UNIVERSAL
LIBRARY
OU_148738
UNIVERSAL
LIBRARY

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No. 517/C 31C Accession No. 19060

Author Carus, P. S

Title Cours de ... integral 19

This book should be returned on or before the date last marked below.

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL

ET MÉTHODE DE FORMATION

AU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

LIVRE I

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

ET MÉTHODE DE FORMATION AU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

LIVRE I

Calcul différentiel. Calcul intégral
Intégrales simples et multiples

PAR M. S. CARRUS
Agrégé de l'Université, Ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique
Professeur d'Analyse à la Faculté des Sciences d'Alger

PARIS
LIBRAIRIE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
LÉON EYROLLES, ÉDITEUR
3, Rue Thénard
1931

Tous droits réservés

PRÉFACE

En publiant cet ouvrage, nous avons poursuivi un double but :

1° Donner aux étudiants un Cours complet de Calcul différentiel et intégral aussi complet qu'il est nécessaire pour les Etudiants des Facultés ou préparant les grandes Ecoles ;

2° Leur apprendre à raisonner mathématiquement.

Pour le premier but, nous nous sommes efforcé de classer dans un ordre naturel et d'enchaîner les unes aux autres les diverses parties d'un cours très complexe.

Nous nous sommes astreint à la plus grande rigueur, sans aucune sécheresse, à la plus grande clarté des démonstrations. Nous avons cherché, par dessus tout, à ne donner que des démonstrations des plus *naturelles*, proscrivant rigoureusement tout artifice de calcul.

Enfin de très nombreuses applications permettent de bien saisir les méthodes.

Nous avons cru pouvoir y insérer le résultat de quelques recherches personnelles : Etude des extrema des fonctions donnant dans le cas « douteux » par une inégalité simple, la condition nécessaire et suffisante d'un extremum, en négligeant les infiniment petits du cinquième ordre seulement.

Intégration sans signe de quadrature des systèmes incomplets d'équations différentielles linéaires ; dans le cas des systèmes complets, la réduction à une équation nécessaire et suffisante.

Généralisation des développées des courbes gauches, leur intégration sans signe de quadrature, les relations entre les rayons de courbure et de torsion de la courbe et de la développée, en particulier le théorème suivant : *une courbe gauche ne peut être la géodésique que d'une seule développable* (*sa détermination*). — Mise en relief de l'importance du rapport des deux rayons.

Détermination sans signe de quadrature de la courbe gauche la plus générale (et de l'arc de courbe) en fonction des rayons de courbure et de torsion mis sous une certaine forme.

Ces diverses parties peuvent être considérées comme une extension du programme du certificat.

Mais tout ceci ne justifierait peut-être pas suffisamment la publication d'un Traité nouveau, les différentes parties ayant été exposées magistralement et avec des résultats originaux dans les Traités classiques des éminents Maîtres JORDAN, APPELL, MM. PICARD, GOURSAT, les remarquables Cours de MM. HADAMARD et P. LÉVY, etc.

Ce qui nous a paru justifier cette publication, c'est le deuxième but, but didactique, que nous avons poursuivi, et qui nous semble recherché, de façon bien gauche peut-être, mais pour la première fois, croyons-nous, en France et, même, à l'Etranger.

Nous avons voulu que ce Cours permît, en même temps, **la formation de l'esprit au raisonnement mathématique.** Il nous a semblé qu'un tel Cours avait non seulement pour but de donner à des étudiants déjà un peu avancés un ensemble de connaissances déterminé, de leur fournir des instruments de travail (étude de séries, des fonctions de variables complexes, calcul d'intégrales simples ou multiples, résolution d'équations aux dérivées partielles, applications géométriques, etc., etc.) mais aussi, mais surtout, dirons-nous, de leur *apprendre à raisonner*, de développer leurs facultés de raisonnement, *leurs facultés d'intuition*, de leur donner le *goût de la recherche*. Dans un tel Cours s'adressant à de tels étudiants, il ne nous a pas semblé que l'on dût se contenter de leur dire : Voilà tel résultat. Voilà comment on le démontre. Apprenez-le et retenez-le.

Or, comment leur apprendre à raisonner sinon en les mettant à même de raisonner, de *raisonner constamment*, et non seulement en refaisant des démonstrations *déjà apprises* (cela c'est à peine du raisonnement) ou en traitant des exercices d'application? Il faut, ainsi que nous essayons de le faire dans notre Cours de Faculté, non pas faire le raisonnement soi-même, mais inciter les étudiants, lorsqu'on est arrivé à tel point de la démonstration, à établir eux-mêmes, à continuer le raisonnement. Voilà le travail réellement profitable. Voilà ce qui les amène, petit à petit, à se rendre compte

qu'il y a une « méthode de raisonnement », que les « *mathématiques ce n'est pas la même chose* », que les démonstrations sont les plus naturelles, qu'*elles ne peuvent pas ne pas être* ce qu'elles sont...

Nous leur disons à tout instant : « Et maintenant qu'allons-nous faire ? Que faut-il faire ? Qu'est-il naturel de faire ? » Nous faisons un appel constant aux connaissances antérieures, nous tâchons de développer leur curiosité, leur esprit de recherche : « Que savez-vous sur le sujet ? Que savez-vous d'analogue ? Que pensez-vous que l'on ait ? »

Cette façon de procéder, nous avons essayé de l'imposer dans cet ouvrage. Tout d'abord, nous l'avons rédigé comme si nous nous adressions directement à nos étudiants. Ensuite, cet appel constant à la réflexion, à l'effort qui fait travailler les cellules cérébrales, nous nous sommes efforcé de l'obtenir par le procédé suivant : Les demandes que l'on peut faire, du genre de celles que nous avons citées, sont en petit nombre. Chacune peut être représentée par un signe, une lettre. Des lettres grecques, représentant chacune une question, sont intercalées à tout instant dans le texte.

Il faudrait, si l'étudiant veut réellement poursuivre le but que nous avons exposé, qu'il s'arrête à chacun de ces signes (un carton mobile indiquant leur signification est adjoint à l'ouvrage) (ils sont choisis du reste de façon que l'on puisse retenir facilement leur signification), qu'il réfléchisse, qu'il s'efforce de répondre à la question posée. Lorsqu'il n'aura pas trouvé, et que la réponse lui sera faite, il sera certainement tout étonné de voir que c'était *si simple*, si évident. Petit à petit, il s'y habituera et petit à petit, nous pensons que, soutenu de temps à autre, il pourra de lui-même établir les démonstrations.

Tout s'enchaîne : une démonstration n'est jamais qu'un exercice, une fois les définitions posées, et un certain nombre de connaissances précédentes ayant été acquises.

Nous espérons d'ailleurs, que ces signes intercalés dans le texte ne nuiront pas à la lecture, dans le cas où l'on voudrait s'en passer, ou dans le cas où l'on n'aurait pas un temps suffisant à consacrer à cet effort de réflexion que nous préconisons.

Cours de Calcul différentiel et intégral

Apprentissage du raisonnement mathématique

LIVRE PREMIER

THÉORIE DES FONCTIONS — CALCUL DIFFÉRENTIEL SÉRIES — INTÉGRALES SOUS TOUTES LES FORMES

Préambule. — Étant donnée une quantité variable complètement libre, indépendante de toute liaison, à laquelle nous pouvons donner telle valeur que nous voulons, nous admettrons que notre esprit puisse concevoir qu'elle varie d'une façon continue d'une valeur A à une valeur B en passant par toute valeur possible intermédiaire.

De même nous admettrons la conception de plusieurs autres variables indépendantes, de même genre, variant de façon continue.

En ce qui concerne la continuité des variables non libres assujetties à une condition imposée à l'avance, dont on puisse calculer ou imaginer la valeur toutes les fois qu'on donnera la valeur d'une autre variable indépendante, c'est-à-dire *fonction* de cette autre variable indépendante, nous définirons mathématiquement, sans conception métaphysique aucune, la continuité de cette fonction et de même la continuité d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.

C'est là une différence essentielle entre la continuité d'une variable libre, indépendante, et la continuité d'une fonction d'une ou de plusieurs autres variables indépendantes.

Objet du calcul différentiel et intégral. — Nous allons tout d'abord montrer par quelques exemples très simples l'objet du calcul différentiel et celui du calcul intégral.

Lorsque l'on veut définir la tangente en un point M d'une courbe,

on considère une sécante variable tournant autour de ce point et rencontrant la courbe en un point voisin M'. On cherche si cette sécante a une position limite lorsque ce point M' se rapproche sur la courbe indéfiniment de M et vient à la limite se confondre avec lui. A cet effet, pour définir une position quelconque MM', on rapporte par exemple la courbe à deux axes ox, oy et on considère l'angle α que MM' fait avec ox. En désignant par Δx, Δy les variations des coordonnées quand on passe de M à M', si les axes sont rectangulaires on a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Lorsque M' se rapproche indéfiniment de M, ces deux éléments tendent simultanément vers zéro et l'on est amené à rechercher si leur rapport tend vers une limite finie et bien déterminée.

C'est là l'objet même du calcul différentiel : considérer les variations infiniment petites des variables choisies comme indépendantes, étudier les variations correspondantes des fonctions ou, plus exactement, les rapports de ces quantités infiniment petites.

Objet du calcul intégral. — On sait que si l'on rapporte une courbe à deux axes ox, oy, pour définir l'aire trapézoïdale comprise entre un arc de courbe, l'axe ox, et deux abscisses, on décompose cette aire en un très grand nombre de parties par des parallèles à oy. On considère alors pour chaque tranche, d'une part, les trapèzes élémentaires complètement inscrits dans la tranche, et d'autre part, les trapèzes circonscrits à la courbe. On fait la somme de toutes les aires inscrites d'une part, de toutes les aires circonscrites d'autre part. Lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre des points de division sur ox, tous les intervalles tendant simultanément vers zéro, on démontre que ces deux sommes ont même limite quelle que soit la façon dont les intervalles tendent vers zéro.

On voit que l'on considère ainsi la limite d'une somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits.

C'est là, en général, l'objet essentiel du calcul intégral : considérer des sommes composées d un nombre infiniment grand d'infiniment petits, voir si ces sommes ont une limite, rechercher cette limite.

On voit que ce qui sert de base à ces études c'est la notion d'infiniment petit. On désigne ainsi une quantité variable qui a pour limite zéro. Par conséquent il est nécessaire tout d'abord d'étudier les limites et auparavant de rechercher et définir tous les nombres possibles.

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES INCOMMENSURABLES. — LIMITES. INFINIMENT PETITS. — FONCTIONS CONTINUES

SOMMAIRE.

Nombres incommensurables : Coupure.

Limites : Limite des fonctions d'une variable. — Convergence uniforme.

Infiniment petits : Valeur principale.

Fonctions continues : Oscillation. — Fonction d'une variable. — Passage par toute valeur intermédiaire. — Une fonction continue atteint ses limites.

Fonctions de plusieurs variables : Ensembles. — Continuité en un point. — Nombre caractéristique. — Continuité dans un champ : si le champ est borné et parfait, la continuité est uniforme. — Applications.

I. — NOMBRES INCOMMENSURABLES

Nous avons la conception nette des nombres entiers successifs, puis des nombres décimaux ou fractionnaires, aussi rapprochés d'ailleurs qu'on le veut les uns des autres. Mais on s'est rendu compte très rapidement que ces nombres ne pouvaient pas représenter tous les nombres possibles et on a été amené à la notion de nombres incommensurables, de nombreuses manières différentes.

Nous allons montrer par un exemple la nécessité de cette conception.

Supposons que l'on veuille mesurer une longueur donnée ; nous porterons une longueur prise comme unité, par exemple le mètre, plusieurs fois de suite, bout à bout, si cela est nécessaire et nous constaterons que la longueur comprend par exemple quatre fois la longueur unité et ne la comprend pas tout à fait cinq. Si nous prenons une subdivision déterminée (rationnelle) du mètre, si nous le divisons par exemple en dix parties égales, nous constaterons que la partie restante comprendra six décimètres et pas tout à fait sept.

Nous pouvons dire que la longueur donnée est comprise entre 4,6 et 4,7. En divisant le décimètre en dix (ou n parties égales) nous verrons de même que la longueur est comprise entre 4,63 et 4,64.

Nous pouvons ainsi continuer autant que nous le voulons ; ou bien il arrivera qu'après un certain nombre d'opérations, nous puissions trouver que la longueur mesurée comprend un nombre exact de parties aliquotes du mètre, est, par exemple, exactement égale à 4,635. Mais de même que nous concevons très nettement que la longueur puisse être comprise entre 4,63 et 4,64, de même il est naturel de concevoir que, aussi loin que nous poussions la subdivision du mètre, nous ne trouverons jamais que la longueur à mesurer comporte un nombre exact de subdivisions. Nous dirons dans ce cas que la longueur est représentée par un nombre incommensurable avec l'unité adoptée.

On voit que pour définir cette longueur, c'est-à-dire ce nombre incommensurable, nous ne pouvons faire autre chose que de donner les évaluations successives obtenues, soit par défaut, soit par excès

4	4,6	4,63	etc...	d'une part
5	4,7	4,64	etc...	d'autre part.

Un nombre incommensurable est donc nécessairement défini par deux suites de nombres qui jouissent, comme on le voit, des propriétés suivantes :

1° Les nombres de l'une des suites vont constamment en croissant ou du moins ne décroissent jamais, et les nombres de l'autre suite vont constamment en décroissant ou sont stationnaires.

2° Un nombre quelconque de la première suite est toujours inférieur à un nombre quelconque de la deuxième.

3° La différence entre deux nombres correspondants des deux suites peut être rendue et rester aussi petite qu'on le veut.

En arithmétique et en géométrie, nous retrouvons cette notion de nombres incommensurables et ces mêmes conclusions quand nous cherchons à déterminer la racine carrée d'un nombre non carré parfait, ou quand nous cherchons à calculer la diagonale d'un carré de côté égal à l'unité. On démontre aisément qu'il ne peut exister aucun nombre fractionnaire dont le carré soit égal à 2. On obtient comme valeurs approchées successives

1	1,4	1,41	1,414 .....
2	1,5	1,42	1,415 .....

Ces deux suites définissent le nombre incommensurable $\sqrt{2}$.

Enfin on peut arriver à la notion de nombres incommensurables indépendamment de toute considération géométrique sur la mesure des longueurs.

Si l'on considère tous les nombres rationnels, nombres entiers ou nombres fractionnaires, ils jouissent des propriétés suivantes :

1° Ils forment un ensemble qui est ordonné, c'est-à-dire que si

$$a < b \quad \text{et} \quad b < c \quad \text{on a} \quad a < c.$$

2° Il n'existe aucun nombre rationnel plus grand que tous les autres ou plus petit que tous les autres.

3° Entre deux nombres rationnels quelconques a, b il existe une infinité de nombres rationnels : Il suffit de prendre la demi-somme $a_1 = \frac{a+b}{2}$ puis la demi-somme de a et a_1 ou de a_1 et b, etc...

Coupure. — Étant donné l'ensemble des nombres rationnels, on peut, en s'imposant une condition déterminée quelconque, partager cet ensemble en deux classes C_1, C_2 telles que tout nombre de C_1 soit plus petit que tout nombre de C_2. On peut par exemple prendre dans C_1 tous les nombres dont le carré est inférieur ou égal (s'il en existe) à un nombre N, dans C_2 tous les nombres dont le carré est supérieur à N.

Lorsqu'on s'est imposé la condition, ce partage constitue une « coupure » et tout nombre rationnel appartient à l'une ou l'autre des classes.

Ce partage étant fait, trois cas sont possibles :

1° Il existe dans C_1 un nombre a plus grand que tous les autres. Dans ce cas il n'existe certainement pas dans C_2 un nombre b plus petit que tous les autres car le nombre rationnel $\frac{a+b}{2}$ appartiendrait à C_2 et serait plus petit que b.

2° Il existe dans C_2 un nombre b plus petit que tous les autres et alors il n'existe certainement pas dans C_1 de nombre plus grand que les autres.

3° Il n'existe aucun nombre de C_1 plus grand que tous les autres et aucun nombre de C_2 plus petit que tous les autres.

Il est aisé de voir qu'un pareil cas peut être possible. Définissons par exemple la coupure en prenant dans C_1 tous les nombres rationnels dont le carré soit inférieur à un nombre N non carré par-

fait. Il ne peut exister dans C_1 un nombre a plus grand que tous les autres, car s'il existait, on aurait

$$a^2 < N.$$

Posons $N - a^2 = \delta$.

Le nombre $a + h$ appartiendrait à C_1 si l'on avait

$$(1) \qquad (a+h)^2 < N \quad \text{ou} \quad h^2 + 2ah - \delta < 0.$$

Si l'on prend à la fois

$$h < 2a \quad \text{et} \quad h < \frac{\delta}{4a},$$

on aura certainement

$$h^2 + 2ah < 4ah < \delta.$$

L'inégalité (1) sera bien vérifiée : il existerait donc un nombre $a + h$ supérieur à a et appartenant à C_1.

Il est donc bien impossible de supposer qu'il existe dans C_1 un nombre plus grand que tous les autres. De même il ne peut exister dans C_2 de nombre plus petit que tous les autres.

Dans ce troisième cas, on dit que la coupure définit un nombre irrationnel.

II. — LIMITES

Considérons une suite de quantités $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, en nombre infini. On dit qu'elles sont bien déterminées si la seule connaissance du rang n permet de connaître la quantité correspondante a_n.

On dit que cette suite de quantités admet une limite A si la différence $|a_n - A|$ peut être rendue et rester plus petite que tout nombre donné ε choisi aussi petit qu'on le voudra à la condition de prendre n suffisamment grand. En notation algébrique on écrit :

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n < N.$$

La définition implique l'existence de deux conditions :

1° Celle de tendre vers une limite déterminée.

2° La condition que cette limite est A.

Comme on le voit, démontrer qu'une suite a une limite revient tout simplement à se donner un nombre ε et à déterminer un autre nombre N. Toute considération d'infiniment petit ou d'infiniment grand est ainsi exclue.

En général, si l'on connaît à l'avance la limite A, il est facile de démontrer que les quantités ont bien A pour limite.

Exemple : Considérons les quantités $a_n = \frac{b^n}{n!}$. Pour passer d'un nombre a_n au nombre suivant a_{n+1} on multiplie a_n par le facteur $\frac{b}{n+1}$. Ce facteur devient de plus en plus petit. On pressent donc que les nombres a_n ont pour limite zéro

Pour le démontrer, il faut démontrer que, étant donné un nombre arbitraire ε, on peut déterminer un entier N tel que pour toute valeur de $n > N$ on ait $|a_n| < \varepsilon$ ou $\frac{b^n}{n!} < \varepsilon$

C'est là une inégalité dans laquelle n entre sous une forme compliquée. (Toutes les fois qu'on a une inégalité semblable à résoudre, s'il n'est pas nécessaire de la résoudre de façon précise, on la remplacera par une autre inégalité plus simple et telle que, si elle est satisfaite, la première le soit à fortiori).

Pour simplifier l'inégalité, en nous rappelant qu'on passe d'une quantité à la suivante en multipliant par le facteur variable $\frac{b}{n+1}$, choisissons d'abord un rang ν tel que $\frac{b}{\nu} < 1$. On pourra poser

$$\frac{b}{\nu} = \frac{1}{1+\alpha} \quad (\alpha > 0) \qquad \frac{b^n}{n!} = \frac{b^\nu}{\nu!} \cdot \frac{b}{\nu+1} \cdot \frac{b}{\nu+2} \cdots\cdots \frac{b}{n}$$

nous simplifierons l'inégalité à résoudre par rapport à n, en remplaçant tous les facteurs variables $\frac{b}{\nu+1}, \frac{b}{\nu+2}, \cdots \frac{b}{n}$ par le facteur $\frac{b}{\nu}$.

On aura

$$\frac{b^n}{n!} < \frac{b^\nu}{\nu!} \left(\frac{b}{\nu}\right)^{n-\nu}.$$

Il suffira donc que l'on ait

$$\frac{b^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^{n-\nu}} < \varepsilon \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (1+\alpha)^{n-\nu} > \frac{b^\nu}{\varepsilon \cdot \nu!}.$$

C'est encore une nouvelle inégalité par rapport à n que l'on pourrait résoudre ; mais pour la simplifier encore, développons $(1+\alpha)^{n-\nu}$ par la formule du binôme ; $(n-\nu)$ et α étant positifs, on sait que

$$(1+\alpha)^{n-\nu} > 1 + (n-\nu)\alpha.$$

δ

Il suffit donc que

$$1 + (n - \nu) > \frac{b^\nu}{\varepsilon \cdot \nu\,!}$$

et à fortiori

$$n > \nu + \frac{b^\nu}{\alpha\varepsilon \cdot \nu\,!}.$$

ω

Le nombre N qu'il fallait déterminer en fonction de n est donc

$$N = \nu + \frac{b^\nu}{\alpha\varepsilon \cdot \nu\,!}.$$

Remarque. — Il faut remarquer que la limite ne fait en général pas partie de la suite de valeurs qui la déterminent. Si l'on considère les nombres successifs 0,45, 0,4545, ... ils ont pour limite $\frac{5}{11}$ et aucun des nombres de la suite n'est égal à $\frac{5}{11}$.

Il peut être utile de démontrer que les quantités a_n ont une limite déterminée, sans que l'on connaisse ou qu'il soit nécessaire de connaître la limite. On sait que si les quantités vont constamment en croissant, et restent inférieures à un nombre fixe A, elles ont une limite et cette limite est au plus égale à A. De même si elles vont constamment en décroissant en restant supérieures à un nombre fixe B, la limite existe au moins égale à B.

Pour appliquer ce théorème il faudra donc d'abord se rendre compte si les quantités vont en croissant par exemple.

Très souvent la méthode employée sera la méthode si puissante de

σ

récurrence : on suppose qu'une loi ou une formule dépendant d'un rang n est vraie et établie pour le rang n ; on démontre que dans ces conditions la loi ou formule a lieu pour le rang $n + 1$. Si la loi a été démontrée directement pour les rangs 1, 2, on en déduit que la loi est générale.

Ce point établi, il faudra rechercher s'il existe un nombre A auquel toutes les quantités restent inférieures. Si l'on connaissait la limite, cette quantité pourrait être cette limite elle-même. Or la loi même de détermination des quantités a_n peut permettre, en admettant l'existence de la limite, de la déterminer.

Application. — Considérons les quantités

$$a_1 = \sqrt{a}, \qquad a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} \ \ldots\ldots \ a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}.$$

Elles vont évidemment en croissant puisque le passage de a_n à a_{n+1} revient à remplacer le dernier radical $\sqrt{a}$ par $\sqrt{a+\sqrt{a}}$.

A priori, on ne voit pas quel est le nombre A auquel les quantités a_n restent inférieures. Nous aurons une indication en admettant provisoirement que la limite existe et en cherchant cette limite l.

A la limite, les quantités a_n, a_{n+1} ayant toutes deux pour limite l on peut poser

$$a_n = l - \varepsilon_n, \qquad a_{n-1} = l - \varepsilon_{n-1}.$$

Par suite

$$l - \varepsilon_n = \sqrt{a + l - \varepsilon_{n-1}} \quad \text{ou} \quad l^2 - a - l = 2l\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n^2.$$

Le second membre peut être rendu aussi petit qu'on le veut. Or le premier membre est fixe, il est donc rigoureusèment nul.

La limite l est donc la racine positive de cette équation.

$$l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

On peut donc prendre pour A ce nombre l ou tout nombre supérieur, par exemple $1 + a$, et démontrer que l'on a $a_n < 1 + a$.

Nous supposerons que l'inégalité est vérifiée pour a_{n-1} et nous démontrerons qu'elle l'est alors aussi pour a_n. Si en effet on a

$$a_{n-1} < 1 + a.$$

On aura bien

$$a_n = \sqrt{a + a_{n-1}} < \sqrt{1 + 2a} < 1 + a.$$

Les quantités a_n ont donc bien une limite, le nombre l ci-dessus défini.

2e *Application.* — On donne deux nombres a_0, A positifs. On forme les quantités

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right), \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right) \cdots a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right) \cdots$$

Montrer que les quantités a_1, $a_2 \cdots$, a_n ont une limite.

En recherchant si $a_n < a_{n-1}$, on est amené à voir si $\frac{A}{a_{n-1}} < a_{n-1}$, c'est-à-dire si $a_{n-1} > \sqrt{A}$.

Or cette inégalité revient à

$$a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}} > 2\sqrt{A}$$

laquelle est toujours vérifiée On a donc bien toujours $a_n < a_{n-1}$; les quantités vont en décroissant ; or elles sont toutes positives, elles ont donc certainement une limite. A la limite, de même que ci-dessus, on aura

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{A}{l}\right) \qquad \text{c'est-à-dire} \quad l = \sqrt{A}.$$

Dans le cas général, il faut une méthode permettant sinon de trouver la limite, du moins de montrer l'existence de la limite.

THÉORÈME. — *Étant donnée une suite de quantités* $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ *si à partir d'un rang arbitraire* n, *l'on peut démontrer que la différence* $|a_{n+p} - a_n|$ *est inférieure, quel que soit* p, *à un nombre* ε_n *qui dépendra en général de* n, *et si les quantités* $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} \cdots$ *ont pour limite zéro, les quantités* a_n *ont une limite.*

Il semble que l'on tourne dans un cercle vicieux : On veut démontrer que les quantités a_n ont une limite et on est amené à rechercher si d'autres quantités ε_n ont une limite ; il y a tout de même une différence entre les deux problèmes, puisque l'on sait quelle doit être la limite des quantités ε.

En effet l'inégalité revient à

$$a_n - \varepsilon_n < a_{n+p} < a_n + \varepsilon_n.$$

Posons $n + p = N$. On voit que pour toutes valeurs de N supérieures à n, on a

$$a_n - \varepsilon_n < a_N < a_n + \varepsilon_n.$$

Considérons la suite à partir du moment où les inégalités sont satisfaites et écrivons toutes les inégalités correspondantes :

$$a_1 - \varepsilon_1 < a_N < a_1 + \varepsilon_1, \quad a_2 - \varepsilon_2 < a_N < a_2 + \varepsilon_2 \cdots, \quad a_n - \varepsilon_n < a_N < a_n + \varepsilon_n.$$

Pour chaque indice n, désignons par A_n le plus grand des premiers membres et par B_n le plus petit des seconds membres.

On aura

$$B_n \leqslant a_n + \varepsilon_n, \quad A_n \geqslant a_n - \varepsilon_n.$$

Par suite $B_n - A_n \leqslant 2\varepsilon_n$.

Lorsque nous ferons croître N indéfiniment nous formerons donc deux suites A, B jouissant des trois propriétés qui définissent un nombre commensurable ou incommensurable C. Je dis que C est la limite de la suite a. En effet pour toute valeur de N supérieure à n on a

$$A_n < a_N < B_n$$

et d'autre part

$$A_n < C < B_n$$

Il en résulte que

$$| C - a_N | \leqslant B_n - A_n \leqslant 2\varepsilon_n.$$

Cette inégalité exprime que a_N a pour limite C.

Limite des fonctions d'une variable. — Soit une fonction d'une seule variable $f(x)$; donnons à x une suite de valeur $x_1, x_2 \cdots, x_n$ tendant vers X et formons la suite des valeurs correspondantes

$$f(x_1), f(x_2) \cdots f(x_n) ;$$

il peut arriver que cette suite tende vers une limite finie, ou qu'elle grandisse indéfiniment, ou qu'elle ne tende vers aucune limite déterminée.

Si par exemple nous donnons à x une suite de valeurs tendant vers zéro, la fonction $y = x^2 + 1$ tend vers 1 ; la fonction $y = \frac{1}{x}$ croît indéfiniment, la fonction $y = \sin \frac{1}{x}$ ne tend vers aucune limite déterminée : Lorsque x tend vers zéro, $\sin \frac{1}{x}$ passe par toutes les valeurs comprises entre — 1 et + 1.

A fortiori, on ne peut pas dire que la suite a nécessairement pour limite $f(X)$. Il pourrait d'ailleurs arriver que $f(X)$ ne soit pas définie. Prenons par exemple la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

et donnons à x une suite de valeurs tendant vers a. Pour toute valeur différente de a, la fonction a la même valeur que $x + a$ et, à condition que x soit suffisamment voisin de a, la fonction prend une valeur aussi voisine qu'on le veut de $2a$. La limite de la fonction est donc $2a$ et cependant la fonction n'est pas définie pour $x = a$. Elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ qui n'a pas de sens. Il peut d'ailleurs arriver que la limite soit différente suivant que x tende vers a par des valeurs inférieures ou supérieures à a. Ainsi par exemple la fonction $y = +\frac{\sqrt{1 - \cos 3x}}{x}$ est égale à

$$\sqrt{2}\,\frac{1}{x} \times \left|\sin \frac{3x}{2}\right|.$$

Ce rapport tend vers $+\frac{3}{\sqrt{2}}$ ou $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ suivant que x tend vers zéro par valeurs positives ou négatives.

Convergence uniforme. — Considérons une fonction $f(x, t)$ dépendant d'une variable x et d'une autre quantité t à laquelle nous donnerons une valeur constante, qui pourra d'ailleurs être arbitrairement fixée dans un intervalle $t_0 t_1$; nous donnons à cette variable le nom de paramètre.

Donnons nous une valeur τ comprise dans l'intervalle, et considérons les valeurs de la fontion $f(x, \tau)$ pour des valeurs de x tendant vers a. Si pour cette suite de valeurs, la fonction a une limite, cette limite dépendra en général de la valeur de τ considérée. Nous la désignerons par $\varphi(\tau)$.

Dire que $f(x, \tau)$ a pour limite $\varphi(\tau)$, c'est dire que la différence $| f(x, \tau) - \varphi(\tau) |$ peut être rendue aussi petite qu'on le voudra à condition que la différence $| x - a |$ soit elle-même suffisamment petite. En langage d'analyse, nous écrirons que

$$| f(x, \tau) - \varphi(\tau) | < \varepsilon \tag{1}$$

si $| x - a | \leqslant \eta$.

Imposons-nous une fois pour toutes la quantité ε. Pour la valeur de τ considérée, pour que l'on ait l'inégalité (1), il faut que $| x - a |$ soit inférieure à une certaine quantité η. Cette valeur de η dépendra elle-même en général de la valeur de τ considérée. Il existe des valeurs de η plus ou moins petites suivant cette valeur de τ. S'il

existe une quantité plus petite que toutes les autres, ou, ce qui revient au même, si l'on peut déterminer une quantité ρ suffisamment petite pour que, la seule condition $| x - a | < \rho$ entraîne l'inégalité (1), quelle que soit la valeur de τ considérée, on dira que la fonction est uniformément convergente vers sa limite pour les valeurs du paramètre comprises entre t_0 et t_1. On pourra écrire une fois pour toutes

$$| f(x, \tau) - \varphi(\tau) | < \varepsilon \quad \text{si} \quad | x - a | < \rho.$$

Considérons par exemple la fonction

$$y = tx + t^2$$

pour les valeurs de t comprises entre 0 et 1 et pour des valeurs de x tendant vers zéro.

Pour une valeur τ quelconque, la fonction prend la valeur

$$y = \tau x + \tau^2$$

et lorsque x tend vers zéro, ces valeurs ont pour limite

$$\varphi(\tau) = \tau^2;$$

δ_1, ξ

Nous devons considérer la différence

$$| \tau x + \tau^2 - \tau^2 | = | \tau x |.$$

Quelle que soit la valeur de τ considérée, nous aurons certainement $| \tau x | < \varepsilon$, si nous prenons $| x | < \varepsilon$.

ω

Ainsi le nombre ρ est ici égal à ε : La fonction est donc bien uniformément convergente.

Considérons au contraire la fonction $y = t^x$ pour les mêmes valeurs du paramètre et lorsque x tend vers zéro.

δ

Pour une valeur de τ nous devons considérer la fonction τ^x. Lorsque x tend vers zéro, cette fonction a une limite égale à l'unité. Il faut prendre la différence $| \tau^x - 1 |$ et voir à quelle condition on aura

$$| \tau^x - 1 | < \varepsilon.$$

Pour chaque valeur de τ, cette inégalité sera satisfaite à partir d'une certaine valeur η de x.

δ_1

Voyons s'il peut exister une quantité fixe ρ telle que la condition $x < \rho$ entraîne, quel que soit τ dans l'intervalle 0,1,

$$| \tau^x - 1 | < \varepsilon.$$

Prenons une quantité ρ' quelconque inférieure à ρ. On devrait être sûr que

$$|\tau^{\rho'} - 1| < \tau$$

quel que soit τ

ρ

Or lorsque τ est suffisamment petit, $\tau^{\rho'}$ est aussi petit qu'on le veut et par conséquent l'inégalité ci-dessus ne peut être satisfaite.

ω

La fonction $y = t^z$ est bien convergente pour chaque valeur du paramètre, mais n'est pas uniformément convergente dans l'intervalle.

III. — INFINIMENT PETITS

La notion d'infiniment petit et celle de limite sont intimement liées l'une à l'autre. Considérons une variable x à laquelle nous donnons des valeurs ayant pour limite zéro. Nous dirons que cette quantité est infiniment petite. Comme on le voit, la définition implique deux conditions :

1° La quantité doit être variable.

2° Elle doit prendre et conserver des valeurs plus petites que toute quantité donnée.

Il ne faut donc pas confondre une quantité infiniment petite avec une quantité fixe très petite même non perceptible à nos sens comme un micron.

Si l'on n'avait à considérer qu'une seule quantité infiniment petite cette définition n'aurait aucune espèce d'utilité.

Mais soit une fonction y de cette variable x et supposons qu'elle prenne elle-même des valeurs tendant vers zéro lorsque x tend vers zéro. Nous dirons que y est infiniment petit avec x, ou tend vers zéro avec x, ou décroît indéfiniment. Nous dirons que x est l'infiniment petit principal, celui auquel nous comparerons tous les autres infiniment petits.

Si lorsque x tend vers zéro, le rapport $\frac{y}{x}$ a une limite finie et bien déterminée et non nulle, nous dirons que y est un infiniment petit du même ordre que x. Plus généralement, supposons qu'il existe un exposant positif α tel que le rapport $\frac{y}{x^\alpha}$ tende vers une limite finie, bien déterminée et non nulle, nous dirons que y est un infiniment petit d'ordre α par rapport à x.

Ainsi par exemple le rapport $\frac{\sin x}{x}$ a pour limite l'unité lorsque x tend vers zéro. Sin x est un infiniment petit du même ordre que x ou du premier ordre ; $1 - \cos x$ est un infiniment petit du deuxième ordre puisque le rapport

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

a pour limite $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers zéro.

Valeur principale. — Si le rapport $\frac{y}{x^\alpha}$ a pour limite C, pour des valeurs de x suffisamment petites mais non nulles, on peut écrire

$$\frac{y}{x^\alpha} = C + R, \qquad y = Cx^\alpha + Rx^\alpha,$$

R désignant une quantité variable ayant pour limite zéro : R est donc un infiniment petit. Le premier terme s'appelle la partie principale de y.

Puisque C est différent de zéro le rapport entre les deux parties $\frac{Rx^\alpha}{Cx^\alpha}$ ou $\frac{R}{C}$ peut en effet être rendu aussi petit qu'on le veut.

Il faut se rendre compte qu'il peut exister des infiniment petits qui ne soient d'aucun ordre déterminé par rapport à x. Par exemple $y = \frac{1}{\log x}$ est infiniment petit avec x mais le rapport $\frac{y}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha \log x}$ prend des valeurs plus grandes que toute quantité donnée quelque petit que soit l'exposant α : $\frac{1}{\log x}$ est donc infiniment petit par rapport à toute puissance de x.

(On pourrait généraliser la notion d'infiniment petit en considérant les infiniment petits de la forme $x^n(\log x)^{-n'}$ (Houel).)

Puisque R est infiniment petit, soit de même $C_1 x^\beta$ sa partie principale, on pourra poser

$$R = x^\beta(C_1 + S) \qquad \text{(S étant infiniment petit)}$$

et par suite

$$y = Cx^\alpha + C_1 x^{\alpha + \beta} + Sx^{\alpha + \beta}$$

ψ

On voit que l'on peut continuer autant qu'on le veut et écrire

$$y = Cx^{\alpha} + C_1x^{\alpha} + \beta + \cdots + Ux^{\alpha} + \beta + \cdots + \lambda.$$

On met ainsi y sous la forme d'une somme de termes dont chacun est infiniment petit par rapport au précédent. Le dernier terme seul n'est pas un infiniment petit d'un ordre déterminé mais il est infiniment petit par rapport à tous les précédents.

Il est évident que l'on ne peut avoir à considérer sur les infiniment petits que les seules opérations utiles suivantes :

1° Rapport de deux infiniment petits ;

2° Somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits.

Les deux théorèmes suivants montrent l'utilité de la considération de la partie principale.

THÉORÈME. — *La limite du rapport de deux infiniment petits est la même que celle du rapport des parties principales.*

δ

Soient y et z deux infiniment petits ayant pour partie principale respectivement Cx^{α}, $C'x^{\beta}$. Pour des valeurs de x suffisamment petites, on peut donc poser

$$y = x^{\alpha}(C + R) \qquad z = x^{\beta}(C' + S).$$

δ_1

R, S étant infiniment petits avec x. On a donc

$$\frac{y}{z} = \frac{C + R}{C' + S}\, x^{\alpha - \beta}.$$

ρ

Si les deux infiniment petits sont du même ordre, ($\alpha = \beta$), ce rapport se réduit à $\frac{C + R}{C' + S}$ et, lorsque x tend vers zéro, il a pour limite $\frac{C}{C'}$. Or la limite des parties principales est $\frac{Cx^{\alpha}}{C'x^{\alpha}}$. Elle se réduit donc aussi à $\frac{C}{C'}$.

Si $\alpha > \beta$ la fraction ayant pour limite $\frac{C}{C'}$ le rapport a pour limite zéro ; il en est de même du rapport des parties principales.

Enfin si $\alpha < \beta$ le rapport $\frac{y}{z}$ comme celui des parties principales prend des valeurs plus grandes que toute quantité donnée.

Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

THÉORÈME. — *La limite d'une somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits tous de même signe est la même que la limite de la somme d'infiniment petits équivalents quelconques.*

Considérons un nombre infiniment grand d'infiniments petits tous positifs $y_1, y_2, \cdots y_n, \cdots$. Soient $v_1, v_2, \cdots v_n, \cdots$ leurs parties principales. δ On peut donc écrire

$$y_1 = v_1(1 + \varepsilon_1) \quad y_2 = v_2(1 + \varepsilon_2) \cdots y_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ désignant eux-mêmes des infiniment petits. Nous pouvons les supposer tous moindres en valeur absolue qu'une quantité ε choisie aussi petite qu'on le voudra.

ξ Formons les sommes successives

$$S_1 = y_1, \quad S_2 = y_1 + y_2 \cdots S_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

et de même

$$S'_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

δ On peut écrire

$$S_n = v_1(1 + \varepsilon_1) + \cdots + v_n(1 + \varepsilon_n) = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + (\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n).$$

Par suite

$$S_n - S'_n = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n.$$

Puisque tous les $| \varepsilon_i |$ sont moindres que ε,

$$| S_n - S'_n | < \varepsilon | v_1 + r_2 + \cdots + v_n) = \varepsilon S'_n$$

et par conséquent, si les infiniment petits sont positifs,

$$S'_n(1 - \varepsilon) < S_n < S'_n(1 + \varepsilon).$$

Par suite :

$$1 - \varepsilon < \frac{S'_n}{S_n} < 1 + \varepsilon.$$

ω Si le nombre n augmente indéfiniment, ces inégalités montrent que si S_n a une limite, S'_n a également une limite et la même, et inversement. Le théorème est donc démontré.

Si les infiniment petits ne sont pas tous de même signe, on a toujours :

$$S_n - S'_n = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n,$$

et par suite α_1 :

$$| S_n - S'_n | < \varepsilon_1 | v_1 | + \varepsilon_2 | v_2 | + \cdots + \varepsilon_n | v_n | < \varepsilon [| v_1 | + | v_2 | + \cdots | v_n |].$$

ρ On voit que si la somme $|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$ a une limite finie T, lorsque le nombre n d'infiniment petits augmente indéfiniment, la conclusion précédente subsiste et l'on peut substituer aux infiniment petits les infiniment petits équivalents.

Considérons, par exemple, les infiniment petits :

$$y_k = \frac{k}{n^2 + k}.$$

δ, α infiniment petits avec $\frac{1}{h}$ lorsque n croît indéfiniment. On peut prendre comme infiniment petits équivalents $v_k = \frac{k}{n^2}$,

π puisque le rapport $\frac{y_k}{v_k} = \frac{n^2 + k}{n^2}$ a pour limite l'unité lorsque n augmente indéfiniment.

δ_1 Cherchons la limite de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2 + k}.$$

On peut lui substituer la somme :

$$S_n = \sum_{1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

Or cette dernière somme est égale à :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Elle a donc pour limite $\frac{1}{2}$. La somme cherchée à donc aussi pour limite $\frac{1}{2}$.

Infiniment grands. — A la notion d'infiniment petit, correspond la notion d'infiniment grand. On dit qu'une variable x croît indéfiniment par valeurs positives, si les valeurs qu'elle peut prendre sont plus grandes que tout nombre choisi arbitrairement, aussi grand qu'on le veut. On dit qu'une autre quantité y, variable avec x, est

indéfiniment grande d'ordre α par rapport à x, si le rapport $\frac{y}{x^\alpha}$ tend vers une valeur finie, bien déterminée et non nulle lorsque x croît indéfiniment.

IV. — FONCTIONS CONTINUES

Considérons une variable x. Supposons qu'elle prenne successivement toutes les valeurs possibles (la différence entre deux valeurs consécutives pouvant être rendue aussi petite qu'on le voudra) depuis un nombre a jusqu'à un nombre b. Nous dirons que x varie de façon continue de a à b.

Considérons d'autre part une autre variable y, résultat d'opérations bien déterminées effectuées sur x : on dit que y est une fonction de x. Plus généralement, si deux quantités variables x, y sont liées par une relation indiquant un certain nombre d'opérations bien déterminées à effectuer sur x, y, nous pourrons admettre que l'une quelconque des deux varie d'une façon continue de a à b. Nous dirons qu'elle est variable indépendante et que l'autre est fonction de la première.

Nous indiquerons cette dépendance par la notation $y = f(x)$.

On peut aussi considérer une fonction de deux ou plusieurs variables indépendantes.

Si, à une valeur de la variable indépendante comprise entre a et b ne correspond qu'une seule valeur de y, nous dirons que y est fonction bien déterminée de x dans l'intervalle ab. Elle sera finie dans tout l'intervalle, ou mieux bornée, si toutes les valeurs de y sont comprises entre deux nombres finis A, B.

Il pourrait arriver qu'une fonction ait une valeur bien déterminée, finie, pour chaque valeur de x dans un intervalle et que, cependant, elle ne soit pas bornée dans tout l'intervalle.

Considérons la fonction qui est égale à zéro pour $x = 0$ et qui serait égale à $\frac{1}{x}$ pour toute valeur de x différente de zéro.

Pour une valeur quelconque x_0 dans l'intervalle, la fonction a une valeur finie bien déterminée, $\frac{1}{x_0}$; elle a une valeur finie pour $x = 0$ par définition et cependant il n'existe pas de nombre, quelque grand soit-il, qui limite supérieurement les valeurs que peut prendre la fonction.

Remarquons encore qu'une fonction peut être parfaitement définie, sans qu'il soit possible de la représenter par une courbe. Tel serait, en effet, le cas de la fonction y définie de la façon suivante : y est égale à x pour toute valeur irrationnelle de x ; y est égale à $\frac{1}{2}$ pour toute valeur rationnelle de x.

Les nombres A B définis ci-dessus ne sont pas suffisamment précisés car s'ils existent, il serait possible que les valeurs de la fonction puissent être comprises dans un intervalle moindre A′ B′.

Nous allons resserrer le plus possible l'intervalle AB.

Oscillation de la fonction. — Supposons par exemple A entier et considérons la suite de valeurs consécutives

$$A, \quad A+1, \quad A+2, \cdots \quad B.$$

Parcourons cette suite de gauche à droite. Il y aura un premier intervalle où commenceront à apparaître des valeurs de y, soit A_1, $A_1 + 1$. $^{\alpha}$ Formons la deuxième suite :

$$A_1, \quad A_1 + \frac{1}{10}, \quad A_1 + \frac{2}{10}, \cdots \quad A_1 + 1.$$

δ_1

Si nous la parcourons de gauche à droite, il y aura un premier intervalle A_2, $A_2 + \frac{1}{10}$ où commenceront à apparaître des valeurs de y. Nous formerons la troisième suite :

$$A_2, \quad A_2 + \frac{1}{100}, \cdots \quad A_2 + \frac{1}{10}.$$

Soit A_3, $A_3 + \frac{1}{100}$ le premier intervalle où commenceront à apparaître des valeurs de y. Nous pouvons continuer autant de fois que nous le voudrons ; $^{\rho}$ nous formerons deux suites illimitées de nombres :

$$\begin{array}{llll} A, & A_1, & A_2, \cdots & A_n, \cdots \\ B, & A_1 + 1, & A_2 + \frac{1}{10}, \cdots & A_n + \frac{1}{10^{n-1}}, \cdots \end{array}$$

jouissant des trois propriétés suivantes :

1° La première suite ne décroît jamais ; la deuxième ne croît jamais ;

2° Un terme quelconque de la première est moindre que tout terme de la seconde.

3° La différence entre deux nombres correspondants des deux suites $\frac{1}{10^{n-1}}$ peut être rendue aussi petite qu'on le voudra. Ces deux suites définissent donc un nombre rationnel ou irrationnel m.

Comme il y a des valeurs de y dans l'intervalle A_n, $A_n + \frac{1}{10^{n-1}}$, on voit qu'il existe des valeurs de y pour lesquelles la différence $y - m$ peut être rendue aussi petite qu'on le voudra. De plus, aucune valeur de y ne pourra être inférieure à m, car s'il y avait des valeurs $m - \mu$, on pourrait déterminer n assez grand pour que A_n (qui a pour limite m) soit supérieure à $m - \mu$. Il y aurait donc des valeurs inférieures à A_n.

m est dite « limite inférieure » de y. On voit qu'il y a des valeurs de y qui s'en approchent autant qu'on le veut, en lui restant toujours supérieures. Nous ne pouvons encore démontrer que y puisse atteindre cette limite.

On verrait de même que si y est assujetti à rester moindre que B, y admet une limite supérieure M. Il existe des valeurs de y qui s'en approchent autant qu'on le veut tout en lui restant toujours inférieures.

La différence M — m s'appelle l'« oscillation » de la fonction dans l'intervalle.

Fonction continue d'une variable. — Soit α une valeur de x entre a et b. On dit que la fonction est continue pour la valeur $x = \alpha$ ou au point α, si, au nombre ε choisi aussi petit qu'on le voudra, mais alors fixé, on peut faire correspondre un nombre η tel que si $|x - \alpha| < \eta$, on est certain que

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon. \tag{1}$$

On pourrait dire aussi que la différence $|f(x) - f(\alpha)|$ est infiniment petite ou que $f(x)$ tend vers $f(\alpha)$ lorsque x tend vers. α.

Supposons que l'on puisse recommencer la même définition pour toutes les valeurs possibles de x comprises entre a et b, limites comprises, c'est-à-dire satisfaisant aux inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Nous dirons que la fonction y est continue dans l'intervalle parfait ab.

Remarquons que cette définition exige que la fonction soit définie même pour des valeurs extérieures à l'intervalle. Si l'on voulait supprimer cette condition pour les limites a, b, il faudrait introduire la définition de fonction continue à droite ou à gauche. Les inégalités auraient lieu seulement pour $x > a$ (fonction continue à droite) ou seulement pour $x < b$ (fonction continue à gauche).

THÉORÈME. — *Une fonction déterminée finie et continue dans un intervalle donné ne peut passer d'une valeur* A *à une valeur* B *sans passer au moins une fois par toute valeur intermédiaire* C.

Supposons par exemple $A < C < B$.

Nous décomposerons l'intervalle ab en 2^n intervalles égaux. Il n'y aura lieu à démonstration que si, pour aucun point de division, la fonction prend la valeur C, aussi grand que soit n.

δ

Partageons d'abord l'intervalle en deux parties égales par le point de division $a_1 = \frac{a+b}{2}$. Si $f(a_1) > C$, on aura

$$f(a) < C < f(a_1).$$

α

L'intervalle aa_1 peut remplacer l'intervalle ab. Si $f(a_1) < C$ l'intervalle a_1b peut remplacer l'intervalle ab. De toutes façons, nous désignerons ce nouvel intervalle par a_1b_1. On sera assuré que

$$f(a_1) < C < f(b_1), \qquad \left(b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}\right).$$

δ_1

Partageons cet intervalle a_1b_1 en deux parties égales : pour l'une des deux moitiés a_2b_2, on sera assuré que

$$f(a_2) < C < f(b_2).$$

On peut continuer l'opération autant de fois qu'on le veut; on arrivera à un intervalle a_nb_n pour lequel on aura

$$f(a_n) < C < f(b_n).$$

ρ

Or on forme ainsi deux suites de nombres

$$a, a_1, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$$
$$b, b_1, \ldots\ldots b_n, \ldots\ldots$$

jouissant des trois propriétés qui définissent un nombre rationnel ou irrationnel α. $\left(\text{On a en effet } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}\right)$.

Les différences $\alpha - a_n$, $b_n - \alpha$, sont infiniment petites.

La fonction étant continue pour toute valeur possible comprise entre a et b, l'est en particulier au point α. Donc les différences

$$f(\alpha) - f(a_n), \qquad f(b_n) - f(\alpha)$$

peuvent être rendues aussi petites qu'on le veut ; il en sera de même de la différence $| C - f(\alpha) |$; ces deux quantités étant fixes, cette différence est donc rigoureusement nulle. Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME. — *Si une fonction est continue dans un intervalle* $a \leqslant x \leqslant b$ *elle atteint au moins une fois chacune de ses valeurs limites.*

Considérons par exemple la limite inférieure ; nous referons le même raisonnement. Partageons l'intervalle en deux parties égales. Pour l'une au moins des deux parties, la limite inférieure de y sera $m \cdots$ Après n opérations nous verrons qu'il existe un intervalle $a_n b_n$ pour lequel la limite inférieure de y est m. Entre a_n et b_n on peut donc trouver un nombre x_n pour lequel

$$f(x_n) - m < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\varepsilon \text{ aussi petit qu'on le veut}). \tag{1}$$

Les suites $a_1 \cdots a_n$, $b_1 \cdots b_n$ admettent pour limite un nombre α ; x_n a également pour limite α. Puisque la fonction est continue pour toute valeur possible de x comprise entre a et b, elle l'est en particulier pour α. Il existe une quantité finie η_α telle que si $| x - \alpha | < \eta_\alpha$ on ait

$$| f(x) - f(\alpha) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si nous choisissons n assez grand pour que $\frac{b-a}{2^n} < \eta_\alpha$, on aura certainement $| x_n - \alpha | < \eta_\alpha$ et par suite

$$| f(x_n) - f(\alpha) | < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Des inégalités (1) (2), on déduira donc que

$$| f(\alpha) - m | < \varepsilon.$$

Le premier membre, différence de deux quantités fixes, est

donc rigoureusement nul. Il existe donc bien une valeur α pour laquelle

$$f(\alpha) = m.$$

Remarquons que si la fonction était quelconque, il n'est pas démontré qu'elle puisse atteindre effectivement sa borne supérieure ou sa borne inférieure.

Considérons par exemple une fonction qui soit égale à $\frac{1}{2}$ pour toute valeur commensurable de x et qui soit égale à x pour toute autre valeur de x, dans l'intervalle 0, 1.

Les bornes inférieure et supérieure de la fonction dans l'intervalle seront donc 0, 1. Cependant la fonction ne peut atteindre effectivement aucune de ces valeurs puisqu'elle est égale à $\frac{1}{2}$ pour $x = 0$ ou pour $x = 1$ (Hadamard).

Fonctions de plusieurs variables. — Nous donnerons d'abord quelques définitions.

Étant donné un système de variables $x, y, \cdots$ nous appellerons « point » tout système de valeurs $a, b, \cdots$ données à ces variables.

Cette définition s'explique :

Dans le cas d'une variable, à toute valeur de la variable, on peut faire correspondre un point d'une droite, dans le cas de deux, de trois variables, à un système de valeurs de ces deux, trois variables, on peut faire correspondre un point d'un plan ou de l'espace par rapport à deux, à trois axes de coordonnées.

Considérons par exemple deux variables. Supposons qu'elles puissent prendre tous les systèmes de valeurs satisfaisant aux inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d.$$

On peut dire que tous ces points sont à l'intérieur d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.

Ce rectangle constitue le champ dans lequel se meut le point. On peut généraliser et substituer au rectangle, l'intérieur d'une courbe fermée de forme quelconque. De même, pour le cas de trois variables, on peut considérer les points à l'intérieur d'un parallélipipède ou dons un volume limité par une surface quelconque. S'il y a plus de trois variables, on ne peut avoir de représentation géométrique,

mais, on peut définir un champ par l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une ou plusieurs inégalités de la forme

$$f_1(x, y, z, t) > 0, \qquad f_2(x, y, z, t) > 0 \cdots$$

Nous continuerons à appeler parallélipipède parallèle aux axes l'ensemble des valeurs des variables satisfaisant aux conditions

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d, \cdots \qquad g \leqslant t \leqslant h.$$

Nous appellerons « plan » l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une équation linéaire

$$Ax + By + Cz + Dt + \cdots + L = 0.$$

Nous appellerons « distance » de deux points x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2 la quantité

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \cdots + (t_2 - t_1)^2}.$$

Nous appellerons « sphère » l'ensemble des points x, y, z, t, à une distance donnée constante R d'un point x_0, y_0, z_0, t_0. Les coordonnées satisfont donc à la condition

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \cdots (t - t_0)^2 = R^2.$$

Ensembles. — Si, pour chacune des variables, on ne considère que certaines valeurs (en nombres infinis) dans l'ensemble complet des nombres, on constitue un ensemble. Par exemple dans le cas d'une variable, les termes d'une série, les nombres entiers, les nombres fractionnaires, constituent des ensembles.

Un ensemble est dense, si aux environs d'un point quelconque de l'ensemble et dans un intervalle, rectangle, parallélipipède aussi petit qu'on le veut, entourant ce point, il existe une infinité de points de l'ensemble, tel qu'il est défini.

Par exemple l'ensemble des nombres entiers n'est pas dense, mais l'ensemble des nombres rationnels l'est.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une variable. Sur une droite, à un point quelconque de cette droite, correspond un nombre rationnel ou irrationnel. L'ensemble de tous les points correspondant à toutes les valeurs rationnelles ou irrationnelles constitue le continu linéaire.

Étant donnés deux ensembles, si à un terme de l'un on peut faire correspondre un terme de l'autre et réciproquement, on dit que ces ensembles ont même puissance.

On dit qu'un ensemble est dénombrable, s'il est de même puissance que l'ensemble des nombres entiers. Une série constitue un ensemble dénombrable.

Une série à double entrée constitue également un ensemble dénombrable, car on peut classer ses termes en prenant successivement les termes des diagonales parallèles à la deuxième bissectrice sous la forme (u_{00}) (u_{10}, u_{01}) (u_{20}, u_{11}, u_{02}) etc···, et il est évident que l'on peut indiquer quel sera le n^e terme de cet ensemble.

L'ensemble des nombres rationnels constitue également un ensemble dénombrable, car on peut faire correspondre ses termes $\frac{\alpha}{\beta}$ à ceux d'une série double $U_{\alpha\beta}$.

On dit qu'un ensemble a la puissance du continu, s'il a même puissance que l'ensemble E de tous les nombres rationnels ou irrationnels. Cet ensemble n'est certainement pas dénombrable, car si l'on pouvait imaginer une correspondance quelconque entre cet ensemble E et l'ensemble des nombre entiers, on pourrait trouver encore une infinité de termes de E qui ne feraient pas partie de cette correspondance.

On dit qu'un ensemble est borné si les coordonnées de chacun de ses points restent inférieures à un nombre fixe M.

$$a_i < M, \qquad b_j < M.$$

On dit qu'un point α, β est un point « limite » de l'ensemble, s'il existe dans l'ensemble une infinité de points a_n, b_n aussi voisins qu'on le veut du point α, β.

On dit que l'ensemble est parfait si tous les points limites qu'il peut avoir appartiennent également à l'ensemble tel qu'il est défini.

Exemples. — L'ensemble de tous les nombres rationnels x satisfaisant à l'inégalité $A < X < B$ est un ensemble borné mais non parfait. Un point quelconque irrationnel entre A et B est point limite et n'appartient pas à l'ensemble. L'ensemble de tous les nombres rationnels ou non, $A < X < B$, n'est pas encore parfait, car les deux points A, B sont eux-mêmes points limites et n'appartiennent pas à l'ensemble.

L'ensemble $A \leqslant X \leqslant B$ est borné et parfait.

Dans le cas de deux variables, l'ensemble de tous les points satisfaisant à l'inégalité

$$x^2 + y^2 < R^2$$

est un ensemble borné mais non parfait, car tous les points du cercle lui-même sont points limites et n'appartiennent pas à l'ensemble. L'ensemble $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ est borné et parfait.

L'ensemble $y^2 - 2px < 0$ est illimité et non parfait. L'ensemble $y^2 - 2px \leqslant 0$ est illimité et parfait.

THÉORÈME. — *Si dans l'espace à n dimensions, un ensemble borné contient une infinité de points, cet ensemble a au moins un point limite.*

Nous raisonnerons sur deux variables. Puisque l'ensemble est borné, tous ses points sont compris dans un carré de centre origine parallèle aux axes, de côté 2M.

Si nous le partageons en quatre parties, dans une au moins des parties, il y aura une infinité de points. Si nous prenons ce carré correspondant et le divisons en quatre, dans l'un au moins il y aura une infinité de points. Nous pouvons continuer indéfiniment.

Après n opérations, nous aurons un carré de côté $\frac{2M}{2^n}$ renfermant autant de points que nous voulons. Or si nous choisissons n assez grand pour que $\frac{2M}{2^n} < \varepsilon$, on voit qu'il existe un carré de côté ε aussi petit qu'on le veut, dans lequel se trouvent autant de points que l'on veut de l'ensemble. C'est la définition même d'un point limite.

Fonctions de plusieurs variables continues en un point. — Considérons un ensemble à deux variables x, y par exemple. Supposons que, pour chacun des points a, b de l'ensemble, une troisième quantité z prenne une valeur bien déterminée c, à la suite d'opérations données faites sur a, b, on dit que z est une fonction de x, y pour l'ensemble de valeurs considéré. On définit cette liaison par la notation

$$z = f(x, y).$$

On dit que la fonction est bien déterminée pour les valeurs a, b et les valeurs voisines, si on peut la calculer pour tout point d'un rectangle suffisamment petit, de centre a, b.

Soit un point a, b du champ. On dit que la fonction est continue

par rapport à x et y au point a, b, si à un nombre ε choisi aussi petit qu'on le voudra, mais alors fixé, on peut faire correspondre un nombre η tel que si

$$|x - a| < \eta, \qquad |y - b| < \eta$$

on est certain que

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon;$$

il ne faut pas confondre cette définition de fonction continue par rapport à x et y avec la définition de fonction continue par rapport à x et par rapport à y lorsqu'on fait varier seulement une seule de ces variables. Il est bien évident qu'une fonction continue par rapport à x et y est nécessairement une fonction continue par rapport à x et par rapport à y. Mais l'inverse peut ne pas être vrai.

Considérons par exemple la fonction $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pour tout système de valeurs de x, y non nulles simultanément et égale à 0 pour les valeurs 0,0.

Si l'on donne à y la valeur $b = 0$ et si l'on fait varier seulement x, cette fonction est continue par rapport à x pour toute valeur de x, y compris la valeur $x = 0$ (puisqu'elle est constamment nulle). Mais si l'on fait varier simultanément x, y de manière que l'on ait constamment $y = mx$, cette fonction n'est plus continue pour les valeurs 0,0, puisque pour des valeurs de x, y, aussi petites soient-elles, elle est égale à $\frac{m}{1 + m^2}$, et que, pour les valeurs $x = 0$, $y = 0$, elle est égale à 0 par définition.

Le nombre η défini ci-dessus n'est pas absolument déterminé, car l'inégalité (2) serait à fortiori satisfaite si les différences $|x - a|$, $|y - b|$, étaient moindres que η.

Nombre caractéristique. — Nous nous donnerons ε. Si la correspondance précédente existe, nous dirons pour abréger que ε est compatible avec η. Il le sera à fortiori avec tout nombre moindre que η. Si au contraire, pour certains systèmes de valeurs de x, y satisfaisant aux inégalités

$$|x - a| < \eta', \qquad |y - b| < \eta',$$

on a

$$|f(x, y) - f(a, b)| > \varepsilon,$$

(η' est alors certainement supérieur à η), nous dirons pour abréger que ε n'est pas compatible avec η'.

Supposons que nous ayons de tels nombres η_1, η_1'. Nous allons restreindre cet intervalle. A cet effet nous considèrerons la valeur intermédiaire $\frac{\eta_1 + \eta_1'}{2}$. Nous la désignerons soit par η_2 soit par η_2' suivant qu'elle sera ou non compatible avec ε. Si nous nous trouvons dans le premier cas, η_2 remplacera η_1. Désignons le nouvel intervalle par $\eta_2\eta_2'$. Partageons-le à nouveau en deux parties égales. Pour l'un des intervalles que nous désignons par η_3, η_3', ε sera compatible avec le nombre inférieur et ne le sera pas avec le nombre supérieur. Nous pourrons recommencer autant de fois que nous le voudrons et nous formerons deux suites

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n, \cdots ; \qquad \eta_1', \eta_2', \cdots \eta_n', \cdots$$

jouissant des trois propriétés qui définissent un nombre ρ rationnel ou irrationnel ; ε sera compatible avec tout nombre inférieur à ρ, et ne le sera pas avec tout nombre supérieur à ρ.

En résumé :

Étant donné ε, il existe un nombre ρ tel que, si

$$| x - a | < \rho, \qquad | y - b | < \rho$$

on est certain que

$$| f(x, y) - f(a, b) | < \varepsilon.$$

On est certain au contraire que, pour certaines valeurs de x, y, satisfaisant à des inégalités

$$| x - a | \leqslant \rho' \qquad | y - b | \leqslant \rho',$$

on a

$$| f(x, y) - f(a, b) | > \varepsilon$$

quelle que petite que soit la différence positive $\rho' - \rho$.

Le nombre ρ s'appelle nombre *caractéristique* rattaché au point a, b.

Continuité dans un champ. — Étant donné un champ, la fonction $f(x, y)$ est dite continue dans ce champ si elle est continue pour chacun des points du champ. Il existe un nombre caractéristique ρ_{ab} rattaché à chacun des points du champ. Ce nombre dépend en effet en général du point considéré a, b. Supposons que

l'on puisse être assuré qu'il existe un nombre $|\rho|$ tel que, quel que soit le point a, b, on ait $\rho < \rho_{ab}$; ε et ρ seront compatibles quel que soit le point a, b. En d'autres termes, à la seule condition que

$$|x-a|<\rho, \qquad |y-b|<\rho. \tag{1}$$

on sera certain que

$$|f(x, y)-f(a, b)|<\varepsilon \tag{2}$$

quel que soit le point a, b de l'ensemble.

S'il existe un tel nombre ρ, inférieur à tous les nombres caractéristiques, on dit que la continuité est uniforme. Cette propriété sera évidemment très importante, puisqu'elle dispensera de spécifier pour quel point a, b les inégalités (1) et (2) sont compatibles. S'il n'existe pas de tel nombre ρ, la fonction pourra être continue dans l'ensemble, mais non uniformément continue.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si l'ensemble considéré est borné et parfait, si la continuité existe, elle est nécessairement uniforme.*

Nous continuerons à raisonner sur deux variables, mais le mode de raisonnement s'appliquera évidemment à un nombre quelconque de variables.

Puisque l'ensemble est borné, il existe un nombre M tel que

$$|a_n|<M, \qquad |b_n|<M.$$

Géométriquement, tous les points a, b sont à l'intérieur d'un carré de centre origine, de côté 2M.

Nous décomposerons le carré en 2^n parties égales, par des parallèles aux axes. Par hypothèse, quel que soit n, il existera dans au moins un des carrés de subdivision, au moins un point pour lequel le nombre caractéristique correspondant sera inférieur à toute quantité choisie aussi petite qu'on le voudra.

Précisons. Partageons le carré en quatre parties égales. Dans l'un des quatre carrés Q_1, il existe au moins un point a_1, b_1 pour lequel le nombre caractéristique est moindre que toute quantité choisie arbitrairement, soit $\frac{\lambda}{2}$. Décomposons Q_1 en quatre

parties égales. Pour l'un au moins des carrés Q_2, il existera au moins un point a_2b_2 pour lequel le nombre caractéristique correspondant sera moindre que toute quantité choisie arbitrairement, soit $\frac{\lambda}{2^2}$. Si en effet, il n'existait pas de tel point, nous serions assuré que pour tout point du carré Q_2, le nombre caractéristique est supérieur à $\frac{\lambda}{2^2}$. Nous raisonnerions sur un des autres carrés de la décomposition.

Après n opérations, nous verrons que, pour un au moins des carrés Q_n, il existe un point a_nb_n pour lequel le nombre caractéristique correspondant est moindre que toute quantité donnée $\frac{\lambda}{2^n}$.

Ces points

$$a_1, b_1 \quad a_2, b_2, \ldots a_n, b_n, \ldots a_{n+p}, b_{n+p}, \ldots -$$

tendent vers un point α, β. En effet, à partir du rang n, ils sont tous compris dans le carré Q_n. On a

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{2M}{2^n}, \qquad |b_{n+p} - b_n| < \frac{2M}{2^n}$$

$\frac{2M}{2^n}$ pouvant être rendu aussi petit qu'on le voudra, les quantités a_n, b_n admettant donc des limites α, β. Le point α, β est un point limite de l'ensemble puisque l'on a

$$|\alpha - a_n| < \frac{2M}{2^n}, \qquad |\beta - b_n| < \frac{2M}{2^n}$$

pour une infinité de points a_nb_n. Puisque l'ensemble est parfait, il appartient à l'ensemble : la fonction est donc continue en ce point. Étant donnée la quantité $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe une certaine quantité δ telle que, pour tout système de valeurs de x, y satisfaisant aux inégalités

$$|x - \alpha| < \delta, \qquad |y - \beta| < \delta,$$

on est certain que

$$|f(x,y) - f(\alpha, \beta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le point a_n, b_n ayant pour limite α, β, choisissons d'abord n assez grand pour que $\frac{2M}{2^n} < \frac{\delta}{2}$. Alors

$$|x - a_n| < \frac{\delta}{2}, \qquad |\beta - b_n| < \frac{\delta}{2}.$$

On aura certainement

$$|f(a_n, b_n) - f(x, \beta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons encore n assez grand pour que $\frac{\lambda}{2^n} < \frac{\delta}{2}$. Si le nombre caractéristique $\rho_{a_n b_n}$ était moindre que $\frac{\lambda}{2^n}$ et par suite que $\frac{\delta}{2}$, cela voudrait dire qu'il existe certainement des valeurs de x, y satisfaisant à

$$|x - a_n| < \frac{\delta}{2}, \qquad |y - b_n| < \frac{\delta}{2}$$

pour lesquels

$$|f(x, y) - (a_n, b_n)| > \varepsilon.$$

Or

$$|f(x, y) - f(a_n, b_n)| \leqslant |f(x, y) - f(x, \beta)| + |f(x, \beta) - f(a_n b_n)|.$$

Comme la dernière différence est moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$, pour ces valeurs de x, y on aurait donc certainement

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Enfin

$$|x - \alpha| \leqslant |x - a_n| + |a_n - \alpha|.$$

Comme chacune des parties du second membre est moindre que $\frac{\delta}{2}$, on voit qu'il existerait des valeurs satisfaisant à

$$|x - \alpha| < \delta, \qquad |y - \beta| < \delta$$

pour lesquelles

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

contrairement à la définition de la continuité au point α, β.

Remarque. — Nous sommes donc assurés désormais que si l'on considère une fonction continue dans un ensemble borné et

parfait (ces mots seront parfois sous-entendus ou évidents), étant donné ε, il existe une quantité δ telle que si

$$|x - x'| < \delta \qquad |y - y'| < \delta$$

on a

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

quelles que soient les deux couples de valeurs x, y, x', y'.

Application. — Considérons le champ $o < x \leqslant A$ et la fonction $y = \frac{1}{x}$, A pouvant même augmenter indéfiniment ; c'est un champ qui n'est peut-être pas borné, mais qui n'est certainement pas parfait.

La fonction y est continue pour tout point du champ.

Soit en effet un point a ; posons $x = a + h$. Étant donné ε on veut que

$$\left|\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad |h| < \varepsilon\,|a| \times |a + h|.$$

Supposons $a > 0$. Si h est positif, l'inégalité est satisfaite si $h < \frac{\varepsilon a^2}{1 - \varepsilon a}$; si h est négatif, posons $h = -h'$. L'inégalité est satisfaite si $h' < \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}$.

On voit donc dans tous cas, que si

$$|h| < \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}$$

l'inégalité sera satisfaite quel que soit h. Le nombre caractéristique ρ_a est donc $\frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}$. Il n'existe pas de nombre caractéristique plus petit que tous les autres : la fonction n'est donc pas uniformément continue. D'ailleurs, on peut se rendre compte qu'il ne peut exister de nombre δ tel que, quel que soit a, on ait

$$\left|\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad h \leqslant \delta.$$

Prenons en effet en particulier $h = \delta$. On devrait avoir

$$\left|\frac{1}{a+\delta} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Or cette inégalité ne pourrait avoir lieu que si

$$a^2 + a\delta - \frac{\varepsilon}{\delta} > 0,$$

inégalité qui ne serait pas vérifiée pour des valeurs de a suffisamment petites, appartenant au champ.

2e Application. — La fonction $y = x^2$ est uniformément continue pour toute valeur de x satisfaisant à $A \leqslant x \leqslant B$. Pour une valeur a, on a en effet à résoudre l'inégalité

$$|(a+h)^2 - a^2| < \varepsilon \qquad |2ah + h^2| < \varepsilon.$$

Supposons $a > 0$. Si $h > 0$, l'inégalité est vérifiée à fortiori si $2Bh < \varepsilon$ quel que soit a : la fonction est donc bien uniformément continue.

On peut voir de même que la fonction est continue pour toute valeur de x satisfaisant à $A \leqslant x$ (la démonstration est la même que ci-dessus) mais qu'elle n'est pas uniformément continue ; il est impossible de trouver une quantité δ fixe, indépendante de la valeur de a considérée, telle que si $h \leqslant \delta$ on ait $|2ah + h^2| < \varepsilon$ quel que soit a.

En effet si cette quantité δ existait, en prenant $h = \delta$, on devrait avoir $2a\delta + \delta^2 < \varepsilon$, et à fortiori, $2a\delta < \varepsilon$: or cette inégalité ne serait pas satisfaite pour des valeurs suffisamment grandes $\left(\frac{\varepsilon}{2\delta}\right)$ de a dans le champ.

CHAPITRE II

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE FONCTIONS IMPLICITES DÉTERMINANTS FONCTIONNELS

SOMMAIRE.

Dérivées et différentielles des fonctions d'une variable : Théorème de Rolle, des accroissements finis. — Fonctions de plusieurs variables : fonctions composées. — Dérivée suivant une direction.

Fonctions implicites (une variable) : Existence. — Calcul des dérivées partielles.

Déterminants fonctionnels : 1re propriété : $\frac{Df}{DX} = \frac{Df}{Dx} \times \frac{Dx}{DX}$. — 2me propriété : Rapport d'aires, de volumes élémentaires. — 3e Propriété : Transformation du déterminant fonctionnel. — Applications. — Indépendance d'un système de fonctions. — Calcul du déterminant fonctionnel dans le cas des fonctions implicites.

Fonctions implicites : Cas de deux équations, de n équations.

Dépendance des fonctions : Autre démonstration.

Dérivées et différentielles d'ordre supérieur : Formule de Leibnitz.

Si $f(x)$ désigne une fonction déterminée finie, continue, dans un intervalle ab, pour une valeur quelconque x de la variable, dans l'intervalle, l'accroissement $f(x + \Delta x) - f(x)$ est infiniment petit en même temps que Δx. Il est naturel de considérer l'ordre de l'infiniment petit.

Si le rapport $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ tend vers une limite déterminée finie, lorsque Δx tend vers 0 d'une manière quelconque, et cela, quelle que soit la valeur de x choisie dans l'intervalle, cette limite dépendra en général de x. Elle constitue donc une nouvelle fonction de x dans l'intervalle ab, que l'on appelle la dérivée de $f(x)$ par rapport à la variable indépendante x. On la représente par $f'(x)$

(notation de Lagrange). Inversement, on dit que la fonction donnée est une fonction primitive de cette dérivée. Nous verrons que toutes les fonctions primitives ne diffèrent entre elles que par une constante.

REMARQUE. — Si une fonction admet une dérivée, elle est nécessairement continue, mais la réciproque n'est pas vraie. Il est facile de trouver des fonctions continues n'admettant pas de dérivée pour des valeurs particulières de la variable. Par ex. la fonction $y = x \sin \frac{1}{x}$ est continue pour $x = 0$: y tend vers 0 quand x tend vers 0 mais le rapport $\frac{y}{x} = \sin \frac{1}{x}$ ne tend vers aucune limite. Soit encore la fonction

$$y = x \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Si x tend vers 0 par valeurs positives, le rapport $\frac{y}{x}$ a pour limite l'unité. Si x tend vers 0 par valeurs négatives, le rapport a limite 0 et cependant, de toutes façons, y tend vers 0 en même temps que x.

Weierstrass, le premier, a montré l'existence d'une fonction continue, donnée par une série assez simple n'admettant de dérivées pour aucune valeur de x. Ce sont là des cas exceptionnels que nous n'aurons pas à envisager.

Nous admettrons connues les dérivées des fonctions simples, fonctions rationnelles, fonctions exponentielles, logarithmiques ou trigonométriques, ainsi que les règles de calcul élémentaire des dérivées. Enfin nous admettrons la règle de calcul des dérivées des fonctions de fonction.

Puisque le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a pour limite $f'(x)$ lorsque Δx tend vers zéro, pour des valeurs petites mais fixes de Δx, on pourra écrire

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

et par suite

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Le rapport entre les deux termes du second membre a pour limite 0 (en supposant $f'(x) \neq 0$). Le terme principal de ce second membre est donc le premier. On donne à cette partie principale le nom de différentielle. Si on la désigne par dy, on a donc $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Une conséquence nécessaire est (si y se réduit à x) que $dx = \Delta x$: la différentielle de la variable indépendante se confond donc avec l'accroissement considéré, d'ailleurs arbitraire, de cette variable indépendante.

On peut alors écrire $dy = f'(x) \cdot dx$ et par suite $f'(x = \frac{dy}{dx}$. On peut donc représenter encore la dérivée par $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$ (notation de Leibnitz).

Représentation géométrique. — Représentons la fonction $y = f(x)$ par une courbe rapportée à deux axes rectangulaires ox, oy. Soit AB l'arc de courbe correspondant à l'intervalle ab. Soient MM' les points correspondant aux abscisses x, $x + h$ représentées par les points m, m' de ox.

Le cofficient angulaire de la corde MM' est

$$\frac{\overline{m'M'} - \overline{mM}}{mm'} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Supposons que h tende vers zéro ; le point M' se rapproche indéfiniment de M. Si la fonction admet une dérivée, le coefficient angulaire de la droite tendra vers une valeur limite $f'(x)$: la droite MM' tendra donc vers une position limite : cette position limite d'une droite qui tourne autour d'un point M jusqu'à ce que un second point d'intersection de la droite et de la courbe vienne se confondre avec lui, s'appelle la tangente en M.

Inversement si cette position limite existe, c'est-à-dire si la courbe admet une tangente en M, le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite : la fonction y admet donc une dérivée au point x.

De plus supposons h non nul. Menons la tangente en M. Elle rencontre l'ordonnée du point M en M_1. Désignons par μ le point où la parallèle à ox menée par M rencontre M'm'. On aura

$$\mu M_1 = \mu M \times f'(x) = h f'(x).$$

ω

Le segment μM_1 représente pour chaque valeur de l'accroissement h, la différentielle de y.

THÉORÈME DE ROLLE. — *Si une fonction finie bien déterminée, prend la même valeur* A *pour* $x = a$, $x = b$, *si elle admet une dérivée dans l'intervalle, cette dérivée s'annule au moins une fois pour une valeur de* x *comprise entre* a *et* b.

En effet si la fonction n'est pas constante dans l'intervalle,

a

elle admettra dans cet intervalle deux valeurs limites m, M. Si par exemple $A \neq M$ la fonction passera par la valeur M pour une valeur c comprise entre a et b. La différence $f(c + h) - f(c)$ sera

d

donc négative, quel que soit le signe de h. Les rapports

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \qquad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

seront donc constamment de signes contraires, quelque petit que

δ_1

soit h. Leurs limites, si elles existent, seront donc de signes contraires, ou nulles. Mais si h tend vers zéro, ces rapports admettent même limite, la dérivée de $f(x)$ au point c. On a donc certainement $f'(c) = 0$.

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS. — *Si l'on a deux fonctions* $f(x)$, $\varphi(x)$ *bien déterminées, finies, dérivables dans un intervalle ab, on peut écrire*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

c désignant une valeur intermédiaire entre a et b.

Considérons en effet la fonction

$$F(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]\varphi(x).$$

Cette fonction prend la même valeur pour $x = a$, $x = b$

$$F(a) = F(b) = f(a)\varphi(b) - f(b)\varphi(a).$$

δ_2

Elle admet d'ailleurs une dérivée

$$F'(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)]f'(x) - [f(b) - f(a)]\varphi'(x).$$

D'après le théorème de Rolle, pour une valeur c comprise entre a et b, on a donc $F'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$[\varphi(b) - \varphi(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]\varphi'(c).$$

D'où la formule à démontrer.

C'est le théorème des accroissements finis sous sa forme la plus générale. On peut supposer en particulier $\varphi(x) = x$. On aura

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

C'est la formule des accroissements finis : si une fonction admet une dérivée dans un intervalle, l accroissement de cette fonction correspondant à deux valeurs quelconques a, b de l'intervalle est le produit de l'intervalle par la valeur de la dérivée en un certain point intermédiaire.

Représentation géométrique. — On peut écrire

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Si MM′ sont les points correspondant aux abscisses a, b, le premier rapport est le coefficient angulaire de la droite MM′, le second représente le coefficient angulaire de la tangente en un point correspondant à une abscisse C de l'intervalle ab ; on voit qu'il existe entre M, M′ un point N pour lequel la tangente en N est parallèle à la corde MM′.

Autre forme du théorème des accroissements finis. — Si nous représentons par x, $x + h$ les abscisses a, b, on pourrait écrire que $c = x + \theta h$, θ étant compris entre 0 et 1 et par suite

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h).$$

Si une fonction est constante dans un intervalle, sa dérivée, limite d'un rapport constamment nul, est nulle pour toute valeur de l'intervalle. Inversement, si pour toute valeur de x comprise dans un intervalle, la dérivée est nulle, la fonction est constante dans l'intervalle. En effet, prenons deux valeurs quelconques de l'intervalle ab. D'après le théorème des accroissements finis,

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Comme par hypothèse, quel que soit c, $f'(c) = 0$, la fonction est donc bien constante.

Comme conséquence, si deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ admettent même

dérivée dans un intervalle, elles ne peuvent différer que par une constante π puisque leur différence admet dans l'intervalle une dérivée constamment nulle.

II. — FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Les notions précédentes s'étendent au cas de plusieurs variables. Soit par exemple une fonction de deux variables $f(x, y)$. Si nous fixons la variable y en lui donnant la valeur y_0 (dans le cas de plusieurs variables, si nous fixons toutes les variables sauf une), nous obtiendrons une fonction de la seule variable x. Elle sera certainement continue dans le champ des valeurs de x correspondant à y_0, si la fonction de deux variables était continue dans le champ. Il suffit en effet de considérer des accroissements nuls pour y.

ξ En faisant varier x seul, il se peut que cette fonction admette une dérivée par rapport à x. Ce sera la limite de

$$\frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

lorsque Δx tend vers zéro. Cette limite, si elle existe pour toute valeur de x, est dite la dérivée partielle par rapport à x de la fonction $f(x, y)$ pour la valeur y_0. On la désigne par $f_x'(x, y_0)$. Si cette limite existe quelle que soit la valeur de y_0 considérée, l'ensemble de ces dérivées partielles constitue une fonction des deux variables x, y que l'on désigne par $f_x'(x, y)$, et que l'on appelle la dérivée partielle par rapport à x de $f(x, y)$.

δ_1 En faisant varier y seul, on obtient de même la dérivée partielle de la fonction par rapport à y seul. On la désigne par $f_y'(x, y)$.

On désigne encore par analogie les dérivées partielles par $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, mais ce symbole ne peut être confondu avec un quotient. Enfin Cauchy employait la notation $D_x f$, $D_y f$.

Faisons maintenant varier simultanément x, y en leur donnant des accroissements Δx, Δy. δ_1 La fonction prendra un accroissement

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Il est facile de ramener ce cas au cas où une seule des variables varierait, χ en écrivant

$$\Delta f = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Or on peut écrire

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x f_x'(x, y) + \varepsilon \Delta x,$$

ε serait un infiniment petit si Δx l'était lui-même. De même dans les deux premiers termes, δ_1 y varie seul, x conservant la valeur $x + \Delta x$. Donc

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = \Delta y f_y'(x + \Delta x, y) + \varepsilon_1 \Delta y,$$

ε_1 serait un infiniment petit si Δy l'était lui-même.

D'ailleurs, si la dérivée partielle $f_y'(x, y)$ est une fonction continue de x pour les valeurs voisines de x, y, on peut écrire

$$f_y'(x + \Delta x, y) = f_y'(x, y) + \varepsilon',$$

ε' étant infiniment petit en même temps que Δx.

ω On a donc finalement

$$\Delta f = \Delta x f_x'(x, y) + \Delta y F_y'(x, y) + \varepsilon \Delta x + (\varepsilon_1 + \varepsilon') \Delta y.$$

Nous allons suivre, pas à pas, ce que nous avons fait dans le cas d'une variable. α, ν Il est naturel de considérer les deux premiers termes. Quand Δx est infiniment petit, le troisième est en effet d'ordre supérieur au premier puisque leur rapport $\frac{\varepsilon}{f_x'}$ tend vers zéro. De même, le dernier est infiniment petit par rapport au second.

ξ, σ_1 L'ensemble des deux premiers termes s'appelle la différentielle de la fonction. En la désignant par df on a donc

$$df = f_x'(x, y) \Delta x + f_y'(x, y) \Delta y.$$

d Ici encore, si on suppose que la fonction se réduit successivement à x puis à y on voit qu'une conséquence nécessaire de la notation est que

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y.$$

Les différentielles des variables indépendantes sont donc tout sim-

plement les accroissements, d'ailleurs arbitraires, donnés à ces variables. Dans la pratique on suppose que ces accroissements sont infiniment petits.

On a donc finalement

$$df = f_x'dx + f_y'dy.$$

Pour une fonction de trois variables $f(x, y, z)$, on a

$$df = f_x'dx + f_y'dy + f_z'dz.$$

Considérons par exemple ce cas. Donnons à y, z des valeurs déterminées y_0, z_0 et faisons varier seulement x. Si la fonction est indépendante de x, sa dérivée $f_x'(x, y_0, z_0)$ est nulle quelles que soient ces valeurs de yz. De même si la fonction est indépendante de y, z, f_y', f_z' sont identiquement nuls. Si donc la fonction se réduit à une constante, on a

$$f_x' = 0, \qquad f_y' = 0, \qquad f_z' = 0.$$

Et par suite $df = 0$ quels que soient dx, dy, dz.

Inversement si $df = 0$ quels que soient dx, dy, dz, faisons par exemple $dy = dz = 0$; $f_x'dx$ devra être nul quel que soit dx. Donc $f_x' = 0$, de même $f_y' = f_z' = 0$.

ω

La condition nécessaire est suffisante pour qu'une fonction se réduise à une constante est que sa différentielle totale soit nulle quelles que soient les différentielles des variables indépendantes.

Il en résulte que si on différentie totalement une identité, on obtient une nouvelle identité.

Le théorème suivant montre l'utilité de la notion de différentielle.

THÉORÈME. — *Si par une analyse quelconque on a pu, en donnant des accroissements Δx, Δy aux variables, mettre l'accroissement d'une fonction sous la forme*

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + R\Delta x + S\Delta x,$$

AB étant des fonctions de xy mais indépendantes de Δx, Δy, R, S étant infiniment petits en même temps que Δx et Δy, on aura nécessairement

$$A = f_x'(x, y), \qquad B = f_y'(x, y).$$

δ

En effet pour des accroissements Δx, Δy, nous savons que l'accroissement de la fonction peut s'écrire

$$\Delta f = f_x'\Delta x + f_y'\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon_1\Delta y.$$

Égalons les deux expressions de Δf

$$A\Delta x + B\Delta y + R\Delta x + S\Delta y = f_x'\Delta x + f_y'\Delta y + \varepsilon\Delta y + \varepsilon_1\Delta y.$$

ρ

Cette égalité devant avoir lieu, quels que soient les accroisse-

α

ments Δx, Δy, laissons y constant, d'où $\Delta y = 0$. L'égalité se met sous la forme

$$(A + R)\Delta x = (f_x' + \varepsilon)\Delta x$$

ou

$$A - f_x' = \varepsilon - R.$$

ρ

Si nous supposons Δx infiniment petit, le second membre, qui est infiniment petit en même temps que Δx, peut être rendu aussi petit qu'on le veut. Mais le premier membre est indépendant

ω

de Δx. Il est donc rigoureusement nul et on a bien

$$A = f_x'(x, y), \qquad \text{de même} \qquad B = f_y'(x, y).$$

Ce théorème conduit immédiatement à la détermination des dérivées partielles d'une fonction composée.

Fonctions composées. — Supposons que z soit fonction de deux variables u, v mais que u, v soient elles-mêmes fonctions de p autres variables indépendantes par exemple de deux autres variables x, y; z est dite fonction composée de x, y par l'intermédiaire de u, v.

α

Considérée comme fonction de x, y, voyons si elle admettrait des dérivées partielles par rapport à x, y.

α

Nous allons appliquer le théorème précédent χ en donnant à x, y des accroissements Δx, Δy et cherchant à déterminer l'accroissement de z.

δ

Si u, v admettent des dérivées partielles par rapport à x, y, pour les accroissements Δx, Δy, u, et v prennent des accroissements

$$\Delta u = u_x'\Delta x + u_y'\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_1'\Delta y$$
$$\Delta v = v_x\Delta x + v_y'\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_2'\Delta y.$$

ξ

Ces accroissements étant déterminés, si z admet des dérivées partielles par rapport à u, v, considérées comme variables indépendantes, son accroissement sera de la forme

$$\Delta z = f_u'\Delta u + f_v'\Delta v + \varepsilon\Delta u + \varepsilon'\Delta v,$$

tous les ε étant infiniment petits en même temps que les accroissements Δx, Δy. En substituant dans Δz les expressions de Δu, Δv, on obtient

$$\Delta z = f_u'[u_x'\Delta x + u_y'\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_1'\Delta y] + f_v'[v_x'\Delta x + v_y'\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_2'\Delta y] + \varepsilon[u_x'\Delta x + \dots] + \varepsilon'[v_x'\Delta x + \dots].$$

Cet accroissement est ainsi mis sous la forme

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \eta\Delta x + \eta'\Delta y$$

avec

$$A = f_u'u_x' + f_v'v_x', \quad B = f_u'u_y' + f_v'v_y', \quad \eta = f_u'\varepsilon_1 + \dots \quad \eta' = \dots$$

AB sont en effet bien indépendants de Δx, Δy ; η et η' des infiniment petits. Avec les restrictions indiquées, z considérée comme fonction de x, y admet donc des dérivées partielles par rapport à x, y

$$z_x' = f_u'u_x' + f_v'v_x', \qquad z_y' = f_u'u_y' + f_v'v_y'.$$

L'une de ces dérivées s'obtient en prenant successivement la dérivée de z par rapport à chacune des fonctions composantes, en multipliant chacun des résultats par la dérivée de la fonction composante correspondante et en faisant la somme des produits ainsi obtenus.

La différentielle totale de la fonction sera

$$dz = [f_u'u_x' + f_v'v_x']\,dx + [f_u'u_y' + f_v'v_y']\,dy.$$

On peut l'écrire

$$dz = f_u[u_x'dx + u_y'dy] + f_v'[v_x'dx + v_y'dy].$$

Or les parenthèses sont les différentielles des fonctions u, v. On peut donc écrire

$$dz = f_u'du + f_v'dv.$$

z considérée comme fonction de u, v admet donc une différentielle qui a exactement la même forme que si u, v étaient, non des fonctions de x, y, mais des variables indépendantes.

Cas particulier d'une seule variable indépendante ; dérivée suivant une direction. — Supposons d'abord une fonction z de deux variables

x, y. Si l'on donne les expressions de ces variables en fonction d'un paramètre t, ces expressions définiront une courbe C et même, si t représente le temps, le mouvement d'un point sur cette courbe. La dérivée

$$\frac{dz}{dt} = z_x' \frac{dx}{dt} + z_y' \frac{dy}{dt}$$

est la dérivée de z suivant cette courbe. Cette dérivée, en un point M donné, ne dépend de la courbe, que par les expressions $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$. Si donc, l'on considère deux mouvements différents effectués le long de deux courbes différentes, si les vecteurs vitesse des deux mouvements sont les mêmes, la dérivée sera la même pour les deux mouvements. On dit que les deux mouvements sont tangents.

En particulier, si la vitesse du mouvement est égale à l'unité, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ sont les cosinus directeurs de la tangente à C. La dérivée

$$\frac{dz}{dt} = z_x' \cos(Tx) + z_y' \cos(Ty) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

est appelée la dérivée de z suivant la direction T. Le premier membre est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de l'arc de courbe quand ce dernier tend vers zéro, puisque dans ce cas $ds = dt$.

Désignons par α l'angle de la demi-tangente à la courbe dans le sens du mouvement (arcs croissants) et par ds un arc élémentaire. On aura

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Prenons pour direction T de déplacement, la direction faisant avec ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (direction de la demi-normale dite intérieure pour le sens de déplacement choisi). On aura

$$\cos(Tx) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{dy}{ds} \qquad \cos(Ty) = \frac{dx}{ds}.$$

La dérivée de la fonction z prise suivant la normale à la courbe a donc pour expression

$$D_n z = \frac{1}{ds}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}dy + \frac{\partial z}{\partial y}dx\right).$$

Dans le cas d'une fonction de trois variables indépendantes

$u = f(x, y, z)$, si l'on suppose que x, y, z sont fonctions d'un paramètre t, ces expressions définiront le mouvement du point x, y, z sur une courbe. La dérivée

$$\frac{du}{dt} = f_x' \frac{dx}{dt} + f_y' \frac{dy}{dt} + f_z' \frac{dz}{dt}$$

qui ne dépend encore que de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, sera encore la même pour deux mouvements tangents. Si on suppose la vitesse du mouvement égale à l'unité, dt se confond avec le déplacement ds du point sur la courbe ; on a

$$\frac{dx}{dt} = \cos(Tx), \qquad \frac{dy}{dt} = \cos(Ty), \qquad \frac{dz}{dt} = \cos(Tz)$$

$$\frac{du}{dt} = f_x' \cos(Tx) + f_y' \cos(Ty) + f_z' \cos(Tz).$$

Le premier membre est donc la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de l'arc de courbe.

III. — FONCTIONS IMPLICITES

Cas d'une seule équation. — On dit que u est fonction implicite de deux variables x, y si l'expression de u au moyen des variables indépendantes, n'est pas explicitement donnée, mais dépend d'une équation de la forme $f(x, y, u) = 0$ non résolue par rapport à u. Étant donnée la fonction de trois variables $f(x, y, u)$, donnons-nous un système de valeurs x, y ; pour que l'on puisse avoir $f(x, y, u) = 0$, il faudra donner à u certaines valeurs bien déterminées. Si l'on considère l'une d'elles, on voit que u est une fonction de x, y. On dit que l'équation définit une ou plusieurs fonctions implicites de x, y.

Nous allons d'abord chercher à quelles conditions une telle équation peut définir une fonction u bien déterminée, si cette fonction est continue, et si elle admet des dérivées partielles par rapport à x, y.

Il est nécessaire de supposer tout d'abord qu'il existe un système de valeurs x_0, y_0, u_0 telles que

$$f(x_0, y_0, u_0) = 0.$$

2° Il est naturel de penser que si les dérivées partielles existent, ψ elles dépendront de f_x', f_y', f_u'. Nous les supposerons continues autour du point x, y, u c'est-à-dire que dans le champ

$$|x - x_0| < \eta \qquad |y - y_0| < \eta \qquad |u - u_0| < \eta$$

les dérivées partielles, considérées comme fonctions de trois variables indépendantes, diffèrent de leurs valeurs initiales $(f_x')_0$, $(f_y')_0$, $(f_u')_0$, d'une quantité moindre que ε.

3° Enfin nous supposerons $(f_u')_0 \neq 0$. Cette condition, moins évidente, va découler immédiatement de notre étude.

Dans ces conditions, nous allons montrer que l'on peut déterminer un intervalle h tel que, à tout système de valeurs x, y satisfaisant à

$$(1) \qquad (x - x_0) < h, \qquad (y - y_0) < h,$$

β correspond une valeur de u et une seule satisfaisant à l'équation $f(x, y, u) = 0$ et à l'inégalité $|u - u_0| < \eta$, η étant choisi aussi petit qu'on le veut.

(On se donne donc η ; on veut déterminer h).

o L'ensemble des valeurs de u ainsi déterminées ρ constituera bien une fonction bien définie, continue de x, y dans le domaine

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < h.$$

Soit ε un nombre positif quelconque moindre que $|(f'_u)_0|$ (hypothèse 3).

On peut déterminer un nombre η tel que les dérivées partielles diffèrent de leurs valeurs initiales d'une quantité moindre que ε (hypothèse 2).

Il en résultera donc que les dérivées partielles f_x', f_y' resteront finies et moindres qu'un nombre déterminé A ; d'autre part comme

$$(f_u')_0 - \varepsilon < f_u' < (f_u')_0 + \varepsilon,$$

ρ f_u' conservera un signe constant et sa valeur absolue est au moins égale à $B = |(f_u')_0| - \varepsilon$. Donnons-nous donc un système de valeurs x, y vérifiant (1).

Pour montrer qu'il existe une valeur correspondante u comprise entre $u_0 - \eta$ et $u_0 + \eta$ telle que $f(x, y, u) = 0$, dans la fonction $f(x, y, u)$, α laissons x, y fixes et faisons varier u de $u_0 - \eta$ à $u_0 + \eta$. Comme f'_u conserve un signe constant, σ_2 la fonc-

tion $f(x, y, u)$ (fonction de u seulement) varie toujours dans le même sens et ne peut donc s'annuler qu'une fois dans l'intervalle.

ψ

Elle s'annulera certainement si ses deux valeurs extrêmes

$$f(x, y, u - \eta), \qquad f(x, y, u + \eta)$$

sont de signes contraires. Or on peut écrire

$$f(x, y, u) = f(x, y, u) - f(x_0, y_0, u_0)$$

α

et en appliquant le théorème des accroissements finis

$$f(x, y, u) = (x - x_0) f_x'(x_1, y, u) + (y - y_0) f_y'(x_0, y_1, u) + (u - u_0) f_u'(x_0, y_0, u_1)$$

x_1, y_1, u_1 étant respectivement compris entre x et x_0, y et y_0, u et u_0.

ρ

Chacun des deux premiers termes est, en valeur absolue,

ρ

moindre que Ah. Le second, lorsqu'on y remplacera u par $u_0 - \eta$ et $u_0 + \eta$ sera en valeur absolue au moins égal à $B\eta$. Si donc nous astreignons h à la nouvelle condition

$$B\eta > 2Ah$$

d

ce troisième terme donnera son signe au second membre. Or ce troisième terme change de signe pour les valeurs

$$u - u_0 = \pm \eta.$$

ω

La fonction $f(x, y, u)$ s'est donc bien annulée, et une seule fois, pour une valeur de u comprise dans l'intervalle $u_0 - \eta$, $u_0 + \eta$.

Nous avons donc défini un élément de fonction u, déterminé dans le champ (1), représenté géométriquement par une petite portion de surface se projetant sur le plan des x, y à l'intérieur d'un carré de centre x, y.

Prolongation de l'élément. — Considérons d'abord le cas d'une seule variable indépendante et de l'équation $f(x, u) = 0$. Le thèorème démontre l'existence d'un petit arc de courbe défini dans le champ $|x - x_0| < h$ c'est-à-dire se projetant sur une portion de l'axe des x. Prenons un point x_1 vers une extrémité ; comme en ce point et pour

α

la valeur u_1 correspondante, $(f_u')_1 \neq 0$, on pourra déterminer un nouveau champ $|x - x_1| < h_1$ qui dépassera en général le précédent, et définira donc la fonction sur une nouvelle portion de ox c'est-à-dire un nouvel arc de la courbe C.

En supposant vérifiée la continuité des dérivées partielles, ξ

considérons les points pour lesquel $f_u'(x, u) = 0$. Si l'on suppose que x, u soient indépendants, cette équation représente une courbe γ. Tant que la courbe C ne rencontrera pas cette courbe on pourra appliquer le raisonnement et prolonger la courbe C.

σ_2

Ces points sont les points pour lesquels la tangente à la courbe est parallèle à oy.

REMARQUE. — Il est fort possible que la fonction u définie par l'équation implicite $f(x, u) = 0$ cesse d'exister, mais que la courbe

π

C puisse tout de même être continuée. Car l'équation de cette courbe peut servir à définir aussi bien u comme fonction implicite de x, que x comme fonction implicite de u. Celle-là existera (à partir des points pour lesquels $f_u' = 0$) tant que $f_x' \neq 0$ et, par conséquent, en donnant à u une suite de valeurs prolongeant les valeurs précédentes, on déduira cette fois pour x une suite de valeurs déterminant un nouvel arc de courbe.

δ

ψ

Dans le cas de deux variables indépendantes, on pourra prolonger l'élément de surface $f(x, y, u) = 0$ à plusieurs reprises et cela dans les deux sens. Il est possible d'ailleurs que, par ces prolongement successifs, on puisse revenir aux valeurs de départ x_0, y_0 avec une autre valeur pour u et cela, même sans que l'on ait traversé le contour apparent de la surface : tel est le cas de la surface de vis à filet carré.

Calcul des dérivées partielles. — Pour calculer la dérivée partielle

α

par rapport à x, pour des valeurs déterminées de x, y, il faut donner à x seulement un accroissement Δx : u prendra un accroissement Δu tel que $f(x + \Delta x, y, u + \Delta u) = 0$ et on cherchera, si elle existe, la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

δ

Or en appliquant le théorème des accroissements finis

$$f(x + \Delta x, y, u + \Delta u) = \Delta x f_x'(\xi, y, u + \Delta u) + \Delta u f_u'(x, y, u_1) = 0,$$

ξ étant un nombre compris entre x, et $x + \Delta x$, u_1, entre u et $u + \Delta u$. On en déduit

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{f_x'(\xi, y, u + \Delta u)}{f_u'(x, y, u_1)}.$$

Or lorsque Δx tend vers zéro, Δu tend également vers zéro puisque la fonction est continue. Puisque les dérivées partielles sont continues, le rapport du deuxième membre tend vers $-\frac{f_x'(x, y, u)}{f_u'(x, y, u)}$; u admet donc bien une dérivée partielle par rapport à x et cette dérivée partielle est

$$u_x' = -\frac{f_x'(x, y, u)}{f_u'(x, y, u)}; \qquad \text{de même} \qquad u_y' = -\frac{f_x'(x, y, u)}{f_u'(x, y, u)};$$

On aurait pu arriver plus rapidement à ce résultat si l'on avait admis l'existence des dérivées partielles. En effet, supposons que dans $f(x, y, u) = 0$ on remplace u par ses valeurs en x, y; le premier membre $f(x, y, u)$ deviendra identiquement nul. Ses dérivées partielles par rapport à x, y seront donc identiquement nulles.

On peut les prendre en considérant $f(x, y, u)$ comme une fonction composée de x, y. On aura donc

$$f_x' + f'_u u_x' = 0;$$

comme $f'(u) \not\equiv 0$,

$$u_x' = -\frac{f_x'}{f_u'}; \qquad \text{de même} \qquad u_y' = -\frac{f_y'}{f_u'}.$$

On pourrait encore raisonner de façon légèrement différente : la fonction $f(x, y, u)$ étant identiquement nulle quand on y fait la substitution de u, sa différentielle est également identiquement nulle. Or, que x, y, u soient ou non variables indépendantes, la différentielle est toujours

$$df = f_x'dx + f_y'dy + f_u'du.$$

En l'annulant, on en déduit donc

$$du = -\frac{f_x'}{f_u'}dx - \frac{f_y'}{f_u'}dy.$$

Cette égalité montre que les dérivées partielles de u sont respectivement $-\frac{f_x'}{f_u'}$, $-\frac{f_y'}{f_u'}$. Ces dérivées existent tant que $f'_u \not\equiv 0$.

Si la dérivée $(f_u')_0$ était nulle, non seulement il ne serait pas possible de faire la démonstration telle que nous l'avons faite, mais il ne serait pas possible de la faire de n'importe quelle manière : le théorème cesse en général d'être vrai. En effet, on peut considérer

l'équation $f(x, y, u) = 0$ comme représentant une surface. Les points pour lesquels $f_u' = 0$ σ_2 sont les points du contour apparent de cette surface. En général, pour un système de valeurs de x, y correspondant à des points situés d'un certain côté de la courbe du contour apparent, il y aura deux ou plusieurs valeurs de u qui viendront se confondre avec la solution u_0. Mais ρ la fonction implicite u n'existera même pas pour les points situés de l'autre côté du contour apparent.

Cas de plusieurs fonctions. — Si l'on a par exemple deux équations de la forme

$$f_1(x, y, z, u, v) = 0, \qquad f_2(x, y, z, u, v) = 0,$$

si ces deux équations ne sont pas résolues par rapport à u, v, on dit qu'elles définissent deux fonctions u, v implicites, des trois variables indépendantes x, y, z. Nous voulons chercher à quelles conditions ces deux équations définiront deux fonctions bien déterminées, continues, admettant des dérivées partielles par rapport à x, y, z.

Cette étude introduit un élément nouveau : Jacobien ou déterminant fonctionnel.

IV. — DÉTERMINANTS FONCTIONNELS

Étant données n fonctions de n variables

$$f_1(x_1, x_2, \cdots x_n),\ f_2(x_1, x_2, \cdots x_n),\ \cdots f_n(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

on appelle « Jacobien » ou « déterminant fonctionnel » le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \cdots\cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \frac{\delta f_n}{d x_2} & \cdots\cdots & \frac{\delta f_n}{\delta x_2} \end{vmatrix}.$$

Les éléments d'une ligne ρ sont les dérivées partielles d'une des fonctions par rapport aux n variables.

On le désigne sous la notation

$$\frac{D(f_1, f_2, \cdots f_n)}{D(x_1, x_2, \cdots x_n)} \qquad \text{ou} \qquad J\begin{matrix} x_1, x_2, \cdots x_n \\ f_1, f_2, \cdots f_n \end{matrix}.$$

Ce déterminant joue, dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, un rôle analogue à celui de la dérivée dans les fonctions d'une variable.

Première propriété. — On sait que si u est une fonction de x, si x est elle-même fonction d'une autre variable X, σ_2 on a

$$\frac{du}{dX} = \frac{du}{dx} \times \frac{dx}{dX}.$$

De même, si l'on a par exemple, trois fonctions f_1, f_2, f_3, de trois variables x_1, x_2, x_3, si ces trois variables sont elles-mêmes fonctions de trois autres variables X_1, X_2, X_3, on peut considérer f_1, f_2, f_3 ψ comme fonctions de X_1, X_2, X_3. On aura

$$\frac{D(f_1 f_2 f_3)}{D(X_1 X_2 X_3)} = \frac{D(f_1 f_2 f_3)}{(Dx_1 x_2 x_3)} \times \frac{D(x_1 x_2 x_3)}{D(X_1 X_2 X_3)}.$$

π, δ

En effet, un élément quelconque du premier déterminant est

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \times \frac{\partial x_1}{\partial X_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \times \frac{\partial x_2}{\partial X_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \times \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Si l'on substitue les expressions analogues dans ce déterminant,

ρ

on remarque que, d'après la règle connue de multiplication des déterminants, le déterminant obtenu est le produit des deux déterminants qui figurent au second membre.

Remarque. — Si l'on prenait les différentielles des fonctions f_1, f_2, f_3 considérées soit comme fonctions de x_1, x_2, x_3 soit comme fonctions de X_1, X_2, X_3 on aurait

$$(1) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

$$(2) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f}{\partial X_3} dX_3.$$

D'ailleurs x_1, x_2, x_3 étant elles-mêmes des fonctions de X_1, X_2, X_3

$$(3) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x}{\partial X_3} dX_3.$$

On dit que les trois formules analogues à (1) établissent entre les trois différentielles dx et les trois différentielles df une « substitution

linéaire » dont les coefficients sont les dérivées partielles des fonctions f. De même, les trois formules (2) ou les trois formules (3) établissent des substitutions linéaires entre les dX et les df, entre les dX et les dx.

Si l'on substituait les expressions (3) dans les formules (1)

σ

on retomberait sur la substitution (2) qui est ainsi dite le « produit » des deux substitutions (1), (3).

Le déterminant de la substitution est le déterminant formé au moyen des coefficients de la substitution.

σ

La relation que nous avons établie montre que le déterminant de la substitution produit est le produit des déterminants des deux substitutions facteurs.

On généraliserait aisément dans le cas où les x seraient fonctions des X, les X elles-mêmes fonctions de nouvelles variables, etc...

Deuxième propriété. — Considérons d'abord le cas de deux variables

$$X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y);$$

elles font correspondre à un point m de coordonnées x, y, un point M de coordonnées X, Y. A toute figure décrite par le point m correspond une figure décrite par le point M. On dit que ces relations définissent une transformation ponctuelle d'un plan sur un plan.

A partir du point m, menons deux segments de droites l_1, l_2 correspondant à des accroissements $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$, $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$. On peut considérer les deux segments L_1, L_2 correspondant aux accroissements $\Delta_1 X$, $\Delta_1 Y$, $\Delta_2 X$, $\Delta_2 Y$ (il faut remarquer d'ailleurs que ces segments ne seront pas les figures transformées des segments de droites l_1, l_2).

σ

On aura

$$\text{(I)} \qquad \Delta_1 X = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta_1 x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta_1 y, \qquad \Delta_1 Y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Delta_1 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Delta_1 y$$

et de même

$$\text{(I)} \qquad \Delta_2 X = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta_2 x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta_2 y, \qquad \Delta_2 Y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Delta_2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Delta_2 y$$

toutes les dérivées étant prises au point x, y, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur.

Considérons le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} \Delta_1 X, & \Delta_1 Y \\ \Delta_2 X, & \Delta_2 Y \end{vmatrix}.$$

En y substituant les valeurs (I), $\overset{\rho,\sigma}{}$ on trouve qu'il est le produit du déterminant

$$a = \begin{vmatrix} \Delta_1 x, & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x, & \Delta_2 y \end{vmatrix}$$

par le déterminant fonctionnel J formé au moyen des dérivées partielles (en vertu de la règle de multiplication des déterminants). On a donc

$$\frac{A}{a} = J.$$

Cette égalité n'est qu'approchée puisque nous avons négligé des infiniment petits d'ordre supérieur en Δx, Δy, mais si nous faisons tendre les segments vers zéro, elle deviendra, à la limite, rigoureusement exacte.

Or, $\overset{\sigma}{a}$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les deux segments l_1, l_2, cette aire étant, comme on le sait, $\overset{\sigma_2}{}$ affectée d'un signe : elle est positive si, pour amener le segment l_1 sur l_2, on tourne dans le sens de ox vers oy. Dans tous les cas on a

$$a = l_1 l_2 \sin (l_1 l_2).$$

De même A représente, en grandeur et en signe, l'aire du parallélogramme construit sur L_1, L_2.

$\overset{\omega}{}$

On en conclut :

1° Les deux aires sont de même sens ou de sens contraires suivant que le Jacobien est positif ou négatif.

2° Si l'on suppose que nous fassions tendre vers zéro les accroissements l_1, l_2, les accroissements L_1, L_2 tendront simultanément vers zéro et, à la limite, l'égalité deviendra rigoureusement exacte.

$\overset{\omega}{}$

Le rapport des deux aires infiniment petites a une limite représentée par la valeur algébrique du Jacobien $J^{x,y}_{f,\varphi}$ au point x, y.

Considérons maintenant un point a et une petite courbe fermée c quelconque entourant ce point, le point correspondant A et la courbe C correspondante. $\overset{a}{}$ Inscrivons dans c un polygone quelconque $m_1 m_2 m_3 \cdots\cdots$ et dans C le polygone correspondant $\overset{\xi}{}$ $M_1 M_2 \cdots\cdots$ Si nous considérons les deux triangles recti-

lignes am_1m_2 et AM_1M_2, le rapport de leurs aires a pour limite le déterminant fonctionnel au point a. $^{\rho}$ Comme cette limite est $^{\omega}$ la même quels que soient les triangles considérés, il en sera de même du rapport des aires des polygones inscrits et par conséquent aussi, à la limite, du rapport des aires délimitées par c, C.

Étant donnée une courbe C fermée délimitant une région R, nous définirons un sens de parcours positif sur C de la façon suivante : En un point M de C nous pouvons définir la demi-normale dirigée vers la région dite intérieure R. Menons alors la demi-tangente MT, telle que l'angle dont il faut faire tourner MT dans le sens de ox vers oy pour l'amener sur MN, soit de $\frac{\pi}{2}$, nous dirons que cette demi-tangente est la tangente positive et nous appellerons sens positif le sens de parcours correspondant sur C.

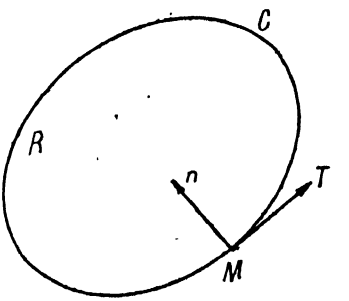


Fig. 1.

$^{\omega}$ Étant données les deux aires infiniment petites correspondantes a, A les deux contours de ces aires seront parcourus dans le même sens ou dans des sens contraires suivant que le déterminant est positif ou négatif.

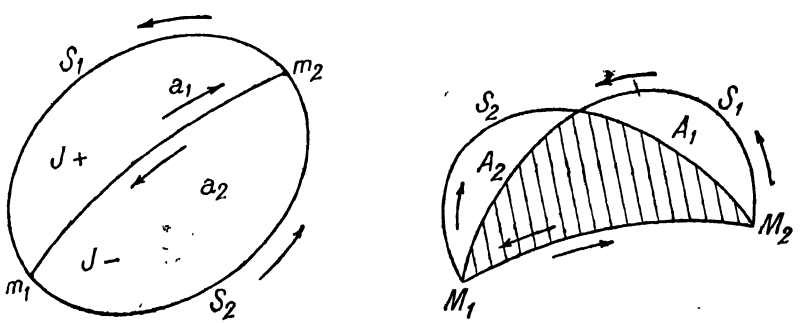


Fig. 2.

Remarque. — Supposons que le déterminant fonctionnel s'annule le long d'une certaine courbe l et change de signe. Considérons une petite aire a renfermant un élément de cette courbe, m_1m_2 (fig. 3). Cet élément partage l'aire en deux parties : a_1 pour laquelle le déterminant

19060

est positif et a_2 pour laquelle ce déterminant est négatif. Quand le point m parcourra le contour $m_1m_2s_1$ de a_2 dans le sens direct, le point M décrira un contour $M_1M_2S_1$ entourant A_1 dans le sens direct. Quand le point m décrira le contour $m_1s_2m_2$ dans le sens direct, le point M décrira le contour de A_2 s'appuyant sur M_1, M_2 et dans le sens inverse (puisque le Jacobien est négatif). Ces deux aires A_1, A_2 situées par rapport à M_1, M_2 du même côté ont donc nécessairement une partie commune. Donc à un point m soit de a_1 soit de a_2 ne correspondra bien qu'un seul point M soit de A_1 soit de A_2, mais un point M de la partie commune à A_1, A_2 sera obtenu pour deux points m_1, m_2 de a_1 et a_2.

La correspondance entre m et M ne sera donc pas « biunivoque ».

Ces considérations seront utiles plus tard (changement de variables dans les intégrales multiples).

Cas de trois variables. — Si l'on a trois équations

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \rho(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z)$$

on dit qu'elles définissent une transformation ponctuelle de l'espace.

Si l'on se donne trois éléments de droites l_1, l_2, l_3 correspondant aux accroissements

$$\Delta_1 x, \Delta_1 y, \Delta_1 z, \qquad \Delta_2 x, \Delta_2 y, \Delta_2 z, \qquad \Delta_3 x, \Delta_3 y, \Delta_3 z,$$

on peut considérer simultanément les éléments de droites L_1, L_2, L_3 correspondant aux accroissements

$$\Delta_1 X, \Delta_1 Y, \Delta_2 Z, \qquad \Delta_2 X, \cdots, \qquad \Delta_3 X, \cdots$$

On aura des expressions analogues à

$$\Delta_1 X = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta_1 x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta_1 y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta_1 z$$

dans lesquelles les dérivées sont prises au point x, y, z si l'on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur en $\Delta_1 x$...

D'après la règle de multiplication des déterminants, on aura

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 X & \Delta_1 Y & \Delta_1 Z \\ \Delta_2 X & \Delta_2 Y & \Delta_2 Z \\ \Delta_3 X & \Delta_3 Y & \Delta_3 Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y & \Delta_1 z \\ \Delta_2 x & \Delta_1 y & \Delta_2 z \\ \Delta_3 x & \Delta_3 y & \Delta_3 z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

σ

Or le premier déterminant représente en grandeur et en signe le volume V d'un parallélipipède construit sur les trois éléments L_1, L_2, L_3 (ce volume était compté positivement σ_2 si les trois éléments L_1, L_2, L_3 forment un trièdre de même sens que celui des axes de coordonnées X, Y, Z) ; de même le deuxième est égal au volume v construit sur les trois éléments l_1, l_2, l_3.

α

En passant à la limite on aura rigoureusement

$$J = \lim \frac{V}{v}.$$

ω

Le rapport des volumes des parallélipipèdes infiniment petits correspondants est égal en grandeur et en signe au Jacobien des fonctions f, φ, ψ pour le point x, y, z.

δ_1

Il en sera de même de la limite du rapport de deux volumes infiniment petits correspondants quelconques.

3° **Transformation du déterminant fonctionnel.** — Prenons le cas général et supposons que l'on ait n fonctions de n variables

$$u_1, u_2, \cdots u_n, \qquad u_i = f_i(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

ξ

On peut former le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(u_1, u_2, \cdots u_n)}{D(x_1, x_2, \cdots x_n)}.$$

L'une au moins des fonctions f dépendra de l'une au moins des x. Supposons par exemple que f_1 dépende de x_1. On aura $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$. On en déduit, que de l'équation

$$u_1 - f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$$

α, σ_2

on peut tirer x_1 comme fonction implicite de $u, x_2, \cdots x_n$. Si nous substituons cette valeur dans les autres équations, elles se mettront sous la forme.

$$\begin{aligned} u_2 &= F_2(u_1, x_2, x_3, \cdots x_n) \\ u_3 &= F_3(u_1, x_2, \cdots x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ U_n &= F_n(u_1, x_2, \cdots x_n). \end{aligned}$$

Il y aura au moins une des fonctions F qui dépendra de l'une

d

des x, sinon $u_2, u_3, \cdots u_n$ seraient fonctions de u_1. Il y aurait $n - 1$ relations entre les u, ce que nous ne supposons pas.

On peut supposer par exemple que F_2 dépende de x_2; on aura

δ_1

$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \neq 0 \cdots$ De l'équation correspondante

$$u_2 - F_2(u_1, x_3, \cdots x_n) = 0$$

on pourra donc déduire x_2 en fonction de $u_1, u_2, x_3, \cdots x_n$ et substituer cette valeur dans les autres équations.

δ_1, σ

On voit qu'en continuant ainsi, on mettra les équations sous la forme

$$\begin{aligned}
u_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots x_n)\\
u_2 &= F_2(u_1, x_2, \cdots x_n)\\
u_3 &= \varphi_3(u_1, u_2, x_3, \cdots x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n &= \lambda_n(u_1, u_2, \cdots u_{n-1}x_n)
\end{aligned}$$

ou par une notation plus symétrique

$$\begin{aligned}
u_1 &= \theta_1(x_1, x_2, \cdots x_n)\\
u_2 &= \theta_2(u_1, x_2, \cdots x_n)\\
u_3 &= \theta_3(u_1, u_2, x_3, \cdots x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n &= \theta_n(u_1, u_2, \cdots u_{n-1}x_n).
\end{aligned}$$

On a supposé que l'on n'a jamais été arrêté avant la dernière opération, c'est-à-dire qu'à un moment quelconque, l'une des équations restantes dépendait de l'une des variables x restantes. Sinon, si l'on

r

est arrêté après K opérations, on en conclurait qu'il existe $n - k$ relations entre les fonctions $u_1, u_2, \cdots u_n$ ce que l'on ne suppose pas, pour le moment.

Une dernière opération consisterait à tirer x_n en fonction de $u_1, u_2, \cdots u_n$, ce que nous ne ferons pas. Si on ne le pouvait pas, c'est que u_n serait fonction de $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$.

On peut alors mettre le déterminant J sous une forme remarquable :

La dernière relation peut être considérée comme définissant u_n

α

comme fonction composée de $x_1, x_2, \cdots x_n$. Substituons la

fonction θ_n à la fonction f_n dans la dernière ligne de J sans changer aux autres lignes. Un élément de cette ligne sera

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial\theta_n}{\partial u_2}\times\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial\theta_n}{\partial u_{n-1}}\cdot\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}+\frac{\partial\theta_n}{\partial x_i}.$$

Le dernier terme n'existera que si $i = n$.

ρ

Le nouveau déterminant peut donc se simplifier π puisque les multiplicateurs

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial u_1},\ \frac{\partial\theta_n}{\partial u_2},\ \cdots\ \frac{\partial\theta_n}{\partial u_{n-1}}$$

α

sont les mêmes quel que soit l'indice i. Il suffit de multiplier les éléments des $n-1$ premières lignes respectivement par

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial u_1},\ \frac{\partial\theta_n}{\partial u_2},\ \cdots\ \frac{\partial\theta_n}{\partial u_{n-1}}$$

et de les retrancher de la dernière ligne. Les éléments de cette dernière ligne se réduisent à

$$0,\ 0,\ 0,\ \cdots\ \frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}.$$

ω

Le déterminant se réduira donc à $\frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}\times J_1$, J_1 désignant le déterminant fonctionnel des $n-1$ fonctions $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ par rapport à $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ considérées comme seules variables indépendantes.

δ_1, α

On peut raisonner sur J_1 comme on a raisonné sur J en substituant la fonction θ_{n-1} à la fonction f_{n-1}, u_{n-1} étant alors considérée comme fonction composée des x par l'intermédiaire de u_1, $u_2, \cdots u_{n-2}$. On aura

$$J_1 = \frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\,J_2.$$

J_2 étant le déterminant fonctionnel des $f_1, f_2, \cdots f_{n-2}$ par rapport aux $n-2$ seules variables $x_1, x_2, \cdots x_{n-2}$ et par suite

$$J = \frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\,J_2.$$

ω

En continuant de proche en proche, on voit que l'on mettra J sous la forme

$$J = \frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial\theta_{n-1}}{\partial x_{n-1}},\cdots\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2},\cdots\times\frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}.$$

Le déterminant fonctionnel sera donc réduit à la forme monôme.

Application. — Considérons les relations qui lient les coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

On peut les écrire

$$x = r\cos\theta, \qquad y = x\,\mathrm{tg}\,\theta;$$

donc

$$\mathrm{J}^{r,\theta}_{x,y} = \cos\theta \times \frac{x}{\cos^2\theta} = \frac{x}{\cos\theta} = r.$$

De même dans l'espace

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

En faisant jouer à r, θ, φ le rôle de x_1, x_2, x_3, on peut les écrire

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = \frac{x}{\cos\varphi}\cdot\mathrm{ctg}\,\theta, \qquad y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

On aura alors

$$\frac{\mathrm{D}(x,z,y)}{\mathrm{D}(r,\theta,\varphi)} = \sin\theta\cos\varphi \times \frac{x}{\cos\varphi} \times \frac{-1}{\sin^2\theta} \times \frac{x}{\cos^2\varphi} = \frac{-x^2}{\sin\theta\cos^2\varphi} = -r^2\sin\theta.$$

Or si l'on permute deux fonctions ou deux variables, on change évidemment le signe du déterminant fonctionnel. Donc

$$\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta.$$

Indépendance d'un système de fonctions. — La forme monôme obtenue pour le déterminant fonctionnel permet de démontrer le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME. — *Si le déterminant d'un système de fonctions est identiquement nul, il existe entre ces fonctions une ou plusieurs relations, identiques, indépendantes des variables et réciproquement. Si tous les mineurs du premier ordre sont nuls, un mineur du deuxième ordre étant différent de zéro, il existe deux relations, etc.*

Tout d'abord s'il existe une relation, le déterminant est certainement nul. En effet on pourra résoudre cette relation par rapport à l'une des variables ; par exemple on aura

$$u_n = \lambda(u_1, u_2, \cdots u_{n-1}).$$

α

On peut prendre les dérivées partielles de u_n par rapport aux x en la considérant comme fonction composée des x par l'intermédiaire de $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$. On aura

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}} \cdot \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}.$$

ρ

On voit que les éléments de la dernière ligne du déterminant se déduisent des éléments correspondants des autres lignes par multiplication par les facteurs

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial u_2}, \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial u_{n-1}}.$$

ω

Ce déterminant est donc nul.

Recommençons l'opération que nous avons faite pour ramener le déterminant à la forme monôme. Si le déterminant est nul, ou bien l'on a pu conduire les calculs jusqu'au bout, ou bien l'on a été arrêté au bout de k opérations. Dans le premier cas

ρ

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

sont différents de zéro, mais, J étant nul, on a $\frac{\partial \theta_n}{\partial x_n} = 0$. ω Cette dernière relation montre que u_n est fonction seulement de $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$.

Dans le deuxième cas, supposons par exemple que nous soyons arrêté après trois opérations, c'est-à-dire qu'après avoir tiré x_1 en fonction de $u_1, x_2, \cdots x_n$ puis x_2 en fonction de $u_1, u_2, x_3, \cdots x_n$ puis x_3 en fonction de $u_1, u_2, u_3, x_4, \cdots x_n$, le résultat de la substitution dans les autres fonctions $u_4, u_5, \cdots u_n$ soit indépendant de toutes les autres variables $x_4, x_5, \cdots x_n$.

o

Nous mettrons donc le système sous la forme

$$u_1 = \theta_1(x_1, x_2, \cdots x_n) \qquad u_4 = \theta_4(u_1, u_2, u_3)$$
$$u_2 = \theta_2(u_1, x_2, x_3, \cdots x_n) \qquad u_5 = \theta_5(u_1, u_2, u_3)$$
$$u_3 = \theta_3(u_1, u_2, x_3, x_4, \cdots x_n) \qquad u_n = \theta_n(u_1, u_2, u_3).$$

0

$u_4, u_5, \cdots u_n$ sont donc fonctions seulement de u_1, u_2, u_3. Il existe donc $n - 3$ relations entre ces fonctions.

D'autre part, pour calculer J, nous pouvons supposer que

$u_4, u_5, \cdots u_n$ sont fonctions composées de $x_1, x_2, \cdots x_n$ par l'intermédiaire de u_1, u_2, u_3. Donc si $k > 3$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \theta_k}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta_k}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \theta_k}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_i}.$$

Si nous substituons ces expressions dans J, on voit que les éléments de la $k^{ème}$ ligne sont des combinaisons linéaires des trois premières lignes avec les multiplicateurs

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial u_3}.$$

Tous les mineurs de J ayant plus de quatre lignes et quatre colonnes c'est-à-dire tous les mineurs d'ordre moindre que $n - 4$ sont donc certainement nuls.

En résumé, si on est arrêté après k opérations il existe $n - k$ relations et tous les mineurs d'ordre inférieur à $n - k$ sont nuls. Il existe au moins un mineur d'ordre $n - k$ différent de zéro par exemple $\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ obtenu en considérant u_1, u_2, u_3 comme fonctions des seules variables x_1, x_2, x_3.

En effet les u étant considérées comme seulement fonctions de x_1, x_2, x_3, en opérant pour la mise du déterminant sous forme monôme comme nous l'avons fait dans le cas général et considérant $x_4, x_5, \cdots x_n$ comme des paramètres on verrait que

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \times \frac{\partial \theta_3}{\partial x_3}.$$

Ce mineur est donc bien différent de zéro.

Réciproquement, si tous les mineurs d'ordre $n - k$ sont nuls, le Jacobien est nul. Il existe au moins une relation.

Il ne peut pas exister plus de $n - k$ relations, soit au moins $n - k + 1$, car alors tous les mineurs d'ordre $n - k + 1$ seraient nuls.

Il ne peut pas exister moins de $n - k$ relations, soit $n - k - 1$ au plus, car alors, un mineur d'ordre $n - k - 1$ serait différent de zéro.

Le théorème est donc complètement démontré.

Application. — Supposons que, sans connaître la définition, ni la propriété fondamentale des logarithmes, on définisse une fonction $l(x)$ qui se réduise à zéro pour $x = 1$, et dont la dérivée soit $\frac{1}{x}$ (ce qu'on reconnaîtra plus tard être possible).

Considérons les deux fonctions

$$u = l(x) + l(y), \qquad v = x \cdot y.$$

On a

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix} = 0.$$

D'après le théorème précédent, on en déduit que u, v sont fonction l'une de l'autre

$$l(x) + l(y) = f(x \times y).$$

Pour déterminer la forme de la fonction f, prenons $y = 1$. On aura

$$l(x) = f(x).$$

Et puisque x est une valeur quelconque, on voit que la fonction f se confond avec la fonction l. On a donc

$$l(x) + l(y) = l(x \cdot y).$$

On reconnaît la propriété fondamentale des logarithmes.

Calcul du Jacobien dans le cas des fonctions implicites. — Supposons que, ayant n équations de la forme

$$\begin{aligned} &\varphi_1(u_1, u_2, \cdots u_n, x_1, x_2, \cdots x_p) = 0 \\ &\varphi_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_n(u_1, u_2, \cdots u_n, x_1, x_2, \cdots x_p) = 0 \end{aligned}$$

nous ayons démontré, sous certaines conditions, l'existence des fonctions $u_1, u_2, \cdots u_n$ des p variables $x_1, x_2, \cdots x_p$ (satisfaisant à ces équations) et de leurs dérivées partielles, ce qui exige que

$$D^{u_1, u_2, \cdots u_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n} \neq 0.$$

Calculons le déterminant

$$D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{u_1, u_2, \cdots u_n} \qquad (p > n).$$

en considérant n des variables $x_1, x_2, \cdots x_p$, les autres étant traitées comme des paramètres.

α

En dérivant la fonction composée, identiquement nulle, φ_i par rapport à x_k on obtient

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0.$$

On en déduit donc

$$-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k}.$$

α, ν

Si l'on formait le déterminant $D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{-\varphi_1 - \varphi_2 \cdots - \varphi_n}$, en y substituant les expressions ci-dessus des $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$, ρ on constate que le déterminant obtenu est visiblement, au signe près, le produit de deux déterminants

$$D^{u_1, u_2, \cdots u_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n} \times D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{u_1, u_2, \cdots u_n}.$$

ω

On a donc

$$(-1)^n D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n} = D^{u_1, u_2, \cdots u_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n} \times D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{u_1, u_2, \cdots u_n}.$$

Ce que l'on peut écrire encore sous une forme abrégée

$$(-1)^n \frac{D\varphi}{Dx} = \frac{D\varphi}{Du} \times \frac{Du}{Dx}.$$

On en déduit le déterminant $D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{u_1, u_2, \cdots u_n}$.

En particulier, si on considère le système de fonctions définies par les équations

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= f_1(u_1, u_2, \cdots u_n) - x_1 = 0 \\
\varphi_2 &= f_2(u_1, u_2, \cdots u_n) - x_2 = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_n &= f_n(u_1, u_2, \cdots u_n) - x_n = 0
\end{aligned}$$

on dit que ces équations définissent les fonctions u inverses de δ $x_1, x_2, \cdots x_n$. On aura

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = -1 \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k.$$

Donc en appliquant la formule ci-dessus

$$1 = D^{u_1, u_2, \cdots u_n}_{f_1, f_2, \cdots f_n} \times D^{x_1, x_2, \cdots x_n}_{u_1, u_2, \cdots u_n} \quad \text{ou} \quad \frac{Dx}{Du} \times \frac{Du}{Dx} = 1.$$

ω

Les deux Jacobiens relatifs à des fonctions inverses sont donc inverses l'un de l'autre.

Application. — Soient les équations

$$r \sin\theta \cos\varphi = x, \qquad r \sin\theta \sin\varphi = y, \qquad r\cos\theta = z.$$

Elles sont vérifiées avec les valeurs $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, pour

$$r = 1, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = 0.$$

Le déterminant fonctionnel $D^{r,\theta,\varphi}_{x,y,z} = r^2 \sin\theta$ se réduit à 1 pour ces valeurs. Il existe donc des fonctions r, θ, φ, qui se réduisent à $1, \frac{\pi}{2}, 0$ pour $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

δ_1

Pour ces fonctions on aura

$$D^{x,y,z}_{r,\theta,\varphi} \times D^{r,\theta,\varphi}_{x,y,z} = 1.$$

Or,

$$D^{r\theta\varphi}_{xyz} = r^2 \sin\theta.$$

Mais on a

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad r\sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ω

Donc

$$D^{x,y,z}_{r,\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

C'est le résultat que l'on aurait obtenu péniblement en résolvant les équations par rapport à r, θ, φ.

Hessien d'une fonction. — Soit une fonction $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$. On appelle « Hessien » de la fonction, ψ le Jacobien formé au moyen de ses dérivées partielles du premier ordre

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}{D(x_1, x_2, \cdots x_n)}.$$

Prenons par exemple une fonction de trois variables $f(x, y, z)$, le Hessien sera

$$h = \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{D(x, y, z)}.$$

Supposons qu'on effectue sur x, y, z une substitution linéaire de la forme

$$x = a_1X + b_1Y + c_1Z, \quad y = a_2X + b_2Y + c_2Z, \quad z = a_3X + b_3Y + c_3Z.$$

δ_1

La fonction $f(x, y, z)$ deviendra

$$F(XYZ) = f(a_1X + b_1Y + c_1Z, \cdots, \cdots).$$

Calculons le Hessien de F

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(X, Y, Z)}.$$

Or nous pouvons écrire identiquement

$$H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)}{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \times \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{D(x)} \times \frac{D(x)}{D(X)}.$$

D'ailleurs

$$\frac{\partial F}{\partial X} = a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y} + a_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{\partial F}{\partial Y} = b_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial Z} = c_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \cdots\cdots\cdots$$

δ_1

Le premier déterminant est donc $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

D'autre part $\frac{D(x)}{D(X)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

ω

On a donc finalement

$$H = h \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

Si la substitution est orthogonale, le déterminant est égal à l'unité. Donc le Hessien d'une fonction ne change pas si l'on effectue une substitution orthogonale sur les variables.

V. — EXISTENCE DES FONCTIONS IMPLICITES

Cas de deux équations. — Ces propriétés des déterminants fonctionnels étant établies, nous pouvons alors résoudre la question proposée et rechercher à quelles conditions deux équations

$$f(x, y, z, u, v) = 0 \tag{1}$$

$$\varphi(x, y, z, u, v) = 0 \tag{2}$$

définiront deux fonctions u, v de x, y, z. Nous prendrons ensuite le cas de n équations. Nous devons supposer

1° Qu'en un certain point x_0, y_0, z_0, u_0, v_0 les fonctions $f\varphi$ s'annulent.

2° Que dans un champ suffisamment petit

$$|x-x_0|<h, \quad |y-y_0|<h, \quad |z-z_0|<h, \quad |u-u_0|<h, \quad |v-v_0|<h$$

toutes les dérivées partielles sont continues.

3° Nous supposerons de plus que, au point x_0, y_0, z_0, u_0, v_0 le Jacobien $D^{uv}_{f\varphi}$ est différent de zéro.

Nous allons démontrer qu'on pourra alors déterminer deux fonctions u, v de x, y, z qui satisfont identiquement aux équations $f = 0$, $\varphi = 0$, qui se réduisent à u_0, v_0 pour x_0, y_0, z_0 et qui admettent des dérivées partielles par rapport à x, y, z.

En effet J_0 étant différent de zéro, l'une au moins des quatre dérivées

$$(f_u')_0, \ (f_v')_0, \ (\varphi_u')_0, \ (\varphi_v')_0$$

est différente de zéro. Soit $(f_u')_0$. On est alors ramené au cas d'une seule fonction implicite : la première équation $f(x, y, z, u, v) = 0$ permet de définir u comme fonction implicite des quatre variables x, y, z, v, continue et se réduisant à u_0 pour x_0, y_0, z_0, v_0. Soit

$$u = \lambda(x, y, z, v)$$

cette fonction ainsi déterminée. Elle admet des dérivées partielles par rapport à x, y, z, v. Si nous la substituons dans la deuxième équation, on obtiendra

$$\varphi(x, y, z, \lambda(x, y, z, v), v) = 0$$

équation de la forme $F(x, y, z, v) = 0$ ne renfermant plus que x, y, z, v. Il suffit de montrer que cette équation permet de déterminer v comme fonction implicite de x, y, z.

1° On a

$$F(x_0, y_0, z_0, v_0) = \varphi(x_0, y_0, z_0, \lambda(x_0, y_0, z_0, v_0), v_0) = 0$$

puisque $\lambda(x, y, z, v)$ se réduit à u_0 pour x_0, y_0, z_0, v_0.

2° La fonction F admet bien des dérivées partielles par rapport à x, y, z, v puisque on peut la considérer comme fonction composée de x, y, z, v par l'intermédiaire de $\lambda(x, y, z, v)$ et que la fonction λ admet elle-même des dérivées partielles.

3° Il reste à démontrer que la dérivée partielle F'_v est différente de zéro au point x_0, y_0, z_0, v_0. Or d'après le théorème de dérivation des fonctions composées

$$F'_v = \varphi'_v + \varphi'_\lambda \cdot \lambda'_v.$$

Mais la dérivée $\lambda'_v = u'_v$ de la fonction λ définie par (1) est donnée par

$$f'_v + f'_u \cdot u'_v = 0, \qquad u'_v = -\frac{f'_v}{f'_u}$$

dans laquelle il faut supposer u remplacée en fonction de x, y, z, v. On a donc

$$F'_v = \frac{\varphi'_v f'_u - \varphi'_u f'_v}{f'_u} = \frac{J}{f'_u}.$$

Or, pour les valeurs x_0, y_0, z_0, v_0, u se réduit à u_0 et par suite $J = J_0$; J_0 étant supposé différent de zéro, on a bien $(F'_v)_0 \neq 0$.

L'équation $F(x, y, z, v) = 0$ permet donc de définir v comme fonction continue de x, y, z admettant des dérivées partielles et se réduisant à v_0 pour x_0, y_0, z_0. Soit

$$v = \psi(x, y, z).$$

Si on la substitue dans l'expression de u, on aura à son tour u en fonction de x, y, z.

