UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224561

UNIVERSAL
LIBRARY

BROWN BOOK

فہرست مطالب

	صفحہ
باب اول بیان حدود کا	۱
فصل اول قاعدہ جمع کا	۵
فصل دوسری قاعدہ تفریق کا	۱۰
فصل تیسری قاعدہ ضرب کا	۱۲
فصل چوتھی قاعدہ تقسیم کا	۲۵
باب دوسرا بیان کسور کا فصل اول بیچ اختصار کے	۲۶
دوسری فصل تحویل کسور	۳۰
تیسری فصل قاعدہ جمع کسور کا	۳۱
چوتھی فصل قاعدہ تفریق کسور کا	۳۴
پانچوین فصل قاعدہ ضرب کسور کا	۳۶
چھٹی فصل قاعدہ تقسیم کسور کا ...	۳۷
فصل قاعدہ نکالنی جذر کا ...	۳۸
فصل قاعدہ نکالنی کعب کا	۴۴
تیسرا باب بیان سادات مین ...	۴۶
بیان مساوات اول درجہ کا	۴۷
بیان مساوات درجہ دوم کا	۸۹
بیان مقدار غیر ممکن کا	۱۴۶
بیان تناسب کا	۱۴۷
قاعدہ سلسلہ جمع اور تفریق کا...	۱۴۸
قاعدہ سلسلہ ضرب اور تقسیم کا	۱۴۹
سوالات اول درجہ کی مساوات کی	۱۵۰
سوالات درجہ دوم کی مساوات کی	۱۶۶
بیان نئے قاعدہ ضرب اور تقسیم کا	۱۷۶
بیان دوسرا قاعدہ تقسیم کا	۱۷۷
بیان تیسرا قاعدہ تقسیم مین	۱۷۸
فصل دوم بیان خواص مساوات کا	۱۸۱
فصل سوم بیچ بیان تبدیل کرنی مساواتونکے	۱۹۱
فصل چہارم بیچ بیان دریافت کرنی قیمتون غیر ممکن مساوات کے بوسیلہ قاعدہ مہندس بودن کے ...	۲۰۹
بیان دوسرا قاعدہ مہندس دیکوا کا واسطی دریافت کرنی قیمتون غیر ممکن مساواتون کے	۲۱۱
فصل پنجم بیان قاعدہ مہندس کارڈن کا واسطی حل کرنے مساواتون تیسری مرتبہ کے	۲۱۲
فصل ششم بیان قاعدہ مہندس بمبلی کا واسطے تحویل کرنی مساواتون چوتھی درجہ کی طرف مساواتون تیسری درجہ کی	۲۱۵
فصل ہفتم بیان ان قواعد کا جنکی ذریعہ سی تقریبی قیمتین جو درجونکی مساواتونکی معلوم ہو سکتی ہین	۲۱۹
باب چہارم مطالب متعلقہ فصل اول ترتیب اور اجتماع کے بیان مین	۲۲۵
فصل دوسری ثبوت ضابطہ نیوٹن صاحب کا	۲۳۱
بیان طریق ثابت کرنی ضابطہ نیوٹن صاحب کا دوسری طرح سے	۲۳۶
بیان اثبات ضابطہ نیوٹن صاحب کا بغیر مدد سلسلہ فرضی کے	۲۴۰
ضابطہ غیر مقررہ نشان ثوت کا	۲۴۹
فصل تیسری لوکارثم کی بیانین	۲۵۰
لوکارثم کی نکالنی کی ترکیب	۲۵۲

ترکیب بنانی لوکارثم کی کتاب کی ۲۵۳
فصل ۴ بیان حل کرنی سوالات ہندسی کا بوسیلہ
جبر و مقابلہ کے ۲۵۵
سوالات مثلثون کے ۲۵۶
فصل پانچوین حد زیادتی اور کمی کی بتامین ۲۶۹
چھٹی فصل مساحت دائرہ اور مجسم بیانین
ساتوین فصل مقدار نزدلی کا بیان ۲۹۳
اٹھوین فصل سلسلون کے بیانین قاعدہ فرق ۳۰۳
نوین فصل قاعدہ سلسلہ زیادتیون کا ۳۰۹
دسوین فصل معکوس کرنا سلسلہ کا ۳۲۰
گیارھوین فصل سلسلہ متواتر ۳۲۴
ضابطہ کثیر الاجزاء ۳۲۸
بارھوین فصل احتمالات کا بیان ۳۳۴
تیرھوین فصل کسور ۳۴۲
مقادیر جبریہ کی عجیب نتیجی ۳۴۶
کسور متسلسل ۳۴۷
ثبوت مقسوم علیہ اعظم ۳۵۲
سود اور تنخواہون کے بیان ۳۵۶
دریافت کرنا زیادتی کسی ملک کا بوسیلہ تعداد مرنے
اور پیدائش کے ۳۵۹
ثبوت قواعد جذر و کعب اعداد ۳۶۰
خواص اعداد کا بیان ۳۶۴
سوالات غیر منقطع ایک مساوات کی ۳۷۱
سوالات غیر منقطع دو مساواتون کے ۳۷۵
خاص ترکیب طان + ا کے صحیح مجذد ہوجانے کی ۳۷۹

سوالات مجذد رومن کے ۳۹۶
مثلثات صحیحہ کی دریافت کرنیکی ترکیب ۴۱۴
سوالات مختلفہ ۴۲۱
ضمیمہ مشکل مساواتون کا ۴۳۵

اور اکثر چالیس صفحون مین تمام مطالب کی مثالین بغیر حل
کی ہوئی وہ صاحب کی جبر و مقابلہ سی نقل کی ہین

جمع کی مثالین ۴۶۱
تفریق کی مثالین ایضاً
ضرب کی مثالین ۴۶۲
تقسیم کی مثالین ۴۶۴
مقسوم علیہ اعظم کی مثالین ۴۶۵
صفع مشترک کی مثالین ۴۶۷
کسور کی مثالین ۴۶۸
کسور کی اختصار کی مثالین ۴۶۹
ضرب کسور کی مثالین ۴۷۱
تقسیم کسور کی مثالین ۴۷۲
صعود اور نزول کی مثالین ۴۷۳
مقادیر نزولی کی مثالین ۴۷۵
مساوات بغیر حل کی ہوئی ۴۷۷ تا آخر

تمت

بسم اللہ الرحمن الرحیم

بعد حمد خدا اور نعت رسول مقبول محمد مصطفےٰ صلے اللہ علیہ وسلم کے ارباب علم پر واضح ہو کہ اس سے پہلے ایک جبر و مقابلہ مولفہ اوستادی مخدومی مکرمی جناب ہیشر رامچندر صاحب کا چھپا تھا چونکہ اوسمین مطالب بہت مفید اور دلچسپ تھے اس سبب سے لوگون کو اوسکے پڑھنے سے اس فن کی طرف بہت رغبت ہوئی اور جسقدر نسخہ جبر و مقابلہ کے چھپے تھے سب بک گئے اکثر آدمی اوسکے مشتاق تھے اسواسطے جناب ہیشر صاحب نے مجھہ کمترین کو کہ نام میرا کریم بخش ہے اور مین ادنےٰ ترین اونکے شاگردون مین سے ہون ارشاد فرمایا کہ ایک جبر و مقابلہ مرتب کرنا چاہئے جسمین جمیع مطالب پہلے جبر و مقابلہ کے ہے ہون اور شاگرد ہر قاعدہ کے بہت بہت لکھی جائین اور بعضے اور مطالب معنیدہ بھی اوسمین زیادہ کئے جائین ہو اسواسطے اس کمترین نے یہہ جبر و مقابلہ مرتب کیا اور جو مطالب مفیدہ تھے جناب ہیشر صاحب کی صلاح سے اوسمین داخل کئے اگر اوسمین کسی جگہہ غلطی ہوئی ہو تو کمترین کے قصور فہم کو معاف فرما کر درست کر دین اور اس جبر و مقابلہ مین مطالب ان کتابون سے جمع کئے ہین - وڈھاوس صاحب کا جبر و مقابلہ بلینڈ صاحب کا جبر و مقابلہ بیج الجبرا یولر الجبرا اور اور کتابین اس فن کی جو انگریزی زبان مین مشہور ہین **باب اول حدود** واضح ہو کہ جبر و مقابلہ جو فرع علم ریاضی کی ہے جس سے فنون ریاضیہ کے اکثر مسائل حل ہوتے ہین اور اس علم مین بجاے اعداد کے حروف فرض کئے جاتے ہین اور اون پر عمل ضرب تقسیم وغیرہ کے کئے جاتے ہین اور جسطرح حساب مین اعداد کے ضرب تقسیم وغیرہ پر مجہول کا گمان موقوف ہے اسیطرح یہان پر ضرب تقسیم وغیرہ پر اعمال جبریہ موقوف ہین

اب جانا چاہئے کہ جبر و مقابلہ مین بجاے اعداد مجہول کے حروف ا ب ج د ر وغیرہ فرض کرلیتے ہین اور بجاے مقادیر معلومہ کے حروف ح ص س ط ع وغیرہ فرض کرتے ہین اور جبر و مقابلہ کے تمام عملون مین علامتون مقررہ کا استعمال ہوتا ہی اسیواسطے ہم پہلے اون علامتونکا بیان کرتے ہین جانا چاہئے کہ صورت + جمع کی علامت ہی یعنے جن دو مقدارون کے درمیان مین یہہ علامت آوے تو جاننا چاہئے کہ وہ دونون مقدار باہم جمع کی جاوینگی مثلا ۲ + ۳ سے یہہ مراد ہی کہ ۲ کو ۳ کے ساتہہ جمع کرلین یعنے ۲ + ۳ سے ۵ مراد ہین علی ہذا القیاس ا + ر سے بہی یہی مراد ہی کہ ا کو ر کے ساتہہ جمع کرلین یہہ بہی واضح ہو کہ جب بہت سی مقدار لکہین اور اول مقدار کی علامت + ہو تو اس علامت کو چہوڑ کر اول مقدار کو بے علامت لکہہ دیتے ہین پس جب کوئی مقدار اول مین ایسی ہو کہ اوسکے پہلے کوی علامت نہو تو جاننا چاہئے کہ اوسکے اول مین علامت + کی منوی ہی جس مقدار کی اول علامت + کی لکہی ہوئی ہو یا محذوف ہو اوس مقدار کو مثبت کہتے ہین

صورت — کی تفریق کی علامت ہی یعنے جن دو مقدارون کے درمیان مین علامت — کی واقع ہو تو جاننا چاہئے کہ اول مقدار مین سے دوسری مقدار نکالی جاوے گی مثلا ۴ — ۲ سے یہہ مراد ہی کہ ۴ مین سے ۲ کو نکال لین یعنے ۴ — ۲ سے ۲ مراد ہی اسیطرح ا — ر سے یہہ مراد ہی کہ ا مین سے ر کو نکالنا چاہئے جس مقدار کے اول علامت تفریق ہوتی ہی اوس مقدار کو منفی کہتے ہین کیونکہ یہہ مقدار نفی کی جاتی ہے مثلا ۴ — ۳ مین ۴ مثبت ہی اور ۳ منفی علی ہذا القیاس ا — ر مین ا مثبت اور ر منفی

صورت × علامت ضرب کی ہی یعنے جن دو مقدارون مین علامت × واقع ہو اونسے یہہ مراد ہوتی ہی کہ یہہ دونو مقدار باہم ضرب دئے گئے ہین مثلا ۵ × ۴ سے حاصل ضرب ۵ اور ۴ کا تغیر ہوتا ہی یعنے ۵ کو ۴ مین ضرب کرنا چاہئے پس ۵ × ۴ سے ۲۰ مراد ہین اسیطرح ا × ر سے یہہ مراد ہی کہ ا کو ر مین ضرب دینا چاہئے یعنے ا × ر حاصل ضرب ا اور ر کا ہی پوشیدہ نرہے کہ جب دو حرف کو باہمین ضرب کرتے ہین تو اونکے حاصل ضرب کو بے علامت ضرب کی لکہہ دیتے ہین یعنے حاصل ضرب ا اور ر کا اسطور پر ا ر لکہتے ہین پس اس صورت مین ا اور ر کے درمیان مین علامت × ضرب کی نہین لکہی لیکن ا ر سے وہی مراد ہی جو ا × ر سے ہی جسطرح حرف کو حرف مین ضرب کرکر بے نشانی ضرب کے شامل کردیتے ہین اسیطرح عدد کو حرف مین ضرب کرین تو بے نشانی ضرب کے لکہنا چاہئے مثلا ۷ کو ا مین ضرب کرین تو ۷ ا لکہنا چاہئے اور اگر ۴ کو د مین ضرب کرین تو ۴ د لکہنا چاہئے لیکن اس صورت مین اس بات کا لحاظ ضرور ہی کہ عدد ہمیشہ حرف کے پہلے لکہا جاوے جب کوئی عدد حرف مین ضرب کیا جاتا ہی تو اوس عدد کو اوس حرف کا سر کہتے ہین ۷ ا مین

مین عدد ۷ کا سرلا کا ہی اور ۴ مین عدد ۴ کا سر د کا ہی بیان بالا سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر لا کو لا مین ضرب کرین تو حاصل ضرب اس صورت سے لا آ کا لکہا جاویگا یعنے لا کو فی نفسہ ضرب کرنے سے لا حاصل ہوتا ہی اور یہہ بات ظاہر ہی کہ جب ایک مقدار کو فی نفسہ ضرب کرتے ہین تو حاصل ضرب کو مجذور اس مقدار کا کہتے ہین مثلاً ۴ کو ۴ مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ۱۶ ہوتا ہی پس ۱۶ کو مجذور ۴ کا کہنے سے معلوم ہوا کہ لا کو لا مین ضرب کیا تو حاصل ضرب لا آ ہوا اور لا لا مجذور لا کا ہی بعینہ اسیطرح ط ط مجذور ط کا ہی اب یہہ بہی ظاہر ہی کہ جسوقت لا لا کو لا مین ضرب کرینگے تو موافق بیان سابق کے لا لا لا ہوگا اور جب کسی مقدار کے مجذور کو اوسی مقدار مین ضرب کرین تو حاصل ضرب مکعب اوس مقدار کا ہوتا ہی تو معلوم ہوا کہ لا لا لا مکعب لا کا ہی کسواسطے کہ لا لا مجذور لا کا تہا اور جب پہر مجذور کو لا مین ضرب کیا تو لا لا لا ہوا پس لا لا لا مکعب لا کا ہی اب چونکہ مجذور لا کا لا لا ہی اور اسمین لا دو دفعہ پایا جاتا ہی اسیواسطے جبر و مقابلہ مین اختصار کے واسطے لا لا کو لا۲ لکہتے ہین یعنے بجاے دو لا لکہنے کے دو کا ہندسہ لا کے اوپر لکہہ دیتے ہین اور لا۲ کو لا کے دوسری قوت کہتے ہین علی ہذا القیاس لا لا لا کو جو مکعب لا کا ہی لا۳ لکہتے ہین اور لا۳ کو لا کے تیسری قوت کہتے ہین اور اسیطرح لا۴ اور لا۵ وغیرہ لکہے جاتے ہین اور ان کو چوتہی قوت اور پانچوین قوت وغیرہ سے تعبیر کرتے ہین اور ان اعداد کو جو حروف کے اوپر لکہے جاتے ہین نشان قوت کہتے ہین جانا چاہیے کہ سوائے × کے علامت ضرب کی اور بہی ہین یعنے خطوط ( ) اور { } بہی علامتین ضرب کی ہین اور ان خطوط کو خطوط وحدانی کہتے ہین مگر ان علامتون کے استعمال مین فرق ہی اور وہ یہہ ہے کہ جب کئی مقدارین اور کئی مقدارون مین ضرب کی جاوین یا کئی مقدارین ایک ہی مقدارین ضرب کی جاوین تو اول صورت مین مضروب اور مضروب فیہ کو ان خطوط کے اندر لکہہ کر دونو کو لے علامت ضرب کے شامل کر دیتے ہین مثلاً مجموعہ لا اور د کا حاصل تفریق ط اور ر مین ضرب کیا جاوے تو ظاہر ہی کہ مجموعہ لا اور د کا اسطرح لا + د لکہا جاوے گا اور حاصل تفریق ط اور ر کا اسطرح ط − ر لکہا جاوے گا پس موافق بیان بالا کے اس مجموعہ اور حاصل تفریق کا حاصل ضرب اسطرح (لا + د) (ط − ر) یا اسطرح { لا + د } { ط − ر } لکہا جاویگا اور دوسری صورت مین یعنے جسوقت کئی مقدارین ایک مقدارین ضرب دی جاوین تو انکی حاصل ضرب کو اسطرح لکہتے ہین [لا + د) ط یعنے مجموعہ لا اور د کا ط مین ضرب کیا ہوا ہی یا اسطرح { ط − لا } د لکہا جاتا ہی یعنے حاصل تفریق ط اور لا کا د مین ضرب کیا ہوا ہی اگر مجموعہ لا اور د یعنے لا + د کو حاصل تفریق ط − ر مین ضرب کرین تو حاصل ضرب کو اسطرح بہی لا + د × ط − ر لکہتے ہین اور علی ہذا القیاس اور صورتین بہی اسطرح لکہی جاتی ہین ہمنے

پہلے بیان کیا ہی کہ مجذور لا کا اسطرح لا۲ لکہا جاتا ہی اور مکعب لا کا اسطرح لا۳ اور علی ہذا القیاس اب جانا چاہئے کہ کسی مقدار کے دوسری مرتبہ کے نزول کو جذر اوس مقدار کا کہتے ہین مثلا ۱۶ کا جذر ۴ ہے یعنے عدد ۴ کا ۱۶ مین کا ایسا جز ہی کہ اگر اوسکو فی نفسہ ضرب کرین تو حاصل ضرب ۱۶ ہوتا ہی اسیطرح لا۲ کا جذر لا ہی کیونکہ لا کو لا مین ضرب کرین تو حاصل ضرب لا۲ ہی پس جب معلوم ہوا کہ جذر دوسرے مرتبہ کا نزول ہوتا ہی تو اسلیئے جبر و مقابلہ مین جذر کی نشانی $\frac{1}{2}$ ہے یعنی جس مقدار کا جذر لینا ہوتا ہے اوسپر $\frac{1}{2}$ لکہہ دیتے ہین مثلا لا کا جذر اسطرح لا$\frac{1}{2}$ لکہتے ہین اور ط کا جذر اسطرح ط$\frac{1}{2}$ اور ر کا جذر اسطرح ر$\frac{1}{2}$ اور لا اور ط کے مجموعہ کا جذر اسطرح (لا + ط)$\frac{1}{2}$ لکہتے ہین علی ہذا القیاس (ر − د)$\frac{1}{2}$ سی جذر حاصل تفریق ر اور د کا تعبیر ہوتا ہی اور (ط + لا + س)$\frac{1}{2}$ سے جذر تین مقدارون ط اور لا اور س کے مجموعہ کا تعبیر ہوتا ہی اسیطرح اور صورتین لکہی جاتی ہین واضح ہو کہ جذر کے واسطے سوائے علامت مذکورہ بالا کے اور بہی ہی اور وہ علامت یہہ خط ‾ خاص صورت کا ہی پس لا ‾ سے جذر لا کا تعبیر ہوتا ہی اور لا + ط ‾ سے جذر مجموعہ لا اور ط کا تعبیر ہوتا ہی اگر ط۲ اور ۲ ط لا کے مجموعہ کا جذر لکہین تو اسطرح ط۲ + ۲ ط لا ‾ لکہنا چاہئے اور اگر ص۲ اور ۳ ط لا کے حاصل تفریق کا جذر لکہنا منظور ہو تو اسطرح ص۲ − ۳ ط لا ‾ لکہنا چاہئے ظاہر ہی کہ کسر مین دو مقدار لکہی جاتے ہین ایک تو شمار کنندہ اور ایک نسب نما مثلا $\frac{۲}{۳}$ مین ۲ شمار کنندہ ہی اور ۳ نسب نما اسیطرح $\frac{ط}{لا}$ مین لا شمار کنندہ ہی اور ط نسب نما اگر لا کی تہائی لکہنے ہو تو اسطرح $\frac{لا}{۳}$ لکہنے چاہئے اور اگر لا کا پانچوان حصہ لکہین تو $\frac{لا}{۵}$ لکہنا چاہئے اور علی ہذا $\frac{ط}{لا}$ کو لا تقسیم کیا ہوا ط پر کہتے ہین — یہہ صورت = مساوات کی علامت ہی یعنے جن مقدارون کے درمیان مین یہہ علامت ہو تو جاننا چاہئے کہ وہ مقادیر باہم برابر ہین مثلا ۴ = ۴ سے مراد ہی کہ ۴ برابر ہی ۴ کے اور علی ہذا القیاس لا = لا سے یہہ مراد ہی کہ لا برابر ہے لا کے اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ مجموعہ لا اور ر کا برابر ہی ۱۲ کے تو اسکو اسطرح لا + ر = ۱۲ لکہنا چاہئے اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ دو چند لا مین سے ۳ کا عدد نکال ڈالین تو باقی برابر ۱۰ کے ہی تو اسطرح ۲ لا − ۳ = ۱۰ لکہنا چاہئے اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ ایک عدد مجہول لا ایسا ہی ہی اگر اسکو تگنا کر کے اوسمین سے ۵ نکال ڈالین تو سات باقی رہی ہین تو اسکو اسطرح ۳ لا − ۵ = ۷ لکہنا چاہئے اور علی ہذا القیاس اور صورتین لکہی جاتی ہین اسکا بیان انشاء اللہ تعالے مساوات کے بیان مین بخوبی کیا جاویگا — اگر یہہ لکہنا منظور ہو کہ عدد ۱ کا ۲ سے وہ نسبت ہی ہے جو عدد ۴ کا ۸ سے نسبت رکہتا ہی تو اسکو اسطرح لکہتے ہین ۱ : ۲ :: ۴ : ۸ یعنے

یعنے نقاط : :: : : تناسب کی علامت ہین پس اگر یہہ صورت ہو لا : ط :: ص : س تو اسکو الفاظ مین اسطرح تعبیر کرین گے کہ لا کو ط سے وہ نسبت ہی جو ص کو س سے ہی یعنے جسقدر مقدار لا کے ط سے زیادہ ہی اوسیقدر مقدار ص کی س سے زیادہ ہی یا جسقدر لا ط سے کم ہی اوسیقدر ص س سے کم ہی اگر یہہ بات لکھنی منظور ہو کہ (لا اور ر ایسے دو عدد ہین کہ انمین وہ نسبت ہی جو ۳ اور ۴ مین ہی تو اسکو اسطرح لکھنا چاہئے لا : ر :: ۳ : ۴ — اگر یہہ لکھنا ہو کہ لا اور ر ایسے دو عدد ہین کہ انکے مجذورون مین وہ نسبت ہی جو س اور ص مین ہی تو اسطرح لکھنا چاہئے لا^{۲} : ر^{۲} :: س : ص سے اور علی ہذا القیاس اور مثالین ہو سکتے ہین ÷ علامت تقسیم کی ہی مثلاً ر ÷ لا سے یہہ مراد ہی کہ ر کو لا پر تقسیم کرنا چاہئے اور اسیطرح لا + ر ÷ لا سے یہہ مراد ہی کہ مجموعہ لا اور ر کو لا پر تقسیم کرنا چاہئے ∴ یہہ تین نقطہ بجاے (اسیواسطے) لکھے جاتے ہین یعنے جس جگہہ لفظ اسیواسطے لکھنا ضرور ہوتا ہی وہان ∴ یہہ تین نقطہ لکھہ دیتے ہین

فصل اول قاعدہ جمع اب ہم جمع کا قاعدہ لکھتے ہین لیکن چونکہ اسمین لفظ مقدار متماثلہ کا مستعمل ہوا اسواسطے اوسکے معنے بیان کرتے ہین سمجھنا چاہئے کہ مقادیر متماثلہ اون مقدارون کو کہتے ہین جو باہم جمع ہو سکین یا اون مین باہم تفریق ہو سکے مثلاً ۴ لا اور ۲ لا مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ ۴ لا اور ۲ لا کو جمع کرین تو ۶ لا ہوتے ہین اور ۴ لا مین سے ۲ لا کو نکال ڈالین تو ۲ لا رہتے ہین اسیطرح ۷ لا ر اور ۳ لا ر مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ ۷ لا ر لا اور ر کے حاصل ضرب کا سات گنا ہی اور ۳ لا ر اوسی حاصل ضرب کا تگنا ہی پس اگر ۷ لا ر کو ۳ لا ر کے ساتھہ جمع کرین تو ۱۰ لا ر ہوتے ہین اور اگر ۷ لا ر مین سے ۳ لا ر نکال ڈالین تو ۴ لا ر رہتے ہین بعینہ اسیطرح ۴ س اور ۲ س مقادیر متماثلہ ہین اور ۴ ص^{۲} اور ۲ ص^{۲} بھی مقادیر متماثلہ ہین اور ۷ لا^{۳} اور ۵ لا^{۳} بھی مقادیر متماثلہ ہین اور ۳ (لا + ر) اور ۲ (لا + ر) مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ ۳ (لا + ر) لا اور ر کے مجموعہ کا تگنا ہی اور ۲ (لا + ر) لا اور ر کے مجموعہ کا دوگنا ہی پس اگر ۳ (لا + ر) کو ۲ (لا + ر) کے ساتھہ جمع کرین تو ۵ (لا + ر) ہوتے ہین اسیطرح ۳ لا^{۲} اور ۲ لا^{۲} مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ اول مقدار لا کے جذر کا تگنا ہی اور دوسری مقدار لا کے جذر کا دوگنا ہی پس اگر ۳ لا^{۲} اور ۲ لا^{۲} کو باہم جمع کرین تو ۵ لا^{۲} ہین ہوتا ہی اور اگر باہم تفریق کرین تو لا^{۲} رہتا ہی علے ہذا القیاس $۵\sqrt{۲لا + لا^{۲}}$ اور $۲\sqrt{۲لا + لا^{۲}}$ بھی مقادیر متماثلہ ہین کیونکہ انمین سوے اعداد ۵ اور ۲ کے

جوانکی سمہ مین ۱۱ کا دی فرق نہین پس انکا مجموعہ ۷ [۲ لا + ۲ لا] ہوتا ہی اور حاصل تفریق ۳ [۲ لا + ۲ لا] ہوتا ہے
چونکہ جذر کا نشان (∛) بھی ہی تو ظاہر ہی کہ ۱ر۲ (۲ لا + لا²) ½ ۲ بھی
مقادیر متماثلہ مین کیونکہ ۵ (۲ لا + لا²) ½ ۲ لا + لا² کے جذر کا پانچ گنا ہی اور ۲ (۲ لا + لا²) ½
اوسی مقدار کے جذر کا دوگنا ہی پس مجموعہ انکا ۷ (۲ لا + لا²) ½ ہی اور حاصل تفریق ۳ (۲ لا + لا²) ½
ہو جانا چاہئے کہ جسطرح اعداد کے جمع کرنمین ترتیب اکائی اور دہائی کے ملحوظ ہوتی ہی جبرو مقابلہ مین
اوسی ترتیب کا خیال نہین کیا جاتا اور جن مقدارون کا جمع کرنا مطلوب ہوتا ہی اونکو اوپر نیچے بلحاظ ترتیب کے
لکھدیتے ہین یہہ بات ظاہر ہی کہ مقادیر جبریہ جنکا جمع کرنا مطلوب ہی تین طرح پر واقع ہو سکتے ہین یا تو سب
مقادیر متماثلہ ہون یا سب مقادیر غیر متماثلہ ہون یا مقادیر متماثلہ اور غیر متماثلہ ملے ہوئے ہون اور علامتین انکے
یا تو یکسان ہونگی یا مختلف یعنے ان سب کے اول مین یا تو علامت جمع کی ہوگی یا علامت تفریق کی ہوگی یا کسی کے
اول مین علامت تفریق کے اور کسی کے اول مین علامت جمع کی ہوگی پس جمع کا قاعدہ یہہ ہی کہ (صورت اول)
اگر مقادیر متماثلہ ہون اور انکی اول مین علامتین یکسان ہون تو اون سب کے نیچے ایک خط عرضی کھینچکر پہلے
اوسی علامت کو لکھین جو اونکے اول مین ہی بشرطیکہ وہ علامت کی جمع ہو کیونکہ اول مین جمع کی علامت
نہین لکھی جاتی بعد اسکے اون مقدارون کے اول مین جو اعداد ہون اونکو جمع کر کر علامت کے آگے لکھدین
اور اسکے آگے مقدار جبریہ یا حروف ثبت کردین مثلاً ۳ لا ۲ لا ۶ لا / ۱۱ لا یہہ سب مقادیر

متماثلہ مین اور ان سب کے اول علامت جمع کی ہی پس موافق قاعدہ بالا کے علامت کا لکھنا ضرور نہین انکے
اعداد کو جمع کیا تو ۱۱ ہوتے ہین اور آ کے آگے لا کو ثبت کیا تو حاصل جمع ۱۱ لا ہوئے
اسیطرح — لا — ۴ لا — ۵ لا / — ۱۰ لا کو جمع کیا تو پہلے علامت نفی کی حاصل جمع مین لکھدی بعد اسکے
اونکے اعدادون کو جمع کیا تو ۱۰ ہوئے اسکے آگے لا کو ثبت کیا
تو حاصل جمع — ۱۰ لا ہوا

مثال (۳)
۳ لا — ۴ ر
۲ لا — ۳ ر
۵ لا — ۲ ر
۱۰ لا — ۹ ر

مثال (۴)
۴ لا ر — ۳ د
۵ لا ر — ۶ د
۷ لا ر — ۹ د
۱۶ لا ر — ۱۸ د

مثال (۵)

$$\begin{array}{r} ۲لا^{۲} - ط لا \\ ۲لا^{۲} - ۳ط لا \\ ۶لا^{۲} - ۷ط لا \\ \hline ۹لا^{۲} - ۱۱ ط لا \end{array}$$

مثال (۶)

$$\begin{array}{r} \sqrt{h}لا - \sqrt{h}ر \\ ۲\sqrt{h}لا - ۳\sqrt{h}ر \\ ۹\sqrt{h}لا - ۵\sqrt{h}ر \\ \hline ۱۲\sqrt{h}لا - ۹\sqrt{h}ر \end{array}$$

مثال (۷)

$$\begin{array}{r} \sqrt{h}ط لا - ر لا \\ ۳\sqrt{h}ط لا - ۲ر لا \\ ۵\sqrt{h}ط لا - ۳ر لا \\ \hline ۹\sqrt{h}ط لا - ۶ر لا \end{array}$$

مثال (۸)

$$\begin{array}{r} ط^{۲} لا^{\frac{۱}{۲}} - ر لا^{\frac{۱}{۲}} \\ ط^{۲} لا^{\frac{۱}{۲}} - ۳ر لا^{\frac{۱}{۲}} \\ ۳لا^{\frac{۱}{۲}} ط^{۲} - ۲ر لا^{\frac{۱}{۲}} \\ \hline ۵لا^{\frac{۱}{۲}} ط^{۲} - ۶ر لا^{\frac{۱}{۲}} \end{array}$$

مثال (۹)

$$\begin{array}{r} ط ب لا - ص ر لا \\ ۳ط ب لا - ۲ص ر لا \\ ب ط لا - ۵ر ص لا \\ \hline ۵ب ط لا - ۸ص ر لا \end{array}$$

مثال (۱۰)

$$\begin{array}{r} ط ص لا^{۲} - ط ص ر^{۲} \\ ۲ط ص لا^{۲} - ۴ط ص ر^{۲} \\ ۳ط ص لا^{۲} - ط ص ر^{۲} \\ \hline ۶ط ص لا^{۲} - ۶ط ص ر^{۲} \end{array}$$

مثال (۱۱)

$$\begin{array}{r} \sqrt{h}ص لا - \sqrt{h}ط ر لا \\ \sqrt{h}ص لا - ۲\sqrt{h}ط ر لا \\ ۳\sqrt{h}ص لا - ۵\sqrt{h}ط ر لا \\ \hline ۵\sqrt{h}ص لا - ۸\sqrt{h}ط ر لا \end{array}$$

صورت دوم

اب اگر مقادیر جبر سہ متماثلہ ہون اور علامتین اونکی مختلف ہون تو اس صورت مین یہہ قاعدہ ہی کہ جنکی علامتین یکسان ہون اونکو علحدہ علحدہ شمار کرلین اور بعد اسکے جنکی تعداد زیادہ ہو اونمین سے کم تعداد کو نکالکر جو باقی رہے اوسے مثبت کردین اور اوسکے اول وہ علامت لکھین جو زیادہ رقم پر تھی پس یہہ حاصل جمع ہوگا مثلاً

$$\begin{array}{r} ۲لا \\ ۳لا \\ - لا \\ \hline ۲لا \end{array}$$

کو جمع کرنا چاہین تو ظاہر ہی کہ اسمین ۵ لا مثبت ہین اور ۳ لا منفی ہین پس پانچ مین سے تین کو تفریق کیا تو ۲ لا بچی اور چونکہ ۵ لا کے اول مین علامت جمع کی تھی اسلیے ۲ لا کے اول مین بھی علامت جمع رہیگی پس معلوم ہوا کہ ۲ لا حاصل جمع ہی

اسیطرح

$$\begin{array}{r} - لا ر \\ - ۴لا ر \\ - ۵لا ر \\ ۳لا ر \\ ۲لا ر \\ \hline - ۵لا ر \end{array}$$

کو جمع کیا تو اسمین ۱۰ لا ر منفی ہین اور ۵ لا ر مثبت ہین پس حاصل تفریق ۵ لا ر منفی رہیگی اسیواسطے منفی ۵ لا ر حاصل جمع ہوگا

مثال (۳)

$$\begin{array}{r} ۴ط لا - ۳ر^{۲} \\ ۲ط لا - ۶ر^{۲} \\ - ۴ط لا + ۳ر^{۲} \\ - ط لا + ۷ر^{۲} \\ \hline ط لا - ۲ر^{۲} \end{array}$$

مثال (۴)

$$\begin{array}{r} - ۶\sqrt{h}ص لا^{۲} + ۵ط لا ر^{۲} - ۴ص لا \\ - \sqrt{h}ص لا^{۲} - ۹ط لا ر^{۲} - ۱۱ص لا \\ + ۲\sqrt{h}ص لا^{۲} - ۶ط لا ر^{۲} + ۱۹ص لا \\ \hline - ۵\sqrt{h}ص لا^{۲} - ۱۰ط لا ر^{۲} + ۲ص لا \end{array}$$

شال (۵)

$$\begin{array}{r} ط ص لا^۲ - ۳ ع لا \\ -۵ ط ص لا^۲ - ۷ ع لا \\ \hline ۶ ط ص لا^۲ + ۱۰ ع لا \\ \hline ۲ ط ص لا^۲ \end{array}$$

شال (۶)

$$\begin{array}{r} ۴ ط لا - ۱۰ ص لا^۲ ر + ۱۵ ط (لا + ر) \\ ۸ ط لا - ۷ ص لا^۲ ر - ۴ ط (لا + ر) \\ -۹ ط لا + ۹ ص لا^۲ ر + ۶ ط (لا + ر) \\ \hline -۴ ط لا + ۸ لا^۲ ص ر - ۴ ط (لا + ر) \\ \hline -ط لا \qquad +۱۳ ط (لا + ر) \end{array}$$

شال (۷)

$$\begin{array}{r} ۳ ن لا - ۵ ص لا^۲ + ۲ \\ ۴ ن لا + ۴ ص لا^۲ - ۴ \\ \hline -۷ لا ن - ص لا^۲ + ۲ \\ \hline -۲ ص لا^۲ \end{array}$$

شال (۸)

$$\begin{array}{r} ۴ لا - ۵ ع + ۲۰ \\ -۷ لا + ۶ ر - ۱۳ \\ \hline ۵ لا - ر + ۷ \\ \hline ۲ لا \qquad +۱۴ \end{array}$$

شال (۹)

$$\begin{array}{r} ۳ لا^۲ - ۱۵ لا + ۲۱ \\ ۲ لا^۲ - ۷ لا - ۱۵ \\ \hline -۵ لا^۲ + ۲۳ لا - ۶ \\ \hline لا \end{array}$$

شال (۱۰)

$$\begin{array}{r} ۳ (لا^۲ - ر^۲) - ۱۰ \\ ۲ (لا^۲ - ر^۲) + ۱۵ \\ \hline -۴ (لا^۲ - ر^۲) - ۳ \\ \hline لا^۲ - ر^۲ + ۲ \end{array}$$

شال (۱۱)

$$\begin{array}{r} \sqrt{ط ب + لا} \quad -۱۷ + (لا - ط)^{\frac{1}{2}} \\ -۳ \sqrt{ط ب + لا} + ۱۹ - ۳ (لا - ط)^{\frac{1}{2}} \\ \hline ۲ \sqrt{ط ب + لا} - ۲ + ۴ (لا - ط)^{\frac{1}{2}} \\ \hline +۲ (لا - ط)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

شال (۱۲)

$$\begin{array}{r} ۳ \sqrt{ح} لا^۲ + ۲ \sqrt{ح} لا^۲ - ۵ \sqrt{ح} ر^۲ \\ ۳ \sqrt{ح} لا^۲ - ۲ \sqrt{ح} لا^۲ + ۳ \sqrt{ح} ر^۲ \\ \hline -۴ \sqrt{ح} لا^۲ - ۲ \sqrt{ح} لا^۲ + ۵ \sqrt{ح} ر^۲ \\ \hline -۲ \sqrt{ح} لا^۲ + ۳ \sqrt{ح} ر^۲ \end{array}$$

صورت سوم

جس صورت مین مقادیر جبریہ غیر متماثلہ ہون تو اس صورت مین یہہ قاعدہ ہی کہ اون سب مقدارون کو ایک سطر مین لکہہ دیتے ہین اور اونکے اول مین جو علامت ہوتی ہی وہ ہی لکہی جاتی ہی اور یہی حاصل جمع ہوتا ہی

مثلاً ۴ ط لا - ۲ لا^۲ + ۳ ط کو جمع کرین تو ان سب کو ایک سطر مین لکہہ دینگے اور ترتیب کا لحاظ کچہہ نہین ہوگا

$$\begin{array}{r} -۶ لا ر + ص لا - ۳ \\ \hline ۴ ط لا - ۲ لا^۲ + ۳ ط - ۳ - ۶ لا ر + ص لا \end{array}$$

شال (۲)

$$\begin{array}{r} ۶ لا^۲ - ۳ ط ن + ۲ \\ -۵ ر^۲ + ۶ ص لا + ۳ لا \\ \hline +۵ لا ط + ص^۲ لا - ن \\ \hline ۶ لا^۲ - ۳ ط ن - ۵ ر^۲ + ۲ + ص لا + ۳ لا - ن + ۵ لا ط + ص^۲ لا \end{array}$$

جس صورت مین مقادیر جبریہ اسطرح واقع ہون کہ اونمین مقادیر متماثلہ بہی ہون اور غیر متماثلہ بہی ہون تو اس صورت مین جاہئے کہ مقادیر متماثلہ کو اسطرح جمع کرین جسطرح صورت اول اور دویم مین جمع کیا ہی اور غیر متماثلہ کو اسطرح جمع کرین جسطرح تیسری صورت مین جمع کیا ہی

مثلا $۴ لا^۲ - ۲ ص لا + ۳ ط - ر$

$- ص لا + ۵ لا^۲ - ۴ ط + ع$

$ط - ۶ لا^۲ + ۴ ص لا$

$۳ لا^۲ + ص لا - ر + ع$

اس صورت مین اول مقدار کی متماثل دو اور ہین یعنے $۴ لا^۲$ کے متماثل $۵ لا^۲$ اور $- ۶ لا^۲$ ہین پس $۹ لا^۲$ مثبت ہین اور $- ۶ لا^۲$ منفی ہین اسیواسطے اسکا حاصل جمع $۳ لا^۲$ ہوا اسیطرح $- ۲ ص لا$ کی متماثل $- ص لا$ اور $۴ ص لا$ ہین پس انکا حاصل جمع $ص لا$ ہوا اور $۳ ط$ کی متماثل $- ۴ ط$ اور $ط$ ہین پس $۴ ط$ اور $- ۴ ط$ کا حاصل جمع کچھہ نہین ہوتا اسواسطے انکی جگہہ کچھہ نہین لکھا اب $- ر$ اور $ع$ کا متماثل کوئی مقدار نہین اسواسطے انکو بعینہ اوتار کی نیچی سطر مین لکھدیا

مثال ۲

$۷ لا ر + ۲ لا^۲ - ۳ ر^۲$

$+ ع - لا^۳ - ۵ ر^۲$

$- ۲ لا ر + ۴ ر^۲ - لا^۲$

$۵ لا ر + لا^۲ - ۴ ر^۲ + ع - لا^۳$

مثال ۳

$۳ \sqrt{ص + ۱۰ - ۲ ح لا + ۵ ص لا}$

$- ص لا + ۴ ح لا - ۷ ص^{\frac{۱}{۲}} - لا ر + لا^۲$

$- ح لا + ۵ ح + لا^۳ - ۴ ص لا$

$- ۴ ص^{\frac{۱}{۲}} + ۵ ح + ح لا - لا ر + لا^۲ + لا^۳$

مثال ۴

$(ط + لا)^{\frac{۱}{۲}} - ۳ \sqrt{۲ لا - لا^۲ - ۱۵}$

$(۲ لا - لا^۲)^{\frac{۱}{۲}} + ۴ لا^۲ - ۲۷ - لا^۳$

$لا^۲ + ۲۵ - \sqrt{ط + لا + ۳ (ط + لا)^{\frac{۱}{۲}}}$

$۳ (ط + لا)^{\frac{۱}{۲}} - ۲ \sqrt{۴ لا - لا^۲ - ۷ ط + ۴ لا^۲}$

مثال ۵

$۶ لا - ۳ ر + ۲۰$

$- ۶ لا + ۳ ر - ۹$

$۷ ر - لا^۲ + ۲$

$۱۳ + ۷ ر - لا^۲$

مثال ۶

$۳ لا^۲ - ۷ + ص$

$۵ لا^۲ - ع - ط لا$

$لا^۳ + ۹ - ۲ ص$

$۸ لا^۲ + ۲ - ص - ع - ط لا + لا^۳$

مثال ۷

$۴ لا ر ط - ۷ لا^۲ ر ط + ۱۵ لا$

$- لا^۲ ر + ۵ ط لا ر + ۷ لا$

$ر^۲ ط لا + ۳ لا^۲ ر ط - ط لا ر$

$- ۲ لا ر ط - ۴ لا^۲ ر ط + ۲۲ لا - لا^۲ ر + ر^۲ ط لا$

مثال ۸

$ط لا - ص لا + ط + لا$

$۷ ص لا - لا^۲ ط - ص^۲ لا$

$- ۶ ط - ۴ لا + ط^۲ لا$

$- لا^۲ ط + ط لا + ۶ ص لا - ۵ ط - ۳ لا - ص^۲ لا + ط^۲ لا$

مثال ۹

$$\begin{array}{l} ۳ط^۲ + ص^۲ + ۲ل^۲ - ل ر \\ ۲ط^۲ + ۳ص^۲ + ۴ل^۲ + ۷ل ر \\ ۵ص^۲ + ۶ط^۲ - ۳ل^۲ - ۴ل ر \\ - ل ر + ل^۲ - ۷ص^۲ - ۶ط^۲ \\ \hline ۵ط^۲ + ۲ص^۲ + ۴ل^۲ + ل ر \end{array}$$

مثال ۱۰

$$\begin{array}{l} (ط + ص)ل + \sqrt{۳ل^۲ - (ص + ط)ل} \\ - ۳\sqrt{۳ل^۲ - ۲(ط + ص)ل - ۲۷} \\ + \sqrt{۹ل^۲ - ل^۲ + ۱۵ل - ۱۸} \\ - ۲(ط + ص)ل - ۲\sqrt{۳ل^۲ - ۴۵ + ۲ل^۲ + ۱۵ل} \\ \hline ۳ل + ۲ل^۲ - ط \end{array}$$

مثال ۱۱

$$\begin{array}{l} ل + ط + س \\ ل - ۴ط - س \\ ل^۲ - ۴ل + ط \\ \hline ل^۲ - ۳ط + ۳ل^۲ \end{array}$$

مثال ۱۲

$$\begin{array}{l} ۱۸ط ل - س ل^۲ + \sqrt{ل^۲ - ط^۲} \\ ر^۲ - ۷ل ط + س ل^۲ + ۱۸ \\ - ۳(ل^۲ - ط^۲)^{\frac{۳}{۲}} + ۲۵ - ۹ط ل \\ \hline ۲ط ل - ۲\sqrt{ل^۲ - ط^۲} + ر^۲ + ۳ \end{array}$$

مثال ۱۳

$$\begin{array}{l} ط + س - ل - ۹ ل^۲ \\ - ۵ل + ۶ط - س + ۳ \\ ۱۵س - ۹ط + ل^۲ + ۱ \\ \hline - ۲ط + ۱۵س - ۶ل - ۸ل^۲ + ۴ \end{array}$$

مثال ۱۴

$$\begin{array}{l} ۴ل^{\frac{۳}{۲}} - ۲ل^{\frac{۱}{۲}} + ۳ط \\ - ۷ط + ۳ل^{\frac{۳}{۲}} + ۵ل^{\frac{۱}{۲}} \\ + ۶ر - ط ل + ۹ \\ \hline ۷ل^{\frac{۳}{۲}} + ۳ل^{\frac{۱}{۲}} - ۴ط + ۶ر - ط ل + \end{array}$$

مثال ۱۵

$$\begin{array}{l} \sqrt{ط - ل + \sqrt{۴ل - ط + ط}} \\ \sqrt{ل^۲ - ۱ - ۳\sqrt{ط - ل + ۶ط}} \\ - ۴\sqrt{ل - ط + ۲\sqrt{ط - ل - ۱۷}} \end{array}$$

مثال ۱۶

$$\begin{array}{l} ۱۷ل^۲ + ۷ ل + ل^{\frac{۱}{۳}} \\ - ۵ل^{\frac{۱}{۳}} + ۶ - ل^{\frac{۱}{۲}} \\ + ۷ل^{\frac{۱}{۳}} + ۲\sqrt{ل + ۹} \\ \hline ۱۱ل^{\frac{۱}{۳}} + ۷ل + ۳ ل^{\frac{۱}{۳}} + ۲\sqrt{ل + ۹} - ۶ل^{\frac{۱}{۳}} - ۹ل^{\frac{۲}{۳}} + ۹ \end{array}$$

مثال ۱۷

$$\begin{array}{l} ۴ل^{\frac{۳}{۲}} - ۷ل^{\frac{۳}{۲}} + ۹ل^{\frac{۱}{۲}} \\ - ل^{\frac{۳}{۲}} + ۳ل^{\frac{۱}{۲}} - ل^{\frac{۱}{۲}} \\ + ۷\sqrt{ل + ۱} - ۶ \end{array}$$

مثال ۱۸

$$\begin{array}{l} (۱ + ب)ل^۲ - ط ل^۲ + ۷\sqrt{ل} \\ + ۶ل^۲ ÷ (۱ + ب)ل^۲ + ط ل^۲ \\ - ۲(۱ + ب)ل^۲ + (۱ + ب)ل^۲ \end{array}$$

مثال ۱۹

$$\begin{array}{l} ل^۲ ر + ر ل^۲ + ل ر + ۲ \\ ر ل - ل^۲ ر + - ل + ۱ \\ ۵ل + ۳ل ر^۲ - ۹ ل ر + ۳ \\ \hline ۲ل^۲ ر^۲ - ۷ل ر^۲ + ۶ + ۲ل ر^۲ \end{array}$$

مثال ۲۰

$$\begin{array}{l} ۹ل - ۶ط + ۲۵ \\ - ۱۷ + ۷ل - ۱۵ل \\ + ۶ط - ۵ط - ۸ل \\ \hline - ۷ل - ص ط + ۸ \end{array}$$

فصل دیم قاعدہ تفرق

جاننا چاہیئے کہ ایک مقدار مین سے دوسری مقدار نکال ڈالنی کو تفریق کہتے ہین پس جو مقدار کہ نکالی جاتی ہو اوسکو مفروق کہتے ہین اور جسمین سے نکالی جاتی ہین اوسکو مفروق منہ کہتے ہین مفروق منہ کو اکثر اوقات پہلے اور مفروق کو اوسکی نیچے لکھتے ہین پہر مفروق کی سب مقدارون کی علامتین بدل کر مفروق منہ کی ساتھ جمع کر دیتے ہین جو کچھ حاصل ہوتا ہی وہ حاصل

تفریق ہی اور علامتین بدلنے سی یہہ مراد ہی کہ جس مقدار پر + کا نشان ہو اسکو - کا بنا دینا چاہئی اور جسپر نفی کا نشان ہو اوسکو + کا بنا دینا چاہئی اور تبدیل علامتون کی اکثر لکھہ کر نہین کرتے بلکہ خیال مین رکھکر مفروق کو مفروق منہ کے ساتھہ جمع کر لیتے ہین مثلاً ۵ لا مین سے ۳ لا کو تفریق کرین تو اسس صورت پر $۵\text{لا} - ۳\text{لا}$ لکھنا چاہئیے پس تبدیل علامت کی یہہ $\frac{۵\text{لا}}{-۳\text{لا}}$ صورت ہوگی اسکی جمع موافق قاعدہ جمع کی ۲ لا ہی پس ۵ لا اور ۳ لا کا حاصل تفریق ۲ لا ہی اسیطرح ۵ لا مین سے - ۳ لا کو تفریق کرین تو اسطرح $۵\text{لا} - (-۳\text{لا})$ لکھنا چاہئیے اور بعد تبدیل علامت مفروق کے یہہ صورت $\frac{۵\text{لا}}{+۳\text{لا}}$ ہوگی اسکی جمع ۸ لا ہی پس ۵ لا اور - ۳ لا کا حاصل تفریق ۸ لا ہوا یہان یہہ بات جاننی چاہئیے کہ جسوقت منفی مقدار پر علامت نفی لکھتے ہین تو وہ مثبت ہوجاتی ہی اگر ہم چاہین کہ ۴ لا + ۳ ط مین سے ۲ لا + ط کو تفریق کرین تو یہہ ہوگا ۴ لا + ۳ ط کیونکہ جب مفروق کی علامتین تبدیل کین تو - ۲ لا - ط ہوا اور اوسکو جمع کیا $\frac{۴\text{لا} + ۳\text{ط}}{-۲\text{لا} - \text{ط}}$ ۲ لا + ۲ ط ہوگا

اگر چاہین کہ ۵ ز + ۳ لا مین سے ۲ ز - ۲ لا تفریق کرین تو یہہ حاصل ہوگا

۵ ز + ۳ لا	
۲ ز - ۲ لا	
۳ ز + ۵ لا	

اس صورت مین ۲ ز منفی ہونگی اور جب اونکو ۵ ز کی ساتھہ جمع کرینگی تو ۳ ز حاصل ہونگی اور - ۲ لا علامت بدلنی کی بعد ۲ لا ہوجائینگی اور انکو ۳ لا کی ساتھہ جمع کرینگی تو ۵ لا ہونگی

۸

مثال ۵

۵ لا^۲ + ۲ د	
۲ لا^۲ + ۵ د	
۳ لا^۲ - ۳ د	

مثال ۶

ص - ۲ لا + ۳	
۴ ص + ۹ لا - ۵	
- ۳ ص - ۱۱ لا + ۸	

مثال ۷

۵ لا^۲ + ۸ لا - ۴ ص	
۶ لا^۲ - ۸ لا - لا^۲	
- لا^۲ + ۲ لا^۲ + ۸ لا - ۴ ص	

مثال ۹

$\frac{۴\text{ط}\text{لا} + ۳\text{ز}^۱ + ۱}{۱ - ۲\text{ط}}$

۴ ط لا + ۳ ز^۱ + ۱	
۳ ز^۱ + ۵ ط لا - ۱	
- ط لا + ۲	

مثال ۱۰

۵ لا + ۱ لا - ۴ ۲	
۵ لا - ۲ لا + ۷	
۳ لا - ۱	

مثال ۱۱

۸ لا^۲ - ۵ لا + ۷ ز - ۹	
۷ لا^۲ - ۸ لا - ۳ ز - ۸	
لا^۲ - ۷ لا + ۱۰ ز - ۱	

مثال ۱۲

۹ ز + ۷ ز لا + ۵ لا^۲ - ۷	
- ۹ + ۶ لا^۲ - ۲ ز + ۱	
۱۱ ز + ۷ ز لا - لا^۲ + ۱	

مثال ۱۳

۴ ط + ۳ ص - ۲ لا + ۸ د	
ط + ۲ ص + لا + ۵ د	
۳ ط + [illegible] - ۳ لا + ۳ د	

مثال ۱۴

۱۲ لا ز + ۳ ز^۲ - ۷ لا^۲ + ۳ $\sqrt{}$	
- ۵ لا ز + ۷ ز^۲ - ۹ لا^۲ + ۲ $\sqrt{}$	
۷ لا ز - ۴ ز^۲ + ۲ لا^۲ + ۸ $\sqrt{}$	

مثال ۱۵

۴۸ ط لا^۲ + ۱۶ ط لا^۲ + ۲۵ ط^۳ لا	
۱۸ ط لا^۲ + ۲۰ ط لا^۲ - ۴۳ ط^۳ لا	
۱۰ ط لا^۲ - ۴۸ ط لا^۲ + ۹۴ ط^۳ لا	

مثال ۱۶

$$\frac{(ط+ص)\,لا+(ط-لا)}{(ط+ص)\,لا+(ط-ط)}$$

مثال ۱۷

$$\frac{\sqrt{لا^{۲}-ک^{۲}}+۴(لا+ک)-۳\sqrt{ط+لا}}{۳(لا+ک)-۲(لا^{۲}-ک^{۲})^{\frac{۱}{۲}}+۳\sqrt{ط+لا}}$$

$$۳\sqrt{لا^{۲}-ک^{۲}}+(لا+ک)-۶\sqrt{ط+لا}$$

مثال ۱۸

$$\frac{\sqrt[۳]{لا-ط^{۲}ک^{۲}}-۴}{(ک)^{\frac{۱}{۲}}ط^{۲}+(۳)^{\frac{۱}{۲}}لا^{\frac{۱}{۲}}+۵}$$

$$-۲ط^{۲}\sqrt{ک^{۲}}-۹$$

مثال ۱۹

$$\frac{لا^{۲}+۲لاک+ک^{۲}}{لا^{۲}-۲لاک+ک^{۲}}$$

$$۴لاک$$

مثال ۲۰

$$\frac{لا^{۲}-۲لاک+ک^{۲}+(لا^{۲}+ک^{۲})+(۲لاک-ک^{۲})}{لا^{۲}+۲لاک-ک^{۲}-(لا^{۲}+ک^{۲})+۲(۲لاک-ک^{۲})}$$

$$-۴لاک+۲ک^{۲}+۲(لا^{۲}+ک^{۲})-(۲لاک-ک^{۲})$$

مثال ۲۱

$$\frac{لا^{۳}+۳لا^{۲}ک+۳لاک^{۲}+ک^{۳}}{لا^{۳}-۳لا^{۲}ک+۳لاک^{۲}-ک^{۳}}$$

$$۶لاک+۲ک^{۳}$$

مثال ۲۲

$$\frac{\sqrt[۳]{۵لا^{۲}-۲لا^{۲}+۵لا^{۲}}}{\sqrt[۳]{۵لا^{۲}-۲لا^{۲}+۲لا^{۲}}}$$

$$\sqrt[۳]{۵لا^{۲}-۲لا^{۲}+۵لا^{۲}}$$

مثال ۲۳

$$\frac{(لا+ط)^{\frac{۱}{۲}}-(لا-ط)^{\frac{۱}{۳}}}{(لا+ط)^{\frac{۱}{۲}}+(لا-ط)^{\frac{۱}{۳}}}$$

مثال ۲۴

$$\frac{\sqrt{لا-ک^{۲}}+ک^{۲}}{\sqrt{لا+ک^{۲}}-ک^{۲}}$$

$$-۴ک^{۲}لا$$

تیسری فصل ضرب کا قاعدہ

حدود مین یہہ بات بیان کی گئی ہی کہ جس مقدار کی اول مین علامت جمع یعنی + ہوتی ہی اوس مقدار کو مقدار مثبت کہتی ہین اور جس مقدار کی اول مین علامت نفی یعنی − ہوتی ہی اوس مقدار کو منفی کہتے ہین پس ضرب کی قاعدہ مین ان تین باتون کو ضرور یاد رکہنا چاہیئے کہ اگر مقدار مثبت کو مثبت مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک مقدار مثبت ہوتی ہی اور اگر منفی کو مثبت مین ضرب کرین یا مثبت کو منفی مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک مقدار منفی ہوتی ہی اب جانا چاہیئے کہ مضروب اور مضروب فیہ کی تین صورتین ہوسکتی ہین یا تو مضروب اور مضروب فیہ دونون مین ایک ایک رقم ہو یا انمین سے ایک مین بہت رقمین ہون اور دوسری مین ایک رقم ہو یا دونون بہت بہت رقمین ہون صورت اول یعنی جسوقت مضروب اور مضروب فیہ مین ایک ایک رقم ہو تو اس صورت مین ضرب کا قاعدہ یہہ ہی کہ اول مضروب اور مضروب فیہ کو اوپر نیچے لکہہ کر ایک خط عرضی کہینچا چاہیئے پس اگر مضروب اور مضروب فیہ دونو مثبت یا دونو منفی ہین تو اس خط عرضی

عرضی کے بیچی علامت جمع کی لکھدی اور بعد اسکی مضروب کی سر کو مضروب فیہ کی سر پر ضرب کرکی اوس علامت کی آگی ثبت کردی اور اسکی آگی حروف کو ملا کر لکھدین اور اگر مضروب اور مضروب فیہ کی علامتین مختلف ہون تو اول مین علامت نفی یعنی — لکھکر اوسکی آگی حاصل ضرب امثالون کا لکھکر حروف کو ملا کر لکھدین مثلاً ۳ لا اور ۴ ؤ کو ضرب کرنا چاہتے ہین تو انکو اسطرح ۳ لا لکھنا چاہیئے اب چونکہ ان دونونکی اول مین علامت

۴ ؤ

۱۲ لاؤ

جمع کی ہی تو حاصل ضرب مین بہی علامت جمع چاہیئے پہر انکی سرونکو باہم ضرب کرنا چاہیئے یعنی ۳ کو ۴ مین ضرب کرنا چاہیئے پس ۱۲ ہوتے ہین ۱۲ کی آگے لاؤ کو لکھنا چاہیئے پس حاصل ضرب ۱۲ لاؤ ہوگا

بعینہ اسیطرح — ۳ لا کو — ۴ ؤ مین ضرب کرین تو — ۳ لا سبے ۱۲ لاؤ ہونگی کیونکہ مضروب اور

— ۴ ؤ

— ۱۲ لاؤ

اور مضروب فیہ مین دونو کی علامت نفی ہین اسیواسطے علامت حاصل ضرب کی مثبت ہوگی اگر — ۳ لا کو ۴ ہ مین ضرب کرین تو — ۳ لا — ۱۲ لاؤ نفی ہونگی کیونکہ علامتین مضروب اور مضروب فیہ کی مختلف ہین اور اسیطرح — ۳ لا

۴ ؤ

— ۱۲ لاؤ

۴ ؤ اور — ۳ لا کا حاصل ضرب ہی — ۱۲ لاؤ ہوگا یہان جانا چاہیئے کہ حروف کو باہم ملا کر لکھدیتی ہین اسمین کچھ لحاظ تقدیم اور تاخیر کا نہین جیسے صورت بالا مین لاؤ لکھدین چاہین ؤ لا لکھدین

مثال ۱	مثال ۲	مثال ۳	مثال ۴	مثال ۵	مثال ۶
+ ۵ ؤ	۷ لاؤ	۳ ص لا	— ۶ ط لا	— ۳ لاؤ	— ۱۵ ؤ
+ ۶ ط	۳ ؤ	۵ ط ؤ	— ۷ ص ؤ	— ۲ ؤ	— ۳ ب لا
+ ۳۰ ط ؤ	۲۱ لاؤ	۱۵ ص ط لا ؤ	۴۲ ط ص لاؤ	۶ لاؤ ؤ	۱۵ ب لاؤ

۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
— ۸ ص لاؤ	— ۴ لا ؤ	— ۷ لاؤ ؤ	۱۱ ص لا	لاؤ ط	ص ؤ
— ۷ ط ؤ	۵ —	۵ ۹ ط	— ۳ ط	— ۲ ص	— لاؤ
۵۶ ص ط لاؤ	— ۲۰ ب لا ؤ	— ۳۵ ط لاؤ ؤ	— ۳۳ ط ص لا	— ۱۰ ص ط لاؤ	— ص لاؤ

۱۳	۱۴	۱۵
ط لا	— ؤ ط	— لاؤ ص
— ؤ ص	ص.	ط
— ص ط لا ؤ	— ص ط ؤ	— ص ط لاؤ

اگر کوئی حرف مضروب اور مضروب فیہ مین مشترک ہو تو اوسکو حاصل ضرب مین ملاکر نہین لکھتے بلکہ اونمین سے فقط ایک ہی حرف لکھکر اوسکی اوپر مجموعہ نشان قوتون دونو حرف کا لکھدیتے ہین مثلاً ۴ لا کو ۵ لا مین ضرب کرین تو ظاہر ہی کہ اونمین نشان قوت لا کی ۲ اور تین ہین پس قاعدہ کے موافق ۵ لا حاصل ضرب ۲۰ لا ہوگا کیونکہ ۴ کو ۵ مین ضرب کیا تو ۲۰ ہوے

۲۰ لا

اور دونون نشانون کو جمع کرکر لا کا نشان قوت لکھا تو لا ہوا پس کل حاصل ضرب ۲۰ لا ہوا

اگر ۳ ز کو ۲ ز مین ضرب کرین تو بعینہ موافق بیان بالا کی حاصل ضرب ۶ ز ہوگا اگر ۲ لا کو

۳ ز ۲ ز

۳ لا مین ضرب کرین تو چونکہ اس صورت مین نشان قوت حرف مشترک لا کا آ اور آ ہی اسیواسطے حاصل

۶ لا

ضرب ۶ لا ہوگا

مثال ۴	مثال ۵	مثال ۶	مثال ۷
۳ لا	— ۷ لا	۵ ز	— ۳ لا ز
۵ لا	۳ لا	۶ —	۵ لا ز
— ۱۵ لا	— ۲۱ لا	— ۳۰ ز	— ۱۵ لا ز

مثال ۸	مثال ۹	مثال ۱۰	مثال ۱۱	مثال ۱۲
۲ لا ز	— ۳ ط لا	۷ ص لا ز	ط ص لا	۱ لا ز
۳ ز لا	۱۵ ط لا	۴ لا ص ز	ص ز لا	۱ لا ز
۶ لا ز	— ۴۵ ط لا	۲۸ ص لا ز	ط ص ز لا	۱ لا ز

مثال ۱۳	مثال ۱۴	مثال ۱۵	مثال ۱۶	مثال ۱۷	مثال ۱۸
ط لا	لا	۴ لا	ص لا	۳ لا	ص لا ز
ط لا	ط لا	۵ لا	ط لا	ط لا	ص لا ز
ط لا	ط لا	۲۰ لا	ص ط لا	۳ ط لا	ص لا ز

مثال ۱۹	مثال ۲۰
ط ز لا	ص لا ز
ط ز لا	ص ز لا
ط ز لا	ص ز لا

جب مضروب اور مضروب فیہ دو مقدار ایسی ہون کہ اون دونو پر جذر ہو تو چاہیئے کہ جو مقدار ین جذر کی اندر ہین اونکو ضرب کرلین اور حاصل ضرب پر نشان جذر کا بنادین

مثال ۱ — مثال ۲ — مثال ۳ — مثال ۴ — مثال ۵

مثال ۶ — مثال ۷ — مثال ۸ — مثال ۹

دوسری صورت یعنی جسوقت مضروب مین بہت رقمین ہون اور مضروب فیہ مین ایک رقم یا بالعکس پس ان دونوحالتونمین یہہ قاعدہ ہی کہ اوس ایک رقم مین سب رقمون کو موافق صورت اول کی ضرب کرکر ایک سطر مین سب کو لکہنا چاہیئے مثلاً ۴ ص لا + ط ر + ۲ لا کو ۴ لا مین ضرب کرین تو ۴ ص لا + ط ر + ۲ لا ان سب کو فہ کو ۴ لا مین ضرب کرنا چاہیئے

۴ لا

یہہ ۱۶ ص لا + ۴ ط لا ر + ۸ لا ۴ حاصل ہوگا

مثال ۲ — مثال ۳ — مثال ۴

مثال ۵ — مثال ۶ — مثال ۷

مثال ۸ — مثال ۹

مثال ۱۰

$$\begin{array}{r} ۳ل^{۲} \\ ۵ل+۶ط-۱۲ \\ \hline ۱۵ل^{۳}+۱۸ط ل^{۲}-۶۰ل \end{array}$$

مثال ۱۱

$$\begin{array}{r} -۶ ک \\ ۲ل ک-ک^{۲}+۷ل^{۲} \\ \hline -۱۲ل ک^{۲}+۶ک^{۳}-۴۲ل^{۲}ک \end{array}$$

مثال ۱۲

$$\begin{array}{r} ۳\sqrt{۸} \\ ۳ل-\sqrt{۸}ل-۱ \\ \hline ۳\sqrt{۸}ل-۳ل-۳\sqrt{۸} \end{array}$$

تیسری صورت یعنی جسوقت مضروب اور مضروب فیہ دونوں مین بہت بہت سی رقمین ہون تو اسوقت یہہ قاعدہ ہی کہ مضروب فیہ کی اول رقم کو مضروب کی ساری رقمونمین ضرب کرکی دوسری صورت کی موافق ایک سطر مین لکھدین اور پھر دوسری رقم کو مضروب فیہ کی ساری رقمونمین ضرب کرکے پہلی سطر کی نیچی ایک مرتبہ چھوڑکر لکھتی چلے جاوین اور علی ہذا القیاس جتنی رقمین ہون سب مین اسیطرح ضرب کرکر لکھتے جاوین اور بعد عمل تمام ہونیکے سب حاصل ضربون کو جمع کرلین یہہ حاصل جمع حاصل ضرب مطلوب ہوگا

مثال ۱

$$\begin{array}{r} ۷ط ل+۲ل-۳ک \\ ۳ل-۲ک \\ \hline ۲۱ط ل^{۲}+۶ل^{۲}-۱۲ل ک \\ -۱۴ط ل ک-۴ل ک+۸ک^{۲} \\ \hline ۲۱ط ل^{۲}-۶ل^{۲}-۱۶ل ک-۱۴ط ل ک+۸ک^{۲} \end{array}$$

مثال ۲

$$\begin{array}{r} ۳ل^{۲}ک-۵ل ک^{۲}-۳ \\ ۴ل ک-۳ل ک \\ \hline ۱۲ل^{۳}ک^{۲}-۲۰ل^{۲}ک^{۲}-۱۲ل ک \\ -۹ل^{۲}ک^{۲}+۱۵ل^{۲}ک^{۲}+۹ل ک \\ \hline -۲ل^{۲}ک^{۲}-۳ل ک \end{array}$$

مثال ۳

$$\begin{array}{r} ل+ک \\ ل+ک \\ \hline ل^{۲}+ک ل \\ +ک ل+ک^{۲} \\ \hline ل^{۲}+۲ک ل+ک^{۲} \end{array}$$

مثال ۴

$$\begin{array}{r} ک-ل \\ ک-ل \\ \hline ک^{۲}-ک ل \\ -ک ل+ل^{۲} \\ \hline ک^{۲}-۲ل ک+ل^{۲} \end{array}$$

مثال ۵

$$\begin{array}{r} ل^{۲}-ک^{۲} \\ ل^{۲}+ک^{۲} \\ \hline ل^{۴}-ل^{۲}ک^{۲} \\ +ل^{۲}ک^{۲}-ک^{۴} \\ \hline ل^{۴}-ک^{۴} \end{array}$$

مثال ۶

$$\begin{array}{r} ط+ل \\ ط-ل \\ \hline ط^{۲}+ط ل \\ -ط ل-ل^{۲} \\ \hline ط^{۲}-ل^{۲} \end{array}$$

مثال ۷

$$\begin{array}{r} ۲ل+۱ \\ ۲ل-۱ \\ \hline ۴ل^{۲}+۲ل \\ -۲ل-۱ \\ \hline ۴ل^{۲}-۱ \end{array}$$

مثال ۸

$$\begin{array}{r} \sqrt{۸}ل+ل^{۲} \\ \sqrt{۸}ل-ل^{۲} \\ \hline ۲+ل^{۳} \\ -ل^{۳}-ل^{۴} \\ \hline ۲-ل^{۴} \end{array}$$

مثال ۹

$$\begin{array}{r} ۲لا ط - لا^۲ \\ ۲لا ط + لا^۲ \\ \hline ۴لا^۲ ط^۲ - ۲ط لا^۳ \\ + ۲لا^۳ ط - لا^۴ \\ \hline ۴لا^۳ ط^۲ - لا^۴ \end{array}$$

مثال ۱۰

$$\begin{array}{r} \sqrt{ط+لا} - لا \\ لا + \sqrt{ط+لا} \\ \hline لا \sqrt{ط+لا} - لا^۲ \\ \hline ط + لا - لا \sqrt{ط+لا} \\ \hline ط + لا - لا^۲ \end{array}$$

مثال ۱۱

$$\begin{array}{r} لا+۱-۲لا-ط \\ ۲لا+ط+لا+۱ \\ \hline ۲لا^۲+۲لا-۴لا^۲-۲ط لا \\ + ط لا + ط - ۲ط لا - ط^۲ \\ + لا^۲ + لا - ۲لا^۲ - ط لا \\ + لا + ۱ - ۲لا - ط \\ \hline -۳لا^۲ + ۲لا - ۴ط لا - ط^۲ + ۱ \end{array}$$

مثال ۱۲

$$\begin{array}{r} لا^۲ + ۱ - ط - لا \\ ط + لا + ۱ + لا^۲ \\ \hline ط لا^۲ + ط - ط^۲ - ط لا \\ + لا^۳ + لا - ط لا - لا^۲ \\ + لا^۳ + لا^۲ - ط لا^۲ - لا^۳ \\ \hline -ط^۲ - ۲ط لا + لا^۴ + ۱ + لا^۲ \end{array}$$

مثال ۱۳

$$\begin{array}{r} ۱ + لا + لا^۲ \\ ۱ + لا + لا^۲ \\ \hline ۱ + لا + لا^۲ \\ لا + لا^۲ + لا^۳ \\ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ \\ \hline ۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۲لا^۳ + لا^۴ \end{array}$$

مثال ۱۴

$$\begin{array}{r} لا^۲ + لا^۳ \\ لا^۲ + لا^۳ \\ \hline لا^۴ + لا^۵ \\ + لا^۵ + لا^۶ \\ \hline ۴لا^۵ \end{array}$$

مثال ۱۵

$$\begin{array}{r} \sqrt{ط+لا} - لا^۲ \\ \sqrt{ط+لا} + لا^۲ \\ \hline ط + لا - لا^۲ \sqrt{ط+لا} \\ + لا^۲ \sqrt{ط+لا} - لا^۴ \\ \hline ط + لا - لا^۴ \end{array}$$

مثال ۱۶ ضرب کرو $لا^۲ + ۲لا ی + ی^۲$ کو $لا - ی$ جواب $لا^۳ + لا^۲ ی - لا ی^۲ - ی^۳$

مثال ۱۷ ضرب کرو $ط^۲ - ۲ط ص + ۴ط ص$ کو $ط^۲ - ۴ط ص + ۲ص$ مین

جواب $ط^۴ - ۲۲ط^۳ ص + ۱۲ط^۲ ص^۲ - ۶ط ص^۳ - ۴ط^۳ ص + ۸ط ص^۲$

مثال ۱۸ ضرب کرو $(لا - ط)$ کو $(لا - د)$ مین اور حاصل ضرب کو $(لا - ۱)$ مین

جواب لا^{۲} − (ط + د + ۱) لا^{۲} + ۱ د ط (ط + د) لا^{۲} − ۱ د ط

جس مقدار کو فی نفسہ ضرب کرتے ہین تو ظاہر ہی کہ حاصل ضرب اوس مقدار کا مجذور ہوتا ہی مثلاً لا کو لا مین ضرب کرین تو لا^{۲} مجذور لا کا ہی اسیطرح لا + د کو لا + د مین ضرب کرین تو (لا^{۲} + ۲ لا د + د^{۲}) مجذور لا + د کا ہی اگر (لا^{۲} + ۲ لا د + د^{۲}) کو لا + د مین ضرب کرین تو ظاہر ہی کہ حاصل ضرب مکعب (لا + د) کا ہوگا اور اسیطرح اگر اس مکعب کو پھر (لا + د) مین ضرب کرین تو چوتھی مرتبہ کا صعود (لا + د) کا حاصل ہوگا اور علی ہذا القیاس پانچوین مرتبہ کا صعود اور چھٹی مرتبہ وغیرہ کا صعود ضرب دینے سے حاصل ہوسکتا ہی لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ اسطرح کی ضرب مین دشواری ہوتی ہی کیونکہ بہت سی مقدارون کے ضرب کرنے مین دقت واقع ہوتی ہی اسیواسطے نیوٹن صاحب نی ایک آسان قاعدہ ایسا نکالا ہی کہ جتنی مرتبہ کا صعود چاہین بغیر ضرب کرنے کی حاصل ہوسکتا ہی پس ہم وہ قاعدہ لکھتے ہین اور دلیل اوسکی آگے بیان کرینگی وہ قاعدہ یہہ ہی کہ اگر دو مقدارون کے مجموعہ یا حاصل تفریق کا صعود لینا ہو تو جتنی مرتبہ کا صعود لینا ہی اوسکی موافق مجموعہ یا حاصل تفریق پر عدد لکھین مثلاً (لا + د) کا مجذور کیا چاہتی ہین یعنے اسکی دو مرتبہ کا صعود لیا چاہتے ہین پس عدد (۲) کا اسیطرح (لا + د)^{۲} لکھنا چاہیئے (لا + د)^{۲} = لا^{۲} + ۲ لا د + د^{۲} اور اسکی اگلی مساوات کی علامت لکھکر جو حرف کہ اول ہی اوسکا نشان قوت وہی عدد رکھنا چاہیئے جو کل پر ہی بعد اسکی دیکھنا چاہئی کہ جن مقدارون کا صعود لینا اونکی بیچمین علامت + کی ہی یا علامت نفی کی پس اگر علامت + ہی تو اول حرف کے بعد علامت + کی لکھکر وہ عدد لکھین جو نشان قوت ہی اور اس عدد کی اگلی اول حرف کو لکھین مگر اسطرح پر نشان قوت اول کی نسبت بقدر ۱ کی کم ہو بعد اسکی دوسرا حرف ملاکر موافق ضرب کی لکھدین یہہ دوسرا جز ہوگا پھر تیسری جز کی واسطے یہہ قاعدہ کرین کہ دوسرے جز کی سر کو اول حرف کی نشان قوت مین ضرب کرین اور حاصل ضرب کو جزون کی تعداد پر کہ اس صورت مین ہوگی تقسیم کرین اور خارج قسمت کو تیسری جز کا سر بناوین بعد اسکی اول حرف کا نشان قوت پہلی کی نسبت بقدر ۲ کی کم کرکر لکھین اور اسکی دوسری حرف کا نشان قوت پہلی سی بقدر ۱ کی زیادہ لکھین اور علی ہذا القیاس جو بھی جز واسطی ہو یہی قاعدہ کرین غرض اول حرف کی قوت گھٹاتی جاوین اور دوسری حرف کی قوت بڑہاتی جاوین اور اگر اونکی بیچمین علامت جمع ہو تو سب جزون کی اول مین علامت جمع ہوگی اور اگر اونکی بیچمین علامت نفی ہی تو اول پر + دوسری پر − تیسری پر + چوتھی پر − اور علی ہذا القیاس اب ہم اس قاعدہ کی مثالین لکھتے ہین مثلاً ہم چاہتے ہین کہ اس قاعدہ کی موافق (لا + د) کا تین مرتبہ کا صعود لین تو اسطرح (لا + د)^{۳} = لا^{۳} + ۳ لا^{۲} د + ۳ لا د^{۲} + د^{۳}

لکھنا چاہیئے پس علامت مساوات کی لا کا نشان وہ لکھا جو کل پر تھا یعنے لا^{۳} لکھا بعد اسکی + کی علامت

لکھ کر نشان قوت یعنی عدد ۳ کا لکھا اور اسکی اگلی نون حرف کا نشان قوت اول سی ایک کم لکھا یعنی لا لکھا پھر ۳ لا کے ساتھ دوسرے حرف کو ضرب دی کر لکھ دیا دوسرا جزو ۳ لا د بعد اسکی علامت + کی لکھ کر دوسری جز کی سر کو جو ۳ ہی لا کی نشان قوت میں جو ۲ ضرب کیا تو حاصل ضرب ۶ ہوا اسکو تعداد جزون پر کہ ۳ ہی تقسیم کیا خارج قسمت ۳ ہوا اس ۳ تیسری جز کا سر بنایا اور اسکی اگلی لا کے نشان قوت ایک کم کر کی لکھا یعنے ۲ لا لکھا اور پھر دوسری حرف نشان قوت بقدر ایک کے زیادہ کر کی اسکی ساتھ لکھدیا پس ۳ لا د ہوا بعد جو تھی جز کی لیئے بھی یہی قاعدہ کیا یعنی تیسری جز کی سر کو جو ۳ ہی نشان قوت لا میں جو آہی ضرب کیا تو حاصل ضرب ۳ ہوا اور سکو تعداد جزون پر جو تین ہی تقسیم کیا خارج قسمت آہوا اور لا کا نشان قوت کم کیا تو لا بالکل زائل ہوگیا اسوا فقط د کا نشان قوت بقدر آکی زیادہ کر کے اور اوسی آہن ضرب کر کے لکھ دیا یہہ قاعدہ بہت مفید ہی اسکو خوب یاد رکھنا چاہیئے

مثال

$$(لا+د)^{۳} = لا^{۳} + ۳ لا^{۲} د + ۳ لا د^{۲} + د^{۳}$$

مثال

$$(لا+د)^{۵} = لا^{۵} + ۵ لا^{۴} د + ۱۰ لا^{۳} د^{۲} + ۱۰ لا^{۲} د^{۳} + ۵ لا د^{۴} + د^{۵}$$

مثال

$$(لا-د)^{۳} = لا^{۳} - ۳ لا^{۲} د + ۳ لا د^{۲} - د^{۳}$$

مثال

$$(لا-د)^{۴} = لا^{۴} - ۴ لا^{۳} د + ۶ لا^{۲} د^{۲} - ۴ لا د^{۳} + د^{۴}$$

مثال

$$(لا+۱)^{۲} = لا^{۲} + ۲ لا + ۱$$

مثال

$$(لا+۱)^{۴} = لا^{۴} + ۴ لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۴ لا + ۱$$

مثال

$$(۱-لا)^{۳} = ۱ - ۳ لا + ۳ لا^{۲} - لا^{۳}$$

مثال

$$(۲ لا+۱)^{۳} = ۸ لا^{۳} + ۱۲ لا^{۲} + ۶ لا + ۱$$

مثال

$$(۲لا-۱)^۴ = ۱۶لا^۴ - ۳۲لا^۳ + ۲۴لا^۲ - ۸لا + ۱$$

چوتھی فصل قاعدہ تقسیم

جانا چاہیئے کہ جس رقم کو تقسیم کرتے ہین اوسی مقسوم کہتے ہین اور جس رقم پر تقسیم کرتے ہین اوسی مقسوم علیہ کہتی ہین تقسیم مین کئی صورتین ہین پہلی صورت یہہ ہی کہ مقسوم اور مقسوم علیہ دو نو ایک ایک رقم ہون پس اس صورت مین یہہ قاعدہ ہی کہ مقسوم کو دو خطون متقوس مثلا) (انکی درمیانین لکھہ دین اور مقسوم علیہ کو ایک طرف خط کی لکھہ کر علامتو نکا لحاظ کرین اور خارج قسمت پر ایسی علامت لکھین کہ اگر اوسکو مقسوم علیہ مین ضرب کرین تو حاصل ضرب پر وہ علامت ہو جو مقسوم پر ہی بعد اسکے مقسوم کی سر کو مقسوم علیہ کی سر پر تقسیم کر کے خارج قسمت کو اوس علامت کی آگی لکھہ دین بعد اسکے جو حرف ایسا ہو کہ مقسوم مین ہی اور مقسوم علیہ مین نہین اوسکو خارج قسمت مین عدد کی آگے لکھدین اور جو حرف مقسوم اور مقسوم علیہ دو نو مین مشترک ہو اوسکو خارج قسمت مین نہ لکھین بعد اسکے خارج قسمت کو مقسوم علیہ مین ضرب دی کر مقسوم کی نیچے لکھین اور دو نو مین تفریق کر دین اگر باقی نہ رہی تو تقسیم پوری ہے اور جو کچھہ باقی رہی اوسکو مقسوم علیہ کی اوپر لکھدین اور اگر کوئی ایسا حرف ہو کہ مقسوم علیہ مین ہی اور مقسوم مین نہین تو اس صورت مین تقسیم نہین ہو سکتی یہہ صورت کسور مین داخل ہو جاتی ہی

مثال ۱

$$\left.\begin{array}{l} ۴ط \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} ۲۰ط لا \\ \underline{۲۰ط لا} \end{array} \left(\begin{array}{l} ۵لا \\ \\ \end{array}\right.$$

مثلا ۲۰ ط لا کو ۴ ط پر تقسیم کیا چاہتے ہین تو اوسکو اسطرح لکھہ دین جسطرح مثال (۱) ہی اب چونکہ علامتین مقسوم اور مقسوم علیہ دو نو کی + ہین اسیواسطی خارج قسمت پر بھی علامت + ہوگی بعد اسکی مقسوم کی سر کو جو ۲۰ ہی مقسوم علیہ کے سر پر جو ۴ ہی تقسیم کیا تو خارج قسمت ۵ ہوا پھر دیکھا کہ ط دو نون مین مشترک ہی اسکو خارج قسمت مین نہ لکھا اور لا ایسا حرف ہی کہ مقسوم مین ہی اور مقسوم علیہ مین نہین اسواسطی اوسکو خارج قسمت مین لکھدیا پھر ۵ لا کو ۴ ط مین ضرب کیا تو ۲۰ ط لا ہوئی اسکو مقسوم علیہ سے تفریق کیا تو کچھہ باقی نہ رہا

مثال ۲

$$\left.\begin{array}{l} -۵ص لا \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} ۵ ۲ط ص لا \\ \underline{۵ ۲ط ص لا} \end{array} \left(\begin{array}{l} -۵ط \\ \\ \end{array}\right.$$

مثال ۳

$$\left.\begin{array}{l} -۶لا \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} ۱۸ط لا \\ \underline{۱۸ط لا} \end{array} \left(\begin{array}{l} -۳ط^۲ \\ \\ \end{array}\right.$$

مثال ۴

$$\left.\begin{array}{l} ۴ \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} -۱۲لا \\ \underline{-۱۲لا} \end{array} \left(\begin{array}{l} -۳لا \\ \\ \end{array}\right.$$

مثال ۵

$$\left.\begin{array}{l} -۶لا^۲ \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} -۲۴ص لا^۲ \\ \underline{-۲۴ص لا^۲} \end{array} \left(\begin{array}{l} +۴ص \\ \\ \end{array}\right.$$

مثال ۶

$$\left.\begin{array}{l} ۶ر \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} -۳۰ص ر \\ \underline{-۳۰ص ر} \end{array} \left(\begin{array}{l} -۵ص - ۳لا^۲ \\ \\ \end{array}\right.$$

مثال ۷

$$\left.\begin{array}{l} -۶ر^۲ \\ \\ \end{array}\right) \begin{array}{l} ۱۸لا^۲ ر^۲ \\ \underline{۱۸لا^۲ ر^۲} \end{array} \left(\begin{array}{l} -۳لا^۲ ر^۲ \\ \\ \end{array}\right.$$

اگر مقسوم اور مقسوم علیہ مین کوئی ایسا حرف مشترک ہو جسپر کچھ نشان قوت یا یا جاوے اور جو حرف مقسوم مین ہی اوسکا نشان قوت زیادہ ہو تو چاہیئے کہ بڑی نشان قوت مین سے کم کو نکال کر باقی عدد کو نشان قوت اوسی حرف کا بنا کر خارج قسمت مین لکھدین

مثال ۸

$$\frac{۸\,لا^{۳}}{۸\,لا^{۳}} \Big) \frac{۸\,لا^{۳}}{۲\,لا} \Big(۴\,لا$$

اس صورت مین مقسوم علیہ لا کا ۳ نشان قوت ہی اور مقسوم علیہ مین لا کا ۲ نشان قوت ہی پس حاصل تفریق اسکا آ ہوا اور اوسکو نشان قوت ۱ کا بنایا پس لا ہوا اور اوسکو خارج قسمت مین ۴ کے آگے لکھا

مثال ۹

$$\frac{۲۸\,لا^{۵}\,ک^{۲}}{۲۸\,لا^{۵}\,ک^{۲}} \Big) \frac{۲۸\,لا^{۵}\,ک^{۲}}{۴\,لا^{۲}\,ک^{۲} * ۳\,لا^{۲}\,ک} \Big(۷\,لا^{۲}\,ک$$

مثال ۱۰

$$\frac{۱۵\,لا^{۴}\,ک^{۲}}{۱۵\,لا^{۴}\,ک^{۲}} \Big) \frac{۱۵\,لا^{۴}\,ک^{۲}}{۵\,ک^{۲} * ۶\,ص\,لا} \Big(۳\,ص\,لا^{۲}\,ک^{۲}$$

مثال ۱۱

$$\frac{۱۸\,ص\,لا^{۳}\,ک^{۲}}{۱۸\,ص\,لا^{۳}\,ک^{۲}} \Big) \frac{۱۸\,ص\,لا^{۳}\,ک^{۲}}{۳\,ص\,لا^{۲}\,ک^{۲}} \Big(۶\,لا^{۱}\,ک$$

مثال ۱۲

$$\frac{لا^{۲}}{لا^{۲}} \Big) \frac{لا^{۲}}{۱ * ص\,لا} \Big(لا^{۲}$$

مثال ۱۳

$$\frac{ط\,ص\,لا}{ط\,ص\,لا} \Big) \frac{ط\,ص\,لا}{ط\,ص * ص\,لا} \Big(۱$$

مثال ۱۴

$$\frac{-۳\,ص\,لا^{۲}}{-۳\,ص\,لا^{۲}} \Big) \frac{-۳\,ص\,لا^{۲}}{-۳\,ص\,لا} \Big(۱$$

مثال ۱۵

$$\frac{ص\,ک^{۲}\,لا^{۵}}{ص\,ک^{۲}\,لا^{۳}} \Big) \frac{ص\,ک^{۲}\,لا^{۵}}{-ص\,ک^{۲}\,لا^{۲} * ط\,لا^{۳}\,ک^{۲}} \Big(-ک\,لا^{۳}$$

مثال ۱۶

$$\frac{-ط\,لا^{۴}\,ک^{۲}}{-ط\,لا^{۴}\,ک^{۲}} \Big) \frac{-ط\,لا^{۴}\,ک^{۲}}{-لا^{۲} * -۵\,ص\,لا} \Big(-لا^{۲}$$

مثال ۱۷

$$\frac{۵\,ص\,لا}{۵\,ص\,لا} \Big) \frac{۵\,ص\,لا}{-۱ * -۵\,ص\,لا} \Big(-۱$$

مثال ۱۸

$$\frac{۳\,(ط-لا)}{۳\,(ط-لا)} \Big) \frac{۳\,(ط-لا)}{۳ * ۵\,(ط+لا)^{\frac{۱}{۲}}} \Big((ط-لا)$$

مثال ۱۹

$$\frac{۵\sqrt{ط+لا}}{۵\sqrt{ط+لا}} \Big) \frac{۵\sqrt{ط+لا}}{۱ * ط\,لا} \Big(\sqrt{ط+لا}$$

مثال ۲۰

$$\frac{ط\,لا^{\frac{۲}{۳}}}{ط\,لا^{\frac{۲}{۳}}} \Big) \frac{ط\,لا^{\frac{۲}{۳}}}{ط\,لا^{\frac{۲}{۳}}} \Big(۱$$

مثال ۲۱

$$\frac{۶\,ص^{\frac{۳}{۲}}\,لا^{\frac{۳}{۲}}}{۶\,ص^{\frac{۳}{۲}}\,لا^{\frac{۳}{۲}}} \Big) \frac{۶\,ص^{\frac{۳}{۲}}\,لا^{\frac{۳}{۲}}}{۲\,ص^{\frac{۱}{۲}}\,لا^{\frac{۱}{۲}} + لا^{\frac{۱}{۲}}\,ص^{\frac{۱}{۲}}} \Big(۳\,ص\,لا$$

مثال ۲۲

$$\frac{لا^{\frac{۳}{۲}}\,ص^{\frac{۳}{۲}}}{لا^{\frac{۳}{۲}}\,ص^{\frac{۳}{۲}}} \Big) \frac{لا^{\frac{۳}{۲}}\,ص^{\frac{۳}{۲}}}{لا^{\frac{۳}{۲}}\,ص^{\frac{۱}{۲}} * لا^{\frac{۱}{۲}}\,ص^{\frac{۱}{۲}}} \Big(لا^{\frac{۱}{۲}}\,ص^{\frac{۱}{۲}}$$

مثال ۲۳

$$\frac{-لا^{\frac{۳}{۲}}\,ص^{\frac{۳}{۲}}}{-لا^{\frac{۳}{۲}}\,ص^{\frac{۳}{۲}}} \Big) \frac{-لا^{\frac{۳}{۲}}\,ص^{\frac{۳}{۲}}}{-لا^{\frac{۱}{۲}}\,ص^{\frac{۱}{۲}}} \Big(لا^{\frac{۱}{۲}}\,ص^{\frac{۱}{۲}}$$

مثال ۲۴

$$\frac{۱۶\,ط^{۲}\,لا^{۴}}{ط^{۲}\,لا^{۴}} \Big) \frac{۱۷\,ط^{۲}\,لا^{۴}}{۴\,ط\,لا^{۳} + ۴\,ط^{۲}\,لا^{۳}} \Big(۴\,ط\,لا^{۳}$$

اس صورت مین ط لا باقی ہی اسکو نیچے مقسوم علیہ کی لکھہ کر کسر کی موافق لکھہ دیا

مثال ۲۵

$$(۲ص لا)\overline{\big)\ ۳ص لا^{۳} + ص لا^{۲} + \frac{ص لا^{۳}}{۲ص لا} * - ۴لا\ }\ \big(\ ص لا^{۲} + \frac{ص لا^{۳}}{۲ص لا} - ۴لا$$

$$۲ص لا^{۳}$$

$$ص لا^{۳}$$

مثال ۲۶

$$(-۴لا^{۲}ک)\overline{\big)\ ۱۸لا^{۳}ک^{۲} + ۱۶لا^{۳}ک^{۲} + \frac{۲لا^{۳}ک^{۲}}{۴لا}\ }\ \big(\ -۴لا^{۲}ک + \frac{۲لا^{۳}ک^{۲}}{۴لا}$$

$$۲لا^{۳}ک^{۲}$$

مثال ۲۷

$$(۵لا^{۳}ک)\overline{\big)\ -۲۷لا^{۴}ک^{۴} + ۲۵لا^{۳}ک^{۴} + \frac{۲لا^{۳}ک^{۴}}{۵لا^{۳}ک}\ }\ \big(\ -۵ک^{۳} - \frac{۲لا^{۳}ک^{۴}}{۵لا^{۳}ک}$$

$$-۲لا^{۳}ک^{۴}$$

اب اگر مقسوم مین بہت رقمین ہون اور مقسوم علیہ مین ایک رقم ہو تو چاہیئے کہ موافق قاعدہ اول کے ہر رقم مقسوم کو مقسوم علیہ پر تقسیم کرین اور خارج قسمت دوسری طرف لکھتے جاوین

مثال ۱

$$(۲لا)\overline{\big)\ ۶لا^{۳} + ۴لا^{۲}\ }\ \big(\ ۳لا^{۲} + ۲لا$$

$$۶لا^{۳}$$

$$+ ۴لا^{۲}$$

$$۴لا^{۲}$$

مثال ۲

$$(۳لا - ۱)\overline{\big)\ ۱۸لا^{۳} - ۱۲لا^{۲} + ۳لا\ }\ \big(\ ۶لا^{۲} + ۴لا - ۱$$

$$۱۸لا^{۳}$$

$$- ۱۲لا^{۲}$$

$$- ۱۲لا^{۲}$$

$$+ ۳لا$$

$$+ ۳لا$$

مثال ۳

$$(-۴لا^{۲}ک)\overline{\big)\ ۱۶لا^{۳}ک^{۳} - ۱۲لا^{۳}ک^{۲} + ۸لا^{۲}ک + ۴لا^{۲}ک\ }\ \big(\ -۴لا^{۲}ک^{۲} + ۳لا^{۲}ک - ۲لا - ۱$$

$$۱۶لا^{۳}ک^{۳}$$

$$- ۱۲لا^{۳}ک^{۲}$$

$$- ۱۲لا^{۳}ک^{۲}$$

$$۸لا^{۲}ک$$

$$۸لا^{۲}ک$$

$$۴لا^{۲}ک$$

$$۴لا^{۲}ک$$

اگر مقسوم اور مقسوم علیہ دونون مین بہت بہت رقمین ہون تو چاہیئے کہ اول دونون کو اس ترتیب سے لکھین کہ جس جزو مین نشان قوت کسی حرف کا سب سے بڑا ہو اوس جز کو اول اور جس جزو مین نشان قوت اوسی

حرف کا پہلے جزسی ایک کم ہو اوسی دوسرا جز بنا دین اور علی ہذا القیاس ترتیب بتان تو کسی حرف کی لکھین اور یہہ بھی رعایت رکھین کہ جس حرف کی ترتیب کی موافق مقسوم لکھا ہی اوسی کی ترتیب کی موافق مقسوم علیہ بھی لکھا جاے بعد اسکی موافق قواعد گذشتہ کی اول رقم مقسوم کو اول رقم مقسوم علیہ پر تقسیم کرین اور خارج قسمت کو ایک جگہہ لکھہ کر تمام مقدارون مقسوم علیہ مین ضرب کرین اور حاصل ضرب کو مقسوم کی نیچی لکھہ کر تفریق کرین جو باقی بچے اوسکی ساتھہ ایک اور رقم مقسوم مین سے وتار کر اس باقی کے اول کو مقسوم علیہ کی اول رقم پر تقسیم کرین اوپر خارج قسمت کو تمام رقمون مقسوم علیہ مین ضرب کر کر اور حاصل ضرب کو مقسوم کے نیچی لکھہ کر تفریق کرین اور اور اخیر تک یہی عمل جاری رکھین خارج قسمت معلوم ہو جاویگا

مثال ۱

$$(ا + ی) \quad ا^۲ + ۲ای + ی^۲ \quad (ا + ی$$

$$ا^۲ + ای$$

$$ای + ی^۲$$

$$ای + ی^۲$$

×

مثال ۲

$$(ا - ی) \quad ا^۲ - ۲ای + ی^۲ \quad (ا - ی$$

$$ا^۲ - ای$$

$$- ای + ی^۲$$

$$- ای + ی^۲$$

×

مثال ۳

$$(ا + ی) \quad ا^۳ + ۳ا^۲ی + ۳ای^۲ + ی^۳ \quad (ا^۲ + ۲ای + ی^۲ \quad * \quad ا - ی$$

$$ا^۳ + ا^۲ی$$

$$+ ۲ا^۲ی + ۳ای^۲$$

$$۲ا^۲ی + ۲ای^۲$$

$$ای^۲ + ی^۳$$

$$ای^۲ + ی^۳$$

×

مثال ۴

$$(ا - ی) \quad ا^۳ - ۳ا^۲ی + ۳ای^۲ - ی^۳ \quad (ا^۲ - ۲ای + ی^۲$$

$$ا^۳ - ا^۲ی$$

$$- ۲ا^۲ی + ۳ای^۲$$

$$- ۲ا^۲ی + ۲ای^۲$$

$$ای^۲ - ی^۳$$

$$ای^۲ - ی^۳$$

×

مثال ۵

$$(ط - ا) \quad ط^۵ - ۵ط^۴ا + ۱۰ط^۳ا^۲ - ۱۰ط^۲ا^۳ + ۵طا^۴ - ا^۵ \quad (ط^۴ - ۴ط^۳ا + ۶ط^۲ا^۲ - ۴طا^۳ + ا^۴$$

$$ط^۵ - ط^۴ا$$

$$- ۴ط^۴ا + ۱۰ط^۳ا^۲$$

$$- ۴ط^۴ا + ۴ط^۳ا^۲$$

$$۶ط^۳ا^۲ - ۱۰ط^۲ا^۳$$

$$۶ط^۳ا^۲ - ۶ط^۲ا^۳$$

$$- ۴ط^۲ا^۳ + ۵طا^۴$$

$$- ۴ط^۲ا^۳ + ۴طا^۴$$

$$طا^۴ - ا^۵$$

$$طا^۴ - ا^۵$$

×

مثال ۶

$$(۵ل^۳ + ۴ل^۲ + ۳ل + ۲) \div (۵ل^۳ - ۴ل^۲)$$

$$۵ل^۳ + ۲ل^۲ - ل^۲ - ۸ل$$
$$۵ل^۳ - ۲۰ل^۲$$
$$+ ۲۰ل^۲ - ل^۲$$
$$۲۰ل^۲ - ۸ل^۲$$
$$۱۵ل^۲ - ۱۲ل$$
$$۱۵ل^۲ - ۱۲ل$$
$$+ ۱۰ل - ۸$$
$$۱۰ل - ۸$$

مثال ۷

$$(ل^۳ - ۲ل^۲ ك + ل ك^۲ - ك^۳) \div (ل^۲ + ك^۲)$$

$$ل^۲ + ك^۲$$
$$ل - ۲ك$$
$$- ۲ل^۲ ك - ك^۳$$
$$- ۲ل^۲ ك - ۲ك^۳$$
$$+ ل ك^۲ - ك^۳$$
$$+ ل ك^۲ + ك^۳$$
$$- ۲ك^۳ - ك^۳$$
$$- ۲ك^۳ - ك^۳$$
×

مثال ۸

$$(ل^۳ - ك^۳) \div (ل + ك) * \frac{۲ك^۳}{ل + ك} - ل^۲ + ل ك + ك^۲$$

$$ل^۳ + ل^۲ ك$$
$$- ل^۲ ك - ك^۳$$
$$- ل^۲ ك - ل ك^۲$$
$$+ ل ك^۲ - ك^۳$$
$$+ ل ك^۲ + ك^۳$$
$$- ۲ك^۳$$

مثال ۹

$$(ل - ۱) \div (ل^۲ - ۲ل + ۱) * (ل - ۱)$$

$$ل - ۱$$
$$- ل + ۱$$
$$- ل + ل^۲$$
×

مثال ۱۰

$$(ل - ۲) \div (ل^۲ - ۴ل + ۴) * (ل - ۲)$$

$$ل - ۲$$
$$- ۲ل + ل^۲$$
$$- ۲ل + ل$$
×

۱۱ تقسیم کرو $ل^۳ + ۳ل^۲ ص + ۳ل ص^۲ + ص^۳$ کو $ل + ص$ پر

جواب $لا^۳ + ۳لا^۲ص + ۳لاص^۲ + ص^۳$

۱۲ تقسیم کرو $لا^۴ + ۸لا^۳ + ۲۴لا^۲ + ۳۲لا + ۱۶$ کو $لا + ۲$ پر

جواب $لا^۳ + ۶لا^۲ + ۱۲لا + ۸$

۱۳ تقسیم کرو $لا^۵ - ط^۵$ کو $لا - ط$ پر جواب $لا^۴ + لا^۳ط + لا^۲ط^۲ + لاط^۳ + ط^۴$

۱۴ تقسیم کرو $۶لا^۳ + ۹لا^۲ - ۱۵لا$ کو $۳لا - ۵$ پر جواب $۲لا^۲ + ۳لا + ۵$

۱۵ تقسیم کرو $۹لا^۶ - ۶۴لا^۵ + ۹۵لا^۴ + ۱۵۰لا^۳ - ۴۷لا^۲ - ۳۰لا$ کو $لا^۲ - ۴لا - ۵$ پر

جواب $۹لا^۴ - ۱۰۰لا^۳ + ۵۰لا^۲ + ۳۰لا$

۱۶ تقسیم کرو $لا - ۱$ کو $لا - ۱$ پر جواب $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$ لانہایت

مثال ۱۷

$$\left(\tfrac{۳}{۴}لا - ۲\right) \Big) لا^۳ - \tfrac{۱۳}{۴}لا^۲ + لا + \tfrac{۳}{۴}لا - ۲ \Big(\tfrac{۴}{۳}لا^۲ - \tfrac{۱}{۲}لا + ۱$$

$$لا^۳ - \tfrac{۶}{۴}لا^۲$$

$$- \tfrac{۷}{۴}لا^۲ + لا$$

$$- \tfrac{۷}{۴}لا^۲ + لا$$

$$\tfrac{۳}{۴}لا - ۲$$

$$\tfrac{۳}{۴}لا - ۲$$

مثال ۱۸

$$لا + ص \Big) لا \left(۱ - \tfrac{ص}{لا} + \tfrac{ص^۲}{لا^۲} - \tfrac{ص^۳}{لا^۳} + \tfrac{ص^۴}{لا^۴} \text{ وغیرہ} * لا - ص\right) \Big(۱ + \tfrac{ص}{لا} + \tfrac{ص^۲}{لا^۲} + \tfrac{ص^۳}{لا^۳} + \text{وغیرہ}$$

$$لا + ص$$

$$- ص$$

$$- ص - \tfrac{ص^۲}{لا}$$

$$\tfrac{ص^۲}{لا}$$

$$\tfrac{ص^۲}{لا} + \tfrac{ص^۳}{لا^۲}$$

$$- \tfrac{ص^۳}{لا^۲}$$

$$- \tfrac{ص^۳}{لا^۲} - \tfrac{ص^۴}{لا^۳}$$

$$\tfrac{ص^۴}{لا^۳}$$

$$\tfrac{ص^۴}{لا^۳} + \tfrac{ص^۵}{لا^۴}$$

$$- \tfrac{ص^۵}{لا^۴}$$

مثال ۱۹

$$لا - ص \Big) لا \left(۱ - \tfrac{ص}{لا} - \tfrac{ص^۲}{لا^۲} - \tfrac{ص^۳}{لا^۳} - \tfrac{ص^۴}{لا^۴} \text{ وغیرہ} * لا + ص\right) \Big(۱ - \tfrac{ص}{لا} - \tfrac{ص^۲}{لا^۲} - \tfrac{ص^۳}{لا^۳} - \text{وغیرہ}$$

$$لا - ص$$

$$ص$$

$$ص - \tfrac{ص^۲}{لا}$$

$$\tfrac{ص^۲}{لا}$$

$$\tfrac{ص^۲}{لا} - \tfrac{ص^۳}{لا^۲}$$

$$\tfrac{ص^۳}{لا^۲}$$

$$\tfrac{ص^۳}{لا^۲} - \tfrac{ص^۴}{لا^۳}$$

$$\tfrac{ص^۴}{لا^۳}$$

تقسیم کرو ۱ کو ۱+لا پر جواب ۱−لا+لا²−لا³+ وغیرہ

تقسیم کرو ۲ کو ۲−لا پر جواب ۱+½لا+¼لا²+⅛لا³+ وغیرہ

تقسیم کرو ۳ کو ۳+لا پر جواب ۱−⅓لا+⅑لا²−/۲۷لا³+ وغیرہ

تقسیم کرو ۴ کو ۴−لا پر جواب ۱+¼لا+/۱۶لا²+/۶۴لا³+ وغیرہ

دوسرا باب کسور کی قاعدی پہلی اختصار وغیرہ

جانا چاہئی کہ کسور مین دو مقدار ہوتی ہین ایک تو خط عرضی کی اوپر اور ایک نیچی اوپر کی مقدار کو شمار کنندہ کہتی ہین اور نیچی کی مقدار کو نسب نما کہتے ہین مثلاً ط/ی مین ط شمار کنندہ ہی اور ی نسب نما ہی اسیطرح ۲لا+۱/۳لا−۲ مین لا+۱ شمار کنندہ ہی اور ۳لا−۲ نسب نما علی ہذا القیاس ۱/لا مین لا شمار کنندہ ہی اور نسب نما بھی ہر صورت کا ہی یہہ بھی جانا چاہئے کہ کسور مین شمار کنندہ اور نسب نما سی یہہ مراد ہوتی ہی کہ شمار کنندہ نسب نما پر تقسیم کیا ہوا ہی اگر ایک کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین تبدیل کیجائین تو کچھ خلل واقع نہین ہوتا مثلاً ۱/لا ایک کسر ہی اور ظاہر ہی کہ اسمین شمار کنندہ اور نسب نما دو نو مثبت ہین پس اگر اسکے شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرین اسطرح ۱) لا ۱ (لا تو مثبت لا خارج قسمت ہوتا ہی اب اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین بدلین یعنے اسطرح −۱/−لا لکھین تو اس صورت مین بھی اگر شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرین اسطرح −۱) −لا ۱ (لا تو بھی مثبت لا خارج قسمت ہوتا ہی یہان سے معلوم ہوا کہ ۱/لا اور −۱/−لا دو نو ایک مقدار کی برابر ہین پس جب یہہ بات معلوم ہوئی کہ کسر ۱/لا بعد تبدیلی علامت کی بھی اوسی مقدار کے برابر رہی جسکی پہلی تھی تو ثابت ہوا کہ علامت بدلنے سے کسر مین فرق نہین آتا اس صورت مین شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین یکسان نہین اگر مختلف ہون تو بھی ظاہر ہی کہ ۱/لا = − ۱/لا اور ۱/لا = − ۱/لا پس عموماً ثابت ہوگیا کہ کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتین بدلین تو کچھ فرق نہین آتا اگر کسی کسر کی شمار اور نسب نما کو ایک ہی مقدار مین ضرب کرین تو قیمت مین کچھ فرق نہین آتا اسواسطے کہ جب شمار کنندہ اور نسب نما دو نو کو ایک ہی مقدار مین ضرب کیا تو ظاہر ہی کہ دو نو ایک ہی نسبت پر زیادہ ہونگی پس جو نسبت کہ اونمین پہلی تھی وہی بعد ضرب کرنیکی رہیگی یعنی ایکمقدار مین ضرب کرنی سے کچھ فرق نہین آتا

— اگر کسی کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی مقدار پر تقسیم کرین تو بھی کچھ فرق نہین آتا اسواسطے کہ جب ایک ہی مقدار پر دو نو کو تقسیم کیا تو ظاہر ہی کہ دو نو ایک ہی نسبت پر گھٹینگے پس جو نسبت کہ اونمین پہلی تھی وہی بعد تقسیم کی بھی رہیگی یعنی تقسیم کرنی سے کچھ فرق نہین آتا ان دو نو صورتون کے ثبوت کو مقادیر جبریہ مین اسطرح لکھتے ہین اول فرض کرو کہ ۱/لا ایک کسر ہی اگر اسکی شمار کنندہ اور نسب نما کو کسی مقدار منحط مین ضرب

تو $\frac{ط^{۲}}{ط^{۲}}$ جواب ہوگا پس اسکی شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرین تو خارج قسمت $\frac{ل^{۲}}{ل^{۲}}$ ہوتا ہی یعنی $\frac{ط^{۲}}{ط^{۲}} = \frac{ل^{۲}}{ل^{۲}}$ پس معلوم ہوا کہ $\frac{ل^{۲}}{ل^{۲}}$ ایک کسر ہی جب اسکی شمار کنندہ اور نسب نما کو ط مین ضرب کیا تو بعد ضرب کرنیکی بھی $\frac{ل^{۲}}{ل^{۲}}$ کے برابر رہے یعنی ط مین ضرب کرنی سی کچھ فرق نہ آیا اور یہی ثابت کرنا تھا

دوسری صورت فرض کرو کہ $\frac{ط^{۲}}{ط^{۲}}$ ایک کسر ہی اب اگر $ط^{۲}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو علحدہ علحدہ ط پر تقسیم کرین تو $\frac{ل^{۲}}{ل^{۲}}$ پر رہجاویگا اور موافق (۱) کے بی تقسیم کرنی کے ط پر $\frac{ط^{۲}}{ط^{۲}} = \frac{ل^{۲}}{ل^{۲}}$ کے ہی تو معلوم ہوا کہ جو کچھ مقدار $ط^{۲}$ لائی ہی وہی ط پر تقسیم کرنی کے بعد رہتی ہی پس ثابت ہوا کہ کسی کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک مقدار پر تقسیم کرنی سی کچھ فرق نہین آتا * اب ہم اس صورت کا فائدہ بیان کرتے ہین جب یہہ بات ثابت ہوئی کہ کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک مقدار پر تقسیم کرنی سی کچھ فرق نہین آتا تو ظاہر ہی کہ اس کسر کا اختصار ہوسکتا ہی یعنی اگر کوئی کسر ایسی ہو کہ اسکا شمار کنندہ اور نسب نما علحدہ علحدہ کسی مقدار پر پورا تقسیم ہوسکی تو اس کو تقسیم کرنی سی کچھ فرق نہین آتا اور مقدار شمار کنندہ اور نسب نما کی تھوڑی ہوجاتی ہی تو وہ کسر بعد تقسیم کرنیکی مختصر ہوجاویگی اور کسر کا مختصر کرنا مساوات کی حل کرنے مین نہایت مفید اور مہم ہوتا ہی اب ہم چند مثالین اختصار کی لکھتے ہین

مثال ۱

$\frac{۳ ل^{۲} ی^{۲}}{۳ ط^{۲}}$ اس کسر کا شمار کنندہ اور نسب نما ۳ پر تقسیم ہوسکتا ہی اسواسطی بعد تقسیم کرنیکی $\frac{ل^{۲} ی^{۲}}{ط^{۲}}$ رہجاویگا یعنے $\frac{۳ ل^{۲} ی^{۲}}{۳ ط^{۲}} = \frac{ل^{۲} ی^{۲}}{ط^{۲}}$ اور اسیطرح

مثال ۲

$\frac{۲ ل^{۲} ی^{۲}}{۳ ل^{۲} ط} = \frac{۲ ی^{۲}}{۳ ط}$ اسواسطی کہ $ل^{۲}$ پر شمار کنندہ اور نسب نما کو تقسیم کرلیا پس جو مقدار شمار کنندہ اور نسب نما مین مشترک ہوتی ہی اوسپر تقسیم کردیتے ہین

۳ $\frac{۳ ل^{۲}}{۳ ی^{۲} ل^{۲}} = \frac{ل^{۲}}{ی^{۲}}$ ۴ $\frac{۴ ل^{۲} ط}{۲ ل^{۲} ص} = \frac{۲ ط}{ص}$ ۵ $\frac{۶ ل^{۲} ی^{۲}}{۹ ی^{۲} ل^{۲}} = \frac{۲ ل^{۲}}{۳ ی^{۲}}$

۶ $\frac{۷ ص^{۲} ی^{۲}}{۱۴ ی^{۲} ص^{۳}} = \frac{۲ ی^{۲}}{۲ ص}$ ۷ $\frac{۳ ل^{۲} ی^{۲}}{۹ ص ل^{۲} ی^{۲}} = \frac{۱}{۳ ص}$ ۸ $\frac{۵ ا ط^{۲} ص^{۲}}{۵ ط ل^{۲}} = \frac{۳ ص^{۲}}{ل^{۲}}$

۹ $\frac{۳ ل^{۲}}{۲ ل^{۲}} = \frac{۳}{۲}$ ۱۰ $\frac{۲ ل^{۲} ص}{۸ ص^{۲}} = \frac{ل^{۲}}{۴ ص}$ ۱۱ $\frac{۷ ل^{۲} ی^{۲}}{۲۱ ل^{۲} ی^{۲}} = \frac{ل^{۲}}{۳ ی^{۲}}$

۱۲ $\frac{۲۵ ل^{۲} ی^{۲}}{۵ ل^{۲} ی^{۲}} = ۵$ ۱۳ $\frac{۶ ل^{۲} ص^{۲}}{۱۸ ل^{۲} ص} = \frac{ص}{۳ ل^{۲}}$ ۱۴ $\frac{۸ ل^{۳} ط^{۲}}{۴ ط^{۲} ل^{۲}} = \frac{۲ ل^{۲}}{ط}$

١٥ $\frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}\text{ل}^{\frac{1}{2}}}{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}} = 1$

١٦ $\frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}} = \frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}}$

١٧ $\frac{\text{ل}^{\frac{2}{3}}}{\text{ك}^{\frac{2}{3}}\text{ل}} = \frac{\text{ل}^{\frac{2}{3}}\text{ك}^{\frac{1}{3}}}{\text{ك}^{\frac{2}{3}}\text{ل}^{\frac{1}{3}}\text{ك}^{\frac{1}{3}}} = \frac{\text{ل}^{\frac{2}{3}}\text{ك}^{\frac{1}{3}}}{\text{ك}^{\frac{2}{3}}\text{ل}^{\frac{1}{3}}\text{ك}^{\frac{1}{3}}} = \frac{\text{ل}^{\frac{2}{3}}}{\text{ك}^{\frac{2}{3}}}$

١٨ $\frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{1}{2}}\text{ل}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{1}{2}}\text{ل}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\text{ل}}$

١٩ $\frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ل}}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}\text{ل}} = \frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}\text{ص}^{\frac{1}{2}}\text{ل}}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}\text{ل}} = \text{ص}^{\frac{3}{2}}$

٢٠ $\frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\text{ل}^{\frac{3}{2}}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}\times\text{ل}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}}$

٢١ $\frac{(\text{ل}+\text{ك})}{\text{ل}^{\frac{3}{2}}+\text{ك}^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\text{ل}+\text{ك})}{(\text{ل}+\text{ك})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\text{ل}+\text{ك}}$

٢٢ $\frac{3\text{ل}^{\frac{2}{3}}+3\text{ك}^{\frac{2}{3}}}{9\text{ل}^{\frac{2}{3}}+9\text{ك}^{\frac{2}{3}}} = \frac{3(\text{ل}^{\frac{2}{3}}+\text{ك}^{\frac{2}{3}})}{9(\text{ل}^{\frac{2}{3}}+\text{ك}^{\frac{2}{3}})} = \frac{3(\text{ل}^{\frac{2}{3}}+\text{ك}^{\frac{2}{3}})}{\text{ل}^{\frac{2}{3}}+\text{ك}^{\frac{2}{3}}}$

٢٣ $\frac{\text{ط}\text{ل}-\text{ط}\text{ل}\text{ك}}{\text{ط}^{\frac{2}{3}}\text{ك}+\text{ط}^{\frac{2}{3}}\text{ل}} = \frac{\text{ط}\text{ل}(1-\text{ك})}{\text{ط}^{\frac{2}{3}}\text{ل}(\text{ك}+1)} = \frac{(1-\text{ك})}{\text{ط}^{\frac{2}{3}}(\text{ك}+1)}$

٢٤ $\frac{1\text{ل}+1\text{ل}^{\frac{2}{3}}}{\text{ب}\text{ل}-\text{ب}\text{ل}\text{ط}} = \frac{1\text{ل}(1+\text{ل})}{\text{ب}\text{ل}(1-\text{ط})} = \frac{1(1+\text{ل})}{\text{ب}(1-\text{ط})}$

٢٥ $\frac{15\text{ل}^{\frac{3}{2}}-10\text{ل}^{\frac{2}{3}}+5\text{ل}}{25\text{ل}^{\frac{3}{2}}-20\text{ل}^{\frac{2}{3}}+15\text{ل}} = \frac{5\text{ل}(3\text{ل}^{\frac{2}{3}}-2\text{ل}+1)}{5\text{ل}(5\text{ل}^{\frac{2}{3}}-4\text{ل}+3)} = \frac{3\text{ل}^{\frac{2}{3}}-2\text{ل}+1}{5\text{ل}^{\frac{2}{3}}-4\text{ل}+3}$

٢٦ $\frac{3\text{ل}^{\frac{3}{2}}-6\text{ك}^{\frac{2}{3}}}{3\text{ل}+3\text{ك}} = \frac{6(\text{ل}^{\frac{2}{3}}-\text{ك}^{\frac{2}{3}})}{3(\text{ل}+\text{ك})} = \frac{3\times2(\text{ل}+\text{ك})(\text{ل}-\text{ك})}{3(\text{ل}+\text{ك})} = 2(\text{ل}-\text{ك})$

٢٧ $\frac{4-4\text{ل}^{\frac{2}{3}}}{3+3\text{ل}} = \frac{4(1-\text{ل}^{\frac{2}{3}})}{3(1+\text{ل})} = \frac{4(1-\text{ل})(1+\text{ل})}{3(1+\text{ل})} = \frac{4(1-\text{ل})}{3}$

٢٨ $\frac{4\text{ل}^{\frac{2}{3}}-1}{2\text{ل}^{\frac{2}{3}}+1} = \frac{(2\text{ل}^{\frac{2}{3}}+1)(2\text{ل}^{\frac{2}{3}}-1)}{(2\text{ل}^{\frac{2}{3}}+1)} = 2\text{ل}^{\frac{2}{3}}-1$

۲۹ $\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x-1}$

۳۰ $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{(a+x)(a-x)}}{\sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x}$

۳۱ $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{(\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x-1})}{1+\sqrt{4x^2-1}} = \sqrt{2x-1}$

۳۲ $\frac{\sqrt{3x+1}}{3x-1} = \frac{\sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1})(\sqrt{3x-1})} = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

۳۳ $\frac{1+2x}{1-4x^2} = \frac{1+2x}{(1+2x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x}$

۳۴ $\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-3} = \frac{x+\sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} = \frac{1}{x-\sqrt{3}}$

۳۵ $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

۳۶ $\frac{x-\sqrt{a}}{x^2-a} = \frac{x-\sqrt{a}}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})} = \frac{1}{x+\sqrt{a}}$

۳۷ $\frac{(x-a)\sqrt{2ax-2x^2}}{\sqrt{2ax-2x^2}\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}} = \frac{(x-a)\sqrt{2x(a-x)}}{\sqrt{2x(a-x)}\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}} = \frac{(x-a)\sqrt{2x}\sqrt{a-x}}{\sqrt{2x}\sqrt{a-x}\sqrt{x+a}} = \frac{(x-a)}{\sqrt{x+a}}$

۳۸ $\frac{12a^3x^3+2a^2x^5}{18a^2cx+3c^2x^4} = \frac{2a^2x^3(6a+x^2)}{3c^2(6a+x^2)} = \frac{2a^2x^3}{3c^2}$

۳۹ $\frac{x^2+(a+c)x+ac}{x^2+(c+s)x+cs} = \frac{x^2+ax+sx+cs}{x^2+cx+sx+cs} = \frac{x^2+a(x+s)}{x^2+c(x+s)}$

$= \frac{(x+a)(x+s)}{(x+c)(x+s)} = \frac{x+a}{x+c}$

۴۰ $\frac{ax+cx+ay+cy}{ax+bx+cx+bc} = \frac{(a+c)x+(a+c)y}{(a+b)x+(a+b)c} = \frac{(x+y)(a+c)}{(x+c)(a+b)}$

۴۱ $\frac{۳لا^{۲}ر - ۳لا^{۲}}{لا^{۲}ر - لا^{۲}} = \frac{۳لا^{۲}(ر-۱)}{لا^{۲}(ر-۱)} = ۳لا$ بہلے سے

جانا چاہیئے کہ اختصار کی مشق سے اعمال جبریہ مین بڑی استعداد حاصل ہوتی ہی اسکی مشق بہت کرنی چاہیئے یہان فقط اکتالیس مثالین لکھی ہین تاکہ طالب علم کو طریقہ حل کرنیکا معلوم ہوجاوے اس جبر و مقابلہ کے آخر مین مثالین بہت ہین اونکو حل کرنی سے بڑی استعداد ہوگی

دوسری فصل تحویل کسور

بہت سی کسرون کے مخرج مشترک کرنی کو تحویل کہتے ہین یعنی جن کسرون کی مخرج مختلف ہون اگر اونکی مخرج اسطرح یکسان کرین کہ اونکی قیمت مین کچھہ فرق نہ آوی تو اس عمل کو تحویل کسور کہتی ہین قاعدہ تحویل کا یہہ ہی کہ جتنی کسرہون اونمین سے اول کی شمار کنندہ کو باقیون کی نسب نما مین ضرب کر کر شمار کنندہ مقرر کرین اور تمام نسب نمایون کے حاصل ضرب کو نسب نما مقرر کرین اسیطرح دوسری کسر کے شمار کنندہ کو باقیون کے نسب نما مین ضرب کر کر شمار کنندہ مقرر کرین اور نسب نمایون کی حاصل ضرب کو نسب نما مقرر کرین اور علی القیاس سب کسرون مین یہی عمل جاری رکھین اسطرح جو کسرین حاصل ہونگی اون سب کے نسب نما یکسان ہونگی مثلاً $\frac{۱}{لا}$ اور $\frac{۳}{ط}$ اور $\frac{ط}{۲}$ تین کسرین ہین اور انکی نسب نما مختلف ہین پس نسب نما یکسان کرنی کو اول کسر کے شمار کنندہ یعنی لا کو باقیون کے نسب نما مین یعنے ط اور ۲ مین ضرب کیا اسطرح کہ لا کو ط مین ضرب کیا تو لاط ہوا اور اس حاصل ضرب کو ۲ مین ضرب کیا تو ۲لاط ہوا اسکو شمار کنندہ بنایا اب اول کی مخرج یعنی لا کو دوسری کسر کی مخرج مین یعنی ط مین ضرب کیا پس ط ہوا اسکو تیسری کسر کے مخرج یعنی ۲ مین ضرب کیا تو ۲ط ہوا پس اسکو نسب نما مقرر کیا تو اول کسر $\frac{۲لاط}{۲ط}$ ہوئے اسیطرح دوسری کسر کے شمار کنندہ یعنی ۳ کو باقیون کے نسب نما مین ضرب کیا یعنی پہلے ۳ کو ۲ مین ضرب کیا اور ۳ کو تیسری کسر کے مخرج ۲ مین ضرب کیا تو ۳۲ ہوا اسکو شمار کنندہ مقرر کیا اور تمام کسرون کی حاصل ضرب یعنی ط۲ کو نسب نما بنایا پس دوسری کسر $\frac{۳۲}{۲ط}$ ہوئی اسیطرح تیسری کسر کے شمار کنندہ یعنی ط کو پہلی اور دوسری کسر کی مخرجون مین ضرب کیا یعنی ط کو ط مین ضرب کیا تو ط۲ ہوا اور اسکو ۲ مین ضرب کیا تو ط۲ ہوا اسکو شمار کنندہ بنایا اور سب مخرجون کی حاصل ضرب کو نسب نما بنایا پس تیسری $\frac{ط۲}{۲ط}$ ہوئی پس ان تینون کسرون $\frac{۱}{لا}$ $\frac{۳}{ط}$ $\frac{ط}{۲}$ کی مخرج مشترک کیے تو تین کسرین $\frac{۲ط}{۲لاط}$ $\frac{۳۲}{۲لاط}$ $\frac{ط۲}{۲لاط}$ ہوئین اور ان تینون کے مخرج یکسان ہین یعنے سب کا مخرج ۲لاط ہی اور انکا اختصار کرین تو وہی اصلی تینون کسرین بچینگے ہین پس معلوم ہوا کہ اس عمل کرنی سے مخرج تو یکسان ہوگئی اور کسر کی قیمت مین کچھہ فرق نہ آیا

مثال ۲ $\frac{۲لا}{۳}$ اور $\frac{۱+لا۵}{۲}$ کا مخرج مشترک کیا چاہتے ہین پس ۲لا+۳ کو ۲ مین ضرب کیا پس ۴لا+۶ حاصل ضرب ہوا اور نسب نمایون کے حاصل ضرب یعنی ۶ کو نسب نما بنایا پس اول کسر یہہ ہوئی $\frac{۴لا+۶}{۶}$ اور دوسری کسر کی شمار کنندہ کو یعنے ۵لا+۱ کو ۳ مین ضرب کیا تو ۱۵لا+۳ حاصل ہوا اور ۲ کو

نسب نما بنایا تو دوسری کسر $\frac{۵لا^۲+لا}{۳لا}$ ہوئی یعنی دونوں کسریں ہیں $\frac{۶لا+۹}{۳لا}$ اور $\frac{۵لا^۲+لا}{۳لا}$ ہیں جو ان دونوں کے نسب نما کیساں ہیں

۳ $\frac{۲+لا}{۲}$ اور $\frac{۳+لا}{لا}$ مخرج مشترک کرو جواب $\frac{۲لا+لا^۲}{۲لا}$ اور $\frac{۳۲+لا}{۲لا}$

۴ $\frac{لا-۱}{لا+۱}$ اور $\frac{لا}{ط}$ جواب $\frac{طلا-ط}{طلا+ط}$ اور $\frac{لا^۲+لا}{طلا+ط}$

۵ $\frac{۱-ط}{لا+۱}$ اور $\frac{۲لا-۱}{۲}$ جواب $\frac{۲-۲ط}{۲لا+۲}$ اور $\frac{۲لا^۲+لا-۱}{۲لا+۲}$

۶ $\frac{لا-۲}{لا+۲}$ اور $\frac{لا+۲}{لا-۲}$ جواب $\frac{(لا-۲)^۲}{لا^۲-۲^۲}$ اور $\frac{(لا+۲)^۲}{لا^۲-۲^۲}$

۷ $\frac{۱-۳لا}{۱+۳لا}$ اور $\frac{۱-۲لا}{۱+۲لا}$ جواب $\frac{۱-لا-۶لا^۲}{۱+۵لا+۶لا^۲}$ اور $\frac{۱+لا-۶لا^۲}{۱+۵لا+۶لا^۲}$

۸ $\frac{۲}{لا+۱}$ $\frac{۳}{لا-۱}$ $\frac{۴}{۳}$ جواب $\frac{۶(لا-۱)}{۳(لا^۲-۱)}$ اور $\frac{۹(لا+۱)}{۳(لا^۲-۱)}$ اور $\frac{۴(لا^۲-۱)}{۳(لا^۲-۱)}$

۹ $\frac{لا}{لا-ط}$ $\frac{۲}{لا+ط}$ $\frac{لا^۲}{۳}$ جواب $\frac{۳لا(لا+ط)}{۳(لا^۲-ط^۲)}$ اور $\frac{۳۲(لا-ط)}{۳(لا^۲-ط^۲)}$ اور $\frac{لا^۲(لا^۲-ط^۲)}{۳(لا^۲-ط^۲)}$

۱۰ $\frac{۲لا}{\sqrt{لا+۱}}$ اور $\frac{\sqrt{۳}(لا+۱)}{\sqrt{لا-۱}}$ جواب $\frac{۲لا\sqrt{لا-۱}}{\sqrt{لا^۲-۱}}$ اور $\frac{\sqrt{۳}(لا+۱)^۲}{\sqrt{لا^۲-۱}}$

۱۱ $\frac{\sqrt{لا+۲}}{\sqrt{لا-۲}}$ اور $\frac{\sqrt{لا}-۳}{\sqrt{لا}+۲}$ جواب $\frac{لا+۴\sqrt{لا}+۴}{لا-۴}$ اور $\frac{۶-۵\sqrt{لا}+لا}{۴-لا}$

تیسری فصل قاعدہ جمع کرنی کسور کا

کسور کی جمع کرنی کا قاعدہ یہہ ہی کہ جن کسروں کا جمع کرنا مطلوب ہی پہلی سب کا مخرج مشترک کرنا چاہیئے پھر اسکی جو شمار کنندہ ان کو جمع کرکر حاصل جمع کو شمار کنندہ بنانا چاہیئے اور اس حاصل جمع کے نیچے وہ نسب نما لکھنا چاہیئے جو مشترک ہی پس یہہ کسر حاصل جمع کسروں کا ہی مثلاً $\frac{۲}{لا-۱}$ اور $\frac{۳}{لا}$ کو جمع کرنا چاہتے ہیں پس تحویل کے قاعدی کے موافق سب کا مخرج مشترک کیا تو $\frac{۲لا}{لا^۲-لا}$ $\frac{لا-۳}{لا^۲-لا}$ ہوا

اب نئی شمارکنندون کو جمع کیا تو ۲لا + ۳ لا − ۳ ہوا نیچے اسکی لا − لا لکھا تو حاصل جمع یہہ کسر ہوئی

$$\frac{۲لا + ۳لا - ۳}{لا - لا}$$

مثال ۲ $\frac{۳لا}{۲د} + \frac{۲لا}{۳} + \frac{۳د}{۴ط}$ پہلی اسکا مخرج مشترک کیا تو یہہ تین کسرین حاصل ہوئین

$\frac{۳۶ طلا}{۲۴ طد}$ + $\frac{۱۶ لاد ط}{۲۴ طد}$ + $\frac{۱۸ د^۲}{۲۴ طد}$ ان کسرون کے شمارکنندون کو جمع کیا اور نیچے ۲۴ طد لکھا

تو یہہ $\frac{۳۶ طلا + ۱۶ لاد ط + ۱۸ د^۲}{۲۴ طد}$ حاصل جمع ہوا

۳ $\frac{لا + ۱}{لا - ۱} + \frac{لا - ۱}{لا + ۱} + \frac{۱ + د}{۱ - د}$ مخرج مشترک کیا

تو $\frac{(لا+۱)^۲(۱-د)}{(لا^۲-۱)(۱-د)} + \frac{(لا-۱)^۲(۱+د)}{(لا^۲-۱)(۱-د)} + \frac{(لا^۲-۱)(۱+د)}{(لا^۲-۱)(۱-د)}$ شمارکنندون کو جمع کیا اور مشترک نیچے لکھا

تو حاصل جمع $\frac{(لا+۱)^۲(۱-د) + (لا-۱)^۲(۱-د) + (لا^۲-۱)(۱+د)}{(لا^۲-۱)(۱-د)} = \frac{(لا+۱)^۲ + (لا-۱)^۲ + (لا^۲-۱)(۱+د)}{(لا^۲-۱)(۱-د)}$ ہوا

۴ $\frac{۲لا - ۱}{۲لا + ۱} + \frac{۲لا + ۱}{۲لا - ۱}$ مخرج مشترک کیا تو یہہ حاصل ہوا

$\frac{(۲لا-۱)^۲}{۴لا^۲-۱} + \frac{(۲لا+۱)^۲}{۴لا^۲-۱}$ شمارکنندون کو جمع کیا اور نسب مشترک لکھا تو $\frac{(۲لا-۱)^۲ + (۲لا+۱)^۲}{۴لا^۲-۱}$

۵ $\frac{۲}{۱-ط} + \frac{۱-ط}{۱+ط}$ جواب $\frac{۲(۱+ط)^۲ + (۱-ط)^۲}{۱-ط^۲}$

۶ $\frac{لا - د^۲}{۳} + \frac{د^۲}{۲لا} + \frac{۴}{لا}$ جواب $\frac{۲لا^۳ + (۳لا - ۲لا^۲)د^۲ + ۲۴لا}{۶لا^۲}$

۷ $\frac{۲لا - ۱}{لا + ۱} + \frac{لا + ۱}{لا + ۱}$ جواب $\frac{۳لا}{لا + ۱}$

۸ $\frac{۱ - ط}{لا + ط} + \frac{ط - لا}{۱ + ط}$ جواب $\frac{۱ - لا^۲}{لا^۲ + (ط+۱)لا + ط}$

۹ $\frac{ل}{ل-۱} + \frac{ل^{۲}}{ل+۱} + \frac{ل^{۳}}{۱-ل}$ جواب $\frac{ل^{۵}-ل^{۴}}{ل+ل^{۲}-ل^{۳}-۱}$

۱۰ $\frac{۱-۳ل}{ل} + \frac{۳ل+۱}{۳ل-۱}$ جواب $\frac{۷ل-۶ل^{۲}-۱}{۳ل^{۲}-ل}$

۱۱ $\frac{۳ل}{۷} + \frac{۵ل}{۹} + \frac{۴ل}{۱۱}$ جواب $\frac{۴۳۴ل}{۶۹۳}$

۱۲ $\frac{۳ط^{۲}}{۲ص} + \frac{۲ط}{۵} + \frac{۲ص}{۷ط}$ جواب $\frac{۱۰۵ط^{۳}+۲۸ط^{۲}ص+۲۰ص^{۲}}{۷۰ط ص}$

۱۳ $\frac{۲ل+۱۰}{۳} + \frac{۴ل+۲}{۵} + \frac{ل}{۷}$ جواب $\frac{۱۶۹ل+۷۷}{۱۰۵}$

۱۴ $\frac{ل+۱}{ل+۲} + \frac{ل}{۳} + \frac{۲ل}{۵}$ جواب $\frac{۱۱ل^{۲}+۷۳ل+۱۵}{۱۵ل+۳۰}$

۱۵ $\frac{ط+ل}{ط-ل} + \frac{ط-ل}{ط+ل}$ جواب $\frac{۲(ط^{۲}+ل^{۲})}{ط^{۲}-ل^{۲}}$

۱۶ $ل ى + \frac{ع ف ى}{ف-۱}$ جواب $\frac{۳ل^{۲}ى-ل ى}{ف-۱}$

۱۷ $\frac{۱}{ل ى-ل} + ۳ل$ جواب $\frac{۳ل^{۲}-۳ل^{۲}+۱}{ل ى-ل}$

۱۸ $\frac{\sqrt{ل}-\sqrt{ى}}{\sqrt{ل}+\sqrt{ى}} + \frac{۲\sqrt{ى}-۲\sqrt{ل}}{\sqrt{ى}+\sqrt{ل}}$ جواب $\frac{ى-ل}{ى+۲\sqrt{ى ل}+ل}$

۱۹ $\frac{\sqrt{ط+ل}}{\sqrt{ل}} + \frac{\sqrt{ل}}{\sqrt{ط+ل}}$ جواب $\frac{ط+۲ل}{\sqrt{ط ل+ل^{۲}}}$

۲۰ $\frac{\sqrt{۲ل-ل^{۲}}}{\sqrt{۲ل+ل^{۲}}} + \frac{\sqrt{۲ل+ل^{۲}}}{\sqrt{۲ل-ل^{۲}}}$ جواب $\frac{۴}{\sqrt{۴-ل^{۲}}} = \frac{۴ل}{\sqrt{۴ل^{۲}-ل^{۴}}}$

۲۱ $\frac{\sqrt{ل}}{\sqrt{۱-ل}} + \frac{\sqrt{۱-ل}}{۲\sqrt{ل}} + \frac{۳\sqrt{ل}}{۲}$ جواب $\frac{۱+ل+۳ل\sqrt{۱-ل}}{۲\sqrt{ل-ل^{۲}}}$

۲۲ $\frac{\sqrt{۵-ل}}{\sqrt{۳-ل}} + \frac{\sqrt{۳-ل}}{\sqrt{۵-ل}}$ جواب $\frac{۲(۴-ل)}{\sqrt{۱۵-۸ل+ل^{۲}}}$

۲۳ $\frac{۲م^{۲}+۲م}{م^{۲}-۲م} + \frac{۳م+۳}{م^{۲}-۳م}$ جواب $\frac{۲(م-۶)}{م^{۳}-۲م^{۲}-۶م+۱}$

۲۴ $\frac{۵م}{م^{۲}} + \frac{۵م}{م}$ جواب $\frac{۵م(م+۱)}{م^{۲}}$

۲۵ $\frac{م-۱}{م} + ۱$ جواب $\frac{۲م-۱}{م}$ ۲۷ $\frac{ط-م}{م} + ۱$ جواب $\frac{ط}{م}$

چوتھی فصل قاعدہ تفریق کسور کا

کسور کی تفریق کا قاعدہ یہہ ہی کہ مفروق اور مفروق منہ کا مخرج مشترک کرین بعد اسکی مفروق منہ کی شمار کنندہ مین سے مفروق کی شمار کنندہ کو نکال کر باقی کو شمار کنندہ بناوین اور اسکی نیچی نسب نما جو مخرج مشترک کرنی سے حاصل ہوا ہی لکھین یہہ کسر حاصل تفریق مطلوب ہی

مثلاً $\frac{۳}{۲م^{۲}}$ مین سے $\frac{۴}{۳م^{۳}}$ کو تفریق کرین پس بعد مخرج مشترک کرنی کی یہہ دونو کسرین یہہ ہوجاتی ہین

$\frac{۹م^{۳}}{۶م^{۵}} - \frac{۸م^{۲}}{۶م^{۵}}$ اب ۹م^۳ مین سے ۸م^۲ کو نکالا تو م^۲ رہی اسکے نیچی ۶م^۵ لکھا تو حاصل تفریق یہہ $\frac{م^{۲}}{۶م^{۵}}$ حاصل ہوا

۲ مثال $\frac{۴ط}{۳م^{۲}} - \frac{۵}{۲ص}$ بعد مخرج مشترک کرنی کے $\frac{۸ط ص}{۶م^{۲}ص} - \frac{۱۵م^{۲}}{۶م^{۲}ص}$

شمار کنندہ دونین تفریق کی اور مخرج مشترک لکھا تو حاصل تفریق مطلوب یہہ $\frac{۸ط ص - ۱۵م^{۲}}{۶م^{۲}ص}$ ہوا

۳ $\frac{م-ط}{م} - \frac{۲م}{م+ط}$ مخرج مشترک کیا تو یہہ $\frac{م^{۲}-ط^{۲}}{م^{۲}+ط م}$ $-\frac{۲م^{۲}}{م^{۲}+ط م}$ حاصل ہوا

شمار کنندون مین تفریق کی اور نسب نما لکھا تو یہہ $\frac{-م^{۲}-ط^{۲}}{م^{۲}+ط م} = \frac{-(م^{۲}+ط^{۲})}{م^{۲}+ط م}$

۴ $\frac{۳م}{۱-م} - \frac{۱+م}{۳م}$ جواب $\frac{۱۰م^{۲}-۱}{۳م-۳م^{۲}}$

۵ $\frac{۴م}{۵} - \frac{۳م+۱}{م+۱}$ جواب $\frac{۴م^{۲}-۱۱م-۵}{۵(م+۱)}$

۶ $\frac{۴ط+۲}{۳} - \frac{۲ط-۱}{۳ط}$ جواب $\frac{۴ط^۲+۱}{۳ط}$

۷ $\frac{۱}{ل-ک} - \frac{۱}{ل+ک}$ جواب $\frac{۲ک}{ل^۲-ک^۲}$

۸ $\frac{۴ل}{۷} - \frac{۳ل-۷}{۸}$ جواب $\frac{۱۱ل+۴۹}{۵۶}$

۹ $\frac{۲ط ل+ل^۲}{۲ل+۱} - \frac{۲ط+ل}{۲}$ جواب $\frac{-(۲ط+ل)}{۴ل+۲}$

۱۰ $\frac{ل^۲+۲ل ک}{۳ل} - \frac{ل+ک}{۵}$ جواب $\frac{۲ل+۷ک}{۱۵}$

۱۱ $\frac{۲\sqrt{۱-ل}}{\sqrt{۱+ل}} - \frac{\sqrt{ل+۱}}{\sqrt{۱-ل}}$ جواب $\frac{۱-۳ل}{\sqrt{۱-ل^۲}}$

۱۲ $\frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ل}-\sqrt{ط}} - \frac{\sqrt{ل}}{\sqrt{ط}-\sqrt{ل}}$ جواب $\frac{ط-ل}{۲\sqrt{ط}ل-ل-ط}$

۱۳ $\frac{\sqrt{۲-۱}}{ل} - \frac{\sqrt{۲+۱}}{ل}$ جواب $\frac{-۲}{ل}$

۱۴ $\frac{۳ل-۱}{\sqrt{۳ل}+۱} - \frac{۲ل-۱}{۱+\sqrt{۲ل}}$ جواب $\sqrt{۳ل}-\sqrt{۲ل}$

۱۵ $\frac{ل}{۱-\sqrt{۵}} - \frac{ل}{۱+\sqrt{۵}}$ جواب $\frac{\sqrt{۵}ل}{-۲}$

۱۶ $۴ل-\frac{ک}{ل}$ جواب $\frac{۴ل^۲-ک}{ل}$ ۱۷ $ل-\frac{۲-ل}{۱-ل}$ جواب $\frac{۶ل-۵ل^۲-۲}{۱-ل}$

۱۸ $۱-\frac{ک+ل}{ل}$ جواب $\frac{ک}{ل}$ ۱۹ $۱-\frac{۳+ک ل}{۲ک ل}$ جواب $\frac{۳-ک ل}{۲ک ل}$

۲۰ $۱-\frac{\sqrt{ل}+\sqrt{ک}}{\sqrt{ل}-\sqrt{ک}}$ جواب $\frac{-۲\sqrt{ک}}{\sqrt{ل}-\sqrt{ک}}$

پانچوین فصل قاعدہ ضرب کسور کا

کسور کی ضرب کرنیکا قاعدہ یہہ ہی کہ سب کسرون کی شمار کنندون کو اپسمین ضرب کرکی حاصل ضرب کو شمار کنندہ مقرر کرین اور اون کسرون کی نسب نمایون کو باہم ضرب کرکی نسب نما مقرر کرین پس یہہ کسر حاصل ضرب سب کسرون کی ہوگی اور اگر کسی مقدار صحیح کو کسر مین ضرب کرنا مطلوب ہو تو اوس صحیح کو نیچی عدد ۱ کا فرض کرین بعد اوسکی قاعدہ مذکورہ بالا جاری کرین

مثال $\frac{ل}{۳} \times \frac{ل}{۲} \times \frac{ط}{۲}$ ان تین کسرونکو ضرب کرنا چاہتے ہین پس سب شمار کنندون کو ضرب کیا $ل^۲ ط$ حاصل ہوا اسکو شمار کنندہ مقرر کرکے نسب نمایون کی حاصل ضرب کو یعنی $۳ ل ۲$ کو نسب نما مقرر کیا پس حاصل ضرب یہہ کسر $\frac{ل^۲ ط}{۳ ل ۲}$ ہوئے

مثال ۲ $\frac{۳ ل}{۲} \times \frac{۵}{ل ۲ ط} \times \frac{۲ ل^۲}{ط}$ اسکی شمار کنندون کو ضرب کیا تو $۳۰ ل^۳$ ہوا اور نسب نمایون کو ضرب کیا تو $۲ ل^۲ ط^۲$ ہوا اور جب $۳۰ ل^۳$ کو شمار کنندہ مقرر کیا اور $۲ ل^۲ ط^۲$ کو نسب نما بنایا تو حاصل ضرب یہہ کسر $\frac{۳۰ ل^۳}{۲ ل^۲ ط^۲}$ ہوئی اور اسکا اختصار کیا تو یہہ $\frac{۱۵ ل}{۲ ط^۲}$ حاصل ہوا

مثال ۳ $\frac{ل - ۱}{ل + ۱} \times \frac{۲ ل + ۲}{ل - ۱}$ **جواب** $\frac{۲(ل+۱)(ل-۱)}{(ل+۱)(ل-۱)} = ۲$

مثال ۴ $\frac{۳ ل + ۱}{ل} \times \frac{ل^۲}{۲ ل - ۱}$ **جواب** $\frac{۳ ل^۲ + ل}{۲ ل - ۱}$

مثال ۵ $\frac{ل + ط}{ل - ط} \times \frac{۲ ط ل}{ل + ط}$ **جواب** $\frac{۲ ط ل}{ل - ط}$

مثال ۶ $\frac{ل + ۱}{ل} \times \frac{ل}{ل - ۱} \times \frac{ل - ۱}{۲ ل}$ **جواب** $\frac{ل + ۱}{۲ ل}$

مثال ۷ $\frac{۳ ل - ۶}{ل} \times \frac{ل^۲}{ل^۲ - ۴ ل + ۴}$ **جواب** $\frac{۳ ل^۲ - ۶ ل}{(ل - ۲)^۲}$

مثال ۸ $\frac{۲ ط}{ط - ل} \times \frac{ط^۲ - ل^۲}{۸}$ **جواب** $\frac{ط^۲ + ط ل}{۴}$

۹ $\frac{۳لا^۲}{۵لا+۱۰} \times \frac{۱۵لا-۳۰}{۲لا}$ جواب $\frac{۹لا^۲-۱۸لا}{۲لا+۴}$

۱۰ $\frac{ط+لا}{لا-۱} \times \frac{لا+ط}{لا+۱}$ جواب $\frac{ط+لا}{لا-۱}$

۱۱ $\frac{لا}{۱+لا} \times \frac{ک(لا+۱)}{لا} \times \frac{۳}{لا-۱}$ جواب $\frac{۳ک}{لا-۱}$

۱۲ $\frac{۴+۲لا}{لا} \times \frac{۳ک}{لا^۲+۴}$ جواب $۳ک$

۱۳ $۴لا \times \frac{۳لا}{لا-۱}$ جواب $\frac{۱۲لا^۲}{لا-۱}$

۱۴ $\frac{۳لا}{لا-۲} \times لا$ جواب $\frac{۳لا^۲ک}{لا-۲}$

۱۵ $\frac{ط\ لا}{۲(لا-ط)} \times \frac{لا-ط}{۲}$ جواب $\frac{ط\ لا}{۲}$

چھٹی فصل کسور کی تقسیم کرنیکا قاعدہ

کسور کی تقسیم کرنی مین ضرب ہی کا قاعدہ کرنا پڑتا ہی صرف اتنا فرق ہی کہ مقسوم علیہ کو اولٹ کر عمل ضرب کا جاری کرتے ہین یعنی جس کسر پر تقسیم کرنا ہوتا ہی اوسکی شمار کنندہ کو نسب نما کر لیتے ہین اور نسب نما کو شمار کنندہ بنا لیتے ہین بعد اسکی مقسوم کی کسر کو اس اولٹی ہوئی کسر مین ضرب کر لیتے ہین حاصل ضرب خارج قسمت مطلوب ہوتا ہی

مثال $\frac{۲}{لا}$ کو $\frac{۳}{ک}$ پر تقسیم کرنا چاہتے ہین یعنی $\frac{۲}{لا} \div \frac{۳}{ک}$ مطلوب ہی پس ۳ کو نسب نما بنایا اور ک کو شمار کنندہ تو یہہ حاصل ہوا $\frac{ک}{۳}$ اسکو $\frac{۲}{لا}$ مین ضرب کیا اسطرح

$\frac{۲}{لا} \times \frac{ک}{۳}$ تو یہہ $\frac{۲ک}{۳لا}$ خارج قسمت ہوا

مثال ۲ $\frac{۴لا^۲}{۳ک} \div \frac{۲ک^۲}{ط}$ اسپر اسطی مقسوم علیہ کو اولٹا اور عمل ضرب کیا تو

یہہ $\frac{۴لا^۲}{۳ک} \times \frac{ط}{۲ک^۲} = \frac{۴لا^۲ط}{۶ک^۳}$ حاصل ہوا

۳ $\frac{لا}{لا+۲} \div \frac{ک}{لا} = \frac{لا}{لا+۲} \times \frac{لا}{ک} = \frac{لا^۲}{لاک+۲ک}$

۴ $\frac{لا^۲}{۱-لا} \div \frac{۲-۲لا}{لا} = \frac{لا^۲}{۱-لا} \times \frac{لا}{۲-۲لا} = \frac{لا^۳}{۲(۱-لا)^۲}$

۵ $\frac{ل}{ل+۱} \div \frac{ل-۱}{ل+۱} = \frac{ل}{ل+۱} \times \frac{ل+۱}{ل-۱} = \frac{ل}{(ل+۱)(ل-۱)} = \frac{ل}{ل^۲-۱}$

۶ $\frac{۳}{۲+ل} \div \frac{۴}{۲-ل} = \frac{۳}{۲+ل} \times \frac{۲-ل}{۴} = \frac{۱۲}{(۲+ل)(۲-ل)} = \frac{۱۲}{۴-ل^۲}$

۷ $\frac{ل+۱}{۲ل} \div \frac{ل+۱}{۲ل^۲} = \frac{ل+۱}{۲ل} \times \frac{۲ل^۲}{ل+۱} = \frac{۲ل^۲}{ل^۲+۲ل+۱}$

۸ $\frac{۷ل-۱}{۵} \div \frac{۳ل+۱}{۷} = \frac{۷ل-۱}{۵} \times \frac{۷}{۳ل+۱} = \frac{۴۹ل-۷}{۱۵ل+۵}$

۹ $\frac{ل^۲-۱}{۵} \div \frac{ل+۱}{۵} = \frac{ل^۲-۱}{۵} \times \frac{۵}{ل+۱} = \frac{۵(ل+۱)(ل-۱)}{۷(ل+۱)} = \frac{۵ل-۵}{۷}$

۱۰ $\frac{ق-ل}{ق+ل} \div \frac{ق^۲-ل^۲}{۴ق+۴ل} = \frac{ق-ل}{ق+ل} \times \frac{۴(ق+ل)}{ق^۲-ل^۲} = \frac{۴(ق+ل)(ق-ل)}{(ق+ل)(ق+ل)(ق-ل)} = \frac{۴}{ق+ل}$

۱۱ $\frac{\sqrt{۱-ل}}{ق} \div \frac{\sqrt{ل-۱}}{ق} = \frac{\sqrt{۱-ل}}{ق} \times \frac{ق}{\sqrt{ل-۱}} = \frac{ق\sqrt{۱-ل}}{ق\sqrt{ل-۱}} = \frac{ق\sqrt{۱-ل}\sqrt{ل-۱}}{ق(ل-۱)} = \frac{-\sqrt{ق-ل}}{ل-۱}$

۱۲ $\frac{\sqrt{۳+ل}}{۵} \div \frac{\sqrt{۳-ل}}{ل} = \frac{\sqrt{۳+ل}}{۵} \times \frac{ل}{\sqrt{۳-ل}} = \frac{ل\sqrt{۳+ل}}{۵\sqrt{۳-ل}} = \frac{ل\sqrt{۹-ل^۲}}{۱۵-۵ل}$

۱۳ $\frac{۱-ل^۲}{ل+۱} \div \frac{۱-ل}{۱+ل} = \frac{۱-ل^۲}{ل+۱} \times \frac{۱+ل}{۱-ل} = \frac{(۱+ل)(۱-ل)(۱+ل)}{(ل+۱)(۱-ل)} = (۱+ل)^۲$

۱۴ $۷ل \div \frac{۷ل}{۱} = ۷ل \times \frac{۱}{۷ل} = \frac{۷ل}{۷ل} = ۱$

۱۵ $ل^۲-۱ \div \frac{۳}{ل^۲+۱} = ل^۲-۱ \times \frac{ل^۲+۱}{۳} = \frac{ل^۴-۱}{۳}$

۱۶ $\frac{۷ل^۲}{۵} \div \frac{۶۳ل}{۵} = \frac{۷ل^۲}{۵} \times \frac{۵}{۶۳ل} = \frac{۳۵ل}{۳۱۵ل} = \frac{۱}{۹}$

فصل جذر کا قاعدہ

یہہ بات حدود مین بیان کی گئی ہی کہ اگر کسی مقدار کو کسی نفسہ ضرب کرین تو حاصل ضرب کو مجذور اوسی مقدار کا کہتے ہین اور وہ مقدار جذر ہوتی ہی اوس حاصل ضرب کی مثلاً لا کو لا مین ضرب کرین تو لا۲ ہوتا ہی پس لا۲ مجذور لا کا ہی اور لا جذر ہی لا۲ کا یہان سے معلوم ہوا کہ جذر ایسی مقدار ہی کہ اگر اوسکو اوسی مین ضرب کرین تو حاصل ضرب مجذور کی برابر ہوجاتا ہی اسیواسطی ما لا جذر لا کا ہی اسواسطے کہ ما لا کو ما لا مین ضرب کرین تو لا ہوجاتا ہی اور لا جذر لا کا ہی کیونکہ لا کو لا مین ضرب کرین تو لا۲ ہوتی ہی اوسی علی ہذا القیاس لا جذر ہی لا۳ کا اور لا۴ جذر ہی لا۴ کا اور لا۵ جذر ہی لا۵ کا اور لا$\frac{۱}{۲}$ جذر ہی لا کا ان مثالون کے دیکھنے سے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ جذر کا نشان قوت مجذور کی نشان قوت سی نصف ہوتا ہی پس مفرد مقدار کی جذر لینے کا یہہ قاعدہ ہی مثلاً کہ اوسکی نشان قوت کو نصف کرکے اوسی حرف کا نشان قوت مقرر کرین پس یہہ جذر ہوگا + یہہ بات ظاہر ہی کہ لا + ط کو لا + ط مین ضرب کرین تو لا۲ + ۲ ط لا + ط۲ ہوتا ہی یعنی لا۲ + ۲ ط لا + ط۲ مجذور لا + ط کا ہی اور لا + ط جذر ہے لا۲ + ۲ ط لا + ط۲ کا اب اگر کوئی ترکیب ایسی کرین کہ لا۲ + ۲ ط لا + ط۲ سے لا + ط حاصل ہوجاوے تو ظاہر ہی کہ یہی ترکیب قاعدہ جذر نکالنی کا ہوگا اب جانا چاہیئے کہ وہ ترکیب یہہ ہی کہ جس مقدار کا جذر نکالنا ہے اوسکو ایک جگہ بترتیب نشان قوت کسی حرف کی لکھین مثلاً لا۲ + ۲ ط لا + ط۲ کا جذر نکالنا ہی اوسکو بترتیب نشان قوت لا کی لکھا) لا۲ + ۲ ط لا + ط۲ (لا + ط بعد اسکے اول مقدار کا جذر لی کر خط قوسی کے

لا۲
۲ لا) × لا۲
۲ ط لا + ط۲
۲ ط لا + ط۲

آگی دیا لکھا مثلاً اس صورت مین لا کا جذر لا لکھا اور اس جذر کا مجذور کر کی اول مقدار مین سی تفریق کیا حاصل تفریق کچھہ نہوا اور ہر صورت مین حاصل تفریق کچھہ نہین ہونیکا بعد اسکی دوسرے اور تیسری مقدار کو نیچی اوتارا اور اوسکو مقسوم مقرر کیا اور اول مقدار کی جذر کو دوچند کرکے مقسوم علیہ بنایا مثلاً اس صورت مین ۲ ط لا + لا۲ کو نیچی اوتارا اور ۲ لا کو مقسوم علیہ بنا کر تقسیم کیا تو ط خارج قسمت نکلا بعد اسکی جو خارج قسمت نکلا اسکو مقسوم علیہ مین ضرب دیا اور خارج قسمت کا مجذور کیا اور اس حاصل ضرب کی ساتھہ مجذور کو جمع کرکے مقسوم کی نیچی لکھا اور تفریق کیا حاصل تفریق کچھہ نہوگا مثلاً ط کو ۲ لا مین ضرب کیا تو ۲ ط لا ہوا اور ط کا مجذور کیا تو ط۲ ہوا پس ۲ ط لا + ط۲ کو مقسوم کی نیچے لکھہ کر تفریق کیا تو کچھہ حاصل نہوا اگر اسی عمل سی ساری مقدارین مجذور کی تمام ہوجاوین تو بہتر ہین تو یہی عمل جاری رکھین جب تک ساری مقدارین

مجذور کی تمام نہون بعد تمامی کے جو کچھ خط کی آگی ہو وہی جذر مطلوب ہی مثلاً اس صورت مین خط قوسکی آگی لا + ط ہی پس لا + ط جذر مطلوب ہی

مثال ۲ ہم چاہتے ہیر کہ لا^۲ − ۲ ک لا + ک^۲ کا جذر نکالین پس موافق ترکیب گذشتہ کی اسطرح عمل کرنا چاہئیے

لا^۲ − ۲ ک لا + ک^۲ (لا − ک پس لا − ک جذر مطلوب ہی

لا^۲

۲ لا) − ۲ ک لا + ک^۲

− ۲ ک لا + ک^۲

×

۳ مجذور — لا^۴ − ۲ لا^۲ ط + ط^۲ (لا^۲ − ط جذر — پس لا^۲ − ط جذر مطلوب ہے

لا^۴

۲ لا^۲) − ۲ لا^۲ ط + ط^۲

− ۲ لا^۲ ط + ط^۲

×

۴ مجذور — لا^۶ + ۲ ط^۲ لا^۴ + ط^۴ (لا^۳ + ط^۲ — جذر — جذر مطلوب ہی

لا^۶

۲ لا^۳) ۲ ط^۲ لا^۳ + ط^۴

۲ ط^۲ لا^۳ + ط^۴

×

۵ مجذور — لا^۸ − ۲ لا^۴ ک^۳ + ک^۶ (لا^۴ − ک^۳ — جذر — جذر مطلوب ہی

لا^۸

۲ لا^۴) − ۲ لا^۴ ک^۳ + ک^۶

− ۲ لا^۴ ک^۳ + ک^۶

×

۶ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{لا}^2 + 2\text{ط لا} + \text{ط}^2 & \text{لا} + \text{ط} \\ \hline \text{لا}^2 & \\ \hline 2\text{لا} + \text{ط} & \\ 2\text{ط لا} + \text{ط}^2 & \\ \hline \times & \end{array}$$

۷ $\frac{\text{مکعب}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{لا}^3 + 3\text{لا}^2\text{ک} + 3\text{لا ک}^2 + \text{ک}^3 & \text{لا} + \text{ک} \\ \hline \text{لا}^2 & \\ \hline 3\text{لا} + \text{ک} & \\ 3\text{لا}^2 + 3\text{لا ک} + \text{ک}^2 & \\ \hline \text{لا}^2 & \\ \hline 3\text{لا} + 3\text{ک} & \\ 3\text{لا ک} + 3\text{ک}^2 & \\ \hline \times & \end{array}$$

۸ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} 4 - 4\text{لا} + \text{لا}^2 & 2 - \text{لا} \\ \hline 4 & \\ \hline -4 + \text{لا} & \\ -4\text{لا} + \text{لا}^2 & \\ \hline \times & \end{array}$$

۹ $\frac{\text{مکعب}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} 9 + 6\text{لا ک} + \text{لا}^2\text{ک}^2 & 3 + \text{لا ک} \\ \hline 9 & \\ \hline 6 + \text{لا ک} & \\ 6\text{لا ک} + \text{لا}^2\text{ک}^2 & \\ \hline \times & \end{array}$$

۱۰ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{ط}^2 - 6\text{ط} + 9 & \text{ط} - 3 \\ \hline \text{ط}^2 & \\ \hline -6 + \text{ط} & \\ -6\text{ط} + 9 & \\ \hline \times & \end{array}$$

۱۱ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{لا} - 2\text{ط}\sqrt{\text{لا}} + \text{ط}^2 & \sqrt{\text{لا}} - \text{ط} \\ \hline \sqrt{\text{لا}} & \\ \hline -2\text{ط} + \sqrt{\text{لا}} & \\ -2\text{ط}\sqrt{\text{لا}} + \text{ط}^2 & \\ \hline \times & \end{array}$$

۱۲ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{لا} + 2\sqrt{5}\sqrt{\text{لا}} + 5 & \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{5} \\ \hline \sqrt{\text{لا}} & \\ \hline 2\sqrt{5} + \sqrt{\text{لا}} & \\ 2\sqrt{5}\sqrt{\text{لا}} + 5 & \\ \hline \times & \end{array}$$

۱۳ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{لا} - 2\sqrt{\text{لا ط}} + \text{ط} & \sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ط}} \\ \hline \sqrt{\text{لا}} & \\ \hline -2\sqrt{\text{ط}} + \sqrt{\text{لا}} & \\ -2\sqrt{\text{لا ط}} + \text{ط} & \\ \hline \times & \end{array}$$

۱۴ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{لا} + 2\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ک}^{\frac{1}{2}} + \text{ک} & \text{لا}^{\frac{1}{2}} + \text{ک}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \text{لا}^{\frac{1}{2}} & \\ \hline 2\text{لا}^{\frac{1}{2}} + \text{ک}^{\frac{1}{2}} & \\ 2\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ک}^{\frac{1}{2}} + \text{ک} & \\ \hline \times & \end{array}$$

۱۵ $\frac{\text{مجذور}}{\text{جذر}}$

$$\begin{array}{r|l} \text{لا} - 2\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ط}^{\frac{1}{2}} + \text{ط} & \text{لا}^{\frac{1}{2}} - \text{ط}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \text{لا}^{\frac{1}{2}} & \\ \hline -2\text{لا}^{\frac{1}{2}}\text{ط}^{\frac{1}{2}} + \text{ط} & \\ \hline \times & \end{array}$$

۱۶ $\sqrt[3]{x^3+6x^2+3x}$ مجذور $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+7}$ جذر $x+(x+2)$

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{x^3+6x^2+3x} \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3+6x^2+3x \\ \hline x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2+3x \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2+3x \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3+3x^2+3x+7 \\ \hline (x+2)^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(x+2)^2 \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(x+2)^2+3(x+2)x+x^2 \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(x+2)x+x^2 \\ \hline x \end{array}$$

۱۸ $\sqrt{(1-x)^3+3(1-x^2)+(1+x)^3}$ مجذور $\sqrt{(1-x)+(1+x)}$ جذر

$$\begin{array}{r} (1-x)^3 \\ \hline 2(1-x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(1-x^2)+(1+x)^3 \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3(1-x^2)+(1+x)^3 \\ \hline x \end{array}$$

۱۹ $\sqrt{x^2+2x\sqrt{x^2+x}+x}$ مجذور $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ جذر

$$\begin{array}{r} x+2x\sqrt{x^2+x}+x \\ \hline x+x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\sqrt{x^2+x}+x \\ \hline 2\sqrt{x+x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\sqrt{x^2+x}+x \\ \hline x \end{array}$$

۲۰ $\sqrt{4x^2-1}+2x-1$ مجذور $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}$ جذر

$$\begin{array}{r} 4x^2-1+2x-1 \\ \hline 2x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\sqrt{4x^2-1}+2x-1 \\ \hline 2\sqrt{2x+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2\sqrt{4x^2-1}+2x-1 \\ \hline x \end{array}$$

۲۱ مجذور — جذر

$$\begin{array}{r|l} ل^{۴} + ۲ ل^{۳} ط^{ن} + ط^{۲ن} & ل^{۲} + ط^{ن} \\ \hline ل^{۴} & \\ \hline ۲ل^{۲} \;)\; ۲ ل^{۳} ط^{ن} + ط^{۲ن} & \\ ۲ ل^{۳} ط^{ن} + ط^{۲ن} & \\ \hline \times & \end{array}$$

۲۲ مجذور — جذر

$$\begin{array}{r|l} ل^{۲} + ۲ ل ك + ك^{۲} + ۲ ل ط + ۲ ط ك + ط^{۲} & ل + ك + ط \\ \hline ل^{۲} & \\ \hline ۲ل \;)\; ۲ ل ك + ك^{۲} & \\ ۲ ل ك + ك^{۲} & \\ \hline ۲ل + ۲ك \;)\; ۲ ل ط + ۲ ط ك + ط^{۲} & \\ ۲ ل ط + ۲ ط ك + ط^{۲} & \\ \hline \times & \end{array}$$

۲۳

$$\begin{array}{r|l} ك^{۲} + ۲ ط ك + ط^{۲} - ۲ ك ل - ۲ ل ط + ل^{۲} & ك + ط - ل \\ \hline ك^{۲} & \\ \hline ۲ك \;)\; ۲ ط ك + ط^{۲} & \\ ۲ ط ك + ط^{۲} & \\ \hline ۲ك + ۲ط \;)\; - ۲ ك ل - ۲ ل ط + ل^{۲} & \\ - ۲ ك ل - ۲ ل ط + ل^{۲} & \\ \hline \times & \end{array}$$

۲۴

$$\begin{array}{r|l} ۲۵ + ۱۰ ل + ل^{۲} + ۱۰ ك + ۲ ل ك + ك^{۲} & ۵ + ل + ك \\ \hline ۲۵ & \\ \hline ۱۰ \;)\; ۱۰ ل + ل^{۲} & \\ ۱۰ ل + ل^{۲} & \\ \hline ۱۰ + ۲ل \;)\; ۱۰ ك + ۲ ل ك + ك^{۲} & \\ ۱۰ ك + ۲ ل ك + ك^{۲} & \\ \hline \times & \end{array}$$

فصل کعب نکالنی کا قاعدہ

جانا چاہیئے کہ تیسری مرتبہ کی صعود کو مکعب کہتی ہین اور تیسری مرتبہ کی نزول کو کعب کہتے ہین مثلاً $لا^3$ مکعب لا کا ہی اور لا کعب $لا^3$ کا ہی اسیطرح لا کعب $لا^6$ کا ہی اور $لا^2$ کعب $لا^9$ کا ہی اور $لا^3$ کعب لا کا ہی اور $لا^{\frac{1}{3}}$ کعب $لا^{\frac{1}{3}}$ کا ہی اور $لا^{\frac{2}{3}}$ کعب $لا^{\frac{2}{3}}$ کا ہی ان مثالون سے معلوم ہوتا ہی کہ کعب کا نشان قوت تہائی ہوتا ہی مکعب کے نشان قوت سی * صعود کی قاعدہ سی ظاہر ہی کہ $(لا + ط)$ کا تین مرتبہ کا صعود یعنے $(لا + ط)^3 = لا^3 + ۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$ پس معلوم ہوا کہ $(لا + ط)$ کعب ہے $لا^3 + ۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$ کا اب ہم کعب نکالنی کا قاعدہ بیان کرتے ہین یعنی ایسا قاعدہ بیان کرتے ہین کہ اگر اوسکو $لا^3 + ۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$ پر جاری کرین تو $لا + ط$ حاصل ہو جاوے قاعدہ یہہ ہی کہ جس مقدار کا کعب لینا ہی پہلی اوسکو ایک جگہ بترتیب نشان قوت کسی حرف کی لکھنا چاہیئے بعد اسکے اول جز کا کعب نکال کر خط قوسی کے اگلی لکھہ دین اس کعب کا مکعب کرکے اول جز مین سے تفریق کرین باقی کچھہ نرہیگا بعد اسکی اگلی تین جزون کو نیچی اوتار کر مقسوم بناوین اور اول جز کی کعب کو مجذور کرین اور اس مجذور کو ۳ مین ضرب کرکی مقسوم علیہ بناوین جو کچھہ خارج قسمت ہو اوسکو مقسوم علیہ مین ضرب کرین اور اس حاصل ضرب کو اول رقم مقسوم کی نیچی لکھین اور پھر خارج قسمت کی مجذور کو تگنا کرکے ضرب کرین اول جز کی کعب مین اور اس حاصل ضرب کو مقسوم کی دوسری مقدار کے نیچی لکھین اور پھر خارج قسمت کا مکعب کرکر مقسوم کی تیسری رقم کی نیچی لکھین اور پھر تفریق کرین اگر عمل تمام ہوجاوی تو فبہا نہین تو پھر اگلی رقمون کو اوتار کر یہی عمل جاری رکھین جب تک کہ عمل تمام ہو بعد اسکی جو کچھہ خط قوسی کی آگے ہو وہی کعب مطلوب ہی مثلاً اس قاعدہ کو $لا^3 + ۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$ پر جاری کرین

اسطرح

مکعب	کعب
$لا^3 + ۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$	$لا + ط$
$۳ لا^2$ $۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$	
$۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$	
×	

کہ اول جز کا کعب لیا تو لا ہوا اسکو خط قوسی کی آگے لکھا پھر اسکا مکعب کرکے اول جز مین سے تفریق کیا تو کچھہ نہ بچا بعد اسکی تینون رقمون باقی کو نیچی اوتار کر لکھا یعنے $۳ لا^2 ط + ۳ لا ط^2 + ط^3$ کو نیچی اوتار کر لکھا

اور اسکو مقسوم بنایا پہر اول جز کی کعب کا مجذور کیا یعنی لا کو مجذور کیا تو لا^{۲} مجذور ہوا اوسکو پہلی مین ضرب تو ۳ لا^{۲} ہوا اس ۳ لا^{۲} کو مقسوم علیہ بنایا خارج قسمت ط ہوا ط کو مقسوم علیہ مین ضرب دیا تو ۳ لا^{۲} ط ہوا اسکو اول رقم مقسوم کی نیچے لکھا پہر خارج قسمت کا مجذور کیا اور اس مجذور کو تگنا کیا تو ۳ ط^{۲} ہوا اسکو اول جز کے کعب مین ضرب کیا تو ۳ لا ط^{۲} ہوا اس حاصل ضرب کو دوسری رقم مقسوم کی نیچے لکھا پہر خارج قسمت کا کعب کیا اور اس مکعب کو تیسری رقم مقسوم کی نیچے لکھا اور پہر تفریق کی تو کچھہ نہ بچا اور عمل تمام ہوگیا اور خط قوسی کی آگے لا + ط ہوا پس لا + ط کعب مطلوب ہی

مثال ۲ ط^{۳} + ۳ ط^{۲} ء + ۳ ط ء^{۲} + ء^{۳} (ط + ء

ط^{۳}

۳ ط^{۲}) ۳ ط^{۲} ء + ۳ ط ء^{۲} + ء^{۳}

۳ ط^{۲} ء + ۳ ط ء^{۲} + ء^{۳}

مثال ۳ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} ء + ۳ لا ء^{۲} − ء^{۳} (لا − ء

لا^{۳}

۳ لا^{۲}) − ۳ لا^{۲} ء + ۳ لا ء^{۲} − ء^{۳}

− ۳ لا^{۲} ء + ۳ لا ء^{۲} − ء^{۳}

×

مثال ۴ ط^{۳} + ۳ ط^{۲} ص + ۳ ط ص^{۲} + ص^{۳} (ط + ص

ط^{۳}

۳ ط^{۲}) ۳ ط^{۲} ص + ۳ ط ص^{۲} + ص^{۳}

۳ ط^{۲} ص + ۳ ط ص^{۲} + ص^{۳}

×

مثال ۵ ۱ − ۳ لا + ۳ لا^{۲} − لا^{۳} (۱ − لا

کعب کعب

۱

۳) − ۳ لا + ۳ لا^{۲} − لا^{۳}

− ۳ لا + ۳ لا^{۲} − لا^{۳}

×

مثال ۶ ۸ لا^{۳} + ۱۲ لا^{۲} + ۶ لا + ۱ (۲ لا + ۱

کعب کعب

۸ لا^{۳}

۳×۴ لا^{۲}) ۱۲ لا^{۲} + ۶ لا + ۱

۱۲ لا^{۲} + ۶ لا + ۱

×

۶ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} ص + ۳ لا ص^{۲} + ص^{۳} + ۳ لا^{۲} س + ۶ لا ص س + ۳ ص^{۲} س + ۳ لا س^{۲} + ۳ ص س^{۲} + س^{۳} (لا + ص + س

لا^{۳}

۳ لا^{۲}) ۳ لا^{۲} ص + ۳ لا ص^{۲} + ص^{۳}

۳ لا^{۲} ص + ۳ لا ص^{۲} + ص^{۳}

۳ لا^{۲} + ۶ ص لا + ۳ ص^{۲}) ۳ لا^{۲} س + ۶ لا ص س + ۳ ص^{۲} س + ۳ لا س^{۲} + ۳ ص س^{۲} + س^{۳}

۳ لا^{۲} س + ۶ لا ص س + ۳ ص^{۲} س + ۳ لا س^{۲} + ۳ ص س^{۲} + س^{۳}

×

۷ مثال جیسکی . $ل^۶ - ۶ل^۵ + ۱۵ل^۴ - ۲۰ل^۳ + ۱۵ل^۲ - ۶ل + ۱$ ÷ $ل^۲ - ۲ل + ۱$

$ل^۶$

$ل^۴$) $ل^۶ - ۶ل^۵ + ۱۵ل^۴ - ۲۰ل^۳$

$- ۶ل^۵ + ۱۲ل^۴ - ۸ل^۳$

$۳ل^۴ - ۱۲ل^۳ + ۱۲ل^۲$) $۳ل^۴ - ۱۲ل^۳ + ۱۵ل^۲ - ۶ل + ۱$

$۳ل^۴ - ۱۲ل^۳ + ۱۵ل^۲ - ۶ل + ۱$

×

۸ $ل^۶ - ۹ل^۵ + ۳۹ل^۴ - ۹۹ل^۳ + ۱۵۶ل^۲ - ۱۴۴ل + ۶۴$ ÷ $ل^۲ - ۳ل + ۸$

$ل^۶$

$۳ل^۴$) $ل^۶ - ۹ل^۵ + ۳۹ل^۴ - ۹۹ل^۳$

$- ۹ل^۵ + ۲۷ل^۴ - ۷۲ل^۳$

$۳ل^۴ - ۱۸ل^۳ + ۲۷ل^۲$) $۱۲ل^۳ - ۷۲ل^۲ + ۱۵۶ل - ۱۴۴$

$۱۲ل^۳ - ۷۲ل^۲ + ۱۵۶ل - ۱۴۴$

×

تیسرا باب مساوات کی بیان مین
علوم متعارفہ

واضح ہو کہ مساوات مین چند باتون کا کام پڑتا ہی اسواسطی اول اون باتو نکا لکھنا ضرور ہی اور یہہ باتین ظاہر اور بدیہی ہین اسواسطی ہم اونکو علوم متعارفہ کہتے ہین وہ باتین یہہ ہین

۱ اگر دو مقدار ایسیمین برابر ہون اور پہر دونو پر برابر برابر زیادہ کردین تو بعد زیادتی کی بہی باہم برابر رہینگے

۲ اگر دو مقدار ایسیمین برابر ہون اور دونو مین سے برابر برابر کم کرلین تو بعد نقصان کی بہی باہم برابر رہینگے

۳ اگر دو مقدار ایسیمین برابر ہون اور اون دونو کو کسی ایک مقدار مین ضرب کرلین تو بعد ضرب دینی کی بہی باہم برابر رہینگی

۴ اگر دو مقدار باہم برابر ہون اور اون دونو کو کسی ایک مقدار پر تقسیم کردین تو بعد تقسیم کے جو خارج قسمت ہونگی وہ بہی باہم برابر ہونگی

۵ اگر ایک مقدار پر کسی ایک مقدار کو زیادہ کرین اور جسکو زیادہ کیا ہی اوسیکو یا اوسکی برابر کو کم بہی کرین تو مقدار اول اپنی حال پر رہیگی یعنے نہ تو زیادہ ہوگی اور نہ کم ہوگی

۶ اگر ایک مقدار کو کسی مقدار مین ضرب کرین اور جسمین ضرب کیا ہی اوسی پر تقسیم کردین تو مقدار اول جیسی تہی اوسی طرح رہیگی یعنے کم و بیش نہین ہوئیگی

مساوات اول درجہ کی

جانا چاہیئے کہ جب دو مقدار باہم برابر ہون اور اون مقدارون مین حرف مجہول کا نشان قوت آ ہو تو اُس صورت کو اول درجہ کی مساوات کہتی ہین مثلاً ۲ لا + ۳ = ۱۱ اول درجہ کی مساوات ہی کیونکہ اسمین لا کا نشان قوت آ ہی اور معنی اسکی یہہ ہین کہ لا ایک ایسا عدد مجہول ہی کہ اگر اوسکی دوچند پر ۳ زیادہ کردین تو مجموعہ اگلی برابر ہو اسیطرح ۵ لا − ۳ = ۲۲ بہی اول درجہ کی مساوات ہی اور اسکی معنی یہہ ہین کہ لا ایسا عدد مجہول ہی کہ اگر اوسکو پانچ مین ضرب کرین اور حاصل ضرب مین سے ۳ نکال ڈالین تو باقی ۲۲ کی برابر رہی

اور اسیطرح ۳ لا + ۲ لا = ۳۰ اول درجہ کی مساوات ہی اسکی یہہ معنی ہین کہ لا ایک ایسا مجہول عدد ہی کہ اگر اوسکا تگنا اور دوگنا جمع کرین تو ۳۰ ہوجاتے ہین

علی ہذا القیاس ۸ لا − ۳ لا = ۲۵ اول درجہ کی مساوات ہی اور اسکی معنی یہہ ہین کہ لا کوئی ایسا عدد ہی کہ اگر اوسکو ۸ مین ضرب کرین اور حاصل ضرب مین سے تگنا اوس عدد کا نکال ڈالین تو باقی ۲۵ رہجاتی ہین

اسیطرح $\frac{لا}{۲} + \frac{لا}{۳} = ۱۰$ مساوات اول درجہ کی ہی اور اسکی یہہ معنی ہین کہ لا کوئی ایسا عدد ہی کہ اگر اوسکی نصف اور تہائی کو جمع کرین تو ۱۰ ہوجاتی ہین اسیطرح ہر ایک مساوات سی کوئی نہ کوئی سوال تعبیر ہوتا ہی اب ظاہر ہی کہ اگر کسیطرح مساوات مین سے حرف مجہول کی مقدار معلوم ہوجاوی تو جو سوال اوس مساوات سی تعبیر ہوتا ہی وہ معلوم ہوجاویگا پس بڑا مطلب مساوات سی یہہ ہی کہ مجہول کی مقدار معلوم ہوجاوی ✣ اب جانا چاہیئے کہ ۶ علوم متعارفہ جو پہلی بیان کیے ہین اگر اونکا خیال کرین تو مساوات سی مجہول کی مقدار معلوم ہوجاتی ہے مثلاً ۲ لا + ۳ = ۱۱ ایک مساوات ہی اور اسمین دو طرفین ہین یعنے علامت مساوات کی دونو طرف دو مقدار ہین جو اسمین برابر ہین ان دونو طرفون کو مساوی اور مساوی لگا بہی کہتے ہین اب اگر اس مساوات کی دونو طرفون سے ۳ کا عدد کم کرین تو موافق (۳) کے مساوات مین کچہہ فرق نہ آئیگا لیکن یہہ ظاہر ہی کہ جب ۳ کا عدد طرفین سے نفی کردین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی ۲ لا + ۳ − ۳ = ۱۱ − ۳ اور چونکہ اول طرف مین ۲ لا کی سا بہہ ۳ کا عدد جمع بہی ہی اور نفی بہی ہی تو موافق (۵) کی اول طرف مین سے ۳ کا عدد زایل ہوجاویگا اور ۲ لا رہجاویگی پس یہہ مساوات حاصل ہوگی ۲ لا = ۱۱ − ۳ اب ظاہر ہی کہ اگر اول مساوات یعنی ۲ لا + ۳ = ۱۱ مین ۳ کی عدد کو علامت بدل کر دوسری طرف لیجاوین تو بہی یہی ۲ لا = ۱۱ − ۳ مساوات حاصل ہوتی ہی اس سے معلوم ہوا کہ اگر ایک مساوات مین کسی عدد کو ایک طرف سی دوسری طرف علامت بدل کر لکہہ دین تو مساوات مین کچہہ فرق نہین آتا اب مساوات ۲ لا = ۱۱ − ۳ سے یہہ حاصل ہوتا ہی ۲ لا = ۸ اسواسطی کہ ۱۱ مین سے جسوقت ۳ کو نکال ڈالا تو ۸ باقی رہی پس اس مساوات ۲ لا = ۸ کے دونو طرفون کو ۲ پر تقسیم کرین تو موافق

(۴) بعد تقسیم کی بھی مساوات مین کچھہ فرق نہین آیگا اور یہہ مساوات حاصل ہوگی لا = ۴ یعنی مقدار مجہول ۴ ہی پس بیان بالا سی یہہ قاعدہ نکلا کہ جسوقت مساوات مین کسور نہون تو اوسوقت مقادیر معلومہ کو ایکطرف لیجا دین اور جنمین مقادیر مجہول ملی ہوئی ہین اونکو ایکطرف رہنے دین بعد اسکی جنمین مقدار مجہول ملی ہوی ہی اونکو اسطرح لکھین کہ مقدار معلوم سر پر جاوی مقدار مجہول کی بعد اسکی مقدار مجہول کے سر پر طرفین مساوات کو تقسیم کردین اس عمل سے مجہول مقدار ایکطرف رہجائیگی اور مقدار معلوم دوسری طرف یعنی مقدار مجہول مقدار معلوم کے برابر ہوجاویگی اور یہی مقدار معلوم قیمت مقدار مجہول کی ہوگی

مثلاً ۳ لا + ۵ لا − ۱۰ = ۳۰ پس اس مساوات کی اول طرف سی ۱۰ کو علامت بدل کر دوسری طرف لکھہ دیا تاکہ مقادیر مجہول ایکطرف ہوجاوین اور مقدار معلوم دوسری طرف پس یہہ مساوات ۳ لا + ۵ لا = ۳۰ + ۱۰ حاصل ہوئے اور جب اول طرف کے مقدارون کو جمع کیا تو ۸ لا ہوئی اور دوسری طرف کو جمع کیا تو ۴۰ ہوئے اور اسیواسطی یہہ مساوات ۸ لا = ۴۰ حاصل ہوئی اور طرفین مساوات کو لا کی سر پر تقسیم کیا یعنی ۸ پر ۸ لا کو بھی تقسیم کیا اور ۴۰ کو بھی تقسیم کیا اب ظاہر ہی کہ جب ۸ لا کو ۸ پر تقسیم کرین تو فقط لا رہی گا کیونکہ موافق (۶) کے لا مین ۸ ضرب کیا ہوا ہی اور ۸ ہی پر تقسیم ہوگا تو عدد ۸ کا زایل ہوجاویگا اور فقط لا رہیگا اور دوسری طرف ۴۰ کو جو ۸ پر تقسیم کیا تو ۵ خارج قسمت ہوگا اسیواسطی طرفین مساوات کو مقدار مجہول کے سر پر تقسیم کرنی سے یہہ مساوات حاصل ہوگی لا = ۵ یعنی مقدار مجہول ۵ ہی بعد اسکے صحت اور غلطی مساوات مین رکھنی سے معلوم ہوسکتی ہی اسیواسطی کہ مساوات ۳ لا + ۵ لا − ۱۰ = ۳۰ کی یہہ معنی ہین کہ لا ایسا عدد مجہول ہی کہ اگر اوسکی تگنی اور پانچ گنی کو جمع کرین اور اس حاصل جمع مین سی ۱۰ کم کرین تو باقی ۳۰ کی برابر ہوے اب ہمنی جو قیمت مجہول کی نکالی ہی وہ ۵ ہی پس ۵ کا تگنا کیا تو ۱۵ ہوے اور پانچ گنا کیا تو ۲۵ ہوے کہ جمع کیا ۴۰ ہوے اور ۴۰ مین سی ۱۰ کم کیے تو باقی ۳۰ رہی پس معلوم ہوا کہ ہمنی جو قیمت مجہول کی ۵ در یافت کی ہی صحیح ہی کیونکہ اوس سے شرط سوال کی پوری ہوگئی * چونکہ مساوات حل کرنے مین بہت عبارت لکھنی سے ترتیب عمل کی بگڑ جاتی ہی اور ذہن منتشر ہوتا ہی اسواسطی مساوات حل کرنیمین ہم فقط علامتون کا استعمال کرینگے

مثال ۳ ۶ لا + ۳ لا − ۷ = ۱۱

∴ ۶ لا + ۳ لا = ۱۱ + ۷

= ۱۸

∴ ۶ لا + ۳ لا = ۱۸

یعنی ۹ لا = ۱۸

∴ لا = ۲ یعنی قیمت مجہول کی ۲ ہی

مثال ۴ ۷ لا − لا + ۸ = ۴۴

∴ ۷ لا − لا = ۴۴ − ۸

∴ ۶ لا = ۳۶

∴ لا = $\frac{۳۶}{۶}$

∴ لا = ۶

۵ $۷ل - ۲ل + ۴ = ۷$

$\therefore ۵ل - ۲ل = ۷ - ۴$

$\therefore ۵ل - ۲ل = ۳$

$\therefore ۳ل = ۳$

$ل = \frac{۳}{۳} = ۱$

$\therefore ل = ۱$

۶ $ل - ۱۳ + ۴ل = ۶۲$

$\therefore ۵ل + ۴ل = ۶۲ + ۱۳$

$\therefore ۵ل = ۷۵$

$\therefore ل = \frac{۷۵}{۵} = ۱۵$

$\therefore ل = ۱۵$

۷ $ل + ۳ = ۱۵ - ل$

$\therefore ل + ل = ۱۵ - ۳$

$\therefore ۲ل = ۱۲$

$\therefore ل = \frac{۱۲}{۲} = ۶$

$\therefore ل = ۶$

۸ $۳ل - ۱۸ + ۷ل = ۹ل + ۷ - ۱۸$

$\therefore ۳ل + ۷ل - ۹ل = ۷ + ۱۸ - ۱۸$

$\therefore ۱۰ل - ۹ل = ۷$

$\therefore ل = ۷$

۹ $۶ل - ۷ = ۲ل + ۱۳$

$\therefore ۶ل - ۲ل = ۱۳ + ۷$

$\therefore ۴ل = ۲۰$

$\therefore ل = \frac{۲۰}{۴} = ۵$

$\therefore ل = ۵$

۱۰ $۲ل + ۳ = ل + ۱۷$

$\therefore ۲ل - ل = ۱۷ - ۳$

$\therefore ل = ۱۴$

۱۱ $۵ل - ۴ = ۴ل + ۲۵$

$\therefore ۵ل - ۴ل = ۲۵ + ۴$

$\therefore ل = ۲۹$

اگر کوئی ایسی مساوات ہو کہ اوسمین بجای اعداد کی حروف ہی ہون تو وہ بہی اسیطرح حل ہوسکتی ہی جسطرح مساوات بالا حل ہوئی ہین مثلاً $طل + ب = ص$ اسمین سوای لا کی اور حرف مقادیر معلومہ ہین یعنے ط اور ب اور ص معلوم ہین پس موافق قواعد گذشتہ کی یہہ مساوات اسطرح حل ہوتی ہی

۱ $طل + ب = ص$

$\therefore طل = ص - ب$

$\therefore ل = \frac{ص - ب}{ط}$ یہہ قیمت مجہول کی ہی

۲ $طل + ب - ل - س = ص$

$\therefore طل + بل = ص + س$

$\therefore (ط + ب) ل = ص + س$

$\therefore ل = \frac{ص + س}{ط + ب}$

۳ ص لا − س لا = ۱۳ ∴ ص لا − س لا − ۳ س لا = ۱۳

∴ ص لا − ۴ س لا = ۱۳

∴ (ص − ۴ س) لا = ۱۳

∴ لا = $\frac{۱۳}{ص − ۴س}$

۴ س لا + ۲ ص لا = س + ص لا + ص

∴ س لا + ۲ ص لا − ص لا = س + ص

∴ س لا + ص لا = س + ص

∴ (س + ص) لا = س + ص

∴ لا = $\frac{س + ص}{س + ص}$ = ۱

∴ لا = ۱

۵ ۴ لا + ۶ ط = ۳ لا − ۲ ط + ۹ ـ

∴ ۴ لا − ۳ لا = −۶ ط − ۲ ط + ۹ ـ

∴ لا = ۹ ـ − ۸ ط

۶ ۳ لا − ۵ س + ۶ لا = ۲ س − ۴ لا + ۱

∴ ۳ لا + ۶ لا + ۴ لا = ۲ س + ۵ س + ۱

∴ ۱۳ لا = ۷ س + ۱

∴ لا = $\frac{۷ س + ۱}{۱۳}$

۷ ۲ لا + ط ص − لا = ط + ط ص

∴ ۲ لا − لا = ط + ط ص − ط ص

∴ لا = ط

۸ ۱ لا + ط لا + س = ۳ ط + س + ۳

∴ ۱ لا + ط لا = ۳ ط + س − س + ۳

= ۳ ط + ۳

= ۳ (۱ + ط)

