لا + ۵) + (ب لا + ج)(لا − ۱)

لا = ۱ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ۱۶ = ۸ا پس ا = ۲

مساوات بالا میں ا = ۲ لکھ کر جملوں کو ترتیب دینے سے

−لا² − ۴لا + ۵ = (ب لا + ج)(لا − ۱)

یا (لا − ۱) پر تقسیم کرنے سے، ب لا + ج = −لا − ۵

لہٰذا (لا² + ۱۵)/((لا − ۱)(لا² + ۲لا + ۵)) = ۲/(لا − ۱) − (لا + ۵)/(لا² + ۲لا + ۵)

[اگر لا^۲ + ۲ لا + ۵ کے اجزائے ترکیبی دریافت کئے جائیں تو ملتف جملے لا + ۱ + ۲خ اور لا + ۱ − ۲خ حاصل ہونگے جہاں خ = $\sqrt{-۱}$ اور زیر بحث کسر کے حسب ذیل اجزائے ضربی برآمد ہونگے :—

$$\frac{۲}{\text{لا}-۱} - \frac{۳+\text{خ}}{۱-۲\text{خ}} \times \frac{۱}{\text{لا}+۱+۲\text{خ}} - \frac{۳-\text{خ}}{۲+۲\text{خ}} \times \frac{۱}{\text{لا}+۱-۲\text{خ}}$$

اس کا عمل طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے -]

۴۳ - اگر کسر کے نسب نما کے بعض اجزائے ترکیبی ایک یا اس سے زیادہ مرتبہ دُہرائے جائیں

یعنی کسر $\frac{\text{ق(لا)}}{\text{ف(لا)}}$ ہو اور بطور مثال اگر

نسب نما ف(لا) = $(\text{ا}_۱\text{لا} + \text{ب}_۱)^۲ (\text{ا}_۲\text{لا} + \text{ب}_۲) (\text{ا}_۳\text{لا}^۲ + \text{ب}_۳\text{لا} + \text{ج}_۳)^۲$ ہو تو ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ق(لا)}}{\text{ف(لا)}} = \frac{\text{ا}}{(\text{ا}_۱\text{لا} + \text{ب}_۱)^۲} + \frac{\text{اَ}}{\text{ا}_۱\text{لا} + \text{ب}_۱} + \frac{\text{ا}_۲}{\text{ا}_۲\text{لا} + \text{ب}_۲}$$
$$+ \frac{\text{ا}_۳\text{لا} + \text{ب}_۳}{(\text{ا}_۳\text{لا}^۲ + \text{ب}_۳\text{لا} + \text{ج}_۳)^۲} + \frac{\text{اَ}_۳\text{لا} + \text{بَ}_۳}{\text{ا}_۳\text{لا}^۲ + \text{ب}_۳\text{لا} + \text{ج}_۳} \quad ....(۱)$$

واضح ہو کہ دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ کا درجہ اس کے نسب نما کے درجہ سے کمتر ہے اور شمار کنندہ اور نسب نما کے مابین کوئی مشترک جزوِ ترکیبی نہیں ہے - جزئی کسور کے لئے جو رقمیں فرض کی گئی ہیں ان پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ یک درجی کثیر رقمی جملہ ا₁ لا + ب₁ ایسے کسور کے نسب نماؤں میں جن کے شمار کنندے ایک ہی شکل کے یعنی ایک مستقل ہوتے ہیں، پہلے اور نیز دوسرے درجہ میں موجود ہے - اسی طرح دو درجی کثیر رقمی جملہ ا₃لا^۲ + ب₃ لا + ج₃ ایسے کسور کے نسب نماؤں میں جن کے شمار کنندے ایک ہی شکل کے یعنی یک درجی کثیر رقمی جملے ہیں، پہلے اور نیز دوسرے درجہ میں موجود ہے -

[اگر طالب علم ایسے نسب نماؤں والی کسروں کو آزمائش کے لیے لکھ کر

معمولی قواعد سے ان کا جبری حاصل جمع نکالے تو معلوم ہوگا کہ اس کی شکل ہوبہو $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ڤ (لا)}}$ کی سی ہوگی]-

اگر ہم مساوات (۱) کو ڤ (لا) سے ضرب دیں تو ہمیں بلحاظ لا چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملیگی، چونکہ ہمارا مفروضہ ہے کہ ف(لا) کا درجہ ڤ (لا) کے درجہ سے چھوٹا ہے۔ پس مساوات کے دونوں جانب $\text{لا}^{۶}$، $\text{لا}^{۵}$، $\text{لا}^{۴}$، $\text{لا}^{۳}$، $\text{لا}^{۲}$ اور لا کے سروں اور مستقل رقموں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے سے ہمارے لیے سات غیر معلوم مستقلوں $\text{ا}_{۱}$، $\text{اَ}_{۱}$، $\text{ب}_{۱}$، $\text{بَ}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$، $\text{بَ}_{۲}$، $\text{بَ}_{۳}$ کی تعیین کے لئے سات مساواتیں مہیّا ہو جاتی ہیں۔

پس واضح ہے کہ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ایسے مستقل موجود ہیں تو ان کی تعیین کا مصرحۂ بالا طریقہ بالکل عام ہے۔ بطور مثال چند سوال حل کیے جاتے ہیں۔

(۱) $\frac{\text{۳لا}^{۷} + \text{لا}^{۶} - \text{۶لا}^{۴} - \text{۸لا}^{۳} - \text{۱۱لا} + ۹}{\text{۲}(\text{لا}^{۳} - ۱)^{۲}}$ کو جزئی کسروں میں تحلیل کرو۔

معمولی تقسیم کے عمل سے دی ہوئی کسر $= \frac{۳}{۲}\text{لا} + \frac{۱}{۲} + \frac{\text{لا}^{۴} - \text{۴لا}^{۳} - \text{۷لا} + ۴}{(\text{لا}^{۳} - ۱)^{۲}}$

اب فرض کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^{۴} - \text{۴لا}^{۳} - \text{۷لا} + ۴}{(\text{لا}^{۳} - ۱)^{۲}} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا} - ۱)^{۲}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} - ۱}$$

$$+ \frac{\text{ج لا} + \text{د}}{(\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱)^{۲}} + \frac{\text{ع لا} + \text{ف}}{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱}$$

اور کسور سے صاف کرو۔ نتیجہ ہے

$$\text{لا}^{۴} - \text{۴لا}^{۳} - \text{۷لا} + ۴ = (\text{ب} + \text{ع})\text{لا}^{۵} + (\text{ا} + \text{ب} - \text{ع} + \text{ف})\text{لا}^{۴}$$

$$+ (\text{۲ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ف})\text{لا}^{۳} + (\text{۳ا} - \text{ب} - \text{۲ج} + \text{د} - \text{ع})\text{لا}^{۲}$$

$$+ (\text{۲ا} - \text{ب} + \text{ج} - \text{۲د} + \text{ع} - \text{ف})\text{لا} + (\text{ا} - \text{ب} + \text{د} + \text{ف})$$

لا کی مساوی قوتوں کے سروں کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

ع + ف = ۰

ا + ب - ع + ف = ۰

۲ا + ب + ج - ف = ۱

۳ا - ب - ۲ج + د - ع = -۴

۲ا - ب + ج - ۲د + ع - ف = -۷

ا - ب + د + ف = ۴

جس سے ا = -۲/۳، ب = ۰، ج = ۳، د = ۴، ع = ۰، ف = -۲/۳

پس (لا^۳ - ۴لا^۲ - ۷لا + ۴) / (لا^۳ - ۱)^۲ = - ۲ / ۳(لا - ۱)^۲ + (۳لا + ۴) / (لا^۲ + لا + ۱)^۲

+ ۲ / ۳(لا^۲ + لا + ۱)

پس دی ہوئی کسر = ۳/۲ لا + ۱/۲ - ۲ / ۳(لا - ۱)^۲ + (۳لا + ۴) / (لا^۲ + لا + ۱)^۲ + ۲ / ۳(لا^۲ + لا + ۱)

مثال (۳) - (۲لا + ۵) / (لا - ۱)^۳(لا - ۳) کو جزوی کسروں میں ظاہر کرو۔

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ (۲لا + ۵) / (لا - ۱)^۳(لا - ۳) = ا / (لا - ۱)^۳ + ب / (لا - ۱)^۲ + ج / (لا - ۱) + د / (لا - ۳)

کسور سے نجات کرنے سے

۲لا + ۵ = ا(لا - ۳) + ب(لا - ۱)(لا - ۳) + ج(لا - ۱)^۲(لا - ۳) + د(لا - ۱)^۳

اس آخری مساوات کے دونوں جانب لا^۰، لا، لا^۲، لا^۳ کے سروں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے سے ہم کو ۴ مقادیر ا، ب، ج، د معلوم کرنے کے لیے چار مساواتیں ملتی ہیں جس سے واضح ہے کہ ہمارا مفروضہ صحیح اور جائز ہے۔ لیکن ا، ب، ج، د کی اصلی قیمتیں دریافت کرنے کے لیے مصرحہ بالا طریقہ بہترین طریقہ نہیں ہے۔ اس خاص مثال میں مندرجہ ذیل طریقے سے یہ قیمتیں زیادہ سرعت کے ساتھ دریافت ہو سکتی ہیں:-

لا - ۱ کو ما کے مساوی لکھو۔ تب

$$۲ + ۲ ما + ۵ = ا\,(ما - ۲) + ب\,ما\,(ما - ۲) + ج\,ما^{۲}\,(ما - ۲) + د\,ما^{۳}$$

اب ما، ما، ما^{۲}، ما^{۳} کے سروں کو مساوی لکھو اور ہمیں حاصل ہوتی ہیں مساواتیں : $۷ = -۲\,ا$ ، $۲ = ا - ۲\,ب$ ، $۰ = ب - ۲\,ج$ اور $۰ = د + ج$

پس $ا = -\frac{۷}{۲}$ ، $ب = -\frac{۱۱}{۴}$ ، $ج = -\frac{۱۱}{۸}$ اور $د = \frac{۱۱}{۸}$

لہٰذا
$$\frac{۲ لا + ۵}{(لا - ۱)^{۳}(لا - ۳)} = \frac{۱۱}{۸\,(لا - ۳)} - \frac{۷}{۲\,(لا - ۱)^{۳}} - \frac{۱۱}{۴\,(لا - ۱)^{۲}} - \frac{۱۱}{۸\,(لا - ۱)}$$

۲۵ — مندرجہ ذیل مثالوں سے جُزئی کسروں کے استعمال کے فوائد عیاں ہونگے :—

(۱) لا کی صعودی قوتوں کے بموجب $\frac{۱}{۱ - ۵ لا + ۶ لا^{۲}}$ کے پھیلاؤ میں لا^{ن} کا سر دریافت کرو۔

$$\frac{۱}{۱ - ۵ لا + ۶ لا^{۲}} = \frac{۳}{۱ - ۳ لا} - \frac{۲}{۱ - ۲ لا}$$

$$= ۳\left\{۱ + ۳ لا + (۳ لا)^{۲} + \cdots\cdots + (۳ لا)^{ن} + \cdots\cdots\right\}$$

$$- ۲\left\{۱ + ۲ لا + (۲ لا)^{۲} + \cdots\cdots + (۲ لا)^{ن} + \cdots\cdots\right\}$$

پس مطلوبہ سر $۳^{ن+۱} - ۲^{ن+۱}$ ہے۔

(۲) $\frac{(۱ + لا)^{ن}}{(۱ - ۲ لا)^{۳}}$ کے پھیلاؤ میں لا^{ر} کا سر معلوم کرو۔

پہلے ہم $\frac{(۱ + لا)^{ن}}{(۱ - ۲ لا)^{۳}}$ کے کسری حصّہ کو جُزئی کسروں میں ظاہر کرینگے۔

فرض کرو
$$\frac{(۱ + لا)^{ن}}{(۱ - ۲ لا)^{۳}} = \frac{ا}{(۱ - ۲ لا)^{۳}} + \frac{ب}{(۱ - ۲ لا)^{۲}} + \frac{ج}{(۱ - ۲ لا)} + \text{ایک صحیح جملہ}$$

تب $(۱ + لا)^{ن} = ا + ب\,(۱ - ۲ لا) + ج\,(۱ - ۲ لا)^{۲} + (۱ - ۲ لا)^{۳} \times$ صحیح جملہ

اب لکھو $۱ - ۲ لا = ما$ ، تب

$$(۱ + لا)^{ن} = \left(\frac{۳}{۲} - \frac{ما}{۲}\right)^{ن} = \frac{۱}{۲^{ن}}\left(۳^{ن} - ن\,۳^{ن-۱}\,ما + \frac{ن\,(ن - ۱)}{۲ \times ۱}\,۳^{ن-۲}\,ما^{۲} + \right.$$

+ ما کی بلند تر قوتوں والی رقمیں

مساوات کے بائیں جانب = ا + ب ما + ج $ما^۲$ + $ما^۳$ × صحیح جملہ ما کی رقموں میں

پس $ما^۰$ ، $ما^۱$ ، $ما^۲$ کے سروں کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے

$$ا = \frac{۳^ن}{۲^ن} ، ب = - \frac{ن ۳^{ن-۱}}{۲^ن} ، ج = \frac{ن(ن-۱) ۳^{ن-۲}}{۲^{ن+۱}}$$

اس لیے $\frac{(۱+لا)^ن}{(۱-۲لا)^۳} = \frac{۳^ن}{۲^ن} \cdot \frac{۱}{(۱-۲لا)^۳} - \frac{ن ۳^{ن-۱}}{۲^ن} \cdot \frac{۱}{(۱-۲لا)^۲} + \frac{ن(ن-۱) ۳^{ن-۲}}{۲^{ن+۱}} \times \frac{۱}{۱-۲لا}$

+ ایک صحیح جملہ (ن-۳) ویں درجہ کا -

پہلی تین رقموں کو مسئلۂ ثنائی کے ذریعہ پھیلانے سے (پہلی مثال کی طرح)، ہمیں $لا^{ق}$ کا سر معلوم ہو جاتا ہے -

۴۶ - کسی کسر کے جزوی کسور میں تحلیل ہونے کے امکان کا ثبوت -

فرض کرو کہ دی ہوئی کسر $\frac{ف(لا)}{ف(لا)}$ ہے جس میں ف (لا) اور ف (لا) ایسے کثیر رقمی جملے ہیں جن کے درمیان کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے - فرض کرو کہ لا - ر نسب نما ف (لا) کا ایک ایسا خطی یا یک درجی جزو ضربی ہے جو م مرتبہ دہرایا جاتا ہے - اور $ف_۱(لا)$ بقیہ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے - تب ف (لا) = $(لا-ر)^م ف_۱(لا)$ اور

$$\frac{ف(لا)}{ف(لا)} = \frac{ف(لا)}{(لا-ر)^م ف_۱(لا)} \quad .... (۱)$$

مساوات $\frac{ف(لا)}{(لا-ر)^م ف_۱(لا)} = \frac{ا}{(لا-ر)^م} + \frac{ف(لا) - ا ف_۱(لا)}{(لا-ر)^م ف_۱(لا)} \quad ... (۲)$

مماثلاً صحیح ہے، ا خواہ کوئی مستقل ہو -

اگر ہم ایسا ا دریافت کریں کہ

$$ف(لا) - ا ف_۱(ر) = ۰ \quad .... (۳)$$

تب $ف(لا) - ا\,ف_{۱}(لا)$، $لا - ر$ پر تقسیم ہو سکیگا اور ہم اس کسر کی $(لا - ر)\,ف_{۲}(لا)$ کے ذریعہ تعبیر کر سکینگے۔

لیکن ہمارے مفروضہ سے نہ تو $ف(لا)$ اور نہ $ف_{۱}(لا)$، $لا - ر$ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اس لیے $ف(ر) \neq ۰$ اور $ف_{۱}(ر) \neq ۰$

پس (۳) سے

$$ا = \frac{ف(ر)}{ف_{۱}(ر)} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

ایک مستقل جو کہ صفر نہیں ہے۔

ا کی اس قیمت کے ساتھ

$$\frac{ف(لا)}{ف(لا)} = \frac{ا}{(لا-ر)^{م}} + \frac{ف_{۲}(لا)}{(لا-ر)^{م-۱}\,ف_{۱}(لا)} \quad \ldots\ldots (۵)$$

یہی طریقہ $\frac{ف_{۲}(لا)}{(لا-ر)^{م-۱}\,ف_{۱}(لا)}$ کے ساتھ استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف_{۲}(لا)}{(لا-ر)^{م-۱}\,ف_{۱}(لا)} = \frac{ا_{۱}}{(لا-ر)^{م-۱}} + \frac{ف_{۳}(لا)}{(لا-ر)^{م-۲}\,ف_{۱}(لا)}$$

جس میں $ا_{۱} = \frac{ف_{۲}(ر)}{ف_{۱}(ر)}$ اور $(لا - ر)\,ف_{۳}(لا) = ف_{۲}(لا) - ا_{۱}\,ف_{۱}(لا)$

لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ $ا_{۱}$ صفر ہو سکتا ہے اس لیے کہ $ف_{۲}(ر)$ صفر ہو سکتا ہے۔ لیکن $ا_{۱}$ لا متناہی نہیں ہو سکتا اس لیے کہ $ف_{۱}(ر) \neq ۰$.

یہ طریقہ متواتر م مرتبہ استعمال کرنے سے

$$\frac{ف(لا)}{ف(لا)} = \frac{ا}{(لا-ر)^{م}} + \frac{ا_{۱}}{(لا-ر)^{م-۱}} + \frac{ا_{۲}}{(لا-ر)^{م-۲}} + \ldots + \frac{ا_{م}}{لا-ر} + \frac{ف_{م}(لا)}{ف_{۱}(لا)}$$

جس میں $ا، ا_{۱}، ا_{۲} \ldots ا_{م}$ سب محدود مستقل ہیں، جن میں سے صرف ا ایسا ہے جو صفر نہیں ہو سکتا۔

اس استدلال سے یہ واضح ہو سکتا ہے کہ نسب نما کے کسی ایسے خطی

جزوِ ضربی کے لحاظ سے جو م مرتبہ واقع ہوتا ہے، ہم م کسریں فرض کرسکتے ہیں، جن کے شمار کنندے مستقل ہیں اور جن کے نسب نما اِس جزوِ ضربی کی علی الترتیب، م - ویں، (م - ۱) - ویں ...... پہلی قوتیں ہیں۔

ان کسروں کو دُور کرنے کے بعد بقیہ کسر یعنی $\frac{\text{ف}_\text{م}(\text{لا})}{\text{ف}_1(\text{لا})}$ کے ساتھ ہم اسی طرح عمل کرسکتے ہیں۔

مندرجۂ بالا بحث میں ر اور ف (لا) اور ف (لا) کے سر حقیقی ہوسکتے ہیں یا ملتف۔ بدیں وجہ یہ طریقہ علی التواتر، ف (لا) کے ہر ایک جزوِ ضربی کے ساتھ استعمال کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح جزوی کسور میں مکمل تحلیل ہوسکتی ہے۔ اگر ف (لا) اور ف (لا) کے حقیقی سر ہوں اور ہم چاہتے ہیں کہ صرف حقیقی کثیر رقمی جملوں کی حد تک اپنے آپ کو محدود رکھیں تو ہم یہ طریقہ صرف حقیقی خطی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کرینگے اور آئندہ فصل میں دو درجی اجزائے ضربی سے بحث کرینگے۔

۲۷ ۔ ایسی صورت میں جبکہ نسب نما ف (لا) کا جزوِ ضربی دو درجی اور بشکل $(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2$ ہوتا ہے، جو حقیقی خطی اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں ہوسکتا فرض کرو

$$\text{ف}(\text{لا}) = \{(\text{لا}-\text{ا})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{م}}\ \text{ف}_1(\text{لا})$$

تب
$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\{(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ب}^2\}^{\text{م}}\ \text{ف}_1(\text{لا})} \quad \ldots\ldots (1)$$

اب مساوات
$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\{(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ب}^2\}^{\text{م}}\ \text{ف}_1(\text{لا})} = \frac{\text{أ}\,\text{لا} + \text{ب}}{\{(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ب}^2\}^{\text{م}}} + \frac{\text{ف}(\text{لا}) - (\text{أ}\,\text{لا}+\text{ب})\,\text{ف}_1(\text{لا})}{\{(\text{لا}-\text{ا})^2+\text{ب}^2\}^{\text{م}}\ \text{ف}_1(\text{لا})} \quad \ldots\ldots (2)$$

متماثلاً صحیح ہے، أ اور ب کوئی سے مستقل ہیں۔

اگر ہم أ اور ب کی قیمتیں معلوم کریں، ایسی کہ

$$\text{ف}(\text{ا}+\text{ب خ}) - \{\text{أ}(\text{ا}+\text{ب خ}) + \text{ب}\}\,\text{ف}_1(\text{ا}+\text{ب خ}) = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

اور
$$\text{ف}(\text{ا}-\text{ب خ}) - \{\text{أ}(\text{ا}-\text{ب خ}) + \text{ب}\}\,\text{ف}_1(\text{ا}-\text{ب خ}) = 0$$

تب ف (لا) - (۲ لا + ب) ف۱ (لا)، لا - ا - ب خ اور لا - ا + ب خ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اس لیے اُن کے حاصلِ ضرب (لا - ا)^2 + ب^2 پر تقسیم ہو سکتا ہے، اور اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں

ف (لا) - (۲ لا + ب) ف۱ (لا) = {(لا - ا)^2 + ب^2} ف۱ (لا)

مفروضہ سے نہ تو ف (لا) اور نہ ف۱ (لا)، (لا - ا)^2 + ب^2 پر تقسیم ہو سکتا ہے

لہذا ف (ا ± ب خ) ≠ ۰ اور ف۱ (ا ± ب خ) ≠ ۰

ف (ا + ب خ) / ف۱ (ا + ب خ) کو پ + ق خ سے تعبیر کریں اور ف (ا - ب خ) / ف۱ (ا - ب خ) کو پ - ق خ سے تعبیر کریں تو ہمیں حاصل ہونگی مساواتیں

۲ (ا + ب خ) + ب = پ + ق خ

اور　۲ (ا - ب خ) + ب = پ - ق خ

جہاں پ اور ق محدود مقداریں ہیں ایسی کہ دونوں ممکن ہے کہ ایک ہی وقت میں صفر نہ ہوں

∴　ا ۲ + ب = پ

ب ۲ = ق

ایسی دو مثالیں جن سے معلوم ہوتا ہے کہ ۲ اور ب حقیقی محدود قیمتیں رکھتے ہیں جو وقتِ واحد میں دونوں صفر نہیں ہو سکتے۔

۲ اور ب کی ان قیمتوں کے ساتھ

ف (لا) / ف (لا) = (۲ لا + ب) / {(لا - ا)^2 + ب^2}^{ا} + ف۱ (لا) / {(لا - ا)^2 + ب^2}$^{ا-۱}$ ف۱ (لا)

اور اس طریقہ کو یک درجی جزوِ ضربی کی مثال کی طرح دُہرانے سے ہم بالآخر دیکھتے ہیں کہ

ف (لا) / ف (لا) = (۲ لا + ب) / {(لا - ا)^2 + ب^2}^{ا} + (۲۱ لا + ب۱) / {(لا - ا)^2 - ب^2}$^{ا-۱}$ + ... + فم (لا) / ف۱ (لا)

یہ ظاہر کرنا ضروری ہے کہ ممکن ہے کہ ۲ اور ب ایک ہی وقت میں صفر

نہ ہوں اور دوسرے مستقلوں میں سے کوئی بھی یا سب کے سب ممکن ہے کہ صفر ہوں۔

ظاہر ہے کہ یہی طریقہ ف (لا) کے دو درجی اجزائے ضربی میں سے ہر ایک کے ساتھ استعمال ہو سکتا ہے۔

الحاصل اگر

$$\text{ف}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{ر}_1)^{\text{ا}}\,(\text{لا}-\text{ر}_2)^{\text{ن}} \cdots\cdots \{(\text{لا}-\text{و})^2+\text{ب}^2\}^{\text{ل}} \cdots\cdots$$

اور ہم مندرجۂ بالا طریقے علی التواتر یک درجی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کریں اور پھر دو درجی اجزائے ضربی کے ساتھ علی التواتر استعمال کریں تو بالآخر

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا}-\text{ر}_1)^{\text{ا}}} + \frac{\text{ا}_1}{(\text{لا}-\text{ر}_1)^{\text{ا}-1}} + \cdots + \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{\text{لا}-\text{ر}_1}$$

$$+ \frac{\text{ب}}{(\text{لا}-\text{ر}_2)^{\text{ن}}} + \frac{\text{ب}_1}{(\text{لا}-\text{ر}_2)^{\text{ن}-1}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{لا}-\text{ر}_2}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$+ \frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{\{(\text{لا}-\text{و})^2+\text{ب}^2\}^{\text{ل}}} + \frac{\text{ج}_1\,\text{لا}+\text{د}_1}{\{(\text{لا}-\text{و})^2+\text{ب}^2\}^{\text{ل}-1}} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ج}_{\text{ل}}\,\text{لا}+\text{د}_{\text{ل}}}{(\text{لا}-\text{و})^2+\text{ب}^2} + \cdots\cdots + \text{آ}$$

جہاں آ یا تو صفر ہے یا لا کا ایک صحیح جملہ ہے۔

لیکن اگر ف (لا) کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے کمتر ہے، اور یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ہم دی ہوئی کسر کو ہمیشہ فی الواقعی عمل تقسیم سے اس حالت میں تحویل کر سکتے ہیں $\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}$ اور تمام کسریں مساوات کے بائیں جانب کی صفر ہو جاتی ہیں جبکہ لا $= \infty$، اس لیے آ صفر ہے اور دی ہوئی کسر مصرحہ جزئی کسوریں تحلیل ہو جاتی ہے۔

دوسرے باب کی مثالیں

مندرجۂ ذیل کسروں کو جزئی کسور میں تحلیل کرو:-

(۱) $\frac{۴-۹\,\text{لا}}{(۱-۲\,\text{لا})(۱-۳\,\text{لا})}$　　(۲) $\frac{۴+۵\,\text{لا}}{(۱-\text{لا})^{۳}}$

(۳) $\frac{۳\,\text{لا}^{۲}+۷\,\text{لا}+۳}{(\text{لا}+۱)(\text{لا}^{۲}+۲\,\text{لا}+۵)}$　　(۴) $\frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}^{۴}+۱}$

(۵) $\frac{\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۱}{\text{لا}^{۳}-۴\,\text{لا}^{۲}+\text{لا}+۶}$　　(۶) $\frac{۱+۷\,\text{لا}-\text{لا}^{۲}}{(۱+۳\,\text{لا})^{۲}(۱-۱۰\,\text{لا})}$

(۷) $\frac{\text{لا}^{۳}+۲}{(\text{لا}-۲)^{۲}(\text{لا}^{۲}+۱)}$　　(۸) $\frac{۱+۲\,\text{لا}}{\text{لا}^{۲}(\text{لا}+۲)^{۲}(\text{لا}+۱)}$

(۹) ثابت کرو کہ $\frac{\text{لا}+۵}{(\text{لا}^{۲}-۱)(\text{لا}+۲)}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{۲\text{ن}-۱}$ کا سر $۱-\frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}}$ ہے

(۱۰) $\frac{\text{لا}-۲}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}-۱)^{۲}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر دریافت کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱-\text{لا}}+\frac{\text{ما}}{۱-\text{ما}\,\text{لا}}+\frac{\text{ما}^{۲}}{۱-\text{ما}^{۲}\,\text{لا}}+\frac{\text{ما}^{۳}}{۱-\text{ما}^{۳}\,\text{لا}}+\cdots$

$$=\frac{۱}{۱-\text{ما}}+\frac{\text{لا}}{۱-\text{لا}\,\text{ما}}+\frac{\text{لا}^{۲}}{۱-\text{لا}^{۲}\,\text{ما}}+\frac{\text{لا}^{۳}}{۱-\text{لا}^{۳}\,\text{ما}}+\cdots$$

تیسرا باب

مقطّعات

(Determinants)

۳۸ — مقطّعات مسائل طبیعیات میں زیادہ تر پیچیدہ اور متعدد نامعلوم مقادیر کی ہمزاد مساواتوں کے حل کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ہم اس باب کا آغاز آسان ہمزاد مساواتوں کی مثال سے شروع کرتے ہیں۔

اگر خطی (یعنی یک درجی) مساواتیں

$$\text{ا}_۱\,\text{لا} + \text{ب}_۱\,\text{ما} + \text{ج}_۱ = ۰$$

$$\text{ا}_۲\,\text{لا} + \text{ب}_۲\,\text{ما} + \text{ج}_۲ = ۰$$

دی جائیں تو ابتدائی الجبرا کے طریقوں سے بآسانی مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} = \frac{(\text{ب}_۱\,\text{ج}_۲ - \text{ب}_۲\,\text{ج}_۱)}{\text{ا}_۱\,\text{ب}_۲ - \text{ب}_۱\,\text{ا}_۲}$$

اور

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}_۱\,\text{ا}_۲ - \text{ا}_۱\,\text{ج}_۲}{\text{ا}_۱\,\text{ب}_۲ - \text{ب}_۱\,\text{ا}_۲}$$

ان کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :—

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_۱\,\text{ج}_۲ - \text{ج}_۱\,\text{ب}_۲} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}_۱\,\text{ا}_۲ - \text{ا}_۱\,\text{ج}_۲} = \frac{۱}{\text{ا}_۱\,\text{ب}_۲ - \text{ب}_۱\,\text{ا}_۲}$$

اور چونکہ تینوں نسب نما ایک ہی شکل کے ہیں اس لیے ان میں سے ہر ایک کی بہ نظرِ سہولت ایک خاص علامت کے ذریعہ تعبیر ہو سکتی ہے :— چنانچہ

$$\text{ا}_۱\,\text{ب}_۲ - \text{ب}_۱\,\text{ا}_۲ \equiv \begin{vmatrix} \text{ا}_۱ & \text{ب}_۱ \\ \text{ا}_۲ & \text{ب}_۲ \end{vmatrix}$$

اس متماثل مساوات کے بائیں جانب کے رُکن کو مقطعہ (Determinant) کہتے ہیں اور سیدھے جانب کے رُکن کو مقطعہ کا پھیلاؤ۔ اعداد $ا_1$، $ب_1$، $ا_2$، $ب_2$ کو مقطعہ کے اجزائے ترکیبی (Elements) کہتے ہیں، اور چونکہ ہر ایک رقم مقطعہ کے پھیلاؤ میں، دو اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب ہے، یہ مقطعہ دوسرے رُتبہ (Order) کا کہلاتا ہے۔

پس دوسرے رُتبہ کے مقطعہ کا پھیلاؤ اس طرح عمل میں آتا ہے کہ سیدھے جانب سے بائیں جانب کو نیچے کی طرف گزرنے والے وتر پر کے اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب لیا جائے اور اس میں سے دوسرے وتر پر کے اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب تفریق کیا جائے۔

لا اور ما کے نسبت نماؤں کو بھی اگر اسی طرح تعبیر کیا جائے تو مساواتوں

$$ا_1 \text{لا} + ب_1 \text{ما} + ج_1 = 0$$

$$ا_2 \text{لا} + ب_2 \text{ما} + ج_2 = 0$$

کا حل یوں لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 \\ ب_2 & ج_2 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ما}}{\begin{vmatrix} ج_1 & ا_1 \\ ج_2 & ا_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

جس میں ہر ایک نسبت نما، سِروں کو دائری (Cyclic) ترتیب میں دو متناظر صفوں میں لکھنے سے، جبکہ زیر تعیین مقدار کے متعلق رقوم متروک کر دیئے جاتے ہیں، تیار ہوتا ہے۔

دائری ترتیب کا مفہوم یہ ہے کہ ا کے بعد ب لکھا جائے، ب کے بعد ج، اور ج کے بعد ا۔ گویا کہ کسی دائرے کے محیط کے گرد ا، ب اور ج سِروں کو لکھ کر ترتیب وار ایک سر سے دوسرے سر کی طرف گزریں۔

مثال (۱) — مقطعات ذیل کو پھیلاؤ:-

(i) $\begin{vmatrix} ۸ & ۵ \\ ۹ & ۶ \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} ا+ب & ۲ب \\ ۲ا & ا+ب \end{vmatrix}$

اور (iii) حل کرو
| ۱۰لا　۵ |
| −۹　۲لا |
=
| لا　−۳ |
| ۱۷　۷ |

حل (i)
| ۸　۵ |
| ۹　۶ |
= ۸×۶ − ۵×۹ = ۴۸ − ۴۵
= ۳

(ii)
| ا+ب　۲ب |
| ۲ا　ا+ب |
= (ا+ب)^۲ − ۴اب = (ا−ب)^۲

(iii) مساوات
| ۱۰لا　۵ |
| −۹　۲لا |
=
| لا　−۳ |
| ۱۷　۷ |
کو

پھیلانے سے حاصل ہوتی ہے مساوات ۲۰لا^۲ + ۴۵ = ۷لا + ۵۱

یا　۲۰لا^۲ − ۷لا − ۶ = ۰

یعنی　(۴لا − ۳)(۵لا + ۲) = ۰

جس سے　لا = ۰ء۷۵ یا −۰ء۴

مثال (۲)۔ ہمزاد مساواتوں

۸لا − ما = −۲۵، ۵لا + ۲ما = ۲۹ کو حل کرو

ان مساواتوں کو مناسب ترتیب میں لکھنے سے

۸لا − ما + ۲۵ = ۰

۵لا + ۲ما − ۲۹ = ۰

مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

∴
لا / | −۱　۲۵ ; ۲　−۲۹ | = ما / | ۲۵　۸ ; −۲۹　۵ | = ۱ / | ۸　−۱ ; ۵　۲ |

یا　لا / −۲۱ = ما / ۳۵۷ = ۱ / ۲۱

لا = −۱ ، ما = ۱۷

۴۹ - تین غیر معلوم مقادیر کی مساواتیں — ذیل کی ہمزاد خطّی مساواتوں پر غور کرو:—

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1\,\text{ی} + \text{د}_1 = 0$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2\,\text{ی} + \text{د}_2 = 0$$
$$\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ب}_3\,\text{ما} + \text{ج}_3\,\text{ی} + \text{د}_3 = 0$$

ان کو معمولی استقاط کے ذریعہ حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے:-

$$\text{لا} = \frac{(\text{ب}_1\text{د}_2\text{ج}_3 + \text{ج}_1\text{ب}_2\text{د}_3 + \text{د}_1\text{ج}_2\text{ب}_3 - \text{ب}_1\text{ج}_2\text{د}_3 - \text{ج}_1\text{د}_2\text{ب}_3 - \text{د}_1\text{ب}_2\text{ج}_3)}{\text{ھ}}$$

$$\text{ما} = \frac{(\text{ج}_1\text{د}_2\text{ا}_3 + \text{د}_1\text{ا}_2\text{ج}_3 + \text{ا}_1\text{ج}_2\text{د}_3 - \text{ا}_1\text{د}_2\text{ج}_3 - \text{ج}_1\text{ا}_2\text{د}_3 - \text{د}_1\text{ج}_2\text{ا}_3)}{\text{ھ}}$$

$$\text{ی} = \frac{(\text{ب}_1\text{ا}_2\text{د}_3 + \text{د}_1\text{ب}_2\text{ا}_3 + \text{ا}_1\text{د}_2\text{ب}_3 - \text{ا}_1\text{ب}_2\text{د}_3 - \text{ب}_1\text{د}_2\text{ا}_3 - \text{د}_1\text{ا}_2\text{ب}_3)}{\text{ھ}}$$

جہاں
$$\text{ھ} = \text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3 + \text{ب}_1\text{ج}_2\text{ا}_3 + \text{ج}_1\text{ا}_2\text{ب}_3 - \text{ج}_1\text{ب}_2\text{ا}_3 - \text{ا}_1\text{ج}_2\text{ب}_3 - \text{ب}_1\text{ا}_2\text{ج}_3$$
$$= \text{ا}_1(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ج}_2\text{ب}_3) + \text{ب}_1(\text{ج}_2\text{ا}_3 - \text{ا}_2\text{ج}_3) + \text{ج}_1(\text{ا}_2\text{ب}_3 - \text{ب}_2\text{ا}_3)$$
$$= \text{ا}_1\begin{vmatrix}\text{ب}_2 & \text{ج}_2\\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3\end{vmatrix} + \text{ب}_1\begin{vmatrix}\text{ج}_2 & \text{ا}_2\\ \text{ج}_3 & \text{ا}_3\end{vmatrix} + \text{ج}_1\begin{vmatrix}\text{ا}_2 & \text{ب}_2\\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3\end{vmatrix}$$

فصل ۴۵ کے مطابق ھ کی تعبیر علامت کے ذریعہ ذیل کے مقطعہ سے ہو سکتی ہے:-

$$\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2\\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3\end{vmatrix}$$

جو کہ تیسرے رتبہ کا مقطعہ ہے - پس

$$\begin{vmatrix}\text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1\\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2\\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3\end{vmatrix} = \text{ا}_1\begin{vmatrix}\text{ب}_2 & \text{ج}_2\\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3\end{vmatrix} + \text{ب}_1\begin{vmatrix}\text{ج}_2 & \text{ا}_2\\ \text{ج}_3 & \text{ا}_3\end{vmatrix} + \text{ج}_1\begin{vmatrix}\text{ا}_2 & \text{ب}_2\\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3\end{vmatrix}$$

پس ا_1 کا سر وہ مقطعہ ہے جو ا_1 والی صف اور کالم کو ساقط کرنے سے بنتا ہے۔

اسی طرح $ب_1$ اور $ج_1$ کے لیے بھی بشرطیکہ ہر صف کے اجزائے ترکیبی دائری ترتیب میں لیے جائیں۔ ان دوسرے رتبہ کے مقطعات میں سے ہر ایک اُس جزو ترکیبی کا صغیر کہلاتا ہے جو اس کو ضرب دیتا ہے۔

لا کی قیمت کا جو جملہ ہے اُس کا شمار کنندہ

$$ب_1 ج_2 د_3 + ج_1 ب_3 د_2 + د_1 ج_2 ب_3 - ب_1 ج_3 د_2 - ج_1 د_3 ب_2 - د_1 ب_2 ج_3$$

$$= ب_1 (ج_2 د_3 - د_2 ج_3) - ج_1 (د_3 ب_2 - ب_3 د_2) - د_1 (ب_3 ج_2 - ج_3 ب_2)$$

$$= ب_1 \begin{vmatrix} ج_2 & د_2 \\ ج_3 & د_3 \end{vmatrix} - ج_1 \begin{vmatrix} د_2 & ب_2 \\ د_3 & ب_3 \end{vmatrix} - د_1 \begin{vmatrix} ب_2 & ج_2 \\ ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

اسی بموجب ما اور ی کی قیمتوں کے شمار کنندہ مقطعات کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں۔

پس مساواتوں

$$ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 ی + د_1 = 0$$

$$ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 ی + د_2 = 0$$

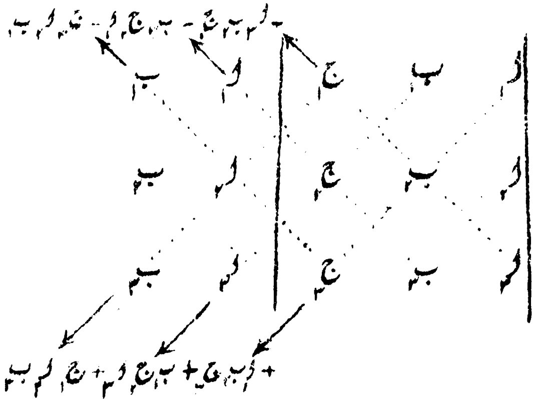
$$ا_3 لا + ب_3 ما + ج_3 ی + د_3 = 0$$

کا حل ذیل کی مقطعاتی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:—

$$\frac{-لا}{\begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \end{vmatrix}} = \frac{ما}{\begin{vmatrix} ج_1 & د_1 & ا_1 \\ ج_2 & د_2 & ا_2 \\ ج_3 & د_3 & ا_3 \end{vmatrix}} = \frac{-ی}{\begin{vmatrix} د_1 & ا_1 & ب_1 \\ د_2 & ا_2 & ب_2 \\ د_3 & ا_3 & ب_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}} \quad ......(۲)$$

ان کے نسب نما ٹھیک اس طرح تیار ہوئے ہیں جیسے کہ فصل (۱) کی مساواتوں کی صورت میں ہوا ہے۔ لیکن علامتیں متبادلاً منفی اور مثبت ہیں تاکہ دائری ترتیب قایم رہے۔

تیسرے رُتبہ کا مقطعہ سارّس کے قاعدے (Rule of Sarrus) سے بآسانی پھیلایا جا سکتا ہے۔ چنانچہ مقطعہ کے سیدھے جانب کے پہلے دو کالموں کو دُہرانے کے بعد مصرحۂ چھ وتروں میں سے ہر ایک پر کے اجزائے ترکیبی کے حاصل ضربوں کا مجموعہ یعنے سے پھیلاؤ لکھا جا سکتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جو حاصل ضرب نیچے کی طرف لیے جاتے ہیں وہ مثبت ہیں اور جو اوپر کی طرف لیے جاتے ہیں وہ منفی ہیں۔



مثال ۳ ــ مندرجۂ ذیل مقطعات کو پھیلاؤ:-

(ا) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 1 & \text{جب ط} & 2 \\ \text{جب ط} & 1 & \text{جم ط} \\ 0 & \text{جم ط} & 1 \end{vmatrix}$

حل (ا) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 13 + 36 - 49 = 0$

یا سارّس کے قاعدے سے پھیلانے سے، مقطعہ

= ۱×۵×۹ + ۶×۸×۳ + ۷×۲×۴ − ۳×۵×۷ − ۴×۸×۱ − ۹×۲×۶

= ۴۵ + ۱۴۴ + ۵۶ − ۱۰۵ − ۳۲ − ۱۰۸ = ۰

(ب) اسی طرح

$$\begin{vmatrix} ۲ & \text{جب ط} & ۱ \\ \text{جم ط} & ۱ & \text{جب ط} \\ ۱ & \text{جم ط} & ۰ \end{vmatrix}$$

= ۱ + ۰ + ۲ جب ط جم ط − ۰ − جم² ط − جب² ط

= ۲ جب ط جم ط

= جب ۲ ط

مثال ۴ — مقطعات کے ذریعہ ذیل کی مساواتیں حل کرو:-

۴ لا + ما + ۲ ی − ۱۵ = ۰

۳ لا − ۲ ما − ی − ۷ = ۰

۷ لا + ۳ ما − ۳ ی + ۱۰ = ۰

چونکہ یہ مساواتیں مناسب ترتیب میں لکھی گئی ہیں۔ ان کا حل، نتیجہ (۲) کے ذریعہ سے علامتاً یوں لکھا جاسکتا ہے:-

$$\frac{\text{ی} -}{\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & -۱۵ \\ -۲ & ۳ & -۷ \\ ۳ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}} = \frac{\text{ما}}{\begin{vmatrix} ۴ & -۱۵ & ۲ \\ ۳ & -۷ & -۱ \\ ۷ & ۱۰ & -۳ \end{vmatrix}} = \frac{\text{لا} -}{\begin{vmatrix} -۱۵ & ۲ & ۱ \\ -۷ & -۱ & -۲ \\ ۱۰ & -۳ & ۳ \end{vmatrix}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ -۳ & ۳ & ۷ \end{vmatrix}}$$

جو مقطعات کو پھیلانے سے ہوجاتے ہیں:-

$$\frac{۱}{۸۴} = \frac{\text{ی}}{۴۲۰} = \frac{\text{ما}}{-۲۵۲} = \frac{\text{لا}}{۱۶۸}$$

جس سے لا = ۲، ما = −۳، ی = ۵

۳۰ - ن غیر معلوم مقادیر کے لیے عام حل - مقطعات کے ذریعہ حل کرنے کا طریقہ ٹھیک اسی طرح کسی بھی خطی مساواتوں کے نظام پر عاید کیا جا سکتا ہے -

فرض کرو کہ

$$\text{ا}_{11}\,\text{لا}_1 + \text{ا}_{12}\,\text{لا}_2 + \text{ا}_{13}\,\text{لا}_3 + \dots + \text{ا}_{1\text{ن}}\,\text{لا}_{\text{ن}} + \text{ک}_1 = 0$$

$$\text{ا}_{21}\,\text{لا}_1 + \text{ا}_{22}\,\text{لا}_2 + \text{ا}_{23}\,\text{لا}_3 + \dots + \text{ا}_{2\text{ن}}\,\text{لا}_{\text{ن}} + \text{ک}_2 = 0$$

. . . .

$$\text{ا}_{\text{ن}1}\,\text{لا}_1 + \text{ا}_{\text{ن}2}\,\text{لا}_2 + \text{ا}_{\text{ن}3}\,\text{لا}_3 + \dots + \text{ا}_{\text{نن}}\,\text{لا}_{\text{ن}} + \text{ک}_{\text{ن}} = 0$$

ن متجانس خطی مساواتوں کا ایک نظام ہے - تب ان کا حل اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے :

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ق}_1} = \frac{\text{لا}_2}{\text{ق}_2} = \frac{\text{لا}_3}{(-1)\,\text{ق}_3} = \dots = \frac{1}{(-1)^{\text{ن}}\,\text{ق}} \quad \dots\dots (۳)$$

جس میں ق ان سروں کا مقطعہ ہے جبکہ مطلق رقموں کا کالم متروک کر دیا جاتا ہے - اور $\text{ق}_{\text{ر}}$ ($\text{ر} = ۱، ۲، ۳ \dots \text{ن}$) سروں کا وہ مقطعہ ہے جو $\text{لا}_{\text{ر}}$ کی رقموں کا کالم متروک کر دینے اور ہر ایک صف کو دائری ترتیب میں لکھنے سے بنتا ہے - ان میں سے ہر ایک مقطعہ ن ویں رتبہ کا ہوگا، اور اس کی ضرورت ہوتی ہے کہ مختصراً ان اصولوں کا امتحان کریں جن کے لحاظ سے تیسرے سے بلند تر رتبہ کا مقطعہ پھیلایا جا سکتا ہے!

مثال ۵ - مقطعہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

کے اہم خواص معلوم کرو [جامعہ لندن]

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_3 & \text{ب}_1 \\ \text{ج}_3 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ا}_2\text{ب}_3\text{ج}_1 - \text{ا}_2\text{ب}_1\text{ج}_3 + \text{ا}_3\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ا}_3\text{ب}_2\text{ج}_1$$

$$= ا_1(ب_2 ج_3 - ب_3 ج_2) + ب_1(ج_2 ا_3 - ج_3 ا_2) + ج_1(ا_2 ب_3 - ا_3 ب_2)$$

$$= \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

پس (۱) کسی مقطعہ کی قیمت نہیں تبدیل ہوتی ہے اگر اس کے کالموں کو صفوں میں اور صفوں کو کالموں میں تبدیل کردیں۔

مندرجۂ بالا پھیلاؤ یوں بھی لکھا جاسکتا ہے:۔

$$-\{ا_3(ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1) + ا_1(ب_2 ج_3 - ب_3 ج_2) + ا_2(ب_3 ج_1 - ب_1 ج_3)\}$$

$$= -\begin{vmatrix} ا_2 & ا_1 & ا_3 \\ ب_2 & ب_1 & ب_3 \\ ج_2 & ج_1 & ج_3 \end{vmatrix}$$

پس (۲) کسی مقطعہ کی علامت تبدیل ہوجاتی ہے اگر اس کی دو صفیں یا اس کے دو کالم باہمدیگر تبدیل کیے جاتے ہیں۔

اسی پھیلاؤ سے فوراً واضح ہوتا ہے کہ اگر $ا_3 = ا_2$، $ب_3 = ب_2$ اور $ج_3 = ج_2$ تو مقطعہ کی قیمت صفر ہوجاتی ہے۔ پس

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ا_2 & ا_2 \\ ب_1 & ب_2 & ب_2 \\ ج_1 & ج_2 & ج_2 \end{vmatrix} = 0$$

پس (۳) جب دو صفیں یا کالم متماثل ہوں تو مقطعہ صفر ہوجاتا ہے۔

اب فرض کرو کہ $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$ کے عوض علی الترتیب $م ا_1$، $م ب_1$، $م ج_1$ لکھے جاتے ہیں؛

تب مقطعہ کو پھیلانے سے فوراً معلوم ہوجاتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} m\,\text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ m\,\text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ m\,\text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

پس (۴) کسی صف یا کالم کے ہر جزوِ ترکیبی کو کسی دیے ہوئے جزوِ ضربی سے ضرب دینے کا نتیجہ وہی ہوتا ہے جو مقطعہ کو اِس جزوِ ضربی سے ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے۔

اب فرض کرو کہ $\text{ا}_1 = \text{عہ}_1 + \text{ف}$ ، $\text{ب}_1 = \text{بہ}_1 + \text{ق}$ ، $\text{ج}_1 = \text{جہ}_1 + \text{ک}$
تب مقطعہ کو پھیلانے سے اس کی شکل

$$(\text{عہ}_1 + \text{ف})(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ا}_2(\text{ب}_3\text{جہ}_1 + \text{ب}_3\text{ک} - \text{بہ}_1\text{ج}_3 - \text{ج}_3\text{ق}) + \text{ا}_3(\text{بہ}_1\text{ج}_2 + \text{ج}_2\text{ق} - \text{ب}_2\text{جہ}_1 - \text{ب}_2\text{ک})$$

$$= \{\text{عہ}_1(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ا}_2(\text{ب}_3\text{جہ}_1 - \text{بہ}_1\text{ج}_3) + \text{ا}_3(\text{بہ}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{جہ}_1)\}$$
$$+ \{\text{ف}(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ا}_2(\text{ب}_3\text{ک} - \text{ج}_3\text{ق}) + \text{ا}_3(\text{ج}_2\text{ق} - \text{ب}_2\text{ک})\}$$

جو تین درجے کے دو مقطعوں کے پھیلاؤں کا مجموعہ ہے۔ پس

$$\begin{vmatrix} \text{عہ}_1 + \text{ف} & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{بہ}_1 + \text{ق} & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{جہ}_1 + \text{ک} & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{بہ}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{جہ}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ف} & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ق} & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ک} & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

پس (۵) جب کسی صف یا کالم کا ہر ایک جزوِ ترکیبی دو یا زائد رقموں کے جبری مجموعہ پر مشتمل ہوتا ہے تو مقطعہ دو یا زائد مقطعوں کا حاصلِ جمع ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک کا جزوِ ترکیبی ایک واحد رقم پر مشتمل ہوتا ہے۔

اس خاصیت اور خاصیت (۴) سے بآسانی واضح ہوتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ف}\,\text{ا}_2-\text{ق}\,\text{ا}_3 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1+\text{ف}\,\text{ب}_2-\text{ق}\,\text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1+\text{ف}\,\text{ج}_2-\text{ق}\,\text{ج}_3 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ف}\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ق}\begin{vmatrix} \text{ا}_3 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_3 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

اس لیے کہ آخری دو مقطعے ازروئے مسئلہ (۳) صفر ہو جاتے ہیں۔

پس (۶) ایک یا زیادہ صفوں یا کالموں کے اجزائے ترکیبی کے مساوی [illegible] اضعاف (Equi-multiples) جبری طور پر کسی دوسری صف یا کالم کے متناظر اجزائے ترکیبی کے ساتھ جمع کیے جاتے ہیں تو مقطعہ کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

۳۱ - ن غیر معلوم مقادیر میں عام نظام — فصل (۴)

یہ تیسرے رتبہ کے مقطعہ کے لیے جو خواص ثابت کیے گئے ہیں بالکل عام ہیں اور تمام رتبوں کے مقطعوں پر حاوی ہیں۔ ن ویں رتبہ کے مقطعہ کے لئے پھیلاؤ متعاون (Minors) کے ذریعہ عمل میں لایا جا سکتا ہے۔

چنانچہ فرض کرو ق =

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} & \text{ا}_{31} & \cdots\cdots & \text{ا}_{\text{ن}1} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} & \text{ا}_{32} & \cdots\cdots & \text{ا}_{\text{ن}2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ا}_{1\text{ن}} & \text{ا}_{2\text{ن}} & \text{ا}_{3\text{ن}} & \cdots\cdots & \text{ا}_{\text{ن}\text{ن}} \end{vmatrix}$$

پس پہلا پھیلاؤ دیا جاتا ہے بذریعہ

ق = ک۱۱ ل۱ − ک۲۱ ل۲ + ک۳۱ ل۳ ...... + (−۱)^ن−۱ کن۱ لن ...... (۲)

جہاں کر (ر = ۱، ۲، ۳ ... ن) صغیر ہے کر۱ کا۔ اور وہ ایک مقطعہ ہے جو کر۱ والی صف اور کالم کو متروک کر دینے اور صفوں کو دائری ترتیب میں لکھنے سے تیار ہوتا ہے۔ ہر ایک صغیر (ن − ۱) ویں رتبہ کا ہے جبکہ ق، ن ویں رتبہ کا ہے۔ مقطعات کے حل میں عملاً اس قاعدے کے ساتھ مصرحہ بالا چھ خواص سے مدد لی جاتی ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

مثال (۶) مساواتوں

۱۶ لا − ۱۲ ما + ۷ ی + ۱۵ سہ + ۳ = ۰

۲۲ لا − ۳ ما + ۳ ی + ۱۱ سہ + ۲ = ۰

۷۶ لا + ۱۰ ما − ۱۱ ی + ۱۶ سہ + ۴ = ۰

− ۶ لا − ۳۸ ما + ۱۰ ی + ۱۹ سہ + ۵ = ۰

کو حل کرو، پہلے لا معلوم کرکے، اور پھر لا کی قیمت کو کام میں لاکر دیے ہوئے نظام کو تین ہمزاد مساواتوں میں محوّل کرکے۔

لا کی قیمت ملتی ہے بذریعہ

$$\frac{لا}{ق_1} = \frac{1}{ق}$$

جہاں ق۱ =

−۱۲	۷	۱۵	۳
−۳	۳	۱۱	۲
۱۰	−۱۱	۱۶	۴
−۳۸	۱۰	۱۹	۵

اور ق =

۱۶	−۱۲	۷	۱۵
۲۲	−۳	۳	۱۱
۷۶	۱۰	[illegible]	۱۶
−۶	−۳۸	۱۰	۱۹

پہلے ق۱ کو لو

ق۱ =

−۱۲ + ۱۴	۷	۱۵ − ۱۵	۳
−۳ + ۲	۳	۱۱ − ۱۰	۲
۱۰ − ۲۲	−۱۱	۱۶ − ۲۰	۴
−۳۸ + ۴۰	۱۰	۱۹ − ۲۵	۵

(از مسئلہ (۶))

$$= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -12 & -11 & -4 & 4 \\ -18 & 10 & -6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 2 \\ -12 & 9 & -4 & 4 \\ -18 & 41 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

پہلے کالم کے دو چند اور چوتھے کالم کے حاصل جمع کو دوسرے کالم میں سے وضع کرنے سے :

$$= 2 \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 9 & -4 & 4 \\ 41 & -6 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -12 & 9 & -4 \\ -18 & 41 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 13 & -4 & 12 \\ 25 & -4 & 17 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -4 & 9 & -4 \\ -6 & 41 & -6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 17 & 45 \end{vmatrix}$$ ازروئے مثلہ (۳)

$$= 2 \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 17 & 28 \end{vmatrix} = 638$$

اور ق = ۳

$$\begin{vmatrix} 8 & -12 & 7 & 15 \\ 11 & -3 & 3 & 11 \\ 38 & 10 & -11 & 16 \\ -3 & -38 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 15 & 3 & -5 & 15 \\ 14 & 8 & 0 & 11 \\ 27 & 26 & -1 & 16 \\ 7 & -19 & -28 & 19 \end{vmatrix}$$

کالموں ۱ اور ۳، ۲ اور ۴، ۲ اور ۳ کو جمع کرنے سے

$$= \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 15 & 3 & -15 & 15 \\ 14 & 8 & 0 & 11 \\ 27 & 26 & -3 & 16 \\ 7 & -19 & -84 & 19 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -26 & 8 & 14 & 11 \\ -103 & 26 & 24 & 13 \\ 102 & -19 & -77 & -65 \end{vmatrix}$$

کالم ۲ کے ۵ گنے کو کالم ۱ میں سے تفریق کرنے اور کالموں ۱ اور

۳ کو، اور ۳ اور ۴ کو جمع کرنے سے،

$$= -2\begin{vmatrix} 14 & 11 & -26 \\ 24 & 13 & -103 \\ -77 & -45 & 102 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 11 & 13 & -66 \\ -12 & -65 & -40 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 11 & -30 & 66 \\ -12 & -29 & 40 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -35 & -152 & 66 \\ -23 & -109 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 35 & 152 \\ 23 & 109 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 35 & 12 \\ 23 & 17 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 12 \\ -28 & 17 \end{vmatrix} = 638$$

پس $\text{لا} = \dfrac{\text{ق}_1}{\text{ق}} = 1$

یہ قیمت پہلی، دوسری اور چوتھی مساواتوں میں درج کرنے سے، مساواتوں کا نظام:

$$-12\,\text{ا} + 7\,\text{ی} + 15\,\text{س} + 19 = 0$$
$$-3\,\text{ا} + 3\,\text{ی} + 11\,\text{س} + 24 = 0$$
$$-38\,\text{ا} + 10\,\text{ی} + 19\,\text{س} - 1 = 0$$

ہو جاتا ہے جس کا حل یہ ہے:

$$\frac{-\text{ا}}{\begin{vmatrix} 7 & 15 & 19 \\ 3 & 11 & 24 \\ 10 & 19 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ی}}{\begin{vmatrix} 15 & 19 & -12 \\ 11 & 24 & -3 \\ 19 & -1 & -38 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{س}}{\begin{vmatrix} 19 & -12 & 7 \\ 24 & -3 & 3 \\ -1 & -38 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -12 & 7 & 15 \\ -3 & 3 & 11 \\ -38 & 10 & 19 \end{vmatrix}}$$

اِن میں سے

$$\begin{vmatrix} 7 & 15 & 19 \\ 3 & 11 & 24 \\ 10 & 19 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 13 \\ 10 & -1 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \\ 10 & -1 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -32 & 5 & -7 \\ 10 & -1 & -16 \end{vmatrix}$$

= | - - ۳۲ - | = ۶۳۱
| ۱۹ - ۱۷ |

اسی طرح دوسرے مقطعات کو پھیلانے سے

ا / ۶۳۱ = - ی / ۱۲۶۲ = سہ / ۱۸۹۳ = ۱ / -۶۳۱

جس سے ا = -۱، ی = ۲، سہ = -۳

یہ قیمتیں تیسری مساوات کے لیے بھی صادق آتی ہیں، پس مساواتوں کا مکمل حل عمل میں آگیا ہے۔

۳۲۔ اسقاط — جب خطی متجانس مساواتوں کا ایک نظام غیر معلوم مقادیر کی تعداد سے زیادہ مساواتوں پر مشتمل ہوتا ہے تو عموماً یہ ممکن نہیں کہ غیر معلوم مقادیر کی قیمتیں دریافت کی جائیں جو ایک ساتھ (وقت واحد میں) اس نظام کے لیے صادق آئیں جب کہ تمام مساواتیں ایک دوسرے کے غیر تابع ہوتی ہیں۔

جب قیمتوں کا ایک مکمل جٹ ایک ساتھ (وقت واحد میں) ن غیر معلوم مقادیر کی (م + ن) مساواتوں کے نظام کے لیے فی الواقع صادق آتا ہے تو ان مساواتوں میں سے م مساواتیں غیر تابع نہیں ہوتی ہیں اور ایسا نظام با ثبات (Consistent) کہلاتا ہے۔

فرض کرو

ل$_1$ لا + ب$_1$ ا + ج$_1$ ی + د$_1$ = ۰

ل$_2$ لا + ب$_2$ ا + ج$_2$ ی + د$_2$ = ۰

ل$_3$ لا + ب$_3$ ا + ج$_3$ ی + د$_3$ = ۰

ل$_4$ لا + ب$_4$ ا + ج$_4$ ی + د$_4$ = ۰

ایک با ثبات نظام ہے۔ تب آخری تین مساواتوں سے

- لا / | ب$_2$ ج$_2$ د$_2$ ، ب$_3$ ج$_3$ د$_3$ ، ب$_4$ ج$_4$ د$_4$ | = ا / | ج$_2$ د$_2$ ل$_2$ ، ج$_3$ د$_3$ ل$_3$ ، ج$_4$ د$_4$ ل$_4$ | = - ی / | د$_2$ ل$_2$ ب$_2$ ، د$_3$ ل$_3$ ب$_3$ ، د$_4$ ل$_4$ ب$_4$ | = ۱ / | ل$_2$ ب$_2$ ج$_2$ ، ل$_3$ ب$_3$ ج$_3$ ، ل$_4$ ب$_4$ ج$_4$ |

لا، ما اور ی کی یہ قیمتیں پہلی مساوات میں درج کرنے اور سب کو مشترک نسب نما سے اس کی علامت تبدیل کرکے ضرب دینے سے

$$\text{ا}_{۱}\begin{vmatrix}\text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲} & \text{د}_{۲}\\ \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳} & \text{د}_{۳}\\ \text{ب}_{۴} & \text{ج}_{۴} & \text{د}_{۴}\end{vmatrix} - \text{ب}_{۱}\begin{vmatrix}\text{ج}_{۲} & \text{د}_{۲} & \text{ا}_{۲}\\ \text{ج}_{۳} & \text{د}_{۳} & \text{ا}_{۳}\\ \text{ج}_{۴} & \text{د}_{۴} & \text{ا}_{۴}\end{vmatrix} + \text{ج}_{۱}\begin{vmatrix}\text{د}_{۲} & \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲}\\ \text{د}_{۳} & \text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳}\\ \text{د}_{۴} & \text{ا}_{۴} & \text{ب}_{۴}\end{vmatrix}$$

$$- \text{د}_{۱}\begin{vmatrix}\text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲}\\ \text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳}\\ \text{ا}_{۴} & \text{ب}_{۴} & \text{ج}_{۴}\end{vmatrix}$$

یعنی

$$\begin{vmatrix}\text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} & \text{ج}_{۱} & \text{د}_{۱}\\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲} & \text{د}_{۲}\\ \text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳} & \text{د}_{۳}\\ \text{ا}_{۴} & \text{ب}_{۴} & \text{ج}_{۴} & \text{د}_{۴}\end{vmatrix} = ۰ \qquad (۵)$$

یہہ اس امر کی شرط ہے کہ نظام باثبات ہو:

پس ن غیر معلوم مقادیر میں (ن + ۱) متجانس خطی مساواتوں کا نظام باثبات ہوتا ہے جبکہ سروں کا مقطعہ صفر ہوتا ہے۔

شرط (۵) کو دیے ہوئے نظام میں لا، ما اور ی کا حاصل اسقاط (Eliminant) بھی کہتے ہیں۔

مثال (۷)۔ ذیل کی تین مساواتوں

$$\text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ب}_{۱}\text{ما} + \text{ج}_{۱}\text{ی} = ۰$$

$$\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ب}_{۲}\text{ما} + \text{ج}_{۲}\text{ی} = ۰$$

$$\text{ا}_{۳}\text{لا} + \text{ب}_{۳}\text{ما} + \text{ج}_{۳}\text{ی} = ۰$$

کے باثبات ہونے کی شرط کو ایک مقطعہ کی شکل میں ظاہر کرو۔

اگر $\dfrac{\text{۵لا} - \text{۲ما}}{\text{لا}} = \dfrac{\text{۵ما} + \text{ی}}{\text{ما}} = \dfrac{-\text{۲لا} + \text{ما} + \text{ی}}{\text{ی}} = \text{م}$

تو ایک مساوات حاصل کرو جس سے م دریافت ہو جائے۔

اِس مساوات کو حل کرو اور متعدد حلوں کے متناظر لا، ما اور ی کی باہمی نسبتیں دریافت کرو۔ [جامعہ لندن]

دی ہوئی مساوات ٹھیک اس شکل میں نہیں ہے جو فصل (۳۲) میں دی گئی ہے۔ لیکن اگر غیر معلوم مقادیر کو لا، ما اور ی کی نسبتیں تصور کیا جائے، جو ہر ایک مساوات کو بالکلیہ لا، ما، ی میں سے کسی ایک پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوں تو وہ فوراً فصل (۳۲) والی شکل میں منتقل ہو جاتی ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ

ع = لا/ی اور و = ما/ی

تب یہ فرض کرکے کہ ی کی قیمت صفر نہیں ہے۔ نظام

ا۱ ع + ب۱ و + ج۱ = ۰

ا۲ ع + ب۲ و + ج۲ = ۰

ا۳ ع + ب۳ و + ج۳ = ۰

ہو جاتا ہے۔ پس (۵) کی رُو سے اِس نظام کے باثبات ہونے کی شرط یہ ہوتی ہے:-

ا۱	ب۱	ج۱	
ا۲	ب۲	ج۲	= ۰
ا۳	ب۳	ج۳	

یہ دیے ہوئے نظام میں لا، ما، ی کا حاصل اسقاط ہے۔

دوسرے نظام میں کسور کو صاف کرو اور لا، ما، ی کو ع اور و میں شکل سابق تبدیل کرو۔ تب

(۵ − م) ع − ۲ = ۰

(۵ − م) و + ۱ = ۰

− ۲ ع + و + ۱ − م = ۰

پس اگر یہ مساواتیں باثبات ہیں تو

۵-م	۰	-۲	= ۰
۰	۵-م	۱	
-۲	۱	۱-م	

جو پھیلانے پر

م (۵-م) (م-۶) = ۰ دیتا ہے۔

∴ م = ۰، ۵ یا ۶

مساواتوں کو م کی اُن قیمتوں کے ساتھ حل کرنے سے

(i) م = ۰، ع = لا/ی = ۰.۶۴، و = ما/ی = -۰.۳۲

اور لا/ما = ع/و = -۲

(ii) م = ۵، ع = ∞، و = ∞

اس سے ظاہر ہے ی = ۰

لا/ما دریافت کرنے کے لیے مساوات -۲لا + ما + (۱-م) ی = ۰ کو ما پر تقسیم کرو۔ تب چونکہ ی = ۰، لا/ما = ۰.۵

(iii) م = ۶، ع = -۲، و = ۱ اور لا/ما = -۲

مثال (۸) ع کی ایسی قیمتیں دریافت کرو کہ نظام ۲لا + ی = ۴، ۴لا - ع ما = ۲۰، ۵لا + ما + ۲ی = ۷، ۱۴۴لا + ۱۲۸ما + ع ی + ۹۶ = ۰ باثبات ہو۔

دی ہوئی مساواتوں کو معیاری شکل میں لکھنے سے

۲لا		+ ی	- ۴	= ۰
۴لا	- ع ما		- ۲۰	= ۰
۵لا	+ ما	+ ۲ی	- ۷	= ۰
۱۴۴لا	+ ۱۲۸ما	+ ع ی	- ۹۶	= ۰

باثباتی کے لیے شرط ہے کہ ق = ۰ جس میں

ق =

۴-	۱	۰	۲
۲۰-	۰	ع-	۴
۷-	۲	۱	۵
۹۶	ع	۱۲۸	۱۴۴

=

۰	۱	۰	۰
۱۲-	۰	ع-	۴
۳	۲	۱	۱
۳۸۴	ع	۱۲۸	۲ع-۱۴۴

=

ع-	۴	۱۲-
۱	۱	۳
۱۲۸	۲ع-۱۴۴	۳۸۴

= ۳

ع-	۴	۴-
۱	۱	۱
۱۲۸	۲ع-۱۴۴	۱۲۸

= ۳

ع-۴	۴	ع-۴
	۱	
۱۲۸	۲ع-۱۴۴	

= ۳ (۴-ع)

۲ع-۱۴۴	۱
۱۲۸	۱

= ۲ (ع-۳) (ع-۸)

پس جب ق = ۰، ع = ۲ یا ۸

یہ ملاحظہ ہو کہ ان میں سے ایک شرط غیر تابع نہیں ہے۔ کیونکہ وہ دوسروں سے مشتق ہوتی ہے جبکہ ع ابھی ابھی معین کی ہوئی دو قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت رکھتا ہے۔ چنانچہ ع = ۸ لیں اور پہلی اور دوسری مساواتوں کو -۳۱ اور ۱۶ سے علی الترتیب ضرب دیں اور جمع کریں تو چوتھی مساوات

۱۸ لا + ۱۶ ما + ی = -۱۲

ہوتی ہے۔ یہ چوتھی مساوات ہے ع کی قیمت درج کرنے اور ایک سرے سے لے کر دوسرے سرے تک تمام کو ۸ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

باب (۳) کی مثالیں

مندرجۂ ذیل مقطعات کی قیمتیں دریافت کرو:-

(۱)

۲۷	۴	۱
۶۴	۹	۲
۱۲۵	۱۶	۳

(۲)

۴۷	۹۱	۳۱
۳۰	۲۹	۱۳
۴۷	۳۶	۲۱

(۳)

۱۱	-۳	۳۷
۳	۲	۱۶
-۲	۳	۵

(۴)

۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱

(۵)

گ	ح	و
ف	ب	ح
ج	ف	گ

(۶)

ج۱	ب۱	ا۱	۰
ج۲	ب۲	ا۲	۰
۰	ج۳	ب۳	ا۳
۰	ج۴	ب۴	ا۴

ثابت کرو کہ

(۷)

ی	ا	لا
ی²	ا²	لا²
ی³	ا³	لا³

= لا ا ی

۱	۱	۱
ی	ا	لا
ی²	ا²	لا²

(۸)

۰	۰	ب۱	ا۱
۰	۰	ب۲	ا۲
د۱	ج۱	۰	۰
د۲	ج۲	۰	۰

=

د۱	ج۱
د۲	ج۲

×

ب۱	ا۱
ب۲	ا۲

(۹)

۵	-۳	۴	۱
-۱	-۸	۶	۰
۲	۴	-۳	۲
۴	۳	۱	۵

=

۱	۲	۰	۵
۴	-۳	-۶	۱
-۳	۴	۸	۳
۵	۲	۱	۴

مقطعات کے ذریعہ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

(۱۰) ۷لا - ۳ا + ۵ی = ۲۱

۲لا + ۵ا - ی = ۱۲

لا + ۶ا + ۳ی = ۲

(۱۱) لا + ط + ی = ۱
۱۱ لا + ۱۲ ط − ۷ ی = ۱۱
۲۷ لا + ۳۰ ط + ۲۴ ی = ۳۸

(۱۲) $۲ لا_۱ − ۳ لا_۲ + ۲ لا_۳ − ۳ لا_۴ = ۰$
$۴ لا_۱ + ۵ لا_۲ + ۴ لا_۳ − ۶ لا_۴ = ۰$
$۳ لا_۱ − ۷ لا_۲ + ۲ لا_۳ + ۳ لا_۴ = ۰$

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر مساواتیں $ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ اور $پ لا^۲ + ق لا + ر = ۰$ ایک مشترک اصل رکھتی ہیں، تو

$$\begin{vmatrix} ج & ا \\ ر & پ \end{vmatrix}^۲ = \begin{vmatrix} ب & ج \\ ق & ر \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ا & ب \\ پ & ق \end{vmatrix}$$

(۱۴) ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ا + ب & ب + ج & ج + ا \\ ب + ج & ج + ا & ا + ب \\ ج + ا & ا + ب & ب + ج \end{vmatrix} = ۲ \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ب & ج & ا \\ ج & ا & ب \end{vmatrix}$$

(۱۵) اگر $خ = \sqrt{-۱}$ تو ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ۲ + ۳ خ & ۴ + ۵ خ \\ -۴ + ۵ خ & ۲ - ۳ خ \end{vmatrix} = ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲$$

اور $۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ۷^۲$ کو بطور ایک مقطعہ کے ظاہر کرو۔ اسی طرح پر ثابت کرو کہ

$$(۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲)(۱^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ + ۷^۲) = ۸^۲ + ۱۲^۲ + ۲۲^۲ + ۶۲^۲$$

(۱۶) ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} جب^۲ عہ & جب عہ جم عہ & جم^۲ عہ \\ جب^۲ بہ & جب بہ جم بہ & جم^۲ بہ \\ جب^۲ جہ & جب جہ جم جہ & جم^۲ جہ \end{vmatrix} = جب (عہ - بہ) \; جب (عہ - بہ) \; جب (بہ - جہ)$$

(۱۷) دریافت کرو کہ عہ کی کس قیمت یا کن قیمتوں کے لیے ذیل کی مساواتیں موافق اور درست ہونگی۔ ایسی صورت میں ان کو حل کرو۔

لا^{۲} + ۲ ما − لا = ۱۱ ع

۳ لا^{۲} + ما + لا = ۱۲ ع

۲ لا^{۲} − ما + لا = ۰

(۱۸) ثابت کرو کہ اگر

ل$_{۱}$ لا + ب$_{۱}$ ما + ج$_{۱}$ = ۰

ل$_{۲}$ لا + ب$_{۲}$ ما + ج$_{۲}$ = ۰

ل$_{۳}$ لا + ب$_{۳}$ ما + ج$_{۳}$ = ۰

کا ایک مشترک حل ہے تو ہمیشہ ایسے تین عدد ل، ک، م دریافت ہو سکتے ہیں کہ

ل$_{۱}$ ل + ل$_{۲}$ ک + ل$_{۳}$ م = ۰

ب$_{۱}$ ل + ب$_{۲}$ ک + ب$_{۳}$ م = ۰

ج$_{۱}$ ل + ج$_{۲}$ ک + ج$_{۳}$ م = ۰

چوتھا باب

مسلہ قوت نما - لوکارثم اور لوکارثمی سلسلہ

۳۴- مسلہ قوت نما - اگر $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ عدداً اکائی سے کم ہو تو $\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{نلا}}$ کو مسلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا سکتے ہیں - اور

$$\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{نلا}}=\text{۱}+\text{نلا}\,\frac{\text{۱}}{\text{ن}}+\frac{\text{نلا}(\text{نلا}-\text{۱})}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{۲}}}+\frac{\text{نلا}(\text{نلا}-\text{۱})(\text{نلا}-\text{۲})}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}}\,\frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{۳}}}$$

$$+\cdots+\frac{\text{نلا}(\text{نلا}-\text{۱})\cdots(\text{نلا}-\text{ر}+\text{۱})}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}\times\cdots\times\text{ر}}\cdot\frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{ر}}}+\cdots$$

ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:-

$$\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{نلا}}=\text{۱}+\text{لا}+\frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۲}}}+\frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{\text{۲}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۳}}}+\cdots$$

$$+\frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\cdots\left(\text{لا}-\frac{\text{ر}-\text{۱}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{ر}}}+\cdots$$

$\text{لا}=\text{۱}$ رکھنے سے

$$\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}=\text{۱}+\text{۱}+\frac{\text{۱}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}}{\underline{|\text{۲}}}+\frac{\left(\text{۱}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\left(\text{۱}-\frac{\text{۲}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۳}}}+\cdots+\frac{\left(\text{۱}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\cdots\left(\text{۱}-\frac{\text{ر}-\text{۱}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{ر}}}+\cdots$$

لیکن $\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{نلا}}=\left\{\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right\}^{\text{لا}}$ - پس

$$\text{۱}+\text{لا}+\frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۲}}}+\frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{\text{۲}}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{۳}}}+\cdots\cdots$$

$$= \left\{ ۱ + ۱ + \frac{۱ - \frac{۱}{ن}}{\lfloor ۲} + \frac{(۱ - \frac{۱}{ن})(۱ - \frac{۲}{ن})}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots \right\}^{لا}$$

مصرحۂ بالا تعلق ن کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے خواہ وہ کتنی ہی بڑی کیوں نہ ہوں، اور اس لیے اس صورت میں بھی صحیح ہے جب کہ ن = ∞ لیکن جب ن = ∞ تو $\frac{۱}{ن}$ = صفر اور تعلق مذکور ذیل کی صورت اختیار کرتا ہے۔ ※

$$۱ + لا + \frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots + \frac{لا^{ر}}{\lfloor ر} + \cdots = \left(۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \cdots + \frac{۱}{\lfloor ر} + \cdots\right)^{لا}$$

اگر ہم سلسلہ $۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \cdots + \frac{۱}{\lfloor ر} + \cdots$ کو و سے تعبیر کریں تو مسئلہ قوت نما ظاہر ہوتا ہے، یعنی

$$و^{لا} = ۱ + لا + \frac{لا^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots + \frac{لا^{ر}}{\lfloor ر} + \cdots\cdots$$

یہاں یہ بیان کر دیا جاتا ہے کہ $و^{لا}$ کا مندرجہ بالا سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

۴۳۔ مقدار و کو ریاضی میں بڑی اہمیت حاصل ہے۔
یہ امر واضح ہے کہ و باعتبارِ قیمت ۲ سے بڑا ہے اور وہ صریحاً $۱ + ۱ + ۲^{-۱} + ۲^{-۲} + ۲^{-۳} + \cdots$ سے اور اس لیے ۳ سے چھوٹا ہے۔ حسابی عمل سے اس کی قیمت ۲٫۷۱۸۲۸...... برآمد ہوتی ہے۔

※ اس بارے میں زیادہ احتیاط کے ساتھ امتحان کرنے کی ضرورت ہے، نہ صرف ہر رقم کی نہایت معلوم کرنے کے لئے بلکہ اس وجہ سے بھی کہ کسی حاصل جمع کی نہایت ضرور نہیں کہ اس کی رقموں کی نہایتوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو، اِلّا اس صورت میں کہ اس کی رقموں کی تعداد متناہی ہو۔ اس موقع پر یہ امتحان ترک کر دیا گیا ہے اِس لیے کہ مابعد کی فصل (۳۵) میں جو تحقیق عمل میں لائی گئی ہے اس سے زیادہ مرجح ہے۔

قو کے غیر متبائن ہونے کا ثبوت ۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ قو = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ جس میں م اور ن دونوں صحیح عدد ہیں۔ پس چاہیے کہ

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = ۱ + ۱ + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{\text{ن}!} + \frac{1}{(\text{ن}+1)!} + \frac{1}{(\text{ن}+2)!} + \frac{1}{(\text{ن}+3)!} + \cdots$$

دونوں جانب $\text{ن}!$ سے ضرب دو۔ تب سلسلہ کی تمام رقمیں صحیح عدد بن جائینگی باستثناء

$$\frac{1}{(\text{ن}+1)} + \frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)} + \frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)} + \cdots$$

پس ہمارے مفروضہ کے بموجب

$$\frac{1}{(\text{ن}+1)} + \frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)} + \frac{1}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)} + \cdots$$

ایک صحیح عدد ہونا چاہیے۔ لیکن یہ حاصل جمع

$$\frac{1}{(\text{ن}+1)} + \frac{1}{(\text{ن}+1)^2} + \frac{1}{(\text{ن}+1)^3} + \cdots$$

سے چھوٹا ہے اور اس لیے $\dfrac{\frac{1}{\text{ن}+1}}{\left(1 - \frac{1}{\text{ن}+1}\right)}$ یعنی $\frac{1}{\text{ن}}$ سے چھوٹا ہے۔ پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ مقدار قو، متوافق عدد $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ کے مساوی نہیں ہو سکتی۔

۳۵۔ مسئلہ قوت نما کی بابت کوشی (Cauchy) کا ثبوت ۔ (مسئلہ ثنائی کو صرف مثبت صحیح قوت نما کی حد تک درست مان کر)

فرض کرو کہ ف(م) سلسلہ $۱ + \text{م} + \frac{\text{م}^2}{2!} + \frac{\text{م}^3}{3!} + \cdots + \frac{\text{م}^{\text{ر}}}{\text{ر}!} + \cdots$ کو تعبیر کرتا ہے۔

پس $\text{ف}(\text{م}) \equiv 1 + \text{م} + \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{م}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{\text{م}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}} + \ldots\ldots$

$\text{ف}(\text{ن}) \equiv 1 + \text{ن} + \frac{\text{ن}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{ن}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{\text{ن}^{\text{س}}}{\lfloor \text{س}} + \ldots\ldots$

اور $\text{ف}(\text{م}+\text{ن}) \equiv 1 + (\text{م}+\text{ن}) + \frac{(\text{م}+\text{ن})^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots + \frac{(\text{م}+\text{ن})^{\text{پ}}}{\lfloor \text{پ}} + \ldots\ldots$

اب، $\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن})$ میں $\text{م}^{\text{ر}}\,\text{ن}^{\text{س}}$ کا سر ہے $\frac{1}{\lfloor \text{ر}\,\lfloor \text{س}}$، اور $\text{ف}(\text{م}+\text{ن})$ میں رقم $\text{م}^{\text{ر}}\,\text{ن}^{\text{س}}$

صرف $\frac{(\text{م}+\text{ن})^{\text{ر}+\text{س}}}{\lfloor \text{ر}+\text{س}}$ ہی میں واقع ہو سکتی ہے اور اس لیے اس کا سر $\frac{\lfloor \text{ر}+\text{س}}{\lfloor \text{ر}\,\lfloor \text{س}} \cdot \frac{1}{\lfloor \text{ر}+\text{س}}$

یعنی $\frac{1}{\lfloor \text{ر}\,\lfloor \text{س}}$ ہوگا۔

پس چونکہ سلسلے $\text{ف}(\text{م})$، $\text{ف}(\text{ن})$ اور $\text{ف}(\text{م}+\text{ن})$، م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہیں اور کسی رقم $\text{م}^{\text{ر}}\,\text{ن}^{\text{س}}$ کا سر $\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن})$ میں وہی ہے جو $\text{ف}(\text{م}+\text{ن})$ میں ہے
لہذا اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$$\text{ف}(\text{م}) \times \text{ف}(\text{ن}) = \text{ف}(\text{م}+\text{ن}) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے۔

اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ تب (1) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$\text{ف}(1) \times \text{ف}(1) \times \text{ف}(1) \times \ldots\ldots$ لا اجزائے ضربی تک

$= \text{ف}(1+1+1+\ldots\ldots$ لا رقموں تک$)$

$$\therefore \{\text{ف}(1)\}^{\text{لا}} = \text{ف}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت کسر $\frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ ہے جس میں پ اور ق مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب (1) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$\left\{ف\left(\frac{پ}{ق}\right)\right\}^{ق} = ف\left(\frac{پ}{ق} + \frac{پ}{ق} + \frac{پ}{ق} + \ldots \text{ق رقموں تک}\right) = ف(پ)$

$= \{ف(۱)\}^{پ}$ ازروئے (۲)

$\therefore ف\left(\frac{پ}{ق}\right) = \{ف(۱)\}^{\frac{پ}{ق}}$

لہذا لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے $\{ف(۱)\}^{لا} = ف(لا)$

آخر میں فرض کرو کہ لا منفی ہے اور -ما کے مساوی ہے پس ما خود مثبت ہے۔ تب ف(-ما) × ف(ما) = ف(۰) ازروئے (۱) لیکن ف = ۱ اس لیے

$ف(-ما) = \frac{۱}{ف(ما)}$

پس $ف(لا) = ف(-ما) = \frac{۱}{ف(ما)} = \frac{۱}{\{ف(۱)\}^{ما}}$ اس لیے کہ ما مثبت ہے۔

$= \{ف(۱)\}^{-ما} = \{ف(۱)\}^{لا}$

پس لا خواہ کچھ ہی ہو $\{ف(۱)\}^{لا} = ف(لا)$

لیکن $ف(۱) = ۱ + \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \ldots\ldots = و$

$\therefore و^{لا} = ف(لا) = ۱ + \frac{لا}{\underline{|۱}} + \frac{لا^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{لا^{۳}}{\underline{|۳}} + \ldots + \frac{لا^{ر}}{\underline{|ر}} + \ldots\ldots$

۳۵۔ ثابت کرو کہ

$ن^{ن} - ن(ن-۱)^{ن} + \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}}(ن-۲)^{ن} - \ldots\ldots = \underline{|ن}$

سابقہ فصل سے $(و^{لا} - ۱)^{ن} = \left(لا + \frac{لا^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{لا^{۳}}{\underline{|۳}} + \ldots\right)^{ن}$

اور مسئلہ ثنائی سے $(و^{لا} - ۱)^{ن} = و^{ن لا} - ن و^{(ن-۱)لا} + \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}} و^{(ن-۲)لا} - \ldots\ldots$

اب $لا^{ر}$ کا سر $\left(لا + \frac{لا^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{لا^{۳}}{\underline{|۳}} + \ldots\right)^{ن}$ میں صفر ہے اگر ن سے ر کم ہے

اور ا ہے اگر ر = ن

اور لاʳ کا سر ونلا ـ ن و(ن-۱)لا + ن(ن-۱)/|۲ و(ن-۲)لا ...... ہے

۱/|ر { نʳ - ن (ن-۱)ʳ + ن(ن-۱)/|۲ (ن-۲)ʳ - .... }

پس (ولا - ۱)ن کے دونوں جملوں کے پھیلاؤ میں لان کے سروں کو باہم دیگر مساوی لکھنے سے

۱/|ن { نن - ن (ن-۱)ن + ن(ن-۱)/|۲ (ن-۲)ن ...... } = ۱

اس مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر عمومیت دی جاسکتی ہے :

چونکہ (والا - وبلا)ن = ون الا - ن و(ن-۱×ا+ب)لا + ن(ن-۱)/|۲ و(ن-۲×ا+۲ب)لا ....

