

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_220456

UNIVERSAL
LIBRARY

LEHRBUCH DER FUNKTIONENTHEORIE

VON

DR. LUDWIG BIEBERBACH

0.5. PROP. AN DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT IN
MITGLIED DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

BAND II

MODERNE FUNKTIONENTHEORIE

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRT AUFLAGE

MIT 47 FIGUREN IM TEXT



1931

VERLAG UND DRUCK VON B.G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Vorwort.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage sei wiederholt: Als ich 1921 den ersten Band meines Lehrbuchs der Funktionentheorie veröffentlichte, dachte ich nicht, daß es so lange dauern würde, bis der zweite Band folgte. Ich glaube aber, daß die Wartezeit dem Buche zugute kam. Denn in diesen Jahren hat sich durch die Arbeit vieler Forscher manches geklärt, gerundet und vereinfacht, was sich vor fünf Jahren noch recht störrisch gab, und das doch in diesem Buch nicht hätte fehlen dürfen. Jetzt aber ist es möglich gewesen, in lesbarer Form ein viel vollständigeres Bild des Standes der allgemeinen Funktionentheorie einer komplexen Variablen zu geben, als dies vor fünf Jahren möglich war. Den Reichtum der Entwicklung mag man auch ermessen, wenn man sich vergegenwärtigt, was von den in diesem Buche wiedergegebenen Resultaten vor 30 Jahren bekannt war, und was sich damals so hätte sagen lassen wie heute. Stellt man beide Forderungen, so bleibt nicht eine Seite dieses Buches übrig. Stellt man nur die erste Forderung, so wird man mit zwei bis drei Bogen auskommen. Angesichts dieser Sachlage mag es ein Wagnis erscheinen, jetzt schon mit einem solchen Buch hervortreten, aber ich glaube doch, daß in den hier dargestellten Dingen ein gewisser Abschluß in der Entwicklung nach Inhalt und Form eingetreten ist. Jedenfalls habe ich mich bemüht, die Ergebnisse und Methoden in den Vordergrund zu stellen, bei denen ich diesen Eindruck habe. Das ist subjektiv und kann dem Irrtum unterliegen und brachte mit sich, daß eine vollständige Wiedergabe aller in Betracht kommenden Ergebnisse nicht möglich war. In dieser Richtung wird ja mein Buch durch meinen Enzyklopädieartikel ergänzt, und so habe ich auch aus diesem Grunde davon abgesehen, in Anmerkungen und Zusätzen zu den einzelnen Abschnitten eine Sammlung weiterer Sätze und Sätzchen anzulegen, es sei denn, es handle sich um neueste Forschungsergebnisse.

Einen Mangel meines Buches wird mancher im Fehlen eines Abschnittes über Dirichletsche Reihen sehen. Trotzdem nun der Beweis des Bohrschen Satzes vorliegt, wonach die in Dirichletsche Reihen entwickelbaren Funktionen sich als die fast periodischen charakterisieren lassen, so handelt es sich hier doch noch vielmehr um Dinge der Reihenlehre als um Dinge der Funktionentheorie. Aus gleichem Grunde sind auch die Untersuchungen über den Zusammenhang der verschiedenen Summationsmethoden, wie z. B. der Taubersche Satz und vieles andere beiseite geblieben. Algebraische und automorphe Funktionen blieben weg, weil es darüber schon Bücher gibt, die es erlaubten,

zwecks Raumersparnis von einer erneuten Behandlung in diesem Buche abzusehen, obschon der Abschnitt über Uniformisierung die Grundlagen solcher Theorien enthält and obwohl es reizvoll gewesen wäre, von diesem Standpunkt aus die Theorie zu entwickeln. Raummangel zwang mich auch, auf Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen und auf die Theorie der Iterationen rationaler Funktionen zu verzichten, die namentlich Fatou und Julia neuerdings entwickelt haben.

Bemüht habe ich mich, die Gebiete, auf denen ich zufällig selber gearbeitet habe, nicht stärker zu betonen als die übrigen. DaB trotzdem der Abschnitt über konforme Abbildung etwas lang geraten ist, hat seinen Grund darin, daß das meiste hier Gesagte in späteren Abschnitten öfter Verwendung findet. Wegen dieser grundlegenden und vorbereitenden Bedeutung habe ich diesen Abschnitt auch an den Anfang des Buches gestellt.

Für die zweite Auflage war ich bemüht, das wichtigste unter den mannigfachen Ergebnissen der letzten Jahre einzuarbeiten. So haben z. B. die Sätze von Bloch und Milloux Aufnahme gefunden, und ist Ahlfors schöner Beweis der Denjoyschen Vermutung über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung zur Darstellung gebracht. Leider habe ich auch diesmal Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen nicht aufgenommen. Solange die inzwischen erschienene schöne Monographie des Herrn Nevanlinna noch so gut dem Stande der Forschung entspricht, wie das heute der Fall ist, liegt ja auch kaum ein Bedürfnis für eine weitere Darstellung vor. An vielen Stellen habe ich den Text gebessert und umgestaltet.

Berlin, Januar 1931.

L. Bieberback.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Erster Abschnitt. Konforme Abbildung	1
§ 1. Einleitung	1
§ 2. Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes	0
§ 3. Bemerkungen und Zusätze zum Beweis des Abbildungssatzes	8
§ 4. Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf die Kreisfläche	15
§ 5. Die Zuordnung der Ränder bei konformer Abbildung	17
§ 6. Beispiele zum Abbildungssatz	34
§ 7. Nähere Untersuchung der Abbildungsfunktion im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche	44
§ 8. Potentialtheoretische Anwendungen	56
§ 9. Die Familie der schlichten Funktionen	71
Zweiter Abschnitt. Die elliptische Modulfunktion	84
§ 1. Einführung der Funktion $J_1(\omega)$	84
§ 2. Die Modulgruppe und ihr Fundamentalbereich	90
§ 3. Abbildung des Fundamentalbereiches durch $J_1(\omega)$	94
§ 4. Die Funktion $\lambda(\omega)$	97
Dritter Abschnitt. Beschränkte Funktionen	103
§ 1. Das Schwarzsche Lemma und seine Verallgemeinerungen	103
§ 2. Der Satz von Julia	112
§ 3. Ein Satz von Löwner	121
§ 4. Die Formel von Jensen-Nevanlinna	122
§ 5. Anwendungen der Jensen-Nevanlinnaschen Formel	124
§ 6. Das Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen	138
§ 7. Der Satz von Fatou	147
§ 8. Die Nullstellen der Randwerte einer analytischen Funktion	155
Vierter Abschnitt. Uniformisierung	100
§ 1. Der Hauptsatz der Uniformisierungstheorie. Vorbereitung zum Beweis	160
§ 2. Die Abbildung der aufgeschnittenen Riemannschen Fläche auf einen schlichten Bereich	161
§ 3. Die Heftungsaufgaben	165
§ 4. Die Verschmelzungsaufgaben	171
§ 6. Die Abbildung der geeignet aufgeschnittenen Riemannschen Fläche wird beendet	176
§ 6. Beweis des Hauptsatzes der Uniformisierungstheorie für offene Riemannsche Flächen	183
§ 7. Übergang zur kanonischen Zelle	187
§ 8. Abschluß des Beweises für den Hauptsatz der Uniformisierungstheorie im Falle geschlossener Riemannscher Flächen	191
§ 9. Überlagerungsfläche. Uniformisierende Kraft	192
§ 10. Nähere Untersuchung der Uniformisierungstranszendenten	194
§ 11. Nähere Untersuchung der Uniformisierungstranszendenten (Fortsetzung).	202
§ 12. Nähere Untersuchung der Uniformisierungstranszendenten (Schluß).	204
§ 13. Verallgemeinerungen	211

	Seite
Fünfter Absehnitt. Der Picardsche Satz	215
§ 1. Der Picardsche Satz für ganze Funktionen	215
§ 2. Der Landausche und der Schottkysche Satz	217
§ 3. Der allgemeine Picardsche Satz	225
§ 4. Julias Vertiefung des Picardschen Satzes	226
§ 5. Der Blochsche Beweis des Picardschen, des Landausehen und des Schottky- sehen Satzes	229
Sechster Absehnitt. Ganze Funktionen	234
§ 1. Begriffsbestimmung. Problemstellung	234
§ 2. Das Koeffizientenproblem bei den ganzen Funktionen endlicher Ordnung	235
§ 3. Beispiele von ganzen Funktionen endlicher Ordnung	239
§ 4. Über die Nullstellen der ganzen Funktionen endlicher Ordnung	242
§ 5. Eine Vertiefung des Picardschen Satzes	251
§ 6. Eine Beziehung zwischen der Verteilungsdichte der a -Stellen und der b -Stellen einerseits und dem Maximalbetrag $M(r)$ andererseits	262
§ 7. Abschätzung der ganzen Funktionen nach unten	266
§ 8. Die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen	277
Siebenter Absehnitt. Analytische Fortsetzung	289
§ 1. Der Satz von Pringsheira	289
§ 2. Der Hadamardsche Lückensatz	291
§ 3. Der Satz von Wigert	297
§ 4. Der Hadamardsche Multiplikationssatz	300
§ 5. Einige Anwendungen und Erweiterungen der in den vorausgegangenen Para- graphen dieses Kapitels bewiesenen allgemeinen Sätze	303
§ 6. Beweis eines Satzes von Fabry	307
§ 7. Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten	315
§ 8. Über Potenzreihen, welche rationale Funktionen darstellen	319
§ 9. Pole an der Peripherie des Konvergenzkreises	321
§ 10. Ein Satz von Polya und Carlson	327
§ 11. Der Satz von Eisenstein	332
Achter Absehnitt. Die Riemannsche Zetafunktion	336
§ 1. Definition der Funktion $\zeta(s)$	336
§ 2. Integraldarstellungen der Funktion $\zeta(s)$	336
§ 3. Die Riemannsche Funktionalgleichung	342
§ 4. Fulers Produktdarstellung von $\zeta(s)$	345
§ 5. Eine Abschätzung von $\zeta(s)$	345
§ 6. Über die Nullstellen von $\zeta(s)$	348
§ 7. Eine Funktionalgleichung für die elliptische Thetafunktion	357
§ 8. Neuer Beweis der Riemannschen Funktionalgleichung	361
§ 9. Die Fouriersche Integralformel	364
§ 10. Anwendung der Fourierschen Integralformel	366
§ 11. Flardys Satz über die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$	367
Sachregister	369

Erster Abschnitt. Konforme Abbildung.

§ 1. Einleitung.

1. Unität der konformen Abbildung **auf** eine Kreisscheibe. Zu wiederholten Malen ist es uns im ersten Bande begegnet, daß eine analytische Funktion einen einfach zusammenhängenden Bereich umkehrbar eindeutig auf einen Kreis abbildete. So lernten wir, daß durch eine passende lineare Funktion eine beliebige Kreisscheibe oder eine beliebige Halbebene so auf die Fläche des Kreises $|z| < 1$ umkehrbar eindeutig abgebildet werden kann, daß dabei noch ein beliebiger Punkt P aus dem Inneren des Kreises oder der Halbebene in $z = 0$ übergeht und daß dabei noch einer beliebigen in P vorgeschriebenen Richtung eine beliebige in $z = 0$ vorgeschriebene Richtung entspricht. Hat man nämlich zunächst, wie S. 63 von Bd. I bemerkt wurde, eine Abbildung gefunden, bei der P in $z = 0$ übergeht, so kann man noch durch eine Drehung um diesen Mittelpunkt erreichen, daß die vorgeschriebenen Richtungen einander entsprechen.

Jetzt wollen wir noch hinzufügen, daß die linearen Funktionen die einzigen analytischen Funktionen sind, welche eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen zwei Kreisen vermitteln können. Denn nehmen wir an, $ic = f(z)$ sei eine in $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion, welche eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Kreises $|z| < 1$ auf die Fläche eines Kreises (oder einer Halbebene) der w -Ebene vermittelt. Sei dann $l(w)$ eine lineare Funktion, welche diesen Kreis auf $|z| < 1$ abbildet, so ist $\xi = \varphi(z) = l(f(z))$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $|z| < 1$ auf sich selbst. Insbesondere werde $l(w)$ so gewählt, daß $\varphi(0) = 0$ und daß $\varphi'(0) > 0$ ist. Dies bedeutet ja nur daß durch $l(w)$ der bei $f(z)$ erhaltene Bildpunkt von $0 \rightarrow 0$ wieder in $z = 0$ übergeht, und daß die Richtung, welche durch $f(z)$ der positiven reellen Achse im Punkte $z = 0$ entsprach, bei $l(w)$ wieder in die Richtung der positiven reellen Achse übergeht. Nun gilt der

Hilfssatz: *Hine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $\xi = \varphi(z)$, welche diesen Kreis so schlicht, d. h. umkehrbar eindeutig auf sich abbildet, daß der Mittelpunkt und eine in ihm gegebene Richtung festbleiben, vermittelt die identische Abbildung, die jeden Punkt ungeändert läßt, so daß also $\xi = \varphi(z) = z$ ist.* Nehmen wir

$$\begin{aligned} l(f(z)) &= z, \\ f(z) &= l^{-1}(z), \end{aligned}$$

D. h. es ist

wo $I^{-1}(z)$ wie auf S.57 von Bd. I die Umkehrfunktion von $I(z)$ bedeutet, also wie diese linear ist. Und damit ist erkannt, daß die linearen Funktionen die einzigen sind, welche Kreisflächen schlicht auf Kreisflächen abbilden. Es bleibt also nur noch der Beweis des Hilfssatzes übrig.

2. Das Schwarzscho Lemma. Den Beweis des Hilfssatzes von 1. stützen wir auf das sogenannte Schwarzsche Lemma, das uns später noch näher beschäftigen wird. Das Schwarzsche Lemma besagt:

$f = g(z)$ sei in $|z| < R$ regular. Es sei $g(0) = 0$ und $|g'(z)| \leq M$ in $|z| < R$.

Dann ist $|g(z)| \leq M|z|$ für $|z| < R$.

Hier kann für ein ϵ mit $|\epsilon| < R$ das Gleichheitszeichen nur dann stehen, wenn $g(z) = M/R e^{i\theta} \cdot z$ mit reellem θ ist.

Der Beweis beruht darauf, daß $\psi(z) = \frac{g(z)}{z}$ in $|z| < R$ regular ist. Für $|z| \leq r < R$ nimmt $|\psi(z)|$ sein Maximum am Rande an (Bd. I, S. 140). Also ist für ein festes z mit $|z| \leq r$ $|\psi(z)| \leq \frac{M}{r}$. Da dies für alle $|z| < R$ gilt, so ist für jedes z aus $|z| \leq r$ auch $|\psi(z)| \leq \frac{M}{r}$, womit schon die erste Hälfte des Lemmas bewiesen ist. In $|\psi(z)| \wedge \frac{M}{r}$ kann das Gleichheitszeichen für ein $|z| < R$ nur dann stehen, wenn es für alle z steht (Bd. I S. 146). Dann ist $\psi(z)$ eine Konstante (Bd. I S. 146). Also ist mit reellem θ , $\psi(z) = e^{i\theta}$, also $g(z) = e^{i\theta} \cdot z$, wie bewiesen werden sollte.

3. Anwendung des Schwarzschen Lemmas. Kehren wir zurück zu der in 1. behandelten Frage. Für die durch $\varphi(z)$ vermittelte schlichte Abbildung des Kreises auf sich gilt das Schwarzsche Lemma mit $M = R = 1$ sowohl für $f = \varphi(z)$, als auch für die Umkehrfunktion. Es ist also

$$|z| \leq |\varphi(z)| \quad \text{und} \quad |\varphi(z)| \leq |z|.$$

(Denn auch die Umkehrfunktion ist in $|z| < 1$ regulär und nimmt darin nur Werte an, deren Betrag Eins nicht übertrifft und verschwindet im Mittelpunkt.) Daher ist in jedem inneren Punkt des Einheitskreises $|z| = |\varphi(z)|$. Mithin ist $\varphi(z) = \epsilon z$, wo ϵ eine Zahl vom Betrag Eins ist. Die Abbildung ist also eine Drehung. Da sie aber noch eine Richtung in $z = 0$ festlassen soll, so ist $\epsilon = 1$ und also $\varphi(z) = z$, wie wir beweisen wollten.

4. Beispiele von Abbildungen gegebener Bereiche auf Kreisscheiben. Wir lernten im ersten Bande weitere Beispiele von konformen Abbildungen von Bereichen auf Kreise kennen. So z. B. auf S. 72 ff., wo das Innere eines Hyperbolas der z -Ebene durch $w = z^2$ auf eine Halbebene der w -Ebene

abgebildet wurde, oder auf S. 73, wo das Äußere einer Parabel der w -Ebene durch $w = z^2$ auf eine Halbebene der z -Ebene abgebildet wurde. Bei Exponentialfunktion und Logarithmus begegnete uns die Abbildung von Streifen, begrenzt von zwei parallelen Geraden, auf die Halbebene. So bildet

$$w = e^{u + \pi i}, \quad \alpha > 0$$

den Streifen

$$0 < \Re(u) < \alpha$$

auf die Halbebene

$$\Im(w) > 0$$

umkehrbar eindeutig ab. Denn zunächst bildet

$$z = \frac{u}{\alpha} \pi i$$

diesen Streifen auf den Streifen $0 < \Im(z) < \pi$

ab, und der geht, wie die Betrachtung der Exponentialfunktion lehrt, in die erwähnte Halbebene über.

$$w = z^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

bildet den Winkelraum

$$0 < \arg z < \alpha\pi$$

auf eine Halbebene ab, wie man durch Einführung von Polarkoordinaten sofort erkennt.

S. 96 ff. von Bd. I lernten wir weiter vermittels

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

das Äußere von Ellipsen der u -Ebene, welche ihre Brennpunkte bei ± 1 haben, auf das Äußere von Kreisen abzubilden. Bei der Betrachtung der trigonometrischen Funktionen wieder begegneten uns weitere Beispiele für solche Abbildungen. Dabei kamen auch Bereiche zur Sprache, die zunächst auf Rechtecke abgebildet wurden. S. 251 aber lernten wir vermittels des elliptischen Integrates erster Gattung Rechteck auf Halbebene abbilden.

5. Mehrfach zusammenhängende Bereiche lassen sich nicht umkehrbar eindeutig und konform auf eine Kreisscheibe abbilden. Immer handelte es sich bisher um die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche auf Kreise. Das legt die Frage nahe, ob man nicht jeden einfach zusammenhängenden Bereich schlicht auf die Fläche des Einheitskreises $|z| < 1$ abbilden kann. Im nächsten Paragraphen werden wir beweisen, daß dies tatsächlich unter einer S. 5 noch anzuführenden Bedingung möglich ist. Hier werde nur noch bemerkt, daß die Voraussetzung des einfachen Zusammenhangs tatsächlich notwendig ist.

Wir dürfen annehmen, daß ∞ -äußerer oder Randpunkt des Bereiches sei. Mit Hilfe der in Bd. I, S. 83 ff. entwickelten Überlegungen kann man nun in jedem mehrfach zusammenhängenden Bereich B ein geschlossenes Polygon kon-

struieren, in dessen Innerem Randpunkte des Bereiches liegen.¹⁾ Ist dann a ein im Inneren eines solchen Polygons gelegener Randpunkt, dann ist

1) Ist nämlich der Bereich J_i mehrfachen zusammenhängend, so kann man den Rand in zwei abgeschlossene punktfremde Teilmengen R_1 und R_2 zerlegen, die einen positiven Abstand voneinander besitzen. Mindestens eine der beiden Mengen R_1 oder R_2 ist beschränkt. Ich nehme an, R_3 sei beschränkt. Dann genügen endlich viele Quadrate von einer Diagonale $\frac{1}{4}$, um R_i derart zu überdecken, daß jeder seiner Punkte dem Inneren mindestens eines der Quadrate angehört. Diejenigen Punkte der Ebene, welche dem Inneren mindestens eines dieser Quadrate angehören, erfüllen dann ein oder mehrere beschränkte polygonale Bereiche. Ein jeder derselben besitzt ein äußeres Randpolygon, das ihn gegen unendlich abgrenzt. In seinem Inneren können weitere Grenzpolygone verlaufen. Gibt es nun zwei auseinander gelegene solche Außenpolygone, so gibt es in dem Inneren eines jener derselben Randpunkte des Bereiches B ; also gibt es darin auch Punkte des Bereiches B selbst, die man durch Polygonzüge verbinden kann, die dem Bereiche B angehören. Jeder Polygonzug, welcher Punkte aus verschiedenen Außenpolygone verbindet, trifft aber jedes der in Betracht kommenden Außenpolygone. Jedes hat also Punkte mit dem Bereich inneren gemein und verläuft daher ganz im Bereiche B , da auf ihm keine Randpunkte von B liegen. Damit ist dann in diesem Falle ein Polygon konstruiert, das im Bereiche B verläuft und in seinem Inneren Randpunkte hat. Es bleibt also nur der Fall über, daß die erwähnten Außenpolygone ineinanderliegen. Dann gibt es eines A , das alle anderen umschließt. Da es keine Randpunkte auf sich hat, verläuft es entweder im Inneren oder im Äußeren des Bereiches. Verläuft es im Inneren, so haben wir wieder ein Polygon gefunden, das im Bereiche verläuft, und Randpunkte in seinem Inneren hat. Verläuft es aber im Äußeren des Bereiches, so liegt der ganze Bereich in seinem Inneren. Also ist in diesem Falle auch die Annahme R_1 beschränkt und wieder genügen endlich viele Quadrate der Diagonale $\frac{1}{4}$, um R_1 zu überdecken. Und wieder erhalten wir endlich viele polygonale Bereiche, die R_1 enthalten. Wir wiederholen alle eben angestellten Schlüsse und finden dann stets ein im Bereiche verlaufendes Polygon, das Randpunkte in seinem Inneren hat, wenn nicht der polygonale Bereich nach außen von einem Polygon begrenzt wird, das den ganzen Bereich in seinem Inneren hat. Dann aber können die so zu R_1 und R_2 gehörigen Außenpolygone nicht auseinanderliegen, da ja jedes den ganzen Bereich in seinem Inneren hat. Also liegen sie ineinander. Nun aber kann man jedes Außenpolygon mit Randpunkten (geradlinig) verbinden, ohne dabei das andere Außenpolygon zu treffen. Denn die Punkte des Außenpolygons gehören Quadraträndern an, die in ihrem Inneren Randpunkte haben, und deren Diagonale $\frac{1}{4}$ ist. Jede in einem solchen Quadrate verlaufende Strecke bleibt aber um mindestens $\frac{1}{8}$ von den um die andere Randmenge konstruierten Quadraten entfernt. Demnach können nicht alle Randpunkte des Bereiches im Inneren der beiden Außenpolygone liegen. Also liegen sowohl im Inneren wie im Äußeren dieses innersten Außenpolygons Randpunkte des Bereiches, also auch innere Punkte desselben, die man im Bereiche verbinden kann. Dabei muß man das innerste Außenpolygon treffen, das daher im Bereich verläuft, da es keine Randpunkte auf sich hat. So hat man wieder ein Polygon im Bereiche gefunden, das Randpunkte im Inneren hat.

$\log(z-a)$ in Bereiche auf jedem beliebigen Wege fortsetzbar und doch nicht eindeutig, da ja bei Durchlaufung des Polygons der $\log(z-a)$ nach Bd. I, S. 79/80 um $2\pi i$ sich ändert. Könnte man nun den Bereich umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche eines Kreises abbilden, so ginge $\log(z-a)$ in eine Funktion $\varphi(w)$ über, die man längs eines jeden Weges im Kreise fortsetzen könnte und die doch nicht eindeutig wäre. Aus dem geschlossenen Polygon wird nämlich bei der umkehrbaren eindeutigen Abbildung eine geschlossene Kurve des Kreisesinneren, auf der fortgesetzt sich $\varphi(w)$ um $2\pi i$ änderte. Das aber widerspricht dem lid. I, S. 223 aufgestellten Monodromiesatz.

6. Nur einfach zusammenhängende Bereiche mit mindestens zwei Randpunkten lassen sich umkehrbar eindeutig auf eine Kreisscheibe konform abbilden.

Auch die einfach zusammenhängenden Bereiche, die man auf die Fläche eines Kreises umkehrbar eindeutig abbilden kann, müssen noch einer Bedingung genügen. Sie müssen nämlich *mindestens zwei Randpunkte* besitzen. Hätte nämlich ein solcher Bereich nur einen Randpunkt, so wäre die Abbildungsfunktion in der ganzen Ebene mit Ausschluß dieses einen Randpunktes regulär und beschränkt. Sie wäre also nach dem Riemannschen Satz über hebbare Unstetigkeiten Bd. I, S. 148 in diesem Punkte regulär, während doch nach dem S. 153 von Bd. I bewiesenen Liouvilleschen Satze jede nichtkonstante analytische Funktion mindestens eine singuläre Stelle besitzt.

Mit diesen natürlichen Einschränkungen werden wir im nächsten Paragraphen den von Riemann herrührenden Abbildungssatz beweisen.

7. Bemerkung. Nachdem schon S. 2 aus dem Schwarzschen Lemma erschlossen wurde, daß die einzigen umkehrbar eindeutigen konformen Abbildungen eines Kreises auf sich durch lineare Funktionen vermittelt werden, mag hier anhangsweise die Frage erörtert werden, durch welche Funktionen eine unendlichgroße Kreisscheibe, d. h. die ganze Ebene mit Ausschluß eines Punktes *umkehrbar eindeutig* auf sich abgebildet werden kann. Jedenfalls kann ja die ganze Ebene nicht auf einen endlichen Kreis abgebildet werden, weil sonst die Abbildungsfunktion in der ganzen Ebene beschränkt, also konstant sein müßte. Soll aber die Funktion in der ganzen Ebene mit Ausnahme eines Punktes von rationalem Charakter sein, so kann auch diese Stelle keine wesentlich singuläre sein. Denn nach S. 152 von Band I müßte sie sonst in seiner Umgebung einzelne Werte unendlich oft annehmen. Daher ist die Funktion auch da noch von rationalem Charakter. Sie ist daher nach S. 154 von Bd. I eine rationale Funktion. Da sie aber keinen Wert mehrfach annimmt, muß sie linear sein.

Der gleiche Schluß gilt offenbar auch für die umkehrbar eindeutigen Abbildungen der vollen Ebene.

§ 2. Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes.

Der zu beweisende Satz lautet nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen:

Jeder einfach zusammenhängende schlichte¹⁾ Bereich B mit mindestens zwei Randpunkten läßt sich durch eine analytische Funktion umkehrbar eindeutig auf die Fläche des Einheitskreises abbilden.

Beweis: 1. Die Abbildungsfunktion ist, falls sie existiert, jedenfalls eine im Bereiche B der z -Ebene reguläre Funktion, deren absoluter Betrag 1 nicht übertrifft. Unsere erste Frage ist somit die, ob es in jedem einfach zusammenhängenden schlichten Bereich mit mindestens zwei Randpunkten reguläre, schlichte und beschränkte Funktionen gibt. Es ist leicht festzustellen, daß es tatsächlich solche Funktionen gibt. Sind nämlich a und b zwei verschiedene Randpunkte, so ist jeder Zweig der Funktion $w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$ auf jedem Wege im Bereiche fortsetzbar, definiert also in dem einfach zusammenhängenden Bereich eine darin eindeutige reguläre Funktion, die von je zwei durch ihr Vorzeichen unterschiedenen Werten immer nur den einen annimmt. Außerdem nimmt sie jeden Wert höchstens einmal im Bereich an. Sie vermittelt also eine Abbildung des Bereiches auf einen schlichten Bereich, der einen Teilbereich der Ebene unbedeckt läßt. Sei c eine innere Stelle eines solchen unbedeckten Bereiches, so ist $\frac{1}{w-c}$ regular, schlicht und beschränkt. Durch Multiplikation mit einer passenden Zahl kann man erreichen, daß ihr absoluter Betrag 1 nicht übertrifft.

2. Nun betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}$ aller im Bereiche B regulären Funktionen, die eine schlichte Abbildung des Bereiches B vermitteln, und von denen wir außerdem noch voraussetzen wollen, daß sie alle in einem gegebenen Punkte P des Bereiches verschwinden und daß ihr absoluter Betrag im Bereich die 1 nicht übertrifft. $f(e)$ sei eine solche Funktion. Mit $d(f)$ werde der absolute Betrag ihrer Ableitung im Punkte P bezeichnet. D sei die obere Grenze aller $d(f)$.

Sollte es keine Funktion φ der Menge geben, für die $d(\varphi) = D$ ist, so gibt es jedenfalls eine Teilmenge von Funktionen

$$f_1, f_2, f_3, \dots$$

für die $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n) = D$ gilt. Die Funktionen dieser Teilmenge sind gleichmäßig

1) Schlicht, d. i. einblättrig. Vgl. Bd. I, S. 66 u. Bd. II, S. 1.

beschränkt. (Ihr absoluter Betrag liegt in B unter ein und derselben von der Nummer n unabhängigen Schranke 1.) Nach den beim Beweis des Vitalischen Satzes in Bd. I angestellten Überlegungen kann man aus dieser Folge $f_1, f_2, \dots$ eine Teilfolge auswählen¹⁾, die in jedem ganz im Inneren von B gelegenen Teilbereich gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion strebt. Ich nehme an

$$f_1, f_2,$$

sei schon diese Teilfolge. φ sei die Grenzfunktion. Sie gehört der Menge m an. Denn φ verschwindet im Punkt P . Sein absoluter Betrag übertrifft in B nicht 1. Weiter vermittelt φ eine schlichte Abbildung von B . Denn die Grenzfunktion einer in B gleichmäßig konvergenten Folge von in B schlichten Funktionen vermittelt selbst eine schlichte Abbildung von B . Denn sonst müßte es in B zwei verschiedene Stellen z_1 und z_2 geben, an welchen $\varphi(z)$ den gleichen Wert w_0 annimmt. Man lege um beide Stellen Kreise, welche einander nicht treffen und auf deren Peripherie $|\varphi(z) - w_0| = \epsilon$ sei. Dann gibt es eine Zahl $m > 0$, so daß auf beiden Peripherien

$$|\varphi(z) - w_0| > m$$

ist. Alsdann wähle man n so groß, daß am Rande beider Kreisscheiben

$$|f_n(z) - \varphi(z)| < m$$

ist. Dann hat nach dem Satz von Rouché (Bd. I, S. 190)

$$f_n(z) - w_0 = (\varphi(z) - w_0) + (f_n(z) - \varphi(z))$$

in jedem Kreise ebenso viele Nullstellen als $\varphi(z) - w_0$. Daher nimmt auch $f_n(z)$ an mindestens zwei verschiedenen Stellen den Wert w_0 an, gegen die Voraussetzung, daß $f_n(z)$ eine schlichte Abbildung von B vermitteln soll. φ gehört nach alledem zur Menge m . Ferner ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz $d(\varphi) = I$.

1) Man hat nach dem Vitalischen Satze diese Teilfolge nur so zu wählen, daß sie in den Punkten irgendeiner unendlichen Menge mit Häufungspunkt im Bereichinneren konvergiert. Sei $z_1, z_2, \dots$ eine solche Menge, so wähle man eine Teilfolge, die bei z_1 konvergiert.

Das sei

$$f_{k_1}, f_{k_2}, \dots$$

Aus dieser wähle man eine Teilfolge, die auch bei z_2 konvergiert. Das sei

$$f_{\mu_1}, f_{\mu_2}, \dots$$

Daraus wähle man eine Teilfolge, die auch bei z_3 konvergiert. Das sei

$$f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \dots$$

Die Diagonalfolge

$$f_{\lambda_1}, f_{\mu_2}, f_{\nu_3}, \dots$$

konvergiert dann an allen Stellen z_{λ_1} , weil die Diagonalfolge von ihrem x -ten Gliede an eine Teilfolge der Folge ist, welche bei z_{λ_1} konvergiert.

3. Ich behaupte nun, daß $w = \varphi(z)$ den Bereich B umkehrbar eindeutig auf die Fläche des Kreises $|w| < 1$ abbildet. Die bisher angestellten Betrachtungen lehren nur, daß der durch $\varphi(z)$ erhaltene Bildbereich nicht über $|w| < 1$ hinausragen kann.

Es bleibt aber noch zu zeigen, daß der Bildbereich, den man durch $\varphi(z)$ aus B erhält, $|w| < 1$ identisch ist. Anderenfalls müßte der Bildbereich G Randpunkte im Inneren des Kreises $|w| < 1$ haben. Dann kann man aber in B eine reguläre Funktion f angeben, die bei P verschwindet und für die $d(f) > D$ ist. Es genügt im Bildbereich G eine Funktion nachzuweisen, die bei $w = 0$ verschwindet, ihn schlicht auf einen Bereich aus $|w| < 1$ abbildet und deren Ableitung bei $w = 0$ einen absoluten Betrag größer als 1 hat. Es sei a mit $|\alpha| < 1$ ein Randpunkt von G . Dann ist jeder Zweig von

$$w_1 = \sqrt{\frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha} w}}$$

in G regulär und dort ist $|w_1| < 1$. Denn $w_1(w)$ bildet $|w| < 1$ auf $|w_1| < 1$ ab. Ich entscheide mich für einen Zweig dieser Funktion und bilde

$$w_2 = \frac{w_1 - w_1(0)}{1 - \overline{w_1(0)} w_1} = \psi(w),$$

also eine Funktion, die wieder im Nullpunkt verschwindet, und für die wieder $|w_2| < 1$ in $|w_1| < 1$, also auch $|w_2| < 1$ in G gilt. Sie ist im Bereiche G auch regulär. Ihre Ableitung bei $w = 0$ ist endlich

$$\frac{1 + |\alpha|}{2 \sqrt{1 - \alpha \bar{\alpha}}}.$$

Ihr Betrag ist größer als Eins. Daher ist

$$\psi(\varphi(z)) = \varphi_1(z)$$

eine Funktion unserer Funktionenmenge $\mathfrak{M}$, deren $d(\varphi_1) > D$ ist. Da aber D die obere Grenze der $d(f)$ war, so führt die Annahme, G sei von $|w| < 1$ verschieden, zu Ungereimtem.

Bemerkung. Die vorstehende Fassung hat der Beweis unter Verarbeitung von Gedanken von Carathéodory und Koebe durch Fejér, F. Riesz und Ostrowski erhalten.

§ 3. Bemerkungen und Zusätze zum Beweis des Abbildungssatzes.

1. Berechnung der Abbildungsfunktion. Man wird vor allem ein Verfahren zur Bestimmung der Abbildungsfunktion vermissen. Es genügt dazu, wegen der Hilfsabbildung aus Nr. 1 des vorigen Paragraphen, die Abbildung von Bereichen zu betrachten, die $|w| < 1$ angehören, und die den Punkt $w = 0$

enthalten. Zur Konstriktion der Funktion, die einen solchen Bereich unter Erhaltung von $w = 0$ auf $|w| < 1$ abbildet, gelangen wir durch nähere Betrachtung der im vorigen Paragraphen in Nr. 3 eingeführten Funktion $\psi(w)$, die wir jetzt mit $w_1 = \psi(w, \alpha)$ bezeichnen wollen, da wir auch auf ihre Abhängigkeit von α achten müssen. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen vermittelt sie eine schlichte Abbildung eines dem Kreise $|w| < 1$ angehörigen schlichten Bereiches G mit Randpunkt a auf einen dem Kreise $|w_1| < 1$ angehörigen Bereich G_1 .

Die Kreisscheibe $|w| < \rho$ möge ganz in G enthalten und die größte dieser Art sein. Die Umkehrfunktion $w = \varphi(w_1, \alpha)$ ist in $|w_1| < 1$ regular und dem Betrag nach kleiner als 1.

Man hat nämlich

$$\sqrt{\frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha}w}} = \frac{w_1 + \sqrt{w_1^2 - \alpha}}{1 + \sqrt{w_1^2 - \alpha}} = W_1$$

und

$$\varphi(w_1, \alpha) = \frac{W_1^2 + \alpha}{1 + \bar{\alpha}W_1^2}.$$

Da weiter $\varphi(0, \alpha) = 0$ ist, so ist nach dem Schwarzschen Lemma

$$|\varphi(w_1, \alpha)| < |w_1|$$

in $|w_1| < 1$. Daraus folgt, daß für jeden Punkt aus $|w| < 1$, der zu G oder einem Rande gehört,

$$|w_1| > |w|$$

ist. Ist insbesondere $|w_1| < \rho_1$ der größte Kreis, der in G_1 Platz hat, so ist $\rho_1 > \rho$. Nun iteriere man das Verfahren, daß von G zu G_1 führt, indem man einen Randpunkt a_1 von G_1 heranzieht und die Funktion $\psi(w_1, \alpha_1)$ bildet. So möge G_2 aus G_1 entstehen. So fahre man in infinitum weiter.

Nun ist $\frac{\rho_1}{\rho} > \frac{\min_{|w|=\rho} |\psi(w, \alpha)|}{\rho}$. Wir wissen schon, daß dieses Minimum für $|\alpha| < 1$ größer als Eins ist.¹⁾ Es hängt außerdem für $|\alpha| \geq \rho$ stetig von a und Q ab. Wenn wir daher für a den zunächst an Null gelegenen Randpunkt nehmen, d. h. $\rho = |\alpha|$ nehmen, oder wenn wir doch Sorge tragen, daß z. B. $|\alpha| < \frac{1+\rho}{2}$ ist, so gibt es eine neue von ρ stetig abhängende Schranke $\delta(\rho) > 1$, so daß $\rho_1 > \rho \delta(\rho)$ ist. Nach n Schritten hat man dann

$$\rho_n > \rho \delta(\rho) \delta(\rho_1) \dots \delta(\rho_{n-1}).$$

Solange $\rho < 1 - \alpha$ bleibt, wo a eine vorgegebene positive Zahl bedeutet, bleibt $\delta(\rho) > \delta(a) > 1$, da $\delta(\rho) > 1$ und stetig ist für $\rho < 1$.

1) Für $|\alpha| = 1$ wird $\psi(w, \alpha) \equiv 0$.

Dies und die für Q_n gegebene Abschätzung lehrt, daß nach endlich vielen Schritten $q_n > 1 - \alpha$ sein muß. Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$. Wir erhalten also durch unser Verfahren eine Reihe von Bildbereichen, die den Einheitskreis mehr und mehr approximieren.

Die hier ausgedeuteten Überlegungen lassen sich durch Abschätzungen ergänzen. Man vergleiche dazu mein Grötschenbändchen über konforme Abbildung oder die Arbeit von A. Ostrowski, Jahresber. d. D. Math.-Vereinig., Bd. 38 S. 168 ff. In dieser sind die bisher besten Abschätzungen enthalten. Diese führen bei günstigster Wahl der α zu

$$1 - q_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ d. h. } 1 - q_n < \frac{C}{n},$$

wo C konstant ist. Freilich beziehen sich diese Abschätzungen auf allgemeinste Bereiche. Für spezielle einfache Bereiche könnten sehr wohl raschere Approximationen der 1 durch q_n herauskommen, so daß auch durch diese Abschätzungen nicht das letzte Wort hinsichtlich der Eignung dieser Methode für praktisches Rechnen gesprochen sein dürfte.

2. Fehlerabschätzung. Wir wollen nun folgendes beweisen: Wenn der Band eines Bereiches B den Kreisring

$$\vartheta \leq |z| \leq 1$$

angehört, so gilt für die Funktion $\varphi(z)$, welche ihn auf den Kreis $|\varphi| < 1$ schlicht abbildet, und für die $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ ist, die Abschätzung

$$|\varphi(z) - z| < \vartheta_1 (1 - \vartheta) + \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2} \cdot \vartheta^2}{1 - \vartheta_1},$$

sobald $|z| < \vartheta_1$ ($0 < \vartheta_1 < 1$) ist. Für $\frac{1}{2} \leq \vartheta_1 < 1$ gilt sogar

$$|\varphi(z) - z| < \vartheta_1 (1 - \vartheta) + 2(\sqrt{1 - \vartheta^2})^{\log \frac{1}{\vartheta_1}}.$$

$\varphi(z)$ ist in $|z| < \vartheta$ schlicht und bildet diesen Kreis auf einen Bereich ab, der ganz dem Kreis $|\varphi| < 1$ angehört, also auch kleineren Flächeninhalt hat als dieser. Nun aber ist der Flächeninhalt des Bildes von $|z| < \vartheta$

$$J = \int_0^\vartheta \int_0^{2\pi} |\varphi'(z)|^2 r dr d\psi,$$

wo $z = r e^{i\psi}$ gesetzt ist. Denn setzt man $\varphi(z) = u + iv$, $z = x + iy$, so wird

$$J = \int_{|z| < \vartheta} \int \left| \frac{u_x u_y}{v_x v_y} \right| dx dy.$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist dies aber dem vorher angeschriebenen Doppelintegral gleich. Setzt man nun

$$\varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{So wird } J &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (c_1 + 2c_2 z + \dots)(\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2 \bar{z} + \dots) r dr d\psi \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (c_1 + 2c_2 r e^{i\psi} + \dots)(\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2 r e^{-i\psi} + \dots) r dr d\psi. \end{aligned}$$

Dies Integral kann man aber ganz analog wie auf S. 147 von Bd. I ausrechnen. Man findet¹⁾

$$J = \pi \{ \vartheta^2 + 2 |c_2|^2 \vartheta^4 + \dots + n |c_n|^2 \vartheta^{2n} + \dots \}.$$

Somit ist also $\vartheta^2 + 2 |c_2|^2 \vartheta^4 + \dots + n |c_n|^2 \vartheta^{2n} + \dots < 1$.

Also wird auch $n |c_n|^2 \vartheta^{2n} < (1 - \vartheta^2)$.

$$\text{Also } |c_n| < \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2}}{\sqrt{n} \vartheta^n} < \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2}}{\vartheta^n}.$$

Nun ist

$$\varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Also wird in $|z| < r = \vartheta_1 \vartheta$ ($0 < \vartheta_1 < 1$)

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - c_1 z| &< \sqrt{1 - \vartheta^2} \vartheta_1^2 \left(1 + \frac{r}{\vartheta} + \dots + \frac{r^n}{\vartheta^n} + \dots \right) \\ &= \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2} \cdot r^2}{(\vartheta - r) \vartheta} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2} \vartheta^2}{1 - \vartheta_1}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Dreiecksatzes²⁾ kann man nach Ostrowski³⁾ diese Abschätzung für $\vartheta_1 \rightarrow 1$ verbessern; denn es macht doch einen schlechten Eindruck, daß die bisher angegebene Schranke für $\vartheta \rightarrow 1$ nicht einmal beschränkt bleibt. Wir nehmen $\vartheta_1 \geq \frac{1}{2}$, und in der Formel des Dreiecksatzes²⁾

$$r_1 = \frac{\vartheta}{2}, \quad r_2 = \vartheta, \quad f(z) \equiv \varphi(z) - c_1 z,$$

$M_1 \leq \frac{1}{2} \sqrt{1 - \vartheta^2}$ (nach der schon gefundenen Abschätzung), $M_1 = 2$.

1) Einer Bemerkung bedarf nur die Frage, ob man wirklich bis zur oberen Grenze integrieren darf. Denn die beiden Potenzreihen, die als Faktoren auftreten, konvergieren ja nur für die kleineren r absolut. Man rechne also das Doppelintegral erst für kleinere r aus, waa eine analoge Reihe gibt, in der nur r statt ϑ steht und gehe dann zur Grenze über. Dies bietet keine Schwierigkeiten, weil alle herauskommenden Inhalte ja kleiner als π sein müssen für alle r .

2) Vgl. S. 126. 3) Jahrbuch. d. Deutch. Math.-Ver. Bd. 39 (1930) S. 80.

Denn in $z, < \vartheta$ ist $|\varphi(z)| < 1$ und nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz¹⁾ ist $c_1 \leq \frac{1}{\vartheta}$; also ist $|\varphi(z) - c_1 z| \leq |\varphi(z)| + |c_1 z| < 2$. Dann ist nach dem Dreiecksatz auf $|z| = \vartheta_1 \vartheta$, das für r in denselben einzusetzen ist,

$$|\varphi(z) - c_1 z| \leq \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - \vartheta^2}\right)^{\frac{\log \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}} \cdot 2^{\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}} \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}} \cdot 2^{\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}} (1 - \vartheta^2)^{\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}}.$$

Wegen $\frac{1}{2} \leq \vartheta_1 < 1$ ist $\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}} \leq 1$, $2^{\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}} < 2^{\log \frac{1}{2} \vartheta_1} < 2$. Also wird

$$|\varphi(z) - c_1 z| < 2(1 - \vartheta^2)^{\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}}.$$

Für $\vartheta_1 \rightarrow 1$ strebt diese Schranke richtig gegen 2. Für findet $|\varphi(z) - z|$ man aus jeder der beiden Schranken eine Abschätzung, wenn man beachtet, daß nach dem Cauchy'schen Koeffizientensatz $1 \leq c_1 \leq \frac{1}{\vartheta}$ ist.²⁾ Also ist

$$c_1 - 1 \leq \frac{1}{\vartheta} - 1 \text{ und } |c_1 z - z| < \vartheta_1(1 - \vartheta).$$

Aber

$$|\varphi(z) - z| \leq |\varphi(z) - c_1 z| + |c_1 z - z|$$

Daher ist $|\varphi(z) - z| \leq \vartheta_1(1 - \vartheta) + \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2} \vartheta_1}{1 - \vartheta_1}$ für $0 < \vartheta_1 < 1$

und $|\varphi(z) - z| \leq \vartheta_1(1 - \vartheta) + 2(1 - \vartheta^2)^{\frac{\log \frac{1}{2} \vartheta_1}{\log \frac{1}{2}}}$ für $\frac{1}{2} \leq \vartheta_1 < 1$.

3. Ein allgemeiner Konvergenzsatz für schlichte Abbildungen. Der Formulierung des zu beweisenden Satzes muß ich einige Begriffserklärungen vorausschicken. Es möge eine Folge von schlichten Bereichen G_n so beschaffen sein, daß sie alle derselben Ebene angehören und den Ursprung derselben enthalten. Dann werde unter dem Kern der G_n der Nullpunkt der Ebene verstanden, falls es keine alien G_n (von einer gewissen Nummer an) genein-

1) c_1 ist reell und positiv angenommen.

2) $c_1 \geq 1$ folgt, wenn man beachtet, daß die Umkehrfunktion von $\varphi(z)$ im Einheitskreis regulär ist und denselben auf einem seinem Inneren angehörenden Bereich abbildet. Für diese ist aber der Koeffizient des Lineargliedes $\frac{1}{c_1}$ und so liefert der Koeffizientensatz $\frac{1}{c_1} < 1$.

same Kreisscheibe um diesen Nullpunkt gibt. Ist aber eine solche vorhanden, so verstehen wir unter dem Kern der G_n den größten diese Kreisscheibe enthaltenden Bereich derart, daß jede abgeschlossene Teilmenge desselben alien G_n von einer gewissen Nummer an angehört. Wir sagen weiter, die G_n konvergieren gegen ihren Kern, wenn jede Teilfolge der G_n denselben Kern besitzt.

Nun betrachten wir eine z -Ebene und in ihr eine Folge von schlichten Bereichen A_n , die alle $z = 0$ enthalten, und ferner eine w -Ebene und in ihr eine Folge von schlichten Bereichen B_n , die alle $w = 0$ enthalten. Es gebe weiter eine Folge von Funktionen $w = f_n(z)$ derart, daß $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) = 1$ ist und daß $f_n(z)$ in A_n regulär ist und diesen Bereich schlicht auf B_n abbildet. Wenn dann die A_n gegen ihren Kern A konvergieren, so ist für die in jedem inneren Teilbereich von A gleichmäßige Konvergenz der $f_n(z)$ gegen eine Grenzfunktion $f(z)$ notwendig und hinreichend, daß auch die B_n gegen ihren Kern B konvergieren. $f(z)$ vermittelt dann die schlichte Abbildung von A auf B .

Wir beweisen den Satz zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß sowohl die A_n wie die B_n gleichmäßig beschränkt sind, um uns erst zum Schluß von dieser Annahme frei zu machen.

Ich zeige zuerst, daß die angegebene Bedingung hinreicht, und betrachte den Fall, daß A ein Bereich ist. Da die B_n gleichmäßig beschränkt sind, so sind die $f_n(z)$ in jeder abgeschlossenen Teilmenge von A von einer gewissen Nummer an regulär und gleichmäßig beschränkt. Nach dem im vorigen Paragraphen beschriebenen Verfahren kann man daher aus den $f_n(z)$ eine unendliche Teilfolge auswählen, die in jeder abgeschlossenen Teilmenge von A gleichmäßig konvergiert. Ich bezeichne diese Funktionen wieder mit $f_n(z)$ und die Bereiche wieder mit A_n und B_n . An den Kern A und B hat sich durch den Übergang zur Teilfolge nichts geändert. $f(z)$ vermittelt nach einem in § 2 ausgesprochenen Hilfssatz eine schlichte Abbildung von A , und zwar auf einen Bereich B' . Um zu zeigen, daß B' mit B identisch ist, stelle ich für die in den B_n regulären und schlichten Umkehrfunktionen $\varphi_n(w)$ der $f_n(z)$ die gleiche Überlegung an und kann daher durch mehrmalige Auswahl zu einer Funktionenfolge gelangen, für die auch die Umkehrfunktionen gleichmäßig in B konvergieren. Ich behalte wieder die bisherigen Bezeichnungen bei und nenne $\varphi(w)$ die Grenzfunktion der $\varphi_n(w)$. $\varphi(w)$ vermittelt eine schlichte Abbildung von B auf einen Bereich A' . Ich will nun zeigen, daß $z = \varphi(w)$ die Umkehrfunktion von $w = f(z)$ ist. Wenn nämlich für einen Punkt z_0 aus A , $w_0 = f(z_0)$ ist, so wird eine Kreisscheibe I vom Radius ρ um z_0 durch $f(z)$ auf einen $U = U_\rho$ enthaltenen Bereich abgebildet. Die Funktionen $f_n(z)$ bilden bei hinreichend großer

Nummer den Kreis k auf Bereiche $k'_{n,p}$ ab, die alle $w = w_0$ enthalten. Da hier gehört $w = w_0$ sowohl dem Bereiche B' als auch den B_n von einer gewissen Nummer an an. Daher ist B' ein Teil von B und ebenso A' ein Teil von A . Die Umkehrfunktionen $\varphi_n(w)$ sind in den $k'_{n,p}$ regulär und schlicht und bilden sie auf k ab. Daher nehmen alle diese $\varphi_n(w)$ im Punkte w_0 Werte an, die k angehören. Da aber e beliebig angenommen werden kann, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(w_0) = z_0.$$

Wenn also $w_0 = f(z_0)$ ist, so ist $z_0 = \varphi(w_0)$. Ebenso schließt man: Wenn $z_0 = \varphi(w_0)$ ist, so ist $w_0 = f(z_0)$. Um nun zu zeigen, daß $w = f(z)$ in A jeden Wert w_0 aus B annimmt, bestimmen wir $z_0 = \varphi(w_0)$, dann ist $f(z_0) = w_0$. Also vermittelt $w = f(z)$ eine schlichte Abbildung von A auf B .

Der zu beweisende Satz behauptet aber, daß die ursprüngliche Funktionenfolge selbst konvergiere. Wäre dem nicht so, so könnte man durch Auswahl passender Teilfolgen zwei verschiedene Grenzfunktionen

$$w = f_1(z) \text{ und } w = f_2(z)$$

erhalten, die beide schlicht A auf B abbilden. Dann aber würde

$$f_2^{-1} f_1(z) = d(z)$$

eine schlichte Abbildung von A auf sich selbst vermitteln, für die es eine Entwicklung

$$d(z) = z + d_n z^n + \dots \text{ mit } d_n \neq 0$$

geben müßte. Da aber A ein beschränkter Bereich ist, so gäbe es eine Schranke für $|d_n|$, die dazu für den Koeffizienten von z^n aller Funktionen

richtig wäre, welche in A regular sind und nur Werte aus A annehmen.

$$d_n(z) = d(d(z)) = z + 2d_n z^n + \dots$$

gehört aber auch zu diesen Funktionen, ebenso wie

$$d_n(z) = d(d_{n-1}(z)) = z + nd_n z^n + \dots$$

Daher müßte für jedes positive ganze n die Zahl $n|d_n|$ auch unter jener festen Schranke liegen; das verträßt sich aber nicht mit $d_n \neq 0$. Und daher ist

$$f_1(z) = f_2(z)$$

und daher konvergiert die ursprüngliche Funktionenfolge selbst.

Damit ist der Fall erledigt, daß A ein Bereich ist. Es hat sich dabei von selbst mit ergeben, daß auch B ein Bereich ist. Wenn nun A ein Punkt ist, so ist auch B ein Punkt. Derrn anderenfalls wiederholen wir die eben angestellte Überlegung, beginnen aber jetzt mit den Umkehrfunktionen $\varphi_n(w)$ und schließen, daß auch A ein Bereich sein muß.

Somit fehlt jetzt nur noch der Nachweis, daß die im Satz ausgesprochene Bedingung auch notwendig ist. Nehmen wir also an, die B_n konvergierten

nicht gegen ihren Kern, es konvergieren aber die $f_n(z)$ in jeder abgeschlossenen Teilmenge von A gleichmäßig gegen eine in A schlichte und reguläre Funktion $f(z)$.

Dann können wir aus den Bereichen B_n zwei Teilfolgen auswählen, die verschiedene Kerne B' und B'' besitzen. Die Grenzfunktion $f(z)$ bildet dann A sowohl auf B' wie auf B'' ab. Die zu den beiden Teilfolgen der B_n gehörigen Funktionen $f_n(z)$ haben nämlich dieselbe Grenzfunktion. Daher sind doch B' und B'' identisch. Damit ist der Beweis dafür, daß die Bedingung notwendig ist, skizziert. Der Leser möge ihn selber zur Einübung der Gedankengänge ins einzelne durchführen.

Nun wollen wir uns zum Schluß noch von der Annahme befreien, daß die A_n und die B_n gleichmäßig beschränkte Bereiche seien. Wir haben von dieser Annahme insofern Gebrauch gemacht, daß wir daraus auf die gleichmäßige Beschränktheit der $f_n(z)$ in jeder abgeschlossenen Teilmenge von A und auf die gleichmäßige Beschränktheit der $\varphi_n(w)$ in jeder abgeschlossenen Teilmenge von B schlossen. Ferner benutzten wir sie auf S. 14 zur Bestimmung einer Schranke für $|a_n|$. Zur Bestimmung einer solchen Schranke genügt es aber auch zu wissen, daß alle in einem Bereiche A schlichten und regulär en, bei $z \rightarrow 0$ verschwindenden und mit der Ableitung Eins versehenen Funktionen in jeder abgeschlossenen Teilmenge von A gleichmäßig beschränkt sind. Es kommt somit darauf an, diesen Satz über schlichte Funktionen zu beweisen. Es wäre leicht, dies hier in Kürze zu tun. Ich verweise aber lieber den Leser auf den § 9 auf S. 71ff., wo derartige Sätze im Zusammenhang entwickelt sind. Man kann diesen Paragraphen auch jetzt schon leeren, ohne beim Verständnis auf Schwierigkeiten zu stoßen.

§ 4. Konform Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf die Kreisfläche.

Man kann auch in jedem mehrfach zusammenhängenden Bereich B eine reguläre Funktion $f(z)$ finden, die darin alle Werte aus einem Kreise (mit endlichem oder unendlichem Radius) genau einmal annimmt. Sie bildet den Bereich also wieder schlicht auf einen Kreis ab. Aber die Abbildungsfunktion ist in B nicht mehr eindeutig. Sie kann nur im Falle eines einfach zusammenhängenden Bereiches B in diesem eindeutig sein. Denn jedenfalls ist die Umkehrungsfunktion als eine im Kreise reguläre oder doch bis auf einen einzigen einfachen Pol in B reguläre Funktion in ihm eindeutig. Man kann aber, wie schon S. 3ff. bemerkt wurde, einen mehr als einfach zusammenhängenden Bereich nie umkehrbar eindeutig und analytisch auf einen einfach zusammenhängenden abbilden.

Hat der Bereich nur zwei Randpunkte a und b , so wird er durch

$$t = \log \frac{z-a}{z-b}$$

schlicht auf die voile Ebene mit Ausschuß des unendlichfernen Punktes abgebildet. Jede in B reguläre Funktion wird daher eine eindeutige reguläre Funktion von t . Es gibt keine Funktion, welche diese voile t -Ebene auf einen endlichen Kreis abbildet. Daher werden wir weiter die Voraussetzung machen, daß B mindestens drei Randpunkte haben soll und wollen dann beweisen, daß B durch eine in ihm reguläre (aber nicht eindeutige) Funktion auf die schlichte Fläche eines Kreises abgebildet werden kann.

In einem Bereich mit mindestens drei Randpunkten gibt es nun aber stets wieder reguläre, beschränkte und schlichte Funktionen. Denn bringt man durch eine lineare Transformation drei Randpunkte nach 0 , 1 und ∞ , so hat man in der elliptischen Modulfunktion¹⁾, welche bei 0 , 1 , ∞ Verzweigungspunkte unendlicher Ordnung hat, ein Beispiel einer regulären Funktion vor sich, welche nur Werte von positivem Imaginärteil annimmt und jeden höchstens einmal im Bereiche. Durch lineare Transformation gelangt man dann zu einer in B regulären, schlichten und beschränkten Funktion.

Um nun zu beweisen, daß es eine in B reguläre und schlichte Funktion gibt, welche darin jeden Wert einer Kreisscheibe genau einmal annimmt, betrachten wir wieder die Menge M aller in B regulären und schlichten Funktionen $f(z)$, für welche außerdem an einer beliebigen Stelle z_0 des Bereiches $f(z_0) = 0$ sein soll, und für die in B $|\overline{f'(z)}| < 1$ ist. Mit $d(f)$ werde genau wie auf S. 6 der $f'(z_0)$ bezeichnet. D sei wieder die obere Grenze der $d(f)$ für alle f aus M . $f_1, f_2, \dots$ sei wieder eine Folge von Funktionen der Menge, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n) = D$ gilt. Dann betrachten wir zu-

nächst von jeder dieser Funktionen ein zum Punkte z_0 als Mittelpunkt gehöriges Funktionselement, für welches $f_n(z_0) = 0$ und $|f'_n(z_0)| = d(f)$ ist. Diese Funktionselemente werden durch Potenzreihen $\mathfrak{P}(z - z_0)$ dargestellt, welche im größten Kreise K konvergieren, welchen man in B um z_0 als Mittelpunkt legen kann. Diese Funktionselemente definieren aber in K eine

1) Wir lernen diese Funktion erst auf S. 40 ff. kennen. Zu ihrer Herleitung sind die Entwicklungen des § 6 nötig, und zwar nur für einfach zusammenhängende Bereiche. Wir behandeln aber — zwecks Vermeidung von Wiederholungen — in § 5 auch gleich die mehrfach zusammenhängenden Bereiche mit. Aber es ist dem Leser unbenommen, erst diesen § 4 zu überschlagen, den § 6, soweit er sich mit einfach zusammenhängenden Bereichen beschäftigt, zu lesen, daraus die elliptische Modulfunktion kennenzulernen, alsdann diesen § 4 vorzunehmen und schließlich § 6 erneut auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche durchzugehen.

Folge gleichmäßig beschränkter Funktionen¹⁾; denn es ist $|f_n(z)| < 1$ in B . Daher kann man wieder aus den Funktionselementen eine Teilfolge herausgreifen, die wieder mit $f_1, f_2, \dots$ bezeichnet sei, und welche in der erwähnten Kreisscheibe gleichmäßig gegen eine in ihr reguläre und nicht konstante Funktion konvergiert. Setzt man nun alle diese Funktionselemente längs ein und demselben beliebig gewählten in B verlaufenden Wege fort, so erhält man bei jedem Schritt des Fortsetzungsprozesses eine neue Folge von Elementen der Funktionen $f_n(z)$ mit gemeinsamen Konvergenzkreisen, welche wieder gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Denn die Kreisscheibe der neu erhaltenen Funktionselemente hat immer mit der vorhergehenden ein Gebiet gemein, in dem die vorhergehenden Funktionselemente schon konvergieren. Nach dem Satz von Vitali konvergieren sie daher auch in der neuen Kreisscheibe gleichmäßig. Auf diese Weise wird als Grenzfunktion der $f_n(z)$ eine in B reguläre und beschränkte Funktion definiert, für die wie in § 2 auch $d(f) = D$ ist. Es ist nun zu zeigen, daß $f(z)$ unserer Menge angehört, daß sie also in B schlicht ist. Gäbe es aber zwei Funktionselemente von $f(z)$, $\mathfrak{P}_1(z - z_1)$ und $\mathfrak{P}_2(z - z_2)$, für die gleichwohl $\mathfrak{P}_1(0) \neq \mathfrak{P}_2(0)$ wäre, so gäbe es wieder nach Rouché in beliebiger Nähe von z_1 und z_2 Stellen $z_1^{(n)}$ und $z_2^{(n)}$ derart, daß für die zu z_1 und z_2 gehörigen Funktionselemente von $f_n(z)$ auch

$$f_n'(z_1^{(n)}) = f_n'(z_2^{(n)}).$$

Dabei hat man diejenigen Funktionselemente von $f_n(z)$ zu nehmen, die man aus dem Ausgangselement auf den gleichen Wegen erhält, wie die beiden Elemente von $f(z)$. Sie sind für genügend großes n wie diese beiden verschieden. Und daher kann auch nicht $f_n'(z_1^{(n)}) = f_n'(z_2^{(n)})$ sein, denn $f_n(z)$ soll ja schlicht abbilden. Also vermittelt die Grenzfunktion $f(z)$ eine schlichte Abbildung des Bereiches auf einen Teilbereich des Kreises $|w| < 1$. Dieser Bildbereich ist aber mit dem Kreise identisch. Dies zeigt man wörtlich durch dieselbe Überlegung wie vorher im Falle des einfach zusammenhängenden Bereiches.

§ 5. Die Zuordnung der Ränder bei konformer Abbildung.

1. Erreichbare Randpunkte. Es sei ein beliebiger beschränkter, schlichter, einfach zusammenhängender Bereich B der z -Ebene vorgelegt. Zunächst interessieren uns die *erreichbaren Randpunkte* von B . Ein Randpunkt P heißt erreichbar, wenn man ihn durch einen stetigen Kurvenbogen²⁾ $z = z(t)$, $t_0 \leq t < t_1$, dessen sämtliche Punkte (außer $t = t_1$) dem Be-

1) D. h. es gibt eine Zahl S derart, daß der absolute Betrag einer jeden Funktion in B kleiner ist als S .

2) Hier ist $z(t)$ eine stetige Funktion.

kung der Allgemeinheit. Denn wir sahen ja S. 16, wie man sonst die Abbildung auf einen beschränkten Bereich leisten kann.

Den weiteren Betrachtungen schicke ich zwei Hilfssätze voraus. Der erste ist eine von Koebe herrührende Verallgemeinerung eines Satzes von Schwarz. Der zweite rührt im wesentlichen von Lindelöf her.

2. Hilfssatz I. $f(w)$ sei in $|w| < 1$ regulär und beschränkt: $|f(w)| < M$. $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ seien zwei verschiedene Peripheriepunkte. $w_n^{(1)}$ sei eine Folge von Punkten aus dem Innern des Kreises, die gegen $w^{(1)}$ konvergiert, und $w_n^{(2)}$ sei eine Folge von Punkten aus dem Kreisinneren, die gegen $w^{(2)}$ konvergiert. ζ_n sei eine stetige Kurve, die $w_n^{(1)}$ mit $w_n^{(2)}$ verbindet, und die in dem Kreisring $1 - \varepsilon_n < |w| < 1$ verläuft. Dagegen ist $\varepsilon_n > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Auf ζ_n sei $|f(w)| < \eta_n$, wo $\eta_n > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$. Dann ist $f(w) \equiv 0$.

Man erbringt den Beweis am raschesten folgendermaßen: Zunächst kann man die stetigen Kurven ζ_n auf mannigfache Weise durch Jordankurven¹⁾, ja durch Polygonzüge ersetzen. Dies folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit der beschränkten Funktion.²⁾ Diese erlaubt es innerhalb $1 - \varepsilon_n < |w| < 1$ einen Bereich abzugrenzen, in dem $|f(w)| < \eta_n$ bleibt. In diesem kann man $w_n^{(1)}$ und $w_n^{(2)}$ durch einen von Selbstüberkreuzungen freien Polygonzug verbinden. Wir bezeichnen ihn weiter wieder mit ζ_n . Auf ihm bleibt $|f(w)| < \eta_n$. Ich behaupte, daß es einen Teilbogen des Einheitskreises gibt, welcher von einer Teilfolge dieser Kurvenbögen gleichmäßig approximiert wird. Um das einzusehen betrachte man die bestehende Figur 1. Man sieht in ihr vier Sektoren eines Kreisringes. Zwei derselben schließen sich an die Punkte $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ an und enthalten die Punktfolgen $w_n^{(1)}$ und $w_n^{(2)}$. Betrachten wir dann irgendeinen in dem Ring der beiden konzentrischen Kreise verlaufenden stetigen Kurvenbogen, der einen Punkt $w_n^{(1)}$ und einen Punkt $w_n^{(2)}$ verbindet, so muß dieser Kurvenbogen entweder alle Radien des dritten oder alle Radien des vierten Sektors treffen.³⁾

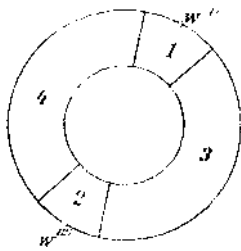


Fig. 2.

1) Wegen der Definition dieser Kurven siehe Bd. I S. 90.

2) Vgl. z. B. Bd. I S. 171. Es gibt nach dem dort Bewiesenen eine positive Zahl n , so daß in zwei beliebigen Punkten aus dem Innern von $|w| < 1 - \sigma$ ($\sigma > 0$), die um weniger als n , voneinander abstehen, der Unterschied der Funktionswerte absolut genommen kleiner als ε ist.

3) Gäbe es nämlich in jedem dieser beiden Sektoren einen Radius, den der Bogen nicht trafe, so beachte man, daß diese beiden Radien den Kreisring in zwei Halbringe

Daher trifft tatsächlich jeder unserer unendlich vielen Polygonzüge entweder alle Radien des einen oder alle Radien des anderen Sektors. In mindestens einem der beiden Sektoren verlaufen daher unendlich viele der Polygonzüge, die jeden seiner Radien treffen. Da sie außerdem die Peripherie des Einheitskreises gleichmäßig approximieren, so approximieren sie den Peripheriebogen dieses Sektors gleichmäßig. Wir nehmen nun an, $f(w)$ sei nicht identisch Null. Dann darf man annehmen, daß $f(0)$ von Null verschieden ist. Denn sonst dividiert man $f(w)$ durch eine geeignete Potenz von w und stellt für die neue Funktion die nun folgende Überlegung an.

Nunmehr betrachte man einen Kreissektor (3 in Fig. 2) von der Öffnung $2\pi/x$ (x ganz), dessen Peripheriebogen ganz dem gleichmäßig approximierten Bogen angehört, und wähle ihn so klein, daß seine beiden Schenkel von jedem der approximierenden Polygonzüge getroffen werden. Man betrachte außerdem noch einen zweiten Sektor (4 in Fig. 2) der gleichen Öffnung, den man erhält, wenn man die Schenkel des eben betrachteten über den Nullpunkt hinaus verlängert. Nunmehr betrachte man auf einem der approximierenden Polygonzüge einen Bogen, der einen Punkt des einen Schenkels mit einem Punkte des anderen Schenkels des ersten Sektors verbindet, ohne dazwischen ein zweites Mal einen der beiden Schenkel des ersten Sektors zu treffen. Dieser Bogen muß alle Radien des ersten Sektors treffen.¹⁾ Es kann sein, daß die Punkte, in welchen er die Schenkel des Sektors trifft, verschiedenen Abstand vom Ursprung haben. Wir betrachten daher noch die Mittellinie des Sektors und greifen aus den Polygonbögen Teilbögen heraus, die ganz im einen halben Sektor verlaufen und seine Schenkel miteinander verbinden. Durch Spiegelung dieser Bögen an der Mittellinie des Sektors erhalten wir dann wieder einen Polygonbogen, der den ganzen Sektor durchzieht und seine Schenkel in Punkten trifft, die gleichweit vom Ursprung abstehen. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß die Symmetrielinie des Sektors gerade die positive reelle Achse ist. In diesem Falle strebt auf den Polygonbögen des einen Halbsektors $f(w)$ gegen Null, während auf den Spiegelbildlichen Bögen des anderen Halbsektors $f(w)$ gegen Null strebt, und zwar so, daß wenn auf einem Bogen $|f(w)| < \eta_n$ ist, auf seinem Spiegelbild $|f(\bar{w})| < \eta_n$ ist. Nunmehr übe man auf den Sektor und die in ihm ver-

zerlegen, und daß die stetige Kurve einen Punkt des einen mit einem Punkte des anderen Ringes verbinden muß. Sie muß daher den Rand eines jeden Halbringes treffen. Da sie aber nach Voraussetzung die konzentrischen Kreise nicht trifft, so muß sie einen der beiden Radien treffen.

1) Da die Polygonzüge ganz in einem Kreisring verlaufen, welcher vom Einheitskreis und einem konzentrischen Kreis gebildet wird, so folgt dies an Hand der in Fußnote 8) auf S. 19/20 ausgeführten Überlegung

laufenden Polygoubögen noch die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und ihre Wiederholungen aus. Dadurch entsteht aus dem Bogen ein einfach geschlossenes Polygon, das im Ring $1 - \epsilon_n < |w| < 1$ verläuft. Betrachtet man dann die Funktion

$$F(w) = \psi(w)\psi(\sigma w) \dots \psi(\sigma^{n-1}w), \quad \text{wo } \sigma = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad \psi(w) = f(w)/\bar{f}(\bar{w}),$$

so ist in jedem Punkt eines solchen Polygons mindestens einer der Faktoren dem Betrage nach $< \eta_n$, während die anderen unter der für $f(w)$ im ganzen Kreis gültigen Schranke M bleiben. Daher gilt in jedem Polygonpunkt

$$|F(w)| < \eta_n M^{2n-1}$$

und hier kann man η_n beliebig klein wählen, wenn man nur das Polygon, auf dem man abschätzt, hinreichend nahe an die Peripherie heranlegt. Für $w = 0$ aber sind alle Faktoren gleich. Daher ist

$$F(0) = |f(0)|^{2n}.$$

Und dieser Wert ist kleiner als das Maximum auf dem Polygon. Daher ist

$$|f(0)|^{2n} < \eta_n M^{2n-1}.$$

Da man durch passende Wahl des Polygons η_n beliebig klein machen kann, so ist gegen die Annahme $f'(0) = 0$. Also ist $f(w)$ identisch Null, wie wir beweisen wollten. Übrigens kann man auch nach Abschluß der topologischen Überlegung vermittle der Methode des Cauchyschen Integrals weiterschließen. Man vgl. dazu den Beweis des Schwarzschen Spiegelungsprinzips Bd I S. 225.

3. Hilfssatz II. Wenn eine für $|w| < 1$ reguläre und beschränkte Funktion $f(w)$ auf zwei verschiedenen im gleichen Peripheriepunkt P endigend, dem Inneren von $|w| < 1$ angehörigen Jordankurven Grenzwerten zustrebt, so strebt sie auf beiden dem gleichen Grenzwert zu. Sind die beiden Jordankurven dazu noch punktfremd und ertauscht man sich durch einen im Einheitskreis verlaufenden Jordانبogen zu einer geschlossenen Jordankurve, so strebt die Funktion gleichmäßig jenem Grenzwert zu, wenn sie sich jenem Peripheriepunkt durch das Innere G der geschlossenen Jordankurve nähert.

Diesen Lindelöfschen Satz beweist man ganz ähnlich wie den vorhin bewiesenen Koebeschen.¹⁾ Wenn erstens die beiden Wege sich in beliebiger Nähe des gemeinsamen Endpunktes P treffen, so sind die auf ihnen erzielten Grenzwerte gleich. Es ist also überhaupt nur nötig, Wege zu betrachten, die sich in der Nähe ihres Endpunktes nicht schneiden. Wenn dann aber

1) Das Beweisprinzip stammt im wesentlichen von Painlevé und wurde mit besonderem Erfolg von Lindelöf verwendet.

zweitens $f(w)$ auf dem einen gegen a , auf dem andern gegen b strebt, so strebt die gleichfalls beschränkte Funktion

$$F(w) = (f(w) - a)(f(w) - b)$$

auf beiden dem gleichen Grenzwert Null zu. Hat man dann bewiesen, daß $F(w)$ in G gleichmäßig gegen Null strebt, so muß einer der Faktoren, aus denen $F(w)$ besteht, gleichmäßig gegen Null streben. D. h. $f(w)$ strebt entweder gleichmäßig gegen a oder gleichmäßig gegen b .¹⁾ Daber muß $a = b$ sein. Es genügt also weiter, die zweite Hälfte des Hilfssatzes unter der Annahme zu beweisen, daß der auf beiden Wegen erzielte gemeinsame Grenzwert Null ist. Dann schneide man vom Einheitskreis durch einen Kreisbogen eine zu ihrer Sehne s symmetrische Sichel ab, welche die Enden A_1 und A_2 der

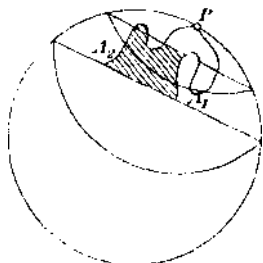


Fig. 3.

beiden Jordankurven enthält, und wähle die Sichel so klein, daß auf den Enden $|f(w)| < \epsilon$ ist. ϵ sei dabei eine beliebig vorgegebene positive Zahl. Die Enden A_1 und A_2 sind so zu erklären: Man verfolgt von dem im Hilfssatz II genannten Punkt P aus jede der beiden Jordankurven rückwärts, bis man zum ersten Male die Sichelsehnung trifft (Fig. 3). Die Endpunkte von A_1 und A_2 verbinde man auf der von P abgewandten Seite der Sehne durch einen Jordanbogen L und markiere auf ihm einen Punkt Q . Dieser Jordanbogen bestimmt dann

zusammen mit A_1 und A_2 eine Jordankurve, deren Inneres G genannt sei. (Vgl. die Formulierung des Satzes.) Sein Rand wird von A_1 , A_2 und L allein gebildet. Es ist nun für die Formulierung der Beweisführung bequem, anzunehmen, daß die Eckpunkte der Sichel auf der reellen Achse liegen, so daß die Sichel zur reellen Achse symmetrisch ist. Das kann man durch eine Verschiebung und Drehung des Einheitskreises in einen anderen Kreis erreichen. Dann geht die Sichel durch Spiegelung an der reellen Achse in sich über.

1) Man betrachte nämlich eine abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge des Jordanbereiches und seines Randes, in der $|F(w)| \leq \epsilon$ ist. In jedem Punkte derselben ist entweder $|f(w) - a| \leq \sqrt{\epsilon}$ oder $|f(w) - b| \leq \sqrt{\epsilon}$, weil sonst auch das Produkt beider größer als wäre. Ist aber ϵ hinreichend klein, so kann auch nur einer der beiden Faktoren dieser Abschätzung genügen, falls a und b verschieden sind. Man kann daher die abgeschlossene Menge in zwei Teilmengen zerlegen. In den Punkten der einen ist $|f(w) - a| \leq \sqrt{\epsilon}$, in den Punkten der andern ist $|f(w) - b| \leq \sqrt{\epsilon}$. Beide sind aber abgeschlossen. Denn in einem Punkt z.B., gegen den sich Punkte häufen, wo $|f(w) - a| \leq \sqrt{\epsilon}$ ist, ist auch $|f(w) - a| \leq \sqrt{\epsilon}$. Eine abgeschlossene und zusammenhängende Menge kann man aber nicht in zwei abgeschlossene punktfremde Teilmengen zerlegen, es sei denn, daß eine derselben leer ist.

Bei dieser Spiegelung wird aus dem von den beiden Kurvenenden A_1 und A_2 gebildeten Jordanschen Kurvenstück ein dazu symmetrisches, das die auf der reellen Achse gelegenen Endpunkte von A_1 und A_2 in der anderen Sichelhälfte miteinander verbindet. Man erhält so eine neue geschlossene Jordansche Kurve, die zu sich selbst symmetrisch ist und in der die Enden A_1 und A_2 und die dazu symmetrischen Enden vorkommen. Diese Jordankurve bestimmt einen Teilbereich D der Sichel, in welchem wir $f(w)$ weiter betrachten wollen. Die Enden A_1 und A_2 treffen im Punkte $w = a$ zusammen. Wir bilden die analytische Funktion

$$\varphi(w) = f(w) \overline{f(\bar{w})} (w-a)^\sigma (\bar{w}-\bar{a})^\sigma.$$

Dabei ist a eine beliebige positive Zahl. Wir betrachten irgendeinen in D eindeutigen Zweig derselben. Er ist im abgeschlossenen Bereich stetig, was gerade durch die Zusatzfaktoren $(w-a)^\sigma$ und $(\bar{w}-\bar{a})^\sigma$ erreicht wurde. Auf der reellen Achse ist $|\varphi(w)| = |f(w)|^2 |w-a|^{2\sigma}$. Diese Werte sind aber nicht größer als das auf der Jordankurve erreichte Maximum. Nun ist aber in jedem Punkte derselben (außer $w = a$ und $w \rightarrow \infty$) einer der beiden ersten Faktoren, aus welchen $\varphi(w)$ besteht, dem Betrage nach kleiner als e , während der andere unter der für $f(w)$ im ganzen Kreise geltenden Schranke M liegt, die man größer als Eins annehmen darf. μ sei das Maximum von $|w-a|$ im abgeschlossenen Bereich D . Daher ist auf der reellen Achse

$$|f(w)|^2 |w-a|^{2\sigma} < \varepsilon M \mu^{2\sigma}.$$

Da dies für jedes $\sigma > 0$ gilt, so folgt durch $\sigma \rightarrow 0$, daß auch $|f(w)| < \sqrt{\varepsilon} M$ auf der reellen Achse gilt. Gehen wir zur ursprünglichen Lage der Sichel zurück, so kennen wir nun im Einheitskreis eine A_1 und A_2 verbindende Gerade, auf welcher

$$|f(w)| < \sqrt{\varepsilon} M$$

ist. Die gleiche Überlegung kann man nun auch auf je zwei zu s parallelen Geraden s' anstellen, die zwischen s und P verläuft. Auf jeder solchen Geraden findet man so eine A_1 mit A_2 verbindende Strecke, auf der $|f(w)| < \sqrt{\varepsilon} M$ ist. Eine solche Strecke s'_1 wird begrenzt von dem ersten Punkte, in dem A_1 die Gerade s' trifft, wenn man A_1 von P aus durchläuft und von dem ersten Punkt, in dem A_2 die Gerade s' trifft, wenn man A_2 von P aus durchläuft. Auf dieser Strecke s'_1 gibt es dann stets eine im Inneren des Bereiches G verlaufende Strecke, die A_1 und A_2 verbindet.¹⁾

1) Wäre dem nicht so, so betrachte man eine in G verlaufenden Polygonzug, der zwei Punkte, P , und Q_1 aus hinreichender Nähe von P und Q miteinander verbindet, d. h. also zwei Punkte, die gleichfalls auf verschiedenen Seiten der Sehne s und auch auf verschiedenen Seiten von s' liegen. Jedes solche Polygon muß s'_1 in einem Punkt

Dies ist dann ein Querschnitt, der von G einen Teilbereich abtrennt, dessen Rand P angehört. Betrachten wir eine Folge gegen P konvergierender Geraden, so erhalten wir auf diese Weise eine Folge von Querschnitten des Bereiches G , die P approximieren, die also von G Teilbereiche abtrennen, die sich auf P zusammenziehen. Auf jedem dieser Querschnitte ist $|f(w)| < \sqrt{\varepsilon} M$. Zwischen zwei solchen Querschnitten liegt ein samt Rand $|w| < 1$ angehöriger Teilbereich¹⁾ von G , auf dessen Rand, soweit er A_1 oder A_2 angehört, $|f(w)| < \varepsilon$ ist. Da $\varepsilon < \sqrt{\varepsilon} M$ ist, so ist am Rand desselben überall $|f(w)| < \sqrt{\varepsilon} M$. Daher gilt die Abschätzung auch im Teilbereich. Und da dies für je zwei der Querschnitte gilt, so grenzt jeder Querschnitt von G einen Teilbereich ab, an dessen Rand P liegt, und in dessen Inneren $|f(w)| < \sqrt{\varepsilon} M$ ist, und darin liegt, daß $f(w)$ im Jordanbereich G gleichmäßig gegen Null strebt.

4. Erreichbaren Randpunkten entsprechen bestimmte Peripheriepunkte. Wir wenden uns zur *Untersuchung der Abbildungsfunktion am Rande* des abzubildenden Bereiches B . Das soll ein ganz beliebiger schlichter beschränkter, einfach zusammenhängender Bereich sein. Man betrachte eine im Bereiche B verlaufende stetige Kurve $L: z = s(t) (\alpha \leq t < \beta)$, die für $t \rightarrow \beta$ gegen den Bereichsrand konvergiert. Damit ist gemeint, daß die Kurve für Parameterwerte, die hinreichend nahe an β liegen, außerhalb eines beliebig vorgegebenen samt seinem Rande dem Inneren von B angehörigen Teilbereiches von B verläuft. Dem Parameterwert $t = \alpha$ möge — das ist keine Beschränkung der Allgemeinheit — der Punkt z_0 entsprechen, welcher bei der Abbildung in $w = 0$ übergeht. Wir setzen dann die Abbildungsfunktion beginnend mit dem Element, das bei z_0 verschwindet, längs der Kurve L analytisch fort und fragen, was sich über die Menge der Werte aussagen läßt, die sie längs der Kurve annimmt. Als erstes bietet sich das Ergebnis, daß die durch $f(z)$ als Bild von L im Einheitskreis erhaltene stetige Kurve A für $t \rightarrow \beta$ gegen die Peripherie des Einheitskreises konvergiert. D. h. für Parameterwerte, die genügend nahe an β liegen, verläuft sie außerhalb eines beliebig gegebenen mit dem Einheitskreis konzentrischen Teilkreises mit Radius kleiner als 1. Andernfalls gäbe es nämlich auf A eine

aus dem Inneren von G treffen. Zu jedem Treffpunkt gehört eine Teilstrecke, die G angehört, und deren Endpunkte dem Rande von G angehören. Man darf aber annehmen, daß der Polygonzug keine Teilstrecke t von s'_1 trifft, deren Endpunkte entweder beide A_1 oder beide A_2 angehören. Denn dann bestimmt diese Teilstrecke zusammen mit einem Teilbogen von A_1 oder einem Teilbogen von A_2 einen Teilbereich G' von G , dem kein Endpunkt des Polygonzuges angehört. Daher könnte man den Polygonzug mit Leichtigkeit so abändern, daß er t überhaupt nicht trifft. Da er aber s'_1 treffen muß, so gibt es darauf eine Teilstrecke der angegebenen Art.

1) Dasselbe ist in Fig. 3 schraffiert.

Folge von Punkten, die gegen einen Punkt w^* im Inneren des Einheitskreises konvergierte, und deren zugehörige Parameterwerte t gegen β konvergierten. Die eindeutige Umkehrfunktion der Abbildungsfunktion müßte dann in diesen Punkten Werte annehmen, welche sich am Kande des Bereiches häuften. Aus ihnen wähle man eine Teilfolge aus, die gegen einen bestimmten Randpunkt z^* konvergiert. Die Umkehrfunktion müßte daher im Punkte w^* den Wert z^* annehmen und seine Umgebung auf eine Umgebung von z^* abbilden. Das geht aber nicht an, da doch die Umkehrfunktion in $|w| < 1$ nur Werte aus dem Inneren von B annehmen kann.

Wir betrachten weiter eine stetige Kurve $z = z(t)$ des Bereiches B , die für $t \rightarrow \beta$ gegen einen bestimmten (erreichbaren) Randpunkt P des Bereiches B strebt, d. h. es soll $\lim_{t \rightarrow \beta} z(t) = P$ sein. Wir wollen zeigen, daß dann auch die Abbildungsfunktion einem Grenzwert zustrebt. Nehmen wir an, die Bildkurve A ende nicht in einem bestimmten Punkte der Peripherie des Einheitskreises. Dann gibt es auf ihr zwei Punktfolgen

$$w_v^{(1)} \quad \text{und} \quad w_v^{(2)},$$

deren Parameterwerte gegen β streben, und zwar so, daß die erste Folge und die zweite Folge verschiedenen Grenzpunkten $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ auf der Peripherie zustreben. Daß dies unmöglich ist, sieht man folgendermaßen ein. Zunächst bemerke man, daß es unendlich oft bei Durchlaufung von A in Richtung wachsender Parameter vorkommen muß, daß auf einen Punkt $w^{(1)}$ ein Punkt $w_v^{(2)}$ folgt. Dementsprechend gibt es auf der Kurve A unendlichviele Bögen, welche Punkte in beliebiger Nähe von $w^{(1)}$ mit Punkten in beliebiger Nähe von $w^{(2)}$ verbinden und welche dabei zugleich für hinreichend große Nummer in beliebiger Nähe der Peripherie des Einheitskreises verlaufen. Auf diesen Bögen nimmt nun aber die Umkehrfunktion Werte an, die gegen P konvergieren. Wir haben also eine im Einheitskreise reguläre und beschränkte Funktion, welche auf Kurvenbögen, die die Peripherie gleichmäßig approximieren, einer Konstanten zustrebt. Eine solche Funktion ist aber nach Hilfssatz I von S. 19 eine Konstante und kann daher die Abbildung nicht vermitteln. Daher muß auch die Kurve A gegen einen Peripheriepunkt konvergieren. Jeder nach einem erreichbaren Randpunkt von P strebenden stetigen Kurve des Bereiches B entspricht also eine stetige Kurve des Einheitskreises, welche in einem bestimmten Peripheriepunkt endigt.

5. Umgebung eines erreichbaren Randpunktes. Wir erörtern weiter die Frage, wann zwei solchen Kurven L_1 und L_2 Kurven im Einheitskreis entsprechen, welche im gleichen Peripheriepunkt endigen. Um hierüber Aufschluß zu gewinnen, muß man durchaus an der Vorstellung festhalten, daß der ein-

zelne erreichbare Randpunkt als Individuum erst durch eine in ihm endende stetige Kurve bestimmt wird. Es genügt also ganz und gar nicht, seine z -Koordinate zu kennen. Es ist dies eine Begriffsbildung, die in vieler Beziehung an den Bd. I, S. 217 ausführlich erörterten Begriff der singulären Stelle einer analytischen Funktion erinnert. Nur bleibt hier dahingestellt, ob die Radien der Funktionselemente bei Annäherung an den Randpunkt gegen Null streben. D. h. wir gehen vorläufig nicht auf die Frage ein, ob sich die Abbildungsfunktion längs der den erreichbaren Randpunkt definierenden Kurve über diesen Punkt hinaus fortsetzen läßt oder nicht.

Wir definieren zunächst, was wir unter der *Umgebung eines erreichbaren Randpunktes* R verstehen wollen. Zu dem Zweck legen wir um die z -Koordinate des Randpunktes als Mittelpunkt einen Kreis, so klein, daß er die den Randpunkt definierende Kurve 5 trifft und verfolgen diese Kurve vom erreichbaren Randpunkt an rückwärts, bis sie zum ersten Male den Kreis trifft. Dies geschehe in einem Punkt P . Er gehört einem von Randpunkten des Bereiches freien Bogen T des Kreises an. Der Bogen T bestimmt einen Teilbereich von B , in welchem $\mathbb{C}$ liegt und an dessen Rand It liegt. Die inneren Punkte dieses Teilbereiches und die Randpunkte, die er mit B gemein hat, machen eine Umgebung von R aus.

Nunmehr können wir definieren, wann zwei Kurven L des Bereiches B zum gleichen Randpunkte von B' führen. Der durch L_1 bestimmte Randpunkt heiße P_1 , der durch L_2 bestimmte sei P_a . Diese heißen gleich, wenn jede Umgebung des einen auch eine Umgebung des anderen ist. Daraus folgt insbesondere, daß beide gleiche z -Koordinate haben müssen.

6. Umkehrbare Eindeutigkeit der Beziehung zwischen erreichbaren Randpunkten und den entsprechenden Peripheriepunkten. Diese Definition findet ihre Rechtfertigung durch den Beweis des Satzes, daß gleichen Randpunkten gleiche Peripheriepunkte und daß verschiedenen Randpunkten verschiedene Peripheriepunkte des Bildbereiches entsprechen.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß zwei Kurven L_1 und L_2 , welche im gleichen Randpunkt enden, zwei Kurven A_1 und A_2 des Einheitskreises entsprechen, welche im gleichen Peripheriepunkt enden. Denn nehmen wir an, sie endeten in verschiedenen Peripheriepunkten, so betrachte man in einer Folge beliebig kleiner sich auf den Randpunkt zusamenziehender Kreise eine Folge von Wegen, die L_1 und L_2 verbinden. Diesen Wegen entsprechen im Einheitskreis Kurven, die in beliebiger Nähe seiner Peripherie verlaufen, und welche Punkte von A_1 mit Punkten von A_2 verbinden. Daraus folgt wie vorhin, daß es darunter eine Teilfolge gibt, welche einen Peripheriebogen gleichmäßig approximiert. Und daraus folgt genau wie vorhin, daß die Umkehrung der Abbildungsfunktion konstant sein müßte, was natürlich unmöglich ist.

Wir betrachten nun zwei stetige Kurven L_1 und L_2 des Bereiches B , welche in zwei verschiedenen Randpunkten P_1 und P_2 enden. Zunächst bemerken wir, daß man jede derselben durch eine Jordansche Kurve ersetzen kann, die im gleichen Randpunkt endigt. Dies erkennt man am besten am Bild der stetigen Kurve im Kreis. Man beschreibe derselben ein Sehnenpolygon ein, das gegen den gleichen Peripheriepunkt strebt, und auf dem die Umkehrungsfunktion der Abbildung dem gleichen Grenzwert zustrebt. Diesem Sehnenpolygon entspricht im Bereiche eine Jordankurve, die in beliebiger Nähe des Randpunktes noch Punkte mit der gegebenen stetigen Kurve gemeinsam hat. Nach unserer Definition enden daher beide stetigen Kurven im gleichen Randpunkt. Nun gehen wir noch einmal zum Polygon im Kreise zurück und ersetzen dasselbe durch Weglassen einiger Strecken durch ein anderes, das keine Selbstüberkreuzung mehr besitzt. Dies ist dann eine Jordansche Kurve, der im Bereiche B auch eine Jordansche Kurve entspricht. Nun zurück zu den beiden Kurven L_1 und L_2 , die in verschiedenen Randpunkten des Bereiches B enden. Wir dürfen annehmen, daß dies zwei Jordansche Kurven sind. Ihnen entsprechen im Einheitskreis zwei Jordansche Kurven A_1 und A_2 . Wir wollen zeigen, daß dieselben in verschiedenen Peripheriepunkten enden. Nehmen wir im Gegenteil an, die beiden Jordankurven A_1 und A_2 endeten im gleichen Peripheriepunkt P' . Wir stützen uns dann wesentlich auf die Tatsache, daß A_1 und A_2 sich in genügender Nähe von P' nicht mehr schneiden können. Denn andernfalls würden auch die Kurven L_1 und L_2 in beliebiger Nähe ihrer Endpunkte gemeinsame Punkte besitzen. Dann aber endeten L_1 und L_2 im gleichen Randpunkt. A_1 und A_2 sind also punktfremd. Der Beweis stützt sich dann weiter auf den zweiten Hilfssatz S. 21. Aus diesem Satz ergibt sich, daß L_1 und L_2 doch den gleichen Randpunkt bestimmen. Denn aus dem ersten Teil des Lindelöf'schen Satzes ergibt sich zunächst, daß die beiden durch L_1 und L_2 bestimmten Randpunkte gleiche z -Koordinate besitzen. Aus dem zweiten aber ergibt sich, daß man sie in beliebiger Nähe der Koordinate ihres Endpunktes durch eine Jordankurve verbinden kann. Denn wir hatten bei der Formulierung des Hilfssatzes II einen Jordanbereich erwähnt. In seinem Inneren ziehe man in beliebiger Nähe von P' einen Jordanbogen, der A_1 und A_2 verbindet. Ihm entspricht im Bereiche B eine Jordankurve, welche in beliebiger Nähe der Endkoordinate von L_1 und L_2 verläuft, weil doch auf den Jordankurven im Einheitskreis die Umkehrung der Abbildung Werte annimmt, die sich beliebig wenig von jener Koordinate unterscheiden. Aus unserer oben gegebenen Definition folgt daher, daß L_1 und L_2 im gleichen Randpunkte enden.

7. Stetigkeit der Abbildung am Rande. *In dem durch Hinzunahme der erreichbaren Randpunkte erweiterten Bereiche B' ist die Abbildungsfunktion stetig.*

D. h. um jeden Punkt P der Menge $\mathfrak{M}$, welche aus dem Inneren von B und aus den erreichbaren Randpunkten von B besteht, gibt es zu jedem gegebenen positiven ε eine Umgebung, in der die Werte der Abbildungsfunktion sich um weniger als ε von dem Werte in jenem Punkte P unterscheiden. Dabei ist der Umgebungsbegriff für einen inneren Punkt in dem üblichen Sinne, für einen Randpunkt in der vorhin erklärten Weise zu nehmen. Der Nachweis der Stetigkeit in inneren Punkten des Bereiches unterliegt keiner Schwierigkeit. Er ist in den bisherigen Betrachtungen selbstverständlich enthalten. Wir hatten auch schon erklärt, welche Randpunkte wir zur Umgebung eines gegebenen rechnen wolien. Wir hatten um die z -Koordinate des Randpunktes R , dessen Umgebung wir definieren wolien, einen Kreis gelegt, der eine den Randpunkt bestimmende stetige Kurve $\mathfrak{C}$ traf. Diëse hatten wir von R aus rückwärts bis zu ihrem ersten Treffpunkt P mit dem Kreis verfolgt. Der im Bereich B verlaufende Kreisbogen, welcher den Treffpunkt P mit dem R definierenden Wege $\mathfrak{C}$ enthält, grenzte die Umgebung ab. Man schreite auf dem Kreise von diesem Treffpunkt P aus nach beiden Seiten fort. Da die Kreisperipherie nicht ganz zu B gehören kann, falls sie klein genug ist, so stößt man dabei auf Randpunkte von B . Der Bereich B war ja einfach zusammenhängend angenommen. Man erhält also in den Enden des Kreisbogens zwei erreichbare Randpunkte, die von R und voneinander verschieden sind. Von R sind sie schon in der 0 -Koordinate verschieden. Sind sie voneinander nicht schon in der z -Koordinate verschieden, wie das z. B. in Fig. 4 ist,

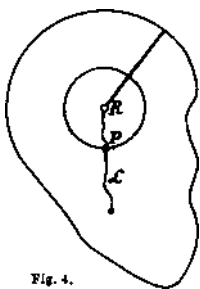


Fig. 4.

so kann man jedenfalls nicht in beliebiger Nähe ihrer gemeinsamen z -Koordinate die sie definierenden beiden Kreisbogen durch einen Jordanweg J aus dem Inneren von B verbinden. Denn man hätte sonst eine geschlossene Jordankurve, bestehend aus J und einem Bogen des Kreises um P . Sie würde bei der Abbildung in eine Jordankurve des Einheitskreises übergeführt, und das Innere der beiden Kurven müßte sich bei der Abbildung umkehrbar eindeutig entsprechen, was doch nicht der Fall sein kann, weil der Mittelpunkt des Kreises ein Randpunkt von B' ist. Unserem Kreisbogen entspricht daher in jedem Fall im Einheitskreis eine Jordankurve, welche zwei verschiedene Peripheriepunkte verbindet und die daher vom Einheitskreis ein sichelförmiges Gebiet S abschneidet. Diesem gehört das Bild A des Weges L an. Auf dem S begrenzenden Bogen des Eintrittskreises liegt das Bild R' von R . Die Siebel ist das umkehrbar eindeutige Bild der Umgebung von R . Man betrachte nun eine Folge von Kreisen um R als Mittelpunkt, die sich

auf B zusammenziehen. Diesen entspricht dann im Einheitskreis eine Folge ineinanderliegender Sicheln, die jedenfalls gleichmäßig gegen einen Bogen seiner Peripherie oder gegen den Punkt R' konvergieren. Das erstere ist aber aus dem früher schon herangezogenen Grunde unruöglich. Denn dann wäre wieder ein Bogen des Einheitskreises durch eine Folge von stetigen Kurven approximiert, auf welchen die beschränkte Umkehrungsfunktion der Abbildung einem konsanten Wert zustrebte. Damit ist die behauptete Stetigkeit bewiesen.

8. Am Bande des Einheitskreises liegen die Bilder erreichbarer Randpunkte überall dicht. Um das einzusehen, wählen wir einen beliebigen Punkt R' auf der Peripherie des Einheitskreises und wählen im Einheitskreis eine Folge von Punkten w_k , die gegen R' konvergieren. Diesen entsprechen im Bereiche B bestimmte Punkte z_k . Man darf annehmen, daß die z -Koordinaten der Punkte z_k gegen einen Wert z^* konvergieren. Dies ist dann die Koordinate eines Randpunktes R des schlichten Bereiches P . Wir dürfen sogar annehmen, daß die Entfernungen der z_k von R ständig abnehmen. Man kann dies ja alles erreichen, indem man statt der ursprünglichen w_k eine Teilfolge derselben nimmt. Alsdann lege man um R als Mittelpunkt Kreise durch die Punkte z_k , greife aus jedem einen von Randpunkten freien, z_k enthaltenden Bogen heraus. Diesem Kreisbogen entsprechen durch die Abbildung Jordanbögen im Einheitskreis, welche die Bilder zweier verschiedener erreichbarer Randpunkte verbinden. Zwei verschiedene dieser Jordanbögen sind punktfremd. Außerdem liegt auf ihnen die gegen P' konvergierende Punktfolge w_k . Diese Jordanbögen konvergieren entweder gegen R' , das dann also Häufungspunkt der Enden der Jordanbögen, d. h. der Bilder erreichbarer Randpunkte ist, oder aber diese Jordanbögen approximieren gleichmäßig einen Bogen des Einheitskreises. Da aber auf diesen Jordanbögen die Umkehrung der Abbildungsfunktion gegen die Abszisse z^* von P konvergiert, so stoßen wir wieder auf die durch Hilfssatz I gegebene Unmöglichkeit.

9. Bemerkung. Soweit wollen wir in der Betrachtung des Verhaltens der Abbildung am Rande des allgemeinsten ebenen Bereiches gehen. Man kann die durch die konforme Abbildung gestiftete Beziehung des Randes zu den Peripheriepunkten zu einer Analyse des Randes eines beliebigen schlichten beschränkten Bereiches benutzen. Das hat Carathéodory Annalen 73 ausgeführt. Man vgl. dazu auch Koebe in Crelles Journal Bd. 145. Was in der ersten Auflage dieses Buches auf S. 55 ff. über die Primteiler des Randes gesagt wurde, ist eine Verallgemeinerung dieser Untersuchungen. Ich füge nun noch einige nähere Angaben für speziellere Bereiche hinzu.

10. Stetigkeit der Abbildung auf einem im Rande enthaltenen Jordanschen Kuryenbogen. Zunächst werde angenommen, daß im Bande des Be-

reiches B ein Jordansches Kurvenstück J vorkommt, dessen innere, d. h. von den beiden Endpunkten verschiedene Punkte nicht Häufungspunkte von Randpunkten sind, welche dem Jordanbogen nicht angehören.¹⁾ Betrachtet man einen nicht an die Enden des Bogens heranreichenden Teilbogen J_1 , so hat derselbe von der Menge $\mathfrak{M}$ aller dem ganzen Bogen nicht angehörigen Randpunkte einen von Null verschiedenen Abstand. Da der Teilbogen nach dem Jordanschen Kurvensatz die Ebene nicht zerlegt, so bestimmt er einen einfach zusammenhängenden Bereich, in dem die nicht dem Bogen J_1 angehörigen Randpunkte von B liegen. Daher kann man ein Polygon Π angeben, das $\mathfrak{M}$ nicht trifft und das den Teilbogen J_1 im Innern enthält. Jeder der beiden weggelassenen kleinen Jordanbogen (durch die sich J und J_1 unterscheiden) trifft das Polygon Π , und daher gibt es einen in B verlaufenden Teilbogen Π_1 desselben, der zwei Punkte dieser kleinen Bögen verbindet. Dieser Querschnitt trennt vom Bereiche B eine Sichel ab, in deren Rand ein J_1 umfassender Teilbogen J , der Jordaukurve vorkommt. Diese Sichel ist einfach zusammenhängend, da sie vom einfach zusammenhängenden Polygon durch einen Querschnitt J_2 abgetrennt ist. Die Sichel ist umkehrbar eindeutig auf einen Teilbereich des Einheitskreises abgebildet. In seinem Rand kommt ein Teilbogen J'_2 der Peripherie vor. Auf diesem liegen die Bilder der erreichbaren Randpunkte des Jordanbogens J_2 aus dem Rande des Bereiches B . Nach einer von Schoenflies herrührenden Ergänzung des Jordanschen Kurvensatzes sind aber alle Punkte eines Jordanschen Kurvenbogens erreichbar. Die Bilder dieser erreichbaren Randpunkte erfüllen auch den ganzen Peripheriebogen J'_2 des Einheitskreises, der am Rande des Sichelbildes Teil hat. Denn gäbe es darauf einen Punkt P' , der nicht Bild eines erreichbaren Randpunktes ist, so betrachte man wieder eine Punktfolge w_k aus dem Einheitskreis, die gegen P' konvergiert. Die in der Sichel ihnen entsprechenden Punkte z_k konvergieren dann auch gegen einen bestimmten Punkt des Jordanbogens J_2 . Wäre das nämlich nicht der Fall, so könnte man zwei Teilfolgen herausgreifen, welche gegen verschiedene Punkte des Jordanbogens konvergieren. Da aber in diesen beiden Punkten, wie wir schon bewiesen, die Abbildung noch stetig ist, so müßen die beiden verschiedenen erreichbaren Randpunkte in den gleichen Peripheriepunkt übergehen. Wir haben aber oben schon gezeigt, daß sie in verschiedene übergehen. Somit haben wir jetzt durch jeden Zweig der Abbildung eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Umgebung des Jordanbogens J_2 , die auch auf diesem Bogen noch umkehrbar eindeutig und stetig ist und ihn in einen Bogen J'_2 des Einheitskreises überführt.

1) Im Falle der Fig. 1 wäre diese Voraussetzung für die linke untere Kantenhälfte des Quadrates nicht erfüllt.

Ist nun insbesondere der Bereich B von einer einzigen Jordanschen Kurve begrenzt, so ist die Abbildung im abgeschlossenen Bereiche stetig und bildet ihn umkehrbar eindeutig und stetig auf den vollen, durch seine Peripherie abgeschlossenen Einheitskreis ab.

11. Analytische Fortsetzung der Abbildungsfunktion. Man kann jetzt auch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angeben, daß die Abbildungsfunktion über den Bereich B hinaus analytisch fortgesetzt werden kann. Soll das natürlich möglich sein, so muß sich auch die eindeutige Umkehrungsfunktion der Abbildung über den Einheitskreis hinaus fortsetzen lassen. Dann aber wird durch sie der Bogen der Peripherie, über den hinaus die Fortsetzung möglich ist, in einen im Rande von B enthaltenen analytischen Kurvenbogen abgebildet, d. h. in einen Kurvenbogen, für den es eine Parameterdarstellung $z(t)$ durch eine analytische Funktion $z(t)$ gibt, deren Ableitung längs des Bogens nirgends verschwindet. Denn die Umkehrung der Abbildung liefert selbst eine solche Parameterdarstellung $z = \psi(e^{it})$, wenn man darin t den Bogen der Peripherie durchlaufen läßt, über den hinaus die Fortsetzung möglich ist. Man kann aber auch zeigen, daß diese notwendige Bedingung hinreichend ist. Denn gibt es im Rande einen analytischen Kurvenbogen $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, derart also, daß $z(t)$ in $\alpha \leq t \leq \beta$ analytisch ist, und daß die Ableitung $z'(t)$, im Intervall $\alpha \leq t \leq \beta$ nicht verschwindet, so wird durch diese Funktion eine passende Umgebung eines inneren Teilintervalles des Stückes $\alpha \leq t \leq \beta$ der reellen t -Achse umkehrbar eindeutig auf eine Umgebung eines Teiles des analytischen Randstückes abgebildet. Wählt man diese Umgebung hinreichend klein, so ist sie vollständig in dem Polygon enthalten, das man in der vorhin angegebenen Weise um den Teilbogen des analytischen Bogens herumlegen kann. Daher wird dann der Durchschnitt dieser Umgebung mit dem Bereich B durch die Abbildungsfunktion umkehrbar eindeutig auf einen Teilbereich des Einheitskreises abgebildet. Diese Abbildung ist auch auf dem analytischen Kurvenbogen noch stetig und führt ihn in einen Bogen der Peripherie des Einheitskreises über. Dieser Teilbereich des Einheitskreises erscheint also seinerseits durch Vermittlung der beiden eben angegebenen Abbildungen umkehrbar eindeutig auf einen Bereich abgebildet, der an einen Bogen der reellen t -Achse anstößt, und zwar so, daß die Abbildung auf dem Peripheriebogen noch stetig ist. Es kommt nur noch darauf an, zu zeigen, daß diese Abbildung auch auf dem Peripheriebogen noch analytisch ist. Dies folgt aber aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip (Bd. I S. 220).

Die Abbildungsfunktion ist also auf jedem im Bande enthaltenen analytischen Kurvenbogen analytisch, sofern sich in ihm nicht ihm fremde Randpunkte häufen.

12. Winkeltreue am Rand. An jeder Stelle, wo die als Jordansche Kurve angenommene Randkurve Tangenten besitzt, ist die Abbildung noch differenzierbar und daher auch winkeltreu und in den Ecken des Randes, d. h. wo zwei Randkurvenstücke, die beide mit Tangenten versehen sind, zusammenstoßen, ist die Abbildung noch winkelpropportional. Carathéodory hat in der Schwarz-Festschrift einen Beweis für die Winkeltreue gegeben. Einen weiteren Beweis hat Lindelöf gegeben. (Vgl. die Darstellung von Schlesinger in „Automorphe Funktionen“ Berlin 1924.) Dazu kommen neuerdings die Ausführungen von Carathéodory in den Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1929 S. 50 ff. Hier wird sogar unter gewissen Voraussetzungen die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

bewiesen, wenn a am Bereichsrand liegt und $f(a)$ die konforme Abbildung auf den Einheitskreis leistet. Wir betrachten zuerst den Sonderfall, wo zwei Kreisbogen die Ecke des Bereiches bilden. Hier kann man so überlegen: Die Ecke liege bei a und habe den Winkel α ($\alpha > 0$). Man wende eine Hilfsabbildung auf die dem Bereich angehörige Umgebung der Ecke an, die man so klein wähle, daß ihr nicht der andere Schnittpunkt b der beiden Kreisbogen angehört. Durch eine lineare Transformation

$$\xi \mapsto \frac{z - a}{z - b}$$

bildet man dann die Umgebung der Ecke auf ein Stück eines Winkelraumes der Öffnung α ab. Durch

$$\zeta = \xi^{\frac{1}{\alpha}}$$

wird dieser Winkel auf einen der Öffnung α abgebildet. Die Umgebung der Ecke ist so im ganzen in einen der Umgebung von $\zeta = 0$ angehörigen sich an eine Gerade anlehnenden Bereich übergegangen. Durch eine auch auf der Geraden noch reguläre Abbildung wird nun dieser Hilfsbereich auf den Teil des Einheitskreises abgebildet, welcher der Umgebung der Ecke bei der Abbildung des Bereiches auf den Einheitskreis entspricht. Diese einer vorhin befolgten ganz analogen Schlussweise lehrt, daß in der Umgebung der Ecke die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ nach Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ entwickelt werden kann, und daß in der Entwicklung das Glied

mit der ersten Potenz von $(z - a)^n$ einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat.

Ich gebe noch kurz den Gedankengang an, der nach Lindelöf¹⁾ im allgemeinen Fall zum Nachweis der Winkeltreue führt. Es werde vorausgesetzt, daß der Rand des abzubildenden Bereiches B eine Jordankurve sei, welche in einem Punkte a eine Tangente besitzt. $w = f(z)$ bilden den Bereich B konform auf $|w| < 1$ ab. Man betrachte die Potentialfunktion

$$\arg F'(z),$$

wo

$$F'(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Es ist

$$\arg F'(z) = u - v,$$

wo

$$\arg \{f(z) - f(a)\} = u, \quad \arg (z - a) = v \quad \text{ist.}$$

Sowohl u wie v sind beschränkt. Verpflanzt man $\arg \{F'(z)\}$ in die w -Ebene, so wird es eine im abgeschlossenen Einheitskreis stetige Funktion. Eine Ausnahme könnte nur die Peripheriestelle $f(a)$ bilden. Nähert man sich ihr aber von beiden Seiten auf der Peripherie, so erhält man jeweils die gleichen Grenzwerte, weil nämlich sowohl u wie v sich bei beiden Grenzübergängen genau um π geändert haben. Daher ist $v - u$ als Funktion von w im abgeschlossenen $|w| \leq 1$ stetig. Und darum existiert

$$\lim_{z \rightarrow a} \arg \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

bei beliebiger Annäherung an $z = a$. Will man einen analogen Satz für allgemeinere Bereiche beweisen, so kann man sich des Heftungs- bzw. Verschmelzungsverfahrens bedienen, das im Kapitel über Uniformisierung näher beschrieben wird. Man braucht dann nur noch anzunehmen, daß am Rande ein Jordanbogen liegt, der in einem seiner Punkte eine Tangente besitzt.

13.¹⁾ Mehrfach zusammenhängende Bereiche. Im Falle des endlich vielfach zusammenhängenden beschränkten Bereiches kann man die Frage der Banderzuordnung auf den Fall des einfach zusammenhängenden zurückführen. Man bilde nämlich zunächst den Teil der Ebene, welche nur von einem Randkontinuum des Bereiches begrenzt ist und diesen enthält, auf einen Kreis umkehrbar eindeutig ab. Diese Abbildung ist auf den

1) Vgl. die gerade vorhin zitierte Stelle.

2) Man vgl. die Bd. I S. 86 gegebene Definition.

anderen Kontinuis noch regulär. Und auf dem ersten ist die Ränderzuordnung nach dem, was wir über einfach zusammenhängende Bereiche wissen, bekannt. Den so aus dem gegebenen Bereich erhaltenen Bildbereich behandle man ebenso weiter, indem man nun ein anderes der Randkontinua in einen Kreis überführt. Dabei geht zwar das erste wieder in eine andere Kurve über. Aber es bleibt eine geschlossene analytische Kurve. So kann man nach und nach alle Randkontinua in geschlossene analytische Kurven überführen — soweit sie nicht aus isolierten Punkten bestehen. Die Funktion nun, die den so zugerichteten Bereich auf einen Kreis abbildet, ist an den nicht aus isolierten Punkten bestehenden Rändern noch regulär. Davon überzeugt man sich am besten folgendermaßen. Man betrachte eine einzelne der analytischen Randkurven und bilde den Bereich umkehrbar eindeutig so ab, daß diese in einen Kreis übergeht. Dann spiegele man den Bereich an diesem Kreis und wende auf den entstandenen Doppelbereich den Existenzsatz an. Man kann ihn also in einen Vollkreis überführen und zwar so, daß ein Punkt des Kreises an dem wir spiegelten, in den Mittelpunkt und die Richtung des Spiegelkreises in ihm in die der positiven reellen Achse übergeht. Da durch diese Festsetzungen die Abbildung eindeutig bestimmt ist, geht der Spiegelkreis in die reelle Achse über. Denn sonst könnte man durch Spiegelung am Kreise der einen Ebene und an der reellen Achse der anderen Ebene eine weitere Abbildung bekommen, die den gleichen Bedingungen genügt. Daher geht der ursprüngliche Bereich bei dieser Abbildung in einen Halbkreis über und die Abbildung ist am kreisförmigen Rande noch analytisch. Führt man nun durch elementare Prozesse den Halbkreis in den Vollkreis über, so sieht man, daß die Abbildung des gegebenen Bereiches es auf den Kreis in jedem analytischen Randstück noch analytisch ist.

§ 6. Beispiele zum Abbildungssatz.

1. Halbkreis. Auf S. 132/133 werden wir im Abschnitt über beschränkte Funktionen von der Abbildung eines Halbkreises $|z| < \rho, \Re z > 0$ auf die Kreisfläche Gebrauch machen. Man kann zu dieser Abbildung durch die folgende Erwägung gelangen. Man bildet erst durch eine lineare Transformation, die die eine Ecke des Halbkreises nach Null, die andere nach Unendlich bringt, den Halbkreis auf einen Quadranten ab. Durch Quadrierung führt man diesen in die Halbebene über und endlich gelangt man durch eine lineare Transformation zum Vollkreis. Die Durchführung dieser Überlegungen erfordert einige Rechnung. Um so deutlicher zeigt der folgende Weg zur Abbil-

dungsfunktion den Nutzen unserer allgemeinen Sätze. Wir werden ohne Rechnung dazu kommen, festzustellen, daß die Funktion

$$w = \frac{z - z_0}{z + \bar{z}_0} \cdot \frac{\rho^2 + z_0 z}{\rho^2 - \bar{z}_0 z},$$

wo z_0 ein beliebiger Punkt aus dem Inneren des Halbkreises ist, die Abbildung auf $|w| < 1$ leistet. Wir wissen nämlich, daß die Abbildungsfunktion auf den Randbogen regulär ist und daher durch Spiegelung über die Grenzen des Halbkreises fortgesetzt werden kann. In spiegelbildlichen Punkten nimmt sie spiegelbildliche Werte an. Bei der Spiegelung an einer Grenze des Halbkreises wird aus einer einfachen Nullstelle ein einfacher Pol. Wir suchen insbesondere die Abbildungsfunktion, welche die Stelle z_0 des Halbkreises in den Nullpunkt überführt. Spiegeln wir zunächst an der geraden Grenze des Halbkreises, die auf der imaginären Achse liegt, so finden wir, daß die Abbildung im ganzen entstehenden Kreis — im Inneren und am Rande regulär ist, außer bei $-\bar{z}_0$, wo sie einen einfachen Pol hat. Eine Ausnahme könnten nur die Ecken des Halbkreises bilden. Spiegeln wir nun an der krummen Grenze, so schließen wir, daß die Abbildung auch im Äußeren bis auf einen bei $\frac{\rho^2}{z_0}$ gelegenen einfachen Pol regulär ist. Eine einfache Nullstelle entsteht bei $-\frac{\rho^2}{\bar{z}_0}$. Die Überlegung lehrt zugleich, daß die Abbildungsfunktion in der z -Ebene eindeutig ist. Denn man denke sich erst in der z -Ebene den Übergang zum Vollkreis durch die erste Spiegelung vollzogen. In der Bildebene entspricht dabei dem vollen Kreis $|z| < \rho$ die volle längs eines Bogens von $|w| = 1$ aufgeschnittene Ebene. Dann spiegele man den Vollkreis an den Hälften seiner Peripherie weiter. Dem entsprechen in der w -Ebene die Spiegelungen an den beiden Ufern des eben genannten Einschnittes. So erkennt man, daß eine gerade Zahl solcher Spiegelungen, sowohl in der z -Ebene als in der Bildebene zum Ausgangswert zurückführt. Also ist die Abbildungsfunktion eindeutig und da sie, wie diese Schluffweise zugleich lehrt, in der Umgebung der Ecken des Halbkreises beschränkt ist, so ist sie nach dem Satz über hebbare Unstetigkeiten (Bd. I S. 148) auch dort regulär. Sie ist also eine eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion. Sie ist also eine rationale Funktion. Da wir Nullstellen und Pole kennen, so ist sie bis auf einen konstanten Faktor der Funktion

$$\frac{z - z_0}{z + \bar{z}_0} \cdot \frac{\rho^2 + z_0 z}{\rho^2 - \bar{z}_0 z}$$

gleich. Da diese aber am Rande des Halbkreises den Betrag Eins hat, so ist dieser konstante Faktor selbst eine Zahl vom Betrag Eins und unsere Aufgabe ist gelöst.

Die hier verwendete Schlufweise ist typisch. Wir wollen sie in ganz ähnlicher Weise noch auf zwei nützliche Beispiele anwenden.

2. Polygone. Zunächst die *Abbildung der Polygone auf die Kreisfläche*. Wir betrachten gcradlinig begrenzte Polygone mit n Ecken. Wir denken uns den Polygonrand so durchlaufen, daß das Polygoninnere zur linken liegt, also in dem S. SO von Bd. I definierten positiven Umlaufssinn. Die Ecken mögen bei w_k liegen und seien in der Reihenfolge numeriert, in der sie bei der Durchlaufung des Polygonrandes angetroffen werden. Der Winkel, um den man dann die in eine Ecke w_k einlaufende Polygonseite im positiven Sinn drehen muß, um sie in die aus der Ecke auslaufende folgende Seite überzuführen, kommt für unsere Betrachtung in Frage. Diese Winkel seien $\alpha_k \pi$, wobei $-1 \leq \alpha_k \leq +1$ sein soll. Auspringenden Ecken entspricht $\alpha_k > 0$, einspringenden Ecken dagegen $\alpha_k < 0$. $\alpha_k = +1$ entspricht den im unendlich-fernen gelegenen Ecken, in welchen also zwei parallele Polygonseiten zusammentreffen. $\alpha_k = 0$ kommt nicht vor. $\alpha_k = -1$ bedeutet den Endpunkt eines Einschnittes. Die Summe der so eingeführten Winkel ist 2π . Die Abbildung auf den Einheitskreis ist am Rande durchweg stetig, so daß auch den Ecken w_k bestimmte Punkte z_k der Kreisperipherie entsprechen.

Das Polygon liege in der w -Ebene. Durch die Operation $(w - w_k)^{\frac{1}{1-\alpha_k}} = w$ wird diesem Polygoninneren angehörnde Umgebung einer endlichen Ecke auf einen Bereich abgebildet, an dessen Grenze als Bild zweier in der Ecke zusammenstoßenden Polygonseitenstücke ein den Punkt $w = 0$ enthaltendes Stück einer geraden Linie teilbat. Da dieses bei der Abbildung des Polygoninneren auf die Kreisfläche in einen Kreisbogen übergehen muß, so bat man für die Abbildungsfunktion in der Umgebung der endlichen Ecke w_k eine Entwicklung von der Form

$$z = z_k + c_1 (w - w_k)^{\frac{1}{1-\alpha_k}} + \dots (c_1 \neq 0).$$

nach Potenzen von $(w - w_k)^{\frac{1}{1-\alpha_k}}$. Für die Umkehrungsfunktion findet man daraus

$$w = f(z) = w_k + \left\{ \frac{1}{c_1} (z - z_k) + \dots \right\}^{1-\alpha_k}.$$

Liegt die Ecke w_k im Unendlichen, so erhält man durch eine Funktion von der Form $w = e^{\alpha w}$ bei passender Wahl von α eine Abbildung des dem Polygoninneren angehörigen Teiles einer Umgebung der Ecke auf einen Bereich an dessen Rand ein Stück einer geraden Linie beteiligt ist. Daher kann man die Abbildung in der Umgebung nach Potenzen von $e^{\alpha w}$ entwickeln:

$$z = z_k + c_1 e^{\alpha w} + \dots (c_1 \neq 0)$$

$$w = \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{z - z_k}{c_1} + \dots \right).$$

Beachten wir jetzt, daß inau $f(z)$ durch Spiegelung um den Kreisbogen (z_k, z_{k+1}) fortsetzen kann. Man gelangt dabei zu Funktionswerten, die Polygone erfüllen, welche zu den entsprechenden Polygonseiten (w_k, w_{k+1}) spiegelbildlich liegen. Zu Polen von $f(z)$ wird man also nicht geführt. Eine gerade Anzahl von Spiegelungen führt außerdem in der z -Ebene zum Ausgangs wert zurück, während man dadurch in der w -Ebene zu einem kongruenten Polygon kommt, das somit durch eine ganze lineare Transformation aus dem ursprünglichen hervorgeht. Mit anderen Worten, die Funktion $f(z)$ ist unendlichvielfach und zwar gehen ihre verschiedenen zum gleichen z gehörigen Funktionselemente durch ganze lineare Transformation auseinander hervor. Setzen wir nun

$$f_1 = \gamma_1 f + \gamma_2,$$

so ist

$$\frac{d}{dz} \log \frac{df_1}{dz} = \frac{d}{dz} \log \frac{df}{dz}.$$

Dieser Differentialausdruck ist also gegenüber ganzen linearen Transformationen von $f(z)$ invariant. Somit ist

$$\varphi(z) = \frac{d}{dz} \log \frac{df}{dz}$$

eine eindeutige Funktion von z . Wir wollen sie zu bestimmen suchen. Zu diesem Zwecke untersuchen wir das Verhalten von $\varphi(z)$ in den Punkten z_k . Dies findet man durch Differentiation aus dem Verhalten von $f(z)$ selbst. Man hat so

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= (1 - \alpha_k) \left\{ \frac{1}{c_1} (z - z_k) + \dots \right\}^{\alpha_k} \left\{ \frac{1}{c_1} + \dots \right\} \\ \log \frac{df}{dz} &= \log(1 - \alpha_k) - \alpha_k \log(z - z_k) - \alpha_k \log \left\{ \frac{1}{c_1} + \dots \right\} + \log \left\{ \frac{1}{c_1} + \dots \right\} \\ (1) \quad \frac{d}{dz} \log \frac{df}{dz} &= \frac{-\alpha_k}{z - z_k} + \mathfrak{P}(z - z_k), \end{aligned}$$

im Fall der im Unendlichen gelegenen Ecke findet man ebenso

$$\frac{d}{dz} \log \frac{df}{dz} = \frac{-1}{z - z_k} + \mathfrak{P}(z - z_k),$$

so daß die Formel (1) für alle Ecken gilt.

Hier bedeutet $\mathfrak{P}(z - z_k)$ in üblicher Abkürzung eine nach ganzen positiven Potenzen von $z - z_k$ fortschreitende Potenzreihe. Die Funktion $\varphi(z)$ besitzt an der Stelle $z = z_k$ einen einfachen Pol vom Residuum $-\alpha_k$. Dies Residuum ist von Null verschieden. An allen anderen Stellen der z -Ebene ist, wie man leicht sieht, $\varphi(z)$ regulär. $\varphi(z)$ ist daher eine bis auf Pole reguläre Funktion. Sie ist also eine rationale Funktion, welche sich von

$$\sum \frac{-\alpha_k}{z - z_k}$$

nur um eine additive Konstante unterscheiden kann. Im Unendlichen muß

$$\varphi(z) = -\frac{2}{z} + \dots,$$

sein, damit in Anbetracht unserer Bestimmung der Winkelsumme die Summe der Residuen Null ist. Da aber auch die eben angeschriebene Funktion im Unendlichen verschwindet und eine ebenso beginnende Entwicklung hat, so ist

$$\varphi(z) = \sum \frac{-a_k}{z - z_k}.$$

Durch Integration gewinnt man daraus

$$(2) \quad f(z) = c_1 \int_0^z (z - z_1)^{-a_1} \cdot (z - z_2)^{-a_2} \cdot \dots \cdot (z - z_n)^{-a_n} dz + c_2,$$

wobei $a_k \neq 0$, $-1 \leq a_k \leq +1$ und $\sum a_k = 2$ ist, als allgemeine Gestalt derjenigen Funktionen, welche $|z| < R$ oder eine Halbebene auf ein Polygon abbilden. Soll nun ein bestimmt gegebenes Polygon herauskommen, so müssen die noch unbestimmten Zahlen

$$c_1, c_2, z_1, z_2, \dots, z_n$$

dementstprechend bestimmt werden. Dies ist eine im allgemeinen schwierige Aufgabe, mit der wir uns für den speziellen Fall des Rechtecks teils schon im ersten Bande beschäftigt haben, teils noch beschäftigen werden, wenn wir die elliptische Modulfunktion untersuchen. Im Falle des Rechtecks führt nämlich unsere Überlegung zum elliptischen Integral erster Gattung. Die Rechteckseiten sind durch die Integralperioden bestimmt und die Aufgabe ist gleichbedeutend mit der, zu gegebenem Periodenparallelogramm die zugehörige zweiblättrige Fläche zu finden.

Für den Fall des Dreiecks erledigt sich die Frage leicht, weil ein Dreieck durch seine Winkel der Gestalt nach bestimmt ist. Beachtet man noch, daß man durch lineare Abbildung von $|z| < R$ auf sich jedes Punktetripel des Randes in jedes andere überführen kann, so sieht man, daß man hier die drei Stellen z_1, z_2, z_3 beliebig wählen kann. Man bekommt dann immer ein Dreieck mit den gewünschten Winkeln, das man dann durch Ähnlichkeitstransformation (Bestimmung von c_1 und c_2) in die gewünschte Größe und Lage zu bringen hat. Ebenso sieht man leicht ein, daß

$$\int_0^z (1 - z^n)^{-\frac{2}{n}} dz$$

die Abbildung von $|z| < 1$ auf das Innere eines regulären Polygons liefert.

Ich füge noch die Bemerkung hinzu, daß auch umgekehrt jede Funktion (2) die Abbildung von $|z| < R$ oder der Halbebene, deren Rand die z_k angehören, auf ein Polygon leistet. Am besten führt man den Beweis

im Falle der Halbebene, auf den man den anderen durch lineare Transformation zurückführen kann. Der Leser möge das selbst durchführen.

3. Kreisbogendreieck. Als *letztes Beispiel* behandle ich eine Abbildungsaufgabe, die uns auf die *elliptische Modulfunktion* führen wird. In ihr gewinnen wir ein für allgemeine funktionentheoretische Zwecke außerordentlich wichtiges Hilfsmittel, auf das wir schon S. 16 hingewiesen haben. Es handelt sich um die Abbildung eines Kreisbogendreiecks, das von drei einander berührenden Kreisen begrenzt ist. Wir verfolgen hier nur das Ziel, uns einen Überblick über den Gesamtverlauf der Abbildungsfunktion zu verschaffen und vertagen das Auffinden der analytischen Darstellung der Modulfunktion auf ein besonderes dieser Funktion gewidmetes Kapitel. Es ist

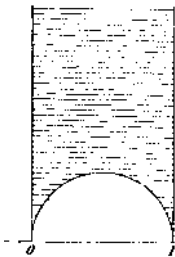


Fig. 5.

am bequemsten, das Kreisbogendreieck in der Halbebene $\Im(w) > 0$ und seine drei Ecken in den Punkten $0, 1, \infty$ anzunehmen. Wir wollen also das in Fig. 5 ersichtliche Dreieck abbilden. Als Bildbereich wählen wir zweckmäßig die Halbebene $\Im(\lambda) > 0$ und legen die Bilder der drei Ecken in die Punkte $0, 1, \infty$. Dann ist die Abbildung am Rande des Dreiecks noch stetig und in den inneren Punkten der Seiten analytisch. Die Abbildungsfunktion kann nach dem Spiegelungsprinzip analytisch fortgesetzt werden. In der ∞ -Ebene erhält man durch fortgesetztes Spiegeln immer neue der oberen Halb-

ebene angehörige Kreisbogendreiecke, während man in der λ -Ebene immer neue Halbebenen aneinanderreicht. Hier erhält man so eine unendlichvieltättrige Riemannsche Fläche, deren einzige Windungspunkte bei $0, 1, \infty$ liegen, Punkte, die keinem einzigen Blatt der Fläche als innere Punkte angehören. Durch fortgesetztes Spiegeln der Kreisbogendreiecke erhält man eine einmalige aber lückenlose Bedeckung der Halbebene $\Im(w) > 0$. Um das zu sehen, denken wir uns das Ausgangsdreieck zunächst an den vertikalen Begrenzungsgeraden gespiegelt. So erhält man einen aus drei kongruenten Dreiecken bestehenden Bereich, der unten von drei Halbkreisen und seitlich von zwei Vertikalen begrenzt ist. An diesen spiegeln wir wieder und fahren so in infinitum weiter. So wird ein Teil der oberen Halbebene mit kongruenten Dreiecken bedeckt. Er liegt oberhalb eines Zuges von kongruenten Halbkreisen. Nunmehr gehen wir zur Spiegelung an diesen Halbkreisen über. So erhalten wir die Bedeckung eines Teiles der oberen Halbebene, der wieder durch einen Zug von Halbkreisen von der reellen Achse getrennt wird. Um nun zu erkennen, daß man bei genügender Fortsetzung des Verfahrens jeden vorgegebenen Punkt der oberen Halbebene in den bedeckten Teil hineinbekommen kann, stellen

wir fest, daß bei jeder an einem Halbkreis erfolgenden Spiegelung zum mindesten der Teil des Halbkreises neu bedeckt wird, der oberhalb zweier Halbkreise vom halben Durchmesser liegt. Wir haben ihn in Fig. 4 schraffiert. Dies folgt sofort daraus, daß dieser schraffierte Teil bei der Spiegelung am Halbkreis ausserhalb über dem Halbkreis gelagert gleichfalls in der Fig. 6 gezeichneten Kreisbogendreieck hervorgeht. Es braucht dies keines der Dreiecke zu sein, die bei der Spiegelung aus einem Ausgangsdreieck hervorgehen. Aber dies Dreieck gehört jedenfalls vor der Spiegelung an den großen Halbkreis der Fig. 6 dem bedeckten Bereich an, weil ja vor dieser Spiegelung der ganze oberhalb gewisser Halbkreise gelegene Teil der Halbebene schon bedeckt ist und weil zu dieser Grenze des bedeckten Teiles auch der Halbkreis gehört, an dem wir spiegelten. Also werden die Radien aller den bedeckten Teil begrenzenden Halbkreise bei jeder Spiegelung auf mindestens die Hälfte reduziert und daher kommt nach einer genügenden Zahl von Spiegelungen ein beliebig vorgegebener Punkt der oberen Halbebene in den bedeckten Teil zu liegen. Daß die so erhaltene Bedeckung der Halbebene einfach ist, d. h. daß, wenn durch zwei verschiedene Spiegelprozesse ein Punkt überdeckt ist, die ihn bedeckenden Dreiecke sich decken, schließt man auf Grund des Monodromiesatzes, den man auf $\lambda(\omega)$



Fig. 6.

anwendet. Der Spiegelprozeß lehrt, daß man $\lambda(\omega)$ auf jedem Wege fortsetzen kann, der der Halbebene angehört. Daher ist $\lambda(\omega)$ eindeutig und daher müssen zwei einen gemeinsamen inneren Punkt besitzende Dreiecke sich decken. Man kann auch die Verwendung von $\lambda(\omega)$ vermeiden und mit dem geometrischen Beweisprinzip des Monodromiesatzes arbeiten.