∴ ۱ لا + ط لا = ۳ (۱ + ط)

∴ (۱ + ط) لا = ۳ (۱ + ط)

∴ لا = $\frac{۳ (۱ + ط)}{(۱ + ط)}$ = ۳

∴ لا = ۳

۹ ۲ ص لا − س لا = ص لا − ۲ س لا

∴ ۲ ص لا − ص لا − س لا + ۲ س لا = ۰

∴ ص لا + س لا = ۰

∴ (ص + س) لا = ۰

∴ لا = $\frac{۰}{ص + س}$ = ۰

∴ لا = ۰

اگر مساوات مین کسور ہون تو چاہیئے کہ پہلی اول کسر کے مخرج نما کو طرفین مساوات مین ضرب کرین بعد اسکی دوسرے کسر کی مخرج نما کو طرفین مساوات مین ضرب کرین اور اسیطرح جتنی کسرین ہون سب کے مخرج نمامین طرفین مساوات کو ضرب کرین اس قاعدہ سی مساوات مین کسر نہین رہنی کی اور پھر اول قاعدہ کی موافق مساوات حل ہوسکتی ہی اور یہہ بھی بات ظاہر ہی کہ اس قاعدہ سی مساوات مین کچھ خلل نہین آتا اسواسطے کہ موافق (۳) کے دو مقدارون متساوی کو ایک مقدار مین ضرب کرین تو بعد ضرب کرنے کی بھی باہم برابر رہتے ہین

مثال ۱ $\frac{۲ل}{۳} - \frac{ل}{۴} = ۱۰$ طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

$\therefore ۲ل - \frac{۳ل}{۴} = ۳۰$ پہر طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

$\therefore ۸ل - ۳ل = ۱۲۰$

$\therefore ۵ل = ۱۲۰$

$\therefore ل = \frac{۱۲۰}{۵} = ۲۴$

$\therefore ل = ۲۴$

۲ $\frac{۷ل}{۴} - \frac{۵ل}{۶} = \frac{۵۵}{۶}$ طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

$\therefore ۷ل - \frac{۲۰ل}{۶} = \frac{۲۲۰}{۶}$ پہر طرفین کو ۶ مین ضرب کیا

$\therefore ۴۲ل - ۲۰ل = ۲۲۰$

$\therefore ۲۲ل = ۲۲۰$

$\therefore ل = \frac{۲۲۰}{۲۲} = ۱۰$

$\therefore ل = ۱۰$

۳ $\frac{ل}{۲} + \frac{ل}{۳} + \frac{ل}{۵} = ۳۱$ طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

$\therefore ل + \frac{۲ل}{۳} + \frac{۲ل}{۵} = ۶۲$ پہر طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

$۳ل + ۲ل + \frac{۶ل}{۵} = ۱۸۶$ پہر طرفین کو ۵ مین ضرب کیا

$\therefore ۱۵ل + ۱۰ل + ۶ل = ۹۳۰$

$\therefore ۳۱ل = ۹۳۰$

$\therefore ل = \frac{۹۳۰}{۳۱} = ۳۰$

$\therefore ل = ۳۰$

۴ $ل + \frac{ل}{۲} + \frac{ل}{۳} = ۱۱۰$ طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

$\therefore ۲ل + ل + \frac{۲ل}{۳} = ۲۲۰$ پہر طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

$۶ل + ۳ل + ۲ل = ۶۶۰$

$\therefore ۱۱ل = ۶۶۰$

$\therefore ل = \frac{۶۶۰}{۱۱} = ۶۰$

$\therefore ل = ۶۰$

۵ $\frac{ل}{۵} + \frac{ل}{۴} + \frac{ل}{۳} = \frac{ل}{۲} + ۷$ طرفین کو ۶۰ مین ضرب کیا

$\therefore ل + \frac{ل۵}{۴} + \frac{ل۵}{۳} = \frac{ل۵}{۲} + ۸۵$ طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

$\therefore ۴ل + ۵ل + \frac{ل۲۰}{۳} = ۱۰ل + ۳۴۰$ طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

$\therefore ۱۲ل + ۱۵ل + ۲۰ل = ۳۰ل + ۱۰۲۰$

$\therefore ۴۷ل = ۳۰ل + ۱۰۲۰$

$\therefore ۷ل - ۳۰ل = ۱۰۲۰$

$\therefore ۱۷ل = ۱۰۲۰$

$\therefore ل = \frac{۱۰۲۰}{۱۷} = ۶۰$

۶ $\frac{ل}{۲} + \frac{ل}{۳} - \frac{ل}{۴} = \frac{۱}{۲}$ طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

$\therefore ل + \frac{ل۲}{۳} - \frac{ل}{۲} = ۱$ ۳ مین ضرب کیا طرفین کو

$۳ل + ۲ل - \frac{ل۳}{۲} = ۳$ طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

$\therefore ۶ل + ۴ل - ۳ل = ۶$

$\therefore ۱۰ل - ۳ل = ۶$

$\therefore ۷ل = ۶$

$\therefore ل = \frac{۶}{۷}$

۷ $۶ل - \frac{ل۳}{۴} - ۹ = ۵ل$ طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

$\therefore ۲۴ل - ۳ل - ۳۶ = ۲۰ل$

$\therefore ۲۴ل - ۳ل - ۲۰ل = ۳۶$

$\therefore ۲۴ - ۲۳ل = ۳۶$

$\therefore ل = ۳۶$

۸ $\frac{ل۳}{۴} + ۲۰ = \frac{ل۷}{۳} + \frac{۱۱۰}{۷}$

$\therefore ۲۱ل + ۱۴۰ = ۲۸ل + ۱۱۰$ طرفین کو ۷ مین ضرب کیا

$\therefore ۱۴۰ + ۱۱۰ = ۲۸ل - ۲۱ل$

$\therefore ۲۵۰ = ۷ل$

$\therefore ل = \frac{۲۵۰}{۲۵} = ۱۰$

$\therefore ل = ۱۰$

۹ $۲ل - \frac{ل+۳}{۳} = ۱۵ + \frac{۱۲ل+۲۶}{۵}$ ۳ کو طرفین ضرب کیا

$\therefore ۶ل - ل - ۳ + ۴۵ = \frac{۳۶ل+۷۸}{۵}$ طرفین کو ۵ مین ضرب کیا

$\therefore ۳۰ل - ۵ل - ۱۵ + ۲۲۵ = ۳۶ل + ۷۸$

$\therefore ۲۵ل + ۲۱۰ = ۳۶ل + ۷۸$

$\therefore ۲۱۰ - ۷۸ = ۳۶ل - ۲۵ل$

$\therefore ۱۳۲ = ۱۱ل$

یا $۱۱ل = ۱۳۲$

$\therefore ل = \frac{۱۳۲}{۱۱} = ۱۲$

$\therefore ل = ۱۲$

۱۰ $ل - ۷ = \frac{ل}{۵} + \frac{ل}{۳}$ طرفین کو ۵ مین ضرب کیا

$\therefore ۱۵ل - ۱۰۵ = ۳ل + ۵ل$ طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

$\therefore ۱۵ل - ۸ل = ۱۰۵$

$\therefore ۷ل = ۱۰۵$

$\therefore ل = \frac{۱۰۵}{۷} = ۱۵$

$ل = ۱۵$

بعضی مساواتین ایسی ہوتی ہین کہ اونمین حرف مجہول کا نشان قوت آسی زیادہ ہوتا ہی لیکن اول درجہ کے مساوات کی موافق اونمین سے قیمت مجہول کی معلوم ہوجاتی ہی مثلاً یہہ مساوات ہی

۱۱ $۳ل^۲ - ۱۰ل = ۸ل + ل^۲$ طرفین مساوات کو گھٹا کیا

$\therefore ۳ل - ۱۰ = ۸ + ل$

$\therefore ۳ل - ل = ۸ + ۱۰$

$\therefore ۲ل = ۱۸$

$\therefore ل = ۹$

۱۲ $\frac{ل-۵}{۴} + ۶ل = \frac{ل-۲۸۴}{۵}$ ضرب کیا ۴ مین طرفین کو

$\therefore ل - ۵ + ۲۴ل = \frac{ل-۱۱۳۶}{۵}$ طرفین کو ضرب کیا ۵ مین

$\therefore ۵ل - ۲۵ + ۱۲۰ل = ل - ۱۱۳۶$

$\therefore ۵ل + ۱۲۰ل - ل = ۱۱۳۶ + ۲۵$

$\therefore ۱۲۹ل = ۱۱۶۱$

$\therefore ل = \frac{۱۱۶۱}{۱۲۹} = ۹$

۱۳ $ل + \frac{۱۱-ل}{۳} = \frac{۱۹-ل}{۲}$ ضرب کیا طرفین کو ۳ مین

$\therefore ۳ل + ۱۱ - ل = \frac{۵۷-۳ل}{۲}$ ضرب کیا طرفین کو ۲ مین

$۶ل + ۲۲ - ۲ل = ۵۷ - ۳ل$

$\therefore ۶ل + ۳ل - ۲ل = ۵۷ - ۲۲$

$\therefore ۷ل = ۳۵$

$ل = ۵$

۱۴ $۳ل - \frac{ل-۴}{۴} - ۴ = \frac{۱۴+۵ل}{۳} - \frac{۱}{۱۲}$ طرفین کو ۱۲ مین ضرب کیا

$\therefore ۱۲ل - ل + ۴ - ۱۶ = \frac{۵۶+۲۰ل}{۳} - ۴$ طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

$\therefore ۳۶ل - ۳ل + ۱۲ - ۴۸ = ۲۰ل + ۵۶ - ۱$

$\therefore ۳۶ل - ۳ل - ۲۰ل = ۵۶ - ۱ - ۱۲ + ۴۸$

$\therefore ۳۶ل - ۲۳ل = ۵۵ - ۱۲ + ۴۸$

$\therefore ۱۳ل = ۹۱$

$\therefore ل = \frac{۹۱}{۱۳} = ۷$

۱۵ $\frac{ل-۱}{۷} + \frac{ل-۲۳}{۵} = ۷ - \frac{ل+۴}{۴}$ ضرب کیا طرفین کو ۷۰ مین

$\therefore ل - ۱ + \frac{۷(ل-۲۳)}{۵} = ۴۹ - \frac{۷(ل+۴)}{۴}$ طرفین کو ۲۰ مین ضرب کیا

$\therefore ۵(ل-۱) + ۷(ل-۲۳) = ۲۴۵ - \frac{۳۵(ل+۴)}{۴}$ طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

$\therefore ۲۰(ل-۱) + ۲۸(ل-۲۳) = ۹۸۰ - ۳۵(ل+۴)$

$\therefore ۲۰ل - ۲۰ + ۲۸ل - ۶۴۴ = ۹۸۰ - ۱۴۰ - ۳۵ل$

$\therefore ۲۰ل + ۲۸ل + ۳۵ل = ۹۸۰ - ۱۴۰ + ۲۰ + ۶۴۴$

$\therefore ۷۳ل = ۲۱۶$

$\therefore ل = \frac{۲۱۶}{۲۷}$

$\therefore ل = ۸$

مساوات مین جتنی کسرین ہون اگر اونکی نسب نمایون کو باہم ضرب کرین اور اسس حاصل ضرب کو طرفین مین ضرب کرین تو بہی کسر دور ہوجاتی ہی مثلاً (۱۶) مثال مین ظاہر ہی

۱۶ $\frac{۷ل+۵}{۳} - \frac{۴+۱۶ل}{۵} = \frac{۳ل+۹}{۲}$

اسکے نسب نمایون کا حاصلضرب یعنی $۳ \times ۵ \times ۲$ عدد ہوتا ہی پس جب ۳۰ کو طرفین مساوات مین ضرب کرین

تو ۷۰ ل + ۵۰ − ۹۶ − ۲۴ ل + ۱۸۰ = ۴۵ ل + ۱۳۵

∴ ۷۰ ل − ۲۴ ل − ۴۵ ل = ۱۳۵ + ۹۶ − ۵۰ − ۱۸۰

∴ ل = ۱

۱۷ $\frac{۳ل+۴}{۵} - \frac{۷ل-۳}{۲} = \frac{ل-۱۶}{۴}$ اس مساوات کی نسب نمایون کا حاصل ضرب ۴۰ ہوتا ہی لیکن عدد ۲۰ کا ان سب نمایون پر تقسیم ہوسکتا ہی پس اگر ۲۰ کو طرفین مین ضرب کرین تو بہی کسر مساوات مین نہین رہنی کی اور ہمیشہ خیال کرنا چاہیئے کہ وہ عدد چہوتی سے چہوٹا کونسا ہی جو سب نسب نمایون پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی پس جو عدد ایسا دریافت ہو اوسکو طرفین مین ضرب کرنا چاہیئے اسطرح مساوات مین کسر بہی نہین رہنی کی اور عمل بہی مختصر رہیگا اب ہم (۱۷) مثال کو ۲۰ مین ضرب کرکے حل کرتے ہین ظاہر ہی کہ بعد ضرب کرنی کی یہہ حاصل ہوگا

۱۲ ل + ۱۶ − ۷۰ ل + ۳۰ = ۸۰ − ۵ ل

∴ ۱۶ + ۳۰ + ۸۰ = ۷۰ ل + ۵ ل − ۱۲ ل *

∴ ۱۲۶ = ۶۳ ل

یا ۶۳ ل = ۱۲۶

∴ ل = $\frac{۱۲۶}{۶۳}$ = ۲

∴ ل = ۲

۱۸ $\frac{۱۷-۳ل}{۵} - \frac{۴ل+۲}{۳} = ۶ - ل$ طرفین کو ۱۵ مین ضرب کیا

∴ ۵۱ − ۹ ل − ۲۰ ل − ۱۰ = ۷۵ − ۹۰ ل + ۳۵ ل + ۷۰

∴ ۹۰ ل − ۳۵ ل − ۹ ل − ۲۰ ل = ۷۵ + ۷۰ − ۱۰ − ۵۱

∴ ۲۶ ل = ۱۰۴

∴ ل = $\frac{۱۰۴}{۲۶}$ = ۴

∴ ل = ۴

۱۹ ل − $\frac{۳ل-۳}{۵}$ + ۴ = $\frac{۲۰-ل}{۲} - \frac{۶ل-۸}{۷} + \frac{۴ل-۴}{۵}$

اس مساوات کی دونوطرفون کو ضرب کیا حاصل ضرب ۵ × ۲ × ۷ مین یعنی ۷۰ مین تو حاصل ہوا یہہ

۷۰ ل − ۲۴ ل + ۲۴۰ + ۲۸۰ = ۷۰۰ − ۳۵ ل − ۶۰ ل + ۸۰ + ۵۶ ل − ۵۶

∴ ۶۷ ل = ۴۰۲

∴ ل = $\frac{۴۰۲}{۶۷}$ = ۶

∴ ل = ۶

۲۰ $\frac{۴ل-۲۱}{۹} + ۳\frac{۳}{۴} + \frac{۷ل-۵۷}{۴} = ۲۴۱ - \frac{۵ل-۹۶}{۱۲} - ۱۱ ل$

اس مساوات کو ضرب کیا ۹ × ۴ یعنی ۳۶ مین تو حاصل ہوئی یہہ مساوات

$$۱۶\,لا - ۸۴ + ۱۳۵ + ۵۱۳ - ۲۷\,لا = ۷۶ - ۸۶۷۶ + ۱۵\,لا + ۲۸۸ - ۹۶\,لا$$

$$\therefore ۱۶\,لا + ۱۵\,لا + ۹۶\,لا - ۲۷\,لا = ۷۶ + ۲۸۸ + ۸۶۷۶ - ۸۴ - ۱۳۵ - ۵۱۳$$

$$\therefore ۴۰۰\,لا = ۸۴۰۰$$

$$\therefore لا = \frac{۸۴۰۰}{۴۰۰} = ۲۱$$

$$\therefore لا = ۲۱$$

۲۱ $$ط\,لا - \frac{ط^۲ - ۳ص\,لا}{ط} - ط\,ص^۲ = ص\,لا + \frac{۶ص\,لا - ۵\,ط^۲}{ط^۲} - \frac{ص\,لا + ۴ط}{۴}$$

طرفین کو ۴ط میں ضرب کیا

$$\therefore ۴\,ط^۲\,لا - ۴\,ط^۳ + ۱۲\,ص\,لا - ۴\,ط^۳\,ص^۲ = ۴\,ط\,ص\,لا + ۱۲\,ص\,لا - ۱۰\,ط^۲ - ط\,ص\,لا - ۴\,ط^۲$$

$$\therefore ۴\,ط^۲\,لا - ۴\,ط^۳\,ص^۲ = ۳\,ط\,ص\,لا - ۱۰\,ط^۲$$

$$\therefore ۴\,ط^۲\,لا - ۳\,ط\,ص\,لا = ۴\,ط^۳\,ص^۲ - ۱۰\,ط^۲$$

$$\therefore (۴\,ط^۲ - ۳\,ط\,ص)\,لا = ۴\,ط^۳\,ص^۲ - ۱۰\,ط^۲$$

$$\therefore لا = \frac{۴\,ط^۳\,ص^۲ - ۱۰\,ط^۲}{۴\,ط^۲ - ۳\,ط\,ص} = \frac{۴\,ط\,ص - ۱۰\,ط}{۴\,ط - ۳\,ص}$$

۲۲ $$\frac{۷\,لا + ۱۶}{۲۱} - \frac{لا}{۳} = \frac{لا + ۸}{۴\,لا - ۱۱}$$ طرفین کو ۲۱ میں ضرب کیا

$$\therefore ۷\,لا + ۱۶ - ۷\,لا = \frac{۲۱\,لا + ۱۶۸}{۴\,لا - ۱۱}$$ ۷ لا کو طرفین سے دور کیا

$$\therefore ۱۶ - \frac{۲۱\,لا + ۱۶۸}{۴\,لا - ۱۱} = ۰$$

$$\therefore ۱۶ = \frac{۲۱\,لا + ۱۶۸}{۴\,لا - ۱۱}$$ طرفین کو ۴لا-۱۱ میں ضرب کیا

$$\therefore ۶۴\,لا - ۱۷۶ = ۲۱\,لا + ۱۶۸$$

$$\therefore ۶۴\,لا - ۲۱\,لا = ۱۷۶ + ۱۶۸$$

$$\therefore ۴۳\,لا = ۳۴۴$$

$$\therefore لا = \frac{۳۴۴}{۴۳} = ۸$$

$$\therefore لا = ۸$$

۲۳ $$\frac{۶\,لا + ۷}{۹} + \frac{۷\,لا - ۱۳}{۳\,لا + ۶} = \frac{۲\,لا + ۴}{۳}$$ طرفین کو ۹ میں ضرب کیا

$$\therefore ۶\,لا + ۷ + \frac{۲۱\,لا - ۳۹}{۱ + ۲\,لا} = ۶\,لا + ۱۲$$ طرفین سے (۶لا+۷) کو کم کیا

$$\therefore \frac{۲۱\,لا - ۳۹}{۱ + ۲\,لا} = ۵$$

$$\therefore ۲۱\,لا - ۳۹ = ۱۰\,لا + ۵$$ ۲لا+۱ کو طرفین میں ضرب کیا

$$\therefore ۲۱\,لا - ۱۰\,لا = ۳۹ + ۵$$

$$\therefore ۱۱\,لا = ۴۴$$

$$\therefore لا = ۴$$

۲۴ $$\frac{۴\,لا + ۳}{۹} + \frac{۷\,لا - ۲۹}{۱۲\,لا - ۵} = \frac{۸\,لا + ۱۹}{۱۸}$$ ۱۸ طرفین کو ضرب کیا

بعضی مساواتین اول و دوم کی ایسی ہوتی ہین کہ اونمین بعضی مقدار اون پر نشان جذر یا مکعب وغیرہ کا ہوتا ہی
پس ایسی صورت مین چاہیئے کہ اون + مقدار اون کو ایکطرف رکھین جن پر نشان جذر وغیرہ کی ہی اور جو مقدار
غیر نشان جذر وغیرہ سے کہ ہین اونکو دوسری طرف رکھین بعد اسکی اگر نشان جذر کا ہو تو طرفین کا مجذور کرلین
اسمین ترکیب سی مساوات ایسی حاصل ہوگی جیسی ابتک حل ہوئی ہین اور اگر نشان مکعب کا ہو تو مکعب کرلین
اور علی ہذا القیاس جس مرتبہ کا نزول ہو اوسی مرتبہ کا صعود دین چنانچہ مثالون آئندہ سی خوب ہویدا ہی

۲۹ $\sqrt{\ }$ ۲ل + ۴ = ۴ طرفین کا مجذور کیا

∴ ۲ل + ۴ = ۱۶

∴ ل = ۸

۳۰ $\sqrt{\ }$ ل − ۱ = ۲ طرفین کا مجذور کیا

∴ ل − ۱ = ۴

∴ ل = ۵

۳۱ $\sqrt{\ }$ ۴ل + ۱۶ = ۱۲ طرفین کا مجذور کیا

∴ ۴ل + ۱۶ = ۱۴۴

∴ ۴ل = ۱۴۴ − ۱۶ = ۱۲۸

∴ ل = ۳۲

۳۲ $\sqrt[3]{\ }$ ۲ل + ۳ + ۴ = ۷

∴ $\sqrt[3]{\ }$ ۲ل + ۳ = ۳ طرفین کا مکعب کیا

∴ ۲ل + ۳ = ۲۷

∴ ۲ل = ۲۷ − ۳ = ۲۴

∴ ل = ۱۲

۳۳ $\sqrt{\ }$ ل + ۱۲ = ۲ + $\sqrt{\ }$ ل طرفین کا مجذور کیا

∴ ل + ۱۲ = ۴ + ۴ $\sqrt{\ }$ ل + ل طرفین سے ل کم کیا

∴ ۱۲ = ۴ + ۴ $\sqrt{\ }$ ل

∴ ۱۲ − ۴ = ۴ $\sqrt{\ }$ ل

∴ ۸ = ۴ $\sqrt{\ }$ ل ۴ پر طرفین کو تقسیم کیا

∴ ۲ = $\sqrt{\ }$ ل مجذور کیا طرفین کو

∴ ۴ = ل

۳۴ ۳ $\sqrt{\ }$ ل + ۴۰ = ۱۰ − $\sqrt{\ }$ ل طرفین کا مجذور کیا

∴ ل + ۴۰ = ۱۰۰ − ۲۰ $\sqrt{\ }$ ل + ل طرفین سی ل کم کیا

∴ ۴۰ = ۱۰۰ − ۲۰ $\sqrt{\ }$ ل

∴ ۲۰ $\sqrt{\ }$ ل = ۱۰۰ − ۴۰ = ۶۰

∴ ۲۰ $\sqrt{\ }$ ل = ۶۰ ۲۰ پر طرفین کو تقسیم کیا

∴ $\sqrt{\ }$ ل = ۳ طرفین کا مجذور کیا

∴ ل = ۹

۳۵ $\sqrt{\ }$ ل − ۱۶ = ۸ − $\sqrt{\ }$ ل طرفین کا مجذور کیا

ل − ۱۶ = ۶۴ − ۱۶ $\sqrt{\ }$ ل + ل طرفین سی ل کم کیا

∴ − ۱۶ = ۶۴ − ۱۶ $\sqrt{\ }$ ل

∴ ۱۶ $\sqrt{\ }$ ل = ۶۴ + ۱۶ = ۸۰

∴ ۱۶ $\sqrt{\ }$ ل = ۸۰ ۱۶ پر طرفین کو تقسیم کیا

$\sqrt{\ }$ ل = ۵ طرفین کا مجذور کیا

∴ ل = ۲۵

۳۶ ۳ $\sqrt{\ }$ ل − ۲۴ = $\sqrt{\ }$ ل − ۲ طرفین کا مجذور کیا

∴ ل − ۲۴ = ل − ۴ $\sqrt{\ }$ ل + ۴ طرفین سی ل کم کیا

$\therefore 4\sqrt{\text{لا}} = 28$ طرفین ۴ پر تقسیم کیا

$\sqrt{\text{لا}} = 7$

لا $= 49$ طرفین کا مجذور کیا

$37\sqrt{\text{لا}} - \frac{1}{2}\text{ط}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا} - \text{ط} = \sqrt{\text{لا}}$ طرفین سے لا کم کیا

$\therefore -\text{ط} = -\sqrt{\text{ط لا}} + \frac{\text{ط}}{4}$

$\therefore \sqrt{\text{ط لا}} = \text{ط} + \frac{\text{ط}}{4} = \frac{5\text{ط}}{4}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore$ ط لا $= \frac{25\text{ط}^2}{16}$ ط پر طرفین کو تقسیم کیا

$\therefore$ لا $= \frac{25\text{ط}}{16}$

$8\sqrt{\text{۳}}\sqrt{5}\sqrt{\text{لا}} + 2 = \sqrt{5\text{لا}} + 20$

$\therefore \sqrt{5\text{لا}} + 10 = \sqrt{5}\sqrt{\text{لا}} + 2$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore 5\text{لا} + 10 = 5\text{لا} + 4\sqrt{5\text{لا}} + 4$

$\therefore 10 = 4\sqrt{5\text{لا}} + 4$ 5لا طرفین سے کم کیے

$\therefore 4\sqrt{5\text{لا}} = 6$ طرفین کو ۴ پر تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{5\text{لا}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\therefore 5\text{لا} = \frac{9}{4}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore$ لا $= \frac{9}{4\times5}$ طرفین کو 5 پر تقسیم کیا

$= \frac{9}{20}$

$\therefore$ لا $= \frac{9}{20}$

$39\sqrt{\text{۳}}\sqrt{4\text{ط}+\text{لا}} = 2\sqrt{\text{ص}+\text{لا}} - \sqrt{\text{لا}}$ کیا

طرفین کا مجذور

$4\text{ط} + \text{لا} = 4(\text{ص}+\text{لا}) - 4\sqrt{\text{لا}}\sqrt{\text{ص}+\text{لا}} + \text{لا}$

طرفین سے لا کم کیا

$\therefore 4\text{ط} = 4(\text{ص}+\text{لا}) - 4\sqrt{\text{ص لا}+\text{لا}^2}$

طرفین کو ۴ پر تقسیم کیا

$\therefore$ ط $= \text{ص} + \text{لا} - \sqrt{\text{ص لا}+\text{لا}^2}$

$\therefore \sqrt{\text{ص لا}+\text{لا}^2} = \text{ص} - \text{ط} + \text{لا} = (\text{ص}-\text{ط}) + \text{لا}$

$\therefore \sqrt{\text{ص لا}+\text{لا}^2} = (\text{ص}-\text{ط}) + \text{لا}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore$ ص لا $+ \text{لا}^2 = (\text{ص}-\text{ط})^2 + 2(\text{ص}-\text{ط})\text{لا} + \text{لا}^2$

طرفین سے لا^2 کم کیا

$\therefore$ ص لا $= (\text{ص}-\text{ط})^2 + 2(\text{ص}-\text{ط})\text{لا}$

$\therefore$ ص لا $- 2(\text{ص}-\text{ط})\text{لا} = (\text{ص}-\text{ط})^2$

$\therefore (\text{ص} - 2(\text{ص}-\text{ط}))\text{لا} = (\text{ص}-\text{ط})^2$

$\therefore (\text{ص} - 2\text{ص} + 2\text{ط})\text{لا} = (\text{ص}-\text{ط})^2$

$\therefore (2\text{ط} - \text{ص})\text{لا} = (\text{ص}-\text{ط})^2$ طرفین کو $2\text{ط}-\text{ص}$ پر تقسیم کیا

$\therefore$ لا $= \frac{(\text{ص}-\text{ط})^2}{2\text{ط}-\text{ص}}$

40 لا $+ \text{ط} + \sqrt{2\text{ط لا} + \text{لا}^2} = \text{ص}$

$\therefore \sqrt{2\text{ط لا} + \text{لا}^2} = \text{ص} - \text{ط} - \text{لا}$

$\therefore \sqrt{2\text{ط لا} + \text{لا}^2} = (\text{ص}-\text{ط}) - \text{لا}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore 2\text{ط لا} + \text{لا}^2 = (\text{ص}-\text{ط})^2 - 2(\text{ص}-\text{ط})\text{لا} + \text{لا}^2$ طرفین سے لا^2 کم کیا

$\therefore 2b\,\text{لا} = (\text{ص}-b)^2 - 2(\text{ص}-b)\,\text{لا}$

$\therefore 2b\,\text{لا} + 2(\text{ص}-b)\,\text{لا} = (\text{ص}-b)^2$

$\therefore \big(2b + 2(\text{ص}-b)\big)\,\text{لا} = (\text{ص}-b)^2$

$\therefore (2b + 2\text{ص} - 2b)\,\text{لا} = (\text{ص}-b)^2$

$\therefore 2\text{ص}\,\text{لا} = (\text{ص}-b)^2$ طرفین کو 2ص پر تقسیم کیا

$\therefore \text{لا} = \dfrac{(\text{ص}-b)^2}{2\text{ص}}$

۴۱ $\dfrac{\text{لا} - b\,\text{لا}}{\text{لا}} = \dfrac{\text{لا}}{\text{لا}}$ طرفین مساوات کو لا سے ضرب کیا

$\therefore \text{لا} - b\,\text{لا} = \text{لا}$

$\therefore \text{لا} - b\,\text{لا} = 1$

$\therefore (1-b)\,\text{لا} = 1$ طرفین کو $1-b$ پر تقسیم کیا

$\therefore \text{لا} = \dfrac{1}{1-b}$

۴۲ $\dfrac{\text{لا} + 28}{\text{لا} + 4} = \dfrac{\text{لا} + 38}{\text{لا} + 6}$ طرفین کو $\text{لا}+4$ سے ضرب کیا

$\therefore \text{لا} + 28 = \dfrac{\text{لا} + 42\,\text{لا} + 152}{\text{لا} + 6}$ طرفین کو $\text{لا}+6$ سے ضرب کیا

$\therefore \text{لا} + 4\,\text{لا} + 168 = \text{لا} + 42\,\text{لا} + 152$

طرفین میں سے کم کیا $(\text{لا} + 4\,\text{لا} + 152)$ کو تو حاصل ہوا یہ

$\therefore 16 = 8\,\text{لا}$ طرفین کو 8 پر تقسیم کیا

$\therefore \text{لا} = 2$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا} = 4$

۴۳ $\dfrac{\text{لا} + 2b}{\text{لا} + \text{ص}} = \dfrac{\text{لا} + 4b}{\text{لا} + 3\text{ص}}$ * $(\text{لا}+\text{ص})$ طرفین کو ضرب کیا

$\therefore \text{لا}\,\text{لا} + 2b = \dfrac{\text{لا} + (4b+\text{ص})\,\text{لا} + 4b\text{ص}}{\text{لا} + 3\text{ص}}$ طرفین کو $\text{لا}+3\text{ص}$ سے ضرب کیا

$\therefore \text{لا}\,\text{لا} + 3\text{ص}\,\text{لا} + 2b\,\text{لا} + 6b\text{ص} = \text{لا} + (4b+\text{ص})\,\text{لا} + 4b\text{ص}$ طرفین سے $\text{لا}+4b\text{ص}$ کم کیا

$\therefore (2b+3\text{ص})\,\text{لا} + 2b\text{ص} = (4b+\text{ص})\,\text{لا}$

$\therefore (4b+\text{ص})\,\text{لا} - (2b+3\text{ص})\,\text{لا} = 2b\text{ص}$

$\therefore \big((4b+\text{ص}) - (2b+3\text{ص})\big)\,\text{لا} = 2b\text{ص}$

$\therefore (4b+\text{ص}-2b-3\text{ص})\,\text{لا} = 2b\text{ص}$

$\therefore (2b-2\text{ص})\,\text{لا} = 2b\text{ص}$

$\therefore \text{لا} = \dfrac{2b\text{ص}}{2b-2\text{ص}} = \dfrac{b\text{ص}}{b-\text{ص}}$

$\therefore \text{لا} = \left(\dfrac{b\text{ص}}{b-\text{ص}}\right)^2$

۴۴ $\dfrac{b\,\text{لا} - \text{ص}}{b\,\text{لا} + \text{ص}} = \dfrac{3\,b\,\text{لا} - 2\text{ص}}{3\,b\,\text{لا} + 5\text{ص}}$

طرفین مساوات کو $b\,\text{لا}+\text{ص}$ میں ضرب کیا

$\therefore b\,\text{لا} - \text{ص} = \dfrac{3b\,\text{لا} + (3\text{ص} - 2\text{ص})\,b\,\text{لا} - 2\text{ص}^2}{3\,b\,\text{لا} + 5\text{ص}}$

یا $b\,\text{لا} - \text{ص} = \dfrac{3b\,\text{لا} + \text{ص}\,b\,\text{لا} - 2\text{ص}^2}{3\,b\,\text{لا} + 5\text{ص}}$

طرفین کو $(3\,b\,\text{لا} + 5\text{ص})$ میں ضرب کیا

$\therefore 3b\,\text{لا} + (5\text{ص} - 3\text{ص})\,b\,\text{لا} - 5\text{ص}^2 = 3b\,\text{لا} + \text{ص}\,b\,\text{لا} - 2\text{ص}^2$

$\therefore 3\,b\,\text{لا} + 2\text{ص}\,b\,\text{لا} - 5\text{ص}^2 = 3b\,\text{لا} + \text{ص}\,b\,\text{لا} - 2\text{ص}^2$

طرفین سے $3b\,\text{لا} - 2\text{ص}^2$ کم کیا

$\therefore 2\text{ص}\,b\,\text{لا} - 3\text{ص}^2 = \text{ص}\,b\,\text{لا}$

$\therefore$ ص $\sin^2 \frac{\theta}{2} - $ ص $\cos^2 \frac{\theta}{2} = 3$ ص^2

$\therefore$ (ص $-$ ص) $\cos^2 \frac{\theta}{2} = 3$ ص^2

$\therefore$ ص $\cos^2 \frac{\theta}{2} = 3$ ص^2

$\therefore \cos^2 \frac{\theta}{2} = 3$ ص

$\therefore \cos \theta = 9$ ص^2

$\therefore \theta = \frac{9 ص^2}{b}$

۴۵ $ص = \frac{\theta^2 - b^2}{\theta^2 + b^2}$

چونکہ $\theta^2 - b^2 = (\theta + b)(\theta - b)$ یعنی جب $\theta + b$ کو $(\theta - b)$ سے ضرب کرتے ہیں تو $\theta^2 - b^2$ ہوتا ہے پس $\theta^2 - b^2$ کی جگہ حاصل ضرب $(\theta + b)(\theta - b)$ رکھا تو حاصل ہوا $\frac{(\theta + b)(\theta - b)}{\theta^2 + b^2} = ص$ بعد اختصار کے یہ ہوتا ہے

$\theta - b = ص$

$\therefore \theta = ص + b$

۴۶ $س = \frac{\theta - b}{\sqrt{\theta^2 + b^2}}$

چونکہ موافق صورت گذشتہ کے

$\theta - b = (\sqrt{\theta^2 + b^2})(\sqrt{\theta^2 - b^2})$

$\therefore \frac{(\sqrt{\theta^2 + b^2})(\sqrt{\theta^2 - b^2})}{\sqrt{\theta^2 + b^2}} = س$ بعد اختصار کے یہ ہوتا ہے

$\therefore \sqrt{\theta^2 - b^2} = س$

$\therefore \sqrt{\theta^2} = س + \sqrt{b^2}$

$\therefore \theta = (س + \sqrt{b^2})^2$

۴۷ $\theta = \frac{2\theta}{\sqrt{\theta^2}} - 2\theta$

چونکہ $\theta - 1 = (\sqrt{\theta^2} + 1)(\sqrt{\theta^2} - 1)$

$\therefore (\sqrt{\theta^2} + 1)(\sqrt{\theta^2} - 1) = \frac{2\theta}{\sqrt{\theta^2}} - 2\theta$

$= \frac{2\theta\sqrt{\theta^2} - 2\theta}{\sqrt{\theta^2}}$

$= \frac{2\theta(\sqrt{\theta^2} - 1)}{\sqrt{\theta^2}}$

$\therefore (\sqrt{\theta^2} + 1)(\sqrt{\theta^2} - 1) = \frac{2\theta(\sqrt{\theta^2} - 1)}{\sqrt{\theta^2}}$

طرفین کو $(\sqrt{\theta^2} - 1)$ پر تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{\theta^2} + 1 = \frac{2\theta}{\sqrt{\theta^2}}$

$= 2\sqrt{\theta^2}$

$\therefore 1 = 2\sqrt{\theta^2} - \sqrt{\theta^2}$

$= \sqrt{\theta^2}$

$\therefore \sqrt{\theta^2} = 1$

$\therefore \theta = 1$

۴۸ $ص = \frac{2\theta - 1}{2\theta + 1}$

چونکہ $2\theta - 1 = (\sqrt{2\theta} + 1)(\sqrt{2\theta} - 1)$

$\therefore ص = \frac{(\sqrt{2\theta} + 1)(\sqrt{2\theta} - 1)}{\sqrt{2\theta} + 1}$ بعد اختصار کے

$\therefore \sqrt{2\theta} - 1 = ص$

$\therefore \sqrt{2\theta} = ص + 1$

$\therefore 2\theta = (ص + 1)^2 \therefore \theta = \frac{(ص + 1)^2}{2}$

$$\text{۴۹ } \frac{\text{ظا}^{2}\frac{\text{لا}}{3}-1}{\text{ظا}^{2}\frac{\text{لا}}{3}+1}=\frac{\text{ظا}\text{لا}-1}{2}+1$$

چونکہ $\text{ظا}\text{لا}-1=(\text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}+1)(\text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}-1)$

$$\therefore \frac{(\text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}+1)(\text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}-1)}{\text{ظا}^{2}\frac{\text{لا}}{3}+1}=1+\frac{\text{ظا}\text{لا}-1}{2}$$

اول طرف کا اختصار کیا

$$\therefore \text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}-1=1+\frac{\text{ظا}\text{لا}-1}{2}$$

طرفین کو ۲ میں ضرب کیا

$$\therefore 2\text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}-2=2+\text{ظا}\text{لا}-1$$

$$\therefore 2\text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}-\text{ظا}\text{لا}=2+2-1=3$$

$$\therefore \text{ظا}\frac{\text{لا}}{3}=3$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \text{ظا}^{2}\frac{\text{لا}}{3}=9$$

$$\therefore \text{ظا}^{2}\text{لا}=9$$

$$\therefore \text{ظا}\text{لا}=3$$

$$\text{۵۰ } \frac{\text{ظا}\text{لا}-\text{ص}^{2}}{\text{ظا}\text{لا}+\text{ص}}=\text{س}+\frac{\text{ظا}\text{لا}-\text{ص}}{\text{س}}$$

چونکہ $\text{ظا}\text{لا}-\text{ص}^{2}=(\text{ظا}\text{لا}+\text{ص})(\text{ظا}\text{لا}-\text{ص})$

$$\therefore \frac{(\text{ظا}\text{لا}+\text{ص})(\text{ظا}\text{لا}-\text{ص})}{\text{ظا}\text{لا}+\text{ص}}=\text{س}+\frac{\text{ظا}\text{لا}-\text{ص}}{\text{س}}$$

اول طرف کا اختصار کیا

$$\therefore \text{ظا}\text{لا}-\text{ص}=\text{س}+\frac{\text{ظا}\text{لا}-\text{ص}}{\text{س}}$$

$$=\text{س}^{2}+\frac{\text{ظا}\text{لا}-\text{ص}}{\text{س}}$$

طرفین کو س میں ضرب کیا

$$\therefore \text{س}\,\text{ظا}\text{لا}-\text{س}\text{ص}=\text{س}^{2}+\text{ظا}\text{لا}-\text{ص}$$

$$\therefore \text{س}\,\text{ظا}\text{لا}-\text{ظا}\text{لا}=\text{س}^{2}+\text{س}\text{ص}-\text{ص}$$

$$=\text{س}^{2}+\text{ص}(\text{س}-1)$$

$$\therefore (\text{س}-1)\text{ظا}\text{لا}=\text{س}^{2}+\text{ص}(\text{س}-1)$$

طرفین کو س−۱ پر تقسیم کیا

$$\therefore \text{ظا}\text{لا}=\frac{\text{س}^{2}}{\text{س}-1}+\text{ص}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \text{ظا}^{2}\text{لا}=\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{س}-1}+\text{ص}\right)^{2}$$

طرفین کو ظ^۲ پر تقسیم کیا

$$\therefore \text{لا}=\frac{1}{\text{ظ}^{2}}\left(\frac{\text{س}^{2}}{\text{س}-1}+\text{ص}\right)^{2}$$

$$\text{۵۱ } \text{لا}=\sqrt{\text{ظ}^{2}+\text{لا}\sqrt{\text{ص}^{2}+\text{لا}^{2}}-\text{ظ}}$$

$$\therefore \text{لا}+\text{ظ}=\sqrt{\text{ظ}^{2}+\text{لا}\sqrt{\text{ص}^{2}+\text{لا}^{2}}}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\text{لا}^{2}+2\text{ظ}\,\text{لا}+\text{ظ}^{2}=\text{ظ}^{2}+\text{لا}\sqrt{\text{ص}^{2}+\text{لا}^{2}}$$

ظ^۲ طرفین سے کم کیا

$$\therefore \text{لا}^{2}+2\text{ظ}\,\text{لا}=\text{لا}\sqrt{\text{ص}^{2}+\text{لا}^{2}}$$

طرفین کو لا پر تقسیم کیا

$$\therefore \text{لا}+2\text{ظ}=\sqrt{\text{ص}^{2}+\text{لا}^{2}}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \text{لا}^{2}+4\text{ظ}\,\text{لا}+4\text{ظ}^{2}=\text{ص}^{2}+\text{لا}^{2}$$

طرفین سے لا^۲ کم کیا

$$\therefore 4\text{ظ}\,\text{لا}=\text{ص}^{2}-4\text{ظ}^{2}$$

$$\therefore \text{لا}=\frac{\text{ص}^{2}-4\text{ظ}^{2}}{4\text{ظ}}$$

$$\text{۵۲ } \sqrt{2+\text{لا}+\sqrt{\text{لا}}}=\frac{4}{\sqrt{2+\text{لا}}}$$

طرفین کو $\sqrt{2+\text{لا}}$ میں ضرب کیا

$$\therefore 2+\text{لا}+\sqrt{2\,\text{لا}+\text{لا}^{2}}=4$$

$\therefore \sqrt{١ل + ل^٢} = ٤ - ٢ - ل = ٢ - ل$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ٢ل + ل^٢ = (٢ - ل)^٢ = ٤ - ٤ل + ل^٢$

طرفین سی لا کم کیا

$\therefore ٢ل = ٤ - ٤ل$ طرفین کو ٢ پر تقسیم کیا

$\therefore ل = ٢ - ٢ل$

$\therefore ٣ل = ٢$

$\therefore ل = \frac{٢}{٣}$

$٣\sqrt{٥ + ل} + \sqrt{ل} = \frac{١٥}{\sqrt{٥ + ل}}$ طرفین کو $\sqrt{٥ + ل}$ سے ضرب کیا

$\therefore ٥ + ل + \sqrt{٥ل + ل^٢} = ١٥$

$\therefore \sqrt{٥ل + ل^٢} = ١٥ - ٥ - ل = ١٠ - ل$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ٥ل + ل^٢ = (١٠ - ل)^٢ = ١٠٠ - ٢٠ل + ل^٢$

طرفین سے $ل^٢$ کم کیا

$\therefore ٥ل = ١٠٠ - ٢٠ل$

$\therefore ٢٥ل = ١٠٠$

$\therefore ل = \frac{١٠٠}{٢٥} = ٤$

$\therefore ل = ٤$

$٥\sqrt{ل + \sqrt{ل}} - \sqrt{ل - \sqrt{ل}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{ل + \sqrt{ل}}$

طرفین کو $\sqrt{ل + \sqrt{ل}}$ سے ضرب کیا

$\therefore ل + \sqrt{ل} - \sqrt{ل^٢ - ل} = \frac{٣\sqrt{ل}}{٢}$

$\therefore ل + \sqrt{ل} - \frac{٣}{٢}\sqrt{ل} = \sqrt{ل^٢ - ل}$

$\therefore ل - \frac{\sqrt{ل}}{٢} = \sqrt{ل^٢ - ل}$ طرفین کو $\sqrt{ل}$ پر تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{ل} - \frac{١}{٢} = \sqrt{ل - ١}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل - \sqrt{ل} + \frac{١}{٤} = ل - ١$ طرفین سی لا کم کیا

$\therefore -\sqrt{ل} + \frac{١}{٤} = -١$

$\therefore \sqrt{ل} = ١ + \frac{١}{٤}$

$\therefore \sqrt{ل} = \frac{٥}{٤}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ل = \frac{٢٥}{١٦}$

$٥٥ \frac{١}{ل^٢} + \frac{١}{ط} = \sqrt{\frac{١}{ط^٢ ل^٢} + \frac{٤}{ط^٢ ل^٢} + \frac{٩}{٤ل^٢}}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{١}{ل^٢} + \frac{٢}{ط ل} + \frac{١}{ط^٢} = \sqrt{\frac{١}{ط^٢ ل^٢} + \frac{٤}{ط^٢ ل^٢} + \frac{٩}{٤ل^٢}}$

$\therefore \frac{١}{ل^٢} + \frac{٢}{ط ل} = \sqrt{\frac{٤}{ط^٢ ل^٢} + \frac{٩}{٤ل^٢}}$

طرفین کو $\frac{١}{ل^٢}$ پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{١}{ل} + \frac{٢}{ط} = \sqrt{\frac{٤}{ط^٢} + \frac{٩}{٤}}$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{١}{ل^٢} + \frac{٤}{ط ل} + \frac{٤}{ط^٢} = \frac{٤}{ط^٢} + \frac{٩}{٤}$

$\therefore \frac{١}{ل^٢} + \frac{٤}{ط ل} = \frac{٩}{٤}$ طرفین کو $ل^٢$ سے ضرب کیا

$\therefore \frac{١}{ل} + \frac{٤}{ط} = \frac{٩}{ل}$

$\therefore \frac{٤}{ط} = \frac{٩}{ل} - \frac{١}{ل}$

$\therefore \frac{٤}{ط} = \frac{٨}{ل}$

$\therefore \frac{١}{ط} = \frac{٢}{ل}$ طرفین کو ٤ سے ضرب کیا

$\therefore \frac{ل}{ط} = ٢$ طرفین کو ط سے ضرب کیا

$\therefore ل = ٢ط$

٥٦ $\sqrt{ط+ل}+\sqrt{ط-ل}=٢\sqrt{ل}$

$\therefore \sqrt{ط+ل}=٢\sqrt{ل}-\sqrt{ط-ل}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ط+ل=٤ل-٤\sqrt{ط ل-ل^{٢}}+ط-ل$

$ط+ل-ط+ل-٤ل=-٤\sqrt{ط ل-ل^{٢}}$

$\therefore -٢ل=-٤\sqrt{ط ل-ل^{٢}}$ علامتین طرفین کی تبدیل کیں

$\therefore ل=٢\sqrt{ط ل-ل^{٢}}$ مجذور کیا طرفین کو

$\therefore ل^{٢}=٤(ط ل-ل^{٢})$ طرفین کو $ل^{٢}$ پر تقسیم کیا

$\therefore ل=٤(ط-ل)$

$=٤ط-٤ل$

$\therefore ٥ل=٤ط$

$\therefore ل=\frac{٤ط}{٥}$

٥٧ $\sqrt{ط+ل}=\sqrt[٣]{ل^{٢}+٥ط ل+ص^{٢}}$

اس مساوات کو اسطرح لکھسکتے ہین

$(ط+ل)^{\frac{١}{٢}}=(ل^{٢}+٥ط ل+ص^{٢})^{\frac{١}{٣}}$

طرفین کا م مرتبہ کا صعود کیا

$\therefore ط+ل=(ل^{٢}+٥ط ل+ص^{٢})^{\frac{٢}{٣}}$

طرفین کو مجذور کیا

$\therefore ط^{٢}+٢ط ل+ل^{٢}=ل^{٢}+٥ط ل+ص^{٢}$ طرفین سے $ل^{٢}$ کم کیا

$\therefore ط^{٢}+٢ط ل=٥ط ل+ص^{٢}$

$\therefore ط^{٢}-ص^{٢}=٥ط ل-٢ط ل$

$=٣ط ل$

$\therefore ط^{٢}-ص^{٢}=٣ط ل$

یا $٣ط ل=ط^{٢}-ص^{٢}$

$\therefore ل=\frac{ط^{٢}-ص^{٢}}{٣ط}$

بعضی مساوات ایسی ہوتی ہین کہ خاص ترکیب سی حل ہوتی ہین اور انشاء اللہ تعالی ایسی مساوات تین درجہ دویم کی مساوات مین بہت لکھی جاوینگی یہان فقط دو مثالین لکھی جاتی ہین اور انمین خاص ترکیب یہہ ہی کہ عدد آ کا زیادہ اور کم کیا جاتا ہی

٥٨ $\frac{\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط+ب}-\sqrt{ط-ل}}=\frac{ب}{ل}$ عدد آ کا طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore \frac{\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط+ب}-\sqrt{ط-ل}}+١=\frac{ب}{ل}+١$ مشترک کیا طرفین کا مخرج علحدہ علحدہ

$\therefore \frac{\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}+\sqrt{ط+ب}-\sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط+ب}-\sqrt{ط-ل}}=\frac{ب+ل}{ل}$

$\therefore \frac{٢\sqrt{ط+ب}}{\sqrt{ط+ب}-\sqrt{ط-ل}}=\frac{ب+ل}{ل}$ .....(١)

اب پہر اصلی مساوات کی دونو طرفون سے عدد آ کا کم کیا

یعنی $١-\frac{\sqrt{ط+ب}-\sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}}=١-\frac{ب}{ل}$ مشترک کیا طرفین کا مخرج علحدہ علحدہ

$\therefore \frac{\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}-\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}}=\frac{ل-ب}{ل}$

$\therefore \frac{٢\sqrt{ط-ل}}{\sqrt{ط+ب}+\sqrt{ط-ل}}=\frac{ل-ب}{ل}$ .....(٢)

اب اوس مساوات کو جس پر نشان (١) کا ہی تقسیم کیا اوس مساوات پر جسپر نشان (٢) کا ہی تو چونکہ ان مساوات کی نسبت نما یکسان ہین تو ظاہر ہی کہ نسبت نما دونو مساواتون کے

زائل ہوجائینگی اور یہہ مساوات حاصل ہوگی

مجذور کیا

$$\frac{ط}{ط-ل} = \frac{1+ب}{1-ب} \quad \text{یا} \quad \frac{ط}{ط-ل} = \frac{1+ب}{1-ب}$$ طرفین کا

$$\therefore \frac{ط}{ط-ل} = \left(\frac{1+ب}{1-ب}\right)^2 \quad \text{یا} \quad \frac{ط-ل}{ط} = \left(\frac{1-ب}{1+ب}\right)^2$$

$$\therefore ط - ل = ط\left(\frac{1-ب}{1+ب}\right)^2$$

$$\therefore ط - ط\left(\frac{1-ب}{1+ب}\right)^2 = ل$$

$$\text{و} \quad \frac{\sqrt[3]{ل+1} - \sqrt[3]{ل-1}}{\sqrt[3]{ل+1} + \sqrt[3]{ل-1}} = \frac{1}{2}$$

طرفین پر ازیادہ کیا

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{ل+1}}{\sqrt[3]{ل-1}} = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

پھر اصلی مساوات کی طرفین سے آکم کیا

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{ل-1}}{\sqrt[3]{ل+1}} = \frac{1}{2} \quad \ldots (2)$$

مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کیا

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{ل+1}}{\sqrt[3]{ل-1}} = 3$$ طرفین کا مکعب کیا

$$\frac{ل+1}{ل-1} = 27$$ (۱) طرفین پر ۱ کو زیادہ کیا

$$\frac{ل+1}{ل-1} + 1 = 28$$

$$\therefore \frac{ل+1+ل-1}{ل-1} = 28$$

$$\therefore \frac{2ل}{ل-1} = 28 \quad \ldots\ldots (ط)$$

مساوات (۱) کی طرفین سے آکم کیا

$$\therefore \frac{ل+1}{ل-1} - 1 = 26$$

$$\therefore \frac{ل+1-ل+1}{ل-1} = 26$$

$$\therefore \frac{2}{ل-1} = 26 \quad \ldots\ldots (ظ)$$

اب مساوات (ط) کو مساوات (ظ) پر تقسیم کیا

$$\therefore \frac{2ل}{2} = \frac{28}{26}$$

یعنی $ل = \frac{28}{26} = 1\frac{1}{13}$

اب تک ایک مجہول کی مساواتین حل ہوئی ہین یعنی ایک مقدار مجہول کی قیمت ایک مساوات کی وسیلہ سی معلوم کی ہے پس اگر دو مقدار مجہول ہون تو دو مساواتون سے اونکی قیمتین معلوم ہونگی اور اگر تین مجہول ہون تو تین مساواتون سے اونکی قیمتین دریافت ہونگی اور علی ہذا القیاس اب ہم دو مقدارون مجہول کے دریافت کرنیکا قاعدہ بیان کرتے ہین جانا چاہیئے کہ اگر دو نو مساوات جنمین یہہ دو مجہول ہین ایسی ہون کہ اونمین کوئی کسر نہو تو اول ہر ایک کو اسطرح لکھنا چاہیئے کہ مقادیر معلومہ ایک طرف ہوجاوین اور مجہول کی رقمین ایک طرف ہوجاوین پھر دیکھنا چاہیئے کہ کسی حرف مجہول کا سر دو نو مساواتونمین یکسان ہے یا نہین اگر ہے تو اوسکی دو صورتین ہین ایک تو یہہ کہ جن دو نو جزدون مین یہہ حرف مجہول پایا جاتا ہے اونکی علامتین یکسان ہون دوسری یہہ کہ اون دو نو جزدون کی علامتین مختلف ہون پس اگر علامتین یکسان ہون تو بڑی مساوات مین سے چھوٹی کو تفریق کرنا چاہیئے اور اگر علامتین مختلف ہون

ہون تو دونو مساواتون کو جمع کرنا چاہیئے ان دونو رکمیون سی وہ مجہول جسکا سر دونو مساواتونمین یکسان ہی زائل ہوجاویگا اور فقط ایک مجہول کی مساوات رہجاویگی اور وہ مساوات موافق امثلہ گذشتہ کی حل ہوسکتی ہی اور اگر دونو مساواتون مین کسی حرف مجہول کا سر یکسان نہو تو اس صورت مین چاہیئے کہ کسی ایک مساوات مین سے ایک مجہول کے سر کو دوسری مساوات کی دونو طرفونمین ضرب کرین پہر دوسری مساوات مین سے اوسی حرف مجہول کے سر کو اول مساوات کی دونو طرفونمین ضرب کرین یہہ دونو مساواتین جو ضرب کرنی سے حاصل ہونگی ان دونو مین ایک مجہول کا سر یکسان ہوگا اور یہہ مجہول موافق صورت بالا کی زائل ہوسکتا ہی یعنے ان مساواتونمین سے تفریق کرنی سے زائل ہوجاویگا اور اگر مساواتونمین کسور ہون تو بہ کسور دور کرنی کے پہی ترکیب کرنی چاہیئے

مثال ۱ لا = ر + ۴ ..... (۱)

۲ر = ۱۹ − لا ..... (۲)

ان دونو مساواتون سی یہہ دو مساوات حاصل ہوتے ہی

لا − ر = ۴ ... (۱)

لا + ۲ر = ۱۹ .... (۲)

مساوات (۱) کو (۲) مین سے تفریق کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوے

۳ر = ۱۹ − ۴ = ۱۵

∴ ۳ر = ۱۵

∴ ر = ۵

اور چونکہ لا = ر + ۴ = ۵ + ۴ = ۹

یعنے لا = ۹

مثال ۲ ۲لا − ر = ۵

لا + ر = ۷ دونو مساواتو کو جمع کیا

۳لا = ۱۲

∴ لا = ۴

اور چونکہ لا + ر = ۷ جب لا کی قیمت لگائی تو

∴ ۴ + ر = ۷

∴ ر = ۷ − ۴

= ۳

∴ ر = ۳

۳ ط لا + ص ر = ۲ س

ط ر = س − ط لا

ان دونو مساواتون سی یہہ دو مساوات حاصل ہوتے ہین

ط لا + ص ر = ۲ س

ط لا + ط ر = س تفریق کا عمل کیا

ص ر − ط ر = س

∴ (ص − ط) ر = س

∴ ر = $\frac{س}{ص - ط}$

اور اول مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

ط لا = ۲ س − ص ر = ۲ س − $\frac{ص س}{ص - ط}$

∴ ط لا = ۲ س − $\frac{ص س}{ص - ط}$

∴ ط لا = $\frac{۲ س ص - ۲ س ط - س ص}{ص - ط}$

∴ ط لا = $\frac{س (۲ ص - ۲ ط - ص)}{ص - ط}$

∴ لا = $\frac{س (ص - ۲ ط)}{ط (ص - ط)}$

٤ ك − ط لا = ص

لا − ك = س دونو کو جمع کیا

∴ لا − ط لا = ص + س

∴ لا (١ − ط) = ص + س

∴ لا = $\frac{ص + س}{١ - ط}$ سے ہی

اور دوسری مساوات سی ك کی قیمت یہہ حاصل ہو

ك = لا − س = $\frac{ص + س}{١ - ط}$ − س

∴ ك = $\frac{ص + س}{١ - ط}$ − س

= $\frac{ص + س + ط س - س}{١ - ط}$

= $\frac{ص + ط س}{١ - ط}$

٥ ٣ ك = ٢ لا − ٣ ... (١)

لا + ك = ٤ ..... (٢)

ان مساواتون سی یہہ حاصل ہوتا ہے

٣ ك − ٢ لا = − ٣ .... (١)

ك + لا = ٤ .... (٢)

مساوات (١) مین ك کا سر آہی ٣ کو (٢) مساوات مین ضرب کیا

اور (٢) مساوات مین ك کا سر آہی اسکو (١) مساوات مین ضرب کیا

تو ٣ ك + ٣ لا = ١٢

٣ ك − ٢ لا = − ٣ ایکن تفریق کی

∴ ٥ لا = ١٥

∴ لا = ٣

اور چونکہ (٢) مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

ك = ٤ − لا = ٤ − ٣ = ١

∴ ك = ١

٦ ٤ لا + ٣ ك = ٣١ ... (١)

٣ لا + ٢ ك = ٢٢ .... (٢)

(١) مساوات کو ٣ مین ضرب کیا اور (٢) کو ٤ مین ضرب کیا

∴ ١٢ لا + ٩ ك = ٩٣

∴ ١٢ لا + ٨ ك = ٨٨ تفریق کی

ك = ٥

∴ ك = ٥

اور چونکہ مساوات (١) سی

٤ لا + ٣ ك = ٣١

∴ ٤ لا + ٣ × ٥ = ٣١

∴ ٤ لا + ١٥ = ٣١

∴ ٤ لا = ٣١ − ١٥ = ١٦

∴ لا = ٤

٧ ٣ لا + ٢ ك = ٤٠ .... (١)

٢ لا + ٣ ك = ٣٥ .... (٢)

مساوات (١) کو ٢ مین ضرب کیا اور مساوات (٢) کو ٣ مین ضرب کیا

∴ ٦ لا + ٩ ك = ١٠٥

٦ لا + ٤ ك = ٨٠ تفریق کی

٥ ك = ٢٥

∴ ك = ٥

اور اول مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

٣ لا = ٤٠ − ٢ ك = ٤٠ − ٢ × ٥

= ٤٠ − ١٠

∴ ٣ لا = ٣٠

∴ لا = ١٠

٨ $٥ل - ٤ك = ١٩$ ..... (١)

$٤ل + ٣ك = ٣٦$ ..... (٢)

اول مساوات کو ٤ مین ضرب کیا اور (٢) کو ٥ مین ضرب کیا تو

$٢٠ل + ١٥ك = ١٨٠$

$٢٠ل - ١٦ك = ٧٦$ تفریق کا عمل کیا

$٣١ك = ١٠٤$

$\therefore ك = \frac{١٠٤}{٢٦} = ٤$

اور مساوات (١) سی یہہ حاصل ہوتا ہی

$٥ل = ١٩ + ١٦ = ١٩ + ٤ك = ٣٥$

$\therefore ٥ل = ٣٥ \therefore ل = ٧$

٩ $٣ل + ٧ك = ٧٩$ ..... (١)

$٢ك - \frac{ل}{٢} = ٩$ (٢)

دوسری مساوات کو ٧ سے خالص کیا تو یہہ حاصل ہوا

$١٤ك - ٧ل = ١٢٦$

اوپر کی مساوات کو ٧ مین ضرب کیرکے نیچی لکھا اور دوسری مساوات کو ٤ مین ضرب کرکے اوپر لکھا

$\therefore ٢٨ك + ١٤ل = ٣١٦$

$١٩ك = ١٩٠$

$\therefore ل = ١٠$

اور بوسیلہ مساوات دوسری کے $٢ك = ٩ + \frac{ل}{٢}$

$= ٩ + ٥$

$٢ك = ١٤$

$\therefore ك = ٧$

١٠ $\frac{ل}{٣} + ك = ١٦$ ... (١)

$\frac{ل}{٤} - ك = ٥$ ..... (٢)

دونو مساواتون کو کسر سے خالص کیا

$\therefore ٤ل + ٣ك = ٤٨$

$٧ك - ٣ل = ٣٥$

یا $٤ل + ٣ك = ٤٨$

$ل + ٦ك = ٣٥$ ..... (١)

نیچی مساوات کو ٤ مین ضرب دیکر مفروق منہ بنایا اور اوپر کی مساوات کو ٣ مین ضرب کرکے مفروق مقرر کیا

$٤ل + ٢٤ك = ١٤٠$

$٤ل + ٣ك = ٤٨$

$٢١ك = ٩٢$

$\therefore ك = ٤$

اور چونکہ $ل = ٣٥ - ٦ك$ موافق مساوات (١) کے

$= ٣٥ - ٢٤$

$= ١١$

یعنے $ل = ١١$

$١١ - \frac{ل + ك}{٣} = ١٢ - ٢$

$\frac{ل + ٣ك}{١٠} + ك = \frac{١٢}{٥}$

(٢) مساوات کو ١٠ مین ضرب کی اور (١) کو ٣ مین ضرب کیا کسر دور کی

$ل + ٣ك + ١٠ك = ٢٤$

$ل + ك - ٦ = ٦$ ..... (٢)

یا $ل + ١٣ك = ٢٤$

$ل - ٥ك = ٦$

$\therefore ١٨ك = ١٨$ تفریق کی

$\therefore ك = ١$

اور موافق مساوات (ط) کے لا = ۶ + ۵ ک

= ۶ + ۵

یعنی لا = ۱۱

۱۲ | $\frac{۲لا-۳}{۳} + ک = ۷$

۵ لا − ۱۳ ک = $\frac{۶۷}{۳}$

دونو مساوا تون کو ۲ مین ضرب کر کی کسر دور کی

۲ لا − ۳ + ۲ ک = ۱۴

۱۰ لا − ۶ ک = ۶۷

یا ۲ لا + ۲ ک = ۱۷ .... (۱)

۱۰ لا − ۶ ک = ۶۷ (۲)

اوپر کی مساوات کو ۱۰ مین ضرب کیا اور نیچی کی مساوات کو ۲ مین ضرب کیا

۲۰ لا + ۲۰ ک = ۱۷۰

۲۰ لا − ۱۲ ک = ۱۳۴ تفریق کی

۲۶ ک = ۳۶

∴ ک = $\frac{۳۶}{۲۶} = \frac{۱}{۲}$

ک = $\frac{۱}{۲}$

اور مساوات (۱) سی ۲ لا = ۱۷ − ۲ ک

= ۱۷ − ۱

= ۱۶

∴ لا = ۸

۱۳ | $\frac{۳لا-۷ک}{۳} = \frac{۲لا+ک+۱}{۵}$

۸ − $\frac{لا-ک}{۵}$ = ۶

اول مساوات کو ۱۵ مین ضرب دی کر اور دوسری کو ۵ مین ضرب دیکر کسر دور کی

∴ ۱۵ لا − ۳۵ ک = ۶ لا + ۳ ک + ۳

۴۰ − لا + ک = ۳۰

مجہول انکیطرف کیے اور معلوم انکیطرف

∴ ۱۵ لا − ۶ لا − ۳۵ ک − ۳ ک = ۳

اور لا − ک = ۱۰

یا ۹ لا − ۳۸ ک = ۳ بنایا

اور لا − ک = ۱۰ ... (۵) کو مفروق

نیچی کی مساوات کو ۹ مین ضرب کر کے مفروق منہ مقرر کیا اور اوپر کی مساوات

∴ ۹ لا − ۹ ک = ۹۰

۹ لا − ۳۸ ک = ۳

۲۹ ک = ۸۷

∴ ک = $\frac{۸۷}{۲۹}$ = ۳

اور بوسیلہ مساوات (ن) لا = ۱۰ + ک = ۱۳

دو مساوا تون کی حل کرنیکا طریقہ یہ ہے کہ دونو مساوا تون سی ایک ہی حرف مجہول کی قیمت نکالین اور اون دونو قیمتون کو باہم مساوی کہین اسس مساوات مین فقط ایک مجہول رہیگا

مثلاً لا + ک = ۱۰ ..... (۱)

اور لا − ک = ۴ ..... (۲)

مساوات (۱) سی لا = ۱۰ − ک

اور مساوات (۲) سی لا = ۴ + ک

∴ ۴ + ک = ۱۰ − ک

∴ ۲ ک = ۱۰ − ۴

= ۶

∴ ک = ۳

اور چونکہ لا = ۴ + ک

= ۴ + ۳

= ۷

یعنے لا = ۷

مثال ۲ $لا - ۳ک = ۱ \ldots\ldots (۱)$

$۲ - ک = لا - ۳ک \ldots (۲)$

مساوات (۱) سی $لا = ۳ک + ۱$

مساوات (۲) سی $لا = ۲ + ۲ک$

$\therefore ۱ + ۳ک = ۲ + ۲ک$

$\therefore ۳ک - ۲ک = ۲ - ۱$

$\therefore ک = ۱$

اور $لا = ۲ک + ۲ = ۲ + ۲ = ۴$

۳ $\frac{لا}{۲} + \frac{ک}{۲} = ۵$

$۲لا - \frac{ک}{۲} = ۱۵$

دونو مساواتون کو ۲ مین ضرب کرکے کسر دور کی

$لا + ک = ۱۰ \ldots\ldots (۱)$

$۴لا - ک = ۳۰ \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) سی $لا = ۱۰ - ک$

مساوات (۲) سی $لا = \frac{۳۰ + ک}{۴}$

$\therefore ۱۰ - ک = \frac{۳۰ + ک}{۴}$

$\therefore ۴۰ - ۴ک = ۳۰ + ک$

$\therefore ۵ک = ۱۰$

$\therefore ک = ۲$

اور چونکہ $لا = ۱۰ - ک$

$= ۱۰ - ۲$

$= ۸$

یعنے $لا = ۸$

$۴\frac{لا}{۳} = ک - ۵ \ldots\ldots (۱)$

$\frac{ک}{۲} = لا - ۵ \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) سی $لا = ۳ک - ۱۵$

مساوات (۲) سی $لا = \frac{ک}{۲} + ۵$

$\therefore ۳(ک - ۵) = \frac{ک}{۲} + ۵$

اسیواسطے $۳ک - ۱۵ = \frac{ک}{۲} + ۵$

$\therefore ۳ک - \frac{ک}{۲} = ۵ + ۱۵ = ۲۰$

$\therefore ۶ک - ک = ۴۰$

$\therefore ۵ک = ۴۰$

$\therefore ک = ۸$

اور چونکہ $لا = \frac{ک}{۲} + ۵ = \frac{۸}{۲} + ۵ = ۴ + ۵ = ۹$

یعنے $لا = ۹$

۵ $۱لا - ص = س ک \ldots\ldots (۱)$

$۱ک - ۱لا = ۲س \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) سی $لا = \frac{س ک + ص}{۱}$

مساوات (۲) سے $لا = \frac{۱ک + ۲س}{۱}$

$\therefore \frac{س ک + ص}{۱} = \frac{۱ک + ۲س}{۱}$

یا $س ک + ص = ۱ک + ۲س$

یعنے $ک - ۱ک = ۲س - ص$

$\therefore (س - ۱) ک = ۲س - ص$

$\therefore ک = \frac{۲س - ص}{س - ۱}$

اور چونکہ $لا = \frac{۱ک + ۲س}{۱} = ک + ۲س$

$= \frac{۲س - ص}{س - ۱} + ۲س$

یعنے $لا = \frac{۲س - ص}{س - ۱} + \frac{۲س}{۱}$

۶ لا + ط ی = ۲ ط ..... (۱)

لا + ۲ ی = ط + ۲ ..... (۲)

مساوات (۱) سی لا = ۲ ط − ط ی

مساوات (۲) سی لا = ط + ۲ − ۲ ی

∴ ۲ ط + ط ی = ط + ۲ − ۲ ی

۲ ط − ط − ۲ = ط ی − ۲ ی

یا ط − ۲ = (ط − ۲) ی

∴ ی = $\frac{ط-۲}{ط-۲}$ = ۱

اور چونکہ لا = ۲ ط − ط ی = ۲ط − ط = ط

یعنے لا = ط

۷ لا + ۸ ی = ۴ ..... (۱)

۵ لا − ۸ ی = ۸ ..... (۲)

مساوات (۱) سی لا = ۴ − ۸ ی

مساوات (۲) سی لا = $\frac{۸+۸ی}{۵}$

∴ ۴ − ۸ ی = $\frac{۸+۸ی}{۵}$ طرفین کو ۵ سے ضرب کیا

∴ ۲۰ − ۴۰ ی = ۸ + ۸ ی

∴ ۴۸ ی = ۱۲ ∴ ۸ ی = ۱۲ ∴ ی = ۲ ∴ ی = ۴

اور لا = ۴ − ۸ ی = ۴ − ۸ ۴ = ۴ ∴ ۲ = لا

سوای دو قاعدون گذشتہ کی تیسرا اور بھی ہی جس سے دو مقدار مجہول دریافت ہوسکتی ہین اور وہ قاعدہ یہہ ہی کہ ایک مساوات کی وسیلہ سی ایک حرف مجہول کے قیمت معلوم کرکی دوسری مساوات مین رکھین اور اس ترکیب سے ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین ایک ہی مجہول رہی گا

مثلا لا − ۲ ی = ۳ ..... (۱)

لا + ی = ۶ .... (۲)

مساوات (۱) سی لا = ۲ ی + ۳

جب یہہ قیمت لا کی دوسری مساوات مین لکھین یعنے بجای لا کی دوسری مساوات مین ۲ ی + ۳ رکھین تو یہہ حاصل ہوتا ہی

۲ ی + ۳ + ی = ۶

∴ ۳ ی = ۶ − ۳

∴ ی = $\frac{۳}{۳}$ = ۱

اور چونکہ لا = ۲ ی + ۳

= ۲ + ۳

= ۵

یعنے لا = ۵

۲ ۱ − ی = لا − ۷ ..... (۱)

لا + ۲ ی = ۱۲ ..... (۲)

(۲) مساوات سی لا = ۱۲ − ۲ ی جسکو مساوات (۱) مین بجای لا کی ۱۲ − ۲ ی رکھا

۱ − ی = ۱۲ − ۲ ی − ۷ = ۵ − ۲ ی

∴ ۱ − ی = ۵ − ۲ ی

∴ ۲ ی − ی = ۵ − ۱

یعنے ی = ۴

اور چونکہ لا = ۱۲ − ۲ ی = ۱۲ − ۸ = ۴

یعنے لا = ۴

۳ $\frac{لا-ی}{۲}$ = ۳

$\frac{لا+ی}{۲}$ = ۵

دونو مساواتون کی کسر دور کی

لا − ی = ۶ . . . . . (۱)

لا + ی = ۱۰ . . . . . (۲)

اوپر کی مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

لا = ۶ + ی یہہ قیمت لا کی دوسری مساوات رکہنے

∴ ۶ + ی + ی = ۱۰

∴ ۲ ی = ۱۰ − ۶ = ۴

∴ ی = ۲

اور لا = ۶ + ی = ۶ + ۲ = ۸

۴ ۳ لا − ۱ = ی . . . . . (۱)

ی + ۲ لا = ۹ . . . . (۲)

مساوات (۱) سی لا = $\frac{ی+۱}{۳}$ بجاے لا کی $\frac{ی+۱}{۳}$ مساوات (۲) مین رکہا

∴ ی + ۲ $\left(\frac{ی+۱}{۳}\right)$ = ۹

∴ ی + $\frac{۲ی+۲}{۳}$ = ۹ طرفین کو ۳ مین ضرب کیا

∴ ۳ ی + ۲ ی + ۲ = ۲۷

∴ ۵ ی = ۲۵

∴ ی = ۵

اور چونکہ لا = $\frac{ی+۱}{۳}$ = $\frac{۵+۱}{۳}$ = $\frac{۶}{۳}$ = ۲

یعنے لا = ۲

۵ $\frac{۲}{ی}$ + $\frac{۱}{لا}$ = ۱ . . . . . (۱)

۳ لا − ی = ۸ . . . . . (۲)

(۱) مساوات سی ظاہر ہی کہ $\frac{۱}{لا}$ = ۱ − $\frac{۲}{۳}$ = $\frac{۱}{۳}$

∴ لا = ۳

اور دوسری مساوات سی ۳ لا − ی = ۸

∴ ی = ۳ لا − ۸ = ۳ × ۳ − ۸

= ۹ − ۸

= ۱

یعنے ی = ۱ مفید ہوا

اب ہم چند مساوات اور طرح حل کرتی ہین تاکہ مشق کی واسطی

۶ $\frac{لا+۲}{۳}$ + ۸ ی = ۳۱

$\frac{ی+۵}{۴}$ + ۱۰ لا = ۱۹۲

دونو مساواتون کو کسر سی خالص کیا

∴ لا + ۲ + ۲۴ ی = ۹۳

ی + ۵ + ۴۰ لا = ۷۶۸

یا لا + ۲۴ ی = ۹۱ . . . . (۱)

۴۰ لا + ی = ۷۶۳

اوپر کی مساوات کو ۴۰ مین ضرب کر کی مفروق منہ بنایا اور نیچی کی مساوات کو مفروق مقرر کیا

۴۰ لا + ۹۶۰ ی = ۳۰۴۲۰

۴۰ لا + ی = ۷۶۳ تفریق کیا

۹۵۹ ی = ۲۸۷۷

∴ ی = ۳

اور موافق مساوات (۱) کی لا = ۹۱ − ۲۴ ی

= ۹۱ − ۷۲

= ۱۹

یعنے لا = ۱۹

۷ $\frac{۲لا-ی}{۴}$ + ۱۴ = ۱۸ . . . . (۱)

$\frac{۲ی+لا}{۳}$ + ۱۶ = ۱۹ . . . . (۲)

مساوات (۱) سی $\frac{۲ل-۱}{۲} = ۴$

$\therefore ۲ل - ۱ = ۸ \quad \ldots\ldots (ط)$

مساوات (۲) سی $\frac{۲ک+ل}{۳} = ۳$

$\therefore ۲ک + ل = ۹$

یا $۲ل + ۴ک = ۱۸$ طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

اور $۲ل - ک = ۸$ موافق (ط) کی تفریق کی

$۵ک = ۱۰$

$ک = ۲$

اور $۲ل = ۸ + ک = ۸ + ۲ = ۱۰$

$\therefore ل = ۵$

۸ $\frac{۲ل+۳ک}{۶} + \frac{ل}{۳} = ۸ \quad \ldots\ldots (ا)$

اور $\frac{۷ک-۳ل}{۲} - ک = ۱۱ \quad \ldots\ldots (ب)$

(ا) مساوات کی کسر دور کی

$\therefore ۲ل + ۳ک + ۲ل = ۴۸$

یا $۴ل + ۳ک = ۴۸ \quad \ldots\ldots (ط)$

اور (ب) مساوات سی کسر دور کی تو

$۷ک - ۳ل = ۲۲$

لیکن $۳ک + ۴ل = ۴۸$ موافق (ط) کے مساوات

نیچی کی مساوات کو ۵ مین ضرب کر کے مفروق منہ مقرر کیا

اور اوپر کی مساوات کو ۳ مین ضرب کیا

$۱۵ک + ۲۰ل = ۲۴۰$

$۱۵ک - ۹ل = ۶۶$ تفریق کی

$۲۹ل = ۱۷۴$

$\therefore ل = ۶$

اور $۳ک = ۴۸ - ۴ل$ موافق (ط) کے

$= ۴۸ - ۲۴$

$= ۲۴$

$\therefore ک = \frac{۲۴}{۳} = ۸$

۹ $۳ل + \frac{ک}{۲} = ۲۲$

$۱۱ک - \frac{۱۲ل}{۵} = ۲۰$ سنگے حاصل ہو

دونو مساواتون کی کسر دور کرین تو یہہ دو مساوات حاصل ہوئے

$۶ل + ۷ک = ۴۴$

$۵۵ک - ۱۲ل = ۱۰۰$

نیچی کی مساوات کو ۶ مین ضرب کیا اور اوپر کی مساوات کو ۲ مین ضرب کیا

$۳۳۰ک - ۷۲ل = ۶۰۰$

$۱۴ک + ۷۲ل = ۸۸$ دونو کو جمع کیا

$۴۴۳ک = ۶۸۸$

$\therefore ک = ۲$

اور بوسیلہ اول مساوات کی $۳ل = ۲۲ - \frac{۷ک}{۲}$

$= ۲۲ - \frac{۲×۷}{۲}$

$= ۲۲ - ۷$

$= ۱۵$

$\therefore ل = ۵$

۱۰ $ل + ۱ : ک :: ۵ : ۳ \quad \ldots\ldots (ا)$

اور $\frac{۱۲ل}{۳} - \frac{۵-ک}{۲} = \frac{۴۱}{۱۲} - \frac{۱۲ل-۱}{۴} \quad \ldots\ldots (ب)$

(ب) مساوات کو ۱۲ مین ضرب کر کے کسر دور کی تو یہہ حاصل ہوا

$۸ل - ۳۰ + ۶ک = ۴۱ - ۶ل + ۳$

$\therefore ۱۴ل + ۶ک = ۷۴$

یا ۷ ل + ۳ ک = ۳۷

۳ ل − ۵ ک = −۳ بوسیلہ تناسب (۲) کے

اوپر کی مساوات کو ۳ مین ضرب کرکی مفروق منہ بنایا

اور نیچی کی مساوات کو ۷ مین ضرب کرکی مفروق بنایا

۲۱ ل + ۹ ک = ۱۱۱

۲۱ ل − ۳۵ ک = −۲۱ تفریق کی

۴۴ ک = ۱۳۲

∴ ک = ۳

اور موافق تناسب کی ۳ ل + ۳ = ۵ ک

۱۵ =

∴ ۳ ل = ۱۲

∴ ل = ۴

۱۱ $\frac{ل-۲}{۵} - \frac{ل-۱۰}{۳} = \frac{ک-۱۰}{۴}$

اور $\frac{۳ک+۴}{۳} - \frac{۲ل+ک}{۸} = \frac{ل+۱۳}{۴}$

اول مساوات کو ۶۰ مین ضرب کرکی کسر دور کی

۱۲ ل − ۴۴ − ۲۰۰ + ۲۰ ل = ۱۵ ک − ۱۵۰

∴ ۳۲ ل − ۱۵ ک = ۴۷ ... (۱)

اور دوسری مساوات کو ۲۴ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۱۶ ک + ۳۲ − ۶ ل − ۳ ک = ۶ ل + ۷۸

∴ ۱۳ ک − ۱۲ ل = ۴۶

اور ۳۲ ل − ۱۵ ک = ۴۷ موافق (۱) کے

اب یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر اوپر کی مساوات کو ۸ مین ضرب کرین

اور نیچی کی مساوات کو ۳ مین ضرب کرین تو امثال لا کے

دونو مساوتین یکسان ہوجائینگی چنانچہ عمل سے ظاہر ہی کہ

۱۰۴ ک − ۹۶ ل = ۳۶۸

۹۶ ل − ۴۸ ک = ۲۲۲ جمع کیا

۵۹۰ = ۵۹ ک

∴ ک = ۱۰

اور موافق (۱) کے

۳۲ ل = ۱۵ ک + ۴۷

= ۱۵۰ + ۴۷

= ۲۲۴

∴ ل = ۷

۱۲ ۲ ک − $\frac{ل+۳}{۴} = ۷ + \frac{۳ل-۲ک}{۵}$

اور ۴ ل − $\frac{۸-ک}{۳} = ۲\frac{۱}{۲} - \frac{۳ل+۱}{۳}$

اول مساوات کو ۲۰ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۴۰ ک − ۵ ل − ۱۵ = ۱۴۰ + ۱۲ ل − ۸ ک

∴ ۴۸ ک − ۱۷ ل = ۱۵۵ ... (۱)

اور دوسری مساوات کو ۶ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۲۴ ل − ۱۶ + ۲ ک = ۷ − ۱۴ − ۶ ل − ۳

∴ ۳۰ ل + ۲ ک = ۱۶۰

اس مساوات کو ۲۴ مین ضرب کیا تو

۷۲۰ ل + ۴۸ ک = ۳۸۴۰

− ۱۷ ل + ۴۸ ک = ۱۵۵ موافق (۱) کے

۷۳۷ ل = ۳۶۸۵ بعد تفریق کی

∴ ل = ۵

اور چونکہ ۳۰ ل + ۲ ک = ۱۶۰

∴ ۲ ک = ۱۶۰ − ۳۰ ل

= ۱۶۰ − ۱۵۰

= ۱۰

∴ ک = ۵

۱۳ | $\frac{ک}{۱۸} - \frac{۱۸-ل}{۳۶} = ۱ - \frac{ک+۴}{۳} + \frac{ل-ک}{۶}$

اور $ل : ک :: ۴ : ۷$

اول مساوات کو مختصر کرکے لکھا تو یہ حاصل ہوا

$\frac{ک}{۹} - \frac{۱-ل۴}{۱۸} = ۱ - \frac{ک+۴}{۳} + \frac{ل-ک}{۶}$

طرفین کو ۱۸ میں ضرب کیا

$\therefore ۲ک - ۴ل + ۱ = ۱۸ - ۴ - ۶ک + ۳ل - ۳ک$

$\therefore ۱۱ک - ۷ل = -۷$

$۷ل = ۱۲ک$ موافق تناسب کے

$۱۱ک = ۱۲ک - ۷$ بعد جمع کرنے کے

$\therefore ک = ۷$

اور $ل = \frac{۱۲ک}{۷}$

$= \frac{۱۲ \times ۷}{۷}$

$= ۱۲$

یعنے $ل = ۱۲$

۱۴ | $ل - \frac{۳ک - ۲+ل}{۱۱} = ۱ + \frac{۱۵ل + \frac{۴ک}{۳}}{۳۳}$

اور $\frac{۳ل + ۲ک}{۶} - \frac{ک-۵}{۴} = \frac{۱۱+۱۵۲ل}{۱۲} - \frac{۳ک+۱}{۲}$

اول مساوات کو ۳۳ میں ضرب کیا

$\therefore ۳۳ل - ۹ک + ۶ - ۳۳ = ۳۳ + ۱۵ل + \frac{۴ک}{۳}$

$\therefore ۱۱ل - ۹ک = ۲۷ + \frac{۴ک}{۳}$

$\therefore ۴۵ل - ۲۷ک = ۸۱ + ۴ک$

$\therefore ۴۵ل - ۳۱ک = ۸۱ \ldots (۱)$

اور دوسری مساوات کو ۱۲ میں ضرب کرکے کسر دور کی

$\therefore ۶ل + ۴ک - ۳ک + ۱۵ = ۱۱ل + ۱۵۲ - ۱۸ک - ۶$

$\therefore ۱۹ک - ۵ل = ۱۳۱$

اس مساوات کو ۹ میں ضرب کیا

$\therefore ۱۷۱ک - ۴۵ل = ۱۱۷۹$

$۴۵ل - ۳۱ک = ۸۱$ موافق (۱) کے

$۱۴۰ک = ۱۲۶۰$ جمع کیا

$\therefore ک = ۹$

اور چونکہ $۱۹ک - ۵ل = ۱۳۱$

$\therefore ۵ل = ۱۹ک - ۱۳۱$

$= ۱۷۱ - ۱۳۱$

$= ۴۰$

$\therefore ل = ۸$

۱۵ | $\frac{۸۰+۵ل۳}{۱۵} = ۱۸\frac{۱}{۳} - \frac{۴ل+۳ک-۸}{۷}$

$۱۰ک + \frac{۳۵-۶ل}{۵} = ۵۵ + ۱۰ل$

اول مساوات کو ۱۰۵ میں ضرب کرکے کسر دور کی

$\therefore ۵۶۰ + ۲۱ل = ۱۹۲۵ - ۶۰ل - ۴۵ک + ۱۲۰$

$\therefore ۸۱ل + ۴۵ک = ۱۴۸۵$

$۹ل + ۵ک = ۱۶۵ \ldots (۱)$ طرفین کو ۹ پر تقسیم کیا

دوسری مساوات کو ۵ میں ضرب کرکے کسر دور کی

$\therefore ۵۰ک + ۶ل - ۳۰ = ۲۷۵ + ۵۰ل$

$\therefore ۵۰ک - ۴۴ل = ۳۱۰$ طرفین کو ۲ پر تقسیم کیا

$\therefore ۲۵ک - ۲۲ل = ۱۵۵ \ldots (۲)$

اب اگر مساوات (۱) کو ۵ میں ضرب کریں تو

$۲۵ک + ۴۵ل = ۸۲۵$

$۲۵ک - ۲۲ل = ۱۵۵$ موافق مساوات (۲) کے

$۶۷ل = ۶۷۰$ تفریق کی

$\therefore ل = ۱۰$

اور موافق مساوات (۱) کی ۱۰۵ = ۱۶۵ − ۹۰

۹۰ = ۱۶۵ −

۷۵ =

∴ ۵ = ۱۵

۱۶

$\frac{۵ل + ۲ک}{۶} - \frac{۳ک - ۱۲ + ۸ل}{۵} = \frac{۱۵ + ۲ل - ۴ک}{۳}$

اور $\frac{۷ل + ۱۳ - ۵ک}{۴} + ل = ۲ک - \frac{۳ل + ۲ک - ۱۶}{۳}$

اول مساوات کو ۶۰ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۳۰ک + ۲۵ل + ۱۰ک − ۱۸ک + ۷۲ − ۴۸ل = ۱۲۰ − ۱۵ − ۲۰ل + ۴۰ک

∴ ۱۸ک + ۳ل = ۱۰۲ ۱۵ مین ضرب کیا

∴ ۴۵ + ۲۷ک = ۱۵۳۰ ....(۱) طرفین کو

دوسری مساوات کو ۱۲ مین ضرب کرکے کسر دور کی

∴ ۲۱ل + ۹۳ − ۱۵ک + ۱۲ل = ۲۴ک − ۱۲ل − ۸ک + ۶۴

∴ ۴۵ل − ۱۳۱ک = ۲۵

اور ۴۵ل + ۲۷ک = ۱۵۳۰ موافق (۱) کے

−۱۳۰۱ک = −۱۵۰۵ تفریق کے

طرفین کی علامتین بدلین

∴ ۱۳۰۱ک = ۱۵۰۵

∴ ک = ۵

اور ۱۸ک + ۳ل = ۱۰۲

∴ ۳ل = ۱۰۲ − ۱۸ک

یا ل = ۳۴ − ۶ک

= ۳۴ − ۳۰

= ۴

۱۷

$۱۱ + \frac{۲۵ + ۵ک}{۶} - \frac{۷ل - ۶}{۳} = ۱۰ - \frac{۱۳ل - ۱۰ + ۷ک}{۱۲}$

اور $\frac{۱۲ - ل}{۹} : ۵ل - \frac{۱۴ + ک}{۳} :: ۱ : ۸$

اول مساوات کو ۱۲ مین ضرب کرکی کسر دور کی

∴ ۱۲۰ + ۵۰ + ۱۰ک − ۲۸ل + ۲۴ = ۱۲۰ − ۱۳ل + ۱۰ − ۷ک

∴ ۱۷ک − ۲۵ل = ۴۴ ضرب کیا

∴ ۱۵۱ک − ۷۵ل = ۲۶۴ ....(۱) طرفین کو ۳ مین

اور تناسب سی یہہ مساوات حاصل ہوئی

$۱۵ - ۲۵ل + ۴۰ک = \frac{۹۶ - ۸ل}{۹} - ل = \frac{۱۴ + ک}{۳}$

اسکی مساوات کو ۹ مین ضرب کیا

∴ ۹۶ − ۸ل − ۴۵ل = ۴۲ − ۳ک

∴ ۱۳۸ = ۵۳ل − ۳ک ضرب کیا

طرفین کو ۱۷ مین

∴ ۲۳۴۶ = ۹۰۱ل − ۱۵۱ک

۱۵۱ک − ۷۵ل = ۲۶۴ موافق (۱) کے

۲۴۷۸ = ۸۲۶ل جمع کیا

∴ ل = ۳

اور ۵۳ل − ۳ک = ۱۳۸

∴ ۳ک = ۵۳ل − ۱۳۸

= ۵۳ × ۳ − ۱۳۸

= ۱۵۹ − ۱۳۸

= ۲۱

∴ ک = ۷

۱۸ $\frac{۴}{۱۱} + \frac{۵}{۲۲} = \frac{۹}{۱} \cdots (۱)$

اور $\frac{۵}{۱۱} + \frac{۴}{۷} = \frac{۷}{۱۱} + \frac{۳}{۲} \cdots (۲)$

اول مساوات کی اول طرف کا اختصار ہو سکتا ہے اسواسطے بعد اختصار کے یہہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{۴}{۱۱} + \frac{۵}{۷} = \frac{۹}{۱} - ۱$

$\therefore \frac{۴}{۱۱} - \frac{۴}{۷} = ۱$

اور $\frac{۲}{۱۱} + \frac{۴}{۷} = \frac{۳}{۲}$ بوسیلہ دوسری مساوات کے

$\frac{۲}{۱۱} = \frac{۱}{۲}$ دونو مساواتون جمع کیا

$\therefore ۱۱ = ۴$

اور $\frac{۴}{۱۱} - \frac{۴}{۷} = ۱$ کے تہا

$\therefore \frac{۴}{۷} = \frac{۴}{۱۱} + ۱ = ۱ + ۱ = ۲$

$\therefore ۴ = ۱۴$

$\therefore ۷ = ۲$

۱۹ $\frac{ط}{۱۱} + \frac{ص}{۷} = م$

اور $\frac{س}{۱۱} + \frac{ع}{۷} = ن$

اول مساوات کو س سے ضرب کیا اور دوسری کو ط سے ضرب کیا تو یہہ دو مساوات حاصل ہوئین

$\frac{س ط}{۱۱} + \frac{س ص}{۷} = م س$

$\frac{س ط}{۱۱} + \frac{ع ط}{۷} = ن ط$

$\therefore \frac{س ص}{۷} - \frac{ع ط}{۷} = م س - ن ط$ تفریق کی

$\therefore (س ص - ع ط) \frac{۱}{۷} = م س - ن ط$

$\therefore \frac{۱}{۱} = \frac{م س - ن ط}{س ص - ع ط}$

$\therefore ۷ = \frac{س ص - ع ط}{م س - ن ط}$

اور $\frac{ط}{۱۱} = م - \frac{ص}{۱}$ بوسیلہ اول مساوات کی

$= م - ص (\frac{۱}{۷})$

$= م - ص \left(\frac{م س - ن ط}{س ص - ع ط}\right)$

$= م - \frac{م ص س - ص ن ط}{س ص - ع ط}$

$= \frac{م ص س - م ع ص س - م ع ط + ص ن ط}{س ص - ع ط}$

$= \frac{ص ن ط - م ع ط}{س ص - ع ط}$

$\therefore \frac{۱}{۱۱} = \frac{ص ن - م ع}{س ص - ع ط}$

$\therefore ۱۱ = \frac{س ص - ع ط}{ص ن - م ع}$

۲۰ $۱۱ - \frac{۱۲ - ۱۱}{۱۱ - ۲۳} = ۲۰ - \frac{۱۲ - ۵۹}{۲}$

اور $۷ + \frac{۷ - ۳}{۱۱ - ۱۸} = ۳۰ - \frac{۷۳ - ۷۳}{۳}$

اول مساوات کو ۲ سے ضرب کیا

$\therefore ۲۱ - \frac{۱۲ - ۱۲}{۱۱ - ۲۳} = ۴۰ - ۵۹ + ۲۱$

۱۱ کو طرفین سے تفریق دیا

$\therefore - \frac{۱۲ - ۱۲}{۱۱ - ۲۳} = ۱۹$

اب طرفین کی علامتین بدلین اور کسر دور کی

$\therefore ۱۲ - ۱۲ = ۷۳ - ۴۳ ۱۹$

$\therefore ۱۲ + ۷۳ ۱۱ = ۴۳ ۷ \cdots (۱)$

اور دوسری مساوات کو ۳ مین ضرب کیا تو یہہ حاصل

$$۳ک + \frac{۳ک - ۹}{ل - ۱۸} = ۹۰ - ۳ک + ۳ک$$

دیا

۳ک کو طرفین سے اڑا

$$\therefore \frac{۳ک - ۹}{ل - ۱۸} = ۱۷$$

کسر دور کی

$$۳ک - ۹ = ۱۷ل - ۳۰۶$$

$$\therefore ۳ک - ۱۷ل = -۲۹۷$$

بوسیلہ (۱) کے

$$۴ک + ۱۷ل = ۴۳۷$$

جمع کیا

$$\therefore ۷ک = ۱۴۰$$

$$\therefore ک = ۲۰$$

اور ۴ک + ۱۷ل = ۴۳۷

$$\therefore ۱۷ل = ۴۳۷ - ۴ک$$

$$= ۴۳۷ - ۸۰$$

$$= ۳۵۷$$

$$\therefore ل = ۲۱$$

$$۲۱ل - ۸ = \frac{۱۶ل + ۶۰}{۳ک - ۱} = \frac{۱۶ل ک - ۱۰۷}{۵ک + ۲}$$

اور $۲ + ۶ک + ۹ل = \frac{۲۷ل^۲ - ۱۲ک^۲ + ۳۸}{۳ل - ۲ک + ۱}$

اول مساوات کو ۵ + ۲ک مین ضرب کیا تو یہہ حاصل ہوا

$$۴۰ل + ۱۶ل ک - \frac{۸۰ + ۳۰ل + ۳۲ک + ۱۲۰ل ک}{۳ک - ۱} = ۱۶ل ک - ۱۰۷$$

۱۶ل ک کو طرفین سے اڑا دیا

$$\therefore ۴۰ل + ۱۰۷ = \frac{۸۰ + ۳۰۰ل + ۳۲ک + ۱۲۰ل ک}{۳ک - ۱}$$

طرفین کو ۳ک - ۱ مین ضرب کیا

$$\therefore ۱۲۰ل ک - ۴۰ل + ۳۲ک - ۱۰۷ = ۸۰ + ۳۰۰ل + ۳۲ک + ۱۲۰ل ک$$

$$\therefore ۲۸۹ک - ۳۴۰ل = ۱۸۷ \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور دوسری مساوات سے کسر دور کی تو یہہ حاصل ہوا

$$۲۷ل^۲ - ۱۲ک^۲ + ۱۵ل + ۲ک + ۲ = ۲۷ل^۲ - ۱۲ک^۲ + ۳۸$$

$$\therefore ۱۵ل + ۲ک = ۳۶ \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر مساوات (۱) کو ۳ مین ضرب کرین اور مساوات (۲) کو ۶۸ مین ضرب کرین تو دونو مساواتون مین امثال لا کی برابر ہو جائینگی اسیواسطی بعد ضرب کرنیکی یہہ دو مساواتین حاصل ہوئین

$$۷۶۸ک - ۱۰۲۰ل = ۵۶۱$$

$$۶۱۲ک + ۱۰۲۰ل = ۲۴۴۸$$

دونو مساواتو کو جمع کیا

$$۱۳۸۰ک = ۳۰۰۹$$

$$\therefore ک = ۳$$

اور موافق مساوات (۲) کی $ل = \frac{۳۶ - ۲ک}{۱۵}$

$$= \frac{۳۶ - ۶}{۱۵}$$

$$= \frac{۳۰}{۱۵}$$

$$\therefore ل = ۲$$

$$۳ - \frac{۷ + \frac{۲ل}{۵}}{۵} = \frac{۵ل + ۹}{۳ک}$$

۲۲

اور $\frac{۴ + ۱۵ک}{۶ل - ۲} = \frac{۲ل ک - \frac{۱۰۷}{۸}}{۵ل + ۲}$

اول مساوات کو ۱۵ک مین ضرب کر کی کسر دور کی

$$۵۴ک - ۱۲۱ک - ۶ل = ۵۷ک - ۲۵ل - ۴۵$$

$$\therefore ۱۵۱ک - ۱۹ل = ۴۵ \quad \ldots\ldots (۱)$$

دوسری مساوات کو ۲ل + ۵ مین ضرب کیا

$$\therefore ۲ل ک + ۵ک - \frac{۸ل + ۲۰ + ۳۰ل ک + ۷۵ک}{۶ل - ۲} = ۲ل ک - \frac{۱۰۷}{۸}$$

طرفین سے ۲ل ک کو اڑا دیا

$\therefore \frac{۱۰۷}{۸} + ۵ز = \frac{۸ل + ۲۰ + ۳۰ل + ۷۵ز}{۶ل - ۲}$

طرفین کو ۶ل - ۲ مین ضرب کیا

$\therefore ۳۰ل ز - ۱۰ز + \frac{۳۲۱ل - ۱۰۷}{۴} = ۸ل + ۲۰ + ۳۰ل ز + ۷۵ز$

۳۰ل ز کو طرفین سے اوڑا دیا

$\therefore \frac{۳۲۱ل - ۱۰۷}{۴} = ۸ل + ۸۵ز + ۲۰$

$\therefore ۳۲۱ل - ۱۰۷ = ۳۲ل + ۳۴۰ز + ۸۰$

$\therefore ۲۸۹ل - ۳۴۰ز = ۱۸۷ \quad \ldots\ldots (۲)$

اب اگر مساوات (۱) کو ۲۰ مین ضرب کرین اور مساوات (۲) کو ۳ مین ضرب کرین تو دونو مساوات مین ز کی یکسان ہوجائیگی اسیواسطی بعد ضرب کرنیکی یہہ دو مساوات حاصل ہونگی

$۲۰۲۰ز - ۳۸۰ل = ۹۰۰$

$۲۰۲۰ز - ۸۶۷ل = ۵۶۱$ تفریق کی

$۱۴۸۷ل = ۱۴۶۱$

$\therefore ل = ۳$

اور موافق مساوات (۱) کے $ز = ۵۴ + ۱۹ل$

$= ۵۴ + ۵۷$

$= ۱۰۲$

$\therefore ز = ۲$

جانا چاہئی کہ جسطرح دو حرف مجہول کی قیمت دو مساوات سے معلوم ہوجاتی ہی اسیطرح تین حرف مجہول کی قیمت تین مساوات سے معلوم ہوجاتی ہی اور قاعدہ حل کرنیکا یہہ ہی کہ تینون مساوات مین سے دو مساوات لین اور ان دونو مساوات سے موافق قواعد گذشتہ کی ایک حرف مجہول دور کردین اور اسی عمل سے ایک ایسی مساوات حاصل ہوکی جسمین دو حرف مجہول ہونگی پہر اون تینون مساوات مین سی ایک تو وہ مساوات لین جو باقی رہتی ہی اور ایک مساوات اون دونو مساوات مین سے لین جسپر عمل کیا ہی اور اون دونو مساوات مین سے موافق قواعد گذشتہ کی وہی حرف مجہول دور کرین جو پہلی دو مساوات سے دور کیا تہا پس اس عمل سی ایک دوسری مساوات حاصل ہوگی جسمین دو مجہول ہونگی پس دو دو مجہول کی دو مساوات حاصل ہونگی اور ان دونو مساوات سے دو مقدار مجہول موافق قواعد گذشتہ کی دریافت ہوسکتی ہین اور جب دو مجہول معلوم ہوگئی تو تیسرا بآسانی معلوم ہوسکتا ہی کیونکہ اون تینون مساوات مین سے کسی ایک مین دو قیمتین دو حرف مجہول کی رکہین اور اس عمل سے ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین فقط ایک حرف مجہول ہوگا اور وہ نہایت آسانی سی معلوم ہوسکتا ہی

مثال ۱

$ل + ز + ر = ۳۱ \quad \ldots\ldots (۱)$

$ل + ز - ر = ۲۵ \quad \ldots\ldots (۲)$

$- ل + ۳ز + ر = ۷ \quad \ldots\ldots (۳)$

مساوات (۱) اور مساوات (۲) کو جمع کیا

$\therefore ۲ل + ۲ز = + ۵۶$

$\therefore ل + ز = ۲۸ \quad \ldots\ldots (۴)$

پہر مساوات (۱) مین سے مساوات (۳) کو تفریق کرین

$۲ل - ۲ز = ۲۴$

$\therefore ل - ز = ۱۲$

اور $ل + ز = ۲۸$ موافق (۴) کے

$۲ل = ۴۰$ جمع کیا

$\therefore$ لا $= ۲۰$

اور ک $= ۲۸ -$ لا $= ۲۸ - ۲۰ = ۸$

اور لا $+$ ک $+$ ر $= ۳۱$

$\therefore$ ر $= ۳۱ -$ لا $-$ ک

$= ۳۱ - ۲۰ - ۸$

$= ۳۱ - ۲۸$

$= ۳$

یعنے ر $= ۳$

۲ لا $+ ۲$ ک $-$ ر $= ۷$ ..... (۱)

۳ ک $-$ لا $+$ ر $= ۳$ ..... (۲)

۲ ر $+$ لا $-$ ک $= ۴$ ..... (۳)

مساوات (۱) کو اور مساوات (۲) کو جمع کیا

لا $+ ۲$ ک $-$ ر $= ۷$

۳ ک $-$ لا $+$ ر $= ۳$

$\therefore ۵$ ک $= ۱۰$

$\therefore$ ک $= ۲$

مساوات (۲) کو اور (۳) کو جمع کیا

۳ ک $-$ لا $+$ ر $= ۳$

۲ ر $+$ لا $-$ ک $= ۴$

۲ ک $+ ۳$ ر $= ۷$

$\therefore ۴ + ۳$ ر $= ۷$ ک کی قیمت رکھی

$\therefore ۳$ ر $= ۳$

$\therefore$ ر $= ۱$

اور لا $+ ۲$ ک $-$ ر $= ۷$

$\therefore$ لا $= ۷ +$ ر $- ۲$ ک $= ۷ + ۱ - ۴ = ۴$

۳ لا $+$ ک $+$ ر $= ۹۰$ ..... (۱)

۲ لا $+ ۴۰ = ۳$ ک $+ ۲۰$ ..... (۲)

۲ لا $+ ۲۰ = ۴$ ر $- ۱۰$ ..... (۳)

$\therefore ۲۰ = ۳$ ک $- ۴$ ر $+ ۳۰$ (۳) سے (۲) کو تفریق کیا

$\therefore ۴$ ر $- ۳$ ک $= ۱۰$ ..... (۴)

مساوات (۱) کو ۲ مین ضرب کرکے مفروق منہ بنایا

اور مساوات (۲) کو مفروق مقرر کرکے تفریق کی

$\therefore ۲$ لا $+ ۲$ ک $+ ۲$ ر $= ۱۸۰$

۲ لا $- ۳$ ک $= - ۲۰$

۵ ک $+ ۲$ ر $= ۲۰۰$

اسس مساوات کو ۲ مین ضرب کیا

$\therefore ۱۰$ ک $+ ۴$ ر $= ۴۰۰$

اور ۴ ر $- ۳$ ک $= ۱۰$ موافق (۴) کے

۱۳ ک $= ۳۹۰$ تفریق کی

$\therefore$ ک $= ۳۰$

اور ۴ ر $= ۱۰ + ۳$ ک $= ۱۰ + ۹۰$

$= ۱۰۰$

$\therefore$ ر $= ۲۵$

اور لا $+$ ک $+$ ر $= ۹۰$

$\therefore$ لا $= ۹۰ -$ ک $-$ ر $= ۹۰ - ۳۰ - ۲۵$

$= ۳۵$

۴ لا $+$ ک $+$ ر $= ۳۵$ ..... (۱)

لا $+ ۲$ ک $+ ۳$ ر $= ۱۰۵$ ..... (۲)

لا $+ ۳$ ک $+ ۴$ ر $= ۱۳۴$ ..... (۳)

مساوات (۲) سی (۱) کو تفریق کیا

$$لا + ۲ ک + ۳ ر = ۱۰۵$$

$$لا + ک + ر = ۵۳$$

$$ک + ۲ ر = ۵۲ \quad \ldots\ldots (۴)$$

پھر مساوات (۳) مین سی (۲) کو تفریق کیا

$$لا + ۳ ک + ۴ ر = ۱۳۴$$

$$لا + ۲ ک + ۳ ر = ۱۰۵$$

$$ک + ر = ۲۹$$

$$ک + ۲ ر = ۵۲$$ موافق (۴) کے

تفریق کی $$- ر = - ۲۳$$

$$ر = ۲۳$$

اور $$ک + ر = ۲۹$$

$$\therefore ک = ۲۹ - ر$$

$$= ۲۹ - ۲۳$$

$$= ۶$$

یعنے $$ک = ۶$$

اور $$لا + ک + ر = ۵۳$$

$$\therefore لا = ۵۳ - ک - ر = ۵۳ - ۶ - ۲۳$$

$$= ۵۳ - ۲۹$$

$$= ۲۴$$

یعنے $$لا = ۲۴$$

۵ $$لا + ک + ر = ۲۹ \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$لا + ۲ ک + ۳ ر = ۶۲ \quad \ldots\ldots (۲)$$

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ک}{۳} + \frac{ر}{۴} = ۱۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۲) سی (۱) کو تفریق کیا

$$لا + ۲ ک + ۳ ر = ۶۲$$

$$لا + ک + ر = ۲۹$$

$$ک + ۲ ر = ۳۳ \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساوات (۳) کو ۱۲ مین ضرب کرکی کسر دور کی

$$\therefore ۶ لا + ۴ ک + ۳ ر = ۱۲۰$$ ضرب کرکی لکھا

مساوات (۱) کو ۶ مین ضرب کرکی لکھا $$۶ لا + ۶ ک + ۶ ر = ۱۷۴$$

تفریق کی $$- ۲ ک - ۳ ر = - ۵۴$$

ضرب کرکی لکھا $$یا \quad ۲ ک + ۳ ر = ۵۴$$

مساوات (۴) کو ۲ مین ضرب کرکی لکھا $$۲ ک + ۴ ر = ۶۶$$

تفریق کی $$- ر = - ۱۲$$

$$یا \quad ر = ۱۲$$

اور $$ک + ۲ ر = ۳۳$$

$$\therefore ک = ۳۳ - ۲ ر$$

$$= ۳۳ - ۲۴$$

$$= ۹$$

یعنے $$ک = ۹$$

اور $$لا = ۲۹ - ک - ر$$

$$= ۲۹ - ۹ - ۱۲$$

$$= ۲۹ - ۲۱$$

$$= ۸$$

یعنے $$لا = ۸$$

جسطرح تین مساواتون سی تین مجہولون کی قیمتین معلوم ہوتی ہین اسیطرح چار مساواتون سی چار مجہولون کی قیمت دریافت ہوتی ہی اور پانچ مساواتون سے پانچ مجہولون کی قیمت دریافت ہوتی ہی اور علی ہذا القیاس

ہر صورت میں دو دو مساواتوں سے ایک ایک حرف مجہول دور کرنا چاہیئے اور اس عمل سے ایسی مساواتیں حاصل ہونگی جنمیں ایک ایک مجہول کم ہوگا اور پھر ان مساواتوں میں سے دو دو مساوات لیکر ایک ایک حرف مجہول دور دور کرنا چاہیئے اور اس عمل سے ایسی مساواتیں حاصل ہونگی جنمیں دو دو مجہول کم ہونگے اور علی ہذا القیاس اسی عمل کی رعایت کریں یہاں تک کہ ایک مجہول کی مساواتیں حاصل ہوں پس ان سے سب مجہولوں کی قیمتیں دریافت ہوجاوینگی

ف اب جسم مشق کے واسطے مساواتیں بغیر حل کی ہر سے لکھتی ہیں

۱ $۱۹ل + ۱۳ = ۵۹ - ۷ل$ جواب $ل = ۲$

۲ $۳ل + ۴ - \frac{ل}{۳} = ۶۴ - ۷۲$ جواب $ل = ۹$

۳ $ل^۲ + ۱۵ل = ۵۳ل - ۳ل^۲$ جواب $ل = ۵$

۴ $\frac{ل^۲}{۹} + \frac{ل}{۴} + ۱۰ = \frac{ل}{۲} - \frac{ل}{۴} + ۱۱$ جواب $ل = ۱۲$

۵ $\frac{۱+ل}{۵} + ۳ = \frac{۲ل - ۳}{۳}$ جواب $ل = ۹$

۶ $\frac{۷ل + ۲}{۳} + ۵ل = ۲۸ + \frac{۵ل - ۶}{۷}$ جواب $ل = ۷$

۷ $\frac{۳+۴ل}{۵} + ۱۲ = \frac{۲۲ - ل}{۵} + ۱۶$ جواب $ل = ۷$

۸ $\frac{۷ - ۱}{۲} + ۴ = \frac{۱۱ - ۳ل}{۴} + \frac{۱۵+۸ل}{۶}$ جواب $ل = ۲$

۹ $\frac{۵ - ۲ل}{۱۸} + \frac{ل - ۱۹}{۳} = \frac{۷ - ۱۰ل}{۹} - \frac{۵}{۲}$ جواب $ل = ۷$

۱۰ $ل - \frac{۱۲+۲ل}{۳} = \frac{۳ + ل}{۴}$ جواب $ل = ۳۰$

۱۱ $\frac{۵+۳ل}{۸} - \frac{ل+۲۱}{۳} = ۳۹ - ۱۵$ جواب $ل = ۹$

۱۲ $۴ل - \frac{۱۹+۲ل}{۵} = ۱۵ - \frac{۷ل+۱۱}{۴}$ جواب $ل = ۳$

۱۳ $\frac{۲۱ - ۳ل}{۳} - \frac{۴ل + ۶}{۹} = ۶ - \frac{۵ل+۱}{۴}$ جواب $ل = ۳$

۱۴ $۷\frac{۵}{۸} + \frac{۱-۳ل}{۴} - \frac{۷ل+۳}{۱۶} = \frac{۱۹+۸ل}{۸}$ جواب $ل = ۷$

۱۵ $\frac{۶ل+۸}{۱۱} - \frac{۵ل+۳}{۲} = \frac{۲۷-۴ل}{۳} - \frac{۹+۳ل}{۲}$ جواب $ل = ۶$

۱۶ $ل + \frac{۲۷-۹ل}{۴} - \frac{۵ل+۲}{۶} = \frac{۴۱}{۱۲} - \frac{۳ل+۵}{۳} - \frac{۲۹+۴ل}{۱۲}$ جواب $ل = ۵$

۱۷ $\frac{۷ل-۸}{۱۱}+\frac{۱۵ل+۸}{۱۳}=۳ل-\frac{۳۱-ل}{۲}$ جواب ل = ۹

۱۸ $\frac{۵ل-۱}{۲}-\frac{۷ل-۲}{۱۰}=۶\frac{۳}{۵}-\frac{ل}{۲}$ جواب ل = ۳

۱۹ $\frac{۳ل-۳}{۴}-\frac{۳ل-۴}{۳}=۵\frac{۱}{۳}-\frac{۲۷+۴ل}{۹}$ جواب ل = ۹

۲۰ $\frac{۴ل-۳۴}{۱۷}-\frac{۲۵۸-۵ل}{۳}=\frac{۶۹-ل}{۲}$ جواب ل = ۵۱

۲۱ $۲ل-\frac{۴ل-۲}{۱۳}=\frac{۳ل+۱۱}{۵}-\frac{۷-۸ل}{۷}$ جواب ل = ۷

۲۲ $\frac{۲ل+۱}{۲۹}-\frac{۴۰۲-۳ل}{۱۲}=۹-\frac{۱۷۴-۶ل}{۲}$ جواب ل = ۲۷

۲۳ $\frac{۷ل+۹}{۸}-\frac{۳ل+۱}{۷}=\frac{۹ل-۱۳}{۴}-\frac{۹ل-۲۴۹}{۱۴}$ جواب ل = ۹

۲۴ $۵-\frac{۳ل+۲۵}{۴}-\frac{۱۷-۶ل}{۹}=۲\frac{۱}{۳۶}+ل-\frac{۶ل+۴۰}{۸}$ جواب ل = ۴

۲۵ $\frac{۷ل-۴۳}{۱۲}+۱۳\frac{۱}{۴}-\frac{۵+۴ل}{۶}=۲۵۶-\frac{۳ل-۱۲}{۹}$ جواب ل = ۹۹

۲۶ $۴ل+\frac{۱}{۱۰}-\frac{۳ل-۱۳}{۱۶}-\frac{۱۲+۷ل}{۹}=۷ل-۳۳-\frac{۹+۵ل}{۱۰}-\frac{۱۱ل-۱۷}{۸}$ جواب ل = ۱۵

۲۷ $\frac{۳۱+۳ل}{۳}-\frac{۳ل+۴۷}{۸}-\frac{۳ل-۱۹}{۱۶}=۴۷+\frac{۳}{۴}-\frac{۱۶-۱۰ل}{۱۱}-\frac{۵ل+۲۰}{۷}$ جواب ل = ۱۷

۲۸ $\frac{۳ط+ل}{ل}-۵=\frac{۶}{ل}$ جواب ل = $\frac{۳ط-۶}{۴}$

۲۹ $\frac{۵}{۶}ط ص+\frac{۳}{۵}ط س-\frac{۲}{۳}س ل=\frac{۳}{۴}ط س+۲ط ص-۶س ل$ جواب ل = $\frac{۷ط ص-۳ط س}{۳۰ س}$

۳۰ $\frac{۱۱ل-۱۳}{۲۵}+\frac{۱۹ل+۳}{۷}-\frac{۵ل-۲۵\frac{۱}{۲}}{۴}=۲۸\frac{۱}{۲}-\frac{۷ل+۴}{۲۱}$ جواب ل = ۸

۳۱ $\frac{۳ل}{۶}-۴-\frac{۴ل-۷}{۹}+\frac{ل}{۲}=\frac{۸-\frac{۳}{۴}ل+۴}{۳}$ جواب ل = ۴

۳۲ $ل-۱\frac{۲۵}{۲۶}-\frac{۲-۶ل}{۱۳}=ل-\frac{۵ل-۱۳ل}{۴}$ جواب ل = ۱۱

۳۳ $\frac{ط^۲ل}{ص س}-\frac{ع^۲}{ط}+ص ل=\frac{ع^۲ل}{ف}-ص+(ع+ص)ل$ جواب ل = $\frac{(ع^۲-ط ص)ص س ف}{ط^۲ف-ط ص ع^۲-ط ص س ع^۲ ف}$

۳۴ $\frac{ط لا}{ص} + \frac{س لا}{ع} + \frac{ی لا}{ف} - ل = ق$ جواب لا = $\frac{(ل+ق) ص ع ف}{ط ع ف + ص س ف + ص ع ی}$

۳۵ $\frac{ط^2 لا}{ص - س} - ع س = ص لا - ط س$ جواب لا = $\frac{س (ص - س)(ع - ط)}{ط^2 - ص^2 + ص س}$

۳۶ $\frac{۲ لا}{۳} - \frac{۱ - \frac{لا}{۲}}{۴ لا} = \frac{لا - ۱}{۲} + \frac{لا}{۶} + \frac{۷}{۱۲}$ جواب لا = ۶

۳۷ $\frac{۲۰ + ۹ لا}{۳۶} = \frac{۴ لا - ۱۲}{۵ لا - ۴} + \frac{لا}{۴}$ جواب لا = ۸

۳۸ $\frac{۳۶ + ۲۰ لا}{۲۵} + \frac{۲۰ + ۵ لا}{۱۶ - ۹ لا} = \frac{۴۸ لا}{۵} + \frac{۸۶}{۲۵}$ جواب لا = ۴

۳۹ $\frac{۱۷ + ۱۰ لا}{۱۸} - \frac{۲ + ۱۲ لا}{۱۶ - ۱۳ لا} = \frac{۴ - ۵ لا}{۹}$ جواب لا = ۴

۴۰ $\frac{۱۹ - ۱۸ لا}{۲۸} + \frac{۱۱ لا + ۲۱}{۱۴ + ۶ لا} = \frac{۹ لا + ۱۵}{۱۴}$ جواب لا = ۷

۴۱ $\frac{۲ لا + ۸\frac{۱}{۲}}{۹} - \frac{۲ - ۱۳ لا}{۳۲ - ۱۷ لا} + \frac{لا}{۳} = \frac{۷ لا}{۱۲} - \frac{لا + ۱۶}{۳۶}$ جواب لا = ۴

۴۲ $\frac{۷ لا + ۶}{۲۸} - \frac{۲ لا + ۴\frac{۲}{۳}}{۲۳ لا - ۶} + \frac{لا}{۴} = \frac{۱۱ لا}{۲۱} - \frac{لا - ۳}{۴۲}$ جواب لا = ۴

۴۳ $\frac{۶ - ۵ لا}{۱۵} - \frac{۲ - ۷ لا^2}{۱۴ (لا - ۱)} = \frac{۱ + ۳ لا}{۲۱} - \frac{۲ - \frac{لا}{۵}}{۶} + \frac{۱}{۱۰}$ جواب لا = ۴

۴۴ $\frac{ط (ص^2 + لا^2)}{ص لا} = ط س + \frac{ط لا}{ص}$ جواب لا = $\frac{ص}{س}$

۴۵ $\frac{س لا^2}{ط + ص لا} = \frac{ع لا^2}{ی + ف لا}$ جواب لا = $\frac{ط ع - س ی}{س ف - ص ع}$

۴۶ $\frac{ط}{ص لا} + \frac{س}{ع لا} + \frac{ی}{ف لا} + \frac{ح}{ج لا} = ل$ جواب لا = $\frac{ط ع ف ج + ص س ف ج + ص ع ی ج + ص ع ف ن}{ص ع ف ج ل}$

۴۷ $(ط + لا)(ص + لا) - ط (ص + س) = \frac{ط^2 س}{ص} + لا^2$ جواب لا = $\frac{ط س}{ص}$

۴۸ $\frac{۱۰ + لا}{۵} : \frac{۴ لا - ۹}{۷} :: ۵ : ۱۴$ تناسب کے صورت میں طرفین کا حاصلضرب کو برابر لکھکر مساوات بنانی چاہئے جواب لا = ۴

۴۹ $\frac{۱۷ - ۴ لا}{۴} : \frac{۱۵ + ۲ لا}{۳} - ۲ لا :: ۵ : ۴$ جواب لا = ۳

۵۰ $۱۶ل + ۵ : \frac{۴ل+۱۴}{۹ل+۳۱} :: ۳۶ل+۱۰ : ۱$ — جواب ل = ۵

۵۱ $\frac{۴ل+۳}{۶ل-۴۳} : ۱ :: ۲ل+۱۹ : ۳ل-۱۹$ — جواب ل = ۸

۵۲ $۵ل + \frac{۴ل+۹}{۳} = ۹ + \frac{۱۰ل^۲-۱۸}{۲ل+۳}$ — جواب ل = ۳

۵۳ $\sqrt[۳]{۱۰ل+۳۵} - ۱ = ۴$ — جواب ل = ۹

۵۴ $\sqrt[۵]{۹ل-۴} + ۶ = ۸$ — جواب ل = ۴

۵۵ $\sqrt{ل+۱۶} = ۲ + \sqrt{ل}$ — جواب ل = ۹

۵۶ $\sqrt{ل-۳۲} = ۱۶ - \sqrt{ل}$ — جواب ل = ۸۱

۵۷ $\sqrt{۴ل+۲۱} = ۲\sqrt{ل+۱}$ — جواب ل = ۲۵

۵۸ $\sqrt[۳]{ص ل - س} = ع \sqrt[۳]{ی ل + ن ل - ن}$ — جواب $ل = \frac{ط^۳ ص - ع^۳ ن}{ط^۳ ص - ع^۳ (ی+ن)}$

۵۹ $\sqrt[۳]{ط^۲ + س} = \sqrt[۳]{\frac{ع^۲ (ل+ص)}{ل}}$ — جواب $ل = \frac{ع^۳ ط^۲ + س}{ص - ع^۳}$

۶۰ $\sqrt[۴]{ط + ل} = \sqrt[۴]{ل^۲ + ۵ط ل + ص}$ — جواب $ل = \frac{ط^۲ - ص}{۳ط}$

۶۱ $(ط+ص)\sqrt[۴]{ل+خ} = س$ — جواب $ل = \left(\frac{س - ط}{ص}\right)^۴ - خ$

۶۲ $\frac{\sqrt{۹ل-۴}}{\sqrt{ل+۲}} = \frac{۱۶+\sqrt{۹ل}}{\sqrt{ل}+۴۰}$ — جواب ل = ۴

۶۳ $\frac{\sqrt{ل}+\sqrt{ص}}{\sqrt{ل}-\sqrt{ص}} = \frac{ط}{ص}$ — جواب $ل = ص\left(\frac{ط+ص}{ط-ص}\right)^۲$

۶۴ $\frac{\sqrt{۶ل}-۲}{\sqrt{۶ل}+۲} = \frac{۴\sqrt{۶ل}-۹}{۴\sqrt{۶ل}+۶}$ — جواب ل = ۶

۶۵ $\frac{۵ل-۹}{۵ل+۳} - ۱ = \frac{۳-\sqrt{۵ل}}{۲}$ — جواب ل = ۵

۶۶ $\sqrt{ل\sqrt{ل^۲+۱۲}} = ۱+ل$ — جواب ل = ۲

۶۷ $\frac{ط لا}{ص}\sqrt{س^2 لا^2 + ع^2} + ط س لا^2 = ی لا$ جواب $لا = \frac{ص ی - ط ع^2}{2 ط ص س ی}$

۶۸ $لا\sqrt{لا + 9} + لا\sqrt{لا + 9} = \frac{36}{9 - لا\sqrt{لا}}$ جواب $لا = 25$

مساوات دو مجہولوں کی

۱ $\begin{cases} لا + 15ی = 53 \\ 5 + 3لا = 27ی \end{cases}$ جواب $\begin{cases} لا = 8 \\ ی = 3 \end{cases}$

۲ $\begin{cases} 4لا + 9ی = 51 \\ 8لا - 13ی = 9 \end{cases}$ جواب $\begin{cases} لا = 6 \\ ی = 3 \end{cases}$

۳ $\begin{cases} \frac{لا}{6} + \frac{ی}{4} = 6 \\ \frac{لا}{4} + \frac{ی}{6} = 5\frac{2}{4} \end{cases}$ جواب $\begin{cases} لا = 12 \\ ی = 16 \end{cases}$

۴ $\begin{cases} \frac{لا}{8} + \frac{ی}{8} = 192 \\ \frac{ی}{8} + \frac{لا}{8} = 131 \end{cases}$ جواب $\begin{cases} لا = 16 \\ ی = 248 \end{cases}$

۵ $\begin{cases} \frac{3لا - 1}{5} + \frac{3ی - 4}{4} = 15 \\ \frac{3ی - 5}{6} + 2لا - 8 = 7\frac{2}{3} \end{cases}$ جواب $\begin{cases} لا = 7 \\ ی = 5 \end{cases}$

۶ $\begin{cases} 9لا + \frac{8ی}{5} = 70 \\ 7ی - \frac{13لا}{3} = 44 \end{cases}$ جواب $\begin{cases} لا = 6 \\ ی = 10 \end{cases}$

۷ $\begin{cases} \frac{7 + لا}{5} - \frac{2لا - ی}{4} = 3ی - 5 \\ \frac{5ی - 7}{2} + \frac{4لا - 3}{6} = 18 - 5لا \end{cases}$ جواب $\begin{cases} لا = 3 \\ ی = 2 \end{cases}$

٨

$$\begin{cases} ل+١- \dfrac{٣ك+٤ل}{٧} = ٧- \dfrac{٩ك+٣٣}{١٤} \\ ك-٣- \dfrac{٥ل-٤ك}{٢} = ل- \dfrac{١١ك-١٩}{٤} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = ٦ \\ ك = ٥ \end{cases}$$

٩

$$\begin{cases} ٤ل+ \dfrac{١٥-ل}{٤} = ٢ك+٥+ \dfrac{٧ل+١١}{١٦} \\ ٣ك- \dfrac{٢ل+ك}{٥} = ٢ل+ \dfrac{٢ك+٤}{٣} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = ٣ \\ ك = ٤ \end{cases}$$

١٠

$$\begin{cases} ل- \dfrac{٣ل+٥ك}{١٢} + ٧ = ٥ك+ \dfrac{٤ل+٧}{٣} \\ \dfrac{٢٢-٦ك}{٣} - \dfrac{٥ل-٧}{١١} = \dfrac{ل+١}{٦} - \dfrac{٥ك+٨}{١٨} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = ٨ \\ ك = ٢ \end{cases}$$

١١

$$\begin{cases} \dfrac{٧ل-١٢}{٦} + ٤ = \dfrac{٣ك-ل}{٣} + \dfrac{٣ل-١٩}{٢} \\ \dfrac{٢ل+ك}{٢} - \dfrac{٩ك-٧}{٨} = \dfrac{٣ك+٩}{٤} - \dfrac{٤ل+٥ك}{١٦} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = ٩٠ \\ ك = ٤ \end{cases}$$

١٢

$$\begin{cases} \dfrac{ص}{ط} = \dfrac{٣ط+ل}{ص+ك} \\ ط ل + ٢ص ك = س \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = \dfrac{٢ص^{٢}-٦ط^{٢}+س}{٣ط} \\ ك = \dfrac{٣ط^{٢}-ص^{٢}+س}{٣ص} \end{cases}$$

١٣

$$\begin{cases} \dfrac{٧ل+٦}{١١} + \dfrac{٤ك-٩}{٣} = ٣ل - \dfrac{١٣-ل}{٢} - \dfrac{٣ك-ل}{٥} \\ ٣ل+٤ : ٢ك-٣ :: ٥ : ٣ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = ٧ \\ ك = ٩ \end{cases}$$

١٤

$$\begin{cases} \dfrac{٥ل+١٣}{٢} - \dfrac{٨ك-٣ل-٥}{٦} = ٩+ \dfrac{٧ل-٣ك+١}{٣} \\ \dfrac{ل+٧}{٣} : \dfrac{٣ك-٨}{٤} + ٤ل :: ٤ : ٢١ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = ٥ \\ ك = ٤ \end{cases}$$

١٥

$$\begin{cases} ل+ك : ٤ل+ك :: ٤ : ٧ \\ \dfrac{١١ك}{٦} - \dfrac{٧ل}{٥} - \dfrac{٢١-٣ك}{٤} = \dfrac{٢+\frac{ل}{١٠}}{٣} - \dfrac{١}{١١} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ل = ٢ \\ ك = ٦ \end{cases}$$

١٦ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل+٤ك+٣}{١٠} - \frac{٤ل+٧-ك}{١٥} = \frac{ك-٨}{٥٠} + ٥ \\ \frac{٩ك+٥ل-٨}{١٢} - \frac{ل+ك}{٤} = \frac{٧ل+٦}{١١} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = ٧ \\ ك = ٩ \end{array}\right\}$

١٧ $\left\{\begin{array}{l} \frac{١٣ل+٤ك-١٧+ل}{١٢} - \frac{١٥-٣ل}{٤} = \frac{٤١ك+١١}{٣} - \frac{١٢ل+٧ك+٢٨}{٦} \\ \frac{٩ل+١٨}{٤} - \frac{١٢+٥ك-٦ل}{٥} = \frac{١٥ل-٣ك-٥}{٨} - \frac{٧ل+ك-١٠}{١٥} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = ٢ \\ ك = ١١ \end{array}\right\}$

١٨ $\left\{\begin{array}{l} ٣ل+٥ك = \frac{(٨ط-٢ص)ط ص}{ط^٢-ص^٢} \\ ط^٢ل - \frac{ط س ص}{ط+ص} + (ط+ص+س)ص ك = ص^٢ل + (ط+٢ص)ط ص \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = \frac{ط ص}{ط-ص} \\ ك = \frac{ط ص}{ط+ص} \end{array}\right\}$

١٩ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٢ل+ك}{٩} = \frac{ك+٦ل+١١}{١٨} + ٩ - \frac{١}{٢} \\ \frac{٥ل+٣ك+٢}{٧} : \frac{٩ك+٦}{٢} :: ١ : ٣ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = ٧ \\ ك = ٤ \end{array}\right\}$

٢٠ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل-٥ك}{٣} - \frac{٤ل-٨ك-٩}{١٢} = \frac{ك}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} \\ \frac{ل}{٧} + \frac{ك}{٤} + \frac{١}{٣} : ٤ل - \frac{ك}{٨} - ٢٤ :: \frac{١}{٣} : ٣\frac{١}{٢} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = ٧ \\ ك = ٤ \end{array}\right\}$

٢١ $\left\{\begin{array}{l} (ل+٥)(ك+٧) = (ل+١)(ك-٩)+١١٢ \\ ٢ل+١٠ = ٣ك+١ \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = ٣ \\ ك = ٥ \end{array}\right\}$

٢٢ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل+٤}{٢} + \frac{١}{٣}٣ = \frac{٥ل+٤ك}{٦-٤ل} + \frac{٩+٤ل}{٤} \\ \frac{٨ك+٧}{١٠} + \frac{٢ك-٨}{٨-٤ل} = ٤ + \frac{٩-٤ك}{٥} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = ٧ \\ ك = ٩ \end{array}\right\}$

٢٣ $\left\{\begin{array}{l} ٤ل-٣\frac{١}{٣} = \frac{٤ك+١٣ل}{٤٦-٢٧} - \frac{١٢ل+٨}{٣} \\ ٣ل + \frac{٤ل-٢١}{١٠-ك} = \frac{١٨ل+١٣}{٦} - ٢\frac{١}{٤} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل = ٧ \\ ك = ٥ \end{array}\right\}$

٢٤ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل+٤ص+٢}{٥}-\frac{٥ل-٣ص-١}{٤}=٥ \\ \frac{٢ل+٤ص+٣}{٣}=\frac{١٥ل+١٠ص-٣٥}{٥} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=٦ \\ ص=٥ \end{array}\right\}$

٢٥ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل+٣ص+٤}{٢}=\frac{٢ل+١}{٣}+\frac{٢ص+٤}{٤} \\ ٢ل+٣=٣ص+\frac{٣ل-١٢ص+١٠}{٤} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=٣ \\ ص=٢ \end{array}\right\}$

٢٦ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل+٦ص+١}{٣}=\frac{٦ل+١٣٠-٢٤ص}{٢} \\ ٣ل-\frac{٣ص-٤}{١}=\frac{١٥١-٦ل}{٤} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=٩ \\ ص=٢ \end{array}\right\}$

٢٧ $\left\{\begin{array}{l} \frac{ل-٦}{٧}+\frac{٣ل+٤}{٢٤}-\frac{ل-٢}{٦}=\frac{١٩+ص}{٣٢}-\frac{٣ص+١١}{٤} \\ ٣ل-١٥ص+\frac{١٣}{٣}::١٥ص-٧ل+\frac{٢٦}{٣}::٣٩-٥ل:ل-\frac{١٣}{٥} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=٩ \\ ص=٧ \end{array}\right\}$

٢٨ $\left\{\begin{array}{l} \frac{ل}{١٦}-٥=\frac{ص+٣}{١٠}-\frac{٣ص+٦}{٥}-\frac{٣ل+٤ص}{٨} \\ \frac{٣ل}{٢}+\frac{٢ص}{٣}+٢\frac{١}{٢}:\frac{١}{٢}ل-\frac{٣}{٤}ص+\frac{١}{٩}::١٠:\frac{١}{٩}:\frac{١}{٢} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=٨ \\ ص=٣ \end{array}\right\}$

٢٩ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل-٢ص+٣}{٣}-\frac{١٨-ل+٥ص}{٧}=\frac{ل}{٣}-\frac{ص}{٥}-\frac{٢}{٣}-٦\frac{١}{٣} \\ ٢ل-ص+١٥:ص-٢ل+١٥::\frac{٣}{٤}ل-\frac{٣}{٤}:\frac{٣}{٤}ص+\frac{٣}{٤}:\frac{ل}{٣}+\frac{ل}{٣}+\frac{١}{١٢} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=١٨ \\ ص=٢٤ \end{array}\right\}$

٣٠ $\left\{\begin{array}{l} \frac{٣ل}{٣}-\frac{ص+٦}{٢}=\frac{٣ل-٥}{٤}+\frac{٣ص+٦}{٢} \\ ٣ص+\frac{ل}{١١}=\frac{ص+٢}{٤}+١٣+ل+١٠+\frac{٣٤-٣ص}{١١} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=٧ \\ ص=٢ \end{array}\right\}$

٣١ $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{ص-ل}:\sqrt{٢٠-ل}::٣:٢ \\ \sqrt{ص-ل}=\sqrt{٢٠-ل}-\sqrt{ص} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} ل=١٦ \\ ص=٢٥ \end{array}\right\}$

مساوات درجہ دویم کی

جاننا چاہیے کہ مساوات درجہ دویم کی اوس مساوات کو کہتی ہین جسمین حرف مجہول کی دوسری قوت ہو یعنی اوسمین مجذور مجہول کا پایا جاوے لیکن بعضی دفعہ ایسی مساوات کو بہی درجہ دویم کی مساوات کہتی ہین جسمین نشان قوت ۲ سی زیادہ ہو مگر اسمین ایک شرط ہی اور وہ اگلی بیان کی جاویگی واضح ہو کہ درجہ دویم کی مساوات دو طرح کی ہوتی ہی ایک مفرد اور ایک مرکب مفرد مساوات درجہ دویم کی وہ ہوتی ہی جسمین حرف مجہول کا مجذور ہی پایا جاوی یعنی مساوات اسطرح کی نہو کہ اوسمین حرف مجہول کا مجذور نہی اور حرف مجہول کی اول قوت بہی ہو مثلاً $لا^۲ + ۹ = ۱۸$ مفرد مساوات درجہ دویم کی ہی اسواسطے کہ اسمین حرف مجہول کی اول قوت نہین پائی جاتی فقط مجذور مجہول کا ہی اور اس مفرد مساوات کا حل کرنا آسان ہی قاعدہ اسکی واسطے یہہ ہی کہ حرف مجہول کے مجذور کو ایک طرف رکہین اور مقادیر معلومہ کو دوسری طرف مساوات کی لیجائین پہر اگر حرف مجہول کا کچہہ سر نہو تو طرفین کا جذر لین اور ان جذرون کو مساوی لکہین اس عمل سے حرف مجہول ایک طرف رہیگا اور مقدار معلوم دوسری طرف ہوگی اور قیمت مجہول کی دریافت ہوجاویگی اور اگر حرف مجہول کے مجذور کا کچہہ سر ہو تو طرفین مساوات کو اوس سر پر تقسیم کرین بعد اسکی جذر لین مثلاً $لا^۲ + ۹ = ۱۸$

اس مساوات مین عدد ۹ کو دوسری طرف لیگئی تو $لا^۲$ برابر رہا عدد ۹ کے $لا^۲ = ۱۸ - ۹$

$= ۹$

$\therefore لا = ۳$

طرفین کا جذر لیا تو لا برابر ہوا ۳ کے یعنی لا کی قیمت ۳ ہی

اگر مساوات یہہ $۵ لا^۲ - ۴۵ = ۰$ ہو تو اسکا حل یہہ ہی $۵ لا^۲ = ۴۵$

$\therefore لا^۲ = ۹$

$\therefore لا = ۳$

یعنی اس صورت مین $لا^۲$ کا سر ۵ تہا اسواسطے طرفین مساوات کو ۵ پر تقسیم کیا اور بعد تقسیم کرنی کی طرفین کا جذر لیا یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ۳ کو ۳ مین ضرب کرین تو حاصلضرب ۹ ہوتا ہی اور اگر -۳ کو -۳ مین ضرب کرین تو بہی حاصلضرب ۹ ہوتا ہی اس سے معلوم ہوا کہ ۹ کا جذر ۳ بہی ہی اور -۳ بہی ہی اور اسیطرح سی ہر عدد مین یہی بات پائی جاتی ہی ۴ کو ۴ مین ضرب کرین تو ۱۶ ہوتے ہین اور -۴ کو -۴ مین ضرب کرین تو بہی ۱۶ ہوتے ہین پس معلوم ہوا کہ ہر مجذور کی واسطی دو جذر ہوتی ہین ایک مثبت اور ایک منفی پس اگر یہہ مساوات ہو $لا^۲ = ۹$ تو ظاہر ہی کہ لا = ۳ اور لا = -۳ کیونکہ لا ۹ کی جذر کی برابر ہی اور جذر ۹ کا ۳ بہی ہی اور -۳ بہی ہی اسیواسطی لا کی دو قیمتین ہوئین ایک تو + ۳ اور ایک -۳ چونکہ مساوات درجہ دویم مین جذر لینی سے

قیمت مجہول کی معلوم ہوتی ہی تو موافق بیان بالا کی یہہ بات عموماً بیان کیجاتی ہی کہ درجہ دویم کی مساوات مین مجہول کی دو قیمتین ہوتی ہین اب جانا چاہیئے کہ مرکب مساوات درجہ دویم کی وہ ہوتی ہی جسمین حرف مجہول کے دوسری قوت بہی ہو اور اول قوت بہی ہو مثلاً $لا^۲ + لا = ۶$ مرکب مساوات درجہ دویم کی ہی کیون کہ اسمین $لا^۲$ حرف مجہول کی دوسری قوت ہی اور لا کی اول قوت بہی ہی اس مساوات کی دیکہنی سے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ اسمین حرف مجہول اسطرح واقع ہین کہ ایک کا نشان قوت دوسری سے دوچند ہی پس جس مساوات مین یہہ بات واقع ہوگی وہ درجہ دویم کی قاعدہ سی حل ہوسکتی ہی مثلاً $لا^۲ + لا^۲ = ۱$ یہہ بہی درجہ دویم کی موافق حل ہوسکتی ہی اسیواسطی زیادہ درجہ کی مساواتین جنمین شرط مذکور پائی جاوے درجہ دویم مین داخل ہین کیونکہ اوسی قاعدہ سی حل ہوسکتی ہین جس سے درجہ دویم کی مساوات حل ہوسکتی ہی مثلاً $لا^ن + لا^ن = ص$ درجہ دویم کی مساوات ہی کیونکہ اسمین نشان قوت حرف مجہول کا ایک سے بہ نسبت دوسری کے دوچند ہی اسیطرح یہہ مساوات $(لا + ط)^۲ + (لا + ط) = ع$ بہی درجہ دویم کی مساوات ہی کیونکہ اسمین $(لا + ط)$ کی چوتہی قوت ہی اور پہر اوسی $(لا + ط)$ کی دوسری قوت بہی ہی یعنی پہلا نشان قوت ایک مقدار کا جسمین حرف مجہول پایا جاتا ہی دوچند ہی نشان قوت اوسی مقدار کی سے اسیطرح $لا + لا^{\frac{۱}{۲}} = ۶$ بہی مساوات درجہ دویم کی ہی کیونکہ اسمین لا کی اول قوت ہی اور $لا^{\frac{۱}{۲}}$ کے نصف ہی یعنی اول کی قوت دوچند ہی بہ نسبت دوسری کے اسیطرح $لا^{\frac{۱}{۲}} - لا^{\frac{۱}{۴}} = ط$ کی درجہ دویم کے مساوات ہی اور بعینہٖ اسیطرح $\sqrt{لا + ط} - \sqrt{لا + ط} = ص$ بہی درجہ دویم کی مساوات ہی کیونکہ اول مقدار مین دوسری مرتبہ کا نزول ہی اور دوسری مقدار مین اوسی مقدار کا چوتہی مرتبہ کا نزول ہی اور علی ہذا القیاس $لا + ۱ - \sqrt{لا + ۱} = ۶$ درجہ دویم کی مساوات ہی کیونکہ اسمین $(لا + ۱)$ کی اول قوت ہی اور پہر اسی مقدار کا جذر ہی یعنے نصف قوت ہی علی ہذا القیاس اور صورتین جنمین شرط مذکورہ بالا پائی جاویگی درجہ دویم کی مساوات مین داخل ہونگی جانا چاہیئے کہ مرکب مساوات درجہ دویم کی کئی قاعدون سے حل ہوسکتی ہی مگر اول ہم ایسی باتین بیان کرتے ہین جنسی اصل اور حقیقت قاعدہ کی طالب علم کی ذہن نشین ہوجاویگی ظاہر ہی کہ اگر $لا + ط$ کا مجذور کرین تو یہہ حاصل ہوگا $لا^۲ + ۲ ط لا + ط^۲$ اسمین لا کا مجذور ہی اور ط کا مجذور ہی اور دوچند حاصلضرب لا اور ط کا ہی اور اسیطرح جب دو مقدارون کی مجموعہ کا مجذور کرتے ہین تو دونو مقدارون کے مجذور اور دونو کا دوچند حاصلضرب حاصل ہوتا ہی اور اگر دو مقدارون کے حاصل تفریق کا مجذور کرین مثلاً $(لا - ط)$ کا تو یہہ حاصل ہوتا ہی $لا^۲ - ۲ ط لا + ط^۲$ اسمین بہی دونو مقدارون کے مجذور ہین اور دوچند مسطح دونو مقدارون

ہی لیکن علامت دو چند مسطح کی منفی ہی پس مجموعہ اور حاصل تفریق کے مجذور کو اسطرح لکھہ سکتی ہین
لا۲ ± ۲ ط لا + ط۲ اس صورت کی دیکھنی سے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ دو چند مسطح کا نصف کر کر باقی کے
دو نو حرفون کے مجذور کرین تو وہی دو مجذور حاصل ہوتے ہین جو اس صورت مین موجود ہین پس اگر انمین سے
ایک مجذور رہو مثلاً یہہ صورت رہ جاوے لا۲ ± ۲ ط لا تو ظاہر ہی کہ اگر اوسکو مجذور کامل بنانا چاہین تو
موافق بیان بالا کی مسطح کو نصف کرین یعنے ۲ ط لا کو نصف کرین پس ط لا ہوگا اور اسمین سے ط کا مجذور
زیادہ کر دین تو یہہ صورت کامل مجذور بن جاویگی اسیطرح اگر یہہ صورت ہو لا ± ط لا تو اسمین بہی مسطح
کو نصف کرین پس $\frac{ط}{۲}$ لا ہوگا اور اسمین سے $\frac{ط}{۲}$ کا مجذور زیادہ کر دین تو یہہ صورت حاصل ہوگی
لا۲ ± ط لا + $\frac{ط۲}{۴}$ اور یہہ (لا ± $\frac{ط}{۲}$) کا مجذور ہی یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر کوئی صورت جبریہ اسیطرح
کی ہو کہ اوسمین ایک مقدار کا مجذور ہو بغیر سر کے اور جس مقدار کا مجذور ہی اوسکی اول قوت بہی ہو تو وہ کامل مجذور
بن سکتی ہی اگر یہہ قاعدہ جاری کرین کہ جس مقدار کی اول قوت ہی اوسکی سر کو نصف کرین اور اس نصف کا مجذور
زیادہ کرین ٭ اب جانا چاہیئے کہ یہہ اول قاعدہ جس سے مساوات درجہ دویم کی حل ہوتی ہی اسواسطے کہ درجہ دویم
کے مساوات مین اس قاعدہ سے ایک طرف کامل مجذور ہو جاتی ہی اور دوسری طرف مقادیر معلومہ رہجاتی ہی
پس دو نو طرفون کا جذر لینے سے ایک اول درجہ کی مساوات حاصل ہوتی ہی اور پہر بآسانی قیمت مجہول کی
دریافت ہو جاتی ہی مثلاً مساوات درجہ دویم کی یہہ ہی ح لا۲ ± ط لا = ± ع اب اس مساوات کو اسطرح
تبدیل کرنا چاہیئے کہ اسمین لا۲ کا سر نر ہی یعنے بجای ح لا۲ کے لا رہجاوی پس اس تبدیلی کے
واسطے طرفین مساوات کو ح پر تقسیم کیا اور ظاہر ہی کہ اس عمل سے مساوات مین کچہہ فرق نہین آسکتا
اسیواسطے یہہ مساوات حاصل ہوگی لا۲ ± $\frac{ط}{ح}$ لا = ± $\frac{ع}{ح}$ اب اگر $\frac{ط}{ح}$ اور $\frac{ع}{ح}$ کو آسانی کی واسطے
ص اور م سے تعبیر کرین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی لا۲ ± ص لا = ± م اور اسیطرح ہر مساوات درجہ
دویم کی اسی شکل کی طرف تحویل ہو سکتی ہی اب اس مساوات مین حرف مجہول کی اول قوت کا سر ص ہی پس اگر
ص کے نصف کا مجذور طرفین مساوات پر زیادہ کرین تو ظاہر ہی کہ اول طرف اس مساوات کی کامل مجذور ہو جاوے
اور دوسری طرف مقادیر معلومہ رہینگی اور چونکہ طرفین پر برابر برابر مقدار زیادہ ہوگی تو مساوات مین بہی کچہہ
فرق نہین آئیگا اسیواسطے ص کا مجذور یعنے $\frac{ص۲}{۴}$ دو نو طرف زیادہ کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی
لا۲ ± ص لا + $\frac{ص۲}{۴}$ = $\frac{ص۲}{۴}$ ± م اب طرفین کا جذر لیا تو یہہ مساوات اول درجہ کی حاصل ہوئی
لا ± $\frac{ص}{۲}$ = $\sqrt{\frac{ص۲}{۴} ± م}$ اسیواسطے لا = $\sqrt{\frac{ص۲}{۴} ± م}$ ∓ $\frac{ص}{۲}$ یہہ قیمت حرف مجہول کی ہی
مثال (۲) لا۲ + ۲ لا = ۳ اس مساوات مین لا کا سر ۲ ہی اسکی نصف کا مجذور یعنی آ طرفین پر

زیادہ کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

$ل^۲ + ۲ل + ۱ = ۱ + ۳ = ۴$ طرفین کا جذر لیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی $ل + ۱ = ۲ \therefore ل = ۱$ یعنی عدد ا قیمت مجہول کی ہے مثال ۳ $۳ل^۲ + ۲ل = ۱۶۱$ اس مساوات میں $ل^۲$ کا سر ۳ ہے اسواسطے ۳ پر طرفین مساوات کو تقسیم کیا تاکہ یہہ سر زائل ہو جاوے پس یہہ مساوات حاصل ہوئی

$ل^۲ + \frac{۲}{۳} ل = \frac{۱۶۱}{۳}$ اس مساوات میں حرف مجہول کی اول قوت کا سر $\frac{۲}{۳}$ ہے اور اسکا نصف $\frac{۱}{۳}$ ہوا اور اس نصف کا مجذور $\frac{۱}{۹}$ ہوا پس جب $\frac{۱}{۹}$ کو طرفین پر زیادہ کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئے

$ل^۲ + \frac{۲}{۳} ل + \frac{۱}{۹} = \frac{۱۶۱}{۳} + \frac{۱}{۹} = \frac{۴۸۳}{۹} + \frac{۱}{۹}$

$= \frac{۴۸۴}{۹}$

ہر طرفین کا جذر لیا تو یہہ حاصل ہوا

$ل + \frac{۱}{۳} = \frac{۲۲}{۳} \therefore ل = \frac{۲۲}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۷$ یعنی $ل = ۷$

مثال ۴ $۲ل^۲ - ۵ل = ۱۱۷$ تقسیم کیا طرفین مساوات کو ۲ پر

$\therefore ل^۲ - \frac{۵}{۲} ل = \frac{۱۱۷}{۲}$

طرفین پر $\frac{۵}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل^۲ - \frac{۵}{۲} ل + \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۱۱۷}{۲} + \frac{۲۵}{۱۶}$

$= \frac{۹۳۶}{۱۶} + \frac{۲۵}{۱۶}$

$= \frac{۹۶۱}{۱۶}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ل - \frac{۵}{۴} = \frac{۳۱}{۴}$

$\therefore ل = \frac{۳۱}{۴} + \frac{۵}{۴} = \frac{۳۶}{۴} = ۹$

$\therefore ل = ۹$

۵ $۳ل^۲ - ل = ۸۰ + ل + ۲۰۰$

$\therefore ۳ل^۲ - ۲ل = ۸۰ + ۲۰۰ = ۲۸۰$

طرفین کو ۳ پر تقسیم کیا

$\therefore ل^۲ - \frac{۲}{۳} ل = \frac{۲۸۰}{۳}$

طرفین پر $\frac{۱}{۳}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل^۲ - \frac{۲}{۳} ل + \frac{۱}{۹} = \frac{۲۸۰}{۳} + \frac{۱}{۹}$

$= \frac{۸۴۰}{۹} + \frac{۱}{۹}$

$= \frac{۸۴۱}{۹}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ل - \frac{۱}{۳} = \frac{۲۹}{۳}$

$\therefore ل = \frac{۲۹}{۳} + \frac{۱}{۳}$

$= \frac{۳۰}{۳} = ۱۰$

$\therefore ل = ۱۰$

۶ $۱۰ل^۲ - ۲۰ل = ۸ + ۳ل^۲ + ۴۰$

$\therefore ۱۰ل^۲ - ۲۰ل - ۳ل^۲ = ۴۰ - ۸ = ۳۲$

$\therefore ۷ل^۲ - ۲۰ل = ۳۲$

$\therefore ل^۲ - \frac{۲۰}{۷} ل = \frac{۳۲}{۷}$

طرفین پر $\frac{۱۰}{۷}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل^۲ - \frac{۲۰}{۷} ل + \frac{۱۰۰}{۴۹} = \frac{۳۲}{۷} + \frac{۱۰۰}{۴۹}$

$= \frac{۲۲۴}{۴۹} + \frac{۱۰۰}{۴۹}$

$= \frac{۳۲۴}{۴۹}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ل - \frac{۱۰}{۷} = \pm \frac{۱۸}{۷}$

$\therefore \quad ل = \pm \frac{۱۸}{۷} + \frac{۱۰}{۷} = ۴ \text{ یا } -\frac{۸}{۷}$

۷ $\therefore \quad ل = ۱ - ۴ = -\frac{۸}{۷}$

$۶ل^۲ - ۵۰ل + ۲۷۳ = ۱۷۵ - ل + ل^۲$

$\therefore \quad ۶ل^۲ - ل^۲ - ۵۰ل + ل = ۱۷۵ - ۲۷۳$

$\therefore \quad ۵ل^۲ - ۴۹ل = -۹۸$

$\therefore \quad ل^۲ - \frac{۴۹}{۵}ل = -\frac{۹۸}{۵}$

طرفین پر مجذور $\frac{۴۹}{۱۰}$ زیادہ کیا

$\therefore \quad ل^۲ - \frac{۴۹}{۵}ل + (\frac{۴۹}{۱۰})^۲ = (\frac{۴۹}{۱۰})^۲ - \frac{۹۸}{۵}$

$= \frac{۲۴۰۱}{۱۰۰} - \frac{۹۸}{۵}$

$= \frac{۲۴۰۱}{۱۰۰} - \frac{۱۹۶۰}{۱۰۰}$

$= \frac{۴۴۱}{۱۰۰}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \quad ل - \frac{۴۹}{۱۰} = \pm \frac{۲۱}{۱۰}$

$\therefore \quad ل = \frac{۴۹}{۱۰} \pm \frac{۲۱}{۱۰} = ۷ \text{ یا } \frac{۱۴}{۵}$

$\therefore \quad ل = ۷ \text{ یا } \frac{۱۴}{۵}$

۸ $۴ا^۲ل^۲ + ۱۴ب - ل = ۱۴ح$

طرفین کو $۴ا^۲$ پر تقسیم کیا

$\therefore \quad ل^۲ + \frac{ب}{ا}ل = \frac{ح}{ا}$

طرفین پر $\frac{ب^۲}{۱۶ا^۲}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore \quad ل^۲ + \frac{ب}{ا}ل + \frac{ب^۲}{۱۶ا^۲} = \frac{ب^۲}{۱۶ا^۲} + \frac{ح}{ا}$

$= \frac{ب^۲}{۱۶ا^۲} + \frac{۱۶اح}{۱۶ا^۲}$

$= \frac{ب^۲ + ۱۶اح}{۱۶ا^۲}$

طرفین کا جذر کیا

$\therefore \quad ل + \frac{ب}{۴ا} = \pm \frac{\sqrt{ب^۲ + ۱۶اح}}{۴ا}$

$\therefore \quad ل = \pm \frac{\sqrt{ب^۲ + ۱۶اح}}{۴ا} - \frac{ب}{۴ا}$

۹ $ل^۲ + ۴ل^۲ = ۱۲$

اس مساوات میں بجائے $ل^۲$ کی $ل^۲$ ہی اور بجائے $ل^۲$ کی $ل^۲$ ہی اسیواسطے $ل^۲$ کی سر کا نصف کیا پس ۲ حاصل ہوا اسکا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore \quad ل^۲ + ۴ل^۲ + ۴ = ۴ + ۱۲ = ۱۶$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \quad ل^۲ + ۲ = \pm ۴$

$\therefore \quad ل^۲ = \pm ۴ - ۲ = ۲ \text{ یا } -۶$

پھر طرفین کا جذر لیا

$\therefore \quad ل = \sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad \sqrt{-۶}$

۱۰ $ل^۶ - ۸ل^۳ = ۵۱۳$

طرفین پر ۸ کی نصف کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore \quad ل^۶ - ۸ل^۳ + ۱۶ = ۵۱۳ + ۱۶ = ۵۲۹$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \quad ل^۳ - ۴ = \pm ۲۳$

$\therefore \quad ل^۳ = ۴ \pm ۲۳ = ۲۷ \text{ یا } -۱۹$

طرفین کا کعب لیا

$\therefore \quad ل = ۳ \text{ یا } \sqrt[۳]{-۱۹}$

۱۱ $لا^{۴ن} - ۴ لا^{ن} = ۱۰$

طرفین پر ۴ کی نصف کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore لا^{۴ن} - ۴ لا^{ن} + ۴ = ۱۴$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا^{ن} - ۲ = \pm \sqrt{۱۴}$

$\therefore لا^{ن} = ۲ \pm \sqrt{۱۴}$

طرفین کا ن مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore لا = (۲ \pm \sqrt{۱۴})^{\frac{۱}{ن}}$

دوسرا قاعدہ مساوات درجہ دویم کے حل کرنیکا یہہ ہے کہ حرف مجہول کے سر کو چوگنا کرین اور اس چوگنی سر کو طرفین مساوات مین ضرب کرین بعد اسکی حرف مجہول کی اول قوت کی سر کا مجذور طرفین پر زیادہ کردین بعد اسکی جذر لین اس عمل سے یہی وہی فائدہ ہوتا ہی جو پہلی قاعدہ سے تہا یعنی جس مقدار مین مجہول ہوتا ہی اوس صورت کا مجذور کامل بن جاتا ہی اور جذر پورا نکلتا ہی اسواسطی کہ اول قاعدہ کی بیان مین یہہ بات مذکور ہوئی ہی کہ جب دو مقدارون کے مجموعہ یا حاصل تفریق کا مجذور کرتے ہین تو اوسمین تین مقدارین ہوتی ہین دو تو مجذور اون دونو مقدارون کے اور دو چند حاصلضرب اون دونو کا پس جس صورت مین یہہ مساوات ہو $ح لا^{۲} \pm ط لا = ن$ اور اسمین $لا^{۲}$ کی سر کو چوگنا کرکر طرفین مین ضرب کرین یعنی $۴ح$ کو دونو طرفون مساوات مین ضرب کرین اور حاصل ہو $۴ح^{۲} لا^{۲} \pm ۲ × ۲ح لا × ط = ۴ح ن$ تو اسمین مساوات مین کچہہ خرابی نہوگی کیونکہ ایک ہی مقدار مین مساوی اور مساوی کو ضرب کیا ہی اور فائدہ یہہ ہوگا کہ اول طرف مساوات کی ایسی ہوجاویگی کہ اگر اوس پر حرف مجہول کی اول قوت کی سر کا مجذور زیادہ کرین تو کامل مجذور بنجاوی اور دوسری طرف مقدار معلوم رہیگی پس جذر لینی سے اول درجہ کے مساوات حاصل ہوگے اور پہر قیمت مجہول کی باسانی معلوم ہوسکتی ہی پس اس مساوات کے $۴ح^{۲} لا^{۲} \pm ۲ × ۲ح لا × ط = ۴ح ن$ دونو طرف مین زیادہ کیا $ط^{۲}$

تو $۴ح^{۲} لا^{۲} \pm ۲ × ۲ح لا ط + ط^{۲} = ۴ح ن + ط^{۲}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ۲ح لا \pm ط = \pm \sqrt{۴ح ن + ط^{۲}}$

$\therefore ۲ح لا = \pm \sqrt{۴ح ن + ط^{۲}} \mp ط$

$\therefore لا = \frac{\pm \sqrt{۴ح ن + ط^{۲}} \mp ط}{۲ح}$

۲ $لا^{۲} - ۲ لا + ۱ = ۹$

$\therefore لا^{۲} - ۲ لا = ۸$

طرفین کو $لا^{۲}$ کی چوگنی سر مین یعنی ۴ مین ضرب کیا

$\therefore ۴ لا^{۲} - ۸ لا = ۳۲$

طرفین پر ۲ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ۴ لا^{۲} - ۸ لا + ۴ = ۴ + ۳۲$

$= ۳۶$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ۲ لا - ۲ = \pm ۶$

$\therefore ۲ لا = \pm ۶ + ۲$

$لا = ۴$ یا -۲

۳ $\frac{لا^{۲}}{۶} - ۱ = لا + ۱۱$

طرفین کو ۶ مین ضرب کیا

$\therefore$ $ل^2 - ۶ = ۶ل + ۶۶$

$\therefore$ $ل^2 - ۶ل = ۶ + ۶۶$

$= ۷۲$

طرفین کو ۴ مین ضرب کیا

$\therefore$ $۴ل^2 - ۲۴ل = ۲۸۸$

طرفین پر ۶ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore$ $۴ل^2 - ۲۴ل + ۳۶ = ۲۸۸ + ۳۶$

$= ۳۲۴$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore$ $۲ل - ۶ = \pm ۱۸$

$\therefore$ $ل = ۱۲$ یا -۱۲

$\therefore$ $ل = ۱۲$ یا -۶

۴ $\frac{ل^2}{۳} + \frac{۱}{ل} = \frac{۷}{۳}$

طرفین کو $۳ل$ مین ضرب کر کے کسر دور کی

$\therefore$ $۲ل^2 + ۳ = ۷ل$

$\therefore$ $۲ل^2 - ۷ل = -۳$

$ل^2$ کی سر کو جو گنا کیا یعنی ۲ کو ۴ مین ضرب کیا پس ۸ ہوئے پھر ۸ کو طرفین مساوات مین ضرب کیا

$\therefore$ $۱۶ل^2 - ۵۶ل = -۲۴$

طرفین پر ۷ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore$ $۱۶ل^2 - ۵۶ل + ۴۹ = ۴۹ - ۲۴ = ۲۵$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore$ $۴ل - ۷ = \pm ۵$

$\therefore$ $۴ل = ۷ \pm ۵ = ۱۲$ یا ۲

$\therefore$ $ل = ۳$ یا $\frac{۱}{۲}$

۵ $\frac{ل^2}{۳} - \frac{ل^2}{۲} = ۹$

طرفین کو ۶ مین ضرب کیا

$۲ل^2 - ۳ل^2 = ۵۴$

طرفین کو ۴×۲ مین ضرب کیا

$\therefore$ $۱۶ل^2 - ۲۴ل^2 = ۴۳۲$

طرفین پر ۳ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore$ $۱۶ل^2 - ۲۴ل^2 + ۹ = ۴۴۱$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore$ $۴ل^2 - ۳ = \pm ۲۱$

$\therefore$ $۴ل^2 = ۳ \pm ۲۱ = ۲۴$ یا -۱۸

$\therefore$ $ل^2 = ۶$ یا $-\frac{۹}{۲}$

$\therefore$ $ل = \sqrt{۶}$ یا $\frac{۳ \pm \sqrt{-۸۶}}{۲}$

۶ $\frac{۶}{ل+۱} + \frac{۲}{ل} = ۳$

$\therefore$ $۶ل + ۲(ل+۱) = ۳ل(ل+۱)$

یا $۶ل + ۲ل + ۲ = ۳ل^2 + ۳ل$

$\therefore$ $۸ل + ۲ = ۳ل^2 + ۳ل$

$\therefore$ $۳ل^2 + ۳ل - ۸ل = ۲$

$\therefore$ $۳ل^2 - ۵ل = ۲$

طرفین کو ۴×۳ مین ضرب کیا

$\therefore$ $۳۶ل^2 - ۶۰ل = ۲۴$

طرفین پر ۲۵ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore$ $۳۶ل^2 - ۶۰ل + ۲۵ = ۴۹$

$\therefore$ ۶ لا − ۵ = ± ۷

$\therefore$ ۶ لا = ۵ ± ۷ = ۱۲ یا − ۲

$\therefore$ لا = ۲ یا $-\frac{۱}{۳}$

یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر مرکب مساوات مین سی اول قوت حرف مجہول کی زایل ہوجاوے تو مفرد مساوات حاصل ہوگے اور مفرد مساوات مین فقط جذر لینی سے مجہول کی قیمت دریافت ہوجاتی ہی اسیواسطی تیسرا قاعدہ مرکب مساوات کی حل کرنیکا ایسا ہی کہ اوس سے اول قوت مقدار مجہول کے زایل ہوجاتی ہی اور مفرد مساوات رہجاتی ہی قاعدہ تیسرا ظاہر ہی کہ مرکب مساوات مین علامت دوسرے جز کی یعنی اوس مقدار کی جس مین اول قوت مقدار مجہول کے پائی جاتی ہی مثبت ہوگی یا منفی اگر منفی ہو تو چاہیئی کہ اول قوت مقدار مجہول کی سر کو نصف کرین اور اس نصف کی ساتہہ ایک اور نیا حرف مجہول فرض کرکر جمع کرین اور اس مجموعہ کو اوس حرف مجہول کی برابر فرض کرین جو مساوات مفروض مین ہی اور اس سے مساوات سے اول مجہول کی قیمت اور اوسکی مخبور کی قیمت جسمین نیا مجہول پایا جاویگا دریافت کرین اور مساوات مفروض مین بجاے اول مجہول اور اوسکی مخبور کی لکہین اس عمل سے نئی مجہول کا فقط مخبور رہجاویگا اور جذر لینی سی اوسکی قیمت دریافت ہوجاویگی اور پہر نئی مساوات سی اول مجہول کی قیمت بہی معلوم ہوسکتی ہی اور اگر علامت اوس مقدار کی جسمین مجہول کی اول قوت پائی جاتی ہی مثبت ہو تو مجہول اول کی قوت کے سر کو نصف کرکر نئی حرف مجہول مین سے تفریق کرین اور اس حاصل تفریق کو اول مجہول کی برابر فرض کرکر وہی عمل جاری کرین جو پہلی صورت مین کیا ہی لیکن اس قاعدہ مین حرف مجہول کی مخبور کا سر آ کی سوا اور کچہہ نہو مثلاً

یہہ مساوات ہو لا^۲ − ط لا = ح (۱)

پس موافق قاعدہ کی لا کے سر کو نصف کیا تو $\frac{ط}{۲}$ ہوا اور اسکو نئی مجہول مثلاً ی کی ساتہہ جمع کرکر لا کی برابر لکہا تو نئی مساوات یہہ حاصل ہوئی

لا = ی + $\frac{ط}{۲}$ (۲)

اور اس سے لا کی قیمت یہہ حاصل ہوئی لا^۲ = ی^۲ + ط ی + $\frac{ط^۲}{۴}$

پس جسوقت قیمتین لا اور لا^۲ کی مساوات مفروض (۱) مین رکہین تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

ی^۲ + ط ی + $\frac{ط^۲}{۴}$ − ط (ی + $\frac{ط}{۲}$) = ح

$\therefore$ ی^۲ + ط ی + $\frac{ط^۲}{۴}$ − ط ی − $\frac{ط^۲}{۲}$ = ح

$\therefore$ ی^۲ + $\frac{ط^۲}{۴}$ − $\frac{ط^۲}{۲}$ = ح

یا ی^۲ − $\frac{ط^۲}{۴}$ = ح

$\therefore$ ی^۲ = ح + $\frac{ط^۲}{۴}$

$\therefore$ ی = ± $\sqrt{ح + \frac{ط^۲}{۴}}$

اور چونکہ موافق نئی مساوات (۲) کے

لا = ی + $\frac{ط}{۲}$ $\therefore$ لا = ± $\sqrt{ح + \frac{ط^۲}{۴}}$ + $\frac{ط}{۲}$

۲ لا^۲ + ط لا = س

اس صورت مین علامت ط لا کی مثبت ہی پس موافق قاعدہ کی $\frac{ط}{۲}$ کو نئی مجہول مثلاً ی مین سے تفریق کرکر حاصل

تفریق کو لا کی برابر لکھا تو یہہ مساوات حاصل ہوئے

حاصل

$$لا = ز - \frac{ط}{۲} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\therefore لا^۲ = ز^۲ - ط ز + \frac{ط^۲}{۴}$$

پس جب یہہ قیمتین لا اور لا کی مساوات مفروض مین لکھین تو

$$ز^۲ - ط ز + \frac{ط^۲}{۴} + ط(ز - \frac{ط}{۲}) = س$$

$$\therefore ز^۲ - ط ز + \frac{ط^۲}{۴} + ط ز - \frac{ط^۲}{۲} = س$$

$$\therefore ز^۲ - \frac{ط^۲}{۴} = س$$

$$\therefore ز^۲ = س + \frac{ط^۲}{۴}$$

$$\therefore ز = \pm \sqrt{س + \frac{ط^۲}{۴}} .$$

اور موافق نئی مساوات (۱) کی $لا = ز - \frac{ط}{۲}$

$$\therefore لا = \pm \sqrt{س + \frac{ط^۲}{۴}} - \frac{ط}{۲}$$

مثال ۳ $لا^۲ - لا = ۱۲$

اس صورت مین لا کا سر آہی اور علامت منفی ہی

پس $\frac{۱}{۲}$ کو ز کی ساتھہ جمع کرکر لا کی برابر فرض کیا

تو یہہ حاصل ہوا $لا = ز + \frac{۱}{۲}$

$$\therefore لا^۲ = ز^۲ + ز + \frac{۱}{۴}$$

$$\therefore لا^۲ - لا = ز^۲ + ز + \frac{۱}{۴} - ز - \frac{۱}{۲} = ۱۲$$

$$\therefore ز^۲ - \frac{۱}{۴} = ۱۲$$

$$\therefore ز^۲ = ۱۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۴۹}{۴}$$

$$\therefore ز = \pm \frac{۷}{۲}$$

اور چونکہ $لا = ز + \frac{۱}{۲}$

$$\therefore لا = \pm \frac{۷}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۴ \text{ یا } -۳$$

مثال ۴ $۲ لا^۲ - لا = ۱۵$.

$$\therefore لا^۲ - \frac{لا}{۲} = \frac{۱۵}{۲}$$

فرض کیا کہ $لا = ز + \frac{۱}{۴}$

$$\therefore لا^۲ = ز^۲ + \frac{ز}{۲} + \frac{۱}{۱۶}$$

$$\therefore لا^۲ - \frac{لا}{۲} = ز^۲ + \frac{ز}{۲} + \frac{۱}{۱۶} - \frac{ز}{۲} - \frac{۱}{۸} = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\therefore ز^۲ - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\therefore ز^۲ = \frac{۱۵}{۲} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۲۰}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶}$$

$$= \frac{۱۲۱}{۱۶}$$

$$\therefore ز = \pm \frac{۱۱}{۴}$$

اور چونکہ $لا = ز + \frac{۱}{۴} = \pm \frac{۱۱}{۴} + \frac{۱}{۴}$

$$= ۳ \text{ یا } -\frac{۵}{۲}$$

یعنے $لا = ۳$ یا $-\frac{۵}{۲}$

مثال ۵ $لا^۲ + ۶ لا = ۴۰$

فرض کیا کہ $لا = ز - ۳$

$$\therefore لا^۲ = ز^۲ - ۶ ز + ۹$$

$$\therefore لا^۲ + ۶ لا = ز^۲ - ۶ ز + ۹ + ۶ ز - ۱۸ = ۴۰$$

$$\therefore ز^۲ - ۹ = ۴۰$$

$$\therefore ز^۲ = ۴۹$$

$$\therefore ز = \pm ۷$$

اور چونکہ $لا = ز - ۳ = \pm ۷ - ۳$

$$= ۴ \text{ یا } -۱۰$$

یعنے $لا = ۴$ یا -۱۰

مثال ۶ $لا^۲ - لا = ۰$ اس صورت مین بجای لا کی لا ہی

اسیواسطے فرض کیا کہ $لا^2 = ی + \frac{1}{2}$

$\therefore لا^4 = ی^2 + ی + \frac{1}{4}$

$\therefore لا^4 - لا^2 = ی^2 + ی + \frac{1}{4} - ی - \frac{1}{2} = 0$

$\therefore ی^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\therefore ی^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore ی = \pm \frac{1}{2}$

اور چونکہ $لا^2 = ی + \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1$ یا 0

$\therefore لا = 1$ یا 0

سوای ان قاعدون کے اور بہی خاص ترکیبین ہین جنسی مشکل مساواتین باسانی حل ہوسکتی ہین اور یہہ خاص ترکیبین مثالون انندہ سے معلوم ہونگی اور اول مفرد مساوات کی مثالین لکہی جاتی ہین

۱ $\frac{لا^2}{ی} + \frac{ی^2}{لا} = 18$ ..... (۱)

$لا + ی = 12$ ..... (۲)

اسس صورت مین لا کو دونئی مجہولون مثلاً ر اور ز کے مجموعہ کی برابر فرض کیا اور ی کو اونہین دو نئے مجہولون کی حاصل تفریق کی برابر فرض کیا یعنی جاتا ہوا

$لا = ر + ز$

$ی = ر - ز$

دونو کو جمع کیا

$\therefore لا + ی = 2ر = 12$ موافق (۲) کے

$\therefore ر = 6$

$\therefore لا = ر + ز = 6 + ز$

اور $ی = ر - ز = 6 - ز$

اور مساوات (۱) سے یہہ حاصل ہوتا ہی

$لا^3 + ی^3 = 18 لا ی$

قیمتین لا اور ی کی رکہین

$\therefore (6 + ز)^3 + (6 - ز)^3 = 18 (6 + ز)(6 - ز)$

$\therefore 216 + 108 ز + 18 ز^2 + ز^3 + 216 - 108 ز + 18 ز^2 - ز^3 = 18 (36 - ز^2)$

$\therefore 432 + 36 ز^2 = 648 - 18 ز^2$

$\therefore 36 ز^2 + 18 ز^2 = 648 - 432$

$54 ز^2 = 216$

$\therefore ز^2 = \frac{216}{54} = 4$

$\therefore ز = \pm 2$ اور $لا = 6 + ز = 6 \pm 2$

$= 8$ یا 4

یعنے $لا = 8$ یا 4

اور $ی = 6 - ز = 6 \mp 2 = 4$ یا 8

۲ $لا ی = ط^2$ ..... (۱)

$لا^2 + ی^2 = س^2$ ..... (۲)

$2 لا = 2 ط^2$ (۱) مساوات کو دو چند کیا

اسس آخر کی مساوات کی ساتہہ (۲) مساوات کو جمع کیا

$\therefore لا^2 + 2 لا ی + ی^2 = س^2 + 2 ط^2$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا + ی = \pm \sqrt{س^2 + 2 ط^2}$

بہر مساوات (۱) کی دوگنی کو (۲) مساوات سی تفریق کیا

$$\text{لا}^2 - 2\text{لاو} + \text{و}^2 = \text{س}^2 - 2\text{ط}^2$$

$$\therefore \text{لا} - \text{و} = \pm\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{ط}^2}$$

لیکن $\text{لا} + \text{و} = \pm\sqrt{\text{س}^2 + 2\text{ط}^2}$ دونو کو جمع کیا

$$\therefore 2\text{لا} = \pm\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{ط}^2} \pm \sqrt{\text{س}^2 + 2\text{ط}^2}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{ط}^2} \pm \sqrt{\text{س}^2 + 2\text{ط}^2}\right)$$

اور جن دونو مساواتون کو جمع کیا ہی اگر اونہین کو تفریق کرین تو $\text{و} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{ط}^2} \mp \sqrt{\text{س}^2 + 2\text{ط}^2}\right)$

۳ $\text{لا}^2 + \text{لاو} = 12 \quad \ldots\ldots (1)$

$\text{و}^2 + \text{لاو} = 24 \quad \ldots\ldots (2)$

$\therefore \text{لا}^2 + 2\text{لاو} + \text{و}^2 = 36$ دونو کو جمع کیا

$\therefore \text{لا} + \text{و} = \pm 6$

طرفین کو لا مین ضرب کیا

$\text{لا}^2 + \text{لاو} = \pm 6\text{لا} = 12$ بحکم (۱) مساوات کے

$\therefore \text{لا} = \frac{12}{\pm 6} = \pm 2$

اور چونکہ $\text{لا} + \text{و} = \pm 6$

$\therefore \text{و} = \pm 6 - \text{لا}$

$= \pm 6 \mp 2 = \pm 4$

۴ $\text{لا} + \text{و} = \text{س} \quad \ldots\ldots (1)$

$\text{لاو} = \text{ط}^2 \quad \ldots\ldots (2)$

مساوات (۱) کا مجذور کیا اور اسس مجذور مین سے (۲) مساوات کا چوگنا تفریق کیا

$\therefore \text{لا}^2 + 2\text{لاو} + \text{و}^2 = \text{س}^2$

$4\text{لاو} = 4\text{ط}^2$

$\text{لا}^2 - 2\text{لاو} + \text{و}^2 = \text{س}^2 - 4\text{ط}^2$

جذر لیا

$\therefore \text{لا} - \text{و} = \pm\sqrt{\text{س}^2 - 4\text{ط}^2}$

لیکن $\text{لا} + \text{و} = \text{س}$ بحکم (۱) مساوات کی بہر جمع کیا

$2\text{لا} = \text{س} \pm \sqrt{\text{س}^2 - 4\text{ط}^2}$

$\therefore \text{لا} = \frac{1}{2}\left(\text{س} \pm \sqrt{\text{س} - 4\text{ط}^2}\right)$

اور جن مساواتون کو جمع کیا ہی اگر اونہین تفریق کرین

تو $\text{و} = \frac{1}{2}\left(\text{س} \mp \sqrt{\text{س}^2 - 4\text{ط}^2}\right)$

۵ $\text{لا} + \text{و} = \text{س} \quad \ldots\ldots (1)$

$\text{لا}^2 + \text{و}^2 = \text{ط}^2 \quad \ldots\ldots (2)$

مساوات (۱) کے مجذور کو (۲) مساوات کے دوچند مین سے تفریق کیا

$\therefore 2\text{لا}^2 + 2\text{و}^2 = 2\text{ط}^2$

$\text{لا}^2 + 2\text{لاو} + \text{و}^2 = \text{س}^2$

$\text{لا}^2 - 2\text{لاو} + \text{و}^2 = 2\text{ط}^2 - \text{س}^2$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \text{لا} - \text{و} = \pm\sqrt{2\text{ط}^2 - \text{س}^2}$ اور و کی قیمت لا کے

لیکن $\text{لا} + \text{و} = \text{س}$ موافق (۱) کی کو جمع و تفریق کر قیمت لا

$\therefore 2\text{لا} = \text{س} \pm \sqrt{2\text{ط}^2 - \text{س}^2}$

$\therefore \text{لا} = \frac{1}{2}\left(\text{س} \pm \sqrt{2\text{ط}^2 - \text{س}^2}\right)$

اور $\text{و} = \frac{1}{2}\left(\text{س} \mp \sqrt{2\text{ط}^2 - \text{س}^2}\right)$

۶ $\sqrt[3]{\text{لا}^3 + \text{ک}^3} = 5 \quad \ldots\ldots (۱)$

$\sqrt[3]{\text{لا}^3 - \text{ک}^3} = 1 \quad \ldots\ldots (۲)$

دونو مساوات کو جمع کیا

$\sqrt[3]{2\,\text{لا}^3} = 6$

$\therefore \sqrt[3]{\text{لا}^3} = 3$

طرفین کا مکعب کیا

$\therefore \text{لا} = 27$

مین سے تفریق کیا

اور مساوات (۲) کو (۱)

$\therefore \sqrt[3]{2\,\text{ک}^3} = 4$

$\therefore \sqrt[3]{\text{ک}^3} = 2$

$\therefore \text{ک} = 8$

۷ $\text{لا} + \sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2} = \frac{2\,\text{ط}^2}{\sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2}}$

$\therefore \text{لا}\sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2} + \text{ط}^2 + \text{لا}^2 = 2\,\text{ط}^2$ کسر دور کی

$\therefore \text{لا}\sqrt{\text{ط}^2 + \text{لا}^2} = \text{ط}^2 - \text{لا}^2$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \text{ط}^2\,\text{لا}^2 + \text{لا}^4 = \text{ط}^4 - 2\,\text{لا}^2\,\text{ط}^2 + \text{لا}^4$

$\therefore 3\,\text{ط}^2\,\text{لا}^2 = \text{ط}^4$

$\therefore \text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^2}{3}$

$\therefore \text{لا} = \pm\frac{\text{ط}}{\sqrt{3}}$

۸ $\sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} + \text{ص}^2} - \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} = \text{ص}$

$\therefore \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} + \text{ص}^2} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} + \text{ص}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} + \text{ص}^2 = \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2 + 2\,\text{ص}\sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} + \text{ص}^2$

$\therefore \text{ص}^2 = 2\,\text{ص}\sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2}$

$\therefore \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2} = \frac{\text{ص}}{2}$ طرفین مجذور کیا

$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - \text{ص}^2 = \frac{\text{ص}^2}{4}$

$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} = \frac{\text{ص}^2}{4} + \text{ص}^2 = \frac{5\,\text{ص}^2}{4}$ جذر لیا

$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{لا}} = \frac{\text{ص}\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \text{لا} = \pm\frac{2\,\text{ط}}{\text{ص}\sqrt{5}}$

۹ $\frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \frac{\sqrt{\text{ط}^2 - \text{لا}^2}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{ص}}$

لا کو جذر کے اندر رکھا

$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - 1} = \frac{\text{لا}}{\text{ص}}$

$\therefore \sqrt{\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - 1} = \frac{\text{لا}}{\text{ص}} - \frac{\text{ط}}{\text{لا}}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} - 1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{ص}^2} - \frac{2\,\text{ط}}{\text{ص}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2}$

$\therefore \frac{\text{لا}^2}{\text{ص}^2} = \frac{2\,\text{ط}}{\text{ص}} - 1$

$\therefore \text{لا}^2 = 2\,\text{ط}\,\text{ص} - \text{ص}^2$

$\therefore \text{لا} = \pm\sqrt{2\,\text{ط}\,\text{ص} - \text{ص}^2}$

۱۰ $\text{لا}^2 + \text{ک}^2 = \frac{13}{\text{لا} - \text{ک}} \quad \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا}\,\text{ک} = \frac{6}{\text{لا} - \text{ک}} \quad \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) سی دوچند (۲) مساوات کا تفریق کیا

$\therefore \text{لا}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ک} + \text{ک}^2 = \frac{13}{\text{لا} - \text{ک}} - \frac{12}{\text{لا} - \text{ک}} = \frac{1}{\text{لا} - \text{ک}}$

یعنے $(\text{لا} - \text{ک})^2 = \frac{1}{\text{لا} - \text{ک}}$

$\therefore (لا - ی)^2 = 1$ طرفین کا کعب لیا

$\therefore لا - ی = 1$ رکھی تو

جب قیمت $لا - ی$ کی (۱) مساوات اور (۲) میں

$لا^2 + ی^2 = 13$

$\frac{2لا ی = 12}{لا^2 - 2لا ی + ی^2 = 25}$

طرفین کا جذر نکالا

$\therefore لا + ی = \pm 5$

لیکن $لا - ی = 1$ ان دونو مساوات کو جمع کیا

$\therefore 2لا = 6$ یا -4

$لا = 3$ یا -2

اور اگر $لا + ی$ میں سے $لا - ی$ کو تفریق کریں

تو $2ی = 4$ یا -6

$\therefore ی = 2$ یا -3

۱۱ $لا^2 - لا ی = 48 ی$ ..... (۱)

$لا ی - ی^2 = 3 لا$ ..... (۲)

مساوات (۱) کو $لا$ پر تقسیم کیا اور (۲) $ی$ پر تقسیم کیا

تو یہ دو مساوات حاصل ہوئیں

$\therefore لا - ی = \frac{48 ی}{لا}$

$\therefore لا - ی = \frac{3لا}{ی}$

$\therefore \frac{48 ی}{لا} = \frac{3لا}{ی}$

طرفین سی کسر دور کی

$\therefore 48 ی^2 = 3 لا^2$

$\therefore 16 ی^2 = لا^2$ طرفین کو ۳ پر تقسیم کیا

$\therefore \pm 4 ی = لا$ طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا - ی = 3ی$ یا $-5ی$

اور چونکہ $لا - ی = \frac{12}{ی}$ $(= \pm \frac{12}{4} = 12)$ $= 3ی$ یا $-5ی$

یعنی $\pm 12 = 3ی$ یا $-5ی$

$\therefore 4 = ی$ یا $\frac{12}{5} = ی$

اور $لا = \pm 4ی = 16$ یا $-\frac{48}{5}$

۱۲ $\frac{لا ی}{\frac{1}{2}لا ی - ی^2} = 48$

$\frac{لا ی}{\sqrt{لا}} = 24$

اول مساوات دوسری پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{لا ی^{\frac{1}{2}}}{لا ی} = \frac{48}{24} = 2$

$\therefore ی^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore ی = 4$

اور موافق دوسری مساوات کی $\frac{لا ی}{\sqrt{لا}} = 24$

$\therefore \frac{4 \times لا}{\sqrt{لا}} = 24$

$\therefore 4\sqrt{لا} = 24$

$\therefore \sqrt{لا} = 6$

$\therefore لا = 36$

۱۳ $\frac{لا^2 + 3لا - 7}{لا + 2 + \frac{18}{لا}} = 1$

کسر دور کی

$\therefore لا^2 + 3لا - 7 = لا + 2 + \frac{18}{لا}$

$\therefore لا^2 + 2لا = 9 + \frac{18}{لا}$

$\therefore \quad ا(ا+۲) = ۹ \quad (۱+\frac{۲}{ا}) = \frac{۹}{ا}(ا+۲)$

$\therefore \quad ا = \frac{۹}{ا}$

$\therefore \quad ا^۲ = ۹$

$\therefore \quad ا = \pm ۳$

۱۴ $\sqrt{\frac{ا+ط}{ا}} + ۲\sqrt{\frac{ط}{ا+ط}} = ص\sqrt{\frac{ا}{ا+ط}}$

طرفین مساوات کو $\sqrt{\frac{ا+ط}{ا}}$ میں ضرب کیا

$\therefore \quad \frac{ا+ط}{ا} + ۲\sqrt{\frac{ط}{ا}} = ص^۲$

یا $۱ + \frac{ط}{ا} + ۲\sqrt{\frac{ط}{ا}} = ص^۲$

یا $۱ + ۲\sqrt{\frac{ط}{ا}} + \frac{ط}{ا} = ص^۲$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \quad ۱ + \sqrt{\frac{ط}{ا}} = \pm ص$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{ط}{ا}} = \pm ص - ۱$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \quad \frac{ط}{ا} = (ص \mp ۱)^۲$

$\therefore \quad ا = \frac{ط}{(ص \mp ۱)^۲}$

۱۵ $\sqrt{\frac{ط+ا}{ا}} + \sqrt{\frac{ط+ا}{ط}} = \sqrt{\frac{ا}{س}}$

اول طرف کو اسطرح لکھہ سکتی ہیں $(\frac{۱}{ا}+\frac{۱}{ط})\sqrt{ط+ا}$

$\therefore \quad (\frac{۱}{ا}+\frac{۱}{ط})\sqrt{ط+ا} = \sqrt{\frac{ا}{س}}$

یا $\left(\frac{ط+ا}{ا ط}\right)\sqrt{ط+ا} = \sqrt{\frac{ا}{س}}$

$\therefore \quad (ط+ا)^{\frac{۳}{۲}} = \frac{ا^{\frac{۱}{۲}} ط}{س}$

طرفین مساوات کا $\frac{۳}{۲}$ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \quad ط+ا = ا\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{۲}{۳}}$

$\therefore \quad ط = ا\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{۲}{۳}} - ا$

$= ا\left(\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{۲}{۳}} - ۱\right)$

$\therefore \quad ا = \frac{ط}{\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{۲}{۳}} - ۱}$

۱۶ $\frac{(ط+ا)^{\frac{۱}{ن}}}{ط} + \frac{(ط+ا)^{\frac{۱}{ن}}}{ا} = \frac{ا^{\frac{۱}{ن}}}{س}$

$\therefore \quad \left(\frac{۱}{ط}+\frac{۱}{ا}\right)(ط+ا)^{\frac{۱}{ن}} = \frac{ا^{\frac{۱}{ن}}}{س}$

$\therefore \quad \left(\frac{ا+ط}{ا ط}\right)(ط+ا)^{\frac{۱}{ن}} = \frac{ا^{\frac{۱}{ن}}}{س}$

یا $(ط+ا)^{\frac{۱}{ن}+۱} = \frac{ط}{س}\, ا^{\frac{۱}{ن}+۱}$

طرفین کا $\frac{۱}{ن}+۱$ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \quad ط+ا = ا\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{ن}{ن+۱}}$

$\therefore \quad ط = ا\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{ن}{ن+۱}} - ا$

$= ا\left(\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{ن}{ن+۱}} - ۱\right)$

$\therefore \quad ا = \frac{ط}{\left(\frac{ط}{س}\right)^{\frac{ن}{ن+۱}} - ۱}$

۱۷ $ج\, ا^{ن-۱} = س\, ط^{ن-۱}$

$\therefore \quad ج\, ا^{ن} = س\, ط\, ا$ طرفین کو ا میں ضرب کیا

$\therefore \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ط}}} = \frac{\text{ک}^{\text{س}}}{\text{ک}^{\text{ع}}}$ یا $\text{لا}^{\text{ن}-\text{ط}} = \text{ک}^{\text{س}-\text{ع}}$

طرفین مساوات کا $\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ - $\frac{\text{ط}}{\text{س}}$ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore \text{لا} = \left(\frac{\text{ط}-\text{ن}}{\text{س}-\text{م}}\right)^{\frac{\text{ن}\,\text{س}}{\text{م}\,\text{س}-\text{ن}\,\text{ط}}}$