Pour x_0, y_0, z_0, comme v se réduit à v_0, u se réduit à u_0 : u admettant des dérivées partielles par rapport à x, y, z, v et v admettant des dérivées partielles par rapport à x, y, z, il en résulte que u admettra des dérivées partielles par rapport à x, y, z. Il existe donc bien des fonctions u, v satisfaisant aux deux équations, se réduisant à u_0, v_0 pour x_0, y_0, z_0 et admettant des dérivées partielles par rapport à x, y, z.

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à x par exemple il suffit de dériver par rapport à x les deux fonctions composées

$$f(x, y, z, u, v), \qquad \varphi(x, y, z, u, v)$$

qui restent identiquement nulles lorsqu'on y substitue les fonctions u, v. On a ainsi

$$f'_x + f'_u u'_x + f'_v v'_x = 0, \qquad \varphi'_x + \varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x = 0.$$

Elles permettront de déduire u'_x, v'_x tant que le Jacobien $D^{u,v}_{f,\varphi}$ sera différent de zéro. Or ce déterminant n'est pas nul au point x_0, y_0, z_0. En vertu de la continuité, il ne sera pas nul dans un champ suffisamment petit entourant ce point

On trouvera de même les dérivées partielles par rapport à y ou z. Ces dérivées partielles ont pour expression

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{D^{x,v}_{f,\varphi}}{D^{u,v}_{f,\varphi}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{D^{y,v}_{f,\varphi}}{D^{u,v}_{f,\varphi}} \cdots\cdots$$

On constate que toutes ces dérivées ont même dénominateur, et que, pour obtenir le numérateur de $\frac{\partial u}{\partial x}$, on remplace, dans ce dénominateur, les dérivées de f, φ par rapport à u, par les dérivées par rapport à x. De même pour les autres dérivées : pour $\frac{\partial v}{\partial y}$ par exemple il faudra remplacer les dérivées par rapport à v par les dérivées par rapport à y.

Cas de n équations. — Le théorème d'existence est établi pour le cas de une ou de deux fonctions définies par une ou deux équations respectivement, dans le cas où le Jacobien est différent de zéro.

αν

Pour le cas de n fonctions, il est naturel de procéder par récurrence. En supposant le théorème d'existence des fonctions et des dérivées, démontré pour le cas de $n-1$ équations, le démontrer pour n équations.

Nous supposerons en particulier que les dérivées partielles sont données par les formules

$$(1)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{D^{u_1, u_2, \cdots u_{i-1}, x_k, u_{i+1}, \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}}{D^{u_1, u_2, \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}}.$$

ρ

Comme dans le cas de deux équations, ces dérivées ont même dénominateur $D^{u_1, u_2, \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}$ et pour la dérivée $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, le numérateur se déduit de ce dénominateur

χ

en remplaçant les dérivées des φ par rapport à u_i par les dérivées des φ par rapport à x_k.

Soient alors n équations

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(u_1, u_2, \cdots u_n, x_1, \cdots x_p) = 0\\
&\varphi_2(u_1, u_2, \cdots u_n, x_1, \cdots x_p) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_n(u_1, u_2, \cdots u_n, x_1, \cdots x_p) = 0.
\end{aligned}$$

ζ

Nous supposerons le Jacobien $D^{u_1, u_2, \cdots u_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n} \neq 0$.

L'un des mineurs au moins est donc différent de zéro. On peut supposer par exemple $D^{u_1 u_2 \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{n-1}} \neq 0$. Des $n-1$ équations correspondantes,

α

on pourra donc déduire les $n-1$ fonctions $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ comme fonctions implicites des variables $x_1, x_2, \cdots x_p, u_n$. Soient

$$\begin{aligned}
u_1 &= \psi_1(u_n, x_1, x_1, \cdots x_p)\\
u_2 &= \psi_2(u_n, x_1, \cdots x_p)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_{n-1} &= \psi_{n-1}(u_n, x_1, \cdots x_p).
\end{aligned}$$

δ

Si nous substituions ces expressions dans les $n-1$ équations, elles seraient identiquement satisfaites. Substituons-les dans la dernière ; on obtiendra

$$\varphi_n(\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{n-1}, u_n, x_1, \cdots x_p) = 0.$$

C'est une équation de la forme $F(u_n, x_1, x_2, \cdots x_p) = 0$.

Elle est satisfaite par les valeurs initiales x_{i0}, u_{n0} puisque, pour ces valeurs, $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{n-1}$ se réduisent à $u_{10}, u_{20}, \cdots u_{(n-1)0} = 0$. La fonction F admet des dérivées par rapport aux x et à u_n, puisque la fonction φ_n admettait des dérivées par rapport aux x et aux u et que $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{n-1}$ admettent des dérivées par rapport aux x et à u_n.

δ_1, ξ

L'équation définira donc u_n comme fonction implicite de $x_1, \cdots x_p$ si $\frac{\partial F}{\partial u_n} \not\equiv 0$. Or, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial F}{\partial u_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial u_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n}$$

les dérivées $\frac{\partial \psi_i}{\partial u_n}$ existent d'ailleurs puisque les fonctions u_i admettent des dérivées partielles par rapport à toutes les variations et l'on a, en appliquant les formules (1),

$$\frac{\partial u_k}{\partial u_n} = - \frac{D^{u_1, u_2, \cdots u_{k-1}, u_n, u_{k+1}, \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}}{D^{u_1, u_2, \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}}.$$

Au numérateur, les dérivées par rapport à u_n remplacent les dérivées par rapport à u_k.

Or le numérateur de $\frac{\partial u_k}{\partial x_n}$ peut s'écrire par une permutation de colonnes, en mettant dans la dernière colonne les dérivées par rapport à u_n

$$(-1)^{n-1-k} D^{u_1, u_2, \cdots u_{k-1}, u_{k+1}, \cdots u_{n-1}, u_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}.$$

δ_1

En substituant ces expressions de $\frac{\partial u_k}{\partial u_n} = \frac{\partial \psi_k}{\partial u_n}$ dans $\frac{\partial F}{\partial u_n}$ et chassant le dénominateur, on obtient

$$D^{u_1, u_2, \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}} \times \frac{\partial F}{\partial u_n} = \sum \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_k} (-1)^{n-k} D^{u_1, u_2, \cdots u_{k-1}, u_{k+1}, \cdots u_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}$$
$$+ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \times D^{u_1, u_2, \cdots u_{n-1}}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-1}}$$

ρ

Le second membre est le développement, par rapport aux éléments de la dernière ligne, du déterminant $D^{u_1, u_2, \cdots u_n}_{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n}$ qui, par hypothèse, est différent de zéro.

ω

L'équation $F(u_n, x_1, \cdots x_p) = 0$ définit donc bien une fonc-

tion u_n des variables $x_1, x_2, \cdots x_p$. Elle sera continue aux environs du point x_{i_0}. En la substituant dans les expressions $u_1, \cdots u_{n-1}$ on aura toutes les fonctions u_i en fonction des variables x_k. Ces fonctions satisferont à toutes les équations $\varphi_i = 0$.

δ_1, ξ

u_n étant continue et admettant des dérivées partielles par rapport aux x, les u_k fonctions composées de $x_1, \cdots x_p$. u_n admettant des dérivées partielles par rapport aux x et u_n seront elles-mêmes fonctions continues de $x_1, x_2, \cdots x_p$ et admettront des dérivées partielles par rapport à ces variables.

L'existence de ces dérivées étant démontrée, pour avoir leur expression, α_1 il suffit de considérer que, si on substitue les expressions des u dans les équations, elles sont identiquement satisfaites. δ_1 En dérivant ces équations par rapport à x_i on aura donc encore

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, 2 \cdots n).$$

En résolvant ces équations, d'après la règle de Cramer, σ_2 on en déduit

$$D^{u_1, u_2, \cdots u_n}_{f_1, f_2, \cdots f_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = - D^{u_1, u_2, \cdots x_i, \cdots u_n}_{f_1, f_2, \cdots f_n}.$$

Ces dérivées ρ ont même dénominateur et au numérateur les dérivées par rapport à x_i remplacent les dérivées par rapport à u_k.

ω

C'est bien la forme, supposée vraie, pour $(n-1)$ fonctions. Cette formule est donc démontrée dans le cas général.

VI. — DÉPENDANCE DES FONCTIONS (AUTRE DÉMONSTRATION)

Nous avons recherché les conditions de dépendance de n fonctions de n variables. Ce résultat étant extrêmement important, nous allons l'établir par une méthode légèrement différente, en nous appuyant sur le théorème d'existence des fonctions implicites et sans avoir à recourir aux propriétés et transformations du déterminant fonctionnel.

Prenons par exemple quatre fonctions de quatre variables

$$X = f(x, y, z, u), \quad Y = \varphi(x, y, z, u), \quad Z = \psi(x, y, z, u), \quad T = \theta(x, y, z, u).$$

On peut toujours supposer le nombre de variables égal au nombre des fonctions : Si l'on n'avait que trois variables x, y, z on pourrait supposer que u a une valeur constante. Si l'on avait plus de quatre variables, le raisonnement porterait sur quatre quelconques des variables.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire est suffisante pour que les fonctions soient dépendantes, c'est-à-dire pour qu'il existe une relation de la forme* $F(X, Y, Z, U) = 0$ *qui soit satisfaite quelles que soient les valeurs données aux variables* x, y, z, u, *est que le Jacobien de ces quatre fonctions par rapport aux quatre variables soit nul.*

Si un mineur du premier ordre est différent de zéro, il n'existe qu'une relation. Si tous les mineurs du premier ordre sont nuls, un mineur du second ordre étant différent de zéro, il existe deux relations, etc...

Pour que les fonctions soient indépendantes, il est donc nécessaire que le nombre de variables indépendantes soit au moins égal au nombre des fonctions.

1° La condition est nécessaire. Si, en effet, il existe une relation $F(X, Y, Z, U) \equiv 0$. en la dérivant par rapport à x, y, z, u, on obtient

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} F'_X \dfrac{\partial X}{\partial x} + F'_Y \dfrac{\partial Y}{\partial x} + F'_Z \dfrac{\partial Z}{\partial x} + F'_T \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ F'_X \dfrac{\partial X}{\partial y} + F'_Y \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \cdots = 0 \\ F'_X \dfrac{\partial X}{\partial z} + F'_Y \dfrac{\partial Y}{\partial z} + \cdots = 0 \\ F'_X \dfrac{\partial X}{\partial t} + F'_Y \dfrac{\partial Y}{\partial t} + \cdots = 0. \end{cases}$$

On peut considérer ces quatre équations comme linéaires et homogènes en F'_X, F'_Y, F'_Z, F'_T. Ces quatre inconnues ne peuvent être nulles simultanément, identiquement, puisque la fonction $F(X, Y, Z, U)$ dépend au moins de l'une des fonctions X, Y, Z, U.

ω

Le déterminant de ces inconnues doit être nul. Or ce déterminant est précisément le Jacobien

$$D^{x,y,z,u}_{X,Y,Z,U}.$$

2° La condition est suffisante. Nous allons nous placer dans le cas général en supposant ce Jacobien nul ainsi que tous ses mineurs du premier ordre, un mineur du deuxième ordre étant différent de zéro Supposons par exemple $D^{x,y}_{X,Y} \neq 0$.

Puisque l'on veut rechercher des relations entre X, Y, Z, U,

α, γ

il est naturel d'éliminer les variables x, y, z, u entre les relations (1). A cet effet, comme le déterminant $D^{x,y}_{X,Y}$ est différent de

α₁

zéro, on peut tirer x, y des deux premières équations en fonction de X, Y, z, u, et substituer ces valeurs dans les deux dernières ; on obtiendra

$$Z = \Psi(X, Y, z, u), \qquad U = \Theta(X, Z, z, u).$$

β, α₁

Nous allons montrer que Z, U sont indépendants de z, u.

φ

Il suffit pour cela de montrer que leur différentielle peut se mettre sous la forme

$$dZ = M dX + N dY, \qquad dU = M_1 dX + N_1 dY.$$

δ₁, α₁

Nous sommes donc amenés à exprimer les différentielles

ξ

en fonction, de dX, dY et peut-être de dZ, dU. A cet effet il est nécessaire de différentier les équations (1)

$$(1) \qquad dX = f_x' dx + f_y' dy + f_z' dz + f_u' du$$
$$(2) \qquad dY = \varphi_x' dx + \varphi_y' dy + \varphi_z' dz + \varphi_u' du$$
$$(3) \qquad dZ = \psi_x' dx + \psi_y' dy + \psi_z' dz + \psi_u' du$$
$$(4) \qquad dU = \theta_x' dx + \cdots + \theta_u' du.$$

δ₁

Nous allons éliminer dx, dy. Nous pouvons les tirer des deux premières et les substituer dans la troisième et la quatrième. Cela revient à éliminer dx, dy entre les équations (1), (2), (3) ou (1), (2), (4). Dans le premier cas le résultat s'écrit

$$\begin{vmatrix} f_x' & f_y' & f_z' dz + f_u' du - dX \\ \varphi_x' & \varphi_y' & \varphi_z' dz + \varphi_u' du - dY \\ \psi_x' & \psi_y' & \psi_z' dz + \psi_u' du - dZ \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant se décompose en trois. Dans le premier, après avoir mis dz en facteur, il reste

$$\begin{vmatrix} f_x' & f_y' & f_z' \\ \varphi_x' & \varphi_y' & \varphi_z' \\ \psi_x' & \psi_y' & \psi_z' \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est nul, puisque c'est un mineur du premier ordre du Jacobien. De même, le coefficient de du est nul. Il reste donc simplement

$$\begin{vmatrix} f_x' & f_y' & dX \\ \varphi_x' & \varphi_y' & dY \\ \psi_x' & \psi_y' & dZ \end{vmatrix} = 0.$$

Et comme $D^{x,y}_{X,Y} \neq 0$, cette équation peut bien se mettre sous la forme

$$dZ = M dX + N dY.$$

De même, en éliminant dx, dy entre (1), (2), (4), on obtiendrait

$$dU = M_1 dX + N_1 dY.$$

Z, U sont donc bien fonctions de X, Y seulement.

D'ailleurs, il ne peut pas exister de relation entre X, Y car en les consdérant comme fonctions de x, y seulement, leur Jacobien n'est pas nul.

La démonstration prouve de plus que les relations de dépendance peuvent être résolues par rapport aux fonctions dont les dérivées ne figurent pas dans le mineur différent de zéro.

VII. — DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Fonctions d'une variable. — Si la fonction $y = f(x)$ admet une dérivée, cette dérivée sera en général une nouvelle fonction de x qui pourra à son tour admettre une dérivée. Elle est dite dérivée seconde de $f(x)$ et se désigne par la notation $f''(x)$.

En continuant ainsi successivement on introduira la dérivée d'ordre n de la fonction, que l'on désigne par $f^n(x)$.

Différentielle seconde. — Changeons légèrement de notation. Si l'on donne un accroissement h_1 à x, y prendra un accroissement

$$\Delta_{h_1} y = f(x + h_1) - f(x).$$

Si dans $\Delta_{h_1} y$, nous donnons à x un nouvel accroissement h_2, δ_1

$\Delta_{h_1} y$ prendra un accroissement que nous désignerons par $\Delta_{h_2}\Delta_{h_1} y$ ou par $\Delta^2_{h_2 h_1} y$. Il est égal à

$$f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_2) - [f(x + h_1) - (fx)].$$

ρ

On remarque que le second membre ne change pas si l'on permute h_1, h_2. Par suite

$$\Delta^2_{h_2 h_1} y = \Delta^2_{h_1 h_2} y.$$

On peut donc intervertir l'ordre de deux accroissements. De même, si dans ce nouvel accroissement nous donnons à x un autre accroissement h_3, $\Delta^2_{h_2 h_1} y$ prendra un nouvel accroissement que nous désignons par $\Delta^3_{h_3, h_2, h_1} y$. $\xi\psi$ Si à l'accroissement Δ_{h_1} on donnait successivement les accroissements h_3 et h_2 ou h_2 et h_3, les résultats seraient les mêmes. Donc

$$\Delta^3_{h_3 h_2 h_1} = \Delta^3_{h_2 h_3 h_1}.$$

δ^1

En continuant ainsi de proche en proche, on peut définir l'accroissement du $n^{\text{ième}}$ ordre de y que l'on désigne par

$$\Delta^n_{h_n h_{n-1} \cdots h_3 h_2 h_1}.$$

Comme on peut intervertir deux accroissements successifs, ω

on voit que l'on peut intervertir d'une manière quelconque les accroissements $h_1 h_2 \cdots h_n$; le résultat n'est pas changé.

Introduisons les dérivées successives de la fonction y.

Pour l'accroissement h_1 on a d'abord

$$\Delta_{h_1} y = f(x + h_1) - f(x).$$

Posons

$$\varphi(x) = f(x + h_1) - f(x).$$

D'où

$$\varphi'(x) = f'(x + h_1) - f'(x) = h_1 f''(x + \theta_1 h_1), \qquad 0 < \theta_1 < 1.$$

On a alors

$$\Delta^2_{h_2 h_1} y = \varphi(x + h_2) - \varphi(x) = h_2 \varphi'(x + \theta_2 h_2), \qquad 0 < \theta_2 < 1.$$

ω

Par suite

$$\Delta^2_{h_2 h_1} y = h_1 h_2 f''(x + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2).$$

(Le θ_1 n'est pas le même que celui qui figure dans la valeur précédente).

ψ

Démontrons que l'on a en général

$$\Delta^{n+1}_{h_1 h_2 \cdots h_{n+1}} f = h_1 h_2 \cdots h_{n+1} f^{n+1}(x + \theta_1 h_1 + \cdots \theta_{n+1} h_{n+1}).$$

χ

Nous supposerons cette formule établie pour n et démontrerons qu'elle est alors vraie pour $n + 1$.

δ

Posons

$$\psi(x) = f(x + h_{n+1}) - f(x).$$

On aura

$$\Delta^{n+1} f = \Delta^n \psi.$$

χ

Et puisque la formule est établie pour n

$$\Delta^n \psi = h_1 h_2 \cdots h_n \psi^n(x + \theta_1 h_1 + \cdots + \theta_n h_n).$$

Or on a

$$\psi^n = f^n(x + h_{n+1}) - f^n(x) = h_{n+1} f^{n+1}(x + \theta_{n+1} h_{n+1}).$$

ω

On a donc bien

$$\Delta^{n+1} f = \Delta^n \psi = h_1 h_2 \cdots h_n h_{n+1} f^{n+1}(x + \theta_1 h_1 + \cdots + \theta_n h_n + \theta_{n+1} h_{n+1}).$$

La relation est donc bien démontrée.

On en déduit

$$\frac{\Delta^{n+1} f}{h_1 h_2 \cdots h_{n+1}} = f^{n+1}(\xi), \qquad \xi = x + \theta_1 h_1 + \cdots + \theta_{n+1} h_{n+1}.$$

Si la dérivée d'ordre $n + 1$ est continue, lorsque tous les accroissements $h_1 h_2 \cdots h_{n+1}$ tendent vers zéro, ξ tend vers x; le second membre tend donc vers $f^{n+1}(x)$.

ω

On voit donc que d'une façon gérale

$$f^n(x) = \lim \frac{\Delta^n f}{h_1 h_2 \cdots h_n}.$$

En particulier si $h_1 = h_2 = \cdots = h_n$

$$f''(x) = \lim \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2}.$$

On peut écrire d'une façon générale, pour des accroissements finis $h_1, h_2, \cdots h_n$

$$\Delta^n f = h_1 h_2 \cdots h_n [f_n(x) + \varepsilon] = h_1 h_2 \cdots h_n f^n(x) + \varepsilon h_1 h_2 \cdots h_n.$$

ε serait infiniment petit si $h_1, h_2, \cdots h_n$ l'étaient eux-mêmes. C'est dans ce sens que nous dirons que la première partie $h_1 h_2 \cdots h_n f^n(x)$ est la partie principale de l'accroissement du $n^{\text{ième}}$ ordre.

On considère plus particulièrement le cas où tous les accroissements sont égaux

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_n = \Delta x.$$

On donne alors à cette partie principale le nom de différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre et on la désigne par $d^n f$. On a donc

$$d^n f = (\Delta x)^n f^n(x).$$

Cette formule entraîne nécessairement ($n = 1$, $y = x$) $\Delta x = dx$ et par suite

$$d^n f = (dx)^n f^n(x).$$

On en déduit

$$f^n(x) = \frac{d^n f}{dx^n}, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = y^n.$$

Ce qui donne une nouvelle notation pour la dérivée d'ordre n d'une fonction. Il faut remarquer que $\frac{d^n y}{dx^n}$ est un véritable quotient.

On aurait pu arriver à la notion de différentielle du deuxième ordre d'une fonction, en la considérant comme différentielle de la différentielle première, la différentielle dx de la variable indépendante étant considérée et traitée comme une constante indépendante de x. Puisque

$$dy = f'(x)dx$$

en différentiant les deux membres de cette égalité on aura la différentielle seconde de dy, soit

$$d^2 y = dx \times df'(x) = dx \times f''(x) \cdot dx = f''(x)dx^2.$$

D'une façon générale

$$d^n y = f^n(x)dx^n.$$

Fonctions composées. — Si y est une fonction de u, u étant elle-même fonction de x, on a vu que

$$dy = f'(u)du.$$

En remarquant que du n'est plus constant, si nous différentions les deux membres

$$d^2y = f''(u)\cdot du^2 + f'(u)d^2u.$$

De même

$$d^3y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)du\,d^2u + f'(u)d^3u.$$

Comme on le voit, d^ny sera évidemment homogène et de degré n par rapport aux indices différentiels, d^ku étant considérée comme d'ordre k.

Si u est linéaire en x,

$$u = ax + b, \qquad du = adx,$$

du est donc constant comme la différentielle de la variable indépendante. Les différentielles d'ordre supérieur sont nulles. On a donc

$$d^ny = f^n(u)du^n, \qquad f^n(u) = \frac{d^ny}{du^n},$$

comme si u était la variable indépendante.

Applications. — La dérivée et la différentielle d'ordre n d'une somme sont respectivement la somme des dérivées, des différentielles d'ordre n.

Polynôme. — Si l'on a un polynôme de degré m

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a^m.$$

la dérivée première est un polynôme d'ordre $m-1$, la dérivée k^e un polynôme d'ordre $m-k$, la dérivée m^e se réduit à $m(m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\,a_0$. Toutes les dérivées suivantes sont nulles.

Cette propriété caractérise un polynôme : Si la dérivée m^e est une constante a, la dérivée $(m-1)^e$ sera la fonction la plus générale admettant pour dérivée a, soit $ax + a_1$. Cette dérivée est donc un polynôme du premier degré. La dérivée $(m-2)^e$ est la fonction la plus générale admettant pour dérivée $ax + a_1$, soit

$$\frac{ax^2}{2} + a_1x + a_2.$$

La démonstration se fait de proche en proche : la dérivée d'ordre 1

sera un polynôme d'ordre $m - 1$ et la fonction elle-même sera un polynôme de degré m dont le premier terme sera $ax^m \times \frac{1}{m!}$.

Fonctions rationnelles. — On désigne sous ce nom toute fonction y de la forme $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q étant des polynômes. Nous les supposerons respectivement de degré m, n.

σ_2

On sait (nous y reviendrons) que l'on peut mettre toute fraction rationnelle sous la forme

$$y = \pi(x) + \sum \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \sum \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^\beta}.$$

$\pi(x)$ étant un polynôme de degré $m - n$, si $m \geqslant n$, les fractions simples de première espèce $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ correspondant à toutes les racines réelles de Q, α étant au plus égal au degré de multiplicité de la racine a, les fractions de seconde espèce $\frac{mx+n}{(x^2+px+q)^\beta}$ correspondant aux racines imaginaires de Q, β étant au plus égal au degré dans Q, des racines du trinôme du second degré $x^2 + px + q$.

Nous renvoyons pour la démonstration de ce théorème au Cours de mathématiques générales.

(Toutes les fois que dans une question on a affaire à une fraction rationnelle, on peut admettre en principe qu'il faudra la décomposer en éléments simples).

Considérons l'une des fractions de première espèce $y = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$.

δ_1

les dérivées successives seront

$$y' = -\alpha(x-a)^{-\alpha-1}, \quad y'' \cdots,$$
$$y^k = (-1)^k \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)(x-a)^{-\alpha-k};$$

Prenons maintenant une fraction de seconde espèce; sans écrire,

ρ

il est évident que la forme des dérivées se complique de plus en plus

α

Pour tourner la difficulté, on peut remarquer que la dérivation d'une fonction donne lieu à une suite d'opérations régulières, bien déterminées. La dérivée de $y = (x-a)^m$ limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

est $m(x-a)^{m-1}$, que a soit réel ou imaginaire. La dérivée est unique, quelle que soit la forme sous laquelle on mette la fonction : Si donc on transforme la fonction et si on la dérive sous sa nouvelle forme, on doit retrouver le même résultat. On peut donc décomposer la fraction de seconde espèce en fractions de première espèce, en introduisant les racines imaginaires sous la forme suivante

$$\frac{A+iB}{(x-a-bi)^3}+\frac{A-iB}{(x-a+bi)^3}.$$

en supposant

$$x^2+px+q=(x-a)^2+b^2.$$

On passe de la première à la deuxième fraction en changeant i en $-i$; les dérivées successives s'obtiendront donc par le même changement. Les deux dérivées d'ordre n sont donc imaginaires conjuguées : leur somme est réelle.

Exemple :

$$y=\frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{1+x^2}=\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right),$$

donc

$$y^n=(-1)^n\frac{i}{2}n!\left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right].$$

En réduisant les deux fractions au même dénominateur,

$$y^n=(-1)^n\frac{i}{2}n!\,\frac{(x-i)^{n+1}-(x+i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Le numérateur de la fraction change simplement de signe, si on change i en $-i$. On en conclut que ce numérateur est une imaginaire pure : y^n est réelle.

$$y^n=(-1)^n n!\,\frac{C^1_{n+1}x^n-C^3_{n+1}x^{n-2}+C^5_{n+1}x^{n-4}\cdots}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Exemple : $n=5$,

$$y^5=-5!\,\frac{6x^5-20x^3+6x}{(1+x^2)^6}.$$

On peut mettre le résultat sous une forme légèrement différente. Nous avons vu que

$$y^{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{i}{2}(n-1)!\left[\frac{1}{(x+i)^n}-\frac{1}{(x-i)^n}\right].$$

Le second membre comprend les puissances $n^{\text{ièmes}}$ d'imaginaires : or une formule est particulièrement simple dans ce cas, c'est la formule de Moivre. Il faut donc mettre les imaginaires sous la forme trigonométrique. Posons donc

$$x + i = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

δ

c'est-à-dire

$$x = \rho\cos\varphi, \quad 1 = \rho\sin\varphi, \quad \text{d'où} \quad \rho = +\sqrt{1+x^2} \quad \varphi = \operatorname{arc\,ctg} x$$

Alors

$$(x+i)^{-n} = \rho^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi), \quad (x-i)^{-n} = \rho^{-n}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

par suite en portant dans l'expression de y^{n-1}

$$y^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{i}{2}(-2i)\rho^{-n}\sin n\varphi = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{\sin n\varphi}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

avec la condition

$$\varphi = \operatorname{arc\,ctg} x, \qquad x = \operatorname{ctg}\varphi.$$

De même si

$$y = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i}\right)$$

$$y^n = (-1)^n n!\,\frac{C^0_{n+1}x^{n+1} - C^2_{n+1}x^{n-1} + C^4_{n+1}x^{n-3}\ldots}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Fonctions transcendantes. — 1° Si $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

ρ

On voit qu'il suffit d'ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'argument. Donc

$$y^n = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

De même si $y = \cos x$

$$y^n = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

2° $y = \log x$,

$$y' = \frac{1}{x}.$$

ρ

La dérivée d'ordre n de y est donc la dérivée d'ordre $n-1$ de x^{-1} soit,

$$(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

3° $y = \text{arc tg } x$,

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

ρ

la dérivée d'ordre n de y sera donc la dérivée d'ordre $n - 1$ de $\frac{1}{1 + x^2}$. σ_2 C'est celle que nous avons calculée ci-dessus.

On aurait pu démontrer directement, et par récurrence, que l'on peut mettre y^n sous la forme $y_n = \frac{P_{n-1}}{(1 + x^2)^n}$, ce qui résulte d'ailleurs de l'expression (1).

ρ

Les racines du polynome P_{n-1} sont les mêmes que celles de $y^n = 0$. δ_1 Or d'après la deuxième forme, ces racines doivent satisfaire à $\sin n\varphi = 0$ et, inversement, à toute racine de cette équation correspond une valeur de $x = \text{ctg } \varphi$, et par suite une racine de $P_{n-1}(x) = 0$.

δ_1, d

Or ces racines sont $\varphi = \frac{k\pi}{n}$. On obtiendra n valeurs distinctes de φ et par suite de x en donnant à k, n valeurs consécutives, par exemple 0, 1, 2, $\cdots (n - 1)$.

π

A la racine $\varphi = 0$ correspond une valeur infinie de x : le coefficient de x^n dans le polynôme numérateur est en effet nul.

ω

On en conclut que toutes les racines du polynôme $P_{n-1}(x)$ sont réelles et on a même leur expression exacte.

Fonctions de plusieurs variables. — Considérons une fonction u de n variables indépendantes $u = f(x, y, z \cdots)$. Ses dérivées partielles f'_x, f'_y, $f'_z \cdots$ sont des fonctions de ces mêmes variables ; chacune d'elles, f'_x par exemple, ξ peut, à son tour, admettre n dérivées partielles qu'on appellera « dérivées partielles du second ordre » de la fonction u. On les désigne par f''_{xx}, f''_{xy}, $f''_{xz} \cdots$

La dérivée f'_y admet de même des dérivées partielles f''_{yx}, $f''_{yy} \cdots$; chacune des dérivées du second ordre peut admettre à son tour, n dérivées partielles qui seront les dérivées partielles du troisième ordre, ainsi de suite...

Il semble que le nombre des dérivées partielles d'ordre k ψ doive être n^k. Ce nombre est réduit comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *On peut intervertir l'ordre de deux dérivations successives sans changer le résultat.*

Montrons d'abord que $f''_{xy} = f''_{yx}$. Pour le démontrer, il est naturel de remonter à la définition de la dérivée d'une fonction. La dérivée par rapport à x s'obtient en donnant à x un accroissement Δx et cherchant la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Soit

$$v = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Pour avoir ensuite la dérivée partielle par rapport à y il faudra dans cette limite, donner à y un accroissement Δy et chercher à son tour la limite de $\frac{\Delta v}{\Delta y}$. Il est évidemment naturel de donner à y l'accroissement Δy dans le rapport qui a pour limite v; on est donc amené à considérer la limite du rapport

$$\frac{[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]}{\Delta x \Delta y}.$$

Posons

$$\varphi(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Le rapport s'écrit

$$\frac{\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta x \Delta y}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis

$$\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = \Delta y \varphi'_y(x, \eta_1). \qquad (\eta_1 \text{ compris entre } y \text{ et } y + \Delta y).$$

Or

$$\varphi'_y(x, \eta_1) = f'_y(x + \Delta x, \eta_1) - f'_y(x, \eta_1).$$

En appliquant à son tour le théorème des accroissements finis, la différence s'écrit

$$\Delta x f''_{yx}(\xi, \eta_1),$$

(ξ compris entre x et $x + \Delta x$). Le rapport dont on cherche la limite se réduit donc simplement à $f''_{yx}(\xi, \eta)$.

Mais le numérateur du rapport considéré peut également s'écrire

$$[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)],$$

et si l'on considère la fonction

$$\psi(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ψ

on verrait que le rapport peut s'écrire simplement

$$f''_{xy}(\xi_1, \eta_1)$$

ξ_1 étant compris entre x et $x + \Delta x$, η_1 entre y et $y + \Delta y$.

On doit donc avoir $f''_{yx}(\xi, \eta) = f''_{xy}(\xi_1, \eta_1)$.

ω

Si les dérivées partielles du second ordre sont continues, l'égalité ayant lieu quels que petits que soient Δx, Δy, lorsque ces accroissements tendent vers 0, ξ et ξ_1 tendent vers x, η et η_1 vers y. A lalimite on a donc bien

$$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y).$$

Généralisation. — Supposons alors que l'on ait deux dérivées partielles d'un ordre quelconque, mais prises le même nombre de fois par rapport à x, le même nombre de fois par rapport à y, etc... Remarquons d'abord que si $f''_{yx} = f''_{xy}$, en dérivant ensuite les deux membres par rapport aux mêmes variables, les deux nouvelles dérivées seront égales. δ_1 Étant données les deux dérivées partielles, on pourra passer d'un ordre de dérivation à un autre, par des permutations de deux indices successifs quelconques et, par suite, par des permutations quelconques des indices. Ce qui importe donc, c'est simplement le nombre de fois que l'on a dérivé par rapport à chaque variable.

α

Il est donc alors permis de grouper les dérivées par rapport à une même lettre et d'écrire par exemple f^6_{xxyyz} ou sous une forme plus abrégée encore $f^6_{x^2y^2z}$. D'une façon générale, une dérivée d'ordre n s'écrira donc $f^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma \dots}$ avec la condition

$$\alpha + \beta + \gamma \cdots = n.$$

Le nombre des dérivées d'ordre n d'une fonction de m variables

σ_2

est donc égal au nombre des combinaisons avec répétition de m objets n à n soit,

$$\Gamma^n_m = \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}.$$

Différentielle des fonctions de plusieurs variables. — Considérons par exemple une fonction de deux variables indépendantes x, y, soit $z = f(x, y)$. Sa différentielle première est

$$dz = f_x' dx + f_y' dy.$$

Supposons qu'on donne aux variables un système d'accroissements égaux aux premiers ; dx, dy devront donc être considérés comme

ξ

constants ; dz aura, à son tour, une différentielle qui s'appellera la différentielle seconde de z, et que l'on désigne par la notation d^2z, etc... On a

$$d^2z = dx\,df_x' + dy\,df_y'.$$

Or

δ_1

$$df_x' = f''_{x^2}dx + f''_{xy}dy, \qquad df_y' = f''_{xy}dx + f''_{y^2}dy.$$

En substituant et remarquant que $f''_{xy} = f''_{yx}$ on obtient

$$d^2z = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{y^2}dy^2.$$

ρ

On remarque que le second membre est homogène et du second dégré en dx, dy, que les coefficients sont les dérivées partielles du deuxième ordre, enfin que les coefficients numériques

ψ

sont ceux du carré du binôme. Il est naturel de penser que la différentielle d'ordre n jouira des propriétés correspondantes c'est-à-dire que l'on aura

$$d^nz = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n + C_n^1\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n$$

ou d'une manière abrégée

$$d^nz = \sum C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}\cdot dy^k.$$

α

La loi étant vraie pour $n = 1$, $n = 2$, nous allons procéder par récurrence, supposer la formule établie pour n, la démontrer pour $n + 1$. Par hypothèse, en écrivant deux termes successifs on a

$$d^nf = \cdots + C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k + C_n^{k+1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k-1}dy^{k+1}}dx^{n-k-1}dy^{k+1} + \cdots$$

δ_1

Si nous différentions encore une fois, en observant que $d.x$, dy sont constants, on aura d'abord

$$d\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\right) = \frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n-k+1}\partial y^k}dx + \frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n-k}\partial y^{k+1}}dy.$$

Tous les termes de $d^n z$ donnent des résultats analogues ; on voit bien d'abord que $d^{n+1}z$ sera homogène de dégré $n+1$ en dx, dy. D'autre part il faut remarquer que toutes les fois qu'on dérive par rapport à x, on multiplie par dx et de même pour y. Il en résulte nécessairement que le nombre de dérivations par rapport à x est le même que le degré de dx. Tous les termes sont donc nécessairement de la forme.

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-k} \partial y^{k+1}} dx^{n-k} dy^{k+1}.$$

On obtiendra un tel terme en différentiant le premier terme écrit, par rapport à y, ou le deuxième par rapport à x.

Enfin le coefficient numérique de ce terme sera

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

On a donc bien

$$d^{n+1}z = \sum C_{n+1}^{k+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-k} \partial y^{k+1}} dx^{n-k} dy^{k+1}.$$

Remarque. — Après que l'on a vu la forme nécessaire du développement de $d^n z$, pour déterminer les coefficients numériques, on peut encore remarquer que ces coefficients ne dépendront plus de la fonction $f(x, y)$. Il suffit donc de les avoir pour une fonction particulièrement simple. Prenons alors $z = e^{x+y}$. On aura

$$dz = e^{x+y}(dx + dy), \quad d^2z = e^{x+y}(dx + dy)^2 \cdots, \quad d^n z = e^{x+y}(dx + dy)^n.$$

D'autre part toutes les dérivées partielles se réduisent à e^{x+y}. On voit donc bien que les coefficients numériques sont les coefficients de la puissance $n^{\text{ième}}$ du binôme.

Fonction composée. — Considérons maintenant une fonction

$$z = f(u, v),$$

u, v, étant fonctions d'une ou plusieurs autres variables indépendantes x, y, t, $\cdots$ nous savons que la différentielle première est

$$dz = f_u' du + f_v' dv.$$

Différentions les deux membres en observant que du, dv ne sont plus des constantes et que

$$df_u' = f''_{u^2}du + f''_{uv}dv, \qquad df_v' = f''_{vu}du + f''_{v^2}dv$$

on obtient

$$(1) \qquad d^2z = f''_{u^2}du^2 + 2f''_{uv}du\,dv + f''_{v^2}dv^2 + f_u'd^2u + f_v'd^2v.$$

Cette forme est caractéristique.

THÉORÈME. — *Si l'on a pu mettre la différentielle seconde d'une fonction z de deux variables u, v sous la forme*

$$d^2z = rdu^2 + 2sdudv + tdv^2 + pd^2u + qd^2v$$

cette égalité devant avoir lieu de quelque manière que l'on fasse varier u, v en fonction des variables indépendantes, on a nécessairement

$$p = \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial v}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

La démonstration est analogue à celle que nous avons établie pour la différentielle première.

Si u, v sont fonctions d'une seule autre variable indépendante t, on peut diviser l'expression de d^2z par dt^2 car $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$ représentent dans ce cas de véritables quotients. On a

$$d^2z = f''_{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2f''_{uv}\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + f''_{v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + f_u'\frac{d^2u}{dt^2} + f_v'\frac{d^2v}{dt^2}.$$

Dans la formule (1) on remarque que la différentielle de la variable indépendante ne figure pas explicitement. Si on donne les expressions de u, v en fonction de t, on peut les considérer comme représentant le mouvement d'un point de coordonnées u, v sur une courbe.

La dérivée $\frac{d^2z}{dt^2}$ ne dépendant que de $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, sera la même pour deux mouvements à la condition : 1° que les mouvements soient tangents ; 2° qu'ils aient même accélération.

Supposons maintenant qu'il y ait plusieurs variables indépendantes, la différentielle seconde ayant la forme (1), on peut différentier à

nouveau les deux membres, mais les résultats se compliquent de plus en plus, car, en plus des termes qui figuraient dans le cas où u, v étaient des variables indépendantes, on introduit les termes en d^2u, d^2v, d^3u, d^3v, ...

Le résultat se simplifie :

1° Si tous ces termes disparaissent, c'est-à-dire si du, dv sont des constantes, c'est-à-dire enfin si u, v sont des fonctions linéaires des variables indépendantes. La différentielle $n^{\text{ième}}$ a alors la même forme que si u, v étaient variables indépendantes.

Formule de Leibnitz. — 2° Si z est de la forme $z = uv$ car alors

$$f_u' = v, \qquad f_v' = u, \qquad f_{uv}'' = 1.$$

Toutes les autres dérivées sont nulles. On a donc dans ce cas

$$dz = v\,du + u\,dv, \qquad d^2z = v\,d^2u + 2du\,dv + u\,d^2v.$$

Nous allons montrer que d'une façon générale

$$(1) \qquad d^nz = v\,d^nu + C_n^1 dv\,d^{n-1}u + C_n^2 d^2v\,d^{n-2}u + \cdots + u\,d^nv$$

ou plus simplement

$$(1) \qquad d^n(uv) = \Sigma C_n^k d^{n-k}u\,d^kv.$$

La formule étant vraie pour $n = 1$, $n = 2$, nous allons encore appliquer la méthode de récurrence. Nous supposons établie l'égalité 1. En différentiant les deux membres, on obtient

$$d^{n+1}(uv) = \Sigma C_n^k (d^{n-k+1}u\,d^kv + d^{n-k}u \cdot d^{k+1}v).$$

Cherchons le coefficient du terme $d^{n-k}u\,d^{k+1}v$. On obtiendra un deuxième terme de cette forme en différentiant par rapport à u le terme qui suit celui que l'on a écrit. Le coefficient numérique est donc $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. On a bien par suite

$$d^{n+1}(uv) = \Sigma C_{n+1}^{k+1} d^{n-k}u\,d^{k+1}v$$

ce qui est bien la forme indiquée.

Cette formule (1) porte le nom de formule de Leibnitz.

Notation symbolique. — On peut écrire symboliquement

$$d^n(uv) = (du + dv)^n$$

avec les conventions suivantes

$$(du)^0 = u, \qquad (du)^k = d^k u.$$

REMARQUE. — Si u, v sont fonctions d'une seule variable indépendante x, on peut diviser par dx^n; alors $\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}$ est la dérivée d'ordre n de u. La formule a lieu pour la dérivée d'ordre n de uv

$$(uv)^n = \Sigma C_n^k \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}} \frac{d^k v}{dx^k} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)^k$$

avec la convention qu'il faut remplacer $\left(\frac{du}{dx}\right)^k$ par $\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)$.

Cette formule est particulièrement pratique si les dérivées successives des fonctions sont faciles à calculer et, plus particulièrement, si l'une des fonctions u, v se réduit à un polynôme, auquel cas les dérivées, à partir d'un certain ordre, sont nulles. Le nombre des termes de $D^n(uv)$ est toujours limité.

CHAPITRE III

CHANGEMENTS DE VARIABLES

SOMMAIRE.

Cas d'une seule variable — de plusieurs variables : Équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

2me *Méthode. — Emploi des différentielles* : Transformation de Legendre.

Notions sur les transformations de contact : Application à la transformation de Legendre.

Introduction. — Lorsque l'on a un problème à traiter, on choisit, suivant les cas, une ou plusieurs variables que l'on peut prendre comme variables indépendantes ; on choisit d'autre part les fonctions inconnues à déterminer et on établit entre ces variables et ces fonctions les équations $E = 0$ qui sont la traduction analytique des conditions du problème. Ces équations peuvent dépendre, non seulement des variables et des fonctions, mais encore des dérivées partielles des divers ordres des fonctions inconnues par rapport aux variables indépendantes.

Or on peut être amené à se rendre compte, par la forme des équations, ou par les combinaisons qui se présentent, que l'on aurait eu avantage à choisir d'autres variables indépendantes, ou d'autres fonctions liées aux premières par des relations connues. Pour ne pas être obligé de recommencer à poser les équations du problème on peut se proposer simplement de transformer les équations $E = 0$ en introduisant les variables indépendantes nouvelles ou les nouvelles fonctions.

Pour transformer les équations, après avoir établi les relations qui existent entre les anciennes et les nouvelles variables, $\alpha\varphi$

il suffit, comme on le voit, de savoir calculer les diverses dérivées anciennes des fonctions inconnues au moyen des dérivées des nouvelles fonctions par rapport aux nouvelles variables et de subs-

tituer ces expressions dans les équations $E = 0$ pour avoir les équations transformées $E' = 0$.

ω

Transformer une équation revient donc tout simplement à calculer des dérivées et ce calcul est indépendant des équations à transformer

Le problème se décompose tout naturellement en quatre parties :

S'il n'y a qu'une variable indépendante, on peut, soit changer seulement la variable, soit changer la variable et la fonction inconnue. S'il y a plusieurs variables indépendantes, on peut de même soit changer les variables indépendantes seulement, soit changer variables et fonction.

I. — CAS D'UNE SEULE VARIABLE

y est une fonction de x admettant des dérivées successives

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{1}$$

On choisit une autre variable indépendante t liée à x par une relation donnée $x = \varphi(t)$; y peut être considérée comme fonction de t et admet des dérivées

$$y'_t, y''_t, \cdots y^n_t. \tag{2}$$

j

On demande de calculer les dérivées du groupe (1) au moyen de t, des dérivées du groupe (2) et des dérivées connues

$$x'_t, x''_t, \cdots x^n_t \qquad \text{(déduites de } x = \varphi(t)\text{)}. \tag{3}$$

τ_2

La solution est connue pour la dérivée première : y peut être considérée comme fonction composée de t par l'intermédiaire de x. Donc

$$y'_t = \frac{dy}{dx} \times x'_t.$$

Et par suite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t \times \frac{1}{x'_t}. \tag{4}$$

On voit que, pour toute fonction u, pour avoir sa dérivée par rapport à x, φ il suffit de multiplier sa dérivée par rapport à t par

un facteur toujours le même $\frac{1}{x'_t}$, ce que l'on peut écrire d'une façon plus symbolique encore

$$\frac{d}{dx}(-) = (-)'_t \times \frac{1}{x'_t}. \tag{4'}$$

Le problème est alors complètement résolu puisque une dérivée quelconque est la dérivée première de la dérivée précédente.

Appliquons la formule (4) à la fonction $\frac{dy}{dx}$ (au premier membre) et à son égale $\frac{y'_t}{x'_t}$ au second. On aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{y'}{x'}\right)'_t \times \frac{1}{x'_t} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}.$$

Appliquons encore la formule à $\frac{d^2y}{dx^2}$ et à son égale $\frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$. On aura

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}\right)' \times \frac{1}{x'_t}, \text{ etc.}$$

Il est à remarquer que les dérivées 1e, 2e, 3e par rapport à x introduisent successivement les dérivées 1e, 2e, 3e par rapport à t.

Toutes les expressions du second membre ne contiendront jamais comme dénominateur qu'une certaine puissance de x'. De plus la dérivée d'ordre n par rapport à x s'exprime au moyen de la dérivée d'ordre n par rapport à t et des dérivées antérieures.

Il en résulte que si l'équation $F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ dépend des dérivées jusqu'à l'ordre n, l'équation transformée contiendra les dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre n au plus. Mais elle les contiendra certainement jusqu'à l'ordre n, car si elle ne les contenait que jusqu'à l'ordre $m < n$, en faisant la transformation inverse et revenant par conséquent à l'équation initiale, l'équation transformée ne contiendrait également que les dérivées jusqu'à l'ordre m seulement.

Exemple. — Transformer l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$$

en faisant le changement de variable $x = \sin t$.

On aura $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{y'}{\cos t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos t}\left(\frac{y'}{\cos t}\right)' = \frac{y'' \cos t + y' \sin t}{\cos^3 t}.$$

L'équation transformée est donc

$$\frac{1}{\cos t}(y'' \cos t + y' \sin t) - \sin t \frac{y'}{\cos t} + m^2 y = 0$$

ou

$$y'' + m^2 y = 0.$$

Sous cette forme, on se rend compte que

$$y = A \sin mt + B \cos mt$$

est une solution, quels que soient A et B, et par suite l'équation donnée admet pour solution

$$y = A \sin (m \text{ arc sin } x) + B \cos (m \text{ arc sin } x).$$

II. **On change la variable et la fonction.** — y est une fonction de x admettant des dérivées successives

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^ny}{dx^n}.$$

On change la variable indépendante et la fonction en se donnant deux relations

$$x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u).$$

Comme y est supposée fonction de x, on a donc trois relations permettant de considérer trois des inconnues comme fonctions de la quatrième, par exemple x, y, u comme fonctions de t variable indépendante.

On demande de calculer les dérivées de y par rapport à x au moyen des dérivées de u par rapport à t et des dérivées partielles des fonctions données

$$x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u).$$

Si l'on supposait connues les expressions de x, y en fonction de t, les relations du problème précédent permettraient de connaître $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots$ en fonction de

$$x', x'', \cdots x^n, \qquad y', y'', \cdots y^n.$$

Mais le problème est alors résolu, puisque les formules de transformation donnent précisément x, y comme fonctions de t par l'intermédiaire de u. On a donc par le théorème de dérivation des fonctions composées

$$x_t' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}u', \qquad x_t'' = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u}u' + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}u'^2 + \frac{\partial f}{\partial u}u'' \cdots$$

De même

$$y_t' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}u', \qquad y_t'' = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En substituant ces expressions, on aura les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\cdots$ en fonction de t, u et des dérivées u', u'', $\cdots$ Il est à remarquer que la dérivée d'ordre n introduit seulement la dérivée d'ordre n, u^n.

Comme dans le cas précédent, l'équation transformée d'une équation différentielle d'ordre n sera encore une équation différentielle, certainement, d'ordre n.

Remarque. — Il n'est même pas nécessaire de supposer, comme nous l'avons fait, les équations résolues par rapport à x, y. On peut se donner deux relations

$$f(x, y, t, u) = 0, \qquad \varphi(x, y, t, u) = 0.$$

En les dérivant une première fois toutes deux par rapport à t, on déduira les dérivées x_t', y_t' en fonction de u_t' par deux équations du premier degré. Le déterminant des inconnues sera $D = f_x'\varphi_y' - f_y'\varphi_x'$. Il sera différent de zéro si les deux relations $f = 0$, $\varphi = 0$ sont indépendantes en x, y.

En dérivant deux fois les relations, on aura les dérivées secondes x'', y'' et ainsi de suite. Le déterminant des inconnues x', y', puis x'', y'' sera toujours D : il est différent de zéro.

Application. — Considérons par exemple la fonction

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

qui définit, comme on sait, le rayon de courbure en un point d'une courbe. Transformons-la en faisant le changement

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

et considérant θ comme nouvelle variable indépendante et r comme fonction de θ.

δ_1

Transformons d'abord l'expression R en introduisant les dérivées de x, y considérées comme fonctions composées de θ par l'intermédiaire de r. Nous avons vu que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}.$$

Donc

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Or on a

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, \qquad x'' = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta$$
$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta, \qquad y'' = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta.$$

δ_1

En substituant les valeurs ci-dessus de x', y', x'', y'' on aura l'expression de R.

On a immédiatement

$$x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2.$$

Le dénominateur est égal à

$$r^2 + 2r'^2 - rr''.$$

On a donc

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Les points d'inflexion de la courbe sont donnés par l'équation

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0.$$

II. — CAS DE PLUSIEURS VARIABLES

Soit de même z une fonction de x, y admettant des dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ \ldots$$

On prend deux nouvelles variables indépendantes t, u liées à x, y par les relations données

$$x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u) ;$$

z devient une fonction de t, u admettant des dérivées partielles

(II) $$\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u}, \text{ etc...}$$

ξ, α

On demande de calculer les dérivées du groupe (1) en fonction des dérivées du groupe (II) et des dérivées des fonctions données f, φ.

π, α₁

La solution est immédiate pour les dérivées premières : z est une fonction composée de t, u par l'intermédiaire des fonctions x, y. Donc

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} f_t' + \frac{\partial z}{\partial y} \varphi_t', \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot f_u' + \frac{\partial z}{\partial y} \varphi_u'.$$

δ₁

On peut résoudre ces équations par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, si l'on a $f'_t\varphi'_u - f'_u\varphi'_t \neq 0$, c'est-à-dire si les fonctions f, φ sont indépendantes, comme cela doit être, puisque x, y étaient deux variables indépendantes.

ω

On en tire donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial t}\varphi_u' - \dfrac{\partial z}{\partial u}\varphi_t'}{f'_t\varphi'_u - f'_u\varphi'_t}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial u} f_t' - \dfrac{\partial z}{\partial t} f_u'}{f'_t\varphi'_u - f'_u\varphi'_t}.$$

Ce que l'on peut écrire

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\varphi_u'}{D} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{-\varphi_t'}{D} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_u'}{D} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{f_t'}{D} \frac{\partial z}{\partial u}. \qquad (D = f'_t\varphi'_u - f'_u\varphi'_t)$$

π, ρ

Or, ces formules sont nettement symboliques. Les coefficients de $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ au second membre, ne dépendent que de f, φ et sont indépendants de la fonction z. Si l'on désigne ces coefficients par M, N, M′, N′ les formules peuvent s'écrire

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M \frac{\partial z}{\partial t} + N \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = M' \frac{\partial z}{\partial t} + N' \frac{\partial z}{\partial u}.$$

ω

Pour obtenir les dérivées partielles par rapport à x d'une fonction *quelconque*, il suffit de multiplier ses dérivées partielles par rapport à t, u par les facteurs toujours les mêmes M, N et d'ajouter les résultats, ce que nous présenterons sous une forme tout à fait symbolique

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mathrm{M}\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{N}\frac{\partial}{\partial u}.$$

De même

$$\frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{M}'\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{N}'\frac{\partial}{\partial u}.$$

On donne à ces expressions le nom « d'opérateurs de Jacobi ».

α, δ₁

Mais les dérivées du second ordre sont les dérivées partielles premières de celles du premier et ainsi de suite. Le problème

δ₁

est donc entièrement résolu. On a par exemple

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{M}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial t} + \mathrm{N}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \mathrm{N}\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial t} + \mathrm{N}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \mathrm{M}'\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial t} + \mathrm{N}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \mathrm{N}'\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{M}\frac{\partial z}{\partial t} + \mathrm{N}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{M}'\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{M}'\frac{\partial z}{\partial t} + \mathrm{N}'\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \mathrm{N}'\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{M}'\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{N}'\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Remarques. — Les dérivées du premier ordre, du deuxième ordre, etc.

ρ

par rapport à x, y introduisent les dérivées partielles du même ordre par rapport à t, u de sorte que l'équation aux dérivées partielles transformée contiendra les dérivées partielles du même ordre au plus, (et les contiendra sûrement).

Nous avons supposé que les relations entre les anciennes variables indépendantes et les nouvelles étaient résolues par rapport aux anciennes. Si l'on donnait les relations

$$f(x, y, t, u) = 0, \qquad \varphi(x, y, t, u) = 0$$

ξ, α

en les considérant comme fonctions composées de t, u et les dérivant par rapport à t on aurait deux équations donnant x'_t, y'_t de même x'_u, y'_u en dérivant par rapport à u. On peut résoudre ces équations si le déterminant $f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x \neq 0$ c'est-à-dire si les fonctions f, φ considérées comme fonctions de x, y sont indépendantes.

δ_1

En dérivant une seconde fois on aurait de même x''_{t^2}, y_{t^2}, x''_{tu}, y''_{tu}, x''_{u^2}, y''_{u^2}, etc... Le déterminant des inconnues ρ est toujours le même que ci-dessus.

Applications. — I. *Trouver les fonctions z qui satisfont à l'équation*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

α, δ_1

Prenons des coordonnées polaires et posons

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega$$

z devient une fonction de ρ, ω. On aura

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\omega + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \omega} = -\frac{\partial z}{\partial x}\rho\sin\omega + \frac{\partial z}{\partial y}\rho\cos\omega.$$

δ_1

Ces équations donneraient $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ qu'il faudrait substituer.

Mais ρ multiplions par ρ la première équation, elle devient

$$\rho\frac{\partial z}{\partial \rho} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

L'équation transformée est donc

$$\rho\frac{\partial z}{\partial \rho} = \rho^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho} = \rho.$$

ω

Donc

$$z = \frac{1}{2}\rho^2 + f(\omega) \qquad (f \text{ quelc.}).$$

En revenant aux variables primitives

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (\varphi \text{ quelc.}).$$

II. *Equation aux dérivées partielles du second ordre*

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

On demande de trouver toutes les fonctions z qui satisfont à cette équation, A, B, C *désignant trois constantes.*

Nous allons effectuer un changement de variables de façon à simplifier l'équation. α, ν Prenons comme nouvelles variables

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const.}).$$

Pour que ξ, η soient indépendantes comme x, y il sera nécessaire que $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$. On pourra alors résoudre les formules par rapport à x, y et en substituant dans z, z deviendrait une fonction de ξ, η.

Formons l'équation à laquelle satisfait cette nouvelle fonction et, à cet effet, calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées de cette nouvelle fonction z par rapport à à ξ, η. On a successivement

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\alpha + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\gamma, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\beta + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\delta,$$

puis

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha\left(\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \gamma\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \gamma\left(\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} + \gamma\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2},$$

de même

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\delta\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

Substituons alors dans l'équation donnée : elle sera visiblement de la forme

$$A'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C'\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0. \tag{2}$$

en posant

$$A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2, \qquad B' = A\alpha\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\beta\delta$$

$$C' = A\gamma^2 + 2B\gamma\delta + C\delta^2.$$

La nouvelle équation est donc de la même forme que l'équation donnée. Nous allons voir si nous ne pouvons pas disposer des coefficients α, β, γ, δ, de manière à simplifier l'équation (2).

1er Cas. $B^2 - AC \neq 0$. Voyons d'abord si l'on ne peut pas avoir

$$A' = 0, \qquad C' = 0.$$

Il faut pour cela que

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0, \qquad A\gamma^2 + 2B\gamma\delta + C\delta^2 = 0.$$

Ces équations expriment que les rapports $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\delta}{\gamma}$ sont les racines λ_1, λ_2 de l'équation.

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0. \tag{3}$$

Mais, comme l'on doit avoir $\frac{\beta}{\alpha} \neq \frac{\delta}{\gamma}$, il sera nécessaire que les deux racines soient distinctes, c'est-à-dire $B^2 - AC \neq 0$.

Dans ce cas on peut donc prendre

$$\alpha = 1, \qquad \beta = \lambda_1, \qquad \gamma = 1, \qquad \delta = \lambda_2.$$

D'ailleurs, pour ces valeurs, le coefficient B′ devient

$$B' = A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1\lambda_2 = 2A - 2\frac{B^2}{C}.$$

Il est donc différent de zéro. L'équation transformée se réduit donc simplement à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0. \tag{2'}$$

On peut l'écrire

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right) = 0.$$

Elle nécessite donc que $\frac{\partial z}{\partial\xi}$ soit une fonction de ξ seulement et, par suite, z est nécessairement de la forme

$$z = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) \qquad (\varphi_1, \varphi_2 \text{ arbitraires}).$$

Inversement toute fonction $z(\xi, \eta)$ de cette forme satisfait à l'équation (2′). De cette forme de z (ξ, η) on déduit la forme nécessaire et suffisante de $z(x, y)$. On a donc le résultat suivant :

Si $B^2 - AC \neq 0$ la solution générale de l'équation aux dérivées partielles est

$$z = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y)$$

λ_1 et λ_2 désignant les racines distinctes de l'équation

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0.$$

Cette conclusion est valable, que λ_1 et λ_2 soient réelles ou imaginaires. Mais si ces racines sont imaginaires, on serait amené à introduire des fonctions de variables complexes. Dans ce cas on peut simplifier l'équation d'une autre manière. Voyons par exemple α_2 si l'on ne pourrait pas avoir (Goursat)

$$A' = C', \qquad B' = 0.$$

Prenons tout de suite

$$\alpha = \gamma = 1, \qquad \beta = \lambda, \qquad \delta = \mu.$$

δ_1 On devrait avoir

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = A + 2B\mu + C\mu^2, \qquad A + B(\lambda + \mu) + C\lambda\mu = 0.$$

La première se réduit (en divisant par $(\lambda - \mu)$) à

$$2B + C(\lambda + \mu) = 0.$$

De ces deux équations on déduit

$$\lambda + \mu = -\frac{2B}{C}, \qquad \lambda\mu = \frac{2B^2 - AC}{C^2}.$$

ρ Et par suite λ et μ sont racines de l'équation

$$t^2 - \frac{2B}{C}t + \frac{2B^2 - AC}{C^2} = 0.$$

ξ Le discriminant est $\frac{AC - B^2}{C^2}$. L'équation a donc ses racines réelles. L'équation donnée peut donc être ramenée par une transformation réelle à l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta Z = 0.$$

Nous verrons que si l'on considère une fonction *analytique* de variable complexe

$$f(x + yi) = X(x, y) + iY(x, y)$$

les deux fonctions X, Y satisfont séparément à

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

De toute fonction analytique, $f(\xi + i\eta)$, ω on déduit donc deux solutions réelles $X(\xi, \eta)$, $Y(\xi, \eta)$ satisfaisant à (4) et par conséquent deux solutions $X(x + \lambda y, x + \mu y)$, Y, de l'équation donnée.

2e Cas. $B^2 - AC = 0$.

On ne peut plus adopter la même simplification. Faisons dans ce cas la transformation

$$\xi = x + \lambda y, \qquad \eta = y.$$

δ1 On aura

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

ω L'équation transformée est encore de la forme

$$A' \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B' \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C' \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$A' = A + 2B\lambda + C\lambda^2, \qquad B' = 2B + 2C\lambda, \qquad C' = C.$$

α, ν Si donc nous choisissons pour λ la racine *double* de

(3) $$A' = A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

On aura aussi $B' = 0$.

L'équation transformée se réduira donc à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

ω On en conclut que z est de la forme

$$Z = \varphi(\xi) + \eta\psi(\xi)$$

φ et ψ désignant des fonctions qui peuvent être quelconques.

ω Ainsi la solution générale de l'équation donnée est

$$z = \varphi(x + \lambda y) + y\psi(x + \lambda y)$$

λ désignant la racine double de (3).

IV. — *On change les variables indépendantes et la fonction en se donnant trois relations*

$$x = f(t, u, v), \qquad y = \varphi(t, u, v), \qquad z = \psi(t, u, v).$$

ξ Ces relations jointes à la relation supposée $z = F(x, y)$ per-

mettent de considérer quatre des variables comme fonctions des deux autres, par exemple x, y, z, v comme fonctions de t, u. *On veut exprimer les dérivées de z*

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdots$$

au moyen des dérivées de v

$$\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cdots$$

Si l'on avait explicitement x, y, z en fonction de t, u on aurait, entre les dérivées partielles de z, les relations du problème précédent qui introduisent les dérivées de x, y, z par rapport à t, u.

Mais ces dérivées partielles peuvent être connues puisqu'il suffit de considérer x, y, z comme des fonctions composées de t, u par l'intermédiaire de v. On a par exemple

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Remarques. — Ici encore, si l'équation $E = 0$ contient les dérivées de z jusqu'à l'ordre n, l'équation transformée les contiendra également jusqu'à l'ordre n seulement.

Nous avons supposé que les relations étaient résolues par rapport à x, y, z mais cela n'est pas nécessaire : Si l'on se donne trois relations

$$f(x, y, z, t, u, v) = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0.$$

En les dérivant par rapport à t on aura les trois dérivées $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, etc...

III. — 2e MÉTHODE : EMPLOI DES DIFFÉRENTIELLES

On peut employer pour effectuer les changements de variables une deuxième méthode basée sur l'emploi des différentielles.

Prenons le cas d'une fonction z de deux variables x, y. Supposons qu'on fasse le changement de variables défini par les trois équations

$$f(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \qquad \psi = 0$$

Z étant la nouvelle fonction de X, Y.

Différentions ces trois relations en tenant compte que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \qquad dZ = \frac{\partial Z}{\partial X}\,dX + \frac{\partial Z}{\partial Y}\,dY.$$

Entre les trois relations différentielles ainsi obtenues, éliminons, soit le groupe de différentielles anciennes dx, dy, soit le groupe de différentielles nouvelles dX, dY ; nous obtiendrons par exemple, dans ce dernier cas, un résultat homogène en dx, dy, dont les coefficients dépendront de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$. En écrivant que c'est une identité, on aura deux relations que l'on résoudra par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Les relations donnent en outre dX, dY en fonction de dx, dy.

Différentielles secondes. — Différentions une seconde fois les relations de tranformation en remarquant que (sans spécifier les variables indépendantes)

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y,$$

$$d^2X = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\,dX^2 + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial Y}\,d^2Y.$$

Si nous remplaçons dX, dY en fonction de dx, dy, les trois équations renfermeront d'une part des groupes homogènes du second degré en dx, dy, d'autre part des groupes linéaires en d^2x, d^2y, d^2X, d^2Y. Les coefficients dépendront linéairement des diverses dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \cdots \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}.$$

En éliminant d^2X, d^2Y entre ces trois équations on aura donc un résultat de la forme

$$A\,d^2x + B\,d^2y + L\,dx^2 + 2M\,dx dy + N\,dy^2 = 0.$$

Ce résultat devra être identiquement nul. Les coefficients A, B ne dépendent que des dérivées premières $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$.

Les équations A = 0, B = 0 ne pourront que donner à nouveau les relations entre ces deux groupes de dérivées. Ces termes disparaîtraient d'eux-mêmes sans inconvénient, si l'on supposait $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, c'est-à-dire dx, dy constants.

Les trois équations L = 0, M = 0, N = 0, donneront les relations entre les dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}.$$

Il suffira de les résoudre par rapport aux premières.

En résumé :

Règle pratique. — Différentier les relations de transformation en tenant compte que z est une fonction de x, y, et Z une fonction de X, Y. — Éliminer les différentielles nouvelles. — Annuler identiquement le résultat en dx, dy.

Pour les dérivées secondes, (en supposant $d^2x = 0$, $d^2y = 0$) différentier deux fois les relations de transformation. — Éliminer les différentielles secondes nouvelles. — Annuler identiquement le résultat en dx^2, $dxdy$, dy^2.

Applications. — *Soit z une fonction de x, y admettant des dérivées partielles*

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots$$

Inversement on peut considérer x par exemple comme fonction de z, y. Cette fonction admettrait des dérivées partielles

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \cdots$$

Calculer les dérivées du groupe (I) *en fonction des dérivées du groupe* (II).

Les nouvelles variables indépendantes sont donc z, y et la nouvelle fonction x. On a donc les formules de transformation

$$X = z, \qquad Y = y, \qquad Z = x.$$

δ_1

1° On différentie

$$dX = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \qquad dY = dy, \qquad \frac{\partial Z}{\partial X}\,dX + \frac{\partial Z}{\partial Y}\,dY = dx.$$

2° On élimine les différentielles nouvelles

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) + \frac{\partial Z}{\partial Y}\,dy = dx.$$

3° On annule identiquement le résultat. D'où

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial Z}{\partial X} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0.$$

ω

Ce qui donne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{\partial Z}{\partial X}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial Y}}{\dfrac{\partial Z}{\partial X}}, \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{1}{P}, \qquad q = -\frac{Q}{P}.$$

Dérivées secondes. — δ_1 1° On différentie deux fois les relations

$$(d^2x = 0,\ d^2y = 0)$$

$$d^2X = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2, \qquad d^2Y = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\,dX^2 + 2\,\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\,dX dY + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\,\partial Y^2 + \frac{\partial Z}{\partial X}\,d^2X + \frac{\partial Z}{\partial Y}\,d^2Y = 0.$$

2° On élimine les différentielles secondes d^2X, d^2Y

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\,dX^2 + 2\,\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\,dX dY + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\,dY^2$$

$$+ \frac{\partial Z}{\partial X}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2\right) = 0.$$

δ_1

3° On remplace dX, dY, en fonction de dx, dy données par le premier groupe de différentiations

$$dX = \frac{\partial x}{\partial z}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \qquad dY = dy.$$

ω

On annule identiquement le résultat. On obtient

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial X}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 Z}{X\partial Y}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 2\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2},$$

c'est-à-dire enfin

$$r = -\frac{1}{P^3}R, \qquad s = \frac{QR - PS}{P^3}, \qquad t = -\frac{Q^2R + P^2T - 2PQS}{P^3}.$$

Transformation de Legendre. — Les relations que l'on se donne entre les anciennes et les nouvelles variables peuvent même contenir les dérivées des fonctions : c'est le cas de la transformation de Legendre.

Considérons une fonction z de deux variables x, y. Prenons de nouvelles variables X, Y et une nouvelle fonction Z définies par les relations

$$\text{(I)} \qquad X = \frac{\partial x}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial y}{\partial z}, \qquad Z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z.$$

Nous supposons que X, Y peuvent être considérées comme deux variables indépendantes.

1° Différentions les trois relations

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} dX = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dy \\ dY = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy \\ \dfrac{\partial Z}{\partial X}\,dX + \dfrac{\partial Z}{\partial Y}\,dY = x\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dy\right] + y\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right]. \end{cases}$$

2° Éliminons un groupe de différentielles par exemple dx, dy. Dans la troisième relation, les coefficients de x, y sont précisément dX, dY. Elle devient

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\,dX + \frac{\partial Z}{\partial Y}\,dY = x\,dX + y\,dY.$$

3° En annulant identiquement ce résultat, on obtient

$$x = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad y = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

La troisième des relations de transformation peut alors s'écrire

$$Z + z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = X\frac{\partial Z}{\partial X} + Y\frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

On voit qu'il y a réciprocité absolue entre les deux groupes de variables x, y, z et X, Y, Z.

Dérivées secondes. — Différentions encore une fois en supposant par exemple dx, dy constants. Au lieu de différentier les relations II, nous pouvons aussi bien différentier les équations qui ont été la conséquence d'une première dérivation, c'est-à-dire

$$x = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad y = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

On obtient

$$dx = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\,dX + \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\,dY, \qquad dy = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X}\,dX + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\,dY.$$

Les différentielles secondes se sont donc éliminées d'elles-mêmes.

Remplaçons dX, dY par leurs expressions obtenues ci-dessus et annulons identiquement ces résultats, nous obtenons

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ 0 = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ 1 = \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{cases}$$

On voit se poursuivre encore la complète symétrie entre x, y et X, Y. Pour simplifier l'écriture nous désignerons suivant l'usage les dérivées partielles par p, q, r, s, t, P, Q, R, S, T.

Les équations s'écrivent

$$1 = r\mathrm{R} + s\mathrm{S}, \qquad 0 = r\mathrm{S} + s\mathrm{T}$$
$$0 = s\mathrm{R} + t\mathrm{S}, \qquad 1 = s\mathrm{S} + t\mathrm{T}.$$

Ces relations sont particulièrement simples et ne dépendent que des dérivées secondes. On en déduit

$$\frac{\mathrm{R}}{t} = -\frac{\mathrm{S}}{s} = \frac{\mathrm{T}}{r} = \frac{1}{rt - s^2} = \frac{\mathrm{RT} - \mathrm{S}^2}{1}.$$

On peut les résoudre soit par rapport à r, s, t, soit par rapport à R, S, T.

IV. — TRANSFORMATIONS DE CONTACT

Donnons-nous une surface $z = f(x, y)$. Faisons une transformation

$$\mathrm{X} = \varphi(x, y, z), \qquad \mathrm{Y} = \psi(x, y, z), \qquad \mathrm{Z} = 0(x, y, z).$$

A tout point de l'espace $m(x, y, z)$, nous faisons correspondre ainsi un deuxième point M(X, Y, Z).

Les formules définissent comme nous l'avons vu une transformation ponctuelle.

Si l'on fait décrire une courbe au point m, le point M décrira lui-même une courbe. Comme l'on a

$$dX = \varphi_x' dx + \varphi_y' dy + \varphi_z' dz, \qquad dY = \psi_x' dx + \psi_y' dy + \psi_z' dz,$$
$$dZ = 0_x' dx + 0_y' dy + 0_z' dz.$$

On voit que les rapports $dX : dY : dZ$ ne dépendent que des rapports $dx : dy : dz$. Si donc, à partir d'un point m_0, le point m décrit deux courbes tangentes, à partir du point transformé M_0, le point M décrira deux courbes également tangentes.

De même à deux surfaces tangentes en un point, correspondront deux surfaces tangentes au point transformé.

Donnons-nous maintenant des formules de transformation telles que

$$X = \varphi(x, y, z, p, q), \qquad Y = \psi(x, y, z, p, q), \qquad Z = 0(x, y, z, p, q)$$

en supposant $Z = f(x, y)$ (p, q désignant les dérivées partielles de z). Si le point m décrit une surface s, le point M décrira en général à son tour une surface S. Il est facile de déterminer la direction du plan tangent en un point, donnée par les dérivées partielles $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, ou encore donnée par une relation différentielle de la forme

$$A dX + B dY + C dZ = 0.$$

Pour l'obtenir, il suffit donc de différentier les formules de transformation en observant que

$$dz = p dx + q dy, \qquad dp = r dx + s dy, \qquad dq = s dx + t dy$$

r, s, t désignant les dérivées secondes de z. On aura donc

$$dX = \varphi_x' dx + \varphi_y' dy + \varphi_z'(p dx + q dy) + \varphi_p'(r dx + s dy) + \varphi_q'(s dx + t dy)$$

c'est-à-dire

$$dX = (\varphi_x' + p\varphi_z' + r\varphi_p' + s\varphi_q')dx + (\varphi_y' + q\varphi_z' + s\varphi_p' + t\varphi_q')dy ;$$

de même

$$dY = (\psi_x' + p\psi_z' + r\psi_p' + s\psi_q')dx + (\psi_y' + q\psi_z' + s\psi_p' + t\psi_q')dy,$$
$$dZ = (\cdots)dx + (\cdots)dy.$$

α, δ_1

L'élimination de dx, dy donne sous forme de déterminant, la relation entre dX, dY, dZ.

$$\begin{vmatrix} \varphi_x' + p\varphi_z' + r\varphi_p' + s\varphi_q', & \varphi_y' + q\varphi_z' + s\varphi_p' + t\varphi_q', & dX \\ \psi_x' + \cdots & \psi_y' + \cdots & dY \\ \theta_x' + \cdots & \theta_y' + \cdots & dZ \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est bien de la forme

$$A dX + B dY + C dZ = 0.$$

Elle donne les dérivées $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$.

ρ

On voit que, en général, ces dérivées dépendront des valeurs des dérivées secondes r, s, t au point considéré de la surface

ω

S. A deux surfaces tangentes ne correspondent donc pas, en général, deux surfaces tangentes.

Mais si, pour des formes données de φ, ψ, θ, les dérivées premières de Z n'avaient dépendu que de x, y, z, p, q, on dit alors que les formules de transformation définissent une *transformation de contact* (non ponctuelle si les formules ne dépendent pas seulement de

r

x, y, z). Si l'on connaît seulement un point m d'une surface S et son plan tangent, on peut connaître le point transformé M et le plan tangent à la surface transformée.

ρ, σ_1

Application à la transformation de Legendre. — Or, c'est précisément cette circonstance qui s'est présentée dans la transfor-

π

mation de Legendre, puisque nous avons trouvé

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X} = x, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y} = y.$$

La tranformation de Legendre est donc de contact et, comme nous l'avons vu, elle est réciproque.

Cela s'explique facilement, car nous allons montrer que c'est simplement une tranformation par polaires réciproques par rapport au paraboloïde $x^2 + y^2 - 2z = 0$.

σ_2

Nous savons qu'étant donnée une quadrique Q, on appelle

polaire réciproque d'une surface donnée S par rapport à Q, le lieu S' des points M', pôles par rapport à Q des plans tangents à S. On peut aussi σ_2 la définir comme l'enveloppe S' des plans polaires des différents points de S. Les surfaces sont réciproques et S par exemple est le lieu des pôles des plans tangents à S'.

δ_1 Nous devons chercher le lieu des pôles des plans tangents à une surface S, par rapport au paraboloïde

$$x^2 + y^2 - 2z = 0.$$

Soit x, y, z un point de S. Le plan tangent en ce point a pour équation

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \tag{1}$$

(ξ, η, ζ, coordonnées courantes). δ_1, β Son pôle par rappport au paraboloïde sera un point X, Y, Z tel que le plan polaire de celui-ci

$$X\xi + Y\eta - (\zeta + Z) = 0$$

se confonde avec (1). On obtient ainsi

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = +1 = \frac{-Z}{z - px - qy}$$

c'est-à-dire

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z.$$

ρ, σ_2 Ces formules définissent bien la transformation de Legendre.

Remarque. — Il faut remarquer que, dans une transformation de contact non ponctuelle, une surface peut ne pas avoir pour transformée une autre surface. Dans le cas de la transformation de Legendre par exemple, si la surface primitive est un cône, σ_2 le pôle du plan tangent (qui passe par un point fixe) décrira une courbe plane. Plus généralement si la surface est développable, r l'équation d'un plan tangent ne dépendant que d'un paramètre, le pôle de ce plan décrira une courbe gauche.

Si le point x, y, z décrit un plan, le point X, Y, Z sera fixe.

Ces résultats s'expliquent si l'on remarque que, des formules de transformation telles que celle de Legendre

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = px + qy - z,$$

on a pu déduire

$$P = x, \qquad Q = y.$$

D'une façon générale, et par définition, des formules données

$$X = \varphi(x, y, z, p, q), \qquad Y = \psi(x, y, z, p, q), \qquad Z = 0(x, y, z, p, q).$$

si ces formules définissent une transformation de contact, on doit pouvoir déduire

$$P = \varpi(x, y, z, p, q), \qquad Q = \chi(x, y, z, p, q).$$

Les trois formules données reviennent donc, en fait, à cinq formules transformant non seulement le point x, y, z mais les cinq variables x, y, z, p, q c'est-à-dire l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point.

D'après Sophus Lie, on donne à un tel ensemble, le nom d'« élément de contact ».

Se donner une surface (les coordonnées d'un point dépendant de deux paramètres) c'est se donner une infinité d'éléments de contact dépendant de deux paramètres. On peut penser que l'ensemble des éléments de contact transformés, c'est-à-dire X, Y, Z, P, Q, dépendront eux aussi de deux paramètres. Mais il peut arriver que certains de ces éléments soient indépendants de l'un ou même de deux de ces paramètres. Si X, Y, Z ne dépendent que d'un seul même paramètre (P, Q dépendant également de l'autre) le point transformé (qui n'est qu'une partie de l'élément) décrira une courbe. S'il arrive que X, Y, Z soient indépendants des deux paramètres, le point restera fixe.

On peut voit que dans cette conception de Lie, une courbe ou un point ne sont que des cas particuliers d'une surface.

Une courbe par exemple définit bien une infinité d'éléments de contact dépendant de deux paramètres. Un tel élément dépendra, en effet, d'abord de la position du point sur la courbe (qui dépend d'un paramètre) et ensuite de l'orientation d'un plan assujetti à passer par la tangente (orientation qui dépendra d'un nouveau paramètre).

De même pour un point : un point fixe ne dépend d'aucun

paramètre, mais si l'on veut considérer un élément de contact, il faudra ajouter un plan passant par ce point (plan qui dépendra de deux paramètres).

Si deux surfaces sont tangentes, c'est-à-dire si elles ont un élément de contact commun, par une transformation de contact, il leur correspondra en général deux surfaces tangentes.

Si à l'une d'elles correspond une courbe, o la courbe et la surface transformée devront encore être tangentes.

Si, aux deux surfaces correspondent deux courbes, o les deux courbes devront se rencontrer : π elles auront bien ainsi un élément de contact commun constitué par le point de contact commun et le plan des deux tangentes.

Enfin, si l'une des transformées se réduit à un point, ce point devra se trouver sur l'autre surface transformée.

CHAPITRE IV

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

SOMMAIRE.

Élimination des constantes : Équation différentielle des coniques.

Équations aux dérivées partielles : Élimination de fonctions arbitraires. — Applications : Cylindres, cônes, surfaces de révolution, fonctions homogènes.

Élimination de fonctions arbitraires dans le cas de plusieurs équations : surfaces réglées, surfaces développables.

Étant donnée une fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes, nous pouvons calculer, par des procédés de calcul déterminés, les dérivées successives ou les dérivées partielles des divers ordres. Elles ne dépendront que des variables indépendantes, de la fonction, et des dérivées d'ordre antérieur (s'il s'agit de fonctions implicites).

On peut former des combinaisons entre ces diverses équations dérivées ; on obtiendra ainsi de nouvelles équations auxquelles satisfait la fonction de départ.

S'il n'y a qu'une seule variable indépendante, on dit que l'équation obtenue est une équation différentielle ; l'équation est d'ordre n si l'ordre le plus élevé des dérivées de y qui y figurent, est n.

S'il y a plusieurs variables indépendantes, on obtient une équation aux dérivées partielles.

Exemple. — La dérivation des fonctions simples, des fonctions dépendant de radicaux ou transcendantes, ρ n'introduisant que des fonctions de même espèce, on voit que, par des combinaisons entre les diverses équations dérivées, on peut faire disparaître ces radicaux ou ces fonctions transcendantes.

Considérons par exemple la fonction $y = \text{arc sin } x$. δ_t On aura

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

En élevant au carré

$$(1 - x^2)y'^2 - 1 = 0$$

ρ

la fonction transcendante a disparu. Dérivons encore une fois, on obtiendra

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 0.$$

δ_1, α

On peut, à son tour, dériver cette équation autant de fois qu'on le voudra, et sa forme linéaire ρ s'y prête particulièrement, π par l'application de la formule de Leibnitz. δ_1 En dérivant n fois, on obtient

$$(1 - x^2)y^{n+2} - 2nxy^{n+1} - n(n-1)y^n - (xy^{n+1} + ny^n) = 0$$

ou

$$(1 - x^2)y^{n+2} - (2n+1)xy^{n+1} - n^2y^n = 0.$$

Ce sont là de nouvelles équations auxquelles satisfait la fonction y.

Cette relation permettrait de calculer de proche en proche les dérivées successives. Pour la valeur particulière x_0 elle se réduit à

$$y_0^{n+2} = n^2y_0^n.$$

δ_1

Comme on a $y_0 = 0$, toutes les dérivées d'ordre pair sont nulles.

Comme $y_0' = \pm 1$, on a

$$y_0''' = \pm 1^2, \quad y_0^5 = 3^2y_0''' = \pm 1^2 \cdot 3^2$$

et de proche en proche

$$y_0^{2n+1} = \pm 1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2.$$

I. — ÉLIMINATION DES CONSTANTES

Considérons une équation $F(x, y, c_1, c_2, \cdots c_n) = 0$ contenant, outre les variables x, y, n constantes auxquelles on puisse donner des valeurs arbitraires et que nous appellerons des paramètres. En donnant à ces constantes toutes les valeurs possibles on obtient une infinité de fonctions distinctes, dépendant de n constantes arbitraires. Toutes les dérivées successives de y ne dépendront que de ces mêmes constantes. ψ, ν On peut concevoir que l'on puisse les

éliminer en prenant un certain nombre d'équations dérivées. Nous allons montrer que toutes ces fonctions y satisfont à une même équation différentielle de l'ordre n au plus.

δ_1

Dérivons en effet l'équation n fois. Nous obtiendrons

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0, \text{ etc.}$$

Entre l'équation proposée et ces n équations dérivées, on peut, dans tous les cas, éliminer les constantes c_1, $c_2 \cdots c_n$. On obtiendra au moins une équation de la forme $f(x, y, y', \cdots y^n) = 0$ à laquelle satisfont toutes les fonctions de la famille.

Considérons par exemple les fonctions

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x}.$$

δ_1

En dérivant deux fois on obtient

$$y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2} \qquad y'' = + \frac{2c_2}{x^3}.$$

L'élimination de c_1, c_2 donne

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Équation différentielle des coniques homofocales. — Ces coniques ont pour équation

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} = 0, \tag{1}$$

A, B étant des constantes déterminées, λ une constante arbitraire.

δ_1

En dérivant, on obtient

$$\frac{x}{A + \lambda} + \frac{yy'}{B + \lambda} = 0. \tag{2}$$

Éliminons λ entre (1) et (2). On a

$$\frac{x}{A + \lambda} = \frac{-yy'}{B + \lambda} = \frac{x + yy'}{A - B}.$$

D'où en portant dans (1) les valeurs de $\frac{1}{A + \lambda}$, $\frac{1}{B + \lambda}$

$$(x + yy')(xy' - y) = (A - B)y'.$$

Telle est l'équation cherchée.

Équation différentielle des coniques générales. — Cette équation a été obtenue par Halphen de la manière suivante sous une forme remarquable.

L'équation générale d'une conique peut s'écrire

$$y = ax + b + \sqrt{mx^2 + 2nx + p}.$$

Elle dépend de cinq constantes arbitraires. Il faudra donc dériver cinq fois pour pouvoir éliminer toutes les constantes. En dérivant une première fois

$$y' = b + \frac{mx + n}{\sqrt{mx^2 + 2nx + p}}.$$

En dérivant une seconde fois, il reste simplement

$$y'' = \frac{mp - n^2}{(mx^2 + 2nx + p)^{\frac{3}{2}}}.$$

On remarque que les paramètres a, b ont disparu. L'équation différentielle ne dépendra donc que de y'' et des dérivées supérieures. L'équation ci-dessus s'écrit

$$mx^2 + 2nx + p = (mp - n^2)^{\frac{2}{3}} y''^{-\frac{2}{3}}.$$

Le premier membre est un polynôme du second degré (si $m \neq 0$).

Si donc on dérive trois fois, les constantes m, n, p seront éliminées d'elles-mêmes. L'équation différentielle de la famille des coniques s'écrit donc

$$\left[y''^{-\frac{2}{3}}\right]''' = 0.$$

Si $m = 0$, c'est-à-dire si les coniques sont des paraboles, deux dérivations suffisent. On obtiendra

$$\left[y''^{-\frac{2}{3}}\right]'' = 0$$

ou en explicitant

$$5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0.$$

On pourrait du reste, sans trop de difficultés, éliminer a, b, c, d, e en partant de l'équation générale

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

δ_1

On arrive immédiatement par trois dérivations à

$$(a + 2by' + cy'^2)y''' - 3(b + cy')y''^2 = 0$$

ρ

d, e, f ont disparu.

α

Puis en isolant $(a + 2by' + cy'^2)$ et dérivant, on élimine a ; en posant $Y''^{-\frac{2}{3}} = Z$ δ_1 et dérivant encore une fois, l'équation transformée se réduit à $Z''' = 0$.

II. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Si l'on a une fonction z de n variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots x_n$ définie par $F(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = 0$, on peut également calculer les dérivées partielles des divers ordres de la fonction z. En formant des combinaisons entre les diverses équations ainsi obtenues, on obtiendra des relations plus générales entre les variables, x_i z et les diverses dérivées partielles de z. On dit qu'on a une équation aux dérivées partielles d'ordre n, si l'équation dépend des dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre au plus.

Élimination de constantes. — De même que dans le cas des fonctions d'une seule variable, si l'on a une équation de la forme

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n, z, c_1, c_2, \cdots c_m) = 0$$

définissant une famille de fonctions dépendant de m constantes arbitraires, toutes les équations partielles dérivées dépendent de ces mêmes constantes ; α, σ_1 il est possible, par leur élimination, d'obtenir des équations aux dérivées partielles d'un ordre suffisamment élevé auxquelles satisfont toutes les fonctions de la famille.

δ_1

En dérivant une fois par rapport à toutes les variables on obtient n équations ; en dérivant deux fois, on obtiendra $\frac{n(n+1)}{2}$ équations nouvelles donnant toutes les dérivées partielles du second ordre. δ_1 En dérivant q fois, σ_2 nous avons vu que le nombre d'équations distinctes (égal au nombre des dérivées partielles

d'ordre q) est égal à $\frac{n(n+1)\cdots(n+q-1)}{1\cdot 2\cdots q}$. Le nombre total d'équations ainsi obtenues sera donc égal à

$$N = 1 + n + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+q-1)}{1\cdot 2\cdots q}.$$

α, δ₁

Il suffira que ce nombre dépasse le nombre m de constantes arbitraires. On obtiendra au moins (N — m) équations aux dérivées partielles d'ordre q auxquelles satisferont toutes les fonctions z de la famille à m paramètres.

Élimination de fonctions arbitraires. — On peut non seulement éliminer des constantes arbitraires mais aussi des fonctions arbitraires.

Cas de deux variables indépendantes. — Prenons d'abord le cas de deux variables indépendantes x, y et considérons les fonctions définies par

$$F(x, y, z, \varphi_1, (\alpha), \varphi_2(\beta), \cdots \varphi_k(\lambda)) = 0$$

$\alpha, \beta, \cdots \lambda$, désignant des fonctions *données* de $x, y, z, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_k$ des fonctions de forme inconnue et arbitraire. Toutes ces fonctions z forment ainsi une famille dépendant de k fonctions arbitraires d'une variable.

ψ

Nous allons montrer qu'elles satisfont toutes à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles bien déterminées.

αν

En dérivant une première fois par rapport à x, y on obtient deux équations nouvelles telles que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\varphi_1'\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\varphi_2'\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \cdots = 0.$$

ρ

Mais ces équations introduisent les k nouvelles fonctions inconnues

$$\varphi_1', \varphi_2', \cdots \varphi_k'.$$

δ₁

En dérivant une deuxième fois, on obtient trois nouvelles équations, mais on introduit (avec les dérivées partielles du second ordre de z) k nouvelles fonctions inconnues

$$\varphi_1'', \varphi_2'' \cdots \varphi_k''.$$

En dérivant q fois, on aura un nombre total d'équations égal à

$$E = 1 + 2 + \cdots + (q+1) = \frac{(q+1)(q+2)}{2}$$

et un nombre de fonctions inconnues $k(q+1)$. Le nombre d'équations sera supérieur au nombre d'inconnues si $q+2 > 2k$, c'est-à-dire si $q > 2(k-1)$. En éliminant toutes les fonctions inconnues on obtiendra $\frac{q+1}{2}(q+2-2k)$ équations aux dérivées partielles d'ordre q. En particulier si $q = 2k-1$, on aura k équations aux dérivées partielles d'ordre $2k-1$.

Cas de n variables indépendantes. — Prenons maintenant le cas général. Considérons les fonctions z définies par une équation de la forme

$$(1)\quad F(x_1, x_2, \cdots x_n, z, \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}), \varphi_2(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{n-1}) \cdots \varphi_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n-1})) = 0,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-1}$, etc., désignent des fonctions données de $x_1, x_2, \cdots x_n, z$, et $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_k$ des fonctions arbitraires de $n-1$ fonctions au plus. Il faudra éliminer toutes ces fonctions φ_i.

Dérivons cette équation (1) successivement q fois par rapport à toutes les variables. Nous aurons un nombre total d'équations égal à

$$N = 1 + n + \frac{n(n+1)}{1,2} + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+q-1)}{q!}.$$

Dans ces équations figurent :

1° $x_1, x_2, \cdots x_n, z$ et les dérivées partielles de z jusqu'à l'ordre q.

2° La fonction φ_1 et ses dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{n-1}}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha_1^2} \cdots$$

jusqu'à l'ordre q, la fonction φ_2 et ses dérivées partielles, etc. Le nombre T de ces dernières quantités sera en désignant par k le nombre des fonctions arbitraires

$$T = k\left[1 + (n-1) + \cdots \frac{(n-1)n\cdots(n+q-2)}{q!}\right].$$

En donnant à q des valeurs successives 1, 2, 3... il arrivera nécessairement un moment où le nombre N d'équations dépassera le nombre T de fonctions inconnues.

π

Car si l'on change q en $q+1$ le nombre d'équations s'accroit de $\frac{n(n+1)\cdots(n+q)}{(q+1)!}$ et le nombre T de $k\frac{(n-1)n(n+1)\cdots(n+q-1)}{(q+1)!}$.
Cette dernière quantité sera inférieure à la précédente si

$$k(n-1) < n+q, \qquad q > k(n-1) - n.$$

ω

Donc dès que q surpassera cette valeur, le nombre N croîtra plus vite que T et finira par le dépasser. A ce moment on pourra éliminer toutes les fonctions inconnues, et il restera au moins N — T équations contenant les dérivées partielles de z jusqu'à l'ordre q.

Réciproquement, on voit que, étant données ces équations aux dérivées partielles, il existera des fonctions z qui y satisfont et qui pourront dépendre de k fonctions arbitraires de $(n-1)$ variables.

ρ

On entrevoit dès maintenant quel est le haut degré de généralité des solutions d'une équation aux dérivées partielles et par suite quelles difficultés peut comporter le problème de la recherche des fonctions satisfaisant à des équations aux dérivées partielles données.

Applications. — x, y désignant deux variables indépendantes, considérons les fonctions z données par une relation de la forme

$$\beta + \varphi(\alpha) = 0$$

α, β désignant des fonctions données de x, y, z; φ une fonction

ρ, σ₂

arbitraire. C'est une application directe du cas précédent. D'ailleurs, l'équation peut s'écrire sous forme plus générale

α

$\psi(\alpha, \beta) = 0$. En dérivant par rapport à x, y on aura

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Ce sont deux équations nouvelles n'introduisant qu'une seule

fonction inconnue nouvelle, le rapport $\frac{\partial\psi}{\partial\beta} : \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$. ω En l'éliminant on obtiendra

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

On pouvait d'ailleurs écrire immédiatement cette relation. π, σ

Elle exprime que le Jacobien des fonctions α, β de x, y (z étant supposée fonction de x, y) est nul : ce qui devait être puisque les fonctions doivent être liées par une relation.

Équation aux dérivées partielles des cylindres. — Un cylindre est engendré par le déplacement d'une droite qui reste parallèle à une direction fixe et qui est assujettie à une autre condition ; rencontrer une courbe directrice, être tangente à une surface, etc.

Si a, b, 1 sont les paramètres directeurs de la direction fixe, les équations d'une génératrice sont de la forme

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

p et q sont variables. En écrivant que cette droite satisfait à la condition supplémentaire, on obtiendra une relation de la forme $F(p, q) = 0$. δ₁

On obtiendra l'équation du cylindre en éliminant p et q entre les équations de la génératrice et cette équation de condition, ce qui donne l'équation

(1) $$F(x - az,\ y - bz) = 0.$$

ρ

On se trouve bien dans le cas que nous avons traité. Cette σ équation exprime qu'il y a une relation entre les deux fonc- δ₁ tions $x - az$, $y - bz$ de x, y. Leur déterminant fonctionnel est donc nul, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 1 - a\frac{\partial z}{\partial x} & -a\frac{\partial z}{\partial y} \\ -b\frac{\partial z}{\partial x} & 1 - b\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant et simplifiant

(2) $$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles de la famille de cylindres dont les génératrices sont parallèles à la direction donnée.

Si l'on considère le plan tangent en un point x, y, z de l'un quelconque de ces cylindres

$$Z - z = (X - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

σ

l'équation exprime que ce plan tangent reste paralèlle à la direction fixe des génératrices. On retrouve la propriété connue, mais de plus, comme nous démontrerons que toute solution de l'équation (2) est de la forme (1), on voit que cette propriété est caractéristique des cylindres.

Equation aux dérivées partielles des cônes de sommet donné. — Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du sommet, les équations d'une génératrice sont de la forme

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = m, \qquad \frac{y - y_0}{z - z_0} = n$$

δ_1

m et n étant variables. En exprimant que cette génératrice satisfait à la condition supplémentaire qui définit le cône, on trouvera une relation de la forme $F(m, n) = 0$. L'équation de la surface s'obtient en éliminant m, n entre les équations de la génératrice et cette équation de condition, ce qui donne pour la surface l'équation

(1) $$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

δ_1

L'équation aux dérivées partielles des cônes est donc

$$D^{x,\,y}_{\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{z - z_0 - (x - x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z - z_0)^2} & \dfrac{-(x - x_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z - z_0)^2} \\ \dfrac{-(y - y_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z - z_0)^2} & \dfrac{z - z_0 - (y - y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z - z_0)^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ou en développant et simplifiant

(2) $$(x - x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial z}{\partial y} - (z - z_0) = 0.$$

σ

Cette équation exprime que le plan tangent en un point passe par le point fixe x_0, y_0, z_0. Comme nous démontrerons que toute

solution de l'équation (2) est de la forme (1), ω on voit que cette propriété est caractéristiques des cônes.

Surfaces de révolution d'axe donné. — Soient $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ les équations de l'axe de révolution OR. σ_2 La surface de révolution peut être considérée comme engendrée par un cercle dont le plan reste perpendiculaire à OR dont le centre est sur cet axe, assujetti en outre à une condition supplémentaire : rencontrer par exemple une courbe fixe génératrice.

δ_1.

Un cercle, parallèle de la surface, est défini par l'intersection de son plan et d'une sphère de centre quelconque sur l'axe, en particulier de centre origine.

Les équations du cercle générateur sont donc de la forme

$$(1) \qquad ax + by + cz = h, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Si ce cercle rencontre la courbe génératrice

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0.$$

δ_1

les équations (1), (2) doivent avoir une solution commune en x, y, z. En éliminant x, y, z entre elles on obtiendra donc une relation de la forme

$$(3) \qquad F(h, R^2) = 6.$$

L'équation de la surface de révolution s'obtient en éliminant h, R entre 1 et 3 ce qui donne

$$(3') \qquad F(ay + by + cz, x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

On est donc encore dans le cas d'application de la méthode.

ω

L'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution est

$$D^{x,\,y}_{ax+by+cz,\ x^2+y^2+z^2} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a + c\frac{\partial z}{\partial x} & x + z\frac{\partial z}{\partial x} \\ b + c\frac{\partial z}{\partial y} & y + z\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad (cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} - (bx - ay) = 0.$$

C'est l'équation cherchée.

Pour obtenir la signification géométrique de cette équation, ξ, ν il faut évidemment introduire les éléments géométriques qui dépendent de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ c'est-à-dire, soit le plan tangent, soit la normale. L'équation du plan tangent en un point est

$$(X - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial z}{\partial y} - (Z - z) = 0.$$

σ L'équation ci-dessus exprime que ce plan tangent est perpendiculaire au plan

$$X(cy - bz) + Y(az - cx) + Z(bx - ay) = 0.$$

φ Or ce plan passe par l'axe de révolution et par le point x, y, z : c'est le plan méridien du point M. On retrouve une propriété connue, mais, de plus, comme nous montrerons que inversement toute solution de l'équation aux dérivées partielles est de la forme (3'), nous en déduirons que toute surface telle que le plan tangent en un de ses points soit perpendiculaire au plan passant par le point et une droite fixe, est une surface de révolution admettant la droite pour axe.

Si on avait pris les équations de la normale

$$\frac{X - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-1}.$$

on verrait aisément que l'équation (4) exprime que cette normale rencontre l'axe.

Equation des fonctions homogènes. — On appelle fonction homogène z de deux variables x, y, toute fonction de la forme

$$z = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

m, est le degré d'homogénéité ; φ étant variable, cette forme), σ exprime qu'il y a une relation entre $\frac{z}{x^m}$ et $\frac{y}{x}$.

), ω Leur déterminant fonctionnel est donc nul, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \frac{x\frac{\partial z}{\partial x} - mz}{x^{m+1}} & \frac{\frac{\partial z}{dy}}{x^m} \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - mz = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des fonctions homogènes.

REMARQUE. — Nous avons poussé le calcul des dérivations jusqu'à obtenir un nombre total d'équations N supérieur au nombre T des fonctions inconnues et nous avons obtenu, *au moins*, N — T équations. Il peut en effet arriver que les T fonctions inconnues se combinent en des groupements d'un nombre total inférieur à T. En considérant ces groupements et les éliminant, il pourra donc arriver soit qu'il ne soit pas nécessaire de dériver q fois, soit que l'on obtienne un nombre d'équations supérieur à N — T. Il n'est pas possible de connaître à priori le nombre de dérivations auxquelles on sera tenu et par suite l'ordre des équations aux dérivées partielles auxquelles on aboutira.

Soient par exemple les fonctions définies par

$$z = x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n\psi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Elles dépendent de deux fonctions arbitraires φ, ψ. Il semble qu'il faudra dériver trois fois pour obtenir, au total, dix équations qui permettront l'élimination des huit fonctions

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \qquad \psi, \psi', \psi'', \psi'''$$

et donneront deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre. Nous allons voir qu'il n'en n'est rien, les fonctions inconnues s'introduisant par certains groupements que l'on peut éliminer.

Posons en effet pour abréger $\frac{y}{x} = t$; en dérivant par rapport à x. y on obtient

$$p = mx^{m-1}\varphi + z_i' \times \frac{-y}{x^2}, \qquad q = ny^{n-1}\psi + z_i' \times \frac{1}{x}.$$

On n'a introduit que le seul groupement z_i'.

En éliminant z_i' on obtient

$$px + qy = mx^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + ny^n\psi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Des équations (1) et (3), on déduit alors $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$(m-n)\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{px + qy - nz}{x^m}, \qquad (n-m)\psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{px + qy - mz}{y^n}.$$

Mais $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ étant fonctions de la même variable, sont fonctions l'une de l'autre. Leur Jacobien est donc nul. On obtient donc l'équation

$$D^{x,y}_{\frac{px+qy-nz}{x^m},\ \frac{px+qy-mz}{y^n}} = 0$$

ou plus simplement

$$D^{x,y}_{\frac{px+qy-mz}{x^m},\ \frac{y}{x}} = 0.$$

En la développant, elle s'écrit

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 + (px + qy)(1 - n - m) + mnz = 0.$$

On voit qu'on n'obtient qu'une seule équation aux dérivées partielles du deuxième ordre.

III. — ÉLIMINATION DE FONCTIONS ARBITRAIRES DANS LE CAS DE PLUSIEURS ÉQUATIONS

Soient deux fonctions z, t de deux variables indépendantes x, y définies par deux équations de la forme

$$F(x, y, z, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots \varphi_n(t)) = 0 \qquad F_1(x, y, z, \varphi_1(t), \cdots \varphi_n(t)) = 0$$

$\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$ étant des fonctions de t qui peuvent être arbitraires.

Si, en particulier, par l'élimination de t, on déduisait de ces deux équations l'expression de z, on aurait une famille de fonctions dépendant de n fonctions arbitraires d'une variable.

Nous allons montrer que toutes les fonctions de cette famille satisfont à une même équation aux dérivées partielles.

A cet effet en dérivant la première par rapport à x nous obtiendrons

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

Il est inutile d'expliciter

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\varphi_1' + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\varphi_2' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n}\varphi_n'.$$

Nous désignerons, pour abréger, par la notation $D_x F$ l'expression

$$D_x F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

C'est la dérivée par rapport à x de F, comme si t était une constante. L'équation précédente s'écrit donc

$$D_x F + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = 0.$$

δ_1

De même en dérivant par rapport à y

$$D_y F + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

α, ν

Entre ces deux équations nous pouvons éliminer $\frac{\partial F}{\partial t}$ et nous obtenons

$$\begin{vmatrix} D_x F, & \frac{\partial t}{\partial x} \\ D_y F, & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous pouvons opérer de même sur l'équation F_1 ; nous obtiendrons

$$\begin{vmatrix} D_x F_1, & \frac{\partial t}{\partial x} \\ D_y F_1, & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

ρ, α

Entre ces deux dernières équations, nous pouvons éliminer le rapport $\frac{\partial t}{\partial x} : \frac{\partial t}{\partial y}$. Il viendra

$$\begin{vmatrix} D_x F, & D_y F \\ D_x F_1, & D_y F_1 \end{vmatrix} = 0 = F_2.$$

ρ, R_1

C'est là une nouvelle équation $F_2 = 0$ déduite des équations (1) (2) qui ne dépend encore que de $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$; elle introduit les dérivées premières de z, *mais pas dautre élément nouveau*

δ_1

En opérant sur $F = 0$, $F_2 = 0$ comme nous avons opéré sur les deux premières, nous obtiendrons

$$\begin{vmatrix} D_x F, & D_y F \\ D_x F_2, & D_y F_2 \end{vmatrix} = 0 = F_3.$$

C'est une nouvelle équation $F_3 = 0$ ne dépendant toujours que

des mêmes éléments et introduisant les dérivées partielles secondes de z. Il est bien évident qu'en opérant sur F_1, F_2 comme sur F et F_2, ψ nous obtiendrions une équation qui se déduirait de $F_2 = 0$, $F_3 = 0$. δ_1

En continuant ainsi $n - 1$ fois, on obtiendra au total $n + 1$ équations entre lesquelles on pourra, de toutes façons, éliminer les n fonctions inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$. On obtiendra au moins une équation dépendant des dérivées partielles de z jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Application aux surfaces réglées. — On appelle surface réglée toute surface engendrée par le déplacement d'une droite.

Les équations de cette droite sont de la forme

$$F = x - mz - n = 0, \qquad F_1 = y - pz - q = 0$$

m, n, p, q sont des fonctions d'une autre variable t. On se trouve donc bien dans le cas précédent. δ_1 L'équation $F_2 = 0$ est

$$\begin{vmatrix} 1 - m\dfrac{\partial z}{\partial x}, & -m\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ -p\dfrac{\partial z}{\partial x}, & 1 - p\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant

$$F_2 = m\frac{\partial z}{\partial x} + p\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0. \tag{3}$$

L'équation $F_3 = 0$ serait

$$\begin{vmatrix} 1 - m\dfrac{\partial z}{\partial x}, & -m\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

En vertu de (3), α nous pouvons remplacer les éléments de la première ligne par $p\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $-m\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ou simplement par p, $-m$. L'équation F_3 est donc

$$m\frac{\partial F_2}{\partial x} + p\frac{\partial F_2}{\partial y} = y$$

ou enfin, en développant

$$F_3 = m^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2mp\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

δ1 De même l'équation $F_4 = 0$ sera

$$m\frac{\partial F_3}{\partial x} + p\frac{\partial F_3}{\partial y} = 0 = F_4.$$

Il est bien évident que le résultat sera homogène et du troisième degré par rapport à m, p. Entre les équations

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0$$

α nous pouvons maintenant éliminer les fonctions arbitraires m, n, p, q. Mais ρ on remarque que les équations $F_3 = 0, F_4 = 0$ ne dépendent que de m, p et sont homogènes en m, p. On peut donc entre ces équations, éliminer le rapport $\frac{m}{p}$.

L'équation aux dérivées partielles ρ ne dépendra que des dérivées secondes et troisièmes de z.

Cas particulier des surfaces développables. — Une surface développable est l'enveloppe d'un plan dont l'équation dépend d'un seul paramètre. Si l'équation de ce plan est

(1) $$z = mx + ny + p$$

(m, n, p, fonction d'un paramètre t), σ1 on obtiendra comme on le sait, l'enveloppe, en adjoignant à cette équation l'équation dérivée

(2) $$m'x + n'y + p' = 0.$$

On peut dire ρ que les équations (1) (2) définissent deux fonctions z, t des deux variables x, y.

Reprenons la formation des équations $F_2 = 0$, etc. δ1 En dérivant (1) par rapport à x nous obtenons

$$\frac{\partial z}{\partial x} = m + (m'x + n'y + p')\frac{\partial t}{\partial x}.$$

Or, ρ en tenant compte de (2) cette équation se réduit à

$$\frac{\partial z}{\partial x} = m.$$

On obtiendrait de même

$$\frac{\partial z}{\partial y} = n.$$

Ainsi, par le procédé que nous avons appliqué, on obtient, dans ce cas particulier, non pas une, mais deux équations nouvelles. D'ailleurs d'après ces équations, on voit que n, m étant fonctions de la même variable t sont fonctions l'une de l'autre.

On peut donc conclure immédiatement

$$D^{x,y}_{\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}} = 0$$

c'est-à-dire

$$rt - s^2 = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.

CHAPITRE V

SÉRIES — SÉRIES DE FONCTIONS SÉRIES ENTIÈRES

SOMMAIRE.

Séries numériques : Th. fondamental $A < \frac{Un}{\sqrt{n}} < B$. — Règle de d'Alembert, de Cauchy. — Série $\frac{1}{n^\alpha}$. — Série $\frac{1}{n \log^\alpha n}$. — Règle de Duhamel. — Règle de Gauss. — Série hypergéométrique. — Théorème de Cauchy.

Séries à termes quelconques : Influence de l'ordre des termes. — Séries absolument convergentes. — Séries convergentes.

Multiplication des Séries.

Séries doubles : Exemple de Arndt.

Séries de fonctions : Séries uniformément convergentes. — Continuité, intégration, dérivation.

Séries entières : Continuité. — Points du cercle de convergence. — Série intégrée, dérivée. — Formule de Taylor.

Séries à deux variables : Région de convergence. — Séries dérivées. — Formule de Taylor.

Séries de Séries : Racines infiniment petites d'une équation-série. — Cas de plusieurs racines nulles. — Formule de Lagrange.

I. — SÉRIES NUMÉRIQUES

Nous supposons connues la définition et les propriétés élémentaires des séries numériques. Nous nous contenterons de rappeler les principaux résultats.

Caractère général de convergence. — Étant donnée une suite de quantités $u_1, u_2, \cdots, u_n$ bien déterminée, en nombre infini, σ_1

on considère les sommes successives

$$S_1 = u_1, \qquad S_2 = u_1 + u_2, \cdots \qquad S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

On dit que la série (u) est convergente, si la suite $S_1, S_2, \cdots S_n, \cdots S_{n+p}$ tend vers une limite finie et bien déterminée S.

Algébriquement, cela peut se traduire de deux manières légèrement différentes.

π

1° Étant donnée une quantité ε, on pourra lui faire correspondre un entier N, tel que, pour toute valeur de n égale ou supérieure à N, on ait $|S - S_n| < \varepsilon$. Cela suppose la connaissance de S.

2° Etant donnée ε_N on peut lui faire correspondre un entier N tel que pour toute valeur de n égale ou supérieure à N on ait $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon_N$ quel que soit p, les quantités ε_N devant tendre vers zéro lorsque N augmente indéfiniment.

β

En particulier, on devra avoir

$$|S_{n+1} - S_n| < \varepsilon_n \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |u_{n+1}| < \varepsilon_n.$$

ω

Une condition nécessaire de convergence est donc que le terme général tende vers zéro. Cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'examen de la série harmonique.

Séries à termes quelconques. — Dans une série déterminée, à termes quelconques, les signes, comme les valeurs absolues des termes, se suivent suivant une loi bien déterminée. En général,

α

il sera possible de grouper les termes de manière que chaque groupe de termes soit constamment positif (ou constamment négatif) ou alternativement positif et négatif.

Prenons par exemple la série

$$\frac{1}{1} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3m+1} - \frac{3}{3m+2} + \frac{2}{3m+3} + \cdots$$

α

On peut grouper les termes de trois en trois et considérer la série

$$v_m = \frac{1}{3m+1} - \frac{3}{3m+2} + \frac{2}{3m+3} = -\frac{3m-1}{(3m+1)(3m+2)(3m+3)}.$$

ω

La série u_n sera évidemment convergente en même temps que la série v_m, le terme général de (v) tendant vers zéro. Nous verrons que cette série v est convergente.

I. **Séries alternées.** — Si les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, si de plus les valeurs absolues des termes

décroissent constamment et tendent vers zéro, la série est convergente.

II. Si la série formée par les valeurs absolues des termes est convergente, il en sera certainement de même de la série proposée, qui est alors dite absolument convergente. Mais il peut arriver que la série donnée soit convergente sans que la série des valeurs absolues le soit : la série est alors dite semi-convergente.

Ce théorème, aussi bien que la remarque faite sur les séries à termes quelconques, montre l'utilité d'étudier d'abord les caractères de convergence des séries à termes positifs.

Séries à termes positifs. — Le théorème principal dominant toute la théorie des séries est le suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Étant données deux séries u v, si à partir d'un certain rang, le rapport* $\frac{u_n}{v_n}$ *reste constamment compris entre deux limites finies* A, B, $(A < \frac{u_n}{v_n} < B)$, *les deux séries sont de même nature.*

En particulier si $u_n < v_n$, si la série v est convergente la série u l'est aussi (on a dans ce cas $0 < \frac{u_n}{v_n} < 1$).

Une condition nécessaire de convergence est que u_n tende vers zéro ; u_n doit donc être un infiniment petit avec $\frac{1}{n}$. Si l'on prend un infiniment petit équivalent, v_n, le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ ayant pour limite l'unité, finira par rester, pour des valeurs suffisamment grandes de n, compris entre deux nombres fixes $1 - \varepsilon$, $1 + \varepsilon$. Les deux séries $u_n v_n$ sont donc de même nature. Il suffira donc de considérer la série formée par les infiniment petits équivalents, en particulier la série formée par les parties principales.

Application. — Cette remarque est d'une application extrêmement générale.

Exemple : A la série $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}$ on peut substituer la série

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x^2}{n^2} = \frac{x^2}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

Comme $\frac{1}{n}$ est un infiniment petit équivalent à $\sin\frac{1}{n}$ et à $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, la série

$$u_n = a\sin\frac{1}{n} + b\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

sera de même nature que la série $v_n = \frac{a+b}{n}$, si $a+b \neq 0$.

Si $a+b=0$, u_n est équivalent à $v_n = -\frac{1}{2n^2}$.

THÉORÈME. — *Enfin nous démontrerons le théorème suivant : soient deux séries à termes positifs*

$$u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots \qquad v_1, v_2, \cdots v_n, \cdots$$

Si la série u est convergente et si à partir d'un certain rang on a constamment $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (1), *la série v est aussi convergente.*

Supposons que l'inégalité soit vérifiée à partir d'un rang n. On ne modifiera pas la convergence de la série v, non plus que le rapport d'un terme au précédent, en multipliant tous les termes de la série v par un facteur λ. On peut donc supposer $v_n < u_n$. Des inégalités (1) on déduira alors

$$v_{n+1} < u_{n+1} \quad \text{puis} \quad v_{n+2} < u_{n+2}, \cdots v_{n+p} < u_{n+p}.$$

Les termes de la série v étant inférieurs à ceux de la série convergente u, la série v est évidemment convergente.

Le premier exemple de série étudiée en algèbre élémentaire est la série géométrique qui est convergente si la raison est inférieure à l'unité.

En comparant, d'après le théorème précédent, une série donnée à la série géométrique, on obtient le théorème suivant :

Règle $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. — THÉORÈME. — *Si à partir d'un certain rang, le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *finit par rester inférieur à un nombre k plus petit que* 1, *la série est convergente. Si ce rapport devient et reste supérieur à un nombre k plus grand que* 1, *la série est divergente.*

Cette règle est due à d'Alembert.

Pratiquement, on applique ce théorème de la manière suivante :

Au lieu d'étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour toute valeur de n, on cherche la limite l vers laquelle il tend, lorsque n augmente indéfiniment.

Si $l < 1$ la série est convergente. Si $l > 1$ la série est divergente. Si $l = 1$ on ne peut rien conclure à moins que la limite $l = 1$ soit atteinte par des valeurs supérieures à 1, auquel cas la série est encore divergente.

Règle $\sqrt[n]{u_n}$. — L'expression $\sqrt[n]{u_n}$ donne lieu à un théorème analogue.

THÉORÈME. — *Si $\sqrt[n]{u_n}$ a pour limite un nombre $l < 1$, la série est convergente. Si $l > 1$, la série est divergente.*

Cette règle porte le nom de règle de Cauchy.

On remarque l'identité des conclusions dans l'application des deux règles précédentes.

On peut démontrer que

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite l, $\sqrt[n]{u_n}$ a aussi une limite et cette limite est l.

En effet, à partir d'une certaine valeur m, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ayant pour limite l, sera compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$, ε étant choisi aussi petit qu'on le veut. Si nous ne considérons la série qu'à partir de ce rang, on peut écrire la suite d'inégalités

$$l - \varepsilon < \frac{u_1}{u_0} < l + \varepsilon, \qquad l - \varepsilon < \frac{u_2}{u_1} < l + \varepsilon \cdots l - \varepsilon < \frac{u_n}{u_{n-1}} < l + \varepsilon.$$

Multiplions toutes ces inégalités membre à membre et extrayons la racine $n^{\text{ième}}$. On aura

$$+ (l - \varepsilon)\sqrt[n]{u_0} < \sqrt[n]{u_n} < (l + \varepsilon)\sqrt[n]{u_0}.$$

Comme $\sqrt[n]{u_0}$ tend vers 1, ces inégalités montrent que $\sqrt[n]{u_n}$ a pour limite l.

Contrairement à ce qu'il serait naturel de penser, la réciproque n'est pas vraie : $\sqrt[n]{u_n}$ peut avoir une limite sans que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en ait une. Considérons par exemple la série

$$a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + a^3b^3 + \cdots$$

dont la loi de formation est évidente. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est alternativement égal à a ou b et ne tend donc pas vers une limite déterminée. Le terme de rang n est égal à $a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$ si n est pair, à $a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair.

Dans les deux cas $\sqrt[n]{u_n}$ a pour limite $\sqrt{ab}$.

On voit que, si par exemple, on a $a > 1$, $ab < 1$, la série est convergente et cependant pour toutes les valeurs, de deux en deux, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1 : la règle de Cauchy permet donc de conclure, la règle de d'Alembert non.

La comparaison du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour la série donnée et pour la progression géométrique a conduit à la règle de d'Alembert. Cette règle est évidemment insuffisante (elle ne permet pas de conclure si la limite du rapport est l'unité) car on conçoit l'existence de séries moins convergentes ou divergentes que toute progression géométrique.

Série $\frac{1}{n^\alpha}$. — Étudions la série

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots$$

C'est la généralisation de la série harmonique. Nous emploierons pour l'étudier un procédé analogue à celui qui a été utilisé. Nous écrirons la série sous la forme

$$S = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_m + \cdots$$

$$T_0 = \frac{1}{1^\alpha}, \quad T_1 = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \cdots T_m = \frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}.$$

Comme on le voit, T_m commence au terme dont le dénominateur est une puissance de 2 et se termine à la puissance suivante (non comprise).

T_m à 2^m termes. Chacun d'eux est compris entre

$$\frac{1}{(2^m)^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2^{m+1})^\alpha} = \frac{1}{(2^m)^\alpha} \cdot \frac{1}{2^\alpha}.$$

T_m sera donc compris entre

$$\frac{1}{(2^m)^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^\alpha}\cdot\frac{1}{(2^m)^{\alpha-1}}.$$

On peut donc poser

$$T_m = \frac{\theta_m}{(2^m)^{\alpha-1}} = \frac{\theta_m}{(2^{\alpha-1})^m},$$

θ_m étant compris entre 1 et $\frac{1}{2^\alpha}$. Ce facteur, restant compris entre des limites finies et différentes de zéro, peut être supprimé :

La série est donc de même nature que la série $v_m = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^m}$.

Cette dernière est une progression géométrique de raison $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$: elle est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha < 1$. Il en est de même de la série $\frac{1}{n^\alpha}$.

Conséquence. — *Si dans une série u le rapport $\frac{u_n}{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$ c'est-à-dire si $n^\alpha u_n$, pour une certaine valeur de l'exposant α, reste compris entre deux limites fixes, les deux séries u_n, $\frac{1}{n^\alpha}$ étant de même nature, la série u sera convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leqslant 1$.*

Application pratique. — On cherchera à déterminer un exposant α tel que $n^\alpha u_n$ tende vers une limite finie et bien déterminée l :

si α est plus grand que 1, la série est convergente.

Série $\frac{1}{n \log^\alpha n}$. — Considérons encore la série

$$\frac{1}{2\log^\alpha 2} + \frac{1}{3\log^\alpha 3} + \cdots + \frac{1}{n\log^\alpha n} + \cdots$$

Nous allons procéder de la même façon que pour la série précédente. Nous grouperons les termes, les groupes commençant aux puissances de 2 successives. Le groupe T_m sera

$$T_m = \frac{1}{2^m \log^\alpha 2^m} + \frac{1}{(2^m+1)\log^\alpha(2^m+1)} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)\log^\alpha(2^{m+1}-1)}.$$

δ_1 Ce groupe contient 2^m termes ; chacun deux est compris entre

$$\frac{1}{2^m \log^\alpha 2^m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^{m+1} \log^\alpha 2^{m+1}}$$

ou

$$\frac{1}{2^m m^\alpha \log^\alpha 2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^{m+1}(m+1)^\alpha \log^\alpha 2},$$

T_m est donc compris entre

$$\frac{1}{m^\alpha \log^\alpha 2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2(m+1)^\alpha \log^\alpha 2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)^\alpha} \times \frac{1}{m^\alpha \log^\alpha 2}.$$

Or $\left(1+\frac{1}{m}\right) < 2$. Donc T_m est compris entre

$$\frac{1}{m^\alpha \log^\alpha 2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{m^\alpha \log^\alpha 2}.$$

α, δ_1 On peut donc poser $T_m = \frac{\theta_m}{m^\alpha}$, θ_m étant compris entre les deux limites finies $\frac{1}{\log^\alpha 2}$ et $\frac{1}{2^{\alpha+1}\log^\alpha 2}$.

ω La série est donc de même nature que la série $\frac{1}{m^\alpha}$. Elle est donc convergente pour $\alpha > 1$, divergente pour $\alpha \leqslant 1$.

Règle de Raabe et Duhamel. — La comparaison de la série u_n avec la série $v_n = \frac{1}{n^k}$ va nous conduire à une règle, obtenue d'abord par Raabe, puis par Duhamel. Nous allons comparer les rapports

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

σ_2 La série v est convergente pour $k > 1$, divergente pour $k \leqslant 1$.

δ Pour la série v, on aura

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}.$$

Or, on sait (et nous y reviendrons) que la formule de Taylor permet d'écrire

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \frac{k}{n} + \frac{\lambda}{n^2},$$

λ ayant une limite finie lorsque n augmente indéfiniment.

Pour la série u, il faut supposer que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ζ a pour limite l'unité, π sans cela la règle de d'Alembert suffirait pour conclure. On peut donc écrire pour des valeurs suffisamment grandes de n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}$, α ayant pour limite zéro. δ Si, à partir d'un certain rang,

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{\lambda}{n^2}}$$

ou

$$n\alpha < k + \frac{\lambda}{n},$$

si la série v est divergente, la série u le sera aussi, Or la série v sera divergente si $k \leqslant 1$.

Soit l la limite du produit $n\alpha$. δ_1 Si $l < 1$, à partir d'un certain rang on aura $n\alpha < 1 + \frac{\lambda}{n}$: La série u est donc divergente.

Inversement si, à partir d'un certain rang, $n\alpha > k + \frac{\lambda}{n}$, si la série v est convergente ($k > 1$), la série u le sera aussi. δ_1 Si donc la limite l est supérieure à 1, soit k un nombre compris entre 1 et l : à partir d'un certain rang on aura

$$n\alpha > k + \frac{\lambda}{n}.$$

La série u sera convergente.

ω En résumé, *on posera* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}$ (α *est déduit de cette égalité même*). *On cherchera la limite l du produit* $n\alpha$.

Si $l < 1$ *la série u est divergente.*

Si $l > 1$ *la série u est convergente.*

Si $l = 1$, *on ne peut rien conclure à moins que la limite* 1 *ne soit atteinte par des valeurs inférieures à* 1, *auquel cas la série est encore divergente* : π on pourra alors poser en effet $n\alpha = 1 - \varepsilon$. A partir de valeurs de n suffisamment grandes, on aura $n\alpha < 1 + \frac{\lambda}{n}$ puisque $\lambda > 0$.

La série v étant divergente, la série u l'est donc aussi.

Règle de Gauss. — *Supposons que dans une série le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *puisse être développé suivant les puissances entières de* $\frac{1}{n}$ *sous la forme*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda + \frac{\lambda_1}{n} + \frac{\mu}{n^2}$$

μ ayant une limite finie lorsque n augmente indéfiniment. La série sera convergente si $\lambda > 1$ *ou si* $\lambda = 1$ *et* $\lambda_1 > 1$, *elle sera divergente dans tous les autres cas.*

ρ (Il faut remarquer que pour l'application de cette règle on considère le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ et non le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).

Nous comparerons la série u_n à la série $v_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$.

δ Pour la série v on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^\alpha.$$

Or

$$\log(n+1) = \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et α, σ_2 en appliquant le développement donné par la formule de Taylor,

$$\log(n+1) = \log n + \frac{k}{n}$$

(k tendant vers l'unité) Puis successivement

δ_1
$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{k}{n \log n}\right]^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{\alpha k}{n \log n} + \frac{\varepsilon'}{n \log n}\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha k}{n \log n} + \frac{\varepsilon''}{n \log n}.$$

ε' comme ε'' tendant vers zéro, αk tendant vers α.

On a donc

δ_2
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{v_n}{v_{n+1}} = \lambda - 1 + \frac{\lambda_1 - 1}{n} - \frac{\alpha k}{n \log n} + \frac{\mu}{n^2} - \frac{\varepsilon''}{n \log n}.$$

ω Pour des valeurs de n suffisamment grandes, la différence sera positive si $\lambda > 1$ ou si $\lambda = 1$ avec $\lambda_1 > 1$, quel que soit α. Mais on peut choisir α de telle manière que la série v soit convergente : la série u l'est donc à fortiori.

Si au contraire $\lambda < 1$, ou si $\lambda = 1$ et $\lambda_1 \leqslant 1$, pour des valeurs de n suffisamment grandes, la différence est négative si $\alpha > 0$. Or on peut choisir $\alpha > 0$ de manière que la série v soit divergente : il en sera à fortiori de même de la série u.

Série hypergéométrique. — Ce théorème, extension de la règle de d'Alembert et de celle de Duhamel, permet de conclure à la seule condition que le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ puisse être développé suivant la forme indiquée. Nous en ferons l'application à l'étude d'une série célèbre étudiée par Gauss, la série hypergéométrique. C'est la série

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

le terme général étant

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)\times\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

α, β, γ, x pouvant être réels ou complexes de la forme $\alpha' + \alpha''i$, etc. Nous verrons que si la série des modules des termes d'une série est convergente, la série donnée est elle-même convergente ; on la dit alors absolument convergente. Nous rechercherons à quelle condition la série hypergéométrique est absolument convergente.

δ

Nous avons

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\times\frac{1}{x}.$$

Par suite

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \sqrt{\frac{(n+1)^2[(\gamma'+n)^2+\gamma''^2]}{[(\alpha'+n)^2+\alpha''^2][(\beta'+n)^2+\beta''^2]}}\times\frac{1}{|x|}.$$

α, δ_1

Développons le radical suivant les puissances de $\frac{1}{n}$.

On a successivement

$$R = \sqrt{\frac{(n^2+2n+1)(n^2+2\gamma' n+\cdots)}{(n^2+2\alpha' n+\cdots)(n^2+2\beta' n+\cdots)}} = \sqrt{\frac{n^4+2n^3(\gamma'+1)+\cdots}{n^4+2n^3(\alpha'+\beta')+\cdots}}$$

$$= \frac{\left[1+\frac{2}{n}(\gamma'+1)+\cdots\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1+\frac{2}{n}(\alpha'+\beta')+\cdots\right]^{\frac{1}{2}}} = \left[1+\frac{2}{n}(\gamma'+1-\alpha'-\beta')+\cdots\right]^{\frac{1}{2}}$$

δ_1 π

ou en appliquant la formule du binôme, puisque le terme complémentaire

$$\frac{2}{n}(\gamma'+1-\alpha'-\beta')+\cdots$$

pour des valeurs suffisamment grandes de n, est moindre que l'unité

$$R = 1 + \frac{\gamma' + 1 - (\alpha' + \beta')}{n} + \cdots$$

ω

On a donc finalement

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{|x|} \times \left[1 + \frac{\gamma' + 1 - \alpha' - \beta'}{n} + \cdots\right].$$

ρ

Ce rapport est bien développé suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$, avec

$$\lambda = \frac{1}{|x|}, \qquad \lambda_1 = [\gamma' + 1 - \alpha' - \beta'] \times \frac{1}{|x|}.$$

ω

La série sera donc convergente si

$$\frac{1}{|x|} > 1 \qquad \text{ou} \qquad |x| < 1$$

ou si $|x| = 1$ avec

$$\gamma' + 1 - \alpha' - \beta' > 1 \qquad \text{ou} \qquad \gamma' > \alpha' + \beta'.$$

La série sera divergente dans tous les autre cas.

La condition $\gamma' > \alpha' + \beta'$ est remarquable : π la convergence de la série ne dépend donc que des parties réelles de α, β, γ.

Théorème de Cauchy. — Nous donnerons encore le théorème suivant, dû à Cauchy, déduit de l'étude des intégrales définies.

Soit une fonction $\varphi(x)$ positive, au moins à partir d'une certaine valeur entière a, allant constamment en décroissant et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment. (La courbe représentative de la fonction

ρ

$y = \varphi(x)$ *est donc asymptote à* $0x$).

La série

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \cdots + \varphi(a+n) + \cdots$$

est convergente ou divergente suivant que l'intégrale $\int_a^p \varphi(x)dx$ *tend vers une limite finie ou non quand p augmente indéfiniment.*

En effet, l'intégrale $\int_a^p \varphi(x)dx$ σ représente l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe et les abscisses a, p.

α

Partageons l'intervalle a, p par les points de division

$$a + 1, \quad a + 2, \cdots a + n, \; p$$

et considérons les divers rectangles inscrits, ayant tous pour base l'unité et pour hauteur l'ordonnée correspondant à l'abscisse la plus grande, et les rectangles circonscrits ayant pour hauteur l'ordonnée correspondant à l'abscisse la plus petite.

Ils auront respectivement pour surface

$$\varphi(a+1), \quad \varphi(a+2)\cdots \quad \varphi(p)$$
$$\varphi(a), \quad \varphi(a+1)\cdots \quad \varphi(a+n).$$

ρ, d

Puisque la fonction est constamment décroissante dans l'intervalle, on a donc

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a+n) > \int_a^p \varphi(x)dx$$
$$> \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \cdots + \varphi(p)$$

δ₁, ω

Si la série est convergente, le premier membre des inégalités tend vers la somme S de la série. Comme l'intégrale croît constamment avec p et qu'elle est constamment inférieure à S, elle a une limite. Par contre si la série est divergente, la somme

$$\varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \cdots + \varphi(p)$$

augmente indéfiniment avec p ; il en est à fortiori de même que l'intégrale.

Inversement, δ₁ si l'intégrale tend vers une limite L quand p augmente indéfiniment, comme la deuxième somme croit constamment avec p et reste constamment inférieure à L, elle tend vers une limite. Si au contraire l'intégrale augmente indéfiniment, la première somme augmente à fortiori indéfiniment. Le théorème est donc démontré.

Considérons, par exemple, la série dont le terme général est $U_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$. δ₁ Prenons la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{x \log^\alpha x}$. On a

$$\int_2^p \varphi(x)dx = \int_2^p \frac{dx}{x \log^\alpha x} = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\log^{1-\alpha} x\right]_2^p \qquad (\text{si } \alpha \neq 1)$$
$$= -\frac{1}{\alpha - 1}\left[\log^{1-\alpha} p - \log^{1-\alpha} 2\right].$$

ω

Si $\alpha > 1$, la parenthèse tend vers une limite finie lorsque p augmente indéfiniment : la série U_n est donc convergente. Si $\alpha < 1$, la parenthèse augmente indéfiniment : la série U_n est divergenle. Enfin si $\alpha = 1$ on a alors l'intégrale

$$\int_2^p \frac{1}{x \log x} dx = [\log \log x]_2^p$$

qui croît indéfiniment : la série est donc divergente. On retrouve les résultats que nous avons déjà obtenus.

II. — SÉRIES A TERMES QUELCONQUES

Considérons maintenant une suite infinie de quantités réelles ou complexes $u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots$ chaque quantité étant de la forme $u_n = a_n + b_n i$ (nous supposons connus la définition et le calcul élémentaire des quantités complexes).

ξ

En formant les sommes successives $S_1, S_2, \cdots S_n, \cdots$, on dira que la série est convergente si cette suite a une limite finie et bien déterminée.

La somme S_n ρ est, en général, de la forme $A_n + B_n i$. Pour que S_n ait une limite, il faut donc et il suffit que A_n et B_n aient séparément des limites. Or

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

ω, φ

Il faut donc et il suffit que les séries (a), (b) soient séparément convergentes. L'étude de la convergence d'une série à termes complexes se réduit donc à l'étude de deux séries à termes réels. Nous allons voir qu'on peut la ramener dans certains cas à l'étude d'une seule autre série déduite de celles-là.

Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit que l'on ait $| S_{n+p} - S_n | < \varepsilon_n$, quel que soit p, les nombres ε_n tendant eux-mêmes vers zéro, quand n augmente indéfiniment.

(La notation $| a |$ signifiant ici le module de la quantité a).

En particulier il est nécessaire que $| u_{n+1} |$ tende vers zéro.

En même temps que la série donnée, considérons la série des modules

$$\Sigma = | u_1 | + | u_2 | + \cdots + | u_n | + \cdots$$

C'est une série à termes positifs qui peut converger ou diverger.

THÉORÈME. — *Si la série* Σ *est convergente, la série* S *est certainement convergente.*

δ, ξ

En effet

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} | \leqslant | u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \cdots + | u_{n+p} |.$$

σ_2

Par hypothèse on a

$$| u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \cdots + | u_{n+p} | < \varepsilon_n$$

quel que soit p, ε_n tendant vers zéro. A fortiori on a donc aussi

$$| S_{n+p} - S_n | = | u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} | < \varepsilon_n$$

quel que soit p.

On a donc une première classe de séries : celles dont la série des modules est convergente ; on les appelle séries « absolument » convergentes (la définition se confondant avec celle des séries à termes réels).

Une deuxième classe est formée de séries convergentes sans que la série des modules le soit également : elles sont dites « semi » convergentes.

Il y a des différences profondes entre ces deux classes de séries, ainsi que le montrent les théorèmes suivants :

Influence de l'ordre des termes sur la somme d'une série.

THÉORÈME I. — *Si une série est absolument convergente, on peut modifier comme on veut l'ordre des termes, sans altérer, ni la convergence, ni la somme de la série.*

Il est nécessaire de préciser tout d'abord que les deux séries S, S' doivent être composées des mêmes termes ; nous l'exprimerons

β, σ

en disant que, étant donnés les n premiers termes de la série S, on peut trouver un nombre n' tel que, parmi les n' premiers termes de S', figurent les n premiers termes de S, et inversement.

δ

En bouleversant l'ordre des termes de S, on obtient la série.

$$S' = u_i + u_j + u_k + \cdots$$

σ_2

La série S étant convergente, étant donné un nombre ε on peut trouver un nombre ν tel que pour $n \geqslant \nu$ on ait

$$| S_n - S | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque S′ est composée des mêmes termes que S, on peut prendre dans S′ un nombre N suffisamment grand de termes pour que S_N contienne tous les termes de S_n. On aura donc

$$S'_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + (u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda)$$

(ce groupement est licite puisque on opère sur un nombre limité de termes), $u_\alpha, u_\beta, \cdots u_\lambda$ désignant les autres termes de S'_N ; par suite les indices $\alpha, \beta, \cdots \lambda$ sont supérieurs à n. On a donc

$$S'_N - S_n = u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda.$$

Il faut et il suffit de démontrer que la différence $| S'_N - S |$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Or

$$| S'_N - S_n | \leqslant | u_\alpha | + | u_\beta | + \cdots + | u_\lambda |$$

a fortiori

$$| S'_N - S_n | \leqslant | u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \cdots + | u_{n+p} |$$

(si $n + p$ désigne le plus grand des indices $\alpha, \beta, \cdots \lambda$).

Comme la série des modules est elle-même convergente, on peut supposer que l'on a choisi n suffisamment grand pour que $\Sigma_{n+p} - \Sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$. On aura donc simultanément

$$| S_n - S | < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad | S'_N - S_n | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit

$$| S'_N - S | < \varepsilon.$$

La série S′ a donc bien pour somme S.

THÉORÈME II. — *En changeant arbitrairement l'ordre des termes d'une série semi convergente, on peut changer arbitrairement la valeur de la série.*

Soit la série dont le terme général est $u_n = a_n + b_n i$.

On a $| u_n | \leqslant | a_n | + | b_n |$.

Puisque la série $| u |$ diverge, il en sera de même de la série $| a_n | + | b_n |$. L'une au moins des deux séries $| a_n |$ ou $| b_n |$ sera donc divergente, sans quoi la série précédente serait convergente.

D'autre part, comme

$$S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)i,$$

si S_n tend vers une limite, les deux séries

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{et} \quad (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \cdots$$

sont toutes deux convergentes.

L'une au moins des séries, par exemple la série a, est donc semi convergente. Il suffit donc de démontrer la proposition pour la série semi convergente à termes réels $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$.

Écrivons les termes positifs de cette série dans l'ordre où nous les rencontrons

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots c_n \cdots$$

puis les termes négatifs

$$-d_1, -d_2, \cdots -dm \cdots$$

Les deux sommes sont nécessairement infinies, car si elles étaient toutes deux finies, la série $|a|$ serait convergente ; si l'une d'elles était finie et l'autre infinie, la série a serait divergente.