4. Die elliptische Modulgruppe. Die Abbildungsfunktion $\lambda(\omega)$ nennen wir nun weiter eine *elliptische Modulfunktion*. Die Aufdeckung ihres Zusammenhangs mit den elliptischen Funktionen behalten wir einem besonderen Kapitel vor.

Hier sei nur noch erwähnt, daß sie eine automorphe Funktion ist. Damit ist gemeint, daß es eine Gruppe von linearen Transformationen

$$\omega_1 \mapsto \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

gibt, für die

$$\lambda(\omega_1) = \lambda(\omega)$$

gilt. Diese linearen Transformationen sind die aus einer geraden Zahl der schon benutzten Spiegelungen zusammengesetzten winkeltreuen Abbildungen der oberen Halbebene in sich. Denn bei einer geraden Zahl von Spiegelungen an Stücken der reellen Achse kommt in der λ -Ebene jeder Punkt

über einen mit gleichem λ zu liegen. $\lambda(\varpi)$ ist dann eine eindeutige überall reguläre Funktion in der oberen Halbebene, während die Umkehrfunktion $\varpi(\lambda)$ als Funktion von λ unendlich vieldeutig ist. Ihre verschiedenen zum gleichen λ gehörigen Werte hängen durch die Transformationen der Gruppe miteinander zusammen.

Diese Gruppe besteht aus denjenigen Transformationen, die ganzzahlige Koeffizienten der Determinante Eins besitzen, und deren Matrix modulo zwei der Einheitsmatrix kongruent ist:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Damit ist gemeint

$$\alpha \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1 \pmod{2}.$$

Um diese Angabe über die Struktur der Gruppe zu beweisen, gehen wir davon aus, daß sie die aus einer geraden Zahl von Spiegelungen bestehenden Transformationen und nur diese umfaßt. Diese Spiegelungen können aber alle aus den drei zu den Seiten des Ausgangsdreiecks gehörigen Spiegelungen hergestellt werden. Diese Spiegelungen seien nämlich S_0 , S_1 , S_k , wobei S_0 die Spiegelung an der im Punkte 0 errichteten Vertikalen v_0 , S_1 die Spiegelung an der Vertikalen v_1 im Punkte 1 und S_k die Spiegelung am Halbkreis k bedeutet. Betrachten wir z. B. das durch die Spiegelung S_0 entstehende Dreieck. Seine Seiten gehen durch die Operation S_0 aus den Seiten des gegebenen hervor. Die Seiten sind also $S_0(v_0)$, $S_0(v_1)$, $S_0(k)$. Die Spiegelung an $S_0(v_1)$ ist dann weiter nichts als die Operation¹⁾ $S_0S_1S_0$, wie man leicht nachprüft. Ebenso schließt man für die letzte Seite des neuen Dreiecks. Hat man allgemein ein Dreieck durch eine Kreisverwandtschaft S erhalten, so sind die Spiegelungen an seinen Seiten durch SS_0S^{-1} , SS_kS^{-1} , SS_1S^{-1} , wo S^{-1} die zu S inverse Operation bedeutet, gegeben. Wenn also für irgendein Dreieck die Spiegelungen an den Seiten sich aus den Ausgangsspiegelungen zusammensetzen lassen, und man dies Dreieck einer weiteren aus Spiegelungen aufgebauten Operation unterwirft, so erhält man ein neues Dreieck, bei dem die Spiegelungen an den Seiten sich gleichfalls aus den Ausgangsspiegelungen aufbauen lassen. Hierin liegt begründet, daß alle bei der Bedeckung der oberen Halbebene vorkommenden Spiegelungen sich aus den Ausgangsspiegelungen aufbauen lassen. Die obere Halbebene ist mit Dreiecken bedeckt, derart, daß die Spiegelungen an ihren Seiten sich aus den Ausgangsspiegelungen zusammensetzen. Denken wir uns nun eine Operation aufgeschrieben, die aus einer

1) Die in einem solchen Produkt zuletzt stehende Operation ist stets die zuerst auf w anzuwendende.

geraden Zahl von Spiegelungen zusammengesetzt ist, so sieht man sofort, daß diese aus den folgenden linearen Transformationen aufgebaut werden kann

$$S_0 S_1, S_1 S_0; S_0 S_k, S_k S_0; S_1 S_k, S_k S_1;$$

Diese sind paarweise invers, so daß wir nur drei derselben weiter untersuchen. Nun ist aber der analytische Ausdruck der drei Spiegelungen dieser:

$$S_0 \equiv (\omega_1 = -\omega); \quad S_1 \equiv (\omega_1 = 1 - (\omega - 1));$$

$$S_k \equiv \left(\omega_1 = \frac{\omega}{2\bar{\omega} - 1} \right).$$

Diese letztere ist ja nur eine andere Schreibweise für

$$(\omega_1 - \frac{1}{2})(\bar{\omega} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

Daher wird

$$S_k S_0 \equiv \left(\omega_1 = \frac{\omega}{2\bar{\omega} + 1} \right); \quad S_k S_1 \equiv \left(\omega_1 = \frac{\omega - 2}{2\bar{\omega} - 3} \right); \quad S_1 S_0 \equiv (\omega_1 = \omega + 2).$$

Dabei ist noch $S_k S_1 = S_k S_0 \cdot S_0 S_1$, so daß wir nun $S_k S_0, S_1 S_0$ weiter verwenden werden. Das sind aber lauter Transformationen der Determinante Eins mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Matrix der Einheitsmatrix modulo 2 kongruent ist. Nun übersieht man sofort, daß auch die Zusammensetzung zweier solcher Transformationen wieder eine mit der Determinante Eins und mit ganzzahligen Koeffizienten ergibt, welche der Einheitsmatrix modulo 2 kongruent ist. Also enthält jedenfalls die Gruppe der Modulfunktion keine anderen als solche Transformationen. Um nachzuweisen, daß sie auch alle diese Transformationen enthält, muß man zeigen, daß sich alle ganzzahligen Transformationen der Determinante Eins, deren Matrix der Einheitsmatrix modulo 2 kongruent ist, aus den T-Transformationen

$$S_k S_0 \quad \text{und} \quad S_1 S_0$$

und deren Inversen aufbauen lassen. Sei also

$$S \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine solche Transformation, so ist

$$(I) \quad S \cdot (S_1 S_0) \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta + 2\alpha \\ \gamma & \delta + 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$(II) \quad S \cdot (S_0 S_1) \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta - 2\alpha \\ \gamma & \delta - 2\gamma \end{pmatrix}$$

$$(III) \quad S \cdot S_k S_0 \equiv \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \beta \\ \gamma + 2\delta & \delta \end{pmatrix}$$

$$(IV) \quad S \cdot S_0 S_k \equiv \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta & \beta \\ \gamma - 2\delta & \delta \end{pmatrix}.$$

Verfährt man nun genügend oft mit S nach I oder II, so gewinnt man (wegen $\alpha \neq 0$, was aus $\alpha \equiv 1 \pmod{2}$ folgt) aus S eine Transformation, in der $|\beta| < |\alpha|$ ist. Mit der so erhaltenen verfährt man genügend oft nach III oder IV und erhält eine Transformation, in der wieder $|\alpha| < |\beta|$ ist. So kann man abwechseln und die Koeffizienten α, β fortwährend verkleinern. Das Verfahren kommt erst zum Stillstand, wenn $\beta = 0$ geworden ist. Dann ist aber auch $\alpha = \pm 1$ geworden und $\delta = \pm 1$, da ja die Determinante Eins ist. Verfährt man nun noch genügend oft nach III oder IV, so wird auch $\gamma = 0$. So ist man entweder zur Matrix $\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$ oder zur Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gelangt. Diesen entspricht aber dieselbe Transformation von w , nämlich die identische /. Es besteht also eine Gleichung von der Form

$$S \cdot (S_1 S_0)^{j_1} (S_2 S_0)^{j_2} (S_3 S_0)^{j_3} \dots (S_k S_0)^{j_k} = I.$$

Also ist

$$S = (S_0 S_k)^{j_k} \dots (S_0 S_1)^{j_1} \cdot (S_0 S_k)^{j_k} \cdot (S_0 S_1)^{j_1}$$

und damit ist erkannt, daß man jede ganzzahlige Transformation der Determinante Eins, die der Einheitsmatrix modulo 2 kongruent ist, aus einer geraden Zahl unserer Spiegelungen aufbauen kann.

Ich schließe noch eine Bemerkung über den Verlauf der Modulfunktion bei Annäherung an eine Ecke des Ausgangsdreieckes an. Ich behaupte, daß die Limesgleichungen

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lambda(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 1} \lambda(\omega) = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \lambda(\omega) = \infty$$

gleichmäßig gelten, wenn man sich der betreffenden Ecke in einem der oberen Halbebene angehörigen Winkelraum nähert, dessen Schenkel nicht auf die reelle Achse fallen.

Wegen der Stetigkeit der Abbildungsfunktion bei Annäherung an die Ecken gelten diese Limesgleichungen jedenfalls gleichmäßig, wenn man sich diesen Ecken im Ausgangsdreieck nähert. Ich betrachte z. B. die Ecke Null weiter. Bei den anderen schließt man ganz analog. Von ihr kann man mit Hilfe eines die reelle Achse in $w = 0$ berührenden Kreises einen Zipfel abschneiden, in dem $|\lambda(\omega)| < \varepsilon$ ist. Ich behaupte nun, daß auch in dem diesem Kreis angehörigen Teil eines Winkels, dessen Scheitel in 0 liegt und der ganz der oberen Halbebene angehört

$$|\lambda(\omega)| < \varepsilon$$

ist (vgl. Fig. 7). Um das einzusehen, betrachte ich die beiden durch Spiegelung an v_0 auseinander hervorgehenden Kreisbogendreiecke der Figur. Auch in dem dem Kreis angehörigen Zipfel des zweiten Dreiecks ist nach dem Spiegelungsprinzip $|\lambda(\omega)| < \varepsilon$. Denn in diesem Zipfel

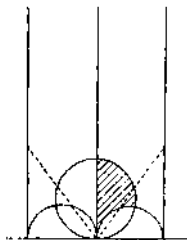


Fig. 7.

nimmt ja $\lambda(w)$ nur die Werte an, welche zu den im schraffierten Zipfel angenommenen konjugiert imaginär sind.

Nun denken wir uns diese beiden Dreiecke wieder an ihren durch 0 hindurchgehenden Seiten gespiegelt. Bei diesen Spiegelungen geht der Berührungskreis in sich über und aus den beiden Zipfeln entstehen neue ihm angehörige Zipfel, die sich neben die beiden schon vorhandenen lagern. Spiegelt man wieder an deren Seiten, so erhält man neue. Und die Fortsetzung des Verfahrens lehrt, wie man den ganzen Berührungskreis mit Spiegelbildern des ersten zudecken kann. Dabei aber erhält man nur Werte der Modulfunktion, deren Betrag unter ϵ liegt. Denn bei jeder Spiegelung bleibt der absolute Betrag der Modulfunktion ungeändert. Unser Beweis lehrt, daß in jedem Kreis, der in $w = 0$ die reelle Achse berührt, $\lambda(w)$ beschränkt ist.

Auf der reellen Achse liegen nun die Punkte, welche man aus $w = 0$ durch die Transformationen der Gruppe erhalten kann, an den Stellen β/δ . Diese liegen überall dicht. Denn hier kann β eine beliebige gerade und d eine beliebige dazu teilerfremde ungerade Zahl sein. Zu diesen beiden teilerfremden Zahlen kann man aber nach dem euklidischen Teilverfahren bekanntlich immer zwei Zahlen α und γ finden, für die $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. Dabei muß α ungerade sein. Falls γ gerade ist, bestimmen die vier Zahlen eine Operation der Gruppe. Ist aber γ ungerade, so beachte man, daß der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ auch Genüge geschieht, wenn man γ um das ungerade δ und zugleich α um β vermehrt. Man gelangt daher jedenfalls von den gegebenen β, δ aus, zu Operationen der Gruppe. Die Bilder von 0 liegen so überall dicht auf der reellen Achse. Aus jedem in $w = 0$ die reelle Achse berührenden Kreise wird ein im Bildpunkt die reelle Achse berührender Kreis. Bei den Operationen der Gruppe bleibt die Modulfunktion ungeändert. Also strebt sie bei Annäherung an den Punkt β/δ auch gegen Null. Daraus folgt, daß die Modulfunktion über die reelle Achse nicht fortgesetzt werden kann. Denn in einer Umgebung einer regulären Stelle liegen nur endlich viele Nullstellen. Die Umkehrfunktion der Modulfunktion ist also in der λ -Ebene überall außer bei 0, 1, ∞ regulär und nimmt nur Werte mit positivem Imaginärteil an.

§ 7. Nähere Untersuchung der Abbildungsfunktion im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche.

1. Die Uniformisierungseigenschaft der Abbildungsfunktion. Die elliptische Modulfunktion setzte uns S.16 in Stand zu zeigen, daß man jeden beliebigen schlichten Bereich mit mindestens drei Randpunkten durch

eine in ihm reguläre Funktion auf eine Kreisscheibe abbilden kann. Sie hat stets endlichen Radius. Im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche sahen wir auch schon S. 3 ff, daß die Abbildung nicht umkehrbar eindeutig sein kann. Es bietet daher Interesse, den Zusammenhang der verschiedenen Zweige der Abbildungsfunktion näher zu untersuchen.

An die Spitze dieser Untersuchung stellen wir die *Uniformisierungseigenschaft der Abbildungsfunktion*: Jede im Bereiche B reguläre Funktion ist eine eindeutige Funktion der Abbildungsfunktion. Unter einer in B regulären Funktion verstehen wir eine Funktion, die sich auf jedem B angehörigen Weg analytisch fortsetzen läßt. Eine solche Funktion ist also nicht notwendig eindeutig, obwohl sie in der Umgebung jeder Stelle eindeutig ist.

Ist nämlich $\varphi(z)$ in B regulär und ist $\psi(w)$ die Umkehrungsfunktion der Abbildungsfunktion, also in $|w| < 1$ regulär, so ist $\varphi\{\psi(w)\}$ im Einheitskreis regulär, also auch eindeutig. Gibt es also irgend zwei Funktionen, welche in B regulär sind und ihn auf den schlichten Einheitskreis abbilden, so ist jede eine eindeutige Funktion der anderen. Beide eindeutige Funktionen sind im Einheitskreis regulär und nehmen darin nur Werte an, die selbst den ganzen Einheitskreis erfüllen. Da aber jede die Umkehrung der anderen ist, so vermitteln sie eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Einheitskreises auf sich. Daher ist nach S. 1/2 *jede Abbildungsfunktion eine lineare Funktion jeder anderen*. Daraus folgt z. B., daß die Abbildungsfunktion eindeutig bestimmt ist, wenn man verlangt, daß ein gegebener Punkt aus B in den Mittelpunkt des Einheitskreises übergehen soll und daß zwei in diesen Punkten vorgeschriebene Richtungen einander entsprechen sollen.

Betrachtet man weiter zwei zum gleichen Punkt von B gehörige Funktionselemente einer Abbildungsfunktion, so erhält man durch analytische Fortsetzung derselben zwei Abbildungen von

auf den Einheitskreis. Daher sind beide lineare Funktionen voneinander, und diese linearen Funktionen vermitteln eine Abbildung des Einheitskreises auf sich. Daraus folgt, daß die *verschiedenen zu ein und demselben Punkt gehörigen Elemente der Abbildungsfunktion sich auseinander mittels linearer Transformation des Einheitskreises in sich gewinnen lassen*.

2. Die Gruppe der Abbildungsfunktion. Die linearen Transformationen, welche den Übergang zwischen den verschiedenen Zweigen einer Abbildungsfunktion vermitteln, bilden eine Gruppe. Sind nämlich f , $L_1(f)$ und $L_2(f)$ drei zum gleichen Punkt von B gehörige Funktionselemente einer Abbildungsfunktion, und sind dabei also $L_1(f)$ und $L_2(f)$ lineare Transformationen des Einheitskreises in sich, so gibt es einen Weg im Bereich B , längs dem man in $L_2(f)$ fortsetzen kann. Setzen wir aber das Funktionselement $L_2(f)$ längs dieses Weges fort, so gelangen wir

zu $L_2 \{L_1(f)\}$. Also ist auch $L_2\{L_1(f)\}$ ein Funktionselement der Abbildungsfunktion, das zum gleichen Punkt gehört, wie f selbst. Darin kommt die Gruppeneigenschaft zum Ausdruck. Mit jeder Operation $L(f)$ gehört auch die inverse $L^{-1}(f)$ zur Gruppe. Denn durchläuft man den Weg, auf dem man von f zu $L(f)$ gelangte, rückwärts, so gelangt man von $L(f)$ zu f , also von f selbst zu $L^{-1}(f)$.

Ist $S(w)$ eine beliebige Operation der Gruppe, so genügt die *Umkehrfunktion der Abbildungsfunktion* der Funktionalgleichung $\psi\{S(w)\} = \psi(w)$. Das drückt man aus, indem man sagt, sie sei eine *automorphe Funktion der Gruppe*.

Einem jeden Punkt des Bereiches B entspricht also bei der Abbildung auf den Einheitskreis eine gewisse Menge von Bildpunkten, wir wollen sagen eine Menge *äquivalenter* Punkte. Sie gehen durch die Operationen der Gruppe aus einem beliebigen derselben hervor. Jedem Weg im Einheitskreis, der von einem Punkte zu einem äquivalenten führt, entspricht im Bereiche B ein geschlossener Weg, auf dem die Funktionselemente der Abbildung eine entsprechende lineare Transformation erleiden.

3. Die Fixpunkte der Operationen der Gruppe. Keine von der identischen verschiedene Operation besitzt einen Fixpunkt im Inneren des Einheitskreises. Denn eine Transformation des Einheitskreises in sich, welche einen inneren Punkt w_0 festläßt, und die von der identischen Transformation verschieden ist, ist eine elliptische Transformation; d. h. sie hat den Charakter einer Drehung. Es gibt dann in beliebiger Nähe dieses Fixpunktes Paare äquivalenter Punkte. Andererseits aber wird durch die Umkehrung der Abbildungsfunktion eine genügend kleine Umgebung des Fixpunktes w_0 auf die schlichte Umgebung eines Punktes z_0 aus dem Bereiche B abgebildet. Diese schlichte Umgebung bedeckt also keinen Punkt von B mehrfach, während doch jedes Paar äquivalenter Punkte denselben Punkt von B liefern muß. In der Gruppe kommen somit nur hyperbolische und parabolische Transformationen vor. Darin liegt, daß die Gruppe *stets unendlich* ist. Ist nämlich S eine hyperbolische oder parabolische Transformation, so sind unter den Transformationen $S, S^2, S^3, \dots$ keine gleichen enthalten. Man sieht dies sofort, wenn man S in der in Bd. I besprochenen Normalform schreibt.

4. Der Fundamentalbereich der Gruppe. Äquivalente Punkte besitzen im Inneren des Einheitskreises keinen Häufungspunkt. Denn sonst müßte die Umkehrfunktion der Abbildung, die doch in äquivalenten Punkten den gleichen Wert annimmt, konstant sein. Wir bringen diesen Sachverhalt zum Ausdruck, indem wir sagen, die Gruppe sei im Innern des Einheitskreises *eigentlich diskontinuierlich*.

Unter einem *Fundamentalbereich der Gruppe* verstehen wir eine zusammenhängende Punktmenge aus dem Einheitskreis, die zu jedem Punkte dieses Kreises

genau einen äquivalenten enthält. Wir können sagen, ein Fundamentalbereich sei das Bild, das ein Zweig der Abbildungsfunktion vom Bereiche B entwirft. Unsere nächste Aufgabe soll es sein, einen solchen Fundamentalbereich anzugeben. Aus seiner Untersuchung wird sich dann weiterer Aufschluß über die Natur der Gruppe und damit über den Verlauf der Abbildungsfunktion ergeben.

5. Kreisgeometrische Maßbestimmung. Ich werde eine besondere Art von Fundamentalbereichen, die sog. *Normalbereiche* konstruieren. Man wählt dazu einen beliebigen Punkt a des Kreisinneren und betrachtet die Menge aller Punkte, die im Sinne einer gleich zu definierenden *kreisgeometrischen Maßbestimmung* näher an a liegen als an den mit a äquivalenten Punkten. Aus dieser Punktmenge erhält man durch Hinzunahme geeigneter Randpunkte derselben einen Fundamentalbereich.

Im Sinne der erwähnten Maßbestimmung versteht man unter der Distanz¹⁾ zweier Punkte w_1 und w_2 aus dem Inneren des Kreises oder von seinem Rande den Wert des Ausdruckes

$$(w_1, w_2) = \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_1 w_2} \right|.$$

Dieser Wert ist für zwei im Inneren gelegene Punkte kleiner als Eins. Er bekommt den Wert Eins, wenn einer der beiden Punkte am Rande gewählt wird. Denn $\frac{w_1 - w_2}{1 - \bar{w}_1 w_2}$ vermittelt eine Abbildung von $|w_2| < 1$ auf sich.

Man kann diesen Abstand auf den euklidischen zurückführen, indem man beide Punkte einer linearen Transformation des Einheitskreises in sich unterwirft, welche den einen der beiden Punkte in den Nullpunkt überführt. Jede solche Abbildung von $|w| < 1$ in sich wird nämlich durch

$$\varepsilon \frac{w - w_1}{1 - \bar{w}_1 w}, \quad \text{wo} \quad |\varepsilon| = 1$$

vermittelt. Dabei geht w_2 in den Punkt

$$\varepsilon \frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2}$$

über, dessen euklidischer Abstand vom Koordinatenanfangspunkt dem kreisgeometrischen Abstand von w_1 und w_2 gleich wird. Daher ist dieser Abstand auch unveränderlich, wenn man beide Punkte w_1 und w_2 der gleichen linearen Transformation des Einheitskreises in sich unterwirft. Mit Rücksicht auf spätere Verwendung zeige ich noch, daß für irgend drei verschiedene Punkte a, b, c aus dem Kreisinneren

$$(a, c) < (a, b) + (b, c)$$

1) Die Ausdrücke Distanz, dichter bei, kreiskonvex, beziehen sich in der Folge auf die kreisgeometrische Maßbestimmung und entsprechen den Ausdrücken Entfernung, näher bei, konvex der gewöhnlichen Maßbestimmung.

gilt. Nach dem gesagten genügt es, dies für den Fall zu beweisen, daß $a \rightarrow 0$, $b > 0$ ist. Dann ist also zu zeigen, daß

$$|c| < b + \left| \frac{b-c}{1-bc} \right|.$$

Das ist für $|c| \leq b$ evident

Zum Beweis für $|c| > b$ betrachte ich alle c von festem absoluten Betrag auf einmal. Sie erfüllen einen Kreis um $iv = 0$ als Mittelpunkt. Es genügt unsere Ungleichung für denjenigen Punkt dieses Kreises zu beweisen, dessen Distanz von b möglichst klein ist. D. i. aber ersichtlich der positiv reelle Punkt dieses Kreises, so das nur für $c > 0$ zu verifizieren ist, daß

$$c < b + \frac{c-b}{1-bc}$$

ist. Das ist aber evident.

6. Konstruktion eines Fundamentaltbcreiches. Ich gehe zur näheren Betrachtung eines *Normalbereiches* über. Er besteht nach Definition aus den Kreispunkten, welche kleinere Distanz von seinem Mittelpunkt a als von irgendeinem mit a äquivalenten Punkt haben, vereinigt mit gewissen Häufungspunkten dieser Punktmenge. Ich betrachte zunächst die *inneren* Punkte des Normalbereiches, d.h. die Punkte, die *dichter* an a liegen, als an den mit a äquivalenten Punkten. Es ist leicht zu sehen, daß unter diesen Punkten keine zwei miteinander äquivalenten vorkommen. Denn sind b und b' irgend zwei untereinander äquivalente Punkte, so führt die Transformation der Gruppe, welche b in V überführt, a in a' d., i. in einen von a verschiedenen¹⁾ aber mit a äquivalenten Punkt über. Liegt dann b dichter an a als an jedem mit a äquivalenten Punkt, so liegt b' dichter an a als an irgendeinem anderen mit a äquivalenten Punkt, also auch dichter bei a als bei a . Der Normalbereich kann also im Inneren keine zwei miteinander äquivalente Punkte besitzen. Am Rande, wo Punkte liegen, welche gleiche Distanz von a und einem mit a äquivalenten Punkte haben, können sehr wohl Paare äquivalenter Punkte vorkommen. Wir werden das nachher noch näher untersuchen. Vorab nur die Bemerkung, daß jedenfalls der Normalbereich (im Inneren oder am Rande) zu jedem Punkte des Kreises mindestens einen äquivalenten enthält. Denn ist b' ein beliebiger Punkt, so suche man unter den mit a äquivalenten Punkten einen a auf, der möglichst dicht bei b' liegt. Einen solchen gibt es, weil in gleicher Distanz von b' nur endlich viele mit a äquivalente Punkte liegen. Diese können sich ja nicht im Kreisinneren häufen und der Ort der Punkte w , welche von einem gegebenen w_1 eine gegebene Distanz ϱ haben, ist der Kreis

$$\left| \frac{w-w_1}{1-\overline{w_1}w} \right| = \varrho,$$

1) Die Operationen der Gruppe haben ja keine Fixpunkte im Kreisinneren.

welcher für $\varrho < 1$ ganz im Inneren des Einheitskreises liegt. Führt man dann linear a in a' über, so geht b' in einen Punkt b des Normalbereiches oder seines Randes über. Ein innerer und ein Randpunkt des Normalbereiches können nicht äquivalent sein, weil es zu jedem Randpunkt mindestens einen mit a äquivalenten Punkt gibt, der von ihm ebenso weit wie a entfernt ist, während für die inneren Punkte solche mit a äquivalenten Punkte fehlen. Wenn somit im Inneren oder am Rand des Normalbereiches zu jedem Punkt aus dem Kreisinneren mindestens ein äquivalenter liegt, wenn weiter zwei innere Punkte desselben nie einander äquivalent sind, wenn endlich ein innerer und ein Randpunkt nicht äquivalent sein können, so erhält man aus dem Normalbereich einen Fundamentalbereich, in dem man zu dem Inneren des Normalbereiches geeignete Handpunkte hinzunimmt und nur Sorge trägt, daß nicht zwei Randpunkte äquivalent sind.

7. Der Fundamentalbereich besitzt ein Inneres. Die inneren Punkte des eben eingeführten Fundamentalbereiches besitzen eine Umgebung, welche ganz dem Fundamentbereich angehört. Es sei b ein innerer Punkt des Fundamentalbereiches, welcher also dichter bei a liegt, als bei den mit a äquivalenten Punkten. Ich nehme an, es gebe beliebig dicht bei demselben Punkte c_k , derart, daß zu jedem ein mit a äquivalenter Punkt a_k gehöre, von dem er geringere oder die gleiche Distanz hätte als von a selbst. Die Distanz des Punktes b von a sei s . Da die Distanz zweier Punkte stetig von dem Punktepaar abhängt, so haben die genügend dicht bei b gelegenen Punkte c_k von a Distanzen, die s nicht sehr übertreffen. Wir brauchen also bei beliebig gegebenem positiven s nur solche Punkte c_k aus einer Kreisscheibe um b zu betrachten, die von dem dichtest bei ihnen gelegenen mit a äquivalenten Punkte a_k höchstens die Distanz $s + \varepsilon$ haben. Da es aber in dieser Distanz $s + \varepsilon$ von den Punkten einer Kreisscheibe um b nur endlich viele mit a äquivalente Punkte gibt¹⁾, $s > 0$ muß unendlich vielen der gegen b konvergierenden Punkte c_k der gleiche mit a äquivalente Punkt a zugeordnet sein. Wieder wegen der Stetigkeit der Distanz hat dann auch b von a höchstens die Distanz $s + \varepsilon$. Da aber ε beliebig

1) Gäbe es nämlich unendlich viele Punkte a_k , die von einem Punkte z_k der Kreisscheibe höchstens die Distanz $s + \varepsilon$ haben, so gäbe es unendlich viele Punktepaare $z_k a_k$ mit lauter verschiedenen a_k , deren Distanz höchstens $s + \varepsilon$ ist und deren erster Punkt z_k der Kreisscheibe angehört. Die z_k haben in dieser einen Häufungspunkt z . Man betrachte die Punktepaare $z_k a_k$ weiter, für die z_k gegen z konvergiert. Die zugehörigen a_k haben einen Häufungspunkt a' , und man betrachte Punktepaare weiter, für die $z_k \rightarrow z'$ und $a_k \rightarrow a'$ strebt. Dann ist auch die Distanz $z' a'$ höchstens $s + \varepsilon$. Und es hat z' von unendlich vielen verschiedenen Punkten a_k eine Distanz die nur wenig größer als $s + \varepsilon$, also noch kleiner als Eins ist. Das ist aber unmöglich, weil sich die a_k im Inneren des Einheitskreises nicht häufen.

gewählt war, und die Distanz ba' von ϵ nicht abhängt¹⁾, so ist die Distanz ba' höchstens s . Da aber b ein innerer Punkt des Fundamentalbereiches war, so ist $\alpha = \alpha'$. Und damit ist bewiesen, daß den Punkten aus einer gewissen Umgebung von b als dichtestgelegener Punkt wieder a zugeordnet ist.

8. Der Rand des Fundamentalbereiches. Ich betrachte den Rand des Fundamentalbereiches etwas näher. Dazu bemerke ich zunächst, daß der Ort derjenigen Punkte aus dem Inneren des Einheitskreises, welche von zwei Punkten w_1 und w_2 gleiche Distanz haben, ein zum Einheitskreis orthogonaler Kreis ist, in bezug auf den w_1 und w_2 spiegelbildlich zueinander liegen. Um das bequem festzustellen, beachten wir wieder, daß unsere Behauptung gegenüber linearen Transformationen des Einheitskreises in sich invariant ist. Durch eine solche lineare Transformation führen wir w_1 und w_2 in die beiden Punkte $-\alpha$ und $+\alpha$ der reellen Achse über. Dann ist der Ort derjenigen Punkte, welche von beiden gleiche Distanz haben durch

$$\left| \frac{w + \alpha}{1 + w\alpha} \right| = \left| \frac{w - \alpha}{1 - w\alpha} \right|$$

gegeben. Bringt man beide Seiten auf den gleichen Nenner, so folgt

$$|w + \alpha - \alpha w^2 - \alpha^2 w| = |w - \alpha + \alpha w^2 - \alpha^2 w|.$$

Oder w
$$\begin{aligned} & (w + \alpha - \alpha w^2 - \alpha^2 w)^2 + (v - 2\alpha w - \alpha^2 v)^2 \\ &= (w - \alpha + \alpha w^2 - \alpha^2 w)^2 + (v + 2\alpha w - \alpha^2 v)^2. \end{aligned}$$

Oder anders geschrieben
$$4\alpha(w - \alpha^2 w)(1 - w^2 + v^2) = 8\alpha w v (v - \alpha^2 v).$$

D. h.
$$4\alpha w(1 - \alpha^2)(1 - w^2 - v^2) = 0.$$

Der geometrische Ort besteht also aus der Peripherie des Einheitskreises, deren Punkte, wie früher schon festgestellt wurde, von jedem inneren Punkte die Distanz Eins haben und aus der imaginären Achse, also einem zum Einheitskreis orthogonalen Kreis, in bezug auf den die beiden Punkte spiegelbildlich liegen.

Der im Inneren des Einheitskreises enthaltene Rand des Fundamentalbereichs wird von denjenigen Punkten gebildet, welche von a und mindestens einem mit a äquivalenten Punkte die gleiche Distanz haben. Betrachten wir nun die Umgebung eines im Inneren des Einheitskreises ge-

1) Verkleinert man nämlich t , so kommen keine neuen Punkte in Betracht, sondern nur ein Teil der bei größerem f schon verwendeten.

legen den Randpunktes und wählen sie so klein, daß sie ganz im Inneren des Einheitskreises liegt. Es gibt nur endlich viele mit a äquivalente Punkte, welche von einem Punkte dieser Umgebung, die man sich als Kreisscheibe vorstellen möge, die gleiche Distanz wie von a haben.¹⁾ Daher treten in diese Kreisscheibe nur endlich viele Orthogonalkreisbögen ein, deren Punkte von a und einem der mit a äquivalenten Punkte gleiche Distanz haben. Es ergibt sich, daß der in jener Kreisscheibe enthaltene Teil des Randes unseres Normalbereiches von endlich vielen Orthogonalkreisbögen gebildet wird. Diese Überlegung lehrt zugleich, daß die *Ecken des Fundamentalbereiches*, d. h. diejenigen Randpunkte des Normalbereiches, die von mehr als zwei mit a äquivalenten Punkten die gleiche Distanz haben, sich im Inneren des Einheitskreises nicht häufen können.

9. Der Fundamentalbereich ist ein im Sinne unserer Maßbestimmung konvexer Bereich. Wir sagen er sei *kreiskonvex*. D. h. mit je zweien seiner Punkte aus dem Inneren des Einheitskreises gehört seinem Inneren oder seinem Rande auch der sie verbindende Orthogonalkreisbogen an. Sind nämlich P und Q zwei solche Punkte, so sind sie von a nicht weiter entfernt als von irgend einem mit a äquivalenten Punkt. Der Ort derjenigen Punkte des Einheitskreises, welche von zwei Punkten a und a gleichen Abstand haben, ist ein sie trennender Orthogonalkreis. Daher trennt kein am Rande des Normalbereiches beteiligter Orthogonalkreis P oder Q von a . Zwei Orthogonalkreise sind entweder identisch oder sie treffen sich im Inneren des Einheitskreises nur in einem Punkt. Der P mit Q verbindende Orthogonalkreisbogen liegt somit wie P und Q selbst auf derjenigen Seite aller Randkreise des Normalbereiches, auf der a liegt, oder er gehört dem Rande an. Sind also P und Q zwei innere Punkte, so gehört auch der sie verbindende Kreisbogen ganz dem Inneren an. Ist aber P ein innerer und Q ein Randpunkt, so gehört der Kreisbogen mit Ausnahme des einen Punktes Q ganz dem Inneren an. Sind endlich P und Q zwei Randpunkte, so gehört der sie verbindende Kreis entweder mit Ausnahme dieser beiden Punkte dem Inneren an, oder aber er gehört vollständig dem Rande an. Hat er nämlich einen Punkt J mit dem Inneren gemein, so kann, wie wir schon sahen, weder der Bogen PJ noch der Bogen QJ das Äußere oder den Rand in einem von P oder Q verschiedenen Punkte treffen. Dann liegt also der Bogen PQ ganz im Inneren. Stets zerlegen P und Q den sie verbindenden Orthogonalkreis in zwei Bogen, von denen der dem Inneren des Einheitskreises angehörige in Betracht kommt. Gehören P und

1) Das lehrt eine Schlußweise ähnlich der in Fußnote 1) von S. 19 verwendeten.

Q nicht demselben Handbogen an, so verläuft er nicht ganz im Rande des Normalbereiches, und durchsetzt daher bei P oder Q seinen Rand und muß daher wegen seiner oben erwähnten Lage in Bezug auf die anderen Randbogen innere Punkte desselben treffen.

10. Zerlegung des Kreisinncrcn in Fundamentalbereiche. Ich konstruiere nun zu allen mit a äquivalenten Punkten die Normalbereiche. Dadurch wird das *Kreisinncre in Normalbereiche eingeteilt*, die zueinander äquivalent sind. Diese Normalbereiche sind lauter kreiskonvexe von Orthogonalkreisen begrenzte Polygone. Die am Rande beteiligten Orthogonalkreisbogen sind paarweise durch die Operationen der Gruppe äquivalent. Denn betrachten wir einen Randbogen, dessen Punkte von a und einem mit a äquivalenten Punkte a' gleiche Distanz haben. Diejenige eindeutig bestimmte Operation der Gruppe, welche a in a' überführt, muß den zu a gehörigen Normalbereich in den zu a' gehörigen überführen. Dabei geht das gemeinsame Randstück beider in einen anderen Randbogen des zu a' gehörigen Normalbereiches über. Seine dem Inneren des Einheitskreises angehörigen Randbogen sind also durch gewisse Operationen der Gruppe paarweise aufeinander bezogen. Will man also einen Fundamentalbereich im Sinne der oben gegebenen Definition konstruieren, so darf man nur gewisse Randpunkte des Normalbereiches dem Bereiche zurechnen.

11. Erzeugung der Gruppe. *Aus den die Ränder Zuordnung eines Normalbereiches vermittelnden Operationen der Gruppe kann man die ganze Gruppe erzeugen*, d.h. man kann aus ihnen jede Operation der Gruppe durch Zusammensetzung gewinnen. Um das einzusehen, verbinden wir a mit einem beliebigen mit a äquivalenten Punkte $S(a)$ durch einen im Kreisinncrcn verlaufenden Polygonzug. Dieser trifft nur endlich viele Normalbereiche der Einteilung. Denn mit einer ganz im Inneren des Einheitskreises gelegenen Kreisscheibe haben nur endlich viele Normalbereiche Punkte gemeinsam. Nehmen wir nämlich eine solche Kreisscheibe und einen zu einem Punkte a gehörigen Normalbereich, der Punkte mit ihr gemein hat. Alle Punkte dieser Kreisscheibe haben von a eine Distanz, die unter einer Schranke s kleiner als Eins liegt. Es gibt aber nur endlich viele mit a äquivalente Punkte, die von einem Punkte der Kreisscheibe eine Distanz kleiner oder gleich s haben. Daher können auch nur endlich viele Normalbereiche mit dieser Kreisscheibe Punkte gemeinsam haben. Da man aber den Polygonzug mit endlich vielen Kreisscheiben überdecken kann, so trifft er nur endlich viele Normalbereiche. Da die Ecken derselben sich im Inneren des Einheitskreises nicht häufen, so darf man annehmen, daß der Polygonzug keine Ecken trifft. Nun seien $L_1, L_2, \dots$ und deren Inverse die Operationen, welche die Ränder des zu a gehörigen Normalbereiches N einander zuordnen. Ist dann $L(N)$ irgendein mit diesem äquivalenter Normalbereich, so werden dessen Ränder durch die

Operationen $L_i L_k L_i^{-1}$ einander zugeordnet. Verfolgen wir nun den Polygon-Zug, indem wir ihn von a aus durchlaufen. Er tritt zunächst in einen Normalbereich ein, der durch eine Operation L_k aus dem zu a gehörigen hervorgeht. Seine Ränder sind durch die $L_i L_k L_i^{-1}$ aufeinander bezogen. Beim Verlassen dieses Normalbereiches tritt er also in einen anderen ein, der durch eine Operation $L_k L_i L_k^{-1}$ aus dem vorhergehenden entspringt, und dessen Ränder nun durch Operationen der Form $L_i L_i L_i^{-1} \cdot L_{i_m} \cdot L_k L_i^{-1} L_k^{-1}$ auseinander hervorgehen. Von diesem tritt das Polygon in einen Normalbereich ein, der durch eine dieser Operationen aus dem vorigen hervorgeht. Aus dem zu a gehörigen geht dieser Normalbereich durch eine Operation $L_k L_i L_k^{-1} \cdot L_{i_m} \cdot L_k L_i^{-1} L_k^{-1} \cdot L_{i_n} \cdot L_k L_i^{-1} L_k^{-1}$ hervor. Wiederholt man diese Überlegung endlich oft, so erkennt man, daß man S durch die L_i darstellen kann. Man nennt daher diese auch Erzeugende der Gruppe.

12. Der Durchschnitt des Fundamentalbereiches mit der Peripherie des Einheitskreises. Nun bleibt noch das Verhalten des *Normalbereiches am Rande des Einheitskreises* zu untersuchen. Durch unsere Definition sind nur die dem Inneren des Einheitskreises angehörigen inneren und Randpunkte bisher charakterisiert worden. Die Peripheriepunkte des Einheitskreises haben »her von allen inneren die gleiche Distanz Eins. Darum ist es schwieriger, diejenigen Peripheriepunkte«; ausfindig zu machen, welche am Rande eines Normalbereiches teilhaben. Denn ganz im Inneren des Einheitskreises kann jedenfalls der Normalbereich nicht liegen. Denn ein ganz im Inneren des Einheitskreises gelegener Teilbereich desselben wird durch die Umkehrungsfunktion der Abbildungsfunktion in einen Bereich abgebildet, der ganz dem Inneren des Bereiches B angehört. Ich gebe nur die Ergebnisse einer Untersuchung an, wie sie z. B. in der ersten Auflage dieses Buches ausführlich dargestellt war. Danach wird der Normalbereich in gewissen Kreisbogen an die Peripherie des Einheitskreises heranreichen. Fixpunkte hyperbolischer Substitutionen gehören ihm nicht an. Dagegen entsprechen die Fixpunkte parabolischer Substitutionen den isolierten Randpunkten.

Durch die Umkehrung der Abbildungsfunktion erscheint der Normalbereich auf den Bereich B so abgebildet, daß seinen Rändern bestimmte Jordankurven des Bereiches B entsprechen, welche diesen in einen einfach-zusammenhängenden Bereich zerschneiden.

Am Rande des Normalbereiches haben, wie die Betrachtung weiter lehrt, bei endlichem Zusammenhang von B nur endlich viele Kreisbogen teil. Die Gruppe kann also, wie wir jetzt einer früheren Überlegung entnehmen, aus endlich vielen ihrer Transformationen erzeugt werden.

Man kann leicht auch die Minimalzahl der Erzeugenden finden, die man zur Darstellung der Gruppe nötig hat. Zu dem Zwecke benutzen

wir eine topologische Tatsache, nämlich die, daß man einen p -fach zusammenhängenden Bereich durch $p - 1$ Querschnitte, die von einer Randkurve zu einer anderen gehen und einander im Bereiche nicht treffen, in einen einfachzusammenhängenden verwandeln kann. In ihm ist jeder Zweig der Abbildungsfunktion eindeutig und bildet ihn auf einen Teilbereich des Einheitskreises ab. Dieser erweist sich aber als ein Fundamentalbereich der Gruppe, denn er enthält ja zu jedem Bereichspunkt einen Bildpunkt. Die $2p - 2$ Ränder sind paarweise durch Operationen der Gruppe einander zugeordnet, so daß die Gruppe aus $p - 1$ Transformationen erzeugt werden kann. Denn längs eines einzelnen Querschnittes kann aus Gründen der analytischen Fortsetzung die Substitution der Gruppe sich nicht ändern. Daß die Gruppe nicht aus weniger als $p - 1$ Erzeugenden gewonnen werden kann, sei nur ohne Beweis erwähnt.

13. Kreisgeometrische Maßbestimmung. Wir haben oben (S. 47) von einer kreisgeometrischen Maßbestimmung Gebrauch gemacht.

Gewöhnlich versteht man unter kreisgeometrischer Entfernung zweier Punkte w_1 und w_2 des Kreises $|w| < \varrho$ den Wert

$$[w_1 w_2] = \log \frac{1 + \left| \frac{\varrho(w_1 - \bar{w}_2)}{\varrho^2 - w_1 \bar{w}_2} \right|}{1 - \left| \frac{\varrho(w_1 - \bar{w}_2)}{\varrho^2 - w_1 \bar{w}_2} \right|}.$$

So werden wir das auch später verwenden. Durch den oben erwähnten Übergang zu dem Fall, wo einer der Punkte Kreismittelpunkt wird, erkennt man, daß diese kreisgeometrische Entfernung weiter nichts ist, als der Logarithmus des Doppelverhältnisses des Punktepaares $w_1 w_2$ zu dem Paare der Punkte, in welchen ein durch w_1 und w_2 gelegter zum Kreis vom Radius ϱ orthogonaler Kreis diesen trifft. Denn in dem eben erwähnten Sonderfall können wir als vier Punkte nehmen: 0 und w , das wir positiv reell nehmen dürfen als ein Paar, und die Durchmesserenden $-\varrho$ und $+\varrho$ als anderes Paar. Die kreisgeometrische Entfernung ist dann

$$[0w] = \log \frac{\varrho + w}{\varrho - w}$$

und das Doppelverhältnis wird $\frac{\varrho + w}{\varrho - w}$,

so daß man sich von der Richtigkeit unserer Angabe überzeugt. Wegen einer bekannten Eigenschaft des Doppelverhältnisses ist die kreisgeometrische Entfernung gegenüber linearen Transformationen, die $|w| < \varrho$ in sich überführen, invariant. Dieser Entfernungsbegriff bietet folgenden Vorteil. Es mögen drei Punkte w_1, w_2, w_3 in dieser Reihenfolge auf demselben Orthogonalkreis liegen, der in α und β den Kreis $|w| = \varrho$ schneiden möge

Dann wird

$$[w_1 w_2] = \log \frac{w_1 - \alpha}{w_1 - \beta} \cdot \frac{w_2 - \beta}{w_2 - \alpha}; \quad [w_2 w_3] = \log \frac{w_2 - \alpha}{w_2 - \beta} \cdot \frac{w_3 - \beta}{w_3 - \alpha},$$

$$[w_1 w_3] = \log \frac{w_1 - \alpha}{w_1 - \beta} \cdot \frac{w_3 - \beta}{w_3 - \alpha},$$

so daß sich die kreisgeometrischen Entfernungen bei dieser Lage der Punkte addieren: $[w_1 w_3] = [w_1 w_2] + [w_2 w_3]$. «Jeder Punkt hat von der Peripherie eine unendlichgroße Entfernung.

Wir gelangen vom Begriff der Entfernung zweier Punkte sofort zum Begriff der *Länge eines Kurvenbogens*. Genau wie bei der Definition der euklidischen Länge markieren wir auf dem Kurvenbogen $w = w(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) eine Folge von Punkten $w_k = w(\tau_k)$; ($k = 1, 2 \dots n$)

$$\tau_k < \tau_{k+1} \text{ für } k = 1, 2 \dots n-1; \quad \tau_1 = t_0, \quad \tau_n = t_1.$$

Dann führen wir die Summe der Entfernungen je zweier aufeinanderfolgender

$$\sum_{k=1}^{n-1} [w_k w_{k+1}]$$

ein und verstehen unter der kreisgeometrischen Länge eines Kurvenbogens die obere Grenze dieser Summen bei beliebig zugelassenen Punktfolgen. Besteht insbesondere die Kurve aus differenzierbaren Bögen in endlicher Anzahl, so zeigt man in üblicher Weise, daß die Länge durch das Integral

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2\rho}{\rho^2 - |w|^2} \cdot |w'(t)| dt$$

bestimmt ist. Aus dieser Integraldarstellung oder noch rascher aus der aufgestellten Definition erkennt man sofort, daß die kreisgeometrischen Längen zweier Kurven, die durch lineare Abbildung des Kreises auf sich auseinander hervorgehen, einander gleich sind. Insbesondere wird die kreisgeometrische Länge des zwei Punkte verbindenden Orthogonalkreisbogens der kreisgeometrischen Entfernung dieser beiden Punkte gleich. Man erkennt dies sofort, in dem vorhin immer benutzten Fall, wo der eine Punkt $w = 0$ ist; wegen der Invarianz beider Größen bei linearer Abbildung ist es daher auch allgemein richtig. Man kann auch leicht einsehen, daß der Orthogonalkreis die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Ich überlasse es dem Leser, sich dies zurechtzulegen. Wir merken uns noch das kreisgeometrische Flächenmaß eines Bereiches β aus $|w| < \rho$ an

$$F = \iint_{\beta} \frac{4\rho^2}{(\rho^2 - |w|^2)^2} du dv (w = u + iv).$$

Es bleibt bei linearer Abbildung von $|w| < \rho$ in sich unverändert.

Endlich merken wir uns noch die entsprechenden Ausdrücke von Entfernung, Länge und Flächenmaß an für den Fall, daß statt eines Kreises

die Halbebene $\Im w > 0$ betrachtet wird. Man findet durch lineare Abbildung des Kreises $|w| < \rho$ auf diese Halbebene

$$|w_1 w_2| = \log \frac{w_1 - \alpha}{w_2 - \alpha} \cdot \frac{w_2 - \beta}{w_1 - \beta} = \log \frac{1 + \frac{w_1 - w_1}{w_1 - w_2}}{1 - \frac{w_1 - w_1}{w_1 - w_2}},$$

wo wieder α und β die beiden Punkte sind, in welchen der durch w_1 und w_2 gelegte zur reellen Achse senkrechte Kreis diese trifft.

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|w'(t)|}{\Im(w)} dt,$$

$$F = \int_{\mu}^{\nu} \int_{\Sigma} \frac{dx dy}{\Im(w)} z.$$

werden die Ausdrücke für die Länge eines Kurvenbogens und für den Inhalt eines Bereiches.

§ 8. Potentialtheoretische Anwendungen.

1. Begriff der Potentialfunktion. Wir benutzen hier unsere funktionentheoretischen Kenntnisse, namentlich aber die Ergebnisse dieses Kapitels, um mit ihrer Hilfe einige Sätze der Potentialtheorie abzuleiten, die uns weiter nützlich sein werden. *Potentialfunktionen, das sind die Realteile analytischer Funktionen.* Wir werden in der Folge die hier jetzt abzuleitenden Sätze der Potentialtheorie verwenden. In einem Lehrbuch der *Funktionentheorie* lege ich Gewicht darauf, sie vorher aus der Wurzel zu gewinnen, aus der uns die ganze Theorie erwachsen ist.

Aus der eben gegebenen Definition ergibt sich nach Bd. I S. 36, daß jede Potentialfunktion $u(x, y)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist, und daß auch umgekehrt jede mit den Ableitungen der zweiten Ordnung stetige Lösung dieser Differentialgleichung Realteil einer analytischen Funktion ist.

Weiter ergibt sich aus der Definition sofort, daß bei konformer Abbildung

$$z = \varphi(\xi)$$

Potentialfunktionen

$$u = u(x, y), \quad (z = x + iy)$$

in Potentialfunktionen

$$u = U(\xi, \eta) \quad (\xi = \xi + i\eta)$$

übergehen. Denn ist

$$u(x, y) = Rf(z),$$

so wird

$$u = U(\xi, \eta) = Rf\{\varphi(\xi)\}.$$

2. Die Greensche Formel. Ich betrachte nun eine Umformung der Cauchy-schen Integralformel. Ich lege einen einfach zusammenhängenden¹⁾ Bereich B der ξ -Ebene zugrunde. $w = \varphi(\xi, z)$ sei eine Funktion, welche ihn auf $|w| < 1$ schlicht abbildet, so daß $\xi = z$ in $w=0$ übergeht.²⁾ Der Rand des Bereiches möge aus endlich vielen Bogen analytischer Kurven bestehen. In den inneren Punkten dieser Bogen ist — wie wir von S. 31 wissen — $\varphi(\xi, z)$ noch regulär.

Bei $\xi = z$ gilt $\varphi(\xi, z) = a_1(\xi - z) + \dots$

Also ist für die Ableitung nach ξ

$$(1) \quad \frac{\varphi'(\xi, z)}{\varphi(\xi, z)} = \frac{1}{\xi - z} + \varphi_1(\xi, z)$$

wo $\varphi_1(\xi, z)$ im Bereich und in den inneren Punkten der Randbogen regulär ist.

Der Bereich sei endlich so beschaffen, daß φ_1 in ihm beschränkt ist, wie das z. B. der Fall ist, wenn der Rand eine geschlossene analytische Kurve, ein durch einen Durchmesser vervollständigter Halbkreis (S. 35), ein konvexes Polygon usw. ist.

In B sei weiter eine Funktion $f(z)$ gegeben, die in B regulär und am Rande noch stetig sei. Dann ist

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\xi) \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

erstreckt über den Bereichrand im positiven Sinne, d. h. so, daß das Innere zur Linken bleibt. Wegen (1) liefert (2)

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\xi) \frac{\varphi'(\xi, z)}{\varphi(\xi, z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\xi) \varphi_1(\xi, z) d\xi.$$

Das zweite Integral dieser Summe ist aber Null. Man entnimmt dies dem Cauchyschen Integralsatz durch Grenzübergang, indem man den Rand durch eine im Bereich verlaufende geschlossene Kurve approximiert. Also wird

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\xi) \frac{\varphi'(\xi, z)}{\varphi(\xi, z)} d\xi.$$

Setzt man³⁾ $\log \varphi = -(g + ih)$, so wird $\frac{\varphi'}{\varphi} d\xi = -\left(\frac{\partial g}{\partial s} + i \frac{\partial h}{\partial s}\right) ds$, wo

1) Ein Teil der folgenden Ausführungen bleibt auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche richtig. Die Voraussetzungen der folgenden Ausführungen lassen sich auch sonst etwas reduzieren.

2) Sie ist damit nur bis auf einen Faktor vom Betrag Eins bestimmt; darauf kommt es aber im folgenden nie an.

3) Man nennt g die zum Bereich und zur Stelle z gehörige Greensche Funktion. Allgemein versteht man unter einer Greenschen Funktion eines Bereiches eine Potentialfunktion, d. h. eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, überall außer an einer Stelle $z = \xi$ regulär, d. h. zweimal stetig differenzierbar ist und welche am Rande des Bereiches verschwindet. Bei $z = \xi$ aber unterscheidet sie die Greensche Funktion von einer regulären Funktion um das Zusatzglied $-\log |z - \xi|$. Die Kurve $g = 1$ nennen wir eine Greensche Niveaulinie.

$\frac{\partial}{\partial s}$ eine Differentiation in Richtung wachsender Bogenlänge bedeutet. Die Bogenlänge wird dabei in Richtung des angenommenen Durchlaufungssinnes als wachsend angenommen. Da aber g am Rande konstant ist, so haben wir

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int f(\xi) \frac{\partial h}{\partial s} ds,$$

wofür man wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auch schreiben kann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int f(\xi) \frac{\partial g}{\partial n} ds,$$

wenn man mit n die in das Bereich innere weisende Normale des Randes bezeichnet. Trennt man Real- und Imaginärteil und setzt

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad \xi = \xi + i \eta,$$

so wird

$$(?) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int u(\xi, \eta) \frac{\partial g}{\partial n} ds.$$

Das ist die sogenannte *Greensche Formel*, welche die Werte, die eine Potentialfunktion im Bereich inneren besitzt, durch ihre Randwerte ausdrückt. Diese Darstellung ist aber hier nur unter gewissen einschränkenden Annahmen, sowohl über u , wie über den Bereich bewiesen. Diese lassen sich noch weitgehend reduzieren, wie sich in der Folge zeigen wird.

3. Nähere Betrachtung der Greenschen Formel. Zunächst wird sich ergeben, daß

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int u(s) \frac{\partial g}{\partial n} ds$$

unter ziemlich allgemeinen Annahmen über $u(s)$ eine Potentialfunktion darstellt. Es genügt dazu, wie sich zeigen wird, daß

$$\int |u(s)| ds \quad \text{existiert.}^1)$$

An den über B gemachten Voraussetzungen halte ich fest, und nehme an, daß (7) existiert.

Die Richtigkeit der Behauptung erkennt man dann sehr leicht, wenn man zusieht, wie $\frac{\partial g}{\partial n}$ von z abhängt. Für (6) kann man schreiben

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int u(s) \frac{\partial h}{\partial s} ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int u(s) \left(\frac{\partial g}{\partial s} + i \frac{\partial h}{\partial s} \right) ds \\ (8) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int u(s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{z - \bar{s}}{\xi - \bar{s}} \right) d\bar{s}. \end{aligned}$$

1) In der Folge mögen die Integrale im Lebesgueschen Sinne genommen sein. Vgl. (dazu Kamke: Das Lebesguesche Integral, Leipzig 1926, B. G. Teubner.

Nun aber ist offenbar

$$(8') \quad \varphi(\xi, z) = \frac{\varphi(\xi, a) - \varphi(z, a)}{1 - \overline{\varphi(z, a)} \varphi(\xi, a)}$$

wo a irgendeine feste Stelle aus B bedeutet. Denn diejenige Funktion, welche B so auf $|w| < 1$ abbildet, daß $\xi = z$ in $w = 0$ übergeht, ist eine lineare Funktion derjenigen, die B so auf $|w| < 1$ abbildet, daß $\xi = a$ in $w = 0$ übergeht. Daraus entnimmt man, daß

$$\frac{\varphi'}{\varphi}$$

eine Potentialfunktion von $z = x + iy$ ist. Die Existenz von (7) lehrt, daß man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dadurch bilden darf, daß man (6) unter dem Integralzeichen differenziert.

Das ergibt aber Null, weil $\frac{\varphi'}{\varphi}$ Potentialfunktion ist.

4. Das Poissonsche Integral. Die weitere Entwicklung knüpft an den Spezialfall an, daß B ein Kreis $|\xi| < R$ ist. Hier wird

$$\varphi(\xi, z) = \frac{R(z - z)}{R^2 - \xi \bar{z}},$$

$$\log \varphi = \log R + \log(\xi - z) - \log(R^2 - \xi \bar{z}).$$

Für $\xi = Re^{i\vartheta}$ wird

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi'}{\varphi} d\xi &= \frac{i\xi}{\xi - z} d\vartheta + \frac{\bar{z}i\xi}{R^2 - \xi \bar{z}} d\vartheta \\ &= \left(\frac{Re^{i\vartheta}}{Re^{i\vartheta} - re^{i\omega}} + \frac{\bar{r}e^{-i\omega}e^{i\vartheta}}{R - e^{i\vartheta}\bar{r}e^{-i\omega}} \right) i d\vartheta \\ &= \left(\frac{Re^{i\vartheta}}{Re^{i\vartheta} - re^{i\omega}} + \frac{re^{-i\omega}}{R - e^{i\vartheta}\bar{r}e^{-i\omega}} \right) i d\vartheta \\ &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \omega)} i d\vartheta, \end{aligned}$$

so daß schließlich wird

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi, \eta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \omega)} d\vartheta.$$

Dies sogenannte *Poissonsche Integral* stellt also die Werte, welche eine in einem Kreis reguläre Potentialfunktion in den inneren Punkten desselben annimmt, durch die Randwerte dar. Nimmt man insbesondere $z = x + iy = 0$, also $r = 0$, so wird

$$(9) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi, \eta) d\vartheta.$$

Dies besagt, daß der Wert einer Potentialfunktion im Mittelpunkt eines Kreises gleich dem arithmetischen Mittel der Randwerte ist. Daraus entnimmt man,

daß eine nicht konstante Potentialfunktion im Innern eines Regularitätsgebietes weder ein Maximum noch ein Minimum annehmen kann. Wir nennen diese Tatsache das Prinzip des Maximums. Man kann es auch dahin aussprechen, daß eine in einem abgeschlossenen Bereich stetige im Innern desselben reguläre, d. h. samt den Ableitungen zweiter Ordnung stetige nicht konstante Potentialfunktion, Maximum und Minimum ihres absoluten Betrages am Bande annimmt.

Ich gehe nun zu der Frage über, unter welchen Umständen das Poissonsche Integral

$$(10) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \omega)} d\vartheta$$

eine Potentialfunktion mit den Randwerten $u(\vartheta)$ darstellt. Die vorher bei

$\int u(s) \frac{\partial g}{\partial n} ds$ angestellten Erörterungen lehren, daß es jedenfalls eine Potentialfunktion stets dann darstellt, wenn $\int_0^{2\pi} |u(\vartheta)| d\vartheta$ existiert.

Ich werde weiter zeigen, daß für beschränkte $u(\vartheta)$ an jeder Stetigkeitsstelle von $u(\vartheta)$ die Potentialfunktion den Bandwert $u(\vartheta)$ besitzt. Damit ist folgendes gemeint: Wenn ϑ_0 eine Stelle ist, wo $u(\vartheta)$ stetig ist, wenn weiter im Kreise ein Winkelraum betrachtet wird, dessen Ecke in ϑ_0 liegt, so ist in dem in Fig. 8 schraffierten Kreisbogenzweieck, wenn es nur hinreichend klein ist,

$$|u(x, y) - u(\vartheta_0)| < \varepsilon,$$

wie klein auch $\varepsilon > 0$ gewählt sein mag.

Zum Beweis der Behauptung schreibe ich das Poissonsche Integral wieder in der Form (8), wo nun

$$\varphi = \frac{R(z - \zeta)}{R^2 - \bar{\zeta}z}$$

zu setzen ist. In Betracht kommen dabei die Werte der Funktion φ für $|\zeta| \rightarrow R$. Hier ist aber $|\varphi| = 1$. Man kann also

$$\varphi = e^{i\psi}, \quad \psi \text{ reell}$$

setzen. Da es bei analytischen Funktionen auf die Richtung des Grenzübergangs beim Differenzieren nicht ankommt, so wird

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{d}{dz} \log \varphi = i \frac{d\psi}{dz}$$

und daher kann man das Poissonsche Integral auch in der folgenden Form schreiben

$$(11) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(\psi) d\psi, \quad U(\psi) = u(\vartheta(\psi)).$$

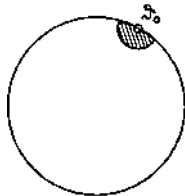


Fig. 8.

Die Bedeutung des Winkels ψ wird klar, wenn man bedenkt, daß $w = \varphi(\xi, z)$ den Kreis $|\xi| < R$ so auf $|w| < 1$ abbildet, daß dabei $\xi = z$ in $w = 0$ übergeht. Dieser Umstand lehrt, daß der Winkel ψ derjenige Winkel ist, den die Kreise durch die Punkte z und R^z im Punkte z mit einer festen Ausgangsrichtung bilden. (Vgl. Fig. 9.) Dabei sind die Linieelemente des Kreisbüschels in der Reihenfolge zu nehmen, in der sie bei einem positiven Umlauf des Punktes z aufeinanderfolgen. Diese Kreise sind die durch den Punkt z gehenden, welche auf $|\xi| = R$ senkrecht stehen. Man erkennt also, daß der Mittelwertsatz (9) als ein spezieller Fall dieser allgemeineren Umformung herauskommt, wenn man $z = 0$ wählt. Aus dieser neuen Form (11) entnimmt man nun bequem die Behauptung über die Randwerte. Denn betrachten wir eine Stetigkeitsstelle ϑ_0 von $u(\vartheta)$ und grenzen um dieselbe einen Peripheriebogen ab, auf dem $|u(\vartheta) - u(\vartheta_0)| < \varepsilon$ sei. Hat man den Punkt z gewählt, so kann man ψ als Parameter auf der Kreisperipherie betrachten, welcher von $-\pi$ bis $+\pi$ variiert. Da man von vornherein ϑ noch mit einem Faktor vom Betrag Eins versehen kann, darf man annehmen, daß dem Punkte ϑ_0 der Wert $\psi = 0$ entspricht. Wählt man nun z hinreichend nahe bei ϑ_0 und wählt man das Kreisbogenzweieck der Figur 8 hinreichend klein und z in demselben, so gehören dem Intervall um ϑ_0 jedenfalls alle ψ -Werte aus $-\pi + \varepsilon < \psi < \pi - \varepsilon$ an. Dies bringt die geometrische Tatsache zum Ausdruck, daß bei der angegebenen Abbildung der

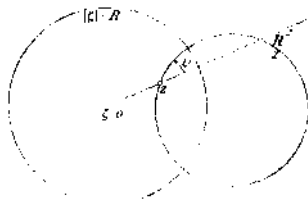


Fig. 9.

größte Teil der Peripherie dicht an ϑ_0 herangeschoben wird, und leuchtet geometrisch leicht ein. Schreibt man daher

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} U(\psi) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi+\varepsilon} U(\psi) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} U(\psi) d\psi,$$

so wird wegen der Beschränktheit der $U(\psi)$ das zweite Integral mit ε zugleich gegen Null streben, ebenso das dritte, während das erste sich von

$$\frac{1}{2(\pi-\varepsilon)} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} U(\psi) d\psi \rightarrow U(0) = u(\vartheta_0)$$

um eine Zahl unterscheidet, die mit ε zugleich gegen Null strebt. Damit

ist der gewünschte Nachweis erbracht. Das Poissonsche Integral stellt also für beschränkte absolut integrable Randwerte $u(\vartheta)$ eine Potentialfunktion dar, die an jeder Stetigkeitsstelle von $u(\vartheta)$ bei Annäherung aus dem Kreisinneen den Randwert $u(\vartheta)$ besitzt.

Aus der Formel (11) entnimmt man auch erneut, daß das Poissonsche Integral für den Fall beschränkter Randwerte eine Potentialfunktion liefert, deren Werte stets zwischen Maximum und Minimum der Randwerte liegen.

Man kann die eben angestellte Betrachtung auch für die Umgebung von Randpunkten anwenden, wo die Randfunktion eine *sprunghafte Unstetigkeit* besitzt, d. h. wo bei Annäherung an die betreffende Stelle längs jedem der beiden Peripheriebogen endliche Grenzwerte existieren. Dann lehrt die Betrachtung, daß sie in einer hinreichend kleinen Umgebung des Peripheriepunktes zwischen Werten liegt, die höchstens um ϵ kleiner als der kleinere der beiden Grenzwerte und höchstens um ϵ größer als der größere der beiden Grenzwerte sind.

Bilden die Randwerte eine längs eines Bogens stetige Funktion, so entnimmt man unseren Betrachtungen auch, daß die durch das Poissonsche Integral dargestellte Funktion in dem um diesen Bogen erweiterten Kreise stetig ist. Unsere Betrachtung lehrt nämlich dann die Stetigkeit in jedem Punkte des Peripheriebogens. Für die Punkte im Kreisinneen ist die Stetigkeit ja längst bekannt.

5. Nochmals die Greensche Formel. Aus diesem Ergebnis kann man leicht entnehmen, daß ein analoges Ergebnis auch für (6) gilt. Wir hatten ja dies Integral schon in der Form (8), (8') geschrieben. Beachtet man nun die Schreibweise (11) des Poissonschen Integrales, so erkennt man, daß man aus (11) für $R = 1$ die (8) erhält, indem man den Bereich B durch $\varphi(\xi, \eta)$ so auf den Einheitskreis abbildet, daß dabei ein irgendwie gewählter Punkt a des Bereiches B in den Mittelpunkt übergeht. Man ersetze nur in (11) ξ durch w und η durch w . Und trage dann $w = \varphi(\xi, \eta)$ u $w = \varphi(\xi, \eta)$ ein. Dann erhält man (8). Da man also durch bloße Änderung der Integrationsvariablen (8) aus dem Poissonschen Integral gewinnen kann, so bleibt der bewiesene Satz auch für (6) richtig, und auch dieses Integral stellt bei beschränktem $u(s)$ eine Potentialfunktion dar, deren Randwerte an jeder Stetigkeitsstelle mit $u(s)$ übereinstimmen. Dabei darf man sich dieser Stelle jedenfalls längs jeder Kurve nähern, die unter einem von Null verschiedenen Winkel den Rand trifft.

6. Existenz von Potentialfunktionen mit gegebenen Randwerten.

Diese Überlegungen führen nun zu der Frage, inwieweit wir uns noch von der einschränkenden Annahme freimachen können, daß der Bereich B aus einer analytischen Kurve bestehe. Nach dem eben benutzten Be

weis verfahren kommt es darauf an, zu wissen, wann man sicher sein kann, daß die Abbildungsfunktion $\varphi(\xi, \eta)$ am Rande des Einheitskreises differenzierbar ist, wenigstens in solchem Umfang, daß die benutzte Transformation richtig bleibt. Nimmt man die Integrale im Lebesgueschen Sinne, so genügt es, daß die Ableitungen bis auf eine Menge vom Maße Null existieren und daß dieselben absolut integrierbar sind.

Ich begnüge mich mit dieser kurzen Erörterung der Darstellbarkeitsfrage der Potentialfunktionen durch die Greensche Formel. Wichtiger als dies Ergebnis ist für uns das andere, nämlich daß die Randwertaufgabe für einfach zusammenhängende Bereiche in dem angegebenen Umfang lösbar ist. Ja, dies Resultat gilt noch für allgemeinere Bereiche als die, für welche die Darstellbarkeit untersucht wurde. Betrachten wir z. B. einen von einer Jordankurve begrenzten einfach zusammenhängenden Bereich und schreiben an seinem Rande z. B. eine beliebige stetige Folge von Randwerten vor, so gibt es stets eine im Bereiche reguläre Potentialfunktion, welche diese Randwerte besitzt. Denn bildet man den Bereich konform auf den Einheitskreis ab, so ist die Abbildung im abgeschlossenen Bereiche stetig und aus den vorgeschriebenen Randwerten wird eine stetige Folge von Werten auf der Kreisperipherie. Mit Hilfe des Poissonschen Integrales kann man die im Kreise reguläre Potentialfunktion mit diesen Randwerten konstruieren und sie dann wieder durch die konforme Abbildung in den gegebenen Bereich übertragen.

Unsere Ergebnisse über das Verhalten der Abbildung am Rande erlauben, dies Ergebnis noch in mancher Hinsicht zu verallgemeinern. Doch mag es dem Leser überlassen sein, mit Hilfe der angegebenen Methode weitere Sätze aufzustellen.

Noch sei aber ausdrücklich hervorgehoben, daß unsere Methoden uns nun auch bald die Mittel an die Hand geben werden, die *Randwertaufgabe für mehrfach zusammenhängende Bereiche* zu lösen. Wir kommen darauf S. 67 zurück.

7. Bestimmtheit der **Potentialfunktionen** durch ihre Randwerte. Wir haben uns bisher wesentlich mit der Frage der Existenz von Potentialfunktionen mit gegebenen Randwerten beschäftigt. Jetzt wenden wir uns der Frage zu, inwieweit die Potentialfunktionen durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt sind. Aus dem Prinzip des Maximums ergibt sich z. B. ohne weiteres, daß es nicht zwei in einem abgeschlossenen Bereiche stetige Potentialfunktionen gleicher Randwerte geben kann. Denn die Differenz ist eine im abgeschlossenen Bereiche stetige Potentialfunktion, die am Rande überall verschwindet. Da aber Maximum und Minimum am Rande angenommen werden, so ist die Differenz überall Null. Wir wollen aber

mit Rücksicht auf spätere Anwendung den Satz unter noch etwas allgemeineren Voraussetzungen beweisen. Es seien am Rande eines Kreises beschränkte Randwerte vorgeschrieben, für deren absoluten Betrag (7) existiert, und die überall außer in einer Menge vom Maß Null stetig sind. Als dann gibt es genau eine im Kreise beschränkte Potentialfunktion, welche überall außer in einer Menge vom Maße Null diese Randwerte besitzt. Unsere Betrachtungen über das Poissonsche Integral lehren, daß bei Verwendung dieser Randwerte durch (10) eine Potentialfunktion gegeben ist, welche im Kreise beschränkt ist und an Stetigkeitsstellen der Randfunktion die gegebenen Randwerte besitzt. Es bleibt also nur zu zeigen, daß es keine weiteren Potentialfunktionell dieser Art gibt. Den Beweis erbringe ich dadurch, daß ich zeige, daß jede solche Potentialfunktion im Kreisfall durch das Poissonsche Integral dargestellt wird. Dieser Nachweis ergibt sich sehr einfach dadurch, daß man das Poissonsche Integral erst für einen konzentrischen Kreis von kleinerem Radius nimmt. Hier ist ja die Potentialfunktion regulär, und daher ergeben unsere seitherigen Methoden den Nachweis der Darstellbarkeit durch das Poissonsche Integral. Denn jede der Potentialfunktionen ist Realteil einer im Kreis regulären analytischen Funktion. Da aber die Potentialfunktionen im Kreise regulär und beschränkt sind und ihre auf dem Kreis vom Radius $r < R$ angenommenen Werte für $r \rightarrow R$ gegen die gegebenen Randwerte konvergieren, wenn man unter Beschränkung auf die Stetigkeitsstellen der Randfunktion auf gleichen Radien gelegene Punkte der beiden Kreise einander zuordnet, so lehrt ein bekannter Satz der Integralrechnung¹⁾, daß die für $|z| = r$ genommenen Poissonschen Integrale gegen das für $|z| = R$ genommene konvergieren. Dies aber ist durch die gegebenen Randwerte eindeutig bestimmt. Also gibt es nur eine beschränkte Potentialfunktion gegebener Randwerte.

Bei diesem Satze ist die Voraussetzung der *Beschränktheit* durchaus *wesentlich*, Denn für den Fall der Halbebene $\Im(z) > 0$ ist z. B.

$$\Im\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

eine in der Halbebene $\Im(z) > 0$ reguläre Potentialfunktion, welche am Rande überall außer bei $z = 0$ verschwindet und auch an allen diesen Randpunkten noch regulär ist. Trotzdem ist sie nicht identisch Null. Sie ist ja auch

1) Er lautet: Wenn in einem Intervall $a \leq x \leq b$ eine Folge gleichmäßig beschränkter integrierbarer Funktionen $f_n(x)$ gegeben ist, und wenn die $f_n(x)$ in diesem Intervall außer in einer Menge von Maß Null gegen eine Grenzfunktion konvergieren, so ist

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. Vgl. Kamke, Das Lebesguesche Integral, S. 109. Leipzig 1925, B. G. Teubner.

nicht beschränkt, da sie in der Nähe von $z = 0$ beliebig großer Werte fähig ist.

Wir bezeichnen weiter die in einem Bereiche B beschränkte, durch die Randwerte $r(\vartheta)$ bestimmte Potentialfunktion mit

$$P(B; z; r(\vartheta)),$$

Ist dann

$$r(z) = r_1(z) + r_2(z),$$

so ist auch

$$P(B; z; r) = P(B; z; r_1) + P(B; z; r_2),$$

wie sich aus dem eben bewiesenen Satze ohne weiteres ergibt, wenn man beachtet, daß die Summe zweier Potentialfunktionen stets wieder Potentialfunktion ist.

8. Gleichmäßig konvergente Reihen von Potentialfunktionen. Ich schließe nun noch einige Grenzwertsätze an, die wir später nötig haben.

Eine gleichmäßig konvergente Folge von Potentialfunktionen liefert eine Grenzfunktion, die selbst Potentialfunktion ist.

Der Nachweis ergibt sich sofort ähnlich wie beim entsprechenden Satze der Funktionentheorie aus der Darstellbarkeit durch das Poissonsche Integral, in der Umgebung einer jeden Stelle des Konvergenzbereiches. Mit Hilfe des Poissonschen Integrales kann man auch sofort zu jeder Potentialfunktion die konjugierte Potentialfunktion bilden, d. h. diejenige Potentialfunktion, welche Imaginärteil derjenigen analytischen Funktion ist, zu der die erste als Realteil gehört. Dazu muß man nur bemerken, daß der unter dem Poissonschen Integral stehende Ausdruck

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \omega)} = \Re \frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad \zeta = Re^{i\vartheta}, \quad z = re^{i\omega}$$

ist. Demnach wird

$$(12) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\vartheta$$

diejenige analytische Funktion, deren Realteil am Kreise die Randwerte $r(\vartheta)$ hat. Hat man nun eine Folge von Randfunktionen $u_n(\vartheta)$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u(\vartheta)$ konvergieren, so konvergieren auch die gemäß (12) den $u_n(\vartheta)$ zugeordneten analytischen Funktionen $f_n(z)$ gleichmäßig gegen die durch (12) erklärte Funktion $f(z)$, und man erkennt, daß eine Folge von analytischen Funktionen dann gleichmäßig konvergiert, wenn ihre Realteile gleichmäßig konvergieren und die Imaginärteile geeignet normiert sind.

Das Poissonsche Integral lehrt auch, daß aus der gleichmäßigen Konvergenz der Randwerte die gleichmäßige Konvergenz der zugehörigen Potentialfunktionen folgt. Dies deutet auf Verallgemeinerungen des eben

bewiesenen Satzes hin, welche dem Vitalischen Satze der Funktionentheorie analog sind. In der Tat kann man auch hier beweisen, daß eine in einem Bereiche gleichmäßig beschränkte Folge von Potentialfunktionen, dann in jedem abgeschlossenen inneren Teilbereich gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, wenn die Funktionenfolge in einem Teilbereich desselben konvergiert. Man kann den Beweis ganz analog wie beim Vitalischen Satze im ersten Bande führen. Man hat nur überall, wo damals die Cauchysche Integralformel verwendet wurde, jetzt das Poissonsche Integral heranzuziehen. Ein Unterschied gegenüber dem Vitalischen Satz liegt nun darin, daß hier, so wie bei der Stieltjesschen Vorstufe des Vitalischen Satzes die Konvergenz in einem Teilbereich zu fordern ist, während bei dem Vitalischen Satz die Konvergenz in einer Punktfolge mit Häufungspunkt im Bereichinneren ausreicht. Dies liegt daran, daß zwei analytische Funktionen identisch sind, wenn sie in einer Punktmenge mit Häufungspunkt im Bereichinneren die gleichen Werte haben, während auf die Gleichheit der Potentialfunktionen erst geschlossen werden kann, wenn sie in einem Gebietsteil die gleichen Werte haben. Die Differenz beider ist ja dann Realteil einer analytischen Funktion, deren Realteil in einem Gebiet verschwindet. Daher ist die analytische Funktion konstant und daher ihr Realteil überall Null.

9. Der Satz von Harnack. In einem Spezialfall enthält ein Satz von Harnack eine weitergehende Aussage.

Es sei eine Folge von Potentialfunktionen $U_n(x, y)$ gegeben, die in einem Bereiche B regulär und eindeutig sind und in jedem Punkte mit n zugleich wachsen.

$$U_{n+1}(x, y) \geq U_n(x, y).$$

Wenn eine solche Folge in einem einzigen Punkte (a, b) einem Grenzwert zustrebt, d. h. wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a, b)$$

existiert, so existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, y)$$

gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Teilmenge von B .

Da sich die Teilmenge mit endlich vielen Kreisen bedecken läßt, so sieht man leicht, daß es genügt den Satz für den Fall zu beweisen, daß B ein Kreis und (a, b) sein Mittelpunkt ist. Ist r der Kreisradius, und setzt man

$$w_{n+1}(x, y) = U_{n+1}(x, y) - U_n(x, y),$$

so wird in einem Punkte (x, y) des Kreisinneren

$$w_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_n(\xi, \eta) \frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \omega)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \omega)} d\vartheta.$$

Hier ist ξ, η der laufende Peripheriepunkt

$$\xi - a + i(\eta - b) = \rho e^{i\vartheta}, \quad x - a + i(y - b) = r e^{i\omega}.$$

Nun ist

$$0 < \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \omega)} \leq \frac{r + \rho}{r - \rho}.$$

Also

$$0 \leq w_n(x, y) \leq w_n(a, b) \frac{r + \rho}{r - \rho}.$$

Da aber nach Voraussetzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a, b)$$

konvergiert, so konvergiert auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, y),$$

und zwar gleichmäßig in jeder konzentrischen Kreisscheibe. Damit ist der Satz von Harnack bewiesen.

10. Lösung der Randwertaufgabe für endlich vielfach zusammenhängende Bereiche. Nunmehr stehen uns alle Mittel zur Verfügung, um auch für endlich vielfach zusammenhängende Bereiche B die Randwertaufgabe zu lösen. Wir nehmen dabei an, daß es ein Bereich sei, der von endlich vielen geschlossenen Jordankurven begrenzt ist. Es wird sich zeigen, daß man an den Randkurven beliebige stetige Randwerte vorschreiben kann, und daß diese dann eine im abgeschlossenen Bereiche stetige Potentialfunktion eindeutig bestimmen, welche diese Randwerte besitzt.¹⁾ Die Lösung der Randwertaufgabe gelingt durch Vermittlung der konformen Abbildung des Bereiches auf eine schlichte Kreisscheibe vom Radius Eins. Bei dieser Abbildung gehen die Randkurven des Bereiches in Bogen der Kreisperipherie über. Die gesuchte Potentialfunktion geht in eine im Kreise reguläre Über, welche auf den dem Bereichrand entsprechenden Bogen die entsprechenden Randwerte besitzt. Sie ist außerdem eine automorphe Funktion der zum Abbildungsproblem gehörigen Gruppe. Die auf die Kreisperipherie verpflanzten Randwerte machen gleichfalls eine automorphe Funktion der Gruppe aus, die freilich nicht in allen Peripheriepunkten erklärt ist, sondern nur in den den Randkurven entsprechenden Bogen. Es wird sich aber zeigen lassen, daß diese Bogen die Peripherie bis auf eine Punktmenge vom Maße Null bedecken. Nehmen wir dies für den Augenblick als bewiesen an. Da die Randwerte aus stetigen Randwerten hervorgingen, so sind sie längs jener Peri-

1) An isolierten Randpunkten kann man nichts vorschreiben. Man vergleiche meine Theorie der Differentialgleichungen 3. Aufl., Berlin 1930, Springer, S. 390, wo dies näher erläutert ist. Daher befassen wir uns nur mit Bereichen, an deren Rande isolierte Punkte nicht beteiligt sind.

periebogen stetig und sind außerdem überall unter derselben Schranke gelegen. Sie bestimmen daher eindeutig eine im Kreise reguläre beschränkte Potentialfunktion, welche in den Punkten der Bogen die vorgeschriebenen Randwerte besitzt. Man kann sie durch das Poissonsche Integral darstellen, weil die Bogen bis auf eine Menge vom Maß Null die ganze Peripherie ausmachen. Da aber diese Potentialfunktion eindeutig bestimmt ist, so muß sie auch eine automorphe Funktion der Gruppe sein. Denn die Randwerte bleiben bei den Transformationen der Gruppe ungeändert. Wäre also die gefundene Funktion nicht automorph, so könnte man aus ihr durch eine passende Transformation der Gruppe eine von ihr verschiedene Potentialfunktion gewinnen, welche doch in allen Punkten der Bogen die gleichen Randwerte besäße. Geht man nun zum ursprünglichen Bereich zurück, so entsteht aus der im Kreise gefundenen Potentialfunktion eine im abgeschlossenen Bereiche eindeutige stetige Potentialfunktion, welche die gegebenen Randwerte besitzt.

Es bleibt nun also nur noch der Nachweis, daß die Peripheriebogen bis auf eine Punktmenge vom Maße Null die ganze Peripherie erfüllen. Diesen Beweis führt man nach einer brieflichen Mitteilung des Herrn Radó am einfachsten folgendermaßen: Es ist zu zeigen, daß die Gesamtlänge der einzelnen den Randkurve entsprechenden Peripheriebogen gerade 2π ist. Es seien also $s_1, s_2, \dots$ die Bogen so daß jeder umkehrbar eindeutig einer Randkurve von B entspricht. Zunächst kann man zeigen, daß eine im Einheitskreis reguläre Potentialfunktion, welche durch die Transformationen der Gruppe in sich übergeht, und welche in allen Punkten der Peripheriebogen s_k den Wert 2π hat, notwendig überall gleich 2π ist. Denn ihr entspricht eine im ursprünglichen Bereiche reguläre, im abgeschlossenen Bereich stetige eindeutige Potentialfunktion, welche am Rande konstant gleich 2π ist. Sie ist daher überall gleich 2π . Daß nun die Gesamtlänge der Bogen 2π ist, folgt sofort aus dieser Bemerkung. Denn wir ordnen dem Bogen s_k eine Potentialfunktion u_k zu, welche in jedem Punkte gleich dem Winkel ist, unter dem der Bogen von dem Punkte durch zwei ihn passierende zum Einheitskreis orthogonale Kreise projiziert wird. Bei Annäherung an die Punkte von s_k strebt diese Funktion gegen 2π . Bei Annäherung an andere Peripheriepunkte strebt sie gegen Null.¹⁾

1) Diese Potentialfunktion $u_k = \frac{1}{2\pi} \int_{s_k} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\omega)} d\theta$ ist s_k erstreckte Integral

geliefert. Daß dies Integral den angegebenen Wert hat, sieht man ohne weiteres für

Nun bilde man

$$u = u_1 + u_2 + \dots$$

Das ist eine an jeder Stelle z des Einheitskreises konvergente Reihe, deren Partialsummen alle höchstens gleich 2π sind, und deren Reihenglieder alle positiv sind. Denn es handelt sich ja in jedem Punkte um die Addition auseinander gelegener Winkel, deren Summe höchstens 2π ist. Nach dem vorhin (S. 78) bewiesenen Satz von Harnack konvergiert die Reihe gleichmäßig und u ist eine Potentialfunktion. Da die Intervalle s_k durch die Gruppe nur permutiert werden, so ist u nach seiner geometrischen Bedeutung eine automorphe Funktion der Gruppe. Lassen wir z gegen einen dem Bogen s_k angehörigen Peripheriepunkt streben, so geht $u_k \rightarrow 2\pi$ und wegen $u_k < u \leq 2\pi$ geht auch $u \rightarrow 2\pi$. Daher ist nach der vorausgeschickten Bemerkung u konstant gleich 2π . Im Mittelpunkt des Kreises hat aber u als Wert die Summe der Längen unserer Bogen s_k . Daher ist diese Längensumme 2π .

11. Ein Grenzwertsatz. Ich komme zu einem Grenzwertsatz, welcher später Anwendung finden wird.

Es sei B ein n -fach zusammenhängender von Jordankurven begrenzter Bereich. Die B_k seien, eine Folge von ineinanderliegenden Bereichen gleichen Zusammenhanges, die B gleichmäßig approximieren, derart, daß es eine im abgeschlossenen Bereich B stetige und umkehrbar eindeutige Abbildung von B_k auf B gibt, die jeden Punkt von B_k einschließlich des Randes um weniger als ε_k verschiebt und wobei $\varepsilon_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. $\mathfrak{G}_i^{(k)}$ sei die Handkurve von B_k , welche dabei der Bandkurve $\mathfrak{G}_i$ von B entspricht. Es seien weiter n Intervalle

$$a_i \leq t \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gegeben, wo

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$$

sei, und auf allen diesen Intervallen stetige Funktionen

$$z = z_k(t), \quad z = z(t)$$

derart, daß für $a_i \leq t \leq b_i$, $z = z_k(t)$ die Band $\mathfrak{G}_i^{(k)}$ von B_k und $z = z(t)$ die Randkurve $\mathfrak{G}_i$ von B darstellt. Weiter seien auf allen Intervallen beschränkte bis auf endlich viele Sprungstellen stetige Funktionen $r^{(k)}(t)$ und $r(t)$ gegeben, welche die Randwerte der zu betrachtenden Potentialfunktionen darstellen. Für andere Lagen von (x, y) folgt es sofort durch konforme Abbildung des Kreises in sich. Man richte diese nur so ein, daß (x, y) in den Mittelpunkt übergeht. s_k geht dabei in einen anderen Bogen über. Das Integral hat nach der Transformation als Wert den Winkel, unter dem der neue Bogen vom Mittelpunkt erscheint. Der ist aber wegen der konformen Abbildung dem Winkel gleich, unter dem der Bogen s_k von (x, y) aus gesehen wird.

stellen. Punkte gleicher Parameter t mögen auf $\mathfrak{G}_i^{(k)}$ und $\mathfrak{G}_i$ sich bei der Abbildung entsprechen. Und es sei

$$|r^{(k)}(t) - r(t)| < \eta_k$$

wo $\eta_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt in jedem abgeschlossenen inneren Teilbereich von B gleichmäßig

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k; z; r^{(k)}(t)) = P(B; z; r(t)).$$

Denn für genügend große k gehört der Teilbereich allen B_k an. Auf $\mathfrak{G}_i^{(k)}$ ist aber für hinreichend große k bei beliebiger Wahl von $\varepsilon > 0$

$$|P(B_k; \mathfrak{G}_i^{(k)}; r^{(k)}(t)) - P(B; \mathfrak{G}_i^{(k)}; r(t))| < \varepsilon.$$

(i=1, 2, ..., n)

Dies gilt somit nach dem Prinzip des Maximums auch für alle Punkte aus dem Inneren des Teilbereiches.

Die letzte Abschätzung ergibt sich im Falle stetiger Randwerte daraus, daß eine in einem endlich vielfach zusammenhängenden Bereiche mit stetigen Randwerten versehene Funktion im abgeschlossenen Bereiche stetig ist. Bildet man nämlich den Bereich auf einen Kreis ab, so erhält man eine Potentialfunktion, welche auf den den Bereichsrändern entsprechenden offenen Peripheriebogen stetig ist, und welche daher auf dem durch diese Peripheriebogen erweiterten Kreise stetig ist. Das bedeutet aber, daß die ursprüngliche Potentialfunktion in ihrem abgeschlossenen Bereiche stetig ist. Den im Satze angenommenen Fall, daß die Stetigkeit der Randfunktionen an endlich vielen Sprungstellen unterbrochen ist, führt man durch folgende Überlegung auf den eben behandelten zurück. Wir konstruieren zunächst eine im Einheitskreis reguläre und beschränkte Potentialfunktion, welche am Rande bis auf eine Sprungstelle der Höhe Eins regulär ist. D. h. an dieser Stelle sollen sich die beiden Grenzwerte, die man bei Annäherung an die Stelle erhält, um Eins unterscheiden. Ist a die Peripheriestelle, wo der Sprung stattfindet, so ist

$$\frac{1}{\pi} \Im \{ \log(z - a) \}$$

eine solche beschränkte Potentialfunktion. Durch konforme Abbildung kann man zu jeder Randstelle eines von einer Jordan kurve begrenzten Bereiches eine solche Sprungfunktion konstruieren. Liegt ein einfach zusammenhängender Bereich vor, so kann man durch Abziehen geeigneter Multipla der Sprungfunktionen zu Potentialfunktionen mit stetigen Randwerten gelangen. Aber auch im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche ist dies möglich, falls sie von Jordankurven begrenzt sind. Denn dann bestimmt eine jede einen einfach zusammenhängenden Bereich der Ebene, dem der gegebene Bereich als Teil angehört. Man nimmt dann die zu diesen

einfach zusammenhängenden Bereichen gehören wie eben angegeben konstruierten Sprungfunktionen. Im Falle unseres Satzes reduziert man so sowohl für die Näherungsbereiche B_k wie für B selbst die Randwerte auf stetige Randwerte. Da aber die Sprungstellen Grenzlagen der Sprungstellen auf den $\mathfrak{G}_i^{(k)}$ sind, so konvergieren die zu der $\mathfrak{G}_i$ gehörigen Sprungfunktionen gegen die zu B gehörigen gleichmäßig und daher konvergieren auch die nach Abzug der Sprungfunktionen noch übrig bleibenden stetigen Randwerte auf den $\mathfrak{G}_i^{(k)}$ gegen die auf $\mathfrak{G}_i$ übrig bleibenden stetigen Randwerte. Diese Bemerkungen liefern auch im allgemeinen Falle den Beweis unseres Satzes.

§ 9. Die Familie der schlichten Funktionen.

1. Fragestellung. Interesse bietet es nun weiter, die Umkehrung der Abbildungsfunktion näher zu untersuchen. Diese ist dadurch ausgezeichnet, daß sie eine automorphe Funktion der Gruppe ist, welche im Fundamentalbereich keinen Wert mehr als einmal annimmt. Solche Funktionen sind bisher nur für den Fall der Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereiches näher untersucht worden. Hier fällt der Fundamentalbereich mit dem vollen Einheitskreis zusammen, die Gruppe besteht aus der identischen Transformation allein, und es handelt sich um die Familie der Funktionen, welche im Inneren des Einheitskreises regulär sind und daselbst keinen Wert mehr als einmal annehmen. Wir wollen sie die Familie der *schlichten* Funktionen nennen. Aufgabe der Untersuchung soll es nun sein, festzustellen, wie diese Forderung der Schlichtheit auf die übrigen Funktionseigenschaften, wie Wachstum, Koeffizienten der die Funktion darstellenden Potenzreihe und dgl. mehr einwirkt.

Wir lernen damit ein erstes Beispiel einer Fragestellung kennen, wie sie uns noch mehrfach beschäftigen werden. Die Koeffizienten der Potenzreihen, welche beschränkte Funktionen darstellen, werden uns im Abschnitt III zusammen mit der Frage beschäftigen, wie diese Beschränktheit auf die übrigen Funktionseigenschaften einwirkt. Das sind Fragen, die sich um das Schwarzsehe Lemma gruppieren, ein Theorem, durch das H. A. Schwarz 1869 den ersten Schritt in diese Fragen tat, in Fragen, wie sie durch den Weierstraßschen Begriff der analytischen Funktion nahe gelegt sind.

In unserem jetzt zu besprechenden Fragenkreis hat Koebe 1907 in Anlehnung an die damals in vollem Fluß befindlichen Untersuchungen aus dem Gebiet des Picardschen Satzes das erste Ergebnis gewonnen.

Man kann es so aussprechen: Wenn $w = f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und schlicht ist, so gibt es eine von $f(z)$ unabhängige positive Zahl m derart, daß sämtliche Bandpunkte des Bildbereiches B vom Punkte $f(0)$ einen Abstand haben, der nicht kleiner als $|f'(0)|^{-1} m$ ist.

Diesen Satz kann man am einfachsten so beweisen: Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ anzunehmen. Dann sei d der zunächst an $w = 0$ gelegene Randpunkt des Bildbereiches. Man bilde diesen durch denjenigen Zweig der Funktion

$$\xi = -4d \frac{\sqrt{w-d} - i\sqrt{d}}{\sqrt{w-d} + i\sqrt{d}}$$

schlicht ab, welcher im Punkte $w = 0$ des Bildbereiches verschwindet. Diese Funktion bildet eine bei $w = d$ und $w = \infty$ verzweigte zwei blättrige Riemannsche Fläche auf die schlichte e -Ebene derart ab, daß der Punkt $w = 0$ des einen Blattes in $\xi = 0$, der Punkt $w = 0$ des anderen Blattes in $\xi = \infty$ übergeht. Der schlichte Bildbereich B enthält keine zwei übereinanderliegenden Punkte der Riemannschen Fläche. Da er aber die Kreisscheibe $|w| < d$ eines Blattes voll enthält, so gehört kein Punkt dieser Kreisscheibe des anderen Blattes dem Bereiche an. Daher ist am Rande des Bildbereiches $|\xi|$ jedenfalls kleiner als das Maximum der Werte, welche $|\xi|$ für Werte $|w| = d$ annimmt. Also gilt für die im Einheitskreis schlichte und reguläre Funktion $\xi\{f(z)\}$ überall die Abschätzung

$$|\xi| \leq \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} 4 \left| \frac{\sqrt{e^{i\varphi} - 1} - i}{\sqrt{e^{i\varphi} - 1} + i} \right| |d|.$$

Die rechte Seite aber wird mit $|d|$ zugleich beliebig klein. Dies aber würde bedeuten, daß die im Einheitskreis reguläre Funktion $\xi\{f(z)\}$, welche im Mittelpunkt desselben verschwindet und dort, wie man leicht nachrechnet, die Ableitung Eins besitzt, in diesem Kreise für hinreichend kleine d nur Werte annimmt, deren Betrag z. B. unter ein Halb angenommen werden kann. Das aber widerspricht dem Cauchyschen Koeffizientensatz, wonach für eine solche Funktion die Ableitung im Mittelpunkt des Kreises gleichfalls einen Betrag unter ein Halb haben muß.

Durch ähnliche Schlüsse könnten wir noch eine ganze Reihe von Sätzen, wie z. B. auch den schon auf S. 15 erwähnten, beweisen. Aber diese etwas grobe Methode würde es nie gestatten, zu einer Bestimmung der Konstanten zu gelangen, deren Existenz in diesem und verwandten Sätzen behauptet wird. Ich ziehe es daher vor, diese mehr propädeutischen Methoden zu verlassen, und wende mich gleich den Methoden zu, welche auch hinsichtlich der wirklichen Bestimmung der Konstanten befriedigendere Resultate ergeben.

2. Der Flächensatz. Diese Methoden¹⁾ stützen sich auf den folgenden Flächensatz

$$w = \xi + \frac{\alpha_1}{\xi} + \dots = \varphi(\xi)$$

1) Kürzlich hat H. Prawitz eine vom Flächensatz unabhängige neue Methode ent-

sei in $|\xi| > 1$ schlicht und regulär bis auf den im unendlich fernen gelegenen einfachen Pol. Dann ist

$$\sum_1^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1.$$

Man nennt diesen Satz Flächensatz, weil er der analytische Ausdruck für die folgende einleuchtende geometrische Tatsache ist: Der bei der Abbildung erhaltene schlichte Bildbereich von $|\xi| > 1$ läßt eine Punktinenge der Ebene unbedeckt, deren äußerer Inhalt größer oder gleich Null ist.

Diese geometrische Deutung gibt sofort den Schlüssel zum Beweise. Man führt ihn am einfachsten so: Der Kreis $|\xi| = r > 1$ geht bei der Abbildung in eine geschlossene analytische Jordankurve über, deren Gleichung

$$w = w(\theta) = \varphi(re^{i\theta})$$

ist. Man hat dabei $\xi = re^{i\theta}$ gesetzt. Daher wird der Inhalt des von dieser Kurve umschlossenen endlichen Bereiches ($w = u + iv$)

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (uv' - v u') d\theta = \int_0^{2\pi} u v' d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{w(\theta) + \overline{w(\theta)}}{2} \frac{w'(\theta)}{2i} - \overline{w'(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{2} + \sum_1^{\infty} \alpha_n e^{-in\theta} + \overline{\alpha_n} e^{in\theta} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{2} - \sum_1^{\infty} n \alpha_n e^{-in\theta} + n \overline{\alpha_n} e^{in\theta} \right\} d\theta \\ &= \pi r^2 - \sum_1^{\infty} n |\alpha_n|^2 \pi \geq 0. \end{aligned}$$

Beim Ausmultiplizieren und nachherigen Integrieren fallen nämlich alle die Glieder weg, welche $e^{k\theta}$ zu einer anderen als der nullten Potenz enthalten.

wickelt (Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 20 (1927/28) Nr. 6). Sie benutzt an Stelle des Flächensatzes den folgenden Satz: $f(z) = Re^{i\varphi}$ sei in $|z| < 1$, $z = re^{i\varphi}$ schlicht. Es sei $g(R)$ eine wachsende konkave oder konvexe Funktion von $\log R$ (d.h. die Kurve $y = g(e^x)$ ist konkav oder konvex). Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} g(R) d\theta \geq 0 \text{ für } r < 1.$$

Grenzübergang zu $r \rightarrow 1$ lehrt, daß auch

$$\pi - \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \pi \geq 0$$

ist, oder was dasselbe ist $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1$.

3. Der Koeffizient a_2 . Ich gehe zu *Folgerungen* aus diesem Flächensatz über:

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

bilde $|z| < 1$ schlicht ab. Dann ist, wie man leicht sieht,¹⁾ auch

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \dots$$

schlicht und regulär in $|z| < 1$. Daher bildet

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{F\left(\frac{1}{\xi}\right)}$$

$|\xi| > 1$ schlicht ab.²⁾ Es besitzt aber $\Phi(\xi)$ eine für $|\xi| > 1$ gültige Potenzreihenentwicklung, die so beginnt

$$\xi - \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{\xi} + \dots$$

Daher ist nach dem Flächensatz

$$\frac{1}{2} |a_2| \leq 1.$$

Also ist $|a_2| \leq 2$. Wir haben so den Satz: Wenn

$$w = z + a_2 z^2 + \dots$$

in $|z| < 1$ schlicht und regulär ist, so ist $|a_2| \leq 2$. Diese Schranke kann nicht verbessert werden. Denn sie wird für die Funktion

$$(1-z)^{\frac{2}{3}}$$

1) Soll nämlich $F'(z_1) = F'(z_2)$ sein, so muß auch $(F'(z_1))^{\frac{1}{2}} = (F'(z_2))^{\frac{1}{2}}$ sein. D. h. es muß $f'(z_1^2) = f'(z_2^2)$ sein. Da aber $f(z)$ schlicht abbildet, so folgt daraus, daß $z_1^2 = z_2^2$ ist. Also ist entweder $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$. Da aber $F(z)$ eine ungerade Funktion ist, so ist im letzteren Falle $F'(z_1) = -F'(z_2)$. Also bildet $F(z)$ wirklich schlicht ab. Man kann das auch daraus entnehmen, daß durch Übergang zu z^2 der Kreis $|z| < 1$ in ein Riemannsches Flächenstück mit Windungspunkt bei $s = 0$ übergeht, welches durch $f'(z^2)$ auf einen ebenfalls nur um $z = 0$ gewundenen Bereich abgebildet wird. Durch Übergang zu $\sqrt{f(z^2)}$ wird diese Windung wieder behoben. So hat man einen zweiten Beweis.

2) Man hätte auch $\frac{1}{f\left(\frac{1}{\xi}\right)}$ betrachten können. Hier aber hätte die Entwicklung so begonnen

$$\xi - \frac{1}{2} a_2 + \dots,$$

so daß der Flächensatz über das Absolutglied $\frac{1}{2} |a_2|$ keinen Aufschluß gegeben hätte.

erreicht. Diese bildet $|z| < 1$ schlicht auf einen Bereich ab, dessen volle Grenze von dem zwischen $-\frac{1}{4}$ und ∞ gelegenen Stück der negativen reellen Achse gebildet wird. Denn

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2}{\frac{1}{z}} = z + \frac{1}{z} - 2$$

bildet $|z| > 1$ bekanntlich auf einen Bereich ab, dessen volle Grenze von dem zwischen -4 und 0 gelegenen Stücke der negativen reellen Achse gebildet wird.

4. Abschätzung der Randpunkte. Ich betrachte wieder die in $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

Es sei $f(z) \neq c$ in $|z| < 1$. Dann ist auch $c \neq 0$ und

$$(1) \quad f_1(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) z^2 + \dots$$

in $|z| < 1$ schlicht und regulär. Also ist

$$\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2.$$

D. h. es ist

$$|c| \geq \frac{1}{4}.$$

Darin liegt insbesondere, daß *kein Randpunkt des durch $f(z)$ erhaltenen Bildes des Einheitskreises vom Nullpunkt eine Entfernung hat, die kleiner als $\frac{1}{4}$ ist*. Damit ist der vorhin mehr propädeutisch behandelte Satz aufs Neue bewiesen. Zugleich aber ist, einer von Koebe geäußerten Vermutung entsprechend, die Konstante, deren Existenz in ihm behauptet wird, genau bestimmt. *Tatsächlich kann die gefundene Schranke, $\frac{1}{4}$ nicht mehr verbessert werden.* Denn es gibt Funktionen, für welche dieselbe erreicht wird. Dies ist wieder für die Funktion

$$\frac{3}{(1-z)^2}$$

der Fall. Dies nimmt für $z = -1$ den Wert $\frac{3}{4}$ an.

Man kann die eben behandelte Frage in folgender Weise verallgemeinern. Es sei $c_1 \neq c$ und $f(z) \neq c$, sowie $f(z) \neq c_1$ in $|z| < 1$. Ferner sei

$$\arg c - \arg c_1 = \pi.$$

D. h. es soll sich um zwei vom Bildbereich nicht bedeckte Punkte c und c_1 handeln, die auf ein und derselben Geraden durch den Nullpunkt so liegen, daß sie durch diesen voneinander getrennt werden. Dann ist nach (1)

$$\left|\frac{c - c_1}{c - c_1}\right| \geq \frac{1}{4}.$$

D. h. es ist $\left| \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right| = \left| \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c_1} \right| \leq 4.$

D. h. es ist entweder $|c_1| \geq \frac{1}{2}$ oder es ist $|c_1| \geq \frac{1}{4}$. Man kann das mit Herrn Szegő, von dem diese Bemerkung herrührt, so aussprechen: Von zwei nicht zum Bildbereich gehörigen auf derselben Geraden durch den Nullpunkt gelegenen Punkten, welche durch diesen von einander getrennt werden, ist mindestens einer um mindestens $\frac{1}{2}$ vom Nullpunkt entfernt.

Man kann dies Ergebnis zum Anlaß der folgenden allgemeineren Fragestellung nehmen: Man lege durch den Nullpunkt des Bildbereiches gleichwinklig verteilte Gerade und betrachte auf diesen gelegene nicht zum Bildbereich gehörige Punkte. Was läßt sich analog über deren Entfernungen vom Nullpunkt aussagen? H. Grötzsch hat kürzlich (Ber. der sächs. Ges. d. Wiss. 1928 S. 373) hierüber das Folgende bewiesen: Die durch $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ auf einen schlichten Bereich abgebildet. Derselbe habe n dem Nullpunkt nächstbenachbarte Randpunkte des Abstandes d vom Ursprung, welche die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks sein mögen. Dann ist $d \geq \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$. Es ist $d = \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ für $f(z) = \frac{z}{\sqrt[n]{1+z^n}}$. Sie bildet $|z| < 1$ auf die von $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ $e^{2\pi i k/n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) radial nach ∞ aufgeschlitzte Ebene ab.

5. Der Verzerrungssatz. Ich gehe zum sogenannten Verzerrungssatz über. Wieder sei

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

in $|z| < 1$ schlicht und regulär. Dann ist, wie man leicht nachprüft, auch

$$g(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi+z}{1+\bar{z}\xi}\right) - f(z)}{f'(z)(1-\bar{z}\xi)}$$

in $|\xi| < 1$ schlicht und regulär und besitzt eine in $|\xi| < 1$ tiefe Potenzreihenentwicklung, die so beginnt

$$g(\xi) = \xi + \beta_2 \xi^2 + \dots$$

Hier ist nach der Taylor'schen Koeffizientendarstellung

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)(1-\bar{z}\bar{z})}{f'(z)} - 2\bar{z} \right).$$

Daher ist

$$\left| \frac{f''(z)(1-\bar{z}\bar{z})}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4.$$

Also

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)^2} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Also

$$\frac{2|z|^2 - 4|z|}{1-|z|^2} \leq \Re \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)^2} \right) \leq \frac{4|z| + 2|z|^2}{1-|z|^2}.$$

$$\begin{aligned}\Re \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) &= \Re \left(\frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} \right) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} \Re \log f'(z) \\ &= |z| \frac{\partial}{\partial |z|} \log |f'(z)|.\end{aligned}$$

$$\text{Also wird} \quad \frac{2|z|}{1-|z|^2} \leq \frac{\partial}{\partial |z|} \log |f'(z)| \leq \frac{4+2|z|}{1-|z|^2}.$$

Und daraus folgt durch Integration

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Das sind Schranken, die wieder bei $|z| \rightarrow 1$ eich t werden. Dies ist der sogenannte *verzerrungssatz*. Er bringt zum Ausdruck, daß das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung von Ort zu Ort sich nicht allzu stürmisch ändern kann. Man kann das Ergebnis auch in der folgenden etwas anderen Art aussprechen. Da $f'(z)$ in $|z| < r < 1$ nicht verschwindet, so wird Maximum und Minimum seines absoluten Betrages auf der Peripherie dieses Kreises angenommen. D. h. es ist für alle $|z| < r$

$$\frac{1-r}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^2}.$$

Sind dann z_1 und z_2 zwei Stellen dieses Kreises, so hat man

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \leq \left| \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2.$$

Aus

$$|f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^2}$$

folgt durch Integration über den Radius des Punktes z :

$$|f(z)| = \left| \int_0^z f'(z) dz \right| \leq \int_0^{|z|} |f'(z)| d|z| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^3}.$$

Durch Integration folgt aber auch¹⁾ aus

$$|f(z)| \geq \frac{1-|z|}{(1+|z|)^2}, \quad \text{daß} \quad |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^2}.$$

1) Um die Richtigkeit der Behauptung zu beweisen, muß man nur zeigen, daß jede Kurve, welche $z=0$ mit einem Punkte z verbindet, in eine Bildkurve übergeht, deren Länge mindestens

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

ist. Man darf sich dabei auf Kurven $z=z(s)$ mit stetiger Ableitung $z'(s)$ beschränken. Der Parameter s sei die Bogenlänge. Dann wird die Länge der Bildkurve

$$\int_0^{|z|} |f'(z)| |z'(s)| ds = \int_0^{|z|} |f'(z)| |dz|.$$

Betrachtet man dies Integral als Grenzwert seiner Näherungssummen und beachtet,

Man hat also

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Die Schranken werden wieder von $\frac{z}{(1-|z|)^2}$ erreicht.

Die linke Seite dieser Abschätzung enthält aufs neue das Ergebnis über die Lage der Randpunkte, von dem schon die Rede war. Die rechte Seite schränkt das Wachstum einer im Einheitskreis schlichten und regulären Funktion ein. Bei Annäherung an die Peripherie kann der Betrag der Funktion nur wie die zweite Potenz der reziproken Entfernung von der Peripherie unendlich werden.¹⁾

6. Zusatz. Man kann hieraus den folgenden allgemeinen Satz erschließen: Es sei B irgendein schlichter den Punkt $z = 0$ enthaltender Bereich und $f(z)$ eine in B reguläre Funktion, welche B schlicht abbildet. Sei ferner G irgendeine abgeschlossene Teilmenge von B , dann gibt es eine nur von B und G abhängende von $f(z)$ aber unabhängige Zahl M , so daß in G überall

$$|f(z)| < |f(0)| + |f'(0)| M.$$

Der Beweis ergibt sich daraus, daß

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)}$$

in B schlicht ist. Für einen genügend kleinen Kreis um $z = 0$ kann man die zuletzt gewonnene Abschätzung ausnützen. Gehört nämlich $|z| < R$ dem Bereich B an, so ist danach in $|z| \leq \theta R$ ($0 < \theta < 1$)

$$|\varphi(z)| \leq \frac{\theta}{(1-\theta)^2},$$

also

$$|f(z)| < |f(0)| + |f'(0)| \frac{\theta}{(1-\theta)^2}.$$

Nun bedecke man ähnlich wie bei der analytischen Fortsetzung mit einer Kette aus endlich vielen Kreisscheiben eine $z = 0$ und die gegebene Menge enthaltende zusammenhängende Menge und kann dann von Kreis zu Kreis

daß stets $|dz| \geq \delta |z|$ ist, so erkennt man, daß das Integral nicht kleiner sein kann als das folgende

$$\int_0^{|z|} \frac{|f'(z)| \delta |z|}{(1+|z|)^2} dz.$$

1) Verschiedentlich sind Analoga des Verzerrungssatzes für nichtschlichte Funktionen angegeben worden. So von Landau, Palermo Rend. 1922 und von Grötzsch (in den Leipziger Ber. 1928, 1980) für nichtanalytische Abbildungen.

die Abschätzung weiter tragen. Der Leser wird leicht imstande sein, diese Andeutungen durchzudenken.

7. Koeffizientenschranken. Nun zurück zu den im Kreise $|\varrho| < 1$ schlichten und durch $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normierten Funktionen.

Die gefundene Schranke für $|f(\varrho)|$ ermöglicht es sofort, zu behaupten, daß auch für die übrigen Koeffizienten der Taylorreihe einer schlichten Funktion Schranken existieren müssen. Gute Schranken hat Littlewood (Proc. of the London math. Soc. (2) 23 (1925) S. 498) bestimmt. Er geht so vor: Für jedes $r < 1$ ist

$$\begin{aligned} |a_n| r^n &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho^2 e^{i\varphi})| d\varphi \quad (r = \varrho^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho^2 e^{i\varphi})|^2 \frac{d\varphi}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho^2 e^{2i\psi})| d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\varrho^2 e^{i\psi})|^2 d\psi. \end{aligned}$$

Setzt man $F(\xi) = \sqrt{f(\xi^2)}$, $\xi = \varrho e^{i\psi} = \sqrt{r} e^{i\psi}$, so wird dies

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\xi)|^2 d\psi.$$

Nun sei $F(\xi) = \xi + b_2 \xi^2 + \dots$, $b_1 = 1$

$$\begin{aligned} \text{Dann wird dies} \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \varrho^{2n}, \\ &= 2 \int_0^{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \varrho^{2n-1} d\varrho. \end{aligned}$$

Der Integrand ist aber nun gleich dem $\frac{1}{\pi\varrho}$ -fachen Flächeninhalt des Bild-

bereiches¹⁾, der aus $|\xi| < \varrho$ durch $F(\xi)$ entsteht. Daher gilt weiter die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\leq 2 \int_0^{\varrho} \frac{1}{x\varrho} \cdot \pi \cdot \max_{|\xi| \leq \varrho} |F(\xi)|^2 d\varrho \\ &\leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\varrho^2}{(1-\varrho^2)^2} d\varrho = \frac{\varrho^2}{(1-\varrho^2)^2} \end{aligned}$$

Also wegen $\varrho = \sqrt{r}$ $|a_n r^n| < \frac{r}{1-r^2}$

Also für $r = 1 - \frac{1}{n}$

$$|a_n| < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot n \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e \cdot n \cdot 2$$

1) Der Inhalt wird nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} |F^*(\xi)|^2 \varrho d\varphi d\varrho &= \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} (1 + 2b_1 \xi + \dots)(1 + 2\bar{b}_1 \bar{\xi} + \dots) \varrho d\varphi d\varrho \\ &= \int_0^{\varrho} 2\pi \varrho (1 + 4|b_1|^2 \varrho^2 + \dots + n^2 |b_n|^2 \varrho^{2n-2} + \dots) d\varrho \\ &= \pi (\varrho^2 + 2|b_1|^2 \varrho^4 + \dots + n|b_n|^2 \varrho^{2n} + \dots). \end{aligned}$$

2) ER ist nämlich $F^*(\xi) = \sqrt{f(\xi^*)}$. Und für $f(\xi)$ liefert der Verzerrungssatz

$$|f(\xi^*)| \leq \frac{\varrho^2}{(1-\varrho^2)^2},$$

Daher

$$|F(\xi)| \leq \frac{\varrho}{1-\varrho^2}.$$

3) Kleiner kann ich hier deshalb schreiben, weil nicht in den beiden vorigen Abschätzungen zugleich das Gleichheitszeichen stehen kann. Denn in der ersten steht gleich nur dann, wenn es sich um eine lineare Abbildung handelt, und in der zweiten steht gleich nur bei den mehrfach erwähnten Schrankenfunktionen, die nicht linear sind.

4) Es ist zu vermuten, daß sogar $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ ist, daß also auch hier die Schranken bei $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ erreicht werden. In dieser Richtung ist ein Ergebnis von Löwner (Math. Annalen Bd. 89) zu nennen, der gezeigt hat, daß $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ ist. Landau hat (Math. Zeitschr. Bd. 30 (1929) S. 635) durch Verschärfung der Littlewoodsehen Methode gezeigt, daß $|a_n| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) e^n$ ist. Von Interesse für das Koeffizientenproblem dürfte auch das Ergebnis von G. Szegő (Math. Annalen Bd. 100 (1928)) sein, daß alle Abschnitte $z + a_1 z^2 + \dots + a_n z^n$ jeder in $|z| < 1$ schlichten Funktion $z + a_1 z^2 + \dots$ den $|z| < \frac{1}{2}$ aber nicht immer einen größeren Kreis schlicht abbilden. Ich habe hinzugefügt (Bull. Calcutta Math. Soc. Bd. 20 (1928)), daß es eine Zahl Q gibt, so daß jede Potenzreihe $z + b_1 z^2 + \dots$ mit $|b_n| \leq |a_n|$ den $|z| < Q$ schlicht abbildet. Es ist $0,159 < Q < 0,166$.

8. Drehungssatz. Aus der oben gewonnenen Formel

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

erhält man für den Imaginärteil

$$\frac{-4|z|}{1-|z|^2} \leq \Im \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Nun ist aber $\Im \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} \arg f'(z).$

Also hat man $\frac{-4}{1-|z|^2} \leq \frac{\partial}{\partial |z|} \arg f'(z) \leq \frac{4}{1-|z|^2}$

Integration nach $|z|$ führt zum *Drehungssatz*

$$\arg f'(z) \leq 2 \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Er ist ein Seitenstück zum Verzerrungssatz, indem er die Richtungsänderung bei schlichter Abbildung reguliert.

9. Rundungsschranke. Ich erwähne noch eine weitere geometrische Deutung der oben gewonnenen Abschätzung

$$\Re \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{2|z|^2 - 4|z|}{1-|z|^2}.$$

Zu ihr gelangen wir, wenn wir das Bild des Kreises $|z| = r$ betrachten.

Die Richtung der Kreistangente im Punkte $z = re^{i\varphi}$ ist

$$\frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Im Bildpunkte $f(z)$ hat die Tangente der Bildkurve die Richtung

$$\frac{\pi}{2} + \varphi + \arg f'(z).$$

Differenziert man nach φ , so erhält man

$$1 + \Re \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right).$$

Denn es ist

$$\Re \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f'(z).$$

Daher wird

$$1 + \Re \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{1-4|z|+|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Wenn nun aber der Ausdruck linker Hand für $|z| = r$ positiv ist, so bedeutet das nach unserer Herleitung, daß das Bild des Kreises konvex ist, d. h. seine Höhlung stets gegen den Nullpunkt kehrt.¹⁾ Man rechnet aber sofort nach, daß für

$$|z| < 2 - \sqrt{3} = 0,26 \dots$$

1) Namentlich also wird $|z| < 1$ selbst dann und nur dann konvex abgebildet, wenn in $|z| < 1$

$$1 + \Re \frac{zf''}{f'^2} \geq 0 \quad \text{ist.}$$

der Ausdruck rechts stets positiv ist, während er für größere $|z|$ negativ wird. Daher wird bei jeder schlichten Abbildung $f(z)$ von $|z| < 1$ jeder Kreis $|z| < 2 - \sqrt{3}$ konvex abgebildet. Meistens wird sogar ein noch größerer Kreis konvex abgebildet. Aber es gibt einen Fall, wo gerade der eben abgegebene Kreis und kein größerer mit ihm konzentrischer konvex abgebildet wird. Das ist der Fall bei der Funktion

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^2,$$

wie man leicht nachrechnet. Man nennt $2 - \sqrt{3}$ die Rundungsschranke.

10. Sternigkeit. Es ist interessant, noch einen weiteren Schluß aus unseren Ergebnissen zu ziehen. Nahe verwandt mit den konvexen sind die von einem Punkte aus konvexen Bereiche, die sogenannten *Sterne*. Das sind schlichte Bereiche, die von jeder Geraden durch $z = 0$ in nur einer Strecke geschnitten werden und die den Punkt $z = 0$ selbst enthalten. Man kann nun leicht sehen, daß es einen Kreis um $z = 0$ geben muß, der bei jeder schlichten Abbildung auf einen Stern abgebildet wird. Ich nenne seinen Radius die Sternschranke. Soll der Kreis $|z| < r$ in einen Stern übergehen, so muß in jeder Richtung, von $w = 0$ aus gesehen, genau ein Punkt der Bildkurve von $|z| = r$ liegen. Daher muß sich $\arg f(z)$ stets in derselben Richtung ändern, wenn z den Kreis $|z| = r$ durchläuft. Daher muß die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f(z) = \Re \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)$$

positiv sein für $|z| \leq r$. Daher lautet die Bedingung $|z| < r$ wird dann und nur dann durch $f(z)$ sternig abgebildet, wenn

$$\Re \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right) > 0.$$

Mit Rücksicht auf das bei konvexen Abbildungen von $f(z)$ vorhin angegebene Kriterium kann man auch sagen: $|z| < 1$ wird durch $f(z)$ dann und nur dann auf einen Stern abgebildet, wenn das durch

$$f(z) = z F'(z)$$

erklärte $F(z)$ den $|z| < 1$ konvex abbildet.¹⁾

1) Hieraus kann man das scharfe Analogon des Verzerrungssatzes für konvexe Funktionen gewinnen. Da nämlich $f(z)$ auf einen Stern abbildet, so gelten für $|f(z)|$ die Abschätzungen des Verzerrungssatzes und dieser liefert auch für sternige Abbildungen die scharfen Schranken. Denn $\frac{z}{(1-z)^2}$ bildet ja $|z| < 1$ auf einen Stern ab. Aus

A. Marx hat von diesem Ansatz ausgehend in Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1929 S. 96ff. gezeigt, daß die Sternschränke zwischen 0,64 und 0,71 liegt.

Ich möchte noch erwähnen, daß für sternige Abbildungen

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

von $|z| < 1$ sich $|a_n| \leq n$ als genaue Schranke tatsächlich beweisen läßt. Es ergibt sich dies nach früheren Bemerkungen daraus, daß für konvexe Abbildungen

$$F(z) \leq z + b_2 z^2 + \dots$$

stets $|b_n| \leq 1$ gilt. Dies wieder ergibt sich aus

$$1 + \Re \frac{z F''(z)}{F'(z)} \geq 0.$$

Man vgl. dazu Löwner in den Berichten der sächs. Akademie zu Leipzig 1917.

11. Schlußbemerkung. Ich schließe damit die Betrachtung der schlichten Familie ab. Noch möchte ich darauf hinweisen, daß ein Hauptproblem der Theorie noch unerledigt ist, nämlich das Koeffizientenproblem: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welchen die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

genügen müssen, wenn dieselbe eine schlichte Abbildung des Kreises $|z| < 1$ vermitteln soll?

Wegen der Ausdehnung der hier besprochenen Dinge auf schlichte Abbildungen mehrfach zusammenhängender Bereiche vergleiche man drei Arbeiten von G. Pólya in den Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1928 u. 1929, sowie eine Arbeit von G. Szegő ebenda 1928. Ferner II. Grötzsch in den Sitzungsber. d. sächs. Akad. d. Wiss. 1929 S. 38 und S. 217.

$$\left(1 + \frac{|z|}{1 - |z|}\right)^2 \leq |z F'(z)| \leq \frac{|z|}{1 - |z|}^2$$

folgt aber durch Integration $\frac{|z|}{1 + |z|} \leq |F(z)| \leq \frac{|z|}{1 - |z|}$.

Dies sind die scharfen Schranken für konvexe Funktionen $F(z)$. Denn

$$w = \frac{z}{1 - z}$$

leistet eine konvexe Abbildung $|z| < 1$. Sie bildet nämlich $|z| < 1$ auf $\Re w > \frac{1}{2}$ ab.

Zweiter Abschnitt.

Die elliptische Modulfunktion.¹⁾

In diesem Kapitel soll es unsere Aufgabe sein, des näheren darzulegen, wie die von der konformen Abbildung eines Kreisbogendreiecks her eingeführte elliptische Modulfunktion mit den elliptischen Funktionen zusammenhängt. Dabei wird sich zugleich noch die Herleitung einer Reihe von weiteren Eigenschaften der Funktion ergeben.

§ 1. Einführung der Funktion $J_1(w)$.

1. Äquivalente Periodenpaare. Außerordentlich nahe liegt der Gedanke, nach den gegenseitigen Beziehungen derjenigen zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit vier Verzweigungspunkten zu fragen, welche sich auf zueinander ähnliche Periodenparallelogramme abbilden lassen. Bei der Beantwortung dieser Frage darf man sich auf die Betrachtung von Riemannschen Flächen beschränken, deren Gleichung von der Weierstraßschen Normalform

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

ist. Denn auf solche Flächen können alle anderen linear abgebildet werden. Eine gegebene Riemannsche Fläche entspricht nicht nur einem Periodenparallelogramm. Vielmehr werden alle die Periodenparallelogramme, welche die gleiche Periodengesamtheit liefern, durch dieselbe y -Funktion auf dieselbe Riemannsche Fläche abgebildet. Denn die y -Funktion ist nach Bd. I S. 268 durch die über die Periodengesamtheit Ω erstreckte absolut konvergente Reihe

$$y(u) = \frac{1}{u^4} + \sum' \left\{ \left(\frac{1}{u - \Omega} \right)^2 - \frac{1}{\Omega^2} \right\}$$

bestimmt. Wenn aber zwei Perioden $(2w_1, 2w_2)$ dieselbe Periodengesamtheit wie $2w_1, 2w_2$ liefern sollen, so müssen sich auch w_1, w_2 linear und ganzzahlig durch w'_1, w'_2 ausdrücken lassen. Ich setze

$$\begin{aligned} w'_1 &= a w_1 + b w_2 \\ w'_2 &= c w_1 + d w_2. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach w_1 und w_2 muß lineare Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten liefern. Man erhält aber

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{d w'_1}{ad - bc} - \frac{b w'_2}{ad - bc} \\ w_2 &= \frac{-c w'_1}{ad - bc} + \frac{a w'_2}{ad - bc}. \end{aligned}$$

1) Für das Verständnis der späteren Abschnitte ist die Lektüre des vorliegenden nicht erforderlich.

Bildet man die Determinante der Koeffizienten, die auch eine ganze Zahl sein muß, so findet man

$$\frac{1}{ad - bc}.$$

Daher ist

$$ad - bc = \pm 1$$

Wir haben das Ergebnis: *Alle und nur diejenigen Periodenpaare liefern dieselbe $\wp$ -Funktion und damit dieselbe Biemannsche Fläche, welche auseinander durch unimodulare ganzzahlige Substitutionen hervorgehen.* (D. h. ganzzahlige Substitutionen der Determinante ± 1 .) Faßt man daher die $\wp$ -Funktion auch als Funktion

$$\wp(u; \omega_1, \omega_2)$$

von ω_1 und ω_2 auf, so gilt

$$\wp(u, a2\omega_1 + b2\omega_2, c2\omega_1 + d2\omega_2) = \wp(u, \omega_1, \omega_2)$$

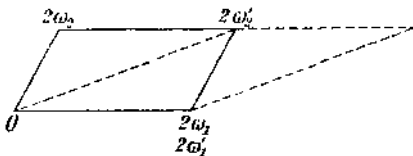


Fig. 10 a.

für alle unimodularen ganzzahligen Substitutionen. Übrigens genügt ein geringes Eingehen auf die übliche Konvergenzbetrachtung der $\wp$ -Funktion, um zu erkennen, daß dieselbe eine analytische Funktion von ω_1 und ω_2 ist. Denn die Reihen konvergieren gleichmäßig in ω_1 und ω_2 , da man die zum Konvergenzbeweis in u nötigen Abschätzungen leicht so führen kann, daß sie für alle nicht zu sehr verschiedenen Periodenpaare auf einmal gelten. Das gleiche gilt dann natürlich für die durch gliedweise Integration entstandene $\wp$ -Reihe.

Einfache Beispiele von Periodenparallelogrammen, die zum selben Periodengitter führen, sind in den Figuren 10 a, b, c dargestellt.

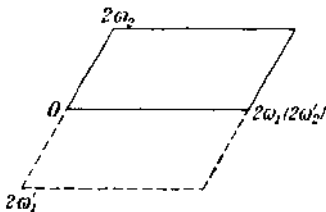


Fig. 10 b.

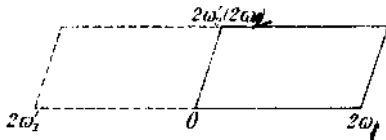


Fig. 10 c.