اور (والا - وبلا)ن = ونبلا { و(ا-ب)لا - ۱ }ن

= ونبلا { (ا-ب) لا + (ا-ب)۲ لا۲/|۲ + ... }ن

پس (والا - وبلا)ن کے لیے دو جملے جو لکھے گئے ہیں ان میں لان کے سروں کو باہم دیگر مساوی لکھنے سے

۱/|ن { (ن ا)ن - ن (ن-۱×ا+ب)ن + ن(ن-۱)/|۲ (ن-۲×ا+۲ب)ن - ..... }
= (ا-ب)ن

اگر ہم ن ا = لا لکھیں اور ب - ا = ما، تو آخر الذکر نتیجہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے :

لان - ن (لا+ما)ن + ن(ن-۱)/|۲ (لا+۲ما)ن ...... = (-۱)ن . مان |ن

معہذا اگر ک کوئی مثبت صحیح عدد ن سے کم ہو تو

لاک - ن (لا + ما)ک + ن(ن-۱)/|۲ (لا + ۲ ما)ک - .... ن + ۱ رقموں تک = ۰

مندرجۂ ذیل خاص صورتیں اہمیت رکھتی ہیں، یہہ فرض کیا جاتا ہے کہ ک، ن سے کم ہے -

۱ک - ن ۲ک + ن(ن-۱)/|۲ ۳ک - .... ن + ۱ رقموں تک = ۰

اور مک - ن(م-۱)ک + ن(ن-۱)/|۲ (م-۲)ک - ...... ن + ۱ رقموں تک = ۰

مشق ۴ (ا)

(۱) جب ن لامتناہی ہو تو ثابت کرو کہ (۱ + لا/ن)^ن کی انتہا و^لا ہے

(۲) جب ن لامتناہی ہو تو بتاؤ کہ (۱ + ل/ن)^(ن/ب) کی انتہا و^(ل/ب) ہے

(۳) ثابت کرو کہ ن^(ن+۱) - ن (ن-۱)^(ن+۱) + ن(ن-۱)/|۲ (ن-۲)^(ن+۱) - ...... = ۱/۲ ن |ن+۱

(۴) بتاؤ کہ (۱ + ۱/|۱ + ۱/|۲ + ۱/|۳ + ...)(۱ - ۱/|۱ + ۱/|۲ - ۱/|۳ + ...) = ۱

(۵) ثابت کرو کہ و^-۱ = ۲/|۳ + ۴/|۵ + ۶/|۷ + ...

(۶) بتاؤ کہ (۱ + ۱/|۲ + ۱/|۴ + ۱/|۶ + ...)^۲ = ۱ + (۱ + ۱/|۳ + ۱/|۵ + ۱/|۷ + ...)^۲

(۷) بتاؤ کہ (و-۱)/(و+۱) = {۱/|۲ + ۱/|۴ + ۱/|۶ + ...} ÷ {۱/|۱ + ۱/|۳ + ۱/|۵ + ...}

لوکارثم

۳۶ - ایک عدد کے مساوی بنانے کے لیے کسی دوسرے عدد کو جس قوت تک بلند کرنا چاہیئے اُس کے قوت نما کو پہلے عدد کا لوکارثم کہتے ہیں بلحاظ دوسرے عدد کے جو کہ اس لوکارثم کا اساس کہلاتا ہے۔ مثلاً اگر ا^لا = ما تو لا، ما کا لوکارثم باساس ا کہلاتا ہے اور اس امر کا اظہار بطریقِ کتابت

لا = لوک ما سے ہوتا ہے۔

ہم اب لوکارتموں کے چند اساسی خواص بیان کرینگے اور ان کے دریافت کرنے کے طریقے اور اُن کے ذریعہ بعض تقریبی حسابات کا مختصر عمل بتائینگے۔

لوکارتموں کے خواص سے طالب علم کو یقیناً انٹرمیڈیئٹ کے نصاب علم مثلث کی تکمیل میں اچھی واقفیت ہوگئی ہوگی۔ سہولت کی خاطر یہ خواص یہاں بیان کردیے جاتے ہیں:

(۱) اساس خواہ کچھ ہی ہو ۱ کا لوکارتم صفر ہے۔

(۲) کسی حاصلِ ضرب کا لوکارتم اس کے اجزائے ضربی کے لوکارتموں کا حاصل جمع ہے۔

مثلاً لوک$_{و}$ (لا ما ی ....) = لوک$_{و}$ لا + لوک$_{و}$ ما + لوک$_{و}$ ی + ...

(۳) کسی خارج قسمت کا لوکارتم مقسوم اور مقسوم علیہ کے لوکارتموں کا جبری تفاوت ہے۔

مثلاً لوک$_{و}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ = لوک$_{و}$ لا ۔ لوک$_{و}$ ما

(۴) کسی عدد کی کسی قوت کا لوکارتم اُس عدد کے لوکارتم اور اُس قوت کے قوت نما کا حاصلِ ضرب ہے۔

مثلاً لوک$_{و}$ لا^{ن} = ن لوک$_{و}$ لا

(۵) کسی عدد کا لوکارتم باساس ا اگر معلوم ہو تو اس کا لوکارتم باساس ب، معلومہ لوکارتم کو مستقل لوک$_{ب}$ ا کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہوجاتا ہے۔

مثلاً لوک$_{ب}$ لا = لوک$_{ا}$ لا × لوک$_{ب}$ ا اور لوک$_{ب}$ ا × لوک$_{ا}$ ب = ۱

۳۷۔ لوکارتمی سلسلہ۔ فرض کرو کہ ا = و^{ک}

پس ک = لوک$_{و}$ ا۔ تب

ا^{لا} = و^{لاک} = و$^{لا لوک_{و} ا}$۔ پس

$$\text{ل}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا لوک}_{\text{و}}\text{ل}} = 1 + \text{لا لوک}_{\text{و}}\text{ل} + \frac{(\text{لا لوک}_{\text{و}}\text{ل})^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{(\text{لا لوک}_{\text{و}}\text{ل})^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}} + \cdots$$

ل = ۱ + ما لکھو۔ تب

$$(1+\text{ما})^{\text{لا}} = 1 + \text{لا لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما}) + \frac{1}{\lfloor 2}\{\text{لا لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما})\}^{2} + \cdots$$

اب، بشرطیکہ ما عدداً اکائی سے کم ہو، $(1+\text{ما})^{\text{لا}}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا سکتے ہیں۔ تب

$$1 + \text{لا ما} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)}{\lfloor 2}\text{ما}^{2} + \cdots + \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)(\text{لا}-2)\cdots(\text{لا}-\text{ر}+1)}{\lfloor \text{ر}}\text{ما}^{\text{ر}} + \cdots$$

$$= 1 + \text{لا لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما}) + \frac{1}{\lfloor 2}\{\text{لا لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما})\}^{2} + \cdots$$

بائیں جانب کا سلسلہ، لا اور ما کی سب قیمتوں کے لیے مستدق ہے اور سیدھے جانب کا سلسلہ، لا کی سب قیمتوں کے لیے مستدق ہے، بشرطیکہ ما کی قیمت عدداً اکائی سے کم ہو۔ پس ما کی ایسی قیمتوں کے لیے ہم مساوات کے دونوں جانب کے لا کے اسروں کو باہم دیگر مساوی لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتی ہے مساوات

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما}) = \text{ما} - \frac{\text{ما}^{2}}{2} + \frac{\text{ما}^{3}}{3} - \cdots + (-1)^{\text{ر}-1}\frac{\text{ما}^{\text{ر}}}{\text{ر}} + \cdots$$

یہ لوکارتمی سلسلہ کہلاتا ہے۔

۳۸۔ کسی عدد کے لوکارتم کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں جو مشقت اٹھانی ہوتی ہے اس کو گھٹانے کے لیے اساسی لوکارتمی سلسلہ سے، اس سے زیادہ سرعت کے مستدق سلسلے حاصل کیے جاتے ہیں۔

لوکارتمی سلسلہ $\text{لوک}_{\text{و}}(1+\text{ما}) = \text{ما} - \frac{\text{ما}^{2}}{2} + \frac{\text{ما}^{3}}{3} - \frac{\text{ما}^{4}}{4} + \cdots \quad (1)$

میں ما کی علامت کو تبدیل کرنے سے، سلسلہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(1-\text{ما}) = -\text{ما} - \frac{\text{ما}^{2}}{2} - \frac{\text{ما}^{3}}{3} - \frac{\text{ما}^{4}}{4} - \cdots \quad (2)$$

برآمد ہوتا ہے

پس $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{۱+\text{ا}}{۱-\text{ا}} = \text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{ا}) - \text{لوک}_{\text{و}}(۱-\text{ا})$

$$= ۲\left(\text{ا} + \frac{\text{ا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{ا}^{۵}}{۵} + \ldots\ldots\right) \ldots\ldots (۳)$$

$\frac{۱+\text{ا}}{۱-\text{ا}}$ کے بجائے $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ لکھو اور اس لیے ا کے بجائے $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$۔ تب

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{م}}{\text{ن}} = ۲\left\{\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^{۳} + \frac{۱}{۵}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^{۵} + \ldots\right\} \ldots (۴)$$

اس سے اب ہم بغیر بہت زیادہ مشقت کے، وٓ کے اساس پر لوکارتم محسوب کر سکتے ہیں۔ بطور مثال:

ضابطہ (۴) میں م = ۲ اور ن = ۱ لکھو۔ تب

$$\text{لوک}_{\text{و}}\, ۲ = ۲\left\{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳^{۳}} + \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۳^{۵}} + \ldots\right\}$$

جس سے $\text{لوک}_{\text{و}}\, ۲$ کی قیمت = ۰٫۶۹۳۱۴۷...... بآسانی محسوب ہو جاتی ہے۔

$\text{لوک}_{\text{و}}\, ۲$ معلوم کر لینے کے بعد ضابطہ (۴) سے $\text{لوک}_{\text{و}}\, ۳$ کی قیمت اس طرح دریافت ہو سکتی ہے۔

$$\text{لوک}_{\text{و}}\, ۳ - \text{لوک}_{\text{و}}\, ۲ = ۲\left\{\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵^{۳}} + \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۵^{۵}} + \ldots\right\}$$

$$= ۰٫۴۰۵۴۶۵\ldots$$

پس $\text{لوک}_{\text{و}}\, ۳ = ۰٫۶۹۳۱۴۷ + ۰٫۴۰۵۴۶۵ = ۱٫۰۹۸۶۱۱$

اس طریقہ پر عمل کرنے سے، وٓ کے اساس پر کسی عدد کا لوکارتم بھی جس تقریبی درجہ تک دریافت کرنا مقصود ہو، دریافت ہو سکتا ہے۔

۳۹۔ وٓ کے اساس پر جو لوکارتم محسوب کیے جاتے ہیں نیپیئری یا طبعی لوکارتم کہلاتے ہیں۔

تمام نظری تحقیقاتوں میں نیپیئری لوکارتم استعمال کیے جاتے ہیں۔ لیکن

جب لوکارتموں کے ذریعہ تقریبی عددی حسابات عمل میں آتے ہیں تو بعض وجوہ کے لحاظ سے جن کا عنقریب ذکر آئیگا، ہمیشہ ۱۰ کے اساس والے لوکارتم استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم معمولی لوکارتم کہلاتے ہیں۔

ہم نے ابھی بتایا ہے کہ و کے اساس والے لوکارتم کس طرح دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ جب و کے اساس کے لوکارتم معلوم ہوجاتے ہیں تو اُن کو مستقل جزوِ ضربی لوک$_{۱۰}$ و یا $\frac{۱}{\text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰}$ سے ضرب دینے سے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مستقل جزوِ ضربی مقیاس (Modulus) کہلاتا ہے۔ اس کی قیمت ۰.۴۳۴۲۹... ہے۔

سوالات ۴ (ا)

ثابت کرو کہ :

(۱) $\text{لوک}\,(\text{لا}+\text{ن}) = \text{لوک}\,\text{لا} + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}}\right) + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}+۱}\right) + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}+۲}\right) + \cdots + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}+\text{ن}-۱}\right)$

(۲) $\text{لوک}_{\text{و}}\sqrt{۱۲} = ۱ + \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right) + \frac{۱}{۴^{۲}}\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\right) + \frac{۱}{۴^{۳}}\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}\right) + \frac{۱}{۴^{۴}}\left(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۹}\right) + \cdots\cdots$ لاتناہی تک

(۳) $\text{لوک}_{\text{و}}\sqrt{۱۰} = \left\{۱ + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۹^{۲}} + \frac{۱}{۷}\cdot\frac{۱}{۹^{۳}} + \cdots \text{لاتناہی تک}\right\} + \left\{\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۹^{۳}} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۹^{۵}} + \frac{۱}{۷}\cdot\frac{۱}{۹^{۷}} + \cdots \text{لاتناہی تک}\right\}$

(۴) $\text{لوک}_{\text{و}}\,۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱\times۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴\times۵} + \frac{۱}{۵\times۶\times۷} + \cdots$ لاتناہی تک

(۵) $\frac{۵}{۱\times۲\times۳} + \frac{۷}{۳\times۴\times۵} + \frac{۹}{۵\times۶\times۷} + \cdots \text{لاتناہی تک} = ۳\,\text{لوک}_{\text{و}}\,۲ - ۱$

(۶) $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{لا}}{\text{لا}-۱} = ۲\left\{\frac{۱}{۲\text{لا}-۱} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{(۲\text{لا}-۱)^{۳}} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{(۲\text{لا}-۱)^{۵}} + \cdots\cdots\right\}$

(۷) $\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا} = \frac{\text{لا}-1}{\text{لا}+1} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}^2-1}{(\text{لا}+1)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{\text{لا}^3-1}{(\text{لا}+1)^3} + \cdots$

(۸) $\text{لوگ}_{\text{و}}\,\frac{\text{ا}+\text{لا}}{\text{ا}-\text{لا}} = \frac{2\,\text{ا لا}}{\text{ا}^2+\text{لا}^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2\,\text{ا لا}}{\text{ا}^2+\text{لا}^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2\,\text{ا لا}}{\text{ا}^2+\text{لا}^2}\right)^5 + \cdots$

(۹) $2\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} - \cdots\right) = \frac{2\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2}\right)^5 - \cdots$

(۱۰) $\left\{\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{لا})\right\}^2 = 2\left\{\frac{1}{2}\text{لا}^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\text{لا}^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\text{لا}^4 - \cdots\right\}$

(۱۱) اگر $\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{لا}+\text{لا}^2)$ کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر یا تو $\frac{1}{\text{ن}}$ ہے یا $-\frac{2}{\text{ن}}$ - ان صورتوں میں امتیاز کرو۔

(۱۲) متماثلہ $2\,\text{لوگ}(1-\text{لا}) \equiv \text{لوگ}(1-2\,\text{لا}+\text{لا}^2)$ سے ثابت کرو کہ

$$2^{\text{ن}} - \text{ن}\,2^{\text{ن}-2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-3)}{\lfloor 2}\,2^{\text{ن}-4} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)}{\lfloor 3}\,2^{\text{ن}-6} + \cdots = 2$$

(۱۳) $\frac{\text{و}^{\text{ن لا}}-1}{\text{و}^{\text{لا}}-1}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\frac{1}{\lfloor \text{ر}}\left\{1^{\text{ر}}+2^{\text{ر}}+3^{\text{ر}}+\cdots+\text{ن}^{\text{ر}}\right\}$ ہے

اس کے ذریعہ سے سلسلوں $1^2+2^2+3^2+\cdots$ اور $1^3+2^3+3^3+\cdots$ کی ن رقموں کے حاصل جمع دریافت کرو۔

(۱۴) $\text{و}^{\text{و}^{\text{لا}}}$ کے پھیلاؤ میں اگر $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\text{ا}_{\text{ر}}$ ہو تو

$$\text{ا}_{\text{ر}} = \frac{1}{\lfloor \text{ر}}\left\{\frac{1^{\text{ر}}}{\lfloor 1} + \frac{2^{\text{ر}}}{\lfloor 2} + \frac{3^{\text{ر}}}{\lfloor 3} + \cdots\right\}$$

پس $\frac{1^3}{\lfloor 1} + \frac{2^3}{\lfloor 2} + \frac{3^3}{\lfloor 3} + \cdots = 5\,\text{و}$

(۱۵) سلسلہ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ کے ن رقموں کا حاصل جمع (ن + ۱) ویں رقم سے اگر آغاز کیا جائے تو $\text{لوگ}_{\text{و}}\,2$ کے مساوی ہوتا ہے جبکہ ن بلا انتہا بڑھایا جاتا ہے۔

(۱۶) $\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{ن}) < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\text{ن}} < 1+\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{ن})$

عام لوکارتم

۴۰۔ حسابی عمل اساس ۱۰ کے لوکارتموں کے ذریعہ بہت آسان ہو جاتا ہے۔ ذیل کی بحث میں لوکارتموں کا اساس اگر محذوف ہو تو سمجھنا چاہیے کہ وہ ۱۰ ہی ہے۔

اگر دو عددوں کی رقمیں (Figures) ایک ہی ہوں اور ان کا تواتر بھی ایک ہی ہو لیکن فرق صرف نشانِ اعشاریہ کے مقام میں ہو تو واضح ہے کہ ایک عدد دُوسرے عدد کو ۱۰ کی کسی صحیح قوت سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ پس ان عددوں کے لوکارتموں میں صرف ایک صحیح عدد کا تفاوت ہوگا۔

مثلاً لوک ۷۴۲٫۹۸ = لوک ۷٫۴۲۹۸ + لوک ۱۰۰ = ۲ + لوک ۷٫۴۲۹۸
= ۲ + ۰٫۸۷۰۹۷۷۱ = ۲٫۸۷۰۹۷۷۱ اعشاریہ کے سات مقاموں تک۔
اسی طرح چونکہ لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳ اعشاریہ کے ۵ مقاموں تک تو
لوک ۰٫۰۰۲ = لوک (۲ ÷ ۱۰۰۰) = لوک ۲ − لوک ۱۰۰۰ = ۰٫۳۰۱۰۳ − ۳۔

مصرحۂ بالا خواص کی وجہ سے عام (یعنی ۱۰ کے اساس والے) لوکارتم ہمیشہ اعشاریہ کے حصّہ کو مثبت قائم رکھ کر لکھے جاتے ہیں۔ چنانچہ لوک ۰٫۰۰۲ کی قیمت $\bar{۳}$٫۳۰۱۰۳ لکھی جاتی ہے یعنی اعشاریہ سے پہلے کا جُزو ۳ ہے اس پر ایک چھوٹا سا خط کھینچا جاتا ہے تاکہ صرف وہی منفی بتایا جائے۔

اسی طرزِ کتابت میں لوکارتم کا اعشاریہ والا مثبت حصّہ اعشاریۂ لوکارتمی (Mantissa) کہلاتا ہے۔ اور اس کا صحیح حصّہ خواہ مثبت ہو یا منفی لوکارتم کا ممیّز کہلاتا ہے۔

۴۱۔ کسی بھی عدد کے لوکارتم کا ممیّز محض اس عدد کے معائنہ سے معلوم ہو جاتا ہے۔ اس لیے کہ اگر کوئی عدد ایک سے بڑا ہو اور اس کے صحیح حصّہ میں رقموں کی تعداد ن ہو تو واضح ہے کہ وہ عدد $۱۰^{ن}$ سے چھوٹا اور $۱۰^{ن-۱}$ سے بڑا ہے۔ پس اس کا لوکارتم ن اور ن-۱ کے مابین ہوگا

یعنی یہ لوکارتم ن - ۱ + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔
بناء بریں ایک سے بڑے کسی بھی عدد کے لوکارتم کا ممیّز اس عدد کے صحیح حصّہ کی رقموں کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔
اگر دیا ہوا عدد ایک سے کم یعنی صرف اعشاریہ ہی پر مشتمل ہو اور اس کی سب سے پہلی ملحوظ رقم کے آگے ن صفر ہوں تو دیا ہوا عدد $۱۰^{-ن-۱}$ سے بڑا مگر $۱۰^{-ن}$ سے چھوٹا ہوگا۔ پس چونکہ لوکارتم کا اعشاریہ والا حصّہ ہمیشہ مثبت رہنا چاہیئے اس عدد کا لوکارتم - (ن + ۱) + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔
پس اگر کوئی عدد ایک سے کم ہو اور اعشاریہ کی شکل میں لکھا گیا ہو تو اس کے لوکارتم کا ممیّز منفی اور دیے ہوئے عدد کی پہلی ملحوظ رقم سے پہلے لکھے ہوئے صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگا۔
مثلاً ۳۵۷۱،۲۴ کے لوکارتم کا ممیز ۳ اور ۰،۰۰۰۳۵۷۱۲۴ کا ممیز $\bar{۴}$ ہے۔

۴۳۔ کسی دیے ہوئے عدد کے لوکارتم کی تعیین تناسب تفاوتوں کے اصول کے ذریعہ۔

اگر کسی عدد کی ملحوظ رقموں کی تعداد، لوکارتموں کی جدول میں دیے ہوئے عددوں کی رقموں کی تعداد سے زیادہ ہو اور جدول کے دو متواتر عددوں کا تفاوت ان ہر دو عددوں کے تفاوت کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو ان عددوں کے لوکارتموں کا تفاوت خود اُن کے تفاوت کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن} + \text{لا}) - \text{لوک}_{۱۰}\,\text{ن} = \text{لوک}_{۱۰}\left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) = \text{مق لوک}_{\text{ہ}}\left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$$

$$= \text{مق}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}} - \frac{۱}{۲}\frac{\text{لا}^۲}{\text{ن}^۲} + \dots\right) = \text{مق}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$$ تقریباً۔ جبکہ $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ بہت چھوٹا ہوتا ہے۔ مق سے مُراد مقیاس $\frac{۱}{\text{لوک}_{\text{ہ}}\,۱۰}$ ہے۔

طالب علم کو لوکارتمی جدولوں سے استفادہ کرنے میں کافی مشق ہوگی۔

اس لیے عملی کام میں مزید ہدایات کی ضرورت نہیں سمجھی گئی ۔

سود مرکب اور سالیانے

۴۳ ۔ سود مرکب اور سالیانوں کے تمام سوالات مندرجۂ ذیل تین سوالوں کے تابع ہیں :۔

(۱) ایک مقررہ تعدادِ سال کے لیے ایک مقررہ شرحِ سود سے سود مرکب پر قرض دیے ہوئے روپیہ کے کل زر کی تعیین۔

فرض کرو کہ اصل رقم پ، تعداد سال ن، شرح سود فی صد فی سال ۱۰۰ ر ہے اور مطلوبہ کل زر ا ہے۔

تب پ کا سود ایک سال کے لیے پ ر ہے اور پہلے سال کے ختم پہ کل زر یعنی اصل مع سود پ (۱ + ر) ہے۔ اب دوسرے سال اس روپیہ کو اصل مان کر سود محسوب کیا جاتا ہے۔ پس دوسرے سال کے ختم پر کل زر {پ (۱ + ر)} (۱ + ر) = پ $(۱ + ر)^{۲}$ ہوگا۔ اسی طرح ن سالوں کے ختم پر کل زر پ $(۱ + ر)^{ن}$ ہوگا۔

یعنی ا = پ $(۱ + ر)^{ن}$

اور لوگ ا = لوگ پ + ن لوگ (۱ + ر)

اگر سود نصف نصف سال کے ختم پر محسوب ہو کر اصل میں جمع کیا جاتا ہے تو واضح ہے کہ ن سال کا کل زر پ $\left(۱ + \frac{ر}{۲}\right)^{۲ن}$ ہوگا۔

(۲) کسی ایسے روپیہ کی حاضرہ قیمت کی تعیین جو ایک مقررہ شرح سود مرکب سے ایک مقررہ مدت کے بعد واجب الادا ہے۔

فرض کرو کہ ا روپیہ ن سال کے بعد واجب الادا ہے اور شرحِ سود ۱۰۰ ر فی صد فی سال فرض کرکے پ اس کی حاضرہ قیمت ہے تو پ روپیہ ن سال میں ۱۰۰ ر فی صد فی سال کی شرح سے کل زر ا ہو جانا چاہیے۔ پس سوال (۱) کی رو سے

$$پ = ا(۱ + ر)^{-ن}$$

(۳) ن متواتر سال تک ہر سال کے ختم پر ا پونڈ واجب الادا سالیانہ کی حاضرہ قیمت کی تعیین۔

اگر سود کی شرح ۱۰۰ ر فی صدفی سال فرض کی جائے تو ازروئے سوال (۲)

پہلے سال کے ختم پر اداشدنی روپیہ کی حاضرہ قیمت ا(۱ + ر)$^{-۱}$ ہے

دوسرے .... ا(۱ + ر)$^{-۲}$ ہے

....

ن ۔ ویں .... ا(۱ + ر)$^{-ن}$ ہے

پس تمام روپیہ کی حاضرہ قیمت

$$ا \left\{ \frac{۱}{۱+ر} + \frac{۱}{(۱+ر)^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{(۱+ر)^{ن}} \right\} = \frac{ا}{ر} \left\{ ۱ - \frac{۱}{(۱+ر)^{ن}} \right\}$$ ہے

مثال ــ ۲۰ سال تک ۳۰ پونڈ سالیانہ کی حاضرہ قیمت دریافت کرو جبکہ سود کی شرح ۴ فی صدفی سال ہے۔

یہاں ا = ۳۰، ن = ۲۰، ر = $\frac{۴}{۱۰۰}$ = $\frac{۱}{۲۵}$

پس حاضرہ قیمت = ۳۰ × ۲۵ $\left\{ ۱ - \left(\frac{۲۵}{۲۶}\right)^{۲۰} \right\}$

لوک $\left(\frac{۲۵}{۲۶}\right)^{۲۰}$ = ۲۰ {لوک ۲۵ - لوک ۲۶}

= ۲۰ {۱٫۳۹۷۹۴۰۰ - ۱٫۴۱۴۹۷۳۳}

= ۲۰(-۰٫۰۱۷۰۳۳۳) = -۰٫۳۴۰۶۶۶ = $\bar{۱}$٫۶۵۹۳۳۴

= لوک ۰٫۴۵۶۳۸۹ لوکارتمی جدولوں سے۔

پس مطلوبہ حاضرہ قیمت = ۳۰ × ۲۵ × (۱ - ۰٫۴۵۶۳۸۹) = ... ۴۰۷٫۷ پونڈ

سوالات ۷ (ب)

(لوکارتمی جدولیں استعمال کی جائیں)

(۱) ۵۰ سال میں ۱۰۰ پونڈ کا کُل زر ۵ فی صدفی سال شرح سود کے حساب سے دریافت کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ ۱۵ سال میں ۵ فی صد فی سال شرح سود پر اور ۱۸ سال میں ۴ فی صد فی سال شرح سود پر، روپیہ اپنے دوچند سے زیادہ ہوجاتا ہے۔

(۳) ۱۰ سال تک اگر سود نصف نصف سال پر ۴ فی صد فی سال کی شرح سے جمع کیا جائے تو ۵۰۰ پونڈ کا کُل زر کیا ہوگا؟

(۴) ایک ملک میں ہر سال کے آغاز پر سالانہ ولادت کی شرح ۵۰ فی ہزار نفر آبادی ہے اور اموات کی شرح سالانہ ۲۵ فی ہزار نفر ہے۔ ثابت کرو کہ ۲۲ سال میں آبادی دوچند سے زیادہ ہو جائیگی۔

(۵) ایک شخص سیونگز بنک میں جو تمام قسم کی امانتی رقموں پر ۲½ فی صد سالانہ منافع دیتا ہے ۳۰ پونڈ داخل کرتا ہے۔ ۲۰ برس کے بعد اس کا کُل زر کیا ہوگا؟

(۶) ۴ فی صد سالانہ کی شرح سود پر، ہر سال ۱۰۰ پونڈ سالیانہ ۲۴ سال تک حاصل کرنے کے لیے کس قدر روپیہ داخل کرنے کی ضرورت ہوگی؟

(۷) ایک مجلس ۳۰۰۰ پونڈ ۳۰ مساوی سالانہ قسطوں میں ادا کرنے کے وعدہ سے قرض لیتی ہے۔ اگر بازار میں منافع کی شرح ۴ فی صد سالانہ ہے تو دریافت کرو کہ ہر سال کس قدر روپیہ ادا کیا جانا چاہیے۔

(علم مثلث)

پانچواں باب

ڈی مؤاور کا مسئلہ اور اس کے استعمالات

۴۴ - ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے (جم طہ + خ جب طہ)^ن کی قیمت یا اس کی قیمتوں میں سے ایک قیمت جم ن طہ + خ جب ن طہ ہے۔

اِس مسئلہ کو ڈی مؤاور کا مسئلہ کہتے ہیں۔ اِس کو ثابت کرنے سے پہلے ہم یہ ثابت کرینگے کہ

(جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲) ..... ن اجزائے ضربی تک

= جم (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن) + خ جب (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن)

چونکہ (جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲)

= جم طہ۱ جم طہ۲ + خ (جب طہ۱ جم طہ۲ + جم طہ۱ جب طہ۲) - جب طہ۱ جب طہ۲

= جم (طہ۱ + طہ۲) + خ جب (طہ۱ + طہ۲)

یعنی درانحالیکہ ن = ۲ مسئلہ مصرحۂ بالا درست ہے۔

اگر ہم تین اجزائے ضربی لیں تو

(جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲) (جم طہ۳ + خ جب طہ۳)

= {جم (طہ۱ + طہ۲) + خ جب (طہ۱ + طہ۲)} (جم طہ۳ + خ جب طہ۳)

= جم (طہ۱ + طہ۲ + طہ۳) + خ جب (طہ۱ + طہ۲ + طہ۳)

پس مسئلہ بالا ن = ۳ کے لیے بھی درست ہے۔

اِس طرح عمل پیرا ہونے سے معلوم ہو گا کہ یہ مسئلہ بہ حیثیت عمومی کسی بھی مثبت صحیح عدد کے لیے درست ہے۔ [اس مسئلہ کے ذریعہ ہم

ن زاویوں کے مجموعہ کی جیوب التمام یا جیوب کو ان زاویوں کی نسبتوں کی رقموں میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ چونکہ

جم (ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) + خ جب (ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$)

= (جم ط$_1$ + خ جب ط$_1$) (جم ط$_2$ + خ جب ط$_2$) ..... (جم ط$_ن$ + خ جب ط$_ن$)

= جم ط$_1$ جم ط$_2$ ..... جم ط$_ن$ (۱ + خ مس ط$_1$) (۱ + خ مس ط$_2$) ..... (۱ + خ مس ط$_ن$)

∴ جم (ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) = جم ط$_1$ جم ط$_2$ ..... جم ط$_ن$ {۱ − ح$_2$ + ح$_4$ − ..... }

اور جب (ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) = جم ط$_1$ جم ط$_2$ ..... جم ط$_ن$ {ح$_1$ − ح$_3$ + ح$_5$ ..... }

جس میں ح$_1$ = مماسوں کا حاصل جمع ہے، ایک ایک مماس کو فرداً فرداً لے کر۔

ح$_2$ = دو دو مماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔

ح$_3$ = تین تین مماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔

اِس سے براہِ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

مس (ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) = (ح$_1$ − ح$_3$ + ح$_5$ − .....) ÷ (۱ − ح$_2$ + ح$_4$ − ح$_6$ + ...)

۴۵۔ ڈی مؤاور کے مسئلہ کا ثبوت جبکہ ن (۱) ایک مثبت

صحیح عدد ہے، (۲) ایک منفی صحیح عدد ہے، (۳) ایک مثبت کسر ف/ق اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے اور ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں، (۴) ایک منفی کسر −ف/ق اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں، ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

واضح ہو کہ (۱) اور (۲) صورتوں میں (جم ط + خ جب ط)^{ن} کی صرف ایک قیمت یعنی جم ن ط + خ جب ن ط ہوگی۔ (۳) اور (۴) صورتوں میں جملہ ق قیمتیں ہونگی جن کے منجملہ جم ن ط + خ جب ن ط ایک قیمت ہوگی۔ آگے چل کر بتایا جائیگا کہ بقیہ قیمتیں کیا ہونگی۔

صورت (۱)۔ جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

سابقہ فصل میں ہم نے دیکھا ہے کہ (جم ط$_1$ + خ جب ط$_1$) (جم ط$_2$ + خ جب ط$_2$) ..... (جم ط$_ن$ + خ جب ط$_ن$)

$$= \text{جم}\,(\text{طہ}_{1} + \text{طہ}_{2} + \ldots + \text{طہ}_{\text{ن}}) + \text{خ جب}\,(\text{طہ}_{1} + \text{طہ}_{2} + \ldots + \text{طہ}_{\text{ن}})$$

$\text{طہ}_{1} = \text{طہ}_{2} = \ldots = \text{طہ}_{\text{ن}} = \text{طہ}$ لکھو۔ تب

$$(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\text{ن}} = \text{جم ن طہ} + \text{خ جب ن طہ}$$

صورت (۲) — جبکہ ن ایک منفی صحیح عدد -م ہے جس میں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ $(\text{جم م طہ} + \text{خ جب م طہ})(\text{جم م طہ} - \text{خ جب م طہ}) = 1$

$$\text{پس}\quad \text{جم م طہ} - \text{خ جب م طہ} = \frac{1}{\text{جم م طہ} + \text{خ جب م طہ}}$$

$$= \frac{1}{(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\text{م}}} \quad \text{صورت (۱) سے}$$

$$\therefore \text{جم}\,(-\text{م طہ}) + \text{خ جب}\,(-\text{م طہ}) = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{-\text{م}}$$

$$\therefore \text{جم ن طہ} + \text{خ جب ن طہ} = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\text{ن}}$$

صورت (۳) — جبکہ ن کوئی مثبت کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے، اور ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

چونکہ $\left(\text{جم}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}\right)^{\text{ق}} = \text{جم ف طہ} + \text{خ جب ف طہ}$ صورت (۱) سے

$\left(\text{جم}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}\right)$ جملہ $(\text{جم ف طہ} + \text{خ جب ف طہ})$ کی ق ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے۔

$\therefore$ $\text{جم}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}$ جملہ $(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\text{ف}}$ کی ق - ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۱) کی رو سے۔

$\therefore$ $\text{جم}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}$ جملہ $(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے۔

صورت (۴) — جبکہ $\text{ن} = -\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ اور ف اور ق مثل صورت (۳) کے ہیں۔

چونکہ $\{$ جم $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})$ + خ جب $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})\}^{\text{ق}}$

= جم (۔ ف ط) + خ جب (۔ ف ط) صورت (۱) سے

جم $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})$ + خ جب $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})$ جملہ جم (۔ ف ط) + خ جب (۔ ف ط)

کی ق۔ ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے۔

$\therefore$ جم $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})$ + خ جب $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})$ جملہ (جم ط + خ جب ط)$^{-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$

کی ق۔ ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۲) سے۔

اس لیے (جم ط + خ جب ط)$^{-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

جم $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})$ + خ جب $(-\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}})$ ہے۔

یہ مسئلہ ن کی غیر منطق قیمتوں کے لیے بھی صادق آتا ہے اور اس طرح سے ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے صحیح ہے، لیکن اس کا باضابطہ ثبوت اس نصاب کے لیے غیر موزوں ہوگا۔

۴۶۔ اب ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ (جم ط + خ جب ط)$^{\text{ن}}$ کی دوسری اور قیمتیں کیا ہیں جبکہ

$$\text{ن} = \pm\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$$

چونکہ $\{$ جم $(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}})$ + خ جب $(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}})\}^{\text{ق}}$

= جم (ف ط + ۲ ر π) + خ جب (ف ط + ۲ ر π)

= جم ف ط + خ جب ف ط جبکہ ر کوئی سا صحیح عدد ہے۔

= (جم ط + خ جب ط)$^{\text{ف}}$

$\therefore$ (جم ط + خ جب ط)$^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی ق قیمتوں میں سے

جم $(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}})$ + خ جب $(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}})$

ایک قیمت ہے جبکہ ر کوئی سا مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

لیکن $\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}}$ زاویے، جبکہ ر کو صفر، ۱، ۲، ...، (ق - ۱) قیمتیں دی جاتی ہیں، سب مختلف ہیں اور ان میں سے کوئی سے دو ایک ہی وقت میں مساوی جیوب التمام اور مساوی جیوب نہیں رکھتے ہیں۔

$$\therefore \text{جملہ جم}\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}}\right)$$

ان ق صحیح عددوں کے لیے ق مختلف قیمتیں رکھتا ہے۔

معہذا، ر کو کسی دوسرے صحیح عدد کے مساوی لکھنے سے یہ جملہ ان ق قیمتوں میں سے ایک یا دوسری قیمت کو دوہراتا ہے۔

اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ر کی کوئی سی متصل ق صحیح عددی قیمتیں، اور علی الخصوص صفر، ۱،.....(ق - ۱) قیمتیں جم$\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}}\right)$ + خ جب$\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\pi}{\text{ق}}\right)$ کو جملہ $(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی ق مختلف قیمتوں کے مساوی بناتی ہیں۔ اور نیز یہ کہ (جم طہ + خ جب طہ) کی ق - ویں اصلیں مندرجہ ذیل ہیں:-

$$\text{جم}\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب}\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}،$$

$$\text{جم}\frac{\text{طہ} + ۲\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\frac{\text{طہ} + ۲\pi}{\text{ق}}،$$

$$\text{جم}\frac{\text{طہ} + ۴\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\frac{\text{طہ} + ۴\pi}{\text{ق}}،$$

. . . .

$$\text{جم}\frac{\text{طہ} + ۲(\text{ق} - ۱)\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\frac{\text{طہ} + ۲(\text{ق} - ۱)\pi}{\text{ق}}$$

سوالات ۵ (ا)

(۱) ($\sqrt{۳}$ + خ) کو شکل ر (جم طہ + خ جب طہ) کی شکل میں لکھو

اور اسی طرح ($\sqrt{3}$ + خ)^{6} کی قیمت نکالو۔

چونکہ $\sqrt{3}$ + خ = ۲ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $\frac{1}{2}$ خ) = ۲ (جم $\frac{\pi}{6}$ + خ جب $\frac{\pi}{6}$)

∴ ($\sqrt{3}$ + خ)^{6} = ۲^{6} (جم $\frac{\pi}{6}$ + خ جب $\frac{\pi}{6}$)^{6}

= ۲^{6} (جم π + خ جب π) = −۲^{6}

(۲) ثابت کرو کہ اگر جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۰

اور جب عہ + جب بہ + جب جہ = ۰

تب جم ۳عہ + جم ۳بہ + جم ۳جہ = ۳ جم (عہ + بہ + جہ)

اور جب ۳عہ + جب ۳بہ + جب ۳جہ = ۳ جب (عہ + بہ + جہ)

فرض کرو ا = جم عہ + خ جب عہ، ب = جم بہ + خ جب بہ، ج = جم جہ + خ جب جہ

تب ا + ب + ج = صفر

لیکن ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} − ۳ ا ب ج = (ا + ب + ج) (ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} − ا ب − ب ج − ج ا)

چونکہ ا + ب + ج = ۰ اس لیے ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} = ۳ ا ب ج

لیکن ا^{3} = (جم عہ + خ جب عہ)^{3} = جم ۳عہ + خ جب ۳عہ، اسی طرح ب^{3} اور ج^{3}

بھی علی الترتیب = جم ۳بہ + خ جب ۳بہ اور جم ۳جہ + خ جب ۳جہ

پس ۳ ا ب ج = ۳ (جم عہ + خ جب عہ) (جم بہ + خ جب بہ) (جم جہ + خ جب جہ)

= ۳ { جم (عہ + بہ + جہ) + خ جب (عہ + بہ + جہ) }

مساوات ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} = ۳ ا ب ج کے حقیقی اور خیالی حصص کو علی الترتیب مساوی لکھنے سے

جم ۳عہ + جم ۳بہ + جم ۳جہ = ۳ جم (عہ + بہ + جہ)

اور جب ۳عہ + جب ۳بہ + جب ۳جہ = ۳ جب (عہ + بہ + جہ)

(۳) ثابت کرو کہ اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو

(۱ + جب فہ + خ جم فہ) / (۱ + جب فہ − خ جم فہ))^{ن} = جم ($\frac{ن\,\pi}{2}$ − ن فہ) + خ جب ($\frac{ن\,\pi}{2}$ − ن فہ)

(۴) تماثل $\frac{(لا - ب)(لا - ج)}{(ا - ب)(ا - ج)}$ + $\frac{(لا - ج)(لا - ا)}{(ب - ج)(ب - ا)}$ + $\frac{(لا - ا)(لا - ب)}{(ج - ا)(ج - ب)}$ = ۱

میں لا = جم ۲طہ + خ جب ۲طہ اور ا = جم ۲عہ + خ جب ۲عہ وغیرہ لکھ کر

ثابت کرو کہ $\sum \frac{\text{جب (طہ - بہ) جب (طہ - جہ)}}{\text{جب (عہ - بہ) جب (عہ - جہ)}} \text{ جب ۲ (طہ - عہ)} = ۰$

ڈی مواور کے مسئلہ کے استعمالات

۴۷ ۔ جب ن طہ، جم ن طہ اور مس ن طہ کا طہ کی نسبتوں کی رقموں میں اظہار جبکہ ن کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے ۔

چونکہ $(\text{جم ن طہ} + \text{خ جب ن طہ}) = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{ن}$

آخر الذکر جملہ کو پھیلا کر تماثل کے حقیقی حصص کو ایک دوسرے کے مساوی اور اسی طرح خیالی حصص کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے،

$$\text{جم ن طہ} = \text{جم}^{ن}\text{ طہ} - \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\text{ جم}^{ن-۲}\text{ طہ جب}^{۲}\text{ طہ} + \cdots$$

$$\text{جب ن طہ} = \text{ن جم}^{ن-۱}\text{ طہ جب طہ} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱\times۲\times۳}\text{ جم}^{ن-۳}\text{ طہ جب}^{۳}\text{ طہ} + \cdots$$

$$\text{پس مس ن طہ} = \frac{\text{ن مس طہ} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱\times۲\times۳}\text{ مس}^{۳}\text{ طہ} + \cdots}{۱ - \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\text{ مس}^{۲}\text{ طہ} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{۱\times۲\times۳\times۴}\text{ مس}^{۴}\text{ طہ} + \cdots}$$

سوالات ۵ (ب)

ثابت کرو کہ

(۱) $\text{جم ۴ طہ} = \text{جم}^{۴}\text{ طہ} - ۶\text{ جم}^{۲}\text{ طہ جب}^{۲}\text{ طہ} + \text{جب}^{۴}\text{ طہ}$

(۲) $\text{جب ۴ طہ} = ۴\text{ جب طہ جم}^{۳}\text{ طہ} - ۴\text{ جم طہ جب}^{۳}\text{ طہ}$

(۳) $\text{جم ۵ طہ} = \text{جم}^{۵}\text{ طہ} - ۱۰\text{ جم}^{۳}\text{ طہ جب}^{۲}\text{ طہ} + ۵\text{ جم طہ جب}^{۴}\text{ طہ}$

(۴) $\text{جب ۵ طہ} = ۵\text{ جب طہ جم}^{۴}\text{ طہ} - ۱۰\text{ جب}^{۳}\text{ طہ جم}^{۲}\text{ طہ} + \text{جب}^{۵}\text{ طہ}$

(۵) جم ۶ ط = جم^{۶} ط - ۱۵ جم^{۴} ط جب^{۲} ط + ۱۵ جم^{۲} ط جب^{۴} ط - جب^{۶} ط

(۶) جب ۶ ط = ۶ جم^{۵} ط جب ط - ۲۰ جم^{۳} ط جب^{۳} ط + ۶ جم ط جب^{۵} ط

(۷) مس ۴ ط = $\frac{\text{۴ مس ط - ۴ مس}^{۳}\text{ ط}}{\text{۱ - ۶ مس}^{۲}\text{ ط + مس}^{۴}\text{ ط}}$

(۸) مس ۵ ط = $\frac{\text{۵ مس ط - ۱۰ مس}^{۳}\text{ ط + مس}^{۵}\text{ ط}}{\text{۱ - ۱۰ مس}^{۲}\text{ ط + ۵ مس}^{۴}\text{ ط}}$

(۹) اگر ن کوئی ایک طاق مثبت صحیح عدد ہے تو بتاؤ کہ مندرجۂ ذیل (ن-۱) مقادیر

مس $\frac{\pi}{ن}$ ، مس $\frac{۲\pi}{ن}$ ..... مس $\frac{(ن-۱)\pi}{ن}$

کے دو دو مقادیر کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ مس $\frac{ط}{ن}$ + مس $\frac{ط+\pi}{ن}$ + مس $\frac{ط+۲\pi}{ن}$ + ... + مس $\frac{ط+(ن-۱)\pi}{ن}$

= ن مم ط یا ن مس ط بموجب اس کے کہ ن جفت عدد ہے یا طاق۔

۴۷ - جب ن ط اور جم ن ط کے لیے جم ط یا جب ط کی نزولی قوتوں کے سلسلوں میں جملے۔

سابقہ فصل کے نتائج پر غور کرنے سے واضح ہوگا کہ ن کوئی سا صحیح عدد ہو ہم جم ن ط کو جم ط کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلے میں ظاہر کرسکتے ہیں، اِس لیے کہ جم ن ط کے لیے جو جملہ لکھا جاتا ہے اِس میں جب ط کی ساری قوتیں جفت ہیں۔

مثلاً جم ۳ ط = جم^{۳} ط - ۳ جم ط جب^{۲} ط

= جم^{۳} ط - ۳ جم ط (۱ - جم^{۲} ط)

= جم^{۳} ط - ۳ جم ط + ۳ جم^{۳} ط = ۴ جم^{۳} ط - ۳ جم ط

[واضح ہو کہ یہ نتیجہ ابتدائی علم مثلثات کا مشہور ضابطہ ہے اور بہت آسان طریقہ سے حاصل ہوتا ہے]

جم ۴ ط = جم^{۴} ط - ۶ جم^{۲} ط جب^{۲} ط + جب^{۴} ط

= جم^۴ طہ - ۶ جم^۲ طہ (۱ - جم^۲ طہ) + (۱ - جم^۲ طہ)^۲

= ۸ جم^۴ طہ ~~[struck]~~ + ۱ - ۸ جم^۲ طہ

معہذا، اگر ن طاق عدد ہے تو (جم ن طہ)/(جم طہ) کو جب طہ کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً (جم ۳ طہ)/(جم طہ) = - ۴ جب^۲ طہ + ۱

(جم ۵ طہ)/(جم طہ) = ۱۶ جب^۴ طہ - ۱۲ جب^۲ طہ + ۱

یہ واضح ہے کہ اگر ن طاق عدد ہے تو جب ن طہ کو جب طہ کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً جب ۳ طہ = - ۴ جب^۳ طہ + ۳ جب طہ

یہ بھی واضح ہے کہ اگر ن جفت عدد ہے تو (جب ن طہ)/(جم طہ) کو بھی ایسے ہی محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً (جب ۴ طہ)/(جم طہ) = (۴ جب طہ جم^۳ طہ - ۴ جم طہ جب^۳ طہ)/(جم طہ)

= ۴ جب طہ جم^۲ طہ - ۴ جب^۳ طہ

= ۴ جب طہ (۱ - جب^۲ طہ) - ۴ جب^۳ طہ

= - ۸ جب^۳ طہ + ۴ جب طہ

جم ن طہ اور (جب ن طہ)/(جب طہ) کو محض جم طہ یا جب طہ کی قوتوں کے سلسلوں میں عام طور پر پھیلا سکتے ہیں۔ لیکن ان کا باضابطہ ثبوت چونکہ اس نصاب سے بالا تر ہے اس لیے ہم صرف چند آسان مثالوں ہی پر اکتفا کرتے ہیں۔

سوالات ۵ (ج)

ثابت کرو۔ (۱) جم ۷ طہ = ۶۴ جم^۷ طہ - ۱۱۲ جم^۵ طہ + ۵۶ جم^۳ طہ - ۷ جم طہ

(۲) جب ۷ طہ = ۷ جب طہ − ۵۶ جب^3 طہ + ۱۱۲ جب^5 طہ − ۶۴ جب^7 طہ

(۳) جم ۸ طہ = ۱۲۸ جم^8 طہ − ۲۵۶ جم^6 طہ + ۱۶۰ جم^4 طہ − ۳۲ جم^2 طہ + ۱

(۴) جب ۸ طہ = جب طہ (۱۲۸ جم^7 طہ − ۱۹۲ جم^5 طہ + ۸۰ جم^3 طہ − ۸ جم طہ)

۴۸ ۔ کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں ۔

مثلثات کی ابتدائی کتاب میں طالب علم نے پڑھا ہوگا کہ جب طہ دیا جاتا ہے تو جب طہ/۲ کی چار ممکنہ قیمتیں ہوتی ہیں اور اسی طرح جم طہ/۲ کی چار قیمتیں۔ اور جم طہ دیا جاتا ہے تو جب طہ/۲ کی دو ممکنہ قیمتیں ہوتی ہیں اور جم طہ/۲ کی دو قیمتیں۔ سلسلہ مندرجہ فصل (۴۶) کے ذریعہ ہم زاویہ طہ/ن کے متعلق اس کے متشابہ معلومات حاصل کرسکتے ہیں۔

مساوات　جم طہ = جم^{ن} طہ/ن − [ن(ن − ۱)/(۱ × ۲)] جم$^{ن-۲}$ طہ/ن جب^2 طہ/ن + ... (۱)

پر غور کرو جو جم طہ کے لیے جم طہ/ن کی نزولی قوتوں میں ایک جملہ ہے۔

فرض کرو کہ جم طہ معلوم ہے اور اس جیب التمام کا سب سے چھوٹا مثبت زاویہ عہ ہے۔

(۲ ر π + عہ) زاویوں کی جیب التمام بھی وہی ہوگی جو عہ کی ہے، اگر ر کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

پس اگر ہم مساوات (۱) والے جملہ میں جم طہ/ن کے عوض (۲ ر π + عہ)/ن قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت لکھیں تو ہمیں جم (۲ ر π + عہ) یا جم عہ حاصل ہو جائیگی۔

پس جم (۲ ر π + عہ)/ن جبکہ ر = ۰، ۱، ۲ ..... (ن − ۱)، جم طہ/ن کی ن ۔ ویں درجہ کی مساوات کی شرط کو پورا کرتی ہے۔

جم عہ = جم^{ن} طہ/ن − [ن(ن − ۱)/(۱ × ۲)] جم$^{ن-۲}$ طہ/ن (۱ − جم^2 طہ/ن) + ... (۲)

اگر عہ صفر یا π کی کوئی ضعف نہیں ہے تو آسانی سے بتایا جا سکتا ہے کہ

$$\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\text{،}\ \text{جم}\,\frac{\text{ع}+\text{۲}\pi}{\text{ن}}\text{،}\ \ldots\ldots\ \text{جم}\,\frac{\text{ع}+\text{۲}(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{ن}}\ \ldots\ldots\ (\text{۳})$$

سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور اِس لیے وہ مساوات (۲) کی جو بلحاظ $\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ ایک مساوات ہے، ن اصلیں ہیں۔

بدیں حالت اِس مساوات کے ذریعہ $\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$، $\text{جم}\,\frac{\text{ع}+\text{۲}\pi}{\text{ن}}$، ....

$\text{جم}\,\frac{\text{ع}+\text{۲}(\text{ن}+\text{۱})\pi}{\text{ن}}$ کے متشاکل تفاعل دریافت ہو سکتے ہیں۔

اس کے علی الرغم اگر ع صفر یا π کی ضعف ہے اور ن > ۲ تو مساوات (۲) کی اصلیں سب مختلف نہیں ہیں بلکہ دوہرائی جاتی ہیں۔

۴۹ — اگر ہم جم ط کو $\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں ادا کریں جبکہ ن جفت (بالفرض ۲م) ہے تو ہمیں ایک ایسی مساوات ملتی ہے جس کی اصلیں مندرجۂ ذیل ۲م جیبیں ہیں:—

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{۲م}}\text{،}\ \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{\text{۲م}}+\frac{\pi}{\text{م}}\right)\text{،}\ \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{\text{۲م}}+\frac{\text{۲}\pi}{\text{م}}\right)\text{،}\ \ldots\ldots\ \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{\text{۲م}}+\frac{(\text{۲م}-\text{۱})\pi}{\text{م}}\right)$$

اِسی طرح جب ط کو $\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی نزولی قوتوں میں پھیلانے سے جبکہ ن طاق (بالفرض ۲م + ۱) ہے، ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں مندرجۂ ذیل ۲م + ۱ جیبیں ہیں:—

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{۲م}+\text{۱}}\text{،}\ \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{\text{۲م}+\text{۱}}+\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲م}+\text{۱}}\right)\text{،}\ \ldots\ldots\ \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{\text{۲م}+\text{۱}}+\frac{\text{۴م}\pi}{\text{۲م}+\text{۱}}\right)$$

$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}}$، $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}$، $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ط}}$ اور مس ن ط کے پھیلاؤ بھی اسی طرح استعمال کیے جا سکتے ہیں جیسا کہ ذیل کے آخری چند سوالوں سے ظاہر ہوگا۔

سوالات ۵ (د)

(۱) ثابت کرو کہ $\text{جم}\,\frac{\text{۲}\pi}{\text{۷}}$، $\text{جم}\,\frac{\text{۴}\pi}{\text{۷}}$، $\text{جم}\,\frac{\text{۶}\pi}{\text{۷}}$ مساوات
$\text{۸لا}^{\text{۳}}+\text{۴لا}^{\text{۲}}-\text{۴لا}-\text{۱}=\text{۰}$ کی اصلیں ہیں۔

چونکہ جم ۷ ط = ۶۴ جم^{7} ط − ۱۱۲ جم^{5} ط + ۵۶ جم^{3} ط − ۷ جم ط

جم ۷ ط = ۱ اور جم ط = لا لکھنے سے

مساوات ۶۴ لا^{7} − ۱۱۲ لا^{5} + ۵۶ لا^{3} − ۷ لا − ۱ = ۰

کی اصلیں ۱، جم $\frac{2\pi}{7}$، جم $\frac{4\pi}{7}$، ...... جم $\frac{12\pi}{7}$ ہیں۔

معہذا، جم $\frac{2\pi}{7}$ = جم $\frac{12\pi}{7}$، جم $\frac{4\pi}{7}$ = جم $\frac{10\pi}{7}$ اور جم $\frac{6\pi}{7}$ = جم $\frac{8\pi}{7}$

لیکن ۶۴ لا^{7} − ۱۱۲ لا^{5} + ۵۶ لا^{3} − ۷ لا − ۱ = (لا − ۱) (۸ لا^{3} + ۴ لا^{2} − ۴ لا − ۱)^{2}

پس مساوات ۸ لا^{3} + ۴ لا^{2} − ۴ لا − ۱ = ۰ کی اصلیں

جم $\frac{2\pi}{7}$، جم $\frac{4\pi}{7}$ اور جم $\frac{6\pi}{7}$ ہیں

(۲) ثابت کرو کہ ۱۶ جم ع جم ۲ع جم ۳ع جم ۴ع = ۱ جس میں ع = $\frac{\pi}{9}$

(۳) ثابت کرو کہ ۸ جب $\frac{\pi}{7}$ جب $\frac{2\pi}{7}$ جب $\frac{3\pi}{7}$ = $\sqrt{7}$

چونکہ جب ۷ ط = ۷ جب ط − ۵۶ جب^{3} ط + ۱۱۲ جب^{5} ط − ۶۴ جب^{7} ط

جب ۷ ط = ۰ لکھنے سے مساوات ۶۴ لا^{7} − ۱۱۲ لا^{5} + ۵۶ لا^{3} − ۷ لا = ۰

کی اصلیں ۰، ± جب $\frac{\pi}{7}$، ± جب $\frac{2\pi}{7}$، ± جب $\frac{3\pi}{7}$ ہوتی ہیں۔

پس جب^{2} $\frac{\pi}{7}$ جب^{2} $\frac{2\pi}{7}$ جب^{2} $\frac{3\pi}{7}$ = $\frac{7}{64}$

اور ۸ جب $\frac{\pi}{7}$ جب $\frac{2\pi}{7}$ جب $\frac{3\pi}{7}$ = $\sqrt{7}$

اس میں مثبت علامت لی گئی ہے اس لیے کہ حاصل ضرب مثبت ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ مس $\frac{\pi}{11}$ مس $\frac{2\pi}{11}$ مس $\frac{3\pi}{11}$ مس $\frac{4\pi}{11}$ مس $\frac{5\pi}{11}$ = $\sqrt{11}$

چونکہ مس ۱۱ ط = $\dfrac{11\,\text{مس ط} - \frac{9\times10\times11}{3\times2\times1}\,\text{مس}^{3}\,\text{ط} + \ldots\ldots - \text{مس}^{11}\,\text{ط}}{1 - \frac{10\times11}{2\times1}\,\text{مس}^{2}\,\text{ط} + \ldots\ldots - 11\,\text{مس}^{10}\,\text{ط}}$

اگر مس ۱۱ ط = ۰ لکھیں تو مساوات $۱۱\ \text{مس}\ \text{ط} - \frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۳\times۲\times۱}\ \text{مس}^{۳}\ \text{ط} + \ldots - \text{مس}^{۱۱}\ \text{ط} = ۰$

کی اصلیں ۰، ± مس $\frac{\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۲\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۳\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۴\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۵\pi}{۱۱}$ ہوتی ہیں۔

$$\therefore\ \text{مس}^{۲}\frac{\pi}{۱۱}\ \text{مس}^{۲}\frac{۲\pi}{۱۱}\ \ldots\ \text{مس}^{۲}\frac{۵\pi}{۱۱} = ۱۱$$

$$\text{پس}\ \text{مس}\frac{\pi}{۱۱}\ \text{مس}\frac{۲\pi}{۱۱}\ \ldots\ \text{مس}\frac{۵\pi}{۱۱} = \sqrt{۱۱}$$

(۵) ثابت کرو کہ ۲ جم $\frac{\pi}{۷}$ مساوات $\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲} - ۲\text{لا} + ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے، اور بقیہ اصلیں کیا ہیں بتاؤ۔

(۶) ثابت کرو کہ لا = ۲ جم $\frac{۲\pi}{۹}$ مساوات $\text{لا}^{۶} - ۶\text{لا}^{۴} + ۹\text{لا}^{۲} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے۔ بقیہ اصلیں بتائی جائیں۔

[ہدایت - $\frac{\text{جب}\ ۹\ \text{ط}}{\text{جب ط}}$ کو جیوب التمام کے سلسلہ میں پھیلاؤ اور پھر جب ۹ ط = ۰]

(۷) ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{۳} - ۲۱\text{لا}^{۲} + ۳۵\text{لا} - ۷ = ۰$ کی اصلیں مس² $\frac{\pi}{۷}$، مس² $\frac{۲\pi}{۷}$ اور مس² $\frac{۳\pi}{۷}$ ہیں اور اس کی مدد سے بتاؤ کہ

$$\text{قط}^{۴}\frac{\pi}{۷} + \text{قط}^{۴}\frac{۲\pi}{۷} + \text{قط}^{۴}\frac{۳\pi}{۷} = ۴۱۶$$

۵۰ ـ جم^ن ط کا اظہار ط کے ضعفوں کی جیوب التمام کے سلسلہ میں جبکہ ط ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

اگر ہم لکھیں جم ط + خ جب ط = لا

تو جم ط - خ جب ط = $\text{لا}^{-۱}$

اور جم ن ط + خ جب ن ط = $\text{لا}^{ن}$، جم ن ط - خ جب ن ط = $\text{لا}^{-ن}$

پس ۲ جم ط = لا + $\text{لا}^{-۱}$ اور ۲ خ جب ط = لا - $\text{لا}^{-۱}$

۲ جم ن ط = $\text{لا}^{ن} + \text{لا}^{-ن}$ اور ۲ خ جب ن ط = $\text{لا}^{ن} - \text{لا}^{-ن}$

اس لیے $(\text{۲ جم طہ})^{\text{ن}} = (\text{لا} + \text{لا}^{-۱})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن لا}^{\text{ن}-۲} + \frac{\text{ن(ن-۱)}}{۱\times۲}\text{لا}^{\text{ن}-۴} + \dots + \text{لا}^{-\text{ن}}$

$$= (\text{لا}^{\text{ن}} + \text{لا}^{-\text{ن}}) + \text{ن}(\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{لا}^{-\text{ن}+۲}) + \dots$$

$$= \text{۲ جم ن طہ} + \text{۲ن جم (ن-۲) طہ} + ۲\frac{\text{ن(ن-۱)}}{۱\times۲}\text{جم (ن-۴) طہ} + \dots$$

$$\therefore\ ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ} = \text{جم ن طہ} + \text{ن جم (ن-۲) طہ} + \frac{\text{ن(ن-۱)}}{۱\times۲}\text{جم (ن-۴) طہ} + \dots$$

اگر ن طاق عدد ہے تو $(\text{لا} + \text{لا}^{-۱})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کے جملہ میں رقموں کی تعداد جفت ہے اور یہ رقمیں جوڑواں ترتیب دی جا سکتی ہیں۔ چنانچہ سلسلہ کی آخری رقم جم طہ ہوگی۔

اگر ن جفت عدد ہے تو پھیلاؤ کے جملہ میں رقموں کی تعداد طاق ہے۔ پس جملہ کے دونوں سروں سے جوڑواں رقمیں ترتیب دینے سے بیچ کی رقم اکیلی رہ جائیگی اور اس میں لا موجود نہ ہوگا۔ اس صورت میں $۲^{\text{ن}}\,\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}$ کے پھیلاؤ کی آخری رقم طہ سے آزاد ہوگی اور ظاہر ہے کہ سلسلہ کی دیگر رقموں کی طرح اس کا جزوضربی ۲ نہ ہوگا۔ $\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ}$ کا پھیلاؤ بھی اسی طرح حاصل ہوسکتا ہے۔ بجالیکہ ن جفت عدد ہوگا پھیلاؤ جم ن طہ، جم (ن-۲) طہ وغیرہ کی رقموں میں ہوگا۔ اور جب ن طاق عدد ہوگا تو پھیلاؤ جب ن طہ، جب (ن-۲) طہ وغیرہ کی رقموں میں ہوگا۔

مثالیں۔

(۱)
$$۲^{۵}\,\text{جم}^{۶}\,\text{طہ} = \text{جم ۶ طہ} + \text{۶ جم ۴ طہ} + \text{۱۵ جم ۲ طہ} + ۱۰$$
$$۲^{۵}\,\text{جب}^{۶}\,\text{طہ} = -\text{جب ۶ طہ} + \text{۶ جب ۴ طہ} - \text{۱۵ جب ۲ طہ} + ۱۰$$

(۲)
$$۲^{۶}\,\text{جم}^{۷}\,\text{طہ} = \text{جم ۷ طہ} + \text{۷ جم ۵ طہ} + \text{۲۱ جم ۳ طہ} + \text{۳۵ جم طہ}$$
$$۲^{۶}\,\text{جب}^{۷}\,\text{طہ} = -\text{جب ۷ طہ} + \text{۷ جب ۵ طہ} - \text{۲۱ جب ۳ طہ} + \text{۳۵ جب طہ}$$

(۳) اگر ن جفت عدد ہو تو

$$۲^{\text{ن}-۱}(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{طہ} = \text{جم ن طہ} - \text{ن جم (ن-۲) طہ} + \frac{\text{ن(ن-۱)}}{۱\times۲}\text{جم (ن-۴) طہ} \dots + \frac{۱}{۲}(-۱)^{\frac{\text{ن}}{۲}}\frac{|\text{ن}}{\{|\frac{\text{ن}}{۲}\}^{۲}}$$

(۴) اگر ن طاق عدد ہو تو

$$۲^{\text{ن}-۱}(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط} = \text{جب ن ط} - \text{ن جب}(\text{ن}-۲)\,\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{جب}(\text{ن}-۴)\,\text{ط}\,\ldots\ldots$$

$$+\,(-۱)^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\;\underline{|\frac{\text{ن}+۱}{۲}}}\,\text{جب ط}$$

(۵) ثابت کرو کہ $۲^{۶}\,\text{جم}^{۳}\,\text{ط جب}^{۴}\,\text{ط} = \text{جم ۷ ط} - \text{جم ۵ ط} - ۳\,\text{جم ۳ ط} + ۳\,\text{جم ط}$

۵۱- جم ن ط کے اجزائے ضربی-

ہم نے فصل (۴۶) میں دیکھا ہے کہ

$$\text{جم ن ط} = \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲}\,\text{ط جب}^{۲}\,\text{ط} + \ldots\ldots$$

اور اس لیے جم ن ط، بلحاظ جم ط ن-ویں درجہ کا ایک کثیر رقمی (Polynomial) جملہ ہے۔

معہذا جم$^{\text{ن}}$ ط والی رقم $۲^{\text{ن}-۱}$ جم$^{\text{ن}}$ ط ہے اِس لیے کہ اس سلسلہ کو از سرِ نو ترتیب دینے اور جب^{۲} ط کے عوض ۱ - جم^{۲} ط لکھنے سے اس کا سر

$$۱ + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱} + \ldots \text{یعنی}\ \tfrac{۱}{۲}\left\{(۱+۱)^{\text{ن}} + (۱-۱)^{\text{ن}}\right\} \text{یا}\ ۲^{\text{ن}-۱}$$