۱۸ $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ک}^{\frac{2}{3}} = ۱۳ \quad \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا}^{\frac{1}{3}} + \text{ک}^{\frac{1}{3}} = ۵ \quad \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۲) کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{2}{3}} + ۲\,\text{لا}^{\frac{1}{3}}\,\text{ک}^{\frac{1}{3}} + \text{ک}^{\frac{2}{3}} = ۲۵$

$\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{ک}^{\frac{2}{3}} = ۱۳$ موافق (۱) کے

تفریق کے $\therefore ۲\,\text{لا}^{\frac{1}{3}}\,\text{ک}^{\frac{1}{3}} = ۱۲$

مساوات (۱) میں سے $۲\,\text{لا}^{\frac{1}{3}}\,\text{ک}^{\frac{1}{3}} = ۱۲$ کو تفریق کیا

$\therefore \text{لا}^{\frac{2}{3}} - ۲\,\text{لا}^{\frac{1}{3}}\,\text{ک}^{\frac{1}{3}} + \text{ک}^{\frac{2}{3}} = ۱$

طرفین کا جذر لیا $\therefore \text{لا}^{\frac{1}{3}} - \text{ک}^{\frac{1}{3}} = \pm ۱$

لیکن $\text{لا}^{\frac{1}{3}} + \text{ک}^{\frac{1}{3}} = ۵$ موافق (۲) مساوات کے

دونو کو جمع کیا $۲\,\text{لا}^{\frac{1}{3}} = ۶$ یا ۴

طرفین کا مکعب کیا $\therefore \text{لا} = ۳$ یا ۴

$\therefore \text{لا} = ۲۷$ یا ۶۴

اور جن مساواتو کو جمع کیا ہے اگر انکو تفریق کریں

تو $۲\,\text{ک}^{\frac{1}{3}} = ۴$ یا ۶

$\therefore \text{ک}^{\frac{1}{3}} = ۲$ یا ۳

$\therefore \text{ک} = ۸$ یا ۲۷

۱۹ $\text{لا}^{۲}\,\text{ک} + \text{ک}^{۲} = ۲۱ \quad \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا}^{۴} + \text{ک}^{۲} = ۳۳۳ \quad \ldots\ldots (۲)$

اول مساوات کا مجذور کیا

$\therefore \text{لا}^{۴} + ۲\,\text{لا}^{۳}\,\text{ک} + \text{ک}^{۲} = ۴۴۱$

$\text{لا}^{۴} + \text{ک}^{۲} = ۳۳۳$ موافق (۲) کے

تفریق کے $\therefore ۲\,\text{لا}^{۳}\,\text{ک} = ۱۰۸$

اس حاصل تفریق کو مساوات (۲) سی تفریق کیا

$\therefore \text{لا}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۳}\,\text{ک} + \text{ک}^{۲} = ۲۲۵$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \text{لا}^{۲} - \text{ک} = \pm ۱۵$

لیکن $\text{لا}^{۲}\,\text{ک} + \text{ک}^{۲} = ۲۱$ تفریق کی

$\therefore ۲\,\text{ک} = ۶$ یا ۳۶

$\therefore \text{ک} = ۳$ یا ۱۸

اور جن مساواتو میں تفریق کی ہے اگر انکو جمع کریں

تو $۲\,\text{لا}^{۲}\,\text{ک} = ۳۶$ یا ۶

$\therefore \text{لا}^{۲}\,\text{ک} = ۱۸$ یا ۳

$\therefore \text{لا} = \frac{۱۸}{۹}$ یا $\frac{۳}{۲۴۴} = ۲$ یا $\frac{۱}{۱۰۸}$

۲۰ $\text{لا}^{۲}\,\text{ک} + \text{لا}\,\text{ک}^{۲} = ۱۸۰ \quad \ldots\ldots (۱)$

$\text{لا}^{۳} + \text{ک}^{۳} = ۱۸۹ \quad \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) کو ۳ میں ضرب کرکر (۲) مساوات کے ساتھ جمع کیا تو یہہ حاصل ہوا

$\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲}\,\text{ک} + ۳\,\text{لا}\,\text{ک}^{۲} + \text{ک}^{۳} = ۷۲۹$

طرفین کا مکعب لیا

$\therefore \text{لا} + \text{ک} = ۹ \quad \ldots\ldots (۳)$

اول مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی

$(لا+ی)\ لای = ۱۸۰$

$\therefore ۹\ لای = ۱۸۰$ بوسیلہ مساوات (۳) کے

$\therefore لای = ۲۰$

$\therefore ۴\ لای = ۸۰ \ldots\ldots (۴)$

اگر مساوات (۳) کا مجذور کریں تو یہہ حاصل ہوتا ہی

$لا^۲ + ۲\ لای + ی^۲ = ۸۱$

$۴\ لای = ۸۰$ موافق (۴) کے

تفریق کی

$\therefore لا^۲ - ۲\ لای + ی^۲ = ۱$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا - ی = \pm ۱$

$لا + ی = ۹$ موافق ۳ کے

$۲\ لا = ۱۰$ یا ۸

$\therefore لا = ۵$ یا ۴

اور $۲\ ی = ۸$ یا ۱۰

$\therefore ی = ۴$ یا ۵

۲۱ $لا + \sqrt{۸}\ ی لا + ی = ۱۹ \ldots (۱)$

$لا^۲ + لای + ی^۲ = ۱۳۳ \ldots (۲)$

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا

$\therefore لا - \sqrt{۸}\ ی لا + ی = ۷$

لیکن $لا + \sqrt{۸}\ ی لا + ی = ۱۹$ مساوات (۱) سے

$\therefore ۲\ لا + ۲\ ی = ۲۶$ دونو کو جمع کیا

$\therefore لا + ی = ۱۳ \ldots\ldots (۳)$

اور جن مساواتون کو جمع کیا ہی انہین باہم تفریق

تو $۲\sqrt{۸}\ ی لا = ۱۲$

$\therefore \sqrt{۸}\ ی لا = ۶$

$\therefore ی لا = ۳۶$

$\therefore ۳\ ی لا = ۱۰۸$

اور مساوات (۲) یہہ ہی

$لا^۲ + لای + ی^۲ = ۱۳۳$

$۳\ لای = ۱۰۸$

تفریق کی

$\therefore لا^۲ - ۲\ لای + ی^۲ = ۲۵$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا - ی = \pm ۵$

$لا + ی = ۱۳$ موافق (۳) کے

$۲\ لا = ۱۸$ یا ۸ جمع کیا

$لا = ۹$ یا ۴

جن مساواتون کو جمع کیا ہی انہین تفریق کے

تو $۲\ ی = ۸$ یا ۱۸

$\therefore ی = ۴$ یا ۹

۲۲ $\frac{ط - \sqrt{۸}\sqrt{ط^۲ - لا^۲}}{ط + \sqrt{۸}\sqrt{ط^۲ - لا^۲}} = ص$

کسور مین یہہ بات ثابت کی گئی ہی کہ اگر کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی مقدار مین ضرب کریں تو قیمت کسر کی نہین بدلتی یعنے اوسمین کچھہ فرق نہین آتا اگر اس مساوات مین شمار کنندہ اور نسب نما کو $ط - \sqrt{۸}\sqrt{ط^۲ - لا^۲}$ مین ضرب کریں تو مساوات مین کچھہ فرق نہین آئیگا اور یہہ مساوات حاصل ہوگی

$\frac{(ط - \sqrt{۸}\sqrt{ط^۲ - لا^۲})^۲}{لا^۲} = ص$ طرفین کا جذر لیا

$\therefore \frac{ط - \sqrt{۸}\sqrt{ط^۲ - لا^۲}}{لا} = \pm \sqrt{۸}\sqrt{ص}$

$\therefore \sqrt{ط^2 - لا^2} = \pm \sqrt{ص}\ لا$

$\therefore ط \mp \sqrt{ص}\ لا = \sqrt{ط^2 - لا^2}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ط^2 \mp ٢ ط \sqrt{ص}\ لا + ص لا^2 = ط^2 - لا^2$

طرفین سے $ط^2$ کم کیا

$\therefore \mp ٢ ط \sqrt{ص} لا + ص لا^2 = - لا^2$

طرفین کو لا پر تقسیم کیا

$\therefore \mp ٢ ط \sqrt{ص} + ص لا = - لا$

$\therefore \mp ٢ ط \sqrt{ص} = - (ص + ١) لا$

$\therefore لا = \pm \frac{٢ ط \sqrt{ص}}{ص + ١}$

٢٣ $\frac{\sqrt{لا} + \sqrt{لا - ط}}{\sqrt{لا} - \sqrt{لا - ط}} = \frac{ن^2 ط}{لا - ط}$

اس مساوات میں اول طرف کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{لا} + \sqrt{لا - ط}$ میں ضرب کیا

$\therefore \frac{\left(\sqrt{لا} + \sqrt{لا - ط}\right)^2}{ط} = \frac{ن^2 ط}{لا - ط}$

$\therefore \left(\sqrt{لا} + \sqrt{لا - ط}\right)^2 = \frac{ن^2 ط^2}{لا - ط}$

$\therefore \left(\sqrt{لا} + \sqrt{لا - ط}\right)^2 = \frac{ن^2 ط^2}{ط - ط}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \sqrt{لا} + \sqrt{لا - ط} = \pm \frac{ن ط}{\sqrt{لا - ط}}$

کسر دور کی

$\therefore \sqrt{لا^2 - ط لا} + لا - ط = \pm ن ط$

$\therefore \sqrt{لا^2 - ط لا} = (١ \pm ن) ط - لا$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore لا^2 - ط لا = (١ \pm ن)^2 ط^2 - ٢ (١ \pm ن) ط لا + لا^2$

$\therefore ٢ (١ \pm ن) ط لا - ط لا = (١ \pm ن)^2 ط^2$

$\therefore (٢ \pm ٢ ن) لا - لا = (١ \pm ن)^2 ط$

$\therefore (٢ \pm ٢ ن - ١) لا = (١ \pm ن)^2 ط$

$\therefore (١ \pm ٢ ن) لا = (١ \pm ن)^2 ط$

$\therefore لا = \frac{(١ \pm ن)^2 ط}{١ \pm ٢ ن}$

٢٤ $\frac{\sqrt{ط + لا} + \sqrt{ط - لا}}{\sqrt{ط + لا} - \sqrt{ط - لا}} = ص$

شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{ط + لا} + \sqrt{ط - لا}$ میں ضرب کیا

$\therefore \frac{\left(\sqrt{ط + لا} + \sqrt{ط - لا}\right)^2}{٢ لا} = ص$

یا $\frac{ط + لا + ٢ \sqrt{ط^2 - لا^2} + ط - لا}{٢ لا} = ص$

$\therefore \frac{٢ ط + ٢ \sqrt{ط^2 - لا^2}}{٢ لا} = ص$

$\therefore \frac{ط}{لا} + \frac{\sqrt{ط^2 - لا^2}}{لا} = ص$

دوسرے جزو میں لا کو مجذور کر کے جذر کی اندر لکھا

یا $\frac{ط}{لا} + \sqrt{\frac{ط^2}{لا^2} - ١} = ص$

$\therefore \sqrt{\frac{ط^2}{لا^2} - ١} = ص - \frac{ط}{لا}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{ط^2}{لا^2} - ١ = ص^2 - \frac{٢ ص ط}{لا} + \frac{ط^2}{لا^2}$

$\therefore \frac{٢ ص ط}{لا} = ص^2 + ١$

$\therefore \frac{لا}{٢ ص ط} = \frac{١}{ص^2 + ١}$

$\therefore لا = \frac{٢ ص ط}{ص^2 + ١}$

۲۵ $\frac{ط+لا+\sqrt{۲طلا+لا^۲}}{ط+لا}=ص$

شمار کنندہ کو مخرج نما پر تقسیم کیا

$\therefore ۱+\frac{\sqrt{۲طلا+لا^۲}}{ط+لا}=ص$

$\therefore \sqrt{\frac{۲طلا+لا^۲}{(ط+لا)^۲}}=ص-۱$

یا $\sqrt{۱-\left(\frac{ط}{ط+لا}\right)^۲}=ص-۱$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore ۱-\left(\frac{ط}{ط+لا}\right)^۲=(ص-۱)^۲=ص^۲-۲ص+۱$

$\therefore \left(\frac{ط}{ط+لا}\right)^۲=۲ص-ص^۲$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \frac{ط}{ط+لا}=\pm\sqrt{۲ص-ص^۲}$

$\therefore \frac{ط+لا}{ط}=\pm\frac{لا}{\sqrt{۲ص-ص^۲}}$

$\therefore ط+لا=\pm\frac{ط}{\sqrt{۲ص-ص^۲}}$

$\therefore لا=\pm\frac{ط}{\sqrt{۲ص-ص^۲}}-ط$

۲۶ $\sqrt{\frac{ط+لا}{لا}}+\sqrt{\frac{ط-لا}{لا}}=\sqrt{\frac{لا}{ص}}$

اول طرف کی شمار کنندہ دونوں کو اونکی مخرج نما پر تقسیم کیا

$\therefore \sqrt{\frac{ط}{لا}+۱}+\sqrt{\frac{ط}{لا}-۱}=\sqrt{\frac{لا}{ص}}$

$\therefore \sqrt{\frac{ط}{لا}+۱}=\sqrt{\frac{لا}{ص}}-\sqrt{\frac{ط}{لا}-۱}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{ط}{لا}+۱=\frac{لا}{ص}-۲\sqrt{\frac{ط-لا}{ص}}+\frac{ط}{لا}-۱$

$\therefore ۲\sqrt{\frac{ط-لا}{ص}}=\frac{لا}{ص}-۲$

$\therefore \sqrt{\frac{ط-لا}{ص}}=\frac{لا}{۲ص}-۱$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{ط-لا}{ص}=\frac{لا^۲}{۴ص^۲}-\frac{لا}{ص}+۱$

یا $\frac{ط}{ص}-\frac{لا}{ص}=\frac{لا^۲}{۴ص^۲}-\frac{لا}{۲ص}+۱$

$\therefore \frac{لا^۲}{۴ص^۲}=\frac{ط}{ص}-۱$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \frac{لا}{۲ص}=\pm\sqrt{\frac{ط}{ص}-۱}$

$\therefore لا=\pm۲ص\sqrt{\frac{ط-ص}{ص}}=\pm۲\sqrt{ط ص-ص^۲}$

۲۷ $۳لا-\frac{۳لا}{ک}=ک^۲-ک$ ..... (۱)

$ک^۲+لا=۴$ ..... (۲)

مساوات (۱) کو اسطرح لکھ سکتے ہیں

$۳لا\left(۱-\frac{۱}{ک}\right)=(ک-۱)ک$ پر تقسیم کیا

یا $۳لا\frac{(ک-۱)}{ک}=(ک-۱)ک$ طرفین کو ک-۱

$\therefore ۳لا=ک^۲$ ..... (۳)

مساوات (۲) میں سے (۳) کو تفریق کیا

$\therefore$ $ر^2 + ل = ۴$

$ر^2 = ۳ل$

$ل = ۴ - ۳ل$

$\therefore ۴ل = ۴$

$\therefore ل = ۱$

لیکن $ر^2 = ۳ل = ۳$

$\therefore ر = \pm \sqrt{۳}$

۲۸ $ل^2 + ر\sqrt{ل ر} = ۹$

$ر^2 + ل\sqrt{ل ر} = ۱۸$

ان دونو مساوات کو اسطرح لکھ سکتے ہین

$ل^{\frac{1}{2}} \left(ل^{\frac{3}{2}} + ر^{\frac{3}{2}} \right) = ۹ \ldots\ldots (۱)$

$ر^{\frac{1}{2}} \left(ر^{\frac{3}{2}} + ل^{\frac{3}{2}} \right) = ۱۸ \quad (۲)$

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا

$\therefore \left(\frac{ر}{ل} \right)^{\frac{1}{2}} = ۲$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore \frac{ر}{ل} = ۴$

$\therefore ر = ۴ل$

لیکن $ل^2 + ر\sqrt{ل ر} = ۹$ موافق اصلی مساوات کے

$\therefore ل^2 + ۴ل\sqrt{۴ل^2} = ۹$

یعنے $ل^2 + ۸ل^2 = ۹$

$\therefore ۹ل^2 = ۹$

$\therefore ل^2 = ۱$

$ل = \pm ۱$

اور $ر = ۴ل = \pm ۴$

۲۹ $\frac{ل^2 + ۲ر^2}{\sqrt{ر}} = ل + ۲ل\sqrt{ر} \ldots\ldots (۱)$

$ل^2 - ۲ر^2 = ۲۵۶ - ۲ر\sqrt{ر} \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) کے کسر دور کی

$\therefore ل^2 + ۲ر^2 = ل\sqrt{ر} + ۲ل ر^{\frac{3}{2}}$

$\therefore ل^2 - ل\sqrt{ر} = ۲ل ر^{\frac{3}{2}} - ۲ر^2$ اس مساوات کو

اسطرح $ل (ل - \sqrt{ر}) = ۲ر^{\frac{3}{2}} (ل - \sqrt{ر})$ لکھا

$\therefore ل = ۲ر^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots (۳)$ طرفین مین $ل - \sqrt{ر}$ کو قسمت کیا

$\therefore ل\sqrt{ر} = ۲ر^2$

جسوقت (۲) مین بجاے $ل\sqrt{ر}$ کی $۲ر^2$ لکھی تو یہہ حاصل ہوا

$ل^2 - ۲ر^2 = ۲۵۶ - ۲ر^2$

$\therefore ل^2 = ۲۵۶$

$\therefore ل = \pm ۱۶$

اور موافق مساوات (۳) کے

$۲ر^{\frac{3}{2}} = ل$

$= \pm ۱۶$

$\therefore ر^{\frac{3}{2}} = \pm ۸$

$\therefore ر^{\frac{1}{2}} = \pm ۲$ طرفین کا کب لیا

$\therefore ر = ۴$

۳۰ $ل^2 ر + ل ر^2 = ۳۰ \ldots\ldots (۱)$

$\frac{۱}{ل} + \frac{۱}{ر} = \frac{۵}{۶} \ldots\ldots (۲)$

(۲) مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{ل + ر}{ل ر} = \frac{۵}{۶}$

$\therefore ل + ر = \frac{۵ ل ر}{۶} \ldots\ldots (۳)$

اور اول مساوات کو اسطرح لکھ سکتے ہین

$لا ر (لا + ر) = ۳۰$

$\therefore لا ر = \frac{۳۰}{لا + ر}$ ..... (۴)

اور موافق (۳) کی $لا + ر = \frac{۵}{۶} لا ر$ (۴) کے موافق

$= \frac{۵}{۶} \times \frac{۳۰}{لا + ر}$

$= \frac{۲۵}{لا + ر}$

$\therefore (لا + ر)^۲ = ۲۵$ ..... (۵)

$\therefore لا + ر = \pm ۵$

اور $لا ر = \frac{۳۰}{لا + ر}$ موافق (۴) کے

$= \frac{۳۰}{\pm ۵} = \pm ۶$

$\therefore ۴ لا ر = \pm ۲۴$

اور موافق (۵) کے $لا^۲ + ۲ لا ر + ر^۲ = ۲۵$

$۴ لا ر = \pm ۲۴$ کے تعویض

$\therefore لا^۲ - ۲ لا ر + ر^۲ = ۱ یا ۴۹$

$\therefore لا - ر = \pm ۱ یا \pm ۷$

لیکن $لا + ر = \pm ۵$

جمع کیا

$\therefore ۲ لا = ۶ یا ۴ یا - ۱۲ یا ۲$

$\therefore لا = ۳ یا ۲ یا - ۶ یا ۱$

اور جن مساواتوں کو جمع کیا ہی اگر اونہین باہم تفریق کرین

تو $۲ ر = ۴ یا ۶ یا ۲ یا - ۱۲$

$\therefore ر = ۲ یا ۳ یا ۱ یا - ۶$

۳۱ $لا^۲ + ر^۲ = ۶$ ..... (۱)

$لا^۲ + لا^۲ ر^۲ = ۱۲$ ..... (۲)

مساوات (۲) کو مساوات (۱) پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{لا ر (لا^۲ + ر^۲)}{لا^۲ + ر^۲} = \frac{۱۲}{۶}$

یعنے $لا ر = ۲$ ..... (۳) اور بوسیلہ (۱) کے

$لا ر (لا + ر) = ۶$

$\therefore ۲ (لا + ر) = ۶$

$\therefore لا + ر = ۳$ طرفین کا مجذور کیا

$\therefore لا^۲ + ۲ لا ر + ر^۲ = ۹$

اور $۴ لا ر = ۸$ بوسیلہ (۳) مساوات کے

تفریق کی

$لا^۲ - ۲ لا ر + ر^۲ = ۱$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا - ر = \pm ۱$

$لا + ر = ۳$

جمع کیا

$\therefore ۲ لا = ۴ یا ۲$

$\therefore لا = ۲ یا ۱$

اور $ر = ۳ - لا$

$= ۳ - ۲ یا - ۱$

$= ۱ یا ۲$

۳۲ $(لا^۳ - ر^۳) : (لا - ر)^۳ :: ۶۱ : ۱$

$لا ر = ۳۲۰$ ..... (۲)

جب چار مقدار متناسب ہوتے ہین تو اول اور دوسری کا حاصل تفریق دوسری مقدار سی وہی نسبت رکھتا ہی جو تیسری اور چوتھی کا حاصل تفریق چوتھی مقدار سے نسبت رکھتا ہی اور ثبوت اس امر کا مساواتون کے بعد تناسب کے فصل مین لکھا جائیگا پس بیان بالا کی موافق تناسب اول سے یہ تناسب حاصل ہوتا ہی

$(لا^۳ - ر^۳) - (لا - ر)^۳ :: ۶۰ : ۱$

یعنے $لا^3 - ک^3 - (لا^3 - ۳لا^2ک + ۳لاک^2 - ک^3) : (لا - ک)^3 :: ۶۰ : ۱$

$\therefore ۳لا^2ک - ۳لاک^2 : (لا - ک)^3 :: ۶۰ : ۱$

$\therefore ۳لاک(لا - ک) : (لا - ک)^3 :: ۶۰ : ۱$

اول اور چہارم کی حاصلضرب کو دوم اور سوم کے حاصلضرب کے برابر لکھا تو

$۳لاک(لا - ک) = ۶۰(لا - ک)^3$

$\therefore ۳لاک = ۶۰(لا - ک)^2$ طرفین کو $(لا - ک)^2$ پر تقسیم کیا

لیکن مساوات (۲ سے) $لاک = ۳۲۰$

$\therefore ۳لاک = ۹۶۰$

$\therefore ۶۰(لا - ک)^2 = ۹۶۰$

$\therefore (لا - ک)^2 = \frac{۹۶۰}{۶۰} = ۱۶$

$\therefore لا - ک = \pm ۴$ طرفین کا جذر لیا

اور $لا^2 - ۲لاک + ک^2 = ۱۶$

$۴لاک = ۱۲۸۰$

$\therefore لا^2 + ۲لاک + ک^2 = ۹۶ + ۱۲$ جمع کیا

$\therefore لا + ک = \pm ۳۶$ طرفین کا جذر لیا

لیکن $لا - ک = \pm ۴$ جمع کیا

$\therefore ۲لا = \pm ۴۰$ یا ± ۳۲

$\therefore لا = \pm ۲۰$ یا ± ۱۶

اور تفریق کرنی سے $۲ک = \pm ۳۲$ یا ± ۴۰

$\therefore ک = \pm ۶$ یا ± ۲۰

۳۳ $(لا^2 + ک^2)(لا + ک) = ۲۳۳۶ \ldots (۱)$

$(لا^2 - ک^2)(لا - ک) = ۵۷۶ \ldots (۲)$

ان دونو مساواتون سے یہہ دو مساواتین حاصل ہوتی ہین

$لا^3 + لا^2ک + لاک^2 + ک^3 = ۲۳۳۶$

$لا^3 - لا^2ک - لاک^2 + ک^3 = ۵۷۶$ تفریق کی

$\therefore ۲لا^2ک + ۲لاک^2 = ۱۷۶۰$

اگر اس حاصل تفریق کو اول مساوات پر زیادہ کرین تو یہہ حاصل ہوتا ہی

$لا^3 + ۳لا^2ک + ۳لاک^2 + ک^3 = ۴۰۹۶$

$\therefore لا + ک = ۱۶ \ldots (۳)$ طرفین کا مکعب لیا

اور حاصل تفریق سے یہہ حاصل ہوتا ہی

$۲لاک(لا + ک) = ۱۷۶۰$

$\therefore ۲لاک \times ۱۶ = ۱۷۶۰$

$\therefore لاک = ۵۵$

اور (۳ سے) $لا^2 + ۲لاک + ک^2 = ۲۵۶$

$۴لاک = ۲۲۰$

$\therefore لا^2 - ۲لاک + ک^2 = ۳۶$ تفریق کی

$\therefore لا - ک = \pm ۶$

اور (۳ سے) $لا + ک = ۱۶$

$\therefore ۲لا = ۲۲$ یا ۱۰

$\therefore لا = ۱۱$ یا ۵

اور $۲ک = ۱۰$ یا ۲۲

$\therefore ک = ۵$ یا ۱۱

۳۴ $لا^3 + ک^3 = (لا+ک)\,لا ک$ ..... (۱)

$لا^2 ک + لا ک^2 = ۴\,لا ک$ ..... (۲)

کو تقسیم کیا $لا ک$ پر مساوات (۲)

$\therefore لا + ک = ۴$ ..... (۳)

طرفین کا مکعب کیا

$لا^3 + ۳ لا^2 ک + ۳ لا ک^2 + ک^3 = ۶۴$

اور مساوات (۱) سے $لا^3 - لا^2 ک + لا ک^2 + ک^3 = ۰$

تفریق کی $۴ لا^2 ک + ۴ لا ک^2 = ۶۴$

$\therefore لا^2 ک + لا ک^2 = ۱۶$

یعنی $لا ک (لا + ک) = ۱۶$

لیکن $لا + ک = ۴$

$\therefore ۴ لا ک = ۱۶$

$\therefore لا ک = ۴$

اور $لا^2 + ۲ لا ک + ک^2 = ۱۶$ بوسیلہ (۳) کے

تفریق کی $۴ لا ک = ۱۶$

$\therefore لا^2 - ۲ لا ک + ک^2 = ۰$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore لا - ک = ۰$

اور $لا + ک = ۴$

$۲ لا = ۴$

$لا = ۲$

اور $۲ ک = ۴$

$\therefore ک = ۲$

۳۵ $(لا^2 + ک^2)(لا + ک) = \frac{۱۵ لا ک}{۲}$ ... (۱)

$(لا^2 - ک^2)(لا^2 + ک^2) = \frac{۷۵ لا^2 ک^2}{۴}$ ... (۲)

مساوات (۲) کو اول پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{(لا^2 - ک^2)(لا^2 + ک^2)}{(لا + ک)(لا^2 + ک^2)} = \frac{۷۵ لا^2 ک^2}{۱۵ \times ۲ \times لا ک}$

یا $\frac{لا^2 - ک^2}{لا + ک} = \frac{۵ لا ک}{۲}$

یا $\frac{(لا^2 + ک^2)(لا^2 - ک^2)}{لا + ک} = \frac{۵ لا ک}{۲}$

یا $\frac{(لا^2 + ک^2)(لا + ک)(لا - ک)}{(لا + ک)} = \frac{۵ لا ک}{۲}$

$\therefore (لا^2 + ک^2)(لا - ک) = \frac{۵ لا ک}{۲}$ ... (۳)

مساوات (۱) کو مساوات (۳) پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{(لا^2 + ک^2)(لا + ک)}{(لا^2 + ک^2)(لا - ک)} = \frac{۱۵ لا ک}{۵ لا ک}$

$\therefore \frac{لا + ک}{لا - ک} = ۳$

$\therefore لا + ک = ۳ لا - ۳ ک$

$\therefore ۴ ک = ۲ لا$

$\therefore ۲ ک = لا$ ... یہ قیمت لا کی (۳) مساوات میں رکھی

$\therefore (لا^2 + ک^2)(لا - ک) = ۵ ک^2 \times ک = \frac{۵ ک \times ۲ ک^2}{۲} = ۵ ک^3$

$\therefore ک = ۱$ اور $لا = ۲ ک = ۲$

۳۶ $(لا^2 - ک^2)(لا - ک) = ۳ لا ک$ ... (۱)

$(لا^2 - ک^2)(لا^2 - ک^2) = ۴۵ لا^2 ک^2$ ... (۲)

مساوات (۲) کو (۱) پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{(لا^2 - ک^2)(لا^2 - ک^2)}{(لا - ک)(لا^2 - ک^2)} = \frac{۴۵ لا^2 ک^2}{۳ لا ک}$

یا $\frac{لا^2 - ک^2}{لا - ک} = ۱۵ لا ک$

$\therefore \frac{(ل^2+ک^2)(ل+ک)(ل-ک)}{ل-ک} = ۱۵ لاک$

$\therefore (ل^2+ک^2)(ل+ک) = ۵ لاک$

یا $ل^3 + ل^2ک + لک^2 + ک^3 = ۱۵ لاک$

اور مساوات (۱) سی $ل^3 - ل^2ک - لاک^2 + ک^3 = ۳ لاک$ دونوں کو جمع کیا

$۲ل^3 + ۲ک^3 = ۱۸ لاک$

$\therefore ل^3 + ک^3 = ۹ لاک \ldots\ldots (۳)$

اور جن مساوات کو جمع کیا ہی اگر اونہیں باہم تفریق کریں تو یہہ حاصل ہوتا ہی $۲ل^2ک + ۲لک^2 = ۱۲ لاک$ تقسیم کیا طرفین کو ۲ لاک پر

$\therefore ل + ک = ۶ \ldots\ldots (۴)$

اس مساوات کو مکعب کیا

$\therefore ل^3 + ۳ل^2ک + ۳لک^2 + ک^3 = ۲۱۶$

کے $ل^3 + ک^3 = ۹ لاک$ موافق (۳)

$\therefore ۳ل^2ک + ۳لک^2 = ۲۱۶ - ۹ لاک$ تفریق کیے

یا $۳(ل+ک) لاک = ۲۱۶ - ۹ لاک$

یا $۳ \times ۶ \times لاک = ۲۱۶ - ۹ لاک$ بوسیلہ مساوات (۴) کے

یا $۱۸ لاک = ۲۱۶ - ۹ لاک$

$\therefore ۲۷ لاک = ۲۱۶$

$\therefore لاک = ۸$

اور $۴ لاک = ۳۲$

مساوات (۴) کا مجذور کیا

$\therefore ل^2 + ۲ لاک + ک^2 = ۳۶$

اور $۴ لاک = ۳۲$

$\therefore ل^2 - ۲ لاک + ک^2 = ۴$ تفریق کی

اور $ل + ک = ۶$

$ل - ک = \pm ۲$

$\therefore ۲ل = ۸$ یا ۴ جمع کیا

$\therefore ل = ۴$ یا ۲

اور $۲ک = ۴$ یا ۸

$\therefore ک = ۲$ یا ۴

یہاں سی مرکب مساوات درجہ دویم کی مثالیں حل کی جاتی ہین

۱ $\frac{۱۰}{ل} - \frac{۱۴-۱۲ل}{ل^2} = \frac{۲۲}{۹}$

طرفین کو $ل^2$ سی ضرب کیا

$\therefore ۱۰ل - ۱۴ + ۱۲ل = \frac{۲۲ل^2}{۹}$

$\therefore \frac{۲۲ل^2}{۹} - ۱۲ل = -۱۴$

$\therefore ل^2 - \frac{۵۴}{۱۱} ل = -\frac{۶۳}{۱۱}$ طرفین کو $\frac{۲۲}{۹}$ پر تقسیم کیا

طرفین پر $\frac{۲۷}{۱۱}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل^2 - \frac{۵۴}{۱۱} ل + \left(\frac{۲۷}{۱۱}\right)^2 = \left(\frac{۲۷}{۱۱}\right)^2 - \frac{۶۳}{۱۱}$

$= \frac{۷۲۹}{۱۲۱} - \frac{۶۳}{۱۱}$

$= \frac{۳۶}{۱۲۱}$

$\therefore ل - \frac{۲۷}{۱۱} = \pm \frac{۶}{۱۱}$

$\therefore ل = \frac{۲۷}{۱۱} \pm \frac{۶}{۱۱} = \frac{۳۳}{۱۱} = ۳$ یا $\frac{۲۱}{۱۱}$

۲ $\frac{۳ل-۴}{ل-۴} + ۱ = ۱۰ - \frac{ل-۲}{۲}$

کسر دور کی

$\therefore ۶ل - ۸ + ۲ل - ۸ = ۲۰ل - ۸۰ - ل^2 + ۶ل - ۸$

$\therefore ل^2 - ۱۸ل = -۷۲$

$\therefore ل^2 - ۱۸ل + (۹)^2 = -۷۲ + ۹$

$\therefore ل - ۹ = \pm ۳$

$\therefore ل = ۹ \pm ۳ = ۱۲$ یا ۶

۳ $\frac{۳ل+۴}{۵} - \frac{۲ل-۳}{ل-۶} = \frac{۱۴-۷ل}{۱۰}$

طرفین کو ۱۰ میں ضرب کیا

$\therefore ۶ل+۸ - \frac{۲۰ل-۳۰۰}{ل-۶} = ۱۴-۷ل$

$\therefore ۲۲-ل = \frac{۲۰ل-۳۰۰}{ل-۶}$ ضرب کیا

طرفین کو ل-۶ میں

$\therefore ۱۳۲-۲ل^۲ = ۳۰۰-۲۰ل+۸ل-۴۸$

$\therefore ل^۲-۸ل+۴۸ = ۴۳۲$

طرفین کی علامتیں بدلیں

$\therefore ل^۲-۸ل = -۴۳۲$

$\therefore ل^۲-۸ل+(۴)^۲ = (۴)^۲-۴۳۲$

$= ۱۶-۴۳۲$

$= ۴۱۶$

$\therefore ل-۴ = \pm ۲۰$

$\therefore ل = ۴ \pm ۲۰ = ۲۴$ یا -۱۶

۴ $۳ل - \frac{۳ل-۱۰}{۲ل-۹} = ۲ + \frac{۶ل^۲-۴۰}{۲ل-۹}$

طرفین مساوات کو $(۲ل-۹)$ میں ضرب کیا

$\therefore ۶ل^۲-۳ل = ۲ل-۴+۶ل^۲-۲۳ل+۱۰$

$\therefore ۷ل+۶ = \frac{۲۴ل+۱۰}{۲ل-۹}$

طرفین کو $۲ل-۹$ میں ضرب کیا

$\therefore ۱۴ل^۲-۶۳ل+۵۴ = ۲۴ل+۱۰$

$\therefore ۱۴ل^۲-۸۷ل = ۳۶۸$

طرفین کی علامتیں بدلیں

$\therefore ۸ل-۱۴ل^۲ = -۳۶۸$

طرفین کو ۸ پر تقسیم کیا

$\therefore ل^۲ - \frac{۳۱}{۲}ل = -۴۶$

طرفین پر $\frac{۳۱}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل^۲ - \frac{۱}{۲}ل + \left(\frac{۳۱}{۴}\right)^۲ = -۴۶ + \frac{۹۶۱}{۱۶}$

$= \frac{۲۲۵}{۱۶}$

طرفین کا مجذر لیا

$\therefore ل - \frac{۳۱}{۴} = \pm \frac{۱۵}{۴}$

$\therefore ل = \frac{۳۱}{۴} \pm \frac{۱۵}{۴} = ۴$ یا $\frac{۲۳}{۲}$

۵ $\frac{ل}{ل+۵} + \frac{۷}{۴ل-۶} = \frac{۱۱ل}{۱۱ل-۸}$ ضرب کیا

طرفین کو $(۵+ل)$ میں

$\therefore ل + \frac{۷ل+۳۵}{۴ل-۶} = \frac{۱۱ل^۲+۵۵ل}{۱۱ل-۸}$

طرفین کو $(۱۱ل-۸)$ میں ضرب کیا

$\therefore ۱۱ل^۲-۸ل + \frac{۴۴ل^۲+۲۷۷ل-۲۸۰}{۴ل-۶} = ۱۱ل^۲+۵۵ل$

$\therefore \frac{۴۴ل^۲+۲۷۷ل-۲۸۰}{۴ل-۶} = ۶۳ل$

طرفین کو ۷ پر تقسیم کیا

$\therefore \frac{۶۴ل^۲+۱۱ل-۴۰}{۴ل-۶} = ۹ل$

$\therefore ۶۴ل^۲+۱۱ل-۴۰ = ۳۶ل^۲-۵۴ل$

$\therefore ۲۸ل^۲ = ۴۰$

$\therefore ل^۲ = \frac{۴۰}{۲۸} = \frac{۷}{۴۷}$

طرفین پر $\frac{۷}{۹۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل^۲ - \frac{۷}{۴۷}ل + \left(\frac{۷}{۹۴}\right)^۲ = \frac{۴۰}{۴۷} + \frac{۴۹}{۸۳۲۶}$

$= \frac{۷۵۶۹}{۸۳۲۶}$

طرفین کا مجذر لیا

$\therefore ل - \frac{۷}{۹۴} = \pm \frac{۸۷}{۹۴}$

$\therefore u = \frac{7}{98} \pm \frac{49}{9604} = \frac{1}{14} - \frac{7}{686}$

$\therefore \frac{10}{u} - \frac{90}{u} = \frac{90}{1+u} - \frac{27}{2+u}$ ۶

طرفین کو ۹ پر تقسیم کیا

طرفین کو $u(1+u)$ سے ضرب کیا

$\therefore 3u^2 + 3u = 10u + 10 - 10u$

$\therefore u = \frac{3u^2 + 3u}{2+u}$

$\therefore 3u^2 + 3u = 10u + 20$

$\therefore 3u^2 - 7u = 20$

$\therefore u^2 - \frac{7}{3}u = \frac{20}{3}$

$\therefore u^2 - \frac{7}{3}u + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{20}{3} + \frac{49}{36}$

$= \frac{289}{36}$

$\therefore u = \frac{7}{6} \pm \frac{17}{6} \therefore u = \frac{7}{6} \pm \frac{17}{6}$

$= 4$ یا $-\frac{5}{2}$

$\frac{1}{u^2 - 3u} = \frac{1}{u^2 + 4u} + \frac{9}{u^3}$ ۷

طرفین کو u سے ضرب کیا

$\therefore \frac{1}{3-u} + \frac{1}{4+u} = \frac{9}{8}$

کسر دور کی

$\therefore 8u + 32 + 8u - 24 = 9u^2 + 9u - 108$

$\therefore 9u^2 + 9u - 16u = 8 + 108$

$\therefore 9u^2 - 7u = 116$

$\therefore u^2 - \frac{7}{9}u = \frac{116}{9}$

$\therefore u^2 - \frac{7}{9}u + \left(\frac{7}{18}\right)^2 = \frac{116}{9} + \frac{49}{324}$

$= \frac{4225}{324}$

$\therefore u - \frac{7}{18} = \pm \frac{65}{18}$

$\therefore u = \frac{7}{18} \pm \frac{65}{18} = 4$ یا $-\frac{29}{9}$

$\frac{u^3 - 10u^2 + 1}{9 + 6u - u^2} = 3 - u$ ۸

کسر دور کی

$\therefore u^3 - 10u^2 + 1 = 3 - 9u^2 + 27u - 27$

$\therefore u^3 + 27u = 28$

$\therefore u^2 + 27u + \left(\frac{27}{2}\right)^2 = \left(\frac{27}{2}\right)^2 + 28$

$= \frac{841}{4}$

$\therefore u + \frac{27}{2} = \pm \frac{29}{2}$

$\therefore u = \pm \frac{29}{2} - \frac{27}{2} = 1$ یا -28

$\frac{u}{10 - 7u} + \frac{u-7}{u} = 2$ ۹

$\therefore \frac{u^2 + (7-u)^2}{7u - u^2} = \frac{29}{10}$

$\therefore u^2 + 49 - 14u + u^2 = \frac{29u - 203}{10}$

$\therefore 20u^2 + 490 - 140u = 203 - 29u$

$\therefore 9u^2 - 343u = -490$

$\therefore u^2 - 7u = -10$

$\therefore u^2 - 7u + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} - 10$

$= \frac{9}{4}$

$\therefore u - \frac{7}{2} = \pm \frac{3}{2}$

$\therefore u = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} = 5$ یا 2

۱۰ $\frac{۷-۱۲لا}{لا^{۳}} = \frac{۱}{لا} - \frac{۸لا+۱۱۰}{لا^{۳}}$

طرفین کو $لا^{۳}$ سے ضرب کیا

$\therefore ۷-۱۲لا = لا^{۲} - ۸لا - ۱۱۰$

$\therefore لا^{۲} + ۴لا = ۷ + ۱۱۷$

$\therefore لا^{۲} + ۴لا + ۴ = ۴ + ۱۱۷$

$= ۱۲۱$

$\therefore لا + ۲ = \pm ۱۱$

$\therefore لا = \pm ۱۱ - ۲ = ۹ \text{ یا } -۱۳$

۱۱ $\sqrt{لا+۵} \times \sqrt{لا+۱۲} = ۱۲$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore (لا+۵)(لا+۱۲) = ۱۴۴$

$\therefore لا^{۲} + ۱۷لا + ۶۰ = ۱۴۴$

$\therefore لا^{۲} + ۱۷لا = ۸۴$

$\therefore لا^{۲} + ۱۷لا + \left(\frac{۱۷}{۲}\right)^{۲} = ۸۴ + \frac{۲۸۹}{۴}$

$= \frac{۶۲۵}{۴}$

$\therefore لا + \frac{۱۷}{۲} = \pm \frac{۲۵}{۲}$

$لا = \pm \frac{۲۵}{۲} - \frac{۱۷}{۲} = ۴ \text{ یا } -۲۱$

۱۲ $\sqrt[۳]{لا^{۳} - ط^{۳}} = لا - ص$ طرفین کا مکعب کیا

$\therefore لا^{۳} - ط^{۳} = لا^{۳} - ۳لا^{۲}ص + ۳لاص^{۲} - ص^{۳}$

$\therefore ۳لا^{۲}ص - ۳لاص^{۲} = ط^{۳} - ص^{۳}$ قسمت کیا

طرفین کو $۳ص$ پر

$\therefore لا^{۲} - ص لا = \frac{ط^{۳} - ص^{۳}}{۳ص}$

$\therefore لا^{۲} - ص لا + \frac{ص^{۲}}{۴} = \frac{ص^{۲}}{۴} + \frac{ط^{۳} - ص^{۳}}{۳ص}$

$= \frac{۲ص^{۳} + ط^{۳}}{۱۲ص}$

$\therefore لا - \frac{ص}{۲} = \pm \sqrt{\frac{۲ص^{۳} + ط^{۳}}{۱۲ص}}$

$\therefore لا = \pm \sqrt{\frac{۲ص^{۳} + ط^{۳}}{۱۲ص}} + \frac{ص}{۲}$

۱۳ $لا^{ن} - م لا^{ن} = ح$

$\therefore لا^{ن} - م لا^{ن} + \left(\frac{م}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{م}{۲}\right)^{۲} + ح$

$= \frac{م^{۲} + ۴ح}{۴}$

$\therefore لا^{ن} - \frac{م}{۲} = \pm \sqrt{\frac{م^{۲} + ۴ح}{۴}}$

$\therefore لا^{ن} = \frac{م \pm \sqrt{م^{۲} + ۴ح}}{۲}$

طرفین کا $ن$ مرتبہ کا نرد لیا

$\therefore لا = \left(\frac{م \pm \sqrt{م^{۲} + ۴ح}}{۲}\right)^{\frac{۱}{ن}}$

۱۴ $\frac{\sqrt{لا+۴} + ۲}{\sqrt{لا+۴} - ۲} = \sqrt{\frac{لا}{لا}}$ دور کی

$\therefore ۲\sqrt{لا+۴} + ۲لا = ۱۶ - لا$

$\therefore ۳لا + ۲\sqrt{لا+۴} = ۱۶$

$\therefore لا + \frac{۲}{۳}\sqrt{لا+۴} + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} = \frac{۱۶}{۳} + \frac{۱}{۹}$

$= \frac{۴۹}{۹}$ طرفین کا جذر لیا

$\therefore \sqrt{لا+۴} + \frac{۱}{۳} = \pm \frac{۷}{۳}$

$\therefore \sqrt{لا+۴} = \pm \frac{۷}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۲ \text{ یا } -\frac{۸}{۳}$

$\therefore لا = ۰ \text{ یا } \frac{۴۷}{۹}$

۱۵ $\frac{\sqrt{ط^۲ لا + ص}}{ط + \sqrt{لا}} = \frac{ط - \sqrt{لا}}{\sqrt{لا}}$

کسر دور کی

$\therefore ط لا + ص \sqrt{لا} = ط^۲ - لا$

$\therefore ط لا + لا + ص \sqrt{لا} = ط^۲$

$\therefore (ط+۱) لا + ص \sqrt{لا} = ط^۲$

$\therefore لا + \frac{ص}{ط+۱} \sqrt{لا} = \frac{ط^۲}{ط+۱}$

$\therefore لا + \frac{ص}{ط+۱} \sqrt{لا} + \left(\frac{ص}{۲(ط+۱)}\right)^۲ = \frac{ص^۲}{۴(ط+۱)^۲} + \frac{ط^۲}{ط+۱}$

$= \frac{ص^۲ + ۴ط^۲(ط+۱)}{۴(ط+۱)^۲}$

$= \frac{ص^۲ + ۴ط^۳ + ۴ط^۲}{۴(ط+۱)^۲}$

$\therefore \sqrt{لا} + \frac{ص}{۲(ط+۱)} = \pm \frac{\sqrt{ص^۲ + ۴ط^۳ + ۴ط^۲}}{۲(ط+۱)}$

$\therefore لا = \left(\frac{\pm \sqrt{ص^۲ + ۴ط^۳ + ۴ط^۲} - ص}{۲(ط+۱)}\right)^۲$

۱۶ $\sqrt{لا^۳} - ۲\sqrt{لا} - لا = ۰$ طرفین کو $\sqrt{لا}$ پر تقسیم کیا

$\therefore لا - ۲ - \sqrt{لا} = ۰$

$\therefore لا - \sqrt{لا} = ۲$

$\therefore لا - \sqrt{لا} + \frac{۱}{۴} = ۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$ طرفین کا جذر لیا

$\therefore \sqrt{لا} - \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۳}{۲}$

$\therefore \sqrt{لا} = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۳}{۲} = ۲ یا -۱$

$\therefore لا = ۴ یا ۱$

۱۷ $\sqrt{لا^۵} + \sqrt{لا^۳} = ۶\sqrt{لا}$ طرفین کو $\sqrt{لا}$ پر تقسیم کیا

$\therefore لا^۲ + لا = ۶$

$\therefore لا^۲ + لا + \frac{۱}{۴} = ۶ + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$

$\therefore لا + \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۵}{۲}$

$\therefore لا = \pm \frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۲ یا -۳$

۱۸ $\frac{\sqrt{لا}}{۲} لا + \frac{۱}{۶} ۲۲ = \frac{\sqrt{لا}}{۳}$

$\therefore \frac{لا}{۲} - \frac{\sqrt{لا}}{۳} = \frac{۱}{۶} ۲۲$

$\therefore لا - \frac{۲}{۳} \sqrt{لا} + \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۹} + \frac{۱۳۳}{۳}$

$= \frac{۴۰۰}{۹}$

$\therefore \sqrt{لا} - \frac{۱}{۳} = \pm \frac{۲۰}{۳}$

$\therefore \sqrt{لا} = \frac{۱}{۳} \pm \frac{۲۰}{۳} = ۷ یا -\frac{۱۹}{۳}$

$\therefore لا = ۴۹ یا \frac{۳۶۱}{۹}$

۱۹ $\frac{۲ - \frac{\sqrt{۳ لا}}{۵}}{لا - ۵} = \frac{۱}{۲۰}$

طرفین کو ۵ لا - ۵ سے ضرب کیا

$\therefore ۳\sqrt{لا} - ۱۰ = لا - ۵$

$\therefore ۱۲\sqrt{لا} - ۴۰ = لا - ۵$

$\therefore لا - ۱۲\sqrt{لا} = -۳۵$

$\therefore لا - ۱۲\sqrt{لا} + ۳۶ = ۳۶ - ۳۵$

$= ۱$

$\therefore \sqrt{لا} - ۶ = \pm ۱$

$\therefore$ $\sqrt{\text{ل}} = 6 \pm 1 = 7$ یا 5

$\therefore$ ل $= 49$ یا 25

۳۰ $\text{ل}^{\frac{6}{5}} + \text{ل}^{\frac{3}{5}} = 756$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{6}{5}} + \text{ل}^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{4} = 756 + \frac{1}{4}$

$= \frac{3025}{4}$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} = \pm \frac{55}{2}$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{5}} = \pm \frac{55}{2} - \frac{1}{2} = 27$ یا -28

طرفین کا کعب لیا

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{1}{5}} = 3$ یا $\sqrt[3]{-28}$

طرفین کا ۵ مرتبہ کا صعود لیا

$\therefore$ ل $= 243$ یا $(-28)^5$

۳۱ $\text{ل}^{\frac{3}{2}} - \text{ل}^{\frac{3}{4}} = 56$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{2}} - \text{ل}^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} = 56 + \frac{1}{4}$

$= \frac{225}{4}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \pm \frac{15}{2}$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{4}} = \pm \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 8$ یا -7

طرفین کا کعب لیا

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{1}{4}} = 2$ یا $\sqrt[3]{-7}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore$ ل $= 4$ یا $\sqrt[2]{-7}$

۳۲ $3\text{ل}^{\frac{5}{3}} + \text{ل}^{\frac{5}{6}} = 3104$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3} \text{ل}^{\frac{5}{6}} = \frac{3104}{3}$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{36} = \frac{1}{36} + \frac{3104}{3}$

$= \frac{37249}{36}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{6} = \pm \frac{193}{6}$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{5}{6}} = \pm \frac{193}{6} - \frac{1}{6} = 32$ یا $-\frac{97}{3}$

طرفین کا ۵ مرتبہ کا نزول لیا

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{1}{6}} = 2$ یا $\left(-\frac{97}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

طرفین کا ۶ مرتبہ کا صعود لیا

$\therefore$ ل $= 64$ یا $\left(-\frac{97}{3}\right)^{6}$

۳۳ ب $\text{ل}^{\frac{3}{2}}$ + ص $\text{ل}^{\frac{3}{4}}$ = س

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{2}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} \text{ل}^{\frac{3}{4}} = \frac{\text{س}}{\text{ب}}$

طرفین پر $\frac{\text{ص}^2}{4\text{ب}^2}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{2}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} \text{ل}^{\frac{3}{4}} + \frac{\text{ص}^2}{4\text{ب}^2} = \frac{\text{س}}{\text{ب}} + \frac{\text{ص}^2}{4\text{ب}^2}$

$= \frac{4\text{ب}\text{س}}{4\text{ب}^2} + \frac{\text{ص}^2}{4\text{ب}^2}$

$= \frac{\text{ص}^2 + 4\text{ب}\text{س}}{4\text{ب}^2}$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{4}} + \frac{\text{ص}}{2\text{ب}} = \pm \frac{\sqrt{\text{ص}^2 + 4\text{ب}\text{س}}}{2\text{ب}}$

$\therefore$ $\text{ل}^{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{\text{ص}^2 + 4\text{ب}\text{س}} - \text{ص}}{2\text{ب}}$

نزول لیا

طرفین کا $\frac{4}{3}$ مرتبہ کا

$\therefore$ ل $= \left(\pm \frac{\sqrt{\text{ص}^2 + 4\text{ب}\text{س}} - \text{ص}}{2\text{ب}}\right)^{\frac{4}{3}}$

۲۴ $3x^{\frac{4}{3}} - \frac{25}{2}x^{\frac{2}{3}} = -25$

طرفین کی علامتیں بدلیں

$\therefore \frac{25}{2}x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} = 25$

طرفین کو $\frac{5}{2}$ پر تقسیم کیا

$\therefore x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{4}{3}} = \frac{1184}{5}$

$\therefore x^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1184}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$= \frac{5920}{25} + \frac{9}{25}$

$= \frac{5929}{25}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5} = \pm\frac{77}{5}$

$\therefore x^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \pm \frac{77}{5} = 16$ یا $-\frac{74}{5}$ ... رد کیا

طرفین کا $\frac{3}{2}$ مرتبہ کا

$\therefore x = (16)^{\frac{3}{2}}$ یا $\left(-\frac{74}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

$= \left((16)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left((8\times 2)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(8^3 \times 2^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(8^4\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore x = 8$ یا $\left(-\frac{74}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

۲۵ $x + 1 + \sqrt{x+1} = 6$

$\therefore \sqrt{x+1} = 5 - x$

$\therefore x + 1 = 25 + x^2 - 10x$

$\therefore x^2 - 11x + 24 = 0$

$\therefore x^2 - 11x + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = -24 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$

$\therefore x - \frac{11}{2} = \pm\frac{5}{2}$

$\therefore x = \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2} = 8$ یا 3

$\therefore x + 1 = 9$ یا 4 $\therefore x = 8$ یا 3

۲۶ $\sqrt{2x^2 + x + 1} = \frac{21}{2\sqrt{x+1}}$

طرفین کو $2\sqrt{x+1}$ سے ضرب کیا

$\therefore 2x + 2 = \frac{21}{2}\sqrt{x+1}$

$\therefore 2\sqrt{x+1} = 4x - 3$

$\therefore 2x + 1 = 16x^2 - 24x + 9$

$\therefore 16x^2 - 26x + 8 = 0$

$\therefore 8x^2 - 13x + 4 = 0$

$\therefore x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{1}{2} = 0$

$\therefore x^2 - \frac{13}{8}x + \left(\frac{13}{16}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{13}{16}\right)^2$

$\therefore x - \frac{13}{16} = \pm\frac{5}{16}$

$\therefore x = \frac{13}{16} \pm \frac{5}{16} = \frac{1}{2}$ یا $\frac{9}{8}$

۲۷ $2\sqrt{x-a} + 3\sqrt{x} = \frac{5x+7a}{\sqrt{x-a}}$

کسر دور کی

$\therefore 2(x-a) + 3\sqrt{x^2 - ax} = 5x + 7a$

$\therefore 3\sqrt{x^2 - ax} = 9a + 3x$

$\therefore \sqrt{x^2 - ax} = 3a + x$

$\therefore x^2 - ax = 9a^2 + 6ax + x^2$

$\therefore \quad ل^2 - 8ط ل = 9ط^2$

$\therefore \quad ل^2 - 8ط ل + 16ط^2 = 9ط^2 + 16ط^2 = 25ط^2$

$\therefore \quad ل - 4ط = \pm 5ط \quad \therefore ل = 9ط$ یا $-ط$

$\therefore \quad ل = \frac{47}{4} \pm \frac{35}{4} = \frac{41}{2}$ یا 3

$\therefore \quad ل^2 - \frac{47}{2} ل + \left(\frac{47}{4}\right)^2 = \frac{123}{2} - \frac{2209}{16}$

$= \frac{1225}{16}$

$\therefore \quad ل - \frac{47}{4} = \pm \frac{35}{4}$

۲۸ $\sqrt{ل + 60 + \sqrt{ل^2 + 9}} = 2\sqrt{ل^2 + 60ل + 9ل + 540} + 19$

$\therefore$ کسر دور کی $\sqrt{ل^2 + 60ل + 9ل + 540} = \sqrt{ل + 60 + \sqrt{ل^2 + 9}}$

$= 2\sqrt{ل^2 + 60ل + 9ل + 540} + 19$

$\therefore \quad ل^2 + ل + 20 = 0$

$\therefore \quad ل^2 + ل + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 20 = \frac{81}{4}$

$\therefore \quad ل + \frac{1}{2} = \pm \frac{9}{2}$

$\therefore \quad ل = \pm \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ یا -5

۲۹ $\frac{\sqrt{ل} \sqrt{ل + 123} + 41}{\sqrt{ل} \sqrt{ل} - ل} = \frac{\sqrt{ل} \sqrt{ل + 20} + 4}{\sqrt{ل} - 3} - \frac{2ل^2}{(\sqrt{ل} - 3)(\sqrt{ل} - ل)(\sqrt{ل} - 5)}$

اس مساوات کو اسطرح لکھ سکتے ہین

$\frac{41(\sqrt{ل} + 3)}{\sqrt{ل} - ل} = \frac{4(\sqrt{ل} + ل)}{\sqrt{ل} - 3} - \frac{2ل^2}{(\sqrt{ل} - 3)(\sqrt{ل} - ل)(\sqrt{ل} - 5)}$

طرفین مساوات کو $(\sqrt{ل} - 5)(\sqrt{ل} - ل)(\sqrt{ل} - 3)$ سے ضرب کیا

$\therefore \quad 41(ط - ل) = 4(25ل - ل^2) - 2ل^2$

یا $369 - 141ل + 6ل^2 = 100ل - 4ل^2$

$\therefore \quad 6ل^2 - 141ل = -369$

طرفین کو 6 پر تقسیم کیا

$\therefore \quad ل^2 - \frac{47}{2} ل = -\frac{123}{2}$

۳۰ $\frac{ل}{\sqrt{ل}\sqrt{ل} + \sqrt{ط}\sqrt{ط} - ل} + \frac{ل}{\sqrt{ل}\sqrt{ل} - \sqrt{ط}\sqrt{ط} - ل} = \frac{ص}{\sqrt{ل}}$

طرفین کو $(\sqrt{ل}\sqrt{ل} + \sqrt{ط}\sqrt{ط} - ل)(\sqrt{ل}\sqrt{ل} - \sqrt{ط}\sqrt{ط} - ل)$ سے ضرب کیا

$\therefore \quad ل(\sqrt{ل}\sqrt{ل} - \sqrt{ط}\sqrt{ط} - ل + \sqrt{ل}\sqrt{ل} + \sqrt{ط}\sqrt{ط} - ل) = \frac{ص(2ل - ط)}{\sqrt{ل}}$

یعنے $2ل\sqrt{ل} = \frac{ص(2ل - ط)}{\sqrt{ل}}$ کسر دور کی

$\therefore \quad 2ل^2 = 2ص ل - ص ط$

$\therefore \quad 2ل^2 - 2ص ل = -ص ط$

$\therefore \quad ل^2 - ص ل + \frac{ص^2}{4} = \frac{ص^2}{4} - \frac{ص ط}{2}$

$= \frac{ص^2 - 2ص ط}{4}$

$\therefore \quad ل - \frac{ص}{2} = \frac{\sqrt{ص^2 - 2ص ط}}{2}$

$\therefore \quad ل = \frac{\sqrt{ص^2 - 2ص ط} + ص}{2}$

۳۱ $\sqrt{ل + \sqrt{ل + 2}} = 4$

اس مساوات کو اسطرح لکھ سکتے ہین

$\sqrt{ل + \sqrt{ل + 2}} = 6 - 2$

$\therefore \quad \sqrt{ل + 2 + \sqrt{ل + 2}} = 6$

طرفین پر $\frac{1}{4}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore \quad \sqrt{ل + 2 + \sqrt{ل + 2}} + 2 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

$\therefore \sqrt{ل+۲} = \pm\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۳$ یا -۲

$\therefore \sqrt{ل+۲} = ۲$ یا -۳

$\therefore ل+۲ = ۴$ یا ۹

$\therefore ل = ۲$ یا ۷

$\therefore ل = ۴$ یا ۹

۳۲ $\frac{\sqrt{ل+۸}\sqrt{ل^۲-۹}}{\sqrt{ل-۸}\sqrt{ل^۲-۹}} = \frac{(ل-۲)^۲}{۹}$

اس مساوات کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{ل+۸}\sqrt{ل^۲-۹}$ سے ضرب کیا

$\therefore \frac{(ل+۸)(ل^۲-۹)}{۹} = (ل-۲)^۲$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \frac{\sqrt{ل+۸}\sqrt{ل^۲-۹}}{۳} = ل-۲$

$\therefore ل+۸\sqrt{ل^۲-۹} = ۳ل-۶$

$\therefore \sqrt{ل^۲-۹} = ۲ل-۶$

$\therefore ل^۲-۹ = ۴ل^۲-۲۴ل+۳۶$

$۳ل^۲-۲۴ل = -۴۵$

$\therefore ل^۲-۸ل = -۱۵$

$\therefore ل^۲-۸ل+۱۶ = ۱$

$\therefore ل-۴ = \pm ۱$

$\therefore ل = ۴\pm ۱ = ۵$ یا ۳

۳۴ $ل+۵ = \sqrt{ل+۵}+۶$

$\therefore ل+۵-\sqrt{ل+۵} = ۶$

طرفین پر $\frac{۱}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل+۵-\sqrt{ل+۵}+\frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \sqrt{ل+۵}-\frac{۱}{۲} = \pm\frac{۵}{۲}$

$\therefore \sqrt{ل+۵} = \frac{۱}{۲}\pm\frac{۵}{۲} = ۳$ یا -۲

$\therefore ل+۵ = ۹$ یا ۴

$\therefore ل = ۴$ یا -۱

۳۵ $ل+۱۶-۷\sqrt{ل+۱۶} = ۱۰-۴\sqrt{ل+۱۶}$

$\therefore ل+۱۶-۳\sqrt{ل+۱۶} = ۱۰$

$\therefore ل+۱۶-۳\sqrt{ل+۱۶}+\frac{۹}{۴} = \frac{۴۹}{۴}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \sqrt{ل+۱۶}-\frac{۳}{۲} = \pm\frac{۷}{۲}$

$\therefore \sqrt{ل+۱۶} = \frac{۳}{۲}\pm\frac{۷}{۲} = ۵$ یا -۲

$\therefore ل+۱۶ = ۲۵$ یا ۴

$\therefore ل = ۹$ یا -۱۲

۳۶ $\sqrt[۴]{ل+۱۲}+\sqrt{ل+۱۲} = ۶$

طرفین پر $\frac{۱}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore \sqrt[۴]{ل+۱۲}+\sqrt{ل+۱۲}+\frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \sqrt[۴]{ل+۱۲}+\frac{۱}{۲} = \pm\frac{۵}{۲}$

$\therefore \sqrt[۴]{ل+۱۲} = \pm\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲} = ۲$ یا -۳

$\therefore$ $ل + ۱۲ = ۱۶$ یا ۸۱

$\therefore$ $ل = ۴$ یا ۶۹

۳۷ $\sqrt{ل^۲ - ۲ل + ۶} = ۱۱ - ۵ + ۲ل$

ظاہر ہے کہ اگر اس مساوات میں عدد ۵ طرفین پر زیادہ کیا جاوے تو یہ مساوات درجہ دویم کی ہو سکتی ہے اسی واسطے طرفین مساوات پر عدد ۵ کا زیادہ کیا

$\therefore (ل^۲ - ۲ل + ۵) + ۶\sqrt{ل^۲ - ۲ل + ۵} = ۱۶$ کیا

طرفین پر ۳ کا مجذور زیادہ

$\therefore (ل^۲ - ۲ل + ۵) + ۶\sqrt{ل^۲ - ۲ل + ۵} + ۹ = ۲۵$

$\therefore \sqrt{ل^۲ - ۲ل + ۵} + ۳ = \pm ۵$

$\therefore \sqrt{ل^۲ - ۲ل + ۵} = \pm ۵ - ۳ = ۲$ یا -۸

$\therefore$ $ل^۲ - ۲ل + ۵ = ۴$ یا ۶۴

$\therefore$ $ل^۲ - ۲ل = -۱$ یا ۵۹

$\therefore$ $ل^۲ - ۲ل + ۱ = ۰$ یا ۶۰

$\therefore$ $ل - ۱ = ۰$ یا $\pm \sqrt{۶۰}$

$\therefore$ $ل = ۱$ یا $۱ \pm \sqrt{۶۰}$

$= ۱ \pm \sqrt{۱۵ \times ۴}$

$= ۱ \pm \sqrt{۱۵ \times ۲^۲}$

$= ۱ \pm ۲\sqrt{۱۵}$

۳۸ $۲ل^۲ + ۳ل - ۵\sqrt{۲ل^۲ + ۳ل + ۹} + ۳ = ۰$

طرفین مساوات پر عدد ۹ کا زیادہ کیا

$\therefore (۲ل^۲ + ۳ل + ۹) - ۵\sqrt{۲ل^۲ + ۳ل + ۹} = ۶ + ۹$

$\therefore \sqrt{۲ل^۲ + ۳ل + ۹} - \frac{۵}{۲} = \pm \frac{۷}{۲}$

$\therefore \sqrt{۲ل^۲ + ۳ل + ۹} = \frac{۵}{۲} \pm \frac{۷}{۲} = ۶$ یا -۱

$\therefore$ $۲ل^۲ + ۳ل + ۹ = ۳۶$ یا ۱

$\therefore$ $۲ل^۲ + ۳ل = ۲۷$ یا -۸

$\therefore$ $ل^۲ + \frac{۳}{۲}ل = \frac{۲۷}{۲}$ یا -۴

$\therefore$ $ل^۲ + \frac{۳}{۲}ل + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۲۵}{۱۶}$ یا $-\frac{۵۵}{۱۶}$

$\therefore$ $ل + \frac{۳}{۴} = \pm \frac{۱۵}{۴}$ یا $\pm \sqrt{-\frac{۵۵}{۱۶}}$

$\therefore$ $ل = ۳$ یا $-\frac{۹}{۲}$ یا $\pm \sqrt{-\frac{۵۵}{۱۶}} - \frac{۳}{۴}$

۳۹ $(ل - ۲)^۲ - (ل - ۲)^۲ - (ل - ۲) = ۸۸ - (ل - ۲)$

$ل = ۹۰ -$

$\therefore (ل - ۲)^۲ - (ل - ۲)^۲ - (ل - ۲) = ۹۰$

طرفین پر $\frac{۱}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore (ل - ۲)^۲ - (ل - ۲)^۲ - (ل - ۲) + \frac{۱}{۴} = \frac{۳۶۱}{۴}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore (ل - ۲)^۲ - ل - ۲ = \pm \frac{۱۹}{۲}$

$\therefore (ل - ۲)^۲ - ل = ۲ \pm \frac{۱}{۲} = ۱۰$ یا -۹

طرفین پر عدد ۲ زیادہ کیا

$\therefore (ل - ۲)^۲ - (ل - ۲) = ۱۲$ یا -۷

طرفین پر $\frac{۱}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore (ل - ۲)^۲ - (ل - ۲) + \frac{۱}{۴} = \frac{۴۹}{۴}$ یا $-\frac{۲۷}{۴}$

$\therefore (لا-۲) - \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۷}{۲}$ یا $\pm \frac{\sqrt{-۲۷}}{۲}$

$\therefore لا = \frac{۵}{۲} \pm \frac{۷}{۲}$ یا $\frac{۵ \pm \sqrt{-۲۷}}{۲}$

$= ۶$ یا -۱ یا $\frac{۵ \pm \sqrt{-۲۷}}{۲}$

۴۰ $(لا+۶)^{۲} + ۲\sqrt{لا}\,(لا+۶) = ۱۳۸ + \sqrt{لا}$

اس مساوات میں $۲\sqrt{لا}$ کی نصف کا مجذور طرفین پر زیادہ کریں تو اول طرف کامل مجذور ہو جاویگا

$\therefore (لا+۶)^{۲} + ۲\sqrt{لا}\,(لا+۶) + لا = ۱۳۸ + لا + \sqrt{لا}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore (لا+۶) + \sqrt{لا} = \pm \sqrt{۱۳۸ + لا + \sqrt{لا}}$

$\therefore (لا + \sqrt{لا}) + ۶ = \pm \sqrt{۱۳۸ + لا + \sqrt{لا}}$

طرفین کا مجذور کیا

$\therefore (لا + \sqrt{لا})^{۲} + ۱۲(لا + \sqrt{لا}) + ۳۶ = ۱۳۸ + لا + \sqrt{لا}$

$\therefore (لا + \sqrt{لا})^{۲} + ۱۱(لا + \sqrt{لا}) = ۱۰۲$

$\therefore (لا + \sqrt{لا})^{۲} + ۱۱(لا + \sqrt{لا}) + \frac{۱۲۱}{۴} = \frac{۱۲۱}{۴} + ۱۰۲$

طرفین کا جذر لیا $= \frac{۵۲۹}{۴}$

$\therefore لا + \sqrt{لا} + \frac{۱۱}{۲} = \pm \frac{۲۳}{۲}$

$\therefore لا + \sqrt{لا} = ۶$ یا -۱۷

طرفین پر $\frac{۱}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore لا + \sqrt{لا} + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$ یا $-\frac{۶۷}{۴}$

$\therefore \sqrt{لا} + \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۵}{۲}$ یا $\pm \frac{\sqrt{-۶۷}}{۲}$

$\therefore \sqrt{لا} = ۲$ یا -۳ یا $\pm \frac{\sqrt{-۶۷}-۱}{۲}$

$\therefore لا = ۴$ یا ۹ یا $\left(\pm \frac{\sqrt{-۶۷}-۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{-۳۳ \pm \sqrt{-۶۷}}{۲}$

۴۱ $لا - ۱ = ۲ + \frac{۲}{\sqrt{لا}} = \frac{۲(\sqrt{لا}+۱)}{\sqrt{لا}}$

چونکہ $لا - ۱ = (\sqrt{لا}+۱)(\sqrt{لا}-۱)$

$\therefore (\sqrt{لا}+۱)(\sqrt{لا}-۱) = \frac{۲(\sqrt{لا}+۱)}{\sqrt{لا}}$

تقسیم کیا $\sqrt{لا}+۱$ پر طرفین کو

$\therefore \sqrt{لا} - ۱ = \frac{۲}{\sqrt{لا}}$

$\therefore لا - \sqrt{لا} = ۲$

$\therefore لا - \sqrt{لا} + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$

$\therefore \sqrt{لا} - \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۳}{۲}$

$\therefore \sqrt{لا} = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۳}{۲} = ۲$ یا -۱

$\therefore لا = ۴$ یا ۱

۴۲ $لا^{۳} - ۲لا^{۲} + لا = ۱۳۲$

اس مساوات کی اول طرف میں لا جمع بھی کیا اور تفریق بھی کیا

$\therefore لا^{۳} - ۲لا^{۲} + لا^{۲} - (لا^{۲} - لا) = ۱۳۲$

یا $(لا^{۲} - لا)^{۲} - (لا^{۲} - لا) = ۱۳۲$

طرفین پر $\frac{۱}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore (لا^{۲} - لا)^{۲} - (لا^{۲} - لا) + \frac{۱}{۴} = \frac{۵۲۹}{۴}$

$\therefore (\lambda^2 - \lambda) - \frac{1}{4} = \pm \frac{23}{4}$

$\therefore \lambda^2 - \lambda = \frac{1}{4} \pm \frac{23}{2} = 12$ یا -11

$\therefore \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$ یا $-\frac{43}{4}$

$\therefore \lambda - \frac{1}{2} = \pm \frac{7}{2}$ یا $\pm \frac{\sqrt{-43}}{2}$

$\therefore \lambda = 4$ یا -3 یا $\pm \frac{\sqrt{-43}+1}{2}$

۴۳ $(\lambda^2+2\lambda)(\lambda+4) = 2 - (\lambda+4) = -(\lambda+2)$

یعنے $\lambda(\lambda+2)(\lambda+4) = -(\lambda+2)$

طرفین کو $\lambda+2$ پر تقسیم کیا

$\therefore \lambda(\lambda+4) = -1$

یعنے $\lambda^2 + 4\lambda = -1$

$\therefore \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 3$

$\therefore \lambda + 2 = \pm \sqrt{3}$

$\therefore \lambda = \pm \sqrt{3} - 2$

۴۴ $\frac{ط-\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{ط-\lambda} = \frac{ص}{س}$

طرفین کو $ط-\lambda$ میں ضرب کیا

$\therefore \left(\frac{ط-\lambda}{\lambda}\right)^2 + 1 = \frac{ص}{س}\left(\frac{ط-\lambda}{\lambda}\right)$

$\therefore \left(\frac{ط-\lambda}{\lambda}\right)^2 - \frac{ص}{س}\left(\frac{ط-\lambda}{\lambda}\right) = -1$

$\therefore \left(\frac{ط-\lambda}{\lambda}\right)^2 - \frac{ص}{س}\left(\frac{ط-\lambda}{\lambda}\right) + \left(\frac{ص}{2س}\right)^2 = \left(\frac{ص}{2س}\right)^2 - 1$

جذر لیا

$\therefore \frac{ط-\lambda}{\lambda} - \frac{ص}{2س} = \pm \frac{\sqrt{ص^2 - 4س^2}}{2س}$

$\therefore \frac{ط}{\lambda} - 1 = \frac{ص}{2س} \pm \frac{\sqrt{ص^2-4س^2}}{2س} = \frac{ص \pm \sqrt{ص^2-4س^2}}{2س}$

$\therefore \frac{ط}{\lambda} = \frac{ص \pm \sqrt{ص^2-4س^2} + 2س}{2س}$

$\therefore \lambda = \frac{2ط س}{ص \pm \sqrt{ص^2 - 4س^2} + 2س}$

۴۵ $\lambda = \frac{12 + 8\sqrt{\lambda}}{\lambda - 5}$

$\therefore \lambda^2 - 5\lambda = 12 + 8\sqrt{\lambda}$

طرفین پر λ زیادہ کیا

$\therefore \lambda^2 - 4\lambda = 12 + 8\sqrt{\lambda} + \lambda$

۲ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 16 + 8\sqrt{\lambda} + \lambda$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \lambda - 2 = 4 + \sqrt{\lambda}$

$\therefore \lambda - \sqrt{\lambda} = 6$

$\therefore \lambda - \sqrt{\lambda} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

$\therefore \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$

$\therefore \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3$ یا -2

$\therefore \lambda = 9$ یا 4

۴۶ $\frac{49\lambda^2}{4} + \frac{48}{\lambda^2} - 49 = 9 + \frac{6}{\lambda}$

ظاہر ہے کہ اگر طرفین پر $\frac{1}{\lambda^2}$ زیادہ کیا جاوے تو طرفین مجذور کامل بن جاوینگے

$\therefore \frac{۴۹ل^۲}{۴} - ۴۹ + ۹ = \frac{۴۹}{۴ل^۲} + \frac{۶}{ل} + \frac{۱}{ل^۲}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore \frac{۷ل}{۲} - \frac{۷}{ل} = ۳ + \frac{۱}{ل}$

طرفین کو ۲ ل مین ضرب کیا

$\therefore ۷ل^۲ - ۱۴ = ۶ل + ۲$

$\therefore ۷ل^۲ - ۶ل = ۱۶$

$\therefore ل^۲ - \frac{۶}{۷}ل = \frac{۱۶}{۷}$

$\therefore ل^۲ - \frac{۶}{۷}ل + \left(\frac{۳}{۷}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۷} + \frac{۹}{۴۹} = \frac{۱۲۱}{۴۹}$

$\therefore ل - \frac{۳}{۷} = \pm \frac{۱۱}{۷} \therefore ل = ۲ \text{ یا } -\frac{۸}{۷}$

$۷ \quad ۴ \frac{ل^۴}{۲} + \frac{۱۷ل^۳}{۴} - ۱۷ل = ۸$

طرفین کو ۲ مین ضرب کیا

$\therefore ل^۴ + \frac{۱۷ل^۳}{۲} - ۳۴ل = ۱۶$

$\therefore ل^۴ + \frac{۱۷ل^۳}{۲} = ۳۴ل + ۱۶$

طرفین پر $\frac{۱۷ل}{۴}$ کا مجذور زیادہ کیا

$\therefore ل^۴ + \frac{۱۷ل^۳}{۲} + \left(\frac{۱۷ل}{۴}\right)^۲ = \left(\frac{۱۷ل}{۴}\right)^۲ + ۳۴ل + ۱۶$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ل^۲ + \frac{۱۷ل}{۴} = \pm \left(۴ + \frac{۱۷ل}{۴}\right)$

اگر $ل^۲ + \frac{۱۷ل}{۴} = ۴ + \frac{۱۷ل}{۴}$

تو $ل = \pm ۲$

اور اگر $ل^۲ + \frac{۱۷ل}{۴} = -۴ - \frac{۱۷ل}{۴}$

تو $ل^۲ + \frac{۱۷ل}{۲} = -۴$

$\therefore ل^۲ + \frac{۱۷ل}{۴} + \left(\frac{۱۷}{۴}\right)^۲ = \frac{۲۸۹}{۱۶} - ۴$

طرفین کا جذر لیا $= \frac{۲۲۵}{۱۶}$

$\therefore ل + \frac{۱۷}{۴} = \pm \frac{۱۵}{۴}$

$\therefore ل = -\frac{۱}{۲} \text{ یا } -۸$

$۸ \quad ۴ ۲۷ل^۲ - \frac{۲۲۳}{ل^۳} = \frac{۱۷}{۲} + \frac{۸۴۱}{۲ل^۳} + ۵ + \frac{۱}{۲ل^۳}$

طرفین کو ۳ ل^۳ مین ضرب کیا

$\therefore ۸۱ل^۲ - \frac{۲۳۲}{ل} = ۱۷ + \frac{۸۴۱}{۲ل^۲} + ۱۵ + \frac{۱}{۲ل^۲}$

$\therefore ۸۱ل^۲ + ۱۷ + \frac{۸۴۱}{۲ل^۲} + \frac{۱}{۲ل^۲} = ۱۵ + \frac{۲۳۲}{ل}$

ظاہر ہی کہ اگر عدد آکا طرفین پر زیادہ کیا جاوے تو طرفین مجذور رہو جاوین

$\therefore ۸۱ل^۲ + ۱۸ + \frac{۸۴۱}{۲ل^۲} + \frac{۱}{۲ل^۲} = ۱۶ + \frac{۲۳۲}{ل}$

طرفین کا جذر لیا

$\therefore ۹ل + \frac{۱}{ل} = \pm \left(۴ + \frac{۲۹}{ل}\right)$

پس اگر $۹ل + \frac{۱}{ل} = ۴ + \frac{۲۹}{ل}$

تو $۹ل^۲ + ۱ = ۲۹ + ۴ل$

$\therefore ۹ل^۲ - ۴ل = ۲۸$

$\therefore ل^۲ - \frac{۴}{۹}ل = \frac{۲۸}{۹}$

$\therefore ل - \frac{۴}{۹}ل + \left(\frac{۲}{۹}\right)^۲ = \frac{۲۸}{۹} + \frac{۴}{۸۱} = \frac{۲۵۶}{۸۱}$

$\therefore ل - \frac{۲}{۹} = \pm \frac{۱۶}{۹}$

$\therefore ل = ۲ \text{ یا } -\frac{۱۴}{۹}$

اور اگر $۹ل + \frac{۱}{ل} = -۴ - \frac{۲۹}{ل}$

تو $۹ل^۲ + ۱ = -۲۹ - ۴ل$

$\therefore ۹ل^۲ + ۴ل = -۳۰$

مجذور پورا کیا

$\therefore ۹ل^۲ + ۴ل + \frac{۴}{۹} = \frac{۴}{۹} - ۳۰ = -\frac{۲۶۶}{۹}$

طرفین کا جذر لیا

$$\therefore 3\text{لا} + \frac{2}{3} = \pm\frac{\sqrt{-266}}{3}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\pm\sqrt{-266} - 2}{9}$$

۹ ۴ $\left(\text{لا}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\text{ط}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ط}}$

$$\therefore \left(\text{لا}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ط}} - \left(\text{ط}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

طرفین کا مجذور کیا

$$\therefore \text{لا}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}} = \frac{\text{لا}^4}{\text{ط}^2} - \frac{2\text{لا}^2}{\text{ط}}\left(\text{لا}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}} + \text{ط}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}}$$

$$\therefore \text{لا}^2 - \frac{2\text{لا}^2}{\text{ط}}\left(\text{لا}^2 - \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4\text{ط}^2}{2\text{لا}} - \text{ط}^2 = 0$$

$$\text{یا } \text{لا}^2 - \frac{2\text{لا}}{\text{ط}}\left(\text{لا}^2 - \text{ط}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}{2} = 0$$

جذر لیا

$$\therefore \text{لا} - \frac{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}}{\text{ط}} = 0$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}}{\text{ط}}$$

$$\therefore \text{لا}^2 = \frac{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}{\text{ط}^2}$$

$$\therefore \text{لا}^2\text{ط}^2 = \text{لا}^2 - \text{ط}^2$$

$$\therefore \text{لا}^2 - \text{ط}^2\text{لا}^2 = \text{ط}^2$$

$$\therefore \text{لا}^2 - \text{ط}^2\text{لا}^2 + \frac{\text{ط}^4}{4} = \frac{5\text{ط}^4}{4}$$ جذر لیا

$$\therefore \text{لا}^2 - \frac{\text{ط}^2}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}\text{ط}^2}{2}$$

$$\therefore \text{لا}^2 = \frac{\pm\sqrt{5}\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^2}{2} = \frac{\text{ط}^2(1\pm\sqrt{5})}{2}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm\text{ط}\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$$

یہاں سے دو مجہول کی مرکب مساواتیں حل کیجاتی ہیں

۱ $\text{لا} - \text{ک} = 15 \quad \ldots\ldots (1)$

$$\frac{\text{لا}^2}{2} = \text{ک}^3 \quad \ldots\ldots (2)$$

مساوات (۲) کو ک پر تقسیم کیا تو $\text{لا} = 2\text{ک}^2$

اور یہہ قیمت لا کی مساوات (۱) میں لکھی

تو $2\text{ک}^2 - \text{ک} = 15$

$$\therefore \text{ک}^2 - \frac{1}{2}\text{ک} = \frac{15}{2}$$

طرفین پر $\frac{1}{16}$ کا مجذور زیادہ کیا

$$\therefore \text{ک}^2 - \frac{1}{2}\text{ک} + \frac{1}{16} = \frac{121}{16}$$

$$\therefore \text{ک} - \frac{1}{4} = \pm\frac{11}{4}$$

$$\therefore \text{ک} = \frac{1}{4} \pm \frac{11}{4} = 3 \text{ یا } -\frac{5}{2}$$

اور $\text{لا} = 2\text{ک}^2 = 18$ یا $\frac{25}{2}$

۲ $\frac{10\text{لا} + \text{ک}}{\text{لا}\text{ک}} = 3 \quad \ldots\ldots (1)$

$9\text{ک} - 9\text{لا} = 18 \quad \ldots\ldots (2)$ تقسیم کیا

مساوات (۲) کو 9 پر

$$\therefore \text{ک} - \text{لا} = 2$$

$$\therefore \text{ک} = \text{لا} + 2 \quad \ldots\ldots (3)$$

اور مساوات (۲) سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$10\text{لا} + \text{ک} = 3\text{لا}\text{ک}$ لکھے ہوئے

اسمیں قیمت ک کی جو مساوات (۳) سے حاصل

$$\therefore 10\text{لا} + \text{لا} + 2 = 3\text{لا}^2 + 6\text{لا}$$

$$\therefore 3\text{لا}^2 - 5\text{لا} = 2$$

$$\therefore \text{لا}^2 - \frac{5}{3}\text{لا} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ $\text{ل}^2 - \frac{5}{3}\text{ل} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{25}{36} = \frac{49}{36}$

$\therefore$ $\text{ل} - \frac{5}{6} = \pm\frac{7}{6}$

$\therefore$ $\text{ل} = \frac{5}{6} \pm \frac{7}{6} = 2$ یا $-\frac{1}{3}$

اور مساوات (۳) سی $\text{ک} = \text{ل} + 2 = 4$ یا $\frac{5}{3}$

۳ $(\text{ل}+\text{ک}) : (\text{ل}-\text{ک}) :: 13 : 5$ ..... (۱)

اور $\text{ک}^2 + \text{ل} = 25$ ..... (۲)

تناسب (۱) سی یہہ حاصل ہوتا ہی

$5(\text{ل}+\text{ک}) = 13(\text{ل}-\text{ک})$

$\therefore$ $\frac{\text{ل}+\text{ک}}{\text{ل}-\text{ک}} = \frac{13}{5}$ ..... (۳)

$\therefore$ $\frac{\text{ل}+\text{ک}+\text{ل}-\text{ک}}{\text{ل}-\text{ک}} = \frac{13+5}{5}$ طرفین پر عدد آکا زیادہ کیا

یا $\frac{2\text{ل}}{\text{ل}-\text{ک}} = \frac{18}{5}$ ..... (۴) کیا

اور پہر مساوات (۳) کے طرفین سی عدد آکا تفریق کیا

$\therefore$ $\frac{2\text{ک}}{\text{ل}-\text{ک}} = \frac{8}{5}$ ..... (۵)

مساوات (۴) کو مساوات (۵) پر تقسیم کیا

$\therefore$ $\frac{\text{ل}}{\text{ک}} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

$\therefore$ $\text{ل} = \frac{9}{4}\text{ک}$ یہہ قیمت لا کی مساوات (۲) مین لکھی

تو $\text{ک}^2 + \frac{9}{4}\text{ک} = 25$

$\therefore$ $\text{ک}^2 + \frac{9}{4}\text{ک} + \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 25 + \frac{81}{64} = \frac{1681}{64}$

$\therefore$ $\text{ک} + \frac{9}{8} = \pm\frac{41}{8}$

$\therefore$ $\text{ک} = \pm\frac{41}{8} - \frac{9}{8} = 4$ یا $-\frac{25}{4}$

اور $\text{ل} = \frac{9}{4}\text{ک} = 9$ یا $-\frac{225}{16}$

۴ $4\text{ل}\text{ک} = 96 - \text{ل}^2\text{ک}^2$ ..... (۱)

$\text{ل}+\text{ک} = 6$ ..... (۲)

مساوات (۱) سی یہہ مساوات مرکب درجہ دوم کی حاصل ہوتی ہی

$\text{ل}^2\text{ک}^2 + 4\text{ل}\text{ک} = 96$

$\therefore$ $\text{ل}^2\text{ک}^2 + 4\text{ل}\text{ک} + 4 = 100$

$\therefore$ $\text{ل}\text{ک} + 2 = \pm 10$

$\therefore$ $\text{ل}\text{ک} = 8$ یا -12

$\therefore$ $4\text{ل}\text{ک} = 32$ یا -48

مساوات (۲) کا مجذور کیا

$\therefore$ $\text{ل}^2 + 2\text{ل}\text{ک} + \text{ک}^2 = 36$

$4\text{ل}\text{ک} = 32$ یا -48

$\therefore$ $\text{ل}^2 - 2\text{ل}\text{ک} + \text{ک}^2 = 4$ یا 84 تفریق کی

$\therefore$ $\text{ل} - \text{ک} = \pm 2$ یا $\pm\sqrt{84}$

اور $\text{ل}+\text{ک} = 6$

جمع کیا

$\therefore$ $2\text{ل} = 8$ یا 4 یا $6 \pm \sqrt{84}$

$\therefore$ $\text{ل} = 4$ یا 2 یا $3 \pm \frac{\sqrt{4\times 21}}{2}$

$= \pm\frac{2\sqrt{21}}{2}$

$= \pm\sqrt{21}$

اور تفریق کرنی سی $2\text{ک} = 4$ یا $8 \pm \sqrt{84}$

$\therefore$ $\text{ک} = 2$ یا $4 \pm \sqrt{21}$

۵ $لا^ن + ی^ن = ۲ط^ن$ ..... (۱)

$لا ی = س^۲$ ..... (۲)

مساوات (۲) سے $ی = \frac{س^۲}{لا}$ (۱) میں لکھے

$\therefore ی^ن = \frac{س^{۲ن}}{لا^ن}$ یہ قیمت $ی^ن$ کی مساوات

$\therefore لا^ن + \frac{س^{۲ن}}{لا^ن} = ۲ط^ن$ کسر دور کی

$\therefore لا^{۲ن} + س^{۲ن} = ۲ط^ن لا^ن$

$\therefore لا^{۲ن} - ۲ط^ن لا^ن = -س^{۲ن}$ کیا

طرفین پر $ط^ن$ کا مجذور زیادہ

$\therefore لا^{۲ن} - ۲ط^ن لا^ن + ط^{۲ن} = ط^{۲ن} - س^{۲ن}$ جذر لیا

$\therefore لا^ن - ط^ن = \pm \sqrt{ط^{۲ن} - س^{۲ن}}$

$\therefore لا^ن = ط^ن \pm \sqrt{ط^{۲ن} - س^{۲ن}}$

$\therefore لا = \left(ط^ن \pm \sqrt{ط^{۲ن} - س^{۲ن}}\right)^{\frac{۱}{ن}}$

اور $ی = \frac{س^۲}{لا} = \frac{س^۲}{\left(ط^ن \pm \sqrt{ط^{۲ن} - س^{۲ن}}\right)^{\frac{۱}{ن}}}$

۶ $لا^۲ + لا + ی = ۱۸ - ی^۲$ ..... (۱)

$لا ی = ۶$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $لا^۲ + ی^۲ + لا + ی = ۱۸$

مساوات (۲) سے $۲ لا ی = ۱۲$

جمع کیا $\therefore لا^۲ + ۲ لا ی + ی^۲ + لا + ی = ۳۰$

یعنی $(لا + ی)^۲ + (لا + ی) = ۳۰$

$\therefore (لا + ی)^۲ + (لا + ی) + \frac{۱}{۴} = ۳۰ + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۲۱}{۴}$

$\therefore لا + ی + \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۱۱}{۲}$

$\therefore لا + ی = ۵$ یا -۶

یہ قیمت $لا + ی$ کی مساوات (۱) میں لکھی

$\therefore لا^۲ + ی^۲ = ۱۳$ یا ۲۴

مساوات (۲) سے $۲ لا ی = ۱۲$

تفریق کی $\therefore لا^۲ - ۲ لا ی + ی^۲ = ۱$ یا ۱۲

طرفین کا جذر لیا $\therefore لا - ی = \pm ۱$ یا $\pm \sqrt{۱۲}$

$لا + ی = ۵$ یا -۶

جمع کیا $۲ لا = ۶$ یا ۴ یا $-۶ \pm \sqrt{۴ \times ۳}$

$\therefore لا = ۳$ یا ۲ یا $-۳ \pm \sqrt{۳}$

اور تفریق سی $۲ ی = ۴$ یا ۶ یا $-۶ \pm \sqrt{۴ \times ۳}$

$\therefore ی = ۲$ یا ۳ یا $-۳ \mp \sqrt{۳}$

۷ $لا^۲ + ۲ لا ی + ی^۲ + ۲ لا = ۱۲۰ - ۲ ی$ ..... (۱)

$لا ی - ی^۲ = ۸$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $(لا + ی)^۲ + ۲ (لا + ی) = ۱۲۰$

$\therefore (لا + ی)^۲ + ۲ (لا + ی) + ۱ = ۱۲۱$

$\therefore (لا + ی) + ۱ = \pm ۱۱$

$\therefore لا + ی = ۱۰$ یا -۱۲ ..... (ط)

مساوات (۲) سے $لا - ی = \frac{۸}{ی}$

$\therefore ۲ لا = \frac{۸}{ی} + ۱۰$ یا $\frac{۸}{ی} - ۱۲$

$\therefore$ لا $= \frac{۴}{ی} + ۵$ یا $\frac{۴}{ی} - ۶$

$\therefore$ لای $= ۴ + ۵$ ی یا $۴ - ۶$ ی

مساوات (۲) سے لای $= ی^۲ + ۸$

$\therefore ی^۲ + ۸ = ۴ + ۵$ ی یا $۴ - ۶$ ی سے ہر

حاصل ہوتا ہے

صورت اول یعنے $ی^۲ + ۸ = ۴ + ۵$ ی سی اسطرح قیمت دی کی

$ی^۲ - ۵ی = - ۴$

$\therefore ی^۲ - ۵ی + \frac{۲۵}{۴} = \frac{۲۵}{۴} - ۴ = \frac{۹}{۴}$

$\therefore ی - \frac{۵}{۲} = \pm \frac{۳}{۲}$

$\therefore ی = \frac{۵}{۲} \pm \frac{۳}{۲} = ۴$ یا ۱ دریافت ہوتے ہیں

صورت دوسری یعنے $ی^۲ + ۸ = ۴ - ۶$ ی سی اسطرح قیمت دی کی

$ی^۲ + ۶ی = - ۴$

$\therefore ی^۲ + ۶ی + ۹ = ۵$

$\therefore ی + ۳ = \pm \sqrt{۵}$

$\therefore ی = \pm \sqrt{۵} - ۳$

اور لا $= \frac{۴}{ی} + ۵ = \frac{۴}{۱} + ۵ = ۹$ یا $\frac{۴}{۴} + ۵ = ۶$

اور بوسیلہ مساوات (ط) کے لا $= - ی - ۱۲ = - ۹ \mp \sqrt{۵}$

۸ لا $- ۲ \sqrt{لای} + ی - \sqrt{لا} + \sqrt{ی} = ۰$ (۱)

$\sqrt{لا} + \sqrt{ی} = ۵$ ..... (۲)

مساوات (۱) مین $\frac{۱}{۲}$ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore$ لا $- ۲ \sqrt{لای} + ی - (\sqrt{لا} - \sqrt{ی}) + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$

جذر لیا $\therefore \sqrt{لا} - \sqrt{ی} - \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۱}{۲}$

(۲) سے $\sqrt{لا} + \sqrt{ی} = ۵$

جمع کیا $۲ \sqrt{لا} = ۶$ یا ۵

$\therefore \sqrt{لا} = ۳$ یا $\frac{۵}{۲}$

$\therefore$ لا $= ۹$ یا $\frac{۲۵}{۴}$

اور تفریق کرنی سے $۲ \sqrt{ی} = ۴$ یا ۵

$\therefore \sqrt{ی} = ۲$ یا $\frac{۵}{۲}$

اور ی $= ۴$ یا $\frac{۲۵}{۴}$

۹ $\frac{لا^۲}{ی^۲} + \frac{۴لا}{ی} = \frac{۸۵}{۹}$ ..... (۱)

لا $- ی = ۲$ ..... (۲)

مساوات (۱) مین مجذور پورا کیا یعنی ۲ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore \frac{لا^۲}{ی^۲} + \frac{۴لا}{ی} + ۴ = ۴ + \frac{۸۵}{۹} = \frac{۱۲۱}{۹}$

$\therefore \frac{لا}{ی} + ۲ = \pm \frac{۱۱}{۳}$

$\therefore \frac{لا}{ی} = \pm \frac{۱۱}{۳} - ۲ = \frac{۵}{۳}$ یا $- \frac{۱۷}{۳}$

$\therefore$ لا $= \frac{۵ی}{۳}$ یا $- \frac{۱۷ی}{۳}$

مساوات (۲) سے لا $= ی + ۲$

$\therefore ی + ۲ = \frac{۵ی}{۳}$ یا $- \frac{۱۷ی}{۳}$

$\therefore ۳ی + ۶ = ۵ی$ یا $- ۱۷ی$

$\therefore ۲ی = ۶$

اور ی $= ۳$

یا $۳۰ د = -۶$

$\therefore د = -\frac{۳}{۱۰}$

اور $لا = د + ۲ = ۵$ یا $\frac{۱۷}{۱۰}$

۱۰ $۱۰ \sqrt{\frac{۳ لا}{لا + د}} + \sqrt{\frac{لا + د}{۳ لا}} = ۲ \quad \ldots (۱)$

$لا د - (لا + د) = ۵۴ \quad \ldots (۲)$

مساوات (۱) کو $\sqrt{۳ لا} \sqrt{لا + د}$ مین ضرب کیا تو یہہ حاصل ہوا

$۳ لا + لا + د = ۲ \sqrt{۳ لا} \sqrt{لا + د}$

$\therefore ۳ لا - ۲ \sqrt{۳ لا} \sqrt{لا + د} + لا + د = ۰$

طرفین کا جذر لیا: $\therefore \sqrt{۳ لا} - \sqrt{لا + د} = ۰$

$\therefore \sqrt{۳ لا} = \sqrt{لا + د}$

طرفین کا مجذور کیا: $\therefore ۳ لا = لا + د$

$\therefore ۲ لا = د$ یہہ قیمت کو (۲) مین لکھکر

$\therefore ۲ لا^۲ - (لا + ۲ لا) = ۵۴$

$\therefore ۲ لا^۲ - ۳ لا = ۵۴$

$\therefore لا^۲ - \frac{۳}{۲} لا = ۲۷$

$\therefore لا^۲ - \frac{۳}{۲} لا + \frac{۹}{۱۶} = ۲۷ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۴۳۱}{۱۶}$

$\therefore لا - \frac{۳}{۴} = \pm \frac{۲۱}{۴}$

$\therefore لا = \frac{۳}{۴} \pm \frac{۲۱}{۴} = ۶ \text{ یا } -\frac{۹}{۲}$

اور $د = ۲ لا = ۱۲$ یا -۹

۱۱ $لا د + لا^۲ = ۱۲ \quad \ldots (۱)$

$لا + لا د = ۱۸ \quad \ldots (۲)$

مساوات (۱) سی $لا = \frac{۱۲}{د (۱ + د)}$

مساوات (۲) سی $لا = \frac{۱۸}{۱ + ۳ د}$

$\therefore \frac{۱۲}{د (۱ + د)} = \frac{۱۸}{(۱ + ۳ د)} = \frac{۳ \times ۶}{(۱ + د)(۲ د - د + ۱)}$

طرفین کا اختصار کیا: $\therefore \frac{۲}{د} = \frac{۳}{۲ د - د + ۱}$

$\therefore ۲ د^۲ - ۲ د + ۲ = ۳ د$

$\therefore ۲ د^۲ - ۵ د = -۲$

$\therefore د^۲ - \frac{۵}{۲} د = -۱$

$\therefore د^۲ - \frac{۵}{۲} د \pm \frac{۲۵}{۱۶} = -۱ - \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶}$

$\therefore د - \frac{۵}{۴} = \pm \frac{۳}{۴}$

$\therefore د = \frac{۵}{۴} \pm \frac{۳}{۴} = ۲ \text{ یا } \frac{۱}{۲}$

اور $لا = \frac{۱۲}{د + د^۲} = ۲ \text{ یا } ۱۶$

۱۲ $لا - لا^{\frac{۱}{۲}} = ۳ - د \quad \ldots (۱)$

$۴ - لا = د - د^{\frac{۱}{۲}} \quad \ldots (۲)$

دونو کو جمع کیا: $\therefore ۴ - لا^{\frac{۱}{۲}} = ۳ - د^{\frac{۱}{۲}}$

$\therefore د^{\frac{۱}{۲}} = لا^{\frac{۱}{۲}} - ۱$

$\therefore د = (لا^{\frac{۱}{۲}} - ۱)^۲$ یہہ قیمت د کی (۱) مساوات مین لکھی

$\therefore لا - لا^{\frac{۱}{۲}} = ۳ - (لا^{\frac{۱}{۲}} - ۱)^۲ = ۳ - لا + ۲ لا^{\frac{۱}{۲}} - ۱$

$\therefore ۲ لا^{\frac{۱}{۲}} - ۳ لا^{\frac{۱}{۲}} = ۲$

$\therefore لا - \frac{۳}{۲} لا^{\frac{۱}{۲}} = ۱$

$\therefore لا - \frac{۳}{۲} لا^{\frac{۱}{۲}} + \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶}$

$\therefore \frac{1}{2}\text{ل} - \frac{3}{4} = \pm\frac{5}{4}$ ..... (۲)

$\therefore \frac{1}{2}\text{ل} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} = 2$ یا $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ ل $= 4$ یا $\frac{1}{4}$

اور ع $= (\frac{1}{2}\text{ل} - 1)^2 = 1$ یا $\frac{9}{4}$

۱۳ $\frac{3}{2}\text{ل} + \frac{3}{2}\text{ع} = 2$ ع ..... (۱) $\therefore$

$8\frac{1}{2}\text{ل} - \frac{1}{2}\text{ع} = 14$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $\frac{1}{2}\text{ل} = \frac{2\text{ع}}{\frac{3}{2}\text{ع} + \frac{3}{2}\text{ع}} = \frac{2\text{ع}}{2\text{ع}} = 2\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}\text{ل} = \frac{1}{2}$

یہ قیمت $\frac{1}{2}$ کی مساوات (۲) میں لکھی

$\therefore 8\frac{1}{2}\text{ل} - \frac{1}{2}\text{ل} = 14$

کسر دور کی $\therefore 16\frac{1}{2}\text{ل} - \frac{1}{2}\text{ل} = 28$

علامتیں طرفین کی بدلیں $\therefore \frac{1}{2}\text{ل} - 16\frac{1}{2}\text{ل} = -28$

مجذر پورا کیا $\therefore \frac{1}{2}\text{ل} - 16\frac{1}{2}\text{ل} + 64 = 64 - 28 = 36$

جذر لیا $\therefore \frac{1}{2}\text{ل} - 8 = \pm 6$

$\therefore \frac{1}{2}\text{ل} = 8 \pm 6 = 14$ یا 2

مکعب کیا $\therefore$ ل $= (14)^3$ یا 8

اور $\frac{1}{2}\text{ع} = \frac{1}{2}\text{ل} = 8$ یا 2

$\therefore$ ع $= (8)^2$ یا 4

۱۴ $\frac{3}{2}\text{ل} + \frac{3}{2}\text{ع} = 3$ ل ..... (۱)

$\frac{1}{2}\text{ل} + \frac{3}{2}\text{ع} = 3$ ل ..... (۲)

مساوات (۲) کا مجذر کیا $\text{ل} + 2\frac{1}{2}\text{ل}\frac{1}{2}\text{ع} + \frac{3}{2}\text{ع} = 9\text{ل}^2$

اور مساوات (۱) سے $\frac{3}{2}\text{ل} + \frac{3}{2}\text{ع} = 3$ ل

تفریق کی $\therefore$ ل $- 2\frac{1}{2}\text{ل}\frac{1}{2}\text{ع} = 9\text{ل}^2 - 3$ ل

اور مساوات (۲) سے $\frac{1}{2}\text{ع} = \text{ل} - \frac{1}{2}\text{ل}$ یہ قیمت $\frac{1}{2}\text{ع}$ کی حاصل تفریق میں

$\therefore$ ل $- \frac{3}{2}\text{ل} + 2\text{ل}^2 = 9\text{ل}^2 - 3$ ل

$\therefore \frac{3}{2}\text{ل} - 2\text{ل}^2 = 0$

طرفین کو ل پر تقسیم کیا $\therefore \frac{1}{2}\text{ل} - 2 = 0$

$\therefore \frac{1}{2}\text{ل} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$\therefore \frac{1}{2}\text{ل} - \frac{1}{4} = \pm\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}\text{ل} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{2} = 2$ یا -1

$\therefore$ ل $= 4$ یا 1

اور $\frac{1}{2}\text{ع} = \text{ل} - \frac{1}{2}\text{ل} = 2$

$\therefore$ ع $= 8$

۱۵ ل $+ \frac{1}{2}\text{ل} = \frac{2\text{ع} + \text{ع} + 2}{\frac{1}{2}\text{ل}} + 4$ ..... (۱)

ع $+$ ل ع $= \text{ع}^2 + 4$ ع ..... (۲)

مساوات (۱) سے $\frac{3}{2}\text{ل} + \text{ل} - 4\frac{1}{2}\text{ل} = \text{ع}^2 + \text{ع} + 2$ ..... (۳)

مساوات (۲) سے ل $= \text{ع} + 3$ یہ قیمت ل کی مساوات (۳) میں لکھی

$\therefore \frac{3}{2}\text{ل} + \text{ع} + 3 - 4\frac{1}{2}\text{ل} = \text{ع}^2 + \text{ع} + 2$

$\therefore \frac{3}{2}\text{ل} - 4\frac{1}{2}\text{ل} = \text{ع}^2 - 1$

یا $\frac{1}{2}\text{ل}(\text{ل} - 4) = (\text{ع} - 1)(\text{ع} + 1)$ ..... (۴)

اور چونکہ $لا = ک + ۳$ ∴ $لا - ۴ = ک - ۱$ ....(۵)

مساوات (۴) کو مساوات (۵) پر تقسیم کیا

$$\therefore \frac{لا^۲}{ک} = ک + ۱$$

$$\therefore لا^۲ = ک^۲ + ۲ک + ۱$$

اور مساوات (۲) سے $لا = ک + ۳$

$$\therefore ک^۲ + ۲ک + ۱ = ک + ۳$$

$$\therefore ک^۲ + ک = ۲$$

$$\therefore ک^۲ + ک + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

$$\therefore ک + \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۳}{۲}$$

$$\therefore ک = \pm \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱ \text{ یا } -۲$$

اور $\frac{لا^۲}{ک} = ک + ۱ = ۲ \text{ یا } -۱$

$$\therefore لا = ۴ \text{ یا } ۱$$

۱۶ $\frac{لا^۲}{ک^۲} + \frac{ک}{لا} + \frac{لا}{ک} = ۶ - \frac{۳}{۴}$ ....(۱)

اور $لا - ک = ۲$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $\frac{لا^۲}{ک^۲} + \frac{ک^۲}{لا^۲} + \frac{ک}{لا} + \frac{لا}{ک} = \frac{۲۷}{۴}$

طرفین پر عدد ۲ کا زیادہ کیا

$$\therefore \frac{لا^۲}{ک^۲} + ۲ + \frac{ک^۲}{لا^۲} + \frac{ک}{لا} + \frac{لا}{ک} = \frac{۳۵}{۴}$$

یعنے $\left(\frac{لا}{ک} + \frac{ک}{لا}\right)^۲ + \left(\frac{لا}{ک} + \frac{ک}{لا}\right) = \frac{۳۵}{۴}$

مجمد ور پورا کیا $\left(\frac{لا}{ک} + \frac{ک}{لا}\right)^۲ + \left(\frac{لا}{ک} + \frac{ک}{لا}\right) + \frac{۱}{۴} = \frac{۳۶}{۴}$

جذر لیا ∴ $\frac{لا}{ک} + \frac{ک}{لا} + \frac{۱}{۲} = \pm \frac{۶}{۲}$

∴ $\frac{لا}{ک} + \frac{ک}{لا} = \frac{۵}{۲} \text{ یا } -\frac{۷}{۲}$

کسر دور کی ∴ $لا^۲ + ک^۲ = \frac{۵لاک}{۲} \text{ یا } -\frac{۷لاک}{۲}$

دوسری مساوات کی مجدد سے $لا^۲ + ک^۲ = ۲لاک + ۴$

∴ $۲لاک + ۴ = \frac{۵لاک}{۲} \text{ یا } -\frac{۷لاک}{۲}$

∴ $۴لاک + ۸ = ۵لاک \text{ یا } -۷لاک$

∴ $لاک = ۸ \text{ یا } -\frac{۸}{۱۱}$ ..... (۳)

(۲) مساوات کی مجدد سے $لا^۲ - ۲لاک + ک^۲ = ۴$

(۳) مساوات سی $۴لاک = ۳۲ \text{ یا } -\frac{۳۲}{۱۱}$

جمع کرنی سی $لا^۲ + ۲لاک + ک^۲ = ۳۶ \text{ یا } \frac{۱۲}{۱۱}$

جذر لیا ∴ $لا + ک = \pm ۶ \text{ یا } \left(\pm \sqrt{\frac{۱۲}{۱۱}} = \pm \sqrt{\frac{۳×۴}{۱۱}}\right)$

اور مساوات (۲) سے $لا - ک = ۲$ $\pm ۲\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}$

جمع کیا ∴ $۲لا = ۸ \text{ یا } -۴ \text{ یا } ۲ \pm ۲\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}$

∴ $لا = ۴ \text{ یا } -۲ \text{ یا } ۱ \pm \sqrt{\frac{۳}{۱۱}}$

اور تفریق کرنی سے $۲ک = ۴ \text{ یا } -۸ \text{ یا } -۲ \pm ۲\sqrt{\frac{۳}{۱۱}}$

∴ $ک = ۲ \text{ یا } -۴ \text{ یا } -۱ \pm \sqrt{\frac{۳}{۱۱}}$

۱۷ $ک \sqrt{لا} + لا \sqrt{ک} = ۲ \sqrt{لاک}$ ..... (۱)

اور $\frac{ک+۲}{\sqrt{لا}} - \frac{۳\sqrt{لا}+۱}{\sqrt{ک}} = ۱$ ..... (۲)

جب چار مقدار متناسب ہوتے ہیں تو اول اور دوسری کے مجموعہ کو اول اور دوسری کے حاصل تفریق کی نسبت وہ نسبت ہوتی ہے جو تیسری اور چوتھی مقدار کی مجموعہ کو تیسری اور چوتھی کی حاصل تفریق سی ہی اور ثبوت اسکا بعد مساواتوں کے

ہوگا پس موافق بیان بالا کی تناسب (۱) سے یہ تناسب حاصل ہوتا ہے

$$\text{جا}\,ک : \text{جا}\,۲ل :: \text{جا}\,ل : \text{جا}\,۳ل$$

یا $\text{جا}\,ک : \text{جا}\,ل :: \text{جا}\,۲ل : \text{جا}\,۳ل$

$\therefore \text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک + \text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک = \text{جا}\,۲ل\,\text{جا}\,۳ل \ldots (۳)$

مساوات (۲) سے $\text{جا}\,۲ل\,\text{جا}\,ک - \text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک = \text{جا}\,۳ل + \text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک$

$\therefore \text{جا}\,ک + \text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک = \text{جا}\,۳ل + \text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک$

اور (۳) مساوات سے $\text{جا}\,ک + \text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک = \text{جا}\,ل + \text{جا}\,۳ل\,\text{جا}\,ل$

جمع کیا $\therefore ک + ۲\,\text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک = ۴\,\text{جا}\,ل + ۴\,\text{جا}^۲ل$

مجذور آکائی $\therefore ک + ۲\,\text{جا}\,ل\,\text{جا}\,ک + \text{جا}^۲ل = ۴\,\text{جا}^۲ل + ۴\,\text{جا}\,ل + ۱$

جذر لیا $\therefore \text{جا}\,ک + \text{جا}\,ل = \pm(۲\,\text{جا}\,ل + ۱)$

پس اگر مثبت قیمت لیں تو یہ حاصل ہوتا ہے

یعنی $\text{جا}\,ک + \text{جا}\,ل = ۲\,\text{جا}\,ل + ۱$ لکھ کر

$\therefore \text{جا}\,ک = ۲\,\text{جا}\,ل$ یہ قیمت مساوات (۳) کی

$\therefore ل + ۳\,\text{جا}\,ل = ۲\,\text{جا}\,ل + ۲ل$

$\therefore ل = \text{جا}\,ل$

$\therefore \text{جا}\,ل = ۱$

$\therefore ل = ۱$

اور $\text{جا}\,ک = ۲\,\text{جا}\,ل = ۲$

$\therefore ک = ۴$

۱۸ $ک + \text{جا}\,ل = \frac{۴۲}{ل} \ldots\ldots (۱)$

$\frac{ل^۲}{۳} + \frac{ل}{\text{جا}\,ک} = \frac{۵۴}{ک} \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) میں مجذور پورا کیا $\frac{۱}{ل^۲}$ کا

مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore ک + \text{جا}\,ل = \frac{ک}{ل} + \frac{۴۲}{ل} = \frac{۱}{ل^۲} + \frac{۱۶۹}{ل^۲}$

جذر لیا $\therefore \text{جا}\,ک + \text{جا}\,ل = \frac{ک}{ل} + \frac{۱}{ل} = \pm\frac{۱۳}{ل}$

$\therefore \text{جا}\,ل = \frac{۶}{ل} \text{ یا } -\frac{۷}{ل} \ldots (۳)$

$\therefore ک = \frac{۳۶}{ل} \text{ یا } \frac{۴۹}{ل} \ldots (۴)$

مساوات (۲) سے $\frac{ل^۲}{۳} + \frac{ل}{\text{جا}\,ک} = \frac{۱۶۲}{ک}$

مجذور پورا کیا یعنی $\frac{۳}{\text{جا}\,ک}$ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore \frac{ل^۲}{۳} + \frac{ل}{\text{جا}\,ک} + \frac{۹}{\text{جا}^۲ک} = \frac{۱۶۲}{ک} + \frac{۹}{\text{جا}^۲ک} = \frac{۲۶۰۲}{\text{جا}^۲ک}$

جذر لیا $\therefore ل + \frac{۳}{\text{جا}\,ک} = \pm\frac{۵۱}{\text{جا}\,ک}$

$\therefore ل = \frac{۱۳}{\text{جا}\,ک} \text{ یا } -\frac{۲۷}{\text{جا}\,ک}$

لیکن مساوات (۳) سے $\text{جا}\,ک = \frac{۶}{ل} \text{ یا } -\frac{۷}{ل}$

$\therefore ل = ۲\,\text{جا}\,ل \text{ یا } -\frac{۱۲}{۷}\,\text{جا}\,ل \text{ یا } \frac{۹}{۴}\,\text{جا}\,ل \text{ یا } -\frac{۲۷}{۱۴}\,\text{جا}\,ل$

$\therefore \text{جا}\,ل = ۲ \text{ یا } -\frac{۱۲}{۷} \text{ یا } \frac{۹}{۴} \text{ یا } -\frac{۲۷}{۱۴}$

$\therefore ل = ۴ \text{ یا } \frac{۱۴۴}{۴۹} \text{ یا } \frac{۸۱}{۱۶} \text{ یا } -\frac{۷۲۹}{۱۹۶}$

اور $ک = \frac{۳۶}{ل} \text{ یا } \frac{۴۹}{ل}$ مساوات (۴) سے

$\therefore ک = ۹ \text{ یا } \frac{۴۹}{۴} \text{ یا } \frac{۷۸۴}{۸۱} \text{ یا } -\frac{۱۹۶ \times ۴۹}{۷۲۹}$

۲۹ $\frac{x^2}{y^2}+\frac{3x+y}{y}-20=\frac{y^2+11x}{y}$ ... (۱)

$x+8=4y$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $\frac{x^2}{y^2}+\frac{3x}{y}+\sqrt{y}=20-y-\frac{11x}{y}$

$\therefore \frac{x^2}{y^2}+\frac{3x}{y}+y+\frac{11x}{y}+\sqrt{y}=20$

یا $\left(\frac{x}{y}+\sqrt{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}+\sqrt{y}\right)=20$

مجذور پورا کیا $\therefore \left(\frac{x}{y}+\sqrt{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}+\sqrt{y}\right)+\frac{1}{4}=\frac{81}{4}$

جذر لیا $\therefore \frac{x}{y}+\sqrt{y}+\frac{1}{2}=\pm\frac{9}{2}$

$\therefore \frac{x}{y}+\sqrt{y}=4$ یا -5

$\therefore x+y^{\frac{3}{2}}=4y$ یا $-5y$

لیکن مساوات (۲) سے $x+8=4y$

مثبت قیمت لینے سے $\therefore y^{\frac{3}{2}}-8=0$

$\therefore y^{\frac{3}{2}}=8$

کب لیا $\therefore y^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore y=4$

اور $x=4y-8=16-8=8$

اب اگر منفی قیمت لیتے یعنی $x+y^{\frac{3}{2}}=-5y$

$x+8=4y$

اور تفریق کرنے سے $y^{\frac{3}{2}}-8=-9y$

یا $8-y^{\frac{3}{2}}=9y$

$\therefore 8-8y=y+y^{\frac{3}{2}}$

یا $8(1-y)=y(1+y^{\frac{1}{2}})$

یا $8(1+y^{\frac{1}{2}})(1-y^{\frac{1}{2}})=y(1+y^{\frac{1}{2}})$

$\therefore 8(1-y^{\frac{1}{2}})=y$

یا $8-8y^{\frac{1}{2}}=y$

$\therefore y+8y^{\frac{1}{2}}=8$

$\therefore y+8y^{\frac{1}{2}}+16=24$

$\therefore \sqrt{y}+4=\pm\sqrt{6\times4}$

$=\pm2\sqrt{6}$

$\therefore \sqrt{y}=\pm2\sqrt{6}-4$

$y=40\pm16\sqrt{6}$

اور $x=4y-8=152\pm64\sqrt{6}$

$20x-8\sqrt{x^2-9y^2}=9y-16x$ ... (۱)

اور $x=4+5y$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $x-8x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x-9y}=9y-16x$

$\therefore (x+9y)-8x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x-9y}+16x=0$

جذر لیا $\therefore \sqrt{x-9y}-4y^{\frac{1}{2}}=0$

$\therefore \sqrt{x-9y}=4y^{\frac{1}{2}}$

مجذور کیا $\therefore x-9y=16x$

$\therefore x=(4+16x)y$

$\therefore y=\frac{x}{4+16x}$

لیکن (۲) مساوات سے $ص^2 = \frac{۵ل - ۴}{۲۵}$

$\therefore \frac{ل}{۱۱ل + ۹} = \frac{۵ل - ۴}{۲۵}$

کسر دور کی $\therefore ۸۰ل^2 - ۱۱۹ل - ۳۶ = ۱۲۵ل$

$\therefore ۸۰ل^2 - ۲۴۴ل = ۳۶$

$\therefore ل^2 - \frac{۲۳}{۴۰}ل = \frac{۱۸}{۴۰}$

$\therefore ل^2 - \frac{۲۳}{۴۰}ل + (\frac{۱۱}{۴۰})^2 = \frac{۱۲۱}{۱۶۰۰} + \frac{۱۸}{۴۰} = \frac{۸۴۱}{۱۶۰۰}$

$\therefore ل - \frac{۱۱}{۴۰} = \pm \frac{۲۹}{۴۰}$

$\therefore ل = \frac{۱۱}{۴۰} \pm \frac{۲۹}{۴۰} = ۱ یا -\frac{۹}{۲۰}$

اور $ص^2 = \frac{۵ل - ۴}{۲۵} = \frac{۱}{۲۵}$ یا $\frac{۱}{۴}$

$\therefore ص = \pm \frac{۱}{۵}$ یا $(\pm \sqrt{\frac{۹}{۴۰}} = \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{-۱})$

۲۱ $۱۶ل - ص^{\frac{۱}{۲}} = ۶ ص^{\frac{۱}{۲}} ل^{\frac{۱}{۲}}$ ..... (۱)

$\frac{ص^{۲}}{ل^{۲}} - \frac{۱۲}{ل^{۲}} = \frac{ل}{ص^{۲}}$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $۱۶ل = ص + ۶ ص^{\frac{۱}{۲}} ل^{\frac{۱}{۲}}$

طرفین پر $۳ ل^{\frac{۱}{۲}}$ کا مجذور زیادہ کیں

$\therefore ۲۵ل = ص + ۶ ص^{\frac{۱}{۲}} ل^{\frac{۱}{۲}} + ۹ل$

$\therefore \pm ۵\sqrt{ل} = ص^{\frac{۱}{۲}} + ۳ ل^{\frac{۱}{۲}}$

$\therefore ص^{\frac{۱}{۲}} = ۲ ل^{\frac{۱}{۲}}$ یا $-۸ ل^{\frac{۱}{۲}}$

$\therefore ص = ۴ل$ یا $۶۴ل$ ..... (۳)

اور مساوات (۲) سے $\frac{ل^{۲}}{ص^{۲}} - \frac{۱}{ص\sqrt{ل}} = \frac{۱۲}{ل^{۲}}$

مجذور پورا کیا یعنے $\frac{۱}{ل^{۲}}$ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore \frac{۴۹}{۲۵ل^{۲}} = \frac{۱۲}{ل^{۲}} + \frac{۱}{۲۵ل^{۲}} = \frac{۱}{ل^{۲}} - \frac{ل}{ص^{۲}}$

جذر لیا $\therefore \frac{۷}{۵ل^{۲}} = \pm \frac{۱}{ل^{۲}} - \frac{ل}{ص^{۲}}$

$\therefore \frac{ل}{ص^{۲}} = \pm \frac{۷}{۵ل^{۲}} + \frac{۱}{ل^{۲}} = \frac{۳}{ل} - \frac{۱۴}{۱۰ل}$

$\therefore \frac{ل^{۳}}{ص^{۲}} = ۴ یا -۳$ ..... (۴)

اور مساوات (۳) سے $\sqrt{ص} = ۴ ل$ یا $۶۴ ل$

یہہ قیمت $\sqrt{ص}$ کی مساوات (۴) مین لکھی

$\therefore \frac{ل^{۲}}{۴} یا \frac{ل^{۲}}{۴۰۹۶} = ۴ یا -۳$

جذر لیا $\therefore \frac{ل}{۲} یا \frac{ل}{۶۴} = ۲ یا \pm \sqrt{-۳}$

$\therefore ل = ۴ یا ۱۲۸ یا ۱۲\sqrt{-۳} یا ۱۲۸\sqrt{-۳}$

اور $ص = ۶۴ یا (۲۵۶)^{۲} یا -۱۲ یا -۳(۴)^{۲}$

۲۲ $ص^{\frac{۱}{۲}} - ۶۴ = ۸ ل^{\frac{۱}{۲}} ص$ ..... (۱)

$ص - ۴ = ۲ ص^{\frac{۱}{۲}} ل^{\frac{۱}{۲}}$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $ص^{\frac{۱}{۲}} - ۸ ل^{\frac{۱}{۲}} ص = ۶۴$

مجذور پورا کیا یعنے $۴ ل^{\frac{۱}{۲}}$ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore ص^{\frac{۱}{۲}} - ۸ ل^{\frac{۱}{۲}} ص + ۱۶ ل = ۶۴ + ۱۶ ل$

$= ۱۶(ل + ۴)$

جذر لیا $\therefore ص^{\frac{۱}{۲}} - ۴ = \pm ۴\sqrt{ل + ۴}$

$\therefore ص = ۴ \pm ۴\sqrt{ل + ۴}$ ... (۳)

مساوات (۲) سے $ص - ۲ ل^{\frac{۱}{۲}} ص^{\frac{۱}{۲}} = ۴$

$\therefore ص - ۲ ل^{\frac{۱}{۲}} ص^{\frac{۱}{۲}} + ل = ۴ + ل$ طرفین پر $ل^{\frac{۱}{۲}}$ کا مجذور زیادہ کیا

جذر لیا $\therefore \sqrt{ک} - \sqrt{ل} = \pm\sqrt{۴+ل}$

طرفین کو ۴ میں ضرب کیا

$\therefore ۴\sqrt{ک} - ۴\sqrt{ل} = \pm ۴\sqrt{۴+ل}$

$\therefore ۴\sqrt{ک} = ۴\sqrt{ل} \pm ۴\sqrt{۴+ل}$

$\therefore$ بوسیلہ اس مساوات کے اور (۳) مساوات کے

$ک = ۴\sqrt{ک}$

$\therefore \sqrt{ک} = ۴$

$\therefore ک = ۱۶$

اور مساوات (۲) سے $ل^{\frac{1}{2}} = \frac{ک-۴}{۴\sqrt{ک}} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲}$

$\therefore ل = \frac{۹}{۴}$

۲۳ $ل - ۳ = \frac{۳+۴\sqrt{ل}}{ل}$

طرفین پر $۱ + \frac{۱}{ل}$ زیادہ کیا

$\therefore ل - ۲ + \frac{۱}{ل} = \frac{۴+۴\sqrt{ل}+ل}{ل}$

یعنے $\left(\sqrt{ل} - \frac{۱}{\sqrt{ل}}\right)^{۲} = \frac{(۲+\sqrt{ل})^{۲}}{ل}$

طرفین کا جذر لیا $\therefore \sqrt{ل} - \frac{۱}{\sqrt{ل}} = \frac{۲+\sqrt{ل}}{\sqrt{ل}}$

$\therefore \frac{ل-۱}{\sqrt{ل}} = \frac{۲+\sqrt{ل}}{\sqrt{ل}}$

$\therefore ل - ۱ = ۲ + \sqrt{ل}$

$\therefore ل - \sqrt{ل} = ۳$

$\therefore ل - \sqrt{ل} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۳}{۴}$

جذر لیا $\sqrt{ل} - \frac{۱}{۲} = \pm\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

$\therefore \sqrt{ل} = \pm\frac{\sqrt{۱۳}+۱}{۲}$

$\therefore ل = \frac{(\pm\sqrt{۱۳}+۱)^{۲}}{۴} = \frac{۷ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$

۲۴ $ل^{۲} + \frac{۱}{ل^{۲}} + ل + \frac{۱}{ل} = ۴$

عدد ۲ کا طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore ل^{۲} + ۲ + \frac{۱}{ل^{۲}} + ل + \frac{۱}{ل} = ۶$

یعنے $\left(ل + \frac{۱}{ل}\right)^{۲} + \left(ل + \frac{۱}{ل}\right) = ۶$

$\therefore \left(ل + \frac{۱}{ل}\right)^{۲} + \left(ل + \frac{۱}{ل}\right) + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$

$\therefore ل + \frac{۱}{ل} + \frac{۱}{۲} = \pm\frac{۵}{۲}$

$\therefore ل + \frac{۱}{ل} = ۲ \text{ یا } -۳$

$\therefore ل^{۲} + ۱ = ۲ل \text{ یا } -۳ل$

پس اگر $ل^{۲} + ۱ = ۲ل$

تو $ل^{۲} - ۲ل = -۱$

$\therefore ل^{۲} - ۲ل + ۱ = ۰$

$\therefore ل - ۱ = ۰$

$\therefore ل = ۱$

اور اگر $ل^{۲} + ۱ = -۳ل$

تو $ل^{۲} + ۳ل = -۱$

$\therefore ل^{۲} + ۳ل + \frac{۹}{۴} = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴}$

$\therefore ل + \frac{۳}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

$\therefore ل = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

۲۵ $۲ل^{۲} - ل - ۲ل\sqrt{۱-ل} = \frac{۱}{۲}$

$\therefore 2\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} + 1$

$\therefore \sin^2\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} + 1 - \sin^2\frac{\theta}{2}$

یا $1 - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sin^2\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}$ اور پھر کیا

اس مساوات کی دوسری طرف عدد آزیادہ بھی کیا

$\therefore 1 - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sin^2\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} - 1$

$= \sin^2\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} + 1$

$= -(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}) + \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}$

$\therefore 2(1-\sin^2\frac{\theta}{2}) + 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}$

$\therefore (1-\sin^2\frac{\theta}{2}) + \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2} + \frac{1}{4}$

مجذور پورا کیا یعنی $\sin\frac{\theta}{2}$ کا مجذور طرفین پر زیادہ کیا

$\therefore (1-\sin^2\frac{\theta}{2}) + \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{4} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{4} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2} + \frac{1}{4}$

جذر لیا $\therefore \sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore \sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}$

$\therefore 1 - \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۶ $\sin\theta + 7\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} = 22$

طرفین مساوات سی $11\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2}$ تفریق کے

$\therefore \sin\theta + 7\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} - 11\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} = 22 - 11\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2}$

$\therefore \sin\theta - 4\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} = 11(2 - \sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2})$

$= -11(\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} - 2)$

$\therefore \sin\theta - 4\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} = -11(\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} - 2)$

یا $(\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} + 2\sin^{\frac{1}{4}}\frac{\theta}{2})(\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} - 2) = -11(\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} - 2)$

$\therefore \sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} + 2\sin^{\frac{1}{4}}\frac{\theta}{2} = -11$

$\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} + 2\sin^{\frac{1}{4}}\frac{\theta}{2} + 1 = -10$

$\therefore \sin^{\frac{1}{4}}\frac{\theta}{2} + 1 = \pm\sqrt{-10}$

$\therefore \theta = (-1 \pm \sqrt{-10})^4$

اور موافق خواص مساوات کی $\sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} - 2 = 0$

$\therefore \sin^{\frac{1}{2}}\frac{\theta}{2} = 2$

$\therefore \theta = 8$

۲۷ $\theta^2 + \theta\phi = 12 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\theta\phi - 2\phi^2 = 1 \ldots\ldots\ldots (2)$

فرض کیا کہ $\phi r = \theta$

$\therefore \theta^2 + \theta\phi = \phi^2 r^2 + \phi^2 r = 12 \ldots (3)$

اور $\theta\phi - 2\phi^2 = \phi^2 r - 2\phi^2 = 1 \ldots (4)$

مساوات (۳) سی $\phi^2(r^2 + r) = 12$

$\therefore \phi^2 = \frac{12}{r^2 + r}$

مساوات (۴) سے $\phi^2 = \frac{1}{r-2}$

$\therefore \frac{12}{r^2+r} = \frac{1}{r-2}$

$\therefore 12r - 24 = r^2 + r$

$\therefore r^2 - 11r = 24$

$\therefore r^2 - 11r + \frac{121}{4} = \frac{121}{4} - 24 = \frac{25}{4}$

$\therefore$ ر $- \frac{11}{2} = \pm \frac{5}{2}$

$\therefore$ ر $= \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2} = ۸$ یا ۳

اور $ک^۲ = \frac{۱}{ر-۲} = \frac{۱}{۲}$ یا ۱

$\therefore$ ک $= \pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ یا ± ۱

اور لا $=$ ک ر $= \pm \frac{۸}{\sqrt{۲}}$ یا ± ۳

۲۸ لا $+$ ک $= ۴$ ..... (۱)

$(لا^۲ + ک^۲)(لا^۳ + ک^۳) = ۲۸۰$ ... (۲)

فرض کیا کہ لا $=$ س $+$ ر

اور ک $=$ س $-$ ر

$\therefore$ لا $+$ ک $= ۲$ س $= ۴$

$\therefore$ س $= ۲$

اور $لا^۲ + ک^۲ = (۲+ر)^۲ + (۲-ر)^۲ = ۸ + ۲ر^۲$

اور $لا^۳ + ک^۳ = (۲+ر)^۳ + (۲-ر)^۳ = ۱۶ + ۱۲ر^۲$

$\therefore (لا^۲ + ک^۲)(لا^۳ + ک^۳) = (۸ + ۲ر^۲)(۱۶ + ۱۲ر^۲) = ۲۸۰$

یا $۸ (۴ + ر^۲)(۴ + ۳ر^۲) = ۲۸۰$

$\therefore (۴ + ر^۲)(۴ + ۳ر^۲) = ۳۵$

یا $۱۶ + ۱۶ر^۲ + ۳ر^۴ = ۳۵$

$\therefore ر^۴ + \frac{۱۶}{۳} ر^۲ = \frac{۱۹}{۳}$

$\therefore ر^۴ + \frac{۱۶}{۳} ر^۲ + \left(\frac{۸}{۳}\right)^۲ = \frac{۱۹}{۳} + \frac{۶۴}{۹} = \frac{۱۲۱}{۹}$

$\therefore ر^۲ + \frac{۸}{۳} = \pm \frac{۱۱}{۳}$

$\therefore ر^۲ = \pm \frac{۱۱}{۳} - \frac{۸}{۳} =$ یا $- \frac{۱۹}{۳}$

$\therefore$ ر $= \pm ۱$ یا $\pm \sqrt{-\frac{۱۹}{۳}}$

اور لا $=$ س $+$ ر $= ۳$

اور ک $=$ س $-$ ر $= ۱$

واضح ہو کہ مساوات درجہ دویم مین خاص ترکیبین اکثر کام اتی ہین اور ان ترکیبون مین خواص مساوات سی بہت مدد ہوتی ہی اسواسطی یہان چند ہی مثالین حل کی گئی ہین تاکہ طریقہ خاص ترکیبونکا کچھ معلوم ہوجاوے اس نمبر و مقابلہ کے آخر مین ایک ضمیمہ مساوات کا ہوگا جسمین بہت سی مساوات خاص ترکیبون سے حل کیجائینگی جانا چاہیئے کہ مقادیر نزولی کے اعمال بہی مساوات حل کرنے مین مدد ہوتی ہین اسواسطی مقادیر نزولی کا بیان ایک فصل مین جیسی طرح لکھا جاویگا یہان تھوڑی سی مثالین لکھی جاتی ہین تاکہ طالب علم کو کچھ واقفیت ہوجاوے

مثالین مقادیر نزولی کے

۱ ثابت کرو کہ $\sqrt[۳]{۳ \sqrt[۳]{۴}} = \sqrt[۳]{۱۰۸} = ۴$

جواب ظاہر ہی کہ $\sqrt[۳]{۴ \times ۳ \sqrt[۳]{۳}} = \sqrt[۳]{۴ \times ۲۷} = \sqrt[۳]{۱۰۸}$

$= ۳ \sqrt[۳]{۴}$

۲ ثابت کرو کہ $\sqrt[۳]{۹ \sqrt[۳]{۳}} = \sqrt[۳]{۲۴۳} = ۳ \sqrt[۳]{۹}$

ظاہر ہی کہ $\sqrt[۳]{۹ \times ۲۷} = \sqrt[۳]{۲۴۳} = \sqrt[۳]{۹ \sqrt[۳]{۳}}$

۳ $\sqrt{۶۸ لا^۲} = \sqrt{۴۹ ب^۲ \times ۱۲ لا^۲} = ۷ ب \sqrt{۱۲ لا^۲}$

۴ $\sqrt{۳۲ + ۸ \sqrt{۲}} = \sqrt{۲۰۰} = ۱۴ \sqrt{۲}$ اسواسطی کہ

$\sqrt{۳۲} = \sqrt{۲×۱۶} = ۴\sqrt{۲}$ اور

$\sqrt{۲۰۰} = \sqrt{۲×۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$

پس $۳\sqrt{۲} + \sqrt{۲۰۰} = ۴\sqrt{۲} + ۱۰\sqrt{۲} = ۱۴\sqrt{۲}$

۵ $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲} \times \frac{۳}{۴}\sqrt{۳۵} = \frac{۷}{۱۰}\sqrt{۱}$

اسواسطے کہ $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲} \times \frac{۳}{۴}\sqrt{۳۵} = \frac{۷}{۱۰}\sqrt{۱} = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲۰}$

$\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۳۵}{۲(۲۰)}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۳۵}{۴۰۰}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۷×۵}{۵×۸۰}}$

$= \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۵} \times \frac{۱}{۲۰} = \sqrt{۳۵}\frac{۱}{۴۰}$

۶ $\frac{۱۰۸}{۶}\sqrt{۸} = ۲\sqrt{۱۲}$

اسواسطے کہ $\frac{۱۰۸}{۶}\sqrt{۸} = \frac{۱۰۸}{۶}\sqrt{۴×۲} = ۴\sqrt{\frac{۱۰۸}{۶}}$

$= ۴\sqrt{۱۸} = ۴\sqrt{۹×۲} = ۴×۳\sqrt{۲} = ۱۲\sqrt{۲}$

۷ ثابت کرو کہ جذر ۱۰ کا $= \sqrt{۱۰}$

ظاہر ہے کہ جذر ۱۰ کا $= \sqrt{۱۰} = \sqrt{۱۰×۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۱۰}$

۸ $\frac{۲۰}{۸}\sqrt{۵} = ۲$

اسواسطے کہ $\frac{۲۰}{۸} = \frac{۱۰×۲}{۲×۴} = \frac{۱۰×۲}{۴} = \frac{۱۰}{۲}$

$= \frac{۵×۲}{۲}\sqrt{۵} = \frac{۵×۲ \times ۲}{۲}\sqrt{۵}$

۹ $\frac{۴۰}{۲۰}\sqrt{۲} = ۲$

اسواسطے کہ $\frac{۴۰}{۲۰} = \frac{۱۰×۴}{۵×۴} = \frac{۲×۵}{۵} = ۲$

۱۰ $\frac{۵۴}{۶}\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

اسواسطے کہ $\frac{۵۴}{۶} = \frac{۲×۲۷}{۶} = \frac{۲×۳×۹}{۶}$

$= \frac{۲×۳}{۲×۲}\sqrt{\frac{۲×۳}{۲×۳}} = \frac{۲×۳}{۲}\sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$

۱۱ $\frac{۳}{۱۸}\sqrt{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$

اسواسطے کہ $\frac{۳}{۱۸} = \frac{۹}{۱۸} = \frac{۱}{۲}$

یہاں سے مشق کی دا سطے بغیر حل کی ہوئی مساوتین درجہ دوم کی لکھے جاتے ہیں

۱ $ل^۲ + ۴ل = ۱۴۰$ جواب $ل = ۱۰$ یا -۱۴

۲ $ل^۲ - ۶ل + ۸ = ۸۰$ $ل = ۱۲$ یا -۶

۳ $ل^۲ - ۱۰ل + ۲۱ = ۱$ $ل = ۸$ یا ۲

۴ $ل^۲ - ل - ۲۴۰ = ۱۷۰$ $ل = ۱۵$ یا -۱۴

۵ $۳ل^۲ - ۹ل - ۴ = ۸۰$ $ل = ۷$ یا -۴

۶ $۷ل^۲ - ۲۱ل + ۱۳ = ۲۹۳$ $ل = ۸$ یا -۵

۷ $\frac{ل^۲}{۳} + \frac{۱۴ل}{۵} - ۱۵ = \frac{۱}{۵}۱۹$ $ل = ۹$ یا $-\frac{۵۷}{۵}$

۸ $\frac{۲ل^۲}{۳} + ۳ = \frac{ل}{۲} + ۸$ $ل = ۳$ یا $-\frac{۹}{۴}$

۹ $ل + ۴ + \frac{۷ل - ۸}{ل} = ۱۳$ $ل = ۴$ یا -۲

۱۰ $۴ل - \frac{ل - ۳۶}{ل} = ۴۶$ $ل = ۱۲$ یا $-\frac{۳}{۴}$

۱۱ $۱۶ - \frac{ل - ۵}{۲} = \frac{۹ + ۳ل}{ل} + ۱۳ل$ $ل = ۳$ یا $\frac{۶}{۵}$

۱۲ $\frac{ل + ۳}{۲} + \frac{۱۲ - ۱۶}{۵ - ۱۲ل} = ۵\frac{۱}{۵}$ $ل = ۵$ یا $\frac{۶۹}{۱۰}$

۱۳ $۱۴ + ۴ل - \frac{ل + ۷}{ل - ۷} = ۳ل + \frac{۹ + ۴ل}{۳}$

$ل = ۹$ یا -۲

۱۴ $\frac{س+۴}{۳} - \frac{س-۳}{۶-س} = ۱ - \frac{۶س+۴}{۹}$

$س = ۱۴\frac{۱}{۵}$

۱۵ $\frac{۱۰-س}{۴} - \frac{۴س-۵}{۱۲-۳س} = ۶۵ - \frac{۲۳۶س+۶۰}{۷}$

$س = ۳\frac{۱۴۸}{۶۲۹}$

۱۶ $\frac{س}{س+۱۱} + \frac{۶+۳۴}{س^۲} = ۷$ $س = -۳\frac{۱}{۲}$

۱۷ $\frac{۲س+۹}{۶} + \frac{۳۴+۳س}{۳-۳۴س} = ۳ + \frac{۳س-۱۶}{۱۸}$

$س = ۶\frac{۱۶}{۴}$

۱۸ $\frac{۶۰+س}{س} = \frac{۳۵-۵}{۷}$ $س = ۱۴\frac{۱}{۶}$

۱۹ $\frac{۷-۳۵}{س} + \frac{۵+۵}{۳۴-۱۰} = ۳\frac{۱}{۲}$ $س = -۶\frac{۲}{۱۲}$

۲۰ $\frac{۱-س}{۲+س} - \frac{۴-س}{۲۴} = ۲\frac{۱}{۳}$ $س = -۳\frac{۶}{۴}$

۲۱ $\frac{۲+س}{۸۵} - ۶ = \frac{۲۰}{۳۵}$ $س = -۱۰\frac{۲}{۳}$

۲۲ $\frac{۴۰}{۵-س} + \frac{۲۷}{س} = ۱۳$ $س = ۶\frac{۱۳}{۱۵}$

۲۳ $\frac{۵س-۱۲}{۹} + \frac{۳۴-۲۴س}{۱۲-۵۴} = ۶ - \frac{۶۷-۳۴س}{۱۵}$

$س = ۱۲\frac{۲۳۴}{۶۲۷}$

۲۴ $\frac{۲س}{۴-س} + \frac{۲-س}{۵-۲س} = ۸\frac{۱}{۳}$ $س = ۶\frac{۱۳}{۲۰}$

۲۵ $\frac{۲+۳س}{۱۰-س} = \frac{۲۵-۳۴س}{۳۴} - ۶\frac{۱}{۲}$

$س = ۸\frac{۱۳}{۲۲}$

۲۶ $\frac{۴۰-۵س}{س} - \frac{۳۴+۶}{۳-۶س} = \frac{۹س+۳۴}{۱۱۳}$

$س = ۲\frac{۱}{۳} - \frac{۱۵۲}{۴۵}$

۲۷ $۴س+۱۷ - \frac{۴س+۶}{۷س^۲+۶۱} = ۲۷ - \frac{۱۲س-۱۱}{۳-۲۴س}$

$س = ۷\frac{۱}{۵}$

۲۸ $\frac{س+۶}{۹+س} + \frac{۲س+۱۷}{۱۸+۲۴} = \frac{۵}{۲} - \frac{س+۷}{س^۲+۲۰}$

$س = ۴\frac{۱}{۶} - \frac{۶۶}{۶۶}$

۲۹ $\frac{س+۶}{س+۴} + \frac{۲س+۴}{۴} = \frac{۳س+۷}{۴+۳س}$

$س = ۷\frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۳}$

۳۰ $۳۴ + \frac{۲س+۳۴}{۴} + \frac{۵س+۷۱}{۳س+۶۴} = \frac{۳س+۵}{۵س}$

$س = ۶\frac{۱}{۲} - \frac{۶۵}{۲}$

۳۱ $\frac{۶+۵س}{۸} + \frac{۲+۳۴س}{۸س-۱۲} = \frac{۲س+۱۲}{۳س+۳}$

$س = ۳\frac{۱}{۱۳} - \frac{۲۸۳}{۲}$

۳۲ $\frac{۱۲}{۵-س} + \frac{۸}{۴-س} = \frac{۳۲}{۲+س}$

$س = ۲\frac{۱}{۱۳} \frac{۵۸}{۵}$

۳۳ $\frac{۳-س}{۱-۲س} = \frac{۲-۲س}{۳-۲س} + \frac{۲}{۲}$

$س = ۲\frac{۱}{۳} - \frac{۱۱}{۵}$

۳۴ $\frac{۶-۲س}{۳} + \frac{۲+۲س}{۶} = \frac{۱۱}{۵۶}$

$س = ۳\frac{۱}{۱۱} \frac{۲۶}{۲۶}$

۳۵ $\frac{۳(۲س+۷)}{۱۶} + \frac{۲س+۳}{۵} = \frac{۵س-۱}{۴}$

$س = ۳\frac{۱}{۱۰} - \frac{۷}{۲۷}$

۳۶ $\frac{۲س+۶-۶}{۳} = \frac{س+۲}{۳} + ۷س+۱$

$س = ۶\frac{۱}{۳} - \frac{۱۶}{۳}$

۳۷ $\frac{س}{۱۲+س} + \frac{۱۲+س}{س} = ۵\frac{۱۵}{۳}$

$س = ۳\frac{۱}{۲} - ۱۵$

۳۸ $\sqrt{۴س+۵} \times \sqrt{۷س+۱} = ۳۰$

$س = ۵\frac{۱}{۲۸} - \frac{۶۷۹}{۲۸}$

۳۹ $\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س+۶}} = \frac{\sqrt{۶س-۳}}{\sqrt{۶س-۹}}$

$س = ۵\frac{۱}{۴۰۰} - \frac{۱۶۰۶۵}{۴۰۰}$

۴۰ $\frac{\sqrt{س}+۳\sqrt{۵}}{\sqrt{س}-۳\sqrt{۵}} = \frac{س-۵}{۴}$

$س = ۴\frac{۱}{۲} - \frac{-۳\pm۳\sqrt{-۶}}{۲}$

۴۱ $\frac{\sqrt{س+۱}+۳}{\sqrt{س+۱}-۳} = \frac{۱۱}{۵}$

$س = ۷\frac{۱}{۸} - \frac{۹}{۸}$

۴۲ $۵ \times \frac{۱+۵\sqrt{س}}{۳س-۱} + \frac{\sqrt{س}}{۲} = ۳\sqrt{س}$

$س = ۴\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۹}$

۴۳ $\sqrt{س} - \frac{۲۰}{\sqrt{س}} = ۳س$

$س = ۴\frac{۱}{۲}(-۵)^{۲}$

۴۴ $\frac{۲}{۳}س^{\frac{۲}{۳}} + ۷س^{\frac{۲}{۳}} = ۴۴$

$س = \pm ۷\frac{۱}{۲}(-۱۱)^{\frac{۲}{۳}}$

۴۵ $۲س^{\frac{۱}{۲}} + س^{\frac{۱}{۲}} = ۶۳$

$س = ۵۶۲۹\frac{۱}{۹}(\frac{۳}{۱۳})^{۲}$

۴۶ $۳س^{\frac{۲}{۳}} + ۲۴س^{\frac{۱}{۳}} = ۱۲۱۲۳$

$س = ۳\frac{۱}{۲} - ۱۷\sqrt{۱۷}$

۴۷ $\frac{۲۷}{\sqrt{س}} + ۲ = \frac{۲س}{۲۷}$ $\qquad س = ۸\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$

۴۸ $\frac{س^{\frac{۲}{۳}}}{۵} + \frac{۹۶}{\sqrt[۳]{س}} = \frac{س}{۵} + ۹$

$س = ۴\frac{۱}{۲}(-۶)^{۳}$

۴۹ $\sqrt[۳]{\frac{۲۷}{س}} + \sqrt[۳]{\frac{۱}{س}} = \frac{\sqrt[۳]{۲س}}{س}$

$س = ۱\frac{۱}{۲۷} - \frac{۸}{۲۷}$

۵۰ $۳ن\sqrt[ن]{س^{ن}} - ۲\sqrt[ن]{س^{ن}} = ۲$

$س = ۵\frac{۱}{۲ن}(-\frac{۲۷}{۸})^{\frac{۱}{۲ن}}$

۵۱ $\frac{۳\sqrt{س-۵}}{۲+س} = \frac{۱۳\frac{۱}{۲}+۳\sqrt{س-۲س}}{۲\sqrt{س}-۳}$

$س = ۲\frac{۱}{۲۵}$

۵۲ $۲س^{\frac{۱}{۳}}(س^{\frac{۲}{۳}}+۲س)^{\frac{۱}{۲}} = ۲س^{\frac{۱}{۲}}(س+۲س)+۲س^{\frac{۱}{۲}}(س-۲)$

$س = ۲\frac{۱}{۲} - ۶$

۵۳ $۲ع س - ۲س = ص س - ص ع$

$س = \frac{ص}{ع} - ۱\frac{۲}{ص}$

٥٤ $\frac{ط^{٢}ل^{٢}}{ص^{٢}} - \frac{٢ط ل}{س} + \frac{ع^{٢}}{ص^{٢}} = ٠$

$ل = \frac{ص}{ط} \times \frac{ص \pm \sqrt{ص^{٢} - ع^{٢}}}{س}$

٥٥ $٩ط^{٢}ص^{٢}ل^{٢} - ٦ط^{٣}ص^{٢}ل = ص^{٢}$

$ل = \frac{ط^{٢} \pm \sqrt{ط^{٤} + ص^{٢}}}{٣ط^{٣}ص^{٢}}$

٥٦ $(ط + ص)ل^{٢} = س ل + \frac{ط س}{ط + ص}$

$ل = \frac{س \pm \sqrt{س^{٢} + ٤ط س}}{٢(ط + ص)}$

٥٧ $٣\sqrt{١١٢ - ٨ل} = ٩ + \sqrt{٣ل + ٧}$

$ل = ٩\frac{٦٣٩}{٦٢٥}$

٥٨ $\sqrt{٢ل + ٧} + \sqrt{٣ل - ١٨} = \sqrt{٧ل + ١}$

$ل = ٩\frac{١}{٥} \quad ١٨$

٥٩ $٧\sqrt{\frac{٣ل}{٢} - ٥} - \sqrt{\frac{ل}{٥} + ٤٥} = \sqrt[٣]{١١٠ل + ٥٦}$

$ل = ٢٠\frac{٩٤٩٤٧٤٩}{١٣٥٧٩٥٠}$

٦٠ $\frac{١٦ - ٣\sqrt{ل}}{٧ - ٣\sqrt{ل}} = \frac{٨٧ + ٣\sqrt{٣٣ل}}{٤ + \sqrt{ل}} + \frac{ل^{٢} - ٥٨ل + ١١}{(٨ - ٣\sqrt{ل})(٤ + \sqrt{ل})}$

$ل = ٣٩\frac{١}{٧}$

٦١ $\frac{٤ل + ٥}{\sqrt{٤ل + ٥}} - \frac{٢٢ - ٣\sqrt{ل}}{\sqrt{ل} + ٤} = \frac{٧ل^{٢} - ٣ل + ٤}{(\sqrt{ل} + ٤)(٢\sqrt{ل} + ٥)}$

$ل = ٥\frac{١}{٢١} \quad ٣$

٦٢ $\sqrt{ل + ٢} : \sqrt{ل - ١} :: \sqrt{٣ل + ٢} : \sqrt{٤ل}$

$ل = ٩\frac{١}{٣}$

٦٣ $ل^{٢} + ١١ + ٢\sqrt{ل^{٢} + ١١} = ٤٢$

$ل = ٥ \pm ٦\sqrt{٣}$

٦٤ $(ل - ٥)^{\frac{٣}{٢}} - ٣(ل - ٥)^{\frac{٢}{٣}} = ٤٠$

$ل = ٩\frac{١}{٦}(-٥)^{\frac{٢}{٣}} + ٥$

٦٥ $ل + \sqrt{ل + ٤} = ٢ + \sqrt{٣ل + ٦}$

$ل = ١٠\frac{١}{٢} - ٢$

٦٦ $(ل^{٢} + ٥)^{٢} - ٢٤ل^{٢} = -١٠٤$

$ل = \pm\sqrt{١٣} \pm \sqrt{-١٥}$

٦٧ $\sqrt{ل^{٢} - ٦ل + ١٨} = ٢٤$

$ل = ٣\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٤٦٣}}{٢}$

٦٨ $٩ل - ٤ل^{٢} + \sqrt{٤ل^{٢} - ٩ل + ١١} = ٥$

$ل = ٢\frac{١}{٤} \quad \frac{٩ \pm \sqrt{-٣١}}{٨}$

٦٩ $ل^{٢} + \sqrt{٥ل + ٤ل^{٢}} = ٤٢ - ٥ل$

$ل = ٤ - ٩\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٢٢١}}{٢}$

٧٠ $\frac{(ل + ٢)^{\frac{٣}{٢}}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{ل + ٢}} = \frac{١٧}{٤\sqrt{ل + ٢}}$

$ل = ٩\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}$

٧١ $\frac{ل}{٤} + \frac{٤}{\sqrt{ل + ٤}} = \frac{٢١}{ل}$

$ل = ١٢ - ٣\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣١٥}}{٢}$

۴۶ $\frac{۷-ن}{۶-ن}+\frac{ن+۷}{ن-۷}=\frac{۲۹}{۱۰}$

$ن\neq ۳$

۴۷ $\frac{۳ن+۵}{۵-ن۳}-\frac{۵-ن۳}{۵+ن۳}=\frac{۶۷}{۱۳۵}$

$ن=\frac{۲۹}{۱۷}-۶۹$

۴۸ $\frac{ن+۲}{\sqrt{ن}}=\frac{ن^۲+ن-۴}{\sqrt{ن}}+۷$

$ن=۶۹\frac{۱}{۱۷}$

۴۹ $\frac{۳۵۱}{۲۵}=\frac{۶}{۴-ن^۲}+۲\frac{ن^۲}{(ن-۳)^۲}$

$ن=۳۶\pm\frac{۳۹}{۱۱}\sqrt{}$

۵۰ $\frac{ن}{۷}-۴۲=ن+۲\left(\frac{۱+ن}{۷}\right)^۲$

$ن=۳۶۹\frac{۱}{۲}-\frac{۷۶\pm\sqrt{۱۲}}{۲}$

۵۱ $\frac{۳}{۴-ن}=\frac{\sqrt{ن+۴}}{۴-ن}\times ۲+۴+ن$

$ن=۶\pm\sqrt{۱۲}$

۵۲ $ن^۲=\frac{۱۲}{ن^۲}-۱۲+\frac{۱۲}{ن^۲}-ن\sqrt{}۷$

$ن=۲۶\pm\sqrt{-۳}$

۵۳ $(ن+۱)^۲\left(\frac{۱}{ن^۳}+۱\right)^۲-(ن^۲+۱)۳۶=۰+۰$

$ن=۳-\frac{۱۰}{۳}\frac{۱}{۶}-\frac{۱\pm\sqrt{-۲۵۱}}{۶}$

۵۴ $ن^۲-\frac{۵ن}{۲}=۱۵+\frac{۳۲۵}{۱۶}-\frac{۶۴}{ن^۲}$

$ن=۴\frac{۱}{۶}-\frac{۷\pm۲\sqrt{-۱۲}}{۹}$

۵۵ $\frac{۱۹}{۱۲}=\frac{\sqrt{ن-۶}}{۱۸}+\frac{۴۵}{\sqrt{۹-ن۲}}$

$ن=۱۵\pm\frac{\sqrt{۱۵۴۱}}{۲}$

۵۶ $(ن-۱)^۲-ن(ن-۱)^۲+۲۲=۱۲۴۱$

$ن=۱۶\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱-\sqrt{-۱۱}}{۲}$

۵۷ $(ن+۱)^۲+۴ن^۲(ن+۱)^۲=۱۴۹-(ن^۲+۲ن)^۲$

۵۸ $\frac{۱۹}{۱۲}=\frac{\sqrt{ن-۶}}{۱۸}+\frac{۴۵}{\sqrt{۹-ن۲}}$

$ن=\frac{۱۵\pm\sqrt{۱۵۴۱}}{۲}$

۵۹ $۲ن^۲+\frac{ن}{۲}=۴ن^۲+۳۴$

$ن=۲\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}\frac{۱}{۴}\pm\frac{\sqrt{-۳۴}}{۴}$

۶۰ $\frac{۳}{۴}=\frac{ن^۲+۷}{۶}+\frac{۴ن+۶}{ن^۲}$

$ن=۴\frac{۱}{۲}-۱۲\pm\sqrt{-۲}$

۶۱ $\frac{ن}{۸}-\sqrt{ن}=\frac{۱}{-۲-\sqrt{ن}}$ $ن=۱۱\frac{۱}{۱۶}$

۶۲ $ن^۲+\frac{ن}{۲}=۴ن^۲+۳۴$

$ن=۲\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}\frac{۱}{۴}\pm\frac{\sqrt{-۳۴}}{۴}$

۶۳ $ن^۲-۲ن^۲+۲۸-\sqrt{ن}=۶$

$ن=۴\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}-\frac{۵\pm۷\sqrt{-۸}}{۲}$

۶۴ $\frac{ن^۲}{۳}+\frac{۱۳ن^۲}{۴}-۶۳ن=۱۲$

$ن=۴\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱۳\pm\sqrt{-۱۵۵}}{۲}$

۶۵ $\frac{ن^۲+۷}{۶}+\frac{۴ن+۷}{ن^۲}=\frac{ن}{۲}-۷$

$ن=۴\frac{۱}{۲}-۱۲\pm\sqrt{-۲}$

۶۶ $(ن-۲)^۲-۶ن^۲(ن-۲)^۲=۲۴-۳۲ن+۱۵ن^۲$

۶۷ $\frac{۱۹}{۱۲}=\frac{\sqrt{ن-۶}}{۱۸}+\frac{۴۵}{\sqrt{۹-ن۲}}$

$ن=۱۵\pm\frac{\sqrt{۱۵۴۱}}{۲}$

۶۸ $۲ن^۲-۲۸ن\sqrt{}+۲۸-ن=۶$

$ن=۴\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}-\frac{۵\pm۷\sqrt{-۸}}{۲}$

۶۹ $\frac{ن^۲}{۳}+\frac{۱۳ن^۲}{۴}-۶۳ن=۱۲$

$ن=۴\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱۳\pm\sqrt{-۱۵۵}}{۲}$

۷۰ $\frac{ن^۲+۷}{۶}+\frac{۴ن+۶}{ن^۲}=\frac{ن}{۲}-۷$

$ن=۴\frac{۱}{۲}-۱۲\pm\sqrt{-۲}$

۷۱ $\frac{ن}{۸}-\sqrt{ن}=\frac{۱}{-۲-\sqrt{ن}}$ $ن=۱۱\frac{۱}{۱۶}$

۷۲ $۲ن^۲+\frac{ن}{۲}=۴ن^۲+۳۴$

$ن=۲\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}\frac{۱}{۴}\pm\frac{\sqrt{-۳۴}}{۴}$

۷۳ $(ن-۲)^۲-۶ن^۲(ن-۲)^۲=۲۴-۳۲ن+۱۵ن^۲$

۷۴ $(ن+۱)^۲+۴ن^۲(ن+۱)^۲=۱۴۹-(ن^۲+۲ن)^۲$

۷۵ $\frac{ن^۲}{۳}+\frac{۱۳ن^۲}{۴}-۶۳ن=۱۲$

$ن=۴\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱۳\pm\sqrt{-۱۵۵}}{۲}$

۷۶ $\frac{ن^۲+۷}{۶}+\frac{۴ن+۶}{ن^۲}=\frac{ن}{۲}-۷$

$ن=۴\frac{۱}{۲}-۱۲\pm\sqrt{-۲}$

۷۷ $\frac{۱۹}{۱۲}=\frac{\sqrt{ن-۶}}{۱۸}+\frac{۴۵}{\sqrt{۹-ن۲}}$

$ن=۱۵\pm\frac{\sqrt{۱۵۴۱}}{۲}$

۷۸ $(ن-۲)^۲-۶ن^۲(ن-۲)^۲=۲۴-۳۲ن+۱۵ن^۲$

۷۹ $(ن+۱)^۲+۴ن^۲(ن+۱)^۲=۱۴۹-(ن^۲+۲ن)^۲$

۸۰ $\frac{ن^۲}{۳}+\frac{۱۳ن^۲}{۴}-۶۳ن=۱۲$

$ن=۴\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱۳\pm\sqrt{-۱۵۵}}{۲}$

۹۱ $۴u^۲+۲۱u+۹=۷\sqrt{u^۲-۵u}$

$u=\frac{۳}{۲}$ یا $\frac{-۲۰۷\pm۳۴۳}{۳۲}$ $u=-۷\frac{۵}{۳۲}$

۹۲ $\frac{۲u+۸\sqrt{u}}{۲u-۸\sqrt{u}}=\frac{۳}{۱۵۴}-\frac{۲u-۸\sqrt{u}}{۲u+۸\sqrt{u}}$

$u=۴$ یا $\frac{۴۹}{۱۶}$

یہاں سے دو مجہول کی مساواتیں شروع ہیں

۱ $\begin{cases} u+۶s=۱۴ \\ s^۲+۴u=۶s+۱۱ \end{cases}$ $\begin{cases} u=۲$ یا $-۴۶ \\ s=۱۰$ یا $۳ \end{cases}$ $\begin{cases} u=۴$ یا $\pm۴\sqrt{-\frac{۷}{۱۹}} \\ s=۲$ یا $-\frac{۱۴}{۱۹} \end{cases}$

۲ $\begin{cases} ۲u+۶s=۱۸ \\ ۵s^۲-۷u^۲=۴۳۲ \end{cases}$ $\begin{cases} u=۲۵$ یا $\frac{۲۹۹}{۱۷} \\ s=۱۴$ یا $\frac{۳۶۸}{۱۷} \end{cases}$ ۷ $\begin{cases} u^۲+۲u^۳s=۴۴۱-u^۲s^۲ \\ u+۳=s+u \end{cases}$

۳ $\begin{cases} \frac{۲u+۷s}{۴u}=۳s-۲ \\ \frac{۴u+۶s}{۱۶}=s-۲ \end{cases}$ $\begin{cases} u=۵$ یا $-\frac{۲۷}{۵۶} \\ s=۴$ یا $\frac{۱۵۱}{۴۸۰} \end{cases}$ $\begin{cases} u=۳$ یا -۷ یا $-۲\pm۴\sqrt{-۱۷} \\ s=۲$ یا $\frac{۷}{۳}$ یا $\frac{۵\pm۴\sqrt{-۱۷}}{۷} \end{cases}$

۴ $\begin{cases} \frac{۳u+۶s}{۷}=\frac{u+۶s-۳}{۱۵}+۲ \\ \frac{۳u+۶s-۳}{۱۵}-\frac{۳u+۳s-۲}{۵}=۱\frac{u-۱۸}{۳} \end{cases}$ ۸ $\begin{cases} u^۲+۴s^۲=۲۵۶-۴u^۲s \\ ۳s^۲-u^۲=۴۹ \end{cases}$

$\begin{cases} u=۹$ یا $-\frac{۳}{۲۶۶} \\ s=۳$ یا $-\frac{۲۷۸۳}{۲۰۲۷} \end{cases}$ $\begin{cases} u=\pm۹$ یا $\pm۱۰۲ \\ s=\pm۵$ یا $\pm۵۹ \end{cases}$

۵ $\begin{cases} u^۲-s^۲=t^۲ \\ (u+s+t)^۲+(u-s+t)^۲=۲s^۲ \end{cases}$

۹ $\begin{cases} (u+s)^۲-۲s=۲u+۸ \\ ۲u+۳s+۳u=۵ \end{cases}$

۶ $\begin{cases} u^۲+s: u^۲-s :: ۹ : ۷ \\ ۱+u^۲: ۴+s :: ۵s+۷ : ۳s \end{cases}$

$\begin{cases} u=\frac{-s\pm\sqrt{۲t^۲-s^۲+۲s^۲}}{۲} \\ s=\pm\sqrt{s^۲-t^۲}\pm\sqrt{۲t^۲-s^۲+۲s^۲} \end{cases}$

١٠
$$\begin{cases} \frac{م}{ن} - \frac{ن}{م} = \frac{٧}{١٢} \\ (م - ٣ن)^٢ + م - ٢ن = ٥ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ن = ٣ + \frac{٢٤٧}{٢٤٧} \\ ن = ١ + \frac{٩}{٤٩} \end{cases}$$

١١
$$\begin{cases} \sqrt{م + ن} + \sqrt{م - ن} = ٥ \\ \sqrt[٣]{م - ن} = ١ + \frac{\sqrt{م - ن}}{٢} \end{cases}$$

$$\begin{cases} م = \frac{١٣}{٢} \\ ن = \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

١٢
$$\begin{cases} م + ن + \sqrt{م + ن} = ٩ \\ م^٢ + ن^٢ = ١٠ \end{cases}$$

١٣
$$\begin{cases} م = ٣ + \frac{١ \pm \sqrt{-٦١}}{٢} \\ ن = ١ + \frac{٣ \pm \sqrt{-٦١}}{٢} \end{cases}$$

١٤
$$\begin{cases} \sqrt{م^٢ + ٣م + ٥} = ٥ - ن \\ م + ٤ن = ١٩ \end{cases}$$

١٥
$$\begin{cases} م = ٣ + \frac{\pm \sqrt{٥٩٧٤} - ٥٣}{٦} \\ ن = ٢ + \frac{\pm \sqrt{٥٩٧٤} - ٦٣٠}{٦٩} \end{cases}$$

١٦
$$\begin{cases} م^٢ + ن^٢ = ٤٩ \\ م + ن = ٥ \end{cases}$$

١٧
$$\begin{cases} (م + ن)(م^٣ + ن^٣) = ٣٥٥ \\ م + ن = ٥ \end{cases}$$

١٨
$$\begin{cases} م + ن = ١٤ \\ \sqrt{م + ن} = \frac{٩ - ن}{٦} \end{cases}$$

$$\begin{cases} م = ٣ + \frac{\pm \sqrt{-١٥١} + ٥}{٢} \\ ن = ٢ + \frac{\pm \sqrt{-١٥١} + ٥}{٢} \end{cases}$$

$$\begin{cases} م = ٣ + \frac{\pm \sqrt{-٣٠١} + \frac{١}{٢}}{٢} \\ ن = ٣ + \frac{\pm \sqrt{-٣٠١} + \frac{١}{٢}}{٢} \end{cases}$$

$$\begin{cases} م = ٣ + \frac{\pm \sqrt{٨٧٢٥} - ٤٩}{٢} \\ ن = ٢ + \frac{\pm \sqrt{٨٧٢٥} - ٦٣٠}{٤٩} \end{cases}$$

۵ $\begin{cases} ل^2 - ك^2 = 80 \\ ك^2 - \frac{ك^2}{9} = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = \pm 9 \\ ك = \pm 3 \end{cases}$

۶ $\begin{cases} ل + ك : ل - ك :: 4 : 1 \\ ك ل = 21 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 7 \text{ یا } -7 \\ ك = 3 \text{ یا } -3 \end{cases}$

۷ $\begin{cases} ل^2 + ك^2 : ل^2 - ك^2 :: 509 : 125 \\ ل^2 ك = 294 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 7 \\ ك = 6 \end{cases}$

۸ $\begin{cases} ل^2 - ل ك : ل ك - ك^2 :: 3 : 2 \\ ل ك^2 = 144 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 3 \\ ك = 2 \end{cases}$

۹ $\begin{cases} ل + \sqrt{ل ك} : ك :: 4 : 1 \\ ل - ك = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 25 \\ ك = 9 \end{cases}$

۱۰ $\begin{cases} \sqrt{ل} - \sqrt{ك} = 3 \\ \sqrt{ل} + \sqrt{ك} = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 625 \\ ك = 16 \end{cases}$

۱۱ $\begin{cases} ل - ك : \sqrt{ل} - \sqrt{ك} :: 8 : 1 \\ \sqrt{ل ك} = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 289 \\ ك = 225 \end{cases}$

۱۲ $\begin{cases} ل^2 - ك^2 : ل ك - ك^2 :: 7 : 2 \\ ل + ك = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 4 \text{ یا } 2 \\ ك = 2 \text{ یا } 4 \end{cases}$

۱۳ $\begin{cases} \frac{1}{ل} + \frac{1}{ك} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{ل ك} = \frac{2}{9} \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 6 \text{ یا } 3 \\ ك = 3 \text{ یا } 6 \end{cases}$

۴ $\begin{cases} ل^2 + ك^2 : ل^2 - ك^2 :: 8 : 1 \\ ل ك = 45 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 5 \\ ك = 9 \end{cases}$

۳ $\begin{cases} ل + ك : ل - ك :: ط : ص \\ ل ك = س^2 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = \pm س \sqrt{\frac{ط + ص}{ط - ص}} \\ ك = \pm س \sqrt{\frac{ط - ص}{ط + ص}} \end{cases}$

۲ $\begin{cases} ل^2 + ك^2 = 181 \\ ل - ك : ك :: 4 : 5 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = \pm 9 \\ ك = \pm 5 \end{cases}$

۱ $\begin{cases} ل + ك : ك :: 3 : 1 \\ ل ك = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = \pm 6 \\ ك = \pm 3 \end{cases}$

مثالین مساوات مفردکی

۲۱ $\begin{cases} ل^{\frac{1}{2}} - 3 = ل^{\frac{1}{2}} ك^{\frac{1}{2}} \left(ل^{\frac{1}{2}} - ك^{\frac{1}{2}} \right) \\ ل ك - 4 = 4 ل^{\frac{1}{2}} ك^{\frac{1}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 1 \\ ك = 4 \end{cases}$

۲۰ $\begin{cases} ك^3 - 4 ل^2 ك = 432 \\ ك^2 = 12 + 2 ل ك \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 2 \\ ك = 6 \end{cases}$

۱۹ $\begin{cases} ل ك - \frac{ك^2}{4} = 4 \\ \frac{ل^2}{ك} - \frac{ك}{4} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = \pm 4 \\ ك = \pm 2 \end{cases}$

۱۸ $\begin{cases} \frac{ل^2 - ك^2}{ل + ك} - \frac{ل - ك}{ل + ك} = \frac{4}{5} \\ \sqrt{\frac{ل^2}{ل - ك}} + \frac{1}{ل} = \frac{4}{\sqrt{9 ل - 4 ك}} \end{cases}$ $\begin{cases} ل = 3 \text{ یا } \frac{25}{2} \text{ یا } \frac{45}{32} \\ ك = 2 \text{ یا } \frac{135}{4} \text{ یا } \frac{135}{64} \end{cases}$

۱۷ $\begin{cases} ل^2 + ك^2 : ل^2 - ك^2 :: 17 : 8 \\ ل ك = 60 \end{cases}$ $\begin{cases} ل = \pm 10 \\ ك = \pm 6 \end{cases}$

۱۴ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 369 \\ x - y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 20 \\ y = \pm 11 \end{cases}$

۱۵ $\begin{cases} x^3 - y^3 = 504 \\ x - y = \frac{14}{xy} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \\ y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4\sqrt{2} \\ y = -3\sqrt{2} \end{cases}$

۱۶ $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$

$x = \pm \frac{1}{2}$

۱۷ $\begin{cases} x^2 y + y^2 = 114 \\ x^2 \frac{x}{y} + y = 57 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4\sqrt{10} \\ y = 2\sqrt{10} \end{cases}$

۱۸ $\begin{cases} x + \sqrt[3]{y} = 6 \\ x + y = 27 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 18\sqrt{2} \\ y = 9\sqrt{2} \end{cases}$

۱۹ $\begin{cases} 4x^2 + \frac{5}{2}y^2 = 1015 \\ x^2 + 3y^2 = 55 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 10 \\ y = \pm 5 \end{cases}$

۲۰ $\frac{1}{x^2 - 2x\sqrt{x^2-2}} + \frac{1}{x^2 + 2x\sqrt{x^2-2}} = 6x$

$x = \pm\sqrt{\frac{6}{6+1}}$

۲۱ $\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2 - x}} = m$ $x = \pm \frac{mn}{\sqrt{m^2+1}}$

۲۲ $\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{4y - x + \frac{1}{2}\sqrt{y - x}} = \sqrt{2y - x} \\ \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 6y + \sqrt{y^2 - 6x}} :: \sqrt{x^2 - 6y} :: 1 : \frac{3}{4} \end{cases}$

$\{x = 7 \text{ اور } y = 8\}$

۲۳ $\begin{cases} \frac{9}{8}\sqrt{x+y} + \frac{9}{8}\sqrt{x+z} = 1\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}\sqrt{x-y} - \frac{7}{4}\sqrt{x-z} = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\{x = \frac{7}{2} \text{ اور } y = \frac{1}{2}\}$

۲۴ $\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 20 \\ x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 18\sqrt{2} \\ y = \pm 32\sqrt{2} \end{cases}$

۲۵ $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 49 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $(x^2 + xy + y^2)$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$

۲۶ $a = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}}$ $x = \frac{4a^2}{(a+1)^2}$

۲۷ $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y} - \sqrt{y}} \\ \sqrt{x} : \sqrt{y} :: \sqrt{x-y} : \sqrt{y} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{25}{14} \\ y = 25 \end{cases}$

۲۸ $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ x^2 y - xy^2 = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \\ y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4\sqrt{2} \\ y = -3\sqrt{2} \end{cases}$

۲۹ $\frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{4x}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{4x}} = 9$ $x = \frac{4}{9}$

۳۰ $\frac{ط+لا+\sqrt{۲ط لا+لا^۲}}{ط+لا-\sqrt{۲ط لا+لا^۲}}=ص$

$لا=\pm ط\frac{(ص\mp ۱)^۲}{۲\sqrt{ص}}$.