Zu 10a gehört die Substitution

$$\begin{aligned} S: \quad \omega'_1 &= \omega_1 \\ \omega'_2 &= \omega_1 + \omega_2 \end{aligned}$$

Zu 10b gehört

$$\begin{aligned} T: \quad \omega'_1 &= -\omega_2 \\ \omega'_2 &= \omega_1. \end{aligned}$$

Zu 10c gehört

$$\begin{aligned} U: \quad \omega'_1 &= -\omega_1 \\ \omega'_2 &= \omega_2. \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, daß durch Kombination dieser drei die ganze homogene Gruppe

$$(n \quad \begin{matrix} \omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2 \\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} a, b, c, d \text{ ganzzahlig} \\ ad - bc = \pm 1 \end{pmatrix})$$

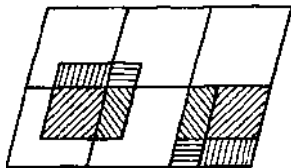
erhalten werden kann.

Diese Substitutionen bilden nämlich eine Gruppe, weil die Zusammensetzung zweier Substitutionen der Determinante ± 1 wieder eine solche der Determinante ± 1 liefert, und weil mit jeder Transformation auch die inverse dem System (1) angehört. Bei der Zusammensetzung zweier Substitutionen S_1 und S_2 erhält man nämlich ein S_3 , dessen Determinante dem Produkt der Determinanten von S_1 und S_2 gleich ist. (Der Leser möge die Rechnung selbst ausführen.) Darin liegt auch begründet, daß die Substitutionen der Determinante ± 1 selbst eine Gruppe bilden, eine Bemerkung, die noch wichtig werden wird. Diese aus S und T allein erzeugte Gruppe nennen wir die *elliptische Modulgruppe*.

2. Ähnliche Periodenparallelogramme. Wir kehren nun zu der eingangs gestellten Frage zurück: Welchen Einfluß hat eine auf ein Periodenparallelogramm ausgeübte Parallelverschiebung oder Drehstreckung auf die zugehörige $\wp$ -Funktion und auf die zugehörige Riemannsche Fläche?

Was zunächst die Parallelverschiebung anlangt, so wird das verschobene Parallelogramm durch die gleiche $\wp$ -Funktion auf die gleiche Riemannsche Fläche abgebildet. Ein Blick auf Fig. 11

lehrt, daß im verschobenen Parallelogramm $\wp(u)$ wieder jeden Wert zweimal annimmt.



Denn in den gleich schraffierten Stücken, die je nach der Aneinanderlegung das eine oder das andere Parallelogramm liefern, nimmt $\wp(u)$ die gleichen Werte an.

Man braucht also nur noch den Einfluß einer *Drehstreckung* zu untersuchen. Es seien (ω_1', ω_2') und (ω_1, ω_2) zwei durch Drehstreckung zusammenhängende Paare von Halbperioden. Es sei etwa

$$\omega_1' = q\omega_1$$

Ferner sei $\wp_1(u')$ die zu (ω_1', ω_2') , $\wp(u)$ aber zu (ω_1, ω_2) gehörige $\wp$ -Funktion.¹⁾

1) Dies ist der Ansatz, der zur Lehre von der komplexen Multiplikation führt. Dort handelt es sich darum, festzustellen, wann $q\omega_1$ und $q\omega_2$ ein Periodensystem erzeugen, das nur Perioden aus dem von ω_1 und ω_2 bestimmten System enthält. Man findet, daß dann $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$ Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen rationalen

Dann wird

$$u' = \int_{-\infty}^{p_1} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2'p - g_3'}} \\ u = \int_{-\infty}^{p'} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}}$$

Ich setze $u' = \varrho u$ und frage: Welche Beziehung der beiden Riemannschen Flächen entspricht einer Drehstreckung der u -Ebene? Ich erhalte die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{p_1} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2'p - g_3'}} = \varrho \int_{-\infty}^{p'} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}}$$

Da man vermuten kann, daß einer Drehstreckung der u -Ebene eine Drehstreckung der Riemannschen Fläche entspricht eventuell mit einer Blättervertauschung kombiniert, so suche ich dieser Gleichung durch den Ansatz¹⁾

$$p_1 = P_1 \varrho$$

zu genügen. So erhalte ich

$$\int_{-\infty}^{P_1 \varrho} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2'p - g_3'}} \cdot g_2' = \varrho \int_{-\infty}^{p'} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}}$$

Differenziere ich nach p und quadriere (um so von der Blättervertauschung loszukommen), so finde ich

$$4P_1^2 \varrho^3 - \frac{g_2' P_1}{\varrho} - \frac{g_3'}{P_1^2} = \frac{4P_1^3}{\varrho^4} - \frac{g_2 P_1}{\varrho^2} - \frac{g_3}{\varrho^2}.$$

Also hat man

$$P_1 = \frac{1}{\varrho^2}, \quad g_2' = \frac{g_2}{\varrho^4}, \quad g_3' = \frac{g_3}{\varrho^6}$$

zu setzen. Einer Drehstreckung

$$u' = \varrho u$$

der u -Ebene entspricht also eine Drehstreckung

$$p_1 = \frac{p'}{\varrho^2}$$

Koeffizienten sein muß. Zu solchen w_1, w_2 gehören dann unendlich viele brauchbare komplexe ϱ . Die elliptischen Funktionen zweier solcher Periodensysteme sind durch algebraische Gleichungen verbunden. Näheres enthält jedes Spezialwerk über elliptische Funktionen. Vgl. z. B. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen.

1) p_1 ist nämlich eine eindeutige Funktion von φ und φ eine eindeutige Funktion von p_1 , die beide überall im Endlichen von rationalem Charakter sind. Da sich außerdem $\varphi = \infty$ und $p_1 = \infty$ entsprechen, so ist $p_1 = P_1 \varphi$.

der Riemannschen Fläche. Beachtet man nun weiter, daß g_2 und g_3 analytische Funktionen von (ω_1, ω_2) sind¹⁾, so erkennt man, daß

$$\varrho^4 g_2(\varrho \omega_1, \varrho \omega_2) = g_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$\varrho^6 g_3(\varrho \omega_1, \varrho \omega_2) = g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Daher bleibt.

$$J_1(\omega) = \frac{g_2^3}{g_3^2}$$

bei Drehstreckungen der Perioden ungeändert. J_1 hängt daher nur von dem Periodenverhältnis

$$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

ab. $J_1(\omega)$ ist weiter, wie unsere Betrachtungen zeigen, eine analytische Funktion von ω , die überall da regulär ist, wo g_3 nicht verschwindet, und wo das Periodenverhältnis ω nicht reell ist. Denn das war bei den Konvergenzbetrachtungen von Bd. I, S. 268 angenommen. Ferner ist $J(\omega)$ eine automorphe Funktion der elliptischen Modulgruppe, genügt also den Funktionalgleichungen

$$J_1\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) = J_1(\omega)$$

für alle unimodularen ganzzahligen Substitutionen. Denn unimodulare ganzzahlige Periodensubstitutionen ändern ja weder $\wp$ noch $\wp'$, also auch nicht g_2 oder g_3 .

3. Analytische Darstellung. Ich gebe nun die analytischen Darstellungen an, die sich für g_2 und g_3 und J_1 aus den Betrachtungen über elliptische Funktionen ergeben. Wir müssen dazu auf Bd. I zurückgreifen.

Die Laurententwicklung von $\wp'(u)$ um $u=0$ wird

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + 6u \cdot \sum' \frac{1}{\Omega^4} + 20u^3 \sum' \frac{1}{\Omega^6} + \dots$$

Also ist
$$(\wp'(u))^2 = \frac{4}{u^6} - \frac{24}{u^2} \sum' \frac{1}{\Omega^4} - 80 \sum' \frac{1}{\Omega^6} + \dots$$

Ferner wird
$$\wp(u) = \frac{1}{u} + 3u^2 \sum' \frac{1}{\Omega^4} + 5u^4 \sum' \frac{1}{\Omega^6} + \dots$$

$$(\wp(u))^3 = \frac{1}{u^3} + \frac{9}{u} \sum' \frac{1}{\Omega^4} + 15 \sum' \frac{1}{\Omega^6} + \dots$$

Nun ist
$$(\wp'(u))^2 - 4(\wp(u))^3 = \dots - \frac{60}{u^2} \sum' \frac{1}{\Omega^4} - 140 \sum' \frac{1}{\Omega^6} + \dots$$

Fügt man hierzu
$$60 \cdot \sum' \frac{1}{\Omega^4} \cdot \wp(u),$$

1) Der Beweis wird S. 89 nachgetragen

so wird die Differenz polfrei. Also hat man

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}$$

zu setzen. Das Absolutglied der Differenz wird

$$g_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6}$$

Diese H₁
$$g_1 = \frac{15}{4} \sum'_{h,k=1,2,3,\dots} \frac{1}{(h\omega_1 + k\omega_2)^4} = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{\omega_1^4} \sum'_{h,k} \frac{1}{(h + k\omega)^4}$$

$$g_2 = \frac{140}{2^4} \sum' \frac{1}{(h\omega_1 + k\omega_2)^6} = \frac{35}{16} \cdot \frac{1}{\omega_1^6} \sum'_{h,k} \frac{1}{(h + k\omega)^6}$$

schreiben kann. Die Konvergenzbetrachtungen von Bd. I, S. 268 lehren sofort, daß diese Reihen in w gleichmäßig konvergieren, also analytische Funktionen darstellen, die in der Umgebung eines jeden w von positivem oder von negativem Imaginärteil reguläres Verhalten zeigen, während sie auf der reellen Achse nicht erklärt sind.

$$J_1(w) = \frac{g_1^3}{g_2^2}$$

zeigt also sowohl in der oberen wie in der unteren Halbebene den Charakter einer rationalen Funktion, deren Pole wir bald bestimmen werden. Auch wird sich ergeben, daß $J_1(w)$ über die reelle Achse hinaus nicht fortsetzbar ist, daß wir es also in der oberen und der unteren Halbebene mit verschiedenen analytischen Funktionen zu tun haben.

4. Die Modulfunktion. Wir fassen nun alle die elliptischen Gebilde in eine Klasse zusammen, die das gleiche Periodenverhältnis besitzen und nennen w den transzendenten Modul dieser Klasse. Alle die Moduln, die durch die Modulgruppe zusammenhängen, liefern dieselbe Riemannsche Fläche. Wir fassen alle die Rieraansschen Flächen in eine Klasse zusammen, die durch lineare auf $\wp$ ausgeübte Transformation oder durch Blättervertauschung auseinander hervorgehen. J_1 ist der algebraische Modul dieser Klasse. Man kann nämlich durch lineare Transformation von $\wp$ stets die Weierstraßsche Normalform

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

herstellen. Wir erkannten vorhin schon, daß Flächen dieser Art, welche durch Drehstreckung auseinander hervorgehen, den gleichen Modul besitzen. Wenn aber weiter zwei Flächen der Weierstraß sehen Normalform durch

lineare Abbildung auseinander hervorgehen sollen, so kann man sie stets auch durch eine Drehstreckung ineinander überführen.¹⁾

Also besitzen alle Flächen, welche linear zusammenhängen, das gleiche J_1 . Aber auch umgekehrt, wenn zwei Flächen das gleiche J_1 haben, so hängen sie linear zusammen. Ich brauche nur zu zeigen, daß zwei Flächen der Weierstraßschen Normalform, die das gleiche J_1 besitzen, durch Drehstreckung auseinander hervorgehen. Sei nämlich

$$\frac{g_3'^2}{g_2'^3} = \frac{g_3^2}{g_2^3},$$

so führt der Ansatz $g_2' = \frac{g_2}{\varrho^2}, \quad g_3' = \pm \frac{g_3}{\varrho^6}$

zum Ziel. Da man aber im Ansatz stets ϱ durch $i\varrho$ ersetzen kann, so darf man in der zweiten Gleichung stets

$$g_3' = \frac{g_3}{\varrho^6}$$

schreiben. Nach S. 87 entspricht dem $\varphi_1 = \frac{1}{\varrho^2}$.

§ 2. Die Modulgruppe und ihr Fundamentalbereich.

Während $J_1(W)$ eine eindeutige Funktion ist, ist die Umkehrfunktion $w(J_1)$ unendlich vieldeutig. Die verschiedenen einem festen J_1 zugehörigen Werte derselben gehen auseinander durch die Operationen der Modulgruppe hervor. Denn Periodenverhältnisse, welche nicht durch eine Operation der Modulgruppe auseinander hervorgehen, können niemals zur gleichen Perioden-

1) Eine solche lineare Transformation ist nämlich bestimmt, sowie man weiß, in welcher Weise dabei die vier Verzweigungspunkte der einen Fläche den vier Verzweigungspunkten der anderen Fläche entsprechen. Man kann sie höchstens auf eine Weise so bestimmen, daß die vier Punkte e_1, e_2, e_3, ∞ in einer gegebenen Reihenfolge in e_1', e_2', e_3', ∞ übergehen. Sicher aber kann man eine lineare Transformation einer Fläche in sich selbst so bestimmen, daß dabei e_i mit ∞ und e_k mit e_l [(i, k, l) = (1, 2, 3)] vertauscht wird. Denn bei dieser Vertauschung der beiden Paare bleibt das Doppelverhältnis bekanntlich ungeändert. Setzt man also eine solche passende Transformation der einen Fläche in sich mit der linearen Transformation zusammen, die die eine Fläche in die andere überführt, so kann man so eine neue lineare Transformation der einen Fläche in die andere gewinnen, welche Unendlich festläßt und die drei anderen endlichen Verzweigungspunkte der einen Fläche in einer gewissen Reihenfolge in die drei endlichen Verzweigungspunkte der anderen Fläche überführt. Da aber diese ganze lineare Transformation drei Punkte der Summe Null in drei Punkte der Summe Null überführt, so ergibt sich, daß dieselbe auch Null festlassen muß. Sie ist also eine Drehstreckung, und somit ist erkannt, daß man eine gegebene Fläche der Weierstraßschen Normalform in eine andere gegebene Fläche wenn überhaupt auf linearem Wege, so gewiß auch durch eine Drehstreckung überführen kann.

gesamtheit führen, und auch nicht zu Periodengesamtheiten, die durch eine Drehstreckung zusammenhängen. Wenn es uns also gelingt, den Fundamentalbereich der Modulgruppe zu finden, so haben wir einen Bereich, in welchem $J_1(W)$ einen jeden Wert genau einmal annimmt. Unter einem Fundamentalbereich einer Gruppe versteht man nämlich, wie uns aus Abschnitt I geläufig sein kann, eine Punktmenge, die aus jeder Klasse durch die Gruppe äquivalenter Punkte genau einen enthält. Zwei Punkte heißen durch die Gruppe äquivalent, wenn sie durch eine Operation der Gruppe auseinander hervorgehen. Von den Punkten der reellen Achse, die ja durch die Gruppe untereinander vertauscht werden, kann dabei abgesehen werden, da reelle Periodenverhältnisse nicht in Betracht kommen. Da durch

$$\omega' = -\omega$$

die beiden Halbebenen vertauscht werden, so brauchen wir nur die Punkte der oberen Halbebene heranzuziehen. Da nur Substitutionen mit der Determinante $+1$ diese Halbebene in sich überführen, so haben wir also für die Punkte der oberen Halbebene den Fundamentalbereich der Modulgruppe zu suchen.

Die Bestimmung des Fundamentalebereiches läuft darauf hinaus, unter allen möglichen primitiven Parallelogrammen einer Periodengesamtheit ein bestimmtes herauszugreifen. Das möge nach der folgenden Vorschrift geschehen. Ich wähle zunächst als $2W_1$ eine der kürzesten aller Perioden. Die Perioden $h \cdot 2W_1$ (h ganz) sind dann durch Punkte einer Geraden dargestellt, auf der weiter keine zu Perioden gehörige Punkte liegen. Diese sind vielmehr alle auf parallele Geraden verteilt. Ich suche die der ersten links von der Richtung von $2W_1$ zunächst benachbarte parallele Periodengerade. Auf dieser wähle ich als $2W_2$ die steilste Periode, d. h. einen Periodenpunkt, welcher der im Anfangspunkt von $2W_1$ errichteten Senkrechten am nächsten liegt. Dieses $2W_2$ ist dann notwendig dem Betrag nach mindestens $2W_1$ und seine Projektion auf $2W_1$ ist kürzer als $|\omega_1|$. Betrachtet man das Verhältnis $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, so gehört es notwendig dem in Fig. 12 aufgezeichneten Bereiche an.

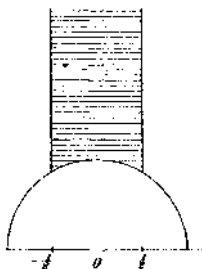


Fig. 12.

Wenn umgekehrt das Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ diesem Bereich angehört, so ist $2W_1$ eine kürzeste und $2W_2$ eine nächst kürzeste Periode auf der linken Nachbargeraden. Man erkennt das sofort, wenn man 1 und $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ als Perioden wählt. Der gefundene Bereich ist ein Fundamentalbereich der Modulgruppe. Denn

die beschriebene Periodenauswahl kann im allgemeinen nur auf eine Weise getroffen werden. Nur die Handpunkte des Bereiches machen eine Ausnahme. Denn die Punkte der vertikalen Ränder sind paarweise durch

$$\omega_1 = \omega + 1$$

aufeinander bezogen, so daß also stets zwei Randpunkte mit gleichem Imaginärteil zur gleichen Periodengesamtheit führen. Das gleiche gilt von den beiden Hälften des kreisförmigen Randes, welche durch die Substitution

$$\omega_1 = -\frac{1}{\omega}$$

zusammenhängen. Sie läßt $+i$ fest und vertauscht je zwei Punkte gleichen Imaginärteils miteinander. Von diesen Ausnahmen abgesehen, kann aber die beschriebene Auswahl nur auf eine Weise getroffen werden, d. h. man kann in jeder Periodengesamtheit nur auf eine Weise ein Periodenverhältnis auswählen, das dem Inneren oder dem Rande des Modulbereiches angehört. Wenn es also gelungen ist, ein Periodenverhältnis auszuwählen, das dem Bereichinneren angehört, so kann man kein zweites finden, das dem Inneren oder dem Rande angehört. Und wenn man ein dem Rande angehöriges gefunden hat, so gibt es noch ein zweites dem Rande zugehöriges aber kein dem Inneren zugehöriges.

Im allgemeinen nämlich gibt es nur zwei kürzeste Perioden $2\omega_1$ und $-2\omega_1$. Wähle ich $2\omega_1$ als erste Periode, so ist die nach links benachbarte Periodengerade eindeutig bestimmt. Die steilste Periode auf derselben ist auch im allgemeinen eindeutig bestimmt, wofern nicht ihre Projektion auf $2\omega_1$, gerade die Länge $|\omega_1|$ hat. Das ist aber gerade der Fall der Punkte auf den vertikalen Rändern. Wähle ich aber $-2\omega_1$ als erste kürzeste, so muß ich notwendig $-2\omega_2$ als zweite wählen, so daß das Periodenverhältnis das gleiche bleibt.

Wenn aber mehr als diese zwei kürzesten Perioden auftreten, so hat man stets ein Paar dieser kürzesten als $2\omega_1$ und $2\omega_2$ zu nehmen. Im allgemeinen gibt es dann nur vier gleichlange Perioden. Denn sie müssen gegeneinander Winkel von mindestens $\frac{\pi}{3}$ bilden. Wenn aber der Winkel von zwei benachbarten nicht genau $\frac{\pi}{3}$ ist, so kann es nur vier gleichlange Perioden geben, in diesem besonderen Ausnahmefalle gibt es genau sechs.

Betrachten wir erst den Fall von vier kürzesten. Man hat stets $2\omega_2$ zur linken von $2\omega_1$ zu wählen. Man erkennt sofort, daß man die Auswahl auf zwei Weisen treffen kann, nämlich entweder so, daß der Winkel der beiden spitz ist oder so, daß er stumpf ist. Im Falle des spitzen Winkels erhält man ein Perioden Verhältnis mit positivem, im anderen Falle mit

negativem Realteil. Aber der Betrag der Realteile ist derselbe und der Betrag des Periodenverhältnisses ist stets Eins. Man erhält also zwei äquivalente Punkte auf dem kreisförmigen Rande des Modulbereiches. Das alles wird der Anblick der Figuren 13 a und 13 b völlig klarlegen. In Fig. 13 a sind die beiden möglichen Auswahlen von Periodenpaaren $(2\omega'_1, 2\omega'_2)$ und $(2\omega_1, 2\omega_2)$ aufgezeichnet. Abgesehen von gleichzeitiger

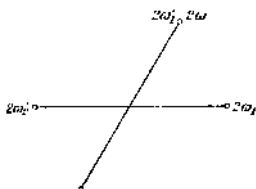


Fig. 13 a.

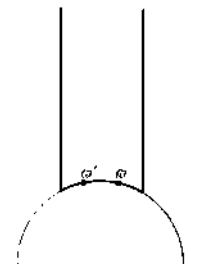


Fig. 13 b.

Vorzeichenänderung beider Perioden sind es die einzigen möglichen Wahlen zweier Periodenpaare. In Fig. 13 b sind die zugehörigen Periodenverhältnisse w' und w eingetragen.

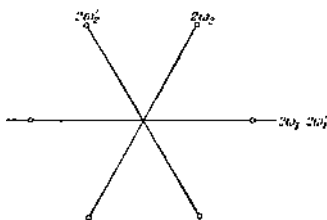


Fig. 14 a.

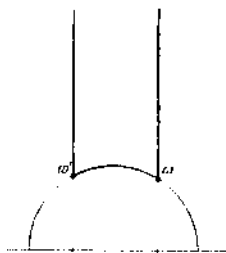


Fig. 14 b.

Liegt endlich der letzte Ausnahmefall vor, daß sechs gleichlange Perioden auftreten, so sind, abgesehen von gleichzeitigen Drehungen beider Perioden die zwei in Fig. 14 a verzeichneten Periodenpaare

$$(2\omega'_1, 2\omega'_2), (2\omega_1, 2\omega_2)$$

zulässig. In Fig. 14 b sind die zugehörigen Periodenverhältnisse aufgezeichnet.

Da somit der Bereich der Fig. 12 nicht zwei Punkte enthalten kann, die auseinander durch eine Operation der Modulgruppe hervorgehen, so haben wir das Resultat:

Der Bereich

$$|\omega| \geq 1, \quad |\Re \omega| \leq \frac{1}{2}$$

ist ein Fundamentalbereich der elliptischen Modulgruppe:

$$(1) \quad \omega_1 = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \quad (a, b, c, d \text{ ganz, } ad - bc = 1).$$

Genauer können wir unser Ergebnis so formulieren: In der Punktmenge

$$|\omega| \geq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \Re \omega \leq 0, \quad |\omega| > 1, \quad 0 < \Re \omega < \frac{1}{2}$$

ist zu jedem Punkt der oberen Halbebene genau ein durch die Modulgruppe äquivalenter enthalten. Übt man also auf den Bereich die sämtlichen Operationen der durch (1) erklärten engeren Modulgruppe aus, so erhält man eine volle schlichte Bedeckung der oberen Halbebene.

§ 3. Abbildung des Fundamentalbereichs durch $J_1(w)$.

Nun wollen wir das Verhalten von $J_1(w)$ im Fundamentalbereich näher betrachten. Soviel steht nach dem Ende des § 1 jedenfalls fest: $J_1(w)$ nimmt darin keinen Wert an mehr als einer Stelle an. Aber nimmt es auch jeden Wert an? Das kommt nur darauf an, ob der algebraische Modul J' , für zweiblättrige Riemannsche Flächen mit vier Verzweigungspunkten alle Werte annimmt. Er wird jedenfalls alle annehmen bis auf den Wert von J_1 oder die Werte von J_1 , auf die man stößt, wenn die Gleichung $4y^3 - g_2y - g_3 = 0$ Doppelwurzeln besitzt. Das euklidische Teilerverfahren liefert aber nach leichter Rechnung als Bedingung für Doppelwurzeln

$$27g_3^2 - g_2^3 = 0.$$

Daher nimmt $J_1(w)$ im Fundamentalebereich einen jeden von 27 verschiedenen Wert genau einmal an. Dem Wert 27 strebt daher J_1 zu, wenn sich w im Fundamentalebereich dem unendlich fernen Punkt nähert.

Aus dieser Betrachtung folgt, daß J_1 in jeder Umgebung des unendlich-fernen Punktes jeden Wert außer 27 unendlich oft annimmt. Um das einzusehen, hat man nur alle die Bereiche zu betrachten, die man aus dem Fundamentalebereich erhält, wenn man auf ihn die Operation

$$S(\omega) = \omega + 1 \quad \text{oder} \quad S^{-1}(\omega) = \omega - 1$$

in beliebiger Wiederholung anwendet. Diese häufen sich im unendlichen. Daraus ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung. Da aber durch die Modulsstitution

$$\omega_1 = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

der unendlichferne Punkt in den rationalen reellen Punkt $\frac{a}{c}$ übergeführt wird, so ergibt sich, daß $J_1(w)$ auch in der Umgebung eines jeden beliebigen

rationalen Punktes einen jeden Wert außer 27 unendlich oft annimmt. Daraus aber folgt, daß man $J(w)$ nicht über die reelle Achse hinaus analytisch fortsetzen kann.

$J_1(w)$ vermittelt eine schlichte Abbildung des Fundamentalbereiches auf die geeignet aufgeschnittene J_1 -Ebene. Der Verlauf dieser Abbildung möge nun noch etwas näher untersucht werden.

Ich behaupte zunächst, daß $J_1(0)$ auf der Geraden $\Re(w) = 0$ und auf der Geraden $\Re(w) = \frac{1}{2}$ reelle Werte annimmt. Um das zu begründen, muß man nur ein spezielles Periodenpaar betrachten, dessen Verhältnis diesen Geraden angehört und muß die zugehörige $\wp$ -Funktion untersuchen. Ich wähle $(1, CD)$ als solches Periodenpaar. Dann werden

$$\wp\left(\frac{1}{2}\right), \quad \wp\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \wp\left(\frac{1+\omega}{2}\right)$$

die endlichen Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemannschen Fläche. Ist w rein imaginär, so ist die Periode $-\omega$ zu w konjugiert imaginär und daher kommt in der Periodengesamtheit zu jeder Periode $\underline{\omega}$ auch die konjugiert imaginäre $\bar{\omega}$ vor. Daher nimmt das zugehörige $\wp(u)$ für konjugiert imaginäre Werte von u konjugiert imaginäre Werte an. Man hat ja

$$\wp(\bar{u}) = \frac{1}{\bar{u}^2} + \sum' \left\{ \left(\frac{1}{(u+\bar{u})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) \right\} = \frac{1}{\bar{u}^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(u+\bar{\omega})^2} - \frac{1}{\bar{\omega}^2} \right\}$$

und das ist konjugiert imaginär zu $\wp(u)$. Daher ist jetzt $\wp(\frac{1}{2})$ reell und du sich $\wp(u)$ ist ja eine gerade Funktion)

$$\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

ergibt, so ist auch $\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$ reell. Ferner ist

$$\wp\left(\frac{1+\omega}{2}\right) = \wp\left(-\frac{1+\omega}{2}\right) = \wp\left(-\frac{1+\omega}{2} + 1\right) = \wp\left(\frac{1-\omega}{2}\right) = \wp\left(\frac{1+\bar{\omega}}{2}\right) = \wp\left(\frac{1+\bar{\omega}}{2}\right)$$

Also ist auch $\wp\left(\frac{1+\omega}{2}\right)$ reell. Alle Nullstellen von $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ sind also reell und daher sind g_2, g_3 und damit auch J_1 reell.

Ist weiter $\Re(\omega) = \frac{1}{2}$, so ist die Periode $-\omega+1$ zu w konjugiert imaginär. Denn setzt man

$$\omega = \frac{1}{2} + i\eta,$$

so wird $1-\omega = \frac{1}{2} - i\eta$. Daher nimmt wieder $\wp(u)$ konjugiert imaginäre Werte für konjugiert imaginäre Werte von u an. Daher ist wieder $\wp\left(\frac{1}{2}\right)$ reell. Weiter aber wird

$$\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(1 - \frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(\frac{1+\bar{\omega}}{2}\right)$$

Denn es ist ja

$$\frac{\omega}{2} = \frac{1}{4} + i \frac{\eta}{2}, \quad 1 - \frac{\omega}{2} = \frac{3}{4} - i \frac{\eta}{2}, \quad \frac{1+\omega}{2} = \frac{5}{4} + i \frac{\eta}{2}.$$

Daher ist ein Verzweigungspunkt reell, die beiden anderen konjugiert imaginär. Daher sind g_2 und g_3 und also auch $J_1(\omega)$ für $\Re(\omega) = \frac{1}{2}$ reell.

Da nun aber

$$J_1(\omega - 1) = J_1(\omega)$$

gilt, so ist $J_1(\omega)$ auch für $\Re(\omega) = -\frac{1}{2}$ reell. Da endlich

$$J\left(\frac{\omega}{\omega+1}\right) = J(\omega)$$

gilt, und da durch

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\omega+1}$$

die Gerade $\Re(\omega_1) = \frac{1}{2}$ in den Kreis $|\omega| = 1$ übergeht, so ist auch für $|\omega| = 1$

$$J_1(\omega)$$

reell. Also ist auf dem vollen Rande des Fundamentalbereiches und auf seiner Mittellinie, der imaginären Achse, $J_1(\omega)$ reell. Wenn wir noch feststellen, welche Werte J_1 in den Ecken annimmt, so übersehen wir den Charakter der Abbildung völlig. In der unendlich fernen Ecke wird, wie wir schon sahen

$$J_1(\infty) = 27.$$

Betrachten wir die „Ecke“

$$\omega = i.$$

Hierzu gehört ein quadratisches Gitter, das also durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in sich übergeht. Durch eine Periodendrehung um $\frac{\pi}{2}$ geht aber nach S. 87 ($\rho = i$) die Riemannsche Fläche

$$(F) \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

$$\text{in die Fläche} \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp + g_3$$

über. Sie muß aber in unserem speziellen Fall mit der ersten identisch sein, da ja die Periodengesamtheit durch die Drehung in sich übergeht. Daher muß

$$g_3 = 0$$

sein. Daher wird

$$J_1 = 0.$$

Betrachten wir weiter die Ecken

$$\omega = \pm \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und das Periodenpaar $(1, \omega)$. Es gibt zu einem Periodennetz Anlaß, das bei einer Drehung um $\frac{\pi}{3}$ in sich übergeht. Dabei geht aber die Fläche (F) in

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - e^{-\frac{4i\pi}{3}} g_2 \wp - g_3$$

über. Soll sie mit (F) identisch sein, so muß $g_2 = 0$ sein. Daher wird

$$J_1\left(\pm \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}\right) = \infty.$$

Daher wird durch $J_1(\omega)$ der Fundamentalbereich auf die von 27 über 0 nach negativ unendlich aufgeschnittene J_1 -Ebene abgebildet.

Häufig betrachtet man statt $J_1 = \frac{g_2^3}{g_3^2}$

die Funktion
$$J(\omega) = \frac{27g_2^3}{27g_2^3 - g_3^2} = \frac{27}{27 - J_1}$$

Sie bildet den Fundamentalbereich auf die längs der positiven reellen Achse aufgeschnittene J -Ebene ab. Der Ecke $\omega = \infty$ entspricht $J = \infty$. Ferner ist

$$J(i) = 1, \quad J\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Bei $w = i$ werden die Winkel verdoppelt, bei $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ verdreifacht. Daher besitzt die Riemannsche Fläche, auf die die obere Halbebene durch $J(w)$ abgebildet wird, bei 1 zweifache, bei 0 dreifache Verzweigungspunkte, während im unendlichen Verzweigungspunkte unendlicher Ordnung liegen. Die Einteilung der oberen Halbebene in Kreisbogendreiecke, wie sie sich aus dem Fundamentalbereich durch die Operationen der Modulgruppe ergeben, erlaubt es, ein übersichtliches Bild des Aufbaus dieser Riemannschen Fläche zu gewinnen.

§ 4. Die Funktion $\lambda(\omega)$.

1. Analytische Darstellung. Auch das *Doppelverhältnis* der vier Verzweigungspunkte bleibt bei linearer Transformation der Riemannschen Fläche invariant und kann also auch statt $J(\omega)$ als algebraischer Modul verwendet werden. Aber man kann das Doppelverhältnis von vier Zahlen bekanntlich auf 24 verschiedene Weisen bilden, die sechs verschiedene Werte desselben liefern. Wenn der eine der Verzweigungspunkte im unendlichen liegt, dann sind diese sechs Werte

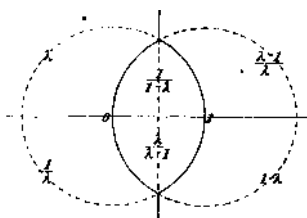


Fig. 15.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}, & 1 - \lambda &= \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}, \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, & 1 - \frac{1}{\lambda} &= \frac{e_2 - e_1}{e_1 - e_3}, \\ \frac{\lambda - 1}{\lambda} &= \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}, & \frac{\lambda}{\lambda - 1} &= \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \end{aligned}$$

Die sechs hieraus ersichtlichen X -Substitutionen bilden eine Gruppe. Jeder der in Fig. 15 verzeichneten sechs von ausgezogenen Linien

berandeten Bereiche kann als Fundamentalbereich derselben gewählt werden. Übe ich nämlich auf den mit λ bezeichneten Bereich die sechs Operationen aus, so entstehen aus ihm die sechs mit dem Ausdruck der Operationen bezeichneten Bereiche. Wenn sich der Leser das durchüberlegt, so hat er zugleich die Verifikation der Behauptung, daß jeder der Bereiche Fundamentalbereich ist.

Nun betrachte ich λ als Funktion von w . Ich setze zu dem Zweck

$$e_1 := \wp(\omega_1; \omega_1, \omega_2), \quad e_2 := \wp(\omega_2; \omega_1, \omega_2), \quad e_3 := \wp(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2).$$

Dann wird

$$\lambda(\omega) = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$$

eine eindeutige analytische Funktion von w , welche in der oberen w -Halbebene von rationalem Charakter ist.

Der bekannten Partialbruchdarstellung der $\wp$ -Funktion entnimmt man nämlich, daß für jede Zahl $m \neq 0$

$$\wp(mu, m\omega_1, m\omega_2) = \frac{1}{m^2} \wp(u, \omega_1, \omega_2)$$

ist. Daher kann man auch setzen

$$e_1 = \frac{1}{\omega_1^2} \wp\left(\frac{1}{2}; 1, \omega\right), \quad e_2 = \frac{1}{\omega_1^2} \wp\left(\frac{\omega}{2}; 1, \omega\right), \quad e_3 = \frac{1}{\omega_1^2} \wp\left(\frac{1+\omega}{2}; 1, \omega\right),$$

und so erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung über $\lambda(\omega)$. Aber die erste Darstellung der e_i läßt leicht erkennen, wie sich dieselben bei linearen unimodularen Transformationen der w verhalten. Wir überlegen das für die Transformationen S, T der S. 85. Setzen wir für S

$$e_1 := \wp(\omega_1; \omega_1, \omega_1 + \omega_2), \quad e_2 := \wp(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_1 + \omega_2),$$

$$e_3 := \wp(2\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_1 + \omega_2),$$

so wird

$$e_1' = \wp(\omega_1; \omega_1, \omega_2) = e_1,$$

$$e_2' = \wp(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = e_2,$$

$$e_3' = \wp(\omega_2; \omega_1, \omega_1 + \omega_2) = \wp(\omega_2; \omega_1, \omega_2) = e_2.$$

Für T wird

$$e_1' = \wp(-\omega_2; -\omega_2, \omega_1) = \wp(-\omega_2; \omega_1, \omega_2) = \wp(\omega_2; \omega_1, \omega_2) = e_2,$$

$$e_2' = \wp(\omega_1; -\omega_2, \omega_1) = \wp(\omega_1; \omega_1, \omega_2) = e_1,$$

$$e_3' = \wp(\omega_1 - \omega_2; -\omega_2, \omega_1) = \wp(\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \wp(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = e_3$$

2. $\lambda(\omega)$ als automorphe Funktion. Daraus wieder ersieht man, daß den linearen Transformationen der Modultgruppe gewisse lineare Transformationen von λ entsprechen, die natürlich unter den sechs uns geläufigen λ -Transformationen enthalten sind, denn wie wir eben sahen, erfahren ja die e_i nur Permutationen. Und zwar treten auch alle sechs Permutationen der e_i auf, wie man durch Zusammensetzen von S und T sofort erkennt. Die entsprechenden λ -Transformationen aber sind diese

$$S: \lambda' = 1 - \lambda, \quad T: \lambda' = -\frac{1}{\lambda},$$

$$ST: \lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad (ST)^2: \lambda' = \frac{1}{1 - \lambda},$$

$$ST^2S: \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Da somit $\lambda(\omega)$ gegenüber allen Transformationen der elliptischen Modulgruppe nur diese sechs Transformationen erleidet, so ist $\lambda(\omega)$ eine automorphe Funktion einer Untergruppe der elliptischen Modulgruppe vom Index sechs. Diese Gruppe der Funktion $\lambda(\omega)$ ist die sogenannte Kongruenzuntergruppe zweiter Stufe. Sie ist definiert als Gesamtheit der linearen unimodularen ganzzahligen Transformationen, welche der Identität modulo zwei kongruent sind. Ist also

$$(1) \quad \omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

eine solche Transformation, so ist

$$a \equiv d \equiv 1 \pmod{2},$$

$$b \equiv c \equiv 0 \pmod{2}.$$

Auch dies ersieht man sofort aus unserer Darstellung der e_i . Soll nämlich eine Transformation (1) der elliptischen Modulgruppe $\lambda(\omega)$ ungeändert lassen, so muß sie alle drei e_i ungeändert lassen. Dann und nur dann gehört sie zu der Gruppe von $\lambda(\omega)$. Der Transformation (1) aber entspricht die folgende Änderung der e_i

$$e_1' = \wp(a\omega_1 + b\omega_2; a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = \wp(a\omega_1 + b\omega_2; \omega_1, \omega_2),$$

$$e_2' = \wp(c\omega_1 + d\omega_2; a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = \wp(c\omega_1 + d\omega_2; \omega_1, \omega_2),$$

$$e_3' = \wp(a + c) \omega_1 + (b + d) \omega_2; a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2 \\ = \wp(a + c) \omega_1 + (b + d) \omega_2; \omega_1, \omega_2.$$

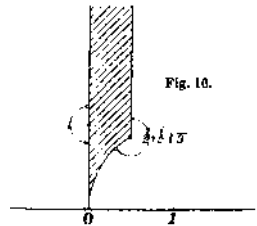
Und daraus ersieht man sofort die Richtigkeit der Behauptung. Denn sollen diese drei e' den e . der Reihe nach gleich sein, so müssen sich die drei an

erster Stelle stehenden Argumente der Reihe nach von $\pm \omega_1$, $\pm \omega_2$, $\pm (\omega_1 + \omega_2)$ nur um Perioden unterscheiden. Und das erfordert, daß

$$\begin{aligned} a &\equiv d \equiv 1 \pmod{2} \\ b &\equiv c \equiv 1 \pmod{2} \end{aligned} \quad \text{ist.}$$

3. Konforme Abbildung durch $\lambda(\omega)$. Die Funktion $\lambda(\omega)$ nimmt im Modulbereich der Fig. 12 keinen Wert mehr als einmal an. Denn zwei Riemannsche Flächen besitzen nur dann dasselbe w , wenn sie durch Drehstreckung auseinander hervorgehen, und sie besitzen auch nur in diesem Falle das gleiche λ . Somit vermittelt $\lambda(\omega)$ eine schlichte konforme Abbildung eines jeden Fundamentalbereiches der elliptischen Modulgruppe. Ich will namentlich die Abbildung des in Fig. 16 verzeichneten Fundamentalbereiches etwas näher betrachten. Er besteht aus der rechts von der imaginären Achse gelegenen Hälfte des Bereiches der Fig. 12 und aus dem durch

$$\omega_1 = -\frac{1}{\omega}$$



entworfenen Bild seiner linken Hälfte. Seine Ränder sind also durch die beiden Substitutionen

$$\omega_1 = -\frac{1}{\omega}$$

und

$$\omega_1 = \frac{1}{1-\omega}$$

in der aus Fig. 16 ersichtlichen Weise einander zugeordnet, so daß also Punkte, die durch diese Substitutionen einander entsprechen, den gleichen Wert von $J(w)$, also auch die gleiche Riemannsche Fläche liefern. Dabei können die Verzweigungspunkte eine Permutation erfahren haben, wie es sich gleich näher zeigen wird.

Ich betrachte erst $w = i$. Hier wird nach S. 96 einer der Verzweigungspunkte Null und die beiden anderen stimmen bis aufs Vorzeichen überein. Offenbar aber ist hier

$$\wp\left(\frac{1}{2}\right) = -\wp\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Denn zu jeder Periode Ω kommt auch $i\Omega$ als Periode vor. Fassen wir je zwei Glieder der $\wp$ -Reihe, deren Perioden Ω und $i\Omega$ sind, zusammen, so können wir schreiben

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left(\frac{1}{(u + \Omega)^2} + \frac{1}{(u + i\Omega)^2} \right).$$

Daher wird

$$\wp\left(\frac{1}{2}\right) = -\wp\left(\frac{i}{2}\right).$$

Also gehört zu $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ der bei 0 gelegene Verzweigungspunkt und es ist:

$$w\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0.$$

Daher haben wir $e_1 = -e_2$, $e_3 = 0$, $\lambda(i) = -1$.

Wir wissen schon von S. 95, daß für rein imaginäre w alle e_i reell werden. Also entsprechen rein imaginären w auch reelle λ . Somit wird bei der zu untersuchenden Abbildung die imaginäre w -Achse in ein Stück der reellen λ -Achse abgebildet, das sich von $\lambda = -1$ aus nach beiden Seiten erstreckt. Denn wir wissen von S. 95 her, daß der Transformation $w_1 = \frac{1}{w}$ die Transformation $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$ der λ entspricht und diese hat $\lambda = -1$ zum Fixpunkt und tauscht die zu beiden Seiten von $\lambda = -1$ gelegenen Stücke $-1 < \lambda < 0$ und $\lambda < -1$ gegeneinander aus.

Auf der Geraden $\Re(w) = \frac{1}{2}$ ist ein Verzweigungspunkt nämlich e_1 reell, die beiden anderen sind konjugiert imaginär. Daher wird

$$\left| \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right| = \left| \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \right| = 1.$$

Daher wird die Gerade $\Re(w) = \frac{1}{2}$ auf ein Stück der Geraden $\Re(\lambda) = \frac{1}{2}$ abgebildet.

Endlich ist auf der noch verbleibenden kreisförmigen Grenze des Bereiches $|\lambda - 1| = 1$. Denn diese kreisförmige Begrenzung geht durch die Transformationen $(ST)^j$ aus der auf $\Re(w) = \frac{1}{2}$ gelegenen Grenze hervor. Und daher muß ihr Bild durch $\lambda_1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ aus $\Re(\lambda_1) = \frac{1}{2}$ hervorgehen. Alles in allem ist also der durch $\lambda(w)$ erhaltene Bildbereich begrenzt von einem Stück der reellen Achse, das den Punkt $A = -1$ enthält, von einem Stück der Geraden $\Re(\lambda) = \frac{1}{2}$ und von einem Stück des Kreises $|\lambda - 1| = 1$. Daraus folgt schon, daß der Bildbereich nur entweder der in Fig. 15 mit A bezeichnete oder der mit $\frac{1}{\lambda}$ bezeichnete sein kann, und somit sind die durch die seitherigen Angaben noch nicht völlig bestimmten Bilder der Begrenzungsstücke des Bereiches der Fig. 10 jetzt genauer bezeichnet. Durchläuft man nun noch den Rand des Bereiches der Figur 16 so, daß dabei das Innere zur Rechten bleibt und beginnt dabei auf der imaginären Achse, so gelangt man zunächst von da auf die andere geradlinige Begrenzung. Im Bildbereich muß man also bei der entsprechenden Durchlaufung der reellen Achse zunächst an das Stück der Geraden $\Re(\lambda) = \frac{1}{2}$ herankommen. Und dies besagt, daß der Bildbereich der in der Fig. 15 schon mit λ bezeichnete sein muß.

Man kann nun auch sofort angeben, welche Bereiche der w -Ebene in die fünf anderen Bereiche der Fig. 15 abgebildet werden. Spiegelt man nämlich Fig. 16 an der imaginären Achse, so erhält man einen neuen Bereich, der durch $\lambda(\omega)$ auf den in Fig. 15 mit $\frac{1}{\lambda}$ bezeichneten abgebildet wird. Dieses Spiegelverfahren lehrt überhaupt, daß die in Fig. 15 durch die λ -Substitutionen bezeichneten Bereiche auf die in Fig. 17 gleich bezeichneten abgebildet werden.

Den Rändern des in Fig. 17 so entstehenden großen, aus sechs Einzelbereichen bestehenden Bereiches entsprechen die positive reelle λ -Achse von 0 bis 1 und die positive reelle λ -Achse von 1 bis ∞ . Man erkennt auch leicht, daß jeweils Randpunkte, die in bezug auf die imaginäre Achse spiegelbildlich liegen, gleiche Werte von λ liefern. Dies folgt aus dem Spiegelungsprinzip, weil die imaginäre ω -Achse ja in die negative reelle λ -Achse übergeht. Die so einander entsprechenden Punkte der vertikalen Ränder sind einander auch durch die Modulusubstitution

$$\omega_1 = \omega + 2$$

zugeordnet, während entsprechende Punkte der beiden Kreisbogen durch

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2\omega + 1} \quad \text{zusammenhängen.}$$

Der so erhaltene Bereich ist der Fundamentalbereich der zu $\lambda(\omega)$ gehörigen Gruppe. Seine rechte aus den Dreiecken λ , $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\frac{1}{1-\lambda}$ zusammengesetzte Hälfte ist ein Kreisbogendreieck, das durch $\lambda(\omega)$ auf die Halbebene $\Im(\lambda) > 0$ so abgebildet wird, daß seine drei bei 0, 1, ∞ gelegene Ecken in die drei Punkte $\lambda = 0, 1, \infty$ der Reihe nach übergehen. Daher ist diese Funktion $\lambda(\omega)$ mit dem S. 40 eingeführten $\lambda(\omega)$ identisch und alle damals aus der Abbildungseigenschaft gezogenen Folgerungen gelten.

Die obere w -Halbebene wird durch $\lambda(\omega)$ auf eine Riemannsche Fläche abgebildet, die bei 0, 1, ∞ Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung besitzt, weil sich an die ihnen entsprechenden Ecken des Fundamentalbereiches unendlich viele äquivalente Bereiche anschließen, deren jeder ein Blatt der Fläche liefert.

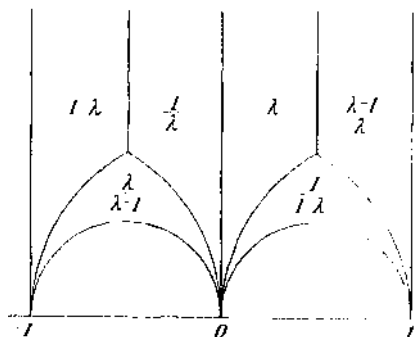


Fig. 17.

Man erkennt übrigens leicht in $J\{\omega(\lambda)\} = J_2(\lambda)$ eine rationale Funktion, die bei den sechs λ -Substitutionen ungeändert bleibt. Jedenfalls ist nämlich $J_2(\lambda)$ eine eindeutige analytische Funktion, die durch die sechs Transformationen nicht geändert wird. Sie kann aber im Fundamentalbereich, den sie auf die schlichte J -Ebene abbildet, keine wesentlich singuläre Stelle besitzen. Daher ist sie rational. Sie nimmt außerdem den sechs Bereichen entsprechend jeden Wert genau sechsmal an. An den Stellen $0, 1, \infty$ liegen ihre Pole. Da die beiden Ecken $0, 1$ zusammen aber die Umgebung des unendlichfernen Punktes der J -Ebene liefern müssen, werden die Winkel verdoppelt. Wir haben also an den drei Stellen Doppelpole. Bei $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ und $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$ liegen aus demselben Grunde dreifache Nullstellen. Daher hat $J_2(\lambda)$ die Gestalt

$$a \frac{\{(\lambda - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\}^n}{\lambda^2(1-\lambda)^2},$$

wo a eine noch zu bestimmende Konstante ist. Da aber $J_2(\frac{1}{2}) = 1$ sein muß, so ist

$$a = \frac{4}{27}.$$

Leichte Umrechnung liefert dann

$$J_2(\lambda) = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Dritter Abschnitt.

Beschränkte Funktionen.

§ 1. Das Schwarzsehe Lemma und seine Verallgemeinerungen.

1. Das Schwarzsehe **Lemma**. Im Jahre 1869 hat H.A. Schwarz mit dem hier zu besprechenden Satz den ersten Schritt in ein Gebiet ganz neuartiger Fragestellung getan. Sein Lemma¹⁾ lautet: Die Funktion $w = f(z)$ sei in $|z| < R$ regulär, es sei dort $|w| \leq M$ und es sei $f(0) = 0$. Dann ist sogar $|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z|$, und das Gleichheitszeichen steht in dieser Abschätzung für einen inneren Punkt z des Kreises $|z| < R$ nur dann, wenn $f(z)$ mit einer linearen Funktion $\varepsilon \frac{M}{R} z$ identisch ist. Hier ist ε irgendeine Zahl vom Betrag Eins.

Heute ist der folgende einfache Beweis allgemein üblich geworden. Aus $f(0) = 0$ folgt, daß auch die Funktion $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ in $|z| < R$ regulär ist.

1) H. A. Schwarz hat den Satz 1869 als Hilfssatz in einer Untersuchung über konforme Abbildung eingeführt. (Vgl. Ges. Abh. Bd. II S. 108 ff.)

Sei nun z ein beliebiger, für die weitere Betrachtung festzuhaltender Punkt aus $|z| < R$. Dann sei r aus $0 < r < R$ irgend eine Zahl, für die $|z| < r$ gilt. Dann ist offenbar¹⁾ $|\varphi(z)| \leq \frac{M}{r}$. Läßt man in dieser Abschätzung $r \rightarrow R$ streben, so folgt $|\varphi(z)| \leq \frac{M}{R}$. Das Gleichheitszeichen kann aber hier sicher nur dann stehen, wenn $\varphi(z)$ eine Konstante $\frac{M}{R}$ vom Betrag $\frac{M}{R}$ ist. Denn nach S. 146 des Bandes I kann eine in $|z| < R$ reguläre Funktion ihr Maximum im *Kreisinneren* nur dann annehmen, wenn sie eine Konstante ist. Damit ist aber das Lemma auch schon bewiesen.

Das neuartige an diesem Lemma ist darin zu erblicken, daß es lehrt, wie man aus einigen wenigen Angaben über $f(z)$ schon einen weitgehenden Schluß über den Verlauf dieser Funktion machen kann.²⁾ Die Fragestellung kann dahin erweitert werden, daß man die Zusammenhänge zwischen den verschiedensten Funktionseigenschaften aufzudecken strebt. Einen Ansatz dazu geben schon der Cauchysche Koeffizientensatz und seine auf S. 147 des Bandes I besprochene Verallgemeinerung. Hier wird aus der Beschränktheit eines Funktionselementes auf seine Koeffizienten geschlossen. Hieran wird sich bald die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten einer beschränkten Potenzreihe anschließen. Es ist das offenbar eine Frage, die ganz in der Richtung der Weierstraßschen Funktionentheorie liegt, für die eine analytische Funktion durch eines ihrer Funktionselemente bestimmt erscheint. In diesem Abschnitt sollen allgemein die Rückwirkungen der Beschränktheit auf die übrigen Funktioneneigenschaften untersucht werden. Wir machen den Anfang mit einigen *Erweiterungen* des eben bewiesenen *Lemmas*.

2. Erweiterung des Schwarzsehen Lemmas. Von der Voraussetzung $f'(0) = 0$ kann man sich leicht freimachen. Ist nämlich $f'(0) = c_0$ und $|f(z)| \leq M$, so ist

$$(1) \quad \varphi(z) = \frac{M^2(f(z) - c_0)}{M^2 - \bar{c}_0 f(z)}$$

eine Funktion, welche in $|z| < R$ wieder dem Betrag nach M nicht übertrifft. Denn die lineare Funktion

$$(2) \quad w = \frac{M^2(w - c_0)}{M^2 - \bar{c}_0 w}$$

bildet $|w| < M$ so schlicht auf sich ab, daß $w = c_0$ in $w = 0$ übergeht.

1) $|\varphi(z)|$ ist in $|z| < r$ stetig und das Maximum wird am Rande angenommen.

2) Dahin gehören auch die Betrachtungen über schlichte Funktionen auf S. 71 ff. dieses Bandes.

Also ist $\varphi(0) = 0$. Daher wird $|\varphi(z)| \leq |z| \frac{M}{R}$ gleich steht nur für $\varphi(z) = \varepsilon \frac{M}{R} z$. Aus (1) aber ergibt sich

$$f(z) = \frac{M^2(\varphi(z) + c_0)}{M^2 + \bar{c}_0 \varphi(z)}$$

Ist nun also z irgendeine Zahl mit $|z| \leq \varrho$, so liegen die zugehörigen Werte $\varphi(z)$ in der Kreisscheibe $|w| \leq \frac{M}{R} \varrho$. Aus dieser geht durch

$$(3) \quad w = \frac{M^2(w + c_0)}{M^2 + \bar{c}_0 w}$$

eine gewisse Kreisscheibe hervor, die den Punkt c_0 umschließt und der die möglichen Werte $f(z)$ angehören. Wieder also hat man den Satz, daß der Wertevorrat, aus dem die Funktionswerte $f(z)$ einer in $|z| < R$ beschränkten Funktion zu entnehmen sind, für $|z| < \varrho$ auf eine gewisse Kreisscheibe beschränkt ist, welche von dem bei $z = 0$ der Funktion vorgeschriebenen Wert und den Zahlen M, R, ϱ allein (und von sonst nichts anderem) abhängt. Diese Kreisscheibe wird aus einer um $M = 0$ als Mittelpunkt gelegten Kreisscheibe durch eine lineare Abbildung von $|w| < M$ auf sich erhalten, welche den Punkt $w = 0$ in $w = c_0$ überführt. Das ist die lineare Funktion (2).

Die Gleichung der Peripherie jener Kreisscheibe ist

$$\frac{M^2 |w - c_0|}{M^2 - \bar{c}_0 w} = \frac{M}{R} \varrho.$$

Man kann den Satz auch so aussprechen: Für $|z| \leq \varrho$ ist

$$\left| \frac{M w + c_0}{M^2 - \bar{c}_0 w} \right| \leq \frac{\varrho}{R}$$

Statt den in $z = 0$ vorgeschriebenen Wert zu verwenden, kann man auch den in einem anderen Punkte z_0 vorhandenen benutzen. Sei z. B. $f(z_0) = w_0$. Dann besitzt offenbar $F(\zeta) = f\left(\frac{\zeta + z_0}{R^2 + \bar{z}_0 \zeta}\right)$ in $\zeta = 0$ den Wert w_0 . Da aber die hier benutzte lineare Funktion $\zeta = \frac{R^2(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$ den Kreis $|z| < R$ in sich überführt, so ist auch wieder $|F(\zeta)| \leq M$. Daher ist nach dem vorher bewiesenen

$$(4) \quad \left| \frac{M^2 |F(\zeta) - w_0|}{M^2 - \bar{w}_0 F(\zeta)} \right| \leq \frac{M}{R} |\zeta|.$$

Man kann das Ergebnis so aussprechen: Wenn $f(z)$ in $|z| < R$ regulär ist, wenn $|f(z)| \leq M$ gilt, wenn $f(z_0) = w_0$ ist, dann ist in dem Kreis

$$\left| \frac{R^2(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right| \leq \varrho \quad \text{stets} \quad \left| \frac{M^2(w - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 w} \right| \leq \frac{M}{R} \varrho.$$

Es ist also¹⁾ auch $\left| \frac{M^2(w - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 w} \right| \leq \frac{M}{R} \left| \frac{R^2(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right|$.

Das Gleichheitszeichen kann dabei nur für diejenigen linearen Funktionen stehen, welche $z \in R$ so auf $w \in M$ abbilden, daß $d(z, z_0) = d(w, w_0)$ gilt.

Diese Abbildungen werden nämlich durch

$$(5) \quad \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} = \varepsilon \frac{M(w - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 w} \quad (|\varepsilon| = 1) \quad \text{geliefert.}$$

Das Ergebnis kann man geometrisch so aussprechen: In dem nicht-euklidischen Kreis²⁾ vom Mittelpunkt z_0 und vom Radius Q nimmt $f(z)$ Werte an, die dem nichteuklidischen Kreis vom Radius M/R und vom Mittelpunkt $f(z_0)$ angehören. Randpunkte des Q -Kreises können dabei nur bei der linearen Abbildung (5) auf Randpunkte des anderen Kreises fallen.

3. Das Lindelöfsche Prinzip. Ich gehe jetzt dazu über, den wesentlichen Gehalt der bisher befolgten Schlußweise herauszuarbeiten. Das wird uns zu einer weitgehenden Verallgemeinerung der dort gewonnenen Ergebnisse führen, die man oft als Lindelöfsches Prinzip bezeichnet.

In einem Bereiche B der z -Ebene sei eine Funktion $f(z)$ eindeutig und analytisch. Sie möge in diesem Bereiche Werte w annehmen, die alle einem Bereiche G der w -Ebene angehören. Insbesondere sei $f(z_0) = w_0$. Zu dem Bereiche B gehöre weiter eine in ihm reguläre Funktion $\varphi(z; z_0)$, die in ihm einen eindeutigen absoluten Betrag besitzt, die ferner an der Stelle z_0 eine einfache Nullstelle besitzt und die sonst nirgends verschwindet. Bei Annäherung an den Rand des Bereiches möge ihr absoluter Betrag gleichmäßig gegen Eins streben. I) d. h. es möge zu jeder positiven Zahl ϵ eine abgeschlossene Punktmenge von B gehören, so daß außerhalb derselben in B überall $|\varphi| - 1 < \epsilon$ sei. Ebenso möge zu G eine in G reguläre Funktion $\psi(w; w_0)$ gehören, welche darin einen eindeutigen absoluten Betrag besitzt, welche bei w_0 eine einfache³⁾ Nullstelle besitzt, und deren Betrag bei Annäherung an den Rand von G gleichmäßig gegen Eins strebt. Dann gilt, wie bewiesen werden soll, die Abschätzung

$$(6) \quad |\psi(f(z); w_0)| \leq |\varphi(z; z_0)|.$$

1) Man wende die vorige Aussage auf

$$\left| \frac{R^2(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right| = Q \quad \text{an.}$$

²⁾ Nicht-euklidischer Kreis vom Radius Q und Mittelpunkt z_0 heißt dabei der Kreis $\left| \frac{R^2(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right| \leq Q$. Es ist der Kreis, der aus einem mit $|z'| = R$ konzentrischen Kreis vom Radius Q hervorgeht, wenn man z so linear auf sich abbildet, daß $z \sim u$ in $z = z_0$ übergeht.

3) Auf die Annahme der Einfachheit könnte bei einem Teil der folgenden Erörterungen verzichtet werden.

Der Beweis verläuft ganz analog wie im vorigen Paragraphen. Die Funktion

$$\psi \{f(z); w_0\}$$

ist in B regulär und besitzt einen eindeutigen absoluten Betrag. An der Stelle z_0 verschwindet sie. Somit ist auch

$$F(z) = \frac{\psi \{f(z); w_0\}}{\varphi(z; z_0)}.$$

in B regulär. Die Funktion hat darin einen eindeutigen absoluten Betrag. Ich schätze denselben in demjenigen Teilbereich B_r von B ab, in dem $|\varphi(z; z_0)| < r < 1$ ist. Sie nimmt im Inneren dieses Bereiches kein Maximum ihres «absoluten Betrages» an. Dieser Schluß bleibt hier bestehen, obwohl die Funktion nicht eindeutig ist, weil nämlich ihr absoluter Betrag eindeutig ist.¹⁾ Daher haben wir in $|\varphi| < r$ die Abschätzung

$$\left| \frac{\psi \{f(z); w_0\}}{\varphi(z; z_0)} \right| < \frac{1}{r}.$$

Nun möge $r \rightarrow 1$ streben. Dann gilt für jeden Punkt z aus B die Abschätzung

$$\left| \frac{\psi \{f(z); w_0\}}{\varphi(z; z_0)} \right| \leq 1.$$

Also wie behauptet war $|\psi \{f(z); w_0\}| \leq |\varphi(z; z_0)|$.

Das Gleichheitszeichen kann hier für eine Stelle s des Bereiches B nur dann stehen, wenn es überall steht, wenn also

$$\psi \{f(z); w_0\} \equiv \varepsilon \varphi(z; z_0),$$

wo $|\varepsilon| = 1$ ist.

4. Bemerkung. Ein Wort muß dieser Erörterung über die Existenz der benutzten Funktionen φ und ψ hinzugefügt werden. Ihre Existenz steht für jeden einfach zusammenhängenden Bereich mit mindestens zwei Randpunkten fest. Man kann dann als Funktionen φ und ψ die in Kap. I untersuchten Abbildungsfunktionen nehmen. Für mehrfach zusammenhängende Bereiche bedenke man, daß $\log |\varphi(z; z_0)|$ eine im Bereich im allgemeinen reguläre Potentialfunktion ist, welche sich bei $z = z_0$ von einer regulären nur um $\log |z - z_0|$ unterscheidet, und welche am Rande verschwindet. Man konstruiere sie an Hand des S. 67 ff. über die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Gesagtes, indem man zu $\log |z - z_0|$ die Potentialfunktion hinzufügt, die im Bereich regulär ist und am Rande $= -\log |z - z_0|$ ist.

1) $|F(z)|$ ist nämlich im abgeschlossenen Bereich B_r eindeutig und stetig und besitzt also auf dieser abgeschlossenen Punktmenge ein Maximum μ . Gäbe es im Inneren von B_r eine Stelle $z = a$, wo $|F(a)| = \mu$ wäre, so grenze man um dieselbe eine zu B_r gehörige Kreisscheibe ab. In dieser ist $F(z)$ eindeutig und regulär. Das Maximum von $|F(z)|$ läge im Bereichinneren, was nicht angeht.

5. Der Fall des Kreises. Für den im vorigen Paragraphen erörterten Fall, wo B der Kreis $|z| < R$ ist, ist die Funktion

$$\varphi(z; z_0) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

Dort war G der Kreis $|w| < M$, und also hat man

$$\psi(w, w_0) = \frac{M(w - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 w}$$

zu nehmen. Und man hat wieder die Abschätzung

$$(7.) \quad \left| \frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right|.$$

Sie hat die dort besprochene geometrische Bedeutung.

Analog bedeutet hier unsere Abschätzung, daß innerhalb des Bereiches $|\varphi(z; z_0)| < r$ die Funktion $f(g)$ Werte annimmt, die dem Bereiche $|\psi(w; w_0)| < r$ angehören.

6. Ein Beispiel. Ich begnüge mich, ein *Beispiel* anzuführen, von dem wir noch Gebrauch zu machen haben. Der eine Bereich sei $|z| < 1$, der andere $\Im(w) > 0$. Dann ist

$$\varphi(z; z_0) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

$$\psi(w; w_0) = \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}.$$

Die Linien $|\varphi| = \lambda$, $|\psi| = \lambda$ sind Kreise. Es sind die Kreise, welche man aus den Kreisen $|\xi| = \lambda$ erhält, wenn man Kreis oder Halbebene durch $\xi = \varphi$ oder durch $\xi = \psi$ auf $|\xi| < 1$ bildet. Bei der Abbildung der Halbebene geht die Gerade

$$(g) \quad w = u_0 + iv \quad (v \text{ reell})$$

in die reelle Achse über. Daher entsteht der tiefste und der höchste Punkt des Kreises $|\psi| = \lambda$, dessen Mittelpunkt auf der Geraden g liegt, aus zwei Punkten der reellen Achse, nämlich den Punkten $\xi = -\lambda$ und $\xi = +\lambda$. Diesen entsprechen die w -Werte

$$u = \frac{u_0 + \lambda \bar{u}_0}{1 + \lambda} \quad \text{und} \quad w = \frac{u_0 - \lambda \bar{u}_0}{1 - \lambda}.$$

Deren Imaginärteile sind

$$v_0 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad \text{und} \quad v_0 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}.$$

Nehmen wir nun $z_0 = 0$ und eine Funktion $f(z)$, die in $|z| < 1$ regulär ist und für die $f(0) = w_0$ ist, und $\Im\{f(z)\} > 0$ für $|z| < 1$, so muß sie in $|z| < 1$ Werte aus $|\psi| < \lambda$ annehmen. Daher liegt in $|z| < 1$ ihr Imaginärteil zwischen den gefundenen Schranken. Also

$$v_0 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \leq \Im\{f(z)\} \leq v_0 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \quad \text{in} \quad |z| \leq \lambda.$$

Insbesondere ist also wegen $\lambda < 1$

$$\frac{r_0}{2} (1 - \lambda) < \Im \{f(z)\} < \frac{2r_0}{1 - \lambda} \quad \text{in} \quad |z| \leq \lambda.$$

Beispiele zur Verwendung des allgemeinen Satzes wollen wir nicht häufen, sondern verweisen den Leser auf eine ausführliche Arbeit von Koebe im sechsten Bande der Mathematischen Zeitschrift, wo man eine reiche Auswahl von Beispielen findet.

7. Die Jensensche Ungleichung. Wer unseren Darlegungen aufmerksam gefolgt ist, wird leicht auf die folgende *Erweiterung* geführt. Wenn die Funktion $f(z)$ nach wie vor in B regulär und eindeutig ist und in B nur Werte aus G annimmt, so kann man zu einer schärferen Abschätzung gelangen, wenn man weitere etwa bekannte Eigenschaften der Funktion $f(z)$ benutzt. Es sei z. B. bekannt, daß sie an den Stellen $z_0, z_1, \dots, z_n$ aus li den Wert w_0 annehme. Dann wird man zu der Abschätzung

$$|\psi \{f(z); w_0\}| \leq |\varphi(z; z_0) \dots \varphi(z; z_n)|$$

geführt, wie man genau auf die gleiche Weise erkennt. Ist also insbesondere $|f(z)| < M$ in dem Kreis $|z| < R$, so hat man

$$(8) \quad \left| \frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - w_0 f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right| \dots \left| \frac{R(z - z_n)}{R^2 - \bar{z}_n z} \right|.$$

Ist namentlich $w_0 = 0$, so wird dies

$$(9) \quad |f(z)| \leq M \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right| \dots \left| \frac{R(z - z_n)}{R^2 - \bar{z}_n z} \right|,$$

wo wieder das Gleichheitszeichen für ein $|z| < R$ nur dann steht, wenn $f(z)$ bis auf einen Zahlenfaktor vom Betrag Eins mit dem Produkt der $n+1$ linearen Funktionen identisch ist. Setzt man hier $z = 0$, so erhält man die als *Jensensche Ungleichung* bekannte Abschätzung

$$(10) \quad |z_0 \dots z_n| \geq \frac{|f(0)| R^{n+1}}{M}.$$

Bezeichnet man mit $M(r)$ das Maximum von $|f(z)|$ in $|z| \leq r < R$ und nimmt an, daß

$$|z_0| \leq |z_1| \leq \dots \leq |z_r| < r \leq |z_{r+1}| \leq \dots \leq |z_n|$$

ist, so folgt aus unserer Abschätzung

$$|z_0 \dots z_r| \geq \frac{|f(0)| r^{r+1}}{M(r)}.$$

Multipliziert man links mit den Zahlen $\left| \frac{z_{r+1}}{r} \right| \dots \left| \frac{z_n}{r} \right|$, die ja alle mindestens gleich Eins sind, so ist erst recht

$$(11) \quad |z_0 \dots z_n| \geq \frac{|f(0)| r^{n+1}}{M(r)}.$$

Dies gilt also, solange $|z| \leq r < R$ ist, für jede in $|z| < R$ reguläre Funktion, welche daselbst an den Stellen $z_0, \dots, z_n$ verschwindet. Das können einige oder alle Nullstellen der Funktion sein. Das ist für die Richtigkeit der Formel einerlei. Sie ist etwas schärfer als die vorher gefundene (10). Versteht man namentlich unter $z_0, \dots, z_n$ die dem absoluten Betrag nach kleinsten Nullstellen der Funktion und zählt dabei jede nach ihrer Vielfachheit, so enthält die Abschätzung eine Aussage über die Verteilung der Nullstellen bei gegebenem $M(r)$. Sie sind in ihrer Häufigkeit beschränkt. Namentlich kann die kleinste nicht zu nahe bei $z=0$ liegen, wenn $f(0) \neq 0$ ist. Denn aus (11) folgt unter der angegebenen Voraussetzung

$$|z_0|^{n+1} \geq \frac{|f(0)|^{n+1}}{M(r)}.$$

8. Meromorphe Funktionen. Noch auf eine weitere Verallgemeinerung sei in Kürze hingewiesen: $f(z)$ sei im Bereiche B meromorph, d. h. bis auf Pole regulär. Zu jedem Randpunkt gehöre eine Umgebung, in der $|f(z)| \leq M$ sei. Die Nullstellen von $f(z)$ mögen bei $z_1, \dots, z_r$, die Pole bei $p_1, \dots, p_\mu$ liegen.¹⁾ Jede der Stellen ist dabei so oft geschrieben, als es der Vielfachheit entspricht. Dann lehrt unsere Schlußweise nach wie vor, daß

$$\frac{f(z) \cdot \prod_{k=1}^{\mu} \varphi(z; p_k)}{\prod_{k=1}^r \varphi(z; z_k)}$$

in B regulär ist, und das Maximum seines Betrages „am Rande“ annimmt. Daher ist dieser Betrag höchstens M und wir haben die Abschätzung

$$(12) \quad |f(z)| \leq M \left| \frac{\varphi(z; z_1) \dots \varphi(z; z_r)}{\varphi(z; p_1) \dots \varphi(z; p_\mu)} \right|.$$

Bei ihr kann in einem Punkte aus B das Gleichheitszeichen wieder nur dann stehen, wenn $f(z)$ bis auf einen Zahlenfaktor vom Betrage Eins mit der rechts stehenden Funktion identisch ist. Ist B insbesondere der Kreis $|z| < R$, so wird

$$(13) \quad |f(z)| \leq M \cdot R^{r-\mu} \prod_{k=1}^r \left| \frac{z - z_k}{R^2 - \bar{z}_k z} \right| \cdot \prod_{k=1}^{\mu} \left| \frac{R^2 - \bar{p}_k z}{z - p_k} \right|.$$

9. Anwendung der Jensenschen Ungleichung. Unter den zahlreichen Anwendungen der Jensenschen Ungleichung (10) will ich hier nur zwei hervorheben. Weitere werden uns später noch begegnen. Was ich zuerst erwähnen will, betrifft

1) Dabei müssen alle Pole Verwendung finden. Dagegen benötigt man nur einen Teil der Nullstellen.

den auf S. 170 von Bd. I bewiesenen Vitalischen Doppelreihensatz. Man kann sich fragen, inwieweit die dort gemachte Voraussetzung, daß die benutzten Konvergenzstellen einen Häufungspunkt im Bereichinneren haben, beim Beweis voll ausgenutzt wurde. Geht man den damals gegebenen Beweis aufmerksam durch, so erkennt man, daß diese Voraussetzung erst zu guter Letzt benutzt wurde, als es sich darum handelte, die Übereinstimmung zweier Grenzfunktionen zu erschließen. Man mußte wissen, daß eine Funktion, welche in den Konvergenzstellen z_1 verschwindet, im ganzen Bereich identisch verschwinden muß. Diesen Schluß kann man aber unter allgemeineren Annahmen als damals machen. Der Häufungspunkt darf auch am Rande liegen, wofern nur die Punkte z nicht zu rasch gegen den Rand konvergieren. Für den Fall, daß der zu untersuchende Konvergenzbereich der Kreis $|z| < 1$ ist, kann man das von Blaschke (Ber. der sächs. Ges. d. Wiss. 1915) herrührende Ergebnis in der folgenden eleganten Fassung aussprechen. Wenn die $f_n(z)$ in $|z| < 1$ beschränkt sind und in einer unendlichen Punktmenge z_i für die

$$\prod_0^{\infty} |z_i| = 0$$

ist, gegen Grenzwerte konvergieren, so konvergiert die Folge gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion in jedem inneren Teilbereich des Einheitskreises. Zum Beweise ist nur festzustellen, daß eine in $|z| < 1$ reguläre und beschränkte Funktion $f(z)$, welche in den z_i verschwindet, in $|z| < 1$ durchweg Null sein muß. Dies folgt sofort aus der Jensenschen Ungleichung (10). Man darf ja annehmen, daß $f(0) \neq 0$ ist. Denn hätte $f(z)$ in $z = 0$ eine genau k -fache Nullstelle, so wäre auch $\frac{f(z)}{z^k}$ in $|z| < 1$ regulär, und läge in $|z| < 1$ unterhalb derselben Schranke, wäre aber jetzt in $z = 0$ nicht Null und dann würden wir unsere Überlegung an diese Funktion anschließen. Es sei also $f(0) \neq 0$. Formel (10) lehrt, daß

$$|z_0 \dots z_n| \geq \frac{|f(0)|}{M} > 0, \text{ wo } f(z) < M \text{ in } |z| < 1.$$

Also wäre auch $\prod_0^{\infty} |z_i| > 0$ gegen die Voraussetzung. Also muß doch $f(0) = 0$ sein. Dies zusammen mit der vorigen Bemerkung liefert den gesuchten Beweis. Man kann ihn noch durch den Zusatz ergänzen, daß er für $\prod_0^{\infty} |z_i| > 0$ nicht mehr richtig ist. Der Beweis beruht darauf, daß man in diesem Falle stets Funktionen konstruieren kann, welche an allen diesen Stellen z_k verschwinden. Durch eine Schlußweise, welche der in Bd. I S. 292 befolgten sehr ähnlich ist, beweist man nämlich, daß

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{z - z_k}{z - w_k}$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre Funktion mit den Nullstellen z_k ist, falls $0 < \delta \leq |z_k| < 1$ für alle k ist, und falls $|w_k| \geq 1$ ist für alle k , und falls $\sum |z_k - w_k|$ konvergiert. Die Durchführung sei eine nützliche Übungsaufgabe für den Leser. Setzt man nun $w_k = \frac{1}{z_k}$, so sind die beiden ersten für die z_k und w_k angegebenen Bedingungen erfüllt. Ferner aber konvergiert $\sum |z_k - w_k|$, wenn $\prod |z_k| > 0$ ist, oder was dasselbe ist, wenn $\sum (1 - |z_k|)$ konvergiert. Denn man hat

$$|z_k - w_k| = \frac{1 - |z_k|^2}{|z_k|} < \frac{2}{\delta} (1 - |z_k|).$$

10. Abschätzung der Ableitung $f'(z)$. Eine weitere Anwendung ist diese: Läßt man in (7) von S. 108 $z_0 \rightarrow z$ streben, so erhält man

$$|f'(z)| \leq \frac{R}{M} \frac{M^2 - |f(z)|^2}{R^2 - |z|^2}.$$

Also ist auch

$$|f'(z)| \leq \frac{RM}{R^2 - |z|^2}$$

und diese Schranke wird auf $|z| = r$ durch

$$f(z) = \frac{MR(z-r)}{R^2 - rz} \quad \text{erreicht.}$$

Analoge Abschätzungen kann man auch für die höheren Ableitungen gewinnen. Doch sind diese Fragen noch nicht völlig erledigt. Man vgl. die Arbeit von Szász in Mathematische Zeitschrift Bd. 8.

§ 2. Der Satz von Julia.

1. Formulierung des Satzes. G. Julia hat 1918 Acta math. Bd. 42 den folgenden Satz bewiesen:

$f(z)$ sei in $|z| < 1$ regulär und es sei dort $|f(z)| < 1$. $f(z)$ sei in $z = 1$ regulär und dort sei $f(1) = 1$, $f'(1) = \alpha$. Dann ist α reell und positiv und es gilt in $|z| < 1$ überall

$$(1) \quad \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha \frac{1 - |z|^2}{1 - |z|^2}.$$

Nun ist

$$\frac{1 - |z|^2}{1 - |z|^2} = c$$

die Gleichung eines Kreises vom Durchmesser $\frac{2}{c+1}$, welcher in $z = 1$ den $|z| = 1$ berührt und der dem $|z| \leq 1$ angehört. Daher kann man den Inhalt der Ungleichheit (1) auch so aussprechen. Unter den angegebenen Voraussetzungen nimmt $f(z)$ in einer Kreisscheibe k vom Durchmesser d , welche in

$z = 1$ den $|z| = 1$ berührt, Werfe an, welche einer ebensolchen Kreisscheibe x vom Durchmesser

$$\delta = \frac{2\alpha d}{2 + d(\alpha - 1)}$$

angehören.

Wie ich in der ersten Auflage dieses Buches mitteilte, hat Löwner die Voraussetzungen des Satzes dahin verallgemeinert, daß statt der Regularität von $f(z)$ bei $z = 1$ nur verlangt wird: $f(z)$ regulär in $|z| < 1$, $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - 1}{z - 1}$$

existiert bei beliebiger geradliniger Annäherung, ist endlich und von dem Annäherungsweg unabhängig. Caratheodory hat inzwischen hinzugefügt (Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1929), daß der Grenzwert (2) stets existiert und vom Wege unabhängig, aber nicht immer endlich ist. Das bedeutet eine vertiefte Erkenntnis der hier zur Rede stehenden Sachverhalte. Um zu ihrer Einsicht vorzudringen, beweisen wir zuerst den Satz von Julia unter noch geringeren Annahmen:

$f(z)$ sei regulär in $|z| < 1$, es sei $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$, es gebe eine Punktfolge z_n in $|z| < 1$, für die

$$(3) \quad \begin{cases} z_n \rightarrow 1, & f(z_n) \rightarrow 1, \\ \liminf_{z_n \rightarrow 1} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha \end{cases}$$

endlich sei. Dann gilt (1) und gilt also auch die geometrische Fassung, die wir dem Inhalt von (1) gaben.¹⁾

2. Bemerkung. Wir werden der Beweisführung die geometrische Fassung des Satzes zugrunde legen. Zuerst zeigen wir, daß die nichtnegative reelle Zahl α aus (3) stets positiv ist. Nach der S. 106 angegebenen Fassung des Schwarzsehen Lemmas nimmt $w = f(z)$ im Punkte z_0 einen Wert an, der einem Kreis um $w = f(0)$ mit dem nichteuklidischen Radius $|z_0|$ angehört. Sei $\mathfrak{R}_0$ der Kreis $|z| < |z_0|$ und $\mathfrak{R}_1$ der Kreis aus $|w| < 1$ um $f(0)$. Dann kann man $\mathfrak{R}_0$ so linear auf $\mathfrak{R}_1$ abbilden, daß dabei $|z| < 1$ in $|w| < 1$ übergeht und daß $z = 0$ in $w = f(0)$ und $z = |z_0|$ in den der Peripherie des Einheitskreises nächstgelegenen Punkt V von $\mathfrak{R}_1$ übergeht. Dabei geht dann die reelle Achse $-1 < z < +1$ in den Durchmesser von $|w| = 1$ über, der $f(0)$ enthält. Denkt man sich $\mathfrak{R}_1$ so gedreht, daß $f(0)$ in $|f(0)|$ und P in einen Punkt $y > 0$ übergeht, so wird aus $\mathfrak{R}_1$ ein Kreis $\mathfrak{R}_1'$. Dieser geht aus $\mathfrak{R}_0$ durch eine lineare Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ hervor, die $z = -1$

1) $\liminf.$, gelesen limes inferior, ist der kleinste Häufungspunkt.

in $w = 1$, $z = \pm 1$ in $w = +1$, $z = 0$ in $w = |f(0)|$, $z = |z_0|$ in $w = y$ abbildet. Daher ist das Doppelverhältnis

$$(-1, +1, 0, |z_0|) = (-1, +1, |f(0)|, y)$$

oder

$$\frac{1 - |z_0|}{1 + |z_0|} = \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} \cdot \frac{1 - y}{1 + y}.$$

Also wird

$$1 - y = \frac{(1 - |z_0|)(1 - |f(0)|)}{1 + |z_0||f(0)|}.$$

Da nun $f(z_0)$ ein Punkt aus $\mathfrak{A}_1$ ist, und da $1 - y$ der Abstand der Kreise $\mathfrak{A}_1$ und $|w| = 1$ ist, so ist

$$1 - |f(z_0)| \geq 1 - y.$$

Also wird

$$\frac{1 - |f(z_0)|}{1 + |z_0|} \geq \frac{1 - |f(0)|}{1 + |z_0||f(0)|} > \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|}.$$

Da dies für jede Stelle z_0 gilt, so ist auch für das α aus (3)

$$\alpha \geq \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} > 0,$$

da $|f(0)| < 1$ ist.

3. Beweis. Wir setzen $y = 1 - \alpha$. Es sei k'_n der nichteuklidische Kreis¹⁾ mit $|z_n|$ als Mittelpunkt, welcher durch den Punkt y geht. k'_n sei ein gleichgroßer Kreis¹⁾ mit $|f(z_n)|$ als Mittelpunkt. Betrachtet man nun eine Teilfolge der z_n , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha$$

ist, so konvergieren die Kreise k'_n und k_n gegen k und x .²⁾

Nun sei k_n der Kreis, der aus k'_n durch Drehung um $z = 0$ entsteht und der z_n als nichteuklidischen Mittelpunkt hat und k'_n sei der Kreis, der aus k'_n durch Drehung um $z = 0$ entsteht, und der $f(z_n)$ als Mittelpunkt hat. Wegen $z_n \rightarrow 1$ und $f(z_n) \rightarrow 1$ konvergieren die Drehwinkel gegen Null. Daher konvergiert auch $k_n \rightarrow k$ und $k'_n \rightarrow k$. Der Beweis des Juliaschen Satzes ergibt sich nun, wenn man die S. 106 angegebene allgemeine Fassung des Schwarzsehen Lemmas auf die Kreise k_n anwendet. Die Werte nämlich, die $f(z)$ in k_n annimmt, gehören k_n an, wie jenes Lemma aussagt. Da weiter wegen $k_n \rightarrow k$ jeder Punkt von k unendlich vielen k_n angehört, so gehört $f(z_n)$ unendlich vielen k_n und daher auch k an. Das ist aber gerade die Aussage des Juliaschen Satzes.

1) Wegen vorhandener Beziehungen zur nichteuklidischen Geometrie (vgl. auch S.106) nennen wir „nichteuklidischen Kreis mit $|z_n|$ als Mittelpunkt“ einen Kreis, welcher aus einem mit $|z| = 1$ konzentrischen hervorgeht, wenn man $|z| < 1$ so linear auf sich abbildet, daß $z = 0$ in $x = |z_n|$ übergeht. Gleichgroß heißen zwei nichteuklidische Kreise, wenn sie aus demselben mit $|z| = 1$ konzentrischen Kreis durch lineare Abbildung hervorgehen.

2) Das sind die in der geometrischen Formulierung des Juliaschen Satzes genannten Kreise.

4. Der Grenzfall. Es läßt sich nun auch eine Aussage darüber machen, wann $f(z)$ in einem Randpunkt von k einen Wert annehmen kann, der dem Rande von $\mathfrak{K}$ angehört. Die allgemeinste lineare Transformation, welche die Kreisscheibe k des Kreises $|z| < 1$ in die Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ des Kreises $|w| < 1$ überführt, hat die Gestalt

$$(4) \quad w = \frac{1+z-\alpha-i\beta(1-z)}{1+\bar{z}+\alpha-i\beta(1-\bar{z})}.$$

Dabei ist α die positive Zahl aus (3) und β eine beliebige reelle Zahl.¹⁾

Wenn nun der Punkt z_0 auf k in w_0 auf $\mathfrak{K}$ übergeht, so ziehe man zwei kleinere Kreise k' und $\mathfrak{K}'$ heran, die gleichfalls in $|z| = 1$ bzw. $|w| = 1$ berühren und die durch die eben angegebene Abbildung auseinander hervorgehen. In dem Kreise $\mathfrak{K}'$ um z_0 als nichteuklidischen Mittelpunkt, welcher k' von außen in einem Punkte P berührt, nimmt $f(z)$ Werte an, die dem Kreise $\mathfrak{K}'$ um $f(z_0)$ als nichteuklidischem Mittelpunkt angehören, und welcher $\mathfrak{K}'$ von außen in einem Punkte P' berührt. Man sieht dies ein, wenn man $|z| < 1$, so auf $|w| < 1$ abbildet, daß $z = 1$ in $w = 1$ übergeht und daß z_0 in $f(z_0)$ übergeht. Das geht gerade durch eine lineare Abbildung (4) für passendes β . Nach dem Juliaschen Satz muß aber der Wert, den $f(z)$ in P annimmt, dem Kreise $\mathfrak{K}'$ angehören; nach dem Schwarzsehen Lemma von S. 106 muß er $\mathfrak{K}'$ angehören. Also nimmt $f(z)$ in einem Randpunkt P von $\mathfrak{K}'$ einen Wert an, der einem Randpunkt P' von $\mathfrak{K}'$ entspricht. Daher ist $f(z)$ nach dem Schwarzsehen Lemma eine lineare Funktion. Da aber durch sie $z = 1$ in $w = 1$ übergeht, muß sie die Form (4) haben.

Alles in allem haben wir also jetzt bewiesen:

Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und daselbst $|f(z)| < 1$, ist ferner für eine gewisse Zahlenfolge

$$z_n \rightarrow 1, \quad f(z_n) \rightarrow 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha$$

und α endlich, so ist $\alpha > 0$ und es ist

$$(5) \quad \frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}.$$

In dieser Abschätzung kann für ein z aus $|z| < 1$ nur dann das Gleichheitszeichen stehen, wenn $f(z)$ mit einer linearen Funktion (4) identisch ist. Dann steht in (5) das Gleichheitszeichen für alle z .

1) Setzt man nämlich $w = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2}$, so gehen $|z| < 1$ und $|w| < 1$ in $\Re(z) > 0$ und $\Re(w) > 0$ über. Die in $z = 1$ bzw. $w = 1$ berührenden Kreise vom Durchmesser d bzw. $\frac{2\alpha d}{2+d(\alpha-1)}$ gehen in die Geraden $\Re(z) = \frac{1}{d} - \frac{1}{2}$ und $\Re(w) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2} \right)$ über. Die allgemeinste lineare Abbildung von $\Re(z) > 0$ auf $\Re(w) > 0$, welche diese beiden Geraden ineinander überführt, ist $w = \frac{1}{\alpha} z + i\beta$, woraus für $\beta = \alpha\beta_1$ die Angabe des Textes folgt.

5. Beweis, daß $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z} = \alpha$. Die lineare Funktion (4) hat die Eigenschaft, daß

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - w}{1 - z} = \alpha$$

ist. Daß dies für alle Funktionen $f(z)$ bei gewissen einschränkenden Annahmen über die Art der Annäherung $z \rightarrow 1$ gilt, soll jetzt bewiesen werden. $f(z)$ sei regulär in $|z| < 1$ und es sei dort $|f(z)| < 1$.

Zunächst möge $z \rightarrow 1$ radial konvergieren, so also reelle Werte x besitzen.

Num ist

$$(6) \quad \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \frac{1 - f(x)}{1 - x}$$

Nun sei

$$(7) \quad \liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \alpha_0 \text{ endlich.}$$

$$\text{Nach (6) ist } \liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \alpha_0.$$

Setzt man nun

$$(8) \quad \liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \alpha_1$$

und wäre

$$\alpha_1 < \alpha_0,$$

so wären die Voraussetzungen des Juliaschen Satzes mit $\alpha = \alpha_1$ für eine Folge reeller Zahlen x_n erfüllt. Im Punkte $x = 1 - d$ nimmt nun $f(x)$ Werte an aus einem Kreis vom Durchmesser

$$\delta = \frac{2\alpha_1 d}{2 + d(\alpha_1 - 1)},$$

der in $z = 1$ den Einheitskreis berührt, also ist

$$|1 - f(x)| \leq \delta$$

und

$$\frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \frac{\delta}{d} = \frac{2\alpha_1}{2 + d(\alpha_1 - 1)}.$$

Also ist

$$\liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \alpha_1.$$

Da $\alpha_1 < \alpha_0$ ist, so widerspricht das der Definition (7) von α_0 und daher kann das durch (8) definierte α_1 nicht $< \alpha_0$ sein. Da es aber wegen (6) auch nicht $> \alpha_0$ sein kann, so folgt

$$(9) \quad \liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \alpha_0.$$

Nach (6) ist aber auch

$$\limsup_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \limsup_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x}$$

Da nach (9) der Juliasche Satz mit $\alpha = \alpha_0$ gilt, so ist wieder

$$\frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \frac{2\alpha_0}{2 + d(\alpha_0 - 1)}$$

und also

$$(10) \quad \limsup_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} < \limsup_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \alpha_0.$$

Aus (9) und (10) aber folgt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \alpha_0$$

Wir haben also das Ergebnis, daß bei radialer Annäherung

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x};$$

stets gilt. Die Grenzwerte existieren also stets und sind auch stets einander gleich, einerlei ob sie endlich oder unendlich sind, wofern nur $f(z)$ in $|x| < 1$ regulär ist und dort $|f(z)| < 1$ gilt.

Wäre nämlich $\liminf_{x \rightarrow 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x}$

nicht endlich, so kann auch nicht

$$\liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x}$$

endlich sein. Denn hätte dieser $\liminf$ den endlichen Wert u , so würde der Juliasche Satz gelten. Dieser würde wegen (6) und der mehrfach benutzten Abschätzung für

$$|1 - f(x)|$$

lehren, daß doch

$$\liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \alpha$$

sein müßte.

Nehmen wir nun an, daß die Grenzwerte endlich sind, daß also

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \alpha$$

endlich sei. Dann ist

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - |f(x)|} = 1.$$

Setzt man

$$1 - f(x) = \rho e^{i\vartheta},$$

so folgt

$$\frac{1 - |f(x)|}{1 - |f(x)|} = \frac{\rho \cos \vartheta + \rho}{1 + \sqrt{1 - 2\rho \cos \vartheta} + \rho^2}.$$

Für $x \rightarrow 1$ gilt $\rho \rightarrow 0$; wegen (11) ist also auch $\cos \vartheta \rightarrow 1$, also auch $e^{i\vartheta} \rightarrow 1$. Nun ist

$$\frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \frac{\rho e^{i\vartheta}}{1 - x} = \frac{1 - f(x)}{1 - x} e^{i\vartheta}.$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x}$$

Wir haben so das Ergebnis:

Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und $|f(z)| < 1$ und ist

$$\liminf_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x}$$

bei radialer Annäherung endlich, so existieren die drei Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x}$$

bei radialer Annäherung und sind einander gleich. Der gemeinsame Grenzwert ist eine positive Zahl.

Gehen wir zu den Voraussetzungen des Julia'schen Satzes zurück, nehmen also an, daß in $|z| < 1$ eine Zahl z_n mit $|f(z_n)| \leq \alpha < 1$, $f(z_n) \rightarrow 1$ existiert, für die

endlich sei, so lehrt der Satz von Julia, daß $f(z)$ auch für reelle $x = 1 - d$ Werte aus dem Kreise vom Durchmesser d annimmt, daß also

$$\frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \frac{|1 - f(x)|}{1 - x} \leq \frac{\alpha}{2 + d(1 - \alpha)}$$

ist. Dann ist aber

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x} \leq \alpha$$

endlich. Also haben wir das Ergebnis:

Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und $|f(z)|$ gleichmäßig eine Folge von Zahlen z_n , für die

$$z_n \rightarrow 1, \quad f(z_n) \rightarrow 1$$

$$\text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|}$$

endlich ist, so existieren die drei Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - |f(x)|}{1 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1 - f(x)|}{1 - x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - f(x)}{1 - x}$$

bei radialer Annäherung und sind einander gleich. Der gemeinsame Grenzwert ist eine positive endliche Zahl.

Wir suchen nun das Ergebnis auf allgemeinere als radiale Annäherung zu verallgemeinern. Zu dem Zwecke betrachten wir ein dem Kreise $|z| \leq 1$ angehöriges Dreieck, dessen eine Ecke bei $z = 1$ liegt. Es sei zur reellen Achse symmetrisch. Seine Höhe sei h .

Es gibt eine von z unabhängige Zahl M , so daß für jeden Punkt z dieses Dreiecks

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} < M$$

ist. Es ist nämlich nach dem Sekantensatz

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \cdot \frac{|1 - P_1|}{1 - |P_1|} = 1.$$

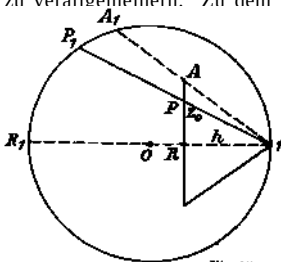


Fig. 18.

Also

$$\left| \frac{1-z}{1-z_n} \right| = \left| \frac{1-R_1}{1-P_1} \right| \leq \left| \frac{2}{1-A_1} \right| = M.$$

Nun sei $z_n \rightarrow 1$ irgendeine Punktfolge aus diesem Dreieck. Gibt es eine Zahl α , so daß

$$\left| \frac{1-f(z_n)}{1-z_n} \right| < \alpha,$$

so wird

$$\left| \frac{1-f(z_n)}{1-z_n} \right| \leq \left| \frac{1-f(z_n)}{1-z_n} \right| \leq M \left| \frac{1-z_n}{1-z_n} \right| < M\alpha,$$

so daß der Juliasche Satz gilt. Es gibt daher eine positive Zahl α_0 , so daß

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \alpha_0$$

für reelle z gilt. Wir setzen

$$(12) \quad r_n = \frac{R(1-z_n)}{h},$$

$$(13) \quad \varrho_n = \frac{\alpha_0 r_n}{1+r_n(\alpha_0-1)},$$

$$(14) \quad 1-z = r_n(1-t),$$

$$(15) \quad 1-f(z) = \varrho_n(1-\Phi_n(t)).$$

Im Kreise vom Durchmesser $2r_n$ nimmt nach dem Juliaschen Satze $f(z)$ Werte aus dem Kreise von Durchmesser $2\varrho_n$ an. Daher ist $|\Phi_n(t)| < 1$ für $|t| < 1$. Denn für $|t| < 1$ gehört nach (14) z zum Kreise vom Durchmesser $2r_n$, und für $f(z)$ aus dem Kreise vom Durchmesser $2\varrho_n$ liegt nach (15) $\Phi_n(t)$ im Einheitskreise. Nun ist

$$(16) \quad \Phi_n(t) - 1 = \frac{1-f(z)}{\alpha_0} \frac{1-z}{1-z} = \frac{1}{\alpha_0} (t-1)(1+r_n(1-\alpha_0)).$$

Für $n \rightarrow \infty$ und festes t gilt $z_n \rightarrow 1$, also nach (12) $r_n \rightarrow 0$ und nach (14) $z \rightarrow 1$. Für reelle t ist außerdem nach (14) z reell. Daher ist nach (16) für reelle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi_n(t) - 1] = t - 1.$$

Also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) = t$$

für reelle t . Nun ziehen wir den Vitalischen Satz heran. Die $\Phi_n(t)$ sind ja gleichmäßig beschränkt und konvergieren auf der ganzen reellen Achse. Also gilt für jede abgeschlossene Menge aus $|t| < 1$ gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) = t.$$

Setzen wir nun

$$(17) \quad 1-z_n = r_n(1-t_n).$$

Dann gehören die t_n der zur reellen Achse vertikalen Seite unseres Dreiecks an. Diese ist eine abgeschlossene Menge aus $|t| < 1$. Setzt man also

$$\Phi_n(t_n) = t_n + r_n,$$

so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Nun ist

$$\frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n} = \frac{\alpha_0}{1 + r_n(\alpha_0 - 1)} (1 - \frac{r_n}{1 - z_n}).$$

Nun ist

$$r_n \rightarrow 0, \quad r_n \rightarrow 0, \quad R(1 - z_n) = h.$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n} = \alpha_0.$$

Dieser Grenzwert α_0 ist also von der Auswahl der Folge unabhängig, da ja α_0 der Grenzwert war, der für reelle z_n heraus kam, sofern nur die Folge der $z_n \rightarrow 1$ so beschaffen ist, daß

$$\left| \frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n} \right|$$

beschränkt bleibt. Gibt es also überhaupt Folgen im Dreieck, für die dieser Quotient gegen ∞ strebt, so muß dies für jede Folge so sein. Gibt es nämlich im Dreieck zwei Punktfolgen $z_n \rightarrow 1$ und $z'_n \rightarrow 1$, so daß für die eine der Quotient gegen ∞ strebt, während er für die andere beschränkt bleibt, so kann man auf den geradlinigen Verbindungslinien der z_n und z'_n Punkte z''_n finden, für die

$$2\alpha_0 < \left| \frac{1 - f(z''_n)}{1 - z''_n} \right| < 3\alpha_0$$

ist. Für diese Folge existiert also der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - f(z''_n)}{1 - z''_n},$$

kann aber nicht gleich α_0 sein. Daher haben wir das Ergebnis, daß der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n}$$

für jede Folge $z_n \rightarrow 1$ aus dem Dreieck existiert. Er ist für alle diese Folgen derselbe. Über $f(z)$ wird dabei nur vorausgesetzt

$$f(z) \text{ regulär in } |z| < 1 \text{ und } |f(z)| < 1.$$

6. Die Winkelderivierte. Wir fügen endlich noch hinzu, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - f(z_n)}{1 - z_n} = \alpha_0,$$

falls α_0 endlich ist.

Da nämlich die Φ_n gleichmäßig gegen t konvergieren, so gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi'_n(t) = 1$$

gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Meute aus $t < 1$. Da die t_n , wie schon gesagt, einer solchen angehören, so ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi'_n(t_n) = 1.$$

Nun ist

$$\Phi'_n(t) = f''(z) \frac{t^n}{\varphi_n}.$$

Also

$$f'(z_n) = \frac{\alpha_0}{1 + r_n(\alpha_0 - 1)} \Phi'_n(t_n).$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(z_n) = \alpha_0.$$

§ 3. Ein Satz von Löwner.

Wenn $f(z)$ im Einheitskreis analytisch ist und am Rande stetige Randwerte vom Betrag Eins besitzt, so ist sie eine rationale Funktion von der Form

$$(1) \quad f(z) = \varepsilon \frac{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n}{1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n} \quad (|\varepsilon| = 1),$$

in der der Zähler nur im Inneren des $|z| < 1$ verschwindet. Der Beweis dieser Bemerkung ergibt sich aus den Betrachtungen von S. 225 ff. des Bd. I über das Schwarzsche Spiegelungsprinzip. Denn danach ist $f(z)$ auf $|z| = 1$ noch regulär, $f(z)$ kann somit über den Einheitskreis fortgesetzt werden und diese Fortsetzung geschieht nach der Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{f(z)}.$$

Daraus folgt, daß $f(z)$ in der ganzen Ebene von rationalem Charakter ist, Einer regulären Stelle z_0 im Inneren des Einheitskreises entspricht nämlich bei der Fortsetzung eine reguläre Stelle $\frac{1}{z_0}$ oder ein Pol im Äußeren, je nachdem $f(z_0) \neq 0$ ist oder $f(z_0) = 0$ ist. Daher ist $f(z)$ eine rationale Funktion, die im $|z| < 1$ keine Pole hat. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seien ihre Nullstellen. Dann sind $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ ihre Pole. Daher muß sie so aussehen

$$f(z) = \varepsilon \frac{\prod (z - \alpha_i)}{\prod (1 - \bar{\alpha}_i z)}$$

Dabei ist $|\varepsilon| = 1$, weil jeder Faktor $\frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z}$ auf $|z| = 1$ den Betrag 1 hat.* Man kann aber hierfür offenbar auch (1) schreiben.

Was aber läßt sich aussagen, wenn $f(z)$ nur in einem Teilbogen von $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage Eins hat? Diese Frage hat Löwner beantwortet. Es gilt der folgende Satz: Wenn $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär ist, wenn dort $|f(z)| < 1$ ist, wenn $f(0) = 0$ ist und wenn $f(z)$ auf einem Bogen der Länge α von $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrag Eins besitzt¹⁾, so bildet

1) Darum folgt nach dem Spiegelungsprinzip die Regularität von $f(z)$. Vgl. zu diesem § und dem vorhergehenden auch R. Nevanlinna, Über beschränkte analytische Funktionen in der Festschrift für E. Lindelöf (Helsingfors 1930).

$f(z)$ diesen Bogen auf einen nicht kürzeren ab. Die Länge bleibt nur bei den Drehungen z erhalten.

Während z den Bogen α im positiven Sinne durchläuft, durchwandert $f(z)$ den Bildbogen ebenfalls im positiven Sinn. Das gleiche gilt für $\frac{f(z)}{z}$, das ja auch in $|z| < 1$ einen Betrag unter Eins besitzt, und das auch auf α den Betrag Eins hat. Nun aber ist $\arg \frac{f(z)}{z} = \arg f(z) - \arg z$. Daher ist der Zuwachs von $\arg f(z)$ auf α gleich dem Zuwachs α von $\arg z$ + dem nichtnegativen Zuwachs von $\arg \frac{f(z)}{z}$. Gleich kann offenbar nur stehen, wenn $\frac{f(z)}{z}$ eine Konstante ist, die dann natürlich den Betrag Eins hat.

R. Nevanlinna hat nach G. Julia, Principes géométriques d'analyse, Paris 1930, S. 95, aus diesem Satz von Löwner den folgenden Schluß gezogen:

$w = f(z)$ sei in $|z| < 1$ regulär und bilde $|z| < 1$ auf einen Teilbereich von $|w| < 1$ ab. Auf einem Teilbogen der Länge α und den Endpunkten A, B von $|z| = 1$ nehme $f(z)$ Werte an, die dem Teilbogen α' mit den Endpunkten A', B' von $|w| = 1$ angehören. Sei ϑ ein beliebiger Winkel. Man ziehe unter dem Winkel ϑ gegen α und α' durch A, B und $A'B'$ Kreisbogen, die mit α und α' zusammen gewisse Kreisbogenzweiecke D und D' abgrenzen. Dann nimmt $f(z)$ in D Werte an, die D' angehören. Nur dann geht ein $|z| < 1$ angehöriger Randpunkt von D in einen Randpunkt von D' über, wenn die Abbildung linear ist.

Der Beweis leuchtet zunächst aus dem Löwnersehen Satz sofort ein, wenn $f(0) = 0$ ist und $z = 0$ zu D gehört. Denn dann gehört wegen $\alpha' > \alpha$ auch $w = 0$ zu D' , wie man sich leicht überlegt. Ist aber z_0 ein beliebiger Punkt aus D , so führe man Hilfsabbildungen von z und w aus, die z_0 in 0 und $f(z_0)$ in 0 überführen und wende dann den Löwnerschen Satz an. Die Behauptungen betr. den Rand ergeben sich aus einer Kombination des bisher bewiesenen mit dem gewöhnlichen Schwarzsehen Lemma.

§ 4. Die Formel von Jensen-Nevanlinna.

1. Herleitung der Formel. In dem § 1 dieses Abschnittes haben wir Abschätzungen gewonnen, die einen Zusammenhang zwischen dem Maximum des absoluten Betrages am Rande, dem Funktionswert $f(z)$ im Bereich inneren und der Lage der Nullstellen und Pole enthielten. Jetzt wollen wir uns die Frage vorlegen, ob es nicht möglich ist, über das, was bei der Abschätzung beiseite blieb, genaueren Aufschluß zu gewinnen. In der Tat gelingt es sehr leicht, den verbleibenden Rest zu untersuchen. Dazu gelangen wir durch die einfache Bemerkung, daß die mehrfach benutzte Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) \cdot \prod \varphi(z; p_k)}{\prod \varphi(z; a_k)}$$

dann von Nullstellen und Polen frei wird, wenn wir zur Bildung der Produkte in Zähler und Nenner alle Nullstellen und Pole von $f(z)$ heranziehen. Damit dies ohne Weiterungen möglich ist, soll angenommen werden, daß es deren im Bereiche B nur endlich viele gibt. Ferner werde angenommen, daß der Bereich von endlich vielen Jordankurven begrenzt sei und daß am Rande des Bereiches keine Nullstellen liegen, und daß dort $f(z)$ stetig sei.¹⁾ Dann ist $\log|g(z)|$ eine im Innern des Bereiches reguläre, im abgeschlossenen Bereiche stetige Potentialfunktion $P(B; z; \log|g(z)|)$.²⁾ Beachtet man noch, daß am Rande $|f(z)| = |g(z)|$, so gewinnen wir die Formel von Jensen in der folgenden allgemeinen zuerst von R. u. F. Nevanlinna angegebenen Form

$$P(B; z; \log|f(z)|) = \log|f(z)| + \sum \log|\varphi(z; p_k)| - \sum \log|\varphi(z; n_k)|.$$

Die Summen sind dabei über alle Nullstellen und Pole von $f(z)$ aus B zu erstrecken. In dem Falle, wo der Bereich B der Kreis $|z| < R$ ist, wird die Formel ($z = re^{i\varphi}$; $\xi = Re^{i\vartheta}$)

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\vartheta})| R^2 - \frac{|z|^2}{R^2 \cos^2(\vartheta - \varphi)} + |z|^2 - \log|f(z)| \\ - \sum \log \left| \frac{R^2 - z\bar{p}_k}{(z - p_k)R} \right| + \sum \log \left| \frac{R^2 - z\bar{n}_k}{R(z - n_k)} \right|.$$

Sie kann natürlich, wie der vorgeführte Gedankengang lehrt, auch sofort aus dem Poissonschen Integral bzw. aus einem älteren Jensenschen Spezialfall hergeleitet werden, ein Umstand, der die Nevanlinna's selbst veranlaßt hat, ihre Formel als Poisson-Jensensche Formel zu bezeichnen. Anwendungen derselben finden sich übrigens schon vor Nevanlinna in der Literatur, z. B. bei Carleman und bei Ostrowski. Aber erst F. und R. Nevanlinna haben diese Gedankengänge systematisch ausgebaut.

2. Verallgemeinerung der Formel. Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch eine von den Nevanlinnas herrührende Verallgemeinerung der Formel (2) angegeben. Man umgebe die Nullstellen und Pole von $f(z)$ mit Kreisen $K(p_\nu)$ und $K(n_\nu)$ vom Radius ϱ derart, daß jeder Kreis eine solche Stelle enthält und die Kreise einander und den Rand von B nicht treffen. Der nach Ausschluß dieser Kreise verbleibende Bereich heiße B_ϱ . $\lambda(\xi)$ sei eine beliebige nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen im Inneren und am Rand von B stetige Funktion. In der für den B_ϱ angesetzten Green-

1) Die S. 56 ff. gegebenen Betrachtungen aus der Potentialtheorie erlauben natürlich gewisse Verallgemeinerungen der nun folgenden Betrachtungen und Ergebnisse.

2) Man vgl. wegen der Bezeichnung S. 65.

scheu Formel (vgl. z. B. meine Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 367).

$$\int \int (u_x v - v_x u) dx dy = \int \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

trage man $u = \log f$, $v = \lambda$ ein und mache dann den Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$. So erhält man die Formel:

$$(3) \quad \begin{cases} \sum \lambda(n_k) - \sum \lambda(p_k) = \frac{1}{2\pi} \int \int \log f \Delta \lambda dx dy \\ + \frac{1}{2\pi} \int \left(\log f \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \log f}{\partial n} \right) ds. \end{cases}$$

Hieraus entsteht als Spezialfall die Formel (1), wenn man λ gleich der Green'schen Funktion $\log \varphi(z, \zeta)$ wählt.

§ 5. Anwendungen der Jensen-Nevanlinnaschen Formel.

1. Ein Satz von Ostrowski und Nevanlinna. Aus der Formel (1) des vorigen Paragraphen kann man die in dem § 1 enthaltenen Abschätzungen wieder finden. Dort war vorausgesetzt, daß am Rande¹⁾ $|f(\zeta)| \leq M$ sei. Beachtet man, daß dann die Potentialfunktion $P(B; z; \log^+ f(\zeta))$ auch im Bereich innern $< \log M$ ist, so hat man sofort jene Abschätzungen wieder gefunden.

Der Vorteil der neuen Formel ist nun aber der, daß man etwaige genauere Kenntnisse über die Randwerte von $f(z)$ ausnutzen kann. Wenn z. B. der Band in mehrere Teilbogen $R_1, R_2, \dots, R_n$ zerfällt, derart, daß $|f(\zeta)| \leq M_k$ auf R_k gilt, wobei die M_k passende positive Zahlen sind, so findet man, daß jetzt

$$(1) \quad \log \left| \frac{f(z) \cdot P(\varphi(z; p_k))}{P(z; n_k)} \right| \leq \sum \log M_k \cdot P_k(B; z; 1)$$

wird. Dabei ist $P_k(B; z; 1)$ die beschränkte Potentialfunktion, welche auf R_k den Wert Eins hat, auf den übrigen Bogen R aber verschwindet. Ferner ist $\sum P_k(B; z; 1) = 1$, weil dies eine beschränkte Potentialfunktion ist, welche überall am Rande den Wert Eins hat.

Beachtet man noch, daß diese Potentialfunktionen in jedem abgeschlossenen Teilbereich (r , der ganz im Innern des Bereiches liegt, stetig sind, so findet man noch den folgenden von Ostrowski und den Nevanlinnas herührenden Satz: *Es gibt n positive Konstanten λ_k , so daß für jede in einem von endlich vielen Jordankurven begrenzten Bereiche B reguläre Funktion, welche am Bande stetig ist und bei Zerlegung des Bandes in n Bogen R_k*

1) Wir halten an den im vorigen Paragraphen über den Rand und über $f(z)$ gemachten Voraussetzungen fest.

auf R_k der Abschätzung $|f(z)| \leq M_k$ genügt, innerhalb des inneren Teilbereiches G

$$(2) \quad |f(z)| \leq \prod_{k=1}^{n-1} M_k^{\lambda_k} \quad \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = 1 \right) \quad \text{gilt.}^{1)}$$

Diese Konstanten λ_k hängen dabei nur von dem gegebenen Bereiche B und von G und von den R_k , aber nicht von der betrachteten Funktion $f(z)$ ab. Zum Beweise nehme man an, die M_k seien der Größe nach geordnet:

$$M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_n. \text{ Dann ist nach (1) wegen } \sum_{k=1}^n P_k = 1$$

$$|f(z)| \leq \left(\frac{M_1}{M_n} \right)^{P_1} \cdot \left(\frac{M_2}{M_n} \right)^{P_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{M_{n-1}}{M_n} \right)^{P_{n-1}} \cdot M_n.$$

Nun sei λ_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) das Minimum von $P_k(B; z; 1)$ in G , also $n-1$ positive Zahlen $0 < \lambda_k < 1$. Dann ist

$$|f(z)| \leq \left(\frac{M_1}{M_n} \right)^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{M_{n-1}}{M_n} \right)^{\lambda_{n-1}} \cdot M_n$$

und daraus folgt (1), wenn man noch $\lambda_n = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}$ setzt.

Man kann die Voraussetzungen dahin einschränken, daß nur zu jedem Randpunkt eine Umgebung gehört, in der $|f(z)| \leq M_k$ ist. Dann zerfällt der Rand in endlich viele — sagen wir $n-1$ Bogen mit Umgebungen, in denen $|f(z)| \leq M_k$ ist. Dann konstruiere man eine Folge von Näherungsbereichen B_k mit Randkurven P_k die gegen B konvergieren. Die Ränder zerfallen in je n Bogen, wo jeweils $|f(z)| \leq M_k$ ist. Bei den Näherungsbereichen sind nun die bisherigen Voraussetzungen erfüllt, und man bekommt damit (2) zunächst für diese. Beachtet man nun den auf S. 69 bewiesenen Satz, wonach die zu den B_k konstruierten Potentialfunktionen gegen die zu B gehörigen konvergieren, so erhält man daraus die Gültigkeit von (1) und damit von (2) auch für B .

Eine Anwendung liefert z. B. der Fall, wo $f(z)$ im ganzen Bereich B nicht über einer Schranke M liegt und wo in einem Teilbereich G_1 , der nicht ganz in G enthalten ist, $|f(z)| \leq M_1$ gilt. Man braucht die Überlegung dann nur auf einen Bereich anzuwenden, der aus dem gegebenen durch Ausschneiden einer Kreisscheibe aus G_1 entsteht. Diese soll von G eine von Null verschiedene Entfernung besitzen. Dann wird

$$(3) \quad |f(z)| \leq M^1 M_1^{\lambda_1}, \quad (\lambda > 0, \lambda_1 > 0, \lambda + \lambda_1 = 1)$$

in G , und die λ, λ_1 hängen nur von B, G, G_1 ab, ein Umstand, der den charakteristischen Inhalt des Satzes ausmacht.

1) Das Produkt $\prod |\varphi(z; p_k)|$ fällt hier weg, weil $f(z)$ regulär ist; das Produkt $\prod |\varphi(z; n_k)|$ kann weggelassen werden, weil es die Eins nicht übertrifft.

2. Der Hadamardsehe Dreikreisesatz. In der Jensen -Nevanlinnaschen Formel ist der *Hadamardsehe Dreikreisesatz* enthalten. Dieser lautet: $f(z)$ sei in dem Kreisring $r_1 \leq |z| \leq r_2$ regulär und eindeutig. An den Rändern gelte ferner $|f(z)| \leq M_1$ für $|z| = r_1$ und $|f(z)| \leq M_2$ für $|z| = r_2$. Ferner sei $\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r)$. Dann

$$M(r) \leq M_1^{\frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}} \cdot M_2^{\frac{\log \frac{r}{r_2}}{\log \frac{r_2}{r_1}}}$$

Der Beweis beruht auf den eben abgeschlossenen Darlegungen. Wir haben die beiden Kreise als beide Randkurven zu verwenden und benötigen dann diejenige Potentialfunktion, welche im Ringe regulär ist und welche auf $|z| = r_1$ verschwindet und auf $|z| = r_2$ den Wert Eins besitzt, sowie diejenige Potentialfunktion, bei welcher die beiden Kreise ihre Rollen vertauschen. Diese beiden Potentialfunktionen sind

$$\frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{und} \quad \frac{\log \frac{r}{r_2}}{\log \frac{r_1}{r_2}}.$$

Somit gewinnen wir aus (3) die Abschätzung

$$(4) \quad \log M(r) \leq \log M_1^{\frac{\log \frac{r}{r_2}}{\log \frac{r_2}{r_1}}} + \log M_2^{\frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}}.$$

Die geometrische Bedeutung derselben wird klar, wenn man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem $x = \log r$ und $y = \log M(r)$ aufträgt. Dann bedeutet die Abschätzung (6), daß zwischen $x = \log r_1$ und $x = \log r_2$ die Kurve $y = \log M(r)$ unter der geraden Linie verläuft, welche die Punkte $(\log r_1, \log M_1)$ und $(\log r_2, \log M_2)$ verbindet. Da ein gleicher Schluß für jedes Paar von r -Werten zwischen r_1 und r_2 gilt, so kann man sagen, die Kurve $y = \log M(e^x)$ sei eine konvexe Kurve.

3. Ein zweiter Beweis des Dreikreisesatzes. Man kann diesen Dreikreisesatz noch auf anderem sehr raschen und direkten Wege gewinnen. Die Funktion $z^\alpha f(z)$ hat nämlich im Kreisring für jedes reelle α einen eindeutigen absoluten Betrag. Sie nimmt daher das Maximum desselben am Rande an. Daher liegt $r^\alpha M(r)$ unter der größeren der beiden Zahlen

$$r_1^\alpha M_1 \quad \text{und} \quad r_2^\alpha M_2.$$

Für $\alpha = -\frac{\log \frac{M_1}{M_2}}{\log \frac{r_1}{r_2}}$ werden beide gleich. Trägt man dies α ein, so findet man

erneut den Dreikreisesatz.

4. Bemerkungen über $M(r)$. Ich benutze die Gelegenheit zu einigen kurzen *zusätzlichen Bemerkungen* über die Funktion $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Sie ist erklärt als das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ auf $|z| = r$. Ich beschränke mich bei diesen Bemerkungen auf eine in einem Kreise $|z| < R$ reguläre Funktion, mit $f(0) = 0$. In unseren bisherigen Betrachtungen ist dann insbesondere enthalten, daß $M(r)$ eine monoton wachsende Funktion ist. Das leuchtet ja auch sofort an Hand der Definition derselben ein. Man kann außerdem leicht feststellen, daß sie eine stetige Funktion ist. Weiter kann man beweisen, daß sie stückweise analytisch ist und daß sich die Stellen, wo sie nicht analytisch ist, im Regularitätsgebiet von $f(z)$ nicht häufen können. Man ist aber heute noch weit davon entfernt, die charakteristischen Eigenschaften der Funktion $M(r)$ zu kennen. Das heißt also, man kennt noch nicht die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften, die eine Funktion besitzen muß, wenn sie $M(r)$ einer analytischen Funktion sein soll. Man weiß auch nicht, ob bis auf triviale Möglichkeiten zu jedem $M(r)$ nur eine analytische Funktion gehört. Diese trivialen Möglichkeiten aber sind diese: zu den Funktionen $f(z)$, $\varepsilon f(\eta z)$, $\varepsilon f(\eta \bar{z})$ gehört das gleiche $M(r)$, wenn ε, η Zahlen vom Betrage Eins sind und wenn zugleich $f(0) = 0$ ist. (Man vgl. hierzu Blumenthal im Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. 16 (1907).

5. Sätze von Lindelöf. Es möge sich um eine in einem einfach zusammenhängenden Bereiche reguläre Funktion handeln. Als solchen Bereich wähle ich die Halbebene $\Im z > 0$. Die reelle Achse wird durch einen Punkt a in zwei Hälften R_1 und R_2 geteilt. Zu jedem (endlichen) Punkt von R_1 gehöre eine Umgebung, in der $|f(z)| \leq C_1$ ist. Ebenso gehöre zu jedem Punkte von R_2 einschließlich $z = \infty$ eine Umgebung, in der $|f(z)| \leq C_2$ ist. Außerdem dem sei $C_1 \leq C_2$. Dann ist, wie bewiesen werden soll, in dem aus der Fig. 19 ersichtlichen schraffierten Winkelraum $0 < \lambda \pi \leq \arg(z - a) \leq \pi$ überall

$$|f(z)| \leq C_1^{1-\lambda} \cdot C_2^{\lambda}.$$

Nach unseren Voraussetzungen ist wegen (1)

$$|f(z)| \leq C_1^{P_1(z, 1)} \cdot C_2^{P_2(z, 1)}.$$

Dabei ist $P_1(z, 1)$ die Potentialfunktion, welche auf R_1 Eins ist und auf R_2 verschwindet. Ebenso $P_2(z, 1)$ diejenige Potentialfunktion, welche auf R_1 verschwindet und auf R_2 Eins ist. Diese Potentialfunktionen aber kann man ohne weiteres explizite angeben. Sie sind, wie der Leser sofort verifizieren wird,

$$P_1 = \frac{1}{\pi} \Im \log(z - a) \quad \text{und} \quad P_2 = 1 - P_1,$$



also die Winkel, unter denen R_1 und R_2 von z aus erscheinen. Dann kann ich die gefundene Abschätzung so schreiben:

$$|f(z)| \leq C_1^{\lambda} \cdot C_2^{1-\lambda}$$

Nun berücksichtige ich noch die Annahme $C_1 \leq C_2$. Dann bedenke man, daß in dem Winkelraum der Fig. 19 $P_1 \geq 1$ ist. Daher gilt für alle z dieses Winkelraumes

$$|f(z)| \leq \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{P_1} C_2.$$

Und dafür kann man wieder

$$|f(z)| \leq \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{P_1} \cdot C_1.$$

schreiben, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

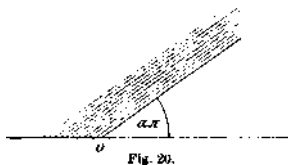
Eine Anwendung dieser Abschätzung ist durch den folgenden von Lindelöf entdeckten Satz gegeben: Wenn $f(z)$ in $\Re z > 0$ regulär ist, wenn in dieser Halbebene $|f(z)| < 1$ ist, wenn weiter bei Annäherung durch die negative reelle Achse, auf der in endlichen Punkten $f(z)$ noch regulär oder stetig sein möge,

$$(5) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

gilt, dann ist bei Annäherung durch den Winkelraum $0 < \alpha \leq \arg z \leq \pi$ der Fig. 20, wie auch das positive α gewählt sein mag, (5) gleichmäßig richtig.

Zum Beweise wähle man den Punkt a der Fig. 20 soweit links, daß links davon $|f(z)| \leq \varepsilon$ bleibt, wobei ε eine beliebige positive Zahl sei. Ferner wähle man den Winkel $\lambda\pi$ der Fig. 19 kleiner als $\alpha\%$ in Fig. 20. Im Winkelraum der Fig. 19 ist dann¹⁾ $|f(z)| \leq \varepsilon^\lambda$. Da dieser Winkelraum aber alle genügend nahe bei Unendlich gelegenen Punkte des Winkelraumes der Fig. 20 enthält, so gilt auch für diese Punkte unsere Abschätzung. Da man ε beliebig klein wählen kann und da α von ε nicht abhängt, sondern nur der Bedingung $\alpha > \lambda$ genügen muß, λ zwischen 0 und 1 aber beliebig gewählt werden kann, so ist damit unsere Behauptung bewiesen.

Da man z. B. jeden Winkelraum elementar auf eine Halbebene abbilden kann, so ergibt sich z. B. die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Lindelöf: Wenn $f(z)$ in einem Winkelraum beschränkt ist und bei Annäherung an seine Ecke (z. B. längs einer Geraden) einem endlichen Grenzwert zustrebt, so strebt $f(z)$ gleichmäßig gegen diesen Grenzwert in jedem inneren



Teilwinkelraum (s.g. Dreiecksstetigkeit). Konforme Abbildung führt so ersichtlich noch zu mancher ähnlichen Folgerung.

Die Sätze über Ränderzuordnung bei konformer Abbildung geben die Möglichkeit mannigfacher Folgerungen. Ich erwähne nur eine solche, nämlich den folgenden Satz von Lindelöf: Eine Funktion sei in einem von einer Jordankurve begrenzten Bereich regulär und beschränkt. In der Umgebung des Bandpunktes P sei sie stetig, und ihre Bandwerte mögen bei Annäherung an P Grenzwerten zustreben. Dann sind diese beiden Grenzwerte gleich und die Funktion in jeder genügend kleinen, dem Bereich oder seinem Rand angehörigen Umgebung von P beliebig wenig von diesem Grenzwert verschieden, so daß man sagen kann, sie strebe im Bereich gleichmäßig diesem Grenzwert zu. Einen Spezialfall dieses Satzes lernten wir schon auf S. 21 kennen.

6. Nevanlinnas Fassung eines Satzes von Phragmén - Lindelöf. Nun komme ich zu der letzten Anwendung der Jensen-Nevanlinnaschen Formel, die ich in diesem Paragraphen besprechen will. Es soll sich dabei darum handeln, ein Kriterium dafür zu finden, daß eine am Rande im allgemeinen beschränkte Funktion im Bereich innern beschränkt ist. „Im allgemeinen“ heißt: Zu jedem Randpunkt mit einigen Ausnahmen gehört eine Umgebung, in der $f(z)$ unter ein und derselben Schranke liegt. Bei den Ausnahmepunkten des Randes ist Beschränktheit nicht bekannt. Vielmehr werden da gewisse geringere Voraussetzungen gemacht, aus denen aber doch die Beschränktheit erschlossen werden kann.

Ich werde insbesondere den folgenden von Phragmén Lindelöf und I. und F. Nevanlinna herrührenden Satz beweisen:

Zu jedem endlichen Randpunkt von $\Re z > 0$ und zu jedem positiven ϵ gehöre eine Umgebung, in der $|f(z)| \leq 1 + \epsilon$ ist. Dann ist entweder in der ganzen Halbebene $|f(z)| \leq 1$ oder es gibt eine positive Konstante η , so daß für alle hinreichend großen r

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi d\varphi > \eta r$$

ist. Dabei ist die Funktion $\log |f(re^{i\varphi})|$ so erklärt: Sie ist gleich $\log |f(re^{i\varphi})|$ überall da, wo $\log |f(re^{i\varphi})| \geq 0$ ist; sie ist gleich Null überall da, wo $\log |f(re^{i\varphi})| \leq 0$ ist.

7. Folgerungen. 1. Bevor ich zum Beweise übergehe, will ich durch ein Beispiel die Bedeutung des Satzes beleuchten. In dem zweiten Falle unseres Satzes ist in $\Re z > 0$ für alle genügend großen r

$$(6) \quad M(r) > e^{\eta \cdot \frac{1}{\pi} \cdot r}.$$

Denn es ist

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi d\varphi$$

und

$$\log M(r) > \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Das heißt, für alle großen r ist

$$\log M(r) > \eta \cdot \frac{1}{\pi} \cdot r, \quad \text{d.h.} \quad M(r) > e^{\frac{\eta}{\pi} r}.$$

Daraus zieht man folgenden Schluß: Gehört zu jedem endlichen Randpunkt von $\Re s > 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung, in der $|f(s)| \leq 1 + \varepsilon$ ist, und gibt es zu jedem positiven s ein beliebig großes $r(s)$, so daß in der Halbebene $\Re s > 0$ auf dem Halbkreis vom Radius $r(s)$ $M(r) < e^{\varepsilon r}$ ist, so ist in der ganzen Halbebene $|f(s)| \leq 1$. Statt der Voraussetzung „Beschränktheit in der Umgebung von “ genügt also diese viel geringere, um auf die Beschränktheit von $f(s)$ schließen zu können.¹⁾

1) Noch sei bemerkt, daß man eine weniger weitgehende Fassung dieser Folgerung auf wesentlich kürzerem Wege beweisen kann. Diese Fassung ist folgende. Wieder sei in den endlichen Randpunkten $|f(s)| \leq 1 + \varepsilon$. Ferner gebe es zu jedem positiven ε ein $r(s)$, so daß für alle $r \geq r(s)$ stets

$$|f(s)| < e^{\varepsilon r}$$

ist. Dann ist in der Halbebene überall $|f(s)| < 1$. Zum Beweise betrachtet man die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{f(s)}{e^{\sigma z}}, \quad \sigma > 0.$$

Da in den endlichen Randpunkten der Halbebene $\Re s > 0$ der absolute Betrag von $e^{\sigma z}$ Eins ist, so gibt es nach wie vor zu jedem endlichen Randpunkt und zu jedem positiven ε eine Umgebung in der $|\varphi(s)| \leq 1 + \varepsilon$ ist. Für $s < \sigma$ und $r > r(s)$ und reelle z ist

$$|\varphi(z)| < e^{(\sigma - \varepsilon)z} < 1.$$

Durch die reelle Achse wird $\Re s > 0$ in zwei Quadranten zerlegt. Betrachten wir z. B. den oberen Quadranten, in dem $\Im s > 0$ ist. Zu jedem Punkt der imaginären Achse und zu jedem $r > 0$ gehört dann eine Umgebung, in der $|\varphi(z)| < 1 + \varepsilon$ ist. Längs der reellen Achse konvergiert $\varphi(z)$ gegen Null, wenn z nach Unendlich strebt. Daher gibt es eine positive Zahl C , die vielleicht auch größer als Eins ist, derart, daß zu jedem Randpunkt des Quadranten eine Umgebung gehört, in der $|\varphi(z)| < C + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) ist. Es ist $C = 1$, wenn die obere Grenze von $|\varphi(z)|$ längs der reellen Achse nicht größer als Eins ist. Ist sie aber größer als Eins, so besitzt $|\varphi(z)|$ in einem Punkte derselben ein Maximum, und für C kann dies Maximum gewählt werden. Für genügend große z ist außerdem im Quadranten

$$|\varphi(z)| < e^{(\sigma + \varepsilon)z},$$

2. Durch die Abbildung $z = z'$ geht die Halbebene in einen Winkelraum der Öffnung $\sigma\pi$ über. Aus unserem Satze gewinnt man durch diese Abbildung einen entsprechenden für diesen Winkelraum. Er lautet:

Wenn zu jedem endlichen Randpunkte eines Winkelraumes der Öffnung $\sigma\pi$ und zu jedem positiven ε eine Umgebung gehört, in der $|f(z)| \leq 1 + \varepsilon$

so daß z. B.

$$e^{-|z|^\frac{1}{\sigma}} \cdot \varphi(z)$$

im Quadranten gleichmäßig nach Null strebt, für $\sigma \rightarrow \infty$. Für die Funktion

$$\psi_\mu(z) = e^{-(\sqrt{\sigma}z)^\frac{\mu}{\sigma}} \cdot \varphi(z) = \varphi(z) \cdot e^{-\mu r^\frac{1}{\sigma}} e^{\frac{\mu}{\sigma}(\varphi - \frac{\pi}{\sigma})}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{\sigma}, \quad \mu > 0$$

ist dann im Quadranten

$$(1) \quad |\psi_\mu(z)| \leq |\varphi(z)| e^{-\mu r^\frac{1}{\sigma}},$$

und zu jedem Randpunkt gehört eine Umgebung, in der

$$|\psi_\mu(z)| < C + \varepsilon.$$

Zum unendlich fernen Punkt gehört nach (1) außerdem eine Umgebung, in der $|\psi_\mu(z)| < C + \varepsilon$. Daher ist im ganzen Quadranten

$$|\psi_\mu(z)| < C + \varepsilon,$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist im ganzen Quadranten

$$|\psi_\mu(z)| < C.$$

Daraus folgt für den ganzen Quadranten

$$|\varphi(z)| < C e^{\mu(\sqrt{\sigma}z)^\frac{1}{\sigma}}$$

Da dies für jedes $\mu > 0$ gilt, so ist im ganzen Quadranten

$$|\varphi(z)| \leq C.$$

Im anderen Quadranten der Halbebene $\Re z > 0$ schließt man ganz ähnlich, und daher ist in der ganzen Halbebene

$$|\varphi(z)| \leq C.$$

Daraus folgt aber weiter, daß $C = 1$ sein muß. Denn sonst wäre $\varphi(z)$ eine Konstante, da sein absoluter Betrag in einem inneren Punkte der Halbebene seiner oberen Grenze C gleich wäre. Diese Konstante hätte einen Betrag größer als Eins, und das widerspricht der Tatsache, daß zu jedem Randpunkt der Halbebene eine Umgebung gehört, in der $|\varphi(z)| < 1 + \varepsilon$ ist, wie auch $\varepsilon > 0$ gewählt sein mag. Daher ist in der ganzen Halbebene

$$|f(z)| \leq |e^{\sigma z}|.$$

Da wieaer $\sigma > 0$ beliebig gewählt werden kann, so ist in der ganzen Halbebene

$$|f(z)| \leq 1.$$

Dieser Satz von Phragme'n-Lindelöf hat den Anstoß zu den ganzen Untersuchungen gegeben, die durch den Nevanlinnaschen Beweis der Phragme'n-Lindelöfschen Vermutung (6) zu einem gewissen Abschluß kam. Man kann den eben bewiesenen Satz auch auf Winkelräume übertragen. Vgl. auch S. 23.

ist, so ist entweder im ganzen Winkelraum $|f(z)| \leq 1$, oder es gibt eine positive Zahl n , so daß für alle hinreichend großen r im Winkelraum

$$M(r) > e^{nr^{\frac{1}{n}}}$$
 ist.

