UNIVERSAL
LIBRARY
OU_224643
UNIVERSAL
LIBRARY

AN ELEMENTARY TREATISE

ON THE

THEORY OF EQUATIONS

WITH A COLLECTION OF EXAMPLES

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,
Head Master, Normal School, Delhi

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR

رسالہ مسائل معادلات

معہ بہت سي مثالوں کے

مرلفہ

ڈاکٹر صاحب ام اي اے ار ايس

جسکو

منشي محمد ذکاء الله صاحب هيڈ ماسٹر نارمل اسکول دهلي نے

بتائيد مقاصد

سين ٹيفک سوسئيٹي عليگڈھ و سين ٹيفک سوسئيٹي صوبہ بہار

اردو ميں ترجمہ کيا

بمقام دهلي مطبع مرتضوي ميں باهتمام حاجي
محمد عزيزالدين کے مطبوع هوا

سنہ ١٨٧١ ع

ٹيٹل پيج مطبوعہ انسٹيٹيوٹ عليگڈھ

بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ

اس رسالہ مین جملہ مسائل معادلات کی جو اکثر کتب طولیہ مین ہوا کرتے ہین لکھی ہین اور اونکی ساتھ
بہت سی مثالین یونی ورسٹی کی سوالات امتحان سی منتخب کرکے تحریر کی ہین
مسائل معادلات مین اکثر عجیب و غریب اور دلچسپ ایسی نتایج ہوتی ہین کہ اگر طالب علم ابتداء
تحصیل علوم ریاضیہ مین اون کو تحصیل کرے تو بہت فایدی اوسکو حاصل ہوتی ہین اس رسالہ
کو وہی طالب علم پڑہ سکتی ہین جو الجبرا سی خوب ماہر ہین اسمین کہین بڑی علم کی ضرورت
سواء دفعات ۱۷۵ و ۲۶۷ و ۳۰۸ - ۳۱۴ کے نہین پڑتی ان دفعات کو طالب علم
جب تک نہ مطالعہ کرین کہ وہ علم مثلث مین ضابطہ ڈی موئور سے واقف ہون
یہہ کتاب حقیقت مین ایک ضمیمہ بڑی جبر مقابلہ کا ہی اسلئی اس کتاب مین جو الہ جا بجا
جبر مقابلہ کی دفعات کا دیا گیا ہے
اس رسالہ مین ایسی تحقیقاتین بہت سی لکھی گئی ہین جنکا نام بہی کسی اور رسالہ مسائل معادلات مین نہین پایا جاتا
مثلاً اونمین سی ایک کاچی کا ثبوت ہی کہ ہر مساوات کی ایک قیمت ہوتی ہی مورنر کی ترکیب اور
مسائل اسقاط اور ضابطہ کاچی صاحب کا خیالی قیمتون کی تعداد کی بیان مین اور ضابطہ مقطعات
کا عرض یہہ مضامین اور بعض اور اوسکی اسی کتاب مین اول اول لکھی گئی ہین ——
جناب ٹوڈہنٹر صاحب کی تصنیفات مین یہہ عجیب کتاب ہے فہرست مضامین یہہ ہے

باب	مضمون	صفحہ
پہلا باب	دیباچہ	۱
دوسرا باب	وجود قیمت کے بیان مین	۱۶
تیسرا باب	خواص معادلات	۲۲
چوتھا باب	تبدل ہئت مساوات	۳۲
پانچوان باب	ڈسکارٹس کا قاعدہ علامات	۴۰
چھٹا باب	مساوی قیمتین	۴۷
ساتوان باب	مساوات کی قیمتون کی حدود غائی اور قیمتون کا جدا جدا کرنا	۵۶
اٹھوان باب	قیمتین محدود اور ناطقہ	۷۲
نوان باب	تنزل معادلات	۷۹
دسوان باب	معادلات متکافیہ	۸۴
گیارھوان باب	معادلات ثنائی	۸۹
بارھوان باب	معادلات مکعبی	۹۸
تیرھوان باب	معادلات درجہ چہارم	۱۰۹
چودھوان باب	سٹرم صاحب کا ضابطہ	۱۱۷
پندرھوان باب	فوریر کا ضابطہ	۱۲۷
سولھوان باب	لاگرانژ کی ترکیب تقرب	۱۳۳
سترھوان باب	نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب اور فوریر کا ضمیمہ	۱۴۰
اٹھارھوان باب	ہورنر کی ترکیب	۱۴۸
اوننیسوان باب	قیمتون کے بالقریبہ جملے	۱۶۲
بیسوان باب	استعمال بالقریبہ جملون کا	۱۷۱
اکیسوان باب	قیمتون کی قانون کے مجموعی	۱۷۷
بائیسوان باب	دور کرنا مقادیر مجہول کا یعنی اسقاط	۱۸۶
تیئیسوان باب	سلسلہ مین جملہ کا پہلانا	۱۹۹
چوبیسوان باب	مسائل متفرقہ	۲۰۷
پچیسوان باب	ادخال مقطعات	۲۲۷
چھبیسوان باب	خواص مقطعات	۲۴۸
ستائیسوان باب	استعمال مقطعات	۲۴۷
	مثالین	۲۶۷
	جواب	۲۸۷

مسائل مساوات

دیباچہ

(۱) جبر مقابلہ کی بائیسویں یا مسائل مساوات میں طالب علم نے پڑہا ہوگا کہ مساوات لا۲ + ب لا + ح = ۰ کی دو قیمتیں یعنی

$$\text{ب} = \frac{\sqrt{\text{ب}^2 - ۴\text{ا ح}}}{\text{ا}^2}$$

ہین اور ان قیمتون کی کیفیت یہہ ہی کہ اونکا مجموعہ برابر ہی $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کی اور حاصل ضرب برابر ہی $\frac{\text{ح}}{\text{ا}}$ کی یعنی مجموعہ ان قیمتون کا برابر ہی مساوات لا۲ + $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ لا + $\frac{\text{ح}}{\text{ا}}$ = ۰ کی دوسری قسم کی سر کی جسکی علامت بدلی ہوئی ہی اور اونکا حاصل ضرب برابر ہی اس مساوات کی اخر رقم کے پس اطالب علم اس مضمون کو خوب غور سی خیال کر کی سمجہہ لی کہ اس رسالہ کی تمام مضامین اسی قسم کی ہین جبر مقابلہ مین تو مساوات درجہ دوم کی خواص بیان ہوئی یہان مساوات درجہ دوم سی اعلی درجہ کی مساواتون کے خواص اور مسائل بیان ہونگی گویا یہہ اوپر جو ہم نی لکہا ہی وہ ایک نمونہ ہی اوسپر قیاس کر کی طالب علم اس کتاب کے ساری مضامین کا تصور ذہن مین پیدا کر سکتا ہی — یہہ نتایج اور مسائل جو بیان ہونگی وہ اور فروع ریاضیہ مین کام اینگے اور ان مسائل کی مشق طلبہ کی واسطی نہایت سودمند ہوگی جو طالب علم کہ علم جبر مقابلہ جانتی ہین اونکو اس قبیل کی مشق چندان مشکل اور دشوار بہی نہین یہہ ایک مضمون بو قلمون اونکی توجہ اور مطالعہ کی عادت بڑہانی کی واسطی ایک عجب چیز ہے

(۲) مساوات اور قیمت مساوات کے معنی طلبہ علم جبر مقابلہ مین خوب سمجہہ گئی ہونگی مگر ہم اونکی یہان تعریف پہر لکہتی ہین جسی مطلب خوب صاف اور عیان ہو جاے

جس جبریہ جملہ مین لا مندرج ہو اوسکو جملہ لا کا کہتی ہین اور ج (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور جو مقدار لا کی جگہ ج (لا) مین رکہی جاے اور وہ ج (لا) کو فنا اور نابود کر دی اوسکو قیمت مساوات

ج (لا) = ۰ کی کہتے ہین (اس ساری کتاب مین مساوات اور معادلہ کی ایک ہی معنی مین ترجم)

ا لا^ن + ب لا^{ن-۱} + س لا^{ن-۲} + . . . + ک لا + ل

کی صورت کا جو جملہ ہو اور ا سے ک تک ن مثبت صحیح عدد ہو اور مثال ا ب س . . ک ل مین لا داخل نہ رکہتا ہو تو ا وسکون درجہ کا صحیح جملہ ناطق لا کا کہتے ہین اور اگر ہم کو یہہ دریافت کرنا ہو کہ وہ کونسی لا کی قیمت ہی کہ اس جملہ کو فنا کرتی ہی تو اوسکی یہہ معنی ہونگی کہ ہم اس درجہ کی صحیح ناطق مساوات کی قیمت دریافت کرتی ہین اس رسالہ مین ساری بحث اسی مساوات پر ہوگی اسی مساوات مین اگر ہم چاہین تو لا کی قوت اعلی کی مثال پر مساوات کو تقسیم کرکی سر اوس اعلی قوت کا ایک بنا لین تو مساوات کی یہہ صورت ہوجائیگی

لا^ن + ع ا لا^{ن-۱} + ع ۲ لا^{ن-۲} + . . . + ع ن-۲ لا^۲ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰

اس مساوات کو سادہ صورت مساوات کہتے ہین اور اس سادگی کی کیفیت آگی کہل جائیگی جب لا ان کا سر ایک ہوتا ہی تو خواص مساواتون کی بہت ٹہیک ٹہیک اور درست بیان ہوتی ہین اور جب یہہ سر نہین ہوتا تو مساواتون کی خواص بیان کرتی مین کچہہ دقت پڑتی ہی اگر ہم کو یہہ منظور نہ ہو کہ لا ان کے مثال کو واحد بنائین تو اوسکو ع سی تعبیر کرین تو مساوات کی یہہ صورت ہوجائیگی

ع . لا^ن + ع ا لا^{ن-۱} + ع ۲ لا^{ن-۲} + . . . + ع ن-۲ لا^۲ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰

(۳) یہہ ہمیشہ یاد رکہنی کی بات ہی کہ ہماری مساوات یا معادلہ سی مراد یہہ ہوتی ہی کہ صحیح ناطق مساوات اور اگر وہ مساوات اس صورت کی نہ ہو تو تحویلات جبریہ سی اس صورت کی طرف تحویل ہوسکتی ہے مثلاً مساوات ا لا^۲ + ب لا + س √لا = ف تو یہہ مساوات مساوات منطق کی طرف اسطرح تحویل ہوسکتی ہی کہ س √لا اور ف کو منتقل کرکی مجذور کرلین تو مساوات منطق صحیح درجہ چہارم کی بنجائیگی جن مساواتون مین لوکارثمی جملی یا قوت نمای جملی یا علم مثلثی جملی یا اصم جملی مندرج ہون وہ ہمارے تحقیقات کی اندر بالتصریح داخل نہین ہونگین مثلاً اس قسم کی مساواتین کہ لا - ی لا = ۰ اور لا لوک لا - ۱ = ۰ داخل نہین ہو مگر ہماری تحقیقات مین ضمناً ایسی مساواتون

پر کہ خارج از بحث ہین کچھ نہ کچھ اپنا نظر دکھائینگے

جہان کہین ہم جملہ ج (لا) لکھین تو اوسی ہماری ہمیشہ جملہ صحیحہ ناطقہ لاسی مراد ہوگی بشرطیکہ اوسکے خلاف نہ بیان کیا گیا ہو

(۴) ایک بڑی بات امثال ع. د ع + ع ۱ د ع + ع ۲ د ۰ ع ن کی نسبت اس مساوات

ع. لا^ن + ع ۱ لا^{ن-۱} + ع ۲ لا^{ن-۲} + ... + ع ن-۲ لا^۲ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰

مین پائی ہوتی ہی مساوات درجہ دوم لا^۲ + ب لا + ح = ۰ کو ہم حل کر سکتی ہین خواہ ا اور ب اور س کو جانین یا نہ جانین کہ وہ کونسی خاص اعداد ہین ہم فقط اتنی بات جاننی کی محتاج ہین کہ ا اور ب اور س ایسی ہین کہ وہ لاسی کچھ لگاؤ نہین رکھتی مثلاً مساوات لا^۲ - ۱۲ لا + ۱۵ = ۰ کی حل کرنی ہو تو خواہ ۱۵ کو متقل رکی مجذور کامل بنائین اور حسب دستور حل کرین یا دفعہ اول مین جو صورت عامہ لکھی ہوئی ہی اوسمین ا = ۱ اور ب = - ۱۲ اور ح = ۱۵ کے لکھین

اگر ہم ایسی مساوات حل کرنی چاہین کہ اوسمین اول سی امثال کی واسطی عددی قیمتین معین ہوئی ہون تو ایسی حل کو ہم حل جبریہ مساوات کا کہتی ہین اور اگر ہم حل جبریہ مساوات عامہ کا حاصل کرلین تو جس درجہ کی مساوات کا یہ حل ہوگا اوس درجہ کی مساوات کا حل عددی فقط اوس صورت عامہ کی امثال کی جگہ اعداد اوس حل جبریہ مین رکھنی سی حاصل ہوجائیگا جب آگے ہم پہنچینگے تو یہہ بات ہم کو معلوم ہوگی کہ حل جبریہ فقط چوتھی درجہ کی مساوات تک کا ہوسکتا ہے مگر تیسرے درجہ اور چوتھی درجہ کی مساواتون کی امثال عددی جب اوس درجہ کی صورت مساوات عامہ کی حل جبریہ مین رکھتی ہین تو نتایج ایسی حاصل ہوتی ہین کہ وہ عملاً کسی کام کی نہین ہوتی اور چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کی مساواتون کا حل جبریہ ابتک نہین ہوا اور نہ اینده اوسکی ہونی کی امید ہے

مگر وہ حل جسکو ہم حل حسابیہ معادلات کا کہتی ہین اور جسمین امثال عددی ہوتی ہین اونمین زیادہ کارروائی کامیابی کی ساتھہ ہوسکتی ہی مثلاً پانچوین درجہ کی مساوات عامہ

کا حل جبر یہ کسی طرح نہین ہوسکتا مگر حل حسابیہ مین حساب لگانی سی یا پنجوین درجہ کی مساوات کا جسمین امثال اعداد ہون حل حاصل ہوسکتا ہی اور یہہ تو ضرور ہی کہ قیمت تقریبی حاصل کرلین جیسی چاہین

(۵) اس جملہ ع.لا^ن + ع۱لا^{ن-۱} + ع۲لا^{ن-۲} + ... + ع_ن لا^۲ + ع_{ن-۱}لا + ع_ن

کو ج (لا) سی تعبیر کرین اور اس جملہ کی قیمت جو لا کی جگہ ا رکھنی سی ہو اوسکو ج (ا) سی تعبیر کرین تو ہم یہہ بتلائینگے کہ ج (ا) کی عددی قیمت کا حساب ج (لا) کی امثال اور خود ا کو خاص اعداد کے فرض کرنے سی بہت آسانی سی ہوجاتا ہے

مثلاً تیسرے درجہ کا جملہ لو تو ہم عددی قیمت

ع.ا^۳ + ع۱ا^۲ + ع۲ا + ع۳

کی دریافت کرنی چاہتے ہین

اول یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ع.ا

ع۱ کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا ع.ا + ع۱

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا ع.ا^۲ + ع۱ا

ع۲ کو زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا ع.ا^۲ + ع۱ا + ع۲

ا مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ع.ا^۳ + ع۱ا^۲ + ع۲ا

ع۳ زیادہ کرو تو یہہ حاصل ہوگا ع.ا^۳ + ع۱ا^۲ + ع۲ا + ع۳

اس عمل کو اس ترتیب سے لکھو کہ

ع.	ع۱	ع۲	ع۳
ع.ا	ع.ا^۲ + ع۱ا	ع.ا^۳ + ع۱ا^۲ + ع۲ا	
ع.ا + ع۱	ع.ا^۲ + ع۱ا + ع۲	ع.ا^۳ + ع۱ا^۲ + ع۲ا + ع۳	

ج (لا) کتنی ایک درجہ کا ہو اوسپر اسی عمل کو مرعی رکھو مثلاً عددی قیمت ۳لا^۳ − ۲لا^۲ − ۵لا + ۷ کی جب لا = ۳ ہو دریافت کرنی ہو

۳	۲−	۰	۵−	۷+
	۹+	۲۱	۶۳+	۱۷۴+
۳	۷+	۲۱+	۵۸+	۱۸۱+

پس حاصل ۱۸۱ ہوا

(۶) اگر لا = ا کی کسی جملہ صحیحہ ناطقہ کو فنا کری تو وہ جملہ پورا لا − ا پر تقسیم ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) اوس جملہ کو تعبیر کری اور ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ج (لا) = ۰ تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ج (لا) لا − ا پر پورا تقسیم ہوگا

ج (لا) کو لا − ا پر موافق قاعدہ مروج حبریہ کی تقسیم کی جاؤ جب تک کہ باقی مین لا نہ رہی اور فرض کرو کہ ق خارج قسمت ہی اور اگر کوئی باقی رہتی ہی تو وہ رہی تو

ج (لا) = ق (لا − ا) + ر اس متطابقہ مین لا کی جگہ ا رکھو تو اس سبب سے کہ ق جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی تو وہ لا = ا کی رکھنی سی لانہایت نہین ہوسکتا اسواسطے جب لا = ا کے ہو تو ق (لا − ا) فنا ہوجائیگا اور بموجب فرض کی لا = ا کے ہونی سی ج (لا) بھی فنا ہوتا ہے اسلئے جب لا = ا کے ہو تو رہی فنا ہوتا ہی اور چونکہ ر مین لا نہین ہی تو جب وہ لا = ا کے ہونی سی فنا ہوتا ہی تو وہ ہمیشہ فنا ہوگا یعنی ر = ۰ اور لا − ا تقسیم ج (لا) کو پورا کرتا ہے

(۷) جس مسئلہ کا ثبوت اوپر لکھا ہی وہ ثبوت ایک عظمت رکھتا ہی اور سمجھ کو بڑھاتا ہی مگر اوسکے ثبوت کو ایک اور طرح لکھتے ہین اوسمین خارج قسمت ق کی ایسی صورت ظاہر ہوتی ہی کہ اوسی اور زیادہ فایدہ ہوتا ہی فرض کرو کہ

ج (لا) = ع$_ن$ لا^ن + ع$_{ن-۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{ن-۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_۲$ لا^۲ + ع$_۱$ لا + ع$_۰$

چونکہ ج (ا) = ۰ تو ج (لا) = ج (لا) − ج (ا)

= ع$_ن$ (لا^ن − ا^ن) + ع$_{ن-۱}$ (لا$^{ن-۱}$ − ا$^{ن-۱}$) + ع$_{ن-۲}$ (لا$^{ن-۲}$ − ا$^{ن-۲}$) + ... + ع$_۱$ (لا − ا)

اب جبر مقابلہ کی دفعہ ۴۸۳ کی موافق لا^ن − ا^ن اور لا$^{ن-۱}$ − ا$^{ن-۱}$ ... مین سے ہر یک لا − ا پر پوری تقسیم ہوتی ہی اب اس تعبیر کے کرنے سی ہم کو خارج قسمت یہہ حاصل ہوگا کہ

$$+ ع_{ن-۲} (لا + ا)$$

$$+ ع_{ن-۱}$$

اب اس خارج قسمت کو اس ترتیب سی لکھتی ہین کہ

$$ع_۰ لا^{ن-۱} + (ع_۰ ا + ع_۱) لا^{ن-۲} + (ع_۰ ا^۲ + ع_۱ ا + ع_۲) لا^{ن-۳} + \cdots$$
$$+ ع_۰ ا^{ن-۱} + ع_۱ ا^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱}$$

اور اسکو ہم

$$ق_۰ لا^{ن-۱} + ق_۱ لا^{ن-۲} + ق_۲ لا^{ن-۳} + \cdots + ق_{ن-۲} لا + ق_{ن-۱}$$

سے تعبیر کرتی ہین

اسواسطے یہہ امثال جدید امثال قدیم سی ان صورتہ یہ ہین اسطرح مربوط ہوتے ہین

$$ق_۰ = ع_۰ \text{ اور } ق_۱ = ا ق_۰ + ع_۱ \text{ اور } ق_۲ = ا ق_۱ + ع_۲$$

$$\text{اور } ق_۳ = ا ق_۲ + ع_۳ \quad \cdots \cdots \cdots \cdots$$

یعنی ہر یک امثال جدید اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ ہر یک امثال جدید کو اوسکی ماقبل کے امثال جدید مین ضرب دو اور ماحصل ہر متناظرہ امثال قدیم زیادہ کرو اور یہہ بھی خیال کرنا چاہیے کہ ہر یک امثال جدید دفعہ ۵ کے عمل سی حاصل ہوتا ہے

(۸) اگر ح (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور اوسکو لا - ا تقسیم کرنا ہو تو ا قسمت مساوات ج (لا) = ۰ کے ہوگی

دلیل فرض کرو کہ ج (لا) کو جب لا - ا پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ق نکلتا ہی تو ج (لا) = ق (لا - ا) اگر اس متطابقہ مین لا کی جگہ ا رکھین تو ق کی لاانتہا ہونی کی سبب سے ق (لا - ا)

فنا ہوتا ہی کس جب لا = ا کے ہو تو ج (لا) فنا ہوتا ہی اسواسطے قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ہے

(۹) جب کوی جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا لا - س پر تقسیم کیا جاے اور س ایک مقدار مستقل ہو تو باقی کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی اور ج (لا) کو لا - س پر تقسیم کرو جب تک کہ باقی کو کچھہ لگاؤ لاسی نہ رہی اور ق خارج قسمت نکلی اور ر باقی رہی تو

ح (لا) = ق (لا - س) + ر

اس متطابقہ مین س کی جگہ لا رکھو تو ق لا نہایت ہوگا اور اسواسطے ق (لا - س) فنا ہوگا اور ح (س) = ۰ یعنی جب لا = س کی ہو تو ر برابر ح (س) کے ہوگا اور ر مین لا کے نہ شامل ہونی سی ہمیشہ رہا برابر ح (س) کے ہوگا

مثلاً اگر ۳ لا^۴ - ۲ لا^۳ - ۵ لا + ۷ کو لا - ۳ پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ۳ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۲۱ لا + ۵۸ ہوگا اور باقی ۱۸۱ ہر ہنگی دفعات ۵ اور ۷ کو دیکھو

(۱۰) فرض کرو کہ ح (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی اور لا کی جگہہ لا + د رکھو اور ح (لا + د) کو موافق قواے د کے لکھو اور مختلف قواد کے امثال دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) = ع_ن لا^ن + ع_{ن-۱} لا^{ن-۱} + ع_{ن-۲} لا^{ن-۲} + . . . + ع_۱ لا + ع_۰ تو

ح (لا + د) = ع_ن (لا + د)^ن + ع_{ن-۱} (لا + د)^{ن-۱} + ع_{ن-۲} (لا + د)^{ن-۲} + . . + ع_۱ (لا + د) + ع_۰

(لا + د)^ن اور (لا + د)^{ن-۱} . . . کو بموجب ضابطہ جملہ شنائی کی پھیلاؤ اور کل ماحصل کو موافق قواے د کے لکھو تو ح (لا + د) کے واسطے یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

ع_ن لا^ن + ع_{ن-۱} لا^{ن-۱} + ع_{ن-۲} لا^{ن-۲} + . . . + ع_۱ لا + ع_۰

+ د [ن ع_ن لا^{ن-۱} + (ن - ۱) ع_{ن-۱} لا^{ن-۲} + (ن - ۲) ع_{ن-۲} لا^{ن-۳} + . . ع_۱]

+ د^۲/۱.۲ [ن (ن - ۱) ع_ن لا^{ن-۲} + (ن - ۱) (ن - ۲) ع_{ن-۱} لا^{ن-۳} + . . + ۲ ع_{ن-۲}]

$$+ \cdots \cdots$$

$$+ \frac{ی^{ر}}{ر}\left[ن(ن-۱)\cdots(ن-ر+۱)\, ع_{ن-ر}\, لا^{ن-ر} + (ن-۱)(ن-۲)(\because (ن-ر) ع_{لا^{ن-ر+۱}} + \cdots\right]$$

$$+ \frac{ی^{ن}}{ن}\left[ن ع_{لا^{ن}}\right]$$

اول سطر اس جملہ کی تو ج (لا) ہی اور د کی امثال کو ہم ج (لا) سے اور امثال $\frac{ی^{۲}}{۲×۱}$ کو ج″ (لا) سی اور امثال $\frac{ی^{۳}}{۳}$ کو ج‴ (لا) سی اور علی ہذا القیاس تعبیر کرو یہہ طریقہ کتابت خالی از دقت اوسوقت نہ ہوگا کہ بہت سی زبرین لگانی پڑینگے

پس عموماً ہم $\frac{ی^{ر}}{ر}$ کی امثال کو ح^{ر} (لا) سے تعبیر کرتے ہین اسی معلوم ہوا کہ

$$ح (لا+ی) = ح لا + ی ج (لا) + \frac{ی^{۲}}{۲×۱} ح″ (لا) + \frac{ی^{۳}}{۳} ح‴ (لا) + ر \cdots$$

$$\cdots + \frac{ی^{ر}}{ر} ج^{ر} (لا) + \cdots + \frac{ی^{ن}}{ن} ح^{ن} (لا)$$

دیکھنے سے معلوم ہوتا ہی کہ ج (لا) وج′ (لا) وج″ (لا) وح‴ (لا) ۔ ۔ ۔ ح^{ن} (لا) اس قاعدہ عامہ کی موافق تمام مربوط ہوتی ہین کہ ج^{+} (لا) کے حاصل کرنی کی واسطی ہم ہر یک رقم ج^{ر} (لا) کو لا کے قوت نمامین جو اوس رقم مین ہو ضرب دیتی ہین اور اوس قوت نمامین سی ایک گھٹا کر قوت نما بناتے ہین

(۱۱) فرض کرو کہ ج (لا) چوتھی درجہ کا ہے اور

$$ج (لا) = ع_{۰} لا^{۴} + ع_{۱} لا^{۳} + ع_{۲} لا^{۲} + ع_{۳} لا + ع_{۴}$$

$$\text{تو } ج′ (لا) = ۴ ع_{۰} لا^{۳} + ۳ ع_{۱} لا^{۲} + ۲ ع_{۲} لا + ع_{۳}$$

$$ج″ (لا) = ۴×۳ ع_{۰} لا^{۲} + ۳×۲ ع_{۱} لا + ۲ ع_{۲}$$

$$ج‴ (لا) = ۴×۳×۲ ع_{۰} لا + ۳×۲ ع_{۱}$$

$$ج^{۴} (لا) = ۴×۳×۲ ع_{۰}$$

$$ج (لا+ی) = ج (لا) + ی ج (لا) + \frac{ی^{۲}}{۲} ج″ (لا) + \frac{ی^{۳}}{۳} ج‴ (لا) + \frac{ی^{۴}}{۴} ج^{۴} (لا)$$

اگر ہم ع، ع۱ ع۲ ع۳ ع۴ اور لا کی دا عدد فیمین تقدیر کرین تو ج (لا) اور ج (لا) ۰۰ کا حساب دفعہ ۵ کی ترکیب کے موافق ہوسکتا ہی جب ہم ہورنر صاحب کی ترکیب والتون کی حل کرنی کی بیان کرینگے تو اوسمین بتلائینگے کہ یہہ حساب کسطرح اسانی سی نہایت ضبط کی ساتھہ ہوسکتی ہین

(۱۲) اگر ہم سلسلہ ج (لا+د) کا اغاز د کی اعلی قوت سی کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا+د) = ع بِ^{ن} + (ع۱ + ن ع بلا) د^{ن-۱} + \left[ع۲ + (ن-۱) ع۱ لا + \frac{ن(ن-۱)}{۱×۲} ع بلا^{۲}\right] د^{ن-۲}$$
$$+ \left[ع۳ + (ن-۲) ع۲ لا + \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۱×۲} ع۱ لا^{۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱×۲×۳} ع بلا^{۳}\right] د^{ن-۳}$$
$$+ \left[ع ر + (ن-ر+۱) ع ر-۱ لا + \frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-ر+۱)}{۱×۲×\cdots×ر} ع بلا^{ر}\right] د^{ن-ر}$$
$$+ \cdots + ج (لا)$$

جو صورت ہم نی ج (لا+د) کی اوپر لکہی ہی اوسی یہہ صورت مستنبط ہوسکتی ہی ج (لا+د) کے ہر رقم کو پہلا کر لکہین اور د کی قوا متنازلہ کی ترتیب سی لکہین تو یہی مطلب حاصل ہوجائیگا

(۱۳) جملہ جَ (لا) کو ج (لا) کا اول جملہ مشتقہ اور ج″ (لا) کو دوم جملہ مشتقہ اور علی ہذا القیاس کہتی ہین جب طالب علم اصول علم مفصولات سی واقف ہوگا تو اوسکو معلوم ہوگا کہ ہر جملہ مشتقہ اپنی ماقبل کی جملہ کا سر مفصول بلحاظ لاکی ہوتا ہی اور ج (لا+د) کے واسطی جو جملہ قواء د مین لکہا ہی وہ ایک مثال ٹیلر صاحب کے ضابطہ کی ہے

علاوہ برین یہہ امر بھی ملحوظ خاطر رہی کہ ج″ (لا) جسطرح جَ (لا) سی استخراج ہوتا ہے اوسیطرح جَ (لا) کا ج (لا) سی مستنبط ہوتا ہی پس ج″ (لا) اول جملہ مشتقہ جَ (لا) کا اور دوم جملہ مشتقہ جَ (لا) کا ہی اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ گذشتہ کی

$$جَ (لا+د) = جَ (لا) + د ج″ (لا) + \frac{د^{۲}}{۱×۲} ج‴ (لا) + \frac{د^{۳}}{۱×۲×۳} ح‴″ (لا) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{د^{ر-۱}}{۱×۲×\cdots×(ر-۱)} ح^{(ر-۱)} (لا) \cdots + \frac{د^{ن-۱}}{۱×۲×\cdots×(ن-۱)} ح^{(ن-۱)} (لا)$$

اور علی ہذا القیاس

$$ج″ (لا+د) = ج″ (لا) + د ج‴ (لا) + \frac{د^{۲}}{۱×۲} ج (لا) + \cdots\cdots$$

$$\cdots \frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-ر+۲)}{ر-۱} ج_{ن-ر+۲} (لا) + \cdots + ج_{ن} (لا)$$

اور علی ہذا القیاس

(۱۴) لا کی کسی جملہ صحیحہ ناطقہ میں جو موافق قوار متنازلہ لا کی لکھا جاوے ہر یک رقم کو جو اوسمیں واقع ہوتی ہو لا کو کافی بڑھا کر ایسا بنا سکتی ہیں کہ وہ اپنی سب مابعد کی رقموں کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہیں ہو جاوے اور ہر یک رقم کو لا کو کافی گھٹا کر ایسا بنا سکتی ہیں کہ وہ اپنی سب مابقبل کی رقموں کی مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہیں ہو جاوے

فرض کرو ع۔ لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۲}$ لا^{۲} + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$

ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور فرض کرو کہ روین رقم ع$_{ر-۱}$ لا$^{ن-ر+۱}$ واقع ہوتی ہے یعنی ع$_{ر-۱}$ صفر نہیں ہی اور امثال ع$_{ر}$ و ع$_{ر+۱}$ ... ع$_{ن}$ میں جو سب سے بڑا ہے اوسکی عددی قیمت ق ہے روین رقم کی مابعد رقموں کا مجموعہ

ق (لا$^{ن-ر}$ + لا$^{ن-ر-۱}$ + ... + لا + ۱) یعنی ق $\frac{لا^{ن-ر+۱} - ۱}{لا - ۱}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا

اور روین رقم کی نسبت اس مجموعہ کی ساتھ $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱) لا^{ن-ر+۱}}{ق (لا^{ن-ر+۱} - ۱)}$

یعنی $\frac{ع_{ر-۱} (لا-۱)}{ق - ق لا^{ن-ر+۱}}$ اب لا کو کافی بڑا فرض کرنی سی شمار کنندہ کو جتنا چاہیں ہم بڑا کر سکتے ہیں اور نسب نما کو برابر ق کی کر سکتی ہیں اسلئی اس نسبت کو جتنا چاہیں بڑھا لیں

پس اسی دعوی کا پہلا جزو ثابت ہوا — اب دوسرے جزو کے ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ لا = $\frac{۱}{ع_{۰}}$ تو یہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{ع_{ن}} \left[ع_{۰} + ع_{۱} ع_{۰}^{۲} + ع_{۲} ع_{۰}^{۳} + \cdots + ع_{ن-۱} ع_{۰}^{ن} + ع_{ن} ع_{۰}^{ن+۱} \right]$$

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ لا کو کافی چھوٹا فرض کرکی یعنی ع$_{۰}$ کو کافی بڑا فرض کرکی کسی رقم ع$_{ر}$ ع$_{۰}^{ر+۱}$ کو جو نفس الامر میں واقع ہوتی ہو نسبت میں اپنی ساتھ ارقام ماقبل کے ع$_{۰}$ + ع$_{۱}$ ع$_{۰}^{۲}$ + ... + ع$_{ن-۱}$ ع$_{۰}^{ن}$ کی مجموعہ کی ساتھ جتنا چاہیں بڑھا دیں اور یہہ اول ثابت ہو چکا ہی اسی دوسرا دعوی کا جزو ثابت ہوا

(۱۵) مسائل معادلات میں جو اول سوال ذہن میں آتا ہی وہ یہہ ہی کہ ہر مساوات ایک قیمت کہتی کا نہیں

اب ہم بعض سیدہی سادہی مقدمات لکھینگے جسسے یہہ ثابت ہوگا کہ خاص صورتون مین ایک قیمت کا وجود ہوتا ہی ایک مسئلہ کی ضرورت پڑتی ہی جسکو بدیہی جانکر تسلیم کرلیا کرتی ہین مگر ہم اوسکو دفعہ ذیل مین ثابت کرتے ہین

(۱۶) فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ محیط جملہ لاکا ہو اور اوسکی قیمتین ج (ا) اور ج (ب) موافق لاکی ا اور ب کی قیمتون کی ہون یعنی ج (لا) مین جب لاکی جگہ ا لکھین تو ج (لا) کی قیمت ج (ا) حاصل ہو اور علی ہذا القیاس ج (ب) تو لاجب اسی بدل کر ب بنی گا تو ج (لا) ج (ا) سی بدل کر ج (ب) بنی گا اور ج (ا) اور ج (ب) کی سب درمیانی قیمتون پر اوسکی نوبت بہ نوبت پہونچیگی اب فرض کرو کہ لاکی قیمت س لگائی جائی اور اسکی موافق ج (لا) کی قیمت ج (س) ہو اب لاکی واسطے ایک اور قیمت س + ھ مقرر کرو تو ھ کو کافی چھوٹا فرض کرنی سی ہم ج (س + ھ) اور ج (س) کے تفاوت کو جتنا چاہین کم کرسکتی ہین اسواسطے کہ

$$ج (س+ھ) = ج (س) + ھ ج' (س) + \frac{ھ^2}{1\times 2} ج'' (س) + \ldots + \frac{ھ^{ن-1}}{ن-1} ج^{ن-1} (س) + \frac{ھ^ن}{ن} ج (س)$$

اب یہہ بموجب دفعہ ۱۴ کی ھ کو کافی چھوٹا فرض کرکے اول رقم تسلسلہ ھ ج' (س) اور $\frac{ھ^2}{1\times 2} ج''$ (س) اور $\frac{ھ^3}{1\times 2\times 3} ج'''$ (س) . . . کو جو معدوم نہین ہوتی ایسا بناسکتی ہین کہ وہ اپنی کل مابعد کی رقمون کے مجموعہ سی جتنی گنی ہم چاہین بڑہجاے اور ھ کو کافی چھوٹا فرض کرنی سی یہہ رقم خود جتنی چھوٹی ہم چاہین بن سکتی ہی اسواسطی ج (س + ھ) - ج (س) کو جتنا چاہین ھ کو چھوٹا فرض کرکی بناسکتی ہین اسی ثابت ہوتا ہی کہ لاجسطرح بتدریج بدلتا ہی اوسیطرح ج (لا) بتدریج بدلتا ہے اگر ج (لا) کی کوئی قیمت موافق قیمت مشخصہ لاکی ہو تو اوسکی دوسری قیمت پہلی قیمت کی قریب جتنی ہم چاہین موافق لاکی دوسری قیمت کی جو پہلی قیمت مشخصہ کے کافی قریب ہوسکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ جب لا اسی ب تک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) قیمت ج (ا) سی قیمت ج (ب) تک نوبت بہ نوبت بدلتا ہی اور اوسکی اندر کہین گستگی نہین واقع ہوتی اسواسطی کہ اگر یہہ کہا جاے کہ اوسکی اندر گستگی واقع ہوتی ہی تو اسکی یہہ معنی ہین کہ ہم لاکی ایسی قیمت نہین مقرر کرسکتی کہ وہ پہلی قیمت کی قریب ہماری مرضی کی موافق ہو

(۱۷) دفعہ گذشتہ مین ہم نی یہہ تو نہین بیان کیا کہ ج (لا) ہمیشہ ج (ا) سی ج (ب) تک بڑہتا ہی
یا ہمیشہ ج (ا) سی ج (ب) تک گہٹتا ہی اسلئی مختلف صورتین ہونگی کہین زیادہ ہوگا کہین کم ہوگا
لیکن یہہ ہم نی بیان کیا ہی کہ وہ نوبت بہ نوبت بتدریج قیمت ج (ا) سی قیمت ج (ب) تک
تبدیل ہوتا ہی اور یہہ تبدل یکایک نہین ہوتا بلکہ نوبت بہ نوبت ہوتا ہی یہہ ایک بڑا مقدمہ ہی اور
اگر طالب علم اوسپر غور کریگا تو اوسکو بدیہات سی معلوم ہوگا کیونکہ یہہ بات ظاہر ہی کہ لا کی
ہر متناہی قیمت کی موافق ج (لا) کی بہی متناہی قیمت ہوگی اور یہہ ہم نی ثابت کردیا کہ اگر لا
بے نہایت چہوٹی تبدیلی کیجائی تو ج (لا) مین بہی بی نہایت چہوٹی تبدیلی ہوگی پس اس سبب سے ج (لا) کے
متواتر قیمتون مین جو درجہ بدرجہ ہوتی ہین کہین گسستگی اور شگستگی نہین واقع ہوگی

(۱۸) طالب علم اگر ہندسہ بالجبر سی واقف ہوگا تو اوسکو یہہ مضمون اوپر کا بڑا دلچسپ معلوم ہوگا
وہ خطوط منحنی جو جملون کو تعبیر کرین بنا لیگا اور اون پر غور اسطرح کریگا کہ ج (لا) کو ی سی تعبیر کریگا
پس ی = ج (لا) کو مساوات خط منحنی کی خیال کریگا اور پہر اس خط منحنی کے اوس حصہ کو
جو درمیان لا = ا اور لا = ب کی واقع ہے فرض کریگا پہر اسی اوس کی ذہن مین یہہ عمدہ تصور
پیدا ہوگا کہ ج (لا) کی واسطی جو قیمتین مابین ج (ا) اور ج (ب) کی درمیان تشخیص کیجائین
اونمین ضرور ہی کہ متواتر ہو اور کہین اونمین گسستگی نہ واقع ہو

اس بات پر بہی لحاظ رہی کہ ا اور ب اور ج (ا) اور ج (ب) کی ساتہہ مثبت ہونی کی قید نہین ہے
ج (ا) اور ج (ب) کی مابین قیمتون کی معنی علم جبر مقابلہ کی موافق لی گئی ہین یعنی ہر مقداری کو
ج (ا) اور ج (ب) کی مقدار مابین کہینگے اگر ی = ج (لا) اور ج (ب) - ی کے ایک سے علامت ہو

(۱۹) اگر لا کی جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) مین لا کی جگہ دو عدد رکہی جائین اور اونسی قیمتین ج (لا)
کی مختلف العلامت حاصل ہون تو ضرور ہی کہ کم از کم ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی
لا کی اون قیمتون کی درمیان واقع ہو.

فرض کرو کہ ا اور ب وہ قیمتین ہین تو ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت بموجب فرض کے ہین

اور بموجب دفعہ ۱۶ کی جب لا بتدریج وسی بانک بدلتا ہی تو جملہ ج (لا) بغیر کسی گستگی قیمت کی
ح (ا) سی ح (ب) تک بدلتا ہی لیکن اس سبب سے کہ ج (ا) اور ج (ب) مختلف العلامت ہیں
تو قیمت صفر کی اونکی درمیان واقع ہوگی اسلئے ضرور ہی کہ موافق کسی قیمت کی جو ا اور ب کے درمیان
واقع ہو ج (لا) برابر صفر کی ہو اور اسکی یہی معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = ۰
کی ایک قیمت درمیان ا اور ب کے واقع ہوتی ہے ۔

(۲۰) مساوات طاق درجہ کی ضرور ایک اصلی قیمت رکھتی ہے

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ سے نغیر ہو یہان

ج (لا) = ع. لا^ن + ع_۱ لا^ن-۱ + ... + ع_ن-۱ لا + ع_ن

اسمیں ن ایک طاق عدد ہی

جب لا کافی بڑا ہو تو بموجب دفعہ ۱۴ کی اول رقم ح (لا) کی یعنی ع. لا^ن باقی ارقام کی مجموعہ سے بڑا ہوگا
اسواسطے ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع. لا^ن کی علامت ہی پس لا کو کافی بڑا مقرر کرنے سے
اگر لا مثبت ہو تو ج (لا) کی وہی علامت ہوگی جو ع. کی علامت ہی اور اگر لا منفی ہوگا تو
ج (لا) کی علامت مخالف ع. کی علامت کی ہوگی پس اس سبب سے کہ لا کی ایک مناسب مثبت قیمت
جب بدل کر ایک مناسب منفی قیمت ہو جاتی ہی تو علامت ج (لا) کی بدلتی ہی ضرور ہی کہ ایک قیمت
درمیانی لا کی ایسی ہو کہ ح (لا) کو معدوم کردی اسکی یہہ معنی ہیں کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک اصلی قیمت ہے
اب ہم یہہ دریافت کر سکتی ہیں کہ یہہ قیمت مثبت ہوگی یا منفی اسواسطے کہ جب لا کی واسطے صفر رکھیں
تو ج (لا) کی علامت وہی ہوگی جو ع_ن کی علامت ہی پس اگر ع. اور ع_ن کی ایک ہی علامت ہو
تو ع_ن مثبت ہی تو مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک منفی قیمت ہوگی اور اگر ع. اور ع_ن
کی مختلف علامتیں ہوں تو ع_ن ایک مقدار منفی ہوگی اسواسطے یقینی ایک مثبت قیمت مساوات
ج (لا) = ۰ کی ہوگی پس اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور سب سے لا کی اعلی قوت کی امثال
مساوات کو تقسیم کرکے سادی صورت اوسکی بنائیں تو ایک اصلی قیمت مساوات ہوگی جسکی

علامت متضاد اخر رقم کے علامت کے ہوگی

(۲۱) ایک مساوات زوج درجہ کی ہو اور صورت سادہ رکھتی ہو اور اوسکی اخر رقم منفی ہو تو اوسکی دو اصلی قیمتین مختلف العلامت ضرور ہونگین

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہو تو جب لا صفر ہوگا تو بموجب فرض کے ج (لا) منفی ہوگا جب لا کافی بڑا ہو تو ج (لا) مثبت ہوگا خواہ لا مثبت ہو یا منفی پس کوئی منفی قیمت لا کی ایسی ہی کسر ج (لا) کو معدوم کرتی ہی اور نیز کوئی مثبت قیمت بھی ایسی ہے کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہی یعنی مساوات ج (لا) = ۰ کی یقینی ایک مثبت قیمت اور ایک منفی قیمت ہی

(۲۲) اگر جملہ صحیحہ ناطقہ ج (لا) میں ارقام کی ایک صف کی امثال کی یکسان علامت ہو اور اونکی اگلی کے ارقام کی صف کی امثال کی علامت پہلی علامت کی متضاد ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت قیمت ہوگی اور صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

بموجب دفعات ۲۰ اور ۲۱ کی مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک مثبت قیمت ہوگی اب یہہ ثابت کرینگے کہ صرف ایک ہی مثبت قیمت ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = ع۰ لا^ن + ع۱ لا^{ن-۱} + ع۲ لا^{ن-۲} + ... + ع_{ن-۱} لا + ع_ن

فرض کرو کہ امثال ع۰ اور ع۱ ... ع_ر سب کے مثبت ہیں اور باقی امثال منفی ہیں

فرض کرو کہ ع_{ر+۱} = - ع_{ر+۱} اور ع_{ر+۲} = - ع_{ر+۲} ... ع_ن = - ع_ن

پس ج (لا) کو ہم اسطرح لکھہ سکتے ہیں کہ

ج (لا) = لا^ن [ع۰ + ع۱ لا^{-۱} + ع۲ لا^{-۲} + ... + ع_ر لا^{-ر} - ع_{ر+۱}/لا - ع_{ر+۲}/لا^۲ - ... - ع_ن/لا^ن]

جملہ ع۰ لا^ن + ع۱ لا^{ن-۱} + ع۲ لا^{ن-۲} + ... + ع_ر لا^{ن-ر} ایسا ہی بڑہتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے مگر جس حالت میں کہ ر = ۰ کے تو اوس کی قیمت مستقل ہو جاتی ہے اور جملہ ع_{ر+۱}/لا + ع_{ر+۲}/لا^۲ + ... + ع_ن/لا^{ن-ر} ایسا گھٹتا ہے جیسا کہ لا بڑہتا ہے

پس جب لا صفر سے اور بڑہتا ہی تو دونو جملہ سوا ایک دفعہ کے آپسمین برابر نہین ہو سکتی اسکی یہی معنی ہین کہ

ج (لا) = ۰ کے صرف ایک ہی مثبت قیمت ہے

(۲۳) کسی طرح مشابہ نہ لگی اسلئے ہم اخیر تین دفعات کے نتایج کو نہایت صفائی اور درستی کے ساتھ لکھتے ہیں

دفعہ ۲۰ میں جس مساوات کا ذکر ہی اوسکی واسطے یہہ ثابت ہواہی کہ اوسکی کم از کم ایک اصلی قیمت ہوتی ہی مگر یہہ نہیں ثابت ہوا کہ وہ صرف ایک ہی ہوتی ہی دفعہ ۲۱ میں جس مساوات کا بیان ہواہی اوسکے واسطے یہہ ثابت ہواہی کہ اوسکی کم از کم دو اصلی قیمتیں ہونگیں مگر یہہ نہیں ثابت کیا کہ صرف دو ہی اصلی قیمتیں ہونگیں دفعہ ۲۲ میں جس مساوات کا ذکر ہی اوسمیں ثابت ہواہی کہ ایک مثبت قیمت اوسکی ہوتی ہی اور یہہ بھی ثابت ہواہی کہ صرف ایک ہی قیمت ہوتی ہی مگر یہہ نہیں ثابت ہوا کہ کوئی اوسکی منفی قیمت نہیں ہوتی

(۲۴) دفعات ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ میں جو مقدمات ثابت ہوئی ہیں اونمیں خاص صورتوں کے اندر قیمتوں کے وجود موقوف اس امر پر رکھا گیا ہی کہ ہم اس بات کو ثابت کریں کہ

ج (لا) کی یا ایک دفعہ علامت یا کئی دفعہ علامت بدلتی ہی اگر برخلاف اسکے ایسی صورت ہو کہ خاص سلک قیمتوں کی ایسی ہو کہ ہم یہہ ثابت کردیں کہ ج (لا) کی علامت موافق اوس سلک کے نہیں تبدیل ہوتی تو کوئی قیمت مساوات ج (لا) = ۰ میں اوس سلک میں سے لا کی واسطی نہ ہوگی

اب اس دعوی کی ظاہر صورتیں ذیل میں لکھتے ہیں

(۱) اگر امثال ج (لا) کی سب مثبت ہوں تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی مثبت قیمت نہ ہوگی

(۲) اگر ج (لا) میں لا کی زوج قواء کی امثال یکسان علامت رکھیں اور لا کی طاق قوتوں کی سب امثال پہلی علامت کی متضاد علامت رکھیں تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی منفی قیمت نہ ہوگی

(۳) اگر لا کی صرف زوج قواء سی ج (لا) ملتفت ہو اور تمام امثال کی یکسان علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی

(۴) اگر صرف لا کی طاق قواء سی ج (لا) ملتفت ہو اور تمام امثال کی یکسان علامت ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کوئی اصلی قیمت نہیں ہوگی الا اوس صورت میں کہ لا = ۰

ہم نے دو اخیر صورتوں میں یہہ لکھا ہی کہ مساوات کی اصلی قیمت کوئی نہیں ہوگی مگر یہہ ہم نے پہلی کہا کہ

کوئی قیمت اوسکی نہین ہوگی اسواسطی کہ اس بات کو ہم جبر مقابلہ کی پچیسوین باب مین پڑہ آئی ہین کہ باتفاق جمہور مساوات بعض صورتون مین ایسی ہوتی ہی کہ اوسکی قیمت تخیلی ہوتی ہے

باب دوم وجود قیمت کی بیان مین

(۲۵) ہم ثابت کرینگے کہ ہر یک مساوات صحیحہ ناطقہ کی ایک قیمت ہوتی ہی خواہ وہ اصلی ہو خواہ خیالی یعنی اس صورت ا + ب √-۱ کی اسمین ا اور ب اصلی ہین ایسی جملہ ا + ب √-۱ کو جسمین ا اور ب اصلی ہون جملہ خیالی کہتی ہین اسکی یہہ معنی ہین کہ جب ہم لفظ خیالی کا کسی جملہ کی نسبت استعمال مین لائین تو اوسی مراد یہہ ہوتی ہی کہ وہ جملہ ا + ب √-۱ کی صورت کا ہی اور اوسمین ا اور ب اصلی ہین

(۲۶) طالب علم اس بات کو جانتی ہین کہ بعض باتین باتفاق جمہور ایسی مقرر ہوتی ہین کہ جنکی سبب سے ہم تحقیقات جبریہ مین خیالی جملون سے بحث کر سکتی ہین اور اونکی باب مین بعض مسائل قائم کر سکتی ہین مثلاً ا² + ب² کی جذر کی مثبت قیمت قالب ہر یک جملہ ا + ب √-۱ اور ا - ب √-۱ کا کہلاتا ہے اور اس حدود کی استعانت سی یہہ ہم ثابت کر سکتی ہین کہ دو خیالی جملون کی حاصل ضرب کا قالب ان دو جملون کی قالبون کا حاصل ضرب ہوتا ہی

اسواسطی کہ حاصل ضرب ا + ب √-۱ اور ا' + ب' √-۱ کا

ا ا' - ب ب' + (ا ب' + ا' ب) √-۱ اور قالب انکا مثبت قیمت جذر (ا ا' - ب ب')² + (ا ب' + ا' ب)² کی یعنی (ا² + ب²) (ا'² + ب'²) کی ہی اور اسکی یہی معنی ہین کہ دو معلوم جملون کے قالبون کا حاصل ضرب یہہ قالب ہے

اور نیز جملہ ا + ب √-۱ اوس حالت مین معدوم قرار دیا گیا ہی کہ ا اور ب معدوم ہو جائین پس اب یہہ ثابت ہوا کہ اگر حاصل ضرب دو خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے تو ایک جملہ کا قالب بہی معدوم ہو جاتا ہی اور ایسی ہی اگر حاصل ضرب دو یا زیادہ خیالی جملون کا معدوم ہوتا ہے تو خود ایک جملہ بہی معدوم ہوتا ہی اور اگر ایک خود جملہ معدوم ہو جاتا ہے تو اوسکا حاصل ضرب بہی معدوم ہو جاتا ہے

(۲۷) جن طالب علمون نے خیالی جملون پر توجہ نہ کی ہو اب وہ پڑہے جبر مقابلہ کی پچیسوین باب کو دیکھین

اب ایک بات بہت مشکل ہم ثابت کرتی ہین کہ ہر یک مساوات ایک قیمت رکھتی ہی خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی ہو + یہہ بہتر معلوم ہوتا ہی کہ بالفعل طالب علم اس امر کو یون ہی تسلیم کرلی اور اگی کام چلائی اور اس باب کو اگی چھوڑ دی اور پھر جب کچھہ اس رسالہ کو پڑھہ لی تو پھر اوسکو مطالعہ کری اول اس مسئلہ کے سمجھنی مین دقت نہ اٹھائی

(۲۸) اول ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ چارون معادلات ذیل مین ہر یک ایک قیمت وجود رکھتی ہے خواہ وہ قیمت اصلی ہو یا خیالی

$$\text{لا}^{\text{ن}} = ۱ \qquad \text{لا}^{\text{ن}} = -۱ \qquad \text{لا}^{\text{ن}} = +\sqrt{-۱} \qquad \text{لا}^{\text{ن}} = -\sqrt{-۱}$$

(۱) لا$^{\text{ن}}$ = ۱ مین ظاہر ہے کہ لا = ۱ ایک قیمت مساوات کی ہے

(۲) لا$^{\text{ن}}$ = -۱ اگر ن طاق عدد ہو تو ظاہر ہی کہ لا = -۱ کی ایک قیمت مساوات کی ہوگی اگر ن زوج ہو تو اوسکو برابر ۲م کی فرض کرو تو یہہ ثابت کرنا ہوگا کہ مساوات لا^{۲م} = -۱ کا ایک حل ہی اور اسکی معنی یہی ہین کہ ہم یہہ ثابت کردین کہ مساوات لا^{۲} = $+\sqrt{-۱}$ کا ایک حل ہی اسلئی اسکا حل یہی باقی دو ذیل کی مساواتون کی حل مین داخل ہوگیا

(۳) لا$^{\text{ن}}$ = $+\sqrt{-۱}$ اگر ن طاق ہو تو اوسکی دو صورتین ۴م+۱ اور ۴م+۳ کی ہونگین اول صورت مین $+\sqrt{-۱}$ ایک قیمت ہی اسلئی کہ $(+\sqrt{-۱})^{۴م+۱} = +\sqrt{-۱}$ اور دوسری صورت مین $-\sqrt{-۱}$ ایک قیمت ہوگی کیونکہ $(-\sqrt{-۱})^{۴م+۳} = +\sqrt{-۱}$

اگر ن ایک جفت عدد ہی تو فرض کرو کہ وہ مع کی برابر ہی اسمین م ایک طاق عدد ہی اور ع کوئی سی قیمت ۲ کی مثلاً ۲ق ہی و = لا^{ع} کی رکھو تو مساوات لا^{ع} = $+\sqrt{-۱}$ کو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ و^{۲} = $+\sqrt{-۱}$ اور ابھی ہم ثابت کرائی ہین کہ $+\sqrt{-۱}$ ایک مناسب قیمت و کی ہی اگر م کی صورت ۴ ر + ۱ ہو اور $-\sqrt{-۱}$ ایک مناسب قیمت و کی ہے اگر م کی صورت ۴ ر + ۳ کی ہو اب ہم کو لا کی قیمت ایسی دریافت کرنی باقی رہی کہ جسی شرایط لا^{ع} = $+\sqrt{-۱}$ اور لا^{ع} = $-\sqrt{-۱}$ کی پوری ہون اسمین ع = ۲ق

قیمت مطلوب اسکی جبر مقابلہ کی ایک معمولی عمل سی اسطرح حاصل ہوسکتی ہی کہ جذر + ۱-ن کا لو یا -۱-ن کا نکالو اسی ایک جملہ سہ + صہ ۱-ن حاصل ہوگا جسمین سہ اور صہ اصلی ہونگے اب جذر سہ + صہ ۱-ن کا لو تو اسی جذر اسیکے متماثل ایک جملہ ہوگا اور علی ہذا القیاس جبر مقابلہ کا پچیسوان باب دیکھو جب ہم ق دفعہ جذر نکالین تو ایک جملہ ا + ب ۱-ن حاصل ہوگا اور (ا + ب ۱-ن)^ن = + ۱-ن ا = - ۱-ن

(۴) لان = ۱-ن پر مثل (۳) کی عمل کرو اگر ن طاق عدد ہو اور ۴م + ۱ کی صورت کا ہو تو + ۱-ن قیمت ہوگی اور جب ۴م + ۳ کی صورت کا ہو تو + ۱-ن ایک قیمت ہوگی اور اگر ن جفت قوت ہو تو اوسکو برابر م ع کی فرض کرو جسمین م طاق عدد ہی اور ع = ۲ق اور اب عمل موافق سابق کرکے

(۲۹) ہر یک مساوات صحیحہ ناطقہ کی ایک اصلی یا خیالی قیمت ہوتی ہے

فرض کرو کہ ج (لا) = ع. لا^ن + ع۱ لا^ن-۱ + ع۲ لا^ن-۲ + . . . + ع ن-۲ لا۲ + ع ن-۱ لا + ع ن اور مثال ع، ع۱ . . . ع ن-۲، ع ن-۱ کیا اصلی ہین یا خیالی ہین اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت کیا اصلی یا خیالی ہوگی اگر بجای لا کی کوئی جملہ خیالی ج (لا) مین مندرج کرین تو حاصل لو + مو ۱-ن کی صورت کا حاصل ہوگا اور اسمین لو اور مو اصلی مقادیر ہونگین اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ایک جملہ خیالی ایسا ہی کہ وہ لو = ۰ اور مو = ۰ کی کرتا ہی اور اس بات کو ہم اسطرح ثابت کرتے ہین کہ چونکہ لو۲ + مو۲ ہمیشہ ایک اصلی مثبت مقدار ہی اگر وہ صفر نہ ہوگی تو کوئی قیمت ایسی اوسکی ضرور ہونی چاہئے کہ وہ کسی اور قیمت سی بڑی نہ ہو یعنی کوئی ایسی قیمت ہونی چاہی کہ وہ گھٹ نہ سکی لیکن اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ لو۲ + مو۲ کی کوئی قیمت سوا صفر کی ہو تو ہم اوس جملہ مین کہ لا کی دا سطے کہا جاے ایک مناسب تغیر پیدا کرکے اوس قیمت کو گھٹا سکتے ہین اور اسسے یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ لو۲ + مو۲ قابلیت صفر ہونی کی رکھتا ہی یعنی لو اور مو دونو ایک ہی وقت معدوم ہو جاتے ہین

فرض کرو کہ لا کی ایک خاص قیمت یعنی ا + ب ۱-ن مقرر کی گئی ہی اور اوسکی مندرج کرنے سے ج (لا) کا عر + قر ۱-ن کی صورت کا ہو جاتا ہی اسمین عر اور قر دونو صفر نہین ہین اب

$۱ + ب\sqrt{-۱} + ھ$ کو لا کی جگہ ج (لا) میں رکھو اب قیمت ج (لا) کی جو صورت پیدا ہوگی وہ اسطرح دریافت ہوگی

اول ج (لا+ھ) کو قوا ر ھ میں پھیلائیں اور پھر ۱ + ب $\sqrt{-۱}$ کو بجای لا کی رکھیں پس فرض کرو

ج (لا+ھ) = ک + ھ ک' + $\frac{ھ^۲}{۲}$ ک'' + . . . + $\frac{ھ^ن}{ن}$ ع. ل

اسمیں ک اور ک' اور ک'' . . جملہ لا کے ہیں دفعہ ۱۰ کو دیکھو

لا کی جگہ ۱ + ب $\sqrt{-۱}$ رکھو تو ک کی صورت غ + ق $\sqrt{-۱}$ کی ہوجائیگی

بعض امثال ک اور ک' . . کی لا کی اس قیمت سی فنا ہوجائیگی مگر وہ سب کے سب معدوم

لا کی اس قیمت سی نہیں ہوسکتی کیونکہ احر امثال $\frac{ھ^ن}{ن}$ کا ع. ل ہے

فرض کرو کہ ھ سب سے ادنی درجہ کی قوت ھ کی ہی جسکی امثال فنا نہیں ہوتی اور ھ کے

کے امثال کو م + ر $\sqrt{-۱}$ سی تعبیر کرو اسمیں م اور ر دونو صفر نہیں ہیں پس جب ۱ + ب $\sqrt{-۱}$ + ھ

لا کی جگہ رکھا جاوی تو ج (لا) یہہ ہوجاتا ہے کہ

ع + ف $\sqrt{-۱}$ + (م + ر $\sqrt{-۱}$) ھ^ن + . . .

جن رقمون کو لکھا نہیں اونمیں ھ کی قوا ر بڑی ھ^ن ملتف ہیں اسکو ع + ف $\sqrt{-۱}$ سے تعبیر کرو

فرض کرو کہ ھ = بدطرا سیمیں بدایک اصلی مثبت مقدار ہی بموجب دفعہ ۲۸ کی یہہ ہمارے اختیار میں ہے کہ

طر کو ایسا مقرر کرین کہ طر^ن کیا + ۱ ہو یا - ۱ پس اسی بہہ ہم حاصل کرسکتے ہین کہ

ع^ن + ف^ن $\sqrt{-۱}$ = ع + ف $\sqrt{-۱}$ ± (م + ر $\sqrt{-۱}$) بط^ن + . . .

پس ع^ن = ع ± م بط^ن + . . .

ف^ن = ف ± ر بط^ن + ...

ع^۲ + ف^۲ = ع^۲ + ف^۲ ± ۲ (ع م + ف ر) بط^ن + . . .

جو رقمین کہ یہان لکھی نہیں اونمین بط^ن سے بڑی قوا ر بد کے ملتف ہونگے

اب بموجب دفعہ ۱۴ کی بد کو ہم ایسا چھوٹا مقرر کرسکتی ہین کہ ع^۲ + ف^۲ کے قیمت مین جو تمام

رقمین بد سے ملتف ہون اونکی وہی علامت ہو جو ± ۲ (ع م + ف ر) بط^ن کی علامت ہی

بشرطیکہ عرمر + فرصر صفر نہ ہو

اب ہم اول یہہ فرض کرتی ہیں کہ عرمر + فرصر صفر نہیں ہی تو علامت عر۲ + فر۲ - عر - قر وہی علامت ہے جو علامت ± ۲ (عرمر + فرصر) بدم کی جسمیں لاکانی چھوٹا مقرر کیا گیا ہے اور ہم اس بات کو یقینی جان سکتی ہیں کہ یہہ علامت منفی بموجب اس فرض کے ہوگی کہ اگر عرمر + فرصر مثبت ہو تو طرم ہو - ۱ اور اگر عرمر + فرصر منفی ہو تو طرم ہو + ۱

پس اسواسطے عر۲ + فر۲ کو چھوٹا عر۲ + فر۲ سے کرسکتی ہیں

دوم یہہ فرض کرو کہ عرمر + فرصر صفر ہی تو بجای طرم = ± ۱ کے

فرض کرنی کی طرم = ± √-۱ فرض کرو اور یہہ موافق سابق کی عمل کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

عر + فر√-۱ = عر + قر√-۱ ± (مر + صر√-۱) بدم√-۱ + . . .

پس عر = عر ∓ صر بدم + . . .

قر = قر ± مر بدم + ...

اور عر۲ + فر۲ = عر۲ + فر۲ ± ۲ (قرمر - عرصر) بدم + . . .

اسمیں ارقام جنمیں بدم سے بڑھکے اعلی قوتیں ملتف ہوں نہیں لکھی ہیں

اب (عرمر + فرصر)۲ + (قرمر - عرصر)۲ = (عر۲ + فر۲) (مر۲ + صر۲)

اور یہہ برابر صفر کی نہیں ہوسکتا اسواسطے کہ عر۲ + فر۲ بموجب فرض کے برابر صفر کی نہیں ہے اور مر۲ + صر۲ ثابت ہوچکا ہی کہ سوا صفر کے ہی پس اس سبب سے کہ عرمر + فرصر صفر ہے قرمر - عرصر صفر نہیں ہی اسواسطے علامت عر۲ + فر۲ - عر۲ - فر۲ کے علامت وہی ہوگی جو علامت ± ۲ (قرمر - عرصر) بدم کی ہی جسمیں بدم کا نی چھوٹا فرض کیا گیا ہی اور ہم اس بات کو یقینی جان سکتی ہیں کہ یہہ علامت منفی بموجب اس فرض کی ہوگی کہ اگر قرمر - عرصر مثبت ہو تو طرم ہو - √-۱ اور اگر قرمر - عرصر منفی ہو تو طرم √-۱ یا + √-۱ ہو اسواسطے ہم عر۲ + فر۲ کو چھوٹا عر۲ + فر۲ سے فرض کرسکتے ہیں

پس ہم نی اسطرح یہہ ثابت کردیا کہ لو + مو کی قیمت جب مختلف صفری ہو تو ہم اوس قیمت کو اسطرح گھٹا سکتی ہین کہ لا کی بجای جو جملہ رکہا جاے اوسمین ایک مناسب تغیر کردین یعنی لو + مو قابل اسکے نہین ہی کہ کوئی مثبت قیمت اوسکی ایسی ہو کہ وہ گہٹ نہ سکی جو کچہہ ہم نی بیان کیا اوسسے معلوم ہوتا ہے کہ یہہ ممکن ہی کہ لو = ۰ اور مو = ۰ کے ایک ہی وقت مین ہو سکتی ہین

(۳۰) اب یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ ا اور ب جملہ ا + ب $\sqrt{-1}$ مین جو لا کی بجای مندرج کرنے سے ج (لا) کو معدوم کرنا ہی متناہی ہے

$$ج\ (لا) = ع_{لا}^{ن} \left\{ 1 + \frac{ع_{1}}{ع_{لا}} + \frac{ع_{2}}{ع_{لا^2}} + \dots + \frac{ع_{ن}}{ع_{لا^ن}} \right\}$$

اب بجای لا کے ا + ب $\sqrt{-1}$ رکہو تو ج (لا) کی یہہ صورت ہو گی کہ

$$ع_{(ا+ب\sqrt{-1})}^{ن} \left[1 + ع_{1} \frac{(ا+ب\sqrt{-1})}{ع_{(ا+ب\sqrt{-1})}} + ع_{2} \frac{(ا+ب\sqrt{-1})^2}{ع_{(ا+ب\sqrt{-1})^2}} + \dots + ع_{ن} \frac{(ا+ب\sqrt{-1})^ن}{ع_{(ا+ب\sqrt{-1})^ن}} \right]$$

اب جو سلسلہ خطوط وحدانی کی درمیان ہی اوسمین سی کسی رقم کو مثلاً اوس رقم کو جسمین ع مختلف ہم لو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ع_{2}}{ع_{(ا+ب\sqrt{-1})^2}} = \frac{ع_{2}}{ع_{(ا+ب\sqrt{-1})^2}} = \frac{ع_{2}}{ع_{(ا^2+ب^2)}} = \frac{ع_{2}(ا-ب)}{ع_{(ا^2+ب^2)}} - \frac{ع_{2}(ا+ب)}{ع_{(ا^2+ب^2)}}$$

$= ما + ب\sqrt{-1}$ کے مقرر کرو

اب یہہ ظاہر ہی کہ جب ا اور ب غیر متناہی زیادہ ہوتی ہین تو ا اور ب غیر متناہی کم ہوتے ہین پس جب لا = ا + ب $\sqrt{-1}$ کے ہو تو ج (لا) کی قیمت کو

لو + مو $\sqrt{-1}$ کے تعبیر کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لو + مو\sqrt{-1} = ع_{(ا+ب\sqrt{-1})}^{ن} \left[1 + با + بب\sqrt{-1} \right]$$

اسمین با اور بب کی غیر متناہی زیادہ ہونی سی ا اور ب لا نہایت کم ہوتی ہین اور یہہ بہی ہم کو حاصل ہے کہ

$$لو - مو\sqrt{-1} = ع_{(ا-ب\sqrt{-1})}^{ن} \left[1 + با - بب\sqrt{-1} \right]$$

پس $لو^2 + مو^2 = ع_{(ا^2+ب^2)}^{ن} \left[(1+با)^2 + بب^2 \right]$

اور یہہ لا انتہا زیادہ ہوتا جبکہ ا اور ب لا انتہا زیادہ ہون کیونکہ ایک جز صریح $(ا^2 + ب^2)^ن$

عرمتناہی زیادہ ہوتا ہی اور ایک جز ضربی (۱+لا)^{ن} + ب$_{ن}$ کی غایت الانتہا کی طرف پہونچتی ہے
پس لا^{ن} + مو$_{ن}$ اوس حالت میں معدوم نہیں ہوسکتی کہ لا اور ب لاانتہا زیادہ ہوں یا ایک انمیں سی غیر متناہی زیادہ ہو
(۳۱) اس بات پر بھی خیال کرنا چاہیئے کہ دفعہ ۲۹ کی اثبات میں مساوات مفروضہ کی امثال اصلی اور
خیالی دونو ہوسکتی ہیں مگر اگی کتاب میں سب جگہ امثال سے امثال اصلی مراد ہیں بشرطیکہ اوسکی خلاف کہیں نہ بیان کیا گیا ہو
(۳۲) مساوات کی ایک قیمت کی ہونی کا جو اثبات لکھا گیا ہی اوسکو کوچی صاحب کا اثبات کہتی ہیں
اب اس مضمون پر بہر مباحثہ عظیم ہوا ہی اوسکی تمام کیفیت کیمبرج کی فلوزوفیکل سوسایٹی کی دسوین
جلد میں لکھی ہی اوسمین ایک بحث ڈی مورگن صاحب نی لکھی ہی اور دوسرے مسٹر ایری صاحب نی لکھی
اور پہر ایری صاحب کی بحث کا ایک تکملہ بھی اوسمین موجود ہی ڈی مورگن صاحب نی لکھا ہی کہ جو اثبات
کہ کوچی صاحب کا مشہور ہے وہ پہلی ارگیند صاحب نے لکھا ہے

تیسرا باب خواص معادلات

(۳۳) جتنی درجہ کی مساوات ہوتی ہی اوتنی ہی اوسمین قیمتین ہوتی ہین
فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور ج (لا) = ۰ سے تعبیر ہوتی ہے اسمین
ج (لا) = ع$_{۰}$ لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ع$_{ن-۱}$ لا + ع$_{ن}$
بموجب باب دوم کی اس مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ضرور ہوگی خواہ وہ اصلی ہو یا خیالی
اس قیمت کو ا$_{۱}$ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۶ کی ج (لا) پورا لا - ا$_{۱}$ پر تقسیم ہوگا اور اسلئے
ج (لا) = (لا - ا$_{۱}$) مح$_{۱}$ (لا) اسمین مح$_{۱}$ (لا) کوئی جملہ جبریہ صحیحہ لا کا .
(ن-۱) درجہ کا ہی اب پہر بموجب باب دوم کی مح$_{۱}$ (لا) = ۰ کی ایک قیمت اصلی یا خیالی ہے
اوسکو ا$_{۲}$ سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۶ کی مح$_{۱}$ (لا) پورا لا - ا$_{۲}$ پر تقسیم ہوگا اور اسواسطے
مح$_{۱}$ (لا) = (لا - ا$_{۲}$) مح$_{۲}$ (لا) اسمین مح$_{۲}$ (لا) ایک جملہ صحیحہ جبریہ لا کا (ن-۲) درجہ کا ہی
اسیواسطی ج (لا) = (لا - ا$_{۱}$) (لا - ا$_{۲}$) مح$_{۲}$ (لا) اور اسیطرح عمل کرنے سے
ج (لا) کی ن اجزاء ضربی لا - ا$_{۱}$ اور لا - ا$_{۲}$ اور ..... لا - ا$_{ن}$ حاصل ہونگے

اور ایک اور جز ضربی ع ہوگا کیونکہ استمال لاگ کے ج (لا) مین ع ہے پس

ج (لا) = ع . (لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) . . . . (لا - اں)

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی ں قیمتین ہین کیونکہ ں مقادیر

ا۱ و ا۲ . . . اں مین سی کوئی مقدار بجای لا کی ج (لا) مین رکھین تو وہ اوسکو معدوم

کردیگی اور اس مساوات کی ں قیمتون سی زیادہ کوئی قیمت نہ ہوگی اسلئی کہ اگر لا کے کوئی اور قیمت

س جون قیمتون ا۱ اور ا۲ . . . اں مین سی نہ ہو مقرر کرین تو ج (لا) بہہ ہوجا لیگا

کہ ع . (س - ا۱) (س - ا۲) (س - ا۳) . . . (س - اں)

اب یہہ صفر نہین ہوسکتا سوائے اسکے کہ ہر یک جز ضربی اسکا مختلف صفری ہی اور حاصل ضرب اجزا ضربی کا

خواہ اصلی ہو یا خیالی ہو معدوم نہین ہوسکتا جب تک کہ کوئی جز ضربی خود معدوم نہ ہوتا ہو دفعہ ۲۶ کو دیکھو

(۳۴) دفعہ گذشتہ مین تمام قیمتین کیا اصلی ہونگین یا اس صورت ا + ب $\sqrt{-1}$ کی اسمین ا اور ب اصلی

ہین اور بعض قیمتین ا۱ اور ا۲ . . . اں مین برابر بھی ہوسکتی ہین اسلئی کچھہ ضرور نہین کہ ں درجہ کی

مساوات کی ں مختلف قیمتین ہی ہون شاید طالب علم اس بات پر مناقشہ کریگا کہ ں درجہ کی مساوات

کی ں قیمتین کسطرح ہوسکتی ہین جب کہ اونکا اسمین مختلف ہونا ضرور نہ ہو تو ہم یہہ کہتی ہین کہ

اسمین بڑی آسانی ہی کہ ں درجہ کی مساوات کی ں ہی قیمتین کہی جائین گو اونمین بعض قیمتین

اسمین برابر ہون جیسا کہ جبر مقابلہ مین مساوات درجہ دوم ا لا۲ + ب لا + ح = ۰ مین بیان کیا گیا ہے

کہ جب ب۲ = ۴ ا ح تو اوسکی دو برابر قیمتین گنی مین بہ نسبت ایک قیمت گننی کی آسانی ہے

(۳۵) اب جو ہم نی امکان مساوی قیمتون کے داخل ہونی کا بیان کیا اوسکا اثر دفعات گذشتہ مین سے

صرف ایک دفعہ ۲۲ پر ہوتا ہی اوس دفعہ مین یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات خاص صورت کی دو مختلف

بنست قیمتین نہین ہوسکتین لیکن اس بات کو اثبات مین نہین ثابت کیا ہی کہ جس قیمت کا ہونا ضرور ہی

اوسکی برابر ایک قیمت یا کئی قیمتون کا ہونا ممکن نہین جب ہم ڈس کارٹیز صاحب کا قاعدہ علامات ثابت

کرینگے اوسوقت یہہ بات ظاہر ہوجائیگی کہ مساوات جسپر بحث کی گئی ہی ایک قیمت رکھتی ہی اور وہ مکرر نہین آتی

(۳۶) اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا ہم کو معلوم ہو تو ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ج (لا) = (لا - ا) محر ۱ لا اسمین محر ۱ لا ایک جملہ لا کا ایک درجہ کم ج (لا) سے ہے اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی دریافت ہوسکتی ہین اگر ہم مساوات محر ۱ (لا) = ۰ کو جو مساوات ایک درجہ کم بہ نسبت ج (لا) = ۰ کی ہی حل کرین اور علی ہذا القیاس اگر ہم کو دو قیمتین ا ۱ اور ا ۲ مساوات ج (لا) = ۰ معلوم ہون تو ہم کو معلوم ہی کہ ج (لا) = (لا - ا ۱) (لا - ا ۲) محر ۲ (لا) اسمین محر ۲ (لا) ایک جملہ لا کا دو درجہ کم بہ نسبت ج (لا) کی ہی اور باقی قیمتین ج (لا) = ۰ کی مساوات محر ۲ (لا) = ۰ کی حل کرنی سی دریافت ہوسکتی ہین یہہ مساوات دو درجہ کم بہ نسبت ج (لا) = ۰ کے ہے اور علی ہذا القیاس

(۳۷) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ن درجہ کا ہو تو ہم نی یہہ ثابت کر دیا ہی کہ ج (لا) اول درجہ کے ن اجزاء ضربی مین تحلیل ہونی کی ایسی قابلیت رکھتا ہے کہ

ج (لا) = ع . (لا - ا ۱) (لا - ا ۲) . . . (لا - ا ن)

اسمین ا ۱ و ا ۲ . . . ا ن کیا اصلی یا خیالی ہین اس بات پر غور کرنی چاہئی کہ ج (لا) جن اجزاء ضربی مین تحلیل ہوسکتا ہی اوسکا نظم ایک ہی ہوتا ہی جب مقادیر ا ۱ اور ا ۲ . . . ا ن سب غیر مساوی ہون تو ایک نظم کا اجزاء ضربی مین ہونا ظاہر ہی مگر جب بعض مقادیر ا ۱ و ا ۲ و ا ۳ . . . ا ن مین مساوی ہون تو ج (لا) کی مختلف طور سی اسطرح ترکیب نہین پاسکتا کہ ایک ہی اجزاء ضربی کے مختلف قوت نما ہون اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو

ج (لا) = ع . (لا - ا ۱)^ر (لا - ا ۲)^ص (لا - ا ۳)^ط . . . .

اور ج (لا) = ع . (لا - ا ۱)^ر (لا - ا ۲)^ص (لا - ا ۳)^ط . . .

اب فرض کرو کہ ربڑا رسی ہی تو (لا - ا ۱)^ر پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

ع . (لا - ا ۱)^ر - ر (لا - ا ۲)^ص (لا - ا ۳)^ط . . . = ع . (لا - ا ۲)^ص (لا - ا ۳)^ط . . .

اب دائین طرف کا رکن مساوات لا = ا ۱ کی ہونی سی معدوم ہوتا ہی مگر بائین طرف کا رکن معدوم

نہیں ہوتا اسلئے ان جملوں میں تطبیق نہیں ہوسکتی اسی ثابت ہوا کہ ج (لا) کی اجزا ضربی کا نظم ایک ہوتا ہے

(۳۸) اگر کوئی ان درجہ کا جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ان مختلف لا کی قیمتوں سی زیادہ قیمتوں سی معدوم ہوتا ہو تو جملہ میں ہر امثال صفر ہوگا اور جملہ یہی لا کی ہر قیمت کی موافق صفر ہوگا

اسواسطے کہ اگر جملہ لا میں کوئی امثال صفر نہ ہو تو لا کی مختلف قیمتوں سی جو تعداد میں ان سے زیادہ ہوں جملہ معدوم نہ ہوگا پس اگر ان سی زیادہ مختلف قیمتوں سے لا کی جملہ معدوم ہوتا ہے تو ہر یک امثال جملہ میں صفر ہونا چاہیے

(۳۹) دفعہ گذشتہ میں جو ثبوت لکھا ہے وہ مسئلہ کی اثبات کو موقوف اس بات پر کرتا ہی کہ مساوات ان درجہ کی ان قیمتیں ہوتی ہیں اور اخر کار یہہ مقدمہ باب دوم کی تحقیقات پر موقوف ہوجاتا ہے لیکن اسی مسئلہ کو ہم استقرا سی بھی ثابت کرسکتی ہیں اور پھر اوسکی واسطی ضرورت باب دوم کی تحقیقات کی نہیں ہے

فرض کرو کہ لا کا جملہ جون درجہ کا ہو وہ ان سی زیادہ قیمتوں کے موافق معدوم ہوتا ہوا اور جملہ کے ہر امثال صفر ہی تو اب ہم یہہ ثابت کرنا چاہتی ہیں کہ لا کا جملہ (ان + ۱) درجہ کا ان + ۱ مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتوں سی معدوم ہوگا اور ہر یک امثال جملہ میں صفر ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = ق۰ لا^ان + ق۱ لا^(ان-۱) + ق۲ لا^(ان-۲) + ... + ق ن لا + ق

اور فرض کرو کہ (ان + ۱) قیمتوں سی زیادہ قیمتیں لا کی ج (لا) کو فنا کرتی ہیں اور ا ایک قیمت ان قیمتوں میں ایسی ہی کہ ج (ا) = ۰ کی ہوتا ہی تو ج (لا) = ج (لا) - ج (ا)

= ق۰ (لا^ان + ۱^ان) + ق۱ (لا^(ان-۱) - ۱^(ان-۱)) + ق۲ (لا^(ان-۲) - ۱^(ان-۲)) + ... + ق ن (لا - ۱)

اسکو اس صورت سی لکھہ سکتی ہیں کہ

ج (لا) = (لا - ۱) مج (لا)

اسمیں مج (لا) جملہ لا کا ان درجہ کا ہے

چونکہ لا کی ان مختلف قیمتوں سی زیادہ ایسی قیمتیں کہ ج (لا) کو معدوم کرتی ہیں اور ان قیمتوں سے ۱ خارج ہے تو لا کی ان مختلف قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ایسی ہونگیں کہ مج (لا) کو فنا کرتی ہیں اور اسواسطے بموجب فرض کے ہر یک امثال مج (لا) میں صفر ہی اب بموجب دفعہ ۷ کے

مج (لا) = ق. لا^ن + (ق. ا + ق،) لا^{ن-۱} + (ق. ا^۲ + ق، ا + ق،) لا^{ن-۲} . . .

پس ق. = ۰ کیونکہ لا^ن کا امثال صفر ہی پس ق، = ۰ کیونکہ لا^{ن-۱} کا امثال صفر ہے

تو ق، = ۰ کیونکہ لا^{ن-۲} کا امثال صفر ہی اور علی ہذا القیاس

پس ج (لا) مین ہر یک امثال صفر ہے

اسی دعوی ثابت ہی کیونکہ یہہ ہم کو معلوم ہی کہ وہ اول اور دوم درجہ کی جملون کے صورت مین ثابت ہے

(۴۰) اگر ج (لا) ن درجہ کا جملہ لا کا ہو تو ہم نی ثابت کر دیا ہی کہ ج (لا) اول درجہ کے اجزاء

ضربی مین تحلیل ہو سکتا ہی ان اجزاء ضربی مین سی ہر یک ج (لا) کو پورا تقسیم کریگا

تو ج (لا) کی مقسوم علیہ پوری باٹنی والی ہونگی اور حاصل ضرب ان اجزاء ضربی مین سی کسی دو اجزاء

ضربی کا درجہ دوم کا جز ضربی ج (لا) کا ہوگا اور اسیواسطے

ج (لا) کی ن (ن-۱) / ۲ مقسوم علیہ پوری باٹنی والی درجہ دوم کے ہونگی اور اسیطرح عمل کرنے سے

ہم کو معلوم ہوگا کہ ج (لا) کی مقسوم علیہ پوری باٹنی والی ر درجہ کی اوتنی ہونگی جتنی کہ اجتماع

ن اشیا مین سی ر اشیا کی ہوتی ہین یعنی ج (لا) کی ر درجہ کے مقسوم علیہ پوری باٹنی والی ن (ن-۱) . . . (ن-ر+۱) / ر ہونگی

لیکن اس بات کو یہی یاد رکھنا چاہئی کہ مقسوم کسی درجہ کے مثلاً دوم درجہ کی یہہ ضرور نہین کہ مختلف ہی ہون

کیونکہ یہہ کہنہ ضرور نہین ہے کہ اول درجہ کی اجزاء ضربی سب مختلف ہون غرض خلاصہ مطلب یہہ ہے

کہ ر درجہ کی مختلف مقسوم علیہ ن (ن-۱) . . . (ن-ر+۱) / ر سے زیادہ نہین ہو سکتی

(۴۱) مساوات جسمین امثال اصلی ہون اوسکے قیمتون مین خیالی قیمتون کے ازواج ہوتے ہین یعنی جوڑی ہوتے ہین

فرض کرو کہ ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہی جسمین امثال لا کی سب اصلی ہین پس اگر

سہ + صہ √-۱ ایک قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی ہو تو ضرور ہی کہ سہ - صہ √-۱ بھی ایک قیمت ہوگی

اسواسطے کہ جب سہ + صہ √-۱ کو لا کی جگہ جملہ (لا) مین رکھین تو اوسکی صورت

ع + ق صہ √-۱ کی ہوگی جسمین ع اور ق مین صہ کی جفت قوتین ملتف ہین

یہہ بات ظاہری کیونکہ اگر لا کے جملہ کو بہ لائین اور اوسمین لا = سہ + صہ √-۱ تو

صہا-۱ کی جہت فوقین اصلی رقمین پیدا کرینگے اور ما-۱ صہ کا تعلق طاق قواد ساتھ ہوگا
اور چونکہ ج (لا) کی امثال سب اصلی مانی گئی ہین ما-۱ کا
کسی طرح سوا صہ کے طاق قواد کے نہین واقع ہوسکتا
پس اگر سہ - صہ ما-۱ بجای لا کی ج (لا) مین رکھا جای تو وہ ماحصل حاصل ہوگا
جو لا کی جگہ سہ + صہ ما-۱ کی رکھنی حاصل ہوا تہا مگر اوسمین صہ کی علامت بدلی ہوئی ہوگی
اسیواسطی ماحصل ع - ق صہا-۱ ہوگا پس اگر سہ + صہ ما-۱ ایک قیمت ج (لا) = ۰
کی ہو تو چاہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰ کے ہو اسلئی مساوات
ع - ق صہ ما-۱ برابر صفر کے ہوگا اسواسطی سہ + صہ ما-۱ بہی ایک قیمت مساوات
ج (لا) = ۰ کے ہوگی
(۴۲) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور اوسمین سب امثال اصلی ہون اور ایک جزو ضربی اوسکا
لا-ا ہو اور اسمین ا = سہ + صہ ما-۱ کے ہو تو اوسکا دوسرا جزو ضربی
لا - ا' ہوگا جسمین ا' = سہ - صہ ما-۱ ہوگا اور حاصل ضرب ان دو اجزاء ضربی
لا - سہ - صہ ما-۱ اور لا - سہ + صہ ما-۱ کا (لا - سہ)' + صہ' یعنی
لا - ۲ سہ لا + سہ' + صہ' ہی یعنی حاصل ضرب ایک اصلی درجہ دوم کا جزو ضربی ہے
(۴۳) پس ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوا کہ ہر جملہ صحیحہ ناطقہ لا کو جسمین سب اصلی امثال ہون یون خیال کرسکتی ہین
کہ وہ حاصل ضرب اصلی اجزاء ضربی کا ہی خواہ وہ اول درجہ کی ہون یا درجہ دوم کی ج (لا)
اس صورت کا ہوگا کہ (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) ... (لا-ک) مج (لا) اسمین
ا اور ب اور س ... ک سب اصلی قیمتین ج (لا) = ۰ کی ہین اور مج (لا) وہ جملہ ہے جسمین
حاصل ضرب درجہ دوم کی اجزاء ضربی کا ہی اور اوسکی علامت نہین بدل سکتی
(۴۴) دفعہ ۴۱ کی طرح یہہ دعوی بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر ج (لا) جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور امثال بہی
اوسکی ناطقہ ہون اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمت ا + ما-۱ ب کے صورت کے ہو تو

جسمین ما ب ایک مقدار اہم ہی تو اوس مساوات کی ا - ما ب بھی ضرور ہوگی
پس ج (لا) کا ایک جز ضربی درجہ دوم کا (لا - ا)۲ - ب ہوگا
(۴۵) جملہ ج (لا) اور مساوات ج (لا) = ۰ کی امثال مین جو ارتباط باہمی ہو اوسکو دریافت کرو
فرض کرو کہ ج (لا) = لا ن + ع ۱ لا ن-۱ + ع ۲ لا ن-۲ + . . . + ع ن-۱ لا + ع ن
اور فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتین ا ۱ اور ا ۲ . . . ا ن ہین تو
ج (لا) = (لا - ا ۱) (لا - ا ۲) . . (لا - ا ن)
چونکہ دونو صورت مفصلہ بیانیہ ج (لا) کی مساوات مطابقہ ہین اسلئے امثال ع ۱ ع ۲ . . . ع ن
اور مقادیر ا ۱ ا ۲ . . . ا ن مین باہمی ارتباط ہی اب اس ارتباط کے توضیح ذیل مین کرتی ہین کہ
معمولی ضرب کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(لا - ا ۱) (لا - ا ۲) = لا۲ - (ا ۱ + ا ۲) لا + ا ۱ ا ۲

(لا - ا ۱) (لا - ا ۲) (لا - ا ۳) = لا۳ - (ا ۱ + ا ۲ + ا ۳) لا۲
+ (ا ۱ ا ۲ + ا ۲ ا ۳ + ا ۳ ا ۱) لا - ا ۱ ا ۲ ا ۳

(لا - ا ۱) (لا - ا ۲) (لا - ا ۳) (لا - ا ۴) = لا۴ - (ا ۱ + ا ۲ + ا ۳ + ا ۴) لا۳
+ (ا ۱ ا ۲ + ا ۱ ا ۳ + ا ۱ ا ۴ + ا ۲ ا ۳ + ا ۲ ا ۴ + ا ۳ ا ۴) لا۲
- (ا ۱ ا ۲ ا ۳ + ا ۱ ا ۲ ا ۴ + ا ۱ ا ۳ ا ۴ + ا ۲ ا ۳ ا ۴) لا + ا ۱ ا ۲ ا ۳ ا ۴

اب ان ماحصل مین ہم یہہ قوانین دیکھتی ہین کہ
اول بائین طرف مین تعداد ارقام بہ نسبت تعداد اجزاء ضربی کی جو باہم ضرب دئی گئی ہین بقدر ایک کے زیادہ ہے
دوم قوت نما لا کا اول رقم مین تعداد اجزاء ضربی کی برابر ہے اور اگے ہر رقم مین قوت نما
بقدر ایک کے اپنی ماقبل کی رقم کے قوت نما سی کم ہوتا جاتا ہے
سوم امثال اول رقم کا واحد ہی اور دوسرے رقم کا امثال مجموعہ اجزاء ضربی درجہ اول کے
دوسرے رقمون کا ہی اور تیسری رقم کا امثال اجزاء ضربی درجہ اول کی دوسری رقمون مین

سی دو دو رقموں کی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی اور چوتھی رقم کا اشتمال اجزاء ضربی درجہ اول کے دوسری رقموں میں سی تین تین رقموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہی وعلی ہذا القیاس اور اخیر رقم اجزاء ضربی درجہ اول کی دوسری کل رقموں کا حاصل ضرب ہے

اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تعداد اجزاء ضربی درجہ اول کی خواہ کچھہ ہی ہو سب صورتوں پر یہہ قوانین متصرف ہین فرض کرو کہ ن - اجزاء ضربی جب آپسمین ضرب دی جائین تو یہہ قوانین اونمین جاری ہوتے ہین یعنی یہہ فرض کرو کہ

$$(لا - ا_1)(لا - ا_2) \ldots (لا - ا_{ن-1}) = لا^{ن} + ق_1 لا^{ن-1} + ق_2 لا^{ن-2} + \ldots + ق_{ن-1} لا + ق_ن$$

اسمین $ق_1$ = مجموعہ ارقام - $ا_1$ و - $ا_2$ و - $ا_{ن-1}$

$ق_2$ = ان ارقام مین سی دو دو کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_3$ = ان ارقام مین سی تین تین کی حاصل ضربوں کے مجموعہ کے

$ق_ن$ = کل ان ارقام کے حاصل ضرب کے

اس مطابقہ کے طرفین کو لا - $ا_ن$ مین ضرب دو

$$(لا - ا_1)(لا - ا_2) \ldots (لا - ا_ن) = لا^{ن} + (ق_1 - ا_ن) لا^{ن-1} + (ق_2 - ق_1 ا_ن) لا^{ن-2} + (ق_3 - ق_2 ا_ن) لا^{ن-3} + \ldots - ق_{ن-1} ا_ن$$

اب $ق_1 - ا_ن$ = $- ا_1 - ا_2 - \ldots - ا_{ن-1} - ا_ن$

= مجموعہ کل ارقام - $ا_1$ و - $ا_2$ و - $ا_ن$ کے

$ق_2 - ق_1 ا_ن$ = $ق_2 + ا_ن (ا_1 + ا_2 + \ldots + ا_ن)$

= کل ارقام - $ا_1$ و - $ا_2$ و ... $ا_ن$ مین سے دو دو کے حاصل ضربون کے مجموعہ کے

$ق_3 - ق_2 ا_ن$ = $ق_3 - ا_ن (ا_1 ا_2 + ا_1 ا_3 + \ldots)$

= کل ارقام - $ا_1$ و - $ا_2$ و ... $ا_ن$ مین سی تین تین کے حاصل ضربون کے مجموعہ کے

$-ق_{ن-۱}$ ان = حاصل ضرب کل ارقام $-ا_۱$ و $-ا_۲$ ۔۔۔ $-ا_ن$ کے

پس اسی ثابت ہوا کہ اگر قوانین مذکورن - ۱ اجزا ضربی کی ضرب دینی میں پائی جاتی ہین تو وہ ن اجزاء ضربی کی ضرب دینی میں بھی پائی جاتی ہین مگر یہہ ثابت کرائی ہین کہ قوانین مذکور چار اجزاء ضربی کی ضرب دینی میں پائی جاتی ہین اسواسطی وہ پانچ اجزاء ضربی کی ضرب دینی بھی پائے جائینگے اور علی ہذا القیاس پس وہ بالعموم سب صورتون میں موجود ہونگے

اگر $ا_۱$ و $ا_۲$ ۔۔۔ $ا_ن$ قیمتین مساوات

$لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + ۔۔۔ + ع_{ن-۱} لا + ع_ن = ۰$ کے ہون

تو دائین طرف کا رکن مساوات برابر ہوگا حاصل ضرب اجزاء ضربی $(لا-ا_۱)$ اور $(لا-ا_۲)$ ۔۔۔ $(لا-ا_ن)$ کے اور اسی سے یہہ نتایج حاصل ہونگی اگر مساوات سادہ صورت مین ہو تو اوسمین دوسری رقم کا امثال تمام قیمتون کی مجموعہ کی برابر ہوتا ہی مگر علامت بدلی ہوئی ہوتی ہی اور تیسرے رقم کا امثال برابر ہوتا ہی دو دو قیمتون کی حاصل ضربون کی مجموعہ کی مگر قیمتون کی علامت بدلی ہوئی ہوتی ہین اور چوتھی رقم کا امثال برابر ہوتا ہی تین تین قیمتون کی حاصل ضربون کے مجموعہ کی مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی ۔۔۔ اخر رقم برابر ہوتی ہی تمام قیمتون کی حاصل ضرب کے مگر اونکی علامتین بدلی ہوئی

یا ہم ان قوانین کو اسطرح بیان کرتی ہین کہ امثال دوسری رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہی برابر تمام قیمتون کی مجموعہ کی اور امثال تیسری رقم کا برابر ہی دو دو قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی اور امثال چوتھی رقم کا جسکی علامت بدلی ہوئی ہو برابر ہوتا ہی تین تین قیمتون کے حاصل ضربون کی مجموعہ کی پس بالعموم اگر ع معمول کی موافق امثال $لا^{ن-ر}$ کا مساوات مین ہو تو

$(-۱)^ر ع_ر$ = ر قیمتون کے حاصل ضربون کے مجموعہ کے

(۴۶) شاید کسی کی دل مین یہہ خیال پیدا ہو کہ جو ارتباط اوپر بیان ہوئی ہین اوسی سے مساوات مفروضہ کی قیمتین ہم کو معلوم ہو جائین کیونکہ اونسی مساوا تین ایسی حاصل ہوتی ہین جنمین قیمتین ملتف ہوتی ہین اور تعداد ان مساواتون کی بھی اوتنی ہی ہوتی ہی جتنی کہ قیمتین ہین تو ان مساواتون مین سی سب قیمتون کو دور کرکے

ایک قیمت رہنی دین اور اوس ایک قیمت کو دریافت کرلین لیکن جب ہم اور قیمتون کو مساواتون سی دور کرتی ہین تو مساوات مفروضہ ہی خود ہم کو دوبارہ حاصل ہوجاتی ہے اسواسطے کچھہ فایدہ نہین ہوتا مثلاً مساوات

$$لا^۳ + ع_۱ لا^۲ + ع_۲ لا + ع_۳ = ۰$$ کے ہو

اور اوسکے قیمتین ا و ب و ج فرض کرو تو

$$-ا - ب - ج = ع_۱$$

$$اب + بج + جا = ع_۲$$

$$-ابج = ع_۳$$

اب ب اور ج کی دور کرنی کی ایک مساوات ایسی حاصل کرتے ہین کہ جسمین فقط ا ہی ہو تو اوسکی سب سے زیادہ آسان ترکیب یہہ ہے کہ ان تین مساواتون مین اول مساوات کو ا^۲ مین ضرب دو اور دوسری مساوات کو ا مین اور تیسرے مساوات کی ساتھہ حاصل کو جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$-ا^۳ - ا^۲ب - ا^۲ج + ا^۲ب + اب^۲ + ابج + ج ا^۲ - ابج = ع_۱ ا^۲ + ع_۲ ا + ع_۳$$

یعنی $$ا^۳ + ع_۱ ا^۲ + ع_۲ ا + ع_۳ = ۰$$

اب یہان مساوات جو حاصل ہوئی وہی ہی جو مساوات مفروضہ تہی فقط فرق اتنا ہی کہ لا کی جگہ ا ہی اور یہہ بات سمجھنی کچھہ مشکل نہین ہی کہ ارتباطات مذکورہ سی جب ہم نے ب اور ج کو دور کیا تو ایک مساوات تیسری درجہ ا کی حاصل ہوگئی ہم کو اسی مساوات کے حاصل ہونے کی توقع تہی کیونکہ حروف ا اور ب اور ج قیمتون کو تعبیر کرتی ہین اور اونمین باہم کچھہ تمیز نہین ہے اسلئے جو مساوات ا کی استخراج کرینگے اوسمین ا کی تین قیمتین ہونگین کیونکہ

ا مساوات کی تینون قیمتون مین سی ہر ایک قیمت ہوسکتا ہی پس اسی ہم کو خوب یقین ہوگیا کہ امثال مساوات اور اوسکی معلوم قیمتون مین جو ارتباطات باہمی ہونگی اون پر جو اعمال جبریہ اس نظر سی کئی جائینگے کہ اور قیمتین سوا ایک کے دور ہوجائینگی اونسی مساوات مفروضہ پیدا ہوگی

(۴۷) دفعہ ۴۵ میں جو ارتباطات بیان ہوئی کو اونسی قیمتیں مساوات کی نہیں دریافت ہوسکتیں مگر اور بڑی بڑی نتایج اونسی مساوات کے باب میں مستنبط ہوتے ہیں

مثلاً ا۱ و ا۲ ۔ ۔ ۔ ان قیمتیں مساوات

لان + ع۱ لان-۱ + ع۲ لان-۲ ۔ ۔ ۔ + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰ کی ہوں

تو - ع۱ = ا۱ + ا۲ + ا۳ + ۔ ۔ ۔ + ان

ع۲ = ا۱ ا۲ + ا۱ ا۳ + ۔ ۔ + ا۲ ا۳ + ۔ ۔ ۔ ۔

ع۱۲ - ۲ ع۲ = ا۱۲ + ا۲۲ + ا۳۲ + ۔ ۔ ۔ + ان۲

یعنی ع۱۲ - ۲ ع۲ برابر ہی مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی مجذور دوں کے مجموعہ کی پس اگر مساوات ع۱۲ - ۲ ع۲ منفی ہو تو تمام قیمتیں مساوات کی اصلی نہیں ہونگیں

(۴۸) موافق دفعہ سابق کی اور ارتباطات بہی جنمیں قیمتیں ملتف ہوں مستنبط کرسکتی ہیں

مثلاً (-۱)ن-۱ ع ن-۱ = ن - ا قیمتوں کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے

(-۱)ن ع ن = تمام قیمتوں کے حاصل ضرب

اسیواسطے تقسیم کرنے سے

$$\frac{-ع_{ن-1}}{ع_ن} = \frac{1}{ا_1} + \frac{1}{ا_2} + \cdots + \frac{1}{ا_ن}$$

= مجموعہ قیمتوں متکافیہ یا مقلوبہ کے

اور نیز $\frac{ع_{ن-1}}{ع_ن} = (ا_1 + ا_2 + \cdots + ا_ن)\left(\frac{1}{ا_1} + \frac{1}{ا_2} + \cdots \frac{1}{ا_ن}\right)$

$= ن + \frac{ا_2}{ا_1} + \frac{ا_3}{ا_1} + \cdots + \frac{ا_ن}{ا_1} + \frac{ا_1}{ا_2} + \frac{ا_3}{ا_2} + \cdots$

اسیواسطے $\frac{ا_1}{ا_2} + \frac{ا_1}{ا_3} + \cdots + \frac{ا_2}{ا_1} + \frac{ا_2}{ا_3} + \cdots = \frac{ع_{ن-1}}{ع_ن} - ن$

باب چہارم تبدل ہیئت معادلات

(۴۹) عموماً مضمون اور مطلب اس باب کا یہہ ہی کہ مساوات معلوم سی ایک اور ایسی مساوات مستنبط کریں کہ جسکی قیمتیں مساوات معلوم کی قیمتوں سی ایک ارتباط خاص رکہتی ہوں

جسکا آگے دیکھینگے تو یہہ معلوم ہوگا کہ بہت سی تبدیل ہیئت مساوات معلوم کی لغیر اوسکی قیمتوں کے معلوم ہونے کی ہوسکتی ہین اور مثالون سے معلوم ہوگا کہ یہہ تبدیل ہیئت مساواتون کی حل کرنے مین کام آتی ہین

(۵۰) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی بنا دو کہ اوسکی قیمتون کے علامت بدل جاے

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ہی اور ء = - لا کے ایسا مقرر کرو کہ

جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ء کی وہی قیمت تعداداً ہو مگر علامت اوسکی متضاد ہو

پس لا = - ء اور مساوات مطلوب ج (- ء) = ۰ کے ہے

اگر ج (لا) = ع۰ لا^ن + ع۱ لا^{ن-۱} + ع۲ لا^{ن-۲} + . . . + ع ن-۱ لا + ع ن

مساوات ج (- ء) = ۰

ع۰ (- ء)^ن + ع۱ (- ء)^{ن-۱} + ع۲ (- ء)^{ن-۲} + . . . - ع ن-۱ ء + ع ن = ۰

یعنی ع۰ ء^ن - ع۱ ء^{ن-۱} + ع۲ ء^{ن-۲} + . . . ∓ ع ن-۱ ء ∓ ع ن = ۰

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلومہ کے ہیئت کو اگر اسطرح بدلین کہ دوسری رقم سی شروع کرکے ہر یک رقم کی علامت کو بدل دین تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی

(۵۱) دفعہ گذشتہ کی اخر مین جو قاعدہ بیان ہوا ہی اوسمین مساوات مفروضہ کی اندر تمام قیمین وہ فرض کی گئین ہین جو اوس درجہ کی مساوات مین واقع ہوا کرتی ہین یعنی کسی مثال کو صفر نہین فرض کیا اب اگر کوئی ایسی مثال ہو کہ جسمین یہہ بات نہ پائی جائی مثلاً یہہ مساوات ہو کہ

لا^۶ + ۳ لا^۵ - ۴ لا^۳ - ۴ لا + ۷ = ۰

اسکو ایسی مساوات مین تبدیل کرنا ہو کہ جسکی قیمتین باعتبار کمیت کی تو وہی ہون جو اس مساوات کی قیمتین ہین مگر علامتین اونکے متضاد ہون

لا = - ء کی رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ء^۶ - ۳ ء^۵ + ۴ ء^۳ + ۴ ء + ۷ = ۰

اگر ہم چاہین تو اصل مساوات کو اسطرح لکھین کہ

لا^۶ + ۳ لا^۵ + ۰ × لا^۴ - ۴ لا^۳ + ۰ × لا^۲ - ۴ لا + ۷ = ۰

تو بموجب قاعدہ دفعہ ۵۰ کے مساوات کے ہیئت بدل کر یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ

$$ز^6 - ۳ز^5 + ۰ \times ز^4 + ۴ز^3 + ۰ \times ز^2 + ۴ز + ۷ = ۰$$

یعنی $$ز^6 - ۳ز^5 + ۴ز^3 + ۴ز + ۷ = ۰$$

اور یہی مساوات سابق میں حاصل ہوئی تہی

مساوات میں جب وہ سب قیمتیں واقع ہون جو اوس درجہ کی مساوات میں واقع ہوتی ہین یعنی کوئی مثال صفر نہ ہو تو ہم اوسکو مساوات کامل کہتی ہین اور کبھی کبھی اسی بہی کام بہت نکلتا ہی کہ مساوات کو کامل موافق حکمت مذکورہ کی بنالین یعنی جو رقمین نہون اونکو لکھہ لین اور مثال اونمین سے ہر یک کی صفر بنائین

(۵۲) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی بناؤ کہ جسکی قیمتین مساوات مفروض کی قیمتون سے کچھہ خاص گنی ہو یعنی خاص اضعاف ہون یا اجزا