ہو جاتا ہے۔ پس

$$\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}(\text{جم ط} - \text{جم ع}_۱)(\text{جم ط} - \text{جم ع}_۲)\ldots\ldots(\text{جم ط} - \text{جم ع}_{\text{ن}})$$

جس میں جم ع$_۱$، جم ع$_۲$، ..... جم ع$_{\text{ن}}$، جم ط کی وہ ن قیمتیں ہیں جو جم ط کے اس ن-ویں درجہ کے جملہ کو صفر بنا دیتی ہیں ۔ لیکن

$$\text{جم ن ط} = ۰ \quad \text{جبکہ ط} = \frac{\pi}{۲\text{ن}}،\ \frac{۳\pi}{۲\text{ن}}،\ \frac{۵\pi}{۲\text{ن}}،\ \ldots\ldots(۲\text{ن}-۱)\frac{\pi}{۲\text{ن}}،$$

اور ان تمام زاویوں کے جیوب التمام مختلف ہیں۔

$$\text{پس جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)\ldots\times\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

ہم اِن کو از سرِ نو جوڑواں ترتیب دے کر لکھ سکتے ہیں، جبکہ ن ایک طاق عدد ہے،

$$\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}\right)\text{جم ط}،$$

اور اگر ن ایک جفت عدد ہے تو

$$\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)\ldots\ldots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

یہ جملے اس طرح بھی لکھے جا سکتے ہیں:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

$$\text{اور جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت ہے

اگر ط ⟵ ۰ تو

$$۲^{\frac{(\text{ن}-۱)}{۲}}\ \text{جب}\frac{\pi}{۲\text{ن}}\ \text{جب}\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\ldots\ldots\ \text{جب}\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}} = ۱$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

$$\text{اور}\quad ۲^{\frac{(\text{ن}-۱)}{۲}}\ \text{جب}\frac{\pi}{۲\text{ن}}\ \text{جب}\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\ldots\ldots\ \text{جب}\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}} = ۱$$

جبکہ ن جفت عدد ہے۔

جذر المربع مثبت لیا جاتا ہے اس لیے $\frac{\pi}{\text{۲ن}}$ ، $\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}$ ...... سب $\frac{\pi}{\text{۲}}$ سے کمتر ہیں۔
ان جملوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{۲ن}}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}}\right)\cdots\cdots\left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-\text{۲})\pi}{\text{۲ن}}}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے، اور

$$\text{جم ن ط} = \left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{۲ن}}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}}\right)\cdots\cdots\left(\text{۱} - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}}}\right)$$

جبکہ ن جفت عدد ہے ۔

۵۲ - جب ن ط کے اجزائے ترکیبی کی تعیین ۔

فصل (۴۶) میں ہم نے دیکھا تھا کہ $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{ن جم}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{ط} - \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)(ن}-\text{۲)}}{\text{۱}\times\text{۲}\times\text{۳}}\text{جب}^2\text{ط جم}^{\text{ن}-\text{۳}}\text{ط} + \cdots$
اور سابقہ فصل میں جیسا کہ بتایا گیا تھا اسی طرح بتایا جا سکتا ہے کہ $\text{جب}^2\text{ط}$ کے عوض $\text{۱} - \text{جم}^2\text{ط}$ لکھنے سے $\text{جم}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{ط}$ کا سر $\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}$ ہے ۔

پس، مثل سابق، $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{ن}}\right)$

ان کو از سر نو جوڑواں ترتیب دینے سے

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{جم ط}\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-\text{۲})\pi}{\text{۲ن}}\right)$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے ۔

ان جملوں کو ہم بدل کر مکرر لکھ سکتے ہیں ۔

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{جم ط}\left(\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\left(\text{جب}^2\frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\cdots\cdots\left(\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-\text{۲})\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\ldots\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

لیکن
$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{ن}\left(\frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن ط}}\right)\left(\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}\right)$$

$$\therefore \text{نہا}_{\text{ط}\to ۰}\left(\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}\right) = \text{ن}\ \text{نہا}_{\text{ط}\to ۰}\left(\frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن ط}}\right)\text{نہا}_{\text{ط}\to ۰}\left(\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}\right) = \text{ن}$$

اگر مندرجۂ بالا نتیجوں میں ط $\to ۰$ تو

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\ \text{جب}\frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{جب}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\ldots\text{جب}\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\ \text{جب}\frac{\pi}{\text{ن}}\ \text{جب}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\ldots\text{جب}\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

جذر المربع کی علامت مثبت لی جاتی ہے اس لیے کہ تمام جیبیں مثبت ہیں۔

پس
$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن جب ط}} = \text{جم ط}\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\ldots\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}}\right)،$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن جب ط}} = \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\ldots\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}}\right)،$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

۵۳ – اِکائی کی ن اصلوں کی تعیین جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

بالفاظِ دیگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} = ۱$ کا حل۔

چونکہ جم ۲ π + خ جب ۲ π = ۱

لہٰذا $\text{لا}^{\text{ن}}$ = جم ۲ π + خ جب ۲ π پس فصل (۴۵) کی رُو سے

لا = جم $\frac{\text{۲(ر+۱)}\pi}{\text{ن}}$ + خ جب $\frac{\text{۲(ر+۱)}\pi}{\text{ن}}$ جس میں ر = ۰، ۱، ....، ن - ۱

∴ لا = جم $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{ن}}$ + خ جب $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{ن}}$ جس میں ر = ۱، ۲، ...، ن

بحالیکہ ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ۲ ف ہے، تو

لا = جم $\frac{\text{ر}\pi}{\text{ف}}$ + خ جب $\frac{\text{ر}\pi}{\text{ف}}$ جس میں ر = ۱، ۲، ....، ۲ ف -

ر کی قیمت = ف تو لا = -۱ اور ر کی قیمت = ۲ ف تو لا = + ۱

ر کی قیمت = س تو لا = جم $\frac{\text{س}\pi}{\text{ف}}$ + خ جب $\frac{\text{س}\pi}{\text{ف}}$

اور ر کی قیمت = ۲ ف - س تو لا = جم $\frac{\text{س}\pi}{\text{ف}}$ - خ جب $\frac{\text{س}\pi}{\text{ف}}$،

س کی قیمتیں اب ۱، ۲، ....، ف-۱ ہونگی۔

بحالیکہ ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ۲ ف + ۱ ہے، تو

لا = جم $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{۲ف+۱}}$ + خ جب $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{۲ف+۱}}$، جس میں ر = ۱، ۲، ....، ۲ف + ۱۔

ر کی قیمت = ۲ ف + ۱ تو لا = ۱

لا کی بقیہ قیمتیں جوڑواں ترتیب دی جا سکتی ہیں اور ر = ۱، ۲، ...، ف کے لیے

لا = جم $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{۲ف+۱}}$ ± خ جب $\frac{\text{۲ر}\pi}{\text{۲ف+۱}}$ دیتی ہیں۔

اس سے بطور نتیجۂ صریح مستخرج ہوتا ہے کہ $\text{لا}^{\text{۲ف}}$ - $\text{ا}^{\text{۲ف}}$ کے اجزائے ضربی

(لا^2 - ا^2) (لا^2 - ۲ ا لا جم $\frac{\pi}{\text{ف}}$ + ا^2) (لا^2 - ۲ ا لا جم $\frac{\text{۲}\pi}{\text{ف}}$ + ا^2) .... (لا^2 - ۲ ا لا جم $\frac{\text{(ف-۱)}\pi}{\text{ف}}$ + ا^2) ہیں

اور $\text{لا}^{\text{۲ف+۱}}$ - $\text{ا}^{\text{۲ف+۱}}$ کے اجزائے ضربی،

(لا - ا) (لا^2 - ۲ ا لا جم $\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ف+۱}}$ + ا^2) (لا^2 - ۲ ا لا جم $\frac{\text{۴}\pi}{\text{۲ف+۱}}$ + ا^2) ..... (لا^2 - ۲ ا لا جم $\frac{\text{۲ف}\pi}{\text{۲ف+۱}}$ + ا^2) ہیں

سوالات ۵ (ھ)

(۱) مساوات $لا^{۳} = و^{۳}$ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{لا}{و}\right)^{۳} = ۱$ لہٰذا $\frac{لا}{و} =$ جم $\frac{۲ر\pi}{۳}$ + خ جب $\frac{۲ر\pi}{۳}$، (جس میں ر = ۱، ۲، ۳)

(۲) مساوات $لا^{۴} = و^{۴}$ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{لا}{و}\right)^{۴} = ۱$ لہٰذا $\frac{لا}{و} =$ جم $\frac{ر\pi}{۲}$ + خ جب $\frac{ر\pi}{۲}$، (جس میں ر = ۱، ۲، ۳، ۴)

= جم $\frac{ر\pi}{۲}$ ± خ جب $\frac{ر\pi}{۲}$، (جس میں ر = ۱، ۲)

(۳) ثابت کرو کہ اگر ن ایک مفرد عدد ہے اور ع، اکائی کی خیالی ن ۔ ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے تو بقیہ اصلیں $ع^{۲}$، $ع^{۳}$، ..... $ع^{ن}$ ہونگی۔

۵۴۔ مساوات $لا^{ن} + ۱ = ۰$ کا حل جبکہ ن کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

یہاں $لا^{ن} = -۱ =$ جم π + خ جب π

∴ لا کی ن قیمتیں جم $(۲ر + ۱)\frac{\pi}{ن}$ + خ جب $(۲ر + ۱)\frac{\pi}{ن}$ ہیں،

جس میں ر = ۰، ۱، ......، ن - ۱۔

بحالیکہ ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ۲ ف ہے، تمام اصلیں خیالی ہوتی ہیں اور اُن کی تعبیر

جم $\left(\frac{۲ر + ۱}{۲ف}\right)\pi$ ± خ جب $\left(\frac{۲ر + ۱}{۲ف}\right)\pi$ سے ہوتی ہے،

جس میں ر = ۰، ۱، .....، ف - ۱۔

بحالیکہ ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ۲ ف + ۱ ہے، صرف ر = ف کے تناظر اصل حقیقی ہے بقیہ اصلیں خیالی ہیں۔

پس اس صورت میں لا = جم $\frac{۲ر + ۱}{۲ف + ۱}\pi$ ± خ جب $\frac{۲ر + ۱}{۲ف + ۱}\pi$

ر = ۰، ۱، .....، ف - ۱ کے لیے اور لا = -۱، ر = ف کے لیے۔

نتیجۂ صریح ۔ $لا^{۲ف} + و^{۲ف}$ کے اجزائے ضربی۔

$\left(لا^{۲} - ۲و لا \text{ جم } \frac{\pi}{۲ف} + و^{۲}\right)\left(لا^{۲} - ۲و لا \text{ جم } \frac{۳\pi}{۲ف} + و^{۲}\right) \ldots\ldots \left(لا^{۲} - ۲و لا \text{ جم } \frac{۲ف - ۱}{۲ف}\pi + و^{۲}\right)$ ہیں

اور $لا^{۲ف+۱} + و^{۲ف+۱}$ کے اجزائے ضربی۔

$(\text{لا} + \text{ا})(\text{لا}^2 - ۲\,\text{ا}\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{\pi}{۲\text{ف}+۱} + \text{ا}^2)(\text{لا}^2 - ۲\,\text{ا}\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{۳\pi}{۲\text{ف}+۱} + \text{ا}^2) \ldots\ldots (\text{لا}^2 - ۲\,\text{ا}\,\text{لا}\,\text{جم}\frac{۲\text{ف}-۱}{۲\text{ف}+۱}\pi + \text{ا}^2)$ ہیں۔

سوالات ۵ (و)

(۱) مساوات $\text{لا}^4 + \text{ا}^4 = ۰$ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^4 = -۱ = \text{جم}\,\pi + \text{خ}\,\text{جب}\,\pi$

$\therefore \quad \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم}\frac{۲\text{ر}+۱}{۴}\pi + \text{خ}\,\text{جب}\frac{۲\text{ر}+۱}{۴}\pi \quad (\text{ر} = ۰، ۱، ۲، ۳)$

$\therefore \quad \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \pm\,\text{جم}\frac{\pi}{۴} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{\pi}{۴}$

(۲) مساوات $\text{لا}^5 + \text{ا}^5 = ۰$ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^5 = -۱ = \text{جم}\,\pi + \text{خ}\,\text{جب}\,\pi$

$\therefore \quad \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم}\frac{۲\text{ر}+۱}{۵}\pi + \text{خ}\,\text{جب}\frac{۲\text{ر}+۱}{۵}\pi، \quad (\text{ر} = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴)$

$\therefore \quad \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم}\frac{\pi}{۵} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{\pi}{۵}$، ر = ۰ اور ۴ کے لیے

$= \text{جم}\frac{۳\pi}{۵} \pm \text{خ}\,\text{جب}\frac{۳\pi}{۵}$، ر = ۱ اور ۳ کے لیے

اور $= -۱$، ر = ۲ کے لیے

(۳) مساوات $\text{لا}^4 + \text{لا}^3 + \text{لا}^2 + ۱ = ۰$ کو حل کرو۔

۵۵۔ $\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{عہ} + \text{ا}^{۲\text{ن}} = ۰$ کا حل جبکہ ن کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ $\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{عہ} + \text{ا}^{۲\text{ن}} = ۰$

$\therefore \quad (\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{عہ})^2 + \text{ا}^{۲\text{ن}}\,\text{جب}^2\,\text{ن}\,\text{عہ} = ۰$

$\therefore \quad \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{عہ} = \pm\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{عہ}$

$\therefore \quad \text{لا}^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{ن}}\,(\text{جم}\,\text{ن}\,\text{عہ} \pm \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{عہ})$

پس لا کی ۲ن قیمتیں $\text{لا} = \text{ا} \left(\text{جم} \frac{\text{ن عہ} + ۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ جب} \frac{\text{ن عہ} + ۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} \right)$ ہیں،

جس میں ر = ۰، ۱، ..... ن - ۱۔

ان کو جوڑواں ترتیب دے سکتے ہیں اور اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن عہ} + \text{ا}^{۲\text{ن}}$ کے دو درجی اجزائے ضربی،

$$\left(\text{لا}^۲ - ۲\,\text{ا لا جم عہ} + \text{ا}^۲\right)\left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{ا لا جم}\left(\text{عہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^۲\right)\ldots\ldots$$

$$\left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{ا لا جم}\left(\text{عہ} + \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^۲\right)\Big\}$$ ہیں۔

اس لیے کہ یہ اجزائے ضربی $= \left(\text{لا} - \text{ا جم}\frac{\text{ن عہ} + ۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} - \text{خ ا جب}\frac{\text{ن عہ} + ۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right) \times$

$\left(\text{لا} - \text{ا جم}\frac{\text{ن عہ} + ۲\text{ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ ا جب}\frac{\text{ن عہ} + ۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$ جس میں ر = ۰، ۱، ..... ن - ۱۔

اس ضابطہ سے بعض اہم نتائج حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ

(۱) لا = ۱ لکھو اور عہ کے بجائے طہ لکھو، تب

$$(۱ - \text{جم ن طہ}) = ۲^{\text{ن}-۱}(۱ - \text{جم طہ})\left\{۱ - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\right\}\ldots\left\{۱ - \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)\right\}$$

اگر ہم یہاں بجائے طہ کے ۲ طہ لکھیں تو

$$\text{جب}^۲\,\text{ن طہ} = ۲^{۲\text{ن}-۲}\,\text{جب}^۲\,\text{طہ}\,\text{جب}^۲\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\ldots\text{جب}^۲\left(\text{طہ} + \frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$\text{یا}\quad \text{جب ن طہ} = \pm\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب طہ جب}\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\text{جب}\left(\text{طہ} + \frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$$

جس کی مبہم علامت کا ہنوز تصفیہ ہونا ہے۔

لیکن اگر ہم جب طہ پر تقسیم کریں اور پھر طہ ← ۰ ہونے دیں، تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ن} = \pm\,۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\ldots\ldots\text{جب}\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

اجزائے ضربی جب π/ن ، جب ۲π/ن ، ..... جب (ن-۱)π/ن سب کے سب مثبت ہیں، پس یہاں مثبت علامت لی جائیگی۔

لہذا جب ن ط = ۲^{ن-۱} جب ط جب (ط + π/ن) .... جب (ط + (ن-۱)π/ن)

اب اگر بجائے ط کے (ط + π/۲ن) لکھا جائے تو

جم ن ط = ۲^{ن-۱} جب (ط + π/۲ن) جب (ط + ۳π/۲ن) ..... جب (ط + (۲ن-۱)π/۲ن)

(ب) لا = ا (جم ط + خ جب ط) لکھو۔

تب چونکہ لا^{۲ن} - ۲ ا^{ن} لا^{ن} جم ن ع + ا^{۲ن}

= ا^{۲ن} (جم ۲ن ط + خ جب ۲ن ط + ۱) - ۲ ا^{۲ن} (جم ن ط + خ جب ن ط) جم ن ع

= ا^{۲ن} (۲ جم^{۲} ن ط + ۲ خ جب ن ط جم ن ط) - ۲ ا^{۲ن} (جم ن ط + خ جب ن ط) جم ن ع

= ۲ ا^{۲ن} {جم ن ط (جم ن ط + خ جب ن ط) - جم ن ع (جم ن ط + خ جب ن ط)}

= ۲ ا^{۲ن} (جم ن ط + خ جب ن ط) (جم ن ط - جم ن ع)

اور لا^{۲} - ۲ ا لا جم ع + ا^{۲} = ا^{۲} (جم ۲ط + خ جب ۲ط + ۱) - ۲ ا^{۲} (جم ط + خ جب ط) جم ع

= ۲ ا^{۲} (جم^{۲} ط + خ جم ط جب ط) - ۲ ا^{۲} (جم ط + خ جب ط) جم ع

= ۲ ا^{۲} (جم ط + خ جب ط) (جم ط - جم ع)

اسی طرح لا^{۲ن} - ۲ ا^{ن} لا^{ن} جم ن ع + ا^{۲ن} کے دوسرے اجزائے ضربی بھی مصرحۂ بالا جملوں کے مشابہ لکھے جا سکتے ہیں۔

پس بالآخر

جم ن ط - جم ن ع = ۲^{ن-۱} (جم ط - جم ع) {جم ط - جم (ع + ۲π/ن)} .... {جم ط - جم (ع + ۲(ن-۱)π/ن)}

اس تماثل میں بجائے ط اور ع کے ½ π + ط اور ½ π + ع لکھو

تب اگر ن جفت عدد ہے تو

جم نπ/۲ (جم ن ط - جم ن ع) = ۲^{ن-۱} (جب ط - جب ع) {جب ط - جب (ع + ۲π/ن)} .....

{جب ط - جب (ع + ۲(ن-۱)π/ن)}

اگر ن طاق عدد ہے تو

جم $\frac{ن\pi}{۲}$ (جم ن طہ - جم ن عہ) کے عوض جب $\frac{ن\pi}{۲}$ (جب ن طہ - جب ن عہ) لکھنا ہوگا۔

۵۶- (ا + خ ب) کی ن- ویں اصلوں کی تعیین جبکہ ا اور ب حقیقی ہیں۔

فرض کرو ا = ر جم عہ اور ب = ر جب عہ

تاکہ جس نقطہ کے کارٹیزی محدّد ا اور ب ہوں اُس کے قطبی محدد ر اور عہ ہوں جبکہ زاویہ عہ $-\pi$ اور $+\pi$ کے مابین لیا جاتا ہے۔

تب ر = $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ اور مس عہ = $\frac{ب}{ا}$

اس طرح ا + خ ب = ر (جم عہ + خ جب عہ) اور (ا + خ ب) کی ن- ویں اصلوں کا اظہار جملہ $ر^{\frac{۱}{ن}}$ (جم $\frac{عہ + ۲ ر \pi}{ن}$ + خ جب $\frac{عہ + ۲ ر \pi}{ن}$) سے ہوتا ہے۔

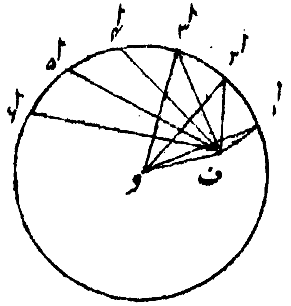
جس میں ر = ۰، ۱، .....، ن - ۱

نوٹ (۱) فرض کرو کہ ا$_۱$، ا$_۲$ ..... ا$_ن$ و مرکز اور ا نصف قطر والے دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ن ضلعوں کا منتظم کثیر الاضلاع ہے۔ اور ف دائرہ کے مستوی میں کوئی سا ایک نقطہ ہے جس کا فاصلہ و سے لا ہے - اگر زاویہ ف و ا$_۱$ = طہ تو ہم ثابت کرینگے کہ (ف ا$_۱$)^۲ (ف ا$_۲$)^۲ ..... (ف ا$_ن$)^۲

= لا^{۲ن} - ۲ ا^{ن} لا^{ن} جم ن طہ + ا^{۲ن}

واضح ہو کہ یہ رابطہ ڈی مواور کی خاصیتِ دائرہ (DeMoivre's property of the circle) کہلاتا ہے۔ اور مثلہ ۵۵ میں جو ضابطہ لا^{۲ن} - ۲ ا^{ن} لا^{ن} جم ن طہ + ا^{۲ن} کے اجزائے ضربی سے متعلق بتایا گیا تھا اس کی یہ ہندسی ترجمانی ہے۔

شکل کھینچ کر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ زاویہ ا$_۱$ و ا$_۲$ = زاویہ ا$_۲$ و ا$_۳$ = ... = $\frac{۲\pi}{ن}$ اور زاویہ ف و ا$_۲$ = طہ + $\frac{۲\pi}{ن}$، زاویہ ف و ا$_۳$ = طہ + $\frac{۴\pi}{ن}$، ......



(شکلِ خاصیتِ دائرہ)

چونکہ ف ا$_{۱}^{۲}$ = و ف^{۲} + و ا$_{۱}^{۲}$ ـ ۲ (و ف) (و ا$_{۱}$) جم ف و ا$_{۱}$

= لا^{۲} ـ ۲ ر لا جم ط + ر^{۲}

ف ا$_{۲}^{۲}$ = و ف^{۲} + و ا$_{۲}^{۲}$ ـ ۲ (و ف) (و ا$_{۲}$) جم ف و ا$_{۲}$

= لا^{۲} ـ ۲ ر لا جم (ط + $\frac{۲ \text{ط}}{\text{ن}}$) + ر^{۲}

. . . .

پس (ف ا$_{۱}$)^{۲} (ف ا$_{۲}$)^{۲} ..... (ف ا$_{ن}$)^{۲} = لا^{۲ن} ـ ۲ ر^{ن} لا^{ن} جم ن ط + ر^{۲ن}

نوٹ (۲)۔ اگر نقطہ ف نصف قطر و ا$_{۱}$ پر واقع ہو تو

(ف ا$_{۱}$) (ف ا$_{۲}$) .... (ف ا$_{ن}$) = لا^{ن} ~ ر^{ن}

حالیہ صورت میں ط = ۰ ۔ لہذا (ف ا$_{۱}$)^{۲} (ف ا$_{۲}$)^{۲}..... (ف ا$_{ن}$)^{۲} = لا^{۲ن} ـ ۲ ر^{ن} لا^{ن} + ر^{۲ن}

= (لا^{ن} ـ ر^{ن})^{۲}

یعنی (ف ا$_{۱}$) (ف ا$_{۲}$) .... (ف ا$_{ن}$) = ± (لا^{ن} ـ ر^{ن}) = لا^{ن} ~ ر^{ن}

اگر ف زاویہ ا$_{۱}$ و ا$_{۲}$ کے منصّف پر واقع ہے تو

(ف ا$_{۱}$) (ف ا$_{۲}$) ...... (ف ا$_{ن}$) = لا^{ن} + ر^{ن}

قوسوں ا$_{۱}$ ا$_{۲}$، ا$_{۲}$ ا$_{۳}$ ..... ا$_{ن-۱}$ ا$_{ن}$ کی ع$_{۱}$، ع$_{۲}$، ..... سے تنصیف کرو۔ اس طرح ا$_{۱}$ ع$_{۱}$ ا$_{۲}$ ع$_{۲}$ .... دائرہ کے اندر ۲ ن ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع بن جاتا ہے۔ ابھی جو رابطہ ثابت کیا گیا اس کی رُو سے

(ف ا$_{۱}$) (ف ع$_{۱}$) .... (ف ا$_{ن}$) (ف ع$_{ن}$) = لا^{۲ن} ~ ر^{۲ن}

اسی طرح چونکہ ع$_{۱}$ ع$_{۲}$ .... ع$_{ن}$، ن ضلعوں کا کثیر الاضلاع ہے ۔

$(\text{ف عہ}_1)\,(\text{ف عہ}_2)\ \ldots\ (\text{ف عہ}_\text{ن}) = \text{لا}^\text{ن} - \text{ا}^\text{ن}$

پس پہلے کو دوسرے پر تقسیم کرنے سے $(\text{ف ا}_1)\,(\text{ف ا}_2)\ldots(\text{ف ا}_\text{ن}) = \text{لا}^\text{ن} + \text{ا}^\text{ن}$

واضح ہو کہ یہ رابطے ''کوٹیز کے خواصِ دائرہ'' (Cotes' properties of the circle) کہلاتے ہیں۔

سوالات ۵ (ز)

(۱) ثابت کرو کہ $\text{قط}^2\text{ط} + \text{قط}^2\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) + \ldots\ \text{قط}^2\left(\text{ط} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\pi\right) = \text{ن}^2\,\text{قط}^2\,\text{ن ط}$

یا $\text{ن}^2\ \text{قم}^2\,\text{ن ط}$ بلحاظ اس کے کہ ن طاق عدد ہے یا جفت۔

(۲) اگر $\text{لا} = \text{جم عہ} + \text{خ جب عہ}$

$\text{ما} = \text{جم بہ} + \text{خ جب بہ}$

$\text{ی} = \text{جم جہ} + \text{خ جب جہ}$، تو

$(\text{ما} + \text{ی})\,(\text{ی} + \text{لا})\,(\text{لا} + \text{ما}) = 8\ \text{لا ما ی جم}\,\frac{\text{بہ}-\text{جہ}}{2}\ \text{جم}\,\frac{\text{جہ}-\text{عہ}}{2}\ \text{جم}\,\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{2}$

(۳) اگر $\text{جب ا} + \text{جب ب} + \text{جب ج} = 0$

$\text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} = 0$ تو

$2(\text{ا}-\text{ب})$، $2(\text{ب}-\text{ج})$، $2(\text{ج}-\text{ا})$ 2π کے ضعف ہیں۔

اور $\text{جم}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ب} + \text{جم}^2\text{ج} = \frac{3}{2}$

(۴) اگر $\text{جم عہ} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ} + \text{جم ضہ} = 0$

$\text{جب عہ} + \text{جب بہ} + \text{جب جہ} + \text{جب ضہ} = 0$، تو

ان دیے ہوئے چار زاویوں میں سے دو ایک دوسرے سے بقدر ایک طاق ضعف π مختلف ہونگے اور بقیہ دو بھی ایک دوسرے سے بقدر ایک طاق ضعف π مختلف ہونگے۔

(۵) $\text{لا}^{12} - 1$ کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

[بتاؤ کہ $2\,\text{جم}\,\frac{2\pi}{13} + 2\,\text{جم}\,\frac{10\pi}{13}$، $2\,\text{جم}\,\frac{4\pi}{13} + 2\,\text{جم}\,\frac{6\pi}{13}$، $2\,\text{جم}\,\frac{8\pi}{13} + 2\,\text{جم}\,\frac{12\pi}{13}$

مساوات $\text{لا}^{3} + \text{لا}^{2} - 4\,\text{لا} + 1 = 0$ کی اصلیں ہیں]

(۶) اگر $\text{ر} = \text{جم ع} + \text{خ جب ع}$ جس میں $\text{ع} = \frac{2\pi}{7}$ تو بتاؤ کہ $\text{ر} + \text{ر}^{6}$، $\text{ر}^{2} + \text{ر}^{5}$، $\text{ر}^{3} + \text{ر}^{4}$ ایک کعبی حقیقی صحیح عددی سروں والی مساوات کی اصلیں ہیں۔

(۷) $\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + 1$ کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے اور بتاؤ کہ

$$\text{جم}\,\frac{\text{ن}\pi}{2} - \text{جم ن}\left(\text{ف} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$2^{\text{ن}-1}\,\text{جب ف}\;\text{جب}\left(\text{ف} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\text{جب}\left(\text{ف} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\text{جب}\left(\text{ف} + \frac{2(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}\right)$$

(۸) ثابت کرو کہ $\prod_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1}\left(\text{جم ف} - \text{جم}\frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right) + \prod_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1}\left\{1 - \text{جم}\left(\text{ف} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\} = 0$

(۹) ثابت کرو کہ $\text{جم ن ط} + \text{جب ن ط} = 2^{\text{ن}-\frac{1}{2}}\prod_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1}\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{(4\text{ر}+1)\pi}{4\text{ن}}\right)$

چھٹا باب

قایم اور قطبی محدّد - اُن کا استحالہ اور خطِ مستقیم کی مساواتیں

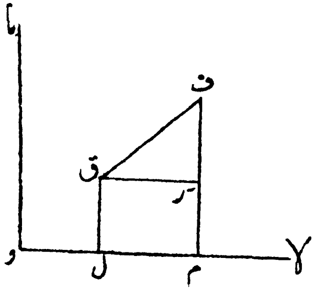
۵۷ - (ا) **محدّدوں کی تعریف** - اگر د لا اور د ما دو باہم گر علی القوائم محور ہیں تو اُن کے مستوی میں کسی نقطۂ پ کے موقع یا محل کی تعیین ان محوروں سے اُن کے فاصلوں کے ذریعہ سے ہوسکتی ہے - یہ فاصلے اس نقطہ کے کارٹیزی محدّد (Cartesian co-ordinates) کہلاتے ہیں اور لا، ما سے تعبیر کیے جاتے ہیں - ان محوروں کے تقاطع کا نقطہ د مبداء کہلاتا ہے - اگر حوالہ کا صرف ایک محور د لا قرار دیا جائے تو نقطہ ف کی تعریف اس کے فاصلہ د ف اور زاویہ لا د ف کے ذریعہ سے ہوسکتی ہے - یہ ف کے قطبی محدّد کہلاتے ہیں اور (ر، طہ) سے تعبیر کیے جاتے ہیں - ر کو نیم قطر سمتی کہتے ہیں اور طہ کو سمتی زاویہ -

کارٹیزی اور قطبی محدّدوں کے مابین مندرجۂ ذیل روابط واضح ہیں :-

$$\text{لا} = \text{ر جم طہ،} \quad \text{ما} = \text{ر جب طہ،} \quad \text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2\text{،} \quad \text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

ابتداءً کارٹیزی محدّدوں سے بحث کی جائیگی - اس کے بعد قطبی محدّدوں سے - کارٹیزی محدّدوں کا علی القوائم ہونا لازمی نہیں - یہ کسی بھی زاویہ پر مائل ہوسکتے ہیں - لیکن عموماً سہولت زاویہ قائمہ ہی کی صورت میں پائی جاتی ہے - اس نصاب میں محوروں کا زاویۂ میلان قائمہ ہی متصور ہوگا -

(ب) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محددوں کی رقموں میں۔



شکل ۱۰

شکل ۱۰ میں فرض کرو نقطہ ف کے محدد لا۱، ما۱ ہیں اور نقطہ ق کے محدد لا۲، ما۲، ف م اور ق ل محور و ما کے متوازی کھینچو اور ق ر محور و لا کے متوازی۔

تب و ل = لا۲، ل ق = ما۲،

و م = لا۱، م ف = ما۱

ف ق۲ = ق ر۲ + ر ف۲

لیکن ق ر = ل م = و م - و ل = لا۱ - لا۲

اور ر ف = م ف - م ر = م ف - ل ق = ما۱ - ما۲

∴ ف ق۲ = (لا۱ - لا۲)۲ + (ما۱ - ما۲)۲

پس ف ق = ± √((لا۱ - لا۲)۲ + (ما۱ - ما۲)۲)

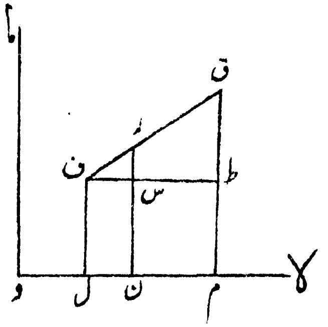
نقطۂ ف کا فاصلہ مبداء و سے یا تو براہِ راست دریافت کرلیا جاسکتا ہے یا مندرجۂ بالا ضابطہ میں لا۲ = ۰ اور ما۲ = ۰ لکھنے سے۔ چنانچہ

و ف = ± √(لا۱۲ + ما۱۲)

خطوطِ مستقیم جب محور و لا یا و ما کی سمت میں ناپے جاتے ہیں تو وہ مثبت تصور کیے جاتے ہیں اور اُن کی مخالف سمتوں میں منفی۔ ان سمتوں کے متوازی سمتوں کے متعلق بھی یہی قرار داد مسلّم ہے۔ دیگر اسمات کے متعلق ایسی کوئی قرار داد نہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خطِ مستقیم پر تین یا زیادہ نقطے ف، ق، ر ...... ہوں تو ہمیں چاہیے کہ اس خط پر جملہ نقطوں کے لیے ایک ہی سمت کو مثبت تصور کریں اور اس کی مخالف سمت کو منفی تاکہ جملہ صورتوں میں ف ق + ق ر = ف ر ہو۔

(ج) دو نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کو معیّنہ نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددوں کی تعیین۔

شکل ۲ میں فرض کرو کہ نقطۂ ف کے محدد $لا_۱$، $ما_۱$ ہیں اور نقطۂ ق کے محدد $لا_۲$، $ما_۲$۔ نقطۂ ر خط ف ق کو $ک_۱ : ک_۲$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور اس کے محدد لا، ما ہیں۔ ف ل، ر ن، ق م محور ما کے متوازی کھینچو اور ف س ط محور لا کے متوازی۔



شکل ۲

تب ل ن : ن م = ف س : س ط = ف ر : ر ق = $ک_۱ : ک_۲$

$\therefore$ $ک_۲$ ل ن $- ک_۱$ ن م $= ۰$ ۔ یعنی $ک_۲ (لا - لا_۱) - ک_۱ (لا_۲ - لا) = ۰$

$$\therefore \quad لا = \frac{ک_۲ لا_۱ + ک_۱ لا_۲}{ک_۱ + ک_۲} \quad \text{اسی طرح} \quad ما = \frac{ک_۲ ما_۱ + ک_۱ ما_۲}{ک_۱ + ک_۲}$$

اگر نقطۂ ر سے خط ف ق کی تنصیف ہوتی ہے تو واضح ہے کہ ر کے محدد

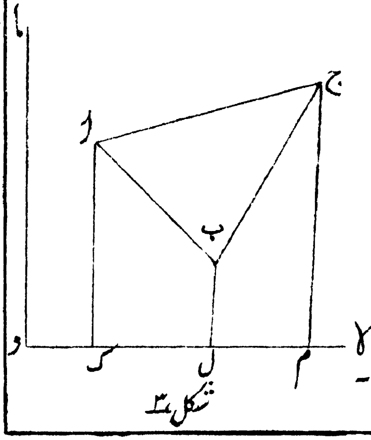
$$\tfrac{1}{2} (لا_۱ + لا_۲) \quad \text{اور} \quad \tfrac{1}{2} (ما_۱ + ما_۲) \quad \text{ہیں۔}$$

اگر ر خط ف ق کو نسبت $ک_۱ : ک_۲$ میں قطع کرے تو ل ن : ن م $= ک_۱ : - ک_۲$

$$\text{پس} \quad لا = \frac{ک_۱ لا_۲ - ک_۲ لا_۱}{ک_۱ - ک_۲} \quad \text{اور} \quad ما = \frac{ک_۱ ما_۲ - ک_۲ ما_۱}{ک_۱ - ک_۲}$$

مصرحۂ بالا نتائج ہر صورت میں صحیح ہیں محوروں کے مابین کچھ ہی زاویہ ہو۔

(د) ایک مثلث کے رقبہ کے لیے جملہ اس کے زاویئی نقطوں کے محدّدوں کی رقموں میں۔



شکل ۳

شکل ۳ میں ا ب ج ایک مثلث ہے جس کے زاویئی نقطوں ا، ب، ج کے محدّد علی الترتیب $لا_۱ ما_۱$، $لا_۲ ما_۲$ اور $لا_۳ ما_۳$ ہیں۔

اک، ب ل اور ج م خطوط محور ما کے متوازی کھینچو۔

△ اب ج = م ج اک - ک اب ل - ل ب ج م

لیکن م ج اک = △ م ج ا + △ اک م = $\frac{1}{2}$ ک م × م ج + $\frac{1}{2}$ ک م × ک ا

= $\frac{1}{2}$ (لا$_3$ - لا$_1$) (ما$_3$ + ما$_1$)

اسی طرح ک اب ل = $\frac{1}{2}$ (لا$_2$ - لا$_1$) (ما$_1$ + ما$_2$)

اور ل ب ج م = $\frac{1}{2}$ (لا$_2$ - لا$_3$) (ما$_2$ + ما$_3$)

∴ △ اب ج = $\frac{1}{2}$ {(ما$_3$ + ما$_1$)(لا$_3$ - لا$_1$) + (ما$_1$ + ما$_2$)(لا$_1$ - لا$_2$) + (ما$_2$ + ما$_3$)(لا$_2$ - لا$_3$)}

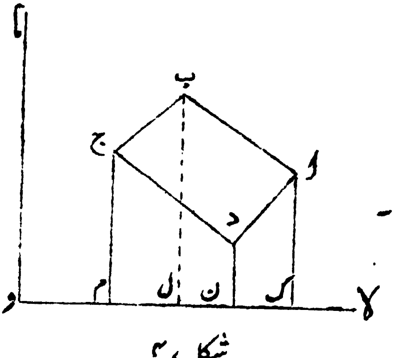
اس جملہ کو پھیلا کر اس میں سے جو رقمیں کٹ جاتی رہیں اُن کو نکال دینے سے

△ اب ج = $\frac{1}{2}$ (لا$_1$ ما$_2$ - لا$_2$ ما$_1$ + لا$_2$ ما$_3$ - لا$_3$ ما$_2$ + لا$_3$ ما$_1$ - لا$_1$ ما$_3$)

= $\frac{1}{2}$ | لا$_1$ ما$_1$ ۱ ؛ لا$_2$ ما$_2$ ۱ ؛ لا$_3$ ما$_3$ ۱ |

مثلث کے رقبہ کے لیے مندرجۂ بالا جملہ مثبت پایا جائیگا اگر دَور اب ج ا کے اظہار کی ترتیب مخالف سمت ساعت ہو گی یعنی مثلث کے گرد گھومنے کے لیے مخالف سمت ساعت حرکت کرنی ہوگی۔ اگر حسابی عمل سے رقبہ کی قیمت منفی برآمد ہو تو سمجھنا چاہیے کہ مثلث کے گرد گھومنے کے لیے موافق سمت ساعت ترتیب اختیار کی گئی ہے۔

(ہ) ایک ذوارابعۃ الاضلاع کا رقبہ اس کے زاویئی نقطوں کی رقموں میں (بلحاظ ایک مقررہ ترتیب کے)۔



شکل ۳

شکل ۳ میں فرض کرو کہ ا، ب، ج، د زاویئی نقطوں کے محدد علی الترتیب (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$)، (لا$_3$، ما$_3$) اور (لا$_4$، ما$_4$) ہیں۔

اک، ب ل، ج م اور د ن محور ما کے متوازی کھینچو۔

تب رقبہ ا ب ج د = ک ا ب ل + ل ب ج م ۔ م ج د ن ۔ ن د ا ک

رقبہ ک ا ب ل = $\frac{۱}{۲}$ (ما$_۱$ + ما$_۲$) (لا$_۱$ ۔ لا$_۲$)، رقبہ ل ب ج م = $\frac{۱}{۲}$ (ما$_۲$ + ما$_۳$) (لا$_۲$ ۔ لا$_۳$)،

" م ج د ن = $\frac{۱}{۲}$ (ما$_۳$ + ما$_۴$) (لا$_۴$ ۔ لا$_۳$)، " ن د ا ک = $\frac{۱}{۲}$ (ما$_۴$ + ما$_۱$) (لا$_۱$ ۔ لا$_۴$)

پس رقبہ ا ب ج د = $\frac{۱}{۲}$ { (ما$_۱$ + ما$_۲$) (لا$_۱$ ۔ لا$_۲$) + (ما$_۲$ + ما$_۳$) (لا$_۲$ ۔ لا$_۳$)

+ (ما$_۳$ + ما$_۴$) (لا$_۳$ ۔ لا$_۴$) + (ما$_۴$ + ما$_۱$) (لا$_۴$ ۔ لا$_۱$) }

کٹ جانے والی رقموں کو چھوڑ دینے سے رقبہ ا ب ج د

= $\frac{۱}{۲}$ { لا$_۱$ ما$_۲$ ۔ لا$_۲$ ما$_۱$ + لا$_۲$ ما$_۳$ ۔ لا$_۳$ ما$_۲$ + لا$_۳$ ما$_۴$ ۔ لا$_۴$ ما$_۳$ + لا$_۴$ ما$_۱$ ۔ لا$_۱$ ما$_۴$ }

اس کے مماثل طریقہ سے کسی بھی کثیر الاضلاع کا رقبہ دریافت کیا جاسکتا ہے۔

جس تدویری ترتیب میں مندرجۂ بالا ضابطہ لکھا گیا ہے، اگر زاویئی نقطے شکل کے محیط کے گرد مخالف سمت ساعت ترتیب میں لیے جائیں تو مثبت ہوتا ہے اور اگر موافق سمت ساعت ترتیب میں لیے جائیں تو منفی۔

اگر ہم کسی منحنی کی ایک ایسی ہندسی خاصیت کے ذریعہ تعریف کریں جو اس کے تمام نقطوں کے لیے مشترک ہو تو ایسا جبری رابطہ دریافت ہوسکتا ہے جو صرف اسی منحنی کے جملہ نقطوں کے محدّدوں کے لیے صحیح ہو اور کسی اور کے لیے صحیح نہ ہو۔ اس رابطہ کو منحنی کی **مساوات** کہتے ہیں۔

ہندسۂ تحلیلی میں کسی ہندسی خاصیت کے لحاظ سے منحنی کی تعریف کرکے اُس کی مساوات دریافت کی جاتی ہے اور اگر ایسی کوئی مساوات دی گئی ہو تو اُس کے متعلقہ منحنی کی وضع اور اس کے خواص دریافت کیے جاتے ہیں۔

اگر کسی مساوات کو اس طرح تحویل کریں کہ اس کے متغیروں کے قوت نما ممکنہ چھوٹے سے چھوٹے مثبت صحیح عدد ہوں تو اُس کے سب سے بڑے ابعاد کی رقم یا رقموں کے لحاظ سے اِس کا درجہ شمار ہوگا۔ مثلاً ا لا + ب ما + ج = ۰ پہلے درجہ کی مساوات ہے؛

لا^۲ + ما^۲ = ر^۲، ا لا ما + ب لا + ج = ۰ اور $\sqrt{\text{لا}}$ + $\sqrt{\text{ما}}$ = ۱ (جو ناطق بننے پر لا^۲ + ما^۲ ۔ ۲ لا ما ۔ ۲ لا ۔ ۲ ما + ۱ = ۰ میں تبدیل ہوتی ہے) تینوں دوسرے

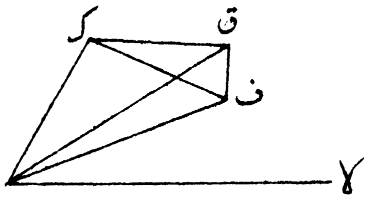
درجہ کی مساواتیں ہیں۔

۵۸۔ قطبی محدّدوں کا استعمال۔ کسی نقطہ کا سمتی زاویہ طہ اگر محور و لا سے مخالف سمت ساعت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت تصور کیا جاتا ہے۔ نیم قطر سمتی ر اگر مبدا ر و سے سمتی زاویہ کے حائط خط کی سمت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت مانا جاتا ہے اور اگر اس کے مخالف سمت میں ناپا جاتا ہے تو منفی۔

(ا) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ نقطوں کے قطبی محدّدوں کی رقموں میں۔

اگر ف، ق دو نقطوں کے محدد ر$_۱$، طہ$_۱$ اور ر$_۲$، طہ$_۲$ ہوں تو علم المثلثات سے

ف ق^۲ = و ف^۲ + و ق^۲ − ۲ و ف × و ق جم ف و ق



شکل ۵

لیکن و ف = ر$_۱$، و ق = ر$_۲$ اور $<$ ف و ق

= $<$ لا و ق − $<$ لا و ف = طہ$_۲$ − طہ$_۱$

$\therefore$ ف ق^۲ = ر$_۱^۲$ + ر$_۲^۲$ − ۲ ر$_۱$ ر$_۲$ جم (طہ$_۲$ − طہ$_۱$)

(ب) مثلث کا رقبہ اس کے زاویئی نقطوں کے قطبی محدّدوں کی رقموں میں۔

فرض کرو شکل ۵ میں ف ق ک مثلث کے زاویئی نقطوں یعنی ف، ق اور ک کے محدد علی الترتیب (ر$_۱$، طہ$_۱$) (ر$_۲$، طہ$_۲$) اور (ر$_۳$، طہ$_۳$) ہیں۔

تب △ ف ق ک = △ و ف ق + △ و ق ک - △ و ف ک

لیکن △ و ف ق = $\frac{1}{2}$ و ف × و ق جب ف و ق = $\frac{1}{2}$ ر$_1$ ر$_2$ جب (ط$_2$ - ط$_1$)

△ و ق ک = $\frac{1}{2}$ ر$_2$ ر$_3$ جب (ط$_3$ - ط$_2$) اور △ و ف ک = $\frac{1}{2}$ ر$_1$ ر$_3$ جب (ط$_3$ - ط$_1$)

پس △ ف ق ک = $\frac{1}{2}$ {ر$_1$ ر$_2$ جب (ط$_2$ - ط$_1$) + ر$_2$ ر$_3$ جب (ط$_3$ - ط$_2$)

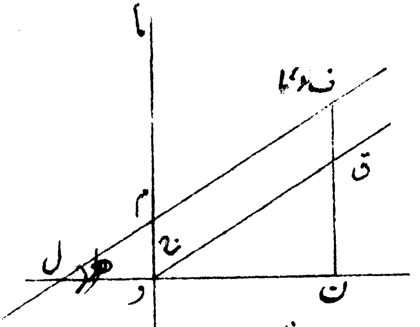
+ ر$_3$ ر$_1$ جب (ط$_1$ - ط$_3$)}

بطور مشق طالب علم کو چاہیے کہ ذوار بعۃ الاضلاع ف ق ک ل کا رقبہ قطبی محددوں میں دریافت کرے اور اس کے بعد قطبی اور کارٹیزی محددوں کے باہمی رابطوں کی مدد سے اس رقبہ کو کارٹیزی محددوں میں تحویل کرے۔

۵۹ - خطِ مستقیم کی مساواتیں۔

اگر خطِ مستقیم محور لا کے متوازی ہو تو واضح ہے کہ اس کی مساوات ما = ب ہوگی جس میں ب اس کا عمودی فاصلہ محور لا سے ہے۔ اسی طرح لا = ا ایسے خط کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہے۔ یہاں ا اس خط کا عمودی فاصلہ محور ما سے ہے۔

اگر خطِ مستقیم ل م ف محور لا کو نقطۂ ل پر اور محور ما کو نقطۂ م پر قطع کرے تو فرض کرو کہ و م = ج اور مس $\angle$ و ل م = م۔ اگر خط کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہوں تو ف ن محور ما کے متوازی کھینچو اور مبداء و میں سے و ق دیئے ہوئے خط ل م ف کے متوازی کھینچو۔ دیکھو شکل ۶۔



شکل ۶

تب ن ف = ن ق + ق ف

= و ن مس ن و ق + و م

یعنی ما = م لا + ج

کسی خاص خطِ مستقیم کے لیے م اور ج مستقل ہونگے۔ واضح ہے کہ مندرجہ بالا

مساوات پہلے درجہ کی ہے۔

(ل) پہلے درجہ کی کوئی سی مساوات خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین صورت ا لا + ب ما + ج = ۰ ہے۔
اِس مساوات کے منحنی پر ف، ق، ر کوئی سے تین نقطے لیے جائیں اگر ان کے محدد (لا۱، ما۱) (لا۲، ما۲) اور (لا۳، ما۳) ہوں تو دی ہوئی مساوات ان محددوں کے لیے بھی صحیح ہوگی۔ پس

ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ۰

ا لا۲ + ب ما۲ + ج = ۰

ا لا۳ + ب ما۳ + ج = ۰

ا، ب اور ج کو ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

| لا۱، | ما۱، | ۱ |
| لا۲، | ما۲، | ۱ | = ۰
| لا۳، | ما۳، | ۱ |

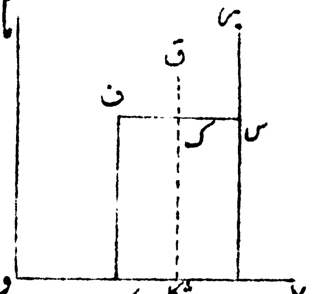
یعنی ف، ق، ر نقطوں کو ملانے والے خطوط کا رقبہ صفر ہے۔
پس یہ نقطے خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔ اور اس لیے دی ہوئی مساوات خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

طریق دیگر۔ مندرجۂ بالا تین مساواتوں میں ایک مساوات کو دوسری مساوات میں سے خارج کرنے سے

ا (لا۱ - لا۲) + ب (ما۱ - ما۲) = ۰

ا (لا۱ - لا۳) + ب (ما۱ - ما۳) = ۰

(لا۱ - لا۲) / (ما۱ - ما۲) = (لا۱ - لا۳) / (ما۱ - ما۳)

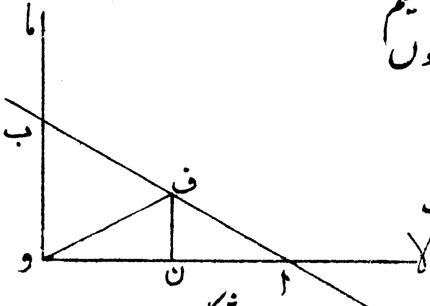


شکل ۴۸

پس ف ک / ک ق = ف س / س ر (دیکھو شکل ۴۸)
یعنی △ ف ک ق اور △ ف س ر متشابہ ہیں جس سے واضح ہے کہ ف ق ر خطِ مستقیم ہے۔
اگر مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ تو
ما = - ا/ب لا + ج/ب کی صورت میں

لکھیں تو معلوم ہوگا کہ یہ مساوات ما = ھ لا + ج کے متشابہ ہے اس لیے کہ ھ = ۔ ا/ب اور ج = ج/ب گویا خطِ مستقیم کی عام مساوات میں بھی صرف دو ہی مستقل ہیں۔

۲ (ب) خطِ مستقیم کی مساوات مقطوعوں کی رقموں میں جو حوالہ کے محوروں پر خط سے بنتے ہیں۔



شکل ۸

فرض کرو شکل ۸ میں خطِ مستقیم محور لا اور ما کو ا اور ب نقطوں میں قطع کرتا ہے۔

و ا = ا اور و ب = ب

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطۂ ف کے محدد لا، ما ہیں۔

ف ن محور ما پر علی القوائم کھینچو اور و ف کو ملاؤ

تب △ و ا ف + △ و ف ب = △ و ا ب

∴ ا ما + ب لا = ا ب

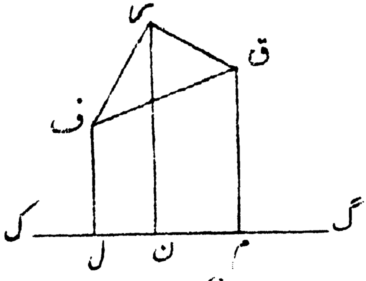
یعنی لا/ا + ما/ب = ۱

اگر محور کے مقطوعوں ا اور ب کے متکافیوں کو ل، م سے تعبیر کریں تو مندرجۂ بالا مساوات صورت ل لا + م ما = ۱ میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

(ج) ایک خط پر دوسرے خط کا ظل —

اگر کسی خط ف ق کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خط ک گ پر عمود ف ل، ق م گرائے جائیں تو ل م خط ف ق کا خط ک گ پر ظل کہلائیگا۔

فرض کرو س کوئی اور نقطہ ہے اور
ن اس کا ظل ک گ پر۔
تب چونکہ جملہ صورتوں میں
ل م + م ن = ل ن اس سے نتیجہ
برآمد ہوتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق س
کے ظلوں کا حاصل جمع اس خط پر ف س کے
ظل کے مساوی ہے۔



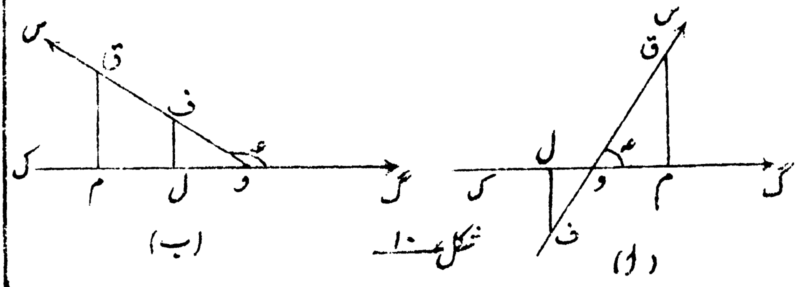
شکل نمبر ۹

اسی طرح کسی خط پر اب، ب ج، ج د ......، ف ق کے ظلوں کا حاصل جمع ا ق کے ظل کے مساوی ہے۔ اگر کثیر الاضلاع بند شکل کا ہو تو کسی بھی خط پر اس کے اضلاع کے ظلوں کا حاصل جمع صفر ہوگا۔

نتیجۂ صریح ۔ اگر ن ضلعوں والا منتظم کثیر الاضلاع کا کوئی ایک ضلع دیے ہوئے خط کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو اس کے دوسرے ضلعے اس خط کے ساتھ سلسلہ وار $\text{ط} + \frac{2\pi}{\text{ن}}$، $\text{ط} + \frac{4\pi}{\text{ن}}$، $\text{ط} + \frac{6\pi}{\text{ن}}$ ..... وغیرہ زاویے بنائینگے۔ پس ط کی کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو

$$\text{جم ط} + \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right) + \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right) + \ldots \text{ن رقموں تک} = 0$$

ف ق جس خط پر واقع ہے اگر وہ خط ک گ کو نقطہ و میں قطع کرے اور اگر زاویہ گ و س کو جو ان خطوط کی مثبت سمتوں و گ اور و س کے مابین بنتا ہے ع سے تعبیر کیا جائے تو شکل نمبر ۱۰ کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ

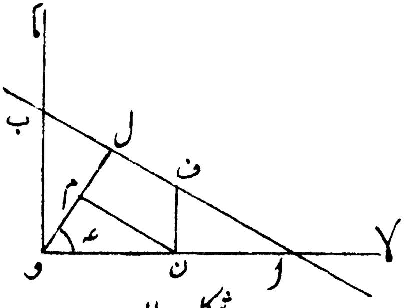


شکل نمبر ۱۰

ول = وف جم عہ اور وم = وق جم عہ ∴ ل م = ف ق جم عہ

پس کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم ک گ پر کسی دوسرے خط ف ق کا ظل ف ق جم عہ ہوگا، جس میں عہ خط ک گ کی مثبت سمت اور اُس خط کی مثبت سمت کا درمیانی زاویہ ہے جس پر ف ق واقع ہے۔

(د) خطِ مستقیم کی مساوات مبدا سے خط پر گرائے ہوئے عمود کے طول اور عمود اور حوالے کے کسی محور کے درمیانی زاویہ کی رقموں میں۔



شکل ۱۱

فرض کرو خط اب پر مبدا سے گرائے ہوئے عمود ول کا طول ع ہے (دیکھو شکل ۱۱) اور اس عمود کا زاویہ محور و لا کے ساتھ (یعنی ∠ لا و ل) عہ ہے - ف کوئی سا ایک نقطہ خط اب پر واقع ہے اور اس کے محدد لا، ما ہیں -

ف ن محور و ما کے متوازی کھینچو اور ن م خط ول پر عمود گراؤ۔

ہر صورت میں ∠ ما و ل = ∠ ما و لا + ∠ لا و ل = - لا و ما + لا و ل = $-\frac{\pi}{2}$ + عہ

چونکہ خط ول پر خطوط و ن اور ن ف کے ظلوں کا حاصل جمع خود ول کے مساوی ہے۔

اور و ن کا ظل = و ن جم عہ اور ن ف کا ظل = ن ف جم ($-\frac{\pi}{2}$ + عہ) = ما جب عہ

پس ع = لا جم عہ + ما جب عہ

واضح ہو کہ یہ مساوات مقطوعوں والی اور عام مساوات کے ذریعہ بھی بآسانی ثابت ہو سکتی ہے۔ چنانچہ

(۱) شکل ۱۱ سے ظاہر ہے کہ ع = ا جم عہ = ب جب عہ پس مساوات

لا/و + ما/ب = ۱ میں و اور ب کے عوض ع/جم عہ اور ع/جب عہ لکھنے سے

لا جم عہ/ع + ما جب عہ/ع = ۱

یعنی لا جم عہ + ما جب عہ = ع

(د) عام مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کو √(ا² + ب²) پر تقسیم کرنے سے

ا/√(ا² + ب²) لا + ب/√(ا² + ب²) ما + ج/√(ا² + ب²) = ۰

چونکہ ا/√(ا² + ب²) اور ب/√(ا² + ب²) کے مربعوں کا حاصل جمع اکائی ہے اس لیے یہ کسی زاویہ کی جیب التمام اور جیب کو تعبیر کرتے ہیں۔ اگر یہ زاویہ عہ قرار دیا جائے تو

لا جم عہ + ما جب عہ − ع = ۰ جس میں ع بجائے − ج/√(ا² + ب²) لکھا گیا ہے

(ھ) کسی خطِ مستقیم کی دی ہوئی مساوات سے اس کی وضع معلوم کرنے کے لیے اس کے صرف دو نقطوں کے محددوں کا دریافت کرلینا کافی ہے۔ اس کے لیے سہولت کے لحاظ سے لا یا ما کی کوئی سی قیمتیں فرض کرکے دی ہوئی مساوات سے اُن کے متعلقہ ما یا لا کی قیمتیں معلوم کرلی جاسکتی ہیں۔ سب سے زیادہ سہولت اس میں ہے کہ حوالہ کے محوروں کے ساتھ خط کے نقاطِ تقاطع دریافت کرلیے جائیں۔ مساوات میں ما، لا کو علی الترتیب صفر لکھنے سے ان کا پتہ چل جاتا ہے۔

اگر ایسے خطِ مستقیم کی مساوات مطلوب ہے جو کوئی سے دو شرائط کی تکمیل کرتا ہے تو دی ہوئی دو شرطوں کی مدد سے خط کی کوئی سی عام شکل کی مساوات لے کر اس کے دونوں مستقل دریافت کرلیے جائیں۔ مثلاً (۱) ما = م لا + ج میں م اور ج، (۲) لا/و + ما/ب = ۱ میں و اور ب، (۳) ل لا + م ما = ۱ میں ل اور م، (۴) لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں عہ اور ع اور (۵) ا لا + ب ما + ج = ۰ میں ا/ج اور ب/ج۔ ذیل میں اس کی چند مثالیں دی جاتی ہیں۔

(و) خطِ مستقیم کی مساوات جو کسی دیے ہوئے نقطہ میں سے

دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدّد لا۱، ما۱ ہیں اور خط کا محور لا کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$م ہے۔ خط کی مساوات ما = م لا + ج اور چونکہ نقطہ لا۱، ما۱ اس پر واقع ہے۔

لہٰذا ما۱ = م لا۱ + ج پس

ما - ما۱ = م (لا - لا۱)

(ز) دیے ہوئے نقطوں میں سے گذرنے والے خط کی مساوات۔

اگر ان نقطوں کے محدّد علی الترتیب (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) ہوں تو مساوات

ا لا + ب ما + ج = ۰ میں (۱)

لا، ما کی یہ خاص قیمتیں لکھنے سے (۲)

ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ۰ اور ا لا۲ + ب ما۲ + ج = ۰

آخری دو مساواتوں میں سے ا، ب، ج کو ساقط کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{لا۱} & \text{ما۱} & ۱ \\ \text{لا۲} & \text{ما۲} & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

حاصل ہوجاتی ہے

(ح) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطۂ تقاطع کے محدّد۔

فرض کرو کہ ان خطوط کی مساواتیں

ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰

اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ ہیں

ان کا نقطۂ تقاطع ان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کریگا۔
پس ان مساواتوں کو حل کرکے لا اور ما کی جو قیمتیں حاصل کی جائینگی وہ اس نقطۂ تقاطع کے محدّد ہونگے۔ وہ حسب ذیل ہیں:—

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1} = \frac{1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$$

(ط) تین خطوطِ مستقیم کے ایک نقطہ میں متقاطع ہونے کی شرط۔

فرض کرو ان خطوط کی مساواتیں حسب ذیل ہیں :-

$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$؛ $\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$ اور $\text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{ما} + \text{ج}_3 = 0$

یہ خطوط ایک نقطہ میں متقاطع ہونگے اگر ان میں سے دو کے تقاطع کا نقطہ تیسرے پر واقع ہوگا۔

پہلی اور دوسری مساوات کے نقطۂ تقاطع کے محددوں کی تصریح

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1} = \frac{1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$$ سے ہوتی ہے

اس نقطۂ تقاطع کے محددوں کو تیسری مساوات میں درج کرنے سے ہمیں معلوم ہو جاتا ہے کہ یہ نقطہ تیسرے خط پر واقع ہونے کی شرط کیا ہے۔ وہ شرط حسب ذیل ہے:-

$$\text{ا}_3\frac{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} + \text{ب}_3\frac{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} + \text{ج}_3 = 0$$

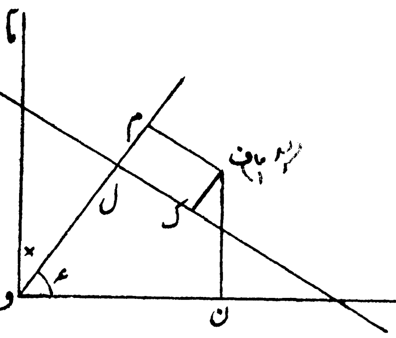
یا $\text{ا}_3(\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1) + \text{ب}_3(\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1) + \text{ج}_3(\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1) = 0$

(ی) دی ہوئی مساواتوں والے دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویہ کی تعیین۔

(۱) اگر ان خطوط کی مساواتیں بشکل $\text{لا جم}\,\text{عہ}_1 + \text{ما جب}\,\text{عہ}_1 - \text{ع}_1 = 0$ اور $\text{لا جم}\,\text{عہ}_2 + \text{ما جب}\,\text{عہ}_2 - \text{ع}_2 = 0$ دی جائیں تو ان کا درمیانی زاویہ $(\text{عہ}_1 - \text{عہ}_2)$ یا $\pi - (\text{عہ}_1 - \text{عہ}_2)$ ہوگا۔

اس لیے کہ عہ_1، عہ_2 وہ زاویے ہیں جو ان خطوط پر مبدار سے گرائے ہوئے

عمودی فاصلہ کی تعیین۔



شکل ۱۲

خط کی مساوات لا جم عہ + ما جب عہ − ع = ۰۔ و اور دیے ہوئے نقطہ ف کے محدد لا، ما، فرض کرو۔ ول اور ف ک مبدأ اور نقطہ ف سے خط پر عمود کھینچو۔ اور ف ن محور و لا پر اور ف م خط ول پر عمود گراؤ۔

تب و م = حاصل جمع و ن اور ن ف کے ظلوں کا خط ول پر۔

چونکہ ن ف محور و ما کے متوازی ہے جملہ صورتوں میں ∠ ما و ل = ∠ ما و لا + ∠ لا و ل = ∠ لا و ما + ∠ لا و ل = $-\frac{\pi}{2}$ + عہ

ول پر ون کا ظل = ون جم عہ = لا جم عہ اور ن ف کا ظل = ن ف جم($-\frac{\pi}{2}$ + عہ) + ما جب عہ

پس و م = لا جم عہ + ما جب عہ پس ک ف = ل م = و م − و ل

= لا جم عہ + ما جب عہ − ع

پس خط لا جم عہ + ما جب عہ − ع = ۰ پر کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول اس نقطہ کے محددوں کو جملہ لا جم عہ + ما جب عہ − ع = ۰ میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خط کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ تو ہم اس کو بشکل

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} = 0$$

لکھ سکتے ہیں۔ پس نقطہ لا، ما، سے اس پر گرائے ہوئے عمود کا طول

$$= \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا}_1 + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما}_1 + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

یا $\frac{\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ ہے۔

طریق دیگر۔ چونکہ ا لا + ب ما + ج =۰ کے علی القوائم خط کی مساوات ب لا - ا ما + ج =۰ ہے اور ایسا خط جو نقطہ لا، ما، میں سے گزرتا ہے اس کی مساوات ب (لا - لا،) - ا (ما - ما،) =۰ ہے۔ اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ ک میں (جس کے محدد لا۲، ما۲ ہیں) ملتا ہے تو چونکہ ک دونوں خطوط پر واقع ہے۔

لہٰذا　ب (لا۲ - لا،) - ا (ما۲ - ما،) =۰ .... (۱)

اور　ا لا۲ + ب ما۲ + ج =۰ اس آخری مساوات کو ہم لکھ سکتے ہیں

ا لا۲ + ب ما۲ + ج - (ا لا، + ب ما،) = - (ا لا، + ب ما،)

یا　ا (لا۲ - لا،) + ب (ما۲ - ما،) = - (ا لا، + ب ما، + ج) ..... (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں کے مربعوں کو جمع کرنے سے

$$(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\{(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2\} = (\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج})^2$$

لیکن

$$\text{ک ف} = \sqrt{(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2}$$

$$\therefore \quad \text{ک ف} = \frac{\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج}}{\sqrt{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}}$$

پس اگر کسی خطِ مستقیم کی مساوات بشکل ا لا + ب ما + ج =۰ دی گئی ہے تو اس سے کسی دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ اس نقطہ کے محددوں کو جملہ ا لا + ب ما + ج =۰ میں تعویض کرنے اور لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے جذر المربع پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ کو ہمیشہ مثبت مانیں تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور خط کی منفی جانب کے کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔

(م) دیے ہوئے دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کی

تنصیف کرنے والے خطوط کی مساواتیں۔

دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرنے والے دو خطوں میں سے کسی ایک پر کے کوئی سے نقطہ سے جو عمود ان خطوطِ مستقیم پر گرائے جاتے ہیں بلحاظ مقدار ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

پس ان خطوط کی مساواتیں اگر

$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1 = ۰$ ......(۱) اور $\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2 = ۰$ .....(۲) ہوں

اور (لاَ ، ماَ) کوئی سا نقطہ ان کے دو منصفوں میں سے کسی ایک منصف پر واقع ہو تو

$$\frac{\text{ا}_1\text{لاَ} + \text{ب}_1\text{ماَ} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا}_2\text{لاَ} + \text{ب}_2\text{ماَ} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2}}$$

بلحاظ مقدار مساوی ہونی چاہییں۔

پس نقطہ (لاَ ، ماَ) مندرجۂ ذیل دو خطوطِ مستقیم میں سے کسی ایک خط پر ہونا چاہیے:

$$\frac{\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2}} = \pm \frac{\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{لا} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2}} \quad ....(۳)$$

پس مساوات (۳) سے جن دو خطوط کی تعبیر ہوتی ہے وہ مطلوبہ منصف ہیں۔ ان دونوں منصفوں میں امتیاز کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے کہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت مانیں اور مساوات (۳) میں اوپر والی علامت لیں تو

$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1$ اور $\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2$ دونوں کے دونوں مثبت ہونگے یا منفی۔

اس لیے
$$\frac{\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2}} = + \frac{\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2}} \quad ....(۴)$$
میں ہر ایک نقطہ دی ہوئی مساواتوں (یعنی (۱) اور (۲) مساواتوں) والے دونوں خطوط کی مثبت جانب ہوگا یا دونوں خطوط کی منفی جانب۔

اگر مساواتیں اس طرح لکھی جائیں کہ دونوں کی مستقل رقمیں مثبت ہیں، تو مبداء دونوں خطوط کی مثبت جانب ہے۔ پس مساوات (۴) اس زاویہ کے منصف سے متعلق ہے جس کے اندر مبداء واقع ہے۔

(ن) دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات۔

سب سے سیدھا طریقہ مطلوبہ مساوات کے حاصل کرنے کا یہ ہے کہ دیے ہوئے خطوط کا نقطۂ تقاطع (لاَ، ماَ) پہلے معلوم کر لیا جائے اور پھر اس نقطہ میں سے گزرنے والے خط کی عام مساوات بشکل ما - ماَ = م (لا - لاَ) استعمال کی جائے۔ لیکن بعض اوقات مندرجۂ ذیل طریقہ بہتر پایا جاتا ہے۔

فرض کرو ان دو خطوط کی مساواتیں ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰ ......(۱)

اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ ......(۲) ہیں

اب مساوات ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ + لہ (ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) = ۰ ......(۳) پر غور کرو۔ چونکہ وہ پہلے درجہ کی ہے اس لیے ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ اور اگر نقطہ (لاَ، ماَ) دونوں خطوط کا مشترک ہے تو

ا۱ لاَ + ب۱ ماَ + ج۱ = ۰ اور ا۲ لاَ + ب۲ ماَ + ج۲ = ۰

اور اس لیے (ا۱ لاَ + ب۱ ماَ + ج۱) + لہ (ا۲ لاَ + ب۲ ماَ + ج۲) = ۰۔ اور اس سے ظاہر ہے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) مساوات (۳) والے خط پر واقع ہے۔

پس مساوات (۳) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ لہ کو اگر مناسب قیمت دی جائے تو اس مساوات سے کسی اور شرط کی بھی تکمیل کرائی جا سکتی ہے۔ مثلاً یہ خط کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے بھی گزارا جا سکتا ہے۔ پس مساوات (۳) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے خطوط (۱) اور (۲) کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے تمام خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

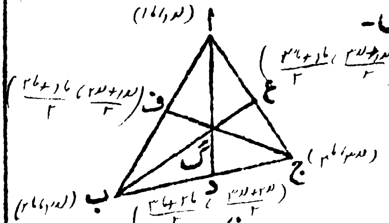
(س) اگر تین خطوطِ مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰، ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ اور ا۳ لا + ب۳ ما + ج۳ = ہوں اور اگر ہم لہ، مہ، نہ تین ایسے مستقل دریافت کر سکتے ہیں جن کے لیے رابطہ

لہ (ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱) + مہ (ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) + نہ (ا۳ لا + ب۳ ما + ج۳) = ۰ ......(۱)

متماثلاً صحیح ہو یعنی لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہو تو یہ تینوں خطوطِ مستقیم

ایک نقطہ پر ملینگے ۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدد ان خطوط کی مساواتوں میں سے کوئی سی دو مساواتوں کی شرط کو پورا کرے تو رابطہ (۱) بتاتا ہے کہ وہ نقطہ تیسری مساوات کی شرط کو بھی پورا کریگا ۔ یہ اصول بکثرت مستعمل ہے ۔

مثال — مثلث کے زاویئی نقطوں کو اُن کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں سے ملانے والے خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں ۔



شکل ۱۳

شکل ۱۳ میں فرض کرو ا ، ب ، ج زاویئی نقطوں کے محدد علی الترتیب $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ ، $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$ اور $(\text{لا}_3, \text{ما}_3)$ ہیں ۔ تب ان کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں د ، ع ، ف کے محدد علی الترتیب

$$\left(\frac{\text{لا}_2+\text{لا}_3}{2},\ \frac{\text{ما}_2+\text{ما}_3}{2}\right)، \left(\frac{\text{لا}_3+\text{لا}_1}{2},\ \frac{\text{ما}_3+\text{ما}_1}{2}\right) \text{ اور } \left(\frac{\text{لا}_1+\text{لا}_2}{2},\ \frac{\text{ما}_1+\text{ما}_2}{2}\right)$$ ہونگے

پس خط ا د کی مساوات $\dfrac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\frac{\text{ما}_2+\text{ما}_3}{2}-\text{ما}_1} = \dfrac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\frac{\text{لا}_2+\text{لا}_3}{2}-\text{لا}_1}$ .... (۱) ہوگی ۔

یعنی $\text{ما}(\text{لا}_2+\text{لا}_3-2\,\text{لا}_1)-\text{لا}(\text{ما}_2+\text{ما}_3-2\,\text{ما}_1)+\text{لا}_1(\text{ما}_2+\text{ما}_3)-\text{ما}_1(\text{لا}_2+\text{لا}_3)=0$

اسی طرح ب ع اور ج ف کی مساواتیں علی الترتیب

$\text{ما}(\text{لا}_3+\text{لا}_1-2\,\text{لا}_2)-\text{لا}(\text{ما}_3+\text{ما}_1-2\,\text{ما}_2)+\text{لا}_2(\text{ما}_3+\text{ما}_1)-\text{ما}_2(\text{لا}_3+\text{لا}_1)=0$

اور $\text{ما}(\text{لا}_1+\text{لا}_2-2\,\text{لا}_3)-\text{لا}(\text{ما}_1+\text{ما}_2-2\,\text{ما}_3)+\text{لا}_3(\text{ما}_1+\text{ما}_2)-\text{ما}_3(\text{لا}_1+\text{لا}_2)=0$ ہونگی

اور چونکہ یہ مساواتیں جب جمع کی جاتی ہیں تو متماثلاً معدوم ہوجاتی ہیں ، اس لیے وہ خطوط جن کو یہ تعبیر کرتی ہیں ایک نقطہ پر ملنے چاہییں ۔

[مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے بآسانی معلوم ہوجائیگا کہ نقطہ گ جس کے محدد $\frac{1}{3}(\text{لا}_1+\text{لا}_2+\text{لا}_3)$ اور $\frac{1}{3}(\text{ما}_1+\text{ما}_2+\text{ما}_3)$ ہیں خط ا د پر واقع ہے ۔ اور اس نتیجہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ گ خطوط ب ع اور ج ف پر بھی واقع ہے ۔]

(ع) ن ویں درجہ کی متجانس مساوات مبداء میں سے گزرنے والے ن خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$\text{ا}\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ب}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{ما}^{\text{ن}-۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots + \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ن}} = ۰ \quad \ldots (۱)$ ہے