Daraus ziehen wir die Folgerung: Wenn am Bunde eines Winkelraumes der Öffnung $\sigma\pi$ im Endlichen $|f(z)| \leq 1 + \varepsilon$ ist und wenn zu jedem positiven ε ein beliebig großes $r(\varepsilon)$ gehört, so daß im Winkelraum

$$|f(z)| < e^{r^{\frac{1}{n}}}, \quad |z| = r(\varepsilon)$$

ist, so ist im ganzen Winkelraum $|f(z)| \leq 1$.

8. Beweis des Satzes von Phragmén-Lindelöf. Wir wenden die Jensen-Nevanlinnasche Formel zunächst auf das aus Fig. 21 ersichtliche Kreis-segment K vom Radius ρ um $z = 0$ als Mittelpunkt an. Die Formel (1) S. 124 liefert wieder die Abschätzung

$$(7) \quad \log^+ |f(z)| \leq P(K; z; \log^+ |f(z)|) \leq P(K; z; \log^+ |f(z)|).$$

Wir zerlegen den Rand in einen geradlinigen Teil g und einen krummen k und setzen dementsprechend am Rande

$$\log^+ |f(z)| = r_1 + r_2,$$

$$\text{wo} \quad r_1 = \log^+ |f(z)| \quad \begin{array}{l} \text{auf } g \\ \text{auf } k \end{array}$$

$$\text{und} \quad r_2 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{auf } g \\ \text{auf } k \end{array}$$

$$= \log^+ |f(z)| \quad \text{auf } k$$

Dann wird

$$\log |f(z)| \leq P(K; z; r_1) + P(K; z; r_2).$$

Ich betrachte zuerst $P(K; z; r_1)$.

Legen wir die geradlinige Begrenzung bei festem ρ hinreichend nahe an die imaginäre Achse, so ist darauf $0 \leq \log^+ |f(z)| \leq \varepsilon$, wie auch $\varepsilon > 0$ vorgegeben sein mag. So erkennt man, daß die angegebene Abschätzung auch richtig bleiben muß, wenn man $P(K; z; r_1)$ durch Null ersetzt. So kommen wir zu der folgenden Abschätzung

$$\log |f(z)| \leq P(K; z; r_2).$$

Wir konstruieren nun dies P mit Hilfe der S. 58 gegebenen Greeuschen Formel. Nach S. 35 ist

$$\varphi(\xi; z) = \frac{\xi - z}{\xi^2 - \bar{z}z} \cdot \frac{\rho^2 + \xi z}{\xi + \bar{z}}$$

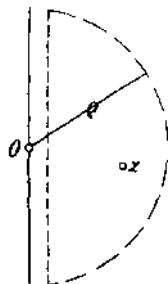


Fig. 21.

iejenige Funktion, welche den Halbkreis schlicht auf den Einheitskreis abbildet und dabei $\xi = z$ in den Nullpunkt überführt. Also ist

$$-\log \left| \frac{\xi - z}{\xi^2 - \bar{z}\xi} \cdot \frac{\bar{\xi} + \bar{z}}{\xi + \bar{z}} \right|$$

die gewünschte Greensche Funktion. Die Berechnung von $\frac{\partial g}{\partial n}$ liefert für

$$\xi = \rho e^{i\vartheta} \quad \text{und} \quad z = r e^{i\varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial n} &= \frac{4r(\rho^2 - r^2) \cos \vartheta \cos \varphi}{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\vartheta - \varphi))(\rho^2 + r^2 + 2\rho r \cos(\vartheta + \varphi))} \\ &= 4r \cos \varphi \cdot \frac{\cos \vartheta}{\rho^2} (1 + O(1)). \end{aligned}$$

Oabei ist $O(1)$ eine Zahl, die für $\rho \rightarrow \infty$ gleichmäßig in ϑ und φ nach Null strebt. Also ist

$$\log |f(z)| \leq \frac{2r \cos \varphi}{\pi} \frac{(1 + O(1))}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho e^{i\vartheta})| \cos \vartheta d\vartheta.$$

Es gibt es somit kein n , so daß für alle hinreichend großen ρ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho e^{i\vartheta})| \cos \vartheta d\vartheta > \eta \rho$$

st, so ist

$$\liminf_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho e^{i\vartheta})| \cos \vartheta d\vartheta = 0.$$

Also

$$|f(z)| \leq 1.$$

Unser Satz ist also bewiesen.

Die benutzte Beweismethode legt gewisse Verallgemeinerungen nahe, auf die ich noch kurz eingehen möchte. Ich gehe zu der Abschätzung

$$\log |f(z)| \leq P(K; z; \log |f(z)|)$$

für das Kreissegment der Fig. 21 zurück. Betrachte ich hier von vornherein die geradlinige Begrenzung und ersetze nur für diese, nicht also auf dem Kreisbogen

$$\log |f(z)| \quad \text{durch} \quad \log^+ |f(z)|,$$

so bleibt die Abschätzung erst recht richtig. Ich lasse wieder die gerad-

$$(8) \quad \log |f(z)| \leq \frac{2r \cos \varphi}{\pi} \left(1 + \frac{0(1)}{r}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho e^{i\vartheta})| \cos \vartheta d\vartheta \\ + \frac{2r \cos \varphi}{\pi} \left(1 + \frac{0(1)}{r}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho e^{i\vartheta})| \cos \vartheta d\vartheta,$$

wo $\log |f(\rho e^{i\vartheta})| = \log |f(\rho e^{i\vartheta})|$, wenn $|f| \leq 1$, und $= 0$, wenn $|f| \geq 1$.

Nimmt man nun an, daß

$$\liminf_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho e^{i\vartheta})| \cos \vartheta d\vartheta \leq k$$

ist, so folgt $|f(z)| \leq e^{\frac{2kr \cos \varphi}{\pi}}$.

Daß diese Schranke genau ist, lehrt die Funktion

$$e^{\frac{2kz}{\pi}}.$$

Nimmt man aber an, daß in der ganzen Halbebene $|f(z)| \leq 1$ ist, und daß

$$\liminf_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(\rho e^{i\vartheta})| \cos \vartheta d\vartheta \leq -k < 0$$

ist, so fällt in der allgemeinen Formel (10) rechts das erste Glied weg, und man erhält

$$|f(z)| \leq e^{-\frac{2kr \cos \varphi}{\pi}},$$

eine Schranke, die von

$$e^{-\frac{2kz}{\pi}}$$

erreicht wird. Für $k =$ ist $f(z) = 0$.

Hieraus kann man übrigens auch das Juliasche Lemma von S. 112 wiedergewinnen.

9. Der Satz von Milloux. $f(z)$ sei in $|z| < 1$ regulär und es sei $|f(z)| \leq 1$. $z = 0$ sei mit der Peripherie des Einheitskreises durch eine Jordankurve $\mathfrak{C}$ verbunden. Auf ihr sei $|f(z)| \leq m < 1$. Wendet man den Satz von Ostrowski-Neumanlinna von S. 124 auf den von $|z| = 1$ und $\mathfrak{C}$ begrenzten Teilbereich

des Einheitskreises an, so erkennt man, daß es eine Zahl $0 < \lambda(\mathfrak{L}, z) < 1$ gibt, so daß

$$|f(z)| \leq m^{1-\lambda}.$$

Nach der Herleitung des Satzes ist dabei $1 - X$ der Wert, den im Punkte s diejenige Potentialfunktion annimmt, die auf $\mathfrak{L}$ den Wert 1, auf $|z| = 1$ den Wert 0 hat. Ist insbesondere $\mathfrak{L}$ der Radius von $z = 0$ nach $z = 1$, so ist diese Potentialfunktion

$$1 - \frac{\Im \log \left(\frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \right)^2}{\pi}.$$

Man nehme dabei den Zweig der $\sqrt{z}$, der für $z = re^{i\varphi}$ durch $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) erklärt ist, und nehme den Zweig des Logarithmus, der für positive Werte des Numerus reell ist. Man erkennt dies, wenn man beachtet, daß $t = \left(\frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \right)^2$ den von 0 nach 1 radial aufgeschlitzten $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Im(t) > 0$ so abbildet, daß $0 < z < 1$ in $t > 0$ übergeht. Wegen $m < 1$ bedürfen wir einer unteren Schranke von $1 - \lambda$ und dazu einer oberen Schranke für den imaginären Teil des Logarithmus. Dieser ist aber

$$2 \Im \log \left(\frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \right) = 2 \arg \left(\frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \right).$$

Kür $|z| < \varrho$ aber ist dies Argument nicht größer, als der in Fig. 22 angegebene Winkel ϑ .

Denn bei der Abbildung durch z geht der längs $0 < z < 1$ aufgeschlitzte Einheitskreis in den Halbkreis der Fig. 22 über, um dann durch

$\frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}$ in den Quadranten der Fig. 23 überzugehen. Dabei geht $|z| < \varrho$ in den Halbkreis der Fig. 23 über. Der Winkel ϑ aber ist eine obere Schranke für $\arg \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}$, solange $|z| < \varrho$ ist. Die

Gerade g der Fig. 23 geht nämlich aus dem -1 mit -1 verbindenden Kreisbogen der Fig. 22 hervor.

Nun ist

$$\sin \vartheta = \frac{1}{r},$$

wenn r der Radius des Kreises ist, der in Fig. 22 die Punkte -1 und -1 verbindet. Es ist aber

$$r^2 - (r - \sqrt{\varrho})^2 - 1 = 0.$$

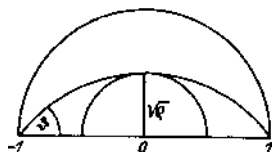


Fig. 22.

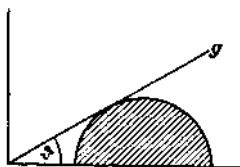


Fig. 23.

Also

$$\varphi = \frac{1 + \varrho}{2 \sqrt{\varrho}}.$$

Also

$$\sin \vartheta = \frac{2 \sqrt{\varrho}}{1 + \varrho}.$$

Insbesondere wird für $\varrho = 3 - \sqrt{8}$, $\sin \vartheta = \frac{1}{2}$. Also $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

Also ist $|f(z)| \leq m^{\frac{1}{2}}$ in $|z| \leq 3 - \sqrt{8}$.

Also ist erst recht in $|z| \leq 3 - \sqrt{8}$

$$|f(z)| \leq m^{\frac{1}{2}(1+|z|)}$$

Wendet man dann den Dreieckesatz auf $|z| = 3 - \sqrt{8}$, $|z| = \varrho > 3 - \sqrt{8}$, und $|z| = 1$ an, so findet man, daß auch für $|z| > \frac{1}{2}$

$$|f(z)| \leq m^{\frac{1}{2}(1+|z|)} \text{ gilt.}$$

Hierbei war vorausgesetzt, daß $|f(z)| \leq 1$ in $|z| < 1$ und $|f(z)| < m$ auf $0 \leq z < 1$.

Für eine beliebige 0 mit $|z| = 1$ verbindende Kurve hätten wir durch eine analoge Schlußweise — freilich ohne dabei die erforderliche Potentialfunktion explizit hinschreiben zu können, erschlossen, daß es ein $p > 0$ gibt, derart, daß

$$|f(z)| < m^{p(1+|z|)}$$

ist. Dies p hängt dann aber von der Wahl der Jordankurve ab. Es ist nun eine merkwürdige Entdeckung von Milloux, daß man ein und dasselbe p für alle Jordankurven nehmen kann. Mit Pólya (Math. Ztschr., Bd. 29 (1929) S. 633) kann man dies vermitteltst eines schon früher (S. 21) verwendeten Painlevéschen Verfahrens so einsehen. Man nehme eine Jordankurve $\mathfrak{U}$, die $z = 0$ mit $z = 1$ verbindet.

Wenn $f(z) < m$ auf $\mathfrak{U}$, so ist $\bar{f}(z) < m$ auf $\bar{\mathfrak{U}}$, dem Spiegelbild von $\mathfrak{U}$ an der reellen Achse. Da auch $|\bar{f}(z)| < 1$ in $|z| < 1$, so ist dann

$$|f(z) \bar{f}(z)| < m$$

sowohl auf $\mathfrak{U}$ wie auf $\bar{\mathfrak{U}}$. Jeder Punkt der reellen Achse liegt nun entweder auf $\mathfrak{U}$ oder in einem von $\mathfrak{U}$ und $\bar{\mathfrak{U}}$ begrenzten Bereich. Auf der reellen Achse also ist auch

$$f(z) \cdot \bar{f}(z) = |f(z)|^2 < m.$$

Also

$$|f(z)| < \sqrt{m}.$$

Also ist nach dem schon bewiesenen

$$|f(z)| < m^{\frac{1}{2}(1+|z|)}$$

in $|z| < 1$. Das ist nun der Milloux'sche Satz:

Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und ist $|f(z)| < 1$ in $|z| < 1$ sowie $f(z) \leq m < 1$ auf einer Jordankurve $\mathfrak{L}$, die $z = 0$ mit $z = 1$ verbindet¹⁾, so gibt es ein von $\mathfrak{L}$, z und $f(z)$ unabhängiges $p > 0$, so daß

$$|f(z)| < m^{p(1-|z|)}$$

in $|z| < 1$. Man kann $p = \frac{1}{4}$ nehmen.

An diesen Satz hat sich eine erhebliche Literatur angeschlossen, seitdem Hoheisel nützliche Anwendungen des Satzes auf die Zetafunktion machte. Milloux selbst hat seinen eben angegebenen Satz (Liouv-Journal (9) 3 (1924)) kürzlich (Comptes rendus 189 (1929)) in merkwürdigerweise verallgemeinert, indem die Voraussetzung genügt, daß $f(z) < m$ auf einer Punktmenge, die mit jedem Kreis $|z| = \varrho$, $0 \leq \varrho \leq 1$ einen Punkt gemein hat. Landau hat (Gött. Nachr. 1930) Schranken für das größte p angegeben, für das auch der allgemeine Miliouxsche Satz noch gilt. Er fand

$$2(\sqrt{2} + 1) \log(\sqrt{2} + 1) < p < \frac{1}{2\sqrt{2} \log(\sqrt{2} + 1)}$$

Man vergleiche auch die an den Millouxschen Satz anschließenden Untersuchungen von Fenchel, Gött. Nachr. 1930.

10. Erhard Schmidts Beweis des Millouxschen Satzes. In einem Vortrag vor der preußischen Akademie der Wissenschaften hat E. Schmidt einen Beweis des Millouxschen Satzes mitgeteilt, aber bisher nicht veröffentlicht.²⁾ Wegen seiner überraschenden Einfachheit sei noch sein Grundgedanke mitgeteilt. Bekanntlich ist $u = \log |f(z)|$ eine Potentialfunktion, wenn $f(z)$ analytisch ist. An den Nullstellen von $f(z)$ wird sie negativ unendlich. In unserem Falle ist außerdem $\log |f(z)| = 0$ auf $|z| = 1$ und $\log |f(z)| < \log m$ auf der Jordankurve. Man betrachte nun die Riemannsche Fläche von $\log z$ und ziehe auf ihr diejenige reguläre Potentialfunktion v heran, welche auf einem Exemplar der Peripherie von $|z| = 1$ Null sei, auf den anderen Exemplaren aber den Wert $\log m$ besitze. Man denke sich den gegebenen Bereich längs der Jordankurve aufgeschlitzt und auf dem Blatt der Riemannschen Fläche gelegen*, dem die Randwerte Null zugehören. Auf den beiden Ufern der Jordankurve nimmt dann v Werte an, die keinesfalls kleiner sind, also $\log m$. Denn im Bereichinneren liegt v zwischen Maximum und Minimum der Randwerte, also zwischen 0 und $\log m$. Da aber u am Rand des aufgeschlitzten Bereiches keine größeren Werte als u annimmt, so ist im ganzen Bereich $v = u$.

1) Wir setzten vorhin voraus, daß $\mathfrak{L}$ $z = 0$ mit $z = 1$ verbindet. Ein beliebiges $\mathfrak{L}$ kann man stets durch Drehung in ein solches überführen.

2) Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1929 S. 244.

Da u von der Wahl der Jordankurve nicht abhängt, so liegt darin ein Beweis des Millouxschen Satzes.

11. Bemerkung. Herr Carlson hat das folgende schöne Ergebnis gewonnen. Wenn $f(z)$ in einem Winkelraum $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$, $\alpha \geq \frac{1}{2}\pi$, $z = re^{i\varphi}$ regulär ist, der Abschätzung

$$|f(z)| < Ae^{k|z|}, \quad k < \pi, \quad A > 0$$

in diesem Winkelraum genügt, wenn $f(z) = 0$ für $z = 1, 2, 3 \dots$, dann ist $f(z) \equiv 0$. (Vgl. Literaturangaben in der Encyclopädie II, 3, S. 499.)

§ 6. Das Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen.

1. Fragestellung. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung ist eine analytische Funktion durch jedes ihrer Funktionselemente bestimmt. Wenn somit ein gegebenes Funktionselement bei Fortsetzung längs beliebigen einem gegebenen Bereich angehörigen Wegen nur Funktionswerte liefern soll, deren Betrag unter einer gegebenen Schranke liegt, so muß sich dies an den Koeffizienten des gegebenen Funktionselementes erkennen lassen. So entsteht insbesondere die Aufgabe, festzustellen, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, daß

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion ist, für die daselbst $|f(z)| \leq 1$ gilt. Dies nenne ich das Koeffizientenproblem der beschränkten Potenzreihen. Im Prinzip ist damit auch die allgemeinere eben für einen beliebigen Bereich gestellte Aufgabe für den Fall gelöst, daß derselbe einfach zusammenhängend ist. Denn dann kann man ihn umkehrbar eindeutig und analytisch auf den Einheitskreis abbilden, so daß der Mittelpunkt des gegebenen Funktionselementes in den Mittelpunkt des Einheitskreises übergeht. Man braucht also nur zu wissen, wie durch diese konforme Abbildung die Koeffizienten eines Funktionselementes beeinflußt werden. Das ist aber bei Kenntnis der Abbildungsfunktion auch bekannt.

Im Prinzip ist mit unserer Frage über die im Einheitskreis beschränkten Funktionen auch die allgemeinere beantwortet, wie man an den Koeffizienten eines Funktionselementes erkennt, ob es im Einheitskreis nur Werte aus einem gegebenen einfach zusammenhängenden Bereiche annimmt. Jetzt führt eine Abbildung in der Ebene, in welcher man sich die Funktionswerte $f(z)$ deutet, die allgemeinere Aufgabe auf die spezielle zurück. Historisch ist zuerst der Fall behandelt worden, daß eine im Einheitskreis reguläre Funktion nur Werte mit positivem Realteil annimmt. Dies Problem hat Carathéodory in den math. Annalen 64 gestellt und gelöst. Später hat

J. Schur gezeigt, daß das Problem in der hier gewählten Fassung bequemer behandelt werden kann. Er hat dieser Frage zwei Arbeiten im Cellerschen Journal, Bd. 147 und 148 gewidmet. Auf diese werde auch wegen einer detaillierten Behandlung der Frage verwiesen. Hier begnügen wir uns damit, die Grundzüge der Lösung des Koeffizientenproblems auseinanderzusetzen.

2. Der Koeffizient c_0 . Notwendige Bedingungen für die Koeffizienten einer beschränkten Potenzreihe¹⁾ enthält schon der Cauchysche Koeffizientensatz. Er lehrt ja, daß sämtliche Koeffizienten der Ungleichung

$$|c_n| \leq 1$$

genügen. Das ist aber keine hinreichende Bedingung. Denn auch

$$1 + z + z^2 + \dots$$

genügt dieser Bedingung, ohne beschränkt zu sein.

Immerhin kann man aber dem Koeffizientensatz die notwendigen und hinreichenden Bedingungen entnehmen, welchen das Absolutglied einer beschränkten Potenzreihe zu genügen hat.

$$|c_0| \leq 1$$

ist die einzige dem c_0 aufzuerlegende Bedingung. Zu jedem ihr genügenden c_0 gibt es im Einheitskreis beschränkte Potenzreihen, z. B. $f(z) \equiv c_0$. Im Falle $|c_0| = 1$ ist dies sogar die einzige Potenzreihe mit dem gegebenen Anfangskoeffizienten, wie wir von S. 147/148 des Bandes I wissen.

3. Der Koeffizient c_1 . Welches sind nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für c_1 bei gegebenem c_0 mit $|c_0| < 1$? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir mit Schur die Funktion

$$f_1(z) \equiv \frac{f(z) - c_0}{1 - \bar{c}_0 f(z)} \cdot \frac{1}{z}.$$

Sie ist in $|z| < 1$ regulär, weil der Nenner nur für $f(z) \equiv \frac{1}{\bar{c}_0}$ verschwinden kann, und weil im Einheitskreis $|f(z)| \leq 1$ ist. Es ist ja $\left| \frac{1}{\bar{c}_0} \right| > 1$. Ferner ist in $|z| < 1$ auch

$$|f_1(z)| \leq 1.$$

Denn durch $w = \frac{f - c_0}{1 - \bar{c}_0 f}$ wird $|f| < 1$ auf $|w| < 1$ abgebildet und durch die Division mit z wird, wie wir schon S. 2 beim Beweis des Schwarzsehen Lemmas gesehen haben, die obere Grenze des absoluten Betrages im Einheitskreis nicht vergrößert. Also ist auch der absolute Betrag des Ab-

1) So nennen wir fortan in diesem Paragraphen eine Potenzreihe, die eine im Einheitskreis reguläre Funktion darstellt, die dort nur Werte besitzt, deren Betrag die Eins nicht übersteigt.

solutglieds von $f_1(z)$ nicht größer als Eins. Grenzübergang $z \rightarrow 0$ liefert für dieses Absolutglied den Wert

$$\frac{c_1}{1 - c_0 c_0}.$$

Und somit finden wir für c_1 die notwendige Bedingung

$$\left| \frac{c_1}{1 - c_0 c_0} \right| \leq 1.$$

Die bisher gefundenen beiden Bedingungen sind auch die einzigen c_0 und c_1 aufzuerlegenden Bedingungen. Denn zu irgend zwei Zahlen c_0 und c_1 , die diesen beiden Bedingungen genügen, gehören immer Potenzreihen, die mit

$$c_0 + c_1 z + \dots$$

beginnen und die im Einheitskreis beschränkt sind. Um das einzusehen, genügt es

$$f_1(z) = \frac{c_1}{1 - c_0 c_0}$$

anzunehmen. Dazu gehört ein mit $c_0 + c_1 z$ beginnendes $f(z)$, das man aus der Gleichung

$$\frac{f(z) - c_0}{1 - c_0 f(z)} = \frac{1}{z} = \frac{c_1}{1 - c_0 c_0}$$

berechnet. Man findet

$$f(z) = \frac{\frac{c_1}{1 - c_0 c_0} + c_0}{1 + c_0 \frac{c_1}{1 - c_0 c_0} z},$$

und dies ist aus denselben Gründen wie vorhin in $|z| < 1$ regulär und hat dort einen Betrag, der Eins nicht übertrifft. Daß seine Potenzreihenentwicklung mit

$$c_0 + c_1 z + \dots$$

beginnt, übersieht man auch mit einem Blick. Für den Fall $\left| \frac{c_1}{1 - c_0 c_0} \right| = 1$ ist diese lineare Funktion wieder die einzige mit $c_0 + c_1 z + \dots$ beginnende beschränkte Potenzreihe, weil dann durch (1) das einzig mögliche $f_1(z)$ gegeben ist.

4. Der Schursche Algorithmus. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zur Lösung des Koeffizientenproblems. Um das einzusehen, betrachten wir die Funktionen

$$f_0(z) = f(z), \quad f_1(z), \quad \dots, \quad f_n(z), \quad \dots,$$

welche durch das rekurrente Verfahren

$$f_n(z) = \frac{f_{n-1}(z) - f_{n-1}(0)}{1 - \overline{f_{n-1}(0)} f_{n-1}(z)} \cdot \frac{1}{z}$$

definiert werden. Wir richten unser Augenmerk namentlich auf die Absolutglieder $f_n(0)$ dieser Funktionen. Es leuchtet sofort ein, daß für alle n

$$(2) \quad |f_n(0)| \leq 1$$

sein muß. Der Rekursionsprozeß erzeugt nämlich aus jeder beschränkten Potenzreihe $f_{n-1}(z)$ mit $|f_{n-1}(0)| < 1$ eine neue beschränkte Potenzreihe. Man erkennt dies aus der auch bei $f_1(z)$ verwendeten Schlußweise. Demnach sind die Absolutglieder aller mittels dieses Verfahrens aus einer beschränkten Funktion erzeugten Funktionen dem Betrag nach nicht größer als Eins. Ist aber $|f_{n-1}(0)| = 1$, so ist $f_n(z)$ durch den Rekursionsprozeß unbestimmt. Wir treffen darüber, so wie über die folgenden $f_{n+p}(z)$ keine Festsetzung, sondern benutzen im folgenden nur die aus der Rekursion sich ergebenden Funktionen.

5. Der Koeffizient c_1 . Um zu erkennen, daß in den so gewonnenen unendlichvielen Ungleichheitsbeziehungen (2) die volle Lösung des Koeffizientenproblems enthalten ist, müssen wir etwas näher darauf eingehen, wie diese Absolutglieder $f_n(0)$ mit den Koeffizienten c_v zusammenhängen.

$$\text{Setzt man} \quad f_{n-1}(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots, \quad |\alpha_0| < 1$$

$$\text{und} \quad f_n(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots,$$

$$\text{so ist} \quad f_n(z) = \frac{f_{n-1}(z) - \alpha_0}{1 - \bar{\alpha}_0 f_{n-1}(z)} \cdot \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad f_{n-1}(z) = \frac{zf_n(z) + \alpha_0}{1 + \bar{z} f_n(z) \cdot \bar{\alpha}_0}.$$

Wegen $|\alpha_0| < 1$ ist dann $f_n(z)$ in $|z| < 1$ regulär. Daraus ergibt sich, daß einerseits β_1 rational von $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_{v+1}, \bar{\alpha}_{v+1}$ abhängt, und daß andererseits

$$\alpha_v$$

rational von $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \beta_0, \bar{\beta}_0, \dots, \beta_{v-1}, \bar{\beta}_{v-1}$ abhängt. Kennt man also $\alpha_0, \dots, \alpha_v$, so sind $\beta_0, \dots, \beta_{v-1}$ eindeutig bestimmt, und kennt man $\alpha_0, \beta_0, \dots, \beta_{v-1}$, so sind $\alpha_0, \dots, \alpha_v$ eindeutig bestimmt.

Wenden wir dies auf unsere Absolutglieder an. Kennt man

$$f_0(0), f_1(0), \dots, f_n(0),$$

$$\text{so sind zunächst aus} \quad f_n(0) \quad \text{und} \quad f_{n-1}(0)$$

die beiden ersten Koeffizienten von $f_{n-1}(z)$ eindeutig und rational bestimmt. Aus diesen und aus $f_{n-1}(0)$ ergeben sich dann eindeutig und rational die drei ersten Koeffizienten von $f_{n-2}(z)$. Fortsetzung dieser Schlußweise läßt erkennen, daß durch

$$f_0(0), f_1(0), \dots, f_n(0)$$

die Koeffizienten $c_0, c_1 \dots c_n$ eindeutig und rational bestimmt sind. Im Falle

$$|f_n(0)| = 1$$

ist $f_n(x)$ konstant und daher sind in diesem Falle die *sämtlichen* Koeffizienten der vorausgehenden Funktionen eindeutig bestimmt.

Umgekehrt sind auch aus $c_0, \dots, c_n$

die $f_0(0), f_1(0), \dots, f_n(0),$

soweit das rekurrente Verfahren reicht, eindeutig und rational bestimmt. Denn zunächst sind durch

$$c_0 \dots c_n$$

die n ersten Koeffizienten von $f_1(x)$ eindeutig und rational bestimmt. Aus diesen ergeben sich wieder die $n - 1$ ersten Koeffizienten von $f_2(x)$ eindeutig und rational. Fortsetzung dieser Schlußweise läßt erkennen, daß aus

$$c_0, \dots, c_n$$

die $f_0(0) \dots f_n(0).$

eindeutig und rational bestimmt sind. Wendet man dies insbesondere auf ein beschränktes $f_0(x)$ an, so bricht die Rekursion nur ab, wenn ein

$$|f_n(0)| = 1$$

wird. Alle vorausgehenden $|f_v(0)|$ sind aber dann kleiner als Eins.

Somit ist also $f_n(0)$

eine rationale Funktion von $c_0, \bar{c}_0, \dots, c_n, \bar{c}_n.$

Ebenso ist c_n

eine rationale Funktion von

$$f_0(0), \bar{f}_0(0), \dots, f_n(0), \bar{f}_n(0).$$

6. Hinreichende Bedingungen. Als notwendige Bedingung für eine beschränkte Funktion hatten wir bereits $|f_n(0)| \leq 1$ für alle n gefunden. Nun zum Nachweis, daß diese Bedingung hinreichend ist. Ich gehe aus von einer Folge von Zahlen

$$f_0(0), f_1(0), \dots$$

Für alle n ist $|f_n(0)| \leq 1.$

Ist aber für ein $n = v$ $|f_v(0)| = 1,$

so bricht die Zahlenfolge mit dieser Nummer v ab. Zu einer solchen Zahlenfolge (3) gehört, nach den eben abgeschlossenen Darlegungen in

den der beiden Fälle eine eindeutig bestimmte unendliche Zahlenfolge

$$c_0, c_1, c_2, \dots$$

enn bricht die Folge der $f_n(0)$ nicht ab, so sind die c_v durch die vorhin klärten rationalen Funktionen für alle Nummern definiert. Bricht aber e Folge der $f_n(0)$ ab, so sind, wie wir bemerkten, wieder alle c_v eindeutig stimmt.

Mit diesen c_v als Koeffizienten bilde ich die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

id beweise, daß sie eine beschränkte Funktion darstellt. Zu dem Zwecke itrachte ich die Hilfsfunktionen $\varphi_n(z)$, welche sich aus unserem rekur-nten Verfahren ergeben, wenn man

$$f_n(z) \equiv f_n(0)$$

nimmt. Diese Hilfsfunktion $\varphi_n(z)$ hat dann eine Potenzreihenentwicklung, e mit

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

eginnt. Ihre Potenzreihe ist mit der zu untersuchenden identisch, wenn $f_n(0) = 1$ ist. Im anderen Falle hat sie wenigstens die aufgeschriebenen nfangsglieder mit ihr gemeinsam. Da aber jedenfalls $\varphi_n(z)$ eine be- hränkte Funktion ist, so gewinnen wir als erstes Ergebnis, daß für alle v , $|c_v| \leq 1$ ist. Daher ist die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

denfalls im Einheitskreis konvergent. Die durch sie dargestellte Funk- on $f(z)$ ist im Einheitskreis beschränkt. Denn da sowohl für $f(z)$ wie ir $\varphi_n(z)$ alle Koeffizienten Beträge nicht größer als Eins haben, so ergibt ch für die Differenz $f(z) - \varphi_n(z)$ die Abschätzung:

$$|f(z) - \varphi_n(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Daraus ergibt sich, daß in jedem abgeschlossenen inneren Teilbereich es Einheitskreises gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = f(z)$$

ilt. Denn für $|z| \leq r$ ist nach der eben gewonnenen Abschätzung

$$|f(z) - \varphi_n(z)| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

)a aber

$$|\varphi_n(z)| \leq 1$$

st in $|z| < 1$, so ist auch

$$|f(z)| \leq 1,$$

nd unser Beweis ist abgeschlossen.

us Folgende Satz: Wenn eine Potenzreihe nach demselben Verfahren gefunden wird, daß die Folge

eindeutig bestimmte rationale Funktion. Denn dann ist $f_n(z)$ konstant und das rekurrente Verfahren bestimmt $f(z)$ eindeutig als rationale Funktion. Man erkennt auch leicht, daß sie der Quotient zweier ganzen Funktionen vom Grade n ist. Diese Grade können auch nicht durch Kürzen geeigneter Linearfaktoren reduziert werden. Denn bei jedem durch die Rekursion auszuführenden Schritt liegen die Nullstellen und Pole von $f_v(z)$ spiegelbildlich am Einheitskreis, ohne auf seiner Peripherie zu liegen und zwar hat $f_v(z)$ immer nur Nullstellen im Inneren und nur Pole im Äußeren. Denn alle aus der Rekursion fließenden Funktionen sind im Einheitskreis beschränkt. Daraus folgt, daß $f(z)$ in dem Falle $|f_n(0)| = 1$ von der folgenden Form ist

$$f(z) \equiv \varepsilon \frac{z^n \cdot \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)}{P_n(z)} = \varepsilon \frac{\bar{d}_n + \bar{d}_{n-1}z + \dots + \bar{d}_0 z^n}{d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n},$$

wo man $\bar{d}_0 = 1$ annehmen darf. Es ist, nämlich

$$f_n(z) \equiv \varepsilon, \quad \text{wo} \quad |\varepsilon| = 1,$$

und das hat die Gestalt $f_n(z) = \varepsilon \frac{z^n \bar{P}_0\left(\frac{1}{z}\right)}{P_0(z)}$

Nehmen wir an, es sei bereits

$$\begin{aligned} f_v(z) &= \varepsilon \frac{z^{n-v} \bar{P}_{n-v}\left(\frac{1}{z}\right)}{P_{n-v}(z)}, \quad 0 < v \leq n \\ &= \varepsilon \frac{\bar{d}_{n-v} + \bar{d}_{n-v-1}z + \dots + z^{n-v}}{1 + d_1 z + \dots + d_{n-v} z^{n-v}} \end{aligned}$$

bewiesen. Dann wird

$$\begin{aligned} f_{v-1}(z) &= \frac{z f_v(z) + f_v(0)}{1 + \bar{f}_v(0) f_v(z) \cdot z} \\ &= \varepsilon \frac{z^{n-v+1} \bar{P}_{n-v}\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{d}_{n-v} P_{n-v}(z)}{P_{n-v}(z) + \bar{d}_{n-v} z^{n-v+1} \bar{P}_{n-v}\left(\frac{1}{z}\right)} \\ &= \varepsilon \frac{z^{n-v+1} \bar{P}_{n-v+1}\left(\frac{1}{z}\right)}{P_{n-v+1}(z)}. \end{aligned}$$

Vollständige Induktion führt daher zur angegebenen Gestalt von $f(z)$.

Hier ist $P_n(z)$ ein Polynom n^{ten} Grades, dessen sämtliche Nullstellen dem Äußeren des Einheitskreises angehören. Umgekehrt ist auch jede solche rationale Funktion eine n^{te} Schrankenfunktion. So sollen Funktionen heißen, für die $|f_n(0)| = 1$ ist. Für unser $f(z)$ wird nämlich

$$f_1(z) = \frac{z^n \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right) - d_n P_n(z)}{P_n(z) - d_n z^n \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \varepsilon \frac{z^{n-1} \bar{P}_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)}{P_{n-1}(z)}.$$

Und hier liegen nach dem Wesen der Rekursion wieder alle Nullstellen des Nenners im Äußeren des Einheitskreises. Setzt man also diesen Prozeß fort, so wird schließlich $f_n(z)$ eine Zahl vom Betrag Eins.

Man kann die hier als wichtig erkannten Funktionen $f_n(z)$ in Determinantenform darstellen. Ich verweise deswegen auf die genannten Arbeiten von Schur.

8. Bemerkungen. 1. Die explizite Lösung des Koeffizientenproblems lautet folgendermaßen:

$$c_0 + c_1 z + \dots$$

ist dann und nur dann eine beschränkte Potenzreihe, wenn die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & c_0 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ \bar{c}_0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_{n-1}, \bar{c}_{n-2} & \dots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

entweder alle positiv sind, oder doch von der ersten verschwindenden an alle verschwinden. Dieser letzte Fall tritt nur für die oben erwähnten rationalen Schrankenfunktionen ein.

2. Man betrachte diejenigen beschränkten Funktionen, deren Entwicklung mit

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$$

beginnt und stelle fest, daß die Werte, welche diese Funktionen in einer festen Stelle z_1 des Einheitskreises annehmen können, eine Kreisscheibe erfüllen. Um das einzusehen, betrachte man die Funktionen $f_n(z)$. Diese haben alle das gleiche Absolutglied. Nach der S. 106 gegebenen Verallgemeinerung des Schwarzsehen Lemmas erfüllen also die Werte, welche die $f_n(z)$ in z_1 annehmen können, eine Kreisscheibe. Daraus schließt man sofort, daß auch die Werte, welche die $f_{n-1}(z)$ in z_1 annehmen können, eine Kreisscheibe erfüllen. So weiterschließend erkennt man die Richtigkeit der Behauptung über $f(z)$. Der Leser möge das selbst genauer durchführen.

3. Deutet man die Koeffizienten $c_0, \dots, c_n \dots$ einer Potenzreihe als Koordinaten in einem unendlichvielfimensionalen Raum, so erfüllen die

Koeffizienten der beschränkten Potenzreihen einen konvexen Teil desselben. Damit ist gemeint, daß für alle $0 \leq t \leq 1$ mit $f(z)$ und $g(z)$ auch $tf + (1-t)g$ beschränkt ist. Denn man hat

$$|tf + (1-t)g| \leq t|f| + (1-t)|g| \leq t + (1-t) = 1.$$

Daraus folgt sofort, daß auch die Projektionen dieser Punktmenge im Raum von unendlichvielen Dimensionen auf einen Raum von endlich vielen Dimensionen konvex sind. Denn eine solche Projektion erhält man, wenn man die $c_0 \dots c_n$ als Koordinaten in einem $2n+2$ -dimensionalen Raum deutet.¹⁾ Die Projektion ist also der Raum derjenigen $c_0 \dots c_n$, die als Anfangskoeffizienten beschränkter Potenzreihen brauchbar sind. Dieser Raum ist nach den eben angestellten Überlegungen konvex. Denn sind $f_0 \dots f_n$ und $g_0 \dots g_n$ zwei Serien von Anfangskoeffizienten beschränkter Potenzreihen und $f(z)$ und $g(z)$ zwei zugehörige beschränkte Funktionen, so ist ja auch, wie wir eben sahen

$$tf + (1-t)g \quad (0 \leq t \leq 1)$$

beschränkt, und hat die Anfangskoeffizienten

$$tf_k + (1-t)g_k.$$

Das besagt aber die Konvexität. Diese Koeffizientenräume sind durch algebraische Flächen begrenzt. Denn jeder solche Raum ist durch endlich-viele unserer oben gewonnenen Ungleichheiten bestimmt, nämlich durch diejenigen derselben, in welche nur die Koordinaten des betreffenden Raumes eingehen. Ein Blick auf die oben angeführten Determinanten, die in die explizite Lösung des Koeffizientenproblemcs eingehen, lehrt, daß bei gegebenen $c_0 \dots c_{n-1}$ sich für die möglichen Werte von c_n eine Kreisscheibe ergibt, so daß also am Koeffizientenraum beliebig viele Kreisschnitte aufgezeigt werden können.

4. R. Nevanlinna hat in einer Arbeit über beschränkte analytische Funktionen, welche in der Festschrift für E. Lindelöf, Helsingfors 1930, erschienen ist, die Untersuchungen, denen dieser Paragraph galt, weitergeführt und insbesondere das folgende allgemeine Problem gelöst: Welches sind diejenigen in $|z| < 1$ beschränkten regulären Funktionen $f(z)$, $|f(z)| \leq 1$, welche an gegebenen Punkten $z_1, z_2, \dots$ gegebene Werte $w_1, w_2, \dots$ annehmen. Dieses Interpolationsproblem enthält natürlich das hier behandelte Koeffizientenproblem als Spezialfall.

1) Real- und Imaginärteile der Koeffizienten mögen cartesische Koordinaten sein.

§ 7. Der Satz von Fatou.¹⁾

1. Der Satz. $f(z)$ sei in $|z| < 1$ beschränkt, d. h. sein Betrag $|f(z)|$ unter einer festen Schranke M . Dann existieren bei radialer Annäherung an den Rand $|z| = 1$ die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi}), \quad (z = re^{i\varphi})$$

überall höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null. I. h. also diejenigen φ -Werte, für die der radiale Grenzwert nicht existiert, können in endlich oder unendlichviele Bogen des Einheitskreises von beliebig kleiner Gesamtlänge eingebettet werden. Dies ist der Satz von Fatou, den wir beweisen wollen. Wenn er auch wegen der darin vorkommenden unbestimmten Menge vom Maße Null einen etwas unbefriedigenden Eindruck macht, so werden wir doch bald in ihm ein sehr nützliches Hilfsmittel erkennen.

Man kann auch nicht erwarten, daß auf jedem Radius Grenzwerte existieren. Denn in den Funktionen, welche $|z| < 1$ schlicht auf beschränkte Bereiche abbilden, deren Grenze nicht eine Jordansche Kurve ist, kennen wir schon Beispiele von Funktionen, bei denen nicht auf jedem Radius Grenzwerte existieren (vgl. S. 17 ff.).

Der Satz wurde ursprünglich von Fatou, *Acta mathematica*, Bd. 30 bewiesen. Seinen Beweis hat Carathéodory auf eine sehr einfache Form gebracht (*Math. Annalen* 73). Diesem Beweis folgen wir in unserer Darstellung.

Er beruht auf einem Satze von Lebesgue, wonach eine reelle Funktion mit beschränkten Differenzenquotienten überall, höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, differenzierbar ist. Auf den Beweis dieses Satzes kann hier nicht eingegangen werden. Man vergleiche z. B. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen.

2. Vorbereitung zum Beweis. Zum Beweis ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit $f(0) = 0$ anzunehmen. Dann ist die hernach zu benutzende Funktion

$$F(\varrho, \vartheta) = \int_0^1 f(\varrho e^{i\vartheta}) d\vartheta = \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} f(z) dz$$

für $0 \leq \varrho < 1$ und beliebige reelle ϑ nach dem Cauchysehen Integralsatz eindeutig. Namentlich ist also

$$(1) \quad F(\varrho, \vartheta + \pi) = F(\varrho, \vartheta - \pi).$$

1) In diesem und dem folgenden Paragraphen wird etwas mehr als sonst aus der Theorie der reellen Funktionen benutzt. Der Leser mag sich über die herangezogenen Sätze in Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, oder in Kamke, Das Lebesguesche Integral, orientieren.

Ferner ist $\left| \frac{f(z)}{iz} \right| < M$, nach dem Schwarzsehen Lemma. Daraus schließt man sofort, daß

$$|F(\varrho + \Delta\varrho, \vartheta) - F(\varrho, \vartheta)| \leq 2M\Delta\varrho.$$

Denn wegen der Willkür in der Wahl des Integrationsweges ist diese Differenz gleich der Summe zweier Integrale von $\frac{f(z)}{iz}$, welche über zwei leicht zu findende Radienstücke zu erstrecken sind. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1} F(\varrho, \vartheta) = F(\vartheta)$$

gleichmäßig in ϑ , so daß also auch $F(\vartheta)$ eine stetige Funktion ist. Weiter aber ist wieder nach der Definition von $F(\varrho, \vartheta)$

$$|F(\varrho, \vartheta + \Delta\vartheta) - F(\varrho, \vartheta)| \leq M|\Delta\vartheta|.$$

Geht man zur Grenze $\varrho \rightarrow 1$ über, so ist also auch

$$|F(\vartheta + \Delta\vartheta) - F(\vartheta)| \leq M|\Delta\vartheta|.$$

D. h. es ist

$$\left| \frac{F(\vartheta + \Delta\vartheta) - F(\vartheta)}{\Delta\vartheta} \right| \leq M.$$

$F(\vartheta)$ hat also beschränkte Differenzenquotienten, ist also stetig und, nach dem vorhin zitierten Satz von Lebesgue, fast überall differenzierbar.

3. Beweis. Wendet man nun das Poissonsche Integral auf Real- und Imaginärteil von $f(z)$ im Kreise $|z| \leq \varrho$ an, so findet man die Darstellung

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} f(\varrho e^{i\vartheta}) e^{i \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2\varrho r \cos(\vartheta - \vartheta_0) + r^2}} d\vartheta,$$

wobei $z = re^{i\varphi}$ gesetzt ist und ϑ_0 eine zunächst willkürliche Peripheriestelle festlegt. Partielle Integration liefert

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} F(\varrho, \vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - 2\varrho r \cos(\vartheta - \vartheta_0) + r^2} \right) d\vartheta.$$

Die ausintegrierten Bestandteile fallen ja wegen der Eindeutigkeit von $F(\varrho, \vartheta)$ nach (1) weg. Geht man hier zur Grenze $\varrho \rightarrow 1$ über, so hat man die Darstellung

$$(3) \quad f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} F(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - \vartheta_0) + r^2} \right) d\vartheta.$$

Setzt man in (2) $f(z) \equiv 1$, $\varphi = \vartheta_0$ und wiederholt die Überlegungen, die zu (3) führten, so findet man:

$$(4) \quad 1 = \frac{1-r}{1+r} - \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0-\pi}^{\vartheta_0+\pi} (\vartheta - \vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta - \vartheta_0) + r^2} \right) d\vartheta.$$

Also ist

$$(5) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0-\pi}^{\vartheta_0+\pi} (\vartheta - \vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta = \frac{2r}{1+r}.$$

Nun sei $\vartheta = \vartheta_0$ eine Stelle, an der $F(\vartheta)$ differenzierbar ist. Wir wollen zeigen, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta_0}) = F'(\vartheta_0)$$

ist. Ich betrachte also die Differenz $f(re^{i\vartheta_0}) - F'(\vartheta_0)$ und finde nach (3) und (4) für $\vartheta = \vartheta_0$

$$(6) \quad f(re^{i\vartheta_0}) - F'(\vartheta_0) = -F'(\vartheta_0) \frac{1}{1+r} - \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0-\pi}^{\vartheta_0+\pi} \{F(\vartheta) - (\vartheta - \vartheta_0) F'(\vartheta_0)\} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta.$$

Hier kann man nicht ohne weiteres den Grenzübergang $r \rightarrow 1$ unter dem Integralzeichen machen. Denn man findet

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) = -\frac{(1-r^2) \sin(\vartheta_0 - \vartheta)}{(1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2)^2}.$$

In der Umgebung von $r \approx 1$, $\vartheta = \vartheta_0$ ist dies aber nicht beschränkt. Daher zerlegen wir mit Hilfe einer positiven Zahl λ ($0 < \lambda < \pi$) das Integral aus (6) in zwei Bestandteile

$$H(r, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0-\lambda}^{\vartheta_0+\lambda} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta,$$

$$I(r, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0-\pi}^{\vartheta_0-\lambda} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0+\lambda}^{\vartheta_0+\pi} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta.$$

$H(r, \lambda)$ wird nun kurz gesprochen deshalb klein, weil für kleine $\vartheta = \vartheta_0$ die Differenz $F(\vartheta) - F'(\vartheta_0) - (\vartheta - \vartheta_0) F'(\vartheta_0)$ klein wird und wir λ klein wählen können. Nachdem so über λ verfügt ist, wird das übrig« dadurch klein gemacht, daß man r nahe an 1 wählt. Wir schreiten zur Durchführung dieser „Grundgedanken“.

Zunächst können wir unter H und I auch

$$F(\vartheta) - F'(\vartheta_0) - (\vartheta - \vartheta_0) F'(\vartheta_0) \quad \text{statt} \quad F(\vartheta) - (\vartheta - \vartheta_0) F'(\vartheta_0)$$

schreiben. Denn dieser Zusatz von $F'(\vartheta_0)$ ändert die rechte Seite unserer Darstellung von $f(re^{i\vartheta_0}) - F'(\vartheta_0)$ um

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0-\pi}^{\vartheta_0+\pi} F'(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta$$

und das ist Null. Also bringen wir in H und I diese Änderung an. Da aber nun $F(\vartheta)$ bei $\vartheta = \vartheta_0$ differenzierbar ist, so strebt

$$\frac{F(\vartheta) - F(\vartheta_0)}{\vartheta - \vartheta_0} - F'(\vartheta_0) = \eta(\vartheta)$$

mit $\vartheta - \vartheta_0$ gegen Null. Für $|\vartheta - \vartheta_0| \leq \lambda$ ist also $|\eta(\vartheta)| < H(\lambda)$ und es gilt $\lim_{\lambda \rightarrow 0} H(\lambda) = 0$

$\lambda \rightarrow 0$

Also haben wir

$$H(r, \lambda) = + \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \lambda}^{\vartheta_0 + \lambda} (\vartheta - \vartheta_0) \eta(\vartheta) \frac{(1-r^2) \sin(\vartheta_0 - \vartheta)}{(1 - 2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2)^{\frac{3}{2}}} d\vartheta.$$

Nun ist aber $(\vartheta - \vartheta_0) \frac{(1-r^2) \sin(\vartheta_0 - \vartheta)}{(1 - 2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2)^{\frac{3}{2}}}$

für $|\vartheta - \vartheta_0| < \pi$ von einerlei Vorzeichen, nämlich stets negativ. Daher finden wir

$$\begin{aligned} H(r, \lambda) &\leq -\frac{1}{2\pi} H(\lambda) \int_{\vartheta_0 - \lambda}^{\vartheta_0 + \lambda} (\vartheta - \vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta \\ &< -\frac{1}{2\pi} H(\lambda) \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} (\vartheta - \vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) d\vartheta = \frac{2H(\lambda)r}{1+r} \end{aligned}$$

wegen (5). Ich wähle nun λ so, daß $\frac{2H(\lambda)r}{1+r} < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, wo ε eine beliebig gegebene positive Zahl bedeutet. Dies λ halte ich fest und gehe zu $I(r, \lambda)$ über. Zunächst bemerke ich, daß

$$|F(\vartheta)| \leq 2\pi M$$

ist. Dies folgt aus

$$|F(\vartheta + \lambda\vartheta) - F(\vartheta)| \leq M \lambda\vartheta \quad \text{und} \quad F(0) = 0$$

sofort. Ferner ist für $|\vartheta - \vartheta_0| < \pi$

$$\left| \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta_0 - \vartheta) + r^2} \right) \right| < \frac{1-r^2}{(1 - 2r \cos \lambda + r^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1-r^2}{(1 - \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}}$$

wie man leicht nachrechnet. Also wird

$$I(r, \lambda) \leq \frac{\pi(4M + |F'(\vartheta_0)|)}{\sin^4 \lambda} (1-r^2) < \frac{2\pi(4M + |F'(\vartheta_0)|)}{\sin^4 \lambda} (1-r).$$

Also ist

$$|f(re^{i\vartheta_0}) - F'(\vartheta_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left\{ \frac{2\pi(4M + |F'(\vartheta_0)|)}{\sin^4 \lambda} + \frac{|F'(\vartheta_0)|}{1+r} \right\} (1-r).$$

Nun wähle ich r so nahe an Eins, daß

$$\left\{ \frac{2\pi(4M + |F'(\theta_0)|)}{\sin^2 \lambda} + \frac{|F'(\theta_0)|}{1+r} \right\} (1-r) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Also ist von diesem r an

$$|f(re^{i\theta_0}) - F'(\theta_0)| < \varepsilon.$$

Der Beweis ist damit vollendet. Denn es hat sich ergeben, daß der radiale Grenzwert überall existiert, wo $F(\theta)$ differenzierbar ist. Da aber $F(\theta)$ beschränkte Differenzenquotienten hat, so ist dies bis auf eine Nullmenge überall der Fall.

4. Zusatz. Bevor ich zu Anwendungen übergehe, will ich bemerken, daß die benutzte Beweismethode noch einen Satz über die Randwerte einer durch ein Poissonsches Integral dargestellten Potentialfunktion enthält. Wenn am Rande des Einheitskreises eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(\theta)$ gegeben ist, so stellt das Poissonsche Integral

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} f(\theta) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta$$

für $r < 1$, also im Inneren des Einheitskreises, eine Potentialfunktion dar. Wir fragen uns, inwieweit ihre Randwerte den vorgeschriebenen $f(\theta)$ gleich sind. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß das über die ganze Peripherie des Einheitskreises erstreckte Integral der Randwerte verschwindet, daß also

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} f(\theta) d\theta = 0$$

ist. Denn wäre das nicht der Fall, sondern wäre etwa

$$\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} f(\theta) d\theta = a,$$

so betrachten wir statt der vorgeschriebenen Randwerte die Randwerte

$$f(\theta) - \frac{a}{2\pi}.$$

Die zugehörige Potentialfunktion unterscheidet sich von der zu den neuen Randwerten gehörigen um

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \frac{a}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} d\theta.$$

Dies ist aber, wie wir von S. 02 wissen, die Konstante $\frac{\alpha}{2\pi}$. Diese zusätzliche konstante Potentialfunktion hat also auf allen Radien des Einheitskreises radiale Randwerte. Also beeinflußt der Zusatz dieser Konstanten nicht unsere Frage, auf welchen Radien die gegebene Potentialfunktion radiale Randwerte hat. Nehmen wir also an, das Integral der Randfunktion erstreckt über den ganzen Kreis sei Null. Dann ist wieder

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta = F(\vartheta)$$

eine eindeutige Funktion. Insbesondere also ist

$$F(\vartheta_0 - \pi) = F(\vartheta_0 + \pi).$$

Wenden wir auf das Poissonsche Integral wieder partielle Integration an, so wird es

$$g(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} F(\vartheta) \frac{d\vartheta}{d\vartheta} \left(\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\vartheta - \varphi) + r^2} \right) d\vartheta.$$

Nun kann man an Hand der vorhin angestellten Überlegungen ohne weiteres erkennen, daß für alle ϑ , für die $F(\vartheta)$ differenzierbar ist, stets

$$\lim_{r \rightarrow 1} g(re^{i\vartheta}) = F'(\vartheta)$$

gilt. Nun hat aber die Funktion $F'(\vartheta)$ nach einem Satze von Lebesgue überall bis auf eine Nullmenge eine Ableitung, und diese Ableitung ist überall mit Ausnahme einer Nullmenge dem Integranden $f(\vartheta)$ gleich. Also gilt tatsächlich überall mit Ausnahme einer Nullmenge von ϑ -Werten

$$\lim_{r \rightarrow 1} g(re^{i\vartheta}) = f(\vartheta).$$

Also stellt das Poissonsche Integral unter den S. 151 angegebenen Annahmen eine Potentialfunktion dar, die überall, außer in einer Nullmenge von Randpunkten, bei radialer Annäherung die gegebenen Randwerte hat. Der Randwert ist namentlich, wie wir auch schon von S. 60 wissen, für alle Stetigkeitsstellen ϑ von $f(\vartheta)$ der gegebenen Randfunktion $f(\vartheta)$ gleich.

5. Notwendige Beschränktheit. Ich möchte nun zum Schlusse dieses Paragraphen noch an einem Beispiel zeigen, daß für die Gültigkeit der Behauptung des Fatouschen Satzes die Voraussetzung der Beschränktheit wesentlich ist, daß also bei im Einheitskreis regulären, aber nicht beschränkten Funktionen keine Randwerte zu existieren brauchen.

Dies Beispiel konstruieren wir so: Im Einheitskreis nehme man eine Folge von konzentrischen Kreisen, deren Radien gegen Eins konvergieren, $K_0, K_1, K_2 \dots$ seien diese Kreise. Ferner denke man sich die Winkelhalbierenden der Winkel zwischen der reellen und der imaginären Achse. Zwischen je

zwei aufeinanderfolgenden Kreisen konstruiere man nun ganz im Inneren des von ihnen gebildeten Ringes ein Stück eines konzentrischen Kreises, der größer ist als ein Halbring und von der einen Winkelhalbierenden bis zur anderen reicht. Ferner Sorge man dafür, daß die in zwei aufeinanderfolgenden Ringen (K_{n-1}, K_n) und (K_n, K_{n+1}) konstruierten Ringstücke abwechselnd die obere und die untere Halbebene durchziehen, so daß das Bild der Fig. 24 entsteht. Die von diesen Ringstücken gebildeten Bereiche mögen mit $B_1, B_2, \dots$ bezeichnet werden, so daß B_n das zwischen K_{n-1} und K_n gelegene Ringstück ist. Nun werde dem Kreise K_0 und den Bereichen B , je eine Funktion zugeordnet. Zu K_0 gehöre $f_0(z)$ und die sei in K regulär und unterliege sonst keiner Beschränkung. Zu B , gehöre $f_i(z)$. Diese Funktionen sind entweder identisch Null oder identisch Eins. Und zwar soll $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = f_4 = 1$ usw. sein, so daß also allgemein $f_{4n-3} = f_{4n-2} = 0$ und $f_{4n-1} = f_{4n} = 1$ ist. Dadurch erreicht man es, daß jeder Radius des Einheitskreises in der Nähe der Peripherie des selben beliebig viele Ringstücke trifft, denen die Null zugeordnet ist, und beliebig viele Ringstücke, denen die Eins zugehört. Nun konstruieren wir eine im Einheitskreis reguläre Funktion, die in den Ringstücken von den denselben zugeordneten Funktionen

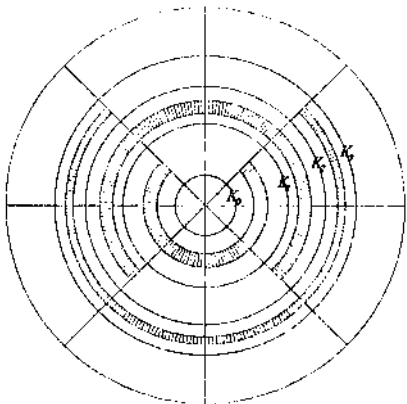


Fig. 24.

um so weniger abweicht, je größer deren Nummer ist. Die Abweichungen sollen mit abnehmender Nummer gegen Null streben. Eine solche Funktion kann dann offenbar auf keinem Radius einen Grenzwert haben. Um eine solche Funktion zu erhalten, wählen wir eine Folge positiver Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$, für die

$\varepsilon_n \rightarrow 0$ ist, und eine Folge von positiven Zahlen η_k , für die $\sum \eta_k$ konvergiert. Dann konstruieren wir nach dem Rungeschen Verfahren von Bd. I S.298ff.¹⁾

1) Dort handelte es sich um einen Bereich B , in dem $f(z)$ regulär war. $\mathfrak{C}$ sei die Randkurve von B . Dann wurde

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

angesetzt und das Integral durch rationale Funktionen approximiert. Diese Überlegung

ein Polynom $P_0(z)$, das in K_0 von $f_0(z)$ um weniger als ε_0 verschieden ist:

$$|f_0(z) - P_0(z)| < \varepsilon_0,$$

und das in B_1 von $f_1(z)$ um weniger als ε_0 abweicht:

$$|f_1(z) - P_0(z)| < \varepsilon_0.$$

Das Polynom $P_1(z)$ wird durch die doppelte Vorschrift

$$\begin{aligned} |P_1(z)| &< \eta_1 && \text{in } K_1 \\ |P_0 + P_1 - f_1| &< \varepsilon_1 && \text{in } B_1 \end{aligned}$$

nach dem Runge'schen Verfahren bestimmt. Alsdann P_2 durch die doppelte Vorschrift

$$|P_0 + P_1 + P_2 - f_2| < \varepsilon_2 \quad \text{in } B_2.$$

Allgemein wird das Polynom P_n durch die beiden Vorschriften

$$|P_n(z)| < \eta_n \quad \text{in } K_n$$

$$|P_0 + \dots + P_n - f_{n+1}| < \varepsilon_n \quad \text{in } B_{n+1} \quad \text{bestimmt.}$$

Nun läßt sich zeigen, daß die Reihe

$$P_0 + P_1 + \dots$$

in jedem Teilkreis K_n gleichmäßig konvergiert, daß sie also eine im Einheitskreis reguläre Funktion $f(z)$ darstellt, für die außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in B_n} |f(z) - f_n(z)| = 0$$

ist. Zunächst der Konvergenzbeweis. In K_n ist

$$|P_0 + \dots + P_n + \dots| \leq |P_0 + \dots + P_{n-1}| + \eta_n + \eta_{n+1} + \dots$$

Also ist die gleichmäßige Konvergenz bewiesen. Die Grenzfunktion sei

$$f(z) = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

In B_n ist

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &< |P_0 + \dots + P_{n-1} - f_n| + |P_n| + |P_{n+1}| + \dots \\ &< \varepsilon_{n-1} + \eta_n + \eta_{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Also ist $\max_{B_n} |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon_{n-1} + \eta_n + \eta_{n+1} + \dots$

Die rechte Seite strebt aber für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, weil $\varepsilon_{n-1} \rightarrow 0$ und weil $\eta_n + \eta_{n+1} + \dots$ der Rest einer konvergenten Reihe ist.

bleibt anwendbar, wenn B die aus den Bereichen $B_1 \dots B_n$ zusammengesetzte Punktmenge ist und $f(z) = f_n(z)$ in B_n ist und unter © die Gesamtheit der Randkurven der B_n verstanden wird. Das Integral (1) zerfällt dann in n Integrale über die Bänder der B_k . Liegt z in B_k , so sind alle bis auf eines 0. Dies eine aber ist $f_k(z)$.

Für diese Funktion $f(z)$, die in $|z| < 1$ regulär ist, existiert also auf keinem Radius ein radialer Grenzwert.¹⁾

6. Zusätzliche Bemerkung. Wir haben an diesem Beispiel gelernt, daß aus den Voraussetzungen des Fatouschen Satzes die Beschränktheit nicht wegleiben kann. Die Regularität allein genügt nicht. Gleichwohl könnte neben der Regularität statt der Beschränktheit eine geringere Voraussetzung genügen. Unsere an die Jensen-Nevanlinnasche Formel anschließenden Erörterungen lassen fast erwarten, daß statt der Beschränktheit von $|f(z)|$ die Beschränktheit des damals eingeführten

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

genügen möchte. Tatsächlich hat Ostrowski in einer neueren Arbeit (Acta lit. ac. sc. reg. univ. Hung. Franc-Jos. I) gezeigt, daß diese Annahme genügt, um zeigen zu können, daß auf fast allen Radien Grenzwerte existieren. Auch F. und R. Nevanlinna haben es bewiesen.

§ 8. Die Nullstellen der Randwerte einer analytischen Funktion.

1. Fragestellung. In dem Beispiel, das wir am Ende des vorigen Paragraphen untersuchten, fanden wir Kreisbogen, die gewisse Bogen des Einheitskreises gleichmäßig approximierten und auf denen die Funktionswerte gleichmäßig gegen Null strebten. Eine solche Erscheinung kann bei beschränkten Funktionen nicht eintreten. Nehmen wir z. B. an, eine Funktion sei im Inneren des Einheitskreises regulär und beschränkt und es gebe im Einheitskreis eine Folge von Kurvenbögen, die einen Peripheriebogen gleichmäßig approximieren und auf denen $f(z)$ Werte annimmt, deren Maximalbetrag gegen Null konvergiert. Dann ist, wie S. 19 bewiesen wurde, $f(z)$ identisch Null.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes rührt von den Gebrüdern Rieß her.

1) Lusin und Priwaloff haben (Ann. ec. norm. sup. 42 (1926)) ein Beispiel einer in $|z| < 1$ regulären Funktion angegeben, zu der eine Folge von Zahlen $\varrho_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ gehört, derart, daß $|f(\varrho_n e^{i\varphi})| > m_n$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $m_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Aus dem an die Spitze des nächsten Paragraphen gestellten Satz folgt, daß es keine Funktion $f(z)$ geben kann, für die zu jedem $m > 0$ ein $\varrho > 0$ existiert, so daß $|f(z)| > m$ für $\varrho < |z| < 1$. Man wende nur den genannten Satz auf ein Kreisbogenzweieck an, in dessen Inneren $f(z)$ regulär ist und an dessen Rand ein Bogen von $|z| = 1$ beteiligt ist. Die Anwendung des genannten Satzes geschieht durch Abbildung des Kreisbogenzweiecks auf einen vollen Kreis.

Ihr Satz lautet:¹⁾ $f(z)$ sei im Inneren des Einheitskreises regulär und beschränkt. Die (nach Fatou existierende) Randfunktion verschwinde in einer Menge von einem Maß größer als Null. Dann ist $f(z)$ identisch Null im Einheitskreis.²⁾

2. Beweis. Beim Beweis werden wir uns des Fatouschen Satzes in einer für die Verwendungsmöglichkeiten dieses Satzes charakteristischen Weise bedienen. Da nämlich die Randfunktion Grenzfunktion einer Folge beschränkter und integrierbarer Funktionen ist, so ist sie nach einem bekannten Satz der Lebesgueschen Theorie selbst integrierbar und ihr Integral ist Grenzwert der Integrale über die Näherungsfunktionen.

Nun sei $\mathfrak{M}$ die Menge und μ das Maß der Menge derjenigen Randpunkte, in welchen $f(z)$ verschwindet. $\mathfrak{M}^*$ sei die Komplementärmenge und $2\pi - \mu$ ihr Maß. $u(\varphi)$ sei die am Rande des Einheitskreises erklärte integrierbare Funktion, welche auf $\mathfrak{M}$ den Wert $\frac{A}{\mu}$ und auf $\mathfrak{M}^*$ den Wert $\frac{A}{\mu - 2\pi}$ hat, wo A eine noch passend zu wählende Zahl ist. Das Poissonsche Integral

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + r^2} d\vartheta$$

stellt dann nach S. 152 eine in $|z| < 1$ reguläre Potentialfunktion dar, welche fast überall die durch $u(p)$ bestimmten Randwerte hat. Sie ver-

schwindet im Mittelpunkt des Einheitskreises, weil $\int_0^{2\pi} u(\varphi) d\varphi = 0$ ist. $v(x, y)$ sei die zu $u(x, y)$ konjugierte Potentialfunktion. Sie werde so normiert, daß sie im Mittelpunkt gleichfalls verschwindet. Dann ist $e^{u+iv} = g(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion, welche in seinem Mittelpunkt den Wert Eins hat. Also ist

$$f(0) = f(0)g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{M}^*} f g dz.$$

Also

$$f(0) \leq e^{A-2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Da aber für hinreichend große positive A die rechte Seite beliebig klein wird, so ist $f(0) = 0$. Wendet man die gleiche Schlußweise auf $\frac{f(z)}{z}$ an, so findet man, daß auch $f(0) = 0$ ist, und ebenso durch Anwendung auf

1) Wegen einer Verallgemeinerung siehe den Satz von Privaloff am Ende dieses Paragraphen.

2) Da die Randfunktion als Grenzfunktion meßbarer Funktionen selbst meßbar ist, HO ist die Menge der Punkte, wo sie verschwindet, stets meßbar. (Zum Begriff „meßbar“ vgl. man Carathéodory, Reelle Funktionen, oder Kamke, Das Lebesguesche Integral.)

$\frac{f(z)}{z^k}$, daß auch $f''(0) = 0$ ist usw. Also sind alle Koeffizienten in der Taylorreihe von $f(z)$ Null. Daher ist $f(z)$ identisch Null.

3. Eine Verallgemeinerung des Vitalischen Satzes. Die eben verwendete, von den Gebrüdern Rieß herrührende Beweismethode läßt sich auch verwenden, um eine Verallgemeinerung des Vitalischen Satzes zu beweisen, die zuerst Khintchine (Fundamenta mathematicae IV) und Ostrowski in der S. 155 erwähnten Arbeit gewonnen haben:

$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$ sei eine Folge von Funktionen, die in $|z| < 1$ regulär sind und deren Beträge dort unter der festen Schranke 31 liegen. Wenn dann die Randwerte dieser Folge in einer Menge von Punkten, deren Maß größer ist als Null, Grenzwerten zustreben, so ist die Funktionenfolge in jedem abgeschlossenen, ganz im Inneren des Einheitskreises gelegenen Bereich gleichmäßig konvergent.

Nehmen wir nämlich an, die Funktionenfolge konvergiere nicht in jedem Punkte des Inneren. Dann sei z_0 eine Stelle, wo sie nicht konvergiert. Aus der Folge $\varphi_k(z)$ kann man dann zwei Teilfolgen auswählen, die beide an der Stelle z_0 konvergieren, die aber dort verschiedenen Grenzwerten zustreben. Diese beiden Teilfolgen seien

$$\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}, \dots$$

und

$$\varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \dots$$

Ich setze

$$f_n(z) = \varphi_{k_n} - \varphi_{m_n}$$

Die Folge

$$f_1, f_2, \dots$$

konvergiert dann in einer Menge $\mathfrak{M}$ von Randpunkten, deren Maß $\mu > 0$ ist gegen Null, konvergiert aber bei z_0 nicht gegen Null. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß dieser Punkt z_0 der Mittelpunkt $z = 0$ ist. Denn das kann man durch eine lineare Transformation des Einheitskreises stets erreichen. Dabei geht eine am Rande gelegene Menge von Punkten, deren Maß größer als Null ist, in eine Menge über, deren Maß größer als Null ist, und außerdem gehen dabei mit Rücksicht auf die uns von S. 129 bekannte Dreiecksstetigkeit beschränkter Funktionen diejenigen Punkte, an welchen radiale Grenzwerte existieren, in eben solche Punkte über. Ich nehme also an, es sei $z_0 = 0$. Die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ sei wieder $\mathfrak{M}^*$. Ihr Maß ist wieder $2\pi - \mu$. Genau wie vorhin ziehe ich die Hilfsfunktion $g(z)$ heran. Nun wird

$$\begin{aligned} f_n(0) &= f_n(0)g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f_n(z)g(z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{M}} \frac{f_n(z)g(z)}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{M}^*} \frac{f_n(z)g(z)}{z} dz. \end{aligned}$$

Also wird $|f_n(0)| \leq e^{\frac{A}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{M}} |f_n(e^{i\varphi})| d\varphi + e^{\mu - \frac{A}{2\pi}} M.$

Nunmehr sei s eine beliebige positive Zahl. Ich verfüge dann zuerst über die noch unbestimmte positive Zahl A so, daß $e^{\mu - \frac{A}{2\pi}} \cdot M < \frac{\varepsilon}{2}$ wird. Als dann bemerke ich, daß nach einem bekannten, schon verwendeten Satze der Lebesgueschen Theorie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{M}} |f_n(e^{i\varphi})| d\varphi = 0$ ist. Denn auf der Menge $\mathfrak{M}$ gilt $f_n \rightarrow 0$, und die $|f_n|$ sind beschränkt. Ich wähle daher nunmehr die Nummer N so groß, daß

$$e^{\frac{A}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{M}} |f_n(e^{i\varphi})| d\varphi < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $n > N$. Dann ist für $n > N$

$$|f_n(0)| < \varepsilon.$$

Also ist doch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0.$$

Die gegebene Funktionenfolge konvergiert also in jedem Punkte des Einheitskreises. Die die gleichmäßige Konvergenz betreffende Angabe unseres Satzes ist dann eine unmittelbare Folge des Vitalischen Satzes in seiner gewöhnlichen Fassung.

4. Bemerkung. 1. Der Satz der Gebrüder Rieß, den wir vorhin bewiesen, folgt aus dem von Khintchine und Ostrowski, wenn man ihn auf die Folge $f(z)$, 0 , $f(z)$, 0 , . . . anwendet.

2. Angesichts des Satzes von Khintchine und Ostrowski fällt eine eigentümliche Analogie mit dem Satze auf, der uns zu Beginn des Paragraphen beschäftigte. Auf diese Analogien zwischen Sätzen über analytische Fortsetzung und über Konvergenz von Funktionenfolgen hat zuerst Ostrowski aufmerksam gemacht. Er hat in seinen schönen Arbeiten diese Analogien weiter verfolgt. (Man vergleiche Bd. 32 des Jahresberichtes der Deutschen Mathematikervereinigung S. 185.) Der Leser mache sich z. B. klar, daß der Vitalische Satz dem Satze entspricht, daß eine analytische Funktion durch die Werte bestimmt ist, welche sie in einer Menge von Punkten annimmt, die im Regularitätsgebiet der Funktion einen Häufungspunkt haben.

5. Der Satz von Priwaloff. Angesichts der Rolle, welche die Beschränktheit beim Satze von Fatou und bei anderen zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Sätzen spielt, ist die Entdeckung besonders merkwürdig, die betrifft

des Satzes der Gebrüder Rieß Hr. Priwaloff¹⁾ im Jahre 1918 gemacht hat. Er hat nämlich gefunden, daß im Satz der Gebrüder Rieß die Voraussetzung der Beschränktheit gestrichen werden kann. Es gilt sonach der folgende Satz von Priwaloff: Wenn die in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ auf einer Bandmenge von einem Maße größer als Null verschwindet, so ist sie identisch Null. Es kommt nie vor, daß eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion auf einer solchen Randmenge unendlich wird. Das „Nullwerden“ und das „Unendlichwerden“ bezieht sich dabei auf die Grenzwerte bei Annäherung aus $|z| < 1$ längs beliebigen Wegen, die $|z| = 1$ nicht berühren.

Ich beschränke mich darauf, einen Beweis für den Fall des Nullwerdens in der Randmenge zu skizzieren. Der Priwaloffsche Beweisausatz führt den Satz auf den der Gebrüder Rieß zurück. Sei z_0 ein Punkt der Randmenge m , in der $f(z)$ verschwindet. Man ziehe von z_0 ins Innere von $|z| < 1$ zwei Geraden, unter 45° gegen den Radius von z_0 und verbinde dieselben durch einen Kreisbogen vom Radius $\frac{1}{n}$ mit z_0 als Mittelpunkt. Die Geraden und der Kreisbogen bestimmen einen Kreissektor. $f_n(z_0)$ sei erklärt als $\max |f(z_0)|$ in diesem Sektor. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = 0$ für jeden Punkt z_0 von $\mathfrak{M}$. Nach

einem Satz von Egoroff²⁾ gibt es dann eine perfekte Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$, deren Maß ebenfalls positiv ist und auf der $f_n(z_0)$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Nun konstruiert Priwaloff eine rektifizierbare Kurve, der alle Punkte von $\mathfrak{M}_1$ angehören. Man konstruiere in den beiden Endpunkten eines jeden Bogens der Komplementärmenge von $\mathfrak{M}_1$ zwei Geraden unter 45° gegen die Radien der Endpunkte derart, daß dieselben in $|z| < 1$ zum Schnitt kommen und zusammen den Bogen vom Rest von $|z| < 1$ trennen.³⁾ Die aus diesen Strecken und den Punkten von $\mathfrak{M}_1$ bestehende rektifizierbare Kurve grenzt von $|z| < 1$ einen Bereich ab. In der durch die Randpunkte dieses Bereiches erweiterten Punktmenge ist $f(z)$ stetig. Bildet man diesen Bereich auf einen Kreis $|w| < 1$ konform ab, so ist die Abbildung auch am Rande stetig. Die Menge $\mathfrak{M}_1$ geht in eine Randmenge von einem Maße > 0 über, wie sich zeigen läßt.⁴⁾ Aus $f(z)$ wird eine in $|w| \leq 1$ stetige, in $|w| < 1$ reguläre und daher beschränkte Funktion, die in einer Randmenge von einem Maße größer als Null verschwindet. Nach dem Satz der Gebrüder Rieß ist sie daher identisch Null.

1) J. Priwaloff, Das Cauchysche Integral (russisch) 1918. Vgl. die Darstellung des Beweises bei Lusin und Priwaloff, Sur l'unicité et multiplicité des fonctions analytiques. Ann. ec. norm. sup. 42 (1925).

2) Comptes rendus Paris 1911.

3) Man darf immer annehmen, daß zur Komplementärmenge nur Bögen kleiner als ein Halbkreis gehören. Denn durch lineare konforme Abbildung des $|z| < 1$ kann das stets erreicht werden.

4) Vgl. die erwähnte Arbeit von Lusin und Priwaloff.

Vierter Abschnitt. Uniformisierung.¹⁾

§ 1. Der Hauptsatz der Uniformisierungstheorie. Vorbereitung zum Beweis.

Einer Einführung in die Probleme der Uniformisierung habe ich bereits einen Paragraphen (S. 257 ff.) des ersten Bandes gewidmet. Ich kann daher jetzt hier ohne lange Einleitung gleich an den Hauptsatz und seinen Beweis herangehen, in der Annahme, daß der Leser geneigt sein wird, sich jenen Paragraphen ins Gedächtnis zurückzurufen.

Ich betrachte somit jetzt eine beliebige analytische Funktion $f(z)$. Man erhält sie durch analytische Fortsetzung aus einem beliebigen ihrer Funktionselemente. Diese Funktionselemente fügen sich bei Hinzunahme der nicht regulären Elemente algebraischen Charakters nach S. 221 von Bd. I zur Riemannschen Fläche von $f(z)$ zusammen. Sobald es gelungen ist, diese Fläche konform auf einen schlichten Bereich einer t -Ebene abzubilden, so werden durch Umkehrung dieser Abbildung z und $f(z)$ in jenem Bereich eindeutige und bis auf Pole reguläre Funktionen von t , weil verschiedene Punkte der Fläche verschiedene Punkte des schlichten Bereiches liefern. Diese Abbildung auf einen schlichten Bereich ist die Hauptsache. Darauf, daß die Abbildung umkehrbar eindeutig sei, kommt es gar nicht an. In der Tat könnte das ja auch gar nicht immer erreicht werden, wie wir vom elliptischen Integral erster Gattung und der durch es uniformisierten zweiblättrigen Riemannschen Fläche her wissen.

Ein Uniformisierungsproblem haben wir auch auf S. 15 u. 44ff. dieses Bandes bei der Abbildung *schlichter* mehrfach zusammenhängender Bereiche auf die Fläche eines Kreises gelöst. Denn jede in einem solchen Bereiche bis auf Pole reguläre Funktion geht durch die Abbildung dieses Bereiches auf die schlichte Kreisfläche in eine in diesem Kreise eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion über.

Dies Beispiel und die früheren Erfahrungen veranlassen uns, zu versuchen, jede beliebige Riemannsche Fläche auf die Fläche eines schlichten Kreises konform abzubilden. Daß dies geht, ist der Inhalt des *Hauptsatzes der Uniformisierung*, den wir jetzt aussprechen und dann beweisen wollen.

Man kann die Riemannsche Fläche einer jeden analytischen Funktion konform auf eine schlichte Kreisscheibe, das Endliche der Ebene oder die volle funktionentheoretische Ebene abbilden.

1) Die Untersuchungen dieses Abschnittes werden in den darauf folgenden Abschnitten nicht verwendet.

Der Existenzbereich für die durch die Uniformisierung aus den Funktionen der Fläche entstehenden Funktionen ist dann ein *einfach* zusammenhängender Bereich, und dadurch wird nach dem Monodromiesatz erreicht, daß jede auf der Riemannschen Fläche bis auf Pole reguläre Funktion in eine eindeutige Funktion übergeführt wird.

Wenn ich hier von konformer Abbildung der Riemannschen Fläche, oder von Funktionen rede, die auf der Fläche bis auf Pole regulär sind, so sind diese Redewendungen alle in dem auf S. 222 des ersten Bandes festgelegten Sinne gemeint. Es gehört nämlich zu jeder Stelle der Riemannschen Fläche eine Umgebung und eine Wurzelfunktion (Ortsparameter), welche diese Umgebung schlicht abbildet. Die Abbildung heißt konform, wenn sie in diesem schlichten Bild konform im gewöhnlichen Sinne ist, und eine Funktion heißt bis auf Pole regulär, wenn sie aufgefaßt als Funktion dieses Ortsparameters bis auf Pole regulär ist.

Ich komme nun auf den Grundgedanken zu sprechen, auf den ich den Beweis des Hauptsatzes aufbauen will. Ich denke mir die Riemannsche Fläche allmählich durch Aneinanderreihen der bei der analytischen Fortsetzung aus einem ersten entstehenden weiteren Funktionselemente aufgebaut und suche die so entstehende Fläche bei jedem einzelnen Schritt auf eine Kreisfläche abzubilden. Ich werde dadurch, wie gleich näher ausgeführt werden soll, auf die folgende Aufgabe geführt: Zwei Bereiche, von denen jeder auf die Fläche eines Kreises abbildbar ist, haben einen Gebiets teil gemein. Durch Vereinigung beider in diesem Gebietsteil entsteht ein neuer Bereich, der seinerseits auf eine Kreisscheibe abgebildet werden soll.

§ 2. Die Abbildung der aufgeschnittenen Riemannschen Fläche auf einen schlichten Bereich.

1. Vorbemerkung. Aufgabe der Uniformisierung ist es, die Riemannsche Fläche der zu uniformisierenden Funktion so auf einen schlichten Bereich abzubilden, daß alle inneren Punkte der Riemannschen Fläche in innere Punkte des Bereiches übergehen. Vorläufig wollen wir von der Forderung, daß *alle* inneren Punkte der Riemannschen Fläche innere Punkte des Bildbereiches werden sollen, absehen und erst einmal die Fläche auf einen schlichten Bereich abbilden, dabei aber zulassen, daß gewisse innere Punkte Randpunkte werden. Gewissen inneren Punkten werden dabei wie bei der Abbildung der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit vier Verzweigungspunkten durch das elliptische Integral erster Gattung mehrere Punkte am Rande des Bildbereiches entsprechen, der daher mit zugeordneten Paaren von Randkurvenbögen versehen sein wird.

2. Die Funktionselemente. Um zu dieser Abbildung zu gelangen, knüpfen wir an S. 210 von Band 1 an. Dort war bewiesen worden, daß es abzählbar viele Funktionselemente gibt, derart, daß jedes andere Element der zu uniformisierenden Funktion sich durch unmittelbare Fortsetzung aus einem dieser Elemente ergibt. Das bringt zum Ausdruck, daß durch diese Elemente der Gesamtverlauf der analytischen Funktion dargestellt wird, insofern diese Elemente alle schlichten Stellen der Riemannschen Fläche bedecken. Insbesondere war zu dieser Darstellung die Gesamtheit aller regulären Funktionselemente mit rationalen Mittelpunkten geeignet. Wir fügen nun noch die Elemente algebraischen Charakters hinzu, die den algebraischen Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche und den Polen der Funktion entsprechen. Auch deren gibt es nur abzählbar viele. Denn der Mittelpunkt eines jeden solchen Elementes gehört dem Rand mindestens eines regulären Elementes mit rationalem Mittelpunkt an. Dieses kann man noch dazu so auswählen, daß auf seinem Rande keine anderen singulären Punkte der Funktion liegen. Man muß dazu nur ein reguläres Element nehmen, das aus dem Element algebraischen Charakters durch unmittelbare Fortsetzung hervorgeht, und das einen rationalen Mittelpunkt hat, der hinreichend nahe an dem Mittelpunkt des algebraischen Elementes liegt. Diese Erwägung lehrt, daß der Funktion nur abzählbar viele Elemente algebraischen Charakters angehören. Diese und die regulären Elemente mit rationalen Mittelpunkten nummeriere man fortlaufend. Nun gehört die Umgebung einer jeden rationalen oder algebraischen Stelle des zu uniformisierenden Gebildes dem Inneren eines dieser Elemente an, so daß also diese Elemente zur Darstellung der Funktion vollkommen ausreichen.

Noch will ich zur Vereinfachung des folgenden annehmen, daß am Rande der Kreise, in welchen die einzelnen Elemente die Funktion darstellen, keine singulären Stellen liegen. Das ist nur eine Voraussetzung darüber, wie weit man ein und dieselbe Potenzreihe zur Darstellung der Funktion verwenden will.

Im Falle einer geschlossenen Riemannschen Fläche — und nur bei einer solchen — kann man mit endlich vielen Elementen auskommen. In diesem Falle mögen tatsächlich diese endlich vielen Elementen der Betrachtung zugrunde gelegt werden. In allen anderen Fällen haben wir es mit unendlich vielen Elementen zu tun.

3. Heftungsaufgabe. Um nun die am Beginn des Paragraphen in Aussicht genommene Aufgabe zu lösen, beginnen wir mit dem ersten unserer Elemente E_1 , das wir als schlichte Kreisscheibe voraussetzen dürfen. Alle nun weiter vorzunehmenden Abbildungen werden Bereiche betreffen, welche dieses Element enthalten und alle Abbildungen sollen dadurch normiert sein, daß sie in dem Mittelpunkt dieses ersten Elementes verschwinden und dort die

Ableitung Eins besitzen. Die Abbildung des ersten Elementes geschieht durch eine Funktion $z = a$. Nun suchen wir das Element kleinster Nummer, das einen Gebietsteil mit dem ersten gemein hat. Ich nenne es E_2 . Es sind zwei Fälle denkbar, nämlich entweder ist eines der Elemente ein Teilbereich des anderen. Dann ist die Abbildung des aus der Verschmelzung beider entspringenden Bereiches mit der Abbildung eines der beiden Elemente identisch. Oder aber die beiden Elemente haben lediglich ein Kreisbogenzweieck gemein. Wenn wir in dem neuen Element die Punkte markieren, welche den Randpunkten des anderen entsprechen, so zerfällt es in zwei Kreisbogenzweiecke E'_2 und E''_2 , von denen eines E'_2 im ersten Elemente enthalten ist, während das zweite E''_2 in einem Kreisbogen 93 an das erste Element anstößt. Die aus den inneren Punkten von E_1 , E''_2 und von 93 bestehende Punktmenge ist ein gewisser Teilbereich der Riemannschen Fläche. Wir sagen, er sei aus E_1 und E''_2 entstanden, und nennen ihn den Vereinigungsbereich. So sprechen wir allgemein von dem Vereinigungsbereich zweier Teilbereiche B_1 und B_2 der Riemannschen Fläche, wenn dieselben punktfremd sind und ihrem Rand gewisse Kreisbogenpolygone gemeinsam sind. Diese gemeinsamen Randbogen können aus einem oder mehreren Kontinuen bestehen. Wir wählen eines derselben B und nennen den aus B_1 , B_2 und 93 bestehenden Teilbereich der Riemannschen Fläche den durch Vereinigung der Riemannschen Fläche längs 93 entstandenen Bereich oder auch kurz den Vereinigungsbereich $B_1 + B_2$ von B_1 und B_2 . Falls sich B_1 und B_2 auf Kreisscheiben schlicht und konform abbilden lassen, läßt sich auch $B_1 + B_2$ auf eine Kreisscheibe oder die volle Ebene schlicht abbilden. Das werden wir nachher beweisen. Die hiermit gestellte Aufgabe nennen wir eine *Heftungsaufgabe*.

4. Aufbau der Riemannschen Fläche aus Elementen. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen kehren wir zur Vereinigung $E_1 + E''_2$ zurück. Wir suchen unter den bisher nicht benutzten Elementen dasjenige kleinster Nummer, welches mit $E_1 + E''_2$ einen Gebietsteil der Riemannschen Fläche gemein hat. Es sei E_3 . Wir unterscheiden wieder einige Fälle. Entweder ist E_3 ein Teilbereich von $E_1 + E''_2$ oder aber $E_1 + E''_2$ ist Teilbereich von E_3 , oder endlich der Durchschnitt von $E_1 + E''_2$ und E_3 ist von beiden verschieden: In den beiden ersten Fällen ist die Gesamtheit der Punkte der Riemannschen Fläche, die entweder $E_1 + E''_2$ oder E_3 angehören, mit einem der beiden Bereiche identisch. Die Abbildung derselben auf eine schlichte Kreisscheibe bietet dann keine Schwierigkeit. Im letzten Falle dagegen besteht der Durchschnitt von $E_1 + E''_2$ und E_3 aus einer endlichen Anzahl von Kreisbogenpolygonen. Nimmt man diese von E_3 weg, so bleibt noch eine endliche Anzahl von Kreisbogenpolygonen übrig, die wir,

wenn sie nicht von vornherein einfach zusammenhangend sein sollten, durch endlich viele Kreisbogen in endlich viele einfachzusammenhängende Kreisbogenpolygone zerlegen. Diese heften wir dann der Reihe nach an $E_1 + E'_2$ bzw an die daraus bereits durch Anheftung entstandenen Teilbereiche der Riemannschen Fläche in je einem Randbogen an. So sehen wir, daß wir durch den Wunsch, auch E_3 in den uniformisierten Teilbereich der Riemannschen Fläche einzubeziehen, auf die Notwendigkeit geführt werden, die Heftungsaufgabe zu lösen.

Nun achte man noch darauf, daß ein jedes der anzuheftenden Kreisbogenpolygone mit dem bereits auf einen Kreis abgebildeten Teilbereich der Riemannschen Fläche mehrere getrennte Randbogen gemein haben kann. Die Anheftung erfolgt aber stets in einem einzigen Randkontinuum, das wir stets so wählen wollen, daß es nicht vergrößert werden kann. Daher werden auf der Riemannschen Fläche gewisse Kreisbogenzüge verbleiben, die dem Rand des abgebildeten Bereiches angehören.

Wir haben es also mit der Abbildung der passend zerschnittenen Riemannschen Fläche zu tun.

Der Umstand, daß wir den Durchschnitt des neuen Elementes und der bereits abgebildeten nicht erneut berücksichtigen, bringt es mit sich, daß kein Gebietsteil der Riemannschen Fläche bei der Abbildung mehr als einen Bildbereich bekommt.

So wie oben mit E_3 verfahren wir alsdann mit dem noch nicht berücksichtigten Element kleinster Nummer, das mit dem abgebildeten Bereich einen Gebietsteil gemein hat.

So fortfahrend erscheint auf der Riemannschen Fläche eine Folge wachsender Teilbereiche. Wir werden die Grenzfunktion der benutzten Abbildungen zu untersuchen haben. Diese leistet dann die Abbildung der Riemannschen Fläche auf einen schlichten Bereich.

Daß im Verlauf unseres Verfahrens alle Funktionselemente Verwendung finden, folgt daraus, daß man jedes mit dem Ausgangselement durch eine Kette unserer Elemente verbinden kann, und dann daß jedes Kettenglied einmal zu demjenigen kleinsten Nummer wird, das mit dem schon abgebildeten Bereich einen Gebietsteil gemein hat, und das dabei eine möglichst kleine Nummer besitzt.

Im Falle einer algebraischen Riemannschen Fläche führt das Verfahren nach endlichvielen Schritten zur gewünschten schlichten Abbildung der Riemannschen Fläche auf eine endliche Kreisscheibe, oder auf die volle Ebene.

Im Falle, daß erst nach unendlich vielen Schritten alle Elemente aufgebraucht sind, muß zum Nachweis der Möglichkeit der Abbildung noch ein Grenzübergang ausgeführt werden.

Wenn nun die Abbildung auf die volle Ebene oder die volle Ebene mit Ausschluß des unendlichfernen Punktes erfolgt, so ist das Uniformisierungsproblem gelöst. Denn dann gehen alle Punkte der Riemannschen Fläche in innere Punkte des Bildbereiches über.

5. Die zerschnittene Fläche. Erfolgt aber die Abbildung auf eine endliche Kreisscheibe, so kann gleichfalls noch der Fall vorliegen, daß das Problem gelöst ist. Es kann aber auch sein, daß kreisbogenförmige Querschnitte auf der Riemannschen Fläche angebracht worden sind und daß nur die aufgeschnittene Riemannsche Fläche abgebildet ist. In diesem Falle ist bekannt, daß die Abbildung auf jedem kreisförmigen Randbogen noch analytisch ist und daß sie denselben in einen Peripheriebogen des Bildkreises überführt. Den beiden Ufern eines solchen Querschnittes entsprechen daher zwei Bogen der Kreisperipherie, die umkehrbar eindeutig und analytisch einander zugeordnet sind. Dabei sind die einander entsprechenden Durchlaufungssinne so, daß der eine das Kreisinne zur Linken, der andere aber das Kreisinne zur Rechten hat. Denn so ist es auch auf der Riemannschen Fläche längs des Querschnittes. Niemals aber stoßen in einem Punkte zwei zugeordnete Randbogen des Bildkreises so zusammen, daß der gemeinsame Punkt sich durch die Zuordnung selbst entspreche. Dies kann man meist dadurch verhindern, daß stets die Anheftung längs möglichst langen Randbogen erfolgen soll. Man kann aber auch, wenn ja sich einmal der oben erwähnte Sachverhalt zeigen sollte, die beiden zugeordneten Peripheriebogen aneinanderheften. Damit ist folgendes gemeint: Man nimmt auf der Riemannschen Fläche zu dem abgebildeten Bereich noch die inneren Punkte der zugeordneten Bogen und den sich selbst entsprechenden Punkt hinzu. Wir haben dann zu zeigen, daß man auch den so abgeänderten Bereich auf einen schlichten Kreis oder die volle Ebene abbilden kann. So werden wir auf *eine noch etwas andere Heftungsaufgabe* geführt.

Wir können auch nach jeder einzelnen Heftung prüfen, ob etwa der eben besprochene Sachverhalt vorliegt und dann die eben neu eingeführte neue Heftung vornehmen.

Wir werden nun erst die Heftungsaufgaben lösen und uns dann mit dem vielleicht nötigen Grenzübergang befassen.

. § 3. Die Heftungsaufgaben.

1. Vorbereitung. Auf einer Riemannschen Fläche sind zwei Kreisbogenpolygone A und B gegeben, deren Inneres punktfremd seien. Ihren Rändern ist ein Polygonzug $\mathfrak{B}$ gemein. Sowohl A wie B läßt sich konform auf eine Kreisscheibe abbilden. Der Vereinigungsbereich $A + B$ ist als Punktmenge $A + B + \mathfrak{B}$ definiert, wobei nur die inneren Punkte von A und B und $\mathfrak{B}$ Verwendung finden. Die Ränder von A und B

bestehen aus endlich vielen Kreisbogen. Ein jeder derselben ist Teilbogen des Randes eines unserer Funktionselemente und enthält daher nach Voraussetzung nur gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche, d. h. Punkte mit einblättriger Umgebung.

Man kann daher um jeden inneren Punkt von $\mathfrak{B}$ eine Kreisscheibe U legen und diese so klein wählen, daß ihr Rand nur gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche enthält, und daß er nur innere Punkte von $\mathfrak{B}$ trifft, und daß U durch $\mathfrak{B}$ in zwei Teile zerlegt wird, deren einer völlig zu A , und deren anderer völlig zu B gehört. Man darf annehmen, daß der Rand von U den Kreisbogenzug $\mathfrak{B}$ unter Winkeln trifft, die von 0 und π verschieden sind. Gegebenenfalls kann man dies durch eine gewisse Vergrößerung von U erreichen. Der dann dem Inneren von U angehörige Teilbogen von $\mathfrak{B}$ sei $\mathfrak{B}'$. Wir denken uns dann A und B zunächst nur längs $\mathfrak{B}'$ verheftet. Dadurch entsteht ein neuer Bereich $A + B$ auf der Riemannschen Fläche, an dessen Rand die übrigen Teile von $\mathfrak{B}$ beteiligt sind. Diese zerfallen in Paare von Kreisbogen, die auf der Riemannschen Fläche koinzidieren und die am Bildbereich paarweise einander zugeordnet sind, und die zum Teil von den sich selbst entsprechenden Endpunkten von $\mathfrak{B}'$ ausgehen. Ich betrachte ein solches von einem sich selbst entsprechenden Punkt P ausgehendes Kurvenpaar, dem auf der Riemannschen Fläche ein Kreisbogenzug entspricht, den ich wieder mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen will. Ihm entsprechen zwei Randbogen des Bereiches $A + B$, den ich wieder mit B bezeichnen will. Diese Rogen machen zusammen entweder nur einen Teil des Randes von B oder den vollen Rand dieses Bereiches aus.

Der Bogen $\mathfrak{B}$ der Riemannschen Fläche trifft nur gewöhnliche Punkte. Denn er ist aus Kreisbogen zusammengesetzt, die den Peripherien von Funktionselementen entstammen. Diese hatten wir aber so klein gewählt, daß auf ihrem Rande nur gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche liegen.

Den inneren Punkten von $\mathfrak{B}$ ordnen wir wieder als Umgebungen Kreisscheiben zu, an deren Rand nur gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche liegen und deren Rand $\mathfrak{B}$ in zwei Punkten unter von 0 und π verschiedenen Winkeln trifft.

Endpunkte von $\mathfrak{B}$ sind die bei der Zuordnung sich selbst entsprechenden Punkte oder die Punkte, die $\mathfrak{B}$ angehören, aber nicht innere Punkte von Teilbögen von $\mathfrak{B}$ sind, welche selbst kein Paar zugeordneter Punkte tragen.

Einem sich selbst entsprechenden Endpunkt ordnen wir als Umgebung eine Kreisscheibe U der Riemannschen Fläche zu, welche am Rand nur gewöhnliche Punkte der Fläche₀ trägt, und die entweder $\mathfrak{B}$ in einem Punkt unter von 0 und π verschiedenen Winkeln trifft, oder die $\mathfrak{B}$ und den übrigen

Rand von B überhaupt nicht trifft¹⁾, oder die zwar $\mathfrak{B}$ nicht trifft, aber die den übrigen Rand von B trifft.

Im ersten Falle habe U mit dem Bereiche B eine längs $\mathfrak{B}$ aufgeschlitzte Kreisscheibe gemein, die einfach zusammenhängt; im zweiten Falle ist der Durchschnitt von U und B eine längs $\mathfrak{B}$ aufgeschlitzte zweifach zusammenhängende Kreisscheibe. Im letzten Falle zerfällt U durch den Rand von B in den längs $\mathfrak{B}$ aufgeschlitzten einfach zusammenhängenden Durchschnitt und einen mit B punktfremden Teil (der auch leer sein kann). Die Fig. 25a, 25b, 25c veranschaulichen die drei Fälle. Der Punkt von $\mathfrak{B}$, um dessen Umgebung es sich handelt, ist stets mit P bezeichnet.

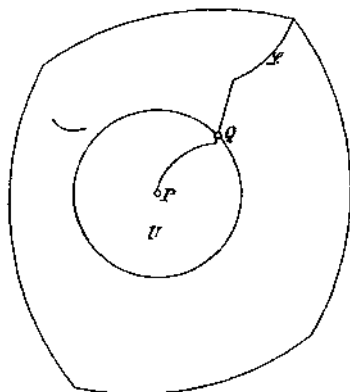


Fig. 25a.

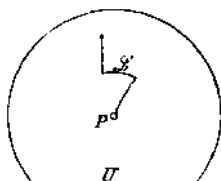


Fig. 25b.

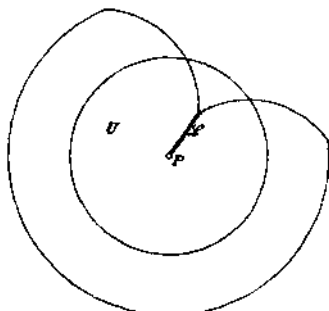


Fig. 25c.

Nun bleibt noch der eventuell vorhandene Endpunkt von $\mathfrak{B}$, der sich nicht selbst entspricht, und von dem daher weitere Randbogen von B ausgehen. Diesem Punkt der Riemannschen Fläche wird eine Kreisscheibe U der Fläche als Umgebung zugeordnet, an deren Rand nur gewöhnliche Punkte der Fläche liegen. Dieser Rand von U soll den von $\mathfrak{B}$ verschiedenen Rand in zwei Punkten unter von 0 und π verschiedenen Winkeln treffen und soll mit $\mathfrak{B}$ einen Punkt gemein haben (vgl. Fig. 26).

1) So kann die Umgebung von P nur dann gewählt werden, wenn durch $\mathfrak{B}$ der Rand von B erschöpft ist.

V zerfällt durch den Rand von B in drei einfach zusammenhängende Teile, von denen zwei längs einem Bogen von $\mathfrak{B}$ zusammenstoßen, während der dritte (eventuell innere Punkte entbehrende) Teil aus Punkten von U besteht, die B nicht angehören.

Endlich viele dieser den Punkten von $\mathfrak{B}$ zugeordneten Umgebungen genügen, um ganz $\mathfrak{B}$ zuzudecken. Wir dürfen dazu annehmen, daß keine derselben vollständig in einer anderen der endlich vielen enthalten ist.

2. Formulierung der Heftungsaufgaben. Nach diesen Vorbereitungen schreite ich zur Formulierung der Heftungsaufgaben. Ich unterscheide mehrere Fälle, je nachdem ob es sich um die Verheftung zweier verschiedener Bereiche längs einer Kurve $\mathfrak{B}$, oder um die Verheftung zweier zugeordneter Randbogen eines Bereiches handelt. So erhalte ich die folgenden vier Fälle:

1. Zwei verschiedene Bereiche A und B werden längs einer Randkurve vereinigt. Diese Randkurve ist mindestens bei dem einen der beiden zu vereinigenden Bereiche vom vollen Rande verschieden. Dann ist $A + B$ auf einen endlichen Kreis abbildbar.

2. Zwei verschiedene Bereiche werden längs einer Randkurve vereinigt, die bei beiden zu vereinigenden Bereichen mit dem vollen Rande identisch ist. Die Abbildung erfolgt auf die volle Ebene.

3. Zwei in einem Punkte P zusammenstoßende Randkurven eines Bereiches werden vereinigt. Beide zusammen erfüllen nicht den vollen Rand. Die Abbildung erfolgt auf einen endlichen Kreis.

4. Zwei in einem Punkte zusammenstoßende Randkurven eines Bereiches werden vereinigt. Beide zusammen erfüllen den vollen Rand. Die Abbildung erfolgt auf die volle Ebene.

3. Zurückführung auf Verschmelzungsaufgaben. Die Lösung der Heftungsaufgaben werden wir nun auf weitere Aufgaben zurückführen, die wir Verschmelzungsaufgaben nennen und im folgenden Paragraphen lösen werden.

Ich beginne mit den beiden ersten Heftungsaufgaben. Ich fasse irgendeinen inneren Punkt Q der zu verheftenden Kurve $\mathfrak{B}$ ins Auge und betrachte seine Umgebung U (Fig. 26). Diese hat sowohl mit A wie mit B

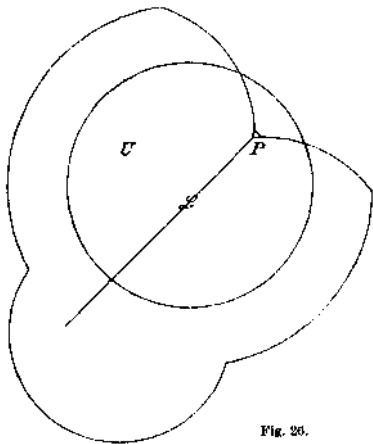


Fig. 26.

einen einfach zusammenhängenden Bereich gemein und man darf annehmen, daß der Rand von U die Kurve B unter von 0 und π verschiedenen Winkeln trifft. Denn dies kann man gegebenenfalls durch eine gewisse Vergrößerung der Kreisscheibe U erreichen. Unser weiteres Vorgehen soll nun das sein, daß wir erst A mit U vereinigen. Dadurch wird A um den B angehörigen Teil von U vergrößert. U hat mit A einen einfach zusammenhängenden Bereich gemein. *Die Aufgabe, den so erweiterten, durch sichelförmige Verschmelzung von A und U entstandenen Bereich auf einen Kreis abzubilden,*

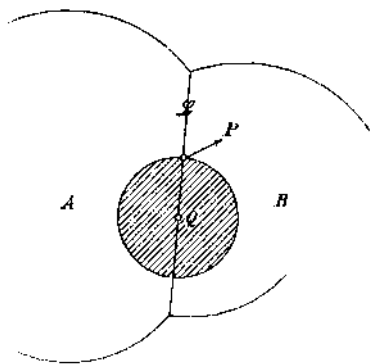


Fig. 27.

nennen wir die erste Verschmelzungsaufgabe. Wir werden sie im nächsten Paragraphen lösen. Nochmalige Anwendung derselben gibt dann die Möglichkeit, B mit $A + U$ zu verschmelzen. Als Ergebnis ist dann die Kreisabbildung eines Bereiches gelungen, der aus A und B zusammengeheftet ist. Aber die Heftung ist noch nicht längs ganz $\mathfrak{B}$ erfolgt, sondern erst längs eines inneren Teilbogens $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$. Wir können auch sagen, es sei nun erst ein Bereich abgebildet, der aus dem eigentlich abzubildenden durch Auf-

schneidung längs ein oder zwei Teilbogen von $\mathfrak{B}$ hervorgeht. Durch diesen Schritt wird die erste Heftimgsaufgabe auf die dritte und die zweite auf die vierte zurückgeführt, so daß wir uns nun nur noch mit der dritten und vierten Heftungsaufgabe zu befassen haben.

Im Rande des Bereiches kommen jetzt zwei Bogen vor, die einander zugeordnet sind und die von einem bei der Zuordnung sich selbst entsprechenden Punkt ausgehen. Auf der Riemannschen Fläche entspricht den beiden Bogen ein Kreisbogenpolygon und zugeordnete Punkte koinzidieren auf der Fläche. Dementsprechend reden wir auch von einem längs $\mathfrak{B}$ aufgeschlitzten Teilbereich der Riemannschen Fläche. Der bei der Zuordnung sich selbst entsprechende Punkt heiße P . Das Kreisbogenpolygon sei $\mathfrak{B}$. Wir wissen, daß man $\mathfrak{B}$ mit endlich vielen seinen Punkten zugeordneten Umgebungen zudecken kann.

Diesen Umgebungen entsprechen Kreise der Riemannschen Fläche, und wir nehmen an, daß keine dieser Umgebungen vollständig dem Inneren einer anderen verwendeten angehört.

Ich betrachte die Umgebung U von P und stelle mir die Sache zunächst auf der Riemannschen Fläche vor.

Es können hier drei Fälle eintreten, je nachdem der Rand von U die Kurve $\mathfrak{B}$ trifft oder nicht.

Im ersten in Fig. 25a dargestellten Fall haben wir wieder die schon erwähnte Aufgabe der sichelförmigen Verschmelzung vor uns. Denn die Umgebung U hat mit dem aufgeschlitzten und bereits auf einen Kreis abgebildeten Bereich einen einfach zusammenhängenden Bereich, nämlich die längs $\mathfrak{B}$ aufgeschlitzte Kreisscheibe U gemein. Und es handelt sich um die Kreisabbildung des durch *sichelförmige* Verschmelzung beider entstandenen Bereiches, der sich vom Ausgangsbereich dadurch unterscheidet, daß der Schlitz ein wenig kürzer geworden ist.

Der andere noch zu behandelnde Fall ist der, daß der Rand von U die Kurve $\mathfrak{B}$ nicht trifft. Ich nehme zunächst an, daß der Rand von U den Rand von B überhaupt nicht trifft. Dann gehört $\mathfrak{B}$ ganz dem Innern von U an, und B hat keine anderen Randpunkte, da der Rand ein Kontinuum bildet (Fig. 25b). *Hier liegt nun die zweite Verschmelzungsaufgabe vor. Es handelt sich jetzt um die gürtelförmige Verschmelzung.* Dem Bereich B und der Umgebung U ist nämlich jetzt der aufgeschlitzte Bereich U gemein. Der ist aber nun zweifach zusammenhängend.

In diesem Falle wird durch Lösung der Verschmelzungsaufgabe die Zuordnung von $\mathfrak{B}$ restlos vollendet.

Nun bleibt endlich der Fall, daß der Rand von U zwar den Rand des Bereiches nicht, aber die Kurve $\mathfrak{B}$ trifft, die von P ausgeht und deren Punkte einander paarweise so zugeordnet sind, daß P sich selbst entspricht. In diesem Fall zerfällt U durch den Rand des Bereiches in zwei Teile, deren einer U_1 der Durchschnitt von U und dem Bereich B ist. Er ist einfach zusammenhängend und wieder haben wir die erste der beiden Verschmelzungsaufgaben zu lösen, wodurch dann die auf B vorgeschriebene Zuordnung restlos realisiert ist (Fig. 25c).

Also nur im ersten Falle ist eine weitere Behandlung von $\mathfrak{B}$ nötig. Wir betrachten dann die Umgebung des aus Fig. 25a ersichtlichen Punktes Q und schließen wie oben weiter.

Sind wir dann mit $\mathfrak{B}$ fertig, so sehen wir zu, ob es dann am Rande vielleicht weitere paarweise zugeordnete Randkurven gibt, die einen Punkt entsprechend gemein haben. Sollte dies der Fall sein, so behandeln wir sie analog wie eben $\mathfrak{B}$.

Alles kommt somit auf die Lösung der beiden Verschmelzungsaufgaben hinaus

Man erkennt, daß man im Falle der dritten Heftungsaufgabe auf eine endliche Kreisscheibe geführt wird, weil bei jedem Schritt freie Ränder bleiben, während man bei der vierten auf die volle Ebene geführt wird.

Wir werden nämlich sehen, daß die erste der beiden erwähnten Verschmelzungsaufgaben (sichelförmige Verschmelzung) auf eine endliche Kreisscheibe, die andere (gürtelförmige) aber auf die volle Ebene führt.

§ 4. Die Verschmelzungsaufgaben.

1. Formulierung der Aufgaben. Ich nehme an, zwischen zwei auf Kreise umkehrbar eindeutig und konform abbildbaren Bereichen sei dadurch eine Beziehung hergestellt, daß zwischen zwei Teilbereichen derselben eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung bekannt ist. Von dieser Annahme ist die im § 3 erwähnte ein spezieller Fall. Dort nahmen wir an, daß die beiden Bereiche noch solagen, daß die Abbildungsbeziehung der Teilbereiche die Identität war. Es ist nun nur noch ein kleiner Schritt, anzunehmen, daß die beiden Bereiche selbst Kreise sind. Denn denken wir uns die Kreisabbildung beider

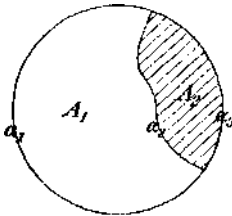


Fig. 28a.

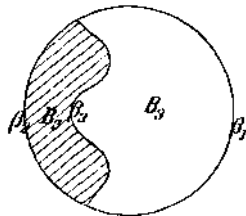


Fig. 28 b.

ausgeführt, so werden aus den beiden Teilbereichen Teilbereiche der beiden Kreise, zwischen welchen nach wie vor eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung besteht. Wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle:

1. Erste Verschmelzungsaufgabe (*Sichelförmige Verschmelzung*): Zwei einfach zusammenhängende Teilbereiche A_2 und B_2 der beiden zu verschmelzenden Teilbereiche A und B sind einander durch eine umkehrbare eindeutige konforme Abbildung zugeordnet. Beide Bereiche stoßen in einem — von der vollen Peripherie verschiedenen — Kreisbogen an die Peripherie ihrer Kreise an. Die Teilbereiche A_2 und B_2 werden von A und B durch stückweise analytische Kurven abgetrennt, die unter von 0 und π verschiedenen Winkeln die Peripherie wenigstens eines der Bereiche z. B. B treffen (Fig. 26). Der aus beiden durch Verschmelzung entstandene Bereich soll auf eine Kreisscheibe konform abgebildet werden.

2. Zweite Verschmelzungsaufgabe (*Gürtelförmige Verschmelzung*). Zwei zweifach zusammenhängende Teilbereiche der beiden zu verschmelzenden Bereiche sind einander zugeordnet. Beide Teilbereiche haben als

eine Grenzkurve die volle Peripherie ihres Kreises (Fig. 29). Der aus beiden durch Verschmelzung entstandene Bereich soll auf die volle Ebene konform abgebildet werden.

Wenn man sich vergegenwärtigt, daß es sich nach den Darlegungen des vorigen Paragraphen in diesen Verschmelzungsaufgaben um lauter Teil-

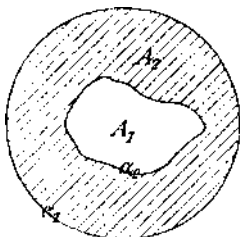


Fig. 29a.

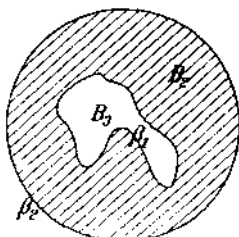


Fig. 29b.

bereiche einer Rieraanschen Fläche handelt, so bedarf die Formulierung der Verschmelzungsaufgaben keiner weiteren Erläuterung.

2. Lösung der ersten Verschmelzungsaufgabe. Ich stelle mir die beiden zu verschmelzenden Bereiche als Kreisscheiben vor. Die beiden in den beiden Kreisen A und B angebrachten Querschnitte α_2 und β_2 sind stückweise analytische Kurvenbogen, die bei B unter von Null und π verschiedenen Winkeln

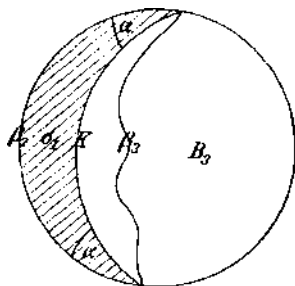


Fig.

30.

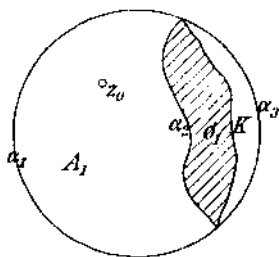


Fig. 31.

die Peripherie treffen. Dann hat es keine Schwierigkeit in der schraffierten Sichel der Fig. 28b einen Kreisbogen K anzugeben, der mit der Peripherie einen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$ für passendes ganzes positives n bildet. (Vgl. Fig. 30.) Diesem Kreisbogen entspricht in der Sichel der Fig. 28a ein analytischer Kurvenbogen K , der nun zusammen mit dem Peripheriebogen α , der nicht-

schraffierten Sichel dieses Kreises einen einfach zusammenhängenden Bereich bestimmt. In ihm wählen wir einen beliebigen Punkt z_0 , der bei der Abbildung in den Punkt $w = 0$ der Bildebene übergehen soll (Fig. 31). Diesen Bereich bilden wir nun tatsächlich schlicht auf einen Kreis ab, der $w = 0$ zum Mittelpunkt hat, durch eine Funktion $w = f(z)$, die somit bei z_0 verschwindet und dort die Ableitung Eins besitzen möge. Dem eben in der Sichel verzeichneten Kreisbogen K entspricht dabei nun ein Peripheriebogen K' dieses Kreises und dem in Fig. 30, 31 schraffierten Teil σ , der der Sichel entspricht eine an diesen Peripheriebogen angrenzende Sichel σ_1' (Fig. 32).

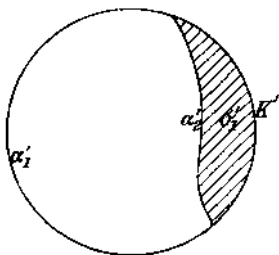


Fig. 32.

Somit kann man die in der Sichel σ , der Fig. 31 erklärte Abbildung durch Spiegelung über die beiden einander entsprechenden Peripheriebogen K und K' fortsetzen. Man erkennt so, daß man tatsächlich nun eine schlichte Abbildung eines Bereiches bekommen hat, der aus folgenden Stücken besteht: Die Sichel A_1 und σ_1 der Fig. 31. Daran durch Spiegelung angefügt das Spiegelbild σ_2 der Sichel σ_1 . Dieser entspricht in B das durch Spiegelung an K erhaltene Spiegelbild von σ_1 . An den

Bereich A_1 ist also nun schon eine Doppelsichel angefügt. Freilich ist dieser Vereinigungsbereich noch nicht auf einen Kreis abgebildet, aber er ist bereits schlicht auf einen einfach zusammenhängenden Bereich abgebildet, den man nun weiter auf einen Kreis abbildet, so daß dabei wieder das Bild des Punktes z_0 Mittelpunkt wird, und die Ableitung daselbst wieder Eins wird. Nun entspricht der Doppelsichel von B , die an ihren Ecken einen Winkel

$2\alpha = \frac{\pi}{2^{n-1}}$ besitzt, wieder eine Sichel dieses neuen Kreises, und da wieder zwei

kreisbogenförmige Ränder einander entsprechen, so kann man durch abermalige Spiegelung die Abbildung auf eine doppelt so große Sichel des Kreises B ausdehnen; nun übersieht man schon, daß man nach n Schritten den ganzen Bereich B aufgesaugt und die Abbildung auf den durch Verschmelzung von A und B entstehenden Bereich ausgedehnt hat. Die erste Verschmelzungsaufgabe hat also zu ihrer Lösung keinen neuen Grenzübergang verlangt. Daß die Abbildung am Bereichrand noch analytisch ist, ergibt sich aus dem stückweise analytischen Charakter des Randes von selbst. (Vgl. S. 31.) Es ergibt sich auch, daß die Abbildung auf eine endliche Kreisscheibe erfolgt.

3. Lösung der zweiten Verschmelzungsaufgabe. Wieder sind α_1 und β_2 stückweise analytische Kurven'. (Fig. 29a u. 29b.) Jetzt bringen wir in B_2 einen mit B

konzentrischen Kreis K (Fig. 33). Ihm entspricht in A_2 eine geschlossene analytische Kurve K' , die A_2 in zwei Ringe zerlegt. (Fig. 34.) Den aus A_1 und Q_1 bestehenden Bereich (Fig. 33, 34) bilden wir nun zunächst auf einen Kreis ab, und zwar so, daß die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ in einem beliebig gewählten Punkt z_0 von A_1 verschwindet und dort die Ableitung Eins hat. Dem Kreis K entspricht dabei die volle Peripherie und dem Ring φ_1 entspricht ein an die Peripherie anstoßender Ring φ'_1 . Somit kann man diese Abbildung

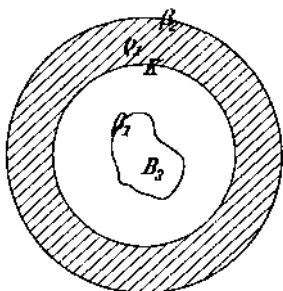


Fig. 33.

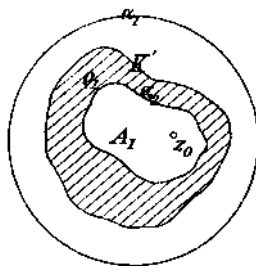


Fig. 34.

wieder durch Spiegelung auf einen anstoßenden Ring gleichen Radienverhältnisses ausdehnen und man hat so nunmehr einen Bereich schlicht abgebildet, welcher aus A_1 , dem Ring φ_1 und seinem Spiegelbild an K (Fig. 33) besteht. Man kann den schlichten Bildbereich nun wieder in einen Kreis überführen, so daß das Bild von z_0 wieder Mittelpunkt wird und die Ableitung im Mittelpunkt Eins bleibt. Setzt man dieses Verfahren in infinitum fort, so erhält man die Vereinigung beliebig großer Stücke von B mit A . Es bleibt aber nun zu zeigen, daß die so erhaltene Folge von Abbildungsfunktionen in dem aus A und B zusammengesetzten Bereich gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, welche die Abbildung des vereinigten Bereiches auf eine volle Ebene vermittelt. Es wird sich nämlich zeigen, daß die Radien der schrittweise erhaltenen Bildbereiche über alle Grenzen wachsen und daß die Grenzfunktion im Mittelpunkt von B einen einfachen Pol besitzt. Zunächst sind die erhaltenen Einzelfunktionen von einer gewissen Nummer an in einem beliebig großen Teilbereich von $A + B$ erklärt, den man erhält, wenn man von B eine beliebige Umgebung seines Mittelpunktes entfernt.

Ich wähle eine Folge von Kreisen mit monoton nach Null strebenden Radien um den Mittelpunkt von B und vereinige immer mit A das Äußere B_n eines solchen Kreises. Ich erhalte so eine Folge von Bereichen

$A + B_n$ von der Art, daß in jedem derselben alle Funktionen der Folge von einer gewissen Nummer an erklärt, analytisch und schlicht sind. Der Verzerrungssatz lehrt, daß in einem jeden Bereich $A + B_n$ die darin erklärten Funktionen gleichmäßig beschränkt sind. Denn das ergibt sich zunächst ohne weiteres für die Umgebung des Mittelpunktes von A . Da man aber jeden Bereich $A + B_{n+1}$, nach seiner Abbildung auf eine Kreisscheibe¹⁾, mit endlich vielen Kreisscheiben zudecken kann, so ergibt sich durch endlichmalige Anwendung des Verzerrungssatzes die gleichmäßige Beschränktheit für $A + B_n$. Wenn nun die gegebene Funktionenfolge nicht in jedem Teilbereich $A + B_n$ gleichmäßig konvergierte, so könnte man zunächst zwei Teilfolgen auswählen, die beide in unendlich vielen Punkten von $A + B_n$ Grenzwerten zustrebten so aber, daß darunter ein Punkt wäre, in dem sie beide verschiedenen Grenzwerten zustrebten. Nach dem Vitalischen Satze konvergiert dann jede dieser Funktionenfolgen gleichmäßig in jedem Bereich $A + B_n$. Beide Folgen streben aber verschiedenen Grenzfunktionen zu, die aber beide in jedem Bereiche $A + B_n$ regulär sind.

Betrachten wir nun eine der beiden Grenzfunktionen weiter. Ich behaupte, daß sie im Mittelpunkt von B einen einfachen Pol hat, und daß sie den aus A und B zusammengesetzten Bereich schlicht auf eine volle Ebene abbildet. Ich zeige zunächst, daß die Abbildung schlicht ist, daß also die Grenzfunktion keinen Wert zweimal annimmt. Wäre das nämlich der Fall, so beachte man, daß die Grenzfunktion nicht konstant sein kann, weil im Mittelpunkt von A ihre Ableitung Eins ist. Daher lehrt der Satz von Rouché, daß auch alle Näherungsfunktionen genügend hoher Nummer denselben Wert an zwei verschiedenen Stellen annehmen müßten. Dies widerspricht aber der Schlichtheit der von denselben vermittelten Abbildungen. Die Grenzfunktion ist somit eine Funktion, welche in der Umgebung des Mittelpunktes von B regulär und eindeutig ist, und welche daselbst keinen Wert mehr als einmal annimmt. Nach dem S. 152 des ersten Bandes bewiesenen elementaren Teil des Picardschen Satzes, kann aber diese Stelle keine wesentlich singuläre Stelle derselben sein. Sie ist vielmehr entweder eine reguläre Stelle oder aber ein Pol. Ist sie ein Pol, so kann sie nur ein einfacher Pol sein, weil sonst in der Nähe einzelne Werte mehrfach angenommen würden. Regulär kann aber die Stelle auch nicht sein. Dann wäre nämlich die Funktion in dem aus A und B zusammengesetzten geschlossenen funktionentheoretischen Bereich beschränkt und würde eine schlichte Abbildung desselben auf einen beschränkten Bereich vermitteln. Das geht aber nicht an,

1) einer w_{n+1} -Ebene. Man fasse nun alle Funktionen, die bei dem Verschmelzungsverfahren auftreten, als Funktionen von w_{n+1} auf. Sie verschwinden bei $w_{n+1} = 0$ und haben dort die Ableitung Eins.

wie man leicht aus der Betrachtung einer Punktfolge dieses beschränkten Bereiches erkennt, welche gegen einen Randpunkt desselben konvergiert. Diese Überlegung lehrt auch, daß der Bildbereich keine Randpunkte besitzen kann.

Daher vermittelt die Grenzfunktion eine schlichte Abbildung von $A + B$ auf eine volle Ebene. Das gleiche gilt aber von der anderen Grenzfunktion, welche von der eben betrachteten verschieden ist. Daher wird durch Vermittlung beider eine schlichte Abbildung der vollen Ebene auf sich selbst vermittelt, welche den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt festläßt und welche im Nullpunkt die Ableitung Eins hat. Eine solche Abbildung ist aber die Identität, und daher sind beide Grenzfunktionen gleich. Die Annahme also, aus der sich ihre Verschiedenheit ergab, wird hinfällig und daraus folgt, daß die ursprüngliche Funktionenfolge in $A + B$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, welche diesen Bereich schlicht auf die volle Ebene abbildet. Damit ist auch die zweite Verschmelzungsaufgabe erledigt.

§ 5. Die Abbildung der geeignet aufgeschnittenen Riemannschen Fläche wird beendet*

1. Konvergenz. Der Beweis des Uniformisierungssatzes läuft nach S. 160 darauf hinaus, die Riemannsche Fläche der zu uniformisierenden Funktion schlicht abzubilden. Als eine Vorstufe zu diesem Beweis hatten wir S. 161 in Aussicht genommen, erst einmal eine umkehrbar eindeutige Abbildung der eventuell auch passend zerschnittenen Riemannschen Fläche vorzunehmen.

Unser Verfahren beruhte auf einer mehrmaligen Verwendung der Heftungsaufgaben. Es konnte nach endlich vielen Schritten zum Ziel führen. Es konnte sich dabei unter Umständen sogar die umkehrbar eindeutige Abbildung der unzerschnittenen Riemannschen Fläche auf die volle Ebene ergeben. Im allgemeinen aber wird man zur Erlangung einer Abbildung der eventuell zerschnittenen Riemannschen Fläche die Heftungsaufgaben unendlich oft verwenden müssen. Man erhält so die Kreisabbildung einer Folge wachsender Teilbereiche B_k der Riemannschen Fläche der zu uniformisierenden Funktion. Wachsende Teilbereiche bedeutet, daß B_k Teilbereich von B_{k+1} ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß die so erhaltene Funktionenfolge in jeder abgeschlossenen Teilmenge eines jeden Bereiches B_n gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die die zerschnittene Fläche auf eine schlichte Kreisscheibe abbildet. Wir denken uns alle Funktionen in einem festen gewöhnlichen Punkt O des ersten Bereiches B_1 so normiert, daß sie dort verschwinden und die Ableitung Eins haben. Der Bereich B_n werde dabei

auf $|w_n| < r_n$ abgebildet. Die Funktionen

$$f_{n,h}(z) \quad h \geq 0$$

sind in B_n erklärt, und können als in $|w_n| < r_n$ reguläre und schlichte Funktionen

$$\varphi_{n,h}(w_n)$$

aufgefaßt werden, welche bei $w_n = 0$ verschwinden und dort die Ableitung 1 haben. Aus einem abgeschlossenen Teilbereich G von B_n wird durch

$$w_n = f_n(z)$$

ein abgeschlossener Teilbereich G' von $|w_n| < r_n$. Der Konvergenzbeweis läuft darauf hinaus, zu zeigen, daß die $\varphi_{n,h}(w_n)$ für $h = 1, 2, \dots$ in G' gleichmäßig konvergieren. Wir betten G' in einen Kreis

$$|w_n| \leq \varrho < r_n$$

ein und zeigen zunächst, daß es passende Teilfolgen der $\varphi_{n,h}$ gibt, die in $|w_n| \leq \varrho$ gleichmäßig konvergieren. Dies ist eine unmittelbare Folge des Verzerrungssatzes von S. 77. Dieser lehrt nämlich, daß die $\varphi_{n,h}$ in $|w_n| \leq \varrho + \frac{r_n - \varrho}{2}$ gleichmäßig beschränkt sind.