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہی اور مطلوب یہہ ہی کہ اس مساوات کی ہیئت بدل کر دوسرے مساوات ایسی بنائین کہ جسکی قیمتین ک گنی مساوات مفروضہ کی قیمتون سی ہو

ز = ک لا کے مقرر کرو جب لا کی کوئی خاص قیمت ہو تو ز کی قیمت ک گنی ہوگی

پس لا = $\frac{ز}{ک}$ اور مساوات مطلوب ج ($\frac{ز}{ک}$) ہے

(۵۳) مثلاً اس مساوات

$$لا^3 - \frac{۳}{۲}لا^2 + \frac{۵}{۴}لا - \frac{۲}{۹} = ۰$$ کی

ہیئت بدل کر دوسرے مساوات بناؤ جسکی قیمتین ک گنی ہون لا = $\frac{ز}{ک}$ کے رکھو

اور پھر ک۳ مین سب کو ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ز^3 - \frac{۳ک}{۲}ز^2 + \frac{۵ک^2}{۴}ز - \frac{۲ک^3}{۹} = ۰$$

اس مثال سی ہم بتلائینگے کہ اس تبدل ہیئت کو کن کام مین لاسکتی ہین مساوات مفروضہ مین سب امثال صحیح نہین ہین تو ہم ک کی مناسب قیمت فرض کرکے مساوات کی ایسی ہیئت بدل کر دوسری مساوات پیدا کرسکتی ہین کہ جسمین سب امثال صحیح اعداد ہون

مثلاً ک = ۲ کے فرض کرو تو مساوات بدل کر

ز۳ - ۴ ز۲ + ۴۵ ز - ۴۸ = ۰ ہو جائینگے

عموماً یہہ فرض کرو کہ مساوات

لا ن + ع۱ لا ن-۱ + ع۲ لا ن-۲ + ... + ع ن-۱ لا + ع ن = ۰ ہو

اب اگر ہم لا = ک + ز کی فرض کریں اور سب کو کا ن مین ضرب دین تو جو مساوات اسطرح پیدا ہو گی اوسمین تمام امثال کی صحیح اعداد ہونی کی واسطی فقط اس بات کا تحقیق کرنا ضرور ہی کہ ہر یک رقم ع ر ک ن-ر ز ر کی واسطی ہر یک جز ضربی آئے ہائین جو ع ر کی نسبت تمامین واقع ہو کم از کم اوسکی اعلی قوت کے برابر واقع ہو

(۵۴) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرو کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروض کے قیمتون سی بقدر ایک مقدار مستقل کی جداگانہ کم ہون

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو اور یہہ مطلوب ہی کہ اس مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرین کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون سی بقدر مقدار مستقل ک کے کم ہون ز = لا - ک کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت لین تو قیمت ز کی اوسی بقدر ک کی کم ہو لا = ک + ز اور مساوات مطلوب ج (ک + ز) = ۰ ہے

بموجب دفعہ ۱۰ کے مساوات (ک + ز) = ۰ کو پھیلاؤ تو

ج (ک) + ز ج′ (ک) + $\frac{ز^۲}{۲×۱}$ ج″ (ک) + $\frac{ز^۳}{۳}$ ج‴ (ک) + ... + $\frac{ز^ن ج^ن (ک)}{ن}$ = ۰

پس اگر ج (لا) = ع۰ لا ن + ع۱ لا ن-۱ + ع۲ لا ن-۲ + ... + ع ن-۱ لا + ع ن

مساوات ج (ک + ز) = ۰ کو موافق قواعد متنازلہ ز کی بموجب دفعہ ۱۲ کی مرتب کرین تو

ع۰ ز ن + (ع۱ + ن ع۰ ک) ز ن-۱ + [ع۲ + (ن - ۱) ع۱ ک + $\frac{ن(ن-۱)}{۲×۱}$ ع۰ ک۲] ز ن-۲

+ [ع ر + (ن - ر + ۱) ع ر-۱ ک + ... + $\frac{ن(ن-۱)...(ن-ر+۱)}{ر}$ ع۰ ک ر] ز ن-ر

+ ... + ج (ک) = ۰

(۵۵) اگر ایک مساوات کی ہیئت بدل کر دوسری مساوات ایسی پیدا کرنی ہو کہ جسکی قیمتین مساوات

مفروضہ کی قیمتون سی بقدر ایک مقدار مستقل ھ کی زیادہ ہون تو ہم کو ترکیب سابق پر عمل کرنا چاہیے
فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ سی تعبیر ہو اور ء = لا + ھ کے فرض کرو تو
لا = ء - ھ اور مساوات مطلوب ج (ء - ھ) = ۰ اب دفعہ گذشتہ کی نتیجہ مین - ھ
بجای ک کی رکھو تو مساوات مطلوب حاصل ہوجائیگی اگر غور سی خیال کرو تو یہہ بات دفعہ گذشتہ
کی بیان مین ضمناً ثابت ہوگی اسلئے کہ اس دفعہ مین یہہ کچھہ ضرور نہین کہ ک قطعی مثبت مقدار رہے ہو
(۵۶) دفعہ ۴۵ جس تبدل ہیئت کو ہم نے حاصل کیا ہی اوسکا بڑا فایدہ یہہ ہی کہ ایک مساوات
مفروضہ مین سی جس رقم کو ہم تعین کرین معدوم ہوجاے
مثلاً اگر بدلی ہوئی مساوات مین دوسرے رقم کو معدوم کرنا چاہین تو ہم ک کو ایسا مقرر کرتی ہین
کہ ع۱ + ن ع۰ ک = ۰
یعنی ک = - ع۱ / ن ع۰ ہو اور اگر ہم یہہ چاہین کہ بدلی ہوئی مساوات ء مین تیسری
رقم نہ رہی تو ہم ک کو اس دوسرے درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ
ع۲ + (ن - ۱) ع۱ ک + ن (ن - ۱) / ۱ × ۲ ع۰ ک۲ = ۰
اب بالعموم یہہ ہی کہ بدلی ہوئی مساوات ء مین (ر+۱) وین رقم نہ رہی
تو ہم ک کو اس ر درجہ کی مساوات سے دریافت کرین کہ
ع۰ ک^ر + ن ع۱ ک^(ر-۱) + ن (ن-۱) / ر (ر-۱) ع۲ ک^(ر-۲) + ... + ن (ن-ر) / ر ع^ر = ۰
اب ہم اگلی بیان کرینگے کہ مساوانون کی حل کرنی مین بڑی آسانی کسی خاص رقم کی اڑا دینے سی ہوجاتی ہی
(۵۷) مثلاً مساوات لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱۴ لا + ۵ = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ
اوسمین دوسری رقم نہ ہو یہان ع۰ = ۱ اور ع۱ = - ۶ پس ک = ۲ اور مساوات مطلوب
(ء + ۲)^۳ - ۶ (ء + ۲)^۲ + ۱۴ (ء + ۲) + ۵ = ۰
یعنی ء^۳ - ۸ ء - ۳ = ۰
اب پھر اس مساوات لا^۳ - ۲ لا^۲ - ۴ لا + ۹ = ۰ کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو

کہ اوسمیں تیسرے رقم نہ ہو، + ک کو بجای لاکے رکھو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی

(ء + ک)³ - ۲ (ء + ک)² - ۴ (ء + ک) + ۹ = ۰

یعنی ء³ + ء² (۳ک - ۲) + ء (۳ک² - ۴ک - ۴) + ک³ - ۲ک² - ۴ک + ۹ = ۰

یعنی اگر تیسرے رقم اڑانی منظور ہو تو مساوات ۳ک² - ۴ک - ۴ = ۰ سی ک کو دریافت کرو

تو ک = ۲ ما - ۲/۳ کی حاصل ہوگا ک = ۲ کی قیمت کی موافق بدلی ہوئی مساوات یہہ ہوگی کہ

ء³ + ۴ء² + ۱ = ۰

اور موافق قیمت ک = - ۲/۳ کے ہیئت بدلی ہوئی مساوات

ء³ - ۴ء² + ۲۸۳/۲۷ = ۰

(۵۸) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں تمکانی مساوات مفروضہ کے قیمتوں کے جداگانہ ہون

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات مفروضہ ہو، = لا کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت معین ہو تو قیمت ء کی تمکانی اوس قیمت کی ہو پس لا = ۱/ء اور مساوات مطلوب ج (۱/ء) = ۰ بنی

پس اگر ج (لا) = ع۰ لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) + ... + ع(ن-۱) لا + ع ن

تو مساوات ج (۱/ء) = ۰ یہہ ہوگی کہ

ع۰/ء^ن + ع۱/ء^(ن-۱) + ع۲/ء^(ن-۲) + . . . + ع(ن-۱)/ء + ع ن = ۰

یعنی ع ن ء^ن + ع(ن-۱) ء^(ن-۱) + ع(ن-۲) ء^(ن-۲) + ... + ع۱ ء + ع۰ = ۰

(۵۹) ایک مساوات کی ہیئت بدل کر ایک اور مساوات ایسی پیدا کرو کہ جسکی قیمتیں مجذور مساوات مفروضہ کی ہر یک قیمتوں کے جداگانہ ہون

فرض کرو کہ ج (لا) = مساوات کو تعبیر کری اور ء = لا کی ایسا مقرر کرو کہ جب لا کی کوئی خاص قیمت مقرر کیجائی تو ء کی قیمت اوسکا مجذور ہو پس لا = √ء اور مساوات مطلوب ج (√ء) = ۰ ہے

پس اگر ج (لا) = ع۰ لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) + . . . + ع(ن-۱) لا + ع ن

تو مساوات ج (ل ز) = ۰ یہہ ہوگی کہ

ع۰ ز^ن/۲ + ع۱ ز^ن-۱/۲ + ع۲ ز^ن-۲/۲ + ... + ع ن-۱ ز^۱/۲ + ع ن = ۰

انتقال اور مجذور سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا

(ع۰ ز^ن/۲ + ع۲ ز^ن-۲/۲ + ع۴ ز^ن-۴/۲ + ...)^۲ = ع۱ ز^ن-۱/۲ + ع۳ ز^ن-۳/۲ + ...)^۲

جب طرفین مساوات کو تشہ بجا لکھینگے تو وہ صوب منطق پیدا کرینگے اور جب سب رقمون کو ایک طرف لے آئینگے تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ع۰^۲ ز^ن + (۲ع۰ ع۲ - ع۱^۲) ز^ن-۱ + (۲ع۰ ع۴ + ع۲^۲ - ۲ع۱ ع۳) ز^ن-۲ + ... = ۰

(۶۰) مساوات کی تبدل ہیئت کی اور بہت سی صورتین ہوسکتی ہین مگر ہم نے اوسیقدر لکھی ہین جسقدر کہ اس مطلب کے سمجھنے کی لئی کافی تہین دفعہ ۴۵ مین جن ارتباط کا بیان ہوا ہی اونکی توضیح کے واسطی دو مثالین لکھکر اس بات کو ختم کرتے ہین

(۱) مساوات ل^۳ + ق ل + ر = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ جسکی قیمتین مخدور مساوات مفروضہ کے قیمتون کے تفاوت کا ہو

فرض کرو کہ ا اور ب اور ح قیمتین مساوات کی ہون تو بموجب دفعہ ۴۵ کے

ا + ب + ح = ۰ ا ب + ب ح + ح ا = ق ا ب ج = - ر

اسیواسطے ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ = - ۲ ق

اور ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی قیمتین (ا - ب)^۲ اور (ب - ح)^۲ اور (ا - ح)^۲ ہین

اب (ا - ب)^۲ = ا^۲ - ۲ ا ب + ب^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ۲ ا ب - ح^۲ =

ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ - ۲ ا ب ج / ح - ح^۲

= - ۲ ق + ۲ ر / ح - ح^۲

پس اگر ز = - ۲ ق + ۲ ر / ل - ل^۲ اوس حالت مین کہ ل کی قیمت ح ہو تو قیمت ز کی (ا - ب)^۲ ہوگی اور علی ہذا القیاس جب ل کی قیمتین ا اور ب ہون

تو قیمتین ز کی (ب - ح)² اور (ح - ا)² ہوگی پس ہیئت بدلی ہوئی مساوات
مساوات مفروضہ اور مساوات ز = - ۲ق + ۲ر/لا - لا² سے لا کی دور کرنی سی حاصل ہوگی
اور یہہ لاد ور اسطرح ہوگا کہ

لا³ + ق لا + ر = ۰

اور لا³ + (۲ق + ۱۵) لا - ۲ر = ۰

اسیواسطے (ق + ۵) لا - ۳ر = ۰

پس لا = ۳ر/ق + ۵ مساوات مفروضہ میں اس قیمت کو مندرج کرو تو آخر کار یہہ مساوات حاصل ہوگی

۵³ + ۶ ق ۵² + ۹ ق² ۵ + ۲۷ ر² + ۴ ق³ = ۰

اسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر ۲۷ ر² + ۴ ق³ مثبت ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ کے ہیئت بدلی ہوئی
مساوات کی قیمت ایک اصلی منفی ہوگی اور اسیواسطے مساوت مفروضہ کی دو خیالی قیمتیں
ہونگین کیونکہ یہی ایک زوج قیمتون کا ہوگا تو
ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک منفی قیمت پیدا کرے
اگر ۲۷ ر² + ۴ ق³ صفر ہو تو ہیئت بدلی ہوئی مساوات کی ایک قیمت صفر ہوگی اور اسیواسطے
مساوات مفروضہ کی دو برابر قیمتین ہونگین

(۲) مساوات لا³ + ع لا² + ق لا + ر = ۰ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات پیدا کرو کہ
جسکی قیمتین مخذور مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کا ہو

لا = لا - ع/۳ رکھو تو مساوات مفروضہ ہوجائیگی کہ

(لا - ع/۳)³ + ع (لا - ع/۳)² + ق (لا - ع/۳) + ر = ۰

یعنی لا³ + ق لا + ر = ۰

اسمین ق = ق - ع²/۳ ر = ۲ع³/۲۷ - ع ق/۳ + ر

اخر مساوات کی ہر یک قیمت مساوات مفروضہ کی ہر یک قیمت سے موافق نظیر کی بقدر ع/۳ کی زیادہ ہے

اسواسطے اخر مساوات کی قیمتوں کے مجذوروں کا تفاوت وہی ہوگا جو مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی مجذوروں کا تفاوت ہی اور موافق مثال گذشتہ کی مساوات مطلوب یہہ ہی کہ

$$ز^3 + ۶ق ز^2 + ۹ق^2 ز + ۲۷ر^2 + ۴ق^3 = ۰$$

یعنی $ز^3 + ۲(۳ق - ع^2) ز^2 + (۳ق - ع^2)^2 ز + (۲ع^3 - ۹ع ق + ۲۷ر)^2 + ۴(۳ن - ع^2)^3 = ۰$

باب پنجم ڈس کارئیس کا قاعدہ علامات کا

(۶۱) دفعات ۲۱ - ۲۴ مین ہم نی مثالین ایسی بیان کین ہین کہ جنسے ج (لا) کے امثال کی تعلقات باہمی اور مساوات ج (لا) = ۰ کی قیمتون کی صفت ذاتی معلوم ہوتی ہی اب ہم اول چند حدود بیان کرینگی اور بعد ازان مسائل عامہ کی تحقیقات لکھینگے

(۶۲) اگر ایک سلسلہ ارقام کی ہو اور ہر یک رقم کی اول علامات + اور - سے کوئی ایک ہو تو مقادیر کے بالترتیب خیال کرنے مین جب ایک رقم کی وہی علامت ہو جو اوسکی رقم ماقبل کی علامت ہی تو اوسکو تواتر کہینگے اور جب ایک رقم کی علامت اپنی رقم ماقبل کی علامت سی مخالف ہو تو اوسکو تغیر کہینگے مثلاً

جملہ لا^۵ - ۳لا^۴ + ۷لا^۳ + ۳لا^۲ + ۲لا - لا^۲ + ۱ مین چار تو اتر اور چار تغیر ہین

اول تواتر + ۴لا^۴ پر دوسرا تواتر + ۳لا^۳ پر اور تیسرا تواتر + ۲لا^۲ پر ہے

اور چوتہا - لا پر اور اول تغیر - ۳لا^۴ اور دوسرا + ۷لا^۳ پر اور تیسرا - لا^۲ پر اور چوتہا + ۱ پر واقع ہوتا ہے

یہہ ظاہر ہی کہ جب مساوات کامل ہو تو اوسکی مجموعہ تواتر اور تغیر کی تعدادون کا اوس عدد کی برابر ہوگا جو مساوات کا درجہ بتلا رہا ہی دفعہ ۵۱ دیکھو

اور اگر ہم کسی مساوات کامل مین - لا بجای لا کی رکھہ دین تو نئی مساوات مین اصلی مساوات کی تغیر تواتر بجا ئیگے اور تواتر تغیر ہو جائیگے مساوات ج (لا) = ۰ مین جو کامل نہ ہو ج (لا) اور ج (- لا) کی تغیرات کی تعدادون کا مجموعہ ایسا عدد نہین ہوگا کہ مساوات کی درجہ سی گھٹ جاے وجہ اسکی یہہ ہی کہ جب ج (لا) مین بعض ارقام معدوم ہون تو یہہ ممکن ہے کہ ج (لا) اور ج (- لا) کے تغیرات کی تعداد کم ہو جاے مگر اوسکا زیادہ ہونا ناممکن ہے

اب ہم ایک مسئلہ کا بیان کرتی ہین اور اوسکو ثابت بھی کرتی ہین اوسکو ڈس کارٹس کا قاعدہ علامات کہتے ہین

(۴۳) کسی مساوات مین خواہ وہ کامل ہو یا ناکامل تعداد مثبت قیمتون کی مثال کی تغیرات علامات کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی اور کسی مساوات کامل مین تعداد منفی قیمتون کی مثال کی تواتر علامات کی تعداد سی زیادہ نہین ہوسکتی

اول ہم ثابت کرینگے کہ کسی کثیر الارقام جملہ کو ہم جز ضربی لا - ا مین ضرب دین تو کم از کم حاصل ضرب مین ایک تغیر علامت بہ نسبت اصلی جملہ کے زیادہ ہوجائیگا

مثلاً فرض کرو کہ ایک اصلی جملہ کثیر الارقام کی علامات + + - - - + - - + - - + ہین اور اس کثیر الارقام کو جملہ ثنائی ہین ضرب دیتا ہون اور اوسکی علامتین + - ہین اب اگر ان علامتون کو لکھکر عمل ضرب کا کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

+ − − + − + − − − + +
− +
+ − − + − + − − − + +
+ + − + − + + + − − −
− + ∓ − + − + ∓ ∓ − ∓ +

دوہری علامت وہان کے لکھنے سے یہان کہ حاصل ضرب مین علامت کی اندر اشتباہ تہا

اب یہان یہہ قوانین نظر آتے ہین

(۱) اصلی کثیر الارقام سلسلہ تواتر کی مقابل مین جدید کثیر الارقام مین سلک علامت مشتبہ کی واقع ہے اور دونون مین تعداد علامات کی یکسان ہے

(۲) جدید کثیر الارقام مین علامت مشتبہ کی ماقبل اور مابعد کی علامات مین تضاد ہے

(۳) کثیر الارقام جدید مین اخر مین ایک تغیر زیادہ ہوگیا ہے

اب کثیر الارقام جدید مین ایک صورت ایسی ہوکہ وہ سب سے زیادہ مخالف معلوم ہوتی ہو اور تمام علامات مشتبہ کی جگہ تواترات کو رکہو تو بموجب قانون دوم کی تواتر کی تعداد مین کچہہ فرق ہی نہین پڑیگا علامات مشتبہ کی ہم اوپر کی علامت لین تو اصلی کثیر الارقام کی علامتین کثیر الارقام جدید مین مکرر

اینگی مگر جب تیسری قانون کی ایک تغیر علامات کا کثیر الارقام جدید کا اخر مین زیادہ داخل ہو جائیگا
پس جب ایسی صورت مخالف مین ایک تغیر علامت کا کثیر الارقام جدید مین بہ نسبت اصلی کثیر الارقام کے
زیادہ ہو گیا تو اور صورتون مین کیون نہ ہوگا

اب اگر ہم یہہ فرض کرین کہ ایک مساوات کی منفی اور خیالی قیمتون کے موافق اجزاء ضربی کی حاصل ضرب کو
ایک مثبت قیمت کی مطابق جز ضربی مین ضرب دین تو کم از کم ایک تغیر علامت کا اوسمین داخل ہو جائیگا
اسیواسطے کسی مساوات مین تغیرات علامت کی تعداد سی زیادہ مثبت قیمتون کی تعداد نہین ہو سکتی
اب ڈس کارٹیس کے قاعدہ علامات کا دوسرا جزو ثابت کرتی ہین فرض کرو کہ مساوات کامل ہے
تو بجای لاکی - رکھنی سی مثبت مساوات کی ایسی بدل جائیگی کہ اصل تو اتر علامات تغیر علامات اوسمین
بنجائینگی اور اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتین بہ نسبت تغیرات کی زیادہ نہین ہو سکتین
اور اسکی یہہ معنی ہین کہ اصلی مساوات کی منفی قیمتون کی تعداد اوسکی تواتر علامت کی تعداد سی زیادہ نہین ہو سکتی

(۶۴) خواہ مساوات ج (لا) = ۰ کامل ہو یا نہ ہو اوسکی قیمتین بلحاظ کمیت کے برابر مساوات
ج (- لا) = ۰ کے قیمتون کی ہوتی ہین مگر علامت مین مخالف یعنی منفی قیمتین
ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین ج (- لا) = ۰ کی ہوتی ہین خواہ مساوات کامل ہو یا نہ ہو
ج (- لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی تعداد ج (- لا) کے تغیرات علامت کی تعداد
سی زیادہ نہین ہو سکتی پس کل قاعدہ علامات کا اصلح مختصر بیان ہو سکتا ہے کہ
ایک مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین تعداد مین ج (لا) کے تغیرات علامت
کی تعداد سی زیادہ نہین ہو سکتی اور اوسکی منفی قیمتون کی تعداد ج (- لا) کی تغیرات علامت
کی تعداد سی زیادہ نہین ہو سکتی

(۶۵) مثلاً مساوات لا⁴ + ۳ لا² - ۵ لا - ۷ = ۰ ہو یہان ایک تغیر علامت ہے اسواسطے ایک مثبت قیمت
سی زیادہ مثبت قیمتین نہین ہو سکتین اور لا کی جگہ - لا لکھو تو یہہ مساوات
لا⁴ + ۳ لا² - ۵ لا - ۷ = ۰ کی حاصل ہوئی اسمین ایک تغیر علامت کا ہی اسلئے اوسکی ایک

ایک مثبت قیمت سی زیادہ کوئی اور مثبت قیمت نہین ہوسکتی اسواسطے اصلی مساوات کی کوئی منفی قیمت ایک سی زیادہ نہین ہوسکتی پس اصلی مساوات کی دو حقیقی قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہوسکتین

اس مثال مین بموجب دفعہ ۲۱ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ایک مثبت قیمت ہی اور ایک منفی قیمت ہے اور یہی ہم نی ابہی تحقیق کر کی لکہا ہی کہ ایک سی زیادہ ہر یک قیمت نہین ہوسکتی

اب پہر مساوات لا^{3} + ق لا + ر = ۰ پر خیال کرو اور اوسمین ق اور ر دونو مثبت ہین

اب یہان کوئی تغیر علامت نہین ہی اسواسطی اوسکی کوئی مثبت قیمت نہین ہی اور یہہ بات دفعہ ۲۴ کی موافق بہی ظاہر ہی اور اگر ہم لا کی جگہہ - لا لکہین تو مساوات مین ایک تغیر علامت کا ہوگا تو اصلی مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہوسکتی اسلئی اصلی مساوات کی دو خیالی قیمتین ہین

اب پہر مساوات لا^{3} - ق لا + ر = ۰ پر خیال کرو اور اسمین ق اور ر دونو مثبت ہین

اب یہان دو تغیر علامت کی ہین اسلئی اوسکی دو مثبت قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہوسکتین اور اگر لا کی جگہ - لا لکہین تو مساوات ایسی حاصل ہوگی کہ اوسمین ایک تغیر علامت ہوگا پس اصلی مساوات کی ایک منفی قیمت سی زیادہ کوئی منفی قیمت نہین ہوسکتی

اس مثال مین بموجب دفعہ ۲۰ کی ہم اس بات کو جانتی ہین کہ ایک منفی قیمت اوسکی ہے اور یہہ اب ہم نی تحقیق کر کی لکہا ہی کہ ایک سی زیادہ منفی قیمت نہین ہوسکتی اور باقی دو قیمتین تحقیقی مثبت مقادیر ہین یا خیالی مقادیر ہین اسکو ہم ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات سی نہین دریافت کرسکتے لیکن بموجب دفعہ ۶۰ کی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ مساوات جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کے قیمتون کی مجذورون کی تفاوت کی برابر ہون یہہ ہی کہ ع^{3} - ۶ ق ع + ۹ ق^{2} ر + ۲۷ ر^{2} - ۴ ق^{3} = ۰ اور ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات اور دفعہ ۲۴ کی موافق اگر ۲۷ ر^{2} - ۴ ق^{3} منفی ہے تو اخر مساوات کی کوئی قیمت منفی نہین ہوگی اور اسواسطے اصلی مساوات کی کوئی قیمت خیالی نہین ہوگی اور اگر ۲۷ ر^{2} - ۴ ق^{3} مثبت ہی تو اخر مساوات کی بموجب دفعہ ۲۰ کے کوئی منفی قیمت نہین ہوتی کی

اسواسطے اصلی مساوات کی دو خیالی قیمتین ہونگین

(۶۶) طالب علم کو اس بات پر غور کرنی چاہئی کہ دفعہ ۲۴ مین جو نتایج لکھی ہین وہ بالکل دس کارٹس کے قاعدہ علامات کی مطابق ہین اور اوسے سب کے سب مستنبط ہوسکتی ہین اور دفعہ ۲۲ مین جو دعوی ثابت کیا ہے وہ بھی قاعدہ ڈس کارئیس مین داخل ہی اور ہم کو اس قاعدہ سی یہہ بات بھی معلوم ہوتی ہے کہ دفعہ ۲۲ مین جس مساوات پر بحث ہوئی ہی اوسکی ایک مثبت قیمت سی زیادہ مثبت قیمتین ہوسکتی ہین خواہ برابر ہون خواہ نا برابر

(۶۷) ڈس کارٹس کے قاعدہ علامات مین یہہ ثابت ہوا ہی کہ کثیر الارقام کو ایک جز ضربی مین جو موافق ایک تحقیقی مثبت قیمت کی ہو ضرب دینی سی کم از کم ایک تغیر علامت داخل ہوسکتا ہے اب یہہ بیان کیا جاتا ہی کہ تغیرات علامات کی جو داخل کی جاتی ہین تعداد مین طاق ہوتی ہین اسواسطے کہ اول فرض کرو کہ اصلی کثیر الارقام مین اخر علامت + ہی تو کل تعداد تغیرات علامت کی اصلی کثیر الارقام مین جفت یا صفر ہونی چاہئی اور کثیر الارقام جدید مین اخر علامت - ہی تو تعداد تغیرات علامت کی طاق ہونی چاہئی اسی معلوم ہوتا ہی کہ تغیرات علامت جو داخل کی گئی ہین وہ طاق ہین جفت کا طاق جب ہے بنتا ہی کہ طاق زیادہ ہو

دوم فرض کرو کہ اخر علامت اصلی کثیر الارقام مین - ہی تو کثیر الارقام جدید مین اخر علامت + ہوگی تو اصلی کثیر الارقام مین تعداد تغیرات علامت کی طاق ہوگی اور کثیر الارقام جدید مین تعداد تغیرات علامت کی جفت ہوگی اسواسطے تغیرات جو داخل کی گئی ہین اونکی تعداد طاق ہوگی

(۶۸) اگر سب قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی تحقیقی ہون تو تعداد مثبت قیمتون کی برابر ج (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کی ہی اور تعداد منفی قیمتون کی برابر ج (- لا) کے تغیرات علامت کی تعداد کے ہے

فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی اور م تعداد مثبت قیمتون کی ہی اور م تعداد منفی قیمتون کی اور مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی

اور مؤ تعداد تغیرات علامت ج (-لا) کی چونکہ تمام قیمتین مساوات کی تحقیقی ہین
اسلئے م + مَ = ن اور م زیادہ موسی اور مَ زیادہ مؤسی بموجب دفعہ ۴۳ کے نہین ہوسکتا
اسیواسطے مو + مؤ = ن اسواسطے کہ مجموعہ مو اور مؤ کا زیادہ ن سی نہین ہوسکتا
پس م + مَ = مو + مؤ اور + م نہ زیادہ موسی ہوسکتا ہی اور نہ کم موسی ہوسکتا ہے
اسلئے کہ اگر کم ہوتو م بڑا مؤسی ہوتا ہی اور یہہ ناممکن پس م = مو اور مَ = مؤ

(۶) فرض کرو کہ مو تعداد تغیرات علامت ج (لا) کی ہو اور مؤ تعداد تغیرات علامت ج (-لا) کی
ہون تو مساوات ج (لا) = ۰ کی موجبت قیمتون سی زیادہ قیمتین نہین ہوسکتی اور مؤ سی زیادہ
منفی قیمتین نہین ہوسکتی اور اسواسطے مو + مؤ سی تحقیقی قیمتین زیادہ نہین ہوسکتین اسی معلوم ہوا کہ
اگر ن زیادہ مو + مؤ سی ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کے کم از کم
ن - مو - مؤ خیالی قیمتین ہونگین دو دفعات آیندہ مین ہم بہت توضیح کے ساتھہ اس بات کو
بتلائینگے کہ جب مساوات کامل نہ ہو تو اوسکی خیالی قیمتون کی تعداد کیا ہوتی ہے

(۷) اگر کسی مساوات مین ایک صف ارقام کی موجود نہ ہو تو جتنی رقمون کی تعداد اس صف مین
ہوگی اوتنی ہی کم از کم خیالی قیمتین اوس مساوات کی ہونگین
فرض کرو کہ ج (لا) مین درمیان لا^ر اور لا^{ر-۲} + ۱ کے ایک صف ۲ ر رقمون کی موجود
نہ ہو تو مساوات ج (لا) = ۰ کی کم از کم خیالی قیمتین ۲ ر ہونگین فرض کرو کہ
ا اور ب ہمثال لا^ر اور لا^{ر-۲} کو ج (لا) مین تعبیر کرین اور ارقام جو موجود نہ تہین
وہ ہمثال ق ۱ اور ق ۲ کے ساتھہ داخل کیجائین تو اس جملہ مین

ا لا^ر + ق ۱ لا^{ر-۱} + ق ۲ لا^{ر-۲} + . . . + ق ۲ر لا^{ر-۲ر} + ب لا^{ر-۲ر-۱}

مین تغیرات علامت کی تعداد مع تواترات علامت کی تعداد کی ۲ ر + ۱ ہی اسکو یون بیان
کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمین علامت لا کی
بدل جاتی ملکر برابر ۲ ر + ۱ کی ہین اب چونکہ ارقام فرضیہ داخل کی نہین اونکو ساقط کرو

تو اگر ا اور ب کی مختلف علامتین ہین تو ایک تغیر علامت کا ج (لا) مین ہوگا اور ج (- لا) مین کوئی تغیر نہ ہوگا اور اگر ا اور ب کی یکسان علامتین ہین تو ایک تغیر علامت ج (- لا) مین ہوگا اور ج (لا) مین کوئی تغیر نہ ہوگا اسواسطی دونو صورتون مین ۲ ر رقمون کی ساقط ہونے سے ج (لا) اور ج (- لا) مین نقصان ۲ ر تغیرات علامت کا واقع ہوتا ہے

اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوص پر جنمین جہت ارقام ہون حاوی ہی پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی اتنی خیالی قیمتین ہین جنسے کہ تعداد رقمون کی اس صنف منقوص مین ہے (۱۷) اگر کسی مساوات مین ایک صنف طاق ارقام کی موجود نہ ہو پس اگر یہہ صنف منقوص ایسی دو رقمون کے درمیان واقع ہی کہ اونکی علامتین یکسان ہین تو مساوات کی خیالی قیمتون کی تعداد اس صنف کی ارقام کی تعدادسی بقدر ایک کے کم از کم زیادہ ہوگی اور اگر صنف منقوص ایسی دو رقمون کی درمیان واقع ہی کہ اونکی علامتین متضاد ہین تو مساوات کی خیالی قیمتون کے تعداد اس صنف کی ارقام کی تعدادسی کم از کم بقدر ایک کے کم ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) مین درمیان لا^م ا اور لا^م - ۲ ر - ۲

کے ۲ ر + ا رقمین موجود نہین ہین اور لا^م اور لا^م - ۲ ر - ۲ کی امثال ا اور ب علیحدہ علیحدہ ہین پس اگر ا اور ب کی یکسان علامت ہی تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ ز + ۲ خیالی قیمتین ہونگین اور اگر ا اور ب کی علامتین متضاد ہین تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ ر خیالی قیمتین ہونگین

فرض کرو کہ ارقام منقوصہ امثال ق ا اور ق ۲ اور ق ۳ ... داخل کیجائین تو جملہ

ا لا^م + ق ا لا^م + ۱ + ق ۲ لا^م - ۲ + ... + ق ۲ ر + ۱ لا^م - ۲ ر - ۱ + ب لا^م - ۲ ر - ۲

مین تعداد تغیرات علامت کی مع تعداد تغیر علامت کی ۲ ر + ۲ ہین یا اس مطلب کو اسطرح ادا کرو کہ اس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد اور اوس جملہ کی تغیرات علامت کی تعداد جسمین کہ لا کی علامت بدل دیجای ملکر ۲ ر + ۲ ہین اور جب ارقام فرضہ جو داخل کین نہین خارج کی جائین تو اگر ا اور ب کی یکسان علامتین ہین تو ج (لا) اور ج (- لا) مین کوئی تغیر علامت نہ ہوگا

اور اگر ا اور ب کی علامتین متضاد ہین تو ایک تغیر علامت ج (لا) اور ج (-لا) مین واقع ہوگا
اسواسطے ج (لا) مین ۲ ر + ا رقمون کی ساقط ہونی سی ج (لا) اور ج (-لا) کی تعداد تغیرات
علامت مین سی ۲ ر + ۲ کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام متحد العلامت کے درمیان واقع ہو
اور ۲ ر تغیرات علامت کا نقصان عاید ہوتا ہی اگر صنف منقوص ارقام مختلف العلامت کی درمیان واقع ہو
اور یہہ قاعدہ تمام اصناف منقوصہ پر جنمین تعداد ارقام طاق ہون حاوی ہے
اسواسطے مساوات ج (لا) = ۰ کی کم از کم اوتنی قیمتین خیالی ہونگین جیساکہ دعوی مین بیان کیا ہے
(۷۲) اب دفعہ ۱۷ کی یہہ ایک مثال ہی کہ اگر ج (لا) مین دو رقمین یکسان علامت کی ہون اور
اونکی درمیان ایک رقم مفقود ہو تو کم از کم اوسکی دو ناممکن قیمتین ہونگین اور اگر ایک رقم ایسی
دو رقمون کی درمیان مفقود ہو کہ اونکی علامتین متضاد ہون تو اسی کچھہ نتیجہ ہم نہین نکال سکتی
کہ اوسکی خیالی قیمتین کتنی ہین
اب اس بات پر یہی غور کرنی چاہی کہ ارقام منقوصہ کی نسبت سی ج (لا) اور ج (-لا) کے
تغیرات علامت کی تعداد چھوٹی مساوات کی درجہ کی تعداد سی ہوتی ہی اور ان دو تعدادون کا
حاصل تفریق جفت عدد ہوتا ہی
دفعات ۷۰ اور ۷۱ کی دو ممکن صورتون کی امتحان کرنی سی یہہ بات ظاہر معلوم ہوتی ہی
یعنی اگر طریقہ کتابت مقادیر کو موافق دفعہ ۶۹ کے اختیار کرین تو عدد ن - مو - مو ہمیشہ
ایک جفت عدد ہوتا ہی اور موافق دفعہ ۱۱۴ کی ہم کو اسی نتیجہ کی نکلنی کی پہلی سی توقع تہی

باب ششم مساوی قیمتین

(۷۳) بعض اوقات تو اس بات کی معلوم ہونیکی کہ مساوات مفروضہ مساوی قیمتین رکھتی ہے
ضرورت پڑتی ہی اور بعض اوقات اس بات کی جاننی سی آسانی ہوتی ہی چنانچہ یہہ بات
اس کتاب کے آگے مطالعہ کرنی سی معلوم ہوجائیگی اسیواسطے اب اس بات کو بیان کرینگی کہ کسطرح
مساوات کی متساوی قیمتون کو تحقیق کرتی ہین اور کسطرح ادن اجزاء ضربی کو موافق

مساوی قیمتوں کی مساوات میں ہوتی ہیں خارج کرتے ہیں اور بسیط طرح خارج کرکے مساوات کی تحویل ایسی مساوات کی طرف کرلیتے ہیں کہ اوسکی قیمتیں غیر مساوی ہوتی ہیں اول ہم ایک خاصیت جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ثابت کرتے ہیں

(۴۷) اگر ج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا ہو اور ح (لا) اوسکا اول جملہ مشتقہ ہو تو یہہ ہوگا کہ

$$ج (لا) = \frac{ج لا}{لا - ا} + \frac{ج (لا)}{لا - ب} + \frac{ج (لا)}{لا - ج} + \cdots + \frac{ج (لا)}{لا - ک}$$

اسمیں ا اور ب اور ج . . . ک خیالی اور حقیقی قیمتیں مساوات ج (لا) = ۰ کی ہیں

وجہ اسکی یہہ ہی کہ ج (لا) میں لا کی اعلی قوت کا سرع. فرض کرو تو بموجب دفعہ ۳۳ کے ہم کو یہہ مطابقہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = ع . (لا - ا) (لا - ب) (لا - ح) \cdots (لا - ک) \qquad (۱)$$

د + ی بجای لا کے رکھو تو

$$ج (د + ی) = ع . (د + ی - ا) (د + ی - ب) (د + ی - ح) \cdots (د + ی - ک)$$

ہر طرف مساوات کو ایک سلسلہ میں بموافق قواعد تصاعدہ کی پھیلاؤ تو بموجب دفعہ ۱۲ کے دائیں طرف کی یہہ صورت ہوگی کہ

$$ج (د) + ج' (د) ی + ج'' (د) \frac{ی^۲}{۱ \times ۲} + \cdots$$

پس سری کا ج (د) ہی اور اسیواسطے ج (د) برابر ہوگا بائیں طرف میں ی کی سر کے یعنی

$$ع . (د - ب) (د - ح) \cdots (د - ک) + ع . (د - ا) (د - ح) \cdots (د - ک) + \cdots$$

یعنی $\frac{ج (د)}{د - ا} + \frac{ج (د)}{د - ب} + \frac{ج (د)}{د - ح} + \cdots \frac{ج (د)}{د - ک}$

اور مقادیر متغیر کی واسطی ہر رمز کو کام میں لاسکتی ہیں جسکی کچھہ بھی قیمت ہو اسلئی د کو لا سے بدل تی ہیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ج (لا) = \frac{ج (لا)}{لا - ا} + \frac{ج (لا)}{لا - ب} + \frac{ج (لا)}{لا - ح} + \cdots + \frac{ج لا}{لا - ک} \qquad (۲)$$

اب یہہ نتیجہ اوس صورت میں بھی صحیح ہی کہ مقادیر ا و ب و ح . . . میں

ایک یا کئی برابر ا یا برابر ب کی ہو . . . اور علے ہذا القیاس

اب کل میں فرض کرو کہ ا ٹھیک ر دفعہ اور ب ٹھیک ص دفعہ اور ح ٹھیک ط دفعہ . . . واقع ہوتا ہے

(۱) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$ج (لا) = ع . (لا - ا)^{ر} (لا - ب)^{ص} (لا - ح)^{ط} \ . \ . \ . \ .$$

اور (۲) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین

$$ج (لا) = \frac{ر ج (لا)}{لا - ا} + \frac{ص ج (لا)}{لا - ب} + \frac{ط ج (لا)}{لا - ح} + \ . \ . \ .$$

(۷۵) اگر ج (لا) اور ج (لا) کا کوئی وفق مشترک جسمین لا ملتفہ ہوگا تو مساوات ج (لا) = ۰ کے برابر قیمتین ہونگین اور اگر وفق مشترک نہ ہوگا تو کوئی برابر قیمت نہین ہوگی

فرض کرو کہ ا و ب و ج . . . ک حقیقی یا خیالی قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کے ہین تو

$$ج (لا) = ع . (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج) \ . \ . \ . \ (لا - ک)$$

$$\text{تو } ج (لا) = ع . (لا - ب) (لا - ج) \ . \ . \ . \ (لا - ک) + ع . (لا - ا) (لا - ح) \ . \ . \ . \ (لا - ک) + \ . \ . \ .$$

اگر ا اور ب اور ح . . . ک تمام غیر مساوی قیمتین ہون تو اجزاء ضربی (لا - ا) و (لا - ب) لا - ج و . . . لا - ک مین کوئی حاصر ضربی ج (لا) کو نہین تقسیم کریگا وجہ اسکی یہہ ہے کہ لا - ا ہر یک رقم ج (لا) کو پورا تقسیم کرتا ہی مگر اول رقم کو نہین تقسیم کرتا اور علی ہذا القیاس اور اجزاء ضربی کی کیفیت ہی اور ان اجزاء ضربی مین سی حاصل ضرب بہی کتنی ایک اجزاء ضربی کا نہین پورا تقسیم کریگا اسلئے ثابت ہوا کہ اگر ج (لا) اور ج (لا) کوئی وفق مشترک نہین رکہتا تو ج (لا) کوئی مساوی اجزاء ضربی نہین رکہتا پس معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور ج (لا) وفق مشترک رکہتی ہون تو ج (لا) کی سب اجزاء ضربی غیر مساوی بہی نہین ہوسکتی

دوم فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہین ا اور ر دفعہ ا اور ص دفعہ ب اور ط دفعہ ج اور علی ہذا القیاس واقع ہوتا ہے تو

$$ج (لا) = ع . (لا - ا)^{ر} (لا - ب)^{ص} (لا - ج)^{ط} \ . \ . \ . \ \left[\frac{ر}{لا - ا} + \frac{ص}{لا - ب} + \frac{ط}{لا - ج} + \ . \ . \ . \right]$$

اس صورت مین جزضربی $(لا-ا)^{ر-ا}(لا-ب)^{ص-ا}(لا-ح)^{ط-ا}$
ج (لا) کی ہر رقم مین واقع ہونا ہی پس اگر ج (لا) کے برابر اجزا ضربی ہون تو
ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک ہوگا اسی معلوم ہوا کہ اگر ج (لا) اور جَ (لا) کا
وفق مشترک نہ ہو تو ج (لا) کے برابر اجزاء ضربی نہین ہونگے

(۷۶) اس مساوات پر خیال کرو کہ

ج (لا) = $لا^۴ - ۱۱لا^۳ + ۴۴لا^۲ - ۷۶لا + ۴۸ = ۰$

یہان جَ (لا) = $۴لا^۳ - ۳۳لا^۲ + ۸۸لا - ۷۶$

اب یہان یہہ دریافت ہونا ہی کہ ج (لا) اور جَ (لا) کا وفق مشترک لا-۲ ہی اسی ثابت ہونا ہے کہ
$(لا-۲)^۲$ ایک جزضربی ج (لا) کا ہے اور یہہ بھی دریافت ہوتا ہے کہ

ج (لا) = $(لا-۲)^۲ (لا^۲ - ۷لا + ۱۲) = (لا-۲)^۲ (لا-۳)(لا-۴)$

پس ج (لا) کے قیمتین ج (لا) = ۰ کی ۲ و ۲ و ۳ و ۴ ہین

اب پھر اس مساوات پر خیال کرو کہ

ج (لا) = $۲لا^۴ - ۱۲لا^۳ + ۱۹لا^۲ - ۶لا + ۹ = ۰$

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) اور جَ (لا) وفق مشترک ۱-۳ رکھتی ہین اور

ج (لا) = $(لا-۳)^۲ (۲لا^۲ + ۱)$ پس قیمتین ج (لا) = ۰ کی

۳ و ۳ و $+\sqrt{-\frac{۱}{۲}}$ و $-\sqrt{-\frac{۱}{۲}}$ ہین

(۷۷) دفعہ ۵۷ مین یہہ عبارت جو لکھی ہین کہ جسمین لاملتفت ہوا وسی یہہ غرض ہی کہ ہم جزضربی
ع پر کچھہ لحاظ نہین کرتی گو وہ بعض لحاظ سی وفق مشترک ج (لا) اور جَ (لا) کا خیال کیا جاسکتا ہے
اب چونکہ اول دفعہ ہم جملون کے وفق مشترک کا ذکر چھیڑا ہی اسلئی مناسب معلوم ہوتا ہی کہ ہم کچھہ کیفیت
اس مضمون کی لکھین دستور کی بات ہی کہ وفق مشترک اور وفق اعظم مشترک کے مسائل الجبرا مین
بیان ہوتی ہین مگر یہہ کچھہ ضرور نہین کہ ابتدا تحصیل ریاضیہ مین ہی ان مسائل کو طلبا تمام کرین

بلکہ وہ بعد دفعہ ۳۳ کے ماحصل کے خوب سمجھ مین آتا ہی فرض کرو کہ
ج (لا) اور مج (لا) دو جملون صحیحہ ناطقہ لا کو تعبیر کرتا ہی تو ج (لا) اور مج (لا) کو اجزاء ضربی مین تحلیل کرسکتی ہین کہ

ج (لا) = ع. (لا - ا۱) (لا - ا۲) (لا - ا۳) . . . .

مج (لا) = ق. (لا - ب۱) (لا - ب۲) (لا - ب۳) . . . .

اوران جملون مین سی ہر یک صرف ایک طور سی اجزاء ضربی مین تحلیل ہوسکتا ہے

اسی معلوم ہوا کہ جملہ لا کا اعلی درجہ کا دو نوج (لا)

اور مج (لا) کو جو پورا تقسیم کرلگا وہ حاصل ضرب اجزاء ضربی مشترک اول درجہ لا کا ہوگا

اور اسکو ہم ج (لا) اور مج (لا) کا دفق مشترک اعظم کہتے ہین

یہان ہم کچھ لحاظ ع. اور ق. کا نہین کرتی اگر ہم چاہین تو عددی دفق اعظم اونکا اگر وہ دونو عدد ہون نکال لین اور اگر وہ کسی اور مقدار مثلاً د کے جملے ہون تو ان د کی جملون کا دفق مشترک اعظم نکال لینگے

(۷۸) فرض کرو کہ ج (لا) = ع. (لا - ا۱)^ر (لا - ب۱)^ص (لا - ج۱)^ط . . . . تو

بموجب دفعہ ۷۵ کی دفق مشترک (لا - ا۱)^ر-۱ (لا - ب۱)^ص-۱ (لا - ج۱)^ط-۱ . . . . .

ہوگا پس دفق مشترک اون تمام اجزاء ضربی مساویہ سی ملتف ہی. جو ج (لا) مین واقع ہوتی ہے

اور ہر صورت مین قوت نما اپنی نظیر کی قوت نما سی ج (لا) مین بقدر ایک کے کم ہی اور ج (لا)

کو دفق مشترک ج (لا) اور مج (لا) پر تقسیم کرین تو خارج قسمت مین تمام اجزاء

جو ج (لا) مین واقع ہوتی ہی ملتف ہونگی اور ہر یک جز ضربی ایک دفعہ واقع ہوگا پس جو مساوات اس خارج قسمت

کو برابر صفر کی لکھنی سی حاصل ہوگی اوسمین کوئی قیمت مکرر مساوات ج (لا) = ۰ کی نہین واقع ہوگی

(۷۹) ہم دیکھتی ہین کہ اگر جز ضربی (لا - ا۱)^ر کا ج (لا) مین واقع ہو تو جز ضربی

(لا - ا۱)^ر-۱ کا ج' (لا) مین واقع ہوگا اسلئے مساوات ج' (لا) = ۰ کے

ر - ا قیمتین ہونگین جنمین سی ہر واحد مساوی ا کی ہوگی اب ج (لا) اول جملہ مشتقہ ج' (لا)

کا ہی پس اگر ر - ا بڑا بہ نسبت ا کی ہو تو ج (لا) اور ج' (لا) کا ایک دفق مشترک ہوگا

اور مساوات ج″ (لا) = ۰ کی ر - ۲ ہونگین جنمین سی ہر یک برابر ۱ کے ہوگا
پس اسطرح ہم ثابت کرسکتی ہین کہ (لا - ۱)ر ایک جزضربی ج (لا) کا ہوجو مشتقہ جملے
ج (لا) وج″ (لا) . . . . ج^{ر-۱} (لا) سب کے سب لا = ۱ سے فنا ہوجائینگے
اور یہہ اسطرح بہی ثابت ہوسکتی ہین
فرض کرد کہ ج (لا) = (لا - ۱)ر مج (لا) اسمین مج (لا) ایک جملہ صحیحہ ناطقہ لا کا فرض کیا گیا ہے
جسمین جزضربی لا - ۱ داخل نہین ہے لا = ۱ + ی رکہو تو
ی^ر مج (۱ + ی) = ج (۱ + ی)
= ج (۱) + ج′ (۱) ی + . . + ج^{ر-۱} (۱) ی^{ر-۱}/(ر-۱)! + . . . + ج^{ن} (۱) ی^ن/ن!
اب دائین طرف کا رکن ی^ر پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو بائین طرف کا رکن بہی پورا ی^ر پر پورا تقسیم ہونا چاہیے
پس یہہ حاصل ہوگا کہ
ج (لا) = ۰ ج′ (۱) = ۰ . . . . ج^{ر-۱} (۱) = ۰
اور چونکہ دائین طرف کا رکن پورا ی کی کسی قوت پر جو ی سی اعلی درجہ رکہتی ہو نہین تقسیم ہوتا
اسلئے ضرور ہی کہ بائین طرف کا رکن بہی ایسا ہو اسیواسطے ج (۱) صفر نہین ہے پس
تعداد ارقام سلسلہ ج (لا) اور ج′ (لا) اور ج″ (لا) . . مین جو لا = ۱ کی ہونی سی فنا ہوتی ہین
اوتنی ہی جتنی لا - ۱ کا ج (لا) مین قوت نما ہے
مثلاً فرض کرو کہ
ج (لا) = لا^۵ + ۲ لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۸ لا + ۳

یہان یہہ دریافت ہوگا کہ سلسلہ ج (لا) وج′ (لا) . . . مین
ج″ (لا) اول ہی لا = ۱ اسی فنا نہین ہوتا پس جزضربی (لا + ۱)^۳ کا ج (لا) مین
واقع ہوتا ہے اور یہہ دریافت ہوگا کہ ج (لا) = (لا + ۱)^۳ (لا^۳ - لا + ۳)

(۸۰) ایک اور طریقہ مختصر مساوی قیمتون کی تحقیق کرنے کا ہم بیان کرتے ہین

اگر مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین برابر ا کی رکھتی ہو تو اسی یہہ نتیجہ نکلی گا کہ ج (لا) کو لا - ا پر تقسیم کرنی سی جو خارج قسمت نکلتا ہی وہ لا = ا سی معدوم ہوتا ہے پس موافق دفعہ ۷ کے ... خارج قسمت کی نکالنے سی یہہ حاصل ہوگا کہ

ن ع۰ ا^{ن-۱} + (ن - ۱) ع۱ ا^{ن-۲} + ... + ۲ ا ع ن-۲ + ع ن-۱ = ۰

یعنی ج (لا) فنا ہو جائیگا جب لا = ا کے ہو

(۸۱) پس اسی یہہ معلوم ہوا کہ جب ہم کو مساوات ج (لا) = ۰ کی برابر قیمتوں کا دریافت کرنا منظور خاطر ہو تو ہم اغاز اسطرح کرین کہ + و فق مشترک اعظم ج (لا) اور ج (لا) کا دریافت کرین اور اس وفق مشترک اعظم کو برابر صفر کے لکھکر مساوات بنائین تو پہر ایک مساوات حل کرنی کی لئی ایسی حاصل ہو جائیگی کہ جسکی قیمتین وہ ہونگین جو مساوات ج (لا) = ۰ کی مکرر قیمتین ہین اور چونکہ یہہ وفق مشترک اعظم خود ایک پیچیدہ جملہ ہو سکتا ہی جسمین اجزاء ضربیہ مساویہ ملتف ہون اسواسطی یہہ فایدہ مند ہو گا کہ ہم عمل کو ایسی ضبط اور نظم کی ساتھہ کرین کہ قیمتین حتی الامکان تھوڑی سی محنت سی حاصل ہو جائین اور اب اس بات کو ہم لکھتی ہین

(۸۲) فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ ایک مساوات ہو جسکی برابر قیمتین ہون اور

ج (لا) = ک۱ لا ک۲ لا^۲ ک۳ لا^۳ ک۴ لا^۴ ... ک م لا^م

اسمین حاصل ضربون تمام اجزاء ضربی کا جو ایک دفعہ واقع ہوتی ہین ک۱ سی اور حاصل ضربون اجزاء ضربی کا جو دو دفعہ واقع ہوتی ہین ک۲ سی اور حاصل ضربون اجزاء ضربی کا جو تین دفعہ واقع ہوتے ہین ک۳ سی اور علی ہذا القیاس تعبیر ہوتی ہین اگر کوئی جزء ضربی ج (لا) مین اوتنی دفعہ نہ آیا ہوگا جتنی دفعہ کہ بیان کیا گیا تو ایک یا کی مقادیر

ک۱ ، ک۲ ، ک۳ ... مین سی برابر واحد کی ہو جائینگین

اب ج (لا) سی اول جملہ مشتقہ ج (لا) کا حاصل کرو اور پہر وفق مشترک اعظم ج (لا) اور ج (لا) کا حاصل کرو اور اس وفق اعظم کو ج (لا) سے تعبیر کرو

$ج_{۱}(لا) = لا_{۲} لا_{۳} لا_{۴} \ldots لا_{م-۱}$

اور پھر دفع اعظم $ج_{۱}(لا)$ اور اوسکی اول جملہ مشتقہ $ج_{۱}(لا)$ کا حاصل کرو اور اوسکو $ج_{۲}(لا)$ سے تعبیر کرو

تو $ج_{۲}(لا) = لا_{۳} لا_{۴}^{۲} \ldots لا_{م-۲}$

اسیطرح متواتر عمل کئی جاؤ تو

$ج_{۳}(لا) = لا_{۴} لا_{۵}^{۳} \ldots لا_{م-۳}$

$ج_{۴}(لا) \quad لا_{۵} \ldots \quad لا_{م-۴}$

$\ldots \quad \ldots$

$ج_{م-۱}(لا) \quad = لا_{م}$

$ج_{م}(لا) \quad = ۱$

اب ایک نیا سلسلہ جملوں کا اسطرح تبدیل کرو کہ سلسلہ

$ج(لا)$ و $ج_{۱}(لا)$ و $ج_{۲}(لا) \ldots ج_{م}(لا) \ldots$

ہر رقم کو $ج_{م-۱}(لا)$ تک اپنے ماقبل کی رقم پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{ج(لا)}{ج_{۱}(لا)} = لا_{۱} لا_{۲}^{۲} \ldots لا_{م} = مج_{۱}(لا)$ کے مقرر کرو

$\frac{ج_{۱}(لا)}{ج_{۲}(لا)} = لا_{۲}^{۲} \ldots لا_{م} = مج_{۲}(لا)$ کے مقرر کرو

$\frac{مج_{م-۲}(لا)}{مج_{م-۳}(لا)} = لا_{م-۱} لا_{م} = مج_{م-۱}(لا)$ کے مقرر کرو

$\frac{مج_{م-۱}(لا)}{مج_{م}(لا)} = لا_{م} = مج_{م}(لا)$ کے مقرر کرو

پس اخر کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{مج_{۱}(لا)}{مج(لا)} = لا$ و $\frac{مج_{۲}(لا)}{مج_{۱}(لا)} = لا_{۲} \ldots \frac{مج_{م-۱}(لا)}{مج_{م}(لا)} = لا_{م-۱}$ اور $مج_{م}(لا) = لا_{م}$

غرض اجزاء ضربی $لا_{۱}$ اور $لا_{۲} \ldots لا_{م}$ اب علیحدہ علیحدہ ہوگئی اور ما والتون $لا_{۱} = ۰$ اور $لا_{۲} = ۰$ اور $\ldots لا_{م} = ۰$ کے حل کرنے سے قیمتیں

مساوات مفروضہ ج (لا) کی حاصل ہوجائیگی اور کوئی قیمت لا = ۰ سے جو دریافت ہوگی وہ ردفعہ مساوات ج (لا) = ۰ مین واقع ہوگی

(۸۳) دفعہ گذشتہ کی عمل کی لئی یہہ مثال ہی فرض کرو کہ

ج (لا) = لا^۶ − ۸ لا^۵ − ۶ لا^۴ + ۲۱ لا^۳ + ۹ لا^۲ − ۲۲ لا − ۴ + ۸

اب طریقہ کتاب جملون کا دفعہ سابق کی موافق رہنی دین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ج۱ (لا) = لا^۴ + لا^۳ − ۳ لا^۲ − لا + ۲

ج۲ (لا) = لا − ۱

ج۳ (لا) = ۱

مج۱ (لا) = لا^۴ − ۵ لا^۲ + ۴

مج۲ (لا) = لا^۳ + ۲ لا^۲ − لا − ۲

مج۳ (لا) = لا − ۱

لا۱ = لا − ۱

لا۲ = لا^۲ + ۳ لا + ۲

لا۳ = لا − ۱

اسیواسطے ج (لا) = (لا − ۲) (لا^۲ + ۳ لا + ۲)^۲ (لا − ۱)^۳

= (لا − ۲) (لا + ۱)^۲ (لا + ۲)^۲ (لا − ۱)^۳

ن قیمتین مساوات ج (لا) = ۰ کی ۲ و − ۱ و − ۱ و − ۲ د − ۲ و ا د ا ہین

(۸۴) جب ایک مساوات کی مثال سب کے سب مقادیر ناطقہ محدودہ ہونگے تو دفعہ ۸۲ مین لا و لا۲ ۰ ۰ ۰ کی امثال ناطقہ محدودہ ہونگے اسی معلوم ہوا کہ اگر صرف ایک ہی قیمت مساوات کی قیمتون مین سی جسمین مثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون ردفعہ کر لین تو وہ مقدار ناطقہ محدودہ ہوگی کیونکہ وہ مساوات لا = ۰ نکلیگی جسمین مقادیر غیر ناطقہ ملتف نہین ہین

اسی ہم کہنیجہ نکالتی ہین کہ ایک مساوات تیسرے یا پانچوین درجہ کی جسمین امثال مقادیر ناطقہ محدودہ ہون اور اوسکی کوئی قیمت ناطقہ محدودہ نہ ہو تو اوسکی برابر کوئی قیمتین نہین ہونگین اور اگر مساوات چوتھی درجہ کی ہو اور اوسکی امثال ناطقہ محدودہ ہون اور کوئی قیمت اوسکی ناطقہ محدودہ نہ ہو اور یہی اوسکی برابر قیمتین ہون تو اوسکی دو قیمتین غیر ناطق ہونگین اور ہر یک دو دفعہ مکرر آئیگی پس اگر

ج (لا) = ۰ مساوات ہو تو ج (لا) ایک مجذور کامل ہوگا

ساتوان باب مساوات کی قیمتون کی حدود غائی اور قیمتون کا جدا جدا کرنا

(۸۵) اب ہم چند مسائل لکھتی ہین جنسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات کی تمام حقیقی قیمتین حدود غائی کے درمیان واقع ہین اور پہر ہم اس بات کی تحقیق کرینگے کہ ہر قیمت کی جدا جدا حد غائی دریافت کرنی کہان تک ممکن ہی اور ایسی مسایل کی لکھنی کا فائدہ یہہ ہی کہ چوتھی درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ کا مساوات عامہ کا حل حریہ نہین حاصل ہوسکتا مگر ہم کو علم بعض خاص قیمتون کا تقریباً حاصل ہوتا ہی اور اوسکی استعانت سی ہم مساوالتون کا اعداد مین حل کرسکتی ہین غرض ان حدود غائی کی معلوم ہونی سی تقریبی قیمتون کا علم ہوگا اور پہر اوسی مساوالتون کا حل چوتھی درجہ سی زیادہ کا دریافت ہوگا

اس ساری باب مین ہر جگہ قیمت سی حقیقی قیمت سمجھی جائیگی اگر کہین اوسکی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو تمام باب حقیقی قیمتون ہی سے متعلق ہے

(۸۶) جب ہم کہتی ہین کہ ایک خاص مقدار مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی ہی تو اوسی مراد یہہ ہوتی ہی کوئی مثبت قیمت مساوات کی اوس مقدار سی زیادہ نہین ہوسکتی

(۸۷) جو مساوات اپنی سادی صورت مین ہو اوسمین جو منفی امثال سب سے بڑا تعداداً ہو اگر ایک زیادہ کرو تو حاصل جمع اس مساوات کی مثبت قیمتون کا اعلی حد غائی ہوگا

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات ن درجہ کی ہی اور تعداداً ع سب سے بڑا منفی امثال ج (لا) مین ہی پس اگر ایک قیمت لا کی ایسی دریافت کیجای کہ ج (لا) اس قیمت کی موافق اور اوسی تمام بڑی قیمتون کی موافق مثبت ہو تو وہ قیمت مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت

کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی ہوگی اب اگر کوئی مثبت قیمت لا کی

لا^ن - ع (لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲} + لا^{ن-۳} + ... + لا + ۱)

کو مثبت بنا دی تو وہ بدرجہ اولی ج (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی لا کی مثبت قیمت سی ج (لا) مثبت ہوتا ہی

اگر لا^ن - لا^{ن-۱} / لا - ۱ مثبت ہی اور جب یہہ مثبت ہی تو لا^ن - ۱ ع لا^{ن-۱} / لا - ۱

بدرجہ اولی مثبت ہی یعنی اگر (لا^ن - ۱) (۱ - ع / لا - ۱) مثبت ہی اور اخر جملہ مثبت ہوگا

اگر لا - ۱ بڑا ع سی ہی پس ج (لا) مثبت ہی اگر لا برابر ع + ۱ کے ہو

یا ع + ۱ سی بڑا ہو یعنی ع + ۱ اعلی حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی ہے

(۸۸) اگر مساوات ج (لا) = ۰ مین بجای لا کی ر مندرج کرین اور ن طاق عدد ہو تو

ہر رقم کی ایسی علامت بدل دو کہ ن کا سر + ۱ ہو اور فرض کرو کہ اس صورت کی مساوات کا

ق تعداد سب سے بڑا منفی سر ہو تو ق + ۱ اعلی حد غائی ر کی مثبت قیمتون کی ہوگی

اور اسیواسطے - (ق + ۱) حد غائی لا کی منفی قیمتون کی ہے

پس اسی معلوم ہوا کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی سب قیمتین درمیان ع + ۱ اور - (ق + ۱) کے واقع ہوتی ہین

پس اگر مساوات مین تعداد سب سے بڑی مثال بغیر لحاظ علامت کی م ہو تو مساوات کی تمام قیمتین

درمیان م + ۱ و - (م + ۱) کے واقع ہونگین

(۸۹) اگر مساوات ن درجہ کی اپنی سادی صورت مین ہو اور عددی قیمت سب سے بڑی مثال کی

ع ہو اور لا^ن - ر سب سے بڑی درجہ کی قوت لا کی ہو جو منفی مثال رکھتی ہو تو ۱ + ن ع

اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہوگی

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات معروضہ ہو چونکہ تمام رقمین ماقبل لا^ن - ر کے مثبت مثال

رکھتی ہین تو ج (لا) یقینی لا کی مثبت قیمت کے موافق مثبت ہوگا اگر

لا^ن - ع (لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-۱} + ... + لا^۲ + لا + ۱)

مثبت ہو یعنی اگر لا^ن - ع لا^{ن-ر+۱} - ۱ / لا - ۱ مثبت ہو پس لا بڑا واحدی فرض کرو

توج (لا) مثبت بدرجہ اولی ہوگا اگر لا^{ن} − ع لا$^{ن-۱}$ / لا − ۱ مثبت ہو یعنی اگر لا^{ن} − ع لا$^{ن-۱}$ − ۱ مثبت ہو یعنی اگر لا$^{ن-۱}$ (لا − ۱) − ع مثبت ہو یعنی اگر (لا − ۱) برابر یا بڑا ع سی ہو سی معلوم ہوا کہ اگر لا = ۱ + ع یا کوئی بڑی قیمت اوسکی ہو توج (لا) مثبت ہے یعنی

۱ + ع اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی مساوات ج (لا) = ۰ مین ہے

(۹۰) اگر مساوات کی سب امثال منفیہ مین سی ہر یک مثبت بنا کر اوسکی قابل کی امثال مثبتہ کے مجموعہ پر تقسیم کرین تو جو کسر اسطرح سی سب سے بڑی ہوگی اوسپر ایک زیادہ کرنی سی مثبت قیمتون کی حد غائی حاصل ہوگی

فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ ہو اسمین ج (لا)

ع$_{۰}$ لا^{ن} + ع$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ − ع$_{۳}$ لا$^{ن-۳}$ + ع$_{۴}$ لا$^{ن-۴}$ − ... − ع$_{ر}$ لا$^{ن-ر}$ + ... + ع$_{ن}$

تعبیر کرتا ہے اب ہم کو معلوم ہے کہ

لا^{م} = (لا − ۱) (لا$^{م-۱}$ + لا$^{م-۲}$ + ... + لا + ۱) + ۱

مساوات کے ہر رقم مثبت کو اس صورت قانونیہ کی موافق تبدیل کرکی لکھو اور باقی ارقام کو بدستور رہنے دو توج (لا) کی یہہ صورت ہو جائیگی

ع$_{۰}$ (لا − ۱) لا$^{ن-۱}$ + ع$_{۰}$ (لا − ۱) لا$^{ن-۲}$ + ع$_{۰}$ (لا − ۱) لا$^{ن-۳}$ + ... + ع$_{۰}$ (لا − ۱) + ع$_{۰}$

+ ع$_{۱}$ (لا − ۱) لا$^{ن-۲}$ + ع$_{۱}$ (لا − ۱) لا$^{ن-۳}$ + ... + ع$_{۱}$ (لا − ۱) + ع$_{۱}$

+ ع$_{۲}$ (لا − ۱) لا$^{ن-۳}$ + ... + ع$_{۲}$ (لا − ۱) + ع$_{۲}$

− ع$_{۳}$ لا$^{ن-۳}$

اب اس جملہ کی عمودی سطرون کو دیکھو کہ جہان امثال منفیہ نہین ہین وہان سطر عمودی کی قیمت مثبت ہی اگر لا بڑا اسی ہو مگر اوس سطر عمودی مین کہ امثال منفیہ واقع ہون ہم کو یہہ حاصل کرنا چاہئے کہ

(ع$_{۰}$ + ع$_{۱}$ + ع$_{۲}$) (لا − ۱) بڑا ع$_{۳}$ سے ہو

(ع$_{۰}$ + ع$_{۱}$ + ع$_{۲}$ + ... + ع$_{ر-۱}$) (لا − ۱) بڑا ع$_{ر}$ سے ہو

اسواسطی چاہی کہ لا بڑا بہ نسبت $\frac{ع^{ر}}{ع_{۰}+ع_{۱}+ع_{۲}}+۱$ ۰۰۰ کی اور
بڑا بہ نسبت $\frac{ع^{ر}}{ع_{۰}+ع_{۱}+ع_{۲}+\cdots+ع_{ر-۱}}+۱$ ۰۰۰ کی ہو اسواسطی اگر لا
ان متحصلہ جملوں میں سی سب سی بڑی جملہ کی برابر فرض کیا جاے تو وہ قیمت لا کی اور اوسی ہر یک قیمت
ج (لا) کو مثبت بنائیگی یعنی ان جملوں میں سی سب سے بڑا جملہ اعلی حد غائی مساوات ج (لا) =
کی مثبت قیمتوں کی ہے

(۹۱) اب ان قاعدوں کی توضیح دو مثالوں سی کرتی ہیں اول یہہ مساوات لو

$$لا^{۵}+۸لا^{۴}-۱۴لا^{۳}-۵۳لا^{۲}+۵۶لا-۱۸=۰$$

بموجب دفعہ ۸۷ کی $۵۳+$ یعنی ۵۴ اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہی اور بموجب دفعہ
۸۹ کی اس سبب سے کہ لا = ۱ اور ر = ۲ تو حد غائی $۱+\frac{۵۳}{۱+۸}$ ہی یعنی ۹ حد غائی ہے
اور بموجب دفعہ ۹۰ کی ان جملوں $\frac{۱۴}{۱+۸}+۱$ اور $\frac{۵۳}{۱+۸}+۱$ اور $\frac{۱۸}{۱+۸+۵۶}+۱$
میں سب سے بڑا جملہ لینا چاہئی یعنی $\frac{۵۳}{۹}+۱$ اسی معلوم ہوا کہ حد غائی ۷ ہے
اب یہہ مساوات لو کہ

$$لا^{۵}-۵لا^{۴}-۱۳لا^{۳}+۲۱لا^{۲}+۱لا-۷۰=۰$$

یہاں دفعات ۸۷ اور ۸۹ سی ۷۰ + احد غائی ہی اور بموجب دفعہ ۹۰ کے $\frac{۷۰}{۱}+۱$
حاصل ہوتا ہے اسی معلوم ہوا کہ ۷۱ حد غائی ہے
پس دونو مثالوں میں دفعہ ۹۰ سی اعلی حد غائی سب سے چھوٹی معلوم ہوتی ہی اب یہہ بات آسانی سے
معلوم ہوتی ہی کہ دفعہ ۸۹ سی بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر ر = ۱ کے
صورت مستثنی ہی اسمیں دونو حدود غائی میں تطبیق ہوجاتی ہی علی العموم دفعہ ۸۹ زیادہ کام
دیتی ہے جب اکثر مثبت امثال امثال منفیہ اول کے واقع ہوں جنکی سبب سے ر بڑا ہوجاے
اور دفعہ ۹۰ سی ہمیشہ بہ نسبت دفعہ ۸۷ کی چھوٹی حد غائی معلوم ہوتی ہی مگر یہہ صورت مستثنی ہی کہ
سب سے بڑی منفی امثال کی ماقبل ایک ہی مثبت امثال ہو یعنی اول ہی رقم ہو اس صورت میں

دونو حدود من تطبیق ہوجاتی ہی علی العموم دفعہ ۹۰ وہان زیادہ کام دیتی ہی کہ مثال مثبتہ یا قبل مثال منفی کی واقع ہون

(۹۲) بعض حکمتین ایسی ہین کہ ہم اگر قواعد عامہ کی نسبت اعلی حد غائی چھوٹی دریافت کرلیتی ہین دفعہ گذشتہ کی اول مثال پر خیال کرو اب یہان مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی حد اعلی دریافت کرنی ہے اسمین ج (لا) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$\text{لا}^{۳}(\text{لا}^{۳} - ۵۳) + ۸\text{لا}^{۲}(\text{لا} - \frac{۱۴}{۸}) + ۵۹(\text{لا} - \frac{۹}{۲۸})$$

اب اگر لا برابر ۴ کی یا اوسی کسی بڑی قیمت کی برابر ہو تو خطوط دحدانی کی مابین جملی سب مثبت ہین اور ایسی ہی ج (لا) مثبت ہی پس ۴ حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کے مثبت قیمتون کی ہے

اب دفعہ مذکور کی دوسرے مثال پر خیال کرو کہ اوسمین ج (لا) کو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

$$\text{لا}^{۳}(\text{لا}^{۲} - ۵\text{لا} - ۱۳) + ۲\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۷$$

اب دفعہ ۸۷ کی امداد سی ہم دیکھتی ہین کہ $\text{لا}^{۲} - ۵\text{لا} - ۱۳$ مثبت ہی اگر لا = ۱۳ + ۱ یا اسی بڑی قیمت کی برابر ہو پس مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی ۱۴ اعلی حد غائی ہے

(۹۳) اب بہت آسانی سی مساوات کی مثبت قیمتون کی حد غائی دریافت کرسکتی ہین یعنی ایسا عدد دریافت کرسکتی ہین کہ وہ کسی مثبت قیمت سی مساوات کی بڑا نہ ہو

مساوات کو ہیئت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتین متکافی مساوات مفروضہ کے جداجدا عوض

اب اس بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی ادنی حد غائی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ مساوات مفروضہ یہہ ہو

$$\text{لا}^{ن} + ع_{۱}\text{لا}^{ن-۱} + ع_{۲}\text{لا}^{ن-۲} + \cdots + ع_{ن-۱}\text{لا} + ع_{ن} = ۰$$

لا کی جگہہ $\frac{۱}{ص}$ رکھو اور $ص^{ن}$ مین ضرب دو اور $ع_{ن}$ پر تقسیم کرو تو بدلی ہوئی مساوات یہہ حاصل ہوگی کہ

$$ص^{ن} + \frac{ع_{ن-۱}}{ع_{ن}} ص^{ن-۱} + \cdots + \frac{ع_{۲}}{ع_{ن}} ص^{۲} + \frac{ع_{۱}}{ع_{ن}} ص + \frac{۱}{ع_{ن}} = ۰$$

اب دفعات گذشتہ مین سے کسی ایک دفعہ کی موافق اعلی حدغائی اس مساوات کی دریافت کرو اور اوسکو سی تعبیر کرو تو اسکی ادنی حدغائی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی ہوگی اب فرض کرو کہ ہم دفعہ ۸۷ کی موافق اعلی حدغائی دریافت کرتی ہین اور $\frac{ع_ے}{ع_ق}$ کو سب سے بڑا امثال منفی تعداداً بدلی ہوئی مساوات مین مانتی ہین تو ا - $\frac{ع_ے}{ع_ق}$

اعلی حدغائی بدلی ہوئی مساوات کی مثبت قیمتون کی ہوگی اور اسیواسطی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی ادنی حدغائی $\frac{ع_ن}{ع_ن - ع}$ ہے

یہان $ع_ن$ واقعی تعداد اُسب سے بڑا امثال مساوات مفروضہ مین ہی جو $ع_ں$ سے علامت مین اختلاف رکھتا ہے

مثلاً دفعہ ۹۱ مین $ع_ن$ = - ۱۸ اور $ع_ر$ = ۵۶ پس $\frac{۱۸}{۵۶-۱۸}$ = $\frac{۱۸}{۳۸}$ یعنی

یعنی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی حدغائی $\frac{۱۸}{۳۸}$ ہے

(۹۴) مساوات ج (لا) = ۰ کی منفی قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو لا کی جگہہ - ے لکھو اور اسطرح جو بدلی ہوئی مساوات حاصل ہو اوسکی مثبت قیمتون کی حدود غائی دریافت کرو تو یہہ حدود غائی جنکی علامتین بدلی ہوئی ہین مساوات مفروضہ کی منفی قیمتون کی حدود غائی ہونگین مثلاً مساوات

$$لا^۵ - ۷ لا^۴ - ۱۵ لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۴ لا + ۴۸ = ۰$$

مین - ے کو بجای لا کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ے^۵ + ۷ ے^۴ - ۱۵ ے^۳ - ۳ ے^۲ + ۴ ے - ۴۸ = ۰$$

بموجب دفعہ ۹۱ کے $\frac{۴۸}{۱+۷+۴}$ + ۱ یعنی ۵ اعلی حدغائی مثبت قیمتون کی ہی اور بموجب دفعہ ۹۳ کے $\frac{۴۸}{۴۸+۷+۱}$ ادنی حدغائی منفی قیمتون کی ہی پس مساوات مفروضہ کی قیمت منفیہ درمیان - ۵ اور - $\frac{۴۸}{۵۵}$ کے واقع ہونگین

(۹۵) اب ہم ایک اور ترکیب مساوات کی مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی کی دریافت کرنے کی لکھتی ہیں اور اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہیں

فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی جسپر ہم اب بحث کرتی ہیں لا کی جگہہ ھہ + ء لکھو اور ج (ھہ + ء) کو بموجب دفعہ ۱۲ کی پھیلاؤ تو مساوات کی صورت یہہ ہو جائیگی کہ

ج (ھہ) + ءحَ (ھہ) + $\frac{ء^۲}{۲}$ حَ‘ (ھہ) + ... + $\frac{ء^ن}{ن}$ حَ^ن (ھہ) = ۰

اب فرض کرو کہ ھہ مثبت ہی اور اوسکی قیمت ایسی ہی کہ ج (ھہ) اور حَ (ھہ) اور حَ‘ (ھہ) ... حَ^ن (ھہ) سب مثبت ہین تو ء کی کوئی مثبت قیمت اوپر کی مساوات کی شرایط کو پورا نہین کریگی لیکن ء = لا - ھہ چونکہ ء مثبت نہین ہوسکتا تو لا بڑا ھہ سے نہین ہوسکتا پس ھہ ایک اعلیٰ حد غائی مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی ہی پس اگر مساوات مفروضہ اپنی سادی صورت مین حَ^ن (ھہ) ہی تو ضرور مثبت ہوگی اور برابر ل ہوگی

(۹۶) مثلاً یہہ مساوات لو کہ

لا^۵ + لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۶ لا^۲ - ۰۰۷ لا + ۰۰۵ = ۰

یہان ج (ھہ) = ھہ^۵ + ھہ^۴ - ۴ ھہ^۳ - ۶ ھہ^۲ + ۰۰۷ ھہ + ۰۰۵

حَ (ھہ) = ۵ ھہ^۴ + ۴ ھہ^۳ - ۱۲ ھہ^۲ - ۱۲ ھہ + ۰۰۷

$\frac{۱}{۲}$ حَ‘ (ھہ) = ۱۰ ھہ^۳ + ۶ ھہ^۲ - ۱۲ ھہ - ۶

$\frac{۱}{۳}$ حَ‘‘ (ھہ) = ۱۰ ھہ^۲ + ۴ ھہ - ۴

$\frac{۱}{۴}$ حَ‘‘‘ (ھہ) = ۵ ھہ + ۱

اب اسمین آسانی ہی کہ اخر جملہ ھہ سی شروع کرین اور باقاعدہ اگے بڑہین کوئی سی مثبت قیمت ھہ کی حَ‘‘‘ (ھہ) کو مثبت بناتی ہی ھہ = ۱ کے حَ‘‘ (ھہ) کو مثبت بناتی ہے ھہ = ۲ کے حَ‘ (ھہ) کو مثبت بناتی ہی اور ھہ = ۴ کے حَ (ھہ) کو مثبت بناتی ہے اور ھہ = ۵ کے ج (ھہ) کو مثبت بناتی ہی تو اسی یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ھہ = ۵

سب حصہ کے جملون کو مثبت بناتی ہی اسواسطے مساوات مفروضہ کی مثبت جملون کی اعلی حد غائی حصہ ہے
اس بات پر بھی غور کرنی چاہئی کہ جس ترکیب کے موافق ہم آخر جملہ سی چلتی ہین اور حصہ کی قیمت مناسب
اوپر کی جملون مین بڑہاتی جاتی ہین اوسمین بہہ کچھہ ضرر نہین کہ ہم نحی کی جملون کو جنکی علامت کا پہلی فیصلہ
ہوچکا ہی اونکو دوبارہ پہر اس قیمت حصہ کی موافق جانچین مثلاً فرض کرو کہ ہم نی یہہ تحقیق کرلیا ہے کہ
حصہ کی خاص قیمت ا تمام جملون کو ح″ (لا) تک مثبت بناتی ہی تو حصہ کی کوئی بڑی قیمت رکہو مثلاً
ا + ب تو اس سبب سے کہ

ح″ (ا + ب) = ح″ (ا) + ب ح‴ (ا) + $\frac{ب^2}{2 \times 1}$ ح⁴ (ا) + . . .

مین تمام رقمین دائین طرف مثبت بموجب فرض کی ہین تو ح″ (ا + ب) بہی مثبت ہی پس مثال گذشتہ
مین جب یہہ دریافت ہوگیا کہ حصہ = ہ کی ح (حصہ) کو مثبت کرتا ہی تو اسکی اب ضرورت نہین رہی کہ
ہم اور جملون کو بہی دریافت کرین کہ وہ مثبت بناتا ہی یا نہین کیونکہ اس ترکیب ہی سی ہم کو یقین ہوجاتا ہے
کہ وہ مثبت بناتا ہے

(۹۷) اب ہم نی یہہ بیان کردیا کہ مساوات کی تمام مثبت حقیقی قیمتون کی حدود غائی کسطرح
اور مساوات کی تمام منفی حقیقی قیمتون کی حدود غائی کیونکر دریافت کرتی ہین اب ہم بعض مسائل
لکہتی ہین جنسی کہ مقام قیمتون کا جو مفرداً یا مجموعتاً لیجائین معلوم ہوگا پوری تحقیقات اس مضمون
کی سٹرم کے ضابطہ مین اگی لکہی ہے

(۹۸) اگر ہم ح (لا) مین لا کی جگہہ متواتر دو مقدارین مندرج کرین اور ان مقدارون کے درمیان مساوات
ح (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو واقع ہون تو ہم کو نتایج مختلف العلامت حاصل ہونگی
اور اگر ہم ح (لا) مین لا کی جگہہ متواتر دو مقدارین مندرج کرین جنکی درمیان مساوات ح (لا) = ۰
کی کوئی قیمت نہ واقع ہو اور جو واقع ہون تو اونکا شمار جفت ہو تو نتایج متحد العلامت حاصل ہونگے
فرض کرو کہ لر اور لو دو مقدارین ہون جنمین کہ بڑا ہو اور ا و ب و ح . . . ک تمام حقیقی قیمتین
مساوات ح (لا) = ۰ کی ہون جو درمیان لر اور لو کی واقع ہین تو بموجب دفعہ ۴۳ کی یہہ حاصل ہوگا کہ

ج(لا) = (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) . . . (لا-ک) مر (لا)

اسمین مر لا ایک جملہ ایسا ہی جو اجزاء ضربی درجہ دوم کی حاصل ضرب سی بنا ہی جو کبھی اپنی علامت نہین بدلتی یا اصلی اجزاء ضربی سی جو اپنی علامت کبھی ایسی حالت مین نہین بدلتی کہ لا درمیان لر اور لو کے واقع ہو

لر اور لو کو بجائی لا کے متواتر رکھو تو

ج (لر) = (لر-ا) (لر-ب) (لر-س) . . . (لر-ک) مر (لر)

ح (لو) = (لو-ا) (لو-ب) (لو-س) . . . (لو-ک) مر (لو)

اب تمام اجزاء ضربی لر-ا اور لر-ب اور لر-ح . . . لر-ک مثبت ہین اور تمام اجزاء ضربی لو-ا اور لو-ب اور لو-ح . . . لو-ک منفی ہین اور مر (لر) اور مر (لو) کی ایک ہی علامت ہی اسلیے ح (لو) اور ح (لو) متحد العلامت ہونگے اگر ا و ب و ح . . . ک قیمتون کا شمار جفت ہو اور مختلف العلامت ہونگی اگر قیمتون کا شمار طاق ہو

(۹۹) اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی دو مقدار متواتر رکھین اور اونسی نتایج مختلف العلامت پیدا ہون تو ان دو مقدارون کی درمیان مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو واقع ہونگین اور اگر اونسی نتایج متحد العلامت پیدا ہون تو ان دو مقدارون کے درمیان مساوات مذکور کی کوئی قیمت نہین واقع ہوگی یا تہی قیمتین واقع ہونگین جنکا شمار جفت ہو

اس نتیجہ کی خاص صورت دفعہ ۱۹ کا نتیجہ ہے

(۱۰۰) اس بات پر بھی خیال کرنا چاہئی کہ دفعہ ۹۸ کے اثبات مین یہ ضرور نہین ہے کہ قیمت ا و ب و ج . . . ک سب غیر مساوی ہون اس بات کو یاد رکھنا چاہئی کہ جو قیمت م دفعہ آتی ہو اوسکو م قیمتین شمار کرتے ہین

ہم لکھہ آئی ہین کہ اگر ح (لر) اور ح (لو) متحد العلامت ہون تو مساوات ح (لا) = ۰ کی کیا تو کوئی قیمت درمیان لر اور لو کے نہین واقع ہوگی یا واقع ہونگین تو اونکا شمار جفت ہوگا

اس باب کے اوپر کی دفعات میں بعض اوقات ہم اس قسم کی دلیل کو کام میں لائی ہین کہ لو ایکوئی اور بڑی اوسی قیمت لا کی ج (لا) کو مثبت بناتی ہی اسواسطے مساوات ج (لا) = ۰ کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی لو ہی اس بابکے خوبخیال میں کہنا چاہیے کہ جہان ہم نی یہہ لکہا ہی کہ ج (لا) کو مثبت بناتی ہی تو اوسی مطلب ہمارا یہہ ہی کہ ج (لا) کو مثبت مقدار بناتی ہی اوسکو صفر نہین بناتی مثلاً اگر ج (لا) = (لا-۴)² (لا-۱) مین لا بڑا بہ نسبت واحد کی ہو تو ج (لا) منفی نہین ہونے کا لیکن اسی یہہ نتیجہ نہین نکالنا چاہئی کہ واحد اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اسواسطے کہ ۴ ایک قیمت موجود ہے پس اگر ہم کو صرف یہہ معلوم ہو کہ کوئی قیمت لا کی بڑی بہ نسبت لو کی ح (لا) کو منفی نہین بنا سکتی تو اوسی یہہ نتیجہ نہین نکالنا چاہئی کہ لو سی کوئی بڑی قیمت نہین ہی مگر اوسی یہہ نتیجہ نکالنا چاہئی کہ کیا تو کوئی قیمت نہین اور اگر کوئی ایک قیمت یا کئی قیمتین ہین تو وہ جفت مرتبہ مکرر ائی ہین

(۱۰۱) اب ہم ایک بڑا مسئلہ یہہ لکہتی ہین کہ مساوات ج (لا) = ۰ اور حَ (لا) = ۰ کی قیمتون مین کیا ارتباطات ہین یہان حَ (لا) اول جملہ مشتقہ ج (لا) کا ہی اس مسئلہ کو کبھی **رول** کا ضابطہ بہی کہتی ہین کیونکہ سب سے پہلی اس مسئلہ کا وجد تہا

(۱۰۲) مساوات حَ (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی دو متصل کی حقیقی قیمتون کے درمیان واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتین بلحاظ مقدار کی بہ ترتیب تصاعیدی جبر مقابلہ کے موافق لکہی گئی ہین اور ا و ب وس ۰۰ ک سی تعبیر ہوتی ہین اور فرض کرو کہ سر (لا) حاصل ضرب بہ دوم کی اجزا ضربی کا موافق خیالی قیمتون مساوات ج (لا) = ۰ کے ایسا ہے کہ سر (لا) اپنی علامت نہین بدل سکتا پس بموجب دفعہ ۴۳ کے

ح (لا) = (لا-ا) (لا-ب) (لا-س) ۰۰۰ (لا-ک) سر (لا)

اس مطابقہ مین لا کی جگہہ ء + ی رکہو تو

ج (ء+ی) = (ء+ی-ا) (ء+ی-ب) ۰۰ (ء+ی-ک) سر (ء+ی)

اب فرض کرو کہ اس متطابقہ کی ہر رکن کی صورت مفصلہ قوا منصاعدہ مین لکھی جای تو امثال ی سے دائین طرف حَ (ی) ہوگا دفعہ ۱۲ کو دیکھو اور امثال ی کی مابین طرف

[(ی-ب)(ی-س)..(ی-ک)+(ی-ب)(ی-س)..(ی-ک)+..] سرا (ی)

+ (ی-ا)(ی-ب)(ی-س)..(ی-ک) سرا (ی)

ہوگا ان حَ کی امثال کو برابر لکھو اور ی کو لا سے بدل کر متطابقہ مین لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

حَ (لا) = [(لا-ب)(لا-س)..(لا-ک)+(لا-ا)(لا-س)-(لا-ک)] سرا لا

+ (لا-ا)(لا-ب)(لا-س)..(لا-ک) سرا لا

اب متواتر ا د ب و س.. ک کو لا کی جگہ رکھو تو اخیر رقم متطابقہ کی مابین طرف کی ہر صورت مین معدوم ہوجائیگی اور اسیواسطے علامتین ح (ا) اور ح (ب) اور ح (س)

.. ح (ک) کی وہی علامتین ہین جو (ا-ب)(ا-س)...(ا-ک) و (ب-ا)(ب-س)...(ب-ک)

.. (ک-ا)(ک-ب)(ک-س)... اور یہہ علامتین علی التبادل مثبت اور منفی ہین یعنی ایک مثبت دوسری منفی پھر تیسری مثبت اور جو تہی منفی اور علی ہذا القیاس اسواسطے کہ اول جملہ کا کوئی جز ضربی منفی نہین ہی اور دوسری جملہ کا ایک جز ضربی منفی ہی اور تیسری جملہ مین دو اجزا ضربی منفی ہین اور علی ہذا القیاس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۹۹ کی مساوات حَ (لا) = ۰ کی قیمتین جنکا شمار طاق ہو مساوات ج (لا) = ۰ کے متصل کی قیمتون کے درمیان واقع ہین (۱۰۳) دفعہ گذشتہ مین قیمتین ا و ب و س.. ک سب کے سب باہم غیر متساوی ہین اب فرض کرو کہ قیمت ا مکرر ر دفعہ اور قیمت ب مکرر ص دفعہ اور قیمت س مکرر ط دفعہ اور علی ہذا القیاس مع

تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ج (لا) = (لا-ا)^ر (لا-ب)^ص (لا-س)^ط .. سرا (لا)

حَ (لا) = سرا (لا) [ر (لا-ا)^(ر-۱) (لا-ب)^ص (لا-س)^ط ... + ص (لا-ا)^ر (لا-ب)^(ص-۱) (لا-س)^ط + ...

+ (لا-ط)^ح (لا-ب)^ص (لا-س)^ط .. سرا (لا)

فرض کرو ح (لا) وقت اعظم ح (لا) اور ح (لا) کا یعنی یہہ فرض کرو کہ

ح (لا) = (لا - ا)^ر (لا - ب)^ص (لا - س)^ط . . .

تو $\frac{ح_1 (لا)}{ح (لا)}$ = سر (لا) [ر (لا - ب) (لا - س) . . . + ص (لا - ا) (لا - س) . . . + . . .