اس کو $\text{لا}^{\text{ن}}$ پر تقسیم کرو تو

$$\text{ا}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} + \text{ب}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-۱} + \text{ج}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-۲} + \ldots + \text{ک} = ۰ \quad \ldots (۲)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں $\text{م}_۱$، $\text{م}_۲$، $\text{م}_۳$ ..... $\text{م}_{\text{ن}}$ ہیں۔

تب وہ اور $\text{ا}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۱\right)\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۲\right) \ldots \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_{\text{ن}}\right) = ۰$

ایک ہی ہیں۔

اس لیے اس کی شرط تکمیل کو پہنچتی ہے جبکہ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۱ = ۰$، جبکہ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \text{م}_۲ = ۰$ وغیرہ اور دوسری کسی صورت میں نہیں پہنچتی۔

پس مساوات (۱) جس طریق کو تعبیر کرتی ہے اس کے تمام نقطے مندرجۂ ذیل ن خطوطِ مستقیم میں سے ایک یا دوسرے خط پر واقع ہیں:

$\text{ما} - \text{م}_۱\,\text{لا} = ۰$، $\text{ما} - \text{م}_۲\,\text{لا} = ۰$، ......، $\text{ما} - \text{م}_{\text{ن}}\,\text{لا} = ۰$

(ف) مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^۲ + ۲\,\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ما}^۲ = ۰$ کے ذریعہ جن دو خطوطِ مستقیم کی تعبیر کی جاتی ہے ان کے درمیانی زاویہ کی تعیین۔

اگر خطوط $\text{ما} - \text{م}_۱\,\text{لا} = ۰$ اور $\text{ما} - \text{م}_۲\,\text{لا} = ۰$ ہوں تو $(\text{ما} - \text{م}_۱\,\text{لا})(\text{ما} - \text{م}_۲\,\text{لا}) = ۰$

اور دی ہوئی مساوات $\left(\text{ما}^۲ + \frac{۲\text{ب}}{\text{ج}}\,\text{لا}\,\text{ما} + \frac{\text{ا}}{\text{ج}}\,\text{لا}^۲ = ۰\right)$ دونوں ایک ہی ہیں۔

$\therefore \text{م}_۱ + \text{م}_۲ = -\frac{۲\text{ب}}{\text{ج}} \quad \ldots (۱)$ اور $\text{م}_۱\,\text{م}_۲ = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \quad \ldots (۲)$

اگر ان خطوط کے مابین زاویہ ط ہو تو $\text{مس}\,\text{ط} = \frac{\text{م}_۱ - \text{م}_۲}{۱ + \text{م}_۱\,\text{م}_۲} = \frac{۲\sqrt{\text{ب}^۲ - \text{ا}\text{ج}}}{\text{ا} + \text{ج}}$

از روئے رابطہ (۱) اور (۲)

اگر ب^۲ ـ اج مثبت ہو تو خطوط حقیقی ہونگے ۔ اگر ب^۲ ـ اج = ۰ تو دونوں منطبق ہونگے ۔ اگر ب^۲ ـ اج منفی ہو تو خطوط خیالی ہونگے لیکن حقیقی نقطہ (۰، ۰) میں سے گزرینگے ۔

مساوات ا لا^۲ + ۲ ب لا ما + ج ما^۲ = ۰ والے خطوط باہمدیگر علی القوایم ہونگے اگر ا + ج = ۰ یعنے اگر لا^۲ + ما^۲ کے سروں کا حاصل جمع صفر ہوگا ۔

(۳) دوسرے درجہ کی عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرنے کی شرط کی تعیین ۔

دوسرے درجہ کی عام ترین مساوات ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ (۱) ہے

اگر یہ متماثلاً (ل لا + م ما + ن) (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰ ۰ ۰ ۰ (۲)

کے مساوی ہے ۔

تو (۱) اور (۲) مساواتوں میں متعلقہ سروں کو مساوی لکھنے سے

ل لَ = ا ، م مَ = ب ، ن نَ = ج

م نَ + مَ ن = ۲ ف ، ن لَ + نَ ل = ۲ گ ، ل مَ + لَ م = ۲ ح

آخر الذکر تین رابطوں کو مسلسل ضرب دینے سے

۸ ف گ ح = ۲ ل لَ م مَ ن نَ + ل لَ (م^۲ نَ^۲ + مَ^۲ ن^۲) +

م مَ (نَ^۲ ل^۲ + ن^۲ لَ^۲) + ن نَ (لَ^۲ م^۲ + ل^۲ مَ^۲)

= ۲ ا ب ج + ا (۴ ف^۲ ـ ۲ ب ج) + ب (۴ گ^۲ ـ ۲ ج ا) + ج (۴ ح^۲ ـ ۲ ا ب)

پس ا ب ج ـ ا ف^۲ ـ ب گ^۲ ـ ج ح^۲ + ۲ ف گ ح = ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ (۳)

مطلوبہ شرط ہے ۔

[الاّ اس صورت کے کہ جس میں لا^۲ اور ما^۲ کے سر دونوں صفر ہیں مندرجۂ بالا

نتیجہ دی ہوئی مساوات کو بطور لا اور ما کی دو درجی مساوات کے حل کرنے سے زیادہ سادگی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو ا صفر نہیں ہے، تب اگر ہم مساوات کو بہ شکل ا لا۲ + لا (۲ ح ما + ۲ گ) + ا ب ما۲ + ۲ ف ما + ج) = ۰ لکھ کر لا کی دو درجی مساوات کی طرح حل کریں تو

ا لا + ح ما + گ = ± √{ (ح۲ - ا ب) ما۲ + ۲ (ح گ - ا ف) ما + گ۲ - ا ج }

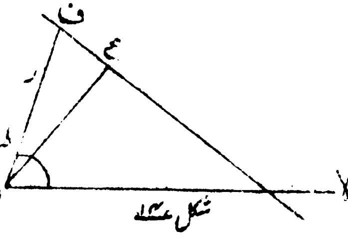
یہ مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کی صورت میں تحویل پذیر ہونے کے لیے ضروری اور کافی ہوگا کہ جذر المربع کی علامت کے نیچے کی مقدار کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

(ح۲ - ا ب) (گ۲ - ا ج) = (ح گ - ا ف)۲

اس کو پھیلا کر ا پر تقسیم کریں تو وہ (۳) کے معادل پائی جائیگی۔

(ق) خطِ مستقیم کی قطبی مساوات

فرض کرو و مبداء ہے اور محور و لا کے لحاظ سے زاویہ طہ ناپا جاتا ہے۔ دیے ہوئے خطِ مستقیم پر ف کوئی سا نقطہ ہے جس کے قطبی محدد ر اور طہ ہیں۔ شکل ع۱۴۔



شکل ع۱۴

مبداء سے خط پر عمود و ع گرایا جاتا ہے، و ع = ع اور زاویہ لا و ع = عہ

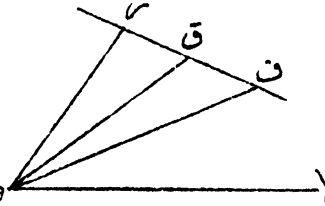
ع و ف = (طہ - عہ) اور

و ف جم ع و ف = و ع

پس مطلوبہ مساوات = ر جم (طہ - عہ) = ع

خطِ مستقیم کی مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں لا کے عوض ر جم طہ اور ما کے عوض ر جب طہ لکھنے سے بھی مصرحۂ بالا مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

(۳) دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی قطبی مساوات۔



شکل ۱۵

فرض کرو ف، ق دیے ہوئے دو نقطے ہیں جن کے محدد بالترتیب ر$_1$، طہ$_1$ اور ر$_2$، طہ$_2$ ہیں۔ اگر س خطِ مستقیم پر کوئی سا دوسرا نقطہ ہے جس کے محددّ ر، طہ ہیں تو

چونکہ △ف و ق + △ق و س − △ف و س = ۰

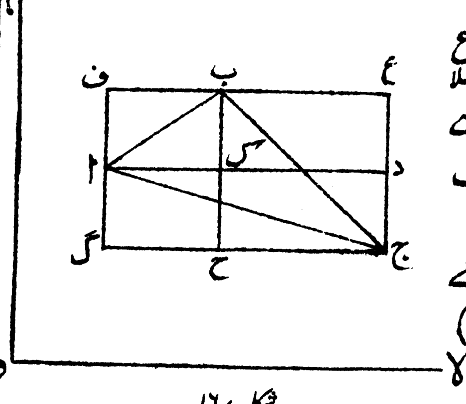
لہٰذا ر$_1$ ر$_2$ جیب (طہ$_2$ − طہ$_1$) + ر$_2$ ر جیب (طہ − طہ$_2$) − ر ر$_1$ جیب (طہ − طہ$_1$) = ۰

پس مطلوبہ مساوات = ر$_1$ ر$_2$ جیب (طہ$_2$ − طہ$_1$) + ر$_2$ ر جیب (طہ − طہ$_2$) + ر ر$_1$ جیب (طہ$_1$ − طہ) = ۰

(مش) ذیل میں چند اہم مثالیں حل کرکے بتائی جاتی ہیں :—

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں پر بطور وتروں کے متوازی الاضلاع کھینچے جاتے ہیں جن کے ضلعے محور لا و ما کے متوازی ہیں۔ بتاؤ کہ ان متوازی الاضلاعوں کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملینگے۔

مثلث ا ب ج کے زاویئی نقطوں کے محددوں کو علی الترتیب (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$) اور (لا$_3$، ما$_3$) مانو۔



شکل ۱۶

شکل ۱۶ میں یہ متوازی الاضلاع بتائے گئے ہیں۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ وتر ف ک، ع ح اور د گ ایک نقطہ پر ملینگے۔

چونکہ ف اور گ کے محدد (لا$_1$، ما$_2$) اور (لا$_2$، ما$_1$) ہیں۔

پس ف گ کی مساوات $\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{لا}_2-\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}-\text{ما}_2}{\text{ما}_1-\text{ما}_2}$ ہے۔

یعنے لا(ما$_1$ − ما$_2$) + ما(لا$_1$ − لا$_2$) + لا$_2$ ما$_2$ − لا$_1$ ما$_1$ = ۰ ہے

اسی طرح و تر ع ح کی مساوات

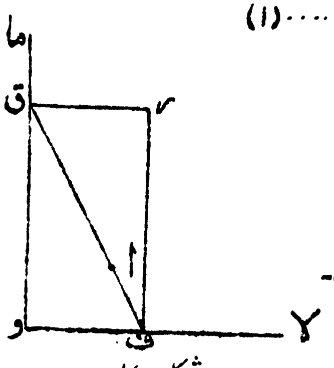
لا(ما$_2$ − ما$_3$) + ما(لا$_2$ − لا$_3$) + لا$_3$ ما$_3$ − لا$_2$ ما$_2$ = ۰ ہے

اور و تر د گ کی مساوات لا(ما$_3$ − ما$_1$) + ما(لا$_3$ − لا$_1$) + لا$_1$ ما$_1$ − لا$_3$ ما$_3$ = ۰ ہے

ان تینوں مساواتوں کا حاصل جمع متماثلاً صفر ہے لہذا یہ تینوں خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۲) ایک ثابت نقطہ ا میں سے کوئی سا خطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے جو محور لا و ما کو علی الترتیب خطوط ف اور ق میں قطع کرتا ہے اور متوازی الاضلاع و ف ر ق مکمل کر دیا جاتا ہے۔ ر کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ا کے محدد ک اور گ ہیں۔ خط ف ق کی کسی ایک وضع میں اگر مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہ}} = 1$ ....(۱)



شکل ۱۷

مانی جائے تو نقطہ ر کے محدد عہ اور بہ ہونگے۔

لیکن چونکہ خط ف ق نقطہ ک، گ میں سے گزرتا ہے مساوات (۱) میں بجائے لا و ما ہم علی الترتیب ک و گ لکھ سکتے ہیں۔

پس $\frac{\text{ک}}{\text{عہ}} + \frac{\text{گ}}{\text{بہ}} = 1$ ...... (۲)

اس لیے نقطہ ر کے محدد عہ اور بہ ہر صورت میں مساوات (۲) کی تصدیق کرینگے۔ ان کو اگر ہم لا و ما سے تعبیر کریں تو ر کے طریق کی مساوات $\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{گ}}{\text{ما}} = 1$ ہوگی۔

(۳) ایک مثلث ا ب ج کے زاویئی نقطوں کے محدد علی الترتیب (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$)، (لا$_3$، ما$_3$) ہیں۔ اس کے اندرونی اور جانبی دائروں کے

مرکز معلوم کرو۔

خط ب ج کی مساوات ما (لا۲ − لا۳) − لا (ما۲ − ما۳) + ما۲ لا۳ − لا۲ ما۳ = ۰ .... (۱) ہے

خط ج ا کی مساوات ما (لا۳ − لا۱) − لا (ما۳ − ما۱) + ما۳ لا۱ − لا۳ ما۱ = ۰ ..... (۲)

اور ا ب کی مساوات ما (لا۱ − لا۲) − لا (ما۱ − ما۲) + ما۱ لا۲ − لا۱ ما۲ = ۰ .... (۳)

ان خطوط پر اندرونی اور جانبی دائروں میں سے کسی بھی دائرے کے مرکز سے گرائے ہوئے عمود مقداراً مساوی ہیں پس ازروئے (ل) ان چار دائروں کے مرکزوں کے محدد مندرجۂ ذیل رابطوں کے لا اور ما ہیں

$$\pm\frac{\text{ما (لا۲ − لا۳) − لا (ما۲ − ما۳) + ما۲ لا۳ − لا۲ ما۳}}{\sqrt{\text{(لا۲ − لا۳)}^2 + \text{(ما۲ − ما۳)}^2}}$$

$$=\pm\frac{\text{ما (لا۳ − لا۱) − لا (ما۳ − ما۱) + ما۳ لا۱ − لا۳ ما۱}}{\sqrt{\text{(لا۳ − لا۱)}^2 + \text{(ما۳ − ما۱)}^2}}$$

$$=\pm\frac{\text{ما (لا۱ − لا۲) − لا (ما۱ − ما۲) + ما۱ لا۲ − لا۱ ما۲}}{\sqrt{\text{(لا۱ − لا۲)}^2 + \text{(ما۱ − ما۲)}^2}} \qquad (۴)$$

اگر مثلث کے زاویئی نقطوں ا، ب، ج کے محددوں کو علی الترتیب مساوات (۱)، (۲) اور (۳) میں تعویض کریں تو ان سب کے سیدھے جانب کے جملے ایک ہی ہونگے۔ پس مثلث کے زاویئی نقطے یا تو سب کے سب خطوط (۱)، (۲)، (۳) کے مثبت جانب ہونگے یا سب کے سب ان کے منفی جانب۔ اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر جو عمود ڈالے جاتے ہیں سب کے سب اسی سمت میں کھینچے جاتے ہیں جس سمت میں مثلث کے زاویئی نقطوں کے عمود۔ پس اندرونی دائرہ کے لیے روابط (۴) میں مثبت منفی کا جہاں اشتباہ بتایا گیا ہے

وہ سب مثبت ہونگے۔

جانبی تین دائروں کے لیے یہ علامتیں علی الترتیب − + + ، + − + اور + + − ہونگی۔

روابط (۴) کی کسروں کے نسب نماؤں پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ وہ مثلث ا ب ج کے ضلعے ا ب ج ہیں۔

اگر (لا، ما) اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد ہیں {یعنے روابط (۴) کی مثبتہ علامتوں میں سے صرف مثبت علامتیں لی جائیں} تو تینوں شمار کنندوں کا حاصل جمع = ۲△ اور تینوں نسب نماؤں کا حاصل جمع = ا + ب + ج کیونکہ اس حاصل جمع میں لا اور ما کے سر دونوں صفر ہیں۔ پس نسبتوں کے خواص کی رُو سے دی ہوئی

تینوں کسروں میں سے ہر ایک کسر = ۲△ / (ا+ب+ج)

اب شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو سلسلہ وار لا۱، لا۲ اور لا۳ سے ضرب دو اور جمع کرو۔

تب ہر ایک کسر = ۲△ لا / (ا لا۱ + ب لا۲ + ج لا۳)

پس ۲△ / (ا+ب+ج) = ۲△ لا / (ا لا۱ + ب لا۲ + ج لا۳)

لہذا لا (ا+ب+ج) = ا لا۱ + ب لا۲ + ج لا۳

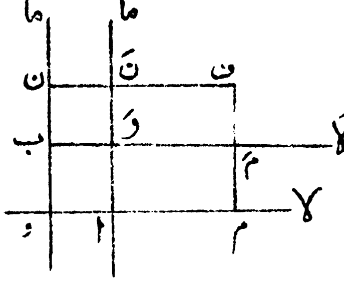
اس طرح ما (ا+ب+ج) = ا ما۱ + ب ما۲ + ج ما۳

ان دو مساواتوں سے مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد، اس کے زاویئی نقطوں کے محددوں اور اس کے ضلعوں کے طولوں کی رقموں میں حاصل ہوتے ہیں۔

[واضح ہو کہ اوپر کی تین مثالوں کا حل نہ صرف علی القوائم محوروں کے لیے صحیح ہے بلکہ مائل محوروں کے لیے بھی۔]

(ت) محددوں کا استحالہ۔

جب محوروں کا انتخاب اختیاری ہوتا ہے تو ایسے محور منتخب ہو سکتے ہیں جن سے کسی مسئلہ کے حل کرنے میں بہت زیادہ سہولت حاصل ہو۔ کسی صورت میں بھی محوروں کی تبدیلی ایک خاص اہمیت رکھتی ہے۔ ہم اب بتائینگے کہ اگر کسی منحنی کی مساوات محوروں کے ایک نظام کے لحاظ سے دی گئی ہو تو ان کے کسی دوسرے نظام کے لحاظ سے اس مساوات کی کیا صورت ہوگی۔



شکل ۱۸

(۱) محددوں کے مبداء کی تبدیلی، محوروں کی سمتوں کی تبدیلی بغیر

فرض کرو کہ ابتدائی محور و لا اور و ما تھے اور جدید محور وَ لاَ اور وَ مَا ہیں۔ دیکھو شکل ۱۸۔ نئے مبداء کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالہ سے ھ اور ک ہیں۔ ف دیے ہوئے منحنی کا ایک نقطہ ہے۔ چونکہ و ف اور وَ ف کے ظل محور و لا پر مساوی ہیں، لہذا لا = لاَ + ھ

اسی طرح ما = مَا + ک

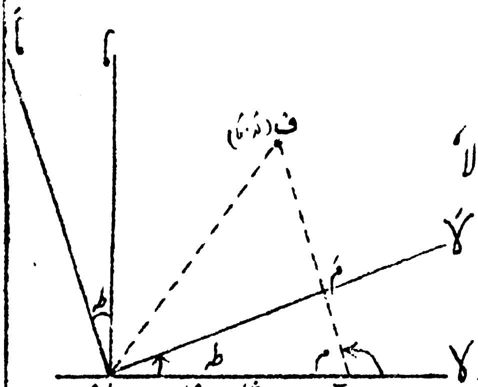
نئے محددوں کی رقموں میں منحنی کی مساوات حاصل کرنے کے لیے دی ہوئی مساوات میں ابتدائی محددوں کے عوض ان کی مندرجہ بالا قیمتیں درج کردی جائیں۔

(۲) مبداء کی تبدیلی بغیر محوروں کا گھماؤ زاویہ طہ میں۔

بہ لحاظ قدیم محور و لا، و ما۔

نقطہ ف کے محدد لا اور ما ہیں اور بلحاظ جدید محور (یعنے و لاَ، و مَا) لاُ اور ماُ دیکھو شکل ۱۹۔

وف خط کھینچو اور ف م محور و لا پر عمود گراؤ۔



شکل ۱۹

محور لا پر و ف کا ظل =

و مَ کا ظل + مَ ف کا ظل

محور لا پر و ف کا ظل = لا'

و مَ کا ظل = لاَ جم طه

اور مَ ف کا ظل =

ماَ جم ($\frac{\pi}{2}$ + طه) = - ماَ جب طه

پس لا = لاَ جم طه - ماَ جب طه

اسی طرح چونکہ و ف کا ظل محور ما پر = و مَ کا ظل + مَ ف کا ظل

لہذا ما = لاَ جم ($\frac{\pi}{2}$ - طه) + ماَ جم طه = لاَ جب طه + ماَ جم طه

دی ہوئی مساوات میں لا اور ما کی یہ جدید قیمتیں درج کرنے سے منحنی کی مساوات نئے محوروں کے حوالہ سے حاصل ہو جاتی ہے۔

مثالیں

(۱) مثلث کے ہندسی مرکز (یعنے اس کے وسطانیوں کے نقطۂ تقاطع) کے محدد دریافت کرو۔

(۲) وہ خط مستقیم جو نقطوں (۵، ۰)، (۰، -۲) میں سے گزرتا ہے نقطوں (۱۵، ۴) اور (-۵، -۴) میں سے بھی گزرتا ہے۔

(۳) مساوات ۵ لا + ۱۲ ما - ۲۶ = ۰ کو لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ کی صورت میں تبدیل کرکے ثابت کرو کہ ع کی قیمت ۲ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ خط ما - لا + ۲ = ۰ نقطوں (۳، -۱) اور (۸، ۹) کو ملانے والے خط کو ۲ : ۳ کی نسبت میں قطع کرتا ہے۔

(۵) دو خطوط مستقیم نقطہ (۴، -۳) میں سے گزرتے ہیں اور محوروں کو

اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان کے مقطوعے مقدار میں مساوی ہیں۔ بتاؤ کہ ان کی مساواتیں لا + ما - ۱ = ۰ اور لا - ما - ۷ = ۰ ہیں۔

(۶) ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں لا - ۷ ما + ۲۵ = ۰، ۵لا + ۳ما + ۱۱ = ۰ اور ۳لا - ۲ما - ۱ = ۰ ہیں ثابت کرو کہ مبدا مثلث کے اندر واقع ہے اور اس کے راسوں کے محدد علی الترتیب (-۱، -۲)، (۳، ۴) اور (-۴، ۳) ہیں۔

(۷) ا ب ج ایک مثلث ہے جس کے زاویئی نقطوں کے محدد علی الترتیب (۱، ۲)، (۲۵، ۸) اور (۹، ۲۱) ہیں۔ بتاؤ کہ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد ۵ر۱۱ اور ۱۱ ہیں۔

(۸) تین خطوط کی مساواتیں ما = م$_1$ لا + ج$_1$، ما = م$_2$ لا + ج$_2$ اور ما = م$_3$ لا + ج$_3$ ہیں۔ ان سے جو مثلث تیار ہوتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۹) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے جو عمود دیئے ہوئے دو خطوطِ مستقیم پر گرائے جاتے ہیں ان کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے بتاؤ کہ نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کسی بھی مثلث کے ضلعوں کے عمودی منصف ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۱) ثابت کرو کہ مثلث کے راسوں سے ان کے متقابل کے ضلعوں پر جو عمود گرائے جاتے ہیں وہ سب ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۲) وہ تمام خطوط جن کے لیے $\frac{1}{ا} + \frac{1}{ب}$ = مستقل، سب کے سب ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ اس نقطہ کے محدد معلوم کرو۔ ا اور ب باہمدیگر علی القوائم محوروں کے مقطوعے ہیں۔

[اس مثال سے پتلے عدسہ کے ماسکی طول کی پیمائش کا اچھا طریقہ ہاتھ آتا ہے اس کی توضیح کرو۔]

(۱۳) چھٹے سوال کی عمومی صورت کو پیش نظر رکھ کر لیجئے خط کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ اور نقطوں کے محددوں کو (لا$_1$، ما$_1$) اور (لا$_2$، ما$_2$) مان کر

ثابت کرو کہ کوئی سا خطِ مستقیم کسی مثلث کے ضلعوں ف$_2$ ف$_3$، ف$_3$ ف$_1$ اور ف$_1$ ف$_2$ کو نقطوں ل، م اور ن پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ

$$\frac{\text{ف}_1\,\text{ل}}{\text{ل}\,\text{ف}_2} \times \frac{\text{ف}_2\,\text{م}}{\text{م}\,\text{ف}_3} \times \frac{\text{ف}_3\,\text{ن}}{\text{ن}\,\text{ف}_1} = -1$$

(۱۴) ثابت کرو کہ مساوات لا^2 + لا ما − ۶ ما^2 + ۷ لا + ۳۱ ما − ۱۸ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جن کا درمیانی زاویہ ۴۵° ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر لہ = ۲ تو مساوات ۱۲ لا^2 − ۱۰ لا ما + ۲ ما^2 + ۱۱ لا − ۵ ما + لہ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اور ان کا درمیانی زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{7}$ ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات ب لا^2 − ۲ھ لا ما + ا ما^2 = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو علی الترتیب خطوط ا لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے علی القوائم ہیں۔

(۱۷) اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ا کو قطب اور اب کو حوالہ کا خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور اس کے دو وتروں کی قطبی مساواتیں دریافت کرو۔

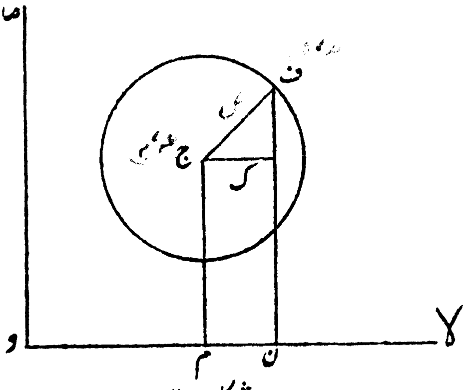
(۱۸) ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم ا لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ اور ل لا + م ما + ن = ۰ سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ = $\frac{\text{ن}^2\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{اب}}}{\text{ا م}^2 - 2\text{ھ ل م} + \text{ب ل}^2}$

ساتواں باب

دائرہ کی مساواتیں

۵۸ (ا)۔ دائرہ کی مساوات علی القوائم محوروں کے حوالہ سے

فرض کرو شکل عنہ۲۰ میں دائرہ کا مرکز ج ہے اور ف اس کے محیط پر کوئی سا نقطہ ہے۔ ج کے محدد عہ اور بہ مانو اور ف کے محدّد لا اور ما۔ دائرہ کا نصف قطر ص فرض کرو۔ ج م، ف ن محور وما کے متوازی کھینچو اور ج ک محور ولا کے متوازی۔ تب



شکل عنہ۲۰

ج ک^2 + ک ف^2 = ج ف^2 لیکن ج ک = لا ـ عہ اور ک ف = ما ـ بہ

∴ (لا ـ عہ)^2 + (ما ـ بہ)^2 = ص^2 . . . . (۱)

یہ دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر محدّدوں کا مبداء خود مرکز دائرہ مانا جائے تو عہ اور بہ دونوں صفر ہونگے اور مساوات حسب ذیل ہوگی:۔

$لا^2 + ما^2 = ص^2$ .... (۲)

مساوات (۱) کو پھیلانے سے $لا^2 + ما^2 - ۲عہ لا - ۲بہ ما + عہ^2 + بہ^2 - ص^2 = ۰$ ہو جاتی ہے۔ اور یہ $لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰$ ...... (۳) کی ہم شکل ہے جس میں گ، ف اور ج مستقل ہیں۔

پس مساوات (۳) دائرہ کی عام مساوات مانی جاتی ہے۔ اس لیے کہ وہ بہ صورت

$(لا+گ)^2 + (ما+ف)^2 = گ^2 + ف^2 - ج$ لکھی جا سکتی ہے اور اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ مساوات (۳) کے طریق پر اگر کوئی سا نقطہ لیا جائے تو نقطہ (-گ، -ف) سے اس کا فاصلہ مستقل اور $\sqrt{گ^2 + ف^2 - ج}$ کے مساوی ہوتا ہے۔ پس مساوات مذکور ایسے دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا مرکز نقطہ (-گ، -ف) ہے اور نصف قطر $\sqrt{گ^2 + ف^2 - ج}$ ہے۔

اگر $گ^2 + ف^2 - ج = ۰$ تو نصف قطر صفر ہے اور دائرہ ایک نقطئی دائرہ کہلاتا ہے۔

اگر $گ^2 + ف^2 - ج$ منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں اس دائرہ کے لیے صادق نہ آئینگی اس لیے وہ دائرہ خیالی کہلائیگا۔

امور مندرجہ بالا سے واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی سی مساوات دائرہ کو تعبیر کریگی بشرطیکہ

(۱) $لا^2$ اور $ما^2$ کے سر مساوی ہوں اور (۲) اس مساوات میں حاصل ضرب لا ما رکھنے والی کوئی رقم شامل نہیں ہے۔

چونکہ دائرہ کی عام مساوات میں تین مستقل ہیں اس لیے اگر تین دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والی یا کوئی دوسرے شرائط کو پورا کرنے والی دائرہ کی مساوات معلوم کرنا ہو تو مصرحۂ بالا مساوات کو فرض کر کے دیے ہوئے شرائط کے لحاظ سے گ، ف، ج مستقلوں کی قیمتیں دریافت کر لی جاتی ہیں۔

(ب) منحنی کے مماس اور عماد ۔ فرض کرو کہ کسی منحنی پر کبھی دو نقطے ف، ق، لیے جاتے ہیں اور ق منحنی پر حرکت کر کے ف کے قریب تر ہوتا جاتا ہے اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے۔ تب خطّ ف ق اس انتہائی وضع میں منحنی کا نقطہ ف پر کا مماس کہلاتا ہے۔

اور ف پر جو خط اس مماس کے علی القوائم کھینچا جاتا ہے منحنی کا اس نقطہ پر کا عماد کہلاتا ہے۔

(۱) دائرہ لا² + ما² = ص² کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ اس پر کے دو نقطوں کے محدد لا₁، ما₁ اور لا₂، ما₂ ہیں۔ ان میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

(لا − لا₁) / (لا₁ − لا₂) = (ما − ما₁) / (ما₁ − ما₂) . . . . (۱) ہے۔

چونکہ یہ دونوں نقطے دائرہ پر واقع ہیں لہذا لا₁² + ما₁² = ص²

اور لا₂² + ما₂² = ص²

پس لا₁² − لا₂² = − (ما₁² − ما₂²) . . . . (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے حصوں کو آپس میں ضرب دو تو

(لا − لا₁) (لا₁ + لا₂) = − (ما − ما₁) (ما₁ + ما₂) . . . . (۳)

اب لا₂، ما₂ کو دائرہ پر لا₁، ما₁ کے قریب تر ہٹاتے جاؤ یہاں تک کہ وہ بالآخر لا₁، ما₁ سے منطبق ہو جائے۔

تب اس انتہائی وضع میں وتر نقطہ لا₁، ما₁ پر کا خطِ مماس بن جاتا ہے

پس مساوات (۳) میں لا₂ = لا₁ اور ما₂ = ما₁ لکھنے سے نقطہ لا₁، ما₁ پر کے مماس کی مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ یعنے

(لا − لا₁) لا₁ + (ما − ما₁) ما₁ = ۰

یا لا لا₁ + ما ما₁ = لا₁² + ما₁² = ص² ∴ لا لا₁ + ما ما₁ = ص²

اگر دائرہ کی مساوات لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ مانی جائے تو پہلے کی طرح لا۱، ما۱ اور لا۲، ما۲ نقطوں میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

(لا − لا۱)/(لا۱ − لا۲) = (ما − ما۱)/(ما۱ − ما۲) . . . . (۱) ہوگی

اور چونکہ یہ نقطے دائرہ پر ہیں لہذا لا۱^۲ + ما۱^۲ + ۲گ لا۱ + ۲ف ما۱ + ج = ۰
اور لا۲^۲ + ما۲^۲ + ۲گ لا۲ + ۲ف ما۲ + ج = ۰

∴ (لا۱ − لا۲) (لا۱ + لا۲ + ۲گ) = −(ما۱ − ما۲) (ما۱ + ما۲ + ۲ف) . . . . . (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے جملوں کو باہمدیگر ضرب دینے سے قاطع کی مساوات
(لا − لا۱) (لا۱ + لا۲ + ۲گ) = − (ما − ما۱) (ما۱ + ما۲ + ۲ف)
برآمد ہوتی ہے۔

پس نقطہ لا۱، ما۱ پر کے خط مماس کی مساوات (لا − لا۱) (لا۱ + گ) + (ما − ما۱) (ما۱ + ف) = ۰ ہے

یعنے لا لا۱ + ما ما۱ + گ لا + ف ما = لا۱^۲ + ما۱^۲ + گ لا۱ + ف ما۱

اب مساوات کے دونوں جانب گ لا۱ + ف ما۱ + ج اضافہ کرو۔
چونکہ لا۱، ما۱ دائرہ پر واقع ہے لہذا مماس کی مساوات
لا لا۱ + ما ما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج = ۰ ہو جاتی ہے جس سے واضح ہے کہ دائرہ کے کسی نقطہ لا۱، ما۱ پر کے خط مماس کی مساوات، دائرہ کی مساوات میں لا^۲ کے عوض لا لا۱، ما^۲ کے عوض ما ما۱، ۲ لا کے عوض (لا + لا۱) اور ۲ ما کے عوض (ما + ما۱) لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲) دائرہ کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات۔

فرض کرو دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ص^۲ پر نقطہ لا۱، ما۱ واقع ہے۔ اس نقطہ پر کے خط مماس کی مساوات لا لا۱ + ما ما۱ = ص^۲ ہے اور جو کوئی خط اس مماس کے علی القوائم ہوگا اس کی مساوات = ما۱ لا − لا۱ ما + م = ۰ جس میں م مستقل ہے۔

جب نقطہ لا$_1$، ما$_1$ اس خط پر واقع ہوتا ہے تو

ما$_1$ لا$_1$ - لا$_1$ ما$_1$ + مر = ۰ یعنے مر = ۰

پس دائرہ کے نقطہ لا$_1$، ما$_1$ پر کے عمود کی مساوات ما$_1$ لا - لا$_1$ ما = ۰ ہے
اس مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرہ کا عمود مبداء میں سے گزرتا ہے یعنے مرکز میں سے۔

(ج) ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم اور دائرہ کے تقاطع کے نقطوں کی تعیین۔

دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ص^2 مانو اور خطِ مستقیم کی مساوات ما = مر لا + ج جو نقطے خطِ مستقیم اور دائرہ کے مشترک ہونگے ان کے لیے یہ دونوں مساواتیں صادق آئینگی۔ پس چونکہ خطِ مستقیم کی مساوات ما^2 = (مر لا + ج)^2 لکھی جا سکتی ہے لہذا ان مشترک نقطوں کے لیے

ما^2 = (مر لا + ج)^2 = ص^2 - لا^2

یعنے لا^2 (۱ + مر^2) + ۲ مر ج لا + ج^2 - ص^2 = ۰ ...... (۱)

یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو اصلیں، حقیقی اور مختلف، حقیقی اور مساوی یا خیالی ہونگی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہونگی اور ان کو مساوات ما = مر لا + ج میں یہ قیمتیں درج کرنے سے ما کی بھی دو قیمتیں برآمد ہونگی۔ اس لیے ہر خطِ مستقیم دائرہ سے دو حقیقی اور امتیاز پذیر نقطوں میں یا دو منطبق نقطوں میں یا دو خیالی نقطوں میں ملتا ہے۔ خیالی نقطوں سے مراد وہ نقطے ہیں جن کے محدد خیالی ہیں۔

مساوات (۱) کی اصلیں باہمدیگر مساوی ہونگی اگر

~~۴~~ (۱ + مر^2) (ج^2 - ص^2) = ~~۴~~ مر^2 ج^2

یعنے اگر ج^2 = ص^2 (۱ + مر^2) (۲)

جب لا کی دونوں قیمتیں مساوی ہونگی تو ما کی دونوں قیمتیں بھی باہمدیگر

مساوی ہونگی۔

اس لیے خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ اور دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ کے تقاطع کے نقطے منطبق ہونگے اگر $\text{ج} = \text{ص}\sqrt{1 + \text{م}^2}$۔ پس خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ص}\sqrt{1 + \text{م}^2}$ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ کو م کی جملہ قیمتوں کے لیے مس کریگا۔

چونکہ $\sqrt{1 + \text{م}^2}$ کی علامت مثبت یا منفی مانی جاسکتی ہے اس لیے م کی ہر قیمت کے لیے دائرہ کے دو خطوط مماس ہونگے یعنے کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی دائرہ کے دو مماسی خط ہوتے ہیں۔

(د) دائرہ کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کے طریق کی تعیین۔

مرکزِ دائرہ کو مبداء اور محور و لا کو وتروں کا متوازی مانو۔ تب دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ ہوگی اور وتروں کے نظام میں سے کسی ایک وتر کی مساوات $\text{ما} = \text{ج}$۔ لی جاسکتی ہے جہاں یہ دونوں ملینگے وہاں

$$\text{لا}^2 + \text{ج}^2 = \text{ص}^2 \quad \therefore \text{لا} = \pm\sqrt{\text{ص}^2 - \text{ج}^2}$$

چونکہ لا کی یہ دونوں قیمتیں مساوی اور مخالف ہیں اس لیے یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ وتر کے وسطی نقطہ کا فصلہ یا مقطوعہ صفر ہوتا ہے یعنے یہ وسطی نقطہ ہمیشہ محور و ما پر واقع ہوتا ہے۔ ج کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر $\text{ج} > \text{ص}$ تو لا کی دونوں قیمتیں خیالی ہوتی ہیں لیکن بہرہم ان کا حاصل جمع صفر ہی ہوتا ہے۔ اور اس لیے وتر کا وسطی نقطہ اس صورت میں بھی ما کے محور پر واقع ہوتا ہے۔

پس دائرہ کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مرکز سے ان پر علی القوائم کھینچا جاتا ہے۔ یہ ضروری نہیں کہ اس طریق کو صرف اس کے اس جزو تک محدود سمجھیں جو دائرہ کے اندر واقع ہے۔

(ہ) اب تک صرف دائرہ کی عام تعریف کو (یعنے یہ کہ اس کے مرکز سے اس کے محیط کے کسی بھی نقطہ کا فاصلہ مستقل ہے) مان کر نتائج حاصل

کیے گئے۔ اس کی کسی ہندسی خاصیت سے مدد نہیں لی گئی۔ اگر ان سے استفادہ کیا جائے تو بعض نتائج زیادہ آسانی کے ساتھ برآمد ہو سکتے ہیں۔ مثلاً دائرہ پر کسی نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات کے لیے دائرہ کی اس خاصیت سے مدد لی جا سکتی ہے کہ وہ اس نقطہ کو مرکز سے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔ چنانچہ آخر الذکر خط کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} - \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = 0$ ہے جس میں لا_1، ما_1 دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد ہیں۔ اور اس کے علی القوائم خط کی مساوات جو لا_1، ما_1 میں سے گزرتا ہے $\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 - \text{ص}^2 = 0$ ہے۔

ایک دوسری مثال کے طور پر یہ معلوم کرنے کے لئے کہ خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ کو کسی شرط کے تحت مس کریگا۔ ہم دائرہ کی اس ہندسی خاصیت کو کام میں لا سکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دیے ہوئے خط کا فاصلہ مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔

پس شرط یہ ہے کہ $\pm \frac{\text{ج}}{\sqrt{1 + \text{م}^2}}$ فاصلہ ص کے مساوی ہو یعنی

$$\text{ج} = \pm\, \text{ص} \sqrt{1 + \text{م}^2}$$

(۵) کسی بھی نقطہ سے دائرہ کے دو خطِ مماس کھینچے جا سکتے ہیں جو حقیقی ہونگے اگر نقطہ دائرہ کے باہر ہوگا، منطبق اگر نقطہ دائرہ پر ہوگا اور خیالی اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہوگا۔

دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ مانو اور کسی بھی نقطہ کے محدد عہ اور بہ فرض کرو۔ اگر لا_1، ما_1 دائرہ پر کے کسی بھی نقطہ کے محدد مانے جائیں تو اس نقطہ پر کے مماس کی مساوات

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$$ ہے

یہ خطِ مماس نقطہ (عہ، بہ) میں سے گزریگا اگر $\text{عہ}\,\text{لا}_1 + \text{بہ}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$ .... (۱)

چونکہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ دائرہ پر واقع ہے اس لیے $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ص}^2$ .... (۲)

پس ان دو مساواتوں سے دائرہ کے ان نقطوں کے لیے $لا_۱$ اور $ما_۱$ کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں جن پر کے مماس دیے ہوئے نقطہ (عہ، بہ) میں سے گزرتے ہیں۔ مساوات (۲) میں $ما_۱$ کے عوض $\frac{ص^۲ - عہ\,لا_۱}{بہ}$ لکھو تو

$$لا_۱^۲ \,(عہ^۲ + بہ^۲) - ۲ص^۲\, عہ\, لا_۱ + ص^۲\, (ص^۲ - بہ^۲) = ۰ \quad \ldots (۳)$$

اس سے ان نقطوں کے فصلے معلوم ہو جاتے ہیں۔ چونکہ مساوات (۳) دو درجی ہے اس لیے دائرہ کے دو مماس نقطہ (عہ، بہ) میں سے گزرینگے۔

مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگی بہ لحاظ اس کے کہ $ص^۴\, عہ^۲ - ص^۲\, (ص^۲ - بہ^۲)\, (عہ^۲ + بہ^۲)$ صفر سے زاید، اس کے مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ یعنے بہ لحاظ اس کے کہ $عہ^۲ + بہ^۲ - ص^۲$ صفر سے زاید، اس کے مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ جس کے معنے یہ ہوئے کہ نقطہ (عہ، بہ) دائرہ کے باہر ہے، اس پر ہے یا اس کے اندر ہے۔

(و) کسی نقطہ سے دائرہ پر خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں، ان کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات۔

جس نقطہ سے خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں اس کے محدد $لا_۱$، $ما_۱$ فرض کرو۔ تماس کے نقطوں کے محددوں کو $عہ_۱$، $بہ_۱$ اور $عہ_۲$، $بہ_۲$ مانو اور دائرہ کی مساوات $لا^۲ + ما^۲ = ص^۲$ فرض کرو۔

خطوطِ مماس کی مساواتیں $لا\,عہ_۱ + ما\,بہ_۱ = ص^۲$ اور $لا\,عہ_۲ + ما\,بہ_۲ = ص^۲$ ہونگی۔

چونکہ یہ دونوں خطوط مماس نقطہ $لا_۱$، $ما_۱$ میں سے گزرتے ہیں اس لیے ان کی مساواتیں ان محددوں کے لیے بھی صحیح ہونگی۔

$\therefore\; لا_۱ عہ_۱ + ما_۱ بہ_۱ = ص^۲ \;\ldots\ldots (۱)$ اور $لا_۱ عہ_۲ + ما_۱ بہ_۲ = ص^۲ \;\ldots\ldots (۲)$

لیکن (۱) اور (۲) مساواتیں اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں

(عہ$_1$، بہ$_1$) اور (عہ$_2$، بہ$_2$) محددوں والے نقطے ایسے خطِ مستقیم پر واقع ہوسکتے ہیں جس کی مساوات

لالا$_1$ + ماما$_1$ = ص^2 .... (۳) ہے

پس مساوات (۳) ایسے خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو نقطہ لا$_1$، ما$_1$ سے دائرہ پر کھنچے ہوئے خطوطِ مماس کے تماس کے دونوں نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

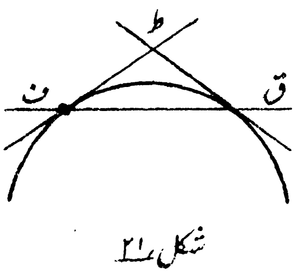
اگر دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ لی جائے تو مصرحۂ بالا طریقہ پر بتایا جاسکتا ہے کہ لا$_1$، ما$_1$ نقطہ سے کھنچے ہوئے خطوطِ مماس کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات

لالا$_1$ + ماما$_1$ + گ (لا + لا$_1$) + ف (ما + ما$_1$) + ج = ۰

جب نقطہ لا$_1$، ما$_1$ دائرہ کے باہر ہوتا ہے تو دونوں خطوط مماس حقیقی ہوتے ہیں اور محدد عہ$_1$، بہ$_1$ اور عہ$_2$، بہ$_2$ حقیقی۔ اور جب لا$_1$، ما$_1$ دائرہ کے اندر ہوتا ہے تو دونوں خطوطِ مماس خیالی ہوتے ہیں لیکن اس صورت میں بھی وہ خط جس کی تعبیر مساوات (۳) سے ہوتی ہے ایک حقیقی خط ہوتا ہے بشرطیکہ لا$_1$ اور ما$_1$ حقیقی ہوں۔ پس ایک حقیقی خط دائرہ کے اندر کے کسی نقطہ سے دائرہ پر کھنچے ہوئے خیالی خطوطِ مماس کے خیالی نقاطِ تماس کو ملاتا ہے۔

دائرہ کے لحاظ سے قطب اور قطبی کی تعریف

کسی نقطہ سے ایک دائرہ پر جو حقیقی یا خیالی خطوطِ مماس کھنچے جاسکتے ہیں ان کے تماس کے نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم اس نقطہ کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطبی کہلاتا ہے۔



شکل ۲۱

کسی خطِ مستقیم اور ایک دائرہ کے حقیقی یا خیالی نقاطِ تقاطع پر کے خطوطِ مماس کے تقاطع کا نقطہ اس خطِ مستقیم کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطب کہلاتا ہے۔

شکل ۲۱ میں نقطہ ط دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے خط ف ق

کا قطب ہے۔ اور خط ف ق دائرہ کے لحاظ سے نقطہ ط کا قطبی ہے۔
جب نقطہ ق دائرہ پر حرکت کرتا ہوا ف کی طرف کو جاتا اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے تو واضح ہے کہ خطوطِ مماس ط ف اور ط ق بھی بالآخر ایک دوسرے کے ساتھ اور وتر ف ق سے منطبق ہوجاتے ہیں۔ اس کے یہ معنیٰ ہوئے کہ جب نقطہ ط دائرہ پر واقع ہوتا ہے تو ط کا قطبی ط پر کے خطِ مماس کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔
قطبی کی مساوات چونکہ خطِ مماس کی مساوات کی ہمشکل ہے اس لیے تحلیلی نقطۂ نظر سے بھی یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ دائرہ پر کے نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا خطِ مماس ہے۔

(ز) اگر کسی نقطہ ف کا قطبی کسی دوسرے نقطہ ق میں سے گزرے تو ق کا قطبی ف میں سے گزریگا۔

فرض کرو ف کے محدد لا_1، ما_1 ہیں اور ق کے محدد لا_2، ما_2 اور دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ ہے تب ف اور ق کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب۔

$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 - \text{ص}^2 = 0$ .... (۱) اور $\text{لا}\,\text{لا}_2 + \text{ما}\,\text{ما}_2 - \text{ص}^2 = 0$ ...... (۲)

ہیں۔
اگر نقطہ ق نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہو تو مساوات (۱) محددوں لا_2، ما_2 کے ساتھ بھی درست ہوگی۔ یعنے

$$\text{لا}_2\,\text{لا}_1 + \text{ما}_2\,\text{ما}_1 - \text{ص}^2 = 0$$

نقطہ ف نقطہ ق کے قطبی پر واقع ہو تو اس صورت میں بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ف کا قطبی جب ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔

اگر ایک نقطہ ق کسی ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہے اور ف اس خط کا قطب ہے۔ تب ق کا قطبی ف میں سے گزرنا چاہیے اس لیے کہ مفروضہ میں مان لیا گیا ہے کہ ف کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے۔

اس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا جائے اور نقطہ ق اس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر واقع ہے ق ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہونا چاہیے جو ف کا قطبی ہے۔

اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ ر پر ملتے ہیں تو ر خطِ مستقیم ف ق کا قطب ہو گا۔

چونکہ ر نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہے اس لیے ر کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح ر کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے پس واضح ہے کہ اس کا قطبی خطِ مستقیم ف ق ہونا چاہیے۔

(ح) کسی دیے ہوئے نقطہ کے دائرہ کے لحاظ سے قطبی کا ہندسی عمل۔

دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ مانو اور فرض کرو کہ ف کوئی سا نقطہ ہے جس کے محدد لا_1، ما_1 ہیں۔ اس نقطہ کے قطبی بلحاظ دائرہ کی مساوات $\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 - \text{ص}^2 = 0$ ف کو مرکز دائرہ سے ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} - \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = 0$ ہے۔

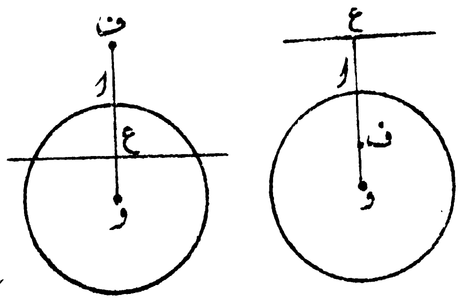
ان دونوں مساواتوں پر غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ یہ باہمدیگر علی القوائم خطوط کی مساواتیں ہیں۔ پس کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ دائرہ، اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔

شکل ۲۲ میں اگر و ع نقطہ و سے اس کے قطبی پر عمود ہے

$$\text{تو و ع} = \frac{\text{ص}^2}{\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}}$$

اور $\text{وف} = \sqrt{\text{مالا}^2 + \text{ما}^2}$

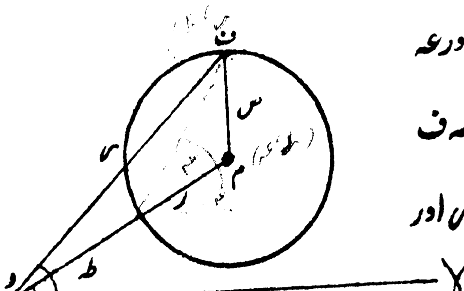
$\therefore \text{وع} \times \text{وف} = \text{ص}^2$



شکل ۲۲

پس ف کا قطبی بلحاظ دائرہ کھینچنے کے لیے وف کو ملاؤ اور اس کو دائرہ کو نقطہ ا پر قطع کرنے دو۔ پھر خط وف پر ایک ایسا نقطہ ع لو کہ وف : وا :: وا : وع (یعنے ف کا بلحاظ دائرہ معکوس نقطہ دریافت کرو)۔ ع میں سے وف کے علی القوائم خط مستقیم کھینچو۔ یہ خط نقطہ ف کا قطبی ہوگا۔

(ط) دائرہ کی قطبی مساوات۔ فرض کرو م دائرہ کا مرکز ہے۔ م کے قطبی محددوں کو ر اور عہ مالو۔ دائرہ پر کوئی سا نقطہ ف لے کر اس کے قطبی محددوں کو س اور طہ فرض کرو۔



شکل ۲۳

تب ازروئے ہندسہ

$\text{م ف}^2 = \text{وم}^2 + \text{وف}^2 - ۲\,\text{وم} \times \text{وف جم م وف}$

چونکہ م ف = ص، وم = ر، وف = س، زاویہ لا و م = عہ اور زاویہ لا و ف = طہ

لہذا $\text{ص}^2 = \text{ر}^2 + \text{س}^2 - ۲\,\text{ر س جم (طہ} - \text{عہ)}$ . . . . . (۱)

یہی دائرہ کی قطبی مساوات ہے۔

اگر مبداء دائرہ کے محیط پر ہو تو سر = ۲ص جم (طہ-عہ) ....(۲)

اگر علاوہ بریں حوالہ کا خطِ مستقیم و لا مرکز میں سے گزرتا ہے تو عہ = صفر اور دائرہ کی مساوات

سر = ۲ص جم طہ .... (۳)

مساوات (۱) کو بشکل سر² - ۲ ر سر جم طہ + ر² - ص² = ۰ ترتیب دو۔ یہ سر کی دو درجی مساوات ہے۔ اگر سر₁ سر₂ اس کی اصلیں قرار دی جائیں تو

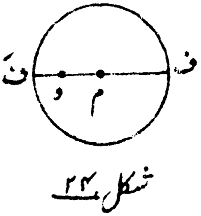
سر₁ سر₂ = ر² - ص² ..... (۴)

پس حاصل ضرب سر₁ سر₂ زاویہ طہ کے غیر تابع ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی ثابت نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچا جائے جو کسی دیے ہوئے دائرہ کو قطع کرتا ہے تو اس خط کے قطعات کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

اگر مبداء و دائرہ کے اندر واقع ہو تو ر نصف قطر ص سے چھوٹا ہوتا ہے۔ پس سر₁ سر₂ کی علامتیں مختلف ہونی چاہییں یعنے مبداء سے ایک دوسرے کے مخالف سمتوں میں کھینچی گئی ہونگی جیسا کہ شکل ۲۴ سے واضح ہے۔

و ف = ص + ر، و فَ = -(ص - ر)

∴ و ف × و فَ = - (ص² - ر²)



شکل ۲۴

(ی) قائم متقاطع دائرے۔

لا² + ما² + ۲گ₁ لا + ۲ف₁ ما + ج₁ = ۰

اور لا² + ما² + ۲گ₂ لا + ۲ف₂ ما + ج₂ = ۰

دو دائروں کے باہمدیگر علی القوائم متقاطع ہونیکی شرط کی تعین

ان دائروں کے مرکز علی الترتیب $(-گ_1، -ف_1)$ اور $(-گ_2، -ف_2)$ نقطے ہیں۔ اور ان کے نصف قطروں کے مربع $گ_1^2 + ف_1^2 - ج_1$ اور $گ_2^2 + ف_2^2 - ج_2$ ہیں۔

یہ ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرینگے اگر ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو گا۔

پس شرط مذکور یہ ہے کہ $(گ_1 - گ_2)^2 + (ف_1 - ف_2)^2 = گ_1^2 + ف_1^2 - ج_1 + گ_2^2 + ف_2^2 - ج_2$

یعنے $۲گ_1 گ_2 + ۲ف_1 ف_2 - ج_1 - ج_2 = ۰$

[طریق دیگر۔ چونکہ کسی مشترک نقطہ $(لا_1، ما_1)$ پر کے خطوط مماس حسب ذیل ہیں:-

$$لا\,لا_1 + ما\,ما_1 + گ_1(لا + لا_1) + ف_1(ما + ما_1) + ج_1 = ۰$$

$$لا\,لا_1 + ما\,ما_1 + گ_2(لا + لا_1) + ف_2(ما + ما_1) + ج_2 = ۰$$

یہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اگر $(لا_1 + گ_1)(لا_1 + گ_2) + (ما_1 + ف_1)(ما_1 + ف_2) = ۰$

یعنے $لا_1^2 + ما_1^2 + لا_1(گ_1 + گ_2) + ما_1(ف_1 + ف_2) + گ_1 گ_2 + ف_1 ف_2 = ۰$ .... (۱)

لیکن چونکہ $(لا_1، ما_1)$ دونوں دائروں پر ہے اس لیے

$لا_1^2 + ما_1^2 + ۲گ_1 لا_1 + ۲ف_1 ما_1 + ج_1 = ۰$ .... (۲)

اور $لا_1^2 + ما_1^2 + ۲گ_2 لا_1 + ۲ف_2 ما_1 + ج_2 = ۰$ .... (۳)

مساوات (۱) کو ۲ سے ضرب دے کر اس میں سے (۲) اور (۳) مساواتوں کے حاصل جمع کو خارج کرو، تب

$۲گ_1 گ_2 + ۲ف_1 ف_2 - ج_1 - ج_2 = ۰$]

(گ) کسی دیے ہوئے نقطہ سے ایک دائرہ پر کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کی تعیین۔

اگر دیا ہوا نقطہ ط ہے اور اس سے م مرکز والے دائرہ پر کھینچے ہوئے دو خطوطِ مماس میں سے ط ت ایک خطِ مماس ہے تو ہندسہ کی رُو سے ظاہر ہے کہ زاویۂ م ف ط ایک زاویۂ قائمہ ہے۔ پس

ط ف^2 = م ط^2 − م ف^2 . . . . (۱)

دائرہ کی مساوات فرض کرو (لا − عہ)^2 + (ما − بہ)^2 − ص^2 = ۰ . . . . (۲) ہے

اگر ط کے محدد لا$_1$، ما$_1$ ہیں تو م ط^2 = (لا$_1$ − عہ)^2 + (ما$_1$ − بہ)^2

پس مساوات (۱) سے ط ف^2 = (لا$_1$ − عہ)^2 + (ما$_1$ − بہ)^2 − ص^2 . . . (۳)

یعنی (لا$_1$، ما$_1$) سے کھینچے ہوئے مماس کا طول، مساوات (۲) میں لا، ما کے عوض لا$_1$، ما$_1$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

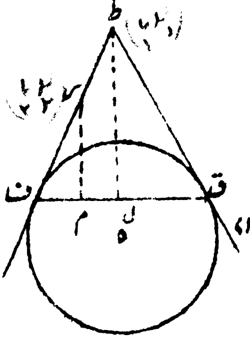
پس اگر دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ فرض کی جائے اور اس میں کسی دئے ہوئے نقطہ کے محدد درج کیے جائیں تو مساوات کی سیدھی طرف کا جملہ، اس نقطہ سے دائرہ پر کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کے مربع کے مساوی ہوگا۔ اور چونکہ یہ مربع اس نقطہ سے دائرہ کو قطع کرنے والے خطوط کے قطعات کے حاصل ضرب کے مساوی ہے اس لیے جملہ مذکور سے اس حاصل ضرب کی قیمت بھی معلوم ہو جائیگی۔ جب نقطہ دائرہ کے اندر ہوگا تو واضح ہے کہ یہ حاصل ضرب اور مماس کا طول خیالی ہونگے۔

اگر دائرہ کی مساوات ل لا^2 + ل ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ہو تو اس کو ل پر تقسیم کرکے اس میں دیے ہوئے نقطہ کے محدد درج کرنے سے اس نقطہ سے کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کا مربع حاصل ہوگا۔

مثال۔ دائرہ لا^2 + ما^2 = ص^2 پر کسی بھی نقطہ سے کھینچے ہوئے

مماسوں کے جفت کی مساوات۔

فرض کرو نقطہ لا، ما، سے دائرہ کے دو مماس ط ف اور ط ق کھینچے گئے ہیں۔ ان مماسوں میں سے کسی ایک مماس (بالفرض ط ف) پر س ایک نقطہ لو اور خط ف ق پر عمود ط ل اور عمود س م گراؤ۔



شکل ۲۵

متشابہ مثلثوں کی رُو سے

$\text{ط ف}^2 : \text{س ف}^2 = \text{ط ل}^2 : \text{س م}^2 \quad \ldots\ldots (1)$

ط کے قطبی ف ق کی مساوات

$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$ ہے۔

پس اگر س کے محدد لا_2، ما_2 مانے جائیں تو

$$\frac{\text{ط ل}^2}{\text{س م}^2} = \left\{ \frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}} \times \frac{\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}}{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2} \right\}^2$$

یعنے $$\frac{\text{ط ل}^2}{\text{س م}^2} = \left(\frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2} \right)^2$$

اور چونکہ ط ف اور س ف علی الترتیب نقطہ (لا_1، ما_1) اور نقطہ (لا_2، ما_2) سے دائرہ پر کھینچے ہوئے مماس ہیں اس لیے ان کے طول بالترتیب $\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}$ اور $\sqrt{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2}$ ہیں۔ پس

$$\frac{\text{ط ف}^2}{\text{س ف}^2} = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2}$$ لہذا مساوات (۱) کی رو سے

$$\left(\frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2} \right)^2 = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2}$$

یعنے $(\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2)(\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2) - (\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2)^2 = 0$

پس کوئی سا نقطہ جو دیے ہوئے یعنے (لا_1، ما_1) محدودں والے نقطہ سے

دائرہ پر کھینچے ہوئے دو مماسوں میں سے کسی ایک مماس پر واقع ہوگا اس کی مساوات (لا^2 + ما^2 − ص^2)(لا$_1^2$ + ما$_1^2$ − ص^2) − (لا لا$_1$ + ما ما$_1$ − ص^2)^2 = ۰ ہے
لہذا لا$_1$ ما$_1$ سے دائرہ پر کھینچے ہوئے دو مماسوں کی مساوات یہی ہے۔

(ل) دو دائروں کا بنیادی محور۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب لا^2 + ما^2 + ۲گ$_1$لا + ۲ف$_1$ما + ج$_1$ = ۰ . . . . (۱)

اور لا^2 + ما^2 + ۲گ$_2$ لا + ۲ف$_2$ ما + ج$_2$ = ۰ . . . . . . (۲) ہیں۔

تو واضح ہے کہ کسی ایسے نقطہ کے محدد جو مساوات (۱) اور نیز مساوات (۲) کے دائروں پر واقع ہو مساوات لا^2 + ما^2 + ۲گ$_1$لا + ۲ف$_1$ما + ج$_1$ = لا^2 + ما^2 + ۲گ$_2$ لا + ۲ف$_2$ما + ج$_2$ . . . . . (۳) کی تصدیق کرینگے۔

پس مساوات (۳) ایک ایسے طریق کو تعبیر کرتی ہے جو دیے ہوئے دو دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ یہ مساوات

۲(گ$_1$ − گ$_2$) لا + ۲ (ف$_1$ − ف$_2$) ما + ج$_1$ − ج$_2$ = ۰ . . . . (۴)

میں تحویل ہوتی ہے، جو پہلے درجہ کی ہونے کی وجہ سے ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ دو دائرے اگر حقیقی نقطوں میں ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو بھی مساوات مندرجۂ بالا سے جس خطِ مستقیم کی تعبیر ہوتی ہے وہ ہر صورت میں حقیقی ہے بشرطیکہ گ$_1$، ف$_1$، ج$_1$ اور گ$_2$، ف$_2$، ج$_2$ حقیقی ہوں۔

مساوات (۳) کی ایک اور بھی تعبیر ہو سکتی ہے۔

کسی دائرہ مساوات (۱) میں جس میں لا کا سر اکائی ہے اگر لا، ما کی جگہ کسی ایک نقطہ کے محدد درج کیے جائیں تو اس کی سیدھی جانب کا جملہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہے جو اس نقطہ سے دائرہ تک کھینچے جاتے ہیں۔ پس اگر لا، ما خط مساوات (۳) پر کے کسی بھی نقطہ کے محدد ہوں تو اس مساوات کی سیدھی جانب کا جملہ اُس نقطہ سے دائرہ (۱) تک

کھینچے ہوئے خطِ مماس کے مربع کے مساوی ہوگا اور اس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ اُس نقطہ سے دائرہ (۲) تک کھینچے ہوئے خطِ مماس کے مربع کے مساوی ہوگا۔

پس خط مساوات (۳) کے کسی نقطہ سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماس باہمدیگر مساوی ہیں۔

تعریف۔ ایسے خط کو جو دو دائروں کے حقیقی یا خیالی نقاطِ تقاطع میں سے گزرتا ہے ان دائروں کا بنیادی محور کہتے ہیں۔

بنیادی محور کی اس طرح بھی تعریف ہوسکتی ہے کہ وہ ان نقطوں کا طریق ہے جن سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماسوں کا طول مساوی ہے۔

چونکہ مساوات (۱) اور (۲) کے دائروں کے مرکزوں کے محدد علی الترتیب $(-گ_1، -ف_1)$ اور $(-گ_2، -ف_2)$ ہیں

ان کو ملانے والے خط کی مساوات $\frac{لا + گ_1}{گ_1 - گ_2} = \frac{ما + ف_1}{ف_1 - ف_2}$ ہے جو بنیادی محور (مساوات ۴) کے علی القوائم ہے۔

(۴) تین دائروں کے تینوں بنیادی محور جو دائروں کے ایک ایک جفت کے لحاظ سے کھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر $لا^2 + ما^2 + 2گ_1 لا + 2ف_1 ما + ج_1 = 0$،

$لا^2 + ما^2 + 2گ_2 لا + 2ف_2 ما + ج_2 = 0$

اور $لا^2 + ما^2 + 2گ_3 لا + 2ف_3 ما + ج_3 = 0$

تین دائروں کی مساواتیں ہیں تو پہلے اور دوسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات $لا^2 + ما^2 + 2گ_1 لا + 2ف_1 ما + ج_1 - (لا^2 + ما^2 + 2گ_2 لا + 2ف_2 ما + ج_2) = 0$ ہے۔

اسی طرح پہلے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\text{لا} + 2\text{ف}_1\text{ما} + \text{ج}_1 - (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_3\text{لا} + 2\text{ف}_3\text{ما} + \text{ج}_3) = 0$ ہے

اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_3\text{لا} + 2\text{ف}_3\text{ما} + \text{ج}_3 - (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\text{لا} + 2\text{ف}_1\text{ما} + \text{ج}_1) = 0$ ہے

ان سے واضح ہے کہ کسی نقطہ کے محدّد اگر ان تین مساواتوں میں سے کسی دو کے لیے صحیح ہونگے تو وہ باقی ماندہ تیسری مساوات کے لیے بھی صحیح ہونگے۔

ان تین بنیادی محوروں کے تقاطع کے نقطہ کو ان تین دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

(ن) دائروں کے کسی نظام کی مساوات۔

اگر مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}\,\text{لا} + 2\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ میں ایک یا اس سے زیادہ سروں کے اندر کوئی اختیاری مستقل شامل ہو تو وہ مساوات **دائروں کے ایک نظام** کو تعبیر کریگی۔ مثلاً $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ص}^2 = 0$ میں اگر ص ایک اختیاری مستقل ہے تو مساوات مذکور ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہے جن کے مرکز مبداء پر واقع ہیں۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\text{لا} + 2\text{ف}_1\text{ما} + \text{ج}_1 = 0 \quad \ldots (1)$

اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2\text{لا} + 2\text{ف}_2\text{ما} + \text{ج}_2 = 0 \quad \ldots (2)$ ہوں تو

مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\text{لا} + 2\text{ف}_1\text{ما} + \text{ج}_1 + \text{ص}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2\text{لا} + 2\text{ف}_2\text{ما} + \text{ج}_2) = 0 \quad \ldots (3)$ اور (۳) کا طریق ہمیشہ ایک دائرہ ہوتا ہے اِلّا

اس صورت میں کہ جب مر = -۱ جیسا کہ پہلے بیان ہو چکا ہے مر = -۱ کی صورت میں مساوات مذکور ایک خطِ مستقیم یعنے دیے ہوئے دائروں کے بنیادی محور کو تعبیر کرتی ہے۔

مساوات (۱) کو ترتیب دینے سے

$$(\text{۱}+\text{مر})\,\text{لا}^2+(\text{۱}+\text{مر})\,\text{ما}^2+\text{۲}\,\text{لا}\,(\text{گ}_1+\text{مرگ}_2)+\text{۲}\,\text{ما}\,(\text{ف}_1+\text{مرف}_2)+(\text{ج}_1+\text{مرج}_2)=\text{۰}$$

اس کو (۱ + مر) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{۲}\left(\frac{\text{گ}_1+\text{مرگ}_2}{\text{۱}+\text{مر}}\right)\text{لا}+\text{۲}\left(\frac{\text{ف}_1+\text{مرف}_2}{\text{۱}+\text{مر}}\right)\text{ما}+\frac{\text{ج}_1+\text{مرج}_2}{\text{۱}+\text{مر}}=\text{۰}$$

جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔

دائرہ مساوات (۳) کے مرکز کے محدد $-\left(\frac{\text{گ}_1+\text{مرگ}_2}{\text{۱}+\text{مر}}\right)$ اور $-\left(\frac{\text{ف}_1+\text{مرف}_2}{\text{۱}+\text{مر}}\right)$ ہیں۔

غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ جو نقطہ دائرہ (۱) اور دائرہ (۲) کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو مر : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اس کے بھی یہی محدد ہیں۔

[جب دائرے $\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{۲گ}_1\text{لا}+\text{۲ف}_1\text{ما}+\text{ج}_1=\text{۰}$ اور $\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{۲گ}_2\text{لا}+\text{۲ف}_2\text{ما}+\text{ج}_2=\text{۰}$ دو نقطوں ف_1، ف_2 میں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو بآسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دائروں کا وہ نظام جس کو مساوات $\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{۲گ}_1\text{لا}+\text{۲ف}_1\text{ما}+\text{ج}_1+\text{مر}(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{۲گ}_2\text{لا}+\text{۲ف}_2\text{ما}+\text{ج}_2)=\text{۰}$ تعبیر کرتی ہے ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جو ف_1 اور ف_2 نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔]

ہم محور دائرے۔ اگر دو دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط لا کا محور مانا جائے اور بنیادی محور ما کا محور تو مساوات (۳) بہ شکل $\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{مَر}\,\text{لا}+\text{ج}=\text{۰}$ لکھی جا سکتی ہے جس میں مَر ایک اختیاری مستقل ہے۔

محور خواہ کیسے ہی منتخب ہوں $\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{۲گ}_1\text{لا}+\text{۲ف}_1\text{ما}+\text{ج}_1=\text{۰}$
اور $\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{۲گ}_2\text{لا}+\text{۲ف}_2\text{ما}+\text{ج}_2=\text{۰}$

ان دائروں کی تمام مساواتیں ہونگی۔ اگر ان کے مرکز محور لا پر واقع ہوں تو ف$_1$ = ۰ اور ف$_2$ = ۰۔ تب بنیادی محور کی مساوات ۲ (گ$_1$ - گ$_2$) لا + (ج$_1$ - ج$_2$) = ۰ ہو جاتی ہے۔

اگر یہ خط محور ما سے منطبق ہوتا ہے تو چونکہ اس محور کی مساوات لا = ۰ ہے لہذا ج$_1$ - ج$_2$ صفر کے مساوی ہونا چاہیے یعنے ج$_1$ = ج$_2$ پس ج$_1$ اور ج$_2$ کے عوض ج لکھنے اور ف$_1$ = ۰ اور ف$_2$ = ۰ لکھنے سے مساوات (۳) بشکل

لا^2 + ما^2 + ۲گ$_1$ لا + ج + مر (لا^2 + ما^2 + ۲گ$_2$ لا + ج) = ۰

تبدیل ہوتی ہے

یعنے لا^2 + ما^2 + $\frac{۲ (گ_1 + مر گ_2)}{۱ + مر}$ لا + ج = ۰

چونکہ لا کا سر مر کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے اس لیے اس کو مَر سے تعبیر کر سکتے ہیں پس ان دائروں کی مساوات لا^2 + ما^2 + مَر لا + ج = ۰ ہو جاتی ہے۔

مَر کو مختلف قیمتیں دینے سے یہ مساوات دائروں کے مختلف جوڑوں کو بھی تعبیر کرتی ہے۔ ان تمام دائروں کے مرکز محور لا پر ہوتے ہیں۔ ان کے مرکزوں کے محدد (- مَر، ۰) ہیں اور ان کے نصف قطر ص^2 = مَر^2 - ج

یہ امر کہ آیا یہ دائرے ایک دوسرے کو قطع کرینگے، مس کرینگے یا نہیں ملینگے مَر اور ج کی قیمتوں پر موقوف ہے۔

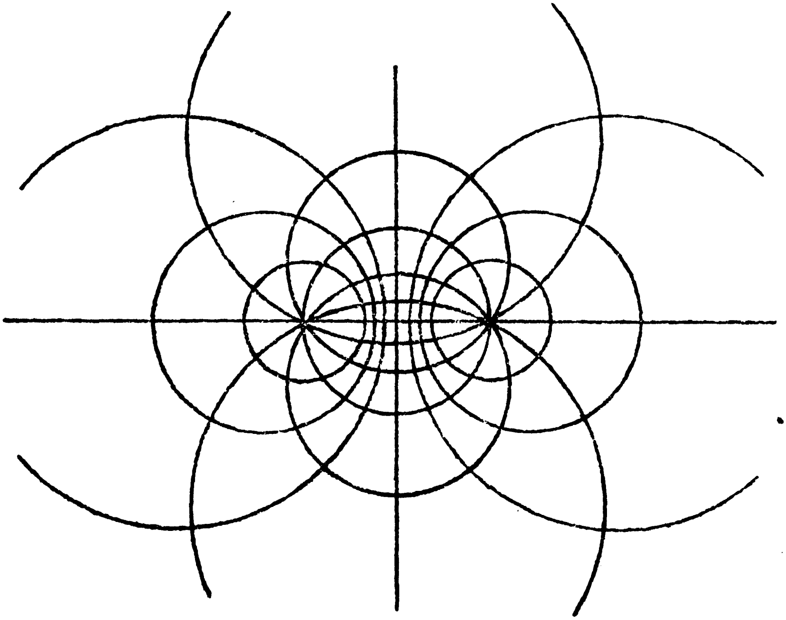
(۱) اگر مَر = ± $\sqrt{ج}$ تب ص = ۰ اور یہ دائرے نقطوں (∓ $\sqrt{ج}$، ۰) میں تحویل ہونگے۔ یہ نقطے ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے کہلاتے ہیں۔

(۲) اگر ج منفی ہے تو یہ ہم محور دائرے حقیقی نقطوں (۰، + $\sqrt{-ج}$) اور (۰، - $\sqrt{-ج}$) میں سے گزرتے ہیں اور ان کے انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔

(۳) اگر ج = ۰ تو یہ دائرے ایک دوسرے کو مبداء پر مس کرتے ہیں۔

(۴) اگر ج مثبت ہو تو یہ دائرے خود ایک دوسرے کو خیالی نقطوں میں منقطع کرلیتے ہیں۔ ان کے انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور یہ دائرے $لا^{۲} + ما^{۲} = ج$ مساوات والے دائرہ پر علی القوائم ہوتے ہیں۔ (اس لیے کہ دو دائرے علی القوائم ہونے کی شرط $۲ گ_{۱} گ_{۲} + ۲ ف_{۱} ف_{۲} - ج_{۱} - ج_{۲} = ۰$ ہے)۔

(س) علی القوائم دائروں کی شرط کا یہ صریح نتیجہ ہے کہ دو ہم محور دائروں کے نظام جن کی مساواتیں $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ گ لا + ج = ۰$ اور $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ ف ما - ج = ۰$ ہیں۔ جن میں ج کی قیمت جملہ دائروں کے لیے مساوی ہے ایسے دائروں پر مشتمل ہیں کہ ایک نظام کا کوئی سا دائرہ دوسرے نظام کے جملہ دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ اور ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے نقطئی دائرے ہیں۔



شکل ۲۶

(ع) دائرہ $\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_1\text{لا}+2\text{ف}_1\text{ما}+\text{ج}_1+\text{م}(\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_2\text{لا}+2\text{ف}_2\text{ما}+\text{ج}_2)=0$ کے کسی نقطے سے دائروں $\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_1\text{لا}+2\text{ف}_1\text{ما}+\text{ج}_1=0$ ...... (ا)

اور $\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_2\text{لا}+2\text{ف}_2\text{ما}+\text{ج}_2=0$ ... (ب) پر کھینچے ہوئے مماسوں کے مربعوں کی نسبت مستقل اور $-\text{م}$ کے مساوی ہے۔

اول الذکر دائرہ پر کوئی سا نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ فرض کرو۔ تب

$$\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2+2\text{گ}_1\text{لا}_1+2\text{ف}_1\text{ما}_1+\text{م}(\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2+2\text{گ}_2\text{لا}_1+2\text{ف}_2\text{ما}_1+\text{ج}_2)=0$$

پس
$$-\text{م}=\frac{\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2+2\text{گ}_1\text{لا}_1+2\text{ف}_1\text{ما}_1+\text{ج}_1}{\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2+2\text{گ}_2\text{لا}_1+2\text{ف}_2\text{ما}_1+\text{ج}_2}$$