Daher kann man aus jeder Teilfolge der $\varphi_{n,h}$ zunächst eine andere auswählen, die in einer abzählbaren Teilmenge $a_1, a_2, \dots$ von $|w_n| \leq \varrho$ konvergiert, wobei die a_k in $w_n = a$, wo $|a| < \varrho$, sich häufen mögen. Das geschieht nach einem Bd. I, S. 172 ff. auseinandergesetzten Verfahren. Nach dem Vitalischen Satz konvergiert dann diese Folge in $|w_n| \leq \varrho$ gleichmäßig.

Wenn nicht die Folge $\varphi_{n,h}$ selbst in $|w_n| \leq \varrho$ konvergiert, so kann man hiernach zwei Teilfolgen bestimmen, die gegen verschiedene Grenzfunktionen konvergieren. Wir betrachten eine solche Folge weiter. Ihr entspricht eine gewisse Teilfolge der $f_n(z)$, die in G gleichmäßig konvergiert.

Nach dem Satz von Vitali konvergiert diese Teilfolge dann in jeder abgeschlossenen Teilmenge Γ eines beliebigen Bereiches B_r , die G umfaßt, gleichmäßig. Um das einzusehen, bilde man B_n samt Γ durch $f_n(z) = w_n$ ab und fasse die Glieder der Teilfolge als Funktionen von w_n auf. Sie konvergieren dann in der G entsprechenden unendlichen abgeschlossenen Teilmenge von Γ und konvergieren daher in Γ selbst nach Vitali gleichmäßig.

Die Grenzfunktion ist jedenfalls nicht konstant, da sie bei 0 verschwindet und die Ableitung Eins besitzt.

2. Schlichte Abbildung durch die Grenzfunktion. Ich zeige zunächst mit Hilfe des Satzes von Rouché, daß auch die Grenzfunktion eine schlichte Abbildung des Inneren von G vermittelt. Falls die Grenzfunktion ein und denselben Wert an zwei verschiedenen Stellen im Inneren von G annimmt, so lege ich um diese Stellen zwei Kreisscheiben, die man Bieberbach, Funktionentheorie II. 2. Aufl.

so klein wählen kann, daß sie einander nicht treffen. Man wähle sie so, daß auf ihren Rändern die Grenzfunktion jenen Wert nicht annimmt. Sei a jener Wert und $f(z)$ die Grenzfunktion, so besitzt $f(z) - a$ auf dem Rande der Kreisscheiben ein positives Minimum : m . Man wähle die Nummer N so, daß für $n > N$ auf dem Rand der Kreisscheiben

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

ist. Dann besitzt nach dem Satze von Rouché

$$\{f(z) - a\} + \{f_n(z) - f(z)\} = f_n(z) - a$$

in jeder Kreisscheibe ebenso viele Nullstellen wie $f(z) - a$. Es nimmt also auch $f_n(z)$ in jeder der Kreisscheiben den Wert a mindestens einmal an. Das widerspricht der Schlichtheit der durch $f_n(z)$ vermittelten Abbildung. Wenn aber $f(z)$ einen Wert an einer Stelle mehrfach annimmt, so genügt es schon, eine Kreisscheibe in der eben geschehenen Weise zu untersuchen.

3. Randverhalten der Grenzfunktion. Ich untersuche nun das Verhalten unserer Teilfolge und ihrer Grenzfunktion am Rande der zerschnittenen Riemannschen Fläche. Ich betrachte zu dem Zwecke irgendeinen Bereich B_k . Er ist von endlich vielen Kreisbogen begrenzt, die nur gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche enthalten. Ein Randpunkt von B_k ist entweder Randpunkt auch aller folgenden B_n ($n \geq k$) oder aber er ist von einer gewissen Nummer $n = N$ an innerer Punkt aller B_n ($n \geq N$). In diesem letzteren Falle konvergiert unsere Teilfolge in seiner Umgebung gleichmäßig — wie man durch passende Wahl von Γ den vorausgegangenen Betrachtungen entnimmt.

Für den ersten Fall wollen wir nun die gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge auch in einer B_k oder seinem Rande angehörigen Teilumgebung des Randpunktes beweisen. Der Randpunkt sei P .

Man darf dabei annehmen, daß die Nummer k so groß sei, daß die volle Umgebung des Punktes P der Riemannschen Fläche dem Bereiche B_k oder seinem Rande angehört. Denn ein P im Inneren enthaltendes Funktionselement hat nach endlich vielen Schritten unseres Abbildungsverfahrens Verwendung gefunden. Die Vorschrift für das bei jedem Schritt heranzuziehende Funktionselement lautet nämlich dahin, daß jeweils dasjenige Element kleinster Nummer genommen werden soll, welches mit dem beim vorausgegangenen Schritt bereits abgebildeten Bereich einen Gebietsteil gemein hat. Dies hat aber zur Folge, daß jedes der abzählbar vielen auf S. 162 eingeführten Funktionselemente Verwendung finden muß. Denn wenn JE irgend ein solches Element ist, so verbinde man seinen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des ersten Elementes durch eine stetige Kurve. Endlich viele Elemente unserer abzählbaren Elementemenge genügen, um diese Kurve so zu bedecken, daß jeder ihrer Punkte innerer Punkt eines der Elemente ist. Durchläuft man

die stetige Kurve vom Ausgangselement bis zu E hin, so trifft man die endlich vielen Elemente in einer solchen Reihenfolge an, daß jedes folgende mit dem vorhergehenden einen Gebietsteil gemein hat und daher muß jedes derselben also auch E bei dem Abbildungsverfahren Verwendung finden.

Diese Überlegung lehrt zugleich, daß jeder Punkt der Riemannschen Fläche von einer gewissen Nummer an innerer oder Randpunkt der B_k ist.

Das zu untersuchende Verhalten der Grenzfunktion $f(z)$ am Rande der B_k wird uns also zugleich lehren, daß tatsächlich durch $f(z)$ eine Abbildung der vollen — allerdings aufgeschnittenen — Riemannschen Fläche geleistet wird.

Ich darf also jetzt zur Betrachtung des Randpunktes P von B_k übergehen, dessen volle Umgebung dem B_k oder seinem Rande angehört. Nun sind zwei Fälle denkbar. Der erste ist der, daß P innerer Punkt eines Randbogens B von B_k ist, welcher auch Randbogen aller B_n ($n \geq k$) ist.

Der andere ist der, daß es keinen solchen Bogen gibt. Es gibt dann also beliebig nahe bei P Randpunkte von B_k , die allmählich innere Punkte der B_n werden, wenn n hinreichend groß ist, ohne daß jedoch P selbst innerer Punkt wird. Nun aber besteht der Rand von B_k in der Umgebung von P aus einem oder auch aus zwei dort zusammentreffenden Kreisbogen, und es gibt im Rand von B_k noch einen oder auch zwei weitere Kreisbogen, die mit diesem oder mit diesen auf der Riemannschen Fläche koinzidieren. Für die Punkte eines solchen Kreisbogens kann sich aber an der Alternative „innerer oder Randpunkt“ eines B_n ($n \geq k$) nur durch den Vollzug einer Ränderzusammenheftung etwas ändern. Wenn diese aber erst in einem P benachbarten inneren Punkt eines der Kreisbogen vorzunehmen ist, so ist sie nach unseren Vorschriften auf den ganzen Kreisbogen oder auf das ganze P enthaltende Kreisbogenpaar zu erstrecken.

Daher kommt diese zweite vorhin als denkbar bezeichnete Möglichkeit nicht vor und es gibt stets einen P als inneren Punkt enthaltenden Randbogen von B_k , der auch Randbogen aller B_n ($n \geq k$) ist. Ich kann daher durch einen Kreis mit P als Mittelpunkt von B_k eine Halbumgebung abtrennen, die sich als Kreisbogenzweieck oder Kreisbogendreieck darstellt.

Ich werde nun zeigen, daß unsere Teilfolge der $f_n(z)$ in diesem abgeschlossenen Kreisbogenpolygon gleichmäßig konvergiert, und daß die Grenzfunktion dasselbe so schlicht abbildet, daß der P enthaltende Randbogen von B_k in einen Kreisbogen übergeht.

Zum Beweis betrachte ich die $f_n(z)$ als Funktionen

$$\varphi_{k,h}(w_k), \quad h = n - k$$

im Kreise $|w_k| < r_k$. Die Funktion $f_k(z)$ ist auch am Rande von B_k stetig und in den inneren Punkten der am Rande beteiligten Kreisbogen regulär

analytisch. Die Halbumgebung von P geht daher in eine gewisse Teilseichel σ des Kreises $|w_k| < r_k$ über, die sich an einen das Bild P' von P enthaltenden Kreisbogen anschließt. Die Funktionen $\varphi_{k,i}(w_k)$ sind in dieser Seichel und an ihrem Rande regulär und bilden sie schlicht auf ebensolche Seicheln ab, so daß dabei der P' enthaltende Kreisbogen in Kreisbogen der Kreise $|w_n| \rightarrow r_n$ übergeht. Daher sind die $\varphi_{k,i}(w_k)$ auch in der Doppelseichel regulär und schlicht, die man aus 6 durch Spiegelung am Kreise $|w_k| \rightarrow r_k$ erhält. Außerdem konvergiert die unserer Teilfolge der $f_n(z)$ entsprechende Teilfolge der $\varphi_{k,i}(w_k)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von 6 gleichmäßig gegen eine nicht konstante Grenzfunktion. Der Verzerrungssatz lehrt daher, daß die Teilfolge in jedem abgeschlossenen Teilbereich der Doppelseichel gleichmäßig beschränkt ist, und daher lehrt der Satz von Vitali die gleichmäßige Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilbereich der Doppelseichel, namentlich also in einer Umgebung des Punktes P .

Die Radien r_n bilden nun eine Folge wachsender Zahlen, weil B_n ein Teilbereich von B_{n+1} ist. Die eben bewiesene Konvergenztatsache lehrt daher, daß die r_n einem endlichen Grenzwert r zustreben. Die Grenzfunktion bildet dann den P -enthaltenden Kreisbogen auf einen Bogen dieses Grenzkreises ab, wie ohne weiteres einleuchtet.

Wie wir vorhin feststellten, ist nach endlich vielen Schritten für jeden Punkt der Riemannschen Fläche entschieden, ob er einmal innerer Punkt der B_k wird oder nicht, und in diesem letzteren Fall ist auch nach endlich vielen Schritten über den Verlauf des Randes der B_k in der Umgebung dieses Punktes entschieden. Da jeder Punkt der Riemannschen Fläche als innerer oder Randpunkt Verwendung findet, so wird durch unser Verfahren entweder die unzerschnittene Fläche umkehrbar eindeutig und schlicht abgebildet, oder aber es wird die Riemannsche Fläche durch abzählbar viele Kreisbogen in einen Bereich verwandelt, der durch eine in seinem Innern und auf den Kreisbogen reguläre Funktion auf einen schlichten Bereich abgebildet wird.

4. Die Grenzfunktion leistet die Abbildung auf eine volle Kreisscheibe. Ich werde nun weiter zeigen, daß dieser schlichte Bereich stets eine volle Kreisscheibe ist, deren Radius der endliche oder unendliche Grenzwert r der r_n ist.

Da die r_n ständig wachsen, kann jedenfalls der durch die Grenzfunktion erhaltene Bildbereich keine Punkte außerhalb dieses Kreises vom Radius r haben. Es bleibt nur zu zeigen, daß dieser Kreis vom Bildbereich vollständig bedeckt wird.

Ich wähle irgend eine Kreisscheibe $|w| \leq \rho_1 < r$ und will zeigen, daß sie vom Bild der Riemannschen Fläche bedeckt wird. Ich wähle $\rho_1 < \rho < r$

und $\varrho < r_n < r$ und betrachte für $p > 0$ die f_{n+p} der Teilfolge als Funktionen von w_n . Diese Funktionen sind in $|w_n| < r_n$ regulär und schlicht, verschwinden im Mittelpunkt und haben dort die Ableitung Eins. Im Falle, daß r endlich ist, lehrt das Prinzip, wonach das Maximum des absoluten Betrages am Rande angenommen wird, daß

$$\left| \frac{\varphi_{n,p}}{w_n} \right| \leq \frac{r}{r_n}.$$

Nunmehr wähle ich irgend eine Zahl $A > 1$ und wähle noch n so groß, daß

$$\frac{r}{r_n} < A.$$

Der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ ist ja Eins.

Im Falle, daß r unendlich ist, bediene ich mich des Verzerrungssatzes, statt des Prinzips des Maximums. Ihm entnehme ich, daß

$$\left| \frac{\varphi_{n,p}}{w_n} \right| \leq \left(\frac{r_n}{r_n - |w_n|} \right)^2.$$

Beschränkt man aber w_n auf $|w_n| < \varrho$ und wählt n hinreichend groß, so wird

$$\left(\frac{r_n}{r_n - |w_n|} \right)^2 < A,$$

wo A die gerade eingeführte beliebig gewählte Zahl oberhalb Eins bedeutet.

Ich setze in beiden Fällen

$$g_n = \frac{\varphi_{n,p}}{w_n} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k^{(n)} (w_n)^{k-1}.$$

Nun ist für $R < r_n$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(Re^{i\varphi})|^2 d\varphi = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k^{(n)}|^2 R^{2(k-1)}.$$

Andererseits wird

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(Re^{i\varphi})|^2 d\varphi < A^2.$$

Daher ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k^{(n)}|^2 R^{2(k-1)} < A^2 - 1.$$

Nun ist für $|w_n| \leq \varrho$

$$|\varphi_{n,p} - w_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)}| \varrho^k = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)}| R^k \cdot \left(\frac{\varrho}{R} \right)^k.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung wird somit für $\varrho < R < r_n$

$$\begin{aligned} |\varphi_{n,p} - w_n| &\leq \sqrt{\sum_1^{\infty} |\alpha_k^{(n)}|^2 R^{2k}} \cdot \sqrt{\sum_2^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2k}} \\ &< \sqrt{A^2 - 1} \varrho \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2}. \end{aligned}$$

Nun sei s eine beliebige Zahl größer als Null. Da A eine beliebige Zahl größer als Eins ist, so kann man sie insbesondere so wählen, daß die linke Seite dieser Abschätzung kleiner als s wird. Wählt man insbesondere $\varepsilon < \varrho - \varrho_1$, so erkennt man, da dies für alle $p > 0$ gilt, daß auch für die Grenzfunktion

$$|f - w_n| < \varepsilon$$

in $|w_n| < \varrho$ und man sieht, daß der durch f erhaltene Bildbereich von $|w_n| < \varrho$ den Kreis $|w_n| < \varrho_1$ bedeckt.

Damit ist nun gezeigt, daß die durch die abzählbar vielen Kreisbogen zerschnittene Riemannsche Fläche auf eine Kreisscheibe (mit endlichem oder unendlichem Radius) umkehrbar eindeutig abgebildet wird.

Die Abbildung ist auch am Rande stetig und in den inneren Punkten der am Rande beteiligten Kreisbogen analytisch. Daher können wir sagen, die Riemannsche Fläche sei durch die abzählbar vielen Kreisbogen in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt worden. Einfach zusammenhängend heißt ein Bereich, wenn jede in ihm enthaltene geschlossene Jordankurve den Bereich in Teilbereiche zerlegt, deren einer nach Vereinigung mit der Jordankurve eine aus nur inneren Punkten bestehende Menge liefert. Für schlechte Bereiche stimmt diese Definition, wie leicht zu sehen, mit der in Bd I, S. 86 gegebenen auf die Untersuchung des Randes gestützten überein. Für Riemannsche Flächen ist jene Definition aus Bd. I nicht verwendbar. Ist hier doch nicht einmal für beliebige Flächen der Begriff Randpunkt definiert worden.

Wendet man unsere Betrachtung auf beliebige ebene Bereiche an, so erkennt man, daß man jeden solchen Bereich durch abzählbar viele Kreisbogen in einen einfach zusammenhängenden zerschneiden kann.

Zum Schluß können wir auch erkennen, daß die Folge der $f_n(z)$ gleichmäßig konvergiert, daß also eine Auswahl zwecks Übergang zu einer konvergenten Teilfolge gar nicht nötig war.

Wenn nämlich die $f_n(z)$ nicht selbst konvergierten, so könnte man zwei Teilfolgen bestimmen, die gegen verschiedene Grenzfunktionen konvergieren. Daß aber beide übereinstimmen müssen, folgt aus der bewiesenen Abbildungseigenschaft der Grenzfunktion. Da nämlich durch diese die Abbildung auf einen Kreis geleistet wird, so können sich beide nur um eine Abbildung

unterscheiden, die den einen Bildkreis in den anderen überführt, und die den Mittelpunkt festläßt und dort die Ableitung Eins hat. Das kann nur die identische Abbildung sein.

Also konvergieren die $f_n(z)$ selbst gegen eine Grenzfunktion.

§ 6. Beweis des Hauptsatzes der Uniformisierungstheorie für offene Riemannsche Flächen.

1. Beschreibung des Verfahrens. Durch die vorausgegangenen Betrachtungen ist das Uniformisierungsproblem stets dann gelöst, wenn eine Zerschneidung der Riemannschen Fläche nicht nötig wurde, also z. B. dann, wenn die Abbildung auf eine Kreisscheibe mit unendlichem Radius erfolgte.

Eine weitere Erörterung verlangt dagegen der Fall, wo innere Punkte der Riemannschen Fläche in Randpunkte des Kreises abgebildet werden. Hier wollen wir *zwei Fälle* unterscheiden. Nämlich einmal den, wo alle Peripheriepunkte aus der Abbildung innerer Punkte der Riemannschen Fläche entspringen und den, wo das nicht der Fall ist. Ich nehme diesen zweiten Fall als den einfacheren vorweg. In diesem Falle gibt es auf der Peripherie des Bildkreises der zerschnittenen Riemannschen Fläche Punkte, die nicht Bilder innerer Punkte der Riemannschen Fläche sind. Außerdem kommen auf der Peripherie Bogen vor, die aus den Querschnitten der Riemannschen Fläche entstammen, und die daher paarweise durch analytische Beziehungen einander zugeordnet sind. Aber niemals stoßen zwei solche Bogen in einem bei der Zuordnung sich selbst entsprechenden Punkte zusammen. Ich denke mir den erhaltenen Bildkreis in unendlich vielen Exemplaren. Diese nummeriere ich. Ebenso nummeriere ich die, eckenfreien Kreisbogen der Riemannschen Fläche entsprechenden Peripheriebogen. Ich gehe von der ersten Kreisscheibe aus, und hefte an sie die zweite längs eines Paares zugeordneter Randkurven an. Die Zuordnung soll längs demjenigen Randbogen erfolgen, der im ersten Exemplar die Nummer Eins trägt. Dieser Anheftung kann man mit Hilfe einer endlich oftmaligen Anwendung der Heftungsaufgaben nachkommen, weil nämlich der abgeschlossene Peripheriebogen einem aus lauter gewöhnlichen Punkten der Riemannschen Fläche bestehenden Kreisbogen derselben entspricht. Man kann ihn daher wie früher mit endlich vielen bei der Verheftung zu verwendenden Kreisscheiben zudecken. Wir erhalten so die Kreisabbildung eines über der Riemannschen Fläche ausgebreiteten Bereiches, der aus zwei Exemplaren der zerschnittenen Fläche zusammengesetzt ist. Seine aus inneren Punkten der Fläche hervorgehenden Peripheriebogen entsprechen wieder den kreisförmigen auf der Fläche angebrachten Einschnitten. Sie sind am Kreise durch ein Nummernpaar kenntlich, von denen die erste die Nummer der Kreisscheibe angibt, der der Bogen ur-

sprünglich angehörte, während die zweite die Nummer des Randbogens der Kreisscheibe angibt. Diese zweiten Nummern sind einander paarweise zugeordnet, da mehrere derselben demselben Kreisbogen der Fläche entsprechen. Ebenso sollen die Randbogen der noch nicht angehefteten Kreisscheiben durch ein Nummernpaar bezeichnet werden. Überall, wo sich nun weiter Randstücke zeigen, welche inneren Punkten der Riemannschen Fläche entsprechen, soll ein weiteres Exemplar des Bildkreises angeheftet werden.

Es handelt sich nun nur darum, eine solche Ordnung in dies Anheften zu bringen, daß man sicher ist, daß das Verfahren, das ja ständig durch Anheftung wachsende Bereiche liefert, zu einem Grenzbereich führt, auf den die Riemannsche Fläche in der Umgebung einer jeden ihrer Stellen umkehrbar eindeutig und analytisch abgebildet ist. Diesem Zwecke kann folgende Vorschrift dienen. Zunächst soll nach jeder Anheftung geprüft werden, ob im Rande des abgebildeten Bereiches zugeordnete Randbogenpaare vorkommen, die einen zugeordneten Punkt gemein haben. Dann sollen diese beiden Bogen verheftet werden. Eventuell kann es nötig sein, unendlich viele solcher Bogenpaare zu verheften. Die Konvergenzbetrachtung des vorigen Paragraphen lehrt aber, daß man dem durch einen konvergenten Prozeß nachkommen kann. Sind alle möglichen Verheftungen von Randbogeupaares vorgenommen, so schreiten wir zur Anheftung einer neuen Kreisscheibe. Die neue Anheftung soll jedesmal an dem freien Bogen erfolgen, der die kleinste Nummernsumme trägt. Gibt es mehrere dieser Art, so sollen sie in irgendeiner Reihenfolge herankommen. Angeheftet wird immer die Kreisscheibe kleinster Nummer, welche noch nicht angeheftet ist, es sei denn, daß es an dem Bereich selbst einen Bogen gibt, der dem zu behandelnden Bogen entspricht und einen bei der Zuordnung sich selbst entsprechenden Punkt mit ihm gemein hat. Dann sollen diese beiden Bogen aneinandergeheftet werden. Zugeordnet heißen dabei immer Randbogen, die den beiden Ufern eines Einschnittes der Riemannschen Fläche entsprechen. Man erhält so eine Folge $B_1, B_2 \dots$ wachsender Bereiche, deren jeder schlicht auf eine Kreisscheibe abgebildet werden kann. Nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen konvergieren die Funktionen dieser Folge, wofern man sie alle in einem festen Punkt des ersten Exemplares wie damals normiert, in jeder abgeschlossenen Teilmenge eines jeden Bereiches der Folge, gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, welche jeden Bereich B_n schlicht abbildet. Soweit gelten die Betrachtungen auch in dem anderen der beiden eingangs unterschiedenen Fälle. In dem Falle aber, auf den wir uns vorerst beschränken wollen, ist die Abbildung in der Umgebung einer jeden Stelle der ursprünglichen Riemannschen Fläche umkehrbar eindeutig. Denn entweder entspricht einer solchen Stelle der Riemannschen Fläche ein innerer Punkt der ersten

und damit jeder verwendeten Bildkreisscheibe. Dann ist die Richtigkeit der Behauptung klar. Oder aber es entspricht der betreffenden Stelle der Riemannschen Fläche ein innerer Punkt eines Peripheriebogens. Dann wird dieser zu einem inneren Punkt des Bildbereiches, sowie längs dieses Peripheriebogens eine Anheftung erfolgt ist. Diese aber erfolgt doch so, daß nach derselben in den inneren Punkten des Bogens eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zu der Riemannschen Fläche statt hat. Bei der Durchführung der Heftung werden ja gerade die durch die Riemannsche Fläche vorgeschriebenen Umgebungen der inneren Punkte der Bogen verwendet. Endlich aber kann es so sein, daß ein innerer Punkt der Riemannschen Fläche in einen Peripheriepunkt übergeht, der nicht innerer Punkt eines der Zuordnung unterliegenden Bogens ist. Da er aber dann innerer Punkt eines bei der Abbildung auf den Bildkreis verwendeten Elementes der Fläche ist, so zeigt sich, daß er gemeinsamer Endpunkt zweier in ihm zusammenkommenden Peripheriebogen ist. Jene von dem eben, genannten Element gebildete Umgebung des Flächenpunktes erscheint in endlichviele Teile zerlegt, welche an verschiedene Stellen der Peripherie verteilt sind.

Wir nennen diese Stellen Ecken und nennen die Gesamtheit der einem Flächenpunkt entsprechenden Ecken einen Eckenzyklus. Ist P eine solche Ecke, so kann man an die beiden in dieser Ecke zusammenstoßenden Peripheriebogen weitere Exemplare des Bildkreises anheften, bis man von jeder dem Zyklus angehörigen Ecke ein Exemplar in V untergebracht hat. Dann schließt sich das Verfahren um diese Ecke durch Aneinanderheften der letzten freien Kanten und man hat in der Umgebung der Ecke eine umkehrbar eindeutige Beziehung zur Umgebung der entsprechenden Stelle der Fläche.

2. Erfolg des Verfahrens. Nun aber haben wir eine bestimmte Vorschrift für den Fortgang des Uniformisierungsprozesses gegeben und wir müssen zeigen, daß man durch dieses Verfahren gerade auch in den Ecken eine umkehrbar eindeutige Beziehung auf die Umgebung der entsprechenden Stelle der Riemannschen Fläche erhält. Um das einzusehen erinnere ich zunächst noch einmal an den Verlauf des Verfahrens. Es wechseln immer ab: Anheftung eines neuen Exemplares der Kreisscheibe und Aneinanderheftung derjenigen zugeordneten Randbogen, welche einen zugeordneten Punkt gemein haben. Ich betrachte den Moment der Anheftung einer neuen Kreisscheibe. Die bis dahin aneinandergehefteten Kreisscheiben erscheinen auf einen Kreis B_n abgebildet. Auf seiner Peripherie liegen verschiedene Ecken im Sinne der vorhin gegebenen Definition. Ich nehme an, daß wie bei der ersten Kreisscheibe B_1 die B_n angehörige Teilumgebung einer jeden Ecke umkehrbar eindeutig auf einen Teil der Umgebung der entsprechenden Stelle der Riemannschen Fläche bezogen sei. Ich drücke das so aus, daß ich sage, in keiner Ecke

sei der Zyklus voll oder überfüllt. Ich werde zeigen, daß dann auch B_{n+1} , der sich durch Anheftung einer neuen Kreisscheibe K_{n+1} an B_n und Ausführung der Randheftung ergibt, diese gleiche Eigenschaft besitzt.

Die Anheftung von K_{n+1} erfolgt in einem Bogen B des Randes von B_n .

Alsdann haben wir zu sehen, ob es in dem Rande des so neu entstandenen Bereiches zugeordnete Bogen gibt, die einen zugeordneten Punkt gemein haben. Es kann sich hierbei nur um Bogen von B_n handeln, die beiderseits an B angrenzen und die nun an solche Bogen der neuen Kreisscheibe K_{n+1} anzuheften sind, die sich gleichfalls an die Endpunkte von B anschließen. Diese können aber mit 93 zusammen weder die volle Peripherie von K_{n+1} noch die volle Peripherie von B_n ausmachen, weil doch am Rande der einen sowohl wie der anderen Punkte liegen, die nicht Bilder von inneren Punkten der Riemannschen Fläche sind, und weil die Anheftung stets nur in den Bildern von inneren Punkten der Riemannschen Fläche erfolgt. Diese Verhaftungen zugeordneter Randbogen fügen aber in jeder Ecke dem Zyklus nur eine Ecke neu hinzu. Dadurch kann aber in keiner Ecke der Zyklus überfüllt werden, wenn er nicht schon bei B_n voll oder überfüllt war. Dies ist aber gegen die Voraussetzung. Ein etwa voll werdender Zyklus wird ja dann durch Ausführung der Ränderzuordnung beseitigt.

Die Beziehung zur Riemannschen Fläche wird also auch in der Umgebung einer jeden Ecke umkehrbar eindeutig.

Insbesondere lehrt diese Überlegung, daß nicht durch die Anheftung der neuen Kreisscheibe bisher getrennte Ecken von B_n in einem Punkt zusammenkommen können.

3. Der Fall der geschlossenen Fläche. Wollten wir in dem ersten der beiden eingangs unterschiedenen Fälle ebenso verfahren, so könnte dieser Umstand als eine neue Schwierigkeit eintreten. Es können nämlich dann durch den Verlauf des Heftungsprozesses Bereichecken, welche dem gleichen Punkte der Riemannschen Fläche entsprechen, aber zunächst einmal als verschiedene Ecken eines Bildbereiches der zerschnittenen Fläche auftreten, im weiteren Verlauf des Verfahrens an die gleiche Stelle gebracht werden, so daß dann in der Umgebung dieser Stelle sich unter Umständen Bilder einzelner Teile der Umgebung des entsprechenden Flächenpunktes mehrfach einstellen. Dies kann aber nur dann eintreten, wenn es nötig wird eine anzuheftende Kreisscheibe längs ihrer ganzen Peripherie an einen Bogen des Randes des bereits abgebildeten Bereiches anzuheften. Damit würden aber dann alle ihre Randpunkte zu inneren Punkten werden müssen, und daher konnte in dem Falle, den wir eben betrachten, diese Schwierigkeit nicht eintreten.

Sie kann aber wohl bei der Abbildung der geschlossenen Riemannschen Flächen eintreten. Diese haben wir gerade aus diesem Grunde zurück-

gestellt, und der Überwindung der hier sich zeigenden Schwierigkeit wenden wir uns jetzt zu. Man könnte dazu mehrfach vorhandene Bilder einzelner Bereichstücke von der Umgebung der betreffenden Stelle wieder entfernen. Es empfiehlt sich aber eher, einen anderen Weg einzuschlagen.

Als Bild der aufgeschnittenen geschlossenen Riemannschen Fläche haben wir einen Kreis mit paarweise analytisch einander zugeordneten Rändern erhalten. Wir wollen dafür den seit Poincaré in der modernen Topologie üblichen Namen „Zelle“ gebrauchen. Wir schicken nun am besten der weiteren Behandlung des Uniformisierungsproblems bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten eine Betrachtung dieser Zelle voraus. Diese Betrachtung wird uns zu einer zweckmäßigen Abänderung der Zelle, zu ihrer sogenannten *kanonischen* Gestalt führen. Vorab merken wir an, daß nach dem Gang unserer Betrachtung im Rand der Zelle keine Bogenpaare vorkommen, die einen zugeordneten Punkt gemeinsam haben. Deren Vereinigung könnte ja auch nachträglich noch vorgenommen werden. Da es sich ferner um die Abbildung geschlossener Flächen handelt, besteht der Rand der Zelle aus endlich vielen einander paarweise zugeordneten Randbogen.

§ 7. Übergang zur kanonischen Zelle.

Der Rand unserer Zelle zerfällt in einzelne Bogen, die paarweise einander zugeordnet sind, d. h. paarweise dem gleichen Kurvenbogen der Riemannschen Fläche entsprechen. Wir denken uns den Rand der Zelle im positiven Sinne durchlaufen. Dann ist einem positiv durchlaufenen Randbogen stets ein negativ durchlaufener zugeordnet, weil doch die beiden Randbogen derselben Kurve der Fläche entsprechen. Linker Hand von beiden liegen aber bei einem festen Durchlaufungssinn der Flächenkurve verschiedene Teile der Fläche. Wir wählen die Randbogen alle möglichst groß, d. h. so, daß nicht zwei in einer Ecke zusammenstoßende Randbogen $P_1 P_{1+1} P_{1+2}$ in einen fortlaufenden Kantenzug $P_{q+2} P_{q+1} P_q$ übergehen, wobei P_1 in P_{q+2} , P_{1+1} in P_{q+1} , P_{1+2} in P_q übergeht. Die Randbogen sind in endlicher Anzahl vorhanden und sollen durch Angabe der sie begrenzenden Ecken bezeichnet werden. Wir denken uns die Zelle als Polygon. Die erwähnten Ecken seien in der Reihenfolge, in der man sie bei positiver Durchlaufung des Zellenrandes antrifft, $P_1 P_2 \dots P_n$. Wir setzen noch $P_{n+h} = P_n$ ($h > 0$). Dann ist $P_k P_{k+1}$ eine Seite und $P_q P_{q+1}$ sei die zugeordnete. Dabei ist dann $P'_k = P_{q+1}$ die P_k zugeordnete Ecke und $P'_{k+1} = P_q$ die P_{k+1} zugeordnete. Man kann die Ecken in Zyklen einteilen. Dazu gehen wir davon aus, daß sich P_k und P_{q+1} entsprechen, was wir so andeuten: $P_k \quad P_{q+1}$. Nun aber ist P_{q+1} wieder hintere Ecke einer weiteren Seite $P_{q+1} P_{q+2}$, die selbst eine zugeordnete Seite hat: $P_{r+1} P_{r+2}$, so daß $P_{q+1} \quad P_{r+2}$ gilt. P_{r+2} ist wieder

hintere Ecke einer Seite $P_{r+2}P_{r+3}$. Diese geht bei der Randbogen-Zuordnung in die vordere Ecke des zugeordneten Randbogens über und ist hintere Ecke der anstoßenden, also bei der positiven Durchlaufung folgenden Seite. (Fig. 35.) Nach endlich vielen Schritten muß bei Fortsetzung dieses Verfahrens eine Ecke zum zweiten Male auftreten, und zwar ist P_k diejenige, welche zuerst zum zweiten Male auftritt. Eingliedrige Zyklen treten nicht auf. Denn dann wäre das eine sich selbst entsprechende Ecke zweier zu-

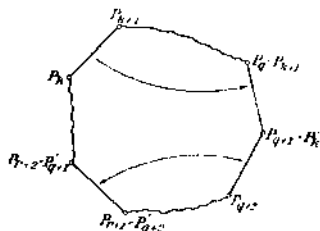


Fig. 35.

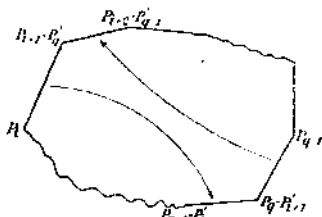


Fig. 36.

geordneten Seiten. Solche sollten aber schon beseitigt sein. Ebensovien kommen zweigliedrige Eckenzyklen vor. Denn sonst wären die Randbogen nicht so groß als möglich gewählt. Wäre nämlich

$$P_i \leftrightarrow P_{q+1}$$

$$P_{i+1} \leftarrow P_q$$

$$P_q \rightarrow P_{i+1},$$

so wäre auch

$$P_{q-1} \rightarrow P_{i+2},$$

so daß man den Bogen $P_i P_{i+1} P_{i+2}$ als einen dem Bogen $P_{q+1} P_q P_{q-1}$ zugeordneten Bogen aufzufassen hat. (Fig 3(5).)

Ich werde nun als erstes zeigen, daß man die Zelle stets so wählen kann, daß ihre Ecken einen einzigen Zyklus bilden. Es gibt nämlich gewisse Prozesse, die aus einer Zelle wieder eine Zelle machen. Zerschneidet man z. B. eine Zelle durch einen passenden Querschnitt und vereinigt die beiden Stücke längs einem Paar zugeordneter Kanten erneut, so hat man wieder eine Zelle erhalten. Man kann den Querschnitt als Kreisbogen wählen und die Vereinigung nach einer der Heftungsaufgaben vornehmen, so daß die neue Zelle wieder als Kreis mit zugeordneten Peripheriebogen vorliegt. Die neue Zelle ist also kraft der Zuordnung ihrer Ränder wieder umkehrbar eindeutiges analytisches Bild der Riemannschen Fläche.

Nehmen wir nun an, es käme in der ursprünglichen Zelle mehr als ein Eckenzyklus vor. Dann gibt es einen Randbogen s_1 , dessen Endpunkte

verschiedenen Eckenzyklen angehören. Auf s_1 folge der Bogen s_2 bei der Durchlaufung. s_2 ist von s_1 verschieden. Denn sonst enthielte s_1 Paare von

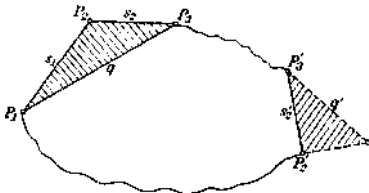


Fig. 37.

es längs der s_2 zugeordneten Kante s_2 wieder an. Das Kantenpaar $s_{2s'}$ geht dabei verloren. Dafür tritt ein q entsprechendes Paar qq neu auf. (Fig. 37.)

Bei diesem Prozeß hat im Zyklus I die Eckenzahl um 1 zugenommen, weil die Ecke P_1 jetzt in zwei Exemplaren da ist. Dagegen hat Zyklus II eine Ecke verloren, weil P_2 und P_2 vereinigt wurden. Zyklus III bleibt unverändert. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man Zyklus II sowie jeden andern von I verschiedenen Zyklus vollständig beseitigen. Dies ist in dem Augenblick der Fall, wo in dem betreffenden Eckenzyklus die Eckenzahl auf zwei zurückgegangen ist. Dann müssen nämlich nach der oben gegebenen Definition des Randbogens die beiden in einer Ecke des Zyklus zusammenstoßenden Bogen als ein einziger Randbogen angesehen werden.

Wir nehmen also weiter an, die Ecken der Zelle gehörten einem einzigen Zyklus an. Zur weiteren Umformung der Zelle gehen wir dann von einem Bogenpaar $s_1s'_1$ aus. Es sei $s_1 = P_1P_2$ und $s'_1 = P'_1P'_2$. Wir verbinden $P_2P'_2$ durch einen Querschnitt q und zerlegen so die Zelle in zwei Halbzellen. Es muß ein Seitenpaar $s_2s'_2$ geben, das verschiedenen Halbzeiten angehört. Denn sonst bildeten die Ecken der einen Halbzelle für

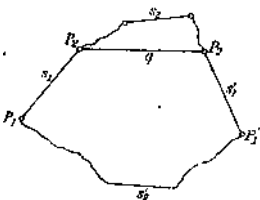
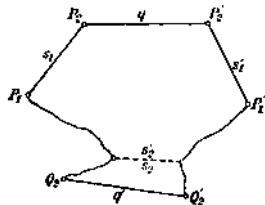


Fig.

38



a.

Fig. 38 b.

sich einen Zyklus. $s_1s'_1$ gehören der gleichen Halbzelle an. Wir fügen die beiden Halbzellen längs $s_2s'_2$ aneinander. (Fig. 38a, 38b.) Dann bilden s_1qs_1

einen Zug aufeinanderfolgender Kanten. Stößt die q zugeordnete Kante q' an s'_1 an, so sind wir zufrieden. Andernfalls verbinden wir Q_2 mit P'_2 durch einen Querschnitt r . Dann gehören s_1 und s'_1 verschiedenen Halbzellen an. Wir heften beide längs $s_1 s'_1$ aneinander und haben dann in $rq'r'q'$ einen Viererzug paarweise zugeordneter Kanten an der neuen Zelle. (Fig. 39 a, 39b.) Waren ursprünglich $s_1 s'_1$, nur durch eine Kante getrennt, so ist nur der zweite Schritt zur Erreichung dieses Zieles nötig. Die Ecken der neuen Zelle bilden einen einzigen Eckenzyklus. Um das einzusehen, brauchen wir nur zu erkennen, daß durch den eben ein- oder zweimal verwendeten Prozeß eine Zelle, deren Ecken einen Zyklus bilden, in eine ebensolche Zelle übergeht. Es leuchtet aber ohne weiteres ein, daß die neu hinzukommenden Ecken dem gleichen Zyklus angehören wie die schon

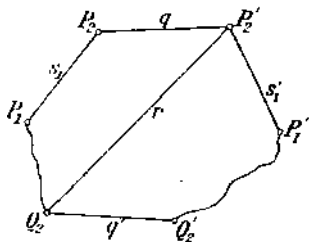


Fig. 39a.

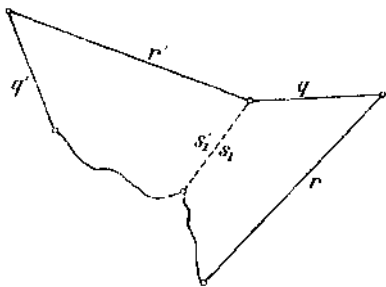


Fig. 39 b.

vorhandenen, aus denen sie hervorgingen. Denn zum gleichen Zyklus gehören alle und nur die Ecken, die bei der Ränderzuordnung einander entsprechen, d. h. alle und nur die, welche dem gleichen Punkt der Riemannschen Fläche angehören. Wenn nun die neue Zelle außer diesen vier noch weitere Randbogen hat, so können wir durch den gleichen Prozeß ohne Störung des vorhandenen Viererzuges einen neuen Viererzug anbringen. Bei keinem der Schritte wächst die Zahl der Randbogen, so daß wir nach endlich vielen Schritten eine Zelle erhalten haben, deren Kanten auf Viererzüge aufgeteilt sind. Es seien p solche Viererzüge vorhanden, so daß die Zeile $4p$ Randbögen hat. Dann nennen wir die Zelle *kanonisch* und p ihr *Geschlecht*, p heißt auch das Geschlecht der Riemannschen Fläche. Wir werden nämlich bald erkennen, daß es nur von der Fläche und nicht von dem Prozeß abhängt, der zur kanonischen Zelle führte. Es wird sich das aus anderen Erwägungen etwas später ergeben. Wir verzichten daher darauf, es hier schon mit den gleichen Methoden zu beweisen.

Die Ausführungen dieses Paragraphen verdanke ich Herrn Feigl, der durch diese Betrachtungen das populäre Verfahren der erlaubten Abänderung, das in der älteren Literatur viel vorkommt, zu einem mathematischen Verfahren gestaltet hat. Seitdem mir Herr Feigl diese Mitteilungen machte, ist ähnliches freilich auch von anderer Seite veröffentlicht worden. Vgl. Brahana in Ann. of math. (2) 23 (1923) S. 144ff.

§ 8. Abschluß des Beweises für den Hauptsatz der Uniformisierungstheorie im Falle geschlossener Riemannscher Flächen.

Die Betrachtung des vorigen Paragraphen hat uns zu den kanonischen Zellen geführt. Sie sind von $4p$ ($p \geq 1$) einander paarweise zugeordneten Bögen der Kreisperipherie begrenzt. Jedem Peripheriebogen entspricht eine auf der Fläche verlaufende stückweise analytische Kurve, und zwar entspricht zugeordneten Peripheriebögen der gleiche Kurvenbogen auf der Fläche. Die Ecken der Zelle bilden einen einzigen Zyklus. Sie entsprechen alle demselben Punkt der Riemannschen Fläche. Wenn wir also nun getreu unserem ursprünglichen Ansatz dazu übergehen, weitere Exemplare der kanonischen Zelle an die erste B_1 anzuheften, so können wir vorab bemerken, daß sich in einem Eckpunkt das entstehende Netz gerade in dem Moment schließen muß, wo da $4p$ Exemplare der kanonischen Zelle zusammenstoßen. Die Anheftung der neuen Zellen soll nach der folgenden von Koebe in anderem Zusammenhang gegebenen Vorschrift geschehen. Man gehe von einer ersten Zelle aus und hefte an jede ihrer $4p$ Seiten eine neue Zelle an. In allen Ecken der ursprünglichen Zelle stoßen nun je 3 Zellen zusammen. Wir wollen aber Sorge tragen, daß uns jeder Schritt nur zu Bereichen führt, die so aus Zellen aufgebaut sind, daß an jede Ecke höchstens 2 Zellen des Bereiches anstoßen. Dem kommen wir hier dadurch nach, daß wir in jeder der $4p$ mit je 3 Zellen bereits versehenen Ecken $4p - 3$ sich zum Zyklus schließende Zellen weiter anbringen. So entsteht ein neuer Bereich von der angegebenen Eigenschaft, da jede der neu anzufügenden Zellen in genau zwei aneinanderstoßenden Kanten an andere Zellen angefügt wird. Damit erst ist die Herstellung des zweiten Bereiches vollendet. Er ist aus $1 + 4p + 4p(4p - 3) = 4p(4p - 2) + 1$ Zellen zusammengesetzt. Alle Heftungen mögen durch konforme Abbildungen getätigt werden, welche in einem festen Punkt des ersten Bereiches B_1 in üblicher Weise normiert sind, d. h. dort verschwinden und die Ableitung Eins besitzen. So soll das Verfahren fortgesetzt werden. Es ist nur noch anzugeben, wie aus irgendeinem so entstandenen Bereich der folgende zu gewinnen ist. Es sei also ein Bereich entstanden, der aus Zellen aufgebaut ist, und von der Art, daß in jeder

Ecke eine oder zwei Zellen des Bereiches zusammenstoßen. Wir heften dann vorerst an jede Seite des Bereiches eine weitere Zelle an. Dadurch entsteht ein neuer Bereich, bei dem aber an einzelnen Ecken drei oder vier Zellen beteiligt sind. In diesen Ecken schließen ($p = 1$) bzw. vervollständigen ($p \geq 1$) wir den Zellenzyklus, indem wir eventuell in den einzelnen Ecken weitere Zellen anfügen, bis in jeder Ecke die Zahl $4p$ erreicht ist. Da im Falle $p > 1$ jede Zelle in genau zwei in einem Punkt zusammenlaufenden Seiten angefügt wird, und da jede Zelle mindestens vier Seiten hat, so ist an dem neuen Bereich die für die Ecken vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Bei $p = 1$ läuft die Vorschrift darauf heraus, stets neue Kränze von Vierecken anzubringen. Man erhält ein Netz nach Art der geläufigen Parallelogrammnetze. Jeder solchen Anheftung kann man mittels der Heftungsaufgaben nachkommen. Der in § 5 näher beschriebene Grenzübergang führt dann zur Abbildung der gegebenen Riemannschen Fläche auf eine endliche Kreisscheibe oder auf die volle Ebene mit Ausschluß des unendlichfernen Punktes. Die Abbildung ist in der Umgebung einer jeden Stelle der gegebenen Riemannschen Fläche umkehrbar eindeutig. Denn für Punkte im Inneren einer Zelle ist das schon bei der Abbildung der Fläche auf die Zelle als richtig erkannt, und die neue Abbildung ist im Inneren einer jeden Zelle umkehrbar eindeutig in der Umgebung einer jeden Stelle. Ebenso ist es in den inneren Punkten der Randbögen, weil man da zur Ausführung der Anheftung sich gerade einer Umgebung der betreffenden Stelle auf der Riemannschen Fläche bedient. In den Ecken ist es aber auch so, da wir ja gerade Sorge getragen haben, daß sich in jeder Ecke der Zyklus schließt. Die Schließung des Zyklus erfolgt ja gerade mit Hilfe einer Umgebung der betreffenden Stelle der Riemannschen Fläche, auf die der Eckenzyklus der Zelle umkehrbar eindeutig und stückweise analytisch bezogen ist.

§ 9. Überlagerungsfläche. Uniformisierende Kraft.

Die eben zu Ende geführte Abbildung der Riemannschen Fläche der zu uniformisierenden Funktion auf einen schlichten Bereich einer t -Ebene wird durch eine Funktion $t(z)$ geleistet, die in der Umgebung einer jeden Stelle der gegebenen Riemannschen Fläche eindeutig ist. Sie ist aber im allgemeinen nicht auf der Riemannschen Fläche in ihrem Gesamtverlauf eindeutig. Vielmehr ist ja jede Zelle, aus welcher der Bildbereich schließlich besteht, umkehrbar eindeutiges Bild eines Exemplares der zerschnittenen Riemannschen Fläche. Dem entspricht es, daß die Riemannsche Fläche der Funktion $t(z)$ selbst aus Exemplaren der gegebenen Riemannschen Fläche in einer Art und Weise aufgebaut ist, über die die Zerlegung des umkehrbar

eindeutigen Bildes dieser Riemannschen Fläche in der t -Ebene in Zellen Aufschluß gibt. Wenn wir also alsbald dazu übergehen, den Aufbau dieses Bildbereiches aus Zellen näher zu studieren, so leisten wir damit die nähere Untersuchung der Riemannschen Fläche der Funktion $t(z)$, die man wegen ihres Aufbaus aus lauter Exemplaren der ursprünglichen Riemannschen Fläche auch als eine *Überlagerungsfläche* derselben bezeichnet.

Unsere Funktion $t(z)$ ist dadurch vor anderen Funktionen, die gleichfalls eine schlichte Abbildung der gegebenen Riemannschen Fläche leisten, ausgezeichnet, daß die durch sie vermittelte Abbildung in der Umgebung einer jeden Stelle der gegebenen Riemannschen Fläche umkehrbar eindeutig ist.

Man kann diesen Sachverhalt auch noch etwas anders ausdrücken. Jede auf der gegebenen Riemannschen Fläche in der Umgebung einer jeden Stelle eindeutige Funktion wird, wenn man sie als Funktion von $t(z)$ auffaßt, eine im Bildbereich der t -Ebene durchweg eindeutige Funktion, die dazu noch an all den Stellen von rationalem Charakter ist, welche Stellen der Riemannschen Fläche entsprechen, an denen die gegebene Funktion auf der Riemannschen Fläche von rationalem Charakter ist. Dies folgt einfach daraus, daß die gegebene Funktion als Funktion von t in der Umgebung einer jeden Stelle des Bildbereiches der t -Ebene eindeutig ist. Da aber dieser Bildbereich stets einfach zusammenhängend ist oder aus der vollen Ebene besteht, so lehrt der bekannte Monodromiesatz, daß diese Funktion von t auch im großen eindeutig ist. Wenn man aber nur verlangt, daß $t(s)$ so beschaffen ist, daß jede auf der Fläche lokal eindeutige Funktion im großen eindeutig in t wird, so gibt es noch andere Lösungen des Problems. Denn dazu ist nur erforderlich, daß $t(z)$ selbst in der Umgebung einer jeden Stelle der gegebenen Riemannschen Fläche von algebraischem Charakter ist, und zwar so, daß $t(z)$ in dieser Umgebung keinen Wert mehr als einmal annimmt. Man darf also dann zulassen, daß $t(z)$ in der Umgebung einzelner Stellen Verzweigungen relativ zur Fläche besitzt, wofern nur die mit der Ordnung der Verzweigung zusammenhängende gewundene Umgebung der Stelle durch $t(z)$ schlicht abgebildet wird. Aber dann werden eindeutige Funktionen von t nicht nur die Funktionen, die relativ zur Fläche unverzweigt sind, also in der Umgebung einer jeden Stelle eindeutig sind, sondern z. B. auch die, welche in der Umgebung einer jeden Stelle ebenso verzweigt sind wie t . $t(z)$ ist also erst dann vollkommen charakterisiert, wenn man verlangt, daß *nur* die relativ zur Fläche unverzweigten Funktionen eindeutige Funktionen von t werden.

Daß es relativ zur Fläche unverzweigte und doch nicht eindeutige Funktionen geben kann, ist uns zum ersten Male bei der Betrachtung des ellip

tischen Integrales begegnet und wurde damals als eine Folge der eigentümlichen topologischen Eigenschaften der dort abzubildenden zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit vier Verzweigungspunkten erkannt, ein gestaltliches Verhalten, das z. B. eine umkehrbar eindeutige Abbildung jener Riemannschen Fläche auf die Kugeloberfläche ausschloß. Genau so werden wir auch in unseren allgemeinen Fällen bald die Bedeutung der gestaltlichen Eigenschaften der Riemannschen Fläche erkennen.

Hier hat sich zunächst eine Charakterisierung der Funktion $t(z)$ durch ihre uniformisierende Kraft gezeigt und hat sich ein Ausblick auf allgemeinere Probleme ergeben, die wir in einem späteren Paragraphen noch ein wenig verfolgen wollen.

Hier sei noch bemerkt, daß gerade der Wunsch, $t(z)$ selbst als relativ zur Riemannschen Fläche unverzweigt einzuführen, die Betrachtungen des § 8 notwendig gemacht hat. Hätten wir darauf verzichten wollen, so hätten wir diese Betrachtungen nicht nötig gehabt, aber dafür in Kauf nehmen müssen, daß $t(z)$ in der Umgebung einzelner nicht im voraus bestimmbarer Stellen der Riemannschen Fläche relativ zu ihr verzweigt sein kann. Ich habe dies in einer Arbeit in Math. Annalen Bd. 78 etwas näher ausgeführt.

Durch die Forderung, daß $t(z)$ relativ zur Fläche unverzweigt ist, daß sein Wertevorrat eine Kreisscheibe erfüllt und daß jede relativ unverzweigte Funktion eine eindeutige Funktion von t wird, ist $t(z)$ bis auf lineare Transformationen eindeutig bestimmt. Denn jede andere diesen Bedingungen genügende Funktion t_1 ist eine eindeutige Funktion von t , die im ganzen Kreis von rationalem Charakter ist und ihn auf den Kreis der t_1 -Ebene abbildet. Das gleiche gilt umgekehrt für t als Funktion von t_1 . Also werden die beiden Kreise der t - und der t_1 -Ebene umkehrbar eindeutig, d. h. linear aufeinander abgebildet.

§ 10. Nähere Untersuchung der Uniformisierungsstranszendenten.

1. Die Gruppe. Für den Fall der Uniformisierung einer algebraischen Funktion will ich die Uniformisierungsstranszendente etwas näher untersuchen. Es handelt sich hier um die Abbildung einer geschlossenen Mannigfaltigkeit. Schon der Gang des Beweises in den vorausgegangenen Paragraphen lehrt, daß das Bild einer einzelnen kanonischen Zelle ein Bereich sein muß, der ganz dem Inneren des Bildkreises angehört. Denn entweder ist die Abbildung umkehrbar eindeutig. Dann liegt nur eine einzige Zelle ohne bezogene Ränder vor, und die Abbildung erfolgt umkehrbar eindeutig auf die volle Ebene, oder aber schon beim ersten Schritt wird die erste Zelle ringsum mit andern

Zellen umgeben. Man kann dem Gang der Betrachtung auch entnehmen, daß die durch $t(z)$ vermittelte Abbildung der Riemannschen Fläche dann und nur dann umkehrbar eindeutig ist, wenn die Vollebene herauskommt. Die Vollebene konnte nämlich herauskommen, solange es sich lediglich um eine Abbildung der Riemannschen Fläche auf eine Zelle handelt. Von dem Moment an, wo es sich um die Aneinanderheftung von Zellen handelte, also zu einer nicht mehr umkehrbar eindeutigen Abbildung der Fläche übergegangen wurde, konnte die Vollebene nicht mehr herauskommen, weil es sich stets um die Aneinanderheftung von unendlich vielen Exemplaren der Zelle handelt. Es muß also im Bildbereich jeder Punkt der Riemannschen Fläche unendlich viele Bildpunkte haben, die sich irgendwo häufen. Ein solcher Häufungspunkt kann dann aber nicht mehr Bild eines Punktes der Riemannschen Fläche sein. Denn in der Umgebung eines jeden einzelnen Punktes ist die Abbildung nach Voraussetzung umkehrbar eindeutig. Ich will aber den Nachweis dafür, daß im Vollkugelfall und nur in diesem die Abbildung einer algebraischen Riemannschen Fläche durch $t(z)$ umkehrbar eindeutig ist, nochmals direkt führen. Dieser Nachweis hängt eng mit der Gruppe zusammen, auf die jedes Uniformisierungsproblem führt. Betrachtet man nämlich zwei verschiedene zur gleichen Stelle der Riemannschen Fläche gehörige Funktionselemente der Funktion $t(z)$, so ist jedes eine lineare Funktion des anderen. Denn durch analytische Fortsetzung eines jeden der beiden Funktionselemente erhält man eine schlichte Abbildung und zwar, da die Ausgangselemente durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen, auf den gleichen Bildbereich. Jede der beiden Funktionen ist auf der Riemannschen Fläche unverzweigt und daher ist jede eine eindeutige Funktion der anderen. Jede dieser eindeutigen Funktionen nimmt aber im Bildbereich alle Werte desselben an. Daher handelt es sich um eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Bildbereiches auf sich. Da dieser entweder die Vollebene, oder die Vollebene mit Ausschluß eines Punktes, oder eine Kreisscheibe ist, so ist eine solche Abbildung linear. Damit ist bewiesen, daß die verschiedenen zum gleichen Punkt der Riemannschen Fläche gehörigen Elemente der Funktion $t(z)$ lineare Funktionen voneinander sind. Dementsprechend sagt man, $t(z)$ sei eine *linear polymorphe Funktion*. Die erwähnten linearen Funktionen bilden eine *Gruppe*. Denn setzt man irgendzwei zur gleichen Stelle gehörige Funktionselemente längs des gleichen Weges fort, so sind die gleichzeitig erhaltenen Funktionselemente stets durch die gleiche lineare Funktion verbunden, wie bei Beginn der analytischen Fortsetzung, so daß sich bei geschlossenem Weg die diesem entsprechende lineare Substitution mit der zusammensetzt, welche die beiden Ausgangselemente verknüpft.

Die Umkehrungsfunktion $z(t)$ ist eine zu dieser Gruppe gehörige eindeutige *automorphe Funktion*. Denn alle Punkte des Bildbereiches der t -Ebene, welche durch die Operationen der Gruppe auseinander hervorgehen, gehören zum gleichen Punkt der Riemannschen Fläche. In allen diesen Punkten hat aber z den gleichen Wert.

2. Die Vollebene. Ist nun die Abbildung einer geschlossenen Riemannschen Fläche umkehrbar eindeutig, so muß auch der Bildbereich geschlossen sein, weil auch im Bildbereich jede unendliche Punktfolge einen dem Bildbereich angehörigen Häufungspunkt besitzen muß. Daher ist die Abbildung nur im Falle der Vollebene umkehrbar eindeutig. In diesem Falle ist sie aber auch stets umkehrbar eindeutig. Denn die Gruppe kann in diesem Falle nur endlich sein, denn sonst gäbe es zu jedem Punkt unendlich viele ihm durch die Gruppe äquivalente. Diese müßten sich irgendwo häufen, und die Umgebung eines Häufungspunktes P könnte dann im Gegensatz zu einer Grundeigenschaft der Funktion $t(z)$, obwohl P innerer Punkt des Bildbereiches ist, nicht umkehrbar eindeutiges Bild der Umgebung einer Stelle der Riemannschen Fläche sein. Aus dem gleichen Grunde kann auch die Gruppe in keinem der drei Fälle elliptische Transformationen enthalten. Denn eine solche hätte auf alle Fälle mindestens einen Fixpunkt im Inneren des Bildbereiches, und in beliebiger Nähe eines Fixpunktes gibt es stets Punkte, die durch die betreffende lineare Transformation auseinander hervorgehen. Schon auf S. 43 haben wir diesen Umstand verwendet. Da aber die Umgebung eines jeden inneren Punktes des Bildbereiches auch hier wieder umkehrbar eindeutig der Umgebung einer Stelle der Riemannschen Fläche entspricht, so kann sie keine äquivalenten Punkte enthalten.

Im Falle der Vollebene muß nun die Gruppe erstens endlich sein, und zweitens darf sie keine elliptischen Transformationen enthalten. Daher kann sie nur aus der identischen Transformation allein bestehen. Infolgedessen ist *tatsächlich im Vollebenenfall und nur in diesem die Abbildung umkehrbar eindeutig*.

3. Das Geschlecht. Diesen Vollebenenfall wollen wir nun etwas näher untersuchen und namentlich feststellen, wodurch die algebraischen Funktionen charakterisiert sind, deren Uniformisierung auf den Vollebenenfall führt.

Ich gehe von der Bemerkung aus, daß die Riemannsche Fläche umkehrbar eindeutig auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 abgebildet wird, wenn man zu der uniformisierenden Abbildung eine stereographische Projektion hinzunimmt. Die Kugeloberfläche ist 4π . Bildet man nun die t -Ebene stereographisch auf die Kugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ab, deren Mittelpunkt der Punkt $t = 0$ ist, derart, daß ξ -Achse und reelle t -Achse, sowie η -Achse und imaginäre t -Achse aufeinanderfallen und derart, daß die Projektion vorn

Punkte $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=1$ aus erfolgt, so wird diese Abbildung der t -Ebene auf die Kugel durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{2t_1}{1+t_1^2}, \quad \eta = \frac{2t_2}{1+t_1^2}, \quad \zeta = \frac{t_1^2 + 1}{1+t_1^2} \quad (t = t_1 + it_2)$$

vermittelt. Nach den Regeln der Flächentheorie gilt daher für den Oberflächeninhalt der Kugel

$$4\pi = 4 \iint \frac{dt_1 dt_2}{(1+t_1^2)^2}$$

Geht man durch $t(z)$ von der t -Ebene zur Riemannschen Fläche über, so sieht man, daß

$$\pi = \iint \frac{t' \bar{t}'}{(1+tt)^2} dx dy \quad (z = x + iy)$$

ist, wenn das Integral über die volle Riemannsche Fläche erstreckt wird. Dies Integral werden wir nun noch auf eine zweite Weise auswerten und dadurch die gewünschte Bedingung dafür finden, daß sich die Riemannsche Fläche umkehrbar eindeutig auf die Vollebene abbilden läßt. Diese zweite Auswertung knüpft an eine partielle Differentialgleichung an, der der Integrand des Integrales genügt. Setzt man nämlich

$$u = \log \frac{t' \bar{t}'}{(1+t\bar{t})^2},$$

so verifiziert man leicht, daß

$$\Delta_z u = -8e^u, \quad \text{wo} \quad \Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$$

ist. Also haben wir jetzt

$$-8\pi = \iint \Delta_z u dx dy.$$

Dies Integral formen wir nun mittels partieller Integration — oder was dasselbe ist, mittels der Greenschen Formel — um. Ich setze dabei nicht als bekannt voraus, daß man dieselbe auf einer Riemannschen Fläche genau wie in der schlichten Ebene verwenden kann, werde dies vielmehr mit beweisen. Man hat dazu nur zu bemerken, daß das Integral

$$\iint \Delta_z u dx dy$$

gegenüber konformer Abbildung invariant ist. Es ist also gleich¹⁾

$$\iint \Delta_z u dt_1 dt_2, \quad \text{wo} \quad \Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}.$$

1) Ist nämlich $z = \varphi(t)$ in einem Bereiche B_1 eindeutig und regulär und bildet ihn auf einen Bereich B_2 ab, so ist

$$\Delta_z u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \bar{t}} \cdot t' \bar{t}' = \Delta_t u \cdot t' \bar{t}'$$

Dabei hat man sich dann u als Funktion von t_1 und t_2 dargestellt zu denken. Um die Greensche Formel anwenden zu können, suchen wir die Stellen auf, wo entweder u selbst oder seine Ableitungen der beiden ersten Ordnungen aufhören, stetig zu sein. Zu dem Zwecke müssen wir das Verhalten von u und seinen Ableitungen in der Nähe der einzelnen Stellen der t -Ebene untersuchen. Betrachten wir zunächst eine Stelle der t -Ebene, deren Umgebung in die schlichte Umgebung eines endlichen Punktes der Riemannschen Fläche übergeht. Sei diese Stelle der Riemannschen Fläche über $z = a$ gelegen, so gilt eine Entwicklung

$$t(z) = \mathfrak{P}(z - a),$$

wo $\mathfrak{P}(z - a)$ eine nach positiven Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe ist, deren Linearglied einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat. Nun ist

$$u - \log t' + \log V - 2 \log (1 + tt')$$

und man erkennt mit leichter Mühe, daß u in der Umgebung einer solchen Stelle, samt Ableitungen aller Ordnungen nach z und nach z stetig ist. Daher sind auch die Ableitungen von u nach t_1 und t_2 in der Umgebung der entsprechenden t -Stelle stetig. Nun schließe ich die Stellen anderer Art, also $t = \infty$, die Bilder der unendlichfernen Punkte der Riemannschen Fläche und die Bilder ihrer Verzweigungspunkte durch geschlossene analytische Kurven von der übrigen t -Ebene ab. Diese Kurven wähle ich so klein, daß eine jede nur eine solche Stelle umschließt und ich kann sie außerdem so wählen, daß sie Bilder von Kreisen sind, welche die entsprechenden Punkte der Riemannschen Fläche umschließen. Auf das von diesen Kreisbildern begrenzte Stück der t -Ebene wende man nun die Greensche Formel an, die ein Leser, dem sie nicht geläufig sein sollte, leicht durch partielle Integration gewinnen wird. Man findet

$$\iint_{B_i} A_i u dt_1 dt_2 = - \sum \iint_{\partial B_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Dabei ist das Doppelintegral über den von den Kreisbildern begrenzten Bereich der t -Ebene zu erstrecken, welcher die eben erwähnten kritischen Punkte nicht enthält. Die Linienintegrale sind über die Kreisbilder so zu erstrecken, daß dabei das Innere des Integrationsbereiches zur Linken bleibt, und $\frac{\partial}{\partial n}$ bedeutet Differentiation in der Richtung der vom Rand nach dem Bereichinneren zeigenden Normalen.

$$\text{und} \quad \iint_{B_i} f(x, y) dx dy = \iint_{B_i} f(x, y) \frac{d(x, y)}{d(t_1, t_2)} dt_1 dt_2 = \iint_{B_i} \frac{f(x, y)}{f'(t)} dt_1 dt_2,$$

wo man natürlich noch x und y durch t_1 und t_2 auszudrücken hat. Beides zusammen ergibt sofort die Behauptung des Textes.

Geht man nun zur Riemannschen Fläche zurück, so wird aus dem Doppelintegral das über den entsprechenden Teil der Riemannschen Fläche erstreckte

$$\iint \mathcal{A}_t u dx dy.$$

Aus dem Rand integral aber wird das gleichlautende über die verschiedenen Kreisperipherien zu erstreckende Rand integral. Denn auch diese Randintegrale sind gegenüber konformer Abbildung invariant, weil dabei alle Linienelemente — unabhängig von ihrer Richtung — bekanntlich mit dem Abbildungsmodul zu multiplizieren sind. Läßt man diese Randkreise sich auf die Punkte zusammenziehen, die sie von der übrigen Riemannschen Fläche trennen sollen, also auf die Verzweigungspunkte, die unendlich-fernen Punkte der Fläche und denjenigen Punkt derselben, welcher $t = \infty$ liefert, so strebt das Doppelintegral, wie wir wissen, gegen -8π . Dem gleichen Grenzwert strebt also auch die Summe der Randintegrale zu. Diese kann man aber nun einzeln ausrechnen. Ich betrachte zunächst einen endlichen Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche, der in einen endlichen Punkt der t -Ebene übergeht. Ihm gehört eine positive ganze Zahl ν zu derart, daß für $t(z)$ in seiner Umgebung eine Darstellung

$$t(z) = c_0 + c_1(z-a)^{\frac{1}{\nu}} + c_2(z-a)^{\frac{2}{\nu}} + \dots = \mathfrak{P}\left((z-a)^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

gilt, in der $c_1 \neq 0$ ist, damit die Abbildung auf die schlichte Umgebung von $t = c_0$ herauskommt. Den die Stelle umgebenden Kreis wählen wir so klein, daß er ganz dem Konvergenzkreis dieser Entwicklung angehört. Man findet

$$t' = \frac{c_1}{\nu} (z-a)^{\frac{1-\nu}{\nu}} + \dots = (z-a)^{\frac{1-\nu}{\nu}} \left(\frac{c_1}{\nu} + \dots \right)$$

$$\bar{t}' = \frac{\bar{c}_1}{\nu} (\bar{z}-\bar{a})^{\frac{1-\nu}{\nu}} + \dots = (\bar{z}-\bar{a})^{\frac{1-\nu}{\nu}} \left(\frac{\bar{c}_1}{\nu} + \dots \right)$$

$$u = \frac{1-\nu}{\nu} \log(z-a) + \frac{1-\nu}{\nu} \log(\bar{z}-\bar{a}) + \mathfrak{P}_1\left((z-a)^{\frac{1}{\nu}}\right) + \mathfrak{P}_2\left((\bar{z}-\bar{a})^{\frac{1}{\nu}}\right) - 2 \log(1 + t\bar{t}).$$

$\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind wieder Potenzreihen, die nach positiven Potenzen ihres Argumentes fortschreiten.

Setzt man $|z-a| = r$, $z-a = re^{i\varphi}$, $\bar{z}-\bar{a} = re^{-i\varphi}$,

so wird

$$u = \frac{2(1-\nu)}{\nu} \log r + \mathfrak{P}_1\left((z-a)^{\frac{1}{\nu}}\right) + \mathfrak{P}_2\left((\bar{z}-\bar{a})^{\frac{1}{\nu}}\right) - 2 \log(1 + t\bar{t}).$$

Es wird¹⁾
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2(1-\nu)}{\nu} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial r} + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial r} = \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{\partial |t|^2}{\partial r}.$$

Nun wird¹⁾
$$\frac{ds}{d\varphi} = -r.$$

Also
$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} r d\varphi = 4(1-\nu)\pi + o(1),$$

wo $o(1) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow 0$, wie man leicht nachprüft.

Ich komme zu denjenigen unendlichfernen Punkten der Fläche, welche ein endliches t liefern. Jeder solchen Stelle ist eine positive ganze Zahl ν zugeordnet, derart, daß in ihrer Umgebung eine Entwicklung

$$t(z) = c_0 + c_1 \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}} + c_2 \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{\nu}} + \dots \quad (c_1 \neq 0)$$

gilt. Jetzt wird
$$t' = -c_1 \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}+1} + \dots$$

$$\bar{t}' = -\bar{c}_1 \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{\frac{1}{\nu}+1} + \dots$$

Setzt man $z = re^{i\varphi}$, $\bar{z} = re^{-i\varphi}$, $z = re^{i\varphi}$, $\bar{z} = re^{-i\varphi}$,

so wird
$$u = -2 \frac{1}{\nu} \log r + \dots$$

Ferner wird jetzt
$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{ds}{d\varphi} = r$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} 2 \frac{1}{\nu} d\varphi + o(1) = 4\pi(1+\nu) + o(1) = 4\pi(1-\nu) + 8\pi\nu + o(1).$$

Durch diese letzte Umschreibung wird der vom unendlichfernen Verzweigungspunkt ν -ter Ordnung herrührende Beitrag in den von der Verzweigung herrührenden und den von der unendlichfernen Lage der Stelle herrührenden Bestandteil zerlegt. Der erste ist genau der gleiche wie der Beitrag eines im endlichen gelegenen Verzweigungspunktes ν -ter Ordnung. Gleichzeitig erkennen wir, daß eine einblättrige unendlichferne Stelle der Riemannschen Fläche, welche in einen endlichen t -Punkt übergeht, den Beitrag 8π liefert.

1) Wir haben nämlich vorhin bei Einführung der Greenscheu Formel eine Festsetzung darüber getroffen, in welcher Richtung s wächst, und ferner ist durch $z = re^{i\varphi}$ die Richtung wachsender φ festgelegt.

Nun fehlt nur noch die Stelle der Riemannschen Fläche, welche in $t =$ übergeht. Dies kann eine im endlichen oder eine im unendlichen gelegene Stelle sein. Es sei zunächst ein im endlichen gelegener Punkt. Dann ist ihm eine ganze positive Zahl ν zugeordnet, derart, daß

$$t(s) = c_{-1} \left(\frac{1}{s-a} \right)^{\nu} + c_0 + c_1(s-a)^{\nu} + \cdots \quad (c_{-1} \neq 0)$$

gilt. Jetzt liefert die eben schon zweimal angestellte Überlegung, wie ein aufmerksamer Leser sofort übersieht

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = -4\pi(1+\nu) - \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial r} r d\varphi,$$

wo

$$v = -2 \log(1+tt) \text{ ist.}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{2}{1+tt} \left(tt' \frac{\partial z}{\partial r} + t\bar{t} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} \right) \\ &= +\frac{2}{1+tt} \left(c_{-1} \left(\frac{1}{s-a} \right)^{\frac{1}{\nu}} \cdot \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{s-a} \right)^{\frac{1}{\nu}+1} c_{-1} \cdot e^{i\varphi} \right. \\ &\quad \left. + c_{-1} \left(\frac{1}{s-a} \right)^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{s-a} \right)^{\frac{1}{\nu}+1} i c_{-1} e^{-i\varphi} + \text{Glieder niedrigerer.} \right. \\ &\quad \left. \text{Ordnung in } \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{4}{1+tt} \left(|c_{-1}|^2 \left(\frac{1}{r} \right)^{\frac{2}{\nu}+1} + \text{Glieder niedrigerer Ordnung in } \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{4}{r^{\frac{2}{\nu}+1} + |c_{-1}|^2 + o(1)} \left(|c_{-1}|^2 \left(\frac{1}{r} \right)^{\frac{2}{\nu}+1} + \text{Glieder niedrigerer} \right. \\ &\quad \left. \text{Ordnung in } \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{4}{r} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Demnach wird nun endlich

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial u}{\partial n} ds &= -4\pi(1+\nu) + 8\pi + o(1) \\ &= 4\pi(1-\nu) + o(1), \end{aligned}$$

so daß also der Beitrag derselbe ist, als ob der Punkt ein endliches t lieferte. Ebenso ist es, wenn ein unendlichferner Punkt der Riemannschen Fläche das $t = \infty$ liefert. Somit haben wir nun im ganzen

$$-8\pi = -4\pi \sum (1-\nu_i) - 8\pi n,$$

wobei die v_i die Vielfachheiten der Verzweigungspunkte sind und über alle zu summieren ist, und wobei n die Blätterzahl der Riemannschen Fläche ist, nämlich die Summe der im unendlichen vorkommenden Verzweigungszahlen. Das ist aber gerade die Blätterzahl der Fläche. Also ist

$$\sum (v_i - 1) - 2(n - 1) = 0.$$

Nennt man die durch

$$2p = \sum (v_i - 1) - 2(n - 1)$$

definierte Zahl p , das *Geschlecht*¹⁾ der Riemannschen Fläche, so können wir unser Ergebnis dahin aussprechen, daß *eine Riemannsche Fläche, welche sich umkehrbar eindeutig auf die volle t -Ebene abbilden läßt, das Geschlecht Null besitzen muß.*

Daß nicht jede Riemannsche Fläche das Geschlecht Null besitzt, lehrt das Beispiel der zweiblättrigen Fläche mit 4 Verzweigungspunkten, die uns beim elliptischen Integral erster Gattung begegnete. Ihr Geschlecht ist Eins. Die gefundene Bedingung ist zunächst nur eine notwendige Bedingung. Daß sie auch hinreichend ist, wird etwas später einleuchten, wenn wir auch für die beiden anderen Fälle — Abbildung auf die Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes und Abbildung auf einen endlichen Kreis — die notwendigen Bedingungen auf ganz analogem Wege gefunden haben.

§ 11. Nähere Untersuchung der Uniformisierungs-transzendenten

(Fortsetzung).

Ich behandle jetzt den Fall, wo *die Abbildung auf die Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes geleistet wird.* Wieder soll es sich dabei um die Uniformisierung einer algebraischen Funktion $w(z)$ handeln. Da deren Riemannsche Fläche geschlossen ist, so kann jetzt die Abbildung auf die offene Ebene nicht umkehrbar eindeutig sein. Zu jedem Punkt der Riemannschen Fläche der zu uniformisierenden Funktion gehören vielmehr jetzt mehrere Elemente der Uniformisierungs-transzendenten. Die Fortsetzung eines jeden derselben liefert eine Abbildung auf eine volle Ebene und daher sind die verschiedenen Zweige der Transzendenten lineare Funktionen von einander, welche die t -Ebene so in sich überführen, daß dabei der unendlichferne Punkt festbleibt. Wenn man also $t(z)$ längs eines auf der Riemannschen Fläche geschlossenen Weges fortsetzt, so geht t in eine lineare Funktion von t über. Diese Überlegung lehrt zugleich, daß

1) Die Beziehung zu der früher (S. 190) so genannten Zahl wird bald zum Vorschein kommen.

die linearen Funktionen eine Gruppe bilden. $z(t)$ sowie $w(t)$ sind automorphe Funktionen dieser Gruppe (vgl. S. 196). Keine Transformation der Gruppe kann einen von unendlich verschiedenen Fixpunkt besitzen. Denn in der Nähe eines solchen Fixpunktes müßten Punkte liegen, die vermöge der betreffenden Transformation zu einander äquivalent sind. Andererseits aber entspricht die Umgebung eines jeden endlichen Punktes der t -Ebene bei der Abbildung umkehrbar eindeutig der Umgebung einer Stelle der Riemannschen Fläche. Beides verträgt sich nicht miteinander. Alle Transformationen der Gruppe sind somit Parallelverschiebungen. Wie auf S. 46 bei der Fundamentalabbildung der schlichten Bereiche, führen wir einen Fundamentalbereich der Gruppe ein; er enthält zu jedem Punkte der Riemannschen Fläche genau einen Bildpunkt und seine Ränder sind paarweise einander zugeordnet. Daraus folgt, wie auch schon S. 194 bemerkt wurde, daß der Fundamentalbereich ganz im Endlichen liegt. Die Gruppe besteht aus Parallelverschiebungen. Schon von Bd. I, S. 246 ff. wissen wir, daß die Gruppe also entweder einfachperiodisch oder doppelperiodisch ist. Da aber der Fundamentalbereich ganz im Endlichen liegt, kommt hier nur der doppelperiodische Fall in Betracht und als Fundamentalbereich kann eines der schon in Bd. I, S. 250 untersuchten Periodenparallelogramme gewählt werden.

Nun wollen wir wieder eine notwendige Bedingung für diejenigen Riemannschen Flächen aufstellen, deren Uniformisierung auf den hier vorliegenden Fall führt. Da sich die verschiedenen Zweige der Funktion $t(z)$ nur um additive Konstanten von einander unterscheiden, so ist t' eine auf der Fläche eindeutige Funktion. Wir betrachten das über die Fläche erstreckte Integral

$$\iint A_1 u dx dy, \text{ wo } u = \log t'.$$

Es ist gleich dem über ein Periodenparallelogramm erstreckten

$$\iint A_1 u dt_1 dt_2.$$

Wir formen es wie im vorigen Paragraphen mittels der Greenschen Formel um und finden so eine Summe von Randintegralen, die über Kurven um die Bilder der Verzweigungsstellen und der unendlich fernen Punkte der Fläche, **und** über den **Rand** des Periodenparallelogrammes zu erstrecken sind:

$$\iint A_1 u dt_1 dt_2 = - \sum \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Dabei ist **das** Doppelintegral zunächst über den durch die Kurven von dem Periodenparallelogramm abgegrenzten Bereich zu erstrecken. Man darf dabei unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß keine der endlichvielen ab-

geschiedenen Stellen dem Rande des Parallelogramms angehört. Zunächst erkennt man nun, daß das über den Rand des Parallelogramms erstreckte Integral Null ergibt. Denn $\log t'$ z. B. kann in zugeordneten Randpunkten des Parallelogramms nur Werte haben, die um additive Konstanten voneinander abweichen. Sie rühren von der Umlaufung der logarithmischen Singularitäten her. Bei der Differentiation nach der Randnormalen fallen diese weg, und man erhält Werte der Normalableitung, die sich in zugeordneten Punkten nur um einen Faktor -1 unterscheiden. Daher liefert die Integration um den Rand Null. Es bleiben die Integrale über die übrigen Kurven. Wir gehen wieder zu Kreisen um die entsprechenden Stellen der Riemannschen Fläche über, und finden genau wie im vorigen Paragraphen als Wert des Integrales

$$0 = -4\pi \sum (1 - \nu_i) - 8\pi n.$$

Dabei ist die Summe über alle Verzweigungspunkte zu erstrecken. p_1 ist die Zahl der in einem solchen zusammenhängenden Blätter, n die Blätterzahl der Riemannschen Fläche. Die ganze Summe ist Null, weil doch das über die Fläche erstreckte Doppelintegral Null ist. Es ist ja identisch $\mathcal{A}u = 0$. Zieht man nun die S. 202 eingeführte, Geschlecht genannte Zahl heran, so sieht man, daß jetzt das *Geschlecht der Riemannschen Fläche Eins sein muß*. Zugleich erkennen wir in diesem Falle die Übereinstimmung des Geschlechtes mit der gelegentlich der kanonischen Zellen eingeführten Zahl p .

§ 12. Nähere Untersuchung der Uniformisierungstranszendenten (Schluß).

1. Die endliche Kreisscheibe. Es bleiben nun noch alle die algebraischen Funktionen, deren Geschlecht weder Null noch Eins ist. Daß es solche gibt, lehrt schon die Betrachtung der Quadratwurzel aus einem Polynom $2p + 2$ ten Grades, deren Riemannsche Fläche zweiblättrig mit $2p + 2$ Verzweigungspunkten ist. Ihr Geschlecht ist nach der auf S. 202 als Definition des Geschlechtes angegebenen Relation gerade p , so daß jede ganze positive Zahl als Geschlecht vorkommt.

Bei allen diesen algebraischen Funktionen kann die Uniformisierung nur auf eine endliche Kreisscheibe führen, weil sich $p = 0$ oder $p = 1$ bei der Vollebene und der unendlichen Kreisscheibe als notwendig herausgestellt hat. Ebenso wird sich $p > 1$ bei der endlichen Kreisscheibe als notwendig ergeben.

Wir führen die Untersuchung auf ganz analogem Weg wie in den beiden vorausgehenden Paragraphen.

Während wir im Vollkugelfall uns der sphärischen Maßbestimmung bedienten, während wir im Fall der punktierten Ebene des vorigen Paragraphen von der euklidischen Maßbestimmung Gebrauch machten, ziehen wir

jetzt die auf den Bildkreis gegründete kreisgeometrische Maßbestimmung heran. Als solchen Kreis dürfen wir den Einheitskreis nehmen. Wir haben schon im Abschnitt über konforme Abbildung auf S. 54 diese kreisgeometrische Maßbestimmung eingeführt. Der damals gegebenen Darstellung entnehmen wir als Ausdruck des kreisgeometrischen Flächeninhaltes, das über den betreffenden Bereich zu erstreckende Doppelintegral:

$$\iint \frac{4 dt_1 dt_2}{(1 - it)^2} \quad (t = t_1 + it_2).$$

Als Bereich nehmen wir die kanonische Zelle. Da diese zu jedem Punkt der Rieinannschen Fläche — abgesehen von den paarweise einander zugeordneten Rändern — genau einen Bildpunkt enthält, so enthält sie auch — wieder abgesehen von den paarweise einander zugeordneten Rändern — aus jedem System durch die Gruppe äquivalenter Punkte genau einen. Im Sinne der S. 46 eingeführten Terminologie ist sie also als *Fundamentalebereich der Gruppe anzusprechen*. Vermöge der durch $t(z)$ vermittelten umkehrbar eindeutigen Abbildung zwischen Riemannscher Fläche und Fundamentalebereich können wir das über den Fundamentalebereich erstreckte Integral in eines über die Riemannsche Fläche verwandeln:

$$\iint \frac{4 t' \bar{t}'}{(1 - t\bar{t})^2} dx dy \quad (z = x + iy).$$

Dies letztere Integral werden wir nun mit Hilfe der Greenschen Formel auswerten, während wir andererseits direkt den kreisgeometrischen Inhalt des Fundamentalebereiches bestimmen können. Die Gleichsetzung beider Ergebnisse wird wieder zu der für die vorliegenden Fälle notwendigen Bedingung führen.

Wir werden das erste Integral über die kanonische Zelle zuerst auswerten. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß man annehmen darf, daß diese von endlich vielen Bögen von Kreisen begrenzt ist, die auf der Peripherie des Einheitskreises senkrecht stehen, und die sich in den Ecken der Zelle unter bestimmten Winkeln treffen. Zu dieser Einsicht gelangt man am bequemsten, wenn man zunächst noch einmal die kanonische Zelle verläßt und zu der vor ihrer Einführung vorgenommenen Zerschneidung der Riemannschen Fläche längs endlich vielen Kreisbogen zurückgeht. Da die Abbildung $t(z)$ überall auf der Riemannschen Fläche analytisch ist, so entsteht durch diese aus der zerschnittenen Fläche als Bild der ursprünglich eingeführten Zelle eine neue Zelle — Fundamentalebereich der Gruppe, welcher von endlich vielen Bögen von Kurven begrenzt ist, welche auch in den Ecken noch analytisch sind, sich dort also unter bestimmten Winkeln treffen. Die Ränder sind paarweise durch lineare Transformationen der

Gruppe, also lineare Transformationen des Einheitskreises in sich einander zugeordnet. Man darf noch annehmen, daß die Winkel, unter denen sie sich in den Ecken treffen, von 0 verschieden sind. Denn man kann dies durch passende Wahl der die Riemannsche Fläche überdeckenden Kreisscheiben erreichen. Nachdem dies geschehen ist, nehmen wir aufs neue den Übergang zur kanonischen Zelle in der S. 187 ff. beschriebenen Weise vor. Dort waren gewisse Linien zur Abtrennung und Wiederanfügung einzelner Teile der Zelle nötig. Als solche Linien darf man nun Polygone aus Kreisbögen nehmen, die auf der Peripherie des Einheitskreises senkrecht stehen. Man erhält somit als kanonische Zelle ein Kreisbogenpolygon, dessen Seiten sich zu 4P Polygonzügen aneinanderfügen, welche paarweise durch Operationen der Gruppe einander zugeordnet sind. So werden am Polygon gewisse einen einzigen Zyklus bildende Ecken ausgezeichnet. Auf den neuerdings als Seiten bezeichneten Polygonzügen befinden sich noch gewisse Hilfsecken. Nimmt man aber zwei einander linear zugeordnete Polygonzüge zusammen, so sieht man, daß diese Hilfsecken zweigliedrigen Zyklen angehören.

In der Gleichung

$$a\bar{t}\bar{t} + \alpha t + u\bar{t} + u = 0, \quad a \text{ reell}$$

sind alle Orthogonalkreise enthalten. Man erkennt dies sofort, wenn man von der allgemeinen Gleichung eines Kreises, also von

$$att + ut + \bar{a}\bar{t} + c = 0, \quad a, c \text{ reell}$$

Invarianz gegen reziproke Radien, also gegenüber

$$t_1 \rightarrow \frac{1}{t_1}$$

verlangt. Denn diese und nur diese Transformation führt jeden Orthogonalkreis in sich über. Differenziert man diese Gleichung zweimal nach irgend einem Parameter, der längs des Kreises variiert, z. B. seiner euklidischen Bogenlänge, so erhält man durch Elimination von α und α die Differentialgleichung der Orthogonalkreise. Man findet

$$(1 - t\bar{t})(t_1''t_2' - t_1't_2'') - 2(t_1'^2 + t_2'^2)(t_1t_2' - t_2t_1') = 0.$$

Nimmt man tatsächlich die euklidische Bogenlänge als Parameter, so kann man diese Gleichung so schreiben:

$$(1 - t\bar{t})(t_1't_2'' - t_2't_1'') + 2(t_1t_2' - t_2t_1') = 0.$$

Nun komme ich zur Berechnung des über eine kanonische Zelle erstreckten Integrales

$$\int \int \frac{4 dt_1 d\bar{t}_1}{(1 - t\bar{t})^2}.$$

Die Greensche Formel lehrt zunächst, daß man dafür das im positiven Sinne um den Polygonrand erstreckte Linienintegral

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \log \frac{4}{(1-it)^2} dt_1 - \frac{\partial}{\partial t_2} \log \frac{4}{(1-it)^2} dt_2 \right)$$

schreiben kann. Denn man erkennt zunächst, daß

$$du = 2e^u$$

ist, wenn man

$$e^u = \frac{4}{(1-it)^2}$$

setzt, und unter du den Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}$$

versteht. Hiernach ergibt die Greensche Formel sofort den Übergang zum Linienintegral. Seinen Integranden kann man ausrechnen und findet so

$$2 \int \frac{t_1' t_2' - t_1 t_2'}{1-it} ds,$$

wenn man noch als Integrationsvariable die euklidische Bogenlänge des Zellenrandes einführt. Die Differentialgleichung der Orthogonalkreise lehrt, daß man dieses Handintegral dann als Summe von Integralen

$$- \sum \int (t_1' t_2' - t_1 t_2') ds$$

schreiben kann, deren jedes im positiven Sinne über einen der im Rand enthaltenen Orthogonalkreisbogen zu erstrecken ist. Ein solches Integral bedeutet aber geometrisch den Winkel, um den sich im positiven Sinne die Tangente des Kreisbogens dreht, wenn man den Berührungspunkt derselben im positiven Sinne den Kreisbogen durchlaufen läßt. Die sich so ergebende Summe von Drehungen der Tangente läßt sich leicht bestimmen. Wenn man nämlich eine Tangente einen vollen Umlauf um das Polygon vornehmen läßt und dabei in den Ecken immer um den da befindlichen Außenwinkel drehen läßt, so kommt als Gesamtdrehung 2π heraus. Unsere Integralsumme liefert aber nur den von den Seiten herrührenden Anteil an dieser Gesamtdrehung. Von 2π ist also die Summe der Außenwinkel in Abzug zu bringen. Unter Außenwinkel ist dabei der Winkel zu verstehen, um den man in einer Ecke die bei der Durchlaufung vorausgehende Seite auf dem kürzesten Weg drehen muß, um sie in die bei der Durchlaufung folgende überzuführen. Betrachtet man so ein Paar zugeordneter Hilfsecken, so sieht man, daß beide zusammen die Außenwinkelsumme Null ergeben. Es bleiben also nur die Außenwinkel der $4p$ Hauptecken zu betrachten. Die Innenwinkel ergeben zusammen 2π . Denn die $4p$ Hauptecken gehören

einem einzigen Zyklus an, d. h. das Zellennetz, in das der Fundamentalbereich zerfällt, zerfällt in jeder Hauptecke in $4p$ Zipfel, die der Reihe nach durch Transformationen der Gruppe sämtlichen Hauptecken der Zelle entsprechen. Der Außenwinkel ist aber an jeder Stelle gleich π minus dem Innenwinkel. Also wird die Summe der Außenwinkel an den Hauptecken

$$4p\pi - 2\pi.$$

Und damit wird der kreisgeometrische Inhalt der Zelle

$$8\pi(p - 1).$$

Daraus ergibt sich z. B. auch, daß die Zahl p von der Art, wie wir zur Zelle gelaugten, nicht abhängt. Denn offenbar haben alle Zellen einer Gruppe den gleichen Inhalt, denn dieser Inhalt ist ja stets dem zweiten der oben angegebenen über die Riemannsche Fläche erstreckten Integrale gleich. Da dieser Inhalt positiv sein muß, so ergibt sich als erste Folgerung $p > 1$ als notwendige Bedingung.

Wir kommen zur Auswertung des über die Riemannsche Fläche erstreckten Doppelintegrals. Dazu ist nur die in § 10 zu ähnlichem Zwecke angestellte Überlegung zu wiederholen. Man findet wie da als Wert des Integrals

$$4\pi \sum (v_i - 1) - 8\pi n.$$

Die Gleichung $8\pi(p - 1) = 4\pi \sum (v_i - 1) - 8\pi n$

liefert dann $2p = \sum (v_i - 1) + 2(n - 1),$

so daß sich p mit der schon S. 190 von der Riemannschen Fläche her als Geschlecht eingeführten Zahl als identisch erweist. Dies Geschlecht muß also im Falle der endlichen Kreisscheibe größer als Eins sein.

Und so zeigt sich, daß die gefundenen notwendigen Bedingungen für das Geschlecht auch hinreichend sind, $p = 0$ und nur dies führt zum Vollenfall, $p = 1$ und nur dies führt zur punktierten Ebene, in allen anderen Fällen kommt die endliche Kreisscheibe heraus.

2. Das Geschlecht als topologische Invariante. Unsere Ausführungen lassen ohne weiteres erkennen, daß zwei geschlossene Riemannsche Flächen sicher dann das gleiche Geschlecht besitzen, wenn sie sich umkehrbar eindeutig und konform aufeinander abbilden lassen. Denn durch diese Abbildungsbeziehung geht jede auf der einen Fläche im kleinen eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion in eine ebensolche Funktion der anderen Fläche über. Sind dann t und T die in der vorausgegangenen Theorie eingeführten Uniformisierungsansatztranszendenten der beiden Flächen, die nach S. 193 dadurch charakterisiert sind, daß jede auf einer Riemannschen Fläche im kleinen eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion, und nur diese, sich als eine bis auf Pole reguläre im großen eindeutige Funktion der Uniformisierungs-

transzendenten darstellen läßt, so ergibt sich, daß sowohl t eine eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion von z , als auch T eine eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion von t ist. Dadurch wird also eine umkehrbar eindeutige Abbildung der durch die Uniformisierung erhaltenen Bildbereiche aufeinander vermittelt, und da es sich um Kreise von endlichem oder unendlichem Radius oder die volle Ebene handelt, ist die Abbildung linear, und es liegt daher auch bei beiden Riemannschen Flächen derselbe der drei eben genannten Fälle vor. Da durch die lineare Transformation eine kanonische Zelle in eine kanonische Zelle übergeht, haben diese auch das gleiche Geschlecht.

Aber man kann nicht umgekehrt zwei Riemannsche Flächen gleichen Geschlechtes stets umkehrbar eindeutig und *konform* aufeinander abbilden. Denn wie wir eben sahen, müßte eine solche Abbildung durch eine lineare Beziehung der Uniformisierungstranszendenten sich ausdrücken lassen. Wir wissen aber schon von den Periodenparallelogrammen $p - 1$ her, daß sich zwei beliebige doppelperiodische Gruppen nicht linear aufeinander abbilden lassen. Wohl aber übersieht man sehr rasch, daß zwei Riemannsche Flächen gleichen Geschlechtes sich stets umkehrbar eindeutig und *stetig* aufeinander abbilden lassen. Man hat zu diesem Zweck nur zu zeigen, daß man zwei kanonische Zellen gleichen Geschlechtes so umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abbilden kann, daß zugeordnete Randpunkte in zugeordnete Randpunkte übergehen. Da es sich beidemal um Zellen mit $2p$ Paaren zugeordneter Seiten handelt, so kann man diese beiden einfach zusammenhängenden Bereiche sofort so aufeinander abbilden, daß zugeordnete Seitenpaare in zugeordnete Seitenpaare übergehen. Hiernach kann man die Abbildung in der Nähe des Randes noch so zurechtrücken, daß zugeordnete Punktepaare des Randes in zugeordnete Punktepaare des Randes übergehen und daß dabei die Stetigkeit und der umkehrbare eindeutige Charakter der Abbildung gewahrt wird.

Den eben bewiesenen Satz kann man nun aber auch umkehren. Zwei Riemannsche Flächen, die sich umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abbilden lassen, besitzen stets das gleiche Geschlecht, so daß die *Gleichheit des Geschlechtes die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer umkehrbar eindeutigen stetigen Beziehung zwischen zwei geschlossenen Riemannschen Flächen ist.*

Um die ausgesprochene Behauptung zu beweisen, hat man nur den vorhin gegebenen Beweis dafür, daß zwei in umkehrbar eindeutiger konformer Beziehung stehende Riemannsche Flächen das gleiche Geschlecht besitzen, ein wenig abzuändern. Wir betrachten jetzt beliebige auf der Riemannschen Fläche im kleinen eindeutige, auch komplexer Werte fähige, im funktionen-

theoretischen Sinne stetige (d. h. nach Hinzunahme einer stereographischen Projektion stetige) Funktionen. Alle diese Funktionen sind im großen eindeutige und stetige Funktionen der uniformisierenden Transzendenten der Fläche. Das lehrt der auf solche Funktionen übertragbare Monodromiesatz. Betrachten wir also wieder zwei in umkehrbar eindeutiger und stetiger Beziehung stehende Riemannsche Flächen mit den Uniformisierungstranszendenten t und T , so ergibt sich, daß einerseits t eine eindeutige und stetige Funktion von T , und daß andererseits T eine eindeutige und stetige Funktion von t ist. Daher sind durch diese Beziehung wieder die Wertebereiche der Uniformisierungstranszendenten umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abgebildet und zwar so, daß dabei Punkte t , die dem gleichen Punkt der Fläche entsprechen, in Punkte T übergehen, die ihrerseits dem gleichen Punkte der zugehörigen Riemannschen Fläche entsprechen. Daher wird aus jedem kanonischen Fundamentalbereich ein kanonischer Fundamentalbereich und die zugehörigen Gruppen sind einstufig isomorph. Daraus folgt sofort, daß volle Ebene in volle Ebene übergeht, so daß nur die übrigen Fälle einer weiteren Betrachtung bedürfen. Freilich ist hier der Begriff „kanonischer Fundamentalbereich“ in etwas allgemeinerem Sinn genommen als bisher. Denn jetzt müssen wir zulassen, daß sein Rand von Bogen beliebiger Jordanscher Kurven gebildet wird. Der Rand zerfällt aber nach wie vor in $2p$ Paare zugeordneter Bogen und diese sind auch am Rande ebenso angeordnet, wie uns dies von kanonischen Zellen des Geschlechtes p geläufig ist.

Man verbinde daher die beiden Endpunkte einer Seite im Inneren des Fundamentalbereiches durch einen Querschnitt, der aus abzählbar vielen Orthogonalkreisbögen besteht, trenne durch ihn eine Sichel vom Bereiche ab und füge sie durch eine lineare Operation der Gruppe an der zugeordneten Seite wieder an. So erhält man einen neuen Fundamentalbereich und durch $2p$ -malige Wiederholung dieser Operation erhält man einen Fundamentalbereich, der von abzählbar vielen Orthogonalkreisbögen begrenzt ist. Diese können sich in den $4p$ Hauptecken des Fundamentalbereiches häufen. Dieser Fundamentalbereich ist nun aber im kreisgeometrischen Sinne quadrierbar und es bleibt nur noch zu zeigen, daß sein Inhalt $8\pi(p-1)$ ist. Um das noch zu erkennen, lege ich um die $4p$ Hauptecken kreisgeometrische kongruente Kreise, deren Radius so klein ist, daß nur die in der betreffenden Ecke zusammenstoßenden Seiten den Kreis treffen. Dann verfolge ich eine jede Seite vom Kreismittelpunkt bis zu ihrem letzten Treffpunkt mit dem Kreise und verbinde die so erhaltenen $8p$ Punkte mit den Kreismittelpunkten durch Orthogonalkreisbögen. Diese zusammen mit den zwischen den Kreisen auf den bisherigen Fundamentalbereichsrändern gelegenen Orthogonalkreis-

bögen begrenzen dann eine neue kanonische Zelle vom Geschlechte p , deren Seiten nun paarweise durch die gleichen linearen Transformationen wie bisher einander zugeordnet sind. (Ob dies ein Fundamentalbereich der Gruppe ist oder nicht, brauche ich nicht zu untersuchen, obwohl sich dies auch sehr leicht feststellen läßt.) Jedenfalls approximiert dieser Bereich den Fundamentalbereich mit den gleichen Hauptecken um so genauer, je kleiner die Radien der Hilfskreise gewählt sind. Sein Inhalt ist aber nach S. 208 stets $8\pi (p - 1)$. Daher hat auch der Fundamentalbereich den Inhalt $8\pi (p - 1)$, und damit ist die topologische Invarianz des Geschlechtes bewiesen und erkannt, daß dies die einzige topologische Invariante geschlossener Riemannscher Flächen ist. Es ist, wie wir sahen, nicht die einzige konforme Invariante. Vielmehr hängen wie in der Theorie der algebraischen Funktionen gezeigt wird, die Riemannschen Flächen vom Geschlechte p von $6p-6$ Moduln, d. i. Parametern ab, in dem Sinne, daß zwei Flächen mit verschiedenen Moduln nicht umkehrbar eindeutig konform aufeinander abgebildet werden können.

§ 13. Verallgemeinerungen.

1. Prinzipielle Bemerkungen. In diesem Paragraphen soll es sich darum handeln, gewisse allgemeinere Sätze zur Sprache zu bringen, die mit der Methode der vorigen Paragraphen bewiesen werden können. Klein und Poincaré sind fast gleichzeitig die ersten gewesen, welche die Idee der Uniformisierung konzipiert haben. Während sich aber Kleins Interesse wesentlich auf die Uniformisierung der algebraischen Funktionen bezog, faßte Poincaré die wesentlich kühnere Idee einer Uniformisierung beliebiger analytischer Funktionen. Beide Forscher haben auch in den achtziger Jahren schon Ideen und Versuche zu Beweisen ihrer Theoreme veröffentlicht, die freilich alle in irgendeiner mehr oder weniger beträchtlichen Hinsicht zu wünschen übrig lassen. Die Idee, dem Beweise des Hauptsatzes der Uniformisierung die Konstruktion einer Überlagerungsfläche zugrunde zu legen, rührt wahrscheinlich von H. A. Schwarz her. Explizite tritt sie zuerst als Beweismittel bei Poincaré auf. Neuerdings hat Koebe das Problem der Uniformisierung wieder aufgenommen, und ihm in großzügiger Weise Methode und Abrundung gegeben. Ich habe mich hier, gestützt auf eine meiner älteren Arbeiten bemüht, möglichst wenig aus der Analysis situs der mehrblättrigen Mannigfaltigkeiten zu benutzen. In der Tat verwendet mein Beweis nur den Begriff des funktionentheoretischen Bereiches, wie er schon im ersten Bande S. 69 entwickelt wurde, und macht insbesondere von den schwierigeren topologischen Begriffen des Zusammenhanges bei solchen mehrblättrigen Bereichen keine Anwendung. Vielmehr hat uns der in § 5

bewiesene Abbildungssatz erst instand gesetzt, im § 7 die gestaltlichen Eigenschaften der Riemannschen Flächen — namentlich algebraischer Funktionen — zu untersuchen.

2. Relativ verzweigte Uniformisierungstranzcndenten. Hier möchte ich, gestützt auf die Methode des vorigen Paragraphen, noch einige allgemeinere Kleinsehe Uniformisierungssätze beweisen.

Im vorigen Paragraphen handelte es sich um die Uniformisierung aller der Funktionen, welche in jedem Punkte einer gegebenen Riemannschen Fläche eindeutig sind, die also, wie wir sagten, relativ zu einer gegebenen Riemannschen Fläche unverzweigt sind. Alle diese Funktionen werden eindeutige Funktionen des im vorigen Paragraphen eingeführten Parameters t .

Aber schon der Logarithmus oder die elliptische Modulfunktion liefern Lösungen andersartiger Uniformisierungsprobleme. Eindeutige Funktionen von $t = \log z$ werden z. B. alle diejenigen Funktionen von z , welche in $z = 0$ und in $z = \infty$ ein ganz beliebiges Verhalten zeigen, welche aber in der Umgebung einer jeden anderen Stelle der z -Ebene eindeutig sind.

Man kann sich so allgemein die folgende Frage stellen. Gegeben wieder eine beliebige analytische Funktion $f(z)$ und ihre Riemannsche Fläche. Es soll eine Funktion $t(z)$ bestimmt werden, die an λ gegebenen Stellen der Riemannschen Fläche in vorgegebener Weise relativ zu dieser verzweigt ist, welche aber in der Umgebung aller anderen Stellen eindeutig ist, und zwar so, daß sich jede Funktion, die in der Umgebung einer jeden Stelle das gleiche Verhalten zeigt, als eindeutige Funktion von t auffassen läßt. Unter „gleichem Verhalten“ ist dabei folgendes zu verstehen: Jeder Stelle der Riemannschen Fläche gehört ein lokaler uniformisierender Parameter zu, d. h. eine Funktion $\tau = \sqrt[n]{z - a}$ (n ganz), die ihre Umgebung auf ein schlichtes Flächenstück abbildet. Jeder Stelle ist nun eine $\sqrt[v]{\tau}$ (v ganz) oder der $\log \tau$ zugeordnet, die das Verhalten der gesuchten Uniformisierungstranzcndenten an der betreffenden Stelle festlegt. Nur zu endlich vielen Stellen gehört dabei nicht τ selbst, d. h. $v = 1$. Eindeutige Funktionen von t sollen alle die Funktionen werden, welche in der Umgebung einer jeden Stelle eindeutige Funktionen der ihr zugeordneten $\sqrt[v]{\tau}$ oder von $\log \tau$ sind. Das ist mit gleichem Verhalten gemeint.

Dies Problem kann man in der gleichen Weise lösen, wie das Problem des vorigen Paragraphen. Man muß nur in der Kette der Funktionselemente von $f(z)$ einzelne Elemente durch v -blättrig verzweigte Kreisscheiben ersetzen, oder aber die Punkte, wo logarithmische Verzweigung entstehen soll, aus der Riemannschen Fläche entfernen, d. h. die Kreisscheiben aller die betreffende Stelle enthaltenden Funktionselemente so verkleinern, daß keines mehr diese Stelle im Inneren hat. Dann führt unser Verfahren, wie

der Leser sich im einzelnen selbst zurechtlegen möge, ganz von selbst zur Lösung des eben gestellten Problems.

3. Existenz von Funktionen auf funktionentheoretischen Bereichen. Auf ein noch allgemeineres Problem führt die Bemerkung, daß es für unsere Beweisführung nicht wesentlich ist, daß die Kette von Funktionselementen, an die sich der Beweis anschließt, gerade aus den Funktionselementen einer analytischen Funktion besteht, vielmehr genügt es, daß diese Funktionselemente das bilden, was wir einen funktionentheoretischen Bereich nannten.

Der Unterschied ist also der, daß wir dann von einem funktionentheoretischen Bereich handeln, bei dem wir noch nicht wissen, ob auf ihm analytische Funktionen existieren oder nicht. Unsere Methode liefert dann den Nachweis, daß auf ihm analytische Funktionen existieren, welche in der Umgebung einer jeden Stelle desselben sich regulär verhalten, die freilich nicht auf ihm im Großen eindeutig zu sein brauchen. Aber auch hier ist der Existenzbeweis der Uniformisierungstranszendenten die Grundlage, auf der sich auch die Existenz solcher eindeutigen Funktionen nachweisen läßt.

In diesem Satze liegt eine besonders von Klein und später von Koebe in den Vordergrund des Interesses gerückte Tatsache der Riemannschen Funktionentheorie. Es gehört danach nicht allein jeder analytischen Funktion ein funktionentheoretischer Bereich, nämlich ihre Riemannsche Fläche zu, sondern umgekehrt gehört auch zu jeder Riemannschen Fläche oder Riemannschen Mannigfaltigkeit eine analytische Funktion, deren Riemannsche Fläche jene Mannigfaltigkeit ist.

4. Weitere Uniformisierungstranszendenten. Die Ausführungen dieses Paragraphen legen die Frage nach einer allgemeinen Begriffsbestimmung der Uniformisierungstranszendenten nahe. Ich beschränke mich dabei auf die Betrachtung solcher Funktionen, die in der Umgebung einer jeden Stelle einer gegebenen Riemannschen Fläche F bis auf Pole regulär sind. Eine solche Funktion nenne ich dann eine Uniformisierungstranszendente, wenn sie bei Fortsetzung längs beliebigen Wegen über die Riemannsche Fläche hin keinen Wert, den sie überhaupt annimmt, mehr als einmal annimmt. Es wird also durch dieselbe eine schlichte Abbildung der Riemannschen Fläche vermittelt. Immer wenn das der Fall ist, spreche ich von einer Uniformisierung. Die Aufgabe, alle Uniformisierungen zu finden, läuft also auf die Bestimmung aller schlichten Abbildungen einer Riemannschen Fläche hinaus. Man kann sie ausgehend von der in den vorausgegangenen Paragraphen gewonnenen Hauptuniformisierung gewinnen. Alle Uniformisierungstranszendenten sind nämlich eindeutige Funktionen der Haupttranszendenten, die die Abbildung der Fläche auf eine Kreisscheibe leistet. Wir betrachten ihr Verhalten gegenüber der Gruppe der Haupttranszendenten. Wenn sie bei keiner Operation dieser Gruppe unverändert

bleibt, so ist auch umgekehrt die Haupttranszendente eine eindeutige Funktion der anderen. Daher ist die neue von der Haupttranszendenten nicht wesentlich verschieden. Sie unterscheiden sich nur um irgendeine schlichte Abbildung der Kreisscheibe der Haupttranszendenten. Anders aber wenn die Untergruppe der Hauptgruppe, bei der die neue Uniformisierungs-transzendente automorph bleibt, eine echte Untergruppe der Hauptgruppe ist. Dann besitzt diese im Hauptkreis einen Fundamentalbereich, welcher aus einer Anzahl von Fundamentalbereichen der Hauptgruppe zusammengesetzt ist, entsprechend der Zerlegung der Hauptgruppe nach der Untergruppe und ihren Nebengruppen. Die Ränder dieses Fundamentalbereiches sind paarweise durch Operationen der Untergruppe einander zugeordnet. Nun suche man diesen Fundamentalbereich schlicht so abzubilden, daß zugeordnete Randpunkte in je einem Punkte zusammenkommen. Dann hat man durch Zusammensetzen dieser Abbildung mit der Hauptuniformisierenden eine neue Uniformisierung gewonnen, die durch jene Untergruppe der Hauptgruppe charakterisiert ist. Aber nicht zu allen Untergruppen der Hauptgruppe gehören so Uniformisierungen, sondern nur zu gewissen. Die Ränderzuordnung ist nämlich sicher nur dann durch schlichte konforme Abbildung realisierbar, wenn keine Ränderzuordnungen über Kreuz gefordert werden. Dann aber, wenn dies nicht der Fall ist, kann die Ränderzuordnung auch stets durch schlichte konforme Abbildung realisiert werden. Dies ist der Inhalt des zuerst von Koebe ausgesprochenen allgemeinen Uniformisierungsprinzips, das kurz besagt, daß alle topologisch möglichen Uniformisierungen auch funktionentheoretisch möglich sind. Die Ausführung der Ränderzuordnung gelingt durch eine passende Modifikation der Heftungsaufgaben, die wir früher gelöst haben. Ich will dies hier nicht mehr ausführen, sondern nur noch auf einen hierher gehörigen schönen Sonderfall hinweisen. Für die Hauptuniformisierung wurde die Riemannsche Fläche längs p Paaren von Rückkehrschnitten aufgeschnitten, die alle vom gleichen Punkte ausgingen. Durch erlaubte Abänderung, also ein Verfahren analog zu dem in § 7 benutzten, kann man diese Zerschneidung so abändern, daß der Fundamentalbereich das schematische Verhalten von Fig. 40 zeigt, daß also sich die Rückkehrschnitte eines jeden Paares in verschiedenen Punkten treffen, die ihrerseits durch Kurvenbögen mit einem festen Punkt verbunden sind. Diesem festen Punkt entspricht dann, wie die Figur lehrt, ein Eckenzyklus und jedem Paar von Rückkehrschnitten entspricht noch ein weiterer



Fig. 40.

Eckenzyklus. Durch konforme Abbildung kann man nun sicher alle die Ränderzuordnungen ausführen, die in Fig 41 noch eingezeichnet sind, da hier keine kreuzweisen vorkommen. Die Riemannsche Fläche erscheint dann nur noch längs p Rückkehrschnitten aufgeschnitten¹⁾ und wird auf einen $2p$ -fachzusammenhängenden Bereich abgebildet, der von $2p$ einander paar

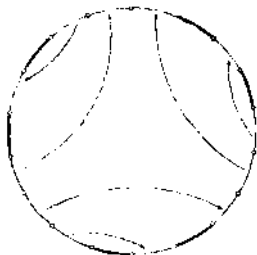


Fig. 41.

weise zugeordneten Randkurven begrenzt ist. An diese hänge man dann gemäß der Ränderzuordnung in infinitum neue Exemplare an und so erhält man eine schlichte Abbildung, also eine Uniformisierung. Man nennt sie vom Schottkyschen Typus, weil Schottky als erster sich mit den zugehörigen automorphen Funktionen befaßt und ihre Theorie entwickelt hat.

Dem vorausgegangenen gruppentheoretischen Standpunkt ordnet sich dies Beispiel insofern unter, als es sich hier um eine ausgezeichnete Untergruppe der Hauptgruppe handelt, deren Faktorgruppe sich aus den den p noch übriggebliebenen Rückkehrschnitten entsprechenden Ränderzuordnungen aufbauen läßt.

Der Raum verbietet es, diese Theorien weiter zu verfolgen. Der interessierte Leser muß auf die Originalarbeiten verwiesen werden, wo freilich den hier vorgetragenen Gesichtspunkte noch nicht voll zur Geltung gekommen sind.

Fünfter Abschnitt.

Der Picardsche Satz.

§ 1. Der Picardsche Satz für ganze Funktionen.

Ein glücklicher Gedanke hat im Jahre 1879 Picard dazu geführt, sozusagen auf zwei Zeilen eine von Weierstraß angeschnittene Frage zu erledigen; mit der wir uns schon im ersten Bande befaßten. Wir stellten dort fest, daß das wesentliche Kennzeichen einer isolierten wesentlich singulären Stelle einer Funktion $f(z)$ darin liegt, daß die Funktion in jeder Umgebung derselben jedem Werte beliebig nahe kommt, ja wir konnten sogar daraus schließen, daß es eine überall dichte Menge von Werten gibt, welche in jeder Umgebung unendlich oft angenommen werden. Dieser Sach-

1) »Se sind in Fig. 41 stark ausgezogen.

verhält legt natürlich die Frage nahe, wieviel Werte denn unter Umständen von der Funktion tatsächlich *nicht* angenommen werden. Diese Frage hat Picard durch Heranziehung der elliptischen Modulfunktion sehr einfach erledigen können.

Der Grundgedanke der Methode kommt am klarsten beim sogenannten kleinen Picardsehen Satze zum Ausdruck. Dieser lautet:

Eine ganze nicht konstante Funktion nimmt jeden (endlichen) Wert mit höchstens einer Ausnahme wirklich an.

Damit ist folgendes gemeint: Ist $f(z)$ die ganze nicht konstante Funktion und a irgendein Wert, so besitzt die Gleichung $f(z) - a = 0$ stets mindestens eine Lösung, es sei denn, daß a einen einzigen bestimmten Wert hat, der eventuell eine Ausnahme machen kann.

So nimmt ja z. B. e^z alle Werte mit Ausnahme der Null an, während $\cos z$, wie man leicht nachprüft, alle Werte wirklich annimmt.

Der Beweis verläuft nun so. Man nehme an, die ganze nicht konstante Funktion $f(z)$ nehme zwei (endliche) Werte nicht an. Man darf annehmen, daß es die Werte 0 und 1 sind. Denn nähme $f(z)$ die Werte a und b nicht an, so nähme

$$(1) \quad \varphi(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

die Werte 0 und 1 nicht an und man könnte diese Funktion $\varphi(z)$ betrachten. Da $f(z)$ als ganze Funktion auch den Wert unendlich nicht annimmt, so ist die Funktion $\omega\{f(z)\}$ längs jeden Weges der z -Ebene fortsetzbar. Dabei ist $\omega(\lambda)$ die Umkehrungsfunktion der S. 40 eingeführten elliptischen Modulfunktion $\lambda(\omega)$. Diese hat, wie wir von damals wissen, singuläre Stellen nur bei 0, 1, ∞ und ist in der Umgebung jeder anderen Stelle regulär. Da aber $f(z)$ diese drei singulären Werte nicht annimmt, ist jedes Funktionselement der Funktion $\omega\{f(z)\}$ regulär. Man kann diese daher längs jeden Weges fortsetzen. Daher definiert nach dem Monodromiesatz die Fortsetzung eines jeden Elementes dieser Funktion eine in der ganzen endlichen Ebene reguläre und eindeutige Funktion. Das ist also wieder eine ganze Funktion, die aber nun keinen Wert mit negativem Imaginärteil annimmt, weil doch $\omega(\lambda)$ nur Werte mit positivem Imaginärteil besitzt. Eine solche ganze Funktion muß aber konstant sein. Denn wäre sie nicht konstant und ganz rational, so nähme sie jeden Wert an, und wäre sie ganz transzendent, so müßte sie jedem Werte beliebig nahe kommen. Und damit ist schon der kleine Picardsche Satz bewiesen.

Man kann den zugrunde gelegten Gedanken auch benutzen, um zu zeigen, daß eine in der Umgebung einer isolierten wesentlich singulären Stelle reguläre Funktion daselbst jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme wirklich annimmt. Damit ist ja dann natürlich die Aussage gleich-

wertig, daß sie jeden Wert in jeder Umgebung unendlich oft annimmt. Indessen sind dabei noch gewisse Schwierigkeiten zu überwinden, die darauf zurückzuführen sind, daß nun kein einfach zusammenhängender Bereich zur Verfügung steht, in dem $\omega\{f(z)\}$ regulär ist. Denn regulär ist diese dann nur in einer Umgebung des singulären Punktes und dies ist ein zweifach zusammenhängender Bereich, weil der isolierte singuläre Punkt der Grenze des Regularitätsbereiches angehört. Die Überwindung dieser Schwierigkeit gelingt am besten, wenn wir uns erst gewissen von Schottky und von Landau herrührenden Vertiefungen des Picardschen Satzes zuwenden.

§ 2. Der Landausche und der Schottkysche Satz.

1. Der Landausche Satz. Landau hat im Jahre 1904 durch eine überraschende Entdeckung den Picardschen Satz vertieft. Es ist ihm nämlich gelungen, einen Kreis um den Koordinatenanfangspunkt anzugeben, in welchem die ganze Funktion $f(z)$ schon notwendig einen der beiden Werte 0 und 1 annimmt. Der Radius dieses Kreises hängt nur von $f(0)$ und von $f^{(n)}(0)$ ab, wo $f^{(n)}(z)$ die Ableitung kleinster Ordnung ist, welche bei $z=0$ nicht verschwindet. Ja diese Aussage gilt nicht nur für ganze Funktionen, sondern für beliebige in der Umgebung von $z=0$ reguläre Funktionen. Der *Landausche Satz* lautet nämlich so:

Wenn $f(z) = a_0 + a_n z^n + \dots (a_n \neq 0)$ in $|z| < R$ regulär ist, wenn es in diesem Kreise weder den Wert Null noch den Wert Eins annimmt, so gibt es eine nur von a_0 , a_n und n abhängende Funktion $L(a_0, a_n; n)$ derart, daß

$$(2) \quad R \leq L(a_0, a_n; n) \quad \text{ist.}$$

Dies besagt also, daß in einem größeren Kreise die Funktion entweder Null wird, oder Eins wird an einer passenden Stelle, oder aber aufhört regulär zu sein.

Natürlich kann man einen ganz analogen Satz aussprechen, wenn man Lagebedingungen für die Stellen sucht, wo $f(z)$ den Wert a oder den Wert b annimmt. Der Übergang zu der schon vorhin herangezogenen Funktion (1) läßt dies sofort erkennen.

Wir führen den Beweis dieses Satzes auf einem von Carathéodory angegebenen Wege, welcher zugleich die Bestimmung der Funktion L liefert.

Der Beweis benutzt wieder die elliptische Modulfunktion und beruht auf einer zweckmäßigen Verwendung des Cauchyschen Koeffizientensatzes. Auch jetzt ist nämlich wieder jeder Zweig der Funktion

$$g(z) = \omega\{f(z)\}$$

in $|z| < R$ regulär und somit eindeutig. Jeder Zweig ist durch den Wert bestimmt, welchen er bei $z=0$ besitzt. Wir haben uns also, um einen

Zweig von $g(z)$ festzulegen für eine bestimmte der Bestimmungsweisen von $w(a_0)$ zu entscheiden und zwar wollen wir denjenigen Wert nehmen, welcher dem S. 102 eingeführten Fundamentalbereich oder doch der linken Hälfte seines Randes angehört. Die so festgelegte Funktion $g(z)$ nimmt dann in $|z| < R$ nur Werte mit positivem Imaginärteil an. Dies hat zur Folge, daß die Funktion

$$(3) \quad t(z) = \frac{g(z) - g(0)}{g(z) - g(0)}, \quad t(0) := 0$$

in $|z| < R$ nur Werte annimmt, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins. Denn

$$t = \frac{w - g(0)}{w - g(0)}$$

vermittelt die Abbildung der oberen w -Halbebene auf das Innere des Einheitskreises der t -Ebene. Die erste Ableitung dieser Funktion bei $z = 0$ kann nach dem Cauchysehen Koeffizientensatz oder nach dem Schwarzsehen Lemma nicht oberhalb $1/R$ liegen. Die Ausrechnung liefert daher die Abschätzung

$$(4) \quad \frac{|g'(0)|}{|g(0) - g(0)|} \leq \frac{1}{R}.$$

Dies liefert die gesuchte Abschätzung für R , wofern $g'(0) \neq 0$ ist.

$$\text{Es ist aber} \quad g'(0) = \frac{d\omega}{dz}(a_0) \cdot a_1 \quad \text{und} \quad \frac{d\omega}{dz}(a_0) \neq 0,$$

weil $\omega(\lambda)$ in der Umgebung jeder Stelle schlicht ist. Also gilt für $a_1 \neq 0$

$$R \leq \frac{2|\omega'(a_0)|}{|a_1 \omega'(a_0)|}.$$

Dies ist die bestmögliche Abschätzung.

Ist aber $a_1 = 0$, so führt die Betrachtung einer passend gewählten Ableitung zum analogen Ergebnis. Man muß dann die erste nicht verschwindende Ableitung von $w(f(z))$ nehmen.

In der Abschätzung(5) gilt nach Bd. I S. 147/148 oder nach dem Schwarzsehen Lemma das Gleichheitszeichen nur dann, wenn

$$t(z) = \frac{1}{R} e^{i\theta} z$$

ist. Dies besagt aber,
$$f(z) = \lambda \left(\frac{g(0) e^{i\theta} z - R g(0)}{e^{i\theta} z - R} \right)$$

das Gleichheitszeichen stehen kann.

2. Der Schottkysche Satz. Das Schwarzsehe Lemma enthält aber nicht allein eine Aussage über das Verhalten der ersten Ableitung bei $z = 0$, sondern es enthält auch eine Aussage über den Betrag der Funktion im Inneren von $|z| < R$. Die Verfolgung dieses Gedankens führt zum *Schottkyschen Satz*. Dieser lautet:

$$\text{Wenn} \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$$

in $|z| < R$ regulär ist, wenn daselbst $f(z) \neq 0$ und $f(z) = 1$ ist, so gibt es eine nur von a_0 und ϑ abhängende Schranke $S(a_0, \vartheta)$, derart, daß

$$(6) \quad |f(z)| \leq S(a_0, \vartheta)$$

$$\text{in} \quad |z| \leq \vartheta R, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Die Anwendung des Schwarzsehen Lemmas auf die Funktion (3) liefert

$$|t(z)| \leq \vartheta \quad \text{in} \quad |z| \leq \vartheta R.$$

Wenn aber $t(z)$ Werte aus diesem Teilkreis des Einheitskreises annimmt, so nimmt $g(z)$, wie man durch Rückgang zur oberen Halbebene erkennt, nur Werte aus einem gewissen um den Punkt $w(a_0)$ gelegten Kreise an, der allein von a_0 und ϑ abhängt. Man erhält diesen Kreis, wenn man den Einheitskreis $|z| < 1$ so auf die obere Halbebene abbildet, daß sein Mittelpunkt in den Punkt $w(a_0)$ übergeht. Diese Betrachtung stimmt genau überein mit der, die wir schon S. 108 zur Verallgemeinerung des Schwarzsehen Lemmas anstellten. Der erhaltene Kreis ist weiter nichts als die zum Punkt $w(a_0)$ und zum Wert ϑ gehörige Greensche Niveaulinie der oberen Halbebene, und dies ist nach S. 106 weiter nichts als der nichteuklidische Kreis um $w(a_0)$ vom Radius ϑR . Geht man nun endlich vermittle $\lambda(\omega)$ von der oberen Halbebene zu der Ebene über, über welcher die von $f(z)$ in $|z| < R$ angenommenen Werte ausgebreitet sind, so nimmt $f(z)$ in $|z| < \vartheta R$ nur Werte an, die dem Bereiche angehören, den man durch die Abbildung $\lambda(\omega)$ aus dem Inneren des eben eingeführten Kreises erhält. Dieser Bereich liegt ganz im Endlichen und zwar ganz innerhalb eines Kreises, dessen Radius, so wie die Greensche Niveaulinie nur von a_0 und ϑ abhängt. Dieser Radius ist die Schranke des Schottkyschen Satzes.

3. Vertiefung des Schottkyschen Satzes. Ein etwas genaueres Eingehen auf den Gang des Beweises führt zu einer von Landau gefundenen Vertiefung des Schottkyschen Satzes. Es gilt nämlich folgender Satz:

$$\text{Wenn} \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$$

in $|z| < R$ regulär ist, und wenn daselbst $f(z) \neq 0$ und $f(z) = 1$ ist, wenn weiter $|a_0| \leq k$ ist, so gibt es eine nur von ϑ und k abhängende Schranke $S_1(k, \vartheta)$, so daß

$$|f(z)| \leq S_1(k, \vartheta)$$

$$\text{in} \quad |z| \leq \vartheta R.$$

Zum Beweis haben wir den Bereich zu betrachten, welchen in der oberen Halbebene der von der Greenschen Niveaulinie umschlossene Kreis überstreicht, wenn man ϑ festhält, aber a_0 der Bedingung $|a_0| \leq k$ entsprechend sich ändern läßt. Kann man zeigen, daß dieser Bereich einen Teil der oberen Halbebene bedeckt, welcher bei Abbildung durch $\lambda(\omega)$ in einen ganz im Endlichen gelegenen Teil der λ -Ebene übergeht, so ist damit die Existenz der Schranke S_1 schon bewiesen. Die dazu nötige Betrachtung ist aber im Grunde schon auf S. 43/44 angestellt worden. Denn dort hatten wir gerade das Verhalten von $\lambda(\omega)$ bei Annäherung von ω an die Ecken des Fundamentalbereiches untersucht.

Wir hatten dort erkannt, daß die Funktion $\lambda(\omega)$ in einem in der rechten oder linken unteren Ecke des Fundamentalbereiches die reelle Achse berührenden Kreise sich beliebig wenig von 0 unterscheidet, wenn nur dieser Kreis hinreichend klein ist, daß ebenso die Funktion in der Nähe der mittleren unteren Ecke beliebig wenig von 1 abweicht, und daß sie oberhalb einer genügend weit von der reellen Achse parallel zu ihr gezogenen Geraden nur absolute Beträge oberhalb einer beliebig vorgegebenen Schranke besitzt. Die Stellen des Fundamentalbereiches also, wo die Werte $\omega(a_0)$ für $|a_0| \leq k$ liegen können, befinden sich alle unterhalb einer in geeigneter von k allein abhängiger Höhe parallel zur reellen Achse gezogenen Geraden. Legt man um alle die so in Betracht kommenden Punkte des Fundamentalbereiches — diesem sollte ja nach S. 218 $\omega(a_0)$ angehören — die zu ϑ gehörigen Greenschen Niveaulinien, so erfüllen die von ihnen umschlossenen Kreisscheiben einen Bereich, dessen Rand man erhält, wenn man um die Randpunkte dieses Teiles des Fundamentalbereiches die zu ϑ gehörigen Greenschen Niveaulinien legt. Dieser Bereich liegt aber jedenfalls ganz im Endlichen und reicht nur in den drei unteren Ecken des Fundamentalbereiches an die reelle Achse heran. In der Umgebung dieser drei Ecken erhält man den Verlauf der Begrenzung, wenn man in einem Randpunkt des Fundamentalbereiches die Niveaulinie ϑ anbringt, und diese dann durch eine hyperbolische Transformation der oberen Halbebene in sich, welche die betreffende Randkurve des Fundamentalbereiches in sich verschiebt, auf die Ecke zuschiebt. Der nichteuklidische Mittelpunkt der Niveaulinie wandert dabei dieser Randkurve entlang und der Vergleich mit der hyperbolischen Transformation, welche Null und unendlich festläßt und die imaginäre Achse in sich verschiebt, lehrt, daß der von der Niveaulinie umschlossene Kreis dabei einen Bereich überdeckt, welcher in der Umgebung der Ecke von zwei Kreisen begrenzt wird, welche unter einem von ϑ allein abhängenden von Null verschiedenen Winkel die reelle Achse treffen.

In diesem Bereich ist aber, wie wir von S. 43/44 wissen, $\lambda(\omega)$ beschränkt, und damit ist die Verschärfung des Schottkyschen Satzes bewiesen.

4. Abschätzungen beim Schottkyschen Satz. Oft ist es von Vorteil, eine *Abschätzung der Schranke* des Schottkyschen Satzes zu besitzen, welche erkennen läßt, wie stark $\mathfrak{S}_1(k, \theta)$ anwachsen kann, wenn k über alle Grenzen wächst oder sich θ der Eins nähert.

Zu dieser Feststellung hat man nur den eben eingeschlagenen Weg ein klein wenig weiter zu verfolgen. Zunächst nehme ich an, daß $w(a_0)$ dem in der Fig. 12 auf S. 91 kenntlich gemachten Kreisbogendreieck angehört. Wenn dies nicht von vornherein so ist, so trifft es doch für eine passende lineare Funktion derselben mit ganzzahligen reellen Koeffizienten zu. Einer ganzzahligen linearen Funktion der w entspricht aber nach S. 99 eine der sechs linearen Funktionen von λ , durch die die sechs Werte des Doppelverhältnisses von vier gegebenen Zahlen auseinander hervorgehen, so daß es tatsächlich ausreichen wird, zunächst die Abschätzung unter der angegebenen Annahme über $w(a_0)$ vorzunehmen. Gehört nun also $w(a_0)$ dem Kreisbogendreieck der Fig. 12 an, dann ist $\mathfrak{S}\{\omega(a_0)\} \geq \frac{V^3}{2}$. Beschränkt man dann z auf den Kreis $|z| < \theta R$, so liegen die zugehörigen Werte von $\omega\{f(z)\}$ innerhalb der zu θ und dem Aufpunkt $\omega\{a_0\}$ gehörigen Green-schen Niveaulinie der oberen Halbebene. Dies führt zu der Abschätzung

$$(7) \quad \mathfrak{S}\{\omega(a_0)\}^{\frac{1-\theta}{2}} < \mathfrak{S}\{\omega\{f(z)\}\} < \mathfrak{S}\{\omega(a_0)\}_1^{\frac{2}{\theta}},$$

wie man von den auf S. 103 behandelten Verallgemeinerungen des Schwarzsehen Lemmas her weiß.