+ (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) . . سر (لا)

اس جملہ کو ح (لا) سے تحریر کرو تو موافق سابق کی یہہ تحقیق ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمتیں جنکا شمار طاق ہو ا اور ب کی درمیان اور دوسری قیمتیں جنکا شمار طاق ہو ب اور س کی درمیان اور علی ہذا القیاس واقع ہین اور چونکہ ح (لا) = ح (لا) ح (لا) ہم کو حاصل ہی تو جسوقت ح (لا) معدوم ہوگا تو ح (لا) بہی معدوم ہوگا پس مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین جنکی تعداد طاق ہو مساوات ح (لا) = ۰ کی ہر دو متصل کی غیر مساوی قیمتون کی درمیان واقع ہین

مساوات ح (لا) = ۰ کی مساوی قیمتون کی نسبت ہم یہہ جانتے ہین کہ قیمت ا جو ر دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین ائی ہی ر - ۱ دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین ائی ہی اور علی ہذا القیاس اور قیمت ب جو ص دفعہ مکرر مساوات ح (لا) = ۰ مین ائی ہی ص - ۱ دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین مکرر ائی ہے اور علی ہذا القیاس

اسمین بڑی آسانی ہوگی کہ ہم یون خیال کرین کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا کی برابر جو قیمتین ہون اوسمین ر - ۱ یون ایسی ہوتی ہین کہ اونمین سی ہر یک مین ح (لا) = ۰ کی قیمت ا کی مکرر واقع ہوتی ہی اور یہی کیفیت اور مکررہ قیمتون کی ہی پس اس خیال سی ہم کو یقین واثق ہوجائیگا کہ ۱۰۲ کا دعوی عام ہی خواہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین برابر ہون یا نا برابر

(۱۰۴) مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی کوئی سی دو متصل کی قیمتون کے درمیان نہین واقع ہوسکتین اسواسطی کہ اگر ایک قیمت سی زیادہ قیمتین واقع ہون تو ایک قیمت یا کئی قیمتین مساوات ح (لا) کی اونکی درمیان واقع ہونگین تو مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین جو بموجب فرض کے متصلہ تہین متصلہ نہ رہین

اور ایسی ہی مساوات ح (لا) = ۰ کی سب سی بڑی قیمت سی بڑھی قیمت مساوات ح (لا) = ۰
کی ایک ہی ہوسکتی ہی اور مساوات ح (لا) = ۰ کی سب سے چھوٹی قیمت سی چھوٹی قیمتیں بہت سی ہوسکتی ہیں
(۱۰۵) اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی سب قیمتیں حقیقی ہوں تو مساوات ح (لا) = ۰ کی بھی سب قیمتیں
حقیقی ہونگیں اسواسطے کہ دوسرے مساوات پہلی مساوات سی درجہ من ایک کم ہے اور
ہر یک قیمت دوسری مساوات کی پہلی مساوات کی دو متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہی اور
علی العموم اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) کی یقینی م - ۱
حقیقی قیمتیں ہونگیں اور اسی زیادہ بھی قیمتیں ہوسکتی ہیں
(۱۰۶) چونکہ ح' (لا) اول جملہ مشتقہ ح (لا) کا ہی تو مساوات ح' (لا) = ۰ کی قیمتیں جنکا شمار
طاق ہو وہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ہر دو متصل کی قیمتوں کی درمیان واقع ہونگیں پس اگر
مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۱ حقیقی قیمتیں
اور مساوات ح' (لا) = ۰ کی کم از کم م - ۲ حقیقی قیمتیں ہونگیں اسی طریقہ کے مراعت سی یہہ نتیجہ
حاصل ہوتا ہے کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی م حقیقی قیمتیں ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی کم از کم
۱ - ر حقیقی قیمتیں ہونگیں

اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی تو خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات ح (لا) = ۰ کی کم از کم
تو خیالی قیمتیں ہونگیں اسواسطے کہ اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی تو خیالی قیمتوں سی کم قیمتیں ہوں تو
اوسکی ن - لو حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ہونگیں ن درجہ مساوات کا ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی
ن - لو - ر حقیقی قیمتوں سی زیادہ قیمتیں ہونگیں اور چونکہ یہہ مساوات ن - ر درجہ کی
اسلئے اوسکی لو قیمتیں خیالی نہیں ہوسکتیں اور یہہ خلاف فرض کے ہے
مثلاً فرض کرو کہ ح (لا) = لا^ن (۱ - لا)^ن

مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام اصلی قیمتیں ہیں یعنی ان برابر صفر کے ہی یا برابر اکی ہی اسی معلوم ہوا
کہ مساوات ح' (لا) = ۰ کی تمام ن اصلی قیمتیں درمیان ۰ اور اکی واقع ہونگیں اور یہہ مساوات یہہ ہے کہ

$$= ۱ - \frac{ن}{۱} \frac{ن+۱}{۱} لا + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲} \frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۱ \times ۲} لا^۲ - \dots \dots$$

(۱۰۷) اگر مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام حقیقی قیمتیں معلوم ہون تو مساوات ح (لا) = ۰ کی نسبت یہہ تحقیق کرسکتے ہین کہ اوسکی اصلی قیمتین کتنی ہین فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین سہ وصہ ولر ۰ ۰ ۰ کر بہ ترتیب تنازلی بلحاظ مقدار کی جبر مقابلہ مین مرتب کیجائین اور ح (لا) مین لا کی جگہہ سہ وصہ دلر ۰ ۰ کو متواتر رکھو اور جو نتایج حاصل ہون اونکی علامتون پر خیال کرو اگر نتایج مختلف العلامت ہونگی تو مساوات ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت ان قیمتون مین سی دو متصل کی قیمتون مین واقع ہونگین اور اگر متحد العلامت ہونگی تو کوئی قیمت دو متصل کی قیمتون کے درمیان نہین واقع ہونگین دفعات ۱۹۸ اور ۱۰۴ کے دیکھو

مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت بڑی جبر مقابلہ مین بہ نسبت سہ کی ہوگی اگر (سہ) منفی ہو اور کوئی قیمت بڑی نہ ہوگی تو ح (سہ) مثبت ہوگا اور اگر مساوات جفت درجہ کی ہو اور ح (کر) منفی ہو تو جبر مقابلہ مین مساوات کی ایک قیمت کم بہ نسبت کر کی ہوگی یا اگر مساوات طاق درجہ کی ہو اور ح (کر) مثبت ہو اور یہہ بات کسی اور طرح سی نہین ہوگی دفعات ۱۹۸ اور ۱۰۴ کی دیکھو

اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) مین بجای لا کی متواتر + ∞ وسہ وصہ ولر ۰ ۰ کرو - ∞ کو رکھنی سی جو سلسلہ پیدا ہو کا اوسمین جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی اوتنی ہی مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کا شمار ہوگا لیکن اگر ح (لا) مین ان قیمتون کی رکھنی سی ح (لا) معدوم ہو جائیگا تو اوسی یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہونگین اور تعداد اونکی باب ششم سی دریافت ہو سکتی ہے

(۱۰۸) تمثیلاً اس بات کو تحقیقات کرتی ہین کہ مساوات لا^۳ - ن لا + ر = ۰ کی تمام قیمتون کی ممکن ہونی کی لئی کیا شرایط ہوتی چاہئین

ق کو مثبت مقدار فرض کرو یہان ح (لا) = ۳ لا^۲ - ق تو مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین $\pm \sqrt{\frac{ق}{۳}}$ ہین اور فرض کرو کہ سہ = $+ \sqrt{\frac{ق}{۳}}$ اور صہ = $- \sqrt{\frac{ق}{۳}}$

تو ح (سہ) = $+ (\frac{ق}{۳})^{\frac{۳}{۲}} - ق (\frac{ق}{۳})^{\frac{۱}{۲}} + ر$ = $- ۲ (\frac{ق}{۳})^{\frac{۳}{۲}} + ر$

ح (صہ) = $-(\frac{ق}{ب})^{\frac{3}{2}} + ق(\frac{ق}{ب})^{\frac{3}{2}} + ر = ۲(\frac{ق}{ب})^{\frac{3}{2}} + ر$

اول فرض کروکہ $(\frac{ر}{ب})^{۲}$ بڑا $(\frac{ق}{ب})^{۳}$ سی ہو پس اگر مثبت ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو مثبت ہونگی اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی اور وہ جبر مقابلہ میں چھوٹی بہ نسبت صہ کی ہوگی اور اگر منفی ہو تو ح (سہ) اور ح (صہ) دونو منفی ہونگے اور مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی جو سہ سی بڑی ہوگی

اب فرض کروکہ $(\frac{ر}{ب})^{۲}$ چھوٹا $(\frac{ق}{ب})^{۳}$ سی ہو تو ح (سہ) منفی ہی اور ح (صہ) مثبت ہی اور مساوات ح (لا) = ۰ میں تینوں حقیقی قیمتیں ہیں یعنی ایک بڑی سہ سی اور ایک سہ اور صہ کے درمیان اور ایک چھوٹی صہ سی جبر مقابلہ میں

(۱۰۹) مساوات کی حقیقی قیمتوں کے مقام دریافت کرنی کی ترکیب وارنگ صاحب نی اول ایجاد کی اور لاگرانج نی اوسمیں پھر دوبارہ جان ڈالی اوسکو قیمتوں کے علیحدہ کرنی کی ترکیب وارنگ صاحب کی کہتی ہیں فرض کروکہ ہم کو مساوات کی برابر قیمتیں معلوم ہوگئیں ہیں اور ہم نی اوسکی موافق جو اجزا ضربی تھے اونکو مساوات سی خارج کردیا ہی اور ایسی مساوات حاصل کرلی ہی کہ اوسکی قیمتیں غیر مساوی ہیں اور اب اسی مساوات پر بحث ہی اور اوسکو مساوات ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرتی ہیں فرض کروکہ ک ایک مقدار ہو جو ہر دو قیمتوں کی تفاوت سی کم ہی اور ص اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہی اب ح (لا) میں بجائے لا کے ص و ص - ک و ص - ۲ ک و ص - ۳ ک . . . رکھو اور یہہ نوبت اوس مقدار تک پہونچاؤ جو الجرا میں مساوات کی سب سے چھوٹی قیمت سی بھی چھوٹی قیمت ہو اور جو نتایج حاصل ہوں اونکی سلسلہ کی علامتوں پر نظر ڈالو پس جب ایک تغیر علامت واقع ہوگا تو جو دو قیمتوں کے رکھنی سی یہہ تغیر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان ایک قیمت مساوات کی ہوگی اور جب ایک تواتر علامت واقع ہوگا تو جن دو قیمتوں کی رکھنی سی یہہ تواتر پیدا ہوا ہی اونکی درمیان کوئی قیمت مساوات کی نہیں ہوگی

اب ہم کو اس بات پر توجہ کرنی چاہیئے کہ ک کو کسطرح تحقیق کرتی ہیں فرض کروکہ ایک مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتوں کی تفاوت کی مجذور کی برابر ہوں اور اس مساوات

کی مثبت قیمتون کی ادنی حد غائی دریافت ہوئی ہی اوسکو درسی لغیر کرو تو ۱ قریب قیمت مناسب کی ہوگی
دفعہ ۶۰ مین ہم نی ایک مثال لکھی ہی کہ کسطرح ایک مساوات بنتی ہی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کے
قیمتون کے تفاوت کی مجذور کی برابر ہوتی ہین اور اس مثال پر کیا موقوف ہی ہم علی العموم آیندہ اوسپر
بحث کرینگے وارنگ صاحب کی ترکیب ایسی پیچیدہ ہی کہ وہ تیسرے درجہ کی مساوات سی زیادہ درجہ
کی مساوات مین عمل مین لانی سی کچھہ فائدہ نہین دیتی اونسی نتیجی پیچ در پیچ پیدا ہوتی ہین کہ اونکا
کھولنا دشوار ہی غرض یہہ ترکیب عملیات مین تو کسی کام کی نہین مگر نظریات مین اوسے مطلب حاصل ہو جاتا ہے

(۱۱۰) تمثیلاً وارنگ صاحب کے ترکیب کے لئی یہہ مساوات

$$لا^۳ - ۳لا^۲ - ۴لا + ۱۳ = ۰ \quad لو$$

بموجب دفعہ ۶۰ کی وہ مساوات جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی تفاوت کی مجذور ہون یہہ ہے

$$ی^۳ - ۴۲ی^۲ + ۴۴۱ی - ۴۹ = ۰$$

ی کی جگہہ $\frac{۱}{ی}$ رکھو تو $۴۹ی^۳ - ۴۱ی^۲ + ۴۲ی - ۱ = ۰$

یعنی $۴۹ی^۲ (ی - ۹) + ۴۲ (ی - \frac{۱}{۴۲}) = ۰$

اب ۹ اعلی حد غائی ی کی قیمتون کی ہی اسیواسطے ادنی حد غائی $\frac{۱}{۹}$ ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ $\sqrt{\frac{۱}{۹}}$ یعنی $\frac{۱}{۳}$ مساوات مفروضہ کی ہر دو قیمتون کے تفاوت سی کم ہے

اسی بموجب دفعہ ۸۷ کی مساوات مفروضہ کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی ۴ + ایعنی ۵ ہی اور بموجب دفعات ۹۴ و ۹۹ کے
مساوات مفروضہ کی منفی قیمتون کی اعلی حد غائی تعداداً

۱ + $\sqrt{۴}$) ہی پس مساوات مفروضہ کی تمام قیمتین ۵ اور - ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہین

اب لا کی قیمتین ۵ اور ۵ - $\frac{۱}{۳}$ اور ۵ - $\frac{۲}{۳}$

متواتر رکھنی سی یہہ دریافت ہوگا کہ ایک قیمت ۳ اور ۲$\frac{۲}{۳}$ کی درمیان اور ایک قیمت ۲$\frac{۲}{۳}$ اور ۲$\frac{۱}{۳}$ کی
درمیان اور ایک قیمت - ۲ اور - ۲$\frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع ہوگی

(۱۱۱) اب ہم اس باب کو ایک دعوی پر ختم کرتی ہین اور یہہ دعوی ان اصول کی ایک مثال ہی جو ابھی ہم نی ثابت کی ہین

مساوات ح (لا) = ۰ مین جسمین

ح (لا) = ع لا^ن + ع لا^{ن-۱} + ... + لا - ر

مین اگر ق کی عددی قیمت تعداد سب سے بڑا سر ہو اور رمثبت اور $\frac{۱}{۲+۴ق}$ سی کم ہو تو ایک حقیقی قیمت ۲ ر سی چھوٹی ہوگی

جب لا صفر ہو تو ح (لا) منفی ہی تو لا کی مثبت قیمت ح (لا) کو مثبت بنائینگی اور بدرجہ اولی مثبت بنائینگے اگر وہ

لا - ر - ق (لا^ن + لا^{ن-۱} + ... + لا^۳ + لا^۲)

کو مثبت بنائینگے یعنی اگر وہ لا - ر - ق لا^۲ $\frac{۱-لا^{ن-۱}}{۱-لا}$ کو مثبت بنائینگے

اسی معلوم ہوا کہ اگر لا بہ نسبت واحد کی کم ہو اور (۱-لا) (لا-ر) - ق لا^۲ مثبت ہو تو ح (لا) بدرجہ اولی مثبت ہوگا اب لا کی جگہ ۲ ر اخر جملہ مین رکھو تو وہ ر [۱-۲ر-۴ق ر] ہو جائیگا اور یہہ مثبت ہی کیونکہ بموجب فرض کی ر (۲+۴ق) چھوٹا بہ نسبت واحد کی ہی پس ح (لا) مثبت ہی جب لا = ۲ ر ہو اور ح (لا) منفی ہی جب لا = ۰ اسیواسطے مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور ۲ ر کے درمیان واقع ہوتی ہے

اسیطرح اگر اخر رقم ر بجای - ر کے ہو اور رمثبت ہو اور چھوٹا $\frac{۱}{۲+۴ق}$ سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۰ اور - ۲ ر کے درمیان واقع ہوگی

اٹھوان باب قیمتین محدود اور ناطق

(۱۱۲) قیمت ناطق اور محدود سی مراد اوس قیمت سی ہی جو ایک محدود صورت مین بیان ہو سکے خواہ صحیح ہو یا کسر ہو اور اوسمین مقادیر اصم نہ ہون اب ہم یہہ بتلائینگے کہ مساوات کی ہمشال جب اعداد ناطق ہون خواہ صحیح یا کسر تو ناطق اور محدود قیمتین مساوات کی اسانی سی دریافت ہو سکتی ہین

دفعہ ۵۳ مین ہم نے بیان کیا ہی کہ اگر مساوات کی ہمشال ناطقہ ہون اور سب صحیح نہ ہون تو اوس مساوات کی ہیئت بدل کر ایک ایسی مساوات بنا سکتے ہین کہ جسکی سب ہمشال صحیح ہون

اور امثال اول رقم کا واحد ہو اسواسطے ہم اب اس اخیر الذکر مساوات پر بحث کرینگے اور اول ہم بتلائینگے کہ مساوات اوس صورت کی قیمتین مکسور ناطقہ نہین رکھینگی

(۱۱۳) اگر مساوات کی امثال تمام اعداد صحیح ہون اور اوسکی اول رقم کا امثال واحد ہو تو مساوات کی کوئی قیمت مکسور ناطقہ نہین ہوسکتی

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \dots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن = ٠$$

اور اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ قیمت مکسور ناطقہ مختصر الحدین $\frac{ا}{ب}$ ہی اور اسکو لا کی جگہ مساوات مین رکھو اور سب کو $ب^{ن-1}$ مین ضرب دو تو ٠

$$ا^ن + ع_1 ا^{ن-1} ب + ع_2 ا^{ن-2} ب^2 + \dots + ع_{ن-2} ا^2 ب^{ن-2} + ع_{ن-1} ا ب^{ن-1} + ع_ن ب^ن = ٠$$

اور اسیواسطے $-\frac{ا^ن}{ب^ن} = ع_1 ا^{ن-1} + ع_2 ا^{ن-2} ب + \dots + ع_{ن-2} ا^2 ب^{ن-3} + ع_{ن-1} ا ب^{ن-2} + ع_ن ب^{ن-1}$

اب اخیر نتیجہ ناممکن ہی اسواسطے کہ بائین طرف کا رکن توصیح مقدار ہی اور دائین طرف کا رکن صحیح مقدار نہین ہی اسواسطے مساوات مفروضہ کی قیمت کسر نہین ہوسکتی

(۱۱۴) اسی معلوم ہوا کہ فقط ہم کو تحقیقات اون قیمتون کی کرنی چاہی جو محدد اور ناطقہ اور صحیحہ ہو اور اب ہم ترکیب اوسکی دریافت کرنی کی بیان کرتی ہین اس ترکیب بعض اوقات ترکیب معصوم علیہ السلام کی کہتی ہین اور بعض اوقات اوسکو نیوٹن صاحب کی ترکیب کہتی ہین

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + ع_2 لا^{ن-2} + \dots + ع_{ن-2} لا^2 + ع_{ن-1} لا + ع_ن = ٠$$ ہو

اور ا ایک صحیح قیمت ہی اس قیمت کی مندرج کرنی سی اور ارقام کو بہ ترتیب معکوس لکھنی سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ع_ن + ع_{ن-1} ا + ع_{ن-2} ا^2 + \dots + ع_2 ا^{ن-2} + ع_1 ا^{ن-1} + ا^ن = ٠$$

اسواسطے ا پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{ع_{ن}}{ا_{ن}} + ع_{ن-۱} + ع_{ن-۲} ا + \cdots + ع_{۲} ا_{ن-۳} + ع_{۱} ا_{ن-۲} + ا_{ن-۱} = ۰$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{ع_{ن}}{ا_{ن}}$ ایک صحیح عدد ہوا و سکو ق سی تعبیر کرو اور اسکو ا پر تقسیم کرو تو

$$ق_{۱} + \frac{ع_{ن-۱}}{ا_{ن}} + ع_{ن-۲} + \cdots + ع_{۲} ا_{ن-۴} + ع_{۱} ا_{ن-۳} + ا_{ن-۲} = ۰$$

اسی معلوم ہوا کہ $ق_{۱} + \frac{ع_{ن-۱}}{ا_{ن}}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسکو ق۲ سی تعبیر کرو اور پھر ا پر تقسیم کرو تو $ق_{۱} + \frac{ع_{ن-۲}}{ا_{ن}}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہئی اسیطرح عمل کرنی سی ا پر ن دفعہ تقسیم کرنی سے اس نتیجہ پر نوبت پہونچیگی کہ $ق_{ن-۱} + \frac{ع_{۱}}{ا_{ن}} + ۱ = ۰$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ا کی ہونی کی واسطی بہ شرائط ضرور ہین کہ اخر رقم مساوات کی ا پر پوری تقسیم ہوتی ہو اور خارج قسمت پر جو اسطرح حاصل ہوا گرلا کا امثال زیادہ کیا جاے تو حاصل جمع بہی ا پر پورا تقسیم ہوا اور اسطرح جو خارج قسمت حاصل ہوا و ر لا کا سر جو مساوات مین ع زیادہ کرین تو حاصل جمع ایسا حاصل ہو کہ وہ ا پر پورا تقسیم ہوا اور اسیطرح عمل کئی جائین جب تک کہ ن - تقسیمون پر نوبت پہونچی اور خارج قسمت جو حاصل ہوا و سپر لا$^{ن-۱}$ کا سر زیادہ کرو تو حاصل جمع پورا ا پر تقسیم ہوا اور خارج قسمت - ۱ ہو

اگر ان تمام مراتب مین سی کسی مرتبہ پر شرط مطلوب ٹوٹ جاے تو جان لینا چاہئی کہ صحیح عدد ا قیمت مساوات کی نہین ہی

(۱۱۵) ہم نی دفعہ گذشتہ مین اون شرائط کو دریافت کیا ہی کہ جنکی موافق صحیح عدد ا مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت بنتا ہی اب یہہ بات آسانی سی دریافت ہوتی ہی کہ اگر ان شرائط مین سی اخر شرط پوری ہو تو صحیح عدد ا قیمت مساوات کی ہوگا اسواسطے کہ اخر شرط اسطرح تعبیر ہوتی ہی ؛

$$\frac{ع_{ن}}{ا_{ن}} + \frac{ع_{ن-۱}}{ا_{ن-۱}} + \frac{ع_{ن-۲}}{ا_{ن-۲}} + \cdots + \frac{ع_{۲}}{ا_{۲}} + \frac{ع_{۱}}{ا_{۱}} = -۱$$

اب اگر یہہ صحیح ہو تو ا^{ن} مین ضرب دینی سی مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ا کا ہونا ظاہر ہے مساوات کی تمام محدود اور ناطق قیمتون کی دریافت کرنی کی واسطی اخر رقم کے تمام پوری بانٹنی والی مقدارین دریافت کرین اور اس بات کو جانچین کہ وہ شرائط دفعہ ۱۱۴ کو پورا کرتی

ہین اس امتحان کی محنت کم ہو جائیگی اگر ہم اول مثبت اور منفی قیمتون کی حد غائی دریافت کرین
ان حدود غائی کی دریافت کرنی سی اون صحاح پر ازمایش کی ضرورت نہین رہیگی جو اون حدود غائی
سی باہر ہون فقط اونہین اعداد کی ازمایش کرنی پڑیگی جو ان حدود غائی کی درمیان واقع ہونگی
(۱۱۶) تمثیلاً اس مساوات کو لو کہ

$$لا^۵ + ۵لا^۴ + لا^۳ - ۱۶لا^۲ - ۲۰لا - ۱۶ = ۰$$

یہان بموجب دفعہ ۸۹ کی $۱ + ۳\sqrt{۲۰}$ اعلی حد غائی ہی اور لا کی جگہ - رکھنی سی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$ر^۴(ر - ۵) + ر^۳ + ۱۶ر(ر - \frac{۵}{۴}) + ۱۶ = ۰$$

اسمین ۵ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اسی معلوم ہوا کہ تمام مثبت قیمتین مساوات کی
۱۴ اور ۵ کی درمیان واقع ہوتی ہین اور ۱۶ کی پوری باٹنی والی صحاح ان حدود غائی کی درمیان
جو واقع ہین اب ان اعداد کا امتحان کرتی ہین کہ کونسی اونمین سی قیمتین ہین

۴	۲	۱	- ۱	- ۲	- ۴
- ۴	- ۸	+ ۱۶	- ۱۶	+ ۸	+ ۴
- ۲۴	- ۲۸	- ۳۶	- ۴	- ۱۲	- ۱۶
- ۶	- ۱۴	- ۳۶	+ ۴	+ ۶	+ ۴
- ۲۲	- ۳۰	- ۵۲	- ۱۲	- ۱۰	- ۱۲
	- ۵	- ۵۲	+ ۱۲	+ ۵	+ ۳
	- ۱۴	- ۵۱	+ ۱۳	+ ۶	+ ۴
	- ۷	- ۵۱	- ۱۳	- ۳	- ۱
	- ۲	- ۴۶	- ۸	+ ۲	+ ۴
	- ۱	- ۴۶	+ ۸	- ۱	- ۱

اول سطر مین وہ پوری باٹنی والی اخر رقم کی لکھی ہین جسکا امتحان منظور ہے
اور ہر یک باٹنی والی کی نیچی وہ نتایج لکھی ہین جو اوسکی امتحان سے پیدا ہوتی ہین مثلاً پورا باٹنی والا ۴ ہے
اخر رقم - ۱۶ کو ۴ پر تقسیم کرتی ہین اور خارج قسمت - ۴ کو اوسکی نیچی لکھتی ہین اب اسکو لا کی سر - ۲ پر
زیادہ کرتی ہین اور حاصل جمع - ۲۴ کو نیچی لکھتی ہین اب اسکو ۴ پر تقسیم کرنی سی - ۶ خارج قسمت نکلتا ہے

اسکو یہی لکھتی ہین اور اسپر سرلا کا - ۱۶ زیادہ کرتی ہین تو - ۲۲ حاصل ہوتی اور یہہ ۴ پر تقسیم نہین ہوتا اسی معلوم ہوا کہ ۴ قسمت نہین ہے ۱۲ اور - ۲ اور - ۴ کی موافق تمام شرایط پوری ہوتی ہین اسلئے یہی اعداد قسمتین مساوات کی ہین اور ۱ اور - ۱ سب سے پہلی شرط کو پورا نہین کرتے یعنی اخرخارج قسمت - انہین ہی اسواسطے یہہ اعداد قسمتین نہین ہین

پس مساوات مفروضہ کو ح (لا) = سی تعبیر کرین تو یہہ دریافت ہوگا کہ (لا - ۲) (لا + ۲) (لا + ۴) ایک جزضربی ح (لا) کا ہی اور اسی یہہ معلوم ہوگا کہ دوسرا جزضربی لا + لا + ۱ ہے

(۱۱۷) اکثر + ۱ اور - ۱ کو پوری باطنی والون مین نہین امتحان کرتے کیونکہ اونکا یہہ امتحان کرنا کہ وہ قسمتین ہین یا نہین اسطرح آسان ہی کہ اونکو لا کی جگہ مساوات معلوم مین رکھکر دیکھہ لین اگر کوئی قوت لا کی مساوات مفروضہ مین سی مفقود ہو تو اوسکی جگہ اوسی قوت کو لکھہ لو اور صفر اوسکا سر بنالو دفعہ ۵۸ دیکھو

جب اس ترکیب سے خاص اعداد اوب وس ... محدود اور ناطق قسمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہون تو یہہ تحقیق کرنا باقی رہا ہی کہ یہہ قسمتین مکرراتی ہین ح (لا) کو حاصل ضرب (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ..... پر تقسیم کرین اور اس خارج قسمت کو سر (لا) سی تعبیر کرتی ہین اور یہہ مساوات سر (لا) = ۰ پر اس ترکیب کو عمل مین لائین اسی طریقہ کے مراعت سی مساوات ح (لا) = ۰ کی مکررہ قسمتین دریافت ہوسکتی ہین اور یہہ معلوم ہوسکتا ہی کہ ہر ایک قسمت مکرر کتنی دفعہ آتی ہے

ح (لا) = ۰ کی مساوی قسمتون کی ازمایش باب چہارم سے ہوسکتی ہے

(۱۱۸) دفعہ ۱۱۴ مین جو مساوات لی گئی ہی اوسکی اول رقم کا سر واحد ہے اگر اس مساوات کی جگہ ایسی مساوات لین کہ جسمین کوئی سر صحیح ع. اول رقم کا ہو تو شرایط مستحصلہ مین فقط اخرخارج قسمت مین یہہ فرق پڑیگا کہ - ا کی جگہ - ع حاصل ہوگا مثلاً فرض کرو کہ

لا^۳ - ۱۲ لا^۲ + ۱۳ لا - ۱۵ = ۰

یہان ۱۵/۲ + ۱۱ اعلی حد غائی بنست قسمتون کی بموجب دفعہ ۹۰ کی اور بموجب دفعہ ۲۴ کی کوئی منفی قسمت نہین ہے،

اور امتحان کرنی سی معلوم ہوتا ہی کہ ۱ قیمت نہین ہی پس اخر رقم کی پوری بانٹنی والی ۵ اور ۳ ہین تو انکی ترتیب یہہ ہوگی کہ

۵	۳
۳	۵
۱۰	۸
۲	
۱۰	
۲	

پس ۵ قیمت ہی اسواسطے کہ اوسی تمام شرائط پوری ہوتی ہین آخر خارج قسمت ۲ ہے اور ۳ قیمت نہین کیونکہ ۸ پورا ۳ پر تقسیم نہین ہوتا

(۱۱۹) اخر رقم کی پوری بانٹنی والون کا شمار اصول مفصلہ ذیل کی موافق ہی ہوسکتا ہے فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت ۱ ہولا کی جگہ م + ر رکھو تو لا - م ایک قیمت ر کی ایسی ہوگی جو مساوات ح (م + ر) = ۰ کی شرائط کو پورا کریگی جو رقم ر سے کچھہ لگاؤ نہین رکھتی وہ ح (م) ہی اور تمام مثال ر کی صحیح ہین اگر ح (لا) کی سب مثال صحیح ہون اور م بھی صحیح ہو دفعہ ۱۲ کو دیکھو پس اگر ۱ صحیح ہو تو لا - م بھی صحیح ہوگا اور اسواسطے ح (م) کو بموجب دفعہ ۱۱۴ کی تقسیم کرنیکا پس کوئی صحیح مقدار ۱ جو اخر رقم ح (لا) کو پورا بانٹتی ہو اور ح (م) کو لا - م نہ پورا تقسیم کرتی ہو تو وہ مقدار خارج از امتحان ہوسکتی ہے

یہان کوئی صحیح منفی اور مثبت ہوسکتا ہی - ۱ + ۱ اور - ۱ قیمتین اوسکی مقرر کرنی سی ح (م) کے اب بین بڑی اسانی ہوجاتی ہے

دفعہ ۱۱۶ کی مساوات معلوم کو تمثیلاً لو یہان ۴ اخر رقم کو پورا بانٹتا ہے لیکن ۴ + ۱ پورا ح (- ۱) کو جو ۹ ہی نہین تقسیم کرتا ہی اسلئے یہہ قیمت مساوات کی نہین ہوسکتی

اب یہہ مثال لا^۳ - ۲۰ لا^۲ + ۱۶۴ لا + ۴۰۰ = ۰ کی کوئی اس مساوات کی منفی قیمت جو صحیح دفعہ ۲۴ کی نہین ہی اور اوسکو اس صورت لا^۲ (لا - ۲۰) + ۱۶۴ (لا - ۱۰۰/۸۱) مین لکھنی سے

ہم دیکھتے ہین کہ ۲۰ اعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہی اخر رقم کی مثبت پوری بانٹنی والے جو ۲۰ سے کم ہون ۲ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ اور ۱۶ ہین انمین سی ۵ و ۸ و ۱۰ قیمتین نہین ہین اسلئی کہ ح (۱) = −۲۵۵ اور یہہ ۵ − ۱ یا ۸ − ۱ یا ۱۰ − ۱ پر پورا نہین تقسیم ہوتا

پس اخر رقم کی پورا بانٹنی والی امتحان کے واسطی ۲ و ۴ اور ۱۶ ہین انمین سی معلوم ہوگا کہ ۴ قیمت ہے

(۱۲۰) ایک مثال قیمت مکسور ناطق کی یہہ مساوات ۴ لا⁴ − ۱۱ لا² + ۷ لا − ۶ = ۰ ہے یعنی

$$لا^4 - \frac{11}{4} لا^2 + \frac{7}{4} لا - \frac{3}{2} = ۰$$

اول مساوات مین لا = $\frac{ص}{۲}$ کے رکھو تا کہ مساوات ہئت بدل کی ایسی ہو جاے کہ تمام معامل صحیح ہون دفعہ ۵۳ کو دیکھو پس

$$ص^4 - 11 ص^2 + 14 ص - 24 = ۰$$

یعنی $ص^4 + ۰ \times ص^3 - 11 ص^2 + 14 ص - 24 = ۰$

بموجب دفعات ۹۰ اور ۹۴ کے تمام قیمتین اس مساوات کی درمیان $+\sqrt{24}$ اور $-(\sqrt{24}+1)$ واقع ہون اور ہم امتحان سی دریافت کرتی ہین کہ +۱۱ اور −۱ قیمتین ہین پس صرف پوری تقسیم کرنی والی اخر رقم کی ۴ و ۳ و ۲ و −۲ و −۳ و −۴ ہین اور نیز رح (۱) = −۲۰ اور یہہ ۴ − ۱ یا −۲ − ۱ پر پوری نہین تقسیم ہوتی سی معلوم ہوا کہ ۴ اور −۲ خارج الامتحان ہین اور موافق سابق کی ترتیب عمل کی یہہ ہوگی

۳	۲	−۳	−۴
−۹	$-\frac{12}{2}$	۸	۶
۶	۱	۲۲	−۵۰
−۹	−۱۰		−۱۶
−۳	−۵		۴
−۱			−۱

پس ۳ اور −۴ قیمتین ہین اور چونکہ لا = $\frac{ص}{۲}$ تو $\frac{3}{2}$ اور −۲ قیمتین اصلی مساوات کی حاصل ہوئین

نواں باب تنزل معادلات

اس باب مین ہم اس بات کی تحقیقات کرینگی کہ کسطرح سے ایک مساوات کا حل اوسی کم درجہ کی مساوات کے حل پر بعض صورتون مین موقوف ہوسکتا ہی جبکہ اونکی قیمتون کی ارتباط معلوم ہون جس عمل سے یہہ امر دریافت ہوتا ہی اوسکو تنزل معادلات کہتی ہین

(۱۲۲) جب دو مساواتون مین ایک قیمت یا کئی قیمتین مشترک ہون تو اوس قیمت یا قیمتون کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ مساواتین ہین جنکی ایک قیمت مشترک ا ہے

پس ح (لا) اور مح (لا) مین لا - ا ایک جزضربی مشترک ہوگا اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) اور مح (لا) کی وفق مشترک اعظم مین لا - ا ایک جزضربی ہوگا اور علی ہذا القیاس ہر یک جزضربی مشترک ج (لا) اور مج (لا) کا وفق مشترک اعظم کا بھی جزضربی ہوگا اور کوئی اور جزضربی اس وفق اعظم مین نہین واقع ہوگا

پس اسی معلوم ہوا کہ اگر ہم ح (لا) اور مح (لا) کا وفق اعظم دریافت کرین اور اوسکو برابر صفر کے لکھہ دین تو اس مساوات کی قیمتین مطابقت نامہ معادلات ج (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ کے مشترک قیمتون سے رہینگے

اگر ح (لا) اور مح (لا) مین کوئی جزضربی مکرر آتا ہی تو وفق اعظم مین بھی مکرر ایگا

(۱۲۳) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ دو مساواتین ہین

$$لا^۴ + ۳ لا^۳ - ۵ لا^۲ - ۶ لا - ۸ = ۰$$

اور $$لا^۴ + لا^۳ - ۹ لا^۲ + ۱۰ لا - ۸ = ۰$$

ا ان مساواتون کی دائین طرف کی ارکان کا وفق اعظم $لا^۲ + ۲ لا - ۸$ ہی اور اگر اسکو برابر صفر کے لکھین تو لا = - ۴ اور لا = ۲ کی حاصل ہوگا

پس دونو مساواتون کی مشترک قیمتین ۲ اور - ۴ ہین

(۱۲۴) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب ہین جنکا ربط باہمی ہم کو یہہ معلوم ہے کہ ع ا + ق ب = ر اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین

چونکہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ا اور ب قیمتین ہیں لہٰذا ح (ا) = ۰ اور ح (ب) = ۰
لیکن ب = $\frac{\text{ر} - \text{ع ا}}{\text{ق}}$ اسلئے ح ($\frac{\text{ر} - \text{ع ا}}{\text{ق}}$) = ۰
پس معادلات ح (لا) = ۰ اور ح ($\frac{\text{ر} - \text{ع لا}}{\text{ق}}$) = ۰ کی مشترک قیمت ا ہے
تو وہ بموجب دفعہ گذشتہ کی دریافت ہوسکتی ہی پس اسطرح تو ا دریافت ہوگیا اور اس ارتباط
ع ا + ق ب = ر سے ب دریافت ہوجائیگا اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب اجزا ضربی
لا - ا اور لا - ب پر ح (لا) پورا تقسیم ہوجائیگا اور خارج قسمت کو برابر صفر کی لکھیں تو ایک
مساوات ایسی حاصل ہوجائیگی کہ اوسی باقی قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کی دریافت ہوجائینگین
(۱۲۵) تمثیلاً فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو

لا^۴ - ۷ لا^۳ + ۱۱ لا^۲ - ۷ لا + ۱۰ = ۰ (۱)

اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی دو قیمتین ا اور ب مین ارتباط باہمی یہہ ہی کہ ب = ۲ ا + ۱
مساوات (۱) مین لا کی جگہہ ۲ لا + ۱ رکھو تو

(۲ لا + ۱)^۴ - ۷ (۲ لا + ۱)^۳ + ۱۱ (۲ لا + ۱)^۲ - ۷ (۲ لا + ۱) + ۱۰ = ۰

یعنی ۱۶ لا^۴ - ۲۴ لا^۳ - ۱۶ لا^۲ - ۴ لا + ۸ = ۰

۱۶ لا^۴ - ۶ لا^۳ - ۴ لا^۲ - لا + ۲ = ۰ (۲)

اب معادلات (۱) اور (۲) کی بائین طرف کی ارکان کا دفع اعظم لا - ۲ ہے پس ا = ۲
اور اسیواسطے ب = ۵ یعنی مساوات مفروضہ کے دو قیمتین ۲ اور ۵ ہین تو اسی بہہ دریافت ہوگا کہ

لا^۴ - ۷ لا^۳ + ۱۱ لا^۲ - ۷ لا + ۱۰ = (لا - ۲) (لا - ۵) (لا^۲ + ۱)

پس اور قیمتین ± $\sqrt{(-۱)}$ ہین

(۱۲۶) یہہ ہوسکتا ہی کہ ایک اور زوج قیمتون کا مساوات مفروضہ مین یہہ ارتباط ہو کہ ع سہ + ق صہ =
تو اس صورت مین جملی ح (لا) اور ح ($\frac{\text{ر} - \text{ع لا}}{\text{ق}}$) کی دفع اعظم مین لا کی دوسرے درجہ کا جملہ ہوگا جس مین
اجزا ضربی لا - ا اور لا - سہ ملتف ہونگی اگر قیمتین ا اور ب دونو مساوات ح (لا) = ۰

مین مکرر آئین تو ح (لا) اور ح ($\frac{ر - ی لا}{ب}$) دفع اعظم مین جز ضربی لا - ا مکرر ایگا

(۱۲۷) علی العموم یہہ فرض کرو کہ مساوات ج (لا) = ۰ کی دو قیمتین ا اور ب مین باہمی ارتباط یہہ ہی کہ ب = سر (ا) تو معادلات ح (لا) = ۰ اور ح [سر (لا)] = ۰ کی ایک قیمت مشترک ا ہوگی اور اس مشترک قیمت کو بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت کرسکتی ہین

(۱۲۸) ایک صورت ایسی بھی ہی کہ اوسمین دو قاعدے ۱۲۴ اور ۱۲۶ کی بجا امداد مساوات مفروضہ کی حل کرنی مین تہیل پاوین مثلاً مساوات ح (لا) = ۰ ہوا اور یہہ ہم کو معلوم ہی کہ اوسکی قیمتون کی زوج واقع ہوتے ہین اور ہر یک زوج ا اور ب قیمتون کا اس ارتباط ا + ب = ۲ ر کی شرایط کو پورا کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۲۴ کے ہم معادلات ح (لا) = ۰ اور ح (۲ ر - لا) = ۰ کی مشترک قیمتین دریافت کرینگے مگر ان قیمتون مین بالکل تطابق ہوگا اسواسطی کہ بموجب فرض کے ح (ا) = ۰ یعنی ح (۲ ر - ب) = ۰ اور ح (ب) = ۰ یعنی ح (۲ ر - ا) = ۰

پس قیمتین ا اور ب دونو مشترک دونو مساواتون مین ہین اور علی ہذا القیاس اوزار دراج قیمتون کے مشترک دونو مساواتون مین ہین اسواسطی دونو مساواتون مین تطبیق تامہ ہوگی

(۱۲۹) جس مساوات پر دفعہ بالا مین بحث ہوئی ہی اوسکی تنزل کی بہت طریقے ہین مگر ہم اونمین صرف دو لکھتے ہین تاکہ طالب علمون کو اس بات کی مضمون مین مشق ہوجاے

اول ہم عمل اسطرح کرتی ہین کہ فرض کرو ا - ب = ۲ ی تو ہم کو ایک ساتھہ ہی یہہ مساواتین حاصل ہونگین

ح (ا) = ۰ ا + ب = ۲ ر ا - ب = ۲ ی

ان مساواتون مین سی دوسری تیسری مساوات سی ا = ی + ر اس قیمت کو مساوات اول مین رکھہ نوب (ی + ر) = ۰ اس مساوات سی قیمتین ی کی دریافت ہوسکتی ہین اور پھر ان قیمتون کی مطابق ا اور ب کی قیمتین بھی دریافت ہوجائینگی اب یہہ بات آسان ہی کہ مساوات ح (ر + ی) = ۰ مین ہم یہہ ثابت کردین کہ اوسمین ی کی جفت قوا رہین پس اگر ہم ی کو مقدار مجہول خیال کرین تو اس مساوات کا درجہ مساوات مفروضہ کی درجہ سی نصف ہوگا

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ کا ایک زوج قیمتوں کا ا اور ب ہی اور دوسرا زوج سہ اور صہ ہی تو

ح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - سہ) (لا - صہ) . . .

ح (ی + ر) = (ی + ر - ا) (ی + ر - ب) (ی + ر - سہ) (ی + ر - صہ) . . .

= (ی + $\frac{ا+ب}{۲}$ - ر) (ی + $\frac{ا+ب}{۲}$ - ب) (ی + $\frac{سہ+صہ}{۲}$ - سہ) (ی + $\frac{سہ+صہ}{۲}$ - صہ) . . .

= $\left[ی^۲ - \left(ر - \frac{ا+ب}{۲}\right)^۲\right]$ $\left[ی^۲ - \left(سہ - \frac{سہ+صہ}{۲}\right)^۲\right]$ . . . . .

یعنی ح (ی + ر) میں صرف ی کی جفت قوا ہین

درحقیقت اس مسئلہ مین کچھ تمیز قیمتون ا اور ب کی درمیان نہین کی گئی اسلئے جو مساوات ایسی بنائی جاوے کہ اوسکی قیمت $\frac{ا-ب}{۲}$ ہو تو ضرور ہم کو یہہ توقع ہو سکتی ہی کہ $\frac{ب-ا}{۲}$ یہی اوسکی قیمت ہوگی اور نفس الامر مین یہی ہے

دوم اسطرح بھی عمل کرتی ہین کہ ی = ا ب کے فرض کرین تو

(لا - ا) (لا - ب) = لا^۲ - (ا + ب) لا + ا ب = لا^۲ - ۲ ر لا + ی

اگر ی کی مناسب قیمت فرض کرین تو لا^۲ - ۲ ر لا + ی ایک جزضربی ح (لا) کا ہوگا ح (لا) کا لا^۲ - ۲ ر لا + ی پر تقسیم کیا جاوے جب تک کہ باقی کی صورت ع لا + ق پیدا ہو اسمین ع اور ق جملی ی کی ہین اور اونمین لا شامل نہین ہی اسی معلوم ہوا کہ ضروری شرط اس امر کی کہ ح (لا) کا جزضربی لا^۲ - ۲ ر لا + ی ہی یہ ہی کہ ع = ۰ اور ق = ۰

بموجب دفعہ ۱۲۲ کی ی کی قیمت ایسی دریافت کرو کہ وہ دو لو مساوالتون کی شرایط کو پورا کرے اور پھر ا اور ب کو ان مساوالتون

ا + ب = ۲ ر ی = ا ب

سے دریافت کرو

(۱۳۰) فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی تین قیمتین ا اور ب اور س کا یہہ ارتباط باہمی معلوم ہی کہ ع ا + ق ب + رس = ص اب مطلوب یہہ ہی کہ ان قیمتون کو دریافت کرین چونکہ ا اور ب اور س مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتین ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ح (ا) = ۰ ح (ب) = ۰ ح (س) ۰ = ۰ پس

ح (ا) = ۰ ح (ب) = ۰ ح $\left(\frac{\text{ص} - \text{ع}_{\text{ا}} - \text{ق ب}}{\text{ر}}\right)$ = ۰

اب اخیر دو مساواتون سی ب کو دور کرو تو ایک یہہ مساوات ہم کو حاصل ہو گی کہ سر (ا) = ۰

پس مساوات ح (لا) = ۰ اور سر (لا) = ۰ کی ایک مشترک قیمت ا ہے اور یہہ بموجب دفعہ ۱۲۲ کے دریافت ہو سکتا ہے

(۱۳۱) اس باب کی مضمون سی متعلق چند مثالین اب ہم لکھتی ہین

(۱) اس مساوات

$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_{\text{ا}} \text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ع}_{\text{۲}} \text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}} = ۰$

کی قیمتین سلسلہ حسابیہ مین ہین اونکو دریافت کرو

ان قیمتون کو ا (ا + ب) و (ا + ۲ ب) . . . سے تعبیر کرو

تو بموجب دفعہ ۴۷ کے

$-\text{ع}_{\text{ا}} = \text{ا} + (\text{ا} + \text{ب}) + (\text{ا} + ۲\text{ب}) + \cdots + (\text{ا} + \text{ن} - ۱\text{ب})$

$\text{ع}_{\text{ا}}^{۲} - ۲\text{ع}_{\text{۲}} = \text{ا}^{۲} + (\text{ا} + \text{ب})^{۲} + (\text{ا} + ۲\text{ب})^{۲} + \cdots (\text{ا} + \text{ن} - ۱\text{ب})^{۲}$

یعنی $-\text{ع}_{\text{ا}} = \text{ن ا} + \frac{\text{ن (ن} - ۱)}{۲} \text{ب}$

$\text{ع}_{\text{ا}}^{۲} - ۲\text{ع}_{\text{۲}} = \text{ن ا}^{۲} + \text{ن (ن} - ۱) \text{ا ب} + \frac{\text{ن (ن} - ۱) (۲\text{ن} - ۱)}{۶} \text{ب}^{۲}$

بیسوان باب الجبرا کا دیکھو

ن ماحصل کے مجذور مین سی دوسرے ماحصل کے ن گنی کو تفریق کرو تو یہہ حاصل ہو گا کہ

$(\text{ن} - ۱) \text{ع}_{\text{ا}}^{۲} - ۲\text{ن ع}_{\text{۲}} = \frac{\text{ن}^{۲} (\text{ن}^{۲} - ۱) \text{ع}}{۱۲}$

پس ب اسی دریافت ہو گیا اور ب کی معلوم ہونی سی ا معلوم ہو جاویگا

(۲) مساوات $\text{لا}^{۴} + ۳\text{لا}^{۳} - ۱۲\text{لا}^{۲} - ۴۸\text{لا} - ۶۴ = ۰$ کی دو قیمتین ہین جو مقدار مین مساوی ہین اور اونکی علامتین مختلف ہین اونکو دریافت کرو یہان اگر لا کی علامت بدل دین تو مساوات

ایسی حاصل ہوگی جسکی اور مساوات مفروضہ کی ایک قیمت مشترک دونو میں ہوگی یعنی مساوات مفروضہ اور اس مساوات

$$لا^۴ - ۳ لا^۳ - ۱۲ لا^۲ + ۴۸ لا - ۶۴ = ۰$$

کی ایک قیمت مشترک ہی پس بموجب فقرہ ۱۲۲ کی ان دونوں مساواتوں کے بائیں طرف کی ارکان کا وفق اعظم دریافت کرین یا دونو مساواتون کو تفریق کرلین تو

$$۶ لا^۳ - ۶ ۹ لا = ۰$$

اسواسطی $لا = ۰$ یا $لا^۲ = ۱۶$

پہلی سی کوئی قیمت نہیں حاصل ہوتی اور دوسری سے $لا = \pm ۴$ حاصل ہوتا ہی اور $+۴$ اور -۴ مساوات مفروضہ کی قیمتین ہین

(۳) مساوات $۳ لا^۴ - ۱۹ لا^۳ + ۹ لا^۲ - ۱۹ لا + ۶ = ۰$ کی دو قیمتین ہین جنکا حاصل ضرب ۲ ہی اونکو دریافت کرو

فرض کرو کہ ایک قیمت ہی تو $\frac{۲}{ز}$ دوسری قیمت ہوگی اسی معلوم ہوا کہ

$$۳ ز^۴ - ۱۹ ز^۳ + ۹ ز^۲ - ۱۹ ز + ۶ = ۰ \quad (۱)$$

اور $۳ (\frac{۲}{ز})^۴ - ۱۹ (\frac{۲}{ز})^۳ + ۹ (\frac{۲}{ز})^۲ - ۱۹ (\frac{۲}{ز}) + ۶ = ۰$

یعنی $۶ ز^۴ - ۳۸ ز^۳ + ۳۶ ز^۲ - ۱۵۲ ز + ۴۸ = ۰$

یا $۳ ز^۴ - ۱۹ ز^۳ + ۱۸ ز^۲ - ۷۶ ز + ۲۴ = ۰ \quad (۲)$

معادلات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کی ارکان کا وفق مشترک $۳ ز^۲ - ۱۹ ز + ۱۶$ ہے اسکو برابر صفر کے لکھکر ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ز = \frac{۱}{۳}$ یا $ز = ۶$ پس $\frac{۱}{ز}$ اور ۶ مطلوب قیمتیں ہین

دسوان باب معادلات متکافیہ

(۱۳۲) مساوات متکافیہ اوسی کہتی ہین کہ اگر مقدار مجہول بدل کر متکافی اپنا ہو جاے تو یہی وہ مساوات نہ بدلی اسی معلوم ہوا کہ اگر ایک قیمت ایسی مساوات کی ہو تو اوسکا متکافی یعنی $\frac{۱}{ز}$ بہی اوس مساوات کی قیمت ہوا ب ہم لکھینگے کہ مساوات متکافیہ کا حل موقوف

اوس مساوات کی حل پر ہی کہ جسکا درجہ مساوات مفروضہ کی نصف درجہ سی بڑا نہین ہی
اول ہم یہہ کہتی ہین کہ مساوات کی امثال مین کیا ارتباط ہو کہ وہ مساوات متکافیہ ہو اور
بعد ازان یہہ لکھینگے کہ مساوات کا تنزل ہو کر کسطرح حل اوسکا اسان ہو سکتا ہے

(۱۳۳) وہ شرائط دریافت کرو کہ جسی مساوات مفروضہ ایک مساوات متکافیہ ہو

فرض کرو کہ مساوات

$$لا^{ن} + ع_{۱} لا^{ن-۱} + ع_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots + ع_{ن-۲} لا^{۲} + ع_{ن-۱} لا + ع_{ن} = ۰ \quad (۱)$$

لا کو $\frac{۱}{لا}$ سی بدلو اور پھر لا^ن مین ضرب دو اور ع_ن پر تقسیم کرو اور ارقام کو دوبارہ مرتب کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا^{ن} + \frac{ع_{ن-۱}}{ع_{ن}} لا^{ن-۱} + \frac{ع_{ن-۲}}{ع_{ن}} لا^{ن-۲} + \ldots + \frac{ع_{۲}}{ع_{ن}} لا^{۲} + \frac{ع_{۱}}{ع_{ن}} لا + \frac{۱}{ع_{ن}} = ۰ \quad (۲)$$

اب (۲) اور (۱) کی تطبیق کی لئی ضرور ہی کہ امثال یکسان قوا ر لا کی اسمین برابر ہون تو

$ع_{۱} = \frac{ع_{ن-۱}}{ع_{ن}}$ اور $ع_{۲} = \frac{ع_{ن-۲}}{ع_{ن}} \ldots ع_{ن-۲} = \frac{ع_{۲}}{ع_{ن}}$ و $ع_{ن-۱} = \frac{ع_{۱}}{ع_{ن}}$ و $ع_{ن} = \frac{۱}{ع_{ن}}$

اخر مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ع_{ن}^{۲} = ۱$ اسیواسطی $ع_{ن} = +۱$ یا -۱ اسسے
معادلات متکافیہ کی دو نوع بنتی ہین

اول فرض کرو کہ $ع_{ن} = ۱$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ .

$ع_{۱} = ع_{ن-۱}$ اور $ع_{۲} = ع_{ن-۲} \ldots ع_{ن-۲} = ع_{۲}$ و $ع_{ن-۱} = ع_{۱}$

پس معلوم ہوا کہ جو مساوات ایسی ہی کہ اول اور اخری ارقام متساوی الابعاد کے امثال برابر ہین
وہ مساوات متکافیہ ہی

فرض کرو کہ $ع_{۱} = -۱$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$ع_{۱} = -ع_{ن-۱}$ و $ع_{۲} = -ع_{ن-۲} \ldots ع_{ن-۲} = -ع_{۲}$ و $ع_{ن-۱} = -ع_{۱}$

اس صورت مین اگر مساوات جفت درجہ کی ہی تو اوپر کے سلسلہ شرائط مین $ع_{م} = -ع_{م}$ اگر
$م = \frac{۱}{۲} ن$ کی ہو اور یہہ ناممکن ہی بشرطیکہ $ع_{م} = ۰$ کے نہ ہو
پس مساوات متکافیہ وہ مساوات ہی جسمین اغاز و انجام سی ارقام متساوی الابعاد

مقدار مین برابر اور علامت مین مختلف ہون مگر اوسکی ساتھہ یہہ بھی شرط ہی کہ اگر مساوات جفت درجہ کی ہو تو رقم متوسط کا سر صفر ہو

(۱۳۴) اول نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا - ا ہونا بادی النظر مین ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا + ا پر تقسیم ہوگا دفعہ ۶ کو دیکھو فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت ہو تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخیر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ طاق درجہ کی ایک قیمت کا + ا ہونا بادی النظر مین ظاہر معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو مساوات ح (لا) پورا لا - ا پر تقسیم ہوگا دفعہ ۶ دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخیر رقم مثبت ہوگی

دوسری نوع کی مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ایک قیمت + ا اور دوسری قیمت - ا ہوگی یہہ امر ظاہر بادی النظر مین معلوم ہوتا ہی پس اگر ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کری تو ح (لا) پورا لا^{۲} - ۲ پر تقسیم ہوگا دفعہ ۳۳ کو دیکھو اور فرض کرو کہ سر (لا) خارج قسمت نکلتا ہی تو سر (لا) = ۰ مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہوگی اور اوسکی اخیر رقم مثبت ہوگی

(۱۳۵) خاص قیمتون کی باب مین جو کچھہ اوپر بیان ہوا وہ بدیہی ہی مگر اوسکا اثبات بھی آسان ہی اخیر صورت مین دوسری نوع کی جو مساوات متکافیہ جفت درجہ کی بیان ہوئی اوسپر خیال کرو فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کو تعبیر کرتا ہی اب ہم کو یہہ معلوم ہی کہ ح (لا) = - لا^{ن} ح $\left(\frac{۱}{لا}\right)$ اور یہہ بھی ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) پورا لا^{۲} - ا پر تقسیم ہوتا ہی اب ہم کو ثابت کرنا یہہ ہی کہ خارج قسمت ایسا جملہ ہی کہ اول اور اخری ارقام متساوی الابعاد کے امثال برابر ہین

ہم کو معلوم ہے کہ ح (لا) = - لا^{ن} ح $\left(\frac{۱}{لا}\right)$

اسیواسطے $\frac{ح(لا)}{لا^{ا}-ا} = -\frac{لا^{ا}}{لا^{ا}-ا} ح(\frac{ا}{لا}) = لا^{-ا} \frac{ح(\frac{ا}{لا})}{ا-\frac{ا}{لا^{ا}}}$

اسی ہمارے بیان کی تصدیق ہوتی ہی کیونکہ $\frac{ح(\frac{ا}{لا})}{ا-\frac{ا}{لا^{ا}}}$ اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ $\frac{ح(لا)}{لا^{ا}-ا}$ مین لاکو $\frac{ا}{لا}$ سے بدل دین

(۱۳۶) دفعہ ۱۳۴ سی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ مساوات متکافیہ کیا توجفت درجہ کی ہوگی اور اخر رقم مثبت ہوگی یا اوسکا تنزل اسی صورت مین ہوسکتا ہی پس اسی صورت کی مساوات کو مدار اپنی ساری تحقیقات کا قرار دیتی ہین اور اب ثابت کرینگی کہ ایسی مساوات کا تنزل اوسکی نصف درجہ تک ہوسکتا ہے

(۱۳۷) مساوات متکافیہ جفت درجہ کی ہی اور اوسکی اخر رقم مثبت ہی مطلوب یہہ ہی کہ اوسکا تنزل کرین

فرض کرو کہ مساوات $لا^{م} + ع_{ا} لا^{م-ا} + ع_{ا} لا^{م-ا} + \dots + ع_{م-ا} لا + ع_{م} = ٠$ لا^م پر تقسیم کرو اور اغاز اور انجام سی جو اقسام متساوی البعد ہون اونکو اکھٹا کرکے زوج بناؤ تو

$لا^{م} + \frac{ا}{لا^{م}} + ع_{ا}(لا^{م-ا} + \frac{ا}{لا^{م-ا}}) + ع_{ا}(لا^{م-ا} + \frac{ا}{لا^{م-ا}}) + \dots = ٠$

اب فرض کرو کہ $لا + \frac{ا}{لا} = ز$ تو

$لا^{ا} + \frac{ا}{لا^{ا}} = ز^{ا} - ا$

$لا^{ا} + \frac{ا}{لا^{ا}} = (لا^{ا} + \frac{ا}{لا^{ا}})(لا + \frac{ا}{لا}) - ز = ز^{ا} - ا ز$

اور علی العموم $لا^{ع+ا} + \frac{ا}{لا^{ع+ا}} = (لا^{ع} + \frac{ا}{لا^{ع}})(لا + \frac{ا}{لا}) - (لا^{ع-ا} + \frac{ا}{لا^{ع-ا}})$

پس ہم $لا^{ع+ا} + \frac{ا}{لا^{ع+ا}}$ کو جملہ ناطقہ ز کا ع+ا درجہ کا کہہ سکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ اوپر کی مساوات مین اگر اسکی مندرج کرنی سی ایک مساوات ز کی م درجہ کی حاصل ہوگی اور پہر ز کی ہر ایک قیمت کی مطابق لا کی دو قیمتین اور ایک جزو ضربی $لا^{ا} - ز لا + ا$ حاصل ہوگا

(۱۳۸) دفعہ گذشتہ کا ارتباط علی العموم اسطرح بیان ہوسکتا ہے کہ

$لا^{ع+ا} + \frac{ا}{لا^{ع+ا}} = (لا^{ع} + \frac{ا}{لا^{ع}}) ز - (لا^{ع-ا} + \frac{ا}{لا^{ع-ا}})$

اسی ثابت ہوتا ہے کہ مقادیر

$$لا + \frac{1}{لا} \text{ اور } لا^2 + \frac{1}{لا^2} \text{ اور } لا^3 + \frac{1}{لا^3} \text{ ۔ ۔ ۔ ۔}$$

سلسلہ مکررہ بنانی مین اور قسطاس ارتباط ۱۔ ۷ + ۱ ہی انچاسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو

اب ہم اگی ایک جملہ عامہ $لا^ع + \frac{1}{لا^ع}$ کے واسطی ارقام ۷ مین لکھینگے

(۱۳۹) تمثیلاً مساوات متکافیہ

$$۲لا^6 + لا^5 - ۱۳لا^4 + ۱۳لا^2 - لا - ۲ = ۰ \text{ ہو تو}$$

بادی النظر مین یہان اور ۔ اقسمتین معلوم ہوتی ہین اسیواسطے دائمین طرف کی رکن کو $لا^2$ ۔ اپر تقسیم کرینگے مین اور اوسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$۲لا^4 + لا^3 - ۱۱لا^2 + لا + ۲ = ۰$$

$$\text{اسیواسطے } لا^2 + \frac{1}{لا^2} + \frac{1}{2}(لا + \frac{1}{لا}) - \frac{11}{2} = ۰$$

$$لا + \frac{1}{لا} = ک \text{ رکھو تو}$$

$$ک^2 - ۲ + \frac{ک}{2} - \frac{11}{2} = ۰$$

$$ما\ ک^2 + \frac{ک}{2} - \frac{15}{2} = ۰$$

$$ک = \frac{5}{2} \text{ ما } - ۳$$

اسی معلوم ہوا کہ $لا + \frac{1}{لا} = \frac{5}{2}$ یا $لا + \frac{1}{لا} = -۳$

$$\text{اسیواسطے } لا = ۲ \text{ ما } \frac{1}{2} \text{ ما } \frac{1}{2}(-۳ \pm \sqrt{۵})$$

(۱۴۰) مساوات

$$لا^م + ع_1 لا^{م-1} + ع_2 لا^{م-2} + \dots + ع_{م-1} لا + ع_م + ع_{م-1} س لا^{-1} + ع_{م-2} س^2 لا^{-2} + \dots + ع_2 س^{م-2} لا^{-2} + ع_1 س^{م-1} لا^{-1} + س^م = ۰$$

بدل کر مساوات متکافیہ بن سکتی ہی اسطرح کہ $لا = ی$ ما $س$ کے فرض کرین اور $س$ پر تقسیم کرین تو مساوات متکافیہ ی مین حاصل ہوجائیگی جسکی صورت اصلی کینڈی پر ہوگی

گیارھواں باب معادلات ثنائی یا دورقمی

(۱۴۱) جس مساوات کی صورت لا^{ن} - ۱ = ۰ ہو اور اسمین ا مقدار معلوم ہو تو اوسکو معادلہ یا مساوات ثنائی کہتے ہین۔
اس مساوات کی قیمتین سب مختلف ہوتی ہین کیونکہ لا^{ن} - ۱ کا اول جملہ مشتقہ ن لا$^{ن-۱}$ ہے
اور کوئی قیمت ایسی لا کی نہین ہوسکتی کہ لا$^{ن-۱}$ اور ن لا$^{ن-۱}$ کو معدوم کرے دفعہ ۷۵ دیکھو

(۱۴۲) اگر لا^{ن} - ۱ = ۰ تو لا = $\sqrt[ن]{۱}$ یعنی لا برابر ا کی ن مرتبہ کی نزول کے ہی لیکن مساوات
لا^{ن} - ۱ = ۰ کی ن قیمتین بموجب دفعہ ۳۳ کی ہین اور بموجب دفعہ ۱۴۱ کے سب مختلف ہین
اسی یہہ ایک بڑا نتیجہ نکلتا ہی کہ ہر یک مقدار جبریہ کی ن مرتبی کی نزول ن طرح کی ہوتی ہین
مقدار جبریہ سے مراد ہی ہماری حقیقی مقدار سی یا مقدار تخیلی سی جو ع + ق $\sqrt{-۱}$ کی صورت کہتی ہو

(۱۴۳) فرض کرو کہ ا مقدار کی ن مرتبی کی نزولون مین سی ایک کو ط تعبیر کرتا ہی تو ط^{ن} = ا پس مساوات
لا^{ن} - ۱ = ۰ مین لا = ط ی کے فرض کرو تو ط^{ن} ی^{ن} - ۱ = ۰ اسیواسطے ی^{ن} - ۱ = ۰
اسی معلوم ہوا کہ ی = $\sqrt[ن]{۱}$ یعنی ی برابر ایک کے ن مرتبہ کے نزول کی برابر ہے اور
لا = ط ی = ط $\sqrt[ن]{۱}$ لیکن لا = $\sqrt[ن]{ا}$ اسیواسطے $\sqrt[ن]{ا}$ = ط $\sqrt[ن]{۱}$ پس
پس کسی مقدار جبریہ کی ن مرتبی کی نزول اسطرح دریافت ہوسکتی ہین کہ ا و نمین سی ایک کو
واحد کے ن نزولون مین متواتر ضرب دین

(۱۴۴) اب فرض کرو کہ ا ایک حقیقی مثبت مقدار ہی اور ہم کو مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰
اور مساوات لا^{ن} + ۱ = ۰ کے حل کرنی ہین اور فرض کرو کہ ط حسابی قیمت ا کے
ن نزول کے ہی جو ہمیشہ ضابطہ ثانی کی استعانت سی نکل سکتی ہی خواہ حقیقتاً یا تقریباً
جبر مقابلہ کا چوبیسوان باب دیکھو اب لا = ط ی کی فرض کرو تو مساواتین مفروضہ کی یہہ صورت ہوجائیگی
کہ ی^{ن} - ۱ = ۰ اور ی^{ن} + ۱ = ۰ اور یہہ مساواتین علم مثلثی جملون کے استعانت سے
حل ہوسکتی ہین تیئسوان باب علم مثلث کا دیکھو اب ہم ان مساواتون کو بتعبیر علم مثلثی جملون کے استعانت سے حل کرینگے
اور اگرچہ ہم اونکو جبر مقابلہ سی علی العموم نہین حل کرسکتی ہین مگر یہہ ہی اونکی باب مین نتایج مستنبط کرسکتی ہین

(۱۴۵) اگر مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ کی قیمت سہ ہو تو سہ^م بھی اوسکی قیمت ہوگی جسمین م صحیح مثبت یا منفی ہے اسواسطے کہ (سہ^م)^ن = سہ^{مں} = (سہ^ن)^م = ۱^م = ۱

(۱۴۶) اگر مساوات $لا^ن + ۱ = ۰$ کی سہ ایک قیمت ہو تو سہ^م بھی ایک قیمت ہوگی جسمین م طاق صحیح مثبت یا منفی ہے اسواسطے کہ (سہ^م)^ن = سہ^{مں} = (سہ^ن)^م = (-۱)^م = -۱ اگر م طاق ہو

(۱۴۷) اگر م اور ن متباین ہون تو معادلات $لا^م - ۱ = ۰$ اور $لا^ن - ۱ = ۰$ کی کوئی مشترک قیمت سوا ۱ واحد کے نہین ہوسکتی

فرض کہ ع اور ق دو صحیح ایسی ہون کہ جسمین یہہ ارتباط ہو کہ ع م - ق ن = ۱ ایسے صحاح ہمیشہ جبر مقابلہ کی استعانت سی دریافت ہوسکتی ہین چوالیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو اور فرض دونو مساواتون کی مشترک قیمت ط ہی پس ط^م = ۱ اسیواسطے ط^{عم} = ۱ اور ط^{قں} = ۱ اسیواسطے ط^{قں} = ۱ اسی معلوم ہوا کہ ط$^{عم - قں}$ = ۱ یعنی ط = ۱

(۱۴۸) لگرن عدد اولی ہو اور مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ کی کوئی سی قیمت سہ ہو مگر واحد نہ ہو تو تمام قیمتین مساوات کی اس سلسلہ سہ و سہ^۲ و سہ^۳ . . . سہ^ں سے حاصل ہونگین کنایا اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۱۴۵ کے یہہ مقدار تمام قیمتین مساوات کی ہین اسواسطے اب ہم کو صرف یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ اونمین سے کوئی سی دو برابر نہین ہین اگر برابر ہونا ممکن ہو تو فرض کرو کہ سہ^ر = سہ^ص پس سہ$^{ر-ص}$ = ۱ پس اسی ثابت ہوا کہ $لا^ن - ۱ = ۰$ اور $لا^{ر-ص} - ۱ = ۰$ قیمت مشترک سوا ۱ واحد کی رکھتی ہین اور یہہ بموجب دفعہ ۱۴۷ کی ناممکن ہے اور چونکہ ر - ص کم بہ نسبت ن کے ہے اسواسطے وہ متباین ہین

(۱۴۹) اگر ن عدد اولی نہ ہو اور نہ کوئی سی قیمت مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ ہو تو بموجب ۱۴۵ کے یہہ تو درست ہی کہ کوئی قوت سہ کی ایک قیمت مساوات کی ہی لیکن یہہ نہین ہے کہ متواتر قوا سہ کی سب قیمتین مساوات کی ہا تھہ لگ جائین مثلاً فرض کرو کہ ن = ع ق اور مساوات $لا^{عق} - ۱ = ۰$ کی قیمت سہ ہی تو مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ کی بھی قیمت سہ ہے

اور علی ہذا القیاس اور قواے سہ کی کیفیت ہی لیکن سہ کی قوتوں کے لیے سی ع مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہی سکتی اسواسطے کہ سہ^ع+۱ = سہ^ع × سہ = سہ اور سہ^ع+۲ = سہ^ع × سہ^۲ = سہ^۲

اور علی ہذا القیاس پس مساوات لاں - ۱ = ۰ کی قواے سہ سے تمام قیمتیں نہیں ہاتھہ لگ سکتیں

اگر ن عدد اولی نہ ہو تو بھی یہہ درست ہی کہ بعض قیمتیں مساوات لاں - ۱ = ۰ کی ایسی خاصیت رکھیں کہ اونکی متواتر قیمتوں سی تمام قیمتیں ہاتھہ لگ جائیں علم مثلثی جملی اگر قیمتوں کی جگہہ لیں تو یہہ بات اسانی سی ثابت ہو سکتی ہے

(۱۵۰) مساوات لاں - ۱ = ۰ مین اگر مختلف اعداد متبائنہ کا حاصل ضرب ہو تو اوسکا حل موقوف اون مساواتون پر ہوگا جنکی صورت متشابہ اسی مساوات کی ہو اور اونمین لا کی قوت نما ن کے اجزاے ضربی اولے ہون

تمثیلاً فرض کرو کہ ن حاصل ضرب تین اجزاے ضربی اولی م و ع و ق کا ہو اور یہ قیمت مساوات لام - ۱ = ۰ کی اور لاع - ۱ = ۰ کی قیمت مشترک ہو مساوات لاق - ۱ = ۰ کی قیمت لر ہو اور یہہ سب قیمتین مختلف واحد سے فرض کی جائین

اول مساوات لاں - ۱ = ۰ کی قیمتین اس حاصل ضرب کی رقمین ہونگین

(۱ + سہ + سہ^۲ + ... + سہ^م-۱) (۱ + صہ + صہ^۲ + ... + صہ^ع-۱) (۱ + لر + لر^۲ + ... + لر^ق-۱)

اسواسطے کہ فرض کرو کہ سہ صہ لر^ف ایسے رقم کو تعبیر کرین تو (سہ صہ لر^ف)^ن = ۱

کیونکہ سہ^ن = ۱ اور صہ^ن = ۱ اور لر^ف = ۱ **دوم** اس حاصل ضرب کی کوئی دو قیمتین برابر نہین ہین اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن تو فرض کرو کہ سہ صہ لر^ف = سہ^د صہ^ہ لر^ح تو سہ^د-ف صہ^ہ-ع لر^ح-ف مقدار دائمی طرف قیمت مساوات لاں - ۱ = ۰ کی ہے اور بائین طرف کی مقدار قیمت مساوات لاع - ۱ = ۰ کی ہی لیکن م اور ع متباین ہین تو یہہ ناممکن ہی کہ ان مساواتون کی قیمت مشترک ہو الا واحد یہہ قیمت مستثنے ہے اگر ن مین اجزاے ضربی متباین تین سی زیادہ ہون تو بھی اسی طرح عمل ہوگا

(۱۵۱) دوم فرض کرو کہ اجزاء ضربی متباین ن مین مکرر واقع ہون اور ن = لو۔ موھو
اسمین لو و موو ھو کوی قوت اعداد اولے م و ع و ق کی ہین تو یہہ بہی درست ہوگا اگر ہم
لو قیمتین مساوات لاو ۱ = ۰ کی اور موقیمتین مساوات لاھ ۱ = ۰ کی اور ھو قیمتین مساوات لاھ ۱ = ۰
ہوا اور موافق ہر یک نظم کی ان قیمتون کا ہر یک ممکن حاصل ضرب لین تو مساوات لان ۱ = ۰ کی تمام قیمتین
حاصل ہو جائینگی بموجب فقہ ۱۴۹ کی ہر یک نظم کی قیمتین کچھہ ضرور نہین ہے کہ اوس ہر ایک قیمت کی قواے کی
تعبیر ہون جسکو خواہ مخواہ مقرر کر لین
اگر ن مین تین مختلف اعداد اولی سی زیادہ اعداد اولی ہون تو بہی عمل اسطرح ہوگا
(۱۵۲) اکثر دستور کی بات ہی کہ ایک دعوی مساوات لان ۱ = ۰ مین ا اور زیادہ لکھا کرتی ہین اوسمین
ن قوت کسی عدد اولی کی ہوتی ہی اگرچہ یہہ عملاً کچھہ بکار آمد نہین ہی مگر ہم اوسکو یہان لکھتی ہین
مثلاً فرض کرو کہ ن = م۳ اور م عدد اولی ہی اور مساوات لام ۱ = ۰ کی ایک قیمت سہ ہی اور مساوات
لام ۱ − سہ = ۰ کی قیمت صہ ہی اور مساوات لام ۱ − صہ = ۰ کی قیمت لر ہی تو مساوات لان ۱ = ۰ کی
قیمتین اس حاصل ضرب کی ارقام ہونگین کہ
(۱ + سہ + سہ۲ + ... + سہ م−۱) (۱ + صہ + صہ۲ + ... + صہ م−۱) (۱ + لر + لر۲ + ... + لر م−۱)
اول کوئی سی رقم اس حاصل ضرب کی ایک قیمت مساوات کی ہی اسواسطے کہ فرض کرو سہ صہ لرف
کسی رقم کو تعبیر کرتی ہی تو (سہ صہ لرف)ن = سہ ن صہ ن لرف ق = ۱
دوم اس حاصل ضرب کی کوئی سی دو قمین برابر نہین ہو سکتین اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ
سہ صہ لرف = سہ ھ صہ ھ لر ف پس سہ ل = سہ لر اسمین

ل = ر + ص/م + ف/م۲ اور لر = ھد + ھے/م + ھج/م۲

اسواسطے سہ ل − لر = ۱ اسواسطے سہ لو − ۱ = ۰ اسمین م = م۲ (ل − لر) لیکن
م۲ (ل − لر) = م۲ (ر − ھد) + م (ص − بد) + ف − ر اور یہہ م سی متباین ہے
اور اسواسطے م۳ سی متباین ہی اسواسطے مساوا مین لان ۱ = ۰ اور لام ۱ = ۰

کی مشترک قیمت سوا واحد کے نہیں ہو سکتی

(۱۵۳) عملاً دفعہ بالا کچھ عظمت نہیں رکھتی اسلئے کہ جو اعمال اوسمین کرنے پڑتے ہین وہ علی العموم نہین ہو سکتی فرض کرو کہ مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ کو حل کر سکتے ہین اور سہ کو دریافت کرتی ہین تو تمام مقادیر ا، سہ، و، . . . سہ$_{م-۱}$ قیمتین مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ کی تو اسطرح ہم کو م قیمتین دریافت ہو جائینگے لیکن صد کے دریافت کرنی کی واسطے ہم مساوات لا^{م} - سہ = ۰ کو حل کرین یعنی مسئلہ کو دریافت کرین اسمین سہ = ما^{م} اور اس دریافت کرنے کے واسطے کوئی ترکیب جبر مقابلہ مین نہین ہے

مثلاً مساوات لا^{۳} - ۱ = ۰ اور لا^{۵} - ۱ = ۰ کو اگر ہم حل کرلین تو مساوات لا^{۱۵} - ۱ = ۰ کی بھی تمام حل بموجب دفعہ ۱۵۰ کی حاصل ہو جائینگے مگر ہم عملاً مساوات لا^{۹} - ۱ = ۰ یا لا^{۲۵} - ۱ = ۰ کو بموجب دفعہ ۱۵۲ کے نہین حل کر سکتی ہم کو صرف تین قیمتین مساوات اول کی اور پانچ قیمتین مساوات دوم کی حاصل ہونگین

(۱۵۴) معادلات لا^{ن} - ۱ = ۰ اور لا^{ن} + ۱ = ۰ کی عملی حل کرنی کی ترکیب ہم لکھتی ہین ہمین ان بہت بڑا نہین ہے اگر ن کوئی قوت ۲ کی ہو تو ان مساواتون کے حل مکرر جذر نکالنی سی دریافت کرلینگے اور اسم شناسی کی بار بار جذر نکالنی کی ترکیب جبر مقابلہ مین لکھی ہے دفعہ ۲۸ کو دیکھو

پس اس صورت مین تمام قیمتین معلوم ہو جائینگین اگر ن = ع م

اسمین ع = ۲ تو لا^{ع} = ر کے فرض کرو تو مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ اور لا^{ن} + ۱ = ۰ کی بدل جائینگین کہ ر^{م} - ۱ = ۰ اور ر^{م} + ۱ = ۰ پس اگر ر معلوم ہو جائے تو لا اسطرح دریافت ہوگا کہ ہم ر دفعہ مکرر جذر نکالین

(۱۵۵) مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ مین فرض کرو کہ ن طاق عدد بھی یعنی ن = ۲م + ۱ تو مساوات لا$^{۲م+۱}$ - ۱ = ۰ کی ایک حقیقی قیمت ہوگی یعنی + ۱ اسواسطے کہ اوسکی کوئی منفی قیمت نہین ہے اور اگر لا کو برابر کسی مقدار کے سوا واحد کی قرار دین تو لا$^{۲م+۱}$ کبھی واحد کی

برابر نہین ہوگا پس معلوم ہوا کہ مساوات کی حقیقی قیمت ایک ہی ہی لا^م+۱ - اگو لا - ا پر تقسیم ہو تو مساوات مختصر اور تحویل ہو کر یہہ پیدا ہو گی جسکو حل کرنا چاہی کہ

لا^۲م + لا^۲م-۱ + لا^۲م-۲ + ... + لا^۲ + لا + ۱ = ۰

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف ہے

(۱۵۶) مساوات لا^ن - ۱ = ۰ فرض کرو کہ ن جفت ہی اور ن = ۲م تو مساوات کے حقیقی قیمتین صرف دو + ۱ اور - ۱ ہین اور لا^م - ۱ کو لا - ۱ اور لا + ۱ کے حاصل ضرب لا^۲ - ۱ پر تقسیم کرتے ہین پس جو مساوات حل کرنی پڑیگی وہ یہہ مختصر اور تحویل ہو کر حاصل ہو گی

لا^۲م-۲ + لا^۲م-۴ + ... + لا^۲ + ۱ = ۰

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اوسکا حل م - ۱ درجہ کی مساوات کی حل پر موقوف ہے

مساوات لا^۲م - ۱ = ۰ کو (لا^م - ۱) (لا^م + ۱) = ۰ کی صورت مین لکھکر ہم عمل سانی سی کر سکتے ہین اور پھر اسکو تحلیل ان مساواتون لا^م - ۱ = ۰ اور لا^م + ۱ = ۰ مین کرلین یا اوس ترکیب کو عمل مین لائین جو دفعہ ۵۴ مین بیان ہوئی

(۱۵۷) مساوات لا^ن + ۱ = ۰ مین فرض کرو کہ ن طاق ہی اور ن = ۲م + ۱ اور مساوات لا^۲م+۱ + ۱ = ۰ کی صرف ایک حقیقی قیمت یعنی - ۱ ہی اور لا^۲م+۱ + ۱ کو لا + ۱ پر تقسیم کرین تو مساوات مختصر تحویل ہو کر حل کرنی کی واسطی یہہ پیدا ہو گی کہ

لا^۲م - لا^۲م-۱ + لا^۲م-۲ - ... + لا^۲ - لا + ۱ = ۰

یہہ مساوات متکافیہ ہی اور اسکا حل م درجہ کی مساوات کے حل پر موقوف

اگر ن طاق مساوات لا^ن + ۱ = ۰ مین ہو اور ہم لا کو - لا سی تبدیل کرین تو مساوات لا^ن - ۱ = ۰ حاصل ہو گی اگر ہم چاہین تو اس دوسرے مساوات کو حل کرین اور جو قیمتین نکلین اونمین علامتین بدل دین تو اول مساوات کا حل حاصل ہو جائیگا

(۱۵۸) اگر مساوات لا^ن + ۱ = ۰ مین ن جفت فرض کرین تو مساوات کی کوئی حقیقی

قیمت نہین ہوگی یہہ مساوات مساوات متکافیہ ہی اور اوسکا حل اوس مساوات کی حل پر موقوف ہے جسکا درجہ نصف اصلی مساوات کی درجہ سی ہی یا اس مساوات کی حل کرنی مین دفعہ ۱۵۴ کی ترکیب کام مین لاؤ

(۱۵۹) پس چار دفعات گذشتہ سی یہہ بات ثابت ہوتی ہی کہ معادلات مفروضہ کا حل ایسی معادلات کی حل پر موقوف ہوسکتا ہی جسکا درجہ نصف معادلات مفروضہ کے درجہ سی ہو

ہر یک صورت مین حقیقی قیمتون کی موافق جو اجزاء ضربی ہوتی ہین اونکو دور کرنی مین اور لا + ۱/لا = ی لکھتی ہین اور ایک مساوات ی کی حاصل ہوتی ہی اب یہہ مساوات ی کی تمام حقیقی قیمتین ہوسکتی ہین اسواسطے کہ فرض کرو کہ سہ + صہ ۱/ہ = ا ایک تخیلی قیمتون مین سی لا کی ہو تو اسکی مطابق ہی کی قیمت یہہ ہوگی کہ

سہ + صہ ۱/ہ + ۱/(سہ + صہ ۱/ہ) یعنی سہ + صہ ۱/ہ + (سہ − صہ ۱/ہ)/(سہ۲ + صہ۲)

اور یہہ برابر ایک حقیقی مقدار کے ہی یعنی ۲ کے شرطیکہ یہہ ثابت ہو کہ سہ۲ + صہ۲ = ۱ اب یہہ ہم ثابت کرینگے کہ سہ۲ + صہ۲ برابر ۱ کے ہے

چونکہ سہ + صہ ۱/ہ ایک قیمت مساوات لان − ۱ = ۰ کی ہی تو بموجب دفعہ ۱۴۱ کے سہ − صہ ۱/ہ بھی قیمت مساوات کی ہوگی پس

(سہ + صہ ۱/ہ)ن = ± ۱ اور (سہ − صہ ۱/ہ)ن = ± ۱

اب ضرب دینی (سہ۲ + صہ۲)۲ = ۱ اسیواسطے سہ۲ + صہ۲ = ± ۱

اور سہ۲ + صہ۲ مثبت ہی اسلئی سہ۲ + صہ۲ برابر ۱ کے ہوا

(۱۶۰) اب ہم بعض مثالین معادلات

لان + ۱ = ۰ اور لان − ۱ = ۰ کی لکھتے ہین

(۱) لا۳ − ۱ = ۰ اسی معلوم ہوتا ہے کہ (لا − ۱)(لا۲ + لا + ۱) = ۰

اسی معلوم ہوا کہ قیمتین ۱ اور (−۱ ± ۱ ۱/ہ − ۳)/۲ ہی پس یہہ تین قیمتین + ۱ کی تین جزو الکعب ہین اور اوسکی علامتین بدلنی سی ہم کو تین جزو الکعب − ۱ کے حاصل ہوتی ہین یا اسکو یون بیان کرو کہ مساوات لا۳ + ۱ = ۰ کی قیمتین حاصل ہوتی ہین

(۲) لا^۴ + ۱ = ۰ میں لا + ۱/لا = ی کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ی^۲ - ۲ = ۰

پس ی = ± √۲

اسیواسطے لا^۴ + ۱ = (لا^۲ + لا√۲ + ۱) (لا^۲ - لا√۲ + ۱)

ان دوم درجوں کی مساواتوں کی قیمتوں کی دریافت کرنی ی حل کامل ہوجائیگا

(۳) لا^۴ - ۱ = ۰ اسی حاصل ہوتا ہی کہ (لا - ۱) (لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱) = ۰

اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات لا^۲ + ۱/لا^۲ + لا + ۱/لا + ۱ = ۰ یعنی

ی^۲ + ی - ۱ = ۰ کی حل ہونی چاہی پس ی = (-۱ ± √۵)/۲

اسیواسطے لا^۵ - ۱ = (لا - ۱) (لا^۲ + لا (-۱ + √۵)/۲ + ۱) (لا^۲ + لا (-۱ - √۵)/۲ + ۱)

ان دوم درجہ کی مساواتوں کے حل کرنی ی کامل حل ہوجائیگا اور قیمتوں کی علامتیں بدل دین تو وہ مساوات لا^۵ + ۱ = ۰ کی قیمتیں بنجائینگی

(۱۶۱) اگر ہم مساوات لا^۳ - ۱ = ۰ کی حل کرنی مین کوشش کرین تو ہم کو مساوات ی کی تیسرے درجہ کی حاصل ہوگی اور اگر مساوات لا^۴ - ۱ = ۰ کے حل کرنے مین سعی کرین تو ی کی چوتھی درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اب اگلی دو بابون مین بتلائینگے کہ تیسری اور چوتھی درجہ کی مساواتین کسطرح حل ہوتی ہین یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ حل کی ترکیبین عملاً کسی کام کی نہین ہوتین جبکہ معادلات جنکو حل کرتی ہین تمام حقیقی قیمتین رکھتی ہون جیسی کہ یہان صورت ہی جسپر بحث موافق دفعہ ۱۵۹ کے ہم کرتے ہین

(۱۶۲) اگر مساوات لا^ن + ع لا^ل + ق = ۰ کی صورت کی ہو تو ہم مساوات درجہ دو کو موافق حل کرکی لا^ل کی قیمتین دریافت کرتی ہین اور پھر موافق اس باب کی ترکیبون کے لا کی قیمتین دریافت ہوسکتی ہین

اب یہان ہم ایک دعوی دو مقادیر اصم کی حاصل ضرب کے باب مین ثابت کرکی اس بات کو ختم کرتی ہین

(۱۶۳) فرض کرو کہ ا اور ب دو مقادیر جبریہ ہون اور م اور ن صحاح مثبتہ ہون تو ہم ا

کی م مختلف قیمتیں ہونگیں اور ن ب کی ن مختلف قیمتیں موافق دفعہ ۱۴۲ کے ہونگیں
اسی معلوم ہوا کہ م آ اور ن ب کی حاصل ضرب کی م ن مختلف قیمتوں سے زیادہ قیمتیں نہیں ہوسکتیں
اور اب ہم یہہ ثابت کرین گی کہ اوسکی اتنی قیمتیں نہیں ہوسکتیں بشرطیکہ م اور ن متباین نہ ہوں
اور اس دعوی سی پہلی اس دعوی کو ثابت کرینگی کہ م آ اور ن ب کی حاصل ضرب کے مختلف
قیمتیں م اور ن کی ذو اضعاف اقل کی برابر ہوتی ہین
فرض کرو کہ م آ کی قیمتون مین سے ایک قیمت ط ہو تو تمام قیمتین م آ کی ط م آ سن شامل ہونگیں
اور فرض کرو کہ ن ب کی قیمتون مین سی ص ایک قیمت ہو تو ن ب کی تمام قیمتین ص ن آ مین
داخل ہونگیں اسی معلوم ہوا کہ تمام قیمتین حاصل ضرب کے ط ص × م آ × ن آ مین داخل ہین اور
اسیواسطے حاصل ضرب کے مختلف قیمتون کی تعداد وہی ہوگی جو م آ × ن آ کی ہے فرض کرو
کہ م اور ن کا ذو اضعاف اقل ہی تو (م آ × ن آ) = ۱
پس م آ × ن آ برابر واحد کے مرتبہ کے نزول کی ہی واسطی رمختلف قیمتون سے
زیادہ قیمتین نہین ہوسکتین
لیکن ہم کو یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ م آ × ن آ فی الحقیقت رمختلف قیمتین رکھتا ہے
فرض کرو کہ ع ذو اعظم م اور ن کا ہی اور ع ک = لو پس لو آ کی لو قیمتین م آ
کی م قیمتون مین داخل ہین اور م آ × ن آ کی قیمتین اسطرح حاصل ہوسکتی ہین کہ لو آ کی
لو قیمتون اور ن آ کی ن قیمتون کے حاصل ضرب کے مختلف ارقام لین اور یہہ رقمین سب مختلف ہونگیں اسواسطے کہ
اگر دو قیمتون مین سی دو قیمتین سہ اور سہ ہین اور ن قیمتون مین سی صہ اور رصہ دو قیمتین ہین تو صہ
برابر رصہ کی نہین ہوسکتا اسواسطی کہ اگر سہ صہ = سہ رصہ تو سہ صہ = صہ رصہ دائین طرف کا رکن
ایک قیمت مساوات لآ - ۱ = ۰ کی ہی اور بائین طرف کا رکن ایک قیمت مساوات لآ - ۱ = ۰ کی ہی
اور ان مساوات کی کوئی قیمت مشترک سوا واحد کے بموجب دفعہ ۱۴۷ کے نہین ہوسکتی
(۱۶۴) بعض اوقات دفعہ گذشتہ کے اصل اصول اسطرح بیان کئے جاتے ہین کہ ہم کو معلوم ہے کہ م آ × ن آ = ۱ مین اور

اگر $\frac{م+ن}{م-ن}$ کو مختصر الحدین بنائین تو تمار کنندہ ایک صحیح عدد ہوگا اور اور نسب نمار ہوگا
اسطرح $\frac{م+ن}{م-ن} = \frac{ا}{ا}$ اور اسکی مختلف قیمتین ہین یہہ ترکیب اثبات کی مضحل ہی کیونکہ جبر مقابلہ
مین جو معمولی مسئلہ مقادیر اصم کا لکھا گیا ہی وہ مقادیر اصم کی حسابیہ قیمتون کے واسطے
ثابت کیا گیا ہی اسواسطے اوسی یہہ ارتباط $\frac{ا}{م} + \frac{ا}{ن} = \frac{م+ن}{م-ن}$ موافق اوس معنی
کے جو یہان لی گئی ہین نہین ثابت ہوتا ہے

بارہوان باب معادلات مکعبی

(۱۶۵) مساوات درجہ دوم کی حل کرنے کی باب مین بحث کرنی یہان فضول ہی اسلیئے کہ اوسکا مفصل
حال جبر مقابلہ مین بیان ہوچکا ہی اس باب مین فقط درجہ سوم کی مساواتون سی جنکو معادلات مکعبی
کہتے ہین بحث ہوگی

دفعہ ۱۶۰ مین ہم نی یہہ ثابت کیا ہی کہ مساوات مفروضہ کی ایسی ہیئت بدل سکتی ہے کہ اوسمین دوسری رقم نہو
جس مساوات مکعبی مین دوسرے رقم ہو اوسکی قیمتون کی بہت صاف جملی بہ نسبت کامل مساوات
مکعبی کے قیمتون کی ہوتی ہین اسلیئے ہم یہہ فرض کرلیتے ہین کہ جن مکعبی مساواتون کو ہم حل کرتی ہین اونمین
دوسری رقم نہین ہے جس عمل کو اب ہم لکھینگے اوسکا نام کارڈن کا حل مکعبی مساوات کا ہے

(۱۶۶) مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $لا = ی + ی$ اور ی اور ی بالفعل دو مقادیر مجہول ہین

اسکو مساوات مفروض مین لا کی جگہ رکھو تو

$$(ی + ی)^۳ + ق(ی + ی) + ر = ۰$$

یعنی $ی^۳ + ی^۳ + (۳ی ی + ق)(ی + ی) + ر = ۰$

ہم نی صرف دو مقادیر ی اور ی کی باب مین ایک یہہ بات فرض کی ہی کہ اونکا مجموعہ مساوات
مفروضہ کی ایک قیمت ہو اسلیئے ہم کو اختیار ہی کہ کوئی دوسری بات بہی اونکی باب مین فرض کرین
وہ دو مقدارین مجہول ہین اونکی واسطی دو شرائط مقرر کرسکتی ہین پس فرض کرو کہ $۳ی ی + ق = ۰$

تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ز^۳ + ی^۳ + ر = ۰$$

ی کی قیمت ارقام ز مین مندرج کرو تو

$$ز^۳ + -(\frac{ق}{۳ز})^۳ + ر = ۰$$

یعنی $ز^۶ + ر ز^۳ - \frac{ق^۳}{۲۷} = ۰$

اسی معلوم ہوا کہ $ز^۳ = -\frac{ر}{۲} \pm \sqrt{(\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷})}$

اور ی$^۳ = -ر - ز^۳ = -\frac{ر}{۲} \mp \sqrt{(\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷})}$

اور نیز لا = ز + ی اب ہم ز^۳ اور ی^۳ کے قیمتون مین اوپر کی علامت لین تو اور نیچی کی لین تو دونو صورتون مین ایک ہی نتیجہ حاصل ہوگا صفائی کی واسطے ہم اوپری کی علامت لیتے ہین تو

$$لا = \sqrt[۳]{[-\frac{ر}{۲} + \sqrt{(\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷})}]} + \sqrt[۳]{[-\frac{ر}{۲} - \sqrt{(\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷})}]}$$

پس لا کے واسطے جو جملہ ہی اوسمین دو جزء الکعب ہین اور ہر مقدار کے تین جزء الکعب ہین تو اب ہم کو یہہ دریافت کرنا چاہئی کہ بالفعل کونسی جزء الکعب لینی چاہئی فرض کرو کہ

$$سہ = \frac{۱}{۲}(-۱ + \sqrt{-۳})$$

تو بموجب دفعہ ۱۶۰ کے اگی تین جزء الکعب ۱ اور سہ اور سہ^۲ ہین اب فرض کرو کہ

$-\frac{ر}{۲} + \sqrt{(\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷})}$ مکعبون مین سی ایک جزء الکعب م ہی تو اور جزء الکعب م سہ اور م سہ^۲ ہونگے اور $-\frac{ر}{۲} - \sqrt{(\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷})}$ کے جزء الکعبون مین سی ایک جزء الکعب کون تعبیر کرتا ہی تو اور جزء الکعب ن سہ اور ن سہ^۲ ہین

لاے جملے مین جو جزء الکعب واقع ہوتی ہین اونمین سی ہر یک کی واسطے اوسکی تین قیمتون مین سے ہر یک قیمت لگائین تو ہم کو کل نو قیمتین حاصل ہونگین لیکن مکعبی مساوات کی صرف تین قیمتین ہوتی ہین تو اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ اون نو قیمتون مین سی صرف تین قیمتین مساوات مین دخل رکھتی ہین اور باقی خارج ہین اور فی الحقیقت عمل حل مین ی = $-\frac{ق}{۳ز}$

ایک شرط ہی پس جو قیمتین اس شرط کو پورا کرین وہی قیمتین مساوات مین دخل رکھتی ہین
فرض کرو کہ م اور ن ایسی مقرر کئی گئی ہین کہ وہ شرط م ن = - $\frac{ق}{۳}$ کو پورا کرتے ہین
تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ی = م اوری = ن کے قیمتین دخل پذیر ہونگین اور ی = سہ م
اوری = سہ ن کی بھی حاصل ہوگا اور ی = سہ م اوری = سہ ن کے بھی حاصل ہوگا
کیونکہ دو تو صورتون مین ارتباط ی = - $\frac{ق}{۳}$ کی شرایط پوری ہوتی ہین مگر کوئی اور زوج
قیمتون کا داخل نہین ہوسکتا تمثیلاً فرض کرو کہ ی = م اوری = سہ ن تو ی = - $\frac{سہ ق}{۳}$
کی حاصل ہوگا اور - $\frac{ق}{۳}$ کی برابر نہین حاصل ہوگا اور ایسی ہی اور زوج قیمتون سی
ی = - $\frac{سہ ق}{۳}$ یا = - $\frac{سہ ق}{۳}$ کے حاصل ہوگا اور - $\frac{ق}{۳}$ نہین حاصل ہوگا
اسلئی سوا اون ازواج قیمتون کی جنکی دخل کی کیفیت اوپر بیان کرائی ہین اور کوئی زوج
قیمتون کا شرایط کو الیفا نہین کریگا

(۱۶۷) تمثیلاً فرض کرو کہ لا^{۳} + ۶ لا - ۲۰ = ۰ یہان ق = ۶ اور ر = - ۲۰ پس

لا = $(۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} + (۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}}$

عددی حساب لگانے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$(۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}}$ = ۳۲ ، ۷ ، ۲ اور $(۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}}$ = - ۳۲ ، ۷ ، ۰

پس اسی ہم گمان کرتی ہین کہ لا = ۲ کے ہوگا اور امتحان سی یہہ معلوم بھی ہوگا کہ لا = ۲ کی ہی
اب اور دو قیمتون کی بیان کرنی کی واسطی موافق دفعہ گذشتہ کی عمل کرنے کے لئے یہہ بہتر ہوگا
کہ ہم مساوات کا تنزل مساوات درجہ دوم کی طرف کرین چونکہ ۲ قیمت مساوات
مفروضہ کی ہی اسلئی لا^{۳} + ۶ لا - ۲۰ پورا لا - ۲ پر تقسیم ہوگا اور یہہ ہم کو دریافت ہوگا کہ

لا^{۳} + ۶ لا - ۲۰ = (لا - ۲) (لا^{۲} + ۲ لا + ۱۰)

اسواسطے باقی دو قیمتین مساوات کی اس مساوات

لا^{۲} + ۲ لا + ۱۰ = ۰

کے حل کرنے سے یہہ دریافت ہونگین کہ

$$-۱ \pm \sqrt{-۳} \text{ اور } -۱ \pm \sqrt{-۳}$$

مثال گذشتہ مین ہم امتحان سی یہہ ثابت کرتے ہین کہ

$$(۱۰ + \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} + (۱۰ - \sqrt{۱۰۸})^{\frac{۱}{۳}} = ۱ + \sqrt{-۳} \text{ اور } ۱ - \sqrt{-۳}$$

پس اسطرح قیمت ۲ بغیر نزول نکالنی کی دریافت ہوگئی کوئی عمل جبریہ ایسا نہین ہے کہ اوسی علی العموم جزء الکعب اس جملہ $ا + \sqrt{ب}$ کی صورت کا محدود صورت مین نکال لین دفعہ ۱۳۱ جبر مقابلہ کی دیکھو اسلئے $(ا + \sqrt{ب})^{\frac{۱}{۳}}$ کی قیمت دریافت کرنی کی واسطے ضابطہ جملہ ثنائی کو کام مین لاکر لانہایت سلسلہ دریافت کرتی ہین اور اس حالت مین اگر $ب$ کم $ا$ سے ہو تو اس سلسلہ کی انضمامی بنانی کی واسطے سلسلہ کو قواء متصاعدہ مین $ب$ کی پہلائین اور اگر $ب$ بڑا $ا$ سے ہو تو سلسلہ کو $ا$ کی قواء متصاعدہ مین پہلائین جبر مقابلہ کا باب ۳۶ اور ۴۰ دیکھو

(۱۶۸) دفعہ ۱۶۶ مین ہم نی لکھا ہی کہ گو لاکیو اسطی بظاہر نو قیمتین نکلتی ہین مگر اونمین سی تین مساوات مین فصل رکھتی ہین اور باقی خارج ہین اب ان نو قیمتون کی واقع ہونی کی دلیل یہہ ہی کہ ارتباط $ری = -\frac{ق}{۳}$ فرض کیا گیا تھا اور پھر اوسکی صورت عمل کی اندر $ر^۳ ی^۳ = -\frac{ق^۳}{۲۷}$ مین تبدیل کی گئی تھی اب اس اخراء ارتباط مین کچھہ تبدل نہ ہوگا اگر

ق بدل کسی سہ یا ق سہ ہوگا پس مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی حل کرنے مین لو حل ہم کو دریافت ہوتی ہین اونمین سی تین تو اس مساوات سی متعلق ہوتی ہین اور تین مساوات

$لا^۳ + ق سہ لا + ر = ۰$ سی اور تین مساوات $لا^۳ + ق سہ^۲ لا + ر = ۰$ سے

(۱۶۹) مکعبی مساوات مفروضہ کی قیمتون کی صورت پر اب ہم خاص بحث کرتے ہین ق اور ر کو ہم اصلی مقادیر فرض کرینگے $ر^۲$ اور $ری$ کے واسطی جملی کیا تو اصلی ہون گے یا خیالی اول فرض کرو کہ یہہ جملی اصلی ہین تو $ر^۳$ اور $ری$ کے جزء الکعبون کی حسابی قیمتون کو فرض کرو کہ م اور ن تعبیر کرتی ہین تو مکعبی مساوات مفروض کی ۳ صورتین مین تعینی ایک اصلی قیمت یعنی م + ن ہو گی

اور باقی دو قیمتیں م سہ + ن سہ اور م سہ + ن سہ ہونگیں اور سہ کی قیمت مندرج کرنے سے جداگانہ یہہ قیمتیں ہونگیں کہ

$$-\frac{1}{2}(م+ن)+\frac{1}{2}(م-ن)\sqrt{-3}$$

اور $$-\frac{1}{2}(م+ن)-\frac{1}{2}(م-ن)\sqrt{-3}$$

اور یہہ تخیلی قیمتیں ہیں بشرطیکہ م = ن کے نہ ہو اور جب م = ن تو تکعبی مساوات کی دو برابر قیمتیں ہونگیں اور ہر یک انمیں سی برابر م یا - ن کے ہو گی اس شرط ضروری جسی یہہ تحقق ہو جائے کہ م = ن یعنی ی۲ = ی۳ کے یہہ ہی کہ $\frac{ب^2}{4} + \frac{ق^3}{27} = 0$

بالعکس اسکے اگر تکعبی مساوات کی قیمتیں تمام اصلی ہوں اور غیر مساوی ہوں تو ی۲ اور ی۳ کی جملہ تخیلی ہونگی یہہ فرض کرو کہ ی۲ اور ی۳ کی جملی خیالی ہیں یعنی فرض کرو کہ $\frac{ب^2}{4} + \frac{ق^3}{27}$ منفی مقدار ہی تو بموجب دفعہ ۴۲ کی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ی۲ اور ی۳ میں سی ہر یک کا جزو الکعب خاص صورت کا ہوگا اسواسطے ہم فرض کرتی ہیں کہ م = لو + مو $\sqrt{-1}$ اور چونکہ ی۳ اور ی۳ میں فرق علامت جذر میں ہے اسلئے ن = لو + مو $\sqrt{-1}$ اس صورت میں تکعبی مساوات مفروضہ کی تمام اصلی قیمتیں یہہ ہیں یعنی

لو + مو $\sqrt{-1}$ + لو - مو $\sqrt{-1}$ یعنی ۲ لو ہے

(لو + مو $\sqrt{-1}$) سہ + (لو - مو $\sqrt{-1}$) سہ۲ یعنی - لو - مو $\sqrt{-3}$

اور (لو + مو $\sqrt{-1}$) سہ۲ + (لو - مو $\sqrt{-1}$) سہ یعنی - لو + مو $\sqrt{-3}$

(۱۷۰) تکعبی مساوات کا حل ہو کارڈن صاحب کا ہی اوسے عملاً ایسی صورت میں کچھہ فایدہ نہیں حاصل ہوتا کہ مساوات کی سب قیمتیں اصلی اور غیر مساوی ہوں اسواسطے کہ اس حالت میں جملی ی۲ اور ی۳ کے تخیلی ہوتی ہیں اور گو ہم اس بات کو جانتے ہیں کہ اونکی جزو الکعب دو رکھتے ہیں مگر کوئی ترکیب ایسی نکالنی کی از روی علم حساب نہیں ہی پس ایسی صورت میں ہم کو قیمتیں صورت جبریہ میں معلوم ہو جاتی ہیں مگر اونکا حساب عددی نہیں ہو سکتا اسلئے وہ حساباً کچھہ وقعت نہیں رکھتی تمثیلاً یہہ مساوات لوکہ

$$لا^{۳} - ۱۵لا - ۴ = ۰$$

یہان ر = - ۴ اور ق = - ۱۵ اسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لا = (۲ + \sqrt{۱۲۱ - ۱۲۱})^{\frac{۱}{۳}} + (۲ - \sqrt{۱۲۱ - ۱۲۱})^{\frac{۱}{۳}}$$

یعنی $لا = (۲ + \sqrt{-۱}۱۱)^{\frac{۱}{۳}} + (۲ - \sqrt{-۱}۱۱)^{\frac{۱}{۳}}$

اب یہان ظاہر ہی کہ کوئی جزد المکعب بگانی کا طریق نہین ہی امتحان سی یہہ ثابت ہوتا ہی کہ

$$(۲ + \sqrt{-۱}۱۱)^{\frac{۱}{۳}} = ۲ + \sqrt{-۱}$$

$$(۲ - \sqrt{-۱}۱۱)^{\frac{۱}{۳}} = ۲ - \sqrt{-۱}$$

پس $لا = ۲ + \sqrt{-۱} + ۲ - \sqrt{-۱} = ۴$

پس ۴ قیمت ہی اب اور قیمتین دفعہ ۱۶۹ سی دریافت ہوسکتی ہین یا اسطرح عمل کرنی سی کہ

$$لا^{۳} - ۱۵لا - ۴ = (لا - ۴)(لا^{۲} + ۴لا + ۱)$$

پس ہم کو یہہ مساوات حل کرنی پڑیگی کہ $لا^{۲} + ۴لا + ۱ = ۰$ اور اسکی قیمتین $-۲ \pm \sqrt{۳}$ ہین

اب مساوات $لا^{۳} - ۳\sqrt{۲}لا - ۲ = ۰$ پر خیال کرو

یہان ر = - ۲ اور ق = $- ۳\sqrt{۲}$ پس

$$لا = (۱ + \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}} + (۱ - \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$$

یہہ امتحان سے ثابت ہوتا ہے کہ

$$\sqrt{-۱}\frac{۱ - ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} + \frac{۱ + ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} = (۱ + \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$$

$$\sqrt{-۱}\frac{۱ - ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} - \frac{۱ + ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} = (۱ - \sqrt{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$$

پس $لا = \frac{۱ + ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} + \sqrt{-۱}\frac{۱ - ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} + \frac{۱ + ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} - \sqrt{-۱}\frac{۱ - ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱ + ۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$

اور باقی قیمتین دریافت ہوسکتی ہین اور وہ یہہ ہین کہ

$$\frac{۱ - ۳\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}} \text{ اور } - \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

(۱۷۱) جو صورت مکعبی مساوات کی ایسی ہی کہ ہوسکتی ہین قیمتین صلی اور غیر مساوی ہون اوس صورت کو معدوم التحویل کہتی ہین

اور بعض اوقات یہہ کہتی ہین کہ اس صورت مین قاعدہ کارڈن کا نہین چلتا ان جملون سے یہہ بات معلوم ہوتی ہے کہ جسمین ایسی صورتین نمایان ہوتی ہین کہ اونکی حسابگانی مین بڑی دقت اور دشواری عاید ہوتی ہے لیکن ضابطہ جملہ ثنائی کی استعانت سی جملہ ع + ق $\sqrt{-1}$ کی صورت کی جملہ کی تعریف قیمتین دریافت کرتی ہین اگر ق تعداداً چھوٹا ع سی ہو تو $(ع + ق \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمائی مین موافق قواعد متصاعدہ ق $\sqrt{-1}$ کے پہلا ئین جبر مقابلہ ۳۴ باب دیکھو پس $(ع + ق \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً ع + ق $\sqrt{-1}$ کے صورت مین لاسکتی ہین اور $(ع - ق \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو تقریباً ع - ق $\sqrt{-1}$ کی صورت مین اور مجموعہ ان جزء الکعبون کا ۲ ع ہوگا لیکن اگر ق تعداداً بڑا ع سی ہو تو ہم اسطرح عمل کرین گے

$ع + ق \sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,(ق - ع \sqrt{-1})$

اسی معلوم ہوا کہ $(ع + ق \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} (ق - ع \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$

اب - $\sqrt{-1}$ کا جزء الکعب امتحان سی $\sqrt{-1}$ معلوم ہوتا ہی پس یہہ حاصل ہوگا

$(ع + ق \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{-1}\,(ق - ع \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$

اور ہم $(ق - ع \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ کو سلسلہ انضمائی مین قواعد متصاعدہ ع $\sqrt{-1}$ کی پہلا سکتی ہین اور پہر موافق سابق کی مجموعہ ع + ق $\sqrt{-1}$ اور ع - ق $\sqrt{-1}$ کا دریافت کرسکتی ہین یہہ صورت کہ ع = ق کے دفعہ گذشتہ کی دوسرے مثال مین شامل ہی

اس بات پر بہی غور کرنی چاہئی کہ ضابطہ ڈی مولور کے وساطت سی مقدار ع + ق $\sqrt{-1}$ کا جزء الکعب اسی صورت مین بیان ہوسکتا ہے کہ اوسمین علم مثلثی جملے ملتفت ہون

(۱۷۲) دفعات گذشتہ سی ظاہر ہوتا ہے کہ مکعبی مساوات $ا^3 + ق ا + ر = ۰$ ہمیشہ کارڈن کے عمل سی حل ہوسکتی ہی اور جب ق مساوات مین مثبت ہو تو کچہہ دقت اوسمین نہین واقع ہوتی اور جب ق منفی ہو اور اوسکی ساتھہ ق^3 تعداداً چھوٹی $\frac{۲۷}{۴}$ ر^۲ سی ہو تو ان صورتون مین قیمتین خیالی ہونگین اگر ق^3 ایک منفی مقدار ہو اور تعداداً بڑی $\frac{۲۷}{۴}$ ر^۲ سی ہو تو گاردین

کے حل مین بڑی دقت ہوتی ہی اور اس صورت مین تمام قیمتین اصلی ہین
اگر ق۳ منفی ہو اور تعداد اُ برابر $\frac{۲۷ ر^۲}{۴}$ ہو تو $\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷} = ۰$ تو بموجب دفعہ ۶۰ کے
اوسکی قیمتین برابر ہونگین بموجب دفعہ ۱۶۶ کے اس صورت مین م = ن = ۳ $\sqrt{-\frac{ر}{۲}}$
اور تینون قیمتین ۳ م اور - م اور - م ہین
جس صورت مین مکعبی مساوات کی قیمت ایک معلوم ہوجاے تو مکعبی مساوات کا تنزل مساوات درجہ
دوم کی طرف کرین اور اس مساوات درجہ دوم سی دو قیمتین دریافت کرین اور دفعات گذشتہ
کی ترکیب سے قیمتون کو نہ دریافت کرین
(۱۷۳) کامل مکعبی مساوات کی حل کرنی مین جو نتایج حاصل ہوتے ہین اوسکا مختصر بیان کرتی ہین فرض کرو کہ مساوات

$$لا^۳ + ا لا^۲ + ب لا + س = ۰$$

مین فرض کرو کہ لا = ی - $\frac{ا}{۳}$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ی^۳ + ق ی + ر = ۰$$

اسمین ق = ب - $\frac{ا^۲}{۳}$ اور ر = س - $\frac{ا ب}{۳} + \frac{۲ ا^۳}{۲۷}$
اب بموجب ترکیب کارڈن کے

$$لا = \sqrt[۳]{\left(-\frac{ر}{۲} + \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)} + \sqrt[۳]{\left(-\frac{ر}{۲} - \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}}\right)}$$

اسے یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷} = \frac{س^۲}{۴} - \left(\frac{ا ب}{۶} - \frac{ا^۳}{۲۷}\right) + \frac{ب^۲}{۲۷}\left(ب - \frac{ا^۲}{۴}\right)$$

(۱۷۴) بعض معادلات مکعبی جسمین امثال کی خاص قیمتین ہون بغیر کارڈن کی ترکیب کے ہی حل ہوجاتی ہین
مثلاً فرض کرو کہ

$$لا^۳ + ۳ لا = ا^۳ - ۳$$

اسکو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$لا^۳ + ۳ لا = (ا - \frac{۱}{ا})^۳ + ۳(ا - \frac{۱}{ا})$$

یعنی $لا^۳ - (ا - \frac{۱}{ا})^۳ + ۳ \left[لا - (ا - \frac{۱}{ا}) \right] = ۰$

اسمین ظاہر ہی کہ ایک قیمت $لا = ا - \frac{۱}{ا}$

اب پھر فرض کرو یہہ مکعبی مساوات کامل ہے کہ

$لا^۳ + ا لا^۲ + ب لا + س = ۰$

اور امثال کی درمیان یہہ ارتباط $۲ا^۳ = س$ ہے ہی تو مساوات مفروضہ اسطرح لکھی جائینگی

$- لا^۳ = ا لا^۲ + ب لا + س$

اسیواسطے $- ۳ا لا^۳ = ۳ ب ا^۲ لا^۲ + ۳ ب^۲ ا^۳ لا + ب^۳$

اسیواسطے $(ا^۳ - ۳ا ب) لا^۳ = ا^۳ لا^۳ + ۳ ب ا^۲ لا^۲ + ۳ ب^۲ ا^۳ لا + ب^۳ = (ا لا + ب)^۳$

اسیواسطے $لا \sqrt[۳]{ا^۳ - ۳ا ب} = ا لا + ب$

اسیواسطے $لا = \frac{ب}{\sqrt[۳]{ا^۳ - ۳ا ب} - ا}$

(۱۷۵) علم مثلث مستوی کی ۷، ۱۱ باب مین ایک عملی کہا ہی جسی کہ ہم مساوات درجہ سوم معدوم التحویل کے قیمتین بذریعہ جداول علم مثلثی کی دریافت کرسکتی ہین یہہ بات عملاً تو کسی کام کی نہین ہے لیکن ہم یہہ بتلائینگی کہ علم مثلثی جدولین کسطرح اون مثالون کی حل کرنی مین بہی کام اتی ہین جو صورت معدوم التخویل سی متعلق نہین ہین

فرض کرو کہ $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ لہ

$لا = (- \frac{ر}{۲} + \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}})^{\frac{۱}{۳}} + (- \frac{ر}{۲} - \sqrt{\frac{ر^۲}{۴} + \frac{ق^۳}{۲۷}})^{\frac{۱}{۳}}$

اگر ق مثبت ہی تو فرض کرو کہ $\frac{ق^۳}{۲۷} = \frac{ر^۲}{۴}$ مس ^{۲} بر تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$لا = (- \frac{ر}{۲} + \frac{ر}{۲} \text{ قط بر})^{\frac{۱}{۳}} + (- \frac{ر}{۲} - \frac{ر}{۲} \text{ قط بر})^{\frac{۱}{۳}}$

$= (- \frac{ر}{۲} \text{ جم بر})^{\frac{۱}{۳}} \left[\text{جم} \frac{ر}{۲} \text{ بر})^{\frac{۱}{۳}} - (\text{جب} \frac{ر}{۲} \text{ بر})^{\frac{۱}{۳}} \right]$

اگر ق منفی ہو اور $\frac{ق^۳}{۲۷}$ تعداد اگہوٹا، $\frac{ر^۲}{۴}$ سی ہو تو فرض کرو $\frac{ق^۳}{۲۷} = - \frac{ر^۲}{۴}$ جب ^{۲} بر تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$لا = (- \frac{ر}{۲} + \frac{ر}{۲} \text{ جم بر})^{\frac{۱}{۳}} + (- \frac{ر}{۲} - \frac{ر}{۲} \text{ جم بر})^{\frac{۱}{۳}}$

$$= (-ر)^{\frac{1}{2}} \left[(جم \tfrac{ح}{2})^{\frac{2}{3}} - (جب \tfrac{ح}{2})^{\frac{2}{3}} \right]$$

(۱۷۶) ایک مساوات عظیم تحقیقات ریاضیہ میں کثیر الوقوع ہی اوسپر بحث کرتی ہین گو وہ اس باب کے خاص مطلب سے متعلق نہین ہے

ہم یہہ دعوی کرتی ہین کہ مساوات ح (لا) = ۰ تمام اصلی قیمتین ہونگین اگر ج (لا)

(لا - ا) (لا - ب) (لا - س) - ا^{۲} (لا - ا) - ب^{۲} (لا - ب) - س^{۲} (لا - س) - ۲ ا ب س

کو تعبیر کری مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$(لا - ا) \left[(لا - ب)(لا - س) - ا^{۲} \right] - \left[ب^{۲} (لا - ب) + س^{۲} (لا - س) + ۲ ا ب س \right] = ۰$$

فرض کروکہ اس مساوات درجہ دوم

$$(لا - ب)(لا - س) - ا^{۲} = ۰$$

کی قیمتین ھہ اور ک ہین اور ھہ بہ نسبت ک کی کم ہی تو مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے یہہ معلوم ہوگا کہ

ھہ بڑا ب یا س سی ہی اور ک چھوٹا ب یا س سی ہی متواتر لا کی جگہ ح (لا) مین + ھہ و ھہ کو ک و - ھہ رکھو تو یہہ نتایج جداگانہ حاصل ہونگے

$$+ ھہ و - \left[ب^{۲} (ھہ - ب) + س^{۲} (ھہ - س) \right] \text{ و } \left[ب^{۲} (ب - ک) + س^{۲} (س - ک) \right] \text{ و } - ھہ$$

پس مساوات ح (لا) = ۰ کی تین اصلی قیمتین ایک بڑی بہ نسبت ھہ کی اور ایک درمیان ھہ اور ک کی اور ایک چھوٹی بہ نسبت ک کے حاصل ہونگین

(۱۷۷) اب دو صورتین ایسی باقی ہین کہ اونکی توضیح اور تشریح زیادہ کرنی چاہی اونکا حل اس اثبات سی نہین ہوتا (۱) جس صورت مین ھہ = ک (۲) جسمین ھہ اور ک ایک قیمت بکثرت مساوات کے ہو

فرض کرو کہ ھہ = ک چونکہ قیمتین مساوات درجہ دوم کی برابر ہین اسلئے یہہ شرط ضرور ہوگی کہ

(ب - س)^{۲} + ۴ ا^{۲} = ۰ اسیواسطے ب = س اور ا = ۰ اسی معلوم ہوتا ہے کہ اس ایک قیمت بکثرت مساوات کی ہوگا