۳۱ $\left.\begin{array}{l}\sqrt{لا-و}+\frac{۱}{۲}\sqrt{لا+و}=\frac{لا-۹}{\sqrt{لا-و}}\\ لا^۲+ک^۲ : لا و :: ۳۴ : ۱۵\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}لا=۵\\ و=۳\end{array}\right.$

۳۲ $\left.\begin{array}{l}لا^۳ ک^۳-لا^۳ ک^۳=۲۱۶\\ لا^۲ ک-لا ک^۲=۶\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}لا=۳\text{ یا }-۲\\ ک=۲\text{ یا }-۳\end{array}\right.$

ایک مقدار ناممکن ہی کیونکہ $ط\times ط=ط^۲$ اور $-ط\times-ط=ط^۲$ تو اس سبب سے معلوم ہوا کہ $\sqrt{-ط^۲}$ نہ تو $ط$ اور نہ $-ط$ ہی اور اسی دلیل سے $\sqrt{-ط^۲}$ ایک مقدار ناممکن ہی بوسیلہ مقدار ناممکن کے معلوم ہوسکتا ہی ہمن سوال سائیل کا درست ہی یا غلط مثلاً اگر کوئی سوال کرے کہ کونسی دو عدد ہین جنکا حاصل جمع = ۱۲ اور حاصل ضرب اونکا = ۴۰ اب ظاہر ہی کہ یہہ سوال غلط ہی اور غلطی اسطرح سی ثابت ہوسکتی ہی فرض کرو کہ بڑا عدد مجہول = لا اور چھوٹا عدد مجہول = ک تو بموجب شرایط سوال کے $لا+ک=۱۲$ (۱) اور $لاک=۴۰$ (۲) مساوات اول سے $لا=۱۲-ک$ اور لکھو اس قیمت لا کو مساوات دویم مین تو حاصل ہوتا ہی

$۱۲ک-ک^۲=۴۰$ اور $ک^۲-۱۲ک=-۴۰$ اور بموجب قاعدہ اول مساوات درجہ دویم کے

$ک=۶\pm\sqrt{۳۶-۴۰}=۶\pm\sqrt{-۴}$ جو محال ہی

۳۳ $\left.\begin{array}{l}لا^۲+لا\sqrt{لاک}=۲۰۸\\ ک^۲+ک\sqrt{لاک}=۱۰۵۳\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}لا=۸\\ ک=۲۷\end{array}\right.$

۳۴ $\left.\begin{array}{l}لا^۳+لا^۲ ک^۲+ک^۳=۱۰۰۹\\ لا^۳+لا^۲ ک^۲+ک^۳=۵۸۲۱۹۳\end{array}\right\}$

۳۵ $\left.\begin{array}{l}لا^۲+ک^۲+لاک(لا+ک)=۹۸\\ لا^۳+ک^۳-۳لاک=۱۲+۱۴ک^۲\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}لا=۸۱\text{ یا }۱۶\\ ک=۱۶\text{ یا }۸۱\\ لا=۴\text{ یا }۲\\ ک=۲\text{ یا }۴\end{array}\right.$

۳۶ $\left.\begin{array}{l}لاک(لا+ک)=۸۴\\ لا^۲ ک^۲(لا^۲+ک^۲)=۳۶۰۰\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}لا=۴\text{ یا }۳\\ ک=۳\text{ یا }۴\end{array}\right.$

۳۷ $\left.\begin{array}{l}\frac{لا^۲+لاک+ک^۲}{لا+ک}=۷\\ \frac{لا^۲-لاک+ک^۲}{لا-ک}=۹\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}لا=۴\\ ک=۳\end{array}\right.$

مقدار غیر ممکن

چونکہ حاصل ضرب دو مقدارون کا جنکی پہلی علامات متماثل ہون ہمیشہ مثبت ہوتا ہی اور چونکہ حاصل ضرب ایک مقدار کا اوسی مین اوسکا مجذور کہلاتا ہی تو ظاہر ہی کہ کوئی ایسی مقدار نہین ہی جسکا مجذور منفی ہو اور اگر کوئی ایسی مقدار حساب جبریہ مین واقع ہو تو جانا چاہئی کہ سوال جسکو ہم حل کر رہی ہون غلط ہی ایسی مقدارون کو مقادیر ناممکن کہتے ہین مثلاً $\sqrt{-ط^۲}$ ایک مقدار ناممکن ہی کیونکہ $ط\times ط=ط^۲$ اور $-ط\times-ط=ط^۲$

تناسب کا بیان

اگر دو مقدارین ہون اور اول مقدار دوسری مقدار پر قسمت کیجاوے تو خارج قسمت ہی نسبت جو مقدار اول دویم سی رکھتی ہی یعنے نسبت ۴ کی ۲ کو $\frac{۴}{۲}$ = ۲ یعنی ۴ ۲ سے دوچند کی نسبت رکھتا ہی اور $\frac{ح}{ط}$ = نسبت جو ح ط سے رکھتی ہی چار مقدارین متناسبہ کہلاتی ہین جب نسبت اول کی دوسری سے اور تیسری کی چوتھی سے مساوی ہوتی ہی مثلاً ح اور ط اور س اور ص مقادیر متناسبہ کہلاتے ہین اگر $\frac{ح}{ط}$ = $\frac{س}{ص}$ اور چار مقادیر متناسبہ کو موافق حدود کی اسطور پر ثبت کرتے ہین

ح : ط :: س : ص ح اور ص یعنی اول اور چوتھی کو اطراف کہتے ہین اور ط اور س یعنی دوسری اور تیسری کو اوساط کہتے ہین اگر چار مقادیر متناسبہ مین سے اطراف کو اسیمین ضرب کرین اور پھر ارقام اوسط کو اسیمین ضرب کرین تو حاصل ضرب دونو حالتونمین مساوی ہوتا ہی یہہ ظاہر ہی کیون کہ اگر

ح : ط :: س : ص تو $\frac{ح}{ط}$ = $\frac{س}{ص}$ اور اگر دونو طرف اس مساوات کی ط ص مین ضرب کی جائین تو

ح ص = س ط اور یہی مراد تھی

اس عمل سی ظاہر ہی کہ اگر تین مقدارین ہون اور اول مقدار دوسری سے وہی نسبت رکھتی ہی جو دوسری رکھتی ہی تیسری کو تو حاصل ضرب اطراف کا مساوی ہوتا ہی مجذور رقم اوسط کی اس سے یہہ بھی ظاہر ہی کہ اگر تین ارقام چار ارقام متناسبہ مین سے معلوم ہون تو چوتھی بھی معلوم ہوسکتی ہی بوسیلہ مساوات ح ص = س ط

۲ چاہتے ہین ہم ثابت کرنا اس بات کا کہ اگر ح : ی :: ص : س تو ح + ی : ی :: ص + س : س

کیونکہ اسطی کہ $\frac{ح}{ی}$ = $\frac{ص}{س}$ عدد ایک کو دونو طرف اس مساوات کی زیادہ کرو تو $\frac{ح}{ی}$ + ۱ = $\frac{ص}{س}$ + ۱

یعنے $\frac{ح+ی}{ی}$ = $\frac{ص+س}{س}$ یعنے ح + ی : ی :: ص + س : س

۳ چاہتے ہین ہم ثابت کرنا اس امر کا کہ اگر ح : ی :: ص : س تو ح − ی : ی :: ص − س : س

موافق فرض کے $\frac{ح}{ی}$ = $\frac{ص}{س}$ تفریق کرو ہر دو طرف اس مساوات سے عدد ۱ کو تو

$\frac{ح}{ی}$ − ۱ = $\frac{ص}{س}$ − ۱ یا $\frac{ح-ی}{ی}$ = $\frac{ص-س}{س}$ یعنے

ح − ی : ی :: ص − س : س لیکن بموجب دعوی (۲) کے

ح + ی : ی :: ص + س : س تو ح − ی : ی :: ص − س : س

۴ چاہتے ہین ہم ثابت کرنا اسکا کہ اگر ح : ی :: ص : س تو

ط ح : ط ی :: و ص : و س یہہ ظاہر ہی کیونکہ اسطی کہ $\frac{ح}{ی}$ = $\frac{ط ح}{ط ی}$

اور $\frac{ص}{س}$ = $\frac{و ص}{و س}$ تو $\frac{ط ح}{ط ی}$ = $\frac{و ص}{و س}$ یعنے ط ح : ط ی :: و ص : و س

اور اسیطور سی یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ ط ح : دی :: ط ص : دس

اور $\frac{ح}{ط} : \frac{ی}{ط} :: \frac{ص}{د} : \frac{س}{د}$ اور $\frac{ح}{ط} : \frac{ی}{د} :: \frac{ص}{ط} : \frac{س}{د}$

اور ح ٹ : ی ٹ :: ص ٹ : س ٹ

۵ اگر ح : ی :: س : ل اور ی : ص :: ل : ع تو

ح : ص :: س : ع کیونکہ چونکہ ح : ی :: س : ل تو

ح : س :: ی : ل یعنے $\frac{ح}{س} = \frac{ی}{ل}$ اور نسبت دویم سے چونکہ

ی : ص :: ل : ع تو ی : ل :: ص : ع یعنے $\frac{ص}{ع} = \frac{ی}{ل}$

اور $\frac{ح}{س} = \frac{ص}{ع}$ یعنے ح : س :: ص : ع یعنے ح : ص :: س : ع

۶ اگر ح : ی :: ل : ع اور ی : ص :: س : ل تب ح : ص :: س : ع کیونکہ نسبت اول سے

ح ع = ی ل اور ی ل = ص س تو ح ع = ص س یعنے ح : ص :: س : ع

۷ اگر ح : ی :: ص : س اور ل : ع :: ط : د اور ف : ک :: م : ن

تو ح × ل × ف : ی × ع × ک :: ص × ط × م : س × د × ن

کیونکہ $\frac{ح}{ی} = \frac{ص}{س}$ اور $\frac{ل}{ع} = \frac{ط}{د}$ اور $\frac{ف}{ک} = \frac{م}{ن}$ ان سب مساوات کو ایسمین ضرب کرو تو

$\frac{ح \times ل \times ف}{ی \times ع \times ک} = \frac{ص \times ط \times م}{س \times د \times ن}$ یعنی ح × ل × ف : ی × ع × ک :: ص × ط × ل : س × د × ن

سلسلہ جمع اور تفریق

اگر ہم کوئی مقدار فرض کرین اور اسی ایک جای ثبت کرین اور اسپر ایک خاص مقدار زیادہ کرین اور بعد ازان اس جمع کو ایک اور جای ثبت کرین اور پہر اس جمع پر اوسی خاص مقدار کو کہ اوسکو فرق عام کہتے ہین زیادہ کرین اور اس نئی جمع کو ایک اور جا ثبت کرین اور یہی عمل کئے جائین جہانتک چاہین تو ظاہر ہی کہ ایک ایسا سلسلہ مقدارونکا پیدا ہوگا کہ اونمین کی دوسری مقدار اول سے اوتنا ہی فرق رکہی گی جتنا تیسری دوسری سے اور چوتہی تیسری سے اور پانچوین چوتہی سے اور علی ہذا القیاس اگر ساری مقادیر اس سلسلہ کو جمع کرین تو اس عمل کو سلسلہ جمع کا کہتے ہین مثلاً ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ایک سلسلہ اعداد کا ہی اول رقم ایک ہی اور فرق عام بہی ایک ہی اسیطور پر

س س + ط س + ۲ ط س + ۳ ط ..... س + ع − ۱ ط

اسس صورت مین س تو اول رقم ہی اور ط فرق عام اور رقمون کی ع ہی اگر فرق عام ایک مقدار منفی ہو تو ظاہر ہی کہ رقم دوسری رقم اول سے اوتنی کم ہوگی جتنی تیسری دوسری سے اور چوتہی تیسری سے اور اسی قیاس پر مثلاً

۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ایک سلسلہ اعداد کا ہی اسمین اول رقم ۸ ہی اور فرق عام −۱ اور تعداد رقمونکی ۸ ہی اور یہ سلسلہ تفریق کا ہی اسیطرپر س س − ط س − ۲ ط س − ۳ ط ..... س − ع − ۱ ط فرض کرو کہ ایک سلسلہ کی اول رقم س ہی اور فرق عام مثبت خواہ منفی ط ہی اور تعداد رقمونکی ع ہی اور مجموعہ اس سلسلہ کا ح ہی تو مقدمہ بالا سے واضح ہی کہ س + س + ط + س + ۲ ط + س + ۳ ط ..... س + ع − ۱ ط = ح

س + ع − ۱ ط + س + ع − ۲ ط + س + ع − ۳ ط + س + ع − ۴ ط وغیرہ = ح

حاصل جمع (س + س + ع − ۱ ط) + (س + س + ع − ۱ ط) + (س + س + ع − ۱ ط) وغیرہ = ۲ ح

لیکن ظاہر ہی کہ (س + س + ع − ۱ ط) کی مانند کتنی رقمین تعداد مین ہین یعنے

انکی جمع = (س + س + ع − ۱ ط) × ع ہی اور اسی سبب سے

(س + س + ع − ۱ ط) × ع = ۲ ح اور

ح = (س + س + ع − ۱ ط) × $\frac{ع}{۲}$

مثال اول ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = ۴ اور فرق عام = ۴ اور تعداد رقمون کی = ۱۲ جاننے مین ہم معلوم کرینگے جمع اس سلسلہ کی تو اس صورت مین

س = (۴ + ۴ + ۱۲ − ۱ ۴) × $\frac{۱۲}{۲}$ = ۲ ۵ × ۶ = ۳ ۱۲

مثال دویم ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = ۲۲ اور فرق عام = −۲ اور تعداد رقمونکی = ۹ تو

ح = (۲۲ + ۲۲ − ۹ − ۱ ۱) × $\frac{۹}{۲}$ = ۲ ۸ × $\frac{۹}{۲}$ = ۹ × ۱۴ = ۱۲۶

سلسلہ ضرب اور تقسیم

اگر ایک رقم کو فرض کرکی ایک جا ثابت کرین اور اوسکا نام رقم اول رکھین اور ایک اور رقم فرض کرین اور اوسکا نام مضروب فیہ عام رکھین اور ضرب دین رقم اول مین اور حاصل ضرب کو ایک اور جا ثابت کرین اور بعد ازان اس حاصل ضرب کو بھی مضروب فیہ عام مین ضرب کرین اور اس حاصل ضرب کو ایک جا ثابت کرین اور یہی عمل کیے جاین جہان تک چاہین تو ظاہر ہی کہ ایک سلسلہ مقادیر کا پیدا ہوگا اور اس سلسلہ کو سلسلہ ضرب اور تقسیم کہتے ہین اگر مضروب فیہ عام ایک عدد صحیح تو سلسلہ ضرب کہلاتا ہی اور اگر کسر ہو تو وہ سلسلہ سلسلہ تقسیم کہلاتا ہی

مثلاً ۱ ۲ ۴ ۸ ۱۶ ۳۲ ۶۴ ایک سلسلہ ضرب ہی اور ۱ $\frac{۱}{۲}$ $\frac{۱}{۴}$ $\frac{۱}{۸}$ $\frac{۱}{۱۶}$ $\frac{۱}{۳۲}$ $\frac{۱}{۶۴}$ ایک سلسلہ تقسیم کا ہی سلسلہ اول مین رقم اول ۱ ہی اور مضروب فیہ عام ۲ ہی اور تعداد رقمون کی ۷ ہی و سلسلہ دویم مین رقم اول ۱ ہی اور مضروب فیہ عام $\frac{۱}{۲}$ ہی اور تعداد رقمون کی ۷ ہی قاعدہ واسطی بیان کرنے

ایسی سلسلوں کے اسطور سی دریافت ہوسکتا ہی فرض کرو کہ ایک سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = س اور مضروب فیہ عام = ط اور تعداد رقمون کی = ع اور جمع اس سلسلہ کی = ح تب

ح = س + س ط + س ط۲ + س ط۳ . . . . . + س ط ع-۱

ضرب کرو ہر دو طرف اس مساوات کو ط مین تب حاصل ضرب یہہ ہے

ح ط = س ط + س ط۲ + س ط۳ . . . . . + س ط ع-۱ + س ط ع

اس مساوات مین سے تفریق کرو مساوات اول کو تو ح ط - ح = - س + س ط ع

= س ط ع - س یعنے (ط - ۱) ح = س ط ع - س اور ح = $\frac{\text{س ط ع - س}}{\text{ط - ۱}}$

= جمع کی مثال اول فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = ۱ اور مضروب فیہ عام = ۲ اور تعداد رقمون کی = ۸ تب ح = $\frac{۱ - \frac{۱}{۲}}{۱ - ۲}$ = $\frac{۲۵۵}{۱}$ = ۲۵۵ مثال دویم فرض کرو کہ ایک ایسا سلسلہ ہی کہ اوسکی رقم اول = ۱ اور مضروب فیہ عام = $\frac{۱}{۲}$ اور تعداد رقمون کی = ۶

تو ح = $\frac{۱ - \frac{۱}{۶}}{۱ - \frac{۱}{۲}}$ = $\frac{۱ - \frac{۱}{۶۴}}{۱ - \frac{۱}{۲}}$ = $\frac{\frac{۶۳}{۶۴}}{\frac{۱}{۲}}$ = $\frac{۱۲۶}{۶۴}$

سوالات اول درجہ کی مساوات کے

سوالات

۱ ایک شخص ۳۰۰ روپیہ کا قرض دار ہی جسمین سے کچھ روپیہ تو اوسی زید کو دینا ہی اور اوس سے دوچند عمر کو اور مجموعہ اون دونو کی قرض کا بکر کو دینا ہی بتاؤ شخص مذکور کو کتنا زید کو دینا ہی اور کتنا عمر کو اور کتنا بکر کو قرض کرو لا روپیہ زید کو دینا ہی تب بموجب سوال کے ظاہر ہی کہ ۲ لا عمر کو دینا ہی اور لا + ۲ لا یعنے ۳ لا بکر کو دینا ہی لیکن کل قرض ۳۰۰ روپیہ ہی تو لا + ۲ لا + ۳ لا = ۳۰۰ اور ۶ لا = ۳۰۰ اور لا = $\frac{۳۰۰}{۶}$ = ۵۰ یعنے

زید کا روپیہ = ۵۰ اور عمر کا روپیہ ۲ × ۵۰ = ۱۰۰ اور بکر کا روپیہ = ۵۰ + ۱۰۰ = ۱۵۰

۲ دو عدد کون سے ہین جنکا حاصل تفریق ۹ ہی اور اگر تگنا بڑا عدد پانچ گنی چھوٹے عدد پر زیادہ کیا جاے تو مجموعہ ۳۵ ہوتا ہی فرض کرو کہ چھوٹا عدد = لا تو بموجب شرایط سوال کے بڑا عدد = لا + ۹ اور تگنا بڑا عدد = ۳ (لا + ۹) اور پانچ گنی چھوٹا عدد = ۵ لا اور ۳ (لا + ۹) + ۵ لا = ۳۵ یعنے

۳ لا + ۲۷ + ۵ لا = ۳۵ یعنے ۸ لا + ۲۷ = ۳۵ اور ۸ لا = ۳۵ - ۲۷ = ۸ اور لا = ۱ = عدد چھوٹی

اور لا + ۹ = ۱ + ۹ = ۱۰ = عدد بڑے کے

۳ ایک مکڑی کا پانچوان حصہ تو زمین مین گڑا ہوا ہی اور تین ساتوین حصے پانی مین ہین اور ۳ گز باہر پانی کی ہے

اوسس لکڑی کا طول ہی فرض کرو کہ لکڑی = لا تو موافق شرایط سوال کے لا − $\frac{لا}{۵}$ − $\frac{۱۲لا}{۷}$ = ۱۳ ضرب کرو ہر دو طرف اس مساوات کو ۵ مین تو ۵ لا − لا − $\frac{۱۵لا}{۷}$ = ۶۵

..... ایضا ..... ۷ مین تو ۳۵ لا − ۷ لا − ۱۵ لا = ۴۵۵

یعنے ۱۳ لا = ۴۵۵ اور لا = $\frac{۴۵۵}{۱۳}$ = ۳۵ = طول لکڑی کے

۴ ایک شخص کے پاس ایک تھیلی روپیون کی تھی اور اوسس روپیون مین سے چوتھائی تو ایک شخص کو دیئی اور ۸ توان حصہ دوسرے شخص کو پھر جو اوسنے روپئے شمار کئے تو ۸۵ نکلے بتاؤ اوسکے پاس کیتنے روپئے تھے فرض کرو کہ تعداد روپیون کی کہ تھیلی مین تھی = لا تو بموجب شرایط سوال کے $\frac{لا}{۴}$ + $\frac{لا}{۸}$ = روپئے جو خرچ ہوگئے اور اسیواسطے لا − $\frac{لا}{۴}$ − $\frac{لا}{۸}$ = ۸۵ ضرب کرو ہر دو طرف اس مساوات کو ۸ مین اور صفا ان ۷ مین تو ۸ لا − ۷ لا − ۶ لا = ۲۳۸۰ یعنے ۱۷ لا = ۲۳۸۰ اور لا = $\frac{۲۳۸۰}{۱۷}$ = ۱۴۰ روپئے مطلوبہ کے

۵ ایک پلٹن سپاہیون کی ہی اوسمین سے تین چوتھائی تو کام پر بیٹھے ہوئی ہین اور دو سو ان حصہ بیمار ہی اور کچھ باقی رہے اوسس باقی کے تین پانچوین حصے غیر حاضر ہین بعد اسکے ۴۸ سپاہی حاضر پائے بتاؤ کیتنے آدمی اس پلٹن مین ہین فرض کرو کہ تعداد مردمان پلٹن = لا تو بموجب شرایط سوال کے تین چوتھائی لا کی یعنے $\frac{۳لا}{۴}$ کام پر تعین ہین اور دو سو ان حصہ لا کا یعنے $\frac{۲لا}{۱۰}$ بیمار ہین اور مجموعہ $\frac{۳لا}{۴}$ + $\frac{۲لا}{۱۰}$ یعنے $\frac{۳۴لا}{۴۰}$ = $\frac{۱۷لا}{۲۰}$ = مردمان کام پر اور بیمار تو لا − $\frac{۱۷لا}{۲۰}$ = $\frac{۳لا}{۲۰}$ = مردمان جو باقی رہے اور تین پانچوین حصے باقی کے یعنے $\frac{۹لا}{۱۰۰}$ = مردمان غیر حاضر کے تو $\frac{۱۷لا}{۲۰}$ + $\frac{۹لا}{۱۰۰}$ + ۴۸ = لا = کل مردمان پلٹن اور

۱۷ لا + $\frac{۹لا}{۵}$ = ۹۶۰ = ۳۰ لا اور ۸۵ لا + ۹ لا + ۴۸۰۰ = ۱۱۰ لا

یعنے ۱۱۰ لا − ۸۵ لا − ۹ لا = ۴۸۰۰ = ۱۶ لا اور لا = $\frac{۴۸۰۰}{۶}$ = ۸۰۰

۶ ایک ایسی کسر ہے کہ اگر ہم اوسکی شمار کنندہ پر ۳ زیادہ کرین تو کسر = $\frac{۱}{۳}$ ہوجاتی ہی اور اگر اوسی کسر کے نب نامی کو تفریق کرین تو وہ کسر = $\frac{۱}{۵}$ وہ کسر کیا ہی فرض کرو کہ لا = شمار کنندہ اور د = نب نامی کے

تو $\frac{لا+۳}{د}$ = $\frac{۱}{۳}$ اور $\frac{لا}{د-۱}$ = $\frac{۱}{۵}$ یعنے

$$\left.\begin{array}{l} ۳لا + ۹ = د \\ ۵لا = د - ۱ \end{array}\right\} \text{یعنے} \left\{\begin{array}{l} د - ۳لا = ۹ \quad (ل) \\ د - ۵لا = ۱ \quad (م) \end{array}\right\} \text{مساوات (ل) سے}$$

مساوات (م) کو تفریق کرو تو حاصل تفریق ۲لا = x اور لا = ۴ اور

۳لا + ۹ = ۱۲ + ۹ = ۲۱ = د پس معلوم ہوا کہ کسر مطلوبہ = $\frac{۴}{۲۱}$

۷ آ اور ب نامی دو شخص کچھ روپیہ الگ الگ رکھتے ہیں آ نے ب سے یہہ کہا کہ اگر تم مجھے ۱۵ روپیے اپنے روپیوں میں سے دو تو میری پاس پانچ گنے روپئے اوس روپئی سے ہوجائینگی جو تمہاری پاس باقی رہینگی بعد ازاں ب نے کہا کہ اگر تم مجھے پانچ روپئے دو تو ہماری تمہاری پاس روپئے برابر ہوجائینگی بتاؤ کتنے کتنے روپئے ہر شخص کے پاس ہے

فرض کرو کہ لا = آ کے روپیے
تو لا + ۱۵ = روپیہ جو آ پاس ہوگیا بعد وصول ۱۵ روپیہ کے ب سے اور
اور د = ب کے روپیہ
∴ د − ۱۵ = روپئے جو ب پاس باقی رہا

اور د + ۵ = روپیہ جو ب پاس ہوگیا بعد وصول ۵ روپیہ کے آ سے اور لا − ۵ = روپیہ جو آ پاس باقی رہے تو موافق شرایط سوال کے

لا + ۱۵ = ۵ (د − ۱۵) = ۵ د − ۷۵ اور د + ۵ = لا − ۵

یعنے ۵ د − لا = ۹۰ (ل) تفریق کرو مساوات (ل) سے
د − لا = ۱۰ (م) مساوات (م) کو

تو حاصل تفریق یہہ ہی ۴ د = ۱۰۰ اور د = ۲۵ = روپیہ ب کے اور مساوات (م) سے

لا = د + ۱۰ = ۲۵ + ۱۰ = ۳۵ = روپئی آ کے

۸ ایک ایسا عدد ہی کو خواہ اوسی دو مساوی حصوں میں خواہ تین مساوی حصوں میں تقسیم کرو تو دونوں صورتوں میں حاصل ضرب اقسام کا ایک ہی مقدار ہوتا ہی فرض کرو کہ لا = عدد مطلوبہ کی تو بموجب شرایط سوال کے

$\frac{لا}{۲} \times \frac{لا}{۲} = \frac{لا^۲}{۴}$ = حاصل ضرب دو مساوی اقسام کی اور

$\frac{لا}{۳} \times \frac{لا}{۳} \times \frac{لا}{۳} = \frac{لا^۳}{۲۷}$ = حاصل ضرب تین مساوی اقسام کے اور موافق شرط سوال کے

$\frac{لا}{۲} \times \frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۳} \times \frac{لا}{۳} \times \frac{لا}{۳}$ یعنے

$\frac{لا^۲}{۴} = \frac{لا^۳}{۲۷}$ اور ۴ لا = ۲۷ لا اور ۴ لا = ۲۷

اور لا = $\frac{۲۷}{۴}$ = $۶\frac{۳}{۴}$ = عدد مطلوبہ کے

۹ ایک عدد دو مرتبہ کا ہی اور مجموعہ اوسکی دو مرتبہ کے ارقام کا = ۵ اور اگر ۹ کو عدد مذکور پر زیادہ کریں تو ارقام مرتبہ کے اوئیے ہوجاتے ہیں یعنے جو رقم اکائی کے مرتبہ پر تھی وہ دہائی کے مرتبہ پر آجاتی ہی اور بالعکس فرض کرو کہ لا = رقم دہائی کے مرتبہ کے اور د = رقم اکائی کے مرتبہ کی تو ظاہر ہی کہ عدد = ۱۰ لا + د اور ۱۰ د + لا = عدد کے اوس حالت میں جب اوسکی ارقام بمحاط مرتبہ کے اوئیچے دینے کے تو موافق شرایط

سوال سے لا+د=۵ (ل)

۱۰لا+د+۹=۱۰د+لا یا ۹لا−۹د=−۹ یا لا−د=−۱ (م)

تفریق کرو مساوات (م) کو مساوات (ل) سے تو ۲د=۶ اور د=۳ اور لا=۵−د=۵−۳=۲

اور عدد مطلوبہ=۱۰لا+د=۲۰+۳=۲۳ زیادہ کرو ۹ اس عدد پر تو مجموعہ

=۹+۲۳=۳۲=عدد کی اوس حالت مین جب اوسکے مرتبہ کے ارقام اولٹ گئے ہین

۱۰ وہ عدد کونسا ہی کہ اگر اوسکے ضعف پر ۱۸ زیادہ کیے جائین تو مجموعہ مساوی ہو ۸۲ کے اب فرض کرو عدد مطلوبہ=لا کیے تو بموجب شرایط سوال کیے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی ۲لا+۱۸=۸۲ اور بعد علامات ابدال کیے ۲لا=۶۴ ∴ لا=۳۲ تو معلوم ہوا کہ عدد مطلوبہ ۳۲ ہی

۱۱ وہ عدد کونسا ہی جسکے ضعف پر (۴۴) زیادہ کیے جائین تو مجموعہ مساوی ہو جو گئے عدد مطلوبہ کے اب فرض کرو لا=عدد مطلوبہ کیے تو بموجب شرایط سوال کیے ۲لا+۴۴=۴ لا یا بعد ابدال ۲لا=۴۴

∴ لا=۲۲

۱۲ وہ کونسا عدد ہی کہ جسکا ضعف زیادہ ہی نصف اوسی عدد سے بقدر چہ کی یعنے نصف عدد مطلوبہ کم ہو ضعف عدد مطلوبہ سے بمقدار چہ کے فرض کرو لا=عدد مطلوبہ کیے تو بموجب شرط سوال کے

$\frac{لا}{۲}$=۲لا−۶ بعد دور کرنی کسر کے لا=۴لا−۱۲ یا ۳لا=۱۲ ∴ لا=۴=عدد مطلوبہ کیے

۱۳ دو مسافر دو شہرون سے کہ بفاصلہ ۱۸۷ کوس کے ہین واسطے ملاقات کی ایک ہی وقت مین گئے اور ایک اونمین سے ایک دنمین ۸ کوس طے کرتا تہا اور دوسرا ۹ کوس اب دریافت کیا چاہتے ہین ہم یہہ بات کہ کتنے دنون کے بعد وہ ایک دوسرے سے ملین گے اور ہر ایک اونمین سے کتنی مسافت طی کریگا فرض کرو لا=تعداد دنون مطلوبہ کیے تو ظاہر ہی کہ ۸لا=اوس مسافت کیے جو ایک نے اونمین سے طی کی اور ۹لا=اوس مسافت کیے جو دوسرے نے طی کی ہی اور چونکہ بموجب فرض کیے بعد طی کرنے اپنی مسافت کیے وہ ملتی ہین تو ظاہر ہی کہ مسافت دونون کی ملکر مساوی ہوگی ۱۸۷ کے

یعنے ۸لا+۹لا=۱۸۷ یا ۱۷لا=۱۸۷ ∴ لا=۱۱=دنون کیے جنمین وہ دونو ایک دوسرے سے ملین گے اور ۸۸ کوس مساوی اوس مسافت کیے جو ۸ کوس چلنے والے نے طی کی اور ۹۹ کوس مساوی اوس مسافت کی جو نو کوس چلنے والے نے طی کی

۱۴ ایک شخص بارادہ تقسیم ۶۰ روپیہ کی گہر سے باہر نکلا چار فقیر اوسکو ملے اوسنے دوسرے کو دوگنا اور تیسری کو تگنا اور چوتہی کو چوگنا دیا اول سے بتاؤ اوسنے ہر ایک کو کیا کیا دیا پس فرض کرو کہ لا=اون روپون

جو اوسنی اول کو دیئے

اور ۲ لا = اون روپیون جو دوسرے کو دیئے

اور ۳ لا = اون کے جو تیسری کو دیئے

اور ۴ لا = اون کے جو چوتھے کو دیئے

∴ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا = ۶۰

یا ۱۰ لا = ۶۰

∴ لا = ۶

یعنی اوسنے ۶ اور ۱۲ اور ۱۸ اور ۲۴ روپیئے علیحدہ علیحدہ ہر ایک کو دیئے

۱۵ ایک کتاب فروش نے دس کتابین کسی خاص قیمت کو فروخت کین اور بعد ازان ۵ اکتابین اسی نرخ سے فروخت کین لیکن بہ نسبت پہلی کے ۳ روپیئے اوسنی زیادہ لیئے بتاؤ کیا ہی قیمت ہر ایک کتاب کے

فرض کرو لا = قیمت کتاب کے تو ۱۰ لا = اون روپیون کے جو اوسنے اول دفعہ بیچی سے پائے

اور ۵ لا = اون روپیون کے جو دوسری دفع حاصل کیئے لیکن موافق شرط سوال کے

۱۰ لا + ۳۵ = ۱۵ لا یا بعد ابدال کے ۵ لا = ۳۵ ∴ لا = ۷

۱۶ تین شخص (ا) اور (ف) اور (س) ۱۴۰ روپیہ مین اپنا اپنا حصہ کچھ رکھتی تھے اسطرح کہ روپیہ (ا) کا ضعف روپیہ (ف) کا اور روپیہ (ف) سہ چند روپیہ (س) کا بتاؤ ہر ایک کا روپیہ کتنا تھا

فرض کرو لا = حصہ (س) تو بموجب فرض کے ۳ لا = حصہ (ف) کے

اور ۶ لا = حصہ (ا) کے

اور یہی مجموعہ انکا مساوی ہی ۱۴۰ کے تو لا + ۳ لا + ۶ لا = ۱۴۰ یعنے ۱۰ لا = ۱۴۰ ∴ لا = ۱۴

یعنے حصہ (س) کا ۱۴ ہی اور حصہ (ف) کا ۴۲ اور حصہ (ا) کا ۸۴

۱۷ چار سوداگر مثلاً آ ب س د نے بارادہ سوداگری کے ۴۵۵ روپیہ جمع کیا اس تفصیل سے کہ ب نے سہ چند آ سے دیا اور س نے مجموعہ اون روپیونکا جو ک اور آ نے دیا اور د نے مجموعہ اون روپیونکا جو س اور ب نے دیا بتاؤ کتنا کتنا روپیہ ہر ایک نے دیا فرض کرو لا = تعداد اوس روپیہ کے جو آ نے دیا تو ۳ لا = اوس روپیہ کے جو ب نے دیا

اور ۴ لا = اوس روپیہ کے جو س نے دیا

اور ۷ لا = اوس روپیہ کے جو د نے دیا

لیکن مجموعہ ان سب روپیوں کا = ۴۷۵۵ سے فی

لا + ۳لا + ۴لا + ۷لا = ۴۷۵۵

یا ۱۵لا = ۴۷۵۵

∴ لا = ۳۱۷ = اوس روپیہ کی جو آپ نے دیا

اور ۹۵۱ = اوس روپیہ کے جو اس نے دیا

اور ۱۲۶۸ = روپیہ تیسرے کے اور ۱۹۰۲ = روپیہ دوسرے کے

۱۸ ایک سوداگر نے تین تھان خریدے اس تفصیل سے کہ طول دوسرے کا بہ نسبت اول کے ۵ گز اور طول تیسری کا بہ نسبت دوسرے کے ۴ گز زیادہ تھا لیکن مجموعہ گزون تینون تھانون کا مساوی ۱۵۹ گز کے تو بتاؤ طول ہر ایک تھان کا کیا ہی فرض کرو لا = تعداد گزون طول تھان اول کے تو بموجب شرایط سوال کے

لا + ۵ = تعداد گزون طول تھان دوسرے کے اور

لا + ۹ = تعداد گزون طول تھان تیسرے کے

لیکن مجموعہ گزون تینون تھانون کا = ۱۵۹ تو معلوم ہوا کہ

لا + لا + ۵ + لا + ۹ = ۱۵۹ یعنی ۳لا + ۱۴ = ۱۵۹

یا ۳لا = ۱۰۵ ∴ لا = ۳۵ = طول تھان اول کے

اور ۵۰ = گزون طول تھان دوسرے کے اور ۷۴ = طول تھان تیسرے کے

۱۹ ایک برتن میں کچھ سرکہ اور کچھ شہد اور کچھ پانی تھا اس تفصیل سے کہ سرکہ بہ نسبت شہد کی ۵ سیر زیادہ تھا اور پانی مساوی تھا مجموعہ شہد اور سرکہ کے لیکن مجموعہ ان تینون چیزون کا ۶۴ سیر تھا تو بتاؤ کتنی کتنی چیز اوسمین تھی ✣ فرض کرو لا = سیرون شہد کی تو بموجب سوال کے

لا + ۵ = سیرون سرکہ کے

اور ۲لا + ۵ = سیرون پانی کے

لیکن ۴لا + ۳۰ = ۶۴ یا ۴لا = ۱۱۶ ∴ لا = ۲۹ تو معلوم ہوا کہ شہد (۲۹) سیر تھا اور سرکہ (۳۴) سیر اور پانی ۷۴ سیر

۲۰ ایک شخص نے ۴ مزدورون کو اس تفصیل سے روپئے دیئے کہ اول کو دو روپیہ زیادہ بہ نسبت دوسری کے اور دوم کو تین روپئے زیادہ بہ نسبت تیسری کے اور تیسرے کو چار روپئے زیادہ بہ نسبت چوتھے کے لیکن کل روپئے جو اوسنے چارون کو دیئے مساوی (۴۲) کے ہین بتاؤ اوسنی ہر ایک کو کیا کیا دیا

ع ف اور د ج میں سے گذرنے والی سطح کے ذریعہ منشور نما کو دو فانوں اب ج د ع ف اور ع ف گ ہ ج د میں منقسم کرو۔

فرض کرو کہ اب، ع ف، ک ل، اد، ع ہ اور ک ن کے ناپ اسی طولی اکائی کے لحاظ سے بالترتیب ل۱ ل۲ ل۳ ض۱ ض۲ ض۳ ہیں۔

فرض کرو کہ فانوں اب ج د ع ف اور ع ف گ ہ ج د کے ناپ تناظر مکعب اکائی کے لحاظ سے بالترتیب ح۱ اور ح۲ ہیں۔

تب —

$$ح_۱ = \frac{ع ض_۱}{۶}(۲ل_۱ + ل_۲) \quad \text{.....دفعہ ۱۴۶}$$

اور

$$ح_۲ = \frac{ع ض_۲}{۶}(۲ل_۲ + ل_۱) \quad \text{.....دفعہ ۱۴۶}$$

$$\therefore ح = ح_۱ + ح_۲ = \frac{ع}{۶}(۲ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۱ + ۲ل_۲ ض_۲ + ل_۱ ض_۲)$$

$$= \frac{ع}{۶}(ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۱ + ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۱ + ل_۱ ض_۲ + ل_۲ ض_۲)$$

$$= \frac{ع}{۶}\{(ل_۱ + ل_۲)(ض_۱ + ض_۲) + ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۲\}$$

$$= \frac{ع}{۶}\{(۲ل \times ۲ض) + ل_۱ ض_۱ + ل_۲ ض_۲\}$$

$$= \frac{ع}{۶}(۴ ق + ق_۱ + ق_۲)$$

پس قاعدہ —

منشور نما کے سروں میں کی کسی مربع اکائیوں کی تعداد میں سروں کے متوازی اور اُن کی وسطی تراش میں کی اُن ہی مربع اکائیوں کی تعداد کا چار گنا جمع کرو۔ پھر اس مجموعہ کو اس کے ارتفاع میں کی متناظر طولی اکائیوں کی تعداد سے ضرب دو تب اس

لا = حصہ اول کے بموجب سوال کے

لا − ۱۰ = حصہ دوسرے کے

اور لا − ۱۴ = حصہ تیسرے کے

اور لا − ۲۵ = حصہ چوتھے کے

اور لا − ۲۸ = حصہ پانچویں کے

اور لا − ۳۳ = حصہ چھٹے کے

تو اب چونکہ مجموعہ ان سب کے حصوں کا مساوی ہے تمامی حصہ اول معہ ۱۰ کے تو معلوم ہوا کہ

۶ لا − ۱۱۰ = ۳ لا + ۱۰ اسیواسطے ۳ لا = ۱۲۰

∴ لا = ۴۰ = حصہ اول کے اور ۳۰ = حصہ دویم کے

اور ۲۶ = حصہ سویم کے اور ۱۵ = حصہ چہارم کے اور

۱۲ = حصہ پنجم کے اور ۷ = حصہ ششم کے

۲۳ تقسیم کرو عدد ۹۹ کو ایسی پانچ حصوں میں کہ اول زیادہ ہووے دوسرے سے ۳ اور کم ہووے بہ نسبت تیسری کے ۱۰ اور زیادہ ہووے بہ نسبت چوتھی کے ۹ اور کم ہووے بہ نسبت پانچویں کے ۱۶ فرض کرو

لا = حصہ اول کے تو بموجب سوال کے

لا − ۳ = حصہ دویم کے

اور لا + ۱۰ = حصہ سویم کے

اور لا − ۹ = حصہ چہارم کے

اور لا + ۱۶ = حصہ پنجم کے

∴ لا + لا − ۳ + لا + ۱۰ + لا − ۹ + لا + ۱۶ = ۹۹

∴ ۵ لا + ۱۴ = ۹۹

∴ بعد ابدال کے ۵ لا = ۸۵

اور لا = ۱۷ = حصہ اول کے اور باقی حصہ ۳۴ اور ۱۴ اور ۲۷ اور ۸

۲۴ دو عدد کونسی ہیں کہ جنکا مجموعہ ۵۹ ہے اور حاصل تفریق ۱۷ فرض کرو

لا = چھوٹے عدد کے تو بموجب سوال کے

لا + ۱۷ = بڑے عدد کے

۱۰۰ + ۱۰ + ۱ = ۵۹ یا بعد ابدال کے ۲ لا = ۴۲

∴ لا = ۲۱ = چھوٹے عدد کی

اور ۳۸ = بڑے عدد کے

۲۵ کون عدد ہی کہ جسکا چند اوسکا مو ۱۲ کے ۵۴ سے اتنا زیادہ ہی جیسا کہ جسکا چند اوسکا کم ہی ایک سو چوالیس سے فرض کرو لا = عدد مطلوبہ کی تو بموجب سوال کے ۳ لا + ۱۲ − ۵۴ = ۱۴۴ − ۳ لا یا بعد ابدال کے ۶ لا = ۱۸۶ ∴ لا = ۳۱ = عدد مطلوبہ کے

۲۶ دو شخص قمار باز کہ مساوی روپیہ رکھتے تھے جو کھیلنے لگے تو اول شخص ۱۴ ہارا اور دوسرا شخص ۲۴ جیتا اور بعد کھیل کے معلوم ہوا کہ پاس دوسری کے دوچند تھا اوس روپیہ کا جو اول پاس تھا بتاؤ ہر ایک پاس کتنا روپیہ تھا فرض کرو لا = اون روپیون جو دونو پاس تھے اور لا − ۱۴ = اوس روپیے کے جو ایک پاس بچے اور لا + ۲۴ = اوس روپیہ کے جو دوسرے پاس تھے لیکن بموجب سوال کے لا + ۲۴ = ۲ لا − ۲۸ تو بعد ابدال کے لا = ۵۲ = برابر اوس روپیے کے جو ہر ایک پاس تھا

۲۷ دو فریق آدمیون کے کہ مجموعہ اونکا ۹۴۳ تھا ایک امر میں بحث کرتی تھی اوسکے ہونے اور نہونے میں لیکن جو کہ اقرار ہونیکا کرتے تھے ۶۵ زیادہ تھے بہ نسبت دوسرے کے تو بتاؤ کتنے ایکطرف تھے اور کتنے ایک طرف فرض کرو لا = تعداد آدمیون اوس فریق کے جو انکار کرتے تھے تو بموجب سوال کے لا + ۶۵ = تعداد اون آدمیون کے جو کہ اقرار امر مذکور کا کرتے تھے لیکن مجموعہ ان دونو تعداد کا مساوی ۹۴۳ کے ہے لا + لا + ۶۵ = ۹۴۳ یا ۲ لا + ۶۵ = ۹۴۳ یا بعد ابدال کے ۲ لا = ۸۷۸

∴ لا = ۴۳۹ = تعداد اوس فریق کے جو انکار کرتے تھے اور ۵۰۴ = تعداد اوس فریق کے جو اقرار کرتے تھے

۲۸ دو چوروں نے لوٹ میں ۳۵ روپئے لوٹے اگر ایک پاس اونمیں سے چار روپیہ سے زیادہ ہوتے تو اوسکے پاس دوگنے روپیہ ہوتی بہ نسبت دوسرے کے بتاؤ کتنے کتنے روپیہ ہر ایک پاس تھے فرض کرو لا = حصہ ایک چور کے تو بموجب سوال کے ۳۵ − لا = حصہ دوسرے چور کے اور لا + ۴ = ۷۰ − ۲ لا اور بعد ابدال کے ۳ لا = ۶۶ ∴ لا = ۲۲ = حصہ ایک چور کے اور ۱۳ = حصہ دوسرے چور کے

۲۹ چار ٹکڑے ریشم کے متساوی تھے جسکہ کنارے تین میں سے ۱۹ گز اور چوتھے میں سے ۱۷ گز اور باقی کو جمع کیا تو مجموعہ = ہوا ۱۴۲ بتاؤ طول چاروں کا کیا تھا فرض کرو طول ہر ایک ٹکڑے کا اونمیں سے = لا تو اسیواسطے بموجب سوال کے لا − ۱۹ + لا − ۱۹ + لا − ۱۷ = ۱۴۲

پھر ۴ لا − ۴۲ = ۷ لا − ۴۲ یا بعد ابدال کے ۴ لا = ۲۱۶ ∴ لا = ۵۴ یعنی ہر ایک
بگڑا چار بگڑ دن رشیم کا ۵۴ گز تھا

۳۰ دو ریوڑ مت دی بکریوں میں سے صاحب ریوڑ نے کچھ بکریاں بیچیں اسطرح کہ ایک میں سے
۹ ۳ اور دوسرے میں سے ۹۲ لیکن بعد فروخت کی معلوم ہوا کہ جنمیں ۹۳ بیچی گئی ہیں وہ دوگنا ہی نسبت
دوسرے کے تو بتاؤ کتنی بکریاں ہر ایک میں اون دونوں سے تھی فرض کرو لا = تعداد ایک کے اون دونو
میں سے تو بموجب سوال کے ۲ لا − ۹۳ = ۲ لا − ۱۸۶ یا بعد ابدال کے لا = ۱۴۷ = تعداد ایک ریوڑ کے

۳۱ ایک سوداگر نے ۱۲ گز کپڑا کچھ اون میں سے فی گز ۱۹ روپیہ کے نرخ سے اور باقی فی گز ۱۷ روپیہ کے
نرخ سے خریدا لیکن کل کپڑا ۲۱۴ روپیہ کا خریدا بتاؤ کتنے گز اون میں سے فی گز ۱۹ روپیہ کے نرخ سے
اور کتنے فی گز ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا فرض کرو لا = اون گز دن کے جو فی گز ۱۹ روپیہ کے
نرخ سے خریدا اور اسیواسطے ۱۲ − لا = اون گز دن کے جو فی گز ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور
۱۵ لا = قیمت اون گز دن کی جو فی گز ۱۹ روپیہ کے نرخ سے خریدا اور ۱۷ × (۱۲ − لا) = قیمت اون
گز دن کے جو ۱۷ روپیہ کے نرخ سے خریدا گیا ∴ ۱۹ لا + ۲۰۴ − ۱۷ لا = ۲۱۴ اور بعد ابدال کے
۲ لا = ۱۰ اور لا = ۵ = تعداد اون گز دن کے جو ۱۹ روپیہ کے نرخ سے خریدا گیا اور ۷ تعداد
اون گز دن کے جو فی گز ۱۷ روپیہ نرخ سے خریدا گیا

۳۲ تقسیم کرو عدد ۱۹۷ کو ایسی دو حصہ غیر مساوی میں کہ چار چند بڑے حصہ کا پانچ گنے چھوٹے سے
۵۰ زیادہ ہو فرض کرو لا = چھوٹے عدد کے تو بموجب سوال کے ۱۹۷ − لا = بڑے عدد کے
اور ۷۸۸ − ۴ لا = ۵ لا + ۵۰ اور بعد ابدال کے ۹ لا = ۷۳۸ ∴ لا = ۸۲ = چھوٹے
قسم کے اور ۱۱۵ = بڑے قسم کے

۳۳ ایک شخص قاصد کہ ۶۰ میل ایک روز میں چلتا ہے ایک جا ی روانہ کیا گیا تھا لیکن بعد پانچ روز کے
ایک اور قاصد واسطے اوسکے بلانی کے بھیجا گیا اور قاصد دویم ۷۵ کوس روز چلتا ہے تو بتاؤ کتنی روز
میں قاصد اول کو پکڑیگا فرض کرو لا = تعداد دونوں کے جتنی دونو میں قاصد دویم قاصد اول کو پکڑیگا
اور لا + ۵ = تعداد اون دونوں کے جو قاصد اول نے اومیں مسافت طی کی ∴ ۶۰ لا = اوس مسافت
کے جو قاصد دویم نے طی کی اور ۶۰ لا + ۳۰۰ = اوس مسافت کی جو قاصد اول نے طی کی
لیکن چونکہ بعد اپنی مسافت کی دونوں ملجائینگی تو معلوم ہوا ۶۰ لا = ۶۰ لا + ۳۰۰ اور بعد ابدال کے
۱۵ لا = ۳۰۰ ∴ لا = ۲۰ = تعداد دونوں پکڑنے کے

۳۴ دو شخص آ اور ب کے پاس ۶۰ روپیہ تھے آ نے ب کو دس روپے دیئے اور بعد اسکے آ پاس اتنے روپے رہی کہ اگر ۸ روپیہ اور اوسکے پاس ہون تو وہ برابر اون روپیون کے جو ب پاس ہوگئے فرض کرو لا = اون روپیون کے جو آ پاس ہے تو ۶۰ - لا = اون روپیون کے جو ب پاس تھے اور لا - ۱۰ = اون روپیون کے جو آ پاس رہی اور ۷۰ - لا = اون روپیون کے جو ب پاس ہوگئے لیکن بموجب سوال کے

لا - ۱۰ + ۸ = ۷۰ - لا یا لا - ۲ = ۷۰ - لا یا ۲ لا = ۷۲ ∴ لا = ۳۶ مساوی اون روپیون کے جو آ پاس تھے اور ۲۴ مساوی اون روپیون کے جو ب پاس تھے

۳۵ دو شخصون آ اور ب نے کہ مساوی روپیہ ملاکر تجارت کی تھے اس تفصیل سے فائدہ حاصل کیا کہ آ نے سہ چند اپنی مال مع ۲۷ کے اور ب نے دوچند اپنی مال کا مع ۱۵۳ کے لیکن کل نفع = ہی پانچ گنے حصہ ایک کو اونمین سے بتا و حصہ اونکا کیا تھا یعنے اونہون نے کتنا کتنا روپیہ ملاکر تجارت کی تھی فرض کرو لا = حصہ آ کے باب کے تو اسیواسطی فائدہ جو کہ آ نے حاصل کیا مع اوسکے مال کے = ۳ لا + ۲۷ اور فائدہ جو ب نے حاصل کیا مع اوسکی مال کے = ۲ لا + ۱۵۳ اور چونکہ مال دونونکا = ۲ لا اور حاصل جمع فائدہ دونکا = ۵ لا تو معلوم ہوا ۳ لا + ۱۸۰ = ۵ لا یا ۲ لا = ۱۸۰ ∴ لا = ۹۰ تو معلوم ہوا کہ اونہون نے ۹۰ - ۹۰ روپئی ملاکر تجارت کی تھی

۳۶ دو کاریگر مثلاً آ اور ب کہ ۶۰ پیسی روز مزدوری پاتے تھے پچاس دن تک مزدوری کرتے رہے اور خرچ بھی کرتے رہے لیکن آ بہ نسبت ب کے چھ پیسی روز کم خرچ کرتا تھا تو بعد پچاس دنکی معلوم ہوا کہ آ پاس پیسے دوچند ب کے پیسون سے مع اوسکی دو دنکی خوراک کے جمع ہوئے بتا و ہر روز ہر ایک اونمین سے کیا کیا خرچ کرتا تھا فرض کرو لا = اون پیسون کے جو آ ہمیشہ خرچ کرتا تھا اور ۶۰ - لا = اوس پیسے کے جو ہر روزہ اوسکی پاس بچتا تھا اور لا + ۶ = اون پیسون کے جو ب ہر روزہ خرچ کرتا تھا اور ۵۴ - لا = اون پیسون کے جو ب ہر روز بچاتا تھا اور ۳۰۰۰ - ۵۰ لا = تمام بچت کے جو کہ آ نے جمع کیا اور ۲۷۰۰ - ۵۰ لا = اون پیسون کے جو ب پاس جمع ہوئے لیکن بموجب سوال کے

۳۰۰۰ - ۵۰ لا = ۵۴۰۰ - ۱۰۰ لا + ۲ لا اور بعد ابدال کے ۴۸ لا = ۲۴۰۰ ∴ لا = ۵۰ اور اس سے معلوم ہوا کہ آ ہر روزہ پچاس پیسے خرچ کرتا تھا اور ب ۵۶ پیسے

۳۷ آ اور ب نے مساوی روپیہ سے تجارت کرنی شروع کی آ نے اول سال مین ۴۰ روپئے حاصل کیے اور ب نے اوسی سال ۴۰ کھوئے بعد ہ دوسرے سال مین آ نے تہائی اوس روپئی کے

جو اوسکے پاس ہوگئے تھے کھوئے اور ب نے حاصل کیا جو کچھ کہ آسنے کھویا تھا اگر اوسکو دوچند کرکے
۴۰ نکال لیں لیکن پھر معلوم ہوا کہ ب پاس دوچند روپیہ ہی بہ نسبت آ کے فرض کرو لا = اوس مال کے
کہ ہر ایک نے اون میں سے تجارت کرنی شروع کی تھی ∴ لا + ۴۰ = روپئے اول سال آ کے
اور لا − ۴۰ = روپئے اول سال ب کی اور لا + ۴۰ − $\frac{لا+۴۰}{۳}$ = روپیہ سال دویم آ کے
اور لا − ۴۰ + $\frac{۸۰+۲لا}{۳}$ − ۴۰ = روپیہ سال دویم ب کے
∴ لا − ۴۰ + $\frac{۸۰+۲لا}{۳}$ − ۴۰ = ۲لا + ۸۰ − $\frac{۸۰+۲لا}{۳}$ یعنے
۳لا − ۱۲۰ + ۸۰ + ۲لا = ۱۲۰ + ۶لا + ۲۴۰ − ۲لا − ۸۰ اور بعد ابدال کے
لا = ۳۲۰ مساوی اوس روپئے کے جس سے ہر ایک نے تجارت کرنی شروع کی تھی

۳۸ تقسیم کرو عدد ۶۸ کو ایسے دو اقسام مختلف میں کہ حاصل تفریق بڑھیے کا ۸۴ سے مساوی ہو
سہ چند حاصل تفریق چھوٹے کو ۴۰ میں سے فرض کرو لا = چھوٹے عدد کے ∴ ۶۸ − لا = بڑی
عدد کے اور بموجب سوال کے ۸۴ − (۶۸ − لا) = ۱۲۰ − لا × ۳ یعنے
۸۴ − ۶۸ + لا = ۱۲۰ − ۳لا اور بعد ابدال کے ۴لا = ۱۰۴ ∴ لا = ۲۶ = چھوٹے
عدد کے اور ۴۲ = بڑے عدد کے

۳۹ وہ کون عدد ہے جسکی چوتھائی پر ۱۶ زیادہ کرین تو تہائی اوس عدد کی ہو لا = عدد مطلوب کے
تو اب بموجب سوال کے $\frac{لا}{۴}$ + ۱۶ = $\frac{لا}{۳}$ ∴ ۳لا + ۱۹۲ = ۴لا ∴ بعد ابدال کے لا = ۱۹۲

۴۰ ایک شخص نے کچھ اناج بویا تھا جب وہ تیار ہوا تو معلوم ہوا کہ ۴۸ من اناج پیدا ہوا اور پہلے
اناج بوئی ہوئے سے ایک تہائی زیادہ ہی تھا اناج کتنا پہلے بویا تھا فرض ۳لا = اناج پہلے بوئے
ہوئے کے ∴ ۳لا + لا = ۴۸ یعنے لا = ۱۲ ∴ اناج جو اوسنے پہلی بویا تھا ۳۶ من تھا

۴۱ ایک شخص نے اپنی ایک گئے کہاس کی چوتھائی اور نصف کو بیچ ڈالا جسکا مجموعہ = ۹۶ من کے تھا
پس بتاؤ سب گھاس کا کتنے من کا تھا فرض کرو ۴لا = تعداد من گٹھے کے ∴ ۲لا + لا = ۹۶
یعنے ۳لا = ۹۶ ∴ لا = ۳۲ اور ۱۲۸ = تعداد من گٹھے کے

۴۲ ایک شخص نے دو نوکروں کو ۲۱۰ روپیہ اس تفصیل سے دیئے کہ ایک کو بہ نسبت دوسرے
کے آدھا دیا تو بتاؤ ہر ایک کو کتنا کتنا دیا روپیہ دیا فرض کرو لا = اوس آدمی کے روپیہ کے جس پاس
کم ہیں تو بموجب سوال کے ۲لا = حصہ اوس نوکر کے جس پاس روپیہ صنف ہیں بہ نسبت دوسرے کے
لیکن ۲لا + لا = ۲۱۰ یا ۳لا = ۲۱۰ ∴ لا = ۷۰ حصہ ایک نوکر کے اور ۱۴۰ = حصہ نوکر دوسرے کے

۴۳ دو عدد کونسی ہین کہ اونمین وہ نسبت ہی جو ۲ کو ۳ سے ہے اور اگر ہر واحد پر اون دونون مین سے چار چار بڑہائی جاوین تو مجموعون کو اسمین وہی نسبت ہوگی جو ۵ رکہتا ہی ۷ سے تو بموجب شرائط سوال کے ۲ لا = ایک عدد کی اور ۳ لا = دوسرے عدد کی اور ۲ لا + ۴ : ۳ لا + ۴ :: ۵ : ۷ سے ۱۴ لا + ۲۸ = ۱۵ لا + ۲۰ ∴ بعد ابدال کے لا = ۸ اور ۱۶ = ایک عدد کے اور ۲۴ = دوسرے عدد کے

۴۴ ایک شخص کو کچہہ گوشت درکار تہا وہ بازار کو کچہہ لیکر خریدنے گیا اور دلمین سوچا کہ اگر ہرن کا گوشت جو چار پیسے سیر ہی لیجئے تو کچہہ نہین بچتا اور اگر بہیڑ کا گوشت جو ساڑہے تین پیسے سیر ہی لیجئے تو ۲۴ پیسے بچتے ہین بتاؤ کتنا گوشت اوسکو درکار تہا فرض کرو ۲ لا = سیرون گوشت کی ∴ ۸ لا = قیمت گوشت ہرن کے اور ۷ لا = قیمت گوشت بہیڑ کے اور بموجب سوال کے ۸ لا − ۷ لا = ۲۴ یا لا = ۲۴ = نصف تعداد سیرون گوشت کی اور کل تعداد = ۴۸

۴۵ ایک مچہلی ہی کہ اوسکی دم ہی ۹ سیر کی اور دہڑ ہی اتنا جتنا اوسکا سر اور دم اور سر اوسکا اتنا وزنی ہی جتنی ساری دم اور آدہا دہڑ بتاؤ مچہلی کتنی وزنی ہی فرض کرو ۲ لا = تعداد سیرون دہڑ کے تو ∴ لا + ۹ = سر مچہلی کے لیکن بموجب فرض کے ۲ لا = لا + ۹ + ۹ ∴ لا = ۱۸ = اصل تعداد سیرون دہڑ مچہلی کے اور ۶ ۳ + ۱۸ + ۹ + ۹ = ۷۲ = تعداد سیرون مچہلی کے

۴۶ ایک سیدہ مین چار مقام آ ف س د ہین کسی خاص فاصلہ پر یعنے آ سے د تک ۳۴ میل اور فاصلہ آ کا ف تک : فاصلہ س سے د تک :: ۲ : ۳ اور ایک ربع فاصلہ آ کا ف تک معہ نصف فاصلہ س کے د تک تکنا ہی فاصلہ ف سے س تک بتاؤ یہ فاصلے کتنے کتنے ہین فرض کرو ۲ لا = فاصلہ کے جو درمیان آ اور ف کے ہی ∴ ۳ لا = اوس فاصلہ کے جو درمیان س اور د کے ہی

اور $\left(\frac{لا}{۴} + \frac{۳لا}{۲}\right)$ = ۲ لا = ۳ ف س یعنے فاصلہ کے جو درمیان ف اور س کے ہی

∴ ف س = $\frac{۲}{۳}$ لا اور بموجب سوال کے $\left(۲لا + ۳لا + \frac{۲}{۳}لا\right)$ = $\frac{۱۱۷لا}{۳}$ = ۳۴

∴ $\frac{لا}{۳}$ = ۲ اور لا = ۶ اور ۱۲ میل = فاصلہ آ اور ف کے اور ۱۸ = فاصلہ س اور د کے اور ۴ میل = فاصلہ ف اور س کے

۴۷ ۱۵ کونسا عدد ہی جس پر اگر علیحدہ علیحدہ زیادہ کرین آ ۵ ۱۳

تو مجموعہ اول : مجموعہ ثانی :: مجموعہ ثالث سے فرض کرو لا = عدد مطلوبہ کے تو لا + ۱ : لا + ۵ :: لا + ۵ : لا + ۱۳ تو بموجب قاعدہ تناسب کے لا + ۱ : ۴ :: لا + ۵ : ۸ اور بعد ابدال نسبت کے لا + ۱ : لا + ۵ :: ۴ : ۸ :: ۱ : ۲ اور پھر بموجب قاعدہ تناسب کے

لا+۱ : ۴ :: ۱ : ۱ ∴ لا+۱ = ۴ اور لا = ۳

۴۸ ایک شخص نے اپنی زوجہ کی ایک برتن پانی کا ۱۲ دنمین پی تا تہا لیکن جب وہ کہین جاتا تہا تو فقط اوسکی زوجہ اوسکو تیس دن مین پی تی تہی تو بتا و شخص مذکور اوسکو اکیلا کتنے دنون مین پیئے گا فرض کرو لا = تعداد دنون مطلوبہ کے

تب لا : ۱۲ :: ۱ : اوس حصہ پانی کے جو مرد نی پیا ∴ $\frac{۱۲}{لا}$ = اوس حصہ کے جو مرد نی پیا

اور ۳۰ : ۱۲ :: ۱ : اوس حصہ پانی سے جو عورت نی پیا بارہ دنمین یعنے حصہ عورت کا ۱۲ دن مین

= $\frac{۱۲}{۳۰}$ = $\frac{۲}{۵}$ ∴ $\frac{۱۲}{لا}$ + $\frac{۲}{۵}$ = ۱ اور ۶۰ + ۱۲لا = ۵لا یعنے ۳لا = ۶۰ اور

∴ لا = ۲۰ = تعداد دنون مطلوبہ کے جنمین کہ فقط شخص مذکور پانی پی لیگا

۴۹ ایک حوض ہی کہ اوسمین دو بمبہ پانی کے آ اور ب ہین اگر دونون برابر جاری رہین تو ۱۲ گھنٹے مین حوض مذکور پر ہوتا ہی اور اگر فقط ایک بمبہ آ جاری رہے تو بیس گھنٹہ مین پر ہوتا ہی پس اگر جاری رہیں فقط بمبہ ب کو تو بتا و حوض مذکور کتنے وقت مین پر ہوگا فرض کرو لا = تعداد دن گھنٹون کے جنمین حوض مذکور پر ہوگا

تب لا : ۱۲ :: ۱ : اوس حصہ پانی سے جو کہ بارہ گھنٹہ مین بمبہ ب سی آتا ہی ∴ $\frac{۱۲}{لا}$ = حصہ مذکور کے

اور اسیطور ثابت ہوسکتا ہی کہ وہ حصہ پانی کا جو ۱۲ گھنٹہ مین بمبہ آ سی آتا ہی = $\frac{۳}{۵}$ ∴ $\frac{۱۲}{لا}$ + $\frac{۳}{۵}$ = ۱

اور ۶۰ + ۳لا = ۵لا یا ۲لا = ۶۰ ∴ لا = ۳۰ = گھنٹون مطلوبہ

۵۰ ایک تالاب ہی کہ اوسمین ۴۲ من پانی ہی اور اوسکو دو ڈولون سے کہ ایک اونمین کا صنف ہی بہ نسبت دوسرے کے خالی کرتے ہین اسطرحسی کہ بڑا ڈول تین منٹ مین دو دفعہ باہر کہینچتے ہین اور چہوٹا ڈول ۲ منٹ مین تین دفعہ کہینچ ڈالتے ہین تو بعد خالی ہونے تالاب کے معلوم ہوا کہ ۱۲ منٹ مین خالی ہوا تا و مقدار ہر ایک ڈول کی کہ کتنا پانی اوسمین آتا تہا فرض کرو لا = تعداد منون پانی کے جو کہ چہوٹے ڈول مین آتا تہا

∴ ۲لا = تعداد منون بڑے ڈول کے اور ۴لا = اوس حصہ پانی کے جو تین منٹ مین بڑے ڈول سے نکلتا ہی ۳ : ۱۲ :: ۱ : ۴ :: ۴لا : اوس پانی سے جو نہکایا گیا ۱۲ منٹ مین یعنے ۱۶لا

اسیطور سی دریافت ہوسکتا ہی کہ پانی نہکایا گیا چہوٹے ڈول سے = ۱۸لا

∴ (۱۶لا + ۱۸لا) = ۳۴لا = ۴۲ ∴ لا = ۱۳ = تعداد منون چہوٹے ڈول کے

∴ ۲۶ = تعداد منون بڑے ڈول کے

۵۱ ایک خرگوش کہ جسکی تین چوکڑیون کے برابر دو چوکڑیان ایک شکاری کتے کی ہین درحیوقت مین کہ خرگوش چار چوکڑیان بہرتا ہی اوسوقت وہی کتا تین چوکڑیان بہرتا ہی ۵ چوکڑیان آگی تھے کے ہتا تو اوسنے بتا و کہ کتا کتنے چوکڑیون مین خرگوش کو پکڑیگا فرض کرو کہ ۳لا = تعداد چوکڑیون کے جو کتا

وقت پڑنے تک لیگا ∴ ۴ لا = تعداد جو کڑیون کے جو خرگوش اوسی وقت مین لیگا

∴ ۴ لا + ۵۰ = تمام جو کڑیون خرگوش کے اور ۲ : ۳ :: ۳ لا : ۴ لا + ۵۰ لیگا

∴ ۹ لا = ۸ لا + ۱۰۰ ∴ لا = ۱۰۰ اور اسیواسطے ۴۰۰ = جو کڑیون کے جنمین کہ کتا خرگوش کو پکڑیگا

۵۲ سیب اور انار اسطرح سے فروخت ہوتی ہین کہ دس سیب ایک پیسے کے اور ۲۵ انار دو پیسے کے

اگر ہم خریدنا چاہین مجموعہ ۱۰۰ اسیبون اور انار کو $\frac{19}{2}$ پیسے کی بدلی تو بتاؤ کتنے انار ہونگے اور

کتنے سیب فرض کرو لا = تعداد سیبون کے ∴ ۱۰۰ − لا = تعداد اناردن کے

اور ۱۰ : لا :: ۱ : قیمت لا کتنی سیب کی ہے ∴ قیمت لا کتنے سیب کی = $\frac{\text{لا}}{10}$ اور اسیطرح

ثابت کرسکتے ہین ہم کہ ۱۰۰ − لا کتنی انار کی قیمت = $\frac{۲۰۰ - ۲\text{لا}}{25}$ ∴ $\frac{\text{لا}}{10} + \frac{۲۰۰ - ۲\text{لا}}{25} = \frac{19}{2}$

اور بعد دور کرنے کسر اور اختصار کے ۵ لا + ۴۰۰ − ۴ لا = ۴۷۵ اور ابدال کے بعد

لا = ۷۵ = تعداد سیبون کے اور ۲۵ = تعداد اناردن کے

۵۳ ایک شخص جوا کھیلنے لگا اول دفعہ جتنے روپئے سی کھیلنا شروع کیا تہا اوس سے دوچند جیتا

اور پھر ۱۶ روپیہ ہارا اور بعد اوسکے باقی کا $\frac{۴}{5}$ ہارا تب جتنی روپئے سے کھیلنا شروع کیا تہا اوسنے

جیتا پھر بعد شمار کے معلوم ہوا کہ ۸۰ روپئے اوسکی پاس تہے بتاؤ کتنے روپئے سی کھیلنا شروع کیا تہا فرض کرو

لا = اون روپیون کے جتنی کھیلنا شروع کیا تہا تو ۲ لا = اون روپیون کے جو اول دفعہ جیتا اور پھر بموجب

سوال کے ۳ لا − ۱۶ − $\frac{۱۲\text{لا} - ۶۴}{5}$ + لا = ۸۰ اور بعد دور کرنے کسر

۱۵ لا − ۸۰ − ۱۲ لا + ۶۴ + ۵ لا = ۴۰۰ اور ابدال کے ۸ لا = ۴۱۶ ∴ لا = ۵۲

۵۴ تقسیم کرو عدد ۳۶ کو ایسے تین حصون مین کہ ادہا اول کا اور ثلث دوسرے کا اور جو تہائی تیسرے کا

مساوی ہو ایک دوسری کے فرض کرو ۲ لا = حصہ اول کے اسیواسطے لا = $\frac{1}{2}$ حصہ دوسرے

کے اور ∴ ۳ لا = حصہ دوسرے کے اور چونکہ لا = $\frac{1}{4}$ حصہ تیسری کے تو ∴ حصہ تیسرا = ۴ لا

اور (۲ لا + ۳ لا + ۴ لا) = ۹ لا = ۳۶ ∴ لا = ۴ اور حصہ مطلوبہ ۸ ۱۲ ۱۶

۵۵ تین فریق نے سپاہیون کے ایک ریوڑ لوٹا اسطرح سے کہ فریق اول نے لوٹا جو تہائی تمام

ریوڑ کا اور جو تہائی ایک بکریکا اور فریق دویم نے ثلث مابقی کا اور ثلث ایک بکری کا اور فریق سیوم

نے ادہا بچے ہوئے کا اور آدہا ایک بکری کا لوٹا اور بعد اسکے ریوڑ مین پچیس بکریان بچین بتاؤ کل بکریان

کتنی تہین ریوڑ مذکور مین فرض کرو لا = تعداد بکریون ریوڑ کے تو بموجب کم ہونے بکریون کے

دفعہ اول مین حاصل ہوئے ہین لا − $\frac{\text{لا} + 1}{4}$ = $\frac{۳\text{لا} - 1}{4}$ اور پھر بموجب دفعہ ثانی کے

$$\frac{۳لا-۱}{۴} - \frac{۳لا-۱}{۱۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲-۱۶لا}{۱۲} - \frac{۹}{۴}$$

$$= \frac{۶لا-۶}{۱۲} = \frac{۳لا-۳}{۶} = \frac{لا-۱}{۲}$$ اب موافق قرین ثالث کے

$$\frac{لا-۱}{۲} - \frac{لا-۱}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{لا-۳}{۴}$$ ∴ بموجب سوال کے

$$\frac{لا-۳}{۴} = ۵$$ اور لا−۳ = ۱۰۰ ∴ لا = ۱۰۳ = تعداد بکریون کے

۵۶ ایک شخص نے پیپہ شراب کا واسطی ۴۸ روپیہ کے خریدا اور تین چوتھائی اوسمین سے بحساب فی صدی ۲۵ روپیہ فائدہ کے معہ دو سیر زیادہ کے بیچ ڈالا اور باقی کو ایسی قیمت سے بیچا کہ کل شراب مین اوسکو فی صدی ۶۰ روپیہ فائدہ حاصل ہوا لیکن اگر وہ کل کو اسی قیمت سے بیچتا تو اوسکو فی صدی ۷۵ روپیہ فائدہ حاصل ہوتا تو بتا و شراب کتنی سیر تھی فرض کرو ۴لا = تعداد سیرون شراب کے اور چونکہ کل سیر شراب کے اوسنے ۴۸ روپیہ کو خریدی تھے تو $\frac{۱۲}{لا}$ = قیمت ایک سیر شراب کی اور

۱۰۰ : ۱۲۵ :: $\frac{۱۲}{لا}$: اوس قیمت سیر سے جو فروخت اول مین اوسنے مقرر کی تھی تو اسیواسطی قیمت اول دفعہ کی = $\frac{۱۵}{لا}$ اور اسیطرح سے ۱۰۰ : ۲۷۵ :: $\frac{۱۲}{لا}$ اوس قیمت سیر سے جو دوسری دفعہ اوسنے بیچی تو ∴ قیمت دوسری دفعہ کی = $\frac{۳۳}{لا}$ ∴ $(۳لا+۲)\cdot\frac{۱۵}{لا} + (لا-۲)\cdot\frac{۳۳}{لا} - ۴۸$

= تمام فائدہ کے = ۳۰ − $\frac{۳۶}{لا}$ اور ۱۰۰ : ۶۰ :: ۴۸ : ۳۰ − $\frac{۳۶}{لا}$ اور موافق قاعدہ تناسب کے

۵ : ۳ :: ۸ : ۵ − $\frac{۶}{لا}$ ∴ ۲۴ = ۲۵ − $\frac{۳۰}{لا}$ اور بعد ابدال کے $\frac{۳۰}{لا}$ = ۱ ∴ لا = ۳۰ اور

اور عدد مطلوب = ۱۲۰ کے یعنی شراب مذکور ۱۲۰ سیر تھی

۵۷ ایک حوض ہی کہ اوسمین ایک یکہ یکسان جاری ہی اور پانی اوسمین تہا ۷۲۰ من اور یہی ایک پمپ جسکے وسیلے سے تین آدمی ایک منٹ مین ۴ دفعہ کی صدمہ سے پانی نکالتے تھی لگا ہوا تھا اوس ترکیب سے چھ گھنٹہ مین پانی تو اسیواسطی آدمی مذکور ایک اور پمپ کہ نکلتا پانی اوسکی کا ایک صدمہ سی دوسرے پمپ کی نکال پانی سے جو ایک ہی صدمہ سی ہو دہی نسبت رکھتا ہی جو ۲ رکھتا ہی تین سے لگایا اور بعد انی اسی پمپ کے ایک آدمی پمپ اول سے موقوف کیا گیا تو اوسمین صرف تین منٹ مین ۱۰ صدمہ ہوتی تھے اور دوسرے پمپ مین ۲ منٹ مین پانچ صدمہ تو اس ترکیب سے حوض مذکور ۱۲ گھنٹہ مین خالی ہوا تو بتا و ہر ایک پمپ مین ایک صدمہ سی کتنا پانی گرتا ہی اور یکہ مین سے کتنا جاری ہی فرض کرو ۳لا = تعداد منون پانی کے جو ایک صدمہ سی پمپ اول سی گرتا ہی اور ۲لا = تعداد منون پانی کے جو ایک صدمہ سی دوسرے پمپ مین سے نکلتا ہی اور ۱۲لا = تمام پانی نکلے ہوئے ایک منٹ کی پمپ اول سے جب کہ تین آدمی اوسپر مقرر تھے اور پانی جو ۶ گھنٹہ مین نکلتا ہی = ۲ × ۶۰ × ۱۲لا

اور پانی جو کل یکمین سے آیا = ۶ × ۶۰ × ۱۲ ۱۵ + ۷۲۰ = ۷۲۰ (۱ + ۱۵ ۶) اور ۱۵ ۱ = مقدار

اوس پانی کے جو نکالا گیا ایک صدمہ سی نل سے اور ۱۵ = مقدار اوس پانی کے جو نکالا گیا دوسرے

پیپ سے ایک صدمہ سی ∴ ۱۵ ۱ × ۱۲ × ۶۰ = مقدار اسکے جو ۱۲ گھنٹہ مین نکلا

∴ ۱۵ ۱ × ۷۲۰ = ۳ × ۷۲۰ (۱ + ۵۶) + ۷۲۰ یا ۱۵ ۱ = ۱۲ ۵ + ۳ + ۵۳ = ۳

اور ۱ = ۱ تو معلوم ہوا کہ نل پیپ مین ایک صدمہ سی ۳ من پانی اور دوسری سے ۲ من پانی نکلتا تہا اور

پانی جو یکمین سے ایک منٹ مین آتا تہا = $\frac{۷۲۰ \times (۱ + ۱۵ ۶)}{۶۰ \times ۶}$ = ۲ × (۱ + ۱۵ ۶)

= ۱۲ ۱۵ + ۲ = ۱۴ = تعداد منون کے

۵۸ وہ کونسی دو عدد ہین جنکا حاصل تفریق = ۱۰ اور اگر ۱۵ زیادہ کئے جائین انکی مجموعہ پر تو کل

= ۴۳ جواب ۹ اور ۱۹

۵۹ وہ دو اعداد کیا ہین جنکا حاصل تفریق = ۱۴ اور اگر نو گنا چھوٹا چھ گنے بڑے سے تفریق

کیا جاوے تو حاصل = ۳۴ جواب ۱۷ اور ۳۱

۶۰ وہ عدد کیا ہی جسپر اگر ۲۰ زیادہ کرین اور اوس جمع کی دو تہائی مین سے ۱۲ تفریق کرین تو حاصل

تفریق = ۱۰ ہوتا ہی جواب ۱۳

۶۱ آ اور ب نے برابر روپیہ تجارت مین لگایا ہی آ کو ۱۲۰ روپیہ کا فائدہ ہوا اور ب کو ۸۰ روپیہ کا

نقصان ہوا بعد ازان دریافت ہوا کہ آ کی پاس جو روپئے باقی رہے وہ گنی ہین دن روپیون سے جو

ب کے پاس باقی رہے بتاؤ کتنا کتنا روپیہ ہر شخص کے پاس اول مین تہا جواب ۱۸۰

۶۲ وہ عدد کونسا ہی جسکی تہائی اور پانچوین حصی مین ۲ کا فرق ہی جواب ۵۴۰

۶۳ ایک قمار باز نے اول بیٹہتے ہی پانچوان حصہ اپنی روپیون کا ہار دیا اور بعد اسکے دس روپئے

جیتا اور پہر کہیلا اور جو کچہ اوسکے پاس تہا اوسکا تہائی ہارا اور بعد اسکے تین روپئے جیتا اور بعد ازان اوسنے

روپیون کی شمار کی تو دریافت ہوا کہ اوس پاس ۶۳ روپئے رہگئی بتاؤ کتنے روپیہ اوسکے پاس اول تہے جواب ۱۰۰ روپے

۶۴ عدد ۹۰ کو ایسے چار حصون مین تقسیم کرو کہ اگر اول حصہ پر ۲ زیادہ کرین اور دوسری سے ۲ تفریق کرین

اور تیسری کو ۲ مین ضرب کرین اور چوتہے کو ۲ پر قسمت کرین تو مجموعہ اور حاصل تفریق اور حاصل ضرب اور خارج

قسمت سب آپسمین مساوی ہوتے ہین جواب ۱۸ اور ۲۲ اور ۱۰ اور ۴۰

سوالات دیم درجہ کی مساوات کے

۱ ایک شخص نے کچھ بیل ۸۰ روپیہ کے خریدے اور اگر اوسی سے ۴ روپیہ کے چار بیل زیادہ آتی تو اوس شخص کو ایک روپیہ فی بیل کم دینا پڑتا بتاؤ کتنے بیل ہین اور کیا ہی قیمت ہر بیل کی فرض کرو کہ تعداد کل بیلون کے = لا ∴ قیمت ہر بیل = $\frac{80}{لا}$ اور اگر چار بیل زیادہ آتے تو اوس حالت مین قیمت ہر بیل کی = $\frac{80}{لا+4}$ تب موافق شرایط سوال کے

$\frac{80}{لا+4} = \frac{80}{لا} - 1$ اور $\frac{80لا+320}{لا} - لا - 4 = 80 - 80$ اور $80لا = 80لا + 320 - لا^2 - 4لا$

یعنی $لا^2 + 4لا = 320$ اور $لا^2 + 4لا + 4 = 324$ ∴ $لا + 2 = \pm 18$ اور $لا = \pm 18 - 2 = 16$ یا -20

اور $\frac{80}{لا} = \frac{80}{16} = 5$ = قیمت ہر بیل کے

۲ دو عدد ایسی ہین کہ اونکا فرق تو ۸ ہی اور اگر اونہین آپسمین ضرب دین تو حاصل ضرب ۲۴۰ ہوتا ہی بتاؤ وے کونسی عدد ہین فرض کرو کہ لا = عدد چھوٹے کے تب موافق شرایط سوال کے لا + ۸ = عدد بڑے کے $(لا+8) \times لا = لا^2 + 8لا = 240$ اور موافق قاعدہ کے

$لا^2 + 8لا + 16 = 240 + 16 = 256$ اور جذر لینے سے $لا + 4 = 16$ اور

$لا = 16 - 4 = 12$ = عدد چھوٹے کے اور $لا + 8 = 12 + 8 = 20$ = عدد بڑی کے

۳ تقسیم کرو عدد ۶۰ کو ایسے دو جزو مین کہ اگر وے آپسمین ضرب کیے جائین تو حاصل ضرب ۸۶۴ ہو

فرض کرو لا = بڑے جزو کے پس موافق شرایط سوال ۶۰ − لا = چھوٹے جزو کے ہو

اور $(60 - لا)\ لا = 60لا - لا^2 = 864$ اور علامتین طرفین کی تبدیل کرو سو $لا^2 - 60لا = -864$

اور موافق قاعدہ کے $لا^2 - 60لا + 900 = -864 + 900 = 36$ اور

$لا - 30 = \pm 6$ اور $لا = 6 + 30 = 36$ = بڑے جزو کے اور $60 - 36 = 24$ = چھوٹے جزو کی

۴ فرض کرو کہ مجموعہ n اعداد = ح اور مجموعہ اونکی الگ الگ مجذورون کا = ص کے دریافت کرو

ان دو عدد کو فرض کرو لا = بڑے عدد کی تب موافق شرایط سوال کے ح − لا = چھوٹی عدد کے

اور $لا^2 + (ح - لا)^2 = 2لا^2 + ح^2 - 2ح لا = ص$ اور ہر دو طرف مساوات کو ۲ پر قسمت کرنی سے

$لا^2 + \frac{ح^2}{4} - ح لا = \frac{ص}{2}$ اور $لا^2 - ح لا = \frac{ص}{2} - \frac{ح^2}{2} = \frac{ص - ح^2}{2}$ اور موافق قاعدہ کے

$لا^2 - ح لا + \frac{ح^2}{4} = \frac{ص - ح^2}{2} + \frac{ح^2}{4} = \frac{2ص - ح^2}{4}$ اور

$لا - \frac{ح}{2} = \pm \sqrt{\frac{2ص - ح^2}{4}}$ اور $لا = \frac{ح}{2} \pm \sqrt{\frac{2ص - ح^2}{4}} = \frac{ح \pm \sqrt{2ص - ح^2}}{2}$

عدد بڑی کے اور $ح - \left(\frac{ح}{2} \pm \sqrt{\frac{2ص - ح^2}{4}}\right) = \frac{ح}{2} \mp \sqrt{\frac{2ص - ح^2}{4}} = \frac{ح \mp \sqrt{2ص - ح^2}}{2}$

عدد چھوٹی کے

۵ ایک درخت پر چند مکھیان بیٹھی ہوی تھین ایک دفع تو اونکی نصف کا جذر اوڑ گیا اور دوسری دفع اونکی آٹھ نوین حصے اوڑ گئے اور باقی رہین دو مکھیان بتاؤ کتنی مکھیان درخت پر بیٹھی تھین فرض کرو کہ تعداد مکھیون کی = لا تو $\frac{\text{لا}}{2}$ = اون مکھیون کے جو اول دفع اوڑ گئین اور $\frac{8\text{لا}}{9}$ = اون مکھیون کے جو دوسری بار اوڑ گئین اور اب ظاہر ہی کہ لا − $\frac{\text{لا}}{2}$ − $\frac{8\text{لا}}{9}$ = ۲ یعنی $\frac{9\text{لا} - 8\text{لا}}{2}$ = ۱۸ یعنے لا − ۹ $\sqrt{\frac{\text{لا}}{2}}$ = ۱۸ اور لا − ۱۸ = ۹ $\sqrt{\frac{\text{لا}}{2}}$

اور لا^2 − ۳۶ لا + ۳۲۴ = $\frac{81\text{لا}}{2}$ اور لا^2 − $\frac{153\text{لا}}{2}$ = − ۳۲۴

اور بموجب قاعدہ کی زیادہ کرو مجذور نصف $\frac{153}{2}$ کا دونوطرف مساوات پر تو حاصل ہوتا ہی

لا^2 − $\frac{153\text{لا}}{2}$ + $\frac{23409}{16}$ = $\frac{23409}{16}$ − ۳۲۴ = $\frac{23409}{16}$ − $\frac{51840}{16}$ = $\frac{18225}{16}$

اور جذر لینے سے دونوطرف کا حاصل ہوتا ہی یہہ لا − $\frac{153}{4}$ = $\frac{135}{4}$ اور

لا = $\frac{135}{4}$ + $\frac{153}{4}$ = $\frac{288}{4}$ = ۷۲ = تعداد مکھیون کے ایک اور ترکیب واسطے حل کرنے سوال مذکورہ بالا کے یہہ ہی فرض کرو تعداد مکھیون کے = ۲ لا^2 تو ظاہر ہی کہ لا = مکھیون کے جو اول دفع اوڑ گئین اور $\frac{16\text{لا}^2}{9}$ = مکھیون کے جو دوسری دفع اوڑ گئین اور بموجب سوال کے

۲ لا^2 − لا − $\frac{16\text{لا}^2}{9}$ = ۲ اور ۱۸ لا^2 − ۱۶ لا^2 − ۹ لا = ۱۸ اور ۲ لا^2 − ۹ لا = ۱۸

اور بموجب قاعدہ دوسری مساوات درجہ دویم کے جو گنی سر لا^2 یعنے ۱۸ تین دونوطرف مساوات کو ضرب دو تو حاصل ہوتا ہی ۱۶ لا^2 − ۷۲ لا = ۱۴۴ اور زیادہ کرو مجذور ۹ کا دونوطرف پر تو

۱۶ لا^2 − ۷۲ لا + ۸۱ = ۱۴۴ + ۸۱ = ۲۲۵ اور جذر لگا لو دونوطرف کا تو

۴ لا − ۹ = ۱۵ اور ۴ لا = ۱۵ + ۹ = ۲۴ اور لا = $\frac{24}{4}$ = ۶

اور ۲ لا^2 = ۲ × ۳۶ = ۷۲ = تعداد مکھیون کے

۶ چار اعداد جمع کے سلسلہ کے ہین اور حاصل ضرب اول کا جو تہی ہین = ۴۵ اور حاصل ضرب دویم کا سویم ہین = ۷۷ وہ چار اعداد کونسی ہین فرض کرو کہ اول سب سے چھوٹا عدد = لا اور فرق عام = د تو لا + د = عدد دویم اور لا + ۲ د = عدد سویم اور لا + ۳ د = عدد چہارم اور موافق شرائط سوال کے لا × (لا + ۳ د) = لا^2 + ۳ د لا = ۴۵ اور

لا + د × لا + ۲ د = لا^2 + ۳ د لا + ۲ د^2 = ۷۷

اب تفریق کرو اس مساوات لا^2 + ۳ د لا + ۲ د^2 = ۷۷ میں سے

لا^2 + ۳ د لا = ۴۵ کو

اس مساوات

تو حاصل تفریق یہہ ہوتا ہی ۲ د² = ۳۲ اور د² = ۱۶ اور د = ±√۱۶ = ۴ یا −۴

لیکن لا² + ۳ د لا = ۴۵ یعنے لا² + ۱۲ لا = ۴۵ اور لا² + ۱۲ لا + ۳۶ = ۴۵ + ۳۶ = ۸۱ اور

لا + ۶ = ±√۸۱ = ۹ اور لا = ۹ − ۶ = ۳ یعنے ۳ اور −۱۵ اور ۱۱ اور −۷ چار اعداد مطلوبہ ہین

۷ تین اعداد مسلسل ضرب کی ایسے ہین کہ اونکا مجموعہ = ۱۴ اور مجموعہ اونکے الگ الگ مجذور کا = ۸۴

دیئے کو جسے فرض کرو کہ عدد اول = لا اور عدد دویم = د اور عدد سویم = ے تو موافق شرایط سوال

کے لا + د + ے = ۱۴ اور لا² + د² + ے² = ۸۴ اور مساوات اول سے لا + ے = ۱۴ − د اور

(لا + ے)² = لا² + ۲ لا ے + ے² = (۱۴ − د)² = ۱۹۶ − ۲۸ د + د² لیکن بموجب قاعدہ نسبت کے

لا ے = د² اور ۲ لا ے = ۲ د² تو لا² + ۲ د² + ے² = ۱۹۶ − ۲۸ د + د² اور

لا² + د² + ے² = ۱۹۶ − ۲۸ د = ۸۴ اور ۲۸ د = ۱۹۶ − ۸۴ = ۱۱۲ اور د = ۱۱۲/۲۸ = ۴

اور لا = ۱۶/ے تو ۴ + ۱۶/ے + ے = ۱۴ اور ے² + ۴ ے + ۱۶ = ۱۴ اور ے² − ۱۰ ے = −۱۶

اور ے² − ۱۰ ے + ۲۵ = −۱۶ + ۲۵ = ۹ اور ے − ۵ = ۳ اور ے = ۸ اور لا = ۱۶/۸ = ۲

یعنے ۲ اور ۴ اور ۸ اعداد مطلوبہ ہین

۸ ایک صوداگر نے ۳۹ روپیہ کی شراب بیچی اور اوسکو فی سیکڑہ اتنا فائدہ ہوا جتنے کو اوسنے

شراب مول لی تھی بتاؤ کیا ہی قیمت شراب کی فرض کرو کہ لا = قیمت شراب کے تو اب ظاہر ہی

کہ ۱۰۰ : لا :: لا : فائدہ اور ∴ فائدہ = لا²/۱۰۰ اور ∴ لا²/۱۰۰ = ۳۹ − لا اور اگر دور کرین ہم

کسر کو تو لا² = ۳۹۰۰ − ۱۰۰ لا اور لا² + ۱۰۰ لا = ۳۹۰۰ ∴ لا = ۳۰ یا −۱۳۰

۹ دو عدد ایسی ہین کہ اونکا حاصل تفریق ۹ ہی اور حاصل ضرب اونکے حاصل جمع کا بڑے عدد مین

۲۶۶ ہی بتاؤ وے عدد کونسے ہین فرض کرو کہ لا = عدد کلان کے ∴ لا − ۹ = عدد چھوٹی کے

اور حاصل جمع عددونکا = ۲ لا − ۹ اور موافق شرایط سوال کے لا (۲ لا − ۹) = ۲۶۶

∴ لا² − ۹/۲ لا = ۲۶۶/۲ اور ∴ لا = ۱۴ یا −۱۹/۲

۱۰ دو ایسے عدد ہین کہ اونمین سے اول دوسری سے وہی نسبت رکھتا ہی جو دوسرا رکھتا ہی ۱۶ سے

اور حاصل جمع اونکے مجذورونکا ۲۲۵ ہی بتاؤ وے کون سے عدد ہین فرض کرو کہ لا = عدد اول کے

تو موافق شرایط سوال کے لا : دوسرے :: دوسرا : ۱۶ ∴ مجذور دوسرے کا = ۱۶ لا یعنے عدد

دوسرا = √۱۶ لا اور لا² + ۱۶ لا = ۲۲۵ اور ∴ عدد مطلوبہ ۹ اور ۱۲ ہین

۱۱ دو ایسی چوبتری ہین کہ اونکی شکل مربع ہی اور اونپر فرش ہی پتھرونکا کہ ہر اینٹ کا ایک گز مکسر ہے

ایک ضلع ایک چبوترہ یکا زیادہ ہی ایک ضلع دوسرے چبوترہ سے بقدر ۱۲ گز کے اور کل دونو چبوترہ دونین ۲۱۲۰ پتھر ہین بتاؤ کیا ہی طول ہر ایک چبوترہ کا فرض کرو کہ ضلع اول چبوترہ کا = لا تو موافق شرایط سوال کے لا + ۱۲ = ضلع دوسرے چبوترہ کے اور لا² = تعداد پتھرون اول چبوترہ کے اور (لا + ۱۲)² = تعداد پتھرون دوسرے چبوترہ کے اور لا² + ۲۴ لا + ۱۴۴ = ۲۱۲۰ اور ∴ ۲ لا² + ۲۴ لا = ۱۹۷۶ ∴ لا² + ۱۲ لا = ۹۸۸ اور ∴ لا = ۲۶ یا − ۳۸

۱۲ ایک مزدور نے ۳۵۶ روپیہ بطریق مزدوری کے لیکر دو کوئے ایسے کھود دیے کہ ایک کا عمق ۶ گز زیادہ تھا بہ نسبت دوسرے کی عمق کے اور کھودنی ہر ایک کے ان کو دنین سے اتنی روپئے فی گز خرچ ہوئے جتنی ہر ایک کے عمق مین گز تھے بتاؤ کیا تھا عمق ہر ایک کا فرض کرو کہ لا اور لا + ۶ ہین عمق تب موافق شرایط سوال کے لا² + (لا + ۶)² = ۳۵۶ ∴ ۲ لا² + ۱۲ لا + ۳۶ = ۳۵۶ یا لا² + ۶ لا = ۱۶۰ ∴ لا = ۱۰ اور ۱۶ اگر عمق مطلوبہ

۱۳ چند بھائی ایک شخص کے ۱۷۵ روپئے کے قرضدار تھے لیکن قبل از ادا ہونی قرض کے دو اونین سے مر گئے اور باقیون کو مری ہوئے بھائیون کے عوض مین دس دس روپئے زیادہ ادا کرنے پڑے بتاؤ کتنے بھائی تھے فرض کرو کہ لا = تعداد بھائیون کے تو $\frac{۱۷۵}{لا}$ = روپیون کے جنکا ادا کرنا ہر واحد پر قبل از مرنے دو بھائیون کے واجب تھا اور اسیطرح سے $\frac{۱۷۵}{لا-۲}$ = روپیون کے جنکا ادا کرنا بعد مرنے دو بھائیون کے ہر واحد باقیون پر واجب تھا پس موافق شرایط سوال کے ۱۰ = $\frac{۱۷۵}{لا-۲} - \frac{۱۷۵}{لا}$ = ۱۷۵ $(\frac{۱}{لا-۲} - \frac{۱}{لا})$ اور ∴ ۱۰ لا (لا − ۲) = ۱۷۵ × ۲ یا لا² − ۲ لا = ۳۵ ∴ لا = ۷ یا − ۵

۱۴ ایک شخص نے چند بھیڑین واسطی ۶۰ روپئے کے خریدین اور انمین سے ۱۵ بھیڑون کو اپنی پاس رکھکر باقی کو واسطی ۵۴ روپیہ کے بیچ دین اور اس فروخت سے اوسنے فی بھیڑ ایک روپئے کی دسوین حصہ کا فائدہ حاصل کیا بتاؤ بھیڑون کے تعداد کیا تھی اور ہر بھیڑ کی قیمت کیا تھی فرض کرو کہ لا = تعداد مطلوبہ کی ∴ $\frac{۶۰}{لا}$ = قیمت ہر بھیڑ کے ∴ (لا − ۱۵) $(\frac{۶۰}{لا} + \frac{۱}{۱۰})$ = ۵۴ یا (لا − ۱۵) × (۶۰ + لا) = ۵۴۰ لا اور لا² + ۵ لا − ۹۰۰ = ۵۴۰ لا ∴ لا² + ۵ لا = ۹۰۰ ∴ لا = ۲۵ یا − ۳۰ اور قیمت = $\frac{۴}{۵}$ روپئے کے

۱۵ دو شخص آ اور ب دو شہرون سے کہ بفاصلہ ۲۴۷ کوس کے واقع تھی طرف ایک دوسرے کے چلی اور ایک خاص مقام پر آملی آ جاتا تھا ۹ کوس ہر روز اور ب ہر روز اتنے کوس چلتا تھا جتنے دنون کے بعد وہ ملے لا ۳ دینے اگر دنون کی تعداد مین سے تین نکالین تو باقی رہتے ہی رفتار ب کی بتاؤ ہر ایک شخص کتنے کتنے کوس چلا فرض کرو کہ لا = تعداد دنون کے ∴ ۹ لا = کوسون کے جو آ چلا اور ۲۴۷ − ۹ لا = کوسون کے کہ ب چلا اور $\frac{۲۴۷ - ۹لا}{لا}$ = کوسون کے جو ب ہر روز چلا ∴ لا − ۳ = $\frac{۲۴۷ - ۹لا}{لا}$ اور

لا^{۲} − ۱۳لا = ۲۴۷ − ۹ ∴ لا^{۲} + ۱۳لا = ۲۴۷ ∴ لا = ۱۳ یا − ۱۹ ∴ آ چلا ۱۷ کوس اور ب چلا ۱۳۰ کوس

۱۶ ایک شخص نے دو تھان مختلف قسم کے کپڑے کے خریدے اول قسم کپڑے کے واسطے اوسنی ایک خمس ایک روپیہ کا فی گز زیادہ دیا اور کل قیمت اچھی کپڑے کی اٹھارہ روپئے تھی لیکن قیمت دوسرے قسم کے کپڑے کے جو دو گز طول مین اول قسم کے کپڑی سے سے زیادہ تھا صرف ۱۶ ہی روپیہ تھے بتاؤ ہر تھان مین کتنے گز کپڑا تھا اور کیا تھی قیمت ہر گز کی فرض کرو لا = تعداد گزون اول قسم کے کپڑے کی :

لا + ۲ = تعداد گزون دویم قسم کے کپڑے کی اور $\frac{۱۸}{لا}$ = قیمت ایک گز اول قسم کی کپڑے کی اور $\frac{۱۶}{لا+۲}$ = قیمت ایک گز دویم قسم کی کپڑے کی ∴ $\frac{۱۸}{لا} = \frac{۱۶}{لا+۲} + \frac{۱}{۵}$ ∴ ۹۰لا + ۱۸۰ = ۸۰لا + لا^{۲} + ۲لا اور لا^{۲} − ۸لا = ۱۸۰ اور ∴ لا = ۱۸ یا − ۱۰

۱۷ ایک شخص آ مقام س سے طرف مقام ط کے چلا اور اوسکی رفتار ۷ کوس نی دن تھی جسوقت کہ اوس شخص نے فاصلہ ۳۲ کوس کا طی کیا اوسوقت ایک اور شخص ب مقام ط سے طرف مقام س کے چلا اور اوسکی رفتار مساوی تھی $\frac{۱}{۱۴}$ حصہ کل اوس مسافت کی اور بعد اتنے دنون کے جتنے کوس وہ ہر روز جاتا تھا وہ آ سے ملا بتاؤ کیا ہی فاصلہ مابین مقامون س اور ط کے فرض کرو لا = فاصلہ مطلوبہ کے تو موافق شرایط سوال کے $\frac{لا}{۱۹}$ = تعداد کوسون کے جتنے ب ہر روز طی کرتا تھا لیکن $\frac{لا}{۱۹}$ = تعداد دنون کے جتنے دنون کے بعد ب سفر کرکے آ سی ملا پس معلوم ہوا کہ

$\frac{لا^{۲}}{۳۶۱} + ۳۲ + \frac{۷لا}{۱۹} = لا$ اور بسبب ابدال علامت کے $\frac{لا^{۲}}{۳۶۱} - \frac{۱۲لا}{۱۹} = -۳۲$ اور

∴ لا = ۱۵۲ یا ۷۶

۱۸ دو شخصون آ اور ب نے ۱۳۰ سیر ریشم کی کہ ۴۰ سیر تو آ کے اور ۹۰ سیر ب کے تھی قیمت ۴۲ روپئے کی بیچے لیکن آ نے ایک تہائی ایک سیر کے واسطے ایک روپیہ کی زیادہ پہ نسبت ب کے بیچے بتاؤ ہر شخص نے کتنے کتنے سیر ریشم کی بیچے فرض کرو کہ لا = تعداد سیرون کے جو ب نے واسطے ایک روپئے کی بیچے اور لا + $\frac{۱}{۳}$ = تعداد سیرون کے جو آ نے واسطے ایک روپیہ کے بیچے

اور لا : ۹۰ :: ۱ : قیمت ۹۰ سیر کے = $\frac{۹۰}{لا}$ اور

لا + $\frac{۱}{۳}$: ۴۰ :: ۱ : قیمت ۴۰ سیر کے = $\frac{۱۲۰}{۳لا+۱}$ ∴ ۴۲۰ = $\frac{۹۰}{لا} + \frac{۱۲۰}{۳لا+۱}$ اور

۷ = $\frac{۱۵}{لا} + \frac{۲۰}{۳لا+۱}$ ∴ ۲۱لا^{۲} + ۷لا = ۴۵لا + ۱۵ + ۲۰لا یا ۲۱لا^{۲} − ۵۸لا = ۱۵

یا لا^{۲} − $\frac{۵۸}{۲۱}$ لا = $\frac{۱۵}{۲۱}$ اور ∴ لا = ۳ یا − $\frac{۵}{۲۱}$

۱۹ اگلے پہیے ایک رتھ کی سینے ۱۲۰ گز کی مسافت طی کرنے مین چھ گردشین بہ نسبت پیچھے کے پہیے سے زیادہ کرین لیکن اگر محیط ہر واحد ان پہیون کا بقدر عدد آ کے زیادہ کیا جاوے تو اگلا پہیا صرف چار گردشین بہ نسبت پیچھے کے پہیے کی زیادہ کریگا بتاؤ کیا ہی محیط ہر پہیے کا فرض کرو کہ لا = تعداد گزون محیط بڑے پہیے کے اور فرض کرو کہ ر = تعداد گزون محیط چھوٹے پہیے کی ∴ $\frac{۱۲۰}{لا} = \frac{۱۲۰}{ر} - ۶$

یا ۲۰ ر = ۲۰ لا − لار یا لار = ۲۰ لا − ۲۰ ر لیکن $\frac{۱۲۰}{لا+۱} = \frac{۱۲۰}{ر+۱} - ۴$

یا ۳۰ (ر+۱) = (لا+۱) (۲۹ − ر) یا ۳۰ ر + ۳۰ = ۲۹ لا + ۲۹ − لار − ر

یا لار = ۲۹ لا − ۱ − ۳۱ ر ∴ ۲۹ لا − ۱ − ۳۱ ر = ۲۰ لا − ۲۰ ر

یا ۹ لا = ۱۱ ر + ۱ یا لا = $\frac{۱۱ر+۱}{۹}$ ∴ $\frac{۱۱ر^۲+ر}{۹} = \frac{۲۲۰ر+۲۰}{۹} - ۲۰ر$ یا یون لکھو

۱۱ ر^۲ + ر = ۲۲۰ ر + ۲۰ − ۱۸۰ ر = ۴۰ ر + ۲۰ ∴ ر^۲ − $\frac{۳۹}{۱۱}$ ر = $\frac{۲۰}{۱۱}$ اور ر = ۴ یا − $\frac{۵}{۱۱}$

۲۰ ایک شخص نے دو گہاس کے گٹھے مکعب کی شکل کے بقیمت ۸۲۰ روپیہ کے خریدے اور ایک گز لمبی کی اینین سے اتنی روپے قیمت تھی جتنے کہ گز تھے ایک ایک ضلع دوسری کے مین اور اینین جو بڑا گٹھا تھا اسکے نیچے ۹ گز کمسز زیادہ زمین تھے یعنے وہ ۹ گز زمین زیادہ گہیرے ہوئے تھا بہ نسبت دوسرے بتاؤ کیا تھی قیمت ہر گٹھی کی فرض کرو کہ لا = تعداد گزون ایک ضلع بڑے گٹھے کی اور فرض کرو کہ ر = تعداد گزون ایک ضلع چھوٹے گٹھے کی اور اب ظاہر ہی کہ لا^۲ اور ر^۲ ہونگی تعداد اون گٹھون کے علیحدہ علیحدہ قاعدون کے لا^۲ − ر^۲ = ۹ اور موافق شرایط سوال کے یہہ بھی ظاہر ہی کہ

لا^۲ ر + ر^۲ لا = ۸۲۰ ∴ لا^۲ + ر^۲ = $\frac{۸۲۰}{لار}$ اور لا^۴ + ۲ لا^۲ ر^۲ + ر^۴ = $\frac{(۸۲۰)^۲}{لا^۲ ر^۲}$ لیکن

لا^۴ − ۲ لا^۲ ر^۲ + ر^۴ = ۸۱

اور حاصل تفریق انکا یہہ ہے ۴ لا^۲ ر^۲ = $\frac{(۸۲۰)^۲}{لا^۲ ر^۲}$ − ۸۱

یا لا^۴ ر^۴ = $\frac{(۸۲۰)^۲}{۴}$ − $\frac{(۸۱ لا^۲ ر^۲)}{۴}$

∴ لا^۴ ر^۴ + $\frac{۸۱ لا^۲ ر^۲}{۴} = \frac{(۸۲۰)^۲}{۴}$ اور اگر کامل کرین مربع کو تو

لا^۴ ر^۴ + $\frac{۸۱}{۴}$ لا^۲ ر^۲ + $(\frac{۸۱}{۸})^۲$ = ۱۰۰ × ۸۱ + $\frac{۶۵۶۱}{۶۴} = \frac{۱۰۴۹۷۶۱}{۶۴}$ اور جسوقت

نکالین جذر دونو طرف کا تو حاصل ہوگا یہہ لا^۲ ر^۲ + $\frac{۸۱}{۸} = \pm \frac{۳۲۸۱}{۸}$

∴ لا^۲ ر^۲ = ۴۰۰ ∴ لار = ۲۰ ∴ لا + ر = $\frac{۸۲۰}{لار} = \frac{۸۲۰}{۲۰}$ = ۴۱

اور ۲ لار = ۴۰

∴ لا^۲ + ۲ لار + ر^۲ = ۸۱ ∴ لا + ر = ۹

یا لا^۲ − ۲ لار + ر^۲ = ۱ ∴ لا − ر = ۱

∴ لا = ۵

اور ی = ۴ پس قیمتین مطلوبہ ۵۰ اور ۳۰ ہین

۲۱ چار ایسے عدد سلسلہ جمع کی ہین کہ اونکا حاصل جمع = ۳۲ اور حاصل جمع اونکی علیحدہ علیحدہ مجذور ونکا = ۲۷۶ بتا دو یہ کون سے عدد ہین فرض کرو کہ فرق عام = ۲ ی کے ہی اور (لا + ۳ ی) اور (لا + ی) اور (لا − ی) اور (لا − ۳ ی) چار اعداد مطلوبہ ہین ∴ اونکا حاصل جمع = ۴ لا = ۳۲ ∴ لا = ۸ لیکن مجموعہ اونکے مجذور ونکا = ۴ لا² + ۲۰ ی² = ۲۷۶ پس اگر کہین اس مساوات مین بجائے لا کی اوسکی قیمت تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲۵۶ + ۲۰ ی² = ۲۷۶

∴ ۲۰ ی² = ۲۰ ∴ ی² = ۱ ∴ ی = ۱ پس معلوم ہوا کہ اعداد مطلوبہ ۱۱ اور ۹ اور ۷ اور ۵ ہین

۲۲ چار عدد سلسلہ ضرب کی ایسے ہین کہ حاصل جمع اول اور دوسرے کا = ۵ ایکے ہی اور حاصل جمع تیسرے اور چوتھے کا = ۶۰ ایکے ہی بتا دیے کون سے عدد ہین فرض کرو کہ لا اور لا ی اور لا ی² اور لا ی³ اعداد مطلوبہ ہین پس موافق شرایط سوال کے لا + لا ی = ۱۵ اور لا ی² + لا ی³ = ۶۰

یا ی² (لا + لا ی) = ۶۰ ∴ ۱۵ ی² = ۶۰ اور ی² = ۴ ∴ ی = ± ۲ ∴ لا + ۲ لا یعنے

۳ لا = ۱۵ ∴ لا = ۵ پس چار اعداد مطلوبہ یہہ ۵ اور ۱۰ اور ۲۰ اور ۴۰

۲۳ قاعدہ ایک مثلث قایم الزاویہ کا ۶ ہی اور اسکے سب ضلعے اعداد سلسلہ جمع کے ہین بتا دو باقی کے ضلعے کیا ہین فرض کرو کہ وہ باقی کے ضلعے مطلوبہ ۶ + لا اور ۶ − لا ہین پس موافق ۴۷ شکل اول مقالہ اقلیدس کے ۳۶ − ۱۲ لا + ۴ لا² + ۳۶ = ۳۶ + ۱۲ لا + لا² ∴ ۴ لا = ۳۶ ∴ لا = ۳ ∴ ضلعے ۹/۲ اور ۱۲/۲ اور ۱۵/۲ ہین یہہ سوال اچھی طرح سے محدود نہین ہی یعنے اسکا صرف ایک ہی جواب نہین ہوسکتا ہی بلکہ ایک سے زیادہ جواب ہوسکتے ہین مثلاً اگر فرض کرین ہم ۶ کو اول جز سلسلہ کا تو تین ضلعے یہہ ۶ اور ۶ + ۱۲ لا ہونگے پس اس صورت مین

۳۶ + ۴۴ + ۴ لا² = ۳۶ + ۳۶ + ۱۲ لا + لا² ∴ لا² + ۴ لا = ۱۲ ∴ لا = ۲ یا − ۶

اور اسیواسطے ضلعی یہہ ہونگے ۶ اور ۸ اور ۱۰ یا صفر اور ۶ اور − ۶

۲۴ دو شخص نامی آ اور ب شہر لندن سے باراده گرد پھرآنے کرہ زمین کے کہ اوسکا محیط ۲۴۹۶۶ میل ہی چلے ایک مشرق کی طرف اور دوسرا مغرب کی طرف آ چلتا ہی آ میل اول دن ۱ میل دوسرے دن اور اسی قیاس پر اور ب چلتا ہی ۲۰ میل ہر روز بتا دو یہ منکتے دونون مین اور بعد کتنی مسافت طی کرینے کی دوسرے سے ملینگے فرض کرو کہ لا = تعداد دنون کے پس موافق قاعدہ سلسلہ جمع کے (لا + ۱) لا/۲ = تعداد میل کے جو آ چلیگا اور ۲۰ لا = تعداد میل کے جو ب چلیگا اور اسیواسطے

موافق شرایط سوال کے $\frac{لا^2+لا}{2}+20لا=3663$ ∴ $لا^2+41لا=7326$ ∴ $لا=198$
یا -369 پس معلوم ہوا کہ روپیے ۱۹۸ دنوں میں ایک دوسرے سے آملینگے اور آجیکا ۱۹۷۰۱
میل اور اب ۳۹۶۰ میل

۲۵ پانچ عدد مسلسل جمع کی ایسے ہیں کہ اونکا حاصل جمع = ۲۵ اور اونکا حاصل ضرب
= ۹۴۵ بتاییے اعداد کیا ہیں فرض کرو کہ $لا+2ک$ اور $لا+ک$ اور $لا$ اور $لا-ک$ اور $لا-2ک$
اعداد مطلوبہ ہیں تو موافق شرایط سوال کے $5لا=25$ ∴ $لا=5$ اور $(لا-ک^2)(لا-4ک^2)=945$
اور اگر قیمت کریں اس مساوات کو $لا=5$ پر تو $(لا^2-ک^2)(لا^2-4ک^2)=189$
یا $لا^4-5لا^2ک^2+4ک^4=189$ اور $4ک^4-125ک^2+625=189$
∴ $4ک^4-125ک^2=-436$ ∴ $ک^4-\frac{125}{4}ک^2=-\frac{436}{4}$ ∴ $ک^2=4$ ∴ $ک=\pm2$
∴ اعداد مطلوبہ یہ ہیں $9\ 7\ 5\ 3\ 1$

۲۶ ایک شخص نے اپنے تین نوکروں کو ۲۱۰ روپیے بانٹے اسطرحپر کہ اونکے حصے اعداد مسلسلہ
ضرب کے ہوے اور بعد ازاں دریافت ہوا کہ اول نوکر کو ۹۰ روپیے بہ نسبت تیسرے کی زیادہ ملی بتاؤ کتنے
کتنے روپیے ہر شخص کو ملی فرض کرو کہ $لا-ک$ اور $لا$ اور $لا+ک$ اعداد مطلوبہ ہیں تو موافق شرایط سوال کے
$لا^3=لا+90$ اور $لا+لاک+لاک^2=210$ یا $3لا+لاک+لاک^2+90=210$ ∴ $3لا+لاک=120$
اب ظاہر ہے کہ مساوات اول سے یہہ حاصل ہوتا ہے $لا=\frac{90}{ک^2-1}$ اور مساوات اخیر سے یہہ $لا=\frac{120}{3+ک}$
∴ $\frac{120}{3+ک}=\frac{90}{ک^2-1}$ یا $\frac{4}{ک+1}=\frac{3}{ک^2-1}$ ∴ $4ک^2-4=3ک+6$
∴ $4ک^2-3ک=10$ اور $4ک^2-3ک+\frac{9}{16}=10+\frac{9}{16}=\frac{169}{16}$ اور جسوقت نخالین ہم
جذر دونوطرف اس مساوات کا تو $2ک-\frac{3}{4}=\pm\frac{13}{4}$ ∴ $2ک=4$ یا $-\frac{5}{2}$
∴ $ک=2$ یا $-\frac{5}{4}$ پس معلوم ہوا کہ $لا=\frac{120}{3+ک}=30$ یا 60 پس اعداد مطلوبہ
یہ ہیں 120 اور 60 اور 30 ہیں

۲۷ وہ کونسا عدد ہے کہ اگر اسکے مکعب اور مجذور کے حاصل جمع میں سے تفریق کریں اوس عدد کو
۱۲ میں ضرب دیکر تو باقی کچھ نہیں رہتا فرض کرو کہ $لا$ = عدد مطلوبہ یہ تو موافق شرایط سوال کے
$لا^3+لا^2-12لا=0$ یعنے $لا^2+لا=12$ یعنے $لا^2+لا+\frac{1}{4}=12+\frac{1}{4}=\frac{49}{4}$ ∴ $لا+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$
∴ $لا=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$

۲۸ حل کرو اس مساوات $(لا^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲})^{\frac{۱}{۲}} + (ط^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲})^{\frac{۱}{۲}} = \frac{لا^۲}{ط}$ کو سے لغے قیمت لا کی دریافت کرو اب اگر بدلین ہم علامتین تو $(لا^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲})^{\frac{۱}{۲}} = \frac{لا^۲}{ط} - (ط^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲})^{\frac{۱}{۲}}$ اور اگر مجذور کرین دونوطرف اس مساوات کو تو حاصل ہوگا یہہ $لا^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲} = \frac{لا^۴}{ط^۲} - \frac{۲لا^۲}{ط}(لا^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲})^{\frac{۱}{۲}} + ط^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲}$ اور اگر دو رکین مشترک $\frac{ط^۴}{لا^۲}$ کو دونوطرف سے اور $ط^۲$ کی علامت بدل کے اول طرف مساوات کے لاوین تو حاصل ہوگا یہہ $لا^۲ - \frac{۲لا^۲}{ط}(لا^۲ - \frac{ط^۴}{لا^۲})^{\frac{۱}{۲}} + \frac{لا^۴}{ط^۲} - ط^۲ = ۰$ یا

$لا^۲ - \frac{۲لا^۲}{ط}(لا^۲ - ط^۲)^{\frac{۱}{۲}} + \frac{لا^۴ - ط^۴}{ط^۲} = ۰$ اور اگر جذر لیوین دونوطرف تو

$$لا - \frac{\sqrt{(لا^۲ - ط^۲)}}{ط} = ۰ \therefore لا = \frac{\sqrt{(لا^۲ - ط^۲)}}{ط}$$ یعنے

$ط لا = \sqrt{(لا^۲ - ط^۲)}$ اور اگر مجذور کرین دونوطرف کو تو حاصل ہوگا یہہ

$ط^۲ لا^۲ = لا^۲ - ط^۲ \therefore لا^۲ - ط^۲ لا^۲ = ط^۲$ اور اگر کامل کرین ہم مربع کو تو حاصل ہوگا یہہ $لا^۲ - ط^۲ لا^۲ + \frac{ط^۴}{۴} = ط^۲ + \frac{ط^۴}{۴} = \frac{۵ط^۴}{۴}$ اگر لیوین ہم جذر تو

$لا^۲ - \frac{ط^۲}{۲} = \pm \frac{ط^۲\sqrt{۵}}{۲}$ اور $لا^۲ = \frac{ط^۲}{۲} \pm \frac{ط^۲\sqrt{۵}}{۲} = \frac{ط^۲ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

$$\therefore لا = \pm ط\sqrt{\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}}$$

۲۹ ایک شخص ایک کام کو ایک دن کرتا ہی اور دوسرا دو دن مین اور تیسرا تین دن مین اور چوتھا چار دن مین اور اگر چار دن اکٹھا ہر کر کام کرین تو بتاو وے کتنے دن مین کام کو پورا کرین گے فرض کرو کہ وقت مطلوبہ = لا سے اب چونکہ کام زیادہ ہوتا ہی جتنا وقت زیادہ ہوتا ہی تو معلوم ہوا کہ اول شخص $\frac{لا}{۱}$ حصہ کام کا کریگا اور دوسرا $\frac{لا}{۲}$ حصہ کام کا کریگا اور تیسرا $\frac{لا}{۳}$ حصہ کام کا کریگا اور چوتھا $\frac{لا}{۴}$ حصہ کام کا کریگا لیکن تمام سے حصے مساوی ایک کام کے ہونگے تو معلوم ہوا $\frac{لا}{۱} + \frac{لا}{۲} + \frac{لا}{۳} + \frac{لا}{۴} = ۱$

$۲۴ لا + ۱۲ لا + ۸ لا + ۶ لا = ۲۴ \therefore ۵۰ لا = ۲۴ \therefore لا = \frac{۲۴}{۵۰} = \frac{۱۲}{۲۵}$ دن

۳۰ دو کرے ایسی ہین کہ حاصل جمع اونکی سطحونکا = ط گز کے ہی اور حاصل جمع اونکے نصف قطرونکا = ع گز کے بتاو اونکے نصف قطر کیا ہین فرض کرو کہ لا اور ر ہین نصف قطر مطلوبہ آگے ایسے ثابت کیا ہی کہ سطح اون کرون کی جنکے نصف قطر لا اور ر ہین یہہ ۴ کہ لا اور ہم کہ ۴ ہوتے ہین اور اس جای واضح ہوا کہ کہ بتیر کرتا ہی محیط اوس دایرہ کو جسکا نصف قطر ایک ہی پس موافق شرایط سوال کے

$لا + ی = ع$ اور $۴ کہ لا^۲ + ۴ کہ ی^۲ = ط$ اور $\therefore لا^۲ + ی^۲ = \frac{ط}{۴ کہ}$

لیکن چونکہ $لا + ی = ع$ $\therefore لا = ع - ی \therefore لا^۲ = (ع - ی)^۲ = ع^۲ - ۲ع ی + ی^۲$

$\therefore ع^۲ - ۲ع ی + ی^۲ + ی^۲ = \frac{ط}{۴ کہ} \therefore \frac{ط}{۴ کہ} - ع^۲ = ۲ ی^۲ - ۲ع ی$

$\therefore ی^۲ - ع ی = \frac{ط - ۴ کہ ع^۲}{۸ کہ}$ اور $ی^۲ - ع ی + \frac{ع^۲}{۴} = \frac{ع^۲}{۴} + \frac{ط - ۴ کہ ع^۲}{۸ کہ}$

$= \frac{ط - ۲ کہ ع^۲}{۸ کہ} \therefore ی - \frac{ع}{۲} =$

$$\sqrt{\frac{ط - ۲ کہ ع^۲}{۸ کہ}} \quad \sqrt{\frac{ط - ۲ کہ ع^۲}{۸ کہ}} \qquad \therefore ی = \frac{ع}{۲} \pm$$

باب سوم

جاننا چاہیئے کہ بعض قاعدے ضرب اور تقسیم جبریہ کے ایسی ہین کہ اونمین فقط امثال اور علامتون پر عمل کیا جاتا ہے اور اسیواسطے عمل مین آسانی بہی ہوتی ہی اور چونکہ خواص مساوات مین اعمال ضرب اور تقسیم سے بہت کام پڑتا ہی اسواسطے اول اونکا لکہنا ضرور ہی اور بعد اسکے خواص مساوات اوسطرح سے لکہی جائینگے جسطرح فضلاء یورپ سے نے زمانہ حال مین ثابت کیئے ہین

فصل اول بیچ بیان اوس قاعدہ ضرب اور تقسیم جبریہ کے جسمین امثال مقادیر جبریہ یعنی حروف کی علیحدہ کئی جاتی ہین

بیان اول قاعدہ ضرب

اکثر اوقات قوای مقدارون جبریہ کی بتدریج زیادہ ہوتی ہین اور ایسی صورت مین عمل ضرب کا بہت سہل ہوجانا سمجہ مین آجاتا ہے اگر جمہور دین ہم قوای مختلف حروف یعنے مقادیر جبریہ کی اور عمل کرین اونپر امثال اونکی سے اور بعد ازان حاصل ضرب مین قوای مقدارون مذکور کو جو جمہور دین گئی ہین اونکی امثال سے اگی لکہدین جیسیکہ مثالون آئندہ سے واضح ہوتا ہی

مثال ۱ ضرب کرو $لا^۳ + لا^۲ ی + لا ی^۲ + ی^۳$ کو $لا - ی$ مین صورت عمل کی یہہ ہوگی

امثال مضروب کی یہہ ہین $۱ + ۱ + ۱ + ۱$

$۱ - ۱$

$۱ + ۱ + ۱ + ۱$

$- ۱ - ۱ - ۱ - ۱$

$۱ + ۰ + ۰ + ۰ - ۱$

اب چونکہ $لا^{۳} \times لا = لا^{۴}$ کہ نہایت بڑی قوت لا کی ہی اور یہہ قوت بقدر آ کے بتدریج کم ہوتی جاتی ہی اور اسیقدر قوت ب کی زیادہ ہوتی جاتی ہی تو ظاہر ہی کہ حاصل ضرب یہہ ہوگا

$لا^{۴} + ۰ \times لا^{۳} ب + ۰ \times لا^{۲} ب^{۲} + ۰ \times لا ب^{۳} - ب^{۴} = لا^{۴} - ب^{۴}$

۲ ضرب کرو $۳ ط^{۲} + ۴ ط لا - ۵ لا^{۲}$ کو $۲ ط^{۲} - ۶ ط لا + ۴ لا^{۲}$ مین پس اب ظاہر ہی کہ صورت عمل کی یہہ ہوگی

$۳ + ۴ - ۵$

$۴ + ۶ - ۲$

$۱۰ - ۸ + ۶$

$- ۱۸ + ۲۴ - ۳۰$

$+ ۱۲ + ۱۶ - ۲۰$

$۲۰ - ۴۶ + ۲۲ - ۱۰ - ۶$

پس معلوم ہوا کہ حاصل ضرب یہہ ہی $۶ ط^{۴} - ۱۰ ط^{۳} لا - ۲۲ ط^{۲} لا^{۲} + ۴۶ ط لا^{۳} - ۲۰ لا^{۴}$

۳ ضرب کرو $۲ ط^{۳} - ۳ ط ص + ۵ ص^{۲}$ کو $۲ ط^{۲} - ۵ ص$ ظاہر ہی کہ اس مثال مین امثال $ط^{۲}$ کی تو مضروب مین اور ط کی مضروب فیہ مین صفر ہین اور اسیواسطی صورت عمل کی یہہ ہوگی

$۵ + ۳ - ۰ + ۲$

$۵ - ۰ + ۲$

$۱۰ + ۶ - ۰ + ۴$

$۰ + ۰ - ۰ + ۰$

$- ۲۵ - ۱۵ + ۰ + ۱۰$

$۲۵ - ۱۵ + ۱۰ + ۱۶ - ۰ + ۴$

پس معلوم ہوا کہ حاصل ضرب یہہ ہے

$۴ ط^{۵} - ۱۶ ط^{۴} ص + ۱۰ ط^{۳} ص^{۲} + ۱۵ ط ص^{۴} - ۲۵ ص^{۵}$

بیان دوسرا قاعدہ تقسیم کی بیان مین

جو حمل تقسیم عام مین کرتے ہین وہی عمل اس قسم کی تقسیم مین بھی کرنا چاہیئے الا یہہ کہ اس صورت مین امثال کو جدا کرنا چاہیئے اور فقط ان پر عمل کرنا چاہیئے اور بعد ازان خارج قسمت مین امثال کے آگے مختلف قوای مقدارون جبریہ یعنے حروف وغیرہ کی لکھنی چاہیئے جیسکہ واضح ہوگا مثالون آئندہ سے

مثال ۱ قسمت کرو $۶ ط^{۲} - ۹ ط$ کو $۳ ط - ۶$ پر اب ظاہر ہی کہ صورت یہہ ہوگی

$$۳ - ۶ \overline{)۶ \quad +۰ \quad +۰ \quad +۰ \quad -۹۶ \quad +۲ \quad +۴ \quad +۸ \quad +۱۶}$$

$$۶ - ۱۲$$

$$+۱۲ \quad ۰$$

$$۱۲ - ۲۴$$

$$۰ \quad +۲۴$$

$$۲۴ - ۴۸$$

$$۴۸ - ۹۶$$

$$۹۶ - ۴۸$$

اور چونکہ $\frac{۴ط}{ط} = ط^۳$ پس معلوم ہوا کہ $ط^۳$ اور $ط^۲$ اور $ط$ اور ۱ مقدارین خبریہ ہین جو آگے امثال ۲ اور ۴ اور ۸ اور ۱۶ کی خارج قسمت مین مندرج کی جائین اور یہان سے یہ معلوم کہ خارج قسمت مطلوبہ یہ ہی $۲ ط^۳ + ۴ ط^۲ + ۸ ط + ۱۶$

۲ قسمت کرو $۸ ط^۵ - ۴ ط^۴ لا - ۲ ط^۳ لا^۲ + ط^۲ لا^۳$ کو $۴ ط^۲ - لا^۲$ پر اور اسیواسطی صورت عمل کی یہ ہوگی

$$۴ + ۰ - ۱ \overline{)۸ - ۴ - ۲ + ۱ \quad ۲ - ۱}$$

$$۸ + ۰ - ۲$$

$$- ۴ - ۰ + ۱$$

$$- ۴ - ۰ + ۱$$

اور چونکہ $\frac{۸ ط^۵}{۴ ط^۲} = ط^۳$ معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہ ہی $۲ ط^۳ - ط^۲ لا$

بیان تیسرا قیاسی قاعدہ تقسیم مین

اوس قاعدہ قسمت کو جو مہندس ہورنر صاحب نے ایجاد کیا ہی قاعدہ قیاسی کہتے ہین اور وجہ تسمیہ اسکی معلوم ہوجائیگی مرقومہ الذیل سے ظاہر کہ قاعدہ عام تقسیم مین تمام اجزای مقسوم علیہ کے ضرب کئے جاتی ہین اول خارج قسمت کے مین اور اس حاصل ضرب کو تفریق کرتے ہین مقسوم مین سے لیکن عمل تفریق کا جاری کیا جاتا ہے بدیل کرنے سے علامتین مفروق کی اور بعد ازان جمع کرنے سے ساتھ مفروق منہ کی پس معلوم ہوا کہ اگر تبدیل کرین ہم علامتین سب اجزاے مقسوم علیہ کے تو اس صورت مین حاصل ضرب مذکور ساتھ مقسوم کے فقط جمع کرنا چاہیگا اور نہ تفریق کرنا اور چونکہ متواتر یہی عمل کیا جاتا ہی تو معلوم ہوا کہ ہر حاصل ضرب جو حاصل

ہوگا ضرب دینی سے مقسوم علیہ کو کسی جز خارج قسمت کی مین جمع کیا جائیگا اور تفریق نکیا جائیگا اس صورت
مین ظاہر ہی کہ مقسوم دوم وہی ہوگا جیسی کہ ہوتا ہی جسوقت جاری کیا جاتا ہی قاعدہ مروج لیکن چونکہ دوسرا جز
خارج قسمت کا حاصل ہوتا ہی تقسیم کرنی سے اول جز مقسوم دوم کو اول جز مقسوم علیہ پر اور اول جز مقسوم علیہ کے
علامت تبدیل کی گئی ہی تو ظاہر ہی کہ علامت دوسری جز خارج قسمت کی وہ نہین ہوگی جو چاہئے پس واسطی در
کرنے اس وقت کی ہم نہین بولتی ہین علامت اول جز مقسوم علیہ کی اور نہین لکھتے ہین اون حاصل ضربون کو
جو حاصل ہوتی ہین ضرب دینی سے ہر جز خارج قسمت کو اول جز مقسوم علیہ مین کسواسطی موافق قاعدہ مروج کے
بوسیلہ حاصل ضرب مذکور کے اول اجزای تمام مقسومون متواتر کے زایل ہوجاتے ہین پس جسوقت چھوڑ دیا ہمنے
ان حاصل ضربون کو تو بدلے اشال اول جز کسی مقسوم کی ہونگے اشال اول جز خارج قسمت کی کسواسطے کہ اشال اول
جز مقسوم علیہ کا عدد آکا ہی اور یہہ بات عمل مین اسکتی ہی تقسیم کرنی سے مقسوم اور مقسوم علیہ کو اشال اول جز مقسوم
علیہ کے اب ظاہر ہی کہ اشال جزون خارج قسمت کی ہونگی اشال اول جزو مقسومون کے عمل مذکور اور بہی سہل ہوسکتا ہی اگر
جمع نکرین ہم سب اجزای کو بلکہ اوسنے اجزا کو جتنی کفایت کرین واسطے بتادینے اول جز ہر مقسوم کے اور لکھین ہم
اون حاصل ضربون کو جو حاصل ہون ضرب دینی سے ایک کم اجزای مقسوم علیہ کو اجزای خارج قسمت مین خطون یا
قطارون ترچہی مین اور نہ خطون عرضی مین جیسیکہ موافق قواعد مروج کی ہوتا ہی بیان سے یہہ قاعدہ نکلتا ہی

قاعدہ

اول قسمت کرد مقسوم اور مقسوم علیہ کو سر اول جز مقسوم علیہ پر اور اس عمل سے سر اول جز مقسوم علیہ کا آ
ہوجائیگا اور اول جز خارج قسمت اور مقسوم کا ایک ہوجائیگا دویم تبدیل کرد علامتین تمام اجزای الا ایک مقسوم علیہ کو اور
ضرب کرد تمام اجزا کو جنکی علامتین تبدیل کی گئی ہین اول جز خارج قسمت مین اور حاصل ضرب کو اول سطر سی ابتدا کرکے ایک
قطار ترچہی مین لکھو سویم جمع کرد اون اجزا کو جو واقع ہون اول قطار عمودی مین اور ضرب کرد اجزای مبدلہ مقسوم علیہ کو
اس حاصل جمع مین اور بطور سابق کے لکھو حاصل ضرب کو ایک ترچہی قطار مین چہارم جمع کرد اجزای دوم قطار عمودی
کو اور حاصل جمع ہوگا دوسرا جز خارج قسمت کا اور ضرب کرد اجزای مبدلہ مقسوم علیہ کو اس حاصل جمع مین اور حاصل ضرب
کو بطور سابق کے لکھو اور یہی عمل کیے جاوے تبتک کہ اجزای مقسوم کے تمام ہوجائین جیسیکہ ہوتا ہی موافق قاعدہ مروج کے
ظاہر ہی کہ قاعدہ مروج قسمت کی کو دیکھکر مہندس ہورنر نے اس قاعدہ کو قیاس مینے استنباط کرلیا ہی اور اسیواسطے
اس قاعدہ کو قاعدہ قیاسی کہتے ہین

مثال ۱ چاہتے ہین ہم تقسیم کرنا ط^{۵} ـ ۵ ط^{۴} لا + ۱۰ ط^{۳} لا^{۲} ـ ۱۰ ط^{۲} لا^{۳} + ۵ ط لا^{۴} ـ لا^{۵}
کو ط^{۲} ـ ۲ ط لا + لا^{۲} پر اب موافق قاعدہ گذشتہ کی صورت عمل کی یہہ ہوگی

۱	۱ − ۵ + ۱۰ − ۱۰ + ۵ − ۱
+۲	+ ۲ − ۶ + ۶ − ۲
− ۱	− ۱ + ۳ − ۳ + ۱

× × ۱ − ۳ + ۳ − ۱

اور یہان سے معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی

ط^{۳} − ۳ ط لا + ۳ ط لا^{۲} − لا^{۳} ظاہر ہی کہ اس مثالین امثال اجزای مقسوم کے خط یا قطار عرضی مین لکھے گئے ہین اور امثال اجزای مقسوم علیہ قطار عمود مین اور تمام اجزا الا ایک مقسوم علیہ کی تبدیل کی گئے ہین اور بعد ازان + ۲ اور − ۱ کو کہ تبدیل کیئے ہوئے اجزای مقسوم علیہ کے ہین ضرب کیا ہی آ مین کہ اول جز مقسوم باخارج قسمت کا ہی اور حاصل ضربون + ۲ اور − ۱ کو خط ترچہی مین نیچے − ۵ اور + ۱۰ کے لکہا ہی کہ یے متماثل ہین + ۲ اور − ۱ کے بعد ازان جمع کیا ہی ہمنے دوسرے قطار عمود کو اور اس عمل سے حاصل ہوا ہی + ۳ کہ دوسرا جز خارج قسمت کا اور جسوقت ضرب کرتے ہین ہم − ۳ کو + ۲ اور − ۱ مین اوسوقت حاصل ضرب − ۶ اور + ۳ ہوتی ہین اور انکو ترچہی قطار مین نیچے + ۱۰ اور − ۱۰ کے لکہا ہی اور حاصل جمع تیسری قطار عمود کا + ۳ ہی اور یہہ ہی تیسرا جز خارج قسمت کا پس ضرب کیا ہمنے اس حاصل جمع کو اجزای تبدیل کیئے ہوئے مقسوم علیہ مین تو حاصل ضرب یے ہونگی + ۶ اور − ۳ پس حاصل جمع چوتہی قطار عمود کا − ۱ اسی طرح سے حاصل ہوتی ہی اخیر قطار ترچہی − ۲ + ۱ اور بعد ازان عمل تمام ہوا ہر

۲ قسمت کرو لا^{۴} − ۵ لا^{۳} + ۱۵ لا^{۲} − ۲۴ لا + ۲۷ − ۱۳ لا^{۲} + ۵ لا^{۳} کو اوپر

لا^{۳} − ۲ لا^{۲} + ۴ لا − ۲ لا + ۱ کے اب ظاہر ہی کہ صورت عمل کی یہہ ہوگی

۱	۱ − ۵ + ۱۵ − ۲۴ + ۲۷ − ۱۳ + ۵
+۲	+ ۲ − ۶ + ۱۰
− ۴	− ۴ + ۱۲ − ۲۰
+ ۲	+ ۲ − ۶ + ۱۰
− ۱	− ۱ + ۳ − ۵

۱ − ۳ + ۵ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰

پس معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی لا^{۲} − ۳ لا + ۵

۳ تقسیم کرو ط^{۵} + ۲ ط^{۴} ص + ۳ ط^{۳} ص^{۲} − ط^{۲} ص^{۳} − ۲ ط ص^{۴} − ۳ ص^{۵} کو

ط^{۲} + ۲ ط ص + ۳ ص^{۲} پر اس جا واضح ہو کہ چون کہ امثال جز مقسوم علیہ کا کچہہ دخل عمل مین نہین رکہتا ہی تو اوسی ہم صورت عمل مین نہین لکہین گے اور واسیواسطے صورت عمل کی یہہ ہی

	۱ + ۲ + ۳ − ۲ − ۱ − ۳	
− ۲	− ۲ + ۰ + ۲	۲
− ۳	− ۳ + ۰ + ۳	۳

۱ + ۰ + ۰ − ۱

پس معلوم ہوا کہ خارج قسمت مطلوبہ یہہ ہی

ط^{۲} + ۰ × ط^{۲} ص + ۰ × ط ص^{۲} − ص^{۳} = ط^{۲} − ص^{۳}

فصل دوم مساواتون کے خواص کے بیان مین

پہلے لیکنے مطالب اس باب کے ضروری ہی کہ لکہین ہم چند تعریفین یا معنے بعضی اصطلاحون کے جو مساواتون کے بیان مین اکثر مستعمل ہوتے ہین

حدود

۱ اوس صورت جبریہ کو جو تعبیر کرتی ہی مساوات کسی دو مقدارون کو مساوات کہتی ہین

۲ قیمت کسی مساوات کی وہ مقدار ہوتی ہی کہ اگر اسکو لکہین ہم بجاے مقدار مجہول مساوات کے تو وہ شرط جو تعبیر ہوتی ہی مساوات مذکور سے پوری ہو جاتی ہی

۳ جملہ کسی مقدار کا اوس صورت جبریہ کو کہتے ہین جسمین مقدار مذکور پائی جاتی ہو کسی طرح سے مثلاً ط لا^{۲} + ص اور ط لا^{۲} + س لا + د اور ط س لا^{۲} + ص اور ط لا ہین تمام جملے لا کے اور ۴ لا − ۵ اور $\frac{\text{ط لا}^{۲} + \text{ص}}{\text{س لا} + \text{د}}$ اور ر^{۲} + لا ر + لا^{۲} + ص + ۲ ہین تمام جملے لا اور ر کے ان جملون کو تعبیر کیا کرتے ہین ساتہہ علامتون ج (لا) اور ج (لا اور ر) کے

شکل ۱ اگر کسی جملہ لا کو کہ مثل اسکی ہو لا^{ن} + ف لا$^{ن-۱}$ + ق لا$^{ن-۲}$ + ک لا$^{ن-۳}$ + وغیرہ قسمت کرین ہم لا − ط پر تو ہم کہتے ہین کہ جو کچہہ بعد قسمت ہونے کے باقی رہیگا وہ ایسا ہی جملہ ط کا ہوگا جیسا کہ جملہ اصلی ہی لا کا واسطے ثابت کرنے اس بات کے فرض کرو کہ

ج (لا) = لاⁿ + ف لاⁿ⁻¹ + ق لاⁿ⁻² + وغیرہ

اور یہہ بھی فرض کرو کہ تقسیم کرنے سے ج (لا) کو لا − ط پر خارج قسمت تو ع ہوتا ہی اور ب باقی رہتا ہی اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ج (لا) = ع (لا − ط) + ب

اب یہہ بات ظاہر ہی کہ یہہ مساوات درست ہونی چاہئے مطابق ہر قیمت لا کی پس جسوقت لا = ط اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات ج (ط) = ۰ + ب

اب چونکہ ب کچھ تعلق لا سے نہین رکھتا ہی یعنے قیمت ب کی نہین موقوف ہوتی ہی قیمت لا کی پر تو ثابت ہوا کہ باقی یعنے ب وہی جملہ کا ہی جسیکہ جملہ اصلی ہی جملہ لا کا

مثالین

۱ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لا⁴ − ۶ لا + ۷ کو لا − ۲ پر اور جواب دو بغیر عمل کرنی تقسیم کے

۲ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لا⁴ − ۶ لا³ + ۸ لا − ۱۹ کو لا + ۳ پر

۳ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لا⁴ + ۶ لا³ + ۷ لا² + ۵ لا − ۴ کو لا − ۵ پر

۴ کیا رہیگا باقی اگر قسمت کرین ہم لاᵐ + ف لاᵐ⁻¹ + ق لا + ک کو ط − لا پر

اجوبہ

۱ ب = ۲⁴ − ۶ × ۲ + ۷ = ۴ − ۱۲ + ۷ = − ۱

۲ ب = (− ۳)⁴ − ۶ (− ۳)³ + ۸ (− ۳)² − ۱۹ = − ۱۲۴

۳ ۱۵۷۱

۴ طᵐ + ف طᵐ⁻¹ + ق طᵐ⁻² + ک

شکل ۲ اگر ط ہو ویسے ایک قیمت مساوات آئندہ کے

لاⁿ + ۱ لاⁿ⁻¹ + ۱۲ لاⁿ⁻² + ... − ۱ن − ۲ لا² + ۱ن − ۱ لا + ۱ن = ۰

تو ہم دعوی کرتے ہین کہ اول طرف اس مساوات کی پوری قسمت ہوسکتی ہی لا − ط پر کسواسطے کہ اگر قسمت کرین ہم اسس مساوات کو لا − ط پر تو موافق شکل (۱) کے باقی رہیگا یہہ طⁿ + ۱ طⁿ⁻¹ + ۱۲ طⁿ⁻² + ... ۱ن − ۱ ط + ۱ن

اور یہہ یعنے ب مساوی صفر کے ہی کسواسطے کہ جسوقت کہین ہم مساوات

ج (لا) = ع (لا − ط) + ب مین ط بجای لا کے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

ج (ط) = ۰ + ب اور چونکہ ط ایک قیمت مساوات کی ہی تو بالضرور ج (ط) = ۰ اور اسیواسطی

معلوم ہوا کہ ب = ۰ اور یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مفروض پوری تقسیم ہوسکتی ہی لا − ط پر اس شکل کے برعکس یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر مساوات مفروض لا − ط پر پوری قسمت ہوسکی تو ط بھی ایک قیمت اس مساوات کی ہوگی اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ مساوات

ج (لا) = ع (لا − ط) اور جسوقت لا = ط اوسوقت ج (ط) = ۰ اور یہان سی یہہ معلوم ہوا کہ اگر لکھین ہم ط بجای لا کی مساوات ج (لا) = ۰ مفروض مین تو شرط مساوات کی پوری ہوجاتی ہی اور اسیواسطی ط ہی ایک قیمت اس مساوات کی

شکل ۳ ہر مساوات کی کہ جسمین فقط ایک مقدار مجہول ہوتی ہی اوتنی ہی قیمتین ہوتی ہین جتنے احاد ہوتے ہین سب سے بڑی نشان قوت مقدار مجہول مذکور کے مین فرض کرو کہ ج (لا) = ۰ ہی مساوات مفروض ن درجہ کی اور ط۱ ہی ایک اسکی قیمت توموافق شکل گذشتہ کی حاصل ہوگی یہہ مساوات

(لا − ط۱) ج۱ (لا) = ج (لا) = ۰ اور اسسے ج۱ (لا) بتعیر کرتا ہی اوس خارج قسمت کو جو پیدا ہوتا ہی تقسیم کرنی سے ج (لا) کو لا − ط۱ پر اب اگر ط۲ ایک قیمت ج (لا) = ۰ کے ہو تو ظاہر ہی کہ ج (لا) پورا قسمت ہونا چاہیئے لا − ط۲ پر کسواسطی کہ لا − ط۱ نہین قسمت ہوسکتا ہی لا − ط۲ پر اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات (لا − ط۱) (لا − ط۲) ج۲ (لا) = ۰ اور اسسے ج۲ (لا) بتعیر کرتا ہی اوس خارج قسمت کو جو پیدا ہوتا تقسیم کرنی سے

ج۲ (لا) کو لا − ط۲ پر پس اگر اسیطرح سے ہو دین

ط۳ اور ط۴ اور ط۵ ..... ط ن قیمتین مساوات مفروض کی تو ضرور ہی کہ صورت ج (لا) پوری قسمت ہوسکی ہر واحد پر ان جزو یعنی سے لا − ط۳ اور لا − ط۴ اور لا − ط۵ ..... لا − ط ن پر اور اسیواسطی مساوات مفروض کی یہہ شکل ہوجاوے گی (لا − ط۱) (لا − ط۲) (لا − ط۳) ..... (لا − ط ن) = ۰

اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ جتنے اجزای ضربی اس مساوات مین ہین اوتنی ہی قیمتین بھی اس مساوات کی ہین یعنے جتنے احاد سب سے بڑے نشان قوت لا یعنی مقدار مجہول کی مین ہین اوتنی ہی قیمتین ہین کسواسطے کہ مساوات گذشتہ پوری ہوسکتی ہی بوسیلہ کسی ایک کے ان مساواتون شرطی مرقوم الزیل سے

لا = ط۱ اور لا = ط۲ اور لا = ط۳ اور ..... لا = ط ن

حکم شکل مذکورہ بالا سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر معلوم ہو ہمین ایک قیمت کسی مساوات کی تو بوسیلہ عمل تقسیم قیاسی کے ہم گھٹا سکتے ہین ایک مرتبہ مساوات مذکورہ کا اور اس نئی مساوات مین باقی قیمتین مساوات مفروض کی ہونگی

ہونگی اور اسیطرح سے اگر ایک سے زیادہ قیمتین کسی مساوات مفروض کی معلوم ہون تو دریافت کرسکتے ہین اوتنی ہی کم درجہ کی مساوات جتنی قیمتین ہمین معلوم ہین اور اس نئی مساوات مین ہونگی باقی قیمتین اب ہم لکھتے ہین چند مثالین واسطے مشق کے

مثالین

۱ ایک قیمت مساوات $لا^۴ - ۲۵ لا^۲ + ۶۰ لا - ۳۶ = ۰$ کے ۳ ہے چاہتے ہین ہم دریافت کرنے وہ مساوات جسمین باقی جاوین باقی قیمتین مساوات مفروض کی

(۳) ۱ + ۰ − ۲۵ + ۶۰ − ۳۶

۳ + ۹ − ۴۸ + ۳۶

۱ + ۳ − ۱۶ + ۱۲

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $لا^۳ + ۳ لا^۲ - ۱۶ لا + ۱۲ = ۰$

۲ دو قیمتین مساوات $لا^۴ - ۱۲ لا^۳ + ۴۸ لا^۲ - ۶۸ لا + ۱۵ = ۰$ کے ۳ اور ۵ ہین اور چاہتے ہم دریافت کرنی وہ مساوات درجہ دویم کی جسمین باقی قیمتین ہونگی

(۳) ۱ − ۱۲ + ۴۸ − ۶۸ + ۱۵

+ ۳ − ۲۷ + ۶۳ − ۱۵

(۵) ۱ − ۹ + ۲۱ − ۵

+ ۵ − ۲۰ + ۵

۱ − ۴ + ۱

اور یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات درجہ دوم مطلوبہ یہہ ہی $لا^۲ - ۴ لا + ۱ = ۰$

۳ ایک قیمت مساوات مکعبی $لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱۱ لا - ۶ = ۰$ کی ۱ ہے اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی مساوات درجہ دوم کی کہ اوسمین باقی قیمتین ہونگی

جواب $لا^۲ - ۵ لا + ۶ = ۰$

۴ دو قیمتین مساوات مال مالی یعنے چوتھے مرتبہ

$۴ لا^۴ - ۱۴ لا^۳ - ۵ لا^۲ + ۳۱ لا + ۶ = ۰$ کی ۲ اور ۳ ہین بتاؤ کیا ہوگی مساوات باقی قیمتون کی

جواب $۴ لا^۲ + ۶ لا + ۱ = ۰$

۵ ایک قیمت مساوات مکعبی $لا^۳ + ۳ لا^۲ - ۱۶ لا + ۱۲ = ۰$ کے ۱ کی ہے بتاؤ باقی قیمتین

جواب ۲ اور — ۶

۶ دو قیمتین مساوات چوتھے درجہ لا⁴ — ۶ لا² + ۱۴ لا — ۱۶ = ۰ کی ۲ اور — ۲ ہین دریافت کرو باقی قیمتون کو

جواب ۳ ± √۵

شکل ۴ چاہتے ہین ہم بنانی ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین

ط۱ اور ط۲ اور ط۳ ..... ط ن موافق شکل گذشتہ کے یہہ ظاہر ہی کہ اول طرف اس مساوات مطلوبہ کے یہہ ہوگی (لا — ط۱) (لا — ط۲) (لا — ط۳) (لا — ط۴) .... (لا — ط ن)

اور اسیواسطے مساوات مطلوبہ یہہ ہی (لا — ط۱) (لا — ط۲) (لا — ط۳) .... (لا — ط ن) = ۰

اب جسوقت جاری کرین ہم عمل ضرب کا کہ تعبیر کیا جاتا ہی مقسل ہونے خطوط وحدانی کی سے تو حاصل ہونگی یہ مساواتین

جبکہ ن = ۲ تو لا² — ط۱	لا + ط۱ ط۲ = ۰
— ط۲	

اور جبکہ ن = ۳ تو لا³ — ط۱	لا² + ط۱ ط۲	لا — ط۱ ط۲ ط۳ = ۰
— ط۲	+ ط۱ ط۳	
— ط۳	+ ط۲ ط۳	

جبکہ ن = ۴ اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا⁴ — ط۱	لا³ + ط۱ ط۲	لا² — ط۱ ط۲ ط۳	لا + ط۱ ط۲ ط۳ ط۴ = ۰
ط۲	+ ط۱ ط۳	— ط۱ ط۲ ط۴	
ط۳	+ ط۲ ط۳	— ط۱ ط۳ ط۴	
ط۴	+ ط۱ ط۴	— ط۲ ط۳ ط۴	
	+ ط۲ ط۴		
	+ ط۳ ط۴		

اور اسی قیاس پر اور مساواتین بہی نکل سکتی ہین جسوقت ن زیادہ ہو دسے ۴ سے اور مساواتون گذشتہ سی یے باتین حاصل ہوتی ہین

۱ سر دوسری جز حاصل ضرب کا ہوتا ہی حاصل جمع تمام قیمتونکا کہ اونکی علامتین بدلی گئی ہون

۲ سر تیسری جز اوسی حاصل ضرب کا ہوتا ہی حاصل جمع دو قیمتون کے حاصل ضربونکا لیکن اونکی سب ہے

علامتین بدلی ہوئی ہون

۳ سر جو تہی جزکا ہوتا ہی حاصل جمع تین قیمتون کے حاصل ضربون کا کہ ہر واحد ان مین کے علامت تبدیل کی ہوئے ہو

۴ سر پانچوین جزکا ہوتا ہی حاصل جمع چار چار قیمتون کے حاصل ضربونکا لیکن انکی علامتین تبدیل ہوئی ہون اور علی ہذا القیاس آخیر جز ہوتا ہی حاصل ضرب تمام قیمتونکا لیکن انکی علامتین بدلی ہوئی ہون یعنے ان تمام قیمتون کی اصلی علامتون کو تبدیل کرکے انکو اسمین ضرب دیا ہو سوا ان باتون کی پانچ احکام اس شکل سے نکلتے ہین

حکم ۱ اگر سر دوسری جز کسی مساوات کا صفر ہو یعنے مساوات مذکورمین دوسرا جز نہو تو بالضرور حاصل جمع قیمتون ملت کا مساوی ہوگا حاصل جمع قیمتون منفیہ کی حکم ۲ اگر علامتین تمام اجزا کسی مساوات کی مثبت ہون تو تمام قیمتین اس مساوات منفی ہونگی اور اگر علامتین متواتر مثبت اور منفی ہون تو تمام قیمتین مثبت ہونگے

حکم ۳ ہر قیمت کسی مساوات پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی مساوات مذکور کا اخیر جز کہ اسکو جز مطلق کہتے ہین

حکم ۴ جس مساوات مین سر جز اول کا عدد ایک ہو اور سر باقی اجزا کے اعداد صحیحہ ہون اوسمین کوئی قیمت کسر نہین ہوسکتی ہی یہہ بات ثابت ہوجائیگی جسوقت لیجائینگی ہم جز مطلق کو دوسری طرف مساوات کے اور لکھین سمجھکے کوئی کسر مختصرہ کیونکہ اس صورت مین یہہ لازم اجائیگا کہ ایک کسر مساوی ہی ایک عدد صحیح کی اور یہہ بات محال ہی

حکم ۵ جس مساوات مین تمام قیمتین ممکن ہون اور جز اخیر بہت چھوٹا یعنے کم ہو تو ضرور ہی کہ قیمتین اس مساوات کی بہت چھوٹی ہون

مثالین

بنا ؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین ۲ اور ۳ اور ۵ اور − ۶ ہین بس اس صورت مین فقط یہہ بات لازم ہی کہ جاری کرین ہم عمل ضرب کا کہ تغیر کیا جاتا ہی مساوات آئندہ مین $(ل-۲)(ل-۳)(ل-۵)(ل+۶)=۰$

اب اگر علیحدہ کرین ہم سرون کو حروف سی تو صورت عمل کی یہہ ہوگی

$$ل-۲ \quad ل-۳$$

$$ل+۶ \quad ل-۵$$

$$ل^۲-۵ل+۶ \quad ل-۵$$

$$ل^۳-۵ل^۲+۶ل$$

$$ل^۳-۵ل^۲+۶ل \quad ل+۶$$

$$ل^۴-۵ل^۳+۶ل^۲+۶ل^۳-۳۰ل^۲+۳۶ل$$

$$ل^۴+ل^۳-۲۴ل^۲+۳۶ل-۱۸۰$$

اور یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہے لا⁴ − ۴لا³ − ۲۹لا² + ۱۵۶لا − ۱۸۰ = ۰

۲ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین √۲ اور −√۲ اور ۳ اور −۳

۳ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین √۳ اور −۴ اور ۲+√۳ اور ۲−√۳

۴ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۳+√۵ اور ۳−√۵ اور ۲ اور −۲

۵ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۱ اور −۲ اور ۳ اور −۴ اور ۵ اور −۶

۶ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۲+√−۱ اور ۲−√−۱ اور −۳

۷ بناؤ ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین یہ ہین ۳ اور ۴ اور $\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۱}{۳}$

اجوبہ

۲ لا³ − ۷لا + ۶ = ۰

۳ لا⁴ − ۳لا³ − ۱۵لا² + ۴۹لا − ۱۲ = ۰

۴ لا³ − ۳۲لا + ۲۴ = ۰

۵ لا⁶ + ۳لا⁵ − ۴۱لا⁴ − ۸۷لا³ + ۴۰۰لا² + ۴۴۴لا − ۲۰۷ = ۰

۶ لا³ − لا² − ۱۷لا + ۱۵ = ۰

۷ ۸لا⁴ − ۵۴لا³ + ۱۰۱لا² − ۵۴لا + ۸ = ۰

شکل ۵ اگر کسی مساوات کی اجزاء کی ایک ایک چھوڑ کر علامتین بدلی جائین تو علامتین تمام قیمتون اس مساوات کی بھی بدل جائینگی فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات

لا^ن + ۱ لا^{ن−۱} + ۲ لا^{ن−۲} + ۳ لا^{ن−۳} + ... ن = ۰ ..... (۱)

اب اگر علامتین اجزای اس مساوات کی ایک ایک چھین چھوڑ کر بدلین تو حاصل یہہ ہونگی مساواتین

لا^ن − ۱ لا^{ن−۱} + ۲ لا^{ن−۲} ... ± ن لا ± ۱ = ۰ ..... (۲)

− لا^ن + ۱ لا^{ن−۱} − ۲ لا^{ن−۲} ... ± ن لا ± ۱ = ۰ ..... (۳)

اس جا ظاہر ہی کہ مساواتین (۲) اور (۳) ایک سی ہین کیونکہ ان دونوتین حاصل جمع مثبت اجزاء کا مساوی ہی حاصل جمع منفی اجزای سے کے اب اگر لکھین ایک قیمت ط مساوات اول اور − ط کو مساوات دوم مین بجایے لا کے تو جو کچھ ان دونون مساواتون سے اسوقت حاصل ہوگا وہ یکسان ہوگا اور چونکہ

اور چونکہ مساوات (۱) قیمت ط سے پوری ہوتی ہی تو ضرور ہی کہ ط سی مساوات (۲) پوری ہووے ہی اور یہان سے معلوم ہوا کہ ط ہی ایک قیمت مساوات (۲) یا (۳) کی ہی اگر علامتین تمام اجزا کے کسی مساوات کی تبدیل کی جائین تو علامتین قیمتون اس مساوات کی تبدیل نہین ہونگی

مثالین

۱ قیمتین مساوات لا^{۳} − ۶ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۶ = ۰ کے ۱ اور ۲ اور ۳ ہین بتا دیا ہین قیمتین اس مساوات کی لا^{۳} + ۶ لا^{۲} + ۱۱ لا + ۶ = ۰ جواب − ۱ اور − ۲ اور − ۳

۲ قیمتین مساوات لا^{۳} − ۶ لا^{۲} + ۲۴ لا − ۱۶ = ۰ کی ۲ اور ۴ اور ۴ ± $\sqrt{-۵}$ ہین بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتین یہ ہین − ۲ اور − ۴ اور − (۴ ± $\sqrt{-۵}$)

جواب − لا^{۳} − ۶ لا^{۲} − ۲۴ لا − ۱۶ = ۰

شکل ۶ مقدارین نزولی اور قیمتین غیر ممکن کی مساواتون مین جوڑی ہوتی ہین یعنے یہ مقدارین دو دو اسیمین ضرب پاکر مساوات مین نمودار ہوتی ہین فرض کرو کہ یہہ مساوات ہی

لا^{ن} + ۱ لا$^{ن-۱}$ + ۱ لا$^{ن-۲}$ ..... + ۱ لا + ۱ ن = ۰ اور اوسکی ایک قیمت یہہ ہی

ط + ص $\sqrt{-۱}$ تو ہم دعوی کرتے ہین کہ ط − ص $\sqrt{-۱}$ ہی ایک قیمت اسی مساوات کی ہی اسواسطے کہ اگر لکھین ہم ط + ص $\sqrt{-۱}$ کو مساوات مفروض مین بجای لا کے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

(ط + ص $\sqrt{-۱}$)^{ن} + ۱ (ط + ص $\sqrt{-۱}$)$^{ن-۱}$ + ... + ۱ ن − ۱ (ط + ص $\sqrt{-۱}$) + ۱ ن = ۰

اب اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ اجزای اس مساوات کی تو حاصل ہونگی دو مجموعی مختلف قسم کی اجزای کے ایک توانین کا ہوگا مجموعہ جفت قوتون ص $\sqrt{-۱}$ کا یعنی مقادیر ممکن کا اور اوسکو تعبیر کرتے ہین ف سے اور دوسرا ہوگا مجموعہ مقادیر غیر ممکن کا اور اوسکو ہم تعبیر کرتے ہین ق $\sqrt{-۱}$ سی پس حاصل ہوگی یہہ مساوات ف + ق $\sqrt{-۱}$ = ۰

اور چونکہ ف اور ق ایک دوسرے سے کچھہ علاقہ نہین رکھتے ہین تو ضرور ہی کہ ف = ۰ اور ق = ۰

اب لکھو ط − ص $\sqrt{-۱}$ واسطے لا کی مساوات مفروض مین اب چونکہ طاق قوتین − ص $\sqrt{-۱}$ کی منفی ہونگی تو ضرور ہی اب حاصل ہووے یہہ صورت ف − ق $\sqrt{-۱}$ اور چونکہ پہلے ثابت ہوچکا ہی کہ ف = ۰ اور ق = ۰ تو معلوم ہوا کہ ۰ + ق $\sqrt{-۱}$ = ۰ اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوئی کہ جسوقت لکھتے

لکھتے ہین ہم ط − ص √۸ − ۱ بجای لا کے مساوات مفروض مین تو شرط مساوات کی پوری ہوجاتی ہی اور اسیواسطی ثابت ہوا کہ ق − ق √۸ − ۱ بھی ایک قیمت مساوات مفروض کی ہی بعینہ اسیطرح سے یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر ط + ص √۸ ہودی ایک قیمت کسی مساوات مفروض کے تو بالضرور ط − ص √۸ بھی ایک قیمت اوسی کی ہوگی

حکم ۱ وہ مساوات جسکی بعضی یا تمام قیمتین غیر ممکن ہون ضرور ہی کہ تقسیم ہوسکی

{ لا − (ط + ص √۸ − ۱) } { لا − (ط − ص √۸ − ۱) } پر یعنے اسپر

لا² − ۲ ط لا + ط² + ص² اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ تمام مساواتین نزولی حل ہوسکتی ہین غیر نزول اجزای مین اور یہ اجزا یا تو اول درجہ کی ہونگی یا دوم درجہ کی اور قیمتین غیر ممکن ممکن ہوسکتی موافق شرایط مذکور کے

حکم ۲ ممکن ہی کہ تمام قیمتین ایک جفت درجہ کی مساوات کی غیر ممکن ہون اور اگر یسے سب قیمتین غیر ممکن نہ ہون گی تو بالضرور کم سے کم دو قیمتین ممکن ہونگی

حکم ۳ چونکہ حاصل ضرب ہر جوڑہ غیر ممکن قیمتون کا ط² + ص² کے شکل کا ہوتا ہی اور ط² + ص² اپنی ذات سی ایک مقدار مثبت ہی تو معلوم ہوا کہ اخیر جزا دسی مساوات کا جسکی سب قیمتین غیر ممکن ہین مثبت ہوتا ہی

حکم ۴ ہر مساوات طاق درجہ کی مین بالضرور کم سے کم ایک قیمت ممکن ہوتی ہی اور علامت اسی ایک قیمت کے مخالف ہوتی ہی علامت اخیر جزا دسی مساوات کی سے

حکم ۵ ہر مساوات جفت درجہ کی مین کہ جسکا اخیر جز منفی ہو کم سے کم دو قیمتین ممکن یعنے اصلی ہونی چاہئین ایک ایمن سے مثبت اور دوسری ایمن کی منفی ہوتی ہی

شکل ۷ کسی مساوات مین تعداد قیمتون مثبت کی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد تبدیلیون علامتون کے + سے − مین یا − سے + مین اور تعداد منفی قیمتونکی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد متواتر آنے ایک ہی علامت کی سے فرض کرو کہ کسی مساوات مین اسس ترتیب سی علامتین نمودار ہین

+ + + − − − − + + + − + − − − + + +

اب اگر پیدا کیا چاہین ایک اور قیمت مساوات مفروض مین تو ظاہر ہے کہ ضرب کرنا چاہیے ہمین مساوات مفروض کو لا − ط مین اور اب ظاہر ہے کہ حاصل ضرب مین اسس صورت سے علامتین نمودار ہونگے

− + + + − − − + − +	
+ − − − + + + − + −	اور دوسری صورت مین
+ − ± ± + ∓ ∓ − + − +	اسطرح نمودار ہونگی
+ + + − + − − − +	
− − − + − + + + −	
− ± ± + − + ± ± − +	

اور اسجای علامت مشکوک ± سے یہہ بات تعبیر ہوتی ہی کہ علامت یا تو + یا − ہوگی اور یہان سے ظاہر ہوا کہ علامتین متواتر تبدیل ہوگئی ہین لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ عمل ضرب مذکورہ بالا سے تعداد متواترانے علامتون کی نہین زیادہ ہوئی گو کہ وے مشکوک ہوگئین ہین اور یہہ اختیار ہی کہ خواہ کیسی علامت دا سطے مشکوک علامتون کے فرض کرو لیکن یہہ ظاہر ہی کہ ایک علامت زیادہ ہوئے اور اسیواسطے تعداد تبدیلیون کے بقدر ایک کے زیادہ ہوئے اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ جبکہ ایک نئی قیمت کسی مساوات مین پیدا ہوتی ہی اوسوقت تعداد تبدیلیون علامتون کی بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہی اور اسیواسطے یہہ ثابت ہوا کہ تعداد قیمتون مثبت کی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد تبدیلیون مذکور سے جسوقت علامتون ایک جزو کو کہ چھوڑکر کسی مساوات کی اجزا ئے تبدیل کیئے جاتے ہین اوسوقت موافق شکل (۵) کے علامتین تمام قیمتون اس مساوات کی تبدیل ہوجاتی ہین اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ متواتر علامتین کہ مساوات مفروض مین ہونگی تبدیل ہوجائینگی تبدیلیون علامات کی سے مساوات مبدلہ مین اور تبدیلین مساوات مفروض کی تبدیل ہوجائینگی علامتون متواتر سے مساوات مبدلہ مین اور چونکہ مساوات مبدلہ مین تعداد مثبت قیمتون کی نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد تبدیلیون علامتون کے سے تو معلوم ہوا کہ تعداد قیمتون منفیہ کی مساوات مفروض مین نہین زیادہ ہوسکتی ہی تعداد متواترانے علامتونکی سے

مثالین

۱ مساوات $لا^۶ + ۳لا^۵ - ۱۴لا^۴ - ۸۷لا^۳ + ۴۰۰لا^۲ + ۴۴۴لا - ۲۷۰ = ۰$ مین چھہ اصلی یعنے ممکن قیمتین ہین بتاو کتنی انمین سے مثبت ہونگی

۲ مساوات $لا^۴ - ۳لا^۳ - ۱۵لا^۲ + ۹۴لا - ۱۲۰ = ۰$ مین چار اصل قیمتین ہین بتاو کتنی انمین سے منفی ہونگی

فصل سویم ہیچ بیان تبدیل کرنی مساوات کے

شکل ۱ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروض کو ایک اور ایسی مساوات سی کہ اسکی پچھلی مساوات کے قیمتین مساوات مفروض کی سے علیحدہ علیحدہ بقدر ایک خاص مقدار کی زیادہ یا کم ہون مثلاً فرض کرو کہ مساوات آیندہ مساوات مفروض ہی

$$ط لا^ن + ا_1 لا^{ن-1} + ا_2 لا^{ن-2} + \dots\dots + ا_ن لا + ا_{ن+1} = ۰$$

اور چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا اسی مساوات کو ایک اور ایسی مساوات سی کہ اسکی قیمتین قیمتون مساوات مفروض کی سے بقدر مقدار د کے کم ہون یہہ تبدیلی عمل مین اسکتی ہی اگر لکھین ہم مساوات مفروض مین ع + د واسطے لا کے اور جو کچھہ حاصل ہوگا وہ مساوات مطلوبہ ہوگی لیکن یہہ عمل بہت طول طویل ہوتا ہی اور اسیواسطے ہم کوئی اور سہل طریقہ کی طرف رجوع کرینگی ظاہر ہی کہ اگر مساوات مفروض مین لکھین ہم ع + د واسطی لا کے تو حاصل ہوگی ایک اسی درجہ کی مساوات اور شکل بہی اسی مساوات کے وہی ہوگی جو مساوات مفروض کی ہے پس فرض کرو کہ مساوات مذکور یہہ ہی

$$ط ع^ن + ب ع^{ن-1} + ب_2 ع^{ن-2} + \dots\dots ب_ن ع + ب_{ن+1} = ۰ \quad (۱)$$

لیکن چونکہ ع = لا − د تو مساوات (۱) اسی شکل کی ہوجائیگی

$$ط (لا - د)^ن + ب (لا - د)^{ن-1} + \dots\dots ب_ن (لا - د) + ب_{ن+1} = ۰ \quad \dots\dots (۲)$$

اور اسیجای یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ ہر جز اسی مساوات کی تو جو مساوات حاصل ہوگی وہ مساوات اور مساوات مفروض ایک سی ہونگی اسواسطے کہ مساوات مفروض مین بجاے لا کی ع + د لکہا گیا ہی اور جو مساوات اس طرح لکھنی سے حاصل ہوئی ہی اوسمین تبدیل کیا ہی ع کو لا − د سی اور اسیواسطے ظاہر ہی کہ مراجعت کی ہمنے طرف مساوات مفروض کے پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ط (لا - د)^ن + ب (لا - د)^{ن-1} + \dots\dots ب_ن (لا - د) + ب_{ن+1} =$$

$$ط لا^ن + ا_1 لا^{ن-1} + ا_2 لا^{ن-2} + \dots\dots ا_ن لا + ا_{ن+1}$$

اب اگر قسمت کرین اول طرف اسی مساوات کو لا − د پر تو ظاہر ہی کہ باقی رہیگا ب_{ن+1} اور خارج قسمت ہوگا یہہ

$$ط (لا - د)^{ن-1} + ب (لا - د)^{ن-2} + \dots\dots ب_ن$$

اور چونکہ دوسری طرف مساوات گذشتہ کی بعینہ وہی ہی جو اول طرف ہی تو ضرور ہی کہ اگر اوسکو لا − د پر قسمت کرین تو بہی یہی خارج قسمت اور باقیات پیدا ہونگی اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوئی کہ اگر اول طرف مساوات مفروض کو لا − د پر قسمت کرین تو باقی رہیگا اخیر جز مساوات مطلوبہ کا اب اگر قسمت کرین خارج قسمت

ط (لا − د)$^{ن-۱}$ + ب (لا − د)$^{ن-۲}$ + ب ن − ۲ (لا − د) + ب ن − ۱ کو لا − د پر تو ظاہر ہی کہ باقی ب ن − ۱ رہیگا اور یہہ ہی سراخیر جزسی پہلے جز کا اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر قسمت کرین اصلی مساوات کی اول طرف کو اور بعد ازان اسیطرح سی ہر خارج قسمت کو تو معلوم ہوجائینگی ہمین سر تمام اجزای مساوات مطلوبہ کی پس واسطی دریافت کرینے مساوات مطلوبہ کی یہہ قاعدہ نکلتا ہی

قاعدہ

فرض کرو کہ اول طرف مساوات مفروض کی کوئی جملہ لا کا ہی اور د ہی وہ مقدار جسقدر قیمتون اس مساوات کو کم یا زیادہ کرنا ہی پس اب قسمت کرو اول طرف مذکور کو لا − د یا لا + د پر جیسیکہ مطلوب ہو یعنے اگر قیمتون مساوات کا کم کرنا ہی تو لا − د پر قسمت کرو اور اگر زیادہ کرنا ہی تو لا + د قسمت کرو اور بعد ازان جو کچھ حاصل ہو اوسی بہی لا − د یا لا + د پر قسمت کرو اور یہی عمل تقسیم کا جاری رکھو جب تک تقسیم انتہا پاوے پس اب سر سب سے بڑی قوت مقدار مجہول مساوات مطلوبہ کا ہوگا سر اسی قوت مقدار مجہول مساوات مفروض کا اور اون مقدارون مین سے جو عملون تقسیم کئی سے باقی بچے ہین اول ہوگی سر اخیر جز مساوات مطلوب کا اور دوسری ہوگی سر اخیر سی پہلی جز مساوات مطلوبہ کا اور علی ہذا القیاس اور اسی طرح سے مساوات معلوم ہوسکتی ہی یہہ بہی واضح ہو کہ اگر کوئی جز مساوات مین نہین ہوا سکی جگہ ایک صفر لکھنا چاہیے

مثالین

۱ چاہتے ہین تبدیل کرنا مساوات ۵ لا^{۴} − ۱۲ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} + ۴ لا − ۵ = ۰ کو جسکی قیمتین کم ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے بقدر ۲ کی

لا − ۲) ۵ لا^{۴} − ۱۲ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} + ۴ لا − ۵ (۵ لا^{۳} − ۲ لا^{۲} − لا + ۲

۵ لا^{۴} − ۱۰ لا^{۳}

− ۲ لا^{۳} + ۳ لا^{۲}

− ۲ لا^{۳} + ۴ لا^{۲}

− لا^{۲} + ۴ لا

− لا^{۲} + ۲ لا

+ ۲ لا − ۵

+ ۲ لا − ۴

− ۱ = باقی اول

$$\text{ل}-۲) \; ۵\text{ل}^۳ - ۲\text{ل}^۲ - \text{ل} + ۲ \; / \; ۵\text{ل}^۲ + ۸\text{ل} + ۱۵$$

$$۵\text{ل}^۳ - ۱۰\text{ل}^۲$$

$$+ ۸\text{ل}^۲ - \text{ل}$$

$$+ ۸\text{ل}^۲ - ۱۶\text{ل}$$

$$+ ۱۵\text{ل} + ۲$$

$$۱۵\text{ل} - ۳۰$$

$$+ ۳۲ = \text{باقی دویم کی}$$

$$\text{ل}-۲) \; ۵\text{ل}^۲ + ۸\text{ل} + ۱۵ \; / \; ۵\text{ل} + ۱۸$$

$$۵\text{ل}^۲ - ۱۰\text{ل}$$

$$+ ۱۸\text{ل} + ۱۵$$

$$+ ۱۸\text{ل} - ۳۶$$

$$+ ۵۱ = \text{باقی سویم}$$

$$\text{ل}-۲) \; ۵\text{ل} + ۱۸ \; / \; ۵$$

$$۵\text{ل} - ۱۰$$

$$۲۸ = \text{چہارم}$$

یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $۵ز^۴ + ۲۸ز^۳ + ۵۱ز^۲ + ۳۲ز - ۱ = ۰$
ظاہر ہی کہ عمل گزشتہ بہت طویل ہی لیکن یہہ مختصر ہو سکتا ہی اگر رجوع کرین ہم طرف قاعدہ قیاسی تقسیم مہندس ہورنر کی پس اگر حل کرین مثال گذشتہ کو اس قاعدہ سے تو صورت عمل کی یہہ ہی

$$۲) \; ۵ - ۱۲ + ۳ + ۴ - ۵$$

$$۱۰ - ۴ - ۲ + ۴$$

$$۵ - ۲ + ۱ - ۲ - ۱ \quad \therefore \; \frac{ب}{۱} = -۱$$

$$\frac{۳۰ + ۱۶ + ۱۰}{۳۲ + ۱۵ + ۸ + ۵} \quad \therefore \; \frac{ب}{۲} = ۳۲$$

$$\frac{۳۶ \quad ۱۰}{۵۱ + ۱۸ + ۵} \quad \therefore \; \frac{ب}{۳} = ۵۱$$

$$\frac{۱۰}{۲۸ + ۵} \quad \therefore \; \frac{ب}{۴} = ۲۸$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $۵ز^۴ + ۲۸ز^۳ + ۵۱ز^۲ + ۳۲ز - ۱ = ۰$
۲ چاہیے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات $۵ز^۴ + ۲۸ز^۳ + ۵۱ز^۲ + ۳۲ز - ۱ = ۰$ کو
ایک ایسی مساوات سی کہ اوسکی قیمتین قیمتون مساوات مفروض کی سے علیحدہ علیحدہ قدر ۲ کے زیادہ ہون
اس صورت مین ظاہر ہی کہ اگر عمل کرین ہم بوسیلہ قاعدہ تقسیم ہورنر صاحب کے تو صورت عمل کی یہہ ہوگی

$$-2)\ 5+28+51-32+1$$

$$-10-36-30+4$$

$$+18+15+2-5$$

$$-10-16+2$$

$$+8-1+4$$

$$-10+4$$

$$-2+3$$

$$-10$$

$$-12$$

پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ یہہ ہی $5لا^4 - 12لا^3 + 3لا^2 + 4لا - 5 = 0$

۳ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات $ع^3 - 2ع^2 + 3ع - 4 = 0$ کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتین بہ نسبت قیمتون مساوات مفروض کے بقدر ۷ ر ۱ کے کم ہون

$$1)\ 1-2+3-4$$

$$1-1+2$$

$$-1+2-2$$

$$+1\ 1$$

$$0+2$$

$$1$$

$$1$$

پس معلوم ہوا کہ وہ مساوات جسکی قیمتین بہ نسبت قیمتون مساوات مفروض کے بقدر ۱ کے کم ہین یہہ ہی $لا^2 + لا + 2لا - 2 = 0$ اور اگر یہی عمل کرین اس مساوات پر واسطے کمی ۷ ر کے تو صورت عمل کی یہہ ہوگی

$$7ر1)\ 1+1+2-2$$

$$+7ر7\quad 1ر19\quad 3ر23$$

$$7ر1\quad 9ر19\quad 3ر23$$

$$7ر7\quad 16ر8$$

$$2ر4\quad 8ر7$$

$$7ر7$$

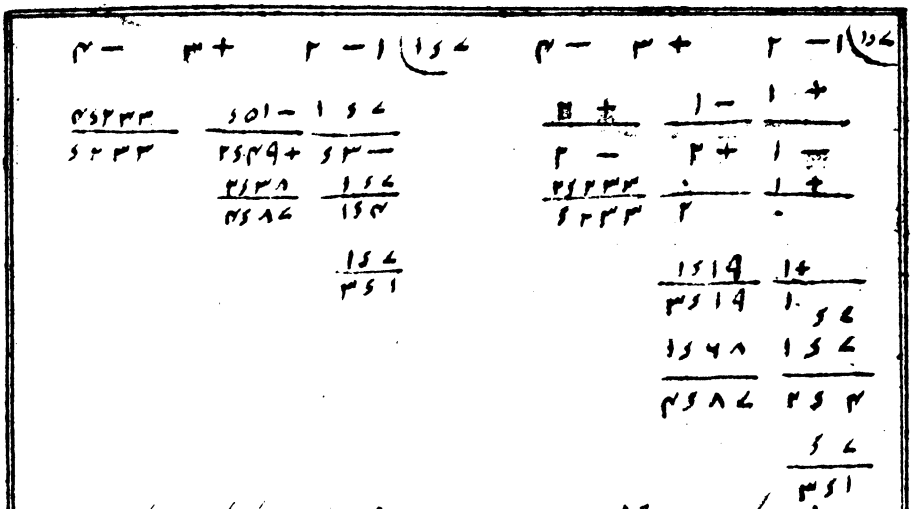
$$3ر1$$

یہان سے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہی $3ر1 + 2ر3 + 8ر7 + 4ر2 + 3ر23 = 0$

مثال گذشتہ مین ہمنے دو دفع عمل تقسیم کا کیا لیکن واضح ہو کہ عمل مذکور ایک ہی دفعہ ہو سکتا ہی جیسکہ واضح ہوگا ان دو طرح کی صورتون عملون کی سے

---

* اسجایے کہ دو قسم کی ہین ایک تو نشان کسور اعشاریہ کا اور دوسرا علامت مقدار جبریہ کا



یہہ بات ظاہر ہی کہ ان دو صورتون مین سے اول صورت مین ہمنے دونون عملون کو ایک جا ہی لکھدیا ہی اور دوسری صورت مین ہمنے آ اور ۷ کو جدا کرکے عمل نہین کیا ہی بلکہ ایک ہی بار اسکو اکھٹا رکھہ کر عمل جاری کیا ہی

۴ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات $لا^{۳} - ۷لا + ۷ = ۰$ کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتین بہ نسبت اس مساوات کے $\frac{۱}{۲}$ بقدر ایک کے کم ہون

۵ چاہتے ہین دریافت کرنے ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین کم ہون بقدر ۳ کے قیمتون اس مساوات $لا^{۴} - ۳لا^{۳} - ۱۵لا^{۲} + ۴۹لا - ۱۲ = ۰$ سے

اور تبدیل کرو اس مساوات کو جو حاصل ہو ایک اور ایسی مساوات سے جسکی قیمتین اس مساوات کی سی بقدر ۴ کے زیادہ ہون

۶ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتین کم ہین بقدر ۱۰ کے بہ نسبت قیمتون اس مساوات کی

$$لا^{۴} + ۲لا^{۳} + ۳لا^{۲} + ۴لا - ۴۰ = ۱۲۳$$

۷ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتین کم ہین بقدر ۲ کے قیمتون اس مساوات کی سے

$$لا^{۵} + ۲لا^{۳} - ۶لا^{۲} - ۱۰لا + ۸ = ۰$$

۸ بتاؤ وہ کونسی مساوات ہی جسکی قیمتین کم ہین بقدر $\frac{۱}{۲}$ کی بہ نسبت قیمتون اس مساوات کی

$$۲لا^{۴} - ۶لا^{۳} + ۴لا^{۲} - ۲لا + ۱ = ۰$$

اجوبہ

۴ $ز^{۳} + ۳ز^{۲} - ۴ز + ۱ = ۰$ اور اسسے $لا = ز + ۱$ ....