Les séries c, d sont donc toutes deux divergentes. Nous allons montrer qu'en groupant convenablemennt les termes de a, c'est-à-dire les termes de c, d, on peut obtenir une nouvelle série (qui sera composée des termes de a mais pris dans un ordre différent) qui aura pour valeur un nombre choisi arbitrairement M.

Supposons par exemple $M > 0$. Prenons des termes de c

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_\alpha$$

en nombre juste suffisant pour que la somme surpasse M, ce qui arrivera puisque la série c est divergente. Prenons ensuite les termes

$$-d_1, -d_2, \cdots -d_\beta$$

en nombre juste suffisant pour que la somme redevienne inférieure à M. Ajoutons des termes positifs $c_{\alpha+1}, \cdots c_{\alpha'}$, et ainsi de suite. On obtient la série

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_\alpha - d_1 - d_2 \cdots - d_\beta + c_{\alpha+1} + \cdots + c_{\alpha'} - \cdots$$

Je dis qu'elle a pour valeur M.

En effet, après la première opération, la somme surpasse M

d'une quantité moindre que le dernier terme ajouté c_α. Après la deuxième, elle en diffère au plus de d_β, puis de c_α, ···, etc...

Comme les c et les d tendent vers zéro, la différence, entre la somme des termes de la série et M tend aussi vers zéro : la série formée a donc bien pour valeur le nombre arbitraire M.

Exemple. — Considérons la série

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$$

C'est une série semi convergente. Écrivons les termes de la série de la façon suivante

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdots$$

Cette nouvelle série est exactement composée des mêmes termes que la série donnée et les comprend tous. Elle est encore convergente : π si l'on prend les $3n$ premiers termes, δ_1 on a

$$S'_{3n} = \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} = \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

ω Les termes de S' tendant tous vers zéro, la série S' est convergente en même temps que la série $\sum \frac{1}{2} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. Or ρ on peut encore écrire

$$S'_{3n} = \sum \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right].$$

La série S' a donc pour somme la moitié de la somme de la série donnée.

Mais nous pouvons également obtenir une série divergente. Prenons les termes de la façon suivante : α, ψ un terme positif puis un terme négatif, deux termes positifs puis un terme négatif, etc., n termes positifs puis un terme négatif. Il est bien certain que cette nouvelle série comprendra tous les termes de la série donnée et ceux-là seulement.

δ_1 Le $n^{\text{ième}}$ groupe sera

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)+1} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)+2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Or

$$v_n > \frac{n}{n(n+1)+2n+1} - \frac{1}{2n+2} > \frac{n}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n-2}{2(n+1)(n+2)}.$$

Cette nouvelle série est donc bien divergente.

III. — MULTIPLICATION DES SÉRIES

Considérons deux séries

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots, \qquad v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

à termes quelconques. Multiplions les termes de la première par les termes de la seconde et groupons-les de la manière suivante :

$$u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \cdots + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0) + \cdots$$

Comme on le voit, le $n+1^{\text{ième}}$ groupe ρ renferme tous les produits u_iv_j pour lesquels $i+j=n$.

Cas où une seule série est absolument convergente. — Cauchy a montré que :

Si les deux séries sont absolument convergentes, et ont pour somme S, T, *la série que nous avons formée, à termes rigoureusement déterminés, comme valeur et comme ordre, est également convergente, et a pour somme* $S \times T$.

Ce résultat a été généralisé par Mertens au cas où une seule série, la série u par exemple, est absolument convergente, la série v étant simplement convergente.

Démontrons ce résultat. Nous poserons

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0.$$

Désignons par S_n, T_n, Σ_n les sommes des n premiers termes des séries u, v, w. Considérons d'abord les sommes Σ_{2n} et formons la différence $\Sigma_{2n} - S_nT_n$. Ordonnons-la par rapport u_0, u_1, $\cdots$ u_{2n}. Il suffit de ρ remarquer que dans cette différence, pour tous les termes u_iv_j, on a $i+j \leqslant 2n$; d'autre part si $i \leqslant n$, il faut que $j > n$.

δ_1 On peut l'écrire

$$\delta = u_0(v_{n+1} + \cdots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + \cdots + v_{2n-1}) + \cdots + u_{n-1}v_{n+1} + u_{n+1}(v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-2}) + \cdots + u_{2n}v_0.$$

α, β

Nous allons montrer que δ peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

δ_1

On a

$$|\delta| < |u_0| \times |v_{n+1} + \cdots + v_{2n}| + |u_1| \times |v_{n+1} + \cdots + v_{2n-1}| + \cdots + |u_{n-1}| \, |v_{n+1}|$$
$$+ |u_{n+1}| \times |v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}| + |u_{n+2}| \times |v_0 + v_1 + \cdots v_{n-2}| + \cdots |u_{2n}| \times |v_0|.$$

σ_2

La série v étant convergente, la somme $|v_0 + v_1 + \cdots + v_p|$ reste, quel que soit p, inférieure à un nombre fixe B. D'autre part, on peut supposer n suffisamment grand pour que

δ_1 $\qquad |v_{n+1} + \cdots + v_{n+k}| < \varepsilon$ quel que soit k.

On aura alors

$$\delta < [|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_{n-1}|] \times \varepsilon + B[|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{2n}|].$$

Or la série $|u|$ étant elle-même convergente, la somme $|u_0| + |u_1| \cdots + |u_{n-1}|$ reste inférieure à la somme S_1 de la série $|u|$. Et l'on peut, d'autre part, supposer encore n suffisamment grand pour que

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+h}| < \varepsilon$$

ω

quel que soit h. On aura donc enfin

$$|\delta| < \varepsilon S_1 + \varepsilon B.$$

Comme S_1 et B sont finis, la différence $|\Sigma_{2n} - S_n T_n|$ peut donc bien être rendue aussi petite qu'on le veut. Et comme $S_n T_n$ a pour limite ST, on en déduit que Σ_{2n} a une limite et que cette limite est ST.

ψ

En prenant les sommes impaires Σ_{2n+1}, on démontrerait que $\Sigma_{2n+1} - S_{2n+1} T_{2n+1}$ peut être rendue aussi petite qu'on le voudra. Les sommes impaires, comme les sommes paires, ont donc aussi pour limite ST.

La série Σ est donc bien convergente (mais rien ne démontre qu'elle le soit absolument).

Cas où les deux séries sont absolument convergentes. — Prenons maintenant deux séries à termes quelconques réels ou complexes S, T et supposons les séries des modules

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \cdots \qquad v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

toutes deux convergentes.

Pour faire le produit des deux séries, on peut alors procéder de façon plus générale que dans le cas précédent.

Faisons le produit d'un terme quelconque u_α *de* S *par un terme* v_β *de* T *dans un ordre quelconque mais de toutes les manières possibles et ajoutons les produits ainsi formés : Nous obtiendrons une série* Σ *absolument convergente dont la somme sera* ST.

Dire que nous avons fait les produits de toutes les manières possibles, σ c'est dire que, à la condition de prendre dans la série Σ un nombre Σ_p suffisamment grand de termes, nous pourrons y retrouver tous les termes du produit

$$S_n T_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(v_1 + v_2 + \cdots v_n)$$

δ_1 nous aurons donc

$$\Sigma_p - S_n T_n = u_\alpha v_{\alpha'} + u_\beta v_{\beta'} + \cdots$$

L'un au moins des indices ρ α, α' ou β et $\beta' \cdots$ est supérieur à n. On a

$$\begin{aligned} |\Sigma_p - S_n T_n| &\leqslant U_\alpha V_{\alpha'} + U_\beta V_{\beta'} + \cdots \\ &\leqslant [U_1 + U_2 + \cdots + \cdots][V_{n+1} + V_{n+2} + \cdots] \\ &+ [V_1 + V_2 + \cdots][U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots]. \end{aligned}$$

δ_1 Or les séries U, V étant convergentes, on peut supposer que l'on a choisi n assez grand pour que

$$V_{n+1} + V_{n+2} + \cdots + V_{n+k} < \varepsilon$$

quel que soit k et de même

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots U_{n+k} < \varepsilon.$$

En désignant par S_1, T_1 les sommes des séries des modules on a donc

$$|\Sigma_p - S_n T_n| < S_1 \varepsilon + T_1 \varepsilon.$$

ω La différence $|\Sigma_p - S_n T_n|$ peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut; $S_n T_n$ ayant pour limite ST, et p augmentant indéfiniment avec n, on voit que Σ_p a une limite et que cette limite est ST.

Autres généralités. — I. Considérons encore une série

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

absolument convergente. Multiplions les termes par des facteurs $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n, \cdots$ nous formons une série

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots$$

ψ

Si l'on a constamment $|\alpha_n| < A$, *la série* $(\alpha_n u_n)$ *sera absolument convergente.*

δ, ξ

En effet on aura

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1}| + |\alpha_{n+2}u_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{n+p}u_{n+p}| < A[U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+p}|.$$

Or, la série U étant convergente, on peut choisir n assez grand pour que

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+p} < \varepsilon.$$

Le deuxième membre peut donc être rendu aussi petit qu'on le voudra.

Inversement si les nombres $|\alpha_n|$ restent supérieurs à un nombre fixe B, ψ de la convergence absolue de la série (αu) on pourra déduire la convergence absolue de la série u, π le terme u_n se déduisant de $\alpha_n u_n$ par le facteur $\frac{1}{\alpha_n}$ qui reste inférieur à un nombre fixe $A = \frac{1}{B}$.

ω

Pour étudier la convergence absolue d'une série, on peut donc supprimer, dans chaque terme, tout facteur dont le module reste compris entre deux nombres fixes.

Ainsi soit la série

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}.$$

α

On peut multiplier par le facteur $\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)$ qui reste compris entre des limites fixes : la série sera de même nature que la série $\frac{1}{n^3}$, donc convergente.

II. Pour étudier une série générale, on la ramène à une série plus simple dont les termes se déduisent de ceux de la première par multiplication ou division par certains facteurs.

r

Nous sommes donc ramenés à comparer une série

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots$$

aux séries

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

β

Pour que la série (αu) soit convergente, il faut et il suffit que

$$| R_n | = | \alpha_{n+1} u_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p} u_{n+p} |$$

puisse être rendue aussi petite qu'on le voudra quel que soit p, pour des valeurs suffisamment grandes de n.

γ

Il faut évidemment introduire les quantités analogues pour la série u ou la série α. On peut écrire par exemple.

$$R_n = \alpha_{n+1}[u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}] + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1})[u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}] + \cdots + \cdots + (\alpha_{n+p} - \alpha_{n+p-1})\, u_{n+p}.$$

Désignons par M le plus grand des modules des quantités

$$u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}, \qquad u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}, \cdots, \qquad u_{n+p}.$$

On aura alors

$$| R_n | \leqslant M [| \alpha_{n+1} | + | \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} | + \cdots + | \alpha_{n+p} - \alpha_{n+p-1} |].$$

ξ

Pour que R_n tende vers zéro, il suffit qu'un des facteurs tende vers zéro, l'autre restant fini. On en déduit donc deux théorèmes.

ψ

THÉORÈME D'ABEL. — *Si une série u est convergente, elle reste convergente si on multiplie ses termes par des facteurs α_n tels que la série des modules des différences des α soit convergente.*

δ_1

Dans ce cas en effet, on peut déterminer n de telle manière que les sommes

$$u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$
$$u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{n+p} = (S_{n+p} - S_n) - (S_{n+1} - S_n)$$
$$u_{n+p} = (S_{n+p} - S_n) - (S_{n+p-1} - S_n)$$

aient leurs modules moindres que $2\varepsilon_n$.

δ_1

Le second facteur

$$| \alpha_{n+1} | + [| \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} | + | \alpha_{n+3} - \alpha_{n+2} | + \cdots]$$

restera fini. Car d'une part la parenthèse peut être rendue aussi petite qu'on le voudra et α_{n+1} est fini. π On a en effet

$$| \alpha_{n+1} | \leqslant | \alpha_1 | + | \alpha_2 - \alpha_1 | + \cdots + | \alpha_{n+1} - \alpha_n | \leqslant | \alpha_1 | + \Sigma_n$$

Σ_n étant la somme des n premiers termes d'une série convergente. Le théorème est donc démontré.

Le cas le plus intéressant est celui où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ forment une suite réelle, toujours croissante ou stationnaire, ou toujours décroissante ou stationnaire, tendant vers une limite k. Dans le deuxième cas par exemple, on a

$$\Sigma_n = |\alpha_2 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| + \cdots + |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \alpha_1 - \alpha_{n+1}$$

Σ_n tend donc vers une limite $\alpha_1 - k$.

Théorème de Dirichlet. — *Supposons que l'on ait une série u convergente, ou plus généralement, telle que, le module de la somme S_n des n premiers termes soit constamment inférieur à un nombre fixe A quel que soit n. On obtiendra une série convergente en multipliant ses termes par des facteurs α tels que la série des modules des différences des α soit convergente et de plus que α_n tende vers zéro.*

En effet les sommes

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n|, \quad |u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_{n+1}|, \text{ etc.}$$

restent toutes inférieures à 2 A. D'autre part, d'après les hypothèses

$$\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}| + \cdots + |\alpha_{n+p} - \alpha_{n+p-1}|$$

tend vers zéro. Le reste R_n tend donc bien aussi vers zézo.

Application. — Soit la série

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta + \cdots$$

le somme S_n des n premiers termes est égale, d'après un calcul trigonométrique facile (si $\theta \not\equiv 0$), à

$$S_n = \frac{\sin n\frac{\theta}{2} \sin (n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

S_n ne tend donc vers aucune limite déterminée, mais on a

$$|S_n| < \frac{1}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}.$$

La série $(\alpha_n \sin n\theta)$ sera donc convergente si α_n tend vers zéro et si la série des modules des différences des α est convergente.

2° Application. — Prenons, pour la série u, des quantités formant une suite périodique telle que la somme de la période soit nulle

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = 0, \qquad u_{k+1} = u_1, \qquad u_{k+2} = u_2 \cdots$$

Les sommes S_n^{ρ} se réduisent toutes à l'une des quantités $S_1, S_2, \cdots S_k$ et resteront donc finies. La série $\alpha_n u_n$ sera convergente dans les conditions du théorème de Dirichlet, en particulier, si les α décroissent et tendent vers zéro. Par exemple la série

$$(\alpha_1 - 1\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_5 - 1\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8) + \cdots$$

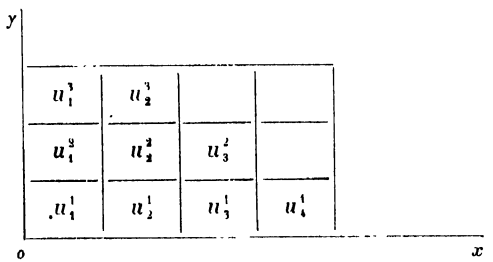
sera convergente dans les conditions ci-dessus.

IV. — SÉRIES DOUBLES

On peut considérer des séries d'une espèce plus générale que les séries linéaires considérées jusqu'ici.

Prenons deux axes de coordonnées et ne considérons que le quadrant des coordonnées positives. Divisons-le en cases en menant deux suites de droites parallèles aux axes des coordonnées équidistantes. L'échiquier comprendra une infinité de « colonnes » parallèles à oy que nous désignerons par les nombres entiers positifs successifs, une infinité de « rangées » parallèles à ox que nous désignerons de même.

Dans chacune des cases inscrivons une quantité u_i^j, i désignant le numéro de la colonne, j le numéro de la rangée. Les quantités u_i^j seront les termes d'une série double. On obtient le tableau suivant



Somme de la série (termes positifs). — Nous supposerons d'abord que tous les termes de ce tableau sont réels, positifs ou nuls. Les termes de chaque rangée forment une série linéaire. Supposons que toutes ces séries soient convergentes, et soient $H_1, H_2, \cdots H_n$ les sommes correspondantes. Si la série $H_1 + H_2 + \cdots + H_n + \cdots$ est convergente et a une somme H, nous dirons que la série double

est convergente et a pour somme H quand on l'évalue par rangées.

Nous allons d'abord montrer $^{\psi}$ qu'elle est alors convergente quand on l'évalue par colonnes. $^{\xi}$ Considérons la série formée par les termes d'une colonne quelconque j. $^{\delta_1}$ Puisque tous les termes sont positifs, l'ensemble de ses n premiers termes

$$u_j^1 + u_j^2 + \cdots + u_j^n$$

sera évidemment inférieur à $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$, à fortiori inférieur au nombre fixe H. Cette somme croissant avec n et restant inférieure à H a donc une limite V_j. $^{\omega}$ Ainsi toutes les séries linéaires formées par les colonnes sont convergentes.

$^{\delta_1}$ Considérons alors la somme

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_j.$$

$^{\rho}$ H comprend tous les termes contenus dans cette somme et en contient d'autres. On a donc

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_j < H.$$

Faisons croître j indéfiniment. La somme $V_1 + V_2 + \cdots + V_j$ croît avec j et reste inférieure au nombre fixe H. Elle a donc une limite $K \leqslant H$. $^{\delta_1}$ Par symétrie on démontrerait que $H \leqslant K$. On ne peut donc avoir que $H = K$.

$^{\alpha_1, \xi}$ On peut imaginer une infinité d'autres modes d'évaluation. Considérons une suite de courbes $C_1, C_2, \cdots C_n \cdots$ rejoignant les axes ox, oy, s'éloignant indéfiniment, et s'enveloppant mutuellement, de telle sorte que :

1° C_n comprenne toute case intérieure à C_m et puisse en contenir d'autres ;

2° que, pour une valeur suffisamment grande de n, C_n puisse envelopper toutes les cases que l'on voudra. (Nous ne considérons pour C_n que les cases complètement intérieures).

Soient $S_1, S_2, \cdots S_n$ les sommes correspondantes. $^{\psi}$ Nous allons montrer que S_n a encore une limite et que cette limite est H.

$^{\delta_1}$ Une courbe quelconque C_n peut en effet être comprise à l'intérieur d'un rectangle formé par les axes, l'abscisse M, l'ordonnée P et comprend à son interieur un rectangle d'abscisse m d'ordonnée p.

En désignant d'une façon générale par Σ_m^p la somme des termes compris dans le rectangle, on a

$$\Sigma_m^p < S_n < \Sigma_M^P.$$

Mais

$$\Sigma_m^p = H_1^m + H_2^m + \cdots + H_p^m$$

$$\Sigma_M^P = H_1^M + H_2^M + \cdots + \cdots + H_P^M.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, nous pouvons faire croître m et p indéfiniment. On peut supposer d'abord p suffisamment grand pour que $H_1 + H_2 + \cdots + H_p$ diffère de la somme de la série H, d'une quantité aussi petite qu'on le veut. p étant fixé, on peut supposer m suffisamment grand pour que chacune des quantités H_i^m diffère de sa limite H_i d'une quantité aussi petite qu'on le veut. La somme $H_1^m + H_2^m + \cdots + H_p^m$, comprenant un nombre fini p de termes, diffère donc de $H_1 + H_2, \cdots + H_p$ et par suite de H d'une quantité aussi petite qu'on le veut.

Ainsi, Σ_m^p et de même Σ_M^P diffèrent de H d'une quantité aussi petite qu'on le veut. Donc aussi S_n.

Quel que soit le système de courbes $C_1, C_2, \cdots C_n, \cdots$ les sommes des termes de la série $S_1, S_2, \cdots S_n, \cdots$ ont donc pour limite H. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque les termes d'une série double sont positifs et forment une série convergente quand on l'évalue par un procédé déterminé, par rangées, par colonnes, par rectangles, par triangles isocèles, par courbes quelconques, la série est convergente et a une somme déterminée toujours la même quel que soit le mode d'évaluation.*

Séries à termes quelconques. — Considérons maintenant une série à termes quelconques. Il faut évidemment supposer qu'il y a un nombre infini de termes positifs et un nombre infini de termes négatifs, sans quoi la suppression de ces termes en nombre fini ne modifierait pas la nature de la série.

Supposons que la série double formée par les valeurs absolues des termes soit convergente. Je dis que la série donnée est aussi convergente et a une somme déterminée quel que soit le mode d'évaluation.

Soit en effet un système de courbes quelconques $C_1, C_2, \ldots C_n \ldots$

ξ

Désignons par P_n la somme des termes positifs contenus dans C_n, par Q_n la somme des termes négatifs.

δ_1

La somme des termes contenus dans la série donnée sera $P_n - Q_n$. Celle des termes contenus dans la série des valeurs absolues est $P_n + Q_n$. σ_2 Par hypothèse, lorque n augmente indéfiniment, $P_n + Q_n$ a une limite. Donc séparément chacune des sommes P_n, Q_n a une limite P ou Q. Donc $P_n - Q_n$ a une limite $P - Q$.

Mais de plus, P_n a même limite P, quel que soit le mode de sommation. π Il suffit de considérer un nouveau tableau dans lequel on ne conserverait que les termes positifs, et où l'on remplacerait tous les termes négatifs par zéro. Dans ce nouveau tableau la somme P des termes positifs est bien indépendante du mode de sommation. De même Q_n a une limite indépendante des courbes C.

On dit dans ce cas que la série double est absolument convergente.

Application. Multiplication de deux séries. — Considérons deux séries absolument convergentes

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \qquad v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

Multiplions-les l'une par l'autre. En multipliant les termes de la première par les termes de la seconde, nous pourrons former une série double en plaçant le terme $u_i v_j$ dans la colonne i et dans la ligne j

u_1v_3	u_2v_3	
u_1v_2	u_2v_2	u_3v_3
u_1v_1	u_2v_1	u_3v_1

ξ

Supposons que nous remplacions chaque terme par sa valeur absolue. La première rangée a pour somme $|v_1| \Sigma |u_i|$. On en déduit facilement que le tableau des valeurs absolues est convergent

ω

et a pour somme $\Sigma |v_j| \times \Sigma |u_i|$. Donc le tableau donné est convergent et on peut prendre, pour l'évaluer, n'importe quel mode

d'évaluation. Si nous l'évaluons par lignes horizontales, il a pour valeur $\Sigma u_n \times \Sigma v_n$. Si nous l'évaluons par triangles isocèles en menant des parallèles à la deuxième bissectrice σ des axes, et si nous posons

$$w_1 = u_1 v_1, \qquad w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1, \qquad w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1,$$
$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1,$$

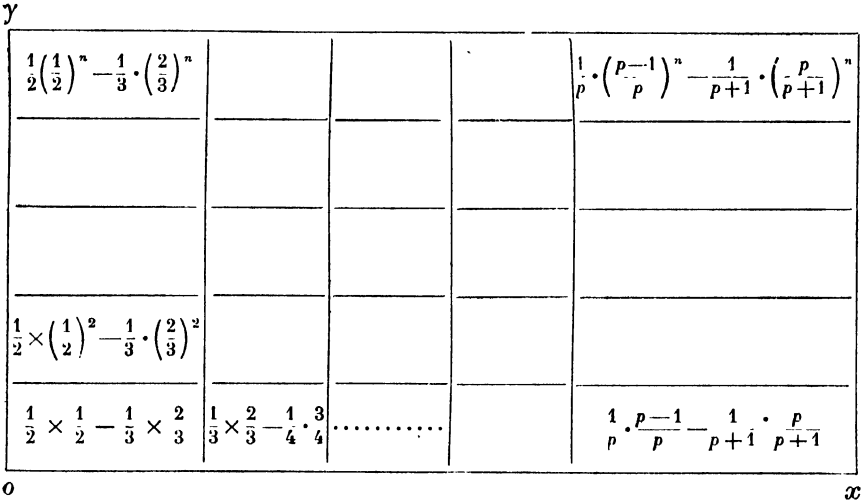
la série $w_1 + w_2 + \cdots + w_n, \cdots$ sera convergente et aura pour somme

$$\Sigma w_n = \Sigma u_n \times \Sigma v_n.$$

Si la série des valeurs absolues est divergente, on ne peut rien dire sur la série double elle-même. Sa valeur peut même différer suivant le mode de sommation ; on peut par exemple obtenir des résultats différents suivant qu'on l'évalue par lignes ou par colonnes.

Exemple de Arndt. — Arndt a donné l'exemple suivant : Considérons les termes

$$u_i^j = \frac{1}{(i+1)} \times \left(\frac{i}{i+1}\right)^j - \frac{1}{(i+2)} \times \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^j.$$



Si on l'évalue par lignes horizontales, c'est-à-dire si l'on calcule Σu_i^j où j est constant, on a

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} u_i^j = \frac{1}{2^{j+1}} = \Pi_j$$

(tous les termes se détruisent deux à deux sauf le premier).

La somme $H_1 + H_2 + \cdots + H_j + \cdots$ a donc pour limite $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{j+1}} \cdots$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}$.

ξ, δ_1

Si on l'évalue par colonnes, la série formée par les termes de la colonne i a pour valeur

$$\frac{1}{i+1}\sum_{j=1}^{j=\infty}\left(\frac{i}{i+1}\right)^j - \frac{1}{i+2}\sum\left(\frac{i+1}{i+2}\right)^j = \frac{1}{i+1}\cdot\frac{i}{i+1}\times\frac{i+1}{1} -$$

$$- \frac{1}{i+2}\times\frac{i+1}{i+2}\times\frac{i+2}{1} = \frac{i}{i+1} - \frac{i+1}{i+2} = \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} = V_i.$$

La somme $v_1 + v_2 + \cdots v_i + \cdots$ tendra donc vers $-\frac{1}{2}$.

Les deux résultats ne sont donc pas les mêmes

V. — SÉRIES DE FONCTIONS — SÉRIES ENTIÈRES

Supposons que les termes de la série $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ soient des fonctions d'une variable x, que ces fonctions soient finies et bien déterminées dans un intervalle. (Nous pouvons supposer tout d'abord que x peut prendre même des valeurs complexes, en admettant connue la définition d'une fonction de variable complexe).

ξ

A chaque valeur de x de l'intervalle correspond donc une série qui peut être convergente ou divergente. Supposons que la série soit convergente, pour toute valeur x de l'intervalle, désignons par $S(x)$ la valeur de la série (réelle ou imaginaire) et par $S_n(x)$ la somme des n premiers termes.

σ

Cela veut dire que, au nombre ε choisi arbitrairement, on peut faire correspondre un nombre ν tel que, pour toute valeur de n supérieure à ν, on ait

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon;$$

ε étant fixé, ce nombre ν dépend en général de la valeur de x.

Séries uniformément convergentes. — Si l'on peut déterminer un nombre ν (correspondant à ε) qui soit indépendant de la valeur attribuée à x dans l'intervalle, on dit que la série est « uniformément convergente » dans l'intervalle.

En insistant sur ce résultat important, on voit que, étant donné ε, on pourra déterminer un nombre ν fixe, tel que, à la seule condition que $n \geqslant \nu$, on ait *quel que soit* x dans l'intervalle

$$| S(x) - S_n(x) | < \varepsilon.$$

Les théorèmes suivants établissent l'importance de ces séries uniformément convergentes qui peuvent être assimilées à des sommes d'un nombre fini de termes.

Continuité. — THÉORÈME. — *Si les termes d'une série uniformément convergente dans un intervalle sont continus, la somme de la série est aussi une fonction continue dans le même intervalle.*

Soit en effet ε un nombre choisi arbitrairement, On pourra déterminer un entier n fixe, tel que, quel que soit x,

$$| S(x) - S_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $x + h$ est une seconde valeur de l'intervalle, on aura donc aussi

$$| S(x + h) - S_n(x + h) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

n étant ainsi fixé et bien déterminé, les fonctions qui composent la somme $S_n(x)$ sont en nombre fini ; comme elles sont continues, leur somme est aussi une fonction continue de x. On peut donc supposer h suffisamment petit pour que

$$| S_n(x + h) - S_n(x) | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or on a identiquement

$$S(x + h) - S(x) = [S(x + h) - S_n(x + h)] + [S_n(x + h) - S_n(x)] + [S_n(x) - S(x)].$$

Chacune des parenthèses du second membre étant en valeur absolue ou en module inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, leur somme est à fortiori inférieure en valeur absolue à ε. On a donc bien

$$| S(x + h) - S(x) | < \varepsilon.$$

Ce qui établit que $S(x)$ est bien une fonction continue de x.

Nous supposerons désormais que x est réel. — En ce qui concerne l'intégration et la dérivation des séries de fonctions dans le cas où la variable est imaginaire, nous y reviendrons après la définition des fonctions de variable complexe et de l'intégration de ces fonctions.

Si x est réel, la fonction $S(x)$ étant continue dans l'intervalle ab est intégrable dans l'intervalle. Il en est de même de chacune des fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\cdots$

Intégration. — Théorème. — *Si on intègre chacun des termes d'une série uniformément convergente dans un intervalle entre deux limites fixes x_0 et X comprises dans l'intervalle, la série des intégrales est uniformément convergente dans l'intervalle et a pour somme* $\int_{x_0}^{X} S(x)dx$.

Posons en effet

$$S(x) = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n = S_n(x) + R_n(x).$$

La série étant uniformément convergente, étant donné ε, on peut trouver un nombre n indépendant de x, tel que l'on ait

$$| R_n | = | S(x) - S_n(x) | < \varepsilon$$

quel que soit x dans l'intervalle (nous le répétons).

Posons

$$v_k(x) = \int_{x_0}^{X} u_k(x)dx.$$

On a

$$\int_{x_0}^{X} S(x)dx = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \int_{x_0}^{X} R_n(x)dx.$$

Comme $| R_n(x) | < \varepsilon$, la dernière intégrale est moindre que $\varepsilon | X - x_0 |$ et à fortiori que $\varepsilon | b - a | = \varepsilon'$.

La différence

$$\int_{x_0}^{X} S(x)dx - (v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$$

peut donc être rendue moindre que le nombre ε' choisi arbitrairement.

On en conclut : 1° que la série des intégrales

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

est convergente ; 2° qu'elle a pour valeur l'intégrale de la fonction $S(x)$; 3° enfin, puisque n est indépendant de X, la série

des intégrales $v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$ est uniformément convergente dans l'intervalle ab.

Dérivation. — THÉORÈME. — *Si les termes d'une série uniformément convergente ont des dérivées continues, et si la série des dérivées est uniformément convergente, sa somme représente la dérivée de la fonction représentée par la série donnée.*

Désignons en effet par $\Sigma(x)$ la série des dérivées

$$\Sigma(x) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx} + \cdots = \Sigma_n + R_n.$$

D'après le théorème précédent, on aura, en désignant par x_0 et X deux valeurs quelconques de l'intervalle

$$\int_{x_0}^{X} \Sigma(x)dx = \int_{x_0}^{X} \frac{du_1}{dx}\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{X} \frac{du_n}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{X} R_n(x)dx.$$

En effectuant les quadratures en nombre fini qui figurent au second membre, on pourra écrire

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} \Sigma(x)dx &= [u_1(X) - u_1(x_0)] + [u_2(X) - (u_2(x_0)] + \cdots \\ &\quad + [u_n(X) - u_n(x_0)] + \int_{x_0}^{X} R_n(x)dx \\ &= S_n(X) - S_n(x_0) + \int_{x_0}^{X} R_n(x)dx.\end{aligned}$$

En prenant n suffisamment grand, le second membre est d'après les hypothèses, aussi voisin qu'on le veut de $S(X) - S(x_0)$. Le premier membre, qui est fixe, lui est donc rigoureusement égal :

$$\int_{x_0}^{X} \Sigma(x)dx = S(X) - S(x_0).$$

Cette égalité prouve que S(X) a pour dérivée $\Sigma(X)$. Comme X est une valeur quelconque de l'intervalle, la série des dérivées $\Sigma(x)$ se confond bien avec la dérivée de la fonction $S(x)$.

VI. — SÉRIES ENTIÈRES

On appelle série entière une série de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

les a étant des constantes réelles ou imaginaires, x pouvant être réel ou imaginaire. Si x est imaginaire nous supposons connue la définition de x^n par la formule de Moivre. Il serait aisé de montrer que, même si x est imaginaire, le rapport $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ tend vers nx^{n-1}, quand h tend vers zéro d'une manière quelconque. Nous dirons que la fonction x^n (x imaginaire) admet une dérivée nx^{n-1}.

Nous désignerons par A, X, les modules de a, x.

Nous démontrerons d'abord le théorème fondamental suivant dû à Abel.

THÉORÈME D'ABEL. — *Si la série est convergente pour une valeur particulière x_0, elle est absolument convergente pour toute valeur de x telle que $X < X_0$.*

En effet, la série étant convergente pour x_0, soit M le plus grand des modules des termes de la série. On aura donc quel que soit n

$$A_n X_0^n \leqslant M \quad \text{ou} \quad A_n \leqslant \frac{M}{X_0^n}.$$

Par suite

$$A_n X^n \leqslant M \left(\frac{X}{X_0}\right)^n.$$

Le module du terme général est donc au plus égal au terme général de la série à termes positifs $M\left(\frac{X}{X_0}\right)^n$ qui est une progression géométrique convergente puisque $X < X_0$.

Comme on le voit, la démonstration suppose seulement que tous les termes de la série restent, pour x_0, inférieurs en module à un nombre fixe.

Inversement si la série est divergente pour x_0 elle le sera pour toute valeur de x telle que $X > X_0$.

Considérons le terme général $a_n x^n$. Supposons que, pour une certaine valeur X_0, ce terme reste fini quel que soit n ; il tendra vers zéro pour toute valeur de x de module moindre lorsque n croîtra indéfiniment. On a en effet

$$a_n x^n = a_n X_0^n \left(\frac{x}{X_0}\right)^n.$$

Le premier facteur $|a_n X_0^n|$ reste par hypothèse fini et le deuxième tend vers zéro.

De même si le terme $A_n X_0^n$ ne tend pas vers zéro, le terme $A_n X^n$ augmentera indéfiniment pour toute valeur telle que $X > X_0$.

π

Sans cela, d'après la remarque ci-dessus, $A_n X_0^n$ tendrait vers zéro. On voit donc que l'on peut partager les nombres positifs en deux classes :

1° les nombres ρ assez petits pour que $A_n \rho^n$ ait zéro pour limite quand n augmente indéfiniment.

2° les nombres ρ' assez grands pour que $A^n \rho'^n$ n'ait pas zéro pour limite.

$\sigma_2 . \omega$

Ces deux classes sont séparées par un nombre intermédiaire R pour lequel on ne peut rien affirmer ; on est seulement certain que, si $\rho < R$, $A_n \rho^n$ tend vers zéro; et si $\rho > R$, $A_n \rho^n$ ne tend pas vers zéro.

Il peut d'ailleurs ne pas exister de nombre ρ' ; dans ce cas on peut dire que R augmente indéfiniment ; c'est ce qui arrive par exemple si $A_n = \frac{1}{n!}$. Il peut de même ne pas exister de nombre ρ ; dans ce cas R est nul ; c'est le cas de $A_n = n!$.

Rayon de convergence. — Le nombre R s'appelle le rayon de convergence de la série. Nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on donne à x une valeur de module $X > R$ la série est divergente. Si $X < R$ la série est absolument convergente.*

La série est même uniformément convergente pour toutes les valeurs telles que $X \leqslant \rho$, ρ étant un nombre fixe quelconque inférieur à R.

π'

La première partie est évidente puisque le module du terme général $A_n X^n$ ne tend pas vers zéro.

Pour la seconde partie nous allons démontrer que, pour toute valeur de x telle que $X \leqslant \rho < R$, étant donné un nombre ε, on peut trouver un entier ν, *indépendant de x*, tel que si $n \geqslant \nu$ on ait

$$A_{n+1} X^{n+1} + A_{n+2} X^{n+2} + \cdots + A_{n+p} X^{n+p} < \varepsilon$$

quel que soit p.

En effet entre ρ et R considérons un nombre fixe quelconque r.

LEMME. — *Étant donné le nombre quelconque $r < R$, on peut lui faire correspondre un nombre M tel que, quel que soit p, on ait*

$$A_p < \frac{M}{r^p}.$$

En effet, par hypothèse $A_n r^n$ a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment. A partir d'un certain rang μ, toutes les quantités $A_m r^m$ sont donc inférieures à un nombre fixe η. Il en résulte que toutes les quantités $A_p r^p$, *quel que soit* p, restent inférieures à un nombre fixe M qui sera la plus grande des quantités en nombre fini

$$A_1 r,\ A_2 r^2,\ \dots,\ A_{\mu-1} r^{\mu-1},\ \eta.$$

On a donc bien, quel que soit p, $A_p r^p < M$, c'est-à-dire $A_p < \frac{M}{r^p}$.

C'est cette remarque, très importante, qui servira de base à toutes nos démonstrations : elle permet de remplacer toutes les quantités variables A_p, pour lesquelles rien n'est précisé, par les quantités $\frac{M}{r^p}$, parfaitement définies en fonction d'un seul nombre fixe r.

On aura donc

$$H = A_{n+1}X^{n+1} + A_{n+2}X^{n+2} + \dots + A_{n+p}X^{n+p} < \frac{M}{r^{n+1}}X^{n+1} + \dots + \frac{M}{r^{n+p}}X^{n+p}$$

A fortiori

$$H < M\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} + \dots + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+p}\right].$$

Or la série dont le terme général est $M\left(\frac{\rho}{r}\right)^k$ est convergente. La parenthèse est à fortiori inférieure à $\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{\rho}{r}}$.

Il sera donc certainement inférieur à ε, si $M\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} < \varepsilon\left(1-\frac{\rho}{r}\right)$.

Cette inégalité sera vérifiée à partir d'une certaine valeur ν de n et pour toute valeur supérieure.

Cette valeur est bien indépendante de la valeur de x considérée et de p. La série est donc bien absolument et uniformément convergente pour les valeurs de x considérées.

La série sera absolument convergente pour toute valeur x telle que $X < R$.

Donnons-nous en effet une de ces valeurs. Entre le nombre

fixe X et R choisissons un nombre r. De même que ci-dessus, on pourra écrire $A_p r^p < M$ quel que soit p, et

$$H < M\left[\left(\frac{X}{r}\right)^{n+1} + \dots + \left(\frac{X}{r}\right)^{n+p}\right].$$

Le second membre peut bien être rendu inférieur à ε quel que soit p.

ω

En résumé, étant donnée une série entière, il existe un nombre positif R jouissant de la propriété suivante : la série est divergente pour toute valeur de x telle que $X > R$. Elle est absolument convergente pour toute valeur de x telle que $X < R$. R s'appelle rayon de convergence de la série.

Tous les points réels ou imaginaires x tels que $X < R$ sont compris à l'intérieur d'un cercle de rayon R ; ce cercle s'appelle cercle de convergence.

Pour les valeurs de x telles que $X = R$, c'est-à-dire pour les points du cercle eux-mêmes, on ne peut rien dire à priori. Ainsi les séries Σx^n, $\Sigma \frac{x^n}{n}$, $\Sigma \frac{x^n}{n^2}$, admettent toute trois pour rayon de convergence $R = 1$, car le rapport d'un terme au précédent a pour limite x.

ρ

La première série est divergente pour $x = \pm 1$. La deuxième est divergente pour $x = 1$ et convergente pour $x = -1$; la troisième est absolument convergente pour $x = \pm 1$.

Continuité d'une série entière. Points du cercle de convergence. — La série étant uniformément convergente pour les valeurs de x telles que $X \leqslant \rho < R$, σ_2 et les termes étant des fonctions continues de x, sera elle-même une fonction continue de x pour les mêmes valeurs.

La continuité subsiste pour les valeurs telles que $X = R$ pourvu que, pour ces valeurs, la série soit convergente. Abel a en effet démontré que :

Théorème. — *Si la série est convergente pour une valeur x_0 telle que $X_0 = R$ c'est-à-dire pour un point M_0 du cercle,* ψ *la somme de cette série est la limite vers laquelle tend la somme de la série $S(x)$ lorsque le point M correspondant à x se rapproche de M_0 en restant sur le rayon OM_0.*

On peut démontrer même que : il suffit que M *se rapproche de* M_0 *en restant sur une courbe qui ne soit pas tangente au cercle en* M_0..

La série étant convergente pour x_0 tel que $X_0 = R$, soit

$$S(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + \cdots$$

d

Étant donné ε, il existera un nombre n tel que

$$a_{n+1}x_0^{n+1} + a_{n+2}x_0^{n+2} + \cdots + a_{n+p}x_0^{n+p} < \varepsilon \quad \text{quel que soit } p.$$

Prenons maintenant une valeur x correspondant à un point intérieur au cercle, posons $x = x_0\theta$ et faisons varier θ par valeurs réelles ou imaginaires de telle manière que le module de θ varie de

ρ

zéro à 1, limites comprises; la valeur limite de θ étant 1,

δ_1

x variera de zéro à x_0, X croîtra de zéro à $X_0 = R$. On aura

$$f(x) = f(x_0\theta) = a_0 + a_1\theta x_0 + \cdots + a_n\theta^n x_0^n + \cdots$$

α

$$\begin{aligned} S - f(x) = [&a_1x_0(1-\theta) + a_2x_0^2(1-\theta^2) + \cdots + a_nx_0^n(1-\theta^n)] \\ &+ a_{n+1}x_0^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x_0^{n+p} + \cdots \\ &- a_{n+1}\theta^{n+1}x_0^{n+1} - \cdots - a_{n+p}\theta^{n+p}x_0^{n+p} + \cdots \end{aligned}$$

σ_2

Par hypothèse, la somme de la série en deuxième ligne est moindre que ε en valeur absolue.

ξ

Prenons la troisième ligne. En posant

$$S_1 = a_{n+1}x_0^{n+1}, \qquad S_2 = a_{n+1}x_0^{n+1} + a_{n+2}x_0^{n+1}, \cdots$$
$$S_p = a_{n+1}x_0^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x_0^{n+p}$$

On peut l'écrire successivement

δ_1

$$\begin{aligned} \theta^{n+1}S_1 + \theta^{n+2}(S_2 - S_1) + \cdots &= \theta^{n+1}(1-\theta)S_1 + \theta^{n+2}(1-\theta)S_2 + \cdots \\ &= \theta^{n+1}(1-\theta)[S_1 + \theta S_2 + \theta^2 S_3 + \cdots]. \end{aligned}$$

Si toutes les quantités $S_1, S_2, \cdots$ sont, en module, inférieures à ε,

ϑ_1

la parenthèse aura un module moindre que $\frac{\varepsilon}{1-|\theta|}$, la troisième partie est donc moindre que $|\theta^{n+1}| \times |1-\theta| \times \frac{\varepsilon}{1-|\theta|}$ et à fortiori moindre que $\varepsilon\frac{|1-\theta|}{1-|\theta|}$.

ω

Elle pourra être rendue aussi petite qu'on le veut si la fraction reste finie.

ξ

Posons

$$\theta = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad 1-\theta = \rho(\cos\beta + i\sin\beta).$$

On a à chercher la limite de $\frac{\rho}{1-r}$. Or

$$\rho \cos \beta = 1 - r \cos \alpha, \qquad \rho \sin \beta = -r \sin \alpha.$$

D'où

$$r^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \beta \qquad \text{et} \qquad \frac{\rho}{1-r} = \frac{1+r}{2\cos\beta - \rho}.$$

δ_1

Quand M tend vers M_0, θ tend vers 1, α tend vers zéro, ρ vers zéro, r vers 1.

ω

La limite du second membre est $\frac{1}{\lim \cos \beta}$. La seconde ligne est donc moindre que $\frac{\varepsilon}{\lim \cos \beta}$, si $\lim \cos \beta \neq 0$.

Or $1 - \theta = \frac{x_0 - x}{x_0}$; β σ représente donc l'angle de la direction limite $x_0 - x$ avec la direction ox_0. φ Il suffit donc que la tangente au point M_0 à la courbe décrite par x ne soit pas tangente au cercle pour que le module de la troisième ligne soit aussi petit que l'on veut.

δ_1

Considérons enfin la première ligne. ρ C'est un polynome de degré n en θ qui s'annule pour $\theta = 1$. On peut supposer θ suffisamment voisin de 1 pour que le module du polynôme soit également moindre que ε. On aura alors

$$| S - f(x) | < \varepsilon'.$$

ω

Ce qui montre que $f(x)$ a pour limite S quand θ tend vers 1 par valeurs quelconques, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 d'une manière quelconque (non tangentiellement au cercle).

Intégration. — Si x est réel, σ_2 la série entière étant absolument et uniformément convergente, si la valeur absolue de x est inférieure à R, et ses termes étant des fonctions continues de x, peut être intégrée terme à terme. La série des intégrales représente une intégrale de la fonction $S(x)$.

On obtient ainsi, par intégrations successives, une suite de nouvelles séries entières convergentes dans le même intervalle, uniformément convergentes pour les valeurs réelles de x satisfaisant à $| x | \leqslant \rho < R$.

Si x est imaginaire, nous définirons plus tard l'intégrale de fonction de variable complexe, et pourrons alors étendre le résultat aux

valeurs imaginaires de x, mais dès maintenant, la dérivée de x^n étant nx^{n-1}, comme nous l'avons dit, même si x est imaginaire, nous pourrons dire, inversement, qu'une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Si nous considérons la série

$$S^1 = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

elle admet évidemment un rayon de convergence au moins égal à R et il résultera du théorème suivant sur la dérivation des séries, que $S^1(x)$ admet pour dérivée $S(x)$, par conséquent que la série des primitives des termes est une primitive de la fonction $S(x)$.

Dérivation. — Considérons la série

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

admettant R pour rayon de convergence et prenons la série $S_1(x)$ des dérivées

$$S_1(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots$$

Nous allons montrer que cette série est absolument et uniformément convergente pour les mêmes valeurs de x que la série donnée.

Considérons en effet les modules des termes et formons

$$H = (n+1)A_{n+1}X^n + \cdots + (n+p)A_{n+p}X^{n+p-1}.$$

Prenons un nombre r compris entre ρ et R.

D'après la remarque fondamentale, on peut écrire, pour toute valeur de l'indice, $A_p < \frac{M}{r^p}$. Par suite

$$H < \frac{M}{r^{n+1}}(n+1)X^n + \cdots + \frac{M}{r^{n+p}}(n+p)X^{n+p-1}.$$

A fortiori

$$H < \frac{M}{r}\left[(n+1)\left(\frac{\rho}{r}\right)^n + (n+2)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} + \cdots + (n+p)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+p-1}\right].$$

Or la série à termes positifs dont le terme général est $v_n = (n+k)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+k-1}$ est convergente, puisque le rapport d'un terme précédent $\frac{n+k}{n+k-1}\frac{\rho}{r}$ a pour limite $\frac{\rho}{r} < 1$ lorsque k augmente

indéfiniment. On peut donc supposer n suffisamment grand pour que la somme d'un nombre quelconque de termes à partir du $n^{\text{ième}}$ soit moindre qu'un nombre $\frac{\varepsilon r}{M}$ arbitrairement choisi. A partir de cette valeur de n, on aura donc $H < \varepsilon$. Ce nombre n étant indépendant de la valeur de x considérée, la série des dérivées est bien absolument et uniformément convergente.

On en déduit immédiatement que : *Toutes les séries des dérivées successives sont également absolument et uniformément convergentes pour les valeurs* $0 \leqslant X \leqslant \rho < R$.

Comme nous l'avons fait pour la série initiale, les séries sont d'ailleurs absolument convergentes pour $X < R$.

La somme de la série $S_1(x)$ est une fonction continue de la variable pour les valeurs de x considérées.

Nous montrerons que cette série des dérivées est la dérivée de la fonction $S(x)$: On ne peut pas en effet appliquer le théorème sur la dérivation des séries de fonctions uniformément convergentes qui n'a été démontré que pour des valeurs réelles de x; on n'a pas encore défini ni démontré que si x est imaginaire, $f(x)$ admet une dérivée (limite bien déterminée du rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, quelle que soit la façon dont Δx tende vers zéro):

Toutes les séries obtenues, soit par intégrations successives, soit par dérivations des termes, ont même cercle de convergence :

En effet, soit R' le rayon de convergence d'une série, nous avons vu déjà que l'on a $R' \geqslant R$. Mais la série donnée étant, par rapport à celle-là, soit une série dérivée, soit une série intégrale, on a $R \geqslant R'$. Donc $R = R'$.

Formule de Taylor. — Désignons par $S_1, S_2, \cdots S_n$ les séries des dérivées successives :

$$S_1 = \Sigma n a_n x^{n-1}, \qquad S_2 = \Sigma n(n-1) a_n x^{n-2} \cdots$$

Si dans ces séries nous faisons $x = 0$, nous aurons $S_n(0) = n!\, a_n$. On en déduit $a_n = \frac{S_n(0)}{n!}$, de sorte que la série donnée peut s'écrire

$$S(x) = S(0) + \frac{x}{1} S_1(0) + \frac{x^2}{2!} S_2(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} S_n(0) + \cdots$$

et nous verrons que les séries $S_1, S_2, \cdots$ sont les dérivées successives de la fonction $S(x)$.

ρ

Cette formule porte le nom de formule de Mac-Laurin. La fonction ne peut donc être représentée que d'une seule manière en série entière.

Soit un point x à l'intérieur du cercle de convergence. Formons $S(x + h)$

$$S(x + h) = \Sigma a_n(x + h)^n = \Sigma a_n[x^n + nx^{n-1}h + \cdots + h^n].$$

ρ, ξ

Nous pouvons former une série double dont les termes dépendent des puissances de x et de h en écrivant les termes provenant de $a_n(x + h)^n$ suivant une même colonne verticale. On aura ainsi

$$\begin{array}{lll} S(x + h) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots & & + a_nx^n + \cdots \\ \quad + a_1h + 2a_2hx & & + na_nx^{n-1}h \\ \quad\quad + a_2h^2 & & + \\ & & \vdots \\ & & + a_nh^n \end{array}$$

ρ_2, ξ

La série des modules s'obtiendra en remplaçant a par A, x et h par X et H ; si on l'évalue par colonnes, ce sera donc la série $\Sigma A_n(X + H)^n$. Elle sera certainement convergente si $X + H < R$.

d

Dans ce cas dans la série donnée, on pourra grouper arbi-

δ^1

trairement les termes sans modifier la valeur de la série. Si nous calculons la série par colonnes verticales nous obtenons $S(x + h)$. Si nous groupons les termes correspondant à une même puissance de h, ce qui revient à calculer la série par lignes horizontales, le terme indépendant de h sera la série donnée $\Sigma a_nx^n = S(x)$. Le coefficient de h sera la série $\Sigma na_nx^{n-1} = S_1(x)$. Le coefficient de h^k sera la série

$$\Sigma \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} a_nx^{n-k} = \frac{1}{k!} S_k(x).$$

ω

On obtiendra pour valeur de la série double

$$S(x + h) = S(x) + \frac{h}{1} S_1(x) + \frac{h^2}{2!} S_2(x) + \cdots + \frac{h^k}{k!} S_k(x) + \cdots$$

Il suffit pour cela que $X + H < R$.

Dérivée de la fonction série. — De cette formule, on peut déduire que la série des dérivées $S_1(x)$ est bien la dérivée de la fonction $S(x)$

On a en effet

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = S_1(x) + h\left[\frac{1}{2}S_2(x) + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k)!}S_k(x) + \cdots\right]$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, la parenthèse restant finie pour les valeurs de h considérées, le second membre tend vers $S_1(x)$. On a bien

$$S_1(x) = \lim. \frac{S(x+h)-S(x)}{h}.$$

Ainsi, même si x est imaginaire, (les raisonnements faits ne supposent pas du tout que x soit réel) la fonction de variable imaginaire $S(x)$ admet une dérivée, limite de $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ indépendante de la façon dont Δx tend vers zéro, qui est la somme de la série des dérivées.

Comme S_2 se déduit de S_1 comme S_1 se déduit de S, S_2 est la dérivée première de S_1, donc la dérivée seconde de S, etc. On peut donc écrire

$$S(x+h) = S(x) + \frac{h}{1}S'(x) + \frac{h^2}{2!}S''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}S^n(x) + \cdots$$

C'est la formule de Taylor dont la formule de Mac-Laurin n'est qu'un cas particulier.

Cette formule, nous l'avons vu, est certainement valable si $X + H < R$ ou $H < R - X$. Si l'on remarque que H représente la distance des deux points x, $x + h$, cette inégalité exprime que le point $x + h$ se trouve à l'intérieur du cercle de centre x tangent au cercle de convergence.

Conséquence. — Si l'on considère la série des primitives des termes $S^1(x) = \Sigma a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, cette série admet une dérivée $\Sigma a_n x^n$. C'est la série donnée. Nous dirons que $S^1(x)$ est une primitive de la fonction $S(x)$. Elle s'obtient donc en intégrant terme à terme les termes de $S(x)$. Nous étendrons ce résultat à l'intégration de la fonction $S(x)$ quand nous aurons défini l'intégrale de fonction de variable complexe.

Il est possible que la série de Taylor ci-dessus soit convergente pour des valeurs qui ne satisfont pas à l'inégalité $X + H < R$ et qu'elle représente $S(x+h)$, à la condition néanmoins que $|x+h| < R$.

Il est possible également que l'on puisse obtenir des développements en série donnant la valeur de la fonction pour des valeurs de x extérieures au cercle de convergence, mais alors ces développements ne procéderont pas suivant les puissances entières de x. Considérons par exemple la fonction $(1 + x)^m$ et bornons-nous aux valeurs réelles de x. Nous verrons que cette fonction peut être représentée par le développement illimité (si m n'est pas entier)

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

développement valable de $x = -1$ à $x = +1$ (sous certaines réserves dans les cas limites).

Soit x_0 une valeur de l'intervalle On peut écrire

$$(1+x)^m = [1 + x_0 + (x - x_0)]^m = (1+x_0)^m \left(1 + \frac{x-x_0}{1+x_0}\right)^m = (1+x_0)^m (1+y)^m,$$

en posant $y = \dfrac{x - x_0}{1 + x_0}$.

On pourra développer $(1 + y)^m$ suivant les puissances de y.

Le développement sera valable pourvu que $|y| < 1$, c'est-à-dire pour les valeurs de x comprises entre -1 et $1 + 2x_0$. Si x_0 est positif, le nouvel intervalle est plus grand que le premier $(-1, +1)$; la nouvelle formule permettra de calculer les valeurs de la fonction pour des valeurs de la variable situées en dehors de l'intervalle primitif.

Série majorante. — Considérons une série à coefficients quelconques

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x_n + \cdots$$

et une autre série à coefficient tous positifs

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m + \cdots$$

On dit que la deuxième est une série majorante de la première si l'on a, pour toutes valeurs de l'indice n, $A_n < \alpha_n$; la première admet un rayon de convergence au moins égal à celui de la seconde.

Il est clair que, si l'on donne un polynôme $P(a_0, a_1, \cdots a_n)$ dont

tous les coefficients soient réels et positifs, si l'on substitue les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n$ aux coefficients $a_0, a_1, \cdots a_n$ on aura

$$| P(a_0, a_1, \cdots a_n) | < P(\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_n).$$

Il est aisé de former une série majorante d'une série entière donnée. Si celle-ci admet un rayon de convergence R, en se donnant $r_1 < R$ nous avons vu qu'on peut écrire $A_n < \frac{M}{r_1^n}$, M étant supérieur à A_0. Il suffit donc de prendre $\alpha_n = \frac{M}{r_1^n}$.

Remarque. — On peut démontrer que : *Etant donné un nombre quelconque m tel que* $A_0 < m < M$, *on peut déterminer un nombre* $r < R$ *tel que* $A_n < \frac{m}{r^n}$, *pour toute valeur de l'indice.*

On aura en effet

$$A_n r^n = A_n r_1^n \cdot \left(\frac{r}{r_1}\right)^n < M \left(\frac{r}{r_1}\right)^n.$$

Choisissons r de telle manière que $M \frac{r}{r_1} < m$, (ce qui entraîne $\frac{r}{r_1} < 1$) ; on aura bien

$$A_n r^n < m \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n-1} < m.$$

On peut en particulier prendre $m = A_0$.

Cette remarque nous sera utile plus tard (séries de séries).

VII. — SÉRIES A DEUX VARIABLES

Région de convergence. — Considérons la série entière dépendant de deux variables x, y.

$$S(x, y) = \Sigma a_{mn} x^m y^n.$$

Supposons d'abord les coefficients tous positifs ainsi que x, y. Si cette série est convergente pour x_0, y_0 elle sera évidemment convergente pour toutes valeurs de x, y respectivement inférieures à x_0, y_0.

Si la série est divergente pour x_1, y_1, elle le sera aussi pour toutes valeurs de x, y respectivement supérieures à x_1, y_1.

Considérons x, y comme les coordonnées d'un point du plan et déplaçons ce point sur une demi-droite OL

$$y = \lambda x \qquad (\lambda > 0)$$

de 0 à $+\infty$. D'après les remarques ci-dessus, il existera sur cette droite un point M jouissant de la propriété suivante : Pour tout point du segment OM, la série est convergente. Pour tout point du segment M $+\infty$ la série est divergente. Pour le point M lui-même on ne peut rien dire.

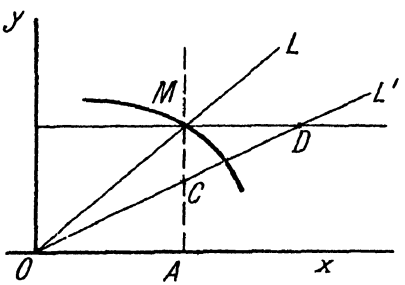


Fig. 3.

Nous définissons ainsi un point M sur chaque droite OL.

Nous allons montrer que ce point se déplace d'une façon continue avec la droite OL.

Considérons en effet une autre position de la droite OL' et traçons le rectangle de diagonale OM. La droite OL' rencontre les côtés du rectangle en C, D.

Pour tout point du segment OC la série est convergente puisque les coordonnées de ce point sont respectivement inférieures à celles de M. Pour tout point de DL' au contraire, la série est divergente. Le point M' de la droite L, séparatif des deux zones, est donc situé entre C et D. Lorsque L' se rapproche de L, ce point vient donc nécessairement se confondre avec M.

Le lieu décrit par M est donc une courbe qui partage la région xoy en deux parties. Pour tout point de la région comprenant l'origine la série est convergente. Pour tout point à l'extérieur, la série est divergente. Pour les points de la courbe elle-même on ne peut rien affirmer.

D'après la construction de M', la courbe est telle que si l'une des coordonnées augmente, l'autre diminue et inversement.

Enfin lorsque OL' se rapproche de l'un des axes, le point M peut tendre vers un point de cet axe ou s'éloigner indéfiniment. D'ailleurs ce point limite peut ne pas se confondre avec celui de la série obtenue en faisant directement $y = 0$ par exemple.

Exemples : 1° La série $\sum \frac{x^m y^n}{a^m b^n}$ est convergente si l'on a à la fois $x < a$, $y < b$; elle est alors le produit des deux séries convergentes $\sum \left(\frac{x}{a}\right)^m$, $\sum \left(\frac{y}{b}\right)^n$; elle a donc pour somme $\frac{1}{1-\frac{x}{a}} \times \frac{1}{1-\frac{y}{b}}$; la courbe séparatrice est formée par les deux segments du rectangle $x = a$, $y = b$.

2° Considérons la série double

$$\sum \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \frac{x^m y^n}{a^m b^n}.$$

Si nous groupons les termes de la série en prenant ceux pour lesquels $m + n = k$, on obtient $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^k$. La série est donc convergente pour $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1$ et a pour valeur $\frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}$. La courbe séparatrice est le segment de droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ compris entre les axes.

3° Enfin considérons la série du premier exemple $\sum \frac{x^m y^n}{a^m b^n}$ mais où les indices m et n varient de 1 à $+\infty$. Cette série est convergente en tous les points du rectangle considéré ci-dessus, et aussi pour tous les points des axes. Le point séparatif sur ox est donc rejeté à l'infini tandis que le point M de OL tend vers le point d'abscisse a de ox, lorsque OL se rapproche de ox.

Remarque. — Prenons le point de la courbe situé sur la bissectrice des axes $x = y = R$. Soit r un nombre quelconque inférieur à R. Pour $x = y = r$, la série est convergente. Le terme général tend donc vers zéro. Cela veut dire que pour des valeurs de m, n respectivement supérieures à des entiers déterminés μ, ν, on a $a_{mn} r^{m+n} < \varepsilon$. Si donc on considère la suite finie formée des termes $a_{mn} r^{m+n}$ où $m \leqslant \mu$, $n \leqslant \nu$ et de ε, si M désigne le plus grand

de ces nombres ω on pourra écrire $a_{mn}r^{m+n} < M$, *quels que soient les indices m, n.*

Je dis qu'il est impossible que ces mêmes inégalités puissent avoir lieu pour un nombre $r' > R$.

Si en effet on avait $a_{mn}r'^{m+n} < M$ on en déduirait $a_{mn} < \frac{M}{r'^{m+n}}$; le terme général de la série serait moindre que celui de la série $\frac{M}{r'^{m+n}}x^m y^n$ qui résulte du produit des deux séries $\sum M\left(\frac{x}{r'}\right)^m$ et $\sum\left(\frac{y}{r'}\right)^n$ qui sont absolument convergentes pour $x < r'$, $y < r'$.

La série serait donc convergente pour un point aussi voisin qu'on le veut du point $x = r', y = r'$ qui est extérieur à la région.

On peut donc dire que *la valeur* R *sépare les nombres r, pour lesquels* $a_{mn}r^{m+n}$ *tend vers zéro, des nombres r' pour lesquels* $a_{mn}r'^{m+n}$ *ne tend pas vers zéro.*

Etant donné un nombre quelconque inférieur à R, on peut lui faire correspondre un nombre M tel que, pour toutes valeurs des indices, on ait $a_{mn} < \frac{M}{r^{m+n}}$.

Ces considérations s'appliquent aux séries d'un nombre quelconque de variables.

Séries quelconques. — Considérons maintenant une série $\Sigma a_{mn}x^m y^n$ à coefficients quelconques, x et y pouvant eux-mêmes être positifs ou négatifs ou même imaginaires. Nous désignerons par A, X, Y, les modules de a, x, y.

Si nous prenons la série des modules des termes, elle serait convergente pour tout point X, Y situé à l'intérieur d'une certaine région de l'angle positif des axes de coordonnées limitée par une courbe C. Si x et y sont réels (positifs ou négatifs) la série donnée est absolument convergente pour tout point x, y d'une région E limitée par C et par les courbes symétriques par rapport aux axes ou à l'origine.

Si x et y sont imaginaires, ψ nous dirons encore que ce point est à l'intérieur de E, si le point X, Y est à l'intérieur de C.

Pour tout système $x_0 y_0$ à l'extérieur de E, la série est divergente.

Car si elle était convergente, le terme général ayant pour limite zéro, on pourrait écrire pour toutes valeurs des indices, comme nous l'avons souvent vu,

$$A_{mn}X_0^m Y_0^n < M \qquad \text{d'où} \qquad A_{mn} < \frac{M}{X_0^m Y_0^n}.$$

Le module du terme de la série donnée serait inférieur à $\frac{M}{X_0^m Y_0^n} X^m Y^n$; la série serait convergente pour $X < X_0$, $Y < Y_0$.

La série des modules serait donc convergente pour un point aussi voisin qu'on le veut de $X_0 Y_0$ qui devrait donc se trouver à l'intérieur de C, contrairement à l'hypothèse.

Etant donné un point $x_0 y_0$ à l'intérieur de E, *la série est absolument et uniformément convergente pour tout système x, y tel que* $X < X_0$, $Y < Y_0$ *Elle est donc absolument et uniformément convergente pour tout point de la région* E. *La somme de la série est donc aussi une fonction continue de x, y à l'intérieur de* E.

Ainsi pour les séries entières doubles comme pour les séries entières simples il ne peut pas exister de série semi-convergente : la série est absolument convergente ou elle est divergente.

Séries dérivées. — Dérivons terme à terme tous les termes de la série, soit par rapport à x soit par rapport à y. Nous formons les séries

$$S_1(x, y) = \Sigma m a_{mn} x^{m-1} y^n, \qquad S_2(x, y) = \Sigma n a_{mn} x^m y^{n-1}.$$

Si la première série est convergente pour tout point d'une région E', elle l'est absolument. Les coefficients de cette série mA_{mn} étant supérieurs à ceux de la série initiale, cette dernière série est donc absolument convergente dans la région E' : tout point de E' est donc à l'intérieur de E.

Mais d'autre part, soit un point x, y de E : la série S étant convergente et absolument, on peut écrire

$$A_{mn} X^m Y^n < M, \qquad A_{mn} < \frac{M}{X^m Y^n}.$$

Pour le point $x_0 y_0$ le terme général de la série S_1 a un module moindre $\frac{Mm}{X^m Y^n} X_0^{m-1} Y_0^n$. Si $X_0 < X$, $Y_0 < Y$, ce dernier terme est le terme général du produit des deux séries absolument convergentes

$$\sum \frac{Mm}{X} \left(\frac{X_0}{X}\right)^{m-1} \qquad \text{et} \qquad \sum \left(\frac{Y_0}{Y}\right)^n.$$

La série S_1 est donc absolument convergente pour $X_0 < X$, $Y_0 < Y$. Le point X_0, Y_0 pouvant être aussi voisin qu'on le veut du point X, Y,

on voit que tout point de E se trouve à l'intérieur de la région E' ou sur la courbe limite.

ω

Les deux régions E *et* E' *sont donc les mêmes.*

Il en est de même du domaine de convergence de la série S_2.

Les deux séries dérivées ont donc même domaine de convergence que la série donnée, et il en sera par suite de même des séries dérivées d'un ordre quelconque.

Cherchons la signification de la série S_1.

ψ

Soit un point x, y à l'intérieur de la région de convergence. Donnons à y une valeur constante et ordonnons la série S par rapport aux puissances croissantes de x. Nous obtiendrons une série entière à une variable. σ_2 La série des dérivées par rapport à x ne change également pas si on ordonne les termes par rapport aux puissances croissantes de x. σ_2 Or cette série des dérivées est la dérivée par rapport à x de la fonction représentée par la somme de la série $S(x, y)$.

On peut donc écrire

$$S_1(x, y) = \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} \qquad \text{de même} \qquad S_2(x, y) = \frac{\partial S(x, y)}{\partial y}.$$

δ_1

On peut de proche en proche étendre ces résultats à toutes les séries dérivées.

Elles sont convergentes dans le même domaine E *que la série initiale et représentent les dérivées partielles successives de* $S(x, y)$.

Formule de Taylor. — Considérons enfin

$$S(x + h, y + k) = \Sigma a_{mn}(x + h)^m(y + k)^n.$$

En développant $(x + h)^m$ et $(y + k)^n$ et effectuant les produits, supposons que nous puissions grouper les termes d'une manière quelconque. α, δ L'ensemble des termes indépendants de h et k sera $\Sigma a_{mn}x^m y^n$, c'est-à-dire la série donnée.

Les termes ne comprenant que h formeront la série $\Sigma m a_{mn}x^{m-1}y^n$ soit la série $\frac{\partial S}{\partial x}$.

δ_1

D'une façon générale les termes en $h^p k^q$ auront pour coefficient

$$\Sigma a_{mn} \frac{m!}{p!\,(m-p)!} \cdot \frac{n!}{q!\,(n-q)!}\, x^{m-p} y^{n-q}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{p\,!\,q\,!}\,\Sigma a_{mn}\,\frac{m\,!}{(m-p)\,!}\cdot\frac{n\,!}{(n-q)\,!}\,x^{m-p}y^{n-q}=\frac{1}{p\,!\,q\,!}\,\frac{\partial^{p+q}S}{\partial x^p\partial y^q}.$$

Si donc, les groupements envisagés étaient permis, on pourrait écrire

$$S(x+h,y+k)=S(x,y)+\frac{h}{1}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{k}{1}\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\cdots+\frac{1}{p!q!}h^pk^q\frac{\partial^{p+q}S}{\partial x^p\partial y^q}.$$

Si l'on groupe encore tous les termes tels que $p+q=\mu$, l'ensemble de ces termes sera

$$\Sigma\,\frac{1}{p\,!\,q\,!}\,h^pk^q\,\frac{\partial^{p+q}S}{\partial x^p\partial y^q}=\frac{1}{\mu\,!}\,\Sigma\,\frac{\mu\,!}{p\,!\,q\,!}\,h^pk^q\,\frac{\partial^{p+q}S}{\partial x^p\partial y^q}+\cdots$$

On pourra le mettre sous la forme symbolique

$$\frac{1}{\mu\,!}\left(h\,\frac{\partial S}{\partial x}+k\,\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{(p+q)}.$$

σ_1 la notation symbolique signifiant que l'on développe par la formule du binôme la puissance $(p+q)^e$ et que l'on remplace ensuite chaque terme $h^pk^q\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^q$ par $h^pk^q\,\frac{\partial^{p+q}S}{\partial x^p\partial y^q}$.

ω On peut donc écrire encore

$$S(x+h,y+k)=S(x,y)+\frac{1}{1}\left(h\,\frac{\partial S}{\partial x}+k\,\frac{\partial S}{\partial y}\right)+\frac{1}{2\,!}\left(h\,\frac{\partial S}{\partial x}+k\,\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{(2)}+\cdots$$

C'est la formule de Taylor pour les séries entières à deux variables.

Reste à résoudre une question importante : ξ dans quel cas les opérations que nous avons faites sont-elles licites ?

σ_2 Le groupement des termes dans un ordre quelconque est certainement permis si la série dont nous bouleversons les termes est absolument convergente.

ξ Nous devons donc considérer la série des modules

$$\Sigma A_{mn}(X+H)^m\times(Y+K)^n.$$

ρ Pour qu'elle soit convergente il faut et il suffit que le point $X+H$, $Y+K$ soit à l'intérieur de C, ce qui entraîne d'ailleurs que le point X, Y soit lui-même à l'intérieur de C.

Pour ce point, on peut alors écrire

$$S(x+h, y+k) = S(x, y) + \left(h\frac{\partial S}{\partial x} + k\frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial S}{\partial x} + k\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial S}{\partial x} + k\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{(n)} + \cdots$$

En particulier, considérons le carré dont les côtés sont parallèles aux axes, un sommet étant le point XY, le sommet diagonalement opposé le point de la courbe C. Soit ρ le côté de ce carré. La série sera convergente pour tout point à l'intérieur d'un carré de centre X, Y de côté 2ρ c'est-à-dire pour $H < \rho$, $K < \rho$.

VIII. — SÉRIES DE SÉRIES

Soit $y = S(x)$ une série entière

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

admettant un rayon de convergence R.

Soit z une série entière en y

$$z = T(y) = b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n + \cdots$$

de rayon R'.

Substituons dans cette deuxième l'expression de y :

Si $X < R$, la série y sera absolument convergente et par suite aussi les séries $y^2, y^3, \cdots y^k$. Dans celles-ci, nous pouvons donc écrire les termes dans tel ordre que nous voulons, en particulier ordonner y^k suivant les puissances croissantes de x.

En disposant verticalement les termes correspondants, nous obtiendrons donc

$$z = b_0 + b_1 \left|\begin{array}{l} a_0 \\ + a_1 x \\ + a_2 x^2 \\ + \end{array}\right. + b_2 \left|\begin{array}{l} a_0^2 \\ + 2a_0 a_1 x \\ + (a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 \\ + \end{array}\right. + b_3 \left|\begin{array}{l} a_0^3 \\ + \cdots + \cdots \end{array}\right.$$

Cherchons à quelles conditions cette série à double entrée sera absolument convergente. Il faut d'abord que la série de la première ligne le soit ; c'est la série

$$b_0 + b_1 a_0 + b_2 a_0^2 + \cdots + b_n a_0^n + \cdots$$

ω

Il est donc nécessaire que $A_0 < R'$.

Nous allons montrer que cette condition est suffisante pour que la série double soit absolument convergente, à condition que X soit suffisamment petit.

En effet remarquons que, dans la série à double entrée, les coefficients sont des polynômes dont les termes ne procèdent que par additions et multiplications. r Il en résulte que, si nous remplaçons tous les coefficients a_i et b_k par des coefficients positifs α_i, β_k tels que $\alpha_i > A_i, \beta_k > B_k$ α_2 la série ainsi formée Σ serait une série majorante de la série considérée, et si cette série Σ est convergente, la série à double entrée admettra un rayon de convergence au moins égal.

Déterminons les coefficients α_i, β_k.

α

Considérons un nombre m tel que $A_0 < m$. D'après une remarque faite sur les séries majorantes, on pourra déterminer un nombre $r < R$ tel que $A_n < \frac{m}{r^n}$; nous prendrons

$$\alpha_n = \frac{m}{r^n}.$$

Nous pouvons prendre également $m < R'$.

Considérons d'autre part un nombre r_1 tel que $m < r_1 < R'$.

τ_1

On pourra lui faire correspondre une constante M, telle que $B_k < \frac{M}{r_1^k}$ quel que soit k. Nous prendrons

$$\beta_k = \frac{M}{r_1^k}.$$

ω

En résumé nous considérons d'une part la série

$$\eta = \sum \frac{m}{r^n} \xi^n \tag{1}$$

et d'autre part la série

$$\xi = T(\tau_1) = \sum \frac{M}{r_1^k} \tau_1^k. \tag{2}$$

ξ

Si nous formions une série à double entrée en substituant l'expression de η donnée par la série (1) dans la série (2) nous formerions bien une série Σ telle que celle que nous avons envisagée.

δ_1

Les termes d'une colonne représentent $\frac{M}{r_1^k} \eta^k$; en évaluant la

série par colonnes nous obtiendrons donc $\sum \frac{M}{r_1^k}\eta^k$. Or cette série sera convergente si $\eta < r_1$; mais d'autre part, si $\xi < r$, on a $\eta = \frac{m}{1-\frac{\xi}{r}}$.

Il suffit donc que l'on ait

$$m < r_1\left(1-\frac{\xi}{r}\right) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \xi < r\left(1-\frac{m}{r_1}\right).$$

Cette condition entraîne d'ailleurs la condition $\xi < r$.

ω

La série Σ sera donc absolument convergente si $\xi < r\left(1-\frac{m}{r_1}\right)$ et par suite la série donnée admettra un rayon de convergence au moins égal.

D'ailleurs, r_1 pouvant être pris aussi voisin qu'on le veut de R', cette inégalité revient à

$$\xi < r\left(1-\frac{m}{R'}\right).$$

Si alors on évalue la série double initiale par colonnes on obtient $T(y) = T(S(x))$. Si au contraire on l'évalue par lignes on aura une série entière ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

La démonstration est plus simple encore si le premier coefficient a_0 de la série $y = S(x)$ est nul.

π, δ

Dans ce cas, en substituant, on a

$$z = b_0 + b_1(a_1x + \cdots) + b_2(a_1x + \cdots)^2 + \cdots$$

Dans cette série, on pourra bouleverser l'ordre des termes d'une façon quelconque et en particulier l'ordonner suivant les puissances croissantes de x, si elle est absolument convergente. δ1 Ceci aura certainement lieu si

(1) $$A_1X + A_2X^2 + \cdots < R'.$$

D'ailleurs la série $S(x)$ admettant un rayon de convergence R, en désignant par r une quantité quelconque inférieure à R, on peut écrire $A_n < \frac{m}{r^n}$.

ω

L'inégalité (1) sera donc satisfaite si

$$m\left(\frac{X}{r} + \frac{X^2}{r^2} + \cdots + \frac{X^n}{r^n} + \cdots\right) < R' \qquad m\frac{X}{r} < R'\left(1-\frac{X}{r}\right)$$

ou enfin si $X < \frac{rR'}{m+R'}$.

Le rayon de convergence donné par cette inégalité est plus grand que dans le cas général, $r \times \left(1 - \frac{m}{R'}\right)$.

Racines infiniment petites d'une équation série. Cas d'une seule racine. — Supposons que l'on ait une série à deux variables

$$S(x, y) = \Sigma a_{mn} x^m y^n$$

convergente dans une certaine région et supposons que pour $x = 0$, l'équation $S(x, y) = 0$ admette une racine nulle en y, mais non l'équation $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$.

Nous allons montrer que *il est possible de trouver pour y un développement de la forme*

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

convergent pour des valeurs de $|x|$ *suffisamment petites et satisfaisant identiquement à l'équation* $S(x, y) = 0$.

L'équation est en effet de la forme

$$a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + \cdots + a_{mn} x^m y^n + \cdots = 0. \tag{1}$$

Puisque $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{x=0} \neq 0$, on a $a_{01} \neq 0$. On peut donc supposer $a_{01} = -1$ et écrire

$$y = a_{10} x + a_{20} x^2 + a_{11} xy + \cdots \tag{1'}$$

Cherchons donc un développement à coefficients indéterminés

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

qui satisfasse identiquement à l'équation (1').

En substituant, et égalant les coefficients des diverses puissances de x, nous obtiendrons

$$c_1 = a_{10}, \qquad c_2 = a_{20} + a_{11} c_1 + a_{02} c_1^2.$$

D'une manière générale, il est évident que c_n sera de la forme

$$c_n = P_n(a_{10}, a_{20}, a_{11}, \cdots a_{ik}, \cdots a_{0n}, \cdots c_1, c_2, \cdots c_{n-1}) \tag{3}$$

avec

$$i + k \leqslant n.$$

δ_1

Si nous remplaçons successivement $c_1, c_2, \cdots c_{n-1}$ dans les relations telles que (3) nous obtiendrons

$$c_n = Q_n(a_{10}, a_{20} \cdots a_{ik} \cdots) \qquad (i + k \leqslant n) \tag{3'}$$

o

Nous ferons dès maintenant la remarque essentielle suivante : Dans les seconds membres, les polynômes P_n et ensuite les polynômes Q_n ne dépendent des divers coefficients que par additions ou multiplications.

ω

Nous avons donc construit une série (2) qui satisfait identiquement à l'équation (1). ξ Mais il reste à savoir dans quelles conditions cette série sera convergente.

Considérons à cet effet une série majorante de la série (2)

$$Y = \gamma_1 X + \gamma_2 X^2 + \cdots + \gamma_n X^n + \cdots$$

$\delta_1, \varkappa$

La série double $\Sigma a_{mn} x^m y^n$ admettant un rayon de convergence R, en prenant $r < R$ on pourra écrire $A_{mn} < \frac{M}{r^{m+n}}$.

α

D'après la remarque faite sur les polynômes P_n, Q_n, si nous y remplaçons toutes les quantités a_{ik} par $\frac{M}{r^{i+k}}$, nous obtiendrons une quantité γ_n qui sera certainement supérieure à C_n

$$\gamma_n = Q_n\left(\frac{M}{r}, \frac{M}{r^2}, \cdots \frac{M}{r^{n+k}}, \cdots \frac{M}{r^n}\right). \tag{4}$$

ξ

Si l'on cherchait un développement

$$Y = \gamma_1 X^2 + \gamma_2 X^2 + \cdots + \gamma_n X^n + \cdots \tag{6}$$

satisfaisant identiquement à l'équation

$$Y = \frac{M}{r} X + \frac{M}{r^2} X^2 + \cdots + \frac{M}{r^{i+k}} X^i Y^k + \cdots \tag{5}$$

ψ

nous aurions, pour déterminer les γ, les mêmes relations que pour déterminer les c et par suite les mêmes expressions Q_n, mais en y remplaçant les a_{mn} par les nouvelles valeurs $\frac{M}{r^{m+n}}$, et par suite nous obtiendrions pour γ_n les expressions (4).

ρ

Mais on peut avoir directement l'expression de Y satisfaisant à (5). Cette équation s'écrit en effet

$$Y + M + M\frac{Y}{r} = M\sum\sum \frac{X^i Y^k}{r^{i+k}} = M\sum\sum \left(\frac{X}{r}\right)^i \left(\frac{Y}{r}\right)^k$$

i et k variant de zéro à $+\infty$.

δ_1

Si l'on a simultanément $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{r}\right| < 1$, la série double du second membre est absolument convergente : elle représente le produit des deux séries $\sum\left(\frac{X}{r}\right)^i$, $\sum\left(\frac{Y}{r}\right)^k$. On a donc

$$Y + M + M\frac{Y}{r} = \frac{M}{\left(1-\frac{X}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{r}\right)} \quad \text{ou} \quad (r+M)Y^2 - r^2 Y + \frac{Mr^2 X}{r-X} = 0.$$

Posons pour abréger

$$\frac{r^2}{r+M} = 2\alpha, \qquad \frac{Mr^2 X}{(r+M)(r-X)} = Z.$$

On aura

$$Y = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - Z}.$$

$\varpi\xi$

Les deux valeurs de Y peuvent être développées en série convergente pour des valeurs de z telles que $|Z| < \alpha^2$ c'est-à-dire

$$(7) \qquad \left|\frac{X}{r-X}\right| < \frac{r^2}{4M(r+M)} \qquad \text{d'où} \qquad X < \frac{r^3}{(r+2M)^2}.$$

D'ailleurs Z sera lui-même développable en série convergente suivant les puissances entières de x, si $X < r$, condition alors remplie.

Pour obtenir la racine qui s'annule pour $x = 0$ il faut prendre le signe — devant le radical.

Y est donc développable en série de puissances de x si $X < \frac{r^3}{(r+2M)^2}$. Ce développement étant convergent et n'ayant pas de terme indépendant de x, on pourra prendre x suffisamment petit pour que $\frac{Y}{r} < 1$. Le développement correspondant coïncidera nécessairement avec (6).

ω

La série

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

admettra un rayon de convergence au moins égal à $\frac{r^3}{(r+2M)^2}$.

Cas général. — Prenons le cas général où l'équation $S(x, y) = 0$ admet n racines nulles en y pour $x = 0$. *Pour des valeurs de x infiniment petites nous allons montrer que l'équation admet n racines développables suivant les puissances rationnelles de x.*

Soit en effet y une des racines supposées infiniment petites et Mx^μ sa partie principale. On pourra poser $y = (M + z)x^\mu$, z étant infiniment petit. En substituant cette expression dans l'équation $S(x, y) = 0$, on devra obtenir une identité. Les termes de moindre degré devront donc s'annuler : il sera donc nécessaire qu'il y ait au moins deux termes de moindre degré ce qui détermine μ; en annulant le coefficient correspondant, on aura M.

Nous raisonnerons sur une série particulière que nous prenons dans le Traité d'Analyse de Jordan. En l'ordonnant suivant les puissances croissantes de y, et ordonnant chaque coefficient correspondant suivant les puissances croissantes de x, nous prendrons la série

$$S(x, y) = x^4 + \cdots + (2x^3 + \cdots)y^2 + (x^2 + \cdots)y^4 + (-x + \cdots)y^7 + (4x^2 + \cdots)y^8 + (1 + \cdots)y^9 + (2 + \cdots)y^{10} + \cdots$$

Substituons-y une expression de la forme $y = (M + z)x^\mu$.

Les termes de moindre degré en x proviendront de la substitution de Mx^μ et il suffira dans chaque parenthèse d'y prendre le terme de moindre degré; quelle que soit la valeur attribuée à μ, les termes de moindre degré se trouveront donc certainement dans l'ensemble

$$x^4 + 2M^2x^{3+2\mu} + M^4x^{2+4\mu} - M^7x^{1+7\mu} + 4M^8x^{2+8\mu} + M^9x^{9\mu} + 2M^{10}x^{10\mu} + \cdots$$

Il est évidemment inutile d'aller au delà du terme en $x^{9\mu}$, les termes ultérieurs étant, quel que soit μ, de degré supérieur. On voit donc qu'on peut s'arrêter à la puissance de y dont le coefficient ne s'annule pas pour $x = 0$.

Il faut rechercher le ou les plus petits des exposants

$$4, \quad 3 + 2\mu, \quad 2 + 4\mu, \quad 1 + 7\mu, \quad 2 + 8\mu, \quad 9\mu.$$

A cet effet nous ferons croître μ de zéro à $+\infty$ et il faudra que pour une valeur de μ, il y ait au moins deux exposants égaux.

δ_1

Tout d'abord lorsque μ est très petit l'exposant 9μ est le plus petit. Lorsque μ croît, cet exposant croît plus vite que les précédents et finira par les égaler.

Il est égal à

$$2 + 8\mu, \quad 1 + 7\mu, \quad 2 + 4\mu, \quad 3 + 2\mu, \quad 4$$

respectivement pour les valeurs

$$\mu = 2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{4}{9}.$$

La plus plus petite de ces valeurs est $\frac{2}{5}$.

ω

Tant que l'on a $0 < \mu < \frac{2}{5}$, il n'y a donc qu'un seul terme de degré moindre (9μ) : il n'est pas possible qu'il y ait, pour y, une partie principale correspondante. Pour $\mu = \frac{2}{5}$, il y a deux termes de degré moindre

$$9\mu = 2 + 4\mu = \frac{18}{5}.$$

δ_1

Il peut y avoir une partie principale correspondante. D'après la remarque générale, il faut alors annuler le coefficient de ce terme. On a donc

$$\varphi(M) = M^9 + M^4 = 0.$$

Et comme M doit être différent de zéro, il faudra prendre l'une des cinq racines non nulles de cette équation c'est-à-dire l'une des cinq racines cinquièmes de — 1 soient M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. On en déduit les parties principales correspondantes de y, $M_i x^{\frac{2}{5}}$.

δ

A partir de cette valeur de μ, l'exposant $2 + 4\mu$ est tout d'abord certainement inférieur à tous les exposants suivants que l'on peut donc écarter. L'exposant $2 + 4\mu$ deviendra égal à

$$3 + 2\mu, \qquad 4,$$

respectivement pour

$$\mu = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2},$$

Lorsque $\frac{2}{5} < \mu < \frac{1}{2}$, il n'y a qu'un seul terme de degré minimum $2 + 4\mu$. Pour $\mu = \frac{1}{2}$ il y a trois termes de degré minimum

$$2 + 4\mu = 3 + 2\mu = 4.$$

Annulons l'ensemble des coefficients de ces termes. Nous obtiendrons

$$\psi(M) = M^4 + 2M^2 + 1 = 0.$$

Ce qui donnera quatre nouvelles valeurs possibles pour la partie principale

$$M_j x^{\frac{1}{2}} \qquad (j = 6, 7, 8, 9).$$

Lorsque $\mu > \frac{1}{2}$, le terme de degré 4 sera toujours celui de degré minimum ; il ne peut plus y avoir de valeur principale pour y.

Au total on a obtenu 9 valeurs possibles pour la partie principale de y. Ce nombre est égal à l'exposant de la première puissance de y dont le coefficient ne s'annule pas pour $x = 0$ et le raisonnement montre que ce résultat sera général. Si, partant d'un terme de degré α en y, on est arrêté successivement à des termes de degré $\beta, \gamma, \delta, \cdots$ on a, pour déterminer les valeurs de M non nulles, des équations respectivement de degré $(\alpha - \beta), (\beta - \gamma), \cdots$ au total on a donc un nombre de racines égal à

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + \cdots \lambda = \alpha.$$

Calculons maintenant les termes suivants du développement de chacune des neuf racines.

1° $\mu = \frac{2}{5}$, $M = M_1$. Faisons dans l'équation la substitution complète

$$y = (M_1 + z)x^{\frac{2}{5}} = (M_1 + z)x'^2$$

en posant $x = x'^5$.

On aura alors une série procédant suivant les puissance de z et x' mais dont tous les termes auront en facteur une certaine puissance de x'. Cette puissance sera x'^{18}, puisque par la substitution initiale, les termes de degré minimum en x étaient ceux en $x^{\frac{18}{5}}$. Lorsqu'on substituait $M_j x^{\mu}$, ces termes de degré minimum avaient pour coefficient

$$(M^9 + M^4) = \varphi(M).$$

Lorsqu'on substituera $(M_1 + z)x^{\mu}$, ces termes auront pour

coeficient $\varphi(M_1 + z)$. Après suppression du facteur x'^{18}, l'équation est donc de la forme

$$\varphi(M_1 + z) + R(x', z) = 0$$

tous les termes de R renfermant en facteur une certaine puissance de x'. δ_1 Or les termes indépendants de x' sont

$$\varphi(M_1 + z) = \varphi(M_1) + z\varphi'(M_1) + \cdots + \frac{z^9}{9!}\varphi^9(M_1).$$

Comme $\varphi'(M_1) \not\equiv 0$ l'équation est donc de la forme

$$z\varphi'(M_1) + \cdots + R(x', z) = 0.$$

ρ C'est une équation de la forme de celles que nous avons ω étudiées tout d'abord. On pourra obtenir pour z un développement en série satisfaisant identiquement à cette équation, procédant suivant les puissances entières de x', et convergent dans un certain cercle. Au total, on aura donc pour y un développement de la forme $y_1 = (M_1 + z)x'^{\frac{1}{2}}$, suivant les puissances entières de $x^{\frac{1}{2}}$.

On obtiendrait des développements analogues pour les autres racines. Mais aucun calcul nouveau n'est même nécessaire : π, ρ x' est en effet une quelconque des déterminations de $x^{\frac{1}{2}}$. Or si on substitue y_1 dans $S(x, y)$, le résultat de la substitution peut être mis sous la forme

$$U_0 + U_1 x'^{\frac{1}{2}} + U_2 x' + U_3 x'^{\frac{3}{2}} + U_4 x'^2$$

ρ U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 étant des séries de puissances entières de x. Puisque $S(x, y_1)$ est identiquement nul, β U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 doivent s'annuler identiquement. Il en résulte qu'on aura encore un résultat identiquement nul, si l'on remplace $x^{\frac{1}{2}}$ par une quelconque ω des autres déterminations ; on aura donc de nouvelles valeurs de y satisfaisant identiquement à l'équation en remplaçant dans y, x par une quelconque de ces déterminations, ce qui donne les cinq développements possibles de y.

2e Cas : $\mu = \frac{1}{2}$. — δ_1 L'équation

$$\psi(M) = M^4 + 2M^2 + 1 = 0$$

a deux racines doubles $\pm i$. Les quatre racines correspondantes ont pour partie principale

$$ix^{\frac{1}{2}},\ ix^{\frac{1}{2}},\ -ix^{\frac{1}{2}},\ -ix^{\frac{1}{2}}.$$

δ_1

Cherchons les coefficients ultérieurs du développement. Il faut poser par exemple

$$y = (i + z)x^{\frac{1}{2}} = (i + z)x' \qquad (x = x'^2)$$

En substituant cette valeur de y, tous les termes auront en facteur une certaine puissance de x' soit x'^8 correspondant au terme de degré minimum x^4.

δ_1

Le coefficient de ces termes sera $\psi(i + z)$. Après suppression du facteur x'^8, on a donc une équation de la forme

$$\psi(i + z) + R(x', z) = 0$$

tous les termes de $R(x', z)$ contenant x' en facteur.

δ_1

Or

$$\psi(i + z) = \psi(i) + \frac{z}{1}\psi'(i) + \cdots + \frac{z^4}{4!}\psi^4(i).$$

ρ

Dans le cas actuel, i étant racine double, les deux premiers termes sont nuls. L'équation est donc de la forme

$$\frac{z^2}{2!}\psi''(i) + \cdots + R(x', z) = 0.$$

σ

C'est une équation analogue à celle dont nous sommes partis mais ici le degré du terme en z dont le coefficient ne s'annule pas avec x' est 2 (au lieu de 9). Soit

$$R(x', z) = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'^2 + \cdots + (\beta_1 x' + \cdots)z + \cdots$$

ξ, α

En substituant $z = Nx^\nu$, si $\alpha_1 \neq 0$, pour qu'il y ait deux termes de degré minimum, il faudra que $\nu = \frac{1}{2}$.

L'équation qui détermine N sera

$$\frac{N^2}{2!}\psi''(i) + \alpha_1 = 0.$$

Elle admettra pour racines N_1, N_2, d'où l'on déduira deux parties principales de z

$$N_1 x'^{\frac{1}{2}} = N_1 x^{\frac{1}{4}}, \qquad N_2 x'^{\frac{1}{2}} = N_2 x^{\frac{1}{4}}.$$

Ces deux racines étant simples, on pourra avoir ensuite les autres termes du développement de z, qui s'effectuera suivant les puissances de $x^{\frac{1}{\nu}}$.

Si $\alpha_1 = 0$, pour avoir plusieurs termes de degré minimum, il faudra prendre $\nu = 1$, et on aura pour déterminer N l'équation

$$\frac{N^2}{2!}\psi''(i) + \alpha_2 + \beta_1 N = 0$$

qui admettra deux racines N_1, N_2; on en déduira les développements des racines suivant les puissances entières de x' c'est-à-dire de $x^{\frac{1}{2}}$.

Formule de Lagrange. — Considérons en particulier l'équation

$$y = a + x\varphi(y) \tag{1}$$

$\varphi(y)$ étant développable en série convergente suivant les puissances croissantes de $y - a$, pour des valeurs suffisamment petites de $y - a$.

Cette équation admet une racine et une seule qui tend vers a quand x tend vers zéro, et cette racine peut être représentée par une série

$$y = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

convergente pour x suffisamment petit.

Plus généralement encore, donnons-nous une fonction $u = f(y)$ développable suivant les puissances de $y - a$. Si l'on y substitue le développement de $y - a$ donné par (2), on aura le développement de u ordonné suivant les puissances de x et ce développement sera convergent pour des valeurs de x comprises entre certaines limites

$$u = f(a) + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots$$

Nous allons chercher l'expression générale de A_n.

Puisque cette série est supposée convergente, on aura

$$n!\, A_n = \left(\frac{d^n u}{dx_n}\right)_{x=0}.$$

α, ν

Or de l'équation (1), on déduit, en dérivant par rapport à x et à a

$$[1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y), \qquad [1 - x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a} = 1.$$

ρ

Il en résulte

$$\frac{dy}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}. \tag{3}$$

δ₁

D'autre part u peut être considéré comme fonction de x et et de a par l'intermédiaire de y. Et comme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a},$$

d

en vertu de (3) on aura aussi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{4}$$

De (3) et (4) on déduit en particulier

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

δ₁

En dérivant les deux membres de (4) par rapport à x, et remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right) = \varphi(y)\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \varphi'\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial u}{da}. \tag{5}$$

On voit que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial a}\cdot\varphi' \times \varphi\frac{\partial y}{\partial a} + \varphi\left[\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \varphi'\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial u}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^2(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]. \tag{5}$$

ρ, ν, R₁

Les expressions (4) et (5) conduisent donc à poser d'une façon générale

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]. \tag{6}$$

δ₁

Nous vérifierons cette formule par récurrence. Supposons-la établie pour n; en la dérivant, comme on a successivement

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n\frac{\partial u}{\partial a}\right) = n\varphi^{n-1}\varphi'\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial a} + \varphi^n\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial x} = n\varphi^{n-1}\varphi'\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi^n\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial x}$$
$$= \frac{\partial}{\partial a}\left(\varphi^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\varphi^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right).$$

on aura bien

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\varphi^n \frac{\partial u}{\partial a}\right)\right] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^n \frac{\partial u}{\partial a}\right)\right] = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\varphi^{n+1}\frac{\partial u}{\partial a}\right).$$

La formule est donc démontrée.

Pour $x = 0$, y se réduit à a, $u = f(a)$ et la formule (6) devient

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{x=0} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\varphi^n(a)\frac{\partial u}{\partial a}\right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}[\varphi^n(a)f'(a)].$$

On a donc le développement

$$(7)\quad f(y) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial}{\partial a}(\varphi^2(a)f'(a)) + \cdots = \Sigma \frac{x^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}(\varphi^n(a)f'(a)).$$

Application. — Soit l'équation

$$(8)\qquad y = a + \frac{x}{2}(y^2 - 1).$$

Le terme général de (7) s'écrit pour $f(y) = y$

$$\frac{x^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^n = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}(a^2-1)^n.$$

Par suite

$$y = a + \frac{x}{2}(a^2-1) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}(a^2-1)^n + \cdots$$

D'ailleurs de (8) on peut tirer directement

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{1 - 2ax + x^2}.$$

On a donc

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2} = \Sigma \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}(a^2-1)^n$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{1-2ax+x^2} = 1 - ax - x\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}(a^2-1)^n$$

ce qui donne le développement du radical suivant les puissances croissantes de x.

CHAPITRE VI

PRODUITS INFINIS

SOMMAIRE.

Produits absolument convergents : Produit des facteurs à partir du $n^{ième}$. — Produits uniformément convergents.

Développement en produit infini de $\sin \pi z$: Sommes $\sum \frac{1}{k^{2n}}$.

Étant donnée une suite de quantités réelles ou imaginaires $u_1, u_2, \cdots u_n \cdots$, considérons les produits successifs

$$P_1 = (1 + u_1), \quad P_2 = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots \quad P_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n).$$

On dit que cette suite définit un produit infini. Ce produit infini est convergent si P_n tend vers une limite finie P qui est dite la valeur du produit.

Si l'un des facteurs $1 + u_k$ est nul, tous les produits ultérieurs sont également nuls et P_n a pour limite zéro. Mais il peut arriver que P_n ait pour limite zéro sans qu'aucun des facteurs du produit soit nul. Si nous prenons par exemple

$$u_n = -\frac{1}{n+1}, \qquad 1 + u_n = \frac{n}{n+1},$$

on a

$$P_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

P_n a donc pour limite zéro.

THÉORÈME. — *Pour que le produit infini soit convergent sans être nul, il faut que* u_n *ait pour limite zéro.*

δ

On a en effet

$$1 + u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \qquad \text{d'où} \qquad u_n = \frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-1}}.$$

ω

Si P_n et P_{n-1} ont une limite P différente de zéro, le numérateur et par suite u_n tend vers zéro.

Le raisonnement ne s'applique pas si la limite de P_n est nulle,

π

le dénominateur tendant également vers zéro.

Réduction à une série. — On peut ramener l'étude d'un produit

φ

infini à l'étude d'une série. Il suffit de considérer la série

$$v_1 = P_1, \qquad v_2 = P_2 - P_1, \qquad v_n = P_n - P_{n-1}$$

c'est-à-dire

$$v_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_{n-1})\, u_n.$$

On a

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = P_n.$$

ω

La série (v) est divergente ou convergente en même temps que le produit ; s'ils sont convergents, leur valeur est la même.

I. — PRODUITS ABSOLUMENT CONVERGENT

Supposons que tous les nombres $u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots$ soient réels et positifs. Les produits successifs P_n vont en croissant. Pour que P_n

v_2

ait une limite, il faut et il suffit que P_n reste inférieur à une quantité fixe. Nous allons le comparer à la somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. On a

$$P_n > 1 + \cdots + u_n. \tag{1}$$

D'autre part, on a $e^x > x + 1$ quel que soit x, puisque la fonction $y = e^x - x - 1$ est minimum et nulle pour $x = 0$.

d

On en déduit

$$1 + u_n < e^{u_n}$$

et par suite

$$P_n < e^{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}. \tag{2}$$

ω

De (2) résulte que, si $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, a une limite, P_n a

également une limite. De (1) résulte que si P_n a une limite, la série (u) aura également une limite. Donc :

THÉORÈME — *Si les termes* $u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots$ *sont tous positifs, le produit* $\Pi(1 + u_n)$ *et la série* u_n *sont convergents ou divergents en même temps.*

Supposons maintenant les nombres u quelconques réels ou imaginaires. Considérons en même temps la série des modules (U).

THÉORÈME. — *Si la série* (U) *est convergente,* ψ *il en est de même du produit* $\Pi(1 + u_n)$.

α

Nous avons en effet ramené l'étude du produit à celle dela série

$$v_n = (1 + u_1)(1 + u_2), \cdots (1 + u_{n-1})u_n.$$

ξ

Considérons aussi

$$W_n = (1 + U_1)(1 + U_2), \cdots (1 + U_{n-1})U_n.$$

δ_1

La série $\Sigma(U_n)$ étant convergente il en est de même du produit $\Pi(1 + U_n)$ et par suite de la série (W_n). Or $|1 + u_n| < 1 + U_n$, donc $|v_n| < W_n$.

La série (v) est donc absolument convergente. Le produit $\Pi(1 + u_n)$ est convergent.

On dit que le produit $\Pi(1 + u_n)$ est absolument convergent si le produit $\Pi(1 + U_n)$ est lui-même convergent.

Produit des facteurs à partir du n^e.

THÉORÈME. — *Dans un produit infini absolument convergent, le produit des facteurs à partir du* n^e *tend vers l'unité quand* n *augmente indéfiniment.*

On a évidemment quels que soient les indices

$$|(1 + u_\alpha)(1 + u_\beta), \cdots (1 + u_\lambda) - 1| < (1 + U_\alpha)(1 + U_\beta), \cdots (1 + U_\lambda) - 1$$

π

comme on le voit en développant les produits. A fortiori, le premier membre est inférieur à $e^{U_\alpha + U_\beta + \cdots + U_\lambda} - 1$

$$(1) \qquad |(1 + u_\alpha)(1 + u_\beta), \cdots - 1| < e^{U_\alpha + U_\beta + \cdots + U_\lambda} - 1.$$

δ_1

La série (U) étant convergente, on peut choisir n assez grand pour que, si les indices $\alpha, \beta, \cdots \lambda$ sont supérieurs à n, on ait

$$U_\alpha + U_\beta + \cdots + U_\lambda < \varepsilon$$

ε étant aussi petit qu'on le veut. La quantité $e^{u_\alpha + u_\beta + \cdots + u_\lambda} - 1$ peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut et par suite le premier membre de l'inégalité (1).

REMARQUE. — On a $P_N = (1 + u_1), \cdots (1 + u_n), \cdots (1 + u_N)$. Si n est suffisamment grand on peut donc écrire $P_N = P_n(1 + \varepsilon_n)$.

Le produit P ne peut donc être nul que si l'un des facteurs de rang fini est nul.

Interversion des facteurs.

THÉORÈME. — *Dans un produit infini absolument convergent, on peut changer arbitrairement l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.*

Modifions les facteurs dans un ordre quelconque, mais de manière à prendre tous les facteurs du produit et soit

$$P'_N = (1 + u'_1)(1 + u'_2), \cdots (1 + u'_N).$$

Puisque l'on a pris tous les facteurs du produit, cela veut dire que l'on peut, étant donné un indice n, choisir N assez grand pour que P'_N contienne tous les facteurs de P_n. On pourra donc écrire

$$P'_N = P'_n(1 + u_\alpha)(1 + u_\beta), \cdots (1 + u_\lambda)$$

$\alpha, \beta, \cdots \lambda$ étant tous supérieurs à n. D'après la remarque précédente, le produit $|(1 + u_\alpha), \cdots (1 + u_\lambda)|$ peut être rendu aussi voisin de 1 que l'on veut. On peut donc écrire

$$P'_N = P_n(1 + \varepsilon).$$

Les limites de P'_N et de P_n sont donc les mêmes.

Produits uniformément convergents. — Si les termes $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ sont des fonctions de x, et si le produit P est convergent pour des valeurs de x comprises entre deux limites a, b, le produit représente une fonction de x dans l'intervalle. L'étude d'un produit étant ramenée à celle de la série (v_n), on dit que le produit est uniformément convergent si cette série est elle même uniformément convergente.

δ_2, σ_2

Dans ce cas, on pourra déterminer un entier n, suffisamment grand, mais fixe, pour que

$$| v_{n+1} + v_{n+2}, \cdots + v_{n+p} | < \varepsilon_n$$

quel que soit x dans l'intervalle, ce qui revient à déterminer n indépendant de x, tel que l'on ait $| P_{n+p} - P_n | < \varepsilon$, quel que soit x.

ψ

THÉORÈME. — *Si la série* (U_n) *est uniformément convergente, le produit l'est également.*

δ

On a en effet

$$P_{n+p} - P_n = P_n[(1 + u_{n+1}), \cdots (1 + u_{n+p}) - 1].$$

D'ailleurs

$$| P_n | < (1 + U_1)(1 + U_2), \cdots (1 + U_n) < e^{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}.$$

Et d'après l'inégalité (1) ci-dessus

$$| (1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}), \cdots (1 + u_{n+p}) - 1 | < e^{U_{n+1} + \cdots + U_{n+p}} - 1.$$

δ_1

La série (U) étant uniformément convergente, et ayant une limite Σ, on peut choisir n assez grand pour que, quelle que soit la valeur de x dans l'intervalle, on ait

$$U_{n+1} + \cdots + U_{n+p} < \varepsilon, \qquad U_1 + U_2 + \cdots + U_n < \Sigma.$$

On aura donc

$$| P_{n+p} - P_n | < (e^{\varepsilon} - 1)e^{\Sigma}.$$

ω

On peut supposer ε assez petit pour que le second membre soit plus petit qu'un nombre arbitrairement choisi. On aura donc bien $| P_{n+p} - P_n | < \varepsilon'$, quel que soit x.

II. — DÉVELOPPEMENT EN PRODUIT INFINI DE SIN πz.

En partant de la formule de Moivre

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx$$

σ_2

et égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on sait que l'on obtient les expressions de sin mx, cos mx en fonction de sin x, cos x. On a en particulier

$$\sin mx = C_m^1 \cos^{m-1} x \sin x - C_m^3 \cos^{m-3} x \sin^3 x + \cdots$$

Quel que soit m, tous les termes du second membre renferment $\sin x$ en facteur.

Si m est impair, le second membre ne renferme que des puissances paires de $\cos x$. En remplaçant $\cos^2 x$ par $(1 - \sin^2 x)$ on a donc finalement

$$\sin (2n + 1)x = \sin x P_n (\sin^2 x)$$

P_n étant un polynôme de degré n en $\sin^2 x$. Or, $^{\rho, \sigma_2}$ on connaît les racines de ce polynôme qui sont les valeurs qui annulent $\sin (2n + 1)x$. Ces racines correspondent à $x = \frac{k\pi}{2n + 1}$; elles ont pour expression $\sin \frac{k\pi}{2n + 1}$.

$^{\delta_1}$ On obtiendra toutes les valeurs distinctes, en donnant à k, $(2n + 1)$ valeurs consécutives

$$-n, \ -n + 1, \ \cdots \qquad -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ \cdots \ n).$$

A la valeur $k = 0$ correspond le facteur $\sin x$.

Les racines de P_n sont donc $\pm \sin \frac{k\pi}{2n + 1}$ $(k = 1, 2, \cdots n)$.

$^{\omega}$ De sorte que, en mettant les facteurs de P_n en évidence, on peut écrire

$$\sin (2n + 1)x = A \sin x \, \Pi_1^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n + 1}} \right)$$

A désignant un coefficient numérique. Pour obtenir la valeur de ce coefficient, $^{\varphi}$ il suffit de donner à x une valeur particulière quelconque ou de supposer x infiniment petit et d'égaler les parties principales des deux membres.

On a donc $A = 2n + 1$.

Posons $(2n + 1)x = \pi z$. On aura une égalité de la forme

$$\sin \pi z = (2n + 1) \sin \frac{\pi z}{2n + 1} \Pi_1^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n + 1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n + 1}} \right).$$

$^{\rho, R_1}$ On constate, sous cette forme, que le premier membre est indépendant de n et que le second semble en dépendre. Cette égalité ayant lieu quelque grand que soit n, $^{\alpha, \nu}$ on peut donc rechercher ce que devient ce second membre lorsque n croît indéfiniment.

Le facteur $(2n+1)\sin\frac{\pi z}{2n+1}$ tend vers πz.

Le produit Π_1^n se transforme en un produit infini. Pour en avoir la valeur, décomposons ce produit en deux, en écrivant

$$\Pi_1^n = \Pi_1^m \times \Pi_{m+1}^n$$

m étant un nombre fixe, que nous pourrons d'ailleurs prendre aussi grand que nous voudrons.

Dans les facteurs du premier produit Π_1^m, m étant fixé et k étant inférieur à m, les arcs $\frac{k\pi}{2n+1}$ deviennent infiniment petits, et par conséquent chacun des facteurs du produit a pour limite $1-\frac{z^2}{k^2}$. Ces facteurs étant en nombre limité, on peut donc écrire

$$\Pi_1^m\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = \Pi_1^m\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)\times(1+\varepsilon_n)$$

Nous ne pouvons pas appliquer la même remarque aux facteurs du second produit Π_{m+1}^n, puisque, k pouvant varier de $m+1$ à n, les arcs $\frac{k\pi}{2n+1}$ tendent vers $\frac{\pi}{2}$ et par conséquent ne sont plus infiniment petits.

Pour tourner la difficulté, remarquons que, lorsque x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on a

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\pi}{2}.$$

Pour tout arc $\frac{k\pi}{2n+1}$, on peut donc écrire

$$\left(\frac{\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}}\right)^2 = \theta_k$$

θ_k étant compris entre 1 et $\frac{\pi^2}{4}$.

D'autre part, $\sin \frac{\pi z}{2n+1}$ étant infiniment petit équivalent à $\frac{\pi z}{2n+1}$, chacun des facteurs du produit peut s'écrire

$$1 - \omega_k \frac{\left(\frac{\pi z}{2n+1}\right)^2}{\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)^2} = 1 - \omega_k \frac{z^2}{k^2}$$

ω_k étant comme θ_k, compris entre des limites voisines de 1 et $\frac{\pi^2}{4}$.

ω

Le deuxième produit est donc un produit de la forme

$$\Pi_{m+1}^{n}\left(1 - \omega_k \frac{z^2}{k^2}\right).$$

ρ, σ₂

Or le produit infini $\Pi\left(1 - \omega_k \frac{z^2}{k^2}\right)$ est absolument convergent, puisque la série $\frac{z^2}{k^2}$ est absolument convergente, et par suite aussi la série $\omega_k \frac{z^2}{k^2}$, ω_k restant compris entre des limites finies.

Dans ce produit infini absolument convergent, σ₂ on peut prendre m suffisamment grand, pour que le produit d'un nombre quelconque de facteurs à partir du $n^{\text{ième}}$, soit aussi voisin qu'on le veut de l'unité. Si nous choisissons m de cette façon, on pourra donc écrire

$$\Pi_{m+1}^{n}\left(1 - \omega_k \frac{z^2}{k^2}\right) = 1 - \varepsilon_m$$

ε_m tendant vers zéro si m augmente indéfiniment.

ω

En définitive on voit qu'on peut écrire

$$\sin \pi z = \pi z (1 - \varepsilon_m)(1 + \varepsilon_m) \Pi_1^{m}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

α

Si dans cette égalité, nous faisons croître d'abord n indéfiniment et si nous faisons ensuite croître m indéfiniment, ε_n puis ε_m tendent vers zéro. Le produit Π_1^{m} se transforme en un produit infini.

ω

Le premier membre de l'égalité étant fixe, on a donc rigoureusement

$$\sin \pi z = \pi z \Pi_1^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right). \tag{1}$$

Ce qui donne l'expression de sin πz sous forme de produit infini.

Faisons en particulier $z = \frac{1}{2}$. Nous aurons

$$1 = \frac{\pi}{2} \Pi_1^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{\pi}{2} \Pi_1^{\infty}\left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2}\right).$$

En renversant les facteurs du produit, on a donc

$$\frac{\pi}{2} = \Pi_1^{\infty}\left(\frac{4k^2}{4k^2 - 1}\right) = \Pi_1^{\infty}\left(\frac{2k \times 2k}{(2k-1)(2k+1)}\right).$$

ou, en explicitant

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \times \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} \times \cdots$$

On retrouve la formule de Wallis.

On pourrait, par des considérations analogues, obtenir le développement en produit infini de $\cos \pi z$. Mais on peut le déduire du développemment précédent. On peut en effet écrire

$$\cos \pi z = \frac{\sin 2\pi z}{2 \sin \pi z} = \frac{2\pi z}{2\pi z} \times \frac{\Pi\left(1 - \frac{4z^2}{k^2}\right)}{\Pi\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)}.$$

Considérons les facteurs du produit numérateur correspondant aux valeurs paires de k soit $k = 2k'$. Un des facteurs de ce produit sera

$$\left(1 - \frac{4z^2}{4k'^2}\right) = 1 - \frac{z^2}{k'^2}.$$

Ce facteur se détruit donc avec un des facteurs du produit dénominateur. Il ne reste donc simplement que les facteurs du numérateur correspondant aux valeurs impaires de k

$$\cos \pi z = \Pi_1^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2}\right).$$

Sommes $\sum \frac{1}{k^{2n}}$. — On peut déduire du développement de $\sin \pi z$ les expressions des sommes des séries

$$\sum \frac{1}{k^2}, \quad \sum \frac{1}{k^4}, \cdots \sum \frac{1}{k^{2n}}$$

formées par les inverses des puissances paires des entiers successifs.

Dérivons en effet logarithmiquement les deux membres de (1), on aura

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2 - k^2}.$$

δ_1

Or

$$\frac{2z}{z^2 - k^2} = -\frac{2z}{k^2}\left[1 + \frac{z^2}{k^2} + \cdots \frac{z^{2n}}{k^{2n}} + \cdots\right].$$

Donc

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = -2z \sum \frac{1}{k^2} - 2z^3 \sum \frac{1}{k^4} \cdots = -2zS_2 - 2z^3 S_4 \cdots \left(S_n = \sum \frac{1}{k^n}\right).$$

α_2

D'autre part, on peut avoir le développement du premier membre suivant les puissances de z

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \times \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} \cdots}{\frac{\pi z}{1} - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \cdots}$$

δ_1

Or, la fraction peut elle-même être développée suivant les puissances croissantes de z ou mieux de $\pi^2 z^2$. o Par simple division, on pourra écrire le second membre sous la forme

$$\frac{1}{z} \times \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} \cdots}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \frac{\pi^4 z^4}{5!} \cdots} = \frac{1}{z}\left[1 - \alpha_1 \frac{\pi^2 z^2}{2!} - \alpha_2 \frac{\pi^4 z^4}{4!} \cdots - \alpha_n \frac{\pi^{2n} z^{2n}}{2n!} \cdots\right]$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ désignant certains coefficients numériques connus.

ω

On a donc finalement

$$+ 2zS_2 + 2z^3 S_4 \cdots + 2z^{2n-1} S_{2n} \cdots = \alpha_1 \frac{\pi^2 z}{2!} + \alpha_2 \frac{\pi^4 z^3}{4!} + \cdots + \alpha_n \frac{\pi^{2n}}{2n!} z^{2n-1} + \cdots$$

En égalant les coefficients des diverses puissances de z, on en déduit

$$2S_2 = \alpha_1 \frac{\pi^2}{2!}, \quad 2S_4 = \alpha_2 \frac{\pi^4}{4!} \cdots, \quad 2S_n = \alpha_n \frac{\pi^{2n}}{2n!}.$$

Si l'on pose $\alpha_n = B_n 2^{2n}$, et par suite $S_n = 2^{2n-1} B_n \frac{\pi^{2n}}{2n!} \cdots$

On trouve, pour coefficients B_n, les valeurs suivantes

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \cdots$$

CHAPITRE VII

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES FORMULE DE TAYLOR

SOMMAIRE.

Formule — Série de Taylor — de Mac Laurin : Applications : e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$ (cas limites $x = \pm 1$) — $L(1+x)$.
Fonctions de plusieurs variables — Autres méthodes.
Applications : Calcul des logarithmes des nombres, des lignes trigonométriques. — Développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. — Polynômes de Legendre. — Limites des expressions indéterminées.

I. — ÉTABLISSEMENT DE LA FORMULE

On a vu en mathématiques générales que, lorsque $f(x)$ est un polynôme de degré n, en développant $f(a+h)$ suivant les puissances croissantes de h, on obtient la formule

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(a).$$

On voit que si l'on considère h comme infiniment petit, la différence $f(a+h) - f(a)$ est un infiniment petit qui, comme nous l'avons vu pour un infiniment quelconque, a été développé suivant les puissances croissantes de h. Il se passe dans ce cas deux faits particuliers :

1° les puissances successives sont des nombres entiers ;

2° le développement s'arrête de lui-même au terme de degré n.

Étant donnée une fonction quelconque $f(x)$, on peut se

proposer de rechercher de même le développement de l'infiniment petit $f(a+h)-f(a)$.

Nous supposerons que $f(x)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre n dans un intervalle contenant a et $a+h$.

δ, σ₂

Puisque le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie $f'(a)$, nous voyons déjà que l'infiniment petit est en général du premier ordre et que sa partie principale est $hf'(a)$. C'est le premier terme du développement.

ψ, ν

Nous pourrions donc voir si, d'une façon générale, nous ne pourrions pas poser

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^n(a)+R_n$$

R_n étant un infiniment petit d'ordre supérieur à n.

Pour le démontrer et obtenir l'expression de R_n, nous partirons de l'identité

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\int_a^{a+h}\varphi'(t)\,dt, \tag{1}$$

en prenant pour $\varphi(x)$ une fonction assujettie seulement à admettre une dérivée dans l'intervalle a, $a+h$.

Prenons

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{(a+h-x)}{1}f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)$$

δ

Cette fonction admet bien une dérivée. En dérivant les termes du second membre on voit en effet, aisément, que les termes se détruisent deux à deux sauf le dernier, et il reste simplement

$$\varphi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x).$$

δ₁

D'ailleurs

$$\varphi(a+h)=f(a+h)$$

$$\varphi(a)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a).$$

ω

On a donc en appliquant l'identité (1)

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+R_n \tag{2}$$

en posant

$$R_n=\int_a^{a+h}\frac{(a+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(t)\,dt.$$

On peut voir que R_n est un infiniment petit d'ordre n, car si l'on applique le théorème de la moyenne

$$\int_a^{a+h} \psi(t)dt = h\,\psi(a+\theta h) \qquad 0<\theta<1$$

on obtient

$$R_n = h\,\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(a+\theta h) = \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h).$$

Cette forme du reste a été donnée par Cauchy.

Lagrange a donné une deuxième forme (en prenant une valeur moyenne de $f^n(t)$ et intégrant $\int_a^{a+h}\frac{(a+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$)

$$R_n = \frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h).$$

Mais ces deux formes contiennent une indéterminée θ qu'on sait seulement être comprise entre 0 et 1.

La formule (2) que nous venons d'établir porte le nom de formule de Taylor. On admirera comme il convient, l'harmonie et le parfait équilibre de cette formule.

Série de Taylor. — Supposons que $f(x)$ admette des dérivées jusqu'à tel ordre que l'on voudra, et que de plus, lorsque n augmente indéfiniment, l'intégrale représentant R_n tende vers zéro.

On pourra constituer une série

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\cdots$$

D'après la formule de Taylor applicable à toute valeur de n, en désignant par S_n la somme des n premiers termes de cette série, on a $f(a+h)-S_n=R_n$, et puisque par hypothèse R_n tend vers zéro, on en déduit

1° que la série est convergente ;

2° que sa valeur est $f(a+h)$.

On dit que $f(a+h)$ est développable en série de Taylor.

Cette condition que R_n tende vers zéro est donc suffisante à elle seule pour que la fonction soit développable en série dans l'intervalle considéré.

Dans la pratique, comme l'étude de ce reste R_n peut présenter quelque difficulté, on cherchera d'abord dans quels intervalles la série est convergente ; mais cette condition pourra ne pas être suffisante. On n'étudiera le reste R_n que dans ces intervalles de convergence.

Il faut remarquer enfin que, si la série est convergente, elle peut ne pas représenter la fonction $f(x)$ (si R_n ne tend pas vers zéro). Cauchy a donné comme exemple la fonction $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. On a

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

D'une façon générale une dérivée quelconque est de la forme

$$\varphi^n(x) = P(x) x^{-3n} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$P(x)$ désignant un polynôme.

Toutes ces dérivées sont nulles pour $x = 0$. Car en posant $x = \frac{1}{z}$, on obtient

$$x^{-3n} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{z^{3n}}{e^{z^2}}.$$

Ce facteur tend vers zéro quand z augmente indéfiniment.

Si donc on applique la formule de Taylor à une fonction $f(x) + \varphi(x)$ on obtiendra le même développement que pour la fonction $f(x)$ seulement.

Il est un cas étendu où l'on peut affirmer que R_n tend vers zéro : c'est celui où la valeur absolue d'une dérivée quelconque reste inférieure à un nombre fixe M, car alors d'après la formule de Lagrange, $R_n < \frac{|h^n|}{n!} M$: R_n tend vers zéro.

Formule et série de Mac-Laurin. — Dans le cas particulier où les conditions sont remplies pour $a = 0$ (en remplaçant h par x), on obtient la formule de Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + R_n.$$

avec

$$R_n = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(t)dt.$$

Le reste de Lagrange prend la forme suivante

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$$

et si R_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, on obtient le développement de $f(x)$ suivant la série de Mac-Laurin

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(o) + \cdots$$

En particulier si $f^n(x)$ conserve une valeur finie, comme le facteur $\frac{x^n}{n!}$, terme général d'une série convergente, tend vers zéro, R_n tendra vers zéro.

Cette formule revient à représenter $f(x)$ par une série entière qui, comme nous le savons, est convergente dans un certain cercle de convergence. Dans ce cercle, nous savons que la série obtenue en prenant les dérivées des termes est convergente et représente la dérivée de la fonction $f(x)$.

On peut alors voir que la fonction $f(x)$ ne peut être représentée que de cette seule manière et dans ce seul intervalle par une série entière.

Si en effet l'on avait dans un certain intervalle

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

en dérivant n fois et faisant $x = 0$, on aurait $f^n(o) = n!\, a_n$ On a donc nécessairement $a_n = \frac{f^n(o)}{n!}$. Le développement est donc bien celui de la formule de Mac-Laurin et l'intervalle de convergence est par suite le même.

Applications. — 1° $f(x) = e^x$.

On a

$$f'(x) = e^x, \cdots \qquad f^n(x) = e^x, \cdots \qquad f^n(o) = 1.$$

En appliquant la formule de Mac-Laurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt.$$

Le reste R_n tend vers zéro. Nous allons en effet en chercher une limite supérieure. Nous savons que, pour toute intégrale définie on peut écrire

$$\int_0^x \varphi(t)dt < Mx$$

M désignant le maximum de $|\varphi^{(n)}|$ dans l'intervalle d'intégration. Or $\left|\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right| < \frac{|x^{n-1}|}{(n-1)!}$ puisque t est compris entre o et x.

Dans tous les cas $|e^t|$ reste inférieur dans l'intervalle ox à un nombre fixe M et par suite $|R_n| < M\frac{|x^{n-1}|}{(n-1)!}$ tend bien vers zéro. On aura quel que soit x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

2^o $f(x) = \sin x$.

On a

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^n(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^n(o) = \sin n\frac{\pi}{2}.$$

Si n est pair, $f^n(o) = 0$; si n est impair, $f^n(o)$ est alternativement égal à $+1$ et à -1. On en déduit que la série de Mac-Laurin ne comprend que des termes impairs et les coefficients sont alternativement positifs et négatifs.

La série obtenue sera

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Comme une dérivée quelconque $f^n(\theta x) = \sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right)$ reste finie, quel que soit x, le reste R_n tend vers zéro et la série représente bien sin x quel que soit x.

3^o $f)x = \cos x$.

On trouvera de même

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

développement valable pour toute valeur de x.

4^o $f(x) = (1+x)^m$.

δ On a en général

$$f^k(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$
$$f^k(o) = m(m-1)\cdots(m-k+1).$$

ω On a donc la formule de Mac-Laurin

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

avec

$$R_n = \int_0^x \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}(1+t)^{m-n}dt.$$

ξ Pour voir si le développement en série de Mac-Laurin est applicable, α nous chercherons d'abord dans quel intervalle la série est convergente.

δ_1 Le rapport d'un terme au précédent est $\frac{m-n+1}{n}x$. Ce rapport a pour limite $-x$.

Donc, la série n'est convergente que si x est compris entre -1 et $+1$.

α, δ_1 Étudions le reste pour ces valeurs

$$R_n < \int_0^x \varphi(t)\,dt < |x| \times \text{max.}\,|\varphi(t)|.$$

Prenons le maximum de la fonction

$$\varphi(t) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}(1+t)^{m-n}(x-t)^{n-1}.$$

On peut écrire

$$\varphi(t) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}(1+t)^{m-1} \times \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}(1+t)^{m-1} \times \left(\frac{1-\frac{t}{x}}{1+t}\right)^{n-1}.$$

ρ Or comme $|x| < 1$ et comme t est constamment compris entre o et x

$$\left|\frac{t}{x}\right| \geqslant |t|, \qquad \left|\frac{1-\frac{t}{x}}{1+t}\right| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |1+t|^{m-1} < [1+|x|]^{m-1}.$$

ω

Donc on aura un maximum de $|\varphi(t)|$ en prenant

$$[1+|x|]^{m-1}\times\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}|x^{n-1}|.$$

ρ

Le deuxième facteur est le terme général d'une série analogue à celle que nous avons étudiée : il tend vers zéro si $|x|<1$.

Donc si $|x|<1$, R_n tend vers zéro.

Le développement en série est applicable.

ω

Dans l'intervalle $-1<x<1$, on peut donc écrire, quel que soit m,

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

Étudions les cas limites :

1° $x=-1$.

δ

Le terme général de la série est

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}.$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{m-n+1}{n}=\frac{n-(m+1)}{n}.$$

ρ

A partir d'un certain rang, tous les termes sont donc de même signe. δ_1 En posant $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha}$ on a

$$\alpha=\frac{m+1}{n-(m+1)},\qquad \lim\cdot n\alpha=(m+1).$$

La série est donc convergente si $m>0$.

Dans ce cas on a

$$R_n=\int_0^x\varphi(t)dt$$

$$\varphi(t)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(1+t)^{m-1}.$$

Le facteur $|1+t|^{m-1}$ reste fini, inférieur à un nombre fixe A.

ω

On a donc

$$|R_n|<A\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}\right|.$$

Or le deuxième facteur $^{\rho}$ représente le terme général d'une série qui, comme pour la série proposée, tend vers zéro. Donc R_n tend vers zéro : la condition $m > 0$ suffit donc.

2^o $x = +1$. $^{\xi}$ On a de même

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{m+1}{n}.$$

A partir d'un certain rang, la série devient alternée. $^{\varphi}$ Il suffit donc que le terme général tende vers zéro, et pour cela il faut d'abord que le rapport soit inférieur à 1 en valeur absolue. On doit donc avoir $m + 1 > 0$.

δ_1, β

D'autre part, il faut encore que u_n tende vers zéro. Nous allons comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au rapport correspondant pour la série $v_n = \frac{1}{n^{m+1}}$, et si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|$, comme v_n tend vers zéro, il en sera de même de u_n.

δ_1

Or pour la série v, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(m+1)}.$$

α

Appliquons la formule de Mac Laurin *limitée aux trois premiers termes* à la fonction $f(x) = (1+x)^k$, ce que l'on a toujours le droit de faire,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0x).$$

On aura

$$(1+x)^k = 1 + k\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} k(k-1)(1+0x)^{k-2}.$$

Ici

$$x = \frac{1}{n}, \qquad k = -(m+1).$$

ω

Donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(m+1)} = 1 - (m+1)\frac{1}{n} + \frac{(m+1)(m+2)}{2n^2}\left(1 + \frac{0}{n}\right)^{-(m+3)}.$$

Le premier facteur du dernier terme étant positif, il en résulte que l'on a bien $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| > \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Or v_n tend vers zéro, donc u_n tend vers zéro et la série u est convergente.

α_1, ξ Étudions maintenant le reste. On a, en prenant la forme de Lagrange,

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^n(0x) = \frac{1}{n!} m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+0)^{m-n}.$$

Mais ρ $(1+\theta)^{m-n}$ est inférieur à 1 et le facteur numérique tend vers séro π puisqu'il représente le terme général de la série. Le développement en série est donc applicable.

ω En résumé la formule du binôme est applicable :

si $|x| < 1$ quel que soit m,

si $x = -1$ lorsque m est positif,

si $x = +1$ lorsque $m+1$ est positif.

3^o $f(x) = \mathrm{L}(1+x)$. δ On trouverait de même

$$\mathrm{L}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n.$$

avec

$$R_n = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}(-1)^n(n-1)!(1+t)^{-n}dt = (-1)^n \int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{-n}dt.$$

ρ La série n'est convergente que si $|x| < 1$.

ξ Pour le reste, la fonction à intégrer peut s'écrire

$$\varphi(t) = x^{n-1} \times \frac{1}{1+t}\left(\frac{1-\frac{t}{x}}{1+t}\right)^{n-1}.$$

Or, comme dans le cas précédent, les derniers facteurs restent finis et le premier facteur x^{n-1} tend vers zéro. Donc R_n tend vers zéro.

Si $x = +1$, δ_1 la série est harmonique alternée, donc convergente. Étudions le reste. On a

$$|R_n| = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \cdot \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{n-1} dt.$$

Cette intégrale tend évidemment vers zéro.

Le développement en série est donc applicable et on peut écrire

$$\mathrm{L}2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots$$

Si $x = -1$ la série est la série harmonique : elle est divergente.

Fonctions de plusieurs variables. — Il est aisé d'étendre la formule de Taylor au cas de fonctions de plusieurs variables. Nous prendrons par exemple, pour simplifier l'écriture, une fonction de deux variables $f(x, y)$ qui admette des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n dans le domaine

$$a \leqslant x \leqslant A, \qquad b \leqslant y \leqslant B$$

et soient $a + h$, $b + k$ des valeurs de x, y comprises dans le domaine.

ξ

Nous voulons obtenir le développement de $f(a + h, b + k)$. Or

χ

il est facile d'introduire une fonction d'une seule variable t, en posant

$$\alpha = a + ht, \qquad \beta = b + kt$$

et considérant la fonction

$$\varphi(t) = f(a + ht, b + kt) = f(\alpha, \beta).$$

ρ

Lorsque t variera de 0 à 1, en vertu des hypothèses, cette fonction composée admettra des dérivées jusqu'à l'ordre n au moins.

π

On a en effet

$$\varphi'(t) = h \frac{\partial f}{\partial \alpha} + k \frac{\partial f}{\partial \beta}.$$

ψ

On verrait par récurrence que l'on peut écrire symboliquement d'une façon générale

$$\varphi^n(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial \alpha} + k \frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{(n)} f.$$

Les dérivées doivent être prises au point $a + ht$, $b + kt$.

Si nous faisons $t = 0$, les dérivées seront prises au point a, b.

α, δ₁

Appliquons alors la formule de Mac-Laurin dans l'intervalle 0, τ. On a

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{\tau}{1} \varphi'(0) + \cdots \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{n-1}(0) + \int_0^\tau \frac{(\tau - t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^n(t) dt$$

Faisons $\tau = 1$ et remarquons que

$$\varphi(1) = f(a + h, b + k), \qquad \varphi(0) = f(a, b).$$

ω

On aura la formule

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{1}\left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right) f + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h \frac{\partial}{\partial a} + k \frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n-1)} f(a, b) + R_n$$

avec R_n

$$R_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n)} f(a+ht, b+kt)\,dt.$$

Si nous prenons la forme du reste de Lagrange, nous aurons

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n)} f(a+\theta h, b+\theta k) \qquad 0<\theta<1.$$

R_n est un polynôme homogène de degré n en h, k.

Pour que le développement soit applicable, il faut et il suffit que R_n tende vers zéro quand n croît indéfiniment.

On pourra, dans le cas où l'on considérerait h et k comme les différentielles des variables indépendantes a, b, écrire :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{1}\left(\frac{\partial}{\partial a}da + \frac{\partial}{\partial b}db\right)f + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial a}da + \frac{\partial}{\partial b}db\right)^{(n-1)} f(a, b) + \cdots$$

On remarque que les termes sont les différentielles successives de f. On peut donc écrire

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{1}df + \frac{1}{2!}d^2f + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f + \cdots$$

Autres méthodes. — L'application de la formule de Mac-Laurin, par exemple, exige le calcul des dérivées successives de la fonction à développer, alors que l'on a seulement besoin de la valeur particulière de ces dérivées pour $x = 0$. On conçoit donc que l'on puisse, soit établir des relations qui donneront seulement ces valeurs particulières, soit donner d'autres méthodes plus simples.

Considérons par exemple la fonction $y = \text{arc sin } x$.

Il serait difficile d'obtenir l'expression générale de la dérivée n^{e}. Mais on peut aisément obtenir les valeurs particulières des dérivées pour $x = 0$. En dérivant, on a

$$y' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y'^2(1-x^2) = 1$$

et en dérivant une deuxième fois

$$y''(1-x^2) = xy'. \tag{1}$$

En dérivant n fois, par la formule de Leibnitz, les deux membres de cette relation, on obtient

$$y^{n+2}(1 - x^2) - 2nxy^{n+1} - n(n-1)y^n = xy^{n+1} + ny^n$$

ou

$$y^{n+2}(1 - x^2) - (2n+1)xy^{n+1} - n^2y^n = 0. \tag{2}$$

Cette relation entre trois dérivées consécutives permettrait difficilement d'avoir l'expression générale de y^n. Mais, si l'on veut simplement avoir les dérivées pour $x = 0$, on constate que, pour cette valeur, la relation (2) se réduit à

$$y_0^{n+2} = n^2 y_0^n$$

ce qui donne immédiatement l'expression générale de y_0^n.

$$y_0^{2p} = 0, \qquad y_0^{2p+1} = 1^2 \cdot 3^2 \cdots (2p-1)^2.$$

De sorte que l'application de la formule de Mac-Laurin donne

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Ce développement n'est valable que pour $|x| \leqslant 1$.

Méthode du développement de la dérivée. — Il peut parfois être plus simple de développer en série la dérivée quand cette dérivée est elle-même une fonction plus simple que la fonction donnée.

Nous savons que si ce développement est convergent dans un cercle de convergence, et par suite dans un intervalle réel $-R, +R$, en intégrant terme à terme, la série, on obtient l'intégrale de la fonction représentée par la série : le développement obtenu est valable dans le même intervalle.

Prenons par exemple la fonction

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

On a $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Or on peut développer

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

par la formule du binôme si $|x| < 1$. On a (par simple division)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots$$

En intégrant la série terme à terme, on obtient donc

$$\text{arc tg } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

développement valable dans le même intervalle. Le développement est même valable pour $x = \pm 1$.

On pourait employer le même procédé pour la fonction $y = \text{arc sin } x$, dont la dérivée $y' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ peut être développée en série par la formule du binôme pour $|x| \leqslant 1$.

II. — APPLICATIONS. CALCUL DES LOGARITHMES DES NOMBRES

Nous avons trouvé pour le développement de $\log (1 + x)$ la formule suivante (valable si $|x| < 1$)

$$\log (1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$$

Appliquons cette formule aux valeurs suivantes

$$x = \frac{1}{15}, \qquad x = \frac{1}{24}, \qquad x = \frac{1}{80}.$$

Nous obtiendrons d'abord

$$\log\left(1 + \frac{1}{15}\right) = \log \frac{16}{15} = 3 \log 2 - \log 3 - \log 5 = \frac{1}{15} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15^2} + \cdots$$

Les termes de la série du second membre varient sensiblement comme les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{15}$. Comme la série est alternée, si l'on s'arrête au terme $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{15^n}$ l'erreur est moindre que $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{15^{n+1}}$. Pour obtenir le développement à $\frac{1}{10^7}$ près, il faut que $(n + 1)15^{n+1} > 10^7$. Cette inégalité est satisfaite à partir de $n = 4$. Il suffit donc de calculer les quatre premiers termes du développement.

De même on aura très facilement, avec une très grande approximation

$$\log\left(1 + \frac{1}{24}\right) = \log \frac{25}{24} = 2 \log 5 - 3 \log 2 - \log 3 = \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24^2} + \cdots$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{80}\right) = \log \frac{81}{80} = 4 \log 3 - 4 \log 2 - \log 5 = \frac{1}{80} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{80^2} + \cdots$$

ω, ρ

On obtient ainsi trois équations à trois inconnues : log 2, log 3, log 5.

En les résolvant, on aura ces logarithmes avec une très grande approximation.

α

Pour avoir log 7, il suffit d'appliquer la formule à $x = \frac{1}{49}$. On aura facilement avec une grande approximation

$$\log\left(1 + \frac{1}{49}\right) = \log\frac{50}{49} = 2\log 5 + \log 2 - 2\log 7 = \frac{1}{49} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49^2} + \cdots$$

Cette égalité ne renferme comme inconnue nouvelle que log 7.

α

Pour avoir log 11, on appliquera à $x = \frac{1}{120}$ ce qui donnera

$$2\log 11 - 3\log 2 - \log 3 - \log 5;$$

et ainsi de suite.

φ

On sait qu'il suffit de connaître les logarithmes des nombres premiers successifs.