Um die Abschätzung weiter zu treiben, hat man nun vor allem eine Abschätzung von $\mathfrak{S}\{\omega(a_0)\}$ nach unten und nach oben nötig.

Nach unten genügt weiterhin die Abschätzung

$$\mathfrak{S}\{\omega(a_0)\} \geq \frac{V^3}{2}$$

die durch die Bestimmung von $\omega\{a_0\}$ bedingt ist. Nach oben dagegen bekommt man eine Abschätzung, wenn man etwas näher auf die Abbildungseigenschaften von $\lambda(w)$ eingeht. Durch diese Funktion wird nämlich die linke Hälfte des Kreisbogendreiecks der Fig. 12 so auf eine Halbebene abgebildet, daß dabei der Rand des Dreiecks in die reelle Achse übergeht und die unendlichferne Ecke in den unendlichfernen Punkt übergeht. Da aber auch durch

$$t = e^{i\pi i w}$$

die Umgebung der Ecke auf einen Halbkreis abgebildet wird, so ist $\lambda(w)$ in der Umgebung der unendlichfernen Ecke eine eindeutige reguläre Funktion von

$$t = e^{i\pi i w},$$

die für $t = 0$ einen einfachen Pol besitzt. Die Regularität erstreckt sich auf alle $w = u + iv$ mit positivem Imaginärteil, also auf alle t mit $0 < |t| < 1$.

Namentlich ist also für $|t| < e^{-\pi\sqrt{3}}$ oder, was dasselbe ist, für $v > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(8) \quad |\lambda(\omega)| + 2 > \frac{c}{|t|} = ce^{2\pi v},$$

wo c eine passende Konstante bedeutet. Ich wende das namentlich auf

$$\omega_0 = \omega(a_0)$$

an. Dann ist $\lambda(\omega_0) = a_0$ und man hat die Abschätzung

$$|a_0| + 2 > ce^{2\pi v}, \quad \text{d. h.} \quad v < d[\log(|a_0| + 2)],$$

$$(9) \quad \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \vartheta) < \Im\{\omega(f(z))\} < \frac{2d \log(|a_0| + 2)}{1 - \vartheta} \quad \text{in} \quad |z| < \vartheta R.$$

Um nun hieraus eine Abschätzung von $f(z)$ selbst zu gewinnen, ist es nötig, $\lambda(\omega)$ abzuschätzen, weil ja $\lambda[\omega(f(z))] = f(z)$ ist. Diese Abschätzung muß aber nun für alle w vorgenommen werden. Wir leisten aber auch sie zunächst für w , die dem Kreisbogendreieck der Fig. 12 angehören. Hier lindern wir ähnlich wie vorhin bei (8), daß

$$|\lambda(\omega)| < \frac{\gamma}{|t|} = \gamma e^{2\pi v} < e^{\delta v} < e^{\delta\left(v + \frac{1}{\gamma}\right)}$$

ist, wo $\gamma > 0$, $\delta > 0$ passende Konstanten sind. Da weiter $\lambda(\omega)$ im Kreisbogendreieck der Fig. 12 dem Werte Null nicht nahe kommt, so gibt es eine Zahl $\delta' < 1$, so daß in jenem Kreisbogendreieck auch

$$|\lambda(\omega)| > e^{\delta'\left(v + \frac{1}{\gamma}\right)}$$

gilt. Also ist im Kreisbogendreieck

$$(10) \quad e^{\delta'\left(v + \frac{1}{\gamma}\right)} < |\lambda(\omega)| < e^{\delta\left(v + \frac{1}{\gamma}\right)}$$

für zwei passende Zahlen $\delta' < 0$ und $\delta > 0$. Durch eine lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten der Determinante Eins kann man jeden Punkt der oberen w -Halbebene in einen Punkt jenes Dreiecks überführen. Es sei also w ein beliebiger Punkt der oberen Halbebene, und die lineare Transformation

$$\omega_1 = \frac{A\omega + B}{C\omega + D} = u_1 + iv_1, \quad \omega = u + iv, \quad AD - BC = 1$$

sei so gewählt, daß w_1 ein Punkt unseres Kreisbogendreiecks ist. Dann ist

$$(11) \quad v_1 = \frac{v}{(Cu + D)^2 + C^2v^2}$$

Hier ist entweder C Null, dann ist $v_i = v$, oder C ist ungleich Null. Eine solche Transformation, in der C nicht verschwindet, hat man aber nur dann nötig, wenn w_i nicht durch Parallelverschiebung in das Kreisbogendreieck hineingebracht werden kann. Daher ist $v < 1$, wenn C nicht verschwindet. Und daher ist in diesem Falle, wo C nicht verschwindet, der Nenner von (4) größer oder gleich v^2 . Daher ist in diesem Falle $v_i \leq \frac{1}{v}$. Da aber jener linearen Transformation der w , wie schon festgestellt, eine von sechs bekannten Transformationen von X entspricht, so gibt es also jetzt eine lineare Funktion von $\lambda(\omega)$, für die die Abschätzungen (10) gelten, wenn man dort v durch v_i ersetzt. Die in Betracht kommenden linearen Funktionen sind

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \frac{1 - \lambda}{\lambda}.$$

Ist aber z. B.
$$e^{\delta'(v_i + \frac{1}{v_i})} < \left| \frac{1}{\lambda} \right| < e^{\delta'(v_i + \frac{1}{v_i})},$$

so ist
$$|\lambda| < e^{-\delta'(v_i + \frac{1}{v_i})}.$$

Nun ist
$$-\delta' > 0 \quad \text{und} \quad v_i \leq \frac{1}{v}, \quad v_i \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Also
$$v_i + \frac{1}{v_i} \leq \frac{1}{v} + \frac{2}{\sqrt{3}} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(v + \frac{1}{v}\right), \quad (v > 0).$$

Schreibt man für $-\delta' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ wieder δ , so gibt es also auch für den Fall solcher $w = u + iv$, daß $\frac{1}{\lambda}$ dem Kreisbogendreieck der Fig. 12 angehört, eine Zahl δ , derart, daß

$$|\lambda| < e^{\delta \left(v + \frac{1}{v}\right)}$$

gilt. Ähnlich schließt man bei $1 - \lambda$ und auch bei $\frac{\lambda}{1 - \lambda}$ und den übrigen. Daher gilt nun allgemein für alle w

$$(12) \quad |\lambda(\omega)| < e^{\delta \left(v + \frac{1}{v}\right)}, \quad \omega = u + iv.$$

Wendet man dies auf (11) an, so findet man

$$|f(z)| < e^{\delta \left(\frac{2d \log(|a_0| + 2)}{1 - \vartheta} + \frac{4}{\sqrt{3}(1 - \vartheta)} \right)} < e^{\delta \frac{\log(|a_0| + 2)}{1 - \vartheta}},$$

wo δ wieder eine passende von ϑ und a_0 unabhängige Konstante ist.

Diese Abschätzung ist unter der Voraussetzung abgeleitet, daß $w(a_0)$ jenem Kreisbogendreieck angehört. Hieraus ersieht man aber sofort, daß

die Abschätzung auch für die anderen Werte von a_0 richtig ist. Denn diese kann man samt den zugehörigen Greenschen Niveaulinien durch eine ganzzahlige lineare Transformation der Determinante Eins so abbilden, daß der eben behandelte Fall vorliegt. Das heißt aber, daß bei beliebigem a_0 für eine passende jener sechs linearen Funktionen von X die gefundene Abschätzung gilt. Dann aber gilt sie, wie wir eben schon sahen, auch für λ selbst. Damit ist nun allgemein bewiesen:

Wenn $f(z)$ in $|z| < R$ regulär ist, dort die Werte Null und Eins nicht annimmt, wenn $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ ist, so gibt es eine von $a_0, \theta, R, a_1 \dots$ unabhängige positive Zahl Δ , so daß in $|z| < \theta R$

$$(13) \quad |f(z)| < [1/a_0 + 2]^{1-\Delta} \text{ gilt}$$

5. Eine Anwendung des Schottkyschen Satzes. Für schlichte Abbildungen von $|z| < 1$ stellten wir S. 75 fest, daß der durch

$$(14) \quad w = z + a_2 z^2 + \dots \cong f(z)$$

vermittelte Bildbereich von $|z| < 1$ die Kreisscheibe $|w| < \frac{1}{4}$ enthält. Landau hat (Pal. Rend. 1922) erkannt, daß man für beliebige in $|z| < 1$ reguläre Funktionen (14) einen analogen Satz behaupten kann. Valiron hat (Bull. sc. math. 51 (1927)) die folgende Fassung gegeben: Wenn (14) in $|z| < 1$ regulär ist, dann gehört zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\rho(\varepsilon) > 0$ derart, daß der von (14) gelieferte Bildbereich alle Punkte $|w| < \rho(\varepsilon)$ mit Ausnahme derjenigen einer gewissen kleinen Kreisscheibe bedeckt, die von $w = 0$ aus unter dem Winkel ε erscheint.

Wir nehmen an, die Kreisscheibe $|w| < \frac{1}{4}$ werde nicht voll bedeckt. w_0 sei einer ihrer nichtbedeckten Punkte mit einem möglichst kleinen absoluten Betrag. w_1 sei ein weiterer nicht bedeckter Punkt dieser Kreisscheibe. Also $|w_1| \geq |w_0|$. Es sei außerdem

$$|w_1 - w_0| > \varepsilon' |w_0|,$$

wo ε' durch

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon', \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

erklärt sei, so daß also nicht w_0 und w_1 einer Kreisscheibe angehören, die von $w = 0$ aus unter dem Winkel ε erscheint. Die Funktion

$$\frac{f(z) - w_1}{1 - \frac{w_1}{w_0}} = \frac{f(z) - w_0}{w_1 - w_0}$$

meidet dann die Werte 0 und 1. Nach (13) ist daher in $|z| \leq \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{f(z)}{w_1} \right| < \left| \frac{w_0}{w_1} \right| + \left| 1 - \frac{w_0}{w_1} \right| \left(\left| \frac{w_0}{w_1 - w_0} \right| + 2 \right)^{1-\Delta} < 1 + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon'} + 2 \right)^{1-\Delta}.$$

Setzt man

$$g(z) = \frac{f(z)}{w_1},$$

so ist nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz für $|z| \leq \frac{1}{2}$ angewandt

$$\left| \frac{g'(0)}{2} \right| < \max_{|z| \leq \frac{1}{2}} |g(z)|,$$

$$\left| \frac{1}{w_1} \right| < 2 + 4 \left(\frac{1}{2} + 2 \right)^{2,1}.$$

Also

$$|w_1| > \frac{1}{2 + 4 \left(\frac{1}{2} + 2 \right)^{2,1}}.$$

Versteht man nun unter $\varphi(\varepsilon)$ die kleinere der beiden Zahlen

$$\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2 + 4 \left(\frac{1}{2} + 2 \right)^{2,1}},$$

so ist für dieselbe unser Satz richtig. Denn wenn ein Punkt w_1 aus $|w_1| < \frac{1}{4}$ die Eigenschaft haben soll, daß w_1 nicht der Kreisscheibe um w_0 angehört, die von $w = 0$ unter einem Winkel ε erscheint, so muß $|w_1| > \varphi(\varepsilon)$ sein.

§ 3. Der allgemeine Picardsche Satz.

Der Schottkysche Satz setzt uns nun instand, den allgemeinen Fall des Picardschen Satzes recht rasch zu beweisen. Es soll also jetzt gezeigt werden, daß eine Funktion $f(z)$, welche in einem gewissen Kreis um eine wesentlich singuläre Stelle regulär und eindeutig ist, darin höchstens einen Wert auslassen kann. Wir können im Gegenteil wieder annehmen, sie nähme weder den Wert Null noch den Wert Eins an. Ich nehme an — das kann man durch lineare Transformation stets erreichen — der wesentlich singuläre Punkt läge bei $z = \infty$ und $f(z)$ sei für $|z| \geq \frac{1}{2}$ regulär, eindeutig und von Null und Eins verschieden.

Nach dem Weierstraßschen Satze, den der Picardsche vertiefen will, kann man nun eine gegen unendlich konvergierende Punktfolge λ_n angeben, für die also $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ ist, und zwar derart, daß $|f(\lambda_n)| < 1$ für alle n .

Die Funktionen $f_n(z) = f(\lambda_n z)$ sind für große n in $|z| \geq \frac{1}{2}$ regulär und eindeutig. Außerdem ist $|f_n(1)| < 1$. Wendet man den Schottkyschen Satz auf einen Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ um $z = 1$ als Mittelpunkt an, so sieht man, daß diese Funktionen in einem mit dem Radius $\frac{1}{4}$ um $z = 1$ gelegten Kreise alle unter derselben Schranke liegen. Man kann nun endlich viele Kreise

vom Radius $\frac{1}{2}$ und einem Mittelpunkt auf $|z| = 1$ so anbringen, daß sie den Kreis $|z| = 1$ vollständig bedecken und daß bei geeigneter Numerierung stets der Mittelpunkt des folgenden im vorhergehenden liegt. Daher lehrt mehrmalige Anwendung des Schottkyschen Satzes auf die Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ um die gleichen Mittelpunkte, daß in dem von den Kreisen vom Radius $\frac{1}{2}$ bedeckten Gebiet alle Funktionen $f_n(z)$ unter ein und derselben endlichen Schranke liegen. Namentlich sind also die Funktionen auf dem Kreise $|z| = 1$ beschränkt. Diese Aussage ist aber damit gleichbedeutend, daß die Funktion $f(z)$ selbst auf allen Kreisen $|z| = \lambda_n$ unter derselben endlichen Schranke liegt. Da aber eine in einem Kreisinge und auf seinem Rande reguläre und eindeutige Funktion das Maximum ihres Betrages am Rande annimmt, so liegt $f(z)$ in dem Gebiete $|z| > \frac{1}{2}$ unter dieser Schranke für alle z . Daher kann $z = \infty$ kein wesentlich singulärer Punkt sein. Dieser Widerspruch beweist die Richtigkeit des allgemeinen Picardschen Satzes.

Wendet man das bereits bewiesene auf $f(\sigma z)$ ($\sigma < 1$) an, so sieht man, daß $f(z)$ außerhalb des Kreises $|z| > \frac{1}{2\sigma}$ alle Werte mit höchstens einer Ausnahme annimmt. Da also $f(z)$ außerhalb eines jeden Kreises diese Eigenschaft hat, so nimmt es alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

§ 4. Julius Vertiefung des Picardschen Satzes.

Julius hat die Schlußweise des vorigen Paragraphen etwas abgeändert und damit die Möglichkeit gewonnen, mit ihr zu allgemeineren Sätzen zu gelangen. Er verzichtet nämlich auf die Verwendung des Weierstraßschen Satzes und bekommt damit die Möglichkeit, für Gebiete, für die die Gültigkeit des Weierstraßschen Satzes nicht feststeht, zu beweisen, daß darin $f(z)$ alle Werte mit höchstens einer Ausnahme annimmt. Statt des Weierstraßschen Satzes wird der Begriff der *normalen Familie* verwendet, den Montel in die Wissenschaft eingeführt hat. Wer mit dem Vitalischen Satz vertraut ist, wird den Begriff leicht erfassen.

Unter einer normalen Familie versteht man eine Menge von Funktionen, die in einem gewissen Bereich regulär und eindeutig sind und so beschaffen, daß man aus jeder Teilfolge der Menge eine andere auswählen kann, die in jeder abgeschlossenen Teilmenge des gegebenen Bereiches gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion oder gegen Unendlich konvergiert.

Normal ist also z. B. die Menge der Funktionen, welche in einem Bereich regulär und eindeutig sind und in ihm unter einer festen Schranke liegen. Denn dann kann man aus jeder Teilfolge in der beim Beweis des Vitalischen Satzes benutzten Weise eine andere auswählen, die an einer

abzählbaren Menge von Stellen des Bereiches, die sich im Innern häufen, Grenzwerten zustreben. Dann lehrt der Vitalische Satz, daß diese neue Teilfolge in jedem inneren Teilbereich gleichmäßig konvergiert.

Normal ist aber auch nach dem Schottkyschen Satze die Familie der Funktionen, welche in einem Bereiche die Werte Null und Eins auslassen und in dem Bereich regulär und eindeutig sind. Denn wenn man aus einer beliebigen Teilfolge eine andere auswählen kann, deren Glieder an einer Stelle des Bereiches beschränkt sind, so sind sie nach dem Schottkyschen Satze, den man wie im vorigen Paragraphen zum Beweis mehrfach anwendet, in jedem inneren Teilbereich gleichmäßig beschränkt, und man kann daher daraus wieder eine gleichmäßig konvergente Folge auswählen. Aus einer Folge kann man aber nur dann keine andere auswählen, welche an einer Stelle beschränkt ist, wenn die Funktionen der Folge an jeder Stelle dem Grenzwert unendlich zustreben. Da aber die Funktionen den Wert Null nicht annehmen, so sind die reziproken Funktionen auch regulär und streben an jeder Stelle gegen Null. Da sie aber die Werte Null und Eins auslassen, so sind sie wieder nach Schottky gleichmäßig beschränkt und konvergieren daher gleichmäßig gegen Null. Die gegebenen Funktionen konvergieren also dann gleichmäßig gegen Unendlich. Man kann daher wirklich entweder aus einer gegebenen Teilfolge eine andere auswählen, welche gleichmäßig gegen eine endliche Grenzfunktion konvergiert, oder aber die Folge konvergiert gleichmäßig gegen Unendlich.

Ich komme nun gleich auf den allgemeinen Juliaschen Satz zu sprechen, welcher den allgemeinen Picardschen als Spezialfall enthält. Dieser lautet so: $z = \sigma(t)$, $0 \leq t < \infty$ sei eine Jordankurve, welche $z = 1$ mit $z = \infty$ verbindet. Es sei $\sigma(0) = 1$ und $\sigma(\infty) = \infty$. Unter $z = z_0 \cdot \sigma(t)$ verstehen wir die zu $z = \sigma(t)$ ähnliche Jordankurve, welche $z = z_0$ mit $z = \infty$ verbindet. Unter einem sich an die Kurve anlehnenden Winkelraum verstehen wir das Gebiet, das die Punkte $z_0 \sigma(t)$ erfüllen, wenn z_0 seinerseits eine Kreisscheibe durchläuft. Wir sagen, der Winkelraum sei beliebig schmal, wenn diese Kreisscheibe beliebig klein ist. Der Satz lautet nun, daß man stets zu einer beliebigen Kurve $z = \sigma(t)$ einen beliebig schmalen Winkelraum finden kann, in dem eine Funktion $f(z)$, welche $z = \infty$ zur isolierten wesentlich singulären Stelle hat, in seiner Umgebung aber regulär und eindeutig ist, jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme wirklich annimmt. Der Winkelraum hängt natürlich von der Funktion ab. Und der Sinn des Satzes ist der, daß man einen Punkt z_0 so finden kann, daß der mit einer beliebig kleinen um ihn gelegten Kreisscheibe und der gegebenen Kurve $z = \sigma(t)$ konstruierte Winkelraum die Eigenschaft hat, daß darin $f(z)$ jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme wirklich annimmt. Um das einzusehen, betrachten wir die Funktionen $f_1(z) = f(z\sigma(t))$

in einem Kreisring um $z = 0$ als Mittelpunkt. Man kann ihn so wählen, daß darin alle Funktionen regulär sind. Aber sie können darin keine normale Familie bilden. Denn wären sie eine normale Familie, so nehme man eine Folge $t_1 < t_2 < \dots$ von t -Werten, die gegen Unendlich konvergieren, und deren zugehörige Funktionen $f_n(z)$ gleichmäßig in jedem inneren Teilring konvergieren. Gegen eine endliche Grenzfunktion kann diese gleichmäßige Konvergenz nicht erfolgen. Denn sonst hätte man nach einer im vorigen Paragraphen schon benutzten Schlußweise eine unendliche Folge von Kreisperipherien, deren Radien gegen Unendlich streben und auf welchen $f(z)$ selbst unter einer festen endlichen Schranke bliebe. Dann wäre aber $f(z)$ wieder in der Umgebung von Unendlich beschränkt und $t = \infty$ wäre nicht wesentlich singuläre Stelle. Daraus folgt, daß die Folge gleichmäßig gegen Unendlich konvergiert. Daraus wieder ergibt sich, daß die Folge $f_t(z)$ selbst für $t \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen Unendlich konvergieren muß. Denn wenn nicht in einem gegebenen inneren Teilring und für genügend großes t alle Funktionen $f_t(z)$ gleichmäßig dem Betrag nach oberhalb einer beliebig vorgeschriebenen Schranke lägen, so könnte man eine Schranke M so bestimmen, daß zu beliebig großem t Funktionen mit noch größerem t gehörten, deren Betrag an einer passenden Stelle des inneren Teilringes unter M läge. So erhält man eine unendliche Funktionenfolge, aus der man gewiß keine andere auswählen kann, welche in dem Teilring gleichmäßig gegen Unendlich strebt. Daher kann die Familie der $f_t(z)$ nicht normal sein. Daher gibt es mindestens einen Punkt des Ringes von der Art, daß die Familie in keiner um ihn gelegten Kreisscheibe normal ist. Denn gäbe es keinen solchen Punkt, so gäbe es um jeden Punkt eine Kreisscheibe, in der die Familie $f_t(z)$ normal ist. Mit endlich vielen solchen Kreisscheiben kann man den Ring überdecken, und daher wäre die Familie doch im Ring normal, weil man ja der Reihe nach für die endlich vielen Kreise aus einer gegebenen Teilfolge die zur Konvergenz in allen führende Auswahl treffen kann. In einer solchen Kreisscheibe hinwiederum wäre die Familie der $f_t(z)$ normal, wenn ihre Glieder darin alle zwei feste Werte nicht annähmen. Daher muß $f(z)$ selbst in dem aus einer um jenen Punkt gelegten Kreisscheibe hervorgehenden Winkelraum jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme wirklich annehmen und zwar unendlich oft annehmen.

Julia hat seinen Satz auf gewisse Klassen meromorpher Funktionen ausgedehnt. Aber erst Ostrowski hat hier einen vollen Erfolg erzielt. Er hat gezeigt, daß der hier bewiesene Satz für Funktionen, die in $R < |z| < \infty$ meromorph sind, im allgemeinen richtig bleibt. Es gibt nur gewisse von ihm vollständig angegebene Ausnahmefunktionen, wo er nicht gilt. Vgl. Math. Ztschr., Bd. 24.

Milloux¹⁾), der sich gleichzeitig mit Ostrowski dem Juliaschen Satze zugewendet hat, ist auf gewisse Kreisscheiben gestoßen, in welchen der Wertevorrat der Funktion besonders groß erscheint. Das Studium dieser „cercles de remplissage“ führt zu einer vertieften Einsicht in den Juliaschen Satz. Eine recht einfache Darstellung gab Valiron.²⁾ Hiernach führt der Schottkysche Satz in der scharfen Fassung der S. 224 bei geeigneter Verwendung zu dem folgenden Satz:

$f(z)$ sei in $|z| > R$ außer bei $z = \infty$ regulär. Dort liege eine wesentlich singuläre Stelle. Gegeben seien eine hinreichend große Zahl $k > 0$ und eine Zahl α , $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Es sei $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $m < 1 + \frac{\pi}{\arcsin \alpha}$. Dann gibt es eine Folge von Zahlen $r_n, r_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und Stellen z_n , die der Abschätzung

$$r_n(1 - 2\alpha) < |z_n| < r_n(1 + 2\alpha)$$

genügen, derart, daß in den Kreisen

$$|z - z_n| < 12\alpha \left(\frac{r_n}{\log M(r_n)} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$f(z)$ jeden Wert annimmt, der dem Bereich angehört, der aus $|f| < \varphi(k)$ durch Weglassung einer Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{\varphi(k)}$ entsteht. Dabei ist

$$\varphi(k) = \left(\frac{e^k}{86.49} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Aus diesem Satz können die Juliaschen Sätze unschwer gefolgert werden.

§ 5. Der Blochsche Beweis des Picardschen, des Landauschen und des Schottkyschen Satzes.

1. Elementare Beweise des Picardschen Satzes. Die Bemühungen, die genannten Sätze ohne Verwendung der elliptischen Modulfunktion³⁾ zu beweisen, sind alt. Doch hatten sie bis vor kurzem zu keinem Gedanken- gang geführt, der sich an Einfachheit mit den Beweisanordnungen hätte messen können, die in den vier ersten Paragraphen dieses Kapitels zur Sprache kamen. Erst Bloch hat eine Beweisanordnung gefunden, die allen Ansprüchen genügt. Durch Valiron und Landau ist sie weiter beträchtlich vereinfacht worden.

1) Liouv. Journal (1924) Acta mathematica Bd. 52.

2) Bull. des sc. math. Bd. 51 (1927).

3) Sogenannte „elementare Beweise“¹⁴⁾. Es ist leicht einzusehen, daß die elliptische Modulfunktion weder eine elementare Funktion noch die Umkehrfunktion einer elementaren Funktion ist.

2. **Der Blochsche Satz.** Diese neue Methode beruht auf folgendem von Bloch entdeckten Satz:

Es sei $f(z)$ für $|z| \leq 1$ regulär, es sei $f'(0) = 1$; dann gibt es eine positive Zahl B von der Art, daß eine gewisse Kreisscheibe vom Radius B schlichtes Bild eines Teilgebietes von $|z| < 1$ ist.

Für die Zwecke des Picardschen Satzes würde eine Kreisscheibe ausreichen, deren Werte alle durch $f(z)$ angenommen werden. Die einfachste bisher bekannte Beweismethode von Valiron und Landau liefert aber gleich den Satz in der angegebenen Fassung. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$f(0) = 0$$

ist. Zum Beweis — den Landau in einer lustigen Laune auf drei Zeilen zusammengedrängt hat¹⁾ — betrachte man die Hilfsfunktion

$$F(\theta) = \theta \max_{|z| \leq 1-\theta} |f'(z)|.$$

Da $f(z)$ — und also auch $f'(z)$ — in $|z| \leq 1$ also einschließlich $|z| = 1$ regulär ist, so sind jene Maxima für $0 \leq \theta \leq 1$ vorhanden und endlich. Außerdem ist $F(\theta)$ für $0 \leq \theta \leq 1$ stetig. Es ist aber $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Daher gibt es ein $\theta > 0$ derart, daß $F(\theta) = 1$, aber $F(\theta) < 1$ ist für $0 \leq \theta < \theta$. Es ist also

$$1 = F(\theta) = \theta \max_{|z| \leq 1-\theta} |f'(z)|.$$

Da nun das Maximum für einen Handpunkt erreicht wird, so gibt es eine Stelle ξ mit $|\xi| = 1 - \theta$, so daß

$$1 = \theta |f'(\xi)|$$

ist. Also ist $|f'(\xi)| = \frac{1}{\theta}$, $|\xi| = 1 - \theta$.

Der Kreis $|z - \xi| \leq \frac{\theta}{2}$ liegt nun ganz in $|z| \leq 1 - \frac{\theta}{2}$. Nun ist

$$F\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} \max_{|z| \leq 1-\frac{\theta}{2}} |f'(z)| < 1.$$

Also ist $|f'(z)| < \frac{2}{\theta}$ in $|z| \leq 1 - \frac{\theta}{2}$.

Insbesondere ist also $|f'(z)| < \frac{2}{\theta}$ in $|z - \xi| \leq \frac{\theta}{2}$.

Nun ist
$$f(z) - f(\xi) = \int_{\xi}^z f'(\xi) d\xi.$$

Also wird $|f(z) - f(\xi)| < 1$ in $|z - \xi| \leq \frac{\theta}{2}$.

1) Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1926 S. 471.

Erinnern wir uns nun daran, was S. 196/197 von Bd. I über Umkehrungsfunktionen gesagt wurde. Wir betrachten

$$w = \varphi(z - \xi) = f(z) - f(\xi) = f'(\xi)(z - \xi) + \dots \text{ in } |z - \xi| < \frac{\varphi}{2}.$$

Dann ist $z - \xi = \psi(w)$ regulär und absolut kleiner als $\frac{\varphi}{2}$ in einem Kreis $|w| < \varphi$. Dabei ist

$$\begin{aligned}\varphi &= |f'(\xi)| \frac{\varphi}{2} + 2 - 2\sqrt{|f'(\xi)| \frac{\varphi}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{2} + 2 - 2\sqrt{\frac{1}{2} + 1} \\ &= \frac{5}{2} - \sqrt{6} = 0,05 \dots\end{aligned}$$

Der genaue Wert der Blochschen Konstanten¹⁾ B ist noch nicht bekannt. Landau hat (Math. Ztschr. Bd. 30) gezeigt, daß

$$1 + 3 \log \frac{3}{4} = 0,1369 \dots < B < \frac{2}{15} = 0,133 \dots$$

3. Die Blochsehe Hilfsfunktion. Die Beziehung des Blochschen Satzes zu dem Picardschen Ideenkreis beruht auf einer von Bloch eingeführten Hilfsfunktion. Es sei $F(z)$ in einem Bereich B regulär und nehme dort die Werte 0 und 1 nicht an. Dann ist dort

$$f(z) = \log \left(\sqrt{\frac{\log F'(z)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\log F'(z)}{2\pi i} - 1} \right)$$

regulär und nimmt keinen der Werte

$$\log(\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}) + 2m\pi i$$

für ganze m und ganze $n \geq 1$ an. Für $\sqrt{n}$ und $\sqrt{n-1}$ ist dabei jeder Wert der Quadratwurzel zulässig. Es ist nämlich

$$(2) \quad F'(z) = -e^{\frac{\pi i}{2} (2f(z) + e^{-2f(z)})}$$

Nähme $f(z)$ einen der angegebenen Ausnahmewerte an, so würde dafür

$$\begin{aligned}F'(z) &= -e^{\frac{\pi i}{2} ((\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})^2)} \\ &= -e^{\frac{\pi i}{2} (2n-2)} = 1.\end{aligned}$$

Wie sind nun die Werte (1) verteilt? Sie gehen aus den Werten von

$$\log(\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})$$

für positive Wahl der beiden Quadratwurzeln durch Addition irgendwelcher ganzzahliger Vielfacher von πi hervor. Sie machen also die Ecken eines gewissen rechteckigen Gitters aus. Aufeinanderfolgende Gittergeraden haben in Richtung der imaginären Achse den festen Abstand π . In Richtung der

1) D.h. der größten Zahl B , für die der Blochsehe Satz gilt.

reellen Achse ist der Abstand aufeinanderfolgender Gittergeraden variabel, strebt aber für $u \rightarrow \infty$ gegen Null. Demnach muß es eine Zahl $p > 0$ geben derart, daß jeder Punkt der Ebene von mindestens einem der Punkte (1) einen Abstand $\leq p$ hat.

4. Beweis des Picardschen Satzes. Um eine erste Anwendung zu machen, werde der Picardsche Satz von § 1 bewiesen. Es sei also $F(z)$ eine ganze nicht konstante und nicht lineare Funktion, welche keinen der Werte 0 oder 1 annehme. Man bilde die angegebene Hilfsfunktion $f(z)$. Sie ist gleichfalls in der ganzen Ebene regulär, also ganz, nimmt aber keinen der Werte (1) an. Sei ξ irgendeine Stelle, wo $f'(\xi) \neq 0$ ist; dann hat die Ableitung von

$$\frac{f(z)}{f'(\xi)}$$

an der Stelle ξ den Wert 1. Nach dem Blochschen Satz gibt es daher eine Kreisscheibe vom Radius B , deren Werte alle von $\frac{f(z)}{f'(\xi)}$ angenommen werden. Daher gibt es eine Kreisscheibe vom Radius

$$|f'(\xi)| B,$$

deren Werte alle von $f(z)$ angenommen werden. Da aber $f(z)$ nicht linear ist, so ist $f'(z)$ nicht konstant, nimmt also für passende z beliebig große Werte an. Wählt man daher ξ so, daß

$$|f'(\xi)| B > p$$

wird, so kommt man in Widerspruch mit den Eigenschaften von $f(z)$. Denn wie wir feststellten, gibt es für die Hilfsfunktion keine Kreisscheibe vom Radius p , deren Werte durch $f(z)$ alle angenommen werden.

5. Beweis des Schottkyschen Satzes. Nach dieser Probe wenden wir uns zum Beweis des Schottkyschen Satzes, da dieser, wie wir von § 3 wissen, eine beherrschende Stellung einnimmt. Es sei also $F(z)$ in $|z| < R$ regulär und nehme dort die Werte 0 und 1 nicht an. Es sei $P(0) = a_0$.

Die Hilfsfunktion $f(z)$ ist gleichfalls für $|z| < R$ regulär. Es ist

$$f(0) = \log \left(\sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\log a_0}{2\pi i}} - 1 \right).$$

Es sei $|\xi| \leq \vartheta R$, $0 \leq \vartheta < 1$ und $f'(\xi) \neq 0$. Man betrachte

$$\varphi(z) = \frac{f(\xi + R(1-\vartheta)z) - f(\xi)}{(1-\vartheta)Rf'(\xi)}.$$

Dann ist $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ und $\varphi(z)$ regulär für $|z| \leq 1$. Daher bedecken nach dem Blochschen Satz die Werte, welche $\varphi(z)$ in $|z| \leq 1$ annimmt, eine Kreisscheibe vom Radius B . Andererseits können wegen der

Eigenschaften der Blochschen Hilfsfunktion $f(z)$ die Werte von $\varphi(z)$ keine Kreisscheibe vom Radius

$$R(1-\vartheta)^{\frac{p}{p-1}}|f'(\xi)|$$

voll bedecken. Also ist $R(1-\vartheta)^{\frac{p}{p-1}}|f'(\xi)| \geq B$.

D. h.

$$|f'(\xi)| \leq \frac{B}{R(1-\vartheta)^{\frac{p}{p-1}}}$$

Da dies auch richtig bleibt, wenn $f'(\xi) = 0$ ist, so gilt diese Abschätzung für alle ξ mit $|\xi| \leq \vartheta R$. Nun ist

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(\xi) d\xi.$$

Also ergibt sich

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \frac{|z|}{R(1-\vartheta)^{\frac{p}{p-1}}} B$$

für alle

$$|z| \leq \vartheta R, \quad 0 \leq \vartheta < 1.$$

Also

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \frac{\vartheta p}{(1-\vartheta) B}.$$

Die gefundene Schranke hängt nur von $a_0 = F(0)$ and von ϑ ab. Wegen (2) ergibt sich daher

$$|F(z)| < S(a_0, \vartheta).$$

Wie wir in § 3 sahen, folgt aus dem Schottkyschen Satz leicht der allgemeine Picardsche Satz. Aber auch der Landausche Satz folgt unmittelbar aus dem Schottkyschen. Sei nämlich

$$a_0 + a_n z^n + \dots, \quad a_n \neq 0$$

in $|z| < R$ regulär und dort von 0 und 1 verschieden. Dann ist nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz

$$|a_n| \leq \frac{S(a_0, 1)}{R^n} 2^n.$$

Also

$$R \leq 2 \sqrt[n]{\frac{S(a_0, 1)}{|a_n|}},$$

was die Aussage des Landauschen Satzes ist.



Sechster Abschnitt. Ganze Funktionen.

§ 1. Begriffsbestimmung. Problemstellung.

Unter einer ganzen Funktion einer komplexen Veränderlichen versteht man eine im Endlichen überall reguläre analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen. Insbesondere interessieren uns die nicht rationalen, d. h. diejenigen, welche im Unendlichen eine wesentlich singuläre Stelle haben. Man nennt sie auch ganze transzendente Funktionen.

Die Theorie der ganzen Funktionen befaßt sich mit den Zusammenhängen, welche zwischen dem Wachstum einer solchen Funktion, den Koeffizienten einer die Funktion darstellenden Potenzreihe und der Lage der Stellen bestehen, wo die Funktion einem gegebenen Werte z. B. der Null gleich wird.

Besonders wird uns die Theorie der *ganzen Funktionen endlicher Ordnung* interessieren. Eine ganze Funktion $f(z)$ heißt von endlicher Ordnung, wenn für ihr $M(r)$, d. h. für das Maximum des absoluten Betrages derjenigen Werte, welche sie auf $|z| = r$ annimmt, eine Abschätzung von der Form

$$(1) \quad M(r) < e^{r^k} \quad \text{für alle hinreichend großen } r$$

besteht. Hier ist k eine positive Zahl. Denn wenn k negativ oder Null ist, so ist $f(z)$ in der ganzen Ebene beschränkt, also konstant. Man sagt dann auch, die Funktion sei höchstens von der Ordnung k . Bezeichnet man mit ϱ die untere Grenze derjenigen Zahlen k , für welche (1) richtig ist, so nennt man ϱ die *Ordnung der Funktion*. Die Ordnung ϱ ist also dadurch charakterisiert, daß bei beliebig gegebenem positiven ε von einem gewissen r an

$$M(r) < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

ist, und daß außerdem für gewisse beliebig große r und $\varepsilon > 0$

$$M(r) > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}$$

ist. Man hat somit auch die Beziehung

$$(2) \quad \varrho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

Ist dieser limes superior Null, so hat man es mit der ausgezeichneten Klasse der Funktionen nullter Ordnung zu tun. Ist der limes superior unendlich, so liegt eine Funktion unendlich hoher Ordnung vor.

Wir werden uns gelegentlich mit einer schärferen Abschätzung bei Funktionen endlicher von Null verschiedener Ordnung zu befassen haben. Es kommt nämlich vor, daß für eine Funktion der Ordnung ϱ sogar eine Abschätzung von der Form

$$(3) \quad M(r) < e^{Ar^\sigma}$$

mit nichtnegativem A für hinreichend große r besteht. Ist dann σ die untere Grenze der Zahlen A für welche (3) richtig ist, so sagt man $f(z)$ sei vom Typus σ der Ordnung ϱ . Insbesondere spricht man von einem *Normaltypus*, wenn $\sigma > 0$ ist, und vom *Minimaltypus*, wenn $\sigma = 0$ ist. Gibt es keine Abschätzung der Form (3), so spricht man vom *Maximaltypus* der Ordnung ϱ . Man kann also den Typus σ auch durch die Gleichung

$$(4) \quad \sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\varrho} \quad \text{charakterisieren.}$$

Wir wenden uns nun zunächst dem Koeffizientenproblem zu, wollen also den Zusammenhang zwischen Wachstum und Koeffizienten untersuchen.

Beispiele: 1. Für e^z ist $|e^z| = e^{x \cos \varphi}$ ($z = re^{i\varphi}$). Also ist $M(r) = e^r$. Daher $\varrho = 1$, $\sigma = 1$.

2. Für e^{z^2} ist $|e^{z^2}| = e^{x^2 \cos \varphi}$, $M(r) = e^{r^2}$, $\varrho = 1$, $\sigma = 2$.

3. Für e^{z^2} ist $|e^{z^2}| = e^{\cos(r \sin \varphi) \cdot r^2 \cos \varphi}$, $M(r) = e^{r^2}$, $\varrho = \infty$. Weitere Beispiele folgen S. 232.

§ 3. Das Koeffizientenproblem bei den ganzen Funktionen endlicher Ordnung.

1. Abschätzung der Koeffizienten. Die Entwicklung der ganzen Funktion $f(z)$ nach Potenzen von z sei durch

$$(5) \quad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

gegeben. Dann lehrt der Cauchysche Koeffizientensatz, daß für alle n

$$|c_n| < \frac{M(r)}{r^n}$$

ist. Gilt insbesondere für genügend große r

$$M(r) < e^{Ar^k}, \quad (k > 0)$$

so hat man

$$(6) \quad |c_n| < \frac{e^{Ar^k}}{r^n}$$

für genügend große r . Bestimmt man nach den Regeln der Differentialrechnung das Minimum der rechten Seite, so findet man, daß es für

$$r = \left(\frac{n}{Ak} \right)^{\frac{1}{k}}$$

eintritt. Wählt man hierin n hinreichend groß, so erhält man einen Wert r , für den man die Abschätzung (6) anwenden darf. Trägt man den gefundenen Wert von r in (6) ein, so erhält man

$$(7) \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \left(\frac{Ake}{n} \right)^{\frac{1}{k}}$$

für genügend große n .

Setzt man hierin $A=1$ und $k=p+s$, geht man also von

$$(8') \quad M(r) < e^{e^{p+s}}$$

aus, so erhält man

$$(8'') \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \left(\frac{e(p+s)}{n} \right)^{\frac{1}{p+s}}$$

Setzt man aber $A = (1+s)\sigma$ und $k=p>0$, geht man also von

$$(9') \quad M(r) < e^{(1+s)\sigma r^p}$$

aus, so erhält man

$$(9'') \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \left(\frac{(1+s)\sigma p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. Abschätzung von $M(r)$. Wir gehen nun umgekehrt von (7) aus, um daraus eine Abschätzung von $M(r)$ zu gewinnen. Aus (7) folgt zunächst, daß es zu jedem positiven r ein $n(r)$ gibt, derart, daß für $n \geq n(r)$

$$|c_n| r^n \leq \left(\frac{Ake}{n} \right)^{\frac{n}{k}} r^n \leq \frac{1}{2^n}$$

ist. Daraus folgt, daß die Potenzreihe

$$(5) \quad c_0 + c_1 z + \dots$$

eine ganze Funktion darstellt, wenn (7) besteht. Es folgt daraus weiter die Abschätzung

$$M(r) \leq |c_0| + |c_1| r + \dots = \sum_{n=0}^{n(r)-1} |c_n| r^n + \frac{1}{2^{n(r)-1}}$$

Nun bezeichne man mit $C(r)$ die größte unter den Zahlen

$$|c_0|, |c_1| r, \dots$$

Dann hat man die Abschätzung

$$M(r) < n(r) C(r) + \frac{1}{2^{n(r)-1}}$$

Da aber hier alle Glieder, also auch $|c_0|$ durch $C(r)$ abgeschätzt wurden und da $C(r)$ für $r \rightarrow \infty$ über alle Grenzen wächst, so folgt daraus sogar die Abschätzung

für hinreichend große r . Wir schätzen $C(r)$ ab.

$C(r)$ ist nicht größer als das Maximum, das

$$\left(\frac{Ake}{n}\right)^k r^n$$

bei frei veränderlichem hinreichend großem n annehmen kann. Dies Maximum tritt für

$$n = Akr^k$$

ein. Daher ist

$$O(r) < e^{Ar^k}.$$

Mau findet weiter aus

$$\left(\frac{Ake}{n}\right)^k r \leq \frac{1}{2},$$

daß man $n(r) = Ake(2r)^k$ nehmen kann. Daher haben wir schließlich

$$M(r) < Ake(2r)^k \cdot e^{Ar^k}.$$

Wir wenden dies an unter der Annahme, daß statt (7) speziell (8'') gilt. Dann haben wir

$$M(r) < e \cdot (e + \epsilon) \cdot (2r)^{e+\epsilon} \cdot e^{e+\epsilon}.$$

Bezeichnet man also mit ϵ' eine Zahl, welche größer ist als ϵ , so folgt hieraus

$$(8''') \quad M(r) < e^{e+\epsilon'} \quad \text{für große } r.$$

Ganz ebenso kann man verfahren, wenn statt (7) speziell (9'') gilt. Dann findet man

$$M(r) < (1 + \epsilon) e \cdot e \cdot (2r)^{e(1+\epsilon)} \cdot e^{e(1+\epsilon)}.$$

Bezeichnet man wieder mit ϵ' eine Zahl, die größer ist als ϵ , so wird hiernach

$$(9''') \quad M(r) < e^{(1+\epsilon') \cdot e \cdot e} \quad \text{für große } r.$$

Diese Betrachtungen lassen nun ohne weiteres die Richtigkeit der folgenden Sätze erkennen:

Dafür, daß $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$

der Ordnung Q angehört, ist notwendig und hinreichend, daß Q die untere Grenze derjenigen Zahlen k ist, für welche von einem n an

$$(10) \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \left(\frac{ek}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{ist.}$$

Ist nämlich Q die untere Grenze der Zahlen k für welche (10) richtig ist, so ist (10) bei beliebigem positiven s für $k = Q + \epsilon$ richtig und daraus folgt für jedes $\epsilon' > \epsilon$, daß (1) für $k = Q + \epsilon'$ gilt. Dann ist also $f(z)$ höchstens von der Ordnung Q . Wäre es aber von kleinerer Ordnung, so müßte (10) für kleinere Zahlen richtig sein.

Man kann den Satz auch so aussprechen:

Dafür daß
$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|c_n|}} \quad \text{ist.}$$

Denn die erste Relation ist, wie vorhin schon festgestellt wurde, damit gleichbedeutend, daß $f(z)$ von der Ordnung ρ ist. Die zweite Limesrelation aber ist damit gleichbedeutend, daß ρ die untere Grenze der Zahlen ist, für die (10) gilt.

3. Verallgemeinerung. Weiter gelten die folgenden Sätze:

Dafür, daß $f(z)$ höchstens dem Minimaltypus der Ordnung ρ angehört, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \quad \text{ist.}$$

Dafür, daß $f(z)$ dem Normaltypus Q der Ordnung Q angehört, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{Q}} \sqrt[n]{|c_n|} = (\sigma \rho)^{\frac{1}{Q}}.$$

Dafür, daß $f(z)$ dem Maximaltypus der Ordnung ρ angehört, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty.$$

Sie gelten für $\rho > 0$ und sind, wie man leicht sieht, nur ein anderer Ausdruck für das, was wir über die Beziehung von (9'), (9'') und (9''') gesagt haben.

Man kann $M(r)$ noch mit vielerlei anderen Funktionen statt mit e^{λ} vergleichen und analoge Sätze aufstellen. Wichtiger aber sind die Untersuchungen, welche darauf ausgehen, einen direkten Zusammenhang zwischen $M(r)$ und $C(r)$ festzustellen, ohne den Umweg über Vergleichsfunktionen zu nehmen. Man erhält so wesentlich allgemeinere Resultate und auch einen Zugang zu den Funktionen unendlicher Ordnung. Ich begnüge mich mit dem hier gegebenen Abriß des Koeffizientenproblems und verweise einen hier näher interessierten Leser auf die Spezialliteratur. In erster Linie nenne ich G. Valiron, Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse 1923.

§ 3. Beispiele von ganzen Funktionen endlicher Ordnung.

1. Beispiele. Wir behandeln einige Beispiele zugleich als Vorbereitung auf die Untersuchung der Nullstellen.

Versteht man unter $g(z)$ ein Polynom k -ten Grades, so ist

$$e^{g(z)}$$

eine ganze Funktion k -ter Ordnung.

Man hat nämlich $|e^{g(z)}| = e^{\Re g(z)}$.

Setzt man also $g(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k$.

$$z = r e^{i\varphi}, \quad a_0 = a'_0 + i a''_0,$$

so wird $\Re g(z) = a_0(\varphi) r^k + a_1(\varphi) r^{k-1} + \dots$,

wo $a_0(\varphi) = a'_0 \cos k\varphi - a''_0 \sin k\varphi$.

Also ist $|e^{g(z)}| = e^{a_0(\varphi) r^k + \dots}$

$$= e^{a_0(\varphi) r^k \left(1 + \frac{1}{\sigma_0} \frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{\sigma_0} \frac{1}{r^k}\right)}.$$

Bezeichnet man das Maximum von $a_0(\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ mit σ , so ist für hinreichend große r

$$|e^{g(z)}| \leq e^{\sigma(1+\varepsilon)r^k}$$

und es ist auch für alle hinreichend großen r

$$\max_{|z|=r} |e^{g(z)}| \geq e^{\sigma(1-\varepsilon)r^k}.$$

$e^{g(z)}$ ist also eine Funktion vom Typus σ der Ordnung k . Sie besitzt noch die Eigentümlichkeit, daß die Abschätzung von $M(r)$ nach unten nicht nur für gewisse, sondern für alle hinreichend großen r gilt. Eine solche Funktion ist, wie man sagt, von *regelmäßigem Wachstum*.

e^z ist also z. B. vom Typus 1 der Ordnung Eins. Weiter ist

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

vom Typus 1 der Ordnung Eins. Ebenso ist

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

vom Typus 1 der Ordnung Eins.¹⁾ Endlich werde noch die Funktion

1) Denn man hat beide Male

$$M(r) < \frac{e^r + e^{-r}}{2} = e^r.$$

Und für $z = iy$ hat man beide Male, wenn man $|z|$ hinreichend groß wählt

$$f(z) \geq \frac{e^{|z|} - e^{-|z|}}{2} > e^{(1-\varepsilon)|z|}, \quad (\varepsilon > 0).$$

$$f(z) = e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{(2k)!} \right)$$

betrachtet. Sie ist eine ganze Funktion vom Typus 1 der Ordnung $\frac{1}{2}$.)

2. Ganze Funktionen ohne Nullstellen. Ich schließe an dies Beispiel die allgemeine Bemerkung an, daß jede von Nullstellen freie ganze Funktion endlicher Ordnung die eben betrachtete Form $e^{g(z)}$ hat. Jedenfalls nämlich ist der Logarithmus einer von Nullstellen freien ganzen Funktion $f(z)$ selbst eine ganze Funktion $g(z)$. Man kann daher

$$f(z) = e^{g(z)}$$

setzen. Ich will beweisen, daß $g(z)$ ein Polynom sein muß, wenn $f(z)$ endliche Ordnung besitzen soll. Setzt man nämlich

$$g(z) = \sum d_n z^n,$$

so ist

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz \quad (n > 0),$$

wenn man das Integral über einen Kreis $|z| = r$ im positiven Sinn erstreckt. Glied weises Integrieren lehrt weiter, daß für den gleichen Integrationsweg

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz$$

ist. Daher folgt durch Addition beider, daß

$$d_n = \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\Re g(z)}{z^{n+1}} dz$$

ist. Nun ist

$$\Re g(z) = \log |f(z)|.$$

Hat also $f(z)$ die Ordnung ρ , so ist

$$\Re g(z) < r^{\rho+\epsilon}$$

für hinreichend große $|z| \leq r$. Daraus folgt²⁾

$$|\Re g(z)| < (2r)^{\rho+\epsilon}$$

1) Es ist nämlich für große r

$$|f(z)| < e^{\sqrt{r}} + e^{\sqrt{r}} = 2e^{\sqrt{r}} < e^{(1+\epsilon)\sqrt{r}}, \quad (\epsilon > 0).$$

Und für $z = r > 0$ ist außerdem

$$|f(z)| = e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}} > e^{(1-\epsilon)\sqrt{r}}, \quad (\epsilon > 0) \quad \text{für große } r.$$

2) Man setze $\Re g(0) = \alpha$ und schließe mittelst des Schwarzschen Lemmas aus

$\Re g(z) < (2r)^{\rho+\epsilon}$ für $|z| \leq 2r$ auf eine Schranke für $|\Re g(z)|$ in $|z| \leq r$. Dazu beachte man, daß $w = \frac{\frac{1}{2}(\alpha - (2r)^{\rho+\epsilon})r}{z + 2r} = \alpha + \frac{1}{2}(2r)^{\rho+\epsilon}$ den $|z| \leq 2r$ so auf $\Re w < (2r)^{\rho+\epsilon}$

für jedes $\varepsilon > 0$ und genügend große r und $|z| \leq r$. Integriert man über einen hinreichend großen Kreis, so findet man aus dieser Schranke für $n > 0$

$$|a_n| < 2 \cdot (2r)^{n+1-n} (\varepsilon > 0).$$

Ist also $n > \rho$, so ist $a_n = 0$, da man r beliebig groß und ε beliebig nahe an Null wählen kann. Daher ist $g(z)$ ein Polynom höchstens Q^{ten} Grades. Da dann die Ordnung der Funktion $f(z) = e^{g(z)}$ mit dem Grad von $g(z)$ übereinstimmt, so haben wir das Ergebnis, daß alle ganzen Funktionen endlicher nichtganzzahliger Ordnung Nullstellen besitzen.

3. Summe zweier ganzer Funktionen. Ich bemerke weiter, daß die Zufügung einer Konstanten zu einer ganzen Funktion die Ordnung nicht ändert. Ist dies bewiesen, so lehrt das eben gewonnene Ergebnis, daß ganze Funktionen von endlicher nicht ganzzahliger Ordnung jeden Wert annehmen.

Ich werde gleich etwas mehr zeigen, nämlich, daß auch die Zufügung einer ganzen Funktion niedrigerer Ordnung, also z. B. die eines Polynomes, die Ordnung nicht ändert. Es mögen also $f_1(z)$ und $f_2(z)$ zwei ganze Funktionen sein; ρ_1 und ρ_2 seien ihre Ordnungen. Es sei $\rho_1 > \rho_2$. Dann hat auch

$$f_1(z) + f_2(z) \quad \text{die Ordnung } \rho_1.$$

Denn dann ist erstens für alle genügend großen r

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r} |f_1(z) + f_2(z)| &\leq \max_{|z|=r} |f_1(z)| + \max_{|z|=r} |f_2(z)| \\ &< e^{\rho_1 r + \varepsilon} + e^{\rho_2 r + \varepsilon} < 2e^{\rho_1 r + \varepsilon} < e^{\rho_1 r + \varepsilon'}, \quad (\varepsilon' > \varepsilon), \end{aligned}$$

und es ist zweitens für gewisse große r

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r} |f_1(z) + f_2(z)| &\geq \max_{|z|=r} |f_1(z)| - \max_{|z|=r} |f_2(z)| \\ &> e^{\rho_1 r - \varepsilon} - e^{\rho_2 r + \varepsilon} \\ &= e^{\rho_1 r - \varepsilon} (1 - e^{\rho_2 r + \varepsilon - \rho_1 r}) \\ &> \frac{1}{2} e^{\rho_1 r - \varepsilon} \end{aligned}$$

für den Fall, daß $\rho_1 - \varepsilon > \rho_2 + \varepsilon$, was man annehmen darf, und für den Fall, daß r hinreichend groß ist. Also hat man für jedes $\varepsilon' > \varepsilon$ und gewisse hinreichend große r

$$\max_{|z|=r} |f_1(z) + f_2(z)| > e^{\rho_1 r - \varepsilon'}.$$

abbildet, daß $z = 0$ in $w = \alpha$ übergeht. Nach dem Schwarzschen Lemma fallen dann die Werte, welche $g(z)$ in $|z| < r$ annimmt, in den Kreis, der aus $|z| < r$ durch unsere lineare Funktion hervorgeht. Den am weitesten von $w = 0$ abstehenden Punkt dieses Kreises erhält man, wenn man $z = -r$ in die lineare Funktion einträgt. Daher wird

$$|\Re g(z)| < 2(2r)^{\rho+1} - 3\alpha < (2r)^{\rho+1}$$

für große r und $|z| \leq r$.

4. Ganze Funktionen mit endlich vielen Nullstellen. Als nächstes Beispiel betrachte ich *ganze Funktionen* $f(z)$ endlicher Ordnung mit *endlich vielen Nullstellen*. Diese mögen an den Stellen $a_1 \dots a_n$ liegen, und es möge dabei jede Stelle so oft notiert sein, als er der Vielfachheit der betreffenden Nullstelle entspricht. Zunächst ist

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z-a_1) \dots (z-a_n)}$$

eine ganze Funktion von der gleichen endlichen Ordnung Q wie $f(z)$ jedesmal dann, wenn $a_1 \dots a_n$ Nullstellen von $f(z)$ sind. Denn man hat erstens für alle genügend großen r

$$\max_{|z|=r} |F(z)| < \frac{e^{r^Q + \varepsilon}}{1} = e^{r^Q + \varepsilon}$$

und man hat zweitens für gewisse hinreichend große r

$$\max_{|z|=r} |F(z)| > \frac{e^{r^Q - \varepsilon}}{r^{n+1}} > e^{r^Q - \varepsilon'}, \quad (\varepsilon' > \varepsilon).$$

Daher gelten für $F(z)$ die eben gewonnenen Ergebnisse. Es ist also

$$f(z) = (z-a_1) \dots (z-a_n) e^{g(z)}$$

und hier ist $g(z)$ ein Polynom vom Grade Q . Dies $f(z)$ hat wieder ganzzahlige Ordnung. Dies folgt aus den zu Beginn dieses Paragraphen für $e^{g(z)}$ gegebenen Abschätzungen, wenn man beachtet, daß

$$|(z-a_1) \dots (z-a_n)| \leq e^{r^k}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $k > 0$, sobald r groß genug ist, und daß

$$|(z-a_1) \dots (z-a_n)| > 1$$

für genügend große $|z|$. Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit nur endlich vielen Nullstellen besitzen also notwendig eine ganzzahlige Ordnung.

Unsere Betrachtungen lehren also, daß Funktionen nicht ganzzahliger Ordnung jeden Wert unendlich oft annehmen.

§ 4. Über die Nullstellen der ganzen Funktionen endlicher Ordnung.

1. Der Grenzexponent der Nullstellen. Ich betrachte nun eine beliebige ganze Funktion endlicher Ordnung. Sie möge im Kreise $|z| < R$ Nullstellen unter anderem bei $a_1, \dots, a_n$ besitzen. Ich nehme an, daß $z=0$ keine derselben sei. Sollte das doch der Fall sein, so setze man $f(z) = z^v \cdot f_1(z)$ und betrachte $f_1(z)$ weiter. Hier kann man v so wählen, daß $f_1(0) \neq 0$ ist. Dann besitzt, wie wir vorhin schon feststellten, $f_1(z)$ die gleiche endliche Ordnung Q wie $f(z)$. Die Jensensche Ungleichung (S. 109) lehrt dann, daß

$$(11) \quad \frac{1}{|a_1 \dots a_n|} < \frac{M(R)}{R^n |f_1(0)|} < \frac{e^{R^Q + \varepsilon}}{R^n}.$$

Nun denke man sich die Nullstellen so geordnet, daß

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_n|.$$

Dann ist hiernach $\frac{1}{|\alpha_n|^k} \leq \frac{1}{|\alpha_1| \dots |\alpha_n|} < \frac{e^{nq+\varepsilon}}{R^k}$.

Wie auf S. 235 erkennt man, daß die rechte Seite ihr Minimum für

$$R = \left(\frac{n}{q + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{q + \varepsilon}}$$

erreicht.¹⁾ Also ist $\frac{1}{|\alpha_n|^k} < \left(\frac{e(q + \varepsilon)}{n} \right)^{k(q + \varepsilon)}$.

Daraus folgt insbesondere, daß die über alle Nullstellen erstreckte Reihe

$$\sum \left| \frac{1}{\alpha_n} \right|^{q + \varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert. Jede Nullstelle tritt dabei so oft auf, als ihre Vielfachheit angibt.

Unter dem *Grenzexponenten* der Nullstellen wollen wir fortan die untere Grenze Q_1 derjenigen Zahlen k verstehen, für die

$$\sum \left| \frac{1}{\alpha_n} \right|^k$$

konvergiert. Dann ist also stets

$$Q_1 \leq \varrho.$$

2. Die Produktdarstellung. Unter q werde die größte ganze Zahl verstanden, welche nicht größer ist als ϱ , so daß $\varrho < q + 1$ ist, und unter q_1 werde die größte ganze Zahl verstanden, für welche $\sum \left| \frac{1}{\alpha_n} \right|^{q_1}$ divergiert. Dann ist auch $q_1 \leq q$. Nach Bd. I S. 295 entnehmen wir hieraus, daß das über alle Nullstellen von $f(z)$ erstreckte kanonische Produkt

$$(12) \quad \varphi(z) = z^r \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k} \right)^{\frac{z}{\alpha_k} + \dots + \frac{1}{q_k}} \left(\frac{z}{\alpha_k} \right)^{q_k} = z^r \varphi_1(z),$$

gleichmäßig konvergiert und also eine ganze Funktion darstellt. Der Quotient

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

1) Diesen Wert von R darf man in (11) eintragen, weil wir S. 109 ausdrücklich feststellen konnten, daß diese Abschätzung für beliebige R und eine beliebige Auswahl von Nullstellen gilt.

ist daher eine von Nullstellen freie ganze Funktion und also von der Form $e^{g(z)}$. Daher besitzt $f(z)$ eine Produktdarstellung

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \varphi(z), \quad f_1(z) = e^{g_1(z)} \varphi_1(z).$$

Ich will nun noch zeigen, daß hier $g(z)$ ein Polynom von höchstens q -ten Grade ist. Der Beweis ergibt sich nach F. Nevanlinna am raschesten aus der Jensensehen Formel, wenn wir sie jetzt nur in der S. 122 angeführten allgemeineren Form verwenden.

Nimmt man den Logarithmus von $f_1(z)$ und differenziert ihn $q+1$ -mal nach z , so erhält man nach (12)

$$(13) \quad \frac{d^{q+1} \log f_1(z)}{dz^{q+1}} = \sum_{|a_k| < R} \frac{(-1)^q q!}{(z - a_k)^{q+1}} + \frac{d^{q+1} g(z)}{dz^{q+1}}.$$

Der Nachweis, daß $g(z)$ ein Polynom höchstens q -ten Grades ist, läuft darauf hinaus, zu zeigen, daß die $q+1$ -te Ableitung von $g(z)$ identisch Null ist. Das aber kann mit Hilfe der Jensenschen Formel folgendermaßen gezeigt werden. Diese Formel (S. 12(5)) wende man auf einen Kreis $|z| < R$ an, auf dessen Peripherie keine Nullstelle liegen möge. Sie liefert

$$\log |f_1(z)| = \sum_{|a_k| < R} \log \left| \frac{(z - a_k) R}{R^2 - \bar{z} a_k} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_1(R e^{i\vartheta})| \frac{R^2 - z^2}{R^2 + r^2 - 2 R r \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta. \\ (z = r e^{i\varphi}).$$

Fügt man auf beiden Seiten die konjugierten Potentialfunktionen hinzu, so erhält man in der geeignet aufgeschnittenen Ebene

$$\log f_1(z) = \sum_{|a_k| < R} \log \frac{R(z - a_k)}{R^2 - \bar{z} a_k} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_1(R e^{i\vartheta})| \frac{R e^{i\vartheta} + z}{R e^{i\vartheta} - z} d\vartheta + iC,$$

wo C eine geeignete reelle Konstante bedeutet. Differenziert man auf beiden Seiten $q+1$ mal nach z , so erhält man

$$(14) \quad \frac{d^{q+1} \log f_1(z)}{dz^{q+1}} = \sum_{|a_k| < R} \frac{(-1)^q q!}{(z - a_k)^{q+1}} + q! \sum_{|a_k| < R} \left(\frac{\bar{a}_k}{R^2 - \bar{z} a_k} \right)^{q+1} \\ + \frac{(q+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_1(R e^{i\vartheta})| \frac{2 R e^{i\vartheta}}{(R e^{i\vartheta} - z)^{q+1}} d\vartheta.$$

Ich werde nun zeigen, daß der zweite und dritte Summand auf der rechten Seite, für $R \rightarrow \infty$ den Grenzwert Null haben. Das ist offenbar nach (13) gleichbedeutend damit, daß die $q+1$ -te Ableitung von $g(z)$ ver-

schwindet. z ist dabei irgendeine Stelle mit $|z| < R$, welche beim Grenzübergang festgehalten wird.

Für den dritten Summanden ist die Richtigkeit der Behauptung wie folgt einzusehen. Es ist

$$(16) \quad \int_0^{2\pi} \log |f_1(Re^{i\vartheta})| \frac{2Rr^q}{(Re^{i\vartheta} - z)^{q+1}} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \log |f_1(Re^{i\vartheta})| \frac{2Rr^q}{(Re^{i\vartheta} - z)^{q+1}} d\vartheta \\ - \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{f_1(Re^{i\vartheta})} \right| \frac{2Rr^q}{(Re^{i\vartheta} - z)^{q+1}} d\vartheta.$$

Dabei ist wie auf S. 132 mit $\log^+ \psi(Re^{i\vartheta})$ eine Funktion bezeichnet, die gleich $\log |\psi(Re^{i\vartheta})|$ ist überall da, wo $|\psi(Re^{i\vartheta})| \geq 1$ ist, die aber gleich Null ist an allen anderen Stellen. Ferner gilt die Jensensche Formel

$$(16) \quad \log |f_1(0)| = \sum_{|a_k| < R} \log \frac{|a_k|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_1(Re^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Dafür kann man schreiben

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{f_1(Re^{i\vartheta})} \right| d\vartheta = -\log |f_1(0)| + \sum_{|a_k| < R} \log \frac{|a_k|}{R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_1(Re^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Wegen $|a_k| < R$ ist daher

$$(17) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{f_1(Re^{i\vartheta})} \right| d\vartheta \leq -\log |f_1(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_1(Re^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Nun ist nach (15) der absolute Betrag des dritten Summanden in (14) nicht größer als

$$\frac{2R(q+1)!}{2\pi} \frac{1}{|R-z|^{q+1}} \left\{ \int_0^{2\pi} \log^+ |f_1(Re^{i\vartheta})| d\vartheta + \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{f_1(Re^{i\vartheta})} \right| d\vartheta \right\}.$$

Nach (17.) ist dies nicht größer als

$$\frac{2R(q+1)!}{[R-|z|]^{q+1}} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_1(Re^{i\vartheta})| d\vartheta - \log |f_1(0)| \right] \\ \leq \frac{2R(q+1)!}{[R-|z|]^{q+1}} [2Rr^q - \log |f_1(0)|].$$

Daß dies aber für $R \rightarrow \infty$ dem Grenzwert Null zustrebt, bedarf wegen $q < q+1$ keiner weiteren Erörterung, denn q ist eine nichtnegative ganze Zahl $> q-1$.

Somit bleibt noch die Betrachtung des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (14). Nun aber gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{a_k}{R^2 - z a_k} \right| \leq \frac{|a_k|}{R^2 - |z| |a_k|} \leq \frac{R}{R^2 - |z|} \frac{1}{R - |z|}.$$

Bezeichnet man also mit $n(R, f_1)$ die Zahl der Glieder, aus denen jener zweite Summand besteht, d. h. bedeutet $n(R, f_1)$ die Zahl der Nullstellen von $f_1(z)$, deren Betrag kleiner ist als R , so hat man für diesen zweiten Summanden die Abschätzung

$$(18) \quad \left| q! \sum_{|a_k| < R} \left(\frac{a_k}{R^2 - z a_k} \right)^{q+1} \right| \leq \frac{q! n(R, f_1)}{(R - |z|)^{q+1}}.$$

Nun lehrt wieder die Jensensche Formel (16), daß für $R_1 > R$

$$n(R, f_1) \log \frac{R_1}{R} \leq \sum_{|a_k| < R} \log \frac{R_1}{a_k} \leq \sum_{|a_k| < R_1} \log \frac{R_1}{a_k} = -\log |f_1(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_1(R_1 e^{i\theta})| d\theta$$

Für $R_1 = e R$ wird daher

$$(19) \quad n(R, f_1) < -\log |f_1(0)| + \log M(eR) < |\log |f_1(0)|| + (eR)^{\varepsilon+\varepsilon'} < R^{\varepsilon+\varepsilon'}, \quad (\varepsilon' > \varepsilon).$$

Trägt man dies in (18) ein, so erkennt man, daß der zweite Summand auf der rechten Seite von (14) gleichfalls für $R \rightarrow \infty$ den Grenzwert Null hat.

Wir haben also bewiesen, daß für ganze Funktionen der endlichen Ordnung ϱ eine Produktdarstellung

$$(20) \quad f(z) = e^{g(z)} z^{\nu} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right)^{\lambda_k + \frac{1}{2}} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{\lambda_k} + \dots + \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{\lambda_k}$$

gilt, in welcher q_1 die größte ganze Zahl ist, $\sum \left| \frac{1}{a_k} \right|^{q_1}$ divergiert, und wo $g(e)$ ein Polynom von höchstens $\varrho^{1/\varrho}$ Grade ist.¹⁾

3. Abschätzung eines kanonischen Produkts nach oben. Noch genaueren Aufschluß gewinnen wir, wenn wir uns die Frage vorlegen, unter welchen Bedingungen ein Produkt wie (20) eine ganze Funktion ϱ -ter Ordnung darstellt.

Ich beginne mit dem kanonischen Produkt $\varphi(z)$ (12) und werde zeigen, daß es eine ganze Funktion der Ordnung Q_1 darstellt. Zunächst folgt schon aus den vorausgegangenen Betrachtungen, daß seine Ordnung mindestens Q_1

1) Übrigens enthalten diese Betrachtungen — wie der Leser des Näheren überlegen möge — einen Beweis für die Möglichkeit der Produktdarstellung (20), der von der oben erwähnten Konvergenzbetrachtung aus Bd. I unabhängig ist.

sein muß. Denn wäre sie kleiner, so wäre $\varphi(z)$ eine ganze Funktion, bei der der Grenzexponent die Ordnung übertrifft. Es bleibt somit nur zu zeigen, daß die Ordnung höchstens q_1 sein kann.

Um diese Abschätzung des kanonischen Produktes nach oben zu leisten, betrachten wir die einzelnen Elementarfaktoren

$$E\left(\frac{z}{a_n}, q_1\right) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\mu} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{2!} + \dots$$

des kanonischen Produktes. Zunächst zeige ich, daß zu jedem μ mit $q_1 < \mu \leq q_1 + 1$ eine Zahl A gehört derart, daß

$$(21) \quad \left| E\left(\frac{z}{a_n}, q_1\right) \right| < e^A \left| \frac{z}{a_n} \right|^\mu$$

ist. Ist $\left| \frac{z}{a_n} \right| < 1$, so ist

$$E\left(\frac{z}{a_n}, q_1\right) = e^{-\frac{1}{q_1+1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{q_1+1} + \dots}$$

$$\text{Also} \quad \left| E\left(\frac{z}{a_n}, q_1\right) \right| \leq e^{\frac{1}{q_1+1} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{q_1+1} + \dots}$$

$$< \exp \left\{ \frac{\left| \frac{z}{a_n} \right|^{q_1+1}}{1 - \left| \frac{z}{a_n} \right|} \right\} \leq \exp \left\{ \frac{\left| \frac{z}{a_n} \right|^\mu}{1 - \left| \frac{z}{a_n} \right|} \right\}.$$

Demnach ist insbesondere für $\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2}$

$$(22) \quad \left| E\left(\frac{z}{a_n}, q_1\right) \right| < e^2 \left| \frac{z}{a_n} \right|^\mu.$$

Da aber $\mu > q_1$ ist, so wächst die rechte Seite rascher als die linke, und daher ist (22) auch für alle hinreichend großen $\left| \frac{z}{a_n} \right|$ richtig. Es gelte also (22) für $\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2}$ und für $\left| \frac{z}{a_n} \right| \geq \lambda > \frac{1}{2}$. Dann bestimme man eine Zahl A , so, daß für $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \lambda$

$$\left| E\left(\frac{z}{a_n}, q_1\right) \right| < e^{A_1} \left| \frac{z}{a_n} \right|^\mu$$

ist. Unter A verstehe man dann die größere der beiden Zahlen 2 und A_1 . Damit ist (21) schon bewiesen.

Ich zeige weiter: Wenn p mit $q_1 < \mu \leq q_1 + 1$ eine Zahl ist, für welche

$$\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^\mu$$

konvergiert, so ist für jedes positive ε und für genügend große z

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon} |z|^{\mu}.$$

Zunächst gilt, nach dem was eben vorausgeschickt wurde, für jeden Elementarfaktor die Abschätzung (21). Nunmehr wählen wir die ganze Zahl n_1 so, daß

$$\sum_{n_1+1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{\mu} < \frac{\varepsilon}{3 \cdot A}$$

wird, und schreiben

$$\varphi(z) = z^{\rho} \cdot \prod_1^{n_1} \cdot \prod_{n_1+1}^{\infty}$$

Da aber $\mu > q_1$ ist, so gilt für das aus endlich vielen Faktoren bestehende Produkt für genügend große $|z|$

$$\left| \prod_1^{n_1} \right| < e^{\frac{\varepsilon}{3}} |z|^{\mu}.$$

Ebenso ist für genügend große $|z|$

$$|z^{\rho}| < e^{\frac{\varepsilon}{3}} |z|^{\mu}.$$

Endlich aber ist

$$\left| \prod_{n_1+1}^{\infty} \right| < e^{A \cdot |z|^{\mu}} \sum_{n_1+1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{\mu} < e^{\frac{\varepsilon}{3}} |z|^{\mu}.$$

Also im ganzen

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon} |z|^{\mu}.$$

Wählt man insbesondere $\mu = q_1 + \varepsilon$, so lehrt dies Ergebnis, daß $\varphi(z)$ höchstens von der Ordnung q_1 ist. Wir wissen somit jetzt, daß für kanonische Produkte Grenzexponent und Ordnung übereinstimmen.

4. Grenzexponent und Ordnung. Es folgt jetzt auch, daß bei jeder ganzen Funktion endlicher nicht ganzzahliger Ordnung Grenzexponent und Ordnung übereinstimmen. Denn wäre der Grenzexponent Q_1 kleiner als die Ordnung Q , so müßte der Exponentialfaktor $e^{(z)}$ die Situation retten. Er müßte genau die Ordnung Q haben. Denn hätte auch er eine kleinere Ordnung, so hätte das Produkt, bestehend aus kanonischem Produkt und Exponentialfaktor eine kleinere Ordnung als Q . Der Exponentialfaktor kann aber nur dann die Ordnung Q haben, wenn Q eine ganze Zahl ist.

Für nichtganzzahlige Ordnung stimmen also Grenzexponent und Ordnung stets überein. Bei ganzzahliger Ordnung kann aber der Grenzexponent kleiner sein als die Ordnung. Tatsächlich haben wir ja auch oben schon in den Beispielen von ganzen Funktionen mit nur endlich vielen Nullstellen solche Beispiele kennen gelernt. Bei diesen ist der Grenzexponent Null.

Es kann aber bei ganzzahliger Ordnung ϱ tatsächlich der Grenzexponent jeden Wert $\varrho_1 \leq \varrho$ besitzen. Zunächst kann man nämlich Nullstellen mit beliebigem Grenzexponenten finden. Soll z. B. der Grenzexponent ϱ_1 sein, so muß man nur

$$\alpha_n = n^{\varrho_1}$$

nehmen. Multipliziert man dann ein kanonisches Produkt vom Grenzexponenten ϱ_1 mit einem Exponentialfaktor

der Ordnung ϱ , so hat das Produkt beider die Ordnung ϱ . Denn wäre die Ordnung kleiner, so müßte nach dem Satz über die Produktzerlegung der ganzen Funktionen endlicher Ordnung auch der Grad des Exponentialfaktors kleiner als ϱ sein.

5. Der Picardsche Satz. Diese jetzt zu einem gewissen Abschluß gediehenen Betrachtungen enthalten ein Stück des Picardschen Satzes und zugleich eine wesentliche Vertiefung desselben. Ganze Funktionen nichtganzzahliger Ordnung nehmen nach dem, was wir bewiesen haben, nicht allein jeden Wert unendlich oft an, sondern sie nehmen auch noch jeden Wert mit einer durch die Ordnung allein bestimmten Verteilungsdichte an. Eine Ausnahme kann nur bei ganzzahliger Ordnung auftreten. Ob sie wie beim Picardschen Satz auch nur für einen Wert höchstens eintreten kann? Wir werden bald die Antwort auf die Frage kennen lernen.

6. Bemerkungen. Ich betrachte den Fall, daß der Grenzexponent ϱ_1 zugleich *Konvergenzexponent* ist, d. h. den Fall, daß die Reihe

$$\sum \frac{1}{|\alpha_n|^{\varrho_1}}$$

konvergiert. Hier lehren die vorausgegangenen Betrachtungen, daß dann notwendig das *kanonische Produkt* vom *Minimaltypus der Ordnung* ϱ_1 ist. Man hat dazu nur $\mu = \varrho_1$ in der S. 248 abgeschlossenen Betrachtung zu nehmen. Bei nicht ganzzahliger Ordnung kann man sogar hinzufügen, daß jede ganze Funktion, deren Grenzexponent ϱ_1 zugleich Konvergenzexponent ist, dem Minimaltypus der Ordnung ϱ_1 angehört. Bei ganzzahliger Ordnung braucht das natürlich nicht richtig zu sein.

Die eben als hinreichend erkannte Bedingung ist andererseits nicht notwendig dafür, daß eine Funktion dem Minimaltypus der Ordnung ϱ angehört. Vielmehr lehren hier die Betrachtungen zu Beginn des Paragraphen 4 nur, daß

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\alpha_n|^{\varrho}} = 0$$

notwendig dafür ist, daß eine ganze Funktion dem Minimaltypus der Ordnung ϱ angehört. Denn jetzt ergibt sich als Analogon zur Formel (11)

$$|a_1 \cdots a_n| < \frac{e^{K^{\varrho}}}{R^n}.$$

Das Minimum der rechten Seite tritt für $R = \left(\frac{n}{\varrho}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$ ein.

Also wird

$$|a_1 \cdots a_n| < \left(\frac{e e \varrho}{n}\right)^{\frac{n}{\varrho}}.$$

Und daraus folgt für $|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n|$

$$|a_n| < \left(\frac{e e \varrho}{n}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$$

und daraus folgt sofort (23). Freilich ist diese Bedingung ihrerseits nicht hinreichend dafür, daß ein kanonisches Produkt höchstens dem Minimaltypus der Ordnung ϱ angehört.¹⁾ Hier sei nur bemerkt, daß nach einem bekannten Grenzwertsatz im Falle daß

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\varrho}}$$

konvergiert, tatsächlich (23) gilt. Aber nur für den Fall, daß ϱ zugleich Grenzexponent ist, haben wir erkannt, daß das kanonische Produkt dem Minimaltypus angehört.

Pringsheim hat in der eben erwähnten Arbeit gezeigt, daß die Bedingung (23) zusammen mit

$$\sum_i \left(\frac{1}{a_i}\right)^{\eta_i} = 0$$

hinreichend dafür ist, daß ein kanonisches Produkt (12) höchstens dem Minimaltypus der Ordnung ϱ angehört. Ich will hier mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung noch an einem Beispiel — gleichfalls einer Abschätzung Pringsheims folgend — die Richtigkeit der Behauptung zeigen.

Es sei

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|a_k|} = 0.$$

Dann ist

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_i^2}\right), \quad \text{wobei } |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots,$$

höchstens vom Minimaltypus der Ordnung 1. Es ist nämlich

1) Man vgl. z. B. Pringsheim, Annalen 58, S. 311.

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| &< \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{|z|^2}{|a_k|^2}\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|^2}{|a_k|^2}\right) \\
&< e^{n \log \left(1 + \frac{|z|^2}{|a_1|^2}\right)} \cdot \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|^2}{|a_k|^2}\right).
\end{aligned}$$

Nun werde die Zahl n so festgelegt, daß für $k > n$

$$\frac{1}{|a_k|} < \frac{\varepsilon}{2\pi k}$$

ist. Dabei ist $\varepsilon > 0$ eine beliebige gegebene Zahl. Dann wird

$$\prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|^2}{|a_k|^2}\right) < \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 |z|^2}{4\pi^2 k^2}\right) = \frac{2}{\varepsilon |z|} \sin\left(i \frac{\varepsilon}{2} |z|\right) < e^{\frac{\varepsilon}{2} |z|},$$

sofern man $|z|$ so groß wählt, daß $\varepsilon |z| > 4$ ist. Außerdem kann man $|z|$ so groß wählen, daß

$$n \log \left(1 + \frac{|z|^2}{|a_1|^2}\right) < \frac{\varepsilon}{2} |z|.$$

Dann ist aber im ganzen $|\varphi(z)| < e^{\varepsilon |z|}$.

§ 5. Eine Vertiefung des Picardschen Satzes.

1. Fragestellung. Ich nehme den im vorigen Paragraphen verlassenen Gegenstand wieder auf und werde zeigen, daß der dort bei Funktionen einer ganzzahligen Ordnung beobachtete Ausnahmefall nur für höchstens eine Stellensorte auftreten kann, daß also bei einer Funktion q -ter Ordnung für höchstens eine Stellensorte der Grenzexponent kleiner als Q sein kann. Unter einer Stellensorte verstehe ich dabei die Gesamtheit der Stellen, wo die Funktion einen gegebenen Wert a annimmt.

Es gibt verschiedene Methoden, dies zu beweisen. Ich gebe hier einer auf der Jensen-Nevanlinnaschen Formel beruhenden den Vorzug, weil sie die weitest gehenden Resultate liefert und zu Überlegungen Anlaß gibt, die uns auch sonst noch nützlich sein werden. Ich werde mit dieser Methode den folgenden Satz beweisen:

Die ganze Funktion $f(z)$ möge den Wert x an Stellen annehmen, deren absolute Beträge $r_\nu(x)$ sind. Wenn dann die Reihe

$$(24) \quad \sum \left(\frac{1}{r_\nu(x)}\right)^k$$

für zwei verschiedene Werte von x konvergiert, so gehört $f(z)$ höchstens dem Minimaltypus der Ordnung k an.

Darin ist das angestrebte Ziel enthalten. Gleichzeitig reicht aber dieser Satz noch weiter, z. B. gilt er ja ohne die Annahme, daß $f(z)$ von endlicher Ordnung ist.

2. Vorbemerkungen. Zum Beweise sind verschiedene Vorbereitungen nötig. Die beiden Werte von x , für die wir Konvergenz von (24) voraussetzen wollen, seien a und b . Dann darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß im Koordinatenanfangspunkt $z=0$ die Funktion $f(z)$ von a und von b verschieden ist, sowie daß daselbst die Ableitung $f'(0) \neq 0$ ist. Denn das kann man stets durch geeignete Wahl des Koordinatenanfangspunktes erreichen. Bei einer Verschiebung desselben um α gehen aber die $r_\nu(x)$ in Werte $r'_\nu(x)$ über, die zwischen $r_\nu(x) - \alpha$ und $r_\nu(x) + \alpha$ liegen und mau sieht leicht, daß die beiden Reihen

$$\sum (r_\nu(x))^{-k} \quad \text{und} \quad \sum (r'_\nu(x))^{-k}$$

gleichzeitig konvergieren oder divergieren. Diese beiden erlaubten Annahmen bewirken eine formale, keine prinzipielle, Vereinfachung der Beweisführung.

3. Eine grundlegende Abschätzung. Wir stützen den Beweis unserer Behauptung auf den Beweis des folgenden allgemeinen Satzes.

$f(z)$ sei eine ganze Funktion. Es sei $f(0) \neq a$, $f'(0) \neq b$, $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$ ($a \neq b$). Setzt man allgemein

$$(26) \quad N(r, g) = \int_0^r \frac{n(t, g)}{t} dt,$$

wo $n(t, g)$ die Zahl der Nullstellen bedeutet, die g in $|z| \leq t$ hat und wo $g(z)$ im Endlichen der Ebene eindeutig und bis auf Pole regulär sei, und setzt man

$$(26) \quad m(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\vartheta})| d\vartheta,$$

für solche r , für die $g(re^{i\vartheta}) \neq 0$ bleibt für alle $0 \leq \vartheta < 2\pi$, so gilt die Abschätzung

$$(27) \quad m(r, f) < C + 4 \log R + 6 \log \frac{1}{R-r} + 4 \log m(R, f) \\ + N(R, f-a) + N(R, f-b).$$

Hier bedeutet C eine von r und R unabhängige Zahl und es ist $r < R$, und r, R sind zwei positive Zahlen, derart, daß auf $|z| = r$ und $|z| = R$ keine Stellen liegen, wo $f = 0$ ist; $\log$ hat die auf Seite 129 erklärte Bedeutung.

Zum Beweise dieses Satzes gehen wir von der Jensen-Nevanlinnaschen Formel aus, die wir für eine Funktion $F(z)$ anschreiben, welche in einem Kreise $|z| \leq R'$ bis auf Pole regulär sei. Ihre Nullstellen mögen bei $a_1, a_2, \dots$ liegen und ihre Pole bei $b_1, b_2, \dots$. Jede Stelle sei so oft ange-

führt, als es der Vielfachheit der betr. Nullstelle oder des zugehörigen Poles entspricht. Vorausgesetzt sei noch, daß auf dem Kreise $|z| = R'$ keine Nullstelle und kein Pol liegt, sowie daß $F(0) \neq 0$ und endlich ist. Dann ist wie auf S. 244

$$(28) \quad \log F(z) = \sum_{|a_k| < R'} \log \frac{R' - a_k}{R' - z a_k} + \sum_{|b_k| < R'} \log \frac{R' - z b_k}{R' - b_k} \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(R'e^{i\theta})| \frac{R'e^{i\theta} + z}{R'e^{i\theta} - z} d\theta + iC,$$

wo C eine passende reelle Konstante ist. Daraus folgt für $z = 0$ die Jensensche Formel:

$$(29) \quad \log |F(0)| = \sum_{|a_k| < R'} \log \frac{|a_k|}{R'} + \sum_{|b_k| < R'} \log \frac{R'}{|b_k|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(R'e^{i\theta})| d\theta.$$

Ich erläutere nun zunächst, wie die beiden Funktionen

$$N(r, F) \quad \text{und} \quad m(r, F)$$

mit der Jensenschen Formel in Verbindung gebracht werden können. Es ist nämlich

$$(30) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(R'e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |F| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{F} \right| d\theta \\ = m(R', F) - m\left(R', \frac{1}{F}\right).$$

Ferner rechnet man leicht nach, daß

$$(30a) \quad \sum_{|a_k| < R'} \log \frac{R'}{|a_k|} = \log \frac{(R')^{n(R', F)}}{a_1 \dots a_{n(R', F)}} = \int_0^{R'} \frac{n(t, F)}{t} dt = N(R', F)$$

ist. Unter Verwendung dieser Beziehungen kann man die Formel (29) so schreiben:

$$(31) \quad m(R', F) + N\left(R', \frac{1}{F}\right) = m\left(R', \frac{1}{F}\right) + N(R', F) + \log |F(0)|$$

Nun zwei Bemerkungen über $\log$. Versteht man unter

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

positive Zahlen, so ist

$$(32) \quad \log^+ (\alpha_1 \dots \alpha_n) \leq \log^+ \alpha_1 + \log^+ \alpha_2 + \dots + \log^+ \alpha_n$$

und es ist

$$(33) \quad \log^+ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \leq \log^+ \alpha_1 + \log^+ \alpha_2 + \dots + \log^+ \alpha_n + \log n.$$

Nur der Beweis der zweiten Bemerkung bedarf einer kurzen Überlegung. Man beachte dazu, daß

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq n\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots\alpha_n$$

ist, falls die ersten k der Zahlen α_i kleiner als Eins, die übrigen mindestens gleich Eins sind.

Beachtet man nun, daß

$$|F'| \leq |F - a| + |a|,$$

so sieht man, daß

$$\log^+ |F'| \leq \log^+ |F - a| + \log^+ |a| + \log 2$$

ist, und daß daher

$$(34) \quad m(R', F') < m(R', F - a) + C_1$$

ist. Hier bedeutet C_1 eine von R' und z unabhängige Zahl. In der Folge sollen mit C_k immer von R' und z bzw. R und $|z| = r$ unabhängige Zahlen bezeichnet werden.

Ebenso findet man natürlich

$$(35) \quad m(R', F - a) < C_2 + m(R', F).$$

Beachtet man weiter, daß für $a \neq b$

$$\frac{a-b}{F'-a} = \frac{F'-b}{F'-a} - 1, \quad \left| \frac{1}{F'-a} \right| \leq \left| \frac{1}{a-b} \right| \left(\left| \frac{F'-b}{F'-a} \right| + 1 \right),$$

so erkennt man aus (32) und (33), daß

$$(36) \quad m\left(R', \frac{1}{F'-a}\right) < C_3 + m\left(R', \frac{F'-b}{F'-a}\right) \text{ ist.}$$

Wir gehen nun zum Beweise unseres Satzes über. Wir setzen für diesen Beweis voraus, daß auf $|z| = r$ und auf $|z| = R$ keine Stellen liegen, wo $f = 0$ ist, oder wo $f = a$, oder $f = b$ oder $f'(z) = 0$ ist. Es ist aber klar, daß (27) unter den im Satz genannten Annahmen richtig bleibt, wenn es erst unter den eben genannten zusätzlichen Annahmen bewiesen ist $f(z)$ sei somit eine ganze Funktion, und es sei

$$f(0) \neq a, \quad f(0) \neq b, \quad f(0) \neq 0, \quad f'(0) \neq 0,$$

Dann folgt zunächst aus (34) für $R' = r$ und $F = f$

$$m(r, f) < C_4 + m(r, f - a).$$

Dann lehrt (31), wenn man es auf $F = f - a$, $R' = r$ anwendet

$$m(r, f - a) = C_5 + N(r, f - a) + m\left(r, \frac{1}{f - a}\right).$$

Den n es ist j $N\left(r, \frac{1}{f - a}\right) = 0$, i $f(z)$ regulär ist. Alsdann lehrt (36), daß

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) < C_6 + m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right).$$

Daher hat man, wenn man diese drei Abschätzungen nacheinander anwendet

$$(87) \quad m(r, f) < C_7 + N(r, f-a) + m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right).$$

Nun schreibe man $\frac{f-b}{f-a} = \frac{f}{f-a} - \frac{f-b}{f'}$.

Dann ist wegen (32)

$$(38) \quad m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right) \leq m\left(r, \frac{f}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f-b}{f'}\right).$$

Nun wende man (31) auf $R' = r$ und $R'' = \frac{f-b}{f'}$

an. Das ergibt

$$(39) \quad m\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) = C_8 + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) \\ \leq C_8 + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) + N(r, f-b).$$

$N\left(r, \frac{f'}{f-b}\right)$ ist nämlich nicht negativ, und die Zahl der Nullstellen von $\frac{f-b}{f'}$ ist sicher nicht größer als die von $f-b$, weil f' eine ganze Funktion ist. Vermittelst (38) und (39) erhält man daher aus (37)

$$(40) \quad m(r, f) < C_9 + N(r, f-a) + N(r, f-b) + m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right).$$

Nun benutzen wir (28) für

$$F = f-a, \quad R' = R, \quad |z| = r < R,$$

setzen also voraus, daß auf $|z| = R$ keine Nullstelle von $f-a$ liegt. Differentiation nach z liefert:

$$\frac{f'(z)}{f(z)-a} = \sum_{|a_k| < R} \left(z - \frac{R^2 - a_k \bar{a}_k}{R^2 - z \bar{a}_k} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta}) - a| \frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)^2} d\theta.$$

Mit a_k sind dabei jetzt die Nullstellen von $f(z) - a$ bezeichnet. Pole hat diese Funktion nicht.

Daher wird

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)-a} \right| \leq \frac{2R}{(R-r)^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta}) - a| d\theta \right. \\ \left. + \sum_{|a_k| < R} \frac{R}{(R-r)^2} \left| \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)} \right| \right\} \\ \leq \frac{2R}{(R-r)^2} \left\{ \sum_{|a_k| < R} \left| \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)} \right| + m(R, f-a) + m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) \right\}.$$

Nun ist nach (31) und (35)

$$\begin{aligned} m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) &= m(R, f-a) - N(R, f-a) + C_{10} \\ &\leq m(R, f-a) + C_{10} < m(R, f) + C_{11}. \end{aligned}$$

Also hat man

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)-a} \right| \leq \frac{2R}{(R-r)^2} \left\{ \sum_{|a_k| < R} \left| \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)} \right| + 2m(R, f) + C_{12} \right\}$$

Wegen (33) wird daher:

$$(41) \quad m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) < C_{12} + \log^+ R + 2 \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ m(R, f) \\ + \log^+ n(R, f-a) + \sum_{|a_k| < R} m\left(r, \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)}\right)$$

Jetzt wende ich (31) auf $F = \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)}$, $R' = r < R$

an. Man beachte dabei, daß $\left| \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)} \right| \geq 1$

ist in $|z| \leq R$. Daher ist $\log^+ \left| \frac{1}{F} \right| = 0$

und daher ist auch $m\left(r, \frac{1}{F}\right) = 0$.

Außerdem ist F in $|z| < R$ frei von Nullstellen. Also ist auch

$$N(r, F) = 0.$$

Daher wird nach (30 a)

$$(42) \quad m\left(r, \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)}\right) = \log \frac{R}{|a_k|}, \quad \text{falls } r < |a_k| < R,$$

$$(43) \quad m\left(r, \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z - a_k)}\right) = \log \frac{R}{|a_k|} - \log \frac{r}{|a_k|} = \log \frac{R}{r}, \quad \text{falls } |a_k| < r.$$

Daher folgt aus (41)

$$(44) \quad m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) < C_{12} + \log^+ R + 2 \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ m(R, f) + \log^+ n(R, f-a) \\ + n(r, f-a) \log \frac{R}{r} + \sum_{r < |a_k| < R} \log \frac{R}{|a_k|}.$$

Nun wird

$$\begin{aligned}
 (45) \quad & n(r, f-a) \log \frac{R}{r} + \sum_{r < |a_k| < R} \log \left| \frac{R}{a_k} \right| \\
 &= n(r, f-a) \log \frac{R}{r} + \int_r^R \frac{n(t, f-a)}{t} - \frac{n(r, f-a)}{t} dt \\
 &= \int_r^R \frac{n(t, f-a)}{t} dt = N(R, f-a) - N(r, f-a).
 \end{aligned}$$

Daher folgt aus (44)

$$\begin{aligned}
 (46) \quad & m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) < C_{14} + \log^+ R + 2 \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ m(R, f) \\
 & + \log n(R, f-a) + N(R, f-a) - N(r, f-a).
 \end{aligned}$$

Um nun auch noch für $\log n(R, f-a)$ eine geeignete Abschätzung zu finden, führen wir noch eine Zahl $\bar{R} > R$ und $< 2R$ ein, über die wir S. 258 verfügen werden. In (45) wollen wir r durch R , R durch $\bar{R}$ ersetzen. Daher nehmen wir vorerst an, daß auch auf $|z| = R$ keine Stellen liegen, wo $f(z) = a$ wird. Dann folgt aus (45)

$$n(\bar{R}, f-a) \log \frac{\bar{R}}{R} < N(\bar{R}, f-a).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Also ist} \quad & n(R, f-a) \leq \frac{1}{\log \frac{\bar{R}}{R}} N(\bar{R}, f-a) \\
 & \leq [C_{14} + m(\bar{R}, f-a)] \frac{R C_{14}}{R-R} \quad (\text{nach (31)}) \\
 & \leq [C_{14} + m(R, f)] \frac{\bar{R} C_{14}}{R-R} \quad (\text{nach (35)}).
 \end{aligned}$$

Also ist wegen (32) und (33)

$$(47) \quad \log^+ n(R, f-a) \leq \log^+ m(\bar{R}, f) + \log^+ \bar{R} + \log^+ \frac{1}{\bar{R}-R} + C_{17}.$$

Aus (46) folgt daher

$$\begin{aligned}
 (48') \quad & m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) < C_{14} + \log^+ R + 2 \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ m(R, f) \\
 & + \log^+ \bar{R} + \log^+ \frac{1}{\bar{R}-R} + \log^+ m(\bar{R}, f) \\
 & + N(R, f-a) - N(r, f-a).
 \end{aligned}$$

Um (48') noch zu vereinfachen, beachte man, daß $m(r, f)$ und daher auch $\log^+ m(r, f)$ mit r zugleich wächst oder doch nicht abnimmt.

Dies

$$\log |f(re^{i\varphi})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\vartheta})| \frac{(R^2 - r^2) d\vartheta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \varphi)},$$

wenn $r < R$

$$\log |f(re^{i\varphi})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\vartheta})| \frac{(R^2 - r^2) d\vartheta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \varphi)}.$$

Die rechtsstehende nichtnegative Potentialfunktion werde mit $u_R(r, \varphi)$ bezeichnet. Als $m(r, f) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_R(r, \varphi) d\varphi = u_R(0, \varphi) = m(R, f)$,

was die Monotonie von $m(r, f)$ ausdrückt.

Daher gilt (48') auch ohne die Annahme, daß $f(z) \neq a$ bleibt auf $|z| = \bar{R}$. Daher setzt man nun in (48')

$$R = \frac{\bar{R} + R}{2} = R + r, \quad R - r = \bar{R} - r,$$

Also

Dadurch wird aus (48')

$$(48'') \quad m\left(r, \frac{f}{f-a}\right) < C_{19} + \log^+ R + \log^+ \bar{R} + 3 \log^+ \frac{1}{\bar{R}-r} + \log^+ m(R, f) \\ + \log^+ m(\bar{R}, f) + N(R, f-a) - N(r, f-a).$$

Da nun $N(R, f-a)$ mit R zugleich wächst oder doch nicht abnimmt, und da ebenso $m(R, f) \leq m(\bar{R}, f)$ und $\log^+ R < \log^+ \bar{R}$ gilt, so kann man in (48'') R durch $\bar{R}$ ersetzen. Schreibt man dann statt $\bar{R}$ wieder R , so hat man

$$(48) \quad m\left(r, \frac{f}{f-a}\right) < C_{20} + 2 \log^+ R + 3 \log^+ \frac{1}{R-r} + 2 \log^+ m(R, f) \\ + N(R, f-a) - N(r, f-a).$$

Eine zu (48) analoge Abschätzung gilt auch für

$$\frac{f}{f-b}.$$

Trägt man beide in (40) ein, so erhält man (27).

4. Anwendung der grundlegenden Abschätzung. Das nächste Ziel ist es nun, aus (27) die folgende Ungleichheit herzuleiten

$$(49) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr < C_1 + C_2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-a) + N(r, f-b)}{r^{k+1}} dr.$$

Hierbei ist $k > 0$, $0 < R_0 < R_1$ und C_1 und C_2 sind von R_1 unabhängige Zahlen.

Daß man über $m(r, f)$ integrieren kann, ergibt sich daraus, daß $m(r, f)$ eine monoton wachsende Funktion von r ist.

Nun setze man zum Beweis von (49) in (27)

$$(50) \quad R = r + \frac{R_1 - r}{R_1},$$

multipliziere beide Seiten von (27) mit

$$\frac{1}{r^{k+1}}$$

und integriere nach r von R_0 bis R_1 . Man erkennt sofort, daß dabei die drei ersten Glieder der rechten Seite Beiträge liefern, die unter einer von R_1 unabhängigen, wohl aber von R_0 abhängigen Schranke liegen. Nach

(50) ist weiter

$$\frac{R}{r} < 1 + \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{dR}{dr} = 1 - \frac{1}{R_1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Also } \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(R, f-x)}{r^{k+1}} dr &\leq \int_{R_0'}^{R_1'} \frac{N(R, f-x)}{R^{k+1}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{r}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{1}{R_1}\right)} dR \quad (x = a \text{ oder } x = b) \\ &\leq \frac{\left(1 + \frac{1}{R_0}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{R_1}} \cdot \int_{R_0'}^{R_1'} \frac{N(R, f-x)}{R^{k+1}} dR \\ &< C \cdot \int_{R_0'}^{R_1'} \frac{N(R, f-x)}{R^{k+1}} dR, \end{aligned}$$

wo C von R_1 unabhängig ist, und R_0', R_1' die R_0 und R_1 entsprechenden Grenzen sind. Ebenso wird

$$(51) \quad 4 \int_{R_0}^{R_1} \frac{\log m(R, f)}{r^{k+1}} dr < C \cdot \int_{R_0'}^{R_1'} \frac{\log m(R, f)}{R^{k+1}} dR.$$

Nun unterscheide man zwei Fälle. Der eine ist der, daß

$$m(R, f)$$

für alle R unter einer von R unabhängigen Schranke bleibt. Dann liegt auch

$$\int_{R_0}^{R_1} \log \frac{m(R, f)}{R^{k+1}} dR$$

unter einer von R_1 unabhängigen Schranke und die Abschätzung ist damit vollendet. Der andere Fall ist der, daß $m(R, f)$ beliebig großer Werte fähig ist. In diesem Falle gibt es eine Schranke $t_0 > 1$ so, daß für $t > t_0$

$$\log t < \frac{1}{2G} \cdot t + \log t_0$$

bleibt. Dann ist also nach (51) wegen der Monotonie von $m(r, f)$ von einem R_0 an

$$4 \int_{R_0}^{R_1} \log \frac{m(R, f)}{R^{k+1}} dR < C' \log t_0 + \frac{1}{2} \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(R, f)}{R^{k+1}} dR.$$

In diesem Falle folgt aus (27)

$$(52) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr < C_1 + C_2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-a)}{r^{k+1}} dr + \frac{1}{2} \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr,$$

wo C_1 und C_2 von R_1 unabhängige Zahlen sind. Im ersten Falle bekommt man eine Abschätzung gleicher Art, in welcher nur das letzte Glied rechts fehlt. In dieser Form gilt aber die Abschätzung immer. Man erkennt das, wenn man das letzte Glied auf der rechten Seite von (52) nach links bringt und dann mit 2 multipliziert. Damit ist (49) bewiesen.

Man kann (49) durch partielle Integration etwas umformen. Man findet nämlich

$$(52a) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr = \frac{1}{k} \left(\frac{N(R_1, f-x)}{R_1^k} - \frac{N(R_0, f-x)}{R_0^k} \right) + \frac{1}{k} \int_{R_0}^{R_1} \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr < \frac{1}{k} \frac{N(R_0, f-x)}{R_0^k} + \frac{1}{k} \int_{R_0}^{R_1} \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr,$$

und daher kann man (49) durch die folgende Abschätzung ersetzen:

$$(53) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr < C_1 + C_2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{n(r, f-a) + n(r, f-b)}{r^{k+1}} dr.$$

5. Vertiefung des Picardschen Satzes. Aus (53) folgt der zu Beginn dieses Paragraphen ausgesprochene Satz sofort: Es sei also jetzt $f(z)$ die zu Beginn des Paragraphen erwähnte ganze Funktion. Man findet

$$(52 \text{ b}) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr = \frac{n(R_0, f-x)}{k R_0^k} - \frac{n(R_1, f-x)}{k R_1^k} + \frac{1}{k} \sum_{R_0 < r_\mu < R_1} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k \\ < U + \frac{1}{k} \sum_{R_0 < r_\mu < R_1} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k.$$

Wenn also die Reihe rechts für $x = a$ und für $x = b$ konvergiert, so lehrt (52), daß das

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr \quad \text{konvergiert.}$$

Aus der Formel (28) folgt für $F(z) = f(z)$, $R' > r = |z|$, $z = r e^{i\varphi}$

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R' e^{i\vartheta})| \frac{R'^2 - r^2}{R'^2 + r^2 - 2R'r \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta + \sum \log \left| \frac{R'(z - a_k)}{R'^2 - \bar{z} \bar{a}_k} \right| \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R' e^{i\vartheta})| \frac{R' + r}{R' - r} d\vartheta.$$

Also ist für das Maximum des absoluten Betrages

$$(53) \quad a) \quad \log M(r) \leq \frac{R' + r}{R' - r} m(R', f).$$

Ich nehme namentlich $R' = 2r$ und habe dann

$$\log M(r) \leq 3m(2r, f).$$

Daraus folgt

$$\int_{R_0}^{R_1} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} dr \leq 3 \cdot \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(2r, f)}{r^{k+1}} dr \\ \leq 3 \cdot 2^k \cdot \int_{2R_0}^{2R_1} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr,$$

so daß also auch

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} dr$$

konvergiert. Da aber bei einer ganzen nicht konstanten Funktion $M(r)$ monoton wächst, so ergibt sich aus dieser Konvergenz, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen r

$$M(r) < e^{\varepsilon r^k}$$

ist.¹⁾ Wenn also

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu(x)} \right)^k$$

1) Andernfalls gäbe es nämlich beliebig große r , für die $\log M(r) > \varepsilon r^k$. Es sei $R_0 < r_1 < r_2 < r_3 < \dots$ und $r_n > 2r_{n-1}$ eine Folge von Zahlen, für die $\log M(r_n) > \varepsilon r_n^k$

für zwei verschiedene Werte a und b von x konvergiert; so gehört $f(z)$ höchstens dem Minimaltypus der Ordnung $1c$ an.

Bemerkung. Rolf Nevanlinna, von dem die Beweismethode dieses Paragraphen herrührt, hat gezeigt, wie man aus diesen Überlegungen auch den Picardschen Satz selbst beweisen kann.

§ 6. Eine Beziehung zwischen der Verteilungsdichte der a -Stellen und der b -stellen einerseits und dem Maximalbetrag $M(r)$ andererseits.

Die Abschätzung (49) des vorigen Paragraphen enthält eine Beziehung zwischen den Verteilungsdichten und dem Anwachsen der Funktion, die nun noch etwas präziser herausgearbeitet werden soll. Wir benutzen sie für $k=1$, wo sie lautet:

$$\int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^2} dr < C_1 + C_2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-a) + N(r, f-b)}{r^2} dr.$$

Elementare Abschätzung lehrt, daß

$$(54) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^2} dr < C_1 + C_2 \frac{1}{R_0} \{N(R_1, f-a) + N(R_1, f-b)\}$$

ist. Wenn $R_0 < R < R_1$ ist, so ist andererseits

$$(55) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^2} dr > \int_R^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^2} dr \geq m(R, f) \cdot \frac{R_1 - R}{R R_1} > \frac{R_1 - R}{R^2} m(R, f).$$

Also nach (54) und (55)

$$m(R, f) < \frac{R^2}{R_1 - R} \left[C_1 + C_2 \frac{1}{R_0} \{N(R_1, f-a) + N(R_1, f-b)\} \right].$$

Und daraus folgt nach (32) und (33)

$$(56) \quad \log m(R, f) < O + 2 \log^+ R_1 + \log^+ \frac{1}{R_1 - R} + \log^+ \left\{ \frac{N(R_1, f-a)}{N(R_1, f-b)} \right\}.$$

Um das in (27) eintragen zu können und um dabei ein übersichtliches Er-

$$\leq \int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} dr > \frac{r_n^k - 1}{k} \left(\frac{1}{r_{n-1}^k} - \frac{1}{r_n^k} \right) = \frac{1}{k} \left(1 - \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \right)^k \right) > \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right),$$

und daraus folgt, daß $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} dr$ nicht konvergieren kann.

gebnis zu bekommen, definiere man das in (27) und (56) vorkommende R durch die Gleichung

$$(57) \quad R = \frac{R_1 + r}{2}.$$

Da $0 < r < R$ war, so ist also jetzt $0 < r < R < R_1$ (27) wird dabei wegen $R < R_1$ und wegen (57)

$$(27') \quad m(r, f) < C + 4 \log^+ R_1 + 6 \log^+ \frac{1}{R_1 - r} + 4 \log^+ m(R, f) \\ + N(R_1, f - a) + N(R_1, f - b).$$

Aus (56) wird durch (57)

$$(56') \quad \log^+ m(R, f) < C + 2 \log^+ R_1 + \log^+ \frac{1}{R_1 - r} + \log^+ \left\{ \frac{N(R_1, f - a)}{+ N(R_1, f - b)} \right\}.$$

In (27') trage man (56') ein. Dann erhält man, indem man wieder R statt R_1 schreibt

$$(58) \quad m(r, f) < C + 12 \log^+ R + 10 \log^+ \frac{1}{R - r} + N(R, f - a) + N(R, f - b) \\ + 4 \log^+ \{ N(R, f - a) + N(R, f - b) \},$$

wo $0 < r < R$.

Ist insbesondere $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion, so wächst

$$n(R, f - a) + n(R, f - b)$$

mit R zugleich über alle Grenzen. Nach der Definition von $\frac{N(R, f - a)}{+ N(R, f - b)}$ ist daher in diesem Falle für genügend große R

$$\log R < \varepsilon \{ N(R, f - a) + N(R, f - b) \}.$$

Dabei ist ε eine beliebig gegebene positive Zahl. Da auch

$$\log^+ \{ N(R, f - a) + N(R, f - b) \} < \varepsilon \{ N(R, f - a) + N(R, f - b) \}$$

ist für genügend große R , so folgt für ganze transzendente Funktionen aus (58)

$$(59) \quad m(r, f) < 10 \log^+ \frac{1}{R - r} + (1 + \varepsilon) \{ N(R, f - a) + N(R, f - b) \}$$

für beliebig gegebenes ε und genügend große R .

Setzt man in (59) $r = R - 1$, so bekommt man

$$(60) \quad m(R - 1, f) < (1 + \varepsilon) \{ N(R, f - a) + N(R, f - b) \}.$$

Andererseits lehrt (53a) für $R' = R - 1$ und $r < R - 1$

$$(61) \quad \log M(r) \leq \frac{R + r - 1}{R - r - 1} m(R - 1, f).$$

Ist dann $q > 1$ und setzt man $R = qr$, so erhält man aus (60) und (61)

für alle genügend großen R bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ und festem q

$$(62) \quad \log M\left(\frac{R}{q}\right) < \left(\frac{q+1}{q-1} + \varepsilon\right) (N(R, f-a) + N(R, f-b))$$

Du $n(r, f)$ und damit auch $N(r, f)$ ein Maß für die Verteilungsdichte enthalten, so ist also durch die Verteilungsdichte zweier Stellensorten, das Wachstum der ganzen Funktion nach oben eingeschränkt.

Die Jensensche Formel liefert aber auch eine durch die Verteilungsdichte bewirkte Einschränkung des Wachstums nach unten. Wendet man nämlich (31) auf $f(z) - x$ u $R' = r$, an, so erhält man

$$m(r, f-x) = m\left(r, \frac{1}{x}\right) + N(r, f-x) + C.$$

$$\text{Wegen} \quad m(r, f-x) \leq m(r, f) + \log^+ |x| + \log 2$$

$$\text{folgt aber hieraus} \quad m(r, f) > C_1 + N(r, f-x).$$

Und hieraus ergibt sich für $k > 0$

$$\int_{R_0}^{R_1} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr > C + \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr,$$

wo C eine von R_1 unabhängige Zahl ist, und das bedeutet eine Beschränkung des Wachstums nach unten.

Trägt man dies in (49) ein, so gewinnt man

$$(63) \quad \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr < C_1 + C_2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-a) + N(r, f-b)}{r^{k+1}} dr.$$

Aus der Abschätzung (52a) entnimmt man, daß

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

konvergiert, wenn

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

konvergiert. Beachtet man noch, daß

$$(64) \quad \int_{R_1}^R \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr \geq \frac{N(R_1, f-x)}{k} \left(\frac{1}{R_1^k} - \frac{1}{R^k} \right),$$

so lehrt die Gleichung (52a), daß auch umgekehrt aus der Konvergenz von

$$(65) \quad \int_{R_0}^{\infty} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

die Konvergenz von

$$(66) \quad \int_{R_0}^{\infty} \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

folgt. Überall ist $k > 0$ angenommen. Aus (52a) folgt nämlich

$$(67) \quad \frac{1}{k} \int_{R_0}^{R_1} \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr < \int_{R_0}^{R_1} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr + \frac{1}{k} \frac{N(R_1, f-x)}{R_1^k}.$$

Aus (64) zusammen mit der Konvergenz von (65) folgt aber

$$\frac{N(R_1, f-x)}{k R_1^k} \leq \int_{R_1}^{\infty} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr.$$

Dies zusammen mit (67) liefert die Konvergenz von (66).

Aus der Abschätzung (52b) haben wir schon entnommen, daß aus der Konvergenz von

$$\sum_{R_0 < r_\mu} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k$$

die Konvergenz von

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

folgt. Beachtet man noch, daß

$$\int_{R_1}^R \frac{n(r, f-x)}{r^{k+1}} dr > \frac{n(R_1, f-x)}{k} \left(\frac{1}{R_1^k} - \frac{1}{R^k} \right)$$

ist, so lehrt die Gleichung (52b) durch eine der eben benutzten analoge Schlußweise, daß auch umgekehrt aus der Konvergenz von

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

die Konvergenz von

$$\sum_{R_0 < r_\mu} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k$$

folgt. Man kann also zusammenfassend sagen, daß

$$\sum_{R_0 < r_\mu} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k$$

und

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

gleichzeitig konvergieren oder divergieren. Nehmen wir nun an, es gebe einen Wert von x , für welchen

$$\sum_{R_0 < r_\mu} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k$$

divergiert. Dann lehrt (63), daß nicht für zwei verschiedene Werte $x = a$ und $x = b$

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{N(r, f-x)}{r^{k+1}} dr$$

konvergieren kann. Es gibt also höchstens einen Wert von x , für den dies Integral konvergiert. Und daher gibt es auch höchstens einen Wert von x , für den

$$\sum_{R_0 < r_\mu} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k \quad \text{konvergiert.}$$

Wir haben so das Ergebnis:

Wenn die Reihe
$$\sum_{R_0 < r_\mu} \left(\frac{1}{r_\mu(x)} \right)^k$$

überhaupt für einen Wert von x divergiert, so divergiert sie für alle Werte von x mit höchstens einer Ausnahme.

Konvergiert sie also für zwei Werte von x , so konvergiert sie für alle Werte von x .

Noch sei ausdrücklich bemerkt, daß die Ausführungen der beiden letzten Paragraphen sich eng an die Darstellung anschließen, die Rolf Nevanlinna Acta soc. scient Fenn Bd. 50, Nr. 6 (1924) gegeben hat.

§ 7. Abschätzung der ganzen Funktionen nach unten.

1. Abschätzung nach unten. Für viele Zwecke ist es vorteilhaft, eine Abschätzung der ganzen Funktionen nach unten für die Punkte eines Gebietes zu besitzen, das aus der ganzen Ebene durch Ausschneiden gewisser Kreise um die Nullstellen entsteht. Es ist diese Abschätzung nach unten, welche in den älteren Darstellungen der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung zur Herleitung der Produktdarstellung diente. Wir haben diese auf die Jensen'sche Formel gestützt, und so ist zu erwarten, daß man mit Hilfe dieser Formel auch die gewünschte Abschätzung wird gewinnen können.

Ich gehe von der Jensen'schen Formel

$$(68) \quad \log |f(z)| = \sum_{|a_k| < R} \log \left| \frac{R(z - a_k)}{R^2 - \bar{a}_k z} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\vartheta})| \frac{(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta$$

aus, und nehme an, daß $f(0) = 1$ ist, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen darf.

Nach dieser Formel ist

$$\begin{aligned}
 (69) \quad \log |f(z)| &\geq \sum_{|a_k| < R} \log |R(z - a_k)| + \sum_{|a_k| < R} \log \left| \frac{1}{R^2 - a_k z} \right| \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{f(R e^{i\vartheta})} \right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta \\
 &> \sum_{|a_k| < R} \log R + \sum_{|a_k| < R} \log |z - a_k| + \sum_{|a_k| < R} \log \left| \frac{1}{R^2 - a_k z} \right| \\
 &\quad - \frac{R+r}{R-r} m\left(R, \frac{1}{f}\right) \\
 &> \sum_{|a_k| < R} \log |z - a_k| + \sum_{|a_k| < R} \log (R - r) \\
 &\quad - \frac{R+r}{R-r} m\left(R, \frac{1}{f}\right).
 \end{aligned}$$

Dabei ist (30) S. 253 berücksichtigt und benutzt, daß $|a_k| < R$ ist, und es ist $|z| = r$ gesetzt.

Wir betrachten nun eine Funktion der endlichen Ordnung ρ . Um ihre Nullstellen a_k lege man Kreise mit den Radien

$$|a_k|^{-h} \quad (h > \rho).$$

Da

$$\sum |a_k|^{-h}$$

konvergiert, so bedecken diese Kreise nicht die volle Ebene. Außerhalb dieser Kreise, aber im Inneren eines genügend großen Kreises $|z| < R$ wähle man die Stelle z . Man nehme $R = 2r$. Dann wird

$$\sum_{|a_k| < R} \log |z - a_k| > -n(2r)h \log(2r).$$

Weiter ist nach (31) S. 253

$$m\left(R, \frac{1}{f}\right) < m(R, f) + C,$$

wo C von R unabhängig ist. Wir setzen also jetzt voraus, daß auf $|z| = R = 2r$ keine Nullstelle von $f(z)$ liegt.

Daher hat man nun alles in allem

$$\log |f(z)| > -n(2r)h \log(2r) - n(2r) \log(3r) - 3m(2r, f) + C.$$

Nun ist nach (30 a)

$$\log \left| \frac{r^{n(r)}}{a_1 \cdots a_{n(r)}} \right| = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Nach der Jensen'schen Formel ist

$$\log \frac{r^{n(r)}}{|a_1 \cdots a_{n(r)}|} < \log M(r).$$

Also ist

$$n(2r) \log 2 < \int_{2r}^{4r} \frac{n(t)}{t} dt < \log M(4r).$$

Ferner ist

$$m(2r, f) < \log M(2r).$$

Also haben wir

$$(69') \quad \log |f(z)| > -\frac{h}{\log 2} \log M(4r) \log(2r) - \frac{\log M(4r)}{\log 2} \cdot \log(3r) \\ - 3 \log M(2r) + O.$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und genügend große r ist somit

$$\log |f(z)| > -r^{\varepsilon + \varepsilon}.$$

Wir haben also das Ergebnis: *Legt man um die Nullstellen a_k einer ganzen Funktion $f(z)$ der Ordnung ρ Kreise mit den Radien $|a_k|^{-\frac{1}{k}}$, $h > \rho$, so gilt außerhalb derselben bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ und für genügend große $|z| = r$ die Abschätzung*

$$(70) \quad |f(z)| > e^{-r^{\rho + \varepsilon}}.$$

Dies ist zwar zunächst nur unter der Annahme bewiesen, daß $f(0) \neq 0$ ist. Das Ergebnis gilt aber auch ohne diese Voraussetzung. Denn besitzt $f(z)$ bei $z = 0$ eine K -fache Nullstelle, so gilt für

$$f_1(z) = \frac{f(z) k!}{f^{(k)}(0) z^k}$$

die eben gefundene Abschätzung. Für $f(z)$ hat man also

$$|f(z)| > f^{(k)}(0) r^k e^{-r^{\rho + \varepsilon} \frac{1}{k!}},$$

so daß für $f(z)$ a fortiori die Abschätzung (70) richtig ist.

Dies Ergebnis ist nun erst für diejenigen hinreichend großen r gewonnen, für die auf $|z| = R = 2r$ keine Nullstelle von $f(z)$ liegt. Aber auch von dieser Annahme kann man sich frei machen, indem man oben $R = kr$ annimmt und für k eine passende hinreichend nahe bei 2 gelegene Zahl nimmt, wenn auf $|z| = 2r$ Nullstellen von $f(z)$ liegen. Für $R = kr$ verlaufen die Überlegungen ganz analog.

2. Bemerkung. Man kann aus (09) auch bei beliebigen ganzen Funktionen eine Abschätzung nach unten gewinnen, z. B. dadurch, daß man beachtet, daß

$$\sum |a_k|^{-k}$$

stets dann konvergiert, wenn man die a_k der Größe nach ordnet:

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$$

3. Kill Satz von Wiman. Die gewonnene Abschätzung nach unten besagt, daß die ganze Funktion mit wachsendem r nicht beliebig rasch abnehmen kann. Davon, daß eine solche Funktion wenigstens auf gewissen Kreisen gleichmäßig ins Unendliche wachse, ist natürlich keine Rede. Denn z. B. schon das Beispiel der Funktion e^z lehrt, daß es Winkelräume gibt, in welchen die Funktion gleichmäßig gegen Null strebt. Um so bemerkenswerter ist ein Satz von Wiman, der bei Funktionen, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, die Existenz einer Folge von Kreisen feststellt, auf welchen die Funktionswerte gleichmäßig über alle Grenzen wachsen.

Um das einzusehen, gehe ich von der Produktdarstellung einer solchen ganzen Funktion aus: Sie hat die Form

$$f(z) = z^\nu \cdot \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Man übersieht sofort, daß für $|z| = r$

$$r^\nu \prod_1^{\infty} \left|1 - \frac{r}{a_k}\right| \leq |f(z)| \leq r^\nu \prod_1^{\infty} \left|1 + \frac{r}{a_k}\right|.$$

Für eine Untersuchung des Minimums, das eine solche Funktion auf dem Kreise $|z| = r$ besitzt, genügt es also vollständig, die Funktion

$$\varphi(z) = z^\nu \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$$

zu betrachten, deren Nullstellen den gleichen absoluten Betrag haben, wie bei $f(z)$, die aber alle auf der positiven reellen Achse liegen. Wir betrachten die Funktion $\varphi(z)$ weiter. Da wieder

$$(71) \quad |\varphi(z)| \geq |z|^\nu \prod_1^{\infty} \left|1 - \frac{|z|}{|a_k|}\right|$$

ist, so genügt es, die Werte zu untersuchen, welche $\varphi(z)$ auf der positiven reellen Achse annimmt. Denn nach (71) wird das Minimum der Werte, die $|\varphi(z)|$ auf $|z| = r$ besitzt, für positive reelle z erreicht.

Bevor ich eine schärfere Abschätzung des Minimums gebe, sei bemerkt, daß eine Funktion von einer Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ und damit also namentlich $\varphi(z)^1$ auf keinem Halbstrahl durch $z = 0$ beschränkt sein kann. So-

1) $\varphi(z)$ hat die gleiche Ordnung wie $f(z)$, da die Ordnung dem Grenzexponenten gleich ist und da dieser letztere durch die absoluten Beträge der Nullstellen bestimmt ist.

wie das gezeigt ist, so folgt daraus insbesondere, daß $\varphi(z)$ auf der positiven reellen Achse nicht beschränkt ist. Und daraus folgt nach den angestellten Überlegungen, daß es tatsächlich bei jeder ganzen Funktion einer Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$, eine unendliche Folge von Kreisen gibt, auf welchen das Minimum der Funktionswerte über alle Grenzen wächst.

4. Ein Satz von Phragmen und Lindelöf. Daß es bei einer ganzen Funktion einer Ordnung unter $\frac{1}{2}$ keinen Halbstrahl durch $z = 0$ geben kann, auf welchem der absolute Betrag der Funktion beschränkt ist, folgt aus einem Satz von Phragmen und Lindelöf. Dieser besagt:

Wenn eine Funktion $f(z)$ in einem Winkelraum einer Öffnung gleich $\frac{\pi}{\varrho_1}$ ($\varrho_1 > \varrho$) für genügend großes $|z|$ regulär ist und der Abschätzung

$$|f(z)| < e^{\sigma}$$

genügt, wenn weiter an den Bändern des Winkelraumes $f(z)$ beschränkt ist, so ist $f(z)$ im Inneren des Winkelraums gleichfalls beschränkt.¹⁾

Für den Beweis ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß der Winkelraum symmetrisch zur positiven reellen Achse liegt. Man betrachte dann die Funktion

$$F_{\sigma}(z) = f(z)e^{-i\varrho_1 \sigma}, \quad \varrho < \varrho_1 < \varrho_2, \quad \sigma > 0.$$

Dabei sei $e^{-i\varrho_1 \sigma}$ für $\sigma > 0$ positiv reell.

$f(z)$ sei regulär in dem durch $|z| \geq R$ bestimmten Teil des Winkelraums a u $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\varrho_1}$ f dem Randbogen $|z| = R$ dieses Winkelraumes ist $F_{\sigma}(z)$ gleichfalls beschränkt:

$$|F_{\sigma}(z)| \leq |f(z)| \cdot e^{\sigma R^{\varrho_1}}.$$

An den geradlinigen Rändern des Winkelraumes sei $|f(z)| < M$. Hier ist

$$\arg z = \pm \frac{\pi}{2\varrho_1}.$$

Also

$$|F_{\sigma}(z)| < M \cdot e^{-\sigma R^{\varrho_1} \cos \frac{\pi \varrho_1}{2\varrho_2}}.$$

Andererseits gilt für $|z| = r$ im Winkelraum

$$|F_{\sigma}(z)| < e^{\sigma} \cdot e^{-\sigma r^{\varrho_1} \cos \frac{\pi \varrho_1}{2\varrho_2}}.$$

und das strebt mit $r \rightarrow \infty$ gegen Null. Daraus folgt, daß in jedem inneren Punkte z des Winkelraumes

$$|F_{\sigma}(z)| < M_{\sigma}, \quad \text{wo} \quad M_{\sigma} = \text{Max} \left\{ |f(Re^{i\varphi})| e^{\sigma R^{\varrho_1}}, M e^{-\sigma R^{\varrho_1} \cos \frac{\pi \varrho_1}{2\varrho_2}} \right\}.$$

1) Vgl. hierzu auch S. 130.

Daraus folgt, daß in jedem Punkte z des Winkelraumes

$$|f(z)| < M_\sigma \cdot e^{\sigma|z|^{1/\sigma}}.$$

Nun lasse man σ nach Null gehen. Da dabei das eben bestimmte Maximum M_σ in $\text{Max}\{|f(R\varrho^\sigma)|, M\}$ übergeht, und $e^{\sigma|z|^{1/\sigma}}$ gegen 1 konvergiert, so ist tatsächlich bewiesen, daß $|f(z)|$ im Inneren des Winkelraumes gleichfalls beschränkt ist.

5. Anwendung auf die ganzen Funktionen, deren Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Dies kann man in dem uns beschäftigenden Falle einer Funktion $\varphi(z)$ einer Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ so anwenden. Man wähle als ϱ des Phragmén schen Satzes eine Zahl, die ein wenig größer ist als die Ordnung, aber die noch kleiner ist als $\frac{1}{2}$. Als Zahl ϱ_1 des Phragmén schen Satzes wähle man $\frac{1}{2}$ selbst, so daß also der zu betrachtende Winkelraum die Öffnung 2π hat. Seine beiden Schenkel fallen auf die gleiche Halbgerade dieser Ebene. Wäre also eine Funktion einer Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ auf einer Halbgeraden beschränkt, so wähle man diese als den gemeinsamen Schenkel eines Winkelraumes der Öffnung 2π und wende den Phragmén schen Satz an. Er lehrt, daß dann die Funktion in der ganzen Ebene beschränkt wäre, was ihrem Charakter als ganze transzendente Funktion bekanntlich widerspricht.

Ebenso leicht aber, wie wir eben erkannt haben, daß es bei jeder ganzen Funktion einer Ordnung unter $\frac{1}{2}$ eine unendliche Folge von Kreisen gibt, auf welchen die Minima der Funktionswerte über alle Grenzen wachsen, finden wir auch eine Schranke für das Anwachsen dieser Minima. Nach der vor Anwendung des Phragmén schen Satzes angestellten Überlegung genügt es wieder, die Funktion $\varphi(z)$ längs der positiv reellen Achse abzuschätzen. Das Maximum ihres absoluten Betrages wird auf der negativen reellen Achse angenommen. Ihre Ordnung sei ϱ . Dann ist für sie

$$M(r) > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}$$

bei beliebig gegebenem positiven ε für gewisse genügend große r . Man betrachte nun die Funktion

$$\Phi(z) = \varphi(z) e^{-\sigma(-z)^{1/\sigma}}, \quad 0 < \sigma < 1$$

und bestimme den Faktor $e^{-\sigma(-z)^{1/\sigma}}$ so, daß er auf der negativen reellen Achse positiv ausfällt. Diese Funktion ist eindeutig und regulär in der längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenen Ebene. Sie kann längs der positiven reellen Achse nicht beschränkt sein. Denn sonst wäre sie nach dem eben bewiesenen überall beschränkt, namentlich also auch auf der negativen reellen Achse. Hier ist aber für gewisse hinreichend große $|z|$

$$|\Phi(z)| > e^{\sigma - \varepsilon(1-n)},$$

was wegen $0 < \sigma < 1$ nicht beschränkt ist.

Also ist $|\Phi(z)|$ auch nicht längs der positiv reellen Achse beschränkt. Also ist für gewisse hinreichend große positive z

$$|\Phi(z)| > 1.$$

Daher ist für gewisse hinreichend große positive z

$$|\varphi(z)| > e^{\sigma' + \theta' - \varepsilon \cos \pi \eta}.$$

Alles in allem haben wir damit den Satz: Zu jeder ganzen Funktion $f(z)$ einer Ordnung ρ Meiner als $\frac{1}{2}$ und zu jedem positiven ε gibt es eine Folge beliebig großer Kreise, auf welchen

$$|f(z)| > e^{|\varepsilon|^{2-\rho}} \quad \text{ist.}$$

6. Mittag-Lefflers E_a -Funktionen. Ein diesem entsprechender Satz kann für Funktionen, deren Ordnung $\frac{1}{2}$ oder größer ist, nicht mehr gelten. So ist z. B.

$$(72) \quad e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}$$

eine ganze Funktion der Ordnung $\frac{1}{2}$, die offenbar für negative z beschränkt ist.