اور ح (لا) کو لا - س پورا تقسیم کریگا اور مساوات کو برابر صفر کے لکھنے سے

مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی جسکی اصلی قیمتین ہین

(۲) فرض کرو کہ حصہ اور کہ میں سے ایک مثلاً حصہ قیمت مکعبی مساوات کی ہی تو دفعہ ۱۷۹ کی موافق عمل کرنے سے ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی بہی ایک اصلی قیمت چھوٹی کسر سی ہے پس اوسکی دو اصلی قیمتیں ہیں ناگزیر تیسری قیمت بہی اصلی ہوگی اور اسیطرح اگر کہ ایک قیمت مکعبی مساوات کی ہو تو ایک اصلی قیمت اوسکی بڑی بہ نسبت حصہ کی ہوگی اصلی ضرور ہی کہ تیسری قیمت بہی اصلی ہو

(۱۷۸) اب ہم اوس شرط کی تحقیقات کرتے ہیں جسکی موافق حصہ یا کہ ایک قیمت مساوات مکعبی کے ہو

فرض کرو کہ لر ایک قیمت مساوات درجہ دوم اور درجہ سوم کی بہی ہے

چونکہ لر مساوات درجہ دوم کی ایک قیمت ہے اصلی

$$(\text{لر}-\text{ب})(\text{لر}-\text{س})-\text{ا}^2=0 \qquad (۱)$$

اور چونکہ لر مساوات مکعبی کی بہی قیمت فرض کی گئی ہی اصلی بہی حاصل ہوگا کہ

$$\text{ب}^2(\text{لر}-\text{ب})+\text{س}^2(\text{لر}-\text{س})+2\text{ا}^2(2\text{لر}-\text{ب}-\text{س})=0 \qquad (۲)$$

(۱) اور (۲) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\text{ب}^2(\text{لر}-\text{ب})+\text{س}^2(\text{لر}-\text{س})+2\text{ب}\text{س}\sqrt{(\text{لر}-\text{ب})(\text{لر}-\text{س})}=0$$

یعنی $\left[\text{ب}\sqrt{(\text{لر}-\text{ب})}+\text{س}\sqrt{(\text{لر}-\text{س})}\right]^2=0$

اسیواسطے $\text{ب}^2(\text{لر}-\text{ب})=\text{س}^2(\text{لر}-\text{س})$ (۳)

(۲) اور (۳) سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لر}-\text{ب}=-\frac{\text{ا}^2\text{س}}{\text{ب}^2} \text{ اور } \text{لر}-\text{س}=-\frac{\text{ا}^2\text{ب}}{\text{س}^2} \qquad (۴)$$

اور اسیواسطے $\text{ب}-\frac{\text{ا}^2\text{س}}{\text{ب}^2}=\text{س}-\frac{\text{ا}^2\text{ب}}{\text{س}^2}$ (۵)

اسی ثابت ہوا کہ مکعبی مساوات کی امثال میں ارتباط (۵) ہونا چاہی تاکہ مساوات درجہ دوم کی قیمتوں میں سی ایک قیمت مکعبی مساوات کی ایک قیمت ہو بالعکس اسکی اگر (۵) متحکم ہو تو (۴) سی تحقیق کرکے کہ اوسکی ایک قیمت مقرر کریں تو دونو مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہوجائینگی پس مساوات درجہ دوم اور مساوات درجہ سوم کے

ایک قیمت مشترک ہوجائیگی

(۱۷۹) مساوات مکعبی کی قیمتون کی برابر ہونی کی شرایط ہم تحقیق کرتے ہین

اگر ھہ اورک مین سی کوئی ایک بہی قیمت مکعبی مساوات کی نہ ہو تو دفعہ ۱۷۶ کی اثبات سی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات مکعبی کی قیمتین غیر مساوی ہین دفعہ ۱۷۶ کا عمل ان دوم درجہ کی مساواتون مین سے ہر ایک پر

$(لا-س)(لا-ر)-ب^{2}=۰$ ما $(لا-ا)(لا-ب)-س^{2}=۰$

بجای مساوات درجہ دوم $(لا-ب)(لا-س)=ا^{2}=۰$ کے حل سکتا ہے

اسی ثابت ہوتا ہی کہ مکعبی مساوات کی برابر قیمتین نہین ہوسکتین جب تک اوسکی اور ان درجہ دوم کی مساواتون مین سی ایک مساوات کی قیمت مشترک نہ ہو

اسی ثابت ہوا کہ مساوات (۵) سی شرایط لابدی مساوات مکعبی کی برابر قیمتون کے واسطی یہہ حاصل ہونگین

$ا-\frac{ب^{2}}{ا}=ب-\frac{ب^{2}}{ا}=س-\frac{ا^{2}ب}{س}$

بالعکس اسکی اگر یہہ شرایط مستحکم ہون تو مساوات مکعبی کی قیمتین برابر ہونگین دلیل اسکی یہہ ہے کہ ان برابر مقادیر کو ر سے تعبیر کرو

تو $ا=ر+\frac{ب^{2}}{ا}$ اور $ب=ر+\frac{ا^{2}ب}{س}$ اور $س=ر+\frac{ا^{2}ب}{س}$

ا اور ب اور س کی جگہ ان قیمتون کو مکعبی مساوات مین مندرج کرو تو

$(لا-ر)^{3}-(لا-ر)^{2}(\frac{ب^{2}}{ا}+\frac{ا^{2}}{ب}+\frac{ا^{2}ب}{س})=۰$

پس قیمت ر مکرراتی ہے اور اور قیمت یہہ ہے کہ

$ر+\frac{ب^{2}}{ا}+\frac{ا^{2}}{ب}+\frac{ا^{2}ب}{س}$

تیرہوان باب معادلات درجہ چہارم

(۱۸۰) معادلات درجہ چہارم کی حل کرنی کی بعض ترکیبین ہم بیان کرتے ہین اوس دلیل کی موافق کہ دفعہ ۱۶۵ مین بیان ہوئی ہم مساوات درجہ چہارم کو بغیر دوسرے رقم کی فرض کرتی ہین اول حل جسکا ہم بیان کرینگے دسکارٹس کا حل کہلاتا ہے

(۱۸۱) مساوات لا⁴ + ق لا² + رلا + ص = ۰ کو حل کرو

فرض کرو لا⁴ + ق لا² + الا + ص = (لا² + هه لا + ف) (لا² - هه لا + گه)

اب ہم کو اس بات بتلانا چاہئی کہ مقادیر هه دف دگه کو کس طرح دریافت کرسکتی ہین بائین طرف جو اجزاء ضربی لکھی ہین اونکو باہم ضرب دو اور دو نو ارکان کی امثال لاکے یکسان قوتون کے السیمین برابر لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

گه + ف - هه² = ق اور هه (گه - ف) = ر اور گه ف = ص

یعنی کہ + ف = ق + هه² اور گه - ف = ر/هه اور گه ف = ص

ان مساوانون مین سی اول اور دوم مساوات سی کہ اور ف کو هه کی ارقام مین دریافت کرکے تیسرے مساوات مین مندرج کرو تو

(ق + هه² + ر/هه) (ق + هه² - ر/هه) = ۴ص

تحویل اور اختصار کرنی سی اس مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

هه⁶ + ۲ق هه⁴ + (ق² - ۴ص) هه² - ر² = ۰

اس مساوات کو هه² دریافت کرنی کی واسطی ہم مساوات مکعبی سمجھہ سکتی ہین اور ہم کو یقینی ایک حقیقی مثبت قیمت بموجب دفعہ ۲۰ کی حاصل ہوگی پس جب هه² ہم کو معلوم ہوگیا تو اوسی هه معلوم ہوگا اور پھر گ اور ف معلوم ہوجائینگے پس جملہ لا⁴ + ق لا² + رلا + ص دو حقیقی اجزاء ضربی مین تحلیل ہوجائیگا اور ہم کو مساوات درجہ چہارم کی چارون قیمتین ان درجہ دوم کی مساوانون کی حل کرنی سی حاصل ہوجائینگے

لا² + هه لا + گه = ۰ اور لا² - هه لا + گه = ۰

(۱۸۲) یہہ بات غور طلب ہی کہ ہم نی دو اجزاء ضربی جو درجہ دوم کی فرض کئی ہین اونمین سی ایک مین رقم هه لا فرض کی ہی اور دوسرے مین - هه لا اور دلیل اسکی یہہ ہی کہ جس جملہ کی ہم تحلیل اجزاء ضربی درجہ دوم مین کرنا چاہتی ہین اوسمین رقم لا³ کی ملتفت نہین ہی اب دوسری مساوات درجہ دوم کی جو اخیر مین دفعہ بالا کی لکھی ہی اوسکی دونو قیمتون کا مجموعہ هه ہی اسلئی مساوات

درجہ چہارم مفروضہ کی دو قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی اور مساوات درجہ چہارم کی چار قیمتوں میں سی دو دو کو $\frac{۴ \times ۳}{۲ \times ۱}$ طرح سی یعنی ۶ طرح سی منتخب کر سکتی ہیں اور اسی دلیل سی مساوات صفر کی چھ درجہ کی حاصل ہوتی ہی لیکن اس سبب سی کہ موافق دفعہ ۴۵ کے مساوات درجہ چہارم کی چاروں قیمتوں کا مجموعہ صفر ہی اسلئی مجموعہ دو قیمتوں کا متحد المقدار اور مختلف العلامت باقی دو مقداروں کے مجموعہ کا ہوگا پس اسی دلیل اس بات کی معلوم ہوئی کہ مساوات صفر میں صفر کی جہت قواء اسطرح ملتف ہوتی ہیں کہ صفر کی قیمتیں یکمبی مساوات کی حل کرنی سی دریافت ہوجاتی ہیں جب صفر ہم کو دریافت ہوجائے تو ہم کو اوسکی جذر نکالنی سی جو دو قیمتیں مختلف العلامت دریافت ہونگی اونمیں سی ہر یک کو کام میں لاسکتی ہیں اسواسطی کہ صفر کی مختلف علامتوں کی کام میں لانی سی قیمتیں ف اور گ کی فقط اپسمیں بدل جائینگے اور اس تبدل سی اثر اون نتایج پر کچھ نہیں ہوگا جو مساوات درجہ چہارم کے حل کرنے میں کام آتے ہیں

(۱۸۳) مثلاً فرض کرو کہ لا^۴ − ۱۰ لا^۲ − ۲۰ لا − ۱۶ = ۰ یہاں ق = − ۱۰ اور ر = − ۲۰ اور ص = − ۱۶ مساوات یکمبی صفر^۲ کی یہہ حاصل ہوگی کہ صفر^۶ − ۲۰ صفر^۴ + ۱۶۴ صفر^۲ − ۴۰۰ = ۰ اور ایک قیمت اسکی صفر^۲ = ۴ ہی دفعہ ۱۱۹ دیکھو پس صفر = ۲ ت = ۲ اور گ = − ۸ اسواسطے

لا^۴ − ۱۰ لا^۲ − ۲۰ لا − ۱۶ = (لا^۲ + ۲ لا + ۲) (لا^۲ − ۲ لا − ۸)

پس مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتیں دریافت ہونگیں

۱ + √۹ + ۲√۲ و ۱ + √۹ − ۲√۲ اور ۱ − √۹ + ۲√۲ و ۱ − √۹ − ۲√۲

(۱۸۴) پس اوپر کی بیان سی ظاہر ہوتا ہی کہ مساوات درجہ چہارم کا حل موقوف ایک مساوات یکمبی کے استعانت پر موقوف ہی اسواسطی اس امر کا دریافت کرنا ایک بڑی بات ٹہری کہ یہہ یکمبی مساوات کب صورت معدوم التحویل رکہتی ہی دفعہ ۱۷۱ دیکھو اس سے موقع اس دعوی کی ثابت کرنی کا ہاتہہ لگتا ہی کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں ہوں تو مساوات یکمبی مستعان کی کبھی صورت معدوم التحویل نہیں واقع ہوگی

دلیل فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی خیالی قیمتیں سہ + صہ $\sqrt{-1}$ اور سہ - صہ $\sqrt{-1}$ کو تعبیر ہون تو اس سبب سے کہ چارون قیمتون کا مجموعہ صفر ہی تو حقیقی قیمتین - سہ + لر اور - سہ - لر کی ہونگین ان قیمتون سی ہر زوج کے مجموعہ سے یہہ جملے حاصل ہونگے کہ

± 2 سہ و $\pm$ (لر $\pm$ صہ $\sqrt{-1}$) اور $\pm$ (لر - صہ $\sqrt{-1}$)

پس تین قیمتین ھہ^2 کی یہہ ہونگین (۲ سہ)^2 اور (لر + صہ $\sqrt{-1}$)^2 اور (لر - صہ $\sqrt{-1}$)^2 اگر لر صفر نہ ہو تو ھہ^2 کے ان قیمتون مین سی دو خیالی ہونگین اور اگر لر صفر ہو تو ھہ^2 کی تمام قیمتین حقیقی ہونگین لیکن ان مین سے دو برابر ہین اسلئی مکعبی مساوات ھہ^2 کی صورت معدوم التحویل نہین ہوگی

(۱۸۵) اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتین ہون تو مساوات مکعبی مستعان کی قیمتین بھی تمام حقیقی ہونگین اور اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام خیالی قیمتین ہون تو وہ ان

سہ $\pm$ صہ $\sqrt{-1}$ اور - سہ $\pm$ لر $\sqrt{-1}$ کی ہونگین ان قیمتون مین سی ہر زوج کے مجموعہ سی یہہ جملے حاصل ہونگے کہ ± 2 سہ و $\pm$ (صہ + لر) $\sqrt{-1}$ اور $\pm$ (صہ - لر) $\sqrt{-1}$

پس قیمتین ھہ^2 کی ۴ سہ^2 اور - (صہ + لر)^2 اور - (صہ - لر)^2 ہین اسی معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ چہارم کی تمام حقیقی قیمتین ہون یا خیالی قیمتین ہون تو مکعبی مساوات مستعان اکثر معدوم التحویل ہوگی ہم نی جو یہہ لکھا ہی کہ مساوات اکثر معدوم التحویل ہوگی تو اسکا سبب یہہ ہی کہ ممکن ہے کہ مساوات مکعبی کی دو قیمتین برابر ہون تو پھر اوسوقت وہ معدوم التحویل نہین ہوگی

(۱۸۶) ہم نی اوپر کی دو دفعون مین یہہ بتلایا ہی کہ مساوات مکعبی مستعان کی قیمتون کے مواقع مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتون کے کیا ہونگین اب ہم اوسکی بالعکس لکھتی ہین کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی قیمتون کی صورتین موافق مساوات مکعبی مستعان کے قیمتون کے کیا ہونگین چونکہ مساوات مکعبی کی اخیر رقم منفی ہی اسلئی ایک قیمت مثبت ہوگی اور چونکہ بموجب دفعہ ۵۸ کے حاصل ضرب قیمتون کا مثبت ہی تو یہہ صورتین واقع ہونگین (۱) تمام قیمتین مثبت ہون (۲) ایک مثبت

ہو اور دو منفی ہوں (۳) ایک مثبت قیمت اور دو خیالی قیمتیں تو بموجب دفعات ۱۸۴ اور ۱۸۵ کے نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر مساوات مکعبی کی تمام قیمتیں مثبت ہوں تو مساوات درجہ دوم کی تمام قیمتیں حقیقی ہونگیں

(۲) اگر مساوات مکعبی کی ایک مثبت قیمت ہو اور دو منفی قیمتیں تو مساوات درجہ چہارم کی دو قیمتیں حقیقی اور دو قیمتیں خیالی ہونگیں یا چاروں قیمتیں خیالی ہونگیں

(۳) اگر مکعبی مساوات کی ایک مثبت قیمت ہو اور دو خیالی قیمتیں تو مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتیں اور دو خیالی قیمتیں ہونگیں

(۱۸۷) مساوات درجہ چہارم کی چاروں قیمتیں بہت سادگی کی ساتھ مکعبی مساوات مستعان کی قیمتوں میں بیان ہو سکتی ہیں فرض کرو کہ $ه^2$ کی تین قیمتیں $س^2$ اور $ص^2$ اور $ل^2$ سی تعبیر ہوں جو اس مساوات سی حاصل ہوتی ہیں کہ

$$ه^6 + 2ق\, ه^4 + (ق^2 - 4ص)\, ه^2 - ر^2 = 0$$

تو بموجب دفعہ ۱۸۵ کے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $ر^2 = س^2 ص^2 ل^2$ اور

$$-2ق = س^2 + ص^2 + ل^2 \text{ پس } ر = س ص ل \text{ کے رکھین اور } ه \text{ کی قیمت } س \text{ لین تو}$$

$$لا^2 + ه لا + ف = لا^2 + س لا + \tfrac{1}{2}(ق + س^2 - \tfrac{ر}{س})$$

$$= لا^2 + س لا + \tfrac{1}{4}(س^2 - ص^2 - ل^2 - 2ص ل)$$

اسیواسطے مساوات $لا^2 + ه لا + ف = 0$ کے حل کرنی سی ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا = \tfrac{1}{2}(-س - ص - ل) \text{ یا } = \tfrac{1}{2}(-س + ص + ل)$$

اسطرح مساوات $لا^2 - ه لا + ف = 0$ کے حل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$لا = \tfrac{1}{2}(س - ص + ل) \text{ یا } = \tfrac{1}{2}(س + ص - ل)$$

پس مساوات درجہ چہارم کی یہہ چار قیمتیں حاصل ہونگین کہ

$\tfrac{1}{2}(-س - ص - ل)$ و $\tfrac{1}{2}(-س + ص + ل)$ و $\tfrac{1}{2}(س - ص + ل)$ و $\tfrac{1}{2}(س + ص - ل)$

(۱۸۸) ایک اور ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی مختلف ہیندسین نے لکھی ہی اونمین کچھ تھوڑا ہی فرق ہے

اور اس ترکیب کا نام کبھی تو فریر کی ترکیب کبھی وارنگ کی ترکیب اور کبھی ہمبسن کی ترکیب لیا جاتا ہے اب ہم اوسکو بیان کرتے ہین

فرض کرو مساوات درجہ چہارم کی یہہ ہو کہ

$$لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰$$

طرفین پر $ا لا^۲ + ب لا + س$ زیادہ کرو اور ا اور ب اور س کو ایسا معین کرو کہ ہر یک رکن مساوات کی مربع کامل بنجای تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لا^۴ + ع لا^۳ + (ق + ا) لا^۲ + (ر + ب) لا + ص + س = ا لا^۲ + ب لا + س$$

بائین طرف کا رکن مساوات مجذور کامل ہوگا اگر $ب^۲ = ۴ا س$ اس کے ہو دائین طرف کی رکن کو فرض کرو کہ وہ برابر

$$(لا^۲ + \frac{ع لا}{۲} + م)^۲$$

کے ہو تو امثال کے مقابلہ کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$۲م + \frac{ع^۲}{۴} = ق + ا \text{ اور } ع م = ر + ب \text{ اور } م^۲ = ص + س$$

یہہ تین ارتباط ا اور ب اور س کو ارقام م مین بیان کرتی ہین ا اور ب اور س کی قیمتون کو مساوات $ب^۲ = ۴ا س$ اس مین مندرج کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ع م - ر)^۲ = ۴ (۲ م + \frac{ع^۲}{۴} - ق) (م^۲ - ص)$$

اس مکعبی مساوات سی م دریافت ہوگا اور پہر اوسسے ا اور ب اور س معلوم ہونگی اور چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہی کہ

$$(لا^۲ + \frac{ع لا}{۲} + م)^۲ = ا لا^۲ + ب لا + س = ا لا^۲ + ب لا + \frac{ب^۲}{۴ا}$$

اسی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ $لا^۲ + \frac{ع لا}{۲} + م = \pm \frac{۲ ا لا + ب}{۲ \sqrt{ا}}$

پس ہم کو دو مساواتین درجہ دوم کی حل کرنی پڑینگے یعنی

$$لا^۲ + \frac{ع لا}{۲} + م + \frac{۲ ا لا + ب}{۲ \sqrt{ا}} = ۰ \text{ اور } لا^۲ + \frac{ع لا}{۲} + م - \frac{۲ ا لا + ب}{۲ \sqrt{ا}} = ۰$$

(۱۸۹) یہان یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اس ترکیب مین جس مکعبی مساوات مستعان کی حل کرنی کا

کام ہم کو پڑتا ہی وہ اگر معدوم التحویل ہوگی بشرطیکہ مساوات درجہ چہارم کی دو حقیقی قیمتین اور دو خیالی قیمتین نہ ہون **دلیل** فرض کرو کہ مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی چار قیمتون کو سہ وصہ ولروفر تعبیر کرتی ہین تو دفعہ ۱۸۸ مین دو مساواتین درجہ دوم کی حاصل ہوئین ہین

اون پر خیال کرنی سی یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ م + $\frac{ب}{۲ا}$ برابر چارون مقادیر سہ وصہ ولروفر مین سی دو کی حاصل ضرب کے ہوا اور م - $\frac{ب}{۲ا}$ باقی دو کے حاصل ضرب کے ہو پس فرض کرو کہ

م + $\frac{ب}{۲ا}$ = سہ صہ اور م - $\frac{ب}{۲ا}$ = لر فر

پس م = $\frac{۱}{۲}$ (سہ صہ + لر فر)

پس یہان قرینہ سی یہہ نتیجہ مستنبط کرتی ہین کہ م کی دو اور قیمتین $\frac{۱}{۲}$ (سہ لر + صہ فر)

اور $\frac{۱}{۲}$ (سہ فر + صہ لر) ہونگین

یہہ ظاہر ہی کہ اگر سہ وصہ ولروفر تمام حقیقی قیمتین ہون تو م کی یہہ تینون قیمتین حقیقی ہونگین اور اگر تمام سہ وصہ ولروفر تمام خیالی ہون تو بہی تینون قیمتین حقیقی ہونگین لیکن اگر چارون قیمتون مین سی دو خیالی اور دو حقیقی قیمتین ہون تو یہہ نتیجہ نکلی گا کہ م کی دو قیمتین خیالی ہین اور ایک حقیقی یا اونکی تمام حقیقی قیمتین ہین اور دو اونمین سی برابر ہین

(۱۹۰) اب ہم یو لر کی ترکیب مساوات درجہ چہارم کی حل کرنی کی لکہتی ہین فرض کرو کہ مساوات یہہ ہے

لا^{۴} + ق لا^{۲} + ر لا + ص = ۰

فرض کرو کہ لا = ء + ی + ھ پس

لا^{۲} = ء^{۲} + ی^{۲} + ھ^{۲} + ۲ (ءی + ی ھ + ھ ء)

یعنی لا^{۲} - ء^{۲} - ی^{۲} - ھ^{۲} = ۲ (ءی + ی ھ + ھ ء)

طرفین کا مجذور کرو تو

لا^{۴} - ۲ لا^{۲} (ء^{۲} + ی^{۲} + ھ^{۲}) + (ء^{۲} + ی^{۲} + ھ^{۲})^{۲} = ۴ (ءی + ی ھ + ھ ء)^{۲}

= ۴ (ء^{۲} ی^{۲} + ی^{۲} ھ^{۲} + ھ^{۲} ء^{۲}) + ۸ ءی ھ (ء + ی + ھ)

ز + ی + ھ کی جگہ لاکو رکھو اور منتقل کرو تو

لا⁴ − ۲لا² (ز² + ی² + ھ²) − ۸لا ی ھ + (ز² + ی² + ھ²)² − ۴ (ز² ی² + ی² ھ² + ھ² ز²) =

تاکہ اس مساوات کی مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی ساتھ تطبیق ہو یہہ حاصل ہوگا کہ

ق = −۲ (ز² + ی² + ھ²) اور ر = − ۸ ز ی ھ

ص = (ز² + ی² + ھ²)² − ۴ (ز² ی² + ی² ھ² + ھ² ز²)

پس ز² + ی² + ھ² = $-\frac{ق}{۲}$

ز² ی² + ی² ھ² + ھ² ز² = $\frac{۱}{۱۶}$ ($\frac{ق^۲}{۴}$ − ص) = $\frac{ق^۲ - ۴ص}{۱۶}$

ز² ی² ھ² = $\frac{ر^۲}{۶۴}$

اسیواسطے موافق دفعہ ۴۵ کی ز² + ی² اور ھ² قیمتین ط کی ہین جو اس مکعبی مساوات سے حاصل ہوتے ہین کہ

ط³ + $\frac{ق}{۲}$ ط² + $\frac{ق^۲ - ۴ص}{۱۶}$ ط − $\frac{ر^۲}{۶۴}$ = ۰

فرض کرو کہ اس مساوات کی قیمتین ط۱ اور ط۲ اور ط۳ سی تعبیر ہوتی ہین تو

ز = ± $\sqrt{ط۱}$ اور ی = ± $\sqrt{ط۲}$ اور ھ = ± $\sqrt{ط۳}$

اگر ان قیمتون کو جملہ لا یعنی ز + ی + ھ مین مندرج کرین تو آٹھہ مختلف نتیجے بسبب اشتباہ علامت کے پیدا ہونگی لیکن یہہ سب نتایج داخل ہونی کی قابل نہین ہین اسواسطی کہ ہم کو یہہ ہی حاصل ہونا چاہیے کہ ز ی ھ = − $\frac{ر}{۸}$ پس ز اور ی اور ھ کی حاصل ضرب کے علامت متضاد علامت ر کی ہو اگر ہم فرض کرین کہ ر مثبت تو لا کی وہ قیمتین جو مساوات مین داخل ہونی کی قابلیت رکھتی ہونگی

$-\sqrt{ط۱} - \sqrt{ط۲} - \sqrt{ط۳}$ اور $-\sqrt{ط۱} + \sqrt{ط۲} + \sqrt{ط۳}$ و $\sqrt{ط۱} - \sqrt{ط۲} + \sqrt{ط۳}$ و $\sqrt{ط۱} + \sqrt{ط۲} - \sqrt{ط۳}$

اگر ہم ر کو منفی فرض کرین تو لا کی یہہ قیمتین مساوات مین داخل ہونی کی قابلیت رکھنی والی حاصل ہونگی

$\sqrt{ط۱} + \sqrt{ط۲} + \sqrt{ط۳}$ و $\sqrt{ط۱} - \sqrt{ط۲} - \sqrt{ط۳}$ و $-\sqrt{ط۱} + \sqrt{ط۲} - \sqrt{ط۳}$ و $-\sqrt{ط۱} - \sqrt{ط۲} + \sqrt{ط۳}$

(۱۹۱) دلیل اس بات کی کہ کیون آٹھہ قیمتین لا کی دفعہ گذشتہ مین پیدا ہوتی ہین یہہ ہی کہ ارتباط

ی ھہ = $-\frac{ع}{۴}$ کا مجذور کیا گیا تہا اور وہ عمل مین اس صورت ڈی ۲ ھہ ۲ = $\frac{ع^۲}{۱۶}$
مین کام آیا تہا پس اس سبب سے کہ ارتباط دوسرے صورت مین علامت ر کی تبدل سی نہین بدلتا تو
عمل مین فی الحقیقت قیمتین مساوات درجہ چہارم لا^۴ + ق لا^۲ - رلا + ص = ۰ اور نیز مساوات
درجہ چہارم لا^۴ + ق لا^۲ + رلا + ص = ۰ کی کام مین اتی ہین اسلئے چار کی اٹہہ قیمتین ہوجاتے ہین
دفعہ ۱۸۱ کی مکعبی مساوات مستعان دفعہ ۱۹۰ کی مکعبی مساوات سی تطبیق ہوجائیگے
اگر ھہ ۲ = ۴ط کے فرض کرین پس دفعات ۱۸۴ - ۱۸۶ تک مین جو مساوات
مکعبی مستعان اور مساوات مفروضہ درجہ چہارم کے قیمتون کے ارتباط اور وہ صورتین
جو مساوات کو معدوم التحویل بناتی ہین لکہی ہین وہ جیسی کہ ڈس کاڈریٹس کی ترکیب سے متعلق ہین
ایسی ہی یو مر کی ترکیب سی بہی متعلق ہین

(۱۹۲) حل خاص صورت کی مساوات درجہ چہارم کا بہ نسبت عام صورت مساوات درجہ چہارم کے بہت اسان ہوتا ہے
مثلاً یہہ مساوات درجہ چہارم

لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + رلا + ص = ۰

مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوسکتی ہی اگر ع^۳ - ۴ع ق + ۸ر = ۰ کے اسواسطے کہ
مساوات لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + رلا + ص = ۰ کو اسطرح لکہہ سکتی ہین کہ

لا^۲ (لا + $\frac{ع}{۲}$)^۲ + (ق - $\frac{ع^۲}{۴}$) لا (لا + $\frac{ق - \frac{ع^۲}{۴}}{ع}$)^۲ + ص = ۰

اور یہہ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہوسکتی ہی اگر $\frac{(ق - \frac{ع^۲}{۴})^۲}{ع}$ = $\frac{ع^۲}{۴}$ کے ہو یعنی اگر ع^۳ - ۴ع ق

چودہوان باب سسٹرم صاحب کا ضابطہ

(۱۹۳) الواب گذشتہ مین ہم نی معادلات کی قیمتون کی مسائل اور تیسری اور چوتہی درجہ کی
مساواتون کی حل کرنی کی ترکیبین لکہین ہین مگر اب ہم ایک اور ہی مضمون لکہتی ہین یعنی معادلات
کی عددی تقریبی قیمتین کن ترکیبون اور حکمتون سی دریافت ہوتی ہین اغاز اس مضمون کا
سسٹرم صاحب کی ضابطہ سی ہوتا ہی اول اس ضابطہ کو ثابت کرتے ہین اوسکا مطلب یہہ ہے

کہ ایک مساوات کی قیمتون کا مقام اور اعداد حقیقی قیمتون کی تشخیص ہوجاے
دفعہ آیندہ مین اس ضابطہ کو ثابت کیا ہی اور پہر چند اور کیفیتین اس ضابطہ کی لکہی ہین جو اجزا ان کے موافق مثالون کو حل کیا ہی

(۱۹۴) **سٹرم صاحب کا ضابطہ** فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہو جسمین مساوی قیمتین خارج ہوگئی ہین اور ح (لا) کا اول جملہ مشتق ح ۱ (لا) ہو اور پہر ح (لا) اور ح ۱ (لا) پر عمل وفق اعظم دریافت کرنی کا کیا گیا ہو مگر اوسمین پہر ترمیم اور کی گئی ہو کہ جو باقی تقسیم کی اندیجی ہو اوسکی علامتین بدل دی گئین ہون اور پہر وہ باقی مقسوم علیہ بنائی گئی ہو اور یہہ عمل جب تک جاری رہا ہو کہ ایک باقی ایسی حاصل ہو کہ اوسکو کہہ لگاؤ لاسی نہ ہو اور اس باقی کی بہی علامتین بدل دی گئی ہون
فرض کرو کہ اسطرح جو باقیات ترمیم شدہ حاصل ہون وہ اس سلسلہ ح ۱ (لا) و ح ۲ (لا) ۰۰۰ ح م (لا) سی تعبیر ہون فرض کرو کہ سہ کوئی مقدار ہو اور صہ ایک اور مقدار ہو جو از روی جبر مقابلہ بڑی سہ سی ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کی تعداد درمیان سہ اور صہ کی برابر اوس زیادتی کی ہوگی جو سلسلہ ج (لا) اور ج ۱ (لا) اور ج ۲ (لا) ۰۰۰ ج م (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد کو اوس حالت مین کہ لا = سہ کی ہو اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کی حاصل ہی کہ جب لا = صہ کے ہو

تمام سلسلہ ح (لا) و ح ۱ (لا) و ح ۲ (لا) ۰۰۰ ح م (لا) کو سٹرم کے جملے کہتے ہین اور سلسلہ ح ۱ (لا) و ح ۲ (لا) ۰۰۰ ح م (لا) کو مستعان جملے کہتی ہین مستعان جملے وہی ہین جو سٹرم کے جملے ہین مگر اونمین سی ح (لا) خارج ہے

فرض کرو کہ ق ۱ و ق ۲ ۰۰۰ ق ن ۔ متواتر خارج قسمتون کو جو عمل مذکور سی پیدا ہوتی ہین تعبیر کرتے ہین تو یہہ ارتباطات حاصل ہونگے

ح (لا) = ق ۱ ح ۱ (لا) − ح ۲ (لا)

ح ۱ (لا) = ق ۲ ح ۲ (لا) − ح ۳ (لا)

ح ۲ (لا) = ق ۳ ح ۳ (لا) − ح ۴ (لا)

ح م − ۲ (لا) = ق م − ۱ ح م − ۱ (لا) − ح م (لا)

اب ان ارتباطات سی تین نتیجی استخراج کرتے ہین

اول اخر جملہ ح م (لا) صفر نہین ہی اسواسطی کہ بموجب فرض کے اوسکو کچہہ تعلق لاسی نہین ہے اگر وہ صفر ہو تو ح (لا) اور ح (لا) کا چاہئی کوئی وفق مشترک ہو اور بموجب دفعہ ۷۵ کے مساوات ح (لا) = ۰ کی برابر قیمتین ہونی چاہئی اور یہہ خلاف فرض کے ہے

دوم دو متصل کی جملی مستعان ایک ہی وقت مین معدوم نہین ہوسکتی اسواسطے کہ وہ معدوم ہون تو برابر اگی کی جملی بہی معدوم ہون جنمین ح م (لا) بہی داخل ہو اور یہہ بموجب اول نتیجہ کی ناممکن ہے

سوم جب ایک جملہ معدوم ہوتا ہی تو اوسکی متصل کی طرفین جملون کی علامتین متضاد ہوتی ہین مثلاً فرض کرو ح (لا) = ۰ تو نظم ارتباطات کی تیسری ارتباطی ح ۲ (لا) = - ح ۱ (لا) حاصل ہوگا اب کوئی سترم کی جملون مین کسی جملہ کی اندر علامت کا تبدیل نہین ہوسکتا الا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ اوس جملی کو معدوم کردی اور اب ہم ثابت کرینگے کہ جب لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچتی ہی کہ وہ ح (لا) کو معدوم کردی تو سترم کی جملون مین ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے اور اس سبب سی کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کردے تو کوئی تغیر علامت نہ گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

اول فرض کرو کہ س ایک قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ایسی ہو کہ ح (س) = ۰

فرض کرو کہ ھہ ایک مثبت مقدار ہو اب بموجب دفعہ ۱۰ ا کی ح (س - ھہ) قوا ر ھہ مین پہیل سکتا ہے اور بموجب دفعہ ۱۴ کی ھہ ایسا چہوٹا مقرر ہوسکتا ہی کہ تمام سلسلہ کی وہی علامت ہو جو اول رقم کی علامت ہو جو روم نہین ہوتی یعنی علامت ح (س - ھہ) کی وہی ہو جو علامت - ھہ ح (س) کی ہے کیونکہ ح (س) = ۰ اور علامت ح (س - ھہ) کی وہی ہوگی جو علامت ح (س) کی ہے بشرطیکہ ھہ کو کافی چہوٹا فرض کرین پس اگر لا = س - ھہ کی ہو اور ھہ کافی چہوٹا فرض کیا جاے تو ح (لا) اور ح (لا) کی مختلف علامتین ہونگین

اسیطرح سی ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + ھہ کی اور ھہ کافی چہوٹا فرض کیا جاے

توح (لا) اور ح (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی

پس جب لا بڑھکر مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت پر اپنی نوبت پہونچائی تو سٹرم کی جملون مین سے ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے

دوم فرض کرو کہ اس ایسی قیمت لا کی ہی کہ مستعان جملون مین سے ایک کو معدوم کرتا ہی مثلاً ح (لا) کو توح (س) = ۰ توح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتین ہونگین اور ماقبل لا = س کی اور مابعد لا = س کی تین قیمتین ح ر-۱ (لا) اور ح (لا) وح ر+۱ (لا) ایک مستقل علامت ہمیشہ رکھینگی اور اونمین ایک تغیر علامت ہوگا اسواسطے کہ اگر ح ر-۱ (لا) اور ح ر (لا) کی ایک ہی علامت ہو توح ر (لا) اور ح ر+۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین اور بالعکس اسکی پس ثابت ہوا کہ اگر لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو معدوم کرتا تو اوسی سٹرم کی جملون مین نہ کوئی تغیر علامت گم ہوتا ہے نہ پیدا ہوتا ہے

کوئی قیمت لا کی دو متصل کی جملون کو معدوم ایک ہی وقت مین نہین کرسکتی اگر دو یا زیادہ جملے جو متصل نہ ہون معدوم ہوجائین تو اگر ح (لا) اونمین سی ایک ہوگا تو موافق نتیجہ اول کے یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک تغیر علامت گم ہوگا جب کہ لا کی زیادہ ہوکر اوس قیمت پر نوبت پہونچیگی اور اگر ح (لا) اونمین سی نہ ہو تو بموجب نتیجہ دوم کی یہہ اخذ ہوگا کہ کوئی تغیر علامت گم نہین ہوئی

پس ہم نی ثابت کردیا کہ جب لا زیادہ ہوتا ہی تو سٹرم کی جملون مین کبھی ایک تغیر علامت گم نہین ہوتا اوس صورت مین کہ لا کی نوبت مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت پر پہونچی اور کبھی تغیر علامت پیدا نہین ہوتا

پس اسی معلوم ہوا کہ تعداد تغیرات علامت کی جو اسطرح گم ہوتی ہی کہ لا زیادہ ایک قیمت سے ہوکر بڑی قیمت صہ پر اپنی نوبت پہونچائی وہ برابر ہوتی ہی مساوات ح (لا) = ۰ کی اون قیمتون کے تعداد کے جو درمیان سہ اور صہ کے واقع ہون

(۱۹۵) ہم نی ثابت کردیا ہی کہ سٹرم کی جملون مین تغیرات علامت کی اندر کوئی تبدل اس سبب سی نہین واقع ہوسکتا کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ کسی ایک جملہ مستعان کو

معدوم کردی مگر اکثر علامات + اور - کی ترتیب مین جملون کے سلسلہ کی اندر ہو
تبدل واقع ہوتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ا اور ب دو قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہو اور ا بہ نسبت ب کی کم ہو تو
ح (لا) اور ح ا کی مختلف علامتین ماقبل لا = ا کی ہونگین اور ایک ہی علامتین مابعد
لا = ا کے ہونگین اب ماقبل لا = ب کی علامتین ح (لا) اور ح ا (لا) کے پہر مختلف
ہونگین فی الحقیقت مساوات ح ا (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان لا = ا اور لا = ب
کے ہوتی ہی پس ح ا (لا) کی نوبت مثبت سی منفی پر پہونچنی چاہئی یا بالعکس اسکی درمیان لا = ا اور
لا = ب کی پس ح ا (لا) کا مثبت سی منفی کی طرف جانا یا بالعکس اسکی درمیان لا = ا
اور لا = ب کی ہونا کل تعداد تغیرات علامت سٹرم کی جملون کی سلسلہ کی کل تعداد
تغیرات علامت مین کچہہ تبدل نہین کرسکتا یہہ ہم نے ثابت کردیا مگر سلسلہ مین جو تقسیم علامت
+ اور - کی ہی اوسمین وہ تبدل پیدا کرتا ہی اور اسی پہہ بات ممکن ہی کہ جب لا زیادہ
ہوکر ا پر اپنی نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت کو گم کری تو اسکی بعد ایک اور تغیر علامت گم ہوگا
جب لا کی نوبت زیادہ ہوکر ب پر پہونچی

اس دفعہ سی کچہہ سٹرم صاحب کی اثبات ضابطہ مین کوئی امر زیادہ نہین ہوتا فقط اوسی طالب علموں کے امداد اس باب
مین ہوتی ہی کہ کس طرح تغیرات علامت گم ہوتے ہین

(۱۹۶) سٹرم کی جملون کی سلسلہ مین تغیرات علامت کی تعداد گنی مین یہہ ہوسکتا ہی کہ قیمت لا کی
جسپر ہم بحث کر رہی ستعان جملون مین سی کسی کو خالی کردی تو اس بات کا لحاظ کرنا چاہئی کہ ہم کو اسی
ماقبل یا مثبت کی یا منفی کی جملہ معدوم سی منسوب کرین کیونکہ علامتین اوسکی ماقبل اور مابعد جملون کے ضرور
مختلف ہوتے ہین

(۱۹۷) مساوات ح (لا) = ۰ کی تمام حقیقی قیمتون کی تعداد دریافت کرنی کی لئی لا کی جگہہ ∞
اور پہر + ∞ سٹرم کی جملون مین رکہو پس اول صورت مین جتنی تعداد تغیرات علامت کی ہوگی
اوسکو جسقدر ازدیاد دوسری صورت کی تغیرات علامت کی تعداد پر حاصل ہوگا اوسیقدر تعداد

مساوات کی کل حقیقی قیمتوں کی ہوگی جب لا برابر + ∞ تا - ∞ کی کیا جائے تو جملون مین سی
ہر یک جملہ کی ہی علامت ہوگی جو لا کی اعلی قوت کی علامت اوس جملہ مین ہو

(۱۹۸) فرض کرو کہ ح (لا) کی درجی کون تعبیر کری تو تعداد مستعان جملون ح (لا) و ح ' (لا) ..
اکثر ن ہوگی کیونکہ ہر باقی اکثر ایک درجہ کم بہ نسبت باقی ماقبل کی ہوگی پس یہہ ہم فرض کرینگے
کہ جو ح (لا) کا درجہ ہی وہی تعداد مستعان جملون کی ہی اور ح (لا) مین جو اعلی قوت لا کی ہے
اوسکی امثال مثبت ہین **اول** اگر کل مستعان جملون کی اول رقمون کی مثبت امثال ہون تو مساوات ح (لا) = ۰
کی تمام قیمتین حقیقی ہونگین اسواسطی کہ سسٹرم کی جملی مثبت ہونگی جب لا = + ∞ کے ہو
اور وہ علی التبادل مثبت اور منفی ہونگین جب لا = - ∞ پس ان تغیرات علامت
گم ہوئینگے جب لا کی نوبت - ∞ سی + ∞ تک پہونچی

دوم اگر اول رقمون کی سب جملون مین امثال مثبت نہ ہون تو خیالی قیمتون کے زوج اوتنی ہی ہونگے جتنی کہ تغیرات علامت واقع ہونگی ہر تغیر کی واسطی ایک زوج ہوگا

فرض کرو کہ ان امثال کی سلسلہ مین م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامت ہین
پس جب لا = + ∞ تو م تغیرات علامت اور ن - م تواترات علامات سسٹرم کی جملون مین ہینگے
اب لا کو + ∞ سی - ∞ مین بدل دو تو تغیرات علامت کی جگہہ تواترات علامت ہوجائینگی اور
تواترات علامت کی جگہ تغیرات علامت ہوجائینگی پس جب لا = - ∞ تو ن - م تغیرات علامات ہونگے
اسیواسطے تغیرات علامات کی تعداد جب لا = - ∞ کی اون تغیرات علامات کی تعداد سی کہ لا = + ∞ کے
بقدر ن - ۲م کے زیادہ ہوگی اور ن - ۲م حقیقی قیمتین مساوات ح (لا) = ۰ کی ہونگین
اور اسیواسطے ۲م خیالی قیمتون کی تعداد ہوگی

اسی معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی تمام قیمتون کی حقیقی ہونی کی لئی یہہ ضرور ہی کہ کل مستعان
جملون کی اول رقمون کی امثال ایکہی علامت رکھین

(۱۹۹) فرض کرو کہ مستعان جملون کی اندر ہم کو یہہ دریافت ہوا کہ ح (لا) کی علامت نہین بدلتی

پس جتنی جملی اوسکی اگی نکلی اون پر کچھہ لحاظ نہ کرو اور سلسلہ ح (لا) وح ۱ (لا) وح ۲ (لا) ۰۰۰ ح ر (لا) کے اندر تعداد تغیرات علامت کی شمار کرلو کیونکہ سٹرم صاحب کی ضابطہ کے اثبات مین اخر جملہ مستعان کی لابدی خاصیت یہہ ہونی چاہئی کہ وہ معدوم نہ ہوتا ہو اور چونکہ ح ر (لا) معدوم نہین ہوتا تو ح (لا) وح ۱ (لا) وح ۲ (لا) ۰۰۰ ح ر (لا) پر اثبات ضابطہ کا حاوی ہوگا

یہہ بات عمل مین بڑی کام آتی ہی کیونکہ جب مساواتین اعلی درجہ کی ہون تو وہان تمام سٹرم کی جملون کا سلسلہ دریافت کرنا بڑی محنت کا کام ہوتا ہی اسواسطے ایسی قاعدہ کا بنانا کہ جسی یہہ مشقت شاقہ تمام سلسلہ کی بنانی کی چھوٹ جاوی نہایت ضروری ہے

(۲۰۰) فرض کرو کہ محر (لا) ایک جملہ ایسا ہی کہ اوسمین اور ح (لا) مین کوئی جز ضربی مشترک نہین ہے اور فرض کرو کہ محر (لا) اور ح ۱ (لا) مین جب کوئی قیمت ح (لا) = ۰ کے بجای لا کی مندرج کیجاے تو اونکی ایک ہی علامت ہوتی ہی تو ہم محر (لا) کو بجای ح ۱ (لا) کے کام مین لاسکتی ہین اور باقی مستعان جملے ح (لا) اور محر (لا) سی بجای ح (لا) اور ح ۱ (لا) کے مستبظ کرسکتی ہین اسواسطے کہ اگر سٹرم صاحب کی ضابطہ کی اثبات کو دوبارہ کام مین لائین تو یہہ معلوم ہوگا کہ ضابطہ کی دو اصلی خاصیتین ان جملون کی نئی سلک مین بہی موجود ہین ایکیہہ کسی جملہ مستعان کی معدوم ہونے کو کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا دوم یہہ کہ ح (لا) کے معدوم ہونی سی ایک تغیر علامت گم ہوتا ہے

(۲۰۱) ابتک ہم نی سٹرم صاحب کی ترکیب کے اندر مساوات کو برابر قیمتون سی صاف کرنی کی لگے ہاے لیکن اب یہہ ثابت کرتی ہین کہ اس قید کے کچھہ ضرورت نہین اور اس ضابطہ سی ہمیشہ تعداد جدا جدا قیمتون کی حدود معینہ کی اندر معلوم ہوجائیگی اور قیمتون کے مکرر انی پر کچھہ لحاظ نہین کیا جائیگا

مثلاً فرض کرو کہ ا قیمت ع دفعہ اور ب قیمت ق دفعہ مساوات ح (لا) = ۰ مین واقع ہوتی ہی

فرض کرو کہ ح (لا) = (لا - ا)^ع (لا - ب)^ق (لا - س) (لا - د) ۰۰۰

پس ح ۱ (لا) = (لا - ا)^{ع-۱} (لا - ب)^{ق-۱} (لا - س) (لا - د) ۰۰۰

+ ق (لا - ا) (لا - س) (لا - د) ۰۰۰

+ ۰۰۰

پس (لا - لا ع)^{-۱} اور (لا - ب)^{ق-۱} دفع اعظم ح (لا) اور ح_۱ (لا) کا ہوگا
اور یہہ جملہ بتمام مستعان جملون ح_۲ (لا) و ح_۳ (لا) . . ح_۱ (لا) کو جو دفعہ ۱۹۴ میں
لکھی ہین تقسیم کرلیگا
اب فرض کرو کہ صح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) (لا - د) . . .

مح (لا) = ع (لا - ب) (لا - س) (لا - د) .

+ ق (لا - ا) (لا - س) (لا - د) . . .

+ (لا - ا) (لا - ب) (لا - د) . .

+ . . .

تو مح (لا) اول جملہ مشتقہ صح (لا) کا نہین ہے اسواسطے کہ
اگر ع = ۱ اور ق = ۱ ہو تو ہی جو مح (لا) ہوجائیگا وہی جملہ مشتقہ ہوگا لیکن جب لا = ا
یا ب یا س وغیرہا کے ہو تو مح (لا) کی اور صح (لا) کی اول جملہ مشتقہ کی ایک ہی علامت ہوتی ہے
اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۰۰ کے ہم مساوات صح (لا) = ۰ کی حقیقی قیمتون کا
صح (لا) اور مح (لا) کو اول دو جملی سٹرم کی نباکر اونسی اور باقی جملے حاصل کرکے فیصلہ کرسکتے ہین
سٹرم کی جملون کا سلسلہ جو ح (لا) اور ح_۱ (لا) سی حاصل ہوتا ہی وہ اوس سلسلہ سی
کہ صح (لا) اور مح (لا) سی حاصل ہوتا ہی اس سبب سی فرق کہتا ہی کہ اسکی ہر رقم مین ایک
جز ضربی زائد (لا - ا)^{ع-۱} (لا - ب)^{ق-۱} ہے
پس جب کوئی قیمت لا کی لگائین تو پہلی سلسلہ کی رقمون کی علامتین وہی ہونگین جو
دوسرے سلسلہ کی رقمون کی ہین یا اوسکی بالکل بالعکس ہونگین اسلئے تعداد تغیرات علامت کے وہی رہیگی
اسی معلوم ہوا کہ سٹرم کی جملون کی سلسلہ کی امتحان کرنی سی ہم کو یہہ بات دریافت ہوسکتی ہے
کہ مساوات صح (لا) = ۰ کی کتنی قیمتین حدود معینہ مین واقع ہین یعنی مساوات ح (لا) = ۰ کی
قیمتین جدا جدا مفصل اون حدود مین دریافت ہوجاتی ہین

پس یہہ کچھہ ضرور نہیں کہ سٹرم کی ترکیب سے پہلے ہم متساوی قیمتوں کی تحقیقات مساوات میں کریں بلکہ جب سٹرم کی جملوں کا حساب لگائینگے تو ہم کو خود بخود مساوات کی برابر قیمتوں پر اگروہ ہونگیں اطلاع اس سبب سے ہوجائیگی کہ اونکی موجود ہونے کی صورت میں باقی اخر صفر ہوگی

(۲۰۲) جس عمل سی کہ مستعان جملی حاصل ہوتی ہیں اوسکی اندر بعد اول جملی کی حاصل ہونے کے مثل عمل وفق اعظم کی ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کو اکثر کسی مثبت عدد میں ضرب دیجاتی ہیں یا کسی مثبت عدد پر تقسیم کرجاتی ہیں اور اسی کچھہ فرق عمل میں نہیں اتا اسلئی کہ مستعان جملی مثبت اعداد کی ضرب و تقسیم سی علامتوں میں اپنی متبدل نہیں ہوتے

سٹرم صاحب کے ضابطہ سی ہم مساوات مفروضہ کی حقیقی قیمتوں کی تعداد دریافت کرسکتی ہیں سٹرم کی جملوں کی سلسلہ میں لا کی جگہ متواتر اعداد صحاح مندرج کرین تو اوسی سے یہہ دریافت ہوگا کہ کونسی دو متصل کی اعداد صحاح کی درمیان قیمتیں واقع ہیں اور اگر یہہ دریافت ہو کہ دو اعداد معینہ کی درمیان ایک قیمت یا زیادہ قیمتیں واقع ہیں تو پہر اون اعداد صحاح کی بابت جو اعداد مکسور واقع ہوں اونکو بجای لا کی مندرج کرتی جاتی ہیں جب تک کہ اخر کو ہمیں یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک قیمت کل دو عددوں کے درمیان واقع ہے

(۲۰۳) اب ہم بعض مثالیں حل کرتے ہیں

فرض کرو کہ ح (لا) = لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۴ لا + ۱۲

یہاں ح$_{۱}$ (لا) = ۳ لا^{۲} − ۶ لا − ۴

ح$_{۲}$ (لا) = ۲ لا − ۵

ح$_{۳}$ (لا) = + ۱

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتیں مثبت ہیں اب سلسلہ علامتوں کا لا کی قیمتوں کے موافق یہہ ہوگا

i	ح (لا)	ح$_{۱}$ (لا)	ح$_{۲}$ (لا)	ح$_{۳}$ (لا)
۱	+	−	−	+
۲	+	−	−	+
۳	+	+	−	+

یہان جب کہ لا = ۲ کی ہو تو دو تغیر علامت ہین اور جب لا = ۳ کی ہو تو کوئی تغیر علامت نہین ہوتا
اسی معلوم ہوا کہ دو مثبت قیمتین ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہین اور کوئی اور مثبت قیمت نہین ہے
اور یہہ بہی دریافت ہوتا ہی کہ جب لا = - ۳ تو علامات متواترہ یہہ ہوتے ہین - + + اور جب لا = ۲
تو وہ + + - + اس سے ایک تغیر علامت - ۳ سی - ۲ پر نوبت پہونچنی سی گم ہوتا ہے
اسواسطے منفی قیمت - ۲ اور - ۳ کی درمیان واقع ہی اب دو مثبت قیمتون کی جدا جدا کرنے کے
لئی ہم کو ۲ اور ۳ کے مابینی اعداد کو لا کی جگہ رکہنا چاہئی مثلاً فرض کرو کہ ہم لا = ۲ ½ رکہین
تو علامات متواترہ یہہ ہوتی ہین - - - ۰ + پس ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہے
خواہ ۰ کو + یا - خیال کرین پس ۲ سی ۲ ½ پر نوبت پہونچانی سی ایک تغیر علامت گم ہوتا ہے
اسواسطے ایک قیمت ۲ اور ۲ ½ کے درمیان واقع ہے
اور اسی معلوم ہوا کہ دوسری قیمت ۲ ½ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگی
اب پہر فرض کرو کہ ح (لا) = لا⁴ - ۶ لا³ + ۵ لا² + ۴ لا - ۴ = ۰

یہان ح۱ (لا) = لا³ - ۹ لا² + ۵ لا + ۷ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہی

ح۲ (لا) = ۷ لا² - ۵۷ لا - ۵

ح۳ (لا) = ۵۲ لا - ۴۵۷

ح۴ (لا) = +

اس مثال مین ح۴ (لا) کا حساب لگانا پیچیدگی سی خالی نہین مگر ہمارے مطلب برآری کی لئی فقط اتنی بات جانسی کافی ہی
کہ علامت کیا ہی پس جب ہم کو یہہ تحقیق ہوگیا کہ وہ مثبت ہی تو ہم اوسکا حساب ٹہیک ٹہیک نہین کرتی اور صرف

ح۴ (لا) = + لکہ لیتے ہین

بموجب دفعہ ۱۹۸ کے مساوات کی تمام قیمتین حقیقی ہین
لا کی قیمتون کے موافق سلسلہ علامات یہہ ہے

	ح (لا)	ح۱ (لا)	ح۲ (لا)	ح۳ (لا)	ح۴ (لا)
۲	+	−	+	−	+
۱	−	−	+	−	+
۰	−	+	−	−	+
۱	+	+	−	−	+
۲	+	−	−	−	+
۳	+	−	−	−	+
۴	+	+	+	+	+

۲ اور ۱ کے درمیان ایک اور ۰ اور ۱ کی درمیان ایک تغیر علامات گم ہوتا ہی اور ۳ اور ۴ کی درمیان دو تغیرات علامت گم ہوتے ہین

اگر ہم ۳½ بجای لا کی رکھین تو علامات متواترہ − ۰ + + حاصل ہوتی ہین جنمین ایک تغیر علامات ہے پس ایک قیمت مساوات کی ۳ اور ۳½ کی درمیان واقع ہوتی ہین اور اسیطرح دوسری قیمت ۳½ اور ۴ کی درمیان واقع ہوتی ہے

اب فرض کرو کہ ح (لا) = ۲ لا⁴ − ۳ لا³ + ۱۰ لا − ۴۹ = ۰

یہان ح (لا) = ۴ لا³ − ۳ لا² + ۵ جز ضربی ۲ کو ساقط کر دیا ہے

ح۱ (لا) = ۳ لا² − ۱۵ لا + ۹۸

ان مساوات بادی النظر مین معلوم ہوتی ہی کہ مساوات ح۲ (لا) = ۰ کی خیالی قیمتین ہین ح۲ (لا) کبھی کسی لا کی حقیقی قیمت سی معدوم نہین ہوسکتا سواسطی بموجب دفعہ ۱۹۹ کی اس مثال مین سٹرم صاحب کی زیادہ قیمتون کی دریافت کرنی کی ضرورت نہین ہے جب لا = − ∞ تو علامات متواترہ + − + اور جب لا = ∞ تو علامات متواترہ + + + پس مساوات کی دو حقیقی قیمتین ہا اور دو خیالی قیمتین ہین اور حقیقی قیمتون مین سی ایک مثبت اور دوسرے منفی بموجب دفعہ ۲۱ کے ہے

پندرہوان باب فوریر کا ضابطہ

(۲۰۴) جس سوال کی حل کرنی مین دو سو برس سی اکثر بڑی بڑی مہندسین توجہ کر رہی تھے وہ سٹرم صاحب کی ضابطہ سی تمام اور کمال حل ہوگیا یہہ ضابطہ پیرس مین ۱۸۳۵ء مین ایک کتاب مین منطبع ہوا سٹرم صاحب سی پہلی جن مہندسین نی اس سوال کی حل کرنی مین توجہ اور کوشش کی اونمین سے لودن صاحب اور فوریر صاحب کا حال قابل لکھنی کے ہے

ان دونو مہندسین کی ترکیبین ایک مسئلہ سی نکلتی ہین اور اس مسئلہ کا موجد اہل انگلستان کے نزدیک تو فوریر صاحب ہین اور اہل فرانس کے نزدیک لوڈن اور فوریر دونو کو اس مسئلہ کا توارد ہوا مسائل معادلات کا باب مین کتاب فوریر کی ۱۸۰۷ء مین مطبع ہوئی اور لوڈن کی کتاب اسی باب مین ۱۷۶۶ء مین مطبع ہوئی مگر اس کی شہادت موجود ہی کہ فوریر نے اپنی اس مسئلہ کو طالب علمون کے روبرو لکچر مین لوڈن کی کتاب کے انطباع سی پہلی بیان کیا تہا اب ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہین

(۲۰۵) **فوریر صاحب کا ضابطہ** فرض کرو کہ ح (لا) جملہ جبریین درجہ کا ہو اور ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) ... ح ن (لا) جملی مشتقہ جملہ ح (لا) کی ہون اور سہ کوئی سی مقدار ہو اور صہ دوسری مقدار اوسی بڑی جبر مقابلہ کی اعتباری ہو تو مساوات ح (لا) = ۰ کی اصلی قیمتین سہ اور صہ کی درمیان بڑی اوس ازدیادی نہین ہوسکتین جو تعداد تغیرات علامت سلسلہ ح (لا) ح۱ (لا) ح۲ (لا) ... ح ن (لا) کو جب لا = سہ کے ہو

اوس تعداد تغیرات علامت پر اس سلسلہ کے حاصل ہی کہ جب لا = صہ کے ہو ہم اس تمام سلسلہ ح (لا) ح۱ (لا) ح۲ (لا) ... ح ن (لا) کو فوریر کے جملے کہینگے فوریر کے جملون مین سی کسی جملہ کی اندر تبدل علامت جب تک نہین واقع ہوگا کہ لا کی نوبت اوس قیمت پر پہونچی کہ وہ جملہ کو معدوم کردی اب چار صورتین بحث طلب ہین

اول فرض کرو کہ لا = س کی ح (لا) کو معدوم کرتا ہی اور ح۱ (لا) معدوم نہین ہوتا اب لا کی جگہ س - ھ رکھو اور ھ ایک مثبت مقدار ہی تو ھ کو ایسا چہوٹا فرض کرسکتے ہین کہ علامت ح (س - ھ) کی وہی ہو جو - ھ ح۱ (س) کی ہی اور بموجب دفعہ ۱۴۷ علامت ح۱ (س - ھ) کی وہی ہی جو ح۱ (س) کی ہی پس اگر لا = س - ھ اور ھ کافی چہوٹا فرض کیا جاے تو ح (لا) اور ح۱ (لا) کی مختلف علامتین ہونگین

اسیطرح یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + ھ اور ھ چہوٹا کافی مقرر کیا جاے تو ح (لا) اور ح۱ (لا) کی ایک ہی علامت ہوگی

پس جب لا بڑھکر مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمت غیر مکررہ س پر نوبت پہونچتا ہی
تو فوریر کے جملون مین سی ایک تغیر علامت گم ہوجاتا ہے

دوم فرض کرو کہ جب لا = س تو ح (لا) معدوم ہوتا ہی اور اوسکی سانہہ ہی جملی مشتقہ
ح ر (لا) و ح ۲ (لا) ... ح ر-۱ (لا) تک معدوم ہوجاتی ہین اور ح ر (لا) معدوم نہین ہوتا
س - صہ بجای لا کی رکہو اور صہ مثبت مقدار ہی تو صہ کو ایسا چہوٹا فرض کرسکتی ہین کہ ان رقمون کے سلسلہ کے
ح (س - صہ) و ح ۱ (س - صہ) و ح ۲ (س - صہ) ... ح ر-۱ (س - صہ) و ح ر (س - صہ)
علامتین جداگانہ وہی ہون جو ان رقمون کے سلسلہ کی ہین کہ
(- صہ)^ر ح ر (س) و (- صہ)^{ر-۱} ح ر (س) و (- صہ)^{ر-۲} ح ر (س) ... - صہ ح ر (س) و ح ر (س)
دفعات ۱۰ اور ۱۴ دیکہو پس اگر لا = س - صہ اور صہ چہوٹا کافی مقرر کیا جاوی تو
فوریر کے اول ر + ۱ جملون مین رتغیرات علامت پیدا ہوتے ہین
اسیطرح یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لا = س + صہ اور صہ کافی چہوٹا مقرر کیا جاوے تو فوریر کے
اول ر + ۱ جملون مین کوئی تغیر علامت نہین پیدا ہوتا
پس جب لا بڑہ کر اپنی نوبت س پر پہونچتا ہی جو مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک ایسی قیمت ہی کہ ر دفعہ مکرر آتی ہے
تو فوریر کے جملون مین سی ر تغیرات علامت گم ہوتے ہین

سوم فرض کرو کہ جب لا = س تو مشتقہ جملون مین سی ایک جملہ معدوم ہوتا ہے
مگر اوسکے طرفین متصلہ کی جملی معدوم نہین ہوتی مثلاً فرض کرو کہ
جب لا = س کے تو ح ر (لا) معدوم ہوتا ہی مگر ح ر-۱ (لا) اور ح ر+۱ (لا) مین سے
کوئی معدوم نہین ہوتا پس اگر صہ چہوٹا کافی فرض کیا جاوے تو جب لا = س - صہ تو علامتین
ح ر-۱ (لا) اور ح ر (لا) اور ح ر+۱ (لا) کی جداگانہ وہی ہونگین جو
ح ر-۱ (س) اور ح ر (س) اور ح ر+۱ (س) کی ہین اور جب لا = س + صہ تو علامتین
وہی ہونگین جو ح ر-۱ (س) و صہ ح ر+۱ (س) و ح ر+۱ (س) کی ہین

پس اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی ایک ہی علامت ہو تو فوریر کے جملون مین دو تغیرات علامت گم ہونگی اور جب لا کی نوبت برہ کرس پر پہونچے اور اگر ح ر+۱ (س) اور ح ر+۱ (س) کی مختلف علامتین ہون تو فوریر کے جملون مین نہ تو تغیر علامت گم ہوتا ہی نہ پیدا ہوتا ہے

چہارم فرض کرو کہ جب لا = س تو کئی ایک متواتر جملی معدوم ہو جاتی ہین مثلاً جب لا = س تو فرض کرو کہ م جملی ح ر (لا) وح ر+۱ (لا) و ۰۰۰ ح ر+م-۱ (لا) معدوم ہوتے ہین اور اور ح ر-۱ لا اور ح ر+م (لا) معدوم نہین ہوتے تو موافق سابق کے عمل کرو اور ھ کو مثبت اور چھوٹا کافی مقرر کرو تو نتایج مفصلہ ذیل بلحاظ م+۲ ارقام

ح ر-۱ (لا) وح ر (لا) ۰۰۰ ح ر+م-۱ (لا) وح ر+م (لا) کے حاصل ہونگے

(۱) فرض کرو کہ م جفت ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام مین جب لا = س - ھ کے ہو م تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + ھ کے ہو تو کوئی تغیر علامت نہین واقع ہوگا اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی مختلف علامتین ہون تو ارقام مین جب لا = س - ھ کے ہو م + ا تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + ھ کے ہو تو ایک تغیر علامت واقع ہوگا پس فوریر کی جملون مین دو صورتون کی اندر جب لا کی نوبت س پر پہونچی م تغیرات علامت گم ہونگے

(۲) فرض کرو کہ م طاق ہی اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م (س) کی ایک ہی علامت ہو تو ارقام مین جب لا = س - ھ کے ہو م + ا تغیرات علامت واقع ہونگی اور جب لا = س + ھ کے ہو تو کوئی تغیر علامت نہین واقع ہوگا پس فوریر کی جملون مین جب لا کی برہ کر نوبت س پر پہونچی ہی تو م + ا تغیرات علامت گم ہوتی ہین اگر ح ر-۱ (س) اور ح ر+م کی علامتین مختلف ہون تو ارقام مین جب لا = س - ھ کے ہو م تغیرات علامت اور جب لا = س + ھ کے ہو تو ایک تغیر علامت واقع ہوتا ہی پس جب لا کی برہ کر نوبت س پر پہونچی ہی تو فوریر کے

جملے م - التغیرات علامت کو گم کرتے ہین

المختصر یہہ ہے کہ فوریر کے کبھی تغیر علامت حاصل نہین کرتی بلکہ جب لا کی سرۂ کو نوبت اس پر کہ ایک قیمت مساوات ح (لا) = ۰ کی ہی پہونچی ہی تو ایک تغیر علامت گم ہو جاتا ہے پس ضابطہ ثابت ہوا

(۲۰۶) دفعہ ۲۰۵ مین جو دعوی ہم نی اسانی کی واسطی بیان کیا تہا وہ ثابت ہوا اور اوسے علاوہ اور باتین بہی ثابت ہین ہم نی اونکو اس سبب سی دفعہ ۲۰۵ مین نہین بیان کیا تہا کہ دقت نہ واقع ہو یہہ ظاہر ہی کہ جب فوریر کے جملون کی تغیرات علامت کی تعداد مین تبدل واقع ہوتا ہے باستثنا اوس وجہ کی جو زیادہ غیر مقررہ ہی مساوات معلوم کی قیمت پر نوبت پہونچتی ہی جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی الحاصل اگر متواتر سہ اور اوسی بڑا عدد صہ فوریر کی جملون مین منمدج کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

(۱) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین کوئی تغیر علامت گم نہین ہوتا تو کوئی قیمت مساوات کی سہ اور صہ کے درمیان نہین واقع ہوگی

(۲) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین طاق تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو اسی ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہے کہ قیمتین مساوات کی جنکی تعداد طاق ہو سہ اور صہ کی درمیان واقع ہین لیکن ہم یہہ نہین کہہ سکتی وہ کونسی طاق تعداد ہی الا اوس صورت مین کہ ایک تغیر علامت گم ہوا ہو تو ہم کو یقینی معلوم ہوتا ہی کہ ایک قیمت ہے

(۳) فرض کرو کہ فوریر کی جملون مین جفت تعداد تغیرات علامت کی گم ہوتی ہی تو اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ یا تو کوئی قیمت سہ اور صہ کی درمیان نہین واقع ہی اور اگر واقع ہین تو جفت تعداد اونکی ہے

(۲۰۷) فوریر کے ضابطہ مین یہہ ایک فایدہ ہی کہ اوسکا استعمال اسانی سی ہو سکتا ہی کیونکہ جملہ معلوم کی جملی مشتقہ اسانی سی دریافت ہو جاتی ہین مگر یہہ نقصان بہی ہی کہ اوسمین امتحان لاتعد کرنی پڑتی ہین اگر دو قیمتین بہت قریب قریب ہون تو اونکی بیچ کی جسکی اندر وہ واقع ہوتی ہین بہت سی چہوٹی چہوٹی حصی کرنی پڑتی ہین تا کہ اونکی تمیز خیالی قیمتون سی ہو جاے اور اسکی بہی ضرورت پڑتی ہے

فوریر کے ضابطہ کی موافق عمل کرنی سی پہلی اس بات کا امتحان کرین کہ مساوات برابر قیمتین رکھتی ہی یا نہین اگر ایسا نہ کرینگے تو مکرر قیمتون کی جنت تعداد ہم کو معلوم نہین ہوگی

(۲۰۸) بوڈن اور فوریر دونونی ترکیبین بون مشتبہ کی امتحان کرنی کی لکھی ہین تاکہ یہہ بات ظاہر ہوجاے کہ قیمتین مساوات مفروضہ کی اوس بون کی اندر واقع نہین یا نہین لیکن ان ترکیبون کا بیان کرنا اس مقام پر اسلئی کہ سسٹرم کی ضابطہ سی مطلب یقینی حاصل ہوجاتا ہی اور اوسمین کچہہ دقت بہی نہین پڑتی ہے

(۲۰۹) یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ فوریر کی ضابطہ کی اندر ڈس کارٹس کے علامتون کا بہی قاعدہ داخل ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات کامل ہے

اگر لا = ۰ فوریر کے جملون مین رکہین تو علامتین وہی ہونگین جو جملہ ح (لا) مین بائین طرف سی دائین طرف نہین اور اگر ہم لا = ∞ کے فوریر کے جملون مین رکہین تو علامتین سب مثبت ہونگین اسی معلوم ہوا کہ فوریر کی ضابطہ کے موافق مساوات ح (لا) = ۰ کی مثبت قیمتین زیادہ تعداد مین ح (لا) کی تغیرات علامت کی تعداد سی نہین رکہہ سکتی اگر مساوات مفروضہ کامل نہ ہو تو ارقام معدومہ کو لکہکر اونکی امثال صفر بنا کر لکہہ دو اور ان امثال پر علامتین ایسی لگ سکتی ہین کہ فوریر کی جملون مین تغیرات علامت کی اوس حالت مین کہ ان ارقام کا بہی شمار ہوا اتنی ہی تعداد ہو جتنی کہ بغیر رقمون کی تعداد تغیرات علامت تہی قاعدہ علامات کا وہ جز جو منفی قیمتون سی متعلق ہی وہ اوس جز سی کہ مثبت قیمتون سی متعلق ہے مستنبط ہوسکتا ہے دفعہ ۶۳ دیکہو

(۲۱۰) مساوات کی مثبت قیمتون کی اعلی حد غائی دریافت کرنی کی ترکیب نیوٹن صاحب کے ہی وہ بہی فوریر کی ضابطہ مین داخل ہی دفعہ ۹۵ دیکہو اسواسطے کہ اگر ح (لا) = ۰ مساوات ہو تو نیوٹن کی ترکیب کے موافق ہم کو صد کی قیمت ایسی دریافت کرنی چاہیی کہ جب لا = صد تو فوریر کے جملے تمام مثبت ہون پس موافق ضابطہ فوریر کی مساوات مفروضہ کی کوئی قیمت درمیان لا = صد اور لا = +∞ کے نہین ہوگی

سولہوان باب لاگرانژ کی ترکیب تقریب

(۲۱۱) ہم نے ابہی بیان کیا ہی کہ قیمتین ناطقہ محدودہ کن ترکیبون سی دریافت ہوتی ہین اب ہم یہہ بیان کرتے ہین کہ مساوات کی حقیقی اصم قیمتون کی قدر عددی تقریباً کن حسابون سی دریافت ہوتے ہین

سٹرم صاحب کی خصابطہ سی یہہ بات ہمیشہ ہم کو معلوم ہوسکتی ہی کہ کتنی قیمتین ایک بون معلوم مین واقع ہوسکتی ہین اور پہر ہم اس بون معلوم کو ایسی چہوٹی چہوٹی بون مین تقسیم کرسکتے ہین کہ جنکی درمیان مین جدا جدا ہر ایک قیمت واقع ہو

فرض کروکہ ہم کو معلوم ہی کہ مساوات کی ایک ہی قیمت ہی اور صرف ایک ہی قیمت دو مقادیر معلوم سہ اور صہ کی درمیان واقع ہی اب ہم یہہ دریافت کرنا چاہتی ہین کہ اس قیمت کی قدر تقریباً کیا ہے سہ اور صہ کی درمیان ایک مقدار لر لو اور اوسکو بجای لا کے ح (لا) مین رکہو تو ح (لر) کی علامت سی ہم کو یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ قیمت سہ اور لر کے درمیان واقع ہے یا لر اور صہ کے درمیان فرض کرو کہ وہ سہ اور لر کے مابین واقع ہی تو پہر بجای لا کے ہم ایک مقدار فر جو مابین سہ اور لر کے واقع ہو رکہینگی اور ح (فر) کے علامت سی یہہ دریافت کرینگے کہ قیمت سہ اور فر کے درمیان واقع ہی یا سہ اور فر کے بیچ مین واقع ہی اب اسی عمل کو جاری رکہین جب تک کہ قیمت کے قدر عددی تقریباً ہم کو خاطر خواہ حاصل ہو ہر عمل مین جس بون کے درمیان قیمت واقع ہوگی اوسکی تنصیف ہوتی جائیگی

جو عمل یہان ہم نے بیان کیا اوسمین مشقت شاقہ اوٹہانی پڑتی ہی اور بڑا طول طویل عمل کرنا پڑتا ہے اسلئے ترکیبین ایجاد ہوئین ہین جنسی کہ عمل مختصر ہوجاتا ہی اونمین سی اول ہم لاگرانژ کی ترکیب بیان کرتے ہین

(۲۱۲) فرض کروکہ ح لا = ۰ مساوات ہی جسکی نسبت ہم کو یہہ معلوم ہی کہ اوسکی صرف ایک قیمت دو مثبت صحاح متصلہ ا اور ا + ا کی درمیان واقع ہی لا = ا + $\frac{۱}{ک}$ کی رکہو اور لا کی اس قیمت کو مساوات مفروضہ مین مندرج کرو تو ح (ا + $\frac{۱}{ک}$) = ۰ اب اگر اس مساوات کو کسی خالص کرین تو ایک مساوات د کی اوسی درجہ کی حاصل ہوجائیگی جس درجہ کی مساوات لا کی تہی اسکو مح (د) = ۰ کہ

تعبیر کرو یہہ مساوات ی کی صرف ایک قیمت ثبت ہوگی کیونکہ اصل مساوات مین لا کی ایک قیمت ا اور ا + ا کی درمیان واقع ہی اب ہم صحاح متصلہ ا و ۲ و ۳ . . . کو محہ (ی) مین بجای ی کے رکھہ رکھہ کر یہہ دریافت کرین کہ وہ کونسی دو نتایج متصلہ ہین کہ جنکی علامتین مختلف ہین فرض کرو کہ یہہ دو نتیجے ب اور ب + ا حاصل ہوئی جنکی درمیان ی واقع ہی ی = ب + $\frac{۱}{ک}$ کی مقرر کرو اور اوسکو بجای ی کی مندرج کرو تو محہ (ب + $\frac{۱}{ک}$) = ۰ تو موافق سابق کی یہان بہی ایک مساوات حاصل ہوگی جسکی مقدار مجہول کی قیمت ایک ہی مثبت ہوگی اور ہم صحاح متصلہ س اور س + ا ایسی تحقیق کرسکتی ہین جنکی درمیان قیمت ی کی واقع ہو

پس ی = س + $\frac{۱}{ر}$ مقرر کرو اور علے ہذا القیاس

پس لا کی قیمت خاطرخواہ تقریباً اس مسلسل کے صورت مین دریافت ہوجائیگی

$$لا = ا + \frac{۱}{ب + \frac{۱}{س + \ldots}}$$

(۲۱۳) اب فرض کرو کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح ا اور ا + ا کے واقع ہین سٹرم صاحب کی ضابطہ کی موافق بالعکس اور قیمتون کے جدا جدا کرنے کے ترکیب سی یہہ ہم تحقیق کرسکتی ہین کہ مساوات کی قیمتون کو جو اون دو صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہین کس عدد مین ضرب دین کہ حاصل ضرب ایسی حاصل ہون کہ وہ مختلف صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون اب مساوات کی ثبت بدل کر ایک اور ایسی مساوات پیدا کرو کہ اوسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کی اضعاف موافق اس عدد متحصلہ کی ہون یعنی اس مساوات کے قیمتین برابر مساوات مفروضہ کی قیمتون اور اس عدد کے حاصل ضرب کے ہون اور پہر اس بدلی ہوئی مساوات پر مواس دفعہ گذشتہ کے عمل کرو

یا ہم دفعہ گذشتہ کی عمل تعبیر مساوات کی ثبت بدلنی کی کام مین لائین اس حالت مین مساوات ح کی ایک سی زیادہ مثبت قیمتین ہونگین پہر قیمت مین سب سے بڑی صحیح عدد کو ہم تلاش کرین اور پہر جدا جدا حساب ی کی مختلف قیمتون کی لگائین یہہ بہی ہوسکتا ہی کہ مساوات ح کی

ایک سی زیادہ قیمتین خاص صحاح متصلہ کی درمیان واقع ہون تو مساوات ی سے اونکے اندر تمیز پیدا کرو اور پہر ہر ایک قیمت کا حساب جاری رکھو اور یہی عمل کئی جاؤ

(۲۱۴) مساوات معلوم ح (لا) = ۰ سی ج (۱ + $\frac{۱}{ن}$) = ۰ کے حاصل کرو

یعنی ح (لا) کون درجہ کا فرض کرکے یہہ حاصل کرو کہ

ج (لا) + $\frac{۱}{ن}$ ح (لا) + $\frac{۱}{۲ن}$ $\frac{ح'' (لا)}{۲}$ + $\frac{۱}{۳ن}$ $\frac{ح^{۳} (لا)}{۳}$ + ... + $\frac{۱}{ن^{ن}}$ $\frac{ح^{ن} (لا)}{ن}$ = ۰

$ن^{ن}$ مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$ن^{ن}$ ح (لا) + $ن^{ن-۱}$ ح (لا) + $ن^{ن-۲}$ $\frac{ح'' (لا)}{۲}$ + ... + $\frac{ح^{ن} (لا)}{ن}$ = ۰

پس مساوات ی کی بنانی کی واسطی عددی قیمتین ح (لا) اور ح (لا) اور ح'' (لا) ... دریافت کرنی چاہئی اور ان عددی قیمتون کا حساب موافق دفعہ ۵ کی ہوسکتا ہی مگر دفعہ ۱۱ مین جو ہم نی بیان کیا ہی کہ ایسی حسابون کی کرنی کی ترکیب ہورنر صاحب کی ترکیب کے باب مین بیان ہوگی وہی یہان ہم بیان کرتی ہین اور یہی کیفیت مساوات ی کی بنی کی ہے

دفعات ۵۴ اور ۵۸ پر رجوع کرنی سی لاگرانژ کی ترکیب تقرب اسطرح بیان ہوسکتی ہے کہ فرض کرو ایک قیمت مساوات مفروضہ کی ا اور ا + ا کی درمیان واقع ہوتی ہی مساوات کی قیمتین بقدر ا کے گہٹاؤ اور پہر مساوات متکافیہ اوسکی بناؤ اور اس اخر مساوات کی ایک قیمت ب اور ب + ا کے درمیان دریافت کرو اور قیمتون کو بقدر ب کی گہٹاؤ اور مساوات متکافیہ بناؤ اور پہر اس اخر مساوات کی قیمت س اور س + ا کی درمیان تحقیق کرو اور قیمتون کو بقدر س کے گہٹاؤ اور مساوات متکافیہ بناؤ اور اسی طرح عمل کئی جاؤ تو یہہ کسر متسلسل

ا + $\frac{۱}{ب + \frac{۱}{س + ...}}$

اصل مساوات کی ایک قیمت ہوگی

(۲۱۵) مثال لا^{۳} − ۲ لا − ۵ = ۰

دفعہ ۸۰ کے موافق مساوات کی ایک اصلی قیمت ہی اور موجب دفعہ ۲۰ کی یہہ قیمت مثبت مقدار ہوگی

اور امتحان سی معلوم ہوتا ہے کہ وہ ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ لا = ۲ + $\frac{1}{ک}$ تو

ح (۲) = $۲^۳ - ۲ \times ۲^۲ - ۵ = -۱$

حَ (۲) = $۳ \times ۲^۲ - ۲ = ۱۰$

$\frac{1}{۲}$ حَ (۲) = ۳×۲ = ۶

پس مساوات ک کی $ک^۳ + ۱۰ ک^۲ + ۶ ک + ۱ = ۰$ یعنی

$ک^۳ + ۱۰ ک^۲ + ۶ ک = -۱$ اب اسکو مح (ک) = ۰ کہو

یہاں ک = ۱۰ کے مح (ک) کو منفی اور ک = ۱۱ مح (ک) کو مثبت بناتا ہی اسواسطے قیمت مطلوب ک کی ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہوگی ک = ۱۰ + $\frac{1}{ی}$ کے فرض کرو تو

مح (۱۰) = $۱۰^۳ - ۱۰ \times ۱۰^۲ - ۱۰ \times ۶ - ۱ = -۶۱$

محَ (۱۰) = $۳ \times ۱۰^۲ - ۲۰ \times ۱۰ - ۶ = ۹۴$

$\frac{1}{۲}$ مح‘‘ (۱۰) = $۳ \times ۱۰ - ۱۰ = ۲۰$

اور مساوات ی کی $-۶۱ ی^۳ + ۹۴ ی^۲ + ۲۰ ی + ۱ = ۰$ یعنی

$۶۱ ی^۳ - ۹۴ ی^۲ - ۲۰ ی - ۱ = ۰$ = اسکو صح (ی) = ۰ سی تعبیر کرو

یہاں ی = ۲ کے صح (ی) کو مثبت بناتا ہی پس قیمت مطلوب ی کی ۱ اور ۲ کی درمیان واقع ہے

فرض کرو کہ ی = ۱ + $\frac{1}{د}$ تو

صح (۱) = $۶۱ \times ۱^۳ - ۹۴ \times ۱^۲ - ۲۰ \times ۱ - ۱ = -۵۴$

صحَ (۱) = $۱۸۳ \times ۱^۲ - ۱۸۸ \times ۱ - ۲۰ = -۲۵$

$\frac{1}{۲}$ صح‘‘ (۱) = $۹۴ - ۱۸۳ \times ۱$ = ۸۹

مساوات د کی $-۵۴ د^۳ - ۲۵ د^۲ + ۸۹ د + ۱ = ۰$ یعنی

$۵۴ د^۳ + ۲۵ د^۲ - ۸۹ د - ۱ = ۰$

اس مساوات سے معلوم ہوتا ہی کہ د کی قیمت اور ۲ کے درمیان واقع ہی اسلیئے ہوافق سابق کی عمل کرو
اسی معلوم ہوا کہ لا = ۲ + $\frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \text{وغیرہ}}}}$

پس کسر مسلسل کے مقربین $\frac{۲}{۱}$ و $\frac{۲۱}{۱۰}$ و $\frac{۲۳}{۱۱}$ و $\frac{۴۴}{۲۱}$ . . . مین جبر مقابلہ کا چوالیسوان باب دیکھو
$\frac{۴۴}{۲۱}$ اور قیمت کی اصل قدر مین فرق کم بہ نسبت $\frac{۱}{۲۱(۲۱+۱۱)}$ یعنی کم بہ نسبت $\frac{۱}{۶۷۲}$ کے ہے
ایکا اور مثال کی واسطی یہہ مساوات لا^۳ − ۷ لا + ۷ = ۰ لو بموجب دفعہ ۱۰۸ کے مساوات کے
تمام اصلی قیمتین ہین اور بموجب سٹرم صاحب کی ضابطہ کی یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ ایک قیمت درمیان ۱
اور ۱$\frac{۱}{۲}$ کی واقع ہی اور دوسری قیمت ۱$\frac{۱}{۲}$ اور ۲ کے درمیان اسیواسطی اگر لا = $\frac{لآ}{۲}$ کے لکھین
اور مساوات لآ کی بنائین تو مساوات کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان اور ایک قیمت ۳ اور ۴ کے
درمیان واقع ہوگی اور مساوات لآ کی یہہ ہی ($\frac{لآ}{۲}$)^۳ − ۷ $\frac{لآ}{۲}$ + ۷ = ۰
یعنی لآ^۳ − ۲۸ لآ + ۵۶ = ۰
قیمت جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے یہہ ہوگی کہ

۲ + $\frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{۲ + \text{وغیرہا}}}}$

اور قیمت جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہو

۳ + $\frac{۱}{۲ + \frac{۱}{۱ + \text{وغیرہا}}}$

۱۱ قیمتون مین سے ہر ایک قیمت کے نصف کرنی سی اصل مساوات کی قیمتین دریافت ہوجائینگی
یا ہم لاگرانژ کی ترکیب اصل مساوات پر کام مین لائین اور مساوات کی ہیئت کو ابتدا مبتدل نہ کرین
فرض کرو کہ لا = ۱ + $\frac{۱}{ح}$ تو (۱ + $\frac{۱}{ح}$)^۳ − ۷ (۱ + $\frac{۱}{ح}$) + ۷ = ۰ اسے یہہ حاصل ہوگا کہ
۳ − ۴ ح^۲ + ۳ ح + ۱ = ۰ اسکو مح (ح) = ۰ سے تعبیر کرو
یہان مح (۱) مثبت ہی اور مح (۲) منفی اور مح (۳) مثبت ہی پس ایک قیمت مثبت د کی ۱ اور ۲ کے

درمیان اور دوسرے قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہوگی تو ۲ = ۱ + ½ ؛
اول قیمت کو تقریباً معلوم کرنی کی واسطی اور ۲ = ۲ + ½ ؛ دوسری قیمت کو تقریباً
دریافت کرنے کے واسطی فرض کرو
مساوات لا³ − ۷ لا + ۷ = ۰ کی ایک منفی قیمت ہی اوسکو اسطرح دریافت کرسکتی ہین کہ لا کو − لا کر
بدل دو اور مساوات مستحصلہ کی قیمت کا حساب لگاؤ یعنی مساوات

(− لا)³ − ۷ (− لا) + ۷ = ۰ کا

چونکہ مساوات لا³ − ۷ لا + ۷ = ۰ کی تینون قیمتون کا مجموعہ صفر ہے تو جب دو قیمتون
کا حساب تقریباً ہو جائیگا تو تیسری قیمت کا حساب بہی تقریباً معلوم ہو جائیگا

(۲۱۶) اگر لاگرانژ کی ترکیب کے اندر ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ اوسکی قیمت ایک صحیح عدد ہو
تو اصل مساوات کی ہم کو ایک قیمت کسر مسلسل محدود مین دریافت ہوگی یعنی ہم کو قیمت مکسور
محدود ناطق حاصل ہوگی لیکن اگر پہلی مساوات مفروضہ کی تمام قیمتین محدود اور ناطق مکسور
یا صحیح تحقیق کرتی ہین اور اونکی موافق اجزاء ضربی مساوات سی ساقط کرلئی ہوتی تو یہہ
بات ہرگز نہ واقع ہوگی

(۲۱۷) لاگرانژ کی ترکیب مین اس بات کا واقع ہونا ممکن ہی کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہو کہ وہ کسی
مساوات ماقبل سی بالکل مطابقت رکہتی ہو تو اس حالت مین خارج قسمت کسر مسلسل کے مقرر واقع ہونگے
اور اس سبب سی کسر مسلسل ایک کسر مکرر یا دور وہ بنجائیگی اور اوسکی قیمت مساوات درجہ دوم
کے حل کرنے سے معلوم ہوگی جبر مقابلہ کا ۴۵ باب دیکہو
اس مساوات درجہ دوم کی قیمتون مین درجہ دوم کا اصم ملتف ہوگا اور بموجب دفعہ ۴۴ کی اس
مساوات کی دونو قیمتین مساوات مفروضہ کی ہے دو قیمتین ہونگین

(۲۱۸) دفعہ ۲۱۵ مین جس عمل کو تمثیلاً مساوات لا³ − ۷ لا + ۷ = ۰ کی دوسرے ترکیب کے اندر
لکہا ہی اوسکو ہم یہان علی العموم لکہتے ہین

ہمارا بڑا مطلب ذہن مین یہہ ہی کہ جب مساوات مفروضہ کی ایک سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح متصلہ کی واقع ہون تو لاگرانژ کی ترکیب کو عمل مین لائین فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ کے مساوات مفروضہ ہو

اب جملی مستعان ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) اور ح۳ (لا) ... سسٹرم صاحب کے ضابطہ حاصل کرو اور وہان ٹہر جاؤ جہان ایسا مستعان جملہ حاصل ہوجاے کہ وہ لا کی سب قیمتون کی واسطے مثبت ہو دفعہ ۱۹۹ دیکھو فرض کرو کہ ایک سی زیادہ قیمتین مساوات مفروضہ کی صحاح متصلہ ا اور ا + ۱ کی درمیان واقع ہین لا کی جگہ ا + ½ جملون ح (لا) اور ح۱ (لا) اور ح۲ (لا) ... مین رکھو اور جو اونکی صورت ہو اونکو ج (ی) و ح۱ (ی) در ح۲ (ی) ... سی تعبیر کرو اگر جملون کے دوسرے سلسلہ مین متواتر کوئی سی ایسی دو عدد ب اور ب + ۱ رکھین تو دو نو صورتون مین جو تغیرات علامت ہونگی اونکا تفاوت مساوات ح (ی) = ۰ کی تعداد اون قیمتون کی ہوگی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہون وجہ اسکی یہہ ہی کہ ح (ی) اور ح۱ (ی) اور ح۲ (ی) ... مین جو ب اور ب + ۱ کی مندرج کرنی سی نتایج حاصل ہوتی ہین وہ وہی ہوتے ہین جو سلسلہ ح (لا) اور ح۱ (لا) و ح۲ (لا) .... مین جداگانہ ا + ب اور ا + ۱/(ب+۱) کے مندرج کرنی سی حاصل ہوتی ہین سو واسطی تغیرات علامت کی تعدادون کا تفاوت برابر مساوات ح (لا) = ۰ کی تعداد اون قیمتون کی ہوگا کہ جو ا + ب اور ا + ۱/(ب+۱) کی درمیان واقع ہون یعنے مساوات ح (ی) = ۰ کی تعداد قیمتون کی جو ب اور ب + ۱ کی درمیان واقع ہون

پس اگر یہہ ثابت ہوا کہ ی کی ایک قیمت سی زیادہ قیمتین درمیان صحاح متصلہ ب اور ب + ۱ کے واقع ہوتی ہین ی کی جگہ ب + ۱/ی سلسلہ ح (ی) اور ح۱ (ی) اور ح۲ (ی) ... مین اوری کی جگہ دو متواتر صحاح متصلہ کی رکھنی سی ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ ی کی ایک سی زیادہ قیمتین دو صحاح متصلہ کے درمیان واقع ہین یا نہین

اسی طرح عمل کیے جائینگی جب تک کہ ہم کو ایسی مساوات حاصل ہوگی کہ جسکی ایک ہی قیمت درمیان دو صحاح متصلہ

کے واقع ہون اور جب یہہ حاصل ہوجاے تو سٹرم صاحب کی ضابطہ کے جملون کی احتیاج نہین رہیگی اور بموجب دفعہ ۲۱۲ کے اس خاص قیمت کا حساب ہوجائیگا

پس اسطرح قیمتون کو جدا جدا کرسکتی ہین اور اوسکا حساب لگاسکتی ہین اور اونمین سے کسی کو نہین چھوڑتے

اب اگر ہم کو ح (ا) و ح (ا + ی) ح ۲ (ی) ... کی قیمتین دریافت کرنی منظور نہ ہون بلکہ اونکی علامتین دریافت کرنی مطلوب ہون تو ہم سب صورتون مین ان جملون کو ی کی ایسی قوتون مین ضرب دیسکتی ہین کہ اونکو کسرون سی خالص کردین اسواسطی کہ مثبت مقدار ہی فرض کی گئی ہی ہر یک قوت اوسکی مثبت ہی مثلاً بجای ح (ی) کی یعنی بجاے ح (ا + ۱/ن) کے ہم یہہ لکھین کہ

ح ن (ا) + ن ح ن-۱ (ا) + ن(ن-۱)/۲ ح ن-۲ (ا) + ... + ۱/ن ح ن (ا)

اور ح (لا) کون درجہ کا فرض کرلین

سترہوان باب

نیوٹن صاحب کی ترکیب تقریب اور اوسپر فوریر کا ضمیمہ

(۲۱۹) اب ہم ترکیب تقریب نیوٹن صاحب کی لکھتی ہین جسی قیمت مساوات کی قدر عددی کا حساب تقریباً ہوتا ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات ہی اور اوسکی ایک قیمت خاص حدود س اور ص کی درمیان واقع ہی اور ان حدون مین فرق بقدر ایک چھوٹی کسر کے ہی فرض کرو کہ س ایک ایسی مقدار ہی جو س اور ص کی درمیان ہی کہ وہ قیمت مطلوب سی تقرب اولین رکھتی ہی اور س + ھ ٹھیک قیمت ہی ص ایک چھوٹی سی کسر ہی جسکا تشخیص کرنا منظور ہے

پس ح (س + ھ) = ۰ یعنی بموجب دفعہ ۱۰ کے

ح (س) + ھ ح' (س) + ھ۲/۱×۲ ح'' (س) + ھ۳/۱×۲×۳ ح''' (س) + ... + ھ ن/۱×۲×۳...ن ح ن (س) = ۰

اب چونکہ ھ ایک چھوٹی سی کسر فرض کی گئی ہی تو ھ۲ اور ھ۳ ... بمقابلہ ھ کے

نہایت چھوٹی ہونگی پس اگر دوسری قوت اور اسی بڑی قوتوں کو اوپر کی مساوات میں ساقط کردیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ح (س) + ھ ح' (س) = ۰$$

$$\text{پس } ھ = - \frac{ح (س)}{ح' (س)}$$

تو یہہ فرض کرکے کہ ہم کو اسطرح یہہ قیمت ھ کی تقریباً دریافت ہوئی ہی س - $\frac{ح (س)}{ح' (س)}$ ایک تقرب جدید مساوات مفروضہ کا حاصل ہوا اس تقرب جدید کو س۱ سے تعبیر کرو تو موافق سابق کی عمل کرنی ہی س۱ - $\frac{ح (س۱)}{ح (س۲)}$ ایک اور تقرب جدید حاصل ہوگا اور علی ہذا القیاس اب ہم اون شرائط کا امتحان کماحقہ کرتی ہین جنکی موافق یہہ ترکیب بغیر کسی خطا اور نقص کے استعمال مین آسکی اور ایسی امتحان کا ضروری ہونا ظاہر ہی کیونکہ اگرچہ (س) بمقابلہ ح (س) کی چھوٹا ہو تو قیمت تقریبی ھ کی ایک چھوٹی کسر نہین ہوگی اور چھوٹی کسر ہونا اوسکا لوازمات سے ہے

(۲۲۰) ایک مساوات پر ہم نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب کا امتحان کرتی ہین اور یہہ مساوات بھی وہی ہی جو خود نیوٹن صاحب نے منتخب کی ہی یعنی لا^{۳} - ۲لا - ۵ = ۰ کو ح (لا) = ۰ سے تعبیر کرو یہان لا = ۲ کے ح (لا) کو منفی اور لا = ۳ کے ح (لا) کو مثبت بناتا ہے اسے معلوم ہوا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان واقع ہی اور لا = ۲ $\frac{۱}{۲}$ کے ح (لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت درمیان ۲ اور ۲ $\frac{۱}{۲}$ کی واقع ہوگی اور لا = ۲ء۲ بھی ح (لا) کو مثبت بناتا ہی تو قیمت ۲ء۲ سی فرق بقدر ۱ء۰ کی بھی نہین رکھتی پس فرض کرو کہ س = ۲ء۱ تو

$$\text{س۱} = \text{س} - \frac{ح (س)}{ح' (س)} = \text{س} - \frac{\text{س}^{۳} - ۲\text{س} - ۵}{۳\text{س}^{۲} - ۲}$$

$$= ۲ء۱ - \frac{۰ء۰۶۱}{۱۱ء۲۳} = ۲ء۱ - ۰ء۰۵۴۰ \text{ تقریباً}$$

$$\text{پس س۱} = ۲ء۰۹۴۶$$

پس ایک اور تقرب جدید کے لئے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$س_۱ - \frac{ح(س_۱)}{ح'(س_۱)} = س - ۰٫۰۰۰۰۴۸۵۲ \text{ تقریباً}$$

$$= ۲٫۰۹۴۵۱۴۸$$

(۲۲۱) یہہ عمل نظریات مین آسان ہی اور عملیات مین مشکل نہین ہی مگر اوسمین چند احتیاطین ضرور ہین تاکہ کامیابی کا اوسمین یقین ہو اب ہم اون احتیاطون کا بیان کرتے ہین فرض کرو کہ س قدر تقریبی مساوات کی قیمت کی ہی اور $س_۱ = س - \frac{ح(س)}{ح'(س)}$ اب ہم کو یہہ یقین بغیر تحقیقات کما حقہ کی نہین ہوسکتا کہ

کہ س۱ بہ نسبت س کی اصل قیمت سی اقرب ہی مثال گذشتہ مین اول ہم نی یہہ تحقیق کیا کہ ایک قیمت ۲ اور ۲٫۲ کے درمیان واقع ہی اور یہہ فرض کیا کہ ۲٫۲ تقرب اولین ہے اور اوسی ایک تقرب جدید ۲٫۰۹۴۶ استخراج کیا لیکن یہہ ہم کو تحقیق نہین ہے کہ ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۲ کی اصل قیمت سی اقرب ہی لیکن اگر بجای لا کی ۲٫۲ کے رکھو تو ح (لا) مثبت ہوتا ہی پس قیمت مطلوب ۲ اور ۲٫۲ کے درمیان واقع ہے اور اسی ہم کو معلوم ہوا کہ ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۲ کی اصل قیمت سی قریب تر ہی لیکن اب بھی ہم کو یہہ نہین معلوم کہ ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۱ کی اصل قیمت سی زیادہ قریب ہی اگر ہم ۲٫۰۹۴۶ کو ح (لا) مین کہین تو ح (لا) مثبت دریافت ہوگا تو اسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ قیمت ۲٫۰۹۴۶ ۲ اور ۲٫۱ کے درمیان واقع ہونا ہی پس ۲٫۰۹۴۶ بہ نسبت ۲٫۱ کے زیادہ قریب اصل قیمت سی ہے

(۲۲۲) فوربر صاحب نی ایک قاعدہ ایسا لکھا ہی کہ اوسکی موافق عمل کرنے سی یہہ مشقت بار بار امتحان کرنی کی نہین پڑتی جیسی کہ اوپر کی مثال مین پڑی تھی اور جب بعض شرائط پورے ہوجاتی ہین تو یہہ نیوٹن صاحب کی ترکیب اس قاعدہ سی مستند ہوجاتی ہے

نیوٹن صاحب کی ترکیب کا ضمیمہ فوربر کا جملہ معلوم کی اول جملہ مشتقہ کی ایک خاصیت پر موقوف ہے جسکو ہم ثابت کرتے ہین

(۲۲۳) اگر ا اور ب دو مقدارین ہون تو کوئی مقدار درمیان ا اور ب کی ایسی ضرور ہوگی کہ

ح (ب) - ح (ا) = (ب - ا) ح' (ر)

اسواسطے کہ فرض ح (لا) بتغیر ح (لا) - ح (ا) - $\frac{لا-ا}{ب-ا}$ [ح (ب) - ح (ا)] کو کرتا ہے

تو لا = ا کے ہونے سے ح (لا) معدوم ہوتا ہے اسیواسطے

بموجب دفعہ ۲۰۱ کی مساوات ح (لا) = ۰ کی نہایت درمیان ا اور ب کی ضرور ہوگی اور

ح' (لا) = ح' (لا) - $\frac{ح(ب)-ح(ا)}{ب-ا}$ اسی معلوم ہوا کہ کوئی مقدار ر درمیان

ا اور ب کی ضرور ایسی ہوگی کہ ح' (ر) - $\frac{ح(ب)-ح(ا)}{ب-ا}$ = ۰

اسیواسطے ح (ب) - ح (ا) = (ب - ا) ح' (ر)

(۲۲۴) فرض کرو کہ ب بڑا ا سے ہی تو ح (ب) جبر مقابلہ کی اعتبار سے بڑا ح (ا) سے ہوگا

اگر ح' (ر) مثبت ہی اور چھوٹا ح (ا) سے ہوگا اگر ح' (ر) منفی ہے

اگر ح' (لا) مثبت ہی درمیان لا = ا اور لا = ب کے ہو تو ح' (ر) ضرور مثبت ہوگا

اور اگر ح' (لا) منفی درمیان لا = ا اور لا = ب کی ہو تو ح' (ر) ضرور منفی ہوگا

پس اسی سبب یہہ نتیجہ پیدا ہوا کہ اگر ح (لا) کسی بون کے درمیان استقلال کی ساتھہ مثبت ہو

تو ح (لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتھہ بڑہی گا اور اگر ح' (لا) استقلا لا منفی ہو

تو ح (لا) اوس بون کی درمیان لا کی ساتھہ کہٹی گا اس کمی اور زیادتی سے مراد

ہماری جبر مقابلہ کی زیادتی اور کمی سی ہی اب ہم اپنی نتیجہ کو اسطرح بیان کیا کرتے ہین

اگر ح' (لا) کی کسی بون کی درمیان ایک ہی علامت ہو اور ح (لا) کی وہی علامت ہو جو ح (لا) کی تو

تو جیسا لا اوس بون کی درمیان بڑہی گا ایسا ہی ح (لا) تعداد بڑہی گا

اور اگر ح (لا) کی علامت مخالف ح' (لا) کے علامت کے ہو تو

جیسا لا اول بون کے درمیان کہٹی گا ایسا ہی ح (لا) گہٹی گا

(۲۲۵) اب ہم فوریر کے قاعدہ کو بیان کرتی ہین اور ثابت کرتی ہین فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہو

جسکی صرف ایک ہی قیمت درمیان سہ اور صہ کی ہو اور فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ کے کوئی قیمت درمیان سہ اور صہ کی نہین ہی اور ح' (لا) = ۰ کی بھی کوئی قیمت سہ اور صہ کے مابین نہین ہی تو اس حالت مین نیوٹن کی ترکیب تقریب ضرور کامیابی کے ساتھہ چلیگی اگر اوسکا آغاز دہان سی کرین جہان ح (لا) اور ح' (لا) کی ایک ہی علامت ہو اور پہر اگے اوسکو جاری کرین

ہماری فرضون سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ ح (لا) علامت کو صرف ایک دفعہ سہ اور صہ کے درمیان بدلتا ہی اور ح (لا) اور ح' (لا) اپنی علامت سہ اور صہ کے درمیان نہین بدلتی ہم صہ - سہ کو مثبت فرض کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ح (لا) اور ح' (لا) کی جب لا = سہ کے ہو ایک ہی علامت ہے یہہ تقریب اولین فرض کرو تو نیوٹن کے ترکیب کے موافق تقریب ثانی سہ - $\frac{ح (سہ)}{ح' (سہ)}$ ہم اور فرض کرو کہ سہ + ھہ قیمت کی بالکل صحیح قدر ہے تو

ح (سہ + ھہ) = ۰ اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح (سہ + ھہ) = ح (سہ) + ھہ ح' (لر) اسمین لر درمیان سہ اور سہ + ھہ کے واقع ہی پس ھہ = - $\frac{ح (سہ)}{ح' (لر)}$ اور ٹھیک قدر قیمت کی سہ - $\frac{ح (سہ)}{ح' (لر)}$ ہے

پس ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا کہ سہ - $\frac{ح (سہ)}{ح' (سہ)}$ بہ نسبت سہ کے اصلی قیمت سے زیادہ قریب ہی چونکہ ھہ ضرور ایک مثبت مقدار ہی تو ح (سہ) اور ح' (لر) کی مختلف علامتین ہین اور ح (سہ) کی وہی علامت ہی جو ح' (سہ) کی علامت ہی اور اسیواسطی ح (۱) اور ح' (سہ) مختلف العلامت ہین اسی معلوم ہوا کہ ح (لا) تعداداً ایسا کم ہوتا ہے جیسا لا درمیان سہ اور صہ کے زیادہ ہوتا ہی پس ح (لر) تعداداً کم ح' (سہ) سی ہوا اسیواسطی - $\frac{ح (سہ)}{ح' (سہ)}$ ایک مثبت مقدار ہے جو تعداداً کم بہ نسبت مقدار - $\frac{ح (سہ)}{ح' (لر)}$ کے ہی اسی ثابت ہوتا ہے کہ نیوٹن کا تقریب ثانی

قیمت حقیقی کی قدر کے زیادہ قریب بہ نسبت تقرب اولین کے ہے

فرض کرو سہ۱ = سہ - ح (سہ)/ح″ (سہ) تو ح (سہ۱) اور ح″ (سہ۱) کی ایک ہی علامت ہے اور تقریب سہ۱ سے جاری ہوتا ہے