Pour passer ensuite des logarithmes népériens aux logarithmes

σ₂

vulgaires, on sait qu'il faut multiplier les premiers par

$$\frac{1}{\log 10} = 0{,}4342944.$$

Calcul des logarithmes des lignes trigonométriques. — Dans les formules de Mac-Laurin relatives à sin x, cos x, tg x, par exemple

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

τ

x représente l'arc relatif à un nombre de degrés donnés, dans le cercle de rayon unité. Étant donné un angle en degrés, minutes, et secondes ou en grades, il faut donc pouvoir calculer

β

l'arc x correspondant ; il est donc nécessaire de connaître π. En dehors des méthodes géométriques, il existe des méthodes purement analytiques donnant la valeur de π.

σ₁

Si par exemple dans la formule donnant arc tg x, nous faisons $x = 1$, nous obtenons

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$$

Mais cette formule est impraticable ; on sait que dans cette série alternée, l'erreur commise en s'arrêtant à un terme donné est de l'ordre du dernier terme négligé,

Pour calculer $\frac{\pi}{4}$ avec une approximation seulement de $\frac{1}{100}$, il serait nécessaire de calculer les cinquante premiers termes du développement.

Nous allons obtenir une série beaucoup plus rapidement convergente.

Considérons l'arc φ dont la tg soit égale à $\frac{1}{5}$.

Nous aurons

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{(5)^3} + \cdots = \text{A}.$$

Dans le développement du second membre, les termes se succèdent sensiblement comme les termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$. Cette série est donc assez rapidement convergente. En calculant seulement jusqu'au terme $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7}$, on aura la valeur de la série avec une approximation de $\frac{1}{10^7}$.

Calculons tg 4φ. A priori, on voit que la valeur sera très voisine de l'unité. On a successivement

$$\text{tg}\,2\varphi = \frac{2\,\text{tg}\,\varphi}{1 - \text{tg}^2\,\varphi} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\text{tg}\,4\varphi = \frac{120}{119}.$$

L'angle 4φ est donc légèrement supérieur à $\frac{\pi}{4}$.

On aura ensuite

$$\text{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Cet angle est donc très petit et on peut calculer facilement avec la plus grande approximation

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{239}\right)^3 + \cdots = \text{B}.$$

(6) Des valeurs de A et B, on déduit

$$\frac{\pi}{4} = 4A - B = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \cdots\right).$$

Nous savons donc maintenant transformer un angle en arc et nous pouvons appliquer les formules donnant $\sin x$ et $\cos x$. Connaissant ces valeurs, on prendra les logarithmes de ces nombres.

Développement de l'expression $y = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Enfin à titre d'exercice considérons l'expression

$$y = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Elle intervient en astronomie dans l'étude du mouvement des planètes : α représentant un nombre très petit, nous voulons obtenir le développement de l'expression suivant les puissances croissantes de α. Ces valeurs seront ainsi moins pénibles à calculer que par un calcul direct.

(5) Posons donc

$$y = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 + t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Avec $t = -\alpha(2x - \alpha)$.

(4) Nous voyons immédiatement que la formule du binôme permettra de développer y suivant les puissances croissantes de t. Nous chercherons ensuite les termes de même degré en α, ce qui nous permettra d'ordonner le développement de y suivant les puissances croissantes de α. (5₁) On a donc successivement

$$y = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \cdots$$

Nous écrirons simplement le terme général

$$y = \sum \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-m+1\right)}{m!} t^m$$

$$= \sum (-1)^m \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2^m m!} t^m = \sum \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2^m m!} \alpha^m (2x-\alpha)^m.$$

(4) Cherchons alors dans les divers termes de Σ, les termes d'un degré donné n en α. Nous n'aurons un pareil terme que si

$$m < n < 2m.$$

Si nous considérons le terme écrit renfermant α^m en facteur, il faudra dans le développement du binôme, prendre le terme de degré $n - m$.

δ_1

Or on a

$$(2x - \alpha)^m = \Sigma C_m^k (-1)^k (2x)^{m-k} \alpha^k.$$

Et si nous faisons $k = n - m$, nous aurons le terme

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2^m m!} (-1)^{n-m} C_m^{n-m} (2x)^{2m-n}.$$

ω

L'ensemble des termes en α^n aura donc pour coefficient

$$\sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2^m m!} (-1)^{n-m} C_m^{n-m} (2x)^{2m-n}$$

avec comme condition $m \leqslant n \leqslant 2m$.

α, ν

n étant fixe et m variable, nous allons évidemment mettre en évidence les éléments ne dépendant que de n. A cet effet,

δ_1

nous écrirons cet ensemble sous la forme

$$\sum \frac{2m!}{2^{2m}(m!)^2} (-1)^{n-m} \frac{m!}{(n-m)!\,(2m-n)!} (2x)^{2m-n}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum \frac{n!}{m!\,(n-m)!} [2m(2m-1) \cdots (2m-n+1)(-1)^{n-m} x^{2m-n}]$$

ρ, R_1

On remarque que le facteur mis entre parenthèses représente la dérivée n^e de $(-1)^{n-m} x^{2m}$.

L'ensemble s'écrit donc

$$\frac{1}{2^n n!} D_n \sum (-1)^{n-m} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} x^{2m}.$$

ρ, R

Or la somme représente le développement de $(x^2 - 1)^n$.

ω

Polynômes de Legendre. — Le coefficient de α^n est donc finalement

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n.$$

On voit que X_n est un polynôme de degré n en x. On peut donc écrire

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \cdots + \alpha^n X_n + \cdots$$

Les polynômes X_n portent le nom de « polynômes de Legendre ». Ils jouissent de propriétés intéressantes :

1° Tout d'abord, ces polynômes ont toutes leurs racines réelles et comprises entre -1 et $+1$, comme on le voit en considérant la fonction $z = (x^2 - 1)^n$: Cette fonction a toutes ses racines réelles (n racines 1, n racines -1). En appliquant successivement le théorème de Rolle à toutes les dérivées successives on voit que toutes les racines de $D^n(x^2 - 1)^n$ sont réelles et séparées par les racines de $D^{n-1}(x^2 - 1)^n$.

2° Ces polynômes satisfont à une équation différentielle du deuxième ordre.

En posant $z = (x^2 - 1)^n$, on a en dérivant logarithmiquement

$$\frac{z'}{z} = \frac{2nx}{x^2 - 1} \quad \text{ou} \quad (x^2 - 1)z' - 2nxz = 0.$$

A son tour, cette dernière équation peut facilement être dérivée $n + 1$ fois, en appliquant la formule de Leibnitz à ses deux termes. On obtiendra seulement

$$[(x^2 - 1)z^{n+2} + 2(n+1)xz^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} 2z^n] - 2n[xz^{n+1} + (n+1)z^n] = 0.$$

ou en simplifiant

$$(x^2 - 1)z^{n+2} + 2xz^{n+1} - n(n+1)z^n = 0.$$

En remplaçant dans cette équation, z^n par $\frac{1}{2^n n!} X_n$ il vient

$$(x^2 - 1)X_n'' + 2xX_n' - n(n+1)X_n = 0.$$

Telle est l'équation différentielle cherchée.

3° On peut enfin établir une relation de récurrence entre trois polynômes successifs X_{n-1}, X_n, X_{n+1}. On a en effet

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \cdots + \alpha^n X_n + \cdots$$

En dérivant logarithmiquement les deux membres de cette égalité par rapport à α, nous avons la nouvelle identité

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x + 2\alpha}{1 - 2\alpha x + \alpha^2} = \frac{X_1 + 2\alpha X_2 + \cdots + n\alpha^{n-1} X_n + \cdots}{1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \cdots}.$$

En chassant les dénominateurs il vient

$$(x-\alpha)(1+\alpha X_1+\cdots+\alpha^n X_n+\cdots)=(1-2\alpha x+\alpha^2)(X_1+2\alpha X_2\cdots).$$

δ_1

Cette équation étant considérée comme une identité en α, en égalant les coefficients des diverses puissances de α, par exemple les coefficients de α^n, on obtient

$$xX_n - X_{n-1} = (n+1)X_{n+1} - 2nxX_n + (n-1)X_{n-1}.$$

ou en réduisant

$$(1) \qquad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

Cette formule permet aisément de démontrer encore par récurrence que si les polynômes X_n et X_{n-1} ont toutes leurs racines réelles (les racines de X_{n-1} séparant celles de X_n), le polynôme X_{n+1} aura aussi toutes ses racines réelles séparées par celles de X_n.

δ_1, ξ

En effet pour deux racines consécutives α, β de X_n, on a d'après (1)

$$(n+1)X_{n+1}(\alpha) = -nX_{n-1}(\alpha)$$
$$(n+1)X_{n+1}(\beta) = -nX_{n-1}(\beta).$$

σ_2

Or par hypothèse, il y a une racine de X_{n-1} entre α et β ; $X_{n+1}(\alpha)$ et $X_{n+1}(\beta)$ sont donc de signes contraires. Il y a donc bien une racine de X_{n+1} entre α et β c'est-à-dire entre deux racines consécutives quelconques de X_n. On démontrerait facilement qu'il y a une racine entre $-\infty$ et la première racine de X_n et de même une racine entre la dernière de X_n et $+\infty$.

Limites de certaines expressions indéterminées. — Les développements en série permettent de rechercher la limite de certaines expressions qui se présentent sous une forme indéterminée pour des valeurs a, b, $\cdots$ des variables.

Dans le cas d'une variable, supposons que, pour une valeur a de la variable, la fonction $f(x)$ n'ait pas été définie et ne présente plus aucun sens, qu'elle se présente par exemple sous l'une des formes $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0\times\infty$ ou enfin $\infty-\infty$.

On dit qu'elle prend une forme indéterminée. On convient d'appeler « vraie valeur » de l'expression pour $x=a$, la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers a. Ce n'est qu'une façon,

logique sans doute, et pour assurer la continuité, d'assigner une certaine valeur à la fonction pour $x = a$, mais on pourrait à priori s'imposer telle autre valeur.

La détermination de la vraie valeur ne présente plus alors aucune difficulté : il suffira de chercher la limite de $f(a + h)$, lorsque h tend vers zéro.

Supposons par exemple que la fonction soit donnée sous la forme $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ et que l'on ait $\varphi(a) = \psi(a) = 0$.

Il faudra alors chercher la limite du rapport des parties principales de $\varphi(a + h)$, $\psi(a + h)$.

Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont développables en série pour des valeurs voisines de a, il suffira de prendre le rapport des premières dérivées qui ne s'annulent pas pour $x = a$. Cette limite ne sera finie et non nulle que si ces premières dérivées sont du même ordre.

Les autres cas d'indétermination, comme on l'a vu en mathématiques générales, peuvent être ramenés à ce cas.

Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on appellera de même vraie valeur d'une fonction $f(x, y)$, qui devient indéterminée pour $x = a$ et $y = b$, la limite de $f(a + h, b + k)$, lorsque h et k tendent simultanément vers zéro. Mais ici, il faut remarquer que cette limite dépendra en général de la façon dont h et k tendront vers zéro.

Ainsi supposons par exemple que $f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$ et que l'on ait $\varphi(a, b) = 0$, $\psi(a, b) = 0$.

Nous devons considérer la limite de $\frac{\varphi(a + h, b + k)}{\psi(a + h, b + k)}$.

Si les fonctions φ, ψ peuvent être développées par la formule de Taylor, on aura

$$\varphi(a + h, b + k) = \varphi(a, b) + h\frac{\partial\varphi}{\partial a} + k\frac{\partial\varphi}{\partial b} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)}\varphi + \cdots$$

$$\psi(a + h, b + k) = \psi(a, b) + h\frac{\partial\psi}{\partial a} + k\frac{\partial\psi}{\partial b} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)}\psi + \cdots$$

Comme $\varphi(a, b) = \psi(a, b) = 0$, en supposant les quatre

dérivées partielles du premier ordre non nulles simultanément pour a, b

$$\frac{\varphi(a+h,\ b+k)}{\psi(a+h,\ b+k)} = \frac{h\dfrac{\partial\varphi}{\partial a} + k\dfrac{\partial\varphi}{\partial b} + \cdots}{h\dfrac{\partial\psi}{\partial a} + k\dfrac{\partial\psi}{\partial b} + \cdots}.$$

Faisons tendre h et k vers zéro mais en les assujettissant par exemple à vérifier une relation $k = \lambda h$, λ étant une constante choisie arbitrairement. On aura

$$\frac{\varphi(a+h,\ b+k)}{\psi(a+h,\ b+k)} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial b} + \dfrac{h}{2!}\left(\dfrac{\partial}{\partial a} + \lambda\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)}\varphi + \cdots}{\dfrac{\partial\psi}{\partial a} + \lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial b} + \dfrac{h}{2!}\left(\dfrac{\partial}{\partial a} + \lambda\dfrac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)}\psi + \cdots}.$$

Lorsque h tendra vers zéro, la limite du second membre sera

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial a} + \lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial b}}.$$

Cette limite dépend donc en général de λ c'est-à-dire de la manière dont h, k ont tendu simultanément vers zéro. Elle n'en serait indépendante que dans le cas où l'on aurait

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial a}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial b}}.$$

La limite serait alors égale, quels que soient h et k, à ces rapports mêmes.

Si les dérivées partielles du premier ordre étaient nulles, on considérerait les termes du second ordre et ainsi de suite.

CHAPITRE VIII

MAXIMUM ET MINIMUM

SOMMAIRE.

Fonction d'une variable : Distance d'un point à une courbe.
Fonction de deux variables : Étude complète. — Cas douteux. — Conditions nécessaires et suffisantes. — Distance d'un point à une surface.
Fonctions de trois variables : Cas douteux. — Conditions nécessaires et suffisantes.
Généralisation : Étude d'une inégalité. — Invariant simultané.
Généralisation : Cas de moins de $(n-1)$ carrés indépendants.
Maximum relatif : Méthode des multiplicateurs. — Cas des fonctions implicites. — Point mobile se déplaçant dans deux millieux.
Méthode de Fermat : Applications.

L'étude de la variation des fonctions a été faite au cours de mathématiques générales. Nous avons plus spécialement en vue la recherche des maxima ou minima d'une fonction de une ou de plusieurs variables.

I. — FONCTIONS D'UNE VARIABLE

On dit qu'une fonction $y = f(x)$ passe par un maximum pour $x = x_0$, si l'on peut déterminer un intervalle η suffisamment petit pour que l'on ait

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$$

pour toute valeur de h $(\gtrless 0)$ satisfaisant à la seule condition $|h| < \eta$.

Si au contraire l'on a dans les mêmes conditions

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0,$$

on dit que la fonction passe par un minimum.

THÉORÈME. — *Si la fonction passe par un maximum ou minimum pour la valeur x_0, et si elle admet une dérivée pour des valeurs voisines et de part et d'autre de x_0, cette dérivée s'annule pour x_0.*

ξ

En effet la dérivée est la limite commune de

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{+ h} \quad \text{et de} \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{- h}.$$

Or, si la fonction passe par un maximum ou minimum pour x_0, et si $|h| < \eta$, les numérateurs de ces deux fractions sont de même

δ_1

signe. Les deux fractions sont de signes contraires. Leurs limites ne peuvent donc qu'être de signes contraires ou nulles. Comme ces limites sont les mêmes, la limite commune qui est la dérivée de la fonction au point x_0 est nulle.

Voyons si dans ce cas il y a réellement maximum ou minimum.

Pour nous placer dans le cas général, il pourra arriver que non seulement la dérivée première s'annule pour x_0, mais qu'un certain nombre de dérivées suivantes s'annulent également pour cette valeur.

Soit $f^n(x)$ la première dérivée qui ne s'annule pas pour x_0.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction, qui admet des dérivées successives, passe par un maximum ou minimum pour x_0, est que la première dérivée qui ne s'annule pas pour la valeur x_0 soit une dérivée d'ordre pair.*

δ, α

En effet, la formule de Taylor appliquée jusqu'à la dérivée n^e se réduit alors à

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0 + \theta h) \qquad 0 < \theta < 1.$$

Puisque par hypothèse, $f^n(x_0) \not\equiv 0$, on peut supposer h et par suite θh suffisamment petit, pour que $f^n(x_0 + \theta h)$ ait le signe de $f^n(x_0)$.

ω

Si n est pair, le second membre conserve donc un signe constant quel que soit h.

Si $f^n(x_0) < 0$ la différence $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est négative : la fonction passe donc par un maximum.

Si $f^n(x_0) > 0$ il y aura minimum.

Si n est impair, la différence change de signe avec h : il n'y a donc ni maximum ni minimum.

REMARQUE. — On ne doit donc rechercher les maxima ou les minima, lorsque la variable doit varier dans un intervalle a, b, que pour les valeurs de x pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'exister ou d'être continue, ou pour les limites mêmes de l'intervalle (car la définition suppose que la fonction puisse prendre des valeurs de part et d'autre de x_0) ou enfin pour les valeurs qui annulent la dérivée.

1° Considérons par exemple la fonction

$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}.$$

Elle admet visiblement un minimum (nul) pour $x = 0$. Cependant cette valeur n'est pas obtenue en annulant la dérivée

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}.$$

C'est que, pour cette valeur, la dérivée est discontinue.

2° Considérons la parabole $y^2 - 2px = 0$. Prenons un point A sur ox, un point M (x, y) variable sur la parabole, et cherchons le maximum ou minimum de la distance AM.

On a

$$\overline{AM}^2 = (x - a)^2 + y^2 = x^2 + 2px - 2ax + a^2 = z.$$

La valeur qui annule la dérivée est $x = a - p$.

Pour que le point soit réel, il faut que x soit positif. Si donc $p > a$, il semble qu'il n'y ait ni maximum ni minimum. Cependant z passe visiblement par un minimum pour $x = 0$. Cette valeur n'est cependant pas obtenue en annulant la dérivée : c'est que zéro est une limite du champ de variation de x.

On arriverait à un résultat analogue en cherchant le maximum ou minimum de la distance d'un point à un cercle.

3° Supposons enfin $y = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$.

Puisque la fonction est constamment positive ou nulle, elle admet un minimum (zéro) pour $x = 0$.

La dérivée est

$$y' = 2x \sin^2 \frac{1}{x} - 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

Elle s'annule pour les valeurs annulant $\sin \frac{1}{x}$, qui correspondent à des minima nuls ; pour les valeurs satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

équation qui admet, comme on sait, une infinité de racines et auxquelles correspondent les maxima successifs $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$.

Enfin la dérivée n'est pas définie pour $x = 0$.

C'est une valeur qui pourrait correspondre à un maximum ou à un minimum : c'est ce qui a lieu en effet.

Application. Distance d'un point à une courbe.

Soit l'équation d'une courbe $y = f(x)$ (1) *en coordonnées rectangulaires.*

Cherchons le maximum ou le minimum du carré de la distance d'un point donné $A(a, b)$ *à un point variable* $M(x, y)$ *de la courbe.*

Le carré de cette distance est

$$u = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

expression dans laquelle il faut remplacer y en fonction de x.

On a

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} = (x - a) + (y - b)y' \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} = 1 + y'^2 + (y - b)y''. \tag{3}$$

La dérivée première s'annule pour les valeurs satisfaisant à

$$x - a + (y - b)y' = 0. \tag{4}$$

Lorsqu'on remplace y et y' en fonction de x, c'est une équation en x qui détermine les points pouvant correspondre à un maximum ou un minimum.

Cette équation exprime que les deux droites de coefficients angulaire $\frac{y - b}{x - a}$ et y' sont rectangulaires : ce sont la droite AM et la tangente MT en M à la courbe.

ω

Le point M doit donc être (en laissant le cas où y' serait indéterminée ou discontinue) le pied d'une des normales issues de A.

Voyons s'il y a réellement maximum ou minimum.

Ces points étant bien déterminés par les équations (1) et (4),

α, γ

nous pouvons supposer que nous prenons l'un de ces points pour origine des coordonnées, l'axe des x étant la tangente en ce point. Pour ce point on doit donc avoir

$$x = y = y' = 0.$$

δ_1

L'équation (2), qui se réduit à $a = 0$, montre bien que le point A est sur la normale oy. Pour ces valeurs on a

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} = 1 - by''(o).$$

ρ

Si $y''(o) = 0$, c'est-à-dire si le point M est point d'inflexion, on aura constamment $\frac{d^2u}{dx^2} > 0$: il y a donc certainement minimum quel que soit A.

ξ

Si $y''(o) \gtrless 0$, le signe dépend de b, c'est-à-dire de la position de A sur oy. On peut supposer par exemple $y''(o) > 0$, c'est-à-dire que la courbe tourne sa concavité vers les y positifs

Considérons sur oy le point C, de cote $\beta = \frac{1}{y''(o)}$.

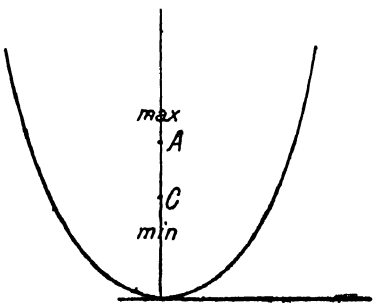


Fig. 4.

δ_1

On aura

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} = y''(o) \times (\beta - b).$$

ω

Si $b < \beta$ c'est-à-dire si A est au-dessous de C, on a $\frac{d^2u}{dx^2} > 0$: il y a minimum.

Si A est au-dessus de C, il y a maximum.

Si A coïncide avec C, il faut considérer la dérivée 3e de u. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d^3u}{dx^3} = (y - b)y''' + 3y'y''.$$

Cette dérivée se réduit à l'origine à $-by'''(o)$.

Si $y'''(o) \neq 0$, il n'y aura ni maximum ni minimum.

Si $y'''(o) = 0$, il faut recourir à la dérivée 4e

$$\frac{1}{2}\frac{d^4u}{dx^4} = (y - b)y^{IV} + 4y'y''' + 3y''^2.$$

Pour l'origine elle se réduit à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 = -by^{IV}(o) + 3y''^2(o) = \frac{1}{y''(o)}\left(3y''^3(o) - y^{IV}(o)\right).$$

Si $u^{IV} > 0$, il y a minimum.

Si $u^{IV} < 0$, il y a maximum.

Le point C situé sur la normale en M et dont on constate l'importance s'appelle le centre de courbure de la courbe en M.

II. — FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Soit une fonction de deux variables $z = f(x, y)$, continue lorsque le point x, y se déplace à l'intérieur d'un champ donné.

On dit que cette fonction, est minimum pour le point x_0, y_0 du champ, si l'on peut déterminer un nombre η tel que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geqslant 0 \tag{1}$$

pour toutes valeurs de h et k satisfaisant aux inégalités

$$|h| < \eta, \qquad |k| < \eta.$$

Ces inégalités expriment que le point $x_0 + h$, $y_0 + k$ se déplace dans un carré de centre x_0, y_0 dont les côtés sont parallèles aux axes et égaux à 2η.

Remarquons aussitôt que cette dernière condition pourrait être remplacée par la condition que l'on puisse trouver un nombre ρ tel que $h^2 + k^2 < \rho^2$, inégalité qui exprime que le point x, y se déplace

à l'intérieur d'un cercle C de rayon ρ. Si l'on se donne en effet un carré Q, il suffit de prendre pour C un cercle inscrit dans ce carré. Si l'on se donne un cercle C, il suffit de prendre pour Q un carré inscrit.

On dit de même que la fonction est maximum pour x_0, y_0 si, dans les mêmes conditions, on avait

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leqslant 0$$

THÉORÈME. — *Si la fonction admet des dérivées partielles au point x_0, y_0, une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'il y ait maximum ou minimum est que ces dérivées soient nulles en ce point.*

En effet, dans le cas d'un minimum, dans l'inégalité (1), on peut supposer en particulier $k = 0$. On doit donc avoir

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \leqslant 0 \tag{1'}$$

pour toute valeur de h satisfaisant à $|h| \leqslant \eta$.

L'inégalité (1') exprime que la fonction $f(x, y_0)$, considérée comme fonction de x seulement, est minimum pour la valeur x_0. Puisqu'elle admet une dérivée $f_x'(x, y_0)$, cette dérivée doit être nulle pour la valeur x_0 :

$$f_x'(x_0, y_0) = 0.$$

On aurait de même $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

On peut même ajouter que si la fonction admet des dérivées secondes f''_{x^2}, f''_{y^2}, non nulles, ces dérivées doivent être positives s'il y a minimum, négatives s'il y a maximum.

On peut bien concevoir que les conditions $f_x' = 0$, $f_y' = 0$ ne soient pas suffisantes puisque les inégalités doivent avoir lieu non seulement pour la valeur particulière $k = 0$ ou $h = 0$ mais quelles que soient les valeurs de h, k satisfaisant à $h^2 + k^2 \leqslant \rho^2$.

Les systèmes de valeurs qui peuvent rendre maximum ou minimum $f(x, y)$ doivent donc être recherchés parmi les systèmes qui satisfont à

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

ou parmi les systèmes de valeurs pour lesquels la fonction ou ses dérivées sont infinies ou cessent d'exister.

Étude complète. — Nous allons rechercher s'il y a réellement maximum ou minimum. Cette étude sera assez délicate et demandera une grande attention (surtout dans les cas douteux que nous rencontrerons) parce qu'il n'y a aucun rapport entre les ordres d'infinitude de deux ou trois infiniment petits h, k, l et on ne peut affirmer à priori par exemple qu'un groupe homogène du 3e degré en h, k, l soit infiniment petit par rapport à un groupe du 2e degré.

Supposons que la fonction admette des dérivées du 2e, 3e et 4e ordre. En donnant à x, y les accroissements h, k et en appliquant la formule de Taylor d'abord jusqu'aux termes du 3e ordre, en tenant compte des équations (2), on a

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\right) + \frac{1}{3!}\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Nous désignerons respectivement par T_2 et T_3 les deux parenthèses du second membre.

T_2 est une forme homogène et du second degré en h, k

$$T_2 = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

dont les coefficients sont constants, valeurs des dérivées secondes de f au point x_0, y_0.

T_3 est une forme homogène et du troisième degré en h, k dont les coefficients sont variables avec h et k, mais qui, lorsque h et k tendent vers zéro, tendent vers les valeurs des dérivées troisièmes de f au point x_0, y_0.

Nous voulons étudier le signe de Δ pour toutes les valeurs de h et k satisfaisant à une inégalité de la forme $h^2 + k^2 \leq \rho^2$.

Remarquons qu'il n'est pas possible de parler d'ordre d'infinitude de T_2 et T_3 en supposant h et k infiniment petits puisqu'il n'y a aucune relation entre ces infiniment petits (il pourrait parfaitement arriver que T_2 fût d'un ordre infinitésimal supérieur à T_3 si $ac = 0$).

Nous poserons

$$h = lh', \qquad k = lk'$$

avec

$$h^2 + k^2 = l^2 \qquad \text{d'où} \qquad h'^2 + k'^2 = 1$$

l pouvant être positif ou négatif.

β

La différence Δ devra conserver un signe constant à la seule condition $l^2 \leqslant \rho^2$, ρ désignant une quantité suffisamment petite.

Étudions d'abord T_3. Les dérivées troisièmes étant continues, on

ρ

peut supposer l et par suite h et k suffisamment petits, pour que ces dérivées en $x_0 + \theta h$, $y_0 + \theta k$ diffèrent des valeurs en x_0, y_0 d'aussi peu qu'on le voudra, quels que soient h, k et à fortiori pour qu'elles restent inférieures, en valeur absolue, à un nombre fixe m. Il en résulte que l'on aura $| T_3 | < m[| h | + | k |]^3$ et comme h et k sont séparément inférieurs à $| l |$ en valeur absolue, on aura certainement $| T_3 | < 8m|l^3|$.

Étudions T_2. On a

$$T_2 = ah^2 + 2bhk + ck^2 = l^2(ah'^2 + 2bh'k' + ck'^2) = l^2 T_2'.$$

ξ

1er Cas. $b^2 - ac > 0$.

Supposons que le trinôme du second degré T_2' en $h'k'$ admette des

σ_2

racines réelles c'est-à-dire $b^2 - ac > 0$. On sait alors que l'on peut mettre ce trinôme sous forme de différence de deux carrés

$$T_2' = U^2 - V^2,$$

U et V étant homogènes linéaires, indépendants en h', k'. On aura donc finalement

$$\Delta = \frac{1}{2} l^2(U^2 - V^2) + \frac{1}{6} T_3.$$

ψ

Je dis que, quelque petit que l'on choisisse ρ, on peut trouver des systèmes de valeurs de h', k' et par suite de h, k qui donnent à Δ des valeurs soit positives, soit négatives.

δ_1

Si nous voulons en effet que Δ soit positif, donnons à h' et k' des valeurs telles que $V = 0$. Pour ces valeurs, U prend une valeur non nulle U_0. On a donc

$$\Delta = \frac{1}{2} l^2 U_0^2 + \frac{1}{6} T_3$$

et comme $| T_3 | < 8m|l^3|$ on a

$$\Delta > \frac{1}{2} l^2 U_0^2 - \frac{4}{3} m|l^3|$$

Δ sera donc certainement positif si $l < \frac{3U_0^2}{8m}$: il suffit donc de prendre $\rho = \frac{3U_0^2}{8m}$.

De même, si nous voulons que Δ soit négatif, nous choisirons des valeurs h', k' satisfaisant à $U = 0$. Pour ces valeurs V prend une valeur V_0. On aura

$$\Delta = -\frac{1}{2} l^2 V_0'^2 + \frac{1}{6} T_3 < -\frac{1}{2} l^2 V_0'^2 + \frac{4}{3} m|l^3|$$

Δ sera donc négatif si $l < \frac{3V_0'^2}{8m}$.

La différence Δ pouvant prendre des valeurs de signes contraires, pour des systèmes convenables de h, k, il n'y a donc ni maximum ni minimum.

2e Cas. — $b^2 - ac < 0$.

Dans ce cas, le trinôme du second degré en h, k conserve un signe constant, celui de a par exemple ou de $f''_{x^2_0}$. (On pourrait également affirmer ici que, en supposant h et k infiniment petits et quel que soit leur ordre respectif, T_3 est infiniment petit par rapport à T_2).

Je dis qu'il est alors possible de trouver une valeur de ρ suffisamment petite pour que Δ conserve un signe constant : la fonction passera donc bien par un extrémum.

En effet pour les systèmes de valeurs de h' et k' satisfaisant à $h'^2 + k'^2 = 1$, le trinôme du second degré admet alors (si $a < 0$) un minimum positif μ. On a alors

$$\Delta > \frac{1}{2} \mu l^2 - \frac{4}{3} m|l^3|.$$

Si donc on prend $l < \frac{3\mu}{8m}$, on aura bien, quels que soient h et k, $\Delta > 0$.

La fonction passera par un minimum.

De même si $a < 0$, le trinôme est constamment négatif et admet un maximum négatif $-\mu$. On aura

$$\Delta < -\frac{1}{2} \mu l^2 + \frac{4}{3} m|l^3|$$

Δ sera donc négatif, quels que soient h et k, si l'on prend $l < \frac{3\mu}{8m}$.

Il y aura maximum.

Cas douteux. — 3e Cas. $b^2 - ac = 0$.

Le trinôme du second degré T_2' est alors le carré d'une forme linéaire en h' et k' laquelle s'annule pour h_0', k_0'

$$T_2' = aP^2.$$

Dans ce cas pour étudier Δ, nous appliquerons la formule de Taylor jusqu'aux termes du 4e ordre et écrirons

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f + \frac{1}{6}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(3)} f + \frac{1}{24}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

d'où

$$\frac{\Delta}{l^2} = \frac{1}{2}T_2' + \frac{1}{6}lT_3' + \frac{1}{24}l^2T_4', \qquad T_2' = \left(h'\frac{\partial}{\partial x} + k'\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(2)} f(x_0 y_0), \text{ etc.}$$

En général pour chaque système de valeurs h', k' n'annulant pas P, et pour des valeurs de l suffisamment petites, Δ a le signe de T_2', c'est-à-dire de $a = f'_{x_0^2}$, donc conserve un signe constant. Mais que se passe-t-il pour des valeurs de h', k' voisines de h_0', k_0' et en particulier pour h_0', k_0' ? Pour ces valeurs

$$T_2'(h_0', k_0') = 0.$$

Si $T_3'(h_0', k_0') \not\equiv 0$, pour des valeurs de l suffisamment petites, Δ est du signe de $l^3T_3'(h_0', k_0')$. Or on peut supposer que l est positif ou négatif. Δ pourrait donc prendre des valeurs tantôt positives tantôt négatives : il n'y a donc ni maximum ni minimum.

Pour qu'il puisse y avoir extrémum, il est donc nécessaire que $T_3'(h_0', k_0') = 0$.

Pour ces valeurs Δ a alors le signe de $\frac{1}{24}l^4T_4'$. Or si h et k sont suffisamment petits, les dérivées 4es qui figurent dans T_4' ont des valeurs aussi voisines qu'on le veut des dérivées en x_0, y_0, et par suite Δ a le signe de $T_4'(h_0', k_0')$

$$T_4'(h_0'k_0') = \left(h_0'\frac{\partial}{\partial x} + k_0'\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)} f(x_0, y_0).$$

Nous supposerons $T_4'(h_0', k_0') \not\equiv 0$. Il est nécessaire encore que $T_4'(h_0', k_0')$ soit du signe de $a = f''_{x_0^2}$ ou que $aT_4'(h_0', k_0') > 0$.

Mais cette condition n'est pas suffisante : il reste à voir ce qui se passe pour des valeurs voisines de h_0', k_0' qui rendraient $T_2(h', k')$ non nul mais infiniment petit par exemple de l'ordre de l.

Nous poserons

$$h' - h_0' = \xi, \qquad k' - k_0' = \eta.$$

Étudions successivement T'_2, T'_3, T'_4.

On a

$$T_2'(h', k') = aP^2(h', k') = aP^2(\xi, \eta)$$

puisque $P(h'_0, k_0') = 0$.

$P(\xi, \eta)$ est certainement différent de zéro ; sans cela ξ, η seraient proportionnels à h_0', k_0' ; on aurait

$$h' = h_0'(1 + \lambda), \qquad k' = k_0'(1 + \lambda)$$

ce qui est impossible, puisque l'on doit avoir simultanément

$$h'^2 + k'^2 = 1, \qquad h_0'^2 + k_0'^2 = 1.$$

On a

$$= T_3'(h', k') = T_3'(h_0' + \xi, k_0' + \eta)$$
$$= T_3'(h_0'k_0') + \xi \frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial T_3'}{\partial k_0'} + \frac{1}{2}\left(\xi \frac{\partial}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial}{\partial k_0'}\right)^{(2)} T_3' + \cdots$$

Le premier terme est nul. Pour le deuxième groupe, on peut faire ici une remarque très importante : la forme linéaire $\xi \frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial T_3'}{\partial k_0'}$ s'annule pour les valeurs h_0', k_0' qui annulent P. On a en effet

$$h_0' \frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + k_0' \frac{\partial T_3'}{\partial k_0'} = 3T_3'(h_0', k_0') = 0$$

on peut donc certainement poser une identité de la forme

$$\xi \frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial T_3'}{\partial k_0'} = \mu P(\xi, \eta)$$

μ désignant un coefficient numérique. D'ailleurs $P(\xi, \eta)$ est différent de zéro.

Nous allons montrer que l'on peut réduire, dans tous les cas, $T_3'(h', k')$ à son premier groupe et négliger les deux autres groupes.

Supposons d'abord $h_0' \cdot k_0' \not\equiv 0$ c'est-à-dire les coefficients de ξ, η dans P non nuls : il en est de même dans le premier nombre.

Dans ce cas, dans l'expression ci-dessus de $T_3'(h', k')$, on peut alors certainement négliger le groupe

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial}{\partial k_0'}\right)^{(2)} T_3'(h_0', k_0')$$

π

qui est infiniment petit par rapport au premier groupe, quels que soient les ordres d'infinitude de ξ, η.

Si par exemple $k_0' = 0$, $P(h', k')$ se réduit à un terme en k'.

D'autre part $T_3'(h', k')$ est de la forme

$$mh'^3 + 3nh'^2k' + 3ph'k'^2 + qk'^3.$$

δ_1

Et comme $T'_3(h'_0, k'_0) = 0$, il faut que $m = 0$.

Alors

$$T_3'(h', k') = 3n(h_0' + \xi)^2 + 3p(h_0' + \xi)\eta^2 + q\eta^3.$$

ξ, ρ

Les termes du premier degré en ξ, η sont $3nh'^2_0\eta = 3n\eta$.

Les termes du second degré renferment également η en facteur. Ils sont donc aussi certainement négligeables devant ceux du premier degré, et aussi ceux du troisième degré.

ω

Ainsi de toutes façons, on peut réduire $T_3'(h', k')$ à son premier terme

$$\xi \frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial T_3'}{\partial k_0'} = \mu P(\xi, \eta).$$

Étudions enfin T_4'.

Pour T_4', nous avons vu que si h, k sont suffisamment petits,

σ_2

les dérivées qui y figurent sont aussi voisines qu'on le veut des dérivées en x_0, y_0. On peut donc d'abord lui substituer

$$\left(h' \frac{\partial}{\partial x} + k' \frac{\partial}{\partial y}\right)^{(4)} f(x_0, y_0).$$

D'autre part en y remplaçant les valeurs h', k' on a

$$T_4'(h', k') = T_4'(h_0', k_0') + \left(\xi \frac{\partial}{\partial h'} + \eta \frac{\partial}{\partial k'}\right) T_4'(h_0', k_0') + \cdots$$

Comme $T_4'(h_0', k_0') \not\equiv 0$ on peut certainement négliger les termes suivants.

ω

En résumé, on voit que pour toutes les valeurs possibles de ξ, η, on est amené à étudier le signe de la différence

$$\frac{\Delta}{l^2} = \frac{1}{2} a P^2(\xi, \eta) + \frac{1}{6} l\mu P(\xi, \eta) + \frac{1}{24} l^2 T'_4(h_0', k_0').$$

j, δ_1

Cette différence doit conserver un signe constant pour l suffisamment petit ; or, considérée comme un trinôme en P, il faut et il suffit pour cela que

$$\mu^2 - 3a\mathrm{T}'_4(h_0', k_0') < 0.$$

Cette condition entraîne d'ailleurs $a\mathrm{T}_4'(h_0', k_0') > 0$.

ω

Conditions nécessaires et suffisantes. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait extrémum, est donc finalement que

$$\mu^2 - 3a\mathrm{T}'_4(h_0', k_0') < 0.$$

R

Rappelons que nous nous sommes placés dans le cas où

$$b^2 - ac = 0 = (f''_{x_0y_0})^2 - f''_{x_0^2}f''_{y_0^2}$$

et que dans ce cas on peut poser

$$\mathrm{T}_2'(h', k') = f''_{x_0^2}\,\mathrm{P}^2(h', k').$$

P étant linéaire en h', k'. De plus

$$\mathrm{T}_3'(h_0', k_0') = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi\frac{\partial \mathrm{T}_3'}{\partial h_0'} + \eta\frac{\partial \mathrm{T}_3'}{\partial k_0'} = \mu\mathrm{P}(\xi, \eta)$$

h_0', k_0' étant les valeurs qui annulent P (identité qui détermine le coefficient numérique μ).

Nous avons supposé T_2 non identiquement nul, c'est-à-dire que les trois dérivées $f''_{x_0^2}$, $f''_{x_0y_0}$, $f''_{y_0^2}$ ne sont pas simultanément nulles.

ψ, ξ

Si cela avait lieu, il faudrait évidemment que toutes les dérivées troisièmes le fussent également. Il faudrait alors considérer le polynôme homogène $\mathrm{T}_4(h', k')$ qui devrait conserver un signe constant.

Application. — Soit la fonction

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

δ

Ici les valeurs qui annulent f_x', f_y' sont $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

On a

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(h, k) = k^2 - 3h^2k + 2h^4.$$

On a donc

$$\mathrm{T}_2 = 2k^2, \qquad \mathrm{T}_3 = -18h^2k, \qquad \mathrm{T}_4 = 48h^4.$$

ρ

T_2 est bien carré parfait et s'annule pour

$$k_0' = 0, \qquad h_0' = \pm 1.$$

On peut poser

$$a = 2, \qquad P(\xi, \eta) = \eta.$$

δ_1

On a bien

$$T_3'(h_0', k_0') = 0.$$

D'autre part,

$$\xi \frac{\partial T'_3}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial T'_3}{\partial k_0'} = -18 h_0'^2 \eta = \mu P \qquad \text{avec} \qquad \mu = -18 h_0'^2.$$

Enfin

$$T_4'(h_0', k_0') = 48 h_0'^4.$$

ξ

Formons

$$\mu^2 - 3a T_4' = 364 h_0'^4 - 3 \times 2 \times 48 h_0'^4 = 76 h_0'^4.$$

ω

Or cette quanté est positive, il n'y a donc pas maximum ou minimum.

Si l'on considère la surface

$$z = y^2 - 3xy + 2x^4,$$

ρ

le plan $z = 0$ traverse cette surface suivant les paraboles $y = x^2$, $y = 2x^2$. Quelque petit que soit le rayon d'un cercle de

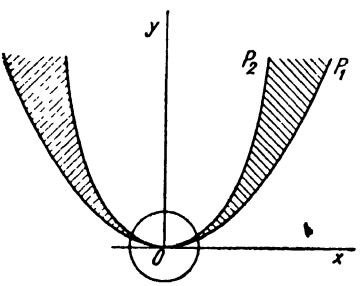


Fig. 5.

centre origine, il y aura à son intérieur des points pour lesquels z sera positif et des points pour lesquels z sera négatif.

Application : distance d'un point à une surface. — Soient

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

l'équation d'une surface, a, b, c les coordonnées d'un point A. Le

carré de la distance de A à un point M(x, y, z) variable sur la surface est

$$u = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Cherchons les positions de M correspondant à un maximum ou minimum de cette distance.

Nous désignerons par p, q les dérivées partielles premières de z, par r, s, t les dérivées secondes.

δ, ξ

Pour les valeurs qui peuvent correspondre à un maximum ou minimum, on doit avoir

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = x - a + p(z - c) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = y - b + q(z - c) = 0. \tag{3}$$

Ces équations jointes à (1) donneront les coordonnées x, y, z du point M. Or les équations (2) et (3) peuvent s'écrire

$$\frac{p}{x - a} = \frac{q}{y - b} = \frac{-1}{z - c}.$$

σ

Elles expriment donc que la direction de paramètres $x - a$, $y - b$, $z - c$, est parallèle à la direction $p, q, -1$, qui est celle de la normale en M. ω La droite AM est donc la normale en M à la surface. Le point M ne peut qu'être le pied d'une des normales à la surface issues de A.

δ_1

Voyons s'il y a réellement maximum ou minimun. Il faut considérer les dérivées secondes

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 + p^2 + (z - c)r$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = pq + (z - c)s$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 + q^2 = (z - c)t.$$

Supposons que nous prenions l'un des points M comme origine et comme plan des xy le plan tangent en ce point. β Les équations (1), (2), (3) devraient être satisfaites pour

$$x = y = z = 0, \qquad p = q = 0.$$

Nous pouvons introduire ces hypothèses. Nous devons considérer la quantité

$$H = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0.$$

On peut encore simplifier, car nous n'avons pas encore fixé la position des axes ox, oy. Or si nous supposons la fonction $f(x, y)$ développable par la formule de Taylor aux environs de l'origine, nous aurions un développement de la forme

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + T_3 + T_4 + \cdots$$

T_3, T_4, ... désignant des termes de degré 2, 3, 4, etc...

α_1

Nous pouvons faire tourner les axes ox, oy dans le plan de manière à prendre pour nouveaux axes les bissectrices, toujours réelles, du système de deux droites

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

r

Le terme en xy disparaîtrait. Nous pouvons donc supposer que cette transformation a été faite, c'est-à-dire $s = 0$.

δ_2, δ

Les équations (2), (3) se réduisent alors à

$$a = 0, \qquad b = 0.$$

σ

Elles signifient bien que le point A est sur la normale en M. Les dérivées secondes se réduisent à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 = 1 - cr, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_0 = 0, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = 1 - ct.$$

ξ

On a ici

$$H = -4(1 - cr)(1 - ct).$$

δ_1

Le signe de H est donc celui d'un trinôme du second degré en c dont les racines sont $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{t}$. Considérons sur oz les deux points c_1, c_2 de côte $z_1 = \frac{1}{r}$, $z_2 = \frac{1}{t}$. On a

$$H = -4rt(c - z_1)(c - z_2).$$

ξ

Trois cas sont à distinguer :

1er Cas : $r \cdot t > 0$. — Par exemple, en choisissant convenablement le sens oz, on peut supposer r, t positifs. Les deux points C_1, C_2

sont donc d'un même côté que M et sur la partie positive de l'axe des z. H est négatif si c est extérieur à l'intervalle z_1, z_2 c'est-à-dire si A n'est pas compris entre C_1, C_2.

ω

Si A est au-dessous de C_1, C_2, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 > 0$, il y a donc minimum.

Si A est au-dessus de C_1, C_2, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 < 0$, il y a maximun.

Si A est entre C_1, C_2, H est positif : il n'y a donc ni maximum ni minimum.

δ_1

2e Cas : $r \cdot t < 0$. — Par exemple $r < 0$, $t > 0$.

Les points C_1, C_2 sont situés de part et d'autre de M ; H est négatif si c est compris entre z_1 et z_2 c'est-à-dire si A est compris entre C_1 et C_2 : d'ailleurs pour ces positions, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 > 0$: il y a donc minimum.

ω

Si A est extérieur à l'intervalle C_1, C_2, il n'y a ni maximum ni minimum.

δ_1

3e Cas : $r \cdot t = 0$. — Par exemple $r = 0$.

Le point C_1 est rejeté à l'infini. On a

$$H = -4t(z_2 - c).$$

Si $c < z_2$ (en supposant $t > 0$), c'est-à-dire si A est au-dessous de C_2, il y a minimum $\left(\left(\frac{\partial x^2}{\partial u}\right)_0 > 0\right)$.

Si A est au-dessus de C_2, il n'y a ni minimum ni maximum.

Si le point A coïncide avec l'un des points C_1 ou C_2 ξ il faudrait considérer les termes du troisième puis du quatrième ordre, etc...

On voit l'importance ρ que jouent dans cette théorie les deux points C_1, C_2 situés sur toute normale à la surface : ce sont les « centres de courbure principaux » de la surface au point M.

III. — FONCTIONS DE TROIS VARIABLES

Soit une fonction f des trois variables x, y, z. On dit qu'elle est minimum pour des valeurs x_0, y_0, z_0 σ_1 si l'on peut trouver un

nombre η suffisamment petit pour que, pour toutes valeurs positives ou négatives de h, k, l inférieures en valeur absolue à η, on ait

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0 y_0 z_0) > 0.$$

On peut évidemment remplacer la condition

$$| h | < \eta, \quad | k | < \eta, \quad | l | < \eta.$$

par une condition de la forme $h^2 + k^2 + l^2 < \rho^2$.

δ, σ_1

Si la fonction admet des dérivées partielles au point x, y, z, ces dérivées doivent s'annuler en ce point. Les valeurs qui peuvent correspondre à un minimum ou un maximum sont donc déterminées par les trois équations

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0.$$

δ_1, ξ

Pour voir s'il y a réellement maximum ou minimum, formons la différence

$$\begin{aligned}\Delta &= f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0 y_0 z_0) \\ &= \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f(x_0 y_0 z_0) + \frac{1}{6}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)^{(3)} f(x_0 y_0 z_0) \\ &+ \frac{1}{24}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)^{(4)} f(x_0 + 0h, y_0 + 0k, z_0 + 0l) = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{6}T_3 + \frac{1}{24}T_4.\end{aligned}$$

α

Posons

$$h = \rho h', \qquad k = \rho k', \qquad l = \rho l' \qquad \text{avec} \qquad \rho^2 = h^2 + k^2 + l^2.$$

ρ pouvant être positif ou négatif.

Les quantités h', k', l' sastisferont donc à $h'^2 + k'^2 + l'^2 = 1$.

Pour tous ces systèmes de valeurs on a

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\rho^2} &= \frac{1}{2}\left(h'\frac{\partial}{\partial x} + k'\frac{\partial}{\partial y} + l'\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f(x_0 y_0 z_0) + \frac{1}{6}\rho\left(h'\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)^{(3)} f(x_0 y_0 z_0) \\ &+ \frac{1}{24}\rho^2\left(h'\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)^{(4)} f(x_0 + 0h \cdots).\end{aligned}$$

Si

$$T'_2(h', k', l') = \left(h'\frac{\partial}{\partial x} + k'\frac{\partial}{\partial y} + l'\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f(x_0, y_0, z_0)$$

ψ

n'est pas nul, pour des valeurs de ρ suffisamment petites, la différence sera du signe de T'_2. Il faut donc d'abord que T'_2 conserve

ρ

un signe constant. Or T'_2 est une forme homogène et du

second degré en h', k', l'. On sait que si le discriminant de la forme n'est pas nul, on peut la décomposer en une somme de trois carrés indépendants au plus, multipliés par des facteurs constants sous la forme

$$T_2' = \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2,$$

P, Q, R étant linéaires en h', k', l'.

Si α, β, γ sont de même signe, il est certain que T_2' conserve un signe constant (celui de α, β, γ) et par suite aussi Δ si ρ est suffisamment petit.

Il y aura maximum si ces coefficients sont négatifs, minimum s'ils sont positifs.

Si α, β, γ ne sont pas de même signe, si par exemple $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$, T_2' sera positif pour les valeurs h', k', l' satisfaisant à $R = 0$; il sera négatif pour des valeurs satisfaisant à $P = 0$, $Q = 0$: il n'y aura donc ni maximum ni minimum.

Cas douteux. — Si l'un des coefficients γ par exemple est nul, l'ensemble T_2' peut s'annuler pour un système de valeurs non toutes nulles de h', k', l' satisfaisant aux deux équations $P = 0$, $Q = 0$, soient h_0', k_0', l_0'. Pour ce système de valeurs, la différence Δ a le signe de T_3' pour des valeurs de ρ suffisamment petites. Si

$$T_3'(h_0', k_0', l_0') \neq 0,$$

en raison du facteur ρ qui peut changer de signe, Δ peut prendre des valeurs tantôt positives tantôt négatives : il n'y aura donc ni maximum ni minimum. Il est donc nécessaire que, pour ce système de valeurs, $T_3'(h_0', k_0', l_0') = 0$ et que $T_4'(h_0', k_0', l_0')$ soit du même signe que α, β.

Mais ces conditions ne sont pas encore suffisantes car l'on ne peut répondre encore du signe de Δ pour des valeurs voisines de h_0', k_0', l_0'.

Nous pousserons l'application de la formule de Taylor jusqu'aux termes du 5e degré. On a

$$\frac{\Delta}{\rho^2} = \frac{1}{2}\left(h'\frac{\partial}{\partial x} + k'\frac{\partial}{\partial y} + l'\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f(x_0 y_0 z_0) + \frac{1}{6}\rho\left(h'\frac{\partial}{\partial x} + k'\frac{\partial}{\partial y} + l'\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(3)} f(x_0 y_0 z_0)$$
$$+ \frac{1}{24}\rho^2\left(h'\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)^{(4)} f(x_0 y_0 z_0) + \frac{1}{120}\left(h'\frac{\partial}{\partial x} + \cdots\right)^{(5)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, z_0 + \theta l)$$
$$= \frac{1}{2}T_2'(h', k', l') + \frac{1}{6}T_3' + \frac{1}{24}T_4' + \frac{1}{120}T_5'.$$

T_2' se met sous la forme d'une somme de deux carrés indépendants en h', k', l', $T_2' = \alpha P^2 + \beta Q^2$ s'annulant tous deux pour les valeurs h_0', k_0', l_0', α et β étant de même signe.

Il faut évidemment comme nous l'avons dit que $T_3'(h_0', k_0', l_0') = 0$, et que $T_4'(h_0', k_0', l_0')$ soit du même signe que α et β.

Que se passe-t-il alors pour des valeurs voisines de h_0', k_0', l_0'?

Puisque $T_4(h_0', k_0', l_0')$ est différent de zéro, on peut certainement négliger le terme en $\rho^5 T_5$ par rapport à $\rho^4 T_4$ si ρ est suffisamment petit.

Pour des valeurs de ρ suffisamment petites, la différence a donc le signe de l'ensemble des trois premiers termes (à condition que cet ensemble ne soit pas nul).

Nous poserons

$$h' - h'_0 = \xi, \qquad k' - k'_0 = \eta, \qquad l' - l'_0 = \zeta.$$

Nous supposerons d'abord que dans $T_2(h', k', l')$ les coefficients des carrés sont tous trois différents de zéro.

Puisque P et Q s'annulent pour h_0', k_0', l_0' on peut écrire

$$P = a\xi + b\eta + d\zeta, \qquad Q = a'\zeta + b'\eta + c'\zeta.$$

Il faut supposer que P et Q ne sont pas tous deux nuls, sans quoi ξ, η, ζ seraient proportionnels à h_0', k_0', l_0', on aurait

$$h' = h_0'(1 + \lambda), \qquad k' = k_0'(1 + \lambda), \qquad l' = l_0'(1 + \lambda),$$

ce qui est impossible, puisqu'on doit avoir simultanément

$$h_0'^2 + k_0'^2 + l_0'^2 = 1, \qquad h'^2 + k'^2 + l'^2 = 1.$$

D'autre part

$$T_3'(h', k', l') = T_3'(h_0', k_0', l_0') + \left(\xi \frac{\partial}{\partial h'} + \eta \frac{\partial}{\partial k'} + \zeta \frac{\partial}{\partial l'}\right) T_3'(h_0', k_0', l_0')$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\xi \frac{\partial}{\partial h'} + \cdots\right)^{(2)} T_3' + \frac{1}{6}\left(\xi \frac{\partial}{\partial h'}, \cdots\right)^{(3)} T_3'.$$

Le premier terme est nul. Nous désignerons les autres groupes respectivement du premier degré, du deuxième, du troisième en ξ, η, ζ par τ_1, τ_2, τ_3.

Nous allons montrer que, dans tous les cas, on peut réduire $T_3'(h', k', l')$ à son premier terme τ_1.

δ

Comme par hypothèse, les coefficients de ξ^2, η^2, ζ^2, dans T_2' ne sont pas nuls, quels que soient les ordres respectifs de ξ, η, ζ, l'ensemble $\rho\tau_2$ sera certainement infiniment petit par rapport à T_2' en vertu du facteur ρ. On peut donc le négliger et de même le terme $\rho\tau_3$. On peut donc bien réduire T_3 à l'ensemble τ_1

$$\tau_1 = \xi \frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial T_3'}{\partial k_0'} + \zeta \frac{\partial T_3'}{\partial l_0'}.$$

σ_1

Or, on peut ici faire une remarque essentielle : cette troisième forme linéaire s'annule pour h_0', k_0', l_0' puisque

$$h_0' \frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + k_0' \frac{\partial T_3'}{\partial k_0'} + l_0' \frac{\partial T_3'}{\partial l_0'} = 3T_3'(h_0', k_0', l_0') = 0.$$

ω

Les trois formes P, Q, τ_1, ne sont donc pas indépendantes et l'on peut poser identiquement

$$\tau_1 \equiv \mu P + \nu Q,$$

μ et ν désignant certains coefficients numériques.

Supposons maintenant que dans T_2 l'un des coefficients, celui de h^2 par exemple, soit nul. On a

$$T_2 = \alpha P^2(\eta, \zeta) + \beta Q^2(\eta, \zeta).$$

(Il faut alors en effet que P et Q soient indépendants de h et par suite de ξ). Si P et Q s'annulaient pour des valeurs non nulles de k, l, P et Q ne seraient pas indépendants : T_2' se réduirait à un seul carré.

ρ

P et Q ne peuvent donc s'annuler simultanément que pour

$$k_0' = 0, \qquad l_0' = 0 \qquad \text{alors} \qquad h_0' = \pm 1.$$

δ_1

Posons

$$T_3(h', k', l') = a_1h'^3 + a_2k'^3 + a_3l'^3 + 3b_1k'^2l' + 3b_2l'^2h' + 3b_3h'^2k' + 3c_1l'^2k' + \cdots$$

Comme $T_3(h_0', 0, 0) = 0$, il faut que $a_1 = 0$.

On a alors

$$T_3(h_0' + \xi, \eta, \zeta) = a_2\eta^3 + a_3\zeta^3 + 3b_1\eta^2\zeta + 3b_2\zeta^2(h_0' + \xi) + 3b_3(h_0' + \xi)^2\eta + 3c_1\eta\zeta^2 + 3c_2(h_0' + \xi)^2\zeta + 3c_3\eta^2(h_0' + \xi).$$

Les termes du premier, deuxième, troisième degré en ξ, η, ζ sont

$$\tau_1 = 3b_3h_0'^2\eta_1 + 3c_2h_0'^2\zeta = 3(b_3\eta_1 + c_2\zeta)$$
$$\tau_2 = 3b_2h_0'\zeta^2 + 6b_3h_0'\xi\eta_1 + 6c^2h_0'\xi\zeta + 3c_3h_0'\eta^2, \qquad \tau_3 = T_3'(\xi, \eta, \zeta).$$

On peut écrire

$$\tau_2 = 3h_0'(b_2\zeta^2 + c_3\eta_1^2) + 2h_0'\xi\tau_1.$$

δ_1

Dans le terme $\rho T_3'$ qui figure dans Δ, on voit que, quels que soient les ordres respectifs de ξ, η, ζ, la première partie de $\rho\tau_2$ sera négligeable devant T_2' (les coefficients de η^2, ζ^2 n'étant pas nuls dans T_2'). Quant à la deuxième partie $2h_0'\xi\tau_1$, elle est aussi certainement négligeable devant τ_1 en raison du facteur ξ.

δ_1

Prenons enfin $\tau_3(\xi, \eta, \zeta)$: on peut y négliger les termes du second degré en η, ζ qui sont négligeables vis-à-vis de T_2 (dont les coefficients de η^2, ζ^2 ne sont pas nuls). Il ne reste donc que les termes

$$3\xi^2(b_3\eta_1 + c_2\zeta) = \xi^2\tau_1.$$

ρ

Ces termes sont infiniment petits par rapport à τ_1. On peut donc encore dans ce cas réduire T_3' à τ_1 et les conclusions précédentes (cas général où les coefficients de h'^2, k'^2, l'^2 n'étaient pas nuls) subsistent.

ω

En définitive si T_1' est réductible à une somme de deux carrés indépendants, le signe de la différence Δ est donné par une expression de la forme

$$\Delta' = 12(\alpha P^2 + \beta Q^2) + 4\rho(\mu P + \nu Q) + \rho^2 T_4'(h'_0, k'_0, l'_0).$$

Cette quantité doit avoir un signe constant quels que soient les ordres respectifs de ξ, η, ζ et ρ.

δ_1

Considérée comme un trinôme du second degré en ρ, pour que Δ' conserve un signe constant, il faut que

$$(\mu P + \nu Q)^2 - 3(\alpha P^2 + \beta Q^2)T_4' < 0$$

ou

$$P^2(3\alpha T_4' - \mu^2) - 2\mu\nu PQ + Q^2(3\beta T_4' - \nu^2) > 0.$$

β

Il faut d'abord que

$$3\alpha T_4' - \mu^2 > 0, \tag{1}$$

δ_1

ensuite que

$$\mu^2\nu^2 - (3\alpha T'_4 - \mu^2)(3\beta T'_4 - \nu^2) < 0.$$

Ou en divisant par $\beta T'_4$ qui est positif

$$3\alpha T'_4 - \mu^2 - \frac{\alpha}{\beta}\nu^2 > 0. \tag{2}$$

Comme $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, on voit que, quel que soit le signe de α(β et T'_4), l'inégalité (2) entraîne l'inégalité (1).

Conditions nécessaires et suffisantes. — Il faut donc et il suffit que l'on ait

$$\alpha\left(\frac{\mu^2}{\alpha} + \frac{\nu^2}{\beta} - 3T'_4(h'_0, k'_0, l'_0)\right) < 0 \tag{3}$$

pour que Δ conserve un signe constant, quels que soient les ordres respectifs de ξ, η, ζ et ρ, c'est-à-dire quels que soient h, k, l.

R

En résumé, on décomposera T'_2 en une somme de deux carrés en h', k', l' :

$$T'_2 = \alpha P^2 + \beta Q^2;$$

P et Q s'annulant pour $h'_0 k'_0 l'_0$ on doit avoir

$$T'_3(h'_0, k'_0, l'_0) = 0.$$

La forme linéaire

$$\tau_1 = h'\frac{\partial T'_3}{\partial h'_0} + k'\frac{\partial T'_3}{\partial k'_0} + l'\frac{\partial T'_3}{\partial l'_0}$$

peut se mettre identiquement sous la forme

$$\tau_1 \equiv \mu P + \nu Q.$$

La condition nécessaire et suffisante d'un extrêmum est la condition (3).

COROLLAIRE. — *Étant donnée une forme quadratique à trois variables, décomposable en une somme de deux carrés indépendants seulement, sous la forme*

$$T_2 = \alpha P^2 + \beta Q^2,$$

ρ, σ_2

(on peut d'une infinité de manières la mettre sous cette forme).

ξ

Considérons une troisième forme linéaire dépendante

$$\tau = \mu P + \nu Q ;$$

(pour chaque forme de la décomposition de T il en résultera une représentation correspondante de τ).

ω *Quelle que soit la décomposition en carrés, la quantité* $\frac{\mu^2}{\alpha}+\frac{\nu^2}{\beta}$ *est un invariant.*

IV. — GÉNÉRALISATION

α, ξ Nous aurons à considérer les quantités de la forme

$$\Pi = ax_1^2 + bx_2^2 + \cdots + lx_1 + mx_2 + \cdots \rho.$$

Cherchons la condition pour qu'elle conserve un signe constant quels que soient $x_1, x_2 \cdots x_n$.

β Il faut d'abord nécessairement que les coefficients des carrés a, b, c, $\cdots$ et ρ soient de même signe. Quel que soit le signe de a, b, c, on devra avoir

$$a(ax_1^2 + bx_2^2 + \cdots + lx_1 + mx_2 + \cdots \rho) > 0.$$

Si l'un des coefficients a est nul, il est nécessaire que le coefficient correspondant l soit également nul. Alors la fonction ne dépendrait pas de x_1. On peut donc supposer $a, b, c \cdots \neq 0$.

δ_1 On peut considérer H comme un trinôme du second degré en x_1. Pour que H conserve un signe constant il faut et il suffit que

$$l^2 - 4a(bx_2^2 + cx_3^2 + \cdots + mx_2 + nx_3 + \cdots \rho) < 0$$

ou

$$a\left(bx_2^2 + cx_3^2 + \cdots + \rho - \frac{l^2}{4a}\right) > 0.$$

ρ C'est une inégalité de même forme que la précédente avec une variable de moins, ρ étant remplacé par $\rho - \frac{l^2}{4a}$. En opérant successivement sur $x_2, x_3 \cdots$ on arrivera à l'inégalité

$$a\left(\rho - \frac{l^2}{4a} - \frac{m^2}{4b} - \cdots\right) > 0 \quad \text{ou} \quad a\left(\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} + \cdots - 4\rho\right) < 0.$$

Considérons maintenant une quantité de la forme

$$\Pi = \alpha(ax + by + cz + \cdots)^2 + \beta(a'x + b'\gamma + \cdots)^2 + \gamma(\cdots)^2 + \lambda(ax + by + cz + \cdots) + \mu(a'x + b'\gamma + \cdots) + \cdots + \rho$$

le nombre de carrés étant inférieur d'une unité au nombre des va-

riables $x, y, z, \cdots$ tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ et ρ étant de même signe. Cherchons la condition pour qu'elle conserve un signe constant.

Elle est de la forme

$$H = \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + \cdots + \lambda P + \mu Q + \nu R + \cdots + \rho.$$

Pour qu'elle garde un signe constant, il faut et il suffit que

$$\alpha\left(\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \frac{\nu^2}{\gamma} + \cdots - 4\rho\right) < 0.$$

Mais la forme homogène et du second degré de $n+1$ variables, qui a pu être décomposée en n carrés indépendants, peut l'être d'une infinité de manières sous la forme

$$\alpha' P'^2 + \beta' Q'^2 + \cdots + \varepsilon' T'^2$$

et

$$\lambda P + \mu Q + \nu R + \cdots$$

deviendra

$$\lambda' P' + \mu' P' + \nu' R' + \cdots$$

Pour que sous cette deuxième forme, H conserve un signe constant, il faudrait que

$$\alpha'\left(\frac{\lambda'^2}{\alpha'} + \frac{\mu'^2}{\beta'} + \cdots - 4\rho\right) < 0.$$

Or nous avons trouvé la condition

$$\alpha\left(\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \cdots - 4\rho\right) < 0.$$

On a donc

$$\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \frac{\nu^2}{\gamma} \cdots = \frac{\lambda'^2}{\alpha'} + \frac{\mu'^2}{\beta'} + \cdots$$

D'où le Théorème :

Invariant simultané. — Si l'on a une forme quadratique de $n+1$ variables, décomposable en n carrés indépendants, tous de même signe

$$\alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + \cdots$$

et une deuxième forme linéaire τ, dépendant des premières P, Q, R sous la forme

$$\lambda P + \mu Q + \nu R + \cdots,$$

quel que soit le mode de décomposition, la quantité

$$\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \frac{\nu^2}{\gamma} + \cdots$$

est un invariant.

Soit la quantité

$$\Pi = (y + z + t)^2 + (z + x + t)^2 + (x + y + t)^2 + (y + z + t)^2 + (z + x + t) + (x + y + t).$$

δ

On a ici

$$\alpha = \beta = \gamma = \lambda = \mu = \nu = 1, \quad \frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \frac{\nu^2}{\gamma} = 3.$$

La forme du second degré peut encore s'écrire

$$2\left(x + \frac{z}{2} + \frac{y}{2} + t\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y + \frac{z}{2} + \frac{2t}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}(2z + t)^2$$
$$= 2P'^2 + \frac{3}{2}Q'^2 + \frac{1}{3}R'^2.$$

δ_1

Et la forme linéaire s'écrit alors

$$2x + 2y + 2z + 3t = 2P' + Q' + \frac{1}{3}R'.$$

On a donc

$$\alpha' = 2, \quad \beta' = \frac{3}{2}, \quad \gamma' = \frac{1}{3}, \quad \lambda' = 2, \quad \mu' = 1, \quad \nu' = \frac{1}{3}.$$

On retrouve bien

$$\frac{\lambda'^2}{\alpha'} + \frac{\mu'^2}{\beta'} + \frac{\nu'^2}{\gamma'} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

Maximum ou minimum pour le cas de n variables. — Le raisonnement et le résultat se généralisent immédiatement.

Nous raisonnerons sur quatre variables x, y, z, t.

δ, σ_1

Pour le maximum ou minimum au point x_0, y_0, z_0, t_0, on doit avoir

$$(f_x')_0 = 0, \quad (f_y')_0 = 0, \quad (f_z')_0 = 0, \quad (f_t')_0 = 0.$$

ξ

Il faut alors considérer l'ensemble du second degré

$$T'_2 = \left(h'\frac{\partial}{\partial x} + k'\frac{\partial}{\partial y} + l'\frac{\partial}{\partial z} + m'\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)} f(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

S'il peut être décomposé en quatre carrés indépendants

$$T'_2 = \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2 + \delta T^2,$$

il est nécessaire et suffisant que α, β, γ, δ soient de même signe.

Cas douteux. — Si la forme est décomposable en trois carrés seulement

$$T'_2 = \alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2.$$

δ_1

Les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ peuvent être satisfaites pour des valeurs h_0', k_0', l_0', m_0'.

β

Il est nécessaire que

$$T_3'(h_0', k_0', l_0', m_0') = 0.$$

Supposons

$$T_4'(h_0', k_0', l_0', m_0') \not\equiv 0.$$

Etudions ce qui se passe pour des valeurs voisines de h_0', k_0', l_0', m_0'. Posons

$$h' - h'_0 = \xi, \quad k' - k_0' = \eta, \quad l' - l_0' = \zeta, \quad m' - m_0' = \theta.$$

On pourra réduire $T_4'(h', k', l', m')$ à son premier terme

$$T_4'(h_0', k_0', l_0', m_0') = (h_0' \frac{\partial}{\partial x} + k_0' \frac{\partial}{\partial y} + \cdots)^{(4)} f(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

δ_1

On pourra négliger les termes suivants qui sont infiniment petits par rapport à T_4'.

Dans P, Q, R, il suffira de remplacer h', k', l', m', par ξ, η, ζ, θ.

Dans $\rho T_3'(h', k', l', m')$ développé par la formule de Taylor on pourra négliger

$$\rho(\xi \frac{\partial}{\partial h_0'} + \eta \frac{\partial}{\partial k_0'} + \cdots)^{(2)} T_3'$$

qui est infiniment petit par rapport à

$$\alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2$$

et de même le terme suivant.

δ_1

Il reste donc simplement à étudier

$$\Delta' = 12(\alpha P^2 + \beta Q + \gamma R^2) + 4\rho \left(\xi \frac{\partial T_3'}{\partial h_0} + \eta \frac{\partial T_3'}{\partial k_0} + \zeta \frac{\partial T_3'}{\partial l_0'} + \theta \frac{\partial T_3'}{\partial m_0'} \right) + \rho^2 T_4'(h_0', k_0', l_0', m_0')$$

Or les trois formes linéaires P, Q, R et la forme τ (2me parenthèse de Δ') s'annulent pour les mêmes valeurs h_0', k_0', l_0', m_0'. Elles sont donc dépendantes et on peut écrire une identité de la forme

$$\tau = \lambda P + \mu Q + \nu R.$$

On a donc

$$\Delta' = 12(\alpha P^2 + \beta Q^2 + \gamma R^2) + 4\rho(\lambda P + \mu Q + \nu R) + \rho^2 T_4'.$$

Cette quantité doit conserver un signe constant quels que soient ξ, η, ζ, θ et ρ c'est-à-dire m', h', k', l', ρ.

ρ, ω

C'est une quantité de la forme étudiée ci-dessus. Pour qu'elle garde un signe constant il faut et il suffit que

$$\alpha\left[\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \frac{\nu^2}{\gamma} - 3T_4'(h_0', k_0', l_0', m_0')\right] < 0.$$

Conclusion. — R Mettons la forme

$$(h'\frac{\partial}{\partial x} + k'\frac{\partial}{\partial y} + \cdots)^{(2)} f(x_0, y_0, z_0, \cdots)$$

sous la forme d'une somme de $n-1$ carrés (cas douteux) en $h', k', l', \cdots$

$$T_2' = \alpha P^2 + \mu Q^2 + \gamma R^2 + \cdots$$

Ces carrés P, Q, R, $\cdots$ s'annulent pour un système de valeurs $h_0', k_0', l_0', \cdots$.

On devra avoir $T_3'(k_0', k_0', l_0', \cdots) = 0$ et $T_4'(h_0', k_0', l_0', \cdots) \not\equiv 0$.

On pourra écrire

$$h'\frac{\partial T_3'}{\partial h_0'} + k'\frac{\partial T_3'}{\partial k_0'} + \cdots \equiv \lambda P + \mu Q + \nu R + \cdots$$

La condition nécessaire et suffisante d'un extrémum est que

$$\alpha\left[\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \frac{\nu^2}{\gamma} \cdots - 3T_4'(h_0', k_0', l_0', \cdots)\right] < 0$$

V. — GÉNÉRALISATION AU CAS DE MOINS DE $(n-1)$ CARRÉS INDÉPENDANTS

ξ

Considérons une quantité Δ de la forme

$$\Delta = T'_2 + \rho T'_3 + \rho^2 T'_4 + \cdots$$

$T'_2, T'_3, T'_4, \cdots$ étant respectivement du deuxième, troisième degré en $h', k', l', \cdots$

(Nous avons posé $h = \rho h' \quad k = \rho k' \cdots$).

Supposons qu'il y ait n variables et que T'_2 soit décomposable en k carrés $p_1, p_2 \cdots p_k (k < n)$.

$$T'_2 = \alpha p_1^2 + \beta p_2^2 + \cdots + \lambda p_k^2.$$

δ

Pour tout système ne satisfaisant pas à la fois à

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0 \quad \cdots \quad p_k = 0. \qquad (I)$$

on a $T'_2 \not\equiv 0$. Tous les coefficients étant de même signe, Δ est du signe de T'_2 c'est-à-dire de α pour ρ suffisamment petit.

δ_1, ξ

Soit $h_0', k_0', l_0', \cdots$ un système de solutions satisfaisant à la fois à

(I) $$p_1 = 0, \quad p_2 = 0 \quad \cdots \quad p_k = 0.$$

β

Pour ce système $T_2' = 0$; il est nécessaire que $T_3' = 0$. Nous ne considérerons que les systèmes pour lesquels $T_4' \not\equiv 0$.

ω

Donc $T_3'(h', k', l', \cdots)$ doit être nul pour tout système satisfaisant à la fois aux équations I

ψ

Donc T_3' doit être de la forme

$$T_3' = p_1 U_1 + p_2 U_2 + \cdots + p_k U_k.$$

$U_1 U_2 \cdots U_k$ étant homogènes du second degré en $h', k', l', \cdots$

α

Posons alors

$$h' = h_0' + \xi, \quad k' = k_0' + \eta \quad \cdots \quad l' = l_0' + \zeta$$

et formons $\Delta(h', k', \cdots l')$. Puisque nous supposons $T_4'(h_0', k_0', \cdots) \not\equiv 0$, on peut certainement négliger tous les termes suivant ceux du quatrième degré.

δ_1

$p_1(h', k', l', \cdots)$ devient $p_1(\xi, \eta, \cdots \zeta)$.
De même $p_2(h', k', l', \cdots) = p_2(\xi, \eta, \cdots \zeta)$.

φ

Dans $T_3'(h', k', \cdots l')$, il suffit de conserver le deuxième terme de la formule de Taylor, le premier $T_3'(h_0', k_0', l_0', \cdots)$ étant nul. Formons

$$\tau = \xi \left(\frac{\partial T'_3}{\partial h'}\right)_0 + \eta \left(\frac{\partial T'_3}{\partial k'}\right)_0 + \cdots$$

δ_1

En remarquant que

$$T'_3 \equiv p_1 U_1 + p_2 U_2 + \cdots$$

On a

$$\frac{\partial T'_3}{\partial h'} = \frac{\partial p_1}{\partial h'} U_1 + p_1 \frac{\partial U_1}{\partial h'} + \cdots$$

Comme $(p_1)_0 = 0 \cdots$, il reste

$$\left(\frac{\partial T'_3}{\partial h'}\right)_0 = (U_1)_0 \frac{\partial p_1}{\partial h'} + \cdots$$

Donc

$$\tau = (U_1)_0 \left[\xi \left(\frac{\partial p_1}{\partial h'}\right)_0 + \eta_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial k'}\right)_0 + \cdots\right] + (U_2)_0 [\cdots] + \cdots$$
$$= (U_1)_0 p_1(\xi, \eta, \zeta, \cdots) + (U_2)_0 p_2(\xi, \eta, \zeta, \cdots) + \cdots$$

ω

τ s'exprime de façon linéaire en $p_1, p_2, \cdots$, les coefficients étant précisément $U_1(h_0', k_0', l_0', \cdots)$, $U_2(h_0', k_0', l_0', \cdots)$. On peut donc poser

$$\tau = \lambda p_1 + \mu p_2 + \nu p_3 + \cdots$$

ω

et on a à considérer le signe de

$$\Delta' = 12(\alpha p_1^2 + \beta q_2^2 + \cdots + \varepsilon p_k^2) + \rho[\lambda p_1 + \mu p_2 + \nu p_3, \cdots]$$
$$+ \rho^2 T_1'(h_0', k_0', \cdots l_0').$$

Pour que Δ' conserve un signe constant il faut et il suffit que

$$\alpha\left[\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \frac{\nu^2}{\gamma} + \cdots - 3T_1'(h_0', k_0', \cdots l_0')\right] < 0.$$

Cette inégalité devra être satisfaite pour tout système de valeurs satisfaisant à

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad \cdots \quad p_k = 0.$$

On peut la rendre homogène du quatrième degré en $h_0', k_0', \cdots, l_0'$ puisque $h_0'^2 + k_0'^2 + \cdots = 1$.

d

Conséquence. — Si une forme quadratique à n variables est décomposable en $n - k$ carrés sous la forme

$$\alpha p_1^2 + \beta p_2^2 + \cdots + \varepsilon p_k^2$$

et si une forme linéaire des n variables dépend de $p_1, p_2, \cdots p_k$ sous la forme

$$\tau = \lambda p_1 + \mu p_2 + \cdots$$

quel que soit le mode de décomposition, la quantité $\frac{\lambda^2}{\alpha} + \frac{\mu^2}{\beta} + \cdots$ est invariante.

Nous en avons terminé avec les développements sur les cas douteux.

Remarque sur le choix des variables. — Si une fonction $f(x, y)$ de deux variables passe par un minimum pour les valeurs x_0, y_0, les conditions nécessaires sont $(f_x')_0 = 0\ (f_y')_0 = 0$. La première revient à dire que la fonction $f(x, y_0)$, où on suppose la variable y_0 fixe et où l'on fait varier seulement x, est maximum pour la valeur x_0.

Si l'on faisait un changement de variables

$$u = \lambda(x, y), \qquad v = \mu(x, y)$$

et si aux valeurs x_0, y_0 correspondent les valeurs u_0, v_0 on devrait avoir $(F'_u)_0 = 0\ (F'_v)_0 = 0$. La première revient à supposer par exemple que l'une des variables v conserve une valeur constante et que u seul varie, ou enfin cela revient à se donner arbitrairement une relation $\mu(x, y) =$ constante et à faire varier x, y en s'assujettissant à cette condition.

Cette seule remarque permet parfois de simplifier considérablement la résolution des problèmes.

Exemple : *supposons qu'un triangle varie de manière que ses trois sommets décrivent trois courbes données, distinctes ou non. Cherchons les positions pour lesquelles l'aire du triangle sera maximum ou minimum.*

Cette aire dépend de trois variables, les positions des trois sommets sur la courbe correspondante.

D'après la remarque ci-dessus, on peut laisser deux éléments fixes, c'est-à-dire deux sommets B, C, le troisième A décrivant la troisième courbe. Mais dans ces conditions, la base du triangle étant fixe, le triangle sera maximum ou minimum en même temps que la distance de A à BC.

Ces maximums ou minimums correspondront visiblement aux positions pour lesquelles la tangente en A à la courbe sera parallèle à BC.

Ainsi pour les positions correspondant au maximum ou minimum, la tangente en chaque sommet à la courbe correspondante doit être parallèle au côté opposé.

En particulier si les trois courbes données se réduisent à une même ellipse, il faut et il suffit que la tangente en chaque sommet soit parallèle au côté opposé. Or l'ellipse pouvant être considérée comme la projection d'un cercle, cette propriété doit subsister pour le cercle et pour le triangle projeté : le triangle

correspondant du cercle est donc un triangle équilatéral, mais inversement peut être un triangle équilatéral quelconque. Il y a donc une infinité de positions correspondant à des maximums du triangle inscrit dans l'ellipse. Pour toutes ces positions, l'aire du triangle est la même $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

VI. — FONCTIONS IMPLICITES

Cas d'une variable. — La fonction $y(x)$ peut être donnée par une équation non résolue

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

σ

Les valeurs qui rendent maximum ou minimum la fonction doivent satisfaire à l'équation $\frac{dy}{dx} = 0$. Or en dérivant (1), on a $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. En écartant les cas où l'une des dérivées partielles

β

serait infinie ou indéterminée, on doit donc avoir certainement

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Les équations (1) (3) donnent les valeurs de x, y pour lesquelles il peut y avoir maximum ou minimum. Il y aura maximum si $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$.

δ_1

Or, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{4}$$

Si l'on tient compte de (3) cette équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{4'}$$

Il y aura donc maximum si

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) > 0.$$

Il y aura doute si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Maximum et minimum relatif. — On peut chercher à déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction de plusieurs variables, lorsque ces variables ne sont plus indépendantes, mais sont liées entre elles par des équations.

Considérons par exemple la fonction $u = f(x, y, z, t)$, des quatre variables x, y, z, t, liées entre elles par deux équations

$$\varphi(x, y, z, t) = 0, \qquad \psi(x, y, z, t) = 0. \tag{2}$$

Ces équations (2) permettent, à la condition que l'un des déterminants issus du tableau

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{Vmatrix}$$

soit différent de zéro, de considérer deux des variables, z et t par exemple, comme fonctions des deux autres (en supposant $D_{\varphi,\psi}^{z,t} \neq 0$).

Si l'on faisait cette substitution dans u, u deviendrait une fonction des seules variables x, y, et il suffirait d'écrire qu'au point où il y a extrémum

$$\frac{du}{dx} = 0. \qquad \frac{du}{dy} = 0$$

ou, ce qui revient au même $du = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0. \tag{3}$$

Mais dz et dt ne sont pas indépendantes. Elles sont liées à dx et dy par les relations que l'on obtient en différentiant (2)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt = 0, \qquad \frac{\psi\partial}{\partial x}dx + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial t}dt = 0. \tag{4}$$

Il faudrait avoir la différentielle du en fonction de dx, dy seulement, ce qui reviendrait à éliminer dz, dt entre (3) et (4) et annuler ensuite les coefficients de dx, dy.

Méthode des multiplicateurs. — Or, multiplions les équations (4) par des facteurs indéterminés λ, μ et ajoutons-les à (3). Nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} du = &\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots\cdots\cdots\right)dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \cdots\cdots\cdots\right)dt \end{aligned}\right\} = 0. \tag{5}$$

Si nous déterminons les fonctions λ et μ par les relations

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

l'élimination de dz, dt serait toute faite. On devrait donc avoir alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

En d'autres termes on voit qu'il doit exister des facteurs λ, μ satisfaisant aux quatre équations (6), (7).

Ces quatre équations jointes aux équations (2), donneront les valeurs des quatre variables x, y, z, t correspondant au minimum, et des deux fonctions auxiliaires λ, μ.

Considérons la fonction $F = f + \lambda\varphi + \mu\psi$.

En vertu des équations (2), les dérivées partielles de F par rapport à x, y, z, t ont les mêmes formes, que λ et μ soient des variables ou des constantes. Les équations (6) et (7) expriment que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

En résumé, on voit qu'il faudra considérer la fonction auxiliaire $F = f + \lambda\varphi + \mu\psi$, la traiter comme une fonction de quatre variables indépendantes x, y, z, t, et λ et μ comme des constantes, et chercher le maximum ou minimum de F.

On remarque que cette méthode ne fait plus de distinction entre les variables que l'on considère comme indépendantes et les autres.

Maximum relatif dans le cas des fonctions implicites de plusieurs variables. — Enfin il n'est pas nécessaire de supposer que la fonction u dont on cherche le maximum ou le minimum soit donnée par une équation résolue par rapport à u.

Nous prendrons tout de suite le cas général où l'on a k variables indépendantes, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, et i fonctions de ces variables $u_1, u_2, \ldots, u_i$, définies par les équations implicites

$$f_1(x_1, x_2, \cdots x_k, u_1, u_2, \cdots u_i) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, \cdots x_k, u_1, u_2, \cdots u_i) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad f_i(x_1, x_2, \cdots x_k, u_1, u_2, \cdots u_i) = 0.$$

Il ne reste plus au total que k variables indépendantes, mais
ρ
on pourrait dire par exemple que u_1 est fonction de $k + i - 1$ variables liées entre elles par $i - 1$ relations.

Cherchons en particulier les systèmes des valeurs des x pour lesquelles l'une des fonctions u_1 par exemple est maximum ou minimum.

α
Si l'on avait l'expression explicite de $u_1(x_1, x_2, \cdots x_k)$, il suffirait d'écrire

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \qquad \cdots \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = 0.$$

Mais ρ on peut avoir les valeurs $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}$ sans avoir au préalable obtenu l'expression de u_1. Il suffit de dériver les équations (1) par rapport à $x_1, x_2, \cdots x_k$.

δ_1
En dérivant toutes les équations par rapport à x_h et faisant immédiatement $\frac{\partial u_1}{\partial x_h} = 0$, on obtiendra

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_h} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_h} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_h} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_h} = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

α, δ_1
En éliminant les dérivées $\frac{\partial u_2}{\partial x_h}, \frac{\partial u_3}{\partial x_h} \cdots$, on obtiendra

$$D^{x_h, u_2, u_3, \cdots u_i}_{f_1, f_2, \cdots\cdots f_i} = 0, \qquad (2)\ (h = 1, 2, \cdots k).$$

En considérant les k équations semblables relatives à $x_1, x_2, \cdots x_k$,
ρ1
on obtient k équations qui, jointes aux i équations (1), donnent les valeurs des k variables x et des i fonctions u correspondant au maximum ou minimum de u_1.

Comme dans le cas d'une variable indépendante, l'équation (2)
σ
exprime qu'il existe une même relation linéaire entre les éléments d'une colonne c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_i$ qui satisfont aux équations

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \cdots + \lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_2} = 0$$
$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \cdots + \lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_3} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_h} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_h} + \cdots + \lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_h} = 0.$$

Mais les rapports des λ sont bien déterminés par les $(i-1)$ premières équations de ce groupe. Pour ces rapports, on voit que la dernière équation du groupe doit être aussi satisfaite quelle que soit la variable x_k considérée.

d

On en déduit qu'il existe des *mêmes* fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_i$ qui satisfont à *toutes* les $k+(i-1)$ équations

$$\text{II}\quad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0, & \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} + \cdots + \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial u_2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} + \cdots + \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, & \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial u_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial u_i} + \cdots + \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial u_i} = 0. \end{cases}$$

Ces équations jointes aux i équations (1) donneront $(k+2i-1)$ équations qui déterminent $x_1, x_2, \cdots x_k, u_1, u_2, \cdots u_i$ et les $(i-1)$ rapports des fonctions $\lambda_1 : \lambda_2 : \cdots : \lambda_i$.

τ_3, ξ

Considérons encore la fonction

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_i f_i.$$

Pour le système des valeurs des variables indépendantes et des fonctions qui satisfont à (1), les valeurs des dérivées partielles de F

ρ

soit par rapport a x, soit par rapport à u ont les mêmes formes que les λ, soient des fonctions ou des constantes. On a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x}.$$

Les équations II s'écrivent donc

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0.$$

ω

Ainsi il suffira de considérer la fonction auxiliaire

$$F = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_i f_i$$

d'y considérer les λ comme des constantes, d'annuler toutes les dérivées partielles par rapport à toutes les variables indépendantes x, et toutes les fonctions u, sauf celle qui doit passer par un maximum ou un minimum.

Il restera à voir, en traduisant les résultats obtenus pour une fonction explicite, si ces valeurs correspondent réellement à un maximum ou un minimum.

Ce procédé permet d'obtenir, de façon symétrique, les équations complémentaires à ajouter au système (1).

Application. — *Un point mobile va d'un point* A *situé dans un premier milieu* α *à un point* B *situé dans un deuxième milieu* β. *Les deux milieux sont séparés par une surface* S. *Dans le milieu* α *le point se meut en ligne droite avec une vitesse* v. *Dans le milieu* β *le point se meut en ligne droite avec une vitesse* v'. *On demande en quel point le mobile doit traverser la surface de séparation, pour que la durée du trajet soit maximum ou minimum.*

δ

Prenons trois axes rectangulaires. Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface de séparation. Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de A, par x_2, y_2, z_2 celles de B, par x, y, z celles du point de passage M.

La durée totale du trajet sera

ξ
$$u = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}{v} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}{v'}.$$

On doit chercher le maximum ou minimum de la fonction u des trois variables x, y, z qui sont liées par la relation $f(x, y, z) = 0$.

α

Nous appliquerons la méthode des multiplicateurs et considèrerons la fonction $F = u + \lambda f$.

δ_1

On doit avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x-x_1}{v\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} + \frac{x-x_2}{v'\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

ou

$$\frac{x-x_1}{v\cdot \mathrm{AM}} + \frac{x-x_2}{v'\cdot \mathrm{BM}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

De même

(1) $$\frac{y-y_1}{v\cdot \mathrm{AM}} + \frac{y-y_2}{v'\cdot \mathrm{BM}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{z-z_1}{v\cdot \mathrm{BM}} + \frac{z-z_2}{v'\cdot \mathrm{BM}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

ρ
Or les trois équations peuvent être considérées comme trois équations linéaires et homogènes en $\frac{1}{v \cdot \mathrm{AM}}$, $\frac{1}{v' \cdot \mathrm{BM}}$, λ.

d
On en déduit donc

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & z - z_1 \\ x - x_2, & y - y_2, & z - z_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

σ
Cette relation signifie qu'il existe un plan

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} - x) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - y) + \mathrm{C}(\mathrm{Z} - z) = 0$$

qui passe par le point x_1, y_1, z_1, par le point x_2, y_2, z_2, par le point x, y, z et qui est parallèle à la direction $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ c'est-à-dire à la normale en M à la surface de séparation.

ω
Le plan AMB contient donc la normale en M. Autrement dit, en empruntant un langage de physique, le rayon incident, le rayon réfracté et la normale au point d'incidence doivent être dans un même plan.

ν, α, δ₁
Nous pouvons supposer que nous prenions l'un des points M satisfaisant à la question comme origine des coordonnées, la normale en ce point comme axe des z, le plan des xz passant en outre par A.

Dans les équations (1) il faudra donc supposer

$$x = y = z = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad y_1 = 0.$$

σ
Elles se réduisent alors à

$$-\frac{x_1}{v \cdot \mathrm{AM}} + \frac{-x_2}{v' \cdot \mathrm{BM}} = 0,$$

$$\frac{y_2}{v' \cdot \mathrm{BM}} = 0,$$

$$-\frac{z_1}{v \cdot \mathrm{AM}} + \frac{-z_2}{v' \cdot \mathrm{M}} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0.$$

ρ
Les deux premières sont indépendantes de λ : elles donnent des relations entre les éléments de la solution. La seconde montre bien que le point B doit être également dans le plan AMN.

Figurons dans le plan AMNB la trajectoire du mobile. En désignant par i_1, i_2 les angles AMN, BMN, la première σ relation exige d'abord que B et A soient de part et d'autre de la normale. On a

$$\sin i_1 = \frac{Aa}{AM} = \frac{x_1}{AM}, \qquad \sin i_2 = \frac{Bb}{BM} = \frac{-x_2}{BM},$$

La première des relations s'écrit donc

$$\frac{\sin i_1}{v} = \frac{\sin i_2}{v'}.$$

En résumé pour les positions M qui peuvent correspondre au maximum ou minimum.

R

1° le rayon incident, le rayon réfracté et la normale au point d'incidence sont dans un même plan ;

2° les sinus des angles de ces rayons avec la normale satisfont à la relation

$$\frac{\sin i_1}{v} = \frac{\sin i_2}{v'}.$$

Remarque. — Sans prendre les axes particuliers que nous avons adoptés, il serait très facile de déduire cette dernière relation des équations générales (1). Il suffit de remarquer que l'on peut prendre comme paramètres directeurs de ces trois directions

$$a = \frac{x - x_1}{v \cdot AM}, \qquad b = \frac{y - y_1}{v \cdot AM}, \qquad c = \frac{z - z_1}{v \cdot AM}$$

$$a' = \frac{x - x_2}{v' \cdot BM}, \qquad b' = \frac{y - y_2}{v' \cdot BM}, \qquad c' = \frac{z - z_2}{v' \cdot BM}$$

$$a'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad b'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad c'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

δ_1, ρ et de remarquer que ces paramètres satisfont aux conditions

$$a + a' + a'' = 0, \qquad b + b' + b'' = 0, \qquad c + c' + c'' = 0.$$

d On en déduit

$$b'c'' - c'b'' = b''c' - c''b'$$

et les deux autres par permutation circulaire.

δ_1

En désignant par i_1, i_2 les angles AMN, MNB, il en résulte

$$(a^2 + b^2 + c^2)\sin^2 i_1 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)\sin^2 i_2.$$

Or, d'autre part

$$v^2(a^2 + b^2 + c^2) = v'^2(a'^2 + b'^2 + c'^2) = 1.$$

Donc on a bien

$$\frac{\sin^2 i_1}{v^2} = \frac{\sin^2 i_2}{v'^2}.$$

Méthode de Fermat. — Avant l'invention du calcul différentiel, Fermat employait pour la recherche des maximum ou minimum une méthode basée sur les remarques ci-après :

Prenons par exemple une fonction d'une variable $f(x)$ et supposons qu'elle passe par un maximum pour la valeur x.

On doit pouvoir déterminer un intervalle η suffisamment petit, tel que si $|h| < \eta$, on ait

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0.$$

Désignons par δ la différence $f(x_0) - f(x_0 + h)$. La fonction étant supposée continue pour x_0, on peut trouver entre $x_0 - \eta$ et x_0 une valeur ξ suffisamment voisine de x_0 pour que l'on ait

$$f(x_0) - f(\xi) < \delta$$

c'est-à-dire

$$f(x_0) - f(\xi) < f(x_0) - f(x_0 + h).$$

On aura donc

$$f(x_0 + h) < f(\xi) < f(x_0).$$

α, d

Puisque la fonction est continue, $f(\xi)$ étant compris entre $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$, il existe une valeur ξ' comprise entre x_0 et $x_0 + h$ pour laquelle $f(\xi') = f(\xi)$.

ω

Ainsi, si le maximum a lieu pour la valeur x_0, on doit pouvoir trouver, de part et d'autre de x_0, des couples de valeurs ξ et ξ' telles que l'on ait constamment $f(\xi') = f(\xi)$.

Si donc, on peut déterminer ce que devient cette égalité lorsque ξ et ξ' tendent vers une limite commune x_0 soit $\varphi(x) = 0$, cette égalité limite ne pourra être satisfaite que pour une valeur x_0 correspondant à un maximum ou à un minimum.

REMARQUE. — Cette méthode suppose simplement la fonction continue sans supposer qu'elle admette une dérivée. Si elle admet une dérivée, l'égalité limite

$$f(\xi') = f(\xi) \qquad \text{ou} \qquad \lim. \frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi} = 0$$

indique que $f'(\xi) = 0$.

Applications. — *Supposons qu'une droite se meuve dans le plan des xy suivant une loi déterminée, par exemple en restant tangente à une courbe donnée. Elle rencontre deux droites fixes du plan* OX, OY *en* AB. *On demande pour quelle position de la droite, l'aire du triangle* OAB *sera maximum ou minimum.*

Soit AB la position correspondante de la droite. Nous devons prendre de part et d'autre de cette position deux positions A_1B_1, A_2B_2 et écrire que

$$\text{surf. } OA_1B_1 = \text{surf. } OA_2B_2.$$

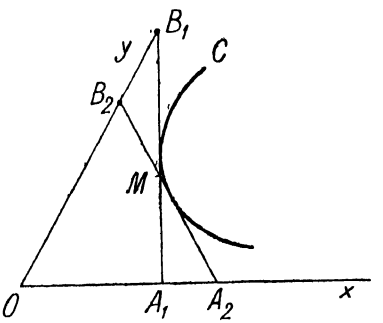


Fig. 6.

Soit M le point de rencontre des deux droites. On en déduira

$$\text{surf. } MA_1A_2 = \text{surf. } MB_1B_2,$$

c'est-à-dire

$$MA_1 \times MA_2 \sin \widehat{A_1MA_2} = MB_1 \times MB_2 \sin \widehat{B_1MB_2}.$$

En divisant par le facteur $\sin \widehat{A_1MA_2} = \sin \widehat{B_1MB_2}$, il vient

$$MA_1 \times MA_2 = MB_1 \times MB_2.$$

Or, lorsque A_1B_1, A_2B_2 viennent se confondre et se confondre avec la position correspondant au maximum AB, le point M devient à la

limite le point de contact P de la droite AB avec son enveloppe. A la limite on a donc l'égalité $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$.

ω

Ainsi la droite doit toucher son enveloppe en un point P qui soit le milieu du segment AB.

Pour voir s'il y a réellement maximum ou minimum, il faudrait connaître la forme de l'enveloppe au point P et en particulier le sens de sa concavité.

Le raisonnement fait ne suppose pas ρ que la droite mobile s'appuie sur deux droites OX, OY. Elle pourrait s'appuyer sur deux courbes quelconques. δ_1 Les secteurs curvilignes MA_1A_2, MB_1B_2 infiniment petits peuvent être remplacés par les triangles MA_1A_2 MB_1B_2 qui en sont les parties principales. L'aire variable sera maximum ou minimum lorsque la droite AB touchera son enveloppe en un point P qui soit le milieu de AB.

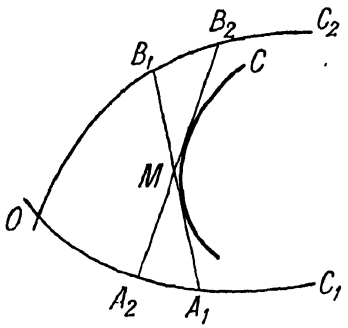


Fig. 7.

Cherchons dans les mêmes conditions le maximum ou minimum de la longueur AB.

δ

Prenons de part et d'autre de la position correspondante deux positions A_1MB_1, A_2MB_2. On devra avoir

(1) $A_1M + MB_1 = A_2M + MB_2$ c'est-à-dire $MA_1 - MA_2 = MB_2 - MB_1$.

α

Or, dans le triangle MA_1A_2, on a

$$\frac{MA_2}{\sin A_1} = \frac{MA_1}{\sin (A_1 + M)}.$$

De même

$$\frac{MB_2}{\sin B_1} = \frac{MB_1}{\sin (B_1 + M)}.$$

Substituons MA_2, MB_2 dans l'égalité (1), elle devient

$$\frac{MA_1}{\sin(A_1+M)}[\sin(A_1+M)-\sin A_1]=\frac{MB_1}{\sin(B_1+M)}[\sin B_1-\sin(B_1+M)].$$

Ou en divisant par $2\sin\frac{M}{2}$, il vient

$$\frac{MA_1\cos\left(A_1+\frac{M}{2}\right)}{\sin(A_1+M)}=-\frac{MB_1\cos\left(B_1+\frac{M}{2}\right)}{\sin(B_1+M)}.$$

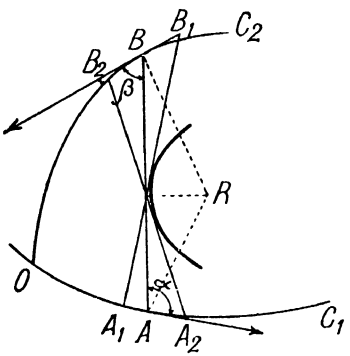


Fig. 8.

Faisons tendre A_1B_1, A_2B_2 simultanément vers AB.

A la limite, $M=0$; le point M devient le point de contact P de la droite avec son enveloppe. L'angle A_2A_1M devient l'angle α de la tangente AT avec AB ; de même l'angle B_2B_1M devient l'angle β de BM avec la tangente en B. A la limite on a donc

$$\frac{PA}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{PB}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Or, si nous désignons par R le point de rencontre des normales en AB et si nous le projetons en P_1 sur AB on a

$$P_1R=-\frac{P_1A}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{P_1B}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Le point P_1 se confond donc avec P.

Pour les positions qui peuvent correspondre à un maximum ou à un minimum, le point P doit se confondre avec la projection du centre instantané de rotation R, sur AB.

La méthode de Fermat peut s'appliquer aux fonctions de plusieurs variables, puisqu'il suffit de ne faire varier séparément qu'une seule des variables.

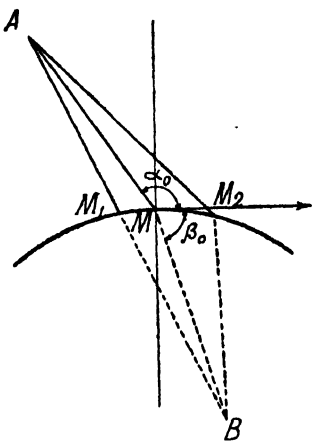


Fig. 9.

Traitons pas exemple le problème de la durée du trajet minimum d'un point mobile dans deux milieux.

Menons sur la surface une courbe C et, en assujettissant le point mobile à traverser la surface en un point de C, cherchons pour quelle position il peut y avoir maximum ou minimum.

Soit M la position correspondante.

De part et d'autre de cette position on pourra déterminer des couples de points M_1, M_2 pour lesquelles les durées de trajet seront les mêmes. On aura donc

$$\frac{AM_1}{v} + \frac{M_1B}{v'} = \frac{AM_2}{v} + \frac{M_2B}{v'}.$$

D'où

$$\frac{AM_1 - AM_2}{v} = \frac{BM_2 - BM_1}{v'}. \qquad (1)$$

En joignant M_1M_2 et désignant par α, β les angles de M_1M_2 avec M_1A, M_1B, on aura

$$\frac{AM_2}{\sin\alpha} = \frac{AM_1}{\sin(\alpha + A)} = \frac{M_1M_2}{\sin A}, \qquad \frac{BM_2}{\sin\beta} = \frac{BM_1}{\sin(\beta + B)} = \frac{M_1M_2}{\sin B}.$$

Il est naturel de tirer tous les éléments de (1) en fonction de l'élément commun M_1M_2. En les substituant dans (1), on aura en divisant par M_1M_2 (c'est ce facteur qui, si on ne le supprimait pas, ferait à la limite s'évanouir l'égalité $f(\xi) = f(\xi')$),

$$\frac{\sin(\alpha + A) - \sin\alpha}{v \sin A} = \frac{\sin\beta - \sin(\beta + B)}{v' \sin B}.$$

En simplifiant

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)}{v \cos\frac{A}{2}} = -\frac{\cos\left(\beta + \frac{B}{2}\right)}{v' \cos\frac{B}{2}}.$$

δ_1 Si l'on passe à la limite, les points M_1, M_2 tendent simultanément vers M, la droite M_1M_2 devient la tangente en M à la courbe. Les angles A, B tendent vers zéro, les angles α, β vers les angles α_0, β_0 de la tangente MT avec AM et MB.

ω A la limite on a donc

$$\frac{\cos \alpha_0}{v} = -\frac{\cos \beta_0}{v'}. \tag{2}$$

Telle est la condition qui doit être satisfaite, quelle que soit la courbe C considérée, pour la position correspondant au maximum ou minimum possible.

ρ, ψ On aura autant d'égalités semblables que l'on peut tracer de courbes sur la surface autour de M. α Si, en particulier, on trace une courbe dont la tangente soit perpendiculaire à AM (par exemple en menant le plan perpendiculaire à AM), pour cette courbe particulière, on aura $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, l'égalité (2) se réduit donc à $\cos \beta_0 = 0$. ω La direction MB est donc aussi perpendiculaire à MT. ω Il existe donc une direction MT perpendiculaire à la normale en M et aussi à AM et MB. Ces trois directions sont donc dans un même plan.

δ, α Si alors on prend ce plan comme plan de figure et si on considère la courbe C située dans ce plan, on aura encore pour cette courbe la relation (1). δ_1 Mais on a

$$\cos \alpha = -\sin i_1 \qquad \cos \beta = \sin i_2.$$

Cette relation se transforme donc en

$$\frac{\sin i_1}{v} = \frac{\sin i_2}{v'}.$$

On retrouve bien les résultats obtenus précédemment.

2e Application. Tétraèdre maximum. — Ce problème sera la généralisation du premier problème que nous avons traité : triangle de surface maximum ou minimum.

ψ, ξ

Un plan se déplace en restant tangent à une surface donnée S ; *dans chacune de ses positions, ce plan détermine, dans un trièdre donné, un tétraèdre* O, ABC. *Déterminer les positions pour lesquelles le volume de ce tétraèdre sera maximum ou minimum.*

Pour ramener le problème à ne dépendre que d'une seule variable,

α

nous assujettirons le plan à une condition supplémentaire en

δ1

laissant fixe le sommet C par exemple. Dans ces conditions, le plan reste tangent au cône circonscrit à la surface de sommet C ; la trace AB de ce plan reste tangente à la trace de ce cône sur le plan XOY. Le point de contact *m* de AB avec son enveloppe est d'ailleurs la trace de la génératrice CM passant par le point de contact du plan tangent.

δ1

Or le tétraèdre a, dans ces conditions, une hauteur constante. Son volume sera donc maximum ou minimum en même temps que

ρ

la surface de base OAB. C'est précisément le premier problème que nous avons traité. Le volume ne pourra être maximum ou minimum que si le point de contact *m* est le milieu de AB. La droite CM est alors une médiane du triangle ABC.

Le même raisonnement peut être fait en assujettissant le plan à passer par le point fixe A ou B.

ω

Pour les positions de maximum ou minimum du volume, le point M doit donc être le point de concours des médianes du triangle ABC.

CHAPITRE IX

INTÉGRALES DÉFINIES

SOMMAIRE.

Définition : les sommes s et S — *Propriétés* : Théorèmes de la moyenne. — Dérivée d'une intégrale. — Somme d'infiniment petits.

Intégrale indéfinie. — Procédés généraux d'intégration. — Intégration par parties. — Changement de variable.

Différentielles binômes : Applications.

Intégration des fractions rationnnelles : Méthode de Hermite. — De Lagrange.

Intégration des différentielles algébriques : Genre d'une courbe. — Courbes unicursales.

Intégrales de la forme $\int \mathrm{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.

Intégrales de la forme $\int \mathrm{R}(x, \sqrt{\mathrm{X}})$: Réduction. — Cas où X est du 3e ou du 4e degré. — Forme normale de Legendre. — Relation générale entre les quatre intégrales. — Forme normale de Weierstrass.

Intégration des fonctions transcendantes : $\int \mathrm{E}(x, e^{ax}, \sin ax \cdots)dx$, $\int \mathrm{R}(x)e^{mx}dx$, $\int \mathrm{E}(x, \log x)\,dx$.

I. — DÉFINITION

En mathématiques générales, on a défini l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, comme l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe $y = f(x)$ les abscisses a, b. Cette définition a l'inconvénient de supposer connue la notion d'aire limitée par un contour curviligne et de supposer que la fonction $f(x)$ puisse être représentée par une courbe telle que nous la concevons intuitivement. Or il n'en est pas toujours ainsi. Darboux a montré qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, ni constantes dans aucun intervalle si petit soit-il. Il n'est donc pas possible de concevoir la courbe représentative de la fonction.

Nous donnerons de l'intégrale définie une définition purement analytique; nous rappellerons d'abord les résultats obtenus au début du cours.

σ₂ Nous avons défini une fonction bornée supérieurement ou inférieurement dans un intervalle, la différence des bornes m, M s'appelant l'oscillation de la fonction. Nous avons démontré que si la fonction est continue, elle passe au moins une fois par toute valeur comprise entre m et M et atteint effectivement chacune de ces valeurs m, M pour au moins une valeur de la variable.

Enfin nous avons démontré que si la fonction est continue, dans un intervalle borné et parfait, σ₂ elle est uniformément continue ; étant donnée une quantité ε, on peut déterminer un intervalle η tel que, sous la seule condition $| x'' - x' | < \eta$, on soit sûr que $| f(x'') - f(x') | < \varepsilon$, quelles que soient les valeurs x' x'' de l'intervalle.

Ces résultats rappelés, considérons une fonction $f(x)$ (continue ou non) dans un intervalle a, $b (a < b)$.

Partageons l'intervalle ab en $n + 1$ intervalles par les points de division

$$a, x_1, x_2, \cdots x_n, b,$$

tous les intervalles étant inférieurs à une quantité que nous pourrons prendre aussi petite qu'on le voudra.

Dans chaque intervalle $x_k x_{k+1}$, désignons par m_k et M_k les bornes inférieures et supérieures de la fonction. Soient d'autre part m et M les bornes de la fonction dans tout l'intervalle ab.

ρ On aura évidemment

$$m_k \geqslant m, \qquad M_k \leqslant M.$$

Les sommes s et S. — Formons les sommes

$$s = m_0(x_1 - a) + m_1(x_2 - x_1) + \cdots + m_k(x_{k+1} - x_k) + \cdots + m_n(b - x_n)$$
$$S = M_0(x_1 - a) + M_1(x_2 - x_1) + \cdots + M_k(x_{k+1} - x_k) + \cdots + M_n(b - x_n).$$

Si dans S, nous remplaçons toutes les quantités M_k par la quantité

M nous obtiendrons évidemment une quantité supérieure

$$M(x_1 - a) + M(x_2 - x_1) + \cdots + M(b - x_n) = M(b - a).$$

On a donc

$$S \leqslant M(b - a).$$

De même

$$s \geqslant m(b - a).$$

Je vais montrer que *ces sommes s et* S *tendent respectivement vers des limites i et* I, *toujours les mêmes, lorsque tous les intervalles tendent simultanément vers zéro d'une manière quelconque.*

REMARQUE. — Si la fonction $f(x)$ est représentée par une courbe, σ et si elle est continue, on peut remarquer que les sommes reviennent à considérer les rectangles inscrits dans la courbe de base $x_{k+1} - x_k$ et de hauteur m_k, les rectangles circonscrits de hauteur M_k. Les sommes considérées représentent la somme des aires des rectangles inscrits ou circonscrits. Ces sommes tendent vers une même limite, l'aire limitée par la courbe $y = f(x)$.

Démontrons l'existence des limittes,

Considérons en effet d'abord une division Δ_1 obtenue en décomposant à nouveau chacun des intervalles de la première division Δ par de nouveaux points de division (le nombre de nouveaux points pouvant être variable d'un intervalle à l'autre) Nous dirons que cette nouvelle division Δ_1 est consécutive à la première Δ, parce qu'elle renferme tous les points de la première.

δ_1 L'intervalle $x_{k+1} - x_k$ sera ainsi décomposé en intervalles partiels par les points de division

$$x_{k0}, x_{k1}, x_{k2}, \cdots x_{kp}, x_{k+1} \qquad (x_{k0} = x_k).$$

Désignons par m_{ki} et M_{ki} les bornes de la fonction dans l'intervalle $x_{ki}x_{k(i+1)}$. On aura

$$m_{ki} \geqslant m_k \qquad M_{ki} \leqslant M_k.$$

Nous pouvons former deux nouvelles sommes s_1, S_1.

ξ, δ_1 L'élément $M_k(x_{k+1} - x_k)$ de la somme S, sera remplacé par les $p + 1$ éléments de S_1

$$M_{k0}(x_{k1} - x_{k0}) + M_{k1}(x_{k2} - x_{k1}) + \cdots + M_{kp}(x_{k+1} - x_{kp})$$

dont la somme sera inférieure à $M_k(x_{k+1} - x_k)$ comme on le voit en remplaçant toutes les quantités M_{ki} par la quantité plus grande M_k (tous les intervalles étant positifs).

ω On en déduit donc que $S_1 \leqslant S$.

De même $s_1 \geqslant s$.

Supposons que nous fassions ainsi une suite déterminée, infinie de divisions Δ_1, Δ_2, ... Δ_i..., consécutives les unes aux autres.

Nous obtiendrons des sommes successives $S_1, S_2, \dots S_i$ telles que

$$S \geqslant S_1 \geqslant S_2 \cdots \geqslant S_i$$

et des sommes s_1, s_2, ... s_i telles que

$$s < s_1 < s_2 < \cdots < s_i.$$

Or les premières décroissent constamment mais restent toujours supérieures à $m(b-a)$. De même les secondes croissent constamment en restant inférieures à $M(b-a)$. Les sommes S_i d'une part et les sommes s_i d'autre part, correspondant à des divisions *consécutives*, ont donc bien séparément des limites i et I.

Nous allons maintenant considérer des divisions absolument quelconques et nous allons montrer que si l'on considère les sommes s' et S' correspondantes, ces sommes ont encore respectivement pour limite i et I à la seule condition que tous les intervalles d'une division tendent simultanément vers zéro.

Démontrons par exemple que les sommes S' ont pour limite I.

Puisque, pour des divisions consécutives, les sommes S ont pour limite inférieure I, il existe une certaine division Δ qui donne pour S une somme aussi rapprochée qu'on le voudra de I soit $I + \frac{\varepsilon}{2}$. Soit n le nombre d'éléments de cette division.

Considérons alors une division absolument quelconque Δ'.

Tout d'abord la somme correspondante S' sera supérieure à I.

Il suffit en effet de considérer une troisième division Δ'' formée au moyen des points de divisison de Δ et Δ'. Cette division Δ'' pouvant être cousidérée comme subdivision de Δ, on aura certainement

$$I < S'' < S.$$

D'autre part Δ'' pouvant être considérée comme subdivision de Δ' on aura de même $S'' \leqslant S'$.

Il en résulte bien que $S' \geqslant I$.

Nous allons maintenant montrer que si les éléments de Δ' sont

suffisamment petits, α_1 la somme S′ peut être rendue moindre que $I + \varepsilon$.

Puisque tous les éléments de Δ' doivent tendre vers zéro, nous supposerons qu'ils sont tous inférieurs à une quantité δ que nous pouvons prendre aussi petite que nous le voudrons.

Dans chaque élément $x_{k+1} - x_k$ de Δ, prenons de part et d'autre des extrémités un élément δ.

Nous formons ainsi à chaque extrémité un intervalle 2δ ; soit μ_k, μ_{k+1} la partie complètement intérieure.

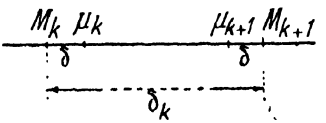


Fig. 10.

Dans l'élément $\delta_k = M_k M_{k+1}$, il existe des intervalles de Δ', que nous désignerons par ω'_{ki} complètement intérieurs à $M_k M_{k+1}$ et des éléments ω''_{kj} qui chevauchent sur M_k ou M_{k+1}.

Puisque tous les éléments de Δ' sont inférieurs à δ ρ les éléments ω'_{ki} remplissent au moins la région $\mu_k \mu_{k+1}$.

On a $\Sigma\omega'_{ki} \geq \delta_k - 2\delta$. δ_1 Ces éléments donneront évidemment dans S une somme inférieure à $M_k \Sigma\omega'_{ki}$ et à fortiori inférieure à $M_k\delta_k + |M_k| \times 2\delta$.

(Il ne faut pas oublier que M_k peut être négatif).

A fortiori encore, si nous désignons par $\mathfrak{M}$ le maximum de la valeur absolue de la fonction dans le champ, les éléments totalement intérieurs à δ_k donneront dans S′ une somme moindre que $M_k\delta_k + 2\delta\mathfrak{M}$.

δ_1

Si nous procédons de même pour tous les éléments de Δ' on voit que tous les éléments totalement intérieurs ω'_{ki} donneront dans S′ une somme moindre que

$$\Sigma M_k \delta_k + 2n\delta\mathfrak{M}$$

c'est-à-dire moindre que

$$I + \frac{\varepsilon}{2} + 2n\delta\mathfrak{M}.$$

Considérons maintenant les éléments qui chevauchent soit sur M_k soit sur M_{k+1}. δ_1 Comme tous les éléments de Δ' sont

inférieurs à δ, les éléments ω''_k ont une amplitude au plus égale à 2δ et par conséquent interviendront dans S' par une quantité au plus égale à $2\delta.\mathfrak{M}$.

En considérant tous les éléments de Δ', ces éléments ω'' donneront donc dans S' une somme au plus égale à $2n\delta.\mathfrak{M}$.

(ω)

En définitive on voit que

$$S' \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} + 2n\delta.\mathfrak{M} + 2n\delta.\mathfrak{m}.$$

Or si nous choisissons δ tel que $4n\delta.\mathfrak{M} < \frac{\varepsilon}{2}$ c'est-à-dire $\delta < \frac{\varepsilon}{8n\mathfrak{M}}$ on voit qu'on aura $S' < I + \varepsilon$.

On aura donc

$$I < S' < I + \varepsilon.$$

(σ)

Ces inégalités expriment que les sommes S' ont également pour limite I.

On démontrerait de même que les sommes s' ont pour limite i.

En résumé, *quel que soit le mode de décomposition, que l'on considère des décompositions consécutives ou non, à la seule condition que les intervalles tendent simultanément vers zéro, les sommes inférieures d'une part, les sommes supérieures d'autre part, ont une limite bien déterminée i et* I.

Si les deux limites i et I sont les mêmes, nous dirons que la fonction $f(x)$ (bornée dans l'intervalle ab) est intégrable dans cet intervalle.

Une fonction continue est intégrable. — Nous allons montrer qu'il en sera certainement ainsi, en particulier, (ψ) si la fonction $f(x)$ est continue pour les valeurs $a \leqslant x \leqslant b$.

D'après le théorème rappelé ci-dessus, si la fonction est continue dans ce champ borné et parfait, elle l'est certainement uniformément On peut déterminer un intervalle η suffisamment petit, pour que, à la seule condition que $| x'' - x' | < \eta$, on ait $| f(x'') - f(x') | < \varepsilon$.

(δ)

Or, puisque nous devons faire tendre tous les intervalles vers zéro, nous pouvons supposer que, dans la division qui sert à former S et s, on ait $\delta < \eta$. On est donc certain que dans chaque intervalle, l'oscillation de la fonction est moindre que ε.

(δ_1)

La différence S — s c'est-à-dire $\Sigma(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k)$ est moindre que $\varepsilon\Sigma(x_{k+1} - x_k)$ c'est-à-dire $\varepsilon(b - a)$. Il en sera à fortiori

de même des sommes ultérieures et par suite des limites i et I. La différence entre ces deux quantités fixes peut donc être rendue moindre que toute quantité donnée : les deux limites sont donc les mêmes.

Plus généralement, prenons pour chaque intervalle $x_{k+1} - x_k$ une valeur μ_k comprise entre m_k et M_k et formons la somme

$$\Sigma = \Sigma \mu_k (x_{k+1} - x_k).$$

On aura visiblement

$$s < \Sigma < S.$$

Si la fonction est intégrable, en particulier si elle est continue, les sommes S et s ayant même limite I quand tous les intervalles tendent vers zéro, Σ aura également une limite et cette limite sera encore I.

D'ailleurs comme μ_k est comprise entre m_k et M_k, la fonction étant continue, cette valeur μ_k est atteinte par la fonction pour une valeur ξ_k comprise entre x_k et x_{k+1}. On peut donc écrire $\mu_k = f(\xi_k)$.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la fonction est continue, la somme* $\Sigma(x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$ *a une limite quand tous les intervalles* $(x_{k+1} - x_k)$ *tendent simultanément vers zéro. Cette limite est indépendante.*

1° *de la façon dont les intervalles tendent vers zéro* ;

2° *de la valeur* ξ_k *que l'on prend dans chaque intervalle* $x_{k+1} - x_k$.

C'est cette limite qu'on appelle l'*intégrale définie* de la fonction dans l'intervalle ab et que l'on désigne par la notation $\int_a^b f(x)dx$.

C'est, comme on le voit, la limite d'une somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits.

Cas où $b < a$. — Il suffit de prendre pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres décroissant de a à b et de renverser toutes les inégalités. Le raisonnement subsiste intégralement.

Cas où la fonction est discontinue mais reste bornée. — Supposons que la fonction admette un nombre fini de discontinuités dans l'intervalle ab, tout en restant bornée. *Nous allons montrer que les sommes s et S ont encore même limite.*

Supposons par exemple la fonction discontinue en un seul point c. Montrons que la différence S — s peut être rendue moindre que ε.

δ

Soit en effet γ une quantité que nous pourrons prendre aussi petite que nous le voudrons. Pour une subdivision donnée, dont tous les intervalles sont moindres que δ, considérons ceux de ces intervalles qui ont une partie commune avec $c - \gamma$ et $c + \gamma$. Leur amplitude totale sera tout au plus $2\gamma + 2\delta$. L'oscillation de la fonction dans chacun de ces intervalles étant moindre que $M - m$, les parties des sommes de S et s correspondant à ces intervalles auront une différence moindre que $2(M - m)(\gamma + \delta)$.

Or si nous choisissons γ et δ moindres que $\frac{\varepsilon}{8(M-m)}$ la différence correspondante sera moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$.

δ_1

D'ailleurs les parties de S et s correspondant aux intervalles a, $c - \gamma$ et $c + \gamma$, b peuvent avoir une différence également moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$, à la condition que $\delta < \delta_0$.

Choisissons pour γ et δ le plus petit des nombre $\frac{\varepsilon}{8(M-m)}$ et δ_0. La différence totale entre S et s sera moindre que ε ; S et s ont bien même limite.

On peut généraliser aisément au cas où les discontinuités sont en nombre fini ou même en nombre infini à la condition qu'elles puissent être comprises dans des intervalles dont la somme puisse être rendue aussi petite qu'on le voudra.

II. — PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

Comparons $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_b^a f(x)dx$. ψ, ξ Dans les sommes successives qui servent à les définir, on peut prendre pour chacune d'elles toujours les mêmes points de division, et toujours les mêmes valeurs de ξ dans chaque intervalle.

δ_1

1° L'élément de la somme $(x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$ est alors remplacé dans la seconde par $(x_k - x_{k+1}) f(\xi_k)$. Les deux sommes sont donc constamment égales et de signes contraires. Leurs limites sont donc égales et de signes contraires.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx ;$$

2° Si

$$f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x)$$

A, B étant des constantes, on a évidemment

$$\int_a^b f(x)dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b f_2(x)dx ;$$

3° On a

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{1}$$

Supposons en effet d'abord b compris entre a et c. Dans les sommes successives qui définissent $\int_a^c$, on peut supposer que b fasse partie de toutes les divisions successives. Le résultat est alors évident.

L'égalité peut s'écrire, puisque $\int_a^c = -\int_c^a$

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = 0.$$

Cette forme symétrique montre alors que l'égalité (1) a lieu quelles que soient les positions respectives de a, b, c.

La généralisation se fait comme dans le cas de l'identité de Chasles.

Théorèmes de la moyenne. — 1° Nous avons déjà vu que les sommes S et s sont constamment comprises entre $m(b - a)$ et $M(b - a)$. Leur limite commune $\int_a^b f(x)dx$ est donc également comprise entre ces deux quantités. On a

$$m(b - a) < \int_a^b f(x)dx < M(b - a).$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a)$$

μ étant compris entre m et M.

Or si la fonction est continue entre a et b, il existe au moins

une valeur ξ de x, comprise entre a et b, pour laquelle $f(x)$ prend la valeur μ. On peut donc écrire $\mu = f(\xi)$ et

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(\xi). \qquad (a < \xi < b)$$

C'est la première formule de la moyenne.

On peut la généraliser.

Si pour toute valeur comprise entre a et b on a $f(x) < \varphi(x)$, on aura évidemment

$$\int_a^b f(x)dx < \int_b^a \varphi(x)dx$$

en supposant $b > a$.

Plus généralement, supposons que la fonction à intégrer puisse se mettre sous la forme $\varphi(x) \times \psi(x)$; supposons $\psi(x)$ constamment positive dans l'intervalle ab, et $\varphi(x)$ comprise entre m et M.

On en déduira

$$m\psi(x) < \varphi(x)\,\psi(x) < \mathrm{M}\psi(x).$$

Donc

$$\int_a^b m\psi(x)dx < \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx < \int_a^b \mathrm{M}\psi(x)dx,$$

c'est-à-dire

$$m\int_a^b \psi(x)dx < \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx < \mathrm{M}\int_a^b \psi(x)dx.$$

On peut donc écrire

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx = \mu\int_a^b (x)dx,$$

μ étant compris entre m et M. D'ailleurs on peut poser aussi $\mu = \varphi(\xi)$, ξ étant compris entre a et b. Donc

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)dx$$

(si $\psi(x)$ garde un signe constant dans l'intervalle ab).

2e Théorème de la moyenne. — Démontrons d'abord le lemme suivant dû à Abel.

LEMME D'ABEL. — *Soient $v_1, v_2, \dots v_n$ une suite de quantités quelconques, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ des multiplicateurs tous positifs et formant une suite stationnaire ou décroissante : nous allons démontrer qu'on peut écrire*

$$\Sigma = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n = \varepsilon_1 H.$$

H *étant intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des sommes*

$$S_1 = v_1 \qquad S_2 = v_1 + v_2 \cdots S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

On a en effet $v_k = S_k - S_{k-1}$; δ_1 en introduisant les sommes $S_1, S_2, \dots S_n$, on peut écrire identiquement

$$\begin{aligned}\Sigma &= \varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2(S_2 - S_1) + \cdots + \varepsilon_n(S_n - S_{n-1}) \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)S_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)S_2 + \cdots + \varepsilon_n S_n.\end{aligned}$$

Par hypothèse, tous les coefficients de $S_1, S_2, \dots S_n$ sont nuls ou positifs. En désignant par s et S les deux sommes extrêmes on a

$$s < S_k < S.$$

δ_1 Si on multiplie chacune de ces inégalités par le coefficient correspondant et si on les ajoute, on aura donc après réductions

$$\varepsilon_1 s < \Sigma < \varepsilon_1 S$$

On peut donc bien écrire

$$\Sigma = \varepsilon_1 H,$$

H étant intermédiaire entre les deux sommes extrêmes,
ce qui démontre le théorème.

Ce lemme étant démontré, prenons encore une intégrale mise sous la forme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

et supposons que dans l'intervalle, $\varphi(x)$ conserve un signe constant et varie toujours dans le même sens par exemple en décroissant.

Considérons, pour une subdivision donnée de l'intervalle ab, la somme

$$\Sigma f(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k) = \Sigma\varphi(\xi_k)\,\psi(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k) = \varphi(a)\,\psi(a)\,(x_1 - a) + \cdots$$

Prenons pour quantités ε_k les facteurs $\varphi(\xi)$ et pour quantités v_k les facteurs $\psi(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k)$.

α, δ_1

En appliquant le lemme d'Abel, on peut écrire

$$\Sigma = \varphi(a) \times \mu,$$

μ étant une quantité intermédiaire entre la plus petite et la plus grande des quantités

$$\begin{aligned}
S_1 &= (x_1 - a)\psi(a),\\
S_2 &= (x_1 - a)\psi(a) + (x_2 - x_1)\psi(\xi_1).\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_k &= (x_1 - a)\psi(a) + (x_2 - x_1)\psi(\xi_1) + \cdots + (x_k - x_{k-1})\psi(\xi_{k-1}),\\
S_n &= (x_1 - a)\psi(a) + (x_2 - x_1)\psi(\xi_1) + \cdots + (b - x_n)\psi(\xi_n).
\end{aligned}$$

ξ

On voit qu'on est amené à considérer les intégrales $\int_a^{x_k} \psi(x)dx$.

Posons donc $F(x_k) = \int_a^{x_k} \psi(x)dx$.

Nous allons remplacer les sommes S_k par les intégrales $F(x_k)$.

Étant donné un nombre positif ε aussi petit qu'on le voudra, on pourra, la fonction $f(x)$ étant continue, supposer les intervalles suffisamment petits pour que l'oscillation de la fonction dans chaque intervalle soit moindre que $\frac{\varepsilon}{b-a}$.

δ_1

Pour cette division de l'intervalle, on aura

$$| S_k - F(x_k) | < \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - a),$$

à fortiori

$$| S_k - F(x_k) | < \varepsilon.$$

Donc μ sera compris entre la plus grande et la plus petite des quantités

$$\begin{aligned}
&F(x_1) - \varepsilon, \quad F(x_2) - \varepsilon \cdots F(b) - \varepsilon,\\
&F(x_1) + \varepsilon, \quad F(x_2) + \varepsilon \cdots F(b) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

δ_1

Si, pour toute valeur de x de l'intervalle ab, $F(x)$ est compris entre deux limites m et M, μ sera compris entre $m - \varepsilon$ et $M + \varepsilon$; ε pouvant être choisi aussi petit qu'on le veut à mesure que l'intervalle δ tend vers 0, μ sera compris entre m et M. On peut donc écrire

$$\int_a^q \varphi(x)\psi(x)dx = \mu\varphi(a).$$

D'ailleurs l'intégrale $F(x) = \int_a^x \psi(x)dx$ étant évidemment et comme nous allons le voir une fonction continue de x, et μ étant compris entre les deux bornes de la fonction dans l'intervalle ab, celle-ci atteint la valeur μ pour au moins une valeur ξ de x. On peut donc écrire

$$\mu = \int_a^\xi \psi(x)dx$$

et par suite

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi \psi(x)dx.$$

Cette formule est due à O. Bonnet.

On peut faire disparaître la restriction que $\varphi(x)$ garde un signe constant dans l'intervalle.

Supposons $\varphi(x)$ décroissant constamment et devenant négative après s'être annulée dans l'intervalle, sa valeur minima étant $\varphi(b)$. Posons

$$\theta(x) = \varphi(x) - \varphi(b).$$

La fonction $\theta(x)$ sera constamment décroissante et positive puisque sa valeur minimum, pour $x = b$, sera zéro. On peut appliquer à l'intégrale $\int_a^b \theta(x)\,\psi(x)\,dx$ la formule de O. Bonnet et écrire

$$\int_a^b \theta(x)\psi(x)dx = \theta(a)\int_a^\xi \psi(x)dx$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b [\varphi(x) - \varphi(b)]\psi(x)dx = [\varphi(a) - \varphi(b)]\int_a^\xi \psi(x)dx.$$

Par suite

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi \psi(x)dx + \varphi(b)\int_\xi^b \psi(x)dx$$

pour une valeur ξ intermédiaire entre a et b.

Cette formule qui constitue le deuxième théorème de la moyenn est due à Weierstrass.

Dérivée d'une intégrale. — Donnons-nous une fonction $f(x)$ intégrable dans un intervalle ab ; X désignant une valeur quelconque de l'intervalle, nous pouvons définir $\int_a^X f(x)dx$. Cette intégrale dépend de la valeur choisie pour X : c'est donc une fonction F(X).

Voyons si cette fonction admet une dérivée. Il faut donner à X un accroissement ΔX, et voir si le rapport $\frac{F(X+\Delta X)-F(X)}{\Delta X}$ admet une limite finie et bien déterminée quand ΔX tend vers zéro. Or $X+\Delta X$ étant supposé compris dans l'intervalle ab, on a

$$\Delta F = F(X+\Delta X)-F(X) = \int_a^{X+\Delta X} f(x)dx - \int_a^X f(x)dx = \int_X^{X+\Delta X} f(x)dx.$$

D'après le théorème de la moyenne, la dernière intégrale est égale à $\Delta X f(\xi)$, ξ étant compris entre X et $X+\Delta X$. On a donc $\frac{\Delta F}{\Delta X} = f(\xi)$.

A la seule condition que $f(x)$ soit bornée, quelle que soit la limite de $f(\xi)$, ΔF tend certainement vers zéro avec ΔX. La fonction F(X) est donc certainement continue même si $f(x)$ admet des discontinuités dans l'intervalle ab. Mais de plus, si la fonction $f(x)$ est continue au point X, lorsque ΔX tendra vers zéro, $f(\xi)$ aura pour limite $f(X)$.

La fonction $F(X) = \int_a^X f(x)dx$, *considérée comme fonction de sa limite supérieure, est une fonction continue de* X *et admet une dérivée* $f(X)$.

On peut donc être sûr que si $f(x)$ est continue pour toute valeur de x (elle est certainement intégrable) il existe une fonction $F(x)$ qui admette constamment pour dérivée $f(x)$. Mais inversement, il n'est pas démontré que toute fonction $f(x)$ même intégrable, admette une fonction dont elle soit la dérivée. Cette dernière n'existera que pour tout intervalle où $f(x)$ sera continue.

De même si l'on considérait l'intégrale $F(X) = \int_X^b f(x)dx$ comme fonction de sa limite inférieure X (comprise entre a et b), elle admet une dérivée $\frac{dF}{dX} = -f(X)$.

Ce résultat se déduit immédiatement du précédent, puisque

$$\int_X^b f(x)dx = -\int_b^X f(x)dx.$$

Primitive. — On appelle fonction primitive d'une fonction $f(x)$ une fonction $F(x)$ admettant $f(x)$ pour dérivée. L'intégrale $F(X) = \int_a^X f(x)dx$ est donc une fonction primitive de la fonction $f(X)$. Une autre fonction primitive quelconque de $f(X)$, $\Phi(X)$, n'en différera que par l'addition d'une constante. Car la différence $F(X) - \Phi(X)$, ayant une dérivée constamment nulle dans l'intervalle se réduit nécessairement à une constante.

Si donc on connait une fonction primitive quelconque $\Phi(X)$ on est certain que

$$\int_a^X f(x)dx = \Phi(X) + \text{const.}$$

Si dans cette égalité nous faisons $X = a$, l'intégrale devient nulle. On aura $C = -\Phi(a)$; donc

$$\int_a^X f(x)dx = \Phi(X) - \Phi(a).$$

C'est la formule fondamentale du calcul des intégrales définies.

Ainsi, pour calculer une intégrale définie, il suffit de connaître une fonction primitive quelconque de la fonction à intégrer.

Mais il faut remarquer que, connaître une fonction primitive d'une fonction donnée, est évidemment un problème plus général que calculer simplement une intégrale définie ; et il est bien évident, à priori, qu'il doit être possible de calculer une intégrale définie sans que l'on puisse connaître la fonction primitive.

Remarque. — Lorsque l'on applique la formule

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

il est bien évident qu'il faut se donner une fonction primitive bien déterminée dont on prendra la différence $F(b) - F(a)$.

Exemple : arc tg (x) est une fonction primitive de $\frac{1}{1+x^2}$, δ_1 mais cette fonction étant à déterminations multiples, il sera nécessaire de spécifier d'abord celle que l'on considère (quelle qu'elle soit d'ailleurs), par exemple l'arc $3\pi + \varphi$, φ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ on aura alors

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = [(3\pi + \varphi)]_a^b = \varphi_b - \varphi_a.$$

Somme d'infiniment petits. — Comme nous l'avons vu, une intégrale définie est la limite de la somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits. Si l'on a partagé l'intervalle ab en n parties égales, chacun de ces infiniment petits u_k est égal à $\frac{b-a}{n} f(\xi_k)$.

d

Il en résulte que

$$nu_k = (b-a) f(\xi_k)$$

ρ

nu_k tend donc vers une valeur finie et différente de zéro. Si l'on considère $\frac{1}{n}$ comme infiniment petit principal, on peut dire que tous les infiniment petits sont en général du premier ordre.

(Il pourra d'ailleurs exister des infiniment petits d'ordre différent, en nombre même infiniment grand).

Inversement supposons que l'on ait des infiniment petits u_k et que l'on ait à calculer la limite de la somme de n infiniment petits. Supposons que nous puissions mettre chaque infiniment petit u_k sous la forme $\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$. δ_1 On aura donc à calculer la somme

$$\Sigma \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{n}{n}\right)$$

qui donnera, à la limite, l'intégrale $\int_0^1 \varphi(x)dx$.

Exemples. — 1° Soit à calculer la somme

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n}.$$

δ_1

On a ici $$u_k = \frac{1}{n+k}$$

nu_k a pour limite l'unité.

La somme a donc une limite. On peut écrire

$$u_k = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Donc $$\varphi(x) = \frac{1}{1+x}.$$

La limite de la somme est

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log. 2.$$

2° Soit la somme

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}.$$

δ

On peut écrire

$$u_k = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}} \quad \text{d'où} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Donc la somme a une limite

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

3° Soit encore la somme

$$\frac{n}{n^3 + 1^3} + \frac{2n}{n^3 + 2^3} + \frac{2n}{n^3 + k^3} + \cdots + \frac{n(n-1)}{n^3 + (n-1)^3}.$$

δ

On a ici $$nu_k = \frac{kn^3}{n^3 + k^3}.$$

Si k reste fini on voit que nu_k tend vers zéro. Pour des valeurs finies de k, u_k est donc un infiniment petit du deuxième ordre, mais il existe néanmoins une infinité de valeurs de k pour lesquelles u_k est du premier ordre. On peut écrire ici

$$u_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k^3}{n^3}}, \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1 + x^3}.$$

Donc la somme tend vers l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^3}.$$

II. — INTÉGRALE INDÉFINIE

PROCÉDÉS GÉNÉRAUX D'INTÉGRATION

Le calcul différentiel étudie les fonctions dérivées d'une fonction donnée (de une ou plusieurs variables), établit des relations entre ces fonctions, leurs dérivées et les variables indépendantes.