Für beliebige Ordnungen größer als $\frac{1}{2}$ erhält man in den Mittag-Lefflerschen E_a -Funktionen Beispiele. Diese sind durch die Potenzreihen

$$(73) \quad E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}$$

definiert. Für $\alpha = 1$ erhält man die Funktion e^z und für $\alpha = 2$ erhält man die eben betrachtete Funktion (72). Wir wollen weiter die E_a -Funktionen für $0 < \alpha < 2$ untersuchen. Daß $E_a(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung α ist, folgt sofort aus (10) von S. 237, wenn man die Bd. I S. 315) angegebene Stirlingsche Formel heranzieht.

Für die weitere Untersuchung dieser Funktionen erweist sich eine Integraldarstellung als zweckmäßig, die man leicht aus der Bd. I S. 317ff. gegebenen Integraldarstellung

für $\frac{1}{\Gamma(z)}$ abliest. Dieser entnehmen wir, daß

$$(74) \quad \Gamma(1 + \alpha n) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^s e^{-(1 + \alpha n) \log s} ds, \quad |\Im \log s| \leq \pi,$$

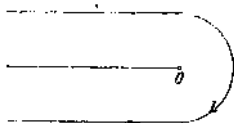


Fig. 40.

wenn man das Integral über den aus Fig. 40 ersichtlichen Weg erstreckt. Daß man dabei einen beliebigen Weg dieser Art wählen darf, wurde schon

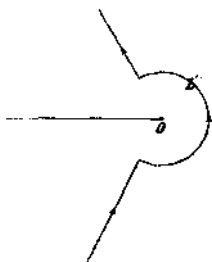


Fig. 41.

Bd. I S. 318 gezeigt. Für uns ist jetzt eine neue Verlagerung des Weges zweckmäßig: Wir wollen einen Integrationsweg nehmen, wie ihn Fig. 41 erkennen läßt. Man überzeugt sich in bekannter Weise leicht, daß diese Wahl des Integrationsweges den Wert des Integrales (74) nicht ändert. Dazu bemerke man nur, daß das Integral erstreckt über die

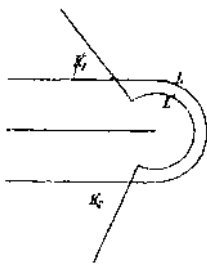


Fig. 42.

geschlossenen aus Fig. 42 ersichtlichen Wege verschwindet, und daß die Integrale über die Kreisbogen K_1 und K_2 der Fig. 42 gegen Null konvergieren, wenn ihr Radius über alle Grenzen wächst. Führt man diese Integraldarstellungen in die Potenzreihe (73) ein, so wird diese

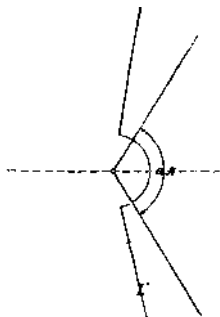


Fig. 43.

$$\begin{aligned} E_\alpha(z) &= \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_L e^s e^{-(1+\alpha n) \log s} ds \cdot z^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L e^s \sum_0^\infty e^{-(1+\alpha n) \log s} s^n \cdot ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L e^s \cdot \frac{1}{1 - e^{-\alpha \log s}} \cdot ds. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser letzten beiden Umformungen ist dabei auf genügend kleine z beschränkt. Man muß $|z|$ so klein voraussetzen, daß $|e^{-\alpha \log s} z| < 1$ für alle s des Integrationsweges. Das ist aber möglich, weil $e^{-\alpha \log s}$ gegen Null strebt, wenn der Punkt s längs des Weges L' nach unendlich strebt. Nun machen wir noch die Substitution

$$s = t^{\frac{1}{\alpha}},$$

und wählen dabei denjenigen Zweig der Funktion $t^{\frac{1}{\alpha}}$, welcher für positive t positiv ist. Dabei gehe der Integrationsweg L' in den aus Fig. 40 ersichtlichen Weg L'' über. Und unser Integral wird

$$(75) \quad E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_{L''} e^{\frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{t - z} dt.$$

Diese Darstellung gilt nach der Herleitung zunächst für alle z aus einer gewissen Umgebung von $z = 0$. Da aber das Integral für alle z konvergiert, die nicht auf dem Wege L'' liegen und da es in der Umgebung eines jeden sich analytisch verhält, so gilt diese Darstellung für alle z -Werte, die auf der gleichen Seite von L'' wie $z = 0$ liegen. Andererseits lehrt unsere Herleitung, daß der Integrationsweg nur an die Bedingung geknüpft ist, daß er aus einem Kreisbogen um $z = 0$ besteht zusammen mit zwei nach Null zielenden Geraden, welche ganz dem Äußeren des Winkelraumes

$$|\arg z| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

angehören. So folgt, daß die Integraldarstellung für alle z zu brauchen ist. Man muß nur den Radius des Kreisbogens so groß wählen, daß der gewünschte Punkt z auf die vorgeschriebene Seite desselben zu liegen kommt.

Ich zeige nun zunächst, daß $E_a(z)$ in jedem Winkelraum, der weder einen inneren noch einen von $z = 0$ verschiedenen Randpunkt mit $|\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$ gemeinsam hat, gleichmäßig gegen Null strebt. Zu dem Zwecke schreibe ich

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z(t-z)}$$

und habe somit

$$E_a(z) = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int e^{t^{\frac{1}{\alpha}}} dt + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int e^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{t}{t-z} dt.$$

Der erste Summand ist nach unserer Herleitung

$$= \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Den zweiten werden wir jetzt abschätzen. Er ist kleiner als

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{|z|} \frac{1}{2\pi} \int \left| e^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right| \frac{|t|}{|z|} \left| \frac{t}{t-z} \right| |dt|.$$

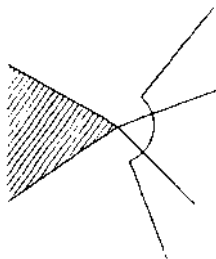


Fig. 44.

Wenn nun aber z auf den in der Fig. 44 schraffierten Winkelraum und t auf den Integrationsweg der Fig. 44 beschränkt ist, so kann sich

$$\frac{t}{z}$$

nicht beliebig der Eins nähern. Auf den geradlinigen Strecken des Integrationsweges sei

$$\arg t = \pm \varphi,$$

so daß auf denselben $\left| e^{\frac{1}{\alpha}} \right| = e^{\frac{1}{\alpha} \cos \frac{\varphi}{\alpha}}$

ist. Da $\cos \frac{\varphi}{\alpha} < 0$ ist, so konvergiert das Integral, und wir haben eine Abschätzung der folgenden Form

$$\left| E_{\alpha}(z) + \frac{1}{z} \frac{1}{1(-\alpha)} \right| < \frac{M}{|z|^{\frac{1}{\alpha}}},$$

wobei M eine passende positive Zahl ist.

Der Vollständigkeit halber wollen wir $E_{\alpha}(z)$ noch im Winkelraum

$$|\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$$

untersuchen. In jedem inneren Teilwinkelraum desselben wächst $E_{\alpha}(z)$ gleichmäßig über alle Grenzen. Wir ziehen, um dies zu erkennen, zunächst einen zweiten Integrationsweg L'' heran, so daß z rechts von L'' liegt (Fig. 45). Diesen Weg können wir dann beim Grenzübergang zu großen z festhalten. Dann wird

$$E_{\alpha}(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{L'-L''} = + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} + \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Genau wie eben kann man nun für alle genügend großen z -Werte des Winkelraumes $|\arg z| \leq \frac{\alpha\pi}{2}$ das noch stehende Integral abschätzen. So findet man in diesem Winkelraum

$$\left| E_{\alpha}(z) - \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}} \right| < \frac{M}{|z|},$$

so daß also in seinem Innern $E_{\alpha}(z)$ über alle Grenzen wächst, während an seinem Rande $E_{\alpha}(z)$ beschränkt bleibt.

Diese letzte Bemerkung lehrt zugleich, daß die im Satze von Phragmén S. 270 angegebenen Schranken nicht verkleinert werden können. Denn wir haben hier in einem Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ eine an seinem Rande beschränkte Funktion der Ordnung $\frac{1}{\alpha}$, welche in seinem Innern nicht beschränkt ist. Gleichzeitig haben wir hier Beispiele von Funktionen aller Ordnungen über $\frac{1}{2}$, die längs gewisser gerader Linien einem endlichen Grenzwert zustreben. So kann also der Satz von Wiman nicht auf Funktionen der Ordnung $\geq \frac{1}{2}$ ausgedehnt werden.

7. Funktionen beliebiger Ordnung Die Betrachtungen über Funktionen einer Ordnung unter $\frac{1}{2}$ erlauben es nun, auch bei Funktionen beliebiger Ord-

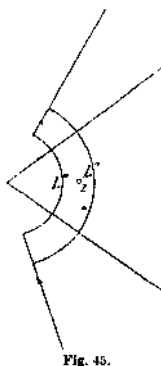


Fig. 45.

nung noch einen Schritt weiter zu kommen. Wir wissen zwar schon, daß es nicht immer eine Folge geschlossener Kreisperipherien geben kann, deren Radien ins Unendliche wachsen und auf welchen die Funktionswerte gleichmäßig über alle Grenzen wachsen. Wir werden aber jetzt erkennen, daß es bei jeder Ordnung eine Folge von Kreisbogen gibt, deren Radien über alle Grenzen wachsen, und auf welchen die Funktionswerte gleichmäßig ins Unendliche streben. Wir werden finden, daß es eine solche Folge von Kreisen gibt, deren Radien gegen Unendlich konvergieren und auf jedem eine Menge von Kreisbogen von einer Gesamtwinkelöffnung, die nicht kleiner ist als $\frac{2\pi}{q}$ ist, wo q die kleinste 2φ übersteigende ganze Zahl bedeutet.

Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß der Grenzexponent der Nullstellen von $f(z)$ gerade Q sei. Denn sollte dem nicht so sein, so wende man die nachstehenden Betrachtungen auf $f(z) - \alpha$ an, wo α so gewählt sein möge, daß φ der Grenzexponent der α -Stellen von $f(z)$ ist: Nach S. 251 gibt es solche Stellen. Es mögen also die Nullstellen von $f(z)$ den Grenzexponenten Q haben. Dann bilden wir vermittels der vorhin erwähnten Zahl q die Funktion

$$f(z) \cdot f(\omega z) \cdots f(\omega^{q-1} z).$$

Dabei soll $\omega = e^{\frac{2\pi i}{q}}$ sein, und $f(z)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung φ .

Da diese ganze Funktion sich nicht ändert, wenn man z durch $w \cdot z$ ersetzt, so ist sie eine ganze Funktion von w^q , denn in ihrer Potenzreihenentwicklung kommen dann nur die ganzen Potenzen von w^q vor. Mit $F(w)$ werde diese Funktion bezeichnet. Dann ist $F(w)$ eine Funktion höchstens der Ordnung $\frac{\varphi}{q}$, besitzt also eine Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$. Denn jeder Faktor von $F(w)$ besitzt die Ordnung Q . Also ist

$$|F(w)| = |F(w^q)| < e^{|z|^{\varphi+q}} = e^{|w|^{\frac{\varphi+q}{q}}}$$

Da ferner aus $f(z_0) = 0$ folgt, daß $F(w_0) = 0$ ist, so kann der Grenzexponent der Nullstellen von $F(w)$ nicht kleiner als $\frac{\varphi}{q}$ sein. Daher hat $F(w)$ genau die Ordnung $\frac{\varphi}{q}$. Daher gibt es eine Folge von Kreisen, deren Radien ins Unendliche wachsen, und auf welchen nach dem vorhin Bewiesenen überall

$$|F(w)| > e^{|w|^{\frac{\varphi}{q}}} = e^{|z|^{\varphi}}$$

ist. Daher muß in jedem Punkte eines solchen Kreises mindestens einer der q Faktoren einen Betrag größer als

$$e^{\frac{1}{q} |z|^{\varphi}}$$

besitzen. Ist dies aber in einem Punkte der Fall, so gibt es um diesen Punkt einen Kreisbogen, auf dem diese Abschätzung auch noch gilt. Auf mindestens einen der Faktoren muß daher eine Menge von Kreisbogen entfallen, deren Winkelsumme mindestens $\frac{2\pi}{q}$ ist. Da aber die Werte eines Faktors $f(\varpi^a z)$ stets den Werten des Faktors $f(z)$ in passenden Punkten gleich sind, so entfallen auch auf den Faktor $f(z)$ Kreisbogen dieser Gesamtlänge, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 8. Die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen.

1. Fragestellung. Die Erörterungen, namentlich die Beispiele des vorigen Paragraphen, legen die Frage nach den Grenzwerten nahe, denen eine ganze Funktion auf passenden ins Unendliche ziehenden stetigen Kurven zustreben kann. Daß es bei Funktionen einer Ordnung unter $\frac{1}{2}$ endliche solche asymptotische Werte nicht geben kann, haben wir im vorigen Paragraphen erkannt. Schon bei der Ordnung $\frac{1}{2}$ aber kann es solche asymptotischen Werte geben. Das ist z. B. bei der ganzen Funktion

$$(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}} - 2)^{\frac{1}{z}}$$

der Ordnung $\frac{1}{2}$ der Fall, die auf der negativ reellen Achse gegen Null strebt. Denn wir sahen schon, daß $e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}} - 2$ auf der negativ reellen Achse beschränkt ist. In den E_α -Funktionen ($0 < \alpha < 2$) haben wir weiter zu jeder anderen endlichen Ordnung Beispiele von Funktionen mit endlichen asymptotischen Werten gefunden. Wenn man zu den Funktionen $E_\alpha(z)$ eine Potenz von z addiert, so erhält man, wie ich nicht näher ausführen will, bei jeder Ordnung Beispiele von Funktionen ohne endlichen asymptotischen Wert.

Achtet man nur auf die endlichen asymptotischen Werte, welche längs geraden Linien erreicht werden, die 0 mit ∞ verbinden, so lehrt der Phragmén'sche Satz, daß es deren höchstens $2q$ geben kann. Denn unter einer größeren Zahl von geraden Linien muß es stets zwei geben, deren Winkel kleiner ist als $\frac{\pi}{q}$. Dann ist aber nach dem Satz von Phragmén in dem von beiden gebildeten Winkelraum einschließlich der beiden Schenkel die ganze Funktion beschränkt. Da sie außerdem auf den beiden Schenkeln des Winkels endlichen Grenzwerten zustrebt, so lehrt ein S. 128 bewiesener Satz von Lindelöf, daß sie in diesem Winkelraum einschließlich der Schenkel gleichmäßig einem Grenzwert zustrebt, daß also die Grenzwerte auf den Schenkeln gleich sind. Diese Beobachtung von Denjoy hat den Anstoß gegeben, die Frage zu

untersuchen, ob die Zahl der verschiedenen endlichen asymptotischen Werte durch die Ordnung der Funktion limitiert ist. Tatsächlich läßt sich die Vermutung von Denjoy beweisen, wonach es bei einer ganzen Funktion einer Ordnung ϱ höchstens 2ϱ verschiedene endliche asymptotische Werte geben kann.

Nachdem erst Carleman die Schranke 5ϱ statt 2ϱ gewonnen hatte, ist es Ahlfors (Ann. Ac. sc. Fenn. A. 32 und Acta Soc. Sc. Fenn. Nova series A Bd. 1) gelungen, den Satz völlig sicherzustellen. Der Beweis schließt sich, wie wir sehen werden, eng an den vorhin skizzierten Spezialfall an.

2. Die asymptotischen Werte als singuläre Stellen der Umkehrungsfunktion. Bevor wir zur Beweisführung übergehen, wollen wir uns die Bedeutung der asymptotischen Werte für die *Umkehrungsfunktion der ganzen Funktion* vergegenwärtigen. Diese liefern nämlich die singulären Stellen nicht algebraischer Natur der Umkehrungsfunktion.

Man erhält die Funktionselemente der Umkehrungsfunktion durch Umkehrung der Elemente der ganzen Funktion. Das liefert reguläre Elemente, wenn bei dem betreffenden Element der ganzen Funktion im Mittelpunkt die Ableitung nicht verschwindet. Und es liefert Elemente algebraischer Natur, wenn die Ableitung verschwindet. Alle so durch Umkehrung erhältlichen Elemente gehören ein und derselben analytischen Funktion an. Damit ist gemeint, daß man dieselben auseinander durch analytische Fortsetzung gewinnen kann. Dies folgt daraus, daß einem Weg der z -Ebene, der die Mittelpunkte der entsprechenden Elemente der ganzen Funktion $w=f(z)$ verbindet, in der w -Ebene ein Weg entspricht, längs dem die Umkehrungen der betreffenden Elemente durch analytische Fortsetzung ineinander übergeführt werden können. Andererseits liefert auch jedes reguläre oder algebraische Element der Umkehrungsfunktion durch Umkehrung ein Element regulären oder algebraischen Charakters der ganzen Funktion. Nehmen wir also $f(z)$ als ganz und transzendent an, so kommen nur reguläre Elemente vor, deren Umkehrung ein Element algebraischen Charakters liefern kann. Daraus folgt, daß durch die Umkehrungen der Elemente der ganzen Funktion die regulären und algebraischen Elemente der Umkehrungsfunktion erschöpft sind.

Nehmen wir nun an, es kämen bei der Umkehrungsfunktion nicht-algebraische singuläre Stellen vor. Dann betrachten wir eine singuläre Kette (siehe Bd. I S. 217), die zu einer solchen singulären Stelle hinführt. Dieser Kette entspricht in der z -Ebene eine Kette von Funktionselementen der ganzen Funktion, die längs eines gewissen Weges L aufgereiht sind. Ich behaupte, daß dieser Weg gegen Unendlich konvergiert, wenn man sich in der singulären Kette der Koordinate des singulären Punktes nähert, so daß

also die ganze Funktion längs des Weges L einen asymptotischen Wert besitzt, der der w -Koordinate der singulären Stelle gleich ist. Um das einzusehen, denken wir uns die stetige Kurve, längs der die Elemente der singulären Kette aufgereiht sind, auf einen Parameter t bezogen: $w = w(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, sei die Gleichung der Kurve. $z = z(t)$ sei der entsprechende Weg der z -Ebene. Um zu beweisen, daß $\lim z(t) =$ ist, muß ich zeigen, daß von einem

gewissen Parameterwert an die Punkte des Weges $z(t)$ außerhalb eines beliebig gegebenen Kreises der z -Ebene liegen. Wäre das nicht so, so gehörten zu t -Werten aus beliebiger Nähe von t_1 Punkte des Weges $z(t)$ aus dem Innern eines gewissen endlichen Kreises der z -Ebene. Wir greifen eine Teilfolge derselben heraus, die gegen einen Punkt z_0 dieses Kreises konvergieren. Die entsprechenden Elemente der singulären Kette gingen dann aus den zugehörigen Elementen der ganzen Funktion durch Umkehrung hervor. Man könnte sie also von einem gewissen an alle durch unmittelbare Fortsetzung desjenigen Elementes algebraischen Charakters bekommen, das man durch Umkehrung aus dem zu z_0 gehörigen Element der ganzen Funktion gewinnen kann. Dann aber führt die singuläre Kette zu einer algebraischen singulären Stelle und nicht zu einer nichtalgebraischen Singularität hin. Also sehen wir, daß den nichtalgebraischen Singularitäten asymptotische Werte der ganzen Funktion entsprechen. Umgekehrt entsprechen auch den asymptotischen Werten nichtalgebraische Singularitäten der Umkehrungsfunktion. Denn einem Weg der z -Ebene, der einen endlichen oder unendlichen asymptotischen Wert liefert, entspricht in der W -Ebene ein Weg, der zu einer nichtalgebraischen Singularität hinführt. Denn andernfalls müßte der ihm entsprechende Weg in der z -Ebene ja im Endlichen endigen.

Um nun festsetzen zu können, wann zwei asymptotische Werte gleich heißen sollen und wann verschieden, definieren wir, daß sie dann gleich heißen sollen, wenn sie dieselbe singuläre Stelle der Umkehrungsfunktion liefern. Wenn dies aber nicht der Fall ist, so sollen sie verschieden heißen. Denselben singulären Punkt liefern zwei singuläre Ketten dann, wenn ihre Enden eine gemeinsame Umgebung besitzen, d. h. dann, wenn man in einem beliebig kleinen Kreis um ihren gemeinsamen Endpunkt ein Element der einen singulären Kette in ein Element der anderen singulären Kette fortsetzen kann. Für die Wege der z -Ebene besagt das, daß es möglich sein soll, Wege in dieser Ebene anzugeben, die von dem einen asymptotischen Weg zu dem andern führen, und auf dem die ganze Funktion nur Werte annimmt, die dem Inneren eines beliebig kleinen oder dem Äußeren eines beliebig großen Kreises angehören. Wenn also z. B. zwei asymptotische Wege einem Winkelraum angehören, in dem die ganze Funktion gleichmäßig einem Grenzwert zustrebt, so liefern

beide Wege denselben asymptotischen Wert. Wenn ferner zwei asymptotische Wege in jeder Umgebung von Punkte gemein haben, so liefern sie nicht nur numerisch, sondern auch im Sinne unserer Definition denselben asymptotischen Wert. Liefern zwei von 0 nach gehende Wege numerisch gleiche Werte, so sind das im Sinne unserer Definition gleiche asymptotische Werte, wenn in dem von den Wegen begrenzten Gebiet $f(z)$ beschränkt ist.¹⁾ Anderenfalls sind es verschiedene asymptotische Werte.

3. Gedankengang des Ahlfors'schen Beweises. Wenn nun $f(z)$ eine Anzahl n von endlichen verschiedenen²⁾ asymptotischen Werten besitzt, so werden dieselben auf Wegen von 0 nach erreicht, die außerhalb eines gewissen Kreises punktfremd sind. Da man sie im Inneren des Kreises durch Radien ersetzen kann, so darf man annehmen, daß den n asymptotischen Werten n Wege von 0 nach entsprechen, die außer 0 keinen Punkt gemein haben. Ferner darf man jeden dieser Wege als stückweise geradlinig ohne Selbstüberkreuzung und ohne Eckeuhäufung im Endlichen annehmen. Diese n Wege zerlegen die Ebene in n Gebiete, deren jedes von je zweien dieser Wege begrenzt ist und keinen anderen der Wege im Inneren hat. In keinem der Gebiete ist $f(z)$ beschränkt.

Man nenne diese Gebiete der z -Ebene $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ und bilde sie durch Funktionen

$$z = \varphi_r(\xi)$$

auf die Halbebene $\Re(\xi) > 0$ derart ab, daß $\xi = 0$ dem $z = 0$ und $\xi = \infty$ dem $z =$ entspricht. (Die Abbildungsfunktionen sind nach S. 29ff. einschließlich des Randes stetig.) Die Funktionen

$$f_r(\xi) = f(\varphi_r(\xi))$$

haben dann endliche Grenzwerte, wenn ξ längs der positiven oder negativen reellen Achse ins Unendliche strebt. Die Funktionen sind aber in der oberen Halbebene nicht beschränkt. Aus

$$|f_r(\xi)| < e^{|\xi|^{\varphi_r(\infty)}}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und $|\xi| > r(\varepsilon)$ folgt

$$|f_r(\xi)| < e^{|\varphi_r(\infty)|^{\varepsilon}}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und $|\varphi_r(\infty)| > r(\varepsilon)$. Da nun die $\varphi_r(\xi)$ gleichmäßig in ξ gegen Unendlich streben wegen der schon erwähnten Stetigkeit in der abgeschlossenen Halbebene, so gibt es ein $R(\varepsilon)$ so, daß

$$|f_r(\xi)| < e^{|\varphi_r(\infty)|^{\varepsilon}}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und $|\xi| > R(\varepsilon)$.

1) Dies lehrt der vorhin schon benutzte Lindelöf'sche Satz von 8. 128.

2) In unserem oben erklärten Sinne.

Der Fortgang des Beweises beruht nun auf folgendem hernach zu beweisenden Hilfssatz:

Zu jedem $\delta > 0$ existiert für Wenigstens eine der Funktionen $\varphi_i(z)$ eine Folge von Kurven T_i der oberen Halbebene von folgenden Eigenschaften:

1. Die T_i streben für $i \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen Unendlich.
2. Die T_i verbinden je einen Punkt der positiven mit je einem Punkt der negativen reellen Achse.

$$3. \text{ Auf den } T_i \text{ gilt} \quad |\varphi_i(z)| < |z|^{\frac{1}{n} + \delta}.$$

Daraus folgt, daß auf den T_i von einer gewissen Nummer an

$$|f_i(z)| < e^{|\zeta|^{(\frac{1}{n} + \delta)(q + \epsilon)}}$$

ist. Wäre nun $n > 2q$, so könnte man d und s so klein wählen, daß der Exponent kleiner als 1 würde. Daraus folgt aber nach S. 130 die Beschränktheit von $f_i(z)$ in der oberen Halbebene, also ein Widerspruch gegen die Voraussetzungen.

4. Ein Satz über konforme Abbildung. Der Beweis des Hilfssatzes beruht auf einem Satz über konforme Abbildung. In einer $s = \sigma + it$ -Ebene sei ein Bereich B gegeben; er sei nach Art eines Streifens von zwei stückweise analytischen Kurven begrenzt, deren Eckpunkte sich im Endlichen nicht häufen. Der Zusammenhang mit dem früheren ergibt sich daraus, daß durch $s = \log z$ jedes Ω_n auf einen solchen Bereich B abgebildet werden kann. Auf jeder Parallelen $s = \sigma$ zur t -Achse liegen endlich viele Querschnitte des Gebietes B . Denjenigen derselben, der durch alle anderen von $\sigma = +\infty$ getrennt wird, bezeichnen wir mit Q_n . Seine Länge sei $L(\sigma)$. Dies $L(\sigma)$ ist bis auf isolierte Sprünge stetig. B werde nun durch $Z(s) = \xi(s) + i H(s)$ auf $0 < H < 1$ konform abgebildet, derart daß $\sigma = -\infty$ in $\xi = -\infty$ und $\sigma = +\infty$ in $\xi = +\infty$ übergehe. Aus Q_n wird dabei eine Kurve q_n , die $H = 0$ mit $H = 1$ verbindet. Die kleinste Abszisse, die bei Punkten von q_n vorkommt, heiße ξ_n . Dann gilt folgender Satz:

Es existiert ein σ_0 , so daß für alle $\sigma_1 > \sigma_0$

$$(76) \quad \xi_n > \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L(\sigma)}.$$

Für $\sigma \rightarrow \infty$ gilt $\xi_n \rightarrow \infty$; also gibt es ein σ_0 , so daß $\xi_n > 2$. Für dies σ_0 gilt (76), wie sich zeigen wird. $\omega(\sigma)$ sei die Schwankung von $\xi(s)$ q_n $l(\sigma)$ sei die Länge von q_n . Dann ist l_n mindestens gleich der Länge der Diagonalen eines Rechtecks der Grundlinie $\omega(\sigma)$ und der Höhe 1. Also ist

$$1 + \omega(\sigma)^2 \leq l_n^2.$$

Ferner ist

$$I_n = \int_{q_n} |Z'(s)| \left| \frac{ds}{dt} \right| dt \leq \int_{q_n} |Z'(s)| dt.$$

Nun ist nach der Schwarzschen Ungleichung¹⁾

$$\left(\int_{q_n} |Z'(s)| dy \right)^2 \leq \int_{q_n} |Z'(s)|^2 dy \cdot \int_{q_n} dy.$$

Also folgt

$$1 + \omega^2 \leq L(\sigma) \int_{q_n} |Z'(s)|^2 dt.$$

Nun sind $L(\sigma)$ und $\omega(\sigma)$ integrierbar.

$L(\sigma)$ ist ja bis auf isolierte Sprünge stetig und immer $\neq 0$. $\omega(\sigma)$ ist die Differenz von größter und kleinster Abszisse auf q_n . Beide wachsen monoton mit σ . Also folgt

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L(\sigma)} + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega^2 d\sigma \leq \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} d\sigma \int_{q_n} |Z'(s)|^2 dt.$$

Das Integral rechter Hand ist der Inhalt einer Fläche, die ganz im Rechteck

$$\Xi_{\sigma_0} \leq \Xi \leq \Xi_{\sigma_1} + \omega(\sigma_1), \quad 0 < H < 1,$$

d. h. auch ganz im Rechteck

$$2 \leq \Xi \leq \Xi_{\sigma_1} + \omega(\sigma_1), \quad 0 < H < 1$$

liegt. Also folgt

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} + \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \omega^2 d\sigma \leq \Xi_{\sigma_1} + \omega(\sigma_1) - 2$$

Somit wird

$$\Xi \leq \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} + \omega(\sigma_1)$$

Hier ist

$$\Delta(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{L} - \omega(\sigma) + 2.$$

Falls $\Delta(\sigma_1) \geq 1$ ist, so folgt (76) unmittelbar.

$$1) \quad \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

Denn

$$\int_a^b (f + \lambda g)^2 dx \geq 0 \text{ für alle } \lambda.$$

Also

$$\int_a^b f^2 dx + 2\lambda \int_a^b fg dx + \lambda^2 \int_a^b g^2 dx > 0,$$

woraus wegen des bekannten Vorzeichens der Diskriminante dieser in λ quadratischen Funktion die Behauptung folgt.

Ist $A(\sigma_1) < 1$, so folgt (76) auch dann noch, wenn $\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} \leq 1$ ist. Denn es ist ja $\mathfrak{H}_{\sigma_1} > \mathfrak{H}_{\sigma_0} > 2$. Es bleibt also nun (76) zu beweisen, falls

$$1. \quad A(\sigma_1) < 1,$$

$$2. \quad \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} > 1.$$

Dann gibt es jedenfalls ein σ' , so daß

$$\int_{\sigma'}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} = 1.$$

$A(\sigma)$ kann dann nicht im ganzen Inter $\sigma' < \sigma < \sigma_1$ in σ als Eins sein. Aus $A(\sigma) < 1$ folgt nämlich

$$1 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{L} < \omega(\sigma)$$

Setzt man

$$\alpha(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{L},$$

so folgt daraus

$$(1 + \alpha)^2 < L \frac{d\alpha}{d\sigma},$$

$$\int_{\sigma'}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} < \int_{\sigma'}^{\sigma_1} \frac{d\alpha}{(1 + \alpha)^2}.$$

Wegen $\alpha \geq 0$ wäre also

$$\int_{\sigma'}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} < \frac{1}{1 + \alpha(\sigma')} = \frac{1}{1 + \alpha(\sigma_1)} < 1$$

im Widerspruch mit

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} > 1.$$

Also gibt es in $\sigma' < \sigma < \sigma_1$ eine Stelle Σ , so daß

$$A(\Sigma) \geq 1$$

ist. Also

$$\mathfrak{H}_{\Sigma} > \int_{\sigma_0}^{\Sigma} \frac{d\sigma}{L} + A(\Sigma) \geq \int_{\sigma_0}^{\Sigma} \frac{d\sigma}{L} + 1.$$

Da $\sigma_1 \geq \Sigma$, so folgt

$$\mathfrak{H}_{\sigma_1} \geq \mathfrak{H}_{\Sigma} = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L} + \left(1 - \int_{\Sigma}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{L}\right).$$

Ferner ist

$$\int_{\gamma} \frac{d\sigma}{L} \leq \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{L} = 1.$$

Also doch

$$\mathfrak{L}_{a_1} > \int_{a_n}^{a_1} \frac{d\sigma}{L}.$$

Den so bewiesenen Satz über konforme Abbildung verwenden wir nun zum Beweis des S. 281 aufgestellten Hilfssatzes.

5. Beweis des Hilfssatzes. Wir bildeten die Gebiete $\mathfrak{Q}_v$ durch $s = \varphi_v(\zeta)$ auf $\Re(\zeta) > 0$ ab. Setzt man weiter

$$\zeta = e^{\pi Z}$$

und $s = \log Z$, so wird durch einen passenden Zweig von

$$s = \log \varphi_v(e^{\pi Z})$$

der Streifen $0 < H < 1$ auf ein Gebiet B_v abgebildet, wie es bei unserm Satz über konforme Abbildung vorkam. Zu jedem gehört ein $L_v(\sigma)$, das jetzt $L_v(\sigma)$ heiße. Es ist dann

$$\sum_{v=1}^n L_v(\sigma) \leq 2\pi,$$

weil nämlich die Querschnitte $Q_a^{(r)}$ deren Längen die $L_v(\sigma)$ sind, durch

$$s = \log z,$$

aus Bogen eines Kreises hervorgehen. σ_0 sei jetzt die größte der Zahlen $\sigma_0^{(v)}$. Dann ist

$$\mathfrak{L}_{a_1}^{(v)} > \int_{a_n}^{a_1} \frac{d\sigma}{L_v(\sigma)}$$

für alle v . Also

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \mathfrak{L}_{a_1}^{(v)} \geq \int_{a_n}^{a_1} \frac{1}{n} \sum \frac{1}{L_v(\sigma)} d\sigma.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_1^n \frac{1}{L_v} \cdot \sum_1^n L_v &= \sum_1^n \frac{L_v}{L_v} + \sum_{v \neq \mu} \frac{L_v}{L_\mu} = n + \sum_{v > \mu} \left(\frac{L_v}{L_\mu} + \frac{L_\mu}{L_v} \right) \\ &\geq n + (n^2 - n) = n^2. \end{aligned}$$

Also

$$\sum_1^n \frac{1}{L_v} \geq \frac{n^2}{\sum_1^n L_v} \geq \frac{n^2}{2\pi}.$$

Also wird

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \mathfrak{L}_{a_1}^{(v)} > \frac{n}{2\pi} (\sigma_1 - \sigma_0).$$

Also ist für mindestens ein v

$$\Sigma_{\sigma_1}^{(v)} > \frac{\pi}{2} (\sigma_1 - \sigma_0),$$

d. h.

$$\sigma_1 < \sigma_0 + \frac{2\pi \Sigma_{\sigma_1}^{(v)}}{\pi}.$$

Läßt man nun σ_1 irgendeine ins Unendliche wachsende Wertfolge

$$\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \dots, \sigma_1^{(x)}$$

durchlaufen, so gilt

$$\sigma_1^{(x)} < \sigma_0 + \frac{2\pi \Sigma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}}{\pi}$$

für dasselbe v gleichzeitig für unendlich viele x . In der ξ -Halbebene bedeutet nun $e^{\pi \Sigma_{\sigma_1}^{(v)}}$ den Abstand vom Nullpunkt der Kurve $\Gamma_{\sigma_1}^{(v)}$, die der Kurve $q_{\sigma}^{(v)}$ im Streifen entspricht. Nimmt man nun die Kurve $\Gamma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}$, so gilt für sie unser Hilfssatz.

Diese Kurven verbinden ja die positive mit der negativen reellen Achse und konvergieren für $x \rightarrow \infty$. Ferner ist in jedem Punkt von

$$\Gamma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}$$

$$|\varphi_v(\xi)| = e^{\pi \Sigma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}}.$$

Also
$$|\varphi_v(\xi)| < e^{\sigma_0 \pi} \cdot e^{\frac{2\pi}{\pi} \Sigma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}} = e^{\pi \Sigma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}} = e^{\pi \Sigma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}} = e^{\pi \Sigma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}}.$$

Für jedes $\delta > 0$ gilt daher auf dem $\Gamma_{\sigma_1^{(x)}}^{(v)}$ für genügend großes x

$$|\varphi_v(\xi)| < |\xi|^{\frac{2}{\pi} + \delta},$$

womit auch der Hilfssatz bewiesen ist.

6. Unendlich als asymptotischer Wert. Ich stelle zunächst fest, daß *Unendlich bei jeder ganzen Funktion asymptotischer Wert ist*, daß also im Unendlichen stets nichtalgebraische singuläre Stellen der Umkehrfunktion liegen.

Dies ergibt sich daraus, daß die ganze Funktion jedenfalls außerhalb eines jeden Kreises beliebig große Werte annehmen kann. Ich betrachte nun irgendeine Stelle z_1 , wo $|f(z_1)| > 1$ sein möge. Diese Stelle gehört einem gewissen Bereich G_1 der z -Ebene an, in dem durchweg $|f(z)| > 1$ ist und an dessen Rande, soweit er im Endlichen liegt, $|f(z)| = 1$ ist. Dieser Bereich G_1 kann nicht beschränkt sein. Denn sonst wäre im Innern und an seinem Rande $f(z)$ regulär und nähme doch im Innern einen größeren Wert als am Rande an. $f(z)$ kann aber auch in dem Gebiete G_1 nicht beschränkt sein. Denn wäre das der Fall, so wähle man irgendeine Stelle a , die dem Gebiete oder seinem Rande nicht angehört, und bestimme eine

Zahl k so, daß am Rande des G $e |k(z - a)| > 1$ ist. Dann betrachte man die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{|k(z - a)|^u}.$$

σ soll dabei irgendeine positive Zahl sein. Sie ist im Gebiete regulär und in den Punkten des Gebietes, die außerhalb eines hinreichend großen Kreises liegen, ist der Betrag der Funktion beliebig klein. An den innerhalb dieses Kreises gelegenen Randpunkten ist $|\varphi(z)| < 1$, weil ja $|f(z)| = 1$ am Rand von G_1 . Daher ist im ganzen Gebiete

$$|\varphi(z)| < 1.$$

Daher ist im ganzen Gebiete

$$|f(z)| < |k(z - a)|^u.$$

Da dies für jedes $\sigma > 0$ gilt, so ergibt sich durch Grenzübergang, daß auch im Gebiete G

$$|f(z)| \leq 1$$

ist. Das widerspricht der Definition des Gebietes G , das eine Stelle enthalten sollte, wo $|f(z)| > 1$ ist. (Vgl. zu dieser Überlegung auch S. 270.)

Jedenfalls können wir nun im Gebiete S_1 eine Stelle z_2 finden, für die $|f(z_2)| > 2$ ist. Wir betrachten denjenigen sie enthaltenden Teilbereich G_2 des Gebietes G_1 in dem $|f(z)| > 2$ ist und an dessen Rande im Endlichen $|f(z)| = 2$ ist. Wieder lehrt die gleiche Überlegung wie eben oder auch der Phragmén-Lindelöfsche Satz von S. 128, daß auch darin $f(z)$ nicht beschränkt ist. Wir haben also eine Stelle z_3 zur Verfügung, in der $|f(z_3)| > 3$ ist, und wir konstruieren um sie einen Teilbereich G_3 von G_2 , in dem $|f(z)| > 3$ ist. So fortfahrend konstruiert man eine Folge ineinanderliegender Gebiete G_n so, daß in G_n $|f(z)| > n$ ist. Nun wähle man in G_n einen Punkt z_n . Diese Punktfolge z_n konvergiert gegen Unendlich, weil $|f(z_n)| > n$ ist. Man konstruiere eine stetige Kurve, die alle Punkte verbindet und die zwischen z_n und z_{n+1} ganz in G_n verläuft. Dann konvergiert längs derselben $f(z)$ gegen Unendlich. Unendlich ist also stets asymptotischer Wert, und im Unendlichen liegt stets mindestens eine nichtalgebraische Singularität der Umkehrungsfunktion.

Im Falle einer ganzen Funktion einer Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ lehnen die Betrachtungen, welche im vorigen Paragraphen angestellt wurden, daß hier im Endlichen keine nichtalgebraische Singularität der Umkehrungsfunktion liegen kann. Denn die unendlich vielen Kreise, auf denen das Minimum der Funktion über alle Grenzen wächst, verhindern das Vorkommen endlicher asymptotischer Werte. Der gleiche Umstand bringt es auch mit sich, daß die Umkehrungsfunktion einer ganzen Funktion einer Ordnung unter $\frac{1}{2}$ im Unendlichen nur eine Singularität besitzt. Denn man kann Bogen

derjenigen Kreise, auf welchen die ganze Funktion über alle Grenzen wächst, verwenden, um zwei beliebige Wege, auf denen die ganze Funktion den asymptotischen Wert unendlich hat, miteinander zu verbinden. Die Riemannschen Flächen der Umkehrfunktionen ganzer Funktionen einer Ordnung kleiner als $\frac{1}{2}$ besitzen also einen einzigen, im Unendlichen gelegenen, nichtalgebraischen Verzweigungspunkt, während außerdem nur algebraische, im Endlichen gelegene Verzweigungspunkte vorhanden sind.

7. Abschätzung der Anzahl der unendlichen asymptotischen Werte. Ich wende mich nun dazu, eine Abschätzung für die Anzahl der verschiedenen unendlichen asymptotischen Werte zu gewinnen. Dies folgt aus dem im Falle der endlichen Werte gewonnenen Ergebnis auf Grund einer schon mehrfach verwendeten Überlegung. Betrachten wir nämlich zwei Wege, auf welchen $f(z)$ verschiedenen asymptotischen Werten unendlich zustrebt. Danu darf es nicht möglich sein, diese beiden Wege so miteinander zu verbinden, daß auf denselben $f(z)$ nur Werte oberhalb eines beliebig vorgeschriebenen Betrages besitzt. Daher müssen die beiden Wege durch ein Kontinuum voneinander getrennt sein, in welchem $f(z)$ nur Werte besitzt, deren absoluter Betrag unterhalb einer gewissen endlichen Schranke liegt. Dieses Kontinuum besitzt den Charakter eines Bereiches und daher gibt es in demselben einen nach unendlich ziehenden Weg, auf welchem $f(z)$ beschränkt bleibt.¹⁾ Hat man nun $n > 1$ Wege, welche voneinander verschiedene asymptotische Werte unendlich liefern, so bekommt man durch die eben angestellte Überlegung n weitere Wege, auf welchen $f(z)$ beschränkt ist. Nun bezeichne man mit p eine beliebige positive ganze Zahl und betrachte die ganze Funktion α -ten Ordnung

$$\varphi_p(z) = \frac{(f(z) - f(0))^p}{z},$$

diese strebt auf den n Wegen, auf welchen $f(z)$ beschränkt ist, gegen Null. Auf n verschiedenen Wegen hat also $\varphi_p(z)$ den asymptotischen Wert Null. Nehmen wir nun an, es wäre $n \geq 5p$, dann müssen mindestens zwei dieser Wege für unendlich viele p denselben asymptotischen Wert Null von $\varphi_p(z)$ liefern. Man kann daher diese beiden Wege durch Kurven verbinden, auf welchen $|\varphi_p(z)|$ beliebig klein ist. Daher muß in dem einen, von diesen beiden Wegen bestimmten Bereich $|\varphi_p(z)|$ beschränkt sein. Da es aber am Rande desselben nach Null strebt, so strebt es in diesem Bereich einschließlich seines Randes gleichmäßig gegen Null.

In diesem Bereiche ist also für genügend große z , wie auch die ganze positive Zahl p gewählt sein mag,

1) Ich habe diesen Teil des Schlusses in einer Arbeit in der Math. Ztschr. Bd. 22 mit aller Ausführlichkeit begründet.

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{z^p} \right| < \varepsilon,$$

wo $\varepsilon > 0$ eine beliebig gegebene Zahl ist. In den endlichen Randpunkten dieses Bereiches ist $f(z) - f(0)$ beschränkt. Daraus folgt aber nach dem S. 128 bewiesenen Satze von Lindelöf, daß $f(z) - f(0)$ in diesem Bereiche beschränkt ist. Andererseits muß ihm aber eine Kurve angehören, auf der $f(z) - f(0)$ den asymptotischen Wert unendlich hat. Die Annahme $n \geq 2p$ hat uns also zu einem Widerspruch geführt. Es kann somit auch nicht $2p$ oder mehr verschiedene asymptotische Werte unendlich geben.

Mit anderen Worten, wir haben bewiesen, daß die Umkehrfunktion einer ganzen Funktion der Ordnung p stets mindestens eine nichtalgebraische im Unendlichen gelegene Singularität hat. Mehr als eine kann es nur sein, wenn $2p > 1$ ist. Dann ist aber die Zahl der unendlichen nichtalgebraischen singulären Stellen kleiner als $2p$ und die Zahl der im Endlichen gelegenen nichtalgebraischen ist ebenfalls kleiner als $2p$.

8. Beispiele. Die gefundene Schranke $2p$ für die Anzahl der endlichen asymptotischen Werte kann nicht verbessert werden. Denn für ganzes p hat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(z^p)}{z^p} dz$$

die Ordnung p und strebt auf den Geraden

$$\arg z = v \frac{\pi}{p} \quad (v = 0, \dots, 2p - 1)$$

gegen

$$e^{iv \frac{\pi}{p}} \int_0^{\infty} \frac{\sin(z^p)}{z^p} dz.$$

9. Bemerkung. Diese Ausführungen gewinnen ein besonderes Interesse, wenn man bedenkt, daß es ganze Funktionen (unendlicher Ordnung) gibt, für die jeder beliebige Wert asymptotischer Wert ist, deren Umkehrfunktion also über jeder Stelle eine nichtalgebraische singuläre Stelle besitzt. W. Groß hat Math. Annalen 79 ein Beispiel einer solchen ganzen Funktion angegeben. Zum Schluß dieses Kapitels sei noch auf die inhaltreiche und anregende Arbeit von A. Speiser, Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen verwiesen (Comm. math. Helv. Bd. 1).

Siebenter Abschnitt. Analytische Fortsetzung.

Im ersten Bande dieses Lehrbuches findet sich ein Kapitel mit der gleichen Überschrift. Dort haben wir im wesentlichen die Begriffe der analytischen Fortsetzung, der analytischen Funktion und der singulären Stelle festgestellt und einige allgemeine Sätze wie Monodromiesatz und Spiegelungsprinzip erörtert. Es ergab sich dort als ein grundlegender Umstand der, daß eine analytische Funktion durch jedes ihrer Funktionselemente, d. h. durch die Koeffizienten einer jeden Potenzreihe, die in einem gewissen Kreise die Funktion darstellt, vollständig bestimmt ist. In diesem neuen Kapitel soll es nun unsere Aufgabe sein, Sätze aufzustellen, die einen näheren Zusammenhang zwischen Eigenschaften der Koeffizienten und Eigenschaften der Funktion zum Ausdruck bringen.

Ich bringe zunächst eine Gruppe von Sätzen, die an die bekannte Tatsache anknüpfen, daß auf jedem Konvergenzkreis mindestens eine singuläre Stelle liegt. Die Sätze dieser ersten Gruppe werden aus gewissen Eigenschaften der Koeffizienten einen näheren Schluß auf die Lage der singulären Stellen am Konvergenzkreis zulassen.

§ 1. Der Satz von Pringsheim.

Wenn man sich seine Naivität durch Nachdenken noch nicht hat verderben lassen, so könnte man vermuten, daß eine Potenzreihe $\sum c_n z^n$ mit *reellen* Koeffizienten und endlichem, von Null verschiedenen Konvergenzkreis $|z| < r$ am Rande mindestens eine *reelle* singuläre Stelle besitzen müsse. Aber schon das Beispiel der Funktion

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum (-1)^n z^{2n}$$

lehrt, daß diese Vermutung irrig ist. Verfolgt man aber den Gedanken weiter, so kommt man zu dem Satze, daß die Vermutung für Potenzreihen, deren Koeffizienten *einerlei Vorzeichen* besitzen, richtig ist. Eine Verallgemeinerung davon ist die folgende Verallgemeinerung eines zuerst von Pringsheim bewiesenen Satzes:

Trägt man die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$(1) \quad \mathfrak{P}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

in einer komplexen Zahlenebene auf, und gehören sie dann alle bis auf endlich viele einem Winkelraum an, dessen Öffnung $< \pi$ ist, und der die positive
Bleiberbach, Funktionentheorie II. 2. Aufl. 19

tive reelle Achse enthält und zu ihr symmetrisch ist, besitzt weiter die Potenzreihe einen endlichen Konvergenzkreis $|z| < r$ mit von Null verschiedenem Radius, so ist $z = r$ ein singulärer Punkt der durch die Potenzreihe dargestellten Funktion, und zwar kann man das durch die Potenzreihe gelieferte Funktionselement nicht längs seines von $z = 0$ nach $z = r$ ziehenden Radius über $z = r$ hinaus fortsetzen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man $r = 1$ annehmen. Denn dies kann man durch die Substitution $z' = rz$ erreichen. Dabei wird jeder reguläre Punkt in einen regulären übergeführt.

Es sei also
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1.$$

Nehmen wir an, $z = 1$ sei bei radialer Fortsetzung von $z = 0$ aus regulär, dann muß die Potenzreihe

$$(2) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\nu!} \left(z - \frac{1}{2} \right)^{\nu}$$

einen Konvergenzradius $> \frac{1}{2}$ besitzen. Es muß also ein $\varepsilon > 0$ geben, so daß die Reihe (2) für $z = 1 + \varepsilon$ noch absolut konvergiert. D. h. es muß

$$(3) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\nu!} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)^{\nu}$$

absolut konvergieren. Nun ist aber

$$(4) \quad \mathfrak{P}^{(\nu)} \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{n \geq \nu} n! \binom{n}{\nu} c_n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-\nu}.$$

Setzt man dies in (3) ein, so erhält man eine Doppelreihe. Diese ist aber absolut konvergent, wie jetzt gezeigt werden soll. Zunächst nämlich konvergiert die Summe der Realteile (absolut). Nun ist aber

$$(5) \quad \Re c_n = |c_n| \cos \varphi_n \geq |c_n| \delta,$$

wo $\delta > 0$ ist. Denn nach Voraussetzung¹⁾ gehören alle Koeffizienten einem zur positiven reellen Achse symmetrischen Winkelraum einer Öffnung kleiner

an. Dieser Winkelraum wird von zwei Geraden der Halbebene rechts

1) Im Wortlaut des Satzes haben wir nur verlangt, daß alle Koeffizienten bis auf endlich viele diesem Winkelraum angehören. Diesen Fall führt man auf den eben allein berücksichtigten dadurch zurück, daß man endlich viele Anfangsglieder beiseite läßt und nur den Rest der Potenzreihe betrachtet. Er hat auf dem Konvergenzkreis die gleichen Singularitäten wie die ganze Potenzreihe, da er sich ja von ihr nur um eine ganze rationale Funktion unterscheidet, die an der Peripherie regulär ist.

von der imaginären Achse begrenzt. Diese bilden mit der positiven reellen Achse Winkel, deren Kosinus den Wert δ haben möge. Dann ist für die Argumente φ_n aller Koeffizienten c_n

$$\cos \varphi_n \geq \delta.$$

Die Abschätzung (5) lehrt, daß aus der Konvergenz der Realteile der Glieder der Doppelreihe auch die Konvergenz der absoluten Beträge ihrer Glieder folgt. Daher kann man diese Doppelreihe beliebig umordnen, namentlich also die Reihenfolge der Summationen vertauschen. Dadurch geht aber die Doppelreihe in die folgende über:

$$(6) \quad \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^v \binom{n}{v} c_n \frac{1}{2^{n-v}} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)^v \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^v \binom{n}{v} c_n \frac{1}{2^n} (1 + 2\varepsilon)^v \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (1 + 2\varepsilon)^v \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^n} (1 + 2\varepsilon)^n$ zum $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 + \varepsilon)^n$ daß die gegebene Potenzreihe (1) außerhalb ihres Konvergenzkreises, der ja der Einheitskreis sein sollte, noch im Punkte $z = 1 + \varepsilon$ (absolut) konvergiert. Diese Unmöglichkeit führt zum Schluß, daß der Satz richtig ist.

Zusatz: Gehören die Koeffizienten einem beliebigen Winkelraum von einer Öffnung kleiner als π an, und ist etwa φ das Argument seiner Symmetrielinie, so ist $z = 1$ nach wie vor ein singulärer Punkt. Denn durch die Transformation $\mathfrak{P}_1(z) = e^{-i\varphi} \cdot \mathfrak{P}(z)$ kommt man zu dem eben behandelten Fall zurück.

§ 2. Der Hadamardsche Lückensatz.

1. Fragestellung. Bereits in Bd. I S. 219 haben wir ein von Weierstraß herrührendes Beispiel einer Potenzreihe kennengelernt, die nicht über ihren Konvergenzkreis hinaus fortgesetzt werden konnte. Es war dies die Potenzreihe

$$\sum a^n z^{b^n}.$$

Hier war a eine positive, $b > 1$ eine positive ganze Zahl. In dieser Potenzreihe fehlen offenbar zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern mit

von Null verschiedenen Koeffizienten eine ganze Reihe von Gliedern. Es sind zwischen je zwei vorhandenen Gliedern Lücken vorhanden. Die Länge einer Lücke wird durch die Exponentendifferenz der die Lücke begrenzenden Glieder gemessen. Diese Differenz ist

$$(8) \quad b^{n+1} - b^n = b^n(b-1) = b^n \vartheta, \quad \vartheta > 0.$$

Man hat es also hier mit einer Potenzreihe

$$\sum c_n z^{i_n}$$

von der Art zu tun, daß es eine Zahl $\vartheta > 0$ (im Beispiel $i \vartheta = b - 1$) gibt derart, daß für alle n

$$i_{n+1} - i_n \geq i_n \vartheta$$

ist. Hadamard hat einen allgemeinen Satz über Potenzreihen dieser Art entdeckt. Das ist der *Hadamard'sche Lückensatz*, den wir so formulieren:

Wenn für die Potenzreihe

$$\sum c_n z^{i_n}$$

$i_{n+1} - i_n > i_n \vartheta$ ($\vartheta > 0$, von n unabhängig) erfüllt ist, so ist diese Reihe über ihren Konvergenzkreis nicht fortsetzbar.

Ich werde für diesen Satz einen von Ostrowski herrührenden Beweis angeben. Ostrowski hat den Hadamard'schen Lückensatz als Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Satzes aufgefaßt und hat damit, wie man wohl sagen kann, erst seinen inneren Grund wirklich aufgedeckt. Ostrowski betrachtet nämlich beliebige Potenzreihen, bei welchen Lücken vorkommen. Er setzt also nicht mehr wie Hadamard voraus, daß zwischen je zwei vorhandenen Gliedern Lücken der angegebenen Länge sind, sondern er fordert nur, daß überhaupt Lücken vorkommen, die der Hadamard'schen Bedingung genügen. Er betrachtet dann diejenigen Abschnitte (Teilsummen) der Potenzreihe, die unmittelbar vor einer solchen Lücke aufhören und beweist, daß die Folge dieser Abschnitte in einer gewissen Umgebung eines jeden regulären Punktes der Peripherie des Konvergenzkreises noch gleichmäßig konvergiert. Man spricht dann von einer *überlconvergenten* Abschnittsfolge. Genau ausgesprochen ist folgendes der Satz von Ostrowski.

In der Potenzreihe

$$(9) \quad f(z) = \sum_0^{\infty} c_{\mu} z^{i_{\mu}},$$

möge es unendlich oft vorkommen, nämlich für $\mu = \mu_k$ ($k = 1, 2, \dots$), daß

$$(10) \quad i_{\mu_k+1} - i_{\mu_k} > \vartheta i_{\mu_k}$$

für ein von n unabhängiges $\vartheta > 0$. Dann setze man

$$(11) \quad A_0 = c_0 + \dots + c_{\mu_1} z^{i_{\mu_1}},$$

$$A_k = c_{\mu_k+1} z^{i_{\mu_k+1}} + c_{\mu_k+2} z^{i_{\mu_k+2}} + \dots + c_{\mu_{k+1}} z^{i_{\mu_{k+1}}}, \quad (k > 0)$$

und betrachte die Reihe

$$(12) \quad \sum t_k.$$

Diese konvergiert „im Inneren“ des Konvergenzkreises von (9) und in der Umgebung einer jeden regulären Stelle der Peripherie des Konvergenzkreises gleichmäßig.

In diesem Ostrowski'schen Satze ist insbesondere der Hadamardsche Lückensatz enthalten: denn im Falle dieses Satzes ist $t_{\mu_k+1} = t_{\mu_{k+1}}$, d. h. es besteht t_k aus genau einem Glied der Potenzreihe und die Reihe (12) ist mit der Potenzreihe (9) identisch. Daher kann es auf der Peripherie des Konvergenzkreises derselben keinen regulären Punkt geben, weil doch die Reihe nicht über ihren Konvergenzkreis hinaus konvergieren kann.

2. Beweis. Ich wende mich zum Beweis des Ostrowski'schen Satzes. Es genügt wieder, anzunehmen, daß $z=1$ die zu untersuchende reguläre Stelle sei. Denn man kann dies durch eine Drehung, die an den Lücken nichts ändert, stets erreichen. Der Beweis beruht auf dem Dreikreisesatz S. 128, der folgender Weise angewendet wird. $|z| < 1$ sei der Konvergenzkreis von (9). Wir legen um $z = \frac{1}{2}$ drei Kreise von den Radien $r_1 < r_2 < r_3$ derart, daß

$$(13) \quad \frac{1}{2} + r_1 < 1 < \frac{1}{2} + r_2 < \frac{1}{2} + r_3$$

ist. Der Dreikreisesatz werde dann auf diese drei Kreise und die Funktio

$$(14) \quad R_n = f(z) - \sum_0^{n-1} A_k$$

angewendet. Es werde also angenommen, daß diese Funktion in einer gewissen Umgebung von $z = 1$ noch regulär sei und es wird r_3 unbeschadet der Ungleichungen (13) so klein angenommen, daß alle drei Kreise dem Regularitätsgebiet von $f(z)$ angehören. Setzt man dann

$$M_k^{(n)} = \max_{|z - \frac{1}{2}| = r_k} |R_n|,$$

so liefert der Dreikreisesatz

$$(15) \quad \log_{r_1}^{r_2} \log M_1^{(n)} \leq \log_{r_2}^{r_3} \log M_1^{(n)} + \log_{r_1}^{r_3} \log M_3^{(n)}.$$

Hier können nun sehr wohl die $M_3^{(n)}$ bei wachsendem n über alle Grenzen wachsen, jedenfalls aber streben die $M^{(n)}$ nach Null, weil nach (13) der Kreis mit dem Radius r_1 dem Konvergenzkreis angehört. Wenn es nun gelingt, die drei Kreise so zu wählen, daß die rechte Seite von (15) bei wachsendem n ins negative unendliche abnimmt, so also, daß der erste Posten rechts den Ausschlag gibt, so folgt, daß auch $M^{(n)}$ nach Null strebt,

daß also im Kreis vom Radius r_2 die Reihe (12) gleichmäßig konvergiert, womit der Satz bewiesen ist. Denn dieser Kreis enthält $z = 1$ im Inneren. Um geeignete Kreise zu finden, führe ich noch eine Hilfszahl r'_1 ein, für die

$$(1\epsilon) \quad \frac{1}{2} + r_1 < \frac{1}{2} + r'_1 < 1 < \frac{1}{2} + r_2 < \frac{1}{2} + r_3$$

sein soll. Den Kreis $|z| \leq \frac{1}{2} + r'_1$ werde ich zur Abschätzung der Koeffizienten c_μ auf Grund des Cauchy'schen Koeffizientensatzes verwenden. Dieser liefert

$$|c_\mu| < \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + r'_1} \right)^\mu S$$

Dabei ist S irgendeine Zahl $\geq \max |f(z)|$ auf $|z| = \frac{1}{2} + r'_1$, hängt also von n nicht ab. Weiter führe ich einen positiven Parameter t ein und setze

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + r_1 &= 1 - t\varrho, & \frac{1}{2} + r'_1 &= 1 - t^2, \\ \frac{1}{2} + r_2 &= 1 + t^2, & \frac{1}{2} + r_3 &= 1 + t\varrho, \end{aligned} \quad 0 < \delta \leq t \leq \varrho.$$

Dabei ist ϱ eine fest gewählte positive Zahl. Über δ wird noch passend verfügt werden. Die eben eingeführte Zahl S hängt nur von δ ab. Man kann $S = \max |f(z)|$ auf $|z| = 1 - \delta^2$ nehmen.

Ich will zeigen, daß für genügend kleine t Kreise gewonnen werden, für die der Dreikreisesatz den eben angedeuteten Schluß zuläßt. Zu dem Zweck muß ich noch $M_1^{(n)}$ und $M_3^{(n)}$ abschätzen. Für $M_1^{(n)}$ kann man die Potenzreihe verwenden, da ja der Kreis vom Radius r_1 dem Konvergenzkreis angehört. Hier findet man

$$\begin{aligned} (17) \quad M_1^{(n)} &\leq \sum_{\mu=\mu_n+1}^{\infty} |c_\mu| |z|^{i\mu} \leq \sum_{\mu=\mu_n+1}^{\infty} |c_\mu| \left(\frac{1}{2} + r_1 \right)^{i\mu} \\ &< \sum_{\mu=\mu_n+1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2} + r_1}{\frac{1}{2} + r'_1} \right)^{i\mu} \cdot S \\ &< \sum_{\lambda=\lambda_{\mu_n+1}}^{\lambda=\infty} \left(\frac{\frac{1}{2} + r_1}{\frac{1}{2} + r'_1} \right)^{\lambda} \cdot S \\ &\leq \left(\frac{\frac{1}{2} + r_1}{\frac{1}{2} + r'_1} \right)^{\lambda_{\mu_n+1}} \cdot S. \end{aligned}$$

Hier hängt wieder S nur von δ ab. Für $M_3^{(n)}$ verende ich die Darstellung (14) von R_n . Ist also M das Maximum von $|f(z)|$ im Kreis vom Radius r_3 , so wird

$$\begin{aligned}
 (18) \quad M_2^{(n)} &< M + \sum_0^{\mu_n} |c_\mu| |z|^{\lambda_\mu} \\
 &< M + \sum_0^{\mu_n} S \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} + r_2}{\frac{1}{2} + r_1'} \right)^{\lambda_\mu} \\
 &< M + \sum_0^{\lambda_{\mu_n}} S \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} + r_2}{\frac{1}{2} + r_1'} \right)^{\lambda} \\
 &< M + \left(\frac{\frac{1}{2} + r_2}{\frac{1}{2} + r_1'} \right)^{\lambda_{\mu_n}} \cdot \frac{S}{1 - \frac{\frac{1}{2} + r_2}{\frac{1}{2} + r_1'}} \\
 &< \left(\frac{\frac{1}{2} + r_2}{\frac{1}{2} + r_1'} \right)^{\lambda_{\mu_n}} \cdot S_3.
 \end{aligned}$$

Hier hängt wieder S_2 nur von δ ab. Trägt man (16), (17), (18) in (15) ein, so erhält man

$$\log_{r_1}^{r_2} \log M_2^{(n)} \leq \log \frac{\frac{1}{2} + t^q}{\frac{1}{2} + t^2} \log \left(\frac{1 - t^q}{1 - t^2} \right)^{\lambda_{\mu_n} + 1} + \log \frac{\frac{1}{2} + t^2}{\frac{1}{2} - t^q} \log \left(\frac{1 + t^q}{1 - t^2} \right)^{\lambda_{\mu_n}} + S_3,$$

wo wieder S_3 nur von δ abhängt. Nach (10) kann man hierfür schreiben

$$\begin{aligned}
 (19) \quad &\log_{r_1}^{r_2} \log M_2^{(n)} \\
 &\leq -\lambda_{\mu_n} \log \frac{\frac{1}{2} + t^q}{\frac{1}{2} + t^2} \log \frac{1 - t^q}{1 - t^2} \left\{ - \frac{\log \frac{\frac{1}{2} + t^q}{\frac{1}{2} + t^2}}{\log \frac{1}{2} + t^2} \cdot \frac{\log \frac{1 + t^q}{1 - t^2}}{\log \frac{1 - t^q}{1 - t^2}} \cdots (1 + \delta) \right\} + S_3.
 \end{aligned}$$

Schon bei dieser Umformung wurde benutzt, daß der Ausdruck vor der geschweiften Klammer positiv ist. Nun beachte man, daß für $t \rightarrow 0$ der erste Posten in der geschweiften Klammer gegen Eins konvergiert. Wählt man also t hinreichend nahe an Null, so ist die geschweifte Klammer negativ. Man halte dies $t = \delta$ fest und wähle n hinreichend groß. So wird erreicht, daß der erste Posten rechts das S_3 überwiegt. Denn λ_{μ_n} wächst über alle Grenzen und S_3 ist von n unabhängig. So haben wir tatsächlich eine Umgebung von $z = 1$ gefunden, in der die Reihe (12) noch gleichmäßig konvergiert.

Bemerkung. Einen weiteren auf anderer Grundlage beruhenden Beweis des Ostrowskischen Satzes hat F. Lösch gefunden (Math. Ztschr. Bd. 31).

3. Überkonvergenz. Daß es nicht fortsetzbare Potenzreihen mit Hadamardschen Lücken gibt, zeigt bereits das Weierstraßsche Beispiel. Ich füge nun noch ein Beispiel dafür an, daß es auch Potenzreihen mit Hadamardschen Lücken gibt, welche überkonvergente Abschnitte besitzen. Das Phänomen der Überkonvergenz hat im Jahre 1906 der Amerikaner M. B. Porter (Annals of Math. vol. 8) entdeckt. 1918 hat es Jentzsch wiederentdeckt. Die Hauptforderung hat die Frage durch Ostrowski erfahren. (Man vergleiche seine letzte Arbeit über den Gegenstand in Math. Ann. Bd. 103.) Ich gehe hier nach Ostrowski eines der Beispiele von Porter, nachdem die erste Auflage ein Beispiel von Jentzsch brachte. Man setze

$$\varphi_n(z) = \frac{(z(1-z))^{4^n}}{p_n}$$

und

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \varphi_n(z).$$

Hier sei p_n der absolut größte Koeffizient der nach Potenzen von z fortschreitenden Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_n(z) = (z(1-z))^{4^n}.$$

Also

$$p_n = \left(\frac{4^n}{2 \cdot 4^{n-1}} \right).$$

Dann sind die absoluten Beträge aller Koeffizienten der Potenzreihe von $f(z)$ gleich 1. In jedem $\varphi_n(z)$ kommt aber einer vor, der genau gleich 1 ist. Die Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(z)$ haben kein gemeinsames Glied gleicher Potenz. Denn $\varphi_n(z)$ beginnt mit z^{4^n} und schließt mit $z^{3 \cdot 4^n}$, während $\varphi_{n+1}(z)$ mit $z^{4^{n+1}}$ beginnt und $\varphi_{n-1}(z)$ mit $z^{3 \cdot 4^{n-1}}$ schließt. Da also die Potenzreihe für $f(z)$ unendlich viele der Eins gleiche Koeffizienten hat, und keiner derselben die Eins im absoluten Betrage übertrifft, so ist $|z| < 1$ Konvergenzkreis für $f(z)$. Setzt man nun $1 - z = w$, so ist

$$z(1-z) = w(1-w)$$

und

$$\varphi_n(w) = \varphi_n(1-z).$$

Daher konvergiert die Reihe $\sum_1^{\infty} \varphi_n(z)$

auch in $|z-1| < 1$ gleichmäßig. Die sämtlichen Teilsummen dieser Reihe sind aber Abschnitte der Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ von $f(z)$.

Da

$$4 \cdot 4^n - 2 \cdot 4^n = 2 \cdot 4^n$$

ist, so stellt die Reihe zugleich ein Beispiel einer fortsetzbaren Reihe mit Hadamardschen Lücken dar.

Das sich hier ergebende Problem, alle Potenzreihen mit überkonvergenten Abschnittsfolgen anzugeben, hat Ostrowski durch Umkehrung seines obigen Lückensatzes gelöst. Nach Abzug einer geeigneten Potenzreihe mit größerem Konvergenzradius bleibt eine Potenzreihe mit unendlich vielen der Hadamardschen Bedingung genügenden Lücken übrig. Vgl. Sitzungsber. der preuß. Akad. d. Wiss. 1923, S. 185ff. Ostrowski hat weiter Funktionen gefunden, bei denen gewisse Abschnittsfolgen im ganzen Regularitätsgebiet gleichmäßig konvergieren und hat in der eingangs schon genannten neueren Arbeit gezeigt, daß zu jedem nicht enthaltenden einfach zusammenhängenden Regularitätsgebiet Funktionen mit solchen Abschnittsfolgen gehören.

§ 3. Der Satz von Wigert.

1. Der Satz. *Dafür, daß* $f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v z^{\nu}$

eine ganze Funktion von $\frac{1}{1-z}$ *ist, ist notwendig und hinreichend, daß es eine ganze Funktion* $\varphi(z)$ *gibt, die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehört, und für die*

$$c_v = \varphi(\nu) \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad \text{ist.}$$

2. Die Bedingung ist notwendig. Daß die Bedingung notwendig ist, sieht man sehr leicht an Hand der Cauchyschen Koeffizientenformel ein. Diese liefert nämlich

$$c_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta.$$

Hier ist das Integral zunächst über einen Kreis um $z = 0$ zu erstrecken, dessen Radius kleiner als Eins ist. Ich vergleiche das Integral mit einem anderen über den gleichen Integranden, daß ich aber jetzt über einen Kreis um den Punkt $z = 1$ erstrecke, dessen Radius ich so klein wähle, daß sich beide Kreise nicht treffen. Schließlich integriere ich den Integranden noch über einen großen Kreis um $z = 0$, dessen Radius ich im Laufe der Betrachtung über alle Grenzen wachsen lasse. Der Cauchysche Satz lehrt, daß das Integral über den großen Kreis gleich der Summe der Integrale über die beiden kleinen Kreise ist, wenn man über alle im positiven Sinne integriert. Läßt man nun aber den Radius des großen Kreises über alle Grenzen wachsen, so konvergiert für alle $\nu > 1$ das Integral über den großen Kreis gegen Null, da ja $f(z)$ im Unendlichen beschränkt ist. Daher hat man für $\nu \geq 1$

$$c_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}} d\zeta,$$

erstreckt über einen $\zeta = 0$ nicht enthaltenden Kreis um $z = 1$ im negativen Sinn. Nun setze ich

$$(20) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int f(\xi) e^{-(z+1)\log \xi} d\xi.$$

Hier ist wieder über einen $\xi = 0$ nicht enthaltenden Kreis um $\xi = 1$ im negativen Sinn zu integrieren. Für $\log \xi$ möge dabei der Wert genommen werden, der bei $\xi = 1$ verschwindet. Dann ist

$$\varphi(v) = c, \quad (v \geq 1).$$

Ich zeige, daß $\varphi(z)$ eine ganze Funktion ist, welche höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehört. Beim Beweis verwenden wir die aus der eben beendeten Betrachtung ersichtliche Tatsache, daß das Integral von dem Radius des Kreises um $\xi = 1$ unabhängig ist, sofern man diesen nur kleiner als Eins wählt. Daß $p(z)$ eine ganze Funktion ist, folgt daraus, daß das Integral (20) eine Funktion darstellt, die in der Umgebung eines jeden endlichen z regulär analytisch ist. Die Behauptung über das Wachstum ergibt sich durch direkte Abschätzung. $e^{-\epsilon} (\epsilon > 0)$ sei der Radius des Kreises um $\xi = 1$, über den integriert wird. $M(\epsilon)$ sei das Maximum der Werte, die $f(\xi)$ auf diesem Kreise annimmt. Dann wird für Größe s

$$|\varphi(z)| < M(\epsilon) e^{\frac{1}{\epsilon} |z+1|},$$

worin die Behauptung eingeschlossen ist.

3. Die Bedingung ist hinreichend. Ich wende mich zu dem Nachweis, daß die im Satze von Wigert ausgesprochene Bedingung auch *hinreichend* ist. Ich lehne mich dabei an einen Beweis an, den Erhard Schmidt vor 20 Jahren gefunden, aber nie veröffentlicht hat. Es $\varphi(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$; dann $\varphi(z)$ höchstens vom Minimaltypus der Ordnung Eins, so ist

$$(21) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0, \quad \text{d. h. } |a_k| < \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^k \text{ für große } k, \quad (\text{z. B. für } k > E).$$

Trägt man
$$c_v = \sum_0^\infty a_k v^k, \quad (v > 1)$$

in
$$f(z) = \sum_1^\infty c_v z^v$$

ein, so erhält man
$$f(z) = \sum_{v=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty a_k v^k z^v.$$

Für $|z| < 1$ lehrt der Weierstraßsche Doppelreihensatz, daß

$$(22) \quad f(z) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{v=1}^\infty a_k v^k z^v = \sum_{k=0}^\infty a_k \sum_{v=1}^\infty v^k z^v = \sum_{k=0}^\infty a_k \varphi_k(z).$$

Hier sind die $\varphi_k(z) = \sum_{v=1}^\infty v^k z^v$ Polynome von $\frac{1}{1-z}$ und daher in $z =$

regulär. Denn es ist $\varphi_k(z) = z \frac{d^k \varphi_{k-1}}{dz}$ und $\varphi_0(z) = 1 - \frac{\varepsilon}{z}$. Ich werde nun zeigen, daß diese letzte Reihe in der Umgebung einer jeden Stelle z , die von Eins verschieden ist, gleichmäßig konvergiert. Daraus ergibt sich dann der Satz von Wigert. Denn die Funktion (22) ist die analytische Fortsetzung der Potenzreihe $\sum c_k e^w$, mit der sie nach der Herleitung in deren Konvergenzkreis übereinstimmt. Es ist für den weiteren Beweis bequem, $z = e^w$ zu schreiben. Dann wird

$$(23) \quad f(e^w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{v=1}^{\infty} v^k e^{vw} = \sum a_k \frac{d^k}{dw^k} \frac{1}{1 - e^w}.$$

Ich betrachte die Umgebung irgendeiner endlichen Stelle w , für die $1 - e^w \neq 0$ ist. Nun sind die

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dw^k} \frac{1}{1 - e^w}$$

die Koeffizienten in der Entwicklung von

$$\frac{1}{1 - e^w}$$

nach Potenzen von $w - w_0$. Diese Funktion ist an allen endlichen Stellen regulär, in welchen

$$e^w \neq 1$$

ist. Ich betrachte eine solche Stelle a , lege um dieselbe einen Kreis vom Radius $R(a)$ derart, daß im Inneren und an seinem Rande

$$\frac{1}{1 - e^w}$$

regulär ist und betrachte alle w aus einem Kreise, der mit diesem konzentrisch ist und den halben Radius hat. Dann ist nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz

$$\left| \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dw^k} \frac{1}{1 - e^w} \right| < \frac{M(\alpha)^{2k}}{[R(\alpha)]^k},$$

wo $M(\alpha)$ von k nicht abhängt. Ferner aber ist nach (21)

$$|f(e^w)| < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^k \cdot \frac{M(\alpha)^{2k}}{[R(\alpha)]^k} \cdot k! + \left| \sum_0^k a_k \frac{d^k}{dw^k} \frac{1}{1 - e^w} \right|.$$

Wählt man also $\varepsilon < \frac{R(\alpha)}{2}$, so erkennt man, daß die Reihe (23) in der kleineren Kreisscheibe gleichmäßig konvergiert. Damit ist schon bewiesen, daß $f(z)$ für alle endlichen von $z = 1$ verschiedenen Stellen regulär ist. Es bleibt die Untersuchung des Unendlichen. Da aber die $\varphi_k(z)$ in $z = \infty$ regulär sind und da, wie wir eben sahen, $\sum a_k \varphi_k(z)$ z. B. in jedem $z =$

umgebenden Kreisring gleichmäßig konvergiert, so konvergiert sie außerhalb eines jeden $z = 1$ umschließenden Kreises gleichmäßig. Man erkennt dies aus einer Bd. 1 S. 170 angeführten Bemerkung, indem man in üblicher Weise durch $\zeta = \frac{1}{1-z}$ die Umgebung von $z = 1$ in die von $\zeta = 0$ überführt. Daher ist nun $f(z)$ überall außer bei $z = 1$ regulär und eindeutig, und so ist nun der Satz von Wigert restlos bewiesen.

4. Zusatz. Man kann den Satz von Wigert noch durch die Bemerkung ergänzen, daß $f(z)$ eine ganze rationale Funktion von $\frac{1}{1-z}$ ist, wenn $\varphi(z)$ eine ganze rationale Funktion ist. Namentlich ist $f(z)$ vom Grade $K+1$ in $\frac{1}{1-z}$, wenn $\varphi(z)$ vom Grade k ist. Dies kann sehr einfach eingesehen werden. Man braucht nämlich zum Nachweis nur Potenzreihen von der Form

$$f_k(z) = \sum_0^{\infty} v^k z^v$$

zu betrachten, weil sich alle anderen als Summe von endlich vielen derartigen Reihen darstellen lassen. Wir sahen aber oben schon, daß

$$f_k(e^w) = \frac{d^k}{d w^k} \frac{1}{1 - e^w}.$$

Darin liegt aber, daß

$$f_k(z)$$

ein Polynom $K+1$ -ten Grades von $\frac{1}{1-z}$ ist.

Auch eine Erweiterung des Satzes von Wigert liegt auf der Hand. Wenn nämlich $\varphi(z)$ zwar eine ganze Funktion endlicher Ordnung ist, aber stärker wächst, als es dem Minimaltypus der Ordnung Eins entspricht, so gilt (21) nicht für beliebige, sondern nur noch für nicht zu kleine positive ε . Geht man unseren Beweis erneut durch, so erkennt man, daß auch jetzt noch $f(z)$ in der Umgebung des Unendlichen regulär ist. Jetzt liegen die Singularitäten alle in einer gewissen Umgebung von $\theta=1$.

§ 4. Der Hadamardsche Multiplikationssatz.

Wenn

$$(24) \quad a(z) = \sum a_r z^r$$

in $|z| < R_a$ konvergiert, wenn

$$(25) \quad b(z) = \sum b_r z^r$$

in $|z| < R_b$ konvergiert, so konvergiert

$$(26) \quad ab(z) = \sum a_r b_r z^r$$

in $|z| < R_a R_b$. Diesen leicht zu beweisenden Satz über die Konvergenzradien, wonach der Konvergenzradius von $ab(z)$ mindestens gleich dem

Produkt der Konvergenzradien von $a(z)$ und $b(z)$ ist, hat Hadamard zu einem Satze über die Lagebeziehung der Singularitäten der drei durch die Reihen dargestellten Funktionen erweitert. Um ihn in einer präzisen Fassung aussprechen zu können, führen wir den Begriff des Hauptsternes einer analytischen Funktion

$$f(z) = \sum c_n z^n$$

ein. Unter einem Stern um $z = 0$ als Mittelpunkt wollen wir irgendeinen Bereich verstehen, der diesen Punkt enthält, und der von jeder Geraden durch ihn in nur einer Strecke geschnitten wird. Der Hauptstern ist dann der größte Stern um $z = 0$, in dem $f(z)$ regulär ist. Man erhält ihn also, indem man $f(z)$ längs jeder Geraden durch $z = 0$ nach beiden Seiten so weit als möglich fortsetzt. Die ersten Singularitäten, auf die man dabei stößt, sollen die Ecken des Hauptsternes heißen. Dann lautet der Hadamardsehe Multiplikationssatz: Der Hauptstern von $ab(z)$ ist ein Bereich, der denjenigen Stern umfaßt, den man erhält, wenn man die Ecken α des Hauptsternes von $a(z)$ mit den Ecken β des Hauptsternes von $b(z)$ multipliziert und mit den so erhaltenen Zahlen $\alpha\beta$ als Ecken einen neuen Stern konstruiert.

Der Satz enthält also kurz gesprochen eine Abschätzung des Hauptsternes von $ab(z)$.

Der Beweis beruht auf der Integraldarstellung

$$(27) \quad ab(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} a\left(\frac{1}{\xi}\right) b(\xi z) \frac{1}{\xi} d\xi.$$

Dabei sei zunächst als Integrationsweg ein positiv durchlaufener Kreis mit einem Radius ϱ gewählt, für den

$$(28) \quad \frac{1}{R_a} < \varrho < \frac{R_b}{|z|}$$

ist. Damit diese Ungleichung möglich ist, muß $|z|$ hinreichend klein sein. Es muß nämlich $|z| < R_a R_b$ sein. Die Integraldarstellung gilt also zunächst für alle z aus diesem Kreis. Man beweist ihre Richtigkeit, indem man beachtet, daß nach (28) die Reihen

$$(29) \quad a\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum a_n \frac{1}{\xi^n} \\ b(\xi z) = \sum b_n (\xi z)^n$$

für $|z| = \varrho$ gleichmäßig konvergieren. Man multipliziere aus und integriere gliedweise. Dann bekommt man sofort (26) heraus. Andererseits stellt aber (27) eine analytische Funktion für alle die z dar, für welche längs des ganzen Integrationsweges die Integranden regulär sind. Ferner kann

man bei festgehaltenem z den Integrationsweg ändern, ohne den Wert des Integrales zu ändern, wenn nur der abgeänderte Integrationsweg jede singuläre Stelle des Integranden ebenso oft umläuft wie der ursprüngliche. Das Regularitätsgebiet von $\alpha\left(\frac{1}{z}\right)$ ist das durch die Abbildung $\zeta = \frac{1}{z}$ erhaltene Bild des Hauptsternes von $a(z)$. Das Regularitätsgebiet von $b\left(\frac{1}{z}\right)$ erhält man, wenn man den Hauptstern von $b(w)$ mit $\frac{1}{z}$ multipliziert. Der erste Regularitätsbereich umfaßt also zum mindesten alle Punkte außerhalb des Kreises $|\zeta| = \frac{1}{R_1}$, während der zweite alle Punkte innerhalb von $|\zeta| = \frac{R_2}{|z|}$ umfaßt. Der Durchschnitt beider ist das Regularitätsgebiet des Integranden, in dem man bei festem z den Integrationsweg in der angegebenen Weise verlagern kann. Und zwar muß der Integrationsweg jeden nicht zum ersten Regularitätsgebiet gehörigen Punkt einmal im positiven Sinne, jeden nicht zum zweiten Regularitätsgebiet gehörigen Punkt einmal im negativen Sinne durchlaufen. Läßt man z sich ändern, so ändert sich das Regularitätsgebiet des Integranden. Man kann aber immer einen der angegebenen Bedingung genügenden darin verlaufenden Integrationsweg finden, solange die Ränder der Regularitätsgebiete von $\alpha\left(\frac{1}{z}\right)$ und von $b\left(\frac{1}{z}\right)$ keinen Punkt gemein haben. Ein Zusammentreffen der beiden muß aber wegen ihrer Sternnatur zuerst in den Ecken erfolgen. Solange also die beiden Sternbilder keine Ecken gemein haben, kann man einen Integrationsweg finden. Eine Ecke haben aber die beiden Sternbilder gemein, wenn z so beschaffen ist, daß es ein α und ein β gibt, für die

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{z}$$

ist, d. h. wenn

$$z = \alpha\beta$$

ist. Läßt man nun z auf einer Halbgeraden von $z = 0$ aus nach einem solchen Punkt $\alpha\beta$ hinwandern, so ist für alle z , deren Betrag kleiner als $|\alpha\beta|$ ist, die Konstruktion und damit die analytische Fortsetzung möglich und darin liegt der Beweis des Hadamardschen Multiplikationssatzes.

Es ist klar, daß man mit Hilfe dieses Gedankenganges noch manche weitere Aussage gewinnen kann. Doch ist es nicht so einfach, die erhaltenen Ergebnisse kurz auszusprechen. Ich will mich daher mit dem Gesagten begnügen.

Es ist nicht bewiesen und ist auch nicht richtig, daß der Hauptstern von $ab(z)$ mit dem Produktstern übereinstimmen müsse. Es ist nur bewiesen, daß er ihn enthält. Tatsächlich braucht man nur z. B. an die beiden Reihen

$$(30) \quad a(x) = \sum_0^{\infty} x^{2\nu}, \quad b(x) = \sum_0^{\infty} x^{2\nu+1}$$

zu denken, die zu $ab(x) = 1$

führen, um zu erkennen, daß mehr, als wir bewiesen haben, im allgemeinen nicht erwartet werden kann.

§ 5. Einige Anwendungen und Erweiterungen der in den vorausgegangenen Paragraphen dieses Kapitels bewiesenen allgemeinen Sätze.¹⁾

1. Verallgemeinerung des Hadamardschen Lückensatzes. Die *Hadamardsehe Lückenbedingung* kann man dahin aussprechen, daß in der Reihe

$$(31) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n z^{\lambda_n}$$

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \vartheta \lambda_n \quad (\vartheta > 0)$$

sein soll. Die Verallgemeinerung soll darin liegen, daß nur die *Fabrysche Lückenbedingung*

$$(32) \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

verlangt wird.

Nun bemerke man, daß aus der Lückenbedingung (32) folgt, daß

$$(33) \quad \frac{\lambda_n}{n} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

ist. Wenn nämlich (32) erfüllt ist, so ist von einer gewissen Nummer $N(M)$ an:

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > M,$$

wo M eine beliebige positive Zahl ist. Dann ist also

$$\lambda_{n+p} - \lambda_n > pM \quad (p > 0)$$

$$\frac{\lambda_{n+p}}{n+p} > \frac{\lambda_n}{n+p} + \frac{pM}{p+n}.$$

Also folgt durch $p \rightarrow \infty$ $\liminf \frac{\lambda_n}{n} \geq M$.

Das heißt $\frac{\lambda_n}{n} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Wenn umgekehrt (33) gilt, so braucht (32) nicht zu gelten. Man nehme nur z. B. $\lambda_n = n^2$ und $\lambda_{n+1} = n^2 + 1$. Dann gilt (33), ohne daß (32) gilt. Ich werde nun sogar beweisen, daß (31) nicht fortsetzbar ist, wenn nur (33) gilt. Dies ist der *Fabrysche Lückensatz*:

1) Der methodische Grundgedanke dieses Paragraphen rührt von G. Faber her.

Wenn in (31) die Fabry'sche Lückenbedingung (33) gilt, so ist (31) über seinen Konvergenzkreis nicht fortsetzbar.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehme ich als Konvergenzkreis den Einheitskreis. Ich greife aus den Exponenten λ_n eine Teilfolge heraus, die für ein passend gewähltes $\vartheta > 0$ der Hadamardschen Lückenbedingung genügen. Das seien die Exponenten p_r , und es sei $p_{r+1} > p_r(1 + \vartheta)$. Außerdem sei

$$(34) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[p_r]{|c_{p_r}|} = 1.$$

Die übrigbleibenden Zahlen λ_n sollen mit q_v bezeichnet und der Größe nach numeriert werden. Dann ist auch noch

$$\frac{q_v}{v} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad v \rightarrow \infty,$$

denn das v -te q_v ist nicht kleiner als λ_v . Daher ist wieder

$$\varphi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{q_v^2}\right)$$

eine ganze Funktion höchstens vom Minimaltypus der Ordnung Eins. Es ist also für alle genügend großen ganzen positiven Zahlen, namentlich also für die Zahlen p_r von einer gewissen Nummer an

$$(35) \quad |\varphi(p_r)| < e^{p_r}.$$

Außerdem ist, wie sich zeigen läßt¹⁾,

$$(36) \quad |\varphi(p_r)| > e^{-p_r}.$$

Aus (35) und (36) folgt $e^{-p_r} < \sqrt[p_r]{|\varphi(p_r)|} < e^{p_r}$.

1) Nach Pringsheim beweist man dies folgendermaßen. Es ist

$$\varphi(p_r) = \varphi_n(p_r) \cdot \Phi_n(p_r),$$

wo

$$\varphi_n(p_r) = \prod_1^n \left(1 - \frac{p_r^2}{q_k^2}\right)$$

und

$$\Phi_n(p_r) = \prod_{k=n+1}^\infty \left(1 - \frac{p_r^2}{q_k^2}\right)$$

und wo n durch

$$q_n < 2p_r \leq q_{n+1}$$

festgelegt ist. Dann wird

$$|\varphi_n(p_r)| = \prod_1^n \frac{q_k + p_r}{q_k} \cdot \frac{|q_k - p_r|}{q_k} > \frac{1}{q_n^n} \prod_1^n |q_k - p_r|.$$

Man lege m durch

$$q_m < p_r < q_{m+1}$$

fest. Dann ist

$$\prod_1^n |q_k - p_r| = \prod_1^m (p_r - q_k) \prod_{k=m+1}^n (q_k - p_r).$$

Also ist

$$(37) \quad \lim_{p_v \rightarrow \infty} \sqrt[p_v]{|\varphi(p_v)|} = 1.$$

Aus (34) und (37) folgt

$$\lim_{p_v \rightarrow \infty} \sqrt[p_v]{|c_{p_v} \varphi(p_v)|} = 1$$

Da nun alle Produktglieder ganze Zahlen sind und da die Glieder in jedem der beiden Teilprodukte von einander verschieden sind, so ist

$$\prod_1^n |q_k - p_v| > m! (n-m)! > \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun ist für ganze positive v $e^v > \frac{v^v}{v!}$, d. h. $v! > \left(\frac{v}{e}\right)^v$.

Daher bei geradem n $\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)! > \left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

Bei ungeradem n ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)! &> \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &= \left(\frac{n}{2e}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &> \left(\frac{n}{2e}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= \left(\frac{n}{2e}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \\ &= \left(\frac{n}{2e}\right)^n. \end{aligned}$$

Also wird

$$|\varphi_n(p_v)| > \left(\frac{n}{2e q_v}\right)^n$$

und

$$|\varphi_n(p_v)|^{-1} < e^{q_n \cdot Q_n}, \quad \text{wo} \quad Q_n = \frac{\log \frac{2e q_n}{n}}{q_n}.$$

Ferner wird

$$|\Phi_n(p_v)|^{-1} = \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{p_v^2}{q_k^2 - p_v^2}\right) = \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{p_v}{q_k}\right)^2} \cdot \left(\frac{p_v}{q_k}\right)^2\right).$$

Nun ist hier wegen

$$q_n < 2p_v \leq q_{n+1}$$

$$\left(\frac{p_v}{q_k}\right)^2 \leq \left(\frac{p_v}{q_{n+1}}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Also wird

$$|\Phi_n(p_v)|^{-1} < \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{3} \left(\frac{p_v}{q_k}\right)^2\right).$$

Daher ist nach dem Hadamardschen Lückensatz der Einheitskreis natürliche Grenze für

$$(38) \quad \sum c_p \varphi(p) z^{p_r}.$$

Da aber $\varphi(\lambda_n) = 0$ ist, so ist diese Funktion gleich

$$(39) \quad \sum c_n \varphi(\lambda_n) z^{\lambda_n}.$$

Und diese ist wieder gleich

$$(39) \quad \sum C_\nu \varphi(\nu) z^\nu,$$

wo $C_\nu = c_n$, wenn $\nu = \lambda_n$, und $C_\nu = 0$, wenn $\nu \neq \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Andererseits ist aber nach dem Satze von Wigert

$$\sum \varphi(\nu) e^\nu$$

eine ganze Funktion von $\frac{1}{1-z}$, hat also auf $|z| = 1$ nur $z = 1$ als singuläre Stelle. Daher hat wieder (39) keine anderen singulären Stellen auf $|z| = 1$ als $\sum C_\nu z^\nu = \sum c_n z^{\lambda_n}$. Da aber (39) nicht fortsetzbar ist, so ist auch (31) nicht fortsetzbar, womit der Fabry'sche Lückensatz bewiesen ist.

8. Nicht fortsetzbare Potenzreihen. Als weitere Anwendung der bisher aufgestellten allgemeinen Sätze gebe ich einen Hurwitzschen Beweis für eine zuerst von Pólya bewiesene Vermutung von Fatou an. Damit soll die Vorstellung belebt werden, daß die Nichtfortsetzbarkeit das normale Vorkommen, die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe ein seltenes Ereignis ist. Freilich wollen wir die sich an diese Vorstellung anschließenden Untersuchungen nicht weiter verfolgen, sondern uns mit diesem einen Satz begnügen. Der Satz ist dieser:

$$(40) \quad \sum c_{\nu} z^{\nu}$$

sei eine beliebige Potenzreihe, deren Konvergenzkreis der Einheitskreis sei. Dann gibt es Zahlen ε_ν , deren jede entweder $+1$ oder -1 ist, derart, daß die Reihe

$$\sum \varepsilon_\nu c_\nu z^{\nu}$$

über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist.

Nun wähle man n so groß, daß wegen $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\nu}{q_\nu} = 0$

$$Q_n < \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q_k} < \frac{\sqrt{3}}{4\pi k} \quad \text{für} \quad k \geq n.$$

$$\text{Dann ist} \quad |\varphi_n(p_\nu)|^{-1} < e^{\frac{q_n}{4}} < e^{\frac{\varepsilon}{2} p_\nu}$$

$$|\Phi_n(p_\nu)|^{-1} < \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\frac{1}{2} \varepsilon p_\nu)^k}{\pi^2 k^2} \right) < \frac{2}{\varepsilon p_\nu} \left| \sin i \frac{\varepsilon}{2} p_\nu \right| < e^{\frac{1}{2} \varepsilon p_\nu}$$

und daher ist

$$|\varphi(p_\nu)| > e^{-\frac{1}{2} \varepsilon p_\nu}.$$

Man Hebe aus der Reihe (40) eine Teilreihe heraus, die der Hadamardschen Lückenbedingung genügt, und die über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist. Diese sei $R(z)$. Dann setze man

$$\sum c_n z^n = f_0(z) + R(z)$$

und zerlege $R(z)$ irgendwie in unendlich viele Potenzreihen

$$f_1(z) + f_2(z) \dots$$

derart, daß keine zwei dieser Reihen Glieder mit gleichen Exponenten enthalten und jede aus unendlich vielen Gliedern besteht. Nun betrachte man die Gesamtheit aller Reihen

$$f_0(z) + \delta_1 f_1(z) + \delta_2 f_2(z) + \dots,$$

wo ein jedes δ_n entweder $+1$ oder -1 ist. Diese Reihen haben die Mächtigkeit des Kontinuums, da sie den Dualbrüchen umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. Wären diese Reihen alle über den Einheitskreis, in dem sie ja alle konvergieren, fortsetzbar, so müßte es zwei verschiedene darunter geben, die über dieselbe Einheitswurzel hinaus fortsetzbar sind. Denn die Einheitswurzeln sind abzählbar. Also wäre auch die Differenz beider in der Umgebung der betreffenden Einheitswurzel regulär. Aus der Differenz fällt aber $f_0(z)$ heraus, so daß die Differenz eine Reihe ist, die der Hadamardschen Lückenbedingung genügt und die den Einheitskreis zum Konvergenz-kreis hat. Daher sind wir zu einem Widerspruch gelangt. Und damit ist die Vermutung von Fatou bewiesen.

§ 6. Beweis eines Satzes von Fabry.

Satz: Wenn in der Potenzreihe

$$\sum c_n z^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = l$$

gilt, So ist $z = 1$ ein singulärer Punkt auf dem Konvergenzkreis.

1. Bemerkung. Daß $|z| = 1$ Konvergenzkreis ist, ergibt sich so: Es ist stets

$$(40a) \quad l = \liminf \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \liminf \sqrt[n]{|c_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \leq \limsup \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L.$$

Zum Beweise beschäftige ich mich zuerst mit dem Fall $l > 0$, L endlich. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) = m$ vorhanden, so daß für $n \geq N(\varepsilon)$

$$l - \varepsilon < \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < L + \varepsilon$$

ist. Also ist

$$(l - \varepsilon)^{n-m} < \left| \frac{c_n}{c_m} \right| < (L + \varepsilon)^{n-m}$$

und

$$\sqrt[n]{|c_n|} (l - \varepsilon)^{1 - \frac{m}{n}} < \sqrt[n]{|c_n|} < \sqrt[n]{|c_m|} (L + \varepsilon)^{1 - \frac{m}{n}}.$$

Also auch

$$l - \varepsilon \leq \liminf \sqrt[n]{|c_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \leq L + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, woraus (40 a) folgt.

Ist nun weiter $l = 0$, aber L endlich, so ist die in der Behauptung enthaltene Aussage über den $\liminf \sqrt[n]{|c_n|}$ selbstverständlich, und für den $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ schließt man wie eben. Ist aber $l > 0$, L unendlich, so ist die Aussage über $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ selbstverständlich, die über $\liminf \sqrt[n]{|c_n|}$ aber wird wie eben bewiesen. Ist weiter $l = L = 0$, so ist für $n \geq N(\varepsilon) = m$

$$0 < \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < \varepsilon.$$

Also

$$0 < \left| \frac{c_n}{c_m} \right| < \varepsilon^{n-m}.$$

Also auch

$$0 < \sqrt[n]{|c_n|} < \sqrt[n]{|c_m|} \varepsilon^{1 - \frac{m}{n}}.$$

Also

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

Ist endlich $l = L = \infty$, so ist für $n > N(\varepsilon) = m$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also

$$\left| \frac{c_n}{c_m} \right| > \frac{1}{\varepsilon^{n-m}}.$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \sqrt[n]{|c_m|} \frac{1}{\varepsilon^{1 - \frac{m}{n}}}.$$

Also

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = \infty.$$

Wenn aber

$$\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$$

ist, so ist auch

$$\lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 1.$$

Und daher folgt aus der eben bewiesenen Bemerkung, daß auch

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = 1$$

ist, daß also der Einheitskreis Konvergenzkreis ist.

2. Beweis. Dafür, daß $z = 1$ singulärer Punkt ist, will ich jetzt einen Beweis angeben, der in seinen Grundzügen mit dem ursprünglichen Fabry'schen übereinstimmt, der aber verschiedene von Ostrowski gelegentlich der Ausdehnung auf Dirichletsche Reihen gegebene Vereinfachungen aufweist. Der Beweis zerfällt in drei Teile.

I. Ich stelle das sogenannte *Hadamardsche Kriterium* in folgender Form an die Spitze. Es lautet: $z = 1$ ist für das durch die Reihe

$$\sum c_n z^n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$$

dargestellte Funktionselement $f(z)$ dann und nur dann eine reguläre Stelle, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi_n|} < 1$$

ist. Dabei ist gesetzt

$$(41) \quad \varphi_n = \sum_{n(1-\theta) \leq k \leq n(1+\theta)} c_k k^n e^{-k},$$

und es ist $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

Zum Beweise ist es am übersichtlichsten, wenn man die gegebene Potenzreihe

$$(42) \quad \sum c_k e^{ks}, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1$$

als *Dirichletsche Reihe* schreibt. Setzt man $s = -\log z$, so geht die Potenzreihe (42) in die Dirichletsche Reihe

$$(43) \quad f(s) = \sum c_k e^{-ks}$$

über, welche für $\Re s > 0$ konvergiert. Der Punkt $z = 1$ geht in den Punkt $s = 0$ über. Entwickelt man die in der Halbebene $\Re s > 0$ reguläre Funktion $f(s)$ nach Potenzen von $s - 1$, so werden die Koeffizienten der Entwicklung

$$(44) \quad \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum c_k \cdot k^n e^{-k}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $s = 0$ ein regulärer Punkt ist, ist die, daß der Konvergenzradius dieser Entwicklung größer ist als Eins, d. h. daB

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \right|} < 1$$

ist. Diese Bedingung formen wir nun in die Bedingung (41) um. Zum Beweise setze man

$$r_n = \frac{1}{n!} \sum_{k \leq n(1-\theta)} c_k k^n e^{-k}$$

$$s_n = \frac{1}{n!} \sum_{k > n(1+\theta)} c_k k^n e^{-k}.$$

Dann ist
$$\left| \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \right| \leq |\varphi_n + r_n + s_n|.$$

Wenn dann gezeigt werden kann, daß

$$(45) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|r_n|} < 1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|s_n|} < 1$$

ist, so ist
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \right|} < 1$$

dann und nur dann, wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\varphi_n|} < 1$

ist. Denn wenn die Potenzreihen

$$\sum r_n x^n \quad \text{und} \quad \sum s_n x^n$$

einen Konvergenzradius größer als 1 haben, so ist bei der Reihe $\sum \frac{f^{(n)}(1)}{n!} x^n$ der Konvergenzradius größer als Eins, wenn dies bei $\sum \varphi_n x^n$ der Fall ist und umgekehrt. Es ist also tatsächlich nur (45) zu zeigen.

Dies gelingt nach einer brieflichen Mitteilung von Landau sehr rasch folgendermaßen. $(1-x)e^x$ und $(1+x)e^{-x}$ nehmen für positive wachsende x monoton ab, sind also für $0 < x < \frac{1}{2}$ beide zwischen 0 und 1 gelegen. Daher kann man bei gegebenem ϑ aus $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ ein $0 < \varepsilon < 1$ so wählen, daß

$$\Theta_1 = (1+\varepsilon)^{1-\vartheta} (1-\vartheta)e^\vartheta < 1$$

und

$$\Theta_2 = (1+\varepsilon)^{1+\vartheta} (1+\vartheta)e^{-\vartheta} < 1$$

ausfallen. Die Funktion

$$(46) \quad d(x) = (1+\varepsilon)^x x^n e^{-x}, \quad n > 0$$

hat ihr Maximum bei $x = \frac{n}{1 - \log(1+\varepsilon)}$.

$$\text{Es ist} \quad n < \frac{n}{1 - \log(1+\varepsilon)} < n(1+\vartheta).$$

$$\begin{aligned} \text{Daher} \quad \frac{d(k+1)}{d(k)} &= (1+\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n e^{-1} < (1+\varepsilon) e^{\frac{n}{k}-1} \\ &< (1+\varepsilon) e^{-\frac{n}{1+\vartheta}} = \alpha < 1 \quad \text{für } k > n(1+\vartheta), \end{aligned}$$

$$\frac{d(k-1)}{d(k)} = \frac{1}{1+\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n < \frac{1}{1+\varepsilon} e^{-\frac{n}{k}+1} < \frac{1}{1+\varepsilon} \quad \text{für } 0 < k < n.$$

Nun gibt es ein $A > 0$, so daß für alle $k > 0$

$$(47) \quad c_k < A(1+\varepsilon)^k.$$

Daher wird $|r_n| \leq A \frac{e^n}{n!} \sum_{k < n(1-\vartheta)} d(k)$

$$\begin{aligned} &< A \frac{e^n}{n!} d(n(1-\vartheta)) \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 + \dots \right) \\ &< B \frac{e^n}{n!} d(n(1-\vartheta)), \end{aligned}$$

wo B eine von n unabhängige Zahl ist: Also

$$|r_n| < B \Theta_1.$$

D.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|r_n|} \leq \Theta_1 < 1.$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} |s_n| &< A \frac{e^n}{n^n} \sum_{k > n(1+\vartheta)} d(k) \\ &< A \frac{e^n}{n^n} d(n(1+\vartheta))(\alpha + \alpha^2 + \dots) \\ &< C \frac{e^n}{n^n} d(n(1+\vartheta)), \end{aligned}$$

wo C von n unabhängig ist. U. h.

$$|s_n| < C \cdot \Theta_1^n.$$

Also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|s_n|} \leq \Theta_1 < 1$$

Das Hadamardsche Kriterium ist damit bewiesen. Wir ziehen sofort eine Folgerung aus demselben. Die der Bedingung

$$(48) \quad n(1-\vartheta) \leq k \leq n(1+\vartheta)$$

genügenden Nummern k machen, wie wir sagen wollen, eine ϑ -Umgebung von n aus. Unter einer ausgezeichneten Folge von Nummern n wollen wir eine Folge ganzer Zahlen $n_1, n_2, \dots$ verstehen, für die

$$\frac{n_{l+1}}{n_l} > 2$$

und

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{|c_{n_\lambda}|} = 1$$

ist. Diese letztere Bedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{|\Re c_{n_\lambda}|} = 1$$

ist. Denn wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$$

kann für keine Teilfolge der Limes superior größer als Eins sein. Andererseits ist aber

$$|c_{n_\lambda}| \geq |\Re c_{n_\lambda}|.$$

Damit $z = 1$ singular sei, genügt es nun, daß in einer ϑ -Umgebung einer Folge n_1 alle c_k nicht-negativen Realteil haben und daß

$$(49) \quad \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{|\Re c_{n_\lambda}|} \geq 1 \quad \text{ist.}$$

$$\begin{aligned} \text{Denn dann ist } |\varphi_{n_2}| &\geq |\Re \varphi_{n_2}| = \sum_{n_2(1-\vartheta) \leq k \leq n_2(1+\vartheta)} \Re c_k \frac{k^{n_2}}{n_2!} e^{-k} \\ &> \Re c_{n_2} \frac{n_2^{n_2} e^{-n_2}}{\Gamma(n_2+1)}. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Stirlingschen Formel

$$(50) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_i e^{-1}}{\sqrt[2]{\Gamma(n_i+1)}} = 1.$$

$$\text{Also ist dann} \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[2]{|\varphi_{n_i}|} \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[2]{\Re c_{n_i}} \geq 1.$$

$$\text{Also ist auch} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2]{|\varphi_n|} \geq 1.$$

Ich füge noch die Bemerkung hinzu, daß es ausreicht, wenn die auf die Realteile bezügliche Bedingung erst dann erfüllt ist, wenn man vor der Bildung der Realteile alle der ϑ -Umgebung von c_{n_2} angehörige c_k mit demselben Faktor $e^{i\vartheta k}$ vom Betrag Eins multipliziert und dann erst die Realteile bildet. Denn im Hadamardschen Kriterium kommt nur $|\varphi_n|$ vor. Und $|\varphi_n|$ ändert sich nicht, wenn man alle Summanden von φ_n mit dem gleichen Faktor vom Betrag Eins multipliziert.

II. Ich komme zum zweiten, den Beweis des Fabry'schen Satzes vorbereitenden Punkt. Hier habe ich nur an einige schon bisher benutzte Ergebnisse zu erinnern. Ist $\Theta(z)$ ganz transzendent und

$$(51) \quad |\Theta(z)| < e^{\epsilon |z|}$$

bei beliebig gegebenem $\epsilon > 0$ und hinreichend großem $|z|$, so ist

$$(52) \quad \sum \Theta(n) c_n z^n$$

in jedem regulären Punkt von $\sum c_n z^n$ auf $|z| = 1$ regulär. Ist $m_1, m_2, \dots$ eine Folge verschiedener ganzer positiver Zahlen und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{k} = \infty,$$

so ist

$$\Theta(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m_k^2}\right)$$

eine solche Funktion, für die außerdem für alle hinreichend großen, von den m_k verschiedenen ganzen $z = n_2$

$$|\Theta(n_2)| > e^{-\epsilon |n_2|}$$

gilt. Man vgl. dazu S. 304

III. Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis des Fabryschen Satzes. Ich setze

$$c_k = |c_k| e^{i\omega_k}$$

und normiere die ω_k sukzessive so, daß $|\omega_{k+1} - \omega_k| \leq \pi$ ist. Es sei $n_1, n_2, \dots, n_\lambda, \dots$ eine ausgezeichnete Folge mit den $\mathfrak{D}$ -Umgebungen

$$U_{n_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots).$$

Es sei $\lim_{k \rightarrow \infty} |\omega_{k+1} - \omega_k| = 0$, wenn k durch irgendwelche den U_{n_λ} angehörige Nummern ins Unendliche strebt. Dann ist auch

$$(53) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \in U_{n_\lambda}} |\omega_{k+1} - \omega_k|}{n_\lambda} = 0.$$

Denn ist δ_λ das Maximum der $|\omega_{k+1} - \omega_k|$, wenn k in U_{n_λ} ist, so ist nach Voraussetzung

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_\lambda = 0.$$

Andererseits ist

$$\sum_{k \in U_{n_\lambda}} |\omega_{k+1} - \omega_k| \leq 2\delta_\lambda \cdot n_\lambda.$$

Markiert man nun auf $|z| = 1$ für jedes U_{n_λ} einen passenden Kreisbogen von der Länge $\frac{\pi}{8}$, so kann man in ihm eine solche Zahl $e^{i\beta_{n_\lambda}}$ finden, daß $\cos(\omega_k - \beta_{n_\lambda})$ in U_{n_λ} nur $o(n_\lambda)$ mal das Vorzeichen wechselt. Dabei ist $o(n_\lambda)$ eine Zahl, für die

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{o(n_\lambda)}{n_\lambda} = 0$$

ist. Wenn nämlich für jedes β aus einem solchen Kreisbogen mindestens q Zeichen Wechsel stattfinden, so muß

$$\sum_{k \in U_{n_\lambda}} |\omega_{k+1} - \omega_k| \geq q \frac{\pi}{8} \quad \text{sein.}^1)$$

Daher muß $q = o(n_\lambda)$ sein, und daher gibt es ein β_{n_λ} , für das die Zahl der Vorzeichenwechsel $o(n_\lambda)$ ist. Wenden wir das auf die gegebene Reihe an, bei öfter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$$

1) Man kann dies wie folgt erkennen. Man errichte auf den Schenkeln des Winkels $\frac{\pi}{8}$, dem β_{n_λ} angehören soll, Lote. So erhält man zwei neue Winkelräume, deren jeder die Öffnung $\frac{\pi}{8}$ hat. Dann verbinde man je zwei aufeinanderfolgende Punkte $e^{i\omega_k}$ durch Kreisbogen von einer π nicht übertreffenden Länge. Diese Kreisbogen müssen jeden, den beiden neuen Winkelräumen angehörigen Durchmesser mindestens q -mal treffen und haben daher mindestens die Gesamtlänge $q \frac{\pi}{8}$, wie im Text behauptet ist.

ist. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_{n+1} - \omega_n| = 0,$$

und daher sind die eben angestellten Überlegungen auf jede ausgezeichnete Folge anwendbar. Man wähle daher für jedes n_k einen Kreisbogen der Länge $\frac{\pi}{8}$, in dem das Argument von c_{n_k} liegt, und auf diesem Kreisbogen eine Zahl $e^{i\beta_{n_k}}$, so daß

$$\cos(\omega_k - \beta_{n_k})$$

nur $\mathcal{O}(n_k)$ Zeichenwechsel in U_{n_k} hat. Man multipliziere die c_k dieser Umgebung mit $e^{-i\beta_{n_k}}$ und ordne die Nummern $k = m_r$, bei welchen Vorzeichenwechsel der Realteile $|c_k| \cos(\omega_k - \beta_{n_k})$ von $c_k e^{-i\beta_{n_k}}$ auftreten, wachsend. Man kann dabei entweder das letzte Glied mit dem alten oder das erste mit dem neuen Vorzeichen nehmen und so erreichen, daß $n_1 \neq m_r$ ist. Dann kann man stets annehmen, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_r}{r} = \infty$$

gilt. Denn ist dies nicht von vornherein der Fall, so gehe man zu einer passenden Teilfolge der n_1 über.¹⁾ Weil nämlich die Zahl der einer $\mathfrak{P}$ -Umgebung angehörigen Vorzeichenwechsel dividiert durch n_2 nach Null strebt, so ist, um dies Ziel zu erreichen, keine Verengung der $\mathfrak{P}$ -Umgebungen nötig, sondern nur ein hinreichend rasches Anwachsen ihrer Nummern n_k .

Die zu diesen m_r gehörige Funktion $\Theta(s)$ ziehe man jetzt heran und bilde

$$\sum c_n \Theta(n) z^n.$$

Für diese Reihe ist, nach unserer Folgerung aus dem Hadamardschen Kriterium $z=1$ singulär. Denn bei dieser Funktion sind in U_{n_1} alle Realteile von

$$c_k \Theta(k) e^{-i\beta_{n_k}}$$

nicht negativ und außerdem ist

$$\limsup_{n_1 \rightarrow \infty} \sqrt[n_1]{\Re(c_{n_1} \Theta(n_1) e^{-i\beta_{n_1}})} \geq 1.$$

Da nämlich $\arg c_{n_1}$ und β_{n_1} dem gleichen Kreisbogen der Länge $\frac{\pi}{8}$ angehören, so ist

$$\Re(c_{n_1} \Theta(n_1) e^{-i\beta_{n_1}}) > |c_{n_1}| \cos \frac{\pi}{8} e^{-i\beta_{n_1}}.$$

Daher ist, wegen $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \sqrt[n_1]{|c_{n_1}|} = 1$

$$\limsup_{n_1 \rightarrow \infty} \sqrt[n_1]{\Re(c_{n_1} \Theta(n_1) e^{-i\beta_{n_1}})} \geq e^{-i},$$

1) Man kann auch zeigen, daß $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_r}{r} = \infty$ stets gilt. Die im Text nun folgende Überlegung reicht aber aus und ist etwas bequemer.

und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, so ist der Limes superior mindestens Eins. Nach dem unter II. Gesagten ist dann aber $z = 1$ auch singulärer Punkt für $\sum c_n z^n$, womit der Fabrysche Satz bewiesen ist

§ 7. Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten.

1. Fragestellung. Die Untersuchungen dieses Paragraphen sind historisch aus der Fragestellung erwachsen, die wir am Schluß des § 5 verlassen haben. Jentzsch, Pólya und Carlson haben die ersten Schritte in dieser Richtung getan, aber erst Szegő hat den folgenden allgemeinen Satz ausgesprochen und bewiesen:

Ist jeder Koeffizient einer Potenzreihe

$$\sum c_n z^n$$

gleich einer von den endlich vielen verschiedenen Zahlen $d_1 \dots d_k$ so stellt die Potenzreihe entweder eine rationale Funktion dar, deren Pole bei Einheitswurzeln liegen, oder sie ist über den Einheitskreis nicht fortsetzbar.

Der erste Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die Koeffizienten von einer gewissen Nummer an periodisch verteilt sind, und die von der Reihe dargestellte Funktion hat dann die Form

$$\frac{P(z)}{1 - z^m},$$

wo $P(z)$ ein Polynom und m eine ganze positive Zahl ist

Dieser Satz enthält z. B. für den Fall einer Potenzreihe, deren sämtliche Koeffizienten $+1$ oder -1 sind, eine viel eingehendere Auskunft, als es die früheren Darlegungen ermöglichten. Denn der Satz gibt uns ein bestimmtes Kriterium dafür, wann die betreffende Reihe fortsetzbar — also rational — ist und wann nicht.

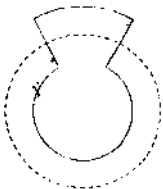


Fig. 46.

Ich wende mich dem von Szegő herrührenden Beweis zu.

Eine Potenzreihe, deren Koeffizienten nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, konvergiert stets im Einheitskreis. Ist sie also über denselben hinaus fortsetzbar, so darf man annehmen, daß die Funktion im Inneren und am Rande eines Bereiches regulär ist, der von der aus Fig. 46 ersichtlichen Kurve T begrenzt wird. Sie wird von zwei Kreisbogen von den Radien $1 - \delta < 1$ und $R > 1$ sowie von zwei dieselben verbindenden Kreisradien gebildet.

2. Erster Hilfssatz. Wenn eine Funktion

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v \quad \text{mit} \quad |c_v| < C$$

in und auf T regulär ist, wenn man

$$s_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

setzt, so gibt es eine von z und n unabhängige Zahl M , so daß auf T

$$\left| \frac{f(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \right| < M \quad \text{ist.}$$

Zum Beweis ziehen wir eine zu T ähnliche Kurve T' heran, welche T völlig im Inneren enthalten soll, die aber so nahe an T verläuft, daß $f(z)$ auch auf ihr noch regulär ist. z_1 und z_2 seien die beiden Punkte, in denen T' den Kreis $|z| = 1$ trifft. Es genügt nun offenbar zu beweisen, daß es eine Zahl M_1 gibt, derart, daß

$$|\Delta_n(z)| = \left| \frac{f(z) - s_{n-1}(z)}{z^n} (z - z_1)(z - z_2) \right| < M_1$$

ist, wenn z auf V liegt. Der innere Kreisbogen von T' möge den Radius $1 - \delta'$ haben. Dann ist auf demselben

$$\begin{aligned} |\Delta_n(z)| &= |(c_n + c_{n+1}z + \cdots)(z - z_1)(z - z_2)| \\ &< C \cdot \frac{1}{1 - |z|} \cdot |z - z_1| \cdot |z - z_2| \\ &< C \cdot \frac{1}{\delta'} \cdot \delta, \end{aligned}$$

wo C die Schranke ist, unter der die absoluten Beträge aller c_v liegen. Auf den geradlinigen Stücken von T' in $|z| < 1$ erhält man ganz ebenso

$$|\Delta_n(z)| < C \cdot \frac{1}{1 - |z|} \cdot |z - z_1| \cdot |z - z_2|.$$

Nun ist aber z. B. auf der durch z_1 gehenden Strecke

$$|z - z_1| = 1 - |z|.$$

Also wird auf den geradlinigen Stücken in $|z| < 1$

$$|\Delta_n(z)| < C \cdot 2.$$

Zu dem außerhalb von $|z| = 1$ gelegenen Teil von T' gehört eine Zahl $S > 0$, so daß auf T' gilt. Daher ist auf T' in $|z| > 1$

$$|f(z) - s_{n-1}(z)| < S + \frac{C|z|^n}{|z| - 1}.$$

R' sei der Radius des äußeren Kreisbogens von T' . Dann wird auf den geradlinigen Stücken

$$\begin{aligned} |A_n(z)| &< \frac{S}{|z|^n} \{ |z| - 1 \} 2|z| + \frac{C}{|z| - 1} \cdot (|z| - 1) 2|z| \\ &< S \cdot 2 \cdot R'(R' - 1) + C \cdot 2R'. \end{aligned}$$

Auf $|z| = R'$ endlich wird

$$\begin{aligned} |A_n(z)| &< \left(\frac{S}{R'^n} + \frac{C}{R' - 1} \right) 4R'^n \\ &< \left(S + \frac{C}{R' - 1} \right) 4R'^n. \end{aligned}$$

3. Zweiter Hilfssatz. Ich betrachte nun eine Folge von verschiedenen Kurven T . Diese sollen sämtlich in dem äußeren Begrenzungskreisbogen übereinstimmen und auch ihre geradlinigen Teile auf denselben Geraden haben. Sie sollen sich voneinander nur durch den Radius $1 - \delta$ des inneren Begrenzungskreisbogens unterscheiden. Dementsprechend bezeichne ich sie mit $T(\delta)$. Dann besagt der zweite Hilfssatz, daß man ein $\eta > 0$ und ein Polynom in $\frac{1}{z}$

$$Q\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n}$$

eines passenden Grades $q(n)$ bestimmen kann, derart, daß auf allen Kurven der Schar, deren $\delta < \eta$ ist,

$$(54) \quad \left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \frac{1}{2} \quad \text{ist.}$$

Der Hilfssatz wird offenbar bewiesen sein, wenn es gelungen ist, ein Polynom $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ zu konstruieren, für das (54) auf $T(0)$ gilt, auf einer Kurve also, die von einem Bogen des Einheitskreises und den von d unabhängigen Stücken der $\Gamma(\delta)$ gebildet wird. Zum Beweise biete man den an $F(0)$ beteiligten Bogen des Einheitskreises in einen Kreisringsektor ein, und bestimme durch Approximation $\frac{1}{z}$ durch ein Polynom nach Runge¹⁾ ein Polynom $P(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_{p-1} z + a_p$, so, daß

$$|a_0 z^p + \dots + a_{p-1} z - (-1)| < \frac{1}{2}$$

in diesem Kreisringsektor. Daraus folgt, daß

$$\left| a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{1}{z^p} \right| < \frac{1}{2|z|^p}$$

in dem Sektor. Auf dem Bogen des Einheitskreises ist also

$$(55) \quad \left| a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{1}{z^p} \right| < \frac{1}{2}.$$

1) Bd. I S. 28 ff.

Zu dem Rest der Kurve $T(0)$ gehört eine Zahl N , derart, daß für alle z auf diesem Kurvenstück

$$\left| \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots + \frac{1}{z^p} \right| < N$$

ist. Da in einer gewissen Umgebung der Endpunkte des Einheitskreisbogens noch (55) gilt, so kann man eine Zahl p_1 so bestimmen, daß

$$\frac{N}{|z|^{p_1}} < \frac{1}{2}$$

ist, auf dem weder der Peripherie des Einheitskreises noch diesen Umgebungen angehörigen Teil von $T(0)$. Daher ist dann auf ganz $T(0)$

$$\left| \frac{\alpha_0}{z^{p_1}} + \frac{\alpha_1}{z^{p_1+1}} + \dots + \frac{1}{z^{p+p_1}} \right| < \frac{1}{2}.$$

Damit ist das gesuchte Polynom gefunden.

4. Beweis des Satzes nach Szegő. $d_1, \dots, d_k$ sind die Zahlen, aus denen die Werte der Koeffizienten c_ν entnommen sind. Es sei

$$(56) \quad |d_\lambda - d_\mu| \geq d > 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq \mu.$$

δ sei so klein gewählt, daß das Polynom $Q\left(\frac{1}{z}\right)$, das auf $Q(0)$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, auch auf $I(\delta)$ noch kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Auf einem so, aber weiter fest gewählten $I(\delta)$ sei $f(z)$ regulär. Dann erhebe man eine so hohe Potenz, daß für das so erhaltene Polynom

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{z}\right) &= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^r} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{I(\delta)} \left| R\left(\frac{1}{z}\right) \right| |dz| &< \frac{d}{2M} \end{aligned}$$

ist, wo M die im ersten Hilfssatz eingeführte Zahl ist. Dann wird nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} &|\alpha_0 c_n + \alpha_1 c_{n+1} + \dots + \alpha_{r-1} c_{n+r-1} + c_{n+r}| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{I(\delta)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} R\left(\frac{1}{z}\right) dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{I(\delta)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \frac{s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} R\left(\frac{1}{z}\right) dz \right| \\ &< \frac{M}{2\pi} \int_{I(\delta)} \left| R\left(\frac{1}{z}\right) \right| |dz| < \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Nun betrachte man alle Koeffizientengruppen:

$$c_n, \quad c_{n+1}, \dots, c_{n+r-1} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

§ 8. Über Potenzreihen, welche rationale Funktionen darstellen

Da man aus den d_v höchstens k^r verschiedene solche Gruppen bilden kann, so muß es unter diesen unendlich vielen zwei gleiche geben. Es sei also

$$\mathbf{z. B.} \quad (c_\mu, c_{\mu+1}, \dots, c_{\mu+r-1}) = (c_\nu, c_{\nu+1}, \dots, c_{\nu+r-1}) \quad (\mu < \nu).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & |c_{\mu+r} - c_{\nu+r}| \\ & \leq |c_{\mu+r} + \alpha_{r-1}c_{\mu+r-1} + \dots + \alpha_0 c_\mu| \\ & \quad + |c_{\nu+r} + \alpha_{r-1}c_{\nu+r-1} + \dots + \alpha_0 c_\nu| < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d. \end{aligned}$$

Wegen (56) ist daher $c_{\mu+r} = c_{\nu+r}$

Dieselbe Schlußweise lehrt allgemein, daß

$$c_{\mu+\sigma} = c_{\nu+\sigma} \quad (\sigma \geq 0).$$

Also wird

$$f(z) = \sum_0^{\mu-1} c_n z^n + \frac{\sum_{n=\mu}^{\nu-1} c_n z^n}{1 - z^{\nu-\mu}},$$

womit der Beweis erbracht ist.

§ 8. Über Potenzreihen, welche rationale Funktionen darstellen.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen legen die Frage nach den Kriterien dafür nahe, daß eine Potenzreihe eine rationale Funktion darstellt. Soll

$$\begin{aligned} (57) \quad f(z) &= \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n} \\ &= c_0 + c_1 z + \dots \end{aligned}$$

sein, so muß $a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m = (b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n)(c_0 + c_1 z + \dots)$

sein. Ist $m \geq n-1$, so müssen beim Ausmultiplizieren die Koeffizienten von z^{n+p} für $p = m-n+1, m-n+2, \dots$ verschwinden. Dies führt zu den Gleichungen

$$(58) \quad b_n c_p + b_{n-1} c_{p+1} + \dots + b_0 c_{n+p} = 0, \quad (p = m-n+1, m-n+2, \dots).$$

Setzt man also

$$Q_\lambda^{(\mu)} = \begin{vmatrix} c_\lambda c_{\lambda+1} & \dots & c_{\lambda+\mu-1} \\ c_{\lambda+1} c_{\lambda+2} & \dots & c_{\lambda+\mu} \\ \vdots & & \\ c_{\lambda+\mu-1} c_{\lambda+\mu} & \dots & c_{\lambda+\mu-2} \end{vmatrix},$$

so findet man als notwendige Bedingung dafür, daß

$$(59) \quad c_0 + c_1 z + \dots$$

eine rationale Funktion mit einem Nenner höchstens n -ten und einem Zähler höchstens m -ten Grades ($m \geq n - 1$) darstellt, daß

$$C_i^{(n+1)} = 0 \quad (\lambda = m + 1 - n, m + 2 - n, \dots).$$

Umgekehrt sei $m \geq n - 1$ und

$$C_i^{(n)} \neq 0, \quad C_i^{(n+1)} = 0, \quad (\lambda = m + 1 - n, m + 2 - n, \dots).$$

Dann stellt (59) eine rationale Funktion dar, deren Nenner von genau n -tem Grade ist, während der Zähler höchstens den Grad m besitzt.

Es handelt sich also darum, festzustellen, daß es Zahlen $b_0, b_1, \dots, b_n$, $b_n \neq 0$ gibt, die allen Gleichungen (58) genügen. Aus $C_i^{(n+1)} = 0$, $C_i^{(n)} \neq 0$ folgt, daß je n aufeinanderfolgende der Gleichungen (58) linear unabhängig sind, während je $n + 1$ aufeinanderfolgende der Gleichungen (58) linear abhängig sind. Daraus folgt, daß jede Lösung $(b_0, \dots, b_n)$ der n ersten Gleichungen (58) auch allen anderen genügt. Die bis auf einen Faktor bestimmte Lösung der n ersten Gleichungen (58) besitzt ein $b_n \neq 0$, weil $C_{m+2-n}^{(n)} \neq 0$ ist.

Aus der gefundenen Bedingung folgt weiter: Dafür, daß (59) eine rationale Funktion darstellt, deren Nenner höchstens den Grad n , deren Zähler höchstens den Grad $m \geq n$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß

$$C_i^{(n+1)} = 0, \quad \lambda = m - n + 1, m - n + 2, \dots$$

Daß die Bedingung notwendig ist, wurde schon bewiesen. Daß sie hinreichend, folgt so: Entweder sind alle

$$C_i^{(v)} = 0 \quad \left(\begin{matrix} v = 1, 2, \dots, n + 1 \\ \lambda = m - n + 1, m - n + 2, \dots \end{matrix} \right).$$

Dann sind alle $c_\lambda = 0$ ($\lambda = m - n + 1, m - n + 2, \dots$), die Behauptung also richtig. Oder es gibt ein $\mu < n + 1$ und ein $\varphi > 0$ derart, daß

$$C_{m-n+\varphi}^{(\mu)} \neq 0,$$

während $C_i^{(n+1)} = 0$, ($\lambda = m - n + 1, m - n + 2, \dots$).

Dann beachte man die bekannte Determinantenrelation

$$(60) \quad C_k^{(\mu)} C_{k+2}^{(\mu)} - C_k^{(\mu+1)} C_{k+1}^{(\mu-1)} = \{C_{k+1}^{(\mu)}\}^2.$$

Man wende sie auf $k + 1 = m - n + \varphi$ an. (Wegen $m \geq n$ gibt es für $\varphi = 0$ ein solches k , für das alle C erklärt sind.) Dann folgt aus der Identität (60):

$$C_{m-n+\varphi-1}^{(\mu)} \cdot C_{m-n+\varphi+2}^{(\mu)} = \{C_{m-n+\varphi}^{(\mu)}\}^2 \neq 0.$$

Es ist also auch $C_{m-n+\varphi-1}^{(\mu)} \neq 0$ und $C_{m-n+\varphi+2}^{(\mu)} = 0$.

Es ist also $C_\lambda^{(\mu)} \neq 0$ ($\lambda = m - n + 1, m - n + 2, \dots$).

Somit folgt aus dem schon bewiesenen die neue Behauptung.

Diese als notwendig und hinreichend erkannten Bedingungen kann man noch etwas umformen. Nach Kronecker gilt nämlich folgender Satz; *Dafür, daß (59) eine rationale Funktion darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinanten*

$$C_0^{(0)}, C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \dots, C_0^{(n)} \dots$$

von einer gewissen $n = N$ an alle verschwinden.

Daß die Bedingung notwendig ist, folgt sofort aus dem gerade bewiesenen Satz. Denn wenn $C_\lambda^{(n+1)} = 0$ für $\lambda = m + p - n$ ($p > 0$), so sind in den Determinanten C_0^{m+p+2} ($p > 0$) jeweils die $n + 1$ letzten Zeilen linear abhängig, und daher sind diese Determinanten alle Null. Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt aus der Identität (00). Wenn nämlich $C_\lambda^{(N)} = C_k^{(N+1)} = \dots = 0$ ist, so folgt aus (60) für $k = N, N+1, \dots$, daß auch

$$C_{k+1}^{(N)} = C_{k+1}^{(N+1)} = \dots = 0.$$

Da aber

$$C_0^{(N)} = C_0^{(N+1)} = \dots = 0$$

sein soll für ein passendes N , so sind nach dieser Überlegung $C_0^{(N)} = C_1^{(N)} = \dots = 0$, d. h. $C_\lambda^{(n)} = 0$ für $\lambda = 0, 1, \dots, \mu = N$, womit die Behauptung bewiesen ist

§ 9. Pole an der Peripherie des Konvergenzkreises.