(۲) فرض کرو کہ ح (لا) اور ح″ (لا) کی جب لا = صہ کے ہو ایک ہی علامت ہے صہ کو تقرب اولین فرض کرو تو نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقرب ثانی صہ - ح (صہ)/ح″ (صہ) ہوگا

فرض کرو کہ صہ + ھصہ قیمت کی صحیح صحیح قدر ہی تو ح (صہ + ھصہ) = ۰

اب بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ح (صہ + ھصہ) - ح (صہ) = ھصہ ح (لر) اسمین لر درمیان صہ اور صہ + ھصہ کے واقع ہی پس ھصہ = - ح (صہ)/ح (لر) پس اب ہم کو یہہ ثابت کرنا رہا کہ صہ - ح (صہ)/ح″ (صہ) قیمت حقیقی کی زیادہ تر قریب بہ نسبت صہ کے ہی چونکہ ھصہ ضرور منفی ہی تو ح (صہ) اور ح (لر) کی ایک ہی علامت ہی اور ح (صہ) کی وہی علامت ہے جو ح″ (صہ) کی علامت ہی اور اسیواسطے ح (لر) اور ح″ (صہ) کی ایک ہی علامت ہے اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۲۴ کے کہ ح (لا) تعداداً ایسا ہی زیادہ ہوتا ہے جیسا کہ لا درمیان سہ اور صہ کی زیادہ ہوتا ہی پس ح (سہ) تعداداً کم بہ نسبت ح (صہ) کے ہوا اسیواسطی ح (صہ)/ح″ (صہ) ایک نسبت مقداری اور تعداد چھوٹی بہ نسبت مثبت مقدار ح (صہ)/ح (لر) کے ہی اسی ثابت ہوتا ہی کہ نیوٹن صاحب کی ترکیب کے موافق تقرب ثانی حقیقی قیمت کے قدر کے قریب تر بہ نسبت تقرب اولین کے ہے

فرض کرو کہ صہ۱ = صہ - ح (صہ)/ح″ (صہ) تو ح (صہ۱) اور ح″ (صہ۱) کی ایک ہی علامت ہی اور تقرب صہ۱ سے آگے جاری ہوگا

(۲۲۶) دفعہ گذشتہ سی بخوبی ثابت ہوگیا کہ فوریر نے جو شرائط لکھی ہیں وہ نیوٹن صاحب کی ترکیب تقرب کی کامیابی کی لئی کافی ہیں جب یہہ شرائط پوری ہوجائیں اور اوس حد سی کہ جسکے موافق ح (لا) اور ح″ (لا) کی ایک ہی علامت ہو تقرب شروع ہوکر جاری ہو تو قیمتین متواترہ حاصل

ہو تین جسمین سی ہر ایک قیمت کی اصل قدر تک متواتر بڑھتی ہی بشرطیکہ حد جسی کہ ہم چلی ہین چھوٹی قیمت کی اصل قدر سی ہو اور گھٹتی ہی اگر حد مذکور بڑی قیمت کی اصل قدر سی ہو

اب ہم اختصار کے ساتھہ یہہ ثابت کرینگے کہ فوریر کی شرایط کا ہونا ضروری ہے

ایک قیمت مفروضہ سی ہم چلین تو نیوٹن صاحب کا تقرب ثانی $-\frac{ح(س)}{ح'(س)}$ زیادہ کرنے سی صحیح کریگا اور قیمت کی قدر حقیقی $\frac{ح(س)}{ح'(س)}$ کے زیادہ کرنی سی حاصل ہوگی اسی ثابت ہوا کہ ح (لا) کے استواری علامت ضرور ہی تاکہ یہہ ہم کو تحقیق ہو کہ ح (س) اور ح (ر) کی ایک ہی علامت ہے اگر ان مقدارون کی ایک علامت نہ ہو تو صحت نیوٹنی کی علامت غلط ہوگی اور نیوٹن کا تقرب ثانی قیمت کی اصلی قدر سی بہ نسبت تقرب اولین کے بڑہا ہوا ہوگا

استواری علامت ح″ (لا) کی ضرور ہی تاکہ اوسی یہہ تحقیق ہو کہ ح (ر) تعداد کم بہ نسبت ح (س) کے ہو اگر یہ صورت نہ ہو تو صحت نیوٹنی تعداد بڑی بہ نسبت اصلی صحت کی ہوگی اور اسطرح صحت کی ٹھیک علامت فرض کرنی سی قیمت کی حقیقی قدر درمیان نیوٹن کے تقرب اول اور دوم کے درمیان واقع ہوگی اس حالت مین نیوٹن کا تقرب ثانی قریب تر قیمت کے حقیقی قدر کے بہ نسبت تقرب اول کی ہوسکتا ہی مگر اونکا ہونا کچھہ ضروری نہین

(۲۲۷) (دفعہ ۲۲۰ کی مثال مین ثابت ہوسکتا ہی کہ مساوات ح (لا) = ۰ صرف ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہی اور مساوات ح′ (لا) = ۰ اور ح″ (لا) = ۰ کی کوئی قیمت ان حدود کی درمیان نہین واقع ہوتی اور جب لا = ۲ کے ہو تو ح (لا) اور ح″ (لا) دونو مثبت ہین پس نیوٹن کی ترکیب سے یقینی کامیابی حاصل ہوگی اگر اوسکا اعزا اور اجزا احداء ۲ سے کرین

ایک اور مثال لا۳ − ۷ لا + ۷ = ۰ کی لو اسکو ح (لا) = ۰ سی تعبیر کرو امتحان سی یہہ بات ثابت ہوسکتی ہی کہ مساوات کی ایک قیمت ۳ و ۱ اور ۴ و ۱ کے درمیان واقع ہے اور ح (لا) = ۰ اور ح″ (لا) = ۰ کی قیمتین درمیان ان حدون کی نہین واقع ہین اور نیز جب لا = ۳ و ۱ تو ح (لا) اور ح″ (لا) دونو مثبت ہین پس اگر حد ۳ و ۱ سی اغاز اور

اجرا کرین تو نیوٹن کی ترکیب تقریب سی کامیابی یقینی حاصل ہوگی

(۲۲۸) اب ہم یہہ بتلائینگے کہ سرعت تقرب کا تخمینہ کسطرح ہوتا ہی فرض کرو کہ عمل کی کسی مرتبہ مین ہم کو س کی قیمت کی قدر تقریبی حاصل ہوئی ہی تو قیمت کی صحیح قدر س − ح (س)/(ر) ہے

پس عددی قدر غلطی کی اس مرتبہ مین ح (س)/(ر) ہی اسکو رسی تعبیر کرو اور ا سے مابعد قدر تقریبی س − ح (س)/(س) اور اب غلطی کی عددی قدر ح (س)/(ر) − ح (س)/(س)

یعنی ر ح (س) − ح (ر) / ح (س) اور بموجب دفعہ ۲۲۳ کے ہم کو معلوم ہی کہ ح (س) ح (ر) = (س − ر) ح′ (لو) آمین لو در میان س اور ر کے واقع ہوتا ہے پس غلطی

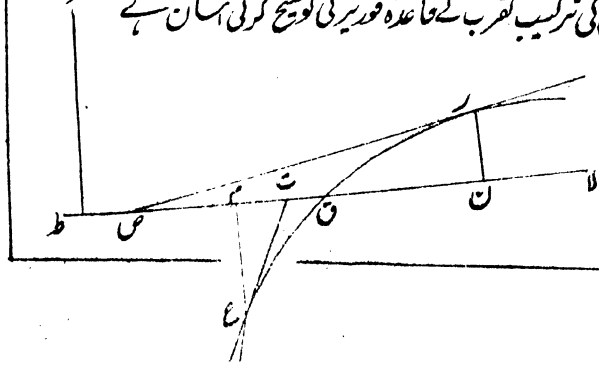
ر (س − ر) ح″ (لو) / ح (س) ہی اب لو در میان س اور قیمت کی حقیقی قدر کی درمیان واقع ہوتا ہی

پس س − ر چھوٹا رسی ہوا پس غلطی کم بہ نسبت ر ح″ (لو) / ح (س) کے ہی اب فرض کرو کہ ح″ (لا) کی سب سی بڑی قیمت جو در میان ان حدود کی ہو وہ سب سی چھوٹی قیمت ح (لا) پر تقسیم کی جاوی اور خارج قسمت ق سی تعبیر ہو تو غلطی بدرجہ اولی کم ق ر سے ہوگی

دفعہ ۲۳۰ کے مثال مین قیمت ۱۲ اور ۱٫۲ کے درمیان واقع ہوتی ہی

پس ق کی قیمت دریافت کرنی کی واسطی قیمت ۶ لا کو جب لا = ۱٫۲ کے ہو قیمت ۳ لا − ۲ لا² جب لا = ۲ کے تقسیم کرو تو ق = ۲۶٫۱ اور چونکہ ق تقریباً واحد کے برابر ہے تو ٹھیک مرتبے اعشاریہ تقرب مین قریب دو چند کے ہر دفعہ کے عمل مین ہونگے

(۲۲۹) جو خطوط منحنی کی مسائل مین اصول علم مفصولات کو کام مین لانا طالب علم جانتی ہین اوسکو علم ہندسہ کے موافق نیوٹن کی ترکیب تقرب کے قاعدہ فوریر کی توضیح کرنی آسان ہے



فرض کرو کہ ع ق ایک خط منحنی کا حصہ مساوات ء = ح (لا) سے دریافت ہوتا ہے
اور ر م اور ر ن ہم کو معلوم ہیں اور ق کی قیمت دریافت کرنی ہی یعنی وہ نقطہ دریافت کرنا ہی جہاں
خط منحنی محور کو کاٹتا ہے

نقطہ ع پر ظاہر ہی کہ ح (لا) منفی ہی اگر ط محور کی مثبت سمت مقرر کی جاے
اور ح (لا) بھی نقطہ ع پر منفی ہی کیونکہ خط منحنی ع پر محور لا کے لحاظ سے محدب ہے
اور مماس ع ت کھینچو اور فرض کرو کہ ء م = سہ تو م ت = $-\frac{ح (سہ)}{ح' (سہ)}$
موافق علم حرسات کے ہوگا

پس م سی تقرب بنیوطنی شروع ہوتا ہی اور ت کی طرف چلتا ہی اور چونکہ ت درمیان
م اور ن کی واقع ہوتا ہی تو اسی ظاہر ہوتا ہی کہ ت سی اجرا ترکیب تقرب کا کامیابی سے ہو سکتا ہے
نقطہ ر پر ح (لا) مثبت ہی اور ح' (لا) منفی ہی مماس رص کھینچو اور تقرب نیوطنی ن سے
شروع ہوتا ہی اور ص کی طرف جاری ہوتا ہی اور ص اور ن مختلف سمت میں ق کے واقع
ہیں علاوہ برین یہہ یقینی نہیں ہی کہ ص ق چھوٹا ق ن سی ہی اور یہہ یقینی نہیں ہے کہ
تقرب ص سی جاری ہوتا ہی پس تقرب ن سی شروع ہوتا ہے
طالب علم شکلین مرتسم کرکی شرط ح (لا) اور ح' (لا) کے حدود مذکور میں علامت
نہ بدلنی کی توضیح کر سکتا ہے

ٹہارہواں باب ہورنر کی ترکیب

(۲۳۰) قیمت مساوات کی قدر تقریباً دریافت کرنی کی لئی اب ہم ترکیب تقرب وہ لکھی ہیں جسکو
ہورنر صاحب نی ایجاد کیا ہے
فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہو تو ح (ط + لا) = ۰ وہ مساوات ہوگی جسکی
قیمتیں اول مساوات کی قیمتوں سی بقدر ط کے کم ہونگین
مساوات ح (لا + ط) کو تشریح کرکے لکھیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ح(ط) + لا ح'(ط) + \frac{لا^2}{2!} ح''(ط) + \frac{لا^3}{3!} ح'''(ط) + \dots \frac{لا^ن}{ن!} ح^{ن}(ط) = 0$$

اب ہورنر صاحب کی ترکیب کا جز اعظم یہہ ہی کہ اس اخر مساوات کی مثال کو نظم اور خوش ترتیبی سے دریافت کریں اور اس عمل کی فایدہ مندہونی کا ذکر ہم نی دفعات ۱۱۱ اور ۱۱۲ مین کیا ہے

(۲۳۱) تمثیلاً فرض کرو

$$ح(لا) = ا لا^4 + ب لا^3 + س لا^2 + د لا + ر لا + ف$$

$$تو\ ح(ط) = ا ط^4 + ب ط^3 + س ط^2 + د ط + ر ط + ف$$

$$ح'(ط) = ۵ ا ط^4 + ۴ ب ط^3 + ۳ س ط^2 + ۲ د ط + ر$$

$$\frac{1}{2} ح''(ط) = ۱۰ ا ط^3 + ۶ ب ط^2 + ۳ س ط + د$$

$$\frac{1}{3} ح'''(ط) = ۱۰ ا ط^2 + ۴ ب ط + س$$

$$\frac{1}{4} ح^{iv}(ط) = ۵ ا ط + ب$$

$$\frac{1}{5} ح^{v}(ط) = ا$$

(۱) ح (ط) کا حساب دفعہ ۵ کی طرح کرین تو

ا	= ا
ا ط + ب	= ع کے لکھو
ع ط + س = ا ط^2 + ب ط + س	= ق کے لکھو
ق ط + د = ا ط^3 + ب ط^2 + س ط + د	= ی کے لکھو
ی ط + ر = ا ط^4 + ب ط^3 + س ط^2 + د ط + ر	= ص کے لکھو
ص ط + ف = ا ط^5 + ب ط^4 + س ط^3 + د ط^2 + ر ط + ف	= ح (ط)

یہان ہر سطر اسطرح حاصل ہوتی ہی کہ ماقبل کی سطر کو ط مین ضرب دی اور حاصل ضرب پر مقادیر ب اور س اور د اور ر اور ف کو زیادہ کیا ہے

(۲) ح' (ط) کا حساب بہی اسطرح کرین جسطرح ح (ط) کا حساب کیا ہی اور اوع دق در

اور ص کو بجای ا و ب و س اور د در کے کام مین لائین

ا = ا

ا ط + ع = ۲ ا ط + ب = سر کے لکھو

سر ط + ق = ۳ ا ط^{۲} + ۲ ب ط + س = جر کے لکھو

حر ط + ی = ۴ ا ط^{۳} + ۳ ب ط^{۲} + ۲ س ط + د = سر کے لکھو

سر ط + ص = ۵ ا ط^{۴} + ۴ ب ط^{۳} + ۳ س ط^{۲} + ۲ د ط + ر = ح ط

(۳) $\frac{۱}{۲}$ ح$''$ (ط) کا حساب مثل ح (ط) کے کرو اور حروف ا اور بر و حر و سر کو کام مین لاؤ تو

ا = ا

ا ط + بر = ۳ ا ط + ب = شر کے لکھو

سر ط + جر = ۶ ا ط^{۲} + ۳ ب ط + س = مر کے لکھو

مر ط + سر = ۱۰ ا ط^{۳} + ۶ ب ط^{۲} + ۳ س ط + د = $\frac{۱}{۲}$ ح$''$ (ط)

(۴) اسیطرح $\frac{۱}{۳}$ ح$''$ (ط) کا حساب کرو اور ا د سر و صر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + سر = ۴ ا ط + ب = فر کے لکھو

فر ط + صر = ۱۰ ا ط^{۲} + ۴ ب ط = $\frac{۱}{۳}$ ح$''$ (ط)

(۵) اب $\frac{۱}{۴}$ ح$'''$ (ط) کا اسیطرح حساب کرسکتے ہین ا اور فر کو کام مین لاؤ

ا = ا

ا ط + فر = ۵ ا ط + ب = $\frac{۱}{۴}$ ح$'''$ (ط)

(۶) اخر ا = $\frac{۱}{۵}$ ح$'''$ (ط)

اوپر کے عمل کو اس ترتیب سے لکھو تو نہایت آسانی ہوگی

ا	ب	س	د	ر	ف
	ا ط / ع	ع ط / ق	ق ط / ر	ر ط / ص	ص ط / ح ط
	ا ط / ر	ر ط / ح	ح ط / ر	ر ط / ح (ط)	
	ا ط / ش ر	ر ط / ر	ر ط / ر		
	ا ط / ف ر	ر ط / ح (ط)	½ ح (ط)		
	ا ط / ½ ح (ط)				

ہر خط عرضی کے نیچے اوسی اوپر کے دو مقداردن کا حاصل جمع لکھا ہے

پس ہم نی ترکیب ہورنر کی عمل کی مساوات ح (ط + لا) = ۰ کی مثال بنانے کی جب وہ پانچوین درجہ کی ہو تبلادی خواہ مساوات کا درجہ کچھ ہی ہو عمل یہی ہوگا

(۲۳۲) مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ایک مساوات معلوم ہی جسکی ایک قیمت ۳۰۰ اور ۴۰ کی درمیان واقع ہو، ایک دوسری مساوات بناؤ جسکی قیمتین بہ نسبت اول مساوات کی بقدر ۳۰ کی کم ہون تو دوسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہونگین اور امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ ۱۰ کا کونسا بڑی سی بڑا ضعاف اس قیمت مین شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۰٫۷ ہے اب تیسری مساوات بناؤ جسکی قیمت دوسری مساوات سی بقدر ۰٫۷ کے کم ہو تو اس تیسری مساوات کی قیمتین ۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہونگین اب امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ قیمت مین کونسا بڑی سی بڑا صحیح عدد شامل ہی فرض کرو کہ وہ ۲ ہے اب چوتھی مساوات بناؤ جسکی قیمت تیسری مساوات سی بقدر ۲ کے کم ہو تو اس چوتھی مساوات کی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان واقع ہونگین اب امتحان سی یہہ دریافت کرو کہ کتنی دسوین حصہ زیادہ سی زیادہ اس قیمت مین شامل ہین

فرض کرو کہ وہ آٹھہ دسوین ہین تو اس پانچوین مساوات کی قیمت ۰ اور ۱ کے

درمیان واقع ہی اور امتحان سی دریافت کرو کہ زیادہ سی زیادہ کتنی سوین حصہ اس قیمت مین شامل ہین فرض کرو کہ ۱۰ سوین حصی ہین

اول فرض کرو کہ ۰٫۰ قیمت پانچوین مساوات کی ہی تو اسی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ۳٫۲۷۸۷ ٹھیک قیمت اول مساوات کی ہے

دوم فرض کرو کہ ۰٫۱ ٹھیک قیمت مساوات پنجم کی نہین ہے تو اسی یہہ مستنبط ہوگا کہ ایک مساوات ہے جسکی قیمتین مساوات اول کی قیمتون سی بقدر ۳٫۲۷۸۷ کے چھوٹی ہین اور اوسکی قیمت ۰ اور ۰٫۱ کے درمیان واقع ہی پس مساوات اول کی قیمت ۳٫۲۷۸۷ اور ۳٫۲۷۸۸ کے درمیان واقع ہے

پس اسی معلوم ہوتا ہی کہ ایک سلسلہ اوس قسم کی قیمتون کا جسکا ذکر ۲۳۱ مین ہوا کسطرح حاصل ہوتا ہی اور اوسی حقیقی قیمت یا تقریبی قیمت خاطر خواہ دریافت ہوجاتی ہے

(۲۳۳) ہم نی دفعہ گذشتہ مین یہہ بیان کیا ہی کہ بعض اعداد امتحان سی دریافت ہوتی ہین اب ہم یہان ایک طریقہ ان متحانون کی ہدایت کی لئی بتلائینگے فرض کرو کہ ح (لا) = ۰ مساوات مفروضہ ہو اور ایک یا زیادہ عملون سی ہم نی ایک مساوات ایسی حاصل کی جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون سی بقدر س کی کم ہون یعنی یہہ فرض کرو کہ ہم مساوات ح (س + لا) = ۰ کی حاصل کرین اور فرض کرو کہ اس مساوات کی ایک قیمت چھوٹی سی ہے تو اس مساوات کی ایک قیمت تقریبی ہوگی

پس اسی معلوم ہوا کہ موافق باب گذشتہ کی اکثر قیمت سی س - $\frac{ح (س)}{ح' (س)}$ اقرب ہوگا

پس - $\frac{ح (س)}{ح' (س)}$ اوس عدد کی قدر تقریباً ہوگی جسکو اجزاء عمل کے واسطی ہم تلاش کرتے ہین

(۲۳۴) مثال فرض کرو کہ ح (لا) = ۲لا۳ - ۴لا۲ - ۳لا + ۱۱۷ اب امتحان سی معلوم ہوتا ہی کہ ح (۲۰۰) منفی ہی اور ح (۳۰۰) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت درمیان ۲۰۰ اور ۳۰۰ کے واقع ہی اب ہم وہ عمل کرتی ہین جسی قیمتون

قیمتون مین سی ہر یک قیمت بقدر ۲۰۰ کے کم ہو جائی

۲	۴۷۳	۲۳۴	۱۱۷ / ۲۰۰
	۴۰۰	۱۴۶۰۰	۲۹۶۶۸۰۰
	۷۳	۱۴۸۳۴	۲۹۶۷۵۱۱
	۴۰۰	۱۵۴۰۰	
	۳۲۷	۵۰۵۶۶	
	۴۰۰		
	۷۲۷		

اسی معلوم ہوا کہ مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتون سی جس مساوات کی قیمتین بقدر ۲۰۰ کی کم ہین وہ یہہ ہے کہ

۲ لا^۳ + ۷۲۷ لا^۲ + ۵۰۵۶۶ لا − ۲۹۶۷۵۱۱ = ۰ پس

ح (۲۰۰) = − ۲۹۶۷۵۱۱ اور ح (۲۰۰) = ۵۰۵۶۶

اسی معلوم ہوا کہ ح (۲۰۰) زیادہ قریب بہ نسبت ۰ کی ہی پس اب مساوات کی قیمتون مین سے ح (۲۰۰) ہر یک قیمت کو بقدر ۵۰ کے کم کرتے ہین

۷۲۷	۵۰۵۶۶	− ۲۹۶۷۵۱۱ / ۵۰
۱۰۰	۴۱۳۵۰	۴۵۹۵۸۰۰
۸۲۷	۹۱۹۱۶	۱۶۲۸۲۸۹

اسطرح سی ہم کو ۵۰ بہت بڑا عدد حاصل ہوا اسواسطی ح (۲۵۰) = ۱۶۲۸۲۸۹ مثبت ہے اور ح (۲۰۰) منفی ہی پس قیمت چھوٹی ۲۵۰ سے ہوئی دفعہ ۲۳۳ کی ہدایت پر چلنی سی اکثر ہم ایک بڑا عدد امتحان کی واسطی تجویز کرینگی اور خاص کر ابتدا عمل مین تو یہہ ضرور ہوگا اسی طرح کی کیفیت عدد کی جذر نکالنی مین واقع ہوتی ہی کہ ہم ایک بڑا عدد جذر مین تجویز کرتے ہین جسی جذر نہین نکلتا

اب ہم ۴۰ پر امتحان کرینگے

۲	۷۲۷	۵۰۵۶۶	− ۲۹۶۷۵۱۱
	۸۰	۳۲۲۸۰	۳۳۱۳۸۴۰
	۸۰۷	۸۲۸۴۶	۳۴۴۳۲۹

پس ۴۰ بھی بہت بڑا ہے کیونکہ ح (۲۴۰) مثبت ہے

اب ہم ۳۰ پر امتحان کرتے ہیں

۲	۷۲۷	۵۰۵۴۴	−۲۹۶۷۵۱۱
	۴۰	۲۳۶۱۰	۲۲۲۵۲۸۰
	۷۸۷	۷۴۱۷۴	−۷۴۲۲۳۱
	۴۰	۲۵۴۱۰	
	۸۴۷	۹۹۵۸۴	
	۴۰	۴۴۴۷	
	۹۰۷	۱۰۴۰۳۳	

پس ح (۲۳۰) = −۷۴۲۲۳۱ منفی مقدار ہی پس ۳۰ ایک مناسب عدد ہے
پس مساوات جسکی قیمتیں مساوات ح (لا) = ۰ کے قیمتوں سے بقدر ۲۳ کے کم ہیں
وہ یہہ ہے کہ ۲ لا^{۳} + ۹۰۷ لا^{۲} + ۹۹۵۸۴ لا − ۷۴۲۲۳۱ = ۰

یہاں ح (۲۳۰) = ۹۹۵۴۴ پس $\frac{\text{ح (۲۳۰)}}{\text{ح (۲۳۰)}}$ = ۷ کے تقریباً
اب مساوات کی قیمتیں بقدر ۷ کے گھٹاتے ہیں

۲	۹۰۷	۹۹۵۸۴	− ۷۴۲۲۳۱ ل ۷
	۱۴	۴۴۴۷	۷۴۲۲۳۱
	۹۲۱	۱۰۴۰۳۳	

اسی ثابت ہوتا ہے کہ ح (۲۳۷) = ۰ پس ۲۳۷ ایک قیمت اصل مساوات کی ہے
کل عمل کو اکٹھا طرح کیا کرتے ہیں

۲	−۴۷۳	−۲۳۴	−۷۱۱ ل ۲۳۷
	۴۰۰	۱۴۶۰۰	−۲۹۶۴۸۰۰
	−۷۳	−۱۴۸۳۴	−۲۹۶۷۵۱۱
	۴۰۰	۴۵۴۰۰	۲۲۲۵۲۸۰
	۴۲۷	۵۰۵۴۴	−۷۴۲۲۳۱
	۴۰۰	۲۳۶۱۰	۷۴۲۲۳۱
	۷۲۷	۷۴۱۷۴	
	۴۰	۲۵۴۱۰	
	۷۸۷	۹۹۵۸۴	
	۴۰	۴۴۴۷	
	۸۴۷	۱۰۴۰۳۳	
	۴۰		
	۹۰۷		
	۱۴		
	۹۲۱		

جہاں ن * کیا گیا ہے وہاں پہلا جز عمل کا ختم ہوتا ہی اور جہاں نشان ‡ ہی وہاں دوسرا جز عمل کا تمام ہوتا ہے

(۲۳۵) اب ہم مثال ایک ایسی مساوات کی لکھتی ہیں کہ جسکی قیمت ناطقہ محدودہ نہیں ہی فرض کرو کہ

ح (لا) = لا⁴ - ۳ لا³ - ۲ لا + ۵ امتحان سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ح (۳) منفی اور

ح (۴) مثبت ہی پس مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۴ اور ۳ کے درمیان ہے

پس عمل اس قیمت کی تقرب کا تین مرتبہ کی اعشاریہ تک یہہ ہوگا

۱ - ۳	- ۲	۵	۳٫۱۲۸
۳	۰	- ۶	
۰	- ۲	- ۱ *	
۳	۹	۷۶۱	
۳	۷ *	- ۲۳۹	
۶ *	۷۶۱	۱۶۷۱۲۸	
۱۷	۷۶۱	- ۲۰۷۱۸۷۲ ‡	
۶٫۱	۸٫۲۳ +	۰٫۰۶۸۲۷۳۱۵۲	
۶٫۱۲	۸٫۳۵۶۴	- ۰٫۰۰۳۵۹۸۸۴۸	
۶٫۱۲۳ *	۸٫۳۵۶۴		
۶٫۱۲۳۰۲	۸٫۴۸۳۲ ‡		
۶٫۱۲۳۰۲	۸٫۵۰۵۹۴۴		
۶٫۱۲۳۰۲	۸٫۵۳۴۱۴۴		
۶٫۱۲۳۰۲	۸٫۵۵۱۰۰۸		
۶٫۱۲۳۰۲ ‡	۸٫۵۵۸۵۱۵۲		
۰٫۰۰۸			
۶٫۱۲۳۶۸			
۰٫۰۰۸			
۶٫۱۲۳۷۶			
۰٫۰۰۸			
۶٫۱۲۳۸۴			

اب قیمت کے دوسرے ہندسہ کے دریافت کرنے کے واسطے - $\frac{۱}{۲}$ ہم کو حاصل ہے

پس ۱ سب سی زیادہ قریب عدد امتحان کرنی کی لئی ہی اور قیمت کی تیسرے ہندسہ کے دریافت کرنی کی واسطے

- $\frac{۲۳۹}{۸٫۲۳}$ ہی پس ۰٫۰۰۲ سب سے زیادہ عدد قریب امتحان کے واسطے ہے

اور قیمت کی چوتھی ہندسہ کی دریافت کرنی کی واسطے - $\frac{۰٫۰۷۱۸۷۱}{۸٫۴۸۳۲}$ ہم کو حاصل ہوتا ہے

پس ۰٫۰۰۸ سب سی زیادہ قریب عدد امتحان کی واسطے ہی ان سب صورتوں میں جس عدد

بیان کیا ہے وہ درست بیٹھا ہے

(۲۳۶) دفعہ گذشتہ مین جو مساوات لکھی ہی اوسکو دوسری مثال سمجھو اور اوسکی قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

۱ — ۳	— ۲	۵) ۱۵۲۰۱۶ (
۱	— ۲	— ۴
۲	— ۴	۱۰۰۰ *
۱	— ۱	— ۹۹۲
۱	— ۵۰۰ *	۸.....
۰۰ *	۴	— ۴۸۷۹۳۹۹
۲	— ۴۹۶	+ ۳۱۲۰۶۰۱۰۰۰۰
۲	۸	— ۲۹۲۷۰۶۰۹۰۴
۴	— ۴۸۸۰۰۰۰ ×	۱۹۳۵۴۰۰۹۶
۲	۶۰۱	
۶۰۰ ✕	— ۴۸۷۹۳۹۹	
۱	۶۰۲	
۶۰۱	— ۴۸۷۸۷۹۷۰۰ ≠	
۱	۳۶۲۱۶	
۶۰۲	— ۴۸۷۸۴۳۴۸۴	
۱	۳۶۲۵۲	
۶۰۳۰ ≠	— ۴۸۷۸۷۲۳۲	
۶		
۶۰۳۶		
۶		
۶۰۴۲		
۶		
۶۰۴۸		

اس دفعہ اور دفعہ ۲۳۵ کی ترتیب مین فرق اس بات سی پیدا ہوتا ہے کہ عمل مین یہہ اکثر دستور ہی کہ علامت اعشاریہ کی ساقط اوسیطرح کر دیتی ہین جسطرح کہ اعداد کی تقریبی جذر کی نکالنی مین قیمت مین جو جزو اعشاریہ ہو اوسکی واسطی یہہ قاعدہ کافی ہی کہ جب تمام ہندسی صحیح عدد کے قیمت مین معلوم ہوجائین اور کسر اعشاریہ کے پیدا ہونے کی نوبت پہونچی تو وہان عمل کی اول خانہ مین دائین طرف ایک صفر لگاؤ اور عمل کے دوسرے خانہ مین دو صفر اور تیسرے خانہ مین تین صفر اور علی ہذا القیاس اگر اور خانی عمل کی تین سے

زائد ہون اور پہر عمل ایک دفعہ کا اسطرح کرو کہ گویا سب بہی ہندسی قیمت کی اعداد صحاح ہی تہی اور پہر صفرون کا الحاق موافق سابق کی عمل مین لاؤ

اب اس بات پر غور کرو کہ قیمت مین جب ۲ نکل چکی بعد اوسکی جو ہندسہ مثل صحیح کی تقریباً تجویز ہوگا وہ $\frac{۸۰۰۰}{۴۸۸۰۰}$ ہی اور یہہ ایک سی کم ہی پس ایک صفر قیمت مین لگاؤ اور اول خانہ عمل مین ایک صفر اور دو اور زیادہ صفر دوسرے خانہ عمل مین اور تین اور زیادہ تیسرے مین الحاق کرو اور عمل موافق سابق کی کرو

یہہ امر ظاہر ہی کہ امثلہ گذشتہ مین اول خانہ مین عمل کا اختصار ہوسکتا تہا کیونکہ یہہ کافی تہا کہ جو نتایج عمل ہون اونکو لکہین اور سان سان عمل کو ذہن مین کرین مگر ہم نی صاف صاف سمجہانے کے واسطی کل عمل کی صورت مفصل لکہی ہی لیکن اوسکا اختصار نہین کیا

(۲۳۷) جب قیمت مین بعض ہندسی نکل ائی تو عمل مختصر کی اعانت سی اور ہندسی قیمت کی دریافت ہوجاتی ہین اس کی مثال مساوات $۱۲ + ۳ = ۱۲ - ۲ = ۵$ کی مثبت قیمتون کے دریافت کرنی مین دیتی ہین قیمت مین پانچ مرتبی اعشریہ کی جب تک ہم کو دریافت ہونگی عمل تمام اور کمال کرینگے

۱ ۳	۲ -	۵ ۱۲۳۰۰۵ -
۱ / ۴	۴	۲
۱ / ۵	۲	۳۰۰۰ -
۱ / ۶۰	۵	۲۶۶۷
۲ / ۶۲	۷۰۰	۳۳۳۰۰۰ -
۳ / ۶۶	۱۸۹	۳۳۳۳۳۳
۳ / ۶۹۰	۸۸۹	۶۶۳..... -
۳ / ۶۹۳	۱۹۸	۵۶۴۳۵۲ ۵۱۲۵
۳ / ۶۹۶	۱۰۸۷۰۰	۹۸۶۴۷۲۴۸۶۵ -
۳ / ۶۹۹۰۰۰	۲۰۷۹	
	۱۱۰۷۷۹	
	۲۰۸۸	
	۱۱۲۸۶۷۰۰۰۰۰	
	۳۴۹۵۰۲۵	
	۱۱۲۸۷۰۴۹۵۰۲۵	
	۳۴۹۵۰۵۰	
	۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۱	

۶۹۹۰۰۵
۵
۶۹۹۰۱۰
۵
۶۹۹۰۱۵

اختصار عمل کا قاعدہ یہہ ہی کہ ہر دفعہ کی عمل مین ایک ہندسہ عمل کی اخرخانہ مین اول سی دور کرو مگر ایک اور اخرخانہ عمل مین سی دو ہندسی مگر دو اور علی ہذا القیاس اب وہی مثال لیتی ہین جو اوپر بیان ہوئی اور اس مختصر قاعدہ کو عمل مین لاتی ہین

۱ ۱۵ ۶۹۹۰ ۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷۵ — ۹۸۶۴۷۵۲۴۸۷۵ / ۱۳۳۰۵۸۷۳ ۱۲

۵۵۹۲۱ ۹۰۲۹۹۶۳۹۴۳۲
۱۱۲۸۷۴۵۴۹۲۹ * — ۸۳۴۷۸۸۵۴۴۳
۵۵۹۲۱ ۷۹۰۱۲۶۱۰۱۸
۱۱۲۸۷۵۱۰۸۵۰ * — ۴۴۶۲۴۴۲۵
۴۸۹ ۳۳۸۶۲۵۶۲۴
۱۱۲۸۷۵۱۵۷۴ — ۱۰۷۹۹۸۰۱

۴۸۹
۱۱۲۸۷۵۲۰۶۳
۲
۱۱۲۸۷۵۲۰۸
۲
۱۱۲۸۷۵۲۱۰

اوس مقام پر جہان پورا عمل ختم ہوتا ہی ہندسہ اخری ۸ تجویز ہوا ہے اب ہم ۵ کو اخرخانہ عمل کے آغاز سی ساقط کرتی ہین الا ایک اور ۱۵ اخرخانہ عمل کے آغاز سی لقط کرتی ہین الا دو اول مرتبہ مین اجرا عمل کے ۶۹۹ کو ۸ مین ضرب دی اور حاصل ضرب کو عمل کی خانہ اخری مین لکھا حاصل ضرب ۵۵۹۲۱ سمجھا گیا ہی اسلئی کہ ۶۹۹۰۱ کو ۸ مین ضرب دی ہی اور اول ہندسہ کو الگ کر لیا ہی پس ۵۵۹۲۱ نسبت اصل قیمت کے ۵۵۹۲۰ سی زیادہ قریب ہی پس ۵۵۹۲۱ کو ۱۱۲۸۷۳۹۹۰۰۷ پر زیادہ کرو اکائی کی مرتبہ کا ہندسہ ہم نے ۹ لکھا ہی اسلئی کہ ہم نی پانچ کے ساقط کرنے کی رعایت رکھی ہی * سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اول مرحلہ عمل مختصر کا یہان ختم ہوا ہی اب دوسری خانہ عمل سی ساقط کرو اور ۹ اول خانہ عمل سی تو اول خانہ عمل مین مختصر ہو کر ۶۹ رہ جائینگے

اب ہندسۂ آخری قیمت کا ۷ ہی اور مرحلہ عمل کا وہاں ختم ہوتا ہی جہاں ہیملہ نشان ہے
اب ۳ کو دوسرے خانہ عمل مین سی ساقط کرد اور ۶۹ کو اول خانہ عمل مین سی تو اول خانہ عمل تو نابود
ہوجائیگا مگر پہر بہی کہہ اثر قیمت کی ہندسہ آخری ۳ پر کری گا اور جب ۶۹ کو ۳ مین ضرب دین
اور دو ہندسی ساقط کرین تو ۲ باقی رہینگے

اب دو خانہ عمل کی باقی رہی ہین اور باقی عمل کی بالکل مطابق تقسیم مختصر کی قاعدہ معمولی کی ہی
اور ادسی اٹھہ ہندسی اور قیمت مین مستنبط ہونگے

۱۱۲۸۷۵۲	۱۰۷۹۹۸۸۰۱	۱۵۳۳۰۵۸۷۳۹۵۶۷۹۲۵
	۱۰۱۵۸۷۶۸۹	
۱۱۲۸۷۵۲	۶۴۱۱۱۱۲	
۱۱۲۸۷۵۲	۵۶۴۳۷۶۱	
۱۱۲۸۷۵۲	۷۶۷۳۵۱	
۱۱۲۸۷۵۲	۹۷۷۲۵۱	
۱۱۲۸۷۵۲	۹۰۱۰۰	
۱۱۲۸۷۵۲	۷۹۰۱۳	
۱۱۲۸۷۵۲	۱۱۰۸۷	
۱۱۲۸۷۵۲	۱۰۱۵۸	
۱۱۲۸۷۵۲	۹۲۹	
۱۱۲۸۷۵۲	۹۰۲	
۱۱۲۸۷۵۲	۲۷	
۱۱۲۸۷۵۲	۲۲	
۱۱۲۸۷۵۲	۵	

اس تقریب پر اعتبار اخر ہندسہ تک ہوسکتا ہی اور کم از کم درجہ اس اعتبار کا یہہ ہے کہ اخر ہندسہ کو خارج کردین
اسواسطی کہ اگر کل عمل تمام و کمال کیا جاتا تو اخر خانہ عمل مین بہت سی ہندسی اون ہندسون
کی دائین طرف ہوتی جو اب لکہی ہوئی ہین مگر وہ ہندسی جو اب لکہی ہوئے ہین تو اوسکی مقامات
مین کچہہ تغیر نہین واقع ہوگا لیکن شاید تغیر ہو تو فقط اتنا ہوگا کہ بعض سطرون کے اخر ہندسہ مین
دوسری سطر کے اخر ہندسی سے بقدر ایک کے فرق رہے

(۲۳۸) دفعہ گذشتہ مین جو قیمت دریافت ہوئی ہی وہ مساوات لا۳ - ۳لا۲ - ۲لا + ۵ = ۰
منفی قیمت کی قدر عددی ہی پس اسی معلوم ہوا کہ دفعات ۲۳۵ اور ۲۳۶ مین جو قیمتین دریافت ہوئین

وہ دفعہ ۲۳۷ کے دریافت شدہ قیمتون سی لیقدر ۳ کے زیادہ ہون کیونکہ مساوات کی تینون قیمتین مع اپنی مناسب علامتون کی ملکر برابر ۳ کے ہین

اگر تینون قیمتون کو تقریباً دریافت کرکی جمع کرینگے تو اوسکا مجموعہ بہی تقریباً ۳ ہوگا طالب علم کو چاہیے کہ وہ دو تقریبی مثبت قیمتون مین بہت سی مراتب عشاریہ کی نکالی تاکہ ان دو قیمتون اور دفعہ ۲۳۷ سی جو قیمت دریافت ہوا ونکی مجموعہ مین تعلق صاف ثابت ہو

(۲۳۹) ہورنر صاحب کی ترکیب مین جو مشقت شاقہ اٹہانی پڑتی ہی اوسکی واسطی بہت سے مہندسین نی اپنی رای دی ہی اون رای مین ایک رای یہہ نقل کرتی ہین کہ چونکہ یہہ عمل ایسا ہے کہ جسکو اکثر ادمی نہین کرسکتی اسلئی اوسکا اختصار بہی کسی کام کا نہین ہی جتنی قاعدی اور مختصر بنانی کی بیان ہوئی ہین اون سب مین محاسب اوس ترکیب کی یکرنگی کو بہولتا ہے اور یہہ مختصر قاعدہ محاسب کے امداد نہین کرتی بلکہ اوس خود ترکیب ہی کو بہولاتی ہین

(۲۴۰) دفعہ ۲۳۱ مین ہم نی بیان کیا تہا کہ ہورنر صاحب کی ترکیب مساوات ح (لا + ط) بنانی کی علی العموم درست اور صحیح ہی اب اس بات کو ثابت کرتی ہین

فرض کرو کہ ح (لا) = ع. لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) + ... + ع ق-۱ لا + ع ق

لا کی جگہ ے + ط لکہو تو ح (لا) یہہ ہو جائیگا کہ

ق ے^ن + ق۱ ے^(ن-۱) + ق۲ ے^(ن-۲) + ... ق ن-۱ ے + ق ن

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ق ن اور ق ن-۱ .... ق۱ و ق۰ ہورنر صاحب کے عمل سی دریافت ہو جائینگے اب یہہ ظاہر ہی کہ ق۰ = ع. چونکہ ے = لا - ط

تو یہہ جملے تطابق کے سبب سے اسیمین برابر ہونگے

ع. لا^ن + ع۱ لا^(ن-۱) + ع۲ لا^(ن-۲) . . . ع ن-۱ لا + ع ق

اور ق. (لا - ط)^ن + ق۱ (لا - ط)^(ن-۱) + ق۲ (لا - ط)^(ن-۲) . . . ق ن-۱ (لا - ط) + ق ن

اسیواسطی جب ح (لا) کو لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن رہیگی اور خارج قسمت پیدا ہوگا

وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

ق۰ (لا - ط)^ن + ق۱ (لا - ط)^{ن-۱} + ق۲ (لا - ط)^{ن-۲} + ق۳ (لا - ط)^{ن-۳} + ... + ق ن-۱

ہوگا اب آخر جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۱ بچیگی اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سے برابر

ق۰ (لا - ط)^{ن-۱} + ق۱ (لا - ط)^{ن-۲} + ق۲ (لا - ط)^{ن-۳} + ... + ق ن-۲

ہوگا اب آخر جملہ کو جب لا - ط پر تقسیم کرینگے تو باقی ق ن-۲ بچیگی اور خارج قسمت جو پیدا ہوگا وہ تطابق کی حیثیت سی برابر

ق۰ (لا - ط)^{ن-۲} + ق۱ (لا - ط)^{ن-۳} + ق۲ (لا - ط)^{ن-۴} + ... + ق ن-۳

ہوگا اور علے ہذا القیاس

پس ق ن و ق ن-۱ و ق ن-۲ و ق ن-۳ ... متواتر باقیات ح (لا) کو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور بہر خارج قسمت جو پیدا ہو اوسکو لا - ط پر تقسیم کرنی سی اور بہر خارج قسمت جدید کو لا - ط پر تقسیم کرنی سے حاصل ہوتی ہین اور بموجب دفعات ۵ و ۷ و ۹ کی ہم کو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ہورنر صاحب کی عمل سی یہہ باقیات متواترہ متعین ہوتی ہین

(۲۴۱) معادلات کی حقیقی قیمتون کے تقریباً دریافت کرنی کی بحث ہم نی کافی اور وافی لکھی ہی مگر اب تک کوئی اسان ترکیب عملی مساواتون کی خیالی قیمتون کے دریافت کرنی کی نہین ایجاد ہوئی مگر ہان ایک ترکیب نظری ایسی ہے کہ وہ موقوف اوس ترکیب پر ہے جو ابھی بیان ہوئی دلیل اسکی یہہ ہی کہ فرض کرو ط + ص √-۱ مساوات ح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ہی پس اس سبب سی کہ ح (ط + ص √-۱) کا جزو حقیقی اور جزو خیالی جدا جدا معدوم ہونا چاہی اسواسطی ہم کو دو نتیجے حاصل ہونگے اونکو

ع = ۰ اور ق = ۰ سی مثل دفعہ ۱۴۱ کے تعبیر کرو

یہان ع اور ق قیمتین ط اور ص کی ہونگے اور اگر ہم ط یا ص کو مساوات ع = ۰ اور ق = ۰ سی خارج کرین اور ایک مساوات ایک مجہول کی دریافت کرین تو اس مساوات

کی ہم کو اصلی قیمتین دریافت کرنی مطلوب ہونگین اسی معلوم ہوا کہ مساوات معلوم کی ہم نامکن قیمتین اسطرح دریافت کرسکتی ہین کہ ایک اور خاص مساوات بنائین اور اوسکی اصل قیمتین دریافت کرین اینده ہم ثابت کرینگے کہ اون دو مجہول کی مساوانون مین سی ایک مجہول کو دور کرکی کسطرح ایک مجہول کی مساوات بنانی مین اکیسوین باب مین معادلات کی نامکن قیمتون کی دریافت کرنی کی ایک اور ترکیب لکہینگی طالب علم کو چاہئی کہ وہ رہر فورد کی اوس مضمون کو دیکہی جسمین اونہون نی اعدادی مساوانون کی حل کرنی کی ترکیب کامل بیان کی

اونیسوان باب قیمتون کی بالقرینہ جملی

(۲۴۲) ایک جملہ دو یا زیادہ مقدارون کا بالقرینہ اون مقادیر کے لحاظ سی کہلاتا ہے جو اوسمین اسطرح واقع ہون کہ اگر اونمین سی دو دو مین تبادل ہو تو جملہ نہ متبدل ہو

مثلاً $ا^۲ + ب^۲ + س^۲$ جملہ بالقرینہ تین مقادیر ا و ب و س کا ہے

اور نیز $ا ب + ب س + ح ا$ بہی جملہ بالقرینہ اونہین مقادیر کا ہی اسواسطے کہ اگر ا اور ب اور س مین دو دو کے اندر تبادل ہو تو جملہ متبدل نہین ہوتا

(۲۴۳) مساوات کی امثال جملی بالقرینہ اوسکی قیمتون کی ہوتے ہین

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۴۵ کے مساوات $لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} \ldots = ۰$ مین

$-ع_۱$ = مجموعہ قیمتون کے

$ع_۲$ = دو دو قیمتون کی حاصل ضربون کے مجموعہ کے

اور علی ہذا القیاس اور یہہ امر ظاہر ہی کہ جو جملی قیمتون کی یہان واقع ہوتی ہین جملے بالقرینہ ہوتے ہین

اس باب کا مطلب اعظم یہہ ہی کہ ہم یہہ ثابت کرین کہ ہر یک جملہ بالقرینہ ناطقہ مساوات کی قیمتون کا مساوات کی امثال کی رقمون مین بیان ہوسکتا ہی اب ہم اغاز اس مطلب کا نیوٹن صاحب کی اوس ضابطہ سی کرتی ہین جو مساوات کی قیمتون کی قوا رجمع کرنے کے باب مین ہے

(۲۴۴) فرض کرو کہ $لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \ldots + ع_ن$ کو ح (لا)

تعبیر کرتا ہی اور ا و ب و س اور مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کو تعبیر کرتے ہین

فرض کرو کہ ص۱ = ا + ب + س + د . . .

ص۲ = ا۲ + ب۲ + س۲ + د۲ + . . .

ص۳ = ا۳ + ب۳ + س۳ + د۳ + . . .

اور علی ہذا القیاس ص۱ مجموعہ قیمتوں کا ہی اور ص۲ مجموعہ قیمتوں کے مجذورون کا ہے اور ص۳ مجموعہ قیمتون کی مکعبون کا ہی غرض بالعموم ص م مجموعہ قیمتون کے م قوتون کا ہے

بموجب دفعہ ۷۴ کے

ح (لا) = ح (لا) / (لا − ا) + ح (لا) / (لا − ب) + ح (لا) / (لا − س) + . . .

اس متطابقہ کی بائین طرف جو تقسیمین لکھی ہین وہ بموجب دفعہ ۷ کی ٹھیک ٹھیک ہوسکتی ہین اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ح (لا) / (لا − ا) = لان−۱ + (ا + ع۱) لان−۲ + (ا۲ + ع۱ ا + ع۲) لان−۳ + . .

+ (ا م + ع۱ لا م−۱ + ع۲ لا م−۲ . . . .) لان−م−۱ + . .

اور اسی کی متماثل جملی ح (لا) / (لا − ب) اور ح (لا) / (لا − س) . . . حاصل ہونگی اور جمع کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

ح (لا) = ن لان−۱ + (ص۱ + ن ع۱) لان−۲ + (ص۲ + ع۱ ص۱ + ن ع۲) لان−۳

+ (ص م + ع۱ ص م−۱ + ع۲ ص م−۲ + . . + ن ع م) لان−م−۱

اور نیز ح′ (لا) = ن لان−۱ + (ن − ۱) ع۱ لان−۲ + (ن − ۲) ع۲ لان−۳ + . . .

+ (ن − م) ع م لان−م−۱ + .

متطابقہ مین امثال لا کی یکسان قواء کے برابر لکھو تو

ص۱ + ن ع۱ = (ن − ۱) ع۱ یا ص۱ + ع۱ = ۰

ص۲ + ع۱ ص۱ + ۲ ع۲ = (ن − ۲) ع۲ یا ص۲ + ع۱ ص۱ + ۲ ع۲ = ۰

اور علی العموم

ص م + ع۱ ص م−۱ + ع۲ ص م−۲ + . . + ن ع م = (ن − م) ع م

یعنی ص م + ع ۱ ص م - ۱ + ع ۲ ص م - ۲ + ... + ع م ص ۱ + م ع م = ۰
اس نتیجہ عامہ مین م بہ نسبت ن کے چھوٹا فرض کیا گیا ہے
اس نتیجہ عامہ کی وساطت سی ہم مجہولہ قیمتون کی م دین قوت کا امثال اور قیمتون کے ادنی درجہ کے قولتون کی رقمون مین بیان کرسکتی ہین اور اسی عمل کو مکررسہ کرکرنی سی ہم قیمتون کی م دین قوتون کے مجموعون کو امثال کی رقمون مین بیان کرسکتی ہین
اب فرض کرو کہ م کی سانہہ ن سی چھوٹی ہونی کی قید جاتی رہی مساوات معلوم ح (لا) = ۰ کی لا م - ن مین ضرب دو تو لا م - ن ح (لا) = ۰ یعنی

لا م + ع ۱ لا م - ۱ + ع ۲ لا م - ۲ + ... + ع ن لا م - ن = ۰

کی جگہ متواتر قیمتین ۱ و ب و س ... رکھو اور حاصل کو جمع کرو تو اسطرح

ص م + ع ۱ ص م - ۱ + ع ۲ ص م - ۲ + ... + ع ن ص م - ن = ۰

اس مسئلہ سی ہم مساوات کی قیمتون کی م دین قوتون کی مجموعہ کو امثال مساوات اور قیمتون کی ادنی قوتون کی رقمون مین اوس حالت مین کہ م چھوٹا ن سی ہو بیان کرسکتی ہین اور اسی عمل کو مکررسہ کرکرنی سی مساوات کی قیمتون کی م قوتون کو جمع کرسکتے ہین

(۲۴۵) مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتون کی منفی قوتون کی مجموعہ کو دریافت کرو

لا کی جگہ ۱/لا رکھو اور اس بدلی ہوئی مساوات مین قیمتون کی مثبت قوتون کے مجموعہ کو معلوم کرو یا دفعہ گذشتہ کی اخیر نتیجہ مین م کو متواتر برابر ن - ۱ اور ن - ۲ اور ن - ۳ ... کے بناؤ تو اوسی متواتر ص ۱ - ۱ ص ۱ - ۲ ص ۱ - ۳ ... حاصل ہونگے

(۲۴۶) جملہ بالقرینہ ناطقہ کی قیمت دریافت کرنی کی سوال عامہ کی صورت اس سوال کے صورت مین متبدل ہوجائیگی کہ خاص مفرد جملون کی قیمت دریافت کرو اور اب ہم اس کو ثابت کردینگی

کوئی جملہ بالقرینہ ناطقہ اگر صحیح نہ ہو تو وہ خارج قسمت ہوگا جو ایک جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کو دوسرے جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ پر تقسیم کرنی سی پیدا ہوا ہو کوئی سا جملہ بالقرینہ ناطقہ صحیحہ اگر متجانس

نہ ہو تو وہ دو یا زیادہ جملے بالقرینہ ناطقہ صحیحہ کا مجموعہ ہوگا پس اسی معلوم ہوا کہ فقط بحث متجانسہ جملوں ہی پر چاہئی ایک جملہ متجانسہ مرکب مختلف احزا سی ہوسکتا ہی جسمین گو مجموعہ قوت نماؤن کا ایک ہی رہی مگر وہ خود قوت نما مختلف ہون ایسی صورت مین جملہ متجانسہ مجموعہ دو یا زیادہ اون متجانسہ جملون کا ہی جو متحد الدرجہ ہین اور اون مین سب رقمون مین ایک ہی قوت نما ہے

اسی معلوم ہوا کہ فقط اون ہی جملون بالقرینہ ناطقہ متجانسہ پر کرنی چاہئی جنمین تمام رقمون مین قوت نما ایک ہی ہین

(۲۴۷) فرض کرو کہ ا و ب و س اور د . . . مساوات معلوم کی قیمتون کو تعبیر کرتے ہین بموجب دفعہ ۲۴۴ کے ہم امثال کے رقمون مین قیمت

ا م + ب م + س م + د م . . .

کی قیمت بیان کرسکتی ہین اس جملہ کو اول رتبہ کا جملہ کہتی ہین کیونکہ اوسکی ہر یک رقم مین ایک قیمت مساوات کی قیمتون مین سے ہے

جب جملہ کی ہر رقم مین قیمتون مین سی دو دو ملتف ہو تو اوسکو دوسرے رتبہ کا جملہ کہتی ہین جیسی یہہ جملہ

ط م ص ع + ط م س ع + ص م س ع + . . .

اب یہان ترتیب قیمتون مین سی دو دو کی لی گئی ہی اور قوت تمام اول قیمت پر اور ع قوت نما دوسری قیمت پر رکہا گیا ہی اب اس جملہ کو ہم ح م ع سے تعبیر کرینگے کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی رقمون کا جیسی کہ رقم م ع ہی جب قیمتون مین سی تین تین قیمتین جمع مین ملتف ہون تو اوس جملہ کو تیسری رتبہ کا جملہ کہتی ہین جیسی کہ یہہ جملہ ہے

ا م ع س ق + ا م ع د ق + ا م ب ع د ق + . .

یہان ترتیب قیمتون مین سی تین تین کی ایک دفعہ لی گئی ہی اور م اول قیمت پر اور ع دوسری قیمت پر اور ق تیسرے قیمت پر رکہا گیا ہی ہم اس جملہ کو ح م ا ب ع س ق سی تعبیر کرینگی کیونکہ وہ حاصل جمع ایسی رقمون کا ہے جیسی کہ م ا ب ع س ق کا ہے

اور اسیطرح سی چوتھی اور زیادہ رتبی کی جملی ہم مقرر کرسکتی ہین اور اسی طریقہ سی اونکی کتابت کرسکتے ہین چونکہ ہم نی یہہ بتلا دیا ہی کہ ص م سی کسطرح جملہ کو مثال مساوات کی رقمون مین بیان کرسکتی ہین تو صرف یہہ بتلا دینا کافی ہوگا کہ ہم جن جملون پر بحث کر رہی ہین اونمین سی کوئی ایسی جملون کی رقمون مین جیسی ص م ہی کسطرح بیان ہوسکتا ہے

(۲۴۸) دوسرے رتبہ کی حج ا م ع جملہ بالقرینہ کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ ص م = ا م + ب م + س م + . . .

ص ع = ا ع + ب ع + س ع + . .

ضرب دینی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ص م ص ع = ا م + ع + ب م + ع + س م + ع + . . .

+ ا م ب ع + ا م س ع + ب م ا ع + . . .

یعنی ص م ص ع = ص م + ع + حج ا م ب ع

اسیواسطی حج ا م ب ع = ص م ص ع − ص م + ع

اسمین م اور ن غیر مساوی فرض کئی گئی ہین اگر ہم ع کو برابر م کے فرض کرین تو حج ا م ب ع مین دو دو رقمین برابر ہوجائینگی اور یہہ حاصل جمع اسطرح بیان کیا جائیگا کہ

۲ حج (ا ب) م اور اسیواسطی

۲ حج (ا ب) م = ص ۲ م − ص ۲ م

(۲۴۹) تیسری رتبہ کی جملہ بالقرینہ حج ا م ب ع س ق کی قیمت دریافت کرو

ہم کو معلوم ہی کہ حج ا م ب ع = ا م ب ع + ب س ع + ا م س ع + . .

ص ق = ا ق + ب ق + س ق

ضرب دینی سی یہہ ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

ص ق حج ا م ب ع = ا م + ق ب ع + ب م + ق س ع + س م + ق ا ع + . . .

$$+ \text{ح}\,(\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ق} + \text{ح}\,\text{س}^{ع} + \text{ق} + \text{س}^{ق}\,\text{ا}^{ع} + \text{ن}$$

$$\cdot + \text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}\,\text{س}^{ق} + \cdot\cdot$$

اب یہانتک ابتدائی طرف کی ارقام مین جن سے صنف ہین جو موافق ہماری طریقہ کتابت کی اسطرح تعبیر ہوتے ہین

ح $\text{ا}^{م}$ + ق $\text{ب}^{ع}$ و ح $\text{ا}^{ع}$ + ق $\text{ب}^{ق}$ و ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}\,\text{س}^{ق}$ پس

ص ن ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}$ = ح $\text{ا}^{م}$ + ق $\text{ب}^{ع}$ + ح $\text{ا}^{ع}$ + ق $\text{ب}^{ق}$ + ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}\,\text{س}^{ق}$

دفعہ ۲۴۸ کی موافق جو قیمتین ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}$ اور ح $\text{ا}^{م}$ + ق $\text{ب}^{ع}$ اور ح $\text{ا}^{ع}$ + ق $\text{ب}^{ق}$ کی دریافت ہون اونکو ان کی جگہ رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}\,\text{س}^{ق}$ = ص م ص ع ص ق − ص م ص ع + ص م ص ق − ص م − ص ع ص ق + ص ع + ص ق − ۲ ص م ص ع ص ق + ۲ ص م + ۲ ص ع + ۲ ص ق − ۳

ہم نے م، ع اور ق کو غیر مساوی فرض کیا ہی لیکن فرض کرو کہ م = ع تو بموجب دفعہ ۲۴۸ کی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

۲ ح $(\text{ا}\,\text{ب})^{م}\,\text{س}^{ق}$ = ص ۲ م ص ق − ص ۲ م ص ق − ۲ ص م + ن ص م + ۲ ص ۲ م + ق

اگر م = ع = ق تو مجموعہ ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}\,\text{س}^{ق}$ کا متبدل اور مختصر ہوکر ۳۰ ح $(\text{ا}\,\text{ب}\,\text{س})^{م}$ ہوگا پس

۶ ح $(\text{ا}\,\text{ب}\,\text{س})^{م}$ = ص ^{۳}م − ۳ ص ۲ م ص م + ۲ ص ۳ م

اس دفعہ اور دفعہ گذشتہ کی ترکیب جہانتک چاہین جاری رکھین اور اوس سی ہم کو ہر رتبہ کا جملہ جو ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}$ اور ح $\text{ا}^{م}\,\text{ب}^{ع}\,\text{س}^{ق}$ صورت کا ہو امثال کی رقمون مین بیان ہوجائیگا

پس بموجب دفعہ ۲۴۶ کے جو اس باب کا مطلب ہی وہ حاصل ہوجائیگا

(۲۵۰) ہم نے یہہ بتلا دیا ہی کہ جو جملہ ص م سی تعبیر ہوتا ہی امثال کی رقمون مین کسطرح بیان ہوسکتا ہی پس اسطرح کتنے جملے مثل ص م کی ہون اونکا مجموعہ حاصل ہوسکتا ہی مگر ترکیب ذیل سی اکثر زیادہ فائدہ حاصل ہوتا ہے

اگر ح (لا) کسی لاکی جملہ ناطقہ صحیحہ کو تعبیر کری اور مطلوب یہہ ہو کہ حاصل جمع ح (ا) + ح (ب) + ح (س) +

دریافت کرین تو ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

$$\frac{\text{ح}\,(\text{لا})}{\text{ح لا}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ا}}{\text{لا} - \text{س}} + \cdot\cdot\cdot$$

اسیواسطی

$$\frac{\text{ح}\,(\text{لا})\,\text{خ}\,(\text{لا})}{\text{ح}\,(\text{لا})} = \frac{\text{ح}\,(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ح}\,(\text{لا})}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ح}\,(\text{لا})}{\text{لا} - \text{س}} + \cdot\cdot\cdot$$

$$= \frac{\text{ح}(\text{لا}) - \text{ح}(\text{ا})}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ح}(\text{لا}) - \text{ح}(\text{ب})}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ح}(\text{لا}) - \text{ح}(\text{س})}{\text{لا} - \text{س}} + \cdots$$

$$+ \frac{\text{ح}(\text{ا})}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ح}(\text{ب})}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ح}(\text{س})}{\text{لا} - \text{س}} + \cdots \cdots$$

اس متطابقہ مین اجزاء صحیحہ اور اجزاء مکسورہ جدا جدا الیسمین برابر ہونگے اور اسی جملی بیانیہ جیسی کہ $\frac{\text{ح}(\text{لا}) - \text{ح}(\text{ا})}{\text{لا} - \text{ا}}$ ہی بموجب دفعہ ۷ کے صحیح ہونگے فرض کرو کہ ح (لا) حَ (لا) کو ح (لا) پر تقسیم کرین اور عمل کئی جائین جب تک کہ باقی ایک جملہ صحیحہ لا کا ادنے درجہ کا بہ نسبت ح (لا) کی حاصل ہو اور رہ باقی ہو تو متطابقہ کے اجزاء مکسورہ سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ر}}{\text{ح}(\text{لا})} = \frac{\text{مح}(\text{ا})}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{مح}(\text{ب})}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{مح}(\text{س})}{\text{لا} - \text{س}} + \cdots$$

کو ضرب دو تو

$$\text{ر} = \text{لا}^{\text{ن}-1} \left[\text{مح}(\text{ا}) + \text{مح}(\text{ب}) + \text{مح}(\text{س}) + \cdots \right]$$

+ ارقام جنمین بہ نسبت لا$^{\text{ن}-1}$ کے ادنے قوتین ملتفت ہین

پس مح (ا) + مح (ب) + مح (س) + ... باقی رہین لا$^{\text{ن}-1}$ کے امثال کی برابر ہے

(۲۵۱) اس باب کی صورقانونیہ کی ایک مثال لکھتی ہین فرض کرو کہ مساوات

لا^{۴} - ۷لا^{۳} + لا + ۶ = ۰ کی قیمتون کی قوتون کا حاصل جمع دریافت کرنا ہے

ص$_{۱}$ = - ع$_{۱}$ = ۱

ص$_{۲}$ = - ع$_{۱}$ ص$_{۱}$ - ۲ع$_{۲}$ = ۱ + ۱۴ = ۱۵

ص$_{۳}$ = - ع$_{۱}$ ص$_{۲}$ - ع$_{۲}$ ص$_{۱}$ - ۳ع$_{۳}$ = ۱۵ + ۷ - ۳ = ۱۹

ص$_{۴}$ = - ع$_{۱}$ ص$_{۳}$ - ع$_{۲}$ ص$_{۲}$ - ع$_{۳}$ ص$_{۱}$ - ۴ع$_{۴}$ = ۱۹ + ۱۰۵ - ۱ - ۲۴ = ۹۹

ص$_{۵}$ = - ع$_{۱}$ ص$_{۴}$ - ع$_{۲}$ ص$_{۳}$ - ع$_{۳}$ ص$_{۲}$ - ع$_{۴}$ ص$_{۱}$ = ۹۹ + ۱۳۳ - ۱۵ - ۶ = ۲۱۱

ص$_{۶}$ = - ع$_{۱}$ ص$_{۵}$ - ع$_{۲}$ ص$_{۴}$ - ع$_{۳}$ ص$_{۳}$ - ع$_{۴}$ ص$_{۲}$ = ۲۱۱ + ۴۹۳ - ۱۹ - ۹۰ = ۶۹۵

اور علی ہذا القیاس

$\frac{1}{2}$ کو بجای لاکے مساوات معلوم مین رکھو تو

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} ، ۳ - \frac{5}{4} ، ۲ - \frac{1}{4} ، ۱ + \frac{1}{4} = ۰$

پس اصل مساوات کی قیمتون کی منفی قوتون کی جمع کرنی کی واسطی ہم کو یہہ معلوم ہی کہ

$ص_{-۱} = -\frac{1}{4}$

$ص_{-۳} = -\frac{1}{4} ص_{-۱} - ۲ (-\frac{5}{4}) = \frac{1}{۳۴} + \frac{۱۴}{4} = \frac{۸۵}{۳۴}$

ان نتایج کا اثبات آسانی سی ہوسکتا ہی کیونکہ اصل مساوات ایسی بنائی گئی ہی کہ اوسکی قیمتین

$-۲ ، -۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳$ ہین

اب پھر فرض کرو کہ ہم کو اس چوتھی درجہ کی مساوات $لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ث = ۰$

کی قیمتین $ص_۱ ، ص_۲ ، ص_۳ ، ص_۴$ کی دریافت کرنی ہین

$ص_۱ + ع = ۰$ اسیواسطی $ص_۱ = -ع$

$ص_۲ + ع ص_۱ + ۲ق = ۰$ اسیواسطی $ص_۲ = ع^۲ - ۲ق$

$ص_۳ + ع ص_۲ + ق ص_۱ + ۳ر = ۰$ اسیواسطی $ص_۳ = -ع (ع^۲ - ۲ق) + ع ق - ۳ر$

$= -ع^۳ + ۳ع ق - ۳ر$

$ص_۴ + ع ص_۳ + ق ص_۲ + ر ص_۱ + ۴ث = ۰$

اسیواسطی $ص_۴ = -ع (-ع^۳ + ۳ع ق - ۳ر) - ق (ع^۲ - ۲ق) + ر ع - ۴ث$

$= ع^۴ - ۴ع^۲ ق + ۴ر ع + ۲ق^۲ - ۴ث$

ایک اور مثال مساوات درجہ چہارم کی لو فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کی $لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ث = ۰$

کی قیمتین سہ وصہ ولر و فر ہین

فرض کرو کہ $ا = \frac{1}{4} (سہ صہ + لر فر)$ و $ب = \frac{1}{4} (سہ لر + صہ فر)$ و $س = \frac{1}{4} (سہ فر + صہ لر)$

اور ہم کو اس مساوات درجہ چہارم کی قیمتون کی ان بالعرنیہ جملون کی قیمت دریافت کرنی ہو

(۱) $ا + ب + س$

(۲) ا ب + ب س + س ا

(۳) ا ب س

(۱) ا + ب + س = $\frac{1}{2}$ (سہ صہ + سہ لر + صہ فر + صہ لر + صہ فر + لر فر) = $\frac{ق}{2}$

(۲) ا ب + ب س + س ا = $\frac{1}{4}$ (سہ۲ صہ لر + سہ۲ لر فر + ...) = $\frac{1}{4}$ حج سہ۲ صہ لر

= $\frac{1}{8}$ (ص۲ ص۱۲ − ص۲۲ − ۲ ص۱ ص۳ + ۲ ص۴) بموجب دفعہ ۲۴۹ کے

پس قیمتیں ص۱، ص۲، ص۳، ص۴ کی جو ابھی حاصل ہوئی ہیں اونکی جگہ مندرج کرو تو قیمت $\frac{1}{4}$ حج سہ۲ صہ لر کی دریافت ہوگی یا ہم اسطرح عمل کریں کہ

حج سہ۲ صہ لر = حج $\frac{\text{سہ}^2 \text{ صہ لر فر}}{\text{فر}}$ = سہ صہ لر فر حج $\frac{\text{سہ}}{\text{فر}}$

اور سہ صہ لر فر = ث اور حج $\frac{\text{سہ}}{\text{فر}}$ = $\frac{\text{ع}}{\text{ب}}$ − ۴ بموجب دفعہ ۴۸ کے

اسیواسطے ا ب + ب س + س ا = $\frac{1}{4}$ (ع ر − ۴ ث)

(۳) ا ب س = $\frac{1}{8}$ (سہ۳ صہ لر فر + ... + سہ۲ صہ۲ لر۲ + ...) =

$\frac{1}{8}$ حج سہ۳ صہ لر فر + $\frac{1}{4}$ حج سہ۲ صہ۲ لر۲

اس باب کی ترکیبوں سے ان دو بالقرینہ جملوں کے قیمت دریافت ہوسکتی ہی اور اون ترکیبوں کا ہم اختصار اسطرح کرتے ہیں کہ

حج سہ۳ صہ لر فر = سہ صہ لر فر حج سہ۲ = ث (ع − ۲ ق)

حج سہ۲ صہ۲ لر۲ = سہ۲ صہ۲ لر۲ فر حج $\frac{1}{\text{سہ}^2}$ = ث۲ ($\frac{\text{ر}^2}{\text{ب}^2}$ − $\frac{\text{ق}}{\text{ب}}$)

اسواسطے کہ حج ($\frac{1}{\text{سہ}^2}$) دریافت کرنی کی واسطے اوس مساوات کے قیمتوں کے مجذوروں کا حاصل جمع دریافت کریں جسمیں لا کی جگہ $\frac{1}{2}$ لکھا جاے

پس ا ب س = $\frac{1}{8}$ (ر۲ + ع۲ ث − ۴ ق ث)

قیمتیں جملوں ا و ب و س کی جو دریافت ہوئی ہیں اونکی صحت ثابت بھی ہوسکتی ہی اسلیے کہ وہ بموجب دفعہ ۱۸۹ کے قیمتیں م کی مکعبی مساوات کی بموجب دفعہ ۱۸۸ کے ہین

بیسوان باب استعمال بالقرینہ جملوں کا

(۲۵۲) مساوات کی قیمتوں کو بالفرینہ جملوں کے مسئلہ کو ہم دو جگہ کام میں لائینگی اول ایسی مساوات کی بنا کرنے میں جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کی تفاوت کے مجذور ہوں اور دوم ایک بڑا مسئلہ مساوات میں سے مجہول کی دور کرنے کا اوسی ثابت کرینگے

(۲۵۳) ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتیں مساوات مفروضہ کی قیمتوں کے تفاوت کا مجذور ہوں

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ان درجہ کی ہی اور اوسکی قیمتیں ا و ب و س ... ہیں تو مساوات مطلوبہ کی قیمتیں (ا - ب)^{۲} و (ا - س)^{۲} ... (ب - س)^{۲} ... ہونگیں اور ان کی تعداد برابر اوس اجتماع کی ہوگی جو چیزوں میں سے دو دو کا لیا جاوے یعنی $\frac{۱}{۲}$ ن (ن - ۱) اسیواسطے یہہ عدد مساوات مطلوبہ کی درجے کو تعبیر کریگا ... $\frac{۱}{۲}$ ن (ن - ۱) کی جگہ م رکھو اور فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ

لا^{م} + ق$_{۱}$ لا$^{م-۱}$ + ق$_{۲}$ لا$^{م-۲}$ + ... + ق$_{م}$ = ۰

سے تعبیر ہوتی ہی اور ص$_{ر}$ اوسکی قیمتوں کی روین قوتوں کا مجموعہ ہی پس ہم کو ص$_{۱}$ ص$_{۲}$ ... ص$_{م}$ کا صرف تحقیق کرنا ہی اور بعد اس تحقیق کرنی کی امثال مساوات مطلوبہ کے بموجب دفعہ ۲۴۴ کے

ان بصورت قانونیہ سی متواتر دریافت ہوجائینگی کہ ص$_{۱}$ + ق$_{۱}$ = ۰ ص$_{۲}$ + ق$_{۱}$ ص$_{۱}$ + ۲ ق$_{۱}$ = ۰

اور علی ہذا القیاس

فرض کرو کہ مح (لا) = (لا - ا)^{۲} + (لا - ب)^{۲} + (لا - س)^{۲} + ...

پس ۲ ص$_{ر}$ = مح (ا) + مح (ب) + مح (س) + ...

اب فرض کرو کہ ص$_{۱}$ و ص$_{۲}$ و ص$_{۳}$ ... مساوات مفروضہ کی قیمتوں کے قوتوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتی ہیں تو

مح (لا) = ن لا^{ر} - ۲ ر ص$_{۱}$ لا$^{ر-۱}$ + $\frac{۲ ر (۲ ر - ۱)}{۲ \times ۱}$ ص$_{۲}$ لا$^{ر-۲}$ - ... + ص$_{۲ ر}$

لا کی جگہ متواتر ا و ب و س ... رکھو اور جمع کرو تو

۲ ص$_{ر}$ = ن ص$_{۲ ر}$ - ۲ ر ص$_{۱}$ ص$_{۲ ر-۱}$ + $\frac{۲ ر (۲ ر - ۱)}{۲ \times ۱}$ ص$_{۲}$ ص$_{۲ ر-۲}$ - + ... ص$_{۲ ر}$

بائیں طرف جو ارقام لکھی ہیں اونمیں اول اور آخری ارقام متساوی البعد اسمیں برابر ہیں اسیواسطے

اونکی ترتیب ثانی سی اور ۲ پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ص_ر = ق ص_{ر-۲} - ۲ر ص_{ر-۱} + \frac{۲ر(۲ر-۱)}{۱\times۲} ص_{ر-۲} - \frac{۲ر(۲ر-۱)(ر+۱)}{۱\times۲\times۳} ص_{ر-۳} + \cdots$$

اب ص۱ اور ص۲ ۔۔۔ مساوات مفروضہ کی مثال کی قیمتوں میں بیان ہوسکتی ہیں پس ص ر معلوم ہوسکتا ہے اور پہر اوسی آخر کار مساوات مطلوبہ کی مثال دریافت ہوجائیگی

(۲۵۴) مساوات مطلوبہ کی آخر رقم جو ق م سی تعبیر کی گئی ہی وسکا حساب کیا اور طریقہ سی بھی ہوسکتا ہی

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ح (لا) = ۰ پس

ح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ۔ ۔ ۔

پس حَ (لا) = (لا - ب) (لا - س) ۔۔۔ + (لا - ا) (لا - س) ۔۔۔ + ۔۔۔

حَ (ا) = (ا - ب) (ا - س) ۔۔۔۔

حَ (ب) = (ب - ا) (ب - س) ۔۔۔۔۔

اسی معلوم ہوا کہ ق م = حَ (ا) حَ (ب) حَ (س) ۔۔۔۔

اب فرض کرو کہ سہ و صہ و لر ۔۔ قیمتیں مساوات حَ (لا) = ۰ کی ہو تو

حَ (لا) = ن (لا - سہ) (لا - صہ) (لا - لر) ۔ ۔ ۔

اسیواسطی حَ (ا) ح (ب) حَ (س) ۔ ۔ ۔

ن ن (ا - سہ) (ا - صہ) (ا - لر) ۔۔۔ (ب - سہ) (ب - صہ) ۔۔۔ (س - سہ) ۔۔۔۔

لیکن (ا - سہ) (ب - سہ) (س - سہ) ۔ ۔ ۔ = (-۱)^ن ح (سہ)

(ا - صہ) (ب - صہ) (س - صہ) ۔۔۔۔ = (-۱)^ن ح (صہ)

اور علی ہذا القیاس

پس حَ (ا) حَ (ب) حَ (س) = ن^ن (-۱)^{ن(ن-۱)} ح (سہ) ح (صہ) ح (لر) ۔ ۔ ۔

= ن^ن ح (سہ) ح (صہ) ح (لر) ۔ ۔ ۔

اسواسطے (-۱)^{ن(ن-۱)} = ۱

اب ح (س) ح (ص) ح (ر) ... مساوات مشتقہ ح (لا) = ۰ کی قیمتون کا جملہ بالقرینہ ہی اور ہیسواسطے اوسکا حساب ہوسکتا ہے

(۲۵۵) ایک فایدہ ایسی مساوات کی دریافت کرنی کا کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون دفعہ ۱۰۹ مین ہم نی بیان کیا ہی کہ اوسی مساوات مفروضہ کی قیمتون کا مقام معلوم ہوتا ہی مگر یہہ مطلب تو سٹرم صاحب کی ضابطہ سی خوب حاصل ہوتا ہی ایکا دربات اسی مساوات سی کہ جسکی قیمتین مساوات مفروضہ کی قیمتون کے تفاوت کا مجذور ہون حاصل ہوتی ہی کہ اوسکی قیمتون کی دیکھنی سی مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتون کی تعداد معلوم ہوجاتی ہی اسواسطے کہ یہہ امر ظاہر ہی کہ اس جدید مساوات کی منفی قیمتین ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتین ہونگین اور اگر مساوات جدید کی منفی قیمتین نہ ہون تو مساوات مفروضہ کی خیالی قیمتین نہونگین اگر مساوات جدید کی خیالی قیمتین ہون تو مساوات مفروضہ کی بہی خیالی قیمتین ہونگین اور اگر اوسکی کوئی خیالی قیمت نہ ہو تو مساوات مفروضہ کی بہی کوئی خیالی قیمت نہ ہوگی

مثلاً مساوات مفروضہ درجہ چہارم کی یہہ قیمتین ± لر^{-۱} اور ± لو^{-۱} ہون تو اس صورت مین مساوات جدید کی حقیقی منفی قیمتین ہونگین

(۲۵۶) اگر دو مساواتون مین دو مقادیر مجہولہ ہون تو اب ہم یہہ بتلائینگی کہ اونمین سے ایک مقدار مجہول قیمتون کی بالقرینہ جملون سی کسطرح دور کرتے ہین

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

ع. لا^م + ع_۱ لا^{م-۱} + ع_۲ لا^{م-۲} + ... + ع_م = ۰

ق. لا^ن + ق_۱ لا^{ن-۱} + ق_۲ لا^{ن-۲} + ... + ق_ن = ۰

مثال ع. وع_۱ وع_۲ ... ق. وق_۱ وق_۲ ... مقدارون کے جملے ناطقہ صحیح ہین اور لا کا دور کرنا منظور ہے

فرض کرو کہ ان مساواتون مین سی اول مساوات سی لا کی قیمتین ارقام ر مین دریافت ہوئی ہین اور ا و ب و س ... ان کو تعبیر کرتی ہین ان کو دوسری مساوات مین مندرج کرو تو ہم کو م مساواتین ر کے تحقیق کرنے کے واسطی حاصل ہونگین یعنی

$$ق_0 ا^ن + ق_1 ا^{ن-1} + ق_2 ا^{ن-2} + .. + ق_ن = ٠$$

$$ق_0 ب^ن + ق_1 ب^{ن-1} + ق_2 ب^{ن-2} + ... + ق_ن = ٠$$

$$ق_0 س^ن + ق_1 س^{ن-1} + ق_2 س^{ن-2} + .. + ق_ن = ٠$$

پس تمام قیمتین ر کی جو قابل داخل ہونی کی ہین وہ ان مساواتون کی قیمتون مین شامل ہین اور بالعکس اسکی جو کوئی قیمت ان مساواتون کی ہو وہ ر کی قیمت قابل داخل ہونی کے ہے

اسواسطی کہ تمثیلاً فرض کرو کہ مساوات اول کی ایک قیمت صہ ہی اور جب ا مین بجای ر کی صہ کہا جاے تو ا کی قیمت سہ ہوتی ہی پس لا = سہ اور ر = صہ دو اصل مساواتون کی شرایط کو پورا کرینگے اسواسطی کہ یہہ قیمتین بظاہر دوسرے مساوات کی شرایط کو پورا کرتی ہین اور مساوات اول کی شرایط لا = ا سی پوری ہوتی ہین خواہ ر کچھ ہی ہو پس اسلئی جب ہم لا = ا اور ا مین ر کو صہ مقرر کرین تو یہی اول مساوات کی شرایط پوری ہونگین اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ اگر اوپر کی مساواتون کی دائین طرف کی ارکان کو باہم ضرب دین اور حاصل ضرب کو برابر صفر کے لکہدین تو ایک مساوات اخر کار ر کی حاصل ہوجائینگی

مقادیر ا اور ب و س ... مین سی دو دو کے باہم تبادل سی یہہ حاصل ضرب متبدل نہین ہوگا اسلئی ان مقادیر کا وہ جملہ بالقرینہ ہوگا اور اسلئی اوسکی قیمت مساوات اول کو مثال ع. د ع ا د ع ب ... کی رقمون مین بیان ہوسکتی ہی پس اسطرح اخر کو ایک مساوات ناطقہ صحیحہ ر کی حاصل ہوجائیگی اور اوسمین وہی سب قیمتین ر کی ہونگین جو داخل ہونے کی قابلیت رکہتی ہین اور اونکی سوا ر کوئی اور قیمت نہین ہوگی

(۲۵۷) ایک خاص مثال فرض کرو کہ ایک مساوات مکعبی ہی اور دوسرے مساوات درجہ دوم کی ہے

اور ہم کو لاکا دور کرنا مساواتون سے منظور ہے

$ع_0 لا^م + ع_1 لا^{م-1} + ع_2 لا^{م-2} = 0$ $ق_0 لا^ن + ق_1 لا^{ن-1} + ق_2 لا^{ن-2} = 0$

اسمین اشکال ۱ کی جملی فرض کی گئی ہین اب بموجب دفعہ گذشتہ کی طریقہ کتابت کی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$(ق_0 لا^ن + ق_1 لا^{ن-1} + ق_2)(ق_0 ب^ن + ق_1 ب^{ن-1} + ق_2)(ق_0 س^ن + ق_1 س^{ن-1} + ق_2) = 0$ بعنی

$ق_0^3 + ق_0^2 ق_1 اب س + ق_0^2 ق_1 لا^2 ب^2 س + ق_0^2 ق_2 حج لا^2 ب^2 + ق_0 ق_1^2 حج لا^2 ب^2 س + ق_0 ق_1 ق_2 حج لا ب$

$+ ق_0 ق_1^2 حج لا^2 + ق_0 ق_2^2 حج لا^2 + ق_0 ق_1^2 حج لا ب س + ق_0 ق_1 ق_2 حج لا ب = 0$

اور نیز $اب س = -\frac{ع_3}{ع_0}$ اور $لا^2 ب^2 س = \frac{ع_3^2}{ع_0^2}$

$حج لا^2 ب^2 = لا^2 ب^2 س حج \frac{1}{لا^2} = \frac{ع_3^2}{ع_0^2}(\frac{ع_2 ع_0^2}{ع_3^2} - \frac{ع_1}{ع_0})$

$حج لا^2 ب^2 س = اب س حج لا ب = -\frac{ع_3}{ع_0} حج اب = -\frac{ع_2 ع_3}{ع_0^2}$

$حج لا = -\frac{ع_1}{ع_0}$ $حج لا^2 = \frac{ع_1^2}{ع_0^2} - \frac{ع_2}{ع_0}$

$حج لا^2 ب س = اب س حج لا = \frac{ع_1 ع_3}{ع_0^2}$

$حج لا^2 ب = اب س حج \frac{1}{ب} = -\frac{ع_3}{ع_0}(\frac{ع_1 ع_2}{ع_0 ع_3} - 3)$ بموجب دفعہ ۴۸ کے

ان قیمتون کی مندرج کرنی سی وہ مساوات حاصل ہوگی جو لاکے دور کرنے سے حاصل ہوتی

(۲۵۸) اگر ایک مساوات م درجہ اور دوسری ن درجہ کی ہو اور اونمین دو مقدار مجہول ہون اور اونمین سی ایک مقدار مجہول کو دور کرین تو مساوات مستحصلہ م ن درجہ سی زیادہ درجہ کی نہین ہوگی

فرض کرو کہ مساواتین یہہ ہون کہ

$ع_0 لا^م + ع_1 لا^{م-1} + ع_2 لا^{م-2} + \dots + ع_م = 0$

$ق_0 لا^ن + ق_1 لا^{ن-1} + ق_2 لا^{ن-2} + \dots + ق_ن = 0$

ان مساواتون مین اشکال جملی ۱ کی ہین اور علاوہ اسکی یہہ بھی فرض کیا گیا ہی کہ مساوات اول مین لا اور ۱ کی قوت نمایون کا مجموعہ م سی زیادہ نہین ہی اور مساوات دوم مین ان سی زیادہ نہین ہے

پس ع_م اور ق_م مرد درجہ کی رہین ہو سکتی ہین مگر فرسی زیادہ نہین اب فرض کرو کہ دفعہ ۲۵۷ کے

کی ترکیب کی موافق لا دور کیا گیا تو ر کی مساوات اخر کا اول رکن مین ایک سلسلہ ارقام کا ہوگا
جسمین سی ہر یک رقم حاصل ضرب م اجزا ضربی کا ہی اور سی کی صورت ق ا ن - ر ق ا ن - ص + ق
ہی اور چونکہ ہم یہہ جانتے ہین کہ یہہ سلسلہ ارقام کا جملہ بالقرینہ ا و ب س ... کا ہی تو مجموعہ ارقام
مع قوت نمایون کی جنکا ابہی ذکر کیا ہے یہہ ہوگا کہ

ق ر ق ص ق ط ... ح ا ن - ر ن - ص س ن - ط

اب درجہ ق ر ق ص ق ط ... کا اعلی ر + ص + ط + ... سی نہین ہی تو اب ہم کو صرف
یہہ ثابت کرنا رہا کہ درجہ ح ا ن - ر ن - ص س ن - ط ... کا بڑا ن - ر + ن - ص + س - ط + ...
سی نہین تو اسی یہہ استخراج ہوگا کہ حاصل ضرب کا درجہ اعلی م ن سی نہین ہی اب یہہ نتیجہ مطلوب
دو مشاہدون سی حاصل ہوتا ہی اول دفعہ ۲۲۴ کے صورفانونیہ سی یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ
ص م مین اعلی قوتین ر کی بہ نسبت ر کی نہین ملتفت ہین دوم دفعہ ۲۴۸ اور ۲۴۹ کے عملون
سی مستنبط ہوتا ہی کہ قیمت ح ا ر ب س ... مین قوتین اور حاصل ضرب
ص ا ص ب ص ج ... ص ا ر + ص ب ر + ص ج ر ملتفت ہی اور ہر رقم مین فرض کی حروف
ما تحت کا مجموعہ ل ر + م ر + س ر + ... ہے

اسی ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ اخر مساوات مین کوئی قوت ر کی اعلی ن سی نہین ہوتی
(۲۵۹) دفعہ گذشتہ سی ر کی اخر مساوات کی درجہ کی حد غائی معلوم ہوتی ہی کہ اوسی سی آگے
وہ نہین بڑہتا لیکن وہ بعض صورتون مین اس حد غائی سی چھوٹا ہوتا ہے
مسئلہ کی توسیع ہوسکتی ہی اور یہہ نتیجہ عامہ اوسی مستنبط ہوتا ہی کہ جتنی مساواتین ہون
اونمین اوتنی ہی مقادیر مجہول ملتفت ہون اور یہہ تمام مقادیر مجہولہ سوا ایک کے دور کیجائین تو اخر کو
جو مساوات حاصل ہوگی اوسکا درجہ اصل مساواتون کی درجون کی حاصل ضرب سی بڑا نہین ہوگا

سرٹ کا جبر مقابلہ پڑہو

اکیسوان باب قیمتون کی قوتون کے مجموعی

(۲۶۰) نیوٹن صاحب کی ترکیب دفعہ ۲۴۴ مین جو بیان ہوئی ہی اوسی متواتر حاصل جمع مساوات کی قیمتون کی قوتون کا دریافت ہوسکتا ہے

اب ہم ایک اور ترکیب بیان کرتی ہین جسکو کچھ لگاؤ اس پہلی ترکیب سے نہین ہوگا جسمین قیمتون کے قواے صحیحہ مفروضہ کا مجموعہ حاصل ہوجاے

فرض کرو کہ ا و ب و س ... مساواتح (لا) = ۰ کی قیمتین ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

ح (لا) = (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ... اور فرض کرو کہ مساوات ن درجہ کی ہی تو

$\frac{\text{ح (لا)}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = (1 - \frac{\text{ا}}{\text{لا}})(1 - \frac{\text{ب}}{\text{لا}})(1 - \frac{\text{س}}{\text{لا}})$

طرفین کی لوگارثم لو اور بائین طرف کی لوگارثم کی صورت مفصلہ لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لوگ} \frac{\text{ح (لا)}}{\text{لا}^{\text{ن}}} = -\frac{1}{\text{لا}}(\text{ا} + \text{ب} + \text{س} + \dots)$$
$$-\frac{1}{2\text{لا}^2}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{س}^2 + \dots)$$
$$-\frac{1}{3\text{لا}^3}(\text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{س}^3 + \dots)$$
$$- - - - -$$

پس بائین طرف امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کا $-\frac{\text{ص}_{\text{م}}}{\text{م}}$ ہی اسی معلوم ہوا کہ ص$_{\text{م}}$ = امثال $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے جو صورت مفصلہ

لوگ $\frac{\text{ح (لا)}}{\text{لا}^{\text{ن}}}$ مین ہو اور یہہ صورت مفصلہ قواے متفارلہ لا مین لکھی گئی ہو

اسمین م مثبت فرض کیا گیا ہی اگر قواے متصدصحیحہ کا حاصل جمع دریافت کرنا منظور ہو تو لا کو $\frac{1}{\text{ع}}$ سے بدل دو

اور مساوات و کی قیمتون کی مثبت قواے کا مجموعہ اس مساوات مین دریافت کرو

(۲۶۱) تمثیلاً مساوات لا^2 - ع لا + ق = ۰ کی قیمتون کی م قوتون کا مجموعہ دریافت کرو

یہان $\frac{\text{ح (لا)}}{\text{لا}^2} = 1 - (\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})$ - لوگ $\frac{\text{ح (لا)}}{\text{لا}^2} = -\text{لوگ}\left[1 - (\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})\right]$

$= \frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2} + \frac{1}{2}(\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})^3 + \dots + \frac{1}{\text{م}}(\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})^{\text{م}} + \dots$

امثال کامل $\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}}$ کے - لوگ $\frac{\text{ح (لا)}}{\text{لا}^2}$ مین مختلف ارقام کے منتخب کرنی سی جنمین لا واقع ہو

حاصل ہوسکتی ہین ان ارقام کو اگر بہ ترتیب معکوس لکھین تو

$\frac{1}{\text{م}}(\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})^{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}-1}(\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})^{\text{م}-1} + \text{م}\frac{1}{\text{م}-2}(\frac{\text{ع}}{\text{لا}} - \frac{\text{ق}}{\text{لا}^2})^{\text{م}-2} + \dots$

اسیطرح امثال $\frac{1}{لا^م}$ بہ تعین کہ

$$\frac{1}{م-1}ع_{م-1} - \frac{1}{1}ع_{م-2}ق + \frac{1}{م-2}\frac{(م-2)(م-3)}{2\times1}ع_{م-4}ق^2 -$$

پس ص م = $ع_م - م_{ن-2}ق + \frac{م(م-3)}{2\times1}ع_{م-4}ق^2 - \ldots$

$+(-1)^ر\frac{م(م-ر-1)\ldots(م-2ر+1)}{ر}ع_{م-2ر}ق^ر + \ldots$

فرض کرو کہ ق = ا نو سادات درجہ دوم ساتھ متکافیہ ہوگی اور اوسکی قیمتین ا اور $\frac{1}{لا^ن}$ کی موجب صورت کے دفعہ ۱۳۲ کے ہونگین

پس ہم ا + $\frac{1}{ا}$ = ع. رکھین تو

$$ا^م + \frac{1}{ا^م} = ع_م - م ع_{م-2} + \frac{م(م-3)}{2\times1}ع_{م-4}$$

$+(-1)^ر\frac{م(م-ر-1)\ldots(م-2ر+1)}{ر}ع_{م-2ر}^ر + \ldots$

پس ہم نے ایک جملہ بیانیہ علی العموم $ا^م + \frac{1}{ا^م}$ کے واسطے ایسا حاصل کیا جسمین ارقام ا + $\frac{1}{ا}$ کی قوتین ہین دفعہ ۱۳۸ دیکھو

(۲۶۲) اب بہر بہیہ فرض کرو کہ سادات $لا^ن - 1 = 0$ کی قیمتون کی م قوتون کا حاصل جمع دریافت کرنا مطلوب ہے

یہان $\frac{ح_{(لا)}}{لا^ن} = 1 - \frac{1}{لا^ن}$

$$- لوک \frac{ح_{(لا)}}{لا^ن} = \frac{1}{لا^ن} + \frac{1}{2لا^{2ن}} + \frac{1}{3لا^{3ن}} + \frac{1}{4لا^{4ن}} + \ldots$$

یہان امثال $\frac{1}{لا^م}$ کے صفر ہین بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور ترتیب امثال $\frac{م}{ن}$ ہونگی اور

پس ص م = ۰ بشرطیکہ م اضعاف ن کا نہ ہو اور اگر یہہ ہوگا تو ص م = ن

یہہ نتیجہ بڑی کام کا ہی دفعات آیندہ مین اوسکی تین استعمال بیان کرینگے

(۲۶۳) اب ہم یہہ بتلائینگی کہ ایک سلسلہ معلوم کی خاص منتخب قیمتون کا حاصل جمع کسطرح دریافت کرتی ہین

فرض کرو کہ ح (لا) = ا. + ا لا + ا لا^۲ + . . لا انتہا اور مطلوب یہہ ہی کہ اس سلسلہ

ا م لا^م + ا م+ن لا^{م+ن} + ا م+۲ن لا^{م+۲ن} + . . . لا انتہا

کا حاصل جمع دریافت کرین

فرض کرو کہ سہ وصہ ولز . . . ن مرتبی کی نزول واحد کی ہیں یعنی ن قیمتیں مساوات
لا^{ن} − ۱ = ۰ کی ہیں اس متطابقہ کی طرفین کو سہ$_{ن-م}$ میں ضرب دو اور لا کو سہ لا سے بدل دو
تو سہ لا$^{ن-م}$ ح (سہ لا) = ۱ . سہ$_{ن-م}$ + ۱ سہ$_{ن-م+۱}$ لا + ۱ سہ$_{ن-م+۲}$ لا^{۲} + . . . اور بسیطرح
صہ$_{ن-م}$ ح (صہ لا) = ۱ . صہ$_{ن-م}$ + ۱ صہ$_{ن-م+۱}$ لا + ۱ صہ$_{ن-م+۲}$ لا^{۲} + . . .
لز$_{ن-م}$ ح (لز لا) = ۱ . لز$_{ن-م}$ + ۱ لز$_{ن-م+۱}$ لا + ۱ لز$_{ن-م+۲}$ لا^{۲} + . . .
اور علی ہذا القیاس
اب یہہ جون متطابقہ اسطرح بنائی جائیں اونکو جمع کرو تو بائیں طرف ن گنا سلسلہ مطلوبہ کا
بموجب دفعہ ۲۶۲ کے حاصل ہوگا پس
۱ م لا^{م} + ۱ م + ن لا$^{م+ن}$ + ۱ م + ۲ن لا$^{م+۲ن}$ + . .
= $\frac{۱}{ن}$ [سہ$_{ن-م}$ ح (سہ لا) + صہ$_{ن-م}$ ح (صہ لا) + لز$_{ن-م}$ ح (لز لا) + . .]
(۲۶۴) اب دفعہ ۲۶۲ کی استعانت سی ہم یہہ مسئلہ ثابت کرسکتی ہیں کہ جملہ (لا+ی)^{ن} − لا^{ن} − ی^{ن}
بورسی لا^{۲} + لا ی + ی^{۲} پر تقسیم ہوسکتی ہی اگر ن طاق صحیح عدد ہو اور ۳ پر پورا تقسیم نہ ہوتا ہو
اور وہ (لا^{۲} + لا ی + ی^{۲})^{۲} پر پورا تقسیم ہوگا اگر ن مثبت صحیح اس صورت ۶م + ۱ کا ہو
فرض کرو کہ اوسہ وصہ واحد کی ہیں جزو المکعب ہیں یعنی مساوات لا^{۳} − ۱ = ۰ کی تین قیمتیں ہیں
تو حاصل ضرب ان تین قیمتوں کا بموجب دفعہ ۴۵ کے ۱ ہے
یعنی بموجب دفعہ ۴۵ کے سہ صہ لز = ۱ اور بموجب دفعہ ۲۶۲ کی ۱ + صہ^{م} + صہ^{۲م} = ۰
بشرطیکہ م اضعاف ۳ کا نہ ہو
پس لا^{۲} + لا ی + ی^{۲} = (لا − سہ ی) (لا − صہ ی)
اسی معلوم ہوا کہ (لا + ی)^{ن} − لا^{ن} − ی^{ن} پورا پورا تقسیم لا^{۲} + لا ی + ی^{۲} پر ہوتا ہی بشرطیکہ وہ لا = سہ ی سی
اور لا = صہ ی سی معدوم ہوتا ہی اور وہ پورا (لا^{۲} + لا ی + ی^{۲})^{۲} پر تقسیم ہوتا ہے
بشرطیکہ اوسکا جملہ مشتقہ ن (لا+ی)$^{ن-۱}$ − ن لا$^{ن-۱}$ معدوم لا = سہ ی سے اور

لا = صہ د سے معدوم ہوتا ہو

جب لا = سہ د تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لا} + \text{د})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} - \text{د}^{\text{ن}} = \text{د}^{\text{ن}} \left[(1 + \text{سہ})^{\text{ن}} - \text{سہ}^{\text{ن}} - 1 \right] = \text{د}^{\text{ن}} \left[(\text{صہ})^{\text{ن}} - \text{سہ}^{\text{ن}} - 1 \right]$$

اور یہہ معدوم ہوتا ہے جب ن طاق ہو اور پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

اور نیز جب لا = سہ د

$$\text{ن}(\text{لا} + \text{د})^{\text{ن}-1} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} = \text{ن}\,\text{د}^{\text{ن}-1} \left[(1 + \text{سہ})^{\text{ن}-1} - \text{سہ}^{\text{ن}-1} \right] = \text{ن}\,\text{د}^{\text{ن}-1} \left[(\text{صہ})^{\text{ن}-1} - \text{سہ}^{\text{ن}-1} \right]$$

یہہ معدوم ہوتا ہی اگر ن - ۱ جفت صحیح ہو اور ضعاف ۳ کا ہو کیونکہ سہ^{۳} = ۱ اور صہ^{۳} = ۱

اور اگر ن - ۱ جفت صحیح ہو اور ضعاف ۳ کا ہو تو یہہ استخراج ہوتا ہے کہ ن طاق صحیح ہے اور ۳ پر تقسیم نہیں ہوتا پس $(\text{لا} + \text{د})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} - \text{د}^{\text{ن}}$ بھی معدوم ہوتا ہے اور یہی نتیجہ حاصل ہو سکتا ہی اگر صہ د کو بجای لا کے رکھیں

(۲۶۵) اب آخر استعمال دفعہ ۲۶۲ کا یہہ ہی کہ ہم اس مسئلہ کو ثابت کریں فرض کرو کہ اس سلسلہ

$$1 - \frac{\text{ن}}{\text{۳}} + \frac{(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\text{۲}} - \frac{(\text{ن}-۵)(\text{ن}-۶)(\text{ن}-۷)}{\text{۳}} + \ldots$$

$$+ (-1)^{\text{ر}-1} \frac{(\text{ن}-\text{ر}-1)(\text{ن}-\text{ر}-2)\ldots(\text{ن}-۲\text{ر}+1)}{\text{ر}} + \ldots$$

کا حاصل جمع ص ہے تو

ص = $\frac{۳}{\text{ن}}$ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = ۰ اگر ن طاق مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

ص = $\frac{۱}{\text{ن}}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہو

ص = $\frac{۲}{\text{ن}}$ اگر ن جفت مثبت صحیح پورا ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو

دفعہ ۲۶۱ مین لا، کو بجای ق کی اور لا + د کو بجای ع کی رکھو تو ص ن = لا$^{\text{ن}}$ + د$^{\text{ن}}$

پس اگر ن مثبت صحیح ہے

$$(\text{لا} + \text{د})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} - \text{د}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لا}\,\text{د}\,(\text{لا} + \text{د}) \left[(\text{لا} + \text{د})^{\text{ن}-۳} - \frac{\text{ن}-۳}{\text{۲}} \text{لا}\,\text{د}\,(\text{لا} + \text{د})^{\text{ن}-۵} \right.$$

$$\left. + \frac{(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\text{۳}} (\text{لا}\,\text{د})^{۲} (\text{لا} + \text{د})^{\text{ن}-۷} \ldots \right] \ldots (۱)$$

فرض کرو کہ ا و سہ و صہ واحد کے تین جزر المکعب ہوں لا = سہ ء کی رکھو (۱) کی بائیں طرف کا رکن یہہ ہو جا یگا کہ

$$ن\,سہ\,(۱+سہ)^{\frac{ن}{۳}-۱}\left[(۱+سہ)^{ن-۳}-\frac{ن-۳}{۲}\,سہ\,(۱+سہ)^{ن-۵}+\frac{(ن-۴)(ن-۵)}{۳}\,سہ^{۲}(۱+سہ)^{ن-۷}\cdots\right]$$

لیکن سہ صہ = ۱ اور اسیواسطی صہ^۲ = سہ صہ^۳ = سہ اور سہ + صہ + ۱ = ۰

پس - صہ = سہ + ۱ پس سہ = (سہ + ۱)^۲ اسی معلوم ہوا کہ بائیں طرف کا رکن (۱) کا تبدیل ہو کر یہہ ہو گا کہ

$$ن\,(۱+سہ)^{\frac{ن}{۳}}\left[۱-\frac{ن-۳}{۲}+\frac{(ن-۴)(ن-۵)}{۳}-\cdots\right]$$

یعنی ن (- صہ)^{ن/۳} ص

اور نیز جب لا = سہ ء تو دائیں طرف کا رکن مساوات کا یہہ ہو جا یگا کہ

$$(۱+سہ)^{\frac{ن}{۳}}\left[(۱+سہ)^{ن}-سہ^{ن}-۱\right]\text{ یعنی }(۱+سہ)^{\frac{ن}{۳}}\left[(-صہ)^{ن}-سہ^{ن}-۱\right]$$

اسیواسطی (- صہ)^ن - سہ^ن - ۱ = ن (- صہ)^ن ص (۲)

اگر ن طاق صحیح پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا برابر - ۳ کے بموجب دفعہ ۲۶۲ کی ہی اور اسیواسطی - ۳ = - ں صہ^ن ص = - ن ص اسیواسطی ص = $-\frac{۳}{ن}$

اگر ن طاق صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا صفر ہے بموجب دفعہ ۲۶۲ کے ہے اور اسیواسطی ص = ۰

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہی تو دائیں طرف کا رکن (۲) کا - ۱ ہے اور بائیں طرف کا رکن ن ص ہی اسیواسطی ص = $-\frac{۱}{ن}$

اگر ن جفت صحیح ہی اور ۳ پر پورا نہیں تقسیم ہوتا تو دائیں طرف کا رکن صہ^ن - سہ^ن - ۱ ہی یعنی ۲ صہ^ن کیونکہ سہ^ن + صہ^ن + ۱ = ۰ پس ۲ صہ^ن = ن صہ^ن ص اور اسیواسطی ص = $\frac{۲}{ن}$

اس بات پر بھی خیال کرنا چاہئی کہ سلسلہ جو اس سی تعبیر ہوتا ہی اوسمیں محدود تعداد رقموں کی ہے اور فی الحقیقت اگر ن = ۲ م یا ۲ م + ۱ کے ہو تو رقمیں سلسلہ من ہونگیں

(۲۶۶) مساوات کی قیمتون کے قوتون کی مجموعون کی قیمتون کو مساوات کی تقریبی قیمت دریافت کرنی اندریہی کام مین لانی ہین اس ترکیب کا بیان ہم مرفی صاحب کے رسالہ مسائل معادلات سی نقل کرتی ہین فرض کرو کہ ادب دس ... قیمتین مساوات کی ہین اور وہ سب حقیقی ہین اور تعداد مین سب سی بڑی قیمت ہے

اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$\frac{ص_{م+1}}{ص_م} = \frac{ا_{م+1} + ب_{م+1} + س_{م+1} + \cdots}{ا_م + ب_م + س_م + \cdots}$$

$$= ا \frac{1 + (\frac{ب}{ا})^{م+1} + (\frac{ج}{ا})^{م+1} + \cdots}{1 + (\frac{ب}{ا})^م + (\frac{ج}{ا})^م + \cdots}$$

اب اگر م کو بڑا کافی فرض کرین تو بائین طرف کا رکن خاطر خواہ ا کے قریب ہو سکتا ہے یعنی قریب سب سی بڑی عددی قیمت کے ہوتا ہے

(۲۶۷) اب ہم یہہ بیان کرتی ہین کہ اگر دفعہ گذشتہ مین خیالی قیمتین بھی ہون تو اوسکی نتیجہ مین کیا ترمیم ہوگی فرض کرو کہ صہ + لر$\sqrt{-1}$ اور صہ - لر$\sqrt{-1}$ ایک زوج مردود خیالی قیمتون کا ہو تو اوسکا مجموعہ ۲صہ اور اوسکا حاصل ضرب صہ۲ + لر۲ ہوگا اور یہہ حاصل ضرب مساوی اونکی قالب کا ہی جبر مقابلہ کا پچیسوان باب دیکھو

اب صہ ± لر$\sqrt{-1}$ = لب (صہ/لب ± لر/لب $\sqrt{-1}$)

فرض کرو کہ صہ/لب = حم بر اور لر/لب = جب بر

پس مس ر = لب۲ اور لب۲ = صہ۲ + لر۲

پس قالب ہی اور مردود خیالی قیمتین اس صورت مین لکھی جا سکتی ہین کہ

لب (جم بر ± $\sqrt{-1}$ جب ر) اور ڈی مولور کے ضابطہ سی مجموعہ دو قیمتون کی

م قوتون کا ۲ لب۲ حم م بر ہے

پس اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی عددی قدر بڑی خیالی قیمتون کی قالب سی ہو تو

$\frac{ص_{م+1}}{ص_م}$ لانہایت زیادہ ہوتی ہی ایک حد غائی کی طرف مائل ہو گی یعنی سب سے

بڑی قیمت کی طرف از روی تعداد کی لیکن اگر سب سے بڑی حقیقی قیمت کی قدر دی خیالی قیمتوں کی قالب سی بڑی نہ ہو تو $\frac{ص_{م+1}}{ص_م}$ کی کوئی حد غائی نہ ہوگی

(۲۶۸) مثال لا^۳ − ۲لا − ۵ = ۰ یہاں سلسلہ ص$_۱$ و ص$_۲$ و ص$_۳$ . . .