Le problème inverse se pose : Étant données une ou plusieurs relations entre des fonctions de une ou de plusieurs variables, leurs dérivées (partielles) successives et ces variables, rechercher quelles sont les fonctions qui satisfont à ces relations.

On peut concevoir facilement que ce problème soit extrêmement compliqué et insoluble dans la plupart des cas. Prenons par exemple le problème le plus simple : Étant donnée une fonction $f(x)$, déterminer les fonctions $F(x)$ qui l'admettent pour dérivée.

Si la fonction $f(x)$ est continue, nous avons vu que l'intégrale $\int_a^X f(x)dx$ considérée comme fonction de la limite supérieure X satisfait à la question. Mais, à moins d'introduire des fonctions nouvelles, nous ne pourrons, en général, que la conserver sous cette forme, et étudier ses propriétés sous cette forme. Cette fonction intégrale peut jouir en effet de propriétés particulières, tout à fait nouvelles, dont ne jouissent pas les fonctions connues ou leurs combinaisons quelles qu'elles soient.

Prenons par exemple l'intégrale $\int_1^x \frac{dt}{t}$ où x est positif.

Nous savons que la fonction intégrale est Lx : elle jouit de propriétés caractéristiques et on ne pourra l'exprimer que sous la forme d'intégrale tant que l'on n'aura pas la notion de fonction exponentielle ou de son inverse.

De même la fonction admettant pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ ne pourra qu'être exprimée sous la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ puisque elle se distingue essentiellement, par certaines de ses propriétés, de toutes celles que l'on peut obtenir par des combinaisons des fonctions algébriques, exponentielles et circulaires.

On peut obtenir un tableau de correspondance aussi étendu qu'on le veut entre des fonctions et leurs primitives.

Rappelons les principales de ces formules

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad \text{si} \quad m+1 \neq 0 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{L}x \qquad (m=-1) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \mathrm{L}(x+\sqrt{a+x^2}),$$

$$\int \cos x dx = \sin x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quelques remarques simples permettent parfois de faciliter la détermination de la fonction primitive d'une fonction donnée.

Si l'on peut mettre la fonction à intégrer sous la forme d'un quotient $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ dont le numérateur soit la dérivée du dénominateur, la fonction primitive sera $\mathrm{L}\varphi(x)$.

Par exemple $\int \operatorname{tg} x dx$ peut s'écrire $-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\mathrm{L}\cos x$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} dx = \mathrm{L}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Les deux formules principales du calcul des dérivées concernent la dérivée d'une somme ou la dérivée d'un produit. Elles conduisent, inversement, à des remarques sur l'intégration.

Décomposition en éléments intégrables. — De même que la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées de chacun des termes, de même, si l'on peut décomposer la fonction en un certain nombre d'éléments intégrables, l'intégrale de la fonction sera égale à la somme des intégrales.

Soit par exemple $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

La fonction à intégrer $\frac{dx}{x^2-1}$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$.

On aura donc

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{L}|x-1| - \mathrm{L}|x+1|\right] = \mathrm{L}\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}.$$

De même

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x.$$

Nous verrons que c'est le procédé appliqué pour l'intégration des fonctions rationnelles quelconques.

Intégration par parties. — Si u, v sont deux fonctions de x, on a

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

On en déduit

$$\int vu'dx = uv - \int uv'dx.$$

L'intégration d'une fonction que l'on peut considérer comme mise sous la forme vu' est donc ramenée à l'intégration de la fonction uv'. Cette dernière peut être plus simple, en particulier si v est une fonction transcendante de la forme $\mathrm{L}\varphi(x)$ ou arc tg $\varphi(x)$ dont la dérivée $\frac{\varphi'}{\varphi}$ ou $\frac{\varphi'}{1+\varphi^2}$ ne dépendra plus de transcendantes si $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle.

Exemple : $\int x^n \mathrm{L}x dx$. On peut poser $du = x^n dx$.

D'où

$$u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (\text{si } n+1 \neq 0).$$

On aura donc

$$\int x^n \mathrm{L}x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{L}x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{L}x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Si $n+1=0$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{L}x\,dx = \int \mathrm{L}x\,d\mathrm{L}x = \frac{1}{2}(\mathrm{L}x)^2.$$

2°

$$\int x^n \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

Cette deuxième, intégrale d'une fonction rationnelle, peut être calculée.

3° Soit encore

$$\mathrm{I} = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{L}\frac{x}{1-x}\,dx.$$

δ

On peut poser

$$du = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

On peut, comme nous le verrons, déterminer facilement la fonction u. On trouve

$$u = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(x^2+2).$$

D'ailleurs

$$d\mathrm{L}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}\,dx.$$

Donc

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\mathrm{L}\frac{x}{1-x} + \int \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} \times \frac{x}{1-x}\,dx.$$

Cette deuxième, intégrale d'une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{1-x^2}$, (radical portant sur un trinôme du second degré), peut être calculée, comme nous le verrons.

4° Considérons encore les deux intégrales

$$\mathrm{A} = \int e^{mx} \cos px\,dx, \qquad \mathrm{B} = \int e^{mx} \sin px\,dx.$$

α

Prenons $e^{mx}dx$ comme élément intégrable dans l'une et dans l'autre.

δ₁

On aura

$$\mathrm{A} = \frac{e^{mx}}{m} \cos px + \int \frac{e^{mx}}{m} \times p \sin px\,dx.$$

De même

$$B = \frac{e^{mx}}{m} \sin px - \int \frac{e^{mx}}{m} p \cos px \, dx,$$

c'est-à-dire

$$mA = e^{mx} \cos px + pB, \qquad mB = e^{mx} \sin px - pA.$$

ρ

Ces deux équations donneront A, B

$$A = e^{mx} \frac{m \cos px + p \sin px}{m^2 + p^2}, \qquad B = e^{mx} \frac{m \sin px - p \cos px}{m^2 + p^2}.$$

La formule d'intégration par parties peut être généralisée dans le cas où, dans la fonction à intégrer, on peut mettre en évidence une dérivée d'ordre supérieur d'une certaine fonction $\varphi(x)$ sous la forme

$$\int f \varphi^n dx.$$

δ_1

On aura successivement

$$\int f \varphi^n dx = \varphi^{n-1} f - \int \varphi^{n-1} f' dx,$$

$$\int f' \varphi^{n-1} dx = \varphi^{n-2} f' - \int \varphi^{n-2} f'' dx,$$

.....

En éliminant les intégrales intermédiaires, on obtient

$$\int f \varphi^n dx = \varphi^{n-1} f - \varphi^{n-2} f' + \varphi^{n-3} f'' \cdots + (-1)^k \varphi^{n-k-1} f^k + (-1)^{k+1} \int f^{k+1} \varphi^{n-k-1} dx.$$

En particulier si f est un polynôme de degré k, la dernière intégrale disparaît.

Exemple : si $f(x)$ est un polynôme de degré k,

δ

$$\int f(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{f}{a} - \frac{f'}{a^2} + \frac{f''}{a^3} \cdots + (-1)^k \frac{f^k}{a^{k+1}} \right)$$

Changement de variable. — Le procédé le plus important pour le calcul des intégrales est celui du changement de variable.

Supposons que nous prenions une nouvelle variable t liée à x par

la relation $x = \varphi(t)$. Si nous avions une fonction primaire $F(x)$ de $f(x)$, remplaçons-y x par $\varphi(t)$. On obtiendra une fonction

$$\Phi(t) = F(\varphi(t)).$$

d

On en déduit

$$\Phi'(t) = F'_{\varphi} \times \varphi'(t)dt.$$

Mais par hypothèse

$$F'_u(u) = f(u).$$

Donc

$$\Phi'(t) = f(\varphi) \times \varphi'(t)dt.$$

σ

Cette formule montre que $\Phi(t)$ a pour dérivée $f(\varphi)\varphi'(t)$ c'est-à-dire que

ω

$$F(x) = \Phi(t) = \int f(\varphi) \times \varphi'(t)dt.$$

Nous sommes donc amenés à calculer l'intégrale

$$\int f(\varphi)\varphi'(t)dt$$

qui est obtenue en remplaçant $f(x)$ et dx par leur expression en fonction de t ; en remplaçant ensuite dans le résultat t en fonction de x nous obtiendrons la fonction primitive cherchée $F(x)$.

Cette formule étant des plus importantes, nous en donnerons une démonstration tout à fait différente en considérant les intégrales définies.

Exemples. — Soit l'intégrale

$$\int \frac{x^4 dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

α, δ

Posons $x = a \sin t$, d'où

$$dx = a \cos t dt.$$

L'intégrale se transforme en

$$a^2 \int \frac{\sin^4 t}{\cos^2 t} dt = a^2 \int \frac{(1 - \cos^2 t)^2}{\cos^2 t} dt = a^2 \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 2 + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt$$

qui est calculable.

2° $\int \frac{dx}{1+e^x}$. Posons $e^x = t$, il vient

$$\int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \mathrm{L}\frac{t}{1+t} = \mathrm{L}\frac{e^x}{1+e^x}.$$

3° Soit

$$\int \mathrm{R}(\sin x, \cos x)dx$$

R désignant une fonction rationnelle de sin x, cos x. Le changement de variable $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ donnera

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

L'intégrale se transforme en

$$\int \mathrm{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

c'est-à-dire en intégrale d'une fonction rationnelle de t, fonction que l'on sait intégrer comme nous le verrons.

Si la fonction est impaire en cos x, c'est-à-dire si on peut la mettre sous la forme cos x R(sin x, $\cos^2 x$) il suffira de faire le changement de variable sin $x = t$. On aura alors à intégrer

$$\int \mathrm{R}(t, 1-t^2)dt.$$

De même, si la fonction est impaire en sin x, on posera cos $x = t$.

Enfin si la fonction est paire à la fois en sin x et cos x, c'est-à-dire si elle ne change pas quand on change x en $x + \pi$, on fera le changement de variable tg $x = t$. D'où

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

La fonction étant paire en sin x et cos x, les radicaux disparaitront ; on aura en dénominateur une puissance de $1 + t^2$ d'ordre deux fois moins élevé que si l'on avait posé $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

4° Soit encore

$$\int \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{1+x^{-\frac{1}{4}}}dx.$$

Faisons le changement de variable

$$x^{\frac{1}{12}} = t \qquad \text{ou} \qquad x = t^{12}.$$

D'où

$$x^{-\frac{3}{4}} = t^{-9}, \qquad x^{\frac{1}{3}} = t^4.$$

L'intégrale se transforme en

$$\int \frac{12t^3}{1+t^4}dt.$$

On est encore ramené à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t.

Le procédé est applicable, comme on le voit, à une fonction rationnelle quelconque de puissances fractionnaires de x, $R(x^\alpha, x^\beta, \ldots x^\lambda)$. Si n désigne le plus petit dénominateur commun de α, β, ... λ, de telle sorte que

$$\alpha = \frac{\alpha'}{n'}, \qquad \beta = \frac{\beta'}{n'}, \cdots \qquad (\alpha', \beta', \cdots \text{ent.}).$$

On posera $x = t^n$. D'où $x^\alpha = t^{\alpha'}$...

On sera ramené à l'intégrale d'une fonction rationnelle de t.

Très souvent, l'intégrale ne dépend que de x^2 et de dx^2. Il suffit alors de poser $x^2 = t$.

Soit par exemple

$$\int \frac{x\mathrm{L}x}{(1+x^2)^3}dx.$$

Elle s'écrit

$$\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{L}x^2 dx^2}{(1+x^2)^3},$$

en posant $x^2 = t$ on aura simplement

$$\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{L}t dt}{(1+t)^3}.$$

Il suffira d'intégrer par parties.

Formule de réduction. — Lorsque la fonction à intégrer dépend d'un certain indice n entier, on peut chercher une relation entre l'intégrale proposée et celle qui correspond à une autre valeur entière de n. On obtient ce que l'on appelle une formule de réduction. Elle permettra par récurrence de réduire l'indice n à sa valeur la plus simple 0, 1, 2, etc.

Exemple. — Soit

$$u_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

On pourrait intégrer par parties, mais pour obtenir le plus rapidement possible la formule de réduction, nous partirons de la dérivée de $\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$. On a

$$\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]' = \frac{1+x^2-2(n-1)x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{-(2n-3)(1+x^2)+2n-2}{(1+x^2)^n}.$$

D'où en intégrant

$$\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} = (2n-2)u_n - (2n-3)u_{n-1}.$$

Si $n-1 \neq 0$

$$u_n = \frac{2n-3}{2n-2}u_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \times \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

C'est la formule de réduction cherchée. Le calcul de u_n est donc ramené au calcul de u_{n-1} et, de proche en proche, si n est positif, à celui de u_2 puis de u_1. On aura

$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}, \qquad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}.$$

On ne peut aller plus loin car nous avons dû supposer $n-1 \neq 0$. Mais on a

$$u_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

En éliminant les intégrales successives, on voit donc que u_n s'exprime par une fonction rationnelle de dénominateur $(1+x^2)^{n-1}$, le numérateur étant de degré inférieur au dénominateur, et par un terme

$$\frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} \operatorname{arc\,tg} x.$$

Applications : I. Intégration des différentielles binômes. — On désigne sous ce nom une expression de la forme

$$x^m(a + bx^n)^p\,dx,$$

a, b étant deux constantes, m, n, p des nombres rationnels positifs ou négatifs.

Les intégrales de ces expressions semblent donc dépendre de cinq constantes. On peut aisément les réduire à deux. Faisons le changement de variable

$$bx^n = at, \qquad x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}.$$

On en déduit

$$a + bx^n = a(1 + t), \qquad dx = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

L'intégrale se transforme en

$$\int \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} t^{\frac{m}{n}}\, a^p(1 + t)^p \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

A un facteur constant près, on est donc ramené à étudier les intégrales

$$I_{qp} = \int t^q(1 + t)^p dt,$$

en posant

$$q = \frac{m + 1}{n} - 1.$$

$\frac{m + 1}{n}$ et p sont donc les deux constantes essentielles de la différentielle binôme.

Intégration. — Si p est un nombre entier positif, il suffit de développer $(1 + t)^p$ par la formule du binôme. On a une suite de termes tous intégrables (même si q est absolument quelconque).

Si p est entier négatif, mais si q est fractionnaire, de la forme $\frac{q'}{n}$ (q' entier), il suffit de faire le changement de variable $t = u^n$ pour être ramené à une fonction rationnelle de u.

2e Cas. — Si q est entier positif, faisons le changement de variable $1 + t = u$, on aura l'intégrale

$$\int (u - 1)^q u^p du$$

absolument analogue à la précédente et intégrable dans les mêmes conditions (q entier positif quel que soit p, q entier négatif si p est fractionnaire).

3e Cas. — Enfin on peut encore écrire

$$\int (1+t)^{p+q}\left(\frac{t}{1+t}\right)^q dt.$$

Faisons le changement de variable

$$\frac{t}{1+t} = u \quad \text{ou} \quad t = \frac{u}{1-u}, \quad dt = \frac{1}{(1-u)^2}du.$$

L'intégrale devient

$$\int \left(\frac{1}{1-u}\right)^{p+q} u^q \frac{1}{(1-u)^2} du = \int u^q (1-u)^{-p-q-2} du.$$

On est donc encore ramené au premier ou au deuxième cas et l'on pourra intégrer :

Si $p+q+2$ est entier négatif quel que soit q ; si $p+q+2$ est entier positif avec q fractionnaire.

Dans ce dernier cas, pour l'intégrale primitivement donnée, le changement de variable revient à poser $ax^{-n}+b=\frac{1}{u}$.

En résumé en supposant p, q fractionnaires, on voit que l'on pourra intégrer dans les trois cas suivants :

$$1^o\ p \text{ entier} ; \quad 2^o\ q \text{ entier} ; \quad 3^o\ p+q \text{ entier},$$

c'est-à-dire, pour la différentielle binôme primitive, si :

$$1^o\ p \text{ entier} ; \quad 2^o\ \frac{m+1}{n} \text{ entier} ; \quad 3^o\ p+\frac{m+1}{n} \text{ entier}.$$

On démontre que ce sont les seuls cas possibles d'intégration.

Exemples. — Soit l'intégrale $\int (bx^{-\frac{2}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} dx$.

On a ici $m=0$, $n=-\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{2}$.

$$\frac{m+1}{n} = -\frac{3}{2}, \quad p+\frac{m+1}{n} = -1.$$

On se trouve donc dans le troisième cas. Nous ferons le changement de variable.

$$b-x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{t}, \quad x = \left(\frac{bt-1}{t}\right)^3.$$

L'intégrale devient, toutes réductions faites,

$$\int \frac{3}{2} t^{-\frac{5}{3}}\, dt = -\, t^{-\frac{3}{3}}.$$

En revenant à la variable x

$$\mathrm{I} = -\left(b - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2° Soit l'intégrale $\int x^m(1 + x^3)^{\frac{1}{3}}\, dx$. On a ici

$$m = m, \quad n = 3, \quad p = \frac{1}{3}.$$

δ

Cette différentielle binôme sera donc intégrable si

$$\frac{m+1}{3} = k, \quad \text{ou} \quad \frac{m+1}{3} + \frac{1}{3} = k, \qquad (k \text{ ent.})$$

c'est-à-dire si

$$m = 3k - 1 \qquad \text{ou} \qquad m = 3k - 2.$$

Il suffit donc que m soit un entier non multiple de 3.

Si l'on ne se trouve dans aucun des trois cas d'intégration, on peut chercher à établir une formule de réduction.

On pourrait intégrer par parties par rapport à t, mais pour arriver, sans combinaisons ni éliminations, à établir cette formule,

α

nous partirons de la dérivée de $t^{q+1}(1 + t)^p$.

On a

α

$$\begin{aligned} \mathrm{D}t^{q+1}(1+t)^p &= t^q(1+t)^{p-1}[(q+1)(1+t) + pt] \\ &= t^q(1+t)^{p-1}[p+q+1)(1+t) - p]. \end{aligned}$$

Ce qui donne aussitôt en intégrant

$$t^{q+1}(1+t)^p = (p+q+1)\mathrm{I}_{q,\,p} - p\mathrm{I}_{q,\,p-1}. \tag{1}$$

ρ

C'est une relation entre deux intégrales dans lesquelles l'indice p seul a varié d'une unité. De même

$$\mathrm{D}t^q(1+t)^{p+1} = t^{q-1}(1+t)^p[(p+q+1)t + q].$$

D'où en intégrant

$$t^q(1+t)^{p-1} = (p+q+1)\mathrm{I}_{q,\,p} + q\mathrm{I}_{q-1,\,p}. \tag{2}$$

L'indice q seul a varié d'une unité.

En appliquant successivement les formules (1)(2), on peut donc rabaisser chacun des indices p, q d'autant d'unités que l'on veut.

Si l'exposant q ou p est négatif, on peut au contraire résoudre les formules par rapport à I_{qp} (si $p + q + 1 \neq 0$), et augmenter l'exposant d'une unité.

2e Application. — Considérons encore l'intégrale

$$I_{pq} = \int \sin^p x \cos^q x dx$$

p et q pouvant être quelconques, positifs ou négatifs.

Nous partirons, pour établir la formule de réduction, de la dérivée de $\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x$. On aura

$$D \sin^{p+1} x \cos^{q-1} x = \sin^p x \cos^{q-2} x [(p+1)\cos^2 x - (q-1)\sin^2 x].$$

$$= \sin^p x \cos^{q-2} x [(p+q)\cos^2 x - (q-1)].$$

En intégrant on aura donc

$$\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x = (p+q) I_{p,q} - (q-1) I_{p,q-2}.$$

C'est une relation entre deux intégrales dans lesquelles, l'indice p restant fixe, l'indice q a varié de deux unités.

Si p est positif, elle peut être résolue par rapport à $I_{p,q}$, à la condition que $p + q$ soit différent de zéro.

Si p est négatif, elle peut être résolue par rapport à $I_{p-2,q}$.

De même

$$D \sin^{p-1} x \cos^{q+1} x = \sin^{p-2} x \cos^q x [(p-1) - (p+q)\sin^2 x].$$

D'où en intégrant

$$\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x = (p-1) I_{p-2,q} - (p+q) I_{p,q}.$$

relation entre deux intégrales dans lesquelles l'indice p seul a varié de deux unités.

On pourra donc ramener le calcul de $I_{p,q}$ à celui de $I_{p',q'}$ les différences $q - q'$, $p - p'$ étant deux nombres pairs positifs ou négatifs quelconques.

En particulier si p et q sont entiers positifs ou négatifs, en appliquant successivement les deux formules, on sera ramené à l'une des intégrales suivantes :

Si p est pair

$$I_{0,0} = \int dx = x ; \qquad I_{0,1} = \int \cos x\, dx = \sin x ;$$

$$I_{0,-1} = \int \frac{dx}{\cos x} = \mathrm{L}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Si p est impair positif, on sera ramené à l'une des intégrales

$$I_{1,0} = \int \sin x\, dx ; \qquad I_{1,1} = \int \sin x \cos x\, dx ;$$

$$I_{1,-1} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\mathrm{L} \cos x.$$

Si p est impair négatif à l'une des intégrales

$$I_{-1,0} = \int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{L}\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \qquad I_{-1,1} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \mathrm{L} \cos x,$$

$$I_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \mathrm{L}\ \mathrm{tg}\ x.$$

Enfin les formules ne peuvent être résolues par rapport à $I_{p,q}$ si $p + q$ est égal à zéro. Traitons ce cas directement.

On a l'intégrale $\int \mathrm{tg}^p x\, dx$.

On a

$$\mathrm{D}\ \mathrm{tg}^{p-1} x = (p-1)(1 + \mathrm{tg}^2 x)\ \mathrm{tg}^{p-2} x.$$

D'où en intégrant

$$\mathrm{tg}^{p-1} x = (p-1) I_{p-2} + (p-1) I_p.$$

Cette formule de réduction ramène I_p à I_{p-2} si p est positif et différent de 1.

En posant $p - 2 = p'$

$$\mathrm{tg}^{p'+1} x = (p'+1) I_{p'} + (p'+1) I_{p'+2}.$$

Cette formule ramène $I_{p'}$ à $I_{p'+2}$ si p' est négatif différent de -1.

On ne pourra donc jamais passer d'un exposant négatif impair à un exposant positif impair ou inversement.

On sera ramené à l'une des intégrales

$$I_0 = \int dx = 1, \qquad I_1 = \int \mathrm{tg}\ x\, dx = \mathrm{L} \cos x, \qquad I_{-1} = \int \frac{dx}{\mathrm{tg}\ x} = \mathrm{L} \sin x.$$

IV. — INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

Nous avons vu dans la plupart des cas précédents, que l'on était ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle. C'est l'intégration de ces fonctions que nous allons étudier.

On a montré, en Mathémathiques générales, qu'une fraction rationnelle $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ pouvait se décomposer :

1° en un polynôme $E(x)$ (si le degré de $f(x)$ est supérieur au degré de $\varphi(x)$).

2° en une somme de fractions de première espèce

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a},$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots \qquad + \frac{B_1}{x-b},$$
$$+ \cdots$$

correspondant aux racines réelles a, b, $\cdots$ d'ordres de multiplicité α, β, $\cdots$

3° une somme de fractions de deuxième espèce

$$\sum \frac{a_n x + b_n}{(x^2 + px + q)^n},$$

correspondant aux racines imaginaires du dénominateur.

Nous rappellerons rapidement la façon pratique de déterminer les coefficients en admettant qu'on ait résolu l'équation $\varphi(x) = 0$.

Sans parler de la méthode des coefficients indéterminés :

1° la partie entière $E(x)$ se détermine par simple division. C'est la partie entière du quotient des polynômes $f(x)$, $\varphi(x)$ ordonnés suivant les puissances décroissantes de x.

2° coefficients relatifs à la racine a.

Posons $x = a + h$ et ordonnons f et φ suivant les puissances croissantes de h. On a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(a),$$
$$\varphi(a+h) = \frac{h^\alpha}{\alpha!}\varphi^\alpha(a) + \cdots + \frac{h^m}{m!}\varphi^m(a),$$

puisque a est racine d'ordre α de $\varphi(x)$.

δ_1 On a donc

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{1}{h^\alpha} \cdot \frac{f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \cdots}{\frac{1}{\alpha!}\varphi^\alpha(a) + \cdots}.$$

La division des deux polynômes, ordonnée suivant les puissances croissantes de h jusqu'au terme en h^α donnera un résultat de la forme

$$A_\alpha + A_{\alpha-1}h + A_{\alpha-2}h^2 + \cdots + A_1 h^{\alpha-1} \cdots$$

Par suite

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{h}.$$

Les coefficients A_α, $A_{\alpha-1}$, $\cdots$ A_1 sont les coefficients relatifs à la racine a.

3° Détermination des coefficients relatifs aux racines du trinôme

$$x^2 + px + q.$$

Divisons f par $(x^2 + px + q)$ on obtiendra successivement

$$\begin{aligned} f &= (x^2 + px + q)f_1 + a_1 x + b_1, \\ f_1 &= (x^2 + px + q)f_2 + a_2 x + b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1} &= (x^2 + px + q)f_n + a_n x + b_n. \end{aligned}$$

f_n se réduisant à une expression du premier degré $a_{n+1}x + b_{n+1}$.

Posons

$$x^2 + px + q = X.$$

α Multiplions ces égalités respectivement par $1, X, X^2, X^3, \cdots X^{n-1}$ et ajoutons-les. On aura

$$f = a_1 x + b_1 + (a_2 x + b_2)X + \cdots + (a_n x + b_n)X^{n-1} + (a_{n+1}x + b_{n+1})X^n.$$

D'autre part φ est de la forme $X^n\varphi_1$, φ_1 étant premier avec X^n.

σ_2 On peut, d'après le théorème de Bezout, déterminer deux polynômes A, B tels que

$$AX^n + B\varphi_1 \equiv 1.$$

δ_1 La fraction $\frac{f}{\varphi}$ devient donc

$$\frac{f(AX^n + B\varphi_1)}{X^n\varphi_1} = \frac{fA}{\varphi_1} + \frac{fB}{X^n}.$$

Or $\int B$ peut (de même que ci-dessus) se mettre sous la forme

$$\int B = a_1 x + b_1 + (a_2 x + b_2)X + \cdots + (a_n x + b_n)X^{n-1} + \cdots$$

ω

Donc

$$\frac{\int B}{X^n} = \frac{a_1 x + b_1}{X^n} + \frac{a_2 x + b_2}{X^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n x + b_n}{X} + \cdots$$

On a du même coup toutes les fractions relatives au dénominateur X.

La décomposition étant supposée effectuée, nous aurons à intégrer :

R

1° le polynôme E(x) ce qui est immédiat. (Nous supposerons désormais que la partie entière de $\frac{f}{\varphi}$ a été extraite ; il ne restera donc qu'une fraction dans laquelle le numérateur sera de degré inférieur à celui du dénominateur) ;

2° des termes de la forme $\frac{A_k}{(x-a)^k}$, k étant inférieur à α et supposé d'abord différent de 1.

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^k} dx = -\frac{A_k}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

De même

$$\int \frac{B_{k'}}{(x-b)^{k'}} dx = -\frac{B_{k'}}{k'-1} \times \frac{1}{(x-b)^{k'-1}}.$$

Remarquons que si nous réduisons toutes les fractions semblables au même dénominateur, σ nous obtiendrons une fraction de la forme $\frac{\theta(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\cdots}$, le degré de $\theta(x)$ étant inférieur au dénominateur.

Il reste enfin les fractions de la forme $\frac{A_1}{x-a}$ qui donnent par l'intégration des termes tout à fait différents

$$\int \frac{A_1}{x-a} dx = A_1 L(x-a).$$

Le coefficient A_1 s'appelle le « résidu » de la fonction par rapport à la racine a.

De même

$$\int \frac{B_1}{x-b} dx = B_1 L(x-b).$$

Nous aurons une série de termes de la forme

$$A_1 L(x - a) + B_1 L(x - b) + \cdots$$

δ_1, ξ

Prenons enfin les fractions de deuxième espèce

$$\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^m} \qquad (m \leqslant n).$$

Le trinôme $x^2 + px + q$, ayant ses racines imaginaires, peut se mettre sous la forme $(x - \alpha)^2 + \beta^2$. Nous aurons donc à calculer

$$\int \frac{ax + b}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m}.$$

ν, α

Faisons le changement de variable $x = \alpha + \beta t$. L'intégrale devient

$$\int \frac{a\beta t + a\alpha + b}{\beta^{2m}(1 + t^2)^m} dt.$$

δ_1

Elle se décompose en deux :

$$I_1 = \frac{a}{\beta^{2m-1}} \int \frac{t\,dt}{(1 + t^2)^m} = -\frac{a}{\beta^{2m-1}} \times \frac{1}{2(m-1)} \times \frac{1}{(1 + t^2)^{m-1}}.$$

A un facteur constant près, en revenant à la variable x ce sera une fraction de la forme

$$\frac{l}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}} = \frac{l}{(x^2 + px + q)^{m-1}}.$$

Enfin restent les intégrales

$$\frac{a\alpha + b}{\beta^{2m}} \times \int \frac{1}{(1 + t^2)^m} dt.$$

σ_2

Nous les avons déjà calculées. Nous avons vu qu'elles s'expriment par une fraction rationnelle de dénominateur $(1 + t^2)^{m-1}$ (le numérateur étant de degré inférieur) et un terme de la forme k arc tg t.

En revenant à la variable x, nous aurons donc une fraction de dénominateur

$$[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{m-1} = (x^2 + px + q)^{m-1}$$

et un terme de la forme k arc tg $\frac{x - \alpha}{\beta}$.

Si nous réduisons toutes les fractions semblables ainsi obtenues, σ nous aurons une fraction ayant pour dénominateur

$$(x^2 + px + q)^{n-1}(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1-1} \cdots$$

le degré du numérateur étant inférieur à celui du dénominateur.

Il restera une somme de termes de la forme

$$k \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta} + k_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha_1}{\beta_1} \cdots$$

R En résumé l'intégration donnera :

1° une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\theta(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\cdots}$$

2° une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1-1}\cdots}$$

θ et ψ étant de degrés inférieurs respectivement au dénominateur correspondant.

3° une somme de termes de la forme

$$A_1L(x-a) + B_1L(x-b) + \cdots$$

4° Une somme de termes

$$k \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha}{\beta} + k_1 \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha_1}{\beta_1} + \cdots$$

Méthode de Hermite. — Les résultats que nous venons d'obtenir conduisent à une forme nouvelle et intéressante de la décomposition de la fraction rationnelle.

En effet, réduisons à nouveau toutes les fractions obtenues (1° et 2°) au même dénominateur. σ Nous obtiendrons un résultat de la forme.

$$\frac{\lambda(x)}{(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\cdots(x^2+px+q)^{n-1}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1-1}\cdots} = \frac{\lambda(x)}{D}$$

$\lambda(x)$ étant de degré inférieur à celui du dénominateur. On peut donc écrire

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx = \frac{\lambda}{D} + A_1L(x-a) + B_1L(x-b) + \cdots$$
$$+ k \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha}{\beta} + k_1 \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha_1}{\beta_1} + \cdots$$

α, γ

Dérivons les deux membres de cette identité. Nous aurons

$$\frac{f}{\varphi} = \left(\frac{\lambda}{D}\right)' + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \cdots + \frac{k\beta}{(x-a)^2+\beta^2} + \frac{k_1\beta_1}{(x-a_1)^2+\beta_1^2} + \cdots$$

δ₁

Si nous réduisons à nouveau au même dénominateur toutes les fractions qui suivent $\left(\frac{\lambda}{D}\right)'$, nous obtiendrons une fraction de dénominateur

$$(x-a)(x-b)\cdots(x^2+px+q)(x^2+p_1x+q_1)\cdots = d$$

le numérateur $\mu(x)$ étant de degré inférieur au dénominateur.

ω

On a donc un résultat de la forme

$$\frac{f}{\varphi} = \left(\frac{\lambda}{D}\right)' + \frac{\mu}{d}. \tag{1}$$

ρ

Remarquons que D admet toutes les racines de $\varphi(x)$ chacune à un degré diminué d'une unité. C'est donc le p. g. c. d. entre φ et sa dérivée φ'.

ρ

Quant à d, c'est le produit de toutes les racines de $\varphi(x)$ mais chacune d'elles n'étant prise qu'une seule fois. C'est donc le quotient $\frac{\varphi}{D}$. La formule montre donc que :

ω

THÉORÈME. — *L'on peut décomposer une fraction rationnelle* $\frac{\varphi}{f}$ *en deux fractions :*

1° *La première est la dérivée d'une fraction rationnelle ayant pour dénominateur le p. g. c. d.* D *entre* φ *et sa dérivée, le numérateur étant de degré inférieur à celui de* D.

2° *La deuxième est une fraction rationnelle dont le dénominateur* d, *admettant toutes les racines de* φ *prises seulement une fois, est le quotient de* φ *par* D, *le numérateur étant de degré inférieur au degré de* d.

REMARQUE. — Les deux polynômes D et d, peuvent s'obtenir

ρ

par de simples divisions successives.

Il serait aisé de démontrer que la décomposition n'est possible que d'une seule manière.

δ

En introduisant des polynômes λ et μ à coefficients indéterminés de degré respectivement inférieur à ceux des dénominateurs, on pourra en développant l'identité (1) écrire

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{\lambda' D - \lambda D'}{D^2} + \frac{\mu}{d}.$$

En multipliant par φ

$$f = \lambda' \frac{\varphi}{D} - \lambda \frac{D'\varphi}{D^2} + \mu D$$

les deux membres ρ sont des polynômes, car 1° φ est divisible par D ; 2° $D'\varphi$ est également divisible par D^2, puisque, si a est une racine de degré α de φ, elle est de degré $\alpha - 1$ de D, de degré $\alpha - 2$ de D', et par suite de degré $2\alpha - 2$ de $\varphi D'$ aussi bien que de D^2.

L'identification des deux polynômes donnera donc les conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer les coefficients de λ et μ.

Cette méthode offre le très grand avantage de ne pas supposer résolue jusqu'ici l'équation $\varphi(x) = 0$; il sera nécessaire de résoudre l'équation $d = 0$ pour l'intégration, mais cette équation peut être de degré bien moindre que l'équation $\varphi(x) = 0$.

La méthode donne effectivement ρ et sans résoudre aucune équation toute la partie algébrique de l'intégrale. Elle se borne en somme au calcul d'une dérivée de fraction rationnelle et à une identification : elle est extrêmement recommandable et des plus pratiques surtout lorsque le dénominateur a des racines imaginaires multiples : toute la partie pénible de l'intégration, celle qui correspond à ces racines, est alors supprimée.

Application. — Calculer $\dfrac{x^2 - 2}{(x^2 - x + 1)^2}\,dx$.

Nous poserons

$$\frac{x^2 - 2}{(x^2 - x + 1)^2} = \left(\frac{ax + b}{x^2 - x + 1}\right)' + \frac{mx + n}{(x^2 - x + 1)}$$

c.-à-d. en effectuant et chassant les dénominateurs

$$x^2 - 2 = a(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(ax + b) + (mx + n)(x^2 - x + 1).$$

On voit immédiatement que $m = 0$. Il reste

$$x^2 - 2 = a(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(ax + b) + n(x^2 - x + 1)$$

d'où en identifiant et résolvant

$$a = -\frac{5}{3} \qquad b = \frac{1}{3} \qquad n = -\frac{2}{3}.$$

De sorte que

$$\frac{x^2 - 2}{(x^2 - x + 1)^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{5x - 1}{x^2 - x + 1}\right)' - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

Et par suite

$$\int \frac{x^2-2}{(x^3-x+1)^2 dx} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{5x-1}{x^3-x+1} - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^3-x+1}.$$

Méthode de Lagrange. — La méthode de décomposition de la fraction rationnelle en fractions simples de première et de deuxième espèce offre le très grand inconvénient d'exiger au préalable la résolution de l'équation $\varphi(x) = 0$. Nous avons vu que la méthode de Hermite exigeait seulement la résolution d'une équation de degré moindre, $d = 0$, ne contenant qu'une seule fois toutes les racines de $\varphi(x) = 0$.

La méthode des racines égales, que nous allons exposer et qui est due à Lagrange, est une généralisation de la méthode précédente.

Désignons par φ_1 le produit des facteurs de φ correspondants aux racines simples, par φ_2, φ_3, $\cdots$ le produit des facteurs de φ correspondant aux racines doubles, triples, etc., de sorte que

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2^2 \times \varphi_3^3 \times \varphi_4^4 \cdots$$

Nous allons montrer que l'on peut décomposer la fraction rationnelle $\frac{f}{\varphi}$ sous la forme

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{A_1}{\varphi_1} + \frac{A_2}{\varphi_2^2} + \frac{A_3}{\varphi_3^3} + \cdots$$

A_1, A_2, $\cdots$ désignant des polynômes déterminés.

Tout d'abord, on peut, sans résoudre aucune équation, déterminer chacun de ces polynômes φ_1, φ_2, $\cdots$ On a en effet

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2^2 \times \varphi_3^3 \cdots$$

Désignons par D le p. g. c. d. entre φ et φ', par D_1 le p. g. c. d. entre D et D', par D_2 le p. g. c. d. entre D_1 et D_1', etc... On aura

$$\begin{aligned} D &= \varphi_2 \times \varphi_3^2 \times \varphi_4^3 \cdots \\ D_1 &= \varphi_3 \times \varphi_4^2 \cdots \\ D_2 &= \varphi_4 \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Tous ces polynômes s'obtiennent par simples divisions.

δ_1

De même

$$\frac{\varphi}{D} = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3 \times \varphi_4 \cdots$$

$$\frac{D}{D_1} = \varphi_2 \times \varphi_3 \times \varphi_4 \cdots$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \varphi_3 \times \varphi_4 \cdots$$

Enfin toujours par simples divisions

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{D}\right)}{\left(\frac{D}{D_1}\right)} = \varphi_1, \qquad \frac{\left(\frac{D}{D_1}\right)}{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)} = \varphi_2 \cdots$$

Ces polynômes φ_1, φ_2, $\cdots$ étant ainsi déterminés, remarquons que les polynômes sont premiers entre eux deux à deux.

Plus généralement, supposons que le polynôme φ se mette sous la forme

$$\varphi = q_1, q_2, q_3, \cdots$$

q_1, q_2, q_3, $\cdots$ étant des polynômes quelconques seulement premiers deux à deux. Nous allons montrer que l'on peut mettre la fraction $\frac{f}{\varphi}$ sous la forme

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{A_1}{q_1} + \frac{A_2}{q_2} \cdots$$

δ, ξ

En effet les polynômes q étant premiers deux à deux, q_1 par exemple est premier avec le produit $q_2 \cdot q_3 \cdot q_4, \cdots$; donc par application du théorème de Bezout (que l'on a toujours à appliquer lorsque l'on a deux polynômes premiers entre eux) on peut déterminer deux polynômes a_1, b_1 tels que

$$a_1 q_2 q_3 \cdots + b_1 q_1 \equiv 1$$

(cette détermination se fait par simples divisions en recherchant le p. g. c. d. des deux polynômes).

Par suite en multipliant les deux membres par f, on aura une égalité de la forme

$$A_1 q_2 q_3 \cdots + B_1 q_1 \equiv f.$$

δ_1

On en déduit

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{A_1}{q_1} + \frac{B_1}{q_2 q_3 \cdots}.$$

On a donc isolé une fraction de dénominateur q_1.

De même la fraction $\frac{B_1}{q_2 q_3 \cdots}$ pourra se mettre sous la forme $\frac{A_2}{q_2} + \frac{B_2}{q_3 \cdots}$.

En continuant ainsi, on arrivera donc bien à la décomposition annoncée.

Ce résultat s'applique immédiatement à la fraction $\frac{f}{\varphi}$ où $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2^2 \times \varphi_3^3 \cdots$ est décomposé en un produit de polynômes premiers entre eux deux à deux. L'on peut donc bien écrire

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{A_1}{\varphi_1} + \frac{A_2}{\varphi_2^2} + \cdots$$

L'intégration de la fraction est donc ramenée à l'intégration de fractions de la forme $\frac{f}{\varphi^m}$, φ n'admettant plus alors que des racines simples.

Nous allons chercher une formule de récurrence :

φ est premier avec sa dérivée φ'. Il existe donc deux polynômes A et B tels que

$$A\varphi + B\varphi' \equiv f.$$

On aura donc

$$\int \frac{f}{\varphi^m} dx = \int \frac{A}{\varphi^{m-1}} dx + \int \frac{B\varphi'}{\varphi^m} dx.$$

Dans la première, l'exposant m est diminué d'une unité.

On peut arriver au même résultat pour la seconde : il suffit d'intégrer par parties

$$\int \frac{B\varphi'}{\varphi^m} dx = -\frac{B}{(m-1)\varphi^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{B'}{\varphi^{m-1}} dx.$$

On a donc finalement

$$\int \frac{f}{\varphi^m} = -\frac{B}{(m-1)\varphi^{m-1}} + \int \frac{A + \frac{1}{m-1} B'}{\varphi^{m-1}} dx.$$

L'intégrale est de la même forme que l'intégrale de départ, l'exposant m étant diminué d'une unité. C'est la formule de récurrence cherchée permettant de réduire successivement cet exposant. On arrivera finalement à une intégrale de la forme $\int \frac{L}{\varphi} dx$.

Toute la partie intégrée est algébrique.

(On fera de même pour les divers dénominateurs φ_1, φ_2^2, φ_3^3, $\cdots$).

Il sera alors nécessaire pour terminer l'intégration (qui donnera la partie transcendante de l'intégrale) de résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ qui n'a que des racines simples, mais on aura obtenu la partie algébrique de l'intégrale.

V. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

On désigne sous ce nom des intégrales de la forme $\int R(x, y)\, dx$, $R(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et y, y étant d'ailleurs liée à x par une équation algébrique de la forme $f(x, y) = 0$.

L'équation $f(x, y) = 0$ représente une courbe algébrique. On désigne aussi ces intégrales sous le nom d'« intégrales abéliennes » rattachées à la courbe. Ce sont en général des fonctions transcendantes. Mais si l'équation de la courbe $f(x, y) = 0$ peut être regardée comme résultant de l'élimination d'un paramètre t entre deux équations de la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

φ et ψ désignant des fractions rationnelles de t, en faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$ (d'où $y = \psi(t)$) $R(x, y)$ deviendra une fraction rationnelle de t. On sera donc ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle

$$\int R(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt.$$

On est donc conduit à étudier les courbes dont l'équation jouisse de la propriété indiquée. Cette étude est basée sur la notion de « genre » d'une courbe.

Genre d'une courbe. — En désignant par n le degré de la courbe, par δ le nombre de ses points doubles, le genre de la courbe est le nombre

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta.$$

Si la courbe admet un point multiple d'ordre k, en supposant les k tangentes aux k branches de courbes toutes distinctes, le point

multiple doit être considéré comme équivalent à $\frac{k(k-1)}{2}$ points doubles, comme on le voit aisément en modifiant légèrement les coefficients de la courbe : au lieu des k branches de courbes se coupant en un point multiple d'ordre k, on aura k branches se coupant deux à deux, en $\frac{k(k-1)}{2}$ points doubles voisins de la courbe transformée.

Si les k tangentes ne sont pas distinctes, le point multiple est équivalent à un nombre plus grand de points doubles.

THÉORÈME. — *Le genre d'une courbe ne peut pas être un nombre négatif à moins que la courbe ne se décompose. Autrement dit, le nombre des points doubles d'une courbe de degré n est au plus égal à* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

En effet, remarquons d'abord que le nombre des coefficients d'une courbe d'ordre n est égal à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Il suffit donc en général de $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ points pour déterminer la courbe.

Si l'on en donne un de moins, tous les coefficients peuvent se déterminer en général linéairement au moyen de l'un d'entre eux, t, de sorte que l'équation pourra se mettre sous la forme

$$\varphi_1(x, y) + t\varphi_2(x, y) = 0$$

($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ représentant deux courbes passant par les points donnés).

D'autre part, deux courbes d'ordre m et n se coupent en $m \times n$ points réels ou imaginaires à moins qu'elles n'aient une partie commune.

Supposons donc qu'une courbe C ait plus de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, soit $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k$ $(k > 0)$.

Considérons une courbe auxiliaire Γ, d'ordre $(n-2)$, que nous pourrons assujettir à passer par $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ points. Parmi ces points, prenons les $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k\right]$ points doubles et

$$\frac{n(n-1)}{2} - 1 - \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} + k\right] = n - 2 - k$$

points simples quelconques de la courbe. Calculons le nombre des

points d'intersection des deux courbes. Chaque point double doit compter pour deux, car l'on peut considérer la courbe auxiliaire comme passant par deux points simples infiniment voisins de la courbe C. Le nombre de points communs sera donc

$$[(n-1)(n-2)+2k]+n-2-k=n^2-2n+k=n(n-2)+k.$$

Les deux courbes auraient donc plus de $n(n-2)$ points communs, ce qui est impossible.

Théorème. — *Étant donnée une courbe de genre zéro, les coordonnées d'un point de cette courbe peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'un paramètre t.*

Considérons une courbe ayant $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles.

Prenons une courbe auxiliaire d'ordre $n-2$. Si nous l'assujettissons à passer par $\left(\frac{(n-1)n}{2}-2\right)$ points, son équation pourra se mettre sous la forme $\varphi_1+t\varphi_2=0$. Parmi ces points, choisissons tous les points doubles de la courbe et un nombre de points simples égal à

$$\frac{(n-1)n}{2}-2-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n-3.$$

De même que ci-dessus, le nombre des points d'intersection connus des deux courbes sera

$$(n-1)(n-2)+n-3=n(n-2)-1.$$

Ces points seront fixes, quel que soit le paramètre t qui figure dans l'équation de la courbe auxiliaire. Or les deux courbes ont $n(n-2)$ points communs. Il reste donc seulement un point variable.

Si nous formons par exemple l'équation aux abscisses des points d'intersection des deux courbes, nous obtiendrons une équation, dépendant de t, de degré $n(n-2)$ dont nous connaîtrons $[n(n-2)-1]$ racines. Si nous les supprimons, par simple division, nous obtiendrons une équation de la forme

$$Ax+B=0$$

A et B étant des fonctions de t. L'abscisse du point variable de la courbe peut donc être exprimée sous la forme d'une fraction rationnelle de t. Il en sera de même de l'ordonnée. Le théorème est donc démontré.

On aurait pu arriver au même résultat en prenant une courbe auxiliaire d'ordre $n-1$ passant par les points doubles et $2n-3$ points arbitrairement choisis, mais les calculs auraient été moins simples.

Il est naturel de rechercher réciproquement quel est le nombre de points doubles d'une courbe dont les coordonnées sont exprimées en fonctions rationnelles d'un paramètre t. On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si les coordonnées d'un point d'une courbe sont exprimées en fonction rationnelle d'un paramètre t, cette courbe est de genre zéro.*

Soient

$$x = \frac{\varphi(t)}{f(t)}, \qquad y = \frac{\psi(t)}{f(t)}$$

les équations de la courbe, f, φ, ψ désignant trois polynômes que l'on peut supposer de même degré n (certains coefficients pouvant être nuls). La courbe est d'ordre n.

On aura un point double, si pour deux valeurs différentes, t, u, on a

$$\text{I} \qquad \frac{\varphi(t)}{f(t)} = \frac{\varphi(u)}{f(u)}, \qquad \frac{\psi(t)}{f(t)} = \frac{\psi(u)}{f(u)}.$$

Ce système est équivalent au système

$$\text{I}' \qquad \varphi(t)f(u) - \varphi(u)f(t) = 0, \qquad \psi(t)f(u) - \psi(u)f(t) = 0$$

à la condition que l'on n'ait pas simultanément

$$f(t) = 0, \qquad f(u) = 0.$$

dont les solutions n'appartiennent pas au premier système.

Or les premiers membres de ces équations changent simplement de signe si l'on permute t, u. Ces premiers membres sont donc le produit par $(t-u)$ d'un polynôme symétrique en t et u.

On peut supprimer ce facteur $(t - u)$ puisque l'on doit supposer t et u différents. Il restera donc deux équations

II $$g(t, u) = 0, \qquad h(t, u) = 0$$

symétriques en t et u, de degré $n - 1$ par rapport à t ou à u.

α, ν Il est naturel de faire le changement de variables

$$t + u = s, \qquad tu = p.$$

d A chaque système de s et p correspondra un groupe de valeurs de t, u racines de

$$z^2 - sz + p = 0$$

et par suite un point double.

ξ Considérons un groupe de termes symétriques

$$At^\alpha u^\beta + At^\beta u^\alpha, \qquad \alpha \leqslant n - 1 \quad \beta \leqslant n - 1.$$

Si $\alpha \geqslant \beta$, on peut l'écrire

$$Ap^\beta (t^{\alpha - \beta} + u^{\alpha - \beta}).$$

α, σ₂ Posons pour abréger $s_k = t^k + u^k$. Nous allons calculer s_k en fonction de s et p. On a la formule de récurrence

$$(t + u)(t^k + u^k) = t^{k+1} + u^{k+1} + ut(t^{k-1} + u^{k-1})$$

c'est-à-dire

$$ss_k = s_{k+1} + ps_{k-1}, \qquad s_{k+1} = ss_k - ps_{k-1}.$$

ρ Remarquons que $s_1 = t + u = s$ est du premier degré en s et t, que

$$s^2 = t^2 + u^2 = s^2 - 2p$$

est du deuxième degré en s et t.

ψ La formule de récurrence montre que si s_k est de degré k en s et p, s_{k+1} est de degré $k + 1$: la loi est donc générale.

Le groupe de termes considéré s'exprimera donc par un ensemble de termes de degré α en s et p. Chacune des équations II se transformera donc en une équation de degré $n - 1$ en s et p. ω Le nombre des solutions communes aux deux équations est donc $(n - 1)^2$.

Mais nous devons éliminer ρ les solutions $(t \neq u)$ pour lesquelles on aurait simultanément

$$f(t) = 0, \qquad f(u) = 0.$$

Chacune des équations étant de degré n, ces solutions sont évidemment en nombre égal au nombre des combinaisons des n racines de $f(z) = 0$ deux à deux, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$.

Le nombre de solutions acceptables en s et p, c'est-à-dire le nombre de points doubles, est donc bien

$$(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Courbes unicursales. — On appelle « *courbe unicursale* » toute courbe pour laquelle les coordonnées d'un de leurs points peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'un paramètre t.

Les théorèmes précédents peuvent donc se résumer au théorème suivant :

Théorème. — *Toute courbe de genre zéro est unicursale et inversement.*

Une courbe du second degré non décomposable ne doit avoir aucun point double. Et toute courbe du second degré est unicursale.

Une courbe du troisième degré unicursale a un point double.

Une courbe du quatrième degré unicursale a trois points doubles, etc.

Rappelons que pour avoir la représentation paramétrique d'une courbe de degré n unicursale, il faut la couper par une courbe auxiliaire de degré $n-2$ passant par tous les points doubles et par $n-3$ autres points simples de la courbe arbitrairement choisis.

Pour une courbe du troisième degré, il suffit de couper par une droite passant par le point double.

Rappelons encore que pour déterminer les points doubles d'une courbe, il faut rendre son équation homogène et déterminer tous les systèmes de solutions satisfaisant aux trois équations

$$\frac{df}{dx} = 0, \qquad \frac{df}{dy} = 0, \qquad \frac{df}{dz} = 0.$$

Application. — Considérons la lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2). \tag{1}$$

Elle admet trois points doubles : l'origine, et les deux points cycliques.

Nous devons la couper par une conique passant par ces trois points (ce sera donc un cercle passant par l'origine) et par un autre point arbitrairement choisi sur la lemniscate. On pourrait prendre le point $y = 0$, $x = a$, mais il est plus simple de prendre sur la lemniscate un point infiniment voisin de 0, c'est-à-dire de prendre un cercle tangent en 0 à la lemniscate.

Ce cercle admettra par exemple pour tangente en 0 la droite $x - y = 0$. Son équation sera de la forme

$$x^2 + y^2 - t(x - y) = 0. \tag{2}$$

Rendons les équations homogènes

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)z^2 \tag{1'}$$

$$x^2 + y^2 = t(x - y)z. \tag{2'}$$

En combinant les équations 1', 2', on obtient

$$t^2(x - y)^2z^2 = a^2(x^2 - y^2)z^2.$$

En supprimant les facteurs $z^2 = 0$, $x - y = 0$, qui correspondent aux deux points cycliques et au point situé sur la tangente en 0, il reste

$$t^2(x - y) = a^2(x + y) \qquad \text{ou} \qquad (t^2 - a^2)x = (t^2 + a^2)y \tag{3}$$

équation qui peut remplacer 1' par exemple. C'est l'équation d'une droite passant par l'origine. Elle rencontre le cercle (2) aux points

$$x^2 + \frac{(t^2 - a^2)^2}{(t^2 + a^2)^2}x^2 = tx\left(1 - \frac{t^2 - a^2}{t^2 + a^2}\right)$$

c'est-à-dire

$$(t^4 + a^4)x^2 = a^2t(t^2 + a^2)x.$$

En supprimant encore la solution $x = 0$, qui correspond au point double, il reste

$$x = \frac{a^2t(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}.$$

On en déduit

$$y = \frac{a^2t(t^2 - a^2)}{t^4 + a^4}.$$

Telle est la représentation de la lemniscate en fonction rationnelle de t.

Une courbe d'ordre n admettant un point multiple d'ordre $n - 1$

est unicursale, puisque ce point multiple est équivalent à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles. Il suffit de couper cette courbe par une droite passant par le point multiple.

Intégrales de la forme

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \qquad \text{ou} \qquad \int R(x, y)dx$$

en posant

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Cette courbe (conique) étant unicursale, peut être représentée en fonction rationnelle d'un paramètre t.

Il suffit de choisir un point quelconque de la conique et de la couper par une droite variable issue de ce point.

Rappelons les procédés pratiques :

Si $c > 0$, on peut prendre le point $x = 0, y = \sqrt{c}$ et par suite poser

$$y - \sqrt{c} = tx.$$

Si $a > 0$ (hyperbole) on coupera par une droite parallèle à une direction asymptotique en posant

$$y = x\sqrt{a} + t.$$

Si les racines du trinôme sont réelles, le trinôme se mettant sous la forme $a(x - \alpha)(x - \beta)$, on peut choisir le point $x = \alpha$, $y = 0$ et par suite poser $y = t(x - \alpha)$, ce qui revient à poser en somme

$$\frac{x - \beta}{x - \alpha} = \pm t^2$$

suivant que a est positif ou négatif.

Enfin si les racines sont imaginaires, a et c étant négatifs, on ne peut éviter les imaginaires.

Intégrales de la forme

$$\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})dx.$$

Posons d'abord $cx + d = t^2$. D'où

$$ax + b = a\frac{t^2 - d}{c} + b = \alpha t^2 + \beta.$$

On est ramené à l'intégrale

$$\int R\left(\frac{t^2-d}{c}, \sqrt{at^2+\beta}, t\right)tdt,$$

c'est-à-dire à l'intégrale précédente.

Application. — Soit l'intégrale

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}.$$

Posons

$$\frac{1-x}{x} = t^2.$$

D'où

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt.$$

On aura

$$I = \int \frac{-2tdt}{[1-4(1+t^2)^2]tx} = 2\int \frac{(1+t^2)dt}{(2t^2+1)(2t^2+3)}$$

qui s'intègre aisément.

VI. — INTÉGRALES DE LA FORME $\int R(x, \sqrt{X})dx$

Nous venons d'étudier les intégrales de cette forme où X est un polynome du second degré. Il est naturel de généraliser au cas où X est un polynôme de degré quelconque. Il semble que nous devrons introduire autant de transcendantes nouvelles qu'il y a de formes possibles pour les fonctions rationnelles et pour les polynômes X. Nous allons voir s'il n'est pas possible de les réduire à des transcendantes types.

Réduction. — Étudions tout d'abord la fonction rationnelle.

En remplaçant toutes les puissances paires de $\sqrt{X}$ par leur développement entier en fonction de x, la fonction peut se mettre sous la forme

$$\frac{M+N\sqrt{X}}{P+Q\sqrt{X}}.$$

En multipliant les deux termes de la fraction par $P - Q\sqrt{X}$, on obtient la forme

$$\frac{R + S\sqrt{X}}{T} = U + \frac{V}{\sqrt{X}}$$

en désignant par U, V deux nouvelles fonctions rationnelles.

Il suffit donc d'étudier les intégrales de la forme

$$\int \frac{V dx}{\sqrt{X}} \qquad \text{(V fonct. rat.).}$$

On pourrait décomposer la fraction rationnelle V en fractions simples, mais pour éviter, autant que possible, la résolution d'une équation, nous emploierons la méthode des racines égales et nous mettrons la fraction rationnelle V sous la forme d'un polynôme H et d'une somme de fractions de la forme $\frac{A}{P^\mu}$, le dénominateur P^μ étant la puissance d'un polynôme sans racines multiples.

Enfin, P et X pouvant avoir un facteur commun D, de sorte que l'on ait

$$P = QD, \qquad X = DX_1,$$

la fraction rationnelle $\frac{A}{P^\mu}$ pourra se mettre sous la forme $\frac{B}{D^\mu} + \frac{C}{Q^\mu}$.

En résumé nous avons à considérer les intégrales de la forme

$$I_1 = \int \frac{C}{Q^\mu \sqrt{X}} dx, \qquad I_2 = \int \frac{B}{D^\mu \sqrt{X}} dx, \qquad I_3 = \int \frac{H}{\sqrt{X}} dx.$$

Considérons la première : Q et X sont premiers entre eux, et Q, n'admettant pas de racines multiples, est premier également avec Q'. Donc Q et Q'X sont premiers entre eux. On pourra trouver deux polynômes M, N tels que

$$MQ + NQ'X \equiv C.$$

L'intégrale se met sous la forme

$$\int \frac{MQ + NQ'X}{Q^\mu \sqrt{X}} dx = \int \frac{M}{Q^{\mu-1}\sqrt{X}} dx + \int \frac{NQ'\sqrt{X}}{Q^\mu} dx.$$

La première ρ est analogue à l'intégrale d'où nous sommes partis mais μ est remplacé par $\mu - 1$.

Pour la seconde, ν intégrons-la par parties. On a

$$\int \frac{Q'}{Q^\mu} N\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{1-\mu} \times \frac{1}{Q^{\mu-1}} N\sqrt{X} + \frac{1}{\mu-1} \int \frac{1}{Q^{\mu-1}} (N\sqrt{X})'\,dx.$$

Or

$$(N\sqrt{X})' = \frac{2N'X + NX'}{2\sqrt{X}} = \frac{N_1}{\sqrt{X}}.$$

Dans la deuxième intégrale, l'exposant de Q est donc encore réduit d'une unité.

δ_1 De proche en proche, on pourra donc réduire l'exposant μ jusqu'à 1. On ne pourra aller plus loin en raison de l'introduction du facteur $\frac{1}{\mu - 1}$, par l'intégration par parties.

A une fraction rationnelle près, ω l'intégrale I_1 est donc ramenée à $\int \frac{N}{Q\sqrt{X}}\,dx$.

Si l'on rassemble tous les résultats on voit que le résultat final est de la forme

$$\int \frac{C}{Q^\mu \sqrt{X}}\,dx = \frac{A\sqrt{X}}{Q^{\mu-1}} + \int \frac{N}{Q\sqrt{X}}\,dx.$$

A, N étant des polynômes.

Décomposons alors la fraction rationnelle $\frac{N}{Q}$ en δ_1 un polynôme H_1 et une somme de fractions de la forme $\frac{A}{x-a}$.

Nous n'introduisons donc comme seule transcendante nouvelle (en plus de $\int \frac{H_1}{\sqrt{X}}\,dx$) que les intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$.

Prenons les intégrales $I_2 = \int \frac{B}{D^\mu \sqrt{X}}\,dx$ avec $X = DX_1$. On a

$$I_2 = \int \frac{B}{D^{\mu + \frac{1}{2}} \sqrt{X_1}}\,dx.$$

α Nous allons réduire l'exposant $\mu + \frac{1}{2}$.

ρ D est premier avec D′ et avec X_1. On peut donc déterminer deux polynômes M, N tels que

$$MD + ND'X_1 = B.$$

L'intégrale devient

$$\int \frac{M}{D^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}}dx + \int \frac{D'}{D^{\mu+\frac{1}{2}}} \times N\sqrt{X_1}\,dx.$$

ρ Pour la première, l'exposant $\mu + \frac{1}{2}$ est réduit d'une unité.

α Pour la seconde, en intégrant par parties, on obtient

$$-\frac{1}{\mu-\frac{1}{2}}\frac{1}{D^{\mu-\frac{1}{2}}}(N\sqrt{X_1}) + \int \frac{1}{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)D^{\mu-\frac{1}{2}}}(N\sqrt{X_1})'dx.$$

D'ailleurs

$$(N\sqrt{X_1})' = \frac{N'X + \frac{N}{2}X_1'}{\sqrt{X_1}} = \frac{N_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Pour la deuxième intégrale, l'exposant $\mu + \frac{1}{2}$ est donc aussi réduit

ω d'une unité. On pourra donc réduire l'exposant μ d'autant d'unités que l'on veut ; ici on remarque ρ que l'intégration par parties n'introduit que des facteurs $-\frac{1}{\mu-\frac{1}{2}}$; on pourra donc aller jusqu'à $\mu = 0$ et être ramené finalement à

$$\int \frac{n}{D^{\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}}dx = \int \frac{n}{\sqrt{X}}dx.$$

ω

Le résultat est donc de la forme

$$I_2 = \int \frac{B}{D^{\mu}\sqrt{X}}dx = \frac{E\sqrt{X}}{D^{\mu}} + \int \frac{n}{\sqrt{X}}dx.$$

Restent enfin les troisièmes intégrales $I_3 = \int \frac{\pi}{\sqrt{X}}dx$ (π étant un

polynôme) qui se décomposeront en une suite d'intégrales de la forme

$$I_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}.$$

Or il est facile d'obtenir une formule de réduction pour ces intégrales. Nous allons voir que :

Si n est le degré de X, *que toutes les intégrales où* $m > n - 2$ *peuvent être exprimées au moyen des autres.*

Pour établir rapidement la formule de réduction, considérons la dérivée de $x^\lambda \sqrt{X}$. On a

$$D(x^\lambda \sqrt{X}) = \frac{\lambda x^{\lambda-1} X + \frac{1}{2} x^\lambda X'}{\sqrt{X}}.$$

Or, posons

$$X = a_0 x_n + a_1 x^{n-1} + \cdots \qquad X' = n a_0 x^{n-1} + \cdots$$

On aura

$$D(x^\lambda \sqrt{X} = \frac{a_0\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) x^{n+\lambda-1} + b_1 x^{n+\lambda-2} + \cdots}{\sqrt{X}},$$

$b_1, b_2, \cdots$ étant des coefficients bien déterminés.

En intégrant les deux membres, on obtient

$$x^\lambda \sqrt{X} = a_0\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) I_{n+\lambda-1} + b_1 I_{n+\lambda-2} + \cdots$$

Cette formule permettra de calculer $I_{n+\lambda-1}$ connaissant $I_{n+\lambda-2}$, $I_{n+\lambda-3}, \cdots$ En particulier I_{n-1} s'exprimera en fonction de I_{n-2}, $I_{n-3}, \cdots$ On obtiendra ensuite I_n, $I_{n+1}, \cdots$

On n'introduit donc comme seules transcendantes nouvelles que

$$I_0, \quad I_1, \quad \cdots \quad I_{n-2}.$$

Résumé général. — L'intégration des fonctions

$$\int R(x, \sqrt{X}) dx$$

comprendra :

1° une partie algébrique ; 2° une partie logarithmique ; 3° une combinaison d'intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}};$$

4° les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} \cdots \quad \int \frac{x^k dx}{\sqrt{X}} \cdots \quad \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{X}}.$$

Toutes ces intégrales, transcendantes nouvelles, sont en général distinctes. Il peut cependant arriver que l'une d'elles soit une combinaison des autres et des fonctions transcendantes élémentaires.

On désigne sous le nom d'intégrales de première espèce les intégrales (4°) pour lesquelles l'exposant k est inférieur à $\frac{n}{2} - 1$ et intégrales de seconde espèce celles pour lesquelles l'exposant est supérieur ou égal à $\frac{n}{2} - 1$. Nous verrons que si l'on intègre $\int_a^x \frac{t^k dt}{\sqrt{X(t)}}$, les premières seules restent finies quand la limite d'intégration x augmente indéfiniment.

Application. — Si X est du second degré, $X = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$,

les intégrales du dernier type se réduisent à une seule $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$. Celles du premier type à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

Dans le cas actuel ces dernières se ramènent aux premières. Il suffit de poser $x - a = \frac{1}{y}$. L'intégrale devient

$$\int \frac{-\frac{1}{y^2}dy}{\frac{1}{y}\sqrt{\alpha\left(a+\frac{1}{y}\right)^2 + 2\beta\left(a+\frac{1}{y}\right)+\gamma}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(ay+1)^2 + 2\beta y(ay+1) + \gamma y^2}}$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{my^2 + 2ny + p}}.$$

σ_1

Quant à la première,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}}},$$

σ

par un simple changement linéaire de variable, si α est positif on a $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$ et si α est négatif on a $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$ qui sont respectivement égales à arc sin $\frac{x}{k}$ et à $\mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 + k})$.

Dans le cas général, si X *est un polynôme de degré pair* $2p$, *on peut, par une transformation, ramener le polynôme sous le radical à être de degré* $2p - 1$.

Soit en effet a une racine quelconque de $X = 0$ de sorte que

$$X = (x - a)X_1(x) \qquad (X_1 \text{ de degré } 2p - 1).$$

Posons $x - a = \frac{1}{z}$. δ_1 Le polynôme sous le radical se transforme en

$$\frac{1}{z}X_1\left(a + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^{2p}}X_1(az + 1).$$

On pourra faire sortir z^{2p} et il restera sous le radical un polynôme de degré $2p - 1$ en z.

Inversement si l'on a un polynôme de degré impair $2p - 1$, faisons la transformation $x = \frac{1}{z}$; δ_1 l'intégrale $\int R(x, \sqrt{X})dx$ devient

$$-\int R\left(\frac{1}{z}, \sqrt{X\left(\frac{1}{z}\right)}\right)\frac{dz}{z^2}.$$

Or on peut écrire

$$X\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^{2p-1}}X_1(z) = \frac{1}{z^{2p}}zX_1(z) = \frac{1}{z^{2p}}X_2(z)$$

X_1 étant de degré $2p - 1$.

En faisant sortir z^{2p} on a bien l'intégrale

$$\int R_1(z, \sqrt{X_2(z)})dz$$

$X_2 = zX_1$ étant de degré $2p$ en z.

Cas où X est du troisième ou du quatrième degré. — Si X est du troisième degré, δ_1 on a deux intégrales du deuxième type

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}.$$

On les appelle intégrales elliptiques, car elles se sont présentées dans le problème de la rectification de l'ellipse.

Si X est du quatrième degré on peut, d'après la remarque précédente, être ramené au cas où l'on aurait sous le radical un polynôme du troisième degré.

Inversement si X est du troisième degré, la transformation $x = \frac{1}{z}$ transformera le polynôme sous le radical en un polynôme du quatrième degré. On a donc avec un polynôme du quatrième degré, les deux mêmes transcendantes nouvelles, les intégrales elliptiques, que l'on peut étudier soit en prenant pour X un polynôme type du troisième degré, soit un polynôme type du quatrième degré.

Dans le cas où X est du quatrième degré, on pouvait cependant remarquer qu'on aurait dû introduire quatre transcendantes nouvelles

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

Mais nous verrons qu'une combinaison des quatre intégrales se réduit aux fonctions transcendantes élémentaires.

Nous avons obtenu les réductions des intégrales sans effectuer de changement sur la variable indépendante : nous pouvons obtenir des réductions nouvelles à une forme normale par un changement de variable, en partant soit d'un polynôme du quatrième degré, soit d'un polynôme du troisième degré.

Réduction à la forme normale de Legendre. — Nous allons montrer d'abord que l'on peut par un changement de variable ramener le polynôme sous le radical à être un polynôme bicarré.

Faisons en effet la transformation réelle

$$x = \frac{p + qt}{t + 1} \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{x - p}{q - x}$$

p, q désignant deux nombres réels que nous déterminerons.

Si a, b, c, d sont les racines de $X(x)$, les racines du polynôme transformé seront

$$t_1 = \frac{a - p}{q - a}, \quad t_2 = \frac{b - p}{q - b}, \quad t_3 = \frac{c - p}{q - c}, \quad t_4 = \frac{d - p}{q - d}.$$

Nous supposerons X à coefficients réels. Les racines a, b, c, d sont donc réelles ou imaginaires conjuguées deux à deux. Dans ce cas nous supposerons a, b conjuguées d'une part, et c, d d'autre part (s il y a lieu).

Si les racines sont réelles nous supposerons $a < b < c < d$ ou plus généralement nous supposerons que les couples a, b et c, d ne s'enchevêtrent pas.

Pour que le polynôme transformé T soit un polynôme bicarré, il faut par un choix convenable de p, q, que l'on ait par exemple

$$t_1 + t_2 = 0, \qquad t_3 + t_4 = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{a-p}{q-a} + \frac{b-p}{q-b} = 0, \qquad \frac{c-p}{q-c} + \frac{d-p}{q-d} = 0.$$

Ce que l'on peut écrire

$$(p+q)(a+b) - 2(ab+pq) = 0$$
$$(p+q)(c+d) - 2(cd+pq) = 0.$$

D'où

$$p+q = \frac{2(ab-cd)}{a+b-c-d}, \qquad pq = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{a+b-c-d}.$$

On voit donc que p, q sont les deux racines d'une même équation du second degré

$$(a+b-c-d)U^2 - 2(ab-cd)U + ab(c+d) - cd(a+b) = 0.$$

Cette équation a toujours ses racines réelles dans les conditions où nous nous sommes placés ; le discriminant est en effet

$$\Delta = (ab-cd)^2 - (a+b-c-d)[ab(c+d) - cd(a+b)].$$

On voit qu'il s'annule si l'on y fait par exemple $a = c$. On peut alors facilement l'écrire

$$\Delta = (a-c)(a-d)(b-c)(b-d).$$

Si a, b, c, d, sont réels et ne s'enchevêtrent pas, c'est à-dire si

$$a < b < c < d \qquad \text{ou} \qquad a < c < d < b$$

le produit est positif

Si a et b sont imaginaires, les facteurs $a - c$ et $b - c$ sont imaginaires conjugués, le produit est positif.

De même pour $(a - b)$ et $(b - d)$.

On voit donc bien que les racines p et q sont réelles.

p et q étant ainsi choisis, le polynôme T sera donc bicarré de la forme

$$A(t^2 + \lambda)(t^2 + \mu).$$

L'intégration $\int R(t, \sqrt{T})dt$ introduira les transcendantes

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{tdt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{t^2dt}{\sqrt{T}}, \quad \int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{T}}.$$

Mais on constate aussitôt que la seconde, par le changement de variable $t^2 = u$ n'introduira que les fonctions transcendantes élémentaires.

En faisant les transformations inverses, on voit bien qu'il doit y avoir une relation entre les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}.$$

et les transcendantes élémentaires

Relation générale entre les quatre intégrales. — Il est du reste facile d'établir cette relation sous la forme générale. Pour l'obtenir rapidement, considérons l'intégrale

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma}} = \int \frac{du}{v} \qquad (v = \sqrt{\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma}).$$

Si par exemple $\alpha > 0$, on a

$$I = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} L(\alpha u + \beta - v\sqrt{\alpha}).$$

Faisons la transformation $u = t^2$. On obtient

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{\alpha t^4 + 2\beta t^2 + \gamma}} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} L(\alpha t^2 + \beta - v\sqrt{\alpha}).$$

Faisons encore la nouvelle tranformation

$$t = \frac{x - p}{q - x} \qquad \text{D'où} \qquad dt = \frac{q - p}{(q - x)^2} dx.$$

Le radical deviendra

$$\frac{\alpha(x-p)^4+2\beta(x-p)^2(q-x)^2+\gamma(q-x)^4}{(q-x)^4}=\frac{X}{(q-x)^4}.$$

On peut évidemment disposer de $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ de manière que X soit un polynôme quelconque du quatrième degré.

L'intégrale deviendra

$$(q-p)\int\frac{x-p}{(q-x)\sqrt{X}}\,dx=-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,L\,\frac{\alpha(x-p)^2+\beta(q-x)^2-\sqrt{X}\sqrt{\alpha}}{(q-x)^2}.$$

Elle n'introduit donc que les transcendantes élémentaires.

Or cette intégrale s'écrit

$$(q-p)\int\left(-1+\frac{q-p}{q-x}\right)\frac{1}{\sqrt{X}}\,dx.$$

Elle est donc égale à

$$(q-p)\,[-I_1-(q-p)I_4].$$

On a donc bien une relation, au moyen des transcendantes élémentaires, entre I_1 et I_4

$$I_1+(q-p)I_4=\frac{1}{\sqrt{\alpha}(q-p)}\,L\,\frac{\alpha(x-p)^2+\beta(q-x)^2-\sqrt{\alpha}\sqrt{X}}{(q-x)^2}$$

le polynôme X ayant été mis sous la forme

$$X=\alpha(x-p)^4+2\beta(x-p)^2(x-q)^2+\gamma(q-x)^4.$$

Suite de la réduction. — Nous allons effectuer une nouvelle transformation du polynôme sous le radical

$$A(t^2+\alpha)(t^2+\beta)=T.$$

Posons

$$t^2=\lambda z^2+\mu,\qquad dt=\frac{\lambda z\,dz}{\sqrt{\lambda z^2+\mu}}.$$

On obtient

$$\frac{dt}{\sqrt{T}}=\frac{\lambda z\,dz}{\sqrt{A(\lambda z^2+\mu)(\lambda z^2+\mu+\alpha)(\lambda z^2+\mu+\beta)}}.$$

Nous écrirons pour plus de symétrie le radical sous la forme

$$A(\lambda z^2+\mu+\alpha_1)(\lambda z^2+\mu+\alpha_2)(\lambda z^2+\mu+\alpha_3),$$

l'une des quantités α étant nulle.

Soit

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3.$$

Si $A > 0$ nous poserons $\mu + \alpha_3 = 0$.

Alors

$$\mu + \alpha_1 = -g^2, \qquad \mu + \alpha_2 = -h^2. \qquad (h^2 < g^2)$$

Si $A < 0$ nous poserons

$$\mu + \alpha_1 = 0, \qquad \mu + \alpha_2 = \mu^2, \qquad \mu + \alpha_3 = g^2. \qquad (h^2 < g^2)$$

δ_1

Le polynôme sous le radical s'écrit donc

$$A(\lambda z^2 - h^2)(\lambda z^2 - g^2)\lambda z^2$$

ou

$$A(\lambda z^2 + \mu^2)(\lambda z^2 + g^2)\lambda z^2.$$

Nous choisirons dans ce deuxième cas λ négatif. Le polynôme devient ($\lambda = -\lambda'$)

$$-A(\lambda' z^2 - h^2)(\lambda' z^2 - g^2)\lambda' z^2.$$

ρ, ω

Dans les deux cas, en faisant sortir du radical $z\sqrt{A\lambda}$ ou $z\sqrt{-A\lambda'}$, le radical se réduit à

$$(\lambda z^2 - h^2)(\lambda z^2 - g^2). \qquad (h^2 < g^2)$$

Posons enfin

$$\lambda = h^2, \qquad h^2 = g^2 k^2. \qquad (k^2 < 1)$$

Le polynôme devient

$$h^2(z^2 - 1)\left(h^2 z^2 - \frac{h^2}{k^2}\right) = \frac{h^4}{k^2}(z^2 - 1)(k^2 z^2 - 1) = \frac{h^4}{k^2}(1 - z^2)(1 - k^2 z^2).$$

R

On a donc les trois intégrales elliptiques sous leur forme normale

$$I_1 = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \qquad I_2 = \int_0^x \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

$$I_3 = \int \frac{dz}{(z - a)\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2}}.$$

en choisissant les intégrales qui se réduisent à zéro pour $x = 0$.

$k(< 1)$ s'appelle le module.

Remarquons enfin que la troisième peut s'écrire successivement

$$\int \frac{dz}{(z - a)\sqrt{Z}} = \int \frac{z + a}{z^2 - a^2}\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int \frac{zdz}{(z^2 - a^2)\sqrt{Z}} + a\int \frac{dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{Z}}.$$

La première ρ se ramène aux transcendantes élémentaires. On n'a donc à considérer que la deuxième que l'on peut écrire

$$\int_0^x \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

en choisissant l'intégrale qui se réduit à zéro pour $x = 0$.

n s'appelle le « paramètre de distribution ».

Si on fait la transformation $x = \sin\varphi$, la première devient

$$I_1 = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

C'est l'intégrale de première espèce de Legendre.

Contrairement à notre notation, Legendre appelait intégrale de deuxième espèce l'intégrale

$$J_2 = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Or on a

$$I_2 = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

On en déduit donc

$$J_2 = \int_0^{\varphi} \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} d\varphi = I_1 - k^2 I_2.$$

Si, inversement, de la relation

$$u = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

on déduisait x en fonction de u on obtiendrait la fonction elliptique que l'on désigne par la notation $x = snu$, qui se réduit à $\sin u$ si $k = 0$.

Applications. — *Longueur d'un arc d'ellipse.*

Soit

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

la représentation paramétrique d'une ellipse. La longueur d'un arc élémentaire de courbe est donnée par

$$ds^2 = (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)d\varphi^2.$$

Or, en désignant par e l'excentricité de l'ellipse, on a

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} < 1.$$

Remplaçons b par sa valeur $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

On a

$$ds^2 = a^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)d\varphi^2.$$

Si l'on pose $\sin \varphi = t$,

$$ds = a\sqrt{\frac{1 - e^2t^2}{1 - t^2}}\,dt = a\,\frac{1 - e^2t^2}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - e^2t^2)}}\,dt.$$

Il viendra

$$s = a\int_0^t \frac{1 - e^2t^2}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - e^2t^2)}} = aI_1 - ae^2I_2.$$

II. *Longueur d'un arc de lemniscate.* — Prenons la lemniscate dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad \rho'_\varphi = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

On a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = a^2\,d\varphi^2\left(\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + \cos 2\varphi\right) = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}d\varphi^2,$$

c'est-à-dire

$$ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi$$

si nous faisons le changement de variable

$$\sqrt{2}\cos\varphi = t, \qquad -\sqrt{2}\sin\varphi\,d\varphi = dt.$$

On obtient

$$ds = \frac{a}{\sqrt{1 - t^2}} \times \frac{dt}{\sqrt{2 - t^2}}.$$

L'arc s est donc donné par une intégrale de première espèce

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)}} \qquad \left(k^2 = \frac{1}{2}\right).$$

Réduction à la forme normale de Weierstrass. — De même, si le polynôme sous le radical est du troisième degré, on peut, par la transformation $x = ay + b$, faire disparaître le terme du second degré et faire en sorte que le coefficient de y soit égal à 4.

Nous désignerons le polynôme ainsi transformé par la notation

$$X = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Et l'on aura l'intégrale de première espèce

$$u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

en prenant une limite inférieure infinie (l'intégrale existe).

Inversement, si de cette relation on déduit x en fonction de u, on a une fonction que l'on désigne par la notation $x = p(u)$. Cette fonction est telle que l'on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Elle satisfait donc à l'équation différentielle

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3.$$

Application. — Mouvement du pendule simple.

Abandonnons un pendule simple de longueur l sans vitesse initiale à une hauteur x_0 au-dessous du point de suspension ; σ_2 le théorème des forces vives donnera

$$v^2 = 2g(x - x_0) = 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

en désignant par φ l'angle de OM avec la verticale descendante. Or on a

$$v = l\frac{d\varphi}{dt}.$$

Donc

$$l\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

D'ailleurs

$$x = l\cos\varphi, \qquad dx = -l\sin\varphi d\varphi.$$

D'où

$$d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

Par suite

$$dt = \frac{ldx}{\sqrt{2g(x - x_0)(l^2 - x^2)}}.$$

$\delta_{1,2}$ Posons

$$x = \frac{x_0}{3} - 4^{\frac{1}{3}}y.$$

Il viendra

$$t = \frac{l}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4y^3 - 4^{\frac{1}{3}}\left(l^2 + \frac{x_0^4}{3}\right)y - 2\frac{x_0}{3}\left(l^2 - \frac{x_0^3}{9}\right)}}.$$

t est donc donné par la fonction elliptique sous la forme normale de Weierstrass.

Remarque. — Si l'on a l'intégrale sous la forme de Legendre

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - k^2x^2)}}.$$

Faisons le changement de variable $x^2 = t$, on obtiendra

$$\int \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t(1 - t)\,(1 - k^2t)}}.$$

Le polynôme sous le radical est donc ramené à un polynôme du troisième degré que l'on peut mettre à son tour sous la forme normale de Weierstrass.

Intégrales pseudo-elliptiques. — Il peut arriver que, dans l'intégrale $\int R(x, \sqrt{X})dx$ où X est un polynôme du troisième ou du quatrième degré, les intégrales elliptiques

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{X}}$$

disparaissent du résultat final qui s'exprime donc simplement au moyen d'une fonction rationnelle et de transcendantes élémentaires. On dit dans ce cas que l'intégrale est pseudo elliptique.

Considérons par exemple

$$J = \int \frac{5x^4 - 3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 1}}\,dx.$$

α, δ_1 Nous appliquerons les formules de réduction des intégrales

$$I_k = \int \frac{x^k}{\sqrt{x^3 + 1}}\,dx.$$

En prenant la dérivée de $x^k\sqrt{x^3 + 1}$, on obtient

$$Dx^k\sqrt{x^3 + 1} = \frac{2kx^{k-1}(x^3 + 1) + 3x^{k+2}}{2\sqrt{x^3 + 1}} = \frac{\left(k + \frac{3}{2}\right)x^{k+2} + kx^{k-1}}{\sqrt{x^3 + 1}}.$$

En intégrant on a donc

$$\left(k+\frac{3}{2}\right)I_{k+2}+kI_{k-1}=x^k\sqrt{x^3+1}.$$

Et par conséquent pour $k=1$

$$5I_3+2I_0=2x\sqrt{x^3+1}.$$

D'autre part

$$-3I_2=\int\frac{-3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx=-2\sqrt{x^3+1}.$$

ω

On a donc

$$J=5I_3-3I_2+2I_0=2(x-1)\sqrt{x^3+1}.$$

VII. — INTÉGRATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES

Un cas immédiat d'intégration est celui où la fonction x peut se mettre sous la forme

$$R(\varphi(x))\times\varphi'(x)dx,$$

φ

en désignant par R une fonction rationnelle. Il suffit de poser $\varphi(x)=t$ pour être ramené à l'intégrale $\int R(t)dt$.

Application. — Soit l'intégrale $\int R(e^{mx})dx$, R désignant une fonction rationnelle. On peut l'écrire

$$\int R(e^{mx})dx=\frac{1}{m}\int\frac{R(e^{mx})}{e^{mx}}me^{mx}dx=\int R_1(e^{mx})de^{mx}.$$

R_1 désignant une nouvelle fonction rationnelle. On peut donc poser $e^{mx}=t$.

Il en est de même d'une fonction rationnelle de sin x, cos x, pour laquelle on fera dans le cas général le changement de variable $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. σ₂ Nous avons déjà dit qu'on aurait un résultat plus simple dans les cas suivants :

Si la fonction est impaire en cos x c'est-à-dire de la forme $\cos x\times R(\sin x,\cos^2 x)dx$, on fera le changement de variable $\sin x=t$.

De même si la fonction est impaire en sin x, on posera cos $x = t$.

Enfin si la fonction est paire en sin x et cos x, c'est-à-dire ne dépend que de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, ou sin x cos x, on fera le changement de variable tg $x = t$.

σ_2 Si la fonction rationnelle se réduit à un polynôme entier en sin x et cos x, on sait qu'on peut remplacer un produit quelconque de ces lignes trigonométriques en fonction linéaire des sin et cos des arcs multiples.

Considérons par exemple l'intégrale

$$\int \cos x \times \cos 2x \times \cos 3x dx.$$

δ_1 On a

$$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$$

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos^2 2x + \cos 2x \cos 4x) = \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 1).$$

L'intégrale est donc égale à

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + x\right) + \text{Const.}$$

Nous avons d'ailleurs déjà étudié les intégrales

$$I_{q,p} = \int \sin^p x \cos^q x dx$$

même dans le cas où p et q sont quelconques.

Intégration d'une fonction entière de x, d'exponentielles, et de lignes trigonométriques.

1° $$\int P(x) e^{ax} dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$I = e^{ax}\left(\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} \cdots\right).$$

Remarquons que cette formule qui ne fait pas appel à la notion d'intégrale de fonction de variable complexe reste valable même si a est imaginaire, π la dérivée de e^{ax} étant ae^{ax}.

2° $\int P(x, e^{ax}, e^{bx}, \cdots \sin \alpha x, \cos \beta x, \cdots)dx.$

On peut évidemment supposer $\alpha, \beta, \cdots$ entiers S'ils étaient fractionnaires de plus petit dénominateur commun d, il suffirait de poser $x = dt$.

Chaque terme de P est de la forme

$$x^{\mu}e^{mx}P_1 (\sin x, \cos x)$$

P_1 désignant un polynôme, en remplaçant les produits d'exponentielles par une exponentielle unique et groupant tous les termes en $x^{\mu}e^{mx}$. Or à son tour le polynôme P_1 pourra se décomposer en une somme de termes de la forme

$$A \cos px + B \sin px.$$

On est donc ramené à calculer les intégrales

$$I = \int x^{\mu}e^{mx} \cos px\, dx \qquad I = \int x^{\mu}e^{mx} \sin px\, dx.$$

Faisons la combinaison des intégrales de variable réelle

$$I + iJ = \int x^{\mu}e^{mx} (\cos px + i \sin px)dx = \int x^{\mu}e^{(m+ip)x}dx.$$

D'après la remarque faite ci-dessus, cette intégrale est égale à

$$e^{(m+ip)x}\left[\frac{x^{\mu}}{m+ip} - \frac{\mu x^{\mu-1}}{(m+ip)^2} + \frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}}{(m+ip)^3} - \cdots\right]$$

$$= e^{mx} (\cos px + i \sin px)\left[\frac{x^{\mu}(m-ip)}{m^2+p^2} - \frac{\mu x^{\mu-1}(m-ip)^2}{(m^2+p^2)^2} + \cdots\right].$$

Le second membre se mettra donc sous la forme $A + Bi$. On aura

$$I = A, \qquad J = B.$$

3° **Intégrales de la forme** $\int e^{mx}R(x)dx$, $R.x$ désignant une fonction rationnelle.

Nous allons faire la réduction de ces intégrales. Il est naturel à cet effet de faire sur la fonction rationnelle $R(x)$ les mêmes transformations que celles que nous avons déjà faites. La fonction peut se décomposer en une partie entière $E(x)$ et une nouvelle fraction rationnelle de même dénominateur, le degré du numérateur étant moindre.

Nous avons déjà vu l'intégrale $\int e^{mx}\mathrm{E}(x)dx$.

On peut donc supposer que dans la fraction rationnelle, il n'y a pas de partie entière. On pourrait réduire l'intégration à des intégrales de la forme $\int \frac{e^{m.c}}{(x-a)^{\alpha}}dx$, mais σ_1 pour éviter le plus longtemps possible la résolution d'équations algébriques, nous décomposerons la fraction rationnelle sous la forme

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{X}_1} + \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{X}_2^2} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_k}{\mathrm{X}_k^k}$$

le dénominateur X ayant été décomposé en

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2^2 \cdots \mathrm{X}_k^k$$

(X_1, X_2, X_k, $\cdots$ étant les facteurs correspondant aux racines simples, doubles, etc...)

ξ

On est donc conduit à des intégrales de la forme $\int \frac{\mathrm{A}e^{mx}}{\mathrm{X}^n}dx$, X n'ayant plus que des racines simples.

α

X et X′ étant premiers entre eux, on peut déterminer des polynômes M, N, tels que

$$\mathrm{MX} + \mathrm{NX}' \equiv 1, \qquad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}^n} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{X}^{n-1}} + \mathrm{NA}\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}^n}.$$

δ_1

Or

$$\int \mathrm{NA}\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}^n}e^{m.c}dx = -\frac{1}{(n-1)\mathrm{X}^{n-1}}\mathrm{NA}e^{mx} + \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{mx}}{\mathrm{X}^{n-1}}[m\mathrm{NA} + (\mathrm{NA})']dx.$$

Finalement

$$\int \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}^n}e^{m.c}dx = -\frac{1}{n-1}\mathrm{X}^{n-1}\mathrm{NA}e^{m.c}$$

$$+ \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{mx}}{\mathrm{X}^{n-1}}[(n-1)\mathrm{MA} + m\mathrm{NA} + (\mathrm{NA})']dx.$$

ρ

C'est une formule de récurrence qui permet d'abaisser successivement d'autant d'unités qu'on le veut, jusqu'à $n = 1$, l'exposant de X. (Remarquons que pour ces réductions successives,

les facteurs M, N resteront les mêmes). On aura donc un résultat de la forme

$$\int \frac{A}{X^n} e^{mx}dx = \frac{\mathcal{A}}{X^{n-1}} e^{mx} + \int \mathcal{B}e^{mx}dx + \int \frac{\mathcal{C}}{X} e^{mx}dx,$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ désignant trois polynômes.

En opérant de même sur les autres termes de la décomposition et réduisant toutes les parties correspondantes, on aura

1° Une partie toute intégrée de dénominateur $X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^3 \cdots = D$ c'est-à-dire le plus g. c. d. de X et de X'.

2° Une intégrale $\int \mathcal{F}(x)e^{mx}dx$, $\mathcal{F}$ étant un polynôme. Le résultat est de la forme $\mathcal{G}(x)e^{mx}$.

3° Une intégrale portant sur une fraction de dénominateur

$$X_1 X_2 X_3 \cdots$$

c'est-à-dire le quotient $Q = \frac{X}{D}$.

On peut écrire

$$\int R(x)e^{mx}dx = \frac{\mathcal{E}(x)}{D} e^{mx} + \mathcal{F}(x)e^{mx} + \int \frac{\mathcal{H}(x)}{Q} e^{mx}dx.$$

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ désignant trois polynômes.

On peut d'ailleurs supposer que la partie entière de $\frac{\mathcal{E}}{D}$ a été englobée dans $\mathcal{F}$, de même que l'intégration de la partie entière de $\frac{\mathcal{H}}{Q}$ de sorte que $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ sont respectivement de degré inférieur à Q et à D.

On peut alors montrer que l'intégrale ne peut être mise sous cette forme que d'une seule manière.

Supposons en effet que l'on ait une deuxième forme avec des polynômes $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{H}'$. En comparant les deux résultats, on aurait une identité de la forme

$$\left(\frac{E}{D} + F\right) e^{mx} + \int \frac{H}{Q} e^{mx}dx = 0 \quad (E = \mathcal{E} - \mathcal{E}', F = \mathcal{F} - \mathcal{F}', H = \mathcal{H} - \mathcal{H}').$$

En dérivant et divisant par e^{mx}

$$\left(\frac{E}{D}\right)' + F' + m\left(\frac{E}{D} + F\right) + \frac{H}{Q} = 0.$$

ρ

E étant de degré inférieur à D, H de degré inférieur à Q, $\left(\frac{E}{D}\right)'$, $\frac{E}{D}$, $\frac{H}{Q}$ n'ont donc pas de partie entière.

β

Il est donc nécessaire que le polynôme $F' + mF$ soit identiquement nul : F lui-même est donc identiquement nul. Il reste donc simplement

$$\left(\frac{E}{D}\right)' + m\frac{E}{D} + \frac{H}{Q} = 0.$$

δ_1

En effectuant et multipliant par $\frac{D}{E}$, on obtient

$$\frac{E'}{E} - \frac{D'}{D} + m + \frac{H}{Q}\frac{D}{E} = 0.$$

ξ

Soit un facteur $(x - a)$ de D, d son degré de multiplicité, 1 son degré dans Q. Supposons qu'il soit facteur de E au degré e, de H au degré h. δ_1 Dans la somme $\frac{E'}{E} - \frac{D'}{D}$ on aura le terme $\frac{e-d}{x-a}$; si $e \not\equiv d$, il faut donc que $\frac{H}{Q}\frac{D}{E}$ contienne $x - a$ au degré 1 au dénominateur, c'est-à-dire que

$$1 + e = h + d + 1 \qquad e = h + d.$$

ω

Si donc $e \not\equiv d$, e est au moins égal à d. Donc E contient tous les facteurs de D avec un exposant au moins égal. E serait donc de degré supérieur à D, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si l'on avait $e = d$, E serait encore de degré au moins égal à D.

La décomposition sous la forme que nous avons indiquée n'est donc possible que d'une seule manière. ρ Il en résulte que l'on peut poser a priori

$$\int R(x)e^{mx}dx = \frac{\mathcal{E}}{D}e^{mx} + \mathcal{F}(x)e^{mx} + \int \frac{\mathcal{H}(x)}{Q}e^{mx}dx.$$

En dérivant on aura

$$R = \left(\frac{\mathcal{E}}{D}\right)' + m\frac{\mathcal{E}}{D} + \mathcal{F} + m\mathcal{F}' + \frac{\mathcal{H}}{Q} = \frac{A}{X}.$$

En multipliant par $X = DQ$ il vient

$$A = \mathcal{E}'Q - \mathcal{E}\frac{D'Q}{D} + mQ\mathcal{E} + (\mathcal{F} + m\mathcal{F}')DQ + D\mathcal{H}$$

$\frac{D'Q}{D}$ étant entier, on aura en identifiant les polynômes des deux membres, le nombre d'équations nécessaires et suffisantes pour déterminer les coefficients des polynômes $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}$, dont on connaît une limite supérieure des degrés.

On est donc finalement ramené à l'intégrale $\int \Pi(x)e^{mx}dx$.

δ_1 La fraction $\frac{H}{Q}$ se mettant sous la forme d'une somme de termes $\frac{A}{x-a}$ on a à considérer les intégrales $\int \frac{e^{mx}}{x-a}dx$.

On démontre qu'elles ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires connues. Il est donc nécessaire d'introduire une transcendante nouvelle. A cet effet posons

$$m(x-a) = t, \qquad e^{mx} = e^{ma}e^{t}.$$

L'intégrale devient $e^{ma}\int \frac{e^t}{t}dt$ ou enfin en posant $e^t = u$

$$I = \int \frac{du}{L(u)}$$

à un facteur constant près. Cette intégrale s'appelle le logarithme intégral de u.

ρ C'est la seule transcendante introduite par l'intégration $\int e^{mx}R(x)dx$.

4° Intégration des fonctions $E(x, \log x)$. E désignant une fonction entière.

δ, ρ Chaque terme est de la forme $x^m \log^n x$. α En intégrant par parties

$$I_{m,n} = \int x^m \log^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \log^{n-1} x dx.$$

ω Le calcul de $I_{m,n-1}$ est donc ramené à celui de $I_{m,n-1}$. De proche en proche on arrivera au cas où $n = 0$, c'est-à-dire à

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Le résultat est donc de la forme

$$I = x^{m+1}P_n(\log x).$$

CHAPITRE X

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES. — DÉRIVATIONS APPLICATIONS DIVERSES

SOMMAIRE.

Intégrales généralisées : Fonction discontinue. — Champ infini. — Applications. — Cas où la fonction change de signe un nombre infini de fois. — Cas remarquable $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1 + x^6 \sin^2 x}$.

Dérivation — Intégration sous le signe.

Généralisations : Intégrales uniformément convergentes avec oscillation du paramètre. — Cas où la fonction devient infinie. — Condition pour que la dérivée d'une limite soit égale à la limite de la dérivée. — Cas où les points de discontinuité dépendent du paramètre. — Applications. — Intégration sous le signe : champ infini.

Détermination d'intégrales définies — Applications diverses : Formule de Wallis. — $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. — $\int_0^{\pi} \log(1 - 2\alpha x + \alpha^2)\,dx$. — $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y\,dy$. — $F(x) = \int_0^1 (1 - z^2)^n \cos zx\,dz$: π est incommensurable.

Intégration sous le signe : Applications.

Nous avons défini l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme la limite de la somme $\Sigma f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ quand on a partagé l'intervalle ab en intervalles partiels, tendant tous simultanément vers zéro, sous les conditions suivantes :

1° la fonction $f(x)$ est continue dans tout l'intervalle, limites comprises ;

2° le champ d'intégration, c'est-à-dire les limites a, b sont finies.

Nous allons généraliser cette notion d'intégrale au cas où ces conditions ne seraient pas réalisées.

Cas où la fonction est discontinue. — Tout d'abord si la fonction est discontinue pour la valeur $x = b$ seulement, en supposant $b > a$,

on peut définir l'intégrale

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Cette intégrale sera une certaine fonction de a, b, ε, $F(a, b, \varepsilon)$. Si ce résultat a une limite finie et bien déterminée quand ε tend vers zéro, cette limite sera par définition l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

De même si la fonction est discontinue pour $x = a$, nous appellerons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx,$$

la limite, si elle existe pour $\varepsilon = 0$, de $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Si l'on connaît une fonction primitive $F(x)$, dans le premier cas par exemple, le résultat est de la forme

$$F(b - \varepsilon) - F(a).$$

Il suffit donc de voir si $F(b - \varepsilon)$ tend vers une limite déterminée quand ε tend vers zéro.

Exemple. — Soit l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Une fonction primitive est

$$F(x) = +3x^{\frac{1}{3}}$$

donc

$$I = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = 3 - 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}$$

dont la limite est 3.

Si la fonction est discontinue en un point c compris entre a et b,

nous pouvons par les définitions précédentes, définir séparément

$$\int_a^c f(x)dx, \qquad \int_c^b f(x)dx.$$

Si chacune de ces intégrales existe séparément, par définition, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ sera la somme des deux limites.

Plus généralement si f devient infinie en plusieurs points du champ, c, d, e, ··· nous décomposerons le champ en intervalles partiels par ces points de division intermédiaires. Si chacune des intégrales partielles existe, l'intégrale sera la somme des résultats.

Comme on le voit, et par cette définition même, la propriété d'addition des intégrales est maintenue, quels que soient les points de décomposition.

Cas d'existence. — Nous sommes amenés à rechercher dans quel cas la limite $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ existe, quand par exemple $f(x)$ devient infinie à la limite inférieure.

Nous considérons donc une suite de valeurs ε, ε', ε'', ε_p, ε_q, ··· tendant vers zéro d'une façon quelconque par valeurs positives et les intégrales correspondantes $I(\varepsilon)$, $I(\varepsilon')$, ··· Pour que ces intégrales aient une limite il faut et il suffit que la différence $I(\varepsilon_p) - I(\varepsilon_q)$ tende vers zéro quels que soient p et q. Or cette différence est

$$\int_{a+\varepsilon_p}^b - \int_{a+\varepsilon_q}^b = \int_{a+\varepsilon_p}^{a+\varepsilon_q}$$

c'est-à-dire d'une façon générale $\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'}$: elle doit tendre vers zéro quelle que soit la manière dont ε et ε' tendent vers zéro.

Théorème. — *Si l'intégrale* $\int_a^b |f(x)|\,dx$, *existe il en est certainement de même de l'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$.

Car

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} |f(x)|\,dx > \left| \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} f(x)dx \right|$$

si par exemple $\varepsilon < \varepsilon'$. Or la première intégrale tend, par hypothèse, vers zéro.

La condition n'est pas nécessaire. Il peut arriver que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe sans qu'existe $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

THÉORÈME. — *Si, pour des valeurs de x voisines de a et supérieures à a, la fonction $f(x)$ est infiniment grande d'un ordre déterminé α par rapport à l'infiniment grand $\frac{1}{x-a}$;*

Si $\alpha < 1$, l'intégrale existe,

Si $\alpha \geqslant 1$ et si, de plus, pour ces valeurs, $f(x)$ conserve un signe constant, alors seulement on peut affirmer que l'intégrale n'existe pas.

Dire que la fonction $f(x)$ est infiniment grande d'ordre α par rapport à $\frac{1}{x-a}$, c'est dire que le rapport

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-a}\right)^\alpha} = (x-a)^\alpha f(x) = \varphi(x)$$

reste compris entre des limites finies, et si ce rapport a une limite, cette limite n'est pas nulle.

Supposons $\alpha < 1$. Désignons par M la plus grande valeur absolue de $\varphi(x)$. On peut écrire

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} f(x)dx\right| = \left|\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\varphi(x)dx\right| < M\left|\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx\right|.$$

Or cette dernière intégrale est égale à

$$\left[\frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\right]_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\varepsilon'^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right].$$

Comme $\alpha < 1$, le second membre tend vers zéro quelle que soit la façon dont ε et ε' tendent vers zéro : l'intégrale existe bien.

Si $\alpha \geqslant 1$ **et si** $f(x)$ **conserve un signe constant,** il en est de même de $\varphi(x)$. Désignons par m la plus petite valeur absolue de $\varphi(x)$. On aura

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}dx\right| = \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \left|\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha}\right| dx > m\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

en supposant par exemple $\varepsilon' > \varepsilon$.

Or cette deuxième intégrale est

$$-\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\right)_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} = -\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) \quad (\alpha \neq 1).$$

ω

Puisque $\alpha > 1$, le second membre, différence de deux infinis indépendants l'un de l'autre, ne tend vers aucune limite et même peut croitre indéfiniment.

Si $\alpha = 1$, l'intégrale est

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{x-a} = \left[\mathrm{L}(x-a)\right]_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} = \mathrm{L}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

ε et ε' étant indépendants, le second membre ne tend vers aucune limite : l'intégrale n'existe pas.

Applications. — Soit l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

δ

La fonction devient infinie pour $x = 1$. On peut l'écrire

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}.$$

On voit que le produit

$$\sqrt{1-x}f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

tend vers une limite finie quand x tend vers 1 ; l'intégrale existe donc $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$.

2° Considérons l'intégrale hyperelliptique $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}$ de première ou de deuxième espèce.

δ

Le polynôme X n'ayant que des racines simples α, β, ··· la fonction devient infinie dans le champ pour chacune des valeurs α, β, ···, mais elle devient infinie d'ordre $\frac{1}{2}$: l'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{X}}$ reste donc finie.

Pour l'intégrale de troisième espèce $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}$, la fonction à

intégrer devient infinie d'ordre 1 pour $x = a$: l'intégrale n'existera donc pas pour tout intervalle renfermant a.

REMARQUES. — I. Le théorème précédent suppose que la fonction est infiniment grande d'un ordre déterminé α pour $x = a$; l'intégrale existe certainement si $\alpha < 1$, c'est-à-dire si

$$(x - a)^{\alpha} f(x) = \varphi(x)$$

reste compris entre des limites finies.

Si pour un certain exposant α moindre que 1, ce produit a pour limite zéro, ψ l'intégrale existera à fortiori.

Exemple. — Prenons l'intégrale

$$\int_0^1 \log x \, dx.$$

δ Log x n'est pas un infiniment petit d'un ordre déterminé si petit soit-il, par rapport à x ; mais par exemple $x^{\frac{1}{2}} \log x$ tend vers zéro lorsque x tend vers zéro : l'intégrale existe donc

$$I = \Big(x \log x - x\Big)_0^1 = -1$$

puisque $\lim_{x=0} x \log x = 0$.

II. Lorsque la fonction devient infinie pour la valeur c de l'intervalle, l'intégrale $\int_a^b$ est, par définition, la limite de

$$\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon'}^b ;$$

il faut que cette limite existe quelle que soit la façon dont ε et ε' tendent vers zéro.

Il peut arriver que la limite, sans exister dans ce cas général, existe lorsque l'on fait tendre ε et ε' vers zéro d'une manière particulière.

Considérons par exemple l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$.

ξ La fonction à intégrer devient infinie pour $x = 0$. Nous devons considérer les intégrales

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x}, \qquad \int_{\varepsilon'}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Pour la première, si nous faisons le changement de variable $x = -x'$, elle devient

$$\int_1^{\varepsilon} \frac{dx'}{x'} = \mathrm{L}\varepsilon.$$

La deuxième est

$$\int_{\varepsilon'}^{+1} \frac{dx}{x} = -\mathrm{L}\varepsilon'.$$

La somme des deux intégrales est donc $\mathrm{L}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ qui est indéterminée quand ε et ε' tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre. Mais si nous assujettissons ε et ε' à la condition $\varepsilon = k\varepsilon'$, k étant une constante, la somme des deux intégrales aura pour limite $\mathrm{L}k$. Lorsque en particulier $k = 1$, on obtient ce que Cauchy appelait la valeur principale de l'intégrale. Dans l'exemple précédent cette valeur principale est $\mathrm{L}1 = 0$.

Cas où le champ d'intégration est infini. — Supposons maintenant que le champ augmente indéfiniment, l'une des limites b par exemple augmentant indéfiniment par valeurs positives. Nous pouvons définir $\int_a^p f(x)\,dx$, quelque grand que soit p : le résultat dépendra de p.

Si ce résultat $\mathrm{F}(p)$ tend vers une limite finie quand p croît indéfiniment, cette limite sera par définition $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

De même si la limite inférieure tendait vers $-\infty$.

Enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ sera la limite, si elle existe, de $\int_{-q}^{+p} f(x)\,dx$ lorsque q et p augmentent indéfiniment, indépendamment l'un de l'autre.

Nous dirons encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty}$ existe ou a un sens.

Exemple :

$$\int_a^p \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_a^p = \frac{1}{a} - \frac{1}{p}.$$

Lorsque p augmente indéfiniment, le second membre tend vers $\frac{1}{a}$ donc

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}.$$

De même

$$\int_0^p \frac{dx}{1+x^2} = (\text{arc tg } x)_0^p = \text{arc tg } p.$$

Si p augmente indéfiniment

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Au contraire pour a positif

$$\int_a^p \frac{dx}{x} = (\text{L}x)_a^p = \text{L}\frac{p}{a}.$$

Lorsque p augmente indéfiniment, le second membre augmente indéfiniment : donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ n'existe pas (est infinie).

Comme on le voit, lorsqu'on connaît une fonction primitive de $f(x)$, il est facile de s'assurer si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe ou non.

Donnons à p une suite de valeurs quelconques $p, p_1, \cdots p_k$ augmentant indéfiniment. Pour que $F(p)$ ait une limite, β il faut et il suffit que la différence de deux quelconques des valeurs $F(p_k) - F(p_l)$, c'est-à-dire d'une façon générale $F(q) - F(p)$ tende vers zéro lorsque p et q augmentent indéfiniment indépendamment l'une de l'autre :

δ_1 Or cette différence est $\int_p^q f(x)\,dx$.

C'est cette intégrale qui devra tendre vers zéro.

THÉORÈME. — *Si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *existe, il en est de même de* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

δ

Car si $q > p$

$$\left| \int_p^q f(x)\,dx \right| \leqslant \int_p^q |f(x)|\,dx$$

et par hypothèse le second membre tend vers zéro.

ψ

La condition n'est pas nécessaire : il peut arriver que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe sans que l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ existe.

THÉORÈME. — *Si, pour des valeurs de x suffisamment grandes, la fonction $f(x)$ est infiniment petite d'un ordre déterminé α par rapport à $\frac{1}{x}$;*

Si $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existera ;

Si $\alpha \leqslant 1$ et si, de plus, pour les valeurs infiniment grandes, la fonction garde un signe constant, l'intégrale n'existera pas.

Dire que $f(x)$ est infiniment petite d'ordre α par rapport à $\frac{1}{x}$

σ

c'est dire que le rapport $\dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = x^\alpha f(x)$ reste borné pour des valeurs de x suffisamment grandes, les bornes étant finies et différentes de zéro, et si ce rapport a une limite, cette limite n'est pas nulle.

Posons $x^\alpha f(x) = \varphi(x)$.

$\varphi(x)$ reste donc compris entre deux bornes m, M. Soit par exemple $|M| > |m|$.

δ_1

Si $\alpha > 1$, on aura

$$\left| \int_p^q f(x)\,dx \right| \leqslant \int_p^q |f(x)|\,dx \leqslant M \int_p^q \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Or

$$\int_p^q \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)_p^q = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{q^{\alpha-1}}\right).$$

Comme $\alpha > 1$, le second membre tend vers zéro quand p, q augmentent indéfiniment d'une façon quelconque.

δ_1

Si $\alpha \leqslant 1$ et si, pour des valeurs de x suffisamment grandes,

la fonction garde un signe constant, les bornes de $\varphi(x)$ sont de même signe. Supposons-les positives. On a

$$\left|\int_p^q f(x)\,dx\right| = \int_p^q |f(x)|\,dx > m\int_p^q \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{q^{\alpha-1}}\right) \quad (\alpha \neq 1).$$

α étant inférieur à 1, et p et q augmentant indéfiniment indépendamment l'un de l'autre, le second membre ne tend vers aucune limite déterminée et peut même augmenter indéfiniment.

Si $\alpha = 1$, $\int_p^q \frac{dx}{x} = \mathrm{L}\frac{q}{p}$ ne tend encore vers aucune limite.

Ce théorème ne suppose pas que $x^\alpha f(x)$ tende vers une limite déterminée.

Cas particulier. — Si le produit $x^\alpha f(x)$ tend vers une limite bien déterminée l, finie, différente de zéro, quand x croît indéfiniment, l'intégrale existe si $\alpha > 1$; elle n'existe pas si $\alpha \leqslant 1$.

En effet, dans ce cas, pour des valeurs de x suffisamment grandes, le produit $x^\alpha f(x)$ reste compris entre deux limites m, M aussi voisines qu'on le veut de l et par conséquent de même signe.

Application. — Soit l'intégrale d'une fraction rationnelle

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

et soient a_0x^p, b_0x^q, les termes de degré le plus élevé de $P(x)$, $Q(x)$.

Le produit $\left|x^{q-p}\frac{P(x)}{Q(x)}\right|$ a une limite finie $\frac{a_0}{b_0}$ lorsque x augmente indéfiniment. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est donc infiniment petit si $q > p$ et c'est alors un infiniment petit d'ordre $q - p$. Si donc $q - p > 1$, c'est-à-dire $q \geqslant p + 2$ l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ existe. Il faut donc que le degré du dénominateur soit supérieur d'au moins deux unités au degré du numérateur.

Exemple II. — Considérons les intégrales hyperelliptiques

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{X}}\,dx.$$

Si a_0x^n désigne le terme de degré le plus élevé de X, le

produit $x^{\frac{n}{4}-m}\frac{x^m}{\sqrt{X}}$ a une limite $\frac{1}{\sqrt{a_0}}$ lorsque x augmente indéfiniment ; $\frac{x^m}{\sqrt{X}}$ est donc infiniment petit si $\frac{n}{2} - m > 0$. Si donc $\frac{n}{2} - m > 1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{x^m}{\sqrt{X}} dx$ existera.

Si n est pair, $n = 2n'$, cette égalité revient à

$$m < n' - 1.$$

Si n est impair $n = 2n' - 1$, il faut que

$$n' + \frac{1}{2} - 1 > m, \qquad m < \frac{2n' - 1}{2}.$$

ρ, σ₂ On voit que les intégrales hyperelliptiques, que nous avons appelées de la première espèce, sont celles qui ont une limite finie lorsque la limite d'intégration augmente indéfiniment ; celles de seconde espèce augmentent indéfiniment avec la limite d'intégration ; les intégrales de troisième espèce enfin peuvent devenir infinies pour des valeurs finies de la variable.

Supposons que la fonction $f(x)$ se mette sous la forme

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

$\varphi(x)$ étant constamment positive et décroissante.

En appliquant le deuxième théorème de la moyenne, on peut écrire

$$\int_p^q \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(p)\int_p^{\xi} \psi(x)dx.$$

d On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si $\varphi(x)$ décroît jusqu'à zéro, et si, quels que soient p, q, l'intégrale $\int_p^q \psi(x)dx$ reste bornée, le second membre tendant vers zéro, l'intégrale $\int_p^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)dx$ existe.*

Une intégrale, qui peut ne pas avoir de limite mais qui reste bornée, conduit donc, en multipliant la fonction à intégrer par une fonction décroissante jusqu'à zéro, à une intégrale qui existe dans un champ infini.

Applications. — On peut prendre $\psi(x) = \sin x$ puisque l'intégrale

$$\left| \int_p^q \sin x dx \right| < 2$$

d

$\varphi(x)$ désignant une fonction quelconque décroissant jusqu'à zéro, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(x) \sin x\, dx$ existe.

ψ

Plus généralement, on peut prendre pour $\psi(x)$ la dérivée d'une fonction $\Psi(x)$ qui reste finie lorsque x augmente indéfiniment.

Prenons par exemple

$$\Psi(x) = \sin x^2 \qquad \text{on a} \qquad [\Psi(x)]_p^q < 2.$$

Donc $\int_p^q 2x \cos x^2 dx$ reste finie, quels que soient p, q.

ω

Multiplions la fonction à intégrer par $\frac{1}{x^\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ qui tend vers zéro, aussi petit que soit ε ; on voit que l'intégrale $\int_0^\infty x^{1+\varepsilon} \cos x^2 dx$ existe, de même que $\int \frac{x}{Lx} \cos x^2 dx$, bien que la fonction à intégrer puisse prendre des valeurs croissant indéfiniment avec x.

Cas où la fonction change de signe un nombre infini de fois. — Lorsque la fonction ne conserve pas un signe constant à partir d'une valeur de x aussi grande soit-elle, l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ peut exister sans même que la fonction devienne infiniment petite. Voyons ce qui se passe alors :

Nous supposons que la fonction change de signe un nombre infini de fois, pour des valeurs de x supérieures à un nombre donné.

ξ

Soient $x_1, x_2, \cdots x_k$ celles de ces valeurs qui sont comprises dans l'intervalle a, p. Partageons l'intervalle d'intégration par ces points de division. Nous aurons

$$\int_a^p f(x)dx = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_k}^p = I_1 + I_2 + \cdots + I_{k+1}.$$

ρ

Ces intégrales sont alternativement positives et négatives. Si p augmente indéfiniment, le second membre se transforme en une série alternée.

σ_2

Pour qu'elle soit convergente, il faut et il suffit que les intégrales décroissent indéfiniment à partir d'un certain rang, et qu'elles aient pour limite zéro.

Exemple. — Soit l'intégrale $\int_a^l \frac{\sin ax}{x} dx$.

On pourrait appliquer le théorème précédent. Démontrons directement que l'intégrale existe.

δ_1

La fonction à intégrer reste finie pour toute valeur de x de l'intervalle. ξ Elle change de signe pour toutes les racines de $\sin ax = 0$ c'est-à-dire

$$ax = k\pi, \qquad x = \frac{k\pi}{a}.$$

ξ

Nous avons donc à considérer les intégrales

$$I_k = \int_{(k-1)\frac{\pi}{a}}^{k\frac{\pi}{a}} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

α

Faisons le changement de variable

$$ax - (k-1)\pi = z.$$

Les nouvelles limites de l'intégrale sont $z = 0$, $z = \pi$

$$\sin ax = \sin (z + (k-1)\pi) = (-1)^{k-1} \sin z$$

$$I_k = (-1)^{k-1} \int_0^\pi \frac{\sin z}{z + (k-1)\pi} dz.$$

ρ, ψ

Les intégrales I_k, I_{k+1}, sont donc alternativement positives et négatives

$$|I_k| - |I_{k+1}| = \int_0^\pi \frac{\pi \sin z}{(z + k\pi)(z + (k-1)\pi)}.$$

L'intégrale du second membre étant positive, on voit que les intégrales I_k décroissent constamment. On a d'ailleurs

$$\frac{\sin z}{z + (k-1)\pi} < \frac{1}{(k-1)\pi}.$$

Donc

$$|I_k| < \int_0^\pi \frac{dz}{(k-1)\pi} = \frac{1}{k-1}.$$

Les intégrales tendent donc vers zéro.

L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx$ est donc finie et bien déterminée.

On démontrerait de même que les intégrales $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ et $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$, qui se présentent dans la théorie de la diffraction, existent : la fonction à intégrer $\sin x^2$ change de signe pour un nombre infini de valeurs $\sqrt{n\pi}$. Les intégrales $\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2\,dx$ sont alternativement positives et négatives et décroissent constamment jusqu'à zéro, comme le montre la transformation $x^2 = t$ qui ramène d'ailleurs l'intégrale à $\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{t}} \sin t\,dt$, à laquelle on pourrait appliquer le théorème précédent.

Remarque. — Il faut bien remarquer qu'il n'est pas nécessaire, pour que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ existe, que $f(x)$ soit infiniment petit, lorsque x augmente indéfiniment, c'est-à-dire que la courbe $y = fx$ soit asymptote à $0x$.

Cas remarquable. — L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ peut exister même si $f(x)$ ne tend pas vers zéro pour des valeurs de x croissant indéfiniment, même si $f(x)$ peut prendre des valeurs infinies, et même si $f(x)$ garde un signe constant. (Il est alors nécessaire naturellement que $f(x)$ ne tende vers aucune limite).

Considérons par exemple l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1 + x^6 \sin^2 x}$.

La fonction $f(x) = \frac{x}{1 + x^6 \sin^2 x}$ est constamment positive dans l'intervalle d'intégration, et on ne peut pas dire qu'elle tende vers zéro puisque par exemple $f(k\pi) = k\pi$, et grandit indéfiniment.

Partageons l'intervalle d'intégration par les valeurs

$$0, \pi, 2\pi, \cdots k\pi$$

et considérons les intégrales

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x\,dx}{1 + x^6 \sin^2 x}.$$

Dans l'intervalle on a

$$x < (k+1)\pi \qquad \text{et} \qquad x^6 > k^6\pi^6.$$

Donc

$$I_k < (k+1)\pi \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + k^6\pi^6 \sin^2 x}.$$

ρ ∂

Il est aisé de calculer l'intégrale : en posant

$$1 + k^6\pi^6 = h^2$$

une fonction primitive est, comme on peut le vérifier,

$$F(x) = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tg}(h \operatorname{tg} x).$$

Nous choisissons celle des fonctions qui s'annule pour $x = k\pi$. Lorsque x varie de $k\pi$ à $(k+1)\pi$ en passant par $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $F(x)$ passe de 0 à $\frac{1}{h}\frac{\pi}{2}$ puis à $\frac{1}{h}\pi$.

δ_1

On a donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + k^6\pi^6 \sin^2 x} = \frac{\pi}{h}.$$

Donc

$$I_k < (k+1)\frac{\pi^2}{h} = \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1 + k^6\pi^6}} \leqslant \frac{(k+1)\pi^2}{k^3\pi^3} = \frac{1}{\pi}\frac{k+1}{k^3}.$$

ω

La série ΣI_k est donc convergente : l'intégrale existe.

Application des règles du calcul — On peut appliquer aux intégrales ainsi généralisées, les formules de l'intégration par parties ou du changement de variable puisque ce sont des limites d'intégrales ordinaires.

On peut également appliquer la formule fondamentale donnant la valeur d'une intégrale définie, connaissant une fonction primitive, $F(x)$ à la condition que $F(x)$ reste continue dans l'intervalle ab.

δ

Supposons en effet que $f(x)$ devienne infinie pour une valeur

c de l'intervalle a, b. ξ On devra considérer les intégrales $\int_a^{c-}$ et $\int_{c+\varepsilon'}^{b}$ qui ont respectivement pour valeur

$$F(c-\varepsilon) - F(a) \qquad \text{et} \qquad F(b) - F(c+\varepsilon')$$

la somme est donc

$$F(b) - F(a) - [F(c+\varepsilon') - F(c-\varepsilon)].$$

ω. Si F est continue dans l'intervalle ab, en particulier en c, lorsqu'on fait tendre ε et ε' vers zéro, d'une manière quelconque, la dernière parenthèse s'annule bien et l'on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

par exemple

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \left(3x^{\frac{1}{3}}\right)_{-1}^{+1} = 6.$$

II. — DÉRIVATION SOUS LE SIGNE $\int$
INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$

Dérivation sous le signe. — Considérons une fonction $f(x, t)$ à intégrer, dépendant non seulement de la variable d'intégration x, mais d'une autre (ou de plusieurs autres variables) que, pour l'en distinguer, nous désignerons par paramètres. Supposons que cette fonction soit continue pour les valeurs de x comprises dans les limites d'intégration x_0 et X, et pour les valeurs de t comprises entre t_0 et T.

En traitant t comme une constante, on peut considérer l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x, t)dx.$$

ρ Le résultat sera une fonction de t, $F(t)$.

α, ξ Il est naturel de se demander si cette fonction admet une dérivée par rapport à t dans l'intervalle t_0T, et d'abord si elle est continue.

Limites fixes. — Nous supposerons d'abord que les limites x_0 et X soient indépendantes de t.

Donnons donc à t l'accroissement Δt ; nous obtiendrons

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \int_{x_0}^{X} [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)]dx$$

puisque les limites sont supposées indépendantes de t.

Le champ étant borné et parfait, la fonction étant continue, elle l'est uniformément : étant donné ε, on peut trouver un intervalle τ suffisamment petit tel que, si $|\Delta t| < \tau$, on ait, *quel que soit* x,

$$|f(x, t + \Delta t) - f(x, t)| < \varepsilon.$$

Dans l'égalité ci-dessus, le second membre sera donc moindre que $\varepsilon |X - x_0|$.

La fonction $F(t)$ est donc certainement continue.

Pour voir si elle admet une dérivée, il faut chercher la limite du rapport

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \int_{x_0}^{X} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx$$

en faisant entrer Δt sous le signe $\int$, ce que nous avons le droit de faire, puisque c'est un élément indépendant de x.

On est ainsi naturellement conduit à appliquer le théorème des accroissements finis et à supposer que la fonction $f(x, t)$ admet une dérivée par rapport à t. Nous supposerons de plus que cette dérivée est continue : elle l'est alors uniformément. Le rapport est alors égal à $f_t'(x, t + \theta\Delta t)$ $(\theta < 1)$.

Or, étant donné ε, on peut trouver un intervalle τ_1 suffisamment petit, tel que pour $|\Delta t| < \tau_1$, et par suite à fortiori, pour $|\theta\Delta t| < \tau_1$. on ait

$$|f_t'(x, t + \theta\Delta t) - f_t'(x, t)| < \varepsilon$$

quel que soit x dans l'intervalle.

Pour ces valeurs, l'intégrale se met sous la forme

$$\int_{x_0}^{X} [f_t'(x, t) + R]dx = \int_{x_0}^{X} f_t'(x, t)dx + \int_{x_0}^{X} R(x, t)dx$$

avec la condition que $|R| < \varepsilon$.

La seconde intégrale est donc moindre en valeur absolue que $\varepsilon \mid X - x_0 \mid$. Si l'on fait tendre Δt vers zéro, on peut choisir, à mesure, ε aussi petit qu'on le veut; le second membre tend donc vers $\int_{x_0}^{X} f_t'(x, t)dx$. Le premier membre a donc aussi une limite : la fonction $F(t)$ admet une dérivée par rapport à t.

Ainsi, aux conditions suivantes : 1° les limites x_0, X sont finies ; la fonction est continue dans le champ x_0, X, t_0, T ;

2° elle admet une dérivée f'_t continue dans le champ.

L'intégrale $F(t)$ admet une dérivée

$$F'_t = \int_{x_0}^{X} f_t'(x, t)dx.$$

Importance de cette formule. — C'est le moment de s'arrêter et de regarder le paysage. Il faut bien se rendre compte combien ce résultat obtenu si simplement est tout à fait remarquable.

Si, en effet, on a pu calculer effectivement l'intégrale d'une fonction qui dépend d'un paramètre t, que fait-on au premier membre et qu'obtient-on au second membre?

Au premier membre on prend une dérivée, et cette opération se traduit, au second membre, par une intégrale nouvelle, c'est-à-dire par une opération en quelque sorte inverse et qui semble beaucoup plus compliquée.

Mais, de plus, on peut par de simples écritures, pour ainsi dire, dériver le premier membre autant de fois qu'on le veut, et l'on obtiendra au second membre autant d'intégrales définies nouvelles et en général essentiellement différentes les unes des autres.

On voit quel puissant instrument de calcul d'intégrales constitue ce théorème et de quelles nombreuses applications il est susceptible.

Mais ce résultat ne doit pas cependant tout à fait surprendre et on peut entrevoir la raison profonde qui l'explique : c'est que, lorsqu'on a calculé l'intégrale

$$F(t) = \int_{x_0}^{X} f(x, t)dx,$$

calcul qui peut être beaucoup plus compliqué que celui d'une intégrale portant sur une fonction de la seule variable x (à laquelle on ne peut pas appliquer, en particulier, le calcul d'approximation que nous verrons ci-après), ρ on n'a pas obtenu qu'une seule intégrale, mais en réalité une suite simplement infinie d'intégrales correspondant à chaque valeur de t, intégrales qui peuvent être d'ailleurs totalement différentes.

Rien ne s'obtient sans rien.

Application. — Considérons par exemple l'intégrale où $a > 0$

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}.$$

δ_1 En dérivant par rapport au paramètre a, on aura

$$-\int_0^x \frac{dt}{(t^2 + a)^2} = \mathrm{D}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

Plus généralement, en dérivant $(n - 1)$ fois, on aura

$$(-1)^{n-1}(n-1)! \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + a)^n} = \mathrm{D}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

Il suffit d'expliciter le second membre.

Nous donnerons d'autres applications de cet important théorème, mais nous l'étendrons d'abord.

Cas des limites variables. — Nous avons supposé que les limites x_0, X étaient indépendantes de la valeur considérée de t. On peut avoir à considérer des intégrales dont les limites seraient elles-mêmes variables avec t. Prenons une telle intégrale

$$\mathrm{F}(t) = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x, t)dx.$$

ζ Nous supposerons que les limites x_0 et X sont elles-mêmes des fonctions continues de t et admettent des dérivées.

δ_1

Lorsqu'on donne à t un accroissement Δt, elles deviennent respectivement $x_0 + \Delta x_0$ et $X + \Delta X$; l'accroissement peut s'écrire

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \int_{x_0+\Delta x_0}^{X+\Delta X} f(x, t + \Delta t)dx - \int_{x_0}^{X} f(x, t)dx$$

$$= \int_{x_0}^{X} [fx, t + \Delta t) - f(x, t)]dx + \int_{X}^{X+\Delta X} f(x, t + \Delta t)dx$$

$$- \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x, t + \Delta t)dx.$$

α

Nous pouvons appliquer aux deux dernières intégrales le théorème de la moyenne et les écrire

$$\Delta X f(X + \theta\Delta X, t + \Delta t) - \Delta x_0 f(x_0 + \theta'\Delta x_0, t + \Delta t)$$

θ et θ' étant compris entre 0 et 1.

δ_1

Chacun des trois termes du second membre tend évidemment vers zéro avec Δt : la fonction $F(t)$ est encore continue.

ξ, α

Formons le rapport $\frac{\Delta F}{\Delta t}$; il s'écrit

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \int_{x_0}^{X} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx + \frac{\Delta X}{\Delta t} f(X + \theta\Delta X, t + \Delta t)$$

$$- \frac{\Delta x_0}{\Delta t} f(x_0 + \theta'\Delta x_0, t + \Delta t).$$

ω

Lorsque Δt tend vers zéro, la première intégrale a, comme on l'a vu, pour limite l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f_t'(x, t)dx$. Les deux autres termes ont respectivement pour limite

$$f(X, t)\frac{dX}{dt} \quad \text{et} \quad f(x_0, t)\frac{dx_0}{dt}.$$

ω

La fonction $F(t)$ a donc une dérivée

$$F'(t) = \int_{x_0}^{X} f_t'(x, t)dx + f(X, t)\frac{dX}{dt} - f(x_0, t)\frac{dx_0}{dt}.$$

Telle est la formule générale de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre.

Elle consiste, comme on le voit, à prendre la dérivée de l'intégrale : 1° comme si les limites étaient fixes, t variant dans la seule fonc-

tion $f(x, t)$; 2° Comme si, t restant fixe dans $f(x, t)$, on ne fait varier seulement t que dans x_0 ou X.

C'est l'application du théorème de dérivation des fonctions composées.

Intégration sous le signe. — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x, y, qui est définie et continue dans le champ

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d.$$

Nous pouvons considérer l'intégrale

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dx.$$

α_2 Le résultat sera une fonction continue de x, que nous pouvons à son tour intégrer de a à b. Nous obtiendrons

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

δ_1, α On peut au contraire considérer d'abord l'intégrale

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

et intégrer le résultat de c à d, ce qui donnera

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

ν, ψ Il est naturel de se demander si les deux résultats ainsi obtenus ne seront pas les mêmes.

Pour le démontrer, nous laisserons constants a, c, d, et remplacerons b par une variable t que nous ferons varier de a à b.

β Nous devrons avoir l'égalité

$$\int_c^d dy \int_a^t f(x, y)dx = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Les deux membres sont alors des fonctions de t.

ρ Nous remarquons d'abord qu'elles s'annulent toutes deux pour $t = a$. φ Il suffit donc de démontrer qu'elles admettent même dérivée par rapport à t.

Posons provisoirement

$$\int_a^l f(x, y)dx = \Phi(l, y). \qquad \text{D'où} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = f(l, y)$$

et

$$\int_a^d f(x, y)dy = \mathrm{F}(x).$$

δ_1 La dérivée du premier membre $\int_c^d \Phi(l, y)dy$, sera

$$\int_c^d \frac{\partial \Phi}{\partial l}dy = \int_c^d f(l, y)dy.$$

La dérivée du second membre $\int_a^l \mathrm{F}(x)dx$ sera

$$\mathrm{F}(l) = \int_c^d f(l, y)dy.$$

Les deux résultats sont donc bien identiques.

On peut donc intervertir l'ordre des intégrations sans changer le résultat. Il est alors inutile de distinguer cet ordre et on peut écrire le résultat $\iint f(x, y)dx\,dy$, étant bien entendu que le point x, y se meut dans le champ rectangulaire $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, et que ce symbole se calcule par deux intégrations successives.

Comme pour la dérivée d'une intégrale, sur laquelle il s'appuie, le résultat n'est valable que si les limites sont finies et si la fonction est continue dans le champ.

Généralisation aux cas de discontinuité ou de Champ infini. — Nous allons voir à quelles conditions ont peut généraliser ces résultats (dérivation ou intégration) si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite.

1° **Cas d'une limite infinie.** — ξ Nous considérons l'intégrale $\int_a^\infty f(x, t)dx$ où $f(x, t)$ est une fonction de x, t, continue pour les valeurs

$$a \leqslant x, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}.$$

σ_2 Ce sera par définition, la limite, si elle existe, de l'intégrale

$$\mathrm{F}(l, t) = \int_a^l f(x, t)dx$$

lorsque l augmente indéfiniment. Désignons cette limite par $\mathcal{F}(t)$, en supposant qu'elle existe pour toutes les valeurs de t considérées.

En désignant par l un nombre que nous ferons croître indéfiniment, nous pouvons écrire

$$\mathcal{F}(t) = \int_a^l f(x, t)dx + \int_l^{\infty} f(x, t)dx.$$

En faisant le rapport

$$\frac{\mathcal{F}(t + \Delta t) - \mathcal{F}(t)}{\Delta t}$$

nous obtenons

$$(1)\quad \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t} = \int_a^l \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx + \int_l^{+\infty} \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx$$

$$= \int_a^l f_t'(x, t + \theta \Delta t)dx + \int_l^{+\infty} f_t'(x, t + \theta' \Delta t)dx.$$

Intégrales uniformément convergentes avec oscillation du paramètre. — Il faut essentiellement remarquer que, dans cette égalité θ et θ' ne sont pas des constantes mais dépendent de t et x : cette remarque va obliger à introduire des conditions délicates.

Nous donnerons d'abord la définition suivante :

Considérons une intégrale $\int_a^l f(x, t)dx$ qui a une limite $\mathcal{F}(t)$ pour chaque valeur de t comprise entre t_0 et t_1 quand l croit indéfiniment. Rien ne démontre que cette fonction $\mathcal{F}(t)$ soit continue. Si elle l'est, on dit que l'intégrale est uniformément convergente vers sa limite, lorsque l'on peut trouver un nombre L suffisamment grand, indépendant de la valeur de t dans l'intervalle, tel que, pour $l > L$, on ait

$$\left| \int_a^l f(x, t)dx - \mathcal{F}(t) \right| < \varepsilon.$$

Dans cette définition, on suppose que dans l'intégrale, c'est-à-dire dans tous les éléments de la somme qui la constituent, *on donne à t une valeur fixe* de l'intervalle. On en déduit que

$$\int_l^{+\infty} f(x, t)dx < \varepsilon.$$

Nous supposerons la restriction plus grande encore : nous supposerons que l'on donne à t des valeurs, pouvant varier avec x, oscillant dans un intervalle $t', t' + \Delta t'$, t' étant fixe.

Nous dirons que l'intégrale est « *uniformément convergente avec oscillation du paramètre* » si l'on peut choisir $\Delta t'$ suffisamment petit, et trouver un nombre L suffisamment grand, tel que, pour $l > L$ on ait

$$\left| \int_a^l f(x, t)dx - \mathcal{F}(t') \right| < \varepsilon.$$

Cette définition étant donnée, nous supposerons :

1° que la fonction $f(x, t)$ est continue par rapport à t dans le champ a, l, t_0, t_1, quelque grand que soit l.

2° que l'intégrale $\int_a^l f_t'(x, t)dx$ a une limite et qu'elle est uniformément convergente vers sa limite avec oscillation du paramètre.

Nous désignerons par $\mathcal{F}_1(t')$ sa limite $\int_a^{+\infty} f_t'(x, t)dx$.

δ

Dans ces conditions, dans la deuxième intégrale de l'égalité

(1), ρ les valeurs $t + \theta'\Delta t$ varient dans un intervalle $t, t + \Delta t$.

σ_2

D'après la deuxième condition, on peut supposer Δt suffisamment petit, et déterminer L suffisamment grand, pour que, pour $l > L$, on ait

$$\left| \int_l^{+\infty} f_t'(x, t + \theta\Delta t)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

l étant ainsi fixé, d'après la première condition, on peut supposer encore Δt suffisamment petit pour que

$$| f_t'(x, t + \theta\Delta t) - f_t'(x, t) | < \frac{\varepsilon}{3(l - a)}.$$

On peut donc poser

$$f_t'(x, t + \theta\Delta t) = f_t'(x, t) + \mathrm{R} \qquad \text{avec} \qquad | \mathrm{R} | < \frac{\varepsilon}{3(l - a)}$$

$$\int_a^l f_t'(x, t + \theta\Delta t)dx = \int_a^l f_t'(x, t)dx + \int_a^l \mathrm{R}dx.$$

La deuxième intégrale est inférienre à $\frac{\varepsilon}{3}$. On aura donc

$$\left| \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t} - \int_a^l f_t'(x, t)dx \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

δ_1 Comme d'autre part

$$\left| \int_a^l f_t'(x, t)dx - \mathcal{F}_1(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit

$$\left| \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t} - \mathcal{F}_1(t) \right| < \varepsilon.$$

ω En d'autres termes, on peut choisir Δt suffisamment petit pour que le rapport $\frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}$ diffère de $\mathcal{F}_1(t)$ d'une quantité aussi petite que l'on veut.

La fonction $\int_o^\infty f(x, t)dx$ a bien pour dérivée $\int_o^\infty f_t'(x, t)dx$ et la règle est encore applicable.

Applications. — Considérons l'intégrale

$$\int_o^\infty e^{-tx} \frac{\sin ax}{x} dx = \mathrm{F}(t) \qquad (t > 0).$$

σ_2 Nous avons déjà démontré (définition de l'intégrale généralisée) que cette intégrale existe pour $0 \leqslant t$.

δ Nous avons

$$f(x, t) = e^{-tx} \frac{\sin ax}{x}, \qquad f_t' = -e^{-tx} \sin ax.$$

1° La fonction $f_t'(x, t)$ est continue quelque grand que soit x si $t \geqslant 0$.