۵ $ز^۴ + ۹ز^۳ + ۱۲ز^۲ - ۱۴ز = ۰$ ایضاً ..... $لا = ز + ۳$

اور $ع^۴ - ۷ع^۳ + ۶۶ع - ۷۲ = ۰$ ایضاً ..... $لا = ع - ۱$

۶ $ز^۴ + ۲۴ز^۳ + ۶۶۳ز^۲ + ۴۶۶۴ز = ۰$ اور اسیجائے ..... $لا = ز + ۱۰$

۷ $ز^۵ + ۱۰ز^۴ + ۴۲ز^۳ + ۸۶ز^۲ + ۷۰ز + ۱۲ = ۰$ ایضاً $لا = ز + ۲$

۸ $۲ز^۴ - ۲ز^۳ - ۲ز^۲ - \frac{۳}{۲}ز + \frac{۳}{۸} = ۰$ ایضاً $لا = ز + \frac{۱}{۲}$

شکل ۲

جاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروض کو ایک ایسی مساوات سیے کہ اسمین دوسرا جز زائل ہوتا ہی فرض کرو کہ مساوات مفروض یہہ ہی

$$لا^ن + ا_۱ لا^{ن-۱} + ا_۲ لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ا_{ن-۱} لا + ا_ن = ۰$$

شکل ۴ فصل گذشتہ سی یہہ بات ظاہر ہی کہ حاصل جمع تمام قیمتون اس مساوات کا $-ا_۱$ ہی اور یہان سیے یہہ معلوم ہوا کہ تاکہ دوسرا جز اس مساوات کا زائل ہوجاوے لازم ہی کہ حاصل جمع تمام قیمتون پر مقدار $ا_۱$ زیادہ کرین لیکن تعداد قیمتون کے $ن$ ہی اور اسیواسطی لازم ہی کہ زیادہ کرین ہم ہر قیمت پر مقدار $\frac{ا_۱}{ن}$ تاکہ دوسرا جز مساوات مفروض کا زائل ہوجاے اگر علامت دوسرے جز کی منفی ہو تو ظاہر ہی کہ حاصل جمع تمام قیمتون کا $+ا_۱$ ہوگا اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ کم کرنا چاہیئے ہمین ہر قیمت کو بقدر $\frac{ا_۱}{ن}$ کے تاکہ دوسرا جز زائل ہوجاے پس یہان سیے یہہ قاعدہ نکلتا ہی

قاعدہ

قسمت کرو دوسرے جز مساوات کو سب سیے بڑے نشان قوت مقدار مجہول پر اور بعد ازان اگر علامت دوسرے جز کی منفی ہو تو ہر قیمت مساوات کو بقدر خارج قسمت مذکور سیے کم کرو اور اگر علامت جز مذکور مثبت ہو تو قیمت مذکور کو زیادہ کرنا چاہیئے بقدر اوسی خارج قسمت سیے کے

مثالین

۱ چاہتے ہم تبدیل کرنا مساوات $ز^۳ - ۶ز^۲ + ۸ز - ۲ = ۰$ ایک اور ایسی مساوات سی جسمین دوسرا جز زائل ہوجاے اسجائے ظاہر ہی کہ $ا_۱ = -۶$ اور $ن = ۳$ پس معلوم ہوا کہ کم کرنی چاہیئے ہمین قیمت اس مساوات کی بقدر $\frac{-۶}{۳}$ کے تاکہ دوسرا جز اسکا زائل ہوجاے

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 - 6 + 8 - 2 \\ \hline & 0 + 8 - 2 + \\ & 1 - 4 + 0 + \\ \hline & 0 - 4 + 2 \\ & 1 - 2 + 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہ ہی $ع^3 - 4ع - 2 = 0$ اور اسجا $لا = ع + 2$

۲ تبدیل کرو مساوات $لا^4 - 16لا^3 - 6لا + 15 = 0$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جز زائل ہو جائے

۳ تبدیل کرو مساوات $لا^5 + 15لا^4 + 12لا^3 - 20لا^2 + 14لا - 25 = 0$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جز زائل ہو جاوے

۴ تبدیل کرو مساوات $لا^3 + ط لا + ص = 0$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جز زائل ہو جائے

۵ تبدیل کرو مساوات $لا^3 + ط لا^2 + ص لا + س = 0$ کو ایک ایسی مساوات سے جسمین دوسرا جز نہ ہے

اجوبہ

۲ $ع^4 - 96ع^3 - 1805ع - 7776 = 0$ (4) $ع - (\frac{ط^2}{4} + ص) = 0$

۳ $ع^5 - 87ع^3 + 1249ع^2 - 5670ع + 4015 = 0$

(5) $ع^3 - (\frac{ط^2}{3} - ص)ع + \frac{ط^3}{27} - \frac{ط ص}{3} - س = 0$

شکل ۳

چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ایک مساوات مفروض کو ایک ایسی مساوات سے کہ قیمتین اس مساوات کی متخالفی ہون واسطے قیمتون مساوات مفروض سے کے فرض کرو کہ مساوات مفروض یہ ہی

$$ط لا^ن + ا_1 لا^{ن-1} + ا_2 لا^{ن-2} + \dots + ا_{ن-1} لا + ا_ن = 0$$

اب فرض کرو کہ $ع = \frac{1}{لا}$ اور اس سے حاصل ہوتا ہی یہہ $لا = \frac{1}{ع}$ پس جبوقت لکھین ہم بجاے لا کے $\frac{1}{ع}$ مساوات گذشتہ مین اور بعد ازان ضرب کرین اس مساوات کو $ع^ن$ مین تو ظاہر ہی اس عمل سے پیدا ہوگی ایک نئی مساوات جسکی اجزا کی سرونکی ترتیب بدل جائگی یعنے مساوات نئی یہہ ہوگی

$$ا_ن ع^ن + ا_{ن-1} ع^{ن-1} + ا_{ن-2} ع^{ن-2} + \dots + ا_2 ع^2 + ا_1 ع + ط = 0$$

حکم ۱ بیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی مساوات مفروض تبدیل ہوسکتی ہی ایک مساوات سے کہ اسکی قیمتین زیادہ یا کم ہون بہ نسبت مکافیون قیمتون مساوات مفروض کے کیونکہ اس صورت مین فقط یہہ بات ملحوظ رہنے چاہیئے کہ معکوس کرکے ترتیب سرون اجزای مساوات مفروض کے جاری کرین ہم عمل موافق شکل (۱) فصل ہذا کی

حکم ۲ اگر سر اجزای مساوات مفروض کے ایک سے رہین خواہ اونہین کسی ترتیب سی لکہین تو ظاہر ہی کہ مساوات مفروض اور مساوات نئی ایک سی ہوگی اور قیمتین ان مساواتون کی اس شکل کی ہوگی

$$ق_1^{\frac{1}{1}} \text{ اور } ق_2^{\frac{1}{2}} \text{ اور } ق_3^{\frac{1}{3}} \text{ اور علی ہذا القیاس}$$

حکم ۳ اگر سر اجزای مساوات طاق درجہ کی ایک سی رہین خواہ اونہین کسی ترتیب سے لین یعنے سر مذکور سب مساوی ہون لیکن اونکی مختلف علامتین ہون تو ہی قیمتین مساوات مفروض اور مساوات نئی کی ایک سی ہوگی کسواسطے کہ اگر بدلین ہم علامتین تمام اجزای نئی مساوات کی تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین قیمتون مین توفق نہین آئیگا لیکن دونو مساواتین ایکسی ہوجائینگی یہی حال ہوگا جبکہ مساوات مفروض جفت درجہ کی ہوگی بشرطیکہ جزاوسط اس مساوات کا نہو تاکہ مساوات نئی کہ تمام اوسکی علامتین تبدیل کیجائینگی اور مساوات مفروض ایک سی ہوسکین پس اون مساواتون کو جنکی اجزا ایکے سر ایک سے رہتے ہین خواہ اونہین کسی ترتیب سی لو مساوات متواتر کہتے ہین اور بلحاظ اونکی قیمتون کے اونہین مساواتون کو مساواتین مکافی بہی کہتے ہین

حکم ۴ اگر علامت کسی اخیر جز تکیلے مساوات مکافی کی طاق مرتبہ کی + ہو تو ایک اس مساوات کی قیمتون سے = ۱ ہوگی اور اگر اخیر جز مذکور پر علامت نفی یعنے − ہوگی تو ایک قیمت + ۱ ہوگی دلیل اسکی یہہ ہے کہ مساوات مفروض اور اوسکی مساوات مکافی کی ایک قیمت ایکسی ہوگی اور یہہ ظاہر ہے کہ عدد آکا ہی ایسی مقدار ہی کہ وہ اور اوسکا مکافی ایک سے ہوتے ہین اب چونکہ مساوات مکافی کی قیمتین سوای مساوات مفروض کے قیمتون کے مکافیون کے اس مساوات کی قیمتین بہی ہوتی ہین تو معلوم ہوا کہ اخیر جز مساوات مکافی کا ہوگا حاصل ضرب قیمتون مساوات مفروض اور اونکی مکافیون کا جسوقت کہ تبدیل کی جائین ان سب کی علامتین اور چونکہ علامت ہر قیمت اور اوسکی مکافی کی ایک سی ہوتی ہی تو معلوم ہوا کہ حاصل ضرب کسی قیمت اور اوسکی مکافی کا مثبت ہوگا پس اب ضرور ہی کہ علامت اخیر جز مذکور اور قیمت مشترک آکی مختلف ہوگی یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر کوئی مساوات مکافی طاق درجہ کی ہو اور قسمت کرین اوسی لا + ۱ پر اوس صورت مین جبکہ علامت اسکی اخیر جز کی مثبت ہو اور لا − ۱ پر اوس صورتمین

جبکہ علامت جزمذکور منفی ہو تو مساوات مذکور ایک درجہ کم کی مساوات ہو جائیگی

حکم ۵ ایک مساوات تکافی جفت درجہ کی ہمیشہ تحویل ہو سکتی ہی طرف ایک مساوات کی جسکا مرتبہ نصف ہو اصلی مساوات سی مثلاً فرض کہ ہی یہہ مساوات $لا^{ن} + ۱ لا^{ن-۱} + ۱ م لا^{ن-۲} + \dots + ۱ م لا^{۲} + ۱ لا + ۱ = ۰$

اب تقسیم کرو اس مساوات کو $لا^{\frac{ن}{۲}}$ پر اور ثبت کرو اخیر امداول جزکو اور دوسرے اور اخیر سے پہلی جز کو اور اسیطرح سے اور اجزا کو جنکی مقام متشابہ ہوں متصل ایک دوسرے کی تو ظاہر ہی کہ حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا^{\frac{ن}{۲}} + \frac{۱}{لا^{\frac{ن}{۲}}} + ۱ ۱ \left(لا^{\frac{ن}{۲}-۱} + \frac{۱}{لا^{\frac{ن}{۲}-۱}}\right) + \dots + ۱ ن_{-۱} \left(لا + \frac{۱}{لا}\right) + ۱ ن = ۰$$

اب فرض کرو کہ $لا + \frac{۱}{لا} = ع$ یا ع $= لا + \frac{۱}{لا}$ پس اب حاصل ہونگی یہے مساواتین

$$لا + \frac{۱}{لا} = ع \qquad \therefore لا + \frac{۱}{لا} = ع$$

$$\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)^{۲} = لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}} + ۲ \qquad \therefore لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}} = ع^{۲} - ۲$$

$$\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)^{۳} = لا^{۳} + \frac{۱}{لا^{۳}} + ۳\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) \therefore لا^{۳} + \frac{۱}{لا^{۳}} = ع^{۳} - ۳ع$$

$$\left(لا + \frac{۱}{لا}\right)^{۴} = لا^{۴} + \frac{۱}{لا^{۴}} + ۴\left(لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}}\right) + ۶ \therefore لا^{۴} + \frac{۱}{لا^{۴}} = ع^{۴} - ۴(ع^{۲}-۲) - ۶$$
$$= ع^{۴} - ۴ع^{۲} + ۲$$

وغیرہ وغیرہ وغیرہ ∴ وغیرہ وغیرہ

اب جسوقت لکھیں ہم یہے قیمتیں $لا + \frac{۱}{لا}$ اور $لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}}$ وغیرہ کی مساوات گذشتہ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ع^{ن} + ب ع^{ن-۱} + ج ع^{ن-۲} + \dots + ن_{-۱} ع + ب ن = ۰$

پس اب ظاہر ہو کہ مساوات مفروض تحویل ہو گئی طرف ایک ایسی مساوات کی جسکا مرتبہ نصف ہی اوسکی مرتبہ سے

مثالین

۱ چاہتے ہین تبدیل کرنا مساوات $لا^{۴} - ۷ لا^{۲} + ۷ = ۰$ کو ایک کو ایسی مساوات سے جسکی قیمتین بہ نسبت تکافیون قیمتون مساوات مفروض سے کے ایک سے کم ہون

$$۱ \quad ۰ \quad -۷ \quad ۰ \quad +۷ \quad ۰ \quad +۱$$
$$۱ \quad ۰ \quad -۷ \quad ۰ \quad +۷$$
$$۱ \quad ۰ \quad -۷ \quad ۰$$
$$۱ \quad ۰ \quad -۷$$
$$۱ \quad ۰$$
$$۱$$

∴ ۷ ع۲ + ۱۴ ع۲ + ۷ ع + ۱ = ۰ مساوات مطلوبہ ہی اور اسکے

ع + ۱ = $\frac{۱}{لا}$ یا لا = $\frac{۱}{ع+۱}$

۴ دریافت کیا چاہتے ہین ہم قیمتین اس مساوات متکافی کی

لا۵ − ۶ لا۴ + ۵ لا۳ + ۵ لا۲ − ۶ لا + ۱ = ۰

حکم (۴) سے واضح ہی کہ اس مساوات کی ایک یہہ قیمت ہی لا = − ۱ اب اگر قسمت کرین اس مساوات کو لا + ۱ پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لا۴ − ۷ لا۳ + ۱۲ لا۲ − ۷ لا + ۱ = ۰ اب اگر قسمت کرین اس پچھلی مساوات کو لا۲ پر اور مرتب کرین اجزاء کو اوسیطرح سے جسطرح کہ حکم (۵) مین کیا ہی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لا۲ + $\frac{۱}{لا۲}$ − ۷ (لا + $\frac{۱}{لا}$) + ۱۲ = ۰

اب فرض کرو کہ لا + $\frac{۱}{لا}$ = ع تو ظاہر ہی کہ لا۲ + $\frac{۱}{لا۲}$ = ع۲ − ۲ پس اب اگر لکھین یہ قیمتین تو

ع۲ − ۲ − ۷ ع + ۱۲ = ۰ یا ع۲ − ۷ ع + ۱۰ = ۰

اور جسوقت حل کرینگے ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگا یہہ

$$ع = \frac{۷}{۲} \pm \sqrt{۱۰ - \frac{۴۹}{۴}}$$

$$= \frac{۷ \pm ۳}{۲} = ۵ \text{ یا } = ۲$$

یہان سے حاصل ہوتی ہین یہ دو مساواتین درجہ دویم کی لا + $\frac{۱}{لا}$ = ۵ اور لا + $\frac{۱}{لا}$ = ۲

اور انکے حل کرنے سے حاصل ہوتی ہین یہ قیمتین لا کی

لا = $\frac{۱}{۲}$ (۵ ± $\sqrt{۲۱}$) اور لا = ± ۱ یا + ۱ پس معلوم ہوا کہ پانچ قیمتین مساوات مفروض کی یہ ہین − ۱ اور + ۱ اور + ۱ اور $\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}$ اور $\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}$

اور اسجا

$$\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲} = \frac{(۵+\sqrt{۲۱})}{(۵+\sqrt{۲۱})} \cdot \frac{(۵-\sqrt{۲۱})}{۲} = \frac{۲۵ - ۲۱}{۲ (۵+\sqrt{۲۱})}$$

$$= \frac{۲}{۵+\sqrt{۲۱}}$$ اور یہہ متکافی ہی قیمت $\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}$ کا

۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایک ایسی مساوات جسکی قیمتین متکافی ہون اسلیے قیمتون اس مساوات کے

لا۵ − ۳ لا۴ − ۲ لا۳ + ۳ لا۲ + ۱۲ لا + ۸ = ۰

۴ چاہتے ہین دریافت کرنی قیمتین اس مساوات متکافی کے

۵ $ز^5 - ۴ز^4 + ۳ز^3 - ۳ز^2 + ۴ز - ۵ = ۰$

۵ دریافت کیا چاہتے ہین ہم قیمتین ممکنی مساوات آئندہ کی $ن^5 + ۱^5 + ۱^4 + ۱^3 + ۱^2 + ۱ + ۱ = ۰$

ایجوبہ

۳ $۸ ۱^4 - ۱۰ ۱^3 - ۱۲ ۱^2 - ۳ ۱^2 + ۲ ۱^2 + ۳ ۱ - ۱ = ۰$

۴ اور $\frac{۱ + ۸\sqrt{-۳}}{۲}$ اور $\frac{۱ - ۸\sqrt{-۳}}{۲}$ اور $\frac{-۳ + ۸\sqrt{-۱}}{۵}$ اور $\frac{-۳ - ۸\sqrt{-۱}}{۵}$

۵ ۱ اور $\frac{-۱ + ۸\sqrt{-۳}}{۲}$ $\frac{-۱ - ۸\sqrt{-۳}}{۲}$ $\frac{۱ + ۸\sqrt{-۳}}{۲}$ اور $\frac{۱ - ۸\sqrt{-۳}}{۲}$

شکل ۴

چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا کسی مساوات مفروض کو ایک اور ایسی مساوات سی جسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ کوئی صحیح یا کوئی جز مقررہ قیمتون مساوات مفروضہ کی ہون فرض کرو کہ سی یہہ مساوات

$$ا^ن + ۱ ا^{ن-۱} + ۱^2 ا^{ن-۲} + \dots\dots ا_{ن-۱} ا + ا_ن = ۰$$

پس اب اگر فرض کرین کہ $ز = م ا$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ا = \frac{ز}{م}$ اور جسوقت کہ ہم یہہ قیمت ا کی بجاے اوسکی مساوات مفروض مین رکھ کر ضرب کرین ہر جز اوسکی کو $م^ن$ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ز^ن + م ۱ ز^{ن-۱} + م^2 ۱^2 ز^{ن-۲} + \dots\dots م^{ن-۱} ا_{ن-۱} ز + م^ن ۱_ن = ۰$$

اور یہہ ایک ایسی مساوات ہی کہ اسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ م گنی قیمتون مساوات مفروض کے ہین پس یہان سے واسطی عمل مین لانے تبدیلی کی کہ اس شکل مین مطلوب ہی ضرب کرو دوسرے جز مساوات مفروض کو م مین اور تیسری جز کو $م^2$ مین اور چوتھے کو $م^3$ مین اور علی ہذا القیاس

حکم ۱ مرقومہ بالا سے ظاہر ہی کہ اگر اول جز مساوات مفروض کا م ہو تو اس صورت مین یہہ قاعدہ برتنا چاہئیے دور کرو سر اول جز کو اور دوسرے جز مین کچھہ تبدیل نکرو اور تیسرے جز کو م مین ضرب کرو اور چوتھے کو $م^2$ مین ضرب کرو اور پانچوین جز کو $م^3$ مین اور علی ہذا القیاس

حکم ۲ مرقومہ بالا سے یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اگر مساوات مفروض کے اجزا کی امثال کسور ہون

تو ہم اس مساوات کو ایک ایسی مساوات سی تبدیل کرسکتی ہین کہ امثال اجزا اس پچھلی مساوات کی اعداد صحیح ہون اور ترکیب اسکی یہہ ہی کہ مساوات مفروض کی امثال کیے (کہ کسور ہین) مخرج نمایون کو اسیمین ضرب کرکے حاصل ضرب معلوم کرو اور بعد ازان مساوات مفروض ایک ایسی مساوات سے تبدیل کرو کہ اسکی قیمتین ایسی ہون کہ پیدا ہون ضرب دینی سے قیمتون مساوات مفروض کو حاصل ضرب مذکورہ بالا مین

حکم ۳ اگر امثال دوسری اور تیسری اور چوتھی وغیرہ جزون کسی مساوات کی پوری قسمت ہوسکتی ہون علیحدہ تم اور م۲ اور م۳ وغیرہ پر تو ضرور ہی کہ م ہووے مقسوم علیہ مشترک سب قیمتون مساوات مذکور کا

مثالین

۱ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات ۲ لا۳ − ۴ لا۲ + ۷ لا − ۳ = ۰ کو ایک ایسی مساوات سے کہ اوسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ تین گنی ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے

۲ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات ۴ لا۴ − ۳ لا۳ − ۱۲ لا۲ + ۵ لا − ۱ = ۰ کو ایک ایسی مساوات سے جسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ چار گنی ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے

۳ چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا مساوات لا۳ + ⅓ لا۲ − ¼ لا + ۲ = ۰ کو ایک ایسی مساوات سی جسکی قیمتین علیحدہ علیحدہ ۱۲ گنی ہون قیمتون مساوات مفروض کی سے

اجوبہ

۱ ۲ لا۳ − ۱۲ لا۲ + ۶۳ لا − ۸۱ = ۰

۲ لا۴ − ۳ لا۳ − ۴۸ لا۲ + ۸۰ لا − ۴۳ = ۰

۳ لا۴ − ۴ لا۳ − ۳۶ لا۲ + ۵۶ لا + ۲۴ = ۰

شکل ۵

چاہتے ہین تبدیل کرنا کسی مساوات مفروض کو ایک ایسی مساوات سی جسکی قیمتین ہوویں مجذور قیمتون مساوات مفروض کے فرض کرو کہ یہہ ہی مساوات لا^ن + ۱ لا^{ن−۱} + ۲ لا^{ن−۲} + ... ن − ۱ لا + ۱ ن = ۰

پس اب موافق شکل پانچوین کے باب گذشتہ سی ظاہر ہی کہ مساوات

لا^ن − ۱ لا^{ن−۱} + ۲ لا^{ن−۲} − ..... ± ن − ۱ لا ∓ ۱ ن = ۰ ایسی ہوگی کہ اسکی قیمتین

قیمتون مساوات مفروض کی سے فقط علامتونمین مختلف ہونگی فرض کرو کہ ط۱ اور ط۲ اور ط۳ وغیرہ قیمتین مساوات مفروض کی ہین اور − ط۱ اور − ط۲ اور − ط۳ وغیرہ قیمتین پچھلی مساوات کی ہین پس اب

حاصل ہونگی سے مساواتین کہ اونمین اجزار بہ نسبت سابق کے ذرا مختلف ترتیب سی سے لکھے گئے ہین

$(لا^ن + ا_1 لا^{ن-1} + ا_2 لا^{ن-2} + ا_3 لا^{ن-3}$ وغیرہ$) + (ا'_1 لا^{ن-1} + ا'_2 لا^{ن-2} + ا'_3 لا^{ن-3}$ وغیرہ$)$

$= (لا - ط_1)(لا - ط_2)(لا - ط_3)(لا - ط_4)$ وغیرہ اور

$(لا^ن + ا_1 لا^{ن-1} + ا_2 لا^{ن-2} + ا_3 لا^{ن-3}$ وغیرہ$) - (ا'_1 لا^{ن-1} + ا'_2 لا^{ن-2} + ا'_3 لا^{ن-3}$ وغیرہ$)$

$= (لا + ط_1)(لا + ط_2)(لا + ط_3)(لا + ط_4)$ وغیرہ

اب اگر ضرب کرین ہم ان دو مساواتون کو ایسیمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$لا^ن + ا_1 لا^{ن-1} + ا_2 لا^{ن-2} + ا_3 لا^{ن-3}$ وغیرہ$)^2 - (ا'_1 لا^{ن-1} + ا'_2 لا^{ن-2} + ا'_3 لا^{ن-3}$ وغیرہ$)^2$

$= (لا^2 - ط_1^2)(لا^2 - ط_2^2)(لا^2 - ط_3^2)(لا^2 - ط_4^2)$ وغیرہ

اب اگر عمل مجذور کا جاری کرین ہم مساوات کی اجزاء کو علی الترتیب موافق قوای لا کی لکھین تو مساوات گذشتہ اس صورت کی ہوجاوے گی

$لا^{2ن} - (ا_1^2 - 2ا_2) لا^{2ن-2} + (ا_2^2 - 2ا_1 ا_3 + 2ا_4) لا^{2ن-4} -$ وغیرہ

$= (لا^2 - ط_1^2)(لا^2 - ط_2^2)(لا^2 - ط_3^2)(لا^2 - ط_4^2)$ وغیرہ

اب اگر واسطے لا^2 کے لکھین ہم ز کو تو مساوات گذشتہ اس شکل کی ہوجاویگی

$ز^ن - (ا_1^2 - 2ا_2) ز^{ن-1} + (ا_2^2 - 2ا_1 ا_3 + 2ا_4) ز^{ن-2} -$ وغیرہ

$= (ز - ط_1^2)(ز - ط_2^2)(ز - ط_3^2)(ز - ط_4^2)$ وغیرہ

پس معلوم ہوا کہ وہ مساوات جسکی قیمتین مجذور ہین واسطے قیمتون مساوات مفروضہ کے یہہ ہی

$ز^ن - (ا_1^2 - 2ا_2) ز^{ن-1} + (ا_2^2 - 2ا_1 ا_3 + 2ا_4) ز^{ن-2} -$ وغیرہ $= 0$

مثالین

۱ تبدیل کرو مساوات $لا^3 + 3لا^2 - 6لا - 8 = 0$ کو ایک اور ایسی مساوات سے جسکی قیمتین مجذور

ہون واسطی قیمتون مساوات مفروض کے ابدال علامات سے ظاہر ہی کہ لا^{۳} − ۶ لا = − ۳ لا^{۲} + ۸
اور اگر دونوطرف اس مساوات کا مجذور لین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا^{۶} − ۱۲ لا^{۵} + ۶۴ لا^{۳} = ۹ لا^{۴} − ۴۸ لا^{۲} + ۶۴ ∴ لا^{۶} − ۲۱ لا^{۴} + ۱۱۲ لا^{۲} − ۶۴ = ۰
یعنے مساوات مطلوبہ یہہ ہی ز^{۶} − ۲۱ ز^{۴} + ۱۱۲ ز^{۲} − ۶۴ = ۰ قیمتین مساوات مفروض کی − ۱
اور − ۴ اور − ۲ ہین اور قیمتین مساوات محصل کی ۱۱ اور ۱۶ اور ۴ ہین

۲ تبدیل کرو مساوات لا^{۳} − لا^{۲} − ۷ لا + ۱۵ = ۰ کو

۳ تبدیل کرو لا^{۴} − ۶ لا^{۳} + ۵ لا^{۲} + ۱۲ لا − ۱۰ = ۰ کو

۴ تبدیل کرو مساوات لا^{۵} − ۴ لا^{۴} − ۸ لا + ۳۲ = ۰ کو

۵ تبدیل کرو مساوات لا^{۶} − ۳ لا^{۵} − ۱۵ لا^{۴} + ۴۹ لا − ۱۲ = ۰ کو

اجوبہ

۲ ز^{۳} − ۱۵ ز^{۲} + ۷۹ ز − ۲۲۵ = ۰

۳ ز^{۴} − ۲۶ ز^{۳} + ۲۹ ز^{۲} − ۱۰۴ ز + ۱۰۰ = ۰

۴ ز^{۵} − ۱۶ ز^{۴} − ۶۴ ز^{۲} + ۱۰۲۴ = ۰

۵ ز^{۶} − ۳۹ ز^{۵} + ۵۹۴ ز^{۴} − ۴۱۲۰ ز^{۲} + ۱۴۴ = ۰

شکل ۶

اگر اصلے قیمتین یعنے ویسے قیمتین جو غیر ممکن نہین ہین کسی مساوات کی متواتر زیادہ ہوتی ہوئی ہون
ط$_{۱}$ اور ط$_{۲}$ اور ط$_{۳}$ اور ط$_{۴}$ وغیرہ یعنے انمین سے ط$_{۱}$ زیادہ ہو ط$_{۲}$ اور ط$_{۲}$ زیادہ ہو
ط$_{۳}$ سے اور ط$_{۳}$ ط$_{۴}$ سے اور ایک اور سلسلہ اعداد کا مثل اسکے ہو
ص$_{۱}$ اور ص$_{۲}$ اور ص$_{۳}$ اور ص$_{۴}$ اور ص$_{۵}$ وغیرہ اور انمین سے ص$_{۱}$ زیادہ ہو ط$_{۱}$ سے
اور ص$_{۲}$ کم ہو ط$_{۱}$ سے اور زیادہ ہو ط$_{۲}$ سے یعنی مابین ط$_{۱}$ اور ط$_{۲}$ کے واقع ہو اور اسیطرح سے
ص$_{۳}$ واقع ہو مابین ط$_{۲}$ اور ط$_{۳}$ کے اور علی ہذا القیاس اور اس پچھلے سلسلہ کے اعداد متواتر
بجای لا کی مساوات مفروض مین لکھے جائین تو جو مقدارین اس عمل سے حاصل ہونگی ویسے ایکبار
تو مثبت اور ایکبار منفی ہونگی یعنے علی الترتیب مثبت اور منفی ہونگی ظاہر ہی کہ اول طرف مساوات گذشتہ کی
ہی حاصل ضرب ان اجزاء مفرد کا (لا − ط$_{۱}$) (لا − ط$_{۲}$) (لا − ط$_{۳}$) (لا − ط$_{۴}$) وغیرہ
اور اجزاء دوسرے مرتبہ کی جنمین پائی جاتی ہین قیمتین غیر ممکن لیکن اجزاء دوسرے مرتبہ کی قیمتین مطابق ہر قیمت

اصلی لا کی نسبت ہوتی ہی اور اسیواسطے ان اجزاء کے ہونی یا نہونی سے کچھہ فرق علامت حاصل ضرب مذکور کی مین نہین اسکتا ہی اور اس باعث سی ہم اونہین دور کر سکتے ہین کیونکہ اسجاے مطلب فقط دریافت کرنا علامتون کا ہی پس اب اگر لکھین واسطے لا کی متواتر ص ۱ اور ص ۲ اور ص ۳ وغیرہ تو حاصل ہونگی یہ مساواتین

(ص ۱ − ط ۱) (ص ۱ − ط ۲) (ص ۱ − ط ۳) (ص ۱ − ط ۴) وغیرہ

= + ۰ + ۰ + ۰ + وغیرہ = + نقاط علامت ضرب کے ہین

(ص ۲ − ط ۱) (ص ۲ − ط ۲) (ص ۲ − ط ۳) (ص ۲ − ط ۴) وغیرہ

= − ۰ + ۰ + ۰ + وغیرہ = −

(ص ۳ − ط ۱) (ص ۳ − ط ۲) (ص ۳ − ط ۳) (ص ۳ − ط ۴) وغیرہ

= − ۰ − ۰ + ۰ + وغیرہ = +

(ص ۴ − ط ۱) (ص ۴ − ط ۲) (ص ۴ − ط ۳) (ص ۴ − ط ۴) وغیرہ

= − ۰ − ۰ − ۰ + وغیرہ = −

وغیرہ وغیرہ

حکم ۱ یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر دو اعداد متواترہ واسطے لا کے کسی مساوات مین لکھین تو اور جو دو مقدارین ان دو اعداد کے لکھنے سے بجاے لا کی حاصل ہون اونکی علامتین مختلف ہون تو ضرور ہی کہ ہوویں مابین ان دو اعداد کے ایک یا تین یا پانچ یا اور کئی قیمتین جنکی تعداد طاق ہی

حکم ۲ اگر وے مقدارین جو حکم (۱) مین حاصل ہوویں ایسی علامتین رکھتی ہون تو ضرور ہی کہ واقع ہون مابین دو اعداد مذکور کے دو یا چار یا چھہ یا کئی قیمتین جنکی تعداد جفت ہی یا انکی مابین کوئی قیمت نہین ہے

حکم ۳ اگر کوئی مقدار ق اور ہر مقدار جو زیادہ ہوق سے ایسی ہون کہ اونکو بجای لا کے لکھنے سے مقدارین محصل مثبت ہون تو ضرور ہی کہ ق زیادہ ہو بہ نسبت سب سے بڑی قیمت مساوات مفروض کے

حکم ۴ یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر ایک ایک جز بیچ مین چھوڑ کر علامتین اجزاء کی تبدیل کی جاین اور ف اور ہر اور مقدار جو زیادہ ہو ف سے ایسی ہو کہ اوسکو بجای لا کی لکھنے سے جو مقدارین حاصل ہون وے مثبت ہون تو ضرور ہی کہ ف کم ہو بہ نسبت سب سے کم قیمت کی

مثال

چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اول رقم ایک کی قیمتون مساوات آئندہ سے

$$\text{لا}^3 - ۴\,\text{لا}^2 - ۶\,\text{لا} + ۸ = ۰$$

یہان یہ ظاہر ہی کہ ایک قیمت لا کی صد و ایک سے کچھ فرق نہین رکھتی ہی اسواسطی کہ جسوقت لا = ۱ اوسوقت قیمت داہنی طرف مساوات گذشتہ کی ۱ ہوتی ہی اور جسوقت لا = ۹ ؍ اوسوقت قیمت اول طرف مساوات مذکور کی اسطرح سی دریافت ہوتی ہی

۹ ؍ ۱ — ۴ — ۶ + ۸

۹ ؍ — ۹ ۷ ۲ ؍ — ۱۱۹ ؍

— ۱ ؍ ۳ — ۹ ۷ ؍ ۲ + ۹ ۸ ۰ ؍

پس معلوم ہوا کہ دوسری قیمت اول طرف مساوات مفروض کی ۹ ۸ ۰ ؍ ہی اور چونکہ اول قیمت تو منفی ہی اور دوسری مثبت تو ضرور ہی ایک قیمت مساوات کی مابین انکے واقع ہوا اور اس قیمت کی اول رقم ۹ ؍ ہوئی کسواسطی کہ $\frac{۱ + ۹ ؍}{۲}$ = کچھ زیادہ ۹ ؍ سے

شکل ۷

ایک مساوات ن درجہ کی موجود ہی اور چاہتے ہین ہم دریافت کرین ایک ایسی مساوات (ن — ۱) درجہ کی کہ قیمتین مساوات مفروض کی ہو دین حدود واسطی قیمتون اس مساوات کی یعنے سر قیمتین منفی مساوات بے واقع ہو مابین دو قیمتون مساوات مفروض کی فرض کرو کہ ط۱ اور ط۲ اور ط۳ اور ط۴ اور ط۵ ... ط ن ہین قیمتین مساوات آئندہ کی اسطرح سے کہ ط۱ سب سے زیادہ ہی اور ط۲ ط۱ سے تو کم اور ط۳ سے زیادہ اور علی ہذا القیاس باقی قیمتین ہی اسطرح سے کم ہوتی جاتی ہین

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + ۱\,۲\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots\ldots\ldots + ۱\,\text{ن}-۱\,\text{لا} + ۱\,\text{ن} = ۰$$

اب کم کرو قیمتون اس مساوات کو بقدر ط کے (موافق شکل اول اس باب کے) تو ظاہر ہی کہ اس حالت مین صورت عمل کی یہہ ہوگی

د ۱ + ۱ ۱ + ۱ ۲ + ... + ۱ ن — ۲ + ۱ ن — ۱ + ۱ ن

$$\frac{\text{د}}{\text{ا}\,\text{س}} \quad \frac{\text{د}\,\text{ب}}{\text{ا}\,\text{س}^{۲}} \quad \frac{\text{د}\,\text{ب}^{۲}}{\text{ا}^{۲}\,\text{س}^{۲}} \quad \frac{\text{د}\,\text{ب}^{\text{ن}-۲}}{\text{ا}^{\text{ن}-۲}\,\text{س}^{\text{ن}-۲}} \quad \frac{\text{د}\,\text{ب}^{\text{ن}-۱}}{\text{ا}^{\text{ن}-۱}\,\text{س}^{\text{ن}-۱}} \quad \frac{\text{د}\,\text{ب}^{\text{ن}}}{\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}}$$

اور اسجا سے ظاہر ہی کہ قیمت س ن ـ ۱ کی مساوات ابتدہ سی معلوم ہوتی ہی

$$\text{س}_{\text{ن}-1} = \text{ا}_{\text{ن}-1} + \text{د ب}_{\text{ن}-2} + \text{د س}_{\text{ن}-2}$$

$$= \text{ا}_{\text{ن}-1} + \text{د}(\text{ا}_{\text{ن}-2} + \text{د س}_{\text{ن}-3}) + \text{د}(\text{ا}_{\text{ن}-2} + \text{د ب}_{\text{ن}-3} + \text{د س}_{\text{ن}-3})$$

$$= \text{ا}_{\text{ن}-1} + 2\,\text{د ا}_{\text{ن}-2} + 2\,\text{د}^2 \text{ب}_{\text{ن}-3} + \text{د}^2 \text{س}_{\text{ن}-3}$$

$$= \text{ا}_{\text{ن}-1} + 2\,\text{د ا}_{\text{ن}-2} + 2\,\text{د}^2(\text{ا}_{\text{ن}-3} + \text{د ب}_{\text{ن}-4}) + \text{د}^2(\text{ا} + \text{د ب} + \text{د س})_{\text{ن}-4}$$

$$= \text{ا}_{\text{ن}-1} + 2\,\text{د ا}_{\text{ن}-2} + 3\,\text{د}^2 \text{ا}_{\text{ن}-3} + 3\,\text{د}^3 \text{ب}_{\text{ن}-4} + \text{د}^3 \text{س}_{\text{ن}-4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$= \text{ا}_{\text{ن}-1} + 2\,\text{د ا}_{\text{ن}-2} + 3\,\text{د}^2 \text{ا}_{\text{ن}-3} + \cdots + (\text{ن}-1)\,\text{د}^{\text{ن}-2} \text{ا}_{\text{ن}-1}$$

یا

$$\text{س}_{\text{ن}-1} = \text{ن د}^{\text{ن}-1} + (\text{ن}-1)\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{د}^{\text{ن}-2} + (\text{ن}-2)\,\text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{د}^{\text{ن}-3} + \cdots + 2\,\text{ا}_2\,\text{د} + \text{ا}_1 \qquad (۱)$$

اب ظاہر ہی کہ قیمتین تبدیل کی گئی مساوات کی یہ ہونگی

ط۱ = د اور ط۲ = د اور ط۳ = د اور ط۴ = د ..... ط ن = د

اور جسیکہ ہمنے مساوات مذکور کے اخیر جزسے پہلی جز کے ایک خاص طریقہ سی دریافت کر لی ہی تو ہم اب اوسی جز کے سر کی قیمت کو ایک اور طریقہ سے دریافت کرینگی بوسیلہ شکل (۶) باب گذشتہ کے پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{س}_{\text{ن}-1} = (\text{د} - \text{ط}_1)(\text{د} - \text{ط}_2)(\text{د} - \text{ط}_3) \cdots (\text{ن}-1) \text{ جزو تک}$$
$$+ (\text{د} - \text{ط}_1)(\text{د} - \text{ط}_2)(\text{د} - \text{ط}_4) \cdots \text{ایضاً}$$
$$+ (\text{د} - \text{ط}_1)(\text{د} - \text{ط}_3)(\text{د} - \text{ط}_4) \cdots \text{ایضاً} \qquad (۲)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$+ (\text{د} - \text{ط}_2)(\text{د} - \text{ط}_3)(\text{د} - \text{ط}_4) \cdots \text{ایضاً}$$

اب چونکہ یہ دو قیمتین س ن ـ ۱ کی مساوی ایک دوسرے کی ہین تو ضرور ہی کہ جو کچھ تبدیلی کسی مقدار کی بجاے کسی مقدار کی رہنے سے ہر ایک کے ان قیمتون مین سے ہوگی وہی تبدیلی اوسی باعث سے دوسری قیمت مین بھی ہوگی پس جسوقت لکھین گے ہم پی در پے ط ۱ اور ط ۲ اور ط ۳ وغیرہ واسطے ق کے دوسری طرف مساوات (۲) کے مین تو حاصل ہونگی یہ مساواتین

(ط ۱ − ط ۲) (ط ۱ − ط ۳) (ط ۱ − ط ۴) ..... = ... + ۰ + ۰ + ۰ = + ۰ ۰ ۰ ۰

(ط ۲ − ط ۱) (ط ۲ − ط ۳) (ط ۲ − ط ۴) .... = ... + ۰ + ۰ − ۰ = ... = −

(ط ۳ − ط ۱) (ط ۳ − ط ۲) (ط ۳ − ط ۴) ..... = ... − ۰ − ۰ + ۰ ۰ = +

وغیرہ وغیرہ وغیرہ

لیکن جسوقت کہ مقدارین مثل ط ۱ اور ط ۲ اور ط ۳ اور ط ۴ وغیرہ کی بجاے مقدار مجہول کے کسی مساوات مین لکھی جاتی ہین اور اس عمل سے جو کچھ مقدارین حاصل ہوتی ہین وے پی در پی مثبت اور منفی ہوتی ہین اوسوقت موافق شکل (۶) اسس باب کی ہر کسر مقدارونمین سے کہ یہ سب ترتیب وار لی جائین واقع ہوتی ہی پس ان دو اصلی قیمتون مساوات مفروض کے پس جسوقت لکھین ہم س ن ـ ۱ کے اور تبدیل کرین دونو لاے تو مساوات (۱) سے حاصل ہوگی یہ مساوات

ق ن − ۱ + (ن − ۱) ۱ ق ن − ۲ + (ن − ۲) ۱ ۲ ق ن − ۳ + ... ۱ ۲ ... ن − ۲ ق ۱ + ۱ ن − ۱ = ۰ (۳)

اور یہ ظاہر ہی کہ یہہ ایک ایسی مساوات ہی کہ اسکی قیمتین محدود قیمتون مساوات مفروض کی یعنی اسکی

ن ن − ۱ ن − ۲
ق ـ ۱ ق + ۱ ۲ ق + ... ۱ ن − ۱ ق ۱ + ۱ ن = ۰

اور طریقہ حاصل کرنے نئی مساوات کا مساوات اصلی سے نہایت ظاہر ہی فرض کرو کہ ط ۱ اور ط ۲ اور ط ۳ اور ط ۴ وغیرہ قیمتین مساوات اصلی کی ہین اور ص ۱ اور ص ۲ اور ص ۳ وغیرہ قیمتین حاصل کی ہوئے مساوات (۳) کی ہین اور یہہ بھی فرض کرو کہ یے سب مرتب ہین موافق اپنی مقدار کے تو قیمتین دونون مساواتون کے لکھی جائین گی موافق اپنی اپنی مقدار کے ترتیب آئندہ سے

ط ۱ اور ص ۱ اور ط ۲ اور ص ۲ اور ط ۳ اور ص ۳ اور ط ۴ اور ص ۴ اور ط ۵ اور ص ۵ وغیرہ

حکم ۱ اگر ط ۲ = ط ۱ تو ضرور ہی کہ (د − ط ۱) پایا جاے بطریق ایک جزو ضربی کے ہر مجموعہ اجزاے ضربی مساوات (۲) کے مین اور یہہ ثابت ہوچکا ہی کہ مساوات (۲) اور مساوات حدی یعنی مساوات

(۳) ایک ہی تبین تو معلوم ہوا کہ لا − ط۱ ایک جزو ضربی مشترک مساوات حدی اور مساوات مفروض مین پایا جائیگا

حکم ۲ اگر ط۳ = ط۲ = ط۱ تو جزو (د − ط۱)(د − ط۲) واقع ہوگا بطریق ایک جزو ضربی کے ہر مجموعہ اجزای ضربی مساوات (۲) کے یعنی مساوات (۳) پوری تقسیم ہوسکتی ہی (لا − ط۱)² پر اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ مساوات حدی و مساوات مفروض مین جزو (لا − ط۱)² مشترک ہوگا

حکم ۳ اگر مساوات مفروض مین یہہ بہی مساوات ہو ط۳ = ط۲ تو مساوات حدی و مساوات مفروض مین یہہ جزو مشترک ہوگا (لا − ط۱)ف (لا − ط۲) یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہم کسی مساوات کی مساوی قیمتون کی تعداد دریافت کیا چاہین تو اول ہمین یہہ لازم ہی کہ دریافت کرین مساوات حدی اس مساوات کی اور بعد ازان دریافت کرین مقسوم علیہ اعظم اول طرفون دونون مساواتونکا اگر مقسوم علیہ اعظم اس شکل کا ہو (لا − ط۱)ف (لا − ط۲)ق (لا − ط۳)ر وغیرہ تو مساوات مفروض مین (ف + ۱) قیمتین تو مساوی ط۱ کے ہونگی اور (ق + ۱) قیمتین مساوی ط۲ کے اور (ر + ۱) قیمتین مساوی ط۳ کے اور علی ہذا القیاس بعد ازان مساوات مفروض کو کم درجہ کا کرسکتے ہین

فصل چہارم بیچ بیان قاعدون کے واسطے دریافت کرنی قیمتون غیر ممکن کسی مساوات مفروض کے

اول قاعدہ مہندس بودن کا

اگر اصلی قیمتین کسی مساوات مفروض کی یہ ہون ط۱ اور ط۲ اور ط۳ وغیرہ کہ موافق اپنی اپنی مقدار کے مرتب ہین اور انمین سے ط۱ سب سی کم ہی اب اگر کم کرین ہم ہر قیمت مذکور کو بقدر ہ کے کہ ایک ایسا عدد ہی کہ زیادہ ہی بہ نسبت ط۱ کے اور کم بہ نسبت ط۲ کے تو قیمتین مذکور اس شکل کی ہوجائینگی ط۱ − ہ، ط۲ − ہ اور ط۳ − ہ وغیرہ ط ن − ہ تک اور ظاہر ہی کہ اول انمین کی منفی ہوگی لیکن جبکہ تمام قیمتین اصلی ہوتی ہین + اور سوقت تعداد قیمتون مثبت کی مکثوتی ہی بعد اوتبدیلیون علامت کی کہ واقع ہوتی ہین مساوات مفروض کے اجزا مین اور چونکہ ہمنے تبدیل کیا ہی ایک قیمت مثبت کو ایک قیمت منفی سے تو یہ مساوات اس تبدیلی کے بعد حاصل ہوگی اوسمین ایک تبدیلی علامت کی بہ نسبت مساوات مفروض کے کم ہوگی اگر کم کرین ہم قیمتون مساوات مفروض کو بقدر کسی کے کہ زیادہ ہی بہ نسبت ط۲ کے لیکن کم بہ نسبت

ط ۳ کے تو اس صورت مین ظاہر ہی کہ جو مساوات بعد کمی مذکور کی حاصل ہوگی اوسمین دو منفی قیمتین ط ۱ — ک اور ط ۲ — ک ہونگی اور اسیواسطے اس مساوات مین دو تبدیلی علامت کی بہ نسبت مساوات مفروض کے کم ہونگے اسواسطے کہ دو قیمتین مثبتہ دو قیمتون منفیہ سی تبدیل کی گئی ہین یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر گھٹا دین ہم ہر قیمت مساوات مفروض کو بقدر ایک ایسی مقدار کے جو زیادہ ہی بہ نسبت ط ۱ کی تو ظاہر ہی کہ تمام قیمتین مثبتہ منفی ہوجائے اور اسیواسطے جو مساوات ما بعد اس کمی کے حاصل ہوگی اوسمین سب اجزا مثبت ہونگی کیونکہ سب قیمتین اسکی منفی ہین

(موافق شکل (۶۰) باب گذشتہ کے) اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ تمام تبدیلین علامات کی جاتی رہینگی یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر قیمتین مساوات مفروض کو یہان تک کم کرین کہ تمام قیمتین اوس مساوات کی جو بعد ازان حاصل ہوتی ہی منفی ہوجائین یعنے تمام اجزاء اوسکی مثبت ہوجائین تو ظاہر ہی کہ وہ عدد جسکا ہم اس صورت مین استعمال کرینگے ہین زیادہ ہوگا یہ نسبت سب سے بڑی قیمت مثبتہ مساوات مفروض کی اور اسیواسطے مکافی اس عدد کا کم ہوگا بہ نسبت سب سے چھوٹی قیمت مساوات مفروض کے مساوات مکافی کی سے اب اگر دریافت کرینگے مساوات مفروض کی مساوات مکافی کو کم کرین ہم اوسکی قیمتون کو بقدر مکافی عدد مذکور کے تو ضرور ہی کہ مساوات مکافی مین اوتنی ہی قیمتین منفیہ رہینگی جتنی قیمتین مثبت مساوات اصلی مین پہلی تھین الا اوس صورت مین جبکہ مساوات مین قیمتین غیر ممکن بہی ہون یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ تعداد ان تبدیلیون کی جو مساوات اول مین سے زائل ہوگئی ہین بالضرور مساوی ہوا ون تبدیلیون کے جو باقی رہین مساوات دوم مین بشرطیکہ تمام قیمتین مساوات مفروض کی اصلی ہون نہ کہ غیر ممکن پس اگر یہہ شرط پوری نہو تو ضرور ہی کہ حاصل تفریق اون اعداد کا جنسی تعداد تبدیلیون مذکور کی تعبیر ہوتی ہی مساوی ہو تعداد قیمتون غیر ممکن کی واسطی توضیح مرقوم الصدر کے ہم فرض کرتے ہین کہ کوئی ایسی مساوات ہی جسمین تین مثبت قیمتین ہین مثلاً ۱ اور ۲ اور ۳ اب اگر ہر واحد کو ان قیمتون مین سے بقدر عدد ۴ کے جو زیادہ ہی سب سے کہ سب سے بڑی قیمت مساوات مفروض کی ہی کم کرین تو ظاہر ہی کہ تینون قیمتین منفی ہوجائینگی اور اسی سبب سے تین تبدیلین علامات کی مساوات تبدیل کی ہوئی مین زائل ہوجائینگی یہہ بہی ظاہر ہی کہ مساوات مفروض کی مساوات مکافی کی تین مثبت قیمتین یے ہونگی ۱ اور $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۱}{۳}$ اور اگر ہر واحد کو ان قیمتون مساوات مکافی کی مین سے بقدر $\frac{۱}{۴}$ کے کہ مکافی ہی $\frac{۴}{۴}$ کا کم کرین تو ظاہر ہی کہ علامات تینون قیمتون کی تبدیل نہین ہوجائینگی کسواسطے کہ قیمتین کم کی گئی یے ہونگی $\frac{۳}{۴}$ — $\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۲}{۴}$ — $\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۱}{۴}$ — $\frac{۱}{۴}$ اعداد مثبت ہین اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ کوئی تبدیلی نہین سے مساوات مکافی تبدیل کی ہوئی مین زائل نہین ہونیکی اور چونکہ تین ہی تبدیلین علامات کی مساوات مفروض تبدیل کی ہوئی مین زائل ہوگئی ہین تو معلوم ہوا

کہ مساوات مفروض مین کوئی قیمت غیر ممکن نہین ہی یہان سے پیدا ہوتا ہی دعوی آئندہ اگر کسی مساوات مفروض کی قیمتون کو بقدر کسی عدد م کی کم کرین اور تبدیل کی ہوئی مساوات مین ن تبدیلین علامات سے زائل ہوجائین اور مبدا زان ہر واحد کو قیمتون مساوات مفروض کی مساوات ممکانی مین سے بقدر م کے کہ ممکانی م کا بھگرین اور اس تبدیل کی ہوئی مساوات ممکانی مین ح کتی تبدیلین علامات باقی رہین تو ضرور ہی کہ مابین صفر اور م کے ن — ح کتنی قیمتین غیر ممکن ہون

مثال

چاہیے ہم دریافت کرنا تعداد قیمتون غیر ممکن اس مساوات لا⁴ — لا³ + ۲ لا² + لا — ۴ = ۱ کے

مساوات مفروض	مساوات مفروض کی مساوات ممکانی
۱) ۱ — ۱ + ۲ + ۱ — ۴	۱) — ۴ + ۱ + ۲ — ۱ + ۱
۱ / ۱ ÷ ۲ / ۳ / ۱ — ۳	۴ / ۲ — ۲ / ۳ — ۲ / ۱ — ۲
۱ / ۱ / ۲ / ۶ — ۳	— ۴ / ۴ — ۸ / ۱۰ — ۵
۱ / ۲ / ۵ — ۲	— ۴ / ۱۱ — ۱۱ / ۱۹
۱ / ۳	— ۴ / ۱۵

اس مثال مین ظاہر ہی کہ مساوات مفروض کی تبدیل کرنے مین دو تبدیلین علامات کی زائل ہوگئی ہین اور مساوات مفروض کی مساوات ممکانی تبدیل کی ہوئی مین کوئی تبدیلین علامات کی باقی نہین رہین ہین تو معلوم ہوا کہ مساوات مفروض مین کم سے کم دو قیمتین غیر ممکن ہین لیکن فقط دو ہی ایسی قیمتین ہین کسواسطی کہ مساوات مفروض کے اخیر جز منفی ہونے سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ اوسمین دو قیمتین اصلی بھی ہین ایک تو اونمین سے مثبت اور دوسری منفی کسواسطی کہ تین تو قیمتین غیر ممکن نہین ہوسکتی ہین کسواسطی کہ اگر ایسا ہوتا تو اخیر جز مذکور مین کوئی مقدار غیر ممکن بھی نمودار ہوتی اور قیمتین غیر ممکن اسواسطے نہین ہین کہ اگر ایسا ہوتا تو اخیر جز مذکور مثبت ہوتا اور حالانکہ وہ منفی ہی

بیان دوسرا

بیچ ایک قاعدہ مہندس دیگو اسکے واسطی دریافت کرنے قیمتون غیر ممکن مساواتون کے

اگر کسی مساوات مفروض مین کتنی کا سر صفر ہو یعنے کوی جزا اس مساوات مین یا یا نجا دیے اور بیچ صفری مابین ایسی دو اجزا کے واقع ہو کہ اونکی علامتین یکسان ہون تو ہم کہتے ہین کہ اس مساوات مین دو قیمتین غیر ممکن ہونگی فرض کرو کہ مساوات مفروض مین علامات اس ترتیب سی نمودار ہین + + − − + − − + − − اور اگر واسطے ۔ کے + یا − لکھین تو حاصل ہونگی یے ترتیبین علامات کی

+ + − + − + − − اور + + − − − + − −

صورت اول مین ہم پاتی ہین کہ تعداد متواتر آنے ایکہی علامت کی دو ہین اور پانچ تبدیلین علامات کی ہین اور صورت دویم مین یہہ ظاہر ہی کہ تعداد متواتر آنے ایکہی علامت کی تین ہین اور تبدیلین علامات کی تین ہین پس معلوم ہوا کہ اگر تمام قیمتین مساوات مفروض کی ممکن ہون تو صورت اول مین پانچ تو مثبت قیمتین ہون اور دو منفی اور صورت دویم مین تین تو مثبت قیمتین ہون اور چار منفی اور اس سے یہہ بات لازم آتی ہی کہ کوئی دو ایسی قیمتین ہین کہ منفی بھی ہین اور مثبت بھی اور اسیواسطی یے دو قیمتین اصلی قیمتین نہین ہوسکتی ہین پس ضرور ہی کہ یے قیمتین غیر ممکن ہون قریب اسطرحسی سے دو دعوی آئندہ بھی ثابت ہوسکتی ہین

۱ اگر مابین ایسی جزدون کے جنکی علامات متماثل ہین ۲ن یا ۲ن − ۱ امثال صفری واقع ہون تو ہم کہتے ہین کہ انکی ہونی سے یہہ بات معلوم ہوگی کہ مساوات مفروضہ مین ۲ن کتنی قیمتین غیر ممکن ہین

۲ اگر مابین ایسے اجزا کی جو علامات غیر متماثل رکھتے ہین ۲ن + ۱ یا ۲ن امثال صفری واقع ہون تو ہم کہتے ہین کہ انکی واقع ہونی سے یہہ بات معلوم ہوگی کہ مساوات مفروض مین ۲ن قیمتین غیر ممکن ہین مثال مساوات لا⁴ − لا³ + ۶ لا² + ۴ لا + ۲ = ۰ مین دو قیمتین غیر ممکن ہین کیونکہ اس مساوات مین دو اجزا کی جنکے مابین وہ جز جسکا سر صفر واقع ہی متماثل ہین اور اسیطرح سی مساوات لا³ ± ۱ مین کہ اسمین یے امثال ۱ ± ۰ ± ۰ ± ۱ ہین دو قیمتین غیر ممکن ہین

مثالین واسطی مشق کے

۱ بتاو کتنی قیمتین غیر ممکن مساوات آئندہ مین پائی جاتی ہین ۔ لا⁵ + لا³ − ۳ لا² + ۲ لا − ۱ = ۰

۲ مساوات لا⁴ − ۲ لا³ + ۶ لا² + ۶۰ لا + ۱۰۰ = ۰ مین کوئی قیمت غیر ممکن ہی یا نہین

فصل پنجم بیچ بیان قاعدہ مہنرکارڈن کے واسطی حل کرنے مساواتون تیسری مرتبہ کی

فرض کرو کہ کوئی مساوات مفروض تیسری مرتبہ کی طرف اس شکل کی تحویل کی گئی ہی لا^{۳} − ق لا + ف = ۰
اور اسجای ق اور ف خواہ مثبت ہون خواہ منفی اب فرض کرو کہ لا = ط + ص پس موافق اس فرض کے
مساوات مفروض اس شکل کے ہوجائیگی (ط + ص)^{۳} − ق (ط + ص) + ف = ۰ اور جسوقت اسکی صورت
مفصلہ لین تو حاصل ہوتا ہی یہہ ط^{۳} + ص^{۳} + ۳ ط ص (ط + ص) − ق (ط + ص) + ف = ۰ اب چونکہ
مقدارین مجہول ط اور ص تو دو ہین اور شرط ہمنے فقط ایک فرض کی ہی یعنے یہہ مانی ہی کہ
ط + ص = لا تو ظاہر ہی کہ انکی بابت ہم ایک دوسری بات بھی فرض کرسکتے ہین پس فرض کرو کہ
۳ ط ص − ق = ۰ اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ مساوات مفروض اس شکل کی ہو جاے گی
ط^{۳} + ص^{۳} + ف = ۰ اور چونکہ یہہ مساوات ۳ ط ص − ق = ۰ بھی حاصل ہی تو اس سے حاصل ہوتے
ہی یہہ مساوات ص = $\frac{ق}{۳ط}$ اور جسوقت لکھین یہہ قیمت ص کی بجاے اوسکی مساوات
ط^{۳} + ص^{۳} + ف = ۰ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط^{۳} + $\frac{ق^{۳}}{۲۷ ط^{۳}}$ + ف = ۰ اور اس سے
حاصل ہوسکتی ہی یہہ مساوات ط^{۶} + $\frac{ق^{۳}}{۲۷}$ + ف ط^{۳} = ۰ اور یہہ ایک مساوات دوسرے درجہ
کی ہی اور اسمین ط^{۳} ایک مقدار مجہول ہی پس اب اگر کامل کرین مربعہ کو تو حاصل ہوگا یہہ

$$ط^{۶} + ف ط^{۳} + \frac{ف^{۲}}{۴} = \frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}$$ اور اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ط^{۳} + \frac{ف}{۲} = \pm \sqrt{\frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}}$$ اور اسیواسطے پیدا ہوگی یہہ مساوات

$$ط^{۳} = -\frac{ف}{۲} \pm \sqrt{\frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}}$$ اور اسیواسطے

$$ط = \sqrt[۳]{-\frac{ف}{۲} \pm \sqrt{\frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}}}$$ اور چونکہ ط^{۳} + ص^{۳} + ف = ۰ اسیواسطے

$$ص^{۳} = -\frac{ف}{۲} \mp \sqrt{\frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}}$$ اور اسیواسطے

$$ص = \sqrt[۳]{-\frac{ف}{۲} \mp \sqrt{\frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}}}$$ پس معلوم ہوا کہ لا = ط + ص

$$= \sqrt[۳]{-\frac{ف}{۲} \pm \sqrt{\frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}}} + \sqrt[۳]{-\frac{ف}{۲} \mp \sqrt{\frac{ف^{۲}}{۴} - \frac{ق^{۳}}{۲۷}}}$$

اسجا یہ بات واضح ہو کہ جسوقت ایک جزو دوسری طرف اس مساوات مین علامت $\sqrt{\frac{ب^۲}{۴} - \frac{ق^۳}{۲۷}}$ کے بجاے اسیکی علامت دوسرے جزو مین مختلف ہوتی ہی یعنی یہہ مساوات ہوتی ہی

$$لا = \sqrt[۳]{-\frac{ن}{۲} + \sqrt{\frac{ق^۳}{۲۷} - \frac{ب^۲ن^۲}{۴}}} + \sqrt[۳]{-\frac{ن}{۲} - \sqrt{\frac{ق^۳}{۲۷} - \frac{ب^۲ن^۲}{۴}}}$$

چونکہ $ص = \frac{ق}{۳ط}$ تو ظاہر ہی کہ مساوات آئندہ بھی پیدا ہوسکتی ہی

$$لا = \sqrt[۳]{-\frac{ن}{۲} \pm \sqrt{\frac{ق^۳}{۲۷} - \frac{ب^۲ن^۲}{۴}}} + \frac{ق}{۳\sqrt[۳]{-\frac{ن}{۲} \pm \sqrt{\frac{ق^۳}{۲۷} - \frac{ب^۲ن^۲}{۴}}}}$$

مثال

فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات تیسری درجہ کی $لا^۳ + ۶ لا - ۲۰ = ۰$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت مقدار مجہول لا کی اسجاے ظاہر ہی $ق = -۶$ اور $ن = -۲۰$ اور اسیواسطی

$$لا = \sqrt[۳]{+۱۰ + \sqrt{۱۰۸}} + \sqrt[۳]{-۱۰ + \sqrt{۱۰۸}} = ۲٫۷۳۲ - ۲٫۷۳۲ = ۲$$

جسوقت معلوم ہوی ایک قیمت مساوات مفروض کی اوسوقت اوس مساوات کو ہم ایک مرتبہ کم کی مساوات یعنی درجہ دوم کی مساوات سی بتدیل کرسکتے ہین اور حل کرنے سی اس مساوات درجہ دوم کو ہم دریافت کرسکتے ہین دو اور قیمتین واضح ہو کہ جسوقت $\frac{ق^۳}{۲۷}$ ہووی اپنی ذات سیے مثبت اور زیادہ ہو $\frac{ب^۲ن^۲}{۴}$ سی تو اس صورت مین ظاہر ہی کہ مقدار $\sqrt{\frac{ب^۲ن^۲}{۴} - \frac{ق^۳}{۲۷}}$ غیر ممکن ہوجائیگی اور اسیواسطی اس حالتمین قاعدہ مہنہ سل کارڈان کا جاری نہین ہوسکیگا اس صورت مین واسطی حل کرنے مساوات مفروض کے استعانت جدول مثلثی کی ضرور ہوتی ہی لیکن چونکہ اس حساب مین علم مثلث کا کام پڑتا ہی تو ہم اس مختصر مین طریقہ حل کرنے ایسی مساواتون کا نہین دینگے

مثالین واسطے مشق کے

۱ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $لا^۳ - ۶ لا + ۱۰ = -۲۲$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت لا کی

۲ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ز^۳ + ۳۰ ز = ۱۱۷$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت ز کی

۳ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ز^۳ - ۳۶ ز = ۹۱$ اور چاہتے ہین دریافت کرنی قیمت ز کی

۴ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ز^۳ - ۳ز = ۱۸$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت ز کی

۵ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ز^۳ + ۲۴ز = ۲۵۰$ اور چاہتے ہین دریافت کرنی قیمت ز کی

۶ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات $ز^۶ - ۳ز^۴ - ۲ز^۲ - ۸ = ۰$ کیا ہی قیمت ز کی

اجوبہ

(۱) $لا = ۴$ (۲) $ز = ۳$ (۳) $ز = ۷$ (۴) $ز = ۲$

(۵) $ز = ۵.۵۰۵$ (۶) $ز = ۲$ یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت مساوات مفروض تیسرے درجہ کی مین کوئی ایسی مقدار مجہول ہی پائی جاتی ہو کہ اوسمین دوسرے درجہ کا صعود ہو تو اوسوقت قاعدہ مہندس کارڈن کا جاری نہین ہوسکتا ہی لیکن ہم اس خبر کو جسمین دوسرے مرتبہ کا صعود مقدار مجہول کا ہی دور کرسکتے ہین پس اوس قاعدہ سے جو (۲) شکل تبدیل مساوات اور بعد ازان قاعدہ مہندس مذکور کا جاری ہوسکتا ہی فقط

فصل ہشتم بیچ بیان قاعدہ مہندس بمبلی کے واسطی تحویل کرنی مساواتون چوتہی درجہ کی طرف مساواتون تیسری درجہ کے

فصل گذشتہ مین ہمنے ترکیب حل کرنے مساواتون تیسری درجہ کی موافق قاعدہ مہندس کارڈن کے لکہی ہی پس اب اگر ہم تحویل کرسکین مساواتون چوتہے درجہ کو طرف مساواتون تیسرے درجہ کی تو ہماری غرض حاصل ہوجاگی یعنے ہم مقدار مجہول چوتہے درجہ کی مساواتون کی قیمت دریافت کرلین گے سوائی اسکے یہہ بات غیر ممکن ہی کہ بغیر مدد قاعدہ تیسری درجہ کے مساواتون کے مساواتین چوتہی درجہ کی حل ہوسکین کسواسطی کہ جسوقت ایک قیمت مساوات چوتہی درجہ کی معلوم ہوجاتی ہی اوسوقت معلوم ہونا ہر قیمت کا موقوف ہوجاتا ہی اور قاعدہ تیسری درجہ کی مساواتون کے اور یہی حال ہی سب درجونکی مساواتون کا پس یہان سے یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ حل ہونا کسی درجہ کی مساوات کا موقوف ہی اوپر حل ہونے سب اون مساواتون کے جو اوس سے کم درجہ کی ہین چند سو برس گذرے ہین کہ مہندس بمبلی نے ایک قاعدہ واسطی حل کرنے مساواتون چوتہے درجہ کے ایجاد کیا اور اوس قاعدہ کو ہم اس فصل مین بیان کرینگے فرض کرو کہ مساوات مفروض چوتہے درجہ کی ہی یہہ $لا^۴ + ا لا^۳ + ب لا^۲ + س لا + ص = ۰$ اور اس مین آ اور ب اور س اور ص مقدارین ممکن ہین اور یہہ بات بہی فرض کرو کہ مساوات مفروض اس شکل کی ہی $(لا^۲ + \frac{۱}{۲} ا لا + ف)^۲ - (ق لا + د)^۲ = ۰$

پس اب چاہیے ہمین دریافت کرنا ف اور ق اور د کو تاکہ مساوات مفروض حل ہوسکے اب اگر عمل مخذور کا جاری کرین اور قوای متماثلہ لا کی مقدار عمومی مین ثبت کرین تو حاصل ہوگا یہہ

$$\left.\begin{array}{l} لا^۴ + ا لا^۳ + \frac{۱}{۴} ا^۲ لا^۲ + ا ف لا + ف^۲ \\ + ا ف لا^۲ - ۲ق د لا - د^۲ \\ - ق^۲ لا^۲ \end{array}\right\} = ۰$$

اس جا ظاہر ہی کہ اول دو جزو اس مساوات کی وہی ہین جو مساوات مفروض مین ہین اور تیسری جزو یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ

$\frac{1}{4}$ ا^2 + ۲ ف − ق^2 = ب اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ق^2 = $\frac{1}{4}$ ا^2 + ۲ ف − ب اور چوتھے جزو سی یہہ بات لازم آتی ہی کہ ہووے یہہ مساوات

ا ف − ۲ ق د = س یا ۲ ق د = ا ف − س اور اخیر جزو سے یہہ مساوات پیدا ہوتی ہی

ف^2 − د^2 = ص یعنے د^2 = ف^2 − ص پس اب پیدا ہوئین تین مساواتین ایسی کہ انکی ذریعہ سے

قیمتین تین مقدارون ف اور ق اور د کی معلوم ہوسکتی ہین نہایت سہل ترکیب واسطے معلوم کرنے

قیمتون ان مقادیر کی یہہ ہی اگر ضرب کرین ہم مساوات اول کو عدد چار مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

۴ ق^2 = ا^2 + ۸ ف − ۴ ب اب اگر اس مساوات کو مساوات د^2 = ف^2 − ص مین ضرب کرین تو حاصل

ہوگی یہہ مساوات ۴ ق^2 د^2 = ۸ ف^3 + (ا^2 − ۴ ب) ف^2 − ص (ا^2 − ۴ ب) ف + ص ب اگر مساوات

دوم کا مجذور لین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ ق^2 د^2 = ا^2 ف^2 − ۱۲ س ف + س^2 پس اب حاصل ہوئین

ہمین دو قیمتین ایکہی مقدار ۴ ق^2 د^2 کی اور اسیواسطی سے قیمتین مساوی ایک کی دوسری سے ہونی چاہئین پس

حاصل ہوگی یہہ مساوات ۸ ف^3 + (ا^2 − ۴ ب) ف^2 − ۸ ص ف − ص (ا^2 − ۴ ب) = ا^2 ف^2 − ۱۲ س ف + س^2

اور اگر سب اجزا اس مساوات کو ایک ہی طرف لی آوین تو پیدا ہوگی یہہ مساوات

۸ ف^3 − ۴ ب ف^2 + (۱۲ س − ۸ ص) ف − ا^2 ص + ۴ ب ص − س^2 = ۰ اور یہہ مساوات تیسری

درجہ کی ہی اور اسکے وسیلہ سی موافق قواعد مرقوم الصدر کی قیمت ف کی معلوم ہوسکتی ہی جسوقت دریافت ہوئی

ہمین تین قیمتین مقدار ف کی بوساطت مقدارون ا اور ب اور س اور ص کی گو ہمین ایک ہی قیمت ف

کی دریافت کرنی منظور رہی) اوسوقت معلوم ہوجاوینگے ہمین قیمتین باقی دو مقدارون مجہول کی یہہ یعنے

ق اور د کی اسواسطے کہ مساوات اول سے حاصل ہوتا ہی یہہ ق = $\sqrt{\frac{1}{4}ا^2 + ۲ ف − ب}$ اور

مساوات دوسری سے یہہ د = $\frac{ا ف − س}{۲ ق}$ اب جسوقت سے قیمتین تین مقدارون ف اور ق اور د کی

معلوم ہوجاتی ہین اوسوقت چاہ مقدار مجہول مساوات مفروض کی اس ترکیب سے معلوم ہوسکتی ہین چونکہ

مساوات مفروض تحویل ہوگئی ہی طرف اس شکل کے (لا^2 + $\frac{1}{2}$ ا لا + ف)^2 − (ق لا + د)^2 = ۰ تو

ظاہر ہی کہ حاصل ہوگی یہہ مساوات کہ دو طرف اوسیکا جذر نکل سکتا ہی

(لا^2 + $\frac{1}{2}$ ا لا + ف)^2 = (ق لا + د)^2 اور جسوقت مکافین ہم جذر دو طرف اس مساوات کا تو حاصل

ہوتی ہی یہہ مساوات لا^2 + $\frac{1}{2}$ ا لا + ف = ق لا + د یا یہہ مساوات

لا^2 + $\frac{1}{2}$ ا لا + ف = − ق لا − د مساوات اول سے حاصل ہوتا ہی یہہ لا = $(ق − \frac{1}{2}ا) ± \sqrt{}$ ف + د

اور اسسے حاصل ہوتی ہین دو قیمتین اور دوسری مساوات سی حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا² = − (ق + ½ ا) لا − ف − د اور اسسے حاصل ہونگی دو اور قیمتین ہم اب توضیح کرتے ہین اسس قاعدہ کی بوسیلہ مثال آئندہ کے فرض کرو کہ مساوات آئندہ چوتھے مرتبہ کی مساوات مفروض ہی اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی چار اسکی قیمتین بوسیلہ قاعدہ مذکور کے

لا⁴ − ۱۰ لا³ + ۳۵ لا² − ۵۰ لا + ۲۴ = ۰ اگر مطابق کرین ہم مساوات عام مذکورہ بالا کو اسس مساوات سی تو دریافت ہوگا کہ اس صورت مین ا = − ۱۰ اور ب = ۳۵ اور س = − ۵۰ اور ص = ۲۴ اور اسیواسطی وہ مساوات جسکی ذریعہ سی قیمت ف کی معلوم ہوجائیگی یہہ ہی

۸ ف³ − ۴۰ ا ف² + ۸۰۸ ف − ۱۵۴۰ = ۰ یا یہہ

۲ ف³ − ۱۰ ا ف² + ۲۰۲ ف − ۳۸۵ = ۰

اور اخیر جزو اسس مساوات کا قسمت ہوسکتا ہی ان اعداد پر ۱ ۵ ۷ ۱۱ وغیرہ اول عدد سی تو مطلب نہین حاصل ہوتا ہی یعنے جو شرط اسس مساوات سی تعبیر ہوتی ہی وہ شرط اسس عدد سی پوری نہین ہوتی ہی پس لو ف کو مساوی ۵ کے اور موافق اسس عدد کی مساوات گذشتہ پوری ہوجائیگی یعنے ہم پائینگی یہہ

۲۵۰ − ۸۷۵ + ۱۰۱۰ − ۳۸۵ = ۰ پس معلوم ہوا کہ ف = ۵ اور یہہ قیمت مساوات تیسری درجہ مرقومہ بالا کی ہی بعد ازان مان لو کہ ف = ۷ اور موافق اس فرض کے مساوات گذشتہ پوری ہوتی ہی یعنے حاصل ہوتی ہی مساوات ۶۸۶ − ۱۷۱۵ + ۱۴۱۴ − ۳۸۵ = ۰ یہان سے ثابت ہوتا ہی کہ ف = ۷ اور یہہ دوسری قیمت مساوات مذکور کی ہی اب دریافت کرنا رہا تیسری قیمت مساوات تیسری درجہ مذکورہ بالا کا واسطے اسس مطلب کے قسمت کرو مساوات مذکورہ کو ۲ پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ف³ − ۳۵/۲ ف² + ۱۰۱ ف − ۳۸۵/۲ = ۰ اب چونکہ سہ دوسرے جزو اسس مساوات کا مساوی ہے حاصل جمع تمام قیمتون اسس مساوات کی اور چونکہ حاصل جمع دو قیمتون اسس مساوات کا ۱۲ ہی تو بالضرور باقی تیسری قیمت اسس مساوات کی ۱۱/۲ ہوگی پس معلوم ہوئین ہمین اب تین قیمتین تیسری درجہ کی مساوات کی لیکن یہہ بات اسجاے واضح ہو کہ ایک ہی قیمت واسطی ہماری مطلب کے کفایت کرتی ہی کسواسطی کہ بذریعہ ہر واحد کے ان تین قیمتونمین سے وہی چار قیمتین مساوات مفروض کی حاصل ہوتی ہی یہہ بات اسطرح سے ثابت ہوتی ہی جسوقت ف = ۵ اوسوقت بذریعہ مساوات

ق = √(¼ ا² + ۲ ف − ب) کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

ق = √(۲۵ + ۱۰ − ۳۵) = ۰ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

د = $\frac{-۵۰+۵۰}{۰}$ = ÷ لیکن اس مساوات سے کچھ بات نہین معلوم ہوتی ہی پس لازم ہی
کہ رجوع کرین ہم طرف مساوات تیسری سے جو یہہ ہی د^۲ = ف^۲ − ص = ۲۵ − ۲۴ = ۱
پس دو مساواتین درجہ دوم کی جنکا اوپر ذکر ہی اس شکل کی ہوجائینگی (۱) لا^۲ = ۵ لا − ۴ اور
(۲) لا^۲ = ۵ لا − ۶ اونمین کی اول مساوات سے یہہ دو قیمتین حاصل ہوتی ہین
لا = $\frac{۵}{۲}$ ± $\sqrt{\frac{۹}{۴}}$ یا لا = $\frac{۵ \pm ۳}{۲}$ یعنے لا = ۴ یا لا = ۱ دوسری مساوات درجہ
دوم سے یہہ دو قیمتین حاصل ہوتی ہین لا = $\frac{۵}{۲}$ ± $\sqrt{\frac{۱}{۴}}$ = $\frac{۱ \pm ۵}{۲}$ یعنے لا = ۳
یا لا = ۲ اب فرض کرو کہ ف = ۷ پس ہوگی یہ مساواتین ق = $\sqrt{۲۵+۱۴-۳۵}$ = ۲
اور ∴ د = $\frac{-۷۰+۵۰}{۴}$ = − ۵ پس اب حاصل ہوگی یہ دو مساواتین دوسرے درجہ کی
(۱) لا^۲ = ۷ لا − ۱۲ اور (۲) لا^۲ = ۳ لا + ۲ انمین کی اول مساوات سے یہہ دو قیمتین حاصل
ہوتی ہین لا = $\frac{۷}{۲}$ ± $\sqrt{\frac{۱}{۴}}$ یا لا = $\frac{۷ \pm ۱}{۲}$ یعنے لا = ۴ یا لا = ۳ دوسری مساوات
سے یہ دو قیمتین حاصل ہوتی ہین لا = $\frac{۳}{۲}$ ± $\sqrt{\frac{۱}{۴}}$ = $\frac{۳ \pm ۱}{۲}$ اور اسیواسطے لا = ۲
اور لا = ۱ یہان سے یہہ بات ثابت ہوئی کہ چار قیمتین چوتھی درجہ کی مساوات مفروض کے موافق
اول فرض کے یعنے اس فرض کہ ف = ۵ حاصل ہوئی تھین وہی قیمتین موافق اس دوسرے فرض کے یعنے
اس فرض کہ ف = ۷ حاصل ہوتی ہین صورت اخیر مین فرض کرو کہ ف = $\frac{۱۱}{۲}$ اور اس صورت مین
حاصل ہونگی یہہ دو مساواتین ق = $\sqrt{۲۵-۱۱-۳۵}$ = ۱ اور د = $\frac{-۵۰+۵۵}{۲}$ = − $\frac{۵}{۲}$
پس دو مساواتین دوسرے درجہ کی یہہ ہونگی (۱) لا^۲ = ۶ لا − ۸ اور (۲) لا^۲ = ۴ لا − ۳
اول مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہی لا = ۳ ± $\sqrt{۱}$ یعنے لا = ۴ اور لا = ۲ اور دوسری
مساوات سی یہہ لا = ۲ ± $\sqrt{۱}$ یعنے لا = ۳ اور لا = ۱ اور یہ چار قیمتین وہی ہین جو
پہلے دو فرضون کے موافق حاصل ہوئی تھین

سوالات واسطی مشق کے

۱ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھی درجہ کی لا^۴ − ۱۶ لا − ۱۲ = ۰ اور چاہتے ہم دریافت کرنے
چار قیمتین اسکی **جواب** لا = ۱ + $\sqrt{۳}$ اور لا = ۱ − $\sqrt{۳}$ اور
لا = ۱ + $\sqrt{-۵}$ اور لا = ۱ − $\sqrt{-۵}$

۲ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھی درجہ کی لا^۴ − ۴ لا^۳ − ۸ لا + ۳۲ = ۰ اور چاہتے ہین ہم

دریافت کرنیمے چار قیمتین اس کی **جواب**

لا = ۴ اور لا = ۲ اور لا = $-۱+\sqrt{-۳}$ اور لا = $-۱-\sqrt{-۳}$

۳ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھے مرتبہ کی لا^۴ − ۴ لا^۳ − ۲ لا^۲ − ۴ لا + ۱ = ۰ اور چاہتی ہم دریافت کرنی چار قیمتین اسکی **جواب** لا = $\frac{-۱+\sqrt{-۳}}{۲}$ اور لا = $\frac{-۱-\sqrt{-۳}}{۲}$

اور لا = $\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}$ اور لا = $\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}$

۴ فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات چوتھی درجہ کی لا^۴ − ۳ لا^۳ − ۴ لا − ۳ = ۰

اور دریافت کیا چاہتے ہن ہم چار قیمتین مقدار مجہول لا کی **جواب**

لا = $\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$ اور لا = $\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}$

اور لا = $\frac{-۱+\sqrt{-۳}}{۲}$ اور لا = $\frac{-۱-\sqrt{-۳}}{۲}$

فصل ہفتم ہیچ بیان اون قواعد کی جنکی ذریعہ سی تقریبی قیمتین سب درجہ کے مساواتون کی دریافت ہوسکتین ہن

جسوقت کہ قیمتین کسی مساوات مفروض کی مقدارین غیر نزدلی نہین ہوتی ہین بلکہ نزدلی یا جسوقت کہ مساواتین مفروض جنکو حل کرنا منظور ہوتا ہی جو تھے درجہ سی بہی زیادہ کی ہوتی ہن اوس صورت مین ہم قیمتین حقیقی مقدارون مجہول کی نہین دریافت کرسکتے ہین اور فقط قیمتین تقریبی دریافت کرکی قناعت کرنی پڑتی ہی لیکن ہندسون نے ایسی قاعدے نکالی ہین کہ یے تقریبی قیمتین اتنی قریب قیمتون حقیقی کے ہوسکتی ہین جتنی ہم چاہین اور جبکہ بہت کم فرق ان قیمتون مین رہجاے اوسوقت ٹہر جاتی ہین اور قیمت تقریبی پر قناعت کرتے ہین اول قاعدہ یہہ ہی بوسیلہ قیاس یا امتحان کے ایک تقریبی قیمت جو بہت قریب قیمت حقیقی کے نہین ہی دریافت کرو اور بعد ازان ایک ایسی مقدار مثل ط کے فرض کرو کہ اگر اوسی قیمت مذکور پر زیادہ یا منہا کرین تو مجموعہ مساوی قیمت حقیقی کا ہو دیے لیکن چونکہ وہ قیمت تقریبی جو قیاس سے مقرر کی گئی ہی ایسی فرض کی جاتی ہی کہ اوسمین اور قیمت حقیقی مین فقط بقدر کسی کسر کے فرق ہوتا ہی اور چونکہ مجذور اور مکعب وغیرہ کسور کی کم ہوتی جایا کرتی ہین تو قاعدہ یہہ ہی کہ اگر عمل مساوات مفروض کی مین ط یا ط^۲ وغیرہ واقع ہون تو انہین دور کرتے ہین اور جو قیمت بعد دور کرنی انکی کے واسطی مقدار مجہول کے دریافت ہوگی اوسی قیمت قاسی قرار دیکر پہر ایک مقدار مثل ص کے ایسی فرض کرو کہ اگر اوسی قیمت مذکورمین سے نکالین یا اوسپر زیادہ کرین تو مجموعہ قیمت حقیقی ہوجاے اور پہر عمل مذکورہ بالا کرین تو اوس سے ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی کے حاصل ہوگی اور اس ترکیب سی قیمت تقریبی کو اتنا قریب تر قیمت حقیقی کے لاسکتی ہین

جتنا ہم چاہین یہہ قاعدہ مثال آئندہ سے خوب واضح ہوجائیگا چاہتے ہین ہم دریافت کرنا خبر ۲۰ کا یعنی حل کیا چاہتے ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو لا = ۲۰ اسلئے ظاہر ہی کہ لا زیادہ ہی ۴ سے اور کم ۵ سے پس لازم ہی کہ فرض کرین ہم لا = ۴ + ط اور اسسے واسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا² = ۱۶ + ۸ ط + ط² = ۲۰ اور اسلئے یہہ حاصل ہوتا ہی ۸ ط + ط² = ۴ اور چونکہ ط ایک کسر ہی تو موافق قاعدہ مرقومہ بالا کی ط² کو ہم دور کرسکتے ہین اور اسسے واسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

۸ ط = ۴ ∴ ط = ۴/۸ = ۱/۲ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ لا = ۴ + ۱/۲ = ۴ ۱/۲ اور یہہ قیمت تقریبی بہت قریب قیمت حقیقی کے ہی یعنی بہ نسبت ۴ کے قریب تر قیمت حقیقی کے ہی اب اگر ہم قیمت تقریبی کو اور قریب تر قیمت حقیقی کے لایا چاہین تو لازم ہی ہمین بطور سابق کے فرض کرنا لا = ۱/۲ ۴ + ص اور چونکہ یہہ بات تحقیق ہی کہ ص ایک چھوٹی سی کسر ہی تو دور کرسکتے ہین ہم مجذور اسکے کو پس مساوات

لا² = ۱/۴ ۲۰ + ۹ ص + ص² سے حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا² = ۱/۴ ۲۰ + ۹ ص = ۲۰ ∴ ۹ ص = −۱/۴ اور ∴ ص = −۱/۳۶ پس معلوم ہوا کہ

لا = ۱/۲ ۴ − ۱/۳۶ = ۱۵/۳۶ ۴ اب اگر اور زیادہ قریب تر قیمت حقیقی کے قیمت تقریبی کو لایا چاہین تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم لا = ۱۷/۳۶ ۴ + س اور اسی سبب سے حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا² = ۱/۱۲۹۶ ۲۰ + ۲۴/۳۶ ۸ س + س² اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

لا² = ۱/۱۲۹۶ ۲۰ + ۲۴/۳۶ ۸ س = ۲۰ اور یہان سے حاصل ہوتا ہی یہہ

۲۴/۳۶ ۸ س = −۱/۱۲۹۶ ∴ ۳۲۲ س = −۳۶/۱۲۹۶

∴ س = −۳۶/۱۲۹۶×۳۲۲ = −۱/۱۱۵۹۲ اسیواسطی حاصل ہوتی ہی

یہہ مساوات لا = ۱۷/۳۶ ۴ − ۱/۱۱۵۹۲ = ۵۴۷۳/۱۱۵۹۲ ۴

اور یہہ قیمت اتنی قریب قیمت حقیقی کے ہی کہ جو غلطی اس صورت مین رہتی ہی وہ قابل لحاظ کے نہین اب ہم لکھتے ہین ایک عام قاعدہ جسکی مثال گذشتہ ایک خاص صورت ہی واسطی اس مطلب کے فرض کرو کہ مساوات مفروض لا = ط ہی اور یہہ مان لو کہ ہم جانتے ہین کہ لا زیادہ ہی ن سے اور کم ن + ۱ سے پس اب اگر فرض کرین ہم کہ لا = ن + ص تو بالضرور ص کم ہوگا عدد ۱ کے سے یعنی وہ کسر ہوگا اور اسیواسطے اوسکے مجذور اور مکعب وغیرہ کو دور کرسکتے ہین کیونکہ وہ بہ نسبت ص کی بہت چھوٹی مقدارین ہونگی اور

اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات لا^{۲} = ن^{۲} + ۲ن ص = ط اور اسیواسطی ص = $\frac{ط - ن^{۲}}{۲ن}$

اور اسیواسطی لا = ن + ص = ن + $\frac{ط - ن^{۲}}{۲ن}$ = $\frac{ط + ن^{۲}}{۲ن}$

اب اگر ن ہووے ایک قیمت تقریبی قریب قیمت حقیقی کے تو $\frac{ط + ن^{۲}}{۲ن}$ ایک قیمت تقریبی قریب تر قیمت حقیقی کے ہوگی اور جسوقت بجای ن کے لکہا $\frac{ط + ن^{۲}}{۲ن}$ کو تو ایک قیمت اور قریب تر قیمت حقیقی کے حاصل ہوگی اور اگر یہی عمل کئے جائین تو قیمت تقریبی کو اتنا قریب قیمت حقیقی کے لاسکتے ہین جتنا ہم چاہین مثلاً فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم حل کرنا اس مساوات لا^{۲} = ۲ کو یعنے دریافت کیا چاہتے ہین ہم جذر ۲ کا اب اگر بجای ن کے عدد آ کا فرض کرین کہ ایک قیمت تقریبی ۲ کے جذر کی ایسی ہی کہ وہ کم ہی بہ نسبت قیمت حقیقی کے فقط بقدر ایک کسر کی تو $\frac{ط + ن^{۲}}{۲ن}$ ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی جذر مذکور کے ہوگی اور اگر یہی عمل متواتر کرتے جائینگی تو صورت اوسکی یہہ ہوگی

(۱) ن = ۱ اور اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ قیمت لا = $\frac{۳}{۲}$

(۲) ن = $\frac{۳}{۲}$ ایضاً ایضاً لا = $\frac{۱۷}{۱۲}$

(۳) ن = $\frac{۱۷}{۱۲}$ ایضاً ایضاً لا = $\frac{۵۷۷}{۴۰۸}$

اور قیمت اخیر لا کی اتنی قریب قیمت حقیقی کے ہی کہ اوسکے مجذور یعنے $\frac{۳۳۲۹۲۹}{۱۶۴۶۴}$ مین اور ۲ مین فقط یہہ فرق ہی $\frac{۱}{۱۶۴۶۴}$ اور یہہ ایک ایسی چہوٹی کسر ہی کہ قابل لحاظ کے نہین ہی یہی قاعدہ جاری ہوسکتا ہی جسوقت کہ مطلوب ہو ہمین جڑ تہی یا زیادہ مرتبہ کا نزول کسی مقدار کا مثلاً فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم حل کرنا اس مساوات تیسری درجہ کو لا^{۳} = ط یعنے دریافت کیا چاہتے ہین ہم قیمت $\sqrt[۳]{ط}$ کی چونکہ ہم جانتے ہین کہ لا ن سے زیادہ اور ن + ۱ سے کم ہی تو فرض کرسکتے ہین ہم لا = ن + ص اور اسجا ص بالضرور ایک کسر ہوگی اور اسیواسطے ص^{۲} اور ص^{۳} نسبت ص کے بہت چہوٹی چہوٹی مقدارین ہونگی اور موافق مرقومہ بالا کے انکو دور کرسکتے ہین پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا^{۳} = ن^{۳} + ۳ن^{۲} ص = ط ∴ ص = $\frac{ط - ن^{۳}}{۳ن^{۲}}$ اور

∴ لا = ن + ص = ن + $\frac{ط - ن^{۳}}{۳ن^{۲}}$ = $\frac{ط + ۲ن^{۳}}{۳ن^{۲}}$

اب اگر ن ہووے قریب $\sqrt[۳]{ط}$ کے تو مقدار $\frac{ط + ۲ن^{۳}}{۳ن^{۲}}$ کے قریب تر قیمت حقیقی کے ہوگی اور اگر اس قیمت کو بجای ن کے لکہو تو قیمت $\frac{ط + ۲ن^{۳}}{۳ن^{۲}}$ اور قریب تر قیمت حقیقی کے ہوگی اور علی ہذا القیاس مثلاً فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات لا^{۳} = ط = ۲ یعنے چاہتے ہین ہم دریافت کرنا مکعب ۲ کا پس موافق

مرقومہ بالا کی حاصل ہوگا ہمین یہہ سلسلہ قیمتون تقریبی کا

جسوقت ن = ۱ اوسوقت دریافت ہوگا کہ لا = $\frac{۴}{۳}$

ایضاً ن = $\frac{۴}{۳}$ ایضاً ایضاً لا = $\frac{۹۱}{۷۲}$

ایضاً ن = $\frac{۹۱}{۷۲}$ ایضاً ایضاً لا = $\frac{۱۶۲۱۳۰۸۹۶}{۱۲۸۶۳۴۲۹۴}$

یہی قاعدہ واسطی دریافت کرنے قیمتون تقریبی ہر قسم کی مساوات کی جاری ہوسکتا ہی واسطی اس بات کے ثابت کرنی کے لیتی ہین ہم ایک مساوات تیسری درجہ کی $لا^۳ + ط لا^۲ + ص لا + س = ۰$ اور اسمین ن ہی ایک تقریبی قیمت لا کی فرض کرو کہ لا = ن — م اور چونکہ اس جاے م ایک کسر ہی تو موافق مرقومہ بالا کے ہم $م^۲$ اور $م^۳$ وغیرہ کو دور کرسکتے ہین اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہ مساوات

$لا^۳ = ن^۳ - ۳ن^۲ م$ اور $لا^۲ = ن^۲ - ۲ن م$ اور اسیواسطی جسوقت کہ ہم قیمتین بجاے $لا^۳$ اور $لا^۲$ اور لا کے مساوات مفروضہ مین توحاصل ہوگی یہہ مساوات

$ن^۳ - ۳ن^۲ م + ط ن^۲ - ۲ط ن م + ص ن - ص م + س = ۰$ یا

$ن^۳ + ط ن^۲ + ص ن + س = ۳ن^۲ م + ۳ط ن م + ص م = م (۳ن^۲ + ۲ط ن + ص)$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$م = \frac{ن^۳ + ط ن^۲ + ص ن + س}{۳ن^۲ + ۲ط ن + ص}$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

$لا = ن - \left(\frac{ن^۳ + ط ن^۲ + ص ن + س}{۳ن^۲ + ۲ط ن + ص}\right) = \frac{۲ن^۳ + ط ن^۲ - س}{۳ن^۲ + ۲ط ن + ص}$

یہہ تقریبی قیمت لا کی بہ نسبت ن کی زیادہ قریب قیمت حقیقی اوسکی کے ہی اور اگر بجای ن کے اس قیمت کو لکھین تو ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی کے حاصل ہوگی اب ہم توضیح کرتے ہین اس قاعدہ کی بذریعہ ایک مثال کے فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم دریافت کرنے قیمت تقریبی اس مساوات تیسری درجہ کے

$لا^۳ + ۲لا^۲ + ۳لا - ۵۰ = ۰$

پس اسوقت ظاہر ہی کہ ط = ۲ اور ص = ۳ اور س = — ۵۰ اب اگر ہووے ن ایک تقریبی قیمت اس مساوات کی تو ہووے گی قیمت آئندہ قریب تر قیمت حقیقی کے

$لا = \frac{۲ن^۳ + ۲ن^۲ + ۵۰}{۳ن^۲ + ۴ن + ۳}$

اس مثال مین ظاہر ہی کہ ۳ ہی ایک قیمت تقریبی لا کی یعنے اس صورتین ن = ۳ پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{لا} = \frac{۲\text{ن}^۳ + ۲\text{ن}^۲ + ۵۰}{۳\text{ن}^۲ + ۴\text{ن} + ۳} = \frac{۱۲۲}{۴۲} = \frac{۶۱}{۲۱}$$

اور اگر ہم اس قیمت لا کو بجاے ن کے تو ایک اور قیمت قریب تر قیمت حقیقی کے معلوم ہوجائیگی مساوات گذشتہ فقط تیسری درجہ کی تہی لیکن یہی قاعدہ جاری ہوسکتا ہی جبکہ مساوات مفروض زیادہ درجہ کی ہو اور واسطی ثبوت اس بات کی مثال آئندہ کفایت کریگی فرض کرو کہ مساوات مفروض جسکی تقریبی قیمت دریافت کرنی منظور ہی یہہ ہی لا^۵ = ۶ لا + ۱۰ یا لا^۵ − ۶ لا − ۱۰ = ۰ اور اس مساوات مین یہہ بات ظاہر ہی کہ آ تو کم اور ۲ زیادہ ہی اسکی قیمت سی پس فرض کرچکے ہین ہم کہ ن ایک قیمت تقریبی لا کی ایسی ہی کہ وہ زیادہ آسے اور کم ۲ سے ہی پس موافق مرقوم المصدر کے حاصل ہوگی ہمین یہ مساوات لا = ن + م اور اس جا ظاہر ہی کہ م ایک کسر ہی اور لا^۵ = ن^۵ + ۵ن^۴ م اور ن^۵ + ۵ن^۴ م − ۶ن − ۶م − ۱۰ = ۰ یا ۵ن^۴ م − ۶م = ۶ن + ۱۰ − ن^۵ اور اسیواسطی م = $\frac{۶\text{ن} + ۱۰ - \text{ن}^۵}{۵\text{ن}^۴ - ۶}$ اور اسیواسطی قیمت آئندہ لا کی قریب تر قیمت حقیقی کے ہوگی لا = ن + م = ن + $\frac{۶\text{ن} + ۱۰ - \text{ن}^۵}{۵\text{ن}^۴ - ۶} = \frac{۴\text{ن}^۵ + ۱۰}{۵\text{ن}^۴ - ۶}$

اب اگر ن = ۱ تو لا = $\frac{۱۰ + ۴}{۱} = ۱۴$ اور یہہ ایک ایسی قیمت ہی جو بالکل مطلوب نہ تہی اور یہہ بات اس سبب سے واقع ہوئی کہ آ بہت کم بہ نسبت قیمت حقیقی کے ہی اب فرض کرو کہ ن = ۲ تو اس صورت مین لا = $\frac{۱۲۸ + ۱۰}{۸۴} = \frac{۱۳۸}{۸۴} = \frac{۶۹}{۴۲}$ اور یہہ قیمت قریب قیمت حقیقی کے ہی اور اگر اسے بجاے ن کے پہر لکھین تو جو قیمت بعد ازان حاصل ہوگی وہ اور ہی قریب تر قیمت حقیقی کے ہوگی سو اسی قاعدہ مرقومہ بالا کی جو سب سے بہتر قاعدہ ہی اور یہی قواعد واسطے دریافت کرنی قیمتون تقریبی مساواتون کے ہین انمین سے ایک بہت اچھا قاعدہ یہہ ہی دریافت کرو ایک ایسا سلسلہ اعداد کا مثل ط ص س وغیرہ کے کہ اگر قسمت کرین ایک کو انمین سے اوسکی ماقبل پر تو خارج قسمت اوسکی ہمیشہ قریب تر قیمت حقیقی کے ہووے جتنا عدد قسمت کیا ہوا دو سلسلہ مین واقع ہو فرض کرو کہ سلسلہ مطلوب یہہ ہی ف ق ک ل م پس اس صورت مین ضرور ہی کہ $\frac{\text{ق}}{\text{ف}}$ ایک قیمت تقریبی لا کی ہو یعنے $\frac{\text{ق}}{\text{ف}}$ = لا تقریبا اور ضرور ہی کہ یہہ بھی مساوات ہو $\frac{\text{ک}}{\text{ق}}$ = لا* اور جسوقت ضرب کرین ہرون دونون مساواتون کو اسیمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{\text{ک}}{\text{ف}}$ = لا^۲ اور چونکہ $\frac{\text{ل}}{\text{ک}}$ = لا تو اگر ضرب کرین اسکل مساوات اخیر کو مساوات

* لا کے آگے لفظ تقریبا کا محذوف ہی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے ایسی ہی موقعون پر

$\frac{ك}{ق}$ = لا۲ مین تو حاصل ہوگا یہہ $\frac{ل}{ق}$ = لا۲ اور چونکہ $\frac{م}{ل}$ = لا ∴ $\frac{م}{ق}$ = لا۳ اور علی ہذا القیاس یہان تک بیان کرنیکے ہم لیتی ہین ایک خاص مساوات جسسے ماہیت اس قاعدہ کی معلوم ہوجاوے فرض کرو کہ یہہ مساوات دوسری درجہ کی لا۲ = لا + ا اب چونکہ یہہ بات ثابت ہوچکی ہی کہ $\frac{ك}{ق}$ = لا۲ اور $\frac{ق}{ق}$ = لا پس جسوقت لکھین ہم یے قیمتین بجاے لا اور لا۲ کے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{ك}{ق}$ = $\frac{ق}{ق}$ + ا اور اسیواسطی کہ = ق + ن اور اسیطور سے یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ ك + ق = ل اور ك + ل = م اور علی ہذا القیاس اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوئی کہ وہ سلسلہ اعداد کا جسکا دریافت کرنا منظور ہی ایسا ہی کہ ہر جزو اوسکا مساوی ہوتا ہی حاصل جمع اوسکی ماقبل کے دو اجزا کے اور یہان سے یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت معلوم ہوجائین ہمین دو اول کے جز تو ساری اجزا سلسلہ کی معلوم ہوسکتی ہین لیکن اول دو اجزا کا مقرر کرنا ایک امر اختیاری ہی کیونکہ گو یی دو اجزا بہت دور قیمت حقیقی کے ہون لیکن عمل کرنے سے موافق اوس شرط کی جو مساوات مذکور مین ثابت ہوئی ہی ہر جز اوس سلسلہ کا جو پیدا ہوا ہی قسمت کرنی سے ہر جز سلسلہ مذکورہ بالا کو اوسکی ماقبل پر اور ثبت کرنی سی ان خارج قسمتون کو کو ایک مقدار معین قریب ترقیمت حقیقی کی ہوگا فرض کرو کہ اول دو اجزا ۱ اور آہین پس موافق اوسکے پہلی ثابت ہوا ہی سلسلہ قیمتون لا کا یہہ ہوگا

لا = $\frac{۱}{۱}$ $\frac{۱}{۱}$ $\frac{۲}{۱}$ $\frac{۳}{۲}$ $\frac{۵}{۳}$ $\frac{۸}{۵}$ $\frac{۱۳}{۸}$ $\frac{۲۱}{۱۳}$ $\frac{۳۴}{۲۱}$ $\frac{۵۵}{۳۴}$ $\frac{۸۹}{۵۵}$ $\frac{۱۴۴}{۸۹}$

اور علی ہذا القیاس مثلاً اگر فرض کرین ہم کہ لا = $\frac{۲۱}{۱۳}$ تو $\frac{۴۴۱}{۱۶۹}$ = $\frac{۲۱}{۱۳}$ + ا = $\frac{۴۴۲}{۱۶۹}$ اور اسسے ظاہر ہی کہ غلطی فقط $\frac{۱}{۱۶۹}$ ہی اور اگر یہون ہم ایک اور آگے کا جز تو اوس سے بہی کم غلطی وقوع مین آوے گی اب فرض کرو کہ دریافت کرنی ہی ہمین قیمت لا کی اوس مساوات مین لا۲ = ۲ لا + ا اب چونکہ ہر صورت مین لا = $\frac{ق}{ق}$ اور لا۲ = $\frac{ك}{ق}$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{ك}{ق}$ = $\frac{۲ق}{ق}$ + ایا کہ = ۲ق + ن اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ ہر جز سلسلہ قیمتون لا کا مساوی ہوتا ہی حاصل جمع دوگنی اوسکی پہلے کے جز کے کہ اوسپر زیادہ کرین اوس جز کی پہلے جز کو اب اگر فرض کرین کہ اول دو جز ۱۰ اور آہین تو حاصل ہوگا یہہ

۱۰ ۲ ۵ ۱۲ ۲۹ ۷۰ ۱۶۹ ۴۰۸ وغیرہ اور اسیواسطی سلسلہ قیمتون لا کا یہہ ہوگا

$\frac{۱}{۱}$ $\frac{۲}{۱}$ $\frac{۵}{۲}$ $\frac{۱۲}{۵}$ $\frac{۲۹}{۱۲}$ $\frac{۷۰}{۲۹}$ $\frac{۱۶۹}{۷۰}$ $\frac{۴۰۸}{۱۶۹}$ وغیرہ

یے قیمتین نوبت بنوبت قریب ترقیمت لا کی جو اس مساوات سی تعبیر ہوتی ہی لا = ۱ + $\sqrt{۲}$ آتی جاتی ہین اور اگر تفریق کرین ہم ہر جز اس سلسلہ مین سے عدد ایک کو تو حاصل ہوگا سلسلہ آئندہ کہ اوسمین ہر جز تعبیر کریگا قیمت تقریبی جذر ۲ کی یعنے اسکے $\sqrt{۲}$

$$\frac{1}{0}\quad\frac{1}{1}\quad\frac{3}{2}\quad\frac{7}{5}\quad\frac{17}{12}\quad\frac{41}{29}\quad\frac{99}{70}\quad\frac{239}{169}\quad\text{وغیرہ}$$

مثلاً $\frac{99}{70}$ کا مجذور $\frac{9801}{4900}$ ہی اور اسمین اور مجذور 2 کے بین یعنے تین فقط بقدر اسکسر کی $\frac{1}{4900}$ فرق ہی جسوقت کہ مساواتین مفروض زیادہ درجہ کی ہون اوسوقت بہی یہی قاعدہ جاری ہوسکتا ہی مثلاً اگر ہو ویسے یہہ مساوات تیسری درجہ کی $\lambda'' = \lambda' + 2\lambda + 1$ تو لازم ہی کہ فرض کرین کہ $\lambda = \frac{\zeta}{\xi}$ اور $\lambda' = \frac{\kappa}{\xi}$ اور $\lambda'' = \frac{\lambda}{\xi}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $\lambda = \kappa + 2\zeta + \xi$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ جسوقت معلوم ہون ہمین تین اجزا تو اوسوقت معلوم کرسکتے ہین چوتہا جز سلسلہ مطلوب کا اور چونکہ شروع کے جزون کو ہم کچہہ ہی فرض کرسکتی ہین تو ہم بناسکتے ہین سلسلہ آئندہ $0\ 1\ 1\ 3\ 7\ 17\ 41\ 99\ 239$ وغیرہ

اور یہان سے حاصل ہوتا ہی یہہ سلسلہ کسور کا کہ تقریبی قیمتین λ کی ہین

$$\lambda = \frac{1}{0}\quad\frac{1}{1}\quad\frac{3}{1}\quad\frac{7}{3}\quad\frac{17}{6}\quad\frac{41}{13}\quad\frac{99}{28}\quad\frac{239}{60}\quad\text{وغیرہ}$$

چند قیمتین اول کی ان کسور میں حقیقی قیمت سے بہت ہی دور ہین لیکن اگر لکہین ہم بجای λ کی مساوات مفروض مین کسر $\frac{60}{28}$ یا $\frac{17}{7}$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\frac{3375}{343} = \frac{2205}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$$ اور اسمین غلطی فقط یہہ ہی $\frac{13}{343}$

اسجای یہہ بات بیان کرنی چاہئے کہ شکل تمام مساواتون کی ایسی نہین ہوتی ہی کہ اون پر قاعدہ مذکورہ بالا جاری ہوسکے مثلاً وہ نہین جاری ہوسکتا ہی جبکہ مساوات مفروض مین دوسرا جز نہین یا یا جاتا ہی تو فرض کرو کہ مساوات مفروض یہہ ہی $\lambda' = 2$ اور اسجای ظاہر ہی کہ دوسرا جز اس مساوات درجہ دوم کا اسمین نہین یا یا جاتا ہی سو اب اگر فرض کرین ہم $\lambda = \frac{\zeta}{\xi}$ اور $\lambda' = \frac{\kappa}{\xi}$ تو حاصل ہوگا ہمین یہہ $\frac{\kappa}{\xi} = 2$ اور $\kappa = 2\xi$ یعنے کہ $= 0 \times \zeta + 2\xi$ اور یہان سے پیدا ہوتا ہی یہہ سلسلہ اعداد صحیح کا $1\ 1\ 2\ 2\ 4\ 4\ 8\ 8\ 16\ 16\ 32\ 32$ وغیرہ اور اس سے کچہہ بات مفید نہین نکل سکتی ہی کسواسطے کہ اگر قسمت کرین ہم کسی جز اس سلسلہ کو اوسکے ماقبل پر تو خارج قسمت ہمیشہ آیا 2 ہوتا ہی یعنے حاصل ہوتی ہین ہمیشہ یہے مساواتین $\lambda = 1$ یا $\lambda = 2$ لیکن یہہ اعتراض جو اس قاعدہ پر ہے دور ہوسکتا ہی اگر فرض کرین ہم $\lambda = \iota - 1$ کسواسطے کہ اس ترکیب سے حاصل ہوگی ہمین یہہ مساوات $\iota^2 - 2\iota + 1 = 2$ اور اگر فرض کرین ہم

$\frac{ق}{ب} = ز$ اور $\frac{ک}{ب} = ک$ اور ان مساواتون کے وسیلہ سے وہی قیمت تقریبی جذر آ کی حاصل ہوگی جو پہلے دریافت کی گئی ہی اعتراض مذکورہ بالا اس مساوات $لا^۲ = ۲$ کے حل کرنے مین بھی ہوسکتا ہی یعنے اس صورت مین بھی قاعدہ مذکورہ بالا جاری نہین ہوسکتا ہی لیکن اگر طریق سابق کے فرض کرین ہم $لا = ز - ۱$ تو حاصل ہوگی ہمین یہہ مساوات $ز^۳ - ۳ز^۲ + ۳ز - ۱ = ۲$ یا یہہ مساوات $ز^۳ = ۳ز^۲ - ۳ز + ۳$ اور جسوقت فرض کرین ہم $\frac{ق}{ب} = ز$ اور $\frac{ک}{ب} = ز^۲$ اور $\frac{ل}{ب} = ز^۳$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ل = ۳ک - ۳ق + ۳ف$ اور اس مساوات سے یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت معلوم ہون تین اجزاء اوسوقت معلوم ہوسکتے ہین اگلی کی جز سلسلہ مطلوب مین اگر فرض کرین ہم کہ اول تین اجزاء اس سلسلہ کی ۱۰۰ ۱۰ ۱ مین تو پیدا ہوگا سلسلہ آئندہ

۱۰۰ ۱ ۳ ۶ ۱۲ ۲۷ ۶۳ ۱۴۴ ۳۲۴ وغیرہ اخیر جزو اس سلسلہ سے

حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت آ کی $ز = \frac{۳۲۴}{۱۴۴}$ اور اسیواسطے

$لا = ز - ۱ = \frac{۳۲۴}{۱۴۴} - ۱ = \frac{۱۸۰}{۱۴۴} = \frac{۵}{۴}$ یہہ قیمت قریب کعب ۲ کے ہی

کسواسطے کہ مکعب $\frac{۵}{۴}$ کا $\frac{۱۲۵}{۶۴}$ ہی اور ۲ $= \frac{۱۲۸}{۶۴}$ پس غلطی فقط $\frac{۳}{۶۴}$ ہی

مثالین واسطی مشق کی

۱ فرض کرو کہ $لا^۳ + ۳لا^۲ - ۵۲۳ = ۰$ کیا ہی قیمت لا کی

جواب لا $= ۵ ۰ ۴ ۳ ۱ ۵$

۲ فرض کرو کہ $لا^۳ - ۱۵لا^۲ + ۶۳لا - ۵۰ = ۰$ کیا ہی قیمت لا کی

جواب لا $= ۹ ۳ ۰ ۸ ۲ ۰ ۱$

۳ فرض کرو کہ $لا^۳ - ۳لا^۲ - ۷۵لا = ۱۰۰۰$ کیا ہی قیمت لا کی

جواب ۱۵ ۲۶ ۱۰

۴ فرض کرو کہ $لا^۵ + ۲لا^۴ + ۳لا^۳ + ۴لا^۲ + ۵لا = ۲۱۳۴۵$ کیا ہی قیمت لا کی

جواب لا $= ۴۴ ۴۱ ۸$

۵ فرض کرو کہ $۱۲۰لا^۳ + ۶۵۷لا^۲ - ۳۶۵۹لا = ۸۰۰۷۱۵$

کیا ہی قیمت لا کی **جواب** لا $= ۳۴ ۶۵۳۲$

باب چہارم مطالب مختلفہ

فصل اول ترتیب و اجتماع کی بیانمین

۱ اگر کئی مقدارین مختلف ترتیب سی ثبت کی جاوین تو سے مختلف ترتیبین مقدارون مذکور کی ترتیبین کہلاتی ہین مثلاً سب مختلف ترتیبین حروف $\overline{ا}$ اور $\overline{ب}$ اور $\overline{س}$ کی کہ دو دو اکہٹی ثبت کیجاوین یہ ہونگی $\overline{اب}$ اور $\overline{با}$ اور $\overline{اس}$ اور $\overline{سا}$ اور $\overline{بس}$ اور $\overline{سب}$

۲ اگر کئی مقدارین ہون اور بغیر لحاظ ترتیب کے اونکی مختلف مجموعے بناکر الگ الگ ثبت کرین تو ان مجموعون کو اجتماع مقدارون مذکور کا کہتے ہین مثلاً $\overline{اب}$ اور $\overline{بس}$ اور $\overline{اس}$ ہین مختلف اجتماع مقدارون $\overline{ا}$ اور $\overline{ب}$ اور $\overline{س}$ کے کہ لکھی جاوین دو دو اکہٹے اور یہان سے یہ معلوم ہوتا ہی کہ $\overline{اب}$ اور $\overline{با}$ اگرچہ دو ترتیب ہین لیکن ان دونون کا اجتماع ایک ہی ہی

۳ اگر ن کتی تعداد مین مقدارین ہون اور اگر اونمین سے دو دو کو اکہٹا کرین تو تعداد ترتیبونکی بتعبیر کی جائیگی ن (ن — ۱) سے اور اگر تین تین اکہٹے لکھی جاوین تو تعداد مختلف ترتیبون کی ہوگی یہہ ن (ن — ۱) (ن — ۲) دلیل اسکی یہہ ہی اگر ن کتی شی تعداد مین مثلاً اب س وغیرہ ہون اور اگر $\overline{ا}$ کو پہلے ہر ایک کی باقی حروف مجموعے ثبت کرین تو ظاہر ہی کہ (ن — ۱) کتی مختلف ترتیبین پیدا ہونگی لیکن اگر $\overline{ب}$ کو پہلے سب حروف کی لکھین تو بہی اتنی ہین پس (ن — ۱) کتی مختلف ترتیبین حروف مذکور کی پیدا ہونگی اور علی ہذا القیاس پس کل تعداد ترتیبونکی تعبیر کیجائیگی ساتھہ ن (ن — ۱) کے اور ترتیبین مذکور اس شکل کی ہونگی $\overline{اب}$ $\overline{با}$ $\overline{اس}$ $\overline{سا}$ وغیرہ اگر (ن — ۱) کتی شی تعداد مین ہون اور انکو دو دو لیکر اکہٹا کرین تو موافق گذشتہ کے تعداد مختلف ترتیبون کے یہہ (ن — ۱) (ن — ۲) ہوگی اور اگر ان سب ترتیبون کے پہلے $\overline{ا}$ کو لگاوین تو ظاہر ہی کہ تین تین حروف کی ترتیبین تعداد مین (ن — ۱) (ن — ۲) کتی ہونگی اور ان سب مین $\overline{ا}$ اول ہوگا لیکن اتنی ہی ترتیبین ہونگی جنمین $\overline{ب}$ اول ہوگی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے واسطی باقی حروف کی پس کل تعداد ترتیبون حروف مذکور کے کہ تین تین ثبت کی جاوین یہہ ہوگی ن (ن — ۱) (ن — ۲)

۴ اگر جاری کرین ترکیب مرقومہ بالا کو تو ظاہر ہو جائیگا کہ اگر ن کتی شی مین سے ر کتی کو اکہٹا الگ الگ لکہین تو کل تعداد ترتیبون کے

ن (ن — ۱) (ن — ۲) (ن — ۳) .... (ن — ر + ۱) ہوگی

۵ اگر ن کتنے حروف تھے اور انکو دو دو کو الگ الگ لکھین تو تعداد اجتماعون کی ن $\frac{ن-۱}{۲}$ ہوگی اور اگر تین تین الگ الگ لکھین تو تعداد مذکور ن $\frac{(ن-۱)}{۲}$ $\frac{(ن-۲)}{۳}$ ہوگی دلیل اسکی یہہ ہی صورت اول مین تعداد ترتیبون کے ن (ن - ۱) ہوگی لیکن ہر ایک اجتماع مثلاً اب مین ہوسکتے ہین دو ترتیبین مثلاً اب اور با پس معلوم ہوا کہ تعداد ترتیبون کی دوچند ہوتی ہی تعداد اجتماعون کی سے یہہ ن $\frac{ن-۱}{۲}$ ہوگی اب ظاہر ہی کہ اگر ن کتنی شیے ہون اور اونمین سے تین تین الگ الگ لکھین تو تعداد ترتیبون کی ن (ن - ۱) (ن - ۲) ہوگی اور یہہ بھی ظاہر ہی کہ ہر اجتماع تین چیزون کی مین ۳ × ۲ × ۱ ترتیبین ہوتی ہین تو معلوم ہوا کہ ترتیبین بہ نسبت اجتماعون کے ۳ × ۲ × ۱ دفع زیادہ ہین اور اسیواسطی تعداد کل اجتماعون کے یہہ ہوگی

$$\frac{ن\ (ن-۱)\ (ن-۲)}{۱ \times ۲ \times ۳}$$

۶ اسیطرح سی یہہ بھی ظاہر ہوتا ہی کہ اگر ن کتنی شیے ہون اور اونمین سے ر کتنی الگ الگ لکھی جاوین تو کل تعداد اجتماعون کی یہہ ہوگی $\frac{ن\ (ن-۱)\ (ن-۲) \ldots\ldots (ن-ر+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots \times ر}$

مثال ۱ بتاو کتنی ہین ترتیبین جنمین حروف لفظ حمد کی دو دو لکھی جاسکتی ہین یہان ظاہر ہی کہ

ن = ۳ اور ر = ۲ پس تعداد ترتیبونکی ہوگی = ۳ × (۳-۱) = ۳ × ۲ = ۶

مثال ۲ ایک شخص کے پاس سات رنگ ہی اور اوسنے دو دو رنگ ملاکر اور رنگ بنائے بتاو کل تعداد رنگون کی کیا ہی یہان ظاہر ہی کہ ن = ۷ اور ر = ۲

اور ∴ تعداد مطلوب = $\frac{۷\ (۷-۱)}{۲}$ = $\frac{۶ \times ۷}{۲}$ = ۳ × ۷ = ۲۱

۷ اگر کتنی چیزین ہون اور اونسی ر کتنی الگ الگ لکھی جاوین تو تعداد اجتماعون کے اوسیقدر ہوگی جسقدر (ن - ر) الگ الگ لکھنے سی ہوتی ہی اسواسطی کہ جسوقت ر کتنی الگ الگ لکھی جاوین تو موافق (۶) کے تعداد اجتماعون کے یہہ ہوتی ہی $\frac{ن\ (ن-۱)\ (ن-۲) \ldots\ldots (ن-ر+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots\ldots ر}$

اب اگر اوسی صورت مین بجاے ر کی ن - ر لکھین تو یہہ حاصل ہوتا ہی $\frac{ن\ (ن-۱)\ (ن-۲) \ldots (ر+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots (ن-ر)}$

اور ظاہر ہی کہ جسوقت ر کم ہووے ن - ر سے اوسوقت صورت گذشتہ اسطرح کی ہوجاویگی

$$\frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-ر+۱)(ن-ر)\cdots(ر+۱)}{۱\times۲\times۳\cdots ر(ر+۱)\cdots(ن-ر)} \quad (۱)$$

کیونکہ اجزاء ضربی شمار کنندہ مین کہٹی جاتی ہین اور نسب نما مین بڑھتے ہوجاتی ہین اسیطرح سے اگر ر زیادہ ہوان سے تو صورت گذشتہ اس شکل کی ہوجاویگی

$$\frac{ن(ن-۱)\cdots(ر+۱)ر(ر-۱)\cdots(ن-ر+۱)}{۱\times۲\cdots(ن-ر)(ن-ر+۱)\cdots(ر-۱)ر} \quad \cdots\cdots (۲)$$

اور اختصار کرنی سے یہ معلوم ہوتا ہی کہ صورت (۱) اور (۲) مساوی ہین اس مقدار کے

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ن-ر+۱)}{۱\times۲\times۳}$$

اور یہی مطلب تہا

۸ اگر ن کتنی چیزین ہون اور انمین کی ایک چیز کئی کئی بار شمار کی گئی ہو اور ن ہی کتنے کو اکٹہا کر کر الگ الگ لکہین تو بتاؤ کہ تعداد ترتیبون کی کیا ہوگی فرض کرو کہ چیزین مذکور آ ب ح وغیرہ ہین اور انمین سے آ ف دفعہ شمار کیا جاتا ہی اور ق دفعہ شمار کیا جاتا ہی اور ح ک دفعہ اور علی ہذا القیاس اور فرض کرو کہ ط بتعبیر کرتا ہی کل تعداد ترتیبون مطلوب کو اب اگر ہم یہہ بات فرض کرین کہ آ جو ف دفعہ شمار ہوسکتے ہین سب کے سب مختلف حروف ہوگئی تو ظاہر ہی کہ فقط انہین حروف کے ترتیبین جو کل تعداد ف کے موافق ہوسکتی ہین اس صورت سے بتعبیر ہونگی ۱×۲×۳...ف سے اور اسیواسطی لازم آتا ہی کہ ط ترتیبون مطلوب مین سے ہر واحد مین موافق فرض مذکور کے ۱×۲×۳...ف ترتیبین پیدا ہوتی اور اسی سبب سے تعداد ط ترتیبون مطلوب کی زیادہ ہوکر اس صورت سے بتعبیر ہوگے ط (۱×۲×۳...ف) اب اگر ہم یہہ فرض کرین کہ ب سے جو ق دفعہ شمار کیا جاتا تہا مختلف حروف ہوگئے تو موافق بیان بالا کی تعداد انہین حروف کی ترتیبون کے جو کل ق کو اکٹہا کر کیجاوین بتعبیر ہوگے ۱×۲×۳...ق سے اور اسی سبب سے تعداد ط ترتیبون کی اس صورت مین زیادہ ہوکر اس صورت سے بتعبیر ہوگی ط (۱×۲×۳...ف) (۱×۲×۳...ق) اب اگر اسیطرح سب حروف کو جو کئی کئی بار شمار کئی جاتے ہین مختلف حروف فرض کرلین تو تعداد ترتیبون ط کی زیادہ ہوکر اس صورت سی بتعبیر ہوگی ط (۱×۲×۳...ف) (۱×۲×۳...ق) (۱×۲×۳...ک) وغیرہ لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ جسوقت ن تکہی چیزین مختلف ہون تو ترتیبون ہی کتنے کو اکٹہا کر کر الگ الگ لکہین تو تعداد ترتیبون کی یہہ ہوتی ہی ۱×۲×۳...ن اسیواسطی

$$۱\times۲\times۳\cdots\cdots ن = ط\times۱\times۲\times۳\cdots ف\times۱\times۲\times۳\cdots ق\times۱\times۲\times۳\cdots ک \text{ وغیرہ}$$

$$\therefore ط = \frac{۱\times۲\times۳\cdots\cdots ن}{۱\times۲\times۳\cdots ف\times۱\times۲\times۳\cdots ق\times۱\times۲\times۳\cdots ک \text{ وغیرہ}}$$

اگر لما سے $۱\times۲\times۳\cdots ن$ کو تعبیر کریں اور اسیطور سے $۱\times۲\times۳\cdots ف$ وغیرہ کو تعبیر کریں فا اور ق ا وغیرہ سے تو $ط = \frac{لما}{فا\times قا \text{ وغیرہ}}$

مثال فرض کرو کہ تین گھوڑے اور ۴ ہاتی اور ۵ اونٹ ہین پس کل تعداد ۱۲ ہی اب اگر ۱۲ جانورون کو اکٹھا کر کر الگ الگ کھڑا کرین تو بتاؤ کتنی ترتیبین ہونگی اس صورت مین ظاہر ہی کہ $ن = ۱۲$ اور $ف = ۳$ اور $ق = ۴$ اور $ک = ۵$

$$\therefore ط = \frac{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷\times۸\times۹\times۱۰\times۱۱\times۱۲}{۱\times۲\times۳\times۱\times۲\times۳\times۴\times۱\times۲\times۳\times۴\times۵}$$

$$= \frac{۶\times۷\times۸\times۹\times۱۰\times۱۱\times۱۲}{۱\times۲\times۳\times۱\times۲\times۳\times۴} = ۷\times۴\times۹\times۱۰\times۱۱ = ۲۷۷۲۰$$

= تعداد ترتیبون مطلوب ہے

۹ فرض کرو کہ $\overline{ن}$ اقسام کی چیزین ہین اور تعداد ان اقسام مختلفہ کی علیحدہ علیحدہ $\overline{ف}$ اور $\overline{ق}$ اور $\overline{ک}$ وغیرہ سے تعبیر ہوتی ہین اور ہم ان اشیا مین سے کچھ مجموعی بنانا چاہتے ہین کہ ہر مجموعہ مین ایک ایک شے ہر قسم مین سے ہو تو اب دریافت کیا چاہتے ہین کہ ان مجموعون یا اجتماعون کی کیا تعداد ہوگی

۱ اول فرض کرو کہ فقط دو قسم کی اشیا ہین اور انکی تعداد علیحدہ علیحدہ $\overline{ف}$ اور $\overline{ق}$ سے تعبیر ہوتی ہین تو اس صورت مین بہت ظاہر ہی کہ اگر ایک ایک شی ہر قسم مین سے لیکر مختلف مجموعی بنادین تو تعداد ان اجتماعون کی مساوی حاصل ضرب $\overline{ف}$ اور $\overline{ق}$ کی یعنے $ف\times ق$ کی ہوگی

۲ دوم فرض کرو کہ سوای دو اقسام مذکورہ بالا کی ایک اور تیسری قسم کی اشیا موجود ہین اور اس قسم مین تعداد اشیاؤ کی $\overline{ک}$ ہی پس ظاہر ہی کہ جب ہر واحد کو اوپر کے اجتماعون مین سے پہلے اجتماعون کے ساتھ لگادین تو کل تعداد اجتماعون کی $ف\times ق$ کہ ہوگی اور اوپر کے ایک ایک شی تینون ان قسمون مین سی ہوگی

حکم اگر ہر قسم مین تعداد اشیاؤ کی مساوی ہو یعنے $ف = ق = ک =$ وغیرہ اور تعداد اقسام کی $ن$ ہو تو کل تعداد اجتماعون کی $ف^{ن}$ ہوگی

مثال سات مرد اور پانچ عورت اور تین لڑکے ہین اگر ان مین سے ایک ایک مرد اور ایک ایک عورت

اور ایک ایک لڑکے کو جمع کر کر الگ الگ بٹھلا دین تو تعداد اجتماعون کی کیا ہوگی اس صورت مین ظاہر ہی کہ
ف = ۷ اور ق = ۵ اور کہ = ۳ ∴ تعداد مطلوب = ۷ × ۵ × ۳ = ۱۰۵

۱۰ دو قسم کی چیزین ہین اور ہر قسم مین تعداد چیزون کی علیحدہ علیحدہ ف اور ق ہین اور دونون قسم کی چیزون سے ہم ایسی مجموعے بنائین کہ اون ہر واحد مین م تو ایک قسم کی چیزون سے اور ن دوسری قسم کی چیزون سے پائی جاوین تو بتاؤ کہ تعداد اون مجمون یا اجتماعون کی کیا ہوگی

اس جا ظاہر ہی کہ اگر اول قسم مین سے م کتنی چیزون کے مختلف مجموعی بناوین تو تعداد اجتماعون کے

$\frac{ف\ (ف-۱)\ \ldots\ (ف-م+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \ldots\ م}$ ہوگی اور دوسری قسم کی چیزون کے مجموعی کہ ن کتنی علیحدہ

علیحدہ لکھین جاوین یہہ ہونگی $\frac{ق\ (ق-۱)\ \ldots\ (ق-ن+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots\ ن}$ اب ظاہر ہی کہ اگر ہم ایسی مجموعی دریافت کیا

چاہین کہ ہر مجموعہ پہلی قسم مین سے مل ہو جای ہر مجموعہ دوسری قسم کا تو ضرور ہی کہ تعداد ایسی اجتماعون کی مساوی حاصل ضرب دو صورتون مذکورہ کی ہوگی یعنے یہہ

$\frac{ف\ (ف-۱)\ \ldots\ (ف-م+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots\ م} \times \frac{ق\ (ق-۱)\ \ldots\ (ق-ن+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots\ ن}$ اور اسی قیاس

سے یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اگر بجاے دو قسم کے زیادہ اقسام اشیاء کی ہون تو تعداد کل اجتماعون کی مساوی حاصل ضرب تعداد اجتماعون سب اقسام کی ہوگی

مثال اگر دس گھوڑے ہون اور تین ہاتی ہون اور چار چار گھوڑون اور دو دو ہاتیون کو علیحدہ علیحدہ اکہٹا کرین تو ان مجمون کی تعداد کیا ہوگی اس جا ظاہر ہی کہ ف = ۱۰ اور ق = ۳ اور م = ۴ اور ن = ۲ ∴ تعداد مطلوب = $\frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} \times \frac{۳ \times ۲}{۱ \times ۲} = ۱۰ \times ۹ \times ۷ = ۶۳۰$

فصل دوسری ثبوت ضابطہ نیوٹن صاحب کا

چند باتین ایسی ہین کہ اون پر ثبوت ضابطہ کا موقوف ہی اسواسطی اول اونکا لکھنا ضروری معلوم ہوتا ہی قاعدہ تقسیم کے بیانمین یہہ بات لکھی گئی ہی کہ مقسوم اور مقسوم علیہ مین جو مقدارین متماثل ایسی ہون کہ اونمین نشان قوت پایا جاوے تو خارج قسمت کا نشان قوت وہ مقدار ہوتی ہی جو مقسوم کے نشان قوت مین سے مقسوم علیہ کی نشان قوت کو تفریق کرنی سی باقی رہتی ہی پس $ح^{۳} \div ح^{۲} = ح^{۳-۲} = ح$ اور $ح^{۲} \div ح^{۳} = ح^{۲-۳} = ح^{-۱}$

یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ نشان قوت منفی بھی ہوسکتا ہی اور بیان بالا کے موافق یہہ چند متالین تقسیم کی مشق کے واسطے لکھی جاتی ہین

۱ $1^{-1} = \frac{1}{1}$ اسواسطے کہ $\frac{1}{1} = \frac{1^1}{1^2} = 1^{1-2} = 1^{-1}$

۲ $1 = 1$ اسواسطے کہ $1 = \frac{1^1}{1^1} = 1^{1-1}$

۳ $1^{-9} = \frac{1}{1^9}$ اسواسطے کہ $\frac{1^1}{1^{10}} = 1^{1-10} = 1^{-9}$

۴ $1^{-ط} = \frac{1}{1^{ط}}$ اسواسطے کہ $\frac{1}{1^{ط}} = \frac{1^1}{1^{1+ط}} = 1^{1-1-ط} = 1^{-ط}$

۵ $(1+ب)^{-ط} = \frac{1}{(1+ب)^{ط}}$

۶ $\frac{1}{1^{-ط}} = 1^{ط}$ واسواسطے کہ $\frac{1^0}{1^{-ط}} = 1 \div \frac{1}{1^{ط}} = 1 \times \frac{1^{ط}}{1} = 1^{ط}$

۷ $\frac{ح}{1^{-ط}} = ح\,1^{ط}$ کیونکہ $\frac{ح}{1^{-ط}} = ح \times 1^{ط} = ح\,1^{ط}$

۸ $\frac{ن}{(1+ب)^{-ر}} = ن\,(1+ب)^{ر}$

اگر ایک سلسلہ مثلاً $1 + ب\,لا + س\,لا^2 + ص\,لا^3 + ع\,لا^4 + ط\,لا^5 + \&c. = 0$ (۱)

اور اگھیز اب س وغیرہ تو مقدار منقطع فرض کیجاوین اور لا اور اوسکی قوتین مقدارین غیر منقطع فرض کیجاوین تو کہتے ہین ہم کہ α اور $-\beta$ س وغیرہ کہ سر من قوتون لا غیر منقطع کی سب ہر واحد $= 0$ دلیل اسکی یہہ ہی چونکہ لا ایک مقدار غیر منقطع ہی تو فرض کرسکتے ہین ہم اوسی $= 0$ تو اس حالت مین

$1 + ب\,لا + س\,لا^2 + ص\,لا^3 + ع\,لا^4 + ط\,لا^5 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \&c. = 0$

یعنے $1 = 0$ اور اگر تقسیم کرین ہم مساوات (۱) کو لا پر تو خارج قسمت یہہ ہوتا ہی

$ب + س\,لا + ص\,لا^2 + ع\,لا^3 + ط\,لا^4 = 0$ اب اگر فرض کرین ہم لا $= 0$ تو دلیل مرقومہ بالا سے ب بھی $= 0$ دریافت ہوگا اور اسی طرح سے ثابت ہوسکتا ہی کہ س ص ع وغیرہ سب $= 0$ کے ہین اگر $1 + ب\,لا + س\,لا^2 = ص\,لا + ط\,لا^2 + ع\,لا^3$ تو $1 = ص$ اور $ب = ط$ اور $س = ع$ کیونکہ ظاہر ہی کہ اگر بائین طرف مساوات کو دہنی طرف علامات بدل کے لیاوے تو

$(1 - ص)\,لا + (ب - ط)\,لا^2 + \&c. = 0$ اور بموجب مرقومہ بالا کے $1 - ص = 0 \therefore 1 = ص$

اور اسیطرح ب = ط اور س = ع جانتے ہین دریافت کرنا (۱ + د) کا صعود م کی مقدار کی ایک سلسلہ مین خواہ م ایک مقدار صحیح ہو خواہ کسر اور خواہ مثبت ہو خواہ منفی

چونکہ $(۱ + لا)^م = \left\{۱(۱ + \frac{لا}{۱})\right\}^م = ۱^م (۱ + \frac{لا}{۱})^م$

اگر $(۱ + ی)^م = ۱ + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ + ع ی^۴ +$ وغیرہ

تو $(۱ + لا)^م = ۱^م (۱ + \frac{لا}{۱})^م$

$= ۱^م (۱ + ب \frac{لا}{۱} + س \frac{لا^۲}{۱^۲} + ص \frac{لا^۳}{۱^۳} +$ وغیرہ$)$

$= ۱^م + ب ۱^{م-۱} لا + س ۱^{م-۲} لا^۲ + ص ۱^{م-۳} لا^۳ +$ وغیرہ

صورت اول مین فرض کرو کہ م ایک مقدار مثبت اور صحیح ہے

تو $(۱ + ی)^م = (۱ + ی) \times (۱ + ی) \times (۱ + ی) \ldots\ldots\ldots\ldots$ م تک بے اور ضرب دینی سے جنہ ان مساوی مضروب اور مضروب نیو نکی معلوم ہو جائیگا ہمین کہ پہلے دو رقمین حاصل ضرب سلسلہ مین ۱ + م ی ہین اور باقی کی رقمین اسی شکل کی ہین یعنے س $ی^۲$ + ص $ی^۳$ + ع $ی^۴$ + وغیرہ اور یہان س ص ع وغیرہ سر غیر معلوم ہین اور کچھ علاوہ نہین رکھتے ہین سے یعنے اگر تو زیادہ یا کم ہو تو اونکی قیمت مین نہین فرق اسکتا ہے اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ ب = م کے صورت دوسرے اگر فرض کرین ہم م کو ایک مقدار منفی لیکن صحیح تو فرض کرو م = − ن تو

$(۱ + ی)^م = (۱ + ی)^{-ن} = \frac{۱}{(۱ + ی)^ن} = \frac{۱}{۱ + ن ی +}$ وغیرہ $= ۱ - ن ی +$ وغیرہ *

∴ ب = ن = م صورت تیسری اگر فرض کرین ہم م کو ایک مقدار مثبت لیکن کسر تو فرض کرو م = $\frac{ر}{ت}$

$(۱ + ی)^م = (۱ + ی)^{\frac{ر}{ت}} = ۱ + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ +$ وغیرہ

∴ $(۱ + ی)^ر = (۱ + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ +$ وغیرہ$)^ت$

∴ $۱ + ر ی +$ وغیرہ $= \left\{۱ + (ب + س ی + ص ی^۲ +\right.$ وغیرہ$) ی\}^ت$

$= ۱^ت + د (ب + س ی + ص ی^۲ +$ وغیرہ$) ی +$ وغیرہ

واضح ہو کہ $(۱ + ب ی + س ی^۲ + ص ی^۳ +$ وغیرہ$)^{\frac{ر}{ت}}$ مین کہ مساوی $(۱ + ی)^{\frac{ر}{ت}}$ کی ہے ان قوت د کا کسر نہین ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو مساوی لو $(۱ + ی)^{\frac{ر}{ت}}$ کو اوسی قوت کو صعود کرین جسپر قوت کا وہ جذر ہے تو اس حاصل صعود مین یہی نشان قوت د کا کسر ہوگا جو برخلاف فرض کی ہے کیونکہ $(۱ + ی)^{\frac{ر}{ت}}$ مین د کی قوت کا نشان آ ہے جو ایک مقدار صحیح ہے

اب بموجب (۲) دعوی کے ر = د ب ر ∴ ب = $\frac{ر}{د}$ = م صورت جو ہی اگر فرض کریں ہم
م کو ایک منفی کسر تو فرض کردم = − $\frac{ر}{د}$

تب $(1+ع)^{م} = (1+ع)^{-\frac{ر}{د}} = \frac{1}{(1+ع)^{\frac{ر}{د}}} = \frac{1}{1+\frac{ر}{د}ع + \text{وغیرہ}} = 1 - \frac{ر}{د}ع + \text{وغیرہ}$

∴ ب = − $\frac{ر}{د}$ = م پس معلوم ہوا کہ تمام صورتوں میں ب = م اور اسی سبب سے

$(1+لا)^{م} = ا^{م} + م ا^{م-1} لا + س ا^{م-2} لا^{2} + ص ا^{م-3} لا^{3}$ وغیرہ ترکیب دریافت کرنے۔ س ص وغیرہ
کی یہہ ہی ظاہر ہی کہ $(1+لا+ه)^{م} = \{(1+لا)+ه\}^{م} = \{1+(لا+ه)\}^{م}$
اب خواہ اول خواہ دویم مساوی لہ $(1+لا+ه)^{م}$ کا صعود کیا جاوے تو حاصل دو نو صورتوں میں باہم مساوی
ہوگا اول مساوی لہ سی یہہ حاصل ہوتا ہی $\{(1+لا)+ه\}^{م} =$
$(1+لا)^{م} + م(1+لا)^{م-1} ه + س(1+لا)^{م-2} ه^{2} + ص(1+لا)^{م-3} ه^{3}$ + وغیرہ
$= ا^{م} + م ا^{م-1} لا + س ا^{م-2} لا^{2} + ص ا^{م-3} لا^{3} + ع ا^{م-4} لا^{4}$ + وغیرہ
$+ م \{ ا^{م-1} + (م-1) ا^{م-2} لا + ش ا^{م-3} لا^{2} + \text{وغیرہ} \} ه$
$+ س \{ ا^{م-2} + (م-2) ا^{م-3} لا + \text{وغیرہ} \} ه^{2}$
$+ ص (ا^{م-3} + (م-3) ا^{م-4} لا + \text{وغیرہ}) ه^{3}$
$+ \text{وغیرہ} = \text{وغیرہ}$

$ا^{م} + م ا^{م-1} لا + س ا^{م-2} لا^{2} + ص ا^{م-3} لا^{3} + ع ا^{م-4} لا^{4} + \text{وغیرہ}$
$+ م ا^{م-1} ه + م(م-1) ا^{م-2} لا ه + ش م ا^{م-3} لا^{2} ه + \text{وغیرہ}$
$+ س ا^{م-2} ه^{2} \ldots\ldots + ص ا^{م-3} ه^{3} + \text{وغیرہ}$

دویم مساوی لہ سی یہہ حاصل ہوتا ہی $\{1+(لا+ه)\}^{م} =$
$= ا^{م} + م ا^{م-1} (لا+ه) + س ا^{م-2} (لا+ه)^{2} + ص ا^{م-3} (لا+ه)^{3}$ وغیرہ
$= ا^{م} + م ا^{م-1} لا + س ا^{م-2} لا^{2} + ص ا^{م-3} لا^{3} + \text{وغیرہ}$
$+ م ا^{م-1} ه + 2 س ا^{م-2} لا ه + 3 ص ا^{م-3} لا^{2} ه + \text{وغیرہ}$
$+ س ا^{م-2} ه^{2} + 3 ص ا^{م-3} لا ه^{2} + \text{وغیرہ}$
$+ ص ا^{م-3} ه^{3} + \text{وغیرہ}$

ان دونوں سلسلوں میں سے قوائے متتالیہ لا اور ہ کے اسیمین مساوی ہیں بموجب مرقومہ بالا کے اور اسیواسطے

$$۲س = م(م-۱) \quad \therefore س = \frac{م(م-۱)}{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$۳ص = س(م-۲) = \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۲} \quad \therefore ص = \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۳\times۲}$$

$$\text{اور } ۴ع = ص(م-۳) \text{ اور } ع = \frac{ص(م-۳)}{۴} = \frac{م(م-۱)(م-۲)(م-۳)}{۴\times۳\times۲}$$

وغیرہ = وغیرہ اب حاصل ہوتا ہی یہہ

$$(۱+لا)^م = ۱^م + م\,۱^{م-۱}\,لا + \frac{م(م-۱)}{۲\times۱}\,۱^{م-۲}\,لا^۲ + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۳\times۲\times۱}\,۱^{م-۳}\,لا^۳$$

$$+ \frac{م(م-۱)(م-۲)(م-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}\,۱^{م-۴}\,لا^۴ + \text{وغیرہ}$$

یہی ہی ضابطہ نیوٹن صاحب کا اور اس یہہ بھی حاصل ہوتا ہی $(۱-لا)^م =$

$$۱^م - م\,۱^{م-۱}\,لا + \frac{م(م-۱)}{۲\times۱}\,۱^{م-۲}\,لا^۲ - \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۳\times۲\times۱}\,۱^{م-۳}\,لا^۳ \text{ وغیرہ اب بیان کرتے}$$

ہیں ہم ترکیبین واسطی نکالنے کے جذر مالی اور جذر کعبی وغیرہ یعنے نزول کسی مرتبہ کا بیشمار فائدون میں سے جو ضابطہ نیوٹن صاحب کے سے حاصل ہوئے ہیں ایک فائدہ عظیم یہہ ہی کہ نکال سکتے ہیں ہم کسی عدد کا نزول کسی مرتبہ کا واضح ہو کہ تعبیر کر سکتے ہیں ہم ہر عدد کو جو زیادہ ہی آسے ساتھہ اس $۱+ط$ کے اور ہر عدد کو جو کم ہی آسے ساتھہ اس $۱-ط$ کے اور اس جائے فرض کر سکتے ہیں ط کو واسطی ایک صدد صحیح یا کسر کے ضابطہ نیوٹن صاحب کے سے واضح ہی کہ

$$(۱+ط)^م = ۱ + م\,ط + \frac{م(م-۱)}{۲\times۱}\,ط^۲ + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{۳\times۲\times۱}\,ط^۳$$

$$+ \frac{م(م-۱)(م-۲)(م-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}\,ط^۴ + \frac{م(م-۱)(م-۲)(م-۳)(م-۴)}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}\,ط^۵ + \text{وغیرہ}$$

اب فرض کرو $م = \frac{۱}{۲}$ یعنے نکالنی ہیں ہم جذر $(۱+ط)$ کا تو

$$(۱+ط)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ + \frac{ط}{۲} - \frac{ط^۲}{۸} + \frac{ط^۳}{۱۶} - \frac{۵ط^۴}{۱۲۸} + \frac{۷ط^۵}{۲۵۶} - \text{وغیرہ}$$

اسیطرح سی اگر فرض کرین ہم م $= \frac{۱}{۳}$ تو معلوم ہوجائیگا ہمین کعب $(۱+ط)$ کا اور اگر م $= \frac{۱}{۹}$ تو نویں مرتبہ کا نزدل $(۱+ط)$ کا معلوم ہوجائیگا چاہتے ہین ہم دریافت کرنا کعب ۳۱ کا بوسیلہ ضابطہ نیوٹن صاحب کے ظاہر ہی کہ

$$\sqrt[۳]{۳۱} = \sqrt[۳]{۲۷+۴} = ۳\sqrt[۳]{۱+\frac{۴}{۲۷}} = ۳(۱+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۲۷} - \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۶}{۷۲۹} - \frac{۶۴}{۱۹۶۸۳}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳} - \text{وغیرہ})$$

$$= ۳ + \frac{۴}{۲۷} - \frac{۱۶}{۲۱۸۷} + \frac{۳۲۰}{۵۳۱۴۱} - \frac{۲۵۶۰}{۴۳۰۴۶۷۲۱} \quad \text{وغیرہ}$$

لیکن

$$\left.\begin{array}{l} ۳ = ۳٫۰۰۰۰۰۰۰ \\ \frac{۴}{۲۷} = ۰٫۱۴۸۱۵ \\ \frac{۳۲۰}{۵۳۱۴۱} = ۰٫۰۰۶۰۰۰ \end{array}\right\} = ۳٫۱۴۸۷۵$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{۱۶}{۲۱۸۷} = -۰٫۰۰۷۳۱ \\ -\frac{۲۵۶۰}{۴۳۰۴۶۷۲۱} = -۰٫۰۰۰۰۰۶ \end{array}\right\} = -۰٫۰۰۷۳۷$$

پس معلوم ہوا کہ کعب ۳۱ کا یعنے $\sqrt[۳]{۳۱} = ۳٫۱۴۱۳۸$

ایک اور طریق ثابت کرنی ضابطہ نیوٹن صاحب کا

واضح ہو کہ اس طریق مین تین صورتین مذکورہ بالا ایکہی صورت عام سی نکل آتی ہین اور اسیواسطے ہم اس صورت عام کو دریافت کرتے ہین

فرض کرو کہ $ط_۲ = \frac{ط(ط-۱)}{۲\times۱}$ $\quad\therefore ۲ط_۲ = (ط-۱)ط$

$ط_۳ = \frac{ط(ط-۱)(ط-۲)}{۳\times۲\times۱}$ $\quad\therefore ۳ط_۳ = (ط-۲)ط_۲$ اور علیٰ ہذا القیاس

$ط_ح = \frac{ط(ط-۱)\ldots\ldots(ط-ح+۱)}{ح\ldots\ldots۳\times۲\times۱}$ $\quad\therefore ح ط_ح = (ط-ح+۱)ط_{ح-۱}$

$ص_۲ = \frac{ص(ص-۱)}{۲\times۱}$ $\quad\therefore ۲ص_۲ = ص(ص-۱)$

$ص_۳ = \frac{ص(ص-۱)(ص-۲)}{۳\times۲\times۱}$ $\quad\therefore ۳ص_۳ = (ص-۲)ص_۲$ علیٰ ہذا القیاس

$$\text{ص ح} = \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)(\text{ص}-2)\cdots(\text{ص}-\text{ح}+1)}{1\times2\times3\times4\cdots\cdots\text{ح}} \quad \therefore \text{ح ص ح} = (\text{ص}-\text{ح}+1)\,\text{ص ح}-1$$

اب ظاہر ہی کہ حاصل ضرب دو سلسلوں $1+\text{ط}\,\text{لا}+\text{ط}_2\,\text{لا}^2+\text{ط}_3\,\text{لا}^3+\cdots+\text{ط}_\text{ر}\,\text{لا}^\text{ر}\cdots\cdots(1)$

$1+\text{ص}\,\text{لا}+\text{ص}_2\,\text{لا}^2+\text{ص}_3\,\text{لا}^3+\cdots+\text{ص}_\text{ر}\,\text{لا}^\text{ر}$ (۲) کا $=1+(\text{ط}+\text{ص})\,\text{لا}+$ اجزا جنمین $\text{لا}^\text{ر}$ اور $\text{لا}^{\text{ر}+1}$ تک پائی جاتی ہین اور اب چونکہ سر لا کا یہہ ہی

$\text{ط}_\text{ر}+\text{ط}_{\text{ر}-1}\text{ص}+\text{ط}_{\text{ر}-2}\text{ص}_2+\text{ط}_{\text{ر}-3}\text{ص}_3\cdots\cdots\text{ط ص}_{\text{ر}-1}+\text{ص}_\text{ر}$ اور $\text{سر لا}^{\text{ر}-1}$ کا یہہ

$\text{ط}_{\text{ر}-1}+\text{ط}_{\text{ر}-2}\text{ص}+\text{ط}_{\text{ر}-3}\text{ص}_2\cdots\cdots\text{ط ص}_{\text{ر}-2}+\text{ص}_{\text{ر}-1}$ اور یہہ ہی

ظاہر ہی کہ $\text{ر ط}_\text{ر}=(\text{ط}-\text{ر}+1)\,\text{ط}_{\text{ر}-1}$ اور $\text{ر ط}_{\text{ر}-1}\text{ص}=(\text{ر}-1)\,\text{ط}_{\text{ر}-1}\text{ص}+\text{ط}_{\text{ر}-1}\text{ص}$

$=(\text{ط}-\text{ر}+2)\,\text{ط}_{\text{ر}-2}\text{ص}+\text{ص ط}_{\text{ر}-1}$ اور اسیطور سے

$\text{ر ط}_{\text{ر}-2}\text{ص}_2=(\text{ر}-2)\,\text{ط}_{\text{ر}-2}\text{ص}_2+2\,\text{ط}_{\text{ر}-2}\text{ص}_2$

$=(\text{ط}-\text{ر}+3)\,\text{ط}_{\text{ر}-3}\text{ص}_2+(\text{ص}-1)\,\text{ص ط}_{\text{ر}-2}$ اور

$\text{ر ط}_{\text{ر}-3}\text{ص}_3=(\text{ر}-3)\,\text{ط}_{\text{ر}-3}\text{ص}_3+3\,\text{ط}_{\text{ر}-3}\text{ص}_3$

$=(\text{ط}-\text{ر}+4)\,\text{ط}_{\text{ر}-4}\text{ص}_3+(\text{ص}-2)\,\text{ص}_2\,\text{ط}_{\text{ر}-3}$

وغیرہ $=$ وغیرہ

$\text{ر ط ص}_{\text{ر}-1}=\text{ط ص}_{\text{ر}-1}+(\text{ر}-1)\,\text{ط ص}_{\text{ر}-1}=\text{ط ص}_{\text{ر}-1}+(\text{ص}-\text{ر}+2)\,\text{ص}_{\text{ر}-2}\,\text{ط}$

$\text{ر ص}_\text{ر}=(\text{ص}-\text{ر}+1)\,\text{ص}_{\text{ر}-1}$

جسوقت جمع کرین ہم ان سب اجزا کو اور یہہ بھی خیال رکھین کہ ہر دو سطر وین ایک جوڑا اجزای متشابہ کا ہی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$\text{ر}\times\text{سر لا}=(\text{ط}+\text{ص}-\overline{\text{ر}-1})(\text{ط}_{\text{ر}-1}+\text{ط}_{\text{ر}-2}\text{ص}+\text{ط}_{\text{ر}-3}\text{ص}_2+\cdots\cdots\text{ص}_{\text{ر}-1})$

$$\therefore \text{سر لا}^\text{ر}=\frac{\text{ط}+\text{ص}-\overline{\text{ر}-1}}{\text{ر}}\times\text{سر لا}^{\text{ر}-1}=\frac{\text{ط}+\text{ص}-(\text{ر}-1)}{\text{ر}}\times\frac{\text{ط}+\text{ص}-(\text{ر}-2)}{\text{ر}-1}\times\text{سر لا}^{\text{ر}-2}$$

$$=\frac{\text{ط}+\text{ص}-(\text{ر}-1)}{\text{ر}}\times\frac{\text{ط}+\text{ص}-(\text{ر}-2)}{\text{ر}-1}\cdots\cdots\frac{\text{ط}+\text{ص}-1}{2}\times\text{سر لا}$$

$$=\frac{\text{ط}+\text{ص}-(\text{ر}-1)}{\text{ر}}\times\frac{\text{ط}+\text{ص}-(\text{ر}-2)}{\text{ر}-1}\cdots\frac{\text{ط}+\text{ص}-1}{2}\times\frac{\text{ط}+\text{ص}}{1}$$

$$=\frac{(\text{ط}+\text{ص})(\text{ط}+\text{ص}-1)\cdots\cdots(\text{ط}+\text{ص}-\text{ر}+1)}{1\times2\times3\cdots\cdots\text{ر}}$$

اب اگر لکھین ہم عدد $2\ 3\ 4$ وغیرہ متواتر بجای ر کے تو حاصل ضرب سلسلون (۱) اور (۲) کا یہہ ہوگا

$$1+(ط+ص)\,لا+\frac{(ط+ص)(ط+ص-1)}{1\times 2}\,لا^2+\dots\frac{(ط+ص)(ط+ص-1)\dots(ط+ص-ر+1)}{1\times 2\times 3\times 4\dots\dots ر}\,لا^ر$$

اب اگر ط کو نشانی سلسلہ اول کی مقرر کرین اور ص کو سلسلہ دویم کی مقرر کرین تو ظاہر ہی کہ یہہ بات ثابت ہوگئی کہ حاصل ضرب دو ایسون سلسلون کا ایک ایسا سلسلہ ہوتا ہی کہ اوسکے نشانی حاصل جمع اون دو سلسلون کی نشانیون کی ہوتی ہی اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ اگر اس حاصل ضرب کو ایک اور ایسی ہی سلسلہ سے ضرب کرین یعنے حاصل ضرب تین ایسے سلسلون کا لیون تو نشانی اس حاصل ضرب کی حاصل جمع تینون سلسلون کی نشانیون کی ہوگی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے اور زیادہ سلسلونکا ——— اور فرض کرو کہ تعداد سلسلون کی ن ہی اور نشانی ہر واحد کی اینن سے عدد ایک کا ہی تب چونکہ تمام سلسلہ ایک سی ہین اور حاصل جمع اونکی نشانیون کا ن ہی تو ظاہر ہی کہ حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\left(1+1\times لا+\frac{1(1-1)}{2}\,لا^2+\dots\right)^ن=1+ن\,لا+\frac{ن(ن-1)}{2}\,لا^2+\text{وغیرہ}$$ یعنے

$$(1+لا)^ن=1+ن\,لا+\frac{ن(ن-1)}{2}\,لا^2+\dots\frac{ن(ن-1)\dots(ن-ر+1)}{1\times 2\times 3\dots\dots ر}\,لا^ر+\dots$$

پس ثابت ہوا ضابطہ نیوٹن صاحب کا جب کہ نشان قوت ایک عدد صحیح مثبت ہی یہہ بات یہان یاد رکھنی چاہیئے کہ اول طرف اس مساوات مین بجائے $ط^2$ اور $ط^3$ وغیرہ کی اونکی قیمتین $\frac{ط(ط-1)}{1\times 2}$ اور $\frac{ط(ط-1)(ط-2)}{1\times 2\times 3}$ وغیرہ لکھین ہین صورت دوم مین فرض کرو کہ تعداد سلسلون کی بطور گذشتہ کے ن ہی لیکن نشانی ہر واحد کی اینن سے $\frac{م}{ن}$ ہی پس اب چونکہ $\frac{م}{ن}+\frac{م}{ن}+$ وغیرہ ن حرون تک $=م$

$$\therefore\left(1+\frac{م}{ن}\,لا+\frac{\frac{م}{ن}\left(\frac{م}{ن}-1\right)}{1\times 2}\,لا^2+\text{وغیرہ}\right)^ن=1+م\,لا+\frac{م(م-1)}{1\times 2}\,لا^2+\text{وغیرہ}=(1+لا)^م$$

موافق صورت اول کے $(1+لا)^{\frac{م}{ن}}=1+\frac{م}{ن}\,لا+\frac{\frac{م}{ن}\left(\frac{م}{ن}-1\right)}{1\times 2}\,لا^2+\frac{\frac{م}{ن}\left(\frac{م}{ن}-1\right)\left(\frac{م}{ن}-2\right)}{1\times 2\times 3}\,لا^3+$ وغیرہ

پس ثابت ہوا ضابطہ جبکہ نشان قوت ایک کسر ہو

صورت سویم مین فرض کرو کہ دو سلسلے ایسے ہین کہ اونکی نشانیان م اور —م ہین ∴

$$\left(1+م\,لا+\frac{م(م-1)}{1\times 2}\,لا^2+\text{وغیرہ}\right)\left(1-م\,لا+\frac{-م(-م-1)}{1\times 2}\,لا^2+\text{وغیرہ}\right)=1+(م-م)\,لا+\text{وغیرہ}$$

$$= 1 \therefore \frac{1}{(1+\theta)^{-m}} \text{ یعنی } (1+\theta)^{-m} = 1 - m\theta + \frac{-m(-m-1)}{2\times 1}\theta^2 + \text{وغیرہ}$$

پس ثابت ہوا ضابطہ جبکہ نشان قوت ایک عدد منفی ہو خواہ صحیح خواہ کسر

اگر n ایک عدد مثبت اور صحیح ہو تو سلسلہ مرکبی $1\times 2\times 3\times \ldots\ldots n$ کو $\underline{n}$ سے تعبیر کریں تو ضابطہ نیوٹن صاحب اسطور پر لکھا جا سکتا ہے

$$(\theta+\phi)^n = \theta^n \left\{ \frac{\underline{n}}{\underline{n}} + \frac{\phi\,\underline{n}}{\theta\,\underline{n-1}} + \frac{\phi^2\,\underline{n-2}}{\theta^2\,\underline{2}\,\underline{n-2}} + \frac{\phi^3\,\underline{n-3}}{\theta^3\,\underline{3}\,\underline{n-3}} + \ldots + \frac{\phi^n}{\underline{n}} \right\}$$

جبکہ ہم ضابطہ کو کام میں لاویں اسوقت مناسب ہے کہ اس بات کو یاد رکھیں کہ جس حالت میں اول طرف کے دو نو جزو قوت رکھتے ہوں اوس حالت میں ہر جزو صورت مفصلہ میں مجموعہ نشانون قوت کا n ہوگا اور جس صورت میں کہ دو نو جزو مذکور دو دو قوت رکھتے ہوں اوس صورت میں ہر جزو صورت مفصلہ میں مجموعہ نشانون قوت کا $2n$ ہوگا اور علی ہذا القیاس واسطے آسانی کے لازم ہے کہ ہمیشہ $(\theta+\phi)^n$ کو $\theta^n(1+\frac{\phi}{\theta})^n$ سی تبدیل کریں اور بعد ازان $(1+\frac{\phi}{\theta})^n$ کی صورت مفصلہ دریافت کرکی اوسکی ہر جزو میں θ^n کو ضرب کریں

مثال (۱) $$(\theta^2+\lambda^2)^n = \left\{\theta^2\left(1+\frac{\lambda^2}{\theta^2}\right)\right\}^n = \theta^{2n}\times\left(1+\frac{\lambda^2}{\theta^2}\right)^n$$

$$= \theta^{2n}\left(1+n\frac{\lambda^2}{\theta^2} + \frac{n}{2}\times\frac{n-1}{\theta^4}\lambda^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}\frac{\lambda^6}{\theta^6} + \text{وغیرہ}\right)$$

$$= \theta^{2n} + n\theta^{2n-2}\lambda^2 + \frac{n(n-1)}{2\times 1}\theta^{2n-4}\lambda^4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}\theta^{2n-6}\lambda^6 + \text{وغیرہ}$$

واضح ہو کہ جزو عام کسی سلسلہ کا وہ جزو ہوتا ہے کہ اوسکے ذریعہ سی کوئی سا جزو اوسکا دریافت ہو سکتا ہے جاہتے ہیں ہم دریافت کرنا جزو عام صورت مفصلہ $(\theta+\phi)^n$ کا ظاہر ہے کہ جزو اول θ^n ہے جزو دوم $n\theta^{n-1}\phi$ جزو سوم $\frac{n(n-1)}{2\times 1}\theta^{n-2}\phi^2$ جزو چہارم $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}\theta^{n-3}\phi^3$

ان اجزا کے گفتہ کرنی سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر کسی جزو کا مرکب ہوتا ہے اجزا ضربی ϕ^n اور $\frac{n-1}{2}$ اور $\frac{n-2}{3}$ وغیرہ سے اور انکی تعداد اوس عدد سی جو مرتبہ اوس جزو کا ہے جسکا سر ہم دریافت کرتے ہیں بقدر ϕ کی کم ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ سہ r ویں جزو کا یہ ہے

$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\dots(ن-ر+۲)}{۱\times۲\times۳\times\dots(ر-۱)}$ اور یہہ بھی ظاہر ہی کہ نشان قوت ط کا

مساوی اخیر جز ضربی نسب نما کی ہوتا ہی اور نشان قوت لا کا مساوی حاصل تفریق ن اور نشان قوت ط کی ہوتا ہی پس معلوم ہوا کہ ترون جز یعنے جو عام مطلوب یہہ ہی

$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\dots\dots(ن-ر+۲)}{۱\times۲\times۳\times\dots\dots(ر-۱)}$ ط$^{ر-۱}$ لا$^{ن-ر+۱}$

اور ظاہر ہی کہ اگر اس صورت جبریہ مین کوئی عدد مطابق کسی جز کے مرتبہ کے بجای ر کی درج کرین تو وہ جز بیشک معلوم ہو جائیگا

مثال کیا ہی پانچوان جز $(ط^۲-ص)^{۱۲}$ کا یہان ظاہر ہی کہ ر=۵ اور ن=۱۲

$\therefore$ جز مطلوب $= \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۱\times۲\times۳\times۴}(-ص)^۴\times(ط^۲)^۸ = ۴۹۵\, ط^{۱۶}\, ص^۸$

اثبات ضابطہ نیوطن صاحب کا بغیر مدد سلسلہ فرضی کے

اس ضابطہ مین تین صورتین ہین صورت اول وہ جسمین نشان قوت ن ایک عدد صحیح اور مثبت ہوتا ہی صورت دویم وہ ہی جسمین نشان قوت ایک کسر مثبت ہو صورت سویم وہ جسمین نشان قوت منفی ہو خواہ عدد صحیح خواہ کسر پہلے ہم اول صورت کا اثبات کرتی ہین عمل ضرب سے معلوم ہوتا ہی کہ $(لا+۱)(لا+ب) = لا^۲+(۱+ب)لا+۱\, ب$

اور $(لا+۱)(لا+ب)(لا+ج) = لا^۳+(۱+ب+ج)لا^۲+(۱+ب+۱ج+ب ج)لا+۱\, ب\, ج$ اور $(لا+۱)(لا+ب)(لا+ج)(لا+س) =$

$لا^۴+(۱+ب+ج+س)لا^۳+(۱+ب+۱ج+بج+۱س+ب س+ج س)لا^۲$

$+(۱\, ب\, ج+۱\, ج\, س+ب\, ج\, س+۱\, ب\, س)لا+۱\, ب\, ج\, س$ ظاہر ہی کہ اگر عمل مرقومہ بالا ضرب کا متواتر جاری رکھین تو متاہدہ سے معلوم ہو جائیگا کہ بطور گذشتہ کی اجزاء حاصل ضرب کے زیادہ ہوتی جائینگی خواہ تعداد اجزاء ضربی مثل $(لا+۱)$ اور $(لا+ب)$ وغیرہ کسیقدر ہو یعنے یہہ انتظام یا قانون حاصلضرب کا دریافت ہوگا کہ اوسمین قوای لا کی ہر جز مین کم ہوتی جاتی ہین اور سب سے بڑا نشان قوت مساوی تعداد اجزاء ضربی کے ہی اور اسکے بعد کی اجزاء حاصلضرب مین نشان قوت لا کا بقدر عدد آ کی بتدریج کم ہوتا جاتا ہی اور یہہ بھی معلوم ہوگا کہ سر اول جز حاصل ضرب کا عدد آ کا ہی اور سر دوسری چیز کا حاصل جمع مقدارون آ اور ب اور س وغیرہ کا ہی اور تیسری جز کا حاصل جمع حاصل ضربون

ان مقدارون کے دو دو کا اور جو تہی جز کا حاصل ضرب تین تین کا ہی اور علی ہذا القیاس اور اخیر جز کا سر حاصلضرب کل ن مقدارون ا اور ب اور ح وغیرہ کا ہوگا فرض کرو کہ قانون مرقومہ بالا صحیح ہوتا ہی جب کہ اجزاء ضربی (لا+۱)(لا+ب) اور (لا+ح) .... (لا+ک) تعداد میں ن ہون پس موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

(لا+۱)(لا+ب)(لا+ح) .... (لا+ک) = لا^ن + ۱ لا^(ن-۱) + ب لا^(ن-۲) .... + کہ

اور اس جا ۱ = ا + ب + ح + ... کہ اور

ب = ا ب + ا ح + ب ح + وغیرہ

وغیرہ = وغیرہ

کہ = ا ب ح س .... کہ

اب ضرب کرو طرفین اس مساوات کو ایک اور جز ضربی (لا+ل) مین تو حاصل ہوگا یہہ

(لا+۱)(لا+ب)(لا+ح) .... (لا+ک)(لا+ل) = لا^(ن+۱) + (۱ + ل) لا^ن +

(ب + ل ۱) لا^(ن-۱) + ... + کہ ل اور یہان سے معلوم ہوا کہ

۱ + ل = ا + ب + ح + ... کہ + ل

ب + ۱ ل = ا ب + ا ح + ب ح + ... ا ل + ب ل + ... + کہ ل

وغیرہ = وغیرہ

کہ ل = ا ب ح س .... کہ ل

یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر قانون مذکورہ بالا صحیح ہو واسطے ن اجزاء ضربی مثل (لا+ا) اور (لا+ب) وغیرہ کی تو بالضرور وہ درست ہوگا واسطے ن+۱ اجزاء ضربی مذکور کی لیکن پہلی ثابت ہوا ہی کہ قانون مذکور درستی واسطے ۲ اجزاء ضربی کے تو اب معلوم ہوا کہ وہ درست ہی واسطے ۳ اجزاء کے اور اگر وہ درست ہی واسطے ۳ اجزاء کی تو وہ درست ہونا چاہیئے واسطے ۴ اجزاء کی اور یہی قیاس کرنا چاہیئے واسطے زیادہ اجزاء کی پس معلوم ہوا کہ قانون مذکور درست ہی خواہ تعداد اجزاء ضربی کی کچھ ہو

اب فرض کرو کہ ا = ب = ح = س = وغیرہ

∴ ۱ = ا + ا + وغیرہ .... ن جزون تک = ن ا

ب = $\left\{\begin{array}{l} \text{ا}^{2} + \text{ا}^{2} + \text{ا}^{2} + \text{وغیرہ اسقدر اجزا تک جسقدر کہ} \\ \text{ملکر مساوی ہون تعداد اجتماعون ن چیزون سے جبکہ وہ چیزین} \\ \text{دو دو اکہٹی لے جائین} \end{array}\right\}$ = ن $\frac{\text{ن}-1}{2}$ ا^{2}

س = $\left\{\begin{array}{l} \text{ا}^{3} + \text{ا}^{3} + \text{وغیرہ اسقدر اجزا تک جسقدر} \\ \text{کہ ملکر مساوی ہون تعداد اجتماعون ن چیزون سے جبکہ} \\ \text{وہ چیزین تین تین اکہٹی لیجاوین} \end{array}\right\}$ = ن $\frac{(\text{ن}-1)}{2}\frac{(\text{ن}-2)}{3}$ ا^{3}

وغیرہ = وغیرہ

اس صورت مین یہہ بہی ظاہر ہی کہ $(\text{لا}+1)(\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}+\text{ج})\ldots(\text{لا}+\text{ک})$ بتدیل $(\text{لا}+1)^{\text{ن}}$ سے ہوجاتا ہی $\therefore (\text{لا}+1)^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ن}\frac{(\text{ن}-1)}{2}\text{لا}^{\text{ن}-2}\text{ا}^{2} +$

$\text{ن}\frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3\times 2}\text{لا}^{\text{ن}-3}\text{ا}^{3} + \ldots\ldots + \text{ا}^{\text{ن}}$

حاکم $(1+\text{لا})^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\text{لا}^{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{3\times 2\times 1}\text{لا}^{3} + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}}$

صورت دوم جسکی نسبت ایک مثبت کسر ہوی فرض کرکہ م اور ن اعداد صحیح مثبت ہین اب ہم ثابت کرینگی کہ $(1+\text{لا})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ مساوی ہی اپنی سلسلہ کے $\left(1 + \frac{\text{م}}{\text{ن}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{2\times 1}\text{لا}^{2} + \text{وغیرہ}\right)$ کی

ظاہر ہی کہ اگر اس سلسلہ مین عدد آ کو اول جز قرار دین اور مجموعہ باقی اجزاؤ کو دوسرا جز اور موافق صورت اول کے اسکا صعود بقدر ن کے کہ ایک عدد صحیح اور مثبت ہی لین تو حاصل ہوگا

$\left\{\left(1 + \frac{\text{م}}{\text{ن}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{2\times 1}\text{لا}^{2} + \text{وغیرہ}\right)^{\text{ن}}\right\} =$

$1 + \text{ن}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{2\times 1}\text{لا}^{2} + \text{وغیرہ}\right) + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times 1}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\right)}{2\times 1}\text{لا}^{2} + \text{وغیرہ}\right)^{2} + \text{وغیرہ}$

$= 1 + \text{م}\,\text{لا} + \left(\text{م}\times\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1 + \text{ن}-1\times\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)\frac{\text{لا}^{2}}{2\times 1} +$

$\left(\text{م}\times\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1\times\frac{\text{م}}{\text{ن}}-2 + 3(\text{ن}-1)\times\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1 + \text{ن}-1\times\text{ن}-2\times\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)\frac{\text{لا}^{3}}{3\times 2\times 1} +$

وغیرہ اب تحویل کرنی سے سر $\frac{\text{لا}^{2}}{2\times 1}$ کا = $\text{م}^{2}-\text{م} = \text{م}(\text{م}-1)$ کے ہوتا ہی

اور سہ $\frac{لا^{۳}}{۱\times۲\times۳}$ $= م\left(\frac{م^{۲}}{ن^{۲}} - \frac{۳م^{۲}}{ن^{۲}} + ۲ + \frac{۳م^{۲}}{ن} - ۳م - \frac{۳م^{۲}}{ن} + م^{۲}\right.$

$\left. - \frac{۳م^{۲}}{ن} + \frac{۳م^{۲}}{ن^{۲}}\right) = م\left(م^{۲} - ۳م + ۲\right) = م(م-۱)(م-۲)$ اور یہی قیاس

کرنا چاہیئے دا سطی سر ون سہ سے زیادہ قوای لا کی پر حاصل ہوگا یہ

$\left(۱ + \frac{م}{ن}لا + \frac{م}{ن}\left(\frac{م}{ن}-۱\right)\frac{لا^{۲}}{۱\times۲} \ldots \text{وغیرہ}\right)^{ن} = ۱ + مLا + \frac{م(م-۱)}{۱\times۲}لا^{۲} +$

$\frac{م(م-۱)(م-۲)}{۱\times۲\times۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ} = (۱+لا)^{م}$ اسلئے کہ م ایک صحیح مثبت عدد ہی

$\therefore (۱+لا)^{ن} = ۱ + \frac{م}{ن}لا + \frac{م}{ن}\left(\frac{م}{ن}-۱\right)\frac{لا^{۲}}{۱\times۲} + \frac{م}{ن}\left(\frac{م}{ن}-۱\right)\left(\frac{م}{ن}-۲\right)\frac{لا^{۳}}{۱\times۲\times۳} + \text{وغیرہ}$

اور یہی ارادہ کیا تہا پس ثابت ہوا ضابطہ نیوٹن کا صورت دوم مین بہی جب کہ نشان قوت ایک کسر مثبت ہو

صورت سوم جبکہ نشان قوت ن منفی ہو خواہ صحیح خواہ کسر

ظاہر ہی کہ $\left(۱ - ن لا + \frac{-ن(-ن-۱)}{۲\times۱}لا^{۲} + \frac{-ن(-ن-۱)(-ن-۲)}{۱\times۲\times۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ}\right)$

$\times \left(۱ + ن لا + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}لا^{۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۱\times۲\times۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ}\right)$

$= ۱ + (ن - ن)لا + \left(ن\times\overline{ن-۱} + ن\times ن + ۱ - ۲ن\right)\frac{لا^{۲}}{۱\times۲}$

$+ \left(ن\times\overline{ن-۱}\times ن - ۲ - ن\times ن + ۱\times\overline{ن+۲} + ۳ن^{۲}\times\overline{ن-۱}\right)\frac{لا^{۳}}{۱\times۲\times۳} + \text{وغیرہ}$

$= ۱ + ۰\times لا + ۰\times\frac{لا^{۲}}{۱\times۲} + ۰\times\frac{لا^{۳}}{۱\times۲\times۳} + \text{وغیرہ} = ۱$

$\therefore ۱ - ن لا + \frac{-ن(-ن-۱)}{۲\times۱}لا^{۲} + \frac{-ن(-ن-۱)(-ن-۲)}{۱\times۲\times۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ}$

$= \frac{۱}{۱ + ن لا + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}لا^{۲} + \text{وغیرہ}} = \frac{۱}{(۱+لا)^{ن}} = (۱+لا)^{-ن}$

پس اب ثابت ہوا ضابطہ سر اسحاق نیوٹن کا تمام تینون صورتون مین

اگر نشان قوت ایک صحیح عدد مثبت ہو ویسے تو ہم کہتے ہین کہ سر ہر جز صورت مفصلہ کا کہ اسی نشان

قوت سی بنتا ہی ایک عدد صحیح مثبت ہوگا اسواسطی کہ ظاہر ہی کہ سر (ر+۱) وین جز کا یہہ ہی
$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ن-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots\times ر}$ اور موافق قاعدون اجتماع کے ظاہر ہی کہ یہی ہی تعداد

اجتماعون ن چیزون سی کہ ر دفع اکہٹی کی جاوین اب موافق تعریف اجتماع کی لازم ہی کہ صورت جبریہ مذکور ایک عدد صحیح عدد مثبت ہووی اگر ہم ن اور ر کو صحیح اور مثبت مانی تو ثابت ہوا دعوی جز دریافت کیا چاہتے ہین ہم تعداد اجزاء صورت مفصلہ کسی صورت ثنائی کی سی پہلے ثابت ہوچکا ہی کہ ر+۱ اوان

$(لا+ط)^{ن}$ کا $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ن-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots\times ر}\times ط^{ر}\,لا^{ن-ر}$

پس اب ظاہر ہی کہ اگر اس صورت مین ر ایسا ہووی کہ ن − ر + ۱ = ۰ یعنے اگر ن ہووے ایک مثبت عدد صحیح اور ر ایسا ہووے کہ ر = ن + ۱ یعنے ر نسبت نشان قوت ن کے بقدر عدد ایک کی زیادہ ہووی تو ظاہر ہی اس صورت مین کہ بعد ر وین جز کے کوئی اور جز باقی نہین رہتا ہی یعنے صورت مفصلہ تمام ہوجاتی ہی اور اسیواسطی معلوم ہوا کہ تعداد مطلوبہ اجزاء کی ن + ۱ ہی یعنے تعداد مذکور نسبت نشان قوت کی بقدر عدد ایک کی زیادہ ہوتی ہی اگر ن ہووی ایک عدد منفی یا ایک کسر تو ظاہر ہی کہ ن − ر + ۱ صفر نہین ہوسکتا ہی گو کچھہ ہی قیمت واسطی ر کی فرض کرین پس معلوم ہوا کہ ان صورتون مین تعداد اجزاء کی غیر نہایت ہوگی مثلاً تعداد اجزاء صورتون مفصلہ $(لا+ط)^{۳}$ اور $(لا+ط)^{۲}$ کی ۴ اور ۳ ہی لیکن تعداد اجزاء صورتون مفصلہ $(لا+ط)^{۲}$ یا $(لا+ط)^{\frac{۱}{۲}}$ کی غیر نہایت ہی جب کہ (لا + ط) کی کوئی قوت لین اور نشان قوت ایک عدد صحیح اور مثبت ہو اوسوقت ثابت کرو کہ اسکی صورت مفصلہ کی شروع اور اخیر سی کوئی دو جز مساوی فاصلون پر لین تو ان جزون مین مساوی ہونگی دلیل اسکی یہہ ہی چونکہ کل تعداد اجزاء کی ن + ۱ ہی تو ظاہر ہی کہ ر + ۱ واں جز اخیر سلسلہ سی (ن + ۱ − ر) واں یعنے (ن − ر + ۱) واں جز شروع سی ہوگا پس جسوقت لکھا ہی ہمنے ن − ر + ۱ بجای ر کے تو سر جز مذکور کا موافق مضامین گذشتہ کی یہہ ہوگا

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ن-ن-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots\times(ن-ن)}$$

$$=\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots\cdots(ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots\times(ن-۱)}$$

$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ن-ر+۱)(ن-ر)\cdots(ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots ر}$ اور یہہ اوسوقت ہی جبکہ اوسنی ر

$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ر+۱)ر(ر-۱)\cdots(ن-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots(ن-ر)(ن-ر+۱)\cdots(ر-۱)ر}$ اور یہہ اوسوقت ہی جبکہ ر یا ن-ر

$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ن-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots ر}$ اور یہہ دونو صورتین ہوسکتا ہی

= سر (ر+۱) دین جز کی شروع سے واضح ہو کہ یہہ بات ثابت ہوسکتی ہی جبکہ لکھین ہم ط بجای لا کے اور لا بجای ط کے یعنی صورتین مفصلہ $(لا+ط)^ن$ اور $(ط+لا)^ن$ کے لیکر اونکو مساوی ایک دوسری کے لکھین اور بعد ازان اون اجزا کی سر دکو جنمین قوای متماثلہ لا اور ط کی پائی جاوین مساوی ایک دوسری کے لکھین حکم بیان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر $(لا+ط)^ن$ کی صورت مفصلہ مین اور ن کے ایک مقدار صحیح اور مثبت فرض کرین تو قطع اول سے اوسی سلسلہ کو دریافت کرکی باقی اوسکے اجزا پہلی اجزا سے قیاس کیے جاسکتی ہین مثلاً

$(ط+ص)^۷ = ط^۷ + ۷ط^۶ص + ۲۱ط^۵ص^۲ + ۳۵ط^۴ص^۳ + ۳۵ط^۳ص^۴ + ۲۱ط^۲ص^۵ + ۷ط ص^۶ + ص^۷$

دریافت کیا چاہتے ہین نہایت بڑا یعنی سب سے اعظم جز اجزا صورت مفصلہ $(ط+ص)^ن$ مین سے ظاہر ہی کہ ر+۱ وان جز اس صورت مفصلہ کا $\frac{ن(ن-۱)\cdots\cdots(ن-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots ر} ط^{ن-ر} ص^ر$ اور سر وان جز یہہ ہی $\frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-ر+۲)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\cdots(ر-۱)} ط^{ن-ر+۱} ص^{ر-۱}$ اور بیان سے معلوم ہوا کہ ر+۱ وان

جز ر وین جز سے نکل سکتا ہی اگر ضرب کرین ر وین جز کو $\frac{ن-ر+۱}{ر} \frac{ص}{ط}$ جبکہ ر کہ ایک عدد صحیح ہی نہایت کم ہو موقع مضروب فیہ $\frac{ن-ر+۱}{ر} \frac{ص}{ط}$ نہایت زیادہ ہو اور اوسوقت ہی جبکہ $\frac{ن-ر+۱}{ر} \frac{ص}{ط}$ ۱ ہو تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین ر وان جز سب سے بڑا جز تمام اجزا صورت مفصلہ مین سے ہوگا موافق اس فرض کے $\frac{ن-ر+۱}{ر} \frac{ص}{ط} > ۱ \therefore (ن-ر+۱) ص > ر ط$ یعنی ر $(ط+ص) > ر(ن+۱) \frac{ص}{ط+ص}$ پس فرض کرو اسیلیے ر کی اول ہی عدد صحیح ایسا کہ وہ زیادہ ہو $(ن+۱) \frac{ص}{ط+ص}$ سے اور اس صورت مین بیشک ر وان جز سب سے زیادہ ہوگا اگر $(ن+۱) \frac{ص}{ط+ص}$ ایک عدد صحیح ہووی تو ظاہر ہی کہ $\frac{ن-ر+۱}{ر} \frac{ص}{ط} = ۱$ اور ∴ ر وان جز مساوی ر+۱ وین

کے ہوگا یعنی درجہ صورت مقصد کی ایسی ہونگی کہ ہر واحد اجزا میں سے سب باقی اجزا دعیہ سے زیادہ ہوگا

حکم جب ہم دریافت کرتے ہیں اسطور سے بڑا جزو سوقت ہم دریافت کرتے ہیں اوس مقام یا نقطہ کو جہاں سے اجزا و سلسلہ کی نوبت بنوبت ہونی لگتے ہیں یا موافق اصطلاح کے جہاں سے سلسلہ مایل بہ انقطاع ہوتا شروع کرتا ہے

مثال دریافت کیا چاہتے ہیں ہم سب سے بڑا جزو صورت مقصد $(۳+۵\theta)^{\frac{۱}{۲}}$ کا جبکہ $\theta = \frac{۱}{۲}$

اگر جای $(ن+۱)$ $\frac{ط}{ص} = (۸+۱)\cdot\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۵}{۲}+۳} = \frac{۵}{۱۱}\times ۹ = \frac{۴۵}{۱۱} = ۴\frac{۱}{۱۱}$

اور اس سے بڑا اول عدد ۴ ہی پس معلوم ہوا کہ سب سے بڑا جزو ۴ وان جزہی دریافت کیا چاہتے ہیں ہم حاصل جمع سردن کا جو حاصل جمع کسی دو مقداروں کی کسی قوت کی صورت مقصد میں پائی جاویں چونکہ

$$(۱+لا)^{ن} = ۱ + ن لا + \frac{ن(ن-۱)}{۳\times ۲\times ۱} لا^{۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times ۲\times ۱} لا^{۳} + \text{وغیرہ}$$

خواہ واسطے لا کی کوئی قیمت فرض کریں تو فرض کہ $لا = ۱$ ∴

$$(۱+۱)^{ن} = ۱ + ن + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times ۱} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times ۲\times ۱} + \text{وغیرہ}$$

∴ $۲^{ن}$ = حاصل جمع تمام سردنکی

مثال $(لا+ط)^{۵} = لا^{۵} + ۵ لا^{۴} ط + ۱۰ لا^{۳} ط^{۲} + ۱۰ لا^{۲} ط^{۳} + ۵ لا ط^{۴} + ط^{۵}$

$$= ۱ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ + ۵ + ۱ = ۳۲ = ۲^{۵}$$

جاہتے ہیں ہم دریافت کرنی مختلف مرتبہ کی نزول تقریبی اعداد کی بذریعہ ضابطہ نیوٹن کی ظاہر ہے کہ

$$\sqrt[ن]{۱ \pm لا} = (۱ \pm لا)^{\frac{۱}{ن}} = ۱ \pm \frac{۱}{ن} لا - \frac{۱}{ن}\frac{ن-۱}{۲ن} لا^{۲} \pm \text{وغیرہ}$$ اب اگر ع ہو دی عدد

مفروض جسکا ن مرتبہ کا نزول دریافت کیا چاہتے ہیں تو فرض کرو کہ $ف^{ن}$ سے مناسب قریب قیمت ع کے

∴ فرض کرو ع = ف ± ن اور اس جای ق بہت کم ہی نسبت ف کے اور علامت + یا − کی

موافق صورتوں ع = ف + ن اور ع = ف − ن کی لینی چاہیئے پس اس صورت میں ظاہر ہے کہ

$$\sqrt[ن]{ع} = ف\left(۱ \pm \frac{ق}{ف ن}\right)^{\frac{۱}{ن}}$$ اور جب لکھا جای لا کی مقدار $\frac{ق}{ف ن}$ کو

اوسوقت $$\sqrt[ن]{ع} = ف\left\{۱ \pm \frac{۱}{ن}\frac{ق}{ف ن} - \frac{۱}{ن}\frac{ن-۱}{۲ن}\left(\frac{ق}{ف ن}\right)^{۲} \pm \text{وغیرہ}\right\}$$

اور اس سلسلہ میں فقط چند اجزاء کی ذریعہ سے بہت قریب قیمت نزول مطلوب کی معلوم ہو جاویگی

مثال چاہتے ہیں دریافت کرنا کعب یعنی تیسری مرتبہ کا نزول عدد ۱۲۸ کا اس جای $\sqrt[3]{125+3}$ یا $\sqrt[3]{125+3}$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{125} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{3}{125}\right)^2 + \frac{5}{9} \frac{1}{3^3} \left(\frac{3}{125}\right)^3 - \text{وغیرہ} \right\} 5$$

$$= 5 + \frac{1}{25} - \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5^7} - \text{وغیرہ} = 5 + \frac{24}{125} - \frac{52}{5^{10}}$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{52}{5^{10}} - \text{وغیرہ} = 5 + 0.04 - 0.0032 + 0.0\ldots +$$

$$= 5.03968442\ldots 0.0$$

مثال دریافت کیا چاہتے ہیں ہم وہ جزو صورت مضعف $(1 + ل + ل^2)^3$ کا جسمیں $ل^2$ یا جای $1 + ل$ کو ایک مقدار کرو اور $\therefore (1 + ل + ل^2)^3 = (1 + ل)^3 + 3(1 + ل)^2 ل^2 + 3(1 + ل) ل^4 + ل^6$

اس جای تعبیر اور عمل کرنے کی معلوم ہوتا ہی کہ جزو مطلوب $= 3 ل^2 \times ل^2 + 3 ل^4 = 6 ل^4$ اور اسی طور سے کوی سا جزو تین جزون کے صعود و تکا دریافت ہو سکیگا

دریافت کیا چاہتے ہیں ہم تعداد اجزاء صورت مضعف $(1 + ب + ح)^ن$ کی ظاہر ہی کہ تعداد مطلوبہ مساوی ہوگی حاصل جمع اجزاء صورتون مضعفہ قوتون مختلفہ $(1 + ب)$ کی یعنے صورتون مضعفہ $(1 + ب)^ن$ اور $(1 + ب)^{ن-1}$ وغیرہ $(1 + ب)$ تحلیل معلوم ہوا کہ تعداد مطلوبہ $= (ن+1) + ن + (ن-1) +$ وغیرہ تک

$$= \left\{ 2ن + 2 - ن \right\} \frac{ن+1}{2}$$ موافق قواعد سلسلہ جمع تفریق کے

$$= \frac{(ن+1)(ن+2)}{1 \times 2}$$

چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا باقیات صورت مضعف $(1 - ل^2)^ن$ کا بعد $ر$ اجزاء کے

ظاہر ہی کہ موافق ضابطہ نیوٹن صاحب کے $(1 - ل)^{-2} = 1 + 2ل + 3ل^2 + \ldots + ر ل^{ر-1} +$ ب

اور اس سے تعبیر کرنا ہی باقیات کو بعد $ر$ اجزاء کی اور

$$\frac{1}{1 - 2ل + ل^2} = 1 + 2ل + 3ل^2 + \ldots + ر ل^{ر-1} + ب$$

$$\therefore 1 = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2ل + 3ل^2 + \ldots \quad + ر ل^{ر-1} + ب \\ -2ل - 4ل^2 - \ldots - 2(ر-1) ل^{ر-1} - 2ر ل^ر - 2ب ل \\ + ل^2 \ldots + (ر-2) ل^{ر-1} + (ر-1) ل^ر + ر ل^{ر+1} + ب ل^2 \end{array} \right.$$

یعنی $۱ = ۱ - (ر+۱)لا + رلا^{ر+۱} + ب(۱-لا)^{۲} ۱ب = \frac{(ر+۱)لا - رلا^{ر+۲}}{(۱-لا)^{۲}}$

اسی طرح سی باقیات بعد ر اجزاء کی صورتون مضمله $(۱-لا)^{-۳}$ اور $(۱-لا)^{-۴}$ کی دریافت ہوسکتی ہین واضح ہو کہ ہم جنس حاصلضرب وہ حاصلضرب مقدارون کی کہلاتی ہین جنمین اجزاء ضربی خواہ ایکسے خواہ مختلف ہوتے ہون مثلاً $۱^{۳}$ اور $۱^{۲}ب$ حاصلضرب ہم جنس ہین اسواسطے کہ دونو اجزاء ضربی مین تین تین مجمعے $۱ \times ۱ \times ۱$ اور $۱ \times ۱ \times ب$ ہین اب فرض کرو کہ ن مقدارین $۱ ب ح س$ وغیرہ ہین اور ر مرتبہ کی حاصلضرب ہم جنس کی تعداد دریافت کیا چاہتے ہین اب بذریعہ عمل نقشہ یا ضابطہ نیوٹن صاحب کے یہہ مساوات حاصل ہونگی

$$\frac{۱}{۱-لا} = ۱ + ۱لا + ۱^{۲}لا^{۲} + ۱^{۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ}$$

$$\frac{۱}{۱-ب لا} = ۱ + ب لا + ب^{۲}لا^{۲} + ب^{۳}لا^{۳} \ldots + \text{وغیرہ}$$

$$\frac{۱}{۱-ح لا} = ۱ + ح لا + ح^{۲}لا^{۲} + ح^{۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ}$$

$$\text{وغیرہ} = \text{وغیرہ}$$

$$\therefore \frac{۱}{۱-۱لا} \cdot \frac{۱}{۱-ب لا} \cdot \frac{۱}{۱-ح لا} \cdot \text{وغیرہ} = ۱ + (۱ + ب + ح + \text{وغیرہ})لا +$$

$$(۱^{۲} + ۱ب + ب^{۲} + ۱ح + ب ح + ح^{۲} + \text{وغیرہ})لا^{۲} +$$

$$(۱^{۳} + ۱^{۲}ب + ۱ب^{۲} + ب^{۳} + ۱^{۲}ح + ب^{۲}ح + ۱ح^{۲} + ب ح^{۲} + ح^{۳} + \text{وغیرہ})لا^{۳}$$

+ وغیرہ اور یہان ظاہر ہے کہ سر $لا^{ر}$ کا حاصل جمع ر مرتبہ کی حاصلضرب ہون ہم جنس مقدارون $۱ ب ح$ وغیرہ کا ہی اب واسطے دریافت کرنے حاصل جمع ان حاصلضرب کے فرض کرو کہ

$۱ = ب = ح = س = \text{وغیرہ} = ۱$ اور اس صورت مین سر $لا^{ر}$ کی عدد مطلوب ہوگا لیکن موافق اس فرضیہ کے مساوی ہونے سب مقدارون کے ذہنی طرف مساوات گذشتہ کے $(۱-لا)^{-ن}$ ہوجائیگی اور یہہ موافق ضابطہ نیوٹن صاحب کے اس صورت کی ہوتی ہے

$$۱ + ن لا + ن\frac{ن+۱}{۲}لا^{۲} + ن\frac{ن+۱}{۲}\cdot\frac{ن+۲}{۳}لا^{۳} + \text{وغیرہ}$$

$$+ \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots(ن+ر-۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \ldots \times ر} \quad \text{اور اسسواسطے}$$

$$\text{عدد مطلوبہ} = \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots(ن+ر-۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \ldots \times ر}$$

حکم یہان سے ہم دریافت کر سکتے تعداد اجزا کسی کثیر الاجزا مثل $(۱ + ا۱ + ا۲ + ا۳ + ا۴ \ldots\ldots ا ر)^{ن}$ کی اسواسطے کہ یہہ تعداد مطلوبہ اور تعداد $ن$ مرتبہ کی حاصلضربون $ر$ مقدارون کی ایکسی ہوتی ہی پس تعداد مطلوبہ یہہ ہی $\frac{ر(ر+۱)(ر+۲)\ldots\ldots(ر+ن-۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots \times ن}$ اگر $ر = ۲$ یعنی صورت $(۱ + ر)^{ن}$ ہو تو تعداد مطلوبہ یہہ ہوگی $\frac{۲ \times ۳ \times ۴ \ldots\ldots (ن+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots \times ن} = ن + ۱$

اگر $ر = ۳$ یعنے صورت $(۱ + ب + ج)^{ن}$ ہو تو تعداد مطلوبہ یہہ ہوگی

$$\frac{۳ \times ۴ \times ۵ \times \ldots\ldots (ن+۲)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots ن} = \frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۱ \times ۲}$$

اگر $ر = ۴$ یعنے صورت $(۱ + ب + ج + س)^{ن}$ ہووی تو تعداد اجزاء کی ہوگی یہہ

$$\frac{۴ \times ۵ \times ۶ \times \ldots\ldots (ن+۳)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots ن} = \frac{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}{۱ \times ۲ \times ۳}$$

اور یہی قیاس کرنا چاہیئے اور قیمت $ر$ کی پر

ضابطہ غیر متقرنان قوت کا

چاہتے ہین دریافت کرنا صورت مفصلہ ط لا کی جسمین کہ قوای مختلفہ لا کی پائے جاوین واسطی اثبات اس سلسلہ یا ضابطہ کے ہم ایک اور طریق لکھتے ہین

$ط لا = \left\{(۱ + ط - ۱)^{ن}\right\}^{لا}$ اور بذریعہ ضابطہ نیوٹن صاحب کے یہہ

$$= \left\{۱ + ن(ط-۱) + ن\frac{ن-۱}{۲}(ط-۱)^{۲} + ن\frac{ن-۱}{۲}\cdot\frac{ن-۲}{۳}(ط-۱)^{۳} + \text{وغیرہ}\right\}^{لا}_{ن}$$

$$= \left\{۱ + \left((ط-۱) - \frac{(ط-۱)^{۲}}{۲} + \frac{(ط-۱)^{۳}}{۳} - \text{وغیرہ}\right)ن + \text{ن}^{۲} + \text{ج ن}^{۳} + \text{وغیرہ}\right\}^{لا}_{ن}$$

اور اس جایے حروف ب ج وغیرہ مین قوای $(ط-۱)$ کی شامل ہین

$$= \left\{ ۱ + ۱ن + \frac{ن^۲}{} + \frac{ن^۳}{} + \text{وغیرہ} \right\}^{\frac{۱}{ن}} \text{اگر } ط - ۱ - \frac{۱}{۲}(ط-۱)^۲ + \text{وغیرہ} = ۱$$

$$= ۱ + \frac{۱}{ن}(۱ن + \frac{ن^۲}{} + \text{وغیرہ}) + \frac{۱}{ن} \cdot \frac{\frac{۱}{ن}-۱}{۲}(۱ن + بن^۲ + \text{وغیرہ})^۲ + \text{وغیرہ}$$

$$= ۱ + ۱(۱ + بن + \text{وغیرہ}) + ۱\frac{۱-ن}{۲}(۱ + بن + \text{وغیرہ})^۲ + \text{وغیرہ}$$

اب چونکہ ط کو کچھ تعلق ن سے نہین ہی تو معلوم ہوا کہ ن کی لیئے کوی قیمت فرض کرسکتے ہین اور
∴ فرض کرو کہ ن = ۰ اور اسیواسطے

$$ط^۱ = ۱ + ۱^۱ + \frac{۱^۲}{۲\times۱} + \frac{۱^۳}{۳\times۲\times۱} + \text{وغیرہ}$$

حکم اگر ی ہو ویسے وہ قیمت ط کی کہ جسکی ذریعہ سی آ مساوی عدد آ کے ہوجاتا ہی تو ظاہر ہی کہ

$$ی^۱ = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱^۲}{۲\times۱} + \frac{۱^۳}{۳\times۲\times۱} + \text{وغیرہ}$$ پس معلوم ہوا کہ اگر فرض کرین لا = ۱ تو

$$ی = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲\times۱} + \frac{۱}{۳\times۲\times۱} + \text{وغیرہ} = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸$$

فصل تیسری لوگارثم کے بیان مین حدود اور خواص لوگارثم کی پہلی لکھی جاتے ہین

ان دوسلسلون مقادیر مین ط ط′ ط″ ط‴ ط⁗ وغیرہ (۱) اور ی ی′ ی″ ی‴ ی⁗ وغیرہ (ب)
کہ جنمین ط تو ایک مقدار منقطع ہی اور ی ی′ ی″ وغیرہ مقادیر غیر منقطع ہین مقادیر سلسلہ (ب) کو لوکارسم
مقادیر سلسلہ (۱) کا کہتے ہین مثلاً ی لوکارسم ط کا ہی اور ی′ لوکارسم ط′ کا ہی اور اسی قیاس پر
اور اگر فرض کرین ہم ط = لا اور ط′ = لا′ اور ط″ = لا″ وغیرہ تو ی = لوگ* لا اور
ی′ = لوگ لا′ اور ی″ = لوگ لا″ اور اسی قیاس پر تا کہ مقادیر سلسلہ (۱) کی مساوی ہوسکین
عددون ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ وغیرہ کے تو ضرور ہی کہ عدد مفروض ط زیادہ ہو ہر ایک سی اور اول
نشان قوسنے ی مساوی ہو صفر سے اور نشان قوسثانی کے ی′ ی″ ی‴ وغیرہ ہمیشہ زیادہ ہوتے
ہین چونکہ بموجب گذشتہ کی ط = ۱ تو اسیواسطے یہہ سلسلہ ہمیشہ زیادہ ہوگا ایک سی اب ظاہر ہی کہ

* لوگ اختصار ہی لفظ لوکارسم کا

فرض کرسکتی ہین ہم واسطے ان $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ کے ایسی مقدار کہ سلسلہ $ط^{\frac{1}{2}}$ $ط^{\frac{1}{3}}$ $ط^{\frac{1}{4}}$ $ط^{\frac{1}{5}}$ منطبق ہوسکے سلسلہ عددون ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ وغیرہ کے یعنی $ط^{\frac{1}{2}} = ۲$ اور $ط^{\frac{1}{3}} = ۳$ اور اسی قیاس پر مثلاً فرض کرو ط = ۱۰ اور چونکہ $۱۰^{\frac{1}{2}} = ۱$ اور $۱۰^{۱} = ۱۰$ تو معلوم ہوا کہ ویسے نشان قوت من ۱۰ کے جو کرین گے $۱۰^{\frac{1}{2}}$ $۱۰^{\frac{1}{3}}$ $۱۰^{\frac{1}{4}}$ $۱۰^{\frac{1}{5}}$ وغیرہ کو مساوی ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ وغیرہ تک ضرور ہین کہ واقع ہون مابین ۱ اور ۲ کے مثلاً فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا لوگارسم عدد ۵ کی اب $۱۰^{\frac{1}{2}} = \sqrt{۱۰} = \sqrt[۳]{۱۰۰} = ۴٫۶۴$ اور اس سے یہہ نتیجہ نکالتی ہین ہم اگر فرض کرین ہم نشان قوت ۱۰ کا ایک کسر کچھہ زیادہ $\frac{۲}{۳}$ (= ۶۶۶۶۶۶ وغیرہ) سی تو حاصل ہوگا $۱۰^{\frac{۲}{۳}} = ۵$ حساب سے معلوم ہوا ہی کہ کسر مذکور یہہ ہی ۶۹۸۹۷۰۰ بہت قریب اور اسی سبب سے $۱۰^{۰٫۶۹۸۹۷۰۰} = ۵$ یعنے جسوقت ط = ۱۰ لوگارسم ۵ کی ہی ۰٫۶۹۸۹۷۰۰ مرقومہ بالا سے واضح ہی کہ مختلف قسم کے لوگارسم ہوسکتے ہین یعنے اگر ط = ۱۰ تو لوگارسم جو اس فرض سے حاصل ہونگی ویسے ایک قسم کی ہونگی اور اگر ط = ۲۰ تو لوگارسم جواب حاصل ہونگی وہ ایک اور قسم کی ہونگی لیکن چونکہ ظ = ۱۰ تو اس سے معلوم ہوا کہ ہر قسم کی لوگارسم مین لوگارسم آ کی صفر ہوتی ہی عدد ط کہلاتا ہی عدد بنیادی اوس قسم کی لوگارسم کا جسکو تعلق رکھتا ہی چونکہ بموجب مرقومہ گزشتہ کی سے $ط^{ی} \times ط^{ی'} = ط^{ی+ی'}$ تو معلوم ہوا کہ دو یا زیادہ عددون کے حاصلضرب کی لوگارسم مساوی ہوتی ہی حاصل جمع اون عددون کے الگ الگ لوگارسم کے چونکہ $\frac{ط^{ی}}{ط^{ی'}} = ط^{ی-ی'}$ تو معلوم ہوا کہ دو عددون کے خارج قسمت کی لوگارسم مساوی ہوتی ہی بقیے الگ الگ لوگارسم کی حاصل تفریق کی اور یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ لوگارسم ایک کسر کی مساوی ہی اوسکی جو حاصل تفریق کرنی سے لوگارسم نسب نما کی لوگارسم شمار کنندہ سی اور اس سے یہہ ظاہر ہوا کہ لوگارسم ایک کسر مناسب* کی ہمیشہ منفی ہوتی ہی

چونکہ $ط^{ی} \times ط^{ی'} \times ط^{ی''} \ldots\ldots$ لا تک $= ط^{ی+ی'+ی''} \ldots\ldots$ لا تک $= ط^{لا ی}$ اور اسیطرح چونکہ $\sqrt[ن]{ط^{ی}} = ط^{\frac{ی}{ن}}$ تو معلوم ہوا کہ لوگارسم لا کتنی قوت کسی عدد کی دریافت ہوسکتی ہی ضرب دینی سے اوس عدد کی لوگارسم کو لا مین اور لوگارسم نزول کسی عدد کی لا کتنی مرتبہ تک دریافت ہوسکتی ہی تقسیم کرنی سے اوس عدد کی لوگارسم کو لا پر اگر سلسلہ (۱) مشتمل ہو مقدارون اس صورت کی سے $ط^{لا}$ $ط^{۲لا}$ $ط^{۳لا}$ $ط^{۴لا}$ $ط^{۵لا} \ldots\ldots$ $ط^{مlا}$ تو انکی مطابق مقدار سلسلہ (ب) کی ہونگی لا ۲لا ۳لا ۴لا ۵لا $\ldots\ldots\ldots\ldots$ مlا

---

* یعنے وہ کسر جسکا شمار کنندہ نسب نما سی کم ہی

یعنی اگر ایک سلسلہ مقادیر ضرب اور تقسیم کا ہو تو اون مقادیر کی لوگارسم بجائے ایک سلسلہ جمع اور تفریق کا

لوگارتم کی نکالنی کی ترکیب کا بیان

فرض کرو کہ $1+م$ کوئی عدد ہی اور اوسکی لوگارسم $ط$ ہی تو بموجب مرقومہ بالا کی $ط = 1+م$ اور فرض کیا $ر$ و $ط = 1+ص$ تو اب چاہتے ہین حل کرنا مساوات $(1+ص)^{ر} = 1+م$ کو جسمین $ر$ ایک مقدار مجہول ہی ر کتنا صعود دو نوطرف اس مساوات کا دریافت کرو تب $(1+ص)^{ر} = (1+م)^{ر}$ یعنے

$$1 + ر ص + \frac{ر(ر-1)}{2} ص^{2} + \frac{ر(ر-1)(ر-2)}{3\times 2} ص^{3} + \text{وغیرہ} =$$

$$1 + رم + \frac{ر(ر-1)}{2} م^{2} + \frac{ر(ر-1)(ر-2)}{3\times 2} م^{3} + \text{وغیرہ}$$

نکال ڈالو 1 کو دونوطرف اس مساوات سے اور تقسیم کرو اونہین $ر$ پر تو

$$ر\left(ص + \frac{ر-1}{2} ص^{2} + \frac{(ر-1)(ر-2)}{3\times 2} ص^{3} + \text{وغیرہ}\right) =$$

$$م + \frac{ر-1}{2} م^{2} + \frac{(ر-1)(ر-2)}{3\times 2} م^{3} + \text{وغیرہ}$$

اب فرض کرو کہ $ر = 0$ تو حاصل ہوتا ہی ہمین

$$ر\left(ص - \frac{1}{2} ص^{2} + \frac{1}{3} ص^{3} - \frac{1}{4} ص^{4} + \text{وغیرہ}\right)$$

$$= م - \frac{1}{2} م^{2} + \frac{1}{3} م^{3} - \frac{1}{4} م^{4} + \text{وغیرہ}$$

یعنے $ر = \text{لوگ}\,(1+م) = \dfrac{م - \frac{1}{2} م^{2} + \frac{1}{3} م^{3} - \frac{1}{4} م^{4} + \text{وغیرہ}}{ص - \frac{1}{2} ص^{2} + \frac{1}{3} ص^{3} - \frac{1}{4} ص^{4} + \text{وغیرہ}}$

$$= \frac{م - \frac{1}{2} م^{2} + \frac{1}{3} م^{3} - \frac{1}{4} م^{4} + \text{وغیرہ}}{(ط-1) - \frac{1}{2}(ط-1)^{2} + \frac{1}{3}(ط-1)^{3} - \text{وغیرہ}}$$

$$= ع\left(م - \frac{1}{2} م^{2} + \frac{1}{3} م^{3} - \frac{1}{4} م^{4} + \text{وغیرہ}\right)$$

اگر فرض کرین ہم $ع = \dfrac{1}{(ط-1) - \frac{1}{2}(ط-1)^{2} + \frac{1}{3}(ط-1)^{3} - \text{وغیرہ}}$

اور یہہ بات تم یاد رکھو کہ اگر ہم نہ فرض کرین م کو ایک چھوٹی کسر تو یہہ بات خوب ظاہر ہی کہ سلسلہ

جو حاصل ہو اسی واسطے قیمت آ کی تمام ایسی جلدی سی نہین ہوگا کہ مجموعہ چند رقمون سلسلہ مذکور کا کافی ہو جاوے واسطے قیمت آ مذکور کے *

خواسیواسطے فرض کرو کہ م = $\frac{۱}{ل-۱}$ یہان ل = ہی ایک عدد کے جو زیادہ ہی ۲ سے تب

$$\frac{۱+م}{۱-م} = \frac{۱+\frac{۱}{ل-۱}}{۱-\frac{۱}{ل-۱}} = \frac{ل}{ل-۲}$$ اور لوگ (۱+م) — لوگ (۱-م)

= لوگ ل — لوگ (ل-۲) اب لوگ (۱+م) = ... (۱)

ع (م - $\frac{۱}{۲}$ م^۲ + $\frac{۱}{۳}$ م^۳ - $\frac{۱}{۴}$ م^۴ + $\frac{۱}{۵}$ م^۵ - وغیرہ) بجای آم کے مندرج کیا ہمنی — م

اسس مساوات مین تو لوگ (۱-م) = ع (-م - $\frac{۱}{۲}$ م^۲ - $\frac{۱}{۳}$ م^۳ - $\frac{۱}{۴}$ م^۴ - $\frac{۱}{۵}$ م^۵ - وغیرہ) تفریق کیا ہمنی مساوات اول سے دوسری کو تو

لوگ (۱+م) — لوگ (۱-م) = ۲ع (م + $\frac{۱}{۳}$ م^۳ + $\frac{۱}{۵}$ م^۵ + وغیرہ) یعنی

لوگ ل — لوگ (ل-۲) = ۲ع (م + $\frac{۱}{۳}$ م^۳ + $\frac{۱}{۵}$ م^۵ + وغیرہ)

اور لوگ ل = ۲ع (م + $\frac{۱}{۳}$ م^۳ + $\frac{۱}{۵}$ م^۵ + وغیرہ) + لوگ (ل-۲) (ط)

جسوقت کوئی قیمت واسطی ع کے مقرر ہو تو سلسلہ بالا بہت خوب سلسلہ ہو جاتا ہی واسطے بنانی ایک کتاب لوگارسم کی

ترکیب بنانے لوگارتم کی کتاب کی

چونکہ ط کو کچھی فرض کر سکتے ہین تو اول فرض کرو اسسے ایسا

کہ (ط-۱) - $\frac{۱}{۲}$ (ط-۱)^۲ + $\frac{۱}{۳}$ (ط-۱)^۳ - وغیرہ یعنی $\frac{۱}{ع}$ کہ مساوی لہ اسکا ہی مساوی آسکے ہو اور اسس صورت مین مساوات مرقومہ بالا ہو جاویگی اسس شکل کی

لوگ ل = ۲ ($\frac{۱}{ل-۱}$ + $\frac{۱}{۳(ل-۱)^۳}$ + $\frac{۱}{۵(ل-۱)^۵}$ + وغیرہ) + لوگ (ل-۲)

لیکن چونکہ ل کا زیادہ ہونا ضرور ہی ۲ سے تو اول لازم ہی ہمین دریافت کرنا لوگارتم ۲ کا پہلے بنانے

---

* اگر ایک سلسلہ اس صورت کا ہو ۱ + $\frac{۱}{۳}$ + $\frac{۱}{۹}$ + $\frac{۱}{۲۷}$ + وغیرہ تو ظاہر ہی کہ یہہ سلسلہ اختتام کی نہین مایل ہی اور چونکہ سلسلہ لا انتہا ہی تو اسکی جمع نہین ہو سکتی اس سلسلہ کو سلسلہ دار کہتے ہین اور اگر ایک سلسلہ اس شکل کا ہو ۱ + $\frac{۱}{۱۰}$ + $\frac{۱}{۱۰۰}$ + $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ وغیرہ تو ظاہر ہی کہ یہہ سلسلہ مایل باختتام ہی کہ اگر اسکی چند رقمین جمع کرین تو اوس مقدار کی جو مساوی ہی اس سلسلہ کی بہت قریب معلوم ہو سکتی ہی اور اس سلسلہ کو سلسلہ کوتہ کہتے ہین

کتاب لوگارثم کی اسیواسطے فرض کرو

ل = ۴ تو لوگ ۴ = لوگ $۲^{۲}$ = ۲ لوگ ۲ = ۲ ($\frac{۱}{۳}$ + $\frac{۱}{۳\times۳^{۳}}$ + $\frac{۱}{۵\times۳^{۵}}$ + وغیرہ)

+ لوگ ۲ لگا لو دونوطرف اسمساوات کی سی لوگ ۳ کو تو

لوگ ۲ = ۲ ($\frac{۱}{۳}$ + $\frac{۱}{۳\times۳^{۳}}$ + $\frac{۱}{۵\times۳^{۵}}$ + وغیرہ ۷ رقمون تک) = ۰٫۶۹۳۱۴۷۲

اسطرح سیے حاصل کرکے لوگارثم ۲ کی اگر فرض کرین ہم پی در پی واسطے ل کی تمام اعداد اصلی یعنے اعداد جو ہنین پورے قسمت ہوسکتے ہین کسی عدد پر سوای اپنی اور عدد ایک کی تو معلوم ہوجائینگی ہمین لوگارثم اون سب اعداد کی اور بوسیلہ خواص لوگارثم کے دریافت کرسکتے ہین ہم لوگارثم اور عددون کی بہت سہولت سیے مثلاً

لوگ	
۱ = ...	= ..... ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰
۲ = ...	۰٫۶۹۳۱۴۷۲
۳ = ۲ ($\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۳\times۳^{۳}}$ + $\frac{۲}{۵\times۳^{۵}}$ + وغیرہ ۱۰ رقمون تک) + لوگ آر (۰)	= ۱٫۰۹۸۶۱۲۳
۴ = ۲ لوگ ۲ = ...	۱٫۳۸۶۲۹۴۴

لوگ

۵ = ۲ ($\frac{۱}{۴}$ + $\frac{۱}{۴\times۳^{۴}}$ + $\frac{۱}{۵\times۴^{۵}}$ + وغیرہ + ۶ رقمون تک) + لوگ ۳	= ۱٫۶۰۹۴۳۷۹
۶ = لوگ ۲ + لوگ ۳ = ...	= ۱٫۷۹۱۷۵۹۵
۷ = ۲ ($\frac{۱}{۴}$ + $\frac{۱}{۴\times۳^{۴}}$ + $\frac{۱}{۵\times۴^{۵}}$ + $\frac{۱}{۶\times۷^{۶}}$) + لوگ ۵	= ۱٫۹۴۵۹۱۰۱
۸ = لوگ ۴ + لوگ ۲ یا لوگ $۲^{۳}$ = ۳ لوگ ۲	= ۲٫۰۷۹۴۴۱۵
۹ = لوگ $۳^{۲}$ = ۲ لوگ ۳	= ۲٫۱۹۷۲۲۴۶
۱۰ = لوگ ۵ + لوگ ۲	= ۲٫۳۰۲۵۸۵۱
وغیرہ = وغیرہ	= وغیرہ

اس قسم کی لوگارسم کہ جو بنی ہین فرض کرنی سیے ع = اسکے لوگارثم نیپری کہلاتی ہین کیونکہ نیپر صاحب نے اونہین ایجاد کیا تہا اسی قسم کی لوگارثم کو لوگارثم بعید البیضوی بہی کہتے ہین کیونکہ وہ تعلق رکھتے ہین مساحت بعید البیضوی مساوی القطرین کی سیے سوای لوگارثم نیپر کی ایک اور قسم کی بہی لوگارسم ہوتی ہین جسکو لوگارسم مروج کہتے ہین اس قسم کی لوگارسم مین ط فرض کیا گیا ہی = ۱۰