۰ و ۴ و ۱۵ و ۸ و ۵۰ و ۹۱ و ۱۴۰ و ۴۳۲ و ۳۵۷ و ۱۵۴۴ و ۳۰۳۶ و ۶۸۰۳ و ۱۵۰۸۰

و ۳۱۷۵۶ و ۶۴۱۵ و ۱۳۸۹۱۲ و ۲۸۷۱۳۰ و ۵۹۸۶۹۹ و . . . سے

ہر یک رقم کو اوسکی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرتی ہیں تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ حاصل کو ایک مسلسل ۲ کی حد کی طرف ہی اسی بہنیچہ نکالتی ہیں کہ ایک حقیقی قیمت کچھہ بڑی ۲ سی ہی مگر یہہ مثال اس ترکیب کے واسطی مناسب نہیں ہی کیونکہ حاصل ضرب تمام قیمتوں کا ہی اور ایک حقیقی قیمت کچھہ زیادہ ۲ سے اور باقی دو قیمتوں کا حاصل ضرب تقریباً ۵ ر۲ ہی یہہ دو قیمتیں بموجب دفعہ ۱۷۲ کے خیالی ہیں اور چونکہ اونکا قالب اونکی حاصل ضرب کا جذر ہی تو قالب بڑا بہ نسبت ۵ ر۲ کے ہوا پس قالب بمقابلہ حقیقی قیمت کی بہت چھوٹا نہیں ہی پس جملہ $\frac{ص_{م+1}}{ص_م}$ آہستہ آہستہ ایک حد غائی کی طرف پہونچتا ہے

(۲۶۹) دفعہ ۲۶۶ کے ترکیب کے متماثل ایک ترکیب ہے جسی کہ تعداداً سب سی بڑی دو قیمتوں کا حاصل ضرب خاص صورتوں میں معلوم ہوجاتا ہے

اسواسطی کہ ص$_م$ = ا^م + ب^م + س^م + . . .

ص$_{م+1}$ = ا$^{م+1}$ + ب$^{م+1}$ + س$^{م+1}$ + . . .

ص$_{م+2}$ = ا$^{م+2}$ + ب$^{م+1}$ + س$^{م+1}$ + . . .

اسیواسطے ص$_م$ ص$_{م+2}$ − ص$^۲_{م+1}$ = ا^م ب^م (ا − ب)^۲ + ا^م س^م (ا − س)^۲

+ ب^م س^م (ب − س)^۲ + . . .

اسکو لوم سے تعبیر کرو تو

لوم = ا^م ب^م (ا − ب)^۲ [۱ + $\frac{س^م}{ب^م}$ $\left(\frac{ا-س}{ا-ب}\right)^۲$ + $\frac{س^م}{ا^م}$ $\left(\frac{ب-س}{ا-ب}\right)^۲$ + . . .]

اب بموجب دفعہ ۲۶۶ و ۲۶۷ کے عمل کرنے سے ہم کو نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہونگے

(۱) اگر سب حقیقی قیمتیں ہیں تو $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ کو خاطر خواہ م کی زیادہ کرنے سے تعداداً دو سب سے بڑی قیمتوں کے حاصل ضرب کے قریب لاسکتی ہیں

(۲) اگر حقیقی قیمتیں تعداداً بڑی کسی خیالی قیمت کی قالب سی ہی تو $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ کی حد غائی ہوگی یعنی ان قیمتوں میں سی سب سی بڑی دو قیمتوں کا حاصل ضرب

(۳) اگر تعداداً سب سی دو بڑی قیمتوں کی حاصل ضرب کی جذر سی خیالی قیمتوں کا قالب بڑا ہے تو $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ کی حد غائی کی قیمت ہوگی یعنی مجذور اوس قالب کا ہوگا یعنی حاصل ضرب اون خیالی قیمتوں کے حاصل ضرب کا جنکا وہ قالب تہا

(۴) پس صرف ایک صورت جسمیں $\frac{\text{لوم}+۱}{\text{لوم}}$ سی حد غائی کی نہ ہونی کا نقص عاید ہوتا ہے یہہ ہی کہ ایک صرف حقیقی قیمت ہو اور خیالی قیمتوں کی سب سے بڑی قالب سے تعداداً بڑی ہو اس صورت میں حقیقی قیمت موافق دفعہ ۲۶۷ کے دریافت ہوجاتی ہے

(۲۷۰) بعض صورتوں میں اسی ترکیب کے متماثل ترکیب سی حاصل جمع ہی دو قیمتوں کا دریافت کرنا ہوتا ہے

ص م و ص م+۱ اور ص م+۲ کی قیمتوں سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ص م ص م+۲ − ص م+۱ ص م+۲ = ا ب ج (ا+ب) (ا−ب)² + ا ب س (ا+س) (ا−س)²
+ ب ج س (ب+س) (ب−س)² + . . .

اب اسکو موم سی تعبیر کرو پس موم کی معنی تو دفعہ گذشتہ میں مقرر ہوگئی ہیں اب ہم یہاں یہہ دریافت کرینگے

$\frac{\text{موم}}{\text{لوم}}$ کی ایک حد غائی اون صورتوں میں ہی جنکا ذکر اوپر کی دفعہ میں ہوا اور یہہ حد غائی مجموعہ تعداداً سب سی بڑی دو قیمتوں کا ہی یا مجموعہ دو خیالی قیمتوں کا ہی جنکا قالب سب سے بڑا ہے

(۲۷۱) پس دفعہ ۲۶۹ کی (۱) و (۲) و (۳) صورتوں میں حاصل ضرب دو قیمتوں کا بموجب دفعہ ۲۶۹ کی اور اونکا مجموعہ بموجب دفعہ ۲۷۰ کے حاصل ہوسکتا ہے اور (۱) اور (۲) کی صورتوں میں بموجب دفعہ ۲۷۰ کی دو قیمتوں کا مجموعہ معلوم ہوسکتا ہے

اور دفعہ ۲۶۶ کے اونمین سی بڑی قیمت معلوم ہوسکتی ہے

(۲۷۲) مثال $لا^۴ + لا^۳ + ۴لا^۲ - ۱۴لا + ۱ = ۰$

یہان بتفصیل ذیل قیمتین حاصل ہوتی ہین

ارقام $ص_۱ ، ص_۲ ، ۰ ۰ ۰$ کے واسطے

$-۱ ، -۷ ، ۲۳ ، -۳ ، -۱۱۶ ، ۲۲۷ ، ۲۰۲ ، -۱۵۷۱ ، ۰ ۰ ۰ ۰$

ارقام $لو_۱ ، لو_۲ ، ۰ ۰ ۰$ کے واسطے

$-۷۲ ، -۵۰۸ ، ۷۷۶۲ ، -۱۴۱۳۷ ، ۷۴۹۶۱ ، -۳۹۷۴۷۲۱ ، ۰ ۰ ۰$

اور ارقام $مو_۱ ، مو_۲ ، ۰ ۰ ۰$ کے واسطے

$۱۶۴ ، ۸۸۱ ، ۳۴۸۷۳ ، ۲۵۷۲۶ ، ۱۳۶۳۸۲ ، ۰ ۰ ۰$

اب یہان سلسلہ $ص_۱ ، ص_۲ ، ۰ ۰ ۰$ مین ایک رقم کو ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنے سی ایک محدود عدد نہین حاصل ہوتی اسی ہم کو یہہ قطعی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات کی خیالی قیمتین ہین اور سلسلہ $لو_۱ ، لو_۲ ۰ ۰ ۰$ کو اپنی ماقبل کی رقم پر تقسیم کرنی سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہے کہ دو قیمتون کی حاصل ضرب کی قدر ۳۰ء۵ ہی اور سلسلہ $مو_۱ ، مو_۲ ۰ ۰ ۰$ کی ہر یک رقم سلسلہ $لو_۱ ، لو_۲ ۰ ۰ ۰$ کی ہر یک رقم متناظر پر تقسیم کرنے سی وہ خارج قسمت حاصل ہوتی ہین جنسی معلوم ہوتا ہی کہ مجموعہ ان دو قیمتون کا - ۸۱۹ء۱ ہے

پس ان دو قیمتون سی ہم دو خیالی قیمتین تقریباً دریافت کرسکتے ہین

اور چونکہ مساوات کی لئی چار دن قیمتون کا مجموعہ - ۱ ہی اور اوسکا حاصل ضرب ۱ ہی تو مجموعہ باقی دو قیمتون کا وغیرہ ۸۱۹ء۱ ہی اور اوسکا حاصل ضرب وغیرہ $\frac{۱}{۳۰ء۵}$ ہی اسواسطے یہہ دو قیمتین بہی خیالی ہین

پس اسطرح ہم کو یہہ معلوم ہوگا کہ خیالی قیمتون کے اول زوج کا قالب پانچ گنہ دوسرے خیالی قیمتون کے زوج کی قالب سی ہی اسی معلوم ہوا کہ بموجب طریقہ کیات دفعہ ۲۷۰ کے ہم کو دریافت

دریافت ہوگا کہ لوم = ۱/۲ ب (ا - ب)² اب اور ارقام کو چھوڑ دین تو غلطی بقدر ۱/۵ حصہ کل کی قریب واقع ہوگی اور اسی ہم اپنی نتیجہ کی صحت کا اندازہ کر سکتی ہین

مثلاً ہم نی اوپر قیمتین لوم کی لوہ اور لوہ تک لکھی ہین تو حاصل ضرب کے دریافت کرنے مین غلطی قریب (۱/۵) دین حصہ کل کے واقع ہوگی

بائیسوان باب دور کرنا مقادیر مجہول کا یعنی اسقاط

(۲۷۳) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین دو مجہول کی ہم کو حل کرنی ہین بعض صورتین ایسی ہوتی ہین کہ جنمین اونکا حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہی فرض کرو کہ لا اور ر مقادیر مجہول کو تعبیر کرتی ہین پس اگر ایک مساوات مین لا ملتف ہو اور کوئی اور قوت لا کی نہ ملتف ہو تو اس مساوات سی لا کی قیمت ر کی رقمون مین دریافت کرین اور اوسکو دوسری مساوات مین مندرج کرین تو ایک مساوات حاصل ہو جائیگی جسمین فقط مقدار مجہول ر ہی ملتف ہوگی اور اوسکی قیمتین تقریبی یا تحقیقی اون ترکیبون سی دریافت ہونگین جو اوپر بیان ہوئین

اب پہر فرض کرو کہ مساوتین ا = ۰ ب = ۰ سی تعبیر ہوتی ہین اور ا اور ب جلدی سے اجزاء ضربی مین تحلیل ہو سکتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ا = لو لو لو اور ب = مو مو تو معادلات مفروضہ کی تمام حل ان ہمزاد مساواتون کے حل کرنی سی حاصل ہونگی کہ لو = ۰ مو = ۰ و لو = ۰ اور مو = ۰ لو = ۰ اور مو = ۰ و لو = ۰ اور مو = ۰ اور لو = ۰ اور مو = ۰ اور لو = ۰ اور مو = ۰ بس حل معادلات مفروضہ کا لون معادلات کی حل پر موقوف ہوا جو معادلات مفروضہ سی درجہ کم رکھتی ہین یہہ ہو سکتا ہی کہ ا کے اجزاء ضربی مین سی ایک ب کی اجزاء ضربی مین سی ایک ساتھہ بالکل مطابق ہو مثلاً فرض کرو کہ لو اور مو مطابق ہین تو کوئی سی قیمتین لا اور ر کی جو مساوات لو = ۰ کی شرائط کو پورا کرینگے وہ ہمیشہ مساوات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو بہی پورا کرینگے پس اگر لو مین لا اور ر دو ملتف ہین تو ہم مقادیر مجہول مین سی ایک کو واسطی جو قیمت چاہین

مقرر کرین اور دوسرے قیمت اوسکی مطابق نکال لین اور اسطرح سی جتنی حل چاہین دریافت کرین
گر لو مین ایک مقدار مجہول مقادیر مجہولہ مین سی ملتف ہو تو ہم معادلات
ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرایط کو پورا اوس مقدار مجہول کے اوس قیمت سی کر سکتی ہین
جو مساوات لو = ۰ سی مستنبط ہو اور دوسری مقدار مجہول کی واسطی خواہ کچہ ہی قیمت مقرر کرین
(۲۷۴) ہم نی ابہی بیان کیا ہی کہ دو مقادیر مجہول کی دو مساواتون سی کسطرح مسائل جملہ بالقرینہ کے
استعانت سی ہم ایک مجہول مقدار کو دور کرتی ہین اور ایک مساوات دوسرے مقدار مجہول کی حاصل
کرتی ہین اب ہم مقدار مجہول کی دور کرنی کی ایک اور ترکیب بیان کرتی ہین وہ دو جریہ جملون کے
وفق اعظم دریافت کرنی کی عمل پر موقوف ہی
(۲۷۵) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین ح (لا و ر) = ۰ اور ح' (لا و ر) = ۰
سی تعبیر کی جائین اور لا = سہ اور ر = صہ کی ایسی قیمتین ہون کہ اونسی ان مساوات کی شرایط پوری ہوتی ہون
تو مساوات ح (لا و صہ) = ۰ اور ح' (لا و صہ) = ۰ کی شرایط لا = سہ سی پوری ہونگین
اسی معلوم ہوا کہ ح (لا و صہ) و ح' (لا و صہ) کا ایک وفق مشترک ہوا اور یہہ وفق مشترک
ایسا ہو کہ جب اوسکو برابر صفر کی لکہین تو اوسی قیمتین سہ کی ساتہہ لگ جائین اور نیز وہ
قیمت یا قیمتین حاصل ہو جائین جو ر = صہ کی ساتہہ شریک ہو گر معادلات مفروضہ کی
شرایط کو پورا کرین
پس فرض کرو کہ ح (لا و ر) اور ح' (لا و ر) کی لا کی قواء متنازلہ کی ترتیب سی لکہین
اور حسب معمول اوسکا وفق اعظم دریافت کرین اور یہانتک عمل کرین کہ اخر کو ایک جملہ ر کا
باقی مین حاصل ہوا اوسکا مح (ر) نام رکہو تو کوئی ایسی قیمت ر کی داخل ہونی قابل نہین ہوگی جب تک کہ
مح (ر) = ۰ کی نہ کری اسواسطی کہ اگر مح (ر) معدوم نہ ہو تو ح (لا و ر) و ح' (لا و ر)
کا کوئی وفق مشترک نہین ہونی کا اسواسطی وہ ایک ہی وقت معدوم نہین ہونگے — مگر اسکا
بالعکس درست نہین کہ ہر یک قیمت ر جو مح (ر) کو فنا کرتی ہی وہ ضرور داخل ہونی کی قابل ہے

اسواسطے کہ اثنا ے عمل مین یہہ واقع ہوسکتا ہی کہ بعض قواے لاکی امثال مکسور ہون جنکی نسب نمایون مین ے ملتف ہو اور ایک قیمت جو مساوات مح (ے) = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہو ان نسب نمایون کو معدوم کردی اور اسطرح سی لاانتہا اور غیر المعین مقادیر داخل کردی

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح۱ (لا ے) = ق ح۲ (لا ے) + مح (ے)

پس اگر ق ایک جملہ صحیحہ ہی تو وہ ے کی کسی محدود قیمت سی غیر متناہی ہوگا اور کوئی قیمت ے کی جو مح (ے) کو معدوم کرتی ہی وہ اوس لاکی قیمت کی ساتھہ شامل ہوکر جو مساوات ح۲ (لا ے) = ۰ سی موافق اس ے کی قیمت کی نکلتی ہی ح۱ (لا ے) کو معدوم کریگی لیکن اگر ق کسر ہو اور اوسکی نسب نما مین ے ملتف ہو تو جب مح (ے) معدوم ہو تو ق غیر متناہی ہوسکتا ہے اور کچھہ ضرور نہین کہ ح۱ (لا ے) معدوم ہو جب ح (ے) = ۰ اور ح۲ (لا ے) = ۰ یہہ صورت مستثنی اوس حالت مین بھی ہوسکتی ہی کہ ہم عمل حسب دستور کرین اور ایسی اجزا ضربی داخل کرین کہ امثال مکسور سی بچ جائین مثلاً فرض کرو کہ ہم ح۱ (لا ے) کو کسی مقدار س مین ضرب دیتے ہین تاکہ ہم اون امثال مکسور سی بچ جائین جو ے کے جملے ہین اور اب ہم فرض کرتے ہین کہ

س ح۱ (لا ے) = ق ح۲ (لا ے) + مح (ے)

اب اگر ے کو مساوات مح (ے) = ۰ سی دریافت کرین اور پھر مساوات ح۲ (لا ے) = ۰ سے دریافت کرین تو جو قیمت اسطرح حاصل ہونگین وہ ضرور س ح۱ (لا ے) کو معدوم کرینگے مگر اسی یہہ نہین نکلتا کہ ح۱ (لا ے) معدوم ہوتا ہے کیونکہ یہہ ہوسکتا ہی کہ جو قیمت ے کی ہم نے لی وہ س کو معدوم کرے

اس سی معلوم ہوا کہ ایک قاعدہ کی ضرورت ہی جسی یہہ معلوم ہو کہ کون سی حل مساواتون مین داخل ہونی کی قابل ہین اب ہم اوس قاعدہ کو بتلاتی ہین — ہم یہہ فرض کرتی ہین کہ دفع مشترک اعظم کی دریافت کرتی ہین حسب دستور۔ اس باب مین احتیاط کی گئی ہی کہ امثال مکسورہ واقع ہون

ہم یہہ فرض کر سکتے ہین کہ مساواتین جو ا = ۰ ادک = ۰ تعبیر کرتے ہین
اوسمین نہ ا اور نہ ب من کوئی جزضربی ایسا واقع ہی کہ وہ صرف د ہی کا جملہ ہو
کیونکہ ایسا جملہ کا ہم جداگانہ خیال کر سکتے ہین اور جو حل اوسپر موقوف ہون وہ دریافت کر سکتے ہین
جو ترکیب ہم اب لکھتے ہین وہ لابیٹی صاحب اور سارس صاحب نے ایجاد کی تہی اوسکو میر
چوکوئرٹ کے جبر مقابلہ سے نقل کرتے ہین

(۲۷۶) فرض کرو کہ دو ہمزاد مساواتین ا = ۰ اور ب = ۰ سے تعبیر ہوتی ہین اور یہہ
بہی ہم فرض کرتے ہین کہ نہ ا ایسا ہی نہ ب ایسی ہی کہ اوسمین کوئی جزضربی ایسا واقع ہو کہ وہ
صرف د کا جملہ ہو اور س وہ جزضربی ہی جسکو ا مین اسلئے ضرب دیتے ہین کہ وہ ب پر تقسیم ہو
فرض کرو کہ ق خارج قسمت نکلتا ہی اور ر باقی بچتی ہی جسمین ر جملہ صرف د کا ہی فرض کرو کہ
س۱ وہ جزضربی جسکو ب مین اسلئے ضرب دیتے ہین کہ وہ ر پر تقسیم ہو فرض کرو کہ اس تقسیم
کرنی مین ق۱ خارج قسمت نکلتا ہی اور ر۱ باقی بچتی ہی اور اسمین ر۱ صرف د کا جملہ ہے
اسی طرح عمل کئے جاؤ اور تمثیلاً فرض کرلو کہ چوتہی تقسیم پر ہم کو ایک ایسی باقی حاصل ہوتی ہے کہ
جسمین لاد داخل نہین ہی اور اوسکو ہم ر۳ سے تعبیر کرتے ہین پس مطابق ذیل ہم کو حاصل ہونگے

$$\left.\begin{aligned} س ا &= ق ب + ر ر \\ س ب &= ق ر + ر۱ ر۱ \\ س۲ ر &= ق۲ ر۱ + ر۲ ر۲ \\ س۳ ر۱ &= ق۳ ر۲ + ر۳ \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (۱)$$

فرض کرو کہ د وفق اعظم س اور ر کا ہی اور د۱ وفق اعظم $\frac{س س۱}{د}$ اور ر۱ کا ہے اور
د۲ وفق اعظم $\frac{س س۱ س۲}{د د۱}$ اور ر۲ کا ہی اور د۳ وفق اعظم $\frac{س س۱ س۲ س۳}{د د۱ د۲}$ اور ر۳ کا ہے
اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کے حل ان نظمون کے
حل کرنے سے حاصل ہونگے

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ب}{د} = ۰ \text{ اور } ل = ۰ \\ \frac{ب^{۱}}{د^{۱}} = ۰ \text{ اور } ر = ۰ \\ \frac{ب^{۲}}{د^{۲}} = ۰ \text{ اور } ر^{۱} = ۰ \\ \frac{ب^{۳}}{د^{۳}} = ۰ \text{ اور } ر^{۲} = ۰ \end{array}\right\} \quad \cdots \quad (۲)$$

اول ہی ہم یہہ ثابت کرتی ہین کہ تمام حل جو معادلات (۲) سی حاصل ہونگی اونسی معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرایط پوری ہونگین اور دویم ہم یہہ ثابت کرینگے کہ تمام قیمتین جو لا اور ر کی معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہین وہ نظم (۲) کے حلون مین داخل ہونگین

اول متطابقہ (۱) کے دونو ارکان کو د پر تقسیم کرو تو

$$\frac{س}{د} ا = \frac{ق}{د} ل + \frac{ب}{د} ر \qquad (۳)$$

اب بموجب فرض کی $\frac{س}{د} ا$ اور $\frac{ب}{د}$ دونو جملی صحیحہ ر کی ہین پس $\frac{ق}{د} ل$ بہی جملہ صحیحہ ہوا لیکن بموجب فرض کی ل کا کوئی جز ضربی ایسا نہین ہی کہ وہ فقط د ہی کا جملہ ہو اسواسطے کہ د کو پورا تقسیم کرتا ہے، متطابقہ (۳) سی ثابت ہوتا ہی کہ لا اور ر کی قیمتین جو معادلات $\frac{ب}{د} = ۰$ اور ل = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہین وہ $\frac{س}{د} ا$ کو معدوم کرتی ہین لیکن $\frac{س}{د} ا$ اور $\frac{ب}{د}$ بموجب فرض کے کوئی جز ضربی رکہتی نہین اسلئی یہہ قیمتین ا کو بہی معدوم کرتی ہین پس اسی معلوم ہوا کہ معادلات $\frac{ب}{د} = ۰$ اور ل = ۰ کی تمام حل معادلات ا = ۰ اور ل = ۰ کی شرایط کو پورا کرتے ہین

اب پہر متطابقہ (۳) کی دو ارکان کو ہین ضرب دو اور متطابقہ (۱) کے دوسرے مساوات سی س ا کا مساوی لہ حاصل ہوا اوسکو س ا کی جگہ رکہی تو

$$\frac{س}{د} س ا = \frac{س}{د} ر + ق ر^{۱}$$

جملہ $\frac{س}{د} ر + ق ر^{۱}$ ایک صحیح جملہ ہی اسواسطے کہ ر اور ق پوری تقسیم د پر ہوتی ہین اور علاوہ بریں یہہ جملہ د پر پوری پوری تقسیم ہوتا ہی اسواسطے کہ $\frac{س}{د} س ا$ کو د تقسیم کرتا ہے

اور ر کو ر۱ پورا انہین تقسیم کرتا ہی د۱ پر تقسیم کرو اور اختصاراً بجای $\frac{ق_1}{د_1}$ کے م۱ اور $\frac{س_1 ر + ق_1}{د_1}$ کے م۱ ر۱ رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س_1 س_1}{د_1 د_1} ا = م_1 ر_1 + \frac{ر_1}{د_1} م_1 ر_1 \qquad (۴)$$

اب (۱) کے متطابقون مین دوسرے کی دونو ارکان کو $\frac{س_1}{د_1}$ مین ضرب دو تو

$$\frac{س_1 س_1}{د_1} ب = \frac{س_1 ق_1}{د_1} ر_1 + \frac{س_1}{د_1} ر_1 ر_1$$

چونکہ د۱ پر تقسیم $\frac{س_1 س_1}{د_1}$ اور ر۱ کو کرتا ہی تو وہ $\frac{س_1 ق_1}{د_1}$ ر۱ کو بہی تقسیم کریگا لیکن ر۱ پورا د۱ پر نہین تقسیم ہوتا ہی اسواسطی $\frac{س_1 ق_1}{د_1}$ پورا تقسیم ہونا چاہیی د۱ پر تقسیم کرو اور اختصاراً اس کی جگہ ن۱ اور $\frac{س_1 ق_1}{د_1 د_1}$ کے جگہ ن۱ ر۱ رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{س_1 س_1}{د_1 د_1} ب = ن_1 ر_1 + \frac{ر_1}{د_1} ن_1 ر_1 \qquad (۵)$$

(۴) اور (۵) متطابقون سی یہہ ثابت ہو کہ تمام قیمتین جو لا اور د کی $\frac{ر_1}{د_1}$ اور ر۱ کو معدوم کرتی ہین وہ $\frac{س_1 س_1}{د_1 د_1} ا$ اور $\frac{س_1 س_1}{د_1 د_1} ب$ کو فنا کرتی ہین لیکن $\frac{س_1 س_1}{د_1 د_1}$ اور $\frac{ر_1}{د_1}$ مین کوئی جز ضربی مشترک نہین اسواسطے تمام حل معادلات $\frac{ر_1}{د_1} = ۰$ اور ر۱ = مساوات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرایط کو پورا کرتے ہین

اب متطابقہ (۴) کی دونو ارکان کو س۲ مین ضرب دو اور س۲ ر۱ کی جگہ اوسکا مساوی لو جو (۱) کے متطابقون مین سی تیسری متطابقہ سی حاصل ہو (۱) مین رکھو تو

$$\frac{س_1 س_2 س_1}{د_1 د_1} ا = (ق_2 م_1 + \frac{س_2 ر_1}{د_1} م) ر_1 + ر_2 م_1 ر_2$$

بموجب فرض کی د۲ اول رکن کو اس متطابقہ کے تقسیم کرتا ہے اور د۲ کو بہی تقسیم کرتا ہی اسواسطی (ن۲ م۱ + $\frac{س_2 د_1}{د_2}$ م) پورا د۲ پر تقسیم ہوگا اس خارج قسمت کو م۲ سے تعبیر کرو تو

$$\frac{س_1 س_1 س_2}{د_1 د_1 د_2} ا = م_2 ر_1 + \frac{ر_2}{د_2} م_1 م_2 \qquad (۶)$$

اب متطابقہ (۵) کے دو نو ارکان کو س۲ مین ضرب دو اور س۲ ر۱ کی جگہ اوسکا

مساوی لہ جو (۱) کے متطابقوں میں تیسری سی نکلے درج کرو تو

$$\frac{س_{۱}^{۲} س_{۲}^{۲}}{د_{۱}^{۲} د_{۲}^{۲}} ل = (ق_{۲} ن_{۱} + \frac{س_{۲}^{۲}}{د_{۲}^{۲}} ن) ر_{۲} + ر_{۲} ن_{۲} ر_{۲}$$

موافق سابق کی ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ ر۲ کے امثال پوری د۲ پر تقسیم ہوتی ہیں اور اس خارج قسمت کو ق۲ سی تعبیر کرتے ہیں تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س_{۱}^{۲} س_{۲}^{۲} س_{۳}^{۲}}{د_{۱}^{۲} د_{۲}^{۲} د_{۳}^{۲}} ل = ن_{۲} ر_{۱} + \frac{ر_{۲}}{د_{۲}} ن_{۱} ر_{۲} \qquad (۷)$$

اب (۶) (۷) متطابقوں سی ثابت ہوتا ہی کہ تمام قیمتیں لا اور ر۱ کی جو $\frac{ر_{۲}}{د_{۲}}$ اور ر۲ کو معدوم کرتی ہیں وہ ان متطابقوں کی اول رکن کو بھی معدوم کرتی ہیں لیکن $\frac{س_{۱}^{۲} س_{۲}^{۲}}{د_{۱}^{۲} د_{۲}^{۲}}$ اور $\frac{ر_{۲}}{د_{۲}}$ کا کوئی جز ضربی نہیں ہی اور اسیواسطے تمام حل معادلات $\frac{ر_{۲}}{د_{۲}} = ۰$ اور ر۱ = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہیں وہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرایط کو بھی پورا کرتی ہیں

اب اسیطرح موافق سابق کی (۶) اور (۷) متطابقوں کو س۳ میں ضرب دیتی ہیں س۳ ر۱ کی جگہ اوسکا مساوی لہ جو (۱) کی متطابقوں میں چوتھی سی نکلی درج کرتی ہیں تو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{س_{۱}^{۲} س_{۲}^{۲} س_{۳}^{۲}}{د_{۱}^{۲} د_{۲}^{۲} د_{۳}^{۲}} ا = م_{۳} ر_{۲} + \frac{ر_{۳}}{د_{۳}} م_{۲} \qquad (۸)$$

$$\frac{س_{۱}^{۲} س_{۲}^{۲} س_{۳}^{۲}}{د_{۱}^{۲} د_{۲}^{۲} د_{۳}^{۲}} ل = ن_{۳} ر_{۲} + \frac{ر_{۳}}{د_{۳}} ن_{۲} \qquad (۹)$$

اسمیں م۳ اور ن۳ جملی صحیحہ لا اور ر کے ہیں اب متطابقی (۸) اور (۹) سی ثابت ہوتا ہے کہ تمام حل معادلات $\frac{ر_{۳}}{د_{۳}} = ۰$ اور ر۲ = ۰ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی حامل ہیں

اب ہم نی اپنی دعوی کا اول جز ثابت کر دیا یعنی تمام حل جو نظم معادلات (۲) سی حاصل ہوتے ہیں وہ معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرایط کو پورا کرتے ہیں

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ تمام قیمتیں جو معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہیں وہ نظم (۲) کے جملوں میں موجود ہوتی ہیں متطابقہ (۳) کو اسطرح لکھ سکتی ہیں کہ

$$ن ا - م ب = \frac{ت}{د} ر \qquad (۱۰)$$

(۴) کو ب ہن اور (۵) کو ا ہن ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$(م_{ا}ب - ن_{ا}ا)\,ر + (م_{ا}ب - ن_{ا}ا)\,\frac{ر_{۱۲}}{د_{۱۲}}\,ر_{۱} = ۰$$

اور اسیواسطی بموجب (۱۰) کے

$$(م_{ا}ب - ن_{ا}ا)\,ر - \frac{ر_{۱۲}}{د_{۱۲}}\,ر\,ر_{۱} = ۰$$

اور اسیواسطے

$$م_{ا}ب - ن_{ا}ا = \frac{ر_{۱۲}}{د_{۱۲}}\,ر_{۱} \qquad (۱۱)$$

(۶) کو ب من اور (۷) کو ا ہن ضرب دو اور تفریق کرو تو

$$(م_{۲}ب - ن_{۲}ا)\,ر_{۱} + (م_{ا}ب - ن_{ا}ا)\,\frac{ر_{۲۳}}{د_{۲۳}}\,ر_{۲} = ۰$$

اور اسیواسطی بموجب (۱۱) کے

$$(م_{۲}ب - ن_{۲}ا)\,ر_{۱} + \frac{ر_{۱۲}\,ر_{۲۳}}{د_{۱۲}\,د_{۲۳}}\,ر_{۱}\,ر_{۲} = ۰$$

اور اسیواسطی $م_{۲}ب - ن_{۲}ا = -\frac{ر_{۱۲}\,ر_{۲۳}}{د_{۱۲}\,د_{۲۳}}\,ر_{۲}$ (۱۲)

اور علی ہذا القیاس (۸) اور (۹) سی ہم یہہ مستنبط کرتے ہین کہ

$$م_{۳}ب - ن_{۳}ا = \frac{ر_{۱۲}\,ر_{۲۳}\,ر_{۳۱}}{د_{۱۲}\,د_{۲۳}\,د_{۳۱}} \qquad (۱۳)$$

متطابقہ (۱۴) بتلا رہا ہی کہ تمام قیمتین لا اور کی جو ا اور ب کو معدوم کرتے ہین وہ $\frac{ر_{۱۲}\,ر_{۲۳}\,ر_{۳۱}}{د_{۱۲}\,د_{۲۳}\,د_{۳۱}}$ کو بہی معدوم کرتی ہین پس اجزاء ضربی $\frac{ر}{د}$ اور $\frac{ر_{۱۲}}{د_{۱۲}}$ اور $\frac{ر_{۲۳}}{د_{۲۳}}$ اور $\frac{ر_{۳۱}}{د_{۳۱}}$ مین ضرور ایک معدوم ہوگا اسی معلوم ہوا کہ معادلات

$\frac{ر}{د} = ۰$ اور $\frac{ر_{۱۲}}{د_{۱۲}} = ۰$ اور $\frac{ر_{۲۳}}{د_{۲۳}} = ۰$ اور $\frac{ر_{۳۱}}{د_{۳۱}} = ۰$.

سے تمام قیمتین ر کی جو داخل ہونی کی قابل ہین انصرام پاتے ہین

پس فرض کرو کہ لا = سہ اور ر = صہ قیمتین ہین جو معادلات ا = ۰ اور ب = ۰ کی شرائط کو پورا کرتی ہین

اول فرض کرو کہ صہ ایک قیمت مساوات $\frac{ر}{د} = ۰$ کی ہی تو یہہ ظاہر ہی کہ قیمتین لا = سہ

اور ر = صہ معادلات $د_{۲}$ = ۰ اور ک = ۰ کی شرایط کو پورا کرینگی

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات $د_{۲}$ = ۰ کی نہیں ہے لیکن وہ قیمت مساوات $د_{۱}$ = ۰ کی ہے

چونکہ ر = صہ سی $د_{۲}$ معدوم نہیں ہوتا تو (۱۰) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

قیمتین لا = سہ اور ر = صہ کی ر کو فنا کرتی ہین تو وہ معادلات $د_{۱}$ = ۰ اور ر = ۰

کی شرایط کو پورا کرتی ہین

دوم فرض کرو کہ صہ قیمت مساوات $د_{۲}$ = ۰ کی نہیں ہی اور $د_{۱}$ = ۰ کی بھی نہیں ہے

بلکہ وہ قیمت مساوات $د_{۳}$ = ۰ کی ہی چونکہ $د_{۲}$ $د_{۱}$ جب ر = صہ کے ہو فنا نہیں ہوتے

تو (۱۱) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ قیمتین لا = سہ اور ر = صہ کی $ر_{۱}$ کو معدوم کرتی ہین

اس سبب سی وہ معادلات $د_{۲}$ = ۰ اور $ر_{۱}$ = ۰ کی شرایط کو پورا کرتی ہین

اب فرض کرو کہ صہ قیمت ان معادلات $د_{۲}$ = ۰ اور $د_{۱}$ = ۰ اور $د_{۳}$ = ۰ مین سی کسی ایک کی

بھی نہین ہی بلکہ وہ مساوات $د_{۳}$ = ۰ کی ایک قیمت ہی چونکہ $د_{۲}$ $د_{۱}$ $د_{۳}$ معدوم نہین ہوتے

جب کہ ر = صہ کے ہو تو (۱۲) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ

قیمتین لا = سہ اور ر = صہ معدوم $ر_{۲}$ کو کرتے ہین اور وہ معادلات $د_{۳}$ = ۰

اور $ر_{۲}$ = ۰ کی شرایط کو پورا کرتے ہین

اسی دوسرا جزدعوی کا ثابت ہوتا ہی مساوات $د_{۲}$ $د_{۱}$ $د_{۳}$ = ۰

جسی تمام قیمتین ر کی جو داخل ہونے کی قابل ہین حاصل ہوتی ہین اسلئے اسکو اخری مساوات کہتی ہین

(۲۷۹) مثالین

(۱) $لا^{۳} + ۳ر لا^{۲} + (۳ر^{۲} - ر + ۱) لا + ر^{۳} - ر^{۲} + ۲ر = ۰$

$لا^{۲} + ۲ر لا + ر^{۲} - ر = ۰$

یہان لا + ۲ر باقی اول ہی پس ر = ۱ اور $ر^{۲}$ - ر دوسری باقی ہے

جو لا سی کچھ لگاؤ نہین رکھتی تو صرف وہی حل ہین جو $د_{۱}$ = ۰ اور ر = ۰

یعنی جو ک۲ - ک = ۰ اور لا + ۲ک = ۰ سی حاصل ہوتے ہیں

(۲) لا۳ + ۳ک لا۲ + ۲ک۲ (ک - ۲) لا + ک۲ - ۴ = ۰

لا۲ + ک لا + ۲ک۲ - ۵ک + ۲ = ۰

یہاں اول باقی (ک - ۲) (لا + ک + ۲) ہے پس ر = ک - ۲ اور

ر = لا + ک + ۲ اور دوسری باقی ک۲ - ۵ک + ۶ ہی اور اسکو کچھ لگاؤ لاسی نہیں ہے

پس تمام حل وہ ہیں جو ر = ۰ اور ب = ۰ یعنی ک - ۲ = ۰ اور لا۲ + ۲ک لا + ۲ک۲ - ۵ک + ۲ =

سے انصرام پاتے ہیں اور جو ر = ۰ اور ر = ۰ یعنی ک۲ - ۵ک + ۶ = ۰

اور لا + ک + ۲ = ۰ سے سرانجام پاتے ہیں

اور اخری مساوات ک کی (ک - ۲) (ک۲ - ۵ک + ۶) = ۰

(۳) لا۳ + ۳ک لا۲ - ۳لا۲ + ۳ک۲ لا - ۶ک لا - لا + ک۳ - ۳ک۲ - ک + ۳ = ۰

لا۳ - ۳ک لا۲ + ۳ لا۲ + ۳ ک۲ لا - ۶ک لا - لا - ک۳ + ۳ک۲ + ک - ۳ = ۰

باقی اول ۲ (ک - ۱) (۳ لا۲ + ک۲ - ۲ک - ۳) ہی اور باقی دوم ۸ (ک۲ - ۲ک) لا ہے

اور تیسری باقی ک۲ - ۲ک - ۳ ہی پس تمام حل وہ ہیں جو ان مساواتوں سی انصرام پاتی ہیں

ک - ۱ = ۰ اور لا۳ - ۳ک لا۲ + ۳ لا۲ + ۳ ک۲ لا - ۶ک لا - لا - ک۳ + ۳ک۲ + ک - ۳ = ۰ سے

اور ک۲ - ۲ک = ۰ سی اور ۳ لا۲ + ک۲ - ۲ک - ۳ = ۰ سے

اور ک۲ - ۲ک - ۳ = ۰ اور لا = ۰ سے

اور ک کی اخری مساوات یہہ ہی کہ (ک - ۱) (ک۲ - ۲ک) (ک۲ - ۲ک - ۳) = ۰

(۴) (ک - ۲) لا۲ - ۲لا + ۵ک - ۲ = ۰

ک لا۲ - ۵لا + ۴ک = ۰

اب ہم دائین طرف کی رکن کو اول جملہ کے ک مین ضرب دیتی ہین تاکہ تقسیم بغیر امثال مکسور کے ممکن ہو پس س = ک اور باقی اول (۳ک - ۱۰) لا + ک۲ + ۶ک اب عمل تقسیم کے

جاری رہتی کے واسطے ہم ۷لا۲ - ۵لا + ۴ے کو ۳ے - ۱۰ میں ضرب دیتے ہیں اور اوسپر عمل ذیل کرتے ہیں

$$\frac{\{(3ے-10)لا+ے^2+6ے\}\{(3ے-10)ے لا^2-(3ے-10)5لا+(3ے-10)4ے\}ولا}{(3ے-10)ے لا^2+(ے^2+6ے)ولا}$$

$$-(ے^3+6ے^2+15ے-50)لا+12ے^2-40ے$$

اب ہم کیا تو اس اخر سطر کی رقموں کو باقی شمار کریں یا اگے تقسیم جاری کریں کیونکہ اوسمیں لا کا درجہ مقسوم علیہ سی کم نہیں ہی اگر ہم دوسرے تجویز کو اختیار کریں تو ۳ے - ۱۰ میں پھر ضرب دیں تو اوسی وہی باقی حاصل ہوگی جو پہلی ہی عمل کو $(3ے-10)^2$ کے ضرب دینی سے حاصل ہوتی پس عمل کو اسطرح جاری کریں

$$-(ے^3+6ے^2+15ے-50)(3ے-10)لا+(12ے^2-40ے)(3ے-10)\}-(ے^3+6ے^2+15ے-$$

$$-(ے^3+6ے^2+15ے-50)(3ے-10)لا-(ے^3+6ے^2+15ے-50)(ے^2+6ے)$$

$$ے^5+12ے^4+87ے^3-200ے^2+100ے$$

یہاں ایک باقی لا سی بالکل بی تعلق ہی اور یہہ قیمت ر۱ کی ہی اور یہاں د۱ = ے پس حل وہ ہیں جو ان مساواتوں سی انصرام پاتے ہیں کہ

$$ے^4+12ے^3+87ے^2-200ے+100=0 \text{ اور } (3ے-10)لا+ے^2+6ے=0$$

(۲۷۸) دفعہ ۲۷۶ کی عمل کی نسبت ہم ان ان باتوں کو کہہ سکتی ہیں کہ

(۱) ہم ہمیشہ س اور ر کو ایسا فرض کرتی ہیں کہ اونمیں کوئی جز ضربی مشترک نہ ہو اسواسطے کہ اگر دفع اعظم س اور ر کا ہو تو تقسیم د۱ کی ب پر تعبیر امثال مکسور کے داخل ہوتی کی ہو جائیگی جیسا کہ متطابقہ (۳) کی ظاہر ہی پس س نہایت سادہ جز ضربی نہیں جو مضروب فیہ ا کا پہلی ب پر تقسیم کرنی سی بنا ہی اسی معلوم ہو کہ نہایت سادہ جز ضربی فرض کرنی سی ہم د = ا کے بناتے ہیں

اور علی ہذا القیاس س۱ اور س۲ ... ایسی ہیں کہ س۱ اور ر۱ کا کوئی جز ضربی مشترک نہیں ہے

اور س۲ اور ر۲ کا کوئی جز ضربی مشترک نہیں ہے

اسی معلوم ہوا کہ ہم تمام س و س۱ و س۲ و س۳ ۰۰ ایسا مقرر کر سکتی ہیں کہ د = ۱ اور د۱ دفق اعظم س اور ر۱ کا ہو اور د۲ دفق اعظم $\frac{\text{س س۱}}{\text{د}_1}$ اور ر۲ کا اور د۳ دفق اعظم $\frac{\text{س س۱ س۲}}{\text{د}_1 \text{د}_2}$ اور ر۳ کا اور علی ہذا القیاس

دوم فرض کرو کہ جو لاسی بی لگاؤ باقی فرض کی گئی نہیں وہ برابر صفر کی ہی تو ر۲ دفق مشترک لا اور ب کا ہوا اسی معلوم ہوا کہ حل معادلات لا = ۰ اور ب = ۰ کے

(۱) لا اور ی کے بی شمار قیمتوں پر جو مساوات واحد ر۲ = ۰ سی مستنبط ہوتی ہیں شامل ہیں (۲) معادلات $\frac{\text{لا}}{\text{ر}_2} = ۰$ اور $\frac{\text{ب}}{\text{ر}_2}$ کے حل کرنی سی جو لا اور ی کے قیمتیں محدود حاصل ہوتی ہیں اون پر شامل ہیں لیکن اس سبب سی کہ ر۳ = ۰ تو

(۱) کی مطابقوں سی بموجب دفعہ ۲۷۶ کے یہ مستنبط ہوتا ہی کہ ر۲ تقسیم ر اور ر۱ پر ہوتے ہیں اب مطابقوں (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۱۰) (۱۱) (۱۲) کو بموجب دفعہ ۲۷۶ کے ر۲ پر تقسیم کرو تو جدید مطابقی حاصل ہونگی جنمین ا و ب و ر و ر۱ اور ر۲ بجای $\frac{\text{لا}}{\text{ر}_2}$ و $\frac{\text{ب}}{\text{ر}_2}$ و $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_2}$ و $\frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2}$ و $\frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_2}$ کی رکہی گئی ہیں بواسطت ان مطابقوں کے ہم ثابت کر سکتی ہیں کہ تمام حل معادلات $\frac{\text{لا}}{\text{ر}_2} = ۰$ اور $\frac{\text{ب}}{\text{ر}_2} = ۰$ ان نظمون کے حل کرنی سی حاصل ہوتی ہیں کہ

$\frac{\text{ر}}{\text{د}_2} = ۰$ اور $\frac{\text{ب}}{\text{ر}_2} = ۰$

$\frac{\text{ر}_1}{\text{د}_1} = ۰$ اور $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_2} = ۰$

$\frac{\text{ر}_2}{\text{د}_2} = ۰$ اور $\frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} = ۰$

مثلاً فرض کرو کہ

$\text{لا}^3 + \text{ی لا}^2 - (\text{ی}^2 + ۱)\text{لا} + \text{ی} - \text{ی}^3 = ۰$

اور $\text{لا}^2 - \text{ی لا} - (\text{ی}^2 + \text{ی} + ۹)$ ب $+ \text{ی}^3 + \text{ی}^2 + ۹\text{ی} = ۰$

تقسیم اولین سی باقی کی واسطی $\left[\text{ی لا} + (۳\text{ی} + ۴)\text{لا} - (\text{ی}^3 + ۳\text{ی}^2 + ۴\text{ی})\right]$

حاصل ہوتا ہے پس

ر = ے لا۲ + (۳ے + ۴) لا - (ے۳ + ۳ ے۲ + ۴ے)

اب تقسیم دوم کرنی کے واسطے مقسوم کو دین اور تقسیم کے اول مرحلہ کے بعد بہر دین ضرب دو تاکہ تقسیم جاری رہی باقی ر ا۱ کے واسطے ۸ (ے۲ + ۳ے + ۲) (لا - ے) حاصل ہوگا اب ر کو لا - ے پر تقسیم کرو تو خارج قسمت ے لا + ے۲ + ۳ے + ۴ ہوگا اور اب کوئی باقی نہیں ہے پس معادلات مفروضہ کی حل (۱) مساوات واحد لا - ے = ۰ سی جو بی شمار قیمتین لا اور ے کی حاصل ہوتی ہین اون پر شامل ہین (۲) اور ان محدود حلون پر شامل ہین جو ان معادلات کی حل کرنے سے حاصل ہوتی ہین کہ

ے۲ + ۳ے + ۲ = ۰ اور ے لا + ے۳ + ۳ ے + ۴ = ۰

سوم دفعہ ۲۷۶ کا ثبوت فرض کرنا ہی کہ لا اور ے محدود ہین مگر یہہ ممکن ہے کہ ایک مساوات کی حل بی شمار ہون مثلاً فرض کرو کہ (ے - ۱) لا۲ - ۲ لا + ے۲ = ۰ پس جب تک کہ ے برابر واحد کے نہو تو اس مساوات درجہ دوم سی دو محدود قیمتین انصرام باقی ہین اگر ے نہایت قریب اکی ہوتا ہے تو ایک قیمت لا کی بی نہایت زیادہ ہوتی ہی بائیسوان باب جبر مقابلہ کا دیکھو

پس جب ے = ۱ تو ہم کہتے ہین کہ لا کی لانہایہ قیمتین ہین

ہم نی دفعہ ۲۷۶ کی تحقیقات مین ایسی لا اور ے کی غیر محدود قیمتین نہین فرض کی ہین اون پر علیحدہ بحث ہوسکتی ہی مثلاً اگر ہم یہہ تحقیق کرنا چاہین کہ لا کی ایک قیمت غیر محدود داخل ہونی کی قابل ہی تو ہم $\frac{۱}{لا}$ بجای لا کی رکہین اور مساوات کو کسری خالص کرین اور فرض کرین کہ لا = ۰ تو اب ہم کو دو مساواتین ے کی حاصل ہونگین اور اگر ان کی ایک قیمت یا کئی قیمتین مشترک ہونگین تو اس قیمت یا ان قیمتون کو مع غیر محدود قیمت لا کے معادلات مفروضہ کی شرایط کا پورا کرنی والا

تیئیسوان باب ایک جملہ کا سلسلہ مین پہلانا

(۲۷۹) فرض کرو کہ ایک مساوات ایسی ہی کہ اسمین دو مقادیر مجہول لا اور ی مخلوط ہین پس اگر ہم مساوات کو حل کرکی قیمتین ی کی لا کی رقمون مین دریافت کرسکین تو ی کی ایک قیمت کو سلسلہ قواء لا مین معلوم کرسکینگی اور اب ہم ی کی قیمتون کی پہلانی کی ایک ترکیب لکھتی ہین اور اسی پہلی ی کی قیمتین محدود رقمون مین نہین دریافت کرینگی

اس ترکیب کو لاگرانژنی ایجاد کیا تہا نیوٹن صاحب کا جو متوازی الاضلاع مشہور ہے اوسمین بہی اس عمل کا بیان ہوا ہی جس کسی کو اس مسئلہ کا مفصل حال دریافت کرنا ہو کہ وہ کس طرح ایجاد ہوا اور کسنے ایجاد کیا تو وہ پروفیسر ڈی مورگن صاحب کی تحریر کو اس باب مین دیکھین

(۲۸۰) فرض کرو کہ مساوات

ا لا^ی + ب لا^ی ص + . . . + ک لا^ی ک + . . . + ص ی^ق = ۰

سے تعبیر ہوتی ہی اسمین ا و ب . . . ک . . . ص تمام جملی لا کے ہین اور ہم فرض کرتی ہین کہ سہ وصہ . . . کہ . . . بہ ترتیب تنازلی مقادیر جبریہ کی لکھی ہوئی ہین اور تمام تحقیقات جہان ہم نے بڑا یا بہت بڑا یا چہوٹا یا بہت چہوٹا مقادیر کو لکہا ہے وہان اونکی معنی جبریہ لئے ہین

فرض کرو کہ ا لا^ی درجہ کا یعنی لا^ی سی کوئی بڑی قوت لا کی ا مین نہین واقع ہوتی اور ب ب درجہ کا ہی . . . ک ک درجہ کا اور . . . ص ص درجہ کا

بالفعل ہمارا بڑا مطلب یہہ ہے کہ دفعہ ذیل کے مسئلہ کو حل کرین

(۲۸۱) مطلب ہمارا ہی کہ وہ سب طریقی دریافت کرین جسکی موافق قیمت ط کی ایسی دریافت کرسکتے کہ سلسلہ ارقام ذیل مین دو یا زیادہ رقمین برابر یا بڑی باقی رقمون مین سی کسی ایک رقم سی ہو

ا + سہ ط ب + صہ ط . . . ک + کدط . . . ص + قدط

اول ط کو فرض کرو کہ + ص ہی تو اول رقم باقی ارقام مین سی ہر ایک سی بڑی ہوگی اور جب ط گہٹتی ہے تو ہر ایک رقم گہٹتی ہی لیکن ہر ایک بہ نسبت اپنی ماقبل کے رقم زیادہ

اہستہ کم ہوتی ہی فرض کرو کہ ط کی وہ قیمت ہی کہ ا + سہ ط اول برابر ارقام مابعد مین سی ایک ماکی ایک کے برابر ہو اور یہہ قیمت اسطرح حاصل ہوگی کہ معادلات ذیل مین سی ط کی سب سے بڑی قیمت دریافت کرین

ا + سہ ط = ب + صہ ط اور ا + سہ ط = س + لرط ... ا + سہ ط = ک + کدط ... ا + سہ ط = ص + قدط

یعنی بڑی قیمت ط کی اس سلک ذیل سے دریافت ہوگی کہ

$$\frac{ب-ا}{سہ-صہ} \text{ و } \frac{س-ا}{سہ-ر} \ldots \frac{ک-ا}{سہ-کد} \ldots \frac{ص-ا}{سہ-قد}$$

فرض کرو کہ $\frac{ک-ا}{سہ-کد}$ ان قیمتون مین سب سی بڑی قیمت ہی اگر ایک قیمت بڑی دوسری سی ہے یا اگر کئی ایک برابر اور بڑی باقی مین سی بہ نسبت کسی کے ہو تو $\frac{ک-ا}{سہ-کد}$ کو اونمین اخر فرض کرو اور $\frac{ک-ا}{سہ-کد}$ کو مر سے تعبیر کرو

فرض کرو کہ ط کم مری ہوتا جائی یہانتک کہ ک + کدط اول برابر ایک یا کئی ایک کے ارقام مابعد مین سی ہوای قیمت ط کی موافق سابق کی معادلات ذیل مین ط کی سب سے بڑی قیمت لینی سے دریافت ہو سکتی ہے

ک + کدط = ل + لرط و ک + کدط = م + لب ط ... ک + کدط = ص + قدط

یعنی سب سی بڑی قیمت اس سلک مین سی لینی چاہئی کہ

$$\frac{ل-ک}{کد-کر} \text{ و } \frac{م-ک}{کد-لب} \ldots \frac{ص-ک}{کد-قد}$$

فرض کرو لا انمین سی سب سی بڑی قیمت منتخب کی جاے اگر ایک قیمت بڑی بہ نسبت کسی اور کی ہو یا کئی ایک بڑی بہ نسبت اور دن کی ہون تو انمین سی سب سے اخر رقم منتخب کیجائی فرض کرو کہ مر قیمت اس منتخب رقم کی ہی جو $\frac{ل-ک}{کد-کر}$ فرض کیجائی

فرض کرو کہ ط پہر کم کر سی ہوتی جای اور موافق سابق کی عمل کر کی مر کو معادلات ذیل سے دریافت کرو

ن + سد ط = ع + بدط ... ن + سدط = ص + قدط

یہی عمل جاری رہی جب تک کہ رقم ص + قدط قیمت ط کی دریافت کرنے کے لئے کام ائی

پس اسی ہم دیکھتے ہیں کہ ط کی تمام مناسب قیمتیں دریافت ہوگئیں

(۲۸۲) اب فرض کرو کہ $ا = لا (ا_۱ + ا_۱)$ اسمیں $ا_۱$ بے لگاؤ لاسی ہی اور $ا_۱$ جب لاانہایت ہو معدوم ہوجائیگا اور اسیطرح فرض کرو کہ $ب = لا (ب_۱ + ب_۱)$ اور علی ہذا القیاس فرض کرو $و = لا (و_۱ + و_۱)$ اسمیں تو بے لگاؤ لاسی ہی اور جب لاانہایت ہوتا ہی تو $و_۱$ معدوم ہوتا ہی پس مساوات مفروضہ کو جسمیں لا اور ط ملتف ہیں یہہ قیمتیں مندرج کرو تو

$لا^{ا+سط} (ا_۱ + ا_۱) (و + و_۱)^{سـ} + لا^{ب+صط} (ب_۱ + ب_۱) (و + و_۱)^{صـ} + \ldots$

$\ldots + لا^{ک+کط} (ک_۱ + ک_۱) + (و + و_۱)^{کـ} + لا^{ص+قط} (ص_۱ + ص_۱) (و + و_۱)^{قـ} =$

چونکہ یہہ مساوات لا کی سب قیمتوں پر حاوی ہی اسلئے وہ لا کی لاانہایت قیمت پر بھی حاوی ہوگا اور یہہ صورت نہیں واقع ہوتی کی اگر لا کی سب سی اعلی قوت صرف ایک رقم میں بھی واقع ہو اس مطلب کو یوں بھی بیان کرسکتے ہیں کہ مجرد عہ امثال لا کی اعلی قوت کا معدوم ہونا بس یہی بات ہی جسکی سبب سے تحقیقات دفعہ گذشتہ کا استعمال ہوسکتا ہے

بموجب فرض کی مرسب سی بڑی قیمت ط کی ہے جو داخل ہوسکتی ہی اور مساوات بالا کی دائیں طرف جو جملہ کا حصہ ایسا لکھا ہی کہ جسمیں لا کی اعلی قوت ملتف ہی یہہ ہے کہ

$لا^{ا+سط} \{ (ا_۱ + ا_۱) (و + و_۱)^{سـ} + \ldots + (ک_۱ + ک_۱) (و + و_۱)^{کـ} \}$

جب لاانہایت ہو تو امثال $لا^{ا+سط}$ معدوم ہونی چاہیے پس بات سی یہہ مساوات ؤ کی قیمت دریافت کرنے کے واسطی حاصل ہوتی ہے کہ

$ا_۱ و^{سـ} + \ldots + ک_۱ و^{کـ} =$

اس مساوات سی و کی قیمتیں دریافت ہونگیں اور پھر تو کی قیمت کی موافق ؤ کی قیمت حاصل ہوگی جسمیں رقم لا کی اعلی قوت رکھنی والی لو لا ہوگی

اور اسی طرح سی مر پر قیاس کرکے مساوات ذیل لو کے تحقیق کرنی کے واسطی حاصل ہوگی کہ

$ک_۱ لو^{کـ} + \ldots + ن_۱ لو^{عـ} =$

اس مساوات سے تین قیمتین تو کی دریافت ہوسکتی ہین اور لو کی ہر قیمت کی موافق ء کی ہر یک قیمت دریافت ہوگی
جسمین رقم اعلی قوت لا کی رکھنی والی لو لا ہوگی
پس اسطرح عمل کرنے سے ہم ء کی ہر قیمت مین اعلی قوت لا کی دریافت کرتے ہین
اب پہر ط اور لو کی متناظر قیمتون کا ایک زوج مستحصلہ کام مین لاؤ اور
ء = لا^ط (لو + ل) اور ء کی اس قیمت کو اصل مساوات من جسمین لا اور ء ملتف ہین
مندرج کرو تو اسطرح ایک مساوات حاصل ہوگی کہ جسمین لا اور لو اور مقادیر معلومہ متعلق ہونگین
اب وہ ترکیب کام مین لائیں جسسے کہ لو کی قیمتون من لا کی اعلی قوتین دریافت ہون
پس اسطرح سے دوسری رقمین ء کی قیمتون کی صورت مفصلہ کی سلسلہ کی دریافت ہونگین
جسمین لا کی قوتون مین ترتیب تنازلی ہوگی اور اس عمل کو جہان چاہین جاری رکھین
(۲۸۳) ترکیب مذکورہ کا اقتضا یہہ نہین ہی کہ قوت سہ دصہ . . . قدوا وب . . . ص
اعداد صحیح ہون مگر اس کتاب من جس قسم کی مساواتون کا ذکر ہی انکی اول رقمون کی دریافت کرنی ہی
جب اس ترکیب کا استعمال کرینگے تو وہ اعداد صحاح ہونگی
اب ہم اس ترکیب کا استعمال ایک مثال مین کرتے ہین
فرض کرو کہ یہہ مساوات ہو کہ
ء^۴ (لا^۳ - ۳لا) + ء^۳ (لا^۳ + ۲لا^۲) - ء (۴لا^۵ + ۳) + ۳لا^۶ = ۰
اب سلک ارقام $\frac{ب-ا}{سہ-صہ}$ و $\frac{س-ا}{سہ-ر}$ . . . کی اس صورت مین یہہ ہے کہ
$\frac{۳-۲}{۴-۲}$ و $\frac{۵-۳}{۴-۱}$ و $\frac{۶-۴}{۴-۲}$ اب انمین سی دوسری اور تیسری رقم برابر ایک
کے ہی جو بہ نسبت $\frac{۱}{۲}$ کی بڑہی ہی اور یہہ قیمت اول رقم کی ہی پس مر = ۱ اسی معلوم ہوا کہ
ء = لا (لو + ل) رکھو اور اسکو مساوات مفروضہ مین رکھو تو سب سے اعلی قوت لا کی لا^۶ ہے
اور رقم جسمین وہ ملتف ہے یہہ ہے کہ
لا^۶ [(لو + د)^۴ - ۴ (لو + ل) + ۳]

پس جب لا لانہایت ہو تو یہہ مثال معدوم ہونی چاہیئی اور اسی سبب حاصل ہوتا ہے

$$لو^۳ - ۴لو + ۳ = ۰$$

اب یہہ ظاہر ہی کہ لو = ۱ ایک حل ہی اور جملہ مشتقہ $۳لو^۲ - ۴$ بھی معدوم ہوتا ہے جب لو = ۱ تو قیمت ایک ثانی ہے

$لو^۳ - ۴لو + ۳$ کو $(لو - ۱)^۲$ پر تقسیم کرو تو خارج قسمت $لو^۲ + ۲لو + ۳$ حاصل ہوگا

پس اور قیمتین لو کی مساوات $لو^۲ + ۲لو + ۳ = ۰$ سے حاصل ہونگین اور وہ

$-۱ \pm \sqrt{-۲}$ ہین پس اب یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ مساوات مفروضہ سہی دو حقیقی قیمتین د کی ارقام ہین حاصل ہونگین اور لا اول رقم ان قیمتون مین سی ہر ایک قیمت مین اوسوقت ہوگی کہ وہ لا کی قواء متنازلہ کے سلسلہ مین بیان کیجاوی

اب ہم لا $(۱ + لو)$ کو د کی جگہ مساوات مفروضہ مین رکھو اور لو کی قیمتون کو دریافت کرو بالفعل اسی مثال کو دوبارہ فرض کرینگے

(۲۸۴) دفعات ۲۸۱ اور ۲۸۲ مین نتایج ذیل حاصل ہوتے ہین

(۱) اگر $ا + سہ ب + صہ \ldots ک + کد$ ص + قد سب برابر ہون

تو مقادیر مر دمر دمر ۔ ۔ ۔ سب برابر واحد کے ہونگے

(۲) اگر مقادیر $ا + سہ وب + صہ \ldots ک + کد \ldots$ ص + قد

مین سی دو یا زیادہ برابر ہون اور بڑی بہ نسبت کل باقی ارقام کی ہون تو واحد سلک مر دمر دمر ۔ ۔ مین واقع ہوگا اسواسطی ظاہر ہی کہ ط = ۱ ایک مناسب قیمت تحقیقات ۲۸۱ مین ہی کیونکہ یہہ قیمت دو یا زیادہ ارقام کو برابر اور بڑی بہ نسبت باقی ارقام کے بناتی ہے

جبریہ خطوط منحنی کی خطوط مستقیمہ ممتنع الملاقات کا ضابطہ ان دو نتایج مین ملتف ہے باقی اس دفعہ مین ہم سہ وصہ ولر ۔ ۔ سب کو صحاح فرض کرتی ہین اور ذ کو صفر

(۳) دفعہ ۲۸۲ میں اول مساوات لوکی سہ - کد قیمتیں رکھتی ہی اور دوسری مساوات کی کد - سد قیمتیں اور علی ہذا القیاس میں الحاصل ہم کو یہہ قیمتیں ی کی اول رقم کی دریافت ہوتی ہیں اور یہی ہونا چاہئی تہا اسلئی کہ مساوات ی کی سہ درجہ کی ہے

(۴) فرض کرو کہ تمام جملی لاکی ک سی ن تک برابر ہیں اور اعلی درجہ کی بہ نسبت اور دن کے ہیں تو ی کی قیمتوں میں سے سہ - کد قیمتیں ہونگیں جو لاکی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہیں اور کد - سہ قیمتیں ہونگیں جو صفر قوت سی لاکی شروع ہوتی ہیں اور سد قیمتیں جو لا منفی قیمتوں سی شروع ہوتی ہیں اسواسطی کہ کد - سد قیمتیں ی کی ہیں جو لاکی صفر قوت سی شروع ہوکر صعود کرتی ہیں اس سبب سے کہ بموجب فرض کی قیمت ط = ۰ تمام ارقام ذیل

کد + کدط دل + لرط ۲ ... ن + سدط کو برابر اور بڑا کسی قسم سی جو اونکی اگی ائی بناتی ہی سہ - کد قیمتیں ی کی جو لاکی مثبت قیمتوں سی شروع ہوکر صعود کرتی ہیں اور اس صعود کا سبب مثبت قیمتیں ط کی اور اونکی موافق قیمتیں تو کی ہیں جو قوت نمایون

سہ وصہ ... کد کے تعلق سی حاصل ہوتی ہیں اور سد قیمتیں ی کی لاکی منفی قوتون سے شروع ہوتی ہی اور صعود کرتی ہیں اور یہہ صعود ط کی منفی قیمتوں سی اور اونکی موافق تو کی قیمتوں سی جو قوت نمایون سد ... فدی حاصل ہوتی ہیں ہوتا ہے اور اسمین قد = ۰

(۵) ا ب و ... ص تمام الام متحد الدرجہ ہیں اور م اعلی درجہ بہ نسبت مابقی کے رکہتا ہی سہ - لب قیمتیں ی کی ہیں جن میں اعلی قوت لا کی مثبت قوت نما سہ - لب ہی اور ی کی لب قیمتیں ہیں جن میں اعلی قوت لا کا منفی قوت نما - م - ا / لب ہے

(۲۸۵) دفعہ ۲۸۲ میں جب مساوات لو کی حاصل ہوتی ہی اور اوسی ی کی قیمتوں کے دوسرے رقم کی دریافت کرتی ہیں اوسپر ایک بات ہم کہتی ہیں فرض کرو کہ ی = لا (یو + ی) اسمین لو اور ط معلوم ہیں اس ی کی قیمت کو مساوات مفروضہ میں مندرج کرو اسطرح سی مساوات مفروضہ کے درجہ کی مساوات حاصل ہوگی اکثر ی کی قیمتیں میں بعض داخل ہونی کی قابل ہونگیں اسواسطے کہ جب فرض کرے لو معدوم ہوتا ہی جب لا لا نہایت ہو

پس وہ قیمتین د کی جو لا کی مثبت قوت سی شروع ہوتی ہین یا لا کی صفر قوت سے اونکو مسترد کرنا چاہیے یہہ لو کی مسترد قیمتین د کی اور قیمتون سی متعلق ہونگین جنسے کہ بالفعل ہم کو کچھ تعلق نہین ہی کیونکہ اسوقت صرف ہم یا تو وہ خاص قیمت د کی تلاش کر رہی ہین جو لا کی سی شروع ہوتی ہی یا خاص د قیمتون کی تلاش کر رہی ہین جو اسطرح شروع ہوتی ہین

اور ایک سی زیادہ ہین اور جنمین یو اور ط کی معلوم قیمتین ہین

(۲۸۶) دفعہ ۲۸۲ کی مثال کو دوبارہ لو کی جگہ لا (لو + ۱) اور لو = ۱ کے فرض کرو تو لا پر تقسیم کرنے کے بعد یہہ نتیجہ حاصل ہوگا

$$\text{لا}^{\text{د}}(\text{لا}^{0}\ldots) + \text{لا}^{\text{د}+1}(4\,\text{لا}^{0}\ldots) + \text{لا}^{\text{د}+2}(6\,\text{لا}^{0}\ldots) - \text{لا}^{\text{د}+3}(10\,\text{لا}^{0}\ldots) - 2\,\text{لا}^{\text{د}+4} = 0$$

یہان لو کی مثال مین اعلی قوتین لا کی بیان کردین اب دفعہ ۲۸۲ کی کسور سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{5-5}{3-4} \quad \text{د} \quad \frac{5-5}{2-4} \quad \text{د} \quad \frac{5-4}{1-4} \quad \text{د} \quad \frac{5-4}{0-4}$$

یہان اول دو رقمین صفر ہین اور جبر مقابلہ کی اعتبار سی بڑی بہ نسبت اوروں کے ہین لیکن صفر قیمت مسترد ہونی چاہئی جسکا بیان دفعہ بالا مین کیا گیا اسیواسطی دفعہ ۲۸ کی طرح پھر ہم عمل کرین اور فرض کرین کہ مر = ۰ اب ہم کو مر دریافت کرنا ہی

اسواسطی یہہ کسرین بنائی جائینگی

$$\frac{5-4}{1-2} \quad \text{د} \quad \frac{5-4}{0-2}$$

انمین سی دوسری $-\frac{1}{2}$ ہی اور جبر مقابلہ کے لحاظ سی بڑی ہی پس اسکے موافق ہم لو = لا$^{-\frac{1}{2}}$ اور مساوات ۶ لو^{2} − ۲ = ۰ سی قیمت لو کی دریافت کرتی ہین پس لو = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

پس اول رقم لو کی $\frac{1}{\text{لا}^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}}$ یا $-\frac{1}{\text{لا}^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}}$ ہے اسیواسطی جہانتک ہم نی عمل کیا ہے

د = لا$^{\text{د}}$ (۱ + $\frac{1}{\text{لا}^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}}$ + ۰۰) یا د = لا$^{\text{د}}$ (۱ − $\frac{1}{\text{لا}^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}}$ + ۰۰)

(۲۸۷) لو کی قیمتون کی صفت مساوات عامہ لو کی بناوٹ کی امتحان سی معلوم ہوسکتی ہے اول فرض کرو کہ بجای د کی لا اور کہین اور یہہ لو کو لو + لو سی تبدیل کرین جب ہم د کی جگہ لا لو

رکھین تو دائمین طرف کا رکن مساوات یہہ حاصل ہوگا کہ

صر (لو) لا^{ن_1} + صر$_2$ (لو) لا^{ن_2} + صر$_3$ (لو) لا^{ن_3} + . . .

اسمین ن$_1$ و ن$_2$ و ن$_3$ . . . مقدار کی لحاظ سی بہ ترتیب تنازلی ہین اس جملہ کو سر (لو) سی تعبیر کرو تو مساوات لو کی یہہ ہوگی کہ سر (لو + لو) = مساوات مفروضہ مین ء کی قوت نما مثبت فرض کئی ہین مساوات لو مین اسطرح لکھی جائیگی کہ

سر$_{سہ}$ لو^{سہ} + سر$_{سہ-1}$ لو$^{سہ-1}$ + سر$_{سہ-2}$ لو$^{سہ-2}$ + . . . + سر$_1$ لو + سر$_0$ =۰

اسمین سر$_{سہ}$ کو بجای $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots سہ}$ سر (لو) کے رکھا ہی اور اسی طرح کے معنی سر$_{سہ-1}$ و سر$_{سہ-2}$ کے ہین اب اگر کوئی خاص قیمت لو کی نہ مقرر کیجای تو اشکال اکثر قوای لو کے اوپر کی مساوات مین جملی لا کی ہونگی اور سب ایک درجہ کی ہین یعنی ن$_1$ درجی کے پس بموجب دفعہ ۲۸۴ کی لو کی قیمتین لا کی صفر قوت سی شروع ہونگین لیکن اگر لو ایسا ہو کہ صر (لو) = ۰ تو جملہ سر کا ادنی درجہ کا بہ نسبت جملہ سر کے ہوگا مگر اسی معلوم ہوا کہ لو کی قیمتون سی ایک قیمت لا کی منفی قوت سی شروع ہوتی یعنی لا$^{(ن_1-ن_2)}$ اور یہی قیمت لو کی ہی جسکی ہم تلاش کر رہی تہی چونکہ صر (لو) = ۰ مساوات ہی جسی لو کی قیمت موافق اپنی عمل کے ہم دریافت کرلینگی لیکن اگر مساوات صر (لو) = ۰ کی قیمتین برابر ہون تو لو کی ایک سی زیادہ مناسب قیمتین ہم کو حاصل ہونگین مثلاً فرض کرو کہ خاص قیمتین جو ہم نی منتخب کی تہی وہ چار دفعہ واقع ہوتی ہی تو لا کی ن$_1$ درجہ کا سر$_4$ ہوگا اور ن$_2$ درجہ کی سر$_3$ و سر$_2$ و سر$_1$ و سر$_0$ ہونگے اسی بموجب دفعہ ۲۸۴ کے معلوم ہوتا ہی کہ لو کی چار مناسب قیمتین ہونگین ہر یک لا کی شروع ہوگی جسمین لا کا صعود منفی قوت - $\frac{1}{4}$ (ن$_1$ - ن$_2$) سے شروع ہوگا

ہم نی یہان یہہ فرض کیا ہی کہ صہ (لو) اور اوسکی مشتقہ جملی کی اوس قیمت سی جسپر بحث ہو رہی ہے، معدوم نہین ہوا

(۲۸۸) جو کچھہ ہم نی اوپر لکھا ہی اوسمین یہہ تحقیق کیا ہی کہ ء کی قیمتین لا کی قوا ر متنازلہ مین بیان ہوتی ہین

پس اگر ہم اپنی نتایج کو علم ہندسہ کی موافق بیان کرین اور خطوط سنخی جو کی اون قیمتونکی موافق کہ قواء لامین بیان ہوئی ہین مرتسم کرین تو اول رقم اوس سلسلہ کی جو قیمت ک کی واسطے ہم نی دریافت کی ہی اوسی صفت ذاتی خط سنخی کی مبدء سی بہت فاصلہ پر معلوم ہوگی لیکن یہہ ترکیب اسطرح بہی استعمال مین آسکتی ہی کہ قیمتین ک کی موافق قواء متصاعدہ کے دریافت کرین تو قیمت ک کی اول رقم صفت ذاتی خط سنخی کی جو مبدء سی بہت قریب ہوتی ہوئی تبلائیگی تاکہ ک کی قیمتین قواء متصاعدہ لامین دریافت کرنی کی ترکیب کو استعمال مین لاسکین یہہ تبدلات ہم کو کرنی چاہئی کہ اول سہ وصہ . . . قد کو بہ ترتیب تصاعدی بلحاظ مقادیر جبریہ کی لکہو اور ا بعد دم ہوگا جب لا معدوم ہوگا وہ لا کی لانہایت ہونی سی معدوم نہین ہوگا پس لا سب سی ادنی درجہ قوت کی ا مین ہو تو موافق سابق کی وہ سب سے اعلی قوت نہین ہوگی اور اسی کی متماثل تبدل ب ا اور ب مین اور باقی اور متشابہ مقادیر تبدیل کرو

پس ط جب + صہ ہی تو مقادیر ذیل

ا + سہ ط و ب + صہ ط . . ک + کد ط . . . ص + قد ط

مین ترتیب تصاعدی بلحاظ مقدار کے ہوگی

موافق سابق کی سب سے بڑی قیمت ط کی ان مساواتون سی دریافت کرو کہ

ا + سہ ط = ب + صہ ط و ا + سہ ط = س + لر ط . . . ا + سہ ط = ک + کد ط . . . ا + سہ ط = ص + قد ط

چوبیسوان باب مسائل متفرقہ

(۲۸۹) اس باب مین معادلات کی مسائل متفرقہ نہایت دلچسپ اور بہت بکار آمد لکہینگے اوسی اوپر کے صفحون مین جو اصول لکہی ہین اونکی توضیح اور تشریح خوب ہوگی گویا یہہ مسائل اون اصول کی مثالین ہین

ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{ا^{۲}}{لا - ا^{۲}} + \frac{ب^{۲}}{لا - ب^{۲}} + \frac{س^{۲}}{لا - س^{۲}} + \ldots + \frac{ک^{۲}}{لا - ک^{۲}} - لر = ۰$$

کی کوئی خیالی قیمت نہیں ہوئی اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ ع + ق $\sqrt{-1}$ ایک قیمت ہی تو ع - ق $\sqrt{-1}$ بھی دوسری قیمت ہوگی اب ان قیمتوں کو متواتر مساوات بجای لاکے لکھو اور ماحصل ایسمین تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ق\left[\frac{ا^۲}{(ع-ا)^۲+ق^۲}+\frac{ب^۲}{(ع-ب)^۲+ق^۲}+\frac{س^۲}{(ع-س)^۲+ق^۲}+\cdots+\frac{ک^۲}{(ع-ک)^۲+ق^۲}\right]=۰$$

اور یہہ ناممکن ہی اگر ق = ۰ کے نہ ہو

یا اس مسئلہ کو اسطرح ثابت کرو کہ مساوات مفروضہ کی دائیں طرف کی رکن کو مح (لا) سی تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ا، ب، س، ... ک مقادیر حربیہ بہ ترتیب تصاعدی ہین جب لا کچھہ ہی بڑا بہ نسبت ا کے ہو تو مح (لا) کی اول رقم بہت بڑی ہوگی اور مثبت ہوگی اور لا کی ا کی ساتھہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی مثبت قیمت قطعی حاصل کرسکتی ہین اور جب لا کچھہ ہی کم بی ہو تو دوسرے رقم مح (لا) کی بہت بڑی ہوگی اور منفی ہوگی اور لا کی ب کے ساتھہ قربت کافیہ فرض کرکی ہم مح (لا) کی منفی قیمت حاصل کرسکتی ہین پس لا کی ا اور ب کے درمیان بعض قیمت کے مقرر کرنی سی مح (لا) کے علامت بدلتا ہی اور اسیطرح ب اور س کے درمیان لا کی بعض قیمت سے مح (لا) کی علامت بدلتی ہے اور علی ہذا القیاس اسطرح ہم ثابت کرسکتی ہین کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتین حقیقی اور غیر متساوی ہین

مساوات مح (لا) = ۰ کی جو صورت ہی اوسی بہت آسان مساوات کی خاصیت جسکا اوپر بیان ہوا آسانی سی ثابت ہوسکتی ہی ظاہری کہ اگر مساوات کو کسوری خالص کرکے اصلی گینڈی کی صورت مین مساوات کو بدل لین تو کچھہ ہماری نتیجہ نکالنی پر اثر نہین ہوگا یعنی اگر بجای مساوات مح (لا) = ۰ کی یہہ مساوات بنالین کہ

مح (لا) (لا - ا) (لا - ب) (لا - س) ... (لا - ک) = ۰

تو کچھہ نتیجہ مین فرق نہین ایگا اور ثبوت ظاہر ہوجائیگا

(۲۹۰) ان مقادیر لا، ولا، ولا، ... لان کی قیمتین ان ن مساواتون سی دریافت کرو

$$لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \cdots + لا_ن = ۰$$

$$ا_۱ لا_۱ + ا_۲ لا_۲ + ا_۳ لا_۳ + \cdots + ا_ن لا_ن = ۰$$

$$ا_۱^۲ لا_۱ + ا_۲^۲ لا_۲ + ا_۳^۲ لا_۳ + \cdots + ا_ن^۲ لا_ن = ۰$$

$$ا_۱^{ن-۲} لا_۱ + ا_۲^{ن-۲} لا_۲ + ا_۳^{ن-۲} لا_۳ + \cdots + ا_ن^{ن-۲} لا_ن = ۰$$

$$ا_۱^{ن-۱} لا_۱ + ا_۲^{ن-۱} لا_۲ + ا_۳^{ن-۱} لا_۳ + \cdots + ا_ن^{ن-۱} لا_ن = ب$$

ان مساواتون جداگانہ س ن-۱ و س ن-۲ ... و س ۲ و س ۱ مین ضرب دو اور اور سب بفعل س ن-۱ و س ن-۲ و ... س ۲ و س ۱ غیر معین ہین اور جو ماحصل ہون اونکو جمع کرو اور یہہ فرض کرو کہ س ن-۱ و س ن-۲ ... س ۲ و س ۱ ایسی ہین کہ لا۲ و لا۳ ... لان کے امثال کو معدوم کرتے ہین تو

$$لا_۱ (ا_۱^{ن-۱} + س_۱ ا_۱^{ن-۲} + س_۲ ا_۱^{ن-۳} + \cdots + س_{ن-۲} ا_۱ + س_{ن-۱}) = ب$$

س ن-۱ و س ن-۲ ... س ۲ و س ۱ کے باب مین جو فرض کیا ہی اوسی سے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ ا۲ و ا۳ ... ان قیمتین مساوات

$$ی^{ن-۱} + س_۱ ی^{ن-۲} + س_۲ ی^{ن-۳} + \cdots + س_{ن-۲} ی + س_{ن-۱} = ۰$$

کی ہین اسواسطے دائین طرف مساوات کی از روی تطابق برابر

$$(ی - ا_۲)(ی - ا_۳) \cdots (ی - ا_ن)$$

(۲۹۱+۱۷)

اسی معلوم ہوا کہ ا۱ کو بجای ی کی مساوات مین رکھین جسی لا۱ معین ہو تو لا۱ اس صورت مین نمایان ہوگا کہ

$$لا_۱ (ا_۱ - ا_۲)(ا_۱ - ا_۳) \cdots (ا_۱ - ا_ن) = ب$$

پس لا۱ معلوم ہوگیا اور لا۲ و لا۳ ... لان کو قرینہ سی دریافت کر سکتے ہین

(۲۹۱) ن مقادیر لا و ی ... ان ن مساواتون سے دریافت کرو

$$\frac{لا_۱}{ک_۱ - ا_۱} + \frac{لا_۲}{ک_۱ - ا_۲} + \frac{لا_۳}{ک_۱ - ا_۳} + \cdots = ۱$$

$$\text{ک}_{۲-۱}^{\text{لا}} + \text{ک}_{۲-ب}^{\text{ی}} + \text{ک}_{۲-س}^{\text{ی}} + \cdots = ۱$$

$$\text{ک}_{ن-۱}^{\text{لا}} + \text{ک}_{ن-ب}^{\text{ی}} + \text{ک}_{ن-س}^{\text{ی}} + \cdots = ۱$$

ن مقادیر ک۱ و ک۲ ۔۔۔ ک ن کو اس مساوات واحد

$$\text{ک}_{-۱}^{\text{لا}} + \text{ک}_{-ب}^{\text{ی}} + \text{ک}_{-س}^{\text{ی}} \cdots = ۱$$

کی قیمتیں خیال کرسکتی ہیں اور یہہ مساوات بلحاظ کے ن درجہ کی ہی فرض کرو کہ ک = ۱ - ط تو اسی یہہ استخراج ہوگا کہ ط میں جو مساوات ذیل بیان ہوئی ہی اوسکی قیمتیں

۱ - ک۱ و ۱ - ک۲ و ۱ - ک۳ ۔۔۔ ہیں

$$۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ط}} + \frac{\text{ی}}{ط+ب-۱} + \frac{\text{ی}}{ط+س-۱} + \cdots = ۰$$

نسب نمایوں کی حاصل ضرب میں مساوات کو ضرب دی کر اوسکی یہہ صورت بناؤ کہ

$$\text{ط}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\text{ط}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\text{ط}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}} = ۰$$

اسمیں رقم جو طاسی بی تعلق ہی یعنی ا ن وہ لا (ب - ۱) (س - ۱) ۔۔ ہے

اسیواسطی بموجب دفعہ ۴۵ کے

$$(۱-\text{ک}_{۱})\ (۱-\text{ک}_{۲})\ (۱-\text{ک}_{۳}) \cdots = (-۱)^{\text{ن}}\ \text{لا}\ (ب-۱)\ (س-۱) \cdots$$

$$\text{یعنی لا} = \frac{(۱-\text{ک}_{۱})\ (۱-\text{ک}_{۲})\ (۱-\text{ک}_{۳}) \cdots}{(۱-ب)\ (۱-س) \cdots}$$

اس جملی سی قیمتیں ۱ اور ی ۔۔۔ کی حروف ا و ب و س ۔۔ کی قرینہ کے ساتھہ تبدل کرکے نکل سکتی ہیں

(۲۹۲) ن مقادیر س و س۲ و س۳ ۔۔ س ن میں م مقادیر کو ایک ایک دفعہ لیکر ضرب دیں تو ان حواصل ضرب کا مجموعہ ثابت کرو کہ یہہ ہے کہ

$$\frac{(س^{\text{ن}}-۱)\ (س^{\text{ن}-۱}-۱) \cdots (س^{\text{ن}-م+۱}-۱)}{(س-۱)\ (س^{۲}-۱) \cdots (س^{م}-۱)}\ س^{\frac{م(م+۱)}{۲}}$$

فرض کرو کہ

$$(\text{لا}+س)\ (\text{لا}+س^{۲}) \cdots (\text{لا}+س^{\text{ن}}) = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ع}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}} \cdots (۱)$$

پس بموجب دفعہ ۴۵ کے قیمت ع م کی ہم کو دریافت کرنی ہے (۱) مین
لا کو $\frac{لا}{س}$ سے بدل دو اور س ن مین ضرب دو تو
$(لا+س^{۲})(لا+س^{۳})\ldots(لا+س^{ن+۱})=لا^{ن}+ع_{۱}س\,لا^{ن-۱}+\ldots+ع_{ن-۱}س^{ن-۱}لا+ع_{ن}س^{ن}$.
(۱) اور (۲) سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
$(لا+س^{ن+۱})(لا^{ن}+ع_{۱}لا^{ن-۱}+\ldots+ع_{ن-۱}لا+ع_{ن})=$
$(لا+س)(لا^{ن}+ع_{۱}س\,لا^{ن-۱}+\ldots+ع_{ن-۱}س^{ن-۱}لا+ع_{ن}س^{ن})$
اس مطابقہ کی دونو رکنون مین امثال $لا^{ن-م+۱}$ کو ایسمین برابر لکھو تو

$$ع_{م}+س^{ن+۱}ع_{م-۱}=ع_{م}+س^{م}ع_{م-۱}$$

$$\text{اسیواسطے } ع_{م}=ع_{م-۱}\frac{س^{م}(س^{ن-م+۱}-۱)}{س-۱}\quad\ldots(۳)$$

اور $ع_{۱}=س+س^{۲}+\ldots+س^{ن}=\frac{س(س^{ن}-۱)}{س-۱}$ تو بوساطت (۳) کے
ہم ع۲ اور ع۳ و ع۴ . . کو تواتر معین کرسکتی ہین اور اسی ہم کو قیمت مطلوب ع م کے
حاصل ہوجائیگی

(۲۹۳) فرض کرو کہ لا وب وس . . . ن مقادیر ہین اور ص ن اونکا مجموعہ ہے
ص ن ۔ مجموعہ اونمین ن ۔ مقادیر کا ہی اور علی ہذا القیاس اور فرض کرو کہ صح
$(ص\,ن)^{ر}-ح(ص\,ن_{۱})^{ر}+ح(ص\,ن_{۲})^{ر}-\ldots+(-۱)^{ن}ح(ص)^{ر}$
تعبیر کرتا ہی یہان ح (ص م)^{ر} مجموعہ ایسی ارقام کو تعبیر کرتا ہی جیسی کہ (ص م)^{ر} رقم جون مقادیر
لا وب وس . . مین سی م مقادیر کے ممکن انتخابات سی بنتی ہی تو اب ہم یہہ ثابت
کرینگے کہ اگر ر چھوٹا ن سی ہو تو صح = ۰ اور اگر ن برابر یا بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو صح پورا
لا ب س . . پر تقسیم ہوگا اور خاص کر
صح = ن^{ن} لا ب س . . . جب ر = ن
اور صح = $\frac{ن^{ن+۱}}{۲}$ (لا + ب + س + . .) لا ب س . . جب ر = ن + ۱

ہم صح کو دو حصون مین جدا جدا کرتی ہین ایک وہ جسکی ہر رقم مین ا واقع ہوتا ہے اور دوسرا وہ حصہ ہی جسمین ا نہین واقع ہوتا تو ہم پہلی حصہ کو اسطرح لکھ سکتی ہین کہ

(ص ن)ر - ح۱ (ص ن-۱)ر + ح۱ (ص ن-۲)ر - ... + (-۱)ن-۱ ا ر

اور دوسرے حصہ کو

- ح۲ (ص ن-۱)ر + ح۲ (ص ن-۲)ر - ... + (-۱)ن-۱ ح۲ (ص۱)ر

اسمین ح۱ سی وہ خاص مقادیر تعبیر ہوتی ہین جو پہلی حج کی ماتحت تہین اور ح۲ سے باقی ارقام تعبیر ہوتی ہین اب فرض کرو کہ ا = ۰ توصح معدوم ہوتا ہی کیونکہ اس صورت مین

(ص ن)ر - ح۲ (ص ن-۱)ر = ۰

ح۱ (ص ن-۱)ر - ح۲ (ص ن-۲)ر = ۰

ح۱ (ص ن-۱)ر - ح۲ (ص ن-۲)ر = ۰

اور اسیطرح ہم ثابت کرسکتی کہ جب ب = ۰ اور س = ۰ کے لو صح معدوم ہوتا ہی اور علی ہذا القیاس پس ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ صح اکثر مقادیر ا و ب و س ... مین سے ہر یک پر تقسیم ہوتا ہی اور اسیواسطی اونکی حاصل ضرب پر لیکن حاصل ضرب ن درجی کا ہی اور اسیواسطی اگر صح ن درجی سی کم ہو تو وہ ازروی تطابق کی صفر ہوگا اور صح ر درجی کا ہی تو اسی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ جب رکم بہ نسبت ن درجی کی ہو تو صح معدوم ہوتا ہے اور جب رکم ن سے نہ ہو تو وہ پورا ا ب س ... پر تقسیم ہوتا ہے جب ر = ن تو صح = ل ا ب س ... کی حاصل ہوگا اسمین ل کوئی عددی مقدار ہے اسکو تشخیص کرنا چاہئی اب ل کے تشخیص کرنی کی واسطی فرض کرو کہ ا و ب و س ... مین ہر یک برابر واحد کے ہے تو صح یہہ ہو جائیگا کہ

ن - ن (ن-۱) + ن(ن-۱)/۲×۱ (ن-۲)ن - ...

یعنی ل ن بموجب جبر مقابلہ کے انتالیسوین باب کے

دوم فرض کروکہ ر = ن + ۱ تو صح پورا ا ب س . . پر تقسیم ہوگا اور
چونکہ صح ن + ۱ درجی کا ہی تو اوسکا ایک جزضربی ایک درجہ کا ہوجو بلحاظ
ا و ب و س . . . ایک قرینہ رکھتا ہوگا اسواسطے یہہ جزضربی ا + ب + س . . ہوگا
اسی معلوم ہوا کہ صح = لب ا ب س . . . (ا + ب + س) + . . اسمین لب کوی عددی
مقدار ہی اوسکا تشخیص کرنا چاہئی الب کی تشخیص کرنی کی واسطی فرض کروکہ ا و ب و س . .
وغیرہ مین ہر یک برابر واحد کے ہے تو

صح = ن ن+۱ − (ن − ۱) ن+۱ + ن (ن − ۱) / ۱ × ۲ (ن − ۲) ن+۱ − . . .