2° Étudions l'intégrale $\int_o^l e^{-tx} \sin ax\, dx$ et voyons si elle est uniformément convergente avec oscillation du paramètre.

Nous devons donner à t des valeurs satisfaisant à $t' < t < t' + \Delta t'$ et déterminer L de manière que $\left| \int_l^{+\infty} e^{-tx} \sin ax\, dx \right| < \varepsilon$, pour $l > \mathrm{L}$.

$\delta_{1,\alpha}$ Or

$$\left| \int_l^{+\infty} e^{-tx} \sin ax\, dx \right| < \int_l^{+\infty} e^{-t_0 x} dx \quad \text{si } 0 < t_0 \leqslant t'$$

$$< \int_{\mathrm{L}}^{+\infty} e^{-t_0 x} dx = \left(-\frac{e^{-t_0 x}}{t_0} \right)_{\mathrm{L}}^{+\infty} = \frac{1}{t_0} e^{-t_0 \mathrm{L}}.$$

Nous aurons

$$\int_l^{+\infty} f_t'(x, t)dx < \varepsilon$$

à la seule condition que $e^{t_0 L} > \frac{1}{t_0 \varepsilon}$. Il suffit de prendre $L = -\frac{1}{t_0}\log(t_0\varepsilon)$.

ω

Ainsi, à la seule condition que $t_0 > 0$, l'intégrale est uniformément convergente avec oscillation. On a donc bien

$$F'(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin ax \, dx.$$

δ_1, ρ

Or l'intégrale du second membre peut se calculer exactement ; une intégrale indéfinie est

$$e^{-tx}\frac{a\cos ax + t\sin ax}{a^2 + t^2}.$$

L'intégrale définie est donc $-\frac{a}{a^2+t^2}$

$$\mathcal{F}'(t) = -\frac{a}{a^2+t^2}.$$

Donc

$$\mathcal{F}(t) = \text{arc tg}\frac{a}{t} + \text{const.}$$

δ_1

Nous déterminerons la constante, en remarquant que lorsque t croît indéfiniment, $\mathcal{F}(t)$ tend vers zéro. Donc $C = 0$.

Ainsi donc, pour toute valeur positive de t, choisie même aussi petite qu'on le voudra,

$$\int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin ax}{x}dx = \text{arc tg}\frac{a}{t}.$$

α_2

Mais les deux membres de cette égalité tendent séparément vers des limites finies lorsque t tend vers zéro. Ces deux limites sont donc égales et

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \pm\frac{\pi}{2}$$

suivant que a est positif ou négatif.

II. — Considérons encore l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

ξ

Elle existe évidemment bien que le champ soit infini, la fonc-

tion devenant infiniment petite d'ordre supérieur à toute puissance de $\frac{1}{x}$. Nous démontrerons que cette intégrale est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Pour introduire un paramètre a, faisons le changement de variable $x = y\sqrt{a}$. L'égalité devient

$$\int_0^\infty e^{-ay^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}}.$$

α

Bien que le champ soit infini, supposons que nous puissions dériver par rapport au paramètre a. On aura

$$\int_0^\infty + y^2 e^{-ay^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \times \frac{1}{2}\,a^{-\frac{3}{2}}.$$

En dérivant à nouveau

$$\int_0^\infty y^4 e^{-ay^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\,a^{-\frac{5}{2}}.$$

Et en dérivant n fois

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-ay^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{2n!}{2^{2n}n!}\,a^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

ξ

Reste à démontrer que ces opérations sont licites.

Prenons par exemple la dernière intégrale.

δ_1

Il faut d'abord que $f_a' = -y^{2n+2}e^{-ay^2}$ soit continue dans le champ $0 + \infty$, a_0, a_1 : cette condition est remplie.

ξ

2° Il faut considérer l'intégrale

$$J = \int_l^{+\infty} y^{2n+2} e^{-(a+\theta\Delta a)y^2}\,dy$$

et voir si elle peut être rendue moindre que ε, pour Δa suffisamment petit, et pour $l \geqslant L$, L étant indépendant de a.

δ_2

Soit a_0 une valeur moindre que toutes les valeurs de a considérées. On aura

$$e^{-(a+\theta\Delta a)y^2} < e^{-a_0 y^2}.$$

Or à partir de valeurs de y suffisamment grandes, $e^{-a_0 y^2}$ est un

infiniment petit d'ordre supérieur à toute puissance de $\frac{1}{y}$, par exemple à $\frac{1}{y^{2n+1}}$. On a

$$y^{2n+2}\, e^{-a_0 y^2} < \frac{1}{y^2}, \qquad J < \int_l^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy = \frac{1}{l}.$$

Il suffit donc de prendre $L = \frac{1}{\varepsilon}$ pour être sûr que $J < \varepsilon$.

Les conditions sont donc remplies et les dérivations permises.

Cas où la fonction devient infinie dans le champ. — Nous démontrerons le lemme préalable suivant, qui nous sera utile dans nos considérations.

Dérivée d'une limite de fonctions. — LEMME. — *Si une fonction $f(x, \varepsilon)$ admet une limite $F(x)$, et si sa dérivée $f_x'(x, \varepsilon)$ admet une limite $\varphi(x)$, nous dirons que la dérivée tend vers cette limite de façon uniformément continue,* σ_2 *si l'on peut choisir ε assez petit tel que, quelque soit x, la différence*

$$R(x, \varepsilon) = f_x'(x, \varepsilon) - \varphi(x)$$

puisse être rendue en valeur absolue moindre qu'un nombre fixe η, choisi arbitrairement.

Nous allons démontrer que dans ce cas :

La dérivée de la limite est égale à la limite de la dérivée.

Par hypothèse, β on peut en effet écrire

$$f_x'(x, \varepsilon) = \varphi(x) + R(x, \varepsilon) \quad \text{avec} \quad |R(x, \varepsilon)| < \eta$$

quel que soit x dans l'intervalle a, b. α En intégrant entre deux limites a, x, on aura

$$\int_a^x f'_x(x, \varepsilon)\, dx = \int_a^x \varphi(x)\, dx + \int_a^x R(x, \varepsilon)\, dx \tag{1}$$

Le premier membre est égal à $f(x, \varepsilon) - f(a, \varepsilon)$.

δ_1 D'autre part $f(x, \varepsilon)$ ayant pour limite $F(x)$, on peut choisir ε assez petit pour que

$$S(x, \varepsilon) = f(x, \varepsilon) - F(x)$$

soit en valeur absolue moindre que η'.

L'égalité s'écrira donc

$$F(x) + S(x, \varepsilon) - f(a, \varepsilon) = \int_a^x \varphi(x)dx + \int_a^x R(x, \varepsilon)dx$$

ou, en substituant dans (1) les valeurs de $f(x, \varepsilon)$, $f(a, \varepsilon)$

$$F(x) - \int_a^x \varphi(x)dx - F(a) = S(a, \varepsilon) - S(x, \varepsilon) + \int_a^x R(x, \varepsilon)dx.$$

Le second membre est, en valeur absolue, moindre que $2\eta' + \eta(b - a)$; la différence $[F(x) - F(a)] - \int_a^x \varphi(x)dx$ peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut. Or ce premier membre est indépendant de ε : il est donc rigoureusement nul. On a

$$F(x) - F(a) = \int_a^x \varphi(x)dx.$$

Cette égalité indique que $\varphi(x)$ est bien la dérivée de $F(x)$.

Ce lemme étant démontré, nous considérons l'intégrale $\int_a^b f(x, t)dx$ pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Il peut arriver que la fonction $f(x, t)$ devienne infinie pour une valeur x_0 du champ fixe, indépendante de la valeur de t. Cependant, en général, cette valeur x_0 de x qui rend $f(x, t)$ infini, dépendra de la valeur τ de t que l'on considère.

1er Cas : Les points de discontinuité sont fixes.

Nous traiterons d'abord le premier cas : pour une valeur τ de t, nous avons défini l'intégrale $\int_a^b f(x, \tau)dx$, comme la limite, si elle existe, de $\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x, \tau)dx + \int_{x_0 + \varepsilon'}^b f(x, \tau)dx$, lorsque ε et ε' tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre.

Considérons par exemple la première

$$F(\tau, \varepsilon) = \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x, \tau)dx.$$

Elle tend vers une limite $\mathcal{F}(\tau)$. On a constamment

$$F'_\tau(\tau, \varepsilon) = \int_a^{x_0 - \varepsilon} f'_\tau(x, \tau)dx.$$

Nous supposerons que l'intégrale $\int_a^{x_0} f_t'(x,t)dx$ existe quel que soit t, (nous la désignerons par $\varphi(t)$) et, de plus, qu'elle est uniformément convergente c'est-à dire que l'on peut déterminer un nombre δ indépendant de la valeur de t dans le champ, tel que $\int_a^{x_0-\delta} f_\tau'(x,t)dx$ diffère de sa limite $\varphi(t)$ d'une quantité η aussi petite que l'on veut.

Si l'on choisie $\varepsilon < \delta$, on pourra alors écrire

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} f_t'(x,t)dx = \varphi(t) + \mathrm{R}(t,\varepsilon)$$

avec $|\mathrm{R}(t,\varepsilon)| < \eta$. On en déduit

$$|\mathrm{F}_t'(t,\varepsilon) - \varphi(t)| = |\mathrm{R}(t,\varepsilon)| < \eta.$$

Cette inégalité exprime que la dérivée de la fonction $\mathrm{F}(t,\varepsilon)$ a pour limite $\varphi(t) = \int_a^{x_0} f_t'(x,t)dx$ et est uniformément convergente vers cette limite. Dans ce cas, d'après le lemme précédent, la limite de la dérivée se confond avec la dérivée de la limite $\mathcal{F}(t)$. On a donc pour $t = \tau$

$$\mathcal{F}'(\tau) = \int_a^{x_0} f_\tau'(x,\tau)dx$$

et la formule est encore applicable.

On raisonnerait de même sur l'intégrale $\int_{x_0+\varepsilon'}^{b}$: il faut que l'intégrale $\int_{x_0+\varepsilon'}^{b} f_\tau'(x,\tau)dx$ soit uniformément convergente vers sa limite.

2e Cas : Les points de discontinuité dépendent du paramètre.

Supposons que la valeur ξ de x, qui rende infini $f(x,t)$, dépende de la valeur τ de t. Nous supposons que la fonction admette une dérivée par rapport à t. Nous devons considérer la limite des intégrales

$$\int_a^{\xi-\varepsilon} f(x,\tau)dx + \int_{\xi_0+\varepsilon'}^{b} f(x,\tau)dx.$$

Considérons encore la première. Elle a pour limite $\mathcal{F}(\tau) = \lim F(\tau, \varepsilon)$

$$F(\tau, \varepsilon) = \int_a^{\xi-\varepsilon} f(x, \tau)dx.$$

Établissement de la formule. — Il est bien évident que, quelles que soient les hypothèses faites sur f et f'_τ, la formule généralisée de dérivation ne s'appliquera pas puisqu'on aurait à introduire par exemple $\xi'_\tau \times f(\xi, \tau)$ et que ce dernier facteur est infini.

Pour établir dans ce cas la formule de dérivation, nous le ramènerons au cas précédent, en faisant le changement de variable

$$x = a + (\xi - a)y.$$

Il vient

$$F(\tau, \varepsilon) = (\xi - a)\int_0^{1-\varepsilon'} f(a + (\xi - a)y, \tau)dy.$$

La fonction sous le signe $\int$,

$$\varphi(y, \tau) = f(a + (\xi - a)y, \tau),$$

devient infinie pour $y = 1$.

Supposons que l'intégrale $\int_0^{1-\varepsilon'} \varphi'_\tau(y, \tau)dy$ soit uniformément convergente vers sa limite $\int_0^1 \varphi'_\tau(y, \tau)dy$; on pourra dériver l'intégrale par rapport à τ, en appliquant la formule, et on aura

$$F'_\tau(\tau, \varepsilon) = \xi'_\tau \int_0^{1-\varepsilon'} \varphi(y, \tau)dy + (\xi - a)\int_0^{1-\varepsilon'} \varphi'_\tau(y, \tau)dy.$$

Mais on a

$$\varphi'_\tau(y, \tau) = f'_x \times y\xi'_\tau + f'_\tau.$$

Si l'on revient à la variable x, la première intégrale devient

$$\int_0^{1-\varepsilon'} \varphi(y, \tau)dy = \int_a^{\xi-\varepsilon} f(x, \tau)\frac{dx}{\xi - a}.$$

La deuxième

$$\int_a^{\xi-\varepsilon} \left[\xi' f'_x(x, \tau) \times \frac{x - a}{\xi - a} + f'_\tau(x, \tau)\right]\frac{dx}{\xi - a}.$$

ω

En passant à la limite, on aura donc

$$\mathcal{F}'(\tau) = \frac{\xi'}{\xi - a}\int_a^{\xi} f(x, \tau)dx + \int_a^{\xi} \frac{\xi'(x-a)f'_x + (\xi - a)f'_\tau}{\xi - a}\,dx$$

$$= \int_a^{\xi} \xi' f + \frac{\xi'(x-a)f'_x + (\xi - a)f'_\tau}{\xi - a}\,dx.$$

Telle est la formule à appliquer dans ce cas. Elle est valable à la condition que l'intégrale

$$\int_a^{\xi-\varepsilon} [\xi'(x-a)f'_x + (\xi - a)f'_\tau]dx$$

soit uniformément convergente vers sa limite.

Appplication. — Considérons l'intégrale

$$F(t) = \int_0^t \frac{\varphi(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx$$

$\varphi(x)$ étant continue dans une intervalle o, b qui contient t.

La fonction à intégrer devient infinie pour la limite supérieure $x = t$, mais c'est un infini d'ordre $\frac{1}{2}$. Donc l'intégrale existe.

δ

Appliquons la formule établie ci-dessus pour la dérivée. Dans le cas actuel

$$f(x, t) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{t-x}},$$

$$f'_x = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{t-x}} + \frac{1}{2}(t-x)^{-\frac{3}{2}}\varphi(x), \qquad f'_t = -\frac{1}{2}(t-x)^{-\frac{3}{2}}\varphi(x),$$

$$a = 0, \qquad \xi = t, \qquad \xi'_t = 1.$$

On aura donc

$$F'_t = \frac{1}{t}\int_0^t \left[\frac{\varphi(x)}{\sqrt{t-x}} + \frac{x\varphi'_x}{\sqrt{t-x}} - \frac{1}{2}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{t-x}}\right]dx = \frac{1}{2t}\int_0^t \frac{2x\varphi'_x + \varphi(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx.$$

ζ

Cette formule est valable à la condition que l'intégrale

$$\left[\int_0^{t-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{t-x}}\varphi'_x - \frac{1}{2}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{t-x}}\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^{t-\varepsilon} \frac{2x\varphi'_x - \varphi}{\sqrt{t-x}}dx$$

soit uniformément convergente vers sa limite.

C'est ce qui a lieu, la fonction devenant infinie d'ordre $\frac{1}{2}$ pour $x = t$.

On a donc bien le droit d'écrire

$$F'_t = \frac{1}{2t}\int_0^t \frac{2x\varphi'_x + \varphi(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx.$$

Dans une question intéressante de mécanique, on est amené à rechercher comment il faut choisir $\varphi(x)$ pour que l'intégrale étudiée soit indépendante de t.

β Il faut donc que $F'_t = 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^t \frac{2x\varphi'_x + \varphi(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx = 0.$$

ψ Si le numérateur $2x\varphi'_x + \varphi(x)$ n'était pas nul pour une valeur quelconque a, on pourrait choisir t suffisamment voisin de a pour que, dans l'intervalle a, t, ce numérateur garde un signe constant. L'intégrale ne pourrait donc être nulle.

Il est donc nécessaire que, pour une valeur quelconque de l'intervalle, la fonction $\psi(x) = 2x\varphi'_x + \varphi(x)$ soit nulle. On en déduit

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{1}{2x}.$$

δ_1 En intégrant,

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}.$$

Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante : car dans ce cas, l'intégrale devient

$$F(t) = c\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(t-x)}} = c\pi \qquad (x = t\sin^2\varphi).$$

Intégration sous le signe $\int$: champ infini. — Considérons l'intégrale

$$\int_l^{+\infty} f(x, t)\,dx.$$

Nous dirons qu'elle est uniformément convergente dans l'intervale $t_0 t_1$, si l'on peut déterminer un nombre L tel que

$$\int_l^{+\infty} f(x, t)dx < \varepsilon$$

quel que soit t pour toute valeur $l \geqslant L$.

Je dis que dans ce cas on a encore

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{t_0}^{t_1} f(x, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^{+\infty} f(x, t)dx.$$

On peut écrire quel que soit l

$$\int_a^{l} dx \int_{t_0}^{t_1} f(x, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^{l} f(x, t)dx. \tag{1}$$

Or on a

$$\int_a^{l} f(x, t)dx = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx - \mathrm{R}(l, t).$$

Avec $|\mathrm{R}(l, t)| < \varepsilon$ quel que soit t, si $l \geqslant \mathrm{L}$.

En substituant dans (1), on a donc

$$\int_a^{l} dx \int_{t_0}^{t_1} f(x, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^{+\infty} f(x, t)dx - \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{R}(l, t)dt.$$

Cette deuxième intégrale est inférieure à $\varepsilon(t_1 - t_0)$.

Le second membre peut donc être rendu aussi voisin qu'on le veut de

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^{+\infty} f(x, t)dx.$$

Le premier membre a donc également une limite et ces deux limites sont les mêmes : on a bien l'égalité énoncée.

III. — DÉTERMINATION D'INTÉGRALES DÉFINIES APPLICATIONS DIVERSES

Lorsqu'on connaît une fonction primitive de $f(x)$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Exemple

$$\int_0^1 x^{p-1}dx = \frac{1}{p}(x^p)_0^1 = \frac{1}{p}.$$

α

Si nous donnons à p les valeurs successives $0, 1, 2, \cdots p$, on a

$$\int_0^1 (1 + x + \cdots + x^{p-1})dx = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \cdots + \frac{1}{p} = \int_0^1 \frac{1 - x^p}{1 - x}\,dx.$$

On a ainsi, sous forme d'intégrale définie, la somme des p premiers termes de la série harmonique.

α_2

Dans la formule (1) remplaçons p par $p + 1$, et retranchons les deux résultats. Nous aurons

$$\int_0^1 x^{p-1}(1 - x)dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Dans cette nouvelle formule, remplaçons encore une fois p par $p + 1$ et retranchons encore les résultats. On aura

$$\int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^2dx = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1 \cdot 2}{p(p+1)(p+2)}.$$

Si nous continuons ainsi q fois, nous obtiendrons

$$\int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}dx = \frac{1 \cdot 2 \cdots (q-1)}{p(p+1)\cdots(p+q-1)} = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+p-1)!}.$$

On remarquera que le second membre est symétrique en p, q, comme on le verrait du reste facilement en changeant dans l'intégrale x en $(1 - x)$.

2° Si la fonction à intégrer dépend d'un entier n et si l'on peut établir une formule de récurrence entre deux intégrales successives indéfinies, cette relation pourra se simplifier lorsqu'on se bornera à des intégrales définies.

Formule de Wallis. — Considérons par exemple l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

α

On a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x \sin x\, dx = \left(-\cos x \sin^{n-1} x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

La partie toute intégrée s'annule aux deux limites. Il reste donc

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

d'où la relation

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Si n est pair, on aura donc ainsi successivement

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0.$$

Or $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Donc

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n \cdot (2n-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2}.$$

Si n est impair, on aura

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}.$$

De proche en proche, on arrivera donc à

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1.$$

D'où

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} \times 1.$$

On arrive à ce résultat remarquable que toutes les intégrales impaires sont rationnelles, alors que les intégrales paires sont des irrationnelles dépendant toutes du facteur π. De cette seule observation, va découler la formule célèbre de Wallis.

En effet on a évidemment

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}$$

puisque pour les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

$$\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x.$$

δ_1

Donc

$$\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3} > \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} > \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}\cdot$$

Ce que nous pouvons écrire

$$(1)\quad 2n\frac{(2n-2)^2(2n-4)^2\cdots 2^2}{(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 3^2} > \frac{\pi}{2} > \frac{1}{2n+1}\times\frac{(2n)^2(2n-2)^2\cdots 2^2}{(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 3^2}\cdot$$

Or ρ le rapport entre le premier et le dernier terme de ces inégalités est $\frac{2n+1}{2n}$ qui a pour limite l'unité.

On peut donc écrire en renversant les facteurs

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2\cdot 4^2\cdots \overline{2n}^2}{1^2\cdot 3^2\cdots (2n-1)^2}\times\frac{1}{2n+1}(1+\lambda)$$

λ étant compris entre 0 et $\frac{1}{2n}$.

α, ν

Si nous faisons croître n indéfiniment, λ tend vers zéro. On voit donc que $\frac{\pi}{2}$ peut être considéré comme la limite du produit infini

$$\frac{\pi}{2} = \lim\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}\times\frac{4^2}{3\cdot 5}\times\cdots\times\frac{\overline{2n}^2}{(2n-1)(2n+1)}\times\cdots$$

Cette formule remarquable porte le nom de formule de Wallis.

Conséquences. — Dans les inégalités (1), introduisons

$$I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots (2n+1)}\cdot$$

δ_1

Elles s'écrivent

$$\frac{(2n+1)^2}{2n}I_{2n+1}^2 > \frac{\pi}{2} > (2n+1)I_{2n+1}.$$

Or le facteur $\frac{2n+1}{2n}$ a pour limite l'unité. On voit donc que $(2n+1)I_{2n+1}^2$ a pour limite $\frac{\pi}{2}$, ou plus simplement $\sqrt{n}\ I_{2n+1}$ a pour limite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Or dans l'intégrale

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, d\cos x$$

α

faisons le changement de variable $\cos x = \frac{t}{\sqrt{n}}$, elle devient

$$I_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

α_2, ρ

Donc lorsque n augmente indéfiniment, l'intégrale $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ a pour limite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Or on peut écrire

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{-t^2} + \varepsilon_n$$

ε_n ayant pour limite zéro quand n augmente indéfiniment.

ψ

On conçoit que cette nouvelle intégrale ait pour limite $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et l'on a

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Nous démontrerons ce résultat plus rigoureusement.

On peut légèrement généraliser cette formule par le changement de variable $t = u\sqrt{a}$. On aura

$$\int_0^{\infty} e^{-au^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

ce qui donne une intégrale définie dépendant d'un paramètre et que nous pouvons dériver par rapport à ce paramètre, ainsi que nous l'avons vu.

3° Soit l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx \, dx.$$

α

On peut développer en série $\cos 2bx$.

δ_1

En substituant, et intégrant la série uniformément convergente ainsi obtenue, on aura donc

$$I = \sum \int_0^\infty (-1)^n e^{-ax^2} \frac{(2b)^{2n} x^{2n}}{2n!}\, dx = \sum (-1)^n \frac{(2b)^{2n}}{2n!} \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n}\, dx.$$

ρ

Or toutes ces intégrales sont celles que nous avons obtenues en dérivant l'intégrale précédente par rapport au paramètre ; on a donc en substituant leurs valeurs

$$I = \sum (-1)^n \frac{(2b)^{2n}}{2n!} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{2n!}{2^{2n} n!}\, a^{-\frac{2n+1}{2}} = \sum (-1)^n \left(\frac{b^2}{a}\right)^n \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \times \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{b^2}{a}\right)^n.$$

La série du second membre ρ, σ_8 est le développement de $e^{-\frac{b^2}{a}}$, on a donc

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos 2bx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Ce qui donne une intégrale définie dépendant de deux paramètres a, b.

4° Nous donnerons encore l'exemple suivant. Nous le traiterons avec quelques détails pour montrer toutes les ressources que peuvent procurer les transformations d'une intégrale.

Soit l'intégrale

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \log (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx.$$

ρ

Tout d'abord la quantité $(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)$ est toujours positive et finie à moins que $\alpha^2 = 1$: l'intégrale existe.

Si par exemple $\alpha = +1$, l'intégrale est égale à

$$F(1) = \int_0^\pi \log 2(1 - \cos x) dx = \int_0^\pi \log 4 \sin^2 \frac{x}{2} dx = \pi \log 4 + 2 \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx.$$

Celle-ci devient d'ailleurs, en posant $\frac{x}{2} = y$, $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y\, dy$.

Or cette dernière intégrale existe ; la fonction $\log \sin y$ devient infinie pour $y = 0$, mais c'est un infini d'ordre moindre que

toute puissance de $\frac{1}{y}$. Nous la calculerons d'ailleurs exactement : l'intégrale existe donc quel que soit α.

α, ν

Supposons $\alpha^2 \neq 1$. On a

$$F'(\alpha) = 2\int_0^{\pi} \frac{\alpha - \cos x}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2} dx.$$

δ_1, ρ

Cette deuxième intégrale se calcule aisément par le changement de variable $tg\frac{x}{2} = t$. Elle devient

$$F'(\alpha) = 4\int_0^{\infty} \frac{\alpha - 1 + (\alpha+1)t^2}{(\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2 t^2} \times \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{4}{\alpha-1}\int_0^{\infty} \frac{1 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1}t^2}{1 + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^2 t^2} \times \frac{dt}{1+t^2}.$$

δ_1

Posons provisoirement $k = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$. Comme

$$\frac{1+kt^2}{(1+t^2)(1+k^2t^2)} = \frac{1}{1+k}\left[\frac{1}{1+t^2} + \frac{k}{1+k^2t^2}\right]$$

$$F'(\alpha) = \frac{4}{\alpha-1} \times \frac{1}{1+k}\Big[\operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} kt\Big]_0^{\infty} = \frac{2}{\alpha}\Big[\operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} kt\Big]_0^{\infty}.$$

ξ.

Si $\frac{\alpha+1}{\alpha-1} > 0$ ou $\alpha^2 > 1$, k est positif

$$F'(\alpha) = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Si $\alpha^2 < 1$, k est négatif

$$F'(\alpha) = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Dans ce deuxième cas, $F(\alpha) = \text{const.}$; or pour $\alpha = 0$, $F(\alpha) = 0$. Si donc $\alpha^2 < 1$, $F(\alpha) = 0$.

δ_1

Dans le premier cas

$$F(\alpha) = \pi L\alpha^2 + \text{const.}$$

Nous allons voir que, pour $\alpha = \pm 1$, $F(\alpha) = 0$.

On aura donc

$$F(\alpha) = \pi L\alpha^2.$$

Si $\alpha = \pm 1$, la formule n'est pas applicable. Mais dans ce cas si $\alpha = +1$ par exemple

$$F'(\alpha) = 4\int_0^\infty \frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = 2(\text{arc tg } t)_0^\infty = \pi.$$

ρ

La dérivée présente une discontinuité pour $\alpha = \pm 1$ mais reste finie : la fonction $F'(\alpha)$ est donc continue. On a donc $F(1) = 0$.

Par suite

$$F(\alpha) = \pi L\alpha^2$$

ω

En résumé :

Si $\alpha^2 \geqslant 1$

$$F(\alpha) = \pi L\alpha^2.$$

Si $\alpha^2 \leqslant 1$

$$F(\alpha) = 0.$$

Remarque. — On peut obtenir directement et par quelques artifices de calcul la valeur de l'intégrale pour $\alpha = \pm 1$.

Nous allons le faire, non sans faire remarquer que ces artifices sont plus ou moins déterminés par la forme de l'intégrale et dérivent des procédés suivants :

1° Application de la définition de l'intégrale comme limite de somme, en décomposant l'intervalle, par exemple en n parties égales ;

2° Transformation de l'intégrale par un changement de variable soit pour modifier la forme de la fonction, soit pour modifier les limites d'intégration ;

3° Recherche d'une règle de récurrence.

Ces remarques seront mises en relief par l'exemple que nous considérons.

Pour $\alpha = +1$ par exemple on a

$$F(1) = \int_0^\pi \log 2(1 - \cos x)dx.$$

α_2

Faisons le changement de variable $x = \pi - y$. On aura

$$I = F(1) = \int_0^\pi \log 2(1 + \cos y)dy = \int_0^\pi \log 2(1 + \cos x)dx.$$

ν

Étant donnée la propriété des logarithmes, on en déduit en ajoutant les deux intégrales

$$2I = \int_0^\pi \log 4\sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \log 2(1 - \cos 2x)dx.$$

$\delta_{1,\alpha}$ Dans cette dernière, faisons le changement de variable $2x = y$: elle devient

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log 2(1 - \cos y)dy.$$

ρ Or lorsque y varie de 0 à π puis de π à 2π, $\cos y$ et par suite $\log 2(1 - \cos y)$ passe par les mêmes valeurs. Donc

$$\int_0^{2\pi} \log 2(1 - \cos y)dy = 2\int_0^{\pi} \log 2(1 - \cos y)dy.$$

Par suite

$$2I = \frac{1}{2} \times 2I, \qquad I = 0.$$

Donc

$$F(1) = 0.$$

Or nous avons vu d'autre part que

$$F(1) = 2\pi \log 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y\, dy.$$

On en déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y\, dy = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

5° Nous donnerons un dernier exemple de calcul d'intégrales par le procédé de dérivation sous le signe $\int$, en étudiant l'intégrale

$$F(x) = \int_0^1 (1 - z^2)^n \cos zx\, dz = I_n.$$

δ On a

$$2\frac{dI_n}{dx} = -\int_0^1 (1 - z^2)^n \sin zx \times 2z\, dz.$$

α En intégrant par parties

$$\frac{2dI_n}{dx} = \left[\frac{(1 - z^2)^{n+1}}{n+1} \sin zx\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1 - z^2)^{n+1}}{n+1}\, x \cos zx\, dz.$$

La partie tout intégrée est nulle. Il reste simplement

$$2\frac{dI_n}{dx} = -\frac{x}{n+1} I_{n+1},$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad I_{n+1} = -\frac{2(n+1)}{x}\frac{dI_n}{dx}.$$

C'est une formule de récurrence entre deux intégrales successives I_n et I_{n+1}.

On est amené à rechercher des fonctions particulières simples dépendant de n et x jouissant de cette propriété.

Remarquons que I_n se comporte par rapport à x comme la fonction $\frac{1}{x^{2n+1}}$. Nous poserons donc

$$I_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{x^{2n+1}}\,a_n$$

(le facteur numérique s'introduit facilement). On aura

$$I_{n+1} = \frac{2\cdot 4\cdots 2n(2n+2)}{x^{2n+3}}\,a_{n+1}, \qquad \frac{dI_n}{dx} = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{x^{2n+2}}[xa_n' - (2n+1)a_n].$$

En substituant dans l'égalité (1), il reste simplement

$$a_{n+1} = (2n+1)a_n - xa_n'.$$

C'est une formule de récurrence pour les fonctions a_n. On voit que les fonctions a_n et leurs dérivées s'expriment toutes au moyen de x et des dérivées de l'une d'elles. Avec un peu de pratique de calcul, on en déduirait la forme nécessaire des fonctions a_n. Mais, même sans cette pratique, et pour nous rendre compte de cette forme, nous allons calculer les premières fonctions a_0, a_1.

On a $I_0 = \int_0^1 \cos zx\,dz = \frac{1}{x}\sin x.$

On en déduit

$$I_1 = -\frac{2}{x}I_0' = -\frac{2}{x^3}(x\cos x - \sin x).$$

D'où

$$a_0 = xI_0 = \sin x, \qquad a_1 = \frac{x^3}{2}I_1 = \sin x - x\cos x.$$

On voit donc que a_0, a_1 sont des fonctions linéaires de $\sin x$ et $\cos x$. On est conduit à poser d'une façon générale

$$a_n = P_n \cos x + Q_n \sin x,$$

P_n et Q_n étant des polynômes en x de degré n.

$$P_0 = 0, \qquad Q_0 = 1, \qquad P_1 = -x, \qquad Q_1 = 1.$$

δ_1 La loi étant vraie pour $n = 0$, $n = 1$, nous allons procéder par récurrence. On devrait avoir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P_{n+1}\cos x + Q_{n+1}\sin x \\ &= (2n+1)[P_n\cos x + Q_n \sin x] - x[(P'_n + Q_n)\cos x + (Q'_n - P_n)\sin x]. \end{aligned}$$

L'identification est possible. Il suffit que l'on ait

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} P_{n+1} = (2n+1)P_n - x(P'_n + Q_n) \\ Q_{n+1} = (2n+1)Q_n - x(Q'_n - P_n). \end{cases}$$

ω P_{n+1} et Q_{n+1} sont bien des polynômes de degré $n+1$ et la loi est générale.

Mais de plus, on peut faire une remarque sur les degrés des polynômes P_n et Q_n. ρ, R Supposons que jusqu'à l'indice n tous les polynômes P_n ne renferment que des termes de degré impair, et tous les polynômes Q_n des termes de degré pair. Les formules (II) montrent qu'il en sera encore ainsi pour les polynômes P_{n+1} et Q_{n+1}: la propriété est donc générale.

Enfin ces mêmes formules montrent que les coefficients ρ des polynômes P_n et Q_n sont tous entiers.

ω En résumé on peut écrire d'une façon générale

$$\int_0^1 (1-z^2)^n \cos zx\, dz = \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{x^{2n+1}}[P_n\cos x + Q_n \sin x]$$

et par exemple si $n = 2\ m$

$$\int_0^1 (1-z^2)^{2m}\cos zx\, dz = \frac{2^{2m}\cdot 2m!}{x^{4m+1}}(P_{2m}\cos x + Q_{2m}\sin x),$$

Q_{2m} étant un polynôme de degré m en x^2 :

$$Q_{2m}(x) = Q'_m(x^2).$$

α, ν Il est naturel d'appliquer cette formule à des valeurs particulières remarquables de x.

Faisons par exemple $x = \frac{\pi}{2}$. On obtiendra

$$Q'_m\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^{2m} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2^{2m}\,2m\,!}\int_0^1 (1-z^2)^{2m} \cos\frac{\pi}{2} z\,dz$$

et cette égalité devrait avoir lieu quel que soit m, Q'_m étant à coefficients entiers.

π est incommensurable. — Hermite en a déduit que le carré du nombre π et par suite π lui-même est incommensurable (il a fallu évidemment un éclair de génie pour entrevoir la possibilité de cette application, mais ensuite la démonstration est immédiate et toute naturelle).

Si en effet $\frac{\pi^2}{4} = \frac{b}{a}$, le premier membre serait de la forme $\frac{E_m}{a^m}$, E_m étant entier. En chassant a, on aurait donc des égalités de la forme

$$E_m = \frac{b^{2m}}{2^{2m}2m\,!} \times \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^m}\int_0^1 (1-z^2)^{2m} \cos\frac{\pi}{2} z\,dz.$$

Or remarquons que l'intégrale est, quel que soit m moindre que

$$\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2} z\,dz = \frac{2}{\pi}.$$

Le facteur

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^m}\int_0^1 (1-z^2)^{2m} \cos\frac{\pi}{2} z\,dz$$

reste donc fini.

D'autre part, pour des valeurs suffisamment grandes de m, le premier facteur $\frac{b^{2m}}{2^{2m} \times 2m\,!}$ peut-être rendu aussi petit qu'on le veut et différent de zéro : à partir de ces valeurs, le second membre ne pourrait donc plus être entier et l'égalité est impossible. Donc $\frac{\pi^2}{4}$ et par suite $\frac{\pi}{2}$ ne peut pas être commensurable.

Intégration sous le signe $\int$. — Le procédé d'intégration sous le signe $\int$ permet également de calculer des intégrales définies.

Considérons par exemple la fonction x^y. Elle est continue dans le champ $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$ si a et b, sont positifs.

En intervertissant l'ordre des intégrations, nous aurons donc

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx.$$

Or on a

$$\int_0^1 x^y dx = \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\right)_0^1 = \frac{1}{y+1}.$$

Le deuxième membre est donc

$$\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \mathrm{L}\,\frac{b+1}{a+1}.$$

D'autre part

$$\int_a^b x^y dy = \left(\frac{x^y}{\mathrm{L}x}\right)_a^b = \frac{1}{\mathrm{L}x}(x^b - x^a).$$

On en déduit donc l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\mathrm{L}x} dx = \mathrm{L}\,\frac{b+1}{a+1}.$$

Plus généralement, considérons deux fonctions $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(x, y)$, telles que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}.$$

En appliquant la formule d'intégration sous le signe, dans un champ

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad y_0 \leqslant y \leqslant y_1$$

où les fonctions P, Q, $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}$ sont continues, nous aurons

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} dx = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dy.$$

Et par suite

$$\int_{y_0}^{y_1} [\mathrm{Q}(x_1, y) - \mathrm{Q}(x_0, y)] dy = \int_{x_0}^{x_1} [\mathrm{P}(x, y_1) - \mathrm{P}(x, y_0)] dx.$$

Cette remarque a été utilisée par Cauchy pour le calcul d'un grand nombre d'intégrales définies.

CHAPITRE XI

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES INTÉGRALES CURVILIGNES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES

SOMMAIRE.

Applications géométriques : Aire d'une courbe. — Arc de courbe. — Applications. — Formule de Legendre, de Fagnano.
Intégrales curvilignes : Applications.
Équations aux différentielles totales : Applications.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES AIRE D'UNE COURBE PLANE — ARC D'UNE COURBE

On a défini en géométrie élémentaire l'aire d'un rectangle puis l'aire limitée par un polygone quelconque. Nous allons définir de façon précise ce que l'on entend par aire plane limitée par une courbe quelconque.

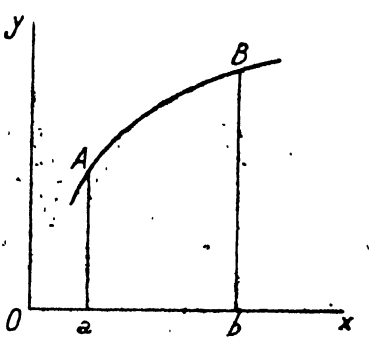


Fig. 11.

Et d'abord soit un arc de courbe AB ; définissons l'aire mixtiligne a, A, b, B limitée par cet arc de courbe et les deux parallèles à oy : $x = a$, $x = b$.

Soit $y = f(x)$ l'équation de cette courbe rapportée à deux axes rectangulaires. Inscrivons dans l'arc une ligne polygonale A, A_1, ... A_k, A_{k+1}, ... B, et considérons, pour chacun des arcs A_kA_{k+1}, le point

m_k correspondant à l'ordonnée minima et le point M_k correspondant à l'ordonnée maxima. Ces points correspondent à des abscisses ξ'_k, ξ''_k comprises entre les abcisses $x_k x_{k+1}$. Les ordonnées sont

$$\eta'_k = f(\xi'_k), \qquad \eta''_k = f(\xi''_k)$$

Si nous considérons le rectangle de base $a_k\ a_{k+1}$ et de hauteur η'_k, et le trapèze mixtiligne de même base limité à l'arc, nous dirons que ce deuxième constitue un domaine de points plus grand que le premier, simplement parce qu'il contient tous les points qui se trouvent dans le rectangle et qu'il renferme de plus des points qui n'appartiennent pas au rectangle.

Si nous opérons de même pour tous les intervalles partiels, nons constituons un domaine σ_1 limité par l'arc de courbe qui sera plus grand que le domaine s_1 constitué par tous les rectangles intérieurs.

De même, si nous avions considéré les rectangles de hauteur η''_k, chaque rectangle aurait constitué un domaine plus grand que le trapèze correspondant, et la somme de tous ces rectangles extérieurs aurait constitué un domaine S_1 plus grand que celui limité par l'arc AB.

Si nous subdivisons une deuxième fois tous les intervalles, nous obtiendrons de nouveaux domaines constitués par des rectangles intérieurs s_2 d'une part et par des rectangles extérieurs S_2 d'autre part. On aura évidemment

$$s_1 < s_2 < \sigma < S_2 < S_1.$$

En continuant ainsi, nous obtenons des suites de domaines $s_1, s_2, \cdots s_n$, $S_1, S_2, \cdots S_n$ tels que

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \sigma < S_n < S_{n-1} < \cdots < S_1.$$

Or, à la notion de domaines polygonaux, nous savons rattacher la notion d'aires de ces domaines. Ces aires $a, a_1, a_2 \cdots a_n$, $A_1, A_2, \cdots A_n$ seront telles que

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < A_n < A_{n-1} < \cdots < A_2 < A_1.$$

Nous admettrons qu'à tout domaine de points limité par

une courbe, correspond une aire et nous pourrons dire alors avec certitude que le domaine σ limité par l'arc a une aire α comprise constamment entre a_n et A_n.

Toutes les aires a_i vont en croissant et restent inférieures à A_1. Elles ont donc une limite a. Toutes les aires A_i ont également une limite A. Ces limites sont précisément les limites des sommes que nous avons considérées dans la définition de l'intégrale définie. S ces deux limites sont les mêmes (nous montrerons que cette limite est indépendante du système d'axes choisis), nous dirons que cette limite est la valeur de l'aire du domaine limité par l'arc de courbe.

Il en sera ainsi en particulier si la fonction $y = f(x)$ est intégrable dans l'intervalle ab. Dans ce cas la limite commune indépendante du mode de subdivision de l'intervalle est représentée par l'intégrale définie

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Cette aire est plus grande que celle de n'importe quelle somme d'aires rectangulaires inscrites et plus petite que celle de rectangles circonscrits.

De cette notion d'aire limitée par un arc de courbe entre deux parallèles à oy, on passe aisément à la notion d'aire comprise à l'intérieur d'une courbe fermée quelconque AM_1BM_2A.

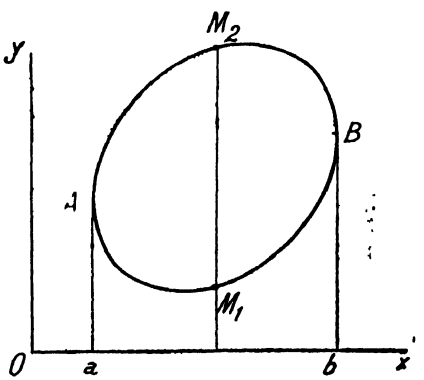


Fig. 12.

Et d'abord en supposant qu'une parallèle à oy ne rencontre la courbe qui limite le domaine qu'en deux points M_1, M_2, nous savons définir l'aire aAM_1Bb et l'aire aAM_2Bb.

Nous admettrons que si S_1, S_2 sont les valeurs des aires correspondant à deux contours fermés contigus, $S_1 + S_2$ sera la valeur correspondant au domaine limité par l'ensemble des deux premiers.

Le domaine compris à l'intérieur de la courbe fermée sera la différence de ces deux domaines. L'aire limitée par le contour sera, par définition, la différence des aires des deux domaines

Si une parallèle à oy rencontrait la courbe en plus de deux points, nous décomposerions la figure en un certain nombre de figures partielles, pour chacune desquelles il n'y aurait que deux points de rencontre.

Cette notion d'aire est indépendante des axes.

Nous allons montrer que cette aire ainsi définie est bien indépendante du sytème d'axes que l'on a dû choisir initialement pour définir l'aire trapézoïdale.

α, ξ

En effet tout d'abord, considérons un triangle quelconque ABC ; nous pouvons le décomposer en triangles dont deux côtés sont parallèles aux axes, et calculer au moyen d'intégrales ce que nous avons défini comme aire du triangle. Nous trouverons que cette aire est le demi-produit de l'un des côtés par la hauteur correspondante : cette aire est donc bien indépendante des axes de coordonnées.

δ_1

En décomposant un polygone en triangles et par la propriété d'addition que nous avons adoptée, nous voyons que l'aire du polygone est identique à la notion d'aire en géométrie élémentaire et que cette aire est aussi indépendante des axes de coordonnées.

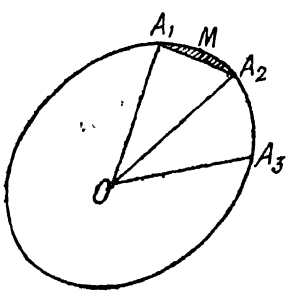


Fig. 13.

δ, ξ

Prenons enfin un domaine limité par une courbe fermée sans points doubles.

α

Choisissons à l'intérieur un point quelconque et inscrivons dans la courbe une ligne polygonale. Pour évaluer l'aire du domaine, nous pouvons le décomposer en secteurs partiels OA_1A_2, OA_2A_3, ... et prendre la somme des aires de ces secteurs partiels.

Si nous augmentons indéfiniment le nombre des côtés du poly-

gone, ψ je dis que l'on pourra substituer à cette somme de secteurs la somme des triangles correspondants $OA_1A_2, \cdots$

δ

Il suffit à cet effet de montrer que l'aire correspondant à chaque segment A_1MA_2 est infiniment petite par rapport à l'aire du triangle correspondant.

Or, en désignant par δ' la distance maxima d'un point de l'arc à la corde A_1A_2, le domaine correspondant au rectangle de base A_1A_2 et de hauteur δ' est plus grand que le domaine du segment, et par suite aussi l'aire du segment est inférieure à l'aire du rectangle.

δ_1

Le rapport de l'aire du rectangle à l'aire du triangle OA_1A_2 est $\frac{2\delta}{h}$, h désignant la hauteur du triangle. Or ce rapport peut être rendu aussi petit qu'on le veut en augmentant suffisamment le nombre de côtés de la ligne polygonale.

ω

L'aire du domaine est donc aussi la limite vers laquelle tend l'aire du polygone inscrit, quand on double indéfiniment le nombre des côtés, et cette définition est ainsi indépendante des axes de coordonnées choisis.

Évaluation des aires planes. — Applications. — Dans le cas où les axes feraient entre eux un angle θ nous décomposerions l'aire trapézoïdale $aABb$ en trapèzes par des parallèles à oy et nous obtiendrions comme expressions de l'aire

$$S = \sin\theta \int_a^b y\,dx.$$

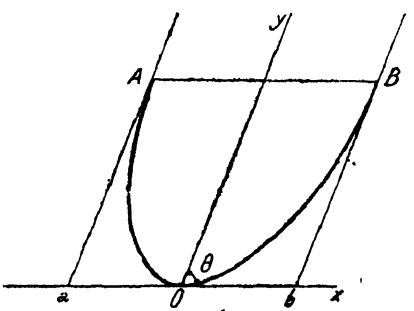


Fig. 14.

Parabole. — Considérons un point O quelconque de la parabole et rapportons celle-ci à deux axes : 1° la tangente en O ; 2° le diamètre correspondant.

Ces deux axes forment entre eux un angle θ.

δ

La parabole aura une équation de la forme

$$x^2 = 2py, \qquad y = \frac{x^2}{2p}.$$

L'aire du triangle curviligne obB aura pour valeur

$$S = \sin\theta \int_0^b y\,dx = \sin\theta \int_0^b \frac{x^2}{2p}\,dx = \frac{1}{2p} \cdot \frac{b^3}{3} \sin\theta.$$

ρ

On peut l'écrire

$$S = \frac{1}{3}\, b\, \frac{b^2}{2p} \sin\theta = \frac{1}{3} ob \times bB \times \sin\theta.$$

ω

Cette aire est donc le tiers de l'aire du parallélogramme.

Il en est de même de l'aire du triangle oaA, et par suite, l'aire du segment de parabole compris entre l'arc BOA et la corde AB est équivalente aux deux tiers de l'aire du parallélogramme aAbB.

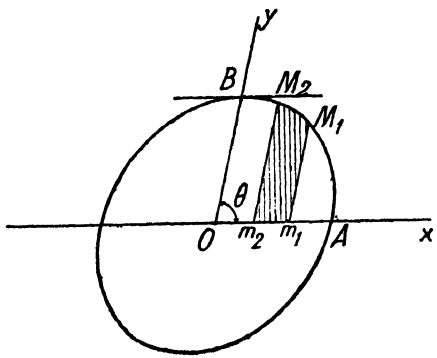


Fig. 15.

Ellipse. — Si l'on rapporte l'ellipse à deux diamètres conjugués faisant entre eux l'angle θ, elle a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0$$

d'où

$$y = \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - x^2}.$$

δ_1

L'aire trapézoïdale $m_1 m_2 M_1 M_2$ a pour expression

$$S = \sin\theta \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{b'}{a'} \sin\theta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a'^2 - x^2}\,dx,$$

x_1 et x_2 étant les abscisses de m_1, m_2. Or ρ l'intégrale est ξ indépendante de b. Si donc on considère une autre ellipse rapportée à deux nouveaux diamètres conjugués faisant entre eux l'angle θ_1, ayant même diamètre OA, l'aire du nouveau segment correspondant aux mêmes abscisses sera

$$S_1 = \frac{b'_1}{a'} \sin\theta_1 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a'^2 - x^2}\,dx.$$

d

On aura donc

$$\frac{S}{b' \sin 0} = \frac{S_1}{b'_1 \sin 0_1}.$$

ν, ξ

En particulier, si cette nouvelle ellipse est un cercle,

$$b'_1 = a', \qquad 0_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad S = \frac{b'}{a'} \sin 0 \, S_1.$$

ω

L'aire du segment est donc proportionnelle à l'aire du segment correspondant aux mêmes abscisses dans le cercle homographique.

En particulier pour $x_1 = 0$, $x_2 = a'$ on a le quart de l'ellipse. Or

$$S_1 = \frac{\pi a'^2}{4} \qquad \text{d'où} \qquad S = \frac{\pi a' b'}{4} \sin 0.$$

ρ, σ₂

L'aire de l'ellipse est donc $S = \pi a' b' \sin \theta$. On en conclut un des théorèmes d'Apollonius :

Pour tout système de diamètres conjugués d'une ellipse, le produit $a'b' \sin \theta$ reste constant (aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués).

Hyperbole. — On trouverait de même l'aire d'un segment hyperbolique. Considérons en particulier l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes

(1) $$x^2 - y^2 = 1.$$

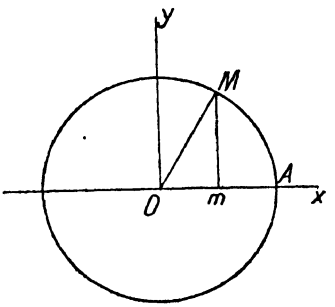


Fig. 16.

Cette équation conduit à la notion de fonctions analogues au sinus et cosinus d'un arc.

ρ

Ceux-ci ont d'ailleurs été introduits par la considération du cercle $x^2 + y^2 = 1$, et on remarque que cette dernière équation diffère peu de celle de l'hyperbole.

ξ, σ₂

Or le sinus et le cosinus sont respectivement l'ordonnée et l'abscisse d'un point correspondant à l'arc $AM = u$, et d'ailleurs

ξ

$u = 2$ secteur OAM. On va donc considérer dans l'hyperbole

l'ordonnée et l'abscisse d'un point M comme fonctions de la quantité u qui sera le double du secteur OAM,

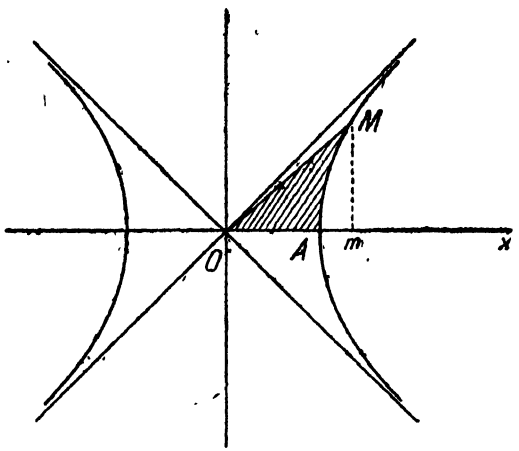


Fig. 17.

δ

Or on a

$$\text{aire AmM} = \int_1^x y\,dx = \text{surf. OmM} - \text{surf. OAM} = \frac{1}{2}xy - \frac{u}{2}$$

c'est-à-dire

$$u = xy - 2\int_1^x y\,dx.$$

D'où

$$du = x\,dy - y\,dx.$$

δ_1

D'ailleurs en différentiant l'équation (1)

$$0 = x\,dx - y\,dy$$

on en déduit

$$\frac{dx}{du} = y, \qquad \frac{dy}{du} = x.$$

En intégrant par exemple la deuxième

$$du = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

on obtient

$$u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \mathrm{L}(y + \sqrt{1+y^2}) = \mathrm{L}(y+x),$$

(2)
$$x + y = e^u.$$

δ_1 De (1) et (2) on déduit sans peine

$$x = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad y = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

On désigne ces fonctions sous le nom de sinus et de cosinus hyperboliques de la variable u

$$sh\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad ch\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}.$$

ρ Elles satisfont à la relation

$$ch^2u - sh^2u = 1,$$

et d'ailleurs

$$\frac{d\,ch\,u}{du} = sh\,u, \qquad \frac{d\,sh\,u}{du} = ch\,u.$$

ρ, σ_1 Ce sont des propriétés tout à fait analogues, comme on le voit, à celles du sinus et du cosinus. On peut vérifier de plus, par simple remplacement, les formules suivantes d'addition

$$sh(u+v) = sh\,u\,ch\,v + sh\,v\,ch\,u, \qquad ch(u+v) = ch\,u\,ch\,v + sh\,u\,sh\,v.$$

Changement de variables. — Nous avons déjà vu que si la courbe est définie par deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

l'intégrale $\int_a^b y\,dx$ se transforme en

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) f'(t) dt$$

t_0, t_1 correspondant aux abscisses ab.

On peut aussi écrire

$$S = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,d\frac{y}{x}.$$

Exemple : Cycloïde. Les équations de la cycloïde rapportée à sa base, et en prenant pour origine un point de rebroussement, sont

$$x = R(t - \sin t), \qquad y = R(1 - \cos t).$$

L'aire du secteur omM est donc

$$S=\int_0^t R^2(1-\cos t)^2 dt=\int_0^t \frac{3+\cos 2t-4\cos t}{2}dt=\frac{R^2}{2}(3t-4\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t)$$

la boucle entière correspond à $t = 2\pi$: $S = 3\pi R^2$.

Elle est le triple de l'aire du cercle générateur.

Aires en coordonnées polaires. — Considérons un arc de courbe $\rho = f(\omega)$ rapporté à un axe polaire ox. Si nous cherchons l'aire d'un secteur OAB, nous le décomposerons en secteurs élémentaire OM_1M_2.

Soient r, R, les rayons polaires maximum et minimum correspondant à l'arc élémentaire M_1M_2. L'aire du secteur OM_1M_2 sera comprise entre les aires des secteurs circulaires $\frac{1}{2}r^2\Delta\omega$ et $\frac{1}{2}R^2\Delta\omega$.

On aura donc

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\omega < \Delta S < \frac{1}{2}R^2\Delta\omega.$$

Si l'on fait la somme de toutes les inégalités analogues correspondant aux divers secteurs élémentaires, on a

$$\Sigma\frac{1}{2}r^2\Delta\omega < \Sigma\Delta S < \Sigma\frac{1}{2}R^2\Delta\omega.$$

Or lorsque tous les éléments $\Delta\omega$ tendent simultanément vers zéro, si la fonction $f(\omega)$ est intégrable dans l'intervalle $\omega_0\omega_1$, les deux sommes extrêmes ont même limite $\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\rho^2 d\omega$: le secteur curviligne aura donc également cette limite. On aura donc

$$S = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\rho^2\, d\omega.$$

Soit, par exemple, la lemniscate

$$\rho^2 = a^2\cos 2\omega.$$

L'aire d'un secteur compté à partir de l'arc polaire sera

$$s = \frac{1}{2}\int_0^{\omega}\rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\omega} a^2\cos 2\omega\, d\omega = \frac{1}{4}a^2\sin 2\omega.$$

En particulier la demi boucle entière qui correspond à $\omega = \frac{\pi}{4}$ a pour aire, $S = \frac{1}{4}a^2$.

Longueur d'un arc de courbe. — Considérons une courbe gauche dont les équations sont

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

et prenons sur cette courbe un arc correspondant aux valeurs de t comprises entre t_0 et T.

Nous supposerons que dans cet intervalle les fonctions f, φ, ψ sont finies et admettent des dérivées continues.

Nous allons définir la longueur de l'arc AB.

ν, α

Décomposons l'arc AB par des points de division A_0, A_1, $\cdots$ A_k, $\cdots$ B correspondant aux valeurs t_0, t_1, t_2, $\cdots$ t_k, $\cdots$ T.

La longueur du côté A_kA_{k+1} est

$$\begin{aligned} l_k &= \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2} \\ &= | t_{k+1} - t_k | \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau'_k) + z'^2(\tau''_k)} \end{aligned}$$

(τ_k, τ'_k, τ_k compris entre t_k et t_{k+1}.

δ_1, ξ

Or les dérivées, étant par hypothèse continues, le sont uniformément dans cet intervalle borné : on peut donc trouver un intervalle η tel que, sous la seule condition $| t'' - t' | < \eta$, on ait

$$| f'(t'') - f'(t') | < \varepsilon$$

et de même pour φ et ψ, cela quelles que soient les valeurs de t', t'' dans l'intervalle.

δ_1

Si nous supposons que tous les intervalles $t_{k+1} - t_k$ sont moindres que η, il en sera à fortiori de même des différences $\tau_k - t_k$, $\tau'_k - t_k$, $\tau''_k - t_k$, et les dérivées $x'(\tau_k)$, $y'(\tau'_k)$, $z'(\tau''_k)$ différeront des dérivées au point t_k d'une quantité moindre que ε'.

On pourra donc écrire

$$l_k = | t_{k+1} - t_k | \sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k) + z'^2(t_k)} + \varepsilon_1.$$

Le radical peut aussi s'écrire

$$\sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k) + z'^2(t_k)} + \varepsilon_2$$

ε_2 étant inférieur à une quantité ε choisie aussi petite qu'on le veut.

ω

Le périmètre du polygone inscrit est donc égal à

$$\Sigma | t_{k+1} - t_k | \sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k) + z'^2(t_k)} + \Sigma | t_{k+1} - t_k | \varepsilon_2.$$

La deuxième partie de la somme est inférieure à

$$\varepsilon\Sigma \mid t_{k+1} - t_k \mid = \varepsilon \mid T - t_0 \mid$$

elle peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut.

δ, ρ

La première partie, quand tous les intervalles tendent vers zéro, a pour limite l'intégrale

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \qquad (t_0 < T).$$

C'est cette intégrale, limite de la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans l'arc, que nous appellerons longueur de l'arc AB. Elle est indépendante de la manière dont on inscrit la ligne polygonale et de la façon dont on fait tendre ses côtés vers zéro.

Si l'on considère les arcs à partir d'une origine fixe t_0 jusqu'à une extrémité variable τ, la longueur de l'arc sera une fonction de τ donnée par

$$S(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\, dt.$$

d

On en déduit

$$ds^2 = (f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2)dt^2$$

c'est-à-dire

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

ρ

on remarquera que cette relation est indépendante de la variable indépendante.

Applications. — Pour la cycloïde dont les équations sont

$$x = R(t - \sin t), \qquad y = R(1 - \cos t),$$

δ

on a

$$dx = R(1 - \cos t)dt, \qquad dy = R \sin t\, dt.$$

Donc

$$ds^2 = R^2(2 - 2\cos t)dt^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{t}{2}\, dt^2.$$

Et par suite

$$ds = 2R \sin \frac{t}{2}\, dt$$

en supposant que les arcs croissent avec t.

L'arc compté à partir du point de rebroussement δ_1 est donc

$$S = \int_0^\tau 2R \sin \frac{t}{2}\, dt = \left(-4R \cos \frac{t}{2}\right)_0^\tau = 8R \sin^2 \frac{\tau}{4}.$$

La longueur d'un arceau complet correspondant à $\tau = 2\pi$ est égale à 8R.

Chaînette. — Pour la chaînette d'équation

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

δ'

en prenant x comme variable indépendante, on trouvera pour longueur d'un arc compté à partir du sommet de la courbe

$$S = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

Or on a

$$\frac{d'y}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

ρ

En désignant par α l'angle que la tangente en un point fait avec ox on a donc

$$S = a \operatorname{tg} \alpha.$$

Il est aisé de construire cette longueur.

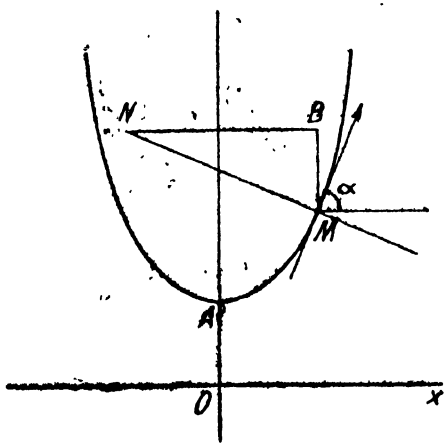


Fig. 18.

Menons la normale MN. Sur la parallèle à oy, prenons $MB = a$. La parallèle à ox menée par B rencontre la normale en N, tel que

$$BN = BM \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha.$$

On a donc $BN = \widehat{AM}$.

Parabole. — Pour la parabole

$$y^2 = 2px, \qquad x = \frac{y^2}{2p}.$$

On aura

$$ds^2 = \left(\frac{y^2}{p^2} + 1\right)dy^2.$$

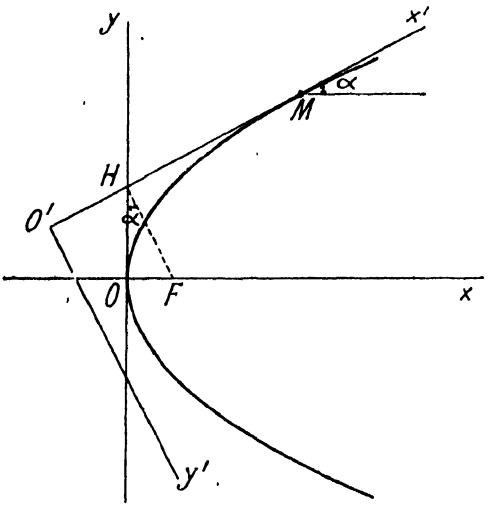


Fig. 19.

On a donc

$$\widehat{OM} = \frac{1}{p}\int_0^y \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

On trouve

$$S = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} L \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

On peut déduire de cette formule un résultat intéressant.

Prenons sur la tangente une longueur MO' = MO = S et menons $o'y$ perpendiculaire à O'M. La projection du foyer sur la tangente se faisant au point H de rencontre avec oy, en désignant par α l'angle de la tangente avec ox, on a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \qquad \cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Donc

$$MH = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y^2}{2p\cos\alpha} = \frac{y}{2p}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

D'où

$$O'H = \frac{p}{2} L \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.$$

D'autre part

$$FH = \frac{p}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

ρ, R_1 Si donc, la parabole étant supposée d'abord tangente en O' à O'M en son sommet O', on imagine qu'on la fasse rouler sans glisser sur cette tangente O'M, ρ les coordonnées de F par rapport aux axes O'M, O'y sont des fonctions de y.

$$X = O'H = \frac{p}{2} L \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}, \qquad Y = FH = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + y^2}.$$

ce qui donne le lieu du foyer F dans le mouvement de roulement.

c_1 On peut éliminer y. On déduit en effet

$$\frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p} = e^{+\frac{2X}{p}}.$$

Et par suite

$$\frac{-y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p} = e^{-\frac{2X}{p}}.$$

En ajoutant

$$\frac{2}{p}\sqrt{p^2 + y^2} = \frac{4Y}{p} = e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}}.$$

Donc

$$Y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}}\right).$$

(1) Le point F décrit donc, dans le roulement, une chaînette de paramètre $\frac{p}{2}$.

Ellipse. — Dans le cas de l'ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad dy = \frac{-b}{a}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$S = \frac{1}{a}\int_0^x \frac{a^2 - c^2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2}}\,dx,$$

σ_2 l'arc est donc donné par la différence de deux intégrales

elliptiques, l'une de première espèce, l'autre de deuxième espèce. C'est d'ailleurs à leur rôle dans la rectification de l'ellipse que ces intégrales doivent leur nom.

En faisant le changement de variable $x = a \sin \varphi$ et posant $\frac{c}{a} = k$, on a

$$s = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{a^4(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{a^3 \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} a \cos \varphi \, d\varphi = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

en comptant les arcs à partir du sommet B.

φ est le complément de l'anomalie excentrique d'un point.

C'est cette intégrale que Legendre appelait intégrale elliptique de seconde espèce.

Coordonnées polaires. — Si la courbe est donnée en coordonnées polaires $\rho = f(\varphi)$ les formules de transformation sont

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi.$$

Par suite

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

L'arc peut donc être calculé encore par une quadrature.

Formule de Legendre. — On sait enfin que l'on peut considérer une courbe comme l'enveloppe de ses tangentes. En désignant par α l'angle que fait la perpendiculaire issue de l'origine à une tangente, par p la distance OT de O à la tangente, l'équation de cette tangente se met sous la forme

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \tag{1}$$

La courbe sera déterminée quand on connaîtra la fonction $p(\alpha)$.

Les coordonnées du point de rencontre de deux tangentes infiniment voisines, c'est-à-dire d'un point M de la courbe satisferont à l'équation (1) et à l'équation dérivée

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha - p'(\alpha) = 0.$$

On obtient

$$x = p \cos \alpha - p' \sin \alpha, \qquad y = p \sin \alpha + p' \cos \alpha.$$

On voit donc que $p' = -\overline{TM}$.

Si l'on veut avoir l'expression de l'arc de courbe, α il faut différentier

$$dx = -(p + p'')\sin\alpha\, d\alpha, \qquad dy = (p + p'')\cos\alpha\, d\alpha.$$

ω

Donc

$$\pm ds = (p + p'')d\alpha, \qquad \pm s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} p\, d\alpha + \left(p'\right)_{\alpha_0}^{\alpha}$$

l'arc étant compté à partir du point correspondant à α_0.

Cette formule porte le nom de formule de rectification de Legendre. Appliquons-la à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

δ

On trouve facilement

$$p = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} \qquad p' = -\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}}.$$

Si l'on compte les arcs à partir du sommet A ($\alpha_0 = 0$), on a

$$s = \int_0^{\alpha}\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}\,d\alpha - \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}}$$

$$= a\int_0^{\alpha}\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha - \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}} \qquad \left(k^2 = \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Or nous avons vu ρ, σ_2 qu'en désignant par φ le complément de l'anomalie excentrique d'un point M′, c'est-à-dire l'angle BOm', on avait

$$\widehat{BM'} = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt.$$

ξ, α Si donc au point M pour lequel la normale fait l'angle α avec OX, nous associons le point M′ correspondant à une anomalie excentrique $\frac{\pi}{2} - \alpha$, on aura $\varphi = \alpha$.

$$\widehat{BM'} = a\int_0^{\alpha}\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt.$$

La formule de Legendre devient donc

$$S = \widehat{AM} = \widehat{BM'} - TM.$$

Ce résultat porte le nom de « formule de Fagnano ».

Si l'on considère le point correspondant à l'anomalie excentrique $\frac{\pi}{2} - \varphi$, c'est-à-dire le point $x = a \sin \varphi$, $y = b \cos \varphi$, la normale en ce point fait un angle α tel que

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}.$$

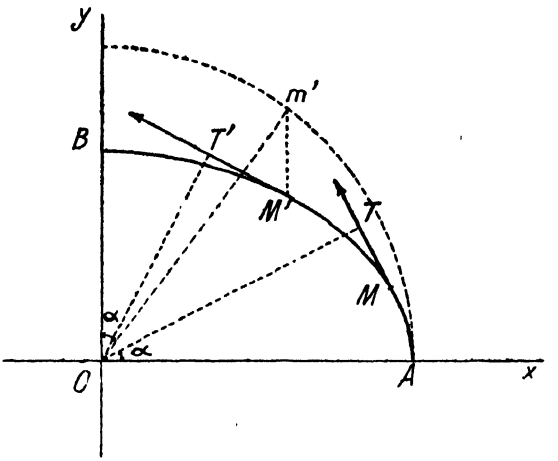


Fig. 20.

On remarque que cette relation est symétrique en α et φ.

Le point où la normale fait l'angle φ correspond donc à l'anomalie $\frac{\pi}{2} - \alpha$: c'est donc le point M'. Les points M et M' sont donc réciproques : l'angle de la normale en l'un des points fait avec oy un angle égal à l'anomalie excentrique de l'autre.

On a donc aussi

$$\widehat{BM} - \widehat{AM'} = T'M'.$$

Mais

$$BM - AM' = BM' - AM.$$

Donc $TM = T'M'$.

Les deux points M, M' sont donc aussi ceux qui correspondent à la même longueur du segment de tangente TM.

II. — INTÉGRALES CURVILIGNES

On peut étendre la notion d'intégrale de la manière suivante : Considérons par exemple un arc de courbe plane C que nous

prendrons soit sous la forme $y = \varphi(x)$ soit en nous donnant x et y en fonction d'un paramètre t.

Prenons d'autre part une fonction de deux variables $P(x, y)$ bien déterminée, continue, lorsque le point x, y se déplace sur l'arc de courbe considéré.

Partageons cet arc par des points de division A, A_1, A_2, $\cdots$, B d'abscisses $x_0, x_1, \cdots x_n$.

α, ξ

Dans l'intervalle A_kA_{k+1}, choisissons d'autre part un point a_k. Nous désignerons par $y_0, y_1, \cdots y_k, \cdots Y = b$ les ordonnées des points correspondants de la courbe, par ξ_k, η_k les coordonnées de chaque point intermédiaire.

ξ

Considérons la somme

$$\Sigma = (x_1 - x_0) P(\xi_0, \eta_0) + (x_2 - x_1) P(\xi_1, \eta_1) + \cdots + (x_{k+1} - x_k) P(\xi_k, \eta_k) + \cdots$$
$$= \Sigma (x_{k+1} - x_k) P(\xi_k, \eta_k).$$

ψ

Je dis que

Cette somme a une limite lorsque tous les arcs A_kA_{k+1} tendent simultanément vers zéro d'une manière quelconque, et cette limite est la même quel que soit le point $\xi_k\eta_k$ que l'on choisit dans chaque intervalle.

Cette limite s'appellera l'intégrale curviligne $\int_{AB} P(x, y)dx$ étendue à l'arc AB.

δ

En effet, si la courbe est représentée par l'équation $y = \varphi(x)$, pour tout point x, y de cette courbe, la fonction $P(x, y)$ se réduit à

$$P(x, \varphi(x)) = F(x), \qquad P(\xi_k, \eta_k) = F(\xi_k),$$

ρ

la somme considérée se réduit donc à

$$\Sigma (x_{k+1} - x_k) F(\xi_k).$$

Supposons d'abord que, en décrivant l'arc de courbe AB, la variable x varie d'une façon continue de x_0 à X et toujours dans le même sens.

Lorsque tous les arcs A_kA_{k+1} tendent vers zéro, il en est de même des intervalles $x_{k+1} - x_k$.

σ_2

La limite de la somme n'est autre que l'intégrale définie ordinaire

$$\int_{x_0}^{X} F(x)dx = \int_{x_0}^{X} P(x, \varphi(x))dx.$$

2° Supposons maintenant la courbe donnée sous la forme

$$x = f(t), \qquad y = \psi(t).$$

L'arc de courbe AB est obtenu en faisant varier t de t_0 à T. Supposons que dans cet intervalle x'_t ne devienne ni nulle ni infinie. Lorsque x variera toujours dans le même sens de x_0 à X, t variera également toujours dans le même sens de t_0 à T.

δ_1

Aux abscisses $x_0, \cdots x_k, \cdots X$ correspondront les valeurs $t_0, \cdots t_k, \cdots T$.

A toute valeur de x comprise dans l'intervalle x_0X correspond une valeur unique de t de l'intervalle t_0T, et par suite une valeur unique de y. δ_1 On peut considérer y comme une fonction déterminée de x dans l'intervalle, et on retombe donc sur le cas précédent.

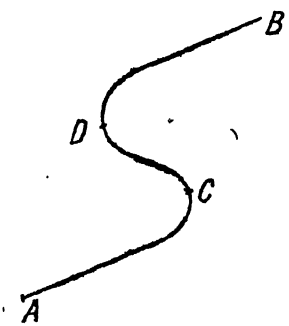


Fig. 21.

Nous avons supposé que, sur l'arc AB, x variait toujours dans le même sens de x_0 à X. α Supposons que cette condition ne soit pas remplie, mais que l'on puisse néanmoins décomposer l'arc AB en un nombre fini d'arcs partiels dans chacun desquels x aille soit constamment en croissant soit constamment en décroissant.

Soit par exemple l'arc ACDB, les points CD correspondant à des points d'abscisse maxima ou minima.

On pourra définir chacune des intégrales

$$\int_{AC} P(x, y)dx, \qquad \int_{CD}, \qquad \int_{DB},$$

et par définition on aura

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DB}.$$

en remarquant toutefois que la fonction $y = \varphi(x)$ n'est par la même sur les arcs AC, CD, DB.

REMARQUE. — Lorsque la courbe est donnée sous la seconde forme,

α, ν

il est bien évident que l'on a avantage à ramener le calcul de l'intégrale à celui d'une fonction de t.

Nous supposerons que la fonction $x = \varphi(t)$ admet une dérivée qui soit continue dans l'intervalle.

Supposons provisoirement de plus que cette dérivée ne s'annule pas. Quand x variera de x_0 à X toujours dans le même sens, t variera toujours dans le même sens de t_0 à T.

δ

Considérons deux valeurs de x, x_k, x_{k+1} et les deux valeurs correspondantes de t, t_k, t_{k+1}.

On aura

$$x_{k+1} - x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = (t_{k+1} - t_k)\,\varphi'(\theta_k),$$

θ_k étant compris entre t_k et t_{k+1}. Comme par hypothèse $\varphi'(t)$ n'est ni nulle ni infinie dans l'intervalle, les différences $x_{k+1} - x_k$ et $t_{k+1} - t_k$ sont certainement infiniment petites en même temps.

δ_1

Puisque nous pouvons faire décroître tous les intervalles vers zéro d'une manière quelconque, nous pouvons supposer que nous obtenons ce résultat en prenant des intervalles $t_{k+1} - t_k$ tendant vers zéro. Puisque l'on peut choisir arbitrairement le point ξ_k, η_k dans chaque intervalle, nous pouvons supposer que nous prenons à chaque instant le point correspondant à la valeur θ_k. Nous aurons donc

$$\xi_k = \varphi(\theta_k), \qquad \eta_k = \psi(\theta_k), \qquad P(\xi_k, \eta_k) = F(\theta_k).$$

ξ

On a donc à considérer la somme

$$\Sigma F(\theta_k)\,(t_{k+1} - t_k)\,\varphi'(\theta_k).$$

ω

Tous les intervalles partiels $t_{k+1} - t_k$ tendant simultanément vers zéro, cette somme a une limite qui est l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

S'il existe des points en nombre fini pour lesquels la dérivée $\varphi'(t)$ s'annule ou devient discontinue, tout en restant finie, on décomposera l'intégrale totale par ces points de division et la formule de transformation restera applicable sans que l'on ait ici à décomposer l'intervalle en intervalles partiels ; c'est donc là un avantage.

En résumé : si la courbe est donnée sous la forme $y = \varphi(x)$ on est ramené à l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} P(x, \varphi'(x))dx.$$

Si la courbe est donnée sous la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

A la condition que $\varphi'(t)$ reste finie, le calcul est ramené à celui de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{T} P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)dt.$$

Enfin, si $\varphi'(t)$ devenait infinie pour une valeur τ_1, on décomposerait l'intervalle par ce point de division. Soit ξ l'abscisse correspondante. On aurait

$$\int_{x_0}^{\xi-\varepsilon} P(x, y)dx = \int_{t_0}^{\tau-\varepsilon'} P(\varphi, \psi)\varphi'\, dt.$$

La première intégrale ayant une limite $\int_{x_0}^{\xi} P(x, y)dx$, la seconde a certainement une limite et les deux limites sont les mêmes.

La formule est donc absolument générale.

Il est bien évident que si l'on change le sens du parcours de l'arc, l'intégrale est changée de signe.

Étant donnée une fonction $Q(x, y)$ ξ on pourrait considérer de même la limite de la somme

$$\Sigma Q(\xi_k, \eta_k)\,(y_{k+1} - y_k)$$

lorsque le point xy décrit l'arc AB.

D'une façon générale ξ on peut donc considérer les intégrales curvilignes

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Dans le cas où la courbe est donnée sous la forme $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, le calcul est ramené à celui de l'intégrale définie ordinaire

$$\int_{t_0}^{T} [P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi']dt.$$

Application. — Considérons par exemple une courbe fermée C et supposons d'abord qu'une parallèle à oy ne rencontre la courbe qu'en deux points. La courbe présente deux points A, B d'abscisse minima et maxima a, b. Une parallèle quelconque d'abscisse intermédiaire rencontre la courbe en deux points m_1, m_2 d'ordonnées y_1, y_2.

$$y_1 = \varphi_1(x), \qquad y_2 = \varphi_2(x).$$

Nous savons que l'intégrale $\int_a^b y\,dx$ représente l'aire limitée par l'arc de courbe Am_2B.

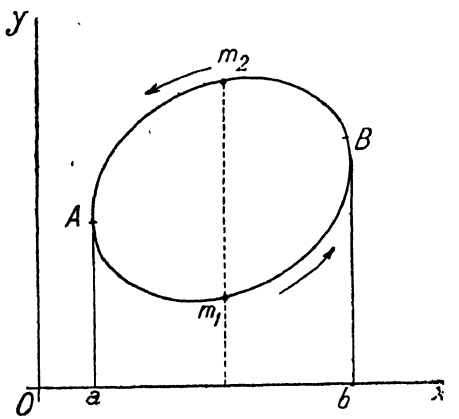


Fig. 22.

L'aire comprise à l'intérieur du contour C est donc égale à

$$\int_a^b (y_2 - y_1)dx.$$

Nous supposerons que le sens de rotation des axes ox vers oy soit, pour un observateur, debout sur le plan de la figure, celui de la droite vers la gauche (sens inverse des aiguilles d'une montre). Supposons d'autre part que ce même observateur décrive le contour de manière qu'il ait à sa gauche l'aire que l'on considère, ce sera le sens Am_1Bm_2A. Nous pouvons considérer ce contour comme formé par la juxtaposition des arcs Am_1B et Bm_2A.

ρ, ξ

Considérons l'intégrale curviligne

$$\int_C y\,dx = \int_{C_1} y_1\,dx + \int_{C_2} y_2\,dx.$$

δ_1, ρ

Sur le premier arc, on a $y = y_1$ et la première intégrale se ramène à l'intégrale définie $\int_a^b y_1\,dx$.

Sur le deuxième arc, on a $y = y_2$, et lorsque le point décrit l'arc Bm_2A, la variable x varie de b à a. Cette deuxième intégrale curviligne est donc

$$\int_b^a y_2\,dx = -\int_a^b y_2\,dx.$$

ω

L'intégrale curviligne totale $\int_C y\,dx$ est donc égale à

$$-\int_a^b (y_2 - y_1)dx$$

c'est-à-dire à l'aire limitée par le contour, changée de signe.

Nous allons éliminer la restriction introduite :

Nous supposerons que, étant donné un contour quelconque C, on puisse, en introduisant un nombre fini de segments de droite, joignant deux à deux les points à tangente verticale, décomposer le contour en contours partiels pour chacun desquels une parallèle à oy ne rencontre la courbe qu'en deux points.

δ_1

L'aire considérée sera décomposée en aires partielles ω_1, ω_2, ω_3. Le théorème sera applicable à chacune de ces aires et on aura

$$-\omega_1 = \int_{L_1} y\,dx, \text{ etc...}$$

le contour $L_1 = cm_1dc$ étant parcouru dans le sens direct,

$$-\omega_1 = \int_{cm_1d} + \int_{dc}.$$

De même

$$-\omega_2 = \int_{cd} + \int_{dm_2e}.$$

Or d'après la remarque faite

$$\int_{cd} + \int_{cd} = 0.$$

En ajoutant toutes ces égalités, au premier membre, on aura

$$-(\omega_1 + \omega_2 + \cdots) = -\Omega.$$

Et au second membre il ne restera que la somme des intégrales curvilignes prise suivant les arcs cm_1d, dm_2c, ··· formant le contour total C. On a donc bien encore

$$-\Omega = \int_C y\,dx.$$

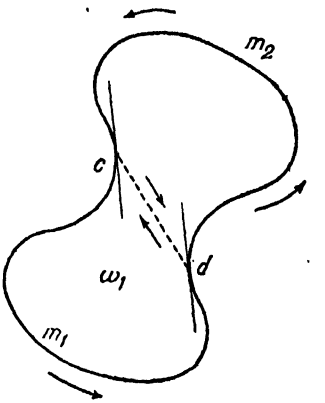


Fig. 23.

On démontrerait de la même manière que l'on a

$$+\Omega = \int_C x\,dy.$$

On pourrait recommencer une démonstration analogue, mais il suffit de considérer que, dans cette nouvelle intégrale, on permute le rôle des variables x, y. Ce qu'il faut considérer c'est le sens de parcours du contour C par rapport au sens de rotation des axes ox, oy. Il faudrait donc considérer un sens de parcours qui soit le même que celui des axes oy vers ox. Or le sens de parcours sur C est supposé le même dans les deux intégrales. On doit donc avoir dans la formule un changement de signe.

En ajoutant les deux intégrales on voit que

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_C x^2\,d\frac{y}{x}.$$

Application. — Si la courbe est unicursale de la forme

$$x = \frac{P(t)}{R(t)}, \qquad y = \frac{Q(t)}{R(t)}$$

(P, Q, R désignant des polynômes que l'on peut supposer de même degré). On a

$$\omega = \frac{1}{2}\int x^2\, d\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{P^2}{R^2}\cdot\frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2} = \frac{1}{2}\int \frac{P\,dQ - Q\,dP}{R^2}.$$

ρ

Cette intégrale ne portera que sur une fonction rationnelle de dénominateur R^2, tandis que l'intégrale $\int y\,dx$ par exemple aurait conduit à une fonction rationnelle de dénominateur R^3.

Exemple. — Soit le folium de Descartes

$$x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0, \qquad x = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{2at^2}{1+t^3}.$$

On obtiendra la boucle en faisant varier t de 0 à $+\infty$. L'aire de cette boucle est donc

$$\frac{1}{2}\int x^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = -\frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{1+t^3}\right)_0^\infty = \frac{3a^2}{2}.$$

Remarque. — Comme on vient de le voir, une intégrale curviligne $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ se ramène à une somme d'intégrales définies ordinaires. Si donc P, Q sont fonctions d'un paramètre a, $^{\alpha,\sigma_2}$ la formule de dérivation sous le signe $\int$ peut lui être appliquée et on a

$$\frac{D}{Da}\int_{AB} P(x, y, a)dx + Q(x, y, a)dy = \int_{AB} \frac{\partial P}{\partial a}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial a}dy.$$

Généralisation : Courbe gauche. — La notion d'intégrale curviligne s'étend immédiatement à une courbe gauche quelconque dont les équations sont

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \theta(t).$$

ξ, τ

P, Q, R désignant trois fonctions de x, y, z, on définira l'intégrale $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ comme la limite de la somme

$$\Sigma P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_{k+1} - x_k) + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(y_{k+1} - y_k) + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(z_{k+1} - z_k).$$

Le calcul de l'intégrale se ramènera à celui de l'intégrale définie ordinaire

$$\int_{t_0}^{T} [P(\varphi, \psi, \theta)\varphi' + Q\psi' + R\theta']dt.$$

III. — ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES

Le premier problème d'intégration que nous avons résolu a été : Étant donnée une fonction $f(x)$ d'une variable, quelle est la fonction $F(x)$ qui admet pour dérivée $f/x)$?

Le problème qui se pose tout naturellement ensuite est le suivant : Étant données deux fonctions de deux variables x, y, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, quelle est la fonction $F(x, y)$ qui admet pour dérivées partielles par rapport à x et à y les fonctions données $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$?

Plus généralement, étant données n fonctions de n variables

$$f_1(x_1, x_2, \cdots x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots x_n), \cdots f_n(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

quelle est la fonction de ces n variables $F(x_1, x_2, \cdots x_n)$ qui admet pour dérivées partielles les fonctions données $f_1, f_2, \cdots f_n$, ou qui admet pour différentielle totale

$$dF = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n.$$

Tout d'abord le problème est-il possible ? Nous allons montrer que les fonctions $f_1, \cdots f_n$ ne peuvent pas être choisies arbitrairement mais doivent satisfaire à des conditions nécessaires.

Par hypothèse, on doit en effet avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

et en général

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i(x_1, x_2, \cdots x_n), \qquad \frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

Si on dérive la première de ces égalités par rapport à x_k, et la deuxième par rapport à x_i, on aura

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

ω Or si la fonction F existe, les deux dérivées rectangles $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}$ doivent être identiques. On en conclut que

(II) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

Cette égalité (qui se réduit à une identité si $i = k$) doit avoir lieu quels que soient les indices i, k. On a donc $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition.

Par exemple si l'on n'a que deux variables x, y, pour que $P dx + Q dy$ soit une différentielle totale exacte, il faudra, que l'on ait

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Nous allons voir que, si les conditions II sont remplies, ψ la solution est possible, et nous la déterminerons.

Détermination de la fonction. — α, δ Il faut d'abord déterminer une fonction F qui satisfasse par exemple à la première des équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

σ2 Si nous considérons $x_2, x_3, \cdots x_n$ comme des paramètres, la fonction

$$u = \int_{a_1}^{x_1} f_1(t_1, x_1, \cdots x_n) dt$$

où a est une constante arbitraire y satisfait évidemment.
La différence F — U, admettant une dérivée par rapport à x constamment nulle, est donc indépendante de x_1. Nous pouvons donc poser

$$F = U + \Phi(x_2 x_3, \cdots x_n).$$

δ1 Voyons à quelles conditions doit satisfaire Φ.

Prenons l'une quelconque des équations I

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k(x_1 x_2, \cdots x_n).$$

Elle deviendra

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{d\Phi}{dx_k} = f_k(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

On a donc à prendre la dérivée de la fonction U par rapport au paramètre x_k. On sait que

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(t, x_2, \cdots x_n)dt.$$

Mais, par hypothèse, les conditions (II) doivent être satisfaites quelles que soient les variables x_1, x_2, $\cdots$ x_n. On a donc pour la valeur t de x_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(t, x_2 \cdots x_n) = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, x_2, \cdots x_n).$$

Donc

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, x_2, \cdots x_n)dt.$$

L'intégrale du second membre peut être calculée. Elle est égale à

$$f_k(x_1, x_2, \cdots x_n) - f_k(a_1, x_2, \cdots x_n).$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$f_k(x_1, x_2, \cdots x_n) - f_k(a_1, x_2, \cdots x_n) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = f_k(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

et se réduit à

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = f_k(a_1, x_2, \cdots x_n).$$

En transformant ainsi toutes les équations I, on obtient donc le système

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = f_2(a_1, x_2, \cdots x_n) \cdots \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = f_n(a_1, x_2, \cdots x_n).$$

On voit que c'est un système analogue au système (II) avec une variable de moins x_1.

Il faut que, pour cette fonction, les conditions analogues à II soient satisfaites, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial f_k(a_1, x_2 \cdots x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial fi(a_1, x_2 \cdots x^n)}{\partial x_k}.$$

Mais ces conditions ne sont autres que les conditions (II) pour la valeur a_1 de x_1. Elles sont donc certainement satisfaites.

Nous désignerons par $f_k^{a_1}$ le résultat de la substitution de a_1 à x_1

dans f_k. De même par $f_k^{a_1, a_2}$ le résultat de la substitution de a_1, a_2 à x_1, x_2, a_2 étant une constante arbitraire.

δ_1

Nous raisonnerons sur la fonction Φ comme nous l'avons fait sur F. Nous prendrons par exemple la première des équations (III) et nous poserons

$$\Phi = \int_{a_2}^{x_2} f_2(a_1, t, x_3, \cdots x_n)dt + \psi(x_3, x_4, \cdots x_n)$$

ψ satisfaisant à

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = f_3(a_1, a_2, x_3, \cdots x_n) \cdots \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = f_n(a_1, a_2, x_3, \cdots x_n).$$

A son tour

$$\psi = \int_{a_3}^{x_3} f_3(a_1, a_2, t, x_4, \cdots x_n)dt + \chi(x_4, \cdots x_n).$$

ω

Nous arriverons finalement à déterminer une fonction ζ de la seule variable x_n satisfaisant à

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_n} = f_n(a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, x_n).$$

Elle sera donnée par

$$\zeta = \int_{a_n}^{x_n} f(a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, t)dt.$$

ω

En rassemblant tous ces résultats, nous aurons donc

$$(4)\quad F = \int_{a_1}^{x_1} f_1\,dt + \int_{a_2}^{x_2} f_2^{a_1}dt + \int_{a_3}^{x_3} f_3^{a_1, a_2}dt + \cdots + \int_{a_n}^{x_n} f_n^{a_1, a_2 \cdots a_{n-1}}dt,$$

la variable d'intégration étant désignée toujours par t.

La fonction F se détermine donc par n quadratures successives.

On voit que la solution $^{\rho, \psi}$ semble dépendre de n constantes arbitraires $a_1, a_2, \cdots a_n$, que l'on a introduites dans les intégrations successives. Cependant $^{\rho, \sigma_2}$ si F et F_1 sont deux solutions distinctes, la différence $F - F_1$ a une dérivée nulle par rapport à chacune des variables x_1 $x_2, \cdots x_n$: elle se réduit donc à une constante absolue. Une solution quelconque F_1 ne peut donc

différer d'une solution bien déterminée F que par une seule constante.

Si l'on considère la solution F donnée par la formule ci-dessus, ρ on remarque que toutes les intégrales s'annulent pour le système de valeurs

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2 \cdots \qquad x_n = a_n.$$

Donc F s'annule pour ce système de valeurs. Si l'on avait eu une autre solution quelconque $F_1(x_1, x_2, \cdots x_n)$, F serait nécessairement de la forme $F = F_1 + k$, et puisque F s'annule pour $a_1, a_2, \cdots a_n$, ω c'est que l'on a

$$k = -F_1(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

et par suite F est nécessairement de la forme

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots x_n) - F_1(a_1, a_2, \cdots a_n).$$

ρ On voit donc que, dans le résultat final donné par la formule (4), toutes les constantes $a_1, a_2, \cdots a_n$ doivent se grouper en une seule constante, et le résultat des intégrations doit être de la forme

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n, a_1, a_2, \cdots a_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots x_n) - F_1(a_1, \cdots a_n)$$

ce qui donne une vérification des calculs.

Remarque. — A une constante près, le résultat ne sera donc pas influencé par les valeurs initiales que nous choisissons successivement. D'un autre côté, il doit être le même quel que soit l'ordre adopté pour les intégrations successives.

α, ν Pour simplifier le calcul dans la pratique, nous commencerons donc par celles des équations dont les intégrations sont les plus faciles et nous choisirons les constantes de façon à simplifier les intégrations ultérieures portant sur les fonctions

$$f_2(a_1, x_2, \cdots x_n), \qquad f_3(a_1, a_2, x_3, \cdots x_n) \cdots$$

qui pourront être en effet considérablement simplifiées par des valeurs convenables de a_1 puis de $a_2, \cdots$ Il pourra même arriver qu'après un très petit nombre d'intégrations, les intégrales ultérieures, portant sur des fonctions nulles, disparaîssent.

Application. — *Déterminer la fonction de deux variables dont la différentielle totale soit*

$$dF = \frac{[xL(x^2+y^2) - x^2y]dx + [yL(x^2+y^2) + x^3]dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

δ

On a ici

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1 = \frac{xL(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2 = \frac{yL(x^2+y^2) + x^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

On pourrait vérifier d'abord que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

On aura à intégrer ensuite

$$\int_a^{x_1} \frac{tL(t^2+y^2) - t^2y}{(t^2+y^2)^2}\,dt.$$

On trouve aisément comme intégrale indéfinie

$$F = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+L(t^2+y^2)}{t^2+y^2} + \frac{1}{2}\left(\text{arc tg}\,\frac{y}{t} + \frac{ty}{t^2+y^2}\right).$$

δ_1, ξ

Nous aurions ensuite à effectuer la deuxième intégration

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{yL(a^2+y^2) + a^3}{(a^2+y^2)^2},$$

ρ, α

mais nous voyons que si nous faisions croître a indéfiniment le second membre s'annulerait et la deuxième intégrale disparaîtrait. ω

D'ailleurs pour a infini, la première intégrale existe. On a donc simplement

$$F = \left[-\frac{1}{2}\frac{1+L(t^2+y^2)}{t^2+y^2} + \text{arc tg}\,\frac{y}{t} + \frac{ty}{t^2+y^2}\right]_\infty^x$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{xy - 1 - L(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + \text{const.}$$

*

CHAPITRE XII

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES

SOMMAIRE.

Interpolation : Polynômes de Lagrange. — Formule de Cotes. — Propriétés. — Applications : $n = 1, 2, 3, 4$.

Méthode de Gauss : Application pratique.

Développements en séries trigonométriques : Développement dans un intervalle $2l$. — Application au problème des cordes vibrantes. — Étude de la convergence. — Intégrale de Dirichlet. — Intégrale de Fourier. — Conclusion. — Applications.

Lorsqu'on ne connaît pas de fonction primitive de la fonction à intégrer $f(x)$, et que l'on ne peut calculer exactement l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx,$$

on peut établir des formules d'approximation donnant la valeur de cette intégrale avec autant d'exactitude que l'on veut.

1° Le théorème de la moyenne donne déjà une première approximation de l'intégrale : On a

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a),$$

μ étant une valeur intermédiaire entre la plus petite et la plus grande valeur de la fonction dans l'intervalle.

2° Un peu plus généralement, si l'on a constamment dans l'intervalle $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$, et si φ et ψ sont intégrables dans l'intervalle, on aura aussi

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx.$$

Soit par exemple l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

α

On peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le premier facteur reste dans l'intervalle constamment compris entre 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < I < \frac{\pi}{2}.$$

3° Pour obtenir une formule d'aproximation plus exacte, nous nous appuierons sur la signification géométrique de l'intégrale définie : σ_2 Si par exemple la fonction $f(x)$ est constamment positive dans l'intervalle ab, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x, et les deux abscisses a, b.

Partageons l'intervalle ab en n parties égales : soit h l'un des intervalles. Si la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle, et si l'on considère les rectangles inscrits dans la courbe, la somme de leurs aires est

$$s = h[f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h)].$$

Si l'on considère les rectangles circonscrits, la somme de leurs aires est

$$S = h[f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+nh)].$$

Il suffit donc de mesurer sur la courbe, supposée construite graphiquement (à une échelle déterminée), les ordonnées correspondant aux points de division, pour avoir des valeurs approchées par excès ou par défaut de l'intégrale.

Si l'on prend pour valeur de l'intégrale $\frac{S+s}{2}$, l'erreur commise

sera moindre en valeur absolue que $\frac{S-s}{2}$ (on n'en connaîtra pas le sens). Or

$$\frac{S-s}{2} = \frac{h}{2}[f(b) - f(a)].$$

D'ailleurs

$$\frac{S+s}{2} = h\left[\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + \frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + \cdots + \frac{f(a+(n-1)h)+f(b)}{2}\right].$$

Elle représente donc la somme des trapèzes inscrits dans la courbe.

I. — INTERPOLATION. POLYNOMES DE LAGRANGE

Plus généralement prenons sur la courbe C, $n+1$ points $M_0, M_1, M_2, \cdots$ entre les deux points A et B correspondant aux abscisses a et b. Substituons à la courbe, une courbe Γ passant par ces points. Étant donnée la signification géométrique de l'intégrale, l'aire limitée par la courbe Γ sera, en général, une valeur approchée de l'aire limitée par C et par suite de l'intégrale définie.

Si en particulier la courbe Γ est une courbe parabolique d'équation de la forme

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

On pourra calculer par une intégrale l'aire qu'elle limite.

Calcul du polynôme $\varphi(x)$. — Désignons par $y_0, y_1, \cdots y_n$, les ordonnées (calculées ou mesurées graphiquement) de la courbe C correspondant aux abscisses $x_0, x_1, \cdots x_n$. Le polynôme $\varphi(x)$ sera assujetti à prendre pour valeurs $y_0, y_1, \cdots y_n$ pour les valeurs correspondantes $x_0, x_1, \cdots x_n$.

Ce polynôme se calcule aisément par la méthode d'interpolation de Lagrange. Il suffit de remarquer qu'il existe un polynôme et un seul de degré n qui s'annule pour $x_1, x_2, \cdots x_n$ et qui prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$. Ce polynôme est évidemment

$$y = \varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} y_0.$$

De même il existe un polynôme et un seul $\varphi_k(x)$ qui s'annule pour toutes les valeurs sauf x_k, et prenne la valeur y_k pour $x = x_k$. Ce polynôme est

$$\varphi_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) \cdots (x_k - x_n)} y_k.$$

α, δ_1 Si l'on ajoute tous ces polynômes, on aura bien un polynôme $\varphi(x)$ qui prendra les valeurs $y_0, y_1, \cdots y_n$ pour $x_0, x_1, \cdots x_n$. En désignant par $X_0, X_1, \cdots X_n$ les polynômes représentés par les fractions, polynômes qui ne dépendent que de $x_0, x_1, \cdots x_n$, on a donc

$$(\Gamma) \qquad y = \varphi(x) = y_0 X_0 + y_1 X_1 + \cdots + y_n X_n.$$

L'aire limitée par cette courbe est

$$\Sigma = y_0 \int_a^b X_0 \, dx + \cdots + y_n \int_a^b X_n \, dx.$$

Solution pratique. Formule de Cotes. — Les intégrales à calculer

ρ dépendent des points de division choisis et des limites ab.

ψ Il semble donc que l'on doive recommencer le calcul de ces intégrales dans chaque cas particulier. Cotes a indiqué une méthode permettant, sous certaines conditions, de faire ce calcul une fois pour toutes.

Considérons l'intégrale

$$I_k = \int_a^b \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_n)} dx,$$

et faisons le changement de variable

$$x = a + (b - a)\theta, \qquad dx = (b - a)d\theta.$$

δ_1 Lorsque x varie de a à b, θ varie de 0 à 1. Soient $\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_n$ les valeurs de θ correspondant à $x_0, x_1, \cdots x_n$. On a

$$x_k = a + (b - a)\theta_k, \qquad \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_k - \theta_i}.$$

L'intégrale devient donc

$$I_k = (b - a) \int_0^1 \frac{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta_1) \cdots (\theta - \theta_n)}{(\theta_k - \theta_0) \cdots (\theta_k - \theta_n)} d\theta.$$

(Le facteur $(\theta - \theta_k)$ ne figure pas au numérateur, ni le facteur $(\theta_k - \theta_k)$ au dénominateur).

Nous désignerons par $J_0, J_1, \cdots J_n$, les nouvelles intégrales

$$J_k = \int_0^1 \frac{(\theta - \theta_0) \cdots (\theta - \theta_n)}{(\theta_k - \theta_0) \cdots (\theta_k - \theta_n)} d\theta.$$

Par suite

$$\Sigma = (b - a)[y_0 J_0 + y_1 J_1 + \cdots y_n J_n].$$

ρ, R

Or 1° dans ces nouvelles intégrales, les limites 0, 1, sont fixes, indépendantes du cas particulier traité.

σ

2° On a $\theta_k = \frac{x_k - a}{b - a}$; θ_k représente donc le rapport dans lequel le point d'abscisse x_k partage l'intervalle ab :

ν, α

Si donc, on convient, dans tous les cas, de partager l'intervalle ab par des points de division, toujours dans les mêmes rapports, ces nombres $\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_n$ seront eux-mêmes fixes et par suite les intégrales seront les mêmes quel que soit le cas particulier. Ce sont des nombres que l'on peut calculer à l'avance (pour chaque valeur de n) et pour des valeurs choisies des rapports θ.

Remarques. Propriétés. — Calculons la somme $J_0 + J_1 + \cdots + J_n$.

δ_1

On a

$$J_0 + J_1 + \cdots + J_n = \int_0^1 (\Theta_0 + \Theta_1 + \cdots + \Theta_n) d\theta,$$

en désignant par Θ_k le polynôme

$$\Theta_k = \frac{(\theta - \theta_0) \cdots (\theta - \theta_n)}{(\theta_k - \theta_0) \cdots (\theta_k - \theta_n)}.$$

ρ

Or ce polynôme Θ_k de degré n s'annule pour toutes les valeurs sauf θ_k et prend la valeur 1 pour $\theta = \theta_k$.

Posons

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_n.$$

Ce polynôme $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 + \cdots + \Theta_n$, prendra la valeur 1 pour $n + 1$ valeurs, $\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_n$.

Ce polynôme, de degré n, se réduit donc identiquement à la constante 1. Par suite

$$J_0 + J_1 + \cdots + J_n = \int_0^1 d\theta = 1.$$

Ainsi, *quel que soit le mode de décomposition de l'intervalle, la somme de toutes les intégrales est égale à* 1, ce qui permet de diminuer d'une unité le nombre des intégrales à calculer.

Prenons maintenant un mode de décomposition de l'intervalle assujetti simplement a être symétrique par rapport au point milieu $\frac{b+a}{2}$.

Les rapports $\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_n$ seront donc tels que

$$\theta_0 + \theta_n = 1, \qquad \theta_k + \theta_{n-k} = 1.$$

Considérons les deux intégrales J_k et J_{n-k}. Dans la première

$$J_k = \int_0^1 \frac{(\theta - \theta_0)\cdots(\theta - \theta_n)}{(\theta_k - \theta_0)\cdots(\theta_k - \theta_n)}\,d\theta = \int_0^1 \Pi\left(\frac{\theta - \theta_i}{\theta_k - \theta_i}\right)d\theta$$

(Π désignant un produit de facteurs), faisons le changement de variable $\theta = 1 - \zeta$. On aura $d\theta = -d\zeta$ et les nouvelles limites seront 1 et 0. On aura donc successivement

$$J_k = \int_0^1 \Pi\left(\frac{1 - \zeta - \theta_i}{\theta_k - \theta_i}\right)d\zeta = \int_0^1 \Pi\left(\frac{\zeta - \theta_{n-i}}{\theta_i - \theta_k}\right)d\zeta = \int_0^1 \Pi\left(\frac{\zeta - \theta_{n-i}}{\theta_{n-k} - \theta_{n-i}}\right)d\zeta.$$

A la notation près, cette intégrale est donc J_{n-k}.

Ainsi : *A la seule condition que le mode de décomposition de l'intervalle soit symétrique par rapport au point milieu, les intégrales équidistantes des extrêmes sont égales :*

$$J_0 = J_n, \qquad J_k = J_{n-k}.$$

En tenant compte de la relation générale

$$J_0 + J_1 + \cdots + J_n = 1,$$

il suffit donc, dans ce cas, de calculer $\frac{n-1}{2}$ intégrales.

Des considérations géométriques très simples permettent d'obtenir les deux résultats précédents.

Considérons d'abord comme courbe, la droite $y = 1$. δ_1, ξ La courbe Γ que nous lui substituons sera évidemment confondue avec elle. L'aire Σ doit donc être égale à $b - a$. On doit donc avoir

$$J_0 + J_1 + \cdots + J_n = 1.$$

2° Considérons une courbe quelconque $y = f(x)$ et α, ξ prenons la courbe symétrique par rapport à l'abscisse moyenne.

Puisque les points de division sur ox sont également symétriques, les points correspondants pris sur les deux courbes seront aussi symétriques. Les deux courbes Γ et Γ' que nous substituons à ces deux courbes symétriques seront donc évidemment aussi symétriques par rapport à cette abscisse moyenne et leurs aires seront égales. Comme à l'ordonnée y_k correspond l'ordonnée y_{n-k} de la deuxième, on doit donc avoir

$$(b-a)[y_0J_0 + y_1J_1 + \cdots + y_nJ_n] = (b-a)[y_nJ_0 + y_{n-1}J_1 + \cdots + y_0J_n],$$

c'est-à-dire

$$y_0(J_0 - J_n) + y_1(J_1 - J_{n-1}) + \cdots = 0.$$

δ_1, ρ Or les ordonnées $y_0, y_1, \cdots$ pouvant être quelconques, cette égalité ne peut avoir lieu que si

$$J_0 = J_n, \qquad J_1 = J_{n-1} \cdots J_n = J_0.$$

Ce sont bien les résultats que nous avons obtenus.

La condition de symétrie est satisfaite en particulier si l'on décompose l'intervalle en n parties égales. On a dans ce cas

$$\theta_0 = 0, \qquad \theta_1 = \frac{1}{n} \cdots \theta_k = \frac{k}{n} \cdots \theta_n = 1.$$

Pour chaque valeur de n, on peut calculer les coefficients numériques $J_0, J_1, \cdots J_n$, qui serviront dans tous les cas.

Cas particuliers. — $n = 1$. δ On fait donc passer une courbe de degré 1, c'est-à-dire une droite, par les deux points correspondant à $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$, c'est-à-dire par les deux points AB. On a

$$J_0 + J_1 = 1, \quad J_0 = J_1 \quad \text{d'où} \quad J_0 = J_1 = \frac{1}{2},$$

et par suite on a la valeur approchée

$$\Sigma = (b-a)\frac{y_0 + y_1}{2}.$$

$n = 2$. On fait passer une courbe parabolique (d'axe parallèle à oy) de degré 2 par les trois points correspondant à $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_1 = 1$.

On a trois intégrales à calculer J_0, J_1, J_2 entre lesquelles on a

$$J_0 + J_1 + J_2 = 1, \qquad J_0 = J_2.$$

Il suffit donc de calculer une seule des intégrales. On a

$$J_0 = \int_0^1 \frac{\left(\theta - \frac{1}{2}\right)(\theta - 1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)} d\theta = \int_0^1 (2\theta - 1)(\theta - 1) d\theta = \frac{1}{6}.$$

Donc

$$J_0 = J_2 = \frac{1}{6}, \qquad J_1 = \frac{4}{6}.$$

L'aire approchée est

$$\Sigma = \frac{b - a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$n = 3$. On a à calculer 4 intégrales entre lesquelles on a les relations

$$J_0 + J_1 + J_2 + J_3 = 1, \qquad J_0 = J_3, \qquad J_1 = J_2.$$

Il suffit donc encore de calculer par exemple J_0

$$J_0 = \int_0^1 \frac{\left(\theta - \frac{1}{3}\right)\left(\theta - \frac{2}{3}\right)(\theta - 1)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)(-1)} d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^1 (3\theta - 1)(3\theta - 2)(\theta - 1) d\theta.$$

En développant et intégrant, on obtient $J_0 = \frac{1}{8} = J_3$.

Par suite $J_1 = J_2 = \frac{3}{8}$

$$\Sigma = \frac{b - a}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

$n = 4$. On trouvera de même

$$\Sigma = \frac{b - a}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).$$

Dans la pratique, on peut, soit simplement appliquer la formule de Cotes, soit décomposer l'intervalle en n parties égales.

Soient $y_0, y_1, \cdots y_n$ les ordonnées correspondant aux points de

division et soient $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ les ordonnées intermédiaires. Appliquons à chacun des intervalles la méthode de Cotes pour $n = 2$. Nous aurons

$$\Sigma = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + 4\eta_1 + y_1) + (y_1 + 4\eta_2 + y_2) + \cdots + (y_{n-1} + 4\eta_n + y_n)]$$

c'est-à-dire

$$\Sigma = \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + 4(\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n)]$$

formule due à Simpson.

Polynômes d'approximation. — Il semblerait que, plus l'on prend sur la courbe entre a et b un nombre de points considérable, plus l'approximation dans l'intégrale sera grande. On a démontré, qu'étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle ab, on peut déterminer un polynôme $P(x)$ qui diffère de $f(x)$ de moins de ε dans tout l'intervalle. Mais ce polynôme $P(x)$ ne s'obtient pas en général par la méthode exposée ci-dessus en prenant un nombre suffisamment grand de points de la courbe dans l'intervalle ab, quelque grand que soit ce nombre, et il n'est pas démontré que l'approximation devienne de plus en plus grande à mesure que l'on multiplie le nombre de points pris sur la courbe. Cependant nous admettrons ce résultat dans les applications habituelles.

II. — MÉTHODE DE GAUSS

Nous considérons dans l'intervalle ab la fonction $y = f(x)$ représentée par la courbe C. Nous lui substituons d'abord une courbe C' d'équation

$$y = F(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_M x^M,$$

courbe parabolique de degré M passant par exemple par M + 1 points de la courbe. Nous admettrons que l'approximation est d'autant plus grande que M sera plus grand et que dans tout l'intervalle

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

C'est l'aire limitée par C' que nous prendrons pour valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Mais il faudrait, pour l'obtenir, β calculer les

coefficients $c_0, c_1, \cdots c_M$. Nous allons montrer que l'on peut se dispenser de ce calcul et simplifier même le calcul de l'intégrale à la condition de choisir convenablement les points de division.

A cet effet considérons seulement $n + 1$ de ces points ($n < M$)

$$x_0, y_0, x_1, y_1, \cdots x_n, y_n.$$

et la courbe parabolique passant par ces points. D'après la formule de Lagrange, son équation est

$$y = \varphi(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + \cdots + y_n\varphi_n(x).$$

α, ν

Puisque ces points ont été choisis parmi les points qui ont servi à déterminer C′, on a

$$y_0 = c_0 + c_1x_0 + \cdots + c_Mx_0^M$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_k = c_0 + c_1x_k + \cdots + c_Mx_k^M.$$

δ_1

L'équation de Γ se met donc sous la forme

$$c_0(\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n) + c_1(x_0\varphi_0 + x_1\varphi_1 + \cdots + x_n\varphi_n) + \cdots$$
$$+ c_k(x_0^k\varphi_0 + \cdots + x_n^k\varphi_n) + \cdots$$

c'est-à-dire sous la forme $y = \Sigma c_k\psi_k$, en posant

$$\psi_k = x_0^k\varphi_0 + x_1^k\varphi_1 + \cdots x_n^k\varphi_n.$$

δ_1

La différence entre les aires délimitées par C′ et par Γ est donc

$$\varepsilon = C' - \Gamma = \Sigma\int_a^b c_k(x^k - \psi_k)dx = c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_k\varepsilon_k + \cdots + c_M\varepsilon_M$$

avec

$$\varepsilon_k = \int_a^b (x^k - \psi_k)dx.$$

ξ

Considérons le polynôme $u_k = x^k - \psi_k$; pour une des valeurs quelconques x_i, on a

$$u_k(x_i) = x_i^k - \psi_k(x_i).$$

ρ

Or tous les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n$ s'annulent sauf le polynôme φ_i qui se réduit à 1. Pour la valeur x_i on a donc

$$\psi_k(x_i) = x_i^k \quad ; \quad u_k(x_i) = x_i^k - x_i^k = 0.$$

d, ρ

Le polynôme $u_k(x)$ s'annule donc pour toutes les valeurs $x_0, x_1, \cdots x_n$. Or tous les polynômes ψ_k sont de degré n au plus. Si donc $k \leqslant n$, le polynôme u_k est identiquement nul et par suite $\varepsilon_k = 0$.

Nous arrivons donc à ce premier résultat :

ω

Quels que soient les $n+1$ *points choisis parmi les* $M+1$, *toutes les erreurs partielles* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_k \cdots \varepsilon_n$ *correspondant aux* $n+1$ *premiers coefficients* $c_0, c_1, \cdots c_n$ *sont identiquement nulles.*

α_2, ν

Cherchons si l'on ne peut pas disposer des points $x_0, x_1, \cdots x_n$ de manière à faire disparaître également quelques-unes des erreurs suivantes.

β

Si $k > n$, on peut écrire

$$u_k = x^k - \psi_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)Q$$

Q étant de degré $k - (n+1)$.

ν, ξ

On est donc amené à chercher une équation de degré $n+1$ dont toutes les racines soient comprises entre a et b.

σ_2, R

Or considérons le polynôme de Legendre

$$X_{n+1} = D^{n+1}(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}.$$

σ_2

En partant de l'équation $U = (x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1} = 0$, dont toutes les racines sont réelles (égales à a et b), et appliquant le théorème de Rolle aux équations dérivées successives, on démontre aisément qu'une dérivée quelconque D^iU a toutes ses racines réelles comprises entre a et b (ou égales) et séparées par les racines de la dérivée $D^{i-1}U$.

δ_1

D^nU admet encore une fois les racines a, b et l'équation $X_{n+1} = D^{n+1}U = 0$ admet ses $n+1$ racines réelles et comprises entre a et b.

Prenons-les pour racines $x_0, x_1, \cdots x_n$.

Nous avons à considérer l'intégrale

$$\varepsilon_k = \int_a^b (x_k - \psi_k)dx = \int_a^b X_{n+1}Q\,dx = \int_a^b QD^{n+1}U\,dx.$$

α, δ_1

En intégrant par parties

$$\varepsilon_k = (QD^nU)_a^b - \int_a^b Q'D^nU\,dx$$

ρ

La partie toute intégrée s'annule pour $x = a$, $x = b$. On a donc

$$'D^nU\,dx.$$

δ₁ En intégrant successivement par parties, on obtiendra

$$\varepsilon_k = +\int_a^b Q^n D^{n-1} U\, dx = \cdots = (-1)^h \int_a^b Q^h D^{n+1-h} U\, dx.$$

On pourra continuer ainsi jusqu'à $h = n + 1$ et par suite

$$\varepsilon_k = (-1)^{n+1} \int_a^b Q^{n+1} D^0 U\, dx.$$

ω Si donc le polynôme Q est de degré q, au plus égal à n, c'est-à-dire si

$$k - (n + 1) \leqslant n, \qquad k \leqslant 2n + 1,$$

les erreurs correspondantes ε_k s'annuleront aussi. En particulier si $M \leqslant 2n + 1$, tous les termes de ε s'annulent.

ω *En choisissant pour $n + 1$ points, les points correspondant aux racines de l'équation*

$$D^{n+1} (x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1} = 0,$$

on obtient donc exactement le même résultat, et par suite la même approximation, que si l'on avait pris sur la courbe $2n + 2$ points.

σ En d'autres termes, en calculant des intégrales portant sur des polynômes de degré n, on obtient la même approximation que si l'on avait choisi $2n + 2$ points et si l'on avait calculé ensuite les intégrales portant sur des polynômes de degré $2n + 1$.

Nous avons établi en passant une propriété remarquable des polynômes de Legendre X_{n+1}: ρ Si Q est un polynôme quelconque de degré au plus égal à n, l'intégrale $\int_a^b X_{n+1} Q\, dx$ est nulle.

Application pratique. — Nous sommes donc amenés à calculer les racines du polynôme

$$X_{n+1} = D^{n+1}(x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1}.$$

ψ Il semble que ces racines doivent être calculées, dans chaque cas particulier, suivant les valeurs des limites a, b. α Nous allons voir qu'on peut être ramené à une équation type, par un changement de variable, et cela de deux manières différentes.

1re Transformation. — Posons

$$x = a + (b - a)t, \qquad x - a = (b - a)t, \qquad x - b = (b - a)(t - 1).$$

A un facteur constant près, une dérivée par rapport à x se réduit à la dérivée par rapport à t.

L'équation $X_{n+1} = 0$ se transforme en

$$D^{n+1} t^{n+1} (t - 1)^{n+1} = 0.$$

ω

Cette équation est indépendante de a et b ; elle a toutes ses racines réelles comprises entre 0 et 1. Désignons-les par $t_0, t_1, \cdots t_n$. Les racines correspondantes de l'équation en x sont

$$x_i = a + (b - a)t_i.$$

δ_1

Soient $y_0, y_1, \cdots y_n$ les valeurs correspondantes des y.

ν

Faisons la même transformation dans les intégrales

$$\int_a^b \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_n)} dx.$$

Elles deviennent

$$(b - a) \int_0^1 \frac{(t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n)}{(t_i - t_0)(t_i - t_1) \cdots (t_i - t_n)} dt = (b - a) T_i.$$

On a donc pour l'aire approchée

$$\Sigma = (b - a)(y_0 T_0 + y_1 T_1 + \cdots + y_n T_n).$$

On peut dresser, pour chaque valeur de n, une table numérique des racines t_i et des coefficients T_i.

2e Transformation. — Posons

$$x = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \tau.$$

δ_1

On a

$$x - a = \frac{b - a}{2}(\tau + 1), \qquad x - b = \frac{b - a}{2}(\tau - 1).$$

L'équation $X_{n+1} = 0$ se transforme donc en

$$D^{n+1}(\tau + 1)^{n+1} (\tau - 1)^{n+1} = 0 \qquad \text{ou} \qquad D^{n+1}(\tau^2 - 1)^{n+1} = 0.$$

C'est une équation type dont toutes les racines sont comprises entre — 1 et + 1. On calculera dans chaque cas particulier les

valeurs correspondantes des x puis des y. En faisant la même transformation dans les intégrales, on obtiendra pour expression de l'aire

$$\Sigma = (b - a)(y_0 T'_0 + y_1 T'_1 + \cdots + y_n T'_n),$$

en posant

$$T'_i = \int_{-1}^{+1} \frac{(\tau - \tau_0)(\tau - \tau_1)\cdots(\tau - \tau_n)}{(\tau_i - \tau_0)\cdots(\tau_i - \tau_n)} d\tau.$$

On peut dresser pour chaque valeur de n la table numérique des racines τ et des coefficients T'.

III. — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Nous avons recherché une représentation de la fonction $y = f(x)$ dans l'intervalle ab, au moyen d'un polynôme. Nous pouvons rechercher de même si la fonction ne pourrait pas être représentée dans un intervalle par une série de la forme

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots a_n \cos nx + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2n + \cdots b_n \sin nx + \cdots$$

(La suite montrera pourquoi l'on prend le premier terme sous la forme $\frac{1}{2} a_0$).

D'une façon plus précise nous considérons la série

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

et nous supposons que cette série est uniformément convergente dans l'intervalle.

Nous allons montrer d'abord, que, si la représentation est possible, elle est unique et nous établirons la valeur nécessaire des coefficients a, b.

Rappelons les résultats suivants :

Si m et n sont entiers

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} dx = 2\pi, \qquad \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \cos mx\, dx = 0, \qquad \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sin mx\, dx = 0,$$

Si $m \neq n$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \qquad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0.$$

Si $m = n$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi, \qquad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi.$$

Détermination des coefficients. — Pour déterminer a_0, intégrons les deux membres de l'égalité dans l'intervalle 2π, en intégrant terme à terme la série supposée uniformément convergente. Tous les termes donneront des résultats nuls sauf le premier. Nous savons que l'intégrale de la fonction représentée par une série uniformément convergente est égale à la somme des intégrales des termes. Donc

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\, dx = \pi a_0.$$

Pour déterminer a_n, multiplions les deux membres par $\cos mx$ et intégrons encore dans l'intervalle 2π. D'après les remarques ci-dessus, tous les termes du second membre donneront encore des résultats nuls, sauf le terme en $\cos^2 mx$ et il restera seulement

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_m \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi a_m.$$

Nous déterminerons de même b_n en multipliant les deux membres par $\sin nx$ et en intégrant dans l'intervalle 2π

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx\, dx = a_n \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi a_n.$$

Les coefficients sont donc bien déterminés et on a

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos mx\, dx \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin mx\, dx.$$

La formule donnant a_m est valable pour a_0, grâce à l'introduction du facteur $\frac{1}{2}$.

Remarque I. Mais il faut bien remarquer que rien ne démontre que la série ainsi construite représentera effectivement la

fonction $f(x)$, ni même seulement, si elle sera convergente dans l'intervalle. De toutes façons, le développement ρ ne pourra représenter la fonction que dans un intervalle 2π, à moins que la fonction $f(x)$ admette elle-même la période 2π. Dans le cas général, le développement en série sera représenté par une série d'arcs de courbe identiques décalés de 2π, l'un d'eux se confondant avec l'arc de courbe $y = f(x)$.

II. Si l'on recherche la représentation de $f(x)$ dans un intervalle total de 2π, les coefficients sont, comme on l'a vu, déterminés de façon unique, mais si l'on veut cette représentation dans un ψ intervalle moindre, cette représentation pourra être obtenue π d'une infinité de manières. Si par exemple on veut la représentation de 0 à $\alpha(\alpha \leqslant 2\pi)$, α il suffit de considérer une fonction auxiliaire $F(x)$ qui soit identique à $f(x)$ de 0 à α, et déterminée arbitrairement de α à 2π. La représentation de cette fonction par une série trigonométrique donnera en particulier $f(x)$ de 0 à α.

Considérons par exemple l'intervalle 0, π. On peut se proposer de rechercher une série qui ne renferme que des cosinus. A cet effet considérons une fonction auxiliaire $F(x)$, telle que

$$F(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$F(x) = f(-x) \quad \text{pour} \quad -\pi \leqslant x < 0.$$

δ₁ On aura

$$a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

En posant $x = -x'$, la premiere intégrale devient

$$-\int_{\pi}^{0} f(x')dx' = \int_{0}^{\pi} f(x')dx'.$$

On a donc $$a_0 = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

δ₁ De même $$a_m = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(-x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Si dans la première nous posons $x = -x'$, elle devient

$$\int_0^{\pi} f(x') \sin nx'\,dx' = -\int_0^{\pi} f(x') \sin nx'\,dx'.$$

On a donc $b_n = 0$.

De même recherchons un développement qui ne renferme que des sinus.

A priori, on remarque que ce deuxième membre sera une fonction impaire en x ; il faut donc considérer une fonction auxiliaire $F(x)$ telle que

$$F(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$F(x) = -f(-x) \quad \text{pour} \quad -\pi \leqslant x < 0.$$

Cette fonction $F(x)$ étant ainsi impaire, il en est de même des fonctions $F(x) \cos nx$; les intégrales

$$a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

sont nulles.

Les fonctions $F(x) \sin nx$ sont paires et l'on a

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx.$$

Développement d'une fonction dans un intervalle $2l$. — Considérons la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $-l$, $+l$. Faisons le changement de variable $y = \frac{\pi x}{l}$, les nouvelles limites de y seront $-\pi$ et $+\pi$.

La fonction $f(x)$ devient une fonction de y dont on peut rechercher la représentation dans l'intervalle $-\pi$, $+\pi$, sous la forme

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} a_0 + \Sigma a_m \cos my + \Sigma b_m \sin my.$$

On aura

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(y) \cos my\,dy \quad , \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(y) \sin my\,dy.$$

Dans ces nouvelles intégrales, faisons le changement de variable $y = \frac{\pi x}{l}$. Il viendra

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x) \cos m\frac{\pi x}{l} \times \frac{\pi}{l}\,dx = \frac{\pi}{l}\int_{-l}^{+l} f x) \cos \frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

De même

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx.$$

Les coefficients a, b sont entièrement déterminés au moyen dé la fonction donnée $f(x)$.

On pourrait obtenir un développement valable de 0 à l ne renfermant que des sinus. Les coefficients seraient

$$b_m = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx.$$

Il semblerait que le résultat que nous venons d'obtenir ρ soit en contradiction avec le résultat précédent, π puisque nous obtenons une représentation unique dans un intervalle qui peut être inférieur ou supérieur à 2π.

ρ,R

Il suffit de remarquer que nous obtenons ici un développement en série trigonométrique procédant suivant les lignes trigonmétriques des arcs multiples de $\frac{\pi x}{l}$ et non en série trigonométrique des arcs multiples de x.

Application au problème des cordes vibrantes. — Lorsqu'on écarte d'ue manière quelconque une corde élastique de sa position

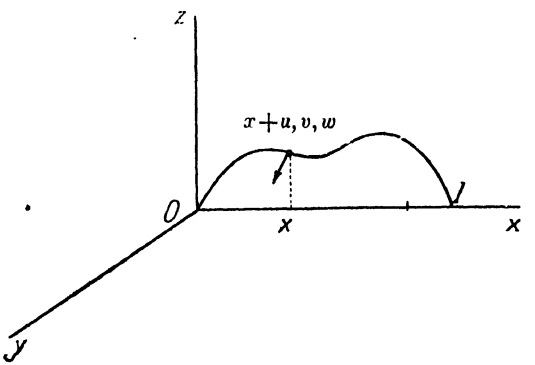


Fig. 24.

d'équilibre, en maintenant fixes ses deux extrémités, et qu'on l'abandonne ensuite en donnant à chacun de ses points une vitesse initiale quelconque, chacun des points de cette corde se met ensuite à vibrer autour de sa position d'équilibre.

Si nous prenons pour axe des x, la position d'équilibre de la corde de longueur l, et pour origine l'une des extrémités, le point qui a pour coordonnées d'équilibre $x, 0, 0$, a, à l'instant t, des coordonnées $x + u, v, w$; u, v, w dépendent de x et de t. On démontre qu'elles satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

a désignant une constante dépendant de l'élasticité de la corde.

Ces fonctions doivent de plus satisfaire aux conditions initiales suivantes :

1° elles sont nulles quel que soit t pour $x = 0$ et $x = l$.

2° à l'instant initial, les points de cette corde (que nous supposerons se prolonger dans les deux sens) compris entre 0 et l ont un déplacement u (et de même v, w) imposé arbitrairement $u = \varphi(x)$ et de même la vitesse initiale $\frac{\partial u}{\partial t}$ peut être imposée arbitrairement suivant une loi $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$.

Cherchons à construire une fonction $u(x, t)$ qui satisfasse à toutes ces conditions.

Tout d'abord la fonction

$$u_\lambda = A_\lambda \cos a\lambda t \sin \lambda x + B_\lambda \sin a\lambda t \sin \lambda x$$

satisfait quel que soit λ à l'équation 1 et par suite aussi une somme ou même une série de fonctions semblables. De plus, la fonction représentée par cette série (supposée convergente) sera nulle quel que soit t pour $x = 0$ (cette condition interdit l'emploi de termes en $\cos \lambda x$).

1° pour que cette fonction soit nulle quel que soit t pour $x = l$, il faut que l'on ait

$$\sin \lambda l = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lambda l = k\pi \qquad \lambda = \frac{k\pi}{l}.$$

k étant un entier quelconque. La fonction

$$u = \Sigma A_k \cos \frac{ak\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x + \Sigma B_k \sin \frac{ak\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x$$

satisfait donc, quels que soient les coefficients A_k, B_k, à l'équation (1) et aux conditions 1°.

2° à l'instant initial $t = 0$ on doit avoir

$$u = \varphi(x), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(x).$$

Or pour $t = 0$

$$u = \Sigma A_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \Sigma \frac{ak\pi}{l} B_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \psi(x).$$

La première de ces égalités montre que les coefficients A_k sont les coefficients de la série trigonométrique, ne renfermant que des sinus, représentant $\varphi(x)$ dans l'intervalle $0, l$; la deuxième montre que les facteurs $\frac{ak\pi}{l} B_k$ sont de même les coefficients de la série trigonométrique représentant $\psi(x)$, dans l'intervalle $0, l$, ne renfermant que des sinus.

On a donc nécessairement

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx,$$

$$\frac{ak\pi}{l} B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx.$$

Ces coefficients sont donc entièrement déterminés et l'on a la représentation de la fonction u qui satisfait à toutes les conditions du problème, par un double développement en série trigonométrique.

Étude de la convergence. — Nous allons maintenant rechercher à quelles conditions la série trigonométrique que nous avons construite sera convergente et représentera effectivement la fonction donnée.

Nous avons obtenu pour expression des coefficients

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin m\alpha \, d\alpha,$$

en désignant par α la variable d'intégration pour la différentier de la variable x. Nous pouvons alors sans inconvénient faire entrer sous le signe $\int$ le facteur $\cos mx$ ou $\sin mx$.

α, ξ

La somme S_n des termes jusqu'à cos nx ou sin nx s'écrira

$$\pi S_n = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{k=1}^{k=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\cos k\alpha\,d\alpha + \sum_{k=1}^{k=n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin kx\sin k\alpha\,d\alpha.$$

α, ν

Nous pouvons rassembler toutes ces intégrales en une seule et mettre $f(\alpha)$ en facteur

$$\pi S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \Sigma\cos kx\cos k\alpha + \Sigma\sin kx\sin k\alpha\right]d\alpha.$$

δ1

En rassemblant les termes en cos kx et sin kx

$$\pi S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\left[\frac{1}{2} + \Sigma\cos k(x-\alpha)\right]d\alpha.$$

Or d'après une formule connue de trigonométrie

$$\frac{1}{2} + \cos a + \cos 2a + \cdots + \cos na = \frac{\sin(2n+1)\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}},$$

par suite

$$\pi S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-\alpha}{2}}{2\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

ν

Il est naturel de faire le changement de variable $\frac{\alpha - x}{2} = y$. On a donc finalement

$$\pi S_n = \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy.$$

ρ

Cette intégrale se décompose elle-même en deux

$$\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}}.$$

Dans la première changeons y en $-z$. Elle deviendra

$$\int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

ω, ρ On est donc amené finalement à considérer la limite d'intégrales de la forme

$$\int_0^h F(y)\frac{\sin ny}{\sin y}\,dy$$

lorsque n augmente indéfiniment par valeurs impaires.

Nous établirons quelques résultats préliminaires.

1° σ1 Nous avons déjà étudié l'intégrale $\int_0^l \frac{\sin x}{x}\,dx$. σ2 Nous avons démontré que cette intégrale existe quel que soit l; elle est au plus égale à $A = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$. Enfin lorsque l augmente indéfiniment elle tend vers $\frac{\pi}{2}$ (dérivation sous le signe $\int$).

Prenons l'intégrale $\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,dx$ où h est un nombre positif quelconque.

α Faisons la transformation $nx = t$. Elle devient

$$\int_0^{nh} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

ρ Elle se ramène donc à l'intégrale précédente; elle est donc certainement inférieure à A et lorsque n augmente indéfiniment elle tend vers $\frac{\pi}{2}$. Ce résultat est remarquable puisqu'il est indépendant de h. On en déduit aussitôt que l'intégrale $\int_a^b \frac{\sin nx}{x}\,dx$ où a, b sont deux nombres positifs quelconques tend vers zéro, quels que soient a, b, lorsque n augmente indéfiniment.

2° ξ Considérons maintenant l'intégrale de Dirichlet

$$J = \int_a^b \varphi(x)\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

en supposant $0 < a < b \leqslant \pi$, où $\varphi(x)$ est une fonction constamment de même signe, décroissante ou stationnaire dans l'intervalle; cherchons sa limite lorsque n croît indéfiniment.

ψ, ν Il est assez naturel de penser que cette intégrale tendra elle-même vers zéro.

d, α

En effet la fonction $\frac{\varphi(x)}{x}$ est elle-même décroissante dans l'intervalle. En appliquant à l'intégrale le second théorème de la moyenne, on peut écrire

$$I = \frac{\varphi(a)}{a} \int_a^{\xi} \sin nx\, dx = \frac{\varphi(a)}{na} (\cos na - \cos n\xi).$$

La parenthèse est comprise entre -2 et $+2$. L'intégrale tend donc vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Prenons maintenant la même intégrale de 0 à π

$$I = \int_0^{\pi} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Nous supposerons que $\varphi(x)$, constamment décroissante, puisse même changer de signe. Soit h un nombre intermédiaire quelconque entre 0 et π. Nous aurons

$$I = \int_0^{h} + \int_h^{\pi}.$$

Il est assez naturel de songer à simplifier ces intégrales en faisant sortir $\varphi(x)$ du signe $\int_{\alpha}^{\delta_1}$. A cet effet appliquons à la première intégrale le théorème de la moyenne sous sa forme la plus générale. Nous aurons (avec une notation que nous expliquons un peu plus loin).

$$\int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \varphi(+0) \int_0^{\xi} \frac{\sin nx}{x} dx + \varphi(h-0) \int_{\xi}^{h} \frac{\sin nx}{x} dx$$

$$= \varphi(+0) \int_0^h \frac{\sin nx}{x} dx + [\varphi(h-0) - \varphi(+0)] \int_{\xi}^{h} \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Par suite

$$I = \varphi(+0) \int_0^h \frac{\sin nx}{x} dx + [\varphi(h-0) - \varphi(+0)] \int_{\xi}^{h} \frac{\sin nx}{x} dx$$

$$+ \int_h^{\pi} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Nous désignons par $\varphi(+0)$ la limite vers laquelle tend $\varphi(x)$ lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, et de même $\varphi(h-0)$ est la limite vers laquelle tend $\varphi(x)$ lorsque x tend vers h par valeurs

inférieures à h. $^{\pi, \sigma_2}$ Cette notation, se justifie aisément si l'on se reporte à la démonstration du théorème d'Abel qui a servi de base à l'établissement de la formule ; elle permet de ne rien préjuger sur la fonction en dehors de l'intervalle 0, h.

Nous devons chercher la limite de I, lorsque n croît indéfiniment.

$^{\delta_1}$ La fonction $\varphi(x)$ étant supposée continue, nous pouvons choisir h assez petit pour que

$$\varphi(h - 0) - \varphi(+ 0) < \varepsilon.$$

On peut choisir n suffisamment grand pour que la première intégrale diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que ε ; la deuxième est constamment comprise entre — A et + A. Pour des valeurs de n suffisamment grandes, la troisième enfin, d'après le résultat précédent, pourra être rendue moindre que ε'.

Pour des valeurs de n suffisamment grandes, l'intégrale diffère donc de $\frac{\pi}{2}\varphi(+ 0)$ d'une quantité moindre que toute quantité voulue.

$^{\omega}$ Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\pi} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx$ tend vers $\frac{\pi}{2}\varphi(+ 0)$.

Nous avons supposé que la fonction $\varphi(x)$ était constamment décroissante dans l'intervalle. Il est facile de lever cette restriction.

Tout d'abord si la fonction était constamment croissante dans l'intervalle, $^{\alpha}$ la fonction $-\varphi(x)$ serait constamment décroissante : l'intégrale

$$\int_0^{+\pi} -\varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx$$

tendrait vers $-\frac{\pi}{2}\varphi(+ 0)$ et par suite l'intégrale donnée tendrait vers $\frac{\pi}{2}\varphi(+ 0)$.

$^{\delta_1}$ Supposons enfin que la fonction ne soit ni constamment croissante ni constamment décroissante, mais que l'intervalle 0, π puisse être décomposé en un nombre fini d'intervalles

$$0, a, b, \dots l, \pi,$$

dans chacun desquels la fonction varie toujours dans le même sens. δ_1 L'intégrale se décomposera en

$$\int_0^a + \int_a^b + \cdots + \int_l^\pi .$$

ρ Chacune des intégrales aura pour limite zéro, sauf la première qui aura pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

Ainsi donc à la seule dernière condition (nombre fini d'oscillations), l'intégrale

$$I = \int_0^b \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx$$

tend vers $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$ *quand n croît indéfiniment* $(b \leqslant \pi)$.

Intégrale de Fourier. — 3° δ_1, ξ Enfin considérons l'intégrale de Fourier

$$J = \int_0^\pi f(x) \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx,$$

$f(x)$ étant une fonction assujettie à la même restriction que $\varphi(x)$.

α, σ_2 Si nous faisions le changement

$$f(x) = \varphi(x) \frac{\sin x}{x}$$

nous retrouverions l'intégrale précédente. Seulement ρ il faut remarquer que si la fonction $f(x)$ est donnée, la fonction $\varphi(x)$ devient infinie pour $x = \pi$.

1er Cas. — Si $b < \pi$, on a

$$\int_0^b f(x) \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx = \int_0^b \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx.$$

L'intégrale tend vers $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$, c'est-à-dire vers $\frac{\pi}{2}f(+0)$ puisque $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$.

2e Cas. — Si $b = \pi$, α nous isolerons cette valeur et partagerons l'intégrale en deux

$$J = \int_0^a + \int_a^\pi .$$

Par le changement indiqué, la première aurait pour valeur limite, $\frac{\pi}{2} f(+0)$.

Dans la seconde, faisons le changement

$$x = \pi - z.$$

Elle devient

$$\int_0^{\pi-a} f(\pi - z) \frac{\sin nz}{\sin z} dz$$

si n est impair, ce qui sera le cas. C'est donc encore une intégrale de la même forme, qui, lorsque n augmente indéfiniment, a pour valeur

$$\frac{\pi}{2} f(\pi - 0).$$

On a donc finalement

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} [f(+0) + f(\pi - 0)].$$

Cette formule fut donnée d'abord par Fourier et démontrée rigoureusement en 1829 par Dirichlet.