∴ ط$^{\overline{۱}}$ = ۰۰۱ اور ط$^{\overline{۲}}$ = ۰۰۰۱ اور ط$^{\overline{۳}}$ = ۰۰۰۰۱ اور اس سے یہہ معلوم ہوا کہ اعداد ۰۰۱ ۰۰۰۱ ۰۰۰۰۱ وغیرہ کی لوگارسم $\overline{۱}$ $\overline{۲}$ $\overline{۳}$ $\overline{۴}$ وغیرہ ہین تاکہ معلوم ہوجاوے ہمین لوگارسم اون اعداد کی جو واقع ہین مابین عددون ۱۰ اور ۰۰۱ کے اور ۰۰۱ اور ۰۰۰۱ کی وغیرہ لازم ہی ہمین اول دریافت کرنا قیمت ع کی جسوقت ط = ۱۰ اور اوسکی ترکیب یہہ ہی اوسقسم کی لوگارثم جنکا عدد مضروب فیہ ع ہی

لوگ (۱+م) = ع (م − ½ م^{۲} + ⅓ م^{۳} − وغیرہ) اور لوگارثم نیپری مین

لوگ (۱+م) = م − ½ م^{۲} + ⅓ م^{۳} − وغیرہ تو معلوم ہوا کہ اوسقسم کی لوگارثم مین جنمین عدد مضروب فیہ = ع کی ہی لوگ (۱+م) = ع × نیپری لوگ (۱+م) اب لوگارثم مروج مین ۱+م = ۱۰

تو لوگ ۱۰ = ع × نیپری لوگ ۱۰ یعنے ۱ = ع × ۲۳۰۲۵۸۵۱

$$ع = \frac{۱}{۲۳۰۲۵۸۵۱} = ۴۳۴۲۹۴۴۸$$

تاکہ دریافت ہوجاوے ہمین لوگارثم مروج اعداد کی جاہئے ہمین لکھنا اس قیمت ع کو مساوات (ط) مین تو حاصل ہوتا ہی

لوگ ل = ۴۳۴۲۹۴۴۸ × (۱/(ل−۱) + ۱/۲(ل−۱)^{۲} + ۱/۳(ل−۱)^{۳} + وغیرہ)

+ لوگ (ل − ۲) ..... (۲)

اور اگر ہم فرض کرین پی در پے اعداد اصلی واسطی آ کے تو بوسیلہ اس مساوات کی فہرست ذیل بن جاویگی

لوگ مروج ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ (۱/۲ + ۱/۳×۲^{۳} + ۱/۵×۲^{۵} + وغیرہ ۱۰ رقمون تک) = ۶۹۳۱۴۷۱۸۰

۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ (۱/۲ + ۱/۳×۲^{۲} + ۱/۵×۲^{۴} + وغیرہ ۱۰ رقمون تک) = ۱۱۷۶۱۲۷۷۴

۴ = ۲ لوگ ۲ ..... = ۶۰۲۰۶۰۰

۵ = لوگ ۱۰/۲ = لوگ ۱۰ − لوگ ۲ = ۱ − لوگ ۲ ..... = ۸۹۷۰۰۰۰

۶ = لوگ ۳ + لوگ ۲ ..... = ۷۷۸۱۵۱۳

۷ = ۸۴۵۰۹۸ + لوگ ۵ (۱/۷ + ۱/۴×۷^{۴} + ۱/۵×۷^{۵} + ۱/۶×۷^{۶} + وغیرہ)

اسیطرح سب اعداد اصلی کی لوگارسم دریافت ہوسکتی ہین اور ظاہر ہی کہ جتنے اعداد بڑھتے ہونگی اوتنی ہی کم رقمین سلسلہ مین ضرور ہونگی واسطے دریافت کرنے اونکی لوگارثم کی ۰۰۰۰ سے آگے صرف آہی رقم ضرور ہونگی وہ قیمت ط کی جسکی وسطے سے سلسلہ (ط − ۱) − (ط−۱)^{۲}/۲ + وغیرہ مساوی آ کے ہوجاوے سلسلہ غیر مقررہ مین جو فصل گذشتہ مین ثابت ہوا ہی دریافت ہوئی ہی

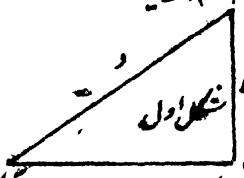
فصل چوتھی بیچ بیان حل کرنے سوالات ہندسی کے بوسیلہ جبر و مقابلہ کے

حدود

مثلث قایم الزاویہ کی طرفون کو ریاضی والون نے علیحدہ علیحدہ نام رکھا ہی جو طرف کہ واقع ہوتی ہی سامنی قایمہ کے اوسیے وتر کہتے ہین اور باقی دو طرفون مین سے ایک کو قاعدہ اور دوسری کو عمود کہتے ہین اگر ایک شکل چار ضلع کی ہو اور اوسکے سامنی کے دو گوشون مین ایک خط مستقیم وصل کیا جاے تو اوس خط کو قطر بسط کہتے ہین اگر ایک مثلث کی ایک طرف کو ہم قاعدہ مقرر کرین تو جس نقطہ پر باقی دو ضلعے المسیمین قاطع کرین اوس نقطہ کو راس مثلث کی کہتے ہین اور اگر خط عمود راس سے قاعدہ پر کھینچا جاوے اوس خط کو ارتفاع مثلث کہتے ہین ظاہر ہی کہ یہہ عمود تقسیم کرتا ہی قاعدہ کو دو حصون مین اور ہر دو ان حصون کو بازو کہتے ہین جو چھوٹا ہی اوس سے بازو خورد کہتے ہین اور جو حصہ بڑا ہی اوسیے بازو کلان کہتے ہین

سوالات مثلثون کے

سوال ۱ آ ب س ایک مثلث قایم الزاویہ ہی فرض کرو کہ معلوم ہی ہین قاعدہ ب س اور مجموعہ وتر آ س اور عمود آ ب کا دریافت کرنا چاہتے ہین ہم علیحدہ علیحدہ مقدار عمود اور وتر کی سوال سے واضح ہی کہ عمود اور وتر مقدارین لا مجہول ہین اور اسیواسطی فرض کرو عمود آ ب = لا اور وتر ب



آ س = د لیکن مجموعہ عمود اور وتر کا اور مقدار قاعدہ کی معلوم ہی فرض کرو مجموعہ = ح اور قاعدہ = ط تب لا + د = ح لیکن بحکم ۷ ۴ شکل اول مقدار اقلیدس کے لا² + ط² = د² لیکن لا = ح - د

اور لا² = ح² - ۲ ح د + د² اور بہی لا² = د² - ط² تو ح² - ۲ ح د + د² = د² - ط²

اور ح² - ۲ ح د = - ط² اور ۲ ح د = ح² + ط² اور د = $\frac{ح^2 + ط^2}{۲ ح}$ لیکن

لا = ح - د = ح - $\frac{ح^2 + ط^2}{۲ ح}$ = $\frac{ح^2 - ط^2}{۲ ح}$ اگر ایک مثلث قایم الزاویہ کا قاعدہ = ط اور فرق اوسکے وتر اور عمود کا = ص تو اوسکے وتر اور عمود کے علیحدہ علیحدہ الگ الگ کیا ہی فرض کرو کہ عمود = لا تب وتر = لا + ص اور لا² + ط² = (لا + ص)² = لا² + ۲ لا ص اور لا = $\frac{ط^2 - ص^2}{۲ ص}$

ایک عمیب مربع ہی کہ فرق اوسکے ایک طرف اور قطر کا = ط اور ہم دریافت کرنا چاہتے ہین سب اضلاع مربع کی فرض کرو کہ ایک ضلع مربع کا = لا تب موافق شرایط سوال کے قطر مربع کا = لا + ط کے اور

لا² + ط² = ۲ لا² = لا² + ۲ لا ط + ط² اور

لا² - ۲ لا ط = ط² اور لا² - ۲ ط لا + ط² = ط² + ط² = ۲ ط² اور لا - ط = $\sqrt{۲ ط^2}$ = ط $\sqrt{۲}$ اور لا = ط + ط $\sqrt{۲}$

۳ ایک ایسا مستطیل ہو کہ نصف محیط اوسکی اضلاع کا = س اور قطر اوسکا = ط ہم جانا چاہتے ہین مقدار ہر ضلع کی علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ اوسکا عرض = لا تو بموجب شرایط سوال کے

س − لا = طول اور (س − لا)² + لا² = ط² اور س² − ۲ س لا + لا² + لا² = ط²

∴ ۲ لا² − ۲ س لا = ط² − س² تقسیم کرو دونو طرف اس مساوات کو ب

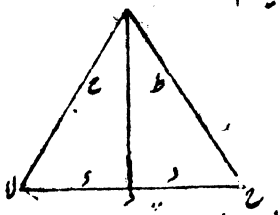
لا² − س لا = $\frac{ط^2 - س^2}{2}$ اور حل کرنے اس درجہ دویم کی مساوات سی ہم پاتے ہین

لا² − س لا + $\frac{س^2}{4}$ = $\frac{ط^2 - س^2}{2}$ + $\frac{س^2}{4}$ = $\frac{2ط^2 - س^2}{4}$ اور

لا − $\frac{س}{2}$ = ± $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2ط^2 - س^2}$ اور

لا = $\frac{س}{2}$ ± $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2ط^2 - س^2}$

۴ معلوم ہن ہمین سب اضلاع ایک مثلث کی اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنا مقدار ارتفاع مثلث کی مثلاً فرض کرو مثلث ب ح لا کا



خط ب ح معلوم ہی = ط اور ب لا = ح

اور قاعدہ ح لا = س کیا ہی مقدار عمود

ب د کے فرض کرو مجہول مقدار ب د = لا اور مجہول ح د = د اور د لا = ء تب

$$\begin{cases} د + ء = س \\ لا^2 + د^2 = ط^2 \\ \text{اور } لا^2 + ء^2 = ح^2 \end{cases}$$

اور تفریق کرو تیسری مساوات کو دوسری مساوات مین سی اور حاصل یہہ ہی د² − ء² = ط² − ح²

لیکن چونکہ د + ء = س تو د = س − ء اور

د² = (س − ء)² = س² − ۲ س ء + ء² اور اس قیمت د² کو مساوات

د² − ء² = ط² − ح² مین لکھو تب س² − ۲ س ء + ء² − ء² = س² − ۲ س ء = ط² − ح²

اور س² + ح² − ط² = ۲ س ء اور ء = $\frac{س^2 + ح^2 - ط^2}{2س}$ اور

$$د = س - ء = س - \frac{س^۲ + ح^۲ - ط^۲}{۲س} = \frac{س^۲ + ط^۲ - ح^۲}{۲س} \quad \text{لیکن}$$

$$ط^۲ - د^۲ = ط^۲ - \left(\frac{س^۲ + ط^۲ - ح^۲}{۲س}\right)^۲ = لا^۲ \quad \text{اور} \quad لا = \pm \sqrt{ط^۲ - \left(\frac{س^۲ + ط^۲ - ح^۲}{۲س}\right)^۲}$$

مثلاً ایک ایسا مثلث ہی کہ مقدار ایک اوسکی ضلع کی ۱۰ ہی اور دوسریکی ۱۷ اور مقدار قاعدہ کی ۲۱ بتاؤ کیا مقدار ہی ارتفاع مثلث کی اور قاعدہ اور دو بازو کے اس صورت مین

ط = ۱۰ اور ح = ۱۷ اور س = ۲۱ تو

$$لا = \pm \sqrt{۱۰۰ - \left(\frac{۲۸۹ - ۱۰۰ + ۴۴۱}{۴۲}\right)^۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

$$\text{ارتفاع اور } د = \frac{س^۲ + ط^۲ - ح^۲}{۲س} = \frac{۴۴۱ + ۱۰۰ - ۲۸۹}{۴۲} = ۶$$

اور ء = ۲۱ - ۶ = ۱۵ شکل ۱۴ اول مقدار سی ثابت ہوا ہی کہ اگر ایک مثلث کی قاعدہ اور ارتفاع کو اپسمین ضرب دو تو نصف حاصل ضرب مساحت مثلث کی ہوتی ہی اور چونکہ بموجب قاعدہ مرقومہ بالا کی جب تین ضلعے ایک مثلث کی معلوم ہون تو اوسکی ارتفاع معلوم ہوسکتی ہی تو یہہ ظاہر ہی کہ اگر اس ارتفاع کو قاعدہ مین ضرب دین تو مساحت بہی اوس مثلث کی معلوم ہوجائیگی مثلاً مثال مرقومہ بالا مین ارتفاع اوس مثلث کی جسکی دو طرف تو ۱۰ اور ۱۷ ہین اور قاعدہ ۲۱ ہی ۸ معلوم ہوئی ہی اور اگر ارتفاع کو یعنی ۸ کو قاعدہ مین یعنے ۲۱ مین ضرب دین تو حاصل ضرب ۱۶۸ ہوتا ہی اور نصف اسکا یعنی ۸۴ مثلث کی ہی چونکہ ہر شکل کیسی ہی بے قاعدہ ہو مثلثون مین تقسیم ہوسکتی ہی تو بوسیلہ مساحت مثلث کی ہم سب شکلون مستقیم الاضلاع کی مساحت معلوم کرسکتے ہین مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ ارتفاع مثلث کی یعنی

$$لا = \pm \sqrt{ط^۲ - \frac{(س^۲ + ط^۲ - ح^۲)^۲}{۴س^۲}} \quad \text{تو}$$

$$لا^۲ = ط^۲ - \frac{(س^۲ + ط^۲ - ح^۲)^۲}{۴س^۲} = \frac{۴س^۲ط^۲ - (س^۲ + ط^۲ - ح^۲)^۲}{۴س^۲}$$

$$= \frac{(۲سط + س^۲ + ط^۲ - ح^۲)(۲سط - س^۲ - ط^۲ + ح^۲)}{۴س^۲}$$

$$= \frac{((س+ط)^۲ - ح^۲) \times (ح^۲ - (ط-س)^۲)}{۴ س^۲}$$

$$= \frac{(س+ط+ح) \times (س+ط-ح)(ح+ط-س)(ح+س-ط)}{۴ س^۲}$$

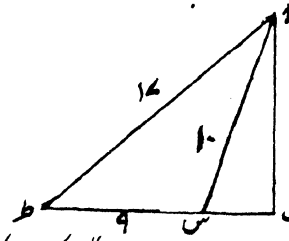
اور $\frac{لاس}{۲} = \frac{۱}{۲}$ $\sqrt{\frac{(س+ط+ح)}{۲} \frac{(س+ط-ح)}{۲} \frac{(ح+ط-س)}{۲} \frac{(ح+س-ط)}{۲}}$

$$= \sqrt{\frac{(س+ط+ح)}{۲} \frac{(س+ط-ح)}{۲} \frac{(ح+ط-س)}{۲} \frac{(ح+س-ط)}{۲}}$$

اور اگر فرض کریں کہ $\frac{س+ط+ح}{۲} = ص$ تو سطح مثلث

$$= لا \times \frac{س}{۲} = \sqrt{ص(ص-ح)(ص-س)(ص-ط)} \quad \ldots\ldots (۱)$$

مثال ۱ ایک شخص ایک مکان کی چھت پر جانے کی لیئے نردبان کہ اوسکا طول ۱۰ گز تھا لگایا چاہتا تھا لیکن اتفاقاً نردبان ۲ گز کم لگی اگر وہ ۲ گز زیادہ ہوتی تو چھت تک پہونچتی اب شخص مذکور مکان کی طرف ۹ گز گیا تب نردبان چھت تک پہونچی بتاؤ مکان کی کیا بلندی ہے اور شخص مذکور اول دفع مکان مذکور سے کتنے فاصلہ پر تھا اور دوسری دفع کتنے فاصلہ پر تھا فرض کرو کہ ا ب ہی مکان اور ا ط ایک خط مساوی ہی نردبان مع ۲ گز کے یعنی کل ۱۷ گز ہی اور ا س = نردبان = ۱۰ اور س ط = ۹ اب ظاہر ہی کہ معلوم ہین ہمین تینون ضلعی مثلث ا س ط کے تو بموجب قاعدہ سوال چہارم کے بازو

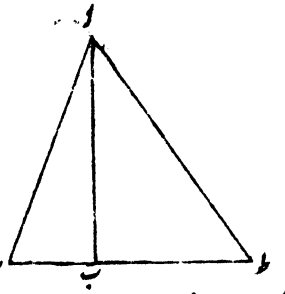


$$ب ط = \frac{۱۷^۲ + ۹^۲ - ۱۰^۲}{۹ \times ۲} = \frac{۲۸۹ - ۸۱ + ۱۰۰}{۹ \times ۲} = \frac{۲۷۰}{۱۸} = ۱۵$$

اور بلندی ا ب $= \sqrt{۱۷^۲ - ۱۵^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$ اور ب س $= ۱۵ - ۹ = ۶$

مثال ۲ دو شخص دو مخالف طرفون ایک مینار کی بفاصلہ ۲۱ گز کے سہتے ایک نی تو ۱۰ گز

کی نردبان لگائی اور دوسرے نے ۱۷ گز کی اور دونو کی نردبان جو ٹی میناتک پہونچین بتاو بلندی مینار کی اور فاصلہ ہر شخص کا مینار سے اب مینار ہی اور ط اور س دو شخص ہین اور نردبان ا س = ۱۰ گز اور نردبان ا ط = ۱۷ گز کے اور فاصلہ درمیان ط اور س کے = ۲۱ اب ظاہر ہی کہ معلوم ہین تین ضلعی ا ط اور ا س اور ط س مثلث ط ا س کے

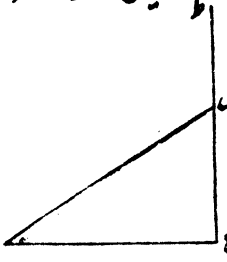


اور معلوم ہوسکتی ہی بلندی ا ب اور بازو ط ب اور ب س کی تو بموجب قاعدہ سوال چہارم کے

$$\text{ب س} = \frac{\text{۲۱}^{۲} + \text{۱۰}^{۲} - \text{۱۷}^{۲}}{\text{۲۱} \times \text{۲}} = \frac{۴۴۱ + ۱۰۰ - ۲۸۹}{۴۲} = \frac{۲۵۲}{۴۲} = ۶$$

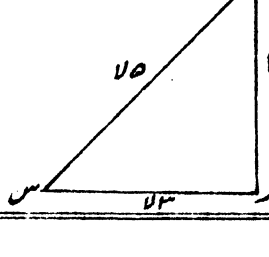
اور ط ب = ۲۱ − ۶ = ۱۵ اور ا ب = $\sqrt{\text{۱۰}^{۲} - ۶^{۲}} = \sqrt{۶۴} = ۸$

۳ ایک بانس کہ اوسکا طول ۸ گز تہا زمین مین گڑا ہوا تہا اندہی جو چلی وہ کسی جای بیچ مین سے ٹوٹ گیا اور اوسکا اوپر لا سرا زمین سے آ لگا بعد اسکی دریافت ہوا کہ فاصلہ درمیان دونو سرون کے ۴ گز تہا بتاو بانس کس جای سے ٹوٹا جو کہ معلوم ہی ہمین کہ ط ع یعنے س ع + س لا کہ حاصل جمع عمود اور وتر کا سی مساوی ۸ کے ہی اور ع لا یعنے س لا − س ع کہ حاصل تفریق مجذورون عمود اور وتر کا ہی مساوی ہی ۱۶ کے تو بموجب قاعدہ سوال اول کے س لا = $\frac{\frac{۱۶}{۸} + ۸}{۲} = \frac{۲ + ۸}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$



اور س ع = $\frac{۸ - \frac{۱۶}{۸}}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$ تو معلوم ہوا کہ بانس مذکور ۳ گز کی بلندی سے ٹوٹا

۴ ایک مینار پر ایک مور بیٹہا ہوا تہا اوسنے مینار کی جڑ مین ایک سانپ دیکہا اور سانپ نی اوسی دیکہا اور بہاگا اور مور اوسکی پکڑنی کے واسطی اوڑا رفتار ۵ گز فی پل سے اور سانپ کی رفتار ۳ گز تہی اور بلندی مینار کی ۲۰ گز تہا تو مور سانپ کو کتنی دیر مین پکڑیگا اور کتنی مسافت سانپ اور مور طی کریگی فرض کرو کہ لا = وقت مطلوبہ کی اور ا ب = مینار = ۲۰ تو ظاہر ہی کہ ر س = ۳ لا اور ا س = ۵ لا



$(۵\ لا)^۲ - (۳\ لا)^۲ = ۲۵\ لا^۲ - ۹\ لا^۲ = ۱۶\ لا^۲ = ۴۰۰$ اور

$\sqrt{۱۶\ لا^۲} = \sqrt{۴۰۰}$ یعنے $۴\ لا = ۲۰$ اور $لا = \frac{۲۰}{۴} = ۵$ = وقت مطلوب کے

$۳\ لا = ۳ \times ۵ = ۱۵$ = رس مسافت ساتب کے اور

$۵\ لا = ۵ \times ۵ = ۲۵$ = مسافت مور کے

۵ معلوم ہی ہین حاصل جمع اور حاصل تفریق وتر اور عمود ایک مثلث قائمہ الزاویہ کا چاہتے ہین ہم دریافت کرنا قیمت عمود اور قاعدہ اور وتر کی الگ الگ فرض کرو قاعدہ ح ب = د اور عمود ا ح = ی اور وتر ا ب = لا تو بموجب شرایط سوال کے $لا + ی = ط$ = مقدار معلوم کی اور $لا - ی = س$ = مقدار معلوم کے تو ظاہر ہی کہ $۲\ لا = ط + س$ اور $لا = \frac{ط+س}{۲}$ اور اسیطور سی $ی = \frac{ط-س}{۲}$ اور اگر ضرب دین ہم $لا + ی = ط$ کو $لا - ی = س$ مین تو حاصل ہوتا ہی $لا^۲ - ی^۲ = ط\ س$ لیکن $لا^۲ - ی^۲ = د^۲$ تو معلوم ہوا کہ

$د = \sqrt{لا^۲ - ی^۲} = \sqrt{ط\ س}$ مثلاً اگر حاصل جمع = ۸ اور حاصل تفریق

$= ۲$ تو $لا = \frac{ط+س}{۲} = \frac{۸+۲}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$ اور

$ی = \frac{ط-س}{۲} = \frac{۸-۲}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$ اور

$د = \sqrt{لا^۲ - ی^۲} = \sqrt{ط\ س} = \sqrt{۸ \times ۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$

۶ معلوم ہی ہین ایک مثلث قائمہ الزاویہ کے عمود کا ٹکڑا اور اوسکا قاعدہ اور جانتی ہین ہم کہ حاصل جمع قاعدہ اور باقی ٹکڑے عمود مذکور کا مساوی ہی حاصل جمع وتر اور پہلے ٹکڑے عمود کی چاہتے ہین دریافت کرنا وتر کو اور دوسری ٹکڑے عمود کو

معلوم ہی ہین ا ع = ط اور قاعدہ ب ح = س

اور جانتے ہین ہم کہ ا ع + ا ح = ع ب + ب ح

فرض کرو کہ ع ب اور ا ح کہ مقدار مجہول ہین

مساوی لا اور ی کے اب ظاہر ہی کہ $\sqrt{(ط + لا)^۲ + س^۲} = ی$

اور بموجب شرطون سوال کے $\sqrt{(ط+لا)^2+س^2}+ط=لا+س$

یعنے $\sqrt{(ط+لا)^2+س^2}=لا+س-ط$ مجدد کرکے دونوطرف اس مساوات کو

تو $(ط+لا)^2+س^2=(لا+س-ط)^2=$

$لا^2+2س لا-2ط لا-2س ط+س^2+ط^2$ یعنے

$ط^2+2ط لا+لا^2+س^2=لا^2+س^2+ط^2+2س لا-2ط لا-2س ط$ اور

$2ط لا=2س لا-2ط لا-2س ط$ یا $ط لا=س لا-ط لا-س ط$

اور $س لا-2ط لا=لا(س-2ط)=س ط$ اور $لا=\frac{س ط}{س-2ط}$

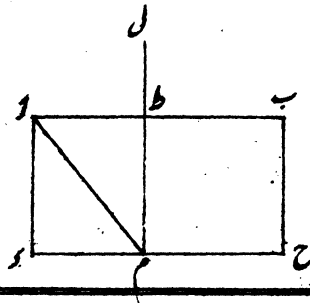
اور $ز=\sqrt{(ط+\frac{س ط}{س-2ط})^2+س^2}$ مثلاً فرض کرو کہ

$ط=2$ اور $س=6$ تو $لا=\frac{2\times 6}{6-4}=\frac{12}{2}=6$

$ز=\sqrt{(2\times 6)^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

مثال ۵ فرض کرتے ہین ہم کہ خانہ آب ایک مکان ہی اور مقام ح پر ایک دریچہ ہی اور آح ایک زینہ ہی دریچہ ح تک جسمین ایک شخص ہی اور مقام ح پر ایک دوسرا شخص ہی جس شخص نے پہلی شخص سی یہہ کہا آپ جلدی نیچے زینہ سی اتر آئیے ورنہ میں جواب دیا کہ خواہ مین اور جو کر لکڑی کے زینہ کی رستہ آؤن خواہ کھڑکی زینہ سی اوتر کی آؤن مجھے دونو صورتونمین مسافت ایک سی طے کرنی پڑیگی اب فرض کرو کہ معلوم ہی ہمین فاصلہ اء اور ب ح کا تو بتاؤ دریچہ زمین سی کتنا بلند ہی اور زینہ کا کیا طول ہی ظاہر ہی کہ یہہ سوال حل ہوسکتا ہی بعینہ بطور مرقومہ بالا کے

مثال ۱ ا ب ح ء ایک تالاب ہی اور ایک درخت ل م کا ہی ایک حصہ اوس درخت کا ط م تو پانی کے اندر ہی اور دوسرا حصہ ل ط باہر پانی کے اگر درخت ل م کو جھکا دین طرف کنارہ کے تو نقطہ ل کا منطبق ہوتا ہی آ پر اور درخت ل م خط آ م پر



جاتے ہین ہم مقدار ل ط اور ط آ کے بتاؤ درخت کا کتنا طول ہی اور وہ کتنا پانی کے اندر ہی فرض کرو ط ل اور ط آ کہ مقدارین معلوم ہین مساوی ط اور س کے اور فرض کرو ط م

کہ مقدار مجہول ہی مساوی لا کے تو ظاہر ہی کہ خط م ل یعنے

ا م = لا + ط اور لا۲ + س۲ = (لا + ط)۲ = لا۲ + ۲ لا ط + ط۲ یعنے

۲ لا ط + ط۲ = س۲ اور لا = $\frac{س^2 - ط^2}{2ط}$ = $\frac{(س+ط)(س-ط)}{2ط}$ اور طول درخت کا کہ مساوی

ا م کے ہی = لا + ط = $\frac{س^2 - ط^2}{2ط}$ + ط = $\frac{س^2 + ط^2}{2ط}$ مثلاً فرض کرو کہ جز درخت مذکور کا باہر

پانی کے = ۲ اور فاصلہ درخت کا کنارہ سے = ۶ تو ظاہر ہی کہ جز درخت کا کہ پانی کے اندر ہی

= $\frac{(۲+۶)(۶-۲)}{۲×۲}$ = $\frac{۳۲}{۴}$ = ۸

اور طول درخت = $\frac{۶^2 + ۲^2}{۲×۲}$ = $\frac{۴+۳۶}{۴}$ = $\frac{۴۰}{۴}$ = ۱۰

ضابطہ

۱ اگر فرض کرین ہم قاعدہ بڑی مثلث کا = س اور اوسکے ارتفاع = ط اور قاعدہ چھوٹی مثلث

کا = ص اور اوسکے ارتفاع = ع تو ظاہر ہی کہ سطح

بڑے مثلث کی = $\frac{ط س}{۲}$ اور سطح

چھوٹے مثلث کی = $\frac{ع ص}{۲}$

اور اگر فرض کرین ہم بڑے

مثلث کی سطح = ا اور چھوٹے

مثلث کی = ب تو ظاہر ہی کہ ا : ب :: $\frac{ط س}{۲}$: $\frac{ع ص}{۲}$ یعنی ا : ب :: ط س : ع ص اسسے یہہ معلوم

ہوا کہ ایک مثلث دوسرے مثلث سے وہ نسبت رکھتا ہی جو حاصل ضرب ارتفاع ایک مثلث کا اوسکی قاعدہ مین

نسبت رکھتا ہی حاصل ضرب ارتفاع دوسرے مثلث کی اوسکی ارتفاع مین اگر فرض کرین ہم کہ ط = ع تو مرقومہ

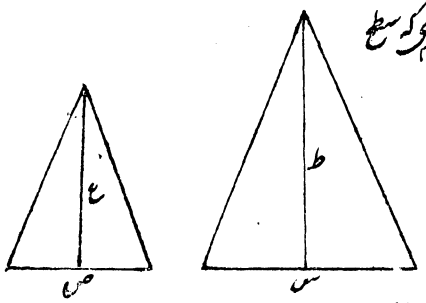
بالا سی ظاہر ہی کہ ا : ب :: ط س : ط ص یعنے ا : ب :: س : ص اسسے یہہ معلوم ہوا کہ اگر دو

مثلث ایسے ہون کہ اونکی ارتفاع برابر ہون تو وے ایک دوسری سے وہ نسبت رکھتے ہین جو اونکی

قاعدے اپسمین رکھتے ہین یہہ شکل ۶ مقالہ اقلیدس مین بیان کی گئی ہی اور چونکہ یہہ بہت فائدہ مند ہی اور اس

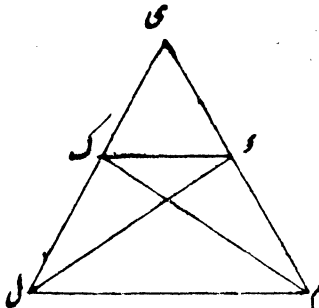
پر علم مثلث بہی موقوف ہی تو میں نے بوسیلہ دلائل جبریہ کی ثابت کیا تاکہ پڑہنی والون اس کتاب کو ضرورت

تحصیل ساری اقلیدس کی نہ پڑے



ضابطہ

۲ مثلث ی ل م مین فرض کرتے ہین ہم کہ خط ی ک متوازی ہی ل م سے کہ قاعدہ ہی مثلث کا تو ظاہر ہی

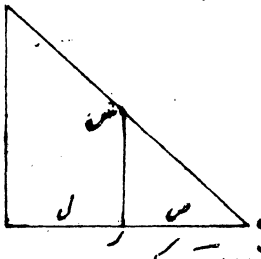


کہ مثلث وک م = مثلث وک ل سے کم اور اسی طرح ثابت کرتے ہیں ہم ہر ایک کو ان مثلثوں میں سے = ا اور مثلث ی وک = ب کی اب بموجب ضابطہ پہلی کے ظاہر ہی کہ

ی و : وم :: ب : ا اور ی ک : ک ل :: ب : ا

∴ ی و : وم :: ی ک : ک ل اور ی و + وم : ی و :: ی ک + ک ل : ی ک

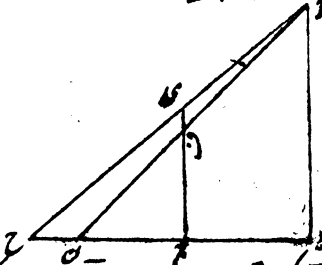
یعنے ی م : ی و :: ی ل : ی ک اور اگر منطبق کریں زاویہ ی ک کو اوپر زاویہ ی م ل کے تو ثابت ہوگا کہ ی م : م ل :: و ی : و ک اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہی کہ ی ک : ک و :: ی ل : ل م اس سے یہ معلوم ہوا کہ خط ی و اور ی ک چھوٹی مثلث ی وک کے متناسب ہیں خطوں ی م اور ی ل بڑی مثلث کی اور چونکہ بسبب متوازی ہونی خط وک کی خط م ل کے یہ دونوں مثلثیں اسی طرح متساوی الزوایا ہیں تو ظاہر ہوا کہ ہر مثلث متساوی الزوایا کی اضلاع متناسب ہوتی ہیں ہم اب بیان کرتے ہیں چند فوائد ضابطہ ۲ کے فرض کرو کہ ہیں ایک لکڑی بمقدار معلوم سطح زمین پر عمود ہی اور متوازی ہی ایک منارہ کے کہ لا ہی اور مقدار خط ح ب معلوم ہی اور ب پر قایم ہو کر س ا اور لا کا راس نمودار ہوتا ہی اس طرح کہ ا ب ایک خط مستقیم وصل ہو سکتا ہی درمیان نقطہ ب اور راسوں مذکورہ کے لا کو معلوم کرو



فرض کرو ب ر = ص اور ر ح = ل کے پس بسبب اسکی کہ بحکم ضابطہ ۲ کے

ص : س :: ص + ل : لا ∴ معلوم ہوا کہ $\frac{\text{س ص + س ل}}{\text{ص}}$ = لا وہو المراد اسی طور سے

ی ح ایک لکڑی متوازی منارہ آ ہ کے ہی اور ف ایک سوراخ لکڑی میں ہی اور اس منارہ کا مقام ن اور ح سے دکھائی دیتا ہی چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا بلندی منارہ کی اور اوسکا فاصلہ مقام ن ح اور ح سے پیمایش کرو خط ح ح اور ح ن اور ح ف



اور ح ی کو اور فرض کرو ح ح = س اور ح ن = ط اور ح ف = ص اور ی ح = ع اور فرض کرو کہ آ ہ اور ح ہ کہ مقدار مجہول ہیں = لا اور ر کے تو ظاہر ہی کہ بحکم ضابطہ (۲) کے

ط : ص :: ط + ر : لا یعنے $\frac{ص ر + ص ط}{ط}$ = لا اور

س ع : : س + : لا کو یعنے $\frac{ع س + ع ر}{س}$ = لا پس

$\frac{ص ر + ط ص}{ط}$ = $\frac{ع س + ع ر}{س}$ اور حاصل ضرب دونوں کا طرفین یہہ

ص ر + ص ط = $\frac{ع س ط + ط ع ر}{س}$ ہی اور حاصل ضرب ان دونوں کا س

مین ص ر س + ص ط س = ط ع س + ط ع ر اور

ص س ر − ط ع ر = ط ع س − ص ط س یعنے (ص س − ط ع) ر = س ط × (ع − ص)

اور بعد قسمت کی ص س − ط ع پر خارج قسمت ر = $\frac{س ط (ع - ص)}{ص س - ط ع}$ ہی

اور واسطے اختصار کی فرض کرو اس قیمت ر کو = ل کے چونکہ

ط : ص :: ط + ر : لا تو ط لا = ص ر + ص ط یعنے

ط لا − ط ص = ص ر اور $\frac{ط لا - ط ص}{ص}$ = ر اور چونکہ

س : ع : : س + ر : لا تو س لا = ع س + ع ر یعنے

س لا − ع س = ع ر اور $\frac{س لا - س ع}{ع}$ = ر پس ظاہر ہوا کہ

$\frac{ط لا - ط ص}{ص}$ = $\frac{س لا - س ع}{ع}$ اور حاصل ضرب دونون کا ص مین

یہہ ط لا − ط ص = $\frac{س ص لا - ص ع س}{ع}$ ہی اور حاصل ضرب اون دونون کا

ع مین یہہ ط ع لا − ط ص ع = س ص لا − ص ع س یعنے

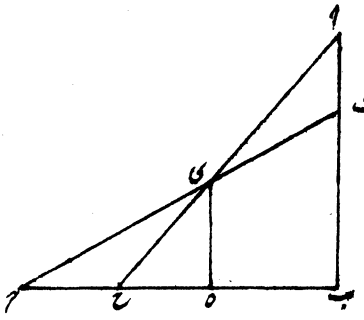
ط ع لا − س ص لا = ط ص ع − ص ع س یعنے

(ط ع − س ص) لا = (ط − س) ص ع پس لا = $\frac{(ط - س)}{ط ع - س ص}$ ص ع

اور واسطی اختصار کی فرض کرو اس قیمت لا کو = م کے تو

$\sqrt{(ل + ط)^2 + م^2}$ = ا ب اور اسیطرح $\sqrt{(ر + س)^2 + م^2}$ = ا ح وہو المراد

اب ایک منارہ ہی اور ی ہ ایک لکڑی متوازی ا آ کے ہی اور مقام ح سی سیدہ مین تی کے جو اس منارہ کے دکھلائی دیے تی ہی اور مقام ح سے تی کی سیدہ مین نقطہ ث کا دکھلائی دیتا ہی اور معلوم ہے ہمین مقدار ا آ ث کے = ع اور پیمایش سے معلوم ہوا کہ



ح ہ = س اور ہ ح = ط

اور ہ ی = ص آب چاہتی ہین ہم دریافت کرنا ب ش اور ہ ب کو فرض کرو

ش ب = ر اور ب ہ = لا اور یہہ دو مقدار مجہول ہین تو بحکم ضابطہ (۲) کی

ط : ص :: ط + لا : ر + ع یعنی ص ط + ص لا = ط ر + ط ع اور

$$\text{ص ط + ص لا − ط ع} = \text{ط ر تو ر} = \frac{\text{ص ط + ص لا − ط ع}}{\text{ط}}$$

اور س : ص :: س + لا : ر یعنے ص س + ص لا = س ر اور

$$\text{ر} = \frac{\text{ص س + ص لا}}{\text{س}} \text{ پس } \frac{\text{ص ط + ص لا − ط ع}}{\text{ط}} = \frac{\text{ص س + ص لا}}{\text{س}}$$

اور حاصل ضرب دو نو نکاس مین $\frac{\text{س ص ط + س ص لا − س ط ع}}{\text{ط}} = \text{ص س + ص لا}$

اور حاصل ضرب ان دو نون کا ط مین

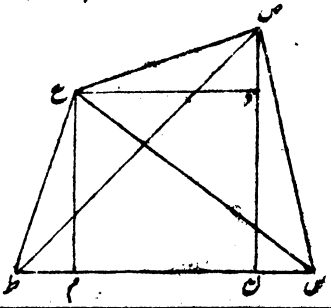
س ص ط + س ص لا − س ط ع = ص ط س + ط ص لا اور بعد ابدال علامت کے حاصل ہوتا ہے — س ط ع = ط ص لا — س ص لا یعنے

س ص لا — ط ص لا = (س ص — ط ص) لا = س ط ع اور

$$\text{لا} = \frac{\text{س ط ع}}{\text{س ص — ط ص}} \text{ اور ر} = \frac{\text{ص س + ص}\left(\frac{\text{س ط ع}}{\text{س ص — ط ص}}\right)}{\text{س}}$$

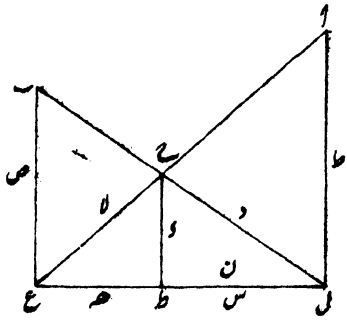
$$= \frac{\text{ص س + } \frac{\text{س ط ع}}{\text{س — ط}}}{\text{س}} = \frac{\text{ص س}^2 - \text{ص س ط + س ط ع}}{\text{س}^2 - \text{س ط}} = \frac{\text{ص س}^2 - \text{ص س ط + س ط ع}}{\text{س}^2 - \text{س ط}}$$

ص ع ط س ایک شکل مخروط ہی اور جانتے ہین ہم سب ضلعے اور دو نو قطر ا ص ع



اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اس ضلع کا بموجب قواعد مرقومہ بالا کے چونکہ تینون ضلعے مثلث ص ط س کے معلوم ہین ہم دریافت ہو سکتے ہی مقدار عمود ص ن کی اور اسیطرح سی عمود ع م

کی اوران دوعمود کے تفریق کرنی سے معلوم ہوجائیگا ہمین ص د اورچونکہ مقدار س م اور س ن کی
بہی معلوم ہوسکتی ہی توانکی تفریق کرنی سے معلوم ہوجائیگی ہمین مقدار ن م یعنی دع کی لیکن
ص د + دع = ص ع تومقدار ص ع کی معلوم ہوجائیگی فہو المراد
فرض کرو کہ دومثلث قایمہ الزوایا ا ع ل اور ب ل ع کی ایسی ہین کہ اونکا قاعدہ ل ع تو ایک ہی اور
اونکی وتر ا ع اور ب ل ایک دوسری کو تقاطع کرتے ہین نقطہ ح مین گراو ایک عمود ح ط کا
اوپر قاعدہ ل ع کے جانتے ہین ہم خطوط ا ل اور ل ع اور ع ب کی بتاو کس جاے دو وتر ایک دوسری کو
تقاطع کرینگی اور محل تقاطع سے ایک عمود کہنچا جاوی تو اوسکا کیا طول ہوگا اور وہ کس جای قاعدہ ل ع
سے ملاقی ہوگا یعنی بتاو کیا ہی قیمت خطون ح ع اور
ح ل اور ح ط اور ط ع اور ط ل کے فرض کرو



ا ل = ط اور ل ع = س اور ع ب = ص
اور ح ع = لا اور ح ل = د اور ح ط = ء
اور ط ع = ھ اور ل ط = ن چونکہ خطح ط
متوازی ہی خطون ب ع اور ا ل کے تو ظاہر ہی کہ

ع ل : ل ا :: ع ط : ط ح یعنے س : ط :: ھ : ء یعنے $\frac{\text{ط ھ}}{\text{س}}$ = ء

اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ ع ل : ع ب :: ل ط : ط ح یعنے
س : ص :: ن : ء یعنے

$\frac{\text{ص ن}}{\text{س}}$ = ء یعنے $\frac{\text{ص ن}}{\text{س}} = \frac{\text{ط ھ}}{\text{س}}$ ∴ ص ن = ط ھ اور

ن = $\frac{\text{ط ھ}}{\text{ص}}$ لیکن ل ع = ط ل + ط ع یعنے ن + ھ = س یعنے

$\frac{\text{ط ھ}}{\text{ص}}$ + ھ = س اور ط ھ + ص ھ یعنے ھ (ط + ص) = ص س اور

ھ = $\frac{\text{ص س}}{\text{ط + ص}}$ اور ن = $\frac{\text{ط}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ص س}}{\text{ط+ص}} = \frac{\text{ط س}}{\text{ط+ص}}$ اور

ء = $\frac{\text{ص ن}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{ط س}}{\text{ط+ص}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ط + ص}}$ اور

لا = $\sqrt{\text{ء}^2 + \text{ھ}^2} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2\text{ص}^2}{(\text{ط+ص})^2} + \frac{\text{ص}^2\text{س}^2}{(\text{ط+ص})^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2(\text{ط}^2 + \text{س}^2)}{(\text{ط+ص})^2}}$

د = $\sqrt{\text{ء}^2 + \text{ن}^2} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2\text{ص}^2}{(\text{ط+ص})^2} + \frac{\text{ط}^2\text{س}^2}{(\text{ط+ص})^2}} = \sqrt{\frac{(\text{ص}^2 + \text{س}^2)\text{ط}^2}{(\text{ط + ص})^2}}$

سب مقادیر مجہول کی قیمت اس فہرست میں مندرج کرتے ہیں

$$ح ع = ا = \frac{ص\sqrt{(ط^2 + س^2)}}{ط + ص} = \frac{ص}{ط + ص} \times \sqrt{ط^2 + س^2}$$

$$ح ل = د = \frac{ط\sqrt{(ص^2 + س^2)}}{ط + ص} = \frac{ط}{ط + ص} \times \sqrt{ص^2 + س^2}$$

$$ح ط = ز = \frac{ط ص}{ط + ص} \quad ط ع = ھ = \frac{ص س}{ط + ص} \text{ اور}$$

$$ط ل = ن = \frac{ط س}{ط + ص} \text{ مثلاً اگر فرض کریں ہم}$$

کہ $\left\{\begin{array}{l} ط = 15 \\ س = 8 \\ ص = 6 \end{array}\right.$ تو حاصل ہوتی ہیں یہ مساواتیں

$$ا = \frac{ص}{ط + ص} \times \sqrt{ط^2 + س^2} = \frac{6}{6 + 15} \times \sqrt{15^2 + 8^2} = \frac{6}{21} \times \sqrt{225 + 64}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{289}}{7} = \frac{2 \times 17}{7} = \frac{34}{7} = 4\frac{6}{7} \text{ اور}$$

$$د = \frac{ط}{ط + ص} \times \sqrt{ص^2 + س^2} = \frac{15}{6 + 15} \times \sqrt{6^2 + 8^2}$$

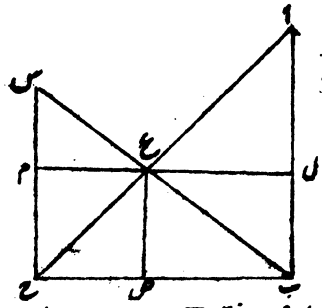
$$= \frac{15}{21} \times \sqrt{36 + 64} = \frac{5 \times \sqrt{100}}{7} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$$

$$\text{اور } ز = \frac{ط ص}{ط + ص} = \frac{6 \times 15}{15 + 6} = \frac{90}{21} = 4\frac{2}{7}$$

$$\text{اور ھ} = \frac{ص س}{ط + ص} = \frac{8 \times 6}{15 + 6} = \frac{48}{21} = 2\frac{2}{7}$$

$$\text{اور ن} = \frac{ط س}{ط + ص} = \frac{15 \times 8}{15 + 6} = \frac{120}{21} = 5\frac{5}{7}$$

ایک شخص مینار اب پر کہ اوسکی بلندی ۱۵ گز ہے دوربین لگائی ہوی طرف نقطہ ح کی دیکھ رہا تھا اور اسطرح ایک اور شخص مقام س سی دوربین میں سے طرف نقطہ ر کے دیکھ رہا تھا اور بلندی س ح کی = ۶ اور اب = ۱۵ اور فاصلہ درمیان دونو میناروں کے یعنی خط س ح = ۸ گز کے اتفاقاً دونو شخصون مذکور نے ایکہی وقت ایک کبوتر کو دوربین میں سے دیکھا بتاؤ کبوتر کس جائے دیکھا اور فاصلہ



فاصلہ اوسجای کا دونون مینارون سے
اور خط سوح سے اور نقطہ ب اور ح سی بموجب ضابطہ گذشتہ
کے ظاہر ہی کہ جایے کبوتر کی ع ہی اور اوسکا
فاصلہ خط سوح سے یعنی ص ع = ۲/۷ ۴ اور
اوسکا فاصلہ مینار ا ب سے یعنی ع ل یا ص ب = ۵ ۵/۷
اور اوسکا فاصلہ مینار س ح سو یعنی خط ع م یا ص ح = ۲ ۲/۷ اور اوسکا فاصلہ نقطہ ح سی یعنی ع ح = ۴ ۲/۷ اور نقطہ
ب سو = یعنی خط ب ح = ۷ ۱/۷ ایکشخص ایک ایسی دیوار کے نیچے کھڑا ہتا کہ اوسی صرف چوٹی ایک مینار کی دیکھا دیتی ہے اور شخص اور دیوار میں ایک گز
کا فاصلہ ہتا اور وہ شخص ۱۶ گز کے فاصلہ پر مینار سے ہتا اور دیوار ۵ گز بلند ہتی بتاو کیا ہی بلندی مینار کی بموجب
گذشتہ کی بلندی مینار = ۵ × ۱۶ / ۱ = ۸۰

ایک دیوار ۱۲ گز بلند ہی اور ایک شخص اوسکے نیچے بفاصلہ ۱۵ گز کے کھڑا ہی اور اوسی صرف چوٹی ایک مینار کی
نظر آتی ہتی بعد اسکے شخص مذکور ۱۰ گز دیوار سے اور ہٹا تب اوسکو ایک کہن کہ اوسکی بلندی ۸ گز سے نظر آنی لگی
بتاو کیا ہی بلندی مینار کی اور فاصلہ اوس مینار کا شخص بموجب شکل گذشتہ کی ظاہر ہی کہ بلندی مینار

= ۸ + (۱۲ × ۲۵ + ۱۵ (۱۲ − ۸)) / (۲۵ − ۱۵) = ۸ + ۳۰۰ − ۶۰ / ۱۰ = ۳۲

اور فاصلہ شخص کا مینار سے

= ۲۵ − ۸ × ۱۵ × ۲۵ / ((۱۵ × ۱۲) − (۱۲ × ۲۵)) = ۲۵ + ۳۰۰۰ / ۱۲۰ = ۵۰

ایک دیوار ۲۰ گز بلند ہتی اور اوسمین ایک سوراخ ۵ گز کی بلندی پر ہتا ایک شخص نی ۵ گز کی فاصلہ پر
دیوار سی چوٹی ایک مینار کی سوراخ سے دیکھی اور بعد اسکی وہ ۱۲ گز دیوار سے اور ہٹا اور پہر دیوار کی سیدھ
مین چوٹی مینار مذکور کی اوسسے نظر آئی بتاو کیا ہی بلندی مینار کی اور فاصلہ شخص مذکور کا اوس سے بموجب شکل گذشتہ کے

بلندی = ۲۰ × ۱۵ × (۱۷ − ۵) / ۱۷ × ۱۵ − ۲۰ × ۵ = ۳۶۰۰ / ۲۵۵ − ۱۰۰ = ۳۶۰۰ / ۱۵۵ = ۷۲۰ / ۳۱

اور فاصلہ مینار کا شخص سے پہلی دفع = ۵ × ۱۷ (۱۵ − ۲۰) / ۲۰ × ۵ − ۱۷ × ۱۵ = ۸۵ × ۵ / ۱۵۵ = ۵۸ / ۲۱

مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ اگر بجای دیوار کے فرض کرین ہم ایک تختہ لکڑیکا اور اوسمین ایک سوراخ کرین
تو بلندی مینار کی اور فاصلہ اوس سے ہر جای سے معلوم ہوسکتا ہی خواہ دہان دیوار ہو یا نہین

فصل پانچوین حد زیادتی اور کمی کے بیان مین

بعضی ایسی مقدارین ہوتی ہین کہ اونکی زیادتی یا کمی کے واسطی ایک حد ہی مثلاً دائرہ کا ایک مقدار ہی کہ اوسکی زیادتی کے واسطی ایک حد ہی یعنی وہ نہین زیادہ ہوسکتی قطر دائرہ سی اور خط جو کہینچا جاوے ایک نقطہ مفروض سے (کہ واقع ہی باہر ایک خط مفروض کے) خط مذکور تک نہین کم ہوسکتا ہی عمود سے کہ گرایا جاوے نقطہ مفروض سے خط مفروض یعنے چھوٹی سے چھوٹا خط جو ایک نقطۂ مفروض سے ایک خط مفروض تک کہینچا جاوے عمود خط مذکور پر ہوتا ہی

علم ہندسہ مین بہت سی ایسی مقدارین ہین کہ اونکی زیادتی یا کمی کے واسطی ایک حد مقررہ ہی اور دریافت کرنا اس حد کا اکثر نہایت مشکل ہوتا ہی اور بہت سی سوالات درباب اس حد کی نہین حل ہوسکتے الا بمدد علم لا انتہا کے کہ اوسکو زبان انگریزی مین دفرنشل کیل کیولس کہتے ہین اس کتاب مین ایسے سوالات اس قسم کی مندرج کیئے جاتی ہین جو حل ہوسکتے ہین بوسیلہ علم جبر و مقابلہ کے

سوال ۱ تقسیم کرو ایک خط مفروض کو اسطور پر کہ ضرب اوسکی دو اقسام کی بڑی سے بڑی ہو یعنے اگر خط مفروض کسی اور طرح سی تقسیم کیا جاوے تو سطح دونکی اقسام کی ہمیشہ کم ہو سطح مذکور الصدر سی فرض کرو کہ خط مفروض = ط اور ایک اوسکی قسم = لا تو ظاہر ہی کہ دوسری قسم خط مذکور کی مساوی ہوگی ط − لا کے اور سطح یعنی حاصل ضرب ان دونوکا = ط لا − لا۲ اب یہہ ظاہر ہی کہ ط ایک مقدار منقطع ہی یعنے اوسکی قیمت نہین بدل سکتی لیکن لا ایک مقدار غیر منقطع ہی کیونکہ معلوم نہین ہی کہ لا کو کتنا بڑا فرض کرنا چاہیئے تاکہ ط لا − لا۲ ایک مقدار اعظم ہوجاوے اس بات کی دریافت کرنی کی لیئے فرض کرتے ہین ہم کہ ط لا − لا۲ = س یعنے لا۲ − ط لا = − س اور حل کرنے اس مساوات درجہ دویم سی حاصل ہوتا ہی

$$\text{لا} - \frac{\text{ط}}{۲} = \pm \sqrt{\frac{\text{ط}^۲}{۴} - \text{س}}$$

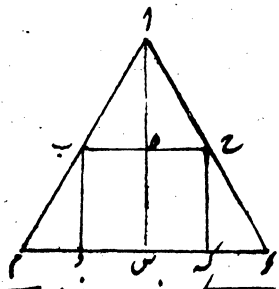
اب ظاہر ہی کہ س نہین زیادہ ہوسکتا $\frac{\text{ط}^۲}{۴}$ سی کیونکہ اگر ایسا ہو تو مقدار $\sqrt{\frac{\text{ط}^۲}{۴} - \text{س}}$ غیر ممکن ہوجاوے تو معلوم ہوا کہ اگر س کو نہایت بڑا فرض کرین تو وہ مساوی ہوتا ہی $\frac{\text{ط}^۲}{۴}$ کے اور اس صورت مین لا − $\frac{\text{ط}}{۲}$ = ۰ یعنے لا = $\frac{\text{ط}}{۲}$ اور اس سی ثابت ہوا کہ واسطی حاصل کرنی سب سے بڑی سطح کے تقسیم کرنا چاہیئے خط مفروض کو دو مساوی اقسام مین

۲ وہ کونسی مسافت ہی کہ اگر اوسمین سے تفریق کرین اوسکا مجذور تو حاصل تفریق ایک مقدار نہایت بڑی ہوتی ہی فرض کرو کہ مسافت مطلوب = لا اور لا − لا۲ = ط اب معلوم کیا چاہتے ہین ہم کیا ہی بڑی سے بڑی قیمت ط کی جبکہ لا − لا۲ = ط تو لا۲ − لا = − ط اور حل کرنی اس مساوات کی سے

حاصل ہوتا ہی لا = $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - ط}$ اب معلوم ہوا کہ بڑی سے بڑی قیمت ط کی $\frac{1}{4}$ ہی اور

اس صورت مین لا = $\frac{1}{2}$ = کسر مطلوبہ کی یہہ سوال علم لا انتہا سی باسانی حل ہوسکتا ہی لیکن حل کرنا اس سوال کا بوسیلہ جبر و مقابلہ کی حقیقت مین مشکل ہی ہر چند کہ یہہ ظاہر ہی کہ بعد حل ہونے کے وہ بہت سہل معلوم ہوتا ہی اس سوال کی وسیلے سے سوال (۱) بہی حل کیا گیا ہی اور سوال (۳) حل کیا جاتا ہی

۳ بناو ایک بڑی سے بڑا مستطیل بیچ ایک مثلث مفروض کی فرض کرو کہ مثلث ا د م کا مثلث مفروض ہی اور مستطیل کہ ب مستطیل مطلوبہ ہی اب ہم دریافت کیا چاہتے ہین کہ کیا شرط ضرور ہی واسطے اس بات کی کہ مقدار مستطیل مذکور کی بڑی سے بڑی ہو معلوم ہی ہمین کہ وتر جو کہ قاعدہ مثلث مفروض کا ہی مساوی ہی ط کے اور اس کہ ارتفاع مثلث مفروض کا ہی مساوی ہی ص کے اور فرض کرو کہ لا = ایک ایسی کسر کے ہی کہ اگر ضرب دین اوسمین ص کو تو حاصل ضرب مساوی ہو خط ہ س کے یعنے فرض کرین ہم ہ س = لاص کے تو ظاہر ہی کہ

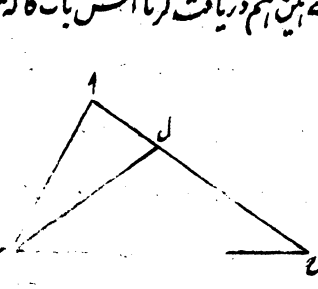


ص − لاص مساوی ہوگا خط ا ہ کی اب ظاہر ہی کہ مثلث ا ح ب کا مشابہ ہی مثلث ا م د کے تو اس : ا ہ :: د م : ح ب یا کہ د یعنے ص : ط :: ص − لاص : کہ د یعنے

کہ د = $\frac{ط ص - ط ص لا}{ص}$ اور مستطیل کہ ب = کہ د × ہ س = لاص × $\frac{ط ص - ط ص لا}{ص}$ = ط ص لا − ط ص لا^2

= ط ص (لا − لا^2) اور اب یہہ ظاہر ہی کہ جتنی مقدار (لا − لا^2) بڑی ہو اوتنا ہی زیادہ ہو ط ص (لا − لا^2) یعنے مستطیل کہ ب ہوگا اور چونکہ یہہ سوال (۲) مین ثابت ہوا ہی کہ بڑی سی بڑی قیمت (لا − لا^2) کی $\frac{1}{4}$ اور لا کی $\frac{1}{2}$ ہی تو معلوم ہوا کہ اس = ۵۲ س یعنے ارتفاع مثلث کی دو چند ہی ارتفاع مستطیل مطلوبہ سے

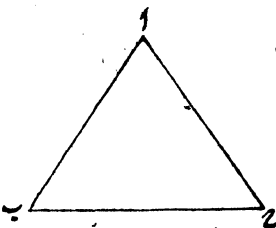
۴ معلوم ہین ہمین دو طرفین ایک مثلث کی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اس بات کا کہ مقدار قاعدہ مثلث کی کتنی فرض کرین تاکہ مثلث مذکور کی مساحت نہایت بڑی ہو مثلاً معلوم ہین دو طرفین ا ح اور ا ب مثلث ا ح ب کی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی قیمت واسطے ح ب کے کہ مثلث ا ح ب نہایت بڑا ہو



نقطہ ب سے گرا دعمود ب ل کا خط ا ح پر فرض کرو ا ح = ط اور ا ب = س اور ا ل = لا اب ظاہر ہی کہ $\sqrt{س^۲ - لا^۲}$ = ب ل اور مساحت اس مثلث کی

= $\frac{۱}{۲}$ ا ح × ب ل = $\frac{۱}{۲}$ ط × $\sqrt{س^۲ - لا^۲}$ اب یہہ ظاہر ہی کہ جتنا زیادہ $\sqrt{س^۲ - لا^۲}$ ہو اوتنی ہی زیادہ مساحت مثلث کی ہوگی لیکن زیادہ ہونا $\sqrt{س^۲ - لا^۲}$ کا موقوف اوپر کم ہونے لا کی ہی تو معلوم ہوا کہ مساحت بڑی ہوگی اگر فرض کریں ہم لا = ۰ یعنی اگر خط ب ل ا ب پر منطبق ہوجاوے یعنی جب دو خطوں ط اور س کے مابین ایک قایمہ بنے تو اس سے یہہ ثابت ہوا کہ مجذور دونوں طرفوں معلوم کا لیکر اونکے حاصل جمع کا جذر لیوین تو یہہ جذر ایک ایسی مقدار ہوتی ہی کہ اگر فرض کریں مساوی اسکے قاعدہ مثلث کا تو مساحت اسی مثلث کی نہایت بڑی ہوگی

۵ معلوم ہی ہمین قاعدہ ایک مثلث قایمہ الزاویہ کا اور مجموعہ اوسکی دو نوطرفونکا چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اس بات کا کہ کیا نسبت دو طرفون مثلث مذکور مین ضرور ہی تاکہ مثلث نہایت بڑا ہو معلوم ہی ہمین کہ ا ب + ا ح = س اور

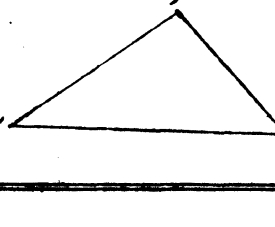


فرض کرو کہ ا ب − ا ح = لا = ایک مقدار مجہول ہے کے جمع کرو دونو مساوات کو تو ا ب = $\frac{س + لا}{۲}$ بعد ازان تفریق کرو ان دونو مساوات کو تو ا ح = $\frac{س - لا}{۲}$ اور ظاہر ہی کہ مساحت اس مثلث کی

= $\frac{ا ب × ا ح}{۲}$ = $\frac{(س + لا)(س - لا)}{۴}$ ÷ ۲ = $\frac{(س + لا)(س - لا)}{۸}$

= $\frac{س^۲ - لا^۲}{۸}$ اب ظاہر ہی کہ جتنا زیادہ $\frac{س^۲ - لا^۲}{۸}$ ہوگا اوتنی ہی زیادہ مساحت مثلث کی ہوگی اور زیادہ ہونا $\frac{س^۲ - لا^۲}{۸}$ موقوف ہی کم ہونی لا کے پر تو معلوم ہوا کہ اگر لا = ۰ تو مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہوگی اور اس سے یہہ ثابت ہوا کہ مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہوتی ہی جسوقت کہ دو ساقین مثلث کی اپسمین نسبت برابری کی رکھتے ہین

۶ معلوم ہی ہمین قاعدہ ایک مثلث کا اور حاصل جمع اوسکی دو باقی ضلعون کا بتا دان دو ضلعون مین کیا نسبت چاہیئے تاکہ مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہو فرض کرو کہ حاصل جمع دو ضلعون



= ط اور قاعدہ = س اور ط اور س مقدار معلوم ہین اور فرض کرو کہ فرق دو ضلعونمین = لا کہ ایک مقدار مجہول ہی تو معلوم ہوا کہ ا ب + ا س = ط اور

ا ب — ا س = لا جمع کرو ان مساواتون کو تو ۲ ا ب = ط + لا اور ا ب = $\frac{ط+لا}{۲}$ اور تفریق کرنے سے

ا س = $\frac{ط-لا}{۲}$ اور معلوم ہی ہین س ب = س تو ظاہر ہوا کہ نصف حاصل جمع تینون ضلعون مثلث کا = $\frac{ط+سد}{۲}$

اور $\frac{ط+س}{۲}$ — س = $\frac{ط-سد}{۲}$

اور $\frac{ط+س}{۲}$ — $\frac{ط+لا}{۲}$ = $\frac{س-لا}{۲}$

او $\frac{ط+سد}{۲}$ — $\frac{ط-لا}{۲}$ = $\frac{س+لا}{۲}$

تو معلوم ہوا کہ مساحت اس مثلث کی بموجب سوال گذشتہ کے

$\sqrt[۴]{(ط+س)(ط-س)(س+لا)(س-لا)}$ =

$\sqrt[۴]{(ط+س)(ط-س)} \times \sqrt{(س^۲-لا^۲)}$

اب ظاہر ہی کہ جتنا تا کم ہو اوتنا ہی مساحت مثلث کی زیادہ ہوگی اور اگر لا = ۰ یعنے ا س = ا ب تو مساحت مثلث کی نہایت بڑی ہوگی

۷ تمام مثلثون قایم الزاویہ مین سے کہ جنکی سطح ایک مقدار مقررہ ہی وہ کون سا مثلث ہی جسکی دو ساقون کا مجموعہ ایک مقدار نہایت کم ہی فرض کرو سطح مثلث کی کہ ایک مقدار مقررہ ہے = ط اور ایک ساق مثلث مطلوبہ کی = لا تو ظاہر ہی کہ دوسری ساق

= $\frac{۲ط}{لا}$ اور مجموعہ دونو ساقون کا = لا + $\frac{۲ط}{لا}$ = $\frac{لا^۲+۲ط}{لا}$ اب فرض کرو کہ

$\frac{لا^۲+۲ط}{لا}$ = س تو لا^۲ + ۲ط = لاس اور لا^۲ — س لا = — ۲ط

اور لا^۲ — س لا + $\frac{س^۲}{۴}$ = $\frac{س^۲}{۴}$ — ۲ط اور لا — $\frac{س}{۲}$ = $\sqrt{\frac{س^۲}{۴}-۲ط}$

اب ظاہر ہی کہ اگر س کو یعنے $\frac{س^۲}{۴}$ کو نہایت کم فرض کرین تو ضرور ہی کہ

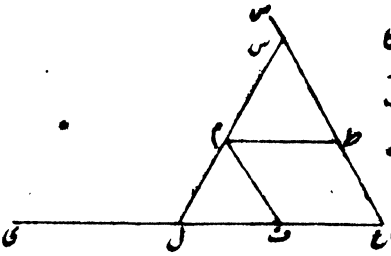
$\frac{س^۲}{۴}$ = ۲ط اور $\frac{س}{۲}$ = $\sqrt{۲ط}$ اور لا — $\frac{س}{۲}$ = ۰ اور

لا = $\frac{س}{۲}$ = $\sqrt{۲ط}$ اور $\frac{۲ط}{لا}$ = $\frac{۲ط}{\sqrt{۲ط}}$ = $\sqrt{۲ط}$

تو ظاہر ہوا کہ مثلث مطلوبہ کی ساقین مساوی ہوتی ہین

۸ فرض کیے ہمنے دو خط ص ع اور ع ی کے اور ایک نقطہ م کا جاتی ہین ہم کھینچ

ایک خط مثل س م ل کی ایسا کہ وہ گذری نقطہ م میں اور ملی خطوں ع ص اور ع ی سے مفروض سے اسطرح کہ س ع + ل ع ایک مقدار نہایت چھوٹی ہو نقطہ م سے کھینچو خط م ط کا متوازی ی ع کے اور خط م ف کا متوازی ص ع اور پیمائش کرو خطوں ط م اور م ف کو فرض کرو کہ ط م اور م ف کے مقدار ین معلوم ہین مساوی ج اور ص کے اور خط ف ل کہ مقدار مجہول ہی مساوی ع لا کی تو اب ظاہر ہی کہ مثلث م ف ل اور ط س م کے مشابہ ہین اور اسیواسطے



لا : ص :: ج : ط س ∴ ط س = $\frac{\text{ص ج}}{\text{لا}}$ ∴ س ع + ل ع = $\frac{\text{ص ج}}{\text{لا}}$ + ص + ج + لا

اب چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی ایک مقدار واسیطے مجہول لا کی کہ مقدار ($\frac{\text{ص ج}}{\text{لا}}$ + ص + ج + لا) نہایت کم ہو فرض کرو $\frac{\text{ص ج}}{\text{لا}}$ + ص + ج + لا = ل ∴ ص ج + ص لا + ج لا + لا^{۲} = ل لا

اور لا^{۲} = − ص ج + (ل − ص − ج) لا یعنے لا^{۲} − (ل − ص − ج) لا = − ص ج اور بموجب قاعدہ مساوات کی

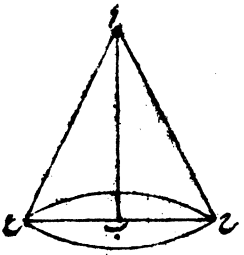
لا^{۲} − (ل − ص − ج) لا + $\frac{\text{(ل − ص − ج)}^{۲}}{۴}$ = $\frac{\text{(ل − ص − ج)}^{۲}}{۴}$ − ج ص

اور لا − $\frac{\text{(ل − ص − ج)}}{۲}$ = $\sqrt{\frac{\text{(ل − ص − ج)}^{۲}}{۴} - \text{ج ص}}$

یہان ظاہر ہی کہ اگر ل کو نہایت کم فرض کرین تو

$\frac{\text{(ل − ص − ج)}^{۲}}{۴}$ = ج ص ∴ $\frac{\text{(ل − ص − ج)}}{۲}$ = $\sqrt{\text{ج ص}}$

اور یہی لا = $\frac{\text{(ل − ص − ج)}}{۲}$ = $\sqrt{\text{ص ج}}$ تو معلوم ہوا کہ اگر خط ف ل مساوی $\sqrt{\text{ج ص}}$ کے ہو تو خط جو گذری نقطون ل اور م مین خطون ی ع اور ع ص کو اسطرح پر قاطع کریگا کہ ع ل + ع س ایک نہایت کم مقدار ہوگی



۹ دریافت کرو کہ ایک ایسے مخروط مستدیر کہ اوسکی باہر کی سطح تو ایک مقدار مقررہ ہی اور اوسکی ساحت جسم کی نہایت بڑی ہی فرض کرو ج کو کہ نصف قطر قاعدہ مخروط کا ہی = لا اور ترچھا خط ا ع = ا اور کہ = محیط

اوس دائرہ کی جسکا قطر عدد ایک کا ہی تو ظاہر ہی کہ سطح قاعدہ = ک × لا × لا = ک لا۲ لیکن سطح مستدیر = و × ک لا = ک و لا تو کل باہر کی سطح مخروط = ک لا۲ + ک و لا اور فرض کرو کہ ک لا۲ + ک و لا = س تو و = س/ک لا − لا اور ارتفاع اب مخروط کی =

$$\sqrt{(\text{اع}^2 - \text{ب ع}^2)} = \sqrt{\left(\frac{\text{س}^2}{\text{ک}^2 \text{لا}^2} - \frac{2\text{س}}{\text{ک}} + \text{لا}^2\right)} - \text{لا}^2 =$$

$$\sqrt{\frac{\text{س}^2}{\text{ک}^2 \text{لا}^2} - \frac{2\text{س}}{\text{ک}}} \text{ اور مساحت مخروط} = \frac{\text{ک لا}^2}{3} \sqrt{\frac{\text{س}^2}{\text{ک}^2 \text{لا}^2} - \frac{2\text{س}}{\text{ک}}}$$

اور اسکی ہم نہایت بڑی قیمت معلوم کیا چاہتے ہین تو اول اوسکی مجذور کی نہایت بڑی قیمت دریافت کرینگے اور بعد ازان اوسکے خود فرض کرو کہ ¼ (س لا۲ − ۲ ک س لا) = ط/۹

تو س لا۲ − ۲ ک س لا = ط اور ۲ ک س لا۲ − س لا۳ = − ط اور

$$\text{لا}^4 - \frac{\text{س لا}^3}{2\text{ک}} = -\frac{\text{ط}}{2\text{ک س}} \text{ اور } \text{لا}^4 - \frac{\text{س}}{2\text{ک}} \text{لا}^2 + \frac{\text{س}^2}{16\text{ک}^2} = \frac{\text{س}^2}{16\text{ک}^2} - \frac{\text{ط}}{2\text{ک س}}$$

$$\text{اور لا}^2 - \frac{\text{س}}{4\text{ک}} = \sqrt{\frac{\text{س}^2}{16\text{ک}^2} - \frac{\text{ط}}{2\text{ک س}}} \text{ اب اگر ط کو نہایت بڑا فرض کرین تو}$$

$$\frac{\text{س}^2}{16\text{ک}^2} = \frac{\text{ط}}{2\text{ک س}} \text{ اور لا}^2 = \frac{\text{س}}{4\text{ک}} \text{ اور لا} = \sqrt{\frac{\text{س}}{4\text{ک}}} \text{ اور}$$

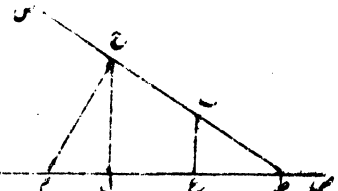
$$\text{و} = \frac{\text{س}}{\text{ک لا}} - \text{لا} = \frac{\text{س} - \text{ک لا}^3}{\text{ک لا}} = \frac{4\text{ک لا}^3 - \text{ک لا}^3}{\text{ک لا}} = \frac{3\text{ک لا}^2}{\text{ک لا}} =$$

$$3\text{لا} = 3\sqrt{\frac{\text{س}}{4\text{ک}}} \text{ اور ارتفاع} = \sqrt{\frac{\text{س}^2}{\text{ک}^2 \text{لا}^2} - \frac{2\text{س}}{\text{ک}}} =$$

$$\sqrt{\frac{4\text{ک س}^2}{\text{ک}^2 \text{س}} - \frac{2\text{س}}{\text{ک}}} = \sqrt{\frac{4\text{س}}{\text{ک}} - \frac{2\text{س}}{\text{ک}}} = \sqrt{\frac{2\text{س}}{\text{ک}}}$$

مرقومہ بالا سے معلوم ہوا کہ نصف قطر قاعدہ کا ترچھی خط سی وہی نسبت رکھتا ہی جو ۱ رکھتا ہی ۳ سے اور مجذور کل قاعدہ مخروط کا ارتفاع کے مجذور سے وہی نسبت رکھتا ہی جو ۲ رکھتا ہی ۳ سے

۱۰ اگر دو جسم حرکت کرین ایکہی وقت نقطون مفروض آ اور ب سے بیچ سمتون آص اور بس



مفروضہ کے ساتھ رفتار مفروضہ کی تو چاہتے ہیں دریافت کرنا
اس بات کا کہ جسوقت وہ جسم نہایت نزدیک ایک دوسری کے
آوینگے وہ کس مقام پر ہونگی اور کتنی کتنی مسافت ہر ایک
نے طی کی ہوگی خط ب س کو زیادہ کرو جب تک کہ وہ ملی خط ص ل کے بیچ نقطہ ط کی معلوم ہیت ہیمین ط ب = ط
ا و ط ع = س اور ط ا = ص اور فرض کرو کہ رفتار جسم ب کی ی ہی اور جسم آ کی م ہی اور فرض
کرو کہ بسوقت جسم ب مسافت ب ح کو طی کرکے نقطہ ح پر پہونچی ہو اسی وقت جسم آ مسافت آ م طی کرکے
نقطہ م پر پہنچے اور فرض کرو کہ ح م نہایت کم فاصلہ دو جسموں میں ہی اب دریافت کرینگے ہم مقدار ح م
اور ح ب اور آ م کی فرض کرو کہ ط ح کہ ایک مقدار مجہول ہی = لا چونکہ ح ل متوازی ب ع کے
تو ط : س :: لا : ط ل یعنے ط ل = $\frac{\text{س لا}}{\text{ط}}$ یہہ بھی ظاہر ہی کہ مسافت جو دو جسموں نے طی کی ہی ایسمیں
وہی نسبت رکھتے ہیں جو رفتار دو جسموں کی ایسمیں رکھتے ہیں اور اسیواسطے
ی : م :: لا − ط : ا م یعنے $\frac{\text{لا} - \text{ط م}}{\text{ی}}$ = ا م اور اسی سبب سے

ط م = ا ط − ا م = ص + $\frac{\text{ط ح}}{\text{ی}}$ − $\frac{\text{لا ح}}{\text{ی}}$ فرض کرو کہ ص + $\frac{\text{ط ح}}{\text{ی}}$ = ع

تو ط م = ع − $\frac{\text{لا ح}}{\text{ی}}$ یہہ ظاہر ہی کہ ط ل = $\frac{\text{ط ح}^2 + \text{ط ح}^2 - \text{ح م}^2}{2\text{ط م}}$

یعنے ح م^2 = ط م^2 + ط ح^2 − ۲ ط ل × ط م یعنے

$$\text{ح م}^2 = (\text{ع} - \frac{\text{لا ح}}{\text{ی}})^2 + \text{لا}^2 - (\text{ع} - \frac{\text{لا ح}}{\text{ی}}) \times \frac{2\text{س لا}}{\text{ط}}$$

$$= \text{ع}^2 - \frac{2\text{ع ح لا}}{\text{ی}} + \frac{\text{لا}^2\text{ح}^2}{\text{ی}^2} + \text{لا}^2 - (\frac{2\text{ع ی س لا} - 2\text{ح س لا}^2}{\text{ی ط}})$$

$$= \frac{\text{ی}^2\text{ع}^2}{1} - \frac{2\text{ع ح لا}}{\text{ی}} + \frac{\text{لا}^2\text{ح}^2}{\text{ی}^2} + \frac{\text{لا}^2}{1} - \frac{2\text{ع س لا}}{\text{ط}} + \frac{2\text{ح س لا}^2}{\text{ی ط}}$$

$$= \frac{\text{ی}^2\text{ط}^2\text{ع}^2 - 2\text{ع ح ی}^2\text{ط}^2\text{لا} + \text{ح}^2\text{ی}^2\text{ط}^2\text{لا}^2 + \text{ی}^2\text{ط}^2\text{لا}^2}{\text{ی}^2\text{ط}^2}$$

$$+ \frac{- 2\text{ع س ی}^2\text{ط لا} + 2\text{ح س ی}^2\text{ط لا}^2}{\text{ی}^2\text{ط}^2} =$$

$$\frac{(م^2 ی^2 ط^2 + ی^2 ط^2 + 2 م س ی^2 ط) لا^2}{ی^2 ط^2} +$$

$$\frac{-(2 ع م ی^2 ط^2 + 2 ع س ی^2 ط) لا + ی^2 ط^2 ع^2}{ی^2 ط^2}$$ فرض کرو کہ سر لا =

ف اور سر لا = کہ تو ظاہر ہی کہ ح م = $\frac{ف لا^2 - کہ لا + ی^2 ط^2 ع^2}{ی^2 ط^2}$ اور

فرض کرو $\frac{ف لا^2 - کہ لا + ی^2 ط^2 ع^2}{ی^2 ط^2}$ = ل اور

ف لا^2 − کہ لا + ی^2 ط^2 ع^2 = ی^2 ط^2 ل اور ف لا^2 − کہ لا = ی^2 ط^2 ل − ی^2 ط^2 ع^2 =

(ل − ع^2) ی^2 ط^2 اور لا^2 − $\frac{کہ}{ف}$ لا = $\frac{(ل - ع^2) ی^2 ط^2}{ف}$ = (ل − ع^2) × $\frac{ی^2 لا^2}{ف}$

اور لا^2 − $\frac{کہ}{ف}$ لا + $\frac{کہ^2}{4 ف^2}$ = (ل − ع^2) × $\frac{ی^2 ط^2}{ف}$ + $\frac{کہ^2}{4 ف^2}$

اور لا − $\frac{کہ}{2 ف}$ = $\sqrt{(ل - ع^2) \times \frac{ی^2 ط^2}{ف} + \frac{کہ^2}{4 ف^2}}$

اب ظاہر ہی کہ مقدار منفی کم ہوتی ہی صفر سے کسو واسطے کہ اگر ایک تو بڑی اور دوسری چھوٹی مقدار ہو اور ان دونوں مقداروں پر ایکہی اور مقدار زیادہ کریں تو حاصل جمع اس مقدار اور بڑی مقدار کا زیادہ ہوگا حاصل جمع اسی مقدار اور چھوٹی مقدار کی سے اب ہم دعوی کرتے ہیں کہ صفر زیادہ ہی − ۹ سے کیونکہ ۰ + ۱۰ = ۱۰ اور − ۹ + ۱۰ = ۱ اب یہہ ظاہر ہی کہ ل کو ہم اتنا کم یعنے − ل کو اتنا زیادہ فرض کرسکتے ہیں کہ (ل − ع^2) × $\frac{ی^2 ط^2}{ف}$ ایک ایسی مقدار منفی ہوسکتی ہی کہ وہ زیادہ ہو مثبت مقدار $\frac{کہ^2}{4 ف^2}$ سے لیکن ہم زیادہ فرض نہیں کرسکتے تو حد کمی کی مساوی ہونا ان دو منفی اور مثبت مقداروں کا ہی اور ۰ لا − $\frac{کہ}{2 ف}$ = ۰ یعنے لا = $\frac{کہ}{2 ف}$ یعنے

لا = $\frac{2 ع م ی^2 ط^2 + 2 ع س ی^2 ط}{2 (م^2 ی^2 ط^2 + ی^2 ط^2 + 2 م س ی^2 ط)}$ = $\frac{ع م ی ط + ع س ی}{م^2 ط + ی^2 ط + 2 م س ی}$

جسوقت معلوم ہوئی ہیں مقدار لا کی تب معلوم ہوسکتی ہی ہیں مقدار خطوں ب ح اور ا م بوسیلہ از مساواتوں یہ کے ب ح = لا − ط اور ا م = $\frac{لام - طام}{ی}$ اور

$$ح م = \sqrt{\left(ع - \frac{لا}{ی}\right)^{۲} + لا^{۲} - \left(ع - \frac{لا}{ی}\right) \times \frac{۲ س لا}{ط}}$$

جو شخص ذرا بھی غور کریگا اوسی معلوم ہوجائیگا کہ شکل گذشتہ بہت فائدہ مند ہی یہہ شکل سمپسن صاحب نے کہ بڑے ریاضی دان انگلستان کی ہے بوسیلہ علم لا انتہا کے ثابت کی ہی

۱۱ ایک شخص نے ایک راجہ سی زمین مانگی راجہ نی ایک بانس کو توڑکر کہا کہ جتنی زمین بشکل مثلث اس بانس کے دو ٹکڑون مین آہوجاوے اوتنی زمین تو تیرے لیے اب شخص مذکور پڑھنے والی اس کتاب سے التماس کتا ہی کہ وہ ٹکڑون بانس کو کتنا پھیلاوے یعنی تیسری طرف مثلث کی کس مقدار پر فرض کرے کہ زمین اوسی نہایت زیادہ ہات لگی جواب تیسری طرف مساوی ہو جذر حاصل جمع مجذورون دو ساقون کے جیسا کہ سوال چہارم مین ثابت ہوچکا ہے

۱۲ ایک گاجر ونکا ڈھیر لگا ہوا ہی اور اگر کسی ایک گاجر کا اینن سے چھلکا اوتارین تو مساحت ہر گاجر کی چھلکے کی یکسان ہوتی ہی بتاؤ کونسی گاجر اینن سے نہایت دزنی ہوگی

۱۳ تصنیف کر وایک مثلث مفروض کو ایک نہایت چھوٹی خط سے حل کرو اس سوال کو صرف بمدد جبر و مقابلہ کے اوفر بوسیلہ علم مثلث یا علم لا انتہا کی فقط

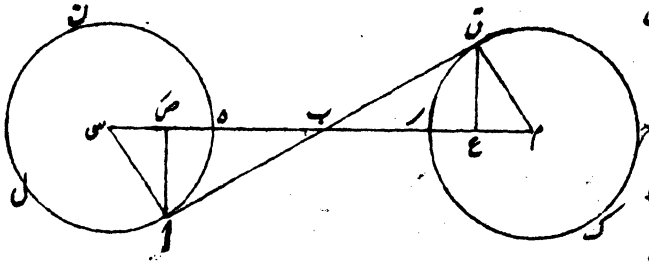
واضح ہو کہ فرنگستان کے ریاضی دانون نے جبر و مقابلہ سی فقط وہ مثالین حد زیادتی اور کمی کی حل کی ہین جو مساوات درجہ دویم اوسی متعلق ہین اور جن مثالون مین مساواتین تیسری درجہ یا چوتھے درجہ یا زیادہ کی حل کرنی پڑتی ہین اون مثالونکا جبر و مقابلہ سے حل کرنا ابتک کسی ریاضی دان انگلستان نے نہین لکھا بلکہ ایسی مثالین علم جزئیات و کلیات سی جسکو زبان انگریزی مین دفرنشل کیلکیولس کہتے ہین حل کی ہین سواب جناب مخدومی مکرمی ماسٹر رامچندرنی ایک طریقہ ایسا ایجاد کیا ہی کہ جس سے تیسری چوتھے مرتبہ کی مثالین سبھے جبر و مقابلہ سے حل ہوسکتی ہین اور اس طریقہ سی ہر طرح کی مثالین نکالکر زبان انگریزی مین ایک کتاب تصنیف کی ہی اور اوس کتاب کی چار باب ہین اول باب مین فقط وہ مثالین لکھی ہین جو مساوات درجہ دویم اور اول سے متعلق ہین اور ایسی مثالین انگریزی جبر و مقابلہ مین بھی ہوتی ہین اور دوسرے باب مین وہ مثالین لکھی ہین جو مساوات تیسری درجہ سے متعلق ہین اور تیسری باب مین وہ مثالین لکھی ہین جنمین چوتھی درجہ اور یا پنجوین درجہ اور چھٹی درجہ کی مساواتین حل کرنی پڑتی ہین اور چوتھی باب مین ایسی مثالین ہین جنمین دو مقدار غیر مقررہ یا کئی مقدار غیر مقررہ مساوات مین شامل ہون اس کتاب کی دیکھنی سے ایسی ذکاوت اور جودت طبع مصنف کی معلوم ہوتی ہی کہ مین اوسکا بیان نہین کرسکتا دل بی اختیار چاہتا تھا کہ اسکی اکثر مثالین اس جبر و مقابلہ مین لکھون لیکن کتاب

کتاب کی بڑھ جانی سے قیمت کی زیادہ ہونیکا اندیشہ ہی اسواسطی ہر باب مین سی ایک یا دو مثالین بطریق
مشتے نمونہ از خروارے لکھکر خوبی اس کتاب کی شایقین پر ظاہر کرتا ہون

دو مثالین اول باب کی

۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایسی قیمت لا کی کہ جس سے $\frac{\text{لا}(۱-\text{لا})}{۲}$ ایک نہایت بڑی
مقدار ہو چونکہ اس صورت مین ۱ ایک مقدار مقررہ ہی اسواسطے نہایت بڑی زیادتی اور کمی مین کچھ خلل واقع نہین ہو سکتا
پس معلوم ہوا کہ لا (۱ - لا) نہایت بڑی مقدار ہونی چاہیئے پس اسکو ط کی برابر فرض کیا یعنے
لا (۱ - لا) = ط ∴ ۱ لا - لا^۲ = ط ∴ لا^۲ - ۱ لا = - ط اور لا^۲ - ۱ لا + $\frac{۱}{۴}$ = $\frac{۱}{۴}$ - ط
∴ لا - $\frac{۱}{۲}$ = $\sqrt{\frac{۱}{۴} - ط}$ ∴ لا = $\frac{۱}{۲} \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} - ط}$ اس صورت مین ظاہر ہی کہ ط نہایت زیادہ
ہو تو $\frac{۱}{۴}$ کے برابر ہوگی کیونکہ اس سے زیادہ ہو تو مقدار زنزولی غیر ممکن ہو جاتی ہی پس لازم آیا کہ ط = $\frac{۱}{۴}$
∴ لا = $\frac{۱}{۲}$ یعنے وہ قیمت لا کی جس سے $\frac{\text{لا}(۱-\text{لا})}{۲}$ نہایت بڑی مقدار ہو $\frac{۱}{۲}$ ہی

۲ دو کرہ اسطرح رکھے ہین کہ اونکی درمیانی کچھ فاصلہ ہی اور اون دونو کے مرکز دونی خط ملا ہوا ہے
تو اب ہم پوچھتے ہین کہ اوس خط مین ایسا مقام کہان ہی کہ اوسپر کھڑی ہو کر دونو کرہ نہایت بڑے
نظر آوین مثلاً دونو کردن



کے دو دایرہ عظیمہ
ا ل ن اور ق ر ک
ایک سطح مین ہین اور خط
ا ق دونو دایردن کا
مماس ہی اور س ا اور م ق دونو کردن کے مرکز ہین اور فرض کرو کہ خط س م = س اور س ہ = ط
اور ر م = ص اور س ب = لا اور مقام مطلوب ب ہی پس اب چھٹی مقالہ کی انہوین شکل سے
ظاہر ہی کہ س ب : س ا :: س ص یا لا : ط :: ط : س ص = $\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}}$
∴ ص ہ = س ہ - س ص = ط - $\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}}$ اور اسیطرح ع ر = م ر - م ع = ص - $\frac{\text{ص}^۲}{\text{س}-\text{لا}}$
اب قواعد مساحت سی ظاہر ہی کہ سطح اوس تراش کردی کی جسکی بلندی ص ہ ہی یہہ ہوتی ہی
۲ کہ ط × ص ہ = ۲ کہ (ط^۲ - $\frac{\text{ط}^۳}{\text{لا}}$) اور اسیطرح سطح اوس تراش کردی کی جسکی بلندی ع ر
ہی یہہ ہوتی ہی ۲ کہ ص × ع ر = ۲ کہ (ص^۲ - $\frac{\text{ص}^۳}{\text{س}-\text{لا}}$) پس معلوم ہوا کہ مجموعہ سطحون تراشہای
کردی کا جو نہایت زیادہ ہونا چاہیئے یہہ ہی ۲ کہ (ط^۲ - $\frac{\text{ط}^۳}{\text{لا}}$) + ۲ کہ (ص^۲ - $\frac{\text{ص}^۳}{\text{س}-\text{لا}}$)

یعنے ۲ کہ $(ط^۲ + ص - \frac{ط^۳}{لا} - \frac{ص^۳}{س - لا})$ اور چونکہ اس صورت مین ۲ کہ ایک مقدار مقررہ ہی اسلیے اسکی دور کرنی سی سیطرح کی خرابی واقع نہین ہوسکتی ∴ فرض کرو کہ $ط^۲ + ص - (\frac{ط^۳}{لا} + \frac{ص^۳}{س - لا}) =$ حد زیادتی کے $= ق$ ∴ $ط^۲ + ص - ق = \frac{ط^۳}{لا} + \frac{ص^۳}{س - لا}$ یہان صاف ظاہر ہی کہ اگر ق نہایت زیادہ ہو تو $ط^۲ + ص - ق$ ایک مقدار نہایت کم ہوگی پس فرض کرو کہ $ط^۲ + ص - ق =$ حد کمی کے یا $\frac{ط^۳}{لا} + \frac{ص^۳}{س - لا} =$ حد کمی کے ∴ $\frac{ط^۳ س + (ص^۳ - ط^۳) لا}{س لا - لا^۲} =$ حد کمی کے اب تعبیر کرو لا کو $\frac{س}{۱ + ر}$ سے یعنی $لا = \frac{س}{۱ + ر}$ ∴ $\frac{ط^۳ س + (ص^۳ - ط^۳) لا}{س لا - لا^۲} = \frac{ط^۳ س + (ص^۳ - ط^۳) \frac{س}{۱ + ر}}{\frac{س^۲}{۱ + ر} - \frac{س^۲}{(۱ + ر)^۲}}$

$= \frac{ط^۳ (۱ + ر)^۲ + (ص^۳ - ط^۳)(۱ + ر)}{س ر} = \frac{ط^۳ ر^۲ + ۲ ط^۳ ر + ط^۳ + (ص^۳ - ط^۳) ر + ص^۳ - ط^۳}{س ر}$

$= \frac{ص^۳ - ط^۳ + ۲ ط^۳}{س} + \frac{ط^۳ ر^۲ + ص^۳}{س ر} =$ حد کمی کے اس صورت مین $\frac{ص^۳ - ط^۳ + ۲ ط^۳}{س}$ ایک مقدار مقررہ ہی اسلیے اسکی دور کرنی سے کوئی خرابی نہین ہوسکتی اسیواسطی فرض کرو کہ $\frac{ط^۳ ر^۲ + ص^۳}{س ر} =$ حد کمی کے $= ع$ ∴ $ط^۳ ر^۲ + ص^۳ = س ر ع$ ∴ $ر^۲ - \frac{س ع}{ط^۳} ر = -\frac{ص^۳}{ط^۳}$ اور اس مساوات کی حل کرنی سے ظاہر ہی کہ $ر = \frac{س ع}{۲ ط^۳} \pm \sqrt{\frac{س^۲ ع^۲ - ۴ ط^۳ ص^۳}{۴ ط^۶}}$ اس قیمت سی معلوم ہوتا ہی کہ ع اوسوقت نہایت کم ہوسکتا ہی جسوقت $س^۲ ع^۲ = ۴ ط^۳ ص^۳$ کیونکہ اس سے کم فرض کرین تو مقدار ر موہوم ہوجاتی ہی پس لازم آیا کہ $س^۲ ع^۲ = ۴ ط^۳ ص^۳$ ∴ $ع = \frac{۲ ط^۳ ص}{س}$

اور $ر = \frac{س ع}{۲ ط^۳} = \frac{ص^۳}{ط^۳}$ اور ∴ $لا = \frac{س}{۱ + ر} = \frac{س}{۱ + \frac{ص^۳}{ط^۳}} = \frac{س ط^۳}{ط^۳ + ص^۳} =$ فاصلہ مطلوبہ کے یعنے نقطہ س سے اگر اتنی فاصلہ پر کھڑی ہوکر نظر کرین تو دو نوکرہ نہایت زیادہ نظر آوین دوسری باب (۱۴) مثال وہ کسر کونسی ہی کہ اگر اوس کسر مین سے اوسکی مکعب کو تفریق کرین تو حاصل تفریق نہایت زیادہ ہو فرض کرو کہ لا = کسر مطلوب کی اور ع = حاصل تفریق نہایت زیادہ کی اسیواسطی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی $لا - لا^۳ = ع$ ∴ $لا^۳ - لا + ع = ۰$ یہہ بات ظاہر ہی کہ اس مساوات کی تین قیمتین ہین اور فرض کرو کہ اونمین ایک $- ط$ ہی پس اب موافق خواص مساوات کی ظاہر ہی کہ یہہ مساوات پوری تقسیم ہوجائیگی $لا + ط$ پر اور جو کچھہ باقی نرہیگا پس عمل تقسیم کیا

$(ل + ط)$ $ل^۳ - ل + ع = (ل^۲ - ط ل + ط^۲ - ۱) = ۰$ (۱)

$ل^۳ + ط ل^۲$

$- ط ل^۲ - ل$

$- ط ل^۲ - ط^۲ ل$

$(ط^۲ - ۱) ل + ع$

$(ط^۲ - ۱) ل + ط^۳ - ط$

اسیواسطی ضروری کہ $= ط^۳ - ط$ اور $ط^۲ - ۱ = \frac{ع}{ط}$ اور اسیواسطی بوسیلہ مساوات (۱) کے

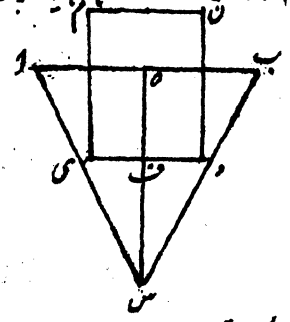
یہہ حاصل ہوتا ہی $ل = \frac{ط}{۲} \pm \sqrt{\frac{ط^۲ - ۴ع}{۴ط}}$ اور اب صاف ظاہر ہی کہ بڑی سی بڑی قیمت ع کی

اوسوقت ہوگی جب کہ $ط^۳ = ع ۴ = ۴ ط^۳ - ۴ ط$ $\therefore ط^۳ = ۴ ط^۳ - ۴ ط$

$\therefore ۳ ط^۳ = ۴ ط$ $\therefore ۳ ط^۲ = ۴$ $\therefore ط = \sqrt{\frac{۴}{۳}}$ اور $ل = \frac{ط}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ = کسر مطلوب کے

۲ ایک گلاس میں پانی بھرا ہوا ہی اور اوسمیں ایک جسم مکعبی ایسا رکھا جاتا ہی کہ پانی اوس

گلاس کا نہایت زیادہ گہرائی — فرض کرو کہ



ا ب س گلاس کا اور اوسکی دہانہ کا قطر $= ۲ص$ اور عمق

اوس گلاس کا یعنی $ہ س = ط$ اور $ن د = ۴$

جسم مکعبی ہی جسکی رکھنی سے نہایت زیادہ پانی

گر پڑتا ہی اور فرض کرو کہ $ف س = ل$ چونکہ مثلث س ۱۵

اور مثلث س ف ی متشابہہ ہین کیونکہ خط ۱۵ متوازی ہی ف ی کے تو $ہ س : ۱۵ :: ف س : ف ی$

یا $ط : ص :: ل : ف ی$ $\therefore ف ی = \frac{ص ل}{ط}$ اور $ی د = ص - \frac{ص ل}{ط}$ ظاہر ہی کہ اوسطح قاعدہ جسم مکعبی کی $= ۴$

$\frac{۴ ص^۲}{ط^۲}$ اور اگر اوس سطح کو بلندی ہ ف میں ضرب دین تو حاصل ضرب وہ حصہ جسم کا ہوگا جو پانی کے اندر ڈوبا ہوا رہتا ہی اگر پانی گر پڑے گا

یعنی $\frac{۴ ص^۲}{ط^۲} ل^۲ \times ہ ف = \frac{۴ ص^۲}{ط^۲} ل^۲ (ط - ل)$ = نہایت زیادہ پانی کے جو گلاس میں سما گر پڑے گا مگر

اوس صورت میں $\frac{۴ ص^۲}{ط^۲} =$ ایک مقدار مقررہ کی اسیواسطی اوسکو دور کرنیکی بعد $ل^۲ (ط - ل) =$

حد زیادتی کے $= ع$ $\therefore ل^۳ - ط ل^۲ + ع = ۰$ اب فرض کرو کہ اوس مساوات تیسری درجہ کی تین قیمتون

میں سے ایک نفی قیمت $- س$ ہی پس اب ضرور ہی کہ یہہ مساوات $ل + س$ پر پوری تقسیم ہو جاوی اور کچھہ باقی

نہ بچی اسیواسطی حل تقسیم کیا

$$\left.\begin{array}{l} \text{لا}^{۲}-\text{ط لا}+\text{ع}=۰ \\ \text{لا}+\text{س} \end{array}\right) \overline{\text{لا}^{۳}-(\text{س}+\text{ط})\,\text{لا}^{۲}+\text{س}^{۲}+\text{س ط}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots (۱)}$$

$$\frac{\text{لا}^{۳}+\text{س لا}^{۲}}{-(\text{ط}+\text{س})\,\text{لا}^{۲}+\text{ع}}$$

$$\frac{-(\text{ط}+\text{س})\,\text{لا}^{۲}-\text{س}\,(\text{س}+\text{ط})\,\text{لا}}{\text{س}\,(\text{س}+\text{ط})\,\text{لا}+\text{ع}}$$

$$\frac{}{\text{س}\,(\text{س}+\text{ط})\,\text{لا}+\text{س}\,(\text{س}^{۲}+\text{س ط})}$$

اور بعد تقسیم کے لازم آیا کہ ع = س (س۲ + س ط) ∴ $\frac{\text{ع}}{\text{س}}$ = س۲ + س ط اور بوسیلہ مساوات (۱)

لا۲ − (س + ط) لا = − $\frac{\text{ع}}{\text{س}}$ اسیواسطی معدوم کرنے کے

$$\text{لا} = \frac{\text{ط}+\text{س}}{۲} \pm \sqrt{\frac{\text{س}\,(\text{ط}+\text{س})^{۲}-۴\text{ع}}{۴\text{س}}}$$ اب تاکہ ع نہایت زیادہ ہو ضرور ہے کہ

س (ط + س)۲ − ۴ع = ۴س (س۲ + س ط) = ۴س۳ (اسی سوال سے ۱ سے ط) = ۴ س

اور س = $\frac{\text{ط}}{۳}$ ∴ لا = $\frac{\text{س}+\text{ط}}{۲}$ = $\frac{۲\text{ط}}{۳}$ اور اسیواسطی ہر ایک ضلع جسم مکعب کا

= $\frac{۲\text{ص لا}}{\text{ط}}$ = $\frac{۲\text{ص} \times \frac{۲\text{ط}}{۳}}{\text{ط}}$ = $\frac{۴\text{ص}}{۳}$ تیسری باب کی مثال عدد ۱۲ کو ایسی دو

حصوں میں تقسیم کرو کہ اگر چھوٹی حصہ کو بڑی حصہ کی مکعب میں ضرب کریں تو حاصل ضرب نہایت زیادہ ہو

فرض کرو لا = بڑی حصہ کی ∴ ۱۲ − لا = چھوٹی حصہ کے اور موافق شرط سوال کے

لا۳ (۱۲ − لا) = نہایت زیادہ کی = ع یعنی لا۴ − ۱۲ لا۳ + ع = ۰ فرض کرو کہ حاصل ضرب دو قیمتوں اس

مساوات = لا۲ − ط لا + ص اسیواسطی اس حاصل ضرب پر مساوات پوری تقسیم ہو جاوے گی

$$\left.\begin{array}{l} \text{لا}^{۲}-\text{ط لا}+\text{ص} \\ \text{لا}^{۲}-۱۲\,\text{لا}^{۲}+\text{ع}=۰ \end{array}\right) \overline{\text{لا}^{۴}+(\text{ط}-۱۲)\,\text{لا}^{۳}+\text{ط}^{۲}-۱۲\text{ط}-\text{ص}=۰ \quad (۱)}$$

$$\frac{\text{لا}^{۴}-\text{ط لا}^{۳}+\text{ص لا}^{۲}}{(\text{ط}-۱۲)\,\text{لا}^{۳}-\text{ص لا}^{۲}}$$

$$\frac{(\text{ط}-۱۲)\,\text{لا}^{۳}-\text{ط}\,(\text{ط}-۱۲)\,\text{لا}^{۲}+\text{ص}\,(\text{ط}-۱۲)\,\text{لا}}{(\text{ط}^{۲}-۱۲\text{ط}-\text{ص})\,\text{لا}^{۲}-\text{ص}\,(\text{ط}-۱۲)\,\text{لا}+\text{ع}}$$

$$(\text{ط}^{۲}-۱۲\text{ط}-\text{ص})\,\text{لا}^{۲}-\text{ط}\,(\text{ط}^{۲}-۱۲\text{ط}-\text{ص})\,\text{لا}+\text{ص}\,(\text{ط}^{۲}-۱۲\text{ط}-\text{ص})$$

پس لازم آیا کہ دو مساوات حاصل ہوں ایک تو ع = ص (ط۲ − ۱۲ ط − ص) ∴

$\frac{ع}{ص} = ط^2 - ۱۲ ط - ص$ .... (۱)

اور دوسری ص (ط − ۱۲) = ط (ط۲ − ۱۲ ط − ص) ∴ ص (۲ط − ۱۲) = ط۳ − ۱۲ ط۲

$\therefore ص = \frac{ط^3 - ۱۲ ط^2}{۲ط - ۱۲} = \frac{ط^2 (ط - ۱۲)}{۲ط - ۱۲}$ ∴ بوسیلہ مساوات (۱) کے

$\frac{ع}{ص} = ط^2 - ۱۲ ط - \frac{ط^2 (ط - ۱۲)}{۲ط - ۱۲} = \frac{ط^3 - ۴ ط^2 + ۱۴۴ ط}{۲ط - ۱۲}$

$= \frac{ط (ط - ۱۲)^2}{۲ط - ۱۲}$ اور ∴ ع = ص × $\frac{ط (ط - ۱۲)^2}{۲ط - ۱۲}$ =

$\frac{ط^2 (ط - ۱۲)}{۲ط - ۱۲} \times \frac{ط (ط - ۱۲)^2}{۲ط - ۱۲} = \frac{ط^3 (ط - ۱۲)^3}{(۲ط - ۱۲)^2}$ اور اب بوسیلہ (۱) کے

$لا^2 + (ط - ۱۲) لا = - \frac{ع}{ص}$ اور اسکی حل کرنی سے لا =

$- \frac{ط - ۱۲}{۲} \pm \sqrt{\frac{ص (ط - ۱۲)^2 - ۴ع}{۴ ص}}$ پس ع کی حد زیادتی کرنے ضرور ہے کہ

$ص (ط - ۱۲)^2 = ۴ع$ یا $\frac{ط^2 (ط - ۱۲)}{۲ط - ۱۲} (ط - ۱۲)^2 = \frac{۴ ط^3 (ط - ۱۲)^3}{(۲ط - ۱۲)^2}$ یا

$۱ = \frac{۴ط}{۲ط - ۱۲}$ ∴ ط = − ۶ اور لا = $- \frac{ط - ۱۲}{۲} = ۹$ = حصہ بڑی کے

اور ∴ ۳ = حصہ چھوٹی کے

چوتھی باب کی مثال کی قیمت چاہئی لا ، د کی تاکہ ط لا۳ د۴ − لا۳ د۴ − لا۴ د۳ − لا۴ د۳ حد زیادہ

جانا چاہیے کہ بہت سے مجہولوں میں ایک مقدار غیر منقطع اور باقی کو منقطع فرض کر کے حل کرتے

ہیں پس اول فرض کیا کہ لا اور د منقطع ہیں اور د غیر منقطع

$$\therefore \text{ط } \text{لا}^2 \text{ک}^3 \text{د}^4 - \text{لا}^3 \text{ک}^3 \text{د}^3 - \text{لا}^3 \text{ک}^4 \text{د}^2 - \text{لا}^4 \text{ک}^2 \text{د}^3 = \text{لا}^2 \text{ک}^3 \left\{ (\text{ط} - \text{لا} - \text{ک}) \text{د}^4 - \text{د}^5 \right\} =$$

حد زیادتی کے اور اسیواسطی $(\text{ط} - \text{لا} - \text{ک}) \text{د}^4 - \text{د}^5 =$ حد زیادتی کے اور موافق (۱۰) سوال (۱) باب اوّل اسی کتاب کی $\text{د} = \frac{۴ (\text{ط} - \text{لا} - \text{ک})}{۵}$ یا $۴ \text{لا} + ۴ \text{ک} + ۵ \text{د} = ۴ \text{ط} \quad \ldots\ldots (۱)$

اور اب فرض کرو کہ $\overline{\text{لا}}$ اور $\overline{\text{د}}$ منقطع ہیں اور ک غیر منقطع اسیواسطی موافق بیان بالا کی

$(\text{ط} - \text{لا} - \text{ک}) \text{ک}^3 - \text{ک}^4 =$ حد زیادتی کے اور اسیواسطی بحکم سابق $\text{ک} = \frac{۳ (\text{ط} - \text{لا} - \text{د})}{۴}$

$\therefore ۳ \text{لا} + ۴ \text{ک} + ۳ \text{د} = ۳ \text{ط} \quad \ldots\ldots (۲)$

اب فرض کرو کہ $\overline{\text{ک}}$ اور $\overline{\text{د}}$ منقطع ہیں اور لا غیر منقطع اسیواسطی بحکم بیان بالا کے

$(\text{ط} - \text{ک} - \text{د}) \text{لا}^2 - \text{لا}^3 =$ حد زیادتی کے اور موافق حل سوال (۲) باب دوم اسی کتاب کے

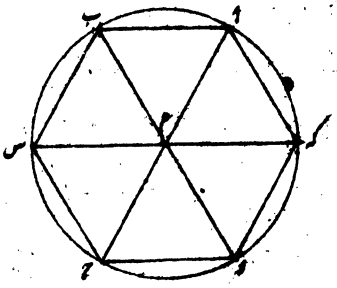
$\text{لا} = \frac{۲ (\text{ط} - \text{ک} - \text{د})}{۳}$ اور $\therefore ۳ \text{لا} + ۲ \text{ک} + ۳ \text{د} = ۲ \text{ط} \quad \ldots\ldots (۳)$

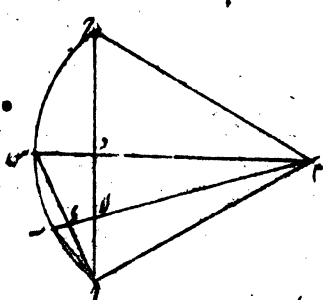
اور اب بوسیلہ مساواتوں (۱) اور (۲) اور (۳) کی قیمتیں مطلوب $\overline{\text{لا}}$ و $\overline{\text{د}}$ کے لیے حاصل ہوتے ہیں لا $= \frac{\text{ط}}{۵}$ اور ک $= \frac{۳ \text{ط}}{۱۰}$ اور $\overline{\text{د}} = \frac{۲ \text{ط}}{۵}$

فصل چھٹی مساحت دائرہ اور

اور شکل مجسم کی بیان مین

آب س م ہی کہ ایک دائرہ ہی اور اسمین ایک شکل چہ ضلعون کی بنی ہوئی ہی اور ہر ضلع اس شکل کا مساوی نصف قطر کی ہی کیونکہ قوس ب س جسمین دائرہ کا ہی اور اسیواسطے مجموعہ باقی دو زاویون کا ۱۲۰ درجی ہے اور چونکہ بسبب مساوی ہونے ب م اور م س کے یہی دو زاویے اسمین مساوی ہین تو معلوم ہوا کہ ہر زاویہ مثلث ب م س کا ۶۰ درجہ کا ہی اور اسیواسطی مثلث مذکور ایک مثلث مساوی الاضلاع ہے یعنے ب س مساوی نصف قطر کے ہی فرض کرو کہ قوس ۱۲ چھٹا حصہ ایک ایسی دائرہ کا ہی کہ اوسکا ایک ہی آب ظاہر ہی کہ چونکہ معلوم ہی ہمین ۱ ہے یعنے نصف اوسکا ۱ د اور خط ۱ م وتر قایمہ کا تو معلوم ہو جائیگا ہمین خط م د اور د س



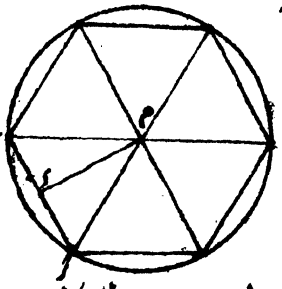


اور جب معلوم ہوا ہمین خط ۱ د اور د س تو معلوم ہو جائیگا ہمین وتر قائمہ کا ۱ س یعنے نصف اوسکا خط ۱ ۲ اور معلوم ہونی خط ۱ م اور ۱ ۲ سے معلوم ہو جائیگا ہمین خط م ۲ پھر وب اور بعد ازان خط ۱ ب جو وتر ہی چھ حصہ قوس ۱ ۲ کا یعنے $\frac{1}{24}$ کل دائرہ کا اور اسیطرح سے معلوم ہو سکتی ہین ہمین وتر

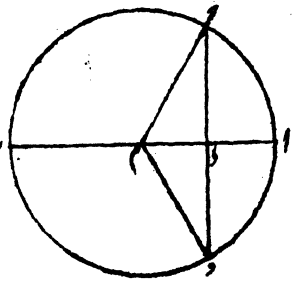
$\frac{1}{48}$ اور $\frac{1}{96}$ اور $\frac{1}{192}$ اور $\frac{1}{384}$ اور $\frac{1}{768}$ اور $\frac{1}{1536}$

دائرہ کا اور اس وتر کو حساب والون نے بجای قوس کے فرض کیا ہی اور ۱۵۳۶ مین ضرب دیکر دریافت کیا ہی کہ اگر قطر ایک دائرہ کا ۱ ہو تو محیط اوسکا نہایت قریب اسکے ۱۴ ۱۵ ۹۱ ۳ ہوتا ہی اس سبب کر ہم تعبیر کرینگے ساتھہ حرف ک کے اب فرض کرو کہ ایک دائرہ ایسا ہی کہ اوسکا قطر = ط کے ہی اور محیط = م تو

۱ : ک :: ط : م یعنے ۱ × م = ک ط ∴ م = ک ط تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ اگر معلوم کیا چاہین ہم محیط کسی دائرہ کا جبکہ جانتے ہون ہم قطر اوسکا تو ضرب دینا چاہیئے ہمین قطر کو ک مین اور حاصل ضرب محیط ہوتا ہی دایرہ مین کہ اوسکا رکن ہم نے فرض کیا ہے ایک شکل کثیر الاضلاع کا اوسکی سب ضلعی مساوی ہین اور یہہ قسم

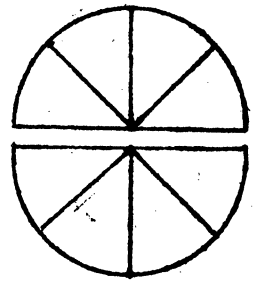


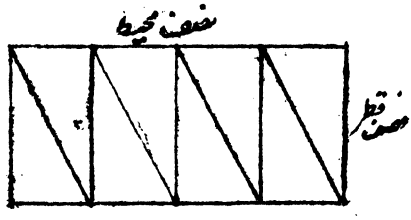
کیا ہمنی اوسیے متلثون مین اور مرکز م سے گرایا ہمنے عمود م د
کا اوپر خط آ ب کے اب فرض کرو کہ تعداد ضلعون اوس کثیر
الاضلاع کے = لا اور ایک ضلع = د اور عمود جو مرکز سے گرایا
جاویے اوس ایک ضلع پر = د تو مساحت ایک مثلث
کی = $\frac{د د}{۲}$ اور کل کثیر الاضلاع کی = $\frac{لا د}{۲}$ × د
یعنی نصف حاصل جمع ضلعون کا × عمود مین = مساحت کثیر الاضلاع کے اب ظاہر ہی کہ جتنا لا کو
زیادہ فرض کرو اوتنا ہی لا د کے حاصل جمع ضلعون کثیر الاضلاع کا ہی اور محیط دایرہ مین کم فرق رہیگا یعنے
دائرہ مین ایک ایسا کثیر الاضلاع بنایا جاسکتا ہی کہ فرق اوسکی ضلعون کے مجموعہ اور محیط مین اور
عمود د اور نصف قطر مین کم ہووی بہ نسبت کسی مقدار مفروض کے اور چونکہ قاعدہ واسطے دریافت کرنی
مساحت کثیر الاضلاع کے اس کثیر الاضلاع کی صورت مین بہی جاری ہوسکتا ہی تو معلوم ہوا کہ مساحت
دائرہ = نصف قطر × نصف محیط اب فرض کرو کہ دو دایرے آ اور ب ہین اور قطر آ کا
= ط اور قطر ب کا = ص تو ا = $\frac{ک ط}{۲}$ × $\frac{ط}{۲}$ = $\frac{ک ط^۲}{۴}$ اور
ب = $\frac{ک ص}{۲}$ × $\frac{ص}{۲}$ = $\frac{ک ص^۲}{۴}$ اور اب ظاہر ہی کہ ا : ب :: $\frac{ک ط^۲}{۴}$: $\frac{ک ص^۲}{۴}$ یعنے



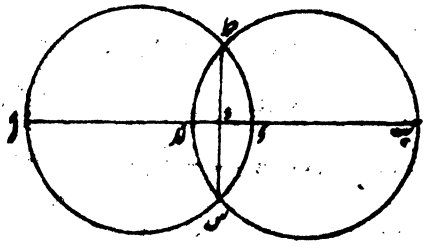
ا : ب :: ط^۲ : ص^۲ اور اوس سے یہہ معلوم ہوا کہ
دایرے ایک دوسرے سے وہ نسبت رکھتی ہین
جو مجذور اونکے قطرون کے رکھتی ہین خط آ د کو
تیر کہتے ہین اور ج د کو وتر قوس کہتے ہین اگر
معلوم ہو ہمین وتر اور قطر تو معلوم کرسکتے ہین ہم
تیر کو اس طور سے فرض کرو کہ نصف قطر ج م یا آ م = ط اور نصف وتر د د = ص اور
آ د = لا جو مجہول ہی تو ص^۲ + (ط − لا)^۲ = ط^۲ یعنی ص^۲ + ط^۲ − ۲ ط لا + لا^۲ = ط^۲ یعنے
لا^۲ − ۲ ط لا = − ص^۲ اور لا^۲ − ۲ ط لا + ط^۲ = ط^۲ − ص^۲ اور
لا − ط = ± $\sqrt{ط^۲ - ص^۲}$ اور لا = ± $\sqrt{ط^۲ - ص^۲}$ + ط
اور معلوم ہوسکتا ہی وتر جب معلوم ہو قطر اور تیر مثلاً فرض کرو کہ تیر = ص اور نصف وتر = لا تو
لا^۲ + (ط − ص)^۲ = ط^۲ یعنے لا^۲ + ط^۲ − ۲ ط ص + ص^۲ = ط^۲

اور لا = — ص + ۲ ط ص اور لا = * — ص + ۲ ط ص (ل) جسوقت معلوم ہو وتر
اور تیر تو معلوم ہوسکتا ہی قطر مثلاً فرض کرو کہ نصف وتر = ص اور تیر = ط اور نصف قطر = ۱ تو
لا = ص + (لا — ط) = ص + لا — ۲ ط لا + ط یعنے ص + ط = ۲ ط لا اور
لا = $\frac{ص^۲ + ط^۲}{۲ ط}$ پس معلوم ہوا کہ جب قطر اور وتر اور تیر مین سے دو چیزین معلوم ہوتی ہین تو
تیسری معلوم ہوسکتی ہی سطح قطاع ا م = $\frac{قوس د ج}{۲}$ × ج م دلیل اسکے واسطے وہی ہی جو
واسطے مساحت دائرہ کے ہی سوای مرقومہ بالا کے ایک اور دلیل واسطے مساحت دائرہ کی یہہ ہی
تقسیم کرو ہر نصف دائرہ کو مساوی تعداد قطاع مین اور قطر کی سیدہ مین دو نصف دائرون کو
جدا کرو اور بعد اسکے قطاع کو پہلا کہ ایک نصف دائرہ کے قطاع کو دوسرے نصف دائرہ کے
قطاع کی ساتھہ شامل کرو اور دیکھنی سے معلوم ہوگا کہ مجموعہ ان قطاع کا یعنے سطح دائرہ کے





مساوی ہی سطح نصف محیط کی نصف قطر مین جیسکہ شکل سی واضح ہی حاصل ہی ہم ایک مربع کہ اوسکا ایک
ضلع = ط کی ہی اور دریافت کیا چاہتے ہین ہم ایک ایسا دائرہ کہ اوسکی مساحت مساحت مربع سی مساوی ہو
فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ مطلوبہ کا = لا کی ہی تو اوسکی مساحت = کہ لا کے ہوگی اور بموجب شرط
سوال کے کہ لا = ط تو لا = $\frac{ط^۲}{۲}$ اور جسوقت معلوم ہو نصف قطر دائرہ کا تو دائرہ فورا معلوم ہوسکتا
ہی دو دائرے ایک دوسرے کو تقاطع کرتی ہین



جیسکہ شکل سی واضح ہی
معلوم ہی ہین قطر دونو دائرو کا
اور خط ا ب یعنے قطر
ب لا = ۲ ط اور قطر
ا س = ۲ ص اور خط

اور (۴) — (۳) = ب + ۵ س + ۷ د = ۱۶ ..... (۷)

اور (۶) — (۵) = ۲ س + ۱۲ د = ۵ ..... (۸)

اور (۷) — (۶) = ۲ س + ۱۸ د = ۷ ..... (۹)

اور (۹) — (۸) = ۶ د = ۲ اور د = $\frac{۱}{۳}$ اور مساوات (۸) سے

۲ س + ۴ = ۵ اور س = $\frac{۱}{۴}$ اور مساوات (۵) سے ب + $\frac{۳}{۲}$ + $\frac{۷}{۳}$ = ۴

∴ ب = ۴ − $\frac{۲۳}{۶}$ = $\frac{۱}{۶}$ اور مساوات (۱) سے ا + $\frac{۱}{۶}$ + $\frac{۳}{۶}$ + $\frac{۱}{۳}$ = ۱

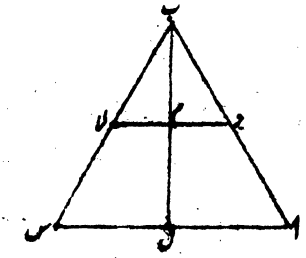
ا + $\frac{۶}{۶}$ = ۱ ∴ ا = ۰ تو معلوم ہوا کہ ۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + وغیرہ =

$$\frac{ن^۴}{۴} + \frac{ن^۳}{۲} + \frac{ن^۲}{۴} = \frac{ن + ۳ن^۲ + ۲ن^۳}{۶} = \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

اب فرض کرو ن = مقدار لا انتہا تو ن + ۱ = ن

$$\therefore \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} = \frac{۲ن^۳}{۶} = \frac{ن^۳}{۳}$$

اب ہم کہتے ہین کہ متشابہ مثلث ایک دوسرے سے وہی نسبت رکھتی ہین جو مجذور اونکی ایک ایک ضلع کے کہ محاذی ہون انہی دونون متشابہ مثلثون کے اونکے ضلع کہتے ہین



فرض کرو کہ اب س اور د لا ب دو مثلث متشابہ ہین اور ایک مثلث کو دوسرے پر بیٹھا دو جیسکہ شکل سے واضح ہی اب ظاہر ہی کہ

د لا : ا س :: د لا : ا س

د لا : ا س :: ب م : ب ل

اور حاصل ضرب اس نسبت کا یہ ہی

د لا : ا س :: د لا × ب م : ا س × ب ل لیکن مثلث

د ب لا : مثلث ا ب س : د لا × ب م :: ا س × ب ل تو معلوم ہوا کہ مثلث

د ب لا : مثلث ا ب س :: د لا : ا س منشور ایک شکل مجسم ہی ایسی کہ اوسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہی اور ایسی ہی ایک مقابل اسکی متوازی ہی اور گھیری ہوتی ہی سب طرف سی اشکال متوازی الاضلاع سی اگر قاعدہ منشور کا مثلث ہو تو اوسی منشور مثلثی کہتے ہین اور علی ہذا القیاس مخروط مضلع وہ شکل مجسم ہی جسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہوتا ہی اور جو گھیری ہوتی ہی مثلثون سے جو سب ایک نقطہ پر ملتے ہین اور اس

اور (۴) — (۳) = ب + ۶ س + ۷ د = ۱۶ ..... (۷)

اور (۶) — (۵) = ۲ س + ۱۲ د = ۵ ..... (۸)

اور (۷) — (۶) = ۲ س + ۱۸ د = ۷ ..... (۹)

اور (۹) — (۸) = ۶ د = ۲ اور د = $\frac{۱}{۳}$ اور مساوات (۸) سے

۲ س + ۴ = ۵ اور س = $\frac{۱}{۲}$ اور مساوات (۵) سے ب + $\frac{۳}{۴}$ + $\frac{۷}{۳}$ = ۴

∴ ب = ۴ − $\frac{۲۳}{۱۲}$ = $\frac{۱}{۱۲}$ اور مساوات (۱) سے ۱ + $\frac{۱}{۱۲}$ + $\frac{۳}{۴}$ + $\frac{۱}{۲}$ = ۱

۱ + $\frac{۶}{۱۲}$ = ۱ ∴ ۱ = ۰ تو معلوم ہوا کہ ۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + وغیرہ =

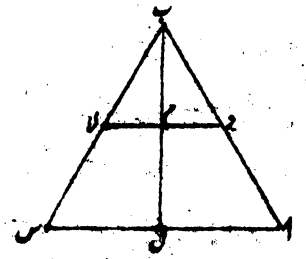
$$\frac{ن^۴}{۴} + \frac{ن^۳}{۳} + \frac{ن^۲}{۲} = \frac{ن + ۳ن^۲ + ۲ن^۳}{۶} = \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

اب فرض کرو ن = مقدار لا انتہا تو ن + ۱ = ن

$$\therefore \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶} = \frac{۲ن^۳}{۶} = \frac{ن^۳}{۳}$$

اب ہم کہتے ہیں کہ مثلث ایک دوسرے سے وہی نسبت رکھتی ہیں جو مجذور راوں کی ایک ایک ضلع کے کہ محاذی ہوں یا دیوں متساوی کے اس کو کہتے ہیں

فرض کرو کہ اب س اور د لا ب دو مثلث مشابہ ہیں اور ایک مثلث کو دوسرے پر بیٹھا دو جیسکہ شکل سے واضح ہی اب ظاہر ہی کہ



د لا : ۱ س :: د لا : ۱ س

د لا : ۱ س :: ب م : ب ل

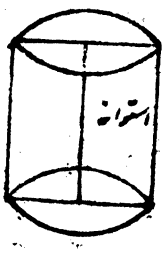
اور حاصل ضرب ان نسبت کا یہ ہی

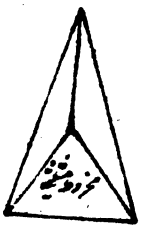
د لا : ۱ س :: د لا × ب م : ۱ س × ب ل لیکن مثلث

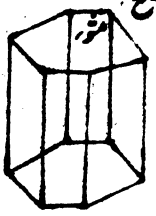
د ب لا : مثلث ۱ ب س : د لا × ب م :: ۱ س × ب ل تو معلوم ہوا کہ مثلث

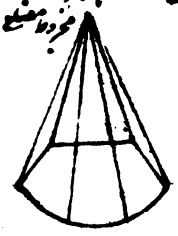
د ب لا : مثلث ۱ ب س :: د لا : ۱ س مشور ایک شکل مجسم ہی ایسی کہ اوسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہی اور ایسی ہی ایک مقابل اسکی متوازی ہی اور گہری ہوتی ہی سب طرف سی اشکال متوازی الاضلاع سی اگر قاعدہ مشور کا مثلث ہو تو اوسی مشور مثلثی کہتے ہیں اور علی ہذا القیاس مخروط مضلع وہ شکل مجسم ہی جسکا قاعدہ ایک شکل مستقیم الاضلاع ہوتا ہی اور جو گہری ہوتی ہی مثلثوں سے جو سب ایک نقطہ پر بیٹھتے ہیں اور اس

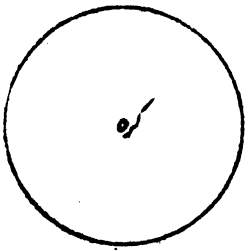
کو مخروط کی راس کہتے ہین استوانہ وہ شکل مجسم ہی جو پیدا ہوتی ہی گردش ایک مستطیل کی سے
گرد ایک اوسکی ضلعون مین سے مخروط مستدیر وہ شکل مجسم ہی جو پیدا ہوتی ہی گردش ایک مثلث
قایم الزاویہ کی سے گرد اوسکی ارتفاع کی یہہ بہی ظاہر ہی کہ ہر منشور مرکب ہوتا ہی منشورون مثلثی
سے اور ہر مخروط مضلع

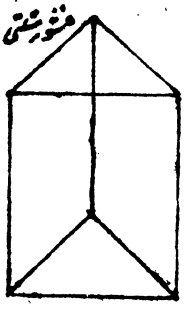


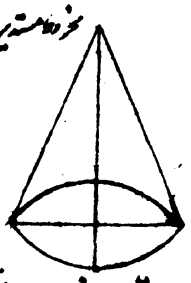






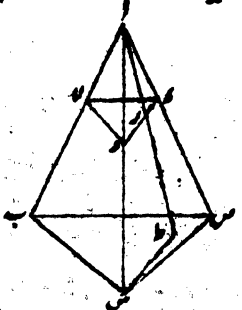






مرکب ہوتا ہی مخروطون مثلثی سے اب ہم کہتی ہین کہ اگر دیکہین ہم ایک مخروط مثلثی کو راس
کی طرف سی تو وہ اس شکل کا معلوم ہوگا تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ مخروط مثلثی مین سب مثلث جو
متوازی قاعدہ کے ہوتی ہین ویسے اسیمین مشابہ ہوتی ہین لیکن مشابہ مثلث ایک دوسرے
سے وہی نسبت رکہتی ہین جو مجذورات اونکے
ایک ایک ضلع کی رکہتے ہین فرض کرو

کہ اب س ص مخروط مثلثی ہی اور فرض
کرو کہ مثلث ر د لا متوازی ہی مثلث ص س ب سے کہ قاعدہ مخروط کا ہی اور فرض
کرو کہ اط ارتفاع مخروط کی ہی اور وہ ملتی ہی
مثلث ر د لا سے نقطہ ر مین اب ظاہر ہی کہ

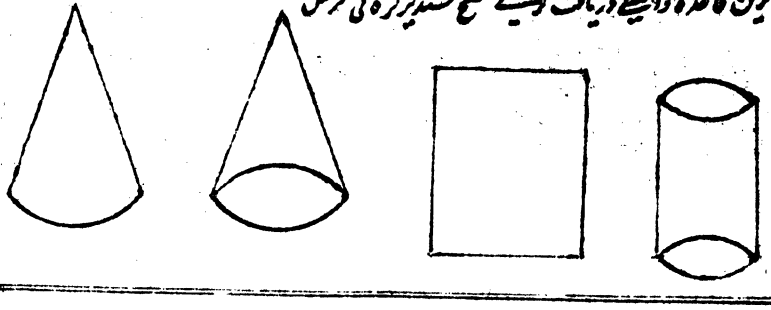


س ص : ر د :: ا س . ا د
∴ ص س² : ر د² :: ا س² : ا د²
لیکن ا س² : ا د² :: ا ط² : ا ر²

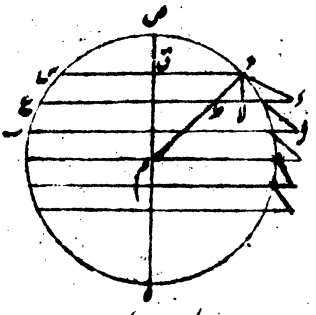
تو مثلث ص ب س : مثلث ر و لا :: ا ط : ا ر اب فرض کرو کہ مثلث ص ب س = ط اور مثلث ر و لا = لا اور ا ط = ص اور ا ر = و ط : لا :: ص : و تو لا = $\frac{ط و}{ص}$ اب فرض کرو کہ تو ہی ایک جزو ان جزون لا انتہا سے جنسی خط ا ط بنا ہوا ہی اور تعبیر کرتے ہین ہم اوس جز کو ساتھہ آ سکے تو اب ظاہر ہی کہ تعبیر کر سکتے ہین مجموعہ سب مثلثون یعنے مخروط کو ساتھہ اس سلسلہ کے $\frac{ط}{ص^2}$ (۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + وغیرہ لا انتہا کی) لیکن پہلی ثابت کیا ہی ہمنے کہ ۱ + ۴ + ۱۶ + وغیرہ لا انتہا = $\frac{ن^3}{3}$ اور اسجاے ن ہی تعداد مثلثون کی تو ضرور ہی کہ ن = ا ط اور

$$\frac{ن^3}{3} = \frac{ا ط^3}{3} = \frac{ص^3}{3}$$ اور مساحت مخروط = $\frac{ط}{ص^2} \times \frac{ص^3}{3} = ط \times \frac{ص}{3}$

تو معلوم ہوا قاعدہ واسطے دریافت کرنی مساحت مخروط کی یہہ ہی ضرب دو ایک تہائی ارتفاع کو مساحت قاعدہ مین اور حاصل ضرب مساحت مخروط ہوتا ہی لیکن مشہور کہ جسکا قاعدہ = ط اور ارتفاع = ص مساوی ہوتا ہی ط ص کے تو معلوم ہوا کہ ہر مخروط تہائی ہوتا ہی ایک منشور کا جسکا قاعدہ اور ارتفاع قاعدہ اور ارتفاع مخروط مذکور کی سے مساوی ہی یہہ بھی ظاہر ہی کہ ہر شکل قاعدہ یا قاعدہ تقسیم ہو سکتی ہی مثلثون مین تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ قاعدہ ہو یا مخروط کا کتنی ہی مثلثون کا ہو قاعدہ مرقومہ بالا ہمیشہ جاری ہو سکتا ہی تو اس سے یہہ معلوم ہوا کہ استوانہ اور مخروط مستدیر کی مساحت کی واسطے بھی جاری ہو سکتا ہی کیونکہ استوانہ ایک منشور ہی ایسا کہ اوسکی قاعدہ کی ضلعی تعداد مین لا انتہا ہین یعنی اوسکا قاعدہ دائرہ ہی اور اسیطور سی مخروط مستدیر ایک مخروط مضلع ہی کہ اوسکی قاعدہ کے ضلعے بیشمار ہین سطح مستدیر ایک استوانہ کی حاصل ہوتی ہی ضرب دینی سے محیط قاعدہ کو ارتفاع مین کیونکہ سطح مذکور ایک مستطیل ہی جیسیکہ شکل سے واضح ہی اور سطح مستدیر ایک مخروط مستدیر کی حاصل ہوتی ہی ضرب دینی سی نصف خط کو نصف محیط قاعدہ کی مین کیونکہ سطح مذکور ایک قطاع دائرہ کا ہی جیسیکہ پہلی سے واضح ہوگا اب ہم ثابت کرینگے قاعدہ واسطے دریافت کرنے سطح مستدیر کرہ کی فرض



کرو کہ ز د ص س ع ایک کرہ ہی اور د ر ایک نہایت چھوٹا مماس اور د و س ع ایک نہایت باریک دہاری سطح مستدیر کرہ کی اور د لا ایک نہایت چھوٹا جز قطر ص ہ کا اب ظاہر ہی کہ بسبب یہ ہونی مثلثوں و د لا اور و ق م کے



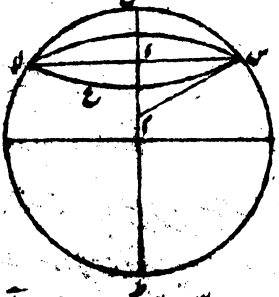
و ق : د م :: د لا : د و = د م × د لا / و ق

اب فرض کرو کہ د م جو نصف قطر ہی = ط اور و ق = لا اور د لا = ز تو د ر = ط × ز / لا لیکن سطح د و س ع = دس × کہ × د و = ۲ کہ لا × ط × ز / لا =

۲ کہ ط ز اور اسیطرح یہہ بھی دریافت ہوسکتا ہی کہ سطح د و ع بھی = ۲ کہ ط ز ہی اور مجموعہ ان سب سطحوں کا کہ مساوی سطح کرہ کے ہی

= ۲ کہ ط (ز + ز + ز + ز ..... لا انتہا) = ۲ کہ ط × ۲ ط = ۴ ط ۲ کہ

= ۲ ط × ۲ ط کہ = محیط قطر = جو چند سطح ایک دائرہ عظیمہ کی اب ہم ثابت کرینگی قاعدہ واسطے مساحت جسم کرہ کے فرض کرو کہ سطح کرہ کو تقسیم کیا ہمنی لا انتہا مساوی مربعوں میں اور ہر ان مربعوں پر ایک مخروط مصنع بنائی جاوے ایسی کہ ان سب کا محل اس مرکز کرہ پر ہو اب ظاہر ہی کہ مجموعہ ان سب مخروطوں کا مساوی مساحت کرہ کی ہی فرض کرو کہ ایک ضلع مذکور = ص تو مجموعہ ان سب مخروطوں کا = ص × ط / ۳ + ص × ط / ۳ + لا انتہا = ط / ۳ (ص + ص + ص + لا انتہا) = ط / ۳ × ۴ ط کہ = ۴ ط ۲ کہ / ۳ = ۸ ط ۳ کہ / ۶ اور اگر فرض کریں جسم کرہ کا ۴ ط = ع تو ۸ ط ۳ کہ / ۶ = ع ۳ کہ / ۶ ایک اور نئی ترکیب سطح ثابت کرنی قاعدہ مساحت کرہ کے یہہ ہی فرض کرو دو دائرے ص لا ط س اور س ع لا ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں بیچ خط س لا کے اور ایک دوسری پر عمود ہیں اب فرض کرو ص ز = لا = ایک نہایت چھوٹی جز قطر کے اور ز س = ز ∴ س لا = ۲ ز اور قطر ص ط = ط



∴ ز ط = ط − لا اور ز ط × ز ص = لا (ط − لا) = ط لا − لا ۲ = ۲ مساحت دائرہ س ع لا = ۲ کہ = کہ (ط لا − لا ۲) اب ظاہر ہی کہ مقدار کہ (ط لا − لا ۲) کے برابر ہی مساحت ایک دائرہ کی جو متوازی ہی دائرہ س ع لا کے اور مجموعہ ان سب دائروں کا مساوی ہی مساحت کرہ کے اور مجموعہ ان سب دائروں کا یہہ ہی

کہ $\left\{ ط(لا + ۲لا + ۳لا + \text{لا انتہا}) - (لا^۲ + ۴لا^۲ + ۹لا^۲ + \text{لا انتہا}) \right\} =$

کہ $\left\{ \frac{ط(۱ + ط)ط}{۲} - \left(\frac{۲ط + ۱ \times ط + ۱ \times ط}{۶} \right) \right\}$ اور چونکہ فرض کیا ہی ہمنے

ط کو لا انتہا نسبت لا کی تو ط + ۱ = ط

∴ مساحت کرہ = کہ $\left(\frac{ط^۳}{۲} - \frac{ط^۳}{۳} \right)$ = کہ $\left(\frac{۳ط^۳}{۶} - \frac{۲ط^۳}{۶} \right)$ = کہ $\frac{ط^۳}{۶}$

اب فرض کرو کہ ایک اور کرہ ایسا ہی کہ اوسکا قطر = ص تو بموجب قاعدہ مرقومہ بالا کی اوسکی مساحت

= کہ $\frac{ص^۳}{۶}$ اب نہایت ظاہر ہی کہ کہ $\frac{ط^۳}{۶}$: کہ $\frac{ص^۳}{۶}$ :: $ط^۳$: $ص^۳$ اس سے معلوم ہوا کہ کرے

ایک دوسری سے وہی نسبت رکھتے ہین جو مکعب اونکی قطرون کے اسمین رکھتے ہین

مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ مساحت سطح ایک کرہ کی جسکا نصف قطر = ط کے ہی مساوی ہوتی ہی ۴ کہ $ط^۲$

اور اگر ایک کرہ ہو جسکا نصف قطر = ص تو اوسکی سطح کی مساحت = ۴ کہ $ص^۲$ تو معلوم ہوا کہ

۴ کہ $ط^۲$: ۴ کہ $ص^۲$ :: $ط^۲$: $ص^۲$ اور اس سے یہہ ثابت ہوا کہ سطحین کرون کی اسمین وہی نسبت رکھتی ہین

جو اونکی قطرون کے مجذور

فصل ساتوین مقدارون نزولی کے بیانمین

اسمین رکھتی ہین

اوس مقدار حرفیہ کو جسکے اوپر علامت کسی مرتبہ کے نزول کی ہو اور جسکا نزول پورا نہین نکل سکتا ہو اوس مقدار کو مقدار نزولی کہتی ہین چند مثالین۔ اقسام کی مقدارون کے صفحہ ۱۳۶ مین ہمنے لکھی ہین اور وہان اونہین لکھنے سے قبل یہہ مطلب تہا کہ اگر اوس قسم کی مقدار کسی حساب مین واقع ہو تو طالب علم اوس پر بہی عمل ضروری جاری کر سکے۔ لیکن ہمین ان سے بہت کام نہین پڑتا ہی ہمنے اونکو ابواب گذشتہ مین نہین لکھا کیونکہ ہمارا مطلب یہہ ہی کہ جو مطالب ضروری اور دلچسپ ہین وہ اول لکھے جاوین اور جو اتنے ضرور نہین ہین وہ بعد ازان لکھے جائین اب ہم لکھتے ہین قواعد جو درباب مقدارون نزولی کے وضع کئے گئی ہین تبدیل کر سکتے ہین ہم کسی مقدار کو مقدار نزولی سے اگر لیوین ہم مقدار نزولی کا اوس مرتبہ کا صعود

جسی مرتبہ کا نزول تعبیر کرے علامت نزول مقدار نزولی مطلوب کی۔ مثلاً اگر ہم چاہین کہ مقدار ط کو بشکل جذر سے

تبدیل کرین تو لازم ہی کہ ہم اوسکا مجذور لین تو ظاہر ہی کہ $ط^۲$ ہوتا ہی اور چونکہ $\sqrt{ط^۲} = ط$

تو معلوم ہوا کہ مقدار نزولی مطلوبہ یہہ ہی $\sqrt{ط^۲}$ کہ مساوی ہی مقدار مفروضہ کے اسی مقدار کو اور

مقدارون نزولی سے بھی بتغیر کرسکتی ہین مثلاً ط = $ط^{\frac{3}{2}}$ اور ط = $ط^{\frac{4}{3}}$ اور
ط = $ط^{\frac{5}{4}}$ وغیرہ اور ط + لا = $(ط + لا)^{\frac{2}{3}}$ اسیطرح سی شکل کسی مقدار نزولی کی ایک اور
شکل سی تبدیل کی جاسکتی ہی مثلاً $(ط + لا)^{\frac{1}{2}} = (ط + لا)^{\frac{3}{6}}$
اور علی ہذا القیاس دلیل قاعدہ مذکور کی نہایت ظاہر ہی اور وہ یہہ ہی کہ جس مرتبہ کا صعود لیا جاتا ہی اسی
مرتبہ کا نزول لیا جاتا ہی اور اسیواسیطے جو مقدار عمل سے حاصل ہوتی ہی بالفرض مساوی ہوتی ہی مقدار
مفروض کی اور اسیواسیطے ہم لکھہ سکتے ہین ایک کو بجای دوسرے کی اگر دو مقدارون نزولی کا ایک ہی
نشان قوت ہو دی تو حاصل ضرب اونکا دریافت ہوسکتا ہی اگر ضرب کرین ہم اون مقدارون کو جو علامات کے
پیچے واقع ہین اور حاصل ضرب پر لکھین علامت مذکور کو مثلاً

$ط^{\frac{1}{2}} \times ص^{\frac{1}{3}} = (ط ص)^{\frac{1}{6}}$ اور $۲ \times ۲ = ۴$ اور ۶

$(ط + ص)^{\frac{1}{2}} \times (ط - ص)^{\frac{1}{2}} = (ط^۲ - ص^۲)^{\frac{1}{2}}$ اگر مقدار نزولی کی امثال بہی ہون تو اونکی حاصل
ضرب کو پہلے حاصل ضرب مقدارون نزولی کے لگانا چاہیئے مثلاً

$ط^{\frac{1}{2}} \times لا^{\frac{1}{2}} \times ص^{\frac{1}{2}} = ط ص لا$ اسیجای یہہ بات بیان کرنی چاہیئے کہ حاصل ضرب
$-ط^۲ \times -ط^۲$ یعنے مربعہ $-ط^۲$ کا $-ط^۴$ ہوتا ہی اسواسیطے کہ یہہ وہ مقدار ہی جسکا
جذر $-ط^۲$ ہی یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ

$(لا - ط + ص)^{\frac{1}{2}} \times (لا - ط - ص)^{\frac{1}{2}} = (لا^۲ - ۲ ط لا + ط^۲ - ص^۲)^{\frac{1}{2}}$

اگر نشان قوت دو مقدارون نزولی کی مخرج ایک سے ہون تو لازم کہ ان مقدارون نزولی کا اوتنے ہی مرتبہ
کا صعود لو جتنے احاد ہون اونکی نشان قوت کے شمار کنندہ و نمین اور بعد ازان ان مقدارون نزولی کا
حاصل ضرب بطریق گزشتہ کی دریافت ہوسکتا ہی
مثال $۲^{\frac{3}{2}} \times ۳^{\frac{1}{2}} = ۸^{\frac{1}{2}} \times ۳^{\frac{1}{2}} = (۲۴)^{\frac{1}{2}}$ اور اسیطرح سے حاصل ہوتا ہی حاصل ضرب آئندہ

$(ط + ص)^{\frac{1}{2}} \times (ط - ص)^{\frac{3}{2}} = ((ط + ص) \times (ط - ص)^{۳})^{\frac{1}{2}}$

اگر نشان قوت مقدارون نزولی کے یکسان نہون تو ان کو تبدیل کرسکتے ہین اور مقدارون نزولی ایسی سے کہ

اونکی نشان قوت کے نسبنما ایک سے ہون اور بعد ازان اونکا حاصل ضرب بطریق گذشتہ کی معلوم ہوسکتا ہی

مثال $(ط^{\frac{1}{4}} - لا^{\frac{1}{4}}) \times (ط - لا)^{\frac{1}{2}} = (ط^{\frac{1}{2}} - لا^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \times (ط - لا)^{\frac{2}{4}}$ اور اسیواسطے حاصلضرب مطلوبہ یہہ ہوگا $\left\{ (ط^{\frac{1}{2}} - لا^{\frac{1}{2}}) \times (ط - لا)^{\frac{2}{4}} \right\}^{\frac{1}{4}}$ اور اسیطور سے حاصل ہوتا ہی حاصل ضرب آئندہ

$$۲^{\frac{1}{2}} \times ۳^{\frac{1}{3}} = ۲^{\frac{3}{6}} \times ۳^{\frac{2}{6}} = ۸^{\frac{1}{6}} \times ۹^{\frac{1}{6}} = (۷۲)^{\frac{1}{6}}$$

اگر دو مقدارین غیر نزولی جو بیچے علامت نزولی کے واقع ہین ایک سی ہون تو حاصل ضرب انکا دریافت ہوسکتا ہی اگر جمع کرین ہم ان نشانون قوت یا علامتون نزولی کو اور بنا دین اس حاصل جمع کو نشان قوت حاصل ضرب کا مثلاً

$$ط^{\frac{1}{ن}} \times ط^{\frac{م}{ن}} = ط^{\frac{ن}{ن}} \times ط^{\frac{م}{ن}} = ط \times ط^{\frac{م}{ن}} = ط^{\frac{م+ن}{ن}}$$

اور یہہ مطابق ہی اوسکی جو ابواب گذشتہ مین بیان کیا گیا ہے

مثال $۲^{\frac{2}{4}} \times ۲^{\frac{3}{6}} = ۲^{\frac{5}{6}}$ اگر نشان قوت دو مقدارون نزولی کے مخرج ایک سے ہون اور ایک کو انمین سے دوسرے پر قسمت کیا چاہین تو خارج قسمت انکا معلوم ہوسکتا ہی اگر لیوین ہم ان دونو مقدارون نزولی کا علیحدہ علیحدہ اوسی مرتبہ کا صعود جتنے احاد ہین اونکے نشانون قوت کی شمار کنندونمین علیحدہ علیحدہ اور بعد ازان قسمت کرین ان حاصل صعودون کو ایک دوسری پر اور لیوین اسی خارج قسمت کا اوسی مرتبہ کا نزول جتنے احاد ہین مخرج مشترک نشانون قوت مذکورین اور دلیل اسکی یہہ کہ

$$(ط)^{\frac{1}{ن}} \div (ص)^{\frac{1}{ن}} = \frac{ط^{\frac{1}{ن}}}{ص^{\frac{1}{ن}}} \text{ اور } \frac{ط^{\frac{م}{ن}}}{ص^{\frac{م}{ن}}} = \left(\frac{ط}{ص}\right)^{\frac{م}{ن}}$$

مثال $۸^{\frac{3}{2}} \div ۲^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{۸}{۲}\right)^{\frac{1}{2}} = ۴^{\frac{1}{2}} = ۲$ اور اسیطور سے حاصل ہوتا ہی حاصل ضرب آئندہ

$$\left(\frac{ف}{ن}\right)^{\frac{1}{ر}} \div (س)^{\frac{1}{ر}} = \left(\frac{ف}{ن س^{ر}}\right)^{\frac{1}{ر}}$$

اگر مخرج نشانون قوت کی ایک سے یعنے مساوی نہون تو اس صورت مین لازم ہی کہ ان مخرجون کو

ایک کراین یعنے مقدارون نزولی مفروض کو ایسی مقدارون سے تبدیل کرین کہ اونکی نشانون قوت سے کسی نما ایک سے ہون اور بعد ازان عمل کرین بطریق گذشتہ کی اور اس عمل سے خارج قسمت مطلوب معلوم ہو جاویگا

مثال $(ط^{\frac{2}{3}} - لا)^{\frac{1}{2}} \div (ط^{\frac{3}{4}} - لا^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} = (ط^{\frac{2}{6}} - لا^{\frac{3}{6}})^{\frac{3}{6}} \div (ط^{\frac{3}{6}} - لا^{\frac{2}{6}})^{\frac{2}{6}} =$

$$\left(\frac{(ط^{\frac{2}{6}} - لا^{\frac{3}{6}})^{\frac{3}{6}}}{(ط^{\frac{3}{6}} - لا^{\frac{2}{6}})^{\frac{2}{6}}}\right) = \frac{(ط^{\frac{2}{6}} - لا^{\frac{3}{6}})^{\frac{3}{6}}}{(ط^{\frac{3}{6}} - لا^{\frac{2}{6}})^{\frac{2}{6}}}$$

اگر دو مقدارون نزولی کے نشانون قوت کی نیچے ایکہی مقدار غیر نزولی پائی جاے تو خارج قسمت انکا دریافت ہو سکتا ہی اگر تفریق کرین ہم ان نشانون قوت کو ایک دوسرے مین سے اور مقرر کرین اس حاصل تفریق کو نشان قوت خارج قسمت کا مثلاً اگر تقسیم کرین $ط^{\frac{1}{ن}}$ کو $ط^{\frac{م}{ن}}$ پر یا $ط^{\frac{م}{ن}}$ کو $ط^{\frac{م}{ن}}$ پر تو خارج قسمت یعنے

$$\frac{ط^{\frac{م}{ن}}}{ط^{\frac{1}{ن}}} = ط^{\frac{م-ن}{ن}}$$ اور یہہ بات بہت ظاہر ہی

مثال $ط^{\frac{1}{2}} \div ط^{\frac{1}{3}} = ط^{\frac{3}{6}} \div ط^{\frac{2}{6}} = ط^{\frac{1}{6}}$ مثال یعنے سرکسی مقدار نزولی کو اندر نشان نزولی کے لا سکتے ہین اگر اول اسکو بشکل مقدار نزولی کے بدل کرین اور بعد ازان عمل ضرب کا کرین جیسکہ بیان کیا گیا ہے سابق مین مثلاً $ط \sqrt{\ } لا = \sqrt{\ } ط^{2} \times لا = \sqrt{\ } ط^{2} لا$ اور

$ط^{\frac{3}{2}} = (ط^{2} ط)^{\frac{1}{2}}$ اور $لا \sqrt{\ } 2ط - لا = \sqrt{\ } 2ط لا - لا^{2}$ اور

$ط (ط - لا)^{\frac{3}{2}} = \left\{ ط^{2} (ط - لا)^{3} \right\}^{\frac{1}{2}}$ اور اسیطور سے $\sqrt{\ } 2 = \sqrt{\ } 2 \times 16 = \sqrt{\ } 32$

اگر مطلوب ہو ہمین کہ کوئی خاص مقدار امثال کسی مقدار نزولی مفروض کی ہو جاوے تو لازم ہی کہ یعین ہم اتنی مرتبہ کا نزول مقدار نزولی مفروض کا لیا گیا ہی اور بعد ازان قسمت کرین ہر خارج قسمت کو جو پیچھے علامت نزولی کے واقع ہو خاص مقطع مذکور پر اور اس عمل سے ہمارا مطلب حاصل ہو جائیگا مثلاً

$\sqrt{\ } ط^{2} - ط لا = ط^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\ } ط - لا$ اور اسیطور سے $\sqrt{\ } ط^{3} - ط^{2} لا = ب \times \sqrt{\ } ط - لا$

م نزولی خاص مقدار کا تعین مرتبہ کا

اور $(ط^{\frac{1}{ن}} - لا^{\frac{1}{ن}}) = ط^{\frac{1}{ن}} \times (1 - \frac{لا}{ط})^{\frac{1}{ن}}$ اور $\sqrt[۴]{۶۰} = ۴ \times \sqrt[۴]{۱۵} = \sqrt[۴]{۱۵}$

اور $(\frac{1}{ص^{۲}} - \frac{1}{لا^{۲}})^{\frac{1}{۲}} = \frac{1}{ص} (1 - \frac{ص^{۲}}{لا^{۲}})^{\frac{1}{۲}}$ اور $\sqrt{۱ - لا} = \sqrt{۱ \times لا}$

جبکہ کسی مقدارون نزدلی کی امثال ایک سی ہونے مساوی ہیں تو حاصل جمع یا حاصل تفریق انکا دریافت ہوسکتا ہی اگر انکا ہین ہم حاصل جمع یا حاصل تفریق انکی امثال کا ساتھ مشترک مقدارون نزدلی کے

مثلاً $\sqrt{لا} * ص \sqrt{لا} = (ط * ص) \sqrt{لا}$ اور

$\sqrt{۳۰۰} \pm ۵\sqrt{۳} = ۱۰\sqrt{۳} \pm ۵\sqrt{۳} = ۱۵\sqrt{۳}$ یا $۵\sqrt{۳}$

جبکہ کسی مقدار کا ہین ہوسکتا ہی حاصل جمع ایسی دو مقدارونکا کہ ایک تو دینین کی مقدار غیر نزدلی اور دوسری مقدار نزدلی دوسرے مرتبہ کی یعنی جذر ہو کیونکہ اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ $ن = ط + \sqrt{م}$

اب اگر لو مجذور دونو طرفون اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ن = ط^{۲} + ۲ط\sqrt{م} + م$ اور $۲ط\sqrt{م} = ن - ط^{۲} - م$ اور اسیواسطے

$\sqrt{م} = \frac{ن - ط^{۲} - م}{۲ط}$ اور یہہ ایک مقدار غیر نزدلی ہی پس لازم آیا خلاف فرض کیونکہ $\sqrt{م}$ کو

ہمنے ایک مقدار نزدلی مانا تہا اور وہ اب ثابت ہوئی مقدار غیر نزدلی اگر کوی ایسی مساوات ہو کہ ایک طرف اوسکے حاصل جمع ہو کسی مقدار غیر نزدلی اور کسی مقدار نزدلی کا اور دوسری طرف اوسکی حاصل جمع ہو کسی اور مقدار غیر نزدلی اور کسی اور مقدار نزدلی کا اور دونون طرف مقدارین نزدلی فقط دوسری مرتبہ کی ہون تو ہم کہتے ہین کہ مقدار نزدلی اول طرف کی مساوی ہوگی مقدار غیر نزدلی دوسری طرف کی اور اسیطور سے مقدار نزدلی اول طرف کی مساوی ہوگی مقدار نزدلی دوسری طرف کی مثلاً اگر ہو وہ یہہ مساوات $لا + \sqrt{ی} = ط + \sqrt{ص}$ تو ضرور ہی کہ $لا = ط$ اور $ی = ص$

اگر لا نہین مساوی ہو ط کی تو فرض کرو کہ $لا = ط + م$ اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ط + م + \sqrt{ی} = ط + \sqrt{ص}$

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $م + \sqrt{ی} = \sqrt{ص}$ یعنے ص حاصل جمع ہی دو مقدارون ایسی کا کہ ایک دینین سے مقدار نزدلی اور دوسری مقدار غیر نزدلی دوسرے مرتبہ کی ہی اور یہہ محال ہی موافق اوسکے کہ ابہی ثابت کیا گیا ہی پس معلوم ہوا $لا = ط$ اور اسیواسطے $ی = ص$ اگر دو مقدار نزدلی دوسرے مرتبہ کی مثل لا اور ی کے ایسی ہون کہ دی نہین تحویل ہوسکتی ہون طرف اور ون کے جنمین جز نزدلی ایک ہو تو حاصل ضرب ایسی مقدارون نزدلی کا نزدلی ہوتا ہی اگر ایسا نہو یعنی حاصل ضرب مذکور مساوی ایک مقدار غیر نزدلی

یہ کہے ہو تو فرض کرو کہ $\sqrt{\text{لا}_0} = \text{ر}\,\text{لا}$ اور اسجای ر یا تو ایک عدد صحیح یا ایک کسر کو تعبیر کرتا ہی
اب ظاہر ہی کہ جسوقت لیوین گے ہم مجذور دونو طرفون اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
$\text{لا}_0 = \text{ر}^2\,\text{لا}$ اور $\text{ر} = \text{ر}^2\,\text{لا}$ اور اسیواسطی $\text{ر} = \sqrt{\text{ر}^2\,\text{لا}}$ اور یہان سی یہہ بات ثابت ہوتی
ہی کہ لا اور ر ایسی مقدارین نزولی ہین کہ تحویل کی جاسکتی ہین طرف ایسی دو مقدارون
نزولی کے جنمین جز ضربی نزولی ایک ہو یعنی وہی دونو مین پایا جاوے اور یہہ خلاف فرض کی ہی ایک مقدار
نزولی دوسرے مرتبہ کی مثل لا کی نہین ہوسکتی ہی حاصل جمع دو اور ایسی ہی مقدارون نزولی مثل
م اور ن کی اگر انمین ایکہی جز ضربی نزولی نہین پایا جاے اگر ایسا ہوسکتا ہی تو فرض کرو کہ
$\sqrt{\text{لا}} = \text{م} + \sqrt{\text{ن}}$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی
یہہ مساوات $\text{لا} = \text{م} + \text{ن} + 2\sqrt{\text{من}}$ اور $\text{لا} - \text{م} - \text{ن} = 2\sqrt{\text{من}}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی
کہ ایک مقدار غیر نزولی مساوی ہوتی ہی ایک مقدار نزولی کے اور یہہ بات محال ہی اگر ہووی یہہ مساوات
$(\text{ط} + \text{ص})^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{لا} + \text{ے}$ اور اسجای س ہووی کوئی عدد جفت اور ط ایک مقدار غیر نزولی اور ص ایک
مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی اور لا اور ے مین سے یا تو ایک یا دونو مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی ہون تو ہم
دعوی کرتے ہین کہ ہوگی یہہ مساوات $(\text{ط} - \text{ص})^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{لا} - \text{ے}$ اب اگر لیا جاے دونو طرفون
اس مساوات کا س مرتبہ کا صعود تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{ط} + \text{ص} = \text{لا} + \text{س}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-1}{2}}\,\text{ے} + \text{س}\,\frac{\text{س}-1}{2}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-2}{2}}\,\text{ے}^2 + \text{س}\,\frac{\text{س}-1}{2}\,\frac{\text{س}-2}{3}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-3}{2}}\,\text{ے}^3$$

+ وغیرہ اور چونکہ س ایک عدد جفت ہی تو ضرور ہی کہ طاق اجزا اس سلسلہ کی مقدارین غیر نزولی ہون
اور جفت اجزا نزولی اور یہان سے معلوم ہوا کہ $\text{ط} = \text{لا} + \text{س}\,\frac{\text{س}-1}{2}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-2}{2}}\,\text{ے}^2$ + وغیرہ اور

$$\text{ص} = \text{س}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-1}{2}}\,\text{ے} + \text{س}\,\frac{\text{س}-1}{2}\,\frac{\text{س}-2}{3}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-3}{2}}\,\text{ے}^3 + \text{وغیرہ}$$

اور اسیواسطی اگر تفریق کرین ہم مساوات دوم کو مساوات اول مین سے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{ط} - \text{ص} = \text{لا}^{\frac{\text{س}}{2}} - \text{س}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-1}{2}}\,\text{ے} + \text{س}\,\frac{\text{س}-1}{2}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-2}{2}}\,\text{ے}^2 - \text{س}\,\frac{\text{س}-1}{2}\,\frac{\text{س}-2}{3}\,\text{لا}^{\frac{\text{س}-3}{2}}\,\text{ے}^3$$

+ وغیرہ اور یہان سے معلوم ہوا کہ $(\text{ط} - \text{ص})^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{لا} - \text{ے}$ اگر س ہووی ایک طاق عدد اور ط اور ص
یا تو ایک یا دونو مقدارین نزولی دوسرے مرتبہ کی ہون اور لا اور ے مین پائی جائین وہی مقدارین

نزدیلی جو ط اور ص مین پائی جاتی ہین علیحدہ علیحدہ اور ہووی یہ مساوات $(ط+ص)^{س} = لا + ی$ تو ہم کہتے ہین کہ $(ط-ص)^{س} = لا - ی$ اب اگر جاری کرین ہم عمل صعود کا دونوطرفون اس مساوات $(ط+ص)^{س} = لا + ی$ پر اور مرتبہ صعود کا بقدر احاد س کے مقرر کرین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ط+ص = لا^{س} + س\,لا^{س-۱}\,ی + س\frac{س-۱}{۲}\,لا^{س-۲}\,ی^{۲} + س\frac{س-۱}{۲}\frac{س-۲}{۳}\,لا^{س-۳}\,ی^{۳}$$

+ وغیرہ اور اس مساوات مین ضرور ہی کہ اجزا وطاق مین وہی مقدار نزدیلی پائی جاوے جو لا مین پائی جاتی ہی اسواسطی کہ س ایک عدد طاق ہی اور یہہ بھی ضرور ہی کہ اجزا جفت مین وہی مقدار نزدیلی جو ی مین پائی جاتی ہی اور چونکہ کوئی جزو ط نہین مرکب ہوسکتا ہی ی سے یا کسی جزو اوسکی سے جیسکہ پہلی ثابت ہوا ہے تو ضرور ہی کہ $ط = لا^{س} + س\frac{س-۱}{۲}\,لا^{س-۲}\,ی^{۲}$ + وغیرہ اور اسیواسطی

$$ص = س\,لا^{س-۱}\,ی + س\frac{س-۱}{۲}\frac{س-۲}{۳}\,لا^{س-۳}\,ی^{۳} + \text{وغیرہ}$$

اور جسوقت تفریق کرین گے ہم مساوات اول مین سے مساوات دویم کو تو اسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ط - ص = لا^{س} - س\,لا^{س-۱}\,ی + س\frac{س-۱}{۲}\,لا^{س-۲}\,ی^{۲} + \text{وغیرہ}$$

اور اسیواسطی معلوم ہوا کہ $(ط-ص)^{\frac{۱}{س}} = لا - ی$ جذر ایک ایسی مجموعہ دو چیزونکا کہ جسکا ایک جزو تو ہمیشہ مقدار نزدیلی دوسرے مرتبہ کی ہو اور دوسرا جزو ایک مقدار غیر نزدیلی ہو بعض اوقات بتیر ہوسکتا ہی ایک ایسی مجموعہ دو جزون کی سے کہ ایک یا دونون اینمین مقدارین نزدیلی دوسرے مرتبہ کی ہون فرض کرو کہ ط + √ص مجموعہ مفروض دو جزونکا ہی اور یہہ بھی فرض کرو کہ $ط + \sqrt{ص} = لا + ی$ اور اسیطرح لا یا دونو لا اور ی مقدارین نزدیلی دوسرے مرتبہ کی ہین پس اب موافق اوسکے جو سابق مین ثابت کیا گیا ہی یہہ بات ظاہر ہی کہ $ط - \sqrt{ص} = لا - ی$ اور جسوقت ضرب کرین ہم اس مساوات کو مساوات گذشتہ مین تو حاصل ہوگے یہہ مساوات $ط^{۲} - ص = لا^{۲} - ی^{۲}$ اور اب اگر مجدد کرین دونوطرفون اول مساوات کو تو حاصل ہوگے یہہ مساوات $ط + \sqrt{ص} = لا^{۲} + ۲لا\,ی + ی^{۲}$ اور چونکہ ضرور ہی کہ اس صورت مین

$ط = لا^{۲} + ی^{۲}$ تو جسوقت جمع کرین گی ہم مساوات $\sqrt{ط^{۲} - ص} = لا^{۲} - ی^{۲}$ پر مساوات

$ط + \sqrt{ص} = لا^2 + ۲لاى + ى^2$ کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ط + \sqrt{ص} + ط - \sqrt{ص} = ۲لا^2 + ۲لاى$ لیکن $\sqrt{ص} = ۲لاى$ تو معلوم ہوا کہ

$ط + \sqrt{ط^2 - ص} = ۲لا^2$ اگر بجای جمع کرنے کے تفریق کریں ہم ایک کو مساوات مذکورین سے دوسری سے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ط - \sqrt{ط^2 - ص} = ۲ى^2$

اور $لا = \sqrt{\frac{ط + \sqrt{ط^2 - ص}}{۲}}$ اور $ى = \sqrt{\frac{ط - \sqrt{ط^2 - ص}}{۲}}$

اور اسیواسطی جذر مطلوب یہہ ہوگا

$لا + ى = \sqrt{\frac{ط + \sqrt{ط^2 - ص}}{۲}} + \sqrt{\frac{ط - \sqrt{ط^2 - ص}}{۲}}$

اور یہاں سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ جذر $ط + \sqrt{ص}$ کا اوسوقت ایک مجموعہ دو جزون مثل $لا + ى$ کی کہ انمین سے ایک یا دونو مقدارین نزدلی دوسرے مرتبہ کی ہین تعبیر ہوسکتا ہے جبکہ $ط^2 - ص$ ایک مجذور کامل ہو

مثال (۱) چاہتے ہین ہم دریافت کرنا جذر $۳ + ۲\sqrt{۲}$ کا اس صورت مین ظاہر ہے کہ $ط = ۳$

اور $ص = ۲ \times ۲$ اور $ط^2 - ص = ۹ - ۸ = ۱$ کامل مجذور پس معلوم ہوا کہ

$لا = \sqrt{\frac{۳+۱}{۲}} = ۲$ اور $ى = \sqrt{\frac{۳-۱}{۱}} = ۱$ اور اسیواسطے

$لا + ى = ۲ + ۱$

مثال (۲) چاہتے ہین ہم دریافت کرنا جذر $۷ - ۲\sqrt{۱۰}$ کا اس صورت مین ظاہر ہے کہ

$ط = ۷$ اور $ص = ۲ \times ۱۰$ اور $ط^2 - ص = ۹ = ۹$ کامل مربعہ کی اور یہاں سے معلوم ہوا کہ

$لا = \sqrt{\frac{۷+۳}{۲}} = ۵$ اور $ى = \sqrt{\frac{۷-۳}{۲}} = ۲$ اور اسیواسطی

$لا - ى = ۵ - ۲$ اور یہی ہی جذر مطلوبہ

مثال (۳) چاہتے ہین ہم دریافت کرنا جذر $۴ - ۵\sqrt{-۱}$ کا اسیطرح ظاہر ہے

کہ $ط = -۱$ اور $ص = ۴ \times -۵$ اور $ط^2 - ص = ۸۱$ جو ایک مجذور پورا ہی تو معلوم ہوا کہ

$لا = \sqrt{\frac{-۱+۹}{۲}} = ۲$ اور $ى = \sqrt{\frac{-۱۰}{۲}} = -۵$

پس معلوم ہوا کہ جذر مطلوبہ یہہ ہی $۲ + ۵\sqrt{-۱}$ بعضی اوقات میں کتنا نزول کسی مجموعہ دو جزو کا کہ جسکی ایک یا دونون اجزا دوم مرتبہ کی مقدارین نزولی ہین تعبیر ہوسکتا ہے ایک مجموعہ دو جزون سے کسی ایسی کہ ایک

یا دونون انمین سے بہی دوم مرتبہ کی مقدارین نزولی ہون یہہ بات اسطرح سے ثابت ہوسکتی ہی فرض کرو کہ ۱ + ب ہی مجموعہ مفروض جسمین دونو جز ممکن ہین یعنے انمین کوئی مقدار غیر ممکن نہین پائی جاتی ہی اور جتنی مقدارین کہ نیچے علامت نزولی کے واقع ہین تو یے سب اعداد صحیح ہین اور اُ زیادہ ہی بہ نسبت ب کے اور یہہ بہی فرض کرو کہ $\sqrt[س]{(۱ + ب)}$ ق = لا + وتب موافق اوسکی جو کہ سابق مین ثابت ہوا ہی یہہ بات ظاہر ہی کہ $\sqrt[س]{(۱ - ب)}$ ق = لا - ء اور جسوقت ضرب کرین ہم ان دونو مساواتون کو اسیمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\sqrt[س]{(۱^۲ - ب^۲)}$ ق = لا^۲ - ء^۲ اب فرض کرو واسطے ق کے کوئی ایسا عدد کہ مقدار (اُ - ب^۲) ق ایک کامل س مرتبہ کا صعود ہوجاے یعنی پیدا ہوجاے ایک مساوات مثل اسکے (اُ - ب^۲) ق = ن^س پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات لا^۲ - ء^۲ = ن^س اب مجدد رکرو دونون مساواتون گذشتہ کو تو حاصل ہونگی یے دو مساواتین

$\sqrt[س]{(۱ + ب)^۲ \times ق}$ = لا^۲ + ۲ لا ء + ء^۲

$\sqrt[س]{(۱ - ب)^۲ \times ق}$ = لا^۲ - ۲ لا ء + ء^۲ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ

$\sqrt[س]{(۱ + ب)^۲ \times ق} + \sqrt[س]{(۱ - ب)^۲ \times ق}$ = ۲ لا^۲ + ۲ ء^۲

اور یہہ عدد ہمیشہ صحیح ہوتا ہی جبکہ مقدار نزولی دوسرے مرتبہ کی ہوتی ہی اب فرض کرو کہ ح اور د نہایت قریب قیمتین اعداد صحیح مقدارون $\sqrt[س]{(۱ + ب)^۲ \times ق}$ اور $\sqrt[س]{(۱ - ب)^۲ \times ق}$ کی ہین اور ایک انمین قیمت اصلی سے زیادہ ہی اور دوسرے کم اب چونکہ حاصل جمع ان مقدارون نزولی کا مساوی ایک عدد صحیح کی ہوتا ہی تو ضرور ہی کہ جو کسور ہر واحد مین انمین سے پائی جاتی ہون وہ زائل ہوجاین جب قیمت اونکی جمع کرینگی اور اسیواسطے لازم آتا ہی یہہ کہ ہووی یہہ مساوات ۲ لا^۲ + ۲ ء^۲ = ح + د بالکل درست اوسوقت جسوقت کہ س وین مرتبہ کا نزول مقدار نزولی مفروض کا دریافت ہوسکتا ہی پس اب حاصل ہوتی ہین ہمین یے دو مساواتین لا^۲ - ء^۲ = ن اور لا^۲ + ء^۲ = $\frac{ح + د}{۲}$ اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ لا^۲ = ن + $\frac{ح + د}{۲}$ = $\frac{۲ن + ح + د}{۲}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ لا^۲ = $\frac{۲ن + ح + د}{۴}$ اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی

لا = $\sqrt{\frac{۲ن + ح + د}{۲}}$ تفریق کرنی سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

۲ ء^۲ = $\frac{ح + د - ۲ن}{۲}$ اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ء کی

ء = $\sqrt{\frac{ح + د - ۲ن}{۲}}$ پس یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر قیمت

$\sqrt[س]{(۱ + ب)} \times$ ق کی ہووی اسش کل لا + ء کی تو ضرور ہی کہ ہووی وہ یہہ

$$\frac{\sqrt[ن۲]{\text{ن۲ + ح + د}} + \sqrt[ن۲]{\text{ح + د − ن۲}}}{۲}$$ اور اسیواسطے س مرتبہ کا نزول ا + ب کا یہہ ہی

$$\frac{\sqrt[ن۲]{\text{ن۲ + ح + د}} + \sqrt[ن۲]{\text{ح + د − ن۲}}}{۲^{س}}$$

$$\sqrt[ن۲]{\text{ق}}$$

مثال (۱) چاہتے ہین دریافت کرنا کعب ۱۰ + $\sqrt{۱۰۸}$ کا اس صورت مین ظاہر ہی کہ ا = $\sqrt{۱۰۸}$

اور ب = ۱۰ اور اسیواسطے $ا^۲ - ب^۲$ = ۸ اور $(ا^۲ - ب^۲)$ ق = ۸ ق = ن۳

پس اگر فرض کیا جاے ق = ا تو ن = ۲ اب ظاہر ہی کہ $\sqrt[۳]{(ا + ب)^۲}$ = ح + ف اور

$\sqrt[۳]{(ا - ب)^۲}$ = ا − ف اور اسحالت بتعبیر کرتا ہی ایک کسر کو جو کم ہی عدد ایک کی سے پس معلوم ہوا کہ

ح = ۷ اور د = ۱ اور اسیواسطی حاصل یہہ مساوات ہوتی ہی

$$لا + د = \frac{\sqrt{۱۲ + ۲}}{۲} = \sqrt{۳} + ۱$$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر کعب ۱۰ + $\sqrt{۱۰۸}$ کا

تعبیر ہے کسی شکل مطلوب کی تو ضرور ہی کہ وہ شکل $\sqrt{۳} + ۱$ ہو اور امتحان کرنی سے بھی معلوم ہوتا ہے

کہ کعب مذکور کی شکل یہی $\sqrt{۳} + ۱$ ہی

مثال (۲) چاہتے ہین دریافت کرنا کعب $\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۷}$ اس صورت مین ظاہر ہی کہ

ا = ۲ $\sqrt{۷}$ اور ب = ۳ $\sqrt{۳}$ اور $ا^۲ - ب^۲$ = ۱ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی یہہ

ق = ۱ اور ن = ۱ اور یہہ ظاہر ہی کہ $\sqrt[۳]{(ح + ب)^۲}$ = ۴ + ف اور $\sqrt[۳]{(ا - ب)^۲}$ = ۱ − ف

اور یہان سے معلوم ہوا کہ ح = ۴ اور د = ۱ اور اسیواسطی لا + د = $\frac{\sqrt{۷ + ۲}}{۲}$ = $\frac{۳}{۲}$ اور یہہ مقدار امتحان کرنی

سے صحیح نکلتی ہی بطور مرقومہ بالا کی س مرتبہ کا نزول ا − ب کا دریافت ہوسکتا ہی اور وہ یہہ ہی

$$\frac{\sqrt[ن۲]{\text{ن۲ + ح + د}} - \sqrt[ن۲]{\text{ح + د − ن۲}}}{۲^{س}}$$ اور اس صورت جبریہ مین ظاہر ہی کہ جسوقت

$$\sqrt[ن۲]{\text{ق}}$$

ا ہی کم بہ نسبت ب کی تو ن نفی ہوگا اسواسطی کہ حاصل تفریق لا − د منفی یعنے − (لا − د) ہوجائیگا

اور حاصل ضرب $لا^ن$ − $د^ن$ بھی نفی ہوجائیگا اور اسکا مساوی لہذا ہے جون ہی منفی ہوجائیگا معلوم ہر قومہ بالا

مین یہہ بات مطلوب ہوتی ہی کہ کوئی ایسا عدد د واسطی ق سے کے دریافت کیا جاے کہ اگر اسکو $(ا^۲ - ب^۲)$

مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک کامل س مرتبہ کا صود ہو یعنے $(ا^۲ - ب^۲)$ × ق ہو دیے

ایک کامل س مرتبہ کا صعود ظاہر ہی کہ یہہ بات حاصل ہوسکتی ہی اگر فرض کرین ق کو مساوی $(\alpha^2 - \beta^2)^{س-1}$ کے کیونکہ اس صورت مین

$$(\alpha^2 - \beta^2) \times ق = (\alpha^2 - \beta^2) \times (\alpha^2 - \beta^2)^{س-1} = (\alpha^2 - \beta^2)^{س}$$ لیکن اگر اس سے ایک کم

عدد کو دریافت کیا چاہین ایسا کہ اوس سے بھی شرط مطلوب پوری ہوتی ہو تو فرض کرو کہ $\alpha^2 - \beta^2$ قسمت ہوسکتا ہی متواتر کئی بار یعنے م بار ط پر اور ق بار ص پر اور ر بار د پر اور علی ہذا القیاس پس فرض کرو $\alpha^2 - \beta^2 = ط^م ص^ق د^ر$ وغیرہ اور اب فرض کرو کہ $ق = ط^{م'} ص^{ق'} د^{ر'}$ وغیرہ اور اسصورت مین ظاہر ہی کہ

$(\alpha^2 - \beta^2) ق = ط^{م+م'} ص^{ق+ق'} د^{ر+ر'}$ وغیرہ اور یہہ مقدار ایک کامل حاصل صعود س مرتبہ کا ہی بشرطیکہ

م + م' اور ق + ق' اور ر + ر' اسطرح سی فرض کیے جائین کہ لا + م اور ن + ق اور د + ع علیحدہ علیحدہ مساوی ہون س کے یا کسی ضعف اسکی کے مثلاً اگر دریافت کیا چاہین کوئی ایسا عدد کہ اگر اوسی ۸۰ آ مین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک کامل مکعب ہوئی پس اس صورت مین لازم ہی کہ قسمت کرین ہم اس عدد کو جہان تک امکان ہو اعداد ۲ ۳ ۵ وغیرہ پر اور یہان سے یہہ ظاہر ہوتا ہی کہ $۸۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵$ پس اب اگر ضرب کرین لیسے $۲ \times ۳ \times ۵$ سے تو حاصل ضرب ہوتا ہی $۲^۳ \times ۳^۳ \times ۵^۳$ یعنے $(۲ \times ۳ \times ۵)^۳$ جو ایک کامل مکعب ہی یہان تمام کرتے ہین اس فصل کو گو اسمین بھی مطالب باقی رہتے ہین لیکن یہہ توقع ہی کہ جو کچھہ لکھا گیا ہی وہ کفایت کریگا

فصل اٹھوین سلسلون کے بیان مین

پہلا قاعدہ فرق کے بیان مین

اگر ایک سلسلہ مقدارون مثل آ اور ب اور ح اور د اور س وغیرہ کا ہو اور ہر واحد ان مقدارون مین سے مقدار ما بعد اپنی کسی سے تفریق کی جاے تو ظاہر ہی کہ ایک نیا سلسلہ حاصل تفریقون کا پیدا ہوگا اور ہر جز اس سلسلہ کو فرق اول مرتبہ کا کہتے ہین اور اگر تفریق کرین ہم ہر جز اس سلسلہ کو اوسکے پہلی جزین سے تو پیدا ہوگا ایک تیسرا سلسلہ حاصل تفریقونکا اور ہر جز اس سلسلہ کا فرق مرتبہ دویم کا کہلاتا ہی اور علی ہذا القیاس مثلاً اگر جاری کرین ہم عمل مذکور تو حاصل ہونگی یہ مساوات مین

فرق اول $ب - ا$ اور $ج - ب$ اور $د - ج$ وغیرہ

فرق دویم $ج - ۲ب + ا$ اور $د - ۲ج + ب$ وغیرہ

فرق سویم $د - ۳ج + ۳ب - ا$ اور $س - ۳د + ۳ج - ب$ وغیرہ

فرق چہارم $س - ۴د + ۶ج - ۴ب + ا$ وغیرہ

فرق پنجم $ص - ۵س + ۱۰د - ۱۰ج + ۵ب - ا$ وغیرہ

وغیرہ وغیرہ وغیرہ

یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ امثال یعنے سر مقدارون $ا$ اور $ب$ $ج$ $د$ وغیرہ کے اول جزو سلسلہ ن کتنے مرتبہ کے ویسی ہی ہین جیسیکہ ہوتے ہین ضابطہ نیوتن صاحب کے مین اور ان مقدارہ کے علامتین پی در پے مثبت اور منفی ہوتی ہین پس جسوقت کہ ن ایک عدد جفت ہووی اوسوقت اول جزو مذکور یہہ ہوگا

$$ا - ن ب + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ج - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲} د + \text{وغیرہ}$$

اور جسوقت ن ایک عدد طاق ہوگا اوسوقت جزو مذکور اس شکل کا ہوگا

$$-ا + ن ب - \frac{ن(ن-۱)}{۲} ج + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲} د - \text{وغیرہ}$$

فرض کرو کہ علامتین $ا^ف$ اور $۲^ف$ اور $۳^ف$ وغیرہ کی تعبیر کرتی ہین اول جزون سلسلون اول اور دویم اور سویم وغیرہ فرقون کو پس اب حاصل ہونگی یہ مساواتین

$$ا^ف = ب - ا$$

$$۲^ف = ج - ۲ب + ا$$

$$۳^ف = د - ۳ج + ۳ب - ا$$

$$۴^ف = س - ۴د + ۶ج - ۴ب + ا$$

$$\text{وغیرہ} = \text{وغیرہ} \quad \text{وغیرہ}$$

اور اب اگر بدلین ہم علامتین تو پیدا ہونگی یہ مساواتین

$$ب = ا + ا^ف$$

$$ج = ۲ب - ا + ۲^ف = ا + ۲ا^ف + ۲^ف$$

$$د = ۳ج - ۳ب + ا + ۳^ف = ا + ۳ا^ف + ۳۲^ف + ۳^ف$$

$$س = ۴ د - ۶ ج + ۴ ب - ۱ + ۴^{ث}$$

$$= ۱ + ۴ ا + ۶ ا^{۲ث} + ۴ ا^{۳ث} + ۴^{۴ث}$$

وغیرہ = وغیرہ

اب اگر نظر کرین ہم ان مساواتون پر تو ہم دریافت کرین گے ایک عام قاعدہ مثل قاعدہ نیوٹن صاحب کے اور اس قاعدہ سی یہہ بات معلوم ہوجائیگی کہ $\overline{ن+۱}$ وان جز سلسلہ

۱ + ب + ج + د + س + وغیرہ کا یہہ ہوگا

$$۱ + ن ا^{ث} + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ا^{۲ث} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲} ا^{۳ث} + \text{وغیرہ}$$

اور یہان سے یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ $\overline{ن}$ وان جز سلسلہ مذکور کا یہہ ہوگا

$$۱ + (ن-۱) ا^{ث} + \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۲} ا^{۲ث} + \frac{(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{۳ \times ۲} ا^{۳ث} + \text{وغیرہ} \quad (۱)$$

مثال

چاہتے ہین دریافت کرنا $\overline{ن}$ وان جز اس سلسلہ کا $\overline{۱}$ $\overline{۳}$ $\overline{۵}$ وغیرہ

۱ ۳ ۵ ۷

۲ ۲ ۲

پس اسجای معلوم ہوا کہ ا = ۱ اور $ا^{۲ث} = ۲$ اور $ا^{۳ث} = ۰$ پس $\overline{ن}$ وان جز مطلوبہ یہہ ہوگا ۱ + (ن - ۱) ۲ = ۲ ن - ۱

اگر فرق آخر کو مساوی صفر کی ہوجاوین تو $\overline{ن}$ وین جز کی قیمت حقیقی معلوم ہوسکتی ہی لیکن اگر فرق مذکور صفر کے مساوی نہین ہون تو جتنے فرق مذکور نسبت پہلی فرقون کے اور نسبت $\overline{ن}$ کی کم ہوتی جاوینگی اتنی ہی قیمت جز مذکور کی قریب مساوی ہونی کے قیمت حقیقی کے آتی جائیگی واضح ہو کہ سلسلہ (۱) ہی قیمت $\overline{ن}$ وین جز سلسلہ ۱ + ب + ج + د + وغیرہ کی اور اسیواسطی (ن - ۱) وین جز سلسلہ مذکور کی قیمت یہہ ہوگی

$$۱ + (ن-۲) ا^{ث} + \frac{(ن-۲)(ن-۳)}{۲} ا^{۲ث} + \frac{(ن-۲)(ن-۳)(ن-۴)}{۳ \times ۲} ا^{۳ث} + \text{وغیرہ}$$

اور اسی قیاس پر اور جزون کی قیمتین دریافت ہوسکتی ہین اب فرض کرو ہی ایک ایسا سلسلہ کہ اوسکی اجزا بتدریج زیادہ ہوتی جاتے ہین مثل اسکے یعنی اجزای مذکور سے ہین ۱ اور ۱ + ب اور ۱ + ب + ج وغیرہ

پس موافق مرقومہ گذشتہ کی یہہ بات ظاہر ہی کہ حاصل تفریق انہای کی ایسین ہونگی

فرق اول — ا اور ب اور ج اور د وغیرہ
ب − ا اور ج − ب اور د − ج وغیرہ

فرق دویم — ج − ۲ب + ا اور د − ۲ج + ب وغیرہ

فرق سیوم — د − ۳ج + ۳ب − ا وغیرہ

اور ظاہر ہی کہ اب حاصل ہونگی یہ مساواتین

ب − ا = ف
ج − ۲ب + ا = ف۲
د − ۳ج + ۳ب − ا = ف۳
س − ۴د + ۶ج − ۴ب + ا = ف۴
وغیرہ = وغیرہ

اور ان مساواتون سے حاصل ہوتی ہین یہ مساواتین

ب = ا + ف
ج = ۲ب − ا + ف۲ = ا + ۲ف + ف۲
د = ا + ۳ف + ۳ف۲ + ف۳

وغیرہ = وغیرہ

اور ان مساواتون سی حاصل ہوتی ہین یہ مساواتین

ا + ب = ۱۲ + ف
ا + ب + ج = ۱۳ + ۳ف + ف۲
ا + ب + ج + د = ۱۴ + ۶ف + ۴ف۲ + ف۳
ا + ب + ج + د + ہ = ۱۵ + ۱۰ف + ۱۰ف۲ + ۵ف۳ + ف۴

وغیرہ = وغیرہ

پس معلوم ہوا کہ ن وان جز سلسلہ مفروض کا تعبیر ہوتا ہی اس سلسلہ سے

ن ا + $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ ف + $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲×۳}$ ف۲ + وغیرہ

یہان سے یہہ قاعدہ نکلا کہ اگر ہر وی کوئی سلسلہ مثل اسکی

۱ + ب + ج + د + س + وغیرہ ن جزون تک اور فرق مختلف اس سلسلہ کی تعبیر کی جائین

Δ^{1} اور Δ^{2} وغیرہ تو حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہوگا

$$ن ۱ + \frac{ن(ن-۱)}{۲}\Delta^{1} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲}\Delta^{2} + \text{وغیرہ}$$

مثال ۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ اوسمین $ن$ کتنے اجزای ہین

۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳ + وغیرہ

۱ ۳ ۵ ۷

۲ ۲ ۲

اس صورت مین ظاہر ہی کہ ۱ = ۱ اور Δ^{1} = ۲ اور Δ^{2} = ۰ پس اسیواسطی حاصل جمع مطلوب یہہ ہی ن + ن(ن − ۱) = $ن^{۲}$

۲ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ اوسمین $ن$ اجزای ہین

$۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + ۴^{۲} + ۵^{۲} + ۶^{۲} + ۷^{۲}$ وغیرہ

۱ ۴ ۹ ۱۶

۳ ۵ ۷

۲ ۲

۰

پس معلوم ہوا کہ اس صورت مین ۱ = ۱ اور Δ^{1} = ۳ اور Δ^{2} = ۲ اور Δ^{3} = ۰ پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ

$$= ن + \frac{ن(ن-۱)}{۲}\times۳ + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲}\times۲$$

$$= \frac{ن(۲ن^{۲}+۳ن+۱)}{۳\times۲\times۱} = \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۳\times۲\times۱}$$

مثال ۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ مکعبونکا کہ اوسمین $ن$ اجزای ہین

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ + ۶^۳ + \text{وغیرہ}$$

۱ ۸ ۲۷ ۶۴ ۱۲۵

۷ ۱۹ ۳۷ ۶۱

۱۲ ۱۸ ۲۴

۶ ۶

۰

پس اسجای ظاہر ہی کہ $ا_۱ = ۱$ اور $ا_۲ = ۷$ اور $ف_۲ = ۱۲$ اور $ف_۳ = ۶$ اور $ف_۴ = ۰$

پس حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہوگا

$$ن + \frac{ن(ن-۱)}{۲} \times ۷ + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲} \times ۱۲ +$$

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{۴ \times ۳ \times ۲} \times ۶ = \frac{ن^۴ + ۲ن^۳ + ن^۲}{۴} = \left(\frac{ن(ن+۱)}{۲}\right)^۲$$

بعضی اوقات حاصل جمع سلسلوں کا بسہولت معلوم ہوسکتا ہی اگر شروع کرین یعنے ابتدا کرین سلسلہ کی ایک یا زیادہ صفر وہی مثلاً واسطی دریافت کرنی حاصل جمع سلسلہ $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ +$ وغیرہ کے ہم فرض کرتے ہین کہ اس سلسلہ مین $ن + ۱$ اجزای ہین اور وہ اس شکل کا ہی

$$۰ + ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ \text{ وغیرہ اور اسیوا سطی}$$