اور یہہ برابر لب ن کے اسی معلوم ہوا کہ موافق باب ۳۹ باب جبر مقابلہ کے لب = ن+۱ / ۲

(۲۹۴) فرض کروکہ [س] تعبیر س (س − ۱) (س − ۲) . . (س − ر + ۱)
کو کرتا ہے اور س خواہ کچہ ہی ہو تو

[ا + ب] ن = [ا] ن + ن [ا] ن−۱ ب + ن (ن − ۱) / ۱ × ۲ [ا] ن−۲ [ب]۲ + . . + [ب] ن

اسواسطی کہ فرض کرو ا مثبت صحیح مقدار ہی تو یہہ ہم کو معلوم ہی کہ یہہ مسئلہ صحیح ہی خواہ ب کی
کوئی مثبت صحیح قیمت ہو کیونکہ (ا + لا) ا+ب اور (ا + لا) ا × (لا + لا) ب مین امثال
لا کے مساوات سی یہہ نتیجہ استخراج ہوتا ہی پس اسی معلوم ہوا کہ ب کی ن قیمتون
سی زیادہ قیمتون کی واسطی بہی یہہ مسئلہ از روی تطابق کے بموجب دفعہ ۳۹ کے
صحیح ہی یعنی جب ا کوئی مثبت صحیح مقدار ہی تو ب کی تمام قیمتون کی صورتین مسئلہ صحیح ہے
اور چونکہ کوئی مثبت صحیح ا کے واسطی مسئلہ صحیح ہی تو وہ ا کی ن قیمتون سی زیادہ
قیمتون کی واسطی صحیح ہی اور اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۹ کے وہ ا کی تمام قیمتون کے واسطے صحیح ہے
غرض یہہ سلسلہ اسطرح صحیح ثابت ہوتا ہی کہ ضابطہ جملہ ثنائی کو مثبت صحیح قوت نما کی صورت
مین فرض کرلین اور پہر دفعہ ۳۹ کی ضابطہ کو بہی صحیح مان لین اس مسئلہ کا نام کبہی واندرمونڈ
بہی لیا جاتا ہی جب فولیر کا ضابطہ ثنائی اوس حالت مین ثابت کرتے ہین کہ قوت نما

کچھ ہی ہو تو اس مسئلہ کا وہاں کام پڑتا ہی اور یہہ بات مشہور ہی اور وہاں اس مسئلہ کو موافق اصول مستقل صورت مساویہ کے قائم کیا ہے

(۲۹۵) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی ایک قیمت ۱ ہی تو ہم فرض کر سکتی ہین کہ

$$\text{مح } (\text{لا}) = (\text{لا} - 1)\ \text{مر } (\text{لا})$$

تو
$$\frac{\text{مح } (\text{لا})}{\text{لا}} = (1 - \frac{1}{\text{لا}})\ \text{مر } (\text{لا})$$

$$\text{لوک } \frac{\text{مح } (\text{لا})}{\text{لا}} = \text{لوک } (1 - \frac{1}{\text{لا}}) + \text{لوک مر } (\text{لا})$$

$$= -(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\text{لا}^2} + \dots) + \text{لوک مر } (\text{لا})$$

فرض کرو کہ لوک $\frac{\text{مح } (\text{لا})}{\text{لا}}$ کو ایسی سلسلہ مین پھیلائین کہ اوسمین لا کی مثبت اور منفی قوتین ملتف ہون اور لوک مر (لا) کو اسی سلسلہ مین پھیلائین کہ اوسمین صرف لا کی مثبت قوتین ہون تو پھر مساوات کی دو ارکان کا تطابق فرض کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

۱ - = امثال $\frac{1}{\text{لا}}$ کی جو صورت مفصلہ لوک $\frac{\text{مح } (\text{لا})}{\text{لا}}$ مین ہون

(۲۹۶) دفعہ بالا کی مسئلہ کو مرفی صاحب نے اپنی رسالہ مسائل معادلات مین لکھا ہے اس مسئلہ کا اثبات ناقص ہی کیونکہ سلسلہ غیر متناہی صورت مفصلہ کا انفراجی ہو سکتا ہے اس مسئلہ پر بڑی بڑی کتابون مین بحث لکھی ہے

(۲۹۷) مثلاً فرض کرو کہ اس مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{س لا} - \text{ب} = 0 \text{ کی ایک قیمت دریافت کرو}$$

یہان $\frac{\text{حج } (\text{لا})}{\text{لا}}$ $\text{س} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}} + \text{لا}^{\text{ن}-1}$

$$\text{لوک } \frac{\text{حج لا}}{\text{لا}} = \text{لوک س} + \text{لوک } (1 - \frac{\text{ب}}{\text{س لا}} + \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\text{س}})$$

$$= \text{لوک س} - \text{ی} - \frac{1}{2}\text{ی}^2 - \frac{1}{3}\text{ی}^3 - \dots$$

اسمین $\text{ی} = \frac{\text{ب}}{\text{س لا}} - \frac{\text{لا}^{\text{ن}-1}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{س لا}}(1 - \text{لا}^{\text{ن}})$

اب ہم کو اون ارقام کا التقاط کرنا چاہئی جسمین $\frac{1}{\text{لا}}$ ملتف ہو تو ہم ایک ایسی رقم

ی سی اور می ن+۱ سی اور می ن+۲ سی اور علی ہذا القیاس حاصل کر سکتی ہین

پس اسی معلوم ہوا کہ قیمت دریافت کرنی کیواسطے یہہ سلسلہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ب}{س} - \frac{ن}{س^{ن+1}} + \frac{ن_2}{2} \frac{ب}{س^{ن+1}} - \frac{ن_3}{3 \times 2} \frac{ب}{س^{ن+1}} + \frac{ن_3 - 2}{س^{ن+1}} + \cdots$$

(۲۹۸) فرض کرو کہ مساوات مح (لا) = ۰ کی قیمتین ا۱ و ا۲ ۰۰۰ ام ہین پس ہم فرض کر سکتی ہین کہ

مح (لا) = (لا - ا۱) (لا - ا۲) ۰۰۰ (لا - ام) مر (لا)

تو $\frac{مح (لا)}{لا^م}$ = (۱ - $\frac{ا_1}{لا}$) (۱ - $\frac{ا_2}{لا}$) ۰۰۰ (۱ - $\frac{ا_م}{لا}$) مر لا

طرفین مساوات کی لوکا رثم لو تو بموجب دفعہ ۲۹۵ کے ہم کو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

- (ا۱ + ا۲ + ۰۰ + ام) برابر امثال $\frac{1}{لا}$ کے ہے جو صورت مفصلہ

لوک $\frac{مح (لا)}{لا^م}$ مین ہو مرفی صاحب کے رسالہ مسائل معادلات کو دیکھو

(۲۹۹) ایک کسر ناطقہ کی تحلیل کرنی کا اور کسور مین بیان کرتی ہین ان کسور کو بخاطر اصلی کسور کے کسور جزئیہ کہتے ہین

فرض کرو کہ ن درجہ کا جملہ لاکا مح (لا) ہی اور مساوات مح (لا) = ۰ کی سب قیمتین غیر مساوی ہین

اور ا۱ و ب و س ۰۰ سی تعبیر ہوئی ہین اور مر (لا) ایک جملہ لاکا (ن - ۱) درجہ کا

یا اوسی بہی ادنی درجہ کا ہی تو یہہ ارتباط ازروی تطابق کی صحیح ہوگا کہ

$$\frac{مر (لا)}{مح (لا)} = \frac{ا}{لا - ا} + \frac{ب}{لا - ب} + \frac{س}{لا - س} + \cdots + \frac{ک}{لا - ک}$$

بشرطیکہ مستقل قیمتین ا و ب و س ۰۰ ک کے واسطے مقرر کیجائین

اب تاکہ یہہ ارتباط ازروی تطابق کی صحیح ہو تو یہہ ضروری اور کافی ہی کہ ازروی تطابق کے یہہ صحیح ہو کہ

$$مر (لا) = ا \frac{مح (لا)}{لا - ا} + ب \frac{مح (لا)}{لا - ب} + س \frac{مح (لا)}{لا - س} \cdots + ک \frac{مح (لا)}{لا - ک}$$

ارکان اس مساوات کے ن - ۱ درجی سی بڑی درجی کی نہین ہین اسی معلوم ہوا کہ یہہ ارتباط ازروی تطابق کی صحیح ہوگا اگر ن قیمتین لاکی وہ دریافت ہوجائین جنکی واسطی وہ صحیح ہے

دفعہ ۳۹ دیکھو اور ا و ب اور س ۰۰ ک مین مناسب انتخاب کرکے ارتباط کو صحیح لاکی ن قیمتون ا و ب و س ۰۰ ک کی واسطی کر سکتی ہین اسواسطے کہ

فرض کرو لا = ۱ سی تمام ارقام بائین طرف معدوم ہوجاتی ہین الا وہ مقدار جسمین ۱ ملتف ہی اور ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{مر}(۱) = ۱ \left[\frac{\text{مر}\, لا}{لا - ۱}\right]_{لا = ۱}$$

یعنی بموجب دفعہ ۴۷ کے

$$\text{مر}(۱) = ۱ \text{ح}(۱)$$

اسی ۱ قطعی دریافت ہوتا ہی اور اسیطرح قیمتین ۱ و ب و س . ک کی دریافت ہوتی ہین

(۳۰۰) اب فرض کرو کہ مر (لا) درجہ ادنی کا بہ نسبت ح (لا) کے نہین ہے تو معمولی تقسیم کے قاعدہ سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{مر}(لا)}{\text{ح}(لا)} = \text{ح}(لا) + \frac{\text{ر}(لا)}{\text{ح}(لا)}$$

اسمین ح (لا) اور ر (لا) جملی صحیحہ لاکی ہین اور ح (لا) کا درجہ ادنی بہ نسبت ح (لا) کے ہی اب $\frac{\text{ر}(لا)}{\text{ح}(لا)}$ موافق دفعہ گذشتہ کی تحلیل کسور جزئیہ مین کرین چونکہ ہم کو یہہ معلوم ہے کہ

$$\text{مر}(لا) = \text{ع}(لا)\text{ح}(لا) + \text{ر}(لا)$$

اسی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ مر (لا) اور ح (لا) کی ایک ہی قیمت ہی جب مح (لا) معدوم ہو اسی معلوم ہوا کہ کسور جزئیہ مطابق $\frac{\text{مر}(لا)}{\text{ح}(لا)}$ کی تشخیص موافق دفعہ ۲۹۹ کے ہوسکتی ہین پہلی اسی کہ ہم مر (لا) کو مح لا پر تقسیم کرین اگر $\frac{\text{مر}(لا)}{\text{ح}(لا)}$ کی کامل قیمت دریافت کرنی ہوتی تو ہم کو جزو ح (لا) کو ساقط کرنا نہ چاہئی تہا

(۳۰۱) ہم نتایج کو دقت سی خالی کرنی کی لئی دفعات گذشتہ مین کسر ناطقہ کے تحلیل کرنے کا طریقہ کسور جبریہ مین اوس صورت مین بیان کیا ہی کہ اونمین اجزا ضربی مکرر نہین آتے یہہ ایک خاص صورت تہی اب ہم علی العموم اسکی تحقیقات کرتے ہین

(۳۰۲) فرض کرو کہ ح (لا) ایک جملہ لا کا ہی جسمین اجزا ضربی مکرر آتی ہین مثلاً فرض کرو کہ

مح (لا) = ع (لا - أ)^ر (لا - ب)^ص (لا - س)^ط . . . (لا - ک)^ک

اور مر (لا) کا دسوا جملہ لا کا ہی تو جملہ $\frac{\text{مر (لا)}}{\text{مح (لا)}}$ اجزا ذیل مین تحلیل ہو سکتا ہی (۱) کوی جز ضربی لا - ک جو مکرر نہین آتا اوسی ایک رقم $\frac{\text{ا}}{\text{لا - ک}}$ پیدا ہوگی (۲) جز ضربی (لا - أ)^ر سے یہہ سلسلہ ارقام پیدا ہوگا کہ

$$\frac{\text{ا}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر-ا}}} + \frac{\text{ا}_{\text{۲}}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر-۲}}} + \cdots + \frac{\text{ا}_{\text{ر-ا}}}{\text{لا - أ}}$$

اور اسی طرح کا سلسلہ ارقام اور ہر یک جز ضربی مکررہ سی پیدا ہوگا (۳) اگر مر (لا) ادنی درجہ کا مح (لا) سی نہین ہوگا تو ایک جملہ صحیحہ بھی پیدا ہوگا

اسواسطے کہ فرض کرو کہ مح (لا) = (لا - أ)^ر صر (لا) تو اگر خواہ کچھ ہی ہو از روی تطابق کے

$$\frac{\text{مر (لا)}}{\text{مح (لا)}} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{مر (لا)} - \text{ا}_{\text{ا}} \text{ صر (لا)}}{\text{مح (لا)}}$$

اب فرض کرو کہ مر (أ) - ا صر (أ) = ۰ تو مر (لا) - ا صر (لا) جسب لا = أ کے ہو معدوم ہوگا اور اسیواسطے لا - أ پر پورا تقسیم ہوگا

اسیواسطے أ کے اس قیمت کے موافق ہم یہہ رکھہ سکتی ہین کہ

مح (لا) - ا صر (لا) = (لا - أ) مح ا (لا)

اور اسیواسطے

$$\frac{\text{مر (لا)}}{\text{مح (لا)}} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر}}} + \frac{\text{مر ا (لا)}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر-ا}} \text{ صر (لا)}}$$

اسی طرح سی اخر کسہ کی تحلیل کرکے یہہ حاصل کر سکتی ہین کہ

$$\frac{\text{مر ا (لا)}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر-ا}} \text{ صر (لا)}} = \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر-ا}}} + \frac{\text{مر ۲ (لا)}}{(\text{لا - أ})^{\text{ر-۲}} \text{ صر (لا)}}$$

پس اسی طریقہ سی بار بار عمل کرنے سے نتیجہ مطلوب قائم ہو جائیگا

(۳۰۳) دفعہ ۳۰۷ کی طرح یہہ ثابت کرنا اسان ہی کہ $\frac{\text{مر (لا)}}{\text{مح (لا)}}$ کی تحلیل صحیحہ جملون مین ایک ہی طرز پر ہو سکتی ہی اور کسور جزئیہ کا ایک سلسلہ ہوتا ہی جسکی نسبتا مین ایک جداگانہ ہی جز ضربی ملتف ہوتا ہے، اسی معلوم ہوا کہ اخر کو نتیجہ ایک ہی حاصل ہوگا خواہ اعمال کی ترتیب کچھ ہی ہو

یعنی خواہ کسی جز ضربی پر اول ہم عمل کریں

عملاً عمدہ طریقہ کسور جزئیہ کے تمام کنندوں کے دریافت کرنی کا ذیل میں لکھا جاتا ہے کہ لا = ا + ھ کی رکھو تو

$$\frac{\text{مر (لا)}}{\text{مخ (لا)}} = \frac{\text{مر (لا)}}{(\text{لا} - \text{ا})\text{ھر(لا)}} = \frac{\text{مر (ا + ھ)}}{\text{ھ}^{\text{ر}}\text{ھر(ا + ھ)}}$$

اگر کسی کسر جزئیہ یہ ہی $\frac{\text{مر (ا + ھ)}}{\text{ھر(ا + ھ)}}$ کو قوا ے ھ میں پھیلاؤ تو بموجب طریقہ کتابت کی جو ابھی اوپر بیان ہوا ہے یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{مر (ا + ھ)}}{\text{ھر(ا + ھ)}} = \text{ا} + \text{ا}_{\text{ا}}\text{ھ} + \text{ا}_{\text{۲}}\text{ھ}^{\text{۲}} + \text{ا}_{\text{۳}}\text{ھ}^{\text{۳}} + \cdots\cdots$$

یعنی $\frac{\text{مر (ا + ھ)}}{\text{ھر(ا + ھ)}}$ کی صورت مفصلہ میں جو موافق قوا ے متصاعدہ ھ کے ہو ا م مثال ھ کے ہیں اور اسیطرح سی اور کسور جزئیہ کے تمام کنندوں کو مقرر کرو

(۳۰۴) اب فقرات ذیل میں مسائل لکھی ہیں جنسی کہ مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی معلوم ہوں وہ پروفیسر ڈی مورگن نی جنہی مورخہ ۱۸ فروری ۱۸۵۸ء میں لکھکر بھیجی تہی

(۳۰۵) اس مسئلہ میں مساوات کی قیمتوں کی حدود غائی کی دو ترکیبیں جو باب ہفتم میں بیان ہوئی ہیں داخل ہیں اور اون پر کچھ اور مزید ہے

فرض کرو کہ ح (لا) = ع لا$^{\text{ن}}$ + ع$_{\text{۱}}$ لا$^{\text{ن-۱}}$ + ... + ع$_{\text{ن-۱}}$ لا + ع$_{\text{ن}}$

اب ہم کو مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کی اعلی حد غائی دریافت کرتے ہیں

فرض کرو کہ ا بر اول رقم کے امثال ہو یا اوسی کسی کم شی کا اور ب کم از کم مثبت امثال اوسکے بعد ہو اور کسی منفی امثال کا ماقبل ہو یا اوسی کسی کم شی کا اور س برابر سب سے بڑی منفی امثال کے عدد کے قیمت کی ہو یا اوسی کسی بڑی شی کی

اور فرض کرو کہ لا$^{\text{ن-ک-۱}}$ اول رقم ہی جسکی امثال منفی ہیں نو ح (لا) یقینی مثبت ہوگا اگر جملہ ذیل مثبت ہو کہ

(ا لا$^{\text{ن}}$ + ب (لا$^{\text{ن-۱}}$ + ... + لا$^{\text{ن-ک}}$) - س (لا$^{\text{ن-ک-۱}}$ + ... + لا + ۱)

یعنی جب جملہ ذیل مثبت ہو کہ

$$ا لا^{ن} + ب \frac{لا^{ن} - لا^{ن-ک}}{لا - ا} - س \frac{لا^{ن-ک} - ا}{لا - ا}$$

یعنی لا کو بڑا واحد سے فرض کرکے

$$\left[ا (لا - ا) + ب \right] لا^{ن-ک} - (ب + س) لا^{ن-ک} + س$$

مثبت ہے یعنی بہدرجہ اولی مثبت ہے جب

$$\left[ا (لا - ا) + ب \right] لا^{ک} - (ب + س)$$

صفر یا مثبت ہو

(۱) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد اُس سے بڑا منفی امثال ہی تو ح (لا) مثبت ہے اگر ا (لا - ا) - س صفر یا مثبت ہی یعنی اگر لا = ۱ + $\frac{س}{ا}$ یا اسی بڑی شی کی برابر ہو دفعہ ۷، ۸ دیکھو

(۲) فرض کرو کہ ب = ۰ اور س تعداد اُس سے بڑا منفی امثال ہو تو ح (لا) مثبت ہوگا اگر ا (لا - ا) لا^ک - س صفر یا مثبت ہی اور اسیواسطے بدرجہ اولی مثبت ہوگا اگر ا (لا - ا) لا^{ک+۱} - س ایسا ہو یعنی اگر لا = ۱ + $(\frac{س}{ا})^{\frac{۱}{ک+۱}}$ یا کسی بڑی شے کے دفعہ ۸۹ دیکھو

(۳) ا کی جگہ صفر رکھو تو ح (لا) مثبت ہوگا اگر ب لا^ک - (ب + س) صفر یا مثبت ہے یعنی اگر لا = $(۱ + \frac{س}{ب})^{\frac{۱}{ک}}$ یا کسی بڑی شی کی یہ ایک نئی حد غائی ہی جو چھوٹی بہ نسبت (۲) کے ہی جب ب بڑی ع سے مقرر کیجاے

(۴) اگر ا بڑا بہ نسبت ب کے نہ ہو تو ح (لا) مثبت ہے اگر

$$\left[ا (لا - ا) + ا \right] لا^{ک} - (ا + س)$$

صفر ہے یا مثبت ہی یعنی اگر لا = $(۱ + \frac{س}{ا})^{\frac{۱}{ک+۱}}$ یا کسی بڑی شے کے

اور اسی چھوٹی حد بہ نسبت (۳) کے معلوم ہوتی جب ب چھوٹی ع سی نہ مقرر کیجاے

(۵) فرض کرو کہ ب چھوٹا س سی نہیں ہی تو اس سی ہم کو اعلی حد غائی $۲ک^{\frac{۱}{ک}}$ حاصل ہوگی

(۶) فرض کرو کہ ا چھوٹا س سی نہیں ہی تو (۲) سی $۱ + ۲ک^{\frac{۱}{ک+۱}}$ اعلی حد غائی حاصل ہوگی

(۷) فرض کرو کہ نہ اور ب چھوٹا سی ہی تو (۴) سی ہم کو $\frac{1}{2}$ اعلی حد غائی حاصل ہوگی

(۳۰۶) اب ہم مساوات کی قیمتون کی حدود غائی کی باب مین ایک اور مسئلہ لکھتی ہین وہ موقوف اسی جملہ $ا لان^{-1} + ب لان^{-1} + س لان^{-2} + \ldots$ کی قیمت کے حساب لگانے پر موقوف ہی اور اس حساب کی ترکیب موافق قیمت معینہ لا کے دفعہ ۵ مین بیان ہوئی ہی اگر ہر ایک قیمت معینہ کو تعبیر کرتی ہی تو حساب سی متواتر یہہ حاصل ہوگا کہ

$ا بر د ا ر + ب و (ا بر + ب) ر و (ا ر + ب) ر + س \ldots$

فرض کرو کہ ح (لا) = مساوات ہی اب ح (لا) کی جماعتین اسطرح بناؤ کہ ہر یک جماعت مین مثبت رقمین اور اوسکی اگی وہ منفی رقمین ہون جو ماقبل لگانی والی مثبت رقمون کی ہون اب فرض کرو کہ فقط علامتون ہی کے لکھتی سی یہہ تواتر حاصل ہو کہ

+ + − − + − − − − + + − + − − − − + + − −

اب اسکی جماعتین اسطرح بناؤ کہ

(+ + − −) و (+ −) و (+ + − − − −) و (+ − −) د +

فرض کرو کہ اول جماعت مین فواء لا کے لان سے لان ع تک ہین اور یہہ دونو اوسمین داخل ہین فرض کرو کہ جز ضربی لان − ع تقسیم کرنی سی ساقط کیا گیا اور امتحان سی لا کی ایک قیمت بر مقرر کرو اور جب لا = بر کے ہو تو خارج قسمت کا حساب بعد از تقسیم لان − ع کے کرو اگر نتیجہ مثبت ہی تو اوسکو ا اسی تعبیر کرو اور $ا لان^{-1}$ کو دوسری جماعت کا سر بناؤ اور فرض کرو کہ یہہ جماعت اوس رقم تک جسمین لان − ک ملتف ہی پہلی ہے پس جب $ا لان$ − ک دوسرے جماعت مین سب سے اول مقرر کیا گیا ہو تو لان − ل پر تقسیم کرو اور جب لا = بر ہو تو قسمت خارج قیمت کا حساب کرو اور اوسکو ا ہ سی تعبیر کرو اور $ا ہ لان$ − ل کو جماعت مابعد مین سب سے اول لکھو اور علی ہذا القیاس اگر تمام نتیجے اخر تک مثبت ہون تو براعلی حد غائی مثبت قیمتون کی ہوگی اور عدد بر کا ہمان قواعد مین سی موافق ایک قاعدہ کے منتخب ہو سکتا ہے

اس بات کو یاد رکھنا چاہیئے کہ جب اول ہی جماعت کا حساب کرو تو اوسی جو اعلیٰ حد غائی دریافت ہوگی اوسی بہت بڑا عدد مطلوب برنہیں ہوگا

مثلاً مساوات اٹھارہ درجی کی ہی تو اب ہم صرف امثال کو جماعتوں میں لکھتے ہیں کہ

$$(۷+۴+۳-۸۰-۱۰۰)+(۲۰-۱۰۰)+(۳+۲+۱-۴۰-۱۰۰۰-۱۰۰۰)$$

$$+(۷۰-۸۰۰۰-۲۰۰۰)+(۱۰۰۰-۴۰۰۰-۴۰۰۰)$$

اول جماعت پر خیال کریں تو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ۲ مثبت چھوٹا عدد ہی سلسلی ۳ پر امتحان کرنا چاہیئے

اب ہم قیمت

$$۷\,لا^{۴}+۴\,لا^{۳}+۳\,لا^{۲}-۸۰\,لا-۱۰۰$$

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کریں

۷	۴	۳	-۸۰	-۱۰۰
۷	۲۵	۷۸	۱۵۴	۳۶۲

پس ل۱ = ۳۶۲

اب ہم قیمت

$$۳۶۲\,لا^{۲}+۲۰\,لا-۱۰۰$$

کا جب لا = ۳ کے ہو حساب کرتے ہیں

۳۶۲	۲۰	-۱۰۰
۳۶۲	۱۱۰۶	۳۲۱۸

پس ل۲ = ۳۲۱۸

اب قیمت

$$۳۲۱۸\,لا^{۶}+۳\,لا^{۵}+۴\,لا^{۴}+لا^{۳}-۴۰\,لا^{۲}-۱۰۰۰\,لا-۱۰۰۰$$ کا

کا حساب جب لا = ۳ کے ہو کرتے ہیں

اب یہہ ظاہر ہی کہ ہم کو تمام نتایج ل۳ و ل۴ و ل۵ مثبت حاصل ہونگے پس اسی معلوم ہوا کہ ۳ مثبت قیمتوں کی اعلیٰ حد غائی ہے

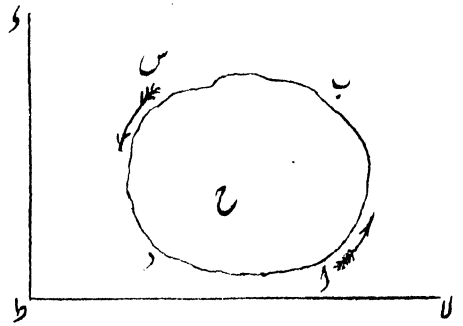
اس مثال مین موافق دفعہ ۹ کے اعلی حد غائی ۱ + $\frac{۸۰۰۰}{۱۱۰۰}$ ہی یہہ بڑا ۷۰ سے ہے
اور بموجب دفعہ ۸۹ کے اعلی حد غائی ۱ + ۳ $\frac{۸۰۰۰}{۷۰۰}$ ہی اور یہہ ۱۱ سی زیادہ ہے

الحاصل مختصر بیان اس مسئلہ کا یہہ ہی کہ تمام جملی کو متواتر مثبت اور صحیح جماعتون
ع - ب ق + س ر - د ص ... مین تقسیم کرو اور ہر جماعت مین لا کا قوت نما اخر لکھو
اور ع - ب ق کو لا پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی مثلاً م ایسی دریافت کرو
کہ وہ خارج قسمت کو مثبت بنائی اور فرض کرو کہ یہہ خارج قسمت ل ہول لا ق + س ر - د ص کو
لا پر تقسیم کرو اور کوئی قیمت لا کی لب جو شاید لر سی بڑی نہ ہو اور چھوٹی لر سی تو ہوتی نہین ہے جسکو
ایسی دریافت کرو جو خارج قسمت کو مثبت بنائی فرض کرو کہ م یہہ خارج قسمت ہو
اب یہہ عمل کو م لا + ی ط - ف پر جاری کرو اور علی ہذا القیاس اخر تک یہی عمل جاری رکھو
تو لا کی اخر قیمت اسطرح حاصل ہو گی وہ مساوات کی ہر یک قیمت سی بڑی ہو گی اور اول قیمت
لا کی یعنی لر اکثر اخر قیمت سے ہوتی ہے

(۳۰۷) ایک مسئلہ کا چی حساب کا لکھکر اس باب کو ختم کرتی ہین مطلب اس مسئلہ کا یہہ ہے
کہ حدود متعینہ کی درمیان یہہ دریافت کرین کہ کتنی حقیقی اور کتنی خیالی قیمتین واقع ہوتی ہین
سٹرم صاحب کی ضابطہ مین خاص حقیقی قیمتون کی نسبت بیان کیا گیا ہی وہ یہان اس مسئلہ مین
علی العموم خیالی اور حقیقی قیمتون کی واسطی بیان کیا جاتا ہے غرض ضابطہ مخصوص حقیقی قیمتون کے واسطے تھا
اور یہہ مسئلہ علی العموم سب قیمتون کے واسطے ہے

(۳۰۸) کوئی قائم الزاویہ محور مقرر کرو اور لا اور د محددین کسی نقطہ کے مقرر کرو اور
مح (ی) کوئی جملہ ناطقہ ی کا فرض کرو تو مح (لا + د $\sqrt{-۱}$) اس صورت ع + ق $\sqrt{-۱}$
مین بیان ہو سکتا ہی جو نقطہ ایسا ہے کہ جسکی محددین ع اور ق کو ایک ہی وقت مین معدوم کر دیتے
اوسکا نام نقطہ اصلی رکھو اور ایک احاطہ اب س دکھینچو تو تعداد نقاط اصلی کی جو
اس حلقہ کی درمیان واقع ہونگی قاعدہ ذیل سی دریافت ہو جائینگی فرض کرو کہ ایک نقطہ اس

احاطہ کی گرد مثبت سمت مین حرکت کرنا چاہی اور اس بات کو گنتے جاؤ کہ کتنی دفعہ ع کی نوبت صفر پر پہونچتی ہی اور اوسکی علامت تبدیل ہوتی ہی فرض کرو کہ ک دفعہ اوسکی علامت + سی - اور ل دفعہ - سی + ہی تو تعداد نقاط اصلی کی احاطہ کے اندر $\frac{1}{2}$ (ک - ل) ہو گی



اس بات پر خیال کرنا چاہیئے کہ احاطہ ایسا مقرر کیا گیا ہی کہ کوئی نقطہ اصلی اوسکی اوپر نہین واقع ہوتا اور اگر کوئی خیالی قیمت مساوات ح (ی) = ۰ دو دفعہ یا تین دفعہ یا زیادہ دفعہ ائی تو ہم کو یہ خیال کرنا چاہیئے کہ دو یا تین یا زیادہ اصلی نقطے ہین اگرچہ وہ منطبق ایک دوسرے پر ہونگے اور مثبت سمت مین حرکت کرنی سی مراد ہماری یہہ ہی کہ ایک نصف قطر دائر ایک نقطہ قائم سی حلقہ کی اندر نقطہ متحرک تک کہنچا گیا ایک دو چار قائمون کی برابر مثبت زاویہ پر گذرتا ہی اور نقطہ متحرک گرد حلقہ کے گذرتا ہی اس مسئلہ کی ثابت کرنی کی لئی اول صورت بی نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی لیتی ہین اور پہر ایک صورت احاطہ محدود کی لیتے ہین

(۳۰۹) احاطہ کی اندر کوئی نقطہ ح جو نقطہ اصلی نہ ہو مقرر کرو اور ایک نہایت ہی چھوٹا احاطہ جسمین ح بہی داخل ہو مرسوم کرو اور فرض کرو کہ نقطہ متحرک مثبت سمت مین اس نہایت ہی چھوٹی احاطہ کی گرد حرکت کرتا ہی تو ہم کو اب چار صورتون پر بحث کرنی چاہیئے

(۱) فرض کرو کہ نع نہ ق اس احاطہ کی اندر نہ اس احاطہ کی اوپر معدوم ہوتی ہین

یہان ع کی تمام دور مین علامت نہین بدلتی تو قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہین ہی اور یہہ صحیح بھی ہی کیونکہ ع اور ق معدوم نہین ہوتے

(۲) فرض کرو کہ احاطہ کی اندر نہ احاطہ کی اوپر ق معدوم ہوتا ہی مگر ع معدوم ہوتا ہے اس صورت مین ع کی علامت وہان بدلتا ہی جہان نقطہ متحرک ایسی مقام پر گذرتا ہی جہان ع معدوم ہوتا ہے لیکن انجام دورہ پر ع اپنی اصلی علامت پر آجاتا ہی تو اسی معلوم ہوتا ہی کہ جتنی تغیر + سی کے ہوئی ہونگی اوتنی تغیر - سی + کے ہوئی ہونگی اسی معلوم ہوا کہ ک اور ل برابر ہین اور قاعدہ سی ظاہر ہوتا ہی کہ کوئی اصلی نقطہ احاطہ کی درمیان نہین واقع ہوتا اور یہہ صحیح ہی کیونکہ ق معدوم نہین ہوتا

(۳) فرض کرو کہ نہ احاطہ کی اندر اور نہ احاطہ کی اوپر ع معدوم ہوتا ہی لیکن ق معدوم ہوتا ہے اس صورت مین ع کبھی معدوم نہین ہوگا اب قاعدہ سی یہہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی نقطہ اصلی احاطہ کے اندر نہین ہے اور یہہ صحیح ہے کیونکہ ع معدوم نہین ہوتا

(۴) فرض کرو کہ ع اور ق دونو احاطہ کی اندر اور اوپر معدوم ہوتے ہین اگر وہ دونو ایک وقت معدوم نہ ہون تو ہم سطح کو جو احاطہ سی گہری ہوئی ہی اور سطحون مین تقسیم کر دینگے جنمین سے بعض مین ع صرف معدوم ہوتا ہی اور باقی مین صرف ق معدوم ہوتا ہی تو اسطرح سی دو یا زیادہ احاطی بجای ایک احاطہ کی حاصل ہونگی اور اونکی صورت موافق صورت (۲) اور (۳) کے ہوگی پس صرف یہی ایک صورت رہی جسمین ع اور ق دونو ایک ہی وقت معدوم ہوتے ہین اور ایک نقطہ اصلی احاطہ کی اندر یا اوپر ہی اور ہم احاطہ کو ایسا چھوٹا فرض کر سکتی ہین کہ اوسمین صرف ایک ہی نقطہ اصلی واقع ہو اور کوئی اوسکی اوپر نہ ہو

فرض کرو کہ ط اور ص اس اصلی نقطہ کی محددین ہین اور لا = ط + ص حم ر

اور ر = ص + ں جب ر

لا + ز ∫ = ا + ب ∫ + نق (حم ر + ∫ جب ر)

= ط + ص ∫ + و کے مقرر کرو

اب فرض کرو کہ مساوات مح (ی) = ۰ کی قیمت ط + ص $\sqrt{-1}$ م دفعہ مکرر آتی ہے
تو مح (ط + ص $\sqrt{-1}$ + و) کی صورت س ۰ و^م + س ۱ و^{م+۱} + س ۲ و^{م+۲} + ...
کی ہوگی اسمین س ۰ س ۱ س ۲ . . خاص خیالی جملی کنڈی کے صورت کے ہین
پس ہم فرض کرسکتی ہین کہ
س = ھ (جم سہ + $\sqrt{-1}$ جب سہ) اور س ۱ = ھ ۱ (جم سہ ۱ + $\sqrt{-1}$ جب سہ ۱) . . .
اسی معلوم ہوا کہ بموجب ضابطہ دی موئور کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
ع ق = ھ جم [م برہ + سہ] + ھ ۱ ق جم [(م + ۱) برہ + سہ ۱] + ھ ۲ ق جم [(م + ۲) برہ + سہ ۲] +
ھ جم [م برہ + سہ] + ھ ۱ ق جب [(م + ۱) برہ + سہ ۱] + ھ ۲ ق جب [(م + ۲) برہ + سہ ۲] + . .
اب ہم ق کو ایسا چھوٹا فرض کرتی ہین کہ تغیرات علامت کی تعداد مین ق سی کچھ اثر نہ ہو یعنی
ہم اسطرح عمل کرسکتی ہین کہ گویا ع ق = م (م برہ + سہ) اور چونکہ م ایک صحیح ہے کہ کسی دوسرے صحیح سے
زیادہ ہوتا ہی تو ہمیشہ ایک رستہ صفر کی درمیان آیا ہوگا کہ وہان تغیر علامت + سی - ہوگا
پس ہم کو یہہ حاصل ہی کہ ک = ۲ م اور ل = ۰ پس $\frac{1}{2}$ (ک - ل) = م کے بموجب قاعدہ کے
(۳۱۰) مسئلہ اوس صورت مین ثابت ہوا کہ احاطہ نہایت ہی چھوٹا تھا اب اگر احاطہ محدود اب س د ہو
تو اس احاطہ کو غیر متناہی نہایت ہی چھوٹی چھوٹی احاطون مین تقسیم کرو اور یہہ احاطے ایسی مقرر کی گئی
ہین کہ اون مین سے نقط اصلی کسی ایک پر نہین واقع ہوتا تو تعداد اصلی نقاط کی احاطہ اب س د کی اندر اسطرح
دریافت ہوگی کہ ایک نقطہ مقرر کرین جو ان بی نہایت چھوٹی چھوٹی احاطون کو مرتسم کرتا ہو اور جو موافق
قاعدہ کی تعداد اصلی نقاط کی حاصل ہوا ونکو جمع کرکی $\frac{1}{2}$ ح (ک - ل) سی تعبیر کرین لیکن یہی نتیجہ
حاصل ہوگا اگر ہم تمام تقسیم کے خطوط اندرونی کو محو کردین اور فقط حد اب س د کو رہنے دین
کیونکہ ہر نقطہ جو اندر کے بی نہایت چھوٹی احاطون مین خط تقسیم پر واقع ہوتا ہی دو احاطون سے علاوہ کرتا ہی
اور ایسے وہ مرتسم کرنی والی نقطہ سی دو دفعہ مختلف سمتون مین تقاطع کرتا ہے
پس اگر ایک صورت علامت ع ق کی + سی - مین بدلتی ہی تو دوسری صورت مین - سی
+ مین بدلتی ہی اور کل تعداد $\frac{1}{2}$ ح (ک - ل) پر اثر نہین ہوتا

اسی معلوم ہوا کہ اندر کے خطوط تقسیم محو ہو سکتی ہین اور نقطہ متحرک فقط احاطہ اب س د کو مرتسم کرتا ہے

پس مسئلہ ثابت ہوا

(۳۱۱) اب ہم اس مسئلہ سی ایک اور مسئلہ مستنبط کرتی ہین کہ اگر ایک مساوات ن درجہ کی ہو تو اوسکی ن قیمتین ہونی چاہئی فرض کرو کہ احاطہ اب س دایک دائرہ ہو اور مرکز اوسکا مبدء ہو اور اوسکا قطر غیر متناہی بڑا ہو تو قیمت $\frac{ع}{ج}$ کی اوس رقم مح (س) پر موقوف ہی جسمین اعلی قوت ھ کی ملحق ہو اور اگر ہم اوس رقم کو ھ (حم سہ + ۔۔۔ جب سہ) کی فرض کرین تو $\frac{ع}{ج}$ = مم (ن برہ + سر) پس ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ک = ۲ ن اور ق = ۰ پس $\frac{1}{2}$ (ک - ل) = ن

(۳۱۲) ہم نی دفعہ ۳۰۸ مین شکل ایسی کہنچی ہی کہ احاطہ کی ہر یک نقطہ اندرونی سے ایک نصف قطر دائر ایک سمت مین کہنچتا ہی اور احاطہ سی ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے لیکن احاطہ کی قید اس شکل کی سلبہ ضرور نہین شکل ایسی بہی ہو سکتی کہ نصف قطر دائر ایک سمت مین کہنچا گیا احاطہ سی طاق دفعہ ملاقی ہو

اسی معلوم ہوا کہ جب نقطہ گرد احاطہ کی متحرک ہوتا ہی تو نصف قطر دائر جو نقطہ متحرک اور کسی مبدء قائم کے درمیان کہنچا جائی اور یہہ نقطہ قائم احاطہ کے اندر ہو تو وہ ہمیشہ ایک ہی سمت مین متحرک نہین ہوگا نقطہ متحرک کی مثبت سمت حرکت سی ہم کو سمجھنا چاہئے کہ گو زاویہ دائر ہمیشہ زیادہ نہ ہوتا ہو مگر اوسپر دورہ مین مثبت زاویہ ۲ کہ کی برابر افزایش ہوتی ہو جس ہست کی یہان شکل لکہی ہی اوسکی قید کچہ نہین ہی غرض شکل کا اثر اثبات پر نہین ہے کیونکہ بے نہایت چہوٹی احاطی اگر ہم چاہین تو یہر بہی ایسی فرض ہو سکتی ہین کہ وہ بیضوی ہون جو مبدء مقرر کے صرف ایک سمت محدودہ مین نصف قطر دائر کہنچا گیا رکہتی ہون اور اگر ہم اس قید کے بہی پابند نہ رہین تو ہم کو یہہ دیکہنا چاہئی کہ دفعہ ۳۰۹ کی اخیر مین پر ہمیشہ زیادہ نہین ہوتا تو

برکی اسی قیمتین ایسی ہونگین کہ جنکی سبب سی بچ معدوم ہوگا
جنکا ہم کو خیال بھی نہ تہا لیکن اگر ایسا ہوگا تو اتنی ہی وہان تغیرات +سی -اور -سی +بر ہونگے
(۳۱۳) ہم نے اپنی ساری تحقیقات مین یہہ فرض کیا ہی کہ احاطہ کی اوپر کوئی نقطہ اصلی نہین ہے
اگر نقطہ اصلی احاطہ پر ہو تو ہماری تحقیقات مین کچہ تغیر سوا ر دفعہ ۳۰۹ کے اخیر کے نہین
واقع ہوگا اور یہان فقط اتنا ہوگا کہ سرکے واسطے ۲ کہ کی ترتیب تہی اب صرف ک کی ترتیب ہوگی
اور م تغیرات علامت بجای ۲م تغیرات علامت کے واقع ہونگے
(۳۱۴) یہہ کاچی صاحب کا ضابطہ پینی آنسائی کلوپیڈیا کے مسائل معادلات کے اندر لکہا ہوا ہے
اور پروفیسر ڈی مورگن کی علم مثلث اور جبر مقابلہ مین اور انہین صاحب کی اور تحریرات مین
موجود ہی غرض انہین کتابون سی اخذ کرکے یہہ سب لکہا ہے

پچیسوان باب ادخال مقطعات

(۳۱۵) مسئلہ مقطعات کا اب ہم کچہ بیان کرتی ہین یہہ فرع علم ریاضی کی زمانہ حال کا ایجاد ہے
روز بروز اوسکی ترقی ہوتی جاتی ہی اور بہت بڑی بڑی کام اوسی نکلتی ہین اس باب مین
بعض خاص مثالین اونکی بیان کرینگے اور اونکی توضیح اور تشریح اسطرح کرینگے کہ جسی طالب علم
مقطعات کی ذات اور صفات کو بخوبی سمجہہ جائین اوسی اگی ایک باب مین مسائل عامہ اس فرع کے
لکہینگے اور پہر ایک باب مین مسائل معادلات مین جو کام اونسی نکلتا ہی اور جسطرح اونکا استعمال ہوتا ہے بیان کرینگے
(۳۱۶) ان معادلات ہم زاد پر خیال کرو کہ

ا۱ لا + ب۱ ک = س۱ اور ا۲ لا + ب۲ ک = س۲

ان مساواتون سے یہہ حاصل ہوتا ہے

کہ لا = $\frac{ب_2 س_1 - ب_1 س_2}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1}$ اور ک = $\frac{ا_1 س_2 - ا_2 س_1}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1}$

نسب نما مشترک ا۱ ب۲ - ا۲ ب۱ کو چار مقادیر ا۱ و ب۱ اور ا۲ و ب۲ کا مقطع کہتے ہین
اور اوسکو اس رمز سے تعبیر کرتے ہین کہ

$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}$

لا اور ء کی قیمتون کی شمار کنندون کو بھی مقطعات کہتی ہین اور لا اور ء کی قیمت کو اس طرح ظاہر کیا کرتے ہین کہ

$$\text{لا} = \frac{\begin{vmatrix} س_1 & ب_1 \\ س_2 & ب_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}} \quad ، \quad \text{ء} = \frac{\begin{vmatrix} ا_1 & س_1 \\ ا_2 & س_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}}$$

(۳۱۷) ان مقطعات کو رتبہ دوم کا کہتی ہین کیونکہ ہر ایک رقم اونکی دو مقدارون سی مرکب ہی اور مقادیر $ا_1$ و $ب_1$ اور $ا_2$ اور $ب_2$ کو جو مقطع $ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1$ مین واقع ہوتی ہین اجزاء ذاتی کہتی ہین اور حاصل ضرب $ا_1 ب_2$ اور $ا_2 ب_1$ کو اجزاء ترکیبی مقطع کی کہتی ہین رتبہ دوم کی مقطع مین چار اجزاء ذاتی اور دو اجزاء ترکیبی ہوتی ہین

اس مقطع کے تعبیر کرنی کی واسطی جو رمز اوپر بیان ہوئی ہی اوسکی شکل مربع کی ہوتی ہین اور اوسمین دو صفین افقی ہوتی ہین یا دو صفین عمودی

(۳۱۸) اب رتبہ دوم کی مقطعات کی بعض صفات کا بیان کرتے ہین

چونکہ یہہ ہم کو حاصل ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1 = \begin{vmatrix} ا_1 & ا_2 \\ ب_1 & ب_2 \end{vmatrix}$$

اسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر افقی صفون کو عمودی صفون مین بدل دین تو کچھ فرق نہین آتا

(۳۱۹) ذیل کے متطابق اسانی سی ثابت ہوتے ہین کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ب_1 & ا_1 \\ ب_2 & ا_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_2 & ب_2 \\ ا_1 & ب_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_2 & ا_2 \\ ب_1 & ا_1 \end{vmatrix}$$

پس مقطع مین اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین آپسمین متبدل ہو جائین تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت مین کچھ خلل نہین واقع ہوتا اور اگر یہہ دونو متبادل

ہون تو مقطع مین کچھہ بھی تبدل نہین واقع ہوتا

(۳۲۰) ہم کو معلوم ہے کہ

$$ع\begin{vmatrix} ا_۱ & وب_۱ \\ ا_۲ & وب_۲ \end{vmatrix} = ع\begin{vmatrix} ا_۱ & وب_۱ \\ ا_۲ & وب_۲ \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} ع ا_۱ & وع ب_۱ \\ ا_۲ & و ب_۲ \end{vmatrix} = ع\begin{vmatrix} ا_۱ & وب_۱ \\ ا_۲ & وب_۲ \end{vmatrix}$$

پس اگر ایک افقی صف کی یا ایک عمودی صف کی ہر جزو ذاتی کو ایک مقدار معلوم مین ضرب دین تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم مین ہو جاتی ہے

(۳۲۱) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_۱ & وب_۱ \\ ا_۱ & وب_۱ \end{vmatrix} = ۰ \quad \begin{vmatrix} ا_۱ & و ا_۱ \\ ا_۲ & و ا_۲ \end{vmatrix} = ۰$$

پس اگر دو افقی صفین اور عمودی صفین متطابق ہون تو مقطع معدوم ہو جائیگا

(۳۲۲) مقطعات کی توضیح اور تشریح سے یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_۱ + اَ_۱ & وب_۱ + بَ_۱ \\ ا_۲ + اَ_۲ & وب_۲ + بَ_۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_۱ & وب_۱ \\ ا_۲ & وب_۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} اَ_۱ & وب_۱ \\ اَ_۲ & وب_۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا_۱ & وبَ_۱ \\ ا_۲ & وبَ_۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} اَ_۱ & وبَ_۱ \\ اَ_۲ & وبَ_۲ \end{vmatrix}$$

پس وہ مقطع جسکا ہر یک جزو ذاتی مجموعہ دو رقمون کا ہو مساوی اون چار مقطعات کی ہوتا ہے جو اسطرح سے بنتی ہین کہ بجای ہر کل سطر عمودی کی ہم اونکی جزئیات عمودی سطرون کی لین اور یہہ ایک خاص صورت ہی کہ ہم فرض کرین کہ اَ_۱ = ب_۱ اور اَ_۲ = ب_۲ تو بموجب دفعہ ۳۲۰ کے ۱۰ بیہ کے چار مقطعات مین سی دوسرا مقطع معدوم ہو جائیگا اور ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{vmatrix} ا_۱ + ب_۱ & وب_۱ + بَ_۱ \\ ا_۲ + ب_۲ & وب_۲ + بَ_۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_۱ & وب_۱ \\ ا_۲ & وب_۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا_۱ & وبَ_۱ \\ ا_۲ & وبَ_۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ب_۱ & وبَ_۱ \\ ب_۲ & وبَ_۲ \end{vmatrix}$$

(۳۲۳) بموجب دفعہ ۳۲۲ کے

$$\begin{vmatrix} ا_1 سہ_1 + ب_1 صہ_1 & ا_1 سہ_2 + ب_1 صہ_2 \\ ا_2 سہ_1 + ب_2 صہ_1 & ا_2 سہ_2 + ب_2 صہ_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ا_1 سہ_1 & ا_1 سہ_2 \\ ا_2 سہ_1 & ا_2 سہ_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ب_1 صہ_1 & ب_1 صہ_2 \\ ب_2 صہ_1 & ب_2 صہ_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا_1 سہ_1 & ب_1 صہ_2 \\ ا_2 سہ_1 & ب_2 صہ_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ب_1 صہ_1 & ا_1 سہ_2 \\ ب_2 صہ_1 & ا_2 سہ_2 \end{vmatrix}$$

$$= سہ_1 سہ_2 \begin{vmatrix} ا_1 & ا_2 \\ ا_2 & ا_2 \end{vmatrix} + صہ_1 صہ_2 \begin{vmatrix} ب_1 & ب_1 \\ ب_2 & ب_2 \end{vmatrix} + سہ_1 صہ_2 \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} + صہ_1 سہ_2 \begin{vmatrix} ب_1 & ا_1 \\ ب_2 & ا_2 \end{vmatrix}$$

بموجب دفعہ ۳۲۰ کے اور بموجب دفعہ ۳۲۱ کے چار مقطعات میں اول دو مقطعات معدوم ہوتی ہیں اور بموجب دفعہ ۳۱۸ کے

$$\begin{vmatrix} ب_1 & ا_1 \\ ب_2 & ا_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

پس ہم نے یہ چھوڑا ہے کہ

$$(سہ_1 صہ_2 - صہ_1 سہ_2) \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} \text{ یعنی } \begin{vmatrix} سہ_1 & صہ_1 \\ سہ_2 & صہ_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

اسیواسطے

$$\begin{vmatrix} سہ_1 & صہ_1 \\ سہ_2 & صہ_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 سہ_1 + ب_1 صہ_1 & ا_1 سہ_2 + ب_1 صہ_2 \\ ا_2 سہ_1 + ب_2 صہ_1 & ا_2 سہ_2 + ب_2 صہ_2 \end{vmatrix}$$

پس حاصل ضرب دوسرے رتبہ کے دو مقطعات کا ایک مقطع دوسرے رتبہ کا ہے اور یہ ایک خاص صورت ہی کہ اجزاء ذاتی سہ_1 و صہ_1 و سہ_2 و صہ_2 جداگانہ برابر ا_1 و ب_1 و ا_2 و ب_2 کے ہوں تو یہ مربع مقطع کا

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

برابر اس مقطع کے ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 + ب_1 & و ا_1 ا_2 + ب_1 ب_2 \\ ا_1 ا_2 + ب_1 ب_2 & و ا_2^2 + ب_2^2 \end{vmatrix}$$

(۳۲۴) اب ہم تیسری رتبہ کی مقطعات کا بیان کرتی ہین ان ہمزاد مساواتون پر غور کرو کہ

$ا_1 لا + ب_1 د + س_1 ی = د_1$ و $ا_1 لا + ب_2 د + س_2 ی = د_2$ اور $ا_3 لا + ب_3 د + س_3 ی = د_3$

ان مساواتون سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لا = \frac{د_1(ب_2 س_3 - ب_3 س_2) + د_2(ب_3 س_1 - ب_1 س_3) + د_3(ب_1 س_2 - ب_2 س_1)}{ا_1(ب_2 س_3 - ب_3 س_2) + ا_2(ب_3 س_1 - ب_1 س_3) + ا_3(ب_1 س_2 - ب_2 س_1)}$$

اور اسی قبیل کے جملی ، اوری کے قیمتون کے واسطی ہونگے

لا کی قیمت کی نسبت نما کو تیسری رتبہ کا مقطع کہتی ہین اور اوسکی نو اجزاء ذاتی

$ا_1$ و $ب_1$ و $س_1$ اور $ا_2$ و $ب_2$ و $س_2$ و $ا_3$ و $ب_3$ و $س_3$ ہین اور اوسمین چھہ اجزا ترکیبی ہین اونمین سی ہر ایک تین اجزاء ذاتی کا حاصل ضرب ہی اور اس مقطع کو اس رقم سے تعبیر کرتے ہین

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 \\ ا_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix}$$

چونکہ قیمت اس مقطع کے یہہ ہے کہ

$ا_1(ب_2 س_3 - ب_3 س_2) + ا_2(ب_3 س_1 - ب_1 س_3) + ا_3(ب_1 س_2 - ب_2 س_1)$

اب اسکو ہم دوسرے رتبہ کے مقطعات مین اسطرح بیان کرتے ہین کہ

$$ا_1 \begin{vmatrix} ب_2 & س_2 \\ ب_3 & س_3 \end{vmatrix} + ا_2 \begin{vmatrix} ب_3 & س_3 \\ ب_1 & س_1 \end{vmatrix} + ا_3 \begin{vmatrix} ب_1 & س_1 \\ ب_2 & س_2 \end{vmatrix}$$

لا کی قیمت کا شمار کنندہ بھی تیسری رتبہ کا مقطع ہی فقط $ا_1$ و $ا_2$ و $ا_3$ کو $د_1$ و $د_2$ و $د_3$ سے

جداگانہ نسب نمائی رموزی جملون مین تبدیل کرلین تو شمار کنندہ کی رموزی جملی حاصل ہوجاتی ہے

اب ہم کو یہہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ جو صفت اور خاصیت دوسرے رتبہ کی مقطعات کی تہی وہی ان تیسرے رتبہ کی مقطعات کی صفت اور خاصیت ہے

(۳۲۵) فرض کرو کہ $\lambda_1 = 1$ اور $\lambda_2 = 0$ اور $\lambda_3 = 0$ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 \text{و ب}_1 \text{و س}_1 \\ \text{ا}_2 \text{و ب}_2 \text{و س}_2 \\ \text{ا}_3 \text{و ب}_3 \text{و س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \text{و س}_2 \\ \text{ب}_3 \text{و س}_3 \end{vmatrix}$$

پس اسطرح تیسرے رتبہ کی مقطع کی تحویل دوسرے رتبہ کے مقطع کی طرف ہوگی اور ب۱ اور س۱ کے قیمتین کچہ اس مقطع پر اثر نہین رکہتین اور اگر ہم چاہین تو اونکو برابر صفر کے لکہہ سکتی ہین

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی ہم کو ارتباط تیسری رتبہ کے مقطعات مین معلوم ہو تو اوسی مثل اوس ارتباط کے دوسری رتبہ کی مقطعات مین ایک ارتباط اسطرح استنباط کرسکتی ہین کہ بعض اجزا ذاتی کو معدوم خیال کرین

(۳۲۶) مقطعات کی تشریح اور توضیح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ

$$\text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \text{و س}_2 \\ \text{ب}_3 \text{و س}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_3 \text{و س}_3 \\ \text{ب}_1 \text{و س}_1 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 \text{و س}_1 \\ \text{ب}_2 \text{و س}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 \text{و ب}_3 \\ \text{س}_2 \text{و س}_3 \end{vmatrix} + \text{ب}_1 \begin{vmatrix} \text{س}_2 \text{و س}_3 \\ \text{ا}_2 \text{و ا}_3 \end{vmatrix} + \text{س}_1 \begin{vmatrix} \text{ا}_2 \text{و ا}_3 \\ \text{ب}_2 \text{و ب}_3 \end{vmatrix}$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 \text{و ب}_1 \text{و س}_1 \\ \text{ا}_2 \text{و ب}_2 \text{و س}_2 \\ \text{ا}_3 \text{و ب}_3 \text{و س}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 \text{و ا}_2 \text{و ا}_3 \\ \text{ب}_1 \text{و ب}_2 \text{و ب}_3 \\ \text{س}_1 \text{و س}_2 \text{و س}_3 \end{vmatrix}$$

اسی ثابت ہوا کہ اگر افقی صف اور عمودی صف آپسمین تبدیل ہوجاسگی تو مقطع مین کچہ فرق نہین آتا

(۳۲۷) ذیل کی مطابقی آسانی سی اسطرح ثابت ہوسکتی ہین کہ تیسرے رتبہ کی مقطعات کو دوسرے رتبہ کے مقطعات مین تحویل کرلین اور پہر انکی توضیح کرین

$$\begin{vmatrix} ا_1 و ب_1 و س_1 \\ ا_2 و ب_2 و س_2 \\ ا_3 و ب_3 و س_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ب_1 و ا_1 و س_1 \\ ب_2 و ا_2 و س_2 \\ ب_3 و ا_3 و س_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_1 و س_1 و ا_1 \\ ب_2 و س_2 و ا_2 \\ ب_3 و س_3 و ا_3 \end{vmatrix}$$

پس اگر دو عمودی صفون مین تبادل ہو تو علامت مقطع کی بدل جاتی ہی مگر اوسکی قیمت نہین بدلتی

اور اسیواسطی اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع مین کچہ تبدل نہین ہوتا اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۲۶ کے اگر دو افقی صفین باہم متبدل ہون تو مقطع کی علامت بدل جائیگی مگر اوسکی قیمت مین کچہ فرق نہین آئیگا اور اگر یہہ عمل دو دفعہ کیا جاے تو مقطع مین کچہ تبدل نہین واقع ہوگا

اسی یہہ بہی نتیجہ نکلتا ہی کہ اگر دو عمودی صفون مین بہی تبادل ہو اور دو افقی صفون مین بہی تبادل ہو تو مقطع مین کچہ تبدل نہین ہوگا پس

$$\begin{vmatrix} ا_1 و ب_1 و س_1 \\ ا_2 و ب_2 و س_2 \\ ا_3 و ب_3 و س_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_2 و ا_2 و س_2 \\ ب_1 و ا_1 و س_1 \\ ب_3 و ا_3 و س_3 \end{vmatrix}$$

(۳۲۸) دفعہ ۳۲۰ کی طرح ثابت کرسکتی ہین کہ اگر ایک افقی صف مین یا عمودی صف مین جزوذاتی کو کسی معلوم مقدار مین ضرب دین تو مقطع کی ضرب اوس مقدار معلوم مین ہوجائیگی

(۳۲۹) اسکا ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 و ب_1 و س_1 \\ ا_2 و ب_2 و س_2 \\ ا_3 و ب_3 و س_3 \end{vmatrix} = ۰ \text{ اور } \begin{vmatrix} ا_1 و ب_1 و س_1 \\ ا_2 و ب_2 و س_2 \\ ا_2 و ب_2 و س_2 \end{vmatrix} = ۰$$

پس اگر دو صفین افقی یا دو صفین عمودی متطابق ہوں تو مقطع فنا ہو جائیگا

(۳۳۰) اس بات کا ثابت کرنا آسان ہے کہ مقطع

$$\begin{vmatrix} ا_1 + ا'_1 + ا''_1 & ب_1 & س_1 \\ ا_2 + ا'_2 + ا''_2 & ب_2 & س_2 \\ ا_3 + ا'_3 + ا''_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix}$$

برابر ان تین مقطعات کے مجموعہ کے

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & س_1 \\ ا_2 & ب_2 & س_2 \\ ا_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا'_1 & ب_1 & س_1 \\ ا'_2 & ب_2 & س_2 \\ ا'_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا''_1 & ب_1 & س_1 \\ ا''_2 & ب_2 & س_2 \\ ا''_3 & ب_3 & س_3 \end{vmatrix}$$

اور اسی کی مستثنا یہ نتیجہ حاصل ہوگا اگر اول عمودی صف میں ہر جزو ذاتی مجموعہ چار رقموں کا یا مجموعہ پانچ رقموں کا اور علی ہذا القیاس ہوتا — اگر اجزاء ذاتی ب۱ و ب۲ و ب۳ میں ہر یک کی جگہ تین رقمیں رکھی جائیں تو تین مقطعات بالا میں سے ہر یک برابر تین مقطعات کے مجموعہ کے ہوگا اور علی ہذا القیاس

اسطرح سے مقطع ذیل برابر ۲۷ مقطعات کے مجموعہ کے ہو سکتا ہے

$$\begin{vmatrix} ا_1 + ا'_1 + ا''_1 & ب_1 + ب'_1 + ب''_1 & س_1 + س'_1 + س''_1 \\ ا_2 + ا'_2 + ا''_2 & ب_2 + ب'_2 + ب''_2 & س_2 + س'_2 + س''_2 \\ ا_3 + ا'_3 + ا''_3 & ب_3 + ب'_3 + ب''_3 & س_3 + س'_3 + س''_3 \end{vmatrix}$$

۲۷ مقطعات اسطرح سے اسکی بنتی ہیں کہ بجای کل عمودی صف کی لینے کی عمودی صفوں کے جزئیات میں سے ایک ایک جز لیتی ہیں پس ان مقطعات میں سے تین وہ مقطعات ہونگے جو اوپر لکھی ہیں

(۳۳۱) دفعہ ۳۳۰ کے خاص صورت کے لئے ذیل کا مقطع لیتے ہیں کہ

$$\begin{vmatrix} ا_{۱}س_{۱}+ب_{۱}ص_{۱}+س_{۱}ل_{۱} & ا_{۱}س_{۱}+ب_{۱}ص_{۱}+س_{۱}ل_{۱} & ا_{۱}س_{۱}+ب_{۱}ص_{۱}+س_{۱}ل_{۱} \\ ا_{۲}س_{۲}+ب_{۲}ص_{۲}+س_{۲}ل_{۲} & ا_{۲}س_{۲}+ب_{۲}ص_{۲}+س_{۲}ل_{۲} & ا_{۲}س_{۲}+ب_{۲}ص_{۲}+س_{۲}ل_{۲} \\ ا_{۳}س_{۳}+ب_{۳}ص_{۳}+س_{۳}ل_{۳} & ا_{۳}س_{۳}+ب_{۳}ص_{۳}+س_{۳}ل_{۳} & ا_{۳}س_{۳}+ب_{۳}ص_{۳}+س_{۳}ل_{۳} \end{vmatrix}$$

یہہ دریافت ہوتا ہی کہ ۲۷ مقطعات مین جنکا مجموعہ یہہ خیال کرسکتی تمام سواء ۰ کی بموجب دفعات ۳۲۸ اور ۳۲۹ کے معدوم ہو جاتی ہین تمثیلاً ۲۷ مقطعات مین سی ایک یہہ لو کہ

$$\begin{vmatrix} ا_{۱}س_{۱}و ا_{۱}س_{۲}ب_{۱}ص_{۳} \\ ا_{۲}س_{۲}و ا_{۲}س_{۲}ب_{۲}ص_{۳} \\ ا_{۳}س_{۳}و ا_{۳}س_{۳}ب_{۳}ص_{۳} \end{vmatrix} \quad \text{یعنی} \quad س_{۱}س_{۲}ص_{۳} \begin{vmatrix} ا_{۱}و ا_{۱}ب_{۱} \\ ا_{۲}و ا_{۲}ب_{۲} \\ ا_{۳}و ا_{۳}ب_{۳} \end{vmatrix}$$

بموجب دفعہ ۳۲۸ کے اور یہہ مقطع بموجب دفعہ ۳۲۹ معدوم ہوتا ہی اور جو جو یہہ مقطعات باقی رہتی ہین اونمین سے ایک یہہ ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_{۱}س_{۱}ب_{۱}ص_{۲}و س_{۱}ل_{۳} \\ ا_{۲}س_{۲}ب_{۲}ص_{۲}و س_{۲}ل_{۲} \\ ا_{۳}س_{۳}ب_{۳}ص_{۲}و س_{۳}ل_{۳} \end{vmatrix} \quad \text{یعنی} \quad س_{۱}ص_{۲}ل_{۳} \begin{vmatrix} ا_{۱}ب_{۱}و س_{۱} \\ ا_{۲}ب_{۲}و س_{۲} \\ ا_{۳}ب_{۳}و س_{۳} \end{vmatrix}$$

ایک اور باقی ماندہ جو یہہ مقطعات مین سے لو تو

$$\begin{vmatrix} ا_{۱}س_{۱}و س_{۱}ل_{۲}ب_{۱}ص_{۳} \\ ا_{۲}س_{۱}و س_{۲}ل_{۲}ب_{۲}ص_{۳} \\ ا_{۳}س_{۱}و س_{۳}ل_{۲}ب_{۳}ص_{۳} \end{vmatrix} \quad \text{یعنی} \quad س_{۱}ل_{۲}ص_{۳} \begin{vmatrix} ا_{۱}و س_{۱}ب_{۱} \\ ا_{۲}و س_{۲}ب_{۲} \\ ا_{۳}و س_{۳}ب_{۳} \end{vmatrix}$$

یعنی $= س_{۱}ل_{۲}ص_{۳} \begin{vmatrix} ا_{۱}ب_{۱}و س_{۱} \\ ا_{۲}ب_{۲}و س_{۲} \\ ا_{۳}ب_{۳}و س_{۳} \end{vmatrix}$ بموجب دفعہ ۳۲۷ کے

اسکا نتیجہ یہہ ہی کہ جو جو یہہ مقطعات باقی رہتی ہین اونسی یہہ بنتا ہے کہ

$$\left[س_1 (صہ_2 لر_3 - صہ_3 لر_2) + س_2 (صہ_3 لر_1 - صہ_1 لر_3) + س_3 (صہ_1 لر_2 - صہ_2 لر_1) \right] \begin{vmatrix} ا_1 ب_1 & و_1 \\ ا_2 ب_2 & و_2 \\ ا_3 ب_3 & و_3 \end{vmatrix}$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} س_1 & وصہ_1 & و لر_1 \\ س_2 & وصہ_2 & و لر_2 \\ س_3 & وصہ_3 & و لر_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ا_1 ب_1 & و_1 \\ ا_2 ب_2 & و_2 \\ ا_3 ب_3 & و_3 \end{vmatrix}$$

اسی معلوم ہوتا ہی کہ حاصل ضرب تیسری رتبہ کی دو مقطعات کا تیسری رتبہ کے مقطع مین نمایان ہوسکتا ہی اگر ہم $ا_1 ب_1 \ldots$ جداگانہ برابر $س_1 وصہ_1 \ldots$ کے فرض کرین تو ہم تیسری رتبہ کا مقطع حاصل کرینگے اور یہہ مساوی تیسری رتبہ کے مقطع کے مجذور کے ہوگا

(۳۳۲) ہم نی اسقدر مثالین مقطعات کی ذات اور صفات کی لکھ دین ہین کہ طالب علم کی سمجھ مین بخوبی یہہ بات اجائیگی کہ یہہ مضمون کیا ہی ہم صرف رتبہ سوم کی مقطعات پر مطلب کو چھوڑتے ہین اس سبب سے جو خواص مقطعات رتبہ سوم کی ثابت ہوئے ہین اوسی موافق دفعہ ۳۲۵ کے رتبہ دوم کے مقطعات کی خواص استخراج ہوسکتی ہی مگر جس طرح سی ہم نی اس مضمون کو بیان کیا ہی اوسیطرح متبدیون کے واسطے سودمند ہی باب اینده مین ہم اثبات علی العموم لکھینگے خواہ مقطعات کسی رتبہ کے ہون اس بات پر غور کرو کہ ہم نی اس مقطعات کی مطلب کی تمہید ہمزاد مساوالتون کو حل سے لکھی ہے اس تمہید سی طالب علم ایک ہی دفعہ مین سمجھ سکتا ہے کہ اسی جملی جنکا نام مقطعات رکھا ہے ریاضیات مین واقع ہوتی ہین جب ہم مسئلہ عامہ لکھینگے تو وہان مقطعات کے تغیرات بالکل مساوات سی بی لگاؤ لکھینگے اور اوسی اس مسئلہ عامہ کے بیان کرنی مین آسانی ہوتی ہے اگر ہم تیسرے رتبہ کے مقطع کو ان معنی جدید کے موافق بیان کرین تو طالب علم اوس تعریف مقطعات کو جو باب اینده مین بیان ہوگی خوب سمجھے گا

(۳۳۳) قیمت مقطع

$$\begin{vmatrix} ا_1 ب_1 & و_1 \\ ا_2 ب_2 & و_2 \\ ا_3 ب_3 & و_3 \end{vmatrix}$$

ا ر ب ۲ س ۳ - ا ب ۳ س ۲ + ا ر ب ۳ س ۱ - ا ر ب ۱ س ۳ + ا ۳ ب ۱ س ۲ - ا ۳ ب ۲ س ۱
ہی اول جزء ترکیبی ا ر ب ۲ س ۳ ہی اور یہہ حاصل ضرب اول اجزاء ذاتی کا ہی جو اوس رفر کے مربع مین
کہ مقطع کو تعیر کرتا ہی قطر مین لکہی ہوئی ہین اور اب باقی اور اجزاء ترکیبی اول جزء ترکیبی سے
موافق طریقہ ذیل کی استخراج ہو سکتی ہین کہ اعداد زیرین ا و ۲ و ۳
حروف ا و ب و س کی نتیجہ اوتنی مختلف طورون سی لگائی گئی ہین جتنی طورسی ترتیبین ان اعداد
زیرین کی ہو سکتی ہین اور علامت + یا - کی کسی جزء ترکیبی کے اول اسطرح لگ سکتی ہے
کہ یہہ دیکہین کہ یہہ جزء ترکیبی اول جزء ترکیبی سی کسطرح مستنبط ہوا ہی اگر جفت دفعہ تبدلات دو
اعداد زیرین کا ہوا ہی تو + کی علامت لکہو اور اگر طاق دفعہ تبدلات ہوئی ہین تو - کی علامت مقرر کرو
مثلاً دوسرا جزء ترکیبی اوپر ا ب ۳ س ۲ ہی اور وہ اول جزء ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوا ہے
اعداد زیرین ۲ اور ۳ مین تبادل ہوا ہی اسلئی بموجب قاعدہ کے علامت - کی اول لگائی جائے
اور یہہ جزء ترکیبی ا ر ب ۲ س ۳ ہی اور وہ دوسرے جزء ترکیبی سی اسطرح حاصل ہوتا ہے کہ
اعداد زیرین ۲ اور ا مین تبادل ہوا ہی اور اسواسطے وہ اول جزء ضربی سی دو اعداد زیرین کے
دو تبادل سی مستنبط ہوتا ہی اسواسطے بموجب قاعدہ کی علامت + کی اول لگائی جائی اور اسیطرح
اور باقی اجزاء ترکیبی کی مناسب علامات کا فیصلہ ہو سکتا ہے

(۳۴۴) تیسرے رتبہ کے مقطعات کے یہہ خاص صورتین امثلہ ذیل ہین جنکو طالب علم ثابت کر سکتا ہے

(۱) $\begin{vmatrix} ا و ه & و گ ه \\ ه و ب & و ف \\ گ ه & و ف & و س \end{vmatrix} = ا ب س - ا ف^2 - ب گ^2 - س ه^2 + 2 ف گ ه$.

(۲) $\begin{vmatrix} ا و لا ۱ & و ک ۱ \\ ا و لا ۲ & و ک ۲ \\ ا و لا ۳ & و ک ۳ \end{vmatrix} = لا ۱ ک ۲ - لا ۲ ک ۱ - لا ۲ ک ۳ - لا ۳ ک ۲ + لا ۳ ک ۱ - لا ۱ ک ۳$

(۳) $\begin{vmatrix} ا_1 و_1 + ا_2 و_2 + ا_3 و_3 & ا_1 ب_1 + ا_2 ب_2 + ا_3 ب_3 & ا_1 س_1 + ا_2 س_2 + ا_3 س_3 \\ ا_1 و_1 + ب_2 و_2 + ب_3 و_3 & ب_1 ب_1 + ب_2 ب_2 + ب_3 ب_3 & ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + ب_3 س_3 \\ ا_1 و_1 + س_2 و_2 + س_3 و_3 & ب_1 س_1 + س_2 ب_2 + س_3 ب_3 & س_1 س_1 + س_2 س_2 + س_3 س_3 \end{vmatrix} = (ا_1 - ب_2)(ب_1 - س_2)(س_1 - ا_3) + (ا_2 - ب_1)(ب_2 - س_1)(س_2 - ا_1)$

(۴) $\begin{vmatrix} ا_1 ر_1 و_1 & - ص_1 ه_1 \\ - ر_1 و_1 ه_1 & ص_1 \\ ص_1 - ه_1 و_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + ه_1^2 + ص_1^2 + ر_1^2$

چھبیسوان باب خواص مقطعات

(۳۳۵) فرض کرو کہ ن رموز $ا_1 و_1 ا_2 و_2 \ldots$ ان مین ہین تو اوس ایک رمز کو بہ نسبت دوسرے رمز کے اعلی کہینگے جسمین کہ عدد زیرین بڑا بہ نسبت دوسرے عدد زیرین کے ہو مثلاً $ا_3$ کو اعلی بہ نسبت $ا_2$ یا $ا_1$ کے کہینگے یا $ا_2$ کو اعلی بہ نسبت $ا_3 و_3 ا_2 و_2 ا_1 و_1$ کے کہینگے اور علی ہذا القیاس اب فرض کرو کہ ان رموز کی ترتیبین بنائی گئین تو جس ترتیب مین دو رمزون کی اعداد زیرین مین اول بڑا بہ نسبت دوسرے کی ہو تو اوسی کی بی ترتیبی یا انتشار کہتی ہین مثلاً ترتیب $ا_3 ا_2 ا_1$ مین چار بی ترتیبیان ہین یعنی $ا_3 ا_2 و_2 ا_1 و_1$ اور $ا_3 ا_2 ا_1$ اور $ا_3 ا_1$

(۳۳۶) رموز $ا_1 و_1 ا_2 و_2 \ldots$ ان مین دو نوع کی ترتیبین ہوسکتی ہین ایک وہ جنمین جفت تعداد بی ترتیبون کی ہو دوسرے وہ جنمین طاق تعداد بی ترتیبون کی ہو

(۳۳۷) جب کسی ترتیب مین دو رمزونمین بتبادل اسطرح ہو کہ ایک دوسرے کے مقام بدل لے اور باقی رموز مین کچھ تبدل نہ ہو تو تعداد بی ترتیبون کی جو زیادہ یا کم ہوگی وہ طاق ہوگی فرض کرو کہ گ وک دو رموز ہین جنمین ک اعلی ہی اور گ سی پیشتر جماعت رموز کو اتعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کی درمیان جو جماعت رموز ہو اوسکو ب تعبیر کرتا ہے اور گ اور ک کے بالعکس جو جماعت رموز ہو اوسکو س تعبیر کرتا ہی تو جن ترتیبون کا باہم مقابلہ کرنا ہے وہ اگر ب ک س اور اک ب گ س ہین تو بی ترتیبون کی تعداد کا فرق موقوف اون رموز

برہی جنسی کہ جماعتین گہ ب ک اور ک ب گہ بنتی ہین فرض کرو کہ ب مین صد موز داخل ہین
اور اونمین سی صہ ۱ اعلی بہ نسبت گ گہی اور صہ ۲ اونمین سی اعلی بہ نسبت ک کے ہے
تو جماعت گہ ب ک مین علاوہ اون بی ترتیبون کی جو خود ب مین موجود ہین صہ - صہ ۱ + صہ ۲
بی ترتیبیان اور ہین اسواسطی کہ گہ اعلی صہ - صہ ۱ سی ب کے رموز مین ہی
اور صہ ۲ رموز ب مین اعلی بہ نسبت ک کی ہین جماعت ک ب گہ مین سواے اون بی ترتیبون کے
جو خود ب مین ہین صہ - صہ ۲ + صہ ۱ + ۱ بی ترتیبیان ہین اسواسطی کہ ک اعلی بہ نسبت
صہ - صہ ۲ رموز سی ب کی اندرہی اور صہ ۱ رموز ب مین اعلی بہ نسبت گہ کی ہین اور
ک اعلی بہ نسبت گہ کی ہی اسواسطی تفاوت بی ترتیبون کی تعداد مین

صہ ۱ - صہ ۲ + صہ ۱ + ۱ - (صہ - صہ ۱ + صہ ۲)

یعنی ۲ (صہ ۱ - صہ ۲) + ۱ یہہ تفاوت طاق عددہی

(۳۳۸) ایک ترتیب معلوم سی تمام ترتیبین جو کل ن رموز کے بنائی جاتی دو رموز کی تبادل
کی تکرار سی مستنبط ہو سکتی ہین اس طریقہ سی جو استخراج ترتیبون کا کرینگی تو موافق دفعہ
۳۳۷ کی باری باری ایسی ترتیبین حاصل ہونگین جنمین ایک دفعہ جفت بی ترتیبیان ہونگین اور
دوسری دفعہ طاق بی ترتیبیان ہونگین اور تمام رموز کی ترتیبون کی کل تعداد جفت ہوگی
اسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ترتیبین جنمین بی ترتیبون کی تعداد جفت ہو اتنی ہی ہوتی ہے
جتنی کہ وہ ترتیبین ہوتی ہین کہ جنمین بی ترتیبون کی طاق تعداد ہو

(۳۳۹) فرض کرو کہ ق مقادیر مربع کی صورت مین اسطرح لکھی جائین

ا ۱ و ۱	ا ۱ و ۲	ا ۱ و ۳	. . . ا ۱ ون
ا ۲ و ۱	ا ۲ و ۲	ا ۲ و ۳	. . . ا ۲ ون
. . .	. . .	. . .	. . .
ا ن و ۱	ا ن و ۲	ا ن و ۳	. . . ا ن ون

یہان کسی مقدار اروی مین عدد زیرین رسی توافقی صف اور دوسرے عدد زیرین
کسی عمودی صف جسمین اروی نمایان ہو تعبیر ہوتی ہے

رمز بالا سی مقطع ن مقادیر کا جو اوسمین واقع ہوتی ہین تعبیر ہوتا ہی اور ان مقادیر کو اجزاء
ذاتی اوس مقطع کا کہتی ہین اور قیمت مقطع کی اسطرح دریافت ہوتی ہی کہ خاص تعداد اجزاء ترکیبی کا
مجموعہ لین اور ہر جزء ترکیبی مین ق اجزاء ذاتی ہین اول جزء ترکیبی حاصل ضرب اجزاء ذاتی
ا اول د ا ۲ و د ا ۳ و ۳ ۔ ۔ ۔ ان ون کا ہے اور یہہ مربع مذکور کے اوس قطر مین
واقع ہین جو دائین طرف اوپر کی کونہ سی شروع ہوتا ہی اور اپنی مقابل کی کونہ پر ختم ہوتا ہے
ہم اس قطر کو قطر مربع کہینگے اسواسطی کہ اینده ہمکو موقع اس قطر کی طرف رجوع کرنی کا ملے گا
اور تمام اوراجزاء ترکیبی اول جزء ترکیبی ا اول د ا ۲ و د ا ۳ و ۳ ۔ ۔ ۔ ان ون
سی اسطرح حاصل ہوتی ہین کہ دوسرے عدد زیرین کی ترتیبین لیتی ہین اور پہلی عدد زیرین جیسا ہی
ویسا ہی رہنے دیتی ہین اور علامت + اور - کی اول مقطع کی ہر جزء ترکیبی کی اول موافق نوع
کے مقرر کرتے ہین جسکا بیان دفعہ ۳۰۶ مین ہوا اگر وہ اوسی نوع کی ہین جس نوع
کا اول جزء ترکیبی ہی تو علامت + کی اول لگاتی ہین اور اگر وہ اس نوع کا نہین ہوتا تو علامت - کی

(۳۴۰) اوپر کے مقطع کو رتبی کا کہتی ہین کیونکہ ہر جزء ترکیبی ن اجزاء ذاتی کا حاصل ضرب ہوتا ہے
اور تعداد اجزاء ترکیبی کے اوتنی ہی ہوتی ہی جتنی کہ تعداد ان اشیا کی ترتیبون کی ہوتی ہے
جب ترتیب کل اشیا کی ایک ہی دفعہ کی جائین یعنی ان انمین سی نصف کی اول علامت + ہوگی
اور نصف کی اول علامت - کی یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اجزاء ترکیبی کا اسطرح بنائی جاتے ہین
اوانمین سی ہر یک جزء ترکیبی مین صرف ایک ہی جزء ذاتی اوس مربع کی ہر صف افقی کا یا ہر صف
عمودی کا ہوتا ہے جو اوس مقطع کو تعبیر کرتی ہے

(۳۴۱) مقطع کی واسطی بجای رمز بالا کے بعض اوقات یہہ رمز
ح = ا اول د ا ۲ و د ا ۳ و ۳ ۔ ۔ ۔ ان ون کام مین لاتے ہین یعنی جزء ترکیبی اول

کو لکھتی ہین اور اوسکی اول ر مزحج ± کو لکھدیتی ہین اور اوسی تعبیر ہوتا ہی محموعہ اجزاء ترکیبی کا
جو اول جزء ترکیبی سی مناسب ترتیبون اور علامات + اور - کی ٹھیک ٹھیک مقرر کرنے سے حاصل ہوتا ہے،
مقطع کی اجزاء ترکیبی مختلف طور سی تعبیر ہوتی ہین کبھی تو (ے وک) کو بجاے ے وک کے
کام مین لاتی ہین اور اس صورت مین یہہ یاد رکھنا چاہئی
کہ (ے وک) اور (ک وے) جدا جدا مقادیر تعبیر ہوتی ہین ادنی رتبی کے مقطعات کی مثالون
مین اسمین آسانی ہوتی ہی کہ دوہری اعداد زیرین کام مین نہ لائین اور ایک ہی حرف تمام اجزاء ذاتی
کے واسطی جو ایک عمودی صف مین ہو کام مین لائین اور ایک ہی اعداد زیرین سی اونمین تمیز پیدا کرین
یہی طریقہ کتابت پہلی باب مین اختیار کیا گیا ہے
(۳۴۲) اور اجزاء ترکیبی مقطع کی اول جزء ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوتی ہین کہ دوسری
عدد زیرین کے ترتیبین لیتی ہین اور اول عدد زیرین مین کچھ تبدل نہین کرتے اور یہہ اجزاء
ترکیبی ایک اور طرح سی حاصل ہوتی ہین کہ اول اعداد زیرین کی ترتیبین لین اور دوسرے
اعداد زیرین مین تبدل نہ کرین اسواسطی کہ فرض کرو کہ
سہ وصہ ولر . . . ر ایک خاص ترتیبین ن اعداد ۱ و ۲ و ۳ . . . ن
کی تعبیر کرین تو ل۱ وسہ ول۲ وصہ ول۳ ولر . . ن وں ایک جزء ترکیبی ہی جو اسطرح
پیدا ہوتا ہے کہ اول جزء ترکیبی مین دوسری عدد زیرین ۱ ۲ . . ن کو
سہ وصہ ولر . لر سے بدل دین لیکن یہی جزء ترکیبی اول جزء ترکیبی
ل۱ ول۲ ۲ . . ن وں سے بھی اسطرح استخراج ہو سکتا ہے کہ
دوسری اعداد زیرین مین کچھ تبدل نہ کرین اور اول اعداد زیرین کو مناسب طور پر
تبدیل کرین یعنی ۱ کو سہ سی اور ۲ کو صہ سے اور ۳ کو لر سے . . اور ن کو سے
ان دونو طریقون سے جو استخراج ہوتا ہے اونمین دونو اعداد زیرین کے تبادل کی
تعداد ایک ہی ہوتی ہی اور اسواسطی ایک ہی علامت ہر جزء ترکیبی کے اول بموجب قاعدہ

دفعہ ۳۳۹ کے مقرر ہوتی ہے

(۳۴۳) اگر متواتر افقی صفون کو عمود صفون سے بدل دین تو مقطع کی قیمت مین کچھ فرق نہین پڑتا

$$\begin{vmatrix} ا_{1,1} & ا_{1,2} & \dots & ا_{1,ن} \\ ا_{2,1} & ا_{2,2} & \dots & ا_{2,ن} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ا_{ن,1} & ا_{ن,2} & \dots & ا_{ن,ن} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_{1,1} & ا_{2,1} & \dots & ا_{ن,1} \\ ا_{1,2} & ا_{2,2} & \dots & ا_{ن,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ا_{1,ن} & ا_{2,ن} & \dots & ا_{ن,ن} \end{vmatrix}$$

اسواسطے کہ یہہ ظاہر ہی موافق دفعہ ۳۴۰ کے اجزاء ترکیبی مقطعات کی برابر قیمت کی ہوتے ہین اور دفعہ ۳۴۲ کے موافق اونکی ایک ہی علامتین ہوتی ہین

(۳۴۴) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین اپسمین بدل جائین تو علامت مقطع کی تبدیل ہوگی

فرض کرو کہ ر س مقطع معلوم کو تعبیر کرتا ہی اور ر س اوس مقطع کو جو تبادل سے پیدا ہوتا ہے تو اجزاء ترکیبی ر س اور ر س مین ایک ہی قیمت کی ہین اب صرف اونکی علامت ہی کا فیصلہ کرنا ہی ر س مین اول جزء ترکیبی ر س کی اول جزء ترکیبی سی اسطرح استخراج ہوسکتا ہے کہ دوسری اعداد زیرین مین سی دو کا تبادل کردین اور ان اجزاء ترکیبی کی دونو مقطعات مین مختلف علامتین ہونگین تو ایک جزء ترکیبی ر س مین جو ر س کی اول جزء ترکیبی کے م تبادل سے دوسرے اعداد زیرین کی پیدا ہوتا ہی وہ اول جزء ترکیبی سی ر س کی م + ۱ تبادل سی پیدا ہوسکتا ہی اور اسیواسطے وہ ر س اور ر س مین مختلف العلامت ہوگا

(۳۴۵) اگر دو افقی صفین یا دو عمودی صفین متطابق ہون تو مقطعات معدوم ہوجائینگے

وجہ اسکی یہہ ہی کہ دو افقی صفین یا دو عمودی صفین جب باہم بدلین تو ایک مقطع ر س سے ر س بدل کر ہوجائیگا لیکن اگر دو افقی صفین یا عمودی صفین متطابق ہون تو ان افقی صفون یا عمودی صفون کا تبادل کچھ تصرف مقطع مین نہین کریگا اور اسیواسطے ر س = ر س اور اسیواسطے ر = ۰

(۳۴۶) جب تمام اجزاء ذاتی سوا ایک کی کسی ایک افقی صف میں یا عمودی صف میں معدوم ہوجائیں تو مقطع کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوجاتی ہے جو رتبہ مابعد کے مقطع اور اوس جزذاتی کے ضرب دینی سے پیدا ہوتا ہے

مثلاً اس مقطع پر خیال کرو

$$\begin{vmatrix} ا_1 ب_1 & وس_1 & د_1 \\ ا_2 ب_2 & وس_2 & د_2 \\ ا_3 ب_3 & وس_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

اکیلی افقی صفوں کی تین متواتر تبادلی ہم اوس افقی صف کو جسمیں س۴ ہی سب سے اوپر کی افقی صف میں لاتی ہیں اور اکیلی عمودی صفوں میں دو متواتر تبادلی سی ہم اوس عمودی صف کو جسمیں س۴ ہی اول عمودی صف میں لاتی ہیں پس بموجب دفعہ ۳۴۴ کے

$$\begin{vmatrix} ا_1 ب_1 & وس_1 & د_1 \\ ا_2 ب_2 & وس_2 & د_2 \\ ا_3 ب_3 & وس_3 & د_3 \\ 0 & وس_4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} س_4 & 0 & 0 \\ س_1 & ا_1 ب_1 & د_1 \\ س_2 & ا_2 ب_2 & د_2 \\ س_3 & ا_3 ب_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

اول جزترکیبی بائیں طرف س۴ ا۱ ب۲ د۳ ہی اور اور اجزاء ترکیبی ایسے اعداد زیرین کے ترتیبوں سی حاصل ہوسکتی ہیں لیکن س۴ صرف ایک جزذاتی ہے جسکا عدد زیرین ۴ ہی جو صفر نہیں ہی اور صرف س۴ ہی ہر ایک جزء ترکیبی کا جزضربی ہوگا جو معدوم نہیں ہوتا اور اور جزضربی ا۱ ب۲ د۳ سے اعداد زیرین ۱ و ۲ و ۳ کے ترتیبوں سی مستنبط ہوتی ہیں پس اصل مقطع کی تحویل

$$(-1)^5 س_4 \times \begin{vmatrix} ا_1 ب_1 & د_1 \\ ا_2 ب_2 & د_2 \\ ا_3 ب_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

طریقہ اثبات کا بھی خواہ مقطع مفروضہ کا کچھ ہی رتبہ ہو
اس مثال مین جو علامت منفی کی $(-1)^5$ سے پیدا ہوتی ہے اگر ہم چاہین تو اوسی اسطرح دور کرسکتی ہین کہ تیسری رتبہ کی مقطع مین دو افقی صفون کو یا دو عمودی صفون کو متبدل کردین

(۳۴۷) ن رتبی کی مقطع کی صف افقی جو سب سی اوپر ہو وہ ن - ا متواتر تبادل سی دو افقی صفون کی سب سی نیچی اسکتی ہی اور علی ہذا القیاس اول عمودی صف اخر عمودی صف کی ن - ا متواتر تبادل سی دو عمودی صفون کے بن سکتی ہی انمین سی ہر یک کو دور تبادل کہتی ہین اور بعض اوقات عمودی یا افقی صفون کو زیادہ بالقرینہ بنانی کی واسطی اسمین سانی ہوتی ہے کہ تبادل مفروضہ افقی صفون یا عمودی صفون کا دور تبادل کی تسلسل سی حاصل کرین
مثال گذشتہ مین ہم س ہ کو جس جگہ قائم کرنا چاہتی تہی اوس جگہ اسطرح لے ائی کہ تین متواتر دور تبادل افقی صفون کی اور دو متواتر دور تبادل عمودی سطرون کی لئی پس اصل مقطع کے واسطی یہہ متواتر صورتین حاصل ہوئین

$(-1)^3$

ا ہ و ب ۲ و س ۲ و د ۲	ا ۳ و ب ۳ و س ۳ و د ۳	۰ و ۰ و س ہ و ۰
ا ۳ و ب ۳ و س ۳ و د ۳	۰ و ۰ و س ہ و ۰	ا ۱ و ب ۱ و س ۱ و د ۱
۰ و ۰ و س ہ و ۰	ا ۱ و ب ۱ و س ۱ و د ۱	ا ۲ و ب ۲ و س ۲ و د ۲
ا ۱ و ب ۱ و س ۱ و د ۱	ا ۲ و ب ۲ و س ۲ و د ۲	ا ۳ و ب ۳ و س ۳ و د ۳

$(-1)^6$

ا ۲ و ب ۲ و س ۲ و د ۲	ا ۳ و ب ۳ و س ۳ و د ۳
ا ۳ و ب ۳ و س ۳ و د ۳	۰ و ۰ و س ہ و ۰
۰ و ۰ و س ہ و ۰	ا ۱ و ب ۱ و س ۱ و د ۱
ا ۱ و ب ۱ و س ۱ و د ۱	ا ۲ و ب ۲ و س ۲ و د ۲

$(-1)^9$

۰ و ۰ و س ہ و ۰	ا ۱ و ب ۱ و س ۱ و د ۱
ا ۱ و ب ۱ و س ۱ و د ۱	ا ۲ و ب ۲ و س ۲ و د ۲
ا ۲ و ب ۲ و س ۲ و د ۲	ا ۳ و ب ۳ و س ۳ و د ۳
ا ۳ و ب ۳ و س ۳ و د ۳	۰ و ۰ و س ہ و ۰

$(-1)^{12}$

۰ و س ہ و ۰ و ۰	س ہ و ۰ و ۰ و ۰	د ۱ و ا ۱ و ب ۱
ب ۱ و س ۱ و د ۱ و ا ۱	س ۱ و د ۱ و ا ۱ و ب ۱	د ۲ و ا ۲ و ب ۲
ب ۲ و س ۲ و د ۲ و ا ۲	س ۲ و د ۲ و ا ۲ و ب ۲	د ۳ و ا ۳ و ب ۳
ب ۳ و س ۳ و د ۳ و ا ۳	س ۳ و د ۳ و ا ۳ و ب ۳	

$(-1)^{15}$ اس ہ

(۳۴۸) ہر ایک مقطع ہمیشہ ایک اعلی رتبہ کی مقطع کی صورت مین بیان ہوسکتا ہے مثلاً بموجب دفعہ ۳۴۷ کے

$$\begin{vmatrix} ا_{۱}ب_{۱}وس_{۱} \\ ا_{۲}ب_{۲}وس_{۲} \\ ا_{۳}ب_{۳}وس_{۳} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا د . و . و \\ صہ و ا_{۱} ب_{۱} وس_{۱} \\ لر د ا_{۲} ب_{۲} وس_{۲} \\ فر د ا_{۳} ب_{۳} وس_{۳} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا و . و . و . و \\ لب و ا و . و . د \\ بر و صہ و ا_{۱} ب_{۱} وس_{۱} \\ فر و لر و ا_{۲} ب_{۲} وس_{۲} \\ فر د فر و ا_{۳} ب_{۳} وس_{۳} \end{vmatrix}$$

اسمین صہ و لر د فر و لب و د ر د فر د فر کوئی سی مقدار ہو اور اسیطرح اس عمل کو جہان تک چاہین پہلا سکتے ہین

(۳۴۹) فرض کرو کہ ے اور ک دو اعداد زیرین اعداد ۱ و ۲ . . ن مین سی ہون اور س مقطع ح + ا_{۱} ا و ا_{۲} ا_{۲} و ۲ . . ان دن کو تعبیر کرتا ہے اور ا_{ے} ا_{ک} امثال ا_{ے} ا_{ک} کو س مین تعبیر کرتا ہے تو ہر یک ان جملون مین سے

ا_{ے} ا_{۱} ا_{ک} ا_{۱} + ا_{ے} ا_{۲} ا_{ک} ا_{۲} + . . + ا_{ے} ا_{ن} ا_{ک} ا_{ن}

اور ا_{ا ے} ا_{ا و} + ا_{ا ے} ا_{۲ و ے} + . . + ا_{ان ے} ا_{ن و ک}

برابر س کے اگر ے اور ک برابر ہون اور برابر کے اگر ے اور ک نابرابر ہون اسواسطے کہ س کے ہر جزو ترکیبی مین ایک جز ضربی ان اجزا ذاتی ا_{ے ا} و ا_{ے ۲} و . . . ا_{ے ن} دن مین سی ایک ہوتا اور جو ے دن افی نصف بناتا ہے اور چونکہ ا_{ے} ا_{ک} امثال ا_{ے} ا_{ک} کو س مین تعبیر کرتا ہے اسلئے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

س = ا_{ے ۱} ا_{ے ور} + ا_{ے ۲} ا_{ے ۲ و} + . . + ا_{ے ن} ا_{ے ن}

اور اسیطرح ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

س = ا_{ا ے} ا_{ا و} + ا_{ا ے} ا_{۲ و ے} + . . . + ا_{ان ے} ا_{ے ن}

س کے ان جملون مین سی اول جملہ مین ا_{ے ۱} = ا_{س ۱} اور ا_{ے ۲} = ا_{س ۲} . . اور علی ہذا القیاس فرض کرو تو ایک مقطع ایسا حاصل ہوگا جسمین دو افی صفین متطابق ہونگین اور اسلئے مقطع بموجب دفعہ ۳۴۵ کے صفر ہوگا

(۳۵۰) اگر ایک افقی صف یا عمودی صف مین ہر یک جزو ذاتی کسی مقدار معلوم مین ضرب کیا ہے تو وہ مقطع اوس مقدار مین ضرب کیا جاتا ہے،

فرض کرو کہ س = لے و۱ لے و۱ + لے و۲ لے و۲ + . . . لے ون لے ون

اور ے دین افقی صف مین ہر یک رقم ع مین ضرب دیجاے تو ہم ع لے و۱ کو لے و۱ اور ع لے و۲ کو لے و۲ کی جگہ اور علی ہذا القیاس رکھین تو مقطع جدید کے واسطے ع گنا نتیجہ اول کا حاصل ہوگا

اور اسیطرح اس مسئلہ کو ثابت کرسکتے ہین اگر عمودی صف کی ہر یک رقم کسی مقدار معلوم مین ضرب کیجاے

(۳۵۱) اگر ایک افقی صف مین یا عمودی صف مین ہر یک جزو ذاتی مجموعہ م رقمون کا ہو تو مقطع کو مجموعہ م مقطعات کا خیال کرسکتے ہین

مثلاً فرض کروکہ ے دین افقی صف کا ہر جزو ذاتی مجموعہ م ارقام کا ہو اور فرض کرو کہ

لے و۱ = ع۱ + ق۱ + ر۱ + . . .

لے و۲ = ع۲ + ق۲ + ر۲ + . . .

لے و۳ = ع۳ + ق۳ + ر۳ + . .

تو س = لے و۱ لے و۱ + لے و۲ لے و۲ + . . + لے ون لے ون

= ع۱ لے و۱ + ع۲ لے و۲ + . . + عن لے ون

+ ق۱ لے و۱ + ق۲ لے و۲ + . . + قن لے ون

+ ر۱ لے و۱ + ر۲ لے و۲ + . . + رن لے ون

پس س کو مجموعہ اون م مقطعات کا خیال کرسکتے ہین جنمین جداگانہ ے دین افقی صفین بہتہ ہین

ع۱ و ع۲ . . عن

ق۱ و ق۲ . . عن

ر۱ و ر۲ . . رن

(۳۵۲) اب یہہ بتلائینگے کہ لے و۱ کے امثال کسی مقطع مین خود مقطع کی طرح نمایان ہوتے ہین یعنی مقطع کے

اون اجزاء ترکیبی کے حاصل کرنی کی لی جنمین ایک خاص جزذاتی لے وک ملتف ہو اور وہی فقط ہو تمام اجزاء ذاتی کو وین صف افقی مین صفر سوار لے وک کے فرض کرو تو لے وک کے جگہ ا رکھنی سے ہم کو امثال مطلوب حاصل ہونگے

مثلاً

$$\text{لے وک} = \begin{vmatrix} \text{ا ا و ا} & \cdots & \text{ا ا و ک - ۱} & \text{ا ا و ک + ۱} & \cdots & \text{ا ا و ن} \\ \text{لے - ا و ا} & \cdots & \text{لے - ا و ک - ۱} & \text{لے - ا و ک} & \text{لے - ا و ک + ۱} & \text{لے - ا و ن} \\ \text{لے و ا و ا} & \cdots & \text{لے + ا و ک - ۱} & \text{لے + ا و ک} & \text{لے + ا و ک + ۱} & \text{لے + ا و ن} \\ \text{ا ن و ا} & \cdots & \text{ا ن و ک - ۱} & \text{ا ن و ک} & \text{ا ن و ک + ۱} & \text{ا ن و ن} \end{vmatrix}$$

پس لے وک مقطع صورت مین نمایان ہوا اور وہ ن رتبہ کا ہی لے وک کے قیمت پر بغیر کسی شرہونے کے ہم ۔ بجای ہر یک جزذاتی کی ک وین صف عمودی سوار اکے رکھہ سکتی ہین

بموجب دفعات ۳۴۶ یا دفعہ ۳۴۷ کے ہم لے وک کو مقطع (ن - ۱) رتبے کا بنا سکتی ہین

پس ہم دفعہ ۳۴۷ کی ترکیب اختیار کرکے ے - ۱ مدور تغیر ک - ۱ افقی صفون مین اور ک - ۱ مدور تغیر عمودی صفون مین کرسکتی ہین اسیواسطے

$$\text{لے وک} = \text{مر}^{\text{ے}} \begin{vmatrix} \text{لے + ا و ک + ۱} & \cdots & \text{لے + ا و ن} & \text{لے + ا ا و ا} & \cdots & \text{لے + ا و ک - ۱} \\ \text{ا ن و ک + ۱} & \cdots & \text{ا ن و ن} & \text{ا ن و ا} & \cdots & \text{ا ن و ک - ۱} \\ \text{ا ا و ک + ۱} & \cdots & \text{ا ا و ن} & \text{ا ا و ا} & \cdots & \text{ا ا و ک - ۱} \\ \text{لے - ا و ک + ۱} & \cdots & \text{لے - ا و ن} & \text{لے - ا ا و ا} & \cdots & \text{لے - ا و ک - ۱} \end{vmatrix}$$

اسمین مر$^{\text{ے}}$ = (-۱)$^{(\text{ے}-۱+\text{ک}\ ۱)(\text{ن}-۱)}$ = (-۱)$^{(\text{ے}+\text{ک})(\text{ن}-۱)}$

(۳۵۳) دفعات ۳۴۹ و ۳۵۲ کی استعانت سی ان رتبہ کی مقطع کو اسطرح بیان کرسکتی ہین کہ

مجموعہ اون ن رقموں کا ہو جسمیں سی ہر یک حاصل ضرب ایک جزدانی اور (ا-۱) رتبی کی مقطع کا ہو اور (ا-۱) وین رتبی کی مقطعات کا بیان اسطرح ہو سکتا ہی اور اس عمل کو جہانتک چاہو جاری رکھو مثلاً

$$\text{ا ب ا س ا د} = \text{ا}_{\text{ا}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{ب}} & \text{س}_{\text{ب}} & \text{د}_{\text{ب}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{س}_{\text{س}} & \text{د}_{\text{س}} \\ \text{ب}_{\text{د}} & \text{س}_{\text{د}} & \text{د}_{\text{د}} \end{vmatrix} - \text{ب}_{\text{ا}} \begin{vmatrix} \text{س}_{\text{ب}} & \text{د}_{\text{ب}} & \text{ا}_{\text{ب}} \\ \text{س}_{\text{س}} & \text{د}_{\text{س}} & \text{ا}_{\text{س}} \\ \text{س}_{\text{د}} & \text{د}_{\text{د}} & \text{ا}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{س}_{\text{ا}} \begin{vmatrix} \text{د}_{\text{ب}} & \text{ا}_{\text{ب}} & \text{ب}_{\text{ب}} \\ \text{د}_{\text{س}} & \text{ا}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{س}} \\ \text{د}_{\text{د}} & \text{ا}_{\text{د}} & \text{ب}_{\text{د}} \end{vmatrix} - \text{د}_{\text{ا}} \begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{ب}} & \text{ب}_{\text{ب}} & \text{س}_{\text{ب}} \\ \text{ا}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{س}} & \text{س}_{\text{س}} \\ \text{ا}_{\text{د}} & \text{ب}_{\text{د}} & \text{س}_{\text{د}} \end{vmatrix}$$

$$\text{ا}_{\text{ب}} \text{ا}_{\text{س}} \text{ا}_{\text{د}} \text{ب}_{\text{ب}} \text{ب}_{\text{س}} \text{ب}_{\text{د}} \text{س}_{\text{ب}} \text{س}_{\text{س}} \text{س}_{\text{د}} \text{د}_{\text{ب}} \text{د}_{\text{س}} \text{د}_{\text{د}}$$

$$= \text{ا}_{\text{ا}} \left\{ \text{ب}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{س}_{\text{س}} & \text{د}_{\text{س}} \\ \text{س}_{\text{د}} & \text{د}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{س}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{د}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{س}} \\ \text{د}_{\text{د}} & \text{ب}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{د}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{س}} & \text{س}_{\text{س}} \\ \text{ب}_{\text{د}} & \text{س}_{\text{د}} \end{vmatrix} \right\}$$

$$- \text{ب}_{\text{ا}} \left\{ \text{س}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{د}_{\text{س}} & \text{ا}_{\text{س}} \\ \text{د}_{\text{د}} & \text{ا}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{د}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{س}} & \text{س}_{\text{س}} \\ \text{ا}_{\text{د}} & \text{س}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{ا}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{س}_{\text{س}} & \text{د}_{\text{س}} \\ \text{س}_{\text{د}} & \text{د}_{\text{د}} \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ \text{س}_{\text{ا}} \left\{ \text{د}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{س}} \\ \text{ا}_{\text{د}} & \text{ب}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{ا}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{س}} & \text{د}_{\text{س}} \\ \text{ب}_{\text{د}} & \text{د}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{ب}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{د}_{\text{س}} & \text{ا}_{\text{س}} \\ \text{د}_{\text{د}} & \text{ا}_{\text{د}} \end{vmatrix} \right\}$$

$$- \text{د}_{\text{ا}} \left\{ \text{ا}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{س}} & \text{س}_{\text{س}} \\ \text{ب}_{\text{د}} & \text{س}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{ب}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{س}_{\text{س}} & \text{ا}_{\text{س}} \\ \text{س}_{\text{د}} & \text{ا}_{\text{د}} \end{vmatrix} + \text{س}_{\text{ب}} \begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{س}} \\ \text{ا}_{\text{د}} & \text{ب}_{\text{د}} \end{vmatrix} \right\}$$

(۳۵۱۷) اب ہم اس مضمون کا ایک مطلب عظیم لکھتی ہیں اور وہ مقطعات کی ضرب سی متعلق ہے فرض کرو کہ رموز کی دو سلک ہوں یعنی

$$\text{ا}_{\text{ا}} \text{ا}_{\text{ا}} \cdots \text{ا}_{\text{ا}} \text{ا}_{\text{ع}} \text{د}_{-}$$
$$\text{ا}_{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ا}} \cdots \text{ا}_{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ع}} \text{د}$$
$$\text{ب}_{\text{ا}} \text{ا}_{\text{ا}} \cdots \text{ب}_{\text{ا}} \text{ا}_{\text{ع}} \text{د}$$
$$\cdots \cdots \cdots$$
$$\text{ب}_{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ا}} \cdots \text{ب}_{\text{ن}} \text{ا}_{\text{ع}} \text{د}$$

ان سی فرض کرو کہ ایک تیسری سلک رموز بنائی گئی

س ا و ا . . . س ا و ن د

س ن و ا . . . س ن و ن

ان رموز کا فیصلہ قطعی اس ارتباط عام سے ہوگا کہ

س لے و ک = لے و ا ب ک د ا + لے و ۲ ب ی د ۲ + . . . + لے و ع ب ں د ع

فرض کرو کہ ح = س ا و ا س ۲ و ۲ . . . س ن و ن کو س تعبیر کرتا ہے تو ہم نتایج ذیل ثابت کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہے تو س = ۰

(۲) فرض کرو کہ ع = ن تو س برابر حاصل ضرب اون دو مقطعات کے ہوگا جو دو سلک رموز سے کہ موافق اپنی اوسی ترتیب کے لیجائیں شامل ہوتے ہیں

(۳) فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو س برابر ہوگا اون ازواج مقطعات کے حاصل ضربوں کی مجموعہ کی جسمیں سی ہر زوج مقطعات کا اسطرح بنا ہی کہ ان عمودی صفین ایک معلوم سلک رموز سے ایک مقطع میں لیں اور اوسکی مطابق ان عمودی صفین دوسرے معلوم سلک رموز میں سی دوسرے مقطع کی لئی لیں

اول جز ترکیبی س کا س ا و ا س ۲ و ۲ . . . س ن و ن ہی اور اسکی قیمت یہہ ہے کہ

(ح ا اور ب ا اور) (ح ۲ و ص و ب ۲ و ص) (ح ۳ و ط ب ۳ و ط) . . .

اسمیں اول جز ضربی میں ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ رکے لیا جاے اور دوسرے جز ضربی میں ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ص کی لیا جاے اور تیسرے جز ضربی میں ح اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی جو بلحاظ ط کے لیا جاے اور علی ہذا القیاس اور یہہ مجموعی ایسی ع تک پہلتی ہیں اور یہہ دونوا وسمیں داخل ہیں

پس حاصل ضرب اس جملہ کے قیمتوں کے مجموعہ لینی سے دریافت ہوسکتا ہے کہ

ا اور ا ۲ و ص . . . ا اور ب ۲ و ص س ط . . .

جسمیں کہ ر و ص و ط . . . کی تمام صحیح قیمتیں اسی ع تک لیجائیں

اب ہم اس مجموعہ کو

ح ر و ص و ط . . . (ا اور ا ۲ و ص ا ۳ و ط . . . ب ا اور ب ۲ و ص ب س و ط . . .)

اور س لے اور اجزاء ترکیبی اسی طرح حاصل ہو سکتی ہین کہ دوسرے اعداد زیرین کی ترتیبین لین اور مناسب علامت مقرر کرین اب تمام قیمت س لے وی سی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ رمز س کے دوسری اعداد زیرین کو بدلنی سی کوئی تغیر رمز ا کے اعداد زیرین مین نہین آتا لیکن رمز ب کے اول اعداد زیرین بدل جاتی ہین اور صرف یہی بدلتی ہین اسی ہم ایک نتیجہ نکالتی ہین جو اسطرح تعبیر ہو سکتا ہے

س = حج روص وط . . . (ا اور ا ۲ وص ا س ۲ وط . . . حج ± ب ا اور ب ۲ وص ب س وط . . .)