1. Ein Satz von Hadamard. Mit Hilfe der im vorigen Paragraphen betrachteten Determinanten hat Hadamard eine Bedingung dafür gefunden, daß an der Peripherie des Konvergenzkreises nur Pole liegen. Man kann nämlich die im vorigen Paragraphen abgeleitete Bedingung auch folgendermaßen aussprechen: Dafür, daß

$$(61) \quad f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

eine rationale Funktion darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß für ein passendes n die Funktion

$$(62) \quad \sum_0^\infty C_\lambda^{(n+1)} z^\lambda = C_{n+1}(z)$$

eine ganze rationale Funktion ist. Dies n gibt den Grad des Nenners, d. h. die Zahl der Pole an, welche die Funktion höchstens im endlichen besitzen kann, während der Grad der ganzen rationalen Funktion (62) den Grad des Zählers der rationalen Funktion bestimmt, die durch (61) dargestellt ist.

Nehmen wir nun an, (61) sei eine beliebige Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$, dann ist (62) eine Potenzreihe, deren Konvergenz-

radius mindestens r^{n+1} ist. Denn man kann ja die Determinanten auflösen. Damit zerfällt die Reihe (62) in eine Anzahl anderer Potenzreihen, deren Koeffizienten Produkte aus $n+1$ Koeffizienten c_k sind. Also ist der Konvergenzradius von (62) mindestens r^{n+1} . Daß er größer als r^{n+1} ist, ist nun gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (61) an der Peripherie seines Konvergenzkreises höchstens n Pole und keine weiteren Singularitäten besitzt.

2. Beweis der Notwendigkeit. Ich will mich damit begnügen, diese Bedingung als notwendig zu erweisen. Zu dem Zwecke nehme ich an, (61) habe an der Peripherie seines Konvergenzkreises genau k Pole und keine anderen Singularitäten. Dann kann man

$$f(z) = r(z) + R(z)$$

setzen, wo $r(z)$ eine rationale Funktion und $R(z)$ eine Potenzreihe mit größerem Konvergenzradius $r' > r$ ist. Ich setze weiter

$$r(z) = \sum r_\nu z^\nu$$

$$R(z) = \sum R_\nu z^\nu.$$

Dann ist

$$c_\nu = r_\nu + R_\nu,$$

und es wird

$$(63) \quad C_j^{(k+1)} = \begin{vmatrix} r_\lambda + R_\lambda & r_{\lambda+1} + R_{\lambda+1} & \cdots & r_{\lambda+k} + R_{\lambda+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{\lambda+k} + R_{\lambda+k} & \cdots & r_{\lambda+2k} + R_{\lambda+2k} \end{vmatrix}.$$

$r(z)$ kann man so wählen, daß es gerade mit der Summe der Hauptteile der Pole identisch ist, welche $f(z)$ auf der Peripherie seines Konvergenzkreises hat. Dann hat also $r(z)$ nicht mehr als k Pole im Endlichen. Daher sind die Determinanten

$$r_2^{(k+1)} = \begin{vmatrix} r_\lambda & r_{\lambda+1} & \cdots & r_{\lambda+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{\lambda+k} & \cdots & r_{\lambda+2k} \end{vmatrix}$$

alle Null von einem gewissen k an. Da jede der $k+1$ -Kolonnen von $C_2^{(k+1)}$ eine Summe von zwei Gliedern ist, so kann man diese Determinante als Summe von 2^{k+1} Determinanten schreiben. Eine davon ist $r_2^{(k+1)}$; die anderen haben stets eine aus $R_\nu+1$ bestehende Kolonne. Schreibt man diese Determinanten aus, so erhält man eine Summe von Gliedern aus je $k+1$ Faktoren. Einer davon ist ein B . Entsprechend zerfällt die mit den $C_2^{(k+1)}$ gebildete Potenzreihe in eine Anzahl anderer Potenzreihen, deren Koeffizienten jene Determinantenglieder sind. Da aber in einem solchen Produkt ein Faktor ein R_ν ist, die anderen gewisse r_μ sind, so wird der Konvergenzradius mindestens

$$r' - r^2.$$

Also ist der Konvergenzradius größer als r^{k+1} . Damit haben wir bewiesen, daß die angegebene Bedingung notwendig dafür ist, daß die Potenzreihe (61) genau k Pole an der Peripherie ihres Konvergenzkreises hat.

Ich will nun noch zeigen, daß die Bedingung auch dafür notwendig ist, daß sie höchstens k Pole daselbst hat. Das ist gleichbedeutend damit, zu zeigen, daß dafür, daß eine Potenzreihe (61) genau k Pole an der Peripherie hat, notwendig ist, daß die Potenzreihe (62) für $n \geq k$ einen Konvergenzradius größer als r^{k+1} besitze. Dies kann man aber genau wie eben durch Betrachtung der Determinanten

$$c_1^{(n+1)}$$

erschließen. Wir formen sie unter Verwendung der Zahlen

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 \dots \beta_k,$$

die sich aus den Gleichungen (64) ergeben, um, wodurch sich genau wie eben das angegebene Resultat ergibt. Man kann sogar noch etwas weiterkommen, indem man die Umformung auf die $n - k$ ersten Kolonnen anwendet und so schließt, daß bei (62) der Konvergenzradius mindestens

$$(64) \quad (r')^{n-k} \cdot r^{k+1} \text{ sein muß.}$$

Bemerkung. Ganz ebenso kann man übrigens beweisen, daß (62) notwendig dann einen Konvergenzradius größer als r'^{k+1} hat, wenn (61), das ja bei $z = 0$ regulär ist, in $|z| \leq r$ bis auf höchstens n Pole regulär ist. Denn es ist für unsere Schlüsse nicht wesentlich, daß die Pole auf $|z| = r$ liegen. Man muß nur in der durchgeführten Betrachtung die Zahl r durch eine Zahl $\varrho > 0$ ersetzen, für die (61) i $|z| < \varrho$ u l ä r ist. Dann ist der Konvergenzradius von (62) m i n d e $(r')^{n-k} \varrho^{k+1}$, s o für genügend großes n wieder größer als r .

3. Ein Spezialfall. Der allgemeine Nachweis dafür, daß die aufgestellte Bedingung hinreichend ist, soll uns hier nicht beschäftigen.¹⁾ Ich will nur kurz skizzieren, wie im Fall eines einzigen einfachen Poles der Beweis erbracht werden kann. Hier ist die gefundene Bedingung die: *Dafür, daß (61) an der Konvergenzgrenze $|z| = r$ nur einen einzigen einfachen Pol und keine anderen Singularitäten besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$(65) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n-1} r_{n+1} - c_n^2|} < \frac{1}{r}.$$

ist. Im Vorstehenden ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen. Aus einer gewissen Umformung ergibt sich der Nachweis, daß die Bedingung

1) Wegen einer einfachen Beweisordnung vgl. man eine Arbeit von Ostrowski im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 35 (1926).

hinreichend ist. Der erste Schritt ist der, daß man beweist, daß unter der Voraussetzung (65) nur endlich viele der c_n verschwinden können.

Dies ergibt sich durch den Nachweis des folgenden Grenzwertsatzes: Aus (65) in Verbindung mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{r} \quad \text{folgt}$$

$$(66) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{r}.$$

Ich führe den Nachweis nicht, sondern ziehe es vor, zunächst unter Verwendung von (66) eine Bedingung herzuleiten. Wir werden sie hernach auf anderem Wege als notwendig und hinreichend nachweisen. Nach (65) gibt es eine positive Zahl $k' < 1$ derart, daß für große n

$$|c_{n-1}c_{n+1} - c_n^2| < \left(\frac{k'}{r^2}\right)^n.$$

Dafür kann man dann schreiben

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| < r^n |c_n| \cdot r^n |c_{n-1}|$$

Da nun aber

$$\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow \frac{1}{r}$$

konvergiert, so sind die Zahlen

$$\sqrt[n]{|c_n|} r \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{|c_{n-1}|} r$$

für große n oberhalb einer festen Schranke $\frac{1}{M}$ gelegen, die man beliebig nahe an 1 wählen kann, wenn nur n groß genug ist. Wir wählen M so, daß

$$M^2 k' = k'' < 1$$

bleibt. Dann haben wir $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| < (k'')^n$.

Daraus folgt, daß die Reihe

$$\frac{c_1}{c_0} + \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_1}{c_0} \right) + \dots + \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{c_n}{c_{n-1}} \right) + \dots$$

absolut konvergiert und daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \alpha,$$

der ja der Summe dieser Reihe gleich ist. Nach S. 307 ist der absolute Betrag dieses Grenzwertes α , so daß α eine Stelle auf dem Konvergenzkreis ist. Es wird sich zeigen, daß es die Koordinate des Poles ist. Zunächst beachte man, daß

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{c_{n+1}}{c_n} - \left(\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} - \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) + \dots$$

Daher wird $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < (k'')^{n+1} + \dots = \frac{(k'')^{n+1}}{1 - k''}$.

Man wähle m so groß, daß

$$\frac{k''}{\sqrt[n]{1 - k''}} = k < 1$$

ist. Ist dann $n > m$ und außerdem so groß, wie es die Betrachtungen bis jetzt verlangt haben, so ist

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \left(\frac{k''}{\sqrt[n]{1 - k''}} \right)^{n+1} < \left(\frac{k''}{\sqrt[m]{1 - k''}} \right)^{n+1} = k^{n+1} < k^n.$$

Diese Überlegung führt uns zu der folgenden Vermutung, die ich dann beweisen will.

Dafür, daß (61) auf dem Konvergenzreise bei $z = \alpha$ einen einfachen Pol und sonst keine Singularitäten besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl $k < 1$ gibt, derart, daß für genügend große n

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < k^n \quad \text{gilt.}$$

Die Bedingung ist dahin zu verstehen, daß nicht allein der

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{\alpha}$$

existieren muß, dessen Existenz schon nach S. 307 die Stelle α als singuläre Stelle kennzeichnen würde, sondern daß außerdem

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

mit einer gewissen Geschwindigkeit sich seinem Grenzwert nähern muß.

Ich komme zum Beweis und zeige zuerst, daß die Bedingung notwendig ist. Setzt man nämlich

$$(57) \quad F(z) = (z - \alpha)f(z),$$

so hat $F(z)$ einen größeren Konvergenzreis als $f(z)$ und es ist $F(\alpha) \neq 0$.

Man setze

$$F(z) = k_0 + k_1 z + \dots,$$

dann folgt aus $F(\alpha) \neq 0$, daß es eine Zahl N gibt derart, daß für alle $n > N$

$$k_0 + k_1 \alpha + \dots + k_n \alpha^n \neq 0$$

ist. Setzt man

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots,$$

so ist wegen (67) $c_n = -\frac{1}{\alpha^{n+1}}(k_0 + k_1 \alpha + \dots + k_n \alpha^n)$.

Ich nehme $n > N$. Dann ist

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{\alpha} \frac{k_0 + k_1 \alpha + \dots + k_{n+1} \alpha^{n+1}}{k_0 + k_1 \alpha + \dots + k_n \alpha^n}$$

Also

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{1}{\alpha} = \frac{k_{n+1} \alpha^n}{k_0 + k_1 \alpha + \dots + k_n \alpha^n}.$$

Es gibt eine Zahl $\delta > 0$, so daß $F(z)$ in $|z| \leq |\alpha| + \delta$ noch regulär ist. Es gibt eine Zahl M , so daß daselbst $|F(z)| < M$ ist. Daraus folgt, daß es eine Zahl M_1 gibt, so daß $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < M_1 \left(\frac{|\alpha|}{|\alpha| + \delta} \right)^n$ für $n > N$. Da $\sqrt[n]{M_1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, so ist für genügend große n eine Zahl $k < 1$ vorhanden, derart, daß für diese großen n

$$\frac{|\alpha| \sqrt[n]{M_1}}{|\alpha| + \delta} \leq k < 1 \quad \text{ist.}$$

Ich komme zu dem Nachweis, daß die Bedingung hinreichend ist. Nach S. 307 folgt aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{daß} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

ist. Wir haben

$$k_n = c_{n-1} - c_n \alpha.$$

Ich muß zeigen, daß $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n-1} - c_n \alpha|} < \frac{1}{|\alpha|}$

ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n-1} - c_n \alpha|} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{c_n}{c_{n-1}} - \frac{1}{\alpha} \right| \cdot |\alpha| |c_{n-1}|} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{c_n}{c_{n-1}} - \frac{1}{\alpha} \right|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n-1}|} \\ &\leq k \cdot \frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{|\alpha|}, \end{aligned}$$

womit der Nachweis schon erbracht ist.

Bemerkung. Man kann übrigens mit Leichtigkeit aus der eben bewiesenen Bedingung wieder auf die Notwendigkeit der früher abgeleiteten Bedingung schließen.

4. Der Satz von Mandelbrojt. Mandelbrojt¹⁾ hat die vorstehend geschilderten Betrachtungen mit den Lückensätzen in Verbindung gebracht und hat so folgendes Ergebnis gewonnen. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei in $|z| < 1$ regulär. Es gebe unendlich viele n , so daß $\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i} \leq k$, wo $k > 0$ eine ganze positive Zahl sei. Hat dann $f(z)$ auf $|z| = 1$ keine anderen Singularitäten als Pole, so hat es deren mindestens K . Tsuji³⁾ hat diesen Satz von Mandelbrojt dahin verallgemeinert, daß das Wort „Pole“ durch „algebraische Singuläri-

1) Annales de l'école normale sup. 40 (1923).

2) Japanese Journal of Math. 3 (1926).

täten" ersetzt wird. Noch weitere Verallgemeinerungen rühren von Pòlya, Narumi, Ostrowski, Shimizu u. a. her. Man vergleiche überhaupt auch die Arbeit von Ostrowski, Über Singularitäten gewisser mit Lücken behafteter Potenzreihen, im Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. 35.

§ 10. Ein Satz von Pòlya und Carlson.

1. Fragestellung. Borel hat an die Betrachtungen aus dem Beginn des vorigen Paragraphen die folgende Bemerkung angeschlossen. Wenn die Reihe (G1) ganze rationale Koeffizienten hat, im Einheitskreis konvergiert und an seiner Peripherie außer k Polen keine Singularitäten besitzt, so muß $f(z)$ eine rationale Funktion sein. Denn nach den Betrachtungen aus dem Beginn des vorigen Paragraphen hat dann die Reihe

$$(68) \quad \sum C_n^{(k+1)} z^n$$

einen Konvergenzradius größer als Eins. Daher müssen von einer gewissen Nummer an ihre Koeffizienten kleiner als Eins sein. Da diese Koeffizienten aber als Determinanten aus ganzen Zahlen selbst ganze Zahlen sein müssen, so müssen sie Null sein. Also ist (68) eine ganze rationale Funktion und dies ist, wie wir feststellten, die Bedingung dafür, daß $f(z)$ rational ist.

Ebenso kann man zeigen, daß eine im Einheitskreis und auf seiner Peripherie bis auf Pole reguläre nichtrationale Funktion niemals in der Umgebung von $z = 0$ eine Potenzreihenentwicklung mit ganzen rationalen Koeffizienten besitzen kann. Dies folgt genau wie eben aus der auf S. 303 gemachten Bemerkung. Es ist dabei durchaus wesentlich, daß die Voraussetzungen nicht nur im Inneren, sondern auch am Rande des Einheitskreises erfüllt sind. Denn wir wissen aus verschiedenen Sätzen dieses Kapitels, daß es auch nichtfortsetzbare Reihen mit ganzzahligen Koeffizienten gibt. Auch kann man bemerken, daß

$$\sum c_n z^n \quad \text{und} \quad \sum [c_n] z^n \quad (c_n \text{ reell für alle } n)$$

im Inneren des Einheitskreises die gleichen Singularitäten haben, denn ihre Differenz ist eine Potenzreihe, deren sämtliche Koeffizienten absolute Beträge kleiner als Eins besitzen und die also im Inneren des Einheitskreises konvergiert. Pòlya hat die angeführten Untersuchungen von Borel wesentlich verallgemeinert. Für eine weitere Vermutung Pòlyas hat erst Carlson einen Beweis erbringen können, den dann Pòlya unter Erweiterung seiner Vermutung wesentlich vereinfacht hat. Ich beweise den folgenden Satz von Pòlya.

Eine Potenzreihe

$$(69) \quad f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

mit ganzzahligen Koeffizienten stelle eine analytische Funktion dar, welche in einem Gebiet B regulär ist, dessen Abbildungsradius größer als Eins ist; dann ist $f(z)$ rational

Unter Abbildungsradius ist dabei der Radius derjenigen Kreisscheibe zu verstehen, auf welche man das Gebiet B schlicht und konform abbilden kann durch eine Funktion, welche bei $z = 0$ verschwindet und dort die Ableitung Eins hat.

In diesem Satze von Pölya ist also namentlich die Aussage enthalten, daß die Funktion $f(z)$ sicher dann rational ist, wenn die Potenzreihe (69) im Einheitskreis konvergiert und über denselben hinaus fortsetzbar ist. Denn dann kann man sofort ein das Innere des Einheitskreises enthaltendes Gebiet angeben, in dem die Funktion regulär ist. Sein Bildradius ist natürlich größer als Eins, weil doch sonst durch die Abbildung des Gebietes B auf eine Kreisscheibe von einem Eins nicht übertreffenden Radius der Einheitskreis als Teilbereich des Gebietes in einen Bereich überginge, der ganz im Einheitskreis enthalten ist. Nach dem Schwarzschen Lemma muß aber die Ableitung der Abbildung dann im Mittelpunkte des Kreises ihrem Betrage nach kleiner sein als Eins. Man kann den Satz als eine Weiterführung der in § 9 beschriebenen Untersuchungen auffassen. Denn der Beweis wird darauf hinauskommen, zu zeigen: Ist $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet mit Abbildungsradius ρ regulär, so ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{C_0^{(n)}\}^{\frac{1}{n(n-1)}} \leq \frac{1}{\rho}.$$

2. Erste Hilfsbetrachtung. Zum Beweise des ausgesprochenen Satzes benötigen wir das in § 8 hergeleitete Kriterium für rationale Funktionen in seiner zweiten Form, das Kriterium also, das an die Determinanten

$$\text{Cinknüpft.} \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} \quad \text{Ich setze}$$

$$L_k c_m = c_m + t_1^{(k)} c_{m-1} + \dots + t_k^{(k)} c_{m-k} \quad (k \geq 1), \quad L_0 c_m = c_m, \quad c_{-v} = 0 \quad (v > 0),$$

wobei unter den $t_i^{(k)}$ irgendwelche nachher näher zu bestimmende Zahlen zu verstehen sind. Übliche Determinantenumformungen lehren dann, daß

$$C_0^{(n+1)} = \begin{vmatrix} c_0 & L_1 c_1 & \dots & L_n c_n \\ L_1 c_1 & L_1 L_1 c_2 & \dots & L_1 L_n c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n c_n & L_n L_1 c_{n+1} & \dots & L_n L_n c_{2n} \end{vmatrix}.$$

Ich setze nun $Q_k^*(x) = t_k^{(k)} x^k + t_{k-1}^{(k)} x^{k-1} + \dots + t_1^{(k)} x + 1.$

Dann ist

$$\begin{aligned} Q'_k(z) \cdot f(z) &= \sum L_k c_k z^k, \\ Q'_k(z) \cdot Q'_l(z) \cdot f(z) &= \sum L_l L_k c_k z^k, \end{aligned}$$

woraus z. B. folgt, daß

$$L_l L_k c_m = L_k L_l c_m$$

ist. Hieraus folgt aber auch, daß

$$L_l L_k c_{i+k} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) Q'_k(z) Q'_l(z)}{z^{i+k+1}} dz.$$

Setzt man

$$Q'_n(z) \cdot \frac{1}{z^n} = Q_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

so wird

$$L_l L_k c_{i+k} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) Q_l\left(\frac{1}{z}\right) Q_k\left(\frac{1}{z}\right)}{z} dz.$$

3. Zweite Hilfsbetrachtung. Von G. Faber stammen die folgenden Bemerkungen: Ein Gebiet B der z -Ebene, das den Punkt $z = 0$ in seinem Inneren enthält, werde durch die Funktion $w = \varphi(z)$ auf den Kreis $|w| < \rho$ schlicht abgebildet. Es sei

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{z} + \lambda_0 + \lambda_1 z + \dots$$

Es sei

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)^m &= \frac{1}{z^m} + \dots + l_m^{(m)} + P_m^*(z) \\ &= P_m\left(\frac{1}{z}\right) + P_m^*(z), \quad P_m^*(0) = 0. \end{aligned}$$

Dann gilt in jedem inneren abgeschlossenen Teilbereich von B gleichmäßig

$$(70) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \varphi(z) \right\}^m \cdot P_m\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$

Nach dem Residuensatz ist nämlich

$$P_m\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \left\{ \frac{1}{\varphi(u)} \right\}^m \left[\left(\frac{u}{z}\right)^m + \left(\frac{u}{z}\right)^{m-1} + \dots + 1 \right] \frac{du}{u}.$$

Dabei möge über das Bild Teines Kreises $|w| = r < \rho$ integriert werden, während z im Inneren dieser Kurve T liegt. Man kann schreiben

$$P_m\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{1}{z^m} \left(\frac{u}{\varphi(u)}\right)^m \frac{du}{u} - \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{z}{u-z} \left(\frac{1}{\varphi(u)}\right)^m \frac{du}{u}.$$

Da nun $\frac{u}{\varphi(u)}$ in B regulär ist, so findet man durch Berechnung des Residuums bei $u = z$

$$P_m\left(\frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)^m = -\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{z}{u-z} \left(\frac{1}{\varphi(u)}\right)^m \frac{du}{u}.$$

Auf T ist aber $|\varphi(u)| = r$. Also kommt

$$\left| \left(\varphi(z)^n \cdot P_m \left(\frac{1}{z} \right) - 1 \right) < \frac{|\varphi(z)|^n}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_T \left| \frac{z}{u-z} \right| \left| \frac{du}{u} \right| \right|.$$

Das Integral ist aber von m unabhängig, während

$$|\varphi(z)| < r$$

ist. Daher ist (70) richtig.

4. Beweis. Es sei $f(z)$ in einem Bereich B mit einem Abbildungsradius $\varrho > 1$ regulär. Es sei

$$1 < R < r < \varrho.$$

Als Funktion

$$Q_m \left(\frac{1}{z} \right)$$

wähle ich die eben eingeführte $P_m \left(\frac{1}{z} \right)$

$$\text{Dann wird} \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_T f(z) P_k \left(\frac{1}{z} \right) P_l \left(\frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z} \right| < \frac{M}{r^k \cdot r^l},$$

wo M eine passende Zahl ist, die von k und l nicht abhängt.

Denn auf T gilt nach (70)

$$\left| P_k \left(\frac{1}{z} \right) \right| < \frac{c}{|\varphi(z)|^k} = \frac{c}{r^k},$$

wo c von k nicht abhängt, weil doch (70) für $|\varphi(z)| \leq r$ gilt. Die auf S. 322 vorgenommene Umformung der Determinante $C_0^{(n+1)}$ liefert daher

$$\begin{aligned} |C_0^{(n+1)}| &< \frac{M^{n+1}}{(r^{1+1+\dots+n})} (n+1)! \\ &< \left(\frac{(n+1)M}{r^n} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Da $r > 1$, so strebt die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen Null. Daher sind für hinreichend große n die $C_0^{(n+1)} \rightarrow 0$ und daher ist $f(z)$ rational.

5. Bemerkungen. 1. Pólya hat durch ganz ähnliche Betrachtungen sogar zeigen können, daß $f(z)$ auch rational sein muß, wenn es in dem Bereich B bis auf isolierte singuläre Stellen regulär und eindeutig ist. Man vgl. seine Arbeit in den Lond. Proc. (2) 21.

2. In seiner großen Arbeit Acta math. 30, die ungeheuer befruchtend auf die funktionentheoretische Forschung gewirkt hat, hat Fatou auf S. 368ff. noch die folgende Ergänzung des hier bewiesenen Satzes gegeben: Wenn eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten im Einheitskreis konvergiert und eine rationale Funktion darstellt, so liegen ihre sämtlichen Pole bei Einheitswurzeln.

3. Borel hat den Betrachtungen, mit denen wir diesen Paragraphen begonnen haben, noch die folgende Bemerkung hinzugefügt. Es sei

$$\sum b_n z^n$$

in der Umgebung des Nullpunktes regulär und in der ganzen endlichen Ebene meromorph. Die a_n und b_n seien ganze Zahlen. In den b_n kommen nur endlich viele verschiedene Primfaktoren $p_1 \dots p_k$ vor und es gibt eine Zahl M , so daß $|b_n| \leq M^n$ ist. Dann ist $f(z)$ rational. Zum Beweis bestimme man die ganze Zahl λ so, daß $p_i^\lambda > M$ ist. Dann ist

$$|b_n| < p_i^{\lambda n}.$$

Man setze

$$z = \frac{1}{p_1^{\lambda} \dots p_k^{\lambda}}$$

Dann wird $f(z) = f(\frac{1}{p_1^{\lambda} \dots p_k^{\lambda}}) = F(\frac{1}{z})$ eine Potenzreihe mit ganzen rationalen Koeffizienten, welche eine meromorphe Funktion darstellt. Sie ist also rational und daher ist auch $f(z)$ rational.

Natürlich gibt es meromorphe nichtrationale Funktionen, welche durch Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden. Denn ist $\sum c_n z^n$ eine beliebige Potenzreihe mit von Null verschiedenem Konvergenzradius und reellen Koeffizienten, so bestimme man die rationalen Zahlen d_n so, daß $|c_n - d_n| < \frac{1}{n!}$ ist. Dann ist die Differenz der beiden Funktionen

$$\sum c_n z^n \quad \text{und} \quad \sum d_n z^n$$

eine ganze Funktion. Also besitzen beide im Endlichen die gleichen Singularitäten und man kann somit jede Potenzreihe durch eine mit rationalen Koeffizienten beliebig genau approximieren.

4. Aus den Sätzen dieses Paragraphen folgt insbesondere auch der schon früher von Fatou bewiesene Satz, daß eine Funktion, welche im Einheitskreise und an seinem Rande von algebraischem Charakter ist, nur dann in der Umgebung des Nullpunktes eine Potenzreihenentwicklung mit ganzzahligen Koeffizienten besitzen kann, wenn sie entweder rational ist, oder wenn im Inneren des Einheitskreises mindestens eine Verzweigungsstelle der Funktion vorkommt. Kämen nämlich im Inneren des Einheitskreises nur Pole vor, so wäre nach dem allgemeineren auf S. 322 ohne Beweis angeführten Satze die Funktion rational. Nehmen wir also an, sie sei nicht rational, so müssen im Inneren des Einheitskreises Verzweigungspunkte vorkommen. Übrigens hat Carleone auf die algebraische Funktion

$$\sqrt[m]{1 - \frac{1}{4} z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^{mn}$$

aufmerksam gemacht, deren Potenzreihenentwicklung rationale Koeffizienten hat, und deren Verzweigungspunkte bei $\sqrt[m]{\frac{1}{4}}$, also bei passender Wahl von m , beliebig nahe an der Peripherie des Einheitskreises liegen.

§ 11. Der Satz von Eisenstein.

1. Formulierung des Satzes. Mit den Erörterungen des vorigen Paragraphen haben wir bereits einen Schritt in das weite Gebiet der arithmetischen Eigenschaften analytischer Funktionen getan. Merkwürdigerweise sind Sätze auf diesem Gebiete älter als ein systematischer Aufbau der Funktionentheorie. Denn bereits im Jahre 1852 hat Eisenstein den berühmt gewordenen Satz ausgesprochen, dem dieser Paragraph gelten soll, und bereits im Jahre 1854 hat Heine, auch einer der Väter der modernen mathematischen Strenge, den ersten Beweis dieses Satzes veröffentlicht.

Der *Eisensteinsche Satz* enthält eine *notwendige* Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe

$$(71) \quad w = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

mit rationalen Koeffizienten eine algebraische Funktion darstellt. Der Satz lautet nämlich: *Wenn die Potenzreihe (71) mit rationalen Koeffizienten eine algebraische Funktion darstellt, so gibt es eine ganze Zahl k derart, daß*

$$w(kz) - c_0 = k c_1 z + k^2 c_2 z^2 + \dots$$

ganze rationale Koeffizienten hat.

2. Vier Vorbemerkungen. I. Wenn eine Potenzreihe (71) einer algebraischen Gleichung

$$(72) \quad f(z, w) = 0$$

genügt, wo also $f(z, w)$ ein Polynom in z und w ist, so genügt sie auch einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Denn auf alle Fälle kann man $f(z, w)$ so schreiben:

$$(73) \quad f(z, w) = f_0(z, w) + \alpha_1 f_1(z, w) + \dots,$$

wo die α_i irrationale Zahlen sind, und die $f_i(z, w)$ rationale Koeffizienten haben, und man darf dabei noch annehmen, daß zwischen den α_i keine lineare Relation

$$\beta_0 + \beta_1 \alpha_1 + \dots = 0$$

mit rationalen Koeffizienten β_i besteht. Denn anderenfalls kann man vermittle einer solchen Relation eines der α_i aus (73) beseitigen. Trägt man nun (71) in (72) ein, und ordnet nach Potenzen von z , so müssen die Koeffizienten aller Potenzen von z verschwinden. Diese Koeffizienten sehen aber so aus:

$$C_0 + \alpha_1 C_1 + \dots$$

Dabei rührt C_i von $f_i(z, w)$ her und ist rational aus den c_k und den Koeffizienten von $f_i(z, w)$ aufgebaut, ist also selbst eine rationale Zahl. Da aber zwischen den α_i keine Relation mit rationalen Koeffizienten bestehen soll,

so müssen die C_i alle einzeln verschwinden. Das bedeutet aber, daß (71) allen Gleichungen $f_i(z, w) = 0$ einzeln genügt. Diese haben aber rationale Koeffizienten. Man darf also für den weiteren Beweis annehmen, daß die algebraische Gleichung $f(z, w) = 0$, der (71) genügen soll, ganze rationale Koeffizienten hat, und daß kein allen Koeffizienten gemeinsamer Teiler vorhanden ist.

II. Man darf außerdem annehmen, daß $f(z, w)$ irreduzibel ist, d. h. daß man $f(z, w)$ nicht in Faktoren zerlegen kann, die selbst rationale nichtkonstante Funktionen von z und w sind. Denn wäre die eben gefundene mit rationalen Koeffizienten versehene Funktion $f(z, w)$ reduzibel, so macht (71) einen der beiden Faktoren zu Null. Er hat einen niedrigeren Grad wie $f(z, w)$. Durch den eben beschriebenen Prozeß geht man wieder zu einem neuen f mit rationalem Koeffizienten über. Es hat auch einen niedrigeren Grad. Wäre es wieder reduzibel, so mache man denselben Schluß aufs neue. Bei jedem Schritt verkleinert sich der Grad, und es ist klar, daß man so nach einer gewissen Zahl von Schritten zu einer irreduziblen Funktion F gelangen muß.

III. Als dritte Vorbemerkung will ich zeigen, daß man annehmen darf, daß die Gleichung $f(0, w) = 0$

linear ist. Zu dem Zwecke mache ich den Ansatz

$$w = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{p-1} z^{p-1} + z^p v.$$

Trägt man das in (72) ein, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen z und v . Man kann ihr ganze Koeffizienten verschaffen, da die c_k rational sind, und man darf sie wieder als irreduzibel annehmen. Diese neue Gleichung sei

$$F'_p(z, v) = 0.$$

Wählt man p hinreichend groß, so muß

$$(74) \quad F'_p(0, v) = 0$$

linear sein. Denn wenn diese Gleichung nicht linear ist, so besagt dies doch, daß die algebraische Funktion $v(z)$ mehrere Funktionselemente besitzt, welche bei $z = 0$ endliche Werte haben. Geht man zu w zurück, so bekommt man für diese algebraische Funktion mehrere Funktionselemente, deren Entwicklung in der Umgebung von $z = 0$ mit

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_{p-1} z^{p-1}$$

beginnt. Da diese algebraische Funktion aber nur endlich viele Elemente in der Umgebung von $z = 0$ besitzt und ihre zu $z = 0$ gehörigen Elemente alle verschieden sind, so ist die Zahl der Anfangsglieder, in denen zwei

Elemente übereinstimmen können, beschränkt. Daher muß für passendes p die Gleichung (74) linear sein. Wenn es nun gelungen ist, für die Funktion

$$w(x) = c_p + c_{p+1}x + \dots$$

den Eisensteinschen Satz zu beweisen, so ergibt er sich daraus für (71) ohne weiteres. Denn dann gibt es eine ganze Zahl k_1 so daß

$$c_{p+v} k_1^v \quad (v > 0)$$

ganz ist. Weiter gibt es eine ganze Zahl k_2 , so daß

$$k_2 c_1, \dots, k_2^p c_p$$

ganzzählig sind. Daher sind auch die

$$(k_1 k_2)^\mu c_\mu \quad (\mu > 0)$$

ganzzählig, so daß für $k = k_1 k_2$ der Eisensteinsche Satz sich für (71) als richtig erweist.

IV Es ist weiterhin bequem und statthaft, c_0 als ganze Zahl anzunehmen. Denn jedenfalls gibt es eine ganze Zahl k' so, daß $k' c_0$ ganz ist. Macht man dann in (72) die Substitution

$$w = k' w_1$$

so genügt Iv einer algebraischen Gleichung mit ganzzähligen Koeffizienten. Ist für diese der Eisensteinsche Satz bewiesen, so kennt man eine ganze Zahl k_1 , so daß

$$k' k_1^v c_v \quad (v > 0)$$

ganz ist. Dann sind aber auch die

$$(k' k_1)^v c_v \quad (v > 0)$$

ganz und $k = k' k_1$ erfüllt den Eisensteinschen Satz in der ursprünglichen Fassung. Ich nehme daher weiter c_0 als ganze Zahl an.

3. Beweis. Nach diesen Vorbereitungen kann nun der eigentliche Beweis rasch geführt werden. Ich stelle die Voraussetzungen, die wir nach den vier Vorbemerkungen machen, kurz zusammen. $f(z, w)$ ist irreduzibel, hat ganzzählige Koeffizienten ohne gemeinsame Teiler. Die Gleichung

$$f(0, w) = 0$$

ist linear. c_0 ist ganz. Ich setze nun

$$(75) \quad \begin{aligned} f(z, w) &= \sum A_\lambda(z) w^\lambda \\ A_\lambda(z) &= \sum a_{\lambda\mu} z^\mu. \end{aligned}$$

Hier ist dann

$$a_{\lambda,0} = 0 \quad (\lambda > 1), \quad a_{1,0} \neq 0,$$

weil $f(0, w)$ linear sein soll. Ich trage in (75)

$$w = c_0 + c_1 z + \dots$$

ein und ordne das ganze nach Potenzen von s . Alle Koeffizienten müssen Null sein. Ich betrachte den Koeffizienten von z . Er ist

$$a_{n,1}c_0^n + a_{n-1,1}c_0^{n-1} + \dots + a_{11}c_0 + a_{10}c_1 + a_{01} = 0.$$

Daher muß

$$a_{10}c_1$$

ganzzahlig sein. Ich will nun allgemein beweisen, daß

$$(a_{10})^n c_n$$

ganzzahlig ist. Dazu bediene ich mich der vollständigen Induktion. Ich nehme also an,

$$a_{10}c_1, (a_{10})^2c_2, \dots, (a_{10})^nc_n,$$

seien ganzzahlig und will zeigen, daß dann auch

$$(a_{10})^{n+1}c_{n+1}$$

ganz ist. Zu dem Zweck betrachte ich den Koeffizienten von z^{n+1} in $f(z, \sum c_i z^i)$. Da für $\lambda > 1$ die $A_\lambda(z)$ kein von s freies Glied haben, so

gehen in die Beiträge, welche die Glieder

$$A_1(z)w^\lambda$$

zum Koeffizienten von z^{n+1} liefern, nur die

$$c_0, \dots, c_n$$

ein. Diese Beiträge hängen ganz und rational von $c_0 \dots c_n$ ab. Sie bestehen also aus einer Summe von Gliedern der Form

$$a_{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n} c_0^{\lambda_0} c_1^{\lambda_1} \dots c_n^{\lambda_n},$$

wo $a_{\lambda_0 \dots \lambda_n}$ ganz ist, und wo

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 + \dots + n\lambda_n \leq n$$

ist. Diese Ausdrücke werden also durch Multiplikation mit $(a_{10})^n$ alle ganzzahlig. Dazu kommt nun noch der Beitrag, den $A_0(z) + A_1(z)w$ zum Koeffizienten von z^{n+1} liefern. Das ist

$$a_{0n+1} + a_{10}c_{n+1} + a_{11}c_n + \dots + a_{1n+1}c_0.$$

Also haben wir eine R $r(c_0 \dots c_n) + a_{10}c_{n+1} = 0$.

Dabei ist

$$r(c_0 \dots c_n)$$

ein Ausdruck, der durch Multiplikation mit $(a_{10})^n$ ganzzahlig wird. Daher ist auch

$$(a_{10})^{n+1}c_{n+1} \quad \text{ganzzahlig.}$$

Achter Abschnitt.

Die Riemannsche Zetafunktion.

§ 1. Definition der Funktion $\zeta(s)$.

Unter $s = \sigma + it$ verstehe man in einer seit Riemann in diesem Zusammenhang üblichen Weise eine komplexe Veränderliche, während σ und t reell sind. Die Reihe:

$$(1) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

in der durch:

$$(2) \quad n^s = e^{s \log n}, \quad \log n \text{ reell}$$

n^s eindeutig definiert ist, konvergiert bei beliebigem $\delta > 0$ für

$$\sigma > 1 + \delta$$

gleichmäßig und stellt darum in der Halbebene $\sigma > 1$ eine eindeutige und reguläre analytische Funktion dar.

$$\text{Es ist nämlich: } |\zeta(s)| = n^{\delta} \geq n^{1+\delta}.$$

Es soll sich nun weiter um die analytische Fortsetzung der so zunächst in einer Halbebene definierten Funktion handeln. Dazu gehen wir zu geeigneten anderen Darstellungen der Funktion durch Integrale über. Die Mittel dazu geben uns die Betrachtungen über die Gammafunktion in Bd. I an die Hand.

§ 2. Integraldarstellungen der Funktion $\zeta(s)$.

1. Erste Darstellung. Für die Funktion $\frac{1}{\Gamma(s)}$ ben wir in Bd. I, S. 317 ff. die Integraldarstellung:

$$(3) \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} e^z z^{-s} dz$$

kennengelernt, die in der ganzen s -Ebene gilt. Wir verwenden sie nun für $\sigma > 1$. z^{-s} ist dabei durch $e^{-s \log z}$, $-\pi \leq \Im \log z \leq \pi$ erklärt. Der Integrationsweg, der damals verwendet wurde, war aus zwei Geraden zusammengesetzt, die im Abstand s zu beiden Seiten der negativen reellen Achse aus dem unendlichen bis zu den Punkten $\pm i\epsilon$ gezogen wurden. Diese beiden Stücke waren durch einen Halbkreis in der rechten Halbebene mit $z = 0$ als Mittelpunkt verbunden. Bei der Integration wurde der Weg so

durchlaufen, daß $0 = 0$ zur Linken blieb. Welchen Wert man ε erteilte, war gleichgültig. Daher gilt die Integraldarstellung noch, wenn man 2 durch $n\pi$ ersetzt, den Integrationsweg aber beibehält, n sei dabei eine positive ganze Zahl. So bekommt man:

$$\frac{1}{n^s \Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^{nz} z^{s-1} dz.$$

Wegen (1) fin

$$(4) \quad \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{1 - e^{kz}}{1 - e^z} z^{s-1} e^z dz$$

$$(5) \quad = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{e^{kz} z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz.$$

Nun muß ich aber zunächst zusehen, ob immer noch in beiden Integralen die Wahl des Integrationsweges gleichgültig ist. Bei der in (4) vorkommenden Verbindung der beiden Integrale ist es noch gleichgültig, wie man ε wählt. Das zeigt die Herleitung. Bei dem ersten Integral in (5) macht man aber die Beobachtung, daß der Integrand Singularitäten bei $z = 2h\pi i$ (h ganz) hat. Daher ist die Wahl des Integrationsweges nicht mehr gleichgültig.¹⁾ Wir müssen vielmehr in beiden Integralen denselben Integrationsweg nehmen, wenn wir von der Wahl desselben unabhängig sein wollen. Es ist aber zu vermuten, daß wieder jedes einzelne Integral vom Wege unabhängig wird, wenn man sich auf $\varepsilon < 2\pi$ beschränkt. Das ist tatsächlich der Fall. Es ist nach dem Gesagten nur nötig, dies für das erste Integral zu beweisen. Vergleicht man zwei Wege mit $\varepsilon = \varepsilon_1$ und $\varepsilon = \varepsilon_2$ miteinander, so sieht man, daß es analog wie in Bd. I darauf ankommt, zu zeigen, daß

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha + i\varepsilon_1}^{\alpha + i\varepsilon_2} \frac{(\alpha + iy)^{s-1} e^{\alpha + iy}}{1 - e^{\alpha + iy}} dy = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha - i\varepsilon_1}^{\alpha - i\varepsilon_2} \frac{(\alpha - iy)^{s-1} e^{\alpha - iy}}{1 - e^{\alpha - iy}} dy = 0.$$

Nun ist aber:
$$\left| \frac{(\alpha + iy)^{s-1} e^{\alpha + iy}}{1 - e^{\alpha + iy}} \right| < \frac{e^\alpha}{1 - e^\alpha} |\alpha^2 + y^2|^{\frac{s-1}{2}},$$

woraus sich das gewünschte Ergebnis sofort ergibt. Um zu zeigen, daß das zweite Integral in (5) den Grenzwert Null hat, mache ich von der Freiheit in der

1) Näher wird der Einfluß einer Änderung des Integrationsweges im folgenden Paragraphen untersucht werden.

Wahl des Integrationsweges Gebrauch, und nehme $s = \frac{1}{k}$. Ich wähle eine Gerade parallel zur imaginären Achse im Abstand δ zur Linken derselben und betrachte zunächst den rechts von ihr gelegenen Teil des Integrationsweges. Auf ihm liegt für $s > 2$ der Integrand für alle $k > 0$ in einer festen Umgebung von $z = 0$ bei festem s unter einer von k unabhängigen Schranke. Wählt man daher δ hinreichend klein, so folgt daraus, daß dieser Teil des Integrationsweges, dessen Länge nach Null strebt, zum Integral einen Beitrag liefert, der kleiner ist, als eine beliebig vorgegebene positive Zahl $\frac{\eta}{2}$. Die durch diese Forderung bestimmte Gerade links der imaginären Achse halte ich nun fest und betrachte den Rest des Integrationsweges, welcher aus zwei geradlinigen Stücken besteht. Da aber auf ihm der Realteil der Integrationsvariablen nicht größer als $-\delta$ ist, so ergibt sich für den Integranden die Abschätzung:

$$\left| \frac{e^{kx} x^{s-1} e^x}{1 - e^x} \right| < e^{-k\delta} |x|^{s-1} e^{\mu x},$$

wo μ eine von k und x unabhängige Zahl bedeutet. Da aber das Integral

$$\int_{\delta}^{\infty} |x|^{s-1} e^{\mu x} dx$$

erstreckt längs der negativen reellen Achse konvergiert, so liefern die beiden noch zu betrachtenden Teile des Integrationsweges wegen des Faktors $e^{-k\delta}$ für hinreichend großes k einen Beitrag, der gleichfalls kleiner als $\frac{\eta}{2}$ ist. Daher ist der Grenzwert des zweiten Integrales für $s > 2$ tatsächlich Null. So haben wir für $s > 2$ die Integraldarstellung gewonnen

$$(6) \quad \zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{L_s} \frac{z^{s-1} e^z}{1 - e^z} dz.$$

Nun aber beherrschen wir die beiden Faktoren dieser Darstellung für beliebige s . $\Gamma(1-s)$ wurde in Bd. I ausführlich betrachtet. Und das außerdem noch dastehende Integral hat gleichfalls für alle s einen Sinn. Es stellt eine ganze Funktion dar. Dies sieht man am bequemsten in der auf S. 174 von Bd. I an einem Beispiel dargelegten Weise mit Hilfe des Vitalischen Satzes ein. Da auch $G(s)$ analytisch ist, so gilt das zunächst nur für $s > 2$ bewiesene (6) für alle s . Daher ist $\zeta(s)$ eine meromorphe Funktion, deren Pole nur da liegen können, wo $\Gamma(1-s)$ Pole besitzt. In Betracht kommen also nur die Stellen, wo s positiv ganzzahlig ist. Da aber diese Stellen von $s = 2$ an in dem uns bereits bekannten Regularitätsgebiet liegen, so bleibt

nur $s = 1$ übrig. Hier hat nun $\zeta(s)$ tatsächlich einen Pol, wie wir durch Bestimmung seines Residuums beweisen wollen. Dies Residuum erhalten wir, indem wir das Residuum von $T(1-s)$ bei $s = 1$ mit dem Wert des Integrales:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{e^z}{1-e^z} dz$$

multiplizieren. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist aber der Wert dieses Integrales gleich dem Residuum des Integranden bei $z = 0$. Dies Residuum ist aber -1 . Nach S. 304 von Bd. I hat weiter das Residuum von $T(1-s)$ bei $s = 1$ den Wert -1 . Also hat $\zeta(s)$ bei $s = 1$ einen einfachen Pol mit dem Residuum $+1$.

2. Zweite Integraldarstellung der Funktion $\zeta(s)$ (8). Man kann sie aus (6) erhalten, indem man dies Integral ähnlich umformt, wie dies Bd. I, S. 317ff. gelegentlich der Herleitung der vorhin benutzten Integraldarstellung von $\frac{1}{\Gamma(s)}$ geschah. Es ist aber wohl bequemer für den Leser, wenn ich kurz anzeige, wie man diese Integraldarstellung auf einem Wege gewinnen kann, der dem ganz analog ist, welcher zu (6) führte. Für die Gammafunktion war in Bd. I, S. 315 die für $\sigma > 0$ gültige Integraldarstellung:

$$(0) \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx, \quad (x > 0)$$

gewonnen worden. x^{s-1} war dabei durch $e^{(s-1)\log x}$, oder x reell, erklärt. Ersetzt man x durch nx , so erhält man:

$$(8) \quad \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

Wendet man dies auf die einzelnen Glieder von (1) an, so erhält man für $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \zeta(s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-kx}}{1 - e^{-x}} e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-kx} x^{s-1} dx}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

Nun ist für $x \geq 0$:

$$e^x - 1 \geq x.$$

Also:

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} x^{s-1} dx}{e^x - 1} \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-tx} x^{s-1} dx \\ = \left| \frac{1}{k^{s-1}} \Gamma(s-1) \right|.$$

Da $\sigma > 1$, so ist $r(s-1)$ endlich, und daher ist:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} x^{s-1} dx}{e^x - 1} = 0.$$

Also bleibt:

$$(9) \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (x \geq 0)$$

Die Integraldarstellung (6) hat eine größere Tragweite als (9). Denn diese letztere gilt nur für $\sigma > 1$ und kann zur analytischen Fortsetzung nicht unmittelbar benutzt werden.

3. Dritte Integraldarstellung. Ich bespreche noch eine weitere Integraldarstellung, die sich aus der in Bd. I, S. 304 angegebenen Eulerschen Summenformel (2) ergibt, wenn man sie auf die Reihe (1) anwendet. Ich setze in jener Formel:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^s}.$$

$$\text{Dann wird} \quad \sum_{n=1}^{n=k} \frac{1}{n^s} = \int_0^k \frac{1}{x^s} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^s} + 1 \right) + s \int_0^k \frac{P_1(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Dabei ist $P(x)$ eine periodische Funktion der Periode 1, die zwischen 0 und 1 durch

$$P_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$$

erklärt ist, und die sich durch die Fouriersche Reihe:

$$P_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$$

darstellen läßt. So lange $\sigma > 1$ ist, kann man auf beiden Seiten den Grenzübergang vornehmen. Dies liefert:

$$(10) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_0^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Da $|P_1(x)|$ beschränkt ist, so stellt das hier verbleibende Integral eine für $\sigma > 0$ reguläre Funktion dar und daher gilt diese Darstellung (10) von $\zeta(s)$ für $\sigma > 0$. Wir haben also mit Hilfe der Eulerschen Summenformel die analytische Fortsetzung der Funktion $\zeta(s)$ über die Definitionshalbebene hinaus erhalten und entnehmen namentlich dieser Darstellung aufs Neue, daß die Funktion in dieser Halbebene bis auf einen einfachen bei $s = 1$ gelegenen Pol vom Residuum Eins regulär ist.

4. Einige Folgerungen. Unsere Formel (10) ist zu gewissen numerischen Bestimmungen besonders geeignet. Z. B. kann man mit ihrer Hilfe bequem das Absolutglied der Liirrenreihe für $\zeta(s)$ in der Umgebung von $s = 1$ berechnen. Man entnimmt nämlich der Formel (10), daß

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^2} dx$$

ist. Dies Integral kommt aber vor, wenn man die Eulersche Summenformel auf die Reihe $\sum \frac{1}{n}$ anwendet. In der Tat wissen wir von S. 298 des Bd. I, daß

$$\int_1^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{2} + C,$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet, die durch

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

definiert ist. Daher wird

$$(11) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = C$$

Wenn man die anderen in Bd. I entwickelten Eulerschen Formeln heranzieht, so kann man die analytische Fortsetzung über immer größere Halbebenen erstrecken. Die Heranziehung der anderen Formeln läuft auf eine Umformung von (10) durch partielle Integration heraus. So erhält man z. B.

$$(10') \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{s}{12} - s(s+1) \int_1^{\infty} \frac{P_2(x)}{x^{s+1}} dx,$$

und diese Darstellung gilt nun, wegen der Beschränktheit von $P_2(x)$ für $\sigma > -1$. Aus dieser Darstellung lesen wir z. B. ab, daß in $\sigma \geq -1 + \delta$, $\delta > 0$

$$\zeta(s) = O(t^{\delta})$$

ist, wo $0(t^2)$ eine Funktion von t bedeutet, für die

$$\left| \frac{O(t^2)}{t^2} \right|$$

beschränkt ist für große t und zwar gleichmäßig für $\sigma \geq -1 + \delta$, $\delta > 0$. Schärfere Abschätzungen werden wir später kennenlernen.

§ 3. Die Riemannsche Funktionalgleichung.

Wir knüpfen an die im vorigen Paragraphen noch nicht voll erledigte Frage der Abhängigkeit des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz$$

von ε an und betrachten zunächst das

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K^{(N)}} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz,$$

erstreckt im positiven Sinn über einen Kreis $K^{(N)}$ vom Radius $(2N+1)\pi$ (N ganz) um $z=0$. Betrachten wir außerdem den in diesem Kreis gelegenen Teil eines Integrationsweges L_ε mit $\varepsilon < 1$. Wir bezeichnen diesen Teil mit $L_\varepsilon^{(N)}$. In dem zwischen dem Kreis $K^{(N)}$ und dem Weg $L_\varepsilon^{(N)}$ gelegenen Gebiet ist der Integrand eindeutig und regulär, außer bei den Stellen

$$z = \pm 2h\pi i \quad (h = 1, 2, \dots, N),$$

wo er einfache Pole besitzt. An der Stelle $z = 2h\pi i$ ist das Residuum des Integranden

$$-(2h\pi i)^{s-1} = -\frac{1}{h^{1-s}} (2\pi)^{s-1} e^{\frac{i\pi}{2}(s-1)}, \quad \text{wenn } h = h > 0$$

$$\text{bzw. } -(-2h\pi i)^{s-1} = -\frac{1}{h^{1-s}} (2\pi)^{s-1} e^{-\frac{i\pi}{2}(s-1)}, \quad \text{wenn } h = -h < 0$$

Daher lehrt der Residuensatz, daß

$$(12) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{K^{(N)}} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon^{(N)}} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz - \sum_{h=1}^N \frac{(2\pi)^{s-1}}{h^{1-s}} 2 \cos \frac{\pi}{2}(s-1)$$

Nun gilt auf $K^{(N)}$ für reelle s die Abschätzung

$$\left| \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} \right| < [(2N+1)\pi]^{s-1} \left| \frac{1}{e^{-1}-1} \right| \\ < [(2N+1)\pi]^{s-1} \mu,$$

wo μ eine von N unabhängige Zahl ist. Denn die Werte, welche e^{-z} auf den Kreisen $K^{(N)}$ annimmt, kommen, wie man ohne weiteres übersieht, der Eins nicht beliebig nahe.

Also wird

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K(N)} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz \right| < [(2N+1)\pi]^\mu$$

Für $s < 0$ wird daher: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K(N)} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz = 0$.

Andererseits wird nach § 1 für $s < 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{h=N} \frac{1}{h^{1-s}} = \zeta(1-s).$$

Für $N \rightarrow \infty$ folgt daher aus (12) die damit zunächst nur für $s < 0$ bewiesene Funktionalgleichung

$$\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = (2\pi)^{s-1} 2 \cos \frac{\pi}{2} (s-1) \zeta(1-s).$$

Also ist wegen

$$(13) \quad \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (\text{Bd. I S. 314})$$

$$(14) \quad \zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \cos \frac{\pi}{2} s \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s)$$

Dies ist die Riemannsche Funktionalgleichung. Als Relation zwischen analytischen Funktionen gilt sie aber nun für alle s (Bd. I S. 140 u. 210).

Setzt man noch

$$(15) \quad \xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s),$$

so ist $\xi(s)$ eine ganze Funktion, für welche die Funktionalgleichung

$$(16) \quad \xi(s) = \xi(1-s)$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{A}(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + is\right),$$

so wird

$$\mathfrak{A}(-s) = \mathfrak{A}(s).$$

Trägt man nämlich zunächst in (14) $s = 2n + 1$ ein, wo n eine positive ganze Zahl sein soll, und beachtet, daß dann links die endliche Zahl $\zeta(-2n)$ steht, während rechts $\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$ ist, und $\Gamma(2n+1)$ und $\zeta(2n+1)$ endliche Zahlen sind, so sieht man, daß

$$\zeta(-2n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Andererseits hat $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ bei $s = 0, -2, -4, \dots$ einfache Pole. Daher ist $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ bei $s = -2, -4 \dots$ polfrei. Der Faktor s schafft auch den

letzten von $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ herrührenden Pol fort. Der Pol, den $\xi(s)$ bei $s = 1$ hat, wird durch den Faktor $s - 1$ beseitigt. Also ist zunächst $\xi(s)$ eine ganze Funktion. Daß für sie (16) gilt, beruht auf der für die Gammafunktion geltenden Funktionalgleichung

$$(17) \quad \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi} 2^{-s} \Gamma(2s).$$

Von ihr war in Bd. I noch nicht die Rede. Man gewinnt sie aber unmittelbar aus der im ersten Bande S. 311 für $\frac{1}{\Gamma(s)}$ gegebenen Darstellung durch ein unendliches Produkt.

Zunächst wird nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} &= e^{c\left(s + \frac{1}{2}\right)} \left(s + \frac{1}{2}\right) \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{s + \frac{1}{2}}{n}\right) e^{-\frac{s + \frac{1}{2}}{n}} \\ &= e^{c\left(s + \frac{1}{2}\right)} \left(s + \frac{1}{2}\right) \prod_1^{\infty} \left(\frac{2n + 1 + 2s}{2n}\right) e^{-\frac{2s + 1}{2n}} \\ &= e^{c\left(s + \frac{1}{2}\right)} \left(s + \frac{1}{2}\right) \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{2s}{2n + 1}\right) e^{-\frac{2s}{2n + 1}} \\ &\quad \cdot \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) e^{-\frac{1}{2n}} \prod_1^{\infty} e^{-2s\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 1}\right)} \\ &= e^{c\left(s + \frac{1}{2}\right)} \left(s + \frac{1}{2}\right) \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{2s}{2n + 1}\right) e^{-\frac{2s}{2n + 1}} \\ &\quad \cdot 2 \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-c\frac{1}{2}} \cdot e^{-2s} \cdot 2^{2s}. \end{aligned}$$

Ferner

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{e^{c s} 2^{-s} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{2s}{2n}\right) e^{-\frac{2s}{2n}}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Also} \quad \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} &= e^{c 2s} \cdot 2s \cdot \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{2s}{n}\right) e^{-\frac{2s}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2^{2s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(2s)} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2s}, \end{aligned}$$

weil nach Bd. I S. 312 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ist.

Hiernach ist der Übergang von (14) zu (16) mit Hilfe von (13) leicht zu bewerkstelligen und kann dem Leser überlassen bleiben.

Später werden wir noch einen zweiten Beweis für (14) kennenlernen.

§ 4. Eulers Produktdarstellung von $\zeta(s)$.

Multipliziert man $\zeta(s)$ mit 2^{-s} und zieht dies von $\zeta(s)$ ab, so fallen aus der Reihe (1) alle Glieder heraus, bei denen n ein Vielfaches von 2 ist. Es bleibt

$$(18) \quad \zeta(s)(1 - 2^{-s}) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

Multipliziert man dies mit 3^{-s} und zieht es von (18) ab, so fallen alle Glieder heraus, deren n ein Vielfaches von 3 ist. Wiederholt man dies der Reihe nach für alle Primzahlen $\leq p$, so findet man

$$(19) \quad \zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) \dots (1 - p^{-s}) = 1 + \sum_{n > p} \frac{1}{n^s},$$

wo dann die Zahl n nur noch die Zahlen durchläuft, welche zu allen Primzahlen kleiner gleich p relativ prim sind. Um die Konvergenz zu gewährleisten, hat man natürlich $\sigma > 1$ anzunehmen. Sei $\delta > 0$ eine beliebige Zahl, so haben wir für $\sigma \geq 1 + \delta$ gleichmäßige Konvergenz. Nun wird

$$\left| \sum_{n > p} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n > p} \frac{1}{n^{1+\delta}},$$

und das strebt gegen Null für $p \rightarrow \infty$. Daher ist das Produkt

$$\prod (1 - p^{-s})$$

gleichmäßig konvergent und

$$(20) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod (1 - p^{-s})$$

erstreckt über alle Primzahlen p gilt für alle $\sigma > 1$.

Das ist Eulers Produktdarstellung.

§ 5. Eine Abschätzung von $\zeta(s)$.

Auf Grund der Funktionalgleichung (14) kann man eine schärfere Abschätzung von $\zeta(s)$ für $s = \sigma + it$ und große t gewinnen. Zunächst nimmt man dem § 1, daß für $\sigma > 1$

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \quad \text{für } \sigma \geq 1 + \delta, \delta > 0,$$

daß also $|\zeta(s)|$ in der Halbebene $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$ beschränkt ist. Die Produktdarstellung (20) des § 4 lehrt weiter, daß

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq \prod \left(1 + \frac{1}{p^{1+\delta}} \right), \quad \text{für } \sigma \geq 1 + \delta, \delta > 0.$$

Daher bleibt $|\xi(s)|$ in der Halbebene $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$ zwischen endlichen von Null verschiedenen Schranken.

Die Riemannsche Funktionalgleichung erlaubt es nun, eine analoge Abschätzung für die Halbebene $\sigma < 0$ und große t zu gewinnen. Die Stirling'sche Formel von Bd. I, S. 313 liefert

$$|\Gamma(\sigma + it)| = e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} (1 + o(1)),$$

wo $o(1) \rightarrow 0$ strebt für $|t| \rightarrow \infty$ und zwar gleichmäßig für jedes endliche Intervall der σ . Daher folgt aus (14) in Verbindung mit dem gerade über $\xi(s)$ gewonnenen

$$|\xi(1-s)| = 2(2\pi)^{-\sigma} e^{\frac{\pi}{2}|t|} (1 + o(1)) e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} (1 + o(1)) h(\delta),$$

wo $h(\delta)$ eine Funktion bedeutet, die für $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$ zwischen endlichen positiven Schranken bleibt. Daher ist

$$|\xi(1-s)| = |t|^{a-\frac{1}{2}} h(\delta),$$

wo $h(\delta)$ jetzt eine Funktion bedeutet, die für jedes endliche Intervall der σ aus $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$ und genügend große $|t|$ gleichmäßig zwischen endlichen positiven Schranken bleibt. Ersetzen wir $1-s$ durch s , so wird

$$|\xi(s)| = |t|^{\frac{1}{2}-\sigma} h(\delta), \quad \sigma \leq -\delta, \quad \delta > 0,$$

wo $h(\delta)$ für jedes endliche Intervall aus $\sigma \leq -\delta$, $\delta > 0$ und genügend große $|t|$ zwischen endlichen positiven Schranken bleibt. Hieraus kann man nun auch eine Abschätzung in dem noch unberücksichtigten kritischen Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ gewinnen.

Es seien $\sigma_0 = -\delta$ und $\sigma_1 = 1 + \delta$, $\delta > 0$ zwei passend gewählte Zahlen. Aus § 2 wissen wir bisher nur, daß in diesem Streifen $|\xi(s)| = O(|t|^\lambda)$ ist. Diese Abschätzung kann jetzt verschärft werden. An den vertikalen Rändern dieses Streifens ist nämlich

$$|\xi(\sigma_0 + it)| = O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma_0})$$

und

$$|\xi(\sigma_1 + it)| = O(|t|^\lambda).$$

Betrachten wir die Funktion

$$(21) \quad \varphi(s) = \left(s - \frac{3}{2}\right)^x \cdot \xi^2(s-2)$$

mit

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}-\sigma_0}{\sigma_1-\sigma_0}, \quad x = \frac{\frac{1}{2}-\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_0} (\sigma_1-2).$$

Jeder ihrer Zweige ist in dem Streifen $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ regulär. Es ist ferner

$$|\varphi(s)| = |t|^\lambda |t|^{\mu(\frac{1}{2}-\sigma)} h(\sigma_0, \sigma_1),$$

wo $h(\sigma_0, \sigma_1)$ im Streifen zwischen endlichen positiven Schranken bleibt. Anders geschrieben ist

$$|\varphi(s)| = |t|^\mu h(\sigma_0, \sigma_1), \quad \text{wo } \mu = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} (\sigma_1 - \sigma).$$

Für $\sigma = \sigma_0$ ist $\mu = \frac{1}{2} - \sigma_0$, für $\sigma = \sigma_1$ ist $\mu = 0$, so daß $\varphi(s)$ an den Rändern des Streifens dasselbe Verhalten zeigt wie $\xi(s)$, während im Inneren sein Wachstum, d. h. μ , linear von $\frac{1}{2} - \sigma_0$ zu 0 abfällt. Die Funktion

$$F(s) = \frac{\xi(s)}{\varphi(s)}$$

ist im Streifen regulär und an den Bändern beschränkt, während im Inneren

$$|F(s)| = O|t|^{2-\mu}$$

ist. Daraus folgt, daß $F(s)$ im ganzen Streifen für große $|t|$ gleichmäßig beschränkt¹⁾ ist, daß also

$$\xi(s) = O|t|^\mu$$

1) Der Beweis dafür, daß eine am Rande eines Streifens $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, $t \geq T > 0$ beschränkte Funktion $F(s)$, für die eine Abschätzung

$$|F(s)| \leq A|t|^\mu, \quad A, \mu \text{ konstant}$$

im Streifen gilt, auch im Streifen beschränkt ist, beweist man ähnlich wie einen analogen Satz auf S. 269/270. Man betrachte

$$f(s) = e^{st} F(s), \quad s > 0.$$

Dann ist $f(s)$ im Streifen regulär, und es ist

$$|f(s)| \leq A|t|^\mu e^{-st}.$$

Daher strebt $f(s)$ für $t \rightarrow \infty$ und $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ gleichmäßig gegen Null. Es ist also für

passeudes t_0 und $t > t_0$ und beliebiges $\eta > 0$

$$|f(s)| < \eta.$$

Wegen $t \geq T > 0$ ist am Rande des Streifens

$$|f(s)| = |F(s)| e^{-st} < |F(s)|.$$

Ist also

$$|F(s)| \leq C$$

am Rande des Streifens, so ist am

$$|f(s)| < C.$$

Nun wähle man einen beliebigen Punkt $s_1 = \sigma_1 + it_1$ des Streifens und $t_0 > t_1$ so, daß $\eta < C$ ist. Dann gehört s_1 einem Rechteck $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, $T \leq t \leq t_0$ an, an dessen Rande $|f(s)| < C$ ist. Daher ist auch in seinem Inneren $|f(s)| < C$. Namentlich ist also

$$|f(s_1)| < C.$$

Daraus folgt

$$|F(s_1)| < C e^{st_1}$$

Da dies aber für jedes $n > 0$ gilt, so ist

$$|F(s_1)| \leq C$$

q. e. d.

in $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ gleichmäßig gilt. Da nun für beliebig gegebenes $\varepsilon > 0$ und passendes $\delta > 0$

$$\mu < \frac{1-\sigma}{2} + \varepsilon$$

gilt, so ist für $0 \leq \sigma \leq 1$ $|\zeta(s)| = O\left\{t^{\frac{1-\sigma}{2} + \varepsilon}\right\}$.

Namentlich ist also für $\sigma = 0$

$$|\zeta(it)| = O\left\{t^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right\}$$

und für $\sigma = 1$

$$|\zeta(1+it)| = O\{t^\nu\}.$$

Die gefundenen Abschätzungen können noch weiter verschärft werden. Man vergl. die Angaben in der Enzyklopädie Bd. II, 3.

§ 6. Über die Nullstellen von $\zeta(s)$.

Die bisherigen Darlegungen geben einigen Aufschluß über die Lage der Nullstellen von $\zeta(s)$. Zunächst lehrt, wie schon bemerkt wurde, Eulers Produktdarstellung (20), daß für $\sigma > 1$ keine Nullstelle von $\zeta(s)$ zu finden ist. Denn $\frac{1}{\zeta(s)}$ ist für $\sigma > 1$ nach jener als gleichmäßig konvergent erkannten Produktdarstellung regulär. Hierauf lehrt die Funktionalgleichung (14), daß auch für $\sigma < 0$ außer den uns schon als Nullstellen bekannten Stellen

$$s = -2, -4 \dots$$

keine Wurzeln von $\zeta(s)$ zu finden sind. Trägt man nämlich in (14) ein s mit negativem Realteil ein, so wird die linke Seite von Null verschieden. Es kann daher $\zeta(s)$ nur an den Stellen verschwinden, wo ein anderer Faktor der rechten Seite unendlich wird. $\Gamma(s)$ hat nun zwar einfache Pole an allen Stellen, wo s einer negativen ganzen Zahl gleich ist, und sonst nirgends. Die an den ungeraden ganzen Zahlen gelegenen Pole werden aber durch den Faktor $\cos \frac{\pi}{2}s$ wieder beseitigt. Es folgt also, daß $\zeta(s)$ für $\sigma < 0$ lediglich an den Stellen $s = -2 - 4$

einfache Nullstellen besitzt. Alle übrigen Nullstellen der Funktion liegen in dem Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$. Die Punkte $s = 0$ und $s = 1$ aber scheiden auch sofort als mögliche Nullstellen aus. Denn bei $s = 1$ liegt der Pol von $\zeta(s)$. Und daß bei $s = 0$ keine Nullstelle liegt, lehrt wieder (14), wenn man darin $s \rightarrow 1$ streben läßt.

Aber auch auf den Begrenzungsgeraden des sogenannten kritischen Streifens $0 < \sigma < 1$ liegen keine Nullstellen von $\zeta(s)$.

Wegen der Funktionalgleichung (14) genügt es, zu beweisen, daß auf $\sigma = 1$ keine Nullstellen liegen.

Man führt den Beweis am besten folgendermaßen. Da bei $s = 1$ ein einfacher Pol liegt, so ist für reelle ε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} = 1.$$

Ferner ist für reelle t , reelle ε und ganze positive k

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Re \varepsilon \frac{\zeta'(1+itk+\varepsilon)}{\zeta(1+itk+\varepsilon)} = \lambda_k$$

nach den bekannten Tatsachen über das logarithmische Residuum eine nichtnegative ganze Zahl, die nur dann von Null verschieden ist, wenn $\zeta(1+itk) = 0$ ist. Sind dann $c_0, c_1, \dots, c_n$ nichtnegative Zahlen, so ist

$$c_0 - \sum_1^n c_k \lambda_k \leq c_0 - c_\varphi < 0,$$

wenn $\lambda_\varphi \neq 0$, und $c_\varphi > c_0$ ist. Andererseits ist nach (20) für $\sigma > 1$

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{1}{n p^{ns}}.$$

Also wird

$$\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{\log p}{p^{n(1+\varepsilon)}}$$

$$\begin{aligned} \Re \frac{\zeta'(1+itk+\varepsilon)}{\zeta(1+itk+\varepsilon)} &= - \Re \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{\log p}{p^{n(1+\varepsilon+itk)}} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{\log p \cdot \cos km\varepsilon \log p}{p^{n(1+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

Also wird

$$c_0 - \sum_1^n c_k \lambda_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{\log p}{p^{n(1+\varepsilon)}} \left(c_0 + \sum_1^n c_k \cos km\varepsilon \log p \right).$$

Nun aber kann man die Zahlen c_i so wählen, daß

$$c_0 + \sum_1^n c_k \cos k\varphi \geq 0$$

wird für alle φ , und zwar so, daß a $c_k \geq 0$ und $c_\varphi > c_0$. Denn man hat z. B.

$$(1 + \alpha \cos \varphi)^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \cos \varphi + \frac{\alpha^2}{2} \cos 2\varphi.$$

Man wähle $\alpha = 1$, dann ist $2\alpha > 1 + \frac{\alpha^2}{2}$. Also $c_0 = \frac{3}{2}$, $c_1 = 2$, $c_2 = \frac{1}{2}$.

Man nehme nun oben $\varrho = 1$ und nehme an, daß $\zeta(1+it) = 0$ ist. Dann ist $\lambda_1 > 0$. Vorhin fanden wir

$$c_0 - \sum_1^n c_k \lambda_k < 0,$$

jetzt aber finden wir

$$c_0 - \sum_1^n c_k \lambda_k \geq 0.$$

Daher kann nie $\zeta(1+it) = 0$ sein.

Wir stellen weiter fest, daß im kritischen Streifen auf der reellen Achse keine Nullstellen liegen. Dazu führt am einfachsten folgender Weg: In (10) ist wegen $|P_1(x)| \leq \frac{1}{2}$ für reelle $s = \sigma > 0$

$$(22) \quad \left| s \int_1^\infty \frac{P_1(x)}{x^{s+1}} dx \right| < \frac{\sigma}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{1}{2}.$$

Da weiter

$$\frac{1}{\sigma-1} < -1 \quad \text{für} \quad 0 < \sigma < 1,$$

so ist

$$\xi(\sigma) < 0 \quad \text{für} \quad 0 < \sigma < 1.$$

Über die Verteilungsdichte, welche die Nullstellen der Funktion $\xi(s)$ allenfalls haben können, kann man der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung Angaben entnehmen. Dazu ist nur eine Abschätzung des absoluten Betrages von $\xi(s)$ nach oben nötig. Diese entnimmt man der Integraldarstellung (6). Man nehme in (6) $s > 1$, $s = \pi e^{i\varphi}$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $\sigma \leq 1$. Dann wird

$$(23) \quad |s^{s-1}| = e^{\log r(\sigma-1) - \varphi t} < e^{\log r(\sigma-1) + \pi |t|} < e^{\pi |t|} < e^{|s|^{1+\eta}}$$

für beliebiges $\eta > 0$, wenn nur $|s|$ reichend groß ist. Daher wird

$$(24) \quad \left| \int_{L_\sigma} \frac{z^{s-1} e^z}{1-e^z} dz \right| < e^{|s|^{1+\eta}} \int_{L_\sigma} \left| \frac{e^z}{1-e^z} \right| |dz| < e^{|s|^{1+\eta}}$$

für beliebiges $n > 0$, wenn nur $|s|$ hinreichend groß ist. Ferner ist nach der Stirlingschen Formel (Bd. I S. 315) für $-\pi + \delta \leq \arg(1-s) \leq \pi + \delta$, $\delta > 0$

$$|F(1-s)| < e^{|s|^{1+\eta}}$$

bei beliebigem $n > 0$ und hinreichend großem $|s|$. Also haben wir — zunächst nur für $\sigma \leq 1$ — bei beliebigem $\varepsilon > 0$ und hinreichend großem $|s|$

$$(25) \quad |\xi(s)| < e^{|s|^{1+\varepsilon}}.$$

Diese Abschätzung gilt aber nicht nur für $\sigma \leq 1$, sondern für alle hinreichend großen $|s|$. Man sieht das am raschesten ein, wenn man in (6) s durch $1-s$ ersetzt und die eben gemachte Abschätzung erneut vornimmt.

Da nun auch für $(s-1)\zeta(s)$ eine Abschätzung-

$$|(s-1)\zeta(s)| < e^{1+s}$$

gelten muß, so ist $(s-1)\zeta(s)$ eine ganze Funktion, deren Ordnung höchstens

Eins ist. Die bei $s = -2n$ gelegenen trivialen Nullstellen kann man in einen Faktor $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ einfassen und daher die Weierstraßsche Produkt-

darstellung² so

$$(26) \quad \zeta(s) = \alpha \frac{1}{s-1} e^{as} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{s}{\rho_r}\right) e^{\frac{s}{\rho_r}},$$

wo das Produkt über alle nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ zu nehmen ist.

Für die Verteilungsdichte dieser Nullstellen ergibt sich, daß

$$(27) \quad \sum \frac{1}{|\rho_r|^{1+\varepsilon}}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert. Die noch unbestimmten Zahlen α und a kann man leicht ausrechnen.

Zunächst ist $\alpha = -\zeta(0)$. Bringt man aber in (14) $T(s)$ auf die rechte Seite und macht dann den Grenzübergang $s \rightarrow 0$, so findet man

$$(28) \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Also ist

$$(29) \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$(26) \text{ liefert weiter } \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = a + 1 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

Nun ist nach Bd. I S. 313

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C + S_1(s-1) + \dots$$

Also

$$(30) \quad \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = a + 1 + \frac{1}{2} C.$$

Andererseits liefert (14)

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log 2\pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{s\pi}{2} + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Nach (11) gilt nun eine Entwicklung

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + \dots$$

Also wird

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + C + \dots$$

Ferner ist

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{s\pi}{2} = -\frac{1}{s-1} + a_1(s-1) + \dots$$

Also wird endlich $-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = -\log 2\pi + \gamma(s-1) \dots$

Also ist für $s = 1$

$$(31) \quad \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi.$$

Aus (30) und (31) folgt endlich

$$(32) \quad a = \log 2\pi - 1 - \frac{1}{2}C.$$

Trägt man die gefundenen Werte in (26) ein, so erhält man endgültig die Produktdarstellung

$$(33) \quad \zeta(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} e^{as} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + i\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

wo a durch (32) erklärt ist, und wo die ρ_r die im Streifen $0 < \sigma < 1$ gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$ sind.

Noch ist freilich unbekannt, ob es überhaupt solche Nullstellen gibt. Unsere bisherigen Betrachtungen enthalten vielmehr nur eine obere Schranke für die Verteilungsdichte, wie dies in der Konvergenz von (27) für jedes $\varepsilon > 0$ zum Ausdruck kommt.

Wir beweisen nun, daß es nichttriviale Nullstellen gibt. Riemann wußte bereits, daß die Zahl $N(T)$ derjenigen nichttrivialen Nullstellen mit positivem Imaginärteil, deren Imaginärteil die Zahl T nicht übertrifft, durch

$$(34) \quad N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

gegeben ist. Dabei ist $O(\log T)$ eine Funktion von T derart, daß

$$\left| \frac{O(\log T)}{\log T} \right|$$

beschränkt ist. Diese Riemannsche Vermutung hat zuerst von Mangoldt bewiesen. Heute erlauben es die neueren funktionentheoretischen Mittel, einen recht einfachen Beweis zu geben. Er rührt von Backlund her und soll im folgenden angegeben werden. Da zu jeder Nullstelle eine konjugiert imaginäre gehört, so gibt diese Formel über die asymptotische Verteilung der nichttrivialen Nullstellen Aufschluß. Namentlich entnimmt man ihr, daß

$$\sum \frac{1}{|\rho_r|} \quad \text{divergiert.}$$

Aus (34) folgt nämlich, daß

$$(35) \quad N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T (1 + o(1)),$$

wo $O(1)$ eine Funktion von T ist, die für $T \rightarrow \infty$ oder, was dasselbe ist, für $N \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Daraus folgt

$$\log N = \log T (1 + o(1)).$$

Also
$$\log T = \log N (1 + o(1)).$$

Somit wegen (35)
$$T = 2\pi \frac{N}{\log N} (1 + o(1)).$$

Setzt man nun $\varrho_n = \varrho'_n + i\varrho''_n$ und ordnet die ϱ_n nach wachsenden Imaginärteilen, so ist

$$\varrho''_n = 2\pi \frac{n}{\log n} (1 + o(1)).$$

Wegen $0 < \varrho'_n < 1$ ist daher auch

$$|\varrho_n| = 2\pi \frac{n}{\log n} (1 + o(1)).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist daher

$$|\varrho_n| < 2\pi \frac{n}{\log n} (1 + \varepsilon)$$

Und daher ist

$$\sum \frac{1}{|\varrho_n|} \text{ divergent.}$$

Ich komme zum Beweis von (34). Die Definition (15) der Funktion $\xi(s)$ lehrt, daß die Menge ihrer Nullstellen mit der Menge der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ identisch ist. Daher ist

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds$$

erstreckt über den Rand des aus Fig. 47 ersichtlichen großen Rechtecks, das zu $\sigma = \frac{1}{2}$ symmetrisch ist. a ist dabei eine beliebige Zahl größer als eins. Da nun einerseits $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$ ist und andererseits (16) gilt, so ist

$$2N(T) = \frac{4}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds$$

erstreckt über den Linienzug abc des Rechtecks. Also

$$N(T) = \frac{1}{\pi i} \int_{(abc)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds.$$

Da aber die linke Seite reell ist, so kommt nur der imaginäre Teil des Integrals, das ist die Änderung des Argumentes von $\xi(s)$ bei der Durchlaufung des Weges in Betracht. Es ist also

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \Im \int_{(abc)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds$$

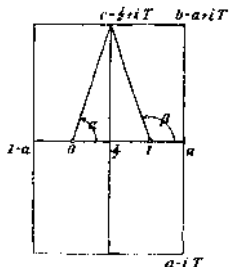


Fig. 47.

Wegen der Definition (15) der Funktion $\xi(s)$ kann man dies Integral in fünf Teilintegrale zerlegen, entsprechend den fünf Faktoren s , $s-1$, $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, $\pi^{-\frac{1}{2}}$, $\xi(s)$ in die man nach (15) $\xi(s)$ zerlegen kann. So erhält man

$$(36) \quad N(T) = \frac{1}{\pi} \Im \int_{(abc)} \frac{ds}{s} + \frac{1}{\pi} \Im \int_{(abc)} \frac{ds}{s-1} - \frac{1}{2\pi} \log \pi \Im \int_{(abc)} ds \\ + \frac{1}{2\pi} \Im \int_{(abc)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} ds + \frac{1}{\pi} \Im \int_{(abc)} \frac{\xi(s)}{\xi(s)} ds.$$

Das erste und das zweite Integral geben die Änderung des Argumentes von $\log s$ und von $\log(s-1)$ bei Durchlaufung von abc an. Das sind aber die Winkel α und β der Fig. 47, deren Summe π ist. Daher ergeben die beiden ersten Summanden zusammen 1. Das dritte Glied liefert

$$- \frac{T}{2\pi} \log \pi$$

Das vierte wird mit Hilfe der Stirlingschen Formel ausgewertet, die wir Bd. I, S. 315 gewonnen haben. Diese lautete

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_0^{\infty} \frac{P_1(x)}{s+x} dx.$$

Jetzt ist es bequem, das Restintegral nach der bei der Herleitung der Eulerschen Summenformel befolgten Methode der partiellen Integration noch umzuformen. So erhält man

$$(37) \quad \log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{12} \frac{1}{s} - \int_0^{\infty} \frac{P_1(x)}{(s+x)^2} dx.$$

Der vierte Summand von (36) gibt nun die $\frac{1}{\pi}$ -fache Änderung an, welche der $\log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ erfährt, wenn s den Weg (abc) durchläuft. Wir denken uns wie bei der Herleitung der Stirlingschen Formel die s -Ebene längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten und wählen wie damals den Zweig des $\log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ der für positive s reell ist. Dann ist jene Änderung weiter nichts als der Wert des Imaginärteiles von $\log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ im Punkte $c = \frac{1}{2} + iT$. Hierfür liefern die beiden ersten Summanden von $\log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ nach (37)

$$\frac{T}{2} \log \left| \frac{1}{4} + i \frac{T}{2} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} (-2T) - \frac{T}{2} \\ = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{T}{4} \log \left(1 + \frac{1}{4T^2}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} (-2T) \\ = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(\log T).$$

Sammeln wir alle Beiträge, die wir bis jetzt zu $N(T)$ erhalten haben, und beachten, daß auch $1 = O(\log T)$ ist, so erhalten wir im ganzen

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T).$$

Aus der Beschränktheit von $P_1(x)$ folgt sofort, daß die beiden letzten Posten von (37) einen Betrag

$$O\left(\frac{1}{T}\right) = O(\log T)$$

liefern. Zum Beweis von (34) ist jetzt also noch zu zeigen, daß auch der letzte Posten von (36) einen Betrag der Größenordnung $O(\log T)$ liefert. In diesem Nachweis, daß

$$\frac{1}{\pi} \Im \int_{(abc)} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} ds = O(\log T)$$

ist, liegt nun die eigentliche Schwierigkeit der Beweisführung. Sie wird mit Hilfe der Jensenschen Formel überwunden. Der noch zu bestimmende Posten gibt $\frac{1}{\pi}$ mal die Änderung des Argumentes von $\zeta(s)$ bei Durchlaufung des Streckenzuges (abc) an. Diese Argumentänderung kann man mit den Nullstellen des Realteiles von $\zeta(s)$ in Zusammenhang bringen. Dieser verschwindet nämlich dann und nur dann, wenn das Argument von $\zeta(s)$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Im Punkte a ist das Argument von $\zeta(s)$ Null. Die erste Nullstelle tritt ein, wenn das Argument $\pm \frac{\pi}{2}$ geworden ist, und zwischen je zwei Nullstellen variiert das Argument um 0 oder um $\pm \pi$. Daher ist die Zahl n der Nullstellen von $\Re \zeta(s)$ auf abc an folgende Ungleichung gebunden

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{(abc)} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} ds \right| < n + \frac{1}{2}.$$

Es kommt also nun nur darauf an eine Abschätzung der Zahl n nach oben zu finden. Dazu wählen wir zunächst a so, daß auf $\sigma = \alpha$, d. h. auf der Strecke ab keine Nullstellen von $\Re \zeta(s)$ liegen. Dazu genügt es $\alpha > 2$ zu nehmen. Denn dann ist

$$(38) \quad \Re \zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \log nt)}{n^s} > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} > \frac{1}{3}.$$

Es bleibt also die Zahl der Nullstellen von $\Re \zeta(s)$ auf bc abzuschätzen. Diese Zahl stimmt überein mit der Zahl der reellen zwischen $\frac{1}{2}$ und 2 gelegenen Nullstellen der Funktion

$$(39) \quad f(s) = \frac{1}{2} (\zeta(s + iT) + \zeta(s - iT)),$$

da für reelle $s = \sigma$ diese Funktion gleich

$$\Re \zeta(\sigma + iT)$$

ist. Diese Zahl n ist nicht größer als die Zahl ν der Nullstellen von (39) im Kreise

$$|s - a| \leq a - \frac{1}{2}.$$

Diese Zahl ν schätzen wir mit Hilfe der Jensenschen Formel ab, die wir auf den Kreis $|s - a| \leq a$ anwenden. T wählen wir so groß, daß die Punkte $1 + iT$ und $1 - iT$ außerhalb dieses Kreises liegen. Dann ist darin $f(s)$ regulär. Sind dann $a_1, \dots, a_\nu$ sämtliche Nullstellen von $f(s)$ in $|s - a| \leq a - \frac{1}{2}$, so liefert wegen $f(a) \neq 0$ die Jensensche Formel (vgl. S. 122ff.)

$$\log \frac{|f(a)| a^\nu}{|a_1 - a| \dots |a_\nu - a|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(a + ae^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Setzen wir

$$M = \max |f(a + ae^{i\vartheta})|,$$

so bekommen wir die Abschätzung

$$\left(\frac{a}{a - \frac{1}{2}} \right)^\nu < \frac{M}{|f(a)|}.$$

d. h.

$$\nu < \frac{\log \frac{M}{|f(a)|}}{\log \frac{a}{a - \frac{1}{2}}}.$$

Wir wollten $a = 2$ nehmen. Dann ist nach (38)

$$|f(a)| > \frac{1}{8}.$$

Also

$$\nu < \frac{\log 8M}{\log \frac{4}{3}}.$$

Nun ist aber nach (39)

$$M < \max_{\left(\frac{0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, \right.} |\zeta(s)|. \\ \left. \left(\frac{1}{T-2} \leq t \leq T+2 \right) \right)} |\zeta(s)|.$$

Nach S. 341 aber ist

$$\zeta(s) = O(t^2).$$

Daher ist

$$\nu = O(\log T).$$

Daher ist auch

$$n = O(\log T),$$

und daher ist

$$\frac{1}{\pi} \Im \int_{a-bc}^{\zeta(s)} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} ds = O(\log T),$$

und damit ist (34) bewiesen.

Riemann hat nun weiter die kühne Vermutung gehegt, daß alle nicht-trivialen Nullstellen von $\xi(s)$ den Realteil $\frac{1}{2}$ hätten. Was ihn zu dieser Vermutung führte, ist nicht bekannt. Heute kann man eine gewisse Stütze für diese noch immer unbewiesene Vermutung darin sehen, daß numerische Rechnungen ergeben haben, daß sämtliche Nullstellen, deren Imaginärteil kleiner als 200 ist, tatsächlich den Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Weiter hat Hardy zeigen können, daß es unendlich viele Nullstellen mit dem Realteil $\frac{1}{2}$ gibt. Diesen Hardyschen Satz zu beweisen, ist das Hauptziel der nun folgenden Paragraphen.

§ 7. Eine Funktionalgleichung für die elliptische Thetafunktion.

Mit der in Bd. I untersuchten σ -Funktion hängt eng die Funktion

$$\vartheta_2(0, e^{-\pi x}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x}$$

zusammen. Wir setzen kurz

$$(40) \quad \vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$$

und betrachten $\omega(x)$ für $\Re x > 0$. Für jedes solche endliche x -Intervall konvergiert die Reihe gleichmäßig. Wir wollen beweisen, daß

$$(41) \quad \vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für } \Re(x) > 0 \quad \text{ist.}$$

Setzt man

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} = \frac{\vartheta(x) - 1}{2},$$

also $\vartheta(x) = 1 + 2\omega(x)$, so kann man dafür auch schreiben

$$(41') \quad 1 + 2\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2\omega\left(\frac{1}{x}\right) \right) \quad \text{für } \Re(x) > 0.$$

Hier ist $\sqrt{x} > 0$ für $x > 0$ zu nehmen. Es genügt, aus Gründen des analytischen Charakters, (41) für $x > 0$ zu beweisen.

Wir stützen den Beweis auf eine von Dirichlet herrührende Summenformel, die wir nun zunächst ableiten wollen.

Es sei $f(x)$ für alle reellen x stetig und mit einer ersten Ableitung versehen. Dann ist für ganze a

$$(42) \quad \frac{1}{2} f(-a) + \frac{1}{2} f(a) + \sum_{\nu=-a+1}^{a-1} f(\nu) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a f(y) \cos 2\nu\pi y \, dy.$$

Zunächst ist nämlich (vgl. z. B. meinen Leitfaden der Integralrechnung

S. 87)

$$\int_{-a}^a \sum_{v=-N}^N f(y) \cos 2\pi v y dy = \int_{-a}^a f(y) \frac{\sin(2N+1)\pi y}{\sin \pi y} dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}} + \int_{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{a}{2}} + \sum_{v=-a+1}^{a-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

Nun setze man im ersten Integral $y = \xi - a$, im zweiten $y = \xi + a$ und unter dem Summenzeichen $y = \xi + v$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sum_{v=-N}^N f(y) \cos 2\pi v y dy &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\xi - a) \frac{\sin(2N+1)\pi \xi}{\sin \pi \xi} d\xi \\ &+ \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(\xi + a) \frac{\sin(2N+1)\pi \xi}{\sin \pi \xi} d\xi + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2N+1)\pi \xi}{\sin \pi \xi} \sum_{v=-a+1}^{a-1} f(\xi + v) d\xi. \end{aligned}$$

Das letzte Integral zerlege man noch im $\int_{-\frac{1}{2}}^0 + \int_0^{\frac{1}{2}}$ und mache dann links und rechts den Grenzübergang zu $N \rightarrow \infty$, wozu man z. B. meinen Leitfaden der Integralrechnung S. 94 vergleiche. Dann erhält man (42).

(41) beweist man nun mit Hilfe von (42), das man für $f(y) = e^{-y^2 \pi x}$, $x > 0$ verwendet. So erhält man:

$$\begin{aligned} (42') \quad e^{-a^2 \pi x} + \sum_{v=-a+1}^{a-1} e^{-v^2 \pi x} &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a e^{-v^2 \pi x} \cos 2\pi v y dy \\ &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-a} - \int_a^{\infty} \right\}. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration findet man bei Berücksichtigung der Ganz-
zahligkeit von a :

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_a^{\infty} e^{-v^2 \pi x} \cos 2\pi v y dy = \sum_{(v \neq 0)} \int_a^{\infty} \frac{\sin 2\pi v y}{2\pi v} e^{-v^2 \pi x} \cdot 2\pi x y dy + \int_a^{\infty} e^{-v^2 \pi x} dy$$

Nochmalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \sum_{(v \neq 0)} \frac{e^{-a^2 \pi x} 2\pi a x}{(2\pi v)^2} + \sum_{(v \neq 0)} \int_a^{\infty} \frac{\cos 2\pi v y}{(2\pi v)^2} e^{-v^2 \pi x} (-2\pi x y)^2 + 2\pi x dy \\ + \int_a^{\infty} e^{-v^2 \pi x} dy. \end{aligned}$$

Dies ist dem absoluten Betrag nach kleiner als

$$\left(2\pi ax e^{-a^2 \pi x} + \int_a^\infty e^{-v^2 \pi x} (2\pi x + 4\pi^2 x^2 y^2) dy \right) \sum_{\substack{v=0 \\ (v \neq 0)}}^{\infty} \frac{1}{(2\pi v)^2} + \int_a^\infty e^{-v^2 \pi x} dy$$

Hier sieht man nun ohne weiteres, daß

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_a^\infty e^{-v^2 \pi x} \cos 2\pi v y dy = 0$$

ist. Ebenso beweist man

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{-a} e^{-v^2 \pi x} \cos 2\pi v y dy = 0.$$

Durch Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ erhält man daher aus (42')

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-v^2 \pi x} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 \pi x} \cos 2\pi v y dy = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 \pi x - i 2\pi v y} dy.$$

Die letzte Umformung rechtfertigt sich dadurch, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 \pi x} \sin 2\pi v y dy = 0$$

ist. Der Integrand ist ja eine ungerade Funktion von y . Weiter wird

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-v^2 \pi x} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi v^2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x \left(v + \frac{iy}{x}\right)^2} dy.$$

Nun setze man

$$z = \sqrt{\pi x} \left(y + \frac{iy}{x} \right).$$

$$\text{Dann wird } \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-v^2 \pi x} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi v^2}{x}} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi v^2}{x}}.$$

Denn es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

(Vgl. z. B. meinen Leitfaden der Integralrechnung S. 123.) Damit ist (41) bewiesen.

Wir ziehen aus (41) noch eine für später nützliche Folgerung. Wir setzen

$$x = e^{\alpha i} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

und zeigen, daß

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\vartheta(e^{\alpha i})) = 0$$

ist. Nach (41') ist nämlich für $x = e^{\frac{\pi i}{2} + z}$, wo $z = re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi (e^{\frac{\pi i}{2} + z})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi z} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi z} \\ (41'') &= - \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{4z}} = - \frac{2}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{z}} + \frac{2}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{4z}} \end{aligned}$$

Wenn nun $x \rightarrow \frac{\pi i}{2}$ rückt und dabei auf $x = e^{\alpha i}$ bleibt, so gehört zu einem jeden $\delta > 0$ ein $r(\delta)$ derart, daß für $|z| < r$, z in dem Winkelraum bleibt, in

$$\cos \varphi > \frac{1}{\delta}$$

ist. Daher ist für $|z| < r(\delta)$

$$\begin{aligned} |\vartheta(e^{\alpha i})| &< \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{r}} + e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{4r}} \right) \right\} < \frac{2}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{4r}} \\ &< \frac{2}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{4r}} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{4r}} < 2e^{-\frac{\pi \delta}{4r}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{4r}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $r \rightarrow 0$.

Ganz analog sieht man auch ein, daß für die k -te Ableitung $\vartheta^{(k)}(x)$ von $\vartheta(x)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \vartheta^{(k)}(e^{\alpha i}) = 0$$

gilt. Dazu ist nun zu zeigen, daß die k -te Ableitung von

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi (z + z)}$$

für $z \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert. Diese k -te Ableitung ist aber nach (41'')

$$f_k = - \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} P_n \left(\frac{1}{z} \right) e^{-\frac{n^2 \pi}{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \left(\frac{1}{z} \right) e^{-\frac{n^2 \pi}{4z}},$$

wo die P_n und Q_n passende Polynome in $\frac{1}{z}$ sind. Daher ist für $\cos \varphi > 0$, $|z| < r(\delta)$ wieder

$$|f_k| < \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\frac{1}{r} \right) e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left(\frac{1}{r} \right) e^{-\frac{n^2 \pi \delta}{4r}}.$$

Dabei sind p_n und q_n aus P_n und Q_n gewonnen, indem man z durch r und die Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge ersetzt. Weiter wird

$$|f_k| < \frac{1}{V^r} e^{-\frac{\pi d}{2r}} \sum_1^{\infty} p_n \left(\frac{1}{r}\right) e^{-\frac{n^2 \pi d}{2r}} + \frac{1}{V^r} e^{-\frac{\pi d}{8r}} \sum_1^{\infty} q_n \left(\frac{1}{r}\right) e^{-\frac{n^2 \pi d}{8r}}$$

und das strebt für $r \rightarrow \infty$ gegen Null. $x=i$ ist also jedenfalls eine singuläre Stelle von $\vartheta(x)$ (wofür $\vartheta(x)$ nicht ein Polynom ist).

§ 8. Neuer Beweis der Riemannschen Funktionalgleichung.

Aus (41) kann man einen neuen gleichfalls von Riemann herrührenden Beweis der Funktionalgleichung (14) gewinnen. Setzt man nämlich¹⁾

$$\eta(s) = \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}},$$

so kann man sie in der Form

$$\eta(s) = \eta(1-s)$$

schreiben. Um sie in dieser Form zu beweisen, geht man von der Integraldarstellung der Gammafunktion aus. Diese liefert

$$\frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Daraus folgt für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} &= \sum_1^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_1^k \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \sum_1^k e^{-n^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx. \end{aligned}$$

Man wird also untersuchen, ob etwa

$$(43) \quad \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^{\infty} \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \quad (\sigma > 1)$$

1) $\pi^{-\frac{s}{2}} = e^{-\frac{s}{2} \log \pi}$, $\log \pi$ reell.

gilt. ¹⁾ IN der Tat ist das hier rechtsstehende Integral für $\sigma > 1$ konvergent. Denn für $x \rightarrow \infty$ ist nach (40) $\omega(x) = O(e^{-\pi^2 x})$.

Für $x \rightarrow 0$ aber ist nach (41')

$$\omega(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Um nun (43) zu beweisen, setze ich

$$\omega_k(x) = \sum_{k+1}^{\infty} e^{-\pi^2 k x}$$

und betrachte
$$\Omega_k(x) = \int_0^x \omega_k(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Um zu zeigen, daß für jedes s mit $\sigma > 1$ und $k \rightarrow \infty$

$$\Omega_k(x) \rightarrow 0$$

gilt, führe ich eine Zahl $\delta > 0$ ein und schreibe

$$\Omega_k(x) = \int_0^{\delta} \omega_k(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_{\delta}^{\infty} \omega_k(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Nun ist
$$\int_0^{\delta} \omega_k(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx < \int_0^{\delta} \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Nach (41) ist
$$\omega(x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = O(1).$$

Daher kann man δ so wählen, daß das erste Integral bei festem s mit $\sigma > 1$ einen Betrag kleiner als $\frac{1}{2}$ hat. Dies δ halten wir weiter fest und betrachten nun das zweite Integral. Hier ist dann

$$\begin{aligned} \omega_k(x) &< e^{-(k+1)^2 \pi x} \left(1 + \sum_{n>k+1} e^{-(n^2 - (k+1)^2) \pi x}\right) \\ &< e^{-(k+1)^2 \pi x} \cdot A, \end{aligned}$$

wo A von K und x nicht abhängt. Daher kann nun durch hinreichend große Wahl von k der Betrag des zweiten Integrals $< \frac{1}{2}$ gemacht werden.

1) $x^{\frac{s}{2}-1} = e^{\left(\frac{s}{2}-1\right)\log x}$, $\log x$ reell. Es wurde dabei wieder

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k z} = \frac{\vartheta(z)}{2} \quad \text{gesetzt.}$$

Damit ist (43) bewiesen. Dafür schreiben wir

$$\begin{aligned}
 \eta(s) &= \int_1^{\infty} \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\
 &= \int_1^{\infty} \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^{\infty} \omega\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{s}{2}-1} dx \\
 &= \int_1^{\infty} \omega(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sqrt{x} + \sqrt{x} \omega(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-\frac{s}{2}-1} dx \\
 (44) \quad &= \int_1^{\infty} \omega(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right) dx + \frac{1}{s(s-1)}.
 \end{aligned}$$

Und hier liest man $\eta(s) = \eta(1-s)$ sofort ab.

Aus (44) folgt nach S. 343

$$\begin{aligned}
 \xi(s) &= \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{\infty} \omega(x) \left[e^{\left(\frac{s}{2}-1\right) \log x} + e^{\left(\frac{1-s}{2}-1\right) \log x} \right] dx + \frac{1}{2} \quad \text{und} \\
 \Xi(s) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + s^2 \right) \int_1^{\infty} \omega(x) \left[e^{\left(-\frac{3}{4} + \frac{s}{2}\right) \log x} + e^{\left(-\frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right) \log x} \right] dx + \frac{1}{2} \\
 &= -\left(\frac{1}{4} + s^2 \right) \int_1^{\infty} \omega(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{s}{2} \log x\right) dx + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Setzt man $x = e^{4t}$, so kommt

$$\begin{aligned}
 (45) \quad \Xi\left(\frac{s}{2}\right) &= -(1+s^2) \int_0^{\infty} \omega(e^{4t}) e^t \cos(st) dt + \frac{1}{2} \\
 &= -(1+s^2) \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos(st) dt + \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

wenn, man

$$(46) \quad \Phi(t) = \omega(e^{4t}) e^t$$

setzt. Wir formen (45) durch zweimalige partielle Integration um. Aus (41) folgt

$$e^t + 2\Phi(t) = e^{-t} + 2\Phi(-t).$$

Setzt man $\psi(t) = e^t + 2\Phi(t)$, so ist $\psi(t) = \psi(-t)$. D. h. es ist $\psi'(0) = 0$. Also ist $0 = 1 + 2\Phi'(0)$. Also $\Phi'(0) = -\frac{1}{2}$. Somit liefert mit Rücksicht auf $\omega(x) = O(e^{-x^2})$ durch zweimalige partielle Integration

$$s^2 \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos(st) dt = \frac{1}{2} - \int_0^{\infty} \Phi''(t) \cos st dt.$$

Somit wird

$$(47) \quad \Xi\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^{\infty} [\Phi''(t) - \Phi(t)] \cos(xt) dt.$$

Diese Formel bleibt offenbar richtig, wenn man dann $\Phi(t)$ nicht durch (46) erklärt, sondern wenn man setzt

$$(48) \quad \Phi(t) = e^t \omega(e^{4t}) + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^t \vartheta(e^{4t}).$$

Dann ist, wie schon bemerkt, $\Phi(t) = \Phi(-t)$. Bei $t = 0$ ist $\Phi(t)$ regulär und hat dort eine Entwicklung

$$\Phi(t) = c_0 + c_2 t^2 + c_4 t^4 + \dots$$

Aus (40) folgt weiter, daß für alle Ableitungen $\Phi^{(n)}(t)$ von $\Phi(t)$ stets

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n \Phi^{(n)}(t) = 0 \quad \text{gilt.}$$

§ 9. Die Fouriersche Integralformel.

Wir knüpfen an eine aus der Theorie der Fourierschen Reihen geläufige Formel an:¹⁾

$$F'(a, b) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(\xi) \frac{e^{i\mu\xi} - e^{-i\mu\xi}}{i\xi} d\xi,$$

wo

$$\begin{aligned} F'(a, b) &= 0, & \text{wenn } ab > 0, \\ &= f(0), & \text{wenn } ab < 0, \\ &= \frac{f(0)}{2}, & \text{wenn } ab = 0 \end{aligned}$$

und wo $f(x)$ eine stetige differenzierbare (reelle) Funktion bedeuten möge.

Wegen

$$\frac{e^{i\mu\xi} - e^{-i\mu\xi}}{i\xi} = \int_{-\mu}^{\mu} e^{i\alpha\xi} d\alpha$$

ist also auch

$$\begin{aligned} F'(a, b) &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(\xi) d\xi \int_{-\mu}^{\mu} e^{i\alpha\xi} d\alpha \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{\mu} d\alpha \int_a^b f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_a^b f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi. \end{aligned}$$

1) Vgl. z. B. die Herleitung einer hierin enthaltenen Formel in meinem Leitfaden der Integralrechnung, S. 94 oder Szegő in Mises-Frank, Differential- und Integralgleichungen der Physik, 2. Aufl., S. 206 ff., wo sich die im Text angegebene Herleitung von (44) findet.

Ist dann zunächst $f(x)$ außerhalb des Intervalles ab Null, so hat man

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi.$$

Wendet man dies insbesondere auf eine Funktion $f(x + \xi)$ an, so wird

$$(49) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} d\xi,$$

wo $f(x)$ eine stetige abteilungsweise monotone Funktion ist, die außerhalb eines gewissen endlichen Intervalles verschwindet.

Die Formel (49) behält aber auch ihre Gültigkeit, wenn für $f(\xi)$ das

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$$

konvergiert und $f(\xi)$ in jedem endlichen Intervall abteilungsweise monoton ist.

Zum Beweise ist nur zu zeigen, daß

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^a f(x) e^{i\alpha x} dx = 0$$

ist. Denn daraus folgt

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^a f(x) e^{i\alpha(x-\xi)} dx = 0$$

und

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^a f(x) e^{i\alpha(x-\xi)} dx = 0.$$

Nun ist wegen der Konvergenz von $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$

$$\begin{aligned} & \int_{-\mu}^{\mu} d\alpha \int_0^a f(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= \int_0^a dx f(x) \int_{-\mu}^{\mu} e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \int_0^a f(x) dx \frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{ix}. \end{aligned}$$

Und dies ist dem Betrag nach kleiner als

$$\frac{2}{\omega} \int_{\omega}^{\infty} |f(x)| dx$$

und strebt daher für $\omega \rightarrow \infty$ gegen Null.

Aus (49) entnimmt man

$$(50) \quad f(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta) \cos \alpha(\beta - \gamma) d\beta,$$

was die *Fouriersche Integralformel* genannt wird, und

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta) \sin \alpha(\beta - \gamma) d\beta.$$

§ 10. Anwendung der Fourierschen Integralformel.

Wenn also $f(x)$ eine für $-\infty < x < +\infty$ stetige, differenzierbare, von $-\infty$ bis $+\infty$ absolut integrierbare Funktion bedeutet, so ist

$$(47) \quad f(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-i\alpha\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{i\alpha\beta} d\beta.$$

Setzt man daher

$$(51) \quad g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{i\alpha\beta} d\beta,$$

so ist

$$(52) \quad f(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{-i\alpha\gamma} d\alpha,$$

wenn $f(\beta)$ irgendeine stetige differenzierbare, von $-\infty$ bis $+\infty$ absolut integrierbare Funktion bedeutet.

Wenden wir unser Ergebnis insbesondere auf (47) an. Setzen wir $\Psi(t) = \frac{1}{2}(\Phi'' - \Phi)$, so ist auch $\Psi(-t) = \Psi(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \Psi(t) = 0$.

Wegen $\Psi(-t) = \Psi(t)$ kann man für (47) auch schreiben

$$(53) \quad \Xi\left(\frac{t}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) e^{it} dt.$$

Also folgt jetzt, daß auch

$$(54) \quad \Psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) e^{-itz} dz \quad \text{ist.}$$

§ 11. Hardys Satz über die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$.

Auf Grund der Relation (52) hat Hardy zeigen können, daß $\zeta(s)$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen besitzt. Er hat damit einen wesentlichen Beitrag zur Erläuterung der Riemannschen Vermutung geliefert. Denn diese gibt an, daß alle nicht bei $s = -2n$ (n ganz und positiv) gelegenen Nullstellen von $\zeta(s)$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen.

Ich gehe zum Beweis des Hardyschen Satzes über, den ich in einer von Herrn Pòlya¹⁾ herrührenden vereinfachten Form gebe.

Offenbar ist nur zu zeigen, daß die auf S. 342 eingeführte Funktion $\mathfrak{A}(z)$ unendlich viele reelle Nullstellen besitzt. Der Beweis schließt sich an die Integraldarstellung (4V), (48) von S. 364 an.

Aus (53) folgt durch partielle Integration wegen $t^n \Psi^{(n)}(t) \rightarrow 0$, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n F(z) = 0$$

ist für alle $n \geq 0$. Daher kann man (54) nach t differenzieren und findet

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}\left(\frac{z}{2}\right) e^{-izt} (-iz)^n dz, \\ (-1)^n \Psi^{(2n)}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}\left(\frac{z}{2}\right) z^{2n} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathfrak{A}\left(\frac{z}{2}\right) z^{2n} dz. \end{aligned}$$

Setzt man

$$(2n)! c_n = (-1)^n \Psi^{(2n)}(0),$$

so ist

$$\Psi(t) = c_0 - c_1 t^2 + c_2 t^4 - \dots$$

Der Konvergenzkreis dieser Reihe ist mindestens dem von $\vartheta(e^{4t})$ gleich. Da $\vartheta(x)$ für $\Re(x) > 0$ regulär ist, so ist der Konvergenzradius der Reihe mindestens $\frac{\pi}{8}$. Ein singulärer Punkt liegt aber tatsächlich bei $t = \frac{\pi i}{8}$, wenn $x = i$ für $\vartheta(x)$ singulär ist. Des weiteren streben die Ableitungen von $\Psi(t)$ für $t \rightarrow \frac{\pi i}{8}$ sämtlich gegen Null. Wegen des S. 360 festgestellten Verhaltens von $\vartheta(x)$ und seinen Ableitungen für $x \rightarrow i$ strebt nämlich $\Psi(t)$ und seine sämtlichen Ableitungen für $t \rightarrow \frac{\pi i}{8}$ gegen Null.

Falls nun $\mathfrak{A}\left(\frac{z}{2}\right)$ nur endlich viele reelle Nullstellen hat, so sind die c_n von einem gewissen n an von Null verschieden und haben alle das gleiche Vorzeichen. Ist nämlich z. B. $\Psi\left(\frac{z}{2}\right) > 0$ für $z \geq Z$, so ist für hinreichend große n

$$\int_0^Z \left| \mathfrak{A}\left(\frac{z}{2}\right) \right| z^{2n} dz < \int_Z^{\infty} \mathfrak{A}\left(\frac{z}{2}\right) z^{2n} dz.$$

1) Vgl. Pòlya, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selskab. VII, 17 (1927).

Also ist auch
$$\left| \int_0^{\frac{z}{2}} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz \right| < \int_{\frac{z}{2}}^{\infty} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz$$

und
$$\int_0^{\frac{z}{2}} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz + \left| \int_0^{\frac{z}{2}} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz \right| < \int_0^{\frac{z}{2}} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz.$$

Wegen
$$\left| \int_0^{\frac{z}{2}} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz \right| \leq \left| \int_0^{\frac{z}{2}} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz \right|$$

folgt also
$$\int_0^{\frac{z}{2}} \Xi\left(\frac{z}{2}\right) s^{1^n} dz < 0$$

für hinreichend große n .

Da somit die Koeffizienten von

$$\Psi(t) = c_0 - c_1 t^2 + c_2 t^4 \dots$$

von einem gewissen n an, alle von Null verschieden sind, so ist $\Psi(t)$ kein Polynom, und daher ist nach S. 361 die Stelle $t = \frac{\pi i}{8}$ für $\Psi(t)$ singulär. Da aber die Koeffizienten von

$$\Psi(it) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

alle von einem gewissen n an positiv sind, so müßten die Ableitungen $\Psi^{(n)}(it)$ für genügend großes n für $it \rightarrow i \cdot \frac{\pi}{2}$ monoton zunehmen. Nach S. 365 streben sie aber alle gegen Null. Die Annahme endlich vieler reeller Nullstellen führt also zu einem Widerspruch. Damit ist Hardys Satz bewiesen.

Man hat den eben bewiesenen Satz auch zu einer Abschätzung der Anzahl der Nullstellen ausbauen können, die $\zeta(s)$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$, $t < T$ besitzt. Sie ist für passendes k größer als kT , so daß man der Anzahl

$$N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$$

der Nullstellen im kritischen Streifen mit diesem Ergebnis von Hardy schon recht nahe gekommen ist. Wegen näherer Angaben und aller weiteren Orientierung ziehe man den Enzyklopädieartikel von Bohr-Cramér (Bd. 11,3.) zu Rate. Für ein tieferes Eindringen wird man auch gerne zu E. C. Titchmarsh, *The Zeta-Funktion of Riemann* greifen (Cambridge tracts no. 26) Cambridge 1930.

Sachregister.

- Allgemeines Uniformisierungsprinzip 214
 Asymptotischer Wert 277
 Automorphe Funktion 196

 Dirichletsche Summenformel 357
 Drehungssatz 81
 Dreikreisesatz 126

 Elliptische Modulfunktion 40, 84
 Elliptische Modulgruppe 40, 90
 Elliptische Thetafunktion 357
 Erreichbarer Randpunkt 17
 Eulers Produktdarstellung 345

 Fabryscher Lückensatz 303
 Flächensatz 72
 Formel von Jensen 122
 Fouriersche Integralformel 364
 Fundamentalebene 46

 Geschlecht 196
 Greensche Formel 57
 Greensche Funktion 57
 Grenzexponent 242

 Hadamardsches Kriterium 309
 Hadamardscher Lückensatz 291
 Hadamardscher Multiplikationssatz 300
 Hardys Satz 367
 Hauptsatz der Uniformisierung 160
 Hauptstern 301
 Heftungsaufgaben 162, 165

 Invarianz des Geschlechtes 208

 Jensen-Nevanlinnasche Formel 122
 Jensensche Ungleichung 109
 Julias Vertiefung des Picardschen Satzes 226

 Kanonisches Produkt 246
 Kanonische Zelle 187
 Kleinsche Uniformisierungssätze 212
 ———Bieberbach, Funktionentheorie II. 2. Aufl.
- Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen 138
 Koeffizientenproblem der ganzen Funktionen 235
 Kreisgeometrische Maßbestimmung 47, 54
 Kritischer Streifen 348

 Landauscher Satz 217
 Lindelöfsches Prinzip 106

 Maximaltypus 235
 Minimaltypus 235
 Mittag-Lefflersche E_n -Funktionen 272

 Nichttriviale Nullstellen 352
 Normalbereich 47
 Normaltypus 235

 Ordnung 234

 Picardscher Satz 215, 225, 249
 Poissonsches Integral 59
 Polygone 36
 Potentialfunktionen 56
 Primteiler des Randes 29
 Prinzip des Maximums 60
 Produktdarstellung der ganzen Funktionen 243

 Randwertaufgabe 63, 67
 Ränderzuordnung 17
 Regelmäßiges Wachstum 239
 Riemannscher Abbildungssatz 6
 Riemannsche Funktionalgleichung 342, 361
 Riemanns Vermutung 361
 Riemannsche Zetafunktion 336
 Rundungsschranke 81

 Satz von Bloch 230
 ———Carlson 138
 ———Eisenstein 332
 ———Fabry 307

- Satz von Fatou 147
- Hadamard 321
- Harnack 66
- Julia 112
 - Mandelbrojt 326
 - Milloux 134
- Ostrowski 292
- Sätze von Phragmén-Lindelöf 128 ff., 270
- Satz von Pòlya und Carlson 327
 - Pringsheim 289
 - Priwaloff 168
 - Szegő 315
 - Wigert 297
 - Wimau 269
- Schlicht 6
- Schottkyscher Satz 219
- Schwarzsches Lemma 2, 103
- Stern 82
- Überkonvergenz 296
- Überlagerungsfliiche 193
- Umgebung eines erreichbaren Randpunktes 25
- Umkehrungsfunktion der ganzen Funktion 278
- Uniformisierende Kraft 192
- Verschmelzungsaufgaben 168, 171
- Verzerrungssatz 76
- Vitalischer Doppelreihensatz 157

Von Dr. L. Bieberbach, Prof. a. d. Univ. Berlin sind ferner erschienen:

Lehrbuch der Funktionentheorie. I. Band: Elemente der Funktionentheorie. 3., verb. Aufl. Mit 80 Fig. i. T. [VII u. 322 S.] gr. 8. 1930- Geb. R.M 17.—

„Das merkwürdig Schöne an dem Bieberbachschen Buche ist nun, daß die persönliche Note der Auffassung einem typischen allgemeinen Zeitbedürfnis vor allem des ansehenden Funktionentheoretikers entgegenkommt. Die weitherzige Vielseitigkeit der Betrachtungsweise, der Ausgleich der Riemannschen und der Weierstraßschen Methoden ist kaum je so natürlich gelungen und durchgeführt wie hier. Auch die Art der Darstellung und die Anordnung des Stoffes ist ein Beweis für die Freiheit des Verfassers. Nirgends wird eine Frage beantwortet, ehe sie nicht belebt und fragwürdig geworden. Nie wird eine exakte Formulierung gegeben, ehe eine einführende Charakterisierung der Schwierigkeiten stattgefunden hat. Nirgends wird schematisiert, und ausführliche Definitionen und Beweise wechseln mit skizzierten Überlegungen, die auch vom deutschen Studenten vom 3. Semester ab leicht ergänzt werden können.“
(Abhandlungen aus dem mathem. Seminar d. Hamburgischen Univ. über Bd. I.)

Funktionentheorie. Mit 34 Fig. i. T. [IV u. II 8 S.] 8. 1922. (Techn. Leitf. 14.) Kart. R.M 3.20

Differential- und Integralrechnung. (Math. Leitf. 4 u. 5.)

I. Teil: Differentialrechnung. 3., verm. u. verb. Aufl. Mit 34 Fig. [VI u. 142 S.] 8. 1928. Kart. R.M 5.40

II. Teil: Integralrechnung. 3., verm. u. verb. Aufl. Mit 25 Fig. [VI u. 150 S.] 8. 1928. Kart. R.M 5.80

Analytische Geometrie. Mit 39 Fig. i. T. [IV u. 120 S.] 8. 1930. (Math. Leitf. 29) Kart. R.M 6.60

Die vorliegende Einführung in die analytische Geometrie ist an Vektoranalysis und Matrizenkalkül orientiert, um so den analytischen Apparat nach Möglichkeit dem geometrischen Objekt zu nähern und anzupassen. Sie erfüllt damit zugleich eine Aufgabe, in die sie sich mit der Differential- und Integralrechnung teilt: Einführung in modernes mathematisches Denken.

Projektive Geometrie. (Math. Leitf. 30.) [In Vorb. 1951]

Vorlesungen über Algebra. Unt. Benutzung der dritten Aufl. des gleichnamigen Werkes von Dr. G. Bauer. In 4., verm. Aufl. dargestellt, von L. Bieberbach. Mit 16 Fig. i. T. u. auf 1 Taf. [X u. 334 S.] gr. 8. 1928. Geb. R.M 20.—

„Bieberbach hat das Buch stark umgestaltet und modernisiert, ihm aber glücklicherweise seinen wesentlichen Charakterzug erhalten: es gibt eine Einführung in die Theorie von den algebraischen Gleichungen, die dem Studierenden all das bietet, was er zum Gesamtverständnis der Mathematik braucht, und verliert sich nirgends ins rein Formale...

Das Buch vermittelt einen anregend geschriebenen Überblick über ein ausgedehntes Gebiet und versteht es, an vielen Stellen dem Leser Appetit zu weiterem Eindringen zu machen, wozu es durch reichliche Literaturangaben die Mittel an die Hand gibt“

(G. Doetsch im „Jahresber. d. Dtsch. Math.-Vereinigg.“.)

Die Determinanten. Von Geh. Hofrat Dr. E. Netto, weil. Prof. a. d. Univ. Gießen. 2., verb. Aufl., Neubearb. von L. Bieberbach. [VI u. 123 S.] 8. 1925. (Samml. math.-phys. Lehrb. 9.) Kart. R.M 4.40

Zur Geschichte der Logik. Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker. Von Dr. F. Enriques, Prof. a. d. Univ. Rom. Deutsch von L. Bieberbach. [V u. 240 S.] 8. 1927. (Wiss. u. Hyp. XXVI.) Geb. R.M 11.—

Mathematisches Wörterbuch. Hrsg. von L. Bieberbach u. Dr. K. v. Mises, Prof. a. d. Univ. Berlin. [In Vorb. 1931]

Dieses Wörterbuch will ein Hilfsmittel bei der mathematischen Lektüre sein und ein Nachschlagewerk für jeden, der rasche Auskunft über einen Begriff oder einen Satz sucht. Es will keine Sammlung von Monographien darstellen, sondern den Stoff auf recht viel Stichworte verteilen, dabei die Begriffe erklären, Sinn und Tragweite wichtiger Sätze erläutern.

Verlag von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin

Lehrbuch der Funktionentheorie. Von Dr. W. F. Osgood, Prof. a. d. Harvard-Univ. Cambridge, Mass. (Teubn. Lehrb. d. math. Wiss. XX, 1–3) I. Band: 5. Aufl. Mit 174 Fig. [XIVu.818S.] gr.8. 1928. Geb. RM 44.— II. Band. 1. Liefg.: 2. Aufl. Mit 6 Fig. [VIIu.307S.] gr.8. 1929. Geb. RM 18.—

2. Liefg. [U. d. Pr. 1931]

„Das durch fünf Auflagen rühmlichst bekannte Werk Osgoods hat bei seinem ersten Erscheinen 1906 eine historische Mission erfüllt. Seinem Einfluß ist es mit zu verdanken, daß in den mathematischen Anfängerunterricht der Universitäten das Maß an Strenge einzog, zu dem die wissenschaftliche Forschung in den vorausgegangenen Jahrzehnten den Entschluß gefaßt hatte. Dieser Einfluß des Buches ist den trefflichen fünf ersten Kapiteln zu danken, in denen die Grundbegriffe der Analysis des Reellen mit vorbildlicher Klarheit auseinandergesetzt werden. ... Gegenstand von Bd. I ist die Darstellung des klassischen Bestandes der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Der Band gipfelt in einem glänzenden Schlußkapitel über konforme Abbildung und Uniformisierung, in dem auch der Picardsche Satz Platz gefunden hat.* Der zweite Band gilt einer Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen.“

(L. Bieberbach in „Deutsche Literaturzeitung“.)

Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Von Geh. Hofrat Dr. R. Fricke, weil. Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Braunschweig.

I. Teil: Die funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen. 2. Aufl. Mit 83 Fig. [VIII u. 500 S.] gr.8. 1930. Geb. RM 16.—

II. Teil: Die algebraischen Ausführungen. Mit 40 Fig. [VIIIu..546S.] gr.8. 1922. Geh. RM 15.—, geb. RM 18.—

Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. Von Geh. Hofrat Dr. A. Pringsheim, Prof. a. d. Univ. München. (Teubn. math. Lehrb. XL, 1,1-3 u.XL,II,I.)

I. Band. 1. Abt.: Reelle Zahlen und Zahlenfolgen. 2. Aufl. [XIIu. 292 S.] gr.8. 1923. Geh. RM 13.—, geb. RM 15 —

2. Abt.: Unendliche Reihen mit reellen Gliedern. 2. Aufl. [VIII u. S. 293—514.] gr.8. 1923. Geh. RM 9.—, geb. RM 11.—

3. Abt.: Komplexe Zahlen, Reihen mit komplexen Gliedern, unendliche Produkte und Kettenbrüche. [IX u. 461 S.] gr.8. 1921. Geh. RM 21.—, geb. RM 23.60

II. Band. 1. Abt.: Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mit 25 Fig. i. T. [XV u. 624 S.] gr.8. 1925. Geh. RM 27.—, geb. RM 30.—

Die Idee der Riemannschen Fläche. Von Dr. H. Weyl, Prof. a. d. Univ. Göttingen. 2., verb. Aufl. Mit 28 Fig. i. T. [VIII u. 183 S.] gr.8. 1923. (Math. Vorl. 5.) Geb. RM 8.—

Vorlesungen über reelle Funktionen. Von Dr. C. Carathéodory, Prof. a.d. Univ. München. 2. Aufl. Mit 47 Fig. i. T. [XU.718S.] gr.8. 1927. Geh. RM 27.—, geb. RM 29.—

„Es ist ein Werk aus einem Guß, das vieles Neue und Eigenartige enthält. Viele vom Verfasser eingeführte Begriffe und Ergebnisse werden zweifellos zum dauernden Besitz der Wissenschaft werden. Es ist ein wertvolles Geschenk, das uns Carathéodory mit diesem tiefdurchdachten Werk beschert hat.“

(Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.)

Das Lebesguesche Integral. Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen. Von Dr. E. Kamke, Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 9 Fig. [IV u. 151 S.] 8. (Samml. math.-phys. Lehrb. 23.) Kart. RM 7.—

Variationsrechnung. Autor. deutsche Bearb. des Werkes: G. A. Bliss, Calculus of Variations. Aus den „Carus Mathematical Monographs“. Hrsg. von F. Schwank, Frankfurt a. M. [U. d. Pr. 1931]

Lehrbuch der Variationsrechnung. Von Dr. C. Carathéodory, Prof. a. d. Univ. München. [In Vorb. 1931]

Verlag von B.G.Teubner in Leipzig und Berlin

Pascals Repertorium der höheren Mathematik. 2., völlig umgearb. Aufl. der deutschen Ausg. Unt. Mitw. zahlr. Mathematiker hrsg. von Dr. E. Salkowski, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin, u. Dr. H. E. Timerding, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Braunschweig.

I. Band: Analysis.

1. Teilband: Algebra, Differential- und Integralrechnung. [XV u. 527 S.] 8. 1910. Geb. RM 18.—
2. Teilband: Differentialgleichungen, Funktionentheorie. [XII S. u. S. 529-1023.] 8. 1927. Geb. RM 18.—
3. Teilband: Reelle Funktionen, Neuere Entwicklungen, Zahlentheorie. Mit 8 Fig. [XII S. u. S. 1025—[598.] 8. 1929. Geb. RM 22.—

II. Band: Geometrie.

- z. Teilband: Grundlagen und ebene Geometrie. Mit 54 Fig. [XVIII u. 534 S.] 8. 1910. Geb. RM 18.—
2. Teilband: Raumgeometrie. Mit 12 Fig. [XII S. u. S. 535 —1165.] 8. 1922. Geh. RM 17.—, geb. RM 20.—

Einführung in die Zahlentheorie. Autor, deutsche Bearbeitung des Werkes: L. E. Dickson, Introduction to the Theory of Numbers. Hrsg. von E. Bodewig, Köln a. Rh. [Erscheint Frühjahr 1931]

Höhere Algebra. Autorisierte deutsche Ausg. von L. E. Dickson „Modern algebraic theories“. Hrsg. von E. Bodewig, Köln a. Rh. [VII u. 242 S.] 8. 1929. Geb. RM 14.—

Vorlesungen über Analysis. Von Dr. E. Lindelöf Prof. a. d. Univ. Helsingfors. Gemeinsam mit dem Verfasser deutsch hrsg. von Dr. E. Ullrich, Assistent a. d. Univ. Jena.

Demnächst erscheint der

I. Band: Einführung in die höhere Analysis (Vorbereitungsband).

In Vorbereitung befinden sich ferner:

- II. Band: Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen / III. Band: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlichen. / IV. Band: Allgemeine Reihentheorie. Differentialgleichungen. Variationsrechnung.

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure.

Von Dr. R. Rothe, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin. (Math. Leitf., 21-23, 31.)

- I. Band: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 3. Aufl. Mit 155 Fig. i. T. [VII u. 189 S.] 8. 1930. Kart. RM 6.—

II. Band: Integralrechnung, Unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen. Mit 96 Fig. i. T. [VIII u. 201 S.] 8. 1929. Kart. RM 6.40
In Kürze erscheinen:

- III. Band: Raumkurven u. Flächen, Linienintegrale u. mehrfache Integrale, gewöhnl. u. partielle Differentialgleich. nebst Anwendungen.
- IV. Band: Übungsbuch. Hrsg. von Studienrat O. Degosang, Assistent an der Techn. Hochschule in Berlin.

Praktische Infinitesimalrechnung. Von F. F. P. Bisacre, M. A. (Cambridge), Chartered Civil Engineer, Glasgow. Berechtigte deutsche Ausg. unt. Mitw. von Dr. Dr.-Ing. h. c. E. Trefftz, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden, hrsg. von Dr. E. König, Elberfeld. Mit 104 Abb. u. 5 Bildnisten. [XIU.364S.] 8. 1929. Geb. RM 18.—

Verlag von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematisches Praktikum. Von Dr. *H.v. Sanden*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Hannover, (Techn. Leitf. 27/28.)

1. Band. Mit 17 Fig. i. T. sowie 20 Zahlentaf. [Vu.m.S.] 8.1927. Geb. RM 6.80
2. Band. [In Vorb. 1931]

Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

Deutsche Bearb. des Werkes: *Webster*, Partial Differential Equations of mathematical physics. Von Dr. *G. Szegő*, Prof. a. d. Univ. Königsberg i. Pr. Mit 98 Fig. i. T. [VIII u. 428 S.] gr. 8. 1930. (Teubn. Lehrb. d. math. Wiss. XLIII.) Geb. RM 28.—

Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen.

Von Dr. *G. Wiarda*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Dresden. Mit 8 Fig. [IV u. 183 S.] 8.1930. (Samml. math.-phys. Lehrb. 25.) Geb. RM 9.60

Projektive und nichteuklidische Geometrie. Von Geh. Reg. Rat Dr. *F. Schilling*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Danzig. Mit Unterstützung der Gesellschaft der Freunde der Technischen Hochschule in Danzig und anderer Körperschaften.

I. Band: Projektive Geometrie in analytischer Behandlung nebst einem Einblick in die Grundlagen der Geometrie. Mit 157 Fig. [XII u. 212 S.] gr. 8. 1931. Geb. RM 13.60

II. Band: Nichteuklidische Geometrie auf der Grundlage der projektiven Geometrie. Mit 175 Fig. [XII u. 216 S.] gr. 8. 1931. Geb. RM 13.60

Lehrbuch der Differentialgeometrie. Von Dr. *A. Duschek*, Privatdozent a. d. Techn. Hochsch. in Wien u. Dr. *W. Mayer*, Privatdoz. a. d. Univ. Wien.

I. Band: Kurven und Flächen im euklidischen Raum. Von *A. Duschek*. Mit 14 Fig. i. T. [VIII u. 250 S.] gr. 8. 1930. Geb. RM 17.—

II. Band: Riemannsche Geometrie. Von *W. Mayer*, Mit 7 Fig. i. T. [VIII u. 245 S.] gr. 8. 1930. Geb. RM 17.—

Darstellende Geometrie. Von Dr. *H.v. Sanden*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Hannover. (Math. Leitf. 2.) [Erscheint Frühjahr 1931]

Mathematische Volkswirtschaftslehre. Eine Einführung. Von Dr. *O. Weinberger*, Oberlandesgerichtsrat in Wien. Mit 70 Fig. i. T. [XIV u. 241 S.] gr. 8. 1930. Geb. RM 18.—

Mathematische Forschungen zur Wert- und Preislehre. Deutsche Ausg. des Werkes: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices. Von *Irving Fisher*, Prof. of Political Economy in Yale University (New Haven). Hrsg. von Dr. *A. Aron*, Frankfurt a. M. Mit Fig. i. T. [ca. 150 S.] gr. 8. 1930. Geb. ca. RM 9.60

Alte und neue mathematische Spiele. Eine Einführung in die Unterhaltungsmathematik. Von Dr. *G. Kowalevski*, Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Dresden. Mit 104 Abb. u. Anleitungen zur Herstellung des Spielgeräts. [VII u. 145 S.] 8. 1930. Geb. RM 10.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