۰ ۱ ۸ ۲۷ ۶۴

۱ ۷ ۱۹ ۳۷

۶ ۱۲ ۱۸

۶ ۶

۰

پس اسجای ظاہر ہی کہ $ا_۱ = ۰$ اور $ا_۲ = ۱$ اور $ف_۲ = ۶$ اور $ف_۳ = ۶$ اور $ف_۴ = ۰$ وغیرہ صحیح

$$= \frac{(ن+۱)ن}{۲} + \frac{(ن+۱)ن(ن-۱)}{۳ \times ۲ \times ۱} \times ۶ + \frac{(ن+۱)ن(ن-۱)(ن-۲)}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times ۶$$

$$= \frac{(ن+۱)\times ۲ن + (ن+۱)ن(ن-۱)\times ۴ + (ن+۱)ن(ن-۱)(ن-۲)}{۴}$$

$$= \frac{(ن+۱)ن(۲+۴ن-۴+ن^{۲}-۳ن+۲)}{۴}$$

$$\frac{(ن+۱)ن(ن^{۲}+ن)}{۴} = \left(\frac{ن(ن+۱)}{۲}\right)^{۲}$$

واضح ہو کہ قاعدہ فرق کا بہت مفید ہی دریافت کرنی مین مساحت سطحون خطوط منحنی کے

فصل نوین قاعدہ زیادتیونکی بیانمین

کسی مقدار غیر مقررہ کو مقدار کلی کہتے ہین اور اوس مقدار کو جسقدر وہ کسی موقع پر زیادہ ہووے زیادتی مقدار کلی کی کہتے ہین مثلاً مقدار $۱+۲+۳+\cdots\cdots+م = \frac{م(م+۱)}{۲}$ کو مقدار کلی کہتے ہین اور وہ مقدار جسقدر یہہ مقدار زیادہ ہوتی ہی $م+۱$ ہی اور اسیواسطے $م+۱$ ہی زیادتی سلسلہ مذکور کی جسوقت مقدار کلی بجائے زیادہ ہونیکی کم ہووے تو اوس صورت مین زیادتی منفی ہوتی ہی اگر دو مقدارین زیادہ ہوتی شروع ہون اور اونکی زیادتین اوسمین ہمیشہ ایکہی نسبت رکہین تو مقدارین کلی بہی یعنے وی مقدارین جو اسیطرح سے زیادہ ہوتی سے پیدا ہوگی اوسمین وہی نسبت رکہین گے فرض کرو کہ زیادتین متواتر $آ$ اور $ب$ اور $ج$ وغیرہ اور $آ$ اور $ب$ اور $ج$ وغیرہ ہین اور فرض کرو کہ

$آ : ۱ :: ب : ب : ج : ؟$ وغیرہ $:: م : ن$ اسیواسطے

$آ + ب + ج +$ وغیرہ $: ۱ + ب + ؟ +$ وغیرہ $سی :: م : ن$ اور یہہ بات ثابت ہی اوس فصل مین جسمین بیان نسبتون مقادیر کا ہی بیان سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ جسوقت $م = ن$ یعنے جسوقت زیادتین مساوی ہون تو اوسوقت مقدارین کلی بہی مساوی ہوتی ہین اگر ایک مقدار کلی بتغیر کیجای حاصل ضرب ایسی مقدارون کے سے کہ وے اجزای ہون ایک سلسلہ جمع کی یعنے مثل اسکے ہووے

$م(م+د)(م+۲د)(م+۳د)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots م+(ن-۱)د$

اور اس جاے د کوئی مقدار مقررہ ہی اور م زیادہ ہوتا ہی متواتر بقدر د کی تو ہم دعوے کرتے ہین کہ زیادتے اوس مقدار کلی کے یہہ ہوگی

$$ن ز \times (م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

کسواسطے کہ قیمت اصلی مقدار کلی کی یہہ ہی

$$م(م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

اور یہہ اسکی قیمت اوسی مقدار کلی کی یہہ ہی

$$(م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+نز$$

اور اسسیواسطے حاصل تفریق ان دو قیمتوں کا یہہ ہوگا

$$(م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز)(م+۴ز) \cdots\cdots م+نز$$

$$م(م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

$$= (م+نز-م)\{(م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots م+(ن-۱)ز\}$$

$$= ن ز \times (م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

یہاں سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ چونکہ مقدار مقررہ کو کوئی زیادتی نہیں حاصل ہوتی ہی تو زیادتی

$$م(م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز \pm ق$$

(اسسے جاے ایک مقدار مقررہ ہی) کی یہہ ہوگی

$$ن ز(م+ز)(م+۲ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

یہاں سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر زیادتی کسی مقدار کلی کی تعبیر کیجاے اسس صورت سے

$$ن ز \times (م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

تو مقدار کلی اسکی بالفرض یہہ ہوگی

$$م(م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز \pm ق$$

اور اسس جاے مقدار مقررہ ق دریافت کیجاتی ہی بوسیلہ شرائط اوسس سوال کے جسکو ہم حل کرتے ہوں

یہاں سے یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اگر زیادتی یہہ ہووے

$$۱ \times (م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

اور اسجاے ۱ ایک مقدار مقررہ ہو تو مقدار کلی اسس زیادتی کی یہہ ہوگی

$$\frac{۱}{ن ز} \times (م+ز)(م+۲ز)(م+۳ز) \cdots\cdots م+(ن-۱)ز$$

اگر زیادتی ایک مقدار متغیر مثل آ کی ہووے اور وہ م دفع کی جاوے تو مقدار کلی یہہ ہوگی ۱ ± م ق مرقومہ بالا سے یہہ عام قاعدہ نکلتا ہی اگر دریافت کیا چاہیں ہم مقدار کلی کسی زیادتی کو تو لازم ہی کہ زیادتی مذکور کو تحویل کریں طرف ایک ایسی صورت کی کہ وہ مرکب ہو اجزای ضربی سلسلہ جمع کی سے اور ایسی فرق وہ مقدار ہو جسقدر مقدار غیر مقررہ زیادہ ہوتی ہی پس مقدار کلی زیادتی کی حاصل ہو جائیگی اگر ضرب کریں ہم تحویل کی ہوئی زیادتی کے اول اجزا سے پہلے جز سلسلہ کی میں اور بعد ازاں تمت کریں اس حاصل ضرب کو دو مقدار دن پر ایک تو تعداد اجزاے سلسلہ پر اور دوم فرق عام مذکور پر مقدار مقررہ سلسلون کی معلوم ہوتی ہی بوسیلہ شرایط اوس سوال کی جسکو ہم حل کر رہے ہون جسوقت کہ مقدار کلی لا ہووے ط اوسوقت یہہ بات معلوم ہو کہ مقدار کلی کامل ص ہی تو ظاہر ہی کہ ط + ق = ص اور ∴ ق = ص − ط اور اسیواسطے لا + ق = لا + ص − ط

مثال ۱ چاہتے ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + وغیرہ ن جزون تک چونکہ اس مثال مین ن وان جز سلسلہ کا ن ہی تو معلوم ہوا کہ زیادتی اس جز ن کی یہہ ہوگی ن + ۱ اور اسیواسطے موافق مرقوم الصدر کے حاصل جمع مطلوب یہہ ہوگا $\frac{ن (ن + ۱)}{۲}$

مثال ۲ کیا ہی ن وان جز اس سلسلہ اعدادی کا کہ اسمین ن کتنے اجزا ہین

۵ + ۹ + ۱۶ + ۲۶ + ۳۹ + وغیرہ

پس اب اگر لیوین ہم متواتر حاصل تفریق اجزای اس سلسلہ کے تو حاصل ہوگا یہہ

۵	۹	۱۶	۲۶	۳۹
	۴	۷	۱۰	۱۳
		۳	۳	۳

اور اب یہہ بات ظاہر ہی کہ ن وان جز کسی مرتبہ کی حاصل تفریقون یا فرقون کا مساوی ہوتا ہی زیادتی ن وین جز اوس سے پہلی مرتبہ کی حاصل تفریقون سے پس معلوم ہوا کہ ۳ ہی زیادتی ن وین جز اول مرتبہ کی حاصل تفریقون کے

اور اسیواسطی ۳ ن + ق ہی ن وان جز اور جسوقت ن = ۱ اوسوقت

۳ + ق = ۴ اور ∴ ق = ۱ پس معلوم ہوا کہ ۳ ن + ۱ ہی ن وان جز اول مرتبہ کی حاصل تفریقون کا

اور اسیواسطی یہہ ہی زیادتی ن وین جز سلسلہ اصلی مفروض کے اور اسیواسطی موافق قاعدہ گذشتہ کے

یہہ بات ظاہر ہی کہ ت ان جز سلسلہ اصلی کا $\frac{۳(ن-۱)ن}{۲} + ن$ + ت اب فرض کرو کہ ن = ۱ اور اسیواسطے حاصل ہوگا یہہ ۱ + ت = ۵ اور ∴ ت = ۴ پس معلوم ہوا کہ ت ان جز سلسلہ اصلی مفروض کا $\frac{۳(ن-۱)ن}{۲} + ن + ۴$ ہی

مثال ۳ چاہتے ہین دریافت کرنا حاصل جمع سلسلہ آئندہ کا کہ مرکب ہی مجذورون اعداد کی سے $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲ + ۷^۲ + ۸^۲ + ۹^۲$ وغیرہ ن جزون تک ظاہر ہی کہ زیادتی اس حاصل جمع کی $(ن+۱)^۲$ ہی اور یہہ مساوی ہی $ن(ن+۱) + ن + ۱$ اور اسیواسطی حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی

$$\frac{(ن-۱)ن(ن+۱)}{۳} + \frac{ن(ن+۱)}{۲} = \frac{(۲ن+۱)ن(ن+۱)}{۶}$$

اور ظاہر ہی کہ اسپر کوئی مقدار مقررہ کا زیادہ کرنا ضرور نہین ہی

مثال ۴ چاہتے ہین دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ مرکب ہی مجذورون عددون ۲ کی فرق سے $۱^۳ + ۳^۳ + ۵^۳ + ۷^۳ + ۹^۳ + ۱۱^۳ + ۱۳^۳ + ۱۵^۳$ وغیرہ ن جزون تک ظاہر ہی کہ زیادتی اس سلسلہ کی حاصل جمع کی یہہ ہی $(۲ن+۱)^۲$ اور یہہ مساوی ہی اسکے $۴ن^۲ + ۴ن + ۱ = ۴ن(ن+۱) + ۱$ اور اسیواسطے حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی

$$\frac{۴(ن-۱)ن(ن+۱)}{۳} + ن$$ اور ظاہر ہی کہ اسپر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین ہی

مثال ۵ چاہتے ہین دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا کہ مرکب ہی مکعبون اعداد کی سے $۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ + ۶^۳ + ۷^۳ +$ وغیرہ ن جزون تک ظاہر ہی کہ زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی $(ن+۱)^۳$ اور یہہ مساوی ہی اسکے

$$ن^۳ + ۳ن^۲ + ۳ن + ۱ = ن(ن+۱)(ن+۲) + ن + ۱$$

اور اسیواسطی حاصل جمع اس سلسلہ کا موافق قاعدہ گذشتہ یہہ ہی

$$\frac{(ن-۱)ن(ن+۱)(ن+۲)}{۴} + \frac{ن(ن+۱)}{۲} = \left(\frac{ن(ن+۱)}{۲}\right)^۲$$

اور ظاہر ہی کہ اس حاصل جمع پر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنا ضرور نہین ہی سلسلے آئندہ اسطرح سے بنتے ہین ت ان جز کسی کا اوپنین سے مساوی ہی حاصل جمع ن کتون جزون اوس سلسلہ کی جو واقع

جو واقع ہی ماقبل اوسکی واضح ہو کہ ان سلسلون کے اجزای کو اعداد شکلی کہتے ہین اول سلسلہ کی اعداد کو اعداد شکلی اول مرتبہ کی کہتے ہین اور دوم سلسلہ کی اعداد کو دوم مرتبہ کی اعداد شکلی کہتے ہین و علی ہذا القیاس

اول مرتبہ کی اعداد شکلی	۱	۱	۱	۱	۱	۱		وغیرہ
دوم ایضاً	۱	۲	۳	۴	۵	۶		وغیرہ
سوم ایضاً	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱		وغیرہ
چہارم ایضاً	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶		وغیرہ
پنجم ایضاً	۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶		وغیرہ

مثال ۶ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون م وین مرتبہ کی اعداد شکلی کا ظاہر ہی کہ اول مرتبہ کی اعداد شکلی کے ن جزون کا حاصل جمع ن ہی اور اسیواسطی زیادتی دوم مرتبہ کی اعداد شکلی کے حاصل جمع کی (ن + ۱) ہی اور اسیواسطی حاصل جمع دوسرے مرتبہ کی اعداد شکلی کے ن جزون کا $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہی اور رہیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ $\frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۲}$ ہی زیادتی سوم مرتبہ کی اعداد شکلی کی حاصل جمع کی اور اسیواسطی $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۲\times۳}$ ہی حاصل جمع ن جزون سوم مرتبہ کی اعداد شکلی کا اور ظاہر ہی کہ اسی طرح سے چہارم اور پنجم وغیرہ مرتبہ کی ن جزون اعداد شکلی کا حاصل جمع معلوم ہوسکتا ہی پس ظاہر ہی کہ م وین مرتبہ کی اعداد شکلی کے ن جزون کا حاصل جمع یہہ ہوگا

$$\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots\ldots(ن+م-۲)(ن+م-۱)}{۱\times۲\times۳\times۴\ldots\ldots(م-۱)م}$$

مثال ۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون اس سلسلہ کا

۱ × ۲ + ۲ × ۳ + ۳ × ۴ + ۴ × ۵ + ۵ × ۶ + وغیرہ ن جزون تک ظاہر ہی کہ (ن+۱) (ن+۲) جز اس سلسلہ کا یعنے زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہہ ہی (ن + ۱) (ن + ۲) اور اسیواسطی مقدار کلی یعنے حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہوگا $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳}$ اور ظاہر ہی کہ اسپر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین ہی

مثال ۸ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع ن جزون ایک ایسی سلسلہ کا جسکا ن وان جزیہہ ہی ط $ن^۳$ + ص $ن^۲$ + ع ن + ف اور اسکے ط اور ص اور ع اور ف مقدار مفروض ہین فرض کرو کہ ا ن (ن+۱)(ن+۲) + ب ن (ن+۱) + ج ن + س = ط $(ن+۱)^۳$ + ص $(ن+۱)^۲$ + ع (ن+۱) + ف یا

$$\left.\begin{array}{l} ا ن^۳ + ۳ ا ن^۲ + ۲ ا ن + س \\ \quad + ب ن^۲ + ب ن \\ \quad + ج ن \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} ط ن^۳ + ۳ ط ن^۲ + ۳ ط ن + ط \\ \quad + ص ن^۲ + ۲ ص ن + ص \\ \quad + ع ن + ع \\ \quad + ف \end{array}\right.$$

پس معلوم ہوا کہ $ا = ط$ اور $۳ ا + ب = ۳ ط + ص$ اور $\therefore ب = ص$ اور

$۲ ا + ب + ج = ۳ ط + ۲ ص + ع$ اور اسیواسطی

$۲ ط + ص + ج = ۳ ط + ۲ ص + ع$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ

$ج = ط + ص + ع$ اور $س = ط + ص + ع + ف$ پس معلوم ہوا کہ

زیادتی حاصل جمع مطلوبہ کی یہہ ہے

$ط ن (ن+۱)(ن+۲) + ص ن (ن+۱) + (ط + ص + ع) ن +$

$ط + ص + ع + ف$ اور اسیواسطی مقدار کلی یعنے حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہے

$$\frac{ط (ن-۱) ن (ن+۱)(ن+۲)}{۴} + \frac{ص (ن-۱) ن (ن+۱)}{۳}$$

$$+ \frac{(ط + ص + ع)(ن-۱) ن}{۲} + (ط + ص + ع + ف) ن$$ اور ظاہر ہی کہ

اسپر کوئی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین ہی سوای قواعد مذکورہ بالا کے اور یہی قواعد خاص درباب سلسلون کے مہندسون نے نکالی ہین اور اونسے بعضی اوقات بہت سہولت سی عمل ہوتا ہے جیسے کہ مثالون آئندہ سے واضح ہوگا

مثال ۹ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا تجزون سلسلہ آئندہ کا حاصل جمع

$۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ +$ وغیرہ

فرض کرو کہ حاصل جمع مطلوب مساوی اس سلسلہ کی ہی

$ا ن + ب ن^۲ + ج ن^۳ + د ن^۴ + س ن^۵ +$ وغیرہ

اب ظاہر ہی کہ زیادتی اس سلسلہ کی یہہ ہوگی

$ا (ن+۱) + ب (ن+۱)^۲ +$ وغیرہ $- ا ن - ب ن^۲ -$ وغیرہ

یعنے یہہ زیادتی ہوگی $ا + ۲ ب ن + ب + ۳ ج ن^۲ + ۳ ج ن + ج +$ وغیرہ

لیکن زیادتی سلسلہ مفروض کی یہہ ہی ت + ۵ پس معلوم ہوا کہ

ا + ۲ ب = ن + ب + ۳ ج ن۲ + وغیرہ = ن + ۵ پس معلوم ہوا کہ ۲ ب = ۱ اور

اسیواسطے ب = ۱/۲ اور ج = ۰ اور ا + ب = ۵ ∴ ا = ۵ − ۱/۲ = ۹/۲

اور یہان سے معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی ۹ن/۲ + ن۲/۲ = ۹ ن + ن۲ / ۲

اس مثال کے ملاحظہ کرنی سے طالب اس فن کو ایک بہت خوب قاعدہ واسطے دریافت کرنی حاصل جمع سلسلون کے معلوم ہو جائیگا اور وہ قاعدہ یہہ ہی جسوقت کسی سلسلہ کا حاصل جمع مطلوب ہو اوسوقت بجاے حاصل جمع مطلوبہ کی فرض کرو ایک ایسا سلسلہ کہ اوسمین قواے ن کے یا ی حائین اور امثال ان قوتون کے مقدار غیر منقطع مثل آ اور ب وغیرہ کی ہون بعد ازان اوس سلسلہ کی زیادتی کو للکھو مساوی زیادتی اوس سلسلہ کی جسکا حاصل جمع مطلوب ہی اور اس مساوات سی معلوم ہو جائیگی ہمین تعیین مقدارون غیر منقطع کی اور بعد ازان حاصل جمع مطلوب بہی معلوم ہو جائیگا

مثال ۱۰ فرض کرو کہ ایک ڈہیر گولیونکا اسطرح سے لگا ہوا ہی کہ اوس ڈہیر کی شکل مخروط مضلع کی ہے اور اسکا قاعدہ ایک مربعہ ہی اور اس مربعہ کی ایک ضلع مین ن گولی ہین بتاؤ کتنی گولی ہین سارے ڈہیر یعنے مخروط مضلع مذکور مین اب چونکہ موافق فرض کے ایک ضلع قاعدہ مخروط کی مین ن گولی ہین تو ساری قاعدہ یعنی کل مربعہ مین ن۲ گولی ہونگی اب چونکہ اس مربعہ کی جو مربعہ اوپر ہوگا اوسکی ایک ضلع مین (ن − ۱) گولی ہونگی تو ظاہر ہی کہ دوسرے مربع مین (ن − ۱)۲ گولی ہونگی اور اسیطرح سی تیسرے مربعہ مین (ن − ۲)۲ گولی ہونگی اور علی ہذا القیاس پس معلوم ہوا کہ ساری گولی کل مخروط مین مساوی ہونگے اوس سلسلہ مجذورون کے ن۲ + (ن − ۱)۲ + (ن − ۲)۲ + (ن − ۳)۲ + (ن − ۴)۲ + وغیرہ یا اوس سلسلہ کی آ + ۲۲ + ۳۲ + ۴۲ + ... + ن۲

اب ظاہر ہی کہ حاصل جمع اس سلسلہ کا دریافت ہو سکتا ہی بوسیلہ قاعدہ زیادتیون کے لیکن ہم اسجاے اسکا حاصل جمع اوس طریقہ سی دریافت کرینگے جس سے دریافت کیا ہی ہمنے حاصل جمع جو مطلوب تہا مثال (۹) مین واسطے اس مطلب کی فرض کرو کہ ا ن + ب ن۲ + ج ن۳ حاصل جمع مطلوبہ ہی اور اسیواسطے زیادتی اس صورت کی یہہ ہوگی

ا (ن + ۱) + ب (ن + ۱)۲ + ج (ن + ۱)۳ − ا ن − ب ن۲ − ج ن۳ لیکن زیادتی اوس سلسلہ کی جسکا حاصل جمع مطلوب ہی یہہ ہی

(ن + ۱)۲ یا ن۲ + ۲ ن + ۱ پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\left.\begin{matrix} ۳ج ن^{۲} + ۳ج ن + ج \\ + ۲ب ن + ب \\ + ۱ \end{matrix}\right\} = ن^{۳} + ۲ن + ۱$$

اور اسیواسطی حاصل ہوگئی یے مساواتین ۳ج = ۱ اور ∴ ج = $\frac{۱}{۳}$ اور

۳ج + ۲ب = ۲ یا ۱ + ۲ب = ۲ ∴ ب = $\frac{۱}{۲}$ لیکن ۱ + ب + ج = ۱

∴ $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۳}$ + ۱ = ا پس معلوم ہوا کہ ا = $\frac{۱}{۶}$ اور بیان سے معلوم ہوا کہ حاصل

جمع مطلوب یہہ ہی $\frac{ن}{۶}$ + $\frac{ن^{۲}}{۲}$ + $\frac{ن^{۳}}{۳}$ اور اسپر کوی مقدار مقررہ زیادہ کرنی ضرور نہین

ہی اگر لکھتے ہم واسطی حاصل جمع مطلوب کی یہہ سلسلہ ا ن + ب $ن^{۲}$ + ج $ن^{۳}$ + د $ن^{۴}$ وغیرہ تو

دریافت ہوتا یہہ کہ د = ۰ اور س = ۰ اور علی ہذا القیاس

اب تک ہمنی بیان کیا ہی وہ قاعدہ زیادتیون کا جسکی وسیلہ سی فقط وہی سلسلے جسکی اجزای اعداد صحیح

ہین جمع ہوسکتی ہین اب ہم لکھینگے وہ قاعدہ زیادتیون کا جسکی وسیلہ سی حاصل جمع اون سلسلون کا

بہی جنمین اجزای کسری ہون معلوم ہوجاتا ہی قاعدہ مذکور یہہ ہی

اگر کسر $\frac{۱}{م (م + ی)(م + ۲ی) \cdots م + (ن - ۱)ی}$ ہو وی کوئی مقدار کلی اور اسمین

و ہو وی کوی مقدار مقررہ کہ اسی قدر م متواتر زیادہ ہوتا ہی تو زیادتی اس مقدار کلی کی یہہ ہوگی

$$\frac{- ن ی}{م (م + ی)(م + ۲ی) \cdots (م + ن ی)}$$

اسواسطی کہ جسوقت ن ہوجاتا ہی ن + ۱ اوسوقت قیمت مقدار کلی کی یہہ ہوتی ہی

$$\frac{۱}{(م + ی)(م + ۲ی)(م + ۳ی) \cdots (م + ن ی)}$$

اور اگر اسمین سے تفریق کرین ہم قیمت اصلی مقدار کلی کی تو حاصل تفریق یہہ ہوتا ہی

$$\frac{م - (م + ن ی)}{م (م + ی)(م + ۲ی) \cdots (م + ن ی)} = \frac{- ن ی}{م (م + ی)(م + ۲ی) \cdots (م + ن ی)}$$

اور یہی ہی زیادتی مرقومہ بالا بیان سے یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہو وی

$$\frac{1}{م(م+د)(م+۲د)\ldots\ldots\ldots(م+ن د)}$$

کوئی زیادتی تو مقدار کلی اسکی یہہ ہوگی

$$\frac{1}{م(م+د)(م+۲د)(م+۳د)\ldots\ldots\ldots م+(ن-۱)د}$$

اور یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہووے

$$\frac{1}{م(م+د)(م+۲د)\ldots\ldots\ldots(م+ن د)}$$

کوئی زیادتی تو مقدار کلی اوسکی یہہ ہوگی

$$-\frac{1}{ن د}\cdot\frac{1}{م(م+د)(م+۲د)\ldots\ldots\ldots م+(ن-۱)د}$$

یعنے یہان سے یہہ قاعدہ نکلتا ہی اگر کوئی زیادتی اس

$$\frac{1}{م(م+د)(م+۲د)\ldots\ldots\ldots(م+ن د)}$$

شکل کی ہو تو اوسکی مقدار کلی دریافت ہوسکتی ہی اگر دو رکن ہم اخیر جز ضربی اوسکی نسبنما کو اور بعد ازان مقسوم کرین باقی کو متواتر تعداد اجزای پر جو باقی رہی ہین اور فرق عام پر اور جو کچھہ حاصل ہووے سے تفریق کرین یہہ قاعدہ خوب واضح ہوجائیگا مثالون آئندہ سے

مثال ۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ان جزون اس سلسلہ کا

$$\frac{1}{۱\times۲\times۳}+\frac{1}{۲\times۳\times۴}+\frac{1}{۳\times۴\times۵}+\text{وغیرہ ان جزون تک}$$

اسسے ظاہر ہی کہ ان جزو اس سلسلہ کا $\frac{1}{ن(ن+۱)(ن+۲)}$ ہی

پس معلوم ہوا کہ $(ن+۱)$ ان جزو اس سلسلہ کا یعنی زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہہ ہی

$$\frac{1}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}$$ اور اس مقدار کی مقدار کلی یہہ ہے $\frac{-1}{۲(ن+۱)(ن+۲)}+ق$

اور جسوقت $ن=۱$ اوسوقت ظاہر ہی کہ

$$\frac{-1}{۲\times۲\times۳}+ق=\frac{1}{۱\times۲\times۳}\quad\text{اور}\quad ق=\frac{1}{۱\times۲\times۳}+\frac{1}{۲\times۲\times۳}$$

$= \frac{۳}{۱۲ \times ۱} = \frac{۱}{۴}$ اور یہان سی معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی

$$\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲(ن+۱)(ن+۲)}$$

مثال ۲ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

$$\frac{۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{۷}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲} + \frac{۹}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳} + \text{وغیرہ ن جزون تک}$$

اسجای ظاہر ہی کہ (ن+۱) وان جزاس سلسلہ کا یعنے زیادتی اسکی یہہ ہی

$$\frac{۲ن+۵}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)} = \frac{۲(ن+۱)+۳}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)}$$

$$= \frac{۲}{(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)} + \frac{۳}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)}$$

اور ظاہر ہی کہ مقدار کلی یعنے حاصل جمع مطلوب

$$= \frac{-۱}{(ن+۲)(ن+۳)} - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)} + ق$$

اور جسوقت ن = ۱ اوسوقت ظاہر ہی کہ حاصل جمع مطلوب

$$= \frac{۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \text{ اور } \therefore -\frac{۱}{۴ \times ۳} - \frac{۱}{۴ \times ۳ \times ۲} + ق =$$

$$\frac{۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \text{ یا } ق = \frac{۱+۲+۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱}{۳} \text{ اور اسیواسطے حاصل}$$

جمع کامل یہہ ہی $\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{(ن+۲)(ن+۳)} - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}$

$$= \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۳)}$$

مثال ۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا موافق قاعدہ زیادتیون کے

$\frac{1}{1\times 2^2} + \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{4\times 6}$ وغیرہ ن جزون تک ظاہر ہی

کہ زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہہ ہی

$$\frac{1}{(ن+1)(ن+3)} = \frac{ن+2}{(ن+1)(ن+2)(ن+3)} = \frac{ن+1+1}{(ن+1)(ن+2)(ن+3)}$$

$$= \frac{1}{(ن+2)(ن+3)} + \frac{1}{(ن+1)(ن+\ )(ن+3)}$$ پس معلوم ہوا کہ مقدار کلی یعنے

حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی $-\frac{1}{ن+2} - \frac{1}{2(ن+1)(ن+2)}$ + ت اب فرض کرو

کہ ن = ا تو $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 2\times 2} + ت = \frac{1}{1\times 3}$

اور ت $= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع مذکور

یہہ ہی $\frac{3}{4} - \frac{1}{ن+2} - \frac{1}{2(ن+1)(ن+2)}$

مثال ۴ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کے ن جزون کا

$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{7\times 9}$ وغیرہ ن جزون تک اسجای ظاہر ہی

کہ زیادتی حاصل جمع اس سلسلہ کی یہہ ہی $\frac{1}{(2ن+1)(2ن+3)}$ فرض کرو کہ

2 د = 2 ن + 1 اور اسی فرض کے موافق یہہ بات ظاہر ہی کہ د زیادہ ہوگا او سیقدر

جسقدر ن زیادہ ہوتا ہی یعنے د زیادہ ہوتا ہی متواتر بقدر آیکے اور

$$\therefore \frac{1}{(2ن+1)(2ن+3)} = \frac{1}{2د(2د+2)} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{د(د+1)}$$

اور اس کے مقدار کلی یہہ ہی $-\frac{1}{4د} + ت = -\frac{1}{4ن+2} + ت$

اور جسوقت ن = ۱ اوسوقت $\frac{1}{6} + ق = \frac{1}{3}$ اور $\therefore ق = \frac{1}{2}$

پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع مطلوبہ یہہ ہی $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 ن + 2}$

مثالین اور قواعد واسطے دریافت کرنے حاصل جمع سلسلون متناہی اور غیر متناہی کے اوپر بیان کی گئی ہین وہی کافی ہونگی اور امید ہی کہ طالب علم اونکی پڑہنے سی ایسی استعداد حاصل کریگا کہ اگر کوئی اور قسم کا بہی سلسلہ اوسکی آگے آویگا اوسکو بہی وہ جمع کرسکیگا بسبب اسکی کہ بہت سی اور دلچسپ اور مفید مطالب جبر و مقابلہ مین باقی ہین تو مین کچہہ اور زیادہ درباب سلسلون کے اسجا نہین لکہہ سکتا ہون چونکہ یہہ باب سلسلون کے بیانین ہی تو مین اسمین مندرج کرتا ہون یا یکدہ اور فصل کو جسمین بیان ہوگا معکوس کرنی سلسلون کے اور سلسلہ متواتر کا

فصل دسوین بیچ بیان معکوس کرنی سلسلون کے

اگر ہو وی یک مساوات اس شکل کے

ز = ط لا + ص لا^{۲} + ع لا^{۳} + ف لا^{۴} + وغیرہ ..... (۱)

اور چاہتے ہون ہم دریافت کرنا ایک ایسا سلسلہ

لا = ا ز + ب ز^{۲} + س ز^{۳} + د ز^{۴} + وغیرہ ..... (۲)

تو اس عمل کو معکوس کرنا سلسلہ کا کہتے ہین کسواسطے کہ اول مساوات مین تو مساوی ہی ایک سلسلہ کے جسمین لا کی قوای بتدریج زیادہ ہوتی جاتی ہین اور اون قوای کے سر خاص مقدارین مثل ط اور ص وغیرہ کی ہین برخلاف اسکے سلسلی دوسرے مین لا ہی مساوی ایک سلسلہ کی جسمین ز کی قوای بتدریج زیادہ ہوتی جاتی ہین اور اونکی امثال خاص مقدارین مثل ا اور ب وغیرہ کی ہین پس لازم ہی ہمین دریافت کرنی قیمتین ا اور ب وغیرہ کی نسبت ط اور ص وغیرہ کے اور واسطے اس مطلب کے دریافت کرو قیمتون مختلف قوای ز کو بوسیلہ سلسلہ اول کے

$$\therefore ز^{۲} = \left\{\begin{array}{l} ط^{۲} لا^{۲} + ۲ ط ص لا^{۳} + ص^{۲} \\ \quad + ۲ ط ع \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} لا^{۴} + ۲ ص ع \\ \quad + ۲ ط ف \end{array}\right. لا^{۵} + \text{وغیرہ}$$

$$ز^{۳} = ط^{۳} لا^{۳} + ۳ ط^{۲} ص \quad لا^{۴} + ۳ ط ص^{۲} \quad لا^{۵} + \text{وغیرہ}$$

$$ز^{۴} = ط^{۴} \quad لا^{۴} + ۴ ط^{۳} ص \quad لا^{۵} + \text{وغیرہ}$$

$$ز^{۵} = ط^{۵} \quad لا^{۵} \text{ وغیرہ}$$

پس جبوقت لکھین ہم ان قیمتون کو سلسلہ (۲) مین اور ثبت کرین قوای لا کو علی الترتیب تو

۰ = ۱ ط	لا + ۱ ص	لا^{۲} + ۱ ع	لا^{۳} + ۱ ف	لا^{۴} + و غیرہ
− ۱	+ ب ط^{۲}	+ ۲ ب ط ص	+ ب ص^{۲}	
		+ س ط^{۳}	+ ۲ ب ط ع	
			+ ۳ س ط^{۲} ص	
			+ د ط^{۴}	

اب جبوقت لکھین جمع ہر واحد سر قوای لا کو مساوی صفر کی تو حاصل ہونگی یہ مساواتین

۱ ط − ۱ = ۰ اور ۱ ص + ب ط^{۲} = ۰ اور ۱ ع + ۲ ب ط ص + س ط^{۳} = ۰

اور ۱ ف + ب ص^{۲} + ۲ ب ط ع + ۳ س ط^{۲} ص + د ط^{۴} = ۰ وغیرہ

اور ان مساواتون سے حاصل ہوتی ہین یہ قیمتین آ اور ب وغیرہ کی

$$۱ = \frac{۱}{ط} \text{ اور } ب = -\frac{۱ ص}{ط^{۲}} = -\frac{ص}{ط^{۳}}$$ اور اسیطرح سی دریافت ہوسکتا ہی کہ

$$س = -\frac{ط ع - ۲ ص^{۲}}{ط^{۵}} \text{ اور } و = -\frac{ط^{۲} ف - ۵ ط ص ع + ۵ ص^{۳}}{ط^{۷}}$$

پس جبوقت لکھین ہم یہ قیمتین آ اور ب وغیرہ کی سلسلہ (۲) مین تو حاصل ہوگا سلسلہ مطلوبہ یہ

$$لا = \frac{۱}{ط} ک - \frac{ص}{ط^{۳}} ک^{۲} - \frac{ط ع - ۲ ص^{۲}}{ط^{۵}} ک^{۳} - \frac{ط^{۲} ف - ۵ ط ص ع + ۵ ص^{۳}}{ط^{۷}} ک^{۴} - \text{وغیرہ}$$

اگر سلسلہ مفروض مین کوئی مقدار منقطع بھی ہوتی تو وہ سلسلہ اس شکل کا ہوتا

ی = ط ک + ط لا + ص لا^{۲} + ع لا^{۳} + ف لا^{۴} + وغیرہ اب فرض کرو کہ ہو ی − ط ک = ی

اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہ مساوات ی = ط لا + ص لا^{۲} + ع لا^{۳} + ف لا^{۴} + وغیرہ

اب موافق گذشتہ کی فرض کرو کہ ہی یہ سلسلہ واسطی قیمت لا کے نسبت ی کے

لا = ۱ ی + ب ی^{۲} + س ی^{۳} + د ی^{۴} + وغیرہ پس موافق گذشتہ کی حاصل ہوگی یہ مساوات

$$لا = \frac{۱}{ط} ی - \frac{ص}{ط^{۳}} ی^{۲} - \frac{ط ع - ۲ ص^{۲}}{ط^{۵}} ی^{۳} - \frac{ط^{۲} ف - ۵ ط ص ع + ۵ ص^{۳}}{ط^{۷}} ی^{۴} \text{ وغیرہ}$$

اور جسوقت لکھینگے ہم بجای ؤ کی اوسکی قیمت ؤ − ظَ تو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات سلسلہ

$$\text{لا} = \frac{1}{\text{ظ}}(\text{ؤ} - \text{ظَ}) - \frac{\text{ص}}{\text{ظ}^3}(\text{ؤ} - \text{ظَ})^2 - \frac{\text{ظ ع} - 2\text{ص}^2}{\text{ظ}^5}(\text{ؤ} - \text{ظَ})^3$$

$$- \frac{\text{ظ}^2\text{ف} - 5\text{ظ ص ع} + 5\text{ص}^3}{\text{ظ}^7}(\text{ؤ} - \text{ظَ})^4 - \text{وغیرہ جسوقت سلسلہ مفروض ہین}$$

قوای طاق ہی لا کی ہون اوسوقت فرض کرو واسطی لا کے ایک ایسا سلسلہ کہ اوسمین بہی قوای ؤ کے فقط طاق ہی ہون مثلاً فرض کرو کہ ہی یہہ مساوات

$$\text{ؤ} = \text{ظ لا} + \text{ص لا}^3 + \text{ع لا}^5 + \text{ف لا}^7 + \text{وغیرہ پس اب فرض کرو کہ}$$

$$\text{لا} = 1\,\text{ؤ} + \text{ب ؤ}^3 + \text{س ؤ}^5 + \text{د ؤ}^7 + \text{وغیرہ اب اگر عمل کرین ہم بطور سابق کے}$$

کہ اوسوقت سلسلہ مفروض مین قوای لا کی طاق اور جفت دونوطرحکی ہین تو حاصل ہونگی یہہ مساوات

$$1 = \frac{1}{\text{ظ}} \text{ اور ب} = -\frac{\text{ص}}{\text{ظ}^4} \text{ اور س} = -\frac{\text{ظ ع} - 3\text{ص}^2}{\text{ظ}^7}$$

$$\text{اور د} = -\frac{\text{ظ}^2\text{ف} - 8\text{ظ ص ع} + 12\text{ص}^3}{\text{ظ}^{10}} \text{ اور علی ھذا القیاس}$$

پس اگر لکھین ہم ان قیمتون کو قیمت لا کی مین کہ ایک سلسلہ ہی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{لا} = \frac{1}{\text{ظ}}\text{ؤ} - \frac{\text{ص}}{\text{ظ}^4}\text{ؤ}^3 - \frac{\text{ظ ع} - 3\text{ص}^2}{\text{ظ}^7}\text{ؤ}^5 -$$

$$\frac{\text{ظ}^2\text{ف} - 8\text{ظ ص ع} + 12\text{ص}^3}{\text{ظ}^{10}}\text{ؤ}^7 - \text{وغیرہ اب ہم لکھتی ہین چند مثالین معکوس}$$

کرنے سلسلون کی تاکہ طالب علم کو مشق ہوجاوے

مثال ۱ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ $\text{ؤ} = 1 + \text{لا} + \frac{1}{1\times2}\text{لا}^2 + \frac{1}{1\times2\times3}\text{لا}^3 + \text{وغیرہ}$

اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت لا کی بوسیلہ ایک سلسلہ کی کہ اوسمین قوای ؤ کی علی الترتیب

لکھی ہوئی ہون اسجاے ظاہر ہی کہ ظ = 1 اور ظ = 1 اور ص = $\frac{1}{2}$

اور ع = $\frac{1}{3\times2}$ اور ف = $\frac{1}{4\times3\times2}$ وغیرہ اور اسیواسطی قیمتین آ اور ب

اور س وغیرہ کی یے ہین

$$ا = \frac{ا}{ط} = \frac{ا}{ا} = ا \text{ اور } ب = \frac{ص}{۳ط} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{اور } س = \frac{ط ع - ۲ ص^۲}{ط^۵} = \frac{۱}{۳ \times ۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

اور اسیطرح سے معلوم ہوسکتا ہی کہ ف = $\frac{۱}{۴}$ اور علے ہذا القیاس پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا = ز - ۱ - \frac{(ز-۱)^۲}{۲} + \frac{(ز-۱)^۳}{۳} - \frac{(ز-۱)^۴}{۴} + \text{وغیرہ}$$

مثال ۲ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ ز = لا − $\frac{لا^۲}{۲}$ + $\frac{لا^۳}{۳}$ − وغیرہ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنے قیمت لا کی نسبت ز کے بوسیلہ ایک سلسلہ کے

جواب $لا = ز + \frac{ز^۲}{۲} + \frac{ز^۳}{۳} + \frac{ز^۴}{۴} + \frac{ز^۵}{۵} + \text{وغیرہ}$

مثال ۳ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ ز = لا − $\frac{۱}{۲}$ $لا^۲$ + $\frac{۱}{۳}$ $لا^۳$ − $\frac{۱}{۴}$ $لا^۴$ + وغیرہ چاہتے ہین دریافت کرنی قیمت لا کی نسبت ز کے بوسیلہ ایک سلسلہ کی

جواب $لا = ز + \frac{۱}{۲} ز^۲ + \frac{۱}{۳ \times ۲} ز^۳ + \frac{۱}{۴ \times ۳ \times ۲} ز^۴ + \text{وغیرہ}$

مثال ۴ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ ز = لا − $\frac{۱}{۳ \times ۲}$ $لا^۳$ + $\frac{۱}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲}$ $لا^۵$

$$- \frac{۱}{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲} لا^۷ - \text{وغیرہ}$$

اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت لا کی نسبت ز کے بوسیلہ ایک سلسلہ کے

$$\text{جواب } لا = ز + \frac{۱}{۳ \times ۲} ز^۳ + \frac{۳}{۵ \times ۴ \times ۲} ز^۵ + \frac{۵ \times ۳}{۷ \times ۶ \times ۴ \times ۲} ز^۷$$

$$+ \frac{۷ \times ۵ \times ۳}{۹ \times ۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲} ز^۹ + \text{وغیرہ}$$

مثال ۵ فرض کرو کہ ہی یہہ سلسلہ یا مساوات متسلسل

$لا + ط لا^۲ + ص لا^۳ + ع لا^۴ + \text{وغیرہ} = ک ز + ط ک ز^۲ + ص ک ز^۳ + ع ک ز^۴ + \text{وغیرہ}$

اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت ز کی نسبت لا کے

جواب ہو $= \frac{\text{لا}}{\text{ک}} + \frac{(\text{ط ک}^2 - \text{ط})\text{لا}^2}{\text{ک}^3} + \frac{(\text{ص ک}^2 - \text{ص ک} - ۲\text{ط})(\text{ط ک}^2 - \text{ط})\text{لا}^3}{\text{ک}^5}$ + وغیرہ

واضح ہو کہ سلسلہ کا معکوس کرنا بہت مفید ہی مثلاً اگر معلوم کرلین ہم بوسیلہ ایک سلسلہ کی قیمت جس لا یا جم لا وغیرہ کی اور اس سلسلہ مین قوای لا کی پای جاتی ہون تو معلوم ہوسکتا ہی ہمین ایک ایسا سلسلہ جو مساوی ہو لا کے اور اوسمین پائی جائین قوای حس لا یا جم لا وغیرہ کی اور ظاہر ہی کہ اس سے معلوم ہوسکتا ہی ہمین محیط ایک دایرہ کا

فصل یازدہم بیچ بیان قاعدہ سلسلون متواتر کے

اگر ایک سلسلہ مین اجزای پیدرپے گھٹتے جاتے ہون اور ہر واحد ان اجزای مین کا اپنی ماقبل کے کئی جزو نکے حاصل جمع سے کوئی خاص نسبت رکھتا ہو تو ایسی سلسلہ کو سلسلہ متواتر کہتے ہین ایسی سلسلونکا حاصل جمع ہمیشہ معلوم ہوسکتا ہی اور طریقہ دریافت کرنی حاصل جمع مزکور کا یہہ ہی فرض کرو کہ

ط + ص لا + ع لا^2 + وغیرہ سلسلہ مفروضہ ہی اور تعبیر کرو جزون اسکی کو حروف آ اور ب اور س اور د اور ی وغیرہ سے اور یہہ بھی فرض کرو کہ س = ف لاب + ک لا^2 ا اور د = ف لاس + ک لا^2 ب وغیرہ اور اسیجای مقدار ف + ک کو میزان نسبت کی کہتے ہین کیونکہ اجزای متواتر کی اپسکی نسبت اس مقدار پر موقوف ہی پس اب حاصل ہونگی یے مساواتین

ا = ا

ب = ب

س = ف لاب + ک لا^2 ا

د = ف لاس + ک لا^2 ب

ی = ف لا د + ک لا^2 س

وغیرہ = وغیرہ

اور اگر ا + ب + س + د + ی + وغیرہ لانہایت = ج

تو حاصل ہوگی ہمین یہہ مساوات ج = ا + ب + ف لا (ج − ا) + ک لا^2 × ج

یا ج − ف لاج − ک لا^2 ج = ا + ب − ف لا ا اور اسیسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\text{ج} = \frac{\text{ا} + \text{ب} - \text{ف لا ا}}{\text{ا} - \text{ف لا} - \text{ک لا}^2}$$

اور اگر ہودی میزان نسبت کی مرکب دو سی زیادہ جزون سے یعنی ہو دیے وہ یہہ ف + کہ + ھہ وغیرہ
ن جزون تک تو بطور گذشتہ کی یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ حاصل جمع سلسلہ مفروض کا یہہ ہوگا

۱ + ب + س .... ن جزون تک = ف لا (۱ + ب .... ن - ۱ تک) کہ لا (۱ + ... ن - ۲ تک) وغیرہ
۱ - ف لا - کہ لا۲ - ھہ لا۳ ..... ن + ۱ جزون تک

مثال ۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لا نہایت کا

۱ + ۳ لا + ۹ لا۲ + ۲۷ لا۳ + وغیرہ لا نہایت کہ اسمین لا کم ہی بہ نسبت $\frac{1}{3}$ کے اس صورت مین

ظاہر ہی کہ ف = ۳ پس حاصل جمع مطلوبہ = $\frac{1}{1 - 3 لا}$

مثال ۲ چاہتے ہین دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لا نہایت کا

۱ + ۲ لا + ۳ لا۲ + ۴ لا۳ + وغیرہ اور اسمین لا کم ہی بہ نسبت عدد ایک کے اسجای ظاہر ہی کہ ف = ۲

اور کہ = - ۱ اور حاصل جمع مطلوبہ

$= \frac{1 + 2 لا - 2 لا}{1 - 2 لا + لا^2} = \frac{1}{(1 - لا)^2}$ اگر لا ہو دیے مساوی آ کے تو ظاہر ہی کہ سلسلہ

لا نہایت ہو جاویگا حاصل جمع ن کتے جزون سلسلہ گذشتہ کا اسطرح سے معلوم ہونا ظاہر ہی

کہ بعد ن کتے جزون کے یہہ سلسلہ ہوگا (ن + ۱) لا^ن + (ن + ۲) لا^ن+۱ + (ن + ۳) لا^ن+۲ وغیرہ

اور چونکہ اس سلسلہ مین یہہ میزان نسبت کی ۲ - ۳ ہی تو موافق گذشتہ کی حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہوگا

$\frac{(ن + 1) لا^ن + (ن + 2) لا^{ن+1} - 2 (ن + 1) لا^{ن+1}}{1 - 2 لا + لا^2} =$

$\frac{(ن + 1) لا^ن - ن لا^{ن+1}}{(1 - لا)^2}$ پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع اس سلسلہ کا

۱ + ۲ لا + ۳ لا۲ + ۴ لا۳ + وغیرہ کا =

$1 - \frac{(ن + 1) لا^ن - ن لا^{ن+1}}{(1 - لا)^2} = \frac{1 - (ن + 1) لا^ن + ن لا^{ن+1}}{(1 - لا)^2}$

اگر علامت لا کی بتدیل ہو جاوے تو ظاہر ہی کہ حاصل ہوگا یہہ سلسلہ

۱ - ۲ لا + ۳ لا۲ - ۴ لا۳ + ۵ لا۴ - وغیرہ اور حاصل جمع ن کتے جزون اس سلسلہ کا بطور

گذشتہ کے یہہ حاصل ہوگا

$\frac{(ن+۱)\,لا^{ن} - ن\,لا^{ن+۱}}{(۱-لا)^{۲}}$ اور اس صورت میں علامت فوقانی کا استعمال کرنا چاہیئے

جبوقت ن ایک عدد صحیح ہو اور علامت تحتانی کا جبوقت ایک عدد طاق ہو

مثال ۳ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا

$۱ + ۳لا + ۵لا^{۲} + ۷لا^{۳} + ۹لا^{۴}$ وغیرہ فرض کرو کہ ف کہ ہی میزان نسبت سے کے پس اب حاصل ہو گئی ہے دو مساواتیں $۳ف + ک = ۵$ اور $۵ف + ۳ک = ۷$ اور انسی حاصل ہوتی ہیں ہے قیمتیں $ف = ۲$ اور $ک = -۱$ اور یہاں سے معلوم ہوا کہ

$۲ = \frac{۱ + ۳لا - ۴لا}{۱ - ۲لا + لا^{۲}} = \frac{۱ + لا}{(۱-لا)^{۲}}$ ظاہر ہی کہ بعد ان جزوں کے یہ سلسلہ ہر شکل کا ہو جائیگا

$(۲ن+۱)\,لا^{ن} + (۲ن+۳)\,لا^{ن+۱} + (۲ن+۵)\,لا^{ن+۲}$ وغیرہ اور حاصل اس جمع کا یہ ہوگا

$\frac{(۲ن+۱)لا^{ن} + (۲ن+۳)لا^{ن+۱} - ۲(۲ن+۱)\,لا^{ن+۱} - (۲ن-۱)لا^{ن+۱}}{۱ - ۲لا + لا^{۲}} = \frac{(۲ن+۱)لا^{ن}}{(۱-لا)^{۲}}$

پس معلوم ہوا کہ حاصل جمع ن کتنے جزوں اس سلسلہ کا $۱ + ۳لا + ۵لا^{۲} + ۷لا^{۳}$ وغیرہ

یہہ ہی $\frac{۱ + لا - (۲ن+۱)\,لا^{ن} + (۲ن-۱)\,لا^{ن+۱}}{(۱-لا)^{۲}}$

مثال ۴ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ کا جبوقت کہ یہہ مایل ہو اختتام کیطرف

$۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۵لا^{۳} + ۸لا^{۴}$ وغیرہ لا نہایت ان صورت میں میزان اس نسبت کی یہہ ہی $۱ + ۱$

اور اسیواسطے حاصل جمع سلسلہ مفروض کا یہہ ہی

$\frac{۱ + ۲لا - لا}{۱ - لا - لا^{۲}} = \frac{۱ + لا}{۱ - لا - لا^{۲}}$ اور اگر لا ہو وے منفی تو

$۱ - ۲لا + ۳لا^{۲} - ۵لا^{۳}$ وغیرہ $= \frac{۱ - لا}{۱ + لا - لا^{۲}}$

مثال ۵ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا حاصل جمع اس سلسلہ لا نہایت کا

$(ن-۱)\,لا + (ن-۲)\,لا^{۲} + (ن-۳)\,لا^{۳}$ وغیرہ

اس صورت مین ظاہر ہی کہ میزان نسبت کی ۲ − ۱ ہی تو حاصل جمع سلسلہ لا نہایت مفروض کا یہہ ہوگا

$$\frac{(ن-۱)\,لا + (ن-۲)\,لا^۲ - ۲(ن-۱)\,لا^۲}{(۱-لا)^۲} = \frac{(ن-۱)\,لا - ن\,لا^۲}{(۱-لا)^۲}$$

ظاہر ہی کہ بعد ن جزون کے سلسلہ مفروض اس شکل کا ہوجاتا ہی

$$-لا^{ن+۱} - ۲لا^{ن+۲} - \text{وغیرہ}$$ اور اسکا حاصل جمع اسطرح سے دریافت ہوتا ہی یہہ ہی

$$\frac{-لا^{ن+۱}}{(۱-لا)^۲}$$ پس معلوم ہوا کہ ن کے کتنے جزون سلسلہ

$$(ن-۱)\,لا + (ن-۲)\,لا^۲ + (ن-۳)\,لا^۳ + \text{وغیرہ}$$ کا حاصل جمع یہہ ہی

$$\frac{(ن-۱)\,لا - ن\,لا^۲ + لا^{ن+۱}}{(۱-لا)^۲}$$

یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ حاصل جمع ن جزون اس سلسلہ کا

$$\frac{(ن-۱)\,لا}{ن} + \frac{(ن-۲)\,لا^۲}{ن} + \text{وغیرہ} = \frac{(ن-۱)\,لا - ن\,لا^۲ + لا^{ن+۱}}{ن\,(۱-لا)^۲}$$

مثال ۶ $۱^۲ + ۲^۲\,لا + ۳^۲\,لا^۲ + ۴^۲\,لا^۳ + ۵^۲\,لا^۴ + \text{وغیرہ}$ ن جزون تک کیا ہی

فرض کرو کہ میزان نسبت کی یہہ ہی ف + کہ + ھہ پس اب حاصل ہوگی یہ مساواتین

$$۹ف + ۴کہ + ھہ = ۱۶$$

$$۱۶ف + ۹کہ + ۴ھہ = ۲۵$$

$$۲۵ف + ۱۶کہ + ۹ھہ = ۳۶$$

اور ان مساواتون سے حاصل ہوتی ہین یہ قیمتین ف = ۳ اور کہ = − ۳ اور ھہ = ۱

پس جسوقت لکھین ہم ان قیمتون کو متواتر سلسلہ مفروض مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\frac{۱ + ۴لا + ۹لا^۲ - ۳لا - ۱۲لا^۲ + ۳لا^۳}{۱ - ۳لا + ۳لا^۲ - لا^۳} = \frac{۱ + لا}{(۱-لا)^۳}$$

اور یہی ہی حاصل جمع سلسلہ غیر نہایت مفروض کا جسوقت لا ہی کم آ سے تعداد ن جزون کے سلسلہ مفروض اس شکل کا ہو جائیگا

$(ن+۱)^۲ لا^ن + (ن+۲)^۲ لا^{ن+۱} + (ن+۳)^۲ لا^{ن+۲}$ وغیرہ اور حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہوگا

$$\frac{(ن+۱)^۲ لا^ن + (ن+۲)^۲ لا^{ن+۱} + (ن+۳)^۲ لا^{ن+۲} - ۳(ن+۱)^۲ لا^{ن+۱}}{۱ - ۳لا + ۳لا^۲ - لا^۳}$$

$$\frac{-۳(ن+۲)^۲ لا^{ن+۲} + ۳(ن+۱)^۲ لا^{ن+۲}}{۱ - ۳لا + ۳لا^۲ - لا^۳}$$

$$= \frac{(ن+۱)^۲ لا^ن - (۲ن^۲ + ۴ن - ۱) لا^{ن+۱} + ن^۲ لا^{ن+۲}}{(۱-لا)^۳}$$ اور یہاں سے معلوم ہوا کہ

صحیح ن جزوں تک $\frac{۱ + لا - (ن+۱)^۲ لا^ن + (۲ن^۲ + ۴ن - ۱) لا^{ن+۱} - ن^۲ لا^{ن+۲}}{(۱-لا)^۳}$

ضابطہ کثیر الاجزاء کا

یہہ ضابطہ اسطرح دریافت کرنی صورت مفصلہ مجموعہ دو سے زیادہ اجزاؤں کی کسی قوت کے کام میں اتا ہی ظاہر ہی کہ بذریعہ ضابطہ نیوٹن کے صورت مفصلہ کثیر الاجزاؤں کی مجموعہ کی کسی قوت کی دریافت ہوسکتی ہی جسطور سے کہ صورت تین جزوں کی میں پہلے مقاموں میں بیان کیا ہی اسواسطے کہ صورت مفصلہ

$(۱ + ب + ح + س + \text{وغیرہ})^م$ کی بطور صورت مفصلہ ضابطہ نیوٹن کے دریافت ہوسکتی ہی

اگر ہمکو اجزاء اسکو ایک جز فرض کرین اور باقی اجزاء کے مجموعہ کو دوسرا جز لیکن ایک عام قاعدہ وہ ہی جسمین کہ جز عام صورت مفصلہ کا دریافت ہوسکے تو ہم کرسکتے ہین اور اس جز عام سے ساری صورت مفصلہ نکل سکتی ہی اور اسکی ترکیب آگی لکھی جاتی ہی

دریافت کیا چاہتے ہین ہم جز عام صورت مفصلہ $(۱ + ب + ح + \text{وغیرہ})^م$ کا

فرض کرو کہ $ب + ح + \text{وغیرہ} = د$ $\therefore (۱ + ب + ح + \text{وغیرہ})^م = (۱ + د)^م$

اور اسکا جز عام کہ بتعبیر کیا جاوے $ط+۱$ ویں جز سے یہہ ہوگا

$$\frac{م(م-۱)\ldots\ldots(م-ط+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \ldots\ldots \times ط} \text{ الف } د^ط \text{ اور اسمیں الف} = ط \text{ اور}$$

یا یہہ ہوگا $\frac{م(م-۱)\ldots\ldots(ن+۱)}{ط!}$ الف $د^ط$ اور اس جای ط ایک عدد صحیح اور مثبت ہی

اب فرض کرو کہ ج + س + وغیرہ = ر ∴ ڈ = (ا + ب + ج + وغیرہ)^ط اور اسکا جزعام کہ تعبیر کیا جاوے
ق + ا دین جز سے یہہ ہوگا $\frac{ط(ط-ا)\cdots\cdots(ط-ق+ا)}{ا\times۲\times۳\times\cdots\cdots\times ق}$ ب^ق ج^ص اور اس جاے
ق + ص = ط یعنے ف + ق + ص = م یا یہہ ہے

$\frac{ط(ط-ا)\cdots(ص+ا)ص(ص-ا)\cdots\times۳\times۲\times ا}{ا\times۲\times۳\times\cdots ق\times ا\times۲\times۳\times\cdots ص}$ ب^ق ج^ص (کیونکہ ص ایک عدد
صحیح اور مثبت ہے) یا ط · $\frac{ب^ق}{ا^ق}$ · $\frac{ج^ص}{ا^ص}$ پس اس صورت مین جزعام صورت کثیر الاجزا کا اس
صورت کا ہوجائیگا م(م-ا)....(ف+ا) · $\frac{آ^ف}{ا^ف}$ · $\frac{ب^ق}{ا^ق}$ · $\frac{ج^ص}{ا^ص}$ اب فرض کرو کہ
س + وغیرہ = لا ∴ د^ص = (لا + ح)^ص اور جزعام کو تعبیر کیا جاوے ک + ا سی یہہ ہوگا

$\frac{ص(ص-ا)\cdots(ص-ک+ا)}{ا\times۲\times۳\times\cdots\cdots ک}$ س^ک لا^ع (اور اس جاے ک + ع = ص)

یا ف + ق + ک + ع = م) یا یہہ ہوگا

$\frac{ص(ص-ا)\cdots(ع+ا)ع(ع-ا)\cdots\times۳\times۲\times ا}{ا\times۲\times۳\times\cdots ک\times ا\times۲\times۳\times\cdots\cdots ع}$ س^ک لا^ع (اس جاے ع
ایک عدد صحیح اور مثبت ہی) یا یہہ ہی ص · $\frac{ح^ک}{ا^ک}$ · $\frac{لا^ع}{ا^ع}$ پس اس صورت مین
مضمد جزعام صورت مضمد کثیر الاجزا کا یہہ ہوگا

م(م-ا)....(ف+ا) $\frac{آ^ف}{ا^ف}$ · $\frac{ب^ق}{ا^ق}$ · $\frac{ح^ک}{ا^ک}$ · $\frac{لا^ع}{ا^ع}$ اور اگر اسیطرح سے

عمل کرین جائین جب تک تمام اجزا تمام ہوجائین تو جزعام مسطور یہہ ہوگا

م(م-ا)....(ف+ا) · $\frac{آ^ف}{ا^ف}$ · $\frac{ب^ق}{ا^ق}$ · $\frac{ح^ک}{ا^ک}$ · $\frac{س^ل}{ا^ل}$ وغیرہ اور اس جاے

ف + ق + ک + ل + وغیرہ = م اور واضح ہو کہ ف کسر یا منفی ہوتا ہی جبکہ م ایک کسر یا منفی
ہوتا ہی لیکن ق اور ک اور ل وغیرہ ہمیشہ مثبت اور صحیح اعداد ہوتے ہین
حکم اگر م ہووے ایک عدد صحیح اور مثبت صورت جزعام کی اسطور پر لکھی جاسکتی ہین

م(م-ا)....(ف+ا)ف(ف-ا).....×۳×۲×ا × $\frac{آ^ف}{ا^ف}$ · $\frac{ب^ق}{ا^ق}$ وغیرہ

یا ۱۰ $\frac{ا^{ف}}{ا!^{ف}} \cdot \frac{ق^{ق}}{ق!^{ق}} \cdot \frac{ک^{ک}}{ک!^{ک}}$ وغیرہ یہ صورت ثابت ہوسکتی ہے

ایک اور طریق سے جسوقت کہ فرض کرین نشان قوت کو ایک عدد صحیح اور مثبت دریافت کیا چاہتے ہین ہم صورت مفصلہ $(۱ + ب + ج + س +$ وغیرہ$)^{م}$ کے جسوقت کہ م ہووے ایک عدد صحیح اور مثبت

ظاہر ہے کہ $(۱ + ب + ج +$ وغیرہ$)^{لا} = ی^{الا ب لا + ج لا + س لا}$ وغیرہ اور یہان ظاہر ہے کہ ی $= ۲.۷۱۸۲۸۱۸$ پس اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ بذریعہ ضابطہ نشان قوت غیر مقررہ کی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$۱ + (۱ + ب + ج +$ وغیرہ$)^{۱} \frac{لا}{۱} + (۱ + ب + ج$ وغیرہ$)^{۲} \frac{لا^{۲}}{۱.۲} + \ldots\ldots$

$+ (۱ + ب + ج +$ وغیرہ$)^{م} \frac{لا^{م}}{۱.۲.۳\ldots م} +$ وغیرہ $=$

$(۱ + ا لا + \frac{ا^{۲} لا^{۲}}{۱.۲} + \frac{ا^{۳} لا^{۳}}{۱.۲.۳} \ldots + \frac{ا^{م} لا^{م}}{۱.۲.۳\ldots م} +$ وغیرہ

$\times (۱ + ب لا + \frac{ب^{۲} لا^{۲}}{۱.۲} + \frac{ب^{۳} لا^{۳}}{۱.۲.۳} + \ldots \frac{ب^{م} لا^{م}}{۱.۲.۳\ldots م} +$ وغیرہ$) \times$ وغیرہ

اب چونکہ بذریعہ عمل مذکورہ بالا کے ایک ہی مقدار کی دو صورتین مفصلہ ایک ضابطہ کی موافق نکالی گئی ہین تو ظاہر ہے کہ ان دو صورتون مفصلہ کے دیے اجزای جنمین قوای متماثلہ لا کی پائی جاوین وہ آپسمین مساوی ہون پس معلوم ہوا کہ جسوقت ہم لکھین سر لا کو کہ ایک صورت پایا جاوے مساوی سر لا کی کہ دوسری صورت مین پایا جاوے اور اس بات کا بھی لحاظ رکھین کہ دوسری طرف مساوات مین سر لا کا حاصلضرب اتنی اجزا کا ہوگا جتنی سلسلون کو آپسمین ضرب دیا ہے اور اس حاصلضرب کا ایک ایک جزو ان سلسلون سے علیحدہ علیحدہ لیا جائیگا اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات

$\frac{(۱ + ب + ج$ وغیرہ$)^{م}}{۱.۲.۳\ldots م} = \frac{ا^{ف}}{ا!^{ف}} \cdot \frac{ب^{ق}}{ق!^{ق}} \cdot \frac{ج^{ک}}{ک!^{ک}}$ وغیرہ

$= \frac{ا^{ف} ب^{ق} ج^{ک}$ وغیرہ$}{ا!^{ف} ق!^{ق} ک!^{ک}$ وغیرہ$} لا^{ف + ق + ک +$ وغیرہ

$= \text{مج} \frac{\text{ا}^{\text{ف}}\ \text{ب}^{\text{ق}}\ \text{ح}^{\text{ک}}\ \text{وغیرہ}}{\text{ف}!\ \text{ق}!\ \text{ک}!\ \text{وغیرہ}}$ اور اسجای ف + ق + ک + وغیرہ = م

اور نشان مج قبیر کرتا ہی اس عبارت کو مجموعہ اس شکل کی مقدار دینگا ∴ حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$(1 + \text{ب} + \text{ح} + \text{وغیرہ})^{\text{م}} = \text{مج} \frac{\text{م}!}{\text{ف}!\ \text{ق}!\ \text{ک}!\ \text{وغیرہ}}\ \text{ا}^{\text{ف}}\ \text{ب}^{\text{ق}}\ \text{ح}^{\text{ک}}\ \text{وغیرہ}$

اس جایہہ بات واضح ہو کہ م ایک عدد صحیح اور مثبت فرض کیا گیا تہا اور اسیواسطی صورت گذشتہ صورت عام نہین ہی کہ اوسمین م صحیح ہو خواہ کسر مثبت ہو خواہ منفی

حکم ۱ اگر ق + ک + ل + وغیرہ = ع تو ف = م − ع اور اسیواسطی جز عام مذکورہ بالا اس صورت کا ہو جائیگا

$\frac{\text{م}(\text{م}-1)\ldots(\text{م}-\text{ک}+1)}{1\times 2\ldots\text{ق}\times 1\times 2\ldots\text{ک}\ \text{وغیرہ}}\ \text{ا}^{\text{م}-\text{ع}}\ \text{ب}^{\text{ق}}\ \text{ح}^{\text{ک}}\ \text{وغیرہ}$ اس صورت کی ذریعہ سے

بعض اوقات عملون کے کرنی مین سہولت ہوتی ہی

حکم ۲ اگر صورت مفصلہ $(1 + \text{ا}_1 \text{لا} + \text{ا}_2 \text{لا}^2 + \text{ا}_3 \text{لا}^3 + \text{وغیرہ})^{\text{م}}$ کی یہ بین تو جز عام اسکا بذریعہ جز عام صورت مفصلہ $(1 + \text{ب}\,\text{ح} + \text{وغیرہ})^{\text{م}}$ کی دریافت ہوسکتا ہی جسوقت کہ لکہین ہم

$1 \cdot \text{ا}_1 \text{لا}\ \ \text{ا}_2 \text{لا}^2\ \ \text{ا}_3 \text{لا}^3$ وغیرہ بجای $1 \cdot \text{ب}\,\text{ح}$ وغیرہ کی علیحدہ علیحدہ چنانچہ اس صورت مین جز عام مطلوب یہہ ہوگا $\frac{\text{م}!}{\text{ف}!\ \text{ق}!\ \text{ک}!\ \text{وغیرہ}}\ \text{ا}_1^{\text{ف}}\ \text{ا}_2^{\text{ق}}\ \text{ا}_3^{\text{ک}}\ \text{وغیرہ} \times \text{ف} + 2\text{ق} + 3\text{ک} + \text{وغیرہ}$

اور اس جز عام کی وسیلہ سی تمام اجزا صورت مفصلہ کے معلوم ہوسکتی ہین جیسکہ پہلی جبکہ فرض کرین ہم مختلف قیمتین واسطی ف ق ک وغیرہ کے ایسی اونسی شرط مساوات ف + ق + ک + وغیرہ = م کی پوری ہووے بذریعہ اسی جز عام کی ہم کوئی سا ایسا جز صورت مفصلہ کا کہ جسمین کوئی خاص قوت لا کی مثل $\text{لا}^{\text{ن}}$ کی پای جاوی دریافت کرسکتے ہین جبکہ فرض کرین تمام ایسی قیمتین واسطی ف ق ک وغیرہ کی جنسی شرایط دو مساواتون

ف + ق + ک + وغیرہ = م اور ق + 2ک + 3ل + وغیرہ = ن کی پوری ہووین۔

حکم ۳ جسوقت مان لین ہم ضابطہ موافق نشان قوت صحیح اور مثبت کے اوسوقت ہم ثابت کرسکتے ہین اوسی موافق ایسے نشان قوت کی کہ دوسرا درجہ منفی ہو اور اوسکا طریق یہہ ہی فرض کرو کہ

ب + ح + وغیرہ = لا اور ∴ $(1 + \text{ب} + \text{ح} + \text{س} + \text{وغیرہ})^{\text{م}} = (1 + \text{لا})^{\text{م}}$

اور اسکا جزعام $ط+۱$ دان جزیہہ ہوگا $\frac{م(م-۱)\cdots(ف+۱)}{۱\times۲\times\cdots\cdots ط}$ $آ^{ف}$ $لا^{ط}$

اور اس جای $ف+ط=م$ اور چونکہ $ط$ ایک عدد صحیح اور مثبت ہی تو موافق اوسکے جو پہلے ثابت ہوچکا ہی ظاہر ہی کہ جزعام $لا^{ط}$ کا یعنے $(ب+ح+س+$ وغیرہ$)^{م}$ کا یہہ ہوگا

$لا^{ط}\cdot\frac{ب^{ق}}{ل^{ق}}\cdot\frac{ح^{ک}}{ل^{ک}}\cdot$ وغیرہ $\therefore$ جزعام مطلوبہ $=\frac{م(م-۱)\cdots(ف+۱)}{}\cdot آ^{ف}\cdot\frac{ب^{ق}}{ل^{ق}}\cdot\frac{ح^{ک}}{ل^{ک}}\cdot$ وغیرہ

مثال ۱ صورت مفصلہ $(آ-ب-ح)^{۷}$ کا وہ جز دریافت کیا چاہتے ہین کہ اوسمین $آ^{۳}ح^{۲}$ پایا جای اس جای $م=۷$ اور $م-ع=۲$ اور $ق=۳$ اور $ک=۲$

$\therefore$ جز مطلوب $=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times۳}{۱\times۲\times۳\times۲\times۱}\cdot آ^{۲}(-ب)^{۳}(-ح)^{۲}$

$=-۲۱۰\,آ^{۲}ب^{۳}ح^{۲}$

مثال ۲ دریافت کیا چاہتے ہین ہم وہ جز صورت مفصلہ

$(۱+ب\,لا+ح\,لا^{۲}+س\,لا^{۳})^{م}$ کا جسمین $لا^{ل}$ کی قوت پایا جاوے اس جای ظاہر ہی کہ $ف+ق+ک+ل=م$ اور $ق+۲ک+۳ل=۸$ اور یہہ بات باقی ہی کہ دریافت کرین ہم تمام قیمتین واسطے $ف$ $ق$ $ک$ وغیرہ کے ایسی کہ اوپر لیے شرایط دو مساواتون گذشتہ کی پوری ہوجائین اس مطلب کے لیے یہہ مناسب معلوم ہوتا ہی کہ شروع قیمت کا سی کم یا زیادہ سے زیادہ واسطے $ق$ کی وغیرہ کرین ایسی کہ اوپر لیے مساوات دوم پوری ہووے اور تمام اون قیمتون کو خارج کرین جو مساوات اول کی موافق نہون مثلاً ہم پاتے ہین کہ $ق$ نہین زیادہ ہوسکتا ہی اسسے جنانچہ جب آزماتی ہین تو اس سے شرایط پوری نہین ہوتی ہین آپ فرض کرو کہ $ق=۳$ اس سے بھی شرایط پوری نہین ہوتی اب فرض کرو کہ $ق=۲$ اسکے موافق شرایط پوری ہوتی ہین جبکہ $ف=۰$ اور $ک=۰$ اور $ل=۲$ اب فرض کرو کہ $ق=۱$ اور یہہ بھی درست ہی جب $ف=۰$ اور $ک=۲$ اور $ل=۱$ اب $ق=۰$ یہہ بھی درست ہی جبکہ $ف=۱$ اور $ک=۱$ اور $ل=۲$ اب فرض کرو کہ $ک=۰$ یہہ مناسب ہی جبکہ $ف=۰$ اور $ق=۰$ اور $ل=۴$ درست نہین ہی اور مساواتین $ک=۲$ اور $ک=۱$ اور $ک=۰$ سوای اون صورتون کے جو پہلے بیان ہوچکی ہین اور صورتین درست نہین ہین اب امتحان کرو $ل=۴$ یا ۳ یا ۲ یا ۱ یا ۰ کو ترتیب وار اور اس صورت مین دریافت ہوگا کہ سوای قیمتون مرقومہ بالا کی اور قیمتون سے کام

انہین نکلتا ہی اور فہرست قیمتون مختلف ف اور ق اور ک اور ل کی یہہ ہوگی

ف	ق	ک	ل
۰	۲	۰	۲
۰	۱	۲	۱
۱	۰	۱	۲
۰	۰	۴	۰

اس فہرست مین قیمتین حرف ف ق وغیرہ کی مطابق ایک دوسرے کی داہنی طرف سی بائین طرف کو لکھی ہوئی ہین اسیواسطے جز مطلوبہ یہہ ہی

$$\text{ل}^{۴} \times \left\{ \frac{\text{ح}^{۲}\text{س}^{۳}}{\text{ل}^{۲} \times \text{ل}^{۲}} + \frac{\text{ب}\,\text{ح}^{۲}\text{س}}{\text{ل}^{۲}} + \frac{\text{ا}\,\text{ح}\,\text{س}^{۲}}{\text{ل}^{۲}} + \frac{\text{ح}^{۳}}{\text{ل}^{۴}} \right\} \text{لا}^{۸}$$

$$= (۶\,\text{ح}^{۲}\text{س} + ۱۲ - \text{ح}^{۲}\text{س} + ۱۲\,\text{ا}\,\text{ح}\,\text{س} + \text{ح}^{۳})\ \text{لا}^{۸}$$

مثال ۳ دریافت کیا چاہتے ہین ہم وہ صورت مصدر $(\text{ا}\,\text{لا} - \text{ب}\,\text{لا}^{۲} + \text{ح}\,\text{لا}^{۳} - \text{وغیرہ})^{۱۰}$ جسمین $\text{لا}^{۱۴}$ پایا جاوے اسس جای ظاہر ہی کہ

$$(\text{ا}\,\text{لا} - \text{ب}\,\text{لا}^{۳} + \text{ح}\,\text{لا}^{۵} - \text{وغیرہ})^{۱۰} = \text{لا}^{۱۰}(\text{ا} - \text{لا}^{۲} + \text{ح}\,\text{لا}^{۳} - \text{وغیرہ})^{۱۰}$$

اور اسیواسطے اس صورت مین فقط اتنا دریافت کرنا ضرور ہوگا کہ وہ جز کونسا ہی جسمین $\text{لا}^{۸}$ کی پائی جاے

اور ∴ یہہ سا دا تین ہوگی

ف	ق	ک
۸	۲	۰
۹	۰	۱

ف + ق + ک + وغیرہ = ۱۰

اور ۲ق + ۴ک + وغیرہ = ۴

اور انکی شرایط یہہ ہونگی

$$\therefore \text{جز مطلوبہ} = \text{ل}^{۱۰} \left\{ \frac{\text{ا}^{۸}\text{ب}^{۲}}{\text{ل}^{۸} \cdot \text{ل}^{۲}} + \frac{\text{ح}^{۹}\text{ا}^{۹}}{\text{ل}^{۹}} \right\} \text{لا}^{۱۴} = ۴۵\,\text{ا}^{۸}\text{ب}^{۲} + ۱۰\,\text{ح}^{۹}\text{ا}^{۹}\,\text{لا}^{۱۴}$$

مثال ۴ دریافت کیا چاہتے ہین ہم $\text{لا}^{۲}$ کا اسمین

$$(۹ + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ح}\,\text{لا}^{۲} + \text{س}\,\text{لا}^{۳})^{\frac{۱}{۲}}$$ سے

اسمیں جای ف + ق + ک + ل = ½ اوپ + ۲ ک + ۳ ل = ۳ مساوات مشروطی ہین

ف	ق	ک	ل
− ۵/۲	۳	۰	۰
− ۳/۲	۱	۱	۰
− ۱/۲	۰	۰	۱

∴ سر مطلوبہ = ½ (½ − ۱)(½ − ۲) / ۳ + ½ (½ − ۱) آ^{۳/۲} ح

+ ½ ۹ − ½ س = ح / ۲۹۱۶ + ح / ۲۱۴ + س / ۲۱۲

فصل بارہوین احتمالات کے بیانمین

اگر ایک بات ت مختلف طریقون سے ہوسکتی ہو اور احتمال واسطی واقع ہونی اوسکی کی ہر طریقہ سے مساوی ہو تو ظاہر ہی کہ یہہ احتمال کہ بات مذکور کسی ایک خاص طریقہ سی واقع ہوگی تعبیر کیا جائیگا اس سر سی ۱/ت اور اسکے بجای عدد آ کا تعبیر کرتا ہی یقین کو یعنے مرقومہ بالا سی یہہ مراد ہی کہ اگر عدد آ کا تعبیر کرے یقین کو تو ضرور ہی کہ قیمت اوس توقع کی کہ بات مذکور ایک خاص طریقہ سی واقع ہوگی ۱/ت ہوتی ہی دلیل اسکی یہہ ہی کہ حاصل جمع تمام احتمالون کا یقین ہوتا ہی جو عبارت ہی اس سے کہ اگر کوئی بات سو طریقہ سی ہوسکتی ہو تو یہہ بات تحقیق ہی کہ وہ بات کسی نہ کسی ان سو طریقون سے ہوگی اور چونکہ احتمال واقع ہونی اس بات کا کسی خاص طریقہ سے مساوی ہی تو بالضرور یہہ احتمال کہ بات مذکور کسی ایک طریقہ سی ہوگی یہہ ہے ۱/ت مرقومہ بالا سے یہہ بھی معلوم ہوتا ہی کہ اگر یقین تعبیر کیا جاے ط سے تو قیمت ایک خاص احتمال کی یعنے توقع کی کہ بات مذکور کسی خاص طریقہ سے واقع ہوگی تعبیر کی جائیگی اس سر سی ط/ت لیکن واضح ہو کہ جو کچھ آگے لکھا جاتا ہی اوسمین ہم یقین کو فقط عدد ایک سے تعبیر کرینگی اگر ایک بات ط مختلف طریقون سی واقع ہوتی ہی ص طریقون سے اور احتمال ہونی ہر واحد ان طریقونکا مساوی ہی تو ہم کہتے ہین کہ احتمال اس بات کی واقع ہونیکا تعبیر کیا جائیگا ط/ت ص سے اور احتمال اوسکی نہ واقع ہونیکا تعبیر کیا جائیگا ت − ط/ت ص سے دلیل اسکی یہہ ہی موافق فرض کے یہہ بات ظاہر ہی کہ احتمال واقع ہونی بات مذکور کا احتمال اوسکے نہ واقع ہونی سے وہی نسبت رکھتا ہی جو ط رکھتا ہی ص سے پس معلوم ہوا کہ احتمال اوسکی واقع ہونی

کا وہی نسبت رکھتا ہی احتمال اوسکی واقع ہونی مفعل نہ واقع ہونی سے جو ط رکھتا ہی ط + ص سے لیکن احتمال واقع ہونی اور نہ واقع ہونی کے ملکر مساوی یقین سے کے ہوتی ہین تو معلوم ہوا کہ احتمال واقع ہونیکا : یقین : : ط : ط + ص لیکن موافق فرض کے یقین = ۱ تو معلوم ہوا کہ احتمال واقع ہونے کا : ۱ : : ط : ط + ص اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات احتمال واقع ہونے کا = $\frac{ط}{ط+ص}$ اگر اس احتمال کو یقین مین سے نکالین تو باقی رہیگا احتمال نہ واقع ہونیکا تو معلوم ہوا کہ احتمال نہ واقع ہونیکا = ۱ − $\frac{ط}{ط+ص}$ = $\frac{ص}{ط+ص}$

مثال ۱ واضح ہو کہ ایک پانسی کی چھہ طرفین یا سطحین ہوتی ہین اور ان طرفون کی مختلف نام ہوتے ہین مثلاً ہم اونکا نام ا ب ج د س ص رکھہ سکتی ہین اب کوئی اگر سوال کرے کہ کیا احتمال ہی کہ ایک دفعہ پانسی کے پھینکنے مین طرف ب اوسکی اوپر آوی تو جواب اس سوال کا اسطرح سے نکالنا چاہیئے ظاہر ہی کہ یہہ بات تحقیق ہی کہ چھہ طرفین سے ایک نہ ایک اوپر واقع ہوگی اور احتمال ہر ایک کے اوپر واقع ہونیکا مساوی ہی پس معلوم ہوا کہ احتمال کسی خاص طرف ب کی اوپر واقع ہونیکا $\frac{۱}{۶}$ ہی اور احتمال اسکی نہ واقع ہونیکا = ۱ − $\frac{۱}{۶}$ = $\frac{۵}{۶}$ اگر یہہ سوال ہو دے کہ کیا ہی احتمال آ یا ب کے اوپر آنیکا تو اس صورت مین ظاہر ہی کہ یہہ احتمال بہ نسبت پہلی کے دوگنا ہی کیونکہ دو صورتین اوسکی پوری ہونی کی ہین ایک تو واقع ہونا آ کا اوپر کی طرف اور دوسرا ب کا واقع ہونا اوپر کیطرف پس معلوم ہوا کہ اس صورت مین احتمال = $\frac{۲}{۶}$ اور اسیطرح سے یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہی کہ احتمال آ یا ب یا ج کے اوپر واقع ہونیکا مساوی ہی $\frac{۳}{۶}$ اور علی ہذا القیاس اور صورتین

مثال ۲ اگر ایک تھیلی مین ن کنی گولیان مثل آ اور ب اور ج اور د وغیرہ کی ڈالین اور ایک شخص بغیر دیکھنے کے تھیلی مین سے ایک گولی نکالی تو ہم سوال کرتے ہین کہ کیا ہی قیمت اس احتمال کی کہ گولی نکالی گئی آ ہوگی یہہ سوال بہت ہی سہل ہی اور طریقہ حل کرنے اوسکی کا مرقومہ الصدر سے عیان ہی یہہ بات تحقیق ہی کہ ایک نہ ایک گولیون سے نکلی گی اور احتمال ہر واحد کی نکلنی کا مساوی ہی تو ضرور ہی کہ احتمال آ کے نکلنی کا = $\frac{۱}{ن}$ اور احتمال آ یا ب کے نکلنی کا = $\frac{۲}{ن}$ اور علی ہذا القیاس

مثال ۳ اگر ان گولیون سے جنکا ذکر مثال گذشتہ مین ہی دو گولیان ایکہی وقت نکالی جائین تو احتمال اس بات کا کہ یہ دو گولیان آ اور ب ہونگی تصور کیا جائیگا $\frac{۲}{ن(ن-۱)}$ کیونکہ یہہ بات مسئلہ ترتیب اور اجتماع سے ظاہر ہی کہ اگر ن گولیون سے دو جزون کو اٹھا کرین اسطرح سے کہ ہر اجتماع مین دو گولیان مختلف ہون یعنے جو دو گولیان ایک اجتماع مین ہون وہی دونون گولیان دوسرے اجتماع مین ہون

تو تعداد کل اجتماعون کی تعبیر کی جاتی ہی $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ اور احتمال واسطی نکلنے آئی پہلی سے کسی ایک کا ان اجتماعون $\frac{۲}{ن(ن-۱)}$ کو یون سے سی مساوی ہی تو معلوم ہوا کہ احتمال واسطی نکلنی گولیون آ اور ب کے ایکہی وقت تعبیر کیا جائیگا $\frac{۱}{\frac{ن(ن-۱)}{۲}} = \frac{۲}{ن(ن-۱)}$ اور یہی بات ثابت کرنی تہی

مثال ۴ اگرچہ سفید گولیان اور پانچ کالی گولیان ایک پہلی مین ڈالکر ملائی جائین اور کوئی شخص ایک گولی انمین سے ایک وقت نکالی تو ہم پوچہتی ہین کہ کیا ہی قیمت اس احتمال کی کہ گولی نکالی گئی سیاہ ہوگی اور کیا ہی قیمت اس احتمال کہ گولی مذکور سفید ہوگی یہہ بات اسجای تحقیق ہی کہ گولی نکالی گئی یا تو کالی یا سفید ہوگی اور چونکہ گولیان سفید تو چہہ اور کالی پانچ ہین تو اوس سے جو پہلی لکہا گیا ہی یہہ بہت ظاہر ہی کہ احتمال سفید گولی نکلنے کا ہوگا $\frac{۶}{۱۱}$ اور احتمال کالی گولی نکلنے کا $\frac{۵}{۱۱}$ ہوگا مختلف موتی فہرستون مردون کی سے ایسی فہرستین یا نقشے تیار کیے گئے ہین کہ اونسے یہہ بات معلوم ہوجاتی ہی کہ کتنے شخص اتنے پیدا ہوئے مین سے بعد گذرنی ہر سال کی زندگی کے انتہای کو پہنچے ہین ان فہرستون کے وسیلہ سی قیمت احتمال اس بات کی کہ فلانا شخص فلانی عمر تک زندہ رہیگا معلوم ہوجاتی ہی

مثال ۵ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت احتمال اس بات کی کہ کوئی شخص کسی عمر مفروض کا ایک برس اور جیگا فرض کرو کہ فہرست مذکورہ بالا مین آ ہی تعداد اون آدمیون کی جنکی عمر مساوی عمر مفروض کے ہی اور ب تعداد اون آدمیون کے جو بعد ایک سال کی باقی رہتے ہین پس اس صورت مین ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ شخص مذکور ایک سال تک جیگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{ب}{آ}$ سے اور احتمال اس بات کا کہ اس سال مین مریگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{آ-ب}{آ}$ سے مثلاً فہرست ڈاکٹر ہیلی صاحب کے سی واضح ہوتا ہی کہ ۵۸۶ آدمیون ۲۲ برس کے عمر کی مین ۵۷۹ آدمی ۲۳ برس کی عمر حاصل کرتے ہین اور یہانسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ احتمال اس بات کا کہ کوئی شخص ۲۲ برس کی عمر کا ایک سال تک جیتا رہیگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{۵۷۹}{۵۸۶}$ سے یعنی قریب قریب اس $\frac{۸۳}{۸۴}$ سے اور احتمال اس بات کا کہ یہی شخص اسی سال مین مریگا تعبیر کیا جائیگا $\frac{۷}{۵۸۶}$ سے یعنی قریب قریب اس $\frac{۱}{۸۴}$ سے ظاہر ہی کہ یہہ مثال بہت دلچسپ ہی اور اسی قبیل کی مثالون سے بہت فائدہ بہی متصور ہی

مثال ۶ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ کوئی شخص کسی عمر مفروض کا جیگا اتنی برسون مفروض تک فرض کرو کہ فہرستون مین تعداد آدمیون عمر مفروض کی آ ہی اور ب تعداد اونکی جو بعد ایک سال کی باقی رہتے ہین ج اونکی جو بعد دو سال کے باقی رہتے ہین د اونکی جو بعد ۳ سال کے

اور علی ہذا القیاس ل ہی تعداد اون آدمیون کی جو باقی رہتے ہین بعد لا سال کے اس صورت مین ظاہر ہی کہ احتمال اسبات کا کہ شخص مذکور ایک برس جیئے گا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ل}{ا}$ سے اور احتمال اسکا کہ وہی شخص ۲ برس تک جیتا رہیگا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ل^۲}{ا^۲}$ سے اور احتمال اسکا کہ وہی شخص ۳ سال تک جیتا رہیگا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ل^۳}{ا^۳}$ سے اور احتمال اسکا کہ وہی آدمی ل برس تک جیئے گا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ل^ل}{ا^ل}$ سے اور علی ہذا القیاس یہان سے یہہ بھی خوب واضح ہی کہ احتمال اسبات کا کہ شخص مذکور ایک سال مین مرجائیگا بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ا-ل}{ا}$ سے اور ۲ سال مین مرجائیگا $\frac{ا-ل^۲}{ا^۲}$ ہوگا اور ۳ سال مین مرجائیگا $\frac{ا-ل^۳}{ا^۳}$ ہوگا اور ل سال مین مرجائیگا $\frac{ا-ل^ل}{ا^ل}$ ہوگا اور علی ہذا القیاس واضح ہو کہ یہ مثال سا ہوکارون اور روپیہ قرض دینے والون کو اور بہت سی کارخانی والون کو کہ جو ولایتون فرنگ مین کثرت سے پائی جاتی ہین بہت مفید ہوتے ہین اگر دو باتین ایک دوسرے سے کچھ تعلق نہین رکھتے ہون اور احتمال ایک کے واقع ہونیکا $\frac{ا}{م}$ ہو اور دوسرے کی واقع ہونیکا $\frac{ا}{ن}$ ہو تو ہم کہتے ہین کہ احتمال اسبات کا کہ یہ دونون باتین اکہٹی واقع ہونگی بتعبیر کیا جائیگا $\frac{ا}{م ن}$ سے کیونکہ ہر واحد کو م طریقون مین سے کہ جنمین اول بات واقع ہوتی ہی یا نہین واقع ہوتی ہی ملانی ہی سے ن طریقون سے کہ جنمین دوسری بات واقع ہوتی ہی یا نہین واقع ہوتی ہی حاصل ہونگی ن م اجتماع اور چونکہ فقط ایک ایسا اجتماع ہی کہ اوسمین دونون باتون کے واقع ہونیکا احتمال ہی تو ضرور ہی کہ احتمال مذکور مساوی ہو $\frac{ا}{م ن}$ کے مرتومہ بالا سی ظاہر ہی کہ احتمال اس کا کہ دونون باتین مذکور اکہٹی نہین واقع ہونگی

یہہ ہوگا $ا - \frac{ا}{م ن}$ یا $\frac{م ن - ا}{م ن}$ اسواسطے کہ احتمال اسبات کا کہ یہ دونون باتین واقع ہونگی اور احتمال اسکا کہ یہ دونون نہین واقع ہونگی مساوی ہین یقین کے کہ بتعبیر کیا جاتا ہی عدد آ کے سی تو معلوم ہوا کہ جسوقت تفریق کرینگی ہم عدد ایک مین سے احتمال دونونکی واقع ہونیکو تو حاصل تفریق ہوگا مساوی احتمال دو نو باتون مذکورہ بالا کی نہ واقع ہونیکا ایکہی وقت مین مرتومہ بالا سے یہہ بھی واضح ہوگا کہ احتمال اسکا کہ دو نو باتین مذکورہ بالا علیحدہ علیحدہ واقع ہونگی بتعبیر کیا جائیگا اس سے

$\frac{(م-ا)(ن-ا)}{م ن}$ کسواسطے کہ احتمال اس بات کا کہ اول بات نہین واقع ہوگی مساوی ہی $\frac{م-ا}{م}$ کے اور احتمال اسبات کا کہ دوسری نہین واقع ہوگی مساوی ہی $\frac{ن-ا}{ن}$ کے پس معلوم ہوا کہ احتمال اسبات کا کہ دو نو باتین مذکور علیحدہ علیحدہ واقع نہین ہونگی مساوی ہوگا اسکے

$$\frac{م-۱}{م} \times \frac{ن-۱}{ن} = \frac{(م-۱)(ن-۱)}{م ن}$$

مرقومہ بالا سی یہہ بہی ظاہر ہوتا ہی کہ احتمال اسکا کہ فقط ایک ماتون مذکورین سے واقع ہوگی اور دوسری نہین واقع ہوگی بتعبیر کیا جائیگا اسسے $\frac{م+ن-۲}{م ن}$ کسواسطی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بات واقع ہوگی اور دوسری نہین واقع ہوگی بتعبیر کیا جاتا ہی $\frac{۱}{م} \times \frac{ن-۱}{ن}$ اور احتمال اسبات کا کہ اول بات نہین واقع ہوگی اور دوسری واقع ہوگی بتعبیر کیا جائیگا $\frac{م-۱}{م} \times \frac{۱}{ن}$ سی پس حاصل جمع ان دو احتمالونکا ہوتا ہی $\frac{م+ن-۲}{م ن}$ جو مساوی ہی احتمال فقط ایک کی واقع ہونیکی مرقومہ بالا سے یہہ بہی واضح ہی کہ اگر کئے باتین ایسی ہون کہ وے ایک دوسری سے تعلق نہ رکہتی ہون اور احتمال انکے علیحدہ علیحدہ واقع ہونیکا بتعبیر کیا جاوے علیحدہ علیحدہ $\frac{۱}{م}$ $\frac{۱}{ن}$ $\frac{۱}{د}$ وغیرہ سی تو ہم کہتے ہین کہ احتمال اس بات کا کہ وے سب باتین ایکہی دفع واقع ہونگی بتعبیر کیا جائیگا اسسے $\frac{۱}{م ن}$ وغیرہ اسواسطی کہ یہہ بات پہلی ثابت ہوچکی ہی کہ احتمال اول دو باتونکی اکٹہے واقع ہونیکا مساوی ہی $\frac{۱}{م} \times \frac{۱}{ن}$ کے اور اسیواسطی احتمال اسکا کہ وے دونون باتین اور تیسری بات اکٹہی واقع ہون یہہ ہوگا $\frac{۱}{م ن د}$ اور یہی دلیل ہی واسطی زیادہ باتون کے جسوقت م = ن = وغیرہ اور تعبیر کرتا ہو تعداد باتون کو تو ظاہر ہی کہ احتمال ان سبونکی اکٹہے یعنے متواتر واقع ہونیکا بتعبیر کیا جائیگا اس $\frac{۱}{م^{ن}}$ سے

مثال ۱ ایک پانسی کے چہ ضلعون پر حروف ا اور ب اور ح اور د اور س اور ص نقش کئے ہوئے ہین چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اسبات کا کہ اگر پانسی مذکور کو ایک دفع پہینکو تو ا اوپر واقع ہو اور دوسری بار پہینکین تو ب اوپر واقع ہو ظاہر ہی کہ احتمال اسبات کا کہ ا اوپر واقع ہوگا مساوی ہی $\frac{۱}{۶}$ کے اور احتمال اس بات کا کہ دوسری بار پہینکنی سے ب اوپر واقع ہوگا مساوی ہی $\frac{۱}{۶}$ کے تو موافق اوسکی جو پہلی ثابت ہوا ہی یہہ بات عیان ہی کہ احتمال دونو ا اور ب کے اوپر واقع ہونیکا مساوی ہوگا $\frac{۱}{۶ \times ۶} = \frac{۱}{۳۶}$

مثال ۲ فرض کرو کہ ایک تہیلی مین تو سفید گولیان اور پانچ سیاہ گولیان ڈالکر اور نہین خوب ملادین اور ایک شخص اس تہیلی مین سے اول تو ایک گولی نکالتا ہی اور دوسری بار ایک اور گولی بغیر دیکہنی کے پس اب ہم سوال کرتے ہین کہ کیا ہی احتمال اسبات کا کہ اول بار تو ایک سفید گولی نکلی گی اور دوسری بار ایک سیاہ گولی نکلی گی ظاہر ہی کہ احتمال اس کا کہ اول دفع ایک سفید گولی نکلی مساوی ہی $\frac{۶}{۱۱}$ اور احتمال اسکا کہ دوسری بار ایک کالی گولی نکلی گی مساوی ہی $\frac{۵}{۱۰}$ کی (کیونکہ اس صورت مین کل تعداد گولیون کی فقط دس رہیگی بسبب $\frac{۱}{۱۱}$ کے

پس معلوم ہوا کہ احتمال مطلوبہ مساوی ہوگا $\frac{۶}{۱۱} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۱۱}$

مثال ۳ اگر فرض کیجئے کہ وہی سب باتین جو مثال گذشتہ مین مانی گئی تہین تو چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ اول بار تو ایک سفید گولی نکلی اور دوسری بار ایک کالی گولی اور تیسری بار ایک کالی گولی نکلی مثال گذشتہ سی یہہ بات عیان ہی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بار ایک سفید گولی نکلی اور دوسری بار ایک کالی گولی نکلی مساوی ہی $\frac{۳}{۱۱}$ کے لیکن بعد نکلنی ان دونو گولیون کے ۵ سفید اور ۴ کالی گولیان باقی رہینگی اور اسیواسطے احتمال اس بات کا کہ تیسری بار ایک کالی گولی نکلے گی مساوی ہوگا $\frac{۴}{۹}$ پس ہوا کہ احتمال مطلوبہ مساوی ہوگا $\frac{۳}{۱۱} \times \frac{۴}{۹} = \frac{۴}{۳۳}$

مثال ۴ چاہتے ہین دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ اگر پانسی مذکور الصدر کو دو دفع متواتر پھینکین تو متواتر دو نو دفع مین کم سے کم ایک بار حرف آ کا اوپر واقع ہو ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ اول بار آ اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہی $\frac{۵}{۶}$ کے اور اسیطور سی احتمال اس بات کا کہ دوسری بار بہی آ اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہی $\frac{۵}{۶}$ کے پس احتمال اس بات کا کہ آ دو نو بار متواتر اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہوگا $\frac{۲۵}{۳۶}$ اور اسیواسطے احتمال اسبات کا کہ کسی نہ کسی دو نو بار مین سے آ اوپر واقع ہوگا مساوی ہی $۱ - \frac{۲۵}{۳۶} = \frac{۱۱}{۳۶}$

مثال ۵ دو شخص برابر کی شرط بدتی ہین اسطرح پر کہ ایک تو آ کی اوپر واقع ہونی سے جیت تا ہے اور دوسرا اوپر واقع نہونی سے جیت تا ہی پس اب ہم سوال کرتے ہین کہ کتنی بار پانسی کو پھینکنا چاہیئے تاکہ دونو شخصون کو جو کچھون مساوی ہو اور مساوی رقم ہارنا یا جیتنا موافق انصاف کی ہو فرض کرو کہ تعداد دفعون پھینکنی پانسی کی مساوی ہی لا کے اب موافق مثال گذشتہ کی یہہ بات ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ لا دفع متواتر آ اوپر واقع نہین ہوگا مساوی ہی $(\frac{۵}{۶})^{لا}$ اور چونکہ احتمال واقع ہونی اور نہونی کا موافق شرط اس سوال کے مساوی ہی یعنی ہر دو احدانین سے مساوی نصف یقین کے ہی جو عدد ایک سی تعبیر کیا جاتا ہی تو معلوم ہوا کہ $(\frac{۵}{۶})^{لا} = \frac{۱}{۲}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات لا × لوگ $\frac{۵}{۶}$ = لوگ $\frac{۱}{۲}$ یا لا × (لوگ ۵ − لوگ ۶) = لوگ ۱ − لوگ ۲ اور

لا = $\frac{\text{لوگ ۱} - \text{لوگ ۲}}{\text{لوگ ۵} - \text{لوگ ۶}}$ اور چونکہ لوگ ۱ = ۰ تو معلوم ہوا کہ لا = $\frac{\text{لوگ ۲}}{\text{لوگ ۶} - \text{لوگ ۵}}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی لا = ۳٫۸ قریب قریب

مثال ۶ چاہتے ہین دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ دو شخص ف اور ق جنکی عمرین معلوم ہین ایک سال تک جیتی رہینگے فرض کرو کہ فہرست مردون اور زندہ رہنے کی سے کہ جسکا پہلی ذکر ہو چکا ہے

یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ احتمال ایک کے دو شخصون مذکورمین سے ایک برس تک جینی کا $\frac{1}{م}$ ہی اور اسیطرح سے احتمال دوسرے شخص یعنے ق کے جینی کا ایک برس تک $\frac{1}{ن}$ ہی تو اب ظاہر ہی کہ احتمال اس بات کا کہ دونو شخص ایک برس تک جیتے رہینگے مساوی ہوگا اس حاصل ضرب $\frac{1}{م} \times \frac{1}{ن}$ یا $\frac{1}{مان}$ کے

مثال ۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اس بات کا کہ کے برسونمین کم سے کم ایک دو شخصون مذکورہ مثال گذشتہ مین سے جیتا رہیگا مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ احتمال اسبات کا کہ شخص ف ایک سال مین مرجائیگا مساوی $\frac{م-۱}{م}$ ہی اور احتمال اس بات کا کہ ق اسی عرصہ مین مرجائیگا مساوی ہے $\frac{ن-۱}{ن}$ کے پس احتمال اس بات کا کہ دو نو شخص ایک سال مین مرجائینگے مساوی ہوگا $\frac{(م-۱)(ن-۱)}{مان}$ کے اور اسیواسطے احتمال اسبات کا کہ دونون شخص مذکور نہین مرینگے مساوی ہوگا

$$۱ - \frac{(م-۱)(ن-۱)}{مان} = \frac{م+ن-۱}{مان}$$

یہہ بھی ظاہر ہی کہ اگر احتمال اسبات کا کہ شخص ف ل سال تک جیئیگا بتعیین کیا جائے $\frac{ط}{ص}$ سی اور احتمال شخص ق کے جینی کا اسی عرصہ تک بتعیین کیا جای $\frac{ظ}{ض}$ سے تو موافق اوسکی کہ پہلی لکھا گیا ہی احتمال اسبات کا کہ کم سے کم ایک شخص انمین کا وقت مذکور تک جیئیگا مساوی ہوگا

$$\text{اسکے } ۱ - \frac{(ط-۱)(ض-۱)}{طض} = \frac{ط+ض-۱}{طض}$$

اگر احتمال ایک بات کی واقع ہونیکا ایک امتحان کرنی سے بتعیین کیا جائے $\frac{ط}{ط+ض}$ سے تو چاہتے ہین ہم دریافت کرنا احتمال اسی کام کی واقع ہونیکا ایک دفع یا دو دفع یا تین دفع اور علی ہذا القیاس ن بار امتحان کرنی سے چونکہ احتمال اسبات کی واقع ہونیکا کسی خاص امتحان مین $\frac{ط}{ط+ض}$ ہی تو موافق اوسکی جو پہلی بیان کیا گیا ہی یہہ بات ظاہر ہی کہ احتمال اسی بات کی نہونے کا (ن - ۱) بار امتحانونمین بتعیین کیا جائیگا

$\frac{ض^{ن-۱}}{(ط+ض)^{ن-۱}}$ سے اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ احتمال واقع ہونیکا کسی خاص امتحان مین اور نہونیکا باقی امتحانونمین بتعیین کیا جائیگا $\frac{طض^{ن-۱}}{(ط+ض)^{ن}}$ سے اور چونکہ تعداد امتحانون کی ن ہی تو ضرور ہی کہ احتمال اس بات کا کہ بات مذکور واقع ہوگی کسی ایک مین ان امتحانونمین سے اور نہ واقع ہوگی باقی امتحانونمین بہ نسبت احتمال مذکور کے ن دفع زیادہ ہوگا یعنے وہ یہہ $\frac{ن طض^{ن-۱}}{(ط+ض)^{ن}}$ ہوگا اسیطرح سی احتمال اوسی کے واقع ہونیکا دو امتحانونمین اور نہین ہونیکا باقی امتحانونمین بتعیین کیا جائیگا

$\frac{ط^{۲} ض^{ن-۲}}{(ط+ض)^{ن}}$ سے اور چونکہ اس صورت مین تعداد اون مختلف طریقون کی جنمین وہ دو دفع ن

کتنے امتحانونمین واقع ہوتا ہی اور باقی امتحانونمین نہین واقع ہوتا ہی $\frac{ن(ن-۱)}{۲}$ ہی توضرور ہی
کہ احتمال اسکی واقع ہونیکا دو دفع ن امتحانونمین تعبیر کیا جایئے گا

$$\frac{\frac{ن(ن-۱)}{۲}\ ط^{۲}\ ص^{ن-۲}}{(ط+ص)^{ن}}$$ سیے اسیطرح سے احتمال اسکا کہ بات مذکور تین دفع ن امتحانونمین واقع ہوگی ہے

$$\frac{\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۳}\ ط^{۳}\ ص^{ن-۳}}{(ط+ص)^{ن}}$$ ہی اور احتمال اسیکی ع دفع واقع ہونیکا ن امتحانونمین یہہ ہوگا

$$\frac{ن\ (ن-۱)\ (ن-۲)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{ن-ع+۱}{ع}\ ط^{ع}\ ص^{ن-ع}}{(ط+ص)^{ن}}$$

بعینہ مرقومہ بالا کی موفق یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہی کہ احتمال بات مذکور کی نہ واقع ہونیکا ع دفع ن امتحانونمین تعبیر کیا جائیگا اس صورت جبریہ سی

$$\frac{ن\ (ن-۱)\ (ن-۲)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{ن-ع+۱}{ع}\ ط^{ن-ع}\ ص^{ع}}{(ط+ص)^{ن}}$$

مرقومہ بالا سی یہہ بھی واضح ہوتا ہی کہ احتمال اسبات کا کہ بات مذکور کم سی کم ع دفع ن امتحانونمین واقع ہو تعبیر کیا جائیگا اس صورت جبریہ سے

$$\frac{ط^{ن}+ن\ ط^{ن-۱}\ ص+\frac{ن(ن-۱)}{۲}\ ط^{ن-۲}\ ص^{۲}\ \ldots\ldots\ldots\ن-ع+۱\text{ جزون تک}}{(ط+ص)^{ن}}$$

دلیل اسکی یہہ ہی کہ اگر ایک بات ہنگام واقع ہونے یا واقع ہو ایک دفع یا دو دفع یا تین دفع یا ن — ع دفع تو ضرور ہی کہ وہ اس صورتین کم سے کم ع دفع واقع ہوگی اور اسیواسطی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ احتمال واقع ہونی بات مذکور کا کم سے کم ع دفع ن امتحانونمین مساوی ہی حاصل جمع احتمالون اسکی ہر دفع واقع ہونیکی اور نہ واقع ہونیکے ایک دفع یا دو دفع ..... ن — ع دفع اور ظاہر ہی کہ حاصل جمع ان احتمالون کا یہہ ہی

$$\frac{ط^{ن}+ن\ ط^{ن-۱}\ ص+\frac{ن(ن-۱)}{۲}\ ط^{ن-۲}\ ص^{۲}\ \ldots\ldots\ldots\ن-ع+۱\text{ جزون تک}}{(ط+ص)^{ن}}$$

مثال ۱ اگر ایک پانسی کو کہ اوسکی چھہ ضلعون پر حروف آ اور ب اور ح اور د اور س اور ص کے کہدی ہوئے ہین تین دفع متواتر پھینکین تو ہم سوال کرتے ہین کہ کیا ہی احتمال اسکا کہ حرف آ کا کم سے کم دو دفع اوپر کی طرف واقع ہو اسصورت مین ظاہر ہی کہ

ن = ۳ اور ع = ۴ اور ط = ۱ اور ص = ۵ اور اسیواسطے ظاہر ہی کہ احتمال مطلوبہ یہہ ہوگا

$$\frac{۵\times۳+۱}{۶\times۶\times۶} = \frac{۱۶}{۲۱۶} = \frac{۲}{۲۷}$$

مثال ۲ بتاو کیا ہی احتمال اسکا کہ پانچ شخصونمین سے جنکی عمر کچھہ فرض کی گئی ہی کم سے کم تین آدمی ایک وقت مفروض مین مرجائینگی فرض کرو کہ احتمال اسبات کا کہ کوئی سا ایک ان شخصونمین سے وقت مفروض مین مرجائیگا یہس اسصورت مین معلوم ہی ہمین احتمال ایک بات کے ایک دفع واقع ہونیکا اور دریافت کرنا ہی ہمین احتمال اسکا کہ بات مذکور کم سے کم تین دفع پانچ امتحانونمین واقع ہو اسصورت مین ظاہر ہی کہ ط = ۱ اور ص = م − ۱ اور ن = ۵ اور ع = ۳ پس معلوم ہوا کہ احتمال مطلوبہ یہہ ہی

$$\frac{۱+۵(م-۱)+۱۰(م-۱)^۲}{۵^م}$$

واضح ہو کہ مطالب اس فصل کے بہت مشکل اور دلچسپ اور مفید ہین لیکن اس کتاب مین ساری مسایل اسس فرع کی نہین لکہے جاسکتی ہین لیکن امید ہی جو طالب علم اوسکو جو مرقوم اوپر ہوا ہی توجہہ سی پڑہی گا اوسی بہت کچھہ درباب اس مطلب کے معلوم ہوجائیگا یہہ بہی واضح ہو کہ مسئلون مذکورہ بالا کی حل کرنے مین اکثر ہم سے غلطی ہوجاتی ہی کیونکہ بعض اوقات ایسا ہوتا ہی کہ جن باتونکو نہایت ظاہر اور صحیح تصور کرتے ہین حقیقت مین بالکل غلط ہوتی ہین واسطے توضیح کرنے اس بات کی ایک مثال اس جاے کفایت کریگی اور وہ مثال یہہ ہی ظاہر ہی کہ احتمال اسبات کا کہ ایک دفع پانسی کے پھینکنے سی حرف آ کا اوپر کیطرف واقع ہو بتصور کیا جاتا ہی $\frac{۱}{۶}$ سے اور چونکہ دوسری دفع پھینکنے مین بہی اتنا ہی احتمال واسطے واقع ہونی آ کے اوپر کیطرف ہی تو ایسا معلوم ہوتا ہی کہ اگر دو دفع پانسی مذکور کو پھینکین تو احتمال دوگنا ہوگا یعنے بتصور کیا جائیگا $\frac{۲}{۶}$ سے لیکن اوسس سے جو ابھی اوپر بیان کیا ہی یہہ باعیان ظاہر ہی کہ یہہ نتیجہ بالکل غلط ہی کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو اوس سے یہہ نتیجہ بہی نکلتا کہ چھہ دفع پانسی کو پھینکنے سی بالضرور حرف آ کا اوپر واقع ہوتا باعث اس غلطی کا جو اس صورت مین ذرا پوشیدہ ہی یہہ ہی کہ فرض کرلیتی ہین ہم کہ بالضرور پانسہ دوسری دفع بہی پھینکا جائیگا اور یہہ نہین ہوتا ہی جبکہ واقع ہو حرف آ کا اوپر کیطرف اول سے پھینکنی سے

فصل پنجم ہوین مبنی بیان ایسی کسور کی جنکی نسب نما اور شمار کنندہ صفر ہوجاتے ہین جسوقت فرض کیجاوی واسطی مقدار غیر مقررہ کے کہ اوسمین پائی جاتی ہی کوئی خاص قیمت

مطالب اس فصل کے بہت عجیب اور دلچسپ ہین اور جو شخص انکو قرار واقعی سمجھلی اوسی بہت قوت سمجھنی اوس مشکل فرع علم ریاضی کے جسکو علم حساب جزیات وکلیات کہتے ہین حاصل ہوتی ہی واضح ہو کہ مختلف مہندسون نی مختلف طریقی اس فرع ریاضی مین نکالی ہین چنانچہ ایک مہندس انگریزی نی کہ اوسکا نام لیندن تہا اس علم کو ایک ایسی قاعدہ پر بنا کیا تہا کہ جو ان کسور کی مسئلہ پر موقوف ہی پس واسطی سمجھنے اس مہندس کے رسالہ کے کہ علم حساب جزیات مین ہے (گو اس کتاب کا رواج نہین ہی) ضرور ہی کہ پہلی واقف ہوجائین ان کسور سی سوای اس فائدہ کی ایک اور بڑا فائدہ یہہ ہی کہ اونکی ذریعہ سی بیحتے ہین ہم بہت سی غلطیون سے مثلاً اکثر شخص جو مسئلہ ان کسور کی سے آگاہ نہین وہ یہہ جانتے ہین کہ اگر صفر کو صفر پر تقسیم کرین تو خارج قسمت صفر ہوگا یا کوئی خاص مقدار ہوگی واسطے توضیح اس بات کی سے لیتے ہین ہم ایک بہت سہل مثال فرض کرو کہ کسر مفروض یہہ ہی $\frac{۲لا - ۲ط}{لا - ط} = ۲$ اسصورت مین ظاہر ہی کہ لا کو کچھی فرض کرین کسر $\frac{۲لا - ۲ط}{لا - ط}$ ہمیشہ مساوی ۲ کی ہوگی چونکہ لفظ کچھی مین ط بہی داخل ہی تو لازم آتا ہی اوس سے یہہ کہ جسوقت لا = ط کی ہو اوسوقت بہی قیمت کسر مفروض کی ۲ ہی ہوگی لیکن اس صورت ۲ لا - ۲ط = ۰ اور اسیطور سے لا - ط = ۰ پس کسر مفروض اس شکل کی ہوجائیگی $\frac{۰}{۰}$ اور یہان سے یہہ بات ثابت ہوتی ہی کہ $\frac{۰}{۰} = ۲$ اگر کسر مفروض $\frac{۳لا - ۳ط}{لا - ط}$ ہوتی تو اس صورت مین حاصل ہوتی ہمین یہہ مساوات $\frac{۰}{۰} = ۳$ اور اگر کسر مفروض یہہ $\frac{ن لا - ن ط}{لا - ط}$ ہوتی تو حاصل ہوتی یہہ مساوات $\frac{۰}{۰} = ن$ اور بغیر کرنا ہی کسی عدد کو تو معلوم ہوا کہ کسر $\frac{۰}{۰}$ مساوی کسی عدد کی ہوسکتی ہی بعض اشخاص جو علم ریاضی سے خوب واقف نہین ہوتے ہین یہہ بات سنکر حیران ہوتی ہین اور یہہ اعتراض کرتے ہین کہ چونکہ $\frac{۰}{۰} = ۲$ کے ہی اور ۳ کی بہی ہے تو لازم آتا ہی اوس سے یہہ ۳ = ۲ اور یہہ بات صریح محال ہی لیکن ہمین اسجای اونہین یہہ جواب دینا چاہیئے کہ جسوقت یا جس صورت مین $\frac{۰}{۰}$ مساوی ۲ کی ہی اوس صورت مین وہ مساوی ۳ کے نہین ہوتی ہی یعنے معنی $\frac{۰}{۰}$ کے صورتون مختلفہ مین مختلف ہوتی ہین یعنے اوسی سے ایک مقدار بغیر کیجاتی ہی اور دوسری وقت کوئی اور مقدار چند سو برس گذرتے کہ ان کسور کی درباب فاضلون مین بہت تکرار ہوی تہی برکلی نامی ایک بڑا فاضل اپنی زمانہ کا انگلستان مین تہا لیکن اوسنے ایسی معلومات علم ریاضی مین نہ تہی کہ اوسکی قول کو اس علم مین بہت ہی لحاظ کرین یہہ بی شک کہ اوسی بڑی دستگاہ منطق اور علم الٰہیات مین تہی اور اور لحاظون مین وہ بہت ذہین اور عاقل تہا لیکن مسئلون ریاضی کو خوب نہین سمجھتا تہا وہ کہا کرتا تہا کہ علامت $\frac{۰}{۰}$ بی معنی ہی اور نہین ہی ممکن کہ یہہ کسی مقدار محدود کی مساوی ہوسکے اور یہی باعث تہا کہ وہ علم حساب جزیات وکلیات کو کہ اسحاق نیوٹن نے ایجاد کیا تہا غلط جانتا تہا قاعدہ ریاضی کرنی اصلی قیمت $\frac{۰}{۰}$ کا کسی خاص صورت مفروض مین یہہ ہی کہ اوس خاص مقدار پر کہ جسکی مساوی فرض کرینے سے مقدار غیر مقررہ کو کسر مفروض $\frac{۰}{۰}$ ہوجاتی ہی ایک ایسی مقدار غیر مقررہ زیادہ کرتے ہین کہ حاصل جمع مساوی ہوجائے مقدار غیر مقررہ

مفروض سے اور بعد ازان لکھتے ہین اس حاصل جمع کو بجای مقدار غیر مقررہ مفروض کی کسر مفروض مین اور بعد جاری کرنے عمل ضروری کے فرض کرتے ہین مقدار غیر مقررہ زیادہ کی گئی کو مساوی صفر کی اور اس عمل سی قیمت اصلی کسر ÷ کے معلوم ہوجاتی ہی مثلاً فرض کرو کہ ہی یہہ کسر $\frac{لا^۲ - ط^۲}{لا - ط}$ کہ ہوجاتی ہی ÷ جسوقت فرض کرتے ہین ایک خاص قیمت مثل ط کی بجای مقدار غیر مقررہ لا کے اب موافق قاعدہ سے فرض کرو کہ ط + د = لا

اور ∴ $لا^۲ = ط^۲ + ۲ ط د + د^۲$ اور ∴ $\frac{لا^۲ - ط^۲}{لا - ط} = \frac{۲ ط د + د^۲}{د} = ۲ ط +$ اور جسوقت د = ۰ اوسوقت ÷ = ۲ط ایک اور مثال اسکی یہہ ہی فرض کرو کہ چاہتے ہین ہم قیمت $\frac{ط لا^ن - ط}{لا - ۱}$ کی کہ مساوی ÷ کی ہوجاتی ہی جسوقت ہووے لا = ۱ کی یہہ مثال بخوبی حل ہوسکتے ہی اگر جاری کرین ہم عمل تقسیم کا اور بعد ازان فرض کرین کہ لا = ۱ صورت عمل سے یہہ ہوسے گے چونکہ

$$\frac{ط لا^ن - ط}{لا - ۱} = \frac{ط (لا^ن - ۱)}{لا - ۱}$$ تو

$$لا - ۱ \Big) \; لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲} + لا^{ن-۳} + لا^{ن-۴} + \text{وغیرہ}$$

$$\frac{لا^ن - لا^{ن-۱}}{لا - ۱}$$

$$\frac{لا^{ن-۱} - لا^{ن-۲}}{لا - ۱}$$

$$+ \frac{لا^{ن-۲}}{لا - ۱}$$

$$\frac{لا^{ن-۲} - لا^{ن-۳}}{لا - ۱}$$

$$+ \frac{لا^{ن-۳}}{لا - ۱}$$

پس معلوم ہوا کہ $\frac{ط (لا^ن - ۱)}{لا - ۱} = ط (لا^{ن-۱} + لا^{ن-۲} + لا^{ن-۳} + لا^{ن-۴} + \text{وغیرہ})$

اور جسوقت لا = ۱ اوسوقت ÷ = ط ن اور یہی ہی قیمت مطلوبہ یہی قیمت حاصل ہوتی اگر عمل کرتے ہم موافق قاعدہ مذکور الصدر کے یعنی فرض کرتے ہم اول

ط + د = لا کے اور بعد ازان یہہ فرض کرتے کہ د = ۰

واضح ہو کہ جس کسر کا شمار کنندہ اور نسب نما کسی خاص قیمت مثلاً ط کے فرض کرنے سے علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کی ہو جاوے تو بالضرور اوس کسر کی شمار کنندہ اور نسب نما میں کوئی جزضربی مثلاً (لا − ط) یا (لا − ط)^{م} شامل ہوتا ہی جس سے وہ کسر ÷ ہو جاتی ہی پس اب ظاہر ہی کہ اگر یہہ جزضربی زائل ہو جاوے تو اصلی قیمت کسر مفروض کی دریافت ہو سکتی ہی مثلاً اول مثال اسطرح حل ہو سکتی ہی

$$\frac{ط^{۲} - لا^{۲}}{ط - لا} = \frac{(ط + لا)(ط - لا)}{ط - لا} = ط + لا = ۲ط \text{ اگر فرض کریں ہم } لا = ط$$

۲ کیا قیمت ہی اس کسر کی $\frac{۱ - ۳لا^{۲} + ۲لا^{۳}}{(۱ - لا)^{۲}}$ جبوقت $لا = ۱$

ظاہر ہی کہ $\frac{۱ - ۳لا^{۲} + ۲لا^{۳}}{(۱ - لا)^{۲}} = \frac{۱ - لا^{۲} - ۲لا^{۲}(۱ - لا)}{(۱ - لا)^{۲}} = \frac{۱ + لا - ۲لا^{۲}}{۱ - لا} = \frac{۱ - لا^{۲} + لا(۱ - لا)}{۱ - لا}$

$= ۱ + لا + لا = ۳$ جبوقت $لا = ۱$

۳ کیا ہی قیمت اس کسر کی $\frac{لا - ط + \sqrt{۲ط لا - ۲ط^{۲}}}{\sqrt{لا^{۲} - ط^{۲}}}$ جب کہ $لا = ط$ ظاہر ہی کہ

$$\frac{لا - ط + \sqrt{۲ط لا - ۲ط^{۲}}}{\sqrt{لا^{۲} - ط^{۲}}} = \frac{لا - ط + \sqrt{۲ط}\sqrt{لا - ط}}{\sqrt{لا + ط}\sqrt{لا - ط}} = \frac{\sqrt{۲ط}\sqrt{لا - ط} + \sqrt{لا - ط}}{\sqrt{لا + ط}} = \frac{\sqrt{۲ط} + \sqrt{لا - ط}}{\sqrt{لا + ط}} = \frac{\sqrt{۲ط}}{\sqrt{۲ط}} = ۱ \text{ جب کہ } لا = ط$$

۴ کیا ہی قیمت اس کسر کی $\frac{(لا + د)^{\frac{ج}{ن}} - لا^{\frac{ج}{ن}}}{د}$ جبوقت کہ $د = ۰$ ظاہر ہی کہ

$$\frac{(لا + د)^{\frac{ج}{ن}} - لا^{\frac{ج}{ن}}}{د} = \frac{(لا + د)^{\frac{ج}{ن}} - لا^{\frac{ج}{ن}}}{(لا + د) - لا} = (لا + د)^{\frac{ج}{ن} - ۱} \times \frac{۱ - \left(\frac{لا}{لا + د}\right)^{\frac{ج}{ن}}}{۱ - \frac{لا}{لا + د}} = (لا + د)^{\frac{ج}{ن} - ۱} \times \frac{۱ - ع^{ج}}{۱ - ع^{ن}} \text{ اگر فرض کیا جاوے}$$

$\left(\frac{لا}{لا + د}\right)^{\frac{۱}{ن}} = ع$ اور اسیواسطے $(لا + د)^{\frac{ج}{ن} - ۱} \frac{۱ - ع^{ج}}{۱ - ع^{ن}} = (لا + د)^{\frac{ج}{ن} - ۱} \frac{۱ - ع^{ج} \div ۱ - ع}{۱ - ع^{ن} \div ۱ - ع}$

$= (لا + د)^{\frac{ج}{ن} - ۱} \times \frac{۱ + ع + ع^{۲} + ع^{۳} + \cdots ع^{ج-۱}}{۱ + ع + ع^{۲} + ع^{۳} \cdots ع^{ن-۱}} = لا^{\frac{ج}{ن} - ۱} \times \frac{۱ + ۱ + ۱ + ۱ \cdots م \text{ جزو تک}}{۱ + ۱ + ۱ \cdots ن \text{ جزو تک}}$ اگر $ع = ۱$

$= ج لا^{\frac{ج}{ن} - ۱}$

فصل چودھوین مقادیر جبریہ کی عجیب نتیجون کے بیان مین

مقادیر جبریہ بعض اوقات ایسی نتیجہ نکلتی ہین جو بادی النظر مین نہایت عجیب بلکہ غلط معلوم ہوتی ہین حالانکہ تامل کرنی سے اونکی حقیقت دریافت ہوتی ہی اور پھر تعجب رفع ہوجاتا ہی اور یہہ نتیجہ بعضی اوقات غلط فرضون سے بھی لازم آتے ہین تفصیل اسکی یہہ ہی کہ مثلاً ط − ط = ۰ لا نہایت ایک عجیب بات معلوم ہوتی ہی اسواسطی کہ اول یہہ خیال ہوتا ہی کہ صفر کوئی مقدار نہین ہی اوسپر تقسیم ہونی سی ہر مقدار بحال خود رہی لیکن یہہ خیال غلط ہی اور دلیل اس بات کی کہ ط − ط = ۰ یہہ ہی کہ اگر ایک مقدار کو دوسری پر تقسیم کرین تو کچھ خارج قسمت ہوگا اب اگر پہلی مقدار کو ایسی مقدار پر تقسیم کرین جو دوسری سے کم ہو تو نہایت ظاہر ہی کہ اس صورت مین خارج قسمت پہلی سے زیادہ ہوگا اور علی ہذا القیاس مقسوم علیہ کو جتنا کم فرض کرینگی اوسیقدر خارج قسمت زیادہ ہوگا پس اگر مقسوم علیہ اتنا کم ہو کہ صفر ہوجاوے تو خارج قسمت نہایت زیادہ لا نہایت ہوگا

۲ ظاہر ہی کہ اگر ایک مقدار کو دوسری پر تقسیم کرین اور کچھ باقی نہ رہی تو اس صورت مین خارج قسمت کامل ہوگا پس اگر ایک مقدار کو دوسری پر تقسیم کرین اور تقسیم پوری نہو اور پھر خارج قسمت کو کامل خارج قسمت تصور کرین اور اس سے کوئی بات محال لازم آجاوی تو تعجب نہین اسواسطی کہ غلطی سے یہہ محال لازم آتا ہی مثلاً

$\frac{1}{1-ل} = 1 + ل + ل^2 + ل^3$ وغیرہ اب اگر اس صورت مین ل = ۲ تو $\frac{1}{1-2} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8$ وغیرہ

∴ ۰ = ۴ + ۴ + ۸ وغیرہ اور یہہ صریحاً محال ہی پس پہان جانا چاہئیے کہ یہہ محال ہی اسواسطی لازم آیا کہ خارج قسمت $1 + ل + ل^2 + ل^3$ وغیرہ کو کامل خارج قسمت فرض کرلیا حالانکہ کامل خارج قسمت یہہ نہین ہی بلکہ $\frac{1}{1-ل} = 1 + ل + ل^2 + ل^3 + \ldots + ل^{م-1} + \frac{ل^م}{1-ل}$ . . . . . (۱) ہی

اب اگر ل = ۲ تو $\frac{1}{1-2} = -1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^{م-1} - (2^م - 1) - 2^م = -1$

اور اسیطرح جو قیمت ل کی خارج قسمت کامل (۱) مین لکھی جاویگی کوئی خرابی لازم نہ آویگی

اگر سلسلہ بالا مین ل کی علامت تبدیل کیجاوے تو ظاہر ہی کہ $\frac{1}{1+ل} = 1 - ل + ل^2 - ل^3$ وغیرہ

اب اگر ل = ۱ تو $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1$ وغیرہ = ۰ یا ۱ اور یہہ محال ہی اب اگر خارج قسمت کامل لین

یعنے $\frac{1}{1+ل} = 1 - ل + ل^2 - ل^3 \ldots (-ل)^م + \frac{(-ل)^{م+1}}{1+ل}$ اور اسمین فرض کرین ل = ۱

تو $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

۳ : = اینے صفر کی قوت صفر کہین تو حاصل صفر آہوتا ہی دلیل اسکی یہہ ہی کہ ضابطہ نیوٹن صاحب کے ثبوت سی پہلی ثابت ہوا ہی کہ ا^ن = ۱ اور ن عام مقدار ہی جو چاہین سو فرض کرین پس اگر ا^ن = ط − لا تو (ط − لا) = ۱ اب فرض کرو کہ ط = لا ∴ : = ۱

۴ جانا چاہیئے کہ صفر یعنے ۰ کوئی خاص مقدار نہین ہی یعنے جسطرح ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵ یا ط وغیرہ خاص مقدار ہین صفر کوئی خاص مقدار نہین اور اسی سبب سے قیمت اس کسر ÷ کی کوئی خاص مقدار نہین ہوتی صفر کو خاص مقدار خیال کرنے سے بڑی غلطیان لازم آتی ہین مثلاً ۲ = ۱ اور ۴ = ۱ ∴ ۲ = ۴ جو محال ہی اور یہہ غلطی سوا اسکے کہ ۲ = ۴ ہوں = لا پر قیاس کیا ہی اور یہہ قیاس غلط ہی کیونکہ ط ایک خاص مقدار ہی اوسکی قیمت ہرگز نہین بدل سکتی اور صفر کی قیمت بدل سکتی ہی مثلاً ۲ = ۲^{۱-۱} اور ۲ = ۲^{۲-۲} اور علی ہذا القیاس اسیطرح سے اور غلطیان لازم آتی ہین مثلاً لا = ۱ ∴ لا − ۱ = ۰ ∴ لا (لا − ۱) = ۰ (۱)

اور چونکہ لا = ۱ ∴ لا^۲ = ۱ ∴ لا^۲ − ۱ = ۰ ∴ (لا + ۱)(لا − ۱) = ۰ ∴ بوسیلہ (۱) و (۲) کے (لا + ۱)(لا − ۱) = لا (لا − ۱) ∴ لا + ۱ = لا ∴ ۱ = ۰ اور یہہ محال ہی

اور اسیطرح ط × ۰ = ۰ اور ص × ۰ = ۰ ∴ ط × ۰ = ص × ۰ ∴ ط = ص اور یہہ محال ہے

فصل پندرہوین کسور متسلسل کی بیان مین

کسر متسلسل اوس کسر کو کہتے ہین کہ جسکی نسب نمامین سوائے عدد صحیح کی ایک کسر بہی ہوتی ہی اور اس کسر کے نسب نمامین بہی سوای عدد صحیح کی ایک کسر ہوتی ہی اور اسیطرح جسی اس تیسری کسر کے نسب نمامین بہی سوای عدد صحیح کے ایک اور کسر ہوتی ہی اور علی ہذا القیاس مثلاً کسر $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\text{وغیرہ}}}}}}}$ ایک کسر متسلسل ہی

اگر تبدیل کیا چاہین کسی کسر محدود کو ایسی کسر متسلسل سے تو طریقہ واسطی حاصل ہونے اس مطلب کے یہہ ہی تقسیم کرو شمار کنندہ کسر مفروض کو اوسکی نسب نما پر اور اگر کوئی عدد صحیح نکلی اوسی ایک جاے ثبت کرو اور بعد ازان باقیات کو مقسوم علیہ قرار دیکر قسمت کرو اوسپر مقسوم علیہ سابق کو اور بعد ازان جو کچہہ باقی رہی اوسے مقسوم علیہ مقرر کرو اور اسسے پہلے مقسوم علیہ کو مقسوم اور عمل قسمت کا جاری کرو اور یہی عمل کیئے جاو جہان تک وہ تمام ہو اور اگر تمام نہو

تو جہان تک چاہو وہان تک اس عمل کو جاری رکھو پس اب ہم کہتی ہین کہ متواتر کی خارج قسمت جو اس متواتر کی تقسیم سے حاصل ہوتی ہین ہونگی اعداد صحیح متواتر کی نسب نمایون کسر مطلوبہ کی واسطے ثبوت اس دعوی کے لازم ہی کہ کرین ہم عمل مذکور الصدر کو کہ اوسکی صورت مثال ائندہ مین مندرج ہی چاہتے ہین تبدیل کرنا کسر $\frac{ب}{ا}$ کو ایک کسر متسلسل سے

ب) ا (ط — اس عمل سے ظاہر ہی کہ حاصل ہونگی یہ مساواتین

ب ط

ج) ب (ص

ص ج — ا = ب ط + ج

د) ج (ع — ب = ج ص + د

د ع

ر) د (ق — ج = د ع + ر

رق — وغیرہ = وغیرہ

س — وغیرہ — اور یہ سوا اسطی ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\frac{ا}{ب} = ط + \frac{ج}{ب}$$

$$= ط + \frac{ج}{ج ص + د} = ط + \frac{ا}{ص + \frac{د}{ج}}$$

$$= ط + \frac{ا}{ص + \frac{د}{د ع + ر}}$$

$$= ط + \frac{ا}{ص + \frac{ا}{ع + \frac{ر}{د}}}$$ وغیرہ

اور یہی ہی کسر متسلسل مطلوبہ

مرتومہ یا لاسی یہہ بات ظاہر ہی کہ بوسیلہ کسور متسلسل کے ہم کسی ایسی کسر کو کہ اوسکا شمار کنندہ اور نسب نما بڑی بڑی عدد ہون ایک ایسی کسر سے تبدیل کر سکتے ہین جو کسر مفروض سی تھوڑا ہی سا فرق رکھتی ہو اور جسکا نسب نما اور شمار کنندہ چھوٹی چھوٹی عدد ہون اور یہہ بھی ظاہر ہی کہ جتنا زیادہ دور تک عمل تقسیم کا جاری کرو گی اوتنا ہی زیادہ درست قیمت کسر مفروض کی حاصل ہوگی اور سوای اسکی یہہ بھی عیان ہی کہ جو قیمتین متواتر حاصل ہونگی

دیے ایکبار زیادہ اور دوسری بار کم قیمت حقیقی سے ہونگی اسیطرح سی $\frac{1}{ب}$ زیادہ ہی بہ نسبت ط کے لیکن کم ہی بہ نسبت ط + $\frac{1}{ص}$ کے اس قسم کی کسور اکثر حسابون ریاضیات مین بہت مفید ہوتی ہین اور یہہ بات انکی ہی ذریعہ سی حاصل ہوتی ہی کہ بڑی کسور کو ایک چھوٹی کسر سے بدل لیتے ہین اور قیمت مین کچھہ بہت فرق نہین آتا ہی مثلاً اگر چاہین دریافت کرنی ایک چھوٹی سی کسر جو تعبیر کری نسبت قطر ایک دایرہ کی طرف اوسکی محیط کی ہم چاہتے ہین کہ اگر چھودی قطر کسی دائرہ کا ۱۰۰۰۰۰ تو ہوویگا محیط اس دایرہ کا ۳۱۴۱۵۹ پس نسبت درمیان اس قطر اور محیط کی یہہ ہی $\frac{۳۱۴۱۵۹}{۱۰۰۰۰۰}$ ظاہر ہی کہ یہہ ایک بڑی کسر ہی اور ہم ایک چھوٹی کسر دریافت کیا چاہتے ہین ترکیب اسکی دریافت کرنی کے موافق قاعدہ مرقوم الصدر کے

۱۰۰۰۰۰) ۳۱۴۱۵۹ (۳

۳۰۰۰۰۰

۱۴۱۵۹) ۱۰۰۰۰۰ (۷

۹۹۱۱۳

۱۵) ۱۴۱۵۹ (۸۸۷

۸۸۷

۵۲۸۹

۴۴۳۵

۱) ۸۸۷ (۸۵۴

۸۵۴

۲) ۸۵۴ (۳۳

۶۶

۱۹۴ وغیرہ

اسجای ظاہر ہی کہ ط = ۳ اور ص = ۷ اور ع = ۱۵ اور علی ہذا القیاس پس حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{۳۱۴۱۵۹}{۱۰۰۰۰۰۰} = ۳ + \cfrac{۱}{۷ + \cfrac{۱}{۱۵ + \text{وغیرہ}}}$

اس صورت مین ظاہر ہی کہ اول تقریبی قیمت کسر مفروض کی ۳ ہی کہ یہہ بہت کم ہی اور دوسری قیمت تقریبی ۳ + $\frac{۱}{۷}$ یعنے $\frac{۲۲}{۷}$ کہ ذرا زیادہ بہ نسبت قیمت حقیقی کے ہی اور تیسری تقریبی قیمت

یہہ $۳ + \frac{۱}{۷ + \frac{۱}{۱۵}} = ۳ + \frac{۱۵}{۱۰۶} = \frac{۳۳۳}{۱۰۶}$

اور یہہ ایک تقریبی قیمت کسر مفروض کی اوسکی بہت ہی قریب ہی اور بتہورکی سی اوس سے کم ہی آسانی ہم لکھتے چند مثالین جنمین لکھے گئی ہین عجیب سلسلی غیر متناہی

(۱) فرض کرو کہ $ق + \frac{۱}{ع + \frac{۱}{ق + \frac{۱}{ع + \text{وغیرہ لا انتہا}}}} = لا$ تو ظاہر ہی کہ $ق + \frac{۱}{ع + \frac{۱}{ق + \frac{۱}{ع + لا}}} = لا$

اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $\frac{ع + لا}{ق ع + ق لا + ۱} = لا$ اور اسیواسطی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی $ع + لا = ق ع لا + ق لا^۲ + لا$ اور اسیواسطی $لا^۲ + ع لا - \frac{ع}{ق} = ۰$ اور جسوقت حل کرینگی ہم اس مساوات درجہ دویم کی کو تو حاصل ہوگی ہمین قیمت لا کی

(۱۰) فرض کرو کہ $لا = ط + \cfrac{ص}{ط + \cfrac{ص}{ط + \text{وغیرہ لا انتہا}}}$

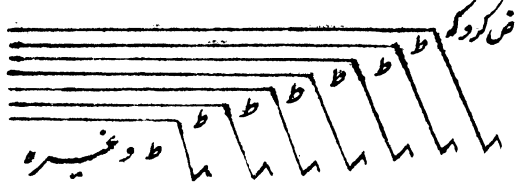
اور جسوقت مجذور کرین ہم دونوطرف اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$لا^۲ = ط + \cfrac{ص}{ط + \cfrac{ص}{ط + \text{وغیرہ}}} = ط + \frac{ص}{لا}$ اور اسیواسطی

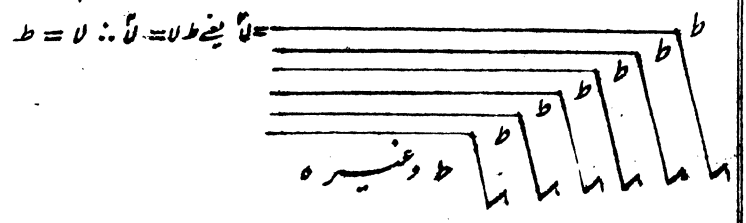
حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات تیسری درجہ کی $لا^۲ - ط لا - ص = ۰$ اور اسکی حل کرنی سی قیمت لا کی معلوم ہوسکتی ہی

۳ چاہتے ہین دریافت کرنی قیمت اس عجیب سلسلہ کی

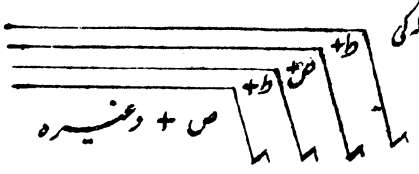
$ط + \cfrac{ب}{ط + \cfrac{ب}{ط + \cfrac{ب}{ط + \cfrac{ب}{ط + \text{وغیرہ}}}}}$

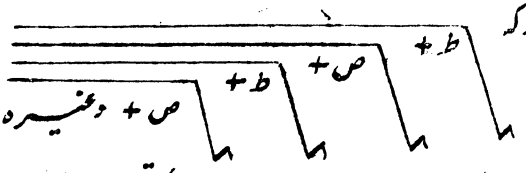
فرض کرو کہ 

اور جسوقت مجذور کرین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

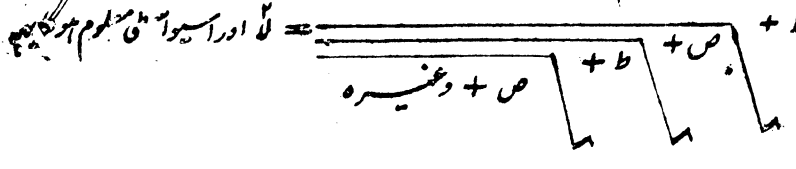


۴ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت اس سلسلہ کی

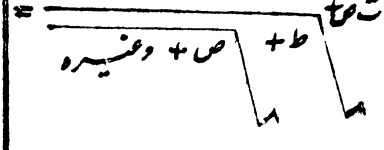


فرض کرو کہ 

اور جسوقت مجذور کرین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات



اور اگر پہر عمل مجذور کا جاری کرین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات



$$\text{لا}^{۴} - ۲\text{لا}^{۲}\text{ط} + \text{ط}^{۲} \text{ اور } \text{ط} + \text{ص} + \text{وغیرہ} = \text{لا}^{۴} - ۲\text{ط لا}^{۲} + \text{ط}^{۲} - \text{ص} = \text{ل}$$

یا $\text{لا}^{۴} - ۲\text{ط لا}^{۲} - \text{ل} + \text{ط}^{۲} - \text{ص} = ۰$ اور اس مساوات سی کہ ایک مساوات چوتھی درجہ کی ہی قیمت لا کی بذریعہ قاعدہ مہندس بسہولیکے دریافت ہوسکتی ہی مثالین مرقوم الصدر بہت عجیب ہین اور یقین ہی کہ طالب علم اس فن کو انکی ملاحظہ اور حل کرنے مین بہت خوشی حاصل ہوگی

فصل سولہوین ثبوت مقسوم علیہ کے بیان مین

کسور مین یہہ بات بیان کی گئی کہ اگر شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی عدد پر تقسیم کرین اور وہ عدد ایسا ہو کہ اوسپر شمار کنندہ اور نسب نما پوری پوری تقسیم ہوجاوین تو تقسیم کرنی سے کسر کا اختصار ہوجاتا ہی لیکن ایسا عدد جسپر شمار کنندہ اور نسب نما دونو پوری پوری تقسیم ہوجاوین اکثر اوقات تامل سے بدشواری معلوم ہوتا ہی بلکہ بعضی دفعہ نہین معلوم ہوتا اسواسطی اوسکی دریافت کرنیکو یہہ قاعدہ مقرر کیا گیا ہی کہ نسب نما اور شمار کنندہ مین سے جو مقدار زیادہ ہو اوسکو مقسوم بناوین اور دوسرے مقدار کو مقسوم علیہ اور بعد تقسیم کے جو کچھہ بچے پھر اوسکو مقسوم علیہ بنا کر پہلی مقسوم علیہ کو مقسوم مقرر کرین اور جو کچھہ بعد تقسیم کے بچی پھر اوسکو مقسوم علیہ بناوین اور باقی اول کو مقسوم مقرر کرین اور یہی عمل جاری رکھین یہانتک کہ باقی کچھہ نہ بچے پس جس مقسوم علیہ پر تقسیم پوری ہوجاوے یعنے باقی کچھہ نہ بچے وہ مقسوم ایسا ہوگا کہ اوسپر شمار کنندہ اور نسب نما دونو پوری پوری تقسیم ہوجاتے ہین اور ان سب مقدارون مین جسپر شمار کنندہ اور نسب نما پوری پوری تقسیم ہوسکتی ہین یہی مقسوم علیہ بڑا ہوگا یعنے اخیر مقسوم علیہ مقسوم علیہ اعظم ہوتا ہی اب ظاہر ہی کہ اسس قاعدہ مین دو باتین ثابت کرنی چاہئین ایک تو یہہ کہ اخیر مقسوم علیہ جسپر شمار کنندہ اور نسب نما دونو پوری پوری تقسیم ہوجاتے ہین اور دوسری یہہ کہ اخیر مقسوم علیہ ان سب مقدارون مین بڑا ہی جنپر شمار کنندہ اور نسب نما پوری پوری تقسیم ہوسکتی ہین پس ان دونو باتون کے اثبات کی واسطے ہم فرض کرتے ہین کہ آ اور ب دو مقدارین ہین انمین سے ہر ایک شمار کنندہ اور نسب نما ہوسکتا ہی اور آ زیادہ ہی ب سے پس

(ب) ۱ اف (ط)

جسوقت آ کو ب پر تقسیم کیا تو خارج قسمت ف ہوا

اور باقی س بچا اور پھر ب کو جو مقسوم علیہ تھا س پر تقسیم

$\frac{\text{س ف}}{\text{ب}}$ $\frac{\text{ب}}{\text{س ق}}$ (د)

کیا تو خارج قسمت ق ہوا اور باقی د بچا اور پھر اس

$\frac{\text{س ق}}{\text{د}}$ $\frac{\text{د}}{\text{ح د}}$ (×)

باقی پر س کو تقسیم کیا تو خارج قسمت ح ہوا اور کچھہ باقی نہا

یعنے د پر تقسیم پوری ہوگئی اب ہم پہلے یہہ بات ثابت کرتے ہین کہ د آ اور ب دونون کا مقسوم علیہ مشترک ہی یعنے آ اور ب دونون د پر پوری پوری تقسیم ہوسکتی ہین عمل تقسیم سے جسکی سا نشان (ط) ہی ظاہر ہی کہ

ا = ب ن + س ..... (۱)	مساوات (۲) اور (۳) سے ظاہر ہی کہ
ب = س ق + د ..... (۲)	ب = س ق + د = ح ق د + د = (ح ق + ۱) د
س = ح د ..... (۳)	∴ $\frac{ب}{د}$ = ح ق + ۱ پس ثابت ہوا کہ ب مقسوم علیہ

د پر پورا تقسیم ہوتا ہی اور تینون مساواتون سے ظاہر ہی کہ

ا = ب ن + س = ن (س ق + د) + س = ن (ح د ق + د) + ح د = (ن ح ق + ن + ح) د

∴ $\frac{ا}{د}$ = ن ح ق + ن + ح اس سے ثابت ہوا کہ آ بھی د پر پورا تقسیم ہوتا ہی پس اول بات تو ثابت ہوگئی یعنے اخیر مقسوم علیہ د مقسوم علیہ مشترک آ اور ب کا ہی اب رہی دوسری بات پس ہم دعوی کرتے ہین کہ د ہی مقسوم علیہ اعظم آ اور ب کا ہی اور اگر یہہ نہو تو فرض کرو کہ لا ہی مقسوم علیہ اعظم اور جب آ کو لا پر تقسیم کرتے ہین تو خارج قسمت م ہوتا ہی اور جب ب کو لا پر تقسیم کرتی ہین تو خارج قسمت ن ہوتا ہی بسیواسطے

ا = م لا اور ب = ن لا اور بوسیلہ عمل تقسیم (ط) کی س = ا − ب ن = م لا − ن لا ن = (م − ن ن) لا

اور د = ب − س ق = ن لا − ق (م − ن ن) لا = (ن − م ق + ق ن ن) لا

∴ $\frac{د}{لا}$ = ن − م ق + ق ن ن اس سے معلوم ہوا کہ وہ مقسوم علیہ مشترک ہی لا پر پورا تقسیم ہوتا ہی پس ضرور ہی کہ لا سی د بڑا ہو اور جسطرح سی د کی لا سی ثابت ہوئی اسیطرح ہر مقسوم علیہ مشترک سی ثابت ہوسکتی ہی تو لازم آیا کہ د ہی مقسوم علیہ اعظم ہی د کا مقسوم علیہ اعظم ہونا ایک اور طرح بھی ثابت ہوتا ہی لیکن اسطرح کے اثبات مین دو باتین جاننی چاہئین ایک تو یہہ کہ جب دو مقدار ایک اور مقدار پر پوری تقسیم ہوجاوین تو اون دونو مقدارون کا مجموعہ اور حاصل تفریق بھی دوسری مقدار پر پورا تقسیم ہوجاویگا مثلاً آ اور ب ح پر پوری تقسیم ہوتی ہی اور خارج قسمت الگ الگ ط اور ق ہوتا ہی تو ظاہر ہی $\frac{ا}{ح}$ = ط اور $\frac{ب}{ح}$ = ن

∴ $\frac{ا}{ح} \pm \frac{ب}{ح}$ = ط ± ن یا $\frac{ا \pm ب}{ح}$ = ط ± ن اور دوسری یہہ کہ اگر ایک مقدار دوسرے پر پوری تقسیم ہوجاوے تو پہلی مقدار کا دوگنا تگنا اور علی ہذا القیاس ط گنا بھی دوسری مقدار پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی یعنے پہلی مقدار کا ضعف صحیح بھی دوسری مقدار پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی مثلاً اگر

$\frac{ب}{ح}$ = ط تو $\frac{س ب}{ح}$ = س ط اب عمل تقسیم (ط) کو دیکھو تو ا − ب ن = س

اور ب − س ق = د اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ جس مقدار پر آ اور ب پوری تقسیم ہوسکتے ہین اوس مقدار پر ب ن اور ا − ب ن یعنے س بھی پورا تقسیم ہوسکتا ہی اور اسیواسطے اوسی مقدار پر

ب - س ق یعنے د بھی پورا تقسیم ہوسکتا ہی یعنے جس مقدار پر آ اور ب پورے تقسیم ہوسکتے ہین اُس مقدار پر د بھی پورا تقسیم ہوسکتا ہی پس اس بیان سے لازم آیا کہ جتنی مقسوم علیہ مشترک آ اور ب کی ہین اون سب سے د بڑا ہی کیونکہ اون سب پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی اب د کی عظمت تو ثابت ہوئی لیکن یہہ بات بھی ثابت ہوجاوے کہ آ اور ب دونو د پر پوری پوری تقسیم ہوجاتی ہین تو د کا مقسوم علیہ اعظم ہونا بخوبی ثابت ہی اب مساوات (۳) سے ظاہر ہی کہ س د پر پورا تقسیم ہوتا ہی اور اسیواسطے س ق اور س ق + د یعنے ب (بوسیلہ مساوات (۲) کے) بھی د پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی اور اسی جہت سی ب ن + س یعنے آ (بوسیلہ (۱) کے) بھی د پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی یعنے آ اور ب دونو د پر پورے پورے تقسیم ہوسکتی ہین پس معلوم ہوا کہ آ اور ب دونو د پر پورے تقسیم بھی ہوسکتی ہین اور جتنے مقسوم علیہ مشترک آ اور ب کے فرض کیے جائین سب سے د بڑا بھی ہی تو صاف ظاہر ہی کہ د مقسوم علیہ اعظم آ اور ب کا ہی واضح ہو کہ مقسوم علیہ اعظم کی مثالون مین بعض اوقات تقسیم کا عمل جاری نہین ہوسکتا پس ایسی صورتون مین یا تو کسی خرضربی کو جو دونو مین مشترک نہین ہوتا ہی دور کردیتے ہین یا کسی مقدار کو ضرب کرتے ہین اور اس سے کچھ خرابی نہین ہوتی اسواسطے کہ مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنی سے یہہ غرض ہوتی ہی کہ شمار کنندہ اور نسب نما کا مشترک خرضربی دریافت ہوجاوے پس ظاہر ہی کہ اگر شمار کنندہ یا نسب نما کو کسی مقدار مین ضرب کرین تو تو خرضربی مذکور مشترک ہی رہیگا یا کسی دو مقدار پر جو دونو مین مشترک نہو تقسیم کرین تو بھی خرمشترک کے خرضربی ہونی مین خلل نہ آویگا پس بعد اس عمل کے بھی خرضربی مشترک یعنی مقسوم علیہ اعظم دریافت ہوسکتا ہی اور لہذا یہہ بات مثالون سے بخوبی معلوم ہوجاویگی

مثال ۱ کیا ہی مقسوم علیہ اعظم $۹لا^۴ + ۳۵لا^۳ - ۹لا - ۱۸$ اور $لا^۴ + ۱۱لا^۳ + ۳۰$ کا

$$\begin{array}{l|l} لا^۴ + ۱۱لا^۳ + ۳۰ & ۹لا^۴ + ۳۵لا^۳ - ۹لا - ۱۸ \\ & ۹لا^۴ + ۹۹لا^۳ + ۲۷۰لا \\ \hline & -۶۴لا^۳ - ۲۷۹لا - ۱۸ \\ & -۶۴لا^۳ - ۵۰۶لا - ۱۳۸۰ \\ \hline & ۲۲۷لا + ۱۳۶۲ = ۲۲۷(لا + ۶) \end{array}$$

چونکہ اس صورت مین ۲۲۷ مشترک ہی اسواسطے اسکو حذف کیا اور $لا + ۶$ کو مقسوم علیہ اعظم مقرر کرکے پہلی مقسوم علیہ کو مقسوم بنایا

$$\begin{array}{r|l} \text{ل}+٦ & \text{ل}^{٢}+١١\text{ل}+٣٠ \quad (\text{ل}+٥ \\ & \underline{\text{ل}^{٢}+٦\text{ل}} \\ & \quad ٥\text{ل}+٣٠ \\ & \quad \underline{٥\text{ل}+٣٠} \\ & \quad \times \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ (ل+٦) مقسوم علیہ اعظم مطلوب ہے

۲ دریافت کرو مقسوم علیہ اعظم ٢ل^٣ + ل^٢ - ٨ل + ٥ اور ٧ل^٢ - ١٢ل + ٥ کا

چونکہ اس مثال میں اول مقدار میں ل^٣ کا سر ٢ ہی اور یہہ ٧ پر تقسیم نہیں ہو سکتا اسواسطے اول مقدار کو ٧ میں ضرب کیا تا کہ تقسیم ہو سکے

$$\begin{array}{r|l} ٧\text{ل}^{٢}-١٢\text{ل}+٥ & ١٤\text{ل}^{٣}+٧\text{ل}^{٢}-٥٦\text{ل}+٣٥ \quad (٢\text{ل}+٣ \\ & \underline{١٤\text{ل}^{٣}-٢٤\text{ل}^{٢}+١٠\text{ل}} \\ & \quad ٣١\text{ل}^{٢}-٦٦\text{ل}+٣٥ \\ & \quad \underline{٣١\text{ل}^{٢}-٨٤\text{ل}+٢٠} \\ & \quad ٣\text{ل}^{٢}-١٨\text{ل}+١٥ = ٣(\text{ل}^{٢}-٦\text{ل}+٥) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{ل}^{٢}-٦\text{ل}+٥ & ٧\text{ل}^{٢}-١٢\text{ل}+٥ \quad (٧ \\ & \underline{٧\text{ل}^{٢}-٤٢\text{ل}+٣٥} \\ & \quad ٣٠\text{ل}+٣٠ = ٣٠(\text{ل}-١) \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ ل - ١ مقسوم علیہ اعظم مطلوب ہے

$$\begin{array}{r|l} \text{ل}-١ & \text{ل}^{٢}-٦\text{ل}+٥ \quad (\text{ل}-٥ \\ & \underline{\text{ل}^{٢}-\text{ل}} \\ & \quad -٥\text{ل}+٥ \\ & \quad \underline{-٥\text{ل}+٥} \\ & \quad \times \end{array}$$

۳ دریافت کرو مقسوم علیہ اعظم ٦ط^٣ص^٣ - ١٨ط^٢ص^٢ - ٢٧ط^٢ص^٢ + ٩ط^٣ص^٣ اور ٢٤ط^٢ص^٢ - ١٨ط^٣ص^٣ - ٩ط^٤ص^٤ کا

اس صورت میں ظاہر ہے کہ ٦ط^٣ - ١٨ط^٢ - ٢٧ط^٢ + ٩ط^٣ = ٩ط^٢(٢ط^٣ - ٢ط^٢ - ٣ط + ١)

اور ٢٤ط^٢ص^٢ - ١٨ط^٣ص^٣ - ٩ط^٤ص^٤ = ٩ط^٢ص^٢(٣ط^٢ - ٢ط - ١) یہاں سے معلوم ہوا کہ ٩ط^٣ دونوں میں

مشترک ہی پس مقسوم علیہ اعظم کا جز ضربی ہی اور ص فقط دوسری ہی مقدار مین مشترک ہی اسیواسطے بعد دور کرنے اجزاء مشترک کے اول مقدار کو ۳ مین ضرب کر کے مقسوم مقرر کیا

$$\begin{array}{r} ۴ط^۳ - ۲ط^۲ - ۳ط + ۱ \\ \hline ۳ط^۲ - ۲ط - ۱ \;\Big)\; ۱۲ط^۳ - ۶ط^۲ - ۹ط + ۳ \;\Big(\; ۴ط \\ ۱۲ط^۳ - ۸ط^۲ - ۴ط \\ \hline ۲ط^۲ - ۵ط + ۳ = ۳ط(ط-۱) - ۳(ط-۱) \\ = (۳ط - ۳)(ط - ۱) \end{array}$$

یہہ بات باسانی معلوم ہوسکتی ہی کہ ۳ط - ۳ مشترک جز ضربی مقادیر مفروضہ کا نہین ہی پس اسیواسطے دور کرنی سے کچھہ خرابی نہین ہوسکتی

$$\begin{array}{r} ۳ط^۲ - ۲ط - ۱ \;\Big)\; ۳ط^۳ - ۲ط^۲ - ۳ط + ۱ \;\Big(\; ط - ۱ \\ ۳ط^۳ - ۳ط \\ \hline ۱ - ط \\ \times \quad ط - ۱ \end{array}$$

پس معلوم ہوا کہ مقسوم علیہ اعظم مقادیر $۳ط^۳ - ۲ط^۲ - ۳ط + ۱$ اور $۳ط^۲ - ۲ط - ۱$ کا $ط - ۱$ ہی اور اسیواسطے مقسوم علیہ اعظم مطلوب $۹ط^۲(ط-۱)^۲$ ہی

فصل سترہوین سود اور تنخواہون کے بیان مین

۱ فرض کرو س = سود ایک روپیہ کی ایک سال یا مہینے مین اور ۱ = اصل اور مجموعہ سود اور اصل کا = م اور ن = تعداد مہینون یا برسون کے اب ظاہر ہی کہ چونکہ سود ایک روپیہ پر زیادہ ہوتا ہی جیسا کہ عرصہ زیادہ ہوتا ہی تو معلوم ہوا کہ ۱ سال : ن سال :: س : ن س جو سود ہی ایک روپیہ کا واسطے ن سالون کے اور اگر آ کتنے روپیہ ہون تو سود آ ن س ہوگا اور جسوقت زیادہ کرین اسپر اصل تو حاصل ہوگی یہہ مساوات م = ۱ + آ ن س اور ظاہر ہی کہ بوسیلہ اس مساوات کی جسوقت کہ معلوم ہون تین مقدارین چار مقدارون م اور آ اور ن اور س مین سے تو باقی ایک مقدار معلوم ہوسکتی ہی مثلاً اگر آ مجہول ہو اور باقی معلوم تو آ معلوم ہوسکتا ہی اس مساوات سے $آ = \frac{م - ۱}{ن س}$ سوال کتنا روپیہ ہمین بطور اصل کے کسی ساہوکار کو سونپنا چاہئے تاکہ ۵ روپیہ سینکڑہ سالیانہ کی سود سے ۹ مہینے مین ہمین ۶۰۰ روپیہ حاصل ہون یہان ظاہر ہی کہ م = ۶۰۰ اور ن = $\frac{۳}{۴}$ = ۷۵ و اور س = $\frac{۵}{۱۰۰}$ = ۰۵ و اور

$$\therefore 1 = \frac{ح}{1+ن س} = \frac{600}{1+5\frac{1}{2}\times 5\cdot} = 87\frac{1}{2}$$

۲ ایک ساہوکار کو ہمنی کچھ روپیہ دیا اس شرط پر کہ ہمین مدت مقررہ تک ہر سال یا ہر مہینے کچھ روپیہ بطور تنخواہ کے دیا کرے اور فرض کرو کہ ن کتنے سال تک ہم یہہ تنخواہ ساہوکار سے نہ لین اور اوسپر سود لگتا جاوے تو بتاؤ کہ بعد ن برس کے اگر ہم ساہوکار سے سب تنخواہ ن سال کی مانگین تو اوسی ہمین کتنا روپیہ دینا چاہئیے فرض کرو کہ ۱ بقیہ کرتا ہی ایک برس کی تنخواہ کو تو ظاہر ہی کہ سود اس تنخواہ کا بعد دو سال کے س ۱ ہو جائیگا (موافق فقرہ آ کے) لیکن بعد اختتام دو سال کے اصل ۲ ۱ ہو جائیگا تو بعد گذرنے تیسری سال کے سود ۲ س ۱ ہوگا اور اسیطرح سے بعد چوتھی برس کے سود ۳ س ۱ ہوگا اور علی ہذا القیاس پس کل سود بعد گذرنے ن سال کے یہہ ہوگا

$$س ۱ + ۲ س ۱ + ۳ س ۱ + ۴ س ۱ \cdots\cdots + (ن-۱) س ۱ = ن\frac{ن-۱}{۲} س ۱$$

لیکن مجموعہ تمام تنخواہون کا سوای سود کے یہہ ن ۱ ہوگا ∴ مجموعہ مع سود کے یہہ ہوگا

$$م = ن ۱ + ن\frac{ن-۱}{۲} س ۱$$

۳ فرض کرو کہ قبل از تمام ہونے میعاد مقررہ کی جبکہ کی واسطے ساہوکار سے یہہ اقرار تھا کہ وہ ہمین تنخواہ دیا کریگا مابین ہمارے اور ساہوکار کے کچھ نا اتفاقی ہو گئی اور ساہوکار مذکور ہمارا روپیہ ہمین واپس کیا چاہتا ہی لیکن چونکہ اوسنے اقرار ہو چکا ہی تو لازم ہی کہ وہ ہمین اتنا روپیہ دیوی جتنا وہ ہمین دیتا بعد انقضای وقت مذکور کے اب بناء اوسی حال مین کتنا روپیہ لینا چاہئیے تاکہ اوسی وقت تک اوپر سود ملکر ہمین اوتنا ہی روپیہ حاصل ہو جاوے فرض کرو کہ روپیہ مطلوبہ = ح جس بعد ن کتنے سال کے روپیہ ح معہ اوسکی سود کے ساوی ہوگا ح + ن س ح (موافق فقرہ ۱) کے اور چونکہ یہہ مجموعہ مساوی ہونا چاہئیے اوس مجموعہ کی جو ساہوکار ہمین گذرنے ن کتنے سال کے دیتا اگر مابین ہمارے اور اوسکی رنج نہ واقع ہوتا تو معلوم ہوا کہ

$$ح + ن س ح = ن ۱ + ن\frac{ن-۱}{۲} س ۱$$

$$\text{اور } ح = \frac{ن ۱ + ن\frac{ن-۱}{۲} س ۱}{۱ + ن س}$$

۴ چاہئیے ہمین دریافت کرنا مجموعہ اصل اور سود کسی خاص رقم روپیہ کا اس شرط پر کہ سود پر سود دیا جائے فرض کرو کہ ص بقیہ کرتا ہی حاصل جمع ایک روپیہ اور اوسکے ایک سال کی سود کو تو ظاہر ہی کہ بعد گذرنی اول سال کے ص ہو جائیگا اصل اور

∴ ۱ : ص :: ص : ص۲ جو مجموعہ دو سال کا ہوگا

۱ : ص :: ص۲ : ص۳ جو مجموعہ تین سال کا ہوگا اور اسیطرح سی

۱ : ص :: ص ن-۱ : ص ن جو مجموعہ ن سال کا ہوگا

اور اگر ۱ ہو دی اصل تو ظاہر ہی کہ مجموعہ آ کتا ضعف مجموعہ گذشتہ کا ہوگا یعنے م = ۱ ص ن

۵ مرقومہ بالا سے ظاہر ہی کہ ۱ = آ/ص ن مثال کتنا روپیہ ہمین ساہوکار کو دینا چاہیئے تاکہ بعد تین سال کی ہمین ۶۰۰ روپیہ حاصل ہون موافق نرخ ۵ روپیہ سینکڑہ سود فی سال کے اور بحساب سود در سود کی اس صورت مین ظاہر ہی کہ ص = ۱٫۰۵ اور ن = ۳

اور م = ۶۰۰ تو ۱ = ۶۰۰/(۱٫۰۵)۳ = ۵۱۸٫۳۰۲ روپیہ

۶ مرقومہ بالا سے ظاہر ہی کہ اگر آ اور ص اور م معلوم ہون اور ن مطلوب تو لکھنا چاہیئے ہمین لوگ ۱ + ن × لوگ ص = لوگ م

∴ ن = (لوگ م − لوگ ۱)/لوگ ص

۷ اگر سب باتین وہی فرض کرین جسکا فقرہ (۲) مین الا یہہ کہ سود پر سود لگایا جاوے تو بتاو ساہوکار کو ہمین کتنا روپیہ بعد تین سال کے دینا چاہیئے فرض کرو کہ ۱ بغیر کرتا ہی ایک سال کی تنخواہ کا اور اسیواسطے بعد دوسرے سال کی تنخواہ دو سال کے معہ سود کی یہہ ہوگی ۱ + ص ۱ اور بعد تین سال کے مجموعہ جو کہ آ سے تعبیر کرتے ہین مساوی ہوگا (۱ + ص + ص۲ ..... ص ن-۱) ۱ کے یعنے موافق قاعدہ سلسلہ ضرب کی م = (ص ن − ۱)/(ص − ۱) × ۱ اور یہان ظاہر ہی کہ اس مساوات مین سے اگر تین مقدارین معلوم ہون تو چوتھی معلوم ہوسکتی ہی

۸ اگر سب باتین وہی فرض کرین جسکا فقرہ (۳) مین الا یہہ کہ سود پر سود لگایا جاوے تو بتاو ساہوکار ہمین کتنا روپیہ لیا چاہیئے اس صورت مین ظاہر ہی کہ اگر بغیر کرین مجہول مطلوبہ کو ح سی تو حاصل کیے مساوات

ح ص ن = (ص ن − ۱)/(ص − ۱) × ۱ یا ح = (۱ − ۱/ص ن)/(ص − ۱) × ۱

اگر تعداد برسون کی لا نہایت ہو یعنے اگر ن = ایک مقدار لا نہایت کی تو ظاہر ہی

۱/ص ن = ۰ اور ∴ ح = ۱/(ص − ۱)

مثال ایک خاص زمین ہی اور اسکا خراج ایک روپیہ سالیانہ ہی بتاؤ اسکی کیا قیمت ہی اگر فرض کرین ہم کہ سود پر سود لگایا جاوے اور اسکا نرخ ۵ روپیہ سینکڑہ سالیانہ ہو اس صورت مین ظاہر ہی کہ ا = ۱ اور ص = ۱ = ۰٫۰۵ اور ∴ ح = $\frac{۱}{۰٫۰۵}$ = ۲۰

فصل اٹھارویں دریافت کرنی زیادتی آبادی کسی ملک کے جسوقت کہ معلوم ہو تعداد مرنی اور پیدایش کے

۱ فرض کرو کہ آ تعبیر کرتا ہی آبادی کسی خاص ملک کو بیچ کسی وقت مفروض کے اور $\frac{۱}{م}$ تعبیر کرتا ہی اوس حصہ آبادی کو جو ایک سال مین مرجاتا ہی اور $\frac{۱}{ط}$ اوس حصہ کو جو پیدا ہوتا ہی اب ظاہر ہی کہ اندازہ زیادتی آبادی کا = $\frac{۱}{ط} - \frac{۱}{م} = \frac{م-ط}{ط م}$ کے ہوگا اور ∴ ۱ : ۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$ :: ۱ : ۱ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$) = آبادی کے بعد اول سال کے اور چونکہ آبادی ہر سال اسی اندازہ سے زیادہ ہوتی ہی تو

۱ : ۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$ :: ۱ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$) : ۱ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$)^{۲} = آبادی بعد دو سال کے اور

∴ آبادی بعد ن سال کے یہہ ۱ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$)^{ن} ہوگی تعبیر کرین مجہول کو ساتھہ ح کے تو حاصل ہوگے یہہ مساوات ح = ۱ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$)^{ن} اور اس مساوات سی حاصل ہوتا ہی یہہ

لوگ ح = لوگ ۱ + لوگ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$) × ن اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہین یہہ مساواتین

لوگ ۱ = لوگ ح − ن × لوگ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$)

$$ن = \frac{\text{لوگ ح} - \text{لوگ ۱}}{\text{لوگ (۱ + } \frac{م-ط}{م ط}\text{)}}$$ اور

لوگ (۱ + $\frac{م-ط}{م ط}$) = $\frac{\text{لوگ ح} - \text{لوگ ۱}}{ن}$ ظاہر ہی کہ اگر مقدارون ح اور آ اور م اور ط اور ن مین سے کوئی سی چار مقدارین معلوم ہون تو پانچوین معلوم ہو سکتی ہی مثال فرض کرو کہ آبادی انگلستان کے سنہ ۱۸۰۰ مین ایک کرور ہی اور $\frac{۱}{۴۰}$ حصہ آبادی کا ہر سال مرجاتا ہی اور نسبت پیدایش کی طرف مرنے کی ہی جو ۴۰ کے ہی طرف ۴۵ کے اور یہہ بہی فرض کرو کہ اس صدی مین کوئی شخص رعایا انگلستان مین سے اور ملکون مین بسنے نہین جاتا ہی تو بتاؤ سنہ ۱۹۰۰ مین آبادی انگلستان کی کتنی ہوگی یہان ظاہر ہی کہ

ا = ۱۰۰۰۰۰۰۰ اور ن = ۱۰۰ اور م = ۴۰ اور

$$ط = ۳۰ \therefore ۱ + \frac{۲-ط}{ط۲} = \frac{۱۲۱}{۱۲۰} \text{ اور لوگ ح = لوگ ا}$$

$$+ ن \times \text{لوگ} \left(۱ + \frac{۲-ط}{ط۲}\right) = \text{لوگ} \cdots\cdots ۱۰۰ + ۱۰۰ \times$$

$$\text{لوگ} \frac{۱۲۱}{۱۲۰} = ۰۰۰ ۲۰۴۶۰ ۳۷ = \text{لوگ} ۰۰۰ ۱۳۹۲۲$$

$$\therefore ح = ۰۰۰ ۱۳۹۲۲$$

فصل اونیسوین ثبوت قواعد جذر اور کعب عددوں کے بیانمین

چاہیئے کہ نظر کرین ہم اعداد حسابی کے نظم پر پہلی بیان کرینے اون قاعدوں کے جن سی نکلتا ہی جذر مالی اور کبی عدد کا نظام عددی (جیسی کہ مقرر ہی حساب مین) زیادہ ہوتا ہی دس دس کے ساتہہ داہنی طرف سی بائین طرف کو سینے ہر ایک مرتبہ جو اس نظام مین ہی ہوتا ہی دس امثال اوس مرتبہ کا جو پہلی اوس سے ہی طرف داہنی کی یا دسوان اوس مرتبہ کا جو بعد اوسکے ہی طرف بائین کے پس ممکن ہی تعبیر کرنا ہر ایک عدد کا ساتہہ جمع اکائیون اور دہائیون اور سیکڑون اور ہزارون وغیرہ کی جیسی کہ تعبیر ہوتا ہی عدد ۴۷۳۱ ساتہہ طریق آئندہ کے یعنی

$۴۰۰۰ + ۳۰۰ + ۷۰ + ۱$ یا اسطرح سی $۴ \times ۱۰^۳ + ۳ \times ۱۰^۲ + ۷ \times ۱۰ + ۱$ اب اگر تعبیر کرین ہم $\overline{ا ب ج د}$ وغیرہ کو ساتہہ حروف $\overline{ا ب}$ $\overline{ج د}$ وغیرہ کے اور ۱۰ کو ساتہہ حرف ی کے تو عدد دو مرتبہ کا ممکن ہی کہ تعبیر کیا جاوے اسطرح سی $\overline{ا ی + ب}$ اور عدد تین مرتبہ کا یا تین صورتون کا اسطرح سی $\overline{ا ی^۲ + ب ی + ج}$ اور چار مرتبہ کا اسطرح سی $\overline{ا ی^۳ + ب ی^۲ + ج ی + د}$ اور پانچ مرتبہ کا اسطرح سی $\overline{ا ی^۴ + ب ی^۳ + ج ی^۲ + د ی + ط}$ اور اسیطرح سی قیاس باقی کا ہی پہر موافق اوسکی جو بیان کیا گیا نظام عددی سے ممکن ہی یہہ کہ تعبیر کیا جاوے عدد تین مرتبہ کا اسطرح سی $\overline{۱۱۰۰ + ۱۰ ب + ج}$ اور حاصل ہوتا ہی مربع اوسکا ضرب فی نفسہ سے $= ۰۰۰۰ ۱۲۱ + ۰۰۰ ۱۲۰ ب + ۰۰ ۱۰۰ ب^۲ + ۰۰ ۲۴۲۰ + ۲۰ ب ج + ج^۲$

اور یہہ ایسا مربع ہی کہ نکل سکتا ہی جذر مالی اوسکا ساتہہ قاعدہ جذر کی جو بیان کیا ہمنے سابق مین اوسکے عمل کے صورت یہہ ہی

$۰۰۰۰ ۱۲۱ + ۰۰۰ ۱۲۰ ب + ۰۰ ۱۰۰ ب^۲ + ۰۰ ۲۴۲۰ ج + ۲۰ ب ج + ج^۲$ ($۱۱۰۰ + ۱۰ ب + ج$

$۰۰۰ ۱۲۰ + ۱۰ ب$) $۰۰۰ ۱۲۰ ب + ۰۰ ۱۰۰ ب^۲$

$۱۲۰۰ + ۲۰ ب + ج$) $۰۰ ۱۲۰ ب + ۰۰ ۱۰۰ ب^۲ + ۰۰ ۲۴۲۰ ج + ۲۰ ب ج + ج^۲$

$۰۰ ۲۴۲۰ + ۲۰ ب + ج^۲$

* * *

چاہیئے کہ ہووی ا = ۲ اور ب = ۳ اور ح = ا پس اب تمام ہوتا ہی عمل مذکور اسطرح سے

۱+۳۰+۲۰۰) ۱+۶۰+۴۰۰+۹۰۰+۱۲۰۰۰+۴۰۰۰۰ (۳۰+۴۰۰

۴۰۰۰۰
*

۹۰۰+۱۲۰۰۰

۱+۶۰+۴۰۰) ۱+۶۰+۴۰۰+۹۰۰+۱۲۰۰۰ (۱+۶۰+۴۰۰

۱+۶۰+۴۰۰

* * *

چاہیئے کہ جمع کیئے جاوین سب عدد کہ واقع ہین بعض اوزکی تہہ بعض کی ایک سطر مین اسطرحسی

۵ ۳ ۳ ۶ ۱ (۲۳۱

۴۰۰۰۰) ۱ ۳ ۳ ۶ ۱ (۴۳

۱ ۲ ۹

۴ ۶ ۱) ۱ ۳ ۳ ۶ ۱ (۴۶۱

۴ ۶ ۱

*

چاہیئے کہ اسقاط کیئے جاوین صفر جو ہنین دخل رکہتے تمام کرنے عمل مین بیچ عمل کے اور نقل کیجاوین نیچے

طرف دو صورتین ایک دفعہ تو عمل کیا جاویگا اسطرحسی

۵ ۳ ۳ ۶ ۱ (۲۳۱

۴) ۱ ۳ ۳ ۶ ۱ (۴۳

۱ ۲ ۹

۴ ۶ ۱) ۱ ۳ ۳ ۶ ۱ (۴۶۱

۴ ۶ ۱

*

یہان سی واضح ہوتا ہی یہہ کہ جذر مالی واسطی اس عدد کی ۱ ۶ ۳ ۳ ۵ کے یہہ ۱ ۳ ۲ ہی

وجہ تقسیم عدد کی جسکا جذر مالی مطلوب ہی درمیان دو ردنکے ساتہہ رکہنی نقط کی اوپر ہر ایک دوسری مرتبہ کی

جب کہ ابتدا کی جاوے اکائیون سے ظاہر ہوتی ہی بیان آئندہ سی چونکہ معلوم ہی ہمین کہ ۱۰ جذر مالی ۱۰ کا ہی
اور ۱۰۰ کا اور ۱۰۰۰ کا اور ۱۰۰۰۰ کا اخر تک تو لازم آتا ہی یہہ کہ ہووے جذر مالی واسطے
ایسی عدد کی جو چھوٹا ہی ۱۰۰ سی ایک مرتبہ کا اور واسطے ایسی عدد کی جو متوسط ہی درمیان ۱۰۰ اور ۱۰۰۰
کے دو مرتبہ کا اور واسطے ایسی عدد کی جو واقع ہی بیچ ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰ کی تین مرتبہ کا اور اسی قیاس
آگی تک پس ضرور ہی کہ شمار نقطون ان دورون کے ظاہر کرتی ہی مرتبون کے شمار کو جنسی مرکب ہون جذر مالی
اونکی اور یہان سے لازم آتا ہی یہہ بھی کہ ہووی پہلی صورت اوپر بائین طرف جذر کی جیسی کہ صورت مذکورہ مین
۶۱ ۳۰۳۰۵ کہ جذر مالی اوسکا ہی تین مرتبو لکا ہی اسواسطی کہ نہین ممکن ہی یہہ کہ پایا جاوے مربع اوس صورت
کا جو واقع ہی بیچ تیسری مرتبہ جذر ۱۲۳ کے بیچ دورہ اخیر کی جو داہنی طرف ہی (۶۱) کی اور اسیطرح مربع اوس
صورت کا جو واقع ہے سینکڑون مین بیچ دوسرے دورہ (۳۰۳) کی تو لازم آیا یہہ کہ پایا جاوے مربع اس صورت
کا جو واقع ہی جذر کی سینکڑون مین بیچ پہلی دورہ کی (۵) اور ضرور ہی کہ ہوگی صورت پہلی اوپر بائین طرف جذر کے
اور یہی قاعدہ حساب ہین ہے اب ہم ثابت کرینگی قاعدہ واسطے نکالنی کعب یا جذر کعبی کی چونکہ معلوم ہی کہ ۱۰ ہی جذر کعبی
۱۰۰۰ کا اور ۱۰۰۰۰۰ کا اور ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ کا اور اسیطرح تو لازم آتا ہی یہہ کہ ہووے
جذر کعبی ایسے عدد کا جو چھوٹا ہی ۱۰۰۰ سی ایک صورت کا اور ایسی عدد کا جو مابین ہی ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰۰
کے دو صورتو نکا پس اسیواسطی تقسیم ہوتا ہی عدد جسکا جذر کعبی مطلوب ہی درمیان دوردن کے جو مرکب ہین
تین تین مرتبون سے ساتھہ نشان کرنی کی نقطون سے ہر تیسری صورت کی سر پر جب کہ ابتدا کرین داہنی طرف
سے پس شمار دوردن کی ظاہر کرتی ہی اس بات کو کہ شمار صورتون کی جنسی مرکب ہو جذر کعبی مساوی ہی اوسکی
واسطے جیسی کہ جذر کعبی اس عدد کا ۹۲۷ ہوگا ایک صورت کا فقط اور جذر کعبی واسطی اس عدد کے
۱۳۸۲۴ ہوگا دو صورتون کا اور جذر کعبی اس عدد کا ۱۲۵۷۹۹۱۳ ہوگا تین صورت کا

اور اسی قیاس پر نکالا چاہتے ہین ہم جذر کعبی
$(ج+ب)^3 + ۳د(۱+ب)^2 ج + ۳(۱+ب) ج^2 + ج^3$ کا کہ مکعب $(۱+ب+ج)$ کا ہی
اور فرض کرو کہ مکعب حروفی = ۱۲۵۷۹۹۱۳ اسکے ہی پس چاہیئے کہ لکھین پہلی صورت عمل کے

۱۳۹۹۷۵۲۱ (۲۰۰ + ۴۰ + ۱

۸۰۰۰۰۰۰

۵۹۹۷۵۲۱

۳ أ² ب = ۳ (۲۰۰)² × (۴۰) = ۴۸۰۰۰۰۰

۳ أ ب² = ۳ (۲۰۰) × (۴۰)² = ۹۶۰۰۰۰

ب³ = (۴۰)³ = ۶۴۰۰۰

۵۸۲۴۰۰۰ = ۵۹۹۷۵۲۱ باقی جو بعد تفریق کرنے کی رہے

۱۷۳۵۲۱ = حاصل تفریق

اور ۳ (أ + ب)² ح² = ۳ (۲۴۰)² × ۱ = ۱۷۲۸۰۰ = حاصل تفریق ۱۷۳۵۲۱

۳ (أ + ب) ح² = ۳ (۲۴۰) × ۱ = ۷۲۰ = حاصل تفریق بالا سے

ح³ = ۱ = معرفت کیا گیا تو تجھ بچا

جانیے کہ حذف کریں ہم صفروں زاید کو اور نقل کریں ہم تین تین صور تین ہر دفعہ پس عمل مذکور کا اس صورت آئندہ پر

۱ ۴ ۲

۱۳۹۹۷۵۲۱

۵۹۹۷

۲۸۲۴ = ب³ + ۳ ب² أ + ۳ ب أ²

۱۷۲۸ | ۱۷۳۵۲۱ = ۳ (أ + ب)² ح²

۱۷۳۵۲۱

×

فصل بیسوین خواص اعداد کے بیان مین

فقرہ ۱ واضح ہو کہ اعداد مین ہر ایک عدد اپنی ماقبل کے عدد سے دس گنا ہوتا ہی یعنے دس کی اضعاف سے اعداد کی ترکیب ہوتی ہی مثلاً ۶ ۵ ۲ ۳ اسطرح تعبیر ہوسکتا ہی $۶ + ۵ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۰^{۲} + ۳ \times ۱۰^{۳}$ اور اعداد $\overline{۳}$ $\overline{۲}$ $\overline{۵}$ $\overline{۶}$ کو جنسی عدد مذکور بنتا ہی مراتب اس عدد کی کہتے ہین اور عدد ۱۰ کا جسکی قوا سے موافق عدد مذکور زیادہ ہوتا ہی عدد بنیادی کہلاتا ہی — جاننا چاہیئے کہ عدد بنیادی مختلف ہوسکتی ہین یعنے جسطرح نظام عشری عدد ۱۰ سی مرتب ہی اسیطرح اعداد $\overline{۲}$ $\overline{۳}$ $\overline{۱۰}$ $\overline{۱۲}$ وغیرہ سی مرتب ہوسکتا ہی پس اگر عدد بنیادی ۷ فرض کیا جاوے تو عدد $\overline{۶ ۵ ۲ ۳}$ اسطرح تعبیر ہوگا $۶ + ۵ \times ۷ + ۲ \times ۷^{۲} + ۳ \times ۷^{۳}$ اور عموماً اگر مراتب ایک عدد کی $\overline{۱}$ $\overline{۱}$ $\overline{۱}$ $\overline{۱}$ وغیرہ فرض کیئے جاوین اور ر عدد بنیادی مقرر کیا جاوے تو وہ عدد اسطرح تعبیر ہوگا $\overline{۱} + \overline{۱} ر + \overline{۱} ر^{۲} + \overline{۱} ر^{۳}$ + وغیرہ اور اگر تعداد مراتب کی ن ہو تو عدد مذکور اسطرح تعبیر ہوگا $\overline{۱} + \overline{۱} ر + \overline{۱} ر^{۲} + \overline{۱} ر^{۳} + \ldots . \overline{۱} ر^{ن-۲} + \overline{۱} ر^{ن-۱}$ اور اسکی دیکھنے سے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ اگر عدد بنیادی کچھہ ہی فرض کیا جاوے ر کی نہایت بڑی قوت تعداد مرتبون سے ایک کم ہوگی اور یہہ بھی واضح ہو کہ عدد بنیادی کچھہ ہی فرض کرین جو عدد اوسکی موافق لیا جاوے اوسکا ہر ایک مرتبہ عدد بنیادی سے کم ہوگا اور تعداد مراتب کی معہ مساوی عدد بنیادی یعنے ر کے ہوگی

۲ چاہتے ہین ہم کہ ایک عدد کو جو کسی خاص عدد بنیادی کے موافق ہی کسی اور عدد بنیادی کے موافق تعبیر کرین پس فرض کرین کہ عدد مذکور ہی اور ر وہ عدد بنیادی ہی جسکے موافق تعبیر کرنا منظور ہی اور $\overline{۱}$ $\overline{۱}$ $\overline{۱}$ $\overline{۱}$ وغیرہ مراتب مجہول ہین تو اب ظاہر ہی کہ ن $= \overline{۱} + \overline{۱} ر + \overline{۱} ر^{۲} + \overline{۱} ر^{۳}$ وغیرہ اب اگر ن کو ر پر تقسیم کرین تو $\overline{۱}$ باقی رہیگا اور اگر خارج قسمت کو پھر ر پر تقسیم کرین تو $\overline{۱}$ باقی رہیگا اور اگر پھر خارج قسمت ثانی کو ر پر تقسیم کرین تو $\overline{۱}$ باقی رہیگی وعلی ہذا القیاس $\overline{۱}$ $\overline{۱}$ وغیرہ باقیان بچین کے پس اگر یہان تک عمل کرین کہ باقی کچھہ نہ رہی تو ظاہر ہے کہ اس عمل تقسیم سی مراتب $\overline{۱}$ اور $\overline{۱}$ اور $\overline{۱}$ وغیرہ معلوم ہوجائینگی اور اون کے معلوم ہوے سے عدد مطلوب معلوم ہوجاویگا مثلاً چاہتے ہین ہم کہ عدد ۱۸۲۰ کو جو عدد بنیادی ۱۰ کے موافق ہی ایسی عدد سی تعبیر کرین جسکا عدد بنیادی ۶ ہو پس موافق قاعدہ کے ۱۸۲۰ کو ۶ پر تقسیم کیا اور خارج قسمت کو پھر ۶ پر تقسیم کیا اور باقیان ثبت کین

۶	۱ ۸ ۲ ۰	باقی اول $= ۲$	پس معلوم ہوا کہ عدد مطلوب ۱۲۳۴۲ ہے اور اسکا تعین
۶	۳ ۰ ۴ ۲ باقی ۲	باقی دوم $= ۳$	بھی ہو سکتا ہے اسواسطے کہ اگر نتیجہ درست ہو تو باضرور
۶	۵ ۰ ۳	باقی سوم $= ۴$	یہہ مساوات ہونی چاہیے
۶	۸ ۲	ایضاً (۴) $= ۲$	$۲+۲×۲+۶×۲+۴×۱+۱=۱۸۲۰$
۱	۲ ب ۱	ایضاً (۵) $= ۱$	
	۱ ب ۰		

اور اسی مساوات کی اول تحقیق کرنی سے بھی ۱۸۲۰ حاصل ہوتا ہے تو معلوم ہوا کہ عدد مذکور صحیح ہے

اگر عدد اساس اور عدد بنیادی معلوم ہو تو دریافت کرو کہ اسی تعداد مراتب کی موافق نہایت بڑا عدد اور نہایت چھوٹا عدد کیا ہوگا فرض کرو کہ عدد بنیادی ہے اور $ر$ تعداد مراتب ہے تو ظاہر ہے کہ عدد نہایت بڑا اوسوقت ہوگا جبکہ ہر ایک مرتبہ اوسکا نہایت بڑا ہو اور کوئی مرتبہ $ر-۱$ سے بڑا نہیں ہو سکتا یعنی نہایت بڑا مرتبہ $ر-۱$ ہوتا ہے پس ظاہر ہے کہ اوسوقت ہر ایک مرتبہ $ر-۱$ ہوگا اوسوقت عدد نہایت بڑا ہوگا یعنی عدد مطلوب اسی صورت سے تعبیر ہوگا $ر^{ن-۱}+(ر-۱)ر^{ن-۲}+(ر-۱)ر^{ن-۳}+\ldots+(ر-۱)ر+(ر-۱)=$

$$(ر-۱)(۱+ر+ر^{۲}+\ldots+ر^{ن-۱})=(ر-۱)\frac{ر^{ن}-۱}{ر-۱}=ر^{ن}-۱=\text{عدد مطلوب نہایت}$$

زیادہ کی — اور یہہ بھی ظاہر ہے کہ نہایت چھوٹا عدد سب اعداد میں آخر اور اسی سلسلہ دو مرتبہ کا نہایت چھوٹا عدد ۱۰ ہوگا اور تین مرتبہ کا نہایت چھوٹا عدد ۱۰۰ ہوگا اور علی ہذا القیاس یعنی نہایت چھوٹا عدد وہ ہوتا ہے جسکا اخیر مرتبہ آخر اور باقی مراتب ۰ ہوں اور اس صورت میں نہایت چھوٹا عدد $=ر^{ن-۱}$ ہوتا ہے

مثال اگر عدد بنیادی ۱۰ فرض کیا جاوے تو چار مرتبہ کا عدد نہایت بڑا یہہ ہوگا $۱۰^{۴}-۱=۹۹۹۹$

اور نہایت چھوٹا عدد $=۱۰^{۳}=۱۰۰۰$ دو عدد مفروض کو باہم ضرب کرین تو درمیانی کرو کہ تعداد مراتب حاصل ضرب کی کیا ہوگی فرض کرو کہ دو عدد مفروض ف اور ق ہین اور م اور ح انکی تعداد مراتب ہین اور ر عدد بنیادی ہے تو $ف=ا+ار+ا_{۲}ر^{۲}+\ldots+ا_{م-۱}ر^{م-۱}$ اور $ق=ب+بر+ب_{۲}ر^{۲}+\ldots+ب_{ح-۱}ر^{ح-۱}$ بسیط اسطی $ف ق=$ ایک ایسی سلسلہ کی ہوگی جسمین نہایت بڑی توت ر کی یہہ ہوگی $ا_{م-۱}ب_{ح-۱}ر^{م+ح-۲}$ اور نہایت چھوٹی توت ر کی یہہ ہوگی $ا_{۰}ب_{۰}ر^{۰}=ا_{۰}ب_{۰}$ پس معلوم ہوا کہ نہایت بڑی قیمت اسکی یہہ ہے $(ر-۱)ر^{م+ح-۲}$ اور نہایت کم قیمت اسکی $ف ق$ میں یہہ ہوگی $ر^{م+ح-۲}$ پس معلوم ہوا کہ نہایت بڑی قیمت کی حاصل ضرب $ف ق$ مین کم از کم $ر^{م+ح-۲}$ یا $ر^{م+ح-۲}$ سے بڑھ کر ہوگی اور نہایت کم $ر^{م+ح-۲}$ ہی تو موافق بیان فقرہ (۱) کی تعداد مراتب کی حاصل ضرب $ف ق$ مین $م+ح-۱$ سی زیادہ نہین ہو سکتی اور $م+ح-۱$ سی کم ہو سکتی ہے

(۵) چاہتی ہین ہم کہ تعداد مراتب خارج قسمت ف ÷ ق کی کیا ہوگی اوس صورت مین جبکہ ق پر ف پورا تقسیم ہوجاے فرض کرو کہ ف ÷ ق = د ∴ ف = ق د اور چونکہ ف مین م مرتبہ فرض کیے گیے تو بالضرور ق مین بھی م مرتبہ ہوگی اور فرض کرو کہ تعداد مراتب د کی = لا تو موافق فقرہ گذشتہ کے م زیادہ (ح + لا) سی اور کم (ح + لا − ۱) سی نہین ہوینگا اور اسیواسطی عدد مطلوب لا کم (م − ح) سی اور زیادہ (م − ح + ۱) سی ہوگا

حکم یہان سیے معلوم ہوا کہ تعداد مرتبون سیے ف مین ۲ م یا ۲ م − ۱ ہی اور ق مین ۳ م یا ۳ م − ۱ یا ۳ م − ۲ ہی اور علی ہذا القیاس — (۶) اگر مجموعہ مراتب کو ہر ایک قسم کی اعداد مین جنکا عدد بنیادی ر ہو ر − ۱ پر تقسیم کرین تو باقی اوسیقدر رہیگا جسقدر کل عدد کو ر − ۱ پر تقسیم کرنی سیے رہتا ہی اثبات دعوی کی لئے فرض کرتے ہین ہم کہ

۱ + ۱ ر + ۱ ر۲ + ... ۱ ر^ن عدد (ن) کو تعبیر کرتا ہی اسیواسطی

ن = ۱ + ۱ + ۱ + ... ۱ + ۱ (ر − ۱) + ۱ (ر − ۱) (ر − ۱) + ... + ۱ (ر − ۱)^ن

$$\therefore \frac{ن}{ر-۱} = \frac{۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱}{ر-۱} + ۱ + ۱ (ر+۱) + \dots + ۱ \frac{ر^{ن-۱}-۱}{ر-۱}$$

لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ن کی واسطی کوئی مثبت قیمت فرض کیجاوے ہر صورت مین $\frac{ر^{ن}-۱}{ر-۱}$ ایک عدد صحیح ہوگا پس اگر کل عدد صحیح کو ع سی تعبیر کرین تو $\frac{ر^{ن}-۱}{ر-۱}$ = ع + $\frac{۱ + ۱ + \dots ۱}{ر-۱}$ اور اس مساوات سی صاف ظاہر ہی کہ عدد ن کو ر − ۱ پر تقسیم کرنی سیے وہی باقی رہتا ہی جو مجموعہ مراتب ۱ + ۱ وغیرہ کو ر − ۱ پر تقسیم کرنی سی باقی رہتا ہی کیونکہ ع تو عدد صحیح ہی اوسمین باقی ہو ہی نہین سکتی

حکم یہان سیے ثابت ہوا کہ اگر ایک عدد ر − ۱ پر پورا تقسیم ہوسکی تو اوسکی مجموعہ مراتب کا بھی ر − ۱ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی اور یہان سیے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر حاصل تفریق اون مراتب کا جو طاق اور جفت مقامون پر واقع ہین ر + ۱ پر پورا تقسیم ہوسکی تو وہ عدد بھی ر + ۱ پر پورا تقسیم ہوسکی گا

مثال دریافت کیا چاہتے ہین ہم کہ وہ اعداد کونسی ہین جو ۳ اور ۹ پر پوری تقسیم ہوسکتے ہین فرض کرکہ ا ب س د وغیرہ مراتب کسی عدد کی ہین تو ظاہر ہی کہ وہ عدد اس صورت سی تعبیر ہوسکیگا

ا + ۱۰ ب + ۱۰۰ س + ۱۰۰۰ د + وغیرہ اب اگر اسکو ۳ پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۳} + ۳ ب + \frac{ب}{۳} + ۳۳ س + \frac{س}{۳} + ۳۳۳ د + \frac{د}{۳} + \text{وغیرہ یعنے}$$

$\frac{1+ب+س+\text{وغیرہ}}{3}+۳ب+۳۳س+۳۳۳د+\text{وغیرہ}$ اور یہہ عدد اوسوقت صحیح ہوگا جسوقت $\frac{1+ب+س+\text{وغیرہ}}{3}$ صحیح ہو پس معلوم ہوا کہ وہ عدد ۳ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی جسکی مراتب کا مجموعہ ۳ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہی مثلاً ۱۱۱ اور ۲۵۲ اور ۷۵۸۱ وغیرہ ۳ پر پوری تقسیم ہوسکتی ہین اور اسیطرح ثابت ہوسکتا ہی کہ ۹ پر وہ عدد پورا تقسیم ہوگا جسکی مراتب کا مجموعہ ۹ پر پورا تقسیم ہوگا اسواسطے کہ

$\frac{1+۱۰ب+۱۰۰س+۱۰۰۰د+\text{وغیرہ}}{9}=\frac{1}{9}+\frac{ب}{9}+\frac{۱۱س}{9}+\frac{۱۱۱د}{9}+\text{وغیرہ}$

$=\frac{1+ب+س+د+\text{وغیرہ}}{9}+ب+۱۱س+۱۱۱د+\text{وغیرہ}=$ عدد صحیح کی جسوقت کہ $\frac{1+ب+س+\text{وغیرہ}}{9}$ عدد صحیح کی ہو مثلاً ۴۸۴ اور ۶۵۸۸ وغیرہ ۹ پر پوری تقسیم ہوسکتی ہین حکم (۱) یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر کسی عدد کو ۹ پر تقسیم کرین اور اوسکی مجموعہ مراتب کو بھی ۹ پر تقسیم کرین تو دو نوصورتون مین باقی یکسان رہیگی حکم (۲) یہانسے وہ قاعدہ بھی ثابت ہوسکتا ہی جو ضرب کی غلطی درست کرنیمین مستعمل ہی کیونکہ اگر فرض کرین ہم کو مضروب فیہ ۱۹ + ۱ ہی اور مضروب ۹ ب + ر ہی تو حاصلضرب ۱۸ ب + ۹ ب + ۱ + ر ہوگا اور یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر مضروب فیہ کی مجموعہ مراتب کو ۹ پر تقسیم کرین تو ۱ باقی رہتا ہی اور اگر مضروب کے مجموعہ مراتب کو ۹ پر تقسیم کرین تو ر باقی رہتا ہی پس ان باقیون کو ضرب کرین تو ۱ + ر ہوگا اور $\frac{1+ر}{9}$ = باقی یکے جو مجموعہ مراتب حاصلضرب کو ۹ پر تقسیم کرنے سے باقی رہتا ہی اسواسطے کہ حاصلضرب مذکور مین ہوا لا کی اور متعدد ۹ پر پورے تقسیم ہوجاتے ہین اور یہی دلیل اوس قاعدہ مین حاصل ہوتی ہی بشرطیکہ عمل درست ہوا فہم ہو کہ جن صورتون مین حاصلضرب پر ایک صفر یا کئی صفر زیادہ یا کم کئے جاوین یا اوس صورتمین جبکہ حاصلضرب پر ۹ یا ۹ کا مضعف صحیح زیادہ یا کم کیا جاوے اسس قاعدہ سے غلطی کی تصحیح نہوگی

(۷) — نظام عددی جو مقرر ہی اسمین اگر کوئی سے دو قریب کی عددین اور اونکو باہم ضرب کرین تو اونکا حاصلضرب ۱ × ۲ سے تقسیم ہوجائیگا کیونکہ اون دو نو عددونمین سے ایک ضرور جفت ہوگا یعنی ۲ پر تقسیم ہوسکیگا اور اسیواسطے اوس عدد کو کسی عدد مین ضرب کرین بالفرض حاصلضرب ۲ پر تقسیم ہوسکیگا — چونکہ ہر ایک عدد ان تینون مقدارون ۳ م اور ۳ م ± ۱ اور ۳ م ± ۲ مین سے کسی نکسی سے بغیر ہوسکتا ہی کیونکہ ہر عدد یا تو ۳ پر پورا تقسیم ہوجائیگا یا فقط ۱ یا ۲ باقی رہیگی تو اسی واسطے حاصلضرب قریب کے تین عددون کا ان تین مقدارون سے

۳ م (۳ م + ۱) (۳ م + ۲) اور (۳ م − ۱) ۳ م (۳ م + ۱) اور (۳ م − ۱) (۳ م − ۱) ۳ م مین کسی نکسی سے بغیر ہوگا اب ظاہر ہی کہ موافق بیان بالا کی دو نو مقدار (۳ م + ۱) (۳ م + ۲) اور (۳ م − ۲) (۳ م − ۱) ۱ × ۲ پر تقسیم ہوسکتے ہین تو ثابت ہوا کہ صورت اول اور تیسری ۱ × ۲ × ۳ پر پوری تقسیم ہوجاویگی — اور اگر م ایک عدد جفت ہو یعنی ۲ پر تقسیم ہوسکی تو ظاہر ہی کہ ۳ م اور اسیواسطے دوسری صورت ۱ × ۲ × ۳ پر تقسیم ہوجاویگی اور اگر م ایک عدد طاق ہو تو ظاہر ہی کہ ۳ م بھی طاق ہوگا اور اسیواسطے ۳ م + ۱ جفت ہوگا اور اسیواسطے اس صورت مین بھی دوسری

صورت ۱×۲×۳ پر تقسیم ہو جائیگی پس ثابت ہوا کہ تمام صورتوں میں حاصلضرب ترتیب کی تین عددوں کا

۱×۲×۳ پر پورا تقسیم ہو جاویگا ۔ ثابت کرو کہ متسلسل حاصلضرب ترتیب کی عدد کا ۱×۲×۳....ر پر تقسیم ہو جاویگا فرض کرو کہ ح (م اور ر) تعبیر کرتا ہے $\frac{م}{۱}\cdot\frac{م-۱}{۲}\cdot\frac{م-۲}{۳}\cdots\frac{م-ر+۱}{ر}$ کو تو ح (م اور ر+۱) =

$$\frac{م}{۱}\cdot\frac{م-۱}{۲}\cdot\frac{م-۲}{۳}\cdots\frac{م-ر+۱}{ر}\cdot\frac{م-ر}{ر+۱} = ح\,(م \text{ اور } ر)\cdot\frac{م-ر}{ر+۱} =$$

$$\frac{م+۱}{ر+۱}ح\,(م \text{ اور } ر) - ح\,(م \text{ اور } ر) = \frac{(م+۱)م(م-۱)\cdots(م-ر+۱)}{۱\times۲\times۳\cdots\cdots(ر+۱)} - ح\,(م \text{ اور } ر)$$

$$= ح\,(\overline{م+۱} \text{ اور } \overline{ر+۱}) - ح\,(م \text{ اور } ر) \therefore ح\,(\overline{م+۱} \text{ اور } \overline{ر+۱}) - ح\,(م \text{ اور } ر) = ح\,(م \text{ اور } \overline{ر+۱})$$

یہاں سے ثابت ہوا کہ ح (ر+۱ اور ر+۱) = ح (ر اور ر) = ۱ اور

ح (ر+۲ اور ر+۱) − ح (ر+۱ اور ر+۱) = ح (ر+۱ اور ر) اور

ح (ر+۳ اور ر+۱) − ح (ر+۲ اور ر+۱) = ح (ر+۲ اور ر)

. . . . . = ...