یہان حج ± ب ا اور ب ۲ وص ب ۲ وط . . . سی ق رتبی کا مقطع دوسری معلوم سلک رموز سے خاص افقی صفون کی لینی سی بنتا ہی اور حج کا مرجع اول اعداد زیرین کی تغیرات ہین دفعہ ۳۴۴ کو دیکھو اس مقطع کون سی تعبیر کرتی ہین اب اول فرض کرو کہ ع چھوٹا بہ نسبت ن کے ہی تو اعداد زیرین روص وط . . . تعداد مین ن ہین اور کوئی اونمین سی ن سے بڑا نہین ہے اسی لیہ مستنبط ہوتا ہی کہ اونمین ہمیشہ دو یا زیادہ دوسی ایک ہی قیمت رکھتے ہین پس ن ہمیشہ بموجب دفعہ ۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہے اور بسیواسطی س معدوم ہوتا ہے

دوم فرض کرو کہ ع = ن تو نظم اعداد زیرین کا رص ط . . . ایک ترتیب ن رموز ا و ۲ . . . ن کی ہوگی اور وہ کچھ نہ ہوگی جب تک ق کو معدوم نہ کرین اب متواتر مختلف ترتیبون کی لینی سی علامت ق کی تبدیل ہوگی مگر اوسکی قیمت بموجب دفعہ ۳۴۴ کے نہین بدلیگی پس قیمت س کی تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوگی جو اوس مقطع کو دوسرے معلوم سلک رموز سی بنانا چاہئی مجموعہ تمام اجزاء ترکیبی مین جو حج ± ا ا اور ا ۲ و ۲ . . . ن سے تعبیر ہوتی ہین ضرب دینی سی پیدا ہوا سمین حج کا مرجع دوسرے اعداد زیرین سے تغیرات مین اسیواسطی جب ع = ن

$$س = \begin{vmatrix} ا ا و ا & . . . & ا ا و ن \\ ا ن و ا & . . . & ا ن و ن \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ب ا و ا & . . . & ب ا و ن \\ ب ن و ا & . . . & ب ن و ن \end{vmatrix}$$

اب آخر فرض کرو کہ ع بڑا بہ نسبت ن کی ہی تو نظم اعداد زیرین رص ط ۰ ۰ ۰ اجتماع
ن اعداد کی ع اعداد ا و ۲ ۰ ۰ ع مین سی ہوگی اور تعداد ایسی اجتماعون کی
ل ع / ل ع - ن ہوگی فرض کرو کہ ق کے معنی موافق سابق کے ہون ب کو اسی بلندی مین
جو ق ہو جای اور سکو ع سی تعبیر کرو اسی معلوم ہوا کہ موافق دوسری صورت کی ہم کوس کے
ایک رقم کی واسطی ع ق حاصل ہوگا اور یہہ اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ ل ع / ل ع - ا
مین سی ممکن محدود اجتماع منتخب کرلین اسیواسطی جسبد ع بڑا بہ نسبت ن کے ہے تو ہم کو
یہہ حاصل ہوتا ہی کہ رس = مج ع ق اسمین مج مجموعہ ل ع / ل ع - ن ارقام کا ہے جو
ممکن اجتماعون سی پیدا ہوتا ہے

(۳۵۵) دفعہ گذشتہ کی دوسری صورت مین ہم دیکھتی ہین کہ حاصل ضرب ن رتبی کی دو مقطعات کا
ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہوسکتا ہی اور علی ہذا القیاس حاصل ضرب ن رتبی کی تین مقطعات کا
ن ہی رتبہ کی مقطع مین نمایان ہوسکتا ہی اسواسطی کہ اول ہم ن رتبی کی دو مقطعات کی حاصل ضرب کو
ن رتبی کے مقطع صورت مین نمایان کرسکتی ہین اور اس جدید مقطع اور اصل مقطعات مین سے
تیسرے مقطع کون رتبی کی مقطع کی صورت مین ظاہر کرسکتی ہین پس ہم دیکھتی ہین کہ حاصل
ضرب تعداد مقطعات کا جو ایک ہی رتبی کے ہون اوسی رتبی مین نمایان ہوسکتا ہے
اسی معلوم ہوا کہ اکثر حاصل ضرب مقطعات کا خواہ کسی رتبی کے ہون اور کتنی ہون اوسی
رتبے کے مقطع کے صورت مین اور اجزاء ضربی کی اعلی رتبہ کے مقطع کے صورت مین
بہی نمایان ہوسکتا ہی اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اور سب مقطعات مثل اعلی رتبے کے
مقطع کی بن سکتی ہین اور جب یہہ بن جائین تو ان مقطعات کا حاصل ضرب اوسے رتبے
کے مقطع کی صورت مین بن سکتی ہین

(۳۵۶) فرض کرو کہ ہم کو حاصل ضرب دو مقطعات کا بنانا ہے

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,n} \end{vmatrix}$$

اور

$$\begin{vmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n} \end{vmatrix}$$

بموجب دفعہ ۳۴۳ کی ہم متوازی صفوں کو عمود صفوں میں خواہ ایک میں یا دونو مقطعات میں بدل سکتے ہیں
پس اگر اس حاصل ضرب کو اسطرح تعبیر کریں

$$\begin{vmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{vmatrix}$$

اب ہم نئی اجزاء ذاتی چار طریقوں سے بناتی ہیں اسلئے کہ ہم قوانین ذیل میں سے جس قانون کو چاہیں اختیار کریں

$\sigma_{\lambda_{1,1}\omega} = \lambda_{1,1}\beta_{1,1} + \lambda_{1,2}\beta_{2,1} + \cdots + \lambda_{1,n}\beta_{n,1}$

یا $\sigma_{\lambda_{1,2}\omega} = \lambda_{1,1}\beta_{1,2} + \lambda_{1,2}\beta_{2,2} + \cdots + \lambda_{1,n}\beta_{n,2}$

یا $\sigma_{\lambda_{2,1}\omega} = \lambda_{2,1}\beta_{1,1} + \lambda_{2,2}\beta_{2,1} + \cdots + \lambda_{2,n}\beta_{n,1}$

یا $\sigma_{\lambda_{2,2}\omega} = \lambda_{2,1}\beta_{1,2} + \lambda_{2,2}\beta_{2,2} + \cdots + \lambda_{2,n}\beta_{n,2}$

(۳۵۷) فرض کرو کہ λ_{ω} مثال λ_{ω} کو مقطع س میں تعبیر کریں تو نظم رموز

$\lambda_{1,1}$ و $\lambda_{1,2}$ ..... $\lambda_{1,n}$

$\lambda_{2,1}$ و $\lambda_{2,2}$ .. $\lambda_{2,n}$

$\lambda_{n,1}$ و $\lambda_{n,2}$ .. $\lambda_{n,n}$

کو نظم متکافیہ رموز

$\lambda_{1,1}$ و $\lambda_{1,2}$ .. $\lambda_{1,n}$

$\lambda_{2,1}$ و $\lambda_{2,2}$ .. $\lambda_{2,n}$

$\lambda_{n,1}$ و $\lambda_{n,2}$ .. $\lambda_{n,n}$

کا کہتے ہیں

(۳۵۸) ایک نظم کا مقطع جو متکافی نظم مفروضہ ن رموز کا ہو وہ (ن-۱) دین قوت کا مقطع نظم مفروضہ کا ہوتا ہے

اگر ہم ان مقطعات کو ضرب دیں

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱۱} & \cdots & \text{ا}_{۱ن} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{ا}_{ن۱} & \cdots & \text{ا}_{نن} \end{vmatrix}$$

اور

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱۱} & \cdots & \text{ا}_{۱ن} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{ا}_{ن۱} & \cdots & \text{ا}_{نن} \end{vmatrix}$$

تو حاصل ضرب کے واسطے یہہ حاصل ہو گا

$$\begin{vmatrix} \text{س}_{۱۱} & \cdots & \text{س}_{۱ن} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{س}_{ن۱} & \cdots & \text{س}_{نن} \end{vmatrix}$$

جسمیں $\text{س}_{ر} = \text{ا}_{ر۱}\text{ک}_{۱۱} + \text{ا}_{ر۲}\text{ک}_{۲۱} + \cdots + \text{ا}_{رن}\text{ک}_{ن۱}$

اسی معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۳۴۹ کے اخر مقطع کی اجزا دائی کی قیمت س ہو گی اگر ے اور ک برابر ہیں یا صفر ہو گی اگر ے اور ک غیر مساوی ہیں پس یہہ مقطع اپنی اول جزو ترکیبی س ا و + س ۲ و ۲ + ... + س ن و ن یعنی س ن کی طرف تحویل ہوتی ہے اسبواسطے

اسبواسطے

$$\text{س} = \text{س}_{ن} = \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱۱} & \cdots & \text{ا}_{۱ن} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{ا}_{ن۱} & \cdots & \text{ا}_{نن} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س}_{ن-۱} = \begin{vmatrix} \text{ا}_{۱۱} & \cdots & \text{ا}_{۱ن} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{ا}_{ن-۱\,۱} & \cdots & \text{ا}_{ن-۱\,ن} \end{vmatrix}$$

(۳۵۹) فرض کرو کہ ایک ن رتبہ کا مقطع ہی اور رمز کے مربع ہیں جو او س کو تعبیر کرے

م افقی صفین اور م عمودی صفین معدوم ہوں اور باقی رموز کو سر کا کر ایک رمز کے جدید مربع میں لکھیں جوں - م رتبی کا مقطع ہی تو اس مقطع کو مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر بلحاظ اصلی مقطع کی کہتی ہیں اور رموز جو مشترک افقی اور عمودی صفوں میں ہوتی ہیں ان سے ایک مربع رمز کا بنی گا جو ایک مقطع م رتبی کا ہوگا یہہ بھی مقطع جزئیہ یا مقطع اصغر ہے ان دو مقطعات جزئیہ یا اصغر کو ایک دوسری کا متمم کہتے ہیں

(۳۶۰) ن رتبی کی مقطع کو س تعبیر کرتا ہی م رتبہ کا مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا تعداداً برابر ہوتا ہی حاصل ضرب س م-۱ اور اصل نظم کے مقطع جزئیہ متمم کے

فرض کرو کہ ف وج د . . . روص ایک ترتیب اعداد ۱ و ۲ . . . ن کو تعبیر کرا وے وک و . . . لو و مو دوسری ترتیب کو تعبیر کریں اور ف وج . . . ا در ے وک . . . او میں ہر یک کو م عددوں کی جماعت فرض کرو اور روص . . . اور لو و مو . . . کو ن - م عددوں کی جماعتیں فرض کر دیں

$$\begin{vmatrix} \text{ا ن وے} & \text{و ا ن وک} \\ \text{ا ج وے} & \text{و ا ج وک} \end{vmatrix}$$

مقطع جزئیہ نظم متکافیہ کا م رتبہ کا ہے اسکو **ص** سے تعبیر کرو

$$\text{اب} \begin{vmatrix} \text{ا ن وے} & \text{و ا ن وک} \cdots \text{ا ن ولو} & \text{و ا ن ومو} \cdots \\ \text{ا ج وے} & \text{و ا ج وک} \cdots \text{ا ج ولو} & \text{و ا ج ومو} \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ا ر وے} & \text{و ا ر وک} \cdots \text{ا ر ولو} & \text{و ا ر ومو} \\ \text{ا ص وے} & \text{و ا ص وک} \cdots \text{ا ص ولو} & \text{و ا ص ومو} \cdots \end{vmatrix} = \text{مرس}$$

مراسمین ۱+ای اگر ترتیبین ف وج و . . . روص اور ے وک . . . لو و مو کی ایک ہی نوع کی ہوں اور ۱-ای اگر انکی ترتیبین مختلف نوع کی ہوں

اب ہم ان دو مقطعات کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہیں بموجب دفعہ ۳۴۸ کی اجزاء ذاتی کے ازدیاد سے مقطع **ص** کا ن رتبہ پر صعود کر سکتا ہی پس م بجای **ص** کے

مقطع ذیل لکھتی ہین

$$\begin{vmatrix} ا_{ن وے} & ا_{ن وک} \ldots & ا_{ن ولو} & ا_{ن ومو} \ldots \\ ا_{ح وے} & ا_{ح وک} \ldots & ا_{ح ولو} & ا_{ح ومو} \ldots \\ ب_{ر وے} & ب_{ر وک} \ldots & ب_{ر ولو} & ب_{ر ومو} \ldots \\ ب_{ص وے} & ب_{ص وک} \ldots & ب_{ص ولو} & ب_{ص ومو} \ldots \end{vmatrix}$$

آیمین ب مع اعداد زیرین کی جن اجزاء ذاتی کو بتغیر کرتا ہی صفر مقرر کی گئی ہین مگر وہ اجزاء ذاتی مستثنی ہین جو قطر مین لکھی ہین وہ سب برابر واحد کے فرض کئی گئی ہین

اب حاصل ضرب ص اور مرس کا بناء تو وہ ایک جدید مقطع ن رتبے کا ہوگا

فرض کرو کہ اجزاء ذاتی اس جدید مقطع کو حرف س مع دو اعداد زیرین کے بتغیر کرے اور ان اعداد زیرین مین سی موافق دستور کی ایک افقی صف کو اور دوسرا عمودی صف کو بتغیر کرے بموجب دفعہ ۳۵۶ کی چار طریقے ہین جنسی ہم حاصل ضرب ص اور مرس کے اجزاء ذاتی کو دریافت کر سکتی ہین انمین سی اول طریقہ کو ہم اختیار کرتے ہین اس طریقہ کے موافق س ع وین اسطرح حاصل ہوتا ہی کہ ص کی ع وین افقی صف کے اجزاء ذاتی کو جداگانہ مرس کی ق وین افقی صف مین ضرب دین تو

$$س_{اوا} = ا_{ن وے} ا_{ن وے} + ا_{ن وک} ا_{ن وک} + \ldots + ا_{ن ولو} ا_{ن ولو} + ا_{ن ومو} ا_{ن ومو} + \ldots$$

$$س_{اوا} = ا_{ن وے} ا_{ح وے} + ا_{ن وک} ا_{ح وک} + \ldots + ا_{ن ولو} ا_{ح ولو} + ا_{ن ومو} ا_{ح ومو} + \ldots$$

اسیواسطی بموجب دفعہ ۳۴۹ کے $س_{اوا}$ و $س_{اوا}$ $\ldots$ $س_{امم}$ برابر کے حاصل ہونگے اور باقی اور اجزاء ذاتی اوس مقطع کے م افقی صفون کے جو ص اور مرس سی حاصل ہوتا ہے صفر ہونگے

(م+۱) وین صف مین اول رقم کے واسطے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$س_{م+اوا} = ب_{ر وے} ا_{ن وے} + ب_{ر وک} ا_{ن وک} + \ldots + ب_{ر ومو} ا_{ن ومو} + \ldots = ا_{ن ولو}$$

اسواسطی کہ ب مع اعداد زیرین کے جو واقع ہوتی ہین جن رموز کو تعبیر کرتا ہے

وہ صفر ہین مگر ب رولو واحد ہی اور اسیطرح (م + ۱) افقی صف ہین دوسرے رقم یہہ ہم کو حاصل ہوتی ہے کہ

$$\text{س}_{م+۱،۲} = \text{ح}_{\text{ولو}}$$

اسیطرح عمل کرنے سے ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ (م + ۱) وین افقی صف حاصل ضرب ص اور مرس مین وہی ہی جو مرس مین (م + ۱) وین صف ہے

علی ہذا القیاس (م + ۲) وین افقی صف حاصل ضرب مین وہی ہے جو (م + ۲) وین عمودی صف مرس مین ہے، پس مقطع جو ساوی لہ ص مرس کا ہو بموجب دفعہ ۳۴۶ کے تحویل اوس حاصل ضرب کی طرف ہوسکتا ہی جو مرس اور ذیل کے (ن - م) رتبہ کے مقطع کو ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے

$$\text{ص} = \text{مرس}_{م-۱} \begin{vmatrix} \text{ا}_{\text{ردمود}} & \text{ا}_{\text{ردولود}} \cdots \\ \text{ا}_{\text{صولو}} & \text{ا}_{\text{صومو}} \cdots \end{vmatrix}$$

$$\text{ا}_{\text{ردلو}} \quad \text{ا}_{\text{ردمود}} \cdots$$

$$\text{ا}_{\text{صولو}} \quad \text{ا}_{\text{صومود}} \cdots$$

(۳۶۱) امثلہ ذیل طالب علم ثابت کری امثلہ (۴) و (۵) (۶) مین ہم نی وہ مقطعات کہی ہین جنکے اجزاء ذاتی خود مقطعات ہین

(۱)
$$\begin{vmatrix} ۰ & \text{سہ} & \text{وصہ} & \text{ولر} \\ \text{سہ} & ۰ & \text{ولر} & \text{وصہ} \\ \text{صہ} & \text{ولر} & ۰ & \text{وسہ} \\ \text{لر} & \text{وصہ} & \text{وسہ} & ۰ \end{vmatrix} = \text{سہ}^{۲}\text{سہ}_{۱}^{۲} + \text{صہ}^{۲}\text{صہ}_{۱}^{۲} + \text{لر}^{۲}\text{لر}_{۱}^{۲} + ۲\,\text{سہ}\,\text{سہ}_{۱}\,\text{صہ}\,\text{صہ}_{۱} - ۲\,\text{سہ}\,\text{سہ}_{۱}\,\text{لر}\,\text{لر}_{۱} - ۲\,\text{صہ}\,\text{صہ}_{۱}\,\text{لر}\,\text{لر}_{۱}$$

(۲)
$$\begin{vmatrix} ۰ & \text{وسہ} & \text{وصہ} & \text{ولر} \\ -\text{سہ} & ۰ & \text{ولر} & \text{وصہ}_{۱} \\ -\text{صہ} & -\text{لر} & ۰ & \text{وسہ}_{۱} \\ -\text{لر} & -\text{صہ}_{۱} & \text{وسہ}_{۱} & ۰ \end{vmatrix} = (\text{سہ}\,\text{سہ}_{۱} - \text{صہ}\,\text{صہ}_{۱} + \text{لر}\,\text{لر}_{۱})^{۲}$$

(۳) $\begin{vmatrix} ر & سه & وصه & ولر \\ -سه & ور & ولر & وصه \\ -صه & -لر & ور & سه \\ -لر & -صه & -سه & ور \end{vmatrix} = ر^۴ + ر^۲(سه^۲ + صه^۲ + لر^۲ + سه^۲ + صه^۲ + لر^۲) + (سه سه - صه صه + لر لر)^۲$

(۴) $\begin{vmatrix} اس & وج \\ اج & وا \end{vmatrix} \begin{vmatrix} اج & وا \\ ان & وهصه \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} اج & وا \\ اف & وهصه \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ا & وهصه \\ اج & وب \end{vmatrix} = ا \begin{vmatrix} ا & وهصه & وج \\ هصه & وب & وف \\ ج & وف & وس \end{vmatrix}$

(۵) $\begin{vmatrix} اج & وا \\ اف & وهصه \end{vmatrix} \begin{vmatrix} اف & وس \\ هصه & وج \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ا & وهصه \\ اهصه & وب \end{vmatrix} \begin{vmatrix} هصه & وب \\ اج & وف \end{vmatrix} = هصه \begin{vmatrix} ا & وهصه & وج \\ هصه & وب & وف \\ ج & وف & وس \end{vmatrix}$

(۶) $\begin{vmatrix} اب & وف \\ اف & وس \end{vmatrix} \begin{vmatrix} اف & وس \\ اهصه & وج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} هصه & وب \\ اج & وف \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} اف & وس \\ اهصه & وج \end{vmatrix} \begin{vmatrix} اس & وج \\ اج & وا \end{vmatrix} \begin{vmatrix} اج & وا \\ ان & وهصه \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} هصه & وب \\ اج & وف \end{vmatrix} \begin{vmatrix} اج & وا \\ ان & وهصه \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ا & وهصه \\ اهصه & وب \end{vmatrix} = \text{مجذوز} \begin{vmatrix} ا & وهصه & وج \\ هصه & وب & وف \\ ج & وف & وس \end{vmatrix}$

(۷) $\begin{vmatrix} ا & وب \\ ا & وب \end{vmatrix} \begin{vmatrix} اس & ود \\ اس & ود \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ب & وس \\ اب & وس \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ا & ود \\ ا & ود \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} اس & وا \\ اس & وا \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب & ود \\ اب & ود \end{vmatrix} =$

ستائیسوان باب

استعمال مقطعات

(۳۶۲) فرض کرو ن مقادیر مجہول لا۱ و لا۲ ۔ ۔ ۔ لان کی قیمتین ان ن مساواتون سی دریافت کرنے ہین

ا۱ لا۱ + ا۱و۲ لا۲ + ا۱و۳ لا۳ + ۔ ۔ ۔ + ا۱ون لان = لو۱

ا۲و۱ لا۱ + ا۲و۲ لا۲ + ا۲و۳ لا۳ + ۔ ۔ ۔ + ا۲ون لان = لو۲

ان و۱ لا۱ + ان و۲ لا۲ + ان و۳ لا۳ + ۔ ۔ ۔ + ان ون لان = لون

فرض کروکہ س مقطع ح ± ا۱ و۲ و۳ ۔ ۔ ۔ ون کو تعبیر کرتا ہی اور ا ے وک امثال ا ے وک کو ہین تعبیر کرتی ہین تو قیمتین مقادیر مجہول کی اس صورت قانونی سے معلوم ہونگین

س لا۱ = لو۱ ا ے و۱ + لو۲ ا ے و۲ + ۔ ۔ ۔ + لون ا ے ون

اسمین ک کوئی قیمت درمیان ۱ اور ن کے ہی اور یہہ دونو اونمین داخل ہین

اسواسطی کہ معلوم مساواتون کے جداگانہ ا ے و۱ و ا ے و۲ و ۔ ۔ ۔ ا ے ون مین ضرب دو اور حاصل ضربون کو جمع کرو تو امثال لا۱ کے

ا ے و۱ ا ے و۱ + ا ے و۲ ا ے و۲ + ۔ ۔ ۔ + ا ے ون ا ے ون

یہہ بموجب دفعہ ۳۴۹ کے برابر ۱ کے ہین اور امثال لا کے

ا ے و ا ے و + ا ے و ا ے و + ۔ ۔ ۔ + ا ے ون ا ے ون

اور یہہ بموجب دفعہ ۳۴۹ کے صفر ہے

اوس صورت قانونی کو جسسے لا۱ معلوم ہو اسطرح لکہ سکتی ہین

س لا۱ = ص

اسمین ص ایک مقطع ہی یعنی وہ مقطع ہی جو اسطرح بنتا ہی کہ س کے وین افقی صفین س کے ساقط کرین اور اونکی جگہ وہ عمودی صف رکہین جو لو۱ و لو۲ ۔ ۔ ۔ لو ن سی مرتب ہوتی ہے

(۳۶۳) فرض کروکہ مقطع س فنا ہزناہی تو قیمتین مقادیر مجہولہ کی غیر متناہی ہوجائینگی اسی یہہ معلوم ہوگا کہ مساواتین معلوم غیر مطابق ہین جبر مقابلہ کا بیندرہوان باب دیکھو

(۳۶۴) فرض کرو کہ لو، لو۲ . . . لون معدوم ہوتے ہین اور س بھی فنا ہوتا ہے تو دفعہ ۲۶۲ کے ترکیب سی مقادیر مجہول غیر المعین صورت ∞ کی ہوجائینگی اس صورت مین ہم ن - ا مساواتین معلوم مساواتون مین سی لین تو نسبت ن - ا مقادیر مجہول کی باقی مقدار مجہول کی ساتھہ دریافت کرنی کی واسطے یہہ مساواتین کافی ہونگین

یہہ نسبتین بھی ایک دفعہ معین ہوسکتی ہین اسواسطے کہ ہم کو یہہ حاصل ہوسکتا ہے کہ

لا۱ : لا۲ : لا۳ : . . . = لے و۱ : لے و۲ : لے و۳ : . . .

اسمین سے ایک صحیح عدد ہے اور ن سے بڑا نہین ہے

دلیل اس سبب سے کہ س = ۰ نیوجب دفعہ ۳۴۹ کے لے اور ک کی تمام صحیح قیمتون ا اور ن کے درمیان ہونگین

لک و۱ لے و۱ + لک و۲ لے و۲ + لک و۳ لے و۳ + . . . = ۰

اور جب لا۱ و لا۲ و لا۳ . . . اوپر کی نسبت معینہ کے موافق لی گئی ہین تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لے و۱ لا۱ + لک و۲ لا۲ + لک و۳ لا۳ + . . . = ۰

معلوم مساواتون مین سی ن - ا مساواتین لین اور لو۱ و لو۲ . . . لو۳ ہر یک کو برابر صفر کے فرض کرین تو ہم کو اکثر اکیلی محدود قیمت ہر یک (ن - ا) مقادیر مجہول اور باقی مقدار مجہول مین نسبت معلوم ہوجائیگے

اسی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ جب س = ۰ تو

لے و۱ : لے و۲ : لے و۳ : . . .

بالکل مے لگاؤ سے ہین

(۳۶۵) اگر لو۱ و لو۲ . . . لون تمام معدوم ہوجائین اور س فنا نہ ہو تو نظم مساوات کا دفعہ ۳۶۲ مین کوئی حل نہین رکھتا الا اوس حالت مین کہ لا۱ و لا۲ و لا۳ . . . لان تمام صفر ہون شرط س = ۰ ضرور ہی تاکہ مقادیر مجہول کی قیمتین جو صفر نہ ہون دریافت ہوجائین

(۳۶۶) معادلات

$$ا_۱ لا + ب_۱ د + س_۱ ی = ۰$$
$$ا_۲ لا + ب_۲ د + س_۲ ی = ۰$$
$$ا_۳ لا + ب_۳ د + س_۳ ی = ۰$$

میں حل کی قابلیت جو صفر نہ ہو جب ہوگی کہ ہم کو یہہ حاصل ہو کہ

$$\begin{vmatrix} ا_۱ & ب_۱ & س_۱ \\ ا_۲ & ب_۲ & س_۲ \\ ا_۳ & ب_۳ & س_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

اگر یہہ شرط پوری ہوتی ہو تو معادلات کی شرایط بہی اسی پوری ہونگین کہ

$$لا : د : ی :: \begin{vmatrix} ب_۲ & س_۲ \\ ب_۳ & س_۳ \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} س_۲ & ا_۲ \\ س_۳ & ا_۳ \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} ا_۲ & ب_۲ \\ ا_۳ & ب_۳ \end{vmatrix} د$$

$$یا لا : د : ی :: \begin{vmatrix} ب_۳ & س_۳ \\ ب_۱ & س_۱ \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} س_۳ & ا_۳ \\ س_۱ & ا_۱ \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} ا_۳ & ب_۳ \\ ا_۱ & ب_۱ \end{vmatrix} د$$

$$یا لا : د : ی :: \begin{vmatrix} ب_۱ & س_۱ \\ ب_۲ & س_۲ \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} س_۱ & ا_۱ \\ س_۲ & ا_۲ \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} ا_۱ & ب_۱ \\ ا_۲ & ب_۲ \end{vmatrix}$$

یہہ تینوں صورتین حل کی موافق دفعہ ۳۶۴ کے ایک دوسرے کے ساتھہ منطبق ہوتی ہین

(۳۶۷) دفعہ ۳۶۲ کے معادلات سے ہم استنباط کرتے ہین کہ

$$لو ا_۱ د_۱ + لو ا_۲ د_۲ + لو ا_۳ د_۳ + \cdots + لو ا_ن د_ن = س لا_۱$$
$$لو ا_۱ د_۲ + لو ا_۲ د_۳ + لو ا_۳ د_۴ + \cdots + لو ا_ن د_۱ = س لا_۲$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$لو ا_۱ د_ن + لو ا_۲ د_۱ + لو ا_۳ د_۲ + \cdots + لو ا_ن د_{ن-۱} = س لا_ن$$

فرض کرو کہ مقطع حج ± ا ا ا ا ۲ ۲ ۲ ۲ ... ن ن کو عر تعبیر کرتا ہے
سے وں امثال لے وں کو جو عر مین ہو تعبیر کرتا ہی اوپر کے مساواتون سے
قیمتین لو ا ولو ۲ ... لون کی دریافت کر سکتی ہین اور دفعہ ۳۶۲ کی طرح عمل کر کے
ہم کو یہہ نتیجہ عامہ حاصل ہوگا

عر لوں = س { لا ا ا ں وا + لا ۲ سہ ں وہ + ... + لان سہ ں وں }

دفعہ ۳۶۲ کے مساوات معلوم سی اس نتیجہ کے مقابلہ کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ا ں وا لا ا + ا ں وہ لا ۲ + ... + ا ں وں لان = لوں

چونکہ قیمتین لوں کی متطابقہ ہین

س سہ ں وے = ا ں وے

عر

لیکن عر = ں - ا بموجب دفعہ ۳۵۸ کے پس

سہ ں وے = ں - ۲ ا ں وے

(۳۶۸) اب ہم ایک اور سوال مین مقطعات کا استعمال کرتی ہین یعنی اونکی استعانت سی مقادیر معلوم
کے فرقون کا حاصل ضرب دریافت کرتے ہین

فرض کرو کہ ن مقادیر سہ ا و سہ ۲ و ... سہ ن سی تعبیر کیجائین اور ع اوس حاصل ضرب کو تعبیر کرے
جو اون فرقون کی ضرب دینی سی پیدا ہو جو ان ن مقادیر مین سی ہر ایک کو اوسکی ماقبل کی مقدار کے
تفریق کرنے سے پیدا ہون یعنی

ع = (سہ ۲ - سہ ا)(سہ ۳ - سہ ۲)...(سہ ن - سہ ن - ا)(سہ ۲ - سہ ا)(سہ ۳ - سہ ۲)...(سہ ن - سہ ن - ا)

تو ع مقطع ں رتبہ کا پیدا ہو سکتا ہی اسواسطی کہ اس مقطع پر خیال کرو

ا و سہ ا و سہ ا ۲ . . سہ ا ں - ا .
ا و سہ ۲ و سہ ۲ . . سہ ۲ ں - ا
ا و سہ ں و سہ ں . . سہ ں ں - ا

یہہ مقطع ایک جملہ ناطقہ صحیحہ مقادیر سہ۱ و سہ۲ . . . سہن کا ہی اور وہ بموجب دفعہ ۳۴۵ کے معدوم ہوتا ہی اگر کوئی دو اونمین سی برابر ہون اسواسطی وہ اوس حاصل ضرب پر جس کو ع سی تغیر کیا ہی تقسیم ہو سکتا ہی اور یہہ اور نیز مقطع اور حاصل ضرب ع دونو $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ درجہ کے قواء اور حواصل ضرب سہ۱ و سہ۲ . . . سہن مین ہین اسیواسطی اب مقطع کو ع پر تقسیم کرین تو کوئی عدد خارج قسمت ہوگا اور یہہ عدد چاہئی کہ واحد ہو کیونکہ یہہ اول جزء ترکیبی مقطع کو اون اجزاء ضربی ثنائی کے حاصل ضرب کے اول ارقام سی مقابلہ کرکے ہم دیکھتی ہین اور ع ان اجزاء ضربی سی مرکب ہے (۳۶۹) ن رتبی کے مقطع مین $\frac{ن}{۱}$ قسمین ہین حاصل ضرب ع مین پہلی مختصر ہونے سے اور محو ہوتی سی بہت سی رقمین ہونگین یعنی $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ پس کثرت ارقام کی بچنی کی لئی مقطع بڑی فایدہ مند صورت حاصل ضرب کے واسطے ہے

(۳۷۰) ہم کو حاصل ہے کہ

$$ع^{۲} = \begin{vmatrix} ا & وسہ۱ & وسہ۱^{۲} & . . . & وسہ۱^{ن-۱} \\ ا & وسہ۲ & وسہ۲^{۲} & . . . & وسہ۲^{ن-۱} \\ ا & وسہ۳ & وسہ۳^{۲} & . . . & وسہ۳^{ن-۱} \\ . & . & . & . & . \\ ا & وسہن & وسہن^{۲} & . . . & وسہن^{ن-۱} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ا & وسہ۱ & وسہ۱^{۲} & . . . & وسہ۱^{ن-۱} \\ ا & وسہ۲ & وسہ۲^{۲} & . . . & وسہ۲^{ن-۱} \\ ا & وسہ۳ & وسہ۳^{۲} & . . . & وسہ۳^{ن-۱} \\ . & . & . & . & . \\ ا & وسہن & وسہن^{۲} & . . . & وسہن^{ن-۱} \end{vmatrix}$$

اب حاصل ضرب ان مقطعات کا اکیلی مقطع کی صورت مین نمایان ہو سکتی ہے . دفعہ ۳۶۵ مین جو چار ترکیبین لکھی ہین اونمین سی اخر ترکیب کے اختیار کرنے سے

ع^۲ = ص۰ ص۱ ص۲ . . . صن-۱
ص۱ ص۲ ص۳ . . . صن
ص ن-۱ ص ن ص ن+۱ . . . ص۲ن-۲

اسمین ص۱ = سہ^۱ + سہ^۲ + . . . سہ^ن

(۳۷۱) مثلاً فرض کرو کہ سہ۱ و سہ۱ . . . ن قسمتین ن درجہ کی ایک مساوات کی ہین تو ع^۲

قیمتوں کے فرقوں کی حاصل ضرب کا مجذور ہوگا پس مساوات کی قیمتوں کی فرقوں کے مجذور ایک مقطع کی صورت میں نمایاں ہوسکتی ہیں اور اس مقطع کے اجزاء ذاتی مساوات معلوم کی امثال میں معلوم ہونگے اسواسطے کہ ص امثال کی رقموں میں بیان ہوسکتا ہی

(۳۷۲) فرض کرو کہ ن مقادیر مجہولہ لا۱ ولا۲ ... لان کی قیمتیں ہم ان مساواتوں سی دریافت کرتی ہیں کے

$$\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 \cdots + \text{لان} = 1$$

$$\text{لا}_1 \text{س}_1 + \text{لا}_2 \text{س}_2 + \text{لا}_3 \text{س}_3 + \cdots + \text{لان س}_n = \text{ط}$$

$$\text{لا}_1 \text{س}_1^2 + \text{لا}_2 \text{س}_2^2 + \text{لا}_3 \text{س}_3^2 + \cdots + \text{لان س}_n^2 = \text{ط}^2$$

$$\text{لا}_1 \text{س}_1^{n-1} + \text{لا}_2 \text{س}_2^{n-1} + \text{لا}_3 \text{س}_3^{n-1} + \cdots + \text{لان س}_n^{n-1} = \text{ط}^{n-1}$$

قیمتیں مقادیر مجہولہ کی اس صورت قانونی سی معلوم ہوا کرینگے کہ

$$\text{لا}_1 = \frac{(\text{س}_1 - \text{ط})(\text{س}_2 - \text{ط}) \cdots (\text{س}_{r-1} - \text{ط})(\text{س}_{r+1} - \text{ط}) \cdots (\text{س}_n - \text{ط})}{(\text{س}_1 - \text{س}_r)(\text{س}_2 - \text{س}_r) \cdots (\text{س}_{r-1} - \text{س}_r)(\text{س}_{r+1} - \text{س}_r) \cdots (\text{س}_n - \text{س}_r)}$$

اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۳۶۲ کے

$$\text{س لا}_1 = \frac{\text{ص}}{\text{د}}$$

$$\text{اسمیں س} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \text{س}_1 & \text{س}_2 & \text{س}_3 & \cdots & \text{س}_n \\ \text{س}_1^2 & \text{س}_2^2 & \text{س}_3^2 & \cdots & \text{س}_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_1^{n-1} & \text{س}_2^{n-1} & \text{س}_3^{n-1} & \cdots & \text{س}_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{اور ص} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \text{س}_1 & -\text{س}_r & 1 & \cdots & \text{س}_n \\ \text{س}_1^2 & -\text{س}_r^2 & \text{ط}^2 & \cdots & \text{س}_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{س}_1^{n-1} & -\text{س}_r^{n-1} & \text{ط}^{n-1} & \cdots & \text{س}_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

اب فرض کرو کہ ے ویں عمودی صف س میں اول رکہی جاوی اور ے ویں عمودی صف ص میں اول رکہی جاوی دفعہ ۳۴۷ کو دیکھو پہر بموجب دفعہ ۳۶۸ کے دونو

مقطعات فرقون کے حواصل ضرب سی بدل جائین اور اجزاء ضربی شمار کنندہ اور نسب نما مین بخوبی اجائین تو لاے کی قیمت اوپر کی صورت معینہ مین ہم کو معلوم ہوگی

(۳۷۳) مساوات معلوم سی خاص مقادیر کے ساقط کرنی سی ایک مساوات حاصل کرنی کی اندر بہی ترکیب مقطعات کی کام اتی ہی فرض کرو کہ معادلات ۔ ح (لا) = ۰ اور مح (لا) = ۰ مین ہم کو لا ساقط کرنا ہے اسمین

$$ح (لا) = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳$$

$$حِ (لا) = ب_۰ + ب_۱ لا + ب_۲ لا^۲$$

اب ہم عمل اسطرح کرتے ہین کہ

$$ح (لا) = ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳$$

$$لا ح (لا) = ۰ + ا_۰ لا + ا_۱ لا^۲ + ا_۲ لا^۳ + ا_۳ لا^۴$$

$$مح (لا) = س_۰ + س_۱ لا + س_۲ لا^۲$$

$$لا مح (لا) = ۰ + س_۰ لا + س_۱ لا^۲ + س_۲ لا^۳ + ۰$$

$$لا^۲ مح (لا) = ۰ + ۰ + س_۰ لا^۲ + س_۱ لا^۳ + س_۲ لا^۴$$

فرض کرو کہ س =

ا_۰	و	ا_۱	و	ا_۲ و ا_۳ و ۰
۰	و	ا_۰	و	ا_۱ و ا_۲ و ا_۳
س_۰	و	س_۱	و	س_۲ و ۰ و ۰
۰	و	س_۰	و	س_۱ و س_۲ و ۰
۰	و	۰	و	س_۰ و س_۱ و س_۲

اور چونکہ بموجب فرض کے ح (لا) اور مح (لا) صفر ہین اسواسطے لاح (لا) و د لامح (لا) اور لا² (مح لا) بہی صفر ہین تو بموجب دفعہ ۳۵۵ کی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ س = ۰ کی ہونا ایک ضروری شرط ہی جو امثال ح (لا) اور مح (لا) مین ہونی چاہیئی

(۳۷۴) ہم نے ایک خاص مثال تحقیقات عامہ کی دفعہ گذشتہ مین لکہی ہی اب ہم اوسکو اسطرح لکہتی ہین کہ وہ زیادہ سمجہہ مین ائی فرض کرو کہ

ح (لا) = ا. + ا، لا + ا، لا² + . . . + ا، لا^م = ۰

مح (لا) = ب. + ب، لا + ب، لا² + . . . + ب، لا^ن = ۰

اب ان مساواتون مین سی لا کو ساقط کرنا ہے اب ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

ح (لا) = ا. + ا، لا + ا، لا² + . . . + ا، لا^م

لاح (لا) = ا. لا + ا، لا² + ا، لا³ + . . . + ا، لا^م + ۱

لا^ن ح (لا) = ا. لا^ن + ا، لا^ن + ۱ + . . . + ا، لا^ن + م

مح (لا) = ب. + ب، لا + ب، لا² + . . . + ب، لا^ن

لامح (لا) = ب. لا + ب، لا² + . . . + ب، لا^ن + ۱ + ب، لا^ن + ۱

لا^م مح (لا) = ب. لا^م + ب، لا^م + ۱ + . . .

فرض کرو کہ م + ن رتبی کی مقطعات کو س تعبیر کرتا ہی جسکی اول صفین یہہ ہین کہ

ا. ، ا، ، ا، . . . ا^م ، ۰ ، ۰ ، ۰ . . . .

۰ ، ا. ، ا، . . . ا^م - ۱ ، ا^م ، ۰ ، ۰

۰ ، ۰ ، ا. . . . ا^م - ۲ ، ا^م - ۱ ، ا^م ، ۰ . . .

اور اسکے بعد م افقی صفین یہہ ہین

ب. ، ب، ، ب، . . . ب^ن ، ۰ ، ۰ ، ۰

۰ ، ب. ، ب، . . . ب^ن - ۱ ، ب^ن ، ۰ ، ۰

۰ ، ۰ ، ب. . . . ب^ن - ۲ ، ب^ن - ۱ ، ب^ن ، ۰

تو س = ۰ ایک ضرور ارتباط امثال مین ہونا چاہئی تاکہ ح (لا) اور مح (لا) ایک ہی وقت مین معدوم ہون

(۳۷۵) ایک جبریہ جملہ کو جو دوسرے جملہ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت پیدا ہوتا ہے اوسکو مقطع کی صورت مین نمایان کرسکتی ہین

فرض کرو کہ مح (لا) = ا۰ لا^ن + ا۱ لا^{ن-۱} + ا۲ لا^{ن-۲} + ... + ار لا^{ن-ر} + ...

ح (لا) = ب۰ لا^ن + ب۱ لا^{ن-۱} + ب۲ لا^{ن-۲} + ... + ب ر لا^{ن-ر} + ...

اور خارج قسمت جو مح (لا) کو ح (لا) پر تقسیم کرنے سے پیدا ہو اوسے

ق۰ لا^{ن-ن} + ق۱ لا^{ن-ن-۱} + ... + ق ر لا^{ن-ن-ر} + ...

$$ق_ر = \frac{1}{ب_0^{ر+1}} \begin{vmatrix} ب_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & ا_0 \\ ب_1 & ب_0 & 0 & \cdots & 0 & ا_1 \\ ب_2 & ب_1 & ب_0 & \cdots & 0 & ا_2 \\ ب_3 & ب_2 & ب_1 & \cdots & 0 & ا_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ب_ر & ب_{ر-1} & ب_{ر-2} & \cdots & ب_0 & ا_ر \end{vmatrix}$$

اور یہہ امتحان سی ثابت ہوسکتا ہی کہ ر = ۰ یا ۱ یا ۲ کے ہو اور علی العموم استقراء سے ثابت ہوسکتا ہے مثلاً ہم فرض کرتے ہین کہ ق۰ و ق۱ و ق۲ و ق۳ اور ق۴ اس قاعدہ کی موافق مناسب طور پر دریافت ہوجائین اور ہم یہہ ثابت کرنا چاہتی ہین کہ ق۵ بہی ایسا ہے

ح (لا) کو خارج قسمت مین ضرب دو اور ح (لا) کے مساوی لکھو تو یہہ دریافت ہوگا

ا۵ = ق۰ ب۵ + ق۱ ب۴ + ق۲ ب۳ + ق۳ ب۲ + ق۴ ب۱ + ق۵ ب۰ ... (۱)

اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ہم نے جو کچہ ق۵ کے واسطی حاصل کیا ہی وہ مطابق اوسکی ہے جو مقطع سی دریافت ہوا ہی فرض کرو کہ س مقطع کو تعبیر کرتا ہے تو

$$ص_{ب.} = \frac{1}{ب_{ه}} \begin{vmatrix} ب_{.} & و & و & و & و & و & ا_{.} \\ ب_{ا} & ب_{.} & و & و & و & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & و & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & ا_{ا} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{ب_{ه}} \{ -ص_{ه} ب_{ه} + ص_{ه} ب_{ه} - ص_{ه} ب_{ه} + ص_{ه} ب_{ه} - ص_{ه} ب_{ه} + ص_{ه} ا_{ه} \}$$

اسمین ص۵ ص۴ ص۳ ص۲ ص۱ ص۰ مقطعات ہین جو اس سطح سے پیدا ہوتی ہین کہ ہمیشہ اخر صف افقی کو اور ایک عمودی صف کو متواتر محو کرتے ہین پس

$$ص_{.} = \begin{vmatrix} ب_{.} & و & و & و & و & ا_{.} \\ ب_{ا} & ب_{.} & و & و & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & ا_{ا} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_{.} & و & و & و & و \\ ا_{ا} & ب_{.} & و & و & و \\ ا_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & و \\ ا_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و \\ ا_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} \end{vmatrix}$$

بموجب فعہ ۳۴۴ کے پس دفعہ ۳۴۶ کو بار بار کام مین لاکر ہم کو ا. ب. کی قیمت مقطع کی حاصل ہوگی پس

$$\frac{ص_{ه}}{ب_{ه}} = \frac{ا_{.}}{ب_{.}} = ق_{.}$$

پھر $ص_{۴} =$

$$\begin{vmatrix} ب_{.} & و & و & و & و & ا_{.} \\ ب_{ا} & ب_{.} & و & و & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & ا_{ا} \\ ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & ا_{ا} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ب_{.} & ا_{.} & و & و & و & و \\ ب_{ا} & ا_{ا} & و & و & و & و \\ ب_{ا} & ا_{ا} & ب_{.} & و & و & و \\ ب_{ا} & ا_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و & و \\ ب_{ا} & ا_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} & و \\ ب_{ا} & ا_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{ا} & ب_{.} \end{vmatrix}$$

بموجب دفعہ ۳۴۴ کے اب دفعہ ۳۴۶ کی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ب_0 و_1 & و_0 & و_0 \\ ب_1 و_1 & و_0 & و_0 \\ ب_2 و_1 & و_2 و_0 & و_0 \\ ب_3 و_1 & و_3 و_0 & و_0 \\ ب_4 و_1 & و_4 و_0 & و_3 و_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_0 و_1 & و_0 \\ ب_1 و_1 & و_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ب_0 و_0 & و_0 \\ ب_1 و_0 & و_0 \\ ب_2 و_1 & و_2 و_0 \end{vmatrix}$$

پس $ص_4 = -\begin{vmatrix} ب_0 و_1 \\ ب_1 و_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب_0 & و_0 & و_0 \\ ب_1 & و_0 & و_0 \\ ب_2 & و_1 & و_0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ب_0 و_1 \\ ب_1 و_1 \end{vmatrix} ب_3 = -ق_1 ب_3$

اسیواسطے $\frac{ص_4}{ب_0} = -ق_1$

پھر $ص_3 = \begin{vmatrix} ب_0 & و_0 & و_0 & و_1 \\ ب_1 & و_0 & و_0 & و_1 \\ ب_2 & و_1 & و_0 & و_1 \\ ب_3 & و_2 & و_1 & و_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب_0 & و_0 & و_1 \\ ب_1 & و_0 & و_1 \\ ب_2 & و_1 & و_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ب_0 & و_0 \\ ب_1 & و_0 \end{vmatrix}$

$= ق_2 ب_0^2$

اسیواسطی $\frac{ص_3}{ب_0} = ق_2$

اسیطرح $\frac{ص_2}{ب_0} = ق_3$

$\frac{ص_1}{ب_0} = ق_4$

اور $\frac{ب_0}{ب_0} = 1$

پس $ر_{ب_0} = -ق_1 ب_4 - ق_2 ب_3 - ق_3 ب_2 - ق_4 ب_1 + ب_0^5$ (۲)

پس اسی ہم یہہ دیکھتے ہیں کہ (۲) سی جو مس دریافت ہوا وہ بالکل مطابق $ق_5$ کے قیمت کے ہی جو (۱) سے دریافت ہوئی تہی اور یہی ثابت کرنا تہا ترکیب جو $ق_5$ کی نسبت ہم کام میں لائے

وہ عام ہی اور اسوا سطی جو ق کی قیمت اوپر تشخیص ہوئی ہی وہ صحیح اور درست ہے

(۳۷۶) اب ہم دو مثالوں پر خاتمہ کرتے ہین

(۱) فرض کرو کہ مقطع ن + ۱ رتبہ کا ہو جسمین تمام اجزاء ذاتی برابر واحد کے ہون الا وہ جو قطر کا سلسلہ بناتی ہین مستثنی ہین اور وہ ۱ و ۱ + لا ۱ و ۱ + لا ۲ ۰ ۱ + لا ن ہین تو قیمت اس مقطع کی لا ۱ لا ۲ ۰ لا ن ہے

اسوا سطی کہ اگر مقادیر لا ۱ و لا ۲ ۰ لا ن مین سی ایک معدوم ہو تو مقطع معدوم ہوتا ہے کیونکہ اوسکی دو افقی صفین مطابق ہوتی ہین اسوا سطی مقطع لا ۱ لا ۲ ۰ لا ن پر تقسیم ہوتا ہی اور خارج قسمت اس تقسیم کا واحد ہوگا کیونکہ یہہ اول جز ترکیبی کی دیکھنی ہی معلوم ہوتا ہی

(۲) فرض کرو کہ رتبی کا مقطع ہی جسمین تمام اجزاء ذاتی سوا اوس سلسلہ قطر کے واحد ہین اور اس سلسلہ قطر مین ۱ + لا ۱ و ۱ + لا ۲ ۰ ۱ + لا ن ہین تو قیمت مقطع کی یہہ ہوگی کہ

$$\text{لا}_1 \text{لا}_2 \cdots \text{لا}_n \left[1 + \frac{1}{\text{لا}_1} + \frac{1}{\text{لا}_2} + \cdots + \frac{1}{\text{لا}_n}\right]$$

اسوا سطے اگر مقادیر لا ۱ و لا ۲ ۰ لا ن مین سی کوئی ایک معدوم ہو جاے تو مقطع کی صورت پہلی مثال کی ایک صورت بنجائیگی اور رقم لا ۱ لا ۲ ۰ لا ن اول جز ترکیبی مقطع پر خیال کرنے سے دریافت ہوتی ہے

مثالین

باب ۱

(۱) جب لا^۵ + ۷ لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۱۷ لا^۲ + ۱۰ لا - ۱۴ کو لا - ۴ پر تقسیم کرین تو باقی اور خارج قسمت دریافت کرو

(۲) (۱ + لا)^ن کو قوا ے لا مین پہلا کر اول جملہ مشتقہ (۱ + لا)^ن کا دریافت کرو

(۳) ثابت کرو کہ مساوات لا^۳ + ۳ لا^۲ + لا - ۶ = ۰ کی صرف ایک ہی قیمت ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی

باب ۲

(۱) مساوات $لا^۲ = \pm \sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

(۲) مساوات $لا^۶ = -\sqrt{-۱}$ کی ایک قیمت دریافت کرو

باب ۳

(۱) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں ۱ و ۱ و ۱ و -۱ و -۲ ہوں

(۲) وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں $۱ \pm \sqrt{-۲}$ اور $۲ \pm \sqrt{-۳}$

(۳) اٹھوین درجہ کی مساوات ایسی بناؤ جسکی قیمت $۲\sqrt{-۱} + \sqrt{-۳}$ ہو

(۴) ان مساواتوں کو حل کرو مساوات کی ایک قیمت معلوم ہے

(۱) $لا^۳ - لا^۲ + ۳لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $۲ - \sqrt{-۱}$

(۲) $لا^۴ + ۴لا^۳ + ۶لا^۲ + ۴لا + ۵ = ۰$ اور قیمت معلوم $\sqrt{-۱}$

(۳) $لا^۴ + لا^۳ - ۲۵لا^۲ + ۱۴۱لا + ۶۶ = ۰$ اور قیمت معلوم $۳\sqrt{-۱} + ۲$

(۴) $لا^۴ + ۲لا^۳ - ۴لا^۲ - ۴لا + ۴ = ۰$ قیمت معلوم $۲\sqrt{-۱}$

(۵) $لا^۴ - ۲لا^۳ - ۵لا^۲ - ۶لا + ۲ = ۰$ قیمت معلوم $۲ + ۳\sqrt{-۱}$

(۶) $لا^۶ - لا^۵ - ۸لا^۴ + ۲لا^۳ + ۲۱لا^۲ - ۱۹لا - ۵۴ = ۰$ قیمت $۲\sqrt{-۱} + \sqrt{-۱}$

(۵) مساوات $لا^۵ - لا^۴ + ۸لا^۲ - ۹لا - ۱۵ = ۰$ کو حل کرو ایک قیمت اوسکی $۳\sqrt{-۱}$
اور دوسری قیمت $۱ - ۲\sqrt{-۱}$ ہے

(۶) مساوات $لا^۳ - ۴لا^۲ + لا + س = ۰$ کی ایک قیمت $= ۳$ اور قیمتیں اورس دریافت کرو

(۷) مساوات $لا^۶ - ۶لا^۵ + ۴۰لا^۳ + ۶۰لا^۲ - لا - ۱ = ۰$ کی متکافی قیمتوں کا مجموعہ
اور قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ اور متکافی قیمتوں کی مجذوروں کا مجموعہ دریافت کرو

(۸) مساوات $لا^۴ - ۲۱لا^۳ + ۱۶۶لا^۲ - ۵۴۶لا + ۵۸۰ = ۰$ کی قیمتیں
سہ اور صہ اور سہ + صہ + (سہ - صہ) $\sqrt{-۱}$ کی صورت کی ہیں مساوات کو حل کرو

(۹) مساوات معلوم کی قیمتوں کے مکعبوں کا مجموعہ دریافت کرو

(۱۰) وہ مساوات دریافت کرو جسکی قیمتین سہ وصہ و سروفر

$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\sqrt{-2} \pm \sqrt{3}\sqrt{2-})$ اور $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\sqrt{-2} \pm \sqrt{3}\sqrt{2-})$ ہین اور یہی ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{سہ}} + \frac{1}{\text{صہ}} + \frac{1}{\text{سر}} + \frac{1}{\text{لر}} + \dots = 0$$

(۱۱) اگر ط وص وس قیمتین ایک مساوات کی ہون تو قیمت

$$\frac{\text{ط}^2}{\text{ص}^2} + \frac{\text{ط}^2}{\text{س}^2} + \dots + \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2} + \dots$$

کی دریافت کرو

(۱۲) کچہ مثبت مقادیر ہین اور او نکا اوسط حسابیہ بڑا اوسط ہندسیہ سے ہی تو ثابت کرو کہ

$\text{ع}_1^2 - 2\text{ع}_2^2$ چھوٹا ان $\text{ع}_1^2 \text{ع}_2^2$ سے ہی اور مساوات کی ناممکن قیمتین ہین

(۱۳) اگر ط وص وس . . قیمتین مساوات کی ہون تو ثابت کرو کہ

$$(1-\text{ع}_1+\text{ع}_2-\dots)^2 + (\text{ع}_1-\text{ع}_3+\text{ع}_5-\dots)^2 = (1+\text{ط}^2)(1+\text{ص}^2)(1+\text{س}^2)+\dots$$

باب ۴

(۱) ذیل کی مساواتون کی ہیت بدل کر ایسی مساواتین بناؤ کہ جسکی قیمتین اصل مساوات کی قیمتون پر ایک عدد معین کی زیادہ کرنے سے پیدا ہون

(۱) $\text{لا}^4 - 3\text{لا}^3 - \text{لا}^2 + 4 = 0$ و (۲) $\text{لا}^6 + \text{لا} + 1 = 0$ و ۳

(۳) $\text{لا}^5 + 4\text{لا}^3 - \text{لا}^2 + 11 = 0$ و ۳

(۲) ذیل کی مساواتون کو ایسی مساواتون مین تبدیل کرو کہ اونکی دوسری رقم نہ ہو

(۱) $\text{لا}^3 - 3\text{لا}^2 + 4\text{لا} - 4 = 0$ (۲) $\text{لا}^3 - 6\text{لا}^2 + 12\text{لا} + 19 = 0$

(۳) $\text{لا}^4 - 8\text{لا}^3 + 5 = 0$ (۴) $\text{لا}^5 + 5\text{لا}^4 + 3\text{لا}^3 + \text{لا}^2 + \text{لا} - 1 = 0$

(۳) ذیل کی مساواتون کو ایسی دو اور مساواتون سی تبدیل کرو کہ اوسمین تیسری رقم نہ ہو

(۱) $\text{لا}^3 + 5\text{لا}^2 + 8\text{لا} - 1 = 0$ (۲) $\text{لا}^3 - 6\text{لا}^2 + 9\text{لا} - 10 = 0$

(۳) $\text{لا}^4 - 8\text{لا}^3 + 18\text{لا}^2 - 15\text{لا} + 14 = 0$ (۴) $\text{لا}^4 - 18\text{لا}^3 - 60\text{لا}^2 + \text{لا} - 2 = 0$

(۴) مساوات $لا^۳ + ۲لا^۲ + \frac{۱}{۴}لا + \frac{۱}{۹} = ۰$ کی صورت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ امثال اوسکی اعداد صحاح ہون اور اول رقم کا سر ایک ہو

(۵) دوسرے رقم کو دور کرو اور اس مساوات کو حل کرو

$لا^۳ - ۱۸لا^۲ + ۱۰۷لا - ۵۱۰ = ۰$

(۶) ذیل کی مساواتون مین سی ہر ایک مساوات کی ہیئت اسطرح تبدیل کرو کہ اوسکی قیمتین مجذور مساوات کی قیمتون کی تفاوت کا ہون اور قیمتون کی خواص پر بحث لکھو

(۱) $لا^۳ + ۷لا - ۱ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۶لا + ۶ = ۰$

(۷) $لا^۴ - ۲۱لا^۲ + ۱۲لا - ۳ = ۰$ کی ہیئت بدل کر ایسی مساوات بناؤ کہ جسکی قیمتین مکافی مساوات معلوم کی قیمتون کی ہون اور ہیئت بدلی ہوئی جو مساوات حاصل ہوا اوسکی قیمتون کو بقدر واحد کے کم کرو

(۸) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ + لا^۲ - ۸لا - ۱۵ = ۰$ کی دو حقیقی قیمتین مختلف العلامت ہین اور دوسری زیادہ اوسکی حقیقی قیمتین نہین ہین اور وہ ۲- اور ۳ کے درمیان واقع ہین

(۹) مساوات $لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین $ط$ $وص$ $وس$ سے تعبیر ہوتی ہین اس مساوات کی ہیئت بدل کر اور مساوات بناؤ جنکی قیمتین معینہ بہ تفصیل ذیل ہو

(۱) $ط^۲ وص^۲ وس^۲$ (۲) $ص + س$ $وس + ط$ $وط + ص$

(۳) $\frac{۱}{ص+س}$ $و\frac{۱}{س+ط}$ $و\frac{۱}{ط+ص}$ (۴) $\frac{ط}{ص س}$ $و\frac{ص}{س ط}$ $و\frac{س}{ط ص}$

(۵) $ص^۲ س^۲$ $وس^۲ ط^۲$ $وط^۲ ص^۲$ (۶) $ما(کط)$ $وما(کص)$ $وما(کس)$

(۷) $\frac{۱}{۲}(ص + س - ط)$ $و\frac{۱}{۲}(س + ط - ص)$ $و\frac{۱}{۲}(ط + ص - س)$

(۸) $\frac{ط}{ص+س}$ $و\frac{ص}{س+ط}$ $و\frac{س}{ط+ص}$ (۹) $\frac{ط}{ص+س-ط}$ $و\frac{ص}{س+ط-ص}$ $و\frac{س}{ط+ص-س}$

(۱۰) $ص س + \frac{۱}{ط}وس ط + \frac{۱}{ص}وط ص$ (۱۱) $ص^۲ + س^۲ وس^۲ + ط^۲ وط^۲ + ص^۲$

(۱۲) $\frac{ص^۲}{س} + \frac{س^۲}{ط}$ $و\frac{س^۲}{ط} + \frac{ط^۲}{ص}$ $وط^۲ + \frac{ص^۲}{س}$ (۱۳) $\frac{ص^۲ س^۲}{ط^۲} + ص^۲$ $و\frac{س^۲ ط^۲}{ص^۲} + س^۲$ $و\frac{ط^۲ ص^۲}{س^۲} + ط^۲$

(۱۴) $ص - س$ $وس - ص$ $وس - ط$ $وط - س$ $وط - ص$ $وص - ط$

(۱۰) مساوات لا³ + ق لا + ر = ۰ کی قیمتیں ط و ص و س ہیں اسکی ہیئت بدل کر اور مساوات بناؤ جسکی قیمتیں معینہ بہ تفصیل ذیل ہوں

(۱) $\left(\frac{ط}{ص-س}\right)^2$ و $\left(\frac{ص}{س-ط}\right)^2$ و $\left(\frac{س}{ط-ص}\right)^2$

(۲) ص ط + ط س و س ص + ص ط و ط س + س ص

(۱۱) اگر مساوات لا³ − ۶ لا² + ۱۱ لا − ۶ = ۰ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں

$\frac{1}{ع^2+س^2}$ و $\frac{1}{س^2+ط^2}$ و $\frac{1}{ط^2+ص^2}$ ہوں

(۱۲) اگر لا³ − ۲ لا² + ۲ = ۰ کی قیمتیں ط و ص و س ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی قیمتیں $\frac{ص^3+س^3}{ط^3}$ و $\frac{س^3+ط^3}{ص^3}$ و $\frac{ط^3+ص^3}{س^3}$ ہوں

(۱۳) ثابت کرو کہ تیسری رقم مساوات

لا³ + ع لا² + ق لا + ر = ۰

کی ساقط نہیں ہو سکتی اگر ع² چھوٹا ۳ ق سے ہو

(۱۴) ثابت کرو کہ دوسری اور چوتھی رقم مساوات

لا⁴ + ع₁ لا³ + ع₂ لا² + ع₃ لا + ع₄ = ۰

کی ایکہی تبدیل ہیئت سے ساقط ہو سکتی ہیں اگر ۸ ع₄ = ع₁ (۴ ع₂ − ع₁²)

(۱۵) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) لا⁴ + ۴ لا³ + ۷ لا² + ۶ لا − ۱۰ = ۰ (۲) لا⁴ + ۴ لا³ + ۳ لا² − ۲ لا − ۶ = ۰

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات لا³ + ۴ لا² + ۶ لا + ۳ = ۰ میں دوسری اور تیسری رقم ایک ہی تبدیل ہیئت سے ساقط نہیں ہو سکتی لیکن اگر لا میں ضرب دیں تو ہو سکتی ہے

(۱۷) ثابت کرو کہ ن درجہ کی مساوات میں سے دوسرے اور تیسرے رقموں کا ساقط کرنا ممکن ہے اگر

ن × (قیمتوں کے مجدوروں کے مجموعہ) = قیمتوں کے مجموعہ کے مربع

باب ۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۵ - ۴لا^۲ + ۳ = ۰$ کی کم سی کم دو خیالی قیمتیں ہیں

(۲) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۴ - ۲لا^۲ + لا - ۱ = ۰$ کی کم سی کم چار خیالی قیمتیں ہیں

(۳) ذیل کی مساواتوں میں کیا نتایج حاصل ہو سکتی ہیں

(۱) $لا^۵ - ۵لا^۲ + لا^۲ - لا - ۱ = ۰$ (۲) $لا^{۱۲} - لا^{۱۱} + لا^۸ + لا + ۱ = ۰$

باب ۶

(۱) ان مساواتوں کو حل کرو ہر ایک مساوات کی برابر قیمتیں ہیں

(۱) $لا^۳ - ۷لا^۲ + ۱۶لا - ۱۲ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۳لا^۲ - ۹لا + ۲۷ = ۰$

(۳) $لا^۳ - لا^۲ - ۸لا + ۱۲ = ۰$ (۴) $لا^۳ - ۵لا^۲ - ۸لا + ۴۸ = ۰$

(۵) $لا^۳ - لا - \frac{۲}{۳\sqrt{۳}} = ۰$ (۶) $لا^۳ - لا + \frac{۲}{۳\sqrt{۳}} = ۰$

(۷) $لا^۳ + ۸لا^۲ + ۲۰لا + ۱۶ = ۰$ (۸) $لا^۳ - \frac{۱}{۲}لا + \frac{۳}{۱۶} = ۰$

(۹) $لا^۴ - ۱۱لا^۲ + ۱۸لا - ۸ = ۰$

(۱۰) $لا^۴ - ۲لا^۳ - لا^۲ - ۴لا + ۱۲ = ۰$

(۱۱) $لا^۴ - ۷لا^۳ + ۱۳لا^۲ + ۳لا - ۱۸ = ۰$

(۱۲) $لا^۴ - ۴لا^۳ - ۶لا^۲ + ۳۶لا - ۲۷ = ۰$

(۱۳) $لا^۴ + ۱۴لا^۳ + ۳۳لا^۲ + ۳۱لا + ۱۰ = ۰$

(۱۴) $۲لا^۴ - ۱۲لا^۳ + ۱۹لا^۲ - ۶لا + ۹ = ۰$

(۱۵) $لا^۴ + ۱۶لا^۳ + ۷۹لا^۲ + ۱۲۶لا + ۹۸ = ۰$

(۱۶) $۸لا^۴ + ۴لا^۳ - ۱۸لا^۲ + ۱۱لا - ۲ = ۰$

(۱۷) $لا^۵ - لا^۴ - ۲لا^۳ + ۲لا^۲ + لا - ۱ = ۰$

(۱۸) $لا^۵ - ۲لا^۴ - ۶لا^۳ + ۴لا^۲ + ۱۳لا + ۶ = ۰$

(۱۹) $لا^۵ - ۱۳لا^۴ + ۶۷لا^۳ - ۱۷۱لا^۲ + ۲۱۶لا - ۱۰۸ = ۰$

(۲۰) $لا^6 - ۳لا^5 + ۶لا^3 - ۳لا^2 - ۳لا + ۲ = ۰$

(۲) وہ شرط دریافت کرو جسکی کہ $لا^3 - ع لا^2 + ر = ۰$ کی مساوی قیمتیں ہوں

(۳) اگر $لا^4 + ع لا^3 + ق لا^2 + رلا + ص = ۰$ کی تین برابر قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ

$ق^2 - ۳ع ر + ۱۲ ص = ۰$

(۴) اگر $لا^ن + ع_1 لا^{ن-1} + \ldots + ع_ن = ۰$ کی دو مساوی قیمتیں برابر ط کے ہو

تو ثابت کرو کہ $ع_1 لا^{ن-1} + ۲ع_2 لا^{ن-2} + \ldots + ن ع_ن = ۰$ کی ایک قیمت ط ہے

(۵) اگر $لا^5 + ق لا^3 + رلا^2 + ت = ۰$ کی دو مساوی قیمتیں ہیں تو ثابت کرو کہ ایک

اونمیں سی قیمت مساوات درجہ دوم

$$لا^2 - \frac{۲ق}{۵ر} لا + \frac{۵ت}{۳ر} - \frac{۹ق^2}{۱۵} = ۰$$ ہوگی

باب ۷

(۱) $لا^6 - ۵لا^5 + لا^4 + ۱۲لا^3 - ۲۱لا^2 + ۱ = ۰$ کی منفی اور مثبت قیمتوں کی حدود غادیاں دریافت کرو

(۲) $لا^4 - ۸لا^3 + ۱۲لا^2 + ۱۶لا - ۳۹ = ۰$ کو اسطرح لکھو کہ جسی ثابت ہو کہ ۱۶ اعلی حد غائی مثبت قیمتوں کی ہر

(۳) ثابت کرو کہ معادلات ذیل میں حقیقی قیمتیں حدود غائی جو معین کی گئی ہیں اوکے درمیان واقع ہیں

(۱) $لا^4 - لا^3 + ۴لا^2 - ۳لا + ۱ = ۰$ حدود معینہ $\frac{1}{4}$ اور ۱

(۲) $لا^4 + لا^3 - ۱۰لا^2 - لا + ۱۵ = ۰$ حدود معینہ -۱۴ اور ۳

(۳) $لا^5 + ۵لا^4 + لا^3 - ۱۶لا^2 - ۲۰لا - ۱۶ = ۰$ حدود معینہ -۵ اور ۴

(۴) $(لا^3 - ۲۶)(لا^2 + ۵لا + ۱) + ۶۰لا = ۰$ حدود معینہ -۵ اور ۳

(۵) $(لا^2 - ۱۴لا - ۲)^2 - ۴۳ = ۰$ حدود معینہ -۲ اور ۶

(۶) $لا^5 + لا^4 + لا^2 - ۲۵لا - ۳۶ = ۰$ حدود معینہ -۵ اور ۵

(۴) معادلات ذیل میں نیوٹن کی ترکیب سی قیمتوں کی حدود غائی دریافت کرو

(۱) $لا^4 - لا^3 - ۵لا^2 + ۱۸لا - ۹ = ۰$ (۲) $لا^4 - ۵لا^2 + ۱۶لا - ۱ = ۰$

(۳) $لا^۴ - لا^۳ + ۴لا^۲ + لا - ۴ = ۰$ (۴) $لا^۴ - ۵لا^۳ + ۱۱لا^۲ - ۲۰ = ۰$

(۵) $لا^۴ - ۲لا^۳ - ۳لا^۲ - ۱۵لا - ۳ = ۰$

(۵) ثابت کرو کہ $لا^۵ + ۵لا^۴ - ۲۰لا^۲ - ۱۹لا - ۳ = ۰$ کی ایک قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور کوئی قیمت بڑی ۳ سے نہیں ہے اور ایک قیمت - ۵ اور - ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور کوئی چھوٹی - ۵ سے نہیں ہے

(۶) دفعہ ۱۰۲ کی ترکیب کو معادلات ذیل کی حقیقی قیمتوں کا مقام اور تعداد دریافت کرو

(۱) $لا^۳ - ۲لا + ۱۷ = ۰$ (۲) $لا^۴ - ۳۲لا + ۲۰ = ۰$

(۳) $لا^۳ - ۳لا + ۳ = ۰$ (۴) $۴لا^۳ + ۹لا^۲ - ۲لا + ۲ = ۰$

(۵) $لا^ن - ط لا^۲ + ش = ۰$ (۶) $لا^ن - ع لا^۲ + ر = ۰$

(۷) ثابت کرو کہ مساوات $۳لا^۴ + ۸لا^۳ - ۶لا^۲ - ۲۴لا + ر = ۰$ کی چار حقیقی قیمتیں ہیں اگر رہوٹا - ۸ سی اور بڑا - ۱۳ سی ہو اور دو حقیقی قیمتیں ہیں اگر ر بڑا - ۸ سی اور چھوٹا ۱۹ سی ہو اور کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوگی اگر ر بڑا ۱۹ سے ہو

باب ۸

(۱) معادلات ذیل کی قیمتیں ناطقہ محدودہ دریافت کرو

(۱) $لا^۳ - ۱۰۶لا - ۴۲۰ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۹لا^۲ + ۲۲لا - ۲۴ = ۰$

(۳) $لا^۳ - ۲لا^۲ - ۲۵لا + ۵۰ = ۰$ (۴) $۲لا^۳ - ۳لا^۲ + ۲لا - ۳ = ۰$

(۵) $۲لا^۳ - ۲لا^۲ - ۱۶لا + ۴ = ۰$ (۶) $۳لا^۳ - ۲۶لا^۲ + ۳۴لا - ۱۲ = ۰$

(۷) $لا^۴ - ۲لا^۳ + ۸لا - ۱۶ = ۰$ (۸) $لا^۴ - لا^۳ - ۱۳لا^۲ + ۱۶لا - ۴۸ = ۰$

(۹) $لا^۴ - لا^۳ - لا^۲ + ۱۹لا - ۴۲ = ۰$ (۱۰) $لا^۴ + ۸لا^۳ - ۷لا^۲ - ۷۹لا + ۵۶ = ۰$

(۱۱) $لا^۵ - ۳لا^۴ - ۹لا^۳ + ۲۱لا^۲ - ۱۰لا + ۲۴ = ۰$

(۱۲) $لا^۶ - ۷لا^۵ + ۱۱لا^۴ - ۷لا^۳ + ۱۴لا^۲ - ۲۸لا + ۴۰ = ۰$

(۲) مثال مساوات ح (لا) = ۰ میں صحاح ہیں تو ثابت کرو کہ اگرچہ (۰) اور ح (۱) دونو طاق اعداد ہوں تو مساوات کی قیمت اعداد صحیح نہیں ہو سکتیں

باب ۹

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو ہر یک دو قیمتیں ۱ اور - ۱ کی صورت کی ہیں

(۱) لا⁴ - ۲ لا³ - ۲ لا² + ۸ لا - ۸ = ۰ (۲) لا⁴ + ۳ لا³ - ۷ لا² - ۲۷ لا - ۱۸ = ۰

(۳) لا⁴ + ۳ لا³ + ۲ لا² + ۹ لا - ۳ = ۰ (۴) لا⁴ + لا³ - ۱۱ لا² + ۹ لا + ۱۸ = ۰

(۲) معادلات ذیل کو حل کرو ہر یک کی قیمتیں بسلسلہ حسابیہ میں ہیں

(۱) لا³ - ۶ لا² + ۱۱ لا - ۶ = ۰ (۲) لا³ - ۹ لا² + ۲۳ لا - ۱۵ = ۰

(۳) لا⁴ - ۸ لا³ + ۱۴ لا² + ۸ لا - ۱۵ = ۰ (۴) لا⁴ + لا³ - ۱۱ لا² + ۹ لا + ۱۸ = ۰

(۳) ان مساواتوں کو حل کرو بعض شرائط جو قیمتوں کے متعلق ہیں وہ اونکی ساتھ بیان کی گئی ہیں

(۱) ۳ لا³ - ۲ لا² - ۲۷ لا + ۱۸ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۲ ہے

(۲) لا⁴ - ۳ لا² - ۶ لا - ۲ = حاصل ضرب دو قیمتوں کا - ۱ ہے

(۳) لا⁴ - ۴ لا³ + ۵ لا² - ۱۶ لا + ۴ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۱ ہے

(۴) ۲ لا⁴ - ۵ لا³ + ۱۱ لا² - ۱۱ لا + ۶ = ۰ حاصل ضرب دو قیمتوں کا ۱ ہے

(۵) لا⁴ - ۴۵ لا² - ۴۰ لا + ۸۴ = ۰ حاصل تفریق دو قیمتوں کا ۳ ہے

(۶) لا⁵ - ۷ لا⁴ + ۱۵ لا³ - ۱۵ لا² + ۱۴ لا - ۸ = ۰ ایک قیمت دوسری سے دو چند ہے

(۴) معادلات ذیل کو حل کرو اونکی قیمتوں کی صورتیں معین ہیں

(۱) لا³ - ۱۰ لا² + ۲۷ لا - ۱۹ = ۰ صورتیں ۱ و ۳ ۱ و ۶ ۱

(۲) لا⁴ - ۱۰ لا³ + ۳۵ لا² - ۵۰ لا + ۲۴ = ۰ صورتیں ۱ + ۱ و ۱ - ۱ و ب + ۱ و ب - ۱

(۳) ۶ لا⁴ - ۴۳ لا³ + ۱۰۷ لا² - ۱۰۸ لا + ۳۶ = ۰ اور صورتیں ۱ و ب دلچسپ ہیں

(۴) لا⁵ + ۸ لا⁴ + ۵ لا³ - ۵۰ لا² - ۳۶ لا + ۷۲ = ۰ صورتیں ۱ و ۲ ۱ و ب و ۲ ب و ۱ + ب

(۵) لا⁶ - ۴ لا⁵ + ۱۰ لا⁴ - ۱۶ لا³ + ۴۴ لا² - ۱۶ لا + ۵۶ = ۰ صورتیں ۱ + ۱ ب ± ۲ ب و ± ۱ س

(۶) لا⁶ - ۱۲ لا⁴ - ۲ لا³ + ۳۷ لا² + ۱۰۴ لا - ۱۰۰ = ۰ و ۱ ± ۱ و ب ± ۲ ب و ± ۱ س

(۵) معادلات ذیل کو حل کرو ہر یک زوج میں ایک قیمت مشترک ہے

(۱) $\lambda^3 - ۳\lambda^2 - ۱۶\lambda - ۱۲ = ۰$ و $\lambda^3 - ۷\lambda^2 + ۵\lambda + ۱۳ = ۰$

(۲) $\lambda^3 - ۳\lambda^2 + ۱۱\lambda - ۹ = ۰$ و $\lambda^3 - ۵\lambda^2 + ۱۱\lambda - ۷ = ۰$

(۶) مساوات $\lambda^3 - ۷\lambda^2 + ۳۶ = ۰$ اور $\lambda^3 - ۳\lambda^2 - ۱۰\lambda + ۲۴ = ۰$ کو حل کرو
پہلی مساوات کی ایک قیمت سہ چند دوسری مساوات کی ایک قیمت سے ہے

(۷) معادلات ذیل کو حل کرو جنمیں دو قیمتیں مشترک ہیں

$\lambda^3 - ۲\lambda^2 - ۷\lambda + ۲۶\lambda - ۲۰ = ۰$ و $\lambda^4 + ۴\lambda^3 - ۲\lambda^2 - ۱۲\lambda + ۸ = ۰$

(۸) م اور ا کی رقموں میں اس مساوات

$\lambda^4 + ع\lambda^3 + (م^2 + م)\lambda^2 + ق\lambda + ا^2 = ۰$

کی قیمتیں جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں دریافت کرو اور ع اور ق کو م اور ا کی رقموں میں تخفیف کرو

باب ۱۰

(۱) ان معادلات متکافیہ کو حل کرو

(۱) $\lambda^4 - ۲\lambda^3 + ۳\lambda^2 - ۲\lambda + ۱ = ۰$ (۲) $\lambda^4 + ۴\lambda^3 - ۵\lambda^2 + ۴\lambda + ۱ = ۰$

(۳) $۲\lambda^4 - ۵\lambda^3 + ۶\lambda^2 - ۵\lambda + ۲ = ۰$ (۴) $\lambda^4 + ۴\lambda^3 - ۱۰\lambda^2 + ۴\lambda + ۱ = ۰$

(۵) $\lambda^5 - ۲\lambda^4 - ۱۹\lambda^3 - ۱۹\lambda^2 - ۲\lambda + ۱ = ۰$ (۶) $\lambda^5 - ۸\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 - ۸\lambda + ۱ = ۰$

(۷) $۶\lambda^5 - ۱۱\lambda^4 - ۳۳\lambda^3 + ۳۳\lambda^2 + ۱۱\lambda - ۶ = ۰$

(۸) $۲\lambda^5 - ۵\lambda^4 + ۴\lambda^3 - ۴\lambda^2 + ۵\lambda - ۲ = ۰$

(۹) $۸\lambda^4 - ۱۶\lambda^3 - ۲۵\lambda^2 - ۱۶\lambda + ۸ = ۰$ (۱۰) $ا + \lambda^5 = ا(ا + \lambda)^5$

(۲) معادلات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو اور اونکا تنزل کرو

(۱) $\lambda^6 - ۲\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 - ۲\lambda^2 + ۱ = ۰$

(۲) $\lambda^6 + ۲\lambda^5 - ۸\lambda^4 - ۷\lambda^3 - ۸\lambda^2 + ۲\lambda + ۱ = ۰$

(۳) $\lambda^5 + ۲\lambda^4 + ۳\lambda^3 + ۲\lambda^2 - ۳\lambda^2 - ۲\lambda - ۱ = ۰$ (۴) $\lambda^n - ۱ = ۰$

(۳) $لا^۲ + ع لا + ۱ = ۰$ کی قیمتوں کو

$ا$ و $ب$ و $\frac{۱}{ا}$ و $\frac{۱}{ب}$ کی صورت میں نمایاں کرو

(۴) اگر $ا$ و $ب$ دو قیمتیں مساوات مکررہ کی تعبیر کریں تو

$لا^ن + ع لا^{ن-۱} + ق لا^{ن-۲} + \ldots + ق لا^۲ + ع لا + ۱ = ۰$

$ا^۲ + س^۲ + \ldots + \frac{ب^۲}{ا^۲} + \frac{س^۲}{ا^۲} + \ldots + \frac{س^۲}{ب^۲} + \ldots = (ع^۲ - ۲ق)^ن$

(۵) مساوات مکررہ $لا^{۲ن} - ع لا^{۲ن-۱} + \ldots = ۰$ میں اگر قیمتیں علی التبادل مثبت اور منفی ہوں اور $ع$ بڑا $۲ن$ سی نہ ہو تو قیمتیں تمام حقیقی نہیں ہونگیں

باب ۱۱

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) $لا^۶ - ۱ = ۰$ (۲) $لا^۸ - ۱ = ۰$ (۳) $لا^۸ + ۱ = ۰$

(۲) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی $ا لا^۳ + ب لا^۲ + س لا - ۳ا ب$ میں کی صورتیں $ا + ب - ۳س$ سے

میں جسمیں $ے^۳ - ۱ = ۰$

(۳) ثابت کرو کہ اجزاء ضربی

$لا^۲ (لا^۲ - ۴ب د - س^۲) - ب^۲ (ب^۲ - ۴ا س - د^۲) + س^۲ (س^۲ - ۴ب د - ا) - د^۲ (د^۲ - ۴ا س - ب^۲)$

کے اس صورت $ا + ب ک + س ک^۲ + د ک^۳$ کے ہیں اگر $ک^۴ - ۱ = ۰$

باب ۱۲

(۱) ان مساواتوں کو حل کرو

(۱) $لا^۳ - ۳لا - ۲ = ۰$ (۲) $لا^۳ - ۹لا - ۲۸ = ۰$

(۳) $لا^۳ - لا + ۶ = ۰$ (۴) $لا^۳ + ۳لا = \frac{۳}{۴}$

(۵) $۳لا^۳ - ۶لا^۲ - ۲ = ۰$ (۶) $لا^۳ - ۱۵لا^۲ + ۳۲۰لا + ۸۴۷ = ۰$

(۷) $لا^۳ + ۱۹۶ = ۳۶ ا^۳$ (۸) $لا^۳ - ۳(ا^۲ + ب^۲) لا = ۲ا (ا^۲ - ۳ب^۲)$

(۲) مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی یہہ صورت $لا^۳ = (لا^۲ + ا لا + ب)^۲$ بن جاوی اسکی واسطی ق اور رتین کیا ارتباط ہونا ضرور ہے

اور پہر اوس ارتباط سے مساوات $۸ لا^۳ - ۳۶ لا + ۲۷ = ۰$ حل کرو

(۳) اگر مساوات $لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ ہندسہ مین ہون تو $ع^۳ = ق^۲$ اسی مساوات $لا^۳ - لا^۲ + ۲ لا - ۸ = ۰$ کو حل کرو

(۴) اگر مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین بقدر حد کے کم کیجائین تو ثابت کرو ہئت بدلی ہوئی مساوات جو حاصل ہوگی اوسکی قیمتین سلسلہ ہندسہ مین ہونگین بشرطیکہ $۲۷ ر حد^۳ - ۹ ق حد^۲ - ق^۳ = ۰$

(۵) اگر مساوات $لا^۳ + ۳ ع لا^۲ + ۳ ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہو تو $۲ ق^۳ = ر (۳ ع ق - ر)$

(۶) اگر مساوات $لا^۳ + ۳ ع لا^۲ + ۳ ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہون تو مساوات $ر لا^۲ + ۲ ق لا + ق ر = ۰$ مین سب سے بڑی اور سب سی چہوٹی قیمتین شامل ہونگین

(۷) $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی ناممکن قیمتین صورت $سہ \pm صہ \sqrt{-۱}$ کی ہین تو ثابت کرو کہ $صہ^۲ = ۳ سہ^۲ + ق$ ۔

(۸) اگر $روسہ + صہ^۲ وسہ - صہ^۳$ مین قیمتین مساوات $لا^۳ + ع_۱ لا^۲ + ع_۲ لا + ع_۳ = ۰$ کی ہون اونمین سی رحقیقی قیمت ہی اور مساوات $لا^۳ + م_۱ لا^۲ + م_۲ لا = ۰$ اسطرح پیدا ہوتی ہو کہ اوپر کی مساوات کی قیمتین بقدر ر کے کم کردین تو ثابت کرو کہ

$سہ = - \frac{ع_۱}{۳} + ر$ اور $صہ = - \frac{۱}{۳} (م_۲ + ۳ ع_۲ - ع_۱^۲)$

(۹) مساوات $لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰$ کو صورت $ی^۳ - ۳ ء ی + م = ۰$ کی طرف $لا = ء ی + ب$ فرض کرکی تحویل کرو اور اس مساوات کو $ی = ی + \frac{ء}{ی}$ فرض کرکے حل کرو اور اسی ثابت کرو کہ اگر اصلی مساوات کی برابر قیمتین ہون تو

$۴(ع^۲ - ۳ق)^۳ = (۲ع^۳ - ۹ع ق + ۲۷ ر)^۲$

(۱۰) اگر مساوات $لا^۳ + ع لا^۲ + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتین سلسلہ موسیقہ مین ہین تو اس مساوات کی قیمتین بھی سلسلہ موسیقہ مین ہونگین

$(ع ق - ر) ی^۳ - (ع^۳ - ۲ع ق + ۳ ر) ی^۲ + (ع ق - ۳ر) ی - ر = ۰$

باب ۱۳

(۱) معادلات ذیل کو حل کرو

(۱) $لا^۴ + ۴ لا^۳ + ۳ لا^۲ - ۴۴ لا - ۸۴ = ۰$ (۲) $لا^۴ - ۶ لا^۲ - ۸ لا - ۳ = ۰$

(۳) $لا^۴ - ۱۲ لا^۲ + ۴۹ لا^۲ - ۷۸ لا + ۴۰ = ۰$

(۴) $لا^۴ - ۲ لا^۳ + (ا^۲ - ۲ ب^۲) لا^۲ + ۲ ا ب^۲ لا - ب^۴ = ۰$ دفعہ ۱۹۲

(۲) اگر $ر^۲ - ع ص = ۰$ تو مساوات $لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ع = ۰$ مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو جائیگی

(۳) اگر ص اور ع مثبت ہون اور $۲۷ ع^۴$ چھوٹی $۲۵۶ ص^۳$ سی ہو تو مساوات $لا^۴ + ع لا^۳ + ص = ۰$ کی قیمتین سب خیالی ہونگین

(۴) مساوات $لا^۴ + ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰$ کی قیمتین صورت $سہ \pm صہ \sqrt{-۱}$ فرض کرکے ثابت کرو کہ سہ اور صہ کی قیمتین ان مساواتون سے دریافت ہو سکتی ہین کہ

$۶۴ سہ^۶ + ۳۲ ق سہ^۴ + (۴ ق^۲ - ۱۶ ص) سہ^۲ - ر^۲ = ۰$ ۔ $صہ^۲ = سہ^۲ + \frac{ق}{۲} + \frac{ر}{۴ سہ^۲}$

باب ۱۴

(۱) معادلات ذیل مین قیمتین بعض سسٹرم کے جملون کی متعین ہو چکی ہین اونکی حقیقی قیمتون کا مقام حسب ضابطہ سسٹرم صاحب کی دریافت کرو

(۱) $لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۳ لا + ۲۳ = ۰$ ۔ $دح_۳ (لا) = - ۹۱ لا^۴ + ۷۱ لا^۳ + ۱۳ دح_۴ (لا) = ۰$

(۲) $لا^۴ - ۴ لا^۳ + لا^۲ + ۶ لا + ۲ = ۰$ ۔ $دح_۲ (لا) = ۵ لا^۲ - ۱۰ لا - ۷ دح_۳ (لا) = لا - ۲$

ح۴ (۴) = +

(۳) لا۴ + لا۳ + لا - ۱ = ۰ وح۲ (لا) = ۳ لا۲ - ۱۲ لا + ۱۷ دفعہ ۱۹۹

(۴) لا۵ - ۲ لا۴ + لا۳ - ۸ لا + ۶ = ۰ وح۳ (لا) = ۱۶ لا۲ - ۲۳ لا + ۹

(۵) لا۵ + ۵ لا۴ - ۲۰ لا۲ - ۱۹ لا - ۳ = ۰ وح۲ (لا) = ۲۰ لا۳ + ۶۰ لا۲ + ۳۶ لا - ۹

ح۳ (لا) = ۹۶ لا۲ + ۱۸۷ لا + ۶۷ وح۴ (لا) = ۱۵۱ لا۴ + ۳۶۵ لا + ۱۷۵۸۴۵

ح۵ (لا) = +

(۲) سٹرم کی ضابطہ سی ثابت کرو کہ معادلات ذیل میں ایک حقیقی قیمت ہے اور اوسکا مقام دریافت کرو

(۱) لا۳ + ۹ لا۲ + ۱۰ لا - ۱ = ۰ (۲) لا۳ - ۶ لا۲ + ۸ لا + ۴۰ = ۰

(۳) مساوات لا۶ - ۲ لا۳ + ۳ لا۲ - ۵ لا - ۱ = ۰ مثبت قیمتوں کا مقام معلوم ہے اور معلوم ہی کہ ح۲ (لا) = ۶ لا (لا - ۱)۲ + ۱۹ لا + ۶

(۴) معادلات ذیل میں سٹرم کے ضابطہ کو کام میں لاؤ

(۱) لا۳ + لا۲ - ۴ لا - ۱ = ۰ (۲) لا۳ - ۴ لا۲ - ۴ لا + ۲۰ = ۰

(۳) لا۴ + ۲ لا۲ - ۴ لا + ۱۰ = ۰ (۴) لا۴ - لا + ۱ = ۰

باب ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ مساوات

لا۵ - ۳ لا۴ - ۲۴ لا۳ + ۹۵ لا۲ - ۴۶ لا - ۱۰۱ = ۰

کی تمام حقیقی قیمتیں درمیان - ۱۰ اور ۱۰ کے ہیں اور ایک حقیقی قیمت اوسکی - ۱۰ اور - ۱ کے درمیان اور ایک قیمت - ۱ اور ۰ کے درمیان اور کوئی قیمت ۰ اور ۱ کے درمیان نہیں ہے اور کم سے کم ایک قیمت ۱ اور ۱۰ کے درمیان ہے

(۲) اس مساوات میں ضابطہ فوریر کو کام میں لاؤ کہ

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 7\lambda^2 + 10\lambda + 1 =$$

باب ۱۶

(۱) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق بشکل تقریبی قیمت مساوات $3\lambda^2 - 4\lambda - 1 =$ کی دریافت کرو

(۲) لاگرانژ کی ترکیب کے موافق مساوات $\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 3 =$ کی تقریبی قیمتیں ۱ اور ۲ کے درمیان دریافت کرو

باب ۱۷

(۱) حدود غائی جو معین کی گئی ہیں اونکی درمیان جو قیمتیں معادلات ذیل کی واقع ہوں اونکو نیوٹن صاحب کی ترکیب سے نکالو

(۱) $\lambda^3 - 4\lambda - 12 =$ قیمت ۲ اور ۳ کی درمیان

(۲) $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 24 =$ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان

(۳) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 4 =$ قیمت ۲ و ۳ و ۳ و ۳ کے درمیان

(۴) $\lambda^3 - 15\lambda - 5 =$ قیمت ۴ اور ۴ کے درمیان

(۵) $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 12\lambda^2 - 8\lambda - 4 =$ قیمت ۱۰ اور ۱ کے درمیان

(۲) معادلات ذیل کی ایک قیمت کی دریافت کرنی ہیں نیوٹن صاحب کی ترکیب کام میں لاؤ

(۱) $\lambda^3 + 3\lambda - 5 =$ (۲) $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 20 =$

باب ۱۸

(۱) معادلات ذیل میں جو حدود غائی متعین کی گئی ہیں اونکی درمیان معادلات کی قیمت ہورنر کی ترکیب سے دریافت کرو

(۱) $\lambda^3 + 10\lambda^2 + 16\lambda - 1200 =$ قیمت درمیان ۲ و ۳

(۲) $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 121\lambda - 23 =$ قیمت درمیان ۱ و ۲ کے

(۳) $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 3\lambda^2 + 35\lambda - 70 =$ قیمت درمیان ۱۲ اور ۳ کے

(۲) حل کرو مساوات $لا^۳ - ۱۷ = ۰$ کو موافق ہورنر کی ترکیب کی

(۳) قیمتوں کا حساب ہورنر کی ترکیب کے موافق معادلات ذیل کا کرو

(۱) $لا^۳ + لا - ۳ = ۰$ (۲) $لا^۳ + ۲لا - ۲۰ = ۰$

(۳) $۳لا^۳ + ۵لا - ۴۰ = ۰$ (۴) $لا^۳ + ۱۰لا^۲ + ۸لا - ۱۲۰ = ۰$

باب ۱۹

(۱) مساوات $لا^۲ + ع لا + ق لا + ر = ۰$ کی قیمتوں ا و ب و س کی بالقرینہ جملوں کی قیمت دریافت کرو

(۱) $(ا + ب + ا ب)(ب + س + ب س)(س + ا + س ا)$

(۲) $(ا + ب - ۲س)(ب + س - ۲ا)(ا + س - ۲ب)$

(۳) $ح (ا + ب)^۲ (ا + س)$ (۴) $ح (ا + ب - ۲س)(ب + س - ۲ا)$

(۵) $ح \frac{ا ب}{ا + ب}$ (۶) $ح \frac{ا^۲ ب س}{(ا + \frac{ب}{ا})(ا + \frac{س}{ا})^۲}$

(۷) $(ب - س)^۲ (س - ا)^۲ (ا - ب)^۲$

(۲) اگر ا و ب و س قیمتیں مساوات

$لا^۴ + ع لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + ص = ۰$

کی ہوں تو قیمت $ح (ا + ب)(س + د)$ کی دریافت کرو

(۳) مساوات $لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + \dots + ع_{ن-۱} لا + ع_ن = ۰$ کی قیمتیں ا و ب و س ۔ ۔ ل فرض کر کے دریافت کرو ۔

(۱) $ح ا^۲ ب$ (۲) $ح (ا + ب)(ا + س) \dots (ا + ل)$

(۳) $ح \frac{(ا + ب)^۲}{ا ب}$ (۴) $ح \frac{ا^۲}{ب^۲}$

(۵) ایسی مساوات بناؤ جسکی قیمتیں مساوات $لا^۴ + ع لا^۳ + ر لا + ص = ۰$ کی ہر تین قیمتوں کی مجموعوں کی مجذوروں کے برابر ہوں اور نیز ایسی مساوات بھی بناؤ کہ جسکی قیمتیں برابر

ہر تین قیمتوں کی مجذوروں کے مجموعہ کے ہو

(۵) اگر ص۱ اور ص۲ و ص۳ ... مجموعہ اول اور دوم اور سوم ... مساوات ح (لا) = ۰ کی قیمتوں کا ہو اور مساوات ن درجہ کی ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لاح (لا)}}{\text{ح لا}^{\text{ن}}} = \text{ن} + \frac{\text{ص}_1}{\text{لا}} + \frac{\text{ص}_2}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ص}_3}{\text{لا}^3} + \dots$$

(۶) اگر مساوات لا$^{\text{ن}}$ + ع۱ لا$^{\text{ن}-1}$ + ع۲ لا$^{\text{ن}-2}$ + ع۳ لا$^{\text{ن}-3}$ + ... + عن = ۰ ایک اور صورت میں تبدیل ہو جسکی قیمتیں اصلی مساوات کی قیمتوں کی ہر زوج کی برابر ہوں تو اول میں استثنا بدلی ہوئی مساوات کی دریافت کرو

باب ۲۰

(۱) معادلات ذیل کو اون مساواتوں کی صورت میں تبدیل کرو جنکی قیمتیں اصلی معادلات کی قیمتوں کی فرقوں کی مجذور ہوں

(۱) لا^3 − ۴ لا + ۲ = ۰ (۲) لا^4 + ۴ لا + ۳ = ۰ (۳) لا^4 + ۱ = ۰

(۲) لا کو ان مساواتوں ا لا^2 + ب لا + س = ۰ اور ا$'$ لا^2 + ب$'$ لا + س$'$ = ۰ سے محفوظ کرو

باب ۲۱

(۱) معادلات ذیل کی قیمتوں کی جو قوت متعین کی گئی ہے وہ دریافت کرو

(۱) لا^4 − لا^3 − ۱۹ لا^2 + ۴۹ لا − ۳۰ = ۰ میں مکعب

(۲) لا^5 − ۳ لا^3 − ۵ لا + ۱ = ۰ میں چوتھی قوت

(۳) لا^5 − ۲ لا^4 − ۲۲ لا^3 − ۲۸ لا^2 + ۷۲ لا + ۱۴۴ = ۰ میں مکعب

(۴) لا^4 + ۴ + ۱ = ۰ میں معکوس مربعات

(۵) لا^3 − لا − ۱ = ۰ میں چھٹی قوت

(۶) اگر مساوات لا$^{\text{ن}}$ + لا + ۱ = ۰ کی قیمتوں کی رو سے قوتوں کا مجموعہ ص$_{\text{ر}}$ سے تعبیر کیا جائے اور ا اور ان کی متکافی قیمتوں کی رو سے قوت کا مجموعہ ح$_{\text{ر}}$ سے

تو ثابت کرو کہ

ص ن - ۱ - ص ن = ۱۱ اور حج ن - ۱ - حج ن = ن - ۲ (-۱)ن

(۴) مساوات لا^ن - لا^۲ + ۱ = ۰ مین ن کو سی بڑا فرض کرکے حج ا^ن - ۳ و حج ا^ن - ۲ اور حج ا^ن کو دریافت کرو

(۵) مساوات لا^۲ - ع لا + ق = ۰ مین ن کو بڑا رسی فرض کرکے قیمتون کی روین قوتون اور (ا ن) دین قوتون کا مجموعہ دریافت کرو

باب ۲۲

(۱) ان مساواتون کو حل کرو

(د - ۱) لا^۲ + د لا + د^۲ - ۲ د = ۰

(د - ۱) لا + د = ۰

(۲) ان مساواتون کو حل کرو

(د - ۱) لا^۳ + د (د + ۱) لا^۲ + (۳ د^۲ + د - ۲) لا + ۲ د = ۰

(د - ۱) لا^۲ + د (د + ۱) لا + ۳ د^۲ - ۱ = ۰

(۳) ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتون کا کوئی حل نہین ہے

د لا^۳ - (د^۳ - ۳ د - ۱) لا + د = ۰

لا^۲ - د^۲ + ۳ = ۰

باب ۲۳

(۱) مساوات د^۴ لا - د^۳ لا^۲ + ۳ د لا^۳ - د^۲ لا + ۴ د - ۲ لا = ۰ مین د کی ہر یک قیمت لا کی قواء متنازلہ مین جب پہلائی جائی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

(۲) مساوات لا^۱۲ + لا^۱۱ + لا^۱۰ د - لا^۷ د^۲ + ۲ لا^۷ د^۳ - لا^۴ د^۴ + د^۶ - ۳ لا^۹ + لا^۱۴ د^۱۳ = ۰ مین د کی ہر یک قیمت لا کی قواء متصاعدہ مین جب پہلائی جائی تو اوسکی اول رقم ہر یک قیمت مین دریافت کرو

(۱) اگر ق مقادیر ا و ب و س ۰۰۰ ہون اور ن جملے اس صورت

$$\frac{(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{س})\cdots}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{س})\cdots}$$

لئی جائین تو ثابت کرو کہ ان جملون کا مجموعہ واحد ہے

(۲) مساوات $\text{لا}^5 + 5\,\text{لا}^4 + 200\,\text{لا}^3 - 111\,\text{لا} + 6 = 0$ مین وہ رقم دور کرو جسمین لا کا مکعب ملتف ہے

(۳) بتلاؤ کہ ایک مساوات کو جسمین دو تغیرات اور تواترات ہون کسطرح ایسی مساواتون مین تبدیل کرین کہ

(۱) جسمین صرف تواترات علامت ہون (۲) جسمین صرف تغیرات ہون

(۴) اگر ع اور ق مثبت ہون تو مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ع}\,\text{لا}^{\text{ر}} + \text{ق} = 0$ کی چار حقیقی مختلف قیمتین ہونگی اگر $(\frac{\text{ر ع}}{\text{ن}})^{\text{ن}}$ بڑا بہ نسبت $(\frac{\text{ر ن}}{\text{ن}-\text{ر}})^{\text{ن}-\text{ر}}$ کے ہو اور کوئی حقیقی قیمت نہین ہوگی اگر $(\frac{\text{ر ع}}{\text{ن}})^{\text{ن}}$ چھوٹا بہ نسبت $(\frac{\text{ر ق}}{\text{ن}-\text{ر}})^{\text{ن}-\text{ر}}$ کے ہو اور اوسکی دو زوج قیمتون کی برابر ہونگی اگر $(\frac{\text{ر ع}}{\text{ن}})^{\text{ن}} = (\frac{\text{ر ن}}{\text{ن}-\text{ر}})^{\text{ن}-\text{ر}}$

(۵) اگر $\text{ع ن} - \text{ق}$ لا$^{\text{ن}}$ $- \text{ق}$ و $- \text{ع ن} - \text{ر}$ لا$^{\text{ن}-\text{ر}}$ $+ \text{و} - \text{ع ن} - \text{ص}$ لا$^{\text{ن}-\text{ص}}$ ۰۰۰ منفی رقمینین ایک ن درجی کی مساوات کی ہو تو سب سے بڑی قیمت مساوات کی مقادیر $(\text{ع ن} - \text{ق})^{\frac{1}{\text{ق}}}$ و $(\text{ع ن} - \text{ر})^{\frac{1}{\text{ر}}}$ و $(\text{ع ن} - \text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}$ ۰۰۰ مین سب سے بڑی دو مقدارون کے مجموعہ کے برابر ہوگی

(۶) اگر ن درجہ کی مساوات کی اخیر رقم ک ہو اور اس مساوات کی قیمتین سلسلہ ہندسیہ مین ہون تو ثابت کرو کہ اگر ن طاق ہو تو ک$^{\frac{1}{2}}$ قیمت مساوات کی ہوگی

اور ثابت کرو کہ اسیطرح ایک قیمت اوس طاق درجہ کی مساوات کی جسکی قیمتین سلسلہ حسابیہ مین یا سلسلہ موسیقیہ مین ہون دریافت ہوسکتی ہے

(۷) وفق اعظم

$$\text{لا}^5 - 6\,\text{لا}^4 + 7\,\text{لا}^3 + 7\,\text{لا}^2 - 6\,\text{لا} - 3 = 0$$

اور لا^{۳} - لا^{۲} - ۳لا - ۱ = ۰ کا دریافت کرو اور مساوات

لا^{۵} - ۶لا^{۴} + ۷لا^{۳} + ۷لا^{۲} - ۶لا - ۳ = ۰

کو حل کرو

(۸) مساوات لا^{ن} + قلا^{۲} + رلا + ص = ۰ کی قیمتیں بقدر ھ کے کم کرو

اور ھ کی ایسی قدر مقرر کرو کہ بدلی ہوئی مساوات کی قیمتیں صورت

ا و ک$\frac{۱}{۲}$ د ب و ج کی ہوں اور بتلاؤ کہ یہہ مساوات کسطرح حل ہو سکتی ہے

مثال لا^{۴} - ۲لا^{۲} + ۱۶لا + ۱ = ۰

(۹) جبریہ جملوں کے جذر نکالنے کا جو عمل ہی اوسے ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} + ع لا^{۳} + قلا^{۲} + رلا + ص = ۰

کی تحویل درجہ دوم کی مساواتوں کی طرف ہو جائیگی اگر ع^{۳} ص - ۴ق ص + ر^{۲} = ۰

یا اگر ع^{۳} - ۴ع ق + ۸ ر = ۰

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} + ۳ ق لا^{۲} + رلا + ص = ۰ تمام حقیقی قیمتیں نہیں

ہو سکتیں اگر ق^{۳} + ر^{۳} مثبت ہو

(۱۱) اگر ح (لا) جملہ ناطقہ صحیحہ لا کا ہو تو کیا ح (لا) = ۰ ماح (لا) = ۰ کی یقینی ایک حقیقی قیمت ہے

(۱۲) ایک مساوات مکعبی قیمتوں کا یہہ جملہ ا^{۲} ب + ب^{۲} س + س^{۲} ا نصف بالتقریب ہے

تو بتاؤ اوسکی قیمت کیونکر دریافت کریں

(۱۳) فرض کرو کہ ا و ب و س و . . . . ک ن درجہ کی مساوات مح (لا) = ۰ کی

قیمتیں ہوں اور اپنی سادی صورتوں میں لکھی ہوں اور یہہ سب قیمتیں غیر مساوی ہوں ثابت کرو کہ جملہ

$$\frac{ا}{ح'(ا)} + \frac{ب}{ح'(ب)} + \frac{س}{ح'(س)} + \cdots + \frac{ک}{ح'(ک)}$$

برابر واحد کے ہی اگر ر = ن - ۱ اور برابر صفر کے ہی اگر ر برابر صفر کے ہے یا اوس

مثبت صحیح عدد کی ہی جو ن - ۱ سی کم ہی اور یہہ بھی ثابت کرو کہ اگر

ر = ۰ تو جملہ = $\frac{(-۱)^{ن-۱}}{ا ب س \cdots ک}$

(۱۴) اگر ح (لا) = لا^ن − ۱ اور ک د ب وس ۰ قیمت ح (لا) = ۰ کی ہین تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ن لا}^{\text{ن}-1}}{\text{لا}^{\text{ن}}-1} = \frac{1}{\text{لا}-\text{ا}} + \frac{1}{\text{لا}-\text{ب}} + \frac{1}{\text{لا}-\text{س}} + \cdots$$

(۱۵) ثابت کرو کہ صحیح حصہ $\frac{1}{\text{ن}+1}$ (ن + ۳ن + ۵) ۲^{ن−۱} پورا ۲^ن پر تقسیم ہوتا ہے

جوابات

پہلا باب (۱) لا^۴ + ۱۱ لا^۳ + ۴۷ لا^۲ + ۲۰۵ لا + ۸۳۰ اور باقی ۳۳۰۶

دوسرا باب (۱) $\left(\frac{1+\text{ع}_1}{2\text{ع}_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1-\text{ع}_1}{2\text{ع}_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (۲) $\frac{\text{ن}-1}{2\text{ن}} + \frac{1}{2\text{ن}}$

تیسرا باب (۷) −۱ و −۴۴ و ۱۲۱ (۸) سہ = ۵ وصہ = ۲

(۹) −ع^۳ + ۳ع^۱ع^۲ − ۳ع^۳ (۱۰) لا^۴ − ۲لا^۳ − ۲لا + ۱ = ۰ دفعہ ۴۸ دیکھو

(۱۱) $(\text{ع}_1^2 - \text{ع}_2)\frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}^2 - 2\text{ع}_{\text{ن}}\text{ع}_{\text{ن}-2}}{\text{ع}_{\text{ن}}^2} - \text{ن}$ (۱۳) دفعہ ۴۵ کے مطابقہ مین متواتر ن − ۱ اور − ن کو لا کے جگہ رکھو

چوتھا باب (۵) قیمتین ۶ و ۶ ± ۷ ن (۷) ک^۴ − ۲ک^۲ + $\frac{2}{3}$ = ۰

(۸) دفعہ ۲۲ و ۵۰ دیکھو (۱۵) ۱۴ مثال کو کام مین لاؤ

چھٹا باب (۱) (۱۵) − ۷ قیمت (۱۶) $\frac{1}{2}$ قیمت ہے

(۱۷) قیمت ایک دفعہ اتی ہے (۱۸) قیمت − ۱ تین دفعہ واقع ہوتی ہے

(۱۹) ۱ و ۲ و ۳ قیمتین ہین (۲) ۱ و − ۱ مکررہ قیمتین ہین ۰ ۰ ۰

(۳) فرض کرو کہ جو قیمت مکرر آتی ہے وہ ا سی اور دوسری قیمت ب سی تعبیر ہو تو دائین طرف کا رکن مساوات مفروضہ کا مطابق (لا − ا)^۳ (لا − ب) ہوگا اور پھر مثال برابر لکھنی سے مطلب حاصل ہوگا

ساتوان باب (۷) قیمتین ح (لا) = ۰ کی − ۲ و − ۱ و ۱ ہین دفعہ ۱۰۲ کو کام مین لاؤ

آٹھوان باب ۱ (۴) $\frac{3}{2}$ (۶) $\frac{2}{3}$

نوان باب ۲ (۳) − ۱ و ۳ و ۵ (۴) − ۴ و ۲۰ د − ۲ و ۰ د ۲۰

(۳) (۱) ۳ و $\frac{2}{3}$ (۲) ۱ ± $\sqrt{-6}$ (۳) ۲ ± $\sqrt{-3}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳ ± $\sqrt{-7}$)

(۵) -۲ و ۱ (۶) ۱ و ۲

(۴) (۱) ا = ۱ (۲) ا = ۳ و ب = ۲ (۳) ا = ۲ و ب = ۳

(۴) ا = ۱ و ب = -۳ (۵) ا = ۱ و ب = -۳ و س = -۲

(۶) ا = ۳ و نیا = -۱ و س = ۵ (۶) قیمتیں ۶ اور ۲ ہیں

(۷) مشترک قیمتیں مساوات $ا^۲ + ۱۲ا - ۴ = ۰$ سے معلوم ہوتی ہیں

(۸) قیمتوں کو $\frac{س}{ب}$ و $\frac{س}{ص}$ و $\frac{س}{ع}$ سی تعبیر کرو اور انکے حاصل ضرب کو $ا^۴$ کے برابر لکھو اور ہر زوج کی حواصل ضرب کو برابر $(م^۲ + م) ا^۲$ کے تو یہہ ثابت ہوسکتا ہے کہ ع برابر ق کے ہے

بارہواں باب ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) $۲\frac{1}{3}$ و $-۲\frac{1}{3}$

(۵) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + ۲ + \frac{5}{2})$ (۶) قیمت ۱۱ دو دفعہ واقع ہوتی ہے

(۷) $\frac{ا}{\frac{1}{3}ا^۲ + \frac{2}{3}}$ (۸) ۲ ا

شیرہواں باب ۱ (۱) ۳ و -۲ (۲) قیمت -۱ مکرر آتی ہے

(۳) قیمت کو بقدر ۳ کے تو مساوات درجہ چہارم کی حل ہوجائیگی

چودہواں باب ۱ (۱) ایک قیمت ۲ اور ۳ کے دوسرے ۳ اور ۴ کی درمیان اور دو نامکمن قیمتیں (۲) دو قیمتیں ۰ اور -۱ کی ہیں اور دو قیمتیں ۲ اور ۳ کے درمیان

اونیسواں باب ۱ (۱) $(ر - ق)^۲ + ع(ر - ق) + ر$ (۲) $۲ع^۳ - ۹ع ق + ۲۷ر$

(۳) $-۲ع^۳ + ع ق - ۳ر$ (۴) $۹ق - ۳ع^۲$ (۵) $\frac{ق^۲ + ر ع}{ر - ع ق}$

(۶) $\frac{ق^۳}{ر} - \frac{(ق - ع^۲)^۲}{ع} + ۳$ (۷) $\frac{۴}{۳}(۳ق - ع^۲)(۳ع - ق^۲) - \frac{1}{3}(ع ق - ۹ر)^۲$

(۲) ۲ ق (۳) (۱) $۳ع^۳ - ع^۱ ع^۴$ (۲) اگر مساوات کو ح (لا) = ۰ سی تعبیر کریں تو جملہ مفروضہ رفرح کی اگی $\frac{ح(-ا)}{۲ا(-ا)^ن}$ ہوجائیگا اسی معلوم ہوا کہ مجموعہ مطلوب

$\frac{1}{2}$ [ص ن - ع ۱ ص ن-۲ + ع ۲ ص ن-۳ - ... + (-۱)ن ع ن ص ۰]

(۳) $\frac{ع_۱ ع_ن}{ع_ن} + ن^۲ - ۲ن$ (۴) $-ن - \frac{(ع_۱^۲ - ۲ع_۲) ع_{ن-۱}}{ع_ن}$

(۶) فرض کرو کہ بدلی ہوئی مساوات

$لا^م + ق_۱ لا^{م-۱} + ق_۲ لا^{م-۲} + ق_۳ لا^{م-۳} + \dots = ۰$

تو $م = \frac{ن(ن-۱)}{۲}$ اب بدلی ہوئی مساوات کی قیمتوں کے قوار کا مجموعہ دریافت کرتی ہیں اور پہلا مثال موافق دفعہ ۲۴۴ کے تو یہہ حاصل ہوگا

$ق_۱ = (ن-۱) ع_۱$ $ق_۲ = \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۲} ع_۱^۲ + (ن-۲) ع_۲$

$ق_۳ = \frac{(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{۳} ع_۱^۳ + (ن-۲) ع_۱ ع_۲ + (ن-۴) ع_۳$

بائیسوان باب[۲۲]

$د^۲ - ۲د = ۰$ اور $(د-۱) لا + د = ۰$ $د^۲ - ۱ = ۰$ اور $(د-۱) لا + ۲د = ۰$

سے حل معلوم ہوتے ہیں

تیئیسوان باب[۲۳]

(۱) $د = لا + \dots$ $د = \pm \sqrt{۳} لا + \dots$ $د = \frac{۲}{۳ لا} + \dots$

(۲) چھ قیمتیں صورت $د = لا^۲ (لو + ب)$ کی ہیں جسمیں لو اس مساوات

$۱ - لو^۲ - لو^۴ + لو^۶ = ۰$ سی دریافت ہوتا ہے چھ قیمتیں

$د = لا^{\frac{۱}{۳}} (لو + ب)$ کی اسمیں $۱ - ۳ لو^۲ = ۰$ سی لو دریافت ہوتا ہے

چار قیمتیں اس صورت $د = لا^{\frac{۱۳}{۴}} (لو + لو)$ اسمیں $۳ - ی^۴ = ۰$

سے لو دریافت

امثال متفرقہ

(۱) مجموعہ کو ح (لا) سے تغیر کرو اور ثابت کرو کہ ح (لا) - ۱ متطابق صفر کے بموجب دفعہ ۳۹ کے ہے

(۲) $د^۶ - ۱۲ د^۵ + ۶۵ د^۴ - ۵۴۰ د^۲ + ۲۰۳۷ د - ۱۴۲۸ = ۰$

(۱۵) مساوات درجہ دوم کی بناؤ جسکی قیمتیں $\sqrt{۳} + \sqrt{۵}$ اور $\sqrt{۳} - \sqrt{۵}$ ہو

اور دفعہ ۲۶۱ کو کام میں لاؤ الجرا کی دفعہ ۵۲۷ دیکھو فقط تمام شد