اس کسر میں شمار کنندہ نقطہ $\text{لا}_1،\ \text{ما}_1$ سے دائرہ (ا) پر کھینچے ہوئے مماس کے مربع کے مساوی ہے اور نسب نما اسی نقطہ سے دائرہ (ب) پر کھینچے ہوئے مماس کے مربع کے مساوی ہے۔

نتیجۂ مہم۔ کسی ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں پر کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے طولوں کی نسبت مستقل ہے، ایک ہم محور دائرہ ہے۔

(ف) اگر $\text{د}_1،\ \text{د}_2$ دو ایسے دائروں کے مرکز ہیں جن کے نصف قطر علی الترتیب $\text{ص}_1،\ \text{ص}_2$ ہیں تو خط $\text{د}_1\text{د}_2$ کو داخلاً اور خارجاً $\text{ص}_1:\text{ص}_2$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے دو نقطے ان دو دائروں کی مشابہت کے مراکز کہلاتے ہیں۔

مشابہت کے مرکزوں کے خواص پر ہندسی طریقہ ہی سے اچھی طرح بحث ہو سکتی ہے۔ ان خواص میں سے سب سے زیادہ اہم حسبِ ذیل ہیں:— (۱) دو دائروں کے مشترک مماسوں میں سے دو دو مماس ان دائروں کی مشابہت کے ایک ایک مرکز میں سے گزرتے ہیں (۲) دو دائروں کی مشابہت کے ایک مرکز میں سے جو کوئی خط ان دائروں کو قطع کرتا ہوا گزرتا ہے وہ اُن سے متشابہاً قطع ہوتا ہے۔

سوالات (۷)

(۱) اگرکسی دائرہ کے سروں ا، ب کے محدد علی الترتیب لا_1، ما_1 اور لا_2، ما_2 ہوں تو دائرہ کی مساوات

$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا} - \text{لا}_2) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما} - \text{ما}_2) = ۰$ ہوگی۔

[اشارہ۔ دائرہ پر کوئی سا نقطہ ف (لا، ما محدد) لو۔ ا کو ف سے ملانے والا خط محور لا کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1}$ بناتا ہے۔ اسی طرح ب کو ف سے ملانے والا خط زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{لا} - \text{لا}_2}$ بناتا ہے چونکہ یہ دونوں خط باہمدیگر علی القوائم ہیں لہذا $۱ + \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} \cdot \frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{لا} - \text{لا}_2} = ۰$]

(۲) ثابت کرو کہ نقطوں (ا، ۰)، (−ا، ۰) اور (۰، ب) میں سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}}\text{ما} - \text{ا}^2 = ۰$ ہے۔

(۳) ایسے دائرہ کی مساوات دریافت کرو

(ا) جو نقطوں (۴، ۲) اور (−۶، −۲) میں سے گزرتا ہے اور مرکز محور ما پر رکھتا ہے۔

(ب) جس کا مرکز (−۱، −۵) ہے اور جو محور لا پر مماس ہے۔

(ج) جو خطوطِ مستقیم لا − ۶ = ۰، لا + ۲ ما = ۰ اور لا − ۲ ما = ۸ سے بنے ہوئے مثلث کا حائط دائرہ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر ص کی قیمتیں $+\sqrt{۶}$ سے بڑی اور $-\sqrt{۶}$ سے چھوٹی ہوں تو مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۴\text{لا} + ۲\text{ص}\text{ما} + ۱۰ = ۰$ ایک طریق کو تعبیر کرتی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{م}(\text{لا} - \text{ا}) + \text{ا}\sqrt{۱ + \text{م}^2}$ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲\text{ا}\text{لا}$ کو مس کرتا ہے، م کی خواہ کچھ بھی قیمت ہو۔

(۶) نقطوں (ا، ۰) اور (-ا، ۰) میں سے بالترتیب دو خط مستقیم ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہوئے کھینچے جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق لا^2 + ما^2 - ا^2 = ± ۲ ا ما مم طہ دائرے ہیں۔

(۷) ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک دوسرے خط سے جو سابق الذکر خط کے علی القوائم ہے ایک مستقل طول (۲ل) منقطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے مرکز کے طریق کی مساوات ما^2 - لا^2 = ل^2 ہے۔

(۸) ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ (ا، ۰) اور (- ا، ۰) نقطوں سے اس تک کھینچے ہوئے عمودوں کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ بتاؤ کہ وہ خط ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

(۹) ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں لا = ۱، ۲ ما = ۵ اور ۳ لا - ۴ ما = ۵ ہیں۔ بتاؤ کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کی مساوات (لا - ۲)^2 + (ما - ۵ر۱)^2 = ۱ ہے۔

(۱۰) دائرہ لا^2 + ما^2 = ص^2 کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کا جو قطبی ہے اگر وہ دائرہ (لا - ص)^2 + ما^2 = ص^2 کو مس کرے تو ثابت کرو کہ (لا، ما) ایک ایسے منحنی پر واقع ہے جس کی مساوات ما^2 + ۲ ا لا = ص^2 ہے۔

(۱۱) بتاؤ کہ حسبِ ذیل تین دائروں کا بنیادی مرکز (-۲، -۱) ہے:-
لا^2 + ما^2 + ۴ لا + ۷ = ۰، لا^2 + ما^2 + ۱ر۵ لا + ۲ر۵ ما + ۴ر۵ = ۰ اور ما^2 + لا^2 + ما = ۰

(۱۲) اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا^2 + ما^2 = ۶ تک کھینچے ہوئے خطِ مماس کا طول اسی نقطہ سے دائرہ لا^2 + ما^2 + ۳ لا + ۳ ما = ۰ تک کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کا دوچند ہو تو ف^2 + گ^2 + ۴ ف + ۴ گ + ۲ = ۰

(۱۳) اس امر کے ذریعہ سے کہ کوئی سے تین دائروں کے بنیادی محور جو ان دائروں کے ایک ایک جفت کے لیے کھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے جو کوئی سے دوسرے تین دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۱۴) دائروں لا^2 + ما^2 + ۲گ$_1$ لا + ۲ف$_1$ ما + ج$_1$ = ۰ اور لا^2 + ما^2 + ۲گ$_2$ لا + ۲ف$_2$ ما + ج$_2$ = ۰ کے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ دریافت کرو جو ایک نقطۂ تقاطع تک کھینچے گئے ہوں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے محیط سے اس کے ایک قطر پر جو عمود ڈالا جاتا ہے وہ اس قطر کے قطعات کے ساتھ وسطی تناسب رکھتا ہے۔

(۱۶) ایک دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ اور ایک خط ا لا + ب ما + جَ = ۰ دیے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ منحنیوں کا نظام لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج + مر (ا لا + ب ما + جَ) = ۰ ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جن کے مرکز دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے دیے ہوئے خط پر علی القوائم گزرنے والے خط پر واقع ہیں۔

(۱۷) سوال (۱۶) میں مر جو دیا گیا ہے اس کی ہندسی ترجمانی کرو۔

(۱۸) مندرجۂ ذیل ہم محور دائروں کو مرتسم کرو۔

(ا) لا^2 + ما^2 + ۸ لا − ۹ + مر (لا^2 + ما^2 − ۴ لا − ۹) = ۰

(ب) لا^2 + ما^2 + ۸ لا + مر (لا^2 + ما^2 − ۴ لا) = ۰

(ج) لا^2 + ما^2 − ۱۰ لا + ۹ + مر (لا^2 + ما^2 + ۸ لا + ۹) = ۰

[سب سے پہلے مر = −۱ مان کر ان دائروں کا بنیادی مرکز کھینچو اور پھر مر کو دوسری مناسب مثبت منفی قیمتیں دے کر دائرے تیار کرو]۔

(۱۹) ایک نقطہ اسی طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کے عمودی فاصلہ کے لحاظ سے بدلتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ متحرک نقطہ ایک دائرہ کو مرتسم کرتا ہے۔

(۲۰) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں اور ف ایک تیسرا نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ف ا = ن × ف ب۔ ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک دائرہ ہے نیز یہ بھی بتاؤ کہ ن کی مختلف قیمتیں اگر لی جائیں تو ان تمام دائروں کا بنیادی محور ایک ہی ہے۔

(۲۱) ایک ثابت نقطہ و سے کوئی سا ایک خطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے جو

ایک ثابت دائرہ سے نقطہ ف پر ملتا ہے اور اس خط پر ق ایک ایسا نقطہ لیا جاتا ہے کہ سطح و ق × و ف = مستقل۔ بتاؤ کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۲۲) ثابت کرو کہ دیے ہوئے دو دائروں کی مساوات ہمیشہ بشکل $لا^2 + ما^2 + ا\,لا + ب = ۰$ اور $لا^2 + ما^2 + اَ\,لا + ب = ۰$ بھی جا سکتی ہے اور یہ کہ ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے اندر واقع ہو گا اگر ا اَ اور ب دونوں مثبت ہیں۔

(۲۳) اگر دو دیے ہوئے دائروں کی مشابہت کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو بطور قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر کے کسی نقطہ سے بھی ان دیے ہوئے دو دائروں پر جو خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں آپس میں متناظر نصف قطروں کی نسبت رکھتے ہیں۔

(۲۴) دائروں $لا^2 + ما^2 + ۲\,لا = ۰$ اور $لا^2 + ما^2 - ۲\,لا = ۰$ کے مشترک خطوطِ مماس ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

(۲۵) (ا ، عہ) اور (ب ، بہ) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر جو دائرہ کھینچا جاتا ہے اس کی قطبی مساوات $ر^2 - ر\{ا\,جم(ط - عہ) + ب\,جم(ط - بہ)\} + اب\,جم(عہ - بہ) = ۰$ ہے۔

(۲۶) دیے ہوئے تین دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۲۷) ثابت کرو کہ دو ثابت دائروں کو مس کرنے والے تمام دائرے دوسرے دو ثابت دائروں میں سے ایک دائرہ پر علی القوائم ہیں۔

(۲۸) اگر دو دائروں کی مساواتیں $لا^2 + ما^2 + ۲گ_1\,لا + ۲ف_1\,ما + ج_1 = ۰$ اور $لا^2 + ما^2 + ۲گ_2\,لا + ۲ف_2\,ما + ج_2 = ۰$ ہیں تو ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل مساوات کے دائرے

$$\frac{لا^2 + ما^2 + ۲گ_1\,لا + ۲ف_1\,ما + ج_1}{\sqrt{گ_1^2 + ف_1^2 - ج_1}} \pm \frac{لا^2 + ما^2 + ۲گ_2\,لا + ۲ف_2\,ما + ج_2}{\sqrt{گ_2^2 + ف_2^2 - ج_2}} = ۰$$

باہمدیگر علی القوائم متقاطع ہیں۔

(۲۹) ایک مثلث کے زاویئی نقطے بالترتیب (۰، ۰)، (۲۰، ۴۸) اور

(۶۳،۰) ہیں ثابت کرو کہ اس کے نونقطی دائرہ کی مساوات
لا^۲ + ما^۲ ـ ۵٫۹۷ لا ـ ۲۸ ما + ۱۵۱۲ = ۰ ہے۔

آٹھواں باب

خطِ مکافی کی مساواتیں

تعریفات

۱۵۹ (ا) تراش مخروط۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے اُس کے ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ سے مستقل نسبت رکھتا ہے۔ اس ثابت نقطہ کو **ماسکہ** کہتے ہیں، اس ثابت خطِ مستقیم کو **مرتب** اور اس مستقل نسبت کو **خروج المرکز**۔

یہ نسبت جب مساوات کی یعنے اکائی ہوتی ہے تو طریق **خطِ مکافی** کہلاتا ہے، جب ایک سے چھوٹی ہوتی ہے تو **خطِ ناقص** اور جب ایک سے بڑی ہوتی ہے تو **خطِ زائد**۔

پہلے ہم خطِ مکافی کی مساوات اور اس کے ذریعہ اس کے چند اہم خواص دریافت کرینگے۔

خطِ مکافی کی مساوات۔

فرض کرو شکل (۲۷) میں س ماسکہ ہے اور ما ما مرتب۔ س و خط ما ما پر عمود کھینچو اور فرض کرو و س = ۲ اَ۔ خط و س کو لا کا محور مانو اور و ما کو ما کا محور۔

ف کوئی سا ایک نقطہ منحنی پر لو اور اس کے محددوں کو لا و ما قرار دو۔

ف ن اور ف م محوروں پر عمود بناؤ اور س ف کو ملاؤ۔

خط مکافی کی تعریف کے لحاظ سے س ف = ف م

∴ ف م^2 = س ف^2 =

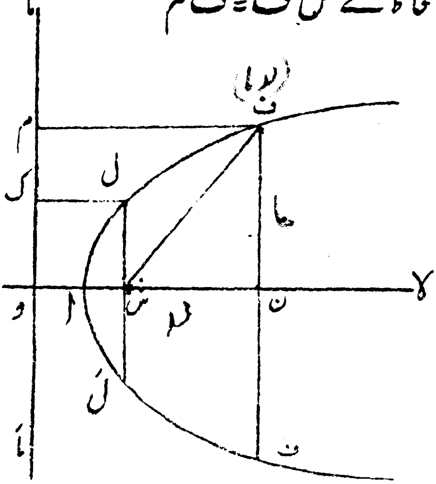
ف ن^2 + س ن^2

یعنے لا^2 = ما^2 + (لا - ۲ ا)^2

یا ما^2 = ۴ ا (لا - ا) ....(۱)

یہی منحنی کی مساوات ہے۔

منحنی مذکور لا کے محور کو ایک نقطہ ا میں منقطع کرتا ہے جہاں ما = ۰۔ اور مساوات (۱) کی رو سے جب ما = ۰۔ تو لا = ا یعنے و ا = ا



شکل ۲۷

نقطہ ا خطِ مکافی کا راس کہلاتا ہے۔

اگر محددوں کا محور ا پر منتقل کیا جائے لیکن محوروں کی سمتوں میں کوئی تغیر نہ ہونے دیا جائے تو

مساوات (۱) ما^2 = ۴ ا لا ..... (۲) میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

اس لحاظ سے ماسکہ نقطہ (ا، ۰) ہوتا ہے۔ اور خط لا + ا = ۰۔

معہذا س ف = م ف = و ا + ا ن = ا + لا

چونکہ ما^2 ایک مثبت مقدار ہے لا ہمیشہ مثبت ہو گا۔ اور اس لیے منحنی بالکلیہ محور ما کی مثبت جانب واقع ہو گا۔ لا کی کسی خاص قیمت کے لیے واضح ہے کہ ما کی دو قیمتیں ہونگی جو مقداریں باہمدیگر مساوی ہونگی۔ ان میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔ پس منحنی کے تمام وتروں کی جو لا کے محور کے علی القوائم ہونگے محور لا تنصیف کریگا۔

اور منحنی کے وہ حصے جو لا کے محور کی مثبت جانب ہونگے اس کے

منفی جانب کے حصوں کے ہر لحاظ سے مساوی ہونگے۔ جیسے جیسے لا بڑھیگا ما بھی بڑھیگا نہ تو لا کے بڑھنے کی کوئی حد ہے اور نہ ما کے بڑھنے کی کوئی حد۔ پس ما کے محور کی مثبت جانب خط مکافی غیر محدود ہوتا ہے۔

ماسکہ میں سے جو خط مُراتب کے علی القوائم گزرتا ہے خطِ مکافی کا محور کہلاتا ہے۔

ماسکہ میں سے خط مکافی کے محور کے علی القوائم جو خطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے اس کا **وترِ خاص** کہلاتا ہے۔

شکل (۲۷) میں س ل = ک ل = و س = ۲ ا۔ پس وتر خاص کا پورا طول = ۴ ا

ہر ایسے نقطے کے لیے جو خطِ مکافی پر واقع ہے ہم نے دیکھا ہے کہ ما^۲ - ۴ ا لا = ۰ پس اس منحنی کے اندر جو کوئی نقطہ واقع ہو اس کے لیے ما^۲ - ۴ ا لا منفی ہوگا۔ اسی طرح منحنی کے باہر جو نقطہ ہوگا اس کے لیے ما^۲ - ۴ ا لا مثبت ہوگا۔

خطِ مستقیم ما = م لا + ج اور خطِ مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کے مشترک نقطوں کے محدد ان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔ پس ان نقطوں کے لیے

(م لا + ج)^۲ = ۴ ا لا۔ یعنے م^۲ لا^۲ + (۲ م ج - ۴ ا) لا + ج^۲ = ۰ .... (۳)

چونکہ یہ دوسرے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ہر ایک خطِ مستقیم خطِ مساوی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہوتے ہیں۔

اگر م بہت چھوٹا ہے تو مساوات (۳) کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے۔ جب م = ۰ تو واضح ہے کہ ایک اصل نامتناہی بڑی ہو جاتی ہے۔ پس خطِ مکافی کے محور کے متوازی جو کوئی خطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے منحنی سے ایک نقطہ پر محدود فاصلہ پر ملتا ہے اور دوسرے نقطہ پر راس سے نامتناہی بڑے فاصلہ پر ملتا ہے۔

(ب) خطِ مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کو خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے

مس کرنے کی شرط۔

چونکہ خطِ مکانی اور خطِ مستقیم کے مشترک نقطوں کے متقطوعوں کی مساوات

مر۲ لا۲ + (۲ مر ج − ۴ ا) لا + ج۲ = ۰ ہے

اگر یہ خطِ مستقیم خطِ مماس ہو تو وہ مکانی سے دو منطبق نقطوں میں ملیگا۔ ایسی صورت میں مساوات مندرجۂ بالا کی اصلیں باہمدیگر مساوی ہونگی۔ جس کے لیے ضروری ہے کہ

۴ مر۲ ج۲ = (۲ مر ج − ۴ ا)۲

پس مر ج = ا یعنے ج = ا/مر

∴ مر کی قیمت کچھ ہی ہو خطِ مستقیم ما = مر لا + ا/مر خطِ مکانی ما۲ = ۴ ا لا کو مس کریگا۔

(ج) مکانی کے دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات اور اس کے ذریعہ مکانی کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات کی تعیین۔

مکانی کی مساوات ما۲ = ۴ ا لا مانو اور اس پر لا۱، ما۱ اور لا۲، ما۲ کوئی سے دو نقطے لو۔

ان نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات (لا − لا۱)/(لا۱ − لا۲) = (ما − ما۱)/(ما۱ − ما۲) ہے

جو پھیلانے سے لا (ما۱ − ما۲) = لا۱ (ما − ما۲) − لا۲ (ما − ما۱) بن جاتی ہے چونکہ لا۱، ما۱ اور لا۲، ما۲ نقطے مکانی پر واقع ہیں اس لیے لا (ما۱ − ما۲) = (ما۱۲/۴ ا)(ما − ما۲) − (ما۲۲/۴ ا)(ما − ما۱) یعنے ۴ ا لا (ما۱ − ما۲) = ما (ما۱۲ − ما۲۲) − ما۱ ما۲ (ما۱ − ما۲)

پس ۴ ا لا = ما (ما۱ + ما۲) − ما۱ ما۲ یا ما (ما۱ + ما۲) − ۴ ا لا − ما۱ ما۲ = ۰ ...(۱)

اس مساوات میں ما۲ = ما۱ لکھنے سے نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے خطِ مماس کی مساوات یعنے ۲ ما ما۱ − ۴ ا لا − ما۱۲ = ۰ حاصل ہوتی ہے اور چونکہ ما۱۲ = ۴ ا لا۱

لہذا $\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\text{ر}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$ .... (۲)

واضح ہے کہ مکافی کے راس ا یعنے نقطہ (۰، ۰) کے خطِ مماس کی مساوات لا = ۰ ہے پس یہ خطِ مماس مکافی کے محور پر علی القوائم ہے۔

مکافی کے مماس کی یہ مساوات ما = م لا + ج کی شکل میں لکھی جاتی ہے تو

$$\text{ما} = \frac{۲\text{ر}}{\text{ما}_1}\,\text{لا} + \frac{۲\text{ر}\,\text{لا}_1}{\text{ما}_1}$$ جس میں $\text{م} = \frac{۲\text{ر}}{\text{ما}_1}$ اور $\text{ج} = \frac{۲\text{ر}\,\text{لا}_1}{\text{ما}_1}$

پس $\text{ج} = \frac{\text{ر}}{\text{م}}$ جیساکہ ذیلی فصل (ب) میں اور طریقہ سے بتایا گیا ہے۔

مثال (۱)۔ مکافی کے دو خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کا معین، ان خطوطِ مماس کے نقاط تماس کے معینوں کا حسابی اوسط ہے۔

$(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ نقطوں پر کے خطوطِ مماس کی مساواتیں بالترتیب $\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\text{ر}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$ اور $\text{ما}\,\text{ما}_2 = ۲\text{ر}\,(\text{لا} + \text{لا}_2)$ ہیں۔

ایک کو دوسری میں سے تفریق کرنے سے ان مماسوں کے مشترک نقطہ کے لیے $\text{ما}\,(\text{ما}_1 - \text{ما}_2) = ۲\text{ر}\,(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) = \frac{1}{2}\,(\text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2)$ $\therefore\ \text{ما} = \frac{1}{2}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)$ ...(۱)

واضح ہو کہ خطوطِ مماس کی مساواتوں کو جمع کرنے سے $\text{ما}\,(\text{ما}_1 + \text{ما}_2) = ۴\text{ر}\,\text{لا} + ۲\text{ر}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)$ پس $۴\text{ر}\,\text{لا} = \frac{1}{2}\,(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)^2 - \frac{1}{2}\,(\text{ما}_1^2 + \text{ما}_2^2) = \text{ما}_1\,\text{ما}_2$ ...... (۲)

مثال (۲)۔ مکافی کے دو ایسے خطوطِ مماس کے تقاطع کا طریق جو باہمدیگر علی القوائم ہوں مکافی کا مرانتب ہے۔

فرض کرو کہ ان خطوطِ مماس کی مساواتیں $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ر}}{\text{م}}$ اور

$\text{ما} = \text{م}'\,\text{لا} + \frac{\text{ر}}{\text{م}'}$ ہیں۔

چونکہ یہ باہمدیگر علی القوائم ہیں اس لیے $\text{م}\,\text{م}' = -۱$ پس مساوات دوم م کی رقموں میں

$\text{ما} = -\frac{1}{\text{م}}\,\text{لا} - \text{ر}\,\text{م}$ لکھی جاسکتی ہے۔

اس مساوات کو پہلی مساوات میں سے تفریق کرنے سے مشترک نقطہ کے

مقطوعہ کی مساوات ۰ = لا (م + ۱/م) + ا (م + ۱/م) یعنے لا + ا = ۰ حاصل ہوتی ہے
جو مرتب کی مساوات ہے۔

(د) مکافی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات۔

مکافی کے نقطہ (لا، ما) پر کے مماس کی مساوات

ما ما = ۲ ا (لا + لا) ہے یعنے ما ما - ۲ ا لا - ۲ ا لا = ۰ ہے۔

اس خط کے علی القوائم خط کی مساوات ۲ ا ما + ما لا + ج = ۰ ہے جس میں ج کوئی سا مستقل ہے چونکہ ہمیں لا، ما پر کا عماد مقصود ہے اس لیے آخر الذکر مساوات میں بجائے لا اور ما کے لا اور ما لکھنے سے ۲ ا ما + ما لا + ج = ۰ جس سے ج کی قیمت - ۲ ا ما - ما لا برآمد ہوتی ہے۔

پس ۲ ا ما + ما لا - ۲ ا ما - ما لا = ۰ یعنے مکافی کے نقطہ لا، ما پر کے عماد کی مساوات ۲ ا (ما - ما) + ما (لا - لا) = ۰ ....(۱)

چونکہ ۴ ا لا = ما^۲ لہذا ۸ ا^۲ (ما - ما) + ما (۴ ا لا - ما^۲) = ۰ ......(۲)

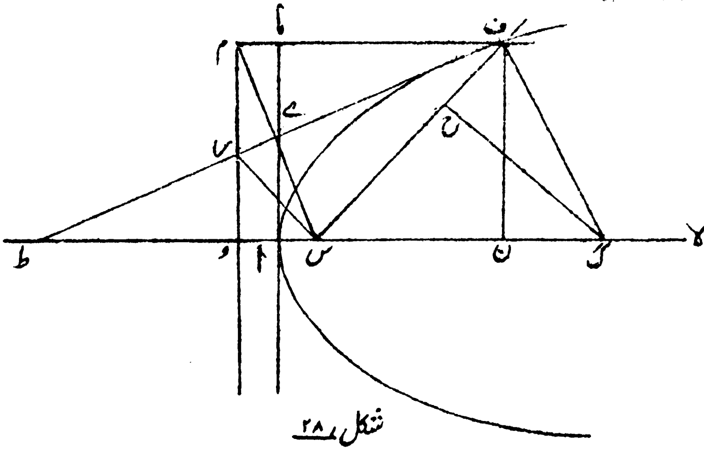
جو بشکل ما = - ما/۲ا لا + ما + ما^۳/۸ا^۲ ......(۳) لکھی جا سکتی ہے۔

- ما/۲ا کے عوض م لکھنے سے ما = - ۲ ا م اور ما^۳/۸ا^۲ = - ا م^۳

پس مساوات (۳) بشکل ما = م لا - ۲ ا م - ا م^۳ ....(۴) تبدیل ہوجاتی ہے جو بعض صورتوں میں زیادہ مفید پائی جاتی ہے۔

(۵) اب ہم مکافی کی مساوات کے ذریعہ اس منحنی کے بعض اہم ہندسی خواص کو ثابت کرینگے۔

شکل ۲۸ میں مکافی ف ا کھینچا گیا ہے جس کا مرتب و م ہے۔ ف پر کا خط مماس ف ط مرتب سے نقطہ ر پر ملتا ہے اور محور سے نقطہ ط پر۔ ف سے ف م، ف ن مرتب اور محور پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ف کے محدد لا، ما فرض کرو اس پر کے مماس کی مساوات ما ما = ۲ ا (لا + لا) ....(۱)



شکل ۲۸

جہاں یہ خط محور مکافی یعنے محور و لا سے ملتا ہے وہاں ما = ۰ پس اس نقطہ پر
لا + لا۱ = ۰ یعنے ط ا = ا ن .... (عہ)
∴ ط س = ا س + ا ن = س ف .... (بہ)
اور چونکہ ط س = س ف زاویہ س ط ف = زاویہ س ف ط۔ پس
خطِ مماس ف ط زاویہ س ف م کی تنصیف کرتا ہے .... (جہ)

یہ بھی ظاہر ہے کہ مثلث ر س ف اور ر م ف ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔
لہٰذا ر س ف = ر م ف = ایک زاویۂ قائمہ .... (ضہ)
چونکہ م نقطہ (-ا، ما۱) ہے اور س نقطہ (ا، ۰) خط س م کی مساوات

ما − ما۱ / − ما۱ = لا + ا / ۲ ا .... (۲) ہے

واضح ہے کہ یہ خط ف پر کے خطِ مماس کے علی القوائم ہے جس کی مساوات (۱) ہے
∴ س م خطِ مماس ف ط کے علی القوائم ہے .... (صہ)
چونکہ ف ط خط س م کے علی القوائم اور زاویہ س ف م کی تنصیف کرتا ہے اس لیے وہ س م کی بھی تنصیف کریگا۔ اگر س م اور ف ط کے تقاطع کا

نقطہ ے قرار دیا جائے س ے = ے م

لیکن س ا = ا و اس لیے ا ے خط و م کے متوازی ہے۔ اور اس لیے مکافی کے راس پر کا خط مماس ہے۔ پس مکافی کے ماسکہ میں سے جو خط اس کے کسی خطِ مماس ف ط پر علی القوائم کھینچا جاتا ہے ف ط سے مکافی کے نقطۂ راس پر کے خط مماس سے ملتا ہے . . . . (۳)

اس مسئلہ کو ہم ہندسۂ تحلیلی سے بھی اس طرح ثابت کر سکتے ہیں :-

مکافی کے کسی خطِ مماس کی مساوات ما = م لا + $\frac{ل}{م}$ . . . . . . (۳) فرض کرو

اس خط پر ماسکہ (ل، ۰) سے گرائے ہوئے عمود کی مساوات

ما = $-\frac{۱}{م}$ (لا - ل) ہو۔

یعنے ما = $-\frac{لا}{م} + \frac{ل}{م}$ . . . . . . (۴) ہوگی۔

ظاہر ہے کہ خطوط (۳) اور (۴) اس نقطہ پر ملتے ہیں جہاں لا = ۰

مکافی کے نقطہ ف یعنے (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

۲ ل (ما - ما۱) + ما۱ (لا - لا۱) = ۰ ہے (ذیلی فصل د)

نقطہ گ پر ما = ۰ اور اس لیے - ۲ ل ما۱ + ما۱ (لا - لا۱) = ۰

یعنے ۲ ل = لا - لا۱ = اگ - ان = ن گ

∴ ن گ = ۲ ل (یعنے مستقل) . . . . (۶)

سوالات ۸ (ل)

(۱) ثابت کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ ل لا کے وترِ خاص کے سروں پر کے خطوطِ مماس اور ان کے عمادوں کی مساواتیں بالترتیب لا ∓ ما + ل = ۰ اور ما ± لا ∓ ۳ ل = ۰ ہیں۔

(۲) بتاؤ کہ مساوات لا^2 + ۴ ل لا + ۲ ل ما = ۰ ایک ایسے مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا راس نقطہ (-۲ ل، ۲ ل) پر ہے جس کا وتر خاص ۲ ل ہے اور جس کا محور ما کے محور کے متوازی ہے۔

(۳) اگر مکافی کے محور کے کسی ثابت نقطہ و میں سے کوئی سا وتر ف و فَ کھینچا جائے تو بتاؤ کہ ف اور فَ کے معیّنوں کا حاصل ضرب مستقل ہے اور اسی طرح ان کے مقطوعوں یا فصلوں کا حاصل ضرب بھی مستقل ہے۔

(۴) مکافی کے خطوطِ مماس ما = مر لا + ر/مر اور ما = مرَ لا + ر/مرَ کے نقطۂ تقاطع کے محدّد دریافت کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جبکہ مر مرَ مستقل ہے اور جب مر مرَ = -۱ تو یہ خطِ مستقیم مکافی کا مرتّب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مکافی ما² = ۴ ر لا کے اندرونی مثلث کا رقبہ ۱/۸ر (ما۱ - ما۲)(ما۲ - ما۳)(ما۳ - ما۱) ہے جس میں ما۱، ما۲، ما۳ مثلث کے زاویئی نقطوں کے معیّن ہیں۔

(۱) کسی نقطہ سے مکافی کے دو خطوطِ مماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگے بہ لحاظ اس کے کہ نقطہ مکافی کے باہر، اس پر یا اس کے اندر واقع ہے۔

مر کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط ما = مر لا + ر/مر ....(۱) مکافی ما² = ۴ ر لا کو مس کرتا ہے۔

یہ خط ایک مخصوص نقطہ لاَ، ماَ میں سے گزرتا ہے اگر ماَ = مر لاَ + ر/مر یعنے

اگر مر² لاَ - مر ماَ + ر = ۰ ....(۲)

مساوات (۲) بہ لحاظ مر ایک دو درجی مساوات ہے۔ اس سے مکافی کے ان خطوطِ مماس کی سمتیں دریافت ہوتی ہیں جو نقطہ لاَ، ماَ میں سے گزرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطہ لاَ، ماَ میں سے مکافی پر عموماً دو خطوطِ مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ اگر ماَ² - ۴ ر لاَ مثبت ہے تو یہ اصلیں حقیقی ہیں، اگر صفر ہے تو منطبق اور اگر منفی ہے تو خیالی۔ یعنے نقطہ (لاَ، ماَ) اگر مکافی کے باہر ہے تو خطوطِ مماس حقیقی ہونگے، اگر نقطہ مکافی پر

ہو گا تو خطوطِ مماس منطبق ہونگے اور اگر اندر ہو گا تو خیالی۔

۶۰ (ا) کسی نقطہ سے مکافی پر دو خطوطِ مماس جو کھینچے جا سکتے ہیں ان کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات۔

فرض کرو نقطہ لاَ، ماَ سے خطوطِ مماس کھینچے گئے ہیں اور خطِ مکافی کے ساتھ ان کے نقاط تماس بالترتیب عم۱، بم۱ اور عم۲، بم۲ ہیں۔

(عم۱، بم۱) اور (عم۲، بم۲) پر کے خطوط مماس کی مساواتیں

ما بم۱ = ۲ ا (لا + عم۱) اور ما بم۲ = ۲ ا (لا + عم۲) ہیں۔

چونکہ نقطہ لاَ، ماَ ان دونوں خطوطِ مستقیم پر واقع ہے۔ لہٰذا

ماَ بم۱ = ۲ ا (لاَ + عم۱) ...... (۱) اور ماَ بم۲ = ۲ ا (لاَ + عم۲) ...... (۲)

لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں کہ (عم۱، بم۱) اور (عم۲، بم۲) نقطے خطِ مستقیم ما ماَ = ۲ ا (لاَ + لا) ...... (۳) پر واقع ہوں۔

پس مساوات (۳) نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

کسی نقطہ ف سے مکافی پر کھینچے ہوئے دو خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خطِ مستقیم کو ف کا قطبی بہ لحاظ مکافی کہتے ہیں۔

(ب) اگر مکافی کے لحاظ سے کسی نقطہ ف کا قطبی نقطہ ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزریگا۔

ف کے محددوں کو لا۱، ما۱ اور ق کے محددوں کو لا۲، ما۲ فرض کرو۔

نقطہ ف کے قطبی بہ لحاظ مکافی ما۲ = ۴ ا لا کی مساوات

ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱) ہے

اگر یہ خط نقطہ ق (یعنے لا۲، ما۲) میں سے گزرتا ہے تو ما۱ ما۲ = ۲ ا (لا۲ + لا۱)

اسس مساوات کے تشاکل سے واضح ہے کہ وہ اس شرط کو بھی ظاہر کرتی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گزرنا چاہیے۔

اس نتیجہ سے مستنبط ہوتا ہے (جیسا کہ دائرہ کی صورت میں بتایا گیا تھا) کہ اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ س پر ملتے ہیں تو س خطِ مستقیم ف، ق کا قطب ہے۔ چونکہ ماسکہ (ا، ۰) کے قطبی کی مساوات لا + ا = ۰ ہے لہذا

ماسکہ کا قطبی مکافی کا مرتّب ہے۔

اگر ق کسی نقطہ مرتّب پر واقع ہے تو ق ماسکہ س کے قطبی پر ہے۔ پس ق کا قطبی ماسکہ س میں سے گزریگا۔ پس اگر مرتّب کے کسی نقطہ سے مکافی پر خطِ مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاطِ تماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گزریگا۔

(ج) مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مکافی کے محور کے متوازی ہے۔

مکافی $\text{ما}^2 = ۴\text{ا}\,\text{لا}$ پر کے دو نقطوں $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات جیسا کہ ع ۵۹ (ج) میں بتایا گیا ہے۔

$$\text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2) - ۴\text{ا}\,\text{لا} - \text{ما}_1\,\text{ما}_2 = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$ ہے

اگر یہ خطِ مستقیم مکافی کے محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو

$$\text{مس طہ} = \frac{۴\text{ا}}{\text{ما}_1 + \text{ما}_2} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

لیکن اگر وتر کے وسطی نقطہ کے محدّد (لا، ما) ہوں تو

$۲\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2$ اور $۲\text{ما} = \text{ما}_1 + \text{ما}_2$

پس مساوات (۲) کی رُو سے $\text{مس طہ} = \frac{۴\text{ا}}{۲\text{ما}}$ یعنے $\text{ما} = ۲\text{ا}\ \text{مم طہ}$ ...(۳)

جس سے ظاہر ہے کہ جب تک طہ مستقل ہے ما بھی مستقل ہے۔

∴ مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مکافی کے محور کے متوازی ہے۔

[طریق دیگر۔ خطِ مستقیم ما = مر لا + ج مکافی ما^{2} − ۴ ا لا = ۰ کو جس مقام پر قطع کرتا ہے وہاں ۴ ا ما = مر ما^{2} + ۴ ا ج پس ما کی اصلیں اگر ما_1، ما_2 قرار دی جائیں تو ما_1 + ما_2 = $\frac{\text{۴ا}}{\text{مر}}$ اس لیے اگر وتر کے وسطی نقطہ کا معین ما ہے تو ج کی جملہ قیمتوں کے لیے ما = $\frac{\text{۲ا}}{\text{مر}}$]

تعریف۔ کسی مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کا طریق قطر کہلاتا ہے۔ جن وتروں کی یہ قطر تنصیف کرتا ہے اس کے **معین** کہلاتے ہیں۔

فصل ۵۹ (ا) میں ہم نے دیکھا ہے کہ مکافی کا قطر مکافی سے اس کے راس سے محدود فاصلہ پر صرف ایک ھی نقطہ پر ملتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر مکافی کو قطع کرتا ہے اس قطر کا سرا کہلاتا ہے۔

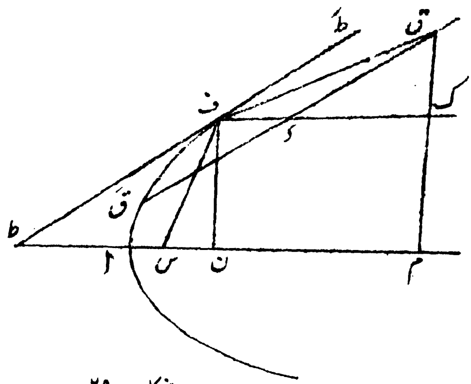
چونکہ قطر کے سرے پر کا مماس قطر کا وہ معین ہے جو مکافی سے دو منطبق نقطوں میں ملتا ہے اس لیے **مکافی کے قطر کے سرے پر کا خطِ مماس اُن وتروں کے متوازی ہے جن کی وہ قطر تنصیف کرتا ہے۔**

(د) مکافی کی مساوات جبکہ اس کا کوئی قطر اور اس کے سرے پر کا خطِ مماس محدد ما لئے جائیں۔

فرض کرو شکل (۲۹) میں ف مکافی کے قطر کا سرا ہے اور ف پر کا خطِ مماس محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب ن ف = ۲ ا مم طہ [فصل ۶۰ (ج)]

∴ ان = فن² / ۴ و = ا مم² طہ

فرض کرو نقطہ قَ کے محدد نئے محددوں کے لحاظ سے بالترتیب لا اور ما ہیں۔ قَ م مکافی کے محور پر علی القوائم کھینچو۔ اور اُسے مکافی کے قطر ف د کو نقطہ ک میں منقطع کرنے دو۔



شکل ع۲۹

تب م ق = ن ف + ک ق = ۲ ا مم طہ + ما جیب طہ . . . . (۱)

ا م = ان + ن م = ان + ف د + د ک = ا مم² طہ + لا + ما جم طہ . . . . (۲)

لیکن ق م² = ۴ ا × ا م

پس (۱) اور (۲) سے (۲ ا مم طہ + ما جیب طہ)² = ۴ ا (ا مم² طہ + لا + ما جم طہ)

یا ما² جیب² طہ = ۴ ا لا . . . . (۳)

لیکن ان = ا مم² طہ لہٰذا س ف = ا + ان = ا / جیب² طہ

∴ س ف یا ا / جیب² طہ کے لیے اَ لکھنے سے منحنی کی مساوات

ما² = ۴ اَ لا . . . . (۴)

چونکہ کسی منحنی کی مساوات کا درجہ اس کے محوروں کی تبدیلی سے نہیں بدلتا لہٰذا مکافی کی مساوات ما² - ۴ ا لا = ۰ اس کے محوروں میں خواہ کیسی ہی تبدیلی عمل میں آئے شکل (ل لا + م ما + ن)² + (لَ لا + مَ ما + نَ)² = ۰ اختیار کرتا ہے یعنے مکافی کی مساوات میں جبکہ وہ کوئی سے محوروں سے متعلق ہوتی ہے دوسرے درجہ کی رقمیں بشکل ایک مکمل مربع کے ہوتی ہیں۔

بصورت معکوس (ل لا + م ما + ن)^۲ + (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰ کی شکل کی کوئی سی مساوات جس میں دوسرے درجہ کی رقمیں بہ شکل ایک مکمل مربع کے ہوتی ہیں خط مکافی کو تعبیر کرتی ہیں۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰ پر مکافی پر کے کسی نقطہ کا عمود اسی نقطہ سے خط لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ پر کے عمود کے متناسب ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم ان خطوط کو لا اور ما کے نئے محور قرار دیں تو مکافی کی مساوات بشکل ما^۲ = پ لا میں تحویل ہو جاتی ہے۔ پس مساوات (ل لا + م ما + ن)^۲ + لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطر ل لا – م ما + ن = ۰ ہے اور اس قطر کے سرے پر کا خطِ مماس لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ ہے۔

(۵)۔ اگر کسی مکافی کی مساوات اس کے کسی قطر اور قطر کے سرے پر کے مماس کو محور مان کر ما^۲ – ۴ ا لا = ۰ قرار دی جائے تو (۱) خط ما = م لا + ا/م م کی تمام قیمتوں کے لیے مکافی کا ایک خط مماس ہو گا۔ (۲) مکافی کے کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے خطِ مماس کی مساوات ما ماَ – ۲ ا (لا + لاَ) = ۰ ہو گی۔ اسی طرح (۳) مکافی کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات ما ماَ – ۲ ا (لا + لاَ) = ۰ اور (۴) خط ما = م لا کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات ما = ۲ا/م ہو گی۔

واضح ہو کہ مصرحۂ بالا چار مسئلوں کے از سر نو ثبوت کی اس لیے ضرورت نہیں کہ ع ۵۹ (ب) اور (ج)، اور ع ۶۰ (ا) اور (ج)، کے نتائج، محور خواہ علی القوائم ہوں یا نہیں صحیح ہیں۔

مثال (۱)۔ مکافی کے دو ایسے خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کے طریق کی مساوات جو باہمدیگر ایک دیے ہوئے زاویہ پر مائل ہوں

خط ما = م لا + ا/م مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کا ایک مماس ہے م کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر لا، ما معلوم مانے جائیں تو مساوات م^۲ لا – م ما + ا = ۰ سے

ان ماسوں کی سمتیں دریافت ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
اگر اس دو درجی مساوات کی اصلیں م_1، م_2 ہوں تو

$$\text{م}_1 + \text{م}_2 = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \quad \text{اور} \quad \text{م}_1\text{م}_2 = \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

$$\therefore (\text{م}_1 - \text{م}_2)^2 = \frac{\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}}{\text{لا}^2}$$

لیکن اگر یہ دو خطوطِ ماس باہم گر زاویہ بناتے ہیں تو

$$\text{مس}\ \text{عہ} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\text{م}_2}$$

$$\therefore \text{مس}^2\ \text{عہ} = \frac{\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا}}{(\text{لا} + \text{ا})^2}$$

پس مطلوبہ طریق کی مساوات $\text{ما}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{لا} - (\text{لا} + \text{ا})^2\ \text{مس}^2\,\text{عہ} = 0$ ہے

مثال (۲)۔ مکافی کے دو ایسے عمادوں کے نقطۂ تقاطع کی مساوات جو باہم دیگر علی القوائم ہیں۔

م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} - 2\,\text{ا}\,\text{م} - \text{ا}\,\text{م}^3 \quad \ldots\ldots(1)$
مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کا ایک عماد ہے۔ اگر نقطہ (لا، ما) معلوم مانا جائے مساوات (۱) اس نقطہ میں سے گزرنے والے عمادوں کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہے۔
اگر اس مساوات کی اصلیں م_1، م_2، م_3 ہوں تو

$$\text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3 = -\frac{\text{ما}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots(2)$$

لیکن اگر ان میں سے دو عماد بالفرض م_1، م_2 علی القوائم ہیں تو

$$\text{م}_1\text{م}_2 = -1$$

پس مساوات (۲) کی رُو سے $\text{م}_3 = \frac{\text{ما}}{\text{ا}}$

لیکن م_3 مساوات (۱) کی ایک اصل ہے۔ لہذا $\text{ما} = \frac{\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ا}} - 2\,\text{ما} - \frac{\text{ما}^3}{\text{ا}^2}$

$$\therefore \text{ما}^2 = \text{ا}(\text{لا} - 3\,\text{ا})$$

سوالات ۸ (ب)

(۱) ثابت کرو کہ مکافی ما^2 = ا لا اور مکافی لا^2 = ب ما باہمدیگر زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{۳\,ا^{\frac{1}{3}}\,ب^{\frac{1}{3}}}{۲(ا^{\frac{2}{3}} + ب^{\frac{2}{3}})}$ پر متقاطع ہیں۔

(۲) اگر ف س ق ایک مکافی کا ماسکی وتر ہو اور ف ۱ مرتب سے نقطہ م پر ملے تو بتاؤ کہ م ق مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

(۳) ثابت کرو کہ مکافی کے دو ایسے نقطوں پر کے خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق جن کے معیّن باہمدیگر مستقل نسبت رکھتے ہیں ایک مکافی ہے۔

(۴) ایک مکافی کے وترِ خاص کے کسی نقطہ سے اس کے (یعنے وترِ خاص کے) سروں پر کے خطوطِ مماس پر عمود ڈالے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ ان عمودوں کے پیروں کو ملانے والا خط مکافی کو مس کرتا ہے۔

(۵) کسی نقطہ ط سے بہ لحاظ مکافی اس کے قطبی پر جو عمود ط ن کھینچا جاتا ہے محور سے نقطہ م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ط ن × ط م مستقل ہے تو ط کا طریق ایک مکافی ہے۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ اگر ط ن : ط م کی نسبت مستقل ہے تو اس صورت میں بھی طریق ایک مکافی ہے۔

(۶) بتاؤ کہ مکافی کے ایک ایسے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے ایک مکافی ہے۔

(۷) مکافی کے کسی نقطہ و میں سے کھینچا ہوا قطر اگر کسی وتر سے ف پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے خطوطِ مماس قطر سے ق، قَ پر ملیں تو بتاؤ کہ وف^2 = وق × وقَ

(۸) ثابت کرو کہ دائرہ لا^2 + ما^2 − ۲ ا لا − ۳ ا^2 = ۰ کے کسی نقطہ کا قطبی بہ لحاظ دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲ ا لا − ۳ ا^2 = ۰ مکافی ما^2 + ۴ ا لا = ۰ کو مس کریگا۔

(۹) اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کسی مکافی کا حائط ہو تو اس ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط مکافی کے محور کے متوازی ہو گا۔

(۱۰) اگر مکافی کے ماسکی وتر کے کسی نقطہ سے دو خطوط مماس کھینچے جائیں تو یہ خطوط مماس اس ماسکی وتر کے سروں پر کے خطوط مماس کے ساتھ مساوی مائل ہونگے۔

(۱۱) مکافی کے ایک ایسے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو جو مکافی کے راس کے مقابل ایک زاویۂ قائمہ بناتا ہے۔

(۱۲) مکافی کے تین نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد ایک نقطۂ و میں باہمدیگر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س ف + س ق + س ر + س ا = ۲ و م جس میں س مکافی کا ماسکہ ہے، ا اس کا راس ہے۔ اور و م نقطہ و سے راس پر کے خطِ مماس پر ڈالا ہوا عمود ہے۔

(۱۳) ثابت کرو کہ مکافی کے تین عمادوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ $\frac{ل^{۲}}{۲}(م_{۱} - م_{۲})(م_{۲} - م_{۳})(م_{۳} - م_{۱})(م_{۱} + م_{۲} + م_{۳})^{۲}$

(۱۴) مکافی کے کسی دو ماسکی وتروں کو قطر مان کر ان پر دائرے کھینچے جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مشترک وتر مکافی کے راس میں سے گزرتا ہے۔

(۱۵) اگر ا ب ج ایک مکافی کا اندرونی مثلث ہے اور اَ بَ جَ ایک ایسا مثلث ہے جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے متوازی کھینچے ہوئے تین خطوطِ مماس سے بنا ہے۔ بتاؤ کہ ا ب ج کے ضلعے اَ بَ جَ کے متناظر ضلعوں کے چہار چند ہونگے۔

(۱۶) ف گ مکافی $ما^{۲} - ۴ ل لا = ۰$ کے نقطہ ف پر کا عماد ہے۔ گ محور پر واقع ہے اور گ ف باہر کی طرف آگے کو ق تک بڑھایا گیا ہے اس طرح کہ ف ق = گ ف۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکافی ہے۔ اور ف اور ق جن مکافیوں پر واقع ہیں انکے اُن نقطوں پر کے خطوطِ مماس کے تقاطع کا طریق $ما^{۲}(لا + ۴ ل) + ۱۶ ل^{۳} = ۰$ ہے۔

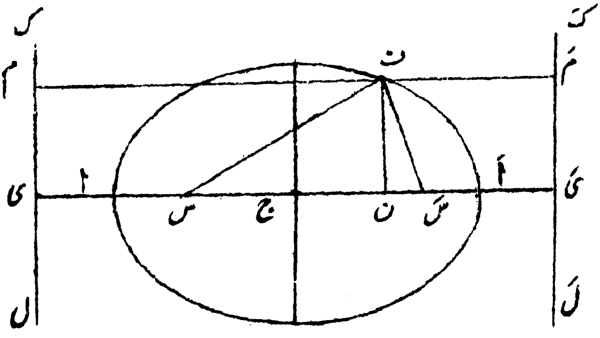
نواں باب

خطِ ناقص کی مساواتیں

۶۱- تعریف — جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے جو ماسکہ کہلاتا ہے ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جو کہ مرتب کہلاتا ہے) اکائی سے کمتر مستقل نسبت رکھتا ہے تو اس نقطہ کا طریق خطِ ناقص ہے۔

(ا) خطِ ناقص کی مساوات۔

فرض کرو س ماسکہ اور ک ل مرتب ہے (شکل ۳۰)۔ س ی مرتب



شکل ۳۰

پر عمود ڈالو۔ ی س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ $\frac{\text{س ا}}{\text{ا ی}}$ = ز جس میں

ز ایک سے کم ہے۔

ی س کو آگے بڑھانے پر ایک نقطہ اَ ایسا ہاتھ آئیگا جس کے لیے

$\frac{\text{س اَ}}{\text{ی اَ}} = \frac{\text{ز}}{\text{ا}}$ ، ج کو ا اَ کا وسطی نقطہ مانو اور ا اَ = ۲ ل

تب ا س = ز × ی ا اور س اَ = ز × ی اَ

∴ ا س + س اَ = ز (ی ا + ی اَ)

پس ۲ ا ج = ۲ ز × ی ج ∴ ی ج = $\frac{\text{ل}}{\text{ز}}$ .... (۱)

نیز س اَ − ا س = ز (ی اَ − ی ا)

یعنی ا اَ − ۲ ا س = ز × ا اَ

∴ س ج = ز × ا ج = ل × ز .... (۲)

اب نقطہ ج کو مبدا، ج اَ کو لا کا محور اور ج میں سے ایک خط ا اَ کا علی القوائم ما کا محور مانو۔

فرض کرو ف منحنی پر کوئی سا ایک نقطہ ہے اور اس کے محدد لا، ما ہیں

تب $\text{س ف}^2 = \text{ز}^2 \times \text{ف م}^2$ ∴ $\text{س ن}^2 + \text{ن ف}^2 = \text{ز}^2 \times \text{ی ن}^2$

لیکن س ن = س ج + ج ن = ل × ز + لا اور ی ن = ی ج + ج ن = $\frac{\text{ل}}{\text{ز}}$ + لا

پس $(\text{ل ز} + \text{لا})^2 + \text{ما}^2 = \text{ز}^2 (\text{لا} + \frac{\text{ل}}{\text{ز}})^2$ یعنی $\text{ما}^2 + \text{لا}^2 (1 - \text{ز}^2) = \text{ل}^2 (1 - \text{ز}^2)$

∴ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ل}^2 (1 - \text{ز}^2)} = 1$ .... (۳)

لا = ۰ لکھنے سے ما = $\pm \text{ل} \sqrt{(1 - \text{ز}^2)}$ یہ منحنی کے محور ما پر کے مقطوعات ہیں۔

اگر ان طولوں کو ± ب کہیں تو $\text{ب}^2 = \text{ل}^2 (1 - \text{ز}^2)$ .... (۴)

اور منحنی کی مساوات (۳) صورت $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ...... (۵)

اختیار کرلیتی ہے۔

وترِ خاص وہ وتر ہے جو ماسکہ میں سے مرتب کے متوازی کھینچا جاتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں لا = − ل ز لکھا جائے

تب $\text{ما}^2 = \text{ب}^2 (1 - \text{ز}^2) = \frac{\text{ب}^4}{\text{ل}^2}$ از روئے مساوات (۴)

پس نیم وترِ خاص کا طول = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ل}}$

مساوات (۵) میں ما کی قیمت ب سے بڑھ نہیں سکتی ورنہ لاَ^2 منفی مقدار ہو جائیگی۔ اِسی طرح لا کی قیمت ا سے بڑھ نہیں سکتی۔ پس خطِ ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہے۔

اگر لا عدداً ا سے کم ہو تو ما^2 مثبت مقدار ہوگی اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے ما کی دو مساوی اور بلحاظ علامت مختلف قیمتیں ہونگی۔ پس لا کا محور اِس منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اِسی طرح اگر ما عدداً ب سے کم ہو تو لا^2 مثبت مقدار ہوگی اور ما کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو مساوی اور باہمدیگر مخالف قیمتیں ہونگی۔ پس ما کا محور خطِ ناقص کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر لا کے محور پر سَ اور یَ دو ایسے نقطے لیے جائیں کہ ج سَ = س ج اور ج یَ = ی ج تو نقطہ سَ بھی منحنی کا ایک ماسکہ ہوگا اور یَ میں سے ج یَ پر علی القوائم کھینچا ہوا خط اس کا تناظر مرتب ہوگا۔

اگر (لاَ، ماَ) منحنی پر کا کوئی نقطہ ہو تو لاَ ماَ مساوات $\frac{\text{لاَ}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ماَ}^2}{\text{ب}^2}-1=0$ کی شرط کو پورا کریگا۔ اور ایسی صورت میں محدد - لاَ اور - ماَ کے لیے بھی یہ مساوات صادق آئیگی۔ لہذا نقطہ (- لاَ، - ماَ) بھی اس منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن (لاَ، ماَ) اور (- لاَ، - ماَ) نقطے مبداء میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم پر ہیں اور مبداء سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں۔ پس مبداء اس میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف کرتا ہے اور اِس لیے منحنی کا مرکز ہے۔

ماسکوں میں سے گزرنے والا وتر محورِ اعظم کہلاتا ہے اور مرکز میں سے اِس پر علی القوائم گزرنے والا وتر محورِ اقل کہلاتا ہے۔

(ب) ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی تعیین ——

شکل بالا میں چونکہ س ف = ز × ف م لہذا س ف = ز × ی ن

= ز (ی ج + ج ن) = ز $\left(\frac{\text{ا}}{\text{ز}} + \text{لا}\right)$ = ا + ز لا

اور $\text{س}'\text{ف} = \text{ز} \times \text{ن ی}' = \text{ز} (\text{ج ی}' - \text{ج ن}) = \text{ا} - \text{ز لا}$

پس $\text{س ف} + \text{س}'\text{ف} = ۲\,\text{ا}$

اس خواص کے مدنظر ناقص کی بعض اوقات یوں تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلوں کا حاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے۔

اِس تعریف سے آغاز کرکے ناقص کی مساوات حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ یہ مستقل حاصل جمع ۲ ا ہے اور ان دو ثابت نقطوں کا درمیانی فاصلہ ۲ ا ز ہے۔ اِن ثابت نقطوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء مانو اور اِس خط کو اور اس کے علی القوائم خط کو محدد قرار دو۔ تب منحنی کی مسلّمہ شرط کے بموجب

$$\sqrt{(\text{لا} - \text{ا ز})^2 + \text{ما}^2} + \sqrt{(\text{لا} + \text{ا ز})^2 + \text{ما}^2} = ۲\,\text{ا}$$

اس کو منطق بنانے پر $\text{ما}^2 + \text{لا}^2 (۱ - \text{ز}^2) = \text{ا}^2 (۱ - \text{ز}^2)$ اور یہ ناقص کی وہی مساوات ہے جو قبل ازیں دوسری تعریف کے ذریعہ سے حاصل کی گئی ہے۔

۹ (ج) خطِ ناقص کی قطبی مساوات۔

اگر مرکز کو قطب مانا جائے تو مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ میں لا کے عوض ر جم ط اور ما کے عوض ر جب ط لکھنے سے قطبی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ یہ مساوات

$$\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2} = ۱ \text{ ہے یعنی } \frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (۱)$$

مساوات (۱) صورت

$$\frac{۱}{\text{ر}^2} = \frac{۱}{\text{ا}^2} + \left(\frac{۱}{\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{ا}^2}\right) \text{جب}^2\,\text{ط} \quad \ldots\ldots (۲)$$

میں لکھی جا سکتی ہے۔

چونکہ $\frac{۱}{\text{ب}^2} - \frac{۱}{\text{ا}^2}$ مثبت ہے اِس لیے مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ $\frac{۱}{\text{ر}^2}$ کی اقل قیمت $\frac{۱}{\text{ا}^2}$ ہے۔ اور جیسے جیسے ط صفر سے بڑھ کر $\frac{\pi}{۲}$ ہوتا ہے ویسے ہی $\frac{۱}{\text{ر}^2}$ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے۔ اس کی اعظم قیمت $\frac{۱}{\text{ب}^2}$ ہوتی ہے۔ پس نیم قطر

سمتی ا سے گھٹ کر ب ہوتا جیسے ط صفر سے بڑھ کر $\frac{\pi}{۲}$ ہوتا ہے۔

[نوٹ — ہم نے دیکھا ہے کہ مرکز کو مبداء ماننے سے اُن تمام نقطوں کے لیے جو ناقص پر واقع ہیں $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - ۱ = ۰$۔ خط مکافی کی صورت میں جیسا کہ بتایا گیا تھا اسی طرح ناقص کے لیے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر لا، ما منحنی کے اندر کے کسی نقطہ کے محدد ہوں تو جملہ $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - ۱$ منفی ہوگا اور اگر وہ منحنی کے باہر کے کسی نقطہ سے متعلق ہوں تو $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - ۱$ مثبت ہوگا]۔

(د) کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم اور ناقص کے نقاطِ تقاطع کی تعیین اور اس خط کے منحنی کو مس کرنے کے شرائط۔

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات ما = م لا + ج ہے اور ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$۔

اس خط اور اس منحنی کے مشترک نقطوں کے لیے یہ دونوں مساواتیں صحیح ہونگی لہذا ان مشترک نقطوں پر $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{(\text{م لا} + \text{ج})^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$

یعنی $\text{لا}^{۲}(\text{ب}^{۲} + \text{ا}^{۲}\text{م}^{۲}) + ۲\,\text{م ج}\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا} + \text{ا}^{۲}(\text{ج}^{۲} - \text{ب}^{۲}) = ۰$۔

یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو اصلیں ہونگی حقیقی، منطبق یا خیالی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہونگی اور اُن کو خطِ مستقیم کی مساوات میں درج کرنے سے ما کی دو متناظر قیمتیں دریافت ہو جائینگی۔

لا کی دو قیمتیں باہمدیگر مساوی ہونگی اگر $\text{ا}^{۲}(\text{ج}^{۲} - \text{ب}^{۲})(\text{ب}^{۲} + \text{ا}^{۲}\text{م}^{۲}) = \text{م}^{۲}\text{ج}^{۲}\text{ا}^{۴}$

یعنی اگر $\text{ج}^{۲} = \text{ا}^{۲}\text{م}^{۲} + \text{ب}^{۲}$

پس اس صورت میں ما کی دو قیمتیں بھی مساوی ہونگی۔ پس دو نقطے جن میں دیا ہوا خطِ مستقیم ناقص کو منقطع کرتا ہے منطبق ہونگے اگر $\text{ج} = \pm\sqrt{\text{ا}^{۲}\text{م}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$

پس م کی جملہ قیمتوں کے لیے خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{م لا} \pm \sqrt{\text{ا}^{۲}\text{م}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$ دیے ہوئے ناقص کو مس کریگا۔ چونکہ جذر المربع کی علامت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے اس لیے واضح ہے کہ م کی ہر ایک قیمت کے لحاظ سے ناقص کے دو خطِ مماس ہوتے ہیں جو باہمدیگر متوازی ہیں۔ یہ دو متوازی خطِ مماس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر

واقع ہیں۔

(۵) ناقص پر کے کوئی سے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات اور منحنی کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات

فرض کرو ناقص پر کے دو نقطوں کے محدد لا₁، ما₁ اور لا₂، ما₂ ہیں۔ ان کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} \quad \text{ہے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

چونکہ یہ نقطے ناقص پر واقع ہیں اس لیے $\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = 1$ اور $\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} = 1$

پس $$\frac{\text{لا}_1^2 - \text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} = -\frac{\text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(۱) اور (۲) کے سیدھے جانب کے جملوں کو باہمدیگر ضرب دینے اور اسی طرح ان کے بائیں جانب کے جملوں کو باہمدیگر ضرب دینے سے

$$\frac{(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)}{\text{ا}^2} = -\frac{(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)}{\text{ب}^2}$$

یعنی $$\frac{\text{لا}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)}{\text{ب}^2} = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{لا}_1\,\text{لا}_2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2 + \text{ما}_1\,\text{ما}_2}{\text{ب}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)}{\text{ب}^2} = 1 + \frac{\text{لا}_1\,\text{لا}_2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ما}_2}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

پس ناقص کے نقطوں (لا₁، ما₁) اور (لا₂، ما₂) کو ملانے والے خطِ مستقیم یعنی وتر کی یہی مساوات ہے۔ مماس کی صورت میں لا₂ = لا₁ اور ما₂ = ما₁

پس $\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \ldots\ldots (4)$ (لا₁، ما₁) پر کے خطِ مماس کی مساوات ہے۔

نتائج صریح۔ (۱) محورِ اعظم کے سروں کے محدد (ا، ۰) اور (− ا، ۰) ہیں،

پس ازروئے مساوات (۳) اِن نقطوں پر کے خطوطِ مماس کی مساواتیں علی الترتیب لا = ا اور لا = - ا ہیں پس یہ مماس محورِ اقل کے متوازی ہیں ۔ اس طرح محورِ اقل کے سروں پر کے خطوطِ مماس محورِ اعظم کے متوازی ہیں ۔

(۲) ناقص کے کسی نقطہ لا٫ ما٫ پر کا خطِ مماس نقطہ (- لا٫ - ما٫) پر کے خطِ مماس کے متوازی ہے اور یہ دونوں نقطے منحنی کے مرکز میں سے گزرنے والے خط پر واقع ہیں ۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے خطوطِ مماس باہمدیگر متوازی ہیں ۔

(و) خط ل لا + م ما + ن = ۰ کے ناقص کو مس کرنے کی شرط ۔

مبداء کو ان نقطوں سے ملانے والے خط کی مساوات جہاں خطِ مستقیم ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو قطع کرتا ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ل لا} + \text{م ما}}{\text{ن}}\right)^2 = 0$$ ہے ۔

اس لیے کہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 = \left(\frac{\text{ل لا} + \text{م ما}}{\text{ن}}\right)^2$ پس $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ل لا} + \text{م ما}}{\text{ن}}\right)^2 = 0$ ---(۱)

جو ایک متجانس درجۂ دوم کی مساوات ہے اور اس لیے مبداء میں سے گزرنے والے دو خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے ۔

اگر دیا ہوا خط، ناقص کو دو منطبق نقطوں میں ملتا ہے تو مساوات (۱) دو منطبق خطوط کو تعبیر کریگی ۔ لہٰذا مساوات (۱) کے سیدھے جانب کا جملہ ایک مکمل مربع ہونا چاہیے ۔ اِس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$\left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ل}^2}{\text{ن}^2}\right)\left(\frac{1}{\text{ب}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ن}^2}\right) = \frac{\text{ل}^2\,\text{م}^2}{\text{ن}^4}$$

یعنی $\text{ا}^2\,\text{ل}^2 + \text{ب}^2\,\text{م}^2 = \text{ن}^2$ .... (۲)

[طریقہ دیگر۔ خطِ مستقیم کی مساوات سے $\text{ما} = -\frac{(\text{ل لا} + \text{ن})}{\text{م}}$

پس ناقص کی مساوات $\text{ب}^2\,\text{لا}^2 + \text{ا}^2\,\text{ما}^2 = \text{ا}^2\,\text{ب}^2$ میں ما کی یہ قیمت درج کرنے سے

$$\text{ب}^2\,\text{م}^2\,\text{لا}^2 + \text{ا}^2\,(\text{ل لا} + \text{ن})^2 = \text{ا}^2\,\text{ب}^2\,\text{م}^2$$

یعنی $(\text{ب}^2\,\text{م}^2 + \text{ا}^2\,\text{ل}^2)\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ا}^2\,\text{ل ن لا} + \text{ا}^2\,(\text{ن}^2 - \text{ب}^2\,\text{م}^2) = ۰$

$$\therefore \text{لا} = \frac{-۲\,\text{ا}^2\,\text{ل ن} \pm \sqrt{۴\,\text{ا}^4\,\text{ل}^2\,\text{ن}^2 - ۴\,\text{ا}^2\,(\text{ن}^2 - \text{ب}^2\,\text{م}^2)(\text{ب}^2\,\text{م}^2 + \text{ا}^2\,\text{ل}^2)}}{۲\,(\text{ب}^2\,\text{م}^2 + \text{ا}^2\,\text{ل}^2)}$$

لا کی دونوں اصلیں مساوی ہونے کے لیے علامت جذر المربع کے اندر کا جملہ صفر ہونا چاہیے۔

یعنی $\text{ا}^2\,\text{ل}^2\,\text{ن}^2 - (\text{ن}^2 - \text{ب}^2\,\text{م}^2)(\text{ب}^2\,\text{م}^2 + \text{ا}^2\,\text{ل}^2) = ۰$

$\therefore \text{ا}^2\,\text{ل}^2 + \text{ب}^2\,\text{م}^2 = \text{ن}^2$]

نتیجۂ صریح ۔ خطِ مستقیم $\text{لا جم ط} + \text{ما جب ط} - \text{ع}$ ناقص کو مس کریگا اگر

$$\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{ط} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط} = \text{ع}^2 \quad \ldots\ldots (۳)$$

(ز) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات۔

ناقص کے کسی نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات $\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = ۱$

اس مماس پر جو خطِ عمود ہوگا اس کی مساوات $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}\,\text{لا} - \frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ ہے

جس میں ج کوئی مستقل ہے۔ اس خاص علی القوائم خط کے لیے جو نقطہ $\text{لا}_1، \text{ما}_1$ میں سے گزرتا ہے

مساوات $\frac{\text{ما}_1\,\text{لا}_1}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}_1\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \text{ج} = ۰$ پس $\text{ج} - \text{ما}_1\,\text{لا}_1\left(\frac{۱}{\text{ا}^2} - \frac{۱}{\text{ب}^2}\right)$

پس ناقص کے نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کے عمود کی مساوات $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}\,\text{لا} - \frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}\,\text{ما} + \text{ما}_1\,\text{لا}_1\left(\frac{۱}{\text{ا}^2} - \frac{۱}{\text{ب}^2}\right) = ۰$ ہے

یعنی $\text{ما}_1\,\text{ا}^2\,\text{لا} - \text{لا}_1\,\text{ب}^2\,\text{ما} + \text{ما}_1\,\text{لا}_1\,(\text{ب}^2 - \text{ا}^2) = ۰$

یعنی $\text{ما}_1\,\text{ا}^2\,(\text{لا} - \text{لا}_1) = \text{لا}_1\,\text{ب}^2\,(\text{ما} - \text{ما}_1)$ ہے

جو بشکل $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}}$ لکھی جا سکتی ہے۔

(ح) کسی نقطہ سے ناقص پر دو خطِ مماس کھینچے جا سکتے ہیں جو بلحاظ اس کے کہ نقطہ ناقص کے باہر، ناقص کے اوپر یا اُس کے اندر ہو، حقیقی، منطبق یا خیالی ہوتے ہیں ۔

فصل (ث) میں بتایا گیا ہے کہ خطِ مستقیم جس کی مساوات $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \sqrt{\text{ل}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}$ ....(۱) ہے ناقص کو چھوتا ہے م کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔

خط (۱) نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے کے لیے $\text{ما}_1 = \text{م}\,\text{لا}_1 + \sqrt{\text{ل}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}$ ہونا چاہیے ۔

یعنی $(\text{ما}_1 - \text{م}\,\text{لا}_1)^2 - \text{ل}^2\text{م}^2 - \text{ب}^2 = 0$ یا $\text{م}^2(\text{لا}_1^2 - \text{ل}^2) - 2\text{م}\,\text{لا}_1\text{ما}_1 + \text{ما}_1^2 - \text{ب}^2 = 0$ .... (۱)

مساوات بالا دو درجی مساوات ہے جس سے ناقص کے ان خطوط مماس کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں ۔ دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطۂ لا، ما میں سے دو ہی خطِ مماس کھینچے جا سکینگے ۔

اِس مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہیں بلحاظ اس کے کہ

$$(\text{لا}_1^2 - \text{ل}^2)(\text{ما}_1^2 - \text{ب}^2) - \text{لا}_1^2\,\text{ما}_1^2$$

منفی، صفر یا مثبت ہے ۔ یا بالفاظِ دیگر بلحاظ اس کے کہ $\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} - 1$ مثبت، صفر یا منفی ہے ۔ یعنی بلحاظ اس کے کہ نقطہ (لا، ما) ناقص کے باہر ہے، اس کے اوپر ہے یا اس کے اندر واقع ہے ۔

(ط) کسی نقطہ سے ناقص پر کھینچے ہوئے دو خطِ مماس کے نقاطِ تماس میں سے گذرنے والے خط کی مساوات ۔

(لا، ما) محدّدوں والے نقطہ سے خطِ مماس کھینچو ۔ اور نقاطِ تماس کے محدّدوں کو علی الترتیب (ح، ک) اور (حَ، کَ) مانو ۔

(ح، ک) اور (حَ، کَ) پر کے خطوطِ مماس کی مساواتیں $\frac{\text{لا}\,\text{ح}}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ک}}{\text{ب}^2} = 1$ اور

$\frac{\text{لا}\,\text{ح}'}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ک}'}{\text{ب}^2} = 1$ ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (لا۱، ما۱) ان دونوں خطوں پر واقع ہے

پس $\frac{\text{لا}_1\,\text{ح}}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ک}}{\text{ب}^2} = 1$ ...... (۱) اور $\frac{\text{لا}_1\,\text{ح}'}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ک}'}{\text{ب}^2} = 1$ ...... (۲)

لیکن (۱) اور (۲) کے معائنہ سے واضح ہے کہ (ح، ک) اور (حَ، کَ) نقطے دونوں اس خطِ مستقیم پر واقع ہیں جس کی مساوات $\frac{\text{لا}_1\,\text{لا}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ما}}{\text{ب}^2} = 1$ ...... (۳) ہے

لہٰذا مساوات (۳) نقطہ (لا۱، ما۱) سے کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے۔

کسی نقطہ ف سے کسی ناقص تک کھینچے ہوئے دو خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کو ف کا قطبی بلحاظ ناقص کہتے ہیں۔

(ی) اگر کسی ناقص کے لحاظ سے نقطہ ف کا قطبی نقطہ ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزریگا۔

اِس کا ثبوت دائرہ اور مکافی والے مسئلہ کے ثبوت کے بالکل مشابہ ہے۔

(ک) ناقص کے باہم یگر علی القوائم دو خطِ مماس کے نقطہ تقاطع کا طریق۔

خطِ مستقیم جس کی مساوات $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2\,\text{م}^2 + \text{ب}^2}$ ہے ناقص کو مس کریگا م کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر ہم لا اور ما کو معلومہ تصور کریں تو یہ مساوات اُن خطوطِ مماس کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔

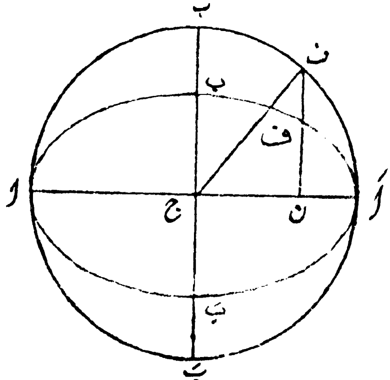
مساوات کو منطق بنانے سے وہ $\text{م}^2(\text{لا}^2 - \text{ا}^2) - 2\,\text{م}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2 - \text{ب}^2 = 0$ ہو جاتی ہے۔

فرض کرو اس مساوات کی اصلیں م_1 اور م_2 ہیں۔ خطوطِ مماس علی القوائم ہونگے اگر

$\text{م}_1\,\text{م}_2 = -1$ پس $\frac{\text{ما}^2 - \text{ب}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2} = -1$ یعنی $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$

پس مطلوبہ طریق کی یہی مساوات ہے - ظاہر ہے کہ یہ طریق ایک دائرہ ہے - اس کو ناقص کا **مرتب دائرہ** کہتے ہیں -

(ل) ناقص کے محورِ اعظم کو قطر مان کر اس پر جو دائرہ کھینچا جاتا ہے **امدادی دائرہ** کہلاتا ہے -



شکل ۳۱

اگر ناقص کی مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ مانی جائے تو اس کے امدادی دائرہ کی مساوات $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ا^2} = ۱$ ہوگی -

پس اگر ناقص کا کوئی سا معین ن ف آگے کو بڑھا کر امدادی دائرہ سے ف پر ملا دیا جائے تو اِن دونوں مساواتوں سے واضح ہے کہ

$$\frac{ن ج^2}{ا^2} + \frac{ن ف^2}{ب^2} = ۱ \quad \text{اور} \quad \frac{ن ج^2}{ا^2} + \frac{ن ف^2}{ا^2} = ۱$$

$$\text{پس} \quad \frac{ن ف^2}{ب^2} = \frac{ن ف^2}{ا^2} \quad \therefore \quad \frac{ن ف}{ن ف} = \frac{ب}{ا}$$

پس ناقص اور دائرہ کے معینوں کے درمیان ایک مستقل نسبت ہوتی ہے -

زاویہ اَ ج ف نقطۂ ف کا **خارج مرکزی زاویہ** کہلاتا ہے -

نقطۂ ف جو امدادی دائرہ پر واقع ہے ناقص کے نقطہ ف کا متناظر منصور ہوتا ہے۔
اگر زاویہ اَج ف کو فہ سے مخاطب کریں تو ف کے محدد ا جم فہ اور ا جب فہ ہونگے اور ف کے محدد ا جم فہ اور ب جب فہ

(م) ناقص کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویے اگر دیے جائیں تو اُن کو ملانے والے خط کی مساوات۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویے فہ_1 اور فہ_2 ہیں پس اِن نقطوں کے محدد ا جم فہ_1، ب جب فہ_1 اور ا جم فہ_2، ب جب فہ_2 ہیں اور اُن کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{ا جم فہ}_1 & \text{ا جب فہ}_1 & 1 \\ \text{ا جم فہ}_2 & \text{ا جب فہ}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ ہے۔