Revenons maintenant à la série trigonométrique que nous avons construite. Nous en avons mis les n premiers termes sous la forme

$$\pi S_n = \int_0^{\frac{\pi - x}{2}} f(x + 2y) \frac{\sin (2n+1)y}{\sin y} dy + \int_0^{\frac{\pi + x}{2}} f(x - 2y) \frac{\sin (2n+1)y}{\sin y} dy.$$

Si x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, sans atteindre aucune de ces limites, on se trouve dans le premier cas : les intégrales ont respectivement pour valeur limite quand n croît indéfiniment

$$\frac{\pi}{2} f(x + 0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{2} f(x - 0).$$

La série trigonométrique a donc pour valeur

$$\frac{1}{2} [f(x + 0) + f(x - 0)].$$

Si, en particulier, la fonction $f(x)$ est continue pour cette

valeur de x, la série trigonométrique sera bien convergente et aura pour valeur $f(x)$.

Cas ou $x = \pi$.

δ_1, ρ

La première intégrale disparaît. Il reste simplement

$$\pi S_n = \int_0^{\pi} f(\pi - 2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\, dy.$$

On se trouve dans le deuxième cas. En posant

$$f(\pi - 2y) = \varphi(y)$$

cette intégrale a pour valeur

$$\frac{\pi}{2}[\varphi(+0) + \varphi(\pi - 0)],$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{2}[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)].$$

Pour $x = -\pi$ on retrouverait la même valeur.

ω

Conclusion. — *A la seule condition que l'intervalle* $-\pi$, $+\pi$ *puisse être décomposé en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction* $f(x)$, *finie, (nous avons laissé de côté les cas de discontinuité) varie toujours dans le même sens, la série trigonométrique est convergente.*

1° *Pour toute valeur de* x, *comprise entre* $-\pi$ *et* $+\pi$, *elle a pour valeur*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

2° *Pour* $x = \pm\pi$, *elle a pour valeur*

$$\frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)].$$

On peut même ajouter que si $f(x)$ est continue, la série du second membre $\Sigma a_m \cos mx + b_m \sin mx$ est *uniformément convergente* dans l'intervalle.

π, ξ

En effet, pour l'intégrale $\int_0^h \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx$, nous avons démontré que l'on peut déterminer n suffisamment grand pour

qu'elle diffère de $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$ d'une quantité aussi petite qu'on le veut. Si l'on passe à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2y)\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy,$$

on voit donc que l'on peut déterminer n suffisamment grand pour qu'elle diffère de $\frac{\pi}{2}f(x+0)$ d'une quantité moindre que ε, cela quel que soit x. Il en est de même de la seconde intégrale.

Si donc $f(x)$ est continue au point x, on peut donc dire que pour $n > N$, on a

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

quel que soit x.

La série $S(x)$ est donc bien uniformément convergente.

Applications. — I. Considérons la fonction $y = f(x) = x$ dans l'intervalle a, $a + 2\pi$.

Calculons les coefficients de la représentation par une série trigonométrique

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} x\,dx = 2(a+\pi),$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} x\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin mx}{m} + \frac{1}{m^2}\cos mx\right)_0^{a+2\pi} = \frac{2}{m}\sin ma,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} x\sin mx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos mx}{m} + \frac{1}{m^2}\sin mx\right)_0^{a+2\pi} = -\frac{2}{m}\cos ma.$$

On a donc

$$x = a + \pi + \Sigma\frac{2}{m}\sin ma\cos mx + \Sigma\frac{-2}{m}\cos ma\sin mx.$$

Ce que l'on peut écrire

$$x - a = \pi - 2\Sigma\frac{1}{m}\sin m(x-a).$$

En particulier dans l'intervalle 0, 2π

$$x = \pi - 2\Sigma\frac{1}{m}\sin mx = \pi - 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots\right].$$

La fonction $y = x$ étant continue pour toute valeur de x, la

série du second membre a pour valeur x pour $0 < x < 2\pi$. δ_1, ξ

Pour $x = 0$, elle doit avoir pour valeur

$$\frac{1}{2}[f(+0) + f(2\pi - 0)] = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) = \pi,$$

c'est bien ce qui a lieu ; de même pour $x = 2\pi$.

Dans l'intervalle $-\pi$, $+\pi$, on aura

$$x = -2\Sigma \frac{1}{m} \sin m(x + \pi) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \cdots\right]$$

formule valable sauf aux limites. σ, ρ En particulier pour $x = \frac{\pi}{2}$ on en déduit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots$$

On retrouve la formule de Leibnitz.

II. Considérons la fonction $y = f(x)$ définie de la façon suivante

$$\begin{array}{lll} \text{Pour } -\pi < x < 0 & , & f(x) = -1 \\ \text{Pour } \quad 0 < x < \pi & , & f(x) = +1. \end{array}$$

δ_1

Calculons la série trigonométrique qui puisse la représenter

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{0} -\cos mx\, dx + \int_{0}^{\pi} \cos mx\, dx = 0$$

$$\pi b_m = \int_{-\pi}^{0} -\sin mx\, dx + \int_{0}^{\pi} +\sin mx\, dx = \frac{2}{m}(1 - \cos m\pi).$$

Si donc m est pair, $m = 2m'$, $b_{2m'} = 0$.

Si m est impair, $b_{2m'+1} = \frac{4}{m\pi}$.

On a donc la série

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right]$$

Ou encore la série

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$

a pour valeur $-\frac{\pi}{4}$ pour x négatif, et $+\frac{\pi}{4}$ pour x positif, sauf pour les valeurs $k\pi$.

δ_1, ξ

Pour $x = -\pi$, la série doit avoir pour valeur

$$\frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)].$$

Or pour la valeur $-\pi + 0$ qui est comprise dans l'intervalle, $f(x)$ a pour valeur -1, et pour $\pi - 0$, elle a pour valeur $+1$. La série a donc pour valeur 0 pour $x = -\pi$, ce qui a bien lieu en effet.

Pour $x = 0$ (point de discontinuité de la fonction considérée), la série a pour valeur

$$\frac{1}{2}[f(-0) + f(+0)] = 0.$$

σ_1

III. Nous avons vu que la fonction

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\, dt$$

est égale à $+\frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, et à $-\frac{\pi}{2}$, si $x < 0$. C'est, à un facteur constant près, la fonction que nous venons d'examiner. Le développement en série trigonométrique donnera

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots\right]$$

qui a pour valeur $\pm\frac{\pi}{2}$ sauf pour $x = 0$ et $x = \pm\pi$.

CHAPITRE XIII

INTÉGRALES DOUBLES

Sommaire.

Les sommes s et S — *Calcul de l'intégrale double* : Dérivées.
Volume : Application. — Changement de variables (2 méthodes).
Aire d'une surface courbe : Applications.
Cas généraux de réduction à une intégrale simple : Surfaces hélicoïdales, de révolution, surfaces réglées.

I. — LES SOMMES s ET S

Considérons une fonction de deux variables $f(x, y)$ bornée dans un domaine Ω et sur son contour. Elle y admet une borne inférieure m et une borne supérieure M. Décomposons Ω par des lignes quelconques en éléments plus petits $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$. Nous supposerons que l'on puisse calculer les aires de ces éléments. Nous dirons qu'un élément ω est inférieur à δ dans toutes ses dimensions, si on peut le renfermer à l'intérieur d'un cercle de diamètre δ. (On pourrait prendre aussi un carré de côté δ).

Nous dirons que l'élément ω tend vers zéro dans toutes ses dimensions si δ tend vers zéro.

Cela étant, désignons par m_i et M_i les bornes inférieures et supérieure de f dans l'élément ω_i et considérons les sommes

$$\omega_1 m_2 + \omega_2 m_2 + \cdots + \omega_n m_n = \Sigma \omega_i m_i \qquad \text{et} \qquad \Sigma \omega_i M_i.$$

Nous allons montrer que :

Ces deux sommes ont des limites s et S lorsque tous les éléments ω_i tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions d'une manière quelconque, et ces limites sont les mêmes quel que soit l'ordre dans lequel on fait la sommation.

1° ρ On a évidemment, puisque $m < m_i < M_i < M$

$$m\Omega < \Sigma\omega_i m_i < \Sigma\omega_i M_i < M\Omega.$$

Considérons d'abord deux décompositions de Ω. Nous dirons que la décomposition Δ_1 est une décomposition consécutive à Δ, si chacun des éléments de Δ a été décomposé en éléments plus petits pour former les éléments de Δ_1.

Prenons une décomposition Δ et sa subdivision Δ_1 ξ et faisons les sommes correspondantes inférieures pour chacune de ces décompositions.

ζ Dans la subdivision Δ_1 l'élément ω_i a été décomposé par hypothèse en éléments partiels $\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \cdots + \omega_{i_l} = \omega_i$, et l'élément de la somme s est remplacé par

$$\omega_{i_1} m_{i_1} + \omega_{i_2} m_{i_2} + \cdots + \omega_{i_l} m_{i_l},$$

d Comme $m_{i_k} \geqslant m_i$

$$\Sigma\omega_{i_k} m_{i_k} > \Sigma\omega_{i_k} m_i = m_i \omega_i.$$

α En ajoutant les inégalités analogues pour tous les éléments, on en déduit

$$s_1 \geqslant s. \qquad \text{De même} \qquad S_1 \leqslant S.$$

ω Si donc nous considérons une suite de subdivisions toutes consécutives les unes aux autres $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots$ et les sommes correspondantes $s, s_1, s_2, \cdots S, S_1, S_2, \cdots$ on aura

$$s < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < S_n < S_{n-1} < \cdots < S_1 < S.$$

D'après ces inégalités, les sommes s_i qui sont toutes inférieures à S et qui vont constamment en croissant, admettent donc une borne supérieure I et les sommes supérieures S_i admettent une borne inférieure J. On a évidemment d'ailleurs $I < J$.

Subdivisions quelconques. — ψ Nous allons démontrer par exemple que les sommes S ont encore pour limite J lorsque tous les éléments de Ω tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions, *d'une manière quelconque*, et non plus seulement pour des subdivisions consécutives les unes aux autres.

δ, ξ En effet considérons les subdivisions consécutives

$\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_n, \cdots$ qui ont donné les sommes S_n ayant pour limite inférieure J. Il existera une certaine subdivision Δ qui donnera une somme S aussi voisine qu'on le veut de J, par exemple moindre que $J + \frac{\varepsilon}{2}$.

Prenons la comme point de départ.

ξ

Considérons maintenant une deuxième décomposition absolument quelconque, Δ'. Mais supposons que dans cette décomposition tous les éléments soient inférieurs à un nombre δ' que nous choisirons suffisamment petit

Soit S' la somme supérieure relative à cette décomposition. Nous allons montrer d'abord que $S' \geqslant J$.

δ, ν

En effet, nous pouvons concevoir une subdivision Δ'' de Ω comprenant à la fois tous les éléments qui ont servi à former Δ et tous ceux qui ont servi à former Δ'. Cette subdivision (consécutive à Δ) donnerait une somme S'' supérieure à J.

δ_1

D'autre part Δ'' étant consécutive également à Δ', la somme S'' serait inférieure à S'.

$$S'' < S' \qquad S'' \geqslant J.$$

ω

On a donc bien $S' \geqslant J$.

δ, α

Nous allons montrer que la somme S' peut être rendue aussi voisine qu'on le veut de J.

Pour chacun des arcs de courbe qui ont servi à former ω_i traçons les deux courbes parallèles à la distance σ. Nous formerons une région intérieure r_i d'aire égale à $\delta' l_i$, l_i désignant la somme des arcs qui ont formé ω_i (à des infiniment petits d'ordre supérieur près) et pour tous les éléments, nous aurons une région totale $r = \Sigma r_i = 2\delta' \Sigma l_i = 2\delta' L$, L désignant la somme (finie) de tous les arcs qui ont donné la décomposition bien déterminée Δ.

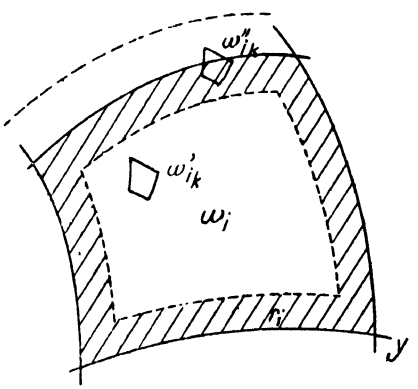


Fig. 25.

Dans chaque élément ω_i de Δ, il existe des éléments ω'_{ik} de Δ' qui

sont complètement intérieurs à ω_i, et des éléments ω''_{ik} qui ont au moins un point de contact avec le contour l de ω_i.

Les éléments complètement intérieurs donneront une somme $\Sigma M_{ik}\omega'_{ik}$. Comme $M_{ik} < M_i$, cette somme est certainement inférieure à $M_i\Sigma\omega'_{ik}$. D'autre part ces éléments complètement intérieurs remplissent certainement toute l'aire $\omega_i - r_i$. On peut poser

$$\Sigma\omega'_{ik} = \omega_i - \rho_i \qquad (\rho_i < r_i).$$

La partie de la somme relative aux éléments totalement intérieurs est donc certainement moindre que $M_i(\omega_i - \rho_i)$, à fortiori moindre que $M_i\omega_i + \rho_i \mid M_i \mid$ et à fortiori encore moindre que

$$M_i\omega_i + \rho_i \mid M_0 \mid < M_i\omega_i + r_i \mid M_0 \mid ,$$

$\mid M_0 \mid$ désignant le maximum de la valeur absolue de la fonction dans toute l'aire.

En définitive, les éléments totalement intérieurs donneront donc une somme moindre que

$$\Sigma M_i\omega_i + \mid M_0 \mid \Sigma r_i = \Sigma M_i\omega_i + \mid M_0 \mid \times 2\delta L.$$

Prenons maintenant les éléments qui ont un point de contact commun avec le contour de ω_i.

Ils sont certainement tous compris dans la bande que nous avons tracée de part et d'autre du contour et de région $2r_i$. Ils donneront donc une somme moindre que $2 \mid M_0 \mid r_i$ et pour tous les éléments ω_i, les éléments ω''_{ik} donneront une somme moindre que $\mid M_0 \mid \times 2\delta L$.

(Chacun de ces éléments ne devrait être compté qu'une fois pour l'élément ω_i et pour l'élément voisin).

Au total, la somme relative à la décomposition Δ' est moindre que

$$\Sigma M_i\omega_i + 4\delta L \mid M_0 \mid ,$$

à fortiori moindre que

$$J + \frac{\varepsilon}{2} + 4\delta L \mid M_0 \mid .$$

Choisissons δ assez petit pour que

$$4\delta L \mid M_0 \mid < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura

$$S' < J + \varepsilon.$$

On a donc bien

$$J < S' < J + \varepsilon.$$

σ

Ces inégalités expriment que les sommes S', relatives aux décompositions arbitraires Δ', ont aussi pour limite J quand δ tend vers zéro.

ω, R

En résumé, toutes les sommes s ont une limite I et toutes les sommes S ont une limite J quand toutes les aires tendent simultanément vers zéro (dans toutes leurs dimensions) quel que soit le mode de décomposition, et quel que soit l'ordre dans lequel on effectue la sommation.

Définition. — Si nous avons I = J, nous dirons que la fonction $f(x, y)$ est intégrable dans le domaine. La limite commune des deux sommes s et S s'appellera l'intégrale double de la fonction dans le domaine.

ψ

THÉORÈME. — *Toute fonction continue dans une aire limitée et sur les frontières est intégrable dans cette aire.*

δ

En effet le domaine étant borné, la continuité est uniforme. On peut donc trouver un nombre δ tel que, à la seule condition

$$| x'' - x' | < \delta, \quad | y'' - y' | < \delta,$$

on ait

$$| f(x'', y'') - f(x', y' | < \varepsilon$$

quels que soient les points M', M''.

α, δ_1

En particulier, si nous décomposons Ω en aires inférieures à δ, les différences $M_i - m_i$ seront toutes inférieures à ε. La différence de deux sommes S — s sera donc inférieure à $\varepsilon\Sigma\omega = \varepsilon\Omega$. Elle peut être rendue aussi petite qu'on le veut. Il en est à fortiori de même de la différence J — I. Ces deux nombres étant fixes, I et J sont donc bien égaux.

La limite commune se représente par le symbole

$$\iint_{\Omega} f(x, y) d\omega.$$

Si l'aire A est décomposée en aires partielles Ω_1, Ω_2, Ω_3, on a

$$\iint_{\Omega} = \iint_{\Omega_1} + \iint_{\Omega_2} + \iint_{\Omega_3}.$$

π

Il suffit en effet, dans les décompositions successives, de prendre parmi les courbes formant ces décompositions, les courbes limitant les contours Ω_1, Ω_2, Ω_3.

Cas de discontinuités. — On peut remarquer que la fonction sera encore intégrable si, tout en restant bornée, elle est discontinue pour certains points ou même le long de certaines lignes, à la seule condition que ces discontinuités puissent être renfermées dans une aire totale aussi petite qu'on le veut.

Supposons par exemple qu'il y ait une ligne de discontinuité L.

α

Considérons la bande formée par les deux courbes parallèles à la distance δ. Nous décomposerons Ω en trois régions Ω_1, Ω_2, Ω_3.

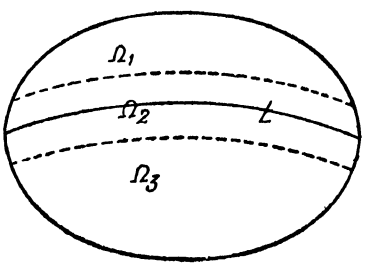


Fig. 26.

δ_1

Dans les deux régions Ω_1, Ω_3 les sommes S et s ont même limite. Dans la région Ω_2, en désignant par $|M_0|$ le maximum de la valeur absolue de la fonction dans toute l'aire, la différence des deux sommes pour l'aire Ω_2 sera moindre que $2|M_0|\Omega_2$. Or cette région peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

ω

La différence totale entre les deux sommes S et s, pour toute l'aire Ω, peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut. Les deux limites I et J sont donc bien les mêmes.

Généralisation. — On peut généraliser la notion d'intégrale double de la façon suivante :

Dans chaque élément ω_k de décomposition, prenons un point ξ_k, η_k. Nous aurons

$$m_k < f(\xi_k, \eta_k) < M_k.$$

α, ν, ξ

Multiplions toutes les inégalités semblables par l'élément d'aire correspondant ω_k et ajoutons-les. Nous aurons

$$\Sigma m_k \omega_k < \Sigma f(\xi_k, \eta_k)\omega_k < \Sigma M_k \omega_k.$$

Mais les sommes extrêmes de ces inégalités ont même limite. Il en est donc de même de la somme intermédiaire.

THÉORÈME DE LA MOYENNE. — *On peut étendre aux intégrales doubles le théorème de la moyenne.*

Soient $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, deux fonctions intégrables (le produit est évidemment intégrable). Supposons que $\varphi(x, y)$ garde un signe constant dans Ω.

Si M et m sont les bornes de f, on aura évidemment, si $\varphi(x, y) > 0$,

$$m\varphi(\xi_k, \eta_k)\omega_k < f(\xi_k, \eta_k)\varphi(\xi_k, \eta_k)\omega_k < \mathrm{M}\varphi(\xi_k, \eta_k)\omega_k.$$

Si on fait la somme de toutes les inégalités semblables et si on passe à la limite, on aura

$$m\iint_\Omega \varphi(x, y)d\omega < \iint_\Omega f(x, y)\varphi(x, y)d\omega < \mathrm{M}\iint_\Omega \varphi(x, y)d\omega.$$

On peut donc écrire

$$\iint_\Omega f(x, y)\varphi(x, x)d\omega = \mu\iint_\Omega \varphi(x, y)d\omega$$

avec $m < \mu < \mathrm{M}$.

Or la fonction $f(x, y)$, étant supposée continue dans le domaine, prend la valeur μ pour au moins un point ξ, η du domaine. On aura $\mu = f(\xi, \eta)$ et par suite

$$\iint_\Omega f(x, y)\varphi(x, y)d\omega = f(\xi, \eta)\iint_\Omega \varphi(x, y)d\omega.$$

En particulier si $\varphi(x, y) = 1$,

$$\iint f(x, y)d\omega = f(\xi, \eta) \times \Omega.$$

REMARQUE. — Les éléments $\Delta\omega$ dans lesquels on décompose Ω sont arbitraires. En particulier, si on décompose l'aire en rectangles élémentaires par des parallèles aux axes de coordonnées, on aura $d\omega = dx\,dy$, et l'intégrale double s'écrit $\iint_\Omega f(x, y)dx\,dy$, mais

il faut remarquer que dx, dy sont essentiellement positifs (contrairement à ce qui se passe pour les intégrales simples) : c'est un inconvénient de la définition.

II. — CALCUL DE L'INTÉGRALE DOUBLE

Nous supposerons d'abord pour simplifier, que le champ d'intégration est limité par une seule courbe fermée et qu'une parallèle quelconque soit à l'axe des y, soit à l'axe des x, ne rencontre le contour qu'en deux points. On peut donc mener deux tangentes parallèles à ox : $y = c$, $y = d$, et deux tangentes parallèles à oy.

Nous allons faire plusieurs simplifications successives.

1° Pour évaluer l'intégrale double, $^{\alpha,\nu}$ puisque nous pouvons décomposer le champ en éléments d'aires $\Delta\omega$ d'une manière quelconque, $^{\alpha}$ nous le décomposerons en rectangles par des parallèles à ox correspondant aux ordonnées $c, y_1, y_2, \cdots y_n, d$, et par des parallèles à oy comprises entre a et b (et que nous n'avons pas besoin de préciser).

Nous supposerons que tous les intervalles sont moindres que h et que les différences des abscisses de deux points quelconques pris dans un même arc du contour limité par deux ordonnées consécutives sont moindres que h ; nous pourrons prendre h aussi petit que nous le voudrons.

2° L'ordonnée y_k rencontre le contour en deux points d'abscisse ξ'_k, ξ_k. Par hypothèse

$$| \xi'_{k+1} - \xi'_k | < h \qquad | y_{k+1} - y_k | < h.$$

$^{\alpha,\xi}$ Considérons tous les éléments situés sur une même bande parallèle à ox comprise entre les ordonnées y_k, y_{k+1} : la bande M_kN_k, $M_{k+1}N_{k+1}$. Nous la décomposerons par des parallèles à oy, en prenant les points d'abscisses extrêmes des arcs M_kM_{k+1}, N_k, N_{k+1} (en général les abscisses ξ'_k ou ξ'_{k+1}, ξ''_k ou ξ''_{k+1}) et des abscisses intermédiaires quelconques.

Pour faire la sommation, $^{\alpha,\nu}$ nous pouvons d'abord faire la somme de tous les éléments relatifs à cette tranche, $^{\pi}$ puisque nous avons le droit de faire la sommation d'une manière quelconque.

3° Cette tranche comprend des éléments rectangulaires complètement intérieurs au domaine, limités par les abscisses $x_1, x_2, \cdots x_n$ et à droite et à gauche, une aire irrégulière de forme trapézoïdale r'_k, r''_k limitée par un arc du contour.

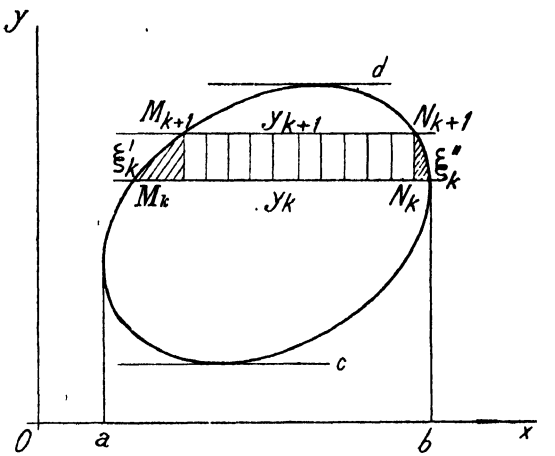


Fig. 27.

ψ

Je dis que l'on a le droit de remplacer ces éléments irréguliers par les petits rectangles de base $x_1 - \xi'_k$ ou $\xi''_k - x_n$.

δ

En effet, en remplaçant un élément irrégulier par le rectangle, la différence entre ces deux aires est tout au plus égale à $h(y_{k+1} - y_k)$ par hypothèse ; en désignant par $|M_0|$ le maximum de la valeur absolue de la fonction dans toute l'aire, nous commettrons une erreur au plus égale à $2|M_0|h(y_{k+1} - y_k)$ et en faisant de même pour toutes les bandes, nous commettrons une erreur au plus égale à $2|M_0|h(d - c)$, erreur que nous pourrons rendre aussi petite que nous le voudrons.

4° Nous avons le droit de prendre dans chaque élément $\Delta\omega$ un point ξ_k, η_k arbitraire. α, ν Nous prendrons par exemple un point situé sur chaque ordonnée inférieure : $\eta_k = y_k$. Quant à l'abscisse, nous la préciserons plus loin.

δ_1, σ

La hauteur de chaque élément d'aire de la bande $y_{k+1} - y_k$ étant constante, la somme des éléments de cette bande est donc

$$\Delta y_k[(x_1 - \xi_k)f(\xi_0, y_k) + (x_2 - x_1)f(\xi_1, y_k) + \cdots + (\xi_k - x_n)f(\xi_n, y_k)].$$

Or ρ, R_1 si nous considérions l'intégrale simple

$$\int_{\xi'_k}^{\xi''_k} f(x_1, y_k)dx.$$

dans laquelle y_k figure comme paramètre, en décomposant le champ $\xi''_k - \xi'_k$ par les points de division $x_1, x_2 \cdots x_n$, et α appliquant à chacun des intervalles le théorème de la moyenne, nous pourrions poser

$$\int_{\xi'_k}^{\xi''_k} f(x_1, y_k)dx = (x_1 - \xi_k)f(\xi_0, y_k) + (x_2 - x_1)f(\xi_1, y_k) + \cdots$$

ν, α_1 Ce sont précisément ces abscisses $\xi_0, \xi_1 \cdots$ ainsi introduites que nous prendrons comme abscisses des points dans chaque élément.

ω Ainsi donc la somme des éléments relatifs à la bande est rigoureusement égale à

$$i_k = \Delta y_k \int_{\xi'_k}^{\xi''_k} f(x, y_k)dx.$$

5° δ_1 Il reste à évaluer Σi_k. Mais l'intégrale $\int_{\xi'_k}^{\xi''_k} f(x, y_k)dx$ ρ dans laquelle nous considérons y_k comme paramètre, dépend de y_k, à la fois parce que y_k figure comme paramètre dans $f(x, y_k)$, et aussi parce que les limites ξ'_k, ξ''_k dépendent de la valeur y_k (à moins que le champ soit limité par deux parallèles à oy). Mais, de toutes façons, l'intégrale ρ est une fonction continue de y_k. Soit :

$$\int_{\xi'_k}^{\xi''_k} f(x, y_k)dx = \varphi(y_k).$$

σ_2 Elle est donc intégrable et ξ la somme

$$\Sigma \Delta y_k \int_{\xi'_k}^{\xi''_k} f(x, y_k)dx = \Sigma \Delta y_k \varphi(y_k)$$

a pour limite $\int_c^d \varphi(y)dy$, lorsque tous les intervalles $y_{k+1} - y_k$ tendent vers zéro.

ω Ainsi, la limite cherchée, c'est-à-dire l'intégrale double, est,

en supprimant les indices, l'intégrale $\int_c^d \varphi(y)dy$ et, en remplaçant $\varphi(y)$ par sa valeur,

$$\int_c^d dy \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)dx.$$

Cette limite s'obtient par deux intégrations successives : on donne à y une valeur comprise entre c et d, et on calcule l'intégrale $\int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)dx$, *$\xi'$ et ξ'' désignant les valeurs de x correspondant aux points de rencontre de l'ordonnée y avec le contour.*

Le résultat est une fonction $\varphi(y)$. Il faut alors calculer $\int_c^d \varphi(y)dy$.

C'est la valeur de l'intégrale double.

Interversion des intégrations. — On aurait pu évidemment opérer autrement : en considérant d'abord tous les éléments d'une même tranche parallèle à oy comprise entre les abscisses x_k, x_{k+1} on aurait obtenu

$$\Delta x_k \int_{\eta'_k}^{\eta''_k} f(x_k, y)dy$$

η'_k, η_k désignant les ordonnées des points de rencontre du contour limitant le champ avec la droite $x = x_k$.

Cette intégrale $\int_{\eta'_k}^{\eta''_k} f(x_k, y)dy$ aurait été une fonction $\psi(x_k)$. Il aurait fallu calculer ensuite

$$\Sigma \Delta x_k \psi(x_k),$$

ce qui aurait conduit à l'intégrale $\int_a^b \psi(x)dx$.

L'intégrale double aurait donc été égale à

$$\int_a^b dx \int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dy.$$

De la comparaison de ces deux expressions d'une même somme, on déduit

$$\int_a^b dx \int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, y)dx.$$

En particulier si le champ d'intégration est le rectangle limité par les abscisses $x = a$, $x = b$, et les ordonnées $y = c$, $y = d$, on aura constamment $\xi'_k = a$, $\xi''_k = b$, $\eta'_k = c$, $\eta''_k = d$, et par suite la relation ci-dessus s'écrit

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

σ_2 Nous retrouvons la formule d'intégration sous le signe $\int$.

Mais, avec la signification particulière de ξ', ξ'' et de η', η'', le même résultat a lieu dans un champ quelconque, en prenant chaque fois pour ξ', ξ'' les limites de x correspondant à la valeur de y.

On peut donc ne pas spécifier l'ordre des intégrations et écrire l'intégrale double sous la forme $\iint_\Omega f(x,y)dx\,dy$, étant bien entendu que ce symbole se traduira, comme il a été indiqué, par deux intégrations successives.

Exemple. — *On donne la fonction* $z = kxy$. *Calculer l'intégrale double de cette fonction à l'intérieur du quart d'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

situé dans l'angle positif des axes de coordonnées.

δ Pour une valeur de x comprise entre 0 et a, y peut varier de $\eta' = 0$ à $\eta'' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

ξ Il faut donc calculer d'abord l'intégrale

$$\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} kxy\,dy = kx\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = k\frac{b^2}{2a^2}x(a^2 - x^2),$$

x pouvant varier de 0 à a, δ_1 on aura ensuite à calculer

$$I = \int_0^a k\frac{b^2}{2a^2}x(a^2 - x^2)dx = k\frac{b^2}{2a^2}\left(a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)_0^a.$$

On trouve

$$I = k\frac{b^2a^2}{8}.$$

Telle est la valeur de l'intégrale double cherchée.

Généralisation. — Nous avons supposé jusqu'ici que le contour limitant le champ n'était rencontré par une parallèle, soit à ox, soit à oy, qu'en deux points.

α

Nous pouvons supprimer cette restriction.

Remarquons d'abord en effet que, si le champ Ω est décomposé en champs partiels $\Omega_1, \Omega_2, \cdots \Omega_n$, en nombre fini, l'intégrale double $\iint_\Omega f(x, y)dx\,dy$ est par définition égale à la somme des intégrales relatives aux champs $\Omega_1, \Omega_2, \cdots \Omega_n$. Si l'on a un champ plus complexe,

α

on peut en menant les parallèles à oy le décomposer en plusieurs champs tels qu'une parallèle à oy ne rencontre chacun d'eux qu'en deux points. On pourra alors appliquer à chacun d'eux la formule d'intégration.

Remarques. — 1° Dans le cas particulier où l'aire d'intégration est un rectangle et où la fonction à intégrer est le produit d'une fonction de x par une fonction de y

$$f(x, y) = \varphi(x) \times \psi(y).$$

o, δ

on intégrant d'abord par rapport à y, les limites de y correspondant à toute valeur de x étant c, d, on a d'abord à calculer

$$\int_c^d \varphi(x)\,\psi(y)dy = \varphi(x)\int_c^d \psi(y)dy.$$

Ce qui donnerait $A\varphi(x)$ en posant $A = \int_c^d \psi(y)dy$.

Il faudrait ensuite calculer

$$\int_a^b A\varphi(x)\,dx = A\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

L'intégrale double est donc égale à $\int_c^d \psi(y)\,dy \times \int_a^b \varphi(x)dx$.

ρ

Elle est donc le produit de deux intégrations simples.

2e Remarque. — Supposons la fonction à intégrer quelconque mais prenons comme champ d'intégration le triangle OAB limité par la bissectrice des axes.

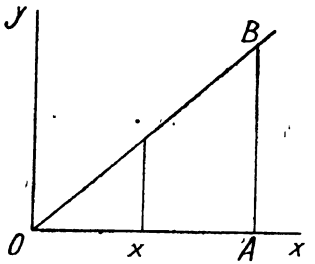


Fig 28.

δ

Si l'on intègre d'abord par rapport à y on aura

$$\int_0^x f(x, y)dy$$

et l'intégrale double a pour valeur

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy.$$

Si au contraire l'on intègre d'abord par rapport à x, pour une valeur de y, x variant de $\xi' = y$ à $\xi'' = a$ on aura $\int_y^a f(x, y)\, dx$, et l'intégrale double est

$$\int_0^a dy \int_y^a f(x, y)dx.$$

On obtient donc l'égalité suivante due à Lejeune-Dirichlet

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

Application. — *Déterminer par une intégrale double une fonction de x admettant pour dérivée seconde une fonction donnée $\varphi(x)$.*

Une primitive de $\varphi(x)$ est

$$\lambda(x) = \int_0^x \varphi(y)\, dy.$$

δ_1

Une primitive de $\lambda(x)$, c'est-à-dire la fonction cherchée $F(x)$, sera donc

$$\int_0^x \lambda(z)\, dz = \int_0^x dz \int_0^z \varphi(y)\, dy.$$

α

En appliquant la formule ci-dessus, le deuxième membre est égal à

$$\int_0^x dy \int_y^x \varphi(y)\, dz.$$

Or la première intégration peut s'effectuer et donne $(x-y)\varphi(y)$. Le résultat est donc

$$\int_0^x (x-y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Dérivées d'une intégrale double. — Considérons une intégrale double de la fonction $f(x, y)$ à l'intérieur d'un rectangle limité par les deux parallèles à oy, $x = a$, $x = X$ et par les deux parallèles à ox, $y = c$, $y = Y$.

On a

$$\int_a^X dx \int_c^Y f(x, y)\,dy = \int_c^Y dy \int_a^X f(x, y)\,dx.$$

Si nous supposons que a et c restent constants, le résultat dépendra seulement de X, Y : on pourra donc le considérer comme une fonction F(X, Y) des coordonnées du sommet variable X, Y.

D'après l'égalité ci-dessus, si nous posons momentanément

$$\int_c^Y f(x, y)\,dy = \varphi(x, y),$$

l'intégrale double est

$$\int_a^X \varphi(x, Y)\,dx = F(X, Y).$$

De cette égalité on déduit

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \varphi(X, Y) = \int_c^Y f(X, y)\,dy.$$

Et de ce premier résultat on déduit alors

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X\,\partial Y} = f(X, Y).$$

En considérant la deuxième forme de l'intégrale double, on obtiendrait

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \int_a^X f(x, Y)\,dy, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial Y\,\partial X} = f(X, Y).$$

Ainsi la fonction F(X, Y) représentée par l'intégrale double admet une dérivée seconde rectangle $f(X, Y)$. Rien ne prouve d'ailleurs que cette fonction admette des dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}$.

La fonction satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = f(X, Y),$$

la solution la plus générale de cette équation s'obtiendra en ajoutant une fonction dont la dérivée rectangle seconde soit nulle, c'est-à-dire une fonction de la forme $\varphi(X) + \psi(Y)$. Elle est donc de la forme

$$U(X, Y) = \int_a^X dX \int_c^Y f(x, y)\, dy + \varphi(X) + \psi(Y).$$

Si l'on veut que pour $X = a$, U se réduise à une fonction donnée $h(y)$, il faut poser

$$\varphi(a) + \psi(Y) = h(Y).$$

Si l'on veut que pour $Y = c$, U se réduise à une fonction donnée $g(x)$, il faudra d'abord, en exprimant de deux manières la valeur de la fonction pour $X = a$, $Y = c$, que $h(c) = g(a)$.

Ensuite on devra avoir

$$\varphi(X) + \psi(c) = g(X).$$

On en déduit

$$\psi(Y) = h(Y) - \varphi(a), \qquad \varphi(X) = g(X) - \psi(c) = g(X) - h(c) + \varphi(a).$$

La fonction cherchée a donc pour expression

$$U(X, Y) = \int_a^X dx \int_c^Y f(x, y)\, dy + g(X) + h(Y) - h(c).$$

Rappelons que

$$g(X) = U(X, c), \qquad h(Y) = U(a, Y).$$

Inversement, si l'on connaît une solution quelconque U(X, Y) de l'équation $\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = f(X, Y)$, l'intégrale double aura pour valeur

$$\int_a^X dx \int_c^Y f(x, y) dy = U(X, Y) - U(X, c) - U(a, Y) + U(a, c).$$

III. — VOLUME

Considérons la surface S d'équation $z = f(x, y)$.

Nous supposerons d'abord $z > 0$. Nous allons définir *le volume du cylindre ayant pour base dans le plan des x, y une aire* Ω, *dont les génératrices sont parallèles à oz, et limité à la surface S.*

Décomposons l'aire Ω en éléments de surface $\Delta\omega$ par des parallèles à ox et oy, et considérons le petit prisme π de base $\Delta\omega$ limité à S.

α, ν

Pour tous les points de S qui se projettent à l'intérieur de $\Delta\omega$, z admet un minimum z et un maximum Z.

δ_1, ψ

Si nous considérons le parallélépipède P de base $\Delta\omega$ et de hauteur Z, tout point du prisme π appartiendra à P et il existera des points de P qui n'appartiennent pas à π. Nous dirons que le domaine des points constituant π est inférieur au domaine de P.

De même, si nous considérions le prisme p de hauteur z, il constitue un domaine inférieur à celui de π.

On peut donc écrire les inégalités

$$p < \pi < P.$$

Et si nous faisons la somme des inégalités analogues correspondant à tous les éléments $\Delta\omega$, nous obtiendrons

$$\Sigma p < \Sigma\pi < \Sigma P.$$

Or, à la notion de domaine d'un parallélépipède et par suite des

σ

domaines Σp et ΣP, nous savons rattacher de façon précise la notion de volume de ces domaines. Nous admettrons que à tout domaine de points correspond un volume positif ou nul. Il en résultera qu'au domaine du prisme π correspondra un volume et que l'on aura

$$\text{vol } p < \text{vol } \pi < \text{vol P}, \qquad \Sigma \text{ vol } p < \Sigma \text{ vol } \pi < \Sigma \text{ vol P}.$$

Or, lorsque tous les éléments $\Delta\omega$ décroissent indéfiniment dans les

σ

deux sens, la première somme a pour limite l'intégrale double $\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$.

La deuxième a même limite : La somme intermédiaire a donc aussi même limite.

C'est cette limite bien déterminée que nous appellerons de façon précise le volume du cylindre ayant pour base Ω, limité à S. On pourrait se donner à priori cette définition. Nous avons voulu la justifier par les considérations que nous avons exposées, et cette définition s'identifie d'ailleurs avec la notion de volume pour les volumes élémentaires que nous connaissons.

REMARQUE. — Pour pouvoir nous rattacher à la notion de volume du parallélépipède, nous avons décomposé Ω en parallélogrammes. Mais pour calculer l'intégrale double, nous pouvons la décomposer en éléments d'aire $\Delta\omega$ infiniment petits dans les deux sens, d'une manière quelconque.

Après avoir défini l'aire plane trapézoïdale limitée à un arc de courbe C, nous avons défini l'aire comprise à l'intérieur d'une courbe fermée quelconque. Nous allons poursuivre l'analogie et définir le volume compris à l'intérieur d'une surface fermée quelconque S.

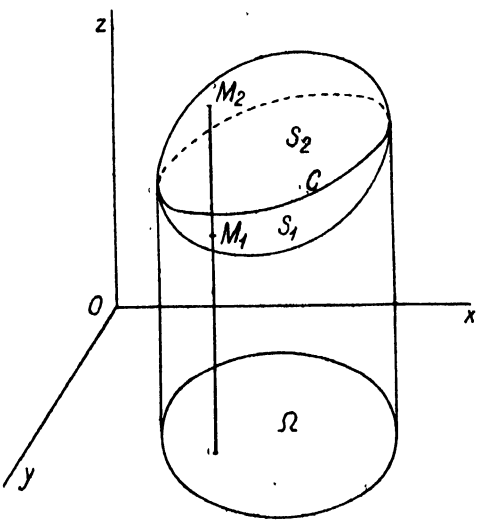


Fig. 29.

Ce volume se projette sur le plan des xy à l'intérieur d'une aire Ω. Nous supposerons d'abord qu'une parallèle à oz menée d'un point de Ω ne rencontre la surface qui limite le corps qu'en deux points M_1, M_2.

ξ, δ_1

Le cylindre, dont les génératrices sont parallèles à oz et

circonscrit à la surface, touche celle-ci suivant une courbe C qui partage la surface en deux calottes S_1, S_2 lieu des points M_1 ou des points M_2.

Nous admettrons que si deux domaines de points sont contigus, le volume du domaine total est égal à la somme des volumes des deux domaines.

Nous dirons que le volume du corps compris à l'intérieur de S est la différence entre le volume du cylindre de base Ω limité à S_2, et celui du cylindre limité à S_1.

Or le premier est défini par l'intégrale double $\iint_\Omega z_2\, d\omega$, le second par $\iint_\Omega z_1\, d\omega$.

Le volume du corps sera donc exprimé par l'intégrale double

$$V = \iint_\Omega (z_2 - z_1) d\omega.$$

Comme dans le cas des surfaces, on démontrera, en passant d'abord par un tétraèdre ou un parallélépipède, que le résultat obtenu est indépendant des axes de coordonnées choisis.

Si une parallèle à oz rencontrait la surface limitant le volume en plus de deux points (en considérant le cylindre circonscrit parallèle à oz), on décomposerait ce volume en volumes partiels tels qu'une parallèle à oz ne rencontre chacun d'eux qu'en deux points.

Volume déterminé par une intégrale simple. — Considérons encore le volume compris à l'intérieur d'une surface S (rencontrée en deux points par toute parallèle à oz) qui se projette suivant une aire Ω. Il a pour expression en décomposant Ω par des parallèles aux axes

$$V = \iint_\Omega (z_2 - z_1) dx\, dy.$$

Pour évaluer cette intégrale double, nous pouvons d'abord laisser y constant et calculer l'intégrale

$$\int_{\xi'}^{\xi''} (z_2 - z_1) dx.$$

Le plan $Y = y$ coupe la surface S suivant une courbe fermée C. Cette première intégrale $\overset{\sigma, R_1}{\quad}$ n'est autre que l'aire comprise à

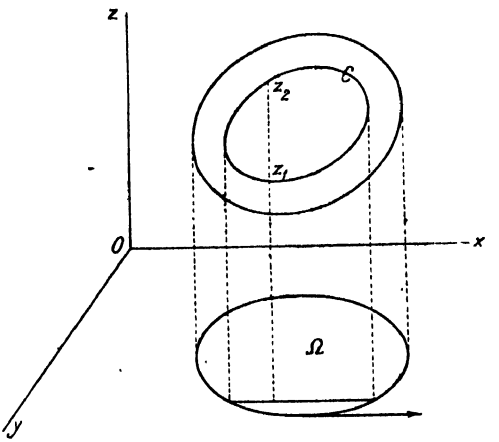


Fig 30.

l'intérieur de cette courbe fermée. Cette aire est une fonction de y, $A(y)$, et si on a su la calculer, il suffira de calculer ensuite l'intégrale

$$\int_c^d A(y)dy.$$

Mais si l'on partage l'intervalle cd par les ordonnées $y_1, y_2, \cdots y_n$, cette intégrale est la limite de la somme

$$\Sigma(y_{k+1} - y_k)\, A(y_k).$$

Or l'élément de cette somme $\overset{\sigma}{(y_{k+1} - y_k)\, A(y_k)}$ représenterait le volume d'une petite tranche ayant pour base la section $A(y_k)$ et pour hauteur la distance des deux plans de section ; $\overset{d}{\quad}$ l'intégrale double sera la limite de la somme des volumes de ces tranches quand toutes les hauteurs décroissent indéfiniment, ce qui correspond à la notion vulgaire de volume.

On voit donc que pour évaluer le volume, on arrive à substituer à une somme doublement infinie d'éléments de volume infiniment petits dans deux dimensions, une somme simplement infinie d'éléments de volume infiniment petits dans une seule dimension, c'est-à-dire compris dans un parallélépipède dont une des arêtes seulement est infiniment petite.

Mais il est bien évident que dans ces conditions, puisque le volume est indépendant des axes de coordonnées, on pourra décomposer ce volume en tranches soit par des plans parallèles à zoy soit par des plans parallèles à xoy : il suffit seulement que l'on sache calculer l'aire de chaque section.

Applications. — *Calculer le volume compris entre le plan des xy et le paraboloïde*

$$z = k^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

L'aire de base est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - k^2 = 0.$$

Nous calculerons le quart de ce volume, celui qui se projette dans l'angle des coordonnées positives.

En intégrant d'abord par rapport à y, pour une valeur donnée de x, y peut varier de 0 à $\eta_2 = \frac{b}{a}\sqrt{k^2a^2 - x^2}$.

Il faut donc calculer

$$\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{k^2a^2-x^2}} \left(k^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy.$$

Ce qui donne

$$\eta_2\left(k_2 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{1}{3b^2}\eta_2^3 = \eta_2\left(k^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{k^2a^2 - x^2}{a^2}\right) = \frac{2}{3}\frac{b}{a^3}(k^2a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

x peut varier de 0 à ka. Nous avons ensuite à calculer

$$V = \int_0^{ka} \frac{2}{3}\frac{b}{a^3}(k^2a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Nous poserons à cet effet $x = ka \sin \varphi$.

L'intégrale se transforme en

$$V = \frac{2}{3}k^4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi.$$

Mais

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{3}{8}\frac{\pi}{2}.$$

Le volume total cherché est donc égal à $\frac{1}{2}\pi k^4 ab$.

Si nous avions décomposé le volume en tranches par des plans parallèles au plan xoy, en remarquant que la section par le plan de cote z est une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2 - z$$

cette ellipse a pour aire

$$\pi(k^2 - z)ab.$$

z pour cent varie de 0 à k^2, il suffit donc de calculer l'intégrale simple

$$\int_0^{k^2} \pi(k^2 - z)abdz = \pi ab\left(k^2 z - \frac{z^2}{2}\right)_0^{k^2} = \frac{1}{2}\pi k^4 ab.$$

C'est le résultat trouvé ci-dessus.

Or la hauteur du segment parabolique est k^2 et la surface de l'ellipse de base est πabk^2. Le volume est donc la moitié du volume du cylindre de même base et de même hauteur.

2°. Application. Surface de révolution. — Si la surface de révolution a pour axe oz et si la courbe méridienne dans le plan des xoz a pour équation $x = f(z)$, la section par un plan de cote z est un cercle qui a pour surface πx^2 c'est-à-dire $\pi f^2(z)$. Le volume compris entre deux plans z_1, z_2 aura donc pour expression $\int_{z_1}^{z_2} \pi f^2(z)dz$. On est ramené au calcul d'une intégrale simple.

Si l'on voulait seulement le volume compris entre deux plans méridiens faisant entre eux l'angle ω, il suffirait de multiplier le résultat précédent par $\frac{\omega}{2\pi}$.

3e. Application. — *Cas où l'aire de la section par le plan de cote z est une fonction du second degré de z.*

Supposons que l'on sache calculer l'aire de la section par un plan quelconque perpendiculaire à oz et supposons que cette aire soit une fonction du second degré de z

$$A(z) = mz^2 + nz + p.$$

Si le volume est limité par deux plans perpendiculaires à oz, z_1, z_2, on pourra calculer le volume ainsi délimité.

δ

Ce volume a pour expression

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} (mz^2 + nz + p)dz = \left[m\frac{z^3}{3} + n\frac{z^2}{2} + pz\right]_{z_1}^{z_2}$$

$$V = \frac{z_2 - z_1}{6}[2m(z_2^2 + z_1z_2 + z_1^2) + 3n(z_1 + z_2) + 6p].$$

ν, ξ

Or les aires B_1, B_2, B_m des sections par les plans

$$z = z_1, \qquad z = z_2, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

sont respectivement

$$B_1 = mz_1^2 + nz_1 + p, \quad B_2 = mz_2^2 + nz_2 + p, \quad B_m = m\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^2 + n\frac{z_1 + z_2}{2} + p.$$

β, α_2

De toutes façons, on voit à priori que l'on pourrait exprimer le volume en fonction de B_1, B_2, B_m qui ont une signification géométrique précise au lieu de m, n, p.

δ_1

On vérifie aisément que la parenthèse qui figure dans l'expression du volume est identique à $B_1 + B_2 + 4B_m$. D'autre part $z_2 - z_1$ est la hauteur h du volume.

On obtient donc simplement

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B_m).$$

ρ

Cette formule est ainsi indépendante de l'expression algébrique de l'aire. Elle ne fait intervenir que des éléments géométriques, la hauteur du volume, les aires des deux bases et de la section moyenne.

π

Elle s'applique au cône et au tronc de cône, puisque en prenant le sommet à l'origine, l'aire de la section est proportionnelle au carré de la hauteur du cône.

Pour une sphère, en prenant pour origine le centre de la sphère, l'aire de la section par le plan de cote z est $\pi(R^2 - z^2)$. La formule est donc applicable à une tranche quelconque de la sphère. En particulier pour la sphère entière

$$B_1 = B_2 = 0, \qquad B_m = \pi R^2, \qquad h = 2R.$$

Donc

$$V = \frac{1}{3}R \times 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Surfaces réglées. — Considérons la surface engendrée par la droite mobile

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

où a, b, p, q sont des fonctions d'un paramètre variable t, admettant des dérivées par rapport à ce paramètre.

Si nous coupons la surface par le plan $z = z_0$, la section a pour équation

$$x = az_0 + p, \qquad y = bz_0 + q$$

On obtiendra toute la surface latérale en faisant varier t de t_0 à T.

Calculons le volume du prisme limité à la surface, entre deux génératrices, deux plans perpendiculaires à oz, et ayant ses génératrices parallèles à oy.

δ1

L'aire comprise à l'intérieur de la section par le plan de cote z_0 aura pour expression

$$A(z_0) = \int_{t_0}^{t_1} y\,dx = \int_{t_0}^{t_1} (bz_0 + q)(a'z_0 + p')dt.$$

ρ

Le résultat est bien de la forme

$$A(z_0) = mz_0^2 + nz_0 + p$$

avec

$$m = \int_{t_0}^{t_1} ba'dt, \qquad n = \int_{t_0}^{t_1} (bp' + qa')dt, \qquad p = \int_{t_0}^{t_1} qp'dt.$$

ω

Le volume d'une tranche quelconque limitée à la surface réglée et à deux plans z et Z a donc pour expression

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B_m).$$

Il ne dépend que des aires des trois sections et de la hauteur.

Étant donné le résultat obtenu et sa signification géométrique, il

ψ

est évident qu'il est valable, même si les génératrices rectilignes de la surface sont imaginaires. L'aire de la section sera réelle et fonction du second degré de z : la formule sera donc encore applicable.

Application. — *Volume total d'un ellipsoïde.*

δ

C'est une surface réglée à génératrices imaginaires. Les deux

plans de base sont deux plans tangents parallèles ; leurs aires seront nulles. Il reste donc

$$V = \frac{2h}{3} B_m,$$

On retrouve l'un des théorèmes d'Apollonius :

Le volume de l'ellipsoïde s'obtient en multipliant l'aire d'une section centrale quelconque par les deux tiers de la distance des plans tangents parallèles : ce produit est donc constant.

2e Application. — Prenons le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0.$$

(rapporté même à des axes obliques), et cherchons le volume d'un segment limité à un plan tangent z et un plan parallèle $z = z_1$.

Les sections homothétiques, B_2, B_m sont entre elles comme les carrés des axes des ellipses, donc dans le rapport de 2 à 1

$$B_1 = 0, \qquad B_m = \frac{1}{2} B_2 = \frac{1}{2} B.$$

Donc

$$V = \frac{h}{6} (B_2 + 4B_m) = \frac{h}{2} B.$$

Le volume est donc la moitié de celui du cylindre de même base et de même hauteur.

IV. — CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LES INTÉGRALES DOUBLES

Pour faire le calcul de l'intégrale double, nous avons supposé jusqu'ici que l'on décomposait le champ d'intégration en rectangles par des parallèles aux axes. Et cependant l'existence de l'intégrale double a été établie dans le cas tout à fait général où le champ était décomposé en éléments infiniment petits dans les deux sens d'une manière quelconque

Faisons le changement de variables

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

Ces formules établissent une correspondance entre le point de

coordonnées u, v par rapport à un certain système d'axes, et le point de coordonnées x, y. Nous supposerons les deux systèmes d'axes de même disposition.

Nous supposerons que

ζ, σ_2

1° Lorsque le point u, v se déplace dans un domaine A_1 du plan u, v, les fonctions φ, ψ sont bien déterminées, continues, et admettent des dérivées partielles continues. Lorsque le point u, v décrit le domaine A_1 et le contour C_1 qui le limite, le point x, y décrit un domaine A limité par un contour C.

2° A tout point de A ne correspond qu'un seul point de A_1. En d'autres termes, la correspondance entre les points de A et de A_1 (et des contours) est biunivoque.

σ_2

Il en résulte nécessairement (comme on l'a vu dans l'étude des propriétés des déterminants fonctionnels) que ce déterminant garde un signe constant dans le domaine A_1 (il peut s'annuler pour certains points).

Ces indications précisées, nous avons à calculer l'intégrale

$$\iint_A f(x, y)dx\,dy$$

en faisant le changement de variables

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

σ_2

Mais nous avons vu que ce changement de variables pouvait être ramené au suivant

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \theta(x, v)$$

et l'on a

$$D^{u,v}_{x,y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

δ_1 α

Pour effectuer l'intégrale, nous pouvons d'abord effectuer la quadrature

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dy,$$

η' et η'' étant les limites de y pour la valeur de x (considérée comme paramètre) $(\eta' < \eta'')$.

α

Si dans cette intégrale, nous faisons le changement de

variable $y = \theta(x, v)$ et si v_1, v_2 sont les valeurs de v correspondant à η', η'' nous obtiendrons

$$\int_{v_1}^{v_2} f(x, \theta(x, v)) \frac{\partial \theta}{\partial v} dv.$$

Nous désignerons ces valeurs v_1, v_2 par v', v'' avec la condition $v' < v''$. Dans ces conditions, si v croît en même temps que y, $\frac{\partial \theta}{\partial v}$ est positif ; $v' = v_1$, $v'' = v_2$ et l'on peut écrire l'intégrale

$$\int_{v'}^{v''} f(x, \theta(x, v)) \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right| dv.$$

Si v décroît quand y croît, $\frac{\partial \theta}{\partial v}$ est négatif, $\frac{\partial \theta}{\partial v} = -\left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|$ mais alors $v' = v_2$, $v'' = v_1$; l'intégrale est

$$-\int_{v''}^{v'} f(x, \theta) \times \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right| dv = +\int_{v'}^{v''} f(x, \theta) \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right| dv.$$

Ainsi, avec la convention sur la désignation de v' et v'', on obtient dans tous les cas

$$\int_{v'}^{v''} f(x, \theta(x, v)) \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right| dv.$$

En effectuant la deuxième intégrale on aura

$$\int_a^b dx \int_{v'}^{v''} f(x, \theta(x, v)) \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right| dv.$$

Or, A' désignant le champ de variation du point x, v, correspondant au champ A, on voit que le résultat n'est autre que l'intégrale double

$$\iint_{A'} f(x, \theta(x, v)) \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right| dx\, dv.$$

Pour effectuer cette intégrale double sous cette nouvelle forme, on peut supposer que l'on commence par intégrer par rapport à x, en donnant à v une valeur constante

$$\int_{x'}^{x''} f(x, \theta) \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right| dv.$$

α

Si nous y faisons le changement de variable $x = \varphi(u, v)$, u remplaçant x, de même que ci-dessus, nous aurons

δ_1, σ_1

1° à remplacer dans l'intégrale x en fonction de u et v, à multiplier la fonction à intégrer par $\left|\frac{\partial \theta}{\partial u}\right|$ et intégrer par rapport à u les limites étant u', u'', avec la condition $u' < u''$. Nous obtenons donc

$$\int_{u'}^{u''} f(\varphi, \theta(\varphi, v)) \times \left|\frac{\partial \theta}{\partial v}\right| \times \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| \partial u$$

σ, ρ

2° mais alors en faisant la deuxième quadrature, nous voyons que nous sommes ramenés à l'intégrale

$$\int_{\gamma}^{\delta} dv \int_{u'}^{u''} f(\varphi, \theta) \left|\frac{\partial \theta}{\partial v}\right| \times \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| du.$$

Le résultat de cette double intégration n'est autre que l'intégrale double

$$\iint_{A_1} f(\bar{x}, \bar{y}) \times \left|\frac{\partial \theta}{\partial v}\right| \times \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| du\, dv,$$

la fonction $f(\bar{x}, \bar{y})$ signifiant que l'on y a remplacé x et y en fonction de u et v, le champ A_1 étant le champ de variation du point u, v.

ρ

Mais nous avons remarqué que

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = D^{u,v}_{x,y}.$$

ω

Nous avons donc en définitive pour expression de l'intégrale double

$$\iint_{A_1} f(\bar{x}, \bar{y}) \left| D^{u,v}_{x,y} \right| du\, dv.$$

Telle est la formule du changement de variable dans les intégrales doubles.

Il faut bien remarquer que du et dv sont essentiellement positifs.

Pour effectuer le changement de variables

$$x = \varphi(u, v) \qquad y = \psi(u, v)$$

dans une intégrale double, il faut :

1° *Remplacer x et y en fonction de u, v dans $f(x, y)$.*

2° *Remplacer l'élément différentiel $dx\, dy$ par $\left| D^{u,v}_{x,y} \right| du\, dv$.*

3° *Intégrer dans le champ A_1 du point u, v, correspondant au champ A du point x, y.*

Remarques. — La transformation que nous avons faite est valable même si le déterminant fonctionnel s'annule (sans changer de signe) en quelques points ou sur une ligne du domaine d'intégration.

Mais la condition que la correspondance soit biunivoque
ψ
est absolument indispensable à la validité de la transformation (et par conséquent que le déterminant fonctionnel ne change pas de signe). Si elle n'est pas satisfaite pour le domaine donné,
α
il faudra décomposer celui-ci en domaines partiels pour chacun desquels cette condition sera remplie.

Prenons par exemple pour domaine A le carré parallèle aux axes de centre origine et de côtés

$$x = \pm 1, \qquad y = \pm 1.$$

δ

L'intégrale

$$\iint_A dx\,dy = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dy = 4.$$

Supposons que nous fassions le changement de variables

$$x^2 \rightleftarrows X, \qquad y^2 = Y.$$

δ_1

Lorsque le point x, y se déplace à l'intérieur du carré, le point X, Y se déplace à l'intérieur du carré A_1 dont les côtés sont $X = 0$, $X = 1$, $Y = 0$, $Y = 1$. On a ici

$$D_{x,y}^{X,Y} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{X}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}}.$$

Si nous appliquions la formule de transformation, nous obtiendrions

$$\iint_{A_1} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{X}}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dX\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{X}} \times \int_0^1 \frac{dY}{\sqrt{Y}} = 1.$$

Le résultat est différent de celui obtenu ci-dessus. L'erreur
π
tient à ce que la correspondance établie entre le point x, y et le point X, Y n'est pas biunivoque. A un point x, y de A, ne correspond bien qu'un seul point X, Y de A_1, mais inversement à un point X, Y de A_1, correspondent les quatre points $\pm\sqrt{x}$, $\pm\sqrt{y}$ (sans concordance de signe) situés dans chacun des quatre carrés dans lesquels on peut décomposer A.

$\delta_{1,\alpha}$

Pour avoir une correspondance biunivoque, il faut donc partager le champ A en quatre carrés égaux. Au carré A', $x = 0$,

$x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ correspond le carré A_1', $X = 0$, $X = 1$, $Y = 0$, $Y = 1$. On a

$$\iint_{A'} dx\,dy = 1, \qquad \iint_{A_1'} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}} dX\,dY = +1.$$

II. — Lorsque l'on veut faire un changement de variables dans un champ Ω, pour avoir le champ de variation de u, v, il ne suffit pas de chercher la transformation de la courbe qui limite Ω, β

mais il faut voir comment se répartissent tous les points u, v correspondant à tous les points x, y de Ω.

Il pourra arriver également que, pour certains points ou certaines lignes, la transformation ne soit plus reversible. Il faudra pour plus de sureté, s'il est nécessaire, isoler ces points ou lignes par des courbes et voir ce qui se passe lorsque la région isolée tend vers zéro.

Exemple. — Faisons la transformation en coordonnées polaires

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega.$$

ρ

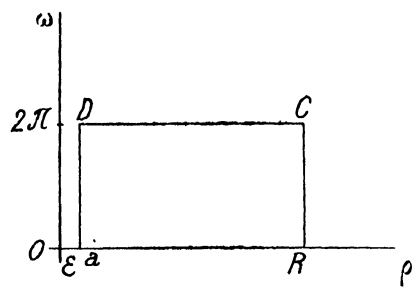


Fig. 31.

Pour l'origine, la transformation n'est pas reversible : $\rho = 0$, mais ω est indéterminé. Il sera donc utile d'isoler l'origine, par exemple par un petit cercle, et calculer l'intégrale dans le champ restant. Si l'on se contentait de transformer dans les axes ρ, ω le cercle limitatif, on aurait simplement pour contour limitatif la portion AB de la parallèle à l'axe $o\omega$ comprise de 0 à 2π. Mais si l'on

σ

isole d'une part l'origine, et si on transforme tous les points compris dans la couronne, on voit que le champ transformé est le rectangle limité par les deux droites $\rho = \varepsilon$, $\rho = R$, et les droites $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$.

Interprétation géométrique. — Dans les expressions

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

si nous donnons à u une valeur constante en faisant varier seulement v, le point x, y décrira une courbe $u = \text{const}$. Lorsque ce

paramètre u variera, on obtiendra une famille de courbes qui balaieront le domaine A.

De même on obtiendra la famille $v = \text{const.}$

Or considérons le quadrilatère limité par les courbes u, $u + du$, v et $v + dv$. Si nous prenions ce quadrilatère $d\sigma$ comme élément de décomposition de A, nous obtiendrions $\iint_A f(x, y)\, d\sigma$. Mais nous avons déjà obtenu

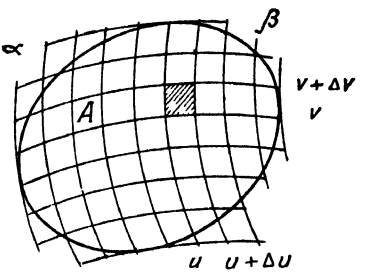


Fig. 32.

$$\iint_{\omega} f(\bar{x}, \bar{y}) \times \left| D^{u, v}_{x, y} \right| du\, dv.$$

On en conclut donc que

$$d\sigma = \left| D^{u, v}_{x, y} \right| du\, dv$$

à des infiniment petits d'ordre supérieur près.

C'est bien le résultat que nous avons obtenu comme partie principale du parallélogramme curviligne (propriétés des déterminants fonctionnels).

Pour calculer cette deuxième intégrale double, nous donnons par exemple à u une valeur constante intermédiaire entre les valeurs limites α, β correspondant aux courbes tangentes au champ. Pour cette valeur, v pourra varier entre v' et v'' ($v' < v''$). Nous calculons d'abord l'intégrale

$$\int_{v'}^{v''} f(\bar{x}, \bar{y}) \left| D^{u, v}_{x, y} \right| dv.$$

Le résultat sera une fonction $A(u)$ que nous intégrons de α à β

$$\int_{\alpha}^{\beta} du \int_{v'}^{v''} f(\bar{x}, \bar{y}) \left| D^{u, v}_{x, y} \right| dv,$$

Nous pourrions de même obtenir

$$\int_{\gamma}^{\delta} dv \int_{u'}^{u''} f(\bar{x}, \bar{y}) \left| D^{u, v}_{x, y} \right| du.$$

2e Méthode. — L'interprétation géométrique que nous venons d'obtenir permet de donner une deuxième démonstration tout à fait différente de la formule du changement de variables.

Nous avons établi à propos des déterminants fonctionnels, que si l'on établit une transformation ponctuelle

$$Y = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y)$$

si à partir d'un point fixe m on mène deux segments de droites mm_1, mm_2 et si l'on considère les deux segments MM_1, MM_2, M_1, M_2 correspondant à m_1m_2, σ_2 le rapport des aires des deux parallélogrammes a pour limite en grandeur et en signe le déterminant fonctionnel $D^{x,y}_{X,Y}$ au point x, y.

Il en sera évidemment de même si l'on considère la limite du rapport de deux aires infiniment petites correspondantes quelconques.

Considérons donc l'intégrale

$$\iint_A f(x, y)d\sigma = \lim \Sigma\Sigma f(\xi_k, \eta_k)d\sigma_k$$

et faisons le changement de variables

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

α

Décomposons le domaine A en éléments infiniment petits dans les deux sens par les courbes $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Par rapport δ_1 aux deux axes ou, ov, l'aire du rectangle construit sur les éléments $u_{k+1} - u_k$, $v_{i+1} - v_i$ a pour expression

$$(u_{k+1} - u_k)(v_{i+1} - v_i).$$

ρ, R_1

A tous les points compris à l'intérieur de ce rectangle

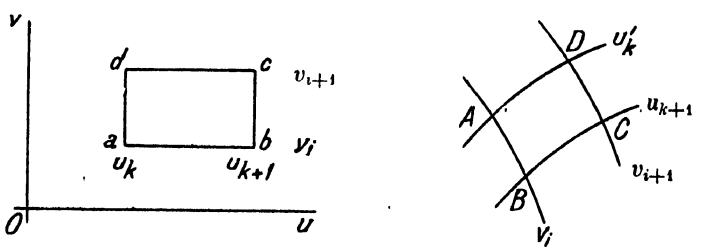


Fig. 33.

correspondent tous les points x, y compris à l'intérieur du quadrilatère curviligne ABCD limité par les courbes u_k, u_{k+1}, v_i, v_{i+1}.

δ_1, ρ

Si le rectangle *abcd* tendait vers zéro le rapport des deux

aires correspondantes aurait pour limite le déterminant fonctionnel $| D^{u,v}_{x,y} |$. On peut donc écrire

$$\frac{\text{quad. curv. ABCD}}{\text{quad. } abcd} = | D^{u,v}_{x,y} | + \varepsilon,$$

ε tandant vers zéro et pouvant être rendu moindre qu'une quantité ε_0, quel que soit l'élément $\Delta\sigma$ considéré.

Par suite l'élément d'aire $\Delta\sigma_k$ a pour expression en valeur absolue et à la condition de supposer du et dv essentiellement positifs

$$[| D^{u,v}_{x,y} | + \varepsilon] du\, dv,$$

le déterminant fonctionnel étant calculé pour un point u, v intérieur à $\Delta\sigma$.

δ_1

Le point ξ_k, η_k est également un point pris dans l'élément $\Delta\sigma$. Puisque on a le droit de choisir arbitrairement ce point, on peut supposer qu'il coïncide avec le point correspondant à u, v ; on obtient donc finalement comme élément de la somme

$$f(\bar{x}, \bar{y})[| D^{u,v}_{x,y} | + \varepsilon] du\, dv.$$

Nous aurions donc à effectuer la somme double d'éléments analogues. Elle s'écrit

$$\Sigma\Sigma f(\bar{x}, \bar{y}) | D^{u,v}_{x,y} | du\, dv + \Sigma\Sigma f(\bar{x}, \bar{y}) \varepsilon\, du\, dv.$$

ρ

Cette dernière somme peut être rendue aussi petite qu'on le

π

veut. En désignant en effet par M le maximum de $| f(x, y) |$ dans le champ elle est moindre que

$$\varepsilon_0 M \Sigma\, du\, dv = \varepsilon_0 MA_1$$

en désignant par A_1 le champ du point u, v.

ω

Nous avons donc finalement à calculer la limite de

$$\Sigma\Sigma f(\bar{x}, \bar{y}) | D^{u,v}_{x,y} | du\, dv$$

mais cette limite est précisément l'intégrale double

$$\iint_{A_1} f(\bar{x}, \bar{y}) | D^{u,v}_{x,y} | du\, dv.$$

étendue au champ A_1 de variation de u, v.

On retrouve la formule que nous avons établie.

Application. — *Calculer le volume du cylindre ayant pour base la boucle de lemniscate*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \qquad (x > 0, y > 0)$$

et limité au paraboloïde

$$xy = bz.$$

δ Nous avons à calculer l'intégrale $\iint_A \frac{xy}{b}\,dx\,dy$.

α Prenons des coordonnées polaires : l'équation de la lemniscate devient

$$\rho^2 = a^2 \sin 2\omega.$$

On a $D^{\rho,\omega}_{x,y} = \rho$.

L'intégrale se transforme en

$$\frac{1}{b}\iint_{A_1} \rho^2 \sin\omega \cos\omega\, \rho\, d\rho\, d\omega.$$

δ_1 Pour une valeur donnée de ω, ρ peut varier de o à $a\sqrt{\sin 2\omega}$. Nous avons donc à calculer d'abord

$$\frac{1}{b}\sin\omega\cos\omega\int_0^{a\sqrt{\sin 2\omega}} \rho^3 d\rho = \frac{a^4}{4b}\sin\omega\cos\omega\sin^2 2\omega.$$

Il reste à calculer

$$V = \frac{a^4}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\omega\cos^3\omega\, d\omega = \frac{a^4}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\omega(1 - \sin^2\omega)d\sin\omega.$$

On obtient

$$V = \frac{a^4}{12b}.$$

V. — AIRE D'UNE SURFACE COURBE

Considérons une surface S et sur cette surface une ligne fermée C qui en délimite une partie. Nous allons définir ce que l'on entend par aire de la portion de surface limitée par C.

Comme pour la définition de la longueur d'un arc de courbe,

ν il serait naturel d'imaginer une surface polyédrale dont les sommets s'appuieraient sur S et de voir si l'aire polyédrale a une

limite lorsque, tous les sommets se rapprochant, toutes les faces deviennent infiniment petites dans les deux sens.

Mais Schwartz a donné le premier un exemple simple montrant que cette aire polyédrale ψ n'a en général pas de limite et dépend de la façon dont tous ses éléments tendent vers zéro. Considérons en effet un cylindre circulaire droit de hauteur H. Partageons la hauteur en m parties égales et menons les sections droites correspondantes. Dans chaque section inscrivons des polygones réguliers de n côtés sous-tendant des arcs $\frac{2\pi}{n}$, mais les sommets des polygones successifs étant décalés de $\frac{\pi}{n}$. Joignons les sommets de chaque polygone aux sommets voisins des deux polygones situés de part et d'autre. Nous formerons ainsi dans chaque tranche $2n$ faces formées de triangles isocèles égaux.

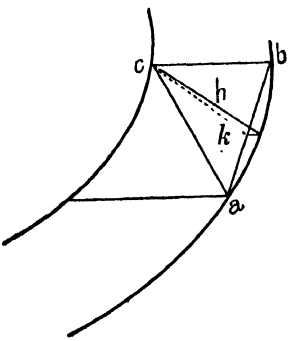


Fig. 34.

δ L'aire d'un de ces triangles est

$$\frac{1}{2} 2R \sin\frac{\pi}{n} \times ck.$$

Mais

$$ck^2 = h^2 + R^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 = h^2 + 4R^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}.$$

L'aire totale est donc

$$S = 2mnR \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{h^2 + 4R^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}} = 2R \times n \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{m^2h^2 + 4R^2m^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

δ_1 Or, lorsque n et m augmentent indéfiniment, $n \sin\frac{\pi}{n}$ tend vers π. La limite sera donc

$$S = 2\pi R\sqrt{H^2 + 4R^2 \lim m^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

ρ Cette limite n'existera que si $\frac{m}{n^2}$ tend vers une limite déterminée k Elle sera alors égale à

$$S = 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{k^2R^2}{4}}.$$

Elle dépend encore de k et n'est égale à $2\pi RH$ que si $\frac{m}{n^2}$ tend vers zéro.

On ne peut donc pas adopter la définition indiquée.

Définition. — La portion de surface délimitée par C se projette sur le plan des xy suivant une aire limitée par un contour c.

Décomposons cette aire en éléments de surface infiniment petits dans les deux sens et cela d'une manière quelconque, par deux familles de courbes. Soit $\Delta\omega_k$ l'un de ces éléments, et soit M_k un point de la surface se projetant à l'intérieur de $\Delta\omega_k$.

Menons le plan tangent en M_k, en supposant qu'en aucun point de la surface ce plan tangent ne soit perpendiculaire au plan des xy.

ξ, ν

Le cylindre de base $\Delta\omega_k$ parallèle à oz découpe sur ce plan tangent une petite aire plane, $\Delta\sigma_k$, ayant donc pour projection sur xoy, $\Delta\omega_k$. Si nous désignons par V_k l'angle que fait la normale en M_k avec oz, nous aurons

$$\Delta\omega_k = \Delta\sigma_k \cos V_k.$$

ρ

Mais $\cos V_k$ est une certaine fonction $f(\xi_k, \eta_k)$ des coordonnées de M_k. Si nous calculions la somme

$$\Sigma\Delta\sigma_k = \Sigma\Delta\omega_k \times \frac{1}{f(\xi_k, \eta_k)},$$

σ_2

cette somme aurait une limite bien déterminée quand tous les éléments $\Delta\omega_k$ tendent vers zéro : elle est donnée par l'intégrale

$$\iint \frac{1}{f(x, y)}\, d\omega = \iint \frac{d\omega}{\cos V}.$$

C'est cette limite que nous prendrons comme définition de la portion de surface se projetant suivant Ω. Cette limite est indépendante de la façon dont nous avons décomposé Ω en éléments $\Delta\omega_k$ et du point M_k choisi à l'intérieur de chaque élément. Nous verrons qu'elle est indépendante des axes de coordonnées.

Si l'équation de S est donnée sous la forme $z = f(x, y)$, on a

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

On peut en particulier décomposer Ω en rectangles par des parallèles aux axes ; $d\omega = dx\,dy$. On est ramené au calcul de

$$\iint_\Omega \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

On pourra pour calculer cette intégrale double effectuer sur x, y tel changement de variables que l'on voudra.

Nous appellerons élément de surface, l'élément $d\sigma$ qui est lié à l'élément de surface plane $d\omega$ par la relation $d\sigma = \frac{d\omega}{\cos V}$ (V aigu).

Supposons que la surface soit déterminée par les expressions des coordonnées d'un de ses points en fonction de deux paramètres sous la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

δ

Cherchons l'expression de cos V. Nous désignerons par A, B, C les déterminants fonctionnels

$$D^{u,v}_{y,z}, \qquad D^{u,v}_{z,x}, \qquad D^{u,v}_{x,y}.$$

La normale étant perpendiculaire à tout déplacement sur la surface, en particulier aux déplacements suivant les courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, les paramètres directeurs de la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ étant $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et ceux de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ étant $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ on a donc, en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale,

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad \alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \gamma \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

δ_1

On en déduit

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

D'où

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\cos V} = \frac{\varepsilon}{C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

D'autre part, une courbe quelconque de la surface correspondant à $\theta(u, v) = 0$ se projette sur le plan des x, y suivant la courbe $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, u et v étant liés par la même relation $\theta(u, v) = 0$.

δ_1, α

Décomposons l'aire Ω en éléments de surface par les familles de courbe $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ L'aire du quadrilatère compris entre les courbes $u, u + du, v, v + dv$ a pour partie principale, comme nous l'avons vu,

$$| D^{u,v}_{x,y} | \, du\, dv = | C | \, du\, dv.$$

α

Si nous prenons les éléments de surface correspondants, ils auront donc pour partie principale

$$\Delta\sigma = + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

et l'on sera ramené au calcul de l'intégrale double

$$\iint_{\Omega} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

REMARQUES. — La définition que nous avons dû d'abord adopter exigeait qu'en aucun point, le plan tangent ne fût perpendiculaire à xoy. Mais pour cette dernière intégrale, cette condition n'est plus nécessaire, la fonction $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ restant finie. C'est cette intégrale double que nous prendrons donc dans tous les cas comme définition de l'aire, définition justifiée par les considérations que nous avons exposées.

II. Il faut remarquer que nous semblons avoir rattaché la définition de l'aire à sa projection sur le plan des xy, et que par conséquent la définition semble dépendre des axes de coordonnées choisis. Grâce à cette dernière expression de l'aire, nous allons voir qu'il n'en est rien.

Tout d'abord, il est évident que nous obtiendrons la même valeur de l'aire si nous faisons une translation d'axes quelconques ou si nous les faisons tourner autour de oz (la projection de l'élément d'aire sur xoy n'est pas modifiée).

Or la deuxième expression que nous avons obtenue est symétrique en x, y, z. Nous serions donc arrivés à la même expression si nous avions projeté la portion de surface parallèlement à ox ou à oy. Mais alors, on n'aurait eu non plus aucun changement si l'on avait fait une rotation autour de ox ou autour de oy.

En d'autres termes, on obtiendra le même résultat si on imprime au système d'axes trois rotations arbitraires autour de ox, oy, oz et une translation quelconque, en d'autres termes si on amène le système à une position quelconque de l'espace.

Application. Voûte de Viviani. — *Considérons la demi-sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad (z > 0)$$

et le cylindre parallèle à oz ayant pour base le cercle γ de diamètre OA. Calculer l'aire de la surface détachée dans la sphère par le cylindre.

Il faut déterminer la portion de surface de la sphère qui se projette à l'intérieur du cylindre.

δ, ν

Si nous définissons un point de la sphère par sa longitude φ (comptée à partir du plan des xz) et sa colatitude λ, on aura

$$x = R \sin \lambda \cos \varphi,$$
$$y = R \sin \lambda \sin \varphi,$$
$$z = R \cos \lambda$$

On a ici $V = \lambda$.

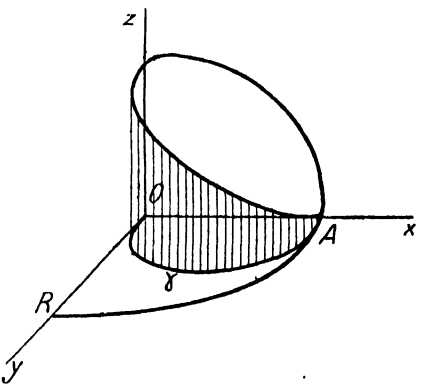


Fig. 35.

δ_1

Dans le plan des xy, les courbes $\varphi = \text{const.}$ sont des droites issues de l'origine ; les courbes $\lambda = \text{const.}$ sont des cercles de rayon $R \sin \lambda$.

σ

L'élément d'aire du plan des xy est donc

$$d\omega = R \sin \lambda \, d\omega \times d(R \sin \lambda) = R^2 \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda \, d\varphi.$$

Par suite

$$d\sigma = \frac{d\omega}{\cos \lambda} = R^2 \sin \lambda \, d\lambda \, d\varphi.$$

δ_1

Nous avons donc à calculer

$$\iint_{\gamma} R^2 \sin \lambda \, d\lambda \, d\varphi.$$

Intégrons d'abord par rapport à λ. Pour une valeur donnée de φ,

o

la distance $R \sin \lambda$ varie de 0 à $om = R \cos \varphi$, et par suite λ de 0 à $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

On a donc d'abord

$$R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin \lambda \, d\lambda = R^2(-\cos \lambda)_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} = R^2(1 - \sin \varphi).$$

Or φ peut varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$. L'aire cherchée est donc

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2(1 - \sin \varphi) d\varphi = R^2\left[\frac{\pi}{2} + (\cos \varphi)_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

La partie restante de la sphère a donc une aire

$$\frac{\pi}{2}R^2 - R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = R^2.$$

ρ

Ce résultat dû à Viviani est remarquable puisqu'il est indépendant de π,

Autre forme de l'expression de l'aire. — Lorsque la surface est donnée sous la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

nous avons vu que l'aire est donnée par l'intégrale

$$S = \iint_\Omega \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

en posant

$$A = D^{u,v}_{y,z}, \qquad B = D^{u,v}_{z,x}, \qquad C = D^{u,v}_{x,y}.$$

En explicitant ABC, la quantité sous le radical est

$$A^2 + B^2 + C^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \cdots$$

σ_1

Or, d'après l'identité de Lagrange, cette expression peut s'écrire

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$
$$-\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2.$$

ξ

Nous poserons pour abréger

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

D'où

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

Et

$$S = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Dans le système de coordonnées u, v, l'élément d'aire est donc

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

REMARQUE. — Ces expressions E, F, G qui ont une importance considérable dans l'étude d'une surface, s'introduisent lorsque l'on considère la distance ds de deux points infiniment voisins d'une surface, x, y, z, et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ correspondant aux systèmes de valeurs u, v et $u + du$, $v + dv$.

On a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 + \cdots = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2.$$

E, F, G sont donc les coefficients de l'élément linéaire de la surface.

On voit que $\sqrt{\mathrm{E}}\,du$ représente la différentielle ds_1 de l'arc quand on se déplace sur la courbe $v = \text{const.}$, de même $\sqrt{\mathrm{G}}\,dv$ celle qui correspond à un déplacement ds_2 sur la courbe $u = \text{const.}$

Quant aux paramètres des tangentes aux deux courbes, ils sont respectivement

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v},$$

de sorte qu'en désignant par α l'angle de ces deux tangentes, on a

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2} \times \sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}.$$

Et par suite

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}.$$

En particulier si $\mathrm{F} = 0$, les courbes coordonnées sont orthogonales.

L'élément d'aire $d\sigma = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,du\,dv$ peut s'écrire

$$\sqrt{\mathrm{E}}\,du \times \sqrt{\mathrm{G}}\,dv \sin\alpha = ds_1\,ds_2 \sin\alpha.$$

On voit que cela revient à décomposer la surface en éléments d'aire par les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ et à assimiler un élément d'aire à un parallélogramme qui serait situé dans le plan tangent à la surface et construit sur les longueurs ds_1, ds_2 des arcs des courbes coordonnées, portées sur les tangentes : on retrouve donc une définition intuitive de l'aire d'une surface courbe.

Cas particulier. — Si la surface est donnée sous la forme

$$z = f(x, y)$$

σ

les courbes coordonnées étant $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2$$
$$= (1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)dy^2.$$

On a donc

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2.$$

Et par suite

$$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2, \qquad S = \iint_\Omega \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy.$$

Si l'on emploie les coordonnées polaires dans le plan des x, y,

δ_1

on aura

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega, \qquad z = f(\rho, \omega).$$

Donc

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2\right]d\rho^2 + 2\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial f}{\partial \omega}\,d\rho\,d\omega + \left[\rho^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2\right]d\omega^2.$$

De sorte que

$$S = \iint_\Omega \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2 + \rho^2\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2\right)}\,d\rho\,d\omega.$$

ξ

En particulier, si la surface est de révolution autour de oz, on a

$$z = f(\rho), \qquad S = \iint_\Omega \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}\,d\rho\,d\omega.$$

ρ

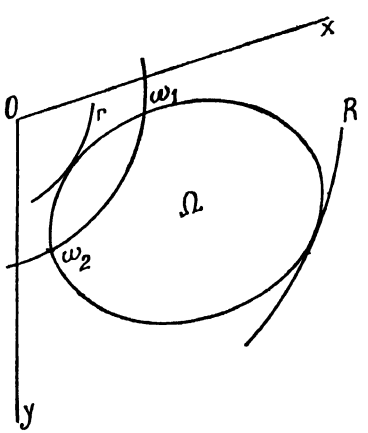


Fig. 36.

ω

On pourra intégrer une première fois par rapport à ω

$$\rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}\,(\omega_2 - \omega_1)d\rho,$$

les valeurs ω_1, ω_2 étant celles qui correspondent aux valeurs limites de ω (dans le champ) pour chaque valeur de ρ correspondante, c'est-à-dire celles qui correspondent aux points d'intersection du champ (en supposant qu'il n'y en ait que deux) avec le cercle de rayon ρ de centre origine.

On est alors ramené à une intégrale simple d'une fonction de ρ entre r et R.

Si l'on veut déterminer l'aire totale de la surface, pour chaque valeur de ρ les valeurs limites de ω diffèrent de 2π.

Dans le cas actuel, les courbes $\rho = \text{const.}$ sont les parallèles de la surface, les courbes $\omega = \text{const.}$ les méridiens. Ces deux familles de courbes se coupent à angle droit. En décomposant la surface de révolution, par les parallèles et les méridiens, d'après la signification géométrique générale, l'élément d'aire est celui du rectangle ayant pour côtés l'élément de parallèle $\rho d\omega$ et l'élément de méridien $\sqrt{1 + f'^2(\rho)}\, d\rho$.

C'est bien en effet ce que l'on retrouve ici

$$d\sigma = \rho d\omega \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2}\, d\rho.$$

Application. — *Déterminer l'aire de la portion de surface*

$$2az = x^2 - y^2$$

qui se projette sur le plan xoy à l'intérieur de la courbe $\rho = a\sqrt{\cos\omega}$.

δ

En prenant les coordonnées polaires, on a

$$z = \frac{1}{2a}\rho^2 \cos 2\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\rho}{a}\cos 2\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \omega} = -\frac{1}{a}\rho^2 \sin 2\omega.$$

On a donc à calculer l'intégrale

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\frac{\rho^4}{a^2}\sin^2 2\omega + \rho^2\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\cos^2 2\omega\right)}\, d\rho\, d\omega = \iint_{\Omega} \frac{\rho}{a}\sqrt{\rho^2 + a^2}\, d\rho\, d\omega.$$

δ_1

Pour chaque valeur de ω, ρ varie de 0 à $a\sqrt{\cos\omega}$ et ω peut varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

En intégrant par rapport à ρ, on a d'abord

$$d\sigma = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a}\left[(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\sqrt{\cos\omega}} = \frac{1}{3a}\left[a^3(1 + \cos\omega)^{\frac{3}{2}} - a^3\right] = \frac{a^2}{3}\left(2\sqrt{2}\cos^3\frac{\omega}{2} - 1\right).$$

δ_1

En intégrant ensuite par rapport à ω, on trouve

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{3}\left(2\sqrt{2}\cos^3\frac{\omega}{2} - 1\right) d\omega$$

$$= \frac{a^2}{3}\left[4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(1 - \sin^2\frac{\omega}{2}\right) d\sin\frac{\omega}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\omega\right]$$

$$= \frac{a^2}{3}\left[4\sqrt{2}\left(\sin\frac{\omega}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\omega}{2}\right) - \omega\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{3}\,\frac{20 - 3\pi}{3}.$$

VI. — CAS GÉNÉRAUX OU LES INTÉGRALES DOUBLES PEUVENT SE RAMENER A DES INTÉGRALES SIMPLES

Si nous résumons les formules obtenues pour le calcul des volumes et des aires, nous voyons que, si la surface a pour équations

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

on a

$$V = \iint_{\Omega} (z_2 - z_1) \mid C \mid du\, dv, \qquad S = \iint_{\Omega} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

les intégrales étant étendues au champ de variation des variables u, v correspondant au volume ou à l'aire considérée.

Il existe des cas où l'on peut effectuer une première intégration et où le problème se ramène par conséquent à une simple quadrature. Cela arrive en particulier pour deux classes très générales de surfaces, les surfaces hélicoïdales et les surfaces réglées.

ψ

Surfaces hélicoïdales. — Une surface hélicoïdale est engendrée de la façon suivante : une courbe plane dont le plan passe par un axe fixe oz tourne autour de cet axe et s'élève en même temps d'une quantité proportionnelle à l'angle de rotation. Les diverses positions de la courbe engendrent la surface.

Si nous prenons pour plan des xz la position initiale de la courbe (supposée plane). elle sera définie dans ce plan par des équations de la forme

$$X = f(t), \qquad Z = g(t).$$

δ_1

Si l'on considère l'un des points m de cette courbe (X, O, Z),

o

après rotation d'un angle ω, puisque ce point s'est élevé d'une quantité $k\omega$ proportionnelle à l'angle de rotation, les coordonnées de ce point seront

$$x = X \cos \omega, \qquad y = X \sin \omega, \qquad z = Z + k\omega,$$

c'est-à-dire

$$x = f(t) \cos \omega, \qquad y = f(t) \sin \omega, \qquad y = g(t) + k\omega.$$

Ce sont les expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres ω, t.

On a

$$\frac{\partial x}{\partial t} = X' \cos\omega, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = X' \sin\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = Z',$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = -X \sin\omega, \qquad \frac{\partial y}{\partial \omega} = X \cos\omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \omega} = k.$$

δ_1

D'où

$$A = kX' \sin\omega - XZ' \cos\omega, \quad B = -XZ' \sin\omega - kX' \cos\omega, \quad C = XX'.$$

Et par suite

$$V = \iint_{\rho} |XX'|(Z + k\omega)\,dt\,d\omega, \qquad S = \iint \sqrt{k^2X'^2 + X^2Z'^2 + X^2X'^2}\,dt\,d\omega.$$

On voit qu'on peut effectuer une premiere intégration par rapport à ω. On donnera à t une valeur constante et l'on obtiendra

$$V = \int_{t_1}^{t_2} |XX'| \left(Z\omega + k\frac{\omega^2}{2}\right)_{\omega_1}^{\omega_2} dt,$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{k^2X'^2 + X^2Z'^2 + X^2X'^2}\,(\omega_2 - \omega_1)\,dt.$$

ω_1 et ω_2 étant les valeurs limites (variables avec t) correspondant à chaque valeur de t considérée. Elles seraient constantes si l'on prenait le volume ou l'aire correspondant à un onglet compris entre deux plans passant par oz.

β

Surfaces de révolution. — En particulier si $k = 0$, la surface engendrée est de révolution

$$V = \int_{t_1}^{t_2} XX'Z(\omega_2 - \omega_1)dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{X'^2 + Z'^2}\,X(\omega_2 - \omega_1)dt.$$

Ellipsoïde. — L'ellipse génératrice a pour équation dans le plan xoz

$$X = a\cos t, \qquad Z = c\sin t.$$

δ

Pour un onglet $\omega_2 - \omega_1$, on aura

$$V = (\omega_2 - \omega_1)\int_{t_1}^{t_2} a^2c\sin^2 t\cos t\,dt = \frac{1}{3}a^2c(\omega_2 - \omega_1)\left(\sin^3 t\right)_{t_1}^{t_2}$$

$$S = a(\omega_2 - \omega_1)\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2\sin^2 t + c^2\cos^2 t}\cos t\,dt.$$

L'intégrale peut être calculée.

Pour le volume entier, $\omega_2 - \omega_1 = 2\pi$, $t_1 = -\frac{\pi}{2}$, $t_2 = +\frac{\pi}{2}$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 c,$$

$$S = 2a\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + c^2 \cos^2 t}\cos t\, dt = 2a\pi \int_{-1}^{+1} \sqrt{a^2 u^2 + c^2(1-u^2)}\, du.$$

Surfaces réglées. — La surface peut être représentée par les équations

$$x = a + bu, \qquad y = a_1 + b_1 u, \qquad z = a_2 + b_2 u,$$

a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, étant des fonctions d'une autre variable t. On a ici

$$x_u' = b, \qquad y_u' = b_1, \qquad z_u' = b_2,$$
$$x_t' = a' + b'u, \qquad y_t' = a'_1 + b'_1 u, \qquad z_t' = a'_2 + b'_2 u,$$
$$C = b_1(a'_2 + b'_2 u) - b_2(a'_1 + b'_1 u) = m_2 + n_2 u.$$

De même

$$A = m + nu, \qquad B = m_1 + n_1 u, \qquad C = m_2 + n_2 u,$$

m, m_1, m_2, n, n_1, n_2 étant des fonctions de t

$$V = \iint_{\rho} (a_2 + b_2 u)(m_2 + n_2 u)\, dt\, du, \qquad S = \iint \sqrt{(m+nu)^2 + \cdots + \cdots}\, dt\, du.$$

On voit qu'on peut intégrer une première fois par rapport à u l'une et l'autre de ces deux expressions.

A propos des volumes, nous avons déjà remarqué que l'on pouvait arriver à un résultat équivalent pour une surface du second degré quelconque qui est une surface réglée à génératrices réelles ou imaginaires.

Dans le cas d'un ellipsoïde, pour éviter les imaginaires, nous poserons

$$x = a \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = b \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = c \cos\theta.$$

On trouvera aisément

$$A = bc \sin^2\theta \cos\varphi, \qquad B = ca \sin^2\theta \sin\varphi, \qquad C = ab \sin\theta \cos\theta,$$

et par suite

$$V = abc \iint \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

$$S = \iint \sin\theta \sqrt{b^2c^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + c^2a^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + a^2b^2 \cos^2\theta} \, d\theta \, d\varphi.$$

ρ

On peut intégrer une première fois l'une et l'autre de ces intégrales doubles par rapport à θ. En donnant à φ une valeur déterminée, les limites θ_1, θ_2 de θ pourront être plus ou moins compliquées suivant la forme du champ considéré.

CHAPITRE XIV

INTÉGRALES TRIPLES — INTÉGRALES MULTIPLES

SOMMAIRE.

Intégrales triples : Subdivisions quelconques.
Calcul — Changement de variable — Applications : Masse. — Centre de gravité. — — Moments d'inertie.
Intégrales multiples : Calcul
Intégrales de surface — Continuité, Intégration, Dérivation : Cas d'un champ variable.

La notion d'intégrale simple, puis d'intégrale double que nous avons établie en considérant une fonction d'une variable, puis une fonction de deux variables indépendantes, ψ se généralise aisément au cas des fonctions de n variables indépendantes. Il suffit de répéter les considérations que nous avons exposées dans ces deux cas.

I. — INTÉGRALES TRIPLES

La notion de volume est maintenant établie par la considération des intégrales doubles. Prenons alors d'abord le cas d'une fonction $f(x, y, z)$, de trois variables indépendantes. Supposons-la bornée dans un domaine Ω (volume) et sur toute la surface de ce domaine.

α, ν, σ_1

On décomposera ce volume en éléments de volume $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ plus petits et que l'on supposera calculables. Nous supposerons chacun de ces éléments infiniment petits dans leurs trois dimensions c'est-à-dire pouvant être compris dans un parallélépipède dont les trois dimensions sont infiniment petites.

δ_1, σ_1

Dans chacun d'eux la fonction admet une borne infé-

rieure m_i et une borne supérieure M_i. Si on considère les deux sommes

$$s = \Sigma m_i \omega_i, \qquad S = \Sigma M_i \omega_i$$

ψ

elles ont respectivement des limites I et J si l'on considère des décompositions consécutives les unes aux autres, c'est-à-dire telles que chaque élément d'une des décompositions est décomposé à son tour en éléments plus petits lorsqu'on passe à la décomposition suivante.

(La démonstration est absolument identique à celles que nous avons déjà faites).

ξ

Subdivisions quelconques. — Considérons maintenant une suite de décompositions absolument quelconques Δ', Δ'_1, $\cdots$ Nous

ψ

allons montrer que pour ces décompositions, les sommes inférieures d'une part et les sommes supérieures d'autre part admettent encore pour limites I et J.

δ, σ₁

Prenons par exemple les sommes supérieures. J étant la borne inférieure des sommes S pour une suite de décompositions consécutives, Δ, Δ_1, Δ_2, $\cdots$ Δ_n, il existe une certaine décomposition Δ qui donnera une somme moindre que $J + \frac{\varepsilon}{2}$.

α, ξ

Pour chaque élément ω_i de Δ considérons les surfaces parallèles aux surfaces de séparation à la distance δ. Nous désignerons par r_i le volume compris entre les surfaces parallèles intérieures et les surfaces limitant ω_i. Et considérons une autre décomposition Δ' dont tous les éléments sont moindres que δ dans leurs trois dimensions. La somme correspondante S' sera évidemment

π, δ

d'abord supérieure à J. Il suffit en effet de considérer une autre décomposition Δ'' formée avec tous les éléments qui ont servi à former Δ et tous les éléments qui ont servi à former Δ'.

δ₁

Δ'' pouvant être considérée comme une décomposition consécutive à Δ, on a certainement

$$S'' > J.$$

D'autre part, Δ'' étant aussi une décomposition consécutive à Δ' on a aussi

$$S'' < S'.$$

Il en résulte que

$$S' > J.$$

Nous allons montrer maintenant que la somme S' peut être rendue aussi voisine qu'on le veut de J.

δ_1, σ_1

En effet parmi tous les éléments de Δ' compris dans un élément ω_i de Δ ou chevauchant sur son contour, il en existe qui sont totalement intérieurs à l'élément ω_i et que nous désignerons par ω'_{ih}, et d'autres qui ont au moins un point de contact avec le contour de Δ_i ou qui chevauchent sur ce contour.

Prenons d'abord la partie de la somme S' correspondant à tous les éléments ω'_{ih}. L'ensemble de tous ces éléments ρ remplit au moins tout le volume compris dans ω_i à l'intérieur des surfaces parallèles que nous avons considérées. On a donc

$$\Sigma\omega'_{ih} = \omega_i - \rho_i, \qquad \rho_i < r_i.$$

δ_1, ξ

Pour chacun de ces éléments la borne supérieure de la fonction est $M_{ih} < M_i$. On a donc

$$\Sigma\omega'_{ih} M_{ih} < \Sigma M_i \omega'_{ih} = M_i \Sigma\omega'_{ih} = M_i(\omega_i - \rho_i).$$

Et à fortiori on aura successivement

$$\Sigma\omega'_{ih} \cdot M_{ih} < M_i \omega_i + |M_i| \rho_i < M_i \omega_i + |M| \rho_i < M_i \omega_i + |M| r_i,$$

en désignant par $|M|$ le maximum de la valeur absolue de la fonction dans tout le volume. En faisant la somme de toutes les inégalités correspondant à tous les éléments ω_i

$$\Sigma\Sigma\omega'_{ih} M_{ih} < \Sigma M_i \omega_i + |M| \Sigma r_i < J + \frac{\varepsilon}{2} + |M| \Sigma r_i.$$

δ_1

Si l'on considère maintenant les éléments qui ont un point de contact avec la surface limitant ω_i, puisque tous ces éléments sont inférieurs à δ dans leurs trois dimensions, ρ ils seront certainement compris dans la région $2r_i$ formée par les surfaces parallèles. On aura

$$|\Sigma M_{ik} \omega''_{ik}| < |M| \times 2r_i.$$

On a donc pour tous ces éléments

$$|\Sigma\Sigma M_{ik} \omega''_{ik}| < |M| \Sigma r_i.$$

(L'élément ne doit être compté qu'une fois pour l'élément de surface ω_i et pour l'élément contigu).

ω

On aura donc au total

$$S' < J + \frac{\varepsilon}{2} + 2 \mid M \mid \Sigma r_i.$$

Or on peut choisir δ suffisamment petit pour que $2 \mid M \mid \Sigma r_i < \frac{\varepsilon}{2}$.

Et par conséquent on a bien alors

$$J < S' < J + \varepsilon.$$

Les sommes S' ont donc bien pour limite J.

Si I = J, la limite commune est appelée intégrale triple de la fonction $f(x, y, z)$ dans le volume Ω et se désigne par la notation $\iiint_\Omega f(x, y, z)d\omega$ ou $S_\Omega f(x, y, z)d\omega$.

σ1

THÉORÈME. — *Toute fonction continue dans un volume est intégrable dans ce volume.*

(Démonstration identique à celles que nous avons faites).

ξ

Généralisation. — On peut encore considérer l'intégrale triple comme la limite de $\Sigma\Sigma\Sigma f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)d\omega_k$ (ξ_k, η_k, ζ_k désignant un point quelconque à l'intérieur de ω_k) quand tous les éléments ω_k deviennent infiniment petits dans leurs trois dimensions.

δ

Théorème de la moyenne. — Si l'on a

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \times \psi(x, y, z),$$

et si $\psi(x, y, z)$ garde un signe constant, si dans le volume la fonction $\varphi(x, y, z)$ reste comprise entre des limites m et M, on aura

$$m \iiint \psi(x, y, z)d\omega < \iiint \varphi(x, y, z)\,\psi(x, y, z)d\omega < M \iiint \psi(x, y, z)d\omega.$$

On peut donc écrire

$$I = \mu \iiint \psi(x, y, z)d\omega \qquad (m < \mu < M)$$

et par suite

$$I = \varphi(\xi, \eta, \zeta) \iiint \psi(x, y, z)d\omega.$$

II. — CALCUL

Le volume se projette sur le plan des x, y suivant une aire A que nous supposerons tout entière à l'intérieur du rectangle $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.

α, σ_1 1° Nous décomposerons le volume par des plans parallèles aux trois plans de coordonnées à intervalles Δx_k, Δy_i, Δz_j ; nous supposerons tous les intervalles inférieurs à une quantité h que nous pourrons prendre aussi petite que nous le voudrons.

δ_1, α 2° Nous ferons la sommation en considérant d'abord tous les éléments relatifs à une même colonne, celle qui a pour base Δx_k, Δy_i.

La parallèle à oz, $x = x_k$, $y = y_i$, rencontre la surface limitant le volume en deux points z', z''.

$\delta_1, ?$ 3° Cette colonne comprend des éléments « réguliers » parallélipipèdes complets, complètement intérieurs au volume et, aux deux extrémités, des éléments irréguliers.

ψ Nous pouvons remplacer chacun de ces éléments irréguliers extrêmes par un parallélipipède qui aurait pour hauteur la distance du point x_k, y_i, z' ou z'' à la face du parallélipipède voisin.

π L'erreur commise sera en effet en désignant par | M | le maximum de la valeur absolue de la fonction dans tout le champ, moindre que $2Mh\,\Delta x_k\,\Delta y_i$ et pour tous les éléments $\Delta x_k\,\Delta y_i$ l'erreur commise sera moindre que

$$2Mh\,\Sigma\,\Delta x_k\,\Delta y_i < 2Mh(b - a)(d - c).$$

Cette erreur pourra donc bien être aussi petite qu'on le voudra.

δ_1 4° Nous prendrons dans chaque élément $\Delta x_k\,\Delta y_i\,\Delta z_j$ le point x_k, y_i, ζ_j (ζ_j encore arbitraire compris entre z_j et z_{j+1}).

Tous les éléments de cette colonne donneront donc une somme

$$\Sigma f(x_k, y_i, \zeta_j)\,\Delta x_k\,\Delta y_i\,\Delta z_j = \Delta x_k\,\Delta y_i\,\Sigma f(x_k, y_i, \zeta_j)\Delta z_j.$$

δ_1, σ_1 5° Nous choisirons les points ζ_j de manière que la somme soit rigoureusement égale à $\int_{z'}^{z''} f(x_k, y_i, z)dz$.

$$\Sigma f(x_k, y_i, \zeta_j)\Delta z_j = \int_{z'}^{z''} f(x_k, y_i, z)dz$$

(application du théorème de la moyenne aux intervalles $(z', z_1, z_2, \cdots z_f, \cdots z'')$.

6° L'intégrale ci-dessus est évidemment une fonction continue de $x_k y_i$

$$\varphi(x_k y_i) = \int_{z'}^{z''} f(x_k, y_i, z)dz.$$

Il restera donc à faire la somme de tous les résultats semblables c'est-à-dire

$$\Sigma \Delta x_h \Delta y_i \varphi(x_k, y_i)$$

correspondant à tous les éléments compris dans la projection A.

ρ, ο 7° Cette somme, quand tous les Δx_k et Δy_i tendent vers zéro, tend vers l'intégrale double

$$\iint_A \varphi(x, y)dx\,dy.$$

R En résumé le résultat s'obtient de la façon suivante.

Donner à x, y un système de valeurs correspondant à un point de A : *z' et z'' désignant les points d'intersection de la surface avec la parallèle à oz menée par ce point (en supposant qu'il n'y ait que deux points) calculer l'intégrale*

$$\int_{z'}^{z''} f(x, y, z)dz$$

(*x et y traités comme paramètres*).

Le résultat est une fonction $\varphi(x, y)$ dont il suffit de prendre l'intégrale double dans le champ A.

σ En d'autres termes, le résultat est obtenu par une intégrale double succédant à une intégrale simple.

Mais cette intégrale double se calcule elle-même par deux intégrations successives, l'une par rapport à y, l'autre par rapport à x.

On peut donc dire aussi que l'on fait trois intégrations simples successives, par rapport à chacune des variables.

1° Considérer x et y constants, et intégrer par rapport à z

$$\int_{z'}^{z''} f(x, y, z)dz.$$

Ce résultat étant une fonction $\varphi(x, y)$, le point x, y se déplaçant

dans le champ A, laisser x constant, faire varier y entre les limites η', η'' de x. On obtient

$$\int_{\eta'}^{\eta''} \varphi(x, y)dx.$$

Enfin ce nouveau résultat dépendant de x, $\psi(x)$, calculer

$$I = \int_a^b \psi(x)dx.$$

Ces calculs se traduisent par la formule

$$I = \int^b dx \int_{\eta'}^{\eta''} dy \int_{z'}^{z''} f(x, y, z)dz.$$

NOTA. — Pour la régularité nous employons la notation suivante : x', x'', y', y'', z', z'', ... désignent des limites variables avec deux ou plusieurs des autres variables indépendantes.

ξ', ξ'', η', η'', ζ', ζ'', ... désignent des limites variables avec une seule autre variable indépendante.

a, b, c, d, e, ... désignent des limites fixes.

REMARQUE. — Il est bien évident que l'on peut permuter le rôle des variables x, y, z, et par suite l'ordre des intégrations à la condition de calculer chaque fois les limites correspondantes des intégrales.

Il y a donc six manières différentes d'opérer.

Par exemple σ on pourra écrire

$$I = \int_e^f dz \int_{\xi'}^{\xi''} dx \int_{y'}^{y''} f(x, y, z)dy,$$

y' et y'' désignant les limites extrêmes de y pour le système de valeurs x, z correspondant à un point de la projection A_y de V sur le plan xoz, ξ' et ξ'' les abscisses des points d'intersection du contour de A_y avec la parallèle à ox de cote z, enfin e et f les cotes des plans tangents perpendiculaires à oz (ou des tangentes à A_y parallèles à ox).

On peut alors écrire

$$I = \int_e^f dz \left[\int_{\xi'}^{\xi''} dx \int_{y'}^{y''} f(x, y, z)dy \right].$$

Si nous considérons la section de la surface par le plan de cote z

cette section est une aire α et la parenthèse $^{\sigma, R_1}$ représente l'intégrale double

$$\iint_{\alpha} f(x, y, z)dx\,dy.$$

Cette intégrale double est évidemment une fonction continue de z entre les limites extrêmes de z.

Le résultat se présente ainsi sous la forme d'une intégrale double suivie d'une intégrale simple. En particulier on voit que l'on sera amené au calcul d'une intégrale simple $^{\rho}$ toutes les fois que l'on pourra calculer l'intégrale double $\iint_{\alpha} f(x, y, z)dx\,dy$.

Dérivées d'une intégrale. — Considérons en particulier le cas où l'intégrale triple est prise dans un champ parallélépipédique a, x ; b, y ; c, z, à limites inférieures fixes et à limites supérieures variables.

L'intégrale sera alors une fonction de ces limites supérieures

$$F(x, y, z) = \int_a^x dx \int_b^y dy \int_c^z f(x, y, z)dz.$$

$^{\sigma_1, \xi}$ Ce sera une fonction continue dans le champ aa', bb', cc', qui admettra les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_b^y dy \int_c^z f(x, y, z)dz, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x dx \int_c^z f dz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_a^x dx \int_z^y f dy.$$

Elle admettra des dérivées partielles du second ordre rectangles. Par exemple

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \int_c^z f(x, y, z)dz.$$

Enfin elle admettra certainement la dérivée partielle troisième

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = f(x, y, z).$$

III. — CHANGEMENT DE VARIABLES — INTÉGRALES TRIPLES

Nous avons à calculer par exemple

$$I = \int_a^b dx \int_{\eta'}^{\eta''} dy \int_{z'}^{z''} f(x, y, z)dz.$$

Faisons le changement de variables

$$x = \varphi(u, v, w), \qquad y = \psi(u, v, w), \qquad z = \theta(u, v, w)$$

établissant une correspondance supposée biunivoque entre le point $A_1(u, v, w)$ se déplaçant à l'intérieur d'un volume V, et sur la surface limitant ce volume, et le point $A(x, y, z)$ qui se déplace, alors à l'intérieur du volume V et sur la surface correspondante.

σ_2, ξ

Nous avons vu (déterminants fonctionnels) que ces formules de transformation peuvent alors se mettre sous la forme

$$x = \varphi(u, v, w), \qquad y = \psi_1(x, v, w), \qquad z = \theta_1(u, v, w).$$

Et on sait que

$$D_{x, y, z}^{u, v, w} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \times \frac{\partial \theta_1}{\partial w}.$$

Faisons d'abord l'intégration $\int_{z'}^{z''} f(x, y, z)dz$.

α, δ

Si nous faisons le remplacement de z par w défini par

$$z = \theta_1(x, y, w)$$

il faudra considérer le champ de variation Ω' de x, y, w. Pour des valeurs de x, y il faudra remplacer z', z'' par les valeurs correspondantes w_1, w_2 de w et calculer

$$\int_{w_1}^{w_2} f(x, y, \theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial w} dw.$$

α, σ_1

L'on peut remplacer $\frac{\partial \theta_1}{\partial w}$ par $\left| \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \right|$ à la condition de supposer que w' désigne la plus petite des deux limites de w : $w' < w''$ et écrire

$$\int_{w'}^{w''} f(x, y, \theta) \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \right| dw.$$

En faisant ensuite les deux autres quadratures pa rapport à x, y, ρ on voit qu'on est conduit à l'intégrale triple

$$\iiint f(x, y, \theta_1) \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \right| dw\, dx\, dy,$$

cette intégrale étant étendue au champ Ω' de variation de x, y, w. δ_1

L'on peut y commencer l'intégration par rapport à y et calculer d'abord

$$\int_{y'}^{y''} f(x, y, \theta) \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \right| dy$$

y' et y'' désignant les limites extrêmes de y pour un système de valeurs x, w. Si dans cette l'intégrale simple on fait le changement

$$y = \psi_1(x, v, w)$$

(v remplaçant y), α_1, σ_1 il faudra considérer le champ de variation Ω'' du point x, v, w, correspondant à Ω', et par suite à Ω, remplacer y en fonction de x, v, w et multiplier la fonction à intégrer par $\left| \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right|$ à la condition de prendre comme limite inférieure de l'intégrale la plus petite des valeurs de v.

$$\int_{v'}^{v''} f(x, \psi_1, 0_0) \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \right| \times \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right| dv.$$

Enfin δ_1 en repassant encore par l'intégrale triple

$$\int_a^b dx \int_{w'}^{w''} dw \int_{v'}^{v''} f(x, \psi_1, 0_1) \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \right| \times \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right| dv$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(x, \bar{y}, \bar{z}) \left| \frac{\partial 0_1}{\partial w} \right| \times \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial w} \right| dx\, dv\, dw,$$

$(f(x, \bar{y}, \bar{z})$ signifiant que y et z sont remplacés en fonction de $x, v, w)$, et commençant cette fois par l'intégration par rapport à x, on voit que si l'on fait dans l'intégrale $\int_{x'}^{x''} f \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \right| \times \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right| dx$ le nouveau changement

$$x = \varphi(u, v, w)$$

il faudra multiplier la fonction à intégrer par $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|$.

En revenant enfin à l'intégrale triple on obtient donc l'intégrale

$$I = \iiint_{V_1} f(\varphi, \psi, \theta) \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| \times \left|\frac{\partial \psi_1}{\partial v}\right| \times \frac{\partial \theta_1}{\partial w}\, du\, dv\, dw$$

c'est-à-dire

$$\iiint_{V_1} f(\varphi, \psi, \theta) \left|D^{u,v,w}_{x,y,z}\right| du\, dv\, dw$$

étendue au champ de variation V_1 du point u, v, w.

Telle est la formule du changement de variables.

REMARQUE. — L'expression $\left|D^{u,v,w}_{x,y,z}\right| du\, dv\, dw$ à quoi se réduit l'élément de l'intégrale si $f(x, y, z) = 1$, représente l'élément de volume dans le système de variables u, v, w, c'est-à-dire la partie principale du volume infiniment petit compris entre les surfaces u et $u + du$, les surfaces v, $v + dv$, w et $w + dw$.

2° Méthode. — On pourrait également adapter à trois variables la méthode de transformation que nous avons établie pour le cas de deux variables.

Nous savons en effet que si l'on considère le parallélipipède construit sur trois arêtes mm_1, mm_2, mm_3 (m_1, m_2, m_3 se déduisant du point m en ne faisant varier successivement que u, v, ou w de du, dv, dw) et le parallélipipède construit sur les trois arêtes correspondantes MM_1, MM_2, MM_3, le rapport de ces deux volumes tend vers $D^{u,v,w}_{x,y,z}$ (en grandeur et en signe) quelle que soit la façon dont le premier parallélipipède tende vers zéro.

Si nous partageons le volume V_1 dans lequel se déplace le point u, v, w en parallélipipèdes parallèles aux axes u, v, w, le volume Δv correspondant, dans le système d'axes $oxyz$, à ce volume $du \times dv \times dw$, aura pour partie principale $\left|D^{u,v,w}_{x,y,z}\right| du\, dv\, dw$, à la condition de supposer du, dv, dw positifs.

Si donc nous décomposons V_1 en éléments de volume par les surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, nous aurons à calculer la somme

$$\Sigma f(x, y, z) \left|D^{u,v,w}_{x,y,z}\right| du\, dv\, dw.$$

C'est le résultat ci-dessus.

REMARQUE. — Nous avons jusqu'ici supposé qu'une parallèle à l'un des axes ne rencontrait la surface qui limite le domaine qu'en deux points. S'il n'en était pas ainsi, on le décomposerait en domaines partiels pour chacun desquels cette condition serait réalisée.

IV. — APPLICATIONS

La notion d'intégrale triple trouve son application dans un grand nombre de notions physiques ou mécaniques.

Masse d'un corps. — Considérons un corps V. Décomposons-le en éléments de volume plus petits. Soit Δv un de ces éléments, et soit Δm la masse de cet élément de volume (la masse d'un corps est une notion première). Le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ s'appelle la densité moyenne de l'élément Δv. Si nous supposons que l'élément Δv devienne infiniment petit dans ses trois dimensions en entourant un point M, le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ où Δm tend également vers zéro, tendra vers une limite que l'on appellera la densité du corps au point M. Cette valeur limite δ dépendra en général du point M considéré. Ce sera donc une fonction $\delta = f(x, y, z)$ des coordonnées de ce point. Nous la supposerons continue dans l'intérieur de V.

Supposons que l'on connaisse cette fonction. Nous allons voir que l'on peut en déduire la masse totale du corps.

Si en effet nous décomposons celui-ci en éléments plus petits, et si Δm est la masse de l'un de ces éléments Δv, lorsque Δv tendra vers zéro (dans ses trois dimensions) en entourant un point $M(x, y, z)$, puisque le rapport $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ a pour limite $\delta = f(x, y, z)$, on en déduit que, pour une valeur suffisamment petite de Δv, on a

$$\frac{\Delta m}{\Delta v} = f(x, y, z) + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit avec Δv. On peut supposer tous les éléments Δv suffisamment petits pour que, quel que soit l'élément, on ait $| \varepsilon | < \varepsilon_0$, ε_0 étant fixé aussi petit qu'on le voudra.

δ_1

La masse Δm de l'élément est donc

$$\Delta m = f(x, y, z)\Delta v + \varepsilon\Delta v.$$

Et la masse totale du corps sera

$$\Sigma\Delta m = \Sigma f(x, y, z)\Delta v + \Sigma\varepsilon\Delta v.$$

α

Si nous faisons décroître tous les éléments Δv vers zéro, la première somme aura par définition pour limite l'intégrale triple

$$\iiint_V f(x, y, z)dv.$$

Quant à la deuxième somme, puisque tous les ε sont moindres que ε_0 en valeur absolue, elle est également moindre en valeur absolue que $\varepsilon_0\Sigma\Delta v = \varepsilon_0 V$.

Elle peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut.

ω

La masse du corps (quantité fixe), pouvant être aussi voisine qu'on le veut de l'intégrale triple $\iiint_V f(x, y, z)dv$, est rigoureusement égale à cette intégrale triple.

Dans le cas où la densité est constante, le corps est dit homogène : le calcul de la masse se réduit au calcul du volume.

Centre de gravité. — Soit un corps. Décomposons-le en éléments Δv de masse Δm. Prenons un point M à l'intérieur de l'élément. Le produit de la masse de l'élément Δm par la distance du point M au plan des xy s'appelle le « moment » de l'élément par rapport au plan des xy.

Ce moment est variable avec le point M choisi, mais nous devons ultérieurement considérer des éléments infiniment petits dans leurs trois dimensions.

Si ρ désigne la densité au point M, la masse de l'élément est $[\rho(x, y, z) + \varepsilon]\Delta v$ et le moment $z(\rho + \varepsilon)\Delta v$.

La somme des moments de tous ces éléments $\Sigma z(\rho + \varepsilon)\Delta v$, lorsque tous les éléments Δv deviennent infiniment petits, s'appelle le moment total du corps par rapport au plan des xy.

ξ, o

Or la somme $\Sigma z\varepsilon\,\Delta v$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut puisqu'elle est inférieure à $\varepsilon_0 Z\Sigma\,\Delta v = \varepsilon_0 ZV$, Z désignant la cote maxima des points du volume.

σ_2 La première partie $\Sigma z\rho(x, y, z)\Delta v$ a pour limite l'intégrale triple

$$M_z = \iiint_V z\rho(x, y, z)dv.$$

On définirait de même les moments du corps par rapport aux deux autres plans de coordonnées.

Cela étant, on appelle « centre de gravité » du corps, un point G tel que, si toute la masse du corps y était concentrée, ses moments par rapport aux trois plans de coordonnées seraient respectivement égaux aux moments du corps par rapport à chaque plan correspondant.

r, δ_1 Il en résulte que, si M désigne la masse totale du corps et si X, Y, Z sont les coordonnées du centre de gravité, on aura

$$MX = \iiint_V \rho(x, y, z)x\,dv, \qquad MY = \iiint_V \rho y dv, \qquad MZ = \iiint_V \rho z\,dv$$

avec

$$M = \iiint_V \rho dv.$$

Les coordonnées du centre de gravité se calculent donc au moyen de quatre intégrales triples.

Propriétés. — I. Décomposons le corps d'une manière quelconque en éléments V_1, V_2, V_3, $\cdots$ en nombre fini ou infini et dans ce cas, infiniment petits dans une, deux, ou trois dimensions. Soient m_1, m_2, m_3, $\cdots$ les masses de ces éléments.

Désignons d'autre part par ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, $\cdots$ les coordonnées du centre de gravité de chaque élément. On aura

$$m_1\xi_1 = \iiint_{V_1} \rho x\,dv, \qquad m_2\xi_2 = \iiint_{V_2} \rho x\,dv \cdots$$

ρ, ν En ajoutant membre à membre toutes les égalités on obtiendra au second membre

$$\iiint_{V_1} + \iiint_{V_2} + \cdots = \iiint_V \rho x\,dv = MX.$$

Et par suite

$$MX = m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \cdots$$

Ainsi donc, σ on peut décomposer le corps en parties finies ou infiniment petites ; à la condition de multiplier chaque élément de masse par la coordonnée correspondante et faisant la somme, on obtiendra le moment correspondant du corps.

Cette formule est ainsi la généralisation de la formule qui sert de définition.

Si l'on a pu décomposer le corps en éléments dm infiniment petits dans deux dimensions seulement, mais dont on puisse connaître le centre de gravité, on sera ramené à une intégrale double.

Si l'on a pu le décomposer en éléments infiniment petits dans une seule dimension, connaissant le centre de gravité de chacun de ces éléments, on n'aura plus à calculer qu'une intégrale simple.

Cette remarque est d'une application constante.

II. Dans le cas où le corps est homogène, la densité est constante on a

$$M = \rho V, \qquad \rho VX = \iiint \rho x\, dv = \rho \iiint x\, dv.$$

D'où

$$VX = \iiint x\, dv.$$

Et

$$(1)\quad VX = V_1\xi_1 + V_2\xi_2 + \cdots,\quad VY = V_1\eta_1 + V_2\eta_2 + \cdots,\quad VZ = V_1\zeta_1 + \cdots$$

Supposons en particulier tous les centres de gravité partiels dans un même plan,

$$aX + bY + cZ + d = 0.$$

On pourra poser

$$\begin{aligned} a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1 + d &= 0, \\ a\xi_2 + b\eta_2 + c\zeta_2 + d &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

α, ν Multiplions les équations (I) respectivement par a, b, c et ajoutons-les. δ_1 On aura

$$\begin{aligned} V(aX + bY + cZ) &= V_1(a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1) + V_2(a\xi_2 + b\eta_2 + c\eta_2) + \cdots \\ &= -V_1 d - V_2 d \cdots = -Vd. \end{aligned}$$

D'où

$$aX + bY + cZ + d = 0.$$

ω Le centre de gravité total sera donc également dans le

plan. On en déduit que si tous les centres de gravité partiels sont sur une droite, le centre de gravité total sera sur cette même droite.

Application. — *Considérons en axes rectangulaires ou obliques le paraboloïde elliptique*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y_2}{q} - 2z = 0$$

et la portion de ce paraboloïde comprise entre les plans $z = 0$, $z = h$. *Cherchons son centre de gravité*

δ, α

Décomposons-le en tranches par des plans parallèles au

σ

plan des xy. Les sections étant des ellipses ayant leur centre sur oz, le centre de gravité de chaque tranche se trouvera sur oz, entre

ω

les deux sections correspondantes. Le centre de gravité total se trouvera donc aussi sur oz en un point G de cote Z, tel que

$$(1) \qquad VZ \cos 0 = \int z \cos 0 \, dv = I.$$

En désignant par ϑ l'angle de oz avec la perpendiculaire au plan des xy, et par φ l'angle des axes ox, oy, l'aire de l'ellipse de section est $2\pi z\sqrt{pq}\sin\varphi$ et le volume de la tranche sera $2\pi z\sqrt{pq}\sin\varphi \times dz\cos\vartheta$.

δ₁

On a donc

$$V = 2\pi\sqrt{pq}\sin\varphi\cos 0\int_0^h z\,dz = \pi h^2\sqrt{pq}\sin\varphi\cos 0.$$

On aura de même

$$I = \int_0^h 2\pi z\sqrt{pq}\sin\varphi\cos 0 \times z\cos 0\,dz = 2\pi\sqrt{pq}\sin\varphi\cos^2 0\int_0^h z^2 dz$$

$$= 2\pi\sqrt{pq}\sin\varphi\cos^2 0\cdot\frac{h^3}{3}.$$

D'où en substituant dans (1) et réduisant

$$h^2 Z = \frac{2h^3}{3}, \qquad Z = \frac{2}{3}h.$$

Moments d'inertie. — Étant donné un corps décomposé en éléments Δv de masse Δm, le moment d'inertie de cet élément par rapport à un axe est le produit de la masse Δm par le carré de la distance d'un point intérieur, à l'axe. Le moment d'inertie total du corps

est la somme des moments d'inertie partiels quand tous les éléments Δv deviennent infiniment petits dans leurs trois dimensions.

Si par exemple la droite est prise comme axe des z, le carré de la distance d'un point x, y, z à cet axe est $d^2 = x^2 + y^2$. Le moment d'inertie sera donné par l'intégrale triple

$$I_z = \iiint_V \rho(x^2 + y^2)dv.$$

ρ désignant la densité au point x, y, z. Si l'on met le résultat sous la forme Mk^2, k s'appelle le rayon de giration du corps.

On aurait de même les moments d'inertie par rapport à ox ou oy.

Comme pour le centre de gravité et le moment d'un corps, la considération du moment d'inertie joue un grand rôle en mécanique et en physique. Nous allons calculer les moments d'inertie de certains corps simples.

Barreau parallélépipédique homogène. — Si le barreau a la forme d'un parallélépipède droit homogène d'arêtes, $2a$, $2b$, $2c$, en le rapportant à des axes passant par son centre et parallèles aux arêtes, le moment d'inertie par rapport à oz a pour expression

$$\rho \iiint (x^2 + y^2)dv.$$

En décomposant le corps en éléments de volume par des plans parallèles aux plans de coordonnées, l'intégrale se ramène à

$$I = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} dy \int_{-c}^{+c} (x^2 + y^2)dz,$$

les limites dans chaque intégrale étant indépendantes des coordonnées restantes. En calculant I, on a successivement

$$I_z = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} 2c(x^2 + y^2)dy$$

$$= 2c \int_{-a}^{+a} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)_{-b}^{+b} = 4bc \int_{-a}^{+a} \left(x^2 + \frac{b^2}{3}\right)dx$$

$$= 4bc \left(\frac{x^3}{3} + \frac{b^2 x}{3}\right)_{-a}^{+a} = 8abc \frac{a^2 + b^2}{3} \qquad k^2 = \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

Barreau cylindrique. — Si le barreau homogène est cylindrique, d'axe ox, de rayon R, de longueur $2a$, on aura

$$I_x = \iiint (x^2 + y^2)dv.$$

Nous prendrons ici des coordonnées polaires dans le plan yoz

$$y = r\cos\theta, \qquad z = r\sin\theta, \qquad x = x.$$

On a

$$D^{x,r,\theta}_{x,y,z} = r.$$

D'où

$$I_x = \iiint (x^2 + r^2\cos^2\theta) r\,dr\,d\theta\,dx.$$

Cette intégrale se ramène aux quadratures

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} dr \int_{-a}^{+a} r(x^2 + r^2\cos^2\theta)dx.$$

En effectuant on obtient aisément

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} dr \times 2r\left(\frac{a^3}{3} + r^2\, a\cos^2\theta\right) = 2\pi a R^2 \frac{4a^2 + 3R^2}{12}.$$

De même

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2)dv = \iiint r^2 \times r\,dr\,d\theta\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} dr \int_{-a}^{+a} r^3 dx = \pi a R^4.$$

Sphère homogène. — Les moments d'inertie par rapport à tous les diamètres sont évidemment égaux. Si l'on prend le centre de la sphère comme origine on a

$$I_x = I_y = I_z.$$

Or

$$I_x + I_y + I_z = \iiint 2(x^2 + y^2 + z^2)dv.$$

Le moment d'inertie par rapport à un diamètre est donc

$$I = \frac{2}{3}\iiint (x^2 + y^2 + z^2)dv.$$

δ_1, α

En prenant des coordonnées polaires dans l'espace

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \qquad y = r \sin \theta \sin \varphi, \qquad z = r \cos \theta.$$

On a

$$dv = \left| D^{r,\theta,\varphi}_{x,y,z} \right| dr\, d\theta\, dy = r^2 \sin \theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

D'où

$$I = \frac{2}{3} \int_0^R r^4\, dr \int_0^\pi \sin \theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi \frac{R^5}{15} \quad \left(k^2 = 2\frac{R^2}{5}\right).$$

Moment d'inertie d'un anneau homogène par rapport à son axe. — Cet anneau en forme de tore est engendré par la rotation, autour de *oz* pris comme axe, d'un cercle initialement dans le plan *xoz*.

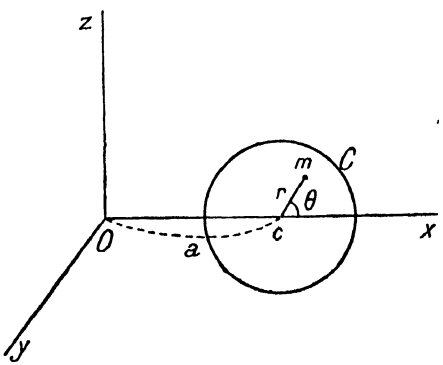


Fig. 37.

Nous prendrons l'axe *ox* passant par le centre C du cercle. Un point quelconque du tore provient de la rotation d'un point initialement à l'intérieur du cercle C. Si X, Z sont les coordonnées de ce point, après rotation de l'angle φ, le point aura pour coordonnées

$$x = X \cos \varphi, \qquad y = X \sin \varphi, \qquad z = Z.$$

α

Or en posant $oc = a$ et définissant le point *m* intérieur par la distance $cm = r$, et l'angle $xcm = \theta$, on aura

$$X = a + r \cos \theta, \qquad Z = r \sin \theta.$$

D'où

$$x = (a + r \cos \theta) \cos \varphi, \qquad y = (a + r \sin \theta) \sin \varphi, \qquad z = r \sin \theta.$$

o

On obtiendra tous les points de l'anneau en faisant varier *r* de 0 à R, θ de 0 à 2π, φ de 0 à 2π et les limites de chacune de ces diverses variables sont indépendantes des deux autres.

δ_1

D'autre part

$$D^{r,\theta,\varphi}_{x,y,z} = r(a + r \cos \theta).$$

Donc

$$I_z = \iiint r(a + r\cos 0)^3\, dr\, d0\, d\varphi.$$

δ_1

Le calcul s'achève sans difficulté. On trouve

$$I_z = \frac{\pi^2 a R^2}{2}(4a^2 + 3R^2).$$

V. — INTÉGRALES MULTIPLES (n VARIABLES)

Dans le cas où l'on a n variables indépendantes $x, y, z, t, \cdots$, la notion d'intégrale multiple d'ordre n d'une fonction $f(x, y, z, t \cdots)$ étendue à un champ V est la généralisation de la définition de l'intégrale simple, double, triple, bien que l'on ne puisse en obtenir une représentation géométrique.

Nous continuerons à appeler point ψ tout système de valeurs données à x, y, z, t. Nous définirons un champ de variation de ce point par une ou plusieurs égalités ou inégalités de la forme

$$\varphi(x, y, z, t, \cdots) \geqslant 0.$$

Nous supposerons que les valeurs des variables qui satisfont à de telles inégalités restent toutes inférieures en valeur absolue à un nombre fixe, et que, pour tous les points du champ, une fonction $f(x, y, z, t)$ reste en valeur absolue moindre qu'une quantité fixe M.

Nous continuerons à dire que le point se meut dans un plan ψ quand les coordonnées satisfont à une équation linéaire

$$ax + by + cz + dt + \cdots + l = 0;$$

que le point se meut dans une sphère à n dimensions quand on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \cdots + ax + by + cz + dt + \cdots + h \leqslant 0.$$

α, ξ

Décomposons le champ en éléments infiniment petits dans tous les sens par des plans parallèles aux divers plans de coordonnées $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, $\cdots$ Nous appellerons élément de volume parallélépipédique, l'ensemble des points dont les coordonnées sont comprises entre les coordonnées des deux plans successifs correspondants.

Nous dirons que le volume d'un de ces parallélépipèdes est $(x_{k+1} - x_k)(y_{i+1} - y_i) \cdots$

δ_1, ξ

Pour chacun de ces éléments, la fonction $f(x, y, z, t)$ admet un minimum m_i et un maximum M_i. *Les sommes*

$$\Sigma m_i \Delta v_i \qquad \text{et} \qquad \Sigma M_i \Delta v_i$$

auront respectivement des limites supérieures et inférieures qui seront atteintes quand tous les éléments de volume seront infiniment petits dans toutes leurs dimensions, quelle que soit la manière dont ils tendent vers zéro.

Si ces limites sont les mêmes nous dirons que la fonction est intégrable dans le champ et nous représenterons cette limite par

$$\iiiint f(x, y, z, t)dx\,dy\,dz\,dt = \mathrm{S} f(x, y, z, t)dx\,dy\,dz\,dt.$$

σ_1, α

Calcul de l'intégrale. — En donnant à toutes les variables sauf x, des couples de valeurs $y_{i+1} - y_i$, $z_{j+1} - z_j$, $\cdots$ fixes, nous dirons que nous obtenons un prisme parallèle à ox.

δ_1, ξ

Nous calculerons la somme en introduisant les diverses simplifications faites pour les intégrales considérées jusqu'ici. Nous verrons que la somme des éléments de l'intégrale relatifs à ce prisme parallèle à ox a pour valeur

$$(y_{i+1} - y_i)(z_{j+1} - z_j) \cdots \int_{x'}^{x''} f(x, y_i, z_j, t_k)dx \qquad (x' < x''),$$

x' et x'' représentant les valeurs limites (supposées réduites à deux) de x pour le système de valeurs $y_i, z_j \cdots$

δ_1

Cette intégrale $\int_x^{x''} f(x, y_i, z_j, t_k)dx$ est une fonction $\varphi(y_i, z_j, t_k)$ que nous supposerons fonction continue de y, z, t. Nous aurons alors à effectuer

$$\Sigma(y_{i+1} - y_i)(z_{j+1} - z_j) \cdots \varphi(y_i, z_j, t_k).$$

C'est une intégrale multiple d'ordre $n - 1$.

De proche en proche et par intégrations successives, on sera donc ramené à une intégrale triple, puis double, puis simple.

ω

Ainsi le résultat se présente sous la forme soit d'une intégrale simple suivie d'une intégrale d'ordre $n - 1$, soit de n intégrales

simples successives, d'une façon générale, sous la forme d'une intégrale d'ordre m_1, suivie d'une intégrale d'ordre m_2, puis d'une intégrale d'ordre $m_3 \cdots, m_1, m_2, m_3$ satisfaisant seulement à la condition $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = n$.

Changement de variables. — Faisons le changement de variables (par exemple 4 variables)

$$\begin{aligned} x &= \lambda(X, Y, Z, T), \\ y &= \mu(X, Y, Z, T), \\ z &= \nu(X, Y, Z, T), \\ t &= \pi(X, Y, Z, T), \end{aligned}$$

la correspondance entre x, y, z, t, X, Y, Z, T étant biunivoque.

σ_2, α Nous savons que ces formules de transformation peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x &= l(X, Y, Z, T) = \lambda(X, Y, Z, T), \\ y &= m(x, Y, Z, T), \\ z &= n(x, y, Z, T), \\ t &= p(x, y, z, T), \end{aligned}$$

et que

$$D^{X,Y,Z,T}_{x,y,z,t} = \frac{\partial l}{\partial X} \times \frac{\partial m}{\partial Y} \times \frac{\partial n}{\partial Z} \times \frac{\partial p}{\partial T}.$$

δ_1, φ_1 En faisant la première intégration par rapport à t et faisant le changement

$$t = p(x, y, z, T)$$

T remplaçant t, on verra qu'il faut remplacer dans la fonction à intégrer t par $p(x, y, z, T)$, multiplier cette fonction par $\left| \frac{\partial p}{\partial T} \right|$ et intégrer entre T' et T''(T' < T''), T' et T'' étant les valeurs limites de T dans le champ, pour les valeurs x, y, z.

En revenant à l'intégrale multiple, faisons cette fois l'intégration par rapport à z puis le nouveau changement de variables

$$Z = n(x, y, Z, T)$$

On aura encore à multiplier la fonction à intégrer par $\left| \frac{\partial n}{\partial Z} \right|$.

ω De proche en proche on sera donc ramené à l'intégrale

$$Sf(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \left| \frac{\partial l}{\partial X} \right| \times \left| \frac{\partial m}{\partial y} \right| \times \left| \frac{\partial n}{\partial Z} \right| \times \left| \frac{\partial p}{\partial T} \right| dX\, dY\, dZ\, dT$$

c'est à-dire

$$Sf(\lambda, \mu, \nu, \pi) \left| D^{X,Y,Z,T}_{x,y,z,t} \right| dX\, dY\, dX\, dT.$$

VI. — INTÉGRALES DE SURFACE

De même que nous avons généralisé la notion d'intégrale simple en considérant une intégrale curviligne, ν, ψ de même nous pouvons chercher à généraliser la notion d'intégrale double en considérant une intégrale de surface.

A cet effet, donnons-nous une portion de surface limitée par une courbe C ou même plusieurs courbes distinctes. Supposons que l'on puisse distinguer, sur cette surface, deux faces, de telle manière que l'on ne puisse passer de l'une des faces à l'autre sans traverser l'un des contours limites. (Il serait aisé de former une surface qui ne satisfasse pas à cette condition en prenant une feuille de papier ayant la forme d'un rectangle *abcd* et contournant ce rectangle de manière à superposer *bc* à *da*).