مقطعہ کو پھیلانے سے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}(\text{جب فہ}_1 - \text{جب فہ}_2) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}(\text{جم فہ}_2 - \text{جم فہ}_1) - \text{جب}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2) = 0$

اس مساوات کو جب $\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)$ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2) = \text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2) \quad ....(1)$$

یہی مطلوبہ مساوات ہے۔
فہ_1 خارج مرکز زاویہ والے نقطہ پر کی مساوات کے لیے مساوات (۱) میں $\text{فہ}_2 = \text{فہ}_1$ لکھو

تب $$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم فہ}_1 + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ}_1 = 1 \quad ....(2)$$

مساوات (۱) سے واضح ہے اگر ناقص پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویوں کا حاصل جمع مستقل اور ۲ عہ کے مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر ہمیشہ خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم عہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب عہ} = 1$ کے متوازی ہے۔ یعنی یہ وتر ہمیشہ خارج مرکزی زاویہ عہ والے نقطہ پر کے خطِ مماس کے متوازی ہے۔ اس کے بالعکس ناقص کے متوازی وتروں کے کسی نظام میں کسی بھی

وتر کے سروں پر کے خارج مرکزی زاویوں کا حاصل جمع مستقل ھے۔

(ن) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات اس نقطہ کے خارج مرکزی زاویہ کی رقموں میں ـ

فرض کرو نقطہ ف کا خارج مرکزی زاویہ فہ ہے۔ اس نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم فہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ} = 1$$

اس پر خط $\frac{\text{لا جب فہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ما جم فہ}}{\text{ا}} + \text{ج} = 0$ عمود ہوگا (جس میں ج ایک مستقل ہے) چونکہ یہ عمود نقطہ ف میں سے گزرتا ہے اس لیے مساوات میں لا اور ما کی قیمتیں (یعنی ا جم فہ اور ب جب فہ) درج کرنے سے

$$\frac{\text{ا جم فہ جب فہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ب جب فہ جم فہ}}{\text{ا}} + \text{ج} = 0$$

پس $\text{ج} = -\frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جب فہ جم فہ}}{\text{اب}}$

$$\therefore \frac{\text{لا جب فہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ما جم فہ}}{\text{ا}} - \frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{\text{اب}}\,\text{جب فہ جم فہ} = 0$$

یعنی $\text{ا لا جب فہ} - \text{ب ما جم فہ} - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جب فہ جم فہ} = 0$

لہذا $\frac{\text{ا لا}}{\text{جم فہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$

(س) ناقص کے خارج مرکزی زاویوں فہ_1، فہ_2 والے نقطوں پر کے خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کے محدد۔

فرض کرو کہ اس نقطہ کے محدد لا_1، ما_1 ہیں۔ چونکہ فہ_1، فہ_2 خارج مرکزی

زاویوں کے نقطوں کو ملانے والا وتر نقطہ لا، ما کا قطبی ہے لہذا اس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} - ۱ = ۰ \quad \text{ہے}$$

لیکن (م) کی مساوات (۱) یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2) = \text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)$ بھی اسی قطبی کی مساوات ہے۔

$$\text{پس}\quad \frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} = \frac{\text{جب فہ}_1 - \text{جب فہ}_2}{\text{جب}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{جم فہ}_1 - \text{جم فہ}_2}{\text{جب}(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2)}$$

$$\text{لہذا}\quad \frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} = \frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$$

[واضح ہے کہ فہ₁ خارج مرکزی زاویہ والے نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم فہ}_1 + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ}_1 - ۱ = ۰$ ہیں لا، ما کے عوض لا₁، ما₁ لکھکر اور اس طرح فہ₂ زاویہ والے نقطہ کے مماس کی مساوات ہیں بھی یہی عمل کرکے $\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}}$ اور $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}}$ کی قیمتیں اخذ کی جاسکتی ہیں۔ طالب علم کو چاہیے بطور مشق اس کی تصدیق کرے]۔

فہ₁، فہ₂ خارج مرکزی زاویوں والے نقطوں پر کے عمادوں کے نقطۂ تقاطع کے محدّد مساواتوں

$\frac{\text{ا لا}}{\text{جم فہ}_1} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}_1} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ اور $\frac{\text{ا لا}}{\text{جم فہ}_2} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}_2} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ کو لا اور ما کے لیے حل کرنے سے حسب ذیل برآمد ہوتے ہیں:۔

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}}\,\text{جم فہ}_1\,\text{جم فہ}_2\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$$

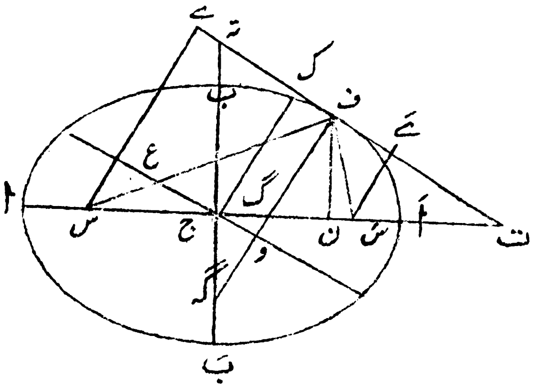
$$\text{ما} = \frac{\text{ب}^2 - \text{ا}^2}{\text{ب}}\,\text{جب فہ}_1\,\text{جب فہ}_2\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$$

طالب علم کو چاہیے اس کی تصدیق کرے۔

اب ہم ناقص کے چند ہندسی خواص ثابت کرینگے۔

شکل ۲۲ میں فرض کرو کہ نقطہ ف پر کا خطِ مماس لا اور ما کے محوروں سے

بالترتیب ت اور تہ پر ملتا ہے اور عماد ان محوروں سے گ اور گہ پر۔ س سے سَ سے، ج کی نقطہ ف پر کے مماس پر عمود گراؤ۔ مرکز ج میں سے ج ع



شکل ۳۲

نقطۂ ف پر کے مماس کے متوازی کھینچو جو عماد ف گ گہ سے نقطۂ و پر ملے اور ماسکی فاصلہ س ف سے ع پر۔

تب اگر نقطہ ف کے محدّد لا، ما ہوں تو ف پر کے خطِ مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \text{ .... (1) ہے}$$

جس نقطہ پر یہ محور لا سے ملتا ہے وہاں ما = ۰ اور اس نقطہ کے لیے از روئے

$$\text{مساوات (1)} \quad \frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{\text{ج ن} \times \text{ج ت}}{\text{ج اَ}^2} = 1$$

$$\text{یعنی ج ن} \times \text{ج ت} = \text{ج اَ}^2 \text{ .... (ع)}$$

$$\text{اور اسی طرح ن ف} \times \text{ج تہ} = \text{ج ب}^2 \text{ .... (ب)}$$

$$\text{ف پر کے عماد کی مساوات} \quad \frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}} \text{ .... (2)}$$

جہاں عما د لا کے محور کو منقطع کرتا ہے وہاں ما = ۰۔ پس از روئے مساوات (۲)

$لا - لا_1 = -\frac{ب^2}{ا^2} لا_1$ یعنی $لا = لا_1 \left(1 - \frac{ب^2}{ا^2}\right) = ز^2 لا_1$ $\therefore$ $ج گ = ز^2 \times ج ن$ .... (جہ)

نیز چونکہ $س گ = س ج + ج گ = از + ز^2 لا_1$ اور $گ سَ = از - ز^2 لا_1$

اس لیے $\frac{س گ}{گ سَ} = \frac{از + ز^2 لا_1}{از - ز^2 لا_1} = \frac{ا + ز لا_1}{ا - ز لا_1} = \frac{س ف}{سَ ف}$

پس ف گ زاویہ س ف سَ کی تنصیف کرتا ہے .... (ضہ)

چونکہ $ف گ^2 = گ ن^2 + ن ف^2 = (ج ن - ج گ)^2 + ن ف^2$

پس $ف گ^2 = ما_1^2 + لا_1^2 (1 - ز^2)^2$ یعنی $ف گ = ب \sqrt{\frac{ما_1^2}{ب^4} + \frac{لا_1^2}{ا^4}}$

اسی طرح $ف گہ = ا^2 \sqrt{\frac{لا_1^2}{ا^4} + \frac{ما_1^2}{ب^4}}$

اور $ف و = ک ج = \frac{1}{\sqrt{\frac{لا_1^2}{ا^4} + \frac{ما_1^2}{ب^4}}}$

$\therefore$ $ف و \times ف گ = ب^2$ اور $ف و \times ف گہ = ا^2$ ...... (صہ)

خطِ مستقیم جس کی مساوات $ما = مر لا + \sqrt{ا^2 مر^2 + ب^2}$ ...... (۳) ہے ناقص کو مس کریگا مر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔

پس اگر س ے، سَ ےَ ماسکوں سے خط (۳) پر ڈالے ہوئے عمود ہوں تو

$س ے = \frac{مر از + \sqrt{ا^2 مر^2 + ب^2}}{\sqrt{1 + مر^2}}$ اور $سَ ےَ = \frac{-مر از + \sqrt{ا^2 مر^2 + ب^2}}{\sqrt{1 + مر^2}}$

$\therefore$ $س ے \times سَ ےَ = \frac{ا^2 مر^2 + ب^2 - مر^2 ا^2 ز^2}{1 + مر^2} = ب^2$ ...... (شہ)

س میں سے خط (۳) پر عمود وار گزرنے والے خط کی مساوات $مر ما + لا + از = 0$ ...... (۴) ہے

(اس لیے کہ یہ مساوات $مر ما + لا +$ مستقل $= 0$ ہے اور چونکہ س کے محدد $- از$

اور صفر ہیں۔ لہذا مستقل کی قیمت ا ز ہے)

خطوط (۳) اور (۴) کے نقطۂ تقاطع ے کا طریق معلوم کرنے کے لیے ان دونوں مساواتوں میں سے م کو ساقط کرنا چاہیے۔ یہ مساواتیں بشکل ذیل لکھی جا سکتی ہیں۔

$$\text{ما} - \text{م}\,\text{لا} = \sqrt{\text{ا}^{2}\text{م}^{2} + \text{ب}^{2}} \quad \text{اور} \quad \text{م}\,\text{ما} + \text{لا} = -\,\text{ا}\,\text{ز}$$

$$\text{پس} \quad (\text{ما} - \text{م}\,\text{لا})^{2} = \text{ا}^{2}\text{م}^{2} + \text{ب}^{2} \quad \text{اور} \quad (\text{م}\,\text{ما} + \text{لا})^{2} = \text{ا}^{2}\text{ز}^{2}$$

ان دونوں مساواتوں کو جمع کرنے سے

$$(\text{ما}^{2} + \text{لا}^{2})(۱ + \text{م}^{2}) = \text{ا}^{2}\text{م}^{2} + \text{ب}^{2} + (\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2})$$

$$= \text{ا}^{2}(۱ + \text{م}^{2})$$

یعنی $(\text{ما}^{2} + \text{لا}^{2}) = \text{ا}^{2}$ پس ے کا طریق امدادی دائرہ ہے ...... (یہ)

اگر خط (۳) پر س' سے عمود س' ے' گرایا جاتا تو ے' کے لیے بھی یہی نتیجہ برآمد ہوتا۔

(ع) فرض کرو ف کوئی سا ایک نقطہ ہے اور خط ق ق' جو لا اور ما کے محوروں سے ت اور تہ نقطوں پر ملتا ہے، ف کا قطبی ہے۔ س ے، س' ے'، ج ک اور ف ط خط ق ق' پر عمود وار کھینچو۔ فرض کرو ف ط محوروں سے گ، گہ میں ملتا ہے۔ تب اگر ف کے محدد لا۱، ما۱ ہوں تو ق ق' کی مساوات

$$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_{۱}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_{۱}}{\text{ب}^{2}} = ۱ \quad \text{.........} \quad (۱) \ \text{ہوگی}$$

اور اس لیے خط ف ط گ کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_{۱}}{\frac{\text{لا}_{۱}}{\text{ا}^{2}}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_{۱}}{\frac{\text{ما}_{۱}}{\text{ب}^{2}}} \quad \text{.....} \quad (۲) \ \text{ہوگی}$$

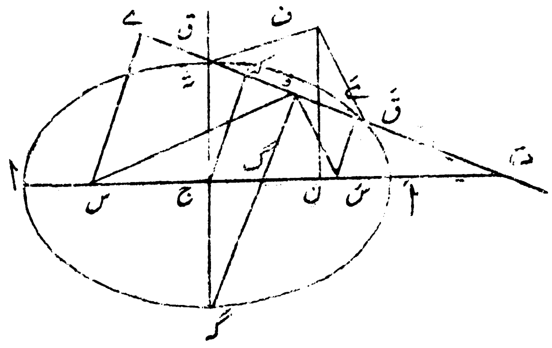
ان دونوں مساواتوں کے ذریعہ سابقہ فصل ۲۲ کے بعینہٖ ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(عہ) $\text{ج ن} \times \text{ج ت} = \text{ج ز}^{2}$، (بہ) $\text{ن ف} \times \text{ج تہ} = \text{ج ب}^{2}$

(جہ) $\text{ج گ} = \text{ز}^{2}\,\text{ج ن}$ اور (ضہ) $\text{ک ج} \times \text{ف گ} = \text{ب}^{2}$

۶۲ (ا) - ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے

وسطی نقطوں کا طریق ۔



شکل ۳۲

فہ۱ اور فہ۲ خارج مرکزی زاویوں کے نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)=\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1-\text{فہ}_2)$$ ہے۔

اگر یہ وتر خطِ مستقیم ما − مر لا = ۰ کے متوازی ہے تو $\text{مر}=-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{تم}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)$ ..... (۱) ہے

لیکن اگر (لا، ما) وتر کا وسطی نقطہ ہے تو $2\,\text{لا}=\text{ا}(\text{جم فہ}_1+\text{جم فہ}_2)=2\,\text{ا}\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1-\text{فہ}_2)$

اور $2\,\text{ما}=\text{ب}(\text{جب فہ}_1+\text{جب فہ}_2)=2\,\text{ب}\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1-\text{فہ}_2)$

پس $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2\,\text{مر}}$ ازروئے مساوات (۱)

لہٰذا خط ما = مر لا کے متوازی تمام وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\text{ما}=-\frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{مر}}$$ .... (۲) ہے

جس سے ظاہر ہے کہ ناقص کے تمام قطر اُس کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات (۲) کو اگر بشکل ما = مر′ لا لکھیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{مر}\,\text{مر}'=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ ..... (۳)

اس رابطہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ تمام وتر جو خط ما = م لا کے متوازی ہیں خط ما = مَ لا ان کی تنصیف کرتا ہے۔

پس اگر ناقص کا ایک قطر کسی دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کریگا۔

تعریف۔ دو قطر **مزدوج** کہلاتے ہیں جبکہ ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

کسی قطر کے سرے پر کا خطِ مماس اس قطر سے تنصیف پانے والے وتروں کا متوازی ہوتا ہے۔

متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ناقص کے ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ اس قطر کے سروں پر کے متوازی خطوطِ مماس بھی اس متوازی وتروں کے نظام کے ارکان سمجھے جا سکتے ہیں۔ اس لیے کہ یہ فی الحقیقت وتر ہی ہیں جو دو منطبق نقطوں میں ناقص سے ملتے ہیں۔

مثال (۱)۔ ناقص کے ایک قطر پر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج قطر کا متوازی ہے۔

اس لیے کہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرنے والا قطر لا ما۱ - ما لا۱ = ۰ ہے

اور (لا۱، ما۱) کا قطبی $\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} - 1 = 0$ ہے۔ یہ دونوں مساواتیں مزدوج قطروں کی شرط م مَ = $-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ کو پورا کرتی ہیں اس لیے کہ م = $\frac{\text{ما}_1}{\text{لا}_1}$ اور مَ = $-\frac{\text{ب}^2 \text{لا}_1}{\text{ا}^2 \text{ما}_1}$

پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اگر (لا۱، ما۱) ناقص کے کسی وتر کا وسطی نقطہ ہے تو وہ وتر (لا۱، ما۱) کے قطبی کا متوازی ہے۔

پس (لا۱، ما۱) وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات $\frac{(\text{لا} - \text{لا}_1)\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ما} - \text{ما}_1)\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 0$ ہے

مثال (۲)۔ اگر کسی ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں تو اُن کے وسطی نقطے ایک دوسرے ناقص پر ہونگے۔

کیونکہ ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ (لا، ما) وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات $\frac{(لا-لا_1)لا_1}{ا^2}+\frac{(ما-ما_1)ما_1}{ب^2}=0$ ہے۔

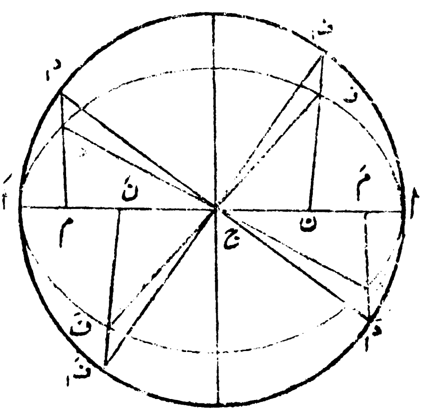
اگر یہ وتر دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) میں سے گزرتا ہے تو $\frac{(ھ-لا_1)لا_1}{ا^2}+\frac{(ک-ما_1)ما_1}{ب^2}=0$

لہٰذا نقطہ (لا، ما) ناقص $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}-\frac{ھ لا}{ا^2}-\frac{ک ما}{ب^2}=0$ پر واقع ہے۔

(ب) شکل ۳۴ میں فرض کرو ف، د ایک جوڑ مزدوج قطروں کے سرے ہیں۔ فرض کرو ف کے محدد لا$_1$، ما$_1$ ہیں اور د کے محدد لا$_2$، ما$_2$ ج ف اور ج د کی مساواتیں $\frac{ما}{ما_1}=\frac{لا}{لا_1}$ اور $\frac{ما}{ما_2}=\frac{لا}{لا_2}$ ہیں۔

پس (۱) کی مساوات (۳) کی رو سے $\frac{ما_1 ما_2}{لا_1 لا_2}=-\frac{ب^2}{ا^2}$

$$\therefore \frac{لا_1 لا_2}{ا^2}+\frac{ما_1 ما_2}{ب^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$



شکل ۳۴

اگر فہ$_1$، فہ$_2$ بالترتیب ف اور د کے خارج مرکزی زاویے ہوں تو
لا$_1$ = ا جم فہ$_1$، ما$_1$ = ب جم فہ$_1$ اور لا$_2$ = ا جم فہ$_2$ اور ما$_2$ = ب جب فہ$_2$

ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے جم فہ۱ جم فہ۲ + جب فہ۱ جب فہ۲ = ۰

یعنی مس فہ۱ = ۔مم فہ۲ ∴ π/۲ ۔ فہ۱ = ۔ فہ۲ پس فہ۱ ∼ فہ۲ = π/۲

لہٰذا ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویوں کا تفاوت ایک زاویہ قائمہ ہے۔

اگر ف ج فَ، د ج دَ ناقص کے قطروں ف ج فَ، د ج دَ کے متناظر امدادی دائرے کے قطر ہیں تو ف ج فَ اور د ج دَ باہمدیگر علی القوائم ہونگے۔ اس لیے د اور دَ کے محدّد فوراً ف اور فَ کے محدّدوں کی رقموں میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔

(ج) دو مزدوج نصف قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل اور ا۲ + ب۲ کے مساوی ہے۔

فرض کرو ف اور د ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں پر کے نقطے ہیں۔ اگر ف کا خارج مرکزی زاویہ فہ مانا جائے تو د کا خارج مرکزی زاویہ فہ ± π/۲ ہوگا۔

ف کے محدّد ا جم فہ، ب جب فہ ہونگے اور د کے محدّد ا جم (فہ ± π/۲)، ب جب (فہ ± π/۲)

∴ ج ف۲ = ا۲ جم۲ فہ + ب۲ جب۲ فہ

اور ج د۲ = ا۲ جم۲ (فہ ± π/۲) + ب۲ جب۲ (فہ ± π/۲)

∴ ج ف۲ + ج د۲ = ا۲ + ب۲

(د) ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پر مس کرنے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ مستقل اور ۴ ا ب کے مساوی ہے۔

فرض کرو ج ف، د ج دَ ناقص کے مزدوج قطر ہیں جو متوازی الاضلاع ناقص کو ف، فَ، د، دَ پر مس کرتا ہے اس کا رقبہ ۴ ج ف × ج د جب ف ج د یا ۴ ج د × ج ک ہے جس میں ج ک مرکز ج سے ف پر کے خطِ مماس پر گرایا ہوا عمود ہے (دیکھو شکل ۳۲)۔

اگر ف کا خارج مرکزی زاویہ فہ ہو تو د کا خارج مرکزی زاویہ فہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

$$\therefore \ \text{ج د}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\left(\text{فہ} \pm \frac{\pi}{2}\right) + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\left(\text{فہ} \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{یعنی ج د}^2 = \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور ف پر کے خطِ مماس کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم فہ} + \frac{\text{یا}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ} = ۱$

$$\therefore \ \text{ج ک}^2 = \frac{۱}{\frac{\text{جم}^2\text{فہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\text{فہ}}{\text{ب}^2}} = \frac{\text{ا}^2\,\text{ب}^2}{\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

پس (۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ ج د × ج ک = ا ب لہذا ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پہ تماس رکھنے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ ۴ ا ب کے مساوی ہے۔

(ہ) اگر ناقص کے دو مزدوج قطروں ج ف، ج د کے طول بالترتیب $\text{ل}_۱$، $\text{ل}_۲$ ہوں تو چونکہ ج ک = ج ف جب $\angle$ ج ف ک = $\text{ل}_۱$ جب ط جس میں ط = زاویہ ف ج د (یعنی مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ) اس لیے $\text{ل}_۱\,\text{ل}_۲$ جب ط = ا ب جس سے ظاہر ہے کہ جب ط اقل ہے جبکہ $\text{ل}_۱\,\text{ل}_۲$ اعظم ہے۔

لیکن دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل $(= \text{ا}^2 + \text{ب}^2)$ ہے۔ لہذا $\text{ل}_۱\,\text{ل}_۲$ کی قیمت اعظم ہوگی جبکہ یہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔ بدیں وجہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ حادہ اقل ہوتا ہے جبکہ یہ مزدوج قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

(و) فرض کرو ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں ف، د کے خارج مرکزی زاویے بالترتیب فہ اور فہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہیں۔

تب $\text{ج ف}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}$ اور $\text{ج د}^2 = \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ}$

$$\therefore \ \text{ج ف}^2 - \text{ج د}^2 = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم ۲فہ}$$

پس ج ف = ج د جبکہ فہ $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی

مساواتیں $\frac{لا}{ا} = \pm \frac{ما}{ب}$ ہیں (کیونکہ جم $\frac{\pi}{4}$ = جب $\frac{\pi}{4}$)

پس ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کی سمتیں اور اس کے محوروں کے سروں پر کے مماسوں سے بنے ہوئے مستطیل کے وتروں کی سمتیں باہمدیگر منطبق ہیں۔

(ز) تعریف۔ ناقص پر کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں کو ملانے والے دو خطوطِ مستقیم تکمیلی اوتار کہلاتے ہیں۔

ناقص کے کوئی سے دو تکمیلی وتر ایک جوڑ مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

ناقص پر کوئی نقطہ ق فرض کرو اور اس کو قطر ف ج فَ کے سروں ف اور فَ سے ملاؤ۔ اگر و اور وَ بالترتیب ق ف اور ق فَ کے وسطی نقطے ہیں تو ج وَ اور ج و مزدوج ہیں اس لیے کہ یہ ایک دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتے ہیں اور ج وَ اور ج و بالترتیب ق ف اور ق فَ کے متوازی ہیں۔
پس ق ف اور ق فَ ایک جوڑ مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

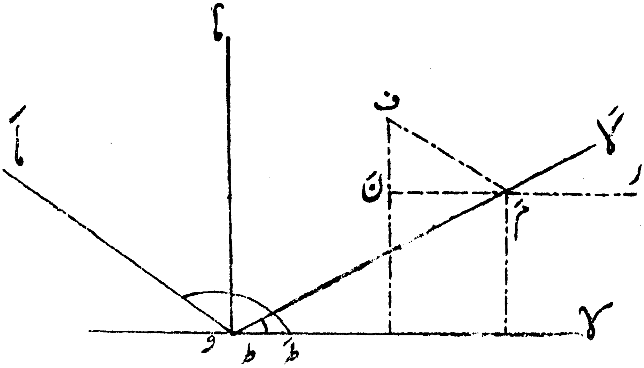
۶۳۔ ایک جوڑ مزدوج قطروں کو محور مان کر بآسانی ناقص کی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کے لیے ہمیں علی القوائم محور والے محدّدوں کو دیے ہوئے دوسرے محور والے محدّدوں کی رقموں میں ظاہر کرنے کی ضرورت ہے۔

(ا) فرض کرو شکل ۳۵ میں و لا، و ما علی القوائم محور ہیں اور و لاَ اور و ماَ جدید محور ہیں جن کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔

اگر ∠ لا و لاَ = طہ اور ∠ لا و ماَ = طہَ تو سہ = طہَ − طہ ہے۔

کسی نقطہ ف کے محدّد اول الذکر محوروں کے حوالہ سے لا، ما فرض کرو اور آخرالذکر کے حوالہ سے لاَ اور ماَ۔

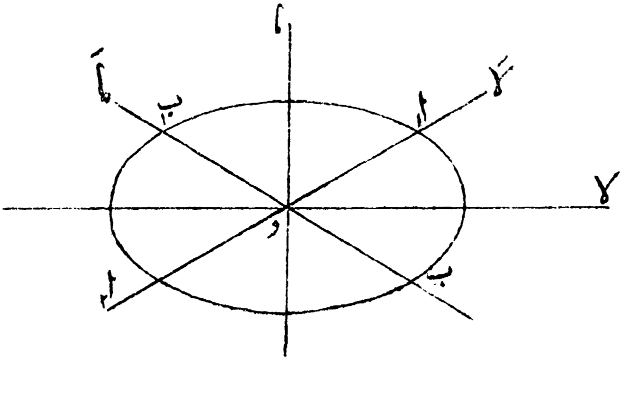
خط ف م محور و ما کے متوازی کھینچو ف مَ محور و ماَ کے متوازی مَ ن محور و ما کے متوازی اور ر مَ نَ محور و لا کے متوازی۔ تب ∠ ر مَ ف = طہَ



شکل ۳۵

چونکہ وم = ون + ن م = ونا + مَ نَ = ومَ جم طہ + مَ ثَ جم طَ
اور مف = م نَ + نَ ف = ن مَ + نَ ف = ومَ جب طہ + مَ ثَ جب طہ
لہذا لا = لاَ جم ط + ماَ جم طَ اور ما = لاَ جب طہ + ماَ جب طَ

(ب) فرض کرو شکل ۳۶ میں ا۱ ا۲ اور ب۱ ب۲ ناقص کے مزدوج قطر ہیں اور یہ محور مانے جاتے ہیں۔



شکل ۳۶

و لاَ ، و ماَ کے حوالہ سے ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ ..... (۱) ہے

$\angle$ لا و لاَ = ط اور $\angle$ ماَ و لا = طَ

پس لا = لاَ جم ط + ماَ جم طَ اور ما = لاَ جب ط + ماَ جب طَ ...... (۲)

۶۲۔ (ا) کی مساوات (۳) سے مس ط مس طَ = $-\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}}$

یعنی $\frac{\text{جم ط جم طَ}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب ط جب طَ}}{\text{ب}^{2}} = 0$ ...... (۳)

مساوات (۱) میں لا اور ما کی نئی قیمتیں درج کرکے ترتیب دینے سے

$$\left(\frac{\text{جم}^{2}\text{ط}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{ط}}{\text{ب}^{2}}\right)\text{لاَ}^{2} + 2\left(\frac{\text{جم ط جم طَ}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب ط جب طَ}}{\text{ب}^{2}}\right)\text{لاَ ماَ} + \left(\frac{\text{جم}^{2}\text{طَ}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{طَ}}{\text{ب}^{2}}\right)\text{ماَ}^{2} = 1$$

(۳) کی رو سے لاَ ماَ کا سر صفر ہے پس $\left(\frac{\text{جم}^{2}\text{ط}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{ط}}{\text{ب}^{2}}\right)\text{لاَ}^{2} + \left(\frac{\text{جم}^{2}\text{طَ}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{طَ}}{\text{ب}^{2}}\right)\text{ماَ}^{2} = 1$

اس مساوات میں ماَ کو صفر لکھنے سے نصف قطر و اَ کی قیمت $\frac{1}{\frac{\text{جم}^{2}\text{ط}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{ط}}{\text{ب}^{2}}}$ برآمد ہوتی ہے۔

جس کو ہم اَ^{2} سے تعبیر کرینگے۔ اسی طرح لاَ کو صفر لکھنے سے وبَ^{2} کی قیمت $\frac{1}{\frac{\text{جم}^{2}\text{طَ}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{طَ}}{\text{ب}^{2}}}$ ہوتی ہے۔

اگر اس کو بَ^{2} سے تعبیر کریں تو ناقص کی مساوات مزدوج قطروں کے حوالہ سے

$$\frac{\text{لاَ}^{2}}{\text{اَ}^{2}} + \frac{\text{ماَ}^{2}}{\text{بَ}^{2}} = 1 \text{ ہے}$$

پس $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ ناقص کی مساوات ہے جبکہ نصف طول اَ اور بَ والے مزدوج قطر کے حوالہ کے محور مانے جاتے ہیں۔

مثال (۱)۔ ناقص کے محورِ اعظم کے سروں پر کے خطوط مماس ناقص کے کوئی سے خط مماس سے ت اور تَ نقطوں پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ت تَ ہے ماسکوں میں سے گزریگا۔

فرض کرو ناقص کے کسی نقطہ کے محدد لاَ ، ماَ ہیں اِس نقطہ پر کے خط مماس کی

مساوات $\frac{\text{لا}\,\text{لاَ}}{\text{و}^{2}} + \frac{\text{ما}\,\text{ماَ}}{\text{ب}^{2}} - 1 = 0$ ہے یہ خطِ مماس خط لا = و سے جس مقام پر ملتا ہے وہاں $\text{ما} = \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ماَ}}\left(1 - \frac{\text{لاَ}}{\text{و}}\right)$ اور خط لا = - و سے جس مقام پر ملتا ہے

وہاں $\text{ما} = \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ماَ}}\left(1 + \frac{\text{لاَ}}{\text{و}}\right)$ -

پس دائرہ جس کا قطر تَ تَ ہے $(\text{لا} - \text{و})(\text{لا} + \text{و}) + \left\{\text{ما} - \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ماَ}}\left(1 - \frac{\text{لاَ}}{\text{و}}\right)\right\}\left\{\text{ما} - \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ماَ}}\left(1 + \frac{\text{لاَ}}{\text{و}}\right)\right\} = 0$ ہے

جو خط ما = ۰ کو ایسی جگہ قطع کرتا ہے جہاں $\text{لا}^{2} - \text{و}^{2} + \frac{\text{ب}^{4}}{\text{ماَ}^{2}}\left(1 - \frac{\text{لاَ}^{2}}{\text{و}^{2}}\right) = 0$ ہے -

چونکہ $\frac{\text{لاَ}^{2}}{\text{و}^{2}} + \frac{\text{ماَ}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ اس لیے یہ مقام تقاطع $\text{لا}^{2} - \text{و}^{2} + \text{ب}^{2} = 0$ ہیں یعنی ماسکے ہیں -

مثال (۲) اگر ناقص کوئی سا مزدوج قطروں کا جوڑ نقطہ ف پر کے خط مماس کو ت اور تَ نقطوں میں قطع کرے تو ثابت کرو کہ ت ف × ف تَ = ج د² جس میں ج د قطر ج ف کا مزدوج ہے - ج ف، ج د کو لا اور ما کے محور قرار دو، تب ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{و}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ ہوگی -

ف یعنی نقطہ (و، ۰) پر کے خط مماس کی مساوات لا = و ہے -

اگر ما = م لا، ما = مَ لا مزدوج قطروں کے کسی جوڑ کی مساواتیں ہوں تو $\text{م}\,\text{مَ} = -\frac{\text{ب}^{2}}{\text{و}^{2}}$ لیکن ف ت = م و اور ف تَ = مَ و ∴ ف ت × ف تَ = م مَ و²

∴ ت ف × ف تَ = ب²

مثال (۳) ثابت کرو کہ اگر کسی ناقص پر کے دو نقطوں ف_1، ف_2 سے اس کے محور اعظم و وَ پر عماد $\text{ف}_1\text{ن}_1$ اور $\text{ف}_2\text{ن}_2$ گرائے جائیں تو

$$\frac{\text{ن}_1\text{ف}_1^{2}}{\text{ن}_2\text{ف}_2^{2}} = \frac{\text{اَن}_1 \times \text{ن}_1\text{ا}}{\text{اَن}_2 \times \text{ن}_2\text{ا}}$$

فرض کرو ف۱ کے محدد (لا۱، ما۱) ہیں اور ف۲ کے محدد (لا۲، ما۲)۔

تب $\frac{لا_1^2}{ا^2} + \frac{ما_1^2}{ب^2} = ۱$ اور $\frac{لا_2^2}{ا^2} + \frac{ما_2^2}{ب^2} = ۱$

پس $\frac{ما_1^2}{ما_2^2} = \frac{ا^2 - لا_1^2}{ا^2 - لا_2^2} = \frac{(ا + لا_1)(ا - لا_1)}{(ا + لا_2)(ا - لا_2)}$

لیکن $ما_1 = ن_1ف_1$، $ا + لا_1 = اَج + ج ن_1 = اَن_1$ جس میں ج ناقص کا مرکز ہے
$ا - لا_1 = ج ا - ج ن_1 = ن_1 ا$، $ما_2 = ن_2 ف_2$، $ا + لا_2 = اَن_2$ اور $ا - لا_2 = ن_2 ا$

پس $\frac{ما_1^2}{ما_2^2} = \frac{اَن_1 \times ن_1 ا}{اَن_2 \times ن_2 ا}$

نویں باب کی مثالیں

(۱) اگر کسی ناقص کے مرکز پر کا عماد محور اعظم کا چوتھائی طول رکھتا ہے تو ناقص کی مساوات اور اس کا خروج مرکز دریافت کرو۔

(۲) $۲ لا^2 + ۳ ما^2 = ۱$ دیا جاتا ہے اس کے نصف محور ماسکے اور مرتب دریافت کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ ناقص میں (ا) محور اقل کا نصف ا س اور س اَ کا ایک اوسط متناسب ہے۔ (ب) ماسکہ پر کا عماد ا س اور اَس کا ایک موسیقی اوسط ہے۔ (ا اَ ناقص کا محور اعظم ہے اور س، سَ اس کے ماسکے ہیں)۔

(۴) ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2}$ کے ایسے خطوطِ مماس کی مساواتیں جو محوروں پر مساوی مقطوعے بناتی ہیں۔

$لا \pm ما \pm \sqrt{ا^2 + ب^2} = ۰$ ہیں۔

(۵) اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ف کے ماسکی فاصلے س ف، سَ ف ہوں،

ج ناقص کا مرکز ہو اور ج د قطر ج ف کا مزدوج ہو تو بتاؤ کہ س ف × سَ ف = ج د²

(۶) ناقص کا محورِ اعظم ا ج اَ ہے۔ ناقص پر کے کسی نقطہ ف پر کا خط مماس نقطہ ا پر کے خط مماس سے نقطہ ی پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ی خط اَ ف کا متوازی ہے۔

(۷) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوطِ مستقیم سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک ناقص ہے۔ اور بتاؤ کہ اِن خطوط کے درمیانی زاویہ کی رقموں میں ناقص کا خروجِ مرکز کیا ہے۔

(۸) ف فَ ناقص پر دو ثابت نقطے ہیں اور ر اس پر کا کوئی ایک اور نقطہ ہے۔ وَ وَ خطوط ف ر، ق ر کے وسطی نقطے ہیں اور وگ، وَگَ بالترتیب ف ر، ق ر پر عمود ہیں اور محور سے گ، گَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ گ گَ مستقل ہے۔

(۹) ایک دیے ہوئے ماسکہ اور اُس کے متناظر مرتب کے ناقصوں کا ایک سلسلہ کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُن کے اقل محوروں کے سروں کا طریق ایک مکافی ہے۔

(۱۰) ف ن فَ ایک ناقص کا دوہرا معین ہے اور ق منحنی پر کوئی سا ایک نقطہ ہے۔ اگر ق ف، ق فَ محورِ اعظم سے علی الترتیب م، مَ نقطوں میں ملے تو ج م × ج مَ = ج ا²

(۱۱) ناقص کے ماسکوں میں سے گزرتے ہوئے مزدوج قطروں کے ایک جوڑ کے بالترتیب علی القوائم خطوط کھینچے جاتے ہیں جو نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

(۱۲) اگر ف، د مزدوج قطروں کے سرے ہیں اور نقطہ ف پر کا خط مماس محورِ اعظم کو نقطہ ت میں منقطع کرتا ہے اور نقطہ د پر کا مماس محورِ اقل کو تَ میں منقطع کرتا ہے تو بتاؤ کہ ت تَ مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک قطر کے متوازی ہوگا۔

(۱۳) ثابت کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کا عماد خطِ مماس پر مرکز اور دونوں ماسکوں پر سے ڈالے ہوئے عمودوں کا چوتھا متناسب ہے۔

(۱۴) ف ن فَ ناقص کا ایک دوہرا معین ہے اور ف پر کا عماد

ج فَ سے نقطہ و پر ملتا ہے۔ثابت کرو کہ و کا طریق ایک ناقص ہے۔

(۱۵) اگر ناقص کے کسی نقطہ ف پر کا عماد محورِ اعظم کو نقطہ گ پر قطع کرے تو بتاؤ کہ ف کی مختلف وضعوں کے لیے ف گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک ناقص ہوگا۔

(۱۶) ناقص کے کوئی سے دو قطروں کے دو سروں کو ملانے والا خط، اِن کے مزدوج قطروں کے دو سروں کو ملانے والے خط کا یا متوازی ہے یا مزدوج۔

(۱۷) اگر ناقص کے تین نقطوں پر جن کے خارج مرکزی زاویے ف۱، ف۲، ف۳ ہیں خطوطِ مماس کھینچے جائیں تو ان خطوط سے جو مثلث بنیگا اُس کے بیرونی دائرہ کا قطر

$$\frac{ط_1 ط_2 ط_3}{۳۲ \; ا ب} \; قط \; \frac{ف_2 - ف_3}{2} \; قط \; \frac{ف_3 - ف_1}{2} \; قط \; \frac{ف_1 - ف_2}{2} \; ہے$$

جس میں ط۱، ط۲، ط۳ ناقص کے اُن قطروں کا طول ہے جو مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں اور اَ، ب ناقص کے نصف محور ہیں۔

(۱۸) اگر ف، ق ناقص کے باہمدیگر علی القوائم خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس ہیں اور فَ، قَ امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطے ہیں تو ثابت کرو کہ ج فَ، ج قَ ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

(۱۹) دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اس نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کی حرکت میں اُس سے اُن دائروں تک کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔

(۲۰) ناقص پر دو علی القوائم خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں۔ وترِ تماس کے وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

(۲۱) ناقص کے مستقل طول کے تمام وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو۔

(۲۲) ناقص کے کوئی سے دو قطروں کے سروں پر کے خطوطِ مماس سے پیدا ہونے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ، نقاطِ تماس کو ملانے سے تیار ہونے والے متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس بدلتا ہے۔

(۲۳) اگر ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں سے عماد کھینچے جائیں تو ان کے نقطۂ تقاطع میں سے محورِ اعظم کے متوازی کھینچا ہوا خط اِس وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

دسواں باب

خط زائد کی مساواتیں

۱۶۳۔ تعریف ــ جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے (جو ماسکہ کہلاتا ہے)، ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جو کہ مرتّب کہلاتا ہے) اکائی سے زائد مستقل نسبت رکھتا ہے تو اِس نقطہ کا طریق **خطِ زائد** ہے۔

(ا) **خطِ زائد کی مساوات** ــ فرض کرو کہ شکل ۳۷ میں س ماسکہ اور ی م مرتّب ہے۔ س ی مرتب پر عمود کھینچو۔ ی س کو نقطہ ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ س ا / ا ی = ز / ۱ جس میں ز ایک سے زائد عدد ہے۔ تب ا منحنی پر کا ایک نقطہ ہوگا۔

س ی کو آگے بڑھانے سے ایک دوسرا نقطہ اَ ایسا ہاتھ آئیگا جس کے لیے س اَ / ی اَ = ز / ۱، ج کو ا اَ کا وسطی نقطہ مانو اور طول ا اَ کو ۲ ل

تب س ا = ز × ا ی اور س اَ = ز × ی اَ

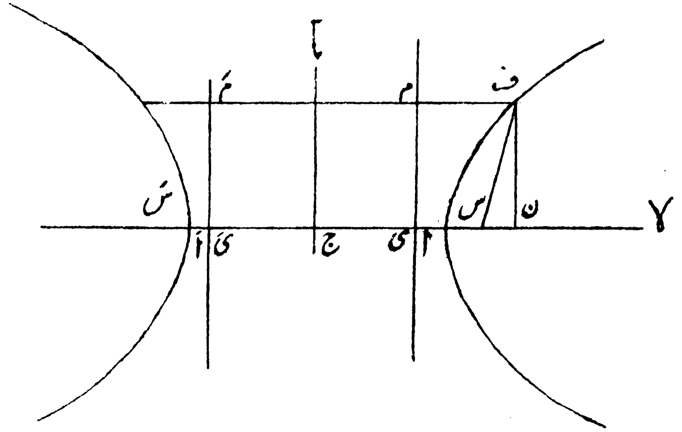
∴ س ا + س اَ = ز (ا ی + ی اَ)

پس ۲ س ج = ۲ ز × ا ج ∴ ج س = ز × ل .... (۱)

نیز س اَ − س ا = ز (ی اَ − ا ی)

یعنی ا اَ = ز (ا اَ − ۲ ا ی)

∴ اج = ز × ی ج یعنی ج ی = $\frac{\text{ا}}{\text{ز}}$ .... (۲)



شکل ۳۷

ج کو مبدا فرض کرو، ج ا کو لا کا محور مانو اور ج ما کو جو ا اَ پر علی القوائم ہے ما کا محور۔ فرض کرو ف منحنی پر کا کوئی سا نقطہ ہے اور اس کے محدد لا، ما ہیں،

تب $\text{س ف}^2 = \text{ز}^2 \times \text{ف م}^2$ یعنی $\text{س ن}^2 + \text{ن ف}^2 = \text{ز}^2 \times \text{ی ن}^2$

لیکن س ن = ج ن − ج س = لا − ا × ز

اور ی ن = ج ن − ج ی = لا − $\frac{\text{ا}}{\text{ز}}$

∴ $(\text{لا} - \text{ا} \times \text{ز})^2 + \text{ما}^2 = \text{ز}^2 \left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{ز}}\right)^2$

یعنی $\text{ما}^2 + \text{لا}^2 (1 - \text{ز}^2) = \text{ا}^2 (1 - \text{ز}^2)$، لہٰذا $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2(1-\text{ز}^2)} = 1$ ..... (۳)

چونکہ ز کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے اس لیے $\text{ا}^2 (1 - \text{ز}^2)$ منفی ہے۔
پس اگر $\text{ا}^2 (1 - \text{ز}^2)$ کے عوض $-\text{ب}^2$ لکھا جائے تو منحنی کی مساوات

$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ .... (۴) ہو جاتی ہے۔

قطع زائد کے **وتر خاص** سے مُراد وہ وتر ہے جو اس کے ماسکہ میں سے مرتب کے

متوازی کھینچی جائے ۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۴) میں لا = ا × ز لکھو۔

تب $\text{ما}^2 = \text{ب}^2(\text{ز}^2 - 1) = \frac{\text{ب}^4}{\text{ا}^2}$ اس لیے کہ $\text{ب}^2 = \text{ا}^2(\text{ز}^2 - 1)$

پس نصف وتر خاص کا طول $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$ ہے۔

مساوات (۴) میں لا^2 کی قیمت ا^2 سے کم نہیں ہو سکتی ورنہ ما^2 منفی مقدار ہوگی۔ جس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ قطع زائد کا کوئی حصہ لا = − ا اور لا = ا کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

اگر لا کی قیمت ا سے زائد ہو تو ما^2 مثبت مقدار ہوگی اور لا کی کسی خاص قیمت کے لیے ما کی دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہونگی۔ لہذا لا کا محور منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں پر تقسیم کرتا ہے۔

ما کی کسی بھی قیمت کے لیے لا^2 مثبت ہے اور ما کی کسی خاص قیمت کے لیے لا کی دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہونگی۔ پس ما کا محور بھی منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر لا کے محور پر سَ اور یَ ایسے نقطے لیے جائیں کہ ج سَ = س ج اور ج یَ = ی ج نقطہ سَ بھی منحنی کا ایک ماسکہ ہوگا اور یَ میں سے ج یَ کے علی القوائم جو خط کھینچا جائیگا اس ماسکہ کا متناظر مرتب ہوگا۔

اگر (لاَ، ماَ) کوئی سا ایک نقطہ ہے جو قطع زائد پر واقع ہے تو واضح ہے کہ نقطہ (− لاَ، − ماَ) بھی اسی منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن مصرحۂ بالا دو نقطے مبداء میں سے گزرنے والے خط مستقیم پر واقع ہیں اور مبداء سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں۔ لہذا مبداء میں سے قطع زائد کا جو کوئی وتر کھینچا جاتا ہے مبداء اس کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے منحنی کا مرکز کہلاتا ہے۔

مساوات (۴) سے یہ بھی ہویدا ہے کہ اگر لا^2 کی قیمت ا^2 سے زائد ہو تو ما^2 ایک مثبت مقدار ہوگی اور جیسے جیسے لا^2 کی قیمت بڑھتی جائیگی ویسے ما^2 کی قیمت بھی بڑھتی جائیگی۔ اور لا اور ما کے اس طرح بڑھتے جانے کی کوئی حد یا انتہا نہیں ہے۔ پس اس منحنی کی عام شکل ایسی ہی ہے جیسے کہ شکل ۳۷ع میں

بتائی گئی ہے۔ یعنی وہ دو نامتناہی بڑی شاخوں پر مشتمل ہے۔
۲ ا قطع زائد کا **قاطع محور** کہلاتا ہے۔ ۲ ا کے علی القوائم ج میں سے گزرنے والا خط منحنی سے کسی حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے۔ لیکن اگر اس خط پر ب اور ب' دو ایسے نقطے لیے جائیں کہ ب ج = ج ب' = ب تو خط ب ب' **مزدوج محور** کہلاتا ہے۔

(ب) قطع زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی تعیین —

شکل ۳۷ میں چونکہ س ف = ز × ف م

لہذا س ف = ز × ی ل = ز (ج ل − ج ی) = ز $(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{ز}})$ = ز × لا − ا

اس طرح س' ف = ز × م' ف = ز (ج ل + ی' ج) = ز $(\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{ز}})$ = ز × لا + ا

پس س' ف − س ف = ۲ ا

(قبل ازیں نویں باب میں بتایا گیا تھا کہ قطع ناقص کے لیے س ف + س' ف = ۲ ا)

(ج) اگر مرکز کو قطب مان کر قطع زائد کی قطبی مساوات معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کی کارٹیزی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ میں بجائے لا کے ر جم طہ اور بجائے ما کے ر جب طہ لکھنا چاہیے۔ تب

$$\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{یعنی} \quad \frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2} \quad \ldots (1)$$

جس کو $\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} - \left(\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}\right)\text{جب}^2\,\text{طہ} \quad \ldots (2)$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس مساوات کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ جب طہ کی قیمت صفر ہوتی ہے تو $\frac{1}{\text{ر}^2}$ اعظم ہے۔ اور اس لیے ر اقل ہے۔ جیسے جیسے طہ بڑھتا جاتا ہے کسر $\frac{1}{\text{ر}^2}$ گھٹتی ہے اور اس کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ جبکہ $\text{جب}^2\,\text{طہ} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$۔ پس طہ کی اس قیمت پر ر نامتناہی بڑا ہوتا ہے۔ اگر جب² طہ کی قیمت $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ سے زیادہ ہو تو $\frac{1}{\text{ر}^2}$ منفی مقدار ہوگی یعنی جو نیم قطری سمتی محور کے ساتھ $\text{جب}^{-1}\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ سے بڑھ کر زاویہ بناتا ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے۔

(د) قطعِ ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو نتائج اخذ کیے گئے تھے ان میں سے اکثر قطعِ زائد پر بھی صادق آتے ہیں۔ ان کے ثبوت کے لیے صرف ب^2 کی علامت تبدیل کر دینا کافی ہے۔ بدیں وجہ یہ نتائج یہاں محض قلمبند کیے جاتے ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ سابقہ باب کی متناظر دفعوں میں ان کا حوالہ دیکھ لے۔

(۱) خط $\text{ما} = \text{م لا} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 - \text{ب}^2}$، م کی جملہ قیمتوں کے لیے خطِ زائد کا خطِ مماس ہے۔

(۲) نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے خطِ مماس کی مساوات $\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$ ہے۔

(۳) نقطہ (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات $\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$ ہے

(۴) نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے عمود کی مساوات $\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{-\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}}$ ہے

(۵) خط $\text{ل لا} + \text{م ما} = \text{ن}$ خطِ زائد کو مس کرے گا اگر $\text{ا}^2\text{ل}^2 - \text{ب}^2\text{م}^2 = \text{ن}^2$

(۶) خط $\text{لا جم ھ} + \text{ا جب ھ} = \text{ع}$ منحنی کو مس کریگا اگر $\text{ع}^2 = \text{ا}^2\text{جم}^2\text{ھ} - \text{ب}^2\text{جب}^2\text{ھ}$

(۷) خطِ زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ ہے۔ واضح ہے کہ یہ مرتب دائرہ محض خیالی ہوتا ہے جبکہ ا کی قیمت ب سے کم ہو۔ اور صفر ہو جاتا ہے جبکہ $\text{ا} = \text{ب}$

(۸) خطِ ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو ہندسی مسائل ثابت کیے گئے تھے وہ خطِ ناقص پر بھی صادق آتے ہیں۔

(۹) خط $\text{ما} = \text{م لا}$ کے متوازی تمام وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق $\text{ما} = \text{مَ لا}$ ہے جس میں $\text{م مَ} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$

(۱۰) خطوط $\text{ما} = \text{م لا}$ اور $\text{ما} = \text{مَ لا}$ مزدوج ہیں اگر $\text{م مَ} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ یہ دونوں قطر منحنی سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلوں یا مقطوعوں کی مساواتیں

$$\text{لا}^2\left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}\right) = 1 \quad \text{اور} \quad \text{لا}^2\left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{مَ}^2}{\text{ب}^2}\right) = 1$$

ہیں۔

پہلی مساوات سے لا کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر م کی قیمت $\frac{ب}{ا}$ سے کمتر ہو۔ اور دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر مَ کی قیمت $\frac{ب}{ا}$ سے کمتر ہو۔ لیکن چونکہ م مَ = $\frac{ب^2}{ا^2}$ اس لیے م اور مَ دونوں $\frac{ب}{ا}$ سے کمتر نہیں ہو سکتے اور نہ دونوں اس سے زائد ہو سکتے ہیں۔ پس خطِ زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر اس منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقطوں میں۔

اگر م = ± $\frac{ب}{ا}$ تو دونوں مزدوج قطر باہمی منطبق ہو جاتے ہیں۔

(و) فرض کرو ف اور د مزدوج قطروں کے ایک جوڑ کے سرے ہیں۔ ف کے محدد $لا_1$، $ما_1$ ہیں اور د کے $لا_2$، $ما_2$۔ ابھی ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ان دو نقطوں میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا نقطہ خیالی ہوگا۔

ج ف اور ج د کی مساواتیں $\frac{ما}{ما_1} = \frac{لا}{لا_1}$ اور $\frac{ما}{ما_2} = \frac{لا}{لا_2}$ ہیں

پس ازروئے نتیجہ ۹ (د)

$$\frac{لا_1 لا_2}{ا^2} - \frac{ما_1 ما_2}{ب^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

پس $$\frac{لا_1^2 لا_2^2}{ا^4} = \frac{ما_1^2 ما_2^2}{ب^4}$$

چونکہ ($لا_1$، $ما_1$) اور ($لا_2$، $ما_2$) دونوں نقطے منحنی پر واقع ہیں۔ لہٰذا

$$\frac{لا_2^2}{ا^2}\left(1+\frac{ما_1^2}{ب^2}\right) = \left(1-\frac{لا_2^2}{ا^2}\right)\frac{ما_1^2}{ب^2} \quad یا \quad \frac{لا_2^2}{ا^2} = -\frac{ما_1^2}{ب^2}$$

$\therefore$ $لا_2 = \pm \frac{ا}{ب} ما_1 \sqrt{-1} \ldots$ (۲) اور اس لیے ازروئے (۱)، $ما_2 = \pm \frac{ب}{ا} لا_1 \sqrt{-1} \ldots$ (۳)

(۲) اور (۳) مساواتوں سے $ج ف^2 + ج د^2 = لا_1^2 + ما_1^2 - \frac{ا^2}{ب^2} ما_1^2 - \frac{ب^2}{ا^2} لا_1^2$

$$= ا^2\left(\frac{لا_1^2}{ا^2} - \frac{ما_1^2}{ب^2}\right) - ب^2\left(\frac{لا_1^2}{ا^2} - \frac{ما_1^2}{ب^2}\right) = ا^2 - ب^2$$

پس قطع ناقص کی طرح قطع زائد کے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا **حاصل جمع** مستقل ہے۔

(ز) تعریف - کسی منحنی کا **متقارب** ایک ایسا خطِ مستقیم ہے جو اس منحنی سے لاتناہی پر دو نقطوں میں ملتا ہے لیکن جو لاتناہی پر بالکلیہ واقع نہیں ہے۔

قطع زائد کے متقارب کی تعیین - خطِ مستقیم $\text{ا} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ جن نقطوں پر قطع زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} - \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کو قطع کرتا ہے ان کے فصلے مساوات

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} - \frac{(\text{م}\,\text{لا} + \text{ج})^2}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \text{یعنی} \quad \text{لا}^2\left(\frac{۱}{\text{ل}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}\right) - \frac{۲\,\text{مج}}{\text{ب}^2}\,\text{لا} - \frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2} - ۱ = ۰$$

سے دریافت ہوتے ہیں۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں نا متناہی ہو جاتی ہیں اگر لا^2 اور لا دونوں کے سر صفر ہوں۔ یعنی اگر $\frac{۱}{\text{ل}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2} = ۰$ اور $\text{مج} = ۰$
پس اس صورت میں $\text{ج} = ۰$ اور $\text{م} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ل}}$

لہذا قطع زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} - \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے دو حقیقی متقارب ہوتے ہیں جن کی مساواتیں $\text{ا} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ل}}\,\text{لا}$ ہیں۔ اگر ان کو ایک ہی مساوات میں لکھا جائے تو $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} - \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} = ۰$ ہے۔ ب، بَ میں سے خطوطِ مستقیم منحنی کے قاطع محور کے متوازی کھینچو اور ا، اَ میں سے خطوطِ مزدوج محور کے متوازی کھینچو۔ تب اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ منحنی کے متقارب شدہ مستطیل کے وتر ہیں۔

قطع ناقص کے کوئی حقیقی نقطے لاتناہی پر واقع نہیں ہیں اور اس لیے ناقص کے متقارب خیالی ہیں۔

فصل (ھ) کے آخری نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ قطع زائد کے متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک جوڑ پر واقع ہیں۔

متقارب کے متوازی کھنچا ہوا خط منحنی سے لاتناہی پر ایک نقطہ میں ملتا ہے۔

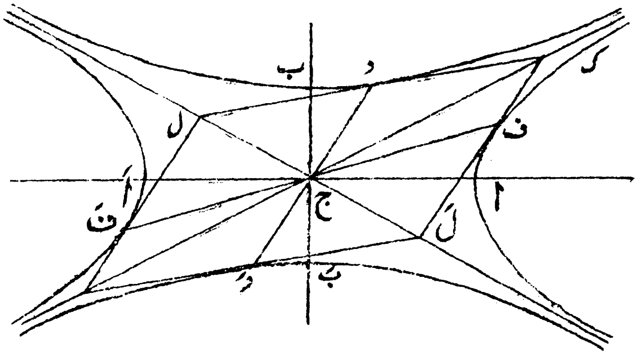
اس لیے کہ مساوات $\text{لا}^2\left(\frac{۱}{\text{ل}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}\right) - \frac{۲\,\text{مج}}{\text{ب}^2}\,\text{لا} - \frac{\text{ج}^2}{\text{ب}^2} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل نامتناہی ہو جاتی ہے اگر لا^2 کا سر صفر ہو۔ یہ شرط اس صورت میں پوری ہوتی ہے جبکہ $\text{م} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ل}}$ - پس خطِ مستقیم $\text{ا} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{ل}}\,\text{لا} + \text{ج}$ قطع زائد سے

لاتناہی پر ایک نقطہ میں ملتا ہے ج کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو ۔

(ح) جس قطع زائد کا قاطع محور ب بَ ہے اور مزدوج محور ا اَ اس کی مساوات

$$-\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \quad ....\quad (۱)$$

یہ قطع زائد اور $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ ...... (۲) مساوات کا ابتدائی قطع زائد باہم دگر مزدوج کہلاتے ہیں ۔ دیکھو شکل ۳۸



شکل ۳۸

ذیل میں مزدوج زائد قطعوں کے جوڑ کی چند مساواتیں درج کی جاتی ہیں :-

(۱) دونوں زائد قطعوں کے ایک ہی متقارب ہوتے ہیں ۔

(۲) اگر دو قطران دو زائد قطعوں میں سے ایک زائد قطع کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو وہ دوسرے زائد قطع کے لحاظ سے بھی مزدوج ہونگے جیسا کہ فصل ۶ و (۹) سے مستنبط ہوتا ہے ۔

(۳) مصرحہ بالا مزدوج زائد قطعوں کی مساواتیں جیسا کہ فصل (ح) میں بتایا گیا ہے، بشکل

$\frac{۱}{ر^2} = \frac{جم^2 ط}{ا^2} - \frac{جب^2 ط}{ب^2}$ اور $-\frac{۱}{ر^2} = \frac{جم^2 ط}{ا^2} - \frac{جب^2 ط}{ب^2}$ لکھی جا سکتی ہیں ۔

واضح ہے کہ اگر طہ کی کسی قیمت کے لیے $سر^۲$ ایک منحنی کے لیے مثبت ہے تو وہ دوسرے منحنی کے لیے منفی ہوگا۔

پس ہر ایک قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملیگا اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں میں ملیگا۔ معہذا ان دو منحنیوں کے نصف قطروں کے طول طہ کی جملہ قیمتوں کے لیے رابطہ $سر_۱^۲ = - سر_۲^۲$ کے ذریعہ مربوط ہیں۔

(۴) اگر دو مزدوج قطر مساوات (۲) اور مساوات (۱) والے منحنیوں کو علی الترتیب ف اور د نقطوں میں قطع کرتے ہیں تو $ج ف^۲ - ج د^۲ = ا^۲ - ب^۲$

فرض کرو ف کے محدد $لا_۱، ما_۱$ ہیں اور د کے محدد $لا_۲، ما_۲$

تب خطِ مستقیم ج ف اور ج د کی مساواتیں

$\frac{لا}{لا_۱} - \frac{ما}{ما_۱} = ۰$ اور $\frac{لا}{لا_۲} - \frac{ما}{ما_۲} = ۰$ ہیں

مزدوج قطروں کی شرط یعنی $م م' = \frac{ب^۲}{ا^۲}$ سے مساوات

$$\frac{لا_۱ لا_۲}{ا^۲} - \frac{ما_۱ ما_۲}{ب^۲} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$ حاصل ہوتی ہے

(اس لیے کہ $م = \frac{ما_۱}{لا_۱}$ اور $م' = \frac{ما_۲}{لا_۲}$ پس $\frac{ما_۱ ما_۲}{لا_۱ لا_۲} = م م' = \frac{ب^۲}{ا^۲}$)

پس $\frac{لا_۱^۲ لا_۲^۲}{ا^۴} = \frac{ما_۱^۲ ما_۲^۲}{ب^۴}$

اور چونکہ نقطہ ($لا_۱، ما_۱$) منحنی (۲) پر واقع ہے اور نقطہ ($لا_۲، ما_۲$) منحنی (۱) پر لہذا

$$\frac{لا_۱^۲}{ا^۲}\left(\frac{ما_۲^۲}{ب^۲} - ۱\right) = \frac{ما_۲^۲}{ب^۲}\left(\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} - ۱\right) \text{ یا } \frac{لا_۱^۲}{ا^۲} = \frac{ما_۲^۲}{ب^۲}$$

$\therefore \frac{ما_۲}{ب} = \pm \frac{لا_۱}{ا} \ldots\ldots (۴)$ اور اس لیے مساوات (۳) سے $\frac{لا_۲}{ا} = \pm \frac{ما_۱}{ب} \ldots\ldots (۵)$

پس $ج ف^۲ - ج د^۲ = لا_۱^۲ + ما_۱^۲ - لا_۲^۲ - ما_۲^۲$

$$= لا_۱^۲ + ما_۱^۲ - \frac{ا^۲}{ب^۲} ما_۱^۲ - \frac{ب^۲}{ا^۲} لا_۱^۲ = (ا^۲ - ب^۲)\left(\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} - \frac{ما_۱^۲}{ب^۲}\right)$$

$$\therefore ج ف^۲ - ج د^۲ = ا^۲ - ب^۲$$

[یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ج ف اور ج د مزدوج نصف قطر نہیں ہیں اس لیے کہ ف اور د ایک ہی قطع زائد پر واقع نہیں ہیں۔ خط د ج دَ ابتدائی قطع زائد کو دو خیالی نقطوں میں قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے د' دَ' فرض کیے جائیں تو مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ ج د'^{2} = − ج د^2]

(۵) ف، ف'، د، دَ پر کے خطوط مماس سے تیار شدہ متوازی الاضلاع کا رقبہ منتقل ہے اور ۴ ا ب کے مساوی ہے۔

یہ متوازی الاضلاع ۴ ج ف × ج د جب ف ج د یا ۴ ج د × ج و کے مساوی ہے جس میں ج و نقطہ ف پر کے مماس پر ج سے ڈالا ہوا عمود ہے۔

ف پر کے مماس کی مساوات $\frac{لا\,لا_1}{ا^2} - \frac{ما\,ما_1}{ب^2} = 1$ ہے ∴ $ج\,و^2 = \frac{1}{\frac{لا_1^2}{ا^4} + \frac{ما_1^2}{ب^4}}$

$$\text{اور}\quad ج\,د^2 = \frac{ا^2}{ب^2}\,ما_1^2 + \frac{ب^2}{ا^2}\,لا_1^2 = ا^2 ب^2 \left(\frac{لا_1^2}{ا^4} + \frac{ما_1^2}{ب^4}\right)$$

$$\text{پس}\quad ج\,د \times ج\,و = ا\,ب$$

(۶) متقارب ف د اور ف دَ کی تنصیف کرتے ہیں۔

اگر خط ف د کے وسطی نقطہ کے محدد لا، ما ہوں تو $2\,لا = لا_1 + لا_2$ اور $2\,ما = ما_1 + ما_2$

$$\therefore\ \frac{لا}{ما} = \frac{لا_1 + لا_2}{ما_1 + ما_2} = \frac{لا_1 \pm \frac{ا}{ب}\,ما_1}{ما_1 \pm \frac{ب}{ا}\,لا_1} = \pm \frac{ا}{ب}$$

پس خطوط ف د اور ف دَ کے وسطی نقطے خطوط $\frac{لا}{ا} = \pm \frac{ما}{ب}$ میں سے کسی ایک خط پر واقع ہیں۔ معہذا چونکہ ج ف ک د متوازی الاضلاع ہے ج ک خط ف د یا خط ف دَ کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے متقاربوں میں سے ایک متقارب ہے۔ اس لیے د اور دَ پر کے خطوطِ مماس د اور دَ پر کے خطوط مماس سے متقاربوں پر ملتے ہیں۔

(۷) بلحاظ قطع زائد (۲) نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) کے قطبی کی مساوات $\frac{لا\,لا_1}{ا^2} - \frac{ما\,ما_1}{ب^2} = 1$ ہے اور بلحاظ قطع زائد (۱) اس نقطہ کے قطبی کی مساوات $-\frac{لا\,لا_1}{ا^2} + \frac{ما\,ما_1}{ب^2} = 1$ ہے پس ان دونوں منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی باہمدیگر متوازی ہیں اور مرکز سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں۔

اگر (لا$_1$، ما$_1$) کوئی سا ایک نقطہ ف منحنی (۲) پر واقع ہو تو اس کا قطبی بلحاظ منحنی (۱)

$$-\frac{لا\,لا_1}{ا^2} + \frac{ما\,ما_1}{ب^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{لا\,(-لا_1)}{ا^2} - \frac{ما\,(-ما_1)}{ب^2} = 1 \ \text{ہے۔}$$

لیکن آخرالذکر مساوات منحنی (۲) کے نقطہ (– لاَ، – ماَ) پر کے خطِ مماس کی مساوات ہے اور یہ نقطۂ ف میں سے گزرنے والے قطر کا دُوسرا سرا ہے۔

پس ایک قطع زائد پر کے کسی نقطہ ف سے اس کے مزدوج قطع زائد پر خطوطِ مماس ف ق، ف قَ کھینچے جائیں تو خط ق قَ ابتدائی قطع زائد کو ف میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر مس کریگا۔

(ط) کوئی سے مزدوج قطروں کے جوڑ کو محور مان کر قطع زائد کی مساوات کی تعیین۔ قاطع اور مزدوج محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات لا²/ا² + ما²/ب² = ۱ ہے۔

چونکہ مبدا میں کوئی تبدیلی نہیں کی جاتی ہے اس لیے نئی مساوات حاصل کرنے کی خاطر بجائے لا، ما کے ہم ل₁لا + م₁ما اور ل₂لا + م₂ما لکھتے ہیں۔ اس سے مساوات

(ب² ل₁² + ا² ل₂²)/(ا² ب²) لا² + ۲ (ل₁م₁ + ل₂م₂)/(ا² ب²) لا ما + (ب² م₁² + ا² م₂²)/(ا² ب²) ما² = ۱

حاصل ہوتی ہے جو بشکل ۱ لا² + ۲ ح لا ما + ب ما² = ۱ ...... (۱) ہے۔

ہم نے چونکہ دو مزدوج قطروں کو محور مانا لا کا محور ما کے محور کے وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

پس لا کی کسی ایک مخصوص قیمت کے لیے ازروئے مساوات (۱) ما کی دریافت شدہ دونوں قیمتیں مساوی و باہدیگر مخالف ہونی چاہییں۔ جس کے معنی یہ ہوئے کہ ح = ۰ اور منحنی کی مساوات بشکل ۱ لا² + ب ما² = ۱ .... (۲) ہوگی۔

ہم جانتے ہیں کہ ان دو نصف مزدوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ پس اگر ان کے طول اَ اور √–۱ بَ فرض کیے جائیں تو چونکہ یہ طول علی الترتیب لا اور ما کے محوروں پر کے مقطوعے ہیں لہذا مساوات (۲) میں ما اور لا کو علیحدہ علیحدہ صفر لکھنے سے

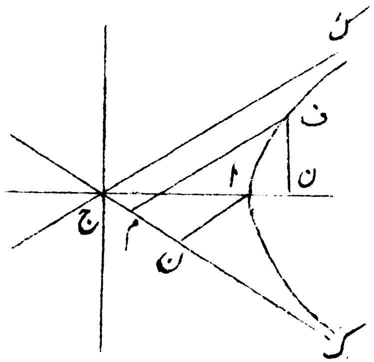
۱ اَ² = ۱ اور ب (√–۱ بَ)² = ۱ یعنی ۱ = ۱/اَ² اور ب = – ۱/بَ²

پس ان نئے محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات لا²/اَ² – ما²/بَ² = ۱ ... (۳) ہے

چونکہ اس مساوات کی شکل وہی ہے جو ابتدائی مساوات کی تھی لہذا وہ جملہ تحقیقات جس میں منحنی کے محور باہدیگر علی القوائم نہیں مانے گئے تھے حالیہ محوروں کے

ساتھ بھی برقرار رہتی ہیں۔ مثلاً ع۔د کے نتائج (۱)، (۲)، (۳)، (۵) اور (۱۱) میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی۔ اسی طرح متقاربوں سے متعلق نتائج بھی جن کا ذکر ع۔ز میں آیا ہے برقرار رہتے ہیں۔ پس قطع زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے متقاربوں کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۰$ ہے۔

(ی) خط زائد کی مساوات، اس کے متقاربوں کو محددوں کے محور مان کر۔ فرض کرو کہ شکل ع۳۹ میں ج ک، ج کَ قطع زائد کے متقارب ہیں اور زاویہ اج کَ = ع یعنی مس ع = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$، ف قطع زائد پر کا ایک نقطہ ہے جس کے محدود ج لا اور ج ما محوروں کے حوالہ سے لا، ما ہیں اور ج کَ، ج ک محوروں کے حوالہ سے لاَ، ماَ ہیں۔ خط ف م، ج کَ کے متوازی کھینچو اور اس کو ج ک سے نقطہ م میں ملنے دو۔ اور خط ف ن قاطع محور کے علی القوائم کھینچو۔



شکل ع۳۹

تب ج م = لاَ، م ف = ماَ، ج ن = لا، ن ف = ما

چونکہ ج ن = ج م جم ع + م ف جم ع

لا = (لاَ + ماَ) جم ع .... (۱)

اور چونکہ ن ف = م ف جب ع - ج م جب ع

ما = (ماَ - لاَ) جب ع .... (۲)

پس مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ میں یہ قیمتیں درج کرنے سے مساوات

$$\frac{\text{جم}^2\text{ع}\,(\text{لاَ}+\text{ماَ})^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{جب}^2\text{ع}\,(\text{ماَ}-\text{لاَ})^2}{\text{ب}^2}=1$$ ..... (۳) حاصل ہوتی ہے۔

لیکن $\text{مس ع} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ پس $\frac{\text{جب}^2\text{ع}}{\text{ب}^2} = \frac{\text{جم}^2\text{ع}}{\text{ا}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2+\text{ب}^2}$

پس ازروئے مساوات (۳) $4\,\text{لاَ}\,\text{ماَ} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$

یعنی متقاربوں کو جب حوالہ کے محور مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات
$4\,\text{لا}\,\text{ما} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$ برآمد ہوتی ہے۔

اسی طرح مزدوج قطع زائد کی مساوات متقاربوں کے حوالہ سے
$4\,\text{لا}\,\text{ما} = -(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)$ حاصل ہوتی ہے۔

(ک) علی القوائم محددوں کے حوالہ سے قطع زائد، اس کے متقاربوں اور مزدوج قطع زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ ، $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 0$ اور $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = -1$ ہیں

اگر محددوں کے محور کسی طرح سے بھی بدلے جائیں تو ان کے لحاظ سے مصرحۂ بالا "منحنیوں" کی نئی مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ان تینوں صورتوں میں یکساں تعویض کی ضرورت ہوگی۔

پس واضح ہے کہ محددوں کے محوروں کی خواہ کچھ ہی وضع ہو قطع زائد اور مزدوج قطع زائد کی مساواتیں متقاربوں کی مساوات سے صرف ان کے مستقلوں کے لحاظ ہی سے مختلف ہونگی اور ان زائد قطعوں کے یہ مستقل باہمدیگر مساوی اور مختلف العلامت ہونگے۔

(ل) جب قطع زائد کے متقاربوں کے مابین کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے تو اسس کو **قایم قطع زائد** کہتے ہیں۔

چونکہ متقاربوں کا درمیانی زاویہ $2\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کے مساوی ہوتا ہے اس لیے اس کی قیمت ایک زاویۂ قائمہ ہونے کی صورت میں $\text{ب} = \text{ا}$ ہوجاتا ہے۔ اس لحاظ سے ایسے منحنی کو بعض اوقات متساوی الاضلاع قطع زائد بھی کہتے ہیں۔

واضح ہے کہ ایسے یعنی قایم قطع زائد کی مساوات $لا^{۲} - ما^{۲} = ا^{۲}$ ہے۔

چونکہ اس سے پیشتر کی ایک فصل میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ متقاربوں کو جب محور مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات $۴\ لا\ ما = ا^{۲} + ب^{۲}$ اور اس کے مزدوج قطع زائد کی مساوات $۴\ لا\ ما = -(ا^{۲} + ب^{۲})$ ہوتی ہے۔ لہذا قائم قطع زائد اور اس کے مزدوج کی مساواتیں متقاربوں کو محور ماننے پر علی الترتیب $۲\ لا\ ما = ا^{۲}$ اور $۲\ لا\ ما = -ا^{۲}$ ہو جاتی ہیں۔

[طالب علم کو چاہیے کہ بطور مشق قائم قطع زائد کی مساوات $لا^{۲} - ما^{۲} = ا^{۲}$ سے آغاز کر کے متقاربوں کو محدد مانے اور ان جدید محددوں کی رقموں میں منحنی کی مساوات حاصل کرے۔

واضح ہو کہ ایسے قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں $لا - ما = ۰$ اور $لا + ما = ۰$ ہیں اور یہ خطوط باہمدیگر علی القوائم ہیں۔ پس حوالہ کے محوروں کو $-\frac{\pi}{۴}$ زاویہ میں گھمانے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ اس لیے کہ ایسی صورت میں $لا = \frac{لا' + ما'}{\sqrt{۲}}$ اور $ما = \frac{-لا' + ما'}{\sqrt{۲}}$ پس مساوات $لا^{۲} - ما^{۲} = ا^{۲}$ میں لا اور ما کی یہ قیمتیں تعویض کرنے سے $\frac{(لا' + ما')^{۲}}{۲} - \frac{(-لا' + ما')^{۲}}{۲} = ا^{۲}$ حاصل ہوتی ہے جو صاف کرنے پر مساوات $۲\ لا\ ما = ا^{۲}$ میں تبدیل ہو جاتی ہے]۔

(م) قطع ناقص یا قطع زائد کی مساوات، راس کو مبداء مان کر یوں حاصل کی جا سکتی ہے کہ مرکز مبداء والی مساوات میں لا کے عوض لا - ا لکھا جائے یعنی

$$\frac{(لا - ا)^{۲}}{ا^{۲}} \pm \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

اب اگر فرض کیا جائے کہ راس سے اس کے قریب تر ماسکہ کا فاصلہ مستقل (بالفرض د) رکھا جاتا ہے اور خروج المرکز کی قیمت اکائی ہو جاتی ہے تو منحنی کی صورت قطع مکافی میں تبدیل ہو جاتی ہے جس کا وترخاص ۴ د ہے۔

چونکہ $د = ا - ا ز = ا(۱ - ز)$ لہذا ز کی قیمت جب اکائی ہوتی ہے تو ا لامتناہی ہو جاتا ہے۔

معہذا $(ا - ز^{۲}) = د(۱ + ز) = ۲د \therefore \frac{ب^{۲}}{ا} = ۲د$

پس مساوات (۱) کی رُو سے $\frac{لا^۲}{و} \pm \frac{ما^۲}{۲و} - ۲\,لا = ۰$

چونکہ $و = \infty$ پس $ما^۲ = \pm ۴\,د\,لا$

اس لیے قطع مکافی قطع ناقص یا زائد کی انتہائی صورت ہے۔ اس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم و محور اقل نامتناہی ہیں۔ اس کا مرکز اور نیز دوسرا ماسکہ بھی لاتناہی پر واقع ہیں۔

طالب علم کے لیے مفید ہوگا کہ بطور مشق قطع مکافی کے خواص قطع ناقص یا قطع زائد کے خواص سے مستنبط کرے۔

دسویں باب کی مثالیں

(۱) مندرجۂ ذیل زائدوں کے متقاربوں اور ان کے مزدوج زائدوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ان کی ترسیم کرو:—

(و) $۴\,لا^۲ - ما^۲ = ۳۶$، (ب) $۸\,لا^۲ - ۱۶\,ما^۲ + ۲۵ = ۰$

(۲) اگر ز اور زَ دو مزدوج زائدوں کے خروج المرکز ہوں تو $\frac{۱}{ز^۲} + \frac{۱}{زَ^۲} = ۱$

(۳) کسی قطع زائد کے متقارب سے اس کے ماسکوں کا فاصلہ عدداً ب کے مساوی ہے۔

(۴) مرکز سے ایک ایسے خط کا فاصلہ جو قطع زائد کے ایک ماسکہ سے ایک متقارب پر علی القوائم کھینچا جائے، عدداً و کے مساوی ہے۔

(۵) متقاربوں سے قطع زائد کے کسی نقطہ کے فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ قائم قطع زائد کا خروج المرکز $\sqrt{۲}$ ہے۔

(۷) $\frac{لا^۲}{و^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} - ۱ = ۰$ پر کے کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ $\frac{لا^۲}{و^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ ناقص $\frac{لا^۲}{و^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کو مس کرتا ہے۔

(۸) اگر نقطہ (عہ، بہ) کا قطبی بلحاظ منحنی $ما^۲ - ۴\,و\,لا = ۰$ منحنی $لا^۲ + ما^۲ - ۴\,و^۲ = ۰$

کو مس کرتا ہے تو نقطہ (ع، بہ) قایم قطع زائد $لا^{۲} - ما^{۲} - ۴ ر^{۲} = ۰$ پر واقع ہے۔

(۹) قطع زائد کے کسی خطِ مماس کا وہ جزو جو اس کے متقاربوں کا مقطوعہ ہے نقطہ تماس پر تنصیف پاتا ہے۔

(۱۰) قطع زائد کا کوئی سا خطِ مماس متقاربوں سے مستقل رقبہ کا مثلث قطع کرتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ ما - مرلا = ۰ اور ما + مرلا = ۰ مر کی تمام قیمتوں کے لیے لا ما = $ج^{۲}$ کے مزدوج قطر ہیں۔

(۱۲) خط مستقیم لا = ۰ قطع زائد $۲ لا ما + ۳ لا^{۲} + ۴ لا = ۹$ کا ایک متقارب ہے۔ دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟

(۱۳) اگر ہم مرکز دائروں کے کسی نظام پر کسی دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی خطوطِ مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاطِ تماس ایک قایم قطع زائد پر واقع ہیں۔

(۱۴) کسی قایم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس کے قطبی سے مرکز کے عمودی فاصلہ کا بالعکس متناسب ہے۔

(۱۵) ایک قطع زائد کے متقاربوں کے متوازی خطوط کھینچ کر ایک متوازی الاضلاع تیار کیا جاتا ہے اور اس کا ایک وتر قطع زائد کا وتر ہے۔ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع کے دوسرے وتر کی سمت قطع زائد کے مرکز میں سے گزرتی ہے۔

(۱۶) قایم قطع زائد کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں تک کھینچے ہوئے خطوطِ مستقیم متقاربوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

گیارہواں باب

ماسکہ کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات

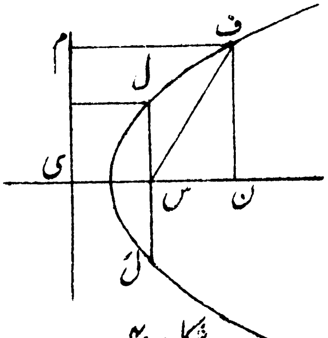
۶۴ (ا)۔ ماسکہ کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات کی تعیین۔

فرض کرو کہ س مخروطی کا ماسکہ ہے ی م اس کا مرتب اور ز اس کا خروج المرکز۔ خط س ی مرتب پر علی القوائم کھینچو اور س ی کو ابتدائی خط تصور کرو (ملاحظہ ہو شکل نمبر ۴۰) ل س لَ کو وتر خاص فرض کرو تو ز (س ی) = س ل اس کو لہ قرار دو۔ منحنی پر کے کسی نقطہ ف کے محددوں کو ر اور طہ مانو۔ ف م اور ف ن بالترتیب مرتب اور خط س ی پر عمود کھینچو۔

تب س ف = ز × ف م = ز × ن ی = ز × ن س + ز × س ی

یعنی ر = ـ ز ر جم طہ + لہ

∴ لہ/ر = ۱ + ز جم طہ



شکل ۴۰

اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے تو مخروطی کی مساوات

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{ز جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})\ \text{ہوگی۔}$$

کیونکہ اس صورت میں خط س ف خط س ی کے ساتھ زاویہ طہ - عہ بناتا ہے۔

(ب) اگر ر، طہ مرتب پر کے کسی نقطہ کے محدد ہوں تو ر جم طہ = س ی = $\frac{\text{ل}}{\text{ز}}$

∴ مرتب کی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم طہ}$ ہے۔

[مخروطی کی مساوات اگر $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{ز جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})$ ہو تو اس کے مرتب کی مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ز جم}\,(\text{طہ} - \text{عہ})$ ہوگی]

اگر س ف َ ماسکی وتر ہے اور ف کا زاویۂ سمتی طہ ہے تو فَ کا زاویۂ سمتی طہ + π ہوگا۔

پس اگر س ف = ر اور س فَ = رَ تو

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{ز جم طہ} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ل}}{\text{رَ}} = 1 + \text{ز جم}\,(\text{طہ} + \pi)$$

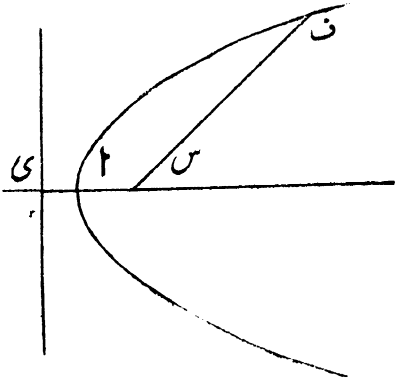
$$\therefore \frac{\text{ل}}{\text{ر}} + \frac{\text{ل}}{\text{رَ}} = 2 \quad \text{یعنی} \quad \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{رَ}} = \frac{2}{\text{ل}}$$

اس لیے کسی بھی مخروطی میں نصف وتر خاص، کسی بھی ماسکی وتر کے قطعات کا موسیقی اوسط ہے۔

(ج) مخروطی $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{ز جم طہ}$ کی ترسیم اس کی مساوات کے ذریعہ

(۱) فرض کرو ز = ۱ تب منحنی قطع مکافی ہے اور مساوات $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = 1 + \text{جم ز}$ ہو جاتی ہے۔ نقطہ ا پر جہاں کہ منحنی محور کو قطع کرتا ہے، طہ = ۰ اور ر = $\frac{1}{2}$ ل جیسے جیسے زاویہ طہ بڑھتا ہے ویسے ہی (۱ + جم طہ) گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے۔ اس طرح ر بغیر کسی حد کے بڑھتا جاتا ہے حتیٰ کہ طہ جب π کے مساوی ہوتا ہے تو ر کی قیمت نامتناہی بڑی ہوتی ہے طہ کی قیمت جب π سے متجاوز ہو کر بڑھتی جاتی ہے تو ۱ + جم طہ مسلسل بڑھتا جاتا ہے اور اس لیے ر بھی مسلسل گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ جب طہ = ۲π تو ر کی قیمت $\frac{1}{2}$ ل کے مساوی

ہوجاتی ہے۔پس جیسا کہ شکل ۱۷۱ سے ظاہر ہے یہ منحنی سمت ا س میں لاتناہی



شکل ۱۷۱

تک چلا جاتا ہے۔

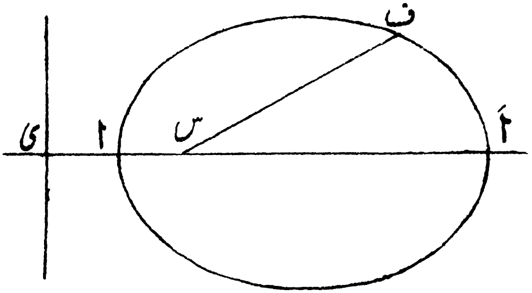
(۲) فرض کرو ز > ۱ تب منحنی قطع ناقص ہے۔

نقطہ ا پر طہ = ۰ اور سہ = له / (۱ + ز)

جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے له/سہ گھٹتا ہے یعنی سہ بڑھتا ہے حتیٰ کہ طہ = π جبکہ سہ = له / (۱ − ز) چونکہ ز > ۱ لہذا سہ کی یہ قیمت مثبت ہے۔ پس منحنی محور کو دوبارہ کسی نقطہ اَ پر قطع کرتا ہے ایسا کہ س اَ = له / (۱ − ز)

طہ کی قیمت π سے بڑھ کر جیسے جیسے ۲ π کے قریب پہنچتی ہے جم طہ مسلسل −۱ سے ۱ تک بڑھتا ہے۔ اس لیے له/سہ مسلسل بڑھتا ہے اور سہ مسلسل له / (۱ − ز) سے گھٹ کر له / (۱ + ز) ہوجاتا ہے۔

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے بھی جم طہ = جم (۲π − طہ) یہ منحنی بلحاظ اپنے محور کے متشاکل ہے۔ پس جب ز کی قیمت اکائی سے کم ہوتی ہے تو مصرحۂ بالا مساوات ایک بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے لحاظ سے متشاکل ہے۔



شکل ۴۲

(۳) فرض کرو ز > ا تب منحنی قطع زائد ہے۔

نقطہ ا پر ط = ۰ اور س = ل/(ا + ز) ۔

جیسے جیسے ط بڑھتا ہے جم ط گھٹتا ہے اور اس لیے س بڑھتا ہے یہاں تک کہ ا + زجم ط = ۰ ط کی جب یہ قیمت ہوتی ہے تو ہم اس زاویہ کو ع کہینگے (شکل ۴۳ میں یہ زاویہ ا س ک ہے) اور اس صورت میں س کی قیمت نامتناہی بڑی ہو جاتی ہے۔

جب زاویہ ط کی قیمت ع سے متجاوز ہوکر بڑھتی جاتی ہے تو (ا + زجم ط) منفی ہوتا ہے اور جب ط = π تو س = - ل/(ز - ا) = س اَ ۔

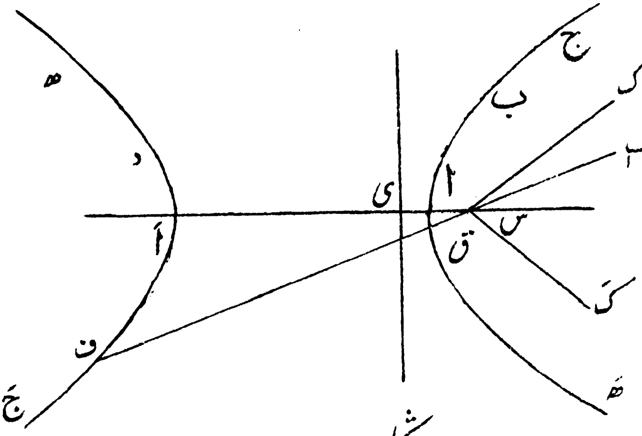
(ا + زجم ط) منفی رہیگا تاوقتیکہ ط = ۲π - ع یعنی زاویہ ا س کَ ۔

جب زاویہ ط = (۲π - ع) تو س پھر نامتناہی بڑا ہوتا ہے۔ اگر ط اس سے ذرا سا چھوٹا ہوتا ہے تو س بہت بڑا اور منفی ہوتا ہے اور اگر ط ذرا سا بڑا ہوتا ہے تو س بہت بڑا اور مثبت ہوتا ہے۔ س کی قیمتیں مثبت رہینگی جبکہ زاویہ ط کی قیمت (۲π - ع) سے بدل کر ۲π ہوتی ہے۔

پس یہ منحنی مندرجہ ذیل ترتیب سے کھینچی جاتی ہے:- (دیکھو شکل ۴۳)

پہلے اس کا حصہ ا ب ج کھینچا جاتا ہے۔ اس کے بعد جَ فَ اَ پھر اَ دَ ھَ اور سب سے آخر ھ ق ا۔

یہ منحنی دو شاخوں یعنی ج ب ا ف ھ اور جَ فَ اَ دَ ھَ پر مشتمل ہے۔ ان میں سے آخرالذکر سالم شاخ کے لیے نیم قطر سمتی منفی ہے۔



شکل ۴۳

اگر شکل ۴۳ کی طرح، ایک خط س ق ف منحنی کو دو نقطوں ق اور ف میں قطع کرتا ہوا کھینچا جائے، جو منحنی کی مختلف شاخوں پر واقع ہیں، تو ان نقطوں ق اور ف کی نسبت یہ نہ خیال کرنا چاہیے کہ وہ ایک ہی زاویۂ سمتی رکھتے ہیں۔ نیم قطر سمتی س ف منفی ہے یعنی خط س ف اس سمت کے مخالف سمت میں کھینچا گیا ہے جس سے اس کے زاویۂ سمتی کی حد بندی ہوتی ہے پس اگر ف س کو ف‌ا تک بڑھایا جائے تو زیرِ بحث زاویۂ سمتی ا س ف‌ا ہونا چاہیے۔ اس لیے اگر نقطہ ق کا زاویۂ سمتی طہ ہو تو نقطہ ف کا زاویۂ سمتی طہ - π ہوگا۔

(د) کسی مخروطی پر کے کوئی سے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات کی تعیین اور اس کے ذریعہ مخروطی پر کے کسی نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات

فرض کرو کہ ف اور ق نقطوں کے سمتی زاویے بالترتیب (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) ہیں اور مخروطی کی مساوات ل/ر = ۱ + ز جم طہ .... (۱) ہے۔

خطِ مستقیم جس کی مساوات ل/ر = ا جم طہ + ب جم (طہ - عہ) .... (۲) ہے کوئی سے دو نقطوں میں سے گزریگا، اس لیے کہ اس کی مساوات میں دو باہدیگر غیر تابع مستقل ا اور ب شریک ہیں۔ اور ہم نے باب (۶) میں دیکھا ہے کہ خطِ مستقیم کی سادہ ترین قطبی مساوات ر جم (طہ - عہ) = ع ہے جس میں ع مبداء سے خط پر کھینچا ہوا عمود ہے۔

یہ خطِ مستقیم دیے ہوئے دو نقطوں ف اور ق میں سے گذریگا اگر س/ر کی قیمتیں مساوات (۲) میں وہی ہیں جو مساوات (۱) میں ہیں جب ط = عہ - بہ اور جب ط = عہ + بہ -

واضح ہے کہ یہ صورت اس وقت واقع ہوگی جبکہ

ا + زجم (عہ - بہ) = ا جم (عہ - بہ) + ب جم بہ

اور ا + زجم (عہ + بہ) = ا جم (عہ + بہ) + ب جم بہ

∴ ا = ز اور ب جم بہ = ا

پس ا اور ب کی ان قیمتوں کو مساوات (۲) میں تعویض کرنے سے ف اور ق کو ملانے والے خط یعنی مخروطی کے وتر کی مساوات

ل/ر = زجم ط + قط بہ جم (ط - عہ) ...... (۳) برآمد ہوتی ہے۔

لہذا مخروطی پر کے عہ زاویۂ سمتی والے نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات دریافت کرنے کے لیے مساوات (۳) میں بہ = ۰ لکھنا چاہیے۔

پس اس کی مساوات ل/ر = زجم ط + جم (ط - عہ) .... (۴) ہے۔

نتیجۂ صریح — اگر مخروطی کی مساوات ل/ر = ا + زجم (ط - جہ) مانی جائے تو (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات

ل/ر = زجم (ط - جہ) + قط بہ جم (ط - عہ) ہے

اور عہ زاویۂ سمتی والے نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات

ل/ر = زجم (ط - جہ) + جم (ط - عہ) ہے۔

(۵) مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو۔

مخروطی کی مساوات ل/ر = ا + زجم ط مانو۔ اس کے زاویۂ سمتی عہ والے

نقطہ پر کے خط مماس کی مساوات لہ/ر = زجم طہ + جم (طہ - عہ) ہے
اس خط مماس کے کسی علی القوائم خط کی مساوات

ج/ر = زجم (طہ + π/۲) + جم (طہ + π/۲ - عہ)

یعنی ج/ر = زجب طہ - جب (طہ - عہ) ہے

یہ مساوات عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی بشرطیکہ ج اس طرح منتخب ہو کہ نقطہ جس کے قطبی محدد لہ/(۱ + زجم عہ)، عہ ہیں اس خط پر واقع ہوں۔

پس چاہیے کہ ج (۱ + زجم عہ)/لہ = -زجب عہ

یعنی ج = - لہ زجب عہ / (۱ + زجم عہ)

∴ عماد کی مطلوبہ مساوات

(لہ زجب عہ / (۱ + زجم عہ)) ۱/ر = زجب طہ + جب (طہ - عہ) ہے

(و) کسی نقطہ کے بلحاظ ایک مخروطی کے قطبی کی قطبی مساوات

مخروطی کی مساوات لہ/ر = ۱ + زجم طہ .... (۱) مانو
فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد ر، طہ ہیں اور مخروطی کے جن نقطوں پر کے مماس دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں ان کے سمتی زاویے عہ ± بہ ہیں۔ ان نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی مساوات

لہ/ر = زجم طہ + قط بہ جم (طہ - عہ) .... (۲) ہوگی

خطوطِ مماس کی مساواتیں

لہ/ر = زجم طہ + جم (طہ - عہ + بہ)

اور لہ/ر = زجم طہ + جم (طہ - عہ - بہ) ہونگی

چونکہ یہ نقطے (سہ۱، طہ۱) میں سے گزرتے ہیں،

اس لیے　ل/سہ۱ = ز جم طہ۱ + جم (طہ۱ − عہ + بہ)

اور　ل/سہ۱ = ز جم طہ۱ + جم (طہ۱ − عہ − بہ)

پس　طہ۱ = عہ　اور جم بہ = ل/سہ۱ − ز جم طہ۱

عہ اور بہ کی یہ قیمتیں مساوات (۲) میں تعویض کرنے سے

(ل/سہ − ز جم طہ) (ل/سہ۱ − ز جم طہ۱) = جم (طہ − طہ۱) ...... (۳)

جو مطلوبہ قطبی مساوات ہے۔

مثال (۱)۔ اگر مخروطی کے کسی نقطہ ف پر کا خطِ مماس مرتب سے نقطہ ک پر ملے تو زاویہ ک س ف قائمہ ہے، جس میں س مخروطی کا ماسکہ ہے اگر نقطہ ف کا سمتی زاویہ عہ فرض کیا جائے تو ف پر کے خطِ مماس کی مساوات

ل/سہ = ز جم طہ + جم (طہ − عہ) ہوگی

یہ خط مرتب سے جس کی مساوات ل = ز سہ جم طہ ہے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جہاں جم (طہ − عہ) = ۰ پس واضح ہے کہ نقطہ ک پر طہ − عہ = ± π/۲
اس لیے زاویہ ک س ف قائمہ ہے۔

مثال (۲)۔ مخروطی کے متقاربوں کی قطبی مساوات کی تعیین۔

مخروطی کی مساوات ل/سہ = ۱ + ز جم طہ فرض کرو۔ مخروطی پر کے ایسے نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات جس کا سمتی زاویہ عہ ہے،

ل/سہ = ز جم طہ + جم (طہ − عہ) ...... (۱) ہے

اگر سہ = ∞ تو ۰ = ۱ + ز جم عہ ...... (۲) اور ایسی صورت میں نقطۂ مذکور مخروطی پر لامتناہی پر کا نقطہ ہوگا۔

پس عہ کو (۱) اور (۲) مساواتوں میں سے ساقط کرنے سے مساوات

{ز له/ر + (۱ - ز^۲) جم طه}^۲ = ز^۲ جب^۲ طه جب^۲ ء = (ز^۲-۱) جب^۲ طه

حاصل ہوتی ہے جو مخروطی کے متقارب کی قطبی مساوات ہے۔

گیارہویں باب کی مثالیں

(۱) مکافی پر کے کسی دو خطوط مماس کا خارجی زاویہ ان کے نقاط تماس کے سمتی زاویوں کے تفاوت کا نصف ہے۔

(۲) کسی دیے ہوئے مکافی کے ایسے دو خطوط مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو باہمدیگر ایک مستقل زاویہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، ایک قطع زائد ہے جس کا ماسکہ اور مرتب دیے ہوئے مکافی کا ماسکہ اور مرتب ہے۔

(۳) اگر ف س فَ اور ق س قَ مخروطی کے کوئی سے دو ماسکی وتر باہمدیگر علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ (۱)/(ف س × س فَ) + (۱)/(ق س × س قَ) مستقل ہے۔

(۴) مخروطی کی قطبی مساوات کے ذریعہ سے ثابت کرو کہ ایسے نقطہ کا طریق جس کے فاصلوں کا حاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے قطع ناقص ہے۔

(۵) اگر دو مخروطیوں کا ماسکہ مشترک ہے تو بتاؤ کہ ان کے دو مشترک وتر ان کے مرتبوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرینگے۔

(۶) مخروطی له/ر = ۱ + ز جم طه کے دو باہمدیگر علی القوائم خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق منحنی ر^۲ (ز^۲ - ۱) - ۲ له ز ر جم طه + ۲ له^۲ = ۰ ہے۔

(۷) ایک معین قطر کا دائرہ جو ایک دیے ہوئے مخروطی کے ماسکہ س میں سے گزرتا ہے مخروطی کو ۱، ب، ج، د میں قطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ س ۱ × س ب × س ج × س د مستقل ہے۔

(۸) ف و فَ اگر س ماسکہ والے مخروطی کے کسی ثابت نقطہ و میں سے گزرنے والا وتر ہو تو مس ۱/۲ فَ س و مس ۱/۲ ف س و مستقل ہوگا۔

(۹) مخروطی لہ / سہ = ۱ + زجم طہ پر کے تین نقطوں کے سمتی زاویے عہ، بہ، جہ ہیں۔ ان نقطوں پر کے عماد نقطہ س۱، طہ۱ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ

۲ طہ۱ = عہ + بہ + جہ

بارھواں باب

درجۂ دوم کی عام مساوات

۶۵ (ا) - درجۂ دوم کی عام مساوات پر بحث کرنے سے پہلے ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ محوروں کی تبدیلی سے کسی مساوات کے درجہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔

صفحات ۱۳۸ و ۱۳۹ کے مطالعہ سے ظاہر ہے کہ محدّدوں کے مبدا کی تبدیلی اور محوروں کے گھماؤ کا اثر صرف اسی قدر ہوتا ہے کہ نئی مساوات میں بجائے محدّد لا اور ما کے مصرحۂ ذیل کی نوعیت کے جملے استعمال کیے جاتے ہیں:

ل لاَ + م ماَ + ن اور لَ لاَ + مَ ماَ + نَ

یہ جملے پہلے ہی درجے کے ہیں اس لیے اگر وہ کسی مساوات میں بجائے لا اور ما کے لکھے جائیں تو واضح ہے کہ مساوات کا درجہ بلند تر نہیں ہوگا۔ یہ درجہ کمتر بھی اس لیے نہیں ہوگا کہ اگر بالفرض وہ کمتر ہوتا تو اسی استدلال سے مستنبط ہوتا ہے کہ ابتدائی محوروں پر عود کر آنے سے اور اس لیے ابتدائی مساوات پر واپس جانے سے مساوات کا درجہ بلند تر ہو جاتا ہے لیکن ایسا نہیں ہوتا ہے۔ پس محوروں کی تبدیلی سے مساوات کے درجہ میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہونے پاتی۔

(ب) ہر ایسا منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہو تراشِ مخروط ہے۔

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ منحنی کے محدّدوں کے محور باہدگر علی القوائم ہیں۔

اس لیے کہ اگر مساوات مائل محوروں سے متعلق ہو تو بھی ہم اس کو علی القوائم محوروں کی رقموں میں بدل سکتے ہیں اور اس تبدیلی سے مساوات کا درجہ غیر متغیر رہتا ہے۔ جیسا کہ ابھی ثابت کیا گیا۔

ہم منحنی کی مساوات ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ..... (۱)
فرض کرتے ہیں جو دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل ہے۔

اگر محوروں کو ایک معین زاویہ میں گھما دیں تو مساوات میں سے لا ما والی رقم خارج ہو سکتی ہے۔ اس لیے کہ محوروں کو زاویہ طہ میں گھمانے کے لیے بجائے لا اور ما کے علی الترتیب لا جم طہ ۔ ما جب طہ اور لا جب طہ + ما جم طہ لکھنا پڑتا ہے (ملاحظہ ہو صفحہ ۱۳۹)۔

اس تعویض سے مساوات (۱) بصورت

ا(لا جم طہ ۔ ما جب طہ)^2 + ۲ ح (لا جم طہ + ما جب طہ) (لا جب طہ + ما جم طہ) + ب (لا جب طہ + ما جم طہ)^2
+ ۲ گ (لا جم طہ ۔ ما جب طہ) + ۲ ف (لا جب طہ + ما جم طہ) + ج = ۰ ..... (۲)

تبدیل ہو جاتی ہے جس میں لا ما کا سر ۲ (ب ۔ ا) جب طہ جم طہ + ۲ ح (جم^2 طہ ۔ جب^2 طہ) ہے

اور وہ صفر ہو جاتا ہے جبکہ مس ۲ طہ = $\frac{\text{۲ ح}}{\text{ا ۔ ب}}$ .... (۳)

چونکہ ایسا زاویہ جس کا مماس کوئی سی حقیقی مقدار ہو دریافت ہو سکتا ہے

لہذا زاویہ طہ = $\frac{1}{2}$ مس$^{-1}$ $\frac{\text{۲ ح}}{\text{ا ۔ ب}}$ تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

پس مساوات (۲) کو بشکل

ا لا^2 + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ .... (۴)

لکھ سکتے ہیں۔

اگر نہ تو ا صفر ہے یا نہ ب تو مساوات (۴) کو مندرجۂ ذیل شکل میں ڈھال سکتے ہیں :—

ا (لا + $\frac{\text{گ}}{\text{ا}}$)^2 + ب (ما + $\frac{\text{ف}}{\text{ب}}$)^2 = $\frac{\text{گ}^2}{\text{ا}}$ + $\frac{\text{ف}^2}{\text{ب}}$ ۔ ج = ک

اگر نقطہ $\left(-\frac{گ}{ا}\,،\,-\frac{ف}{ب}\right)$ پر مبداء منتقل کیا جائے تو مساوات

$$ا\,لا^{۲} + ب\,ما^{۲} = ک \quad ....\ (۵)$$ ہو جاتی ہے۔

اگر بائیں جانب کی رقم (یعنے ک) = ۰ تو مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کریگی (صفحہ ۱۳۱) لیکن اگر ک صفر نہ ہو تو مساوات

$$\frac{لا^{۲}}{\frac{ک}{ا}} + \frac{ما^{۲}}{\frac{ک}{ب}} = ۱$$ ہو جاتی ہے،

جو قطع ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر دونوں نسب نما مثبت ہوں اور قطع زائد کو اگر ایک نسب نما مثبت ہو اور دوسرا منفی۔

اگر دونوں نسب نما منفی ہوں تو واضح ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مندرجۂ بالا مساوات کے لئے صادق نہیں آسکتیں۔ اس صورت میں منحنی ایک خیالی ناقص کی تعبیر کریگا۔

اگر ا اور ب مساوی ہوں تو ب = ا لکھنے سے مساوات $لا^{۲} + ما^{۲} = \frac{ک}{ا}$ جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔

اس کے بعد مساوات (۴) میں ا یا ب کو صفر مانو۔ مسئلہ ۶۵ (۱) کی رو سے ا اور ب دونوں وقت واحد میں صفر نہیں ہو سکتے۔ فرض کرو کہ ا صفر ہے۔ تب مساوات مذکور بشکل

$$ب\left(ما + \frac{ف}{ب}\right)^{۲} = -۲\,گ\,لا - ج + \frac{ف^{۲}}{ب} \quad ......\ (۶)$$

لکھی جا سکتی ہے۔ اب اگر گ = ۰ تو مساوات دو متوازی خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو اگر گ = ۰ کے ساتھ $ف^{۲} - ب\,ج = $ ۰ بھی ہو تو باہمدیگر منطبق ہوتے ہیں۔ اگر گ صفر نہ ہو تو مساوات بشکلِ ذیل لکھی جا سکتی ہے:۔

$$\left(ما + \frac{ف}{ب}\right)^{۲} = -\frac{۲گ}{ب}\left(لا - \frac{ف^{۲}}{۲\,ب\,گ} + \frac{ج}{۲\,گ}\right)$$

جو ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور لا کے محور کے متوازی ہے۔

پس ہر صورت میں دوسرے درجہ کی مساوات کا منحنی تراشِ مخروط ہے۔

(ج) تراشِ مخروط کے مرکز کے محددین کی دریافت، درجۂ دوم کی عام مساوات کو مان کر نویں باب کے شروع میں ہم نے دیکھا ہے کہ جب محددین کا مبداء تراشِ مخروط کا مرکز ہوتا ہے تو اس کی مساوات میں لا اور ما کی پہلی قوت کی رقمیں نہیں پائی جاتی ہیں۔

پس عام مساوات کے ذریعہ تراشِ مخروط کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبداء کو کسی ایسے نقطہ (لاَ، ماَ) میں تبدیل کرنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے لا اور ما کے سر صفر ہو جاتے ہیں۔

پس مساوات ا لا^{۲} + ۲ح لا ما + ب ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ کو نقطہ لاَ، ماَ میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے ذریعہ ظاہر کرنے کے لیے لا کے عوض لا + لاَ اور ما کے عوض ما + ماَ لکھنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے مساوات

ا (لا + لاَ)^{۲} + ۲ح (لا + لاَ) (ما + ماَ) + ب (ما + ماَ)^{۲}

+ ۲گ (لا + لاَ) + ۲ف (ما + ماَ) + ج = ۰

یعنے ا لا^{۲} + ۲ح لا ما + ب ما^{۲} + ۲ لا (ا لاَ + ح ماَ + گ) + ۲ ما (ح لاَ + ب ماَ + ف)

+ ا لاَ^{۲} + ۲ح لاَ ماَ + ب ماَ^{۲} + ۲گ لاَ + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج = ۰ ہو جاتی ہے

اور اس میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہو جاتے ہیں بشرطیکہ لاَ اور ماَ کا انتخاب اس طرح پر ہو کہ

ا لاَ + ح ماَ + گ = ۰ .... (۱)

اور

ح لاَ + ب ماَ + ف = ۰ .... (۲)

پس مبداء (لاَ، ماَ) کے حوالہ سے مساوات

ا لا^{۲} + ۲ح لا ما + ب ما^{۲} + جَ = ۰ ...... (۳)

ہوگی جس میں جَ = ا لاَ^{۲} + ۲ح لاَ ماَ + ب ماَ^{۲} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج .... (۴)

اس لیے تراشِ مخروط کے مرکز کے محدد لاَ اور ماَ کی وہ قیمتیں ہیں جو (۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

∴ مرکز نقطہ $\left(\frac{\text{ح ف - ب گ}}{\text{اب - ح}^2} \text{ ، } \frac{\text{گ ح - ا ف}}{\text{اب - ح}^2} \right)$ ہے

جب اب - ح^2 = ۰ تو مرکز کے محددّ نا متناہی ہوتے ہیں یعنے مرکز لا تناہی پر واقع ہوتا ہے اور اس لیے منحنی قطع مکافی ہے - لیکن جب ح ف - ب گ اور اب - ح^2 = ۰ یعنے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ح}} = \frac{\text{ح}}{\text{ب}} = \frac{\text{گ}}{\text{ف}}$$

تو (۱) اور (۲) مساواتیں ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں اور اس خط کا کوئی نقطہ منحنی کا ایک مرکز ہے پس اس صورت میں مرکز کا طریق دو متوازی خطوطِ مستقیم ہے واضح ہو کہ مندرجۂ بالا بحث میں محور خواہ علی القوائم ہو سکتے ہیں یا مائل -

(د) درجۂ دوم کی عام مساوات سے دو خطوطِ مستقیم کی تعبیر -

تراشِ مخروط کے مرکز کے محددّوں کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لاَ اور ماَ سے ضرب دو تو

$$\text{ا لاَ}^2 + \text{ح لاَ ماَ} + \text{گ لاَ} = ۰$$

$$\text{ح لاَ ماَ} + \text{ب ماَ}^2 + \text{ف ماَ} = ۰$$

ان کو باہمدیگر جمع کرنے سے

$$\text{ا لاَ}^2 + ۲\text{ح لاَ ماَ} + \text{ب ماَ}^2 + \text{گ لاَ} + \text{ف ماَ} = ۰$$

اس کو مساوات (۴) یعنے ا لاَ^{2} + ۲ح لاَ ماَ + ب ماَ^{2} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج = جَ میں سے وضع کرنے سے

$$\text{جَ} = \text{گ لاَ} + \text{ف ماَ} + \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

اس مساوات میں لاَ اور ماَ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\text{جَ} = \text{گ} \frac{\text{ح ف - ب گ}}{\text{اب - ح}^2} + \text{ف} \frac{\text{گ ح - ا ف}}{\text{اب - ح}^2} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{اب ج} + ۲\text{ف گ ح} - \text{ا ف}^2 - \text{ب گ}^2 - \text{ج ح}^2}{\text{اب - ح}^2}$$

جملہ ا ب ج + ۲ ف گ ح - ا ف^2 - ب گ^2 - ج ح^2 عموماً △ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور جملہ ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج کا ممیز کہلاتا ہے۔ جب ممیز △ = ۰ تو ج = ۰ اور عام مساوات کا استحالہ ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 = ۰ میں ہوتا ہے جو دو خطوطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ پس △ = ۰ تراشِ مخروط کے دو خطوطِ مستقیم میں تحویل ہونے کی شرط ہے۔ صفحہ ۱۳۲ پر ہم نے یہی شرط ایک دوسرے طریقہ سے دریافت کی تھی۔ اوپر جو کچھ کہ بیان کیا گیا ہے ائل محدّدوں کے لیے بھی صادق آتا ہے۔

(ھ) تراشِ مخروط ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 = ۱ کے محوروں کی وضع و مقدار کی تعیین۔

اگر کسی تراشِ مخروط کو کوئی ہم مرکز دائرہ قطع کرتا ہے تو نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والے قطر اس تراشِ مخروط کے محوروں کے ساتھ مساوی زاویوں میں مائل ہونگے۔ اور باہمدیگر منطبق ہونگے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر تراشِ مخروط کے دو نصف محوروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو۔

چونکہ تراشِ مخروط کی مساوات ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 = ۱ مانی گئی ہے

اور ہم مرکز دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ص^2 یعنے لا^2/ص^2 + ما^2/ص^2 = ۱ ہے۔

پس مبدا اور تراشِ مخروط و دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط کی مساوات

ا لا^2 + ۲ ح لا ما + ب ما^2 = لا^2/ص^2 + ما^2/ص^2 ہے

یعنے (ا - ۱/ص^2) لا^2 + ۲ ح لا ما + (ب - ۱/ص^2) ما^2 = ۰ ....(۱)

اور یہ خطوط باہمدیگر منطبق ہونگے اگر (ا - ۱/ص^2) (ب - ۱/ص^2) = ح^2 ....(۲)

ایسی حالت میں یہ خطوط نہ صرف آپس میں منطبق ہونگے بلکہ تراشِ مخروط کے دو محوروں میں سے کسی ایک محور کے ساتھ بھی منطبق ہونگے۔

پس مساوات (۲) کو حل کرنے سے تراشِ مخروط کے نصف محوروں کے طول (ص) کی تعیین ہو سکتی ہے۔ مساوات مذکور

$$\frac{1}{\text{ص}^4} - (\text{ا}+\text{ب})\frac{1}{\text{ص}^2} + \text{اب} - \text{ح}^2 = 0 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

اور

$$\frac{1}{\text{ص}^2} = \frac{(\text{ا}+\text{ب}) \pm \sqrt{(\text{ا}+\text{ب})^2 - 4(\text{اب} - \text{ح}^2)}}{2}$$

$$= \frac{(\text{ا}+\text{ب}) \pm \sqrt{(\text{ا}-\text{ب})^2 + 4\text{ح}^2}}{2}$$

اب مساوات (۱) کو $\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)$ سے ضرب دو۔ تو

$$\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)^2 \text{لا}^2 + 2\text{ح}\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{لا ما} + \left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)\left(\text{ب} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{ما}^2 = 0$$

اگر $\frac{1}{\text{ص}^2}$ مساوات (۲) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل ہے تو

$$\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)^2 \text{لا}^2 + 2\text{ح}\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{لا ما} + \text{ح}^2\text{ما}^2 = 0$$

$$\therefore \quad \left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{لا} + \text{ح ما} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

پس اگر مساوات (۴) میں مساوات (۳) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل تعویض کی جائے تو اس کے متناظر محور کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

(و) درجۂ دوم کی عام مساوات سے قطع مکافی کے محور اور وترِ خاص کی تعیین۔

اگر مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\text{ح لا ما} + \text{ب ما}^2 + 2\text{گ لا} + 2\text{ف ما} + \text{ج} = 0$ ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے تو دوم درجہ کی رقمیں مل کر ایک کامل مربع بناتی ہیں۔ ملاحظہ ہو صفحہ (۱۸۲) لہٰذا یہ مساوات

$$(\text{عہ لا} + \text{بہ ما})^{۲} + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

کے معادل ہے۔ جس میں $\text{عہ}^{۲} = \text{ا}$ اور $\text{بہ}^{۲} = \text{ب}$

مساوات (۱) پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر کے عمود کا مربع خط ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ پر کے عمود کے تناسب ہے۔ ممکن ہے کہ یہ خطوط باہمدیگر علی القوائم نہ ہوں۔ لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل

$$(\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ})^{۲} = ۲\,\text{لہ}\,(\text{عہ لا} + \text{بہ ما}) + \text{لہ}^{۲} - (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج})$$

یعنے $(\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ})^{۲} = ۲\text{لا}\,(\text{لہ عہ} - \text{گ}) + ۲\,\text{ما}\,(\text{لہ بہ} - \text{ف}) + \text{لہ}^{۲} - \text{ج}$

لکھ سکتے ہیں اور خطِ مستقیم جس کی مساوات عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ ہے مساوات $۲\,\text{لا}\,(\text{لہ عہ} - \text{گ}) + ۲\,\text{ما}\,(\text{لہ بہ} - \text{ف}) + \text{لہ}^{۲} - \text{ج} = ۰$ والے خطِ مستقیم سے علی القوائم واقع ہوتا ہے اگر $\text{عہ}\,(\text{لہ عہ} - \text{گ}) + \text{بہ}\,(\text{لہ بہ} - \text{ف}) = ۰$

یعنی
$$\text{لہ} = \frac{(\text{عہ گ} + \text{بہ ف})}{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}$$

پس اب خطوط عہ لا + بہ ما + لہ = ۰

اور $۲\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})\,\text{لا} + ۲\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})\,\text{ما} + \text{لہ}^{۲} - \text{ج} = ۰$ کو علی الترتیب لا اور ما کے محور مانو تو ہمیں $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{پ لا}$ کے ماثل مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اور واضح ہے کہ یہ مساوات قطع مکافی کی ہے جس کے محدودوں کے محور، منحنی کا محور اور منحنی کے راس پر کا خطِ مماس ہیں۔

وتر خاص ۴پ کی تعیین کے لیے ہم خط عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ پر کے عمود

$$\frac{\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}}{\sqrt{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}}$$ کو ما تصور کرتے ہیں

اور خط $۲\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})\,\text{لا} + ۲\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})\,\text{ما} + \text{لہ}^{۲} - \text{ج} = ۰$ پر کے عمود

$$\frac{۲\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})\,\text{لا} + ۲\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})\,\text{ما} + \text{لہ}^{۲} - \text{ج}}{\sqrt{۴\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})^{۲} + ۴\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})^{۲}}}$$ کو لا تصور کرتے ہیں۔

پس
$$\left(\frac{\text{عہ لہ} + \text{بہ ما} + \text{لہ}}{\sqrt{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}}\right)^{۲} = ۴\,\text{پ} \left\{\frac{۲\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})\,\text{لا} + ۲\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})\,\text{ما} + \text{لہ}^{۲} - \text{ج}}{\sqrt{۴\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})^{۲} + ۴\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})^{۲}}}\right\}$$

∴ ۴پ = √(۴(عہ لہ - گ)² + ۴(بہ لہ - ف)²) / (عہ² + بہ²)

اور اس لیے مساوات (۱) یعنے (عہ لا + بہ ما)² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰
ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ ہے اور جس کا وترِ خاص

۲√((عہ لہ - گ)² + (بہ لہ - ف)²) / (عہ² + بہ²) = ۲(عہ ف - بہ گ) / (عہ² + بہ²)^(۳/۲) ہے

اس لیے کہ لہ = (عہ گ + بہ ف) / (عہ² + بہ²)

ذیل میں ہم نمونۃً چند سوالات کو حل کرکے بتاتے ہیں کہ درجۂ دوم کی مساوات سے تراشِ مخروط کی نوعیت، وضع وغیرہ کیونکر دریافت ہوسکتی ہے۔

مثال (۱) ۱۷لا² - ۱۲لا ما + ۸ما² - ۶۸لا + ۲۴ما - ۱۲ = ۰

منحنی کے مرکز کے محدد لاَ، ماَ دریافت کرنے کے لیے ذیل کے ضابطے استعمال ہوتے ہیں:

ا لاَ + ح ماَ + گ = ۰ اور ح لاَ + ب ماَ + ف = ۰

پس ۱۷لاَ - ۶ماَ - ۳۴ = ۰ اور -۶لاَ + ۸ماَ + ۱۲ = ۰

ان کو حل کرنے سے مرکز کے محددوں کی قیمتیں لاَ = ۲ اور ماَ = ۰ حاصل ہوتی ہیں۔
مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالے سے منحنی کی مساوات
۱۷لا² - ۱۲لا ما + ۸ما² + جَ = ۰ ہے جس میں جَ = گ لاَ + ف ماَ + ج
یعنے مساوات ۱۷لا² - ۱۲لا ما + ۸ما² - ۸۰ = ۰ ہے۔

اس کو ۱۷/۸۰ لا² - ۱۲/۸۰ لا ما + ما²/۱۰ = ۱ لکھ سکتے ہیں

یعنے ۱۷/۸۰ لا² - ۳/۲۰ لا ما + ما²/۱۰ = ۱

پس تراشِ مخروط کے نصف محور مساوات $\frac{1}{ص^4} - (ا+ب)\frac{1}{ص^2} + اب - ح^2 = 0$ کی اصلیں ہیں۔

یعنی $\frac{1}{ص^4} - \left(\frac{17}{80}+\frac{1}{10}\right)\frac{1}{ص^2} + \frac{17}{800} - \frac{9}{1600} = 0$ کی اصلیں

$\therefore \frac{1}{ص^4} - \frac{5}{16}\frac{1}{ص^2} + \frac{1}{64} = 0$ یعنی $ص^4 - 20ص^2 + 64 = 0$

$\therefore ص^2 = 16$ یا ۴ اور مساوات $\frac{لا^2}{16} + \frac{ما^2}{4} = 1$

$\therefore$ تراشِ مخروط قطع ناقص ہے جس کے نصف محوروں کی قیمت ۴ اور ۲ ہے۔
ان محوروں کی سمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات $\left(ا - \frac{1}{ص^2}\right)لا + ح\,ما = 0$ استعمال کرنے سے اعظم محور کی مساوات $\left(\frac{17}{80} - \frac{1}{16}\right)لا - \frac{6ما}{80} = 0$ حاصل ہوتی ہے جس سے $ما = 2لا$ یعنی $م = 2$

اور اقل محور کی مساوات $\left(\frac{17}{80} - \frac{1}{4}\right)لا - \frac{6ما}{80} = 0$ جس سے $ما = -\frac{1}{2}لا$
یعنی $م = -\frac{1}{2}$

مثال (۲) $4لا^2 - 8لا\,ما + 4ما^2 + 6لا - 8ما + 1 = 0$

اس مساوات میں دوسرے درجہ کی رقموں سے ایک مکمل مربع بنتا ہے۔

پس $(2لا - 2ما)^2 + 6لا - 8ما + 1 = 0$

لہذا $(2لا - 2ما + ل)^2 = 4(لا - ما)ل + ل^2 - 6لا + 8ما - 1$

$= 2لا(2ل - 3) - 4ما(ل - 2) + ل^2 - 1$

خطوط $(2لا - 2ما + ل) = 0$ اور $2لا(2ل - 3) - 4ما(ل - 2) + ل^2 - 1 = 0$
باہمدیگر علی القوائم ہونگے اگر $2(4ل - 6) + 2(4ل - 8) = 0$
یعنی اگر $ل = \frac{7}{4}$

$\therefore \left(2لا - 2ما + \frac{7}{4}\right)^2 = 2لا\left(\frac{7}{2} - 3\right) - 4ما\left(\frac{7}{4} - 2\right) + \frac{49}{16} - 1$

(۸لا - ۸ما + ۷)^{۲} = ۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳

قطع مکافی کی مساوات ما^{۲} = ۴پ لا ہے جبکہ ما قطع مکافی کے کسی نقطہ کا منحنی کے محور سے عمودی فاصلہ ہے اور لا راس پر کے مماس سے اسی نقطہ کا عمودی فاصلہ۔

پس ((۸لا - ۸ما + ۷) / $\sqrt{}$(۸^{۲} + ۸^{۲}))^{۲} = ۴پ لا (۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳) / $\sqrt{}$(۱۶^{۲} + ۱۶^{۲})

یعنے ((۸لا - ۸ما + ۷) / ۸$\sqrt{}$۲)^{۲} = ۴پ لا (۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳) / ۱۶$\sqrt{}$۲

∴ ۴پ = ۲ یعنے وترِ خاص کی قیمت ۲ ہے -

۸لا - ۸ما + ۷ = ۰ قطع مکافی کے محور کی مساوات ہے اور ۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳ = ۰ منحنی کے راس پر کے مماس کی مساوات ہے - ان خطوں کے مشترک نقطہ کے محدد راس کے محدد ہیں - پس ان کو حل کرنے سے لا کی قیمت - ۴۷/۳۲ اور ما کی قیمت - ۱۹/۳۲ برآمد ہوتی ہے - اور یہی راس کے محدد ہیں۔

مثال (۳) ۷لا^{۲} - ۱۷لا ما + ۶ما^{۲} + ۲۳لا - ۲ما - ۲۰ = ۰

مرکز کی تعیین کی مساواتیں ۱۴لاَ - ۱۷ماَ + ۲۳ = ۰ اور - ۱۷لاَ + ۱۲ماَ - ۲ = ۰ ہیں - ان مساواتوں کو حل کرنے سے لاَ = ۲ اور ماَ = ۳ حاصل ہوتے ہیں - پس منحنی کا مرکزِ نقطہ (۲ ، ۳) ہے -

اس مرکز میں سے گزرنے والے سابقہ محوروں کے متوازی محوروں کے حوالہ سے منحنی کی مساوات

۷لا^{۲} - ۱۷لا ما + ۶ما^{۲} + ۲۳/۲ × ۲ - ۱ × ۳ - ۲۰ = ۰ ہے

یعنے ۷لا^{۲} - ۱۷لا ما + ۶ما^{۲} = ۰

اس لیے یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ (۲ ، ۳) پر متقاطع ہوتے ہیں۔

اگر ابتدائی مساوات میں ما کو صفر لکھیں تو مساوات ۷لا^{۲} + ۲۳لا - ۲۰ = ۰ حاصل ہوتی ہے۔

پس محولہ بالا دو خطوط لا کے محور کو ایسے مقاموں پر قطع کرتے ہیں جہاں

۷لا^{۲} + ۲۳لا - ۲۰ = ۰ یعنے جہاں لا = - ۴ اور لا = ۵/۷

(۴) لا^{۲} - ۵لا ما + ما^{۲} + ۸لا - ۲۰ما + ۱۵ = ۰

منحنی کے مرکز کے محددوں (لاَ ، ماَ) کی تعیین

۲ لاَ - ۵ ماَ + ۸ = ۰ اور ۵ لاَ + ۲ ماَ - ۲۰ = ۰ سے ہوتی ہے

∴ لاَ = -۴ اور ماَ = ۰

مرکز میں سے گزرنے والے ابتدائی محوروں کے متوازی محوروں کے حوالہ سے تراشِ مخروط کی مساوات

لا۲ - ۵ لاما + ما۲ + ۴ (-۴) + ۱۵ = ۰ یعنی لا۲ - ۵ لاما + ما۲ = ۱ ہے

اس تراشِ مخروط کے نصف محور مساوات ۱/ص۴ - ۲/ص۲ + ۱ - ۲۵/۴ = ۰ کی اصلیں ہیں۔

اس کو حل کرنے سے ص۲ = ۲/۷ یا - ۲/۳ جس سے ص = ۱/۷ √۱۴ یا ۱/۳ √-۶

چونکہ ایک نصف محور خیالی ہے اس لیے تراشِ مخروط قطع زائد ہے۔

اس کی حقیقی محور کی سمت مساوات (۱ - ۷/۲) لا - ۵/۲ ما = ۰ یعنی لا + ما = ۰ سے حاصل ہوتی ہے۔

(ز) دوم درجہ کی عام مساوات سے قطع زائد کے متقاربوں کی تعیین۔

صفحہ (۲۲۲) پر بتایا گیا ہے کہ قطع زائد اور اس کے متقاربوں کی مساواتوں میں صرف ایک مستقل کا فرق ہے۔

پس جب اُ لا۲ + ۲ ح لاما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ..... (۱)

تراشِ مخروط کی مساوات ہے۔

تو اُ لا۲ + ۲ ح لاما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج + لہ = ۰ ..... (۲)

اس کے متقاربوں کی مساواتیں ہونگی۔

بشرطیکہ لہ کو ایسی قیمت دی جائے جس کی وجہ سے مساوات (۲) دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے۔

اس کے لیے مساوات کو محض لا کی دو درجی مساوات تصور کر کے اس کو حل کرتے ہیں ملاحظہ ہو صفحہ (۱۳۳)۔

چنانچہ اُ لا۲ + لا (۲ ح ما + ۲ گ) + (ب ما۲ + ۲ ف ما + ج + لہ) = ۰

∴ لا = [-(۲ ح ما + ۲ گ) ± √((۲ ح ما + ۲ گ)۲ - ۴ اُ (ب ما۲ + ۲ ف ما + ج + لہ))] / ۲ اُ

پس ا لا + ح ما + گ = √(ح^۲ ما^۲ + گ^۲ + ۲ گ ح ما - (اب ما^۲ + ۲ اف ما + اج + ال))

= √(ما^۲ (ح^۲ - اب) + ۲ (ح گ - اف) ما + گ^۲ - اج - ال)

یہ مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کی شکل میں تحویل ہونے کے لیے ضروری اور کافی ہوگا کہ جذرالمربع کی علامت کے نیچے کی مقدار کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

(ح^۲ - اب) (گ^۲ - اج - ال) = (ح گ - اف)^۲

اس کو پھیلا کر ا پر تقسیم کرنے سے

ل (ح^۲ - اب) = اب ج + ۲ ف گ ح - اف^۲ - ب گ^۲ - ج ح^۲

مساوات کے بائیں جانب کا جملہ ممیّز کہلاتا ہے اور △ سے تعبیر ہوتا ہے۔ پس

△ + ل (اب - ح^۲) = ۰ اس لیے ل = - △ / (اب - ح^۲)

لہٰذا دوسرے درجہ کی عام مساوات والے قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں حسبِ ذیل مساوات میں شامل ہیں :

الا^۲ + ۲ ح لاما + ب ما^۲ + ۲گ لا + ۲ ف ما + ج - △ / (اب - ح^۲) = ۰

دو مزدوج قطعات زائد کی مساواتوں اور ان کے متقاربوں کی مساواتوں میں صرف مستقلوں ہی کا فرق ہوتا ہے جو باہدیگر مساوی اور مخالف ہوتے ہیں ۔ پس مساوات (۱) والے قطع زائد کے مزدوج کی مساوات

الا^۲ + ۲ ح لاما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج - ۲△ / (اب - ح^۲) = ۰ ہے

نتیجۂ صریح ۔ خطوطِ مستقیم جن کی تعبیر مساوات الا^۲ + ۲ ح لاما + ب ما^۲ = ۰ سے ہوتی ہے تراشِ مخروط کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں ۔

مثال ۔ تراشِ مخروط لا^۲ - لاما - ۲ ما^۲ - ۳ ما - ۲ = ۰ کے متقارب معلوم کرو۔

ان متقاربوں کی مساوات لا^۲ - لاما - ۲ ما^۲ - ۳ ما - ۲ + ل = ۰ ہے

جس میں ل = − Δ / (اب − ح^۲)

Δ = (۱ × −۲ × −۲) + (۲ × ۳/۲ × ۰ × −۱/۲) − ۱ × (۳/۲)^۲ − (−۲) × ۰^۲ − (−۲) (−۲) (۱/۲)^۲

= −۴ − ۹/۴ + ۱/۲ = ۹/۲ − ۹/۴ = ۹/۴

اب − ح^۲ = (۱ × −۲) − (۱/۲)^۲ = −۲ − ۱/۴ = −۹/۴

∴ ل = − Δ / (اب − ح^۲) = − (۹/۴) / (−۹/۴) = ۱

پس متقاربوں کی مساوات لا^۲ − لا ما − ۲ ما^۲ + ۳ ما − ۲ + ۱ = ۰

یعنی لا^۲ − لا ما − ۲ ما^۲ + ۳ ما − ۱ = ۰ ہے

طالب علم کو چاہیے کہ محض ضابطہ استعمال نہ کرے بلکہ دی ہوئی مساوات کے ساتھ اس طرح عمل کرے جیسا کہ عام مساوات کے ساتھ کیا گیا ہے ۔ یہ طریقہ زیادہ مفید ثابت ہوگا ۔

(ح) اگر بجائے ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ = ۱ کے تراشِ مخروط کی مساوات بشکل عام مساوات درجۂ دوم دی جائے تو ذیل کے طریقہ سے اس تراشِ مخروط کے نصف محور دریافت کیے جاسکتے ہیں ۔

اس لیے کہ تراشِ مخروط کے مرکز کو مبداء ماننے سے عام مساوات درجۂ دوم

ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ + ۲گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ + جَ = ۰ میں تبدیل ہوجاتی ہے جس میں جَ = Δ / (اب − ح^۲)

چونکہ متقاطع ہم مرکز دائرہ کی مساوات لا^۲ + ما^۲ − ص^۲ = ۰ ہے

اس لیے مبداء اور دائرہ اور دی ہوئی تراشِ مخروط کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط کی مساوات

ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ = − جَ (لا^۲ + ما^۲) / ص^۲ ہے

یعنے $\text{لا}^2\left(\text{ا} + \frac{\text{ج}}{\text{ص}^2}\right) + ۲\text{ح لا ما} + \text{ما}^2\left(\text{ب} + \frac{\text{ج}}{\text{ص}^2}\right) = ۰$

یہ خطوط باہمدیگر منطبق ہونگے اگر $\left(\text{ا} + \frac{\text{ج}}{\text{ص}^2}\right)\left(\text{ب} + \frac{\text{ج}}{\text{ص}^2}\right) - \text{ح}^2 = ۰$

$$\therefore\ \text{اب} + \frac{\text{اج}}{\text{ص}^2} + \frac{\text{بج}}{\text{ص}^2} + \frac{\text{ج}^2}{\text{ص}^4} - \text{ح}^2 = ۰$$

یعنے $\text{اب ص}^4 + \text{ج ص}^2(\text{ا}+\text{ب}) + \text{ج}^2 - \text{ص}^4\text{ح}^2 = ۰$

$$\therefore\ \text{ص}^4(\text{اب} - \text{ح}^2) + (\text{ا}+\text{ب})\text{ج ص}^2 + \text{ج}^2 = ۰$$

پس $\text{ص}^4(\text{اب} - \text{ح}^2) + \text{ص}^2\ \frac{\Delta(\text{ا}+\text{ب})}{\text{اب} - \text{ح}^2} + \frac{\Delta^2}{(\text{اب} - \text{ح}^2)^2} = ۰$

$$\therefore\ \text{ص}^4(\text{اب} - \text{ح}^2)^2 + (\text{ا}+\text{ب})\Delta(\text{اب} - \text{ح}^2)\text{ص}^2 + \Delta^2 = ۰$$

مثال - تراشِ مخروط $۵\text{لا}^2 - ۲۶\text{ لا ما} + ۵\text{ما}^2 + ۱۰\text{لا} - ۲۶\text{ما} + ۷۱ = ۰$ کے نصف قطروں کی تعیین -

$$\text{اب} - \text{ح}^2 = ۲۵ - (۱۳)^2 = -۱۴۴$$

$$\Delta = \text{ابج} + ۲\text{فگح} - \text{اف}^2 - \text{بگ}^2 - \text{جح}^2 = ۱۷۷۵ + ۱۶۹۰ - ۸۴۵ - ۱۲۵ - ۱۱۹۹۹$$
$$= -۹۵۰۴$$

$$\therefore\ -(۱۴۴)^3\text{ص}^4 + (۹۵۰۴) \times ۱۴۴\text{ص}^2 + (۹۵۰۴)^2 = ۰$$

یعنے $۱۲\text{ص}^4 - ۵۵\text{ص}^2 - ۳۶۳ = ۰$

$\therefore\ \text{ص}^2 = \frac{۳۳}{۴}$ یا $-\frac{۱۱}{۳}$ پس منحنی قطع زائد ہے -

بجائے ضابطہ استعمال کرنے کے پہلے مرکز کے محدد دریافت کرکے تفصیل دار عمل کرنا بہتر ہوگا - اِس طرح عمل کرنے سے طالب علم کو معلوم ہوگا کہ مرکز کے محدد لا = −۱ اور ما = ۰ ہیں -

بارھویں باب کی مثالیں

۱۔ مندرجۂ ذیل مخروطی تراشوں کی نوعیت اور ان کی وضعیں دریافت کرو:-

(ا) لا^{۲} − ۶ لا ما + ۹ ما^{۲} − ۲۸۰ لا − ۲۰ = ۰

(ب) ۴ لا ما + ۶ لا − ۸ ما + ۱ = ۰

(ج) ۱۴ لا^{۲} − ۲۴ لا ما + ۳۴ ما^{۲} − ۸۸ لا + ۱۱۶ ما + ۱۹۶ = ۰

(د) ۶ لا^{۲} − ۵ لا ما − ۶ ما^{۲} − ۴۶ لا − ۹ ما + ۶۰ = ۰

۲۔ ثابت کرو کہ اگر کسی تراش مخروط کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تو ان کے تقاطع کا نقطہ منحنی کا مرکز ہونا چاہیے۔

۳۔ لہ کی کیا قیمت ہونی چاہیے تاکہ مساوات

۲ لا^{۲} + لہ لا ما − ما^{۲} − ۳ لا + ۶ ما − ۹ = ۰

خطوطِ مستقیم کے ایک جوڑ کو تعبیر کرے۔

۴۔ قطع زائد ۲ لا^{۲} − ۷ لا ما − ۳ ما^{۲} − ۲ لا − ۸ ما − ۲ = ۰

کے متقارب دریافت کرو۔

اس قطع زائد کے مزدوج کی مساوات بھی لکھو۔

۵۔ ثابت کرو کہ اگر ا$_{۱}$ لا^{۲} + ۲ ح$_{۱}$ لا ما + ب$_{۱}$ ما^{۲} = ۱ اور

ا$_{۲}$ لا^{۲} + ۲ ح$_{۲}$ لا ما + ب$_{۲}$ ما^{۲} = ۱

ایک ہی تراشِ مخروط کو تعبیر کرتے ہیں اور محدّدوں کے محور علی القوائم ہیں تو

(ا$_{۱}$ − ب$_{۱}$)^{۲} + ۴ ح$_{۱}^{۲}$ = (ا$_{۲}$ − ب$_{۲}$)^{۲} + ۴ ح$_{۲}^{۲}$

۶۔ ثابت کرو کہ درجۂ دوم کی عام مساوات جس تراشِ مخروط کو تعبیر کرتی ہے وہ قائم قطع زائد ہے اگر ا + ب = ۰

۷۔ ثابت کرو کہ لا ما + ا لا + ب ما + ج = ۰ ایک قطع زائد کی عام مساوات ہے جبکہ محدّدوں کے محور متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

تیرہواں باب

کعبی اور عددی سروں کی مساواتوں کا عملی حل

٦٦ - (ا) اکثر مساواتیں جن کی طبیعیات یا انجینیری میں ضرورت ہوتی ہے تقریبی طریقہ پر حل کی جاسکتی ہیں - یہ مساواتیں عموماً دو قسم کی ہوتی ہیں :-

(۱) جبری مساواتیں از قسم $لا^{م}$ + ا لا + ب = ۰ جس میں م > ۲

(۲) ماورائی مساواتیں مثلاً $لا^{لا}$ + ا لوک لا = ب، $و^{لا}$ + ا لا = ج،

لا + ا جب لا + ب لوک لا = ج وغیرہ

قسم اول کی مساواتیں جبری طریقہ پر حل ہوسکتی ہیں بشرطیکہ م = ۳ یا م = ۴ لیکن یہ جبری طریقے اکثر طویل اور دقت طلب ہوتے ہیں - ترسیمی طریقہ زیادہ آسان اور زود عمل ثابت ہوتا ہے - اگر جبری مساوات میں م کی قیمت ۴ سے زائد ہو تو اس کے جبری حل کا کوئی طریقہ نہیں دریافت ہوا ہے اور نہ ماورائی مساواتوں کا کوئی جبری طریقہ موجود ہے -

ترسیمی طریقہ میں یا تو واحد طریق مرتسم کیا جاتا ہے یا ایک ہی کاغذ پر دو طریق مرتسم کرکے ان کے تقاطع کے نقطے دریافت کیے جاتے ہیں - واضح ہے کہ ان طریقوں سے مساواتوں کی صرف حقیقی اصلیں معلوم ہوسکینگی اور وہ بھی تقریبی طور پر - اس کے بعد تحلیلی ذرائع سے مدد لے کر ان اصلوں کی قیمت مطلوبہ درجۂ صحت تک دریافت کی جاسکتی ہے -

(ب) ہورنر (Horner) کا تقریبی طریقہ —

فرض کرو مساوات کثیر رقمی ہے اور بشکل ف (لا) = ۰ لکھی جا سکتی ہے۔

(۱) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد ھ، ھ + ۱ دریافت کیے جائیں جن کے مابین مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل عہ واقع ہوتی ہے۔
(سردست یہ فرض کیا جائے کہ ان دو متصل صحیح عددوں کے مابین کوئی دوسری اصل موجود نہیں ہے)۔

(۲) مساوات ف$_{1}$ (ما) = ۰ تیار کرو جس کی اصلیں مصرحۂ بالا اصلوں سے بقدر ھ کم ہوں۔ واضح ہے کہ اس نئی مساوات ف$_{1}$ (ما) = ۰ کی وہ اصل جو عہ کے متناظر ہے ف (ما) = ۰ کی صرف ایک ہی ایسی اصل ہے جو صفر اور ۱ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے کہ نئی مساوات کی اصل سابقہ مساوات کی اصل سے بقدر ھ کمتر ہے۔

(۳) حسابی عمل کی دقتوں سے بچنے کے لیے جو صفر اور ۱ کے مابین کسری اصل واقع ہونے سے پیدا ہوتی ہیں ایک مساوات ف$_{1}$ (لا) = ۰ تیار کی جائے جس کی اصلیں (ہر ایک) ف$_{1}$ (ما) = ۰ کی اصلوں کی دہ چند ہوں۔
واضح ہے کہ ف$_{1}$ (لا) = ۰ کی ایک اصل بوجہ عمل (۱) صفر اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے۔

(۴) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد ھ$_{1}$ اور ھ$_{1}$ + ۱ دریافت کرو جن کے مابین ف$_{1}$ (لا) = ۰ کی مطلوبہ اصل واقع ہے۔
پس مساوات ف (لا) = ۰ کی اصل عہ بموجب طریقۂ کتابت کے اعشاریہ ھ ۔ ھ$_{1}$ اور (ھ$_{1}$ + ۱) ۔ ھ کے درمیان واقع ہوگی۔

(۵) اسی طرح عمل کرتے ہوئے مساوات ف$_{2}$ (ما) = ۰ دریافت کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات ف$_{1}$ (لا) = ۰ کی اصلوں سے بقدر ھ$_{1}$ کمتر ہوں اور اس کے بعد مساوات ف$_{2}$ (لا) = ۰ معلوم کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات ف$_{2}$ (ما) = ۰ کی اصلوں کی دہ چند ہوں۔
پس ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے جس مقام تک صحت کے ساتھ اصل کی قیمت

دریافت کرنا مقصود ہو دریافت کی جا سکتی ہے۔

مثال - مساوات ف (لا) ≡ ۲ لا^{۳} - ۷ لا^{۲} + لا + ۴ = ۰
کی ایک اصل عہ ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔ اعشاریہ کے دو مقاموں تک صحت کے ساتھ اس کی قیمت دریافت کرو۔

(۱) چونکہ ف (۳) = -۲ اور ف (۴) = ۲۴ مساوات کی ایک اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔

(۲) ف (لا) = ۰ کی اصلوں سے بقدر ۳ کمتر اصلوں کی مساوات تیار کرنے کے لیے ما = لا - ۳ یعنے لا = ما + ۳ لکھو - پس

۲ (ما + ۳)^{۳} - ۷ (ما + ۳)^{۲} + (ما + ۳) + ۴ = ۰

∴ ف$_{۱}$ (ما) ≡ ۲ ما^{۳} + ۱۱ ما^{۲} + ۱۳ ما - ۲ = ۰

(۳) ف$_{۱}$ (ما) = ۰ کی اصلوں کے دہ چند اصلوں کی مساوات بنانے کے لیے لا = ۱۰ ما لکھو
یعنے ما = $\frac{\text{لا}}{۱۰}$ - تب

ف$_{۲}$ (لا) ≡ لا^{۳} + ۵۵ لا^{۲} + ۶۵۰ لا - ۱۰۰۰ = ۰

(۴) آزمائش سے دریافت ہوتا ہے کہ ف$_{۲}$ (لا) = ۰ کی مطلوبہ اصل جو صفر اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے فی الحقیقت ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

(۱') پس عہ کی قیمت ۱ر۳ اور ۲ر۳ کے مابین ہے۔

(۲') ف$_{۲}$ (لا) = ۰ کی اصلوں سے بقدر ۱ کمتر اصلوں والی مساوات تیار کرنے کے لیے

ما = لا - ۱ یعنے لا = ما + ۱ لکھو - تب

(ما + ۱)^{۳} + ۵۵ (ما + ۱)^{۲} + ۶۵۰ (ما + ۱) - ۱۰۰۰ = ۰

یعنے ف$_{۳}$ (ما) ≡ ما^{۳} + ۵۸ ما^{۲} + ۷۶۳ ما - ۲۹۴ = ۰

(۳') ف$_{۳}$ (ما) = ۰ کی اصلوں کی دہ چند اصلوں والی مساوات تیار کرنے کے لیے
لا = ۱۰ ما یعنے ما = $\frac{\text{لا}}{۱۰}$ لکھو - تب

ف۴ (لا) ≡ لا^۳ + ۵۸۰ لا^۲ + ۷۶۳۰۰ لا − ۲۹۴۰۰۰ = ۰

(۴) آزمائش سے ف۴ (لا) = ۰ کی مطلوبہ اصل جو صفر اور ۱۰ کے مابین واقع ہے فی الحقیقت ۳ اور ۴ کے درمیان ہے ۔

پس ع کی قیمت ۳۱۳ اور ۳۱۴ کے درمیان ہے ۔

اسی طریقۂ عمل سے اگر ہم چاہیں تو اعشاریہ کے مزید مقاموں تک صحت کے ساتھ ع کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں ۔

(ب) مصرحۂ بالا طریقہ اگر براہِ راست استعمال کیا جائے تو بہت ہی طویل اور تکلیف رساں پایا جاتا ہے ۔ اس لیے ذیل میں ایسے طریقے درج کیے جاتے ہیں جن سے (۱) کثیر رقمی جملوں کی اختصاری تقسیم اور (۲) ایسی مساوات کی تعیین جس کی اصلیں کسی دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ایک معیّنہ حقیقی عدد کے کمتر ہوں، بآسانی عمل میں آسکے ۔

(۱) کثیر رقمی جملہ ا. لا^ن + ا۱ لا^ن⁻۱ + ا۲ لا^ن⁻۲ + ... + ان کی تقسیم (لا − ح) سے بذریعۂ طریقۂ اختصار ۔

فرض کرو کہ ا. لا^ن + ا۱ لا^ن⁻۱ + ا۲ لا^ن⁻۲ + ... + ان ≡

(لا − ح) (ب. لا^ن⁻۱ + ب۱ لا^ن⁻۲ + ... + بن⁻۱) + م (جس میں م = باقی)

مساوات کے ہر دو ارکان کے لا کی مختلف قوتوں کے سروں کو متعادل لکھنے سے

ا. = ب. ∴ ب. = ا.

ا۱ = ب۱ − ب. ح ب۱ = ا۱ + ب. ح

ا۲ = ب۲ − ب۱ ح ب۲ = ا۲ + ب۱ ح

ا۳ = ب۳ − ب۲ ح ب۳ = ا۳ + ب۲ ح

. . . .