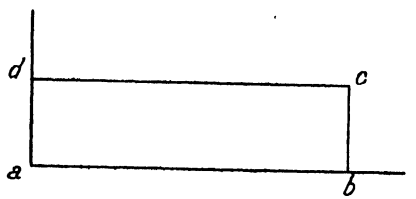


Fig. 38.

Prenons l'une de ces faces. Si nous supposons que la surface a une petite épaisseur (comme une peau d'orange) nous pourrions sur la normale en chaque point de la face considérée, distinguer deux sens : pour l'un des sens nous traverserons l'épaisseur (normale vers l'intérieur), et pour l'autre nous ne la traverserons pas.

Nous appellerons normale extérieure cette deuxième demi-normale. Nous pourrons la suivre par continuité lorsque nous nous déplacerons sur la surface.

Supposons maintenant que toute parallèle à oz ne rencontre la surface qu'en un seul point. Il est clair que pour l'une des faces, ψ la normale extérieure fera toujours un angle aigu γ avec oz et pour l'autre face un angle constamment obtus. Nous choisirons la première des faces et prendrons une portion de surface Ω qui se projette sur le plan des xy suivant une aire Ω_0.

Pour tout point de la surface, la cote r sera une fonction bien déterminée des deux autres coordonnées, $z = \varphi(x, y)$.

Donnons-nous d'autre part une fonction $R(x, y, z)$ continue dans un domaine à trois dimensions contenant en particulier Ω.

σ_1, δ_1

Pour tout point de cette surface, elle prend une valeur $R(x, y, \varphi(x, y))$, que je désignerai sous la notation $R(x, y, \bar{z})$, qui sera fonction de x et y seulement.

ξ

Il est naturel de considérer l'intégrale

$$\iint_{\Omega_z} R(x, y, \bar{z}) dx\, dy.$$

C'est cette intégrale double que nous appellerons intégrale de surface de la fonction $R(x, y, z)$ prise sur la portion Ω de surface se projetant suivant Ω_z et sur la face pour laquelle la demi-normale fait un angle aigu avec oz.

Introduisons l'élément d'aire $d\sigma$ de la surface. Puisque $dx\, dy$ est, jusqu'ici, positif, ainsi que $d\sigma$ et que γ est aigu, on a

$$\cos\gamma\, d\sigma = dx\, dy.$$

L'intégrale peut s'écrire

$$\iint_{\Omega_z} R(x, y, \bar{z}) \cos\gamma\, d\sigma.$$

Mais si l'on y suppose x, y, z et par suite γ et σ exprimés en fonction de deux paramètres u, v, $\overset{\sigma}{}$ on pourra l'écrire

$$\iint_{\Omega'} R(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma$$

le champ Ω' de variation de u, v correspondant à l'aire Ω. Ce devient une intégrale double portant sur une fonction de u, v.

Or, $R(x, y, z) \cos\gamma$ est une fonction $f(x, y, z)$.

ρ

On arrive donc aussi à la forme

$$\iint_{\Omega'} f(x, y, z) d\sigma$$

qui pourrait être prise comme définition de l'intégrale de surface.

Sous la deuxième forme que nous avons obtenue, l'intégrale peut être plus générale que celle que nous avons considérée tout d'abord car rien ne nous oblige à supposer que $\cos\gamma$ est positif. Si γ est obtus, nous pouvons néanmoins calculer l'intégrale qui sera dite prise sur la face pour laquelle γ est obtus. Cette généralisation revient

en somme, à supposer que dans l'intégrale double $\iint_\Omega R(x, y, z)\,dx\,dy$ l'élément $dx\,dy = d\sigma \cos\gamma$ peut être négatif.

Expresssion de l'intégrale double. — Considérons donc une face déterminée : la demi-normale correspondante fait avec les axes des angles α, β, γ tels que

$$\frac{\cos\alpha}{D^{u,v}_{y,z}} = \frac{\cos\beta}{D^{u,v}_{z,x}} = \frac{\cos\gamma}{D^{u,v}_{x,y}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Nous choisirons la face en nous donnant ε.

σ_1

D'autre part

$$d\sigma = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv, \qquad (du > 0,\ dv > 0)$$

$$dx\,dy = \cos\gamma\,d\sigma = \varepsilon D^{u,v}_{x,y}\,du\,dv.$$

L'intégrale devient donc

$$\varepsilon \iint_{\Omega'} R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) D^{u,v}_{x,y}\,du\,dv,$$

u, v variant dans le champ qui correspond à Ω, $R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ désignant le résultat de la substitution de x, y, z en fonction de u, v dans $R(x, y, z)$.

Telle est la formule qui ramène le calcul de l'intégrale de surface au calcul d'une intégrale double ordinaire.

Nous pouvons de même, étant données deux autres fonctions $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ψ définir les intégrales

$$\iint P(x, y, z)\,dy\,dz, \quad \text{et} \quad \iint Q(x, y, z)\,dz\,dx.$$

σ_2

Elles se calculent par les intégrales doubles ordinaires

$$\iint_\Omega P(x, y, z)\,dy\,dz = \varepsilon \iint_{\Omega'} P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) D^{u,v}_{y,z}\,du\,dv,$$

$$\iint_\Omega Q(x, y, z)\,dz\,dx = \varepsilon \iint_{\Omega'} Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) D^{u,v}_{z,x}\,du\,dv.$$

Si ces deux intégrales sont prises sur la même face, ε sera le même.

α_2 En les réunissant, nous avons l'intégrale de surface générale prise sur la face qui correspond à ε

$$\iint_{\Omega} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Elle est calculée par l'intégrale double

$$\varepsilon \iint_{\Omega'} \left[P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})D^{u,v}_{y,z} + Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})D^{u,v}_{z,x} + R(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})D^{u,v}_{x,y}\right] du\,dv$$

lorsque l'on remplace dans les fonctions P, Q, R, x, y, z par leurs expressions en fonction de u, v. On peut aussi la désigner sous la notation

$$\iint_{\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma.$$

Elle est prise sur la face pour laquelle la demi-normale fait avec les axes les angles α, β, γ.

VII. — CONTINUITÉ — INTÉGRATION DÉRIVATION DES INTÉGRALES MULTIPLES

Considérons par exemple une intégrale double $\iint_{\Omega} f(x, y, \alpha)dx\,dy$ dans laquelle f, dépendant d'un paramètre α, est continue par rapport à x et y, et admet une dérivée par rapport à α continue dans le champ Ω. ρ Cette intégrale sera une fonction de α.

ν Voyons si elle est continue et si elle admet une dérivée.

δ Supposons d'abord le champ indépendant de α. On aura

$$\Delta I = I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha) = \iint_{\Omega} [f(x,y,\alpha + \Delta\alpha) - f(x,y,\alpha)]d\omega.$$

Or f étant continue, et le champ borné, f est uniformément continue : on peut supposer $\Delta\alpha$ suffisamment petit pour que, pour tout système de valeurs de x, y, on ait $|\Delta f| < \varepsilon$.

ω L'intégrale double ΔI sera alors moindre que $\varepsilon\Omega$: la fonction est donc continue.

δ_1

D'ailleurs

$$f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha) = \Delta\alpha f'_\alpha(x, y, \alpha + \theta\Delta\alpha).$$

Si la dérivée f'_x est elle-même continue, on peut écrire

$$f'_\alpha(x, y, \alpha + \theta\Delta\alpha) = f'_\alpha(x, y, \alpha) + \varepsilon',$$

$| \varepsilon' |$ étant moindre qu'une quantité donnée ε_0 pour $| \Delta\alpha | < \Delta\alpha_0$, quel que soit le point x, y.

d

On en déduit

$$\frac{\Delta I}{\Delta\alpha} = \iint_\Omega f'_\alpha(x, y, \alpha) d\omega + \iint_\Omega \varepsilon' d\omega.$$

La seconde intégrale peut être rendue aussi petite qu'on le veut, pour $\Delta\alpha$ suffisamment petit : ω I admet donc une dérivée

$$\frac{dI}{d\alpha} = \iint_\Omega f'_\alpha(x, y, \alpha) d\omega.$$

C'est la même formule que pour les intégrales simples.

Dérivation : Champ variable. — δ_1, ξ Si le champ est lui-même dépendant de α, désignons par Ω' ce que devient le champ quand α varie de $\Delta\alpha$.

Nous supposerons que ce champ varie d'une façon continue avec α, c'est-à-dire que la somme des aires extérieures à l'un des domaines et intérieures à l'autre peut être rendue aussi petite qu'on le veut avec $\Delta\alpha$. δ_1 On a dans ce cas

$$\Delta I = \iint_{\Omega'} f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) d\omega - \iint_\Omega f(x, y, \alpha) d\omega.$$

α

Ce que l'on peut écrire

$$\Delta I = \iint_\Omega [f(x, y, \alpha + \Delta\alpha)] d\omega + \iint_{\Delta\omega} \pm f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) d\omega,$$

cette dernière intégrale pouvant comporter d'ailleurs une partie correspondant à un accroissement du champ et une partie correspondant à un décroissement du champ.

Nous avons vu que la première partie tend vers zéro avec $\Delta\alpha$. La deuxième intégrale est moindre que $M\Delta\omega$, M désignant une limite supérieure de $|f(x,y)|$: $^{\omega}$ $I(\alpha)$ est donc bien encore une fonction continue de α.

Considérons par exemple une intégrale triple

$$\iiint f(x, y, z, \alpha)dx, dy, dz,$$

la fonction à intégrer dépendant d'un paramètre α, le champ étant lui-même variable, d'une façon continue avec α.

On peut pour se donner cette variation de Ω, $^{\alpha, R_1}$ soit se donner le déplacement de chacun des points de la surface limitant Ω en fonction de α sous la forme

$$x = \varphi(u, v, \alpha), \qquad y = \psi(u, v, \alpha), \qquad z = \theta(u, v, \alpha).$$

On obtiendra les diverses surfaces limitant le champ en faisant varier α ;

$^{\sigma_2}$ soit, plus simplement, se donner l'équation $F(x,y,z,\alpha)=0$ de la surface limite.

Notre raisonnement et nos résultats s'appliqueront aux deux cas.

L'intégrale peut donc être considérée comme fonction de deux variables α et $\beta = \Omega(\alpha)$ par l'intermédiaire de Ω.

$^{\beta}$ Pour prendre la dérivée par rapport à α, il faut prendre :

1° la dérivée par rapport à α comme si Ω était fixe ;

2° prendre la dérivée comme si Ω variait seul, α gardant une valeur constante comme paramètre dans la fonction.

$^{\sigma_2}$ La première est égale d'après ce que nous avons vu ci-dessus à $\iiint_{\Omega}^{\prime} \frac{\partial}{\partial\alpha} d\omega$.

$^{\delta_1}$ Prenons la seconde. Quand α varie de $\Delta\alpha$, Ω varie de $\Delta\Omega$, comprenant deux parties :

$^{\rho}$ 1° une partie $\Delta_1\Omega$ correspondant à un accroissement de Ω (champ à l'extérieur de Ω et à l'intérieur de Ω').

2° une partie $\Delta_2\Omega$ correspondant à une diminution du champ.

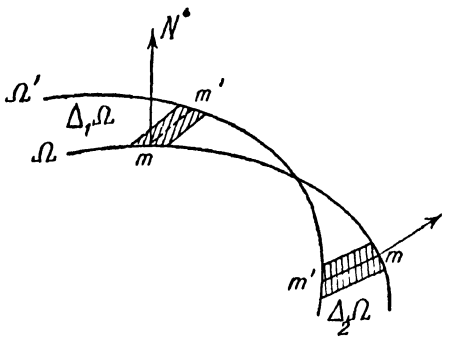


Fig. 39.

Pour évaluer la variation de l'intégrale correspondant à $\Delta_1\Omega$, il faut décomposer $\Delta_1\Omega$ en éléments $\delta_1\omega$ infiniment petits dans toutes leurs dimensions, et multiplier chaque élément par la valeur de la fonction $f(x, y, z, \alpha)$ en un point de l'élément. Or, considérons un point x, y, z sur la surface de Ω et un petit élément de surface $\Delta\sigma$ entourant ce point. On peut imaginer que les points de cet élément se sont déplacés sur un petit cylindre parallèlement au déplacement de x, y, z (à des infiniment petits d'ordre supérieur près). Ce déplacement est connu si l'on donne le déplacement de chaque point ; il est inconnu si l'on donne seulement la surface limitant Ω sous la forme $F(x, y, z, \alpha) = 0$, mais le résultat final ne fera intervenir que des éléments connus.

Les projections de mm' sont

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha, \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Considérons la demi-normale N à la surface Ω extérieure à Ω.

La hauteur du cylindre élémentaire sera $|mm' \cos \widehat{mm', mN}|$; or

$$mm' \cos \widehat{mm', mN} = \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cos(N, x) + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cos(N, y) + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cos(N, z)\right] d\alpha.$$

Pour un élément de $\Delta_1\Omega$, $mm' \cos \widehat{mm', mN}$, est positif. L'élément de l'intégrale sera donc

$$f(x, y, z, \alpha)\, mm' \cos \widehat{mm', mN}\, d\sigma.$$

Pour un élément de $\Delta_2\Omega$, $mm' \cos \widehat{mm', mN}$ est négatif : le volume du cylindre élémentaire sera donc $-mm', \cos(\widehat{mm', mN})\Delta\sigma$; dans la variation de Ω il faudra donc retrancher

$$-mm' \cos(mm', mN) f(x, y, z, \alpha) d\sigma$$

pour tous les points de la surface Σ_2.

Au total, on aura donc

$$\Delta_2 I = \iint_{\Sigma} mm' \cos(mm', mN) f(x, y, z, \alpha) d\sigma,$$

l'intégrale étant prise sur la surface totale de Ω.

En remplaçant $mm' \cos(mm', mN)$, on voit donc que

$$\frac{\Delta_2 I}{\Delta \alpha} = \iint_{\omega} \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cos(N, x) + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cos(N, y) + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cos(N, z) \right] f(x, y, z, \alpha) d\sigma$$

On a donc enfin

$$\frac{dI}{d\alpha} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\omega + \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cos(N, x) + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cos(N, y) + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cos(N, z) \right] f(x, y, z, \alpha) d\sigma.$$

Telle est la formule donnant la dérivée de l'intégrale par rapport à un paramètre quand le champ est lui même variable. Elle se calcule donc par une intégrale de volume et une intégrale de surface.

On pourra calculer immédiatement cette deuxième intégrale

ρ

si l'on donne x, y, z en fonction de deux variables u, v et de α.

ζ

Mais supposons la variation de Ω déterminée de la deuxième manière : le champ Ω est limité à chaque instant par $F(x, y, z, \alpha) = 0$ et correspond par exemple aux points pour lesquels $F(x, y, z, \alpha) > 0$.

ξ

En un point de Σ, la normale extérieure fait avec les axes des angles tels que

$$\frac{\cos(N, x)}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\cos(N, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\cos(N, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

α_1

Déterminons le signe de ε.

Prenons un point

$$x + l \cos(N, x), \qquad y + l \cos(N, y), \qquad z + l \cos(N, z)$$

sur la normale ($l > 0$). C'est un point à l'extérieur de F.

β

Donc

$$F(x + l \cos(N, x), y + l \cos(N, y), z + l \cos(N, z)) < 0.$$

En développant, et nous bornant aux infiniment petits du premier ordre,

$$l\cos(N, x)\frac{\partial F}{\partial x} + l\cos(N, y)\frac{\partial F}{\partial y} + l\cos(N, z)\frac{\partial F}{\partial z} < 0.$$

ω

Ainsi on doit avoir

$$\cos(N, x)\frac{\partial F}{\partial x} + \cdots < 0.$$

ε est donc négatif.

δ_1

En substituant les cosinus dans $\Delta_2 I$, l'intégrale double devient

$$\iint_\Sigma - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}\,d\sigma.$$

ρ

Mais comme l'on a constamment $F(x, y, z, \alpha) = 0$, on a

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) = +\frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

ω

L'intégrale double devient donc tout simplement

$$\iint \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} f(x, y, z, \alpha)\,d\sigma.$$

Donc dans ce cas

$$\frac{dI}{d\alpha} = \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\omega + \iint_\Sigma \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \cdots}} f(x, y, z, \alpha)\,d\sigma.$$

Telle est la formule de dérivation de l'intégrale triple, dans le cas où le champ lui-même est variable, limité par $F(x, y, z, \alpha) = 0$.

Intégration. — L'intégrale étant fonction continue de α peut être intégrée par rapport à α. Si le champ d'intégration est fixe, on peut intégrer sous le signe $\int$. On a

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \iint_\Omega f(x, y, \alpha)\,dx\,dy = \iiint_V f(x, y, \alpha)\,dx, dy, d\alpha.$$

Si l'on considère x, y, α comme trois coordonnées, V représente le volume du cylindre ayant pour base Ω limité aux plans α_1, α_2. On peut écrire aussi

$$\iint_\Omega dx\,dy \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, y, \alpha)\,d\alpha.$$

CHAPITRE XV

TRANSFORMATIONS DES NOTIONS D'INTÉGRALES LES UNES DANS LES AUTRES

SOMMAIRE.

Réduction d'une intégrale double à une intégrale curviligne : Formule de Green. — Condition pour que l'intégrale soit indépendante du coutour.

Réduction d'une intégrale triple à une intégrale de surface : Formule de Green (3 variables).

Transformation d'une intégrale curviligne en une intégrale de surface : Formule de Stokes. — Condition pour qu'une intégrale de surface ne dépende que du contour. — Application.

I. — RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE DOUBLE A UNE INTÉGRALE CURVILIGNE

Formule de Green et d'Ostrogradski. — Le calcul d'une intégrale double se ramène à deux intégrations successives. Si la fonction à intégrer $f(x, y)$ est, par exemple, la dérivée partielle d'une fonction par rapport à y, on pourra effectuer la première intégration par rapport à y.

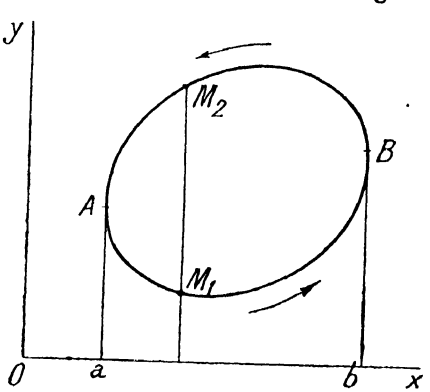


Fig. 40.

Nous supposerons les axes disposés comme sur la figure : une rotation de 90°, en sens inverse des aiguilles d'une montre, amène ox sur oy (sens rétrograde).

Considérons donc l'intégrale

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

étendue à un champ limité par un contour C sans point double. Nous supposerons d'abord que toute parallèle à oy ne rencontre le contour C qu'en deux points M_1, M_2 de coordonnées x, y_1, x, y_2, x étant compris entre a et b, abscisses des deux tangentes parallèles à oy.

δ_1, α

Pour la calculer, on aura donc à intégrer d'abord

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{dy} dy = P(x, y_2) - P(x, y_1)$$

car on doit prendre pour limite supérieure de l'intégrale $y_2 > y_1$; on aura ensuite à calculer

$$\int_a^b [P(x,y_2) - P(x,y_1)]dx \qquad a < b.$$

Considérons par exemple la deuxième $\int_a^b P(x, y_1)dx$.

Si l'on y supposait x et y_1 exprimés en fonction d'un paramètre t, ρ le point x, y_1 décrivant l'arc de courbe AM_1B dans le sens de la flèche, σ_2 l'intégrale représenterait la partie de l'intégrale curviligne $\int_{AM_1B} P(x, y)dx$.

On a donc

$$-\int_a^b P(xy_1)dx = -\int_{AM_1B} P(x, y)dx.$$

Quant à la première, on peut l'écrire

$$-\int_b^a P(x, y_2)dx.$$

Lorsque x varie de b à a, ρ, σ le point x, y_2 décrit l'arc BM_2A et cette intégrale représente donc $-\int_{BM_2A} P(x, y)dx$.

L'intégrale totale est donc égale à l'intégrale curviligne

$$-\int_{AM_1B} -\int_{BM_2A} = -\int_C P(x, y)dx$$

prise suivant le contour total dans le sens de la flèche :

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_C P(x, y)dx.$$

Il ne sera pas utile de spécifier le point de départ si les fonctions P, Q ont des valeurs bien déterminées et uniques en tout point du contour, quel que soit le chemin que l'on fait dans une région comprenant C pour y arriver. Car si l'on part de A', on a

$$\int_{A'MBAA'} = \int_{A'MBA} + \int_{AA'}.$$

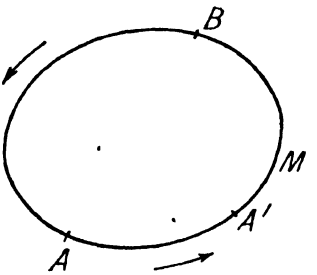


Fig. 41.

Cette deuxième intégrale se confond avec la partie d'intégrale $\int_{AA'MBA}$, si après être revenu en A, la fonction a repris la même valeur initiale. On a donc bien

$$\int_{AA'MBA} = \int_{A'MBAA'}.$$

On voit que le contour est décrit de manière que l'observateur placé sur le contour, normalement au plan de la figure en avant de ce plan, et décrivant le contour, ait à sa gauche le champ dans lequel on devait calculer l'intégrale double.

Si les axes avaient été disposés en sens inverse, il faudrait changer le signe. On a donc dans tous les cas (en ne considérant que des rotations rétrogrades)

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\sin(xoy) \int_C P\, dx$$

C étant décrit de manière à laisser à sa gauche l'aire Ω.

On pourrait considérer de même

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy.$$

Mais une nouvelle démonstration n'est pas nécessaire. Il suffit dans l'égalité ci dessus de permuter les variables x et y, on a donc

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = -\sin(yox) \int_C Q\, dx = \sin(xoy) \int_C Q\, dy.$$

En rassemblant ces deux égalités on obtient

$$\sin(xoy) \int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Si la rotation de 90° de ox vers oy est rétrograde, on a

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dx\,dy.$$

Cette formule porte le nom de formule de Green ou d'Ostrogradski.

Applications. — **I.** Supposons en particulier $Q = x$, $P = -y$. On obtiendra

$$\frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \iint_\Omega dx\,dy = \Omega.$$

On retrouve l'expression, par une intégrale curviligne, de l'aire limitée par un contour fermé C.

Application II. Formule de Green (deux variables). — *Soient deux fonctions* U, V *de deux variables* x, y *continues ainsi que leurs dérivées du premier et du deuxième ordre à l'intérieur d'un contour* C *limitant une aire* Ω. *Formons l'intégrale*

$$I = \iint_\Omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

ρ, α

Comme on a

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

On en déduira, en appliquant à la première partie du second membre la formule de Green

$$\iint_\Omega \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C U\frac{\partial V}{\partial x}\,dy - \iint_\Omega U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy.$$

ε₁

De même

$$\iint_\Omega \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_C U\frac{\partial V}{\partial y}\,dx - \iint_\Omega U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,dx\,dy.$$

Par conséquent

$$I = \int_C U\left(\frac{\partial V}{dx}\,dy - \frac{\partial V}{dy}\,dx\right) - \iint_\Omega U\left(\frac{\partial^2 V}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{dy^2}\right) dx\,dy.$$

Mais, lorsque nous avons défini la dérivée d'une fonction suivant

une direction donnée, nous avons vu que, pour une fonction de deux variables, la dérivée $D_n V$ d'une fonction $V(x, y)$ suivant la demi-normale intérieure à une courbe (faisant la direction $\alpha + \frac{\pi}{2}$ avec la demi-tangente prise dans le sens des arcs croissants) est

$$D_n V = \frac{1}{ds}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\,dx - \frac{\partial V}{\partial x}\,dy\right).$$

La première intégrale n'est donc autre que $-\int_C U D_n V\,ds$, la dérivée $D_n V$ étant prise suivant la normale intérieure à l'aire Ω.

D'autre part, nous poserons suivant l'usage

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Nous avons donc

$$I = \iint_\Omega \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int_C U\,DV\,ds - \iint_\Omega U\Delta V\,dx\,dy.$$

Mais l'intégrale I est symétrique en U et V. On en déduit donc

$$\int_C U D_n V ds + \iint_\Omega U\Delta V dx\,dy = \int_C V D_n U ds + \iint_\Omega V\Delta U dx\,dy$$

c'est-à-dire

$$\int_C (U D_n V - V D_n U) ds + \iint_\Omega (U\Delta V - V\Delta U) dx\,dy = 0.$$

Cette formule célèbre s'applique, quelles que soient les fonctions U, V ; elle est due à Green.

Si en particulier les fonctions U, V satisfont toutes deux à $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$, il vient

$$\int_C (U D_n V - V D_n U) ds = 0.$$

Si plus particulièrement encore, $U = 1$,

$$\int_C D_n V ds = 0$$

pour toute fonction V satisfaisant à $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.

Nous établirons une formule analogue dans le cas des fonctions de trois variables.

Condition pour qu'une intégrale curviligne soit indépendante du contour. — De la formule de Green on peut déduire la condition pour que l'intégrale curviligne $\int_C P\,dx + Q\,dy$ soit nulle le long d'un contour fermé C quelconque.

On en déduit en effet

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

quel que soit Ω. Il est suffisant que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

La condition est aussi nécessaire. Car si le premier membre n'était pas identiquement nul, on pourrait délimiter une région du plan suffisamment petite, pour que dans cette région, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, qui est supposée continue, garde un signe constant. L'intégrale double, composée d'éléments tous de même signe, ne pourrait donc être nulle.

On en déduit que $P\,dx + Q\,dy$ doit être la différentielle totale d'une fonction $U(x, y)$.

On peut présenter le résultat sous une forme légèrement différente :

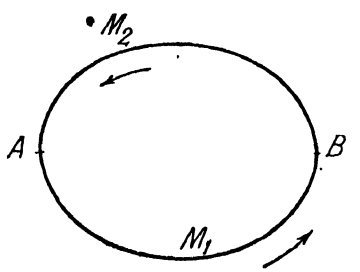


Fig. 42.

Si cette condition est remplie, prenons sur le contour deux points quelconques A, B. Puisque l'intégrale prise suivant le contour total est nulle

$$\int_{AM_1B} = -\int_{BM_2A} = \int_{AM_2B}.$$

Ainsi l'intégrale curviligne serait indépendante du chemin d'intégration et ne dépendrait simplement que des extrémités A, B. Inversement, il est évident que si cette dernière condition est rem-

plie, l'intégrale curviligne prise suivant un contour fermé quelcon... sera nulle.

REMARQUES. — I. Il faut remarquer que la conclusion à laquelle nous sommes parvenus ζ suppose implicitement que l'on a pu déformer le chemin AM_1B pour l'amener sur AM_2B sans passer par aucun point de discontinuité de P ou de Q ni de $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ π puisque nous avons dû passer par l'intégrale double.

II. Il est bien entendu que si, pour calculer l'intégrale double, on fait un changement de variables

$$x = g(u, v), \qquad y = h(u, v)$$

l'intégrale se transformant en

$$\iint_{\Omega} f(g, h) \left| D^{u,v}_{x,y} \right| du\, dv$$

si l'on détermine deux fonctions M, N, telles que

$$\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} = f(g, h) D^{u,v}_{x,y}$$

l'intégrale se ramènera à l'intégrale curviligne $\int M du + N dv$ prise suivant le contour qui limite le champ de variation de u et v. Mais ce résultat n'est légitime que dans les conditions du changement de variables, c'est-à-dire si la transformation est biunivoque. Sinon, il faudra isoler ou décomposer le champ de manière que cette condition soit remplie.

Par exemple soit l'intégrale $\iint_{\Omega} dx\, dy$.

En passant aux coordonnées polaires on obtient

$$I = \iint r\, dr\, d\varphi.$$

β On doit avoir

$$\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{\partial M}{\partial \varphi} = r.$$

α On peut prendre par exemple

$$M = 0, \qquad N = \frac{r^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad N = 0, \qquad M = -r\varphi.$$

Ce qui donne les deux formules

$$\int \frac{r^2}{2}\, d\varphi \qquad \text{ou} \qquad \int -r\varphi\, dr.$$

Ces intégrales doivent être prises suivant le contour Ω' (du champ u, v) correspondant à Ω.

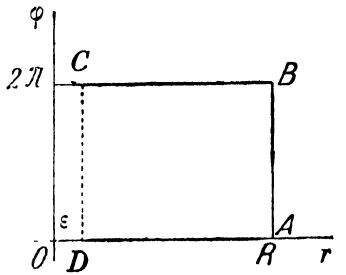


Fig. 43.

Mais l'origine étant point d'indétermination pour $\varphi(r = 0)$ isolons ce point par un petit cercle.

Si Ω est un cercle de rayon R, lorsque le point x, y se déplace à l'intérieur de la couronne ε, R, le point r, φ se déplace à l'intérieur du rectangle ABCD de base $R - \varepsilon$ et de hauteur 2π. On aura donc à calculer l'une ou l'autre des intégrales curvilignes le long du contour ABCD.

Aire sphérique. — Considérons encore une aire sphérique. On peut poser

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \qquad y = r \sin \theta \sin \varphi, \qquad z = r \cos \theta,$$

$$S = R^2 \iint \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

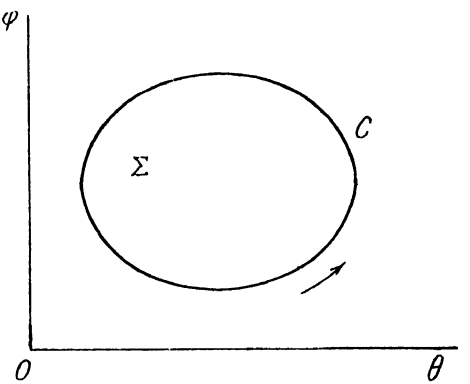


Fig. 44.

Pour les pôles P et P′ de la sphère, $\theta = 0$ mais φ est indéterminé. Si l'aire ne renferme ni P ni P′, le champ de variation de θ et φ ne rencontre pas $o\varphi$.

En posant

$$P = 0, \qquad Q = \cos\theta, \qquad y = \varphi, \qquad x = 0,$$

α

on peut écrire

$$\iint_{\Sigma} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = -\int_{C} \cos\theta \, d\varphi,$$

C décrit dans le sens $o\theta$ vers $o\varphi$.

Mais si par exemple, l'aire Ω comprend P, il faudra isoler P en l'entourant d'un petit cercle γ et calculer l'aire annulaire comprise entre γ et le champ.

Dans le plan de coordonnées θ, φ, quel sera le champ correspondant ?

o

Au petit cercle γ correspondra une parallèle à $o\varphi$ ($\theta = \varepsilon$) de 0 à 2π.

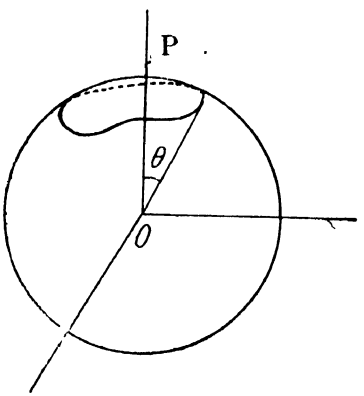


Fig. 45.

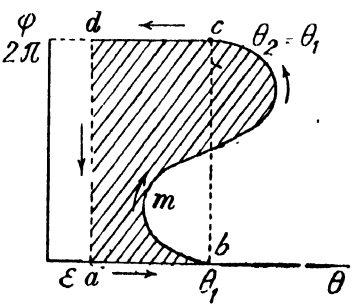


Fig. 46.

φ variant de zéro à 2π, θ varie d'une certaine valeur θ_1 à une valeur finale $\theta_2 = \theta_1$.

θ_1

Dans le plan θ, φ on a donc une courbe telle que *bmc*. Le champ compris entre γ et la courbe donnée se transforme donc dans le champ ombré. o Dans ce champ on peut écrire

$$\iint_{\Sigma} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = -\int_{C} \cos\theta \, d\varphi$$

l'intégrale curviligne étant prise dans le sens de $o\vartheta$ vers $o\varphi$ tout le long du contour

$$\int_C = \int_{ab} + \int_{bmc} + \int_{cd} + \int_{da}.$$

Or

$$\int_{ab} = \int_{cd} = 0 \qquad (d\varphi = 0)$$

et

$$\int_{da} = \int_{2\pi}^{0} (-\cos 0\, d\varphi) = 2\pi \cos \varepsilon.$$

Donc l'intégrale a pour valeur

$$\int_{bmc} + \int_{da} = \int_0^{2\pi} - \cos 0\, d\varphi + 2\pi \cos \varepsilon.$$

γ, ω

Lorsque le rayon de γ tend vers zéro, on voit que l'aire cherchée a pour valeur

$$\Omega = 2\pi R^2 - R^2 \int_0^{2\pi} \cos 0\, d\varphi$$

le contour de l'aire étant parcouru dans le sens des φ croissants.

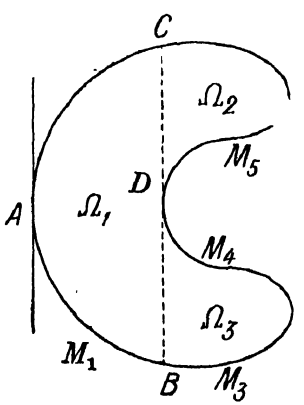


Fig. 47.

o, δ

Si le contour donné contenait P et P', on aurait

$$\Omega = 4\pi R^2 - R^2 \int_0^{2\pi} \cos 0\, d\varphi.$$

Remarque III. — Nous avons supposé qu'une parallèle aux axes ne rencontrait le contour qu'en deux points. Si cette condition n'estpas réalisée, α on décomposera le domaine en domaines partiels pour chacun desquels cette condition serait remplie. Dans le cas de la figure par exemple, le champ étant partagé en trois, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, on appliquera la formule à chacun de ces champs.

δ_1

On aura

$$\iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{AM_1BDCA} P dx + Q dy.$$

En ajoutant les trois égalités analogues, on obtiendra au premier membre

$$\iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint_{\Omega_2}+\iint_{\Omega_3}=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Au second membre, les intégrales prises suivant les lignes de séparation se détruiront deux à deux, les sens de parcours étant changés. Il ne restera que les intégrales

$$\int_{AM_1B}+\int_{CM_2A}+\int_{BM_3D}+\int_{DM_3C}$$

c'est-à-dire l'intégrale $\int P\,dx+Q\,dy$ prise suivant seulement le contour C.

La formule s'applique même au cas d'une aire délimitée par un contour non simple comme celui de la figure.

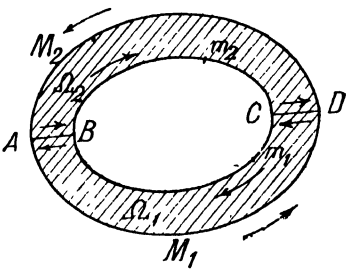


Fig. 48.

En réunissant les deux contours par deux coupures AB, CD et appliquant la formule à chacune des aires on aura

$$\iint_{\Omega_1}=\int_{AM_1DCm_1BA},\qquad \iint_{\Omega_2}=\int_{ABm_2CDM_2A}.$$

En les ajoutant, on obtient au premier membre

$$\iint_{\Omega_1}+\iint_{\Omega_2}=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Au second membre, les portions d'intégrale prises suivant les éléments de droite AB et CD se détruisent deux à deux si la fonction est uniforme dans le champ. Il ne reste que les intégrales prises suivant les contours AM_1DM_2A et Cm_1Bm_2C, c'est-à-dire les intégrales $\int_C$ et $\int_{C'}$.

Or ces contours C, C′ sont bien ainsi parcourus de manière que l'observateur laisse à sa gauche l'aire suivant laquelle on voulait calculer l'intégrale double.

Cas d'un point double. — Dans le cas où le contour admet un point double tel que le contour ci-joint, il est impossible de définir sur le contour une normale intérieure et une normale extérieure. Car si l'on suit par continuité une portion de normale intérieure à la courbe, cette même portion de normale devient extérieure pour la deuxième boucle.

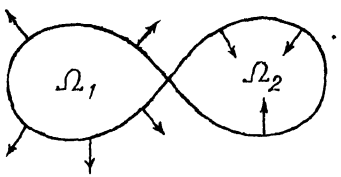


Fig. 49.

Dans le cas de la figure, on voit que l'intégrale prise suivant le contour total $\int P dx + Q dy$ représenterait l'intégrale

$$\iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy - \iint_{\Omega_2}.$$

II. — RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE TRIPLE A UNE INTÉGRALE DE SURFACE

Deuxième formule de Green. — De même que la formule de Green nous a permis de ramener une intégrale double à une intégrale curviligne, de même, on peut ramener une intégrale triple prise à l'intérieur d'un volume à une intégrale de surface prise suivant la surface qui le limite.

Supposons d'abord qu'une parallèle à oz ne rencontre la surface qu'en deux points et supposons que la fonction à intégrer soit mise sous la forme $\frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$.

Tous les points de S se projettent sur le plan des xy à l'intérieur d'une aire Ω. Pour calculer l'intégrale $\int \frac{\partial R}{\partial z} dx \times dy \times dz$, nous pouvons commencer l'intégration par rapport à z en donnant à x, y des valeurs correspondant à un point de Ω. La parallèle à oz menée par ce point rencontre la surface en deux points M_1, M_2 de cotes z_1 et $z_2 (z_2 > z_1)$.

On aura d'abord

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z} dz = R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1).$$

On aura à calculer ensuite

$$\iint_{\Omega} R(x, y, z_2) dx\, dy - \iint_{\Omega} R(x, y, z_1) dx\, dy.$$

ρ

Or la première σ représente l'intégrale de surface $\iint_{S_2} R(x, y, z) dx\, dy$ prise sur la calotte S_2 (lieu des points x, y, z_2) supérieure et extérieure (pour laquelle la normale fait un angle aigu avec oz).

Quant à la deuxième

$$- \iint_{\Omega} R(x, y, z_1) dx\, dy$$

σ

elle représentera également l'intégrale de surface

$$\iint_{S_1} R(x, y, z) dx\, dy$$

prise suivant la calotte S_1 inférieure et extérieure de la surface (pour laquelle la normale fait un angle obtus avec oz).

ω

Le second membre représente donc l'intégrale totale

$$\iint_{S} R(x, y, z) dx\, dy$$

prise sur toute la surface extérieure de S.

On obtient donc en définitive

$$\iiint_{V} \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint_{S} R(x, y, z) dx\, dy.$$

ξ, σ1

On obtiendrait de même

$$\iiint_{V} \frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint_{S} P(x, y, z) dy\, dz$$

$$\iiint_{V} \frac{\partial Q}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_{S} Q(x, y, z) dz\, dx$$

à la condition qu'une parallèle à ox ou oy ne rencontre la surface qu'en deux points.

δ_1

En rassemblant ces trois égalités, on obtient la formule de Green pour les intégrales triples

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

l'intégrale de surface du second membre étant prise sur toute la surface extérieure limitant V.

Nous avons dû supposer qu'une parallèle à l'un quelconque des axes ne rencontre la surface qu'en deux points. Si cette condition

ψ

n'était pas réalisée, la formule n'en reste pas moins valable.

π

On pourra en effet décomposer le volume par des surfaces auxiliaires de séparation, par exemple par des plans, en volumes partiels pour lesquels cette condition serait réalisée.

δ_1

Au premier membre on obtiendra $\iiint_V$.

On introduira au second membre les intégrales prises sur les sur-

ρ

faces de séparation. Mais considérons deux volumes contigus : pour le premier, nous introduisons l'intégrale de surface prise sur la surface AB à l'extérieur du volume V_1 c'est-à-dire vers V_2. Pour le second, nous introduirons l'intégrale de surface prise également sur AB, mais à l'extérieur de V_2. Ces deux intégrales

ω

sont donc égales et de signes contraires. Il ne restera au second membre que les intégrales prises seulement sur la surface extérieure S.

La formule s'applique encore, comme on l'a vu pour les intégrales doubles, même au cas où le volume V serait limité par plusieurs surfaces distinctes sans ligne commune. La formule de Green est donc générale.

Application. Formule de Green (3 variables). — De cette transformation d'une intégrale triple en intégrale de surface, nous allons déduire une autre relation due à Green, et qui sera la généralisation de celle que nous avons obtenue comme application de la transformation d'une intégrale double en intégrale curviligne.

σ_1, ξ

U et V désignant deux fonctions continues de x, y, z dans un volume V limité par une surface S, considérons l'intégrale

$$\iiint_V \left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

α

On a l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)-U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

et des formules analogues par rapport à y et z.

L'intégrale triple devient donc

$$\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}U\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)-U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

ρ, α

La première partie peut se transformer en une intégrale de surface

$$\iint_S U\frac{\partial V}{\partial x}dy\,dz+U\frac{\partial V}{\partial y}dz\,dx+U\frac{\partial V}{\partial z}dx\,dy$$
$$=\iint_S U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma\right)d\sigma,$$

α, β, γ désignant les angles que fait avec les axes la demi-normale extérieure au volume (et $d\sigma$ un élément d'aire). On reconnaît dans la parenthèse ρ, σ_2 ce que nous avons appelé la dérivée de la fonction V prise suivant cette normale et que nous désignerons par la notation $\frac{\partial V}{\partial n}$. α La première intégrale est donc

$$\iint_S U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma.$$

En posant

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

La deuxième est

$$-\iiint_V U\Delta V\,dx\,dy\,dz.$$

Ainsi donc

$$I = \iiint_V \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_S U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \iiint_V U \Delta V\, dx\, dy\, dz.$$

Mais le premier membre est symétrique en U, V. Nous pouvons donc au second membre, permuter U et V. En égalant les deux expressions de I on aura alors

$$\iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_V (U \Delta V - V \Delta U) dx\, dy\, dz.$$

Si au lieu de prendre l'intégrale de surface sur la face de S extérieure à V, nous la prenions sur la face *intérieure*, nous obtiendrions

$$\iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma + \iiint_V (U \Delta V - V \Delta U) dx\, dy\, dz = 0.$$

C'est la formule de Green.

Elle est générale, quelles que soient les fonctions U et V, et est applicable même si le volume est limité par plusieurs surfaces distinctes à la seule condition que pour chaque surface, on prenne l'intégrale de surface sur la face *intérieure* au volume V.

Si, en particulier, les fonctions U et V satisfont à $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$, la formule se réduit à

$$\iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

Nous en ferons l'application dans la détermination d'une fonction harmonique définie sur une surface donnée (problème de Dirichlet) (cas particulier où par exemple $\Delta U = 0$).

III. — TRANSFORMATION D'UNE INTÉGRALE CURVILIGNE EN UNE INTÉGRALE DE SURFACE

Formule de Stokes. — Il existe une deuxième manière de généraliser la transformation d'une intégrale curviligne prise suivant un contour fermé plan en intégrale double prise dans l'aire plane limitée par le contour :

ξ, R1

Il faut considérer une intégrale curviligne prise suivant un contour fermé L plan ou gauche, et une surface S s'appuyant sur ce contour.

δ1

P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) désignant trois fonctions données, prenons l'intégrale curviligne

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Nous supposerons que P, Q, R admettent des dérivées partielles finies dans le champ où nous aurons à les prendre.

Imaginons une surface Σ s'appuyant sur L.

j

Nous voulons chercher si l'on ne peut transformer l'intégrale curviligne en une intégrale de surface prise sur Σ

Prenons l'intégrale $\int_L P\,dx$. α, ξ Il faut d'abord définir un sens sur L. Choisissons une des faces de Σ et par suite la demi-normale correspondante. Nous définirons le sens de parcours « direct » sur L de la façon suivante : γ, ψ Un observateur placé en un point de la courbe normalement à Σ et suivant la demi-normale choisie, parcourt L de manière à laisser à sa gauche l'aire Σ.

Nous supposerons qu'une parallèle à l'un quelconque des axes ne rencontre la portion de surface Σ qu'en un seul point. ρ Il en résultera que pour tout point de Σ, z est une fonction bien déterminée de x, y, soit $z = \varphi(x, y)$.

Nous ferons tout d'abord la remarque essentielle suivante :

Si l'angle de la normale avec oz est aigu (il sera aigu pour tout point de Σ) il en résultera qu'un observateur parcourant la projection l de L sur le plan des xy, se plaçant suivant oz, o laissera à sa gauche l'aire Ω projection de Σ.

Mais si, par exemple l'angle, de la normale avec ox est obtus, o, R1 à un sens de parcours direct sur L, correspondra un sens de parcours inverse sur la projection de L sur le plan yoz, pour un observateur placé dans la direction ox.

Ces précisions étant faites, pour calculer $\int_L P\,dx$, z1 il faudrait

exprimer x, y, z en fonction d'un paramètre t au moyen des équations de L.

Mais, pour tout point de Σ et par suite de L, on a $z = \varphi(x, y)$.

On peut supposer que l'on a exprimé d'abord z en fonction de x, y, ce qui donnerait l'intégrale

$$\int_L P(x, y, \varphi(x, y))dx = \int_L p(x, y)dx,$$

en posant

$$p(x, y) = P(x, y, \varphi(x, y)).$$

Cette intégrale ne dépend ainsi que de x, y. Mais lorsque le point M décrit L, le point m projection de M sur xoy décrit l. Ses coordonnées x, y sont constamment égales à celles de M et ses variations sont les mêmes. Il en résulte que

$$\int_L P(x, y, \bar{z})dx = \int_l p(x, y)dx.$$

On est donc ramené à une intégrale curviligne plane à laquelle on peut appliquer la formule de Green.

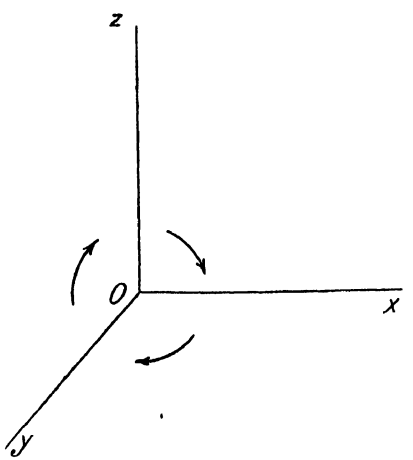


Fig. 50.

Mais ici une remarque importante s'impose. La formule de Green

$$\int_C f(x, y)dx = -\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y} dx\, dy$$

a été obtenue en prenant sur C un sens de parcours qui laisse Ω à la gauche de l'observateur, et en supposant les axes ox, oy disposés de manière à amener ox sur oy par une rotation de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Or il va en être autrement : le trièdre ox, y, z sera disposé, comme en cinématique, de la façon suivante : nous considérons les axes dans l'ordre ox, oy, oz. Pour un observateur placé sur oz, il faut une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (rotation directe) pour

amener ox sur oy. Il faudra alors une rotation directe de 90° autour de ox pour amener oy sur oz, et une rotation directe de 90° autour de oy pour amener oz sur ox. Le trièdre ainsi défini sera dit « direct ».

Mais, dans ces conditions, il faut changer le signe de la formule de Green et on aura

$$\int_C f(x, y)dx = +\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}dx\,dy,$$

C étant parcouru dans le sens direct.

Si pour tout point de la face considérée, l'angle γ de la normale avec oz est aigu, le sens de parcours sera direct sur l comme sur L. On aura

$$\int_l p(x, y)dx = \iint_\Omega \frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy.$$

En revenant à la fonction $P(x, y, z)$, on a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

Or, α, β, γ désignant les angles de la normale avec les axes

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma}{-1}.$$

Donc

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)\frac{1}{\cos\gamma}.$$

L'intégrale double devient donc

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$

après avoir remplacé z en fonction de x, y. Enfin, γ étant supposé aigu, et $dx\,dy$ étant dans cette formule essentiellement positif,

$$\frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = d\sigma.$$

On a donc dans ce cas

$$\int_L P dx = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)d\sigma.$$

Si, au contraire, pour tout point de la face considérée, γ est obtus,

ρ

à un sens de parcours direct sur L, correspond comme nous l'avons dit un sens de parcours inverse sur la projection l.

σ

On a donc dans ce cas

$$\int_L P\,dx = \int_l p\,dx = -\iint_\Omega \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

ρ

Ici, γ étant obtus, on a

$$-\frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = d\sigma.$$

Et par suite

$$\int_L P\,dx = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)d\sigma.$$

ω

Ainsi donc, cette formule est valable dans tous les cas.

β_1, α

Par simple permutation circulaire de x, y, z, de α, β, γ, on aura de même

$$\int_L Q\,dy = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha - \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma\right)d\sigma,$$

$$\int_L R\,dz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha\right)d\sigma.$$

ω

En rassemblant ces trois résultats, on a donc

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \iint_\Sigma \left[\cos\alpha\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \cos\beta\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \cos\gamma\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]d\sigma.$$

Cette formule porte le nom de formule de Stokes.

Elle suppose simplement que L est parcouru dans le sens direct pour un observateur placé sur la demi-normale faisant les angles α, β, γ.

d

On déduit de cette formule la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *prise le long d'un contour fermé quelconque soit nulle.*

β

Il faut que

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

La condition est évidemment suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, α, φ il suffit d'appliquer la formule à trois contours plans situés successivement dans les plans de coordonnées.

Nous avons supposé qu'une parallèle à l'un des axes ne rencontrait la surface qu'en un point. α On supprimerait cette restriction en décomposant Σ en aires partielles par des courbes auxiliaires. ο Les intégrales prises suivant les arcs de courbe séparant deux aires partielles se détruiraient deux à deux, π ces arcs étant parcourus deux fois dans des sens opposés.

Condition pour qu'une intégrale de surface ne dépende que du contour qui limite la surface. — Au deuxième membre de la formule de Stokes, ρ on a une forme particulière d'intégrale de surface

$$\iint_{\Sigma} (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\,d\sigma,$$

$$A = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad B = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad C = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ce résultat ainsi obtenu est très remarquable : π les fonctions P, Q, R étant données, le calcul de l'intégrale de surface

$$\text{(1)} \qquad \iint_{\Sigma} \left| \cos\alpha \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + \cdots \right| d\sigma$$

se ramène au calcul de l'intégrale curviligne $\int_{L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Mais si le contour est donné, on voit que, dans ce cas, l'intégrale curviligne, au signe près, ρ est absolument indépendante de la surface Σ que l'on a considérée. L'intégrale de surface est donc indépendante de la surface Σ sur laquelle on la prend, et ne dépend que du contour qui limite Σ.

Supposons alors que l'on se donne une intégrale de surface quelconque

$$\iint_{\Sigma} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy.$$

Cette intégrale ne dépendra elle-même que du contour de Σ si on peut la mettre sous la forme (1), c'est-à-dire si l'on peut déterminer trois fonctions P, Q, R satisfaisant aux trois équations

$$A = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad B = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad C = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Il semble que les fonctions A, B, C puissent être arbitraires, comme l'étaient les fonctions P, Q, R. Mais il n'en est rien, puisque de ces trois relations, on déduit immédiatement

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Nous allons montrer d'abord que cette condition est suffisante pour que l'on puisse déterminer P, Q, R.

Nous pouvons même choisir $R = 0$. Il reste

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -B, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = C.$$

Les deux premières donnent

$$Q = \int_{z_0}^{z} A(x, y, z)dz + \varphi(x, y), \qquad P = -\int_{z_0}^{z} B(x, y, z)dz + \psi(x, y),$$

x et y étant traités comme des paramètres dans les intégrales.

Portons ces valeurs dans la troisième équation en dérivant sous le signe $\int$. On aura

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial B}{\partial y} dz + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A}{\partial x} dz - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = C(x, y, z).$$

Les deux intégrales se rassemblent en

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dz = +\int_{z_0}^{z} \frac{\partial C}{\partial z} dz = C(x, y, z) - C(x, y, z_0).$$

Il reste donc seulement

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = C(x, y, z_0).$$

On peut prendre encore

$$\varphi = 0, \qquad \psi = \int_{y_0}^{y} C(x, y, z_0)dy.$$

ω

En résumé on peut poser

$$R = 0, \quad P = -\int_{z_0}^{z} B(x, y, z)dz + \int_{y_0}^{y} C(x, y, z_0)dy, \quad Q = \int_{z_0}^{z} A(x, y, z)dz.$$

Donc, une condition suffisante pour que l'intégrale

$$\iiint_{\Sigma} (A \cos\alpha + B \cos\beta + C \cos\gamma)d\sigma$$

ne dépende que du contour est que

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

ψ

La condition est nécessaire. — Nous allons démontrer que cette condition est nécessaire.

Donnons-nous une courbe fermée C et considérons deux surfaces quelconques passant par C, soient

$$\lambda(x, y, z) = 0, \qquad \mu(x, y, z) = 0.$$

ψ

On peut les considérer comme définissant la courbe elle-même. Nous supposerons de plus certaines conditions de continuité vérifiées.

Prenons la famille particulière de surfaces passant par C, dépendant d'un paramètre α, définie par l'équation

(1) $$\lambda(x, y, z) + \alpha[\mu(x, y, z) - \lambda(x, y, z)] = 0. \qquad (\Sigma_\alpha)$$

ρ

Les surfaces données correspondent à $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. (Bien que partant d'une famille linéaire de surfaces, notre conclusion sera générale).

ζ

Supposons qu'une parallèle à oz ne rencontre toute surface Σ_α qu'en un point, de sorte qu'on pourrait en déduire

$$z = \varphi(x, y, \alpha).$$

j

Nous voulons calculer sur cette surface, l'intégrale

$$I(\alpha) = \iint_{\Sigma_\alpha} A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

qui sera fonction du paramètre α, et nous en prendrons la dérivée Prenons d'abord la troisième

$$I_3(\alpha) = \int_{\Sigma_\alpha} C\,dx\,dy = \iint_{\Sigma_\alpha} C(x, y, \rho(x, y, \alpha))dx\,dy.$$

Pour la calculer, nous choisirons x et y comme variables indépendantes. Nous poserons $x = u$, $y = v$. Cette intégrale de surface se transforme en intégrale double ordinaire

$$I_3(\alpha) = \iint_{\Sigma_z} C(x, y, \rho)dx\,dy,$$

Σ_z étant la projection de Σ_α sur le plan des xy.

On a

$$I_3(\alpha) = \int_c^d dy \int_{\xi'(y)}^{\xi''(y)} C(x, y, \rho)dx = \int_c^d dy\, \varphi(y, \alpha),$$

en posant

$$\varphi(y, \alpha) = \int_{\xi'}^{\xi''} C(x, y, \rho)dx.$$

Calculons la dérivée de $I_3(\alpha)$ par rapport à α. Les limites c, d, correspondant aux tangentes parallèles à ox du contour projection de Σ_α, étant indépendantes de α, on aura

$$\frac{dI_3}{d\alpha} = \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} dy.$$

Mais pour toute valeur y, les limites ξ', ξ'' sont également indépendantes de α, puisque la projection Σ_z est la même pour toutes les surfaces Σ_α. On a donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \int_{\xi'}^{\xi''} \frac{\partial C}{\partial \alpha} dx = \int_{\xi'}^{\xi''} \frac{\partial C}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx.$$

Ainsi

$$\frac{dI_3}{d\alpha} = \int_c^d dy \int_{\xi'}^{\xi''} \frac{\partial C}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx = \iint_{\Sigma_z} \frac{\partial C}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx\,dy.$$

(Nous supposons que dans les limites 0 et 1 de α et pour le champ correspondant des surfaces Σ_α, on ait le droit de dériver sous le signe $\int$).

Prenons de même $\iint_{\Sigma_\alpha} A\,dy\,dz$.

En prenant toujours x et y comme variables indépendantes $x = u$, $y = v$, cette intégrale de surface revient à l'intégrale double ordinaire

$$I_1(\alpha) = \iint_{\Sigma_z} A(x, y, \rho) D^{x,y}_{y,z}\,dx\,dy = \iint_{\Sigma_z} -A(x, y, \rho)\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Comme ci-dessus, on aura, puisque les limites sont indépendantes de α,

$$\frac{dI_1}{d\alpha} = \iint_{\Sigma_z} -\frac{D}{D\alpha}\left(A\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx\,dy = \iint_{\Sigma_z}\left[-\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - A\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial \alpha}\right]dx\,dy.$$

La première partie est

$$-\iint_{\Sigma_z}\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\,dy.$$

La deuxième se calculerait par

$$-\int_c^d dy\int_{\xi'}^{\xi''} A\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial \alpha}\,dx.$$

On peut d'abord intégrer par parties

$$\int_{\xi'}^{\xi''} A\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial \alpha}\,dx = \left(A\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''}\frac{\partial}{\partial x}A(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial \alpha}\,dx$$

Or la partie tout intégrée s'annule aux deux limites puisque z est constant aux deux limites ξ', y et ξ'', y. D'ailleurs $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ se calculerait en dérivant (1)

$$\lambda(x, y, z) + \alpha(\mu - \lambda) = 0.$$

Ce qui donnerait

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\right] + \mu - \lambda = 0.$$

Or les points du contour limite ξ', y et ξ'', y satisfont à $\mu = 0, \lambda = 0$.

ω

Donc pour ces points on a bien $\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$.

δ_1

Il en résulte que la deuxième partie se réduit à

$$\int_c^d dy \int_{\xi'}^{\xi''} \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx = \iint_{\Sigma_z} \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx\, dy.$$

En explicitant $\frac{\partial A(x, y, \bar{z})}{\partial x}$ σ qui représente la dérivée totale de $A(x, y, \bar{z})$ par rapport à x, on a

$$\frac{\partial A(x, y, \bar{z})}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

ω

On a donc

$$\frac{dI_1}{d\alpha} = \iint_{\Sigma_z} \left[- \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dx\, dy,$$

ou en simplifiant

$$\frac{dI_1}{d\alpha} = \iint_{\Sigma_z} \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx\, dy.$$

δ_1

De la même façon, si l'on pose

$$I_2 = \iint_{\Sigma_\alpha} B(x, y, z) dz\, dx,$$

on aura

$$\frac{dI_2}{d\alpha} = \iint_{\Sigma_z} \frac{\partial B}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx\, dy.$$

δ_1, ω

En rassemblant les trois résultats, on a donc

$$\frac{dI}{d\alpha} = \iint_{\Sigma_z} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} dx\, dy.$$

Si l'on impose que l'intégrale I soit constante pour un contour donné, quelle que soit la surface de la famille, et quel que soit le contour, β il est nécessaire que

$$K = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

En effet on a

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\lambda - \mu}{\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \alpha \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)} = \frac{(\lambda - \mu)^2}{(\lambda - \mu) \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)}.$$

Si la quantité K n'était pas identiquement nulle, on pourrait délimiter une portion de l'espace suffisamment petite pour que K y conserve un signe constant ainsi que la fonction $\frac{\partial z}{\partial x}$ de x, y, z.

Une intégrale de surface prise dans cette portion de volume ne pourrait donc être nulle puisque la fonction à intégrer y aurait un signe constant.

Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de surface prise sur les surfaces de la famille soit constante est que

$$K = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Mais alors on aura

$$I(\alpha) = \text{const.} \qquad I(0) = I(1).$$

L'intégrale de surface prise sur les surfaces $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ c'est-à-dire sur les surfaces $\lambda = 0$, $\mu = 0$ et limitées au contour C aurait la même valeur. Or ces deux surfaces sont deux surfaces quelconques passant par le contour : la restriction que nous semblions avoir introduite, famille dépendant linéairement d'un paramètre α, disparaît donc.

On a donc le résultat suivant :

Pour que l'intégrale de surface

$$\iint A dydz + B dzdx + C dxdy$$

ne dépende que du contour de la surface (et non de la surface s'appuyant sur le contour) et en admettant que les fonctions A, B, C *et les dérivées premières soient continues dans un volume où l'on déforme la surface, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

On en déduit aisément que l'intégrale de surface étendue à une surface fermée à l'intérieur de laquelle A, B, C et les dérivées sont continues, est égale à zéro.

Si pour certains points ou lignes à l'intérieur de la surface, A, B, C ou les dérivées cessent d'être finies, il pourra arriver que

l'intégrale de surface ne soit pas nulle, mais cette intégrale restera constante si cette surface se déforme en conservant toujours à son intérieur les mêmes points de discontinuité et ceux-là seulement.

Application. — Prenons l'intégrale

$$I = \frac{1}{4\pi}\iint \frac{(x-a)dy\,dz + (y-b)dz\,dx + (z-c)dx\,dy}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

On a ici

$$A = \frac{x-a}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B = \cdots, \quad C = \cdots.$$

La condition $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$ est réalisée, comme on le vérifie aisément.

Le seul point de discontinuité pour A, B, C et les dérivées partielles, est le point a, b, c. L'intégrale prise sur toute surface fermée ne renfermant pas ce point sera nulle. L'intégrale prise sur toute surface fermée renfermant le point a, b, c sera constante

Pour avoir sa valeur, il suffit donc de la calculer sur une surface particulière. Nous prendrons la face extérieure d'une sphère de rayon R de centre a, b, c.

α, β, γ désignant les angles de la normale avec les axes, on a

$$x - a = R\cos\alpha, \qquad y - b = R\cos\beta, \qquad z - c = R\cos\gamma.$$

L'intégrale qui est égale à $\iint (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)d\sigma$ devient

$$\frac{1}{4\pi}\iint \frac{R(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}{R^3}d\sigma = \frac{1}{4\pi R^2}\iint d\sigma = 1.$$

Sous une autre forme, et sans prendre une surface particulière, on peut remarquer que l'intégrale s'écrit

$$\iint \frac{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma}{r^3}d\sigma,$$

en posant

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

ou encore

$$\iint \left[\frac{x-a}{r} \cos\alpha + \frac{y-b}{r} \cos\beta + \frac{z-c}{r} \cos\gamma \right] \frac{d\sigma}{r^2}.$$

Or la parenthèse représente cos V, V étant l'angle du prolongement du rayon vecteur avec la normale à la surface Projetons l'aire $d\sigma$ sur le plan perpendiculaire au rayon vecteur. La projection sera $d\sigma \cos V$; $\frac{d\sigma \times \cos V}{r^2}$ représente donc la surface perspective, sur la sphère de rayon unité, de l'élément d'aire $d\sigma$.

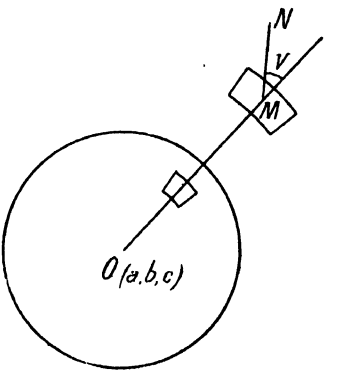


Fig. 51.

Si le point a, b, c est à l'intérieur de Σ, la somme de toutes les aires perspectives sera évidemment égale à l'aire de la sphère, soit 4π. L'intégrale est égale à 1.

Si le point a, b, c est à l'extérieur de Σ, la somme de toutes les aires perspectives est nulle : l'intégrale de surface est nulle.

CHAPITRE XVI

INTÉGRALES MULTIPLES GÉNÉRALISÉES APPLICATIONS DIVERSES

SOMMAIRE.

Champ infini : Intégrales doubles, triples.
Fonction discontinue : Cas d'un point, d'une ligne de discontinuité.
Restriction des propriétés : Exemple de Cayley. — Théorème de d'Alembert (Gauss).
Applications diverses : Intégrales eulériennes. — Fonction B. — Intégrale de Raabe, de Dirichlet.

Pour définir une intégrale multiple dans un champ donné, nous avons dû supposer :

1° que le champ est fini ;

2° que la fonction à intégrer est bornée et intégrable dans le champ, plus particulièrement qu'elle y est continue.

Nous allons généraliser cette notion d'intégrale en supposant que l'une ou l'autre de ces conditions ne soit pas réalisée.

I. — CHAMP INFINI

Considérons d'abord une intégrale double. — Supposons que le champ Σ soit illimité dans tout le plan ou dans une partie du plan. Prenons par exemple le champ limité par une courbe Γ dont deux branches s'éloignent indéfiniment. Considérons des courbes auxiliaires C_1, C_2, C_3, $\cdots$, qui s'éloignent indéfiniment d'une façon quelconque. Elles délimitent avec Γ des champs finis R_1, R_2, R_3, $\cdots$

Nous pouvons définir les intégrales doubles $\iint_{R_1}$, $\iint_{R_2}$, $\iint_{R_3}$ $\cdots$

δ1 Si ces intégrales tendent vers une limite finie et bien déterminée, quand les courbes $R_1, R_2, R_3, \cdots$ s'éloignent indéfiniment de façon à englober tout point de Σ, nous dirons que cette limite est l'intégrale $\iint_\Sigma f(x,y)d\sigma$.

Cette définition ρ suppose :

1° que la limite existe ; 2° qu'elle est indépendante du choix des courbes $C_1, C_2, C_3, \cdots$

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que l'intégrale* $\iint_\Sigma f(x,y)d\sigma$ *existe, il faut et il suffit que l'intégrale* $\iint_\Sigma |f(x,y)|\,d\sigma$ *existe.*

Il faut évidemment supposer que dans le champ, la fonction ne garde pas un signe constant, π sans quoi, les deux intégrales seraient égales au signe près.

La fonction f étant supposée continue, α traçons la courbe qui sépare les points où f est positif des points où f est négatif. Chaque champ R_i comprendra un champ r_i où f est positif et un champ r_i' où f est négatif. Nous aurons

δ
$$S_{R_i} f\,d\sigma = S_{r_i} |f|\,d\sigma - S_{r_i'} |f|\,d\sigma,$$

$$S_{R_i} |f|\,d\sigma = S_{r_i} |f|\,d\sigma + S_{r_i'} |f|\,d\sigma.$$

Désignons par S_i et S_i' les deux intégrales qui figurent aux seconds membres

$$S_{R_i} f\,d\sigma = S_i - S_i', \qquad S_{R_i} |f|\,d\sigma = S_i + S_i'.$$

δ1 Si par hypothèse $S_{R_i} |f|\,d\sigma$ a une limite, les deux intégrales S_i et S_i' auront séparément des limites. La différence $S_i - S_i'$ aura donc aussi une limite et par suite $S_{R_i} f\,d\sigma$.

δ1 Inversement si $S_{R_i} |f|\,d\sigma$ n'a pas de limite, l'une des intégrales S_i ou S_i' augmente indéfiniment. Si une seule de ces intégrales augmente indéfiniment, il en sera de même au signe près de $S_{R_i} f\,d\sigma$. Si les deux intégrales augmentent indéfiniment, ρ comme les champs r_i, r_i' croissent indéfiniment indépendamment l'un de

d

l'autre, la quantité $S_i - S'_i$ différence de deux quantités qui augmentent indéfiniment indépendamment l'une de l'autre, ne tendra vers aucune limite déterminée ou pourra augmenter ou décroître indéfiniment.

β

On remarque que, contrairement à ce qui se passe pour les intégrales simples, pour que l'intégrale existe dans un champ infini, il est nécessaire que l'intégrale portant sur la valeur absolue de la fonction existe elle-même.

Nous sommes donc ramenés au cas où la fonction garde un signe constant : nous la supposerons par exemple toujours positive.

ψ

THÉORÈME. — *Pour que l'intégrale existe, il suffit de vérifier que la limite existe pour une famille particulière de courbes* $C_1, C_2, C_3, \cdots$ *s'enveloppant mutuellement et s'éloignant indéfiniment.*

d

Par hypothèse les intégrales $S_1, S_2 \cdots, S_p, \cdots S_{p+q}$ tendent vers une limite finie. La différence $S_{p+q} - S_p$ peut donc être rendue aussi petite qu'on le voudra quel que soit q pourvu que p soit suffisamment grand. En d'autres termes la différence de deux intégrales quelconques doit pouvoir être rendue aussi petite qu'on le voudra.

ξ

Considérons une autre famille de courbes quelconques $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_p, \cdots$ s'éloignant indéfiniment et s'enveloppant mutuellement. Désignons par $S'_1, S'_2, \cdots, S'_p$ les intégrales de $f(x, y)$ dans

α

les champs correspondants. A une courbe quelconque γ_i nous pouvons faire correspondre une courbe C_k qui l'enveloppe et une

o

courbe C_j enveloppée par γ_i. La fonction f étant toujours positive, on aura

$$S_j < S'_i < S_k.$$

β

Par hypothèse, il existe une quantité S telle que la différence $S - S_j$, et de même $S - S_k$, puisse être rendue aussi petite

r

qu'on le veut quand j et k augmentent indéfiniment. Il en sera donc de même de $S - S'_i$ quand i augmentera indéfiniment (j et k augmentant simultanément indéfiniment). Les intégrales prises dans les champs délimités par les courbes γ ont donc bien pour limite S.

Il existe des cas assez étendus où l'on peut se rendre compte si cette limite existe.

Nous pouvons supposer $f(x, y)$ toujours positive.

Cas d'existence. — THÉORÈME. — *Supposons que l'on puisse trouver un exposant α tel que, pour des points suffisamment éloignés (r désignant la distance d'un point à l'origine) le produit $r^\alpha f(x,y)$ reste compris entre des limites finies, quel que soit le point, la limite de l'intégrale existera quel que soit le champ, si $\alpha > 2$; elle n'existera pas dans un champ infini dans les deux sens si $\alpha \leqslant 2$.*

Par hypothèse, pour tout point à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment grand R, on peut écrire

$$m < f(x, y)\, r^\alpha < M.$$

Si donc nous posons $f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^\alpha}$, $\varphi(x, y)$ sera borné par m et M qui seront de même signe.

L'intégrale devient

$$I = \iint \frac{\varphi(x, y)}{r^\alpha} dx\, dy.$$

Pour la simplifier, nous appliquerons le théorème de la moyenne en prenant une valeur moyenne μ de $\varphi(x, y)$. On obtiendra

$$I = \mu \iint \frac{dx\, dy}{r^\alpha}.$$

On a donc cette première conséquence :

L'intégrale existe ou non en même temps que l'intégrale $\iint \frac{dx\, dy}{r^\alpha}$.

Il suffit d'étudier cette intégrale pour la portion du champ extérieure au cercle de rayon R.

Nous pouvons, pour délimiter le champ, prendre comme courbes variables des cercles de centre origine et il suffit que l'intégrale prise dans la couronne C comprise entre deux cercles de rayon R′ et R″ tende vers zéro quand R′ et R″ augmentent indéfiniment.

En passant aux coordonnées polaires l'intégrale deviendra $\iint_{\delta_1} r^{1-\alpha}\,dr\,d\theta$.

Or cette intégrale sera

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{R'}^{R''} r^{1-\alpha}\,dr = \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(r^{2-\alpha}\right)_{R'}^{R''} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(R''^{2-\alpha} - R'^{2-\alpha}\right).$$

Si $\alpha > 2$, quelle que soit la façon dont R′ et R″ augmentent indéfiniment, l'intégrale tend vers zéro.

Si $\alpha < 2$, $R'^{2-\alpha}$ et $R''^{2-\alpha}$ augmentent indéfiniment, mais comme R′ et R″ augmentent indéfiniment indépendamment l'un de l'autre, la différence ne tend vers aucune limite déterminée. L'intégrale étendue à tout le plan n'existe donc pas.

Si $\alpha = 2$, l'intégrale a pour valeur $2\pi \mathrm{L}\frac{R''}{R'}$ et ne tend encore vers aucune limite déterminée.

Si le champ ne comprend pas tout le plan, il est possible que l'intégrale existe même si $\alpha \leqslant 2$.

Pour voir ce qui se passe dans ce cas on peut, en intégrant d'abord par rapport à θ, écrire l'intégrale sous la forme

$$\int_{R'}^{R''} \frac{dr}{r^{\alpha}} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r\,d\theta,$$

θ_0 et θ_1 désignant les limites de θ (dans le champ) pour chaque valeur de r.

Or $\int_{\theta_0}^{\theta_1} r\,d\theta$ représente la longueur $l(r)$ de l'arc de cercle compris dans le champ. On a donc à calculer ensuite $\int_{R'}^{R''} l(r)\,dr$.

Supposons que $l(r)$ soit un infiniment grand de l'ordre β avec r, de la forme kr^{β}, k restant borné. Il faudra étudier l'intégrale

$$\int_{R'}^{R''} kr^{\beta-\alpha}dr = k_m \int_{R'}^{R''} r^{\beta-\alpha}dr = k_m \cdot \frac{1}{\beta+1-\alpha}\left(r^{\beta+1-\alpha}\right)_{R'}^{R''}$$

en prenant une valeur moyenne de k.

Pour que cette quantité tende vers zéro quand R′ et R″

augmentent indéfiniment indépendamment l'un de l'autre, il faut et il suffit que $\alpha > \beta + 1$.

Si le champ comprend tout le plan, ou un secteur fini du plan, compris par exemple entre deux droites divergentes, l'arc de cercle $l(r)$ est un infiniment grand du premier ordre avec r : $\beta = 1$: β

il faut que $\alpha > 2$.

Mais si par exemple le champ est compris entre deux droites parallèles, $\beta = 0$: il suffit que $\alpha > 1$.

Intégrales triples. — On aura des conclusions analogues dans le cas des intégrales triples.

α

On limitera le champ par des surfaces auxiliaires Σ. Ces surfaces s'éloigneront indéfiniment dans tous les sens, si à partir d'un certain moment, elles englobent une sphère de centre origine de rayon choisi aussi grand qu'on le veut.

On démontrera aisément que :

THÉORÈME. — σ_1, ψ *Pour que l'intégrale* $\iiint f(x, y, z)dV$ *existe, il faut et il suffit que* $\iiint |f(x, y, z)|dV$ *existe aussi.*

Même démonstration que pour les intégrales doubles.

THÉORÈME. — *Supposons que pour des points suffisamment éloignés* ξ *(à l'extérieur d'une sphère de rayon* R), *on puisse déterminer un exposant* α *tel que* $r^\alpha f(x, y, z)$ *reste compris entre deux limites fixes* m *et* M, *l'intégrale existera ou non en même temps que l'intégrale* $\iiint \frac{dV}{r^\alpha}$.

φ

Il suffit d'appliquer le théorème de la moyenne.

En prenant des coordonnées polaires dans l'espace, cette dernière intégrale devient

$$\iiint \frac{r^2 \sin \theta}{r^\alpha} dr\, d\theta\, d\varphi.$$

THÉORÈME. — σ_1, ψ *Si* $\alpha > 3$, *l'intégrale existe dans tout l'espace et par conséquent dans une portion quelconque de l'espace.*

Si $\alpha \leqslant 3$ *l'intégrale étendue à tout l'espace augmente indéfiniment.*

δ, α

En prenant pour surfaces auxiliaires, des sphères, il faudra considérer les intégrales correspondant au volume compris entre

deux sphères de rayon R′, R″ ; ces intégrales devront tendre vers zéro quand R′ et R″ augmentent indéfiniment d'une façon quelconque.

Or l'une de ces intégrales s'écrit, en intégrant d'abord par rapport à θ et à φ,

$$I = \int_{R'}^{R''} \frac{dr}{r^\alpha} \iint r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Mais l'intégrale double représente l'aire Σ de la portion de sphère de rayon r comprise dans le champ. Supposons que cette aire soit un infiniment grand de l'ordre β par rapport à r, c'est-à-dire supposons que, pour des sphères suffisamment grandes, le rapport $\frac{\Sigma}{r^\beta}$ reste compris entre des limites fixes.

On pourra poser

$$\Sigma = g(r) r^\beta \qquad \text{avec} \qquad m < g(r) < M.$$

En appliquant à l'intégrale triple, le théorème de la moyenne, en prenant une valeur moyenne de $g(r)$, on pourra écrire

$$I = \mu \int_{R'}^{R''} r^{\beta-\alpha} dr = \frac{\mu}{\beta + 1 - \alpha} (R''^{\beta+1-\alpha} - R'^{\beta+1-\alpha}).$$

Pour que ce résultat tende vers zéro quand R′ *et* R″ *augmentent indéfiniment indépendamment l'un de l'autre, c'est-à-dire pour que l'intégrale existe, il faut et il suffit que* $\alpha > \beta + 1$.

Supposons que le champ comprenne tout l'espace, ou que seulement il comprenne au moins toute la portion d'un cône de sommet origine.

On aura $\beta = 2$. L'intégrale existera donc si $\alpha > 3$ et n'existera pas si $\alpha \leqslant 3$.

Si le champ est simplement compris entre deux plans parallèles, on aura $\Sigma = 2\pi r h$, h désignant la distance des plans. Donc $\beta = 1$: Pour que l'intégrale existe, il faut et il suffit que $\alpha > 2$.

Enfin si le champ est un cylindre, pour des valeurs de r suffisamment grandes, l'aire Σ se rapproche de la section droite du cylindre : $\beta = 0$: il faut et il suffit que $\alpha > 1$.

On généraliserait ces résultats dans le cas des intégrales multiples.

II. — FONCTION DISCONTINUE

Considérons une intégrale double $\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$. Supposons que $f(x, y)$ devienne infinie dans le champ. Il peut arriver qu'elle devienne infinie en un seul point (par exemple $\frac{1}{x^2 + y^2}$ pour l'origine) ou qu'elle devienne infinie pour tous les points d'une courbe (par exemple $\frac{1}{x + y}$).

Dans le cas d'une fonction de trois variables ; elle pourrait devenir infinie en tous les points d'une surface.

α, ξ

Dans le cas le plus général, isolons la discontinuité ou la partie de discontinuité qui se trouve à l'intérieur du champ par une surface Σ qui l'entoure complètement. On dit que la surface Σ tend en tous sens vers la discontinuité,

ψ

si, étant donnée une surface Σ_0 quelconque entourant cette discontinuité, Σ finit par devenir et rester complètement intérieure à Σ_0.

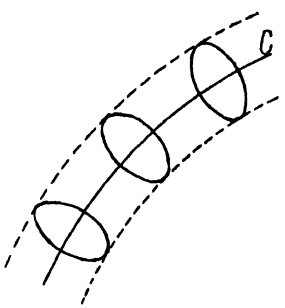


Fig. 52.

Si par exemple la discontinuité a lieu suivant une courbe, nous entourerons cette courbe d'une espèce de tube en considérant dans chaque plan normal, un petit cercle de rayon r ayant son centre sur la courbe. Il suffit ensuite de faire tendre r vers zéro.

Chaque surface Σ décomposera le champ Ω en deux parties, une partie extérieure Ω_1, et une partie intérieure Ω_2.

σ, ν

Comme il n'y a plus de point de discontinuité dans la région Ω_1, nous pouvons définir l'intégrale triple $\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z)dV$.

ξ

Supposons que cette intégrale triple tende vers une limite finie et bien déterminée quand la surface Σ tend en tous sens vers la discontinuité, nous dirons que cette limite est l'intégrale triple

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dV.$$

Cette définition suppose donc non seulement que la limite existe, mais qu'elle est indépendante de la façon dont se déforme Σ.

Théorèmes d'existence :

σ_1, ψ

THÉORÈME. — *Pour que l'intégrale*

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dV \quad \text{ou} \quad \left(\iint f(x, y)d\sigma\right)$$

existe, il faut et il suffit que l'intégrale $\iiint |f(x, y, z)|\, dV$ (*ou* $\iint |f(x,y)|\, d\sigma$) *existe.*

La démonstration sera identique à celle que nous avons employée dans le cas du champ infini.

α, δ

Traçons dans le champ la ligne ou surface de séparation des points pour lesquels f est positive, des points pour lesquels elle est négative. (Cette surface pourra se confondre en tout ou en partie avec la surface de discontinuité).

δ_1

Pour chaque surface Σ, il y aura dans la région une partie Ω_1' où f est positive, et une région Ω_1'' où f est négative.

On aura

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z)dV = \iiint_{\Omega_1'} |f(x, y, z)|dV - \iiint_{\Omega_1''} |f(x, y, z)|dV.$$

Désignons par I_1' et I_1'' les deux intégrales, il viendra

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z)dV = I_1' - I_1'', \qquad \iiint_{\Omega_1} |f|\, dV = I_1' + I_1''.$$

δ_1

Si la surface Σ tend vers la discontinuité, cette dernière intégrale tend par hypothèse vers une limite J finie et bien déterminée. Donc I_1' et I_1'' tendent séparément vers des limites I′ et I″.

ω

L'intégrale donnée tendra donc vers $I' - I''$.

Si la deuxième intégrale augmente indéfiniment, si une seule intégrale I_1' ou I_1'' augmente indéfiniment, il en sera de même de l'intégrale donnée.

Si I_1' et I_1'' augmentent toutes deux indéfiniment, l'intégrale donnée, différence de deux quantités augmentant indéfiniment indé-

pendamment l'une de l'autre, ne tendra vers aucune limite déterminée.

σ, ξ

THÉORÈME. — *Si la fonction f est constamment de même signe, si l'intégrale* $\iiint f(x, y, z)dV$ *existe pour un mode particulier de décroissance des surfaces* Σ, *elle existera pour tout autre mode de décroissance.*

δ

Considérons un premier mode de décroissance des surfaces Σ vers la discontinuité

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n, \cdots, \Sigma_q$$

isolant des champs extérieurs qui vont en croissant

$$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n, \cdots, \Omega_q$$

pour lesquels l'intégrale a une limite I.

ξ

Considérons un deuxième mode de décroissance

$$\Sigma'_1, \Sigma'_2, \cdots, \Sigma'_p$$

donnant des champs extérieurs

$$\Omega'_1, \Omega'_2, \cdots, \Omega'_p \cdots$$

δ_1 o

Puisque Σ_q tend en tous sens vers la discontinuité, il arrive un moment où elle est constamment intérieure à une surface quelconque Σ'_p. Mais puisque les surfaces Σ' tendent également en tous sens vers la discontinuité, il arrivera un moment où toute surface Σ'_p sera complètement intérieure à une surface Σ_n de la première famille. r On aura donc alors

$$\Omega_q > \Omega'_p > \Omega_n.$$

d

La fonction f étant supposée constamment positive, on en déduira

$$\iiint_{\Omega_q} > \iiint_{\Omega'_p} > \iiint_{\Omega_n}.$$

δ_1 ω

Lorsque Ω'_p tend vers Ω, Ω_q tend également vers Ω ainsi que Ω_n : les intégrales extrêmes ont donc pour limite I. L'intégrale intermédiaire aura donc bien aussi une limite, et cette limite sera également I.

ω

Il faut donc et il suffit de rechercher si la limite existe pour

la fonction prise en valeur absolue, et pour tel mode particulier de décroissance des surfaces.

THÉORÈME (*Fonction infinie en un seul point*). — *Supposons que la fonction devienne infinie en un point unique a, b, c.* *Supposons que pour des points suffisamment voisins, c'est-à-dire pour tous les points compris à l'intérieur d'une sphère de rayon* R, *on puisse trouver un exposant* α *tel que* $r^\alpha f(x, y, z)$ *reste constamment compris entre deux limites fixes m et* M : *l'intégrale existera ou non en même temps que l'intégrale* $\iiint \frac{dV}{r^\alpha}$.

En effet, on peut négliger la partie de l'intégrale extérieure à la sphère de rayon R, intégrale qui existe.

Pour tous les points intérieurs, on peut par hypothèse écrire

$$f(x, y, z) = \frac{\varphi(x, y, z)}{r^\alpha},$$

$\varphi(x, y, z)$ étant positif et restant compris entre m et M. On peut donc appliquer à l'intégrale $\iiint f(x, y, z)dV$ le théorème de la moyenne et écrire

$$\iiint \frac{\varphi(x, y, z)}{r^\alpha} dV = \mu \iiint \frac{dV}{r^\alpha} \qquad m < \mu < M.$$

Le théorème est donc démontré.

Ce théorème s'applique pour une fonction de deux, trois, ··· variables.

Cas d'une intégrale triple. — THÉORÈME. — *Si* $\alpha < 3$, *l'intégrale existe.*

Si $\alpha \geqslant 3$, *l'intégrale n'existe pas.*

Prenons en effet des coordonnées polaires dans l'espace

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

On a

$$D^{r, \varphi, \theta}_{x, y, z} = r^2 \sin\theta.$$

o

L'intégrale deviendra

$$\iiint r^{2-\alpha} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

r variant de zéro à R, θ de 0 à π, φ de 0 à 2π.

ρ

Ces limites étant indépendantes et les variables pouvant être séparées, cette intégrale se décompose en produit d'intégrales simples.

$$I = 2\pi \times 2 \int_0^R r^{2-\alpha} dr = 4\pi \frac{1}{3-\alpha} (r^{3-\alpha})_0^R.$$

ω

Si $\alpha < 3$, l'intégrale tend vers $\frac{4\pi}{3-\alpha} R^{3-\alpha}$.

Si $\alpha > 3$, l'intégrale prise dans la sphère complète entourant le point augmente indéfiniment, mais si, le point de discontinuité est sur la surface limitant le champ, l'intégrale pourrait exister, comme nous allons le voir, pour des valeurs supérieures de α.

Si $\alpha = 3$, l'intégrale est

$$I = 4\pi \int_0^R \frac{dr}{r} = 4\pi (Lr)_0^R$$

et elle augmente indéfiniment.

Si le point est sur la surface même limitant le champ, pour démontrer la remarque que nous venons de faire, il suffit de voir que l'intégrale peut s'écrire

$$I = \int_0^R r^{-\alpha} dr \iint r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

σ1

Or l'intégrale double est égale à $S(r)$, $S(r)$ désignant la portion de surface sphérique comprise dans le champ. Si cette surface ainsi limitée est de l'ordre de r^β, c'est-à-dire si l'on peut poser

ξ

$$S(r) = \lambda(r) r^\beta,$$

$\lambda(r)$ restant borné, l'intégrale existera si $\alpha < \beta + 1$.

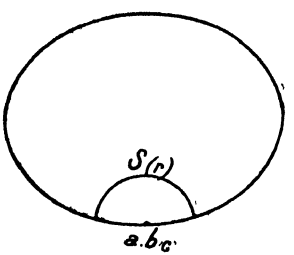


Fig. 53.

En général si, en restant dans le champ, on peut s'approcher du

point de discontinuité par tous les points à l'intérieur d'un véritable cône, on a

$$S(r) = \lambda(r) r^2 \qquad \beta = 2$$

($\lambda(r)$ voisin de 2π si le point est ordinaire).

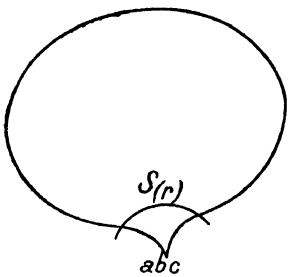


Fig. 54.

On doit donc avoir $\alpha < 3$.

Mais si la portion du champ avoisinant le point de discontinuité se réduit à une surface, on a $\beta = 3$: il suffit que $\alpha < 4$ pour que l'intégrale existe.

Enfin, si la portion du champ aux environs du point de discontinuité se réduit à une courbe, il suffira que $\alpha < 5$.

Cas d'une intégrale double. — Dans le cas d'une intégrale double, on a à considérer l'intégrale

$$I = \iint r^{1-\alpha} dr\, d\theta = \int_0^R r^{-\alpha} \int r\, d\theta.$$

L'intégrale existera si $\alpha < 2$; elle augmentera indéfiniment si $\alpha \geqslant 2$ (sauf exception analogue à ci-dessus).

Cas d'une ligne de discontinuité. — Nous désignerons par δ la plus courte distance d'un point du plan (s'il s'agit d'une intégrale double) ou de l'espace (intégrale triple) à la ligne de discontinuité.

Supposons qu'il existe un exposant α tel que, pour tout point d'une région suffisamment voisine de la ligne, on ait

$$m < f(x, y, z)\delta^\alpha < M,$$

m et M désignant des limites fixes :

THÉORÈME. — *L'intégrale existera ou non en même temps que*

$$\iiint \frac{dV}{\delta^\alpha}.$$

Nous pouvons en effet, puisque nous pouvons choisir arbitrairement les surfaces Σ qui tendent vers la discontinuité, considérer les surfaces obtenues en menant dans chaque plan normal, la circonférence de rayon δ ayant son centre sur la courbe.

Nous pouvons supposer que les inégalités sont vérifiées à partir d'une distance Δ, et négliger la partie de l'intégrale correspondant au domaine extérieur, partie qui reste finie.

δ_1

Pour tout point intérieur, on pourra écrire

$$f(x, y, z) = \frac{\varphi(x, y, z)}{\delta^\alpha} \qquad m < \varphi(x, y, z) < M.$$

L'intégrale devient $\iiint \frac{\varphi(x, y, z)}{\delta^\alpha} dV$. α En lui appliquant le théorème de la moyenne on la mettra bien sous la forme $\mu \iiint \frac{dV}{\delta^\alpha}$, μ étant compris entre m et M : l'intégrale existera donc bien ou non en même temps que $\iiint \frac{dV}{\delta^\alpha}$.

σ_1

THÉORÈME. — *Si $\alpha < 2$ (intégrale triple) l'intégrale existe. Si $\alpha \geqslant 2$, l'intégrale augmente indéfiniment.*

α, ν

En effet prenons comme élément de volume, le volume compris entre deux surfaces correspondant aux valeurs δ et $\delta + d\delta$.

Pour tous les points à l'intérieur de ce volume ρ la fonction $\frac{1}{\delta^\alpha}$ prend la même valeur. Le volume compris a pour partie principale $S d\delta$ (S désignant l'aire de la surface).

Pour des valeurs de δ suffisamment petites, cette surface ψ a elle-même pour partie principale $2\pi\delta \times L$, L désignant la longueur de la ligne de discontinuité.

ω

On est donc ramené à chercher la limite de l'intégrale

$$\int_0^\Delta 2\pi L \frac{\delta d\delta}{\delta^\alpha} = 2\pi L \int_0^\Delta \delta^{1-\alpha} d\delta.$$

Cette intégrale existera bien si $\alpha < 2$; elle n'existera pas si $\alpha \geqslant 2$.

Dans le cas d'une intégrale double et d'une ligne de discontinuité, pour que l'intégrale existe, il faut que $\alpha < 1$.

En général supposons une intégrale multiple d'ordre n, et que les points de discontinuité forment un espace à m dimensions ($m < n$).

ξ

Si pour des points suffisamment voisins de cet espace, et pour un exposant α, *on peut écrire*

$$m < f(x, y, z \cdots)\delta^{\alpha} < M,$$

(δ *désignant ce que l'on peut appeler la plus courte distance du point* $x, y, z, \cdots$ *à l'espace de discontinuité*),

ψ, R_1

l'intégrale existera si $\alpha < n - m$.

Elle n'existera pas si $\alpha \geqslant n - m$.

III. — RESTRICTIONS DES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES MULTIPLES

Dans le cas où l'on considère une intégrale multiple, dans un champ fini, d'une fonction qui reste finie dans ce champ,

1° on peut intervertir l'ordre des intégrations ;

2° on peut faire le changement de variables par la règle que nous avons indiquée.

Il faut bien remarquer que ces propriétés ψ ne subsistent en général pas dans le cas des intégrales généralisées telles que nous venons de les définir (champ infini ou fonction discontinue).

Voici un exemple dû à Cayley du cas où le champ est infini.

Soit la fonction $\sin(x^2 + y^2)$ qui est finie et continue dans tout le plan. δ Si on l'intègre à l'intérieur d'un carré de côté a, on aura

$$I = \int_0^a dx \int_0^a \sin(x^2 + y^2)\,dy = \int_0^a dx \int_0^a (\sin x^2 \cos y^2 + \sin y^2 \cos x^2)\,dy.$$

ρ

L'intégrale se décompose donc en un produit d'intégrales

$$\int_0^a \sin x^2\,dx \int_0^a \cos y^2\,dy + \int_0^a \sin y^2\,dy \int_0^a \cos x^2\,dx.$$

σ_2

Or lorsque a augmente indéfiniment, ces diverses intégrales ont pour limite $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. L'intégrale a donc pour limite $\frac{\pi}{4}$.

δ_1, σ_2

Si au contraire, l'on intègre à l'intérieur d'un cercle de rayon R, on aura

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sin r^2 \times r\,dr = 2\pi\left(-\frac{\cos r^2}{2}\right)_0^R = \pi(1 - \cos R^2).$$

ρ

Le second membre ne tend vers aucune limite déterminée lorsque R augmente indéfiniment.

Voici un exemple sur l'interversion de l'ordre des intégrations.

Considérons la fonction

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Elle devient discontinue pour l'origine.

ξ

Si donc nous considérons un champ qui comprenne l'origine à son intérieur ou sur sa surface, voyons d'abord si l'intégrale existe.

En posant $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$, on a

$$f(x, y) = \frac{\cos 2\omega}{\rho^2}.$$

σ_2, ξ

Si le champ n'englobe pas une des bissectrices, $\rho^2 f(x, y)$ sera compris entre des limites fixes $\cos 2\omega_1$, $\cos 2\omega_2$ de même signe :

r, ω

$f(r, y)$ sera de l'ordre 2 par rapport à $\frac{1}{\rho}$, l'intégrale augmentera indéfiniment.

δ_1

On ne peut rien dire si le champ comprend l'une des bissectrices : l'intégrale peut ne pas exister ou dépendre de la façon dont le champ englobant la discontinuité décroît.

Considérons un rectangle de côtés a, b s'appuyant sur les axes.

Intervertissons l'ordre des intégrations.

δ_1

Si l'on intègre d'abord par rapport à y, on aura

$$\int_0^a dx \int_0^b \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = \int_0^a dx \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)_0^b = -\int_0^a \frac{b\,dx}{x^2 + b^2} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}.$$

δ_1

Si au contraire on intègre d'abord par rapport à x, on aura

$$\int_0^b dy \int_0^a \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \int_0^b dy \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)_0^a = \int_0^b \frac{a\,dy}{a^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$$

Les deux résultats sont différents.

De cette remarque résulte que, inversement, si en renversant l'ordre des intégrations, on trouve pour une intégrale double prise dans un champ fini deux résultats différents, ψ, β on pourra en conclure que certainement la fonction à intégrer est devenue infinie dans le champ d'intégration.

Cette simple remarque a permis à Gauss de donner une démonstration très ingénieuse du théorème de d'Alembert.

ξ

Théorème de d'Alembert. — *Soit une équation à coefficients réels*

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \cdots + kx + l = 0.$$

Cette équation admet au moins une racine réelle ou imaginaire.

Donnons à x des valeurs réelles ou imaginaires de la forme $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Le résultat de la substitution sera de la forme $P(\rho, \varphi) + iQ(\rho, \varphi)$ en posant

$$P = a\rho^m \cos m\varphi + b\rho^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \cdots + l,$$
$$Q = a\rho^m \sin m\varphi + \cdots + k\rho \sin\varphi.$$

β

Il faut démontrer que pour certaines valeurs de ρ et de φ, on a à la fois $P = 0$, $Q = 0$.

En posant $V = \text{arc tg}\,\frac{P}{Q}$, considérons la fonction $\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi}$. ρ, δ₁ On voit aisément d'abord que cette fonction est de la forme $\frac{R(\rho, \varphi)}{(P^2+Q^2)^2}$.

R désignant un polynôme en ρ et lignes trigonométriques. Prenons l'intégrale double de cette fonction à l'intérieur d'un cercle de rayon R. ψ Je dis que si R est suffisamment grand, on a

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi}\, d\rho \neq \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi}\, d\varphi.$$

On en déduira que la fonction $\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi}$ est devenue certainement infinie dans le champ. Or elle ne peut devenir infinie, d'après sa forme, que si P et Q s'annulent simultanément. ω Il y a donc dans le champ certaines valeurs ρ et φ qui annulent simultanément P et Q. Il y a donc des valeurs de x réelles ou imaginaires qui annulent $f(x)$.

δ

Voyons d'abord la forme de la fonction $\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi}$.

On a $\frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial\rho} - P\frac{\partial Q}{\partial\rho}}{P^2+Q^2}$.

Il est donc visible que $\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi}$ aura pour dénominateur $(P^2+Q^2)^2$, le numérateur étant formé au moyen des dérivées de Q et de P, étant par conséquent un polynôme en ρ et lignes trigonométriques.

δ_1 Calculons les intégrales. On a d'abord

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi} d\varphi = \int_0^R d\rho \left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)_0^{2\pi}.$$

ρ Or les polynômes P, Q, $\frac{\partial P}{\partial\rho}$, $\frac{\partial Q}{\partial\rho}$ reprennent les mêmes valeurs pour 0 et 2π. Donc $\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)_0^{2\pi} = 0$: le résultat de l'intégration est donc nul.

δ_1 Prenons maintenant

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\varphi} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_0^R.$$

Or

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \frac{Q\frac{\partial P}{\partial\varphi} - P\frac{\partial Q}{\partial\varphi}}{P^2 + Q^2}.$$

ρ Mais

$$\frac{\partial P}{\partial\varphi} = -\,ma\rho^m \sin m\varphi - \cdots, \qquad \frac{\partial Q}{\partial\varphi} = ma\rho^m \cos m\varphi + \cdots$$

Pour $\rho = 0$, on a

$$Q = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial\varphi} = 0.$$

Donc $\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_{\rho=0} = 0.$

Pour $r = R$, ρ le numérateur est un polynôme de degré $2m$ en R (les coefficients étant des fonctions de φ). Le terme de plus haut degré est $-\,ma^2R^{2m}$. Le dénominateur alors est également de degré $2m$, le terme de plus haut degré est a^2R^{2m}. On peut donc écrire

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_{\rho=R} = \frac{-\,ma^2R^{2m} - \cdots}{a^2R^{2m} + \cdots}.$$

ξ, d Pour des valeurs suffisamment grandes de R, ce résultat est aussi voisin qu'on le veut de $-m$. On peut donc écrire

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)_{\rho=R} = -\,m + \varepsilon.$$

δ_1, ω L'intégrale est donc $\int_0^{2\pi} (-\,m + \varepsilon) d\varphi$: elle est aussi voisine qu'on le veut de $-2m\pi$.

Les deux résultats sont donc différents : la fonction doit donc bien devenir infinie pour un point au moins dans le champ.

Comme nous l'avons dit, le polynôme $f(x)$ admet donc bien au moins une racine réelle ou imaginaire (et par suite m).

IV. — APPLICATIONS DIVERSES. INTÉGRALES EULÉRIENNES

Fonction Γ. — Lorsqu'on ne peut calculer au moyen des fonctions connues l'intégrale d'une fonction d'une variable, il est tout de même possible d'étudier les propriétés de cette intégrale, si la fonction dépend d'un paramètre, et si on la considère comme fonction de ce paramètre.

L'étude des intégrales généralisées que nous avons faite, celle des intégrales doubles, vont nous permettre d'étudier, aussi complètement que possible, une intégrale définie qui se présente dans un grand nombre d'applications en Physique ou en Analyse pure, et qui jouit en particulier de cette propriété que, pour les valeurs entières du paramètre, elle se confond avec une factorielle.

Considérons l'intégrale

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

ξ Il faut voir tout d'abord si cette intégrale existe.

δ. 1° Le champ est infini. Mais, pour des valeurs de x infiniment grandes, la fonction à intégrer devient infiniment petite d'ordre supérieur à tout ordre donné : l'intégrale existerait donc de ce fait.

δ_1 2° La fonction devient infinie pour $x = 0$, si $n - 1 < 0$;

σ_2 pour que l'intégrale existe, il faut et il suffit que l'ordre d'infinitude de la fonction soit inférieur à 1, c'est à dire que $1 - n < 1$ ou $n > 0$.

ω En résumé, l'intégrale existe pour toute valeur positive de n.

La fonction $\Gamma(n)$ s'appelle « intégrale eulérienne » de deuxième espèce.

Pour $n = 0$, $\Gamma(n)$ est infini.

En intégrant par parties, on a

$$\Gamma(n) = \left(\frac{x^n}{n}e^{-x}\right)_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^n}{n}e^{-x}dx.$$

Or la partie tout intégrée s'annule aux deux limites. Il reste donc simplement

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{x^n}{n}e^{-x}dx = \frac{1}{n}\Gamma(n+1).$$

Appliquons cette formule de proche en proche

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$
$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Gamma(n-k+1) = (n-k)\Gamma(n-k) \quad \text{si} \quad (n-k) > 0.$$

En multipliant membre à membre ces égalités, on obtient

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots(n-k)\Gamma(n-k).$$

On peut donc en prenant pour k le plus grand entier contenu dans n, ramener le calcul de l'intégrale au cas où l'argument est compris entre 0 et 1.

En particulier, si n est entier, comme $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$, on en déduit

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n\,!.$$

Si n tend vers zéro, $\Gamma(n)$ augmente indéfiniment mais $n\Gamma(n)$ qui est égal à $\Gamma(n+1)$ tend vers 1.

La formule

$$\Gamma(n-k+1) = (n-k)\Gamma(n-k)$$

permettrait de définir $\Gamma(n-k)$ même si $n-k<0$, en ramenant le calcul de $\Gamma(n-k)$ au calcul de $\Gamma(n-k+1)$. On aurait alors

$$\Gamma(n-k+1) = (n-k)\Gamma(n-k)$$

et en posant $n-k = -n'$

$$\Gamma(-n'+1) = -n'\Gamma(-n').$$

La formule $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ est donc vraie même si $n<0$. Nous venons de voir que pour n entier $\Gamma(n+1) = n\,!$. Or il est

possible de calculer une valeur approchée de $\Gamma(n)$ pour de grandes valeurs de l'argument. On démontre qu'on peut écrire

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}\left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{2n\pi}}\right) \qquad -1 < \theta < 1.$$

d

En prenant $\Gamma(n+1) = \sqrt{2n\pi n^n e^{-n}}$, on aura donc une valeur approchée de $n!$ qu'il serait impraticable de calculer ρ si n était un peu grand.

La fonction Γ permet de calculer une factorielle générale de la forme

$$P = a(a+b)(a+2b)\cdots(a+kb).$$

π, α

On a en effet

$$P = b^{k+1}\,\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{b}+2\right)\cdots\left(\frac{a}{b}+k\right).$$

Donc

$$P = b^{k+1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}+k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

On a établi des tables donnant les valeurs de $\log\Gamma$ pour les diverses valeurs de n, comprises entre 0 et 1.

Changement de variable. Fonction B. — a_2 L'intégrale Γ peut se mettre sous de nombreuses autres formes par changements de variable.

ν

En posant $x = y^2$, elle devient

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty 2y^{2p-1}e^{-y^2}\,dy.$$

Cette forme permet de faire commodément le produit de deux δ fonctions Γ. On a en effet

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_0^\infty 2y^{2p-1}e^{-y^2}\,dy \times \int_0^\infty 2x^{2q-1}e^{-x^2}\,dx.$$

ρ

Les limites étant indépendantes, le produit donne l'intégrale double

$$\iint 4x^{2q-1}y^{2p-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

étendue à tout l'angle des coordonnées positives.

En prenant des coordonnées polaires

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi,$$

elle devient

$$\iint 4\rho^{2p+2q-2} \cos^{2q-1}\varphi \sin^{2p-1}\varphi\, e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

ρ doit varier de 0 à $+\infty$ quel que soit φ, et φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quel que soit ρ. Or de plus, les variables peuvent être séparées. Cette intégrale double se transforme donc à son tour en un produit de deux intégrales simples

$$\int_0^{\infty} 2\rho^{2p+2q-1} e^{-\rho^2} d\rho \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^{2q-1}\varphi \sin^{2p-1}\varphi\, d\varphi.$$

Mais la première est égale à $\Gamma(p+q)$.

On désigne la seconde par la notation $B(p, q)$. (Intégrale eulérienne de première espèce)

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^{2q-1}\varphi \sin^{2p-1}\varphi\, d\varphi.$$

On a donc

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Cette fonction B peut donc s'exprimer au moyen de fonctions Γ : cette fonction de deux variables s'exprime par un produit de fonctions d'une seule variable, et cette forme symétrique montre que

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Transformation de la fonction B. — On a en particulier

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 d\varphi = \pi$$

et par suite

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Posons

$$x = \sin^2\varphi, \qquad dx = 2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi.$$

δ

Il viendra

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

On voit donc que l'intégrale est exactement calculable pour toute valeur entière positive de p ou de q.

On peut enfin faire encore le changement de variable

$$x = \frac{y}{1+y}, \qquad dx = \frac{dy}{(1+y)^2}.$$

δ

On trouve

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy.$$

α_2

En particulier si, $p + q = 1$

$$B(p, 1-p) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y}\,dy.$$

On démontre que cette dernière intégrale est égale à $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

d

Donc

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p).$$

ρ

C'est la généralisation de la valeur $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

L'égalité n'est démontrée ρ que si p est positif. ψ Mais on a défini $\Gamma(p)$ pour p négatif, et il est facile de voir que si l'égalité δ est vraie pour p, elle l'est aussi pour $p + 1$. En effet si on change p en $p + 1$, on devrait avoir

$$\Gamma(p+1)\,\Gamma(-p) = \frac{\pi}{\sin(p+1)\pi} = -\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)$$

ρ

mais cette égalité est évidente puisque (même si p est négatif)

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \qquad \Gamma(1-p) = -p\Gamma(-p).$$

D'après la propriété ci-dessus, et la propriété fondamentale de la fonction Γ, φ il suffit de calculer les valeurs de la fonction pour $0 < n \leqslant \frac{1}{2}$, pour la connaître pour toute valeur de n.

Par exemple si $p = \frac{1}{2}$ on a $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$.

Or sous la deuxième forme nous avons

$$\Gamma(p) = \int_0 2x^{2p-1} e^{-x^2} dx.$$

Donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

C'est une valeur sur laquelle nous nous sommes appuyés (dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre) et d'où par le changement de variable $x = y\sqrt{a}$, nous avons déduit l'intégrale plus générale $\int_0^\infty e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Application II. Intégrale de Raabe. — Considérons l'intégrale

$$J(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} \log \Gamma(u)\, du.$$

On peut l'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires.

Prenons en effet la dérivée par rapport à α, on a

$$J'(\alpha) = \log \Gamma(\alpha + 1) - \log \Gamma(\alpha),$$

puisque l'intégrale ne dépend de α que par les limites.

Or $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Donc

$$J'(\alpha) = \log \alpha.$$

En intégrant, on a donc

$$J(\alpha) = \alpha \log \alpha - \alpha + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, il suffit de donner à α une valeur particulière

$$C = J(0) = \int_0^1 \log \Gamma(u)\, du.$$

α_2

On peut écrire successivement

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(u)\, du + \int_0^{\frac{1}{2}} \log \Gamma(1-u)\, du.$$

en faisant dans le deuxième le changement de u en $1 - u$.

σ_2

Or nous avons vu que

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

ω

Donc

$$C = J(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \log \frac{\pi}{\sin \pi u}\, du = \frac{1}{2} \log \pi - \int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi u\, du.$$

Reste à calculer l'intégrale

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin \pi u\, du.$$

ν

En posant $\pi u = y$, elle devient

$$K = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y\, dy.$$

σ_2

Nous avons déjà calculé cette intégrale (applications diverses) et nous avons trouvé

$$K = -\frac{1}{2} \log 2.$$

Donc $J(0) = \frac{1}{2} \log 2\pi$. Par suite

$$J(\alpha) = \alpha \log \alpha - \alpha + \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

III. Intégrale de Dirichlet. — Nous allons calculer une intégrale qui se rattache à la fonction Γ et qui se présente très souvent dans les applications (Mécanique, Physique, Géométrie) (centres de gravité, moments d'inertie, ··· d'un très grand nombre de surfaces). C'est l'intégrale

$$I = \iiint x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\, dx\, dy\, dz$$

étendue au champ

$$x > 0, \qquad y > 0, \qquad z > 0, \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} - 1 \leqslant 0.$$

Le point x, y, z se meut donc dans le trièdre des trois coordonnées positives à l'intérieur ou sur la surface

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} - 1 = 0.$$

Cette intégrale dépend des trois variables p, q, r qui définissent la fonction, des six paramètres $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ qui définissent le champ.

On peut les réduire à trois. Posons

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} = x_1, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} = y_1, \qquad \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} = z_1.$$

D'où

$$x = a x_1^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad y = b y_1^{\frac{1}{\beta}}, \qquad z = c z_1^{\frac{1}{\gamma}}.$$

L'intégrale devient après réductions,

$$\frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \iiint x_1^{p_1 - 1} y_1^{q_1 - 1} z_1^{r_1 - 1} \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1$$

en posant

$$p_1 = \frac{p}{\alpha}, \qquad q_1 = \frac{q}{\beta}, \qquad r_1 = \frac{r}{\gamma}.$$

La fonction à intégrer a conservé la même forme, mais le champ n'a plus rien d'arbitraire

$$x_1 > 0, \qquad y_1 > 0, \qquad z_1 > 0, \qquad x_1 + y_1 + z_1 - 1 \leqslant 0.$$

On peut donc dire qu'il n'y a que trois paramètres essentiels dans l'intégrale : $\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}, \frac{r}{\gamma}$.

Dans la fonction, on remarque que les variables sont séparées; nous allons faire un nouveau changement de variables de manière que les limites soient indépendantes. A cet effet, nous poserons avec Dirichlet

$$x_1 + y_1 + z_1 = \xi, \qquad y_1 + z_1 = \xi\eta, \qquad z_1 = \xi\eta\zeta$$

desquelles on déduit

$$x_1 = \xi(1 - \eta), \qquad y_1 = \xi\eta(1 - \zeta), \qquad z_1 = \xi\eta\zeta.$$

α

En transformant les inégalités auxquelles doivent satisfaire x, y, z, on obtient simplement

$$0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < \zeta < 1.$$

ρ

Le point ζ, η, ξ se meut donc dans le parallélépipède d'arêtes égales à l'unité, formé sur le trièdre positif des coordonnées : les limites de variation sont bien indépendantes.

ξ, δ_1

Il faut maintenant calculer le déterminant fonctionnel $D^{\xi,\eta,\zeta}_{x_1,y_1,z_1}$.

Or si l'on pose provisoirement $X = \xi$, $Y = \xi\eta$, $Z = \xi\eta\zeta$,

$$x_1 = X - Y, \qquad y_1 = Y - Z, \qquad z_1 = Z.$$

δ_1

$$D^{\xi,\eta,\zeta}_{x_1,y_1,z_1} = D^{X,Y,Z}_{x_1,y_1,z_1} \times D^{\xi,\eta,\zeta}_{X,Y,Z} = 1 \times \xi^2\eta.$$

ω

La fonction à intégrer devient donc

$$\xi^{p_1-1}(1-\eta)^{p_1-1}\xi^{q_1-1}\eta^{q_1-1}(1-\zeta)^{q_1-1}\xi^{r_1-1}\eta^{r_1-1}\zeta^{r_1-1} \times \xi^2\eta$$
$$= \xi^{p_1+q_1+r_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}(1-\eta)^{p_1-1}\zeta^{r_1-1}(1-\zeta)^{q_1-1}$$

Et par suite

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \iiint \xi^{p_1+q_1+r_1-1}\eta^{p_1+r_1-1}(1-\eta)^{p_1-1}\zeta^{r_1-1}(1-\zeta)^{q_1-1}\, d\xi\, d\eta\, d$$

ρ

On voit que les variables sont restées séparées. Les limites étant indépendantes, l'intégrale se transforme en un produit d'intégrales

$$\int_0^1 \xi^{p_1+q_1+r_1-1}d\xi \times \int_0^1 \eta^{q_1+r_1-1}(1-\eta)^{p_1-1}d\eta \times \int_0^1 \zeta^{r_1-1}(1-\zeta)^{q_1-1}d\zeta.$$

ρ

Si $p_1 + q_1 + r_1 \neq 0$, la première est égale à $\frac{1}{p_1+q_1+r_1}$.

σ_2

Les deux autres sont

$$B(q_1 + r_1, p_1) = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1+r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)},$$

$$B(r_1, q_1) = \frac{\Gamma(r_1)\,\Gamma(q_1)}{\Gamma(r_1+q_1)}.$$

ω

On a donc

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \times \frac{1}{p_1+q_1+r_1} \times \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1)\,\Gamma(r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)}.$$

En revenant aux paramètres initiaux,

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \times \frac{1}{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right)}.$$

La transformation ci-dessus s'étend aussitôt à une intégrale de la forme

$$\iiint f\left(\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma\right) x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\, dx\, dy\, dz.$$

La première des intégrales ci-dessus se transforme en

$$\int_0^1 f(\xi)\, \xi^{p_1+q_1+r_1-1}\, d\xi.$$

Nous en avons terminé avec les Intégrales simples ou multiples sous toutes leurs formes et avec leurs Applications.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER

PRÉAMBULE. OBJET DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL

CHAPITRE PREMIER

Nombres incommensurables. Limites. Infiniment petits Fonctions continues.

Pages

I. — *Nombres incommensurables* 3
Coupure 5

II. — *Limites* 6
Applications 7
Limite des fonctions d'une variable 11
Convergence uniforme 12

III. — *Infiniment petits. Valeur principale* 14
Théorèmes 16

IV. — *Fonctions continues* 19
Oscillation de la fonction 20
Fonction continue d'une variable 21
Théorème I : Passage par toute valeur intermédiaire 22
Théorème II : Une fonction continue atteint ses limites 23
Fonctions continues de plusieurs variables 24
Ensembles 25
Fonction continue en un point 27
Nombre caractéristique 28
Continuité dans un champ 29
Théorème fondamental 30
Applications 33

CHAPITRE II

Dérivées et différentielles des fonctions d'une variable. Fonctions implicites. Déterminants fonctionnels

I. — *Dérivées et différentielles des fonctions d'une variable* 35
Théorème de Rolle. — Théorème des accroissements finis. 38

Pages

II. — *Fonctions de plusieurs variables* 40
Théorème : $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + R\Delta x + S\Delta y$ 42
Application : Fonctions composées 43
Dérivée suivant une direction 44

III. — *Fonctions implicites* (une variable) 46
Prolongation de l'élément 48
Calcul des dérivées partielles 49

IV. — *Déterminants fonctionnels* 51
1° Propriété $\frac{Df}{DX} = \frac{Df}{Dx} \times \frac{Dx}{DX}$ 52
2° Propriété. Rapport d'aires élémentaires, de volumes ... 53
Transformation du déterminant fonctionnel. — Applications 57
Indépendance d'un système de fonctions. — Applications .. 60
Calcul du Jacobien dans le cas de fonctions implicites
Hessien d'une fonction 65

V. — *Existence de fonctions implicites* (système) 67
Cas de deux équations 67
Cas de n équations 69

VI. — *Dépendance de fonctions* : Autre démonstration 72

VII. — *Dérivées et différentielles d'ordre supérieur* 75
Fonction d'une variable 75
Fonction composée. Applications 78
Fonctions de plusieurs variables 83
Théorème : On peut intervertir l'ordre des dérivations 84
Différentielles des fonctions de plusieurs variables 86
Fonction composée 87
Formule de Leibnitz 89

CHAPITRE III

Changements de variables

I. — *Cas d'une seule variable* 92
Exemple 93
On change la variable et la fonction 94

II. — *Cas de plusieurs variables* 96
Applications 99
Equation linéaire aux dérivées partielles du second ordre .. 99
On change les variables et les fonctions 103

III. — 2e *Méthode : Emploi des différentielles* 104
Applications 106
Transformation de Legendre 108

IV. — *Transformations de contact* 109
Application à la transformation de Legendre 111

CHAPITRE IV

Formation des équations différentielles

I. — *Elimination des constantes* 116
Equation différentielle des coniques 117

Pages

II. — *Equations aux dérivées partielles* 119
Elimination de fonctions arbitraires 120
Cas de n variables indépendantes 121
Applications : Cylindres. Cônes. Surfaces de révolution. Fonctions homogènes 123
Exemple 127

III. — *Elimination de fonctions arbitraires dans le cas de plusieurs équations* 128
Application aux surfaces réglées 130
Cas des surfaces développables 131

CHAPITRE V

Séries. Séries de fonctions. Séries entières

I. — *Séries numériques* 133
Théorème fondamental : $A < \frac{U_n}{V_n} < B$ 135
Règle de d'Alembert 136
Règle de Cauchy 137
Série $\frac{I_x}{n^\alpha}$ 138
Série $\frac{I}{n \log^\alpha n}$ 139
Règle de Raabe et Duhamel 140
Règle de Gauss 142
Série hypergéométrique 143
Théorème de Cauchy 144

II. — *Séries à termes quelconques* 145
Influence de l'ordre des termes 147
Séries absolument convergentes 147
Séries semi-convergentes 148

III. — *Multiplication des Séries* 151
Cas où une seule série est absolument convergente 151
Cas où les deux séries sont absolument convergentes 152
Autres généralités 153
Théorème d'Abel 155
Applications 156

IV. — *Séries doubles* 157
Somme de la série (termes positifs) 157
Séries quelconques 159
Exemple de Arndt 161

V. — *Séries de fonctions* 162
Séries uniformément convergentes 162
Continuité 163
Intégration 164
Dérivation 165

VI. — *Séries entières* 165
Rayon de convergence 167

Pages

Continuité d'une série entière : Points du cercle de convergence 169
Série intégrée 171
Série dérivée 172
Formule de Taylor 173
Dérivée de la fonction-série 174
Série majorante 176

VII. — *Séries à deux variables* 177
Région de convergence (termes positifs) 177
Séries quelconques 180
Séries dérivées 181
Formule de Taylor 182

VIII. — *Séries de Séries* 184
Racines infiniment petites d'une équation-série 187
Cas d'une seule racine nulle 187
Cas général : Exemple 190
Formule de Lagrange. Application 195

CHAPITRE VI

Produits. Infinis. Application : Sin πz

I. — *Produits absolument convergents* 199
Produit des facteurs à partir du n^e 200
Interversion des facteurs 201
Produits uniformément convergents 201

II. — *Développement en produit infini de* $\sin \pi z$ 202
Sommes $\sum \frac{1}{k^{2n}}$ 206

CHAPITRE VII

Développements en série. Formule de Taylor

I. — *Etablissement de la formule* 208
Série de Taylor 210
Formule et série de Mac-Laurin 211
Applications : e^x — $\sin x$ — $\cos x$ 212
$(1 + x)^m$. Cas limites : $x = \pm 1$ 213
$L(1 + x)$ 217
Fonctions de plusieurs variables 218
Autres méthodes 219

II. — *Applications* : Calcul des logarithmes des nombres 221
Calcul des logarithmes des lignes trigonométriques 222
Développement de l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ 221
Polynômes de Legendre 225
Limites de certaines expressions indéterminées 227

CHAPITRE VIII

Maximum et minimum

Pages

I. — *Fonctions d'une variable* 230
Application : Distance d'un point à une courbe 233

II. — *Fonctions de deux variables* 235
Etude complète 237
Cas douteux : Conditions nécessaires et suffisantes 240
Applications 243
Distance d'un point à une surface 244

III. — *Fonctions de trois variables* 247
Cas douteux : Conditions nécessaires et suffisantes 249
Corollaire 253

IV. — *Généralisation* 254
Etude d'une inégalité 254
Invariant simultané d'une forme quadratique et d'une forme linéaire 255
Cas de n variables 256

V. — *Généralisation : Cas de moins de n — 1 carrés indépendants* .. 258

VI. — *Fonctions implicites. Maximum relatif* 262
Méthode des multiplicateurs 263
Maximum relatif dans le cas des fonctions implicites de plusieurs variables 264
Application : Point mobile se déplaçant dans deux milieux. 267

VII. — *Méthode de Fermat* 270
Applications 271

CHAPITRE IX

Intégrales définies

I. — *Définition* : Les sommes s et S 277
Une fonction continue est intégrable 282
Cas où la fonction est discontinue, mais reste bornée 233

II. — *Propriétés de l'intégrale définie* 284
Théorèmes de la moyenne 285
Dérivée d'une intégrale 290
Somme d'infiniment petits 292

III. — *Intégrale indéfinie. Procédés généraux d'intégration* 294
Décomposition en éléments intégrables 295
Intégration par parties 296
Changement de variable 298
Formule de réduction 302

IV. — *Intégration des différentielles binômes* 303
Applications 304

V. — *Intégration des fractions rationnelles* 308
Méthode de Hermite 312
Méthode de Lagrange 315

Pages

VI. — *Intégration des différentielles algébriques* 318
Genre d'une courbe 318
Courbes unicursales 323
Intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ 325
$\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})$ 325

VII. — *Intégrales de la forme* $\int R(x, \sqrt{X})\,dx$ 326
Réduction 326
Résumé général 330
Cas où X est du 3e ou du 4e degré 332
Réduction à la forme normale de Legendre 333
Relation générale entre les quatre intégrales (X du 4e degré). 335
Suite de la réduction 336
Applications 338
Réduction à la forme normale de Weierstrass 339
Intégrales pseudo-elliptiques 341

VIII. — *Intégration des fonctions transcendantes* 342
Intégration d'une fonction entière de x, d'exponentielles.. 343
$\int R(x)e^{mx}dx$. — Réduction 344
$\int E(x, \log x)dx$ 748

CHAPITRE X

Intégrales généralisées. Dérivation. Applications diverses

I. — *Intégrales généralisées* 349
Cas où la fonction est discontinue. — Applications 350
Cas du champ infini. — Applications 355
Cas où la fonction change de signe un nombre infiniment grand de fois 360
Cas remarquable $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1 + x^6 \sin^2 x}$ 362

II. — *Dérivation. Intégration sous le signe* — 364
Dérivation sous le signe 366
Importance de la formule 366
Cas des limites variables 367
Intégration sous le signe 369
Généralisation au cas de discontinuité ou de champ infini. 370
Intégrales uniformément convergentes avec oscillation du paramètre 371
Applications 373
Cas où la fonction devient infinie 376
Condition pour que la dérivée d'une limite soit égale à la limite de la dérivée 376
1er Cas : Les points de discontinuité sont fixes 377

Pages

2e Cas : Les points de discontinuité dépendent du paramètre : Etablissement de la formule 379
Intégration sous le signe : champ infini 381
III. — *Détermination d'intégrales définies. Applications diverses* 382
Formule de Wallis 383
$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ 386
$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx\, dx$ 386
$\int_0^{\pi} \log (1 - 2ax + a^2) dx$ 387
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y\, dy$ 390
$F(x) = \int_0^1 (1 - z^2)^n \cos zx\, dz$ 390
π est incommensurable 393
Intégration sous le signe : Application 393

CHAPITRE XI

Applications géométriques. Intégrales curvilignes. Équations aux différentielles totales

I. — *Applications géométriques* 395
Aire d'une courbe plane 395
Cette notion est indépendante des axes 398
Applications : Parabole, ellipse, etc 399
Longueur d'un arc de courbe 405
Applications : Cycloïde. Chaînette. Parabole 406
Formule de Legendre, de Fagnano 410
II. — *Intégrales curvilignes* 412
Application 417
Généralisation : Courbe gauche 420
III. — *Equations aux différentielles totales* 421
Détermination de la fonction. — Application 422

CHAPITRE XII

Calcul approché des intégrales

I. — *Interpolation* : Polynômes de Lagrange 429
Formule de Cotes : Propriétés 430
Applications $n = 1, 2, 3, 4$ 433
II. — *Méthode de Gauss* 435
Application pratique 438
III. — *Développements en Séries trigonométriques* 440
Développement dans un intervalle $2l$ 443
Application au problème des cordes vibrantes 444
Etude de la convergence 446

Pages

Intégrale de Dirichlet. — Intégrale de Fourier 448
Conclusion. — Applications 453

CHAPITRE XIII

Intégrales doubles

I. — *Les sommes s et S* 457
Subdivisions quelconques 458
Cas de discontinuités 462

II. — *Calcul de l'intégrale double* 464
Exemple 468
Remarques 469
Dérivées d'une intégrale double 471

III. — *Volume* 473
Volume déterminé par une intégrale simple 475
Application : Paraboloïde 477
Surface de révolution 478
Cas où l'aire d'une section est fonction du second degré de z. 479
Surfaces réglées 480
Ellipsoïde 481

IV. — *Changement de variables* 481
Remarques 484
Interprétation géométrique 486
2e Méthode 488
Application : Paraboloïde et lemniscate 490

V. — *Aire d'une surface courbe* : Diverses expressions 494
Remarques 494
Application : Voûte de Viviani 333
Autre forme de l'expression de l'aire. — Application 496

VI. — *Cas généraux où des intégrales doubles peuvent se ramener à des intégrales simples* 500
Surfaces hélicoïdales. — Surfaces réglées 501

CHAPITRE XIV

Intégrales triples. Intégrales multiples

I. — *Intégrales triples* 504
Subdivisions quelconques 505

II. — *Calcul* 508

III. — *Changement de variables* 512
2e Méthode 514

IV. — *Applications* : Masse d'un corps 515
Centre de gravité 516
Moments d'inertie. — Applications : Barreau. Tore 519

V. — *Intégrales multiples* 523
Calcul 524
Changement de variables 525

Pages

VI. — *Intégrales de surface* 526

VII. — *Continuité. Intégration. Dérivation des intégrales multiples* 529

Dérivation : Champ variable 530

CHAPITRE XV

Transformations des diverses notions d'intégrales les unes dans les autres.

I. — *Réduction d'une intégrale double à une intégrale curviligne*.. 535

Formule de Green et d'Ostrogradsky 535

Application : Formule de Green (2 variables) 538

Condition pour qu'une intégrale curviligne soit indépendante du contour 540

Remarques 541

II. — *Réduction d'une intégrale triple à une intégrale de surface* 546

Application : Formule de Green (3 variables) 548

III. — *Transformation d'une intégrale curviligne en une intégrale de surface* : Formule de Stokes 550

Condition pour qu'une intégrale de surface ne dépende que du contour 555

La condition est nécessaire et suffisante 557

Application 562

CHAPITRE XVI

Intégrales multiples généralisées. Applications diverses

I. — *Champ infini* : Intégrales doubles 564

Cas d'existence 567

Intégrales triples 569

II. — *Fonction discontinue* 571

Théorèmes d'existence 572

Fonction infinie en un seul point 574

Cas d'une ligne de discontinuité 576

III. — *Restrictions des propriétés*. 578

Exemple de Cayley 578

Théorème de d'Alembert (Gauss) 580

IV. — *Applications diverses* 582

Intégrales eulériennes 582

Fonction B 584

II. — Intégrale de Raabe 587

III. — Intégrale de Dirichlet 588

COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

TOME I

ERRATA

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
4	4e avant fin	exister aucun	exister de
7	13e	remplacera	remplace
17	13e avant fin	$\varepsilon[v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$	$\varepsilon(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$
»	3e avant fin	$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n$	$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n$
»	dernière	même correction que ci-dessus	
18	1re	au lieu des v	mettre des v
»	7e	petits avec $\frac{1}{h}$	petits avec $\frac{1}{n}$.
»	8e	équivalents $v_k = \frac{k}{n^2}$	équivalents $v_k = \frac{k}{n^2}$
»	9e	rapport $\frac{y_k}{v_k}$	rapport $\frac{y_k}{v_k}$
26	14e avant fin	$a_i < M \quad b_j < M$	$\lvert a_i \rvert < M \quad \lvert b_j \rvert < M$
30	1re	nombre $\lvert \rho \rvert$	nombre ρ
49	14e avant fin	prolongement	prolongements
56	milieu	$Y = \rho(x, y, z)$	$Y = \varphi(x, y, z)$
58	10e avant fin	après K opérations	après k opérations
60	9e	$y = \sin\theta \sin\varphi$	$y = r \sin\theta \sin\varphi$
66	8e	F(XYZ)	F(X, Y, Z)
»	10e	$H = \overline{D(x, y, z)}$	$H = \overline{D(X, Y, Z)}$
71	11e	variations	variables
74	11e avant fin	et peut être de dZ, dU	et peut être de dz, du.
77	6e avant fin.	accroissements $h_1 h_2 \cdots h_{n+1}$	accroissements h_1, h_2, $\cdots$ h_{n+1}
88	7	d'uue fonction	d'une
92	13 à 21	y est une fonction.....	en caractères italiques
102	10e avant fin	$t^2 - \frac{2B}{C} t$ +.....	$t^2 + \frac{2B}{C} t$ +.....
105	16e	tranformations	transformations
110	milieu	en supposant $Z = f(x, y)$	en supposant $z = f(x, y)$
116	milieu	valeur particulière x_0, elle	pour la valeur particulière $x_0 = 0$, elle

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
125	10e avant fin	$F(h, R^2) = 6$	$F(h, R^2) = 0$
128	6e	$D^{x,y}_{\frac{px+qy-mz}{x^m}, \frac{y}{x}}$	$D^{x,y}_{\frac{px+qy-nz}{x^m}, \frac{y}{x}}$
131	11e avant fin	m, n, p, fonction	m, n, p, fonctions
163	3e avant fin	On a donc bien	On a donc
164	4e	de ces fonction	de ces fonctions
168	7e	$A_1 r, A_2 r^2 + \ldots\ldots$	$A_1 r, A_2 r^2, \ldots$
»	milieu	$H = A_n + X^{n+1} \ldots\ldots \frac{M}{r^{n+p}} X_p^{n+1}$ (fin)	$\ldots\ldots X^{n+p}$
169	milieu	admettent toute trois	toutes trois
176	7e avant fin	à coefficient tous positifs	à coefficients
177	8e	REMARRUE	REMARQUE
183	5e	$\ldots\ldots \frac{1}{p!\,q!} h^p k^q \frac{\partial^{p+q} S}{\partial x^p \partial y^q}$.	$\ldots\ldots \frac{\partial^{p+q} S}{\partial x^p \partial y^q} + \cdots$
192	9e	on a obtenu 9 valeurs	neuf valeurs
199	milieu	PRODUITS ..... CONVERGENT	PRODUITS ..... CONVERGENTS
202	milieu	ayant une timite Σ	limite
213	5e avant fin	$3^o\ f)x =$	$3^o\ f(x) =$
2 4	milieu	Avec $t = -x(2x - x)$	avec $t =$
236	8e	dérivées partielles au point	partielles premières au point
242	2e	premier nombre	premier membre
245	milieu	Elles expriment donc que	Elles expriment que
246	7e	nous aurions un développement	nous aurons
249	10e avant fin	Il n'y aura donc ni maximum	il n'y aura ni maximum
250	milieu	$P = c\xi + b\eta + d\zeta$	$P = a\xi + b\eta + c\zeta$
279	13e	des limittes	des limites
281	14e avant fin	dans S une somme	dans S' une somme
283	milieu	Cette limite est indépendante.	indépendante (pas de point)
292	dernière	nu_k a pour limite l'unité	nu_k reste finie
293	9e	$u_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ }}$	$u_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ }}$
299	1re	fonction primaire	fonction primitive
305	milieu	combinaisons niéliminations	ni éliminations
306	9e	réduction, de la	réduction ψ de la
313	16e avant fin	rationnelle $\frac{\varphi}{f}$	rationnelle $\frac{f}{\varphi}$
316	»	fraction $\frac{f}{\varphi}$	fraction $\frac{f}{\varphi}$
317	5e avant fin	$\int \frac{f}{\varphi^m} =$	$\int \frac{f}{\varphi^m} dx =$
323	10e	se résumer au théorème	se résumer dans le
328	12e	fraction rationnelle près	fraction rationnelle près multipliée par le facteur $\sqrt{X}$
330	6e	Si n est le degré de X, que	Si n est le degré de X, toutes
331	1re	après une partie logarithmique ajouter :	
		3° des parties toutes intégrées de la forme $\frac{A\sqrt{X}}{Q^{\mu-1}}$ et $\frac{E\sqrt{X}}{D^{\mu}}$	
		4° une combinaison.....	
		5° les intégrales	

Page	Ligne	au lieu de	Lire
344	8e avant fin	Ra désignant	R(x) désignant
348	5e avant fin	Le calcul de $I_{m,\,n-1}$	Le calcul de $I_{m,\,n}$
354	milieu	infiniment petit d'un ordre	infiniment grand
357	6e avant fin	$< M\int_p^q$	$\leqslant \lvert M \rvert \int_p^q$
360	milieu	$\int_0^\infty x^{1+\varepsilon} \cos x^2 dx$	$\int_0^\infty x^{1-\varepsilon} \cos x^3 dx$
370	9e avant fin	ont peut généraliser	on peut.....
372	10e	1° que la fonction $f(x, t)$	1° que la fonction $f'(x, t)$
383	10e avant fin	$= (p-1)!\,(q-1)!$ $p+p-1)!$	$= \dfrac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$
403	4e et 5e avant fin	On peut aussi écrire...	A supprimer ici
404	2e	$S = \ldots\ldots = \int_0^l \ldots\ldots$	$S = \ldots\ldots = R^2 \int_0^l \ldots\ldots$
409	9e avant fin	$\frac{2}{p}\sqrt{p^2 + {}^2\nu}$	$\frac{2}{p}\sqrt{p^2 + y^2}$
»	2e avant fin	$S = \frac{1}{a}\int_0^{\backslash} \sqrt{a^2 - c^2x^2}\, dx$	$S = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{a^4 - c^2x^2}\, dx$
415	7e	de l'intégrale à celle d'une	de l'intégrale à celui d'une intégrale d'une fonction
417	11e	l'intégrale $\int_a^b y\, dv$	$\int_a^b y_2\, dx$
422	9e avant fin	F — U, u admettant	F — U, admettant
426	2e avant fin	$\ldots\ldots + \text{arc tg}\frac{y}{l} + \frac{ty}{t^2 + y^2}$	$+\frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{y}{l} + \frac{1}{2}\frac{ty}{t^2 + y^2}$
450	8e avant fin	$\varphi(h-0) - \varphi(+0) < \varepsilon$	$\lvert \varphi(h-0) - \varphi(+0) \rvert < \varepsilon$
454	9e avant fin	$\left(\ldots\right)_0^{a+2\pi}$	$\left(\ldots\right)_a^{a+2\pi}$
»	8e avant fin	id.	id.
458	7e avant fin	d'ailleurs I < J	d'ailleurs I - J
481	11e	plan tangent z et un	plan tangent $z = 0$ et un
484	6e	$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\partial u$	$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du$
485	10e avant fin	$\iint_{A_1} \frac{1}{4} \backslash X \frac{1}{\sqrt{y}} dX\, dy$	$\iint_{A_1} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}} dX dY$
»	5e avant fin	quatre points $\pm\sqrt{x}, \pm\sqrt{y}$	$\pm\sqrt{X}, \pm\sqrt{Y}$,
494	milieu	translation d'axes quelconques	translation d'axes parallèlement à oz
»	6e avant fin	, en d'autres termes si	, c'est-à-dire si
496	milieu	$A^2 + B^2 + C^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial v} \ldots\right)$	$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \ldots\right)$
512	7e	d'un volume V et sur	d'un volume V, et sur
513	9e	Si dans cette l'intégrale	Si dans cette intégrale
522	6e avant fin	$y = (a + r \sin\theta)\sin\varphi$	$y = (a + r\cos\theta)\sin\varphi$
524	6e	supérieures et intérieures	supérieure et inférieure
525	3e avant fin	$\ldots\ldots \left\lvert \frac{\partial l}{\partial X} \right\rvert \times \left\lvert \frac{\partial m}{\partial y} \right\rvert \times \frac{\partial n}{\partial Z} \ldots\ldots$	$\ldots\ldots \left\lvert \frac{\partial m}{\partial Y} \right\rvert \ldots\ldots$
530	4e avant fin	$\Delta I = \iint_\Omega [f(x, y, z + \Delta z)]d\omega + \ldots\ldots,$	$\Delta I = \iint_\Omega [f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha)]d\omega$

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
533	milieu	Elle se calcule	calcule
538	9e avant fin	$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ldots\ldots\right)$	$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \ldots\ldots$
542	3e	être pri es	..... prises .....
544	milieu	$\ldots\ldots R^2 \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\ldots\ldots$	$- R^2 \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\varphi$
545	6e	étant changés	étant différents
548	10e	n'était pas réalisée	n'est pas .....
»	13e	serait réalisée	sera .....
574	dernière	$D^{r,\varphi,\theta}_{x,y,z}$	$D^{r,\theta,\varphi}_{x,y,z}$
581	11e avant fin	Pour $r = R$, ...	Pour $\rho = R$, ...
590	4e	Le point ξ, η, ξ	Le point ξ, η, ζ