ان = م − بن⁻۱ ح م = ان + بن⁻۱ ح

پس دیے ہوئے کثیر رقمی جملہ کے سروں کو ایک قطار میں لکھ ڈالو ۔ اس قطار کے نیچے ایک اور قطار کی جگہ چھوڑ کر ایک خط کھینچو ۔ خط کے نیچے اور ا. کے

عین نیچے ب. لکھو - پھر ب. کو ح سے ضرب دے کر خط کے اوپر ا، کے عین نیچے لکھو - اور ان کے حاصل جمع ب، کو ان کے اور خط کے نیچے لکھو اور اس طرح خط کے اوپر اور نیچے کی دونوں قطاروں کو مکمل کرو - جیسا کہ ذیل میں مندرج ہے:-

$$ا_{.} \quad ا_{۱} \quad ا_{۲} \quad ا_{۳} \quad \cdots\cdots \quad ا_{ن-۱} \quad ا_{ن}$$

$$ب_{.}ح \quad ب_{۱}ح \quad ب_{۲}ح \quad \cdots\cdots \quad ب_{ن-۲}ح \quad ب_{ن-۱}ح$$

$$ب_{.} \quad ب_{۱} \quad ب_{۲} \quad ب_{۳} \quad \cdots\cdots \quad ب_{ن-۱} \quad | \underline{ر}$$

مثال - جملہ $۲لا^{۵} + ۷لا^{۴} - ۳لا^{۳} - ۵لا - ۹$ کو $(لا+۴)$ پر تقسیم کرو:-

$لا + ۴ = لا - (-۴)$ لہذا

۲	۷	۳-	۰	۵-	۹-
	۸-	۴	۴-	۱۶	۴۴-
۲	۱-	۱	۴-	۱۱	۵۳-

پس خارج قسمت $= ۲لا^{۴} - لا^{۳} + لا^{۲} - ۴لا + ۱۱$ اور باقی $= -۵۳$

(۲) ایسی مساوات کی تعیین جس کی اصلیں بالترتیب مساوات

$ا_{.}لا^{ن} + ا_{۱}لا^{ن-۱} + ا_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots\cdots\cdots + ا_{ن}$ کی

اصلوں سے بقدر ح کمتر ہوں -

فرض کرو $ما = لا - ح$ پس $لا = ما + ح$

اب فرض کرو $ا_{.}(ما+ح)^{ن} + ا_{۱}(ما+ح)^{ن-۱} + ا_{۲}(ما+ح)^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_{ن}$

$$\equiv ا'_{.}ما^{ن} + ا'_{۱}ما^{ن-۱} + ا'_{۲}ما^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا'_{ن}$$

پس $ا_{.}لا^{ن} + ا_{۱}لا^{ن-۱} + ا_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_{ن} \cdots\cdots (۱)$

$$= \text{ا}_0(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}} + \text{ا}_1(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}-1}(\text{لا}-\text{ح}) + \text{ا}_{\text{ن}}$$

$$= (\text{لا}-\text{ح})\left\{\text{ا}_0(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}-1} + \text{ا}_1(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\right\} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

جس سے واضح ہے کہ $\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$ کو $(\text{لا}-\text{ح})$ پر تقسیم کرنے سے $\text{ا}_{\text{ن}}$ باقی رہتا ہے -

اگر $\text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$ کو $(\text{لا}-\text{ح})$ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت $\text{ب}_0\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{ب}_2\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1}$ دستیاب ہوتا ہے تو $(\text{لا}-\text{ح})(\text{ب}_0\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1}) + \text{ا}_{\text{ن}}$

$$= \text{ا}_0\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}} \quad \cdots (2)$$

پس (۱) اور (۲) مساواتوں سے

$$(\text{لا}-\text{ح})(\text{ب}_0\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1}) + \text{ا}_{\text{ن}}$$

$$= \text{ا}_0(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}} + \text{ا}_1(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}-1} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}-1}(\text{لا}-\text{ح}) + \text{ا}_{\text{ن}}$$

مساوات کے دونوں ارکان سے $\text{ا}_{\text{ن}}$ کو قلمزد کرکے باقی ماندہ جملوں کو $(\text{لا}-\text{ح})$ پر تقسیم کرنے سے

$$\text{ب}_0\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1}$$

$$= \text{ا}_0(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}-1} + \text{ا}_1(\text{لا}-\text{ح})^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}-1}$$

پس واضح ہے کہ جملہ $\text{ب}_0\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots + \text{ب}_{\text{ن}-1}$ کو $(\text{لا}-\text{ح})$ پر تقسیم کرنے کے بعد جو باقی رہتا ہے وہ $\text{ا}_{\text{ن}-1}$ ہے -

اسی طرح تقسیم کا عمل جاری رکھ کر مطلوبہ مساوات کے تمام سروں کو دریافت کر سکتے ہیں -

مثال - ایک ایسی مساوات کی تعیین جس کی ہر ایک اصل مساوات

۳ لا^۳ - ۷ لا^۲ + ۲ لا - ۴ = ۰ کی ہر حقیقی اصل سے بقدر ۵ کمتر ہے -

مصرحۂ بالا طریقہ کے بموجب

(عہ)	۳	۷-	۲	۴-	
		۱۵	۴۰	۲۱۰	
	۳	۸	۴۲	۲۰۶	≡ ا۳
		۱۵	۱۱۵		
(بہ)	۳	۲۳	۱۵۷		≡ ا۲
		۱۵			
(جہ)	۳	۳۸			≡ ا۱

ا۰ ≡ ۳

پس مطلوبہ مساوات ۳ لا^۳ + ۳۸ لا^۲ + ۱۵۷ لا + ۲۰۶ = ۰ ہے

مثال کے طور پر مساوات لا^۴ - ۵ لا^۳ + ۷ لا^۲ - ۱۷ لا + ۱۱ = ۰ کی ایک حقیقی اصل مندرجۂ بالا طریقوں سے اعشاریہ کے چوتھے مقام تک محسوب کی جاتی ہے :-

آزمائش سے (یا ترسیمی طریقے سے) پتہ چلتا ہے کہ مساوات کی ایک اصل ۴ اور ۵ کے مابین واقع ہے لہذا دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ۴ کمتر اصلوں والی مساوات حاصل کی جاتی ہے اور جملہ عمل ایک جدول کی شکل میں ترتیب دیا جاتا ہے -

						اصلوں میں کمی بقدر
ف(لا) ≡	۱	-۵	۷	-۱۷	۱۱	
		۴	-۴	۱۲	-۲۰	
	۱	-۱	۳	-۵	-۹	
		۴	۱۲	۶۰		
	۱	۳	۱۵	۵۵		۴
		۴	۲۸			
	۱	۷	۴۳			
		۴				
ف₁(ما)	۱	۱۱				
ف₁(لا) ≡	۱	۱۱۰	۴۳۰۰	۵۵۰۰۰	-۹۰۰۰۰	
		۱	۱۱۱	۴۴۱۱	۵۹۴۱۱	
	۱	۱۱۱	۴۴۱۱	۵۹۴۱۱	-۳۰۵۸۹	
		۱	۱۱۲	۴۵۲۳		۱
	۱	۱۱۲	۴۵۲۳	۶۳۹۳۴		
		۱	۱۱۳			
	۱	۱۱۳	۴۶۳۶			
		۱				
ف₂(ما)	۱	۱۱۴				
ف₂(لا) ≡	۱	۱۱۴۰	۴۶۳۶۰۰	۶۳۹۳۴۰۰۰	-۳۰۵۸۹۰۰۰۰	
		۴	۴۵۷۶	۱۸۷۲۷۰۴	۲۶۳۲۲۶۸۱۶	
	۱	۱۱۴۴	۴۶۸۱۷۶	۶۵۸۰۶۷۰۴	-۴۲۶۶۳۱۸۴	
		۴	۴۵۹۲	۱۸۹۱۰۷۲		۴
	۱	۱۱۴۸	۴۷۲۷۶۸	۶۷۶۹۷۷۷۶		
		۴	۴۶۰۸			
	۱	۱۱۵۲	۴۷۷۳۷۶			
		۴				
ف₃(ما)	۱	۱۱۵۶				
ف₃(لا) ≡	۱	۱۱۵۶۰	۴۷۷۳۷۶۰۰	۶۷۶۹۷۷۷۶۰۰۰	-۴۲۶۶۳۱۸۴۰۰۰۰	
		۶	۶۹۳۹۶	۲۸۶۸۴۱۹۷۶	۴۰۷۹۰۷۷۰۷۸۵۶	
	۱	۱۱۵۶۶	۴۷۸۰۶۹۹۶	۶۷۹۸۴۶۱۷۹۷۶	-۱۸۷۲۴۱۳۲۱۴۴	
		۶	۶۹۴۳۲	۲۸۷۲۵۸۵۶۸		۶
	۱	۱۱۵۷۲	۴۷۸۷۶۴۲۸	۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴		
		۶	۶۹۴۶۸			
	۱	۱۱۵۷۸	۴۷۹۴۵۸۹۶			
		۶				
ف₄(ما)	۱	۱۱۵۸۴				
ف₄(لا) ≡	۱	۱۱۵۸۴۰	۴۷۹۴۵۸۹۶۰۰	۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴۰۰۰	-۱۸۷۲۴۱۳۲۱۴۴۰۰۰۰	۳

پہلے سیاہ دبیز خط کے نیچے کی مساوات ف(لا) = ۰ کی اصلیں مساوات فہ(ما) = ۰ کی اصلوں کے بالترتیب دہ چند ہیں۔

اس کے بعد آزما کر دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات ف(لا) = ۰ کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے ف(لا) = ۰ کی اصلوں کو بقدر ۱ گھٹا کر نئی مساوات فہ(ما) = ۰ تیار کی جاتی ہے۔ اس طرح عمل کے بقیہ مراتب انجام پاتے ہیں اور دی ہوئی مساوات کی اصل ...۲۰۰ ۶ ۴ ۱ ر ۴ برآمد ہوتی ہے۔

نوٹ:۔ پہلے دو تین استخراجے تکمیل پانے کے بعد بائیں جانب کے سب سے آخری باقی سے عین پہلے کے باقی پر آخری باقی کو تقسیم کرکے اصل کا اعشاریہ کے بعد کا دوسرا ہندسہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً ...۳۰۵۸۹۰۰۰ کو ...۶۳۹۳۴۰۰ پر تقسیم کرنے سے ہندسہ ۴ حاصل آتا ہے۔

معہذا جب یہ مقسوم علیہ دریافت طلب ہندسوں کی تعداد سے دو زائد ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے تو حسابی عمل میں حسب ذیل اختصار عائد کیا جا سکتا ہے:۔

صفروں کے بڑھانے کے عوض آخری سر سے عین پہلے کے سر کا آخری ہندسہ قلمزد کر دیا جائے اور اس سے عین پہلے کے سر کے آخری دو ہندسے قلمزد کیے جائیں وغیرہ وغیرہ۔ پس دوسرے دبیز خط کے نیچے کا حسابی عمل اختصار کے ساتھ یوں لکھا جا سکتا ہے:۔

(۴٫۱۴۶۳   ۳۰۵۸۹ -   ۶۳۹۳۴   ۸۶۴۵   ۴۴۴   ۴

۲۶۳۰۸   ۱۸۴

۴۲۸۱ -   ۶۵۷۷

۴۰۵۲   ۱۸۴

۲۲۵ -   ۶۷۶۱

۲۰۱

۲۴ -

پہلی مرتبہ جب ہندسوں کو قلمزد کرتے ہیں تو پہلے اور دوسرے سر ساقط ہو جاتے ہیں۔ جب دوسری مرتبہ ہندسے قلمزد کیے جاتے ہیں تو تمام سر الّا آخری دو کے ساقط ہو جاتے ہیں۔ اور اس کے بعد کا عمل معمولی اختصاری تقسیم کے ذریعہ اختتام کو پہنچتا ہے۔

۶۷۔ کعبی مساواتوں کے حل سے پہلے مناسب معلوم ہوتا ہے کہ معادلات سے متعلق چند مفید کلیات و واقعات کا محض ذکر کر دیا جائے۔ ان کا ثبوت نصاب سے باہر ہونے کی وجہ سے غیر ضروری ہے۔ البتہ شوقین طالب علم مستند کتابوں میں ان کا مطالعہ کر سکتا ہے۔

(۱) ہر ایسی مساوات کی جو بشکل ف (لا) = ۰ لکھی جاتی ہے ایک اصل ضرور ہوتی ہے خواہ وہ حقیقی ہو یا خیالی۔

(۲) ن۔ویں درجہ کی ہر مساوات کی ن ہی اصلیں ہوتی ہیں۔ ن سے زیادہ نہیں۔

(۳) اگر مساوات $\text{ا}_{۰}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}} = ۰$

ہو تو وہ بشکل $\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{\text{ا}_{۱}}{\text{ا}_{۰}}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ا}_{۲}}{\text{ا}_{۰}}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \dots + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-۱}}{\text{ا}_{۰}}\text{لا} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{۰}} = ۰$

لکھی جا سکتی ہے اور اگر عہ، بہ، جہ، ... کہ، اس کی اصلیں ہوں تو مساوات متماثلاً

$(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ}) \dots (\text{لا} - \text{کہ}) = ۰$ کے مساوی ہے۔

پس $\Sigma\, \text{عہ} = -\frac{\text{ا}_{۱}}{\text{ا}_{۰}}$ ، $\Sigma\, \text{عہ بہ} = \frac{\text{ا}_{۲}}{\text{ا}_{۰}}$ ، $\Sigma\, \text{عہ بہ جہ} = \frac{\text{ا}_{۳}}{\text{ا}_{۰}} \dots\dots$

اور $\text{عہ بہ جہ} \dots\dots \text{کہ} = (-۱)^{\text{ن}} \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{۰}}$

طالب علم کو شاید یہ خیال ہو گا کہ چونکہ مندرجۂ بالا روابط کی تعداد مساوات کی اصلوں کی تعداد کے برابر ہے اس لیے ہر ایک مساوات حل کی جا سکتی ہے۔ لیکن حقیقتِ حال اس سے بہت مختلف ہے۔ اس لیے کہ اگر ن اصلوں میں سے ن - ۱ کو ساقط کر کے باقی ماندہ یعنے ن۔ویں اصل کی تعیین کے لیے مساوات تیار کی جائے تو چونکہ یہ مقادیر ہر ایک مساوات میں متشاکلاً شامل ہیں لہذا ہمیشہ ایسی ہی مساوات حاصل ہو گی جس کے سر ابتدائی مساوات کے سر ہیں۔

(۴) حقیقی سروں کی مساوات میں خیالی اصلوں کے زوج ہوتے ہیں۔

(۵) منطق سروں کی مساوات میں اصم اصلوں کے زوج ہوتے ہیں۔

(۶) مساوات ف (لا) = ۰ کی مثبت اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہی ہوسکتی ہیں جتنی کہ جملہ ف (لا) میں علامات کی تبدیلیاں ہیں اور اس کی منفی اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہوسکتی ہے جتنی کہ جملہ ف (-لا) میں علامات کی تبدیلیاں ہیں - یہ کلیہ ڈیکارٹس (Descartes) کا علامتوں کا قانون یا قاعدہ کہلاتا ہے۔

(۷) طاق درجہ کی ہر مساوات کی کم از کم ایک حقیقی اصل ہوتی ہے جس کی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔

(۸) اگر کسی مساوات کا درجہ جفت اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس کی کم از کم دو اصلیں حقیقی ہونگی جن میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔

۶۸ - کعبی مساواتیں - کارڈان (Cardan) کا حل -

فرض کرو کہ کعبی مساوات $ل_۰$ لا^{۳} + ۳ $ل_۱$ لا^{۲} + ۳ $ل_۲$ لا + $ل_۳$ = ۰ ......(۱) ہے،

جس میں $ل_۰$، $ل_۱$، $ل_۲$ اور $ل_۳$ عام طور پر مختلف (Complex) اعداد ہیں۔

اب بجائے لا کے ما + ج لکھو .... (۲)

تب $ل_۰$ (ما + ج)^{۳} + ۳ $ل_۱$ (ما + ج)^{۲} + ۳ $ل_۲$ (ما + ج) + $ل_۳$ = ۰

یعنے $ل_۰$ ما^{۳} + ۳ ($ل_۰$ ج + $ل_۱$) ما^{۲} + ۳ ($ل_۰$ ج^{۲} + ۲ $ل_۱$ ج + $ل_۲$) ما

+ ($ل_۰$ ج^{۳} + ۳ $ل_۱$ ج^{۲} + ۳ $ل_۲$ ج + $ل_۳$) = ۰ ...... (۳)

مقصد یہ ہے کہ جملہ سے رقم جس میں ما^{۲} شریک ہے معدوم ہوجائے۔
پس ج کی قیمت ایسی ہونی چاہیے کہ

$ل_۰$ ج + $ل_۱$ = ۰　یعنے ج = $-\frac{ل_۱}{ل_۰}$

مساوات (۳) کو $ل_۰$ پر تقسیم کرنے سے

مساوات $\text{ما}^3 + 3\,\text{پ}\,\text{ما} + \text{ق} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$ حاصل ہوتی ہے۔
اور یہ کعبی مساوات کی معیاری شکل ہے۔
اس کے حل کے لیے فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{ع} + \text{و}$

$$\therefore\ \text{ع}^3 + \text{و}^3 + 3(\text{ع}+\text{و})(\text{ع}\text{و} + \text{پ}) + \text{ق} = 0 \quad \ldots\ldots (5)$$

چونکہ ہمیں دو غیر معلوم مقادیر سے سابقہ پڑا ہے اس لیے ہم ان کا اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ وہ رابطہ (۵) کی تطبیق کرے اور نیز رابطہ

$$\text{ع}\text{و} + \text{پ} = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$ کی

(۵) اور (۶) سے $\text{ع}^3 + \text{و}^3 + \text{ق} = 0 \quad \ldots\ldots (7)$

مساوات (۷) میں و کی قیمت $-\frac{\text{پ}}{\text{ع}}$ درج کرنے سے $\text{ع}^3 - \frac{\text{پ}^3}{\text{ع}^3} + \text{ق} = 0$

یعنی $\text{ع}^6 + \text{ق}\,\text{ع}^3 - \text{پ}^3 = 0$

$$\therefore\ \text{ع}^3 = \frac{-\text{ق} \pm \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}$$

ع³ کی ان دو قیمتوں میں سے مثبت علامت کی ایک قیمت لو

یعنی $\text{ع}^3 = \frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}$ لکھو۔

$$\therefore\ \text{ع} = \left(\frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ جبکہ } \text{و} = \left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ازروئے رابطہ (۶)

$$\text{معہذا } \text{ع} = \text{سہ}\left(\frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ جبکہ } \text{و} = \text{سہ}^2\left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{اور } \text{ع} = \text{سہ}^2\left(\frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ جبکہ } \text{و} = \text{سہ}\left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ \text{ما} = (\text{ع}+\text{و}) = \left(\frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^2 + 4\,\text{پ}^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

یا $سہ \left(\frac{-ق + \sqrt{ق^{۲} + ۴پ^{۳}}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۳}} + سہ^{۲} \left(\frac{-ق - \sqrt{ق^{۲} + ۴پ^{۳}}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۳}}$

یا $سہ^{۲} \left(\frac{-ق + \sqrt{ق^{۲} + ۴پ^{۳}}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۳}} + سہ \left(\frac{-ق - \sqrt{ق^{۲} + ۴پ^{۳}}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۳}}$

جن میں سہ اور سہ^{۲} اکائی کے خیالی جذر الکعب ہیں۔

(۱) اگر $ق^{۲} + ۴پ^{۳}$ مثبت ہے تو $ع^{۳}$ اور $و^{۳}$ دونوں حقیقی ہیں۔ فرض کرو کہ ع اور و بالترتیب $ع^{۳}$ اور $و^{۳}$ کے حسابی جذر الکعب ہیں۔ تب کعبی مساوات کی اصلیں

$ع + و$، $سہ ع + سہ^{۲} و$ اور $سہ^{۲} ع + سہ و$ ہیں۔

ان میں کی پہلی اصل $(ع + و)$ حقیقی ہے اور سہ اور سہ^{۲} کی قیمتیں درج کرنے سے باقی ماندہ دو اصلیں

$$\frac{ع + و}{۲} + \frac{ع - و}{۲}\sqrt{-۳} \quad \text{اور} \quad -\frac{ع + و}{۲} - \frac{ع - و}{۲}\sqrt{-۳}$$

ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر $ق^{۲} + ۴پ^{۳}$ صفر ہے تو $ع^{۳} = و^{۳}$ اور $ع = و$ اور اصلیں $۲ع$، $ع(سہ + سہ^{۲})$، $ع(سہ^{۲} + سہ)$ یعنے $۲ع$، $-ع$ اور $-ع$ ہو جاتی ہیں۔

(۳) اگر $ق^{۲} + ۴پ^{۳}$ منفی ہے تو $ع^{۳}$ اور $و^{۳}$ خیالی جملے ہو جاتے ہیں اور $عہ + خ بہ$ اور $عہ - خ بہ$ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ان مقادیر کے جذر الکعب $م + خ ن$ اور $م - خ ن$ ہیں۔ تب کعبی مساوات کی اصلیں

$م + خ ن + م - خ ن$ یعنے $۲م$،

$سہ(م + خ ن) + سہ^{۲}(م - خ ن)$ یعنے $-م - ن\sqrt{۳}$،

$سہ^{۲}(م + خ ن) + سہ(م - خ ن)$ یعنے $-م + ن\sqrt{۳}$ ہو جاتی ہیں۔

جو سب کے سب حقیقی مقادیر ہیں لیکن چونکہ خیالی مقادیر کے جذر الکعب کی ٹھیک قیمت دریافت کرنے کا کوئی عام حسابی یا جبری طریقہ موجود نہیں ہے اس لیے کارڈان کے طریقہ کا حل عملی نقطۂ نظر سے کچھ سود مند نہیں ہوتا ہے جبکہ کعبی مساوات کی تینوں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوتی ہیں - پس اس صورت کو کارڈان کے حل کی ناقابلِ تحویل صورت کہتے ہیں -

واضح ہو کہ ہر حالت میں کعبی مساوات کی حقیقی اصلیں کارڈان کے حل کی بہ نسبت ہورنر کے تقریبی طریقہ سے زیادہ آسانی کے ساتھ دریافت کی جاسکتی ہیں -

مثال - مساوات $\text{لا}^3 - 6\,\text{لا} - 9 = 0$ کو حل کرو ...... (۱)

چونکہ مساوات معیاری شکل کی ہے (یعنی لا^2 کی رقم معدوم ہے)

لہذا فرض کرو $\text{لا} = \text{ع} + \text{و}$ .... (۲)

$\therefore\ \text{ع}^3 + \text{و}^3 + 3(\text{ع}+\text{و})(\text{ع}\,\text{و} - 2) - 9 = 0$ ...... (۳)

ع اور و ایسے منتخب کرو کہ $\text{ع}\,\text{و} - 2 = 0$ .... (۴)

$\therefore\ \text{ع}^3 + \text{و}^3 - 9 = 0$ ...... (۵) از روئے (۳) اور (۴)

(۴) اور (۵) کے مابین و کو ساقط کرو -

$$\therefore\ \text{ع}^3 + \frac{8}{\text{ع}^3} - 9 = 0$$

یعنی

$$\text{ع}^6 - 9\,\text{ع}^3 + 8 = 0$$

$$\therefore\ \text{ع}^3 = 1 \text{ اور اس لیے } \text{ع} = 1،\ \text{س}،\ \text{س}^2$$

پس و کی متناظر قیمتیں رابطہ (۴) کی رُو سے

$\text{و} = 2،\ 2\,\text{س}^2،\ 2\,\text{س}$ ہونگی -

پس دی ہوئی مساوات کی تین اصلیں $3،\ \text{س} + 2\,\text{س}^2،\ \text{س}^2 + 2\,\text{س}$ ہیں -

تیرہویں باب کی مثالیں

(۱) - ہورنر کے تقریبی طریقہ سے ذیل کی مساواتوں کی مثبت اصلیں اعشاریہ کے

چوتھے مقام تک دریافت کرو۔

(ا) لا^{۴} + لا^{۳} − ۴لا^{۲} − ۱۶ = ۰

(ب) لا^{۵} − ۲ = ۰

(ج) لا^{۳} − ۴۹لا^{۲} + ۶۵۸لا − ۱۳۷۹ = ۰

(۲) لا^{۵} + لا^{۴} − ۴لا^{۳} − ۳لا^{۲} + ۳لا + ۱ = ۰ کی منفی اصل (جو صفر اور −۱ کے درمیان واقع ہے) دریافت کرو۔

(۳) لا^{۴} − ۷لا^{۳} − ۱۷لا^{۲} + ۳۰ = ۰ کی حقیقی اصلیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک دریافت کرو۔

(۴) مساوات ۸لا^{۳} − ۶۰لا^{۲} + ۱۰۲لا + ۶۷ = ۰ کو حل کرو۔

(۵) ذیل کی کعبی مساواتوں کو جبری طریقہ سے حل کرو۔

(ا) لا^{۳} − ۱۲لا + ۶۵ = ۰

(ب) لا^{۳} − ۴۸لا − ۵۲۰ = ۰

(ج) لا^{۳} − ۲لا + ۵ = ۰

(۶) فین ڈیر وال (Van der Waals) کی مساوات

(د + ا/ح^{۲})(ح − ب) = مرت

کو (جس میں د اور ح گیس کا دباؤ اور حجم ہیں، ت مطلق تپش اور ا، ب، مر مستقل مقادیر ہیں) بطور ح کی کعبی مساوات کے ترتیب دے کر حل کرو جبکہ اس کی تینوں اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں یعنے گیس کا فاصل (Critical) حجم دریافت کرو۔

[جواب = ۳ب]

(۷) اسی طرح کلاؤسیوس (Clausius) کی مساوات

د = مرت/(ح − عہ) − ک/(ت (ح + بہ)^{۲})

کو (جس میں د ح اور ت بالترتیب گیس کا دباؤ حجم اور مطلق تپش ہیں اور مر، عہ، بہ اور ک مستقل مقادیر ہیں) بطور ح کی کعبی مساوات کے ترتیب دے کر بتاؤ کہ گیس کا فاصل حجم ۳عہ + ۲بہ ہے۔

چودھواں باب

مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع جب لا اور جم لا کے سلسلے اور زائدی تفاعیل

۶۹ - (۱) سلسلہ جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ۔۔۔۔

کی ن رقموں کا حاصل جمع ۔

فرض کرو سن = جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ۔۔۔۔ ن رقموں تک

اس سلسلہ کی عام رقم یعنے ر-ویں رقم جم {عہ + (ر-۱) بہ} ہے ۔

∴ سن = جم عہ + جم (عہ + بہ) + ۔۔۔ جم {عہ + (ر-۱) بہ} + ۔۔۔

+ جم {عہ + (ن-۱) بہ}

اس مساوات کے دونوں ارکان کو ۲ جب بہ/۲ سے ضرب دو ۔

تب ۲ سن جب بہ/۲ = ۲ جم عہ جب بہ/۲ + ۲ جم (عہ + بہ) جب بہ/۲ + ۔۔۔۔

+ ۲ جم {عہ + (ر-۱) بہ} جب بہ/۲ + ۔۔۔۔۔۔

+ ۲ جم {عہ + (ن-۱) بہ} جب بہ/۲

۲ جب بہ/۲ سن = جب (عہ + بہ/۲) - جب (عہ - بہ/۲)

+ جب (عہ + ۳بہ/۲) - جب (عہ + بہ/۲)

+ جب (عہ + ۵بہ/۲) − جب (عہ + ۳بہ/۲)

+ ....

+ جب{عہ + (۲ن − ۱) بہ/۲} − جب{عہ + (۲ن − ۳) بہ/۲}

= جب{عہ + (۲ن − ۱) بہ/۲} − جب (عہ − بہ/۲)

∴ سن = ۲ جم{عہ + (ن − ۱) بہ/۲} جب (ن بہ/۲) / جب (بہ/۲)

(ب) سلسلہ جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ...
کی ن رقموں کا حاصل جمع ۔

فرض کرو سن = جب عہ + جب (عہ + بہ) + ...

+ جب{عہ + (ن − ۱) بہ}

مساوات کے دونوں ارکان کو ۲ جب بہ/۲ سے ضرب دو ۔

تب ۲ جب (بہ/۲) سن = ۲ جب عہ جب (بہ/۲) + ۲ جب (عہ + بہ) جب (بہ/۲) + ...

+ ۲ جب{عہ + (ن − ۱) بہ} جب (بہ/۲)

= جم (عہ − بہ/۲) − جم (عہ + بہ/۲)

+ جم (عہ + بہ/۲) − جم (عہ + ۳بہ/۲)

+ ....

+ جم{عہ + ((۲ن − ۳)/۲) بہ} − جم{عہ + ((۲ن − ۱)/۲) بہ}

= جم (عہ − بہ/۲) − جم{عہ + (ن − ۱/۲) بہ}

∴ س~ن~ = جب{عہ + (ن-۱) بہ/۲} جب (ن بہ/۲) ÷ ۲ جب (بہ/۲)

سوالات ۱۴ (ا)

(۱) مندرجۂ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو:-

(ا) جم ۲ طہ + جم ۴ طہ + جم ۶ طہ + ...

(ب) جب طہ + جب ۳ طہ + جب ۵ طہ + ...

(۲) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو:-

(ا) جم عہ - جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) - جم (عہ + ۳ بہ) + ...

(ب) جب عہ - جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) - جب (عہ + ۳ بہ) + ...

[ہدایت - بہ = π + بہ' لکھو]

(۳) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو :-

(ا) جم^2 طہ + جم^2 ۲ طہ + جم^2 ۳ طہ + ...

(ب) جب^2 طہ + جب^2 ۲ طہ + جب^2 ۳ طہ + ...

[ہدایت - جم^2 ر طہ = (۱ + جم ۲ ر طہ) ÷ ۲

اور جب^2 ر طہ = (۱ - جم ۲ ر طہ) ÷ ۲ لکھو]

(۴) ثابت کرو کہ

مس ن طہ = (جب طہ + جب ۳ طہ + جب ۵ طہ + ... + جب (۲ ن - ۱) طہ) ÷ (جم طہ + جم ۳ طہ + جم ۵ طہ + ... + جم (۲ ن - ۱) طہ)

(ج) سلسلہ قم طہ + قم ۲ طہ + قم ۴ طہ + ... کی ن رقموں کا حاصل جمع -

چونکہ　قم طہ - مم (طہ/۲) = ۱ ÷ (۲ جب (طہ/۲) جم (طہ/۲)) - جم (طہ/۲) ÷ جب (طہ/۲)

$$= \frac{۱ - ۲\,\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{ط}}{۲}}{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲}} = -\,\text{مم ط}$$

∴ قم ط = مم $\frac{\text{ط}}{۲}$ - مم ط اسی طرح قم ۲ ط = مم ط - مم ۲ ط

قم ۴ ط = مم ۲ ط - مم ۴ ط ....

. . . .

اور قم ۲$^{\text{ن}-۱}$ ط = مم ۲$^{\text{ن}-۲}$ ط - مم ۲$^{\text{ن}-۱}$ ط

∴ $\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ن}-۱}$ قم ۲$^{\text{ر}}$ ط = مم $\frac{\text{ط}}{۲}$ - مم ۲$^{\text{ن}-۱}$ ط

سوالات ۱۴ (ب)

(۱) ثابت کرو کہ قم ط قم ۲ ط = قم ط [مم ط - مم ۲ ط]

قم ۲ ط قم ۳ ط = قم ط [مم ۲ ط - مم ۳ ط]، وغیرہ

اور ان کے ذریعے بتاؤ کہ $\sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ن}}$ قم ر ط قم (ر + ۱) ط = قم ط [مم ط - مم (ن + ۱) ط]

(۲) مندرجۂ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو :—

(i) قم ط قم ۳ ط + قم ۳ ط قم ۵ ط + ...

(ii) جم ط جم ۲ ط + جم ۲ ط جم ۳ ط + ...

(iii) جم ط جب ۲ ط + جم ۲ ط جب ۳ ط + ...

(د) سلسلہ ح. جم عہ + ح$_۱$ جم (عہ + بہ) + ح$_۲$ جم (عہ + ۲ بہ) + ...

کی ن رقموں کا حاصل جمع جبکہ ح.، ح$_۱$ .... ایک سلسلۂ حسابیہ ہو۔

فرض کرو س$_{\text{ن}}$ = ح. جم عہ + ح$_۱$ جم (عہ + بہ) + ...

+ ح$_{\text{ن}-۱}$ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

تب ۲ جم بہ س$_{ن}$ = ح$_{۰}$ {جم (عہ + بہ) + جم (عہ - بہ)}

+ ح$_{۱}$ {جم (عہ + ۲ بہ) + جم عہ}

+ ح$_{۲}$ {جم (عہ + ۳ بہ) + جم (عہ + بہ)}

. . . .

+ ح$_{ن-۱}$ [جم (عہ + ن بہ) + جم {عہ + (ن - ۲) بہ}]

∴ ۲ (۱ - جم بہ) س$_{ن}$ = (۲ ح$_{۰}$ - ح$_{۱}$) جم عہ

+ (۲ ح$_{۱}$ - ح$_{۰}$ - ح$_{۲}$) جم (عہ + بہ)

+ (۲ ح$_{۲}$ - ح$_{۱}$ - ح$_{۳}$) جم (عہ + ۲ بہ)

+ . . . .

+ (۲ ح$_{ن-۲}$ - ح$_{ن-۳}$ - ح$_{ن-۱}$) جم {عہ + (ن - ۲) بہ}

+ (۲ ح$_{ن-۱}$ - ح$_{ن-۲}$) جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

- ح$_{۰}$ جم (عہ - بہ) - ح$_{ن-۱}$ جم (عہ + ن بہ)

لیکن اگر ح$_{۰}$، ح$_{۱}$، ح$_{۲}$ . . . . سلسلۂ حسابیہ میں ہوں، تو

۲ ح$_{ر}$ = ح$_{ر-۱}$ + ح$_{ر+۱}$

∴ ۲ (۱ - جم بہ) س$_{ن}$ = (۲ ح$_{۰}$ - ح$_{۱}$) جم عہ + (۲ ح$_{ن-۱}$ - ح$_{ن-۲}$) جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

- ح$_{۰}$ جم (عہ - بہ) - ح$_{ن-۱}$ جم (عہ + ن بہ)

جس سے س$_{ن}$ کی قیمت برآمد ہو جاتی ہے۔

طالب علم کو چاہیے کہ اس طرح سلسلہ

ح$_{۰}$ جب عہ + ح$_{۱}$ جب (عہ + بہ) + ح$_{۲}$ جب (عہ + ۲ بہ) + ...

کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرے جبکہ ح، ح۱ ..... ایک سلسلۂ حسابیہ ہو۔

سوالات ۱۴ (ج)

مندرجۂ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو:-

(۱) جم ط + ۲ جم ۲ ط + ۳ جم ۳ ط + ...

(۲) جب ط + ۲ جب ۲ ط + ۳ جب ۳ ط + ...

(۳) جم ط − ۲ جم ۲ ط + ۳ جم ۳ ط − ....

(۴) جب ط − ۲ جب ۲ ط + ۳ جب ۳ ط − ....

(ھ) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے پھیلاؤ زاویہ کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں۔

لا کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \cdots\cdots = \sum_{\text{ر}=۰}^{\infty} (-۱)^{\text{ر}} \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\underline{|(۲\text{ر}+۱)}}$$

$$\text{اور جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \cdots\cdots = \sum_{\text{ر}=۰}^{\infty} (-۱)^{\text{ر}} \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}}}{\underline{|۲\text{ر}}}$$

ان مسائل کا مستند باضابطہ ثبوت ہابسن (Hobson)، برامِ وچ (Bromwich) وغیرہ کی کتابوں میں درج ہے۔ ابتدائی احصار کے ذریعہ بھی ان کو ثابت کرسکتے ہیں لیکن طبیعیات کے طالب علم کے لیے ایسی باضابطگی کی چنداں ضرورت نہیں ہے۔ اس لیے یہاں ڈی موآور کے مسئلہ کے ذریعہ ہی سرسری ثبوت پیش کیے جاتے ہیں:—

صفحہ ۸۹ پر فصل ۷۴ میں بتایا گیا ہے کہ

$$\text{جب ن ط} = \text{ن جب ط جم}^{\text{ن}-۱}\text{ط} - \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\underline{|۳}}\text{جب}^{۳}\text{ط جم}^{\text{ن}-۳}\text{ط} + \cdots$$

اور $\text{جم ن طہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{طہ جم}^{\text{ن}-۲}\text{طہ} + \ldots\ldots$

اول الذکر سلسلہ کی رقموں کی تعداد $\frac{۱}{۲}$ ن ہے جبکہ ن ایک جفت عدد ہے

اور $\frac{۱}{۲}$ (ن + ۱) جبکہ ن طاق عدد ہے - آخر الذکر سلسلہ میں $\frac{۱}{۲}$ ن + ۱

رقمیں ہیں جبکہ ن جفت عدد ہے اور $\frac{۱}{۲}$ (ن + ۱) جبکہ ن طاق ہے -

پس $\text{جب ن طہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\left[\text{ن مس طہ} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳}\,\text{مس}^{۳}\,\text{طہ} + \ldots\ldots\right]$

$= \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\left[\text{ن مس طہ} - \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})}{\lfloor ۳}(\text{ن مس طہ})^{۳} + \ldots\ldots\right]$

اور $\text{جم ن طہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\left[۱ - \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})}{\lfloor ۲}(\text{ن مس طہ})^{۲}\right.$

$\left. + \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})(۱-\frac{۳}{\text{ن}})}{\lfloor ۴}(\text{ن مس طہ})^{۴} - \ldots\ldots\right]$

فرض کرو کہ لا کوئی ایک مثبت عدد ہے اور ن طہ = لا لکھو - تب

$\text{جب لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left[\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} - (۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{۳} + \ldots\ldots\right] \quad (۱)$

اور $\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left[۱ - \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})}{\lfloor ۲}(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{۲}\right.$

$\left. + \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})(۱-\frac{۳}{\text{ن}})}{\lfloor ۴}(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{۴} - \ldots\ldots\right] \quad (۲)$

لیکن $\underset{\text{لا}\to}{\text{نہا}}\left(\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}}\right) = ۱$

پس $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) = \text{لا}$

اور $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہیا}}\left(\text{جم}^{\text{ن}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) = ۱$

[اگرچہ واضح ہے کہ $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہیا}}\left(\text{جم}^{\text{ن}}\,\text{لا}\right) = ۱$ جبکہ ن کوئی معین قیمت کا عدد ہے

تاہم

$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہیا}}\left(\text{جم}^{\text{ن}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) = ۱$ ثبوت کا محتاج ہے۔

فرض کرو $\quad \text{ما} = \text{جم}^{\text{ن}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \left(\text{جم}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\frac{\text{ن}}{۲}}$

تب $\quad \text{لوک ما} = \frac{\text{ن}}{۲}\,\text{لوک}\left(۱ - \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $۰ < \frac{-\text{لوک}(۱-\text{ھ})}{\text{ھ}} = ۱ + \frac{\text{ھ}}{۲} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{۳} + \dots$ جبکہ $۰ < \text{ھ} < ۱$

$< ۱ + \frac{۱}{۲^{۲}} + \frac{۱}{۳\cdot۲^{۲}} + \dots$ جبکہ $۰ < \text{ھ} < \frac{۱}{۲}$

$< \frac{۳}{۲}$

پس $\left|\text{لوک}(۱-\text{ھ})\right| < \frac{۳}{۲}\,\text{ھ}$ جبکہ $۰ < \text{ھ} < \frac{۱}{۲}$

$\therefore \quad \left|\text{لوک ما}\right| = \frac{\text{ن}}{۲}\left|\text{لوک}\left(۱ - \text{جب}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)\right|$

$< \frac{۳}{۴}\,\text{ن}\,\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ ، جبکہ $\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{۱}{۲}$

$< \frac{۳\,\text{لا}^{۲}}{۴\,\text{ن}}$ چونکہ $\text{جب}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}$

اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہیا}}\,\text{لوک ما} = ۰$ اور اس لیے $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہیا}}\,\text{ما} = ۱$]

(و) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے آئلر (Euler) کے قوت نمائی جملے۔

عدد ﻭ کی تعریف قوت نمائی سلسلہ $۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots$

سے کی جا کر فصل (۳۴) میں (دیکھو صفحہ ۷۰) بتایا گیا ہے کہ جب لا کوئی سا حقیقی عدد ہوتا ہے تو

$$\text{و}^{\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{|\underline{2}} + \frac{\text{لا}^3}{|\underline{3}} + \cdots\cdots$$

اور یہ سلسلہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے
اگر خیالی متغیّر ی = لا + خ ما استعمال کیا جاتا ہے تو سلسلہ

$$1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^2}{|\underline{2}} + \frac{\text{ی}^3}{|\underline{3}} + \cdots\cdots$$ کو بشکل

$$1 + \text{ر}\,(\text{جم ط} + \text{خ جب ط}) + \frac{\text{ر}^2}{|\underline{2}}\,(\text{جم } 2\,\text{ط} + \text{خ جب } 2\,\text{ط}) + \cdots\cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں

$$\text{ر} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} \quad \text{اور مس ط} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

پس سلسلہ $1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^2}{|\underline{2}} + \frac{\text{ی}^3}{|\underline{3}} + \cdots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع

$$\left[1 + \text{ر جم ط} + \frac{\text{ر}^2}{|\underline{2}}\,\text{جم } 2\,\text{ط} + \cdots\cdots \frac{\text{ر}^{\text{ن}-1}}{|\underline{\text{ن}-1}}\,\text{جم (ن} - 1)\,\text{ط}\right.$$

$$\left. + \text{خ}\left[\text{ر جب ط} + \frac{\text{ر}^2}{|\underline{2}}\,\text{جب } 2\,\text{ط} + \cdots\cdots \frac{\text{ر}^{\text{ن}-1}}{|\underline{\text{ن}-1}}\,\text{جب (ن} - 1)\,\text{ط}\right]\right.$$ ہے

اوپر کے دونوں جملے ر اور ط کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوتے ہیں۔ اس لیے ن رقموں کے حاصل جمع کی انتہا وجود رکھتی ہے اور سلسلہ

$$1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^2}{|\underline{2}} + \frac{\text{ی}^3}{|\underline{3}} + \cdots\cdots$$

کو $\text{و}^{\text{ی}}$ کی تعریف تصور کر سکتے ہیں، جبکہ ی = لا + خ ما

$$\text{یعنی}\quad \text{قو}^{\text{خ لا}} \equiv ۱ + \text{خ لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{|۲} - \frac{\text{خ لا}^{۳}}{|۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{|۴} + \frac{\text{خ لا}^{۵}}{|۵} - \frac{\text{لا}^{۶}}{|۶} - \frac{\text{خ لا}^{۷}}{|۷} + \cdots\cdots$$

$$\text{اور}\quad \text{قو}^{-\text{خ لا}} \equiv ۱ - \text{خ لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{|۲} + \frac{\text{خ لا}^{۳}}{|۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{|۴} - \frac{\text{خ لا}^{۵}}{|۵} - \frac{\text{لا}^{۶}}{|۶} + \frac{\text{خ لا}^{۷}}{|۷} + \cdots\cdots$$

$$\text{پس}\quad \text{قو}^{\text{خ لا}} + \text{قو}^{-\text{خ لا}} = ۲\left(۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{|۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{|۴} - \frac{\text{لا}^{۶}}{|۶} + \cdots\cdots\right)$$

$$\text{اور}\quad \text{قو}^{\text{خ لا}} - \text{قو}^{-\text{خ لا}} = ۲\,\text{خ}\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{|۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{|۵} - \frac{\text{لا}^{۷}}{|۷} + \cdots\cdots\right)$$

$$\text{یعنی}\quad \text{جم لا} = \frac{\text{قو}^{\text{خ لا}} + \text{قو}^{-\text{خ لا}}}{۲} \quad \text{اور جب لا} = \frac{\text{قو}^{\text{خ لا}} - \text{قو}^{-\text{خ لا}}}{۲\,\text{خ}}$$

پانچویں باب کے اکثر مسائل مصرحۂ بالا روابط کی مدد سے بڑی آسانی کے ساتھ حل ہو سکتے تھے - لیکن طالب علم کی موجودہ حالت میں ان کا براہِ راست بغیر مدد خیالی مقادیر ثابت کرنا زیادہ سودمند ہے۔

جم لا اور جب لا کے لیے ابھی ابھی جو قوت نمائی جملے اخذ کیے گئے ہیں ان کی مدد سے بآسانی بتایا جا سکتا ہے کہ زاویوں کے حاصل جمع یا حاصل تفریق کے مستدیر تفاعلوں کے ضابطے نہ صرف حقیقی زاویوں کے لیے صادق آتے ہیں بلکہ خیالی زاویوں پر بھی حاوی ہیں۔

یعنی جب (لا + ما) = جب لا جم ما + جم لا جب ما

جب (لا - ما) = جب لا جم ما - جم لا جب ما

جم (لا + ما) = جم لا جم ما - جب لا جب ما

جم (لا - ما) = جم لا جم ما + جب لا جب ما

ان کا ثبوت طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ثبوت میں فرض کر لیا جا سکتا ہے کہ رابطہ $\text{قو}^{\text{لا}} \times \text{قو}^{\text{ما}} = \text{قو}^{\text{لا}+\text{ما}}$ اس صورت میں بھی صحیح ہے

جبکہ لا اور ما ملتف مقادیر ہیں ۔ اس طرح جو ضابطے جمع اور تفریق کے مسائل پر مبنی اور حقیقی زاویوں کے لیے ثابت ہو چکے ہیں ملتف مقادیر کے لیے بھی صادق آتے ہیں ۔

۷۰ ۔ زائدی تفاعیل ۔

تعریف ۔ مقدار $\dfrac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$ خواہ ما حقیقی ہو یا ملتف ما کی زائدی جیب کہلاتی ہے اور جبز ما لکھی جاتی ہے ۔

اسی طرح مقدار $\dfrac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{۲}$ ما کی زائدی جیب التمام کہلاتی ہے اور جمز ما لکھی جاتی ہے ۔

واضح ہو کہ زائدی مماس، قاطع، مماس التمام اور قاطع التمام زائدی جیب اور زائدی جیب التمام سے اس طرح حاصل کیے جاتے ہیں جیسا کہ معمولی مماس، قاطع، مماس التمام اور قاطع التمام معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل کیے جاتے ہیں ۔

چنانچہ $\text{مسز ما} = \dfrac{\text{جبز ما}}{\text{جمز ما}} = \dfrac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}$

$$\text{قطز ما} = \dfrac{۱}{\text{جمز ما}} = \dfrac{۲}{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}$$

$$\text{ممز ما} = \dfrac{۱}{\text{مسز ما}} = \dfrac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}$$

$$\text{قمز ما} = \dfrac{۱}{\text{جبز ما}} = \dfrac{۲}{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}$$

(۱) زائدی جیب التمام اور زائدی جیب کو قائم قطع زائد کے ساتھ وہی رابطہ و تعلق ہے جو معمولی مستدیر جیب التمام اور جیب کو دائرہ کے ساتھ ہے ۔

واضح ہے کہ جبز ما اور جمز ما کی قیمتیں جب ما اور جم ما کے قوت نمائی جملوں سے محض علامت خیالی (خ) متروک کر دینے سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۲) چونکہ $خ^۲ = -۱$ لہذا $جم\ ما\ خ = \frac{و^{ما خ.خ} + و^{-ما خ.خ}}{۲}$

$$= \frac{و^{-ما} + و^{ما}}{۲} = \frac{و^{ما} + و^{-ما}}{۲} \equiv جمز\ ما$$

اور $جب\ ما\ خ = \frac{و^{ما خ.خ} - و^{-ما خ.خ}}{۲\ خ}$

$$= \frac{و^{-ما} - و^{ما}}{۲\ خ} = خ\ \frac{و^{-ما} - و^{ما}}{۲\ (-۱)}$$

$$= خ\ \frac{و^{ما} - و^{-ما}}{۲} \equiv خ\ جبز\ ما$$

یعنی جم (ما خ) = جمز ما، جب (ما خ) = خ جبز ما اور مس (ما خ) = مسز ما

(۳) پس مصرحۂ بالا روابط سے براہ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ جو کوئی عام ضابطہ زاویوں کی جیوب التمام سے متعلق ہے اگر اس میں بجائے جم کے جمز لکھا جائے تو بھی صحیح رہیگا۔

نیز ہر وہ عام ضابطہ جس میں کسی زاویہ کی جیب التمام اور مربع جیب شامل ہیں صحیح ہے اگر جم کی بجائے جمز اور $جب^۲$ کی بجائے $-جبز^۲$ لکھا جائے۔ اسی طرح $مس^۲$ کے ضابطے بھی صحیح رہتے ہیں اگر $مس^۲$ کے عوض $-مسز^۲$ لکھا جائے۔

(۴) چونکہ $جمز\ لا = \frac{۱}{۲}(و^{لا} + و^{-لا})$ اور $جبز\ لا = \frac{۱}{۲}(و^{لا} - و^{-لا})$

$و^{لا}$ اور $و^{-لا}$ کو ھ کے بموجب پھیلانے سے

$$جمز\ لا = ۱ + \frac{لا^۲}{\underline{|۲}} + \frac{لا^۴}{\underline{|۴}} + \frac{لا^۶}{\underline{|۶}} + \ldots\ldots$$

اور جبز لا = لا + $\frac{\text{لا}^{۳}}{|\underline{۳}}$ + $\frac{\text{لا}^{۵}}{|\underline{۵}}$ + $\frac{\text{لا}^{۷}}{|\underline{۷}}$ + ...

مثال (۱) جملہ مس (عہ + بہ خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علیحدہ کرو۔

$$\text{مس (عہ + بہ خ)} = \frac{\text{جب (عہ + بہ خ)}}{\text{جم (عہ + بہ خ)}}$$

$$= \frac{\text{۲ جب (عہ + بہ خ) جم (عہ − بہ خ)}}{\text{۲ جم (عہ + بہ خ) جم (عہ − بہ خ)}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲ عہ + جب ۲ بہ خ}}{\text{جم ۲ عہ + جم ۲ بہ خ}} = \frac{\text{جب ۲ عہ + خ جبز ۲ بہ}}{\text{جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ}}$$

مثال (۲) جملہ جمز (عہ + بہ خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علیحدہ کرو۔

جمز (عہ + بہ خ) = جم {(عہ + بہ خ) خ} = جم (عہ خ − بہ)

= جم (عہ خ) جم بہ + جب (عہ خ) جب بہ

= جمز عہ جم بہ + خ جبز عہ جب بہ

چودھویں باب کی مثالیں

(۱) جم لا اور جب لا کے لیے قوت نمائی جملے استعمال کرکے مندرجۂ ذیل ضابطے ثابت کرو لا اور ما حقیقی ہوں یا ملتف

(ا) جم^{۲} لا + جب^{۲} لا = ۱

(ب) جم ۲ لا = جم^{۲} لا − جب^{۲} لا = ۱ − ۲ جب^{۲} لا

(ج) جب ۳ لا = ۳ جب لا − ۴ جب^{۳} لا

(د) جم لا − جم ما = ۲ جب $\frac{\text{لا + ما}}{۲}$ جب $\frac{\text{ما − لا}}{۲}$

(ہ) جب لا − جب ما = ۲ جم $\frac{\text{لا + ما}}{۲}$ جب $\frac{\text{لا − ما}}{۲}$

(۲) ثابت کرو کہ

(ا) جمز (ع + ب) = جمز ع جمز ب + جبز ع جبز ب

(ب) جمز (ع + ب) − جمز (ع − ب) = ۲ جبز ع جبز ب

(ج) جمز لا + جمز (لا + ما) + جمز (لا + ۲ ما) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{\text{جمز}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲}\,\text{ما}\right)\ \text{جبز}\ \frac{\text{ن ما}}{۲}}{\text{جبز}\ \frac{\text{ما}}{۲}}$$

(د) جبز لا + جبز (لا + ما) + جبز (لا + ۲ ما) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{\text{جبز}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲}\,\text{ما}\right)\ \text{جبز}\ \frac{\text{ن ما}}{۲}}{\text{جبز}\ \frac{\text{ما}}{۲}}$$

(۳) اگر جب (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{جمز}^۲\ \text{ب}} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{جبز}^۲\ \text{ب}} = ۱ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}^۲}{\text{جب}^۲\ \text{ا}} - \frac{\text{ما}^۲}{\text{جم}^۲\ \text{ا}} = ۱$$

(۴) اگر مس (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + ۲\ \text{لا مم}\ ۲\ \text{ا} = ۱$ اور $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ - ۲\ \text{ما ممز}\ ۲\ \text{ب} + ۱ = ۰$

(۵) ثابت کرو کہ

(ا) $\frac{۱}{۲}(\text{جبز لا} + \text{جب لا}) = \text{لا} + \frac{\text{لا}^۵}{۵!} + \frac{\text{لا}^۹}{۹!} + \ldots$ تا بہ لا تناہی

(ب) $\frac{۱}{۲}(\text{جمز لا} + \text{جم لا}) = ۱ + \frac{\text{لا}^۴}{۴!} + \frac{\text{لا}^۸}{۸!} + \ldots$ تا بہ لا تناہی

جوابات

نصاب ذیلی ریاضی

حصۂ اول

پہلا باب (ا)

(۱) چوتھی اور پانچویں رقم ۔ قیمت = $\frac{۷}{۱۴۴}$

(۴) ۲۴۷۲

ایضاً (ب)

(۱) مثبت تیسری رقم سے شروع ہوتا ہے ۔

(۲) آٹھویں رقم

(۳) ـ $\frac{۱۹۷۱۲}{۳}$ لا۶

ایضاً (ج)

(۱) ۱۰۶۰۰۹۹۹ (۲) ۰۶۰۰۷۹۵

(۳) $\frac{۱}{۴}$ ـ $\frac{۵}{۶}$ لا (۴) ۱ ـ $\frac{۳۴۳}{۱۲۰}$ لا

(۶) صفر

دوسرا باب

(۱) $\frac{۱}{۱-۲لا} + \frac{۳}{۱-۳لا}$ (۲) $\frac{۹}{۴(۱-لا)}$ ـ $\frac{۵}{۴(۱-لا)}$

(۳) $\frac{۷لا + ۹}{۲(لا^۲ + ۲لا + ۵)}$ ـ $\frac{۱}{۲(لا + ۱)}$

(۴) $\frac{\text{لا}+\sqrt{۲}-۱}{۲\sqrt{۲}(\text{لا}^۲+\sqrt{۲}\,\text{لا}+۱)} - \frac{\text{لا}-\sqrt{۲}-۱}{۲\sqrt{۲}(\text{لا}^۲-\sqrt{۲}\,\text{لا}+۱)}$

(۵) $\frac{۱}{۱۲(\text{لا}+۱)} - \frac{۷}{۳(\text{لا}-۲)} + \frac{۱۳}{۴(\text{لا}-۳)}$

(۶) $\frac{۱}{۱-۱۰\,\text{لا}} + \frac{۱}{۳(۱+۳\,\text{لا})} - \frac{۱}{۳(۱+۳\,\text{لا})^۲}$

(۷) $\frac{۲}{(\text{لا}-۲)^۲} + \frac{۴}{۵(\text{لا}-۲)} + \frac{\text{لا}+۲}{۵(\text{لا}^۲+۱)}$

(۸) $\frac{۱}{۸\,\text{لا}^۲} - \frac{۱}{۱۶\,\text{لا}} - \frac{۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۱۷}{۱۶(\text{لا}+۲)}$

$+ \frac{۱}{(\text{لا}+۲)^۲} + \frac{۳}{۴(\text{لا}+۲)^۳}$

(۱۰) $\frac{۴}{۹}\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{\text{ن}+۱} - \frac{۱}{۹}(۳\,\text{لا}+۷)$

تیسرا باب

(۱) ۴ (۲) ۵۰۴۰ (۳) −۲۰۳ (۴) ۳

(۵) $\text{ا ب ج} + ۲\,\text{ف گ ح} - \text{ا ف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج ح}^۲$

(۶) $۲\,\text{ا}_۱\text{ا}_۲\text{ج}_۱\text{ج}_۲ + \text{ا}_۱\text{ب}_۱\text{ب}_۲\text{ج}_۲ + \text{ا}_۲\text{ب}_۱\text{ب}_۲\text{ج}_۱$

$- \text{ا}_۱^۲\text{ج}_۲^۲ - \text{ا}_۲^۲\text{ج}_۱^۲ - \text{ا}_۱\text{ب}_۲^۲\text{ج}_۱ - \text{ا}_۲\text{ب}_۱^۲\text{ج}_۲$

(۱۰) $\text{لا} = \frac{۸۶۵}{۲۰۳}$ ، $\text{ا} = \frac{۷۹}{۲۰۳}$ ، $\text{ی} = -\frac{۳۱۱}{۲۰۳}$

(۱۱) $\text{لا} = \frac{۲۲}{۴۱}$ ، $\text{ا} = \frac{۱۸}{۴۱}$ ، $\text{ی} = \frac{۱}{۴۱}$

(۱۲) $\text{لا}_۱ = ۰$ ، $\text{لا}_۲ = ۰$ $\text{لا}_۳ : \text{لا}_۴ = ۳ : ۲$

(۱۴) ع = ۰ یا ۲، لا = ۰ یا ۲، ما = ۰ یا ۱۰

چوتھا باب (۱) ۱۱۳۶۶،۷۴ پونڈ (۳) ۴۲، پونڈ ۱۹ شلنگ ۹ پنس
(۵) ۷۸۵، پونڈ ۱۰ شلنگ (۶) ۱۹۷۹ پونڈ ۵ شلنگ ۲ پنس
(۷) ۱۷۳۵ پونڈ تقریباً

پانچواں باب (ف) ± جم $\frac{\pi}{۴}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۴}$،
جم $\frac{\pi}{۳}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۳}$، −۱

ساتواں باب [۳] (۱) لا² + ما² + ۵ ما − ۳۰ = ۰
(ب) لا² + ما² + ۲لا + ۱۰ما + ۱ = ۰
(ج) لا² + ما² − ۵،۱۰لا + ۳ما + ۳۰ = ۰

بارہواں باب [۱] (۱) خطِ مکافی، محور کا ڈھال $\frac{۱}{۲}$، راس $(\frac{۲۲}{۳۵}، -\frac{۱۶}{۳۵})$
(ب) خطِ زائد، مرکز $(۲، -\frac{۳}{۲})$، محوروں کے ڈھال ۱ اور −۱
(ج) خطِ ناقص، مرکز (۲، −۱) محوروں کے ڈھال $\frac{۴}{۳}$ اور $-\frac{۳}{۴}$
(د) دو خطوطِ مستقیم جو نقطہ (۳، −۲) پر متقاطع ہوتے ہیں
اور جن کے ڈھال $\frac{۲}{۳}$ اور $-\frac{۳}{۲}$ ہیں۔
[۴] ۶لا² − ۷لاما − ۳ما² − ۱۲لا − ۸ما − ۴ = ۰

تیرہواں باب [۱] (۱) ۲،۲۳۱۷ (ب) ۱،۱۴۸۷
(ج) ۲،۵۵۷۴
[۲] −۰،۲۸۴۶ [۳] ۱،۱۴۷ اور ۸،۸۷۳
[۴] $-\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}(۸ \pm \sqrt{-۳})$
[۵] (۱) −۵، −س − ۴س²، −س² − ۴س
(ب) ۱۰، ۲س + ۸س²، ۲س² + ۸س
(ج) ۸، س + ۷س²، س² + ۷س

چودھواں باب-۱

[۱] (ا) $\frac{\text{جم}(\text{ن}+۱)\text{ط}\ \text{جب}\ \text{ن ط}}{\text{جب}\ \text{ط}}$

(ب) $\frac{\text{جب}\left(\frac{\text{ن}+۱}{۲}\right)\text{ط}\ \text{جب}\ \frac{\text{ن ط}}{۲}}{\text{جب}\ \frac{\text{ط}}{۲}}$

[۲] (ا) $\frac{\text{جم}\left\{\text{ع}+\frac{\text{ن}-۱}{۲}(\text{ب}+\pi)\right\}\text{جب}\ \frac{\text{ن}(\text{ب}+\pi)}{۲}}{\text{جم}\ \frac{\text{ب}}{۲}}$

(ب) $\frac{\text{جب}\left\{\text{ع}+\frac{\text{ن}-۱}{۲}(\text{ب}+\pi)\right\}\text{جب}\ \frac{\text{ن}(\text{ب}+\pi)}{۲}}{\text{جم}\ \frac{\text{ب}}{۲}}$

[۳] (ا) $\frac{\text{ن}}{۲}+\frac{\text{جم}(\text{ن}+۱)\text{ط}\ \text{جب}\ \text{ن ط}}{۲\ \text{جب}\ \text{ط}}$

(ب) $\frac{\text{ن}}{۲}-\frac{\text{جم}(\text{ن}+۱)\text{ط}\ \text{جب}\ \text{ن ط}}{۲\ \text{جب}\ \text{ط}}$

ب [۲]

(۱) $\frac{\text{مم}\ \text{ط}-\text{مم}(۲\text{ن}+۱)\text{ط}}{\text{جب}\ ۲\ \text{ط}}$

(۲) $\text{ن}\ \text{جم}\ \text{ط}+\frac{\text{جم}(\text{ن}+۲)\text{ط}\ \text{جب}\ \text{ن ط}}{\text{جب}\ \text{ط}}$

(۳) $\text{ن}\ \text{جب}\ \text{ط}+\frac{\text{جب}(\text{ن}+۲)\text{ط}\ \text{جب}\ \text{ن ط}}{\text{جب}\ \text{ط}}$

ج (۱) $\frac{۲\text{ن}\ \text{جب}\ \frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\text{ط}\ \text{جب}\ \frac{\text{ط}}{۲}-۱}{۲(۱-\text{جم}\ \text{ط})}$

(۲) $\frac{\text{ن}\ \text{جم}\ \frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\text{ط}}{\text{جب}\ \frac{\text{ط}}{۲}}$

(۳) — $\dfrac{۱ + (-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{ن}\left\{\text{جم ن ط} + \text{جم}(\text{ن}+۱)\,\text{ط}\right\}}{۲(۱ + \text{جم ط})}$

(۴) $(-۱)^{\text{ن}}\ \dfrac{\text{ن جب}\ \frac{۲\text{ن}+۱}{۲}\ \text{ط}}{\text{جم}\ \frac{\text{ط}}{۲}}$

فہرستِ اصطلاحات

نصابِ ریاضی

(حصۂ اول)

اُردو	انگریزی
	A
سالیانہ	Annuity
حسابی اوسط	Arithmetic mean (A. M.)
متقارب	Asymptote
محور	Axis
	B
مسئلۂ ثنائی	Binomial theorem
برام وچ	Bromwich
	C
کارڈان	Cardan
کارٹیسی	Cartesian
کوشی	Cauchy
وتر	Chord
محیط	Circumference
کلاوسیوس	Clausius
ہم محور	Co-axial
سر	Coefficient
ملتف	Complex
مخروطی	Conic
تراش مخروط	Conic section
مزدوج	Conjugate
باثبات	Consistent
نتیجۂ صریح	Corollary
قاطع التمام	Cosecant
جیب التمام	Cosine
مماس التمام	Cotangent
کوٹیز	Cotes
فاصل	Critical
کعبی	Cubic
منحنی	Curve
دَوری ۔ دائری	Cyclic

اردو	انگریزی
	D
ڈالیمبر	D'Alembert
ڈی موآور	DeMoivre
نسب نما	Denominator
مقطعہ	Determinant
ابعاد	Dimensions
مرتب دائرہ	Director circle
مرتب	Directrix
	E
خروج المرکز	Eccentricity
اجزائے ترکیبی	Elements
مسقط۔ حاصل اسقاط	Eliminant
اسقاط	Elimination
قطع ناقص ۔ ناقص	Ellipse
اضعاف متساویہ	Equimultiples
آئیلر	Euler
جفت	Even
پھیلاؤ	Expansion
مسئلہ قوت نما	Exponential theorem
	F
ضربی	Factorial

اردو	انگریزی
ماسکہ	Focus
	G
عام مساوات	General equation
ہندسی اوسط	Geometric mean (G.M.)
	H
موسیقی اوسط	Harmonic mean (H. M.)
ہابسن	Hobson
ہورنر	Horner
قطع زائد۔ زائد	Hyperbola
زائدی تفاعل	Hyperbolic function
	I
خیالی	Imaginary
قوت نما	Index
لاتناہی	Infinity
مقطوعہ	Intercept
	L
وتر خاص	Latus rectum
نہایت ۔ نہا	Limit
طریق	Locus
	M

انگریزی	اُردو
Major axis	اعظم محور۔ محورِ اکبر
Mantissa	اعشاریہ لوکارثمی
Minor axis	اقلّ محور۔ محورِ اصغر
Modulus	مقیاس
N	
Normal	عماد۔ معیّن
Numerator	شمار کنندہ
Numerical	عددی
O	
Odd	طاق
Order	رُتبہ
Origin	مبداء
P	
Parabola	خطِ مکافی۔ مکافی
Parallelogram	متوازی الاضلاع
Partial fraction	جُزوی کسر
Perpendicular	عمود
Polar	قطبی
Polar co-ordinate	قطبی محدّد
Pole	قطب
Polynomial	کثیر رقمی
Projection	ظل

انگریزی	اُردو
Q	
Quotient	خارج قسمت
R	
Radical axis	بنیادی محور
Radius vector	نیم قطر سمتی
Real	حقیقی
Rectangular hyperbola	قائم زائد
Rhombus	معیّن
S	
Sarrus	سارُّس
Secant	قاطع
Series	سلسلہ
Sine	جیب
Suffix	علامت زیرین ۔ لاحقہ
System of circles	دائروں کا نظام
T	
Tangent	مماس
Trigonometrical	مثلثی
U	
Unity	اکائی
Unknown	نامعلوم ۔ مجہول

اُردو	انگریزی
V	
سمتی	Vector
قیمت	Value
W	
صحیح عدد	Whole number
X	
محور لا	X-axis
Y	
محور ما	Y-axis
Z	
صفر	Zero

غلط نامہ

نصاب ریاضی

(برائے طبیعیات بی۔ اے)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳	۱	$لا^{۱-ن}$	$لا^{ن-۱}$	۲۰	۱۳	س سر	س۳
۵	۹	$ن ج_{۲}$	$ن ج_{۳}$	//	۱۸	دو، تین،	دو، تین، ....
۱۵و۱۶	۱۳و۹	$+(\frac{۲۹}{۳۲}$	$+(\frac{۳۹}{۳۲}$	۲۱	۶	$\times (ن)^{ن}$	$+ (ن)^{ن}$
۱۵	۱۶	$\frac{۳۱}{۸}$	$\frac{۲۱}{۸}$	۲۱	۱۴	$پ_{۱}$	$پ_{ر-۱}$
۱۶	۸	$(-\frac{ے}{۲}-۲)$	$(-\frac{ے}{۲}-۲)$	۲۱	۱۶	$پ_{ر-۲}$	$پ_{ر-۲}$
//	۱۵	$\sqrt[۲]{۱۰۰۳}$	$\sqrt[۳]{۱۰۰۳}$	//	۱۷	پر	$پ_{ر}$
۱۷	۳	$)\frac{۴}{۲}\quad)\frac{۳}{۴}$	$)\frac{۱}{۲}\quad)\frac{۳}{۲}$	۲۲	۵	$ر(+۲)$	$(ر+۲)$
۱۷	۸	$\frac{لا}{۴}$	$\frac{لا}{۲}$	//	//	$(+۱)^{ر-۱}$	$(-۱)^{ر-۱}$
۱۷	۱۷	ن-(ر+۱	ن - ر + ۱	۲۲	۶	$(ر+۲)-۴ر$	$(ر+۲)+۴ر$
۲۰	۶	$ر^{۳}\ ا^{۳}$	$ر^{۳}\ لا^{۳}$	۲۳	۱تا۲۵	ض	ضہ
//	۷	$+ب^{۳}\ لا^{۳}+$	$+ب^{۳}\ لا^{۳}+$	۲۴	۱۸	$+د\ لا^{۲}+$	$+د\ لا^{۳}+$
//	۸	$ج^{۳}\ لا^{۳}$	$ج^{۲}\ لا^{۳}$	۲۵	۱تا۲۵	ضر	ضہ
//	۱۰	$+ب^{۲}\ لا^{۳}+$	$+ب^{۳}\ لا^{۲}+$	//	۹	$\frac{د}{ر}\ لا^{۲}+$	$\frac{د}{ا}\ لا^{۳}+$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۵	۱۵	- ٦ لا^{2})	+ ٦ لا^{3})
۲٦	۱ و ۲ و ۳، ۵ و ۸، ۹ و ۱۰	ضہ	ضد
۲٦	۱۲	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$
۲۸	۳	اس گا	اس کے
〃	۴	یعنے	یعنے
〃	٦	استعمال	استعمال
〃	۷	جُزوی	جُزوی
〃	۱۷	اجزائے ضربی	اجزائے ضربی
〃	۲۲	اورہمیں	اور ہمیں
۲۹	۱۳	کو	کو
〃	۱۴	(ا-ب)	(ا-ب)
〃	۱٦	قیمتیں تعین	قیمتیں تعین
۳۰	۱	تقامل	تفاعل
۳۲	٦	(لا + ۳)^{3}	(لا + ۳)^{2}
〃	۸	ن / عہ بہ جہ	ن / عہ بہ جہ ....
〃	۱٦	(۵ | + ب)	(۵ | + ب)
۳۴	۴	- ۲ ح	- ۲ خ
۳٦	۸	لا^{3} - ۴ لا^{3}	لا^{3} - ۴ لا^{2}
〃	۱۰	کسر = $\frac{2}{4}$ لا +	کسر = $\frac{3}{2}$ لا +
〃	۱۱	مثال (۲) +	مثال (۲)
۳۷	۹	صبعودی	صعودی
۴۰	۱۸	- ا^{2}	- ا)^{2}
۴۷	۵	د$_{2}$ = ۰	د$_{3}$ = ۰

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴۷	۱۰	ج$_{2}$)	ج$_{3}$
۴۹	۱۹	+ ۲٦ -	+ ۳٦ -
۵۱	۷	+ ان$_{3}$ لا$_{2}$ +	+ ان$_{3}$ لا$_{3}$ +
〃	۱۰	لا$_{3}$ ،	لا$_{3}$
〃	۱۷ و ۲۰	ا$_{1}$ ا$_{2}$ ا$_{2}$	ا$_{1}$ ا$_{2}$ ا$_{3}$
〃	۲۰	+ ا$_{3}$ | ب$_{1}$ ب$_{2}$	+ ا$_{3}$ | ب$_{1}$ ب$_{2}$
〃	۲۱	ب$_{1}$ ب$_{2}$ ب$_{2}$	ب$_{1}$ ب$_{2}$ ب$_{3}$
〃	〃	ج$_{2}$ ج$_{2}$	ج$_{2}$ ج$_{3}$
۵۲	۱	- بجہ ج$_{2}$)	- ب$_{3}$ ج$_{2}$)
〃	۹	(ب$_{1}$ ج$_{2}$ - ب$_{2}$ ج$_{1}$)	(ب$_{1}$ ج$_{3}$ - ب$_{3}$ ج$_{1}$)
〃	۱٦	ج$_{3}$ = ج$_{1}$	ج$_{3}$ = ج$_{2}$
۵۳	۱۰	- ب جہ$_{1}$ -	- ب$_{2}$ جہ$_{1}$ -
〃	۱۲	ب$_{2}$ ج$_{2}$	ب$_{2}$ ج$_{3}$
۵۳	۲۱	زابد	زائد
۵۴	۵	ا$_{3}$	ا$_{3}$
〃	٦	ب$_{3}$ ب$_{2}$ ب$_{3}$	ب$_{2}$ ب$_{2}$ ب$_{3}$
〃	〃	ب$_{3}$ ب$_{2}$ ب$_{3}$	ب$_{3}$ ب$_{2}$ ب$_{3}$
〃	۱۳	مساوی حاصل ضعاف	مساوی اضعاف
۵۷	۲۲	۷ ۱ ۴	۷ ۱ ۴
۵۹	۴	د$_{3}$ ا$_{2}$ ب$_{2}$	د$_{3}$ ا$_{3}$ ب$_{3}$
〃	۱۱	ا$_{2}$ ب$_{2}$ ج$_{3}$ د$_{2}$	ا$_{2}$ ب$_{3}$ ج$_{3}$ د$_{3}$
٦۰	۲۱	سالق	سابق
〃	۲۴	+ د +	+ و +

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۶۴	۱	−۳ لا٫ = ۰۰	−۳ لا٫ = ۰	۱۳۲	۲۲	حس	جس
۶۴	۲	−۱۱	۱۱	۱۳۳	۱	..ما وات	مساوات
″	۳	۳ ال٫ = ۰	۳ لا٫ = ۰	″	شکل		ع
۶۹	۲	ن²/۲ر	ن²/۳ر	۱۳۹	۴	لا جم ط	لَا جم ط
۷۰	۱۶	ن (ن +۱)	ن (ن −۱)	۱۴۰	۲۰	فقطہ	نقطہ
۷۴	۱۰	حدداً	عدداً	۱۴۹	۱۸	لا عم	لا عم۱
″	۱۳	+ (−۱)	+ (−۱)	۱۶۱	۱۲	+ ۲ گ لا	+ ۲ گ۱ لا
۷۵	۴	(ما + ۶/۳ +	(ما + ۳ما/۳ +	۱۶۲	۱۹	(∓ √ماج ۰۰)	(∓ √ماج ۰)
″	۱۹	محوب	محسوب	۱۶۴	۲۴	گررتاہے	گزرتاہے
۷۶	۱۷	۱/۲۹	۱/۳۹	۱۷۱	۱۶	تعنبر	تغیر
″	۳۰	۱/(۲لا−۱)²	۱/(۲لا−۱)³	۱۷۴	۲۱	حاسکتی	جاسکتی
۷۷	۱۱	رقمون	رقموں	۱۷۷	۲	لیے اے	لیے ا ے
۷۸	۱۲	۱۰۳۰۱۰۳٫۳	۱۰۳۰۱۰۳٫۳	۱۸۳/۱۸۹	۱۴/۸	مکانی	مکافی
۸۶	۷	)− ف/ق	)− ف/ق	۱۸۶	۱۴	م۲	م۲
۸۸	۱۰	ج = ۱	ج = ۰	۱۹۱	۱۷	= م۲ ج² ا²	= مر۲ ج² ا²
″	۱۵	جم جہ + خ جب جہ	(جم جہ + خ جب جہ)	۱۹۲	۱۲	یعنی لا(لا = لا۱)/۲ر	یعنی لا(لا − لا۲)/۲ر
۹۱	۱۴	−۴ جب² ط	−۴ جب³ ط	۱۹۴	۶	یہ	یہ
۹۶	۲۰	۶/۲ جب ط =	۶/۲ جب² ط =	۱۹۴	۲۱	(ا − ما۱)/(ما۱/ب۲)	(ما − ما۱)/(ما۱/ب۲)
۱۰۴	۱۴	(ن −۱)۳۱	(ن −۱)π				
۱۰۸	۱۴	ضصف	ضعف	۱۹۶	۱۸	منطق	منطبق
۱۲۹	۷	لہ لا	لہ۱ لا	۱۹۹	۱۷	ف۱، ف	ف۱، ف۲
″	۲۱	+ ب۳ ما + ج۲	+ ب۳ ما + ج۳	۲۰۱	۶	لا لا۱/۲ر	لا لا۱/۲ر
۱۳۲	۱۹	(۴ ک² −	۴ گ² −	″	۸	= ا۱	= ا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۰۶	شکل	$دَ_۱$	$مَ_۱$	۲۳۱	۱	خطر	خط
۲۱۰	شکل ۳۶	بؔ	ب	۲۴۴	۱۸	ب ج =	ب ج =۰
۲۱۲	۲	$\frac{ب^۲}{ا}$	$\frac{ب^۲}{ا_۱}$	۲۵۹	۲۲	بقدر م	بقدر $م_۱$
۲۱۵	۱	ج فَ ے	ج فَ سے	۲۶۰	۸	یعنے لا	یعنے $لا_۳$
۲۱۸	۲۲	مساوات (۴) ے	مساوات (۴) سے	۲۶۱	۲	ے	سے
۲۲۲	۱۷	مسنط	مستنبط	۲۶۲	۸	(۴)	(۴-)
۲۲۵	۹	$\frac{۱}{لا_۱^۲ \quad ما_۱^۲}$	$\frac{۱}{لا_۱^۲ \quad ما_۱^۲}$	۲۶۵	۱۹	۶۴۹۳۴...	۶۳۹۳۴...
۲۲۵	۱۹	لمحاظ	بلحاظ	"	۲۹	۶۹۲۹۶	۶۹۳۹۶
۲۲۹	۵	$ز_۱$	$ز_۱^۲$	"	۳۷	غلط ۶۸۱۷۱۸۷۶۵۴۴...	
۲۳۰	۱۲	$\frac{۱}{ز_۲}$	$\frac{۱}{۲ز}$			صحیح ۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴...	
۲۳۳	۸	پہنچی	پہنچتی	۲۸۰	۱۷	$۱ + \frac{۱}{۳}$	$۱ + \frac{۱}{۲}$
۲۳۵	۱۵	جَ فَ اَ	جَ ف اَ	۲۸۶	۳	جذر(لا + ا)+	جذر(لا + ما)+

آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
صورت میں ایک آنہ یومیہ لیا جائیگا۔

کتب خانہ
جامعہ عثمانیہ

۱- اراکین مجلس اعلیٰ، مجلس [illegible]، مجلس انتظامی [illegible] رکھ سکینگے۔
ملازمین شعبہ جات و نصاب پانچ کتابیں ایک ماہ کے لیے اپنے پاس رکھ سکینگے۔ [illegible] عہدہ داران جامعہ

۲- اساتذہ جامعہ عثمانیہ و کلیات ملحقہ [illegible] ایک ماہ کے لیے اپنے پاس رکھ سکینگے۔
اور اراکین دارالترجمہ دس کتابیں ایک ماہ کے لیے اپنے پاس رکھ سکینگے۔ اور [illegible]

۳- طلبائے ایم اے دو کتابیں بی اے، ال ال بی و تحقیقاتی جماعتوں کے
طلبہ تین کتابیں اپنے پاس رکھ سکینگے۔
طلبہ پانچ کتابیں دو ہفتہ کے لیے اپنے پاس رکھ سکینگے۔ اگر دو ہفتہ کے بعد کسی اور طالب علم کو ضرورت نہ ہو تو طالب علم کو حساب

۴- مدت مقررہ پر کتابیں واپس نہ کی جائیں تو جرمانہ لیا جائیگا۔
ایک آنہ یومیہ فی کتاب جرمانہ دینا ہوگا۔ [illegible] جاری کی جا سکینگی مگر اس غرض کے

۵- بشرط موقع کتابیں گھر پر جاری کی جائینگی مگر اس پر کتاب کا لانا لازم ہے۔
[illegible] خانہ میں کتاب کا لانا لازم ہے۔ [illegible] دری

۶- کتابیں گم یا خراب ہو جائیں تو مستعیر پر ذمہ داری عائد ہوگی۔

۷- کتابوں پر کسی قسم کا نشان یا سیاہی یا پنسل سے نہ لگایا جائے۔

۸- قلمی نسخے اور نادر الوجود کتابیں جاری نہ کی جا سکینگی۔ فقط