ح (م اور ر+۱) − ح (م−۱ اور ر+۱) = ح (م−۱ اور ر)

∴ ح (م اور ر+۱) = ۱ + ح (ر اور ر) + ح (۲ اور ر) + . . . + ح (م−۱ اور ر)

اب اگر ر = ۱ تو ح (م اور ۲) = ۱ + ح (۲ اور ۱) + ح (۳ اور ۱) + . . . + ح (م−۱ اور ۱)

= ۱ + ۲ + ۳ + . . . + م − ۱ = ایک عدد صحیح کے

اور اگر ر = ۲ تو ح (م اور ۳) = ۱ + ح (۳ اور ۲) + ح (۴ اور ۲) + . . . + ح (م−۱ اور ۲) پر صحیح کے

اور اگر ر = ۳ تو ح (م اور ۴) = ۱ + ح (۴ اور ۳) + ح (۵ اور ۳) + . . . + ح (م−۱ اور ۳) = صحیح کے

∴ وغیرہ = وغیرہ = وغیرہ = وغیرہ

اور ح (م اور ر) = ۱ + ح (ر اور ر−۱) + ح (ر+۱ اور ر) + . . . + ح (م−۱ اور ر−۱) = ایک عدد صحیح کے

یعنی متسلسل حاصلضرب ترتیب کی اعداد تو بہ کا ۱×۲×۳....ر پر پورا تقسیم ہو جاویگا مثال (۱) اگر ن ایک عدد

صحیح ہو تو ثابت کرو کہ ن (ن²−۱) (ن²−۴) ۱۲۰ پر تقسیم ہو جاویگا چونکہ ن (ن²−۱) (ن²−۴) =

ن (ن−۱) (ن+۱) (ن−۲) (ن+۲) = (ن−۲) (ن−۱) ن (ن+۱) (ن+۲) جو کہ پانچ اعداد قریبہ کا حاصلضرب ہے اور

۱×۲×۳×۴×۵ یا ۱۲۰ پر پورا تقسیم ہو جاویگا

مثال ۲ اگر ن ایک عدد جفت ہو تو ہمکو کہنا ہے کہ ن³ + ۲۰ ن ۴۸ پر پورا تقسیم ہوجاویگا چونکہ جفت ہے تو فرض کرو کہ ن = ۲م ∴ ن³ + ۲۰ن = ۸م³ + ۴۰م = ۸م(م² + ۵) = ۸م (م² − ۱) + ۴۸م =

= ۸(م − ۱) م (م + ۱) + ۴۸م اب چونکہ (م − ۱) م (م + ۱) تین اعداد قریبہ کا حاصلضرب ہے اسلیے اسی واسطے ۱ × ۲ × ۳ پر پورا تقسیم ہوجاویگا اسیواسطے ۶ × ۸ یا ۴۸ پر بصورت مفروض تقسیم ہوجاویگی

(۸) ثابت کرو کہ جو عدد مجذور کامل ہو ان دو صورتون ۵م اور ۵م ± ۱ سی تعبیر ہوسکتا ہے اسیواسطے کہ یہہ بات ظاہر ہے کہ ہر عدد تعبیر ہوسکتا ہے بوسیلہ کسی نہ کسی صورت کی ان صورتون ۵م اور ۵م + ۱ اور ۵م + ۲ اور ۵م + ۳ ۵م + ۴ مین سی اور یہہ صورتین تعبیر ہوسکتی ہین ان تین صورتون ۵م ۵م ± ۱ ۵م ± ۲ سی اسواسطے کہ سوا ان دو صورتون اخیر کی جنمین ۳ اور ۴ ہین انکا تعبیر ہونا تو ظاہر ہے اور دونو صورتین اخیرہ اسواسطے تعبیر ہوسکتی ہین کہ ۵م + ۳ = ۵(م + ۱) − ۲ = ۵م − ۲

اور ۵م + ۴ = ۵(م + ۱) − ۱ = ۵م − ۱ پس معلوم ہوا کہ ہر عدد تین صورتون مذکورہ سی تعبیر ہوسکتا ہے اب ہم ثابت کرتی ہین کہ مجذورات ان تینون صورتون سے کے انہین دو صورتون مفروضہ یعنی ۵م اور ۵م ± ۱ سے تعبیر ہوسکتا ہے ظاہر ہے کہ (۵م)² = ۵(۵م²) = ۵م جو ۵م کی صورت کا ہے

اور (۵م ± ۱)² = ۲۵م² ± ۱۰م + ۱ = ۵(۵م² ± ۲م) + ۱ = ۵م + ۱ جو ۵م + ۱ کی صورت کا ہے

اور (۵م ± ۲)² = ۲۵م² ± ۲۰م + ۴ = ۵(۵م² ± ۴م + ۱) − ۱ = ۵م − ۱ جو ۵م − ۱ کی صورت کا ہے پس ثابت ہوا کہ جو عدد مجذور کامل ہے ان دو صورتون ۵م اور ۵م ± ۱ سے تعبیر ہوسکتا ہے

(۹) ثابت کرو کہ جو عدد ایسا ہو کہ سوای اپنی اور عدد آپکے اور کسی پر تقسیم نہوسکی اور اس عدد کو انگریزی مین پریم کہتی ہین اگر دو سی زیادہ ہو تو ۴م ± ۱ سی تعبیر ہوسکتا ہے اسواسطے کہ تمام اعداد ان صورتون سی ۴م ۴م + ۱ ۴م + ۲ ۴م + ۳ تعبیر ہوسکتی ہین لیکن عدد مذکور ۴م اور ۴م + ۲ سی تعبیر نہین ہوسکتا کیونکہ یہہ دونو صورتین ۲ پر تقسیم ہوسکتی ہین پس معلوم ہوا کہ عدد مذکور یعنی عدد پریم جو دو سی بڑا ہو ۴م + ۱ اور ۴م + ۳ سے تعبیر ہوسکتا ہے لیکن ۴م + ۳ = ۴(م + ۱) − ۱ = ۴م − ۱ پس ثابت ہوا کہ ہر عدد پریم جو دو سی زیادہ ہے ۴م ± ۱ سی تعبیر ہوسکتا ہے جو کہ م جفت ہوگا یا طاق یعنے ۲ن + ۱ کی صورت کا ہوگا یا ۲ن کی صورت کا اسیواسطے ۴م ± ۱ ان دو صورتون سے ۸ن ± ۱ اور ۸ن ± ۳ تعبیر ہوسکتا ہے یعنی عدد مذکور ان چہار صورتون سی تعبیر ہوسکتا ہے

(۱۰) ثابت کرو کہ عدد پریم اگر تین سے زیادہ ہو ۶م ± ۱ سی تعبیر ہوسکتا ہے اسواسطے کہ تمام اعداد ان صورتون ۶م اور ۶م + ۱ اور ۶م + ۲ اور ۶م + ۳ اور ۶م + ۴ اور ۶م + ۵ سی تعبیر ہوسکتی ہین

لیکن یہ ظاہر ہی کہ پہلی اور تیسری اور چوتھی اور پانچوین صورت سی پرہم عدد تعبیر ہوسکتا ہی معلوم ہوا
کہ عدد مذکور ۶م+۱ اور ۶م+۵ سے تعبیر ہوسکتا ہی لیکن ۶م+۵=۶(م+۱)-۱ جو ۶م-۱
کی صورت کا ہی پس جو عدد پرہم تین سے زیادہ ہو ۶م±۱ سی تعبیر ہوسکتا ہی اور م کی طاق اور جفت ہونیکی موافق
عدد مذکور ۱۲ن±۱ اور ۱۲ن±۵ سی تعبیر ہوگا

(۱۱) ایک عدد کی تمام مقسوم علیہ دریافت کرو فرض کرو کہ آ^ا . ب^ب وغیرہ اوس عدد کے پرہم ہین اور فرض کرو
کہ آ^ص دفعہ واقع ہو اور ب^ق دفعہ اور ح^ر دفعہ ... علی ہذا پس وہ عدد مساوی ہوگا آ^ص ب^ق ح^ر ...
یہ ظاہر ہی کہ یہ عدد ہر ایک عدد آئندہ سی پورا تقسیم ہوویگا

۱ اور آ اور آ^۲ اور آ^۳ ..... آ^ص	ص+۱ تعداد تک
۱ اور ب اور ب^۲ اور ب^۳ ..... ب^ق	ق+۱
۱ اور ح اور ح^۲ اور ح^۳ ..... ح^ر	ر+۱
.....	.....

اور ان اعداد کی دو یا زیادہ کی حاصل ضرب سے بھی تقسیم ہوسکیگا یعنی ہر ایک حاصل ضرب متسل (۱+آ+آ^۲+...+آ^ص)
×(۱+ب+ب^۲+...+ب^ق)(۱+ح+ح^۲+...ح^ر) پر کہ کہ (۱+آ+آ^۲+...آ^ص)(۱+ب+ب^۲+...+ب^ق)

= ۱+آ+آ^۲+...آ^ص جو کہ مختلف مقسوم علیہ آ^ص ب^ق کی ہین اور انمین مقسوم علیہ ایک یہ بھی شامل ہی
+ب+آب+...آ^ص ب اسکیطرح اگر ہم اسکو (۱+ح+ح^۲+...ح^ر) سی ضرب دین تو حاصل
+ب^۲+آب^۲+...آ^ص ب^ق ضرب مساوی ہوگا تمام مقسوم علیہ آ^ص ب^ق ح^ر کی اسیطرح اور صورتین حاصل ہوسکتی
+..... ہین اگر عدد مفروض کی اجزاء ضربی زیادہ ہون اب ظاہر ہی کہ تعداد ان مقسوم علیہ کی
+ب^ق+آب^ق+...آ^ص ب^ق یہ حاصل ہی اور آ^ص ب^ق مین تعداد مساوی ہوگی (۱+ص)(۱+ق) کے
اور آ^ص ب^ق ح^ر مین تعداد مقسوم علیہ مساوی ہوگی (۱+ص)(۱+ق)(۱+ر) اور اگر زیادہ
ہون تو بھی یہی قاعدہ جاری ہوسکتا ہی تعداد مقسوم علیہ آ^ص ب^ق ح^ر ... غیرہ =
(۱+ص)(۱+ق)(۱+ر) (وغیرہ) ان مقسوم علیہ مین عدد ایک اور وہ خود عدد بھی شامل ہی

مثال دریافت کرو تمام مقسوم علیہ ۲۱۶۰ کے ۲۱۶۰=۲×۱۰۸۰=۲^۲×۵۴۰=
۲^۳×۲۷۰=۲^۴×۱۳۵=۲^۴×۳×۴۵=۲^۴×۳^۲×۱۵=۲^۴×۳^۳×۵ اسیواسطی تمام
مقسوم علیہ ۲۱۶۰ کی مساوی ہو (۴+۱)(۳+۱)(۱+۱)=۴۰

باب چہارم سوالات غیر منقطع کی بیان مین

فصل ۱

اوس سوال کو جسمین مساواتین جو شرایط سوال کی سی پیدا ہوتی ہین کم ہین بہ نسبت تعداد مقدارون مجہول کی سوال غیر منقطع کہتے ہین گو کہ ایسی سوالون کے جواب بی شمار ہو سکتے ہین پہر بہی جواب اونکی اعداد صحیح مین اکثر تہوڑی سی ہوتی ہین اور اونکی دریافت کرنیکی ترکیبین مرقوم الذیل سی معلوم ہو جائینگی

شکل اول

جاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمتین لا اور ر کی مساوات ط لا = ص ر + س سے جسمین ط اور ص اور س بتیر کرتے ہین اعداد مفروضہ کو کہ ایسی ہون کہ اونکا کوئی عدد غیر مشترک نہین ہر

قاعدہ

(۱) تعبیر کرو صہ سی کسی عدد صحیح کو اور چونکہ مساوات مفروضہ سی حاصل ہوتا ہی یہہ لا = $\frac{ص ر + س}{ط}$ تو بعد نکالڈالنے کی سب صحیح کی اعداد کو جو $\frac{ص ر + س}{ط}$ مین نکل سکتی ہین فرض کرو کہ حاصل ہوتا ہی یہہ

$\frac{د ر + ف}{ط}$ اب تفریق کرو $\frac{د ر + ف}{ط}$ کو $\frac{ط ر}{ط}$ یا $\frac{۲ ط ر}{ط}$ یا $\frac{۳ ط ر}{ط}$ یا کسی اور عدد صحیح

ی کی مین سی کہ ہووی نہایت قریب $\frac{د ر + ف}{ط}$ کی اور لازم ہی کہ ہووی باقی ایک عدد صحیح اور یہی عمل کری جاو جب تک کہ سر کا مساوی آ کے ہو جاوے اور اوس صورت مین حاصل ہوگی یہہ مقدار شکل ایک کسر کی $\frac{ر + ک}{ط}$ اور اسکو لکہو مساوی ایک عدد صحیح کی یعنی ثبت کرو اسطرح سی $\frac{ر + ک}{ط}$ = صہ اور

∴ ر = ط صہ — کہ اب جسوقت فرض کرین گے کوئی عدد صحیح واسطی صہ کی تو قیمت آ کی معلوم ہو جائیگی اور بعد ازان قیمت لا کی بہی قاعدہ مرقومہ بالا مبنی ہی ان علوم متعارفہ پر (۱) حاصل جمع اور حاصل تفریق اور حاصل ضرب اعداد صحیح کا صحیح ہوتا ہی (۲) اگر ایک عدد فنا کرتا ہی کسی اور عدد کو اور اوسکی کسی ایک جز کو تو ضرور ہی کہ بہلا عدد بہی فنا کرے پہلی عدد کی باقی جز کو

مثالین

۱ ۱۹ لا = ۱۴ و — ۱۱ بتاو کیا ہی قیمت لا اور ر کی ظاہر ہی کہ لا = $\frac{۱۴ ر - ۱۱}{۱۹}$ = صہ

اور چونکہ $\frac{۱۹ز}{۱۹}$ = صہ تو معلوم ہوا کہ $\frac{۱۹ز}{۱۹} - \frac{۱۴ز - ۱۱}{۱۹} = \frac{۵ز + ۱۱}{۱۹}$ = صہ اور اب

$۴ \times \frac{۵ز + ۱۱}{۱۹} = \frac{۲۰ز + ۴۴}{۱۹} = \frac{۶ز + ۳۰}{۱۹} + ۲ =$ صہ

$\therefore \frac{۶ + ۲۰ز}{۱۹} =$ صہ اور $\therefore \frac{۲۰ز + ۶}{۱۹} - \frac{۱۹ز}{۱۹} = \frac{۱ + ۶ز}{۱۹} =$ صہ

$\therefore ۶ + ز = ۱۹$ صہ $\therefore ز = ۱۹$ صہ $- ۶$ اب اگر کم سی کم قیمت واسطی ز کی دریافت کیجاوے تو لازم ہی کہ فرض کریں ہم صہ $= ۱$ اور $\therefore ز = ۱۹ - ۶ = ۱۳$ اور $\therefore$ لا $= ۹$ اور اگر صہ $= ۲$ تو $ز = ۳۸ - ۶ = ۳۲$ اور اسیطرح سی اور بی شمار قیمتین واسطے ز کی معلوم ہوسکتی ہین اور ان قیمتون کے موافق لا کی بہی بی شمار ہونگی

(۲) مثال معلوم ہی ہمین یہہ مساوات ۳ لا $= ۸ز - ۱۶$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی لا اور ز کی کہ اعداد صحیح ہون سجای ظاہر ہی کہ لا $= \frac{۸ز - ۱۶}{۳} = ۲ز - ۵ + \frac{۲ز - ۱}{۳}$ اب ضرور ہی کہ $\frac{۲ز - ۱}{۳} =$ صہ لیکن ظاہر ہی کہ $\frac{۱۳}{۳}$ ایک صحیح ہی اور چونکہ

$\frac{۲ز - ۱}{۳} \times ۲ = \frac{۴ز - ۲}{۳} =$ صہ تو ضرور ہی کہ $\frac{۴ز - ۲}{۳} - \frac{۳ز}{۳} =$

$\frac{ز - ۲}{۳} =$ صہ اور $ز - ۲ = ۳$ صہ اور $ز = ۳$ صہ $+ ۲$ اب اگر صہ $= ۱$ تو $ز = ۳ + ۲ = ۵$ اور لا $= ۸$ اور اگر صہ $= ۳$ تو اور قیمتین ز اور لا کی معلوم ہوسکتی ہین

(۳) مثال معلوم ہی ہمین مساوات ۹ لا $+ ۱۳ز = ۲۰۰۰$ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنے قیمتین لا اور ز کی کہ اعداد صحیح ہون اب ظاہر ہی کہ

لا $= \frac{۲۰۰۰ - ۱۳ز}{۹} = ۲۲۲ - ز + \frac{۴ز - ۲}{۹} =$ سہ اور $\therefore \frac{۴ز - ۲}{۹} =$ صہ

اور چونکہ $\frac{۴ز - ۲}{۹} \times ۲ = \frac{۸ز - ۴}{۹} =$ صہ اور $\frac{۹ز}{۹}$ بہی = صہ

تو معلوم ہوا کہ $\frac{۸ز - ۴}{۹} + \frac{۹ز}{۹} = \frac{۱ + ۴ز}{۹} =$ صہ اور $\therefore ز + ۴ = ۹$ صہ

اور $ز = ۹$ صہ $- ۴$ اور اگر صہ $= ۱$ تو $ز = ۹ - ۴ = ۵$ اور لا $= ۱۵$ اور اسطور سے

اور قیمتین ء اور لا کی معلوم ہو سکتی ہیں

(۴) معلوم ہے ہمین مساوات ۲۴ لا = ۱۳ ء + ۱۶ اور چاہتے ہین ہم دریافت کرنی قیمت لا اور ء کی جواب لا = ۵ اور ء = ۸

(۵) ۱۴ لا = ۵ ء + ۷ بتا دیا ہمین قیمتین لا اور ء کی جواب لا = ۳ اور ء = ۷

(۶) ۲۷ لا = ۱۶۰۰ − ۱۶ ء ایضاً جواب لا = ۴۸ اور ء = ۱۶

(۷) ۸۷ لا + ۵۶ ء = ۱۵۴۱۰ ایضاً جواب لا = ۱۳۰ اور ء = ۵۰

شکل دوسری

چاہتے ہین دریافت کرنا ایک ایسا عدد صحیح مثل لا کی کہ اگر قسمت کرین ہم اوسی کئی اعداد صحیح پر مثل ط اور ص اور ع وغیرہ سے، تو بعد عمل تقسیم کی باقی رہین اعداد صحیح مثل ا اور ب اور ح وغیرہ

قاعدہ

تفریق کرو ہر عدد باقی کو لا مین سے متواتر اور ہر حاصل تفریق کو قسمت کرو اوپر اعداد مفروضہ ط ص ع وغیرہ کی علیحدہ علیحدہ تو ظاہر ہی ایسی حاصل ہونگی سے صورتین

جبریہ $\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{لا} - \text{ب}}{\text{ص}}$ اور $\frac{\text{لا} - \text{ح}}{\text{ع}}$ وغیرہ اور ہر دو احد امین کا بالضرور = صہ

بتغیر کرو اوس قیمت صحیح مقدار لا کو جو اول کسر سے حاصل ہو مساوات ہ کی اور لکھو اوسی کسر دوسری مین اب دریافت کرو کم سی کم قیمت ء کو کسر دوسری مین سے بوسیلہ قاعدہ گذشتہ کی اور بتغیر کرو اوسی دے سے اور بعد ازان قیمت لا کی نسبت د کی دریافت کرو اور لکھو اوسی کسر تیسری مین اور اس کسر مین د کی کم سی قیمت دریافت کرو اور بتغیر کرو اوسکو ترسی اور جسوقت یہہ قیمت لا کی نسبت ر کی لکھین ہم اوسی سر جوتہی مین اور یہی عمل جاری رکھین تو آخر شش کو حاصل ہوگا عدد صحیح مطلوبہ

مثالین

۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایک ایسا چھوٹا سے چھوٹا عدد صحیح کہ اگر قسمت کرین ہم اوسی ۷ پر تو باقی رہتا ہی عدد ۷ کا اور اگر قسمت کرین اوسکو ۲۶ پر تو باقی رہتا ہی عدد ۱۳ کا فرض کرو کہ عدد مطلوب = لا تو ظاہر ہی کہ ہوین گے یہ مساوات $\frac{\text{لا} - ۷}{۱۷}$ = صہ اور $\frac{\text{لا} - ۱۳}{۲۶}$ = صہ اب فرض کرو کہ $\frac{\text{لا} - ۷}{۱۷}$ = ء اور ∴ لا = ۱۷ ء + ۷ اور جسوقت لکھین ہم اس قیمت لا کو کسر دوسری مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{۱۷ ء - ۶}{۲۶}$ = صہ لیکن

$\frac{۲۶ز}{۲۶} = ص$ اور $\therefore \frac{۲۶ز}{۲۶} - \frac{۱۰ز-۹}{۲۶} = \frac{۹ز+۶}{۲۶} = ص$

یا $\frac{۹ز+۶}{۲۶} \times ۳ = \frac{۲۷ز+۱۸}{۲۶} = ز + \frac{ز+۱۸}{۲۶} = ص$ اور $\therefore \frac{ز+۱۸}{۲۶} = ص$

اور $\therefore ز = ۲۶ص - ۱۸$ اب اگر $ص = ۱$ تو $ز = ۸$ اور $\therefore لا = ۱۷ز + ۷ = ۱۷ \times ۸ + ۷ = ۱۴۳$

۲ چاہتے ہیں دریافت کرنا ایک ایسا عدد صحیح کہ اگر قسمت کریں ہم اوسی علیحدہ علیحدہ اعداد ۱۱ ۱۹ ۲۹ پر تو باقی رہتی ہیں سیے اعداد ۳ ۵ ۱۰ فرض کہ عدد مطلوبہ $= لا$ اور اسیواسطے حاصل ہونگی سیے مساواتیں

$\frac{لا - ۳}{۱۱} = ص$ اور $\frac{لا - ۵}{۱۹} = ص$ اور $\frac{لا - ۱۰}{۲۹} = ص$ فرض کردو کہ

$\frac{لا - ۳}{۱۱} = ز$ اور $\therefore لا = ۱۱ز + ۳$ اور جسوقت لکھیں ہم اس قیمت لا کو دوسری کسر میں تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{۱۱ز - ۲}{۱۹} = ص$ اور $\therefore ۲ \times \frac{۱۱ز - ۲}{۱۹} = \frac{۲۲ز - ۴}{۱۹} = ز + \frac{۳ز - ۴}{۱۹} = ص$

اور $\therefore \frac{۳ز - ۴}{۱۹} = ص$ لیکن یہہ ظاہر ہی کہ

$۶ \times \frac{۳ز - ۴}{۱۹} = \frac{۱۸ز - ۲۴}{۱۹} = ۱ - \frac{۱۸ز - ۵}{۱۹} = ص$

اور $\therefore \frac{۱۸ز - ۵}{۱۹} = ص$ لیکن $\frac{۱۹ز}{۱۹} = ص$ اور اسیواسطے یہہ ظاہر ہی کہ

$\frac{۱۹ز}{۱۹} - \frac{۱۸ز - ۵}{۱۹} = \frac{ز + ۵}{۱۹} = ص$ اب فرض کردو کہ $\frac{ز + ۵}{۱۹} = د$ اور

$\therefore ز = ۱۹د - ۵$ اور ظاہر ہی کہ $لا = ۱۱ز + ۳ = ۱۱ \times (۱۹د - ۵) + ۳ = ۲۰۹د - ۵۲$ اور جسوقت لکھیں ہم یہہ قیمت لا کی کسر سے میں تو حاصل ہوگا یہہ

$\frac{۲۰۹د - ۶۲}{۲۹} = ۷د - ۲ + \frac{۶د - ۴}{۲۹} = ص$ اور $\therefore \frac{۶د - ۴}{۲۹} = ص$

لیکن $\frac{۶د - ۴}{۲۹} \times ۵ = \frac{۳۰د - ۲۰}{۲۹} = د + \frac{د - ۲۰}{۲۹} = ص$

اور $\therefore \frac{د - ۲۰}{۲۹} = ص$ اور اسیواسطے $د = ۲۹ص + ۲۰$ اب جسوقت $ص = ۰$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $د = ۲۰$ اور $\therefore لا = ۲۰۹ \times ۲۰ - ۵۲ = ۴۱۲۸$

۳ چاہتے ہیں دریافت کرنا ایک ایسا عدد صحیح کہ اگر قسمت کریں ہم اوسکو ۹ پر تو باقی رہتا ہی عدد ۷ کا

لیکن جسوقت قسمت کرینگے ہم اوسی ۲۸ پر تو باقی رہتا ہی عدد ۱۳ کا جواب عدد مطلوبہ ۹ ۴ ۳ ہی

۴ وہ کونسا چھوٹے سی چھوٹا عدد صحیح ہی کہ اگر قسمت کرین ہم اوسے علیحدہ علیحدہ

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ پر تو باقی کچھ نہین رہتا ہی جواب عدد مطلوبہ ۲۵۲۰ ہی

فصل دوسری بیچ بیان ایسی سوالات غیر منقطع کے جنمین بوسیلہ دو مساواتون کے دریافت کرنا ہوتا ہی تین یا زیادہ مقدارون مجہول کا

سوال ۱ ایک شخص نے تیس فقیرون کو کہ اونمین عورتین اور مرد اور بچے تہی ۵۰ روپیہ دیئے ساتھہ اس شرط کی کہ ہر مرد کا حصہ تین روپیہ ہوا اور ہر عورت کا حصہ ۲ روپیہ اور ہر بچہ کا حصہ آدہ روپیہ بتاؤ ان سب فقیرونمین کتنے مرد اور کتنی عورتین اور کتنے بچے تہی فرض کرو کہ تعداد مردون کی = لا اور عورتون کی = ز اور بچون کی = د اور اب ظاہر ہی کہ حاصل ہونگی یہہ دو مساواتین

لا + ز + د = ۳۰ ..... (۱)

۳ لا + ۲ ز + د = ۵۰ ..... (۲)

مساوات (۱) کو ۲ مین ضرب کرو اور حاصل ضرب مین سے مساوات (۲) کو تفریق کرو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ز + د = ۴۰ اور ظاہر ہی کہ اس مساوات سی موافق قاعدون گذشتہ کی حاصل ہوجائینگی ہمین قیمتین ز اور د کی اور بعد ازان لا کی قیمت بہی معلوم ہوجائیگی یہہ سوال اور طرحسی بہی حل ہوسکتا ہی اور وہ طرح یہہ ہی مساوات اول سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات د = ۳۰ − لا − ز اور یہان سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ لا + ز کم ہی ۳۰ سی اور جسوقت لکہین یہہ قیمت د کی مساوات (۲) مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲ لا + ز + ۳۰ = ۵۰ اور ∴ ز = ۲۰ − ۲ لا اور ∴ ز + لا = ۲۰ − لا پس معلوم ہوا کہ ۲۰ − لا بہی ۳۰ سے کم ہی پس ہم فرض کرسکتے ہین واسطے لا کی کوئی عدد بشرطیکہ وہ کم ۱۰ سی ہو اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہین گیارہ جواب آئندہ

لا = ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

ز = ۲۰ ۱۸ ۱۶ ۱۴ ۱۲ ۱۰ ۸ ۶ ۴ ۲ ۰

د = ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰

اور اگر چہوڑین اول اور آخر جواب کو تو باقی رہینگے ۹ جواب

سوال ۲ ایک شخص نے سو جانور خریدکئے اور اس نرخ سے کہ فی بیل دس روپیہ اور فی گائے ۵ روپیہ اور فی بچھڑہ ۲ روپیہ اور فی بکری نصف روپیہ بتاؤ ان سو جانورونمین کتنے بیل تھے اور کتنی گائین اور کتنے بچھڑے اور کتنی بکریان فرض کرو کہ تعداد بیلون کی = لا اور تعداد گایون کی = ک اور بچھڑون کی = د اور بکریون کی = ر پس اب حاصل ہونگے یہ دو مساواتین

لا + ک + د + ر = ۱۰۰ ..... (۱)

۱۰لا + ۵ک + ۲د + ½ر = ۱۰۰ ..... (۲)

اب جسوقت دور کرین ہم کسر کو مساوات (۲) مین سے تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

۲۰ لا + ۱۰ک + ۴ د + ر = ۲۰۰ اور جسوقت تفریق کرین اس مساوات مین سے مساوات (۱) تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱۹لا + ۹ک + ۳د = ۱۰۰ اور اسیواسطی حاصل ہوگا یہہ

۳د = ۱۰۰ − ۱۹لا − ۹ک اور جسوقت قسمت کرین ہم تین پر تو یہہ حاصل ہوگا

د = ۳۳ + ⅓ − ۶لا − ½لا − ۳ک یا د = ۳۳ − ۶لا − ۳ک + ⅓ − لا پس

اب ضرور ہے کہ ⅓ − لا یا ⅓ − لا قسمت ہوسکی ۳ پر اور اسیواسطی فرض کرو کہ

لا − ۱ = ۳ط اور ∴ لا = ۳ط + ۱

ک = ک

د = ۲۷ − ۱۹ط − ۳ک

ر = ۲۷ + ۲ک + ۱۶ط

یہان سی یہہ بات معلوم ہوتی ہے کہ ۱۹ط + ۳ک بالضرور کم ہے ۲۷ سی پس اگر ط رہی یہہ شرط تو ہم واسطی ک اور ط کی کوئی قیمت فرض کرسکتے ہین اول اگر فرض کرین ہم کہ

ط = ۰ تو حاصل ہوگا یہہ

لا = ۱

اور ک = ک

د = ۲۷ − ۳ک

ر = ۷۲ + ۲ک

دویم فرض کرو کہ ط = ۱ تو حاصل ہونگی یہ مساواتین لا = ۴ ر = ر د = ۸ − ۳ ر
ر = ۸ ۸ + ۲ ر لیکن ہم نہین فرض کرسکتے ہین ط = ۲ کیونکہ اس صورت مین د ہوجاتی ہی منفی آپ
ظاہر ہی کہ صورت اول مین تو نہین زیادہ ہوسکتا ۹ سی اور صورت دوسری مین وہ نہین زیادہ ہوسکتا
ہی ۲ سی پس صورت اول سی حاصل ہوتی ہین ہمکو جواب آئندہ

اجوبہ	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
لا =	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
ر =	۱۰	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
د =	۲۷	۲۴	۲۱	۱۸	۱۵	۱۲	۹	۶	۳	
ر =	۷۲	۷۴	۷۶	۷۸	۸۰	۸۲	۸۴	۸۶	۸۸	۹۰

اور صورت دوسری اسی سے تین جواب حاصل ہوسکتے ہین

اجوبہ	۱	۲	۳	پس کل جواب تعداد مین
لا =	۴	۴	۴	۳ ہین اور اگر انمین سے
ر =	۰	۱	۲	خارج کرین ہم اون جوابون
د =	۸	۵	۲	کو جو صفر ہین تو باقی رہینگے
ر =	۸۸	۹۰	۹۲	دس جواب

جو شخص مہارت مساواتون غیر منقطع کی حل کرنے مین پیدا کیا چاہے اوسی لازم ہی کہ سوالات گذشتہ
کو اور ان ترکیبون کو جن سی وہ حل ہوئی ہین اور دوعلوم متعارفہ کو کہ پہلی مذکور ہوی ہین خوب توجہ
سی ملاحظہ کری اب ہم حل کرینگے چند مساواتین غیر منقطع جنمین حاصل ضرب اور مجذور وغیرہ مقدارون
مجہول سے دخل رکھتی ہین مثلاً حل کرو اس مساوات کو لا ر + لا + ر = ۷۹ ظاہر ہی کہ اس مساوات
سے حاصل ہوتی ہی یہ مساوات لا ر + ر = ۷۹ − لا اور

$$\therefore ر = \frac{۷۹ - لا}{لا + ۱} = -۱ + \frac{۸۰}{لا + ۱}$$ اور اب ضرور ہی کہ ہو وی لا + ۱ کوئی ایسا
عدد صحیح کہ اوسپر ۸۰ قسمت ہوسکی ظاہر ہی کہ وے اعداد جن پر ۸۰ قسمت ہوسکتی ہین ۱ اور
اسیواسطی قیمتین لا کی بھی بہت ہونگی جیسکہ جداول آئندہ سی ۱ ۲ ۴ ۵ ۸ ۱۰ ۱۶ ۲۰ ۴۰ ۸۰
واضح ہوگا مقسوم علیہ ۸۰ کی اوپر اسیواسطی لا = ۱ ۳ ۹ ۱۵ ۱۹ ۳۹ ۷۹
اور اسیواسطی ر = ۷۹ ۳۹ ۱۹ ۱۵ ۹ ۳ ۱

لیکن چونکہ لا اور ر کی قیمتیں ایک سی ہیں صرف فرق یہہ ہے کہ دونوں کی ترتیب برعکس ہے تو ظاہر ہے کہ حقیقت میں ۵ جواب ہیں اور ویسے ہیں لا = ۱۰ ۳ ۷ ۴ اور ر = ۹ ۷ ۹ ۳ ۱۹ ۱۵ ۹

مساوات گذشتہ ہے ایک خاص صورت اس مساوات عام کی لا ر + ط لا + ص ر = س اور یہہ اسطرح سے حاصل ہوتی ہے لا ر + ص ر = س − ط لا اور

$$\therefore \text{ر} = \frac{\text{س} - \text{ط لا}}{\text{لا} + \text{ص}} = -\text{ط} + \frac{\text{ط ص} + \text{س}}{\text{لا} + \text{ص}}$$ پس لا کی واسطے کوئی ایسا عدد تجویز کرنا

چاہیئے کہ وہ پورا کرے اوس شرط کو جو تعبیر کی گئی ہے اس اخیر مساوات سے چاہتے ہیں ہم دریافت کرنی ایسی قیمت واسطے لا کی کہ صورت ط + ص لا کا جذر نکل سکے فرض کرو کہ ط + ص لا = ر² اور

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ر}^2 - \text{ط}}{\text{ص}}$$ اب اگر مطلوب ہو ہمیں قیمت لا کی اعداد صحیح میں تو لازم ہے کہ فرض کریں ہم واسطے ر کی ایسی

قیمت کہ اگر اوسکے مخبورین سے تفریق کی عدد ط کو قسمت کریں ہم حاصل تفریق کو ص پر تو خارج قسمت ایک عدد صحیح ہو لیکن اگر کسر ہی مطلوب ہو تو صرف یہہ شرط ملحوظ ہونی چاہیئے کہ ر² زیادہ ہو ط سے مثلاً وہ کونسا عدد ہے کہ اگر اوسے آئین ضرب کریں اور حاصل ضرب پر عدد ۳ کا زیادہ کریں تو مجموعہ ایک مخبور رہتا ہے اب ظاہر ہے کہ

یہہ مساوات ہوگی ۱۱ لا + ۳ = ر² اور $\therefore \text{لا} = \frac{\text{ر}^2 - 3}{11}$ اب اگر ر = ۵ تو لا $= \frac{25-3}{11} = \frac{22}{11} = 2$ اور اگر ر = ۴ تو لا $= \frac{16-3}{11} = \frac{13}{11} = 1\frac{2}{11}$ دریافت کیا

چاہتے ہیں ہم ایسی قیمت واسطے لا کی کہ صورت (ط + لا²) کا جذر نکل سکے فرض کرو کہ

ط + لا² = ر² + لا اور $\therefore$ ط + لا² = ر² + ۲ ر لا + لا² اور $\therefore$ ر² + ۲ ر لا = ط

اور لا $= \frac{\text{ط} - \text{ر}^2}{2\text{ر}}$ اگر ط = ۱۰ اور ر = ۲ تو لا $= \frac{10-4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

واضح ہو کہ اگر ط اس شکل کا ہو ر² + ۲ ر لا جبکہ ر کوئی عدد ہو سکتا ہے تو خواہ لا کی واسطے کیسی قیمت فرض کریں ط + لا² ہمیشہ مخبور رہتا ہے چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسی دو مخبور کا کہ اونکا حاصل جمع بھی مخبور ہو دے فرض کرو کہ لا² اور آ² دو مخبور مطلوبہ ہیں اور یہہ فرض کرو کہ لا² + ر² = (ر لا − ر)² اور

$\therefore$ لا² + ر² = ر² لا² − ۲ ر² لا + ر² $\therefore$ لا² = ر² لا² − ۲ ر² لا اور $\therefore$ لا = ر² لا − ۲ ر² اور

لا (ر² − ۱) = ۲ ر² اور $\therefore$ لا $= \frac{2\text{ر}^2}{(\text{ر}^2 - 1)}$ اب فرض کرو کہ ر² − ۱ = ر² اور $\therefore$ لا = ۲ ر²

اب جسوقت کوئی قیمت واسطے ر کے فرض کریں گے اوسوقت قیمتیں لا اور ر کی معلوم ہو جائینگی مثلاً

ر = ۲ تو ر = ۳ اور لا = ۴ اور لا² + ر² = ۱۶ + ۹ = ۲۵ = ۵² چاہتے ہیں ہم

دریافت کرنا وہ ایسی مخبور کا کہ اونکا حاصل تفریق بھی ایک عدد مخبور رہتا ہو فرض کرو کہ لا² اور ر²

مجذور مطلوبہ ہین اور یہہ بہی مان لو کہ لا۲ − و۲ = (لا − ر و)۲ = لا۲ − ۲ ر و لا + ر۲ و۲ اور اسسے سطی
− و۲ = − ۲ ر و لا + ر۲ و۲ یا ۲ ر لا = (ر۲ + ۱) و اور لا = $\frac{(ر^2+1)و}{۲ر}$ اب اگر و = ۲ ر تو
لا = ر۲ + ۱ مثلاً اگر ر = ۲ تو و = ۴ اور لا = ۵ اور اسسے حاصل ہوگا یہہ حاصل
لا۲ − و۲ = ۲۵ − ۱۶ = ۹ = ۳۲

فصل تیسرے بیچ بیان ایک خاص ترکیب کی جسکی ذریعہ سی صورت $\sqrt{ط ن^2 + ۱}$ ایک مجذور اعداد صحیح مین ہوجائے

بنا ناصورت جبریہ $\sqrt{ط ن^2 + ۱}$ کو ایک کامل مربعہ کوی امر مشکل نہوتا اگر دریافت کرنی ہوتی ہمین فقط کسور واسطی مقدار ن کے کیونکہ اس صورت مین ہمین فقط یہہ بات ضرور ہوتی کہ فرض کرتے ہم

$\sqrt{ط ن^2 + ۱} = ۱ + \frac{ن ف}{ق}$ اور اسسے حاصل ہوتے ہین مساوات ط ن۲ + ۱ = ۱ + $\frac{۲ ن ف}{ق}$ + $\frac{ن^2 ف^2}{ق^2}$

اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ط ن۲ = $\frac{۲ ن ف}{ق}$ + $\frac{ن^2 ف^2}{ق^2}$ اور جسوقت قسمت کرتے ہم دونوطرف اس مساوات کو ن پر تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ط ن = $\frac{۲ ف}{ق}$ + $\frac{ن ف^2}{ق^2}$ یا

ط ن − $\frac{ن ف^2}{ق^2}$ = $\frac{۲ ف}{ق}$ یا $\frac{ن(ط ق^2 - ف^2)}{ق^2}$ = $\frac{۲ ف}{ق}$ یا ن = $\frac{۲ ق ف}{ط ق^2 - ف^2}$

اور اس مساوات سی بیشمار قیمتین واسطی ن کے معلوم ہوجاتین لیکن یے سب کسور ہین اور نہ اعداد صحیح پس ظاہر ہی کہ یہہ ترکیب نہین جاری ہوسکتی ہی جسوقت دریافت کیا جاہین قیمتین ن کی اعداد صحیح مین اور اسسواسطی لازم ہی کہ رجوع کرین ہم ظن اور ترکیبون کے جنسی مطلب ہمارا حاصل ہو واسطی اس مطلب کے لازم ہی کہ نکال ڈالین ہم تمام اون صورتون کو جنمین ط ایک مقدار مثبت ہو اور تمام اون صورتون کو بہی جنمین ط ایک مجذور ہو کسواسطی اسس صورت مین ط ن۲ ایک عدد مجذور ہوگا اور چونکہ کوئی مجذور جسوقت کہ اوسکی اوپر عدد ایک کا زیادہ کیا جاتا ہی مجذور اعداد صحیح کا نہین رہتا ہی تو لازم آتا ہی اسسے یہہ کہ اگر ط ایک عدد مجذور ہو تو ط ن۲ + ۱ ایک مجذور صحیح اعداد کا نہین ہوسکتا ہی اسجای واضح ہو کہ جسوقت معلوم ہوجائگی ہمین کوئی ترکیب دریافت کرنی کم سی کم قیمت ن کی ایسی کہ اوسکی ذریعہ سی $\sqrt{ط ن^2 + ۱}$ ایک کامل مجذور اعداد صحیح کا ہوگا اوسوقت معلوم ہوسکتی ہین ہمین بیشمار اور قیمتین ن کی پس اب لکہینگے ترکیب دریافت

کرنی کم سی کم قیمت ن کی اور یہہ ترکیب مہندس پیل نی کہ ایک شخص قوم انگریزی مین سے تہا ایجاد کی تہی واضح ہو کہ یہہ ترکیب ایسی نہین ہی کہ ہر قسم کی مثالون اس فصل کی پر ایکہی طریقہ سی جاری ہوسکے بلکہ وہ مختلف طریقون سے اور مختلف درجہ سہولت سی مختلف مثالون کی حل کرنی مین جاری ہوسکتی ہی اول لیتے ہین ہم ایک بہت سہل مثال یعنے چاہتی ہین دریافت کرنی کوئی ایسی قیمت واسطی ن کے کہ صورت جبریہ $۲ن^۲ + ۱$ ایک مجذور کامل اعداد صحیح کا ہوجائی اس جای ظاہر ہی کہ جذر $۲ن^۲ + ۱$ کا زیادہ ہی ن سے اور کم ہو $۲ن$ سے پس اگر تعبیر کرین اس جذر کو $ن + ف$ سے تو ضرور ہی کہ ف کم ہو ن سے اور اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ مساوات $\sqrt{۲ن^۲ + ۱} = ن + ف$ اور جسوقت مجذور کرین ہم دونوطرف اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $۲ن^۲ + ۱ = ن^۲ + ۲نف + ف^۲$

اور جسوقت دور کرین $ن^۲$ کو دونوطرفون اس مساوات سی اور لاوین تمام اجزا کو جنمین ن پایا جاتا ہی ایک طرف مساوات کی اور باقی اجزا کو دوسری طرف مساوات کی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ن^۲ - ۲نف = ف^۲ - ۱$ اور جسوقت کامل کرین ہم مربعہ کو موافق قاعدہ مساوات درجہ دوم کے بعد $ن^۲ - ۲نف + ف^۲ = ۲ف^۲ - ۱$ اور جسوقت جذر نکالین دونوطرفون اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ن - ف = \sqrt{۲ف^۲ - ۱}$ اور $ن = ف + \sqrt{۲ف^۲ - ۱}$ اب ظاہر ہی کہ تا کہ ن ایک کامل مجذور ہوجائے تو ضرور ہی کہ $\sqrt{۲ف^۲ - ۱}$ ایک کامل مجذور ہو لیکن ظاہر ہے کہ بہت مشکل سے دریافت کرنا کسی ایسی قیمت کا واسطی ف کے کہ $\sqrt{۲ف^۲ + ۱}$ ایک کامل مجذور ہوجای اوتنا ہی مشکل ہی دریافت کرنا کسی ایسی قیمت کا واسطی ف کے کہ $\sqrt{۲ف^۲ - ۱}$ ایک کامل مجذور ہوجائے پس ہمین لازم ہی کہ پہر کوئی ایسا عمل کرین کہ اوسکی وسیلہ سے کچہہ سہولت حاصل کرنی مطلب مین پیدا ہو اب چونکہ $\sqrt{۲ف^۲ - ۱}$ زیادہ ہی ف سی اور اسی سبب سی ن زیادہ ہی $۲ف$ سے تو ہم فرض کرین گے کہ $ن = ۲ف + ق$ اور موافق اس فرض کے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۲ف + ق = ف + \sqrt{۲ف^۲ - ۱}$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ن^۲ + ۲نق + ق^۲ = ۲ف^۲ - ۱$ اور اسیواسطے $ن^۲ = ۲ف ق + ق^۲ + ۱$ اور اس مساوات درجہ دوم مین ف کو مقدار مجہول فرض کرکے حل کرنی سے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ف کی $ف = ق + \sqrt{۲ق^۲ + ۱}$ پس یہان سے معلوم ہوتا ہی یہہ کہ تا کہ ف ایک ایسا عدد ہوجائے کہ مقدار $\sqrt{۲ف^۲ - ۱}$ ایک کامل مجذور ہوجائے تو لازم ہی کہ $\sqrt{۲ق^۲ + ۱}$ ایک کامل مجذور رہو اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ اگر $ق = ۰$ تو $\sqrt{۲ق^۲ + ۱}$ یعنے $\sqrt{۱}$ ایک کامل مجذور رہوتا ہی اور یہان سے معلوم ہوا کہ $ف = ۱$ اور

$$ن = ف + \sqrt{۲ف^۲ - ۱} = ۱ + \sqrt{۲ - ۱} = ۲$$ اور اسیواسطی

۲ن^۲ + ۱ = ۲ × ۴ + ۱ = ۸ + ۱ = ۹ = ۳^۲ کامل مجذور ہے آمید ہی کہ فقط اس سہل مثال سے ترکیب مہندس پہل کی طالب علم کی خیالمین آجائیگی اور وہ دلمین بیٹھ جائیگی اگر وہ توجہ کریگا اون مثالوں کی طرف جو اگی لکھی جاتی ہین اب فرض کرو کہ ط = ۳ یعنی چاہتے ہین ہم تبدیل کرنا ۳ن^۲ + ۱ کو ایک عدد مجذور سی پس موافق مرقومہ بالا کی فرض کرو کہ $\sqrt{۳ن^۲ + ۱} = ن + ف$ اور جسوقت جاری کرتے ہین ہم عمل مجذور کا دونون طرفون اس مساوات پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۳ن^۲ + ۱ = ن^۲ + ۲ن ف + ف^۲ اور ن^۲ - ف ن = $\frac{ف^۲ - ۱}{۲}$ اور اگر ن کو مقدار مجہول مقرر کرکے حل کرین ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ن = $\frac{ف + \sqrt{۳ف^۲ - ۲}}{۲}$ اب چونکہ $\sqrt{۳ف^۲ - ۲}$ زیادہ ہی ف سی اور اسی سبب سے ن زیادہ ہی $\frac{ف}{۲}$ سی یعنی ف سی تو فرض کرو کہ ن = ف + ق اور چونکہ ن = $\frac{ف + \sqrt{۳ف^۲ - ۲}}{۲}$ تو معلوم ہوا کہ

ف + ق = $\frac{ف + \sqrt{۳ف^۲ - ۲}}{۲}$ اور اسیواسطی ۲ف + ۲ق =

ف + $\sqrt{۳ف^۲ - ۲}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ف + ۲ق = $\sqrt{۳ف^۲ - ۲}$ اور جسوقت مجذور کرین دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

ف^۲ + ۴ف ق + ۴ق^۲ = ۳ف^۲ - ۲ یا ۴ق^۲ - ۲ف ق = ۲ف^۲ + ۱ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ف = ق + $\sqrt{۳ق^۲ + ۱}$ اور جسوقت فرض کیا جاوی ق = ۰ اوسوقت حاصل ہوتے ہین یہہ مساوات ف = ۱ اور ن = ۱ اور $\sqrt{۳ن^۲ + ۱} = ۲$ اب فرض کرو کہ ط = ۵ یعنی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد واسطی ن کے کہ صورت جبریہ ۵ن^۲ + ۱ ایک کامل مجذور ہوجاوے اب ظاہر ہی کہ مجذور ۵ن^۲ + ۱ کا زیادہ ہی ۲ن سے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ

$\sqrt{۵ن^۲ + ۱} = ۲ن + ف$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتا ہی یہہ ۵ن^۲ + ۱ = ۴ن^۲ + ۴ف ن + ف^۲ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ن^۲ - ۴ف ن = ف^۲ - ۱ اور حل کرنی سے اس مساوات درجہ دوم کو ہم پاتی ہین یہہ قیمت ن کی ن = ۲ف + $\sqrt{۵ف^۲ - ۱}$ اب چونکہ $\sqrt{۵ف^۲ - ۱}$ زیادہ ہی ۲ف سی تو لازم آتا ہی اس سے یہہ کہ ہووی ق زیادہ ۴ف سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ ن = ۴ف + ق

اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ ف + ق = $\sqrt{۵ ف^۲ - ۱}$ اور جسوقت مخبور کرین
دونوطرفون اسمساوات کو توحاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۵ ف^۲ - ۱ = ۴ ف^۲ + ۴ ف ق + ق^۲
اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ف^۲ - ۴ ف ق = ق^۲ + ۱ اور جسوقت فرض کرکی ق کو بطور
مقدار مجہول کے حل کرتے ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو توحاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ف کی
ف = ۲ ق + $\sqrt{۵ ق^۲ + ۱}$ اور چونکہ کم سی کم قیمت ف کی حاصل ہوتی ہی جسوقت ق = ۰ توحاصل
ہوگی ہمین یہہ قیمت ق کی ق = ۱ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطی ن کے

ن = ۲ ف + $\sqrt{۵ ف^۲ - ۱}$ = ۲ + $\sqrt{۴}$ = ۲ + ۲ = ۴ اور اسیواسطی

$\sqrt{۵ ن^۲ + ۱}$ = ۹ اور ۵ ن^۲ + ۱ = ۸۱ اب فرض کرو کہ ط = ۶ یعنی چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک
ایسا عدد واسطے ن کے کہ ۶ ن^۲ + ۱ ایک کامل مربع ہوجاوے اسسے ظاہر ہی کہ جذر ۶ ن^۲ + ۱
کا زیادہ ہی ۲ ق سی اور کم ۳ ن سے اور اسیواسطی فرض ہین ہم کہ $\sqrt{۶ ن^۲ + ۱}$ = ۲ ن + ف اور
جسوقت مخبور کرتے ہین ہم دونوطرفون اسمساوات کو توحاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۶ ن^۲ + ۱ = ۴ ن^۲ + ۴ ن ف + ف^۲ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات درجہ دوم کی
ن^۲ - ۲ ف ن = $\frac{ف^۲ - ۱}{۲}$ اور اسکو حل کرنی سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ن کی

$$ن = ف + \frac{\sqrt{۶ ف^۲ - ۲}}{۲} = \frac{۲ ف + \sqrt{۶ ف^۲ - ۲}}{۲}$$

اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ن زیادہ ہی ۲ ف سی اور اسیواسطی ہم فرض کرینگے کہ ن = ۲ ف + ق
اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ ف^۲ + ۲ ق = ۲ ف + $\sqrt{۶ ف^۲ - ۲}$ اور جسوقت دور کرین گے
ہم دونوطرفون اسمساوات مین سے ۲ ف کو توحاصل ہوگی یہہ مساوات ۲ ف + ۲ ق = $\sqrt{۶ ف^۲ - ۲}$
اور جسوقت مخبور کرتے ہین ہم دونوطرفون اسمساوات کو توحاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۴ ف^۲ + ۸ ق ف + ۴ ق^۲ = ۶ ف^۲ - ۲ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۲ ف^۲ - ۸ ق ف = ۴ ق^۲ + ۲ اور ف^۲ - ۴ ق ف = ۲ ق^۲ + ۱ اور حل کرنی اسمساوات درجہ
دوم سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطی ق کے ف = ۲ ق + $\sqrt{۶ ق^۲ + ۱}$ اب ظاہر ہی اس صورت
اخیر کی وہی شکل ہی جو صورت مفروض کی ہی تو واسطی حاصل کرنی کم سے کم قیمت ق کی ضرور ہی کہ فرض کرین
ہم ق = ۰ اور اسسے واسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ف = ۱ اور اسیواسطی

$$ن = \frac{۲ف + \sqrt{۶ن^۲ - ۲}}{۲} = \frac{۲ + \sqrt{۴}}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$ اور اسیواسطے

$$\sqrt{۶ن^۲ + ۱} = \sqrt{۶ \times ۲^۲ + ۱} = \sqrt{۲۴ + ۱} = \sqrt{۲۵} = ۵$$ یعنے

$\sqrt{۶ن^۲ + ۱} = ۵$ اب ہم فرض کرتے ہین کہ ط = ۷ یعنی ہم چاہتے ہین کہ کوئی ایسا عدد واسطی ن کے دریافت کرین کہ صورت $۷ن^۲ + ۱$ ایک کامل مخذور ہوجائے اب چونکہ مخذور $۷ن^۲ + ۱$ اکثر زیادہ ہی ۲ن سے تو فرض کرتے ہین بعسم کہ $\sqrt{۷ن^۲ + ۱} = ۲ن + ف$ اور اگر دونو طرفون اس مساوات کا مخذور لین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $۷ن^۲ + ۱ = ۴ن^۲ + ۴ن ف + ف^۲$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۳ن^۲ - ۴ف ن = ف^۲ - ۱$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$ن^۲ - \frac{۴ف ن}{۳} = \frac{ف^۲ - ۱}{۳}$$ اور حل کرنی سی اس مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوگی یہہ قیمت واسطی ن کے $ن = \frac{۲ف + \sqrt{۷ف^۲ - ۳}}{۳}$ اور بیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ن زیادہ ہی $\frac{۴}{۳}$ ف سی اور اسیواسطی ن زیادہ ہی ق سے اور اسیواسطی فرض کرتے ہین ہم ن = ف + ق اور بیان سے معلوم ہوتا ہی کہ ۳ف + ۳ق = ۲ف + $\sqrt{۷ف^۲ - ۳}$ یا ف + ۳ق = $\sqrt{۷ف^۲ - ۳}$ اور جسوقت مخذور کرین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ف^۲ + ۶ف ق + ۹ق^۲ = ۷ف^۲ - ۳$ اور اس سے حاصل ہوتا ہی یہہ

$۶ف^۲ - ۶ق ف = ۹ق^۲ + ۳$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$ف^۲ - ق ف = \frac{۳ق^۲ + ۱}{۲}$$ اور حل کرنی سی اس مساوات درجہ دوم کی حاصل ہوتی ہی یہہ

مساوات $ف = \frac{ق + \sqrt{۷ق^۲ + ۲}}{۲}$ اور بیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ف زیادہ ہی $\frac{۳ق}{۲}$ سی

اور اسیواسطی ق سے پس فرض کرتے ہین ہم کہ ف = ق + ک اور اسیواسطی ۲ق + ۲ک = ق + $\sqrt{۷ق^۲ + ۲}$ اور ۲ق + ۲ک = $\sqrt{۷ق^۲ + ۲}$ اور جسوقت مخذور کرین ہم دونون طرفون اس مساوات کو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات $۴ق^۲ + ۴ک^۲ + ۸ق ک = ۷ق^۲ + ۲$ یا $۳ق^۲ - ۸ق ک = ۴ک^۲ - ۲$ اور بیان سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۶ق^۲ - ۴ک ق = ۴ک^۲ - ۲$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$ق^۲ - \frac{۴ک ق}{۶} = \frac{۴ک^۲ - ۲}{۶}$$ یا $ق^۲ - \frac{۲ک ق}{۳} = \frac{۲ک^۲ - ۱}{۳}$

اور جسوقت حل کرین ہم اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ق کی ق = $\frac{ک + \sqrt{۷ک^۲ - ۳}}{۳}$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ ق زیادہ ہی کہ سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتی ہین کہ ق = کہ + س اور یہان سی یہہ معلوم ہوتا ہی ۲ کہ + ۳ س = $\sqrt{۷ک^۲ - ۳}$ اور ۴ کہ^۲ + ۱۲ س کہ + ۹ س^۲ = ۷ کہ^۲ - ۳ یا ۳ کہ^۲ - ۱۲ س کہ = ۹ س^۲ + ۳ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات کہ^۲ - ۴ س کہ = ۳ س^۲ + ۱ اور حل کرنی سی اسکو حاصل ہوتا ہی یہہ کہ = ۲ س + $\sqrt{۷س^۲ + ۱}$ پس جسوقت فرض کرین ہم س = ۰ اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات کہ = ۱ اور اسیواسطی ق = ۱ اور ف = ۲ اور ن = ۳ یا $\sqrt{۷ن^۲ + ۱}$ = ۸ عمل مذکورہ بالا کا بہت اختصار ہوسکتا ہی بوسیلہ ترکیب آئندہ کی اور یہہ ترکیب اور مثالون مین بھی جاری ہوسکتی ہی چونکہ $\sqrt{۷ن^۲ + ۱}$ کم ہی ۳ ن سے تو اسی واسطی ہم فرض کرتے ہین کہ $\sqrt{۷ن^۲ + ۱}$ = ۳ ن - ف اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۷ ن^۲ + ۱ = ۹ ن^۲ - ۶ ف ن + ف^۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ ن^۲ - ۶ ف ن = ۱ - ف^۲ اور جسوقت حل کرین گے اس مساوات درجہ دوم کو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ قیمت واسطی ن کی

ن = $\frac{۳ف + ۸\sqrt{۷ف^۲ + ۲}}{۲}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ن کم ہی ۳ ف سی

فرض کرین گے کہ ن = ۳ ف - ق اور جسوقت مجذور کرتی ہین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۹ ف^۲ - ۱۲ ف ق + ۴ ق^۲ = ۷ ف^۲ + ۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ ف^۲ - ۱۲ ف ق = ۲ - ۴ ق^۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ف^۲ - ۶ ق ف = ۱ - ۲ ق^۲ اور جسوقت حل کرتے ہین اس مساوات درجہ دوم کو واسطی حاصل کرنے قیمت ف کی تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ف کی ف = ۳ ق + $\sqrt{۷ق^۲ + ۱}$ اور جسوقت فرض کرتے ہین ہم ق = ۰ اوسوقت ف = ۱ اور اسیواسطی ن = ۳ اور $\sqrt{۷ن^۲ + ۱}$ = ۸ جیسکہ پہلی اب فرض کرکے = ۸ یعنے چاہتے ہین ہم دریافت کرنی کو ئی ایسی قیمت واسطی ن کے کہ صورت ۸ ن^۲ + ۱ کی ایک کامل مجذور ہوجای اس صورت مین ظاہر ہی کہ $\sqrt{۸ن^۲ + ۱}$ کم ہے بہ نسبت ۳ ن کی اور اسیواسطی ہم فرض کرتی ہین کہ $\sqrt{۸ن^۲ + ۱}$ = ۳ ن - ف اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۸ ن^۲ + ۱ = ۹ ن^۲ - ۶ ف ن + ف^۲ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات ن^۲ - ۶ ف ن = ۱ - ف^۲ اور جسوقت حل کرتے ہین اس مساوات

درجہ دویم کو واسطی حل کرنی قیمت آن کے تو حاصل ہوگی یہہ قیمت آن کی ن = ۳ ف + √(۸ ف۲ + ۱)
اور جسوقت ف = ۰ اوسوقت ن = ۱ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطی
√(۸ ن۲ + ۱) کے √(۸ ن۲ + ۱) = ۳ اسیطرح سی ہم اور صورتونمین عمل کرسکتے ہین بشرطیکہ
عدد ط منفی اور مخذور نہو اور اخیر کو ہم حاصل کرینگی ایک ایسی صورت جبریہ √(ط ح۲ + ۱) متشابہ
صورت مفروضہ کے اور اسس صورت مین تاکہ جذر کی علامت دور ہوجاوی ہم فرض کرین گے کہ ح = ۰ اور
بعدازان ہم بہر اولی چلین گے اور قیمتین تمام اون حروف کی جو ہم متواتر فرض کرتے گئی ہے دریافت
کرینگی اور اخیر کو قیمت آن کی معلوم ہوجائیگی اور عمل تمام ہوجائیگا یعنی بذریعہ اسس قیمت آن کی صورت جبریہ
(ط ن۲ + ۱) ایک کامل مخذور ہوجائیگی اسجای واضح ہو کہ بعض اوقات ہمارا مطلب بہت سہولت سے
حاصل ہوجاتا ہی لیکن اکثر ہمین بہت سی عمل کرنی پڑتے ہین عملونکا زیادہ یا کم ہونا موقوف ہی اوپر خواص
عدد ط کی لیکن ہمین ابتک ایسی اصول اور فوائد دریافت نہین ہوئے ہین کہ اونکی ذریعہ سی یہہ بات
پہلی سی معلوم ہوجایا کری کہ اسس مثالمین اتنی عمل کرنی ہونگی واسطی اعداد کی جو کم ہین ۱۳ سی بہت عمل
ضرور نہین ہوتی ہین لیکن جسوقت ط = ۱۳ اوسوقت حساب بہت مشکل اور طویل ہوجاتا ہی اور واسطی
مثال کے اسس حساب کو ہم اسجای سہلکتے ہین فرض کرو ط = ۱۳ یعنی چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایسی
قیمت واسطی آن کے کہ صورت جبریہ ۱۳ ن۲ + ۱ ایک کامل مخذور ہوجاوی اسس صورت مین ظاہر ہی
کہ √(۱۳ ن۲ + ۱) زیادہ ہی ۳ ن سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتی ہین کہ √(۱۳ ن۲ + ۱) = ۳ ن + ف
اور جسوقت مخذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اسس مساوات کو اوسوقت حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۱۳ ن۲ + ۱ =
۹ ن۲ + ۶ ف ن + ف۲ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ ن۲ − ۶ ف ن = ف۲ − ۱
اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ن۲ − (۳/۲) ف ن = (ف۲ − ۱)/۴ اور جسوقت حل کرتے ہین
اسس مساوات درجہ دوم کو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات ن = (۳ ف + √(۱۳ ف۲ − ۴))/۴
اور یہان سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ن زیادہ ہی ۶/۴ ف سی یعنے ن زیادہ ہی ف سی اور اسیواسطی
ہم فرض کرتے ہین کہ ن = ف + ق اور یہان سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ ف + ۴ ق =
۳ ف + √(۱۳ ف۲ − ۴) اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ف + ۴ ق = √(۱۳ ف۲ − ۴)
اور جسوقت مخذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اسس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
ف۲ + ۸ ق ف + ۱۶ ق۲ = ۱۳ ف۲ − ۴ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۱۲ ف۲ − ۸ ق ف = ۱۶ ق + ۴ اور جسوقت تقسیم کرین دونوطرفون اسس مساوات کو عدد ۴ پر

اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات ۳ ف^{۲} − ۲ ق ف = ۴ ق^{۲} + ۱ اور جسوقت حل کرتے ہین اسمساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ف کی ف = $\frac{ق + \sqrt{۱۳ ق^{۲} + ۳}}{۳}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ ق زیادہ ہی $\frac{۲ ق}{۳}$ یعنے ق سے تو فرض کرتے ہین ہم کہ ف = ق + ک اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۳ ق + ۳ ک = ق + $\sqrt{۱۳ ق^{۲} + ۳}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲ ق + ۳ ک = $\sqrt{۱۳ ق^{۲} + ۳}$ اور جسوقت مخذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اسمساوات کو اوسوقت حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱۳ ق^{۲} + ۳ = ۴ ق^{۲} + ۱۲ ک ق + ۹ ک^{۲} اور اسسے یہہ حاصل ہوتا ہی ۹ ق^{۲} − ۱۲ ک ق = ۹ ک^{۲} − ۳ اور اسسے یہہ حاصل ہوتا ہی ۳ ق^{۲} − ۴ ک ق = ۳ ک^{۲} − ۱ اور جسوقت حل کرتے ہین ہم اسمساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ق کی

ق = $\frac{۲ ک + \sqrt{۱۳ ک^{۲} − ۳}}{۳}$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ ق زیادہ ہی

$\frac{۲ ک + ۳ ک}{۳}$ سے یعنی ق زیادہ ہی ک سے تو فرض کرتے ہین ہم کہ ق = ک + س اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۳ ک + ۳ س = ۲ ک + $\sqrt{۱۳ ک^{۲} − ۳}$ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ک + ۳ س = $\sqrt{۱۳ ک^{۲} − ۳}$ اور جسوقت مخذور کرتے ہین ہم دونون طرفون اس مساوات کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ک^{۲} + ۶ س ک + ۹ س^{۲} = ۱۳ ک^{۲} − ۳ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۱۲ ک^{۲} − ۶ س ک = ۹ س^{۲} + ۳ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ ک^{۲} − ۲ س ک = ۳ س^{۲} + ۱ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ک^{۲} − $\frac{س}{۲}$ ک = $\frac{۳ س^{۲} + ۱}{۴}$ اور جسوقت حل کرتے ہین اسمساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ک کی ک = $\frac{س + \sqrt{۱۳ س^{۲} + ۴}}{۴}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ک زیادہ ہی $\frac{س + ۳ س}{۴}$ یعنے زیادہ ہی س سے تو ہم اسیواسطے فرض کرتے ہین کہ ک = س + ع اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ س + ۴ ع = س + $\sqrt{۱۳ س^{۲} + ۴}$ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۳ س + ۴ ع = $\sqrt{۱۳ س^{۲} + ۴}$ اور جسوقت مخذور کرین ہم دونون طرفون اسمساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۹ س^{۲} + ۴ ۲ ع س + ۱۶ ع^{۲} = ۱۳ س^{۲} + ۴ اور اسس سے حاصل ہوتا ہی یہہ ۴ س^{۲} − ۴ ۲ ع س = ۱۶ ع^{۲} − ۴ اور اسس سے یہہ س^{۲} − ۶ ع س = ۴ ع^{۲} − ۱ اور جسوقت حل کرتے ہین اسمساوات درجہ دوم کو اوسوقت

حاصل ہوگی یہہ مساوات س = ۳ع + √(۱۳ع۲ − ۱) اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ س زیادہ ہی ۳ع + ۳ع سے یعنے ۶ع سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین س = ۶ع + ل اور اب حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۶ع + ل = ۳ع + √(۱۳ع۲ − ۱) اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۳ع + ل = √(۱۳ع۲ − ۱) اور اگر مجذور کرین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۹ع۲ + ۶ل ع + ل۲ = ۱۳ع۲ − ۱ اور اس سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ع۲ − ۶ل ع = ل۲ + ۱ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ع۲ − (۳/۲) ل ع = (ل۲ + ۱)/۴ اور جسوقت فرض کرکے ع کو بطور مقدار مجہول کے

حل کرتے ہین ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ع = (۳ل + √(۱۳ل۲ + ۴))/۴ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ ع زیادہ ہی

(۶/۴) ل سے یعنی ل سے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ ع = ل + م اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ل + ۴م = ۳ل + √(۱۳ل۲ + ۴) اور جسوقت نکال ڈالین دونون طرفون اس مساوات سی ۳ل کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ل + ۴م = √(۱۳ل۲ + ۴) اور جسوقت مجذور کرتی ہین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ل۲ + ۸م ل + ۱۶م۲ = ۱۳ل۲ + ۴ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

۱۲ل۲ − ۸م ل = ۱۶م۲ − ۴ اور جسوقت قسمت کرتی ہین دونون طرفون اس مساوات کو عدد ۴ پر تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۳ل۲ − ۲م ل = ۴م۲ − ۱ اور جسوقت مقرر کرکے ل کو بطور مقدار مجہول کے جاری کرین ہم اس مساوات پر قاعدہ مساوات درجہ دوم کا تو حاصل ہوگی یہہ قیمت واسطے ل کے ل = (م + √(۱۳م۲ − ۳))/۳ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا

ہی کہ ل زیادہ ہی (۴م)/۳ سے یعنی زیادہ ہی م سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ

ل = م + لا اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۳م + ۳لا = م + √(۱۳م۲ − ۳)

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات جسوقت کہ نکال ڈالا یعنی م کو دونوطرفون اس مساوات سے

۲م + ۳لا = √(۱۳م۲ − ۳) اور جسوقت مجذور کرین دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل

ہوگی یہہ مساوات ۴م۲ + ۱۲ لام + ۹لا۲ = ۱۳م۲ - ۳ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۹م۲ - ۱۲ لام = ۹لا۲ + ۳ اور جیہ ت متمت کرتی ہین دونوطرفون اسس مساوات کو عدد ۳ پر تو حاصل
ہوتی ہی یہہ مساوات ۳م۲ - ۴ لام = ۳لا۲ + ۱ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
م۲ - $\frac{۴}{۳}$ لام = $\frac{۳لا۲+۱}{۳}$ اور جبوقت حل کرتے ہین اسس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی
یہہ قیمت واسطی م کے م = $\frac{۲لا+\sqrt{۱۳لا۲+۳}}{۳}$ اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوتی
ہی کہ م زیادہ ہی $\frac{۵}{۴}$ لا سے یعنی لا سے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ م = لا + ر
اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۳لا + ۳ر = ۲لا + $\sqrt{۱۳لا۲+۳}$ اور اسس سے
حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا + ۳ر = $\sqrt{۱۳لا۲+۳}$ اور جبوقت مجذور کرتے ہین ہم
دونوطرفون اسس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا۲ + ۶ رلا + ۹ر۲ = ۱۳لا۲+۳ اور
اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۱۲لا۲ - ۶ رلا = ۹ر۲ - ۳ یا ۴لا۲ - ۲ رلا = ۳ر۲ - ۱
اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا۲ - $\frac{۱}{۲}$ ر.لا = $\frac{۳ر۲-۱}{۴}$ اور جبوقت مقرر کرکی لا کو
بطور مقدار مجہول کے حل کرتی ہین ہم اسس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
لا = $\frac{ر+\sqrt{۱۳ر۲-۴}}{۴}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ لا زیادہ تر سی اور اسیواسطی
فرض کرتی ہین ہم کہ لا = ر + د اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ر + ۴د = ر + $\sqrt{۱۳ر۲-۴}$
اور جبوقت دور کرتے ہین ہم دونون طرفون اسس مساوات مین سے مقدار ر کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
۳ر + ۴د = $\sqrt{۱۳ر۲-۴}$ اور جبوقت مجذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اسس مساوات کو تو
حاصل ہوگی یہہ مساوات ۹ر۲ + ۲۴دد + ۱۶د۲ = ۱۳ر۲ - ۴ اور اسس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
۴ر۲ - ۲۴دد = ۱۶د۲ + ۴ اور جبوقت متمت کرتے ہین ہم دونوطرفون اسس مساوات کو عدد ۴ پر
تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ر۲ - ۶دد = ۴د۲ + ۱ اور جبوقت حل کرتے ہین اسس مساوات درجہ دوم
کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ر = ۳د + $\sqrt{۱۳د۲+۱}$ اب ظاہر ہی کہ یہہ صورت اخیر مشابہ ہی
صورت مفروضہ کے اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ د = ۰ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
ر = ۱ پس اب لکھتی ہین ہم قیمتین سب مقدارون کی جو کہ متواتر فرض کی گئی ہین نقشہ ذیل مین

د = ۰	ل = م + لا = ۳	ق = ک + س = ۱۷
ر = ۱	ع = ل + م = ۵	ف = ق + ک = ۱۰۹
لا = ر + د = ۱	س = ۶ع + ل = ۳۳	ن = ف + ق = ۱۸۰
م = لا + ر = ۲	ک = س + ع = ۳۸	$\sqrt{۱۳ن^۲+۱}$ = ۳ن + ف = ۶۴۹

اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ چھوٹی سے چھوٹا عدد جو کہ واسطی ن کے فرض کیا جا سکتا ہی اسکی شرط یہ ہی کہ $\sqrt{۱۳ن^۲+۱}$ ایک کامل مجذور ہو جاوی ۱۸۰ ہی مثال مرقومہ بالا سی یہہ بات خوب واضح ہوتی ہی کہ بعض صورتونمین حساب بہت ہی مشکل اور طویل ہوتا ہی جسیوقت کہ عدد ۱۳ اسی بہی زیادہ ہوتا ہی اوسوقت اکثر دس دفعہ زیادہ عمل کرنے پڑتے ہین بہ نسبت عدد ۱۳ کی چونکہ ہم پہلی سے یہہ بات نہین بتا سکتی ہین کہ کونسی عدد کی واسطی ہمین بہت عمل کرنی پڑیگی تو ہم فائدہ اوٹھا سکتے ہین اور وں کی محنت سی جنہون نے کہ اسی حساب کرکی بہتیری اعداد دریافت کئی ہین واسطی اس مطلب کے اس فصل کی اخیر مین ایک فہرست لگائی گئی ہی اور اوسمین قیمتین ن اور $\sqrt{ط ن^۲+۱}$ اسکے مطابق اون سب قیمتون ط کے جو کہ ۲ سی ۱۰۰ تک واقع ہین اسطرح مرتب کی گئی ہین

یہہ بات بیان کرنی ضرور ہی کہ خاص صورتونمین ہم دریافت کر سکتے ہین بہت سہولت سی قیمتین ن اور $\sqrt{ط ن^۲+۱}$ کی مثلاً جسیوقت کہ ط بہ نسبت کسی عدد مجذور کی بقدر آیا ۲ کی زیادہ یا کم ہوتا ہی اوسوقت ایک عام اور سہل قاعدہ واسطی حصول ہماری مطلب کے مستقل ہی اور یہہ قاعدہ مرقوم آئندہ سی ظاہر ہو جائیگا فرض کرو کہ ط = ی^۲ − ۲ اور چونکہ ضرور ہی کہ ہو وی یہہ مساوات (ی^۲ − ۲) ن^۲ + ۱ = م^۲ = ایک مجذور کی تو یہہ بات ظاہر ہی کہ م کم سی کم ی ن سی اور اسیواسطی ہم فرض کرتے ہین کہ م = ی ن − ف اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات (ی^۲ − ۲) ن^۲ + ۱ = ی^۲ ن^۲ − ۲ ی ن ف + ف^۲ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ی^۲ ن^۲ − ۲ ن^۲ + ۱ = ی^۲ ن^۲ − ۲ ی ن ف + ف^۲ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

۲ ن^۲ − ۲ ی ن ف = ۱ − ف^۲ اور جسیوقت مقرر کرکی ن کو بطور مقدار مجہول کے حل کرتے ہین ہم اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ن کی ن = $\frac{ی ف + \sqrt{ی^۲ ف^۲ - ۲ ف^۲ + ۲}}{۲}$ اور یہان یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ف مساوی ایک کے فرض کیا جاوے تو ن = $\frac{ی + \sqrt{ی^۲ - ۲}}{۲}$ = $\frac{ی + ی}{۲}$ = $\frac{۲ ی}{۲}$ = ی

اور چونکہ $\sqrt{ط ن^۲ + ۱}$ = م اور ط = ی^۲ − ۲ تو معلوم ہوا کہ $\sqrt{(ی^۲ - ۲) ی^۲ + ۱}$ = $\sqrt{ی^۴ - ۲ ی^۲ + ۱}$ = ی^۲ − ۱ پس معلوم ہوا کہ م = ی^۲ − ۱ مثلاً اگر ط = ۲۳ تو ظاہر ہی کہ ی = ۵ اور اسیواسطی م = ۲۵ − ۱ = ۲۴ دلیل اوسکی جو کچھ گذرا ہی اسطرح سی ہی ظاہر ہی

جسوقت کہ ط = ی۲ − ۱ اگر اوسوقت فرض کریں ہم ن = ی تو حاصل ہوگی ہمین یہہ مساوات ط ن۲ + ۱ = م۲ − ۲ ی م + ۱ جو مخدور ہی ی۲ − ۱ کا اب فرض کرو کہ ط = ی۲ − ۱ یعنے فرض کرو ط کو کم بہ نسبت ایک عدد مخذور کے بقدر عدد آ کے پس اب ضرور ہی کہ ہووے یہہ مساوات (ی۲ − ۱) ن۲ + ۱ = م۲ اور بطور گزشتہ کے یہہ بات ظاہر ہی کہ م کم ہی بہ نسبت ی ن کے اور اسیواسطے ہم فرض کرتے ہین کہ م = ی ن − ف اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات (ی۲ − ۱) ن۲ + ۱ = ی۲ ن۲ − ۲ ی ن ف + ف۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ ی ن ف = ۱ − ف۲ اور اگر مقرر کرکے ن کو بطور معدا مجہول کے حل کرین ہم اس مساوات درجہ دوم کو تو حاصل ہوگی یہہ قیمت ن کی ن = ی ف + √(ی۲ ف۲ − ف۲ + ۱) اور اسجای ظاہر ہی کہ علامت خذر کی دور ہوجاویگی اگر فرض کرین ہم ف = ۱ اور اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ مساوات ن = ۲ ی اور م = ۲ ی۲ − ۱ یہی بات اسطرح بہی ظاہر ہی چونکہ ن = ۲ ی اور م = ۲ ی۲ − ۱ تو ط ن۲ + ۱ = ۴ ی۲ − ۴ ی۲ + ۱ = (۲ ی۲ − ۱)۲ یعنے مخذور ۲ ی۲ − ۱ کا مثلاً فرض کرو کہ ط = ۲۴ اور اسیواسطے ی = ۵ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ قیمت ن کی ن = ۱۰ اور ۲۴ ن۲ + ۱ = ۲۴۰۱ = (۴۹)۲ اب فرض کرو کہ ط = ی۲ + ۱ یعنے یہہ کہ ط زیادہ ہی کسی عدد مخذور سے بقدر عدد آ کی اور اس صورتین بہی یہہ بات ضرور ہی کہ (ی۲ + ۱) ن۲ + ۱ = م۲ اور چونکہ اس صورتین م زیادہ ہی ی ن سے تو فرض کرتے ہین ہم کہ م = ی ن + ف اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات (ی۲ + ۱) ن۲ + ۱ = ی۲ ن۲ + ۲ ی ن ف + ف۲ یا یہہ مساوات ی۲ ن۲ + ن۲ + ۱ = ی۲ ن۲ + ۲ ی ن ف + ف۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ن۲ − ۲ ی ن ف = ف۲ − ۱ اور جسوقت حل کرتے ہین اس مساوات کو اوسوقت حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ن کی ن = ی ف + √(ی۲ ف۲ + ف۲ − ۱) اب فرض کرتے ہین ف = ۱ اور موافق اس فرض کی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ن = ۲ ی اور م = ۲ ی۲ + ۱ اور یہی بات ظاہر ہوتی ہی اس سے کہ جسوقت ط = ی۲ + ۱ اور ن = ۲ ی اوسوقت ط ن۲ + ۱ = ۴ ی۲ + ۴ ی۲ + ۱ = (۲ ی۲ + ۱)۲ = ایک مخذور کے مثلاً فرض کرو کہ ط = ۱۷ اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ ی = ۴ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱۷ ن۲ + ۱ = م۲ اور اسیواسطے ن = ۸ اور م = ۳۳ اب فرض کرو کہ ط = ی۲ + ۲ یعنے فرض کرو کہ طا دی ہی بہ نسبت کسی عدد مخذور کی بقدر عدد ۲ کی پس اسصورتین حاصل ہوگی یہہ مساوات (ی۲ + ۲) ن۲ + ۱ = م۲ اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ م زیادہ ہی ی ن سے اور اسیواسطے ہم فرض کرتے ہین کہ م = ی ن + ف اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲ ن۲ − ۲ ی ن ف = ف۲ − ۱ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$ن = \frac{ی ف + ۸ \sqrt{ی^۲ ف^۲ + ۲ ف^۲ - ۲}}{۲}$$ اب فرض کرو کہ ف = ۱ اور ہم اسیواسطے دیا ف کرینگے کہ ن = ی اور م = ی + ۱ یہی بات اور طرحسے بھی ظاہر ہی کسواسطے کہ جسوقت

ط ن^۲ + ۱ = ی^۲ + ۲ ی^۲ + ۱ اور ن = ی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط ن^۲ + ۱ = ی^۲ + ۲ ی^۲ + ۱ = (ی + ۱)^۲ = ایک مجذور کی مثلاً فرض کرو کہ ط = ۱ اپس اسصورت مین ظاہر ہی کہ ی = ۳ اور اسیواسطے صورت جبریہ

۱۱ ن^۲ + ۱ = م^۲ اور اس صورت مین ن = ۳ اور م = ۱۰ اگر ط = ۸۳ تو ضرور ہی کہ ی = ۹ کے

اور اب بھی ۸۳ ن^۲ + ۱ = م^۲ اور اس صورتمین ن = ۹ اور م = ۸۲ سوای خاص صورتون مذکورہ بالا کے

ایک اور بھی خاص صورت نہایت سہل بارنولی نے نکالی ہی اور وہ یہہ ہی جسوقت کہ ہووی ط اس شکل کی ی^۲ ± س کیونکہ اسس صورتمین اگر فرض کرین ن = س تو صورت جبریہ ط ن^۲ + ۱ ہوجاتی ہی

ی^۲ س^۲ ± ۲ س ی + ۱ = (ی س ± ۱)^۲ = ایک مجذور کے مثلاً اگر ی = ۳ اور س = ۱ تو

ی^۲ + ۲ ی = ۹ + ۶ = ۱۵ ∴ ط = ۱۵ اور اس صورتمین اگر فرض کرین ہم کہ ن = س = ۱

تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط ن^۲ + ۱ = ۱۵ × ۱^۲ + ۱ = ۱۵ + ۱ = ۱۶ = م^۲ = ایک عدد مجذور کے

اگر ی = ۶ اور س = ۳ اور ن = ۲ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط = ی^۲ + $\frac{۲ ی}{س}$ ی =

۳۶ + $\frac{۱۲}{۳}$ = ۳۶ + ۴ = ۴۰ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات

ط ن^۲ + ۱ = ۴۰ × ۲^۲ + ۱ = ۴۰ × ۴ + ۱ = ۱۶۱ = (۱۹)^۲ = ایک عدد کی مجذور کی اور اسیواسطے

اور مثالین بھی حل ہوسکتی ہین اب ہم لکھتے ہین وہ فہرست جسکی لکھنے کا ہمنے پہلے اقرار کیا تھا اور اس فہرست

مین قیمتین ط اور ن اور م ط ن^۲ + ۱ یعنے م کی لکھی ہوئی ہین فہرست ذیل مین مندرج ہین مطابق ہر ضعیف

ط کے چھوٹی سی چھوٹی قیمتین عدد ن کی ایسی کہ اونکی ذریعہ سی ط ن^۲ + ۱ کامل مربعہ ہوجاوے

ط	ن	م	ط	ن	م
۲	۲	۳	۱۳	۱۸۰	۶۴۹
۳	۱	۲	۱۴	۴	۱۵
۵	۴	۹	۱۵	۱	۴
۶	۲	۵	۱۷	۸	۳۳
۷	۳	۸	۱۸	۴	۱۷
۸	۱	۳	۱۹	۳۹	۱۷۰

ط ل	ن	م	ط	ن	م
۱۰	۶	۱۹	۲۰	۲	۹
۱۱	۳	۱۰	۲۱	۱۲	۵۵
۹۲	۲	۷	۲۲	۴۲	۱۹۷
۲۳	۵	۲۴	۴۲	۲	۱۳
۴	۱	۵	۴۳	۵۳۱	۳۴۸۲
۲۶	۱۰	۵۱	۴۴	۳۰	۱۹۹
۲۷	۵	۲۶	۴۵	۲۴	۱۶۱
۲۸	۲۴	۱۲۷	۴۶	۳۵۸۸	۲۴۳۳۵
۲۹	۱۸۲۰	۹۸۰۱	۴۷	۷	۴۸
۳۰	۲	۱۱	۴۸	۱	۷
۳۱	۲۷۳	۱۵۳۰	۵۰	۱۶	۹۹
۳۲	۳	۱۷	۵۱	۷	۵۰
۳۳	۴	۲۳	۵۲	۹۰	۶۴۹
۳۴	۶	۳۵	۵۳	۱۱۰۰	۶۶۲۴۹
۳۵	۱	۶	۵۴	۶۶	۴۸۵
۳۷	۱۲	۸۳	۵۵	۱۲	۸۹
۳۸	۶	۳۷	۵۶	۲	۱۵
۳۹	۴	۲۵	۵۷	۲۰	۱۵۱
۴۰	۳	۱۹	۵۸	۲۵۷۴	۱۹۶۰۳
۴۱	۳۲۰	۲۰۴۹	۵۹	۶۹	۵۳۰
۶۰	۴	۳۱	۷۸	۶	۵۳
۶۱	۲۲۱۵۳۹۸۰	۱۷۶۶۳۱۹۰۳۹	۷۹	۹	۸۰
۶۲	۸	۶۳	۸۰	۱	۹
۶۳	۱	۸	۸۲	۱۸	۱۶۳

ط	ن	م	ط	ن	م
۶۵	۱۶	۱۲۹	۸۳	۹	۸۲
۶۶	۸	۶۵	۸۴	۶	۵۵
۶۷	۵۹۶۷	۴۸۸۴۲	۸۵	۳۰۹۹۶	۲۸۵۷۶۹
۶۸	۴	۳۳	۸۶	۱۱۴۲	۱۰۴۰۵
۶۹	۹۳۶	۷۷۷۵	۸۷	۳	۲۸
۷۰	۳۰	۲۵۱	۸۸	۲۱	۱۹۷
۷۱	۴۱۳	۳۴۸۰	۸۹	۵۳۰۰۰	۵۰۰۰۰۱
۷۲	۲	۱۷	۹۰	۲	۱۹
۷۳	۲۶۷۰۰۰	۲۲۸۱۲۴۹	۹۱	۱۶۵	۱۵۷۴
۷۴	۴۳۰	۳۶۹۹	۹۲	۱۲۰	۱۱۵۱
۷۵	۳	۲۶	۹۳	۱۲۶۰	۱۲۱۵۱
۷۶	۶۶۳۰	۵۷۷۹۹	۹۴	۲۲۱۰۶۴	۲۱۴۳۲۹۵
۷۷	۴۰	۳۵۱	۹۵	۴	۳۹
۹۶	۵	۴۹	۹۸	۱۰	۹۹
۹۷	۶۳۷۷۳۵۲	۶۲۸۰۹۶۳۳	۹۹	۱	۱۰

واضح ہو کہ ایک ہمنی چھوٹی سے چھوٹی قیمتین واسطی ن کے دریافت کی ہین کہ جسکی ذریعہ سی صورت حرۃ ط ن + ۱ ایک کامل مجذور ہوجاوی لیکن اس جایہ یہہ بھی واضح ہو کہ بذریعہ ان چھوٹے قیمتون کی ہم دریافت کرسکتے اور قیمتین بہی مثلاً ہمنے پہلی دریافت کیا ہی کہ اگر ن مساوی فرض کیا جاوی ۲ کی تو صورت ۲ ن + ۱ ایک کامل مجذور ہوجاتی ہی اور یہہ بات ہمنی بعد فرض کرنے دو مقدار دن ق اور ق کے دریافت کی ہی اور اخیر کی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی ف = ق + √(۲ ق² + ۱) اور اسمین ق کو صفر فرض کیا تہا اور اس ترکیب سی کم قیمت واسطی ن کے حاصل کی ہی پس اگر ہم ق کو صفر تو فرض نکرین لیکن کوئی اور مقدار جو ایسی ہو کہ کامل مربعہ ہوجاوی تو ہمین ایک اور قیمت واسطی ن کے حاصل ہوجاویگی ایسی کہ اوسکی ذریعہ سے صورت ۲ ن + ۱ ایک کامل مجذور ہوجاویگی لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ جسکی وسیلہ سی صورت ۲ ن + ۱ کامل مجذور ہوجاتی ہی اوسی قیمت ق کی ذریعہ سے صورت ۲ ق² + ۱ کامل مجذور ہوجاویگی کیونکہ دونو

صورتون کی ایک ہی شکل ہی پس اب فرض کرو کہ ق = ۲ اور اسسے واسطی حاصل ہوگی

یہہ مساوات ف = ۲ + $\sqrt{۲ \times ۲^۲ + ۱}$ = ۲ + $\sqrt{۱ + ۴ \times ۲}$ = ۲ + $\sqrt{۱ + ۸}$ =

۲ + $\sqrt{۹}$ = ۲ + ۳ = ۵ اور چونکہ ن دریافت ہوا تھا مساوی اسس صورت کی

ف + $\sqrt{۲ ق^۲ - ۱}$ اور اسسے واسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ن = ۵ + $\sqrt{۲ \times ۵^۲ - ۱}$ =

۵ + $\sqrt{۲ \times ۲۵ - ۱}$ = ۵ + $\sqrt{۵۰ - ۱}$ = ۵ + $\sqrt{۴۹}$ = ۵ + ۷ = ۱۲ پس معلوم ہوا

کہ دوسری قیمت سوای ۲ کی واسطی ق کے ۱۲ ہی ایسی کہ اوسکی ذریعہ سی صورت $۲ ن^۲ + ۱$ کا مل مجذور

ہوجاتی ہی اور اسکا امتحان یون ہوتا ہی م = $\sqrt{۲ ن^۲ + ۱}$ = $\sqrt{۲ \times ۱۲^۲ + ۱}$ =

$\sqrt{۲ \times ۱۴۴ + ۱}$ = $\sqrt{۲۸۸ + ۱}$ = $\sqrt{۲۸۹}$ = ۱۷ اب اگر تیسری قیمت واسطے

ن کی دریافت کیا چاہین تو فقط یہہ لازم ہی کہ لکھین ۱۲ کو واسطی ق کی مساوات ف = ق + $\sqrt{۲ ق^۲ + ۱}$

اور بعد ازان جو کچھہ قیمت اسس مساوات سی واسطی ق کے حاصل ہو لکھین اوسی بجای ق کی مساوات

ن = ف + $\sqrt{۲ ق^۲ - ۱}$ مین اور جو کچھہ قیمت واسطی ق کے اس مساوات سی حاصل ہوگی وہ قیمت

مطلوبہ ہوگی مثلاً جسوقت لکھین واسطی ق کے عدد ۱۲ کا مساوات ف = ق + $\sqrt{۲ ق^۲ + ۱}$

مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ف = ۱۲ + $\sqrt{۲ \times ۱۲^۲ + ۱}$ = ۱۲ + $\sqrt{۲ \times ۱۴۴ + ۱}$ = ۱۲ +

$\sqrt{۲۸۸ + ۱}$ = ۱۲ + $\sqrt{۲۸۹}$ = ۱۲ + ۱۷ = ۲۹ پس اب لکھو عدد ۲۹ کو بجاے

ف کے مساوات ن = ف + $\sqrt{۲ ف^۲ - ۱}$ کی تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

ن = ۲۹ + $\sqrt{۲ \times ۲۹^۲ - ۱}$ = ۲۹ + $\sqrt{۲ \times ۸۴۱ - ۱}$ = ۲۹ ± $\sqrt{۱۶۸۲ - ۱}$ =

۲۹ + $\sqrt{۱۶۸۱}$ = ۲۹ + ۴۱ = ۷۰ اور اسسیطرح سے جو تیسری قیمت واسطی ق کے حاصل

ہوسکتی ہی مثلاً جسوقت لکھی ۷۰ واسطی ق کے مساوات ن = ق + $\sqrt{۲ ق^۲ + ۱}$ مین تو

حاصل ہوگی یہہ قیمت ف کی ف = ۷۰ + $\sqrt{۲ \times ۷۰^۲ + ۱}$ = ۷۰ + $\sqrt{۲ \times ۴۹۰۰ + ۱}$ =

۷۰ + $\sqrt{۹۸۰۰ + ۱}$ = ۷۰ + $\sqrt{۹۸۰۱}$ = ۷۰ + ۹۹ = ۱۶۹ اور

جسوقت لکھین اس قیمت ف کو بجاے اوسکی مساوات ن = ف + $\sqrt{۲ ف^۲ - ۱}$ مین تو

ن = ۱۶۹ + $\sqrt{۲ \times ۱۶۹^۲ - ۱}$ = ۱۶۹ + $\sqrt{۵۷۱۲۲ - ۱}$ = ۱۶۹ + $\sqrt{۵۷۱۲۱}$

= ۱۶۹ + ۲۳۹ = ۴۰۸ اور یہان معلوم ہوتا ہی کہ چار متواتر قیمتین ن کی یہ ہین

۲ ۱۲ ۷۰ ۴۰۸ اور اور قیمتین اسسیطرح سی معلوم ہوسکتی ہین جسطرح سی کہ مختلف قیمتین ن کی مطابق

قیمت ۲ ط کی دریافت ہوسکتی ہین اوسیطرح سی مختلف قیمتین ن کی مطابق کسی اور قیمت ط کے دریافت

ہوسکتی ہین ہم لکھین گے ایک اور مثال تکھنا چاہتے ہین ہم دریافت کرنی ایک اور قیمت ن کی سوائے ۱۸۰ کے جو سابق مین دریافت کی گئی ہی جس سے کہ صورت ۱۳ ن۲ + ۱ کامل مجذور ہوجاوی واسطی اس مطلب کی ہم لکھتی ہین اسجاے تمام مساواتین جو پہلی ثابت کی گئی ہین ویسے مساواتین سیے ہین

$$ز = ۳د + ۸\sqrt{۱۳د۲ + ۱} \quad \text{اور} \quad لا = \frac{ز + ۸\sqrt{۱۳ز۲ - ۴}}{۴} \quad \text{اور} \quad ک = \frac{۲لا + ۸\sqrt{۱۳لا۲ + ۳}}{۳}$$

$$\text{اور} \quad ل = \frac{ک + ۸\sqrt{۱۳ک۲ - ۳}}{۳} \quad \text{اور} \quad ع = \frac{۳ل + ۸\sqrt{۱۳ل۲ + ۴}}{۴} \quad \text{اور}$$

$$س = ۳ع + ۸\sqrt{۱۳ع۲ - ۱} \quad \text{اور} \quad م = \frac{س + ۸\sqrt{۱۳س۲ + ۴}}{۴} \quad \text{اور}$$

$$ق = \frac{۲م + ۸\sqrt{۱۳م۲ - ۳}}{۳} \quad \text{اور} \quad ف = \frac{ق + ۸\sqrt{۱۳ق۲ + ۳}}{۳} \quad \text{اور}$$

$$ن = \frac{۳ف + ۸\sqrt{۱۳ف۲ - ۴}}{۴}$$ اب فرض کرو کہ د = ۱۸۰ اور اسیواسطی جسوقت لکھین ہم یہہ قیمت د کی مساوات اول مین توحاصل ہوگی یہہ مساوات ز = ۳۶۰ + ۸√(۱۳ × (۱۸۰)۲ + ۱) = ۶۴۹۵۴۰ + ۱ = ۱۱۸۹ اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ز کو مساوات دوسری مین توحاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی

$$لا = \frac{۱۱۸۹ + ۸\sqrt{۱۳ × (۱۱۸۹)۲ - ۴}}{۴}$$ اور جو قیمت لا کی اس مساوات

سی حاصل ہوگی لکھین گے ہم اوسی مساوات تیسری مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ک کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ک کو مساوات چوتھی مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ل کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت کو مساوات پانچوین مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ع کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ع کو مساوات چھٹی مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت س کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت س کو مساوات ساتوین مین تو حاصل ہوگی ہمین قیمت م کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت م کو مساوات اٹھوین مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ق کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ق کو مساوات نوین مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ف کی اور جسوقت لکھین گے ہم اس قیمت ف کو مساوات

سوین مین تو اوسوقت حاصل ہوگی ہمین قیمت ق کی پس ان کمی عملون سے حاصل ہوتی ہی دوسری
ق کی اور اگر پھر کی جائین اتنی عمل تو حاصل ہوگی ہمین تیسری قیمت ق کی اور علی ہذا القیاس اور قیمتین بھی اسیطرح
سی حاصل ہوسکتی ہین اسجای ہمنی ساری عمل نہین ہلکے کسواسطی کہ اوسمین کچھ مشکل بات نہین ہی
سوای کچھ مشقت کی جو عملون ضرب اور تقسیم اور جذر کی مین ضرور ہوتی ہی

فصل چوتھے بیچ بیان سوالات مجذورون کے

سوال آئندہ بہت دلچسپ اور مفید ہین اونکی حل کرنی سے بڑی قوت عملون جبریہ مین حاصل ہوتی ہی اور
ہر واحد اونمین کا بطور ایک شکل تحریر اقلیدس کے ہی کہ اوسکی حل کرنی یا ثابت کرنی کی واسطی کوئی قاعدہ عام
وضع نہین ہی بلکہ ہر صورتمین عقل اور ذہن کو کام مین لانا ہوتا ہی واضح ہو کہ یہ سوالات غیر منقطع ہوتے
ہین کسواسطی کہ اونکی واسطی کئی جواب ہوسکتی ہین

سوال ۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ خواہ اوسپر عدد ایک کا زیادہ کرین
خواہ اوسمین سی اوسی عدد کو تفریق حاصل جمع اور حاصل تفریق دونو اعداد مجذور ہوتے ہین پس
فرض کرو کہ لا ہی عدد مطلوبہ اور موافق شرط سوال کی یہہ بھی فرض کرو کہ لا + ۱ = ن۲ اور
اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا = ن۲ - ۱ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
لا - ۱ = ن۲ - ۲ لیکن موافق دوسری شرط سوال کی لا - ۱ یعنی اوسکا مساوی ن۲ - ۲
ایک مجذور ہونا چاہئی چونکہ اسجای یہہ بات ظاہر ہی کہ جذر ن۲ - ۲ کا ن سی کم ہی تو فرض کرو کہ
√(ن۲ - ۲) = ن - ق اور جسوقت مجذور کرین دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات
ن۲ - ۲ = ن۲ - ۲ ق ن + ق۲ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ن کی

$$ن = \frac{ق^۲ + ۲}{۲ ق}$$ اور چونکہ لا = ن۲ - ۱ اور

$$ن^۲ = \left(\frac{ق^۲ + ۲}{۲ ق}\right)^۲ = \frac{ق^۴ + ۴ ق^۲ + ۴}{۴ ق^۲}$$ تو معلوم ہوا کہ

$$لا = ن^۲ - ۱ = \frac{ق^۴ + ۴ ق^۲ + ۴}{۴ ق^۲} - ۱ = \frac{ق^۴ + ۴}{۴ ق^۲}$$ اور اسجای قیمت

ق کی کچھی فرض کی جاسکتی ہی خواہ اعداد صحیح خواہ کسور لیکن چونکہ کسور بہ نسبت اعداد صحیح کی عام ہین
یعنی عدد صحیح ایک کسور کی شکل سی تعبیر ہوسکتا ہی اور عکس اسکا نہین ہوتا ہی یعنی ایک کسر بشکل عدد

صحیح کی نہین لکھی جاسکتی ہین تو ہم فرض کرینگی کہ ق = $\frac{ر}{س}$ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہین یہ مساوائین

$ق^۲ = \frac{ر^۲}{س^۲}$ اور $۴ق^۲ = \frac{۴ر^۲}{س^۲}$ اور $ق^۴ = \frac{ر^۴}{س^۴}$ پس جسوقت لکھینگے

ہم یہ قیمتین مساوات لا کی مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$لا = \frac{\frac{ر^۴}{س^۴} + ۴}{\frac{۴ر^۲}{س^۲}} = \frac{\frac{ر^۴ + ۴س^۴}{س^۴}}{\frac{۴ر^۲}{س^۲}} = \frac{س^۲}{۴ر^۲} \times \frac{ر^۴ + ۴س^۴}{س^۴}$$

$$= \frac{ر^۴ + ۴س^۴}{۴ر^۲ س^۲}$$ اب اگر فرض کیے جائین کوئی اعداد واسطی حروف ر اور س کے تو حاصل

ہونگی ایسی قیمتین واسطی لا کی کہ اونکی ذریعہ سی جو قیمتین لا کی حاصل ہونگی ویسے ایسی ہونگی کہ اگر اون پر عدد ایک کا زیادہ کرین یا اونمین سی اسی عدد کو تقسیم کرین تو دونون اعداد مجذور حاصل ہونگی مثلاً فرض کرو کہ $\frac{ر}{س}$ مساوی ہی متواتر ان قیمتون یا اعداد کے

$\frac{ر}{س} = \frac{۱}{۱}$	$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۱}$	$\frac{۴}{۱}$
$لا = \frac{۵}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۶۵}{۱۶}$	$\frac{۸۵}{۳۶}$	$\frac{۶۵}{۱۶}$

اور امتحان اس بات کا کہ یہ قیمتین لا کی مجذور ہوجاتی ہین جسوقت کہ اونپر عدد آ کا زیادہ کیا جاتا ہے یا جسوقت کہ اونمین سی عدد ایک تقسیم کیا جاتا ہی یون ہوتا ہی

$\frac{۵}{۴} + ۱ = \frac{۹}{۴} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲$ اور $\frac{۹}{۴} + ۱ = \frac{۱۳}{۴}$ اور

$\frac{۶۵}{۱۶} + ۱ = \frac{۸۱}{۱۶} = \left(\frac{۹}{۴}\right)^۲$ اور $\frac{۸۵}{۳۶} + ۱ = \frac{۱۲۱}{۳۶} = \left(\frac{۱۱}{۶}\right)^۲$

اور اسیطرح سے $\frac{۵}{۴} - ۱ = \frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$ اور $\frac{۶۵}{۱۶} - ۱ = \frac{۴۹}{۱۶} = \left(\frac{۷}{۴}\right)^۲$

اور $\frac{۸۵}{۳۶} - ۱ = \frac{۴۹}{۳۶} = \left(\frac{۷}{۶}\right)^۲$

۲ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ اگر اوسپر کوئی سی دو عدد مثل ۴ اور ۷ کے زیادہ کرین تو حاصل جمع دو تو صورتین مجذور ہوتا ہی پس موافق شرایط سوال کیے دو تو صورتین $لا + ۴$ اور $لا + ۷$ مجذور ہونی چاہئین اور اسیواسطی فرض کرو کہ $لا + ۴ = ن^۲$ اور اسسے حاصل ہوتا ہی یہہ $لا = ن^۲ - ۴$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا + ۷ = ن^۲ + ۳$ اور چونکہ یہہ صورت اخیر بھی مجذور ہونی چاہیے تو فرض کرو کہ اسکا جذر $ن + ق$ ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $ن^۲ + ۳ = ن + ق$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ قیمت ن کی $= \frac{۳ - ق^۲}{۲ ق}$ اور چونکہ $لا + ۷ = ن^۲ + ۳$ تو اسیواسطی $لا = ن^۲ - ۴$ اور چونکہ

$ن^۲ = \left(\frac{۳ - ق^۲}{۲ ق}\right)^۲ = \frac{۹ - ۶ ق^۲ + ق^۴}{۴ ق^۲}$ تو اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ قیمت واسطے

تو کے $لا = ن^۲ - ۴ = \frac{۹ - ۶ ق^۲ + ق^۴}{۴ ق^۲} - ۴ = \frac{۹ - ۲۲ ق^۲ + ق^۴}{۴ ق^۲}$

اور اگر فرض کرین کوئی کسر واسطے ق کے مثل $\frac{ر}{س}$ کی تو حاصل ہوگے یہہ مساوات

$$لا = \frac{۹ - \frac{۲۲ ر^۲}{س^۲} + \frac{ر^۴}{س^۴}}{\frac{۴ ر^۲}{س^۲}}$$ یعنی حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا = \frac{۹ س^۴ - ۲۲ ر^۲ س^۲ + ر^۴}{۴ ر^۲ س^۲}$

اور اسسل مساوات مین کوئی اعداد واسطی ر اور س کے فرض کیے جاسکتے ہین مثلاً اگر فرض کرین ہم $ر = ۱$ اور $س = ۱$ تو حاصل ہوگی ہین یہہ قیمت واسطی لا کے $لا = -۳$ اور اسیواسطی $لا + ۴ = ۱$ عدد مجذور دیکے اور $لا + ۷ = ۴$ مجذور کی لیکن اگر چاہین ہم دریافت کرنی اعداد مثبت واسطی لا کی تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم کہ $س = ۲$ اور $ر = ۱$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا = \frac{۵۷}{۱۶۲}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہین یہہ مساواتین $لا + ۴ = \frac{۵۷}{۱۶} + ۴ = \frac{۱۲۱}{۱۶} = \left(\frac{۱۱}{۴}\right)^۲ =$ ایک عدد مجذور کے اور $لا + ۷ = \frac{۵۷}{۱۶} + ۷ = \left(\frac{۱۳}{۴}\right)^۲ =$ ایک عدد مجذور کی اور اگر فرض کرین ہم $س = ۳$ اور $ر = ۱$ تو اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا = \frac{۱۳۳}{۹}$ اور اسسے یہہ حاصل ہوتا ہے

لا + ۴ = $\frac{۱۳۳}{۹}$ + ۴ = $\frac{۱۶۹}{۹}$ = $\left(\frac{۱۳}{۳}\right)^۲$ = عدد مجذور کے اور

لا + ۷ = $\frac{۱۳۳}{۹}$ + ۷ = $\frac{۱۹۶}{۹}$ = $\left(\frac{۱۴}{۳}\right)^۲$ = عدد مجذور کے اگر ہم چاہیں کہ ایسے عدد

اوس صورت جبریہ کا جو قیمت لا کو تغیر کرتی ہی زیادہ ہو جاوے اوسکی وسط کی جزسی تو لازم ہی کہ فرض کریں ہم کہ ر = ۵ اور

س = ۱ اور اوس صورت مین حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی لا = $\frac{۲۱}{۲۵}$ اور اوس سے حاصل ہوتی ہین یہ مساوات

لا + ۴ = $\frac{۲۱}{۲۵}$ + ۴ = $\frac{۱۲۱}{۲۵}$ = $\left(\frac{۱۱}{۵}\right)^۲$ = ایک عدد مجذور کے اور

لا + ۷ = $\frac{۲۱}{۲۵}$ + ۷ = $\frac{۱۹۶}{۲۵}$ = $\left(\frac{۱۴}{۵}\right)^۲$ = ایک عدد مجذور کے

۳ دریافت کیا چاہتے ہین ایک ایسی کسر کہ اگر اوسی زیادہ کریں عدد آیر یا اوسی تفریق کر اسی عدد آیں سے تو حاصل جمع اور حاصل تفریق دو نو مجذور ہو وین فرض کر کہ کسر مطلوبہ لا ہی پس موافق شرایط سوال کے ضرور ہی کہ ہو وین صورتین جبریہ ۱ + لا اور ۱ − لا دو نون مجذور اور اسیواسطی فرض کرو کہ ۱ + لا = ف^۲ اور اوس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا = ف^۲ − ۱ اور ۱ − لا = ۲ − ف^۲ اور موافق شرط سوال کے لازم ہی کہ ۲ − ف^۲ بھی ایک مجذور ہو اب چونکہ یہہ بات ظاہر ہی کہ جذر ہر واحد دو جزدن اوس صورت جبریہ کا نہین نکل سکتا ہی تو لازم ہی کہ دریافت کرین ہم ایک ایسی صورت جسمین کہ صورت مفروض مجذور ہو جاوے اور یہہ بات حاصل ہوتی ہی جسوقت کہ ہو وی ف = ۱ کیونکہ اوس حالت مین ۲ − ف^۲ = ۲ − ۱ = ۱ تو فرض کر سکتے ہین ہم کہ ف = ۱ − ق اور اسیواسطی حاصل ہوئے یہہ مساوات لا = ق^۲ − ۲ق اور ۲ − ف^۲ = ۱ + ۲ق − ق^۲ اور فرض کرو کہ جذر اوس صورت کا یہہ ہی ۱ − ق ر اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱ + ۲ق − ق^۲ = ۱ − ۲ق ر + ق^۲ ر^۲ اور اوس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ − ق = − ۲ ر + ق ر^۲ اور اوس سے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت ق کی

ق = $\frac{۲ر + ۲}{ر^۲ + ۱}$ اور اسیواسطی لا = $\frac{۴ر − ۴ر^۲}{(ر^۲ + ۱)^۲}$ اور چونکہ ر ایک کسر ہی تو فرض کرو کہ ر = $\frac{ط}{ع}$

اور اب حاصل ہوگی یہہ مساوات لا = $\frac{۴ط ع^۳ − ۴ ط^۳ ع}{(ط^۲ + ع^۲)^۲}$ = $\frac{۴ط ع (ع^۲ − ط^۲)}{(ط^۲ + ع^۲)^۲}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہے

کہ ع زیادہ ہی بہ نسبت ط کی پس اسیوا سطی فرض کرو کہ ع = ۲ اور ط = ۱ اور اسصورت مین حاصل ہوگے
یہہ قیمت لا کی لا = $\frac{۲۴}{۲۵}$ اب فرض کرو کہ ع = ۳ اور ط = ۲ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات
لا = $\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$ اور اسیوا سطی حاصل ہوگی یہ مساوات

۱ + لا = $\frac{۲۸۹}{۱۶۹}$ اور ۱ − لا = $\frac{۴۹}{۱۶۹}$ اور یہہ دونون مجذور ہین کیونکہ ایسے

کہ $\frac{۲۸۹}{۱۶۹} = \left(\frac{۱۷}{۱۳}\right)^۲$ اور $\frac{۴۹}{۱۶۹} = \left(\frac{۷}{۱۳}\right)^۲$

۴ ہم دریافت کیا چاہتے ہین ایک عدد مثل لا کی ایسا کہ خواہ اوسسے عدد ۱۰ پر زیادہ کرین
اور خواہ اوسی عدد ۱۰ مین سے تفریق کرین دو نوصورتونمین حاصل جمع اور حاصل تفریق اعداد مجذور ہوتے
ہین پس اس صورت مین ضرور ہی کہ کوئی ایسا عدد لا کی واسطی مقرر کرین کہ صورتین ۱۰ + لا اور ۱۰ − لا دونون
مجذور ہو جائین یہہ سوال حل ہو سکتا ہی بذریعہ اوسس ترکیب کہ سوال گذشتہ مین لکھی گئی ہی لیکن اسجایے
ہم ایک اور ترکیب اسکی حل کرنی سیکھ بیان کرینگی یہہ بات بہت ظاہر ہی کہ حاصل ضرب دو مجذور دونگا مجذور ہوتا
ہی اور اگر ۱۰ + لا اور ۱۰ − لا مجذور ہون تو ضرور ہی کہ حاصل ضرب انکا یعنی (۱۰ + لا) (۱۰ − لا)
یعنے ۱۰۰ − لا^۲ مجذور ہونا چاہیئے اب چونکہ اول جزا اس صورت کا مجذور ہی تو ہم فرض کر سکتے ہین کہ جذر
۱۰۰ − لا^۲ کا ۱۰ − ف لا ہی اور موافق اسس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

۱۰۰ − لا^۲ = ۱۰۰ − ۲۰ ف لا + ف^۲ لا^۲ اور جسوقت مجذور کرینگے دونون طرفون اس مساوات کو تو حاصل
ہوگی یہہ مساوات ۱۰۰ − لا^۲ = ۱۰۰ − ۲۰ ف لا + ف^۲ لا^۲ اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات
ف^۲ لا + لا = ۲۰ ف اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ لا = $\frac{۲۰ ف}{ف^۲ + ۱}$ اور یہان سی یہہ بات ثابت
ہوتی ہی کہ اگر فرض کیجای واسطی لا کے ایک ایسی قیمت جو اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی تو حاصل ضرب
۱۰۰ − لا^۲ ایک عدد مجذور ہو جائیگا لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ایک جزا جزا حاصل ضرب مذکور کا مجذور کا ہو جائے
تو ضرور ہی کہ دوسرا جزا بھی مجذور ہو جائے اور یہین واسطی لا کی ایک ایسی قیمت دریافت کرنی ہی کہ جسکے
ذریعہ سی دونون صورتین ۱۰ + لا اور ۱۰ − لا مجذور ہو جائین پس اب دریافت کرنی ہی ایک ایسی قیمت
واسطی لا کی کہ ایک ان صورتونمین سے مثلاً ۱۰ + لا کی مجذور ہو جای اب ظاہر ہی کہ

۱۰ + لا = ۱۰ + $\frac{۲۰ ف}{ف^۲ + ۱}$ = $\frac{۱۰ ف^۲ + ۲۰ ف + ۱۰}{ف^۲ + ۱}$ = $\frac{۱۰ (ف^۲ + ۲ ف + ۱)}{ف^۲ + ۱}$

اور چونکہ $ف^۲ + ۲ف + ۱$ ایک مجذور ہی تو باقی رہا ہمین یہہ کہ دریافت کرین ہم کوی ایسی قیمت واسطے لا کے جسکے دریعہ سے صورت $\frac{۱۰}{ف^۲ + ۱}$ یا $\frac{۱۰ف^۲ + ۱۰}{(ف^۲ + ۱)^۲}$ ایک مجذور ہو جاے

اور چونکہ نفاس کسر کا بہی ایک مجذور ہی تو باقی رہا ہمین مجذور بنانا $۱۰ف^۲ + ۱۰$ کا اسجاے ضرور ہے کہ دریافت کرین ہم ایک خاص ایسی صورت جسمین $۱۰ف^۲ + ۱۰$ ایک عدد مجذور ہو جاے اور یہہ اوسوقت ہوتا ہی جب کہ $ف = ۳$ کیونکہ موافق اسس فرض کے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$۱۰ف^۲ + ۱۰ = ۹۰ + ۱۰ = ۱۰۰ = (۱۰)^۲$ فرض کرسکتی ہین ہم $ف = ۳ + ق$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $۱۰۰ + ۶۰ق + ۱۰ق^۲ = ۱۰ف^۲ + ۱۰$ اب فرض کرو کہ جذر صورت $۱۰۰ + ۶۰ق + ۱۰ق^۲$ کا یہہ ہی $۱۰ + قع$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات

$۱۰۰ + ۶۰ق + ۱۰ق^۲ = ۱۰۰ + ۲۰قع + ق^۲ع^۲$ اور اسسے حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ق = \frac{۶۰ - ۲۰ع}{ع^۲ - ۱۰}$ اور اسکے ذریعہ سے ہمین قیمت $۳ + ق$ یعنے ف کی معلوم ہو جاگی اور بوسیلہ اسس قیمت ف کے معلوم ہو جاگی ہمین قیمت لا کی اسس مساوات سے $لا = \frac{۲۰ف}{ف^۲ + ۱}$ فرض کرو کہ $ع = ۲$ اور موافق اسس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات $ق = ۰$ اور $ف = ۳$ اور اسیواسطے $لا = ۶$ اور اسیواسطے صورت $۱۰ + لا = ۱۰ + ۶ = ۴^۲$ یا $۱۰ - لا = ۴$ ایک مجذور لیکن اگر $ع = ۱$ تو حاصل ہونگی یہ مساواتین $ق = -\frac{۴۰}{۹}$ اور $ف = \frac{۱۳}{۹}$ اور بذریعہ اسس قیمت ف کے حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی $لا = \frac{۲۳۴}{۲۵}$ اور اسسے حاصل ہوتی ہین یہہ مساواتین

$۱۰ + لا = ۱۰ + \frac{۲۳۴}{۲۵} = \frac{۴۸۴}{۲۵} = \left(\frac{۲۲}{۵}\right)^۲$ اور

$۱۰ - لا = ۱۰ - \frac{۲۳۴}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} = \left(\frac{۴}{۵}\right)^۲$ پس معلوم ہوا کہ دونون

صورتین مجذور ہین

۵ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد کہ جو اوسپر خواہ اوسکی مجذور پر عدد ایک کا زیادہ کرین تو دونو صورتون مین حاصل جمع مجذور ہوتا ہی فرض کرو کہ لا عدد مطلوبہ ہے پس موافق شرایط سوال کے ضرور ہی کہ ہو دے یہہ مساوات $لا + ۱ = ف^۲$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا = ف^۲ - ۱$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا^۲ = ف^۴ - ۲ف^۲ + ۱$ اب

$لا^۲ + ۱ = ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲$ اور چونکہ موافق شرط سوال کے ضرور ہی کہ ہووے $لا^۲ + ۱$ ایک کامل مربع تو ضرور ہی کہ $ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲$ ایک کامل مجذور ہووے اسلئے یہہ بات ظاہر ہی کہ اگر ہووے $ف = ا$ تو صورت $ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲$ مجذور ہو جائیگی پس فرض کرو کہ $ف = ا + ق$ اور جسوقت لکھینگے ہم یہہ قیمت $ف$ کی بجائے اوسکی صورت مذکور الصدر میں تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا^۲ + ۱ = ف^۴ - ۲ف^۲ + ۲ =$

$۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴$ پس اب ضرور ہی کہ صورت اخیر مجذور ہووے اور اوسکو مجذور کرنی کی سیکڑے ترکیبیں ہین مثلاً فرض کرو کہ جذر اس صورت کا $۱ + ق^۲$ ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

$۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ = ۱ + ق^۲$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اس مساوات کو اوسوقت حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ = ۱ + ۲ق^۲ + ق^۴$ اور اس سے حاصل ہوئی ہی یہہ مساوات $۲ق^۲ + ۴ق^۳ = ۰$ یعنی $۲ق = -۱$ اور $ق = -\frac{۱}{۲}$ اور اسی واسطے

$ف = ق + ۱ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ اور $لا = -\frac{۳}{۴}$ اور

$لا^۲ + ۱ = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} = (\frac{۱}{۲})^۲$ اور $لا^۲ + ۱ = (-\frac{۳}{۴})^۲ + ۱ = \frac{۹}{۱۶} + ۱ = \frac{۲۵}{۱۶} = (\frac{۵}{۴})^۲$ اب فرض کرو کہ جذر اس صورت جبریہ کا

$۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴$ یہہ ہی $۱ - ق^۲$ اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

$۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ = ۱ - ق^۲$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ = ۱ - ۲ق^۲ + ق^۴$ اور اس مساوات سے حاصل ہوئی ہی یہہ مساوات $۶ق^۲ + ۴ق^۳ = ۰$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۳ = -۲ق$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ق = -\frac{۳}{۲}$ اور اسیواسطی

$ف = ۱ + ق = ۱ - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۲}$ اور $لا = ف^۲ - ۱ = \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۴}$

جیسیکہ پیشتر اب فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا $۱ + ۲ق + ق^۲$ ہی اور موافق اس فرض کے ظاہر ہی کہ اول دو ردو اخیر کی اجزاء صورت مذکور کی زائل ہو جائینگی پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات

$۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ = ۱ + ۲ق + ق^۲$ اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونوطرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۱ + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴ =$

$(۱ + ۲ق)^۲ + ۲ق^۲ (۱ + ۲ق) + ق^۴ = ۱ + ۴ق + ۴ق^۲ + ۴ق^۳ + ق^۴$ اور یہانسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۴ق + ۲ق^۲ = ۰$ اور یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ $ق = -۲$ اور $ف = -۱$ اور $لا = ۰$ اب فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا $۱ - ۲ق - ق^۲$ ہی اور اس صورت مین حاصل ہوگی یہہ

مساوات ۱ + ۴ ق۲ + ۴ ق۳ + ق۴ = ۱ − ۴ ق + ۲ ق۲ + ۴ ق۳ + ق۴ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ق = −۲ جسیکہ پہلی آپ فرض کرو کہ جذر صورت مذکور کا ۱ + ۲ ق۲ ہی اور اب حاصل ہوتے ہی یہہ مساوات ۱ + ۴ ق۲ + ۴ ق۳ + ق۴ = ۱ + ۴ ق۲ + ۴ ق۳ + ۴ ق۴ اور یہاں سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ق = $\frac{۴}{۳}$ اور ∴ ف = $\frac{۷}{۳}$ اور لا = $\frac{۴۹}{۹}$ − ۱ = $\frac{۴۰}{۹}$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ

مساواتین لا + ۱ = $\frac{۴۰}{۹}$ + ۱ = $\frac{۴۹}{۹}$ = $(\frac{۷}{۳})^۲$ اور لا۲ + ۱ =

$(\frac{۴۰}{۹})^۲ + ۱ = \frac{۱۶۰۰}{۸۱} + ۱ = \frac{۱۶۸۱}{۸۱} = (\frac{۴۱}{۹})^۲$

۶ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی اعداد کا کہ اگر دو دو کو اونمین سے اسیمین ضرب کرین اور حاصل ضربون پر عدد ایک کا علیحدہ علیحدہ زیادہ کرین تو تینون صورتون مین اعداد مخجذور حاصل ہون فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا اور ر اور ع ہین پس موافق شرایط سوال کے ہی کہ صورتین لا ع + ۱ اور لا ع + ۱ اور ر ع + ۱ اعداد مخجذور ہونے فرض کرو کہ ہین یہ دو مساواتین لا ع + ۱ = ف۲ اور ر ع + ۱ = ق۲ ہین اور ان دو مساواتون سے حاصل ہوتی ہین یہ مساواتین لا = $\frac{ف^۲ - ۱}{ع}$ اور ر = $\frac{ق^۲ - ۱}{ع}$ اور جسوقت ضرب کرتی ہین ہم ان دو نو مساواتون کو اسیمین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا ر = $\frac{(ف^۲ - ۱)(ق^۲ - ۱)}{ع^۲}$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

لا ر + ۱ = $\frac{(ف^۲ - ۱)(ق^۲ - ۱)}{ع^۲}$ + ۱ اب اب ضرور ہی کہ ہو وی یہہ صورت اخیر ایک کامل مخجذور

لیکن یہہ بات ظاہر ہی کہ حاصل ضرب دو مخجذور لگا مخجذور رہوتا تو اگر ضرب کرین ہم اس صورت اخیر کو ع۲ مین تو حاصل ضرب یعنی (ف۲ − ۱) (ق۲ − ۱) + ع۲ بہی مخجذور رہونا چاہیئے اب فرض کرو کہ جذر اس مخجذور کا ع + ر ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات (ف۲ − ۱) (ق۲ − ۱) + ع۲ = ع۲ + ۲ ع ر + ر۲

اور اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات (ف۲ − ۱) (ق۲ − ۱) = ۲ ع ر + ر۲ اور اس مساوات سی حاصل ہوگی یہہ قیمت ع کی ع = $\frac{(ف^۲ - ۱)(ق^۲ - ۱) - ر^۲}{۲ ر}$ اور اس مساوات مین کوئی سے اعداد واسطے ف اور ق اور ر کی فرض کیے جاسکتی ہین مثلاً اگر ہو وی ر = (ف ق + ۱) تو حاصل ہونگی یہ مساواتین ر۲ = ف۲ ق۲ + ۲ ف ق + ۱ اور ع = $\frac{ف^۲ + ۲ ف ق + ق^۲}{۲ ف ق + ۱}$ اور اس سے حاصل ہوتی ہے

مساوات لا = $\frac{(ف^2-1)\times(2ف ق+2)}{ق^2+2ف ق+ق^2} = \frac{2(ف ق+1)\times(ف^2-1)}{(ف+ق)^2}$

اور ء = $\frac{2(ف ق+1)\times(ق^2-1)}{2(ف+ق)^2}$ اگر فقط اعداد صحیح مطلوب ہون تو ضرور ہی کہ اول فرض کرین ہم کہ لاء + ۱ = ف^۲ اور ع = لا + ء + ق اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

لاع + ۱ = لا (لا + ء + ق) + ۱ = لا^۲ + لاء + لاق + ۱ = لا^۲ + ق لا + ف^۲ اور تیسری صورت یہہ ہوجائیگی ءع + ۱ = ء (لا + ء + ق) + ۱ = لاء + ء^۲ + ءق + ۱ = ء^۲ + ق ء + ف^۲ اور یہان یہہ بات ظاہر ہی کہ یہ تینون صورتین کامل مجبور ہوسکتی ہین اگر فرض کرین ہم کہ ق = ± ۲ ف کیونکہ اس صورت مین حاصل ہونگی یہ مساواتین جنکی دوسری طرفین مجبور ہین لاء + ۱ = ف^۲ اور لاع + ۱ = لا^۲ ± ۲ ف لا + ف^۲ = (لا ± ف)^۲ اور ءع + ۱ = ء^۲ ± ۲ ف ء + ف^۲ = (ء ± ف)^۲ اب مساوات اول سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لاء = ف^۲ − ۱ اور واسطی ف کی انسبت ہم کوئی سی قیمت فرض کرسکتے ہین مثلاً فرض کرو کہ ف = ۳ اور اسیواسطی لاء = ۳^۲ − ۱ = ۹ − ۱ = ۸ پس معلوم ہوا کہ حاصل ضرب لا اور ء کا مساوی ہی ۸ کی اور اسیواسطی جو اعداد واسطی لا اور ء کے فرض کیے جائین ضرور ہی کہ یہہ شرط پوری کرین پس فرض کرو کہ لا = ۲ اور اسیواسطے ء = ۴ اور

ع = لا + ء + ۲ف = ۲ + ۴ + ۶ = ۱۲ پس اب معلوم ہوجائیگی اعداد مطلوبہ اور امتحان اس مثال کا اسطرح سے ہوسکتا ہی لاء + ۱ = ۲ × ۴ + ۱ = ۸ + ۱ = ۹ = ۳^۲ اور

لاع + ۱ = ۲ × ۱۲ + ۱ = ۲۴ + ۱ = ۲۵ = ۵^۲ اور ءع + ۱ = ۴ × ۱۲ + ۱ =

۴۸ + ۱ = ۴۹ = ۷^۲ اگر ف = ۴ تو ظاہر ہی کہ لاء = ف^۲ − ۱ = ۴^۲ − ۱ = ۱۶ − ۱ = ۱۵

اور اسیواسطی فرض کرو کہ لا = ۵ تو اس سے لازم آتا ہی کہ ہو ویسے ء = ۳ اور اسیواسطی

ع = لا + ء + ۲ف = ۵ + ۳ + ۸ = ۱۶ پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ یہہ ہین ۵ اور ۳ اور ۱۶ اور امتحان اس مثال کا یون ہوتا ہی لاء + ۱ = ۵ × ۳ + ۱ = ۱۵ + ۱ = ۱۶ = ۴^۲ = ایک عدد مجبور کے

اور لاع + ۱ = ۵ × ۱۶ + ۱ = ۸۰ + ۱ = ۸۱ = ۹^۲ اور ءع + ۱ = ۳ × ۱۶ + ۱ =

۴۸ + ۱ = ۴۹ = ۷^۲ اگر ف = ۵ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لاء = ف^۲ − ۱ = ۵^۲ − ۱ =

۲۵ − ۱ = ۲۴ اور اسیواسطی فرض کرو کہ لا = ۳ اور اس سے حاصل ہوتی ہی مساوات ء = ۸ اور اس سے

ع = لا + ء + ۲ف = ۳ + ۸ + ۱۰ = ۲۱ اور یہان سے معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ یہہ ہین ۳ اور ۸ اور ۲۱ اور امتحان یون ہوتا ہی لاء + ۱ = ۳ × ۸ + ۱ = ۲۴ + ۱ = ۲۵ = ۵^۲

اور لاع ۲ = ۳ × ۲۱ + ۱ = ۶۳ + ۱ = ۶۴ = ۸²

اور ۷ع + ۱ = ۸ × ۲۱ + ۱ = ۱۶۸ + ۱ = ۱۶۹ = ۱۳²

۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنی تین ایسی اعداد مثل لا اور ۷ اور ع کی کہ اگر ادنین سے دو دو کو اسمین ضرب کرین اور تینون حاصل ضربون پر کوئی خاص عدد مثل ط کی علیحدہ علیحدہ جمع کرین تو حاصل جمع تینون صورتون مین مجذور ہووے ظاہر ہی کہ یہہ سوال حل ہوسکتا ہی بطور سوال گذشتہ کی کیونکہ جو کچھہ عمل اوسوقت ضرور تہا جسوقت بجاے ط کے عدد ایک کا تہا وہی عمل اب بہی ضرور ہوگا اور اسس صورت مین مساوات اول یہہ ہوگی لا۲ = ن۲ − ط مثلاً فرض کرو کہ ط = ۳ اور ن = ۵ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات لا۲ = ۵۲ − ۳ = ۲۵ − ۳ = ۲۲ اور ظاہر ہی کہ اب فرض کرسکتے ہین ہم کہ لا = ۱۱ اور ۷ = ۲ اور اسیواسطے ع = لا + ۷ + ۲ن = ۱۱ + ۲ + ۱۰ = ۲۳ پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ یہہ ہین ۱۱ اور ۲ اور ۲۳ اور امتحان اسس مثال کا یون ہوتا ہی لا۷ + ۳ = ۱۱ × ۲ + ۳ = ۲۲ + ۳ = ۲۵ = ۵۲ = ایک عدد مجذور کی اور لاع + ۳ = ۱۱ × ۲۳ + ۳ = ۲۵۳ + ۳ = ۲۵۶ = ۱۶۲ اور ۷ع + ۳ = ۲ × ۲۳ + ۳ = ۴۶ + ۳ = ۴۹ = ۷۲

اور اسیطور سی اور مثالین بہی حل ہوسکتی ہین جنمین ط کوئی اور عدد ہو

۸ دریافت کیا چاہتے ہین دو ایسی عدد کہ اگر ہر واحد کو ادنین سے زیادہ کرین ہم مجذور دوسرے کی پر تو دونون صورتون مین حاصل جمع ایک عدد مجذور ہوتا ہی مثلاً فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا اور آ ہین تو ہم دریافت کیا چاہتے ہین ایسی قیمتین واسطی لا اور ۷ کے کہ صورتین جیریہ لا۲ + ۷ اور ۷۲ + لا دونو علیحدہ علیحدہ مجذور ہوون فرض کرو کہ لا۲ + ۷ = ن۲ اور اس مساوات سی حاصل ہوئی ہی یہہ مساوات ۷ = ن۲ − لا۲ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۷۲ + لا = (ن۲ − لا۲)۲ + لا = ن۴ − ۲ن۲ لا۲ + لا۴ + لا پس لازم ہی کہ بنا دین کسیطرحسی صورت اخیر کو ایک مجذور لیکن یہہ بات نہایت مشکل ہی تو فرض کرو کہ لا۲ + ۷ = (ف − لا)۲ = ف۲ − ۲ف لا + لا۲ اور اسیطور سے ۷۲ + لا = (ق − ۷)۲ = ق۲ − ۲ق ۷ + ۷۲ اور ان مساواتون سے حاصل ہونگی یہے مساواتین ۷ + ۲ف لا = ف۲ اور لا + ۲ق ۷ = ق۲ اور یہان سی یہہ بات ظاہر ہی کہ یہے دو مساواتین اول درجہ کی ہین اور انمین دو مقدارین مجہول لا اور ۷ ہین پس اگر دو رکرین ہم ایک ان دو مقدارون مجہول مین سے بوسیلہ ان دو مساواتون کے اور بعد ازان دریافت کرین قیمت ایک مقدار مجہول کی اور بعد اسکی دوسری مقدار مجہول کی بہی تو حاصل ہون گے یہے مساواتین

لا $= \frac{۴ق ف^۲ - ق^۲}{۴ف ق - ۱}$ اور ر $= \frac{۲ف ق^۲ - ف^۲}{۴ف ق - ۱}$ اور ان مساواتین کوئی

قیمت واسطی ف اور ق کی فرض کیے جاسکتی ہے مثلاً فرض کرو کہ ف = ۲ اور ق = ۳ تو

حاصل ہونگی یے دو مساواتین لا $= \frac{۱۵}{۲۳}$ اور ر $= \frac{۴۲}{۲۳}$ اور انکی وسیلہ سی حاصل ہوتی ہین

یے مساواتین لا^۲ + ر $= \frac{۲۲۵}{۵۲۹} + \frac{۴۲}{۲۳} = \frac{۹۶۱}{۵۲۹} = \left(\frac{۳۱}{۲۳}\right)^۲$ اور

اسیطور سے ر^۲ + لا $= \frac{۱۰۲۴}{۵۲۹} + \frac{۱۵}{۲۳} = \frac{۱۳۶۹}{۵۲۹} = \left(\frac{۳۷}{۲۳}\right)^۲$ اور اگر فرض

کرین ہم کہ ف = ۱ اور ق = ۳ تو حاصل ہونگی یے مساواتین لا $= -\frac{۳}{۱۱}$ اور ر $= \frac{۱۷}{۱۱}$

اور یہہ مطابق سوال کی ہینین ہی کیونکہ ایک اعداد مطلوبہ منفی نکلا ہی لیکن فرض کرسکتے

ہین ہم کہ ف = ۱ اور ق $= \frac{۳}{۲}$ اور اب حاصل ہونگی یے مساواتین لا $= \frac{۳}{۲۰}$ اور ر $= \frac{۷}{۱۰}$ اور

انسی حاصل ہوتے ہین یے مساواتین لا^۲ + ر $= \frac{۹}{۴۰۰} + \frac{۷}{۱۰} = \frac{۲۸۹}{۴۰۰} = \left(\frac{۱۷}{۲۰}\right)^۲$

ر^۲ + لا $= \frac{۴۹}{۱۰۰} + \frac{۳}{۲۰} = \frac{۶۴}{۱۰۰} = \left(\frac{۸}{۱۰}\right)^۲$

4 دریافت کیا چاہتی ہین ہم دو ایسی عدد کہ اگر اونکو جمع کرین تو حاصل جمع ایک عدد مجذور ہوتا ہی اور اگر

اونکی مجذورونکو جمع کرین تو حاصل جمع ایک عدد چوتھی مرتبہ کا حاصل صعود ہوتا ہی یعنی اس عدد کا چوتھی مرتبہ کا نزول

پر انکل سکتا ہی فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا اور ر ہین اور چونکہ موافق سوال کے چاہتی ہین ہم دریافت کرنا ایسی

تعیین واسطی لا اور ر کی کہ صورت لا^۲ + ر ایک چوتھی مرتبہ کا حاصل صعود ہوجاے تو ہم اول یہی بات دریافت کرینگے

فرض کرو کہ لا $= ف^۲ - ق^۲$ اور ر $= ۲ف ق$ اور اسیواسطی حاصل ہونگی یے مساواتین لا^۲ $= (ف^۲ - ق^۲)^۲ =$

$ف^۴ - ۲ف^۲ ق^۲ + ق^۴$ اور ر^۲ $= ۴ف^۲ ق^۲$ اور اسیواسطی لا^۲ + ر^۲ $=$

$ف^۴ - ۲ف^۲ ق^۲ + ق^۴ + ۴ف^۲ ق^۲ = ف^۴ + ۲ف^۲ ق^۲ + ق^۴ = (ف^۲ + ق^۲)^۲$ لیکن تاکہ یہہ

مجذور چوتھی مرتبہ کا حاصل صعود ہووے ضرور ہی کہ ف^۲ + ق^۲ ایک مجذور ہووی واسطی اسس مطلب کی فرض کرو

کہ ف $= ر^۲ - س^۲$ اور ق $= ۲رس$ اور انسی حاصل ہوتی ہین یے مساواتین

ف^۲ $= (ر^۲ - س^۲)^۲ = ر^۴ - ۲ر^۲ س^۲ + س^۴$ اور ق^۲ $= ۴ر^۲ س^۲$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی

ہوتی ہی یہہ مساوات $ق^۲ + ق^۲ = ر^۲ - ۲ر س + س^۲ + ۴ر س = ر^۲ + ۲ر س + س^۲ =$
$(ر + س)^۲$ اور اسسے یہہ معلوم ہوا کہ $(ق^۲ + ق^۲)^۲ = (ر^۲ + س^۲)^۲$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی
ہی یہہ مساوات $لا + ی = (ر^۲ + س^۲)^۲$ = ایک چوتھی مرتبہ کی حاصل صعود کی ہمنی فرض کیا ہی
$لا = ق^۲ - ق^۲$ اور $ق = ر^۲ - س^۲$ اور $ق = ۲ر س$ پس اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
$لا = ر^۴ - ۶ر^۲ س^۲ + س^۴$ اور اسیطرہ سی حاصل ہوگی یہہ مساوات $ی = ۴ر^۳ س - ۴ر س^۳$ اور اسیواسطے
$لا + ی = ر^۴ + ۴ر^۳ س - ۶ر^۲ س^۲ - ۴ر س^۳ + س^۴$ پس لازم ہی کہ بناوین ہم کسیطرہ
سی اسس صورت جبریہ اخیر کو ایک کامل مخبذور واسطی اسس مطلب کی فرض کرو کہ جذر اس صورت کا
$ر^۲ - ۲ر س + س^۲$ ہی اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات
$ر^۴ + ۴ر^۳ س - ۶ر^۲ س^۲ - ۴ر س^۳ + س^۴ = (ر^۲ - ۲ر س + س^۲)^۲ =$
$ر^۴ - ۴ر^۳ س + ۶ر^۲ س^۲ - ۴ر س^۳ + س^۴$ اور جسوقت دور کرتی ہین ہم دونون طرفون کے دو دو
خیر خرد نکو اور باقی جذرون کو قسمت کرتے ہین $ر^۳ س$ پر اوسوقت حاصل ہوتی ہی مساوات $۴ر - ۶س =$
$- ۴ر + ۶س$ یا یہہ مساوات $۸ر = ۱۲س$ یا $ر = \frac{۳}{۲} س$ اور اگر $ر = ۳$ تو $س = ۲$ اور
موافق ان قیمتون $ر$ اور $س$ کے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت $لا$ کی $لا = -۱۱$ لیکن یہہ قیمت منفی ہی اور اسیواسطے
نکمی پس اب فرض کرو کہ $ر = \frac{۳}{۲} س + ط$ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ر^۲ = \left(\frac{۳}{۲} س + ط\right)^۲ = \frac{۹}{۴} س^۲ + ۳س ط + ط^۲ \text{ اور}$$

$$ر^۳ = \frac{۲۷}{۸} س^۳ + \frac{۲۷}{۴} س^۲ ط + \frac{۹}{۲} س ط^۲ + ط^۳ \text{ اور اسیواسطی اب حاصل}$$

ہوگی یہہ مساوات کہ اونکی اکھٹا کرنی سے قیمت $لا + ی$ کی پیدا ہوتی ہی یعنی وہ صورت پیدا ہوتی
ہی جسکو مخبذور بنانا منظور ہی $ر^۴ = \frac{۸۱}{۱۶} س^۴ + \frac{۲۷}{۲} س^۳ ط + \frac{۲۷}{۴} س^۲ ط^۲ + ۶س ط^۳ + ط^۴$

$$+ ۴ر^۳ س = \frac{۲۷}{۲} س^۴ + ۲۷ س^۳ ط + ۱۸ س^۲ ط^۲ + ۴ س ط^۳$$

$$- ۶ر^۲ س^۲ = - \frac{۲۷}{۲} س^۴ - ۱۸ س^۳ ط - ۶ س^۲ ط^۲$$

$$- ۴ر س^۳ = -۶ س^۴ - ۴ س ط^۳$$

$$+ س^۴ = س^۴ \qquad \text{اور حاصل جمع ان تمام اجزا کا یہہ ہی}$$

$$\frac{۱}{۱۶} س^۴ + \frac{۳۷}{۲} س^۳ ط + \frac{۵۱}{۲} س^۲ ط^۲ + ۱۰ س ط^۳ + ط^۴$$

اور چونکہ یہہ آدسوقت بھی مخبذور رہیگی جسوقت ضرب کرین ہم اوسکو ۱۶ مین کہ ایک عدد مخبذور ہی تو عمل ضرب کا

کوئی سی عدد ۱۶ شی حاصل ہوتی ہی یہہ صورت جسکو مجذور کرنا منظور ہی

س⁴ + ۹۶ س³ ط + ۸۴۰ س² ط² + ۱۶۰ س ط³ + ۱۶ ط⁴ فرض کرو کہ جذر اس صورت

اخیر کا یہہ ہی س² + ۸ س ط − ۴ ط² اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات

س⁴ + ۹۶ س³ ط + ۸۴۰ س² ط² + ۱۶۰ س ط³ + ۱۶ ط⁴ =

س⁴ + ۹۶ س³ ط + ۹۶ ۱۸ س² ط² − ۱۱۸۴ س ط³ + ۱۶ ط⁴ اور اس صورت مین ظاہر

ہی کہ دونون طرفون اس مساوات کی اول دو جزو اور اخیر کا جز زائل ہوجاتے ہین اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

۹۶ ۱۸ س − ۱۱۸۴ ط = ۸۴۰ س + ۱۶۰ ط اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$\frac{س}{ط} = \frac{۱۳۴۴}{۲۱۴۸۸} = \frac{۳۳۶}{۵۳۷۲} = \frac{۸۴}{۱۳۴۳}$$

اور یہان سے معلوم ہوا کہ س = ۸۴ اور ط = ۱۳۴۳ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ر = $\frac{۳}{۲}$ س + ط = ۱۴۶۹ اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہین یہ مساوات ین

لا = ک⁴ − ۶ ک² س² + س⁴ = ۴۵۶۵۴۸۶۰۲۷۷۶۱

ر = ۴ ک² س − ۴ س³ = ۱۰۶۱۶۵۲۲۹۳۵۲۰

۱۰ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا تین ایسے اعداد کا کہ اگر ان تینون کو جمع کرین تو حاصل جمع ایک عدد مجذور ہووے اور اگر ان مین سے کوئی سی دو دو کو جمع کرین تو یہی حاصل جمع ایک عدد مجذور ہووے فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ ۴ لا اور لا − ۴ لا اور ۲ لا + ۱ ہین اس صورت مین ظاہر ہی کہ

(۴ لا) + (لا² − ۴ لا) = لا² = عدد مجذور اور لا² − ۴ لا + ۲ لا + ۱ =

لا² − ۲ لا + ۱ = (لا − ۱)² = ایک عدد مجذور اور ۴ لا + لا² − ۴ لا + ۲ لا + ۱ =

لا² + ۲ لا + ۱ = (لا + ۱)² = ایک عدد مجذور پس تین شرطین سوال کی تو پوری ہوئین اور

باقی رہی فقط یہہ شرط کہ ہووے حاصل جمع ۴ لا اور ۲ لا + ۱ کا ایک عدد مجذور یعنی ۶ لا + ۱ ایک

عدد مجذور ہووے پس فرض کرو کہ ۶ لا + ۱ = ط² اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کے

لا = $\frac{ط² − ۱}{۶}$ اور اسیواسطی ۴ لا = $\frac{۴ ط² − ۴}{۶}$ اور لا² − ۴ لا =

$\left(\frac{ط² − ۱}{۶}\right)^۲ - \frac{۴ ط² − ۴}{۶} = \frac{ط⁴ − ۲۶ ط² + ۲۵}{۳۶}$ اور ۲ لا + ۱ = $\frac{۲ ط² − ۲}{۶}$ + ۱

پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مطلوبہ یہ ہین $\frac{۲ ط² − ۲}{۳}$ اور $\frac{ط⁴ − ۲۶ ط² + ۲۵}{۳۶}$ اور $\frac{ط² + ۲}{۳}$

اس صورت مین یہہ ظاہر ہی کہ جو صورتین جبریہ واسطی تین عدد دن مطلوبہ کی فرض کیگئے ہین وے ایسی ہین کہ ہر شخص سے یکایک خیالمین نہین آتی ہین پس اس جاے یہہ بات کہی جاسکتی ہی کہ گو فرضونمین کوئی بات محال نہین پائی گئی ہی لیکن ہم یہہ کیونکر جانین کہ یہی صورتین فرض کرنی چاہئین تاکہ سوال بآسانی حل ہوجاے اسکا جواب یہہ ہی کہ اگر کوئی شخص ذرا بھی غور کریگا اوسی یہہ معلوم ہوسکتا ہی کہ یے صورتین ایسی ہین کہ اونکی فرض کرنی سے تین شرطین سوال کی ایک ہی بار پوری ہوجاتی ہین اور باقی رہجاتی ہی فقط جو ہی شرط اور اوسکا پورا کرنا ہوتا ہی بوسیلہ اور عملون کے جہان سے طالب علم کو ایک نئی بات یہہ معلوم ہوگی کہ فرض کرنی مین بھی طالب علم اس فن کی عقل ظاہر ہوتی ہی کیونکہ جسکو زیادہ عقل ہوگی وہ ایسی ایسی فرض کریگا کہ اونکی وسیلہ سی سوال بسہولت حل ہوجائیگا

۱۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا دو ایسی عدد مجذور کا کہ حاصل تفریق اونکا کوئی خاص عدد مثل ح کے ہو فرض کرو کہ ط اور ص غیر مساوی عدد ایسی ہین کہ اونکا حاصل ضرب ح ہوتا ہی اب فرض کرو کہ جذر اول عدد مجذور کا لا ہی اور جذر دوسرے عدد مجذور کا مساوی ہی لا + ص کے پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات $(لا+ص)^{۲} - لا^{۲} = لا^{۲} + ۲ ص لا + ص^{۲} - لا^{۲} = ۲ ص لا + ص^{۲} = ح = ط ص$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ لا + ص = ط اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی $لا = \frac{ط - ص}{۲}$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا + ص کی

$لا + ص = \frac{ط - ص}{۲} + ص = \frac{ط + ص}{۲}$ اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ وہ اعداد مجذور مطلوبہ

ہے ہین $\left(\frac{ط - ص}{۲}\right)^{۲}$ اور $\left(\frac{ط + ص}{۲}\right)^{۲}$ مثلاً فرض کرو کہ ح = ۶۰ اور اسیواسطے

ط × ص = ۳۰ × ۲ اور اسیواسطی حاصل ہونگی یے مساوات

$\frac{ط - ص}{۲} = \frac{۳۰ - ۲}{۲} = \frac{۲۸}{۲} = ۱۴$ اور $\frac{ط + ص}{۲} = \frac{۳۰ + ۲}{۲} = \frac{۳۲}{۲} = ۱۶$

اور $(۱۴)^{۲} = ۱۹۶$ اور $(۱۶)^{۲} = ۲۵۶$ پس معلوم ہوا کہ اعداد مطلوبہ ۱۹۶ اور ۲۵۶ ہین جسوقت فرض کیا جاے واسطی ح کے عدد ۶۰ کا

۱۲ دریافت کیا چاہتے ہین ہم ایسی دو عدد کہ حاصل جمع اور حاصل تفریق انکا دونون مجذور ہوون فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا اور لا — لا ہین یہہ ظاہر ہی کہ حاصل جمع ان دو عدد ونکا یعنی

لا + لا۲ − لا یا لا۲ ایک مجذور ہی اور یہان سی معلوم ہوا کہ اول شرط سوال کی تو پوری ہوئی پس اب باقی رہی دوسری شرط یعنی اب لازم ہی کہ دریافت کرن ہم کوئی ایسی قیمت واسطی لا کے کہ صورت جیسے لا۲ − ۲ لا ایک مجذور ہوجاے آب فرض کرو کہ جذر لا۲ − ۲ لا کا لا − ء ہی اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات لا۲ − ۲لا = (لا − ء)۲ = لا۲ − ۲ لا ء + ء۲ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۲ لا ء − ۲ لا = ء۲ اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت واسطے لا کے لا = $\frac{ء^۲}{۲ء - ۲}$ اور لا۲ − لا = $\left(\frac{ء^۲}{۲ء - ۲}\right)^۲ - \frac{ء^۲}{۲ء - ۲}$ اور یہان یہہ بات معلوم ہوئی کہ اعداد مطلوبہ یہہ ہین $\frac{ء^۲}{۲ء - ۲}$ اور $\left(\frac{ء^۲}{۲ء - ۲}\right)^۲ - \frac{ء^۲}{۲ء - ۲}$ اور اسجاے واسطی ء کی کوئی قیمت فرض کیجاسکتی ہی بشرطیکہ وہ زیادہ ہو عدد آسی مثلاً اگر ہووے ء = ۲ کے تو اعداد مطلوبہ ان مساواتون سے معلوم ہوجاوینگی لا = $\frac{ء^۲}{۲ء - ۲} = \frac{۴}{۲ - ۴} = \frac{۴}{۲}$ = ۲ اور لا۲ − لا = $\left(\frac{ء^۲}{۲ء - ۲}\right)^۲ - \frac{ء^۲}{۲ء - ۲} = ۲^۲ - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$ پس اسجای حاصل جمع دو عددون مطلوب کا یعنی ۴ ایک مجذور ہی لیکن حاصل تفریق انکا صفر ہی کہ وہ بہی ایک صفر کا مجذور تصور کیا جاسکتا ہی لیکن ہم لینگی ایک اور مثال مثلاً فرض کرو کہ ء = ۳ اور اس صورتمین حاصل ہونگی یہے مساواتین لا = $\frac{ء^۲}{۲ء - ۲} = \frac{۹}{۲ - ۶} = \frac{۹}{۴}$ اور

لا۲ − لا = $\left(\frac{ء^۲}{۲ء - ۲}\right)^۲ - \frac{ء^۲}{۲ء - ۲} = \frac{۸۱}{۱۶} - \frac{۹}{۴} = \frac{۸۱}{۱۶} - \frac{۳۶}{۱۶}$

= $\frac{۴۵}{۱۶}$ اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ حاصل جمع دو نو عددون مطلوبہ کا یعنے یہہ

$\frac{۴۵}{۱۶} + \frac{۹}{۴} = \frac{۴۵}{۱۶} + \frac{۳۶}{۱۶} = \frac{۸۱}{۱۶} = \left(\frac{۹}{۴}\right)^۲$ ایک مجذور ہی اور اسیطرح سے حاصل تفریق انکا یہہ ہے $\frac{۴۵}{۱۶} - \frac{۹}{۴} = \frac{۴۵}{۱۶} - \frac{۳۶}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶} = \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲$ جو ایک عدد مجذور ہے

۱۳ چاہیئے ہین ہم دریافت کرنا ایسی اعداد مجذور کو کہ جو فرق درمیان اول اور دوسرے کے وہی فرق درمیان دوسرے اور تیسری کی ہی فرض کرو کہ اول عدد مطلوب ط۲ ہی اور فرق اسمین اور دوسرے مین اور

دوسری اور تیسری مین $۲ط ص + ص^۲$ ہی پس اس صورت مین اعداد مطلوبہ یہ ہونگی $ط^۲$ اور $ط^۲ + ۲ط ص + ص^۲$ اور $ط^۲ + ۴ط ص + ۲ص^۲$ اسیطرح ظاہر ہی کہ اول دو اعداد تو مجذور ہین پس باقی رہی صورت اخیر کہ اوسکو بھی مجذور بنانا چاہیئے یہہ بات ظاہر ہی کہ جذر $ط^۲ + ۴ط ص + ۲ص^۲$ کا زیادہ سے $ط + ص$ ہی گا اور اسیواسطے فرض کرو کہ وہ $ط + ص + س$ ہی اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات $ط^۲ + ۴ط ص + ۲ص^۲ = ط + ص + س$ اور جسوقت مجذور کرینگی ہم دونو طرفون مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $ط^۲ + ۴ط ص + ۲ص^۲ = (ط + ص + س)^۲ = (ط + ص)^۲ + ۲(ط + ص) س + س^۲$ اور یہان سے معلوم ہوا کہ $۲ط ص + ص^۲ = ۲(ط + ص) س + س^۲ = ۲ط س + ۲ص س + س^۲$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۲ط ص - ۲ط س = ۲ص س + س^۲ - ص^۲$ یا

$ط(۲ص - ۲س) = ۲ص س + س^۲ - ص^۲$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$ط = \frac{۲ص س + س^۲ - ص^۲}{۲ص - ۲س}$$

اسجا ہم فرض کرسکتے کوئی سی قیمتین واسطی ص اور س کے لیکن اسجا ظاہر ہی کہ ط کی قیمتین اکثر کسور دریافت ہونگی پس اگر ہم دریافت کیا چاہین اعداد مجذور صحیح تو یہہ بات چاہیئے کہ اگر کئی مجذور رہون اور اونکی نسب نما ایکسی ہون تو اونکو اس نسب نما مین ضرب دینے سے اعداد مجذور صحیح بنا سکتے ہین مثلاً اگر ہوین یہ مجذور $\frac{۱۶}{۹}$ اور $\frac{۳۶}{۹}$ اور $\frac{۶۴}{۹}$ اور ضرب کرین ہم ان سبہونکو ۹ مین تو جو ہین حاصل ضرب حاصل ہونگی وہ اعداد مجذور صحیح ہونگی اسجا یہہ بات بھی ظاہر ہی کہ اگر ط کے واسطے کوئی کسر ایسی فرض کی جائی کہ اوسکا نسب نما عدد ۲ کا ہو تو فرق عام یعنی $۲ط ص + ص^۲$ ایک عدد صحیح ہوگا پس اس صورت مین تینون مجذورون کے نسب نما ایک ہونگی مثلاً فرض کرو کہ $ط = \frac{۲ص س + س^۲ - ص^۲}{۲ص - ۲س}$ مین ص = ۲ اور س = ۱ پس حاصل ہونگی یہہ مساواتین $۲ص س + س^۲ - ص^۲ = ۲ × ۲ × ۱ + ۱^۲ - ۲^۲ = ۴ + ۱ - ۴ = ۱$ اور

$۲ص - ۲س = ۲ × ۲ - ۲ × ۱ = ۲$ پس معلوم ہوا کہ $ط = \frac{۱}{۲}$ اور اسیواسطے حاصل ہونگی یہہ مساواتین $ط^۲ = \frac{۱}{۴}$ اور $ط^۲ + ۲ط ص + ص^۲ = ۶ + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$ اور $ط^۲ + ۴ط ص + ۲ص^۲ = ۶ + \frac{۲۵}{۴} = \frac{۲۴}{۴} + \frac{۲۵}{۴} = \frac{۴۹}{۴}$ پس معلوم ہوا کہ کہ تین اعداد مطلوبہ یہہ ہین $\frac{۱}{۴}$ اور $\frac{۲۵}{۴}$ اور $\frac{۴۹}{۴}$ اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہون تو لازم ہے

کہ ضرب کرین ہم ان اعداد کو عدد چارمین تو حاصل ہونگی سے اعداد مجذور ۱ اور ۲۵ اور ۴۹ کہ ایمین ۲۴ کا فرق عام ہی کیونکہ ۱ + ۲۴ = ۲۵ اور ۲۵ + ۲۴ = ۴۹ اب فرض کرو کہ س = ۲ اور ص = ۳ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی سے مساواتین

$$ط = \frac{۲ص س + س^۲ - ص^۲}{۲ص - ۲س} = \frac{۱۲ + ۴ - ۹}{۶ - ۴} = \frac{۷}{۲} \quad \text{اور}$$

۲ ط ص + ص^۲ = ۲۱ + ۹ = ۳۰ اور اسیواسطی حاصل ہونگی سے مساواتین

$$ط^۲ = \left(\frac{۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۴} \quad \text{اور} \quad ط^۲ + ۲ ط ص + ص^۲ = \frac{۴۹}{۴} + ۳۰ =$$

$$= \left(\frac{۱۳}{۲}\right)^۲ \quad \text{اور} \quad ط^۲ + ۴ ط ص + ۲ ص^۲ = \frac{۱۶۹}{۴} + ۳۰ = \frac{۲۸۹}{۴} = \left(\frac{۱۷}{۲}\right)^۲$$

پس معلوم ہوا کہ تین اعداد مجذور مطلوبہ سے ہین $\frac{۴۹}{۴}$ اور $\frac{۱۶۹}{۴}$ اور $\frac{۲۸۹}{۴}$ اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہون تو لازم ہین کہ ضرب کرین ہم انکو عدد ۴ سے کہ مین ۱ در اسیواسطی اعداد مجذور صحیح ہونگے ۹ ۴ اور ۱۶۹ اور ۲۸۹ اور ایمین فرق عام ۱۲۰ ہی کیونکہ ۴۹ + ۱۲۰ = ۱۶۹ اور ۱۶۹ + ۱۲۰ = ۲۸۹ اب فرض کرو کہ ص = ۴ اور س = ۳ اور اسیواسطی حاصل ہونگی سے مساواتین

$$ط = \frac{۲ص س + س^۲ - ص^۲}{۲ص - ۲س} = \frac{۲۴ + ۹ - ۱۶}{۸ - ۶} = \frac{۱۷}{۲} \quad \text{اور}$$

۲ ط ص = ۱۷ × ۴ = ۶۸ اور ۲ ط ص + ص^۲ = ۶۸ + ۱۶ = ۸۴ اور اسیواسطی حاصل ہونگی سے مساواتین $ط^۲ = \left(\frac{۱۷}{۲}\right)^۲ = \frac{۲۸۹}{۴}$ اور $ط^۲ + ۲ ط ص + ص^۲ =$

$$\frac{۲۸۹}{۴} + ۸۴ = \frac{۳۳۶}{۴} + \frac{۲۸۹}{۴} = \frac{۶۲۵}{۴} = \left(\frac{۲۵}{۲}\right)^۲ \quad \text{اور}$$

$$\frac{۶۲۵}{۴} + ۸۴ = \frac{۳۳۶}{۴} + \frac{۶۲۵}{۴} = \frac{۹۶۱}{۴} = \left(\frac{۳۱}{۲}\right)^۲ \quad \text{پس معلوم ہوا کہ}$$

تین اعداد مجذور مطلوب ہے ہین $\frac{۲۸۹}{۴}$ اور $\frac{۶۲۵}{۴}$ اور $\frac{۹۶۱}{۴}$ اور اگر اعداد صحیح مطلوب ہون تو وہ یہہ ہونگی ۲۸۹ اور ۶۲۵ اور ۹۶۱ اور ایمین فرق عام ۳۳۶ ہی کیونکہ

$۲۸۹ + ۶۴۳ = ۶۲۵$ اور $۶۲۵ + ۳۳۶ = ۹۶۱$ پس تین قیمتین اعداد مجذور مطلوبہ کی اعداد صحیح یہ ہین ۱ ۲۵ ۴۹ اور ۴۹ ۱۶۹ اور ۲۸۹ ۶۲۵ ۹۶۱ اور اسیطرح سی اور بہی اعداد معلوم ہوسکتے ہین یہ طریقہ حل کرنی سوال گذشتہ کا بالکل مبنا ہی اور بہت سہل ہی اور اسسے بیشمار اعداد مجذور معلوم ہوسکتے ہین اور یہ اعداد خواہ کسور ہون اور خواہ صحیح

۱۴ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسا عدد مجذور کہ اگر اوسمین سے عدد ۴ کا نکال لین اور حاصل تفریق کو ۷ پر قسمت کرین تو خارج قسمت ایک عدد صحیح نکلتا ہی اور باقی کچہ نہین نکلتا یہ سوال مہندس بہاسکرا چارج نی اپنی مشہور کتاب بیج گنت مین لکہا ہی اوسکا طریقہ حل کرنیکا ذرا پیچیدہ ہی ہین ایک اور آسان طریقہ سی اسی حل کرتا ہون مثلاً فرض کرو کہ عدد مجذور مطلوبہ لا ہی اور یہہ بہی فرض کرو کہ خارج قسمت مذکور ر ہی پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات $\frac{لا^۲ - ۴}{۷} = ر$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی $لا = \sqrt{۷ ر + ۴}$ اب لازم ہی کہ کسی ترکیب سے $۷ ر + ۴$ کو ایک کامل مجذور اور واسطی اسسکے مطلب کی فرض کرو کہ جذر اسس صورت کا $۲ + ح$ ہی اور اسیوا سطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $۷ ر + ۴ = ۴ + ۴ ح + ح^۲$ اور اسیوا سطی $۷ ر = ۴ ح + ح^۲$ اور $ر = \frac{۴ ح + ح^۲}{۷}$ اب فرض کرو کہ $۷ ن = ح$ اور اسیوا سطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $ر = ۴ ن + ۷ ن^۲$ اور اسجای واسطی اسکے کوئی عدد صحیح فرض کیا جاسکتا ہی مثلاً فرض کرو کہ $ن = ۱۱$ اور اسیوا سطی $لا = \sqrt{۷ ر + ۴} = ۱۱ \times ۷ + ۴ = ۷۷ + ۴ = ۸۱ = ۹^۲$ اور اگر $ن = ۲$ تو $ر = ۴ \times ۲ + ۷ \times ۲^۲ = ۸ + ۲۸ = ۳۶$ اور اسیوا سطی $لا = \sqrt{۷ ر + ۴} = \sqrt{۷ \times ۳۶ + ۴} = \sqrt{۲۵۲ + ۴} = \sqrt{۲۵۶} = ۱۶^۲$

۱۵ چاہتے ہین ہم حل کرنا سوال (۱۳) کو ایک اور طریقہ سی جو طریقہ سابق کی سے آسان ہو فرض کرو کہ وہ تین اعداد مجذور کہ جنمین اول اور دوسرے مین وہی فرق ہی جو مابین دوسرے اور تیسری کی واقع ہی یہ ہین $لا^۲$ اور $ر^۲$ اور $ع^۲$ پس موافق قاعدہ سلسلہ جمع اور تفریق کے یہہ بات ظاہر ہی کہ $لا^۲ + ع^۲ = ۲ ر^۲$ اب فرض کرو کہ $لا = ف + ق$ اور $ع = ف - ق$ اور اسیوا سطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا^۲ + ع^۲ = (ف + ق)^۲ + (ف - ق)^۲ = ۲ ف^۲ + ۲ ق^۲ = ۲ ر^۲$ اور اسسے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ف^۲ + ق^۲ = ر^۲$ اب تاکہ ہوجاوے صورت $ف^۲ + ق^۲$ ایک مجذور تو فرض کرو کہ $ف = ۲ م$ اور $ق = م^۲ - ۱$ اور اسیوا سطی $ف^۲ + ق^۲ = ۴ م^۲ + م^۴ - ۲ م^۲ + ۱ = م^۴ + ۲ م^۲ + ۱ = (م^۲ + ۱)^۲$ اور یہانسی یہہ معلوم ہوا کہ $ر^۲ = (م^۲ + ۱)^۲$ اور جسوقت لیتی ہین ہم جذر دونون طرفون اسس مساوات کا تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ر = م^۲ + ۱$ پس اس صورت مین حاصل ہونگی یہہ قیمتین لا اور ر اور ع کی

ل = ۴م + م² − ۱ اور ع = ۲م − م² + ۱ اور ر = م² + ۱ مثلاً فرض کرو کہ م = ۱ تو لا² = ۴
اور ر² = ۴ اور ع² = ۴ اور ظاہر ہی کہ فرق ان مجذورہ مین صفر ہی پس اب فرض کرو کہ م = ۲ اور اسیواسطے
حاصل ہونگی سیے مساواتین لا = ۷ اور ر = ۵ اور ع = ۱ اور اسی سبب سے لا² = ۴۹ اور
ر² = ۲۵ اور ع² = ۱ اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ تین اعداد مجذور مطلوبہ سیے ہین ۱ اور ۲۵ اور ۴۹
اب فرض کرو کہ م = ۳ اور موافق اسکے لا = ۱۴ اور ر = ۱۰ اور ع = ۲ اور اسیواسطے
لا² = ۱۹۶ اور ر² = ۱۰۰ اور ع² = ۴ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ تین اعداد مجذور مطلوبہ سیے ہین
۴ اور ۱۰۰ اور ۱۹۶ اور اسیطورسی اور اعداد بہی معلوم ہوسکتی ہین

۱۰۶ حاصل تفریق دو شخصونکی عمرون کے مجذور مین ایک خاص وقت مین ۵۴ برس تہا اور ایک
دوسرے وقت مین ۱۵۹ بتاو کیا تہی عمران دو شخصون کی علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ دو شخصون کی عمرین وقت اول
مین لا اور ر تہین اور وقت دوسرے مین لا اور ر پس اب حاصل ہونگی سیے مساواتین لا² − ر² = ۵۴ یا
(لا − ر)(لا + ر) = ۵۴ اور لا² − ر² = ۱۵۹ یا (لا − ر)(لا + ر) = ۱۵۹ اور چونکہ
لا − ر = لا − ر اور ۵۴ اور ۱۵۹ کا خرضربی مشترک ۳ اور ۳ ہین تو ضرور ہی کہ ہو دین سے مساواتین
لا − ر = ۱ یا لا − ر = ۳ اور لا + ر = ۵۴ یا لا + ر = ۱۵ اور ان مساواتون سیے حاصل ہوے
ہی یہہ مساوات لا = ۲۳ اور ر = ۲۲ یا لا = ۹ اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ لا − ر = ۱
یا لا − ر = ۳ اور لا + ر = ۱۵۹ یا لا + ر = ۵۳ اور اسیواسطی حاصل ہونگی سیے مساواتین
لا = ۸۰ اور ر = ۷۹ اور لا = ۲۸ اور ر = ۲۵ اور یہان سے یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ وقت اول مین
ان شخصون سیے عمرین ۹ اور ۶ برس تہین اور وقت دوسرے مین ۲۸ اور ۲۵ یا وقت اول مین اونکی
عمرین ۲۳ اور ۲۲ برس تہین اور وقت دوسرے مین ۸۰ اور ۷۹ اب ہم تمام کرتی ہین اس فصل کو
اور امید ہی کہ جو طالب علم یہہ چاہے کہ مجذور دون کے سوالون کے حل کرنی مین بہی ایک سہولت حاصل
ہوجاوے وہ انکو بہت توجہ سی پڑہیگا واضح ہو کہ اس قسم کی سوالات کو سوالات دیوفنطس کہتے ہین کسواسطے
کہ دیوفنطس ایک مہندس یونانی تہا اور اوسنی اس قسم کی سوالات بہت سی حل کیے اور اونمین اپنا
عقل اور ذہن بہت دکہایا

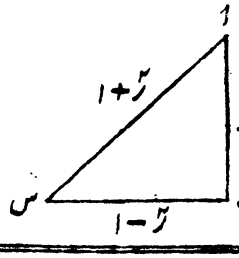
فصل پانچوین پیچ دریافت کرنے ایسی مثلثون سیے جنکی اضلاع اور ارتفاع
اور مساحت اور دو اقسام قاعدہ کی جہان عمود قاعدہ سے ملتا ہی اعداد صحیح ہوتی ہین

یہہ بات اون اشخاص کو جو ذرا بھی مساحت سی واقف ہین معلوم ہوگی کہ جسوقت ہم کسی مثلث کی اضلاع مقرر کرتے ہین تو اوسکی مساحت اوسکے عمود اوسکی قاعدہ پر اور دو جزا اس قاعدہ کی جو سدا ہوتی ہین بسبب ملنے اس عمود کی قاعدہ سے

مقداریں نزدلی کہ جنکی نزدلی جذر نہین نکل سکتے ہین یا کسور ہوتی ہین اور جسوقت ہم مساحت کسی مثلث کی مقرر کرتی ہین تو اضلاع اوسکے مقداریں نزدلی یا کسور ہوسکتے ہین اور جسوقت دو ضلعے ایک مثلث قایم الزاویہ کے مقرر کرتی ہین تو اکثر وتر اوسکا ایک مقدار نزدلی ہوتا ہی کہ اوسکا جذر پورا نہین نکل سکتا ہی پس اب طالب علم جبر و مقابلہ کا (کہ اسمین سب قسم کی مقدارون کی بحث ہوتی ہی) یہہ سوال کرسکتا ہی کہ کیونکر دریافت کرلین ہم پہلی سے کہ دو ضلعی ایک مثلث قایم الزاویہ کی اس مقدار کے فرض کرنے چاہئین تاکہ اوسکا وتر ایک مقدار غیر نزدلی ہو یا یہہ کہ کیسی کیسی اعداد واسطی کسی مثلث کے مقرر کیے جائین کہ اوسکے مساحت اور عمود اوسکے قاعدہ پر اور دو جزا قاعدہ کی مقدارین غیر نزدلی ہون حل کرنا اس سوال کا بعض صورتون مین بہت سہل ہوتا ہی مثلاً جسوقت کہ مقرر کیے جائین ایسی دو اعداد واسطی دو ضلعون ایک مثلث قایم الزاویہ کی کہ وتر اوسکا ایک مقدار غیر نزدلی ہو ایک امر مشکل نہین ہی اور یہہ بات معلوم ہوسکتی ہی بوسیلہ اس سوال کے ہم دریافت کیا چاہتے ہین دو ایسی مجذور کہ اونکا حاصل جمع ایک مجذور رہے اور یہہ سوال مجذورون کے بیان مین حل کیا گیا ہی اور وہان یہہ بات ثابت کی گئی ہی کہ اگر ہو ب ر - ۱ کا ور لا = ۲ ر اور اگر ر کی واسطے کوئی عدد فرض کیا جائے تو جو قیمتین واسطی ت اور لا کے حاصل ہونگی وے ایسی ہونگی کہ حاصل جمع اونکی مجذور ہونگا یعنے لا + ت ایک مجذور ہوگا اور فی الحقیقت

چونکہ لا = (۲ ر)^۲ = ۴ ر^۲ اور ت^۲ = (ر^۲ - ۱)^۲ = ر^۴ - ۲ ر^۲ + ۱ تو

لا^۲ + ت^۲ = ۴ ر^۲ + ر^۴ - ۲ ر^۲ + ۱ = ر^۴ + ۲ ر^۲ + ۱ = (ر^۲ + ۱)^۲ تو معلوم ہوا کہ لا^۲ + ت^۲ ہمیشہ ایک عدد مجذور رہوگا اگر فرض کیجائے واسطی لا کے صورت ۲ ر اور واسطی ت کی صورت ر^۲ - ۱ اب چونکہ فیثاغورس نے ثابت کردیا ہی کہ حاصل جمع مجذورون اون دو ضلعون ایک مثلث قایم الزاویہ کا جو محیط مین قایمہ کی مساوی ہوتا ہی مجذور وتر قائمہ کے پس اگر فرض کرین ہم واسطی ایک ضلع کی صورت جبریہ ۲ ر اور واسطے دوسرے ضلع کے صورت ر^۲ - ۱ اور واسطی وتر قایمہ کی صورت ر^۲ + ۱ تو خواہ کچھی قیمت ر کے فرض کرین ہر صورت مین ایسی قیمتین اعداد صحیح اضلاع اس مثلث کے حاصل ہونگی کہ جاکا مجموع مجذورون دو ضلعون کا مساوی ہوگا مجذور وتر قائمہ کے فرض کر مثلث ا ب س مین

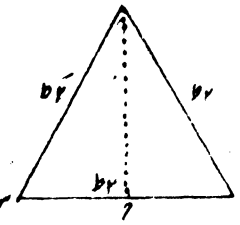


ا ب = ۲ ر اور ب س = ر^۲ - ۱ اور واسطے وتر قائمہ کا ا س = ر^۲ + ۱ اب فرض کرو کہ ر = ۲ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یے قیمتین

ضلعون اس مثلث کی ا ب = ۲ ر = ۲ × ۲ = ۴ اور ب س = ر − ۱ = ر² − ۱ = ۴ − ۱ = ۳ اور
ا س = ر² + ۱ = ۲² + ۱ = ۴ + ۱ = ۵ اور امتحان اس مثال خاص کا اسطرحسی ہوتا ہی ۳² + ۴² =
۹ + ۱۶ = ۲۵ = ۵² اب فرض کرو کہ ر = ۳ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یے مساواتین
ا ب = ۲ ر = ۲ × ۳ = ۶ اور ب س = ر² − ۱ = ۳² − ۱ = ۹ − ۱ = ۸ اور
ا س = ر² + ۱ = ۳² + ۱ = ۹ + ۱ = ۱۰ اور امتحان اس مثال کا اسطورسی ہوتا ہی
۶² + ۸² = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ = ۱۰² اب فرض کرو کہ ر = ۴ اور موافق اس فرض کے حاصل
ہونگی یے مساواتین ا ب = ۲ ر = ۲ × ۴ = ۸ اور ب س = ر² − ۱ = ۴² − ۱ = ۱۶ − ۱ = ۱۵
اور ر² + ۱ = ۴² + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷ اور امتحان اس شکل کا یون ہوتا ہی ۸² + ۱۵² =
۶۴ + ۲۲۵ = ۲۸۹ = ۱۷² اب فرض کرو کہ ر = ۵ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگے
یے مساواتین ا ب = ۲ ر = ۲ × ۵ = ۱۰ اور ب س = ر² − ۱ = ۵² − ۱ = ۲۵ − ۱ = ۲۴
اور ا س = ر² + ۱ = ۵² + ۱ = ۲۵ + ۱ = ۲۶ اور امتحان اس مثال کا یہہ ہی ۱۰² + ۲۴² =
۱۰۰ + ۵۷۶ = ۶۷۶ = ۲۶² اب فرض کرو کہ ر = ۶ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یے
مساواتین ا ب = ۲ ر = ۲ × ۶ = ۱۲ اور ب س = ر² − ۱ = ۶² − ۱ = ۳۶ − ۱ = ۳۵ اور
ا س = ر² + ۱ = ۶² + ۱ = ۳۶ + ۱ = ۳۷ اور امتحان اس مثال کا اسطرحسی ہوتا ہی ۱۲² + ۳۵² =
۱۴۴ + ۱۲۲۵ = ۱۳۶۹ = ۳۷² اور اسیطرحسی اور اعداد دریافت ہوسکتی ہین اور یہہ اعداد
صحیح ہونگی اگر جمع کرین ہم قیمتون گذشتہ حروف ر اور ۲ ر اور ر² − ۱ اور ر² + ۱ کو ایک جائے ترتیب سے تو
بیجا نگا فقہ آئندہ کہ اوسکی ذریعہ سے بغیر عملون جبر مقابلہ کی کیے مثلث قائمہ الزاویہ ایسی معلوم ہوسکتے
ہین کہ اونکی اضلاع اعداد صحیح ہون

قیمتین ر کی	قیمتین ۲ ر کی	قیمتین ر² − ۱ کی	قیمتین ر² + ۱ کی
۲	۴	۳	۵
۳	۶	۸	۱۰
۴	۸	۱۵	۱۷
۵	۱۰	۲۴	۲۶
۶	۱۲	۳۵	۳۷

یہہ بات بہت ظاہر ہی کہ جب ضلعی کسی مثلث قائمہ الزاویہ کی اعداد صحیح ہوتے ہین تو اوسکی مساحت بیشک ایک عدد صحیح ہوگی کیونکہ مساحت کسی مثلث قائمہ الزاویہ کی مساوی نصف اوس حاصل ضرب کی ہوتی ہی جو حاصل ہوتا ہی ضرب دینے سے دو ضلعون کو جو سوای وتر قایمہ کی ہین اور چونکہ یہہ ضلعی اعداد صحیح ہین تو حاصل ضرب انکا یعنی مساحت مثلث عدد صحیح ہوگی اب ہم دریافت کرینگی اعداد صحیح اور مقدارین غیر نزولی واسطی اوس قسم کی مثلثون کے سوای مثلث قائمہ الزاویہ کے اب ہم دریافت کیا چاہتی ہینگی ایسی مثلثین مساوی الاضلاع کہ اونکی اضلاع اور عمود اونکی قاعدون مراد اجزاء اون قاعدون کے کہ پیدا ہوتی ہین بسبب ملنے عمودون مذکور کی مقدارین غیر نزولی اور اعداد صحیح ہون فرض کرو کہ مثلث ا ب س ایک مثلث مساوی الاضلاع ہی کہ ہر ضلع اسکا ۲ ط ہی اسلئے ظاہر ہی کہ واسطی ط کے کوئی عدد صحیح اور جفت فرض کیا جاے تو اجزای قاعدہ کے اعداد صحیح ہونگی لیکن اب دیکھنا چاہیے کہ ارتفاع ا ح بہی اوس قسم کی مثلثون مین مقدار غیر نزولی اور صحیح ہوتی ہی یا نہین



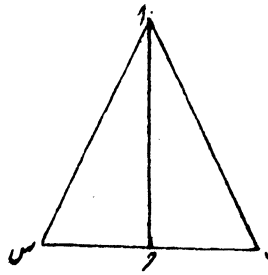
اب ظاہر ہی کہ ا ح۲ = (۲ ط)۲ − ط۲ = ۴ ط۲ − ط۲ =

۳ ط۲ اور یہان سے یہہ معلوم ہوتا ہی ا ح۲ = ۳ ط۲

اور اسیواسطے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ا ح یعنے

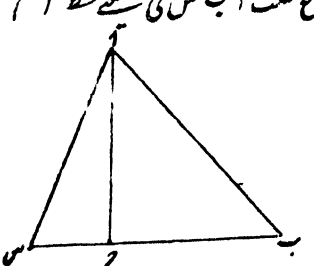
ارتفاع = ط √۳ پس معلوم ہوتا ہی مساوات

ا ح = ط √۳ سے کہ جسوقت ضلعی کسی مثلث مساوی الاضلاع کے اعداد صحیح ہون تو نہین ہی ممکن کہ ارتفاع اس مثلث کی کوئی مقدار غیر نزولی ہو اور سیواسطے اوس قسم کی مثلثون کی مساحت بہی مقدار غیر نزولی نہین ہوسکتی اور پوری نہین دریافت ہوسکتی کیونکہ جذر عدد ۳ کا کبہی پورا نہین نکل سکتا ہی پس جو اعداد صحیح ہم چاہتی ہین وہ غیر ممکن ہین اب دریافت کیا چاہتے ہین ہم ایسی مثلث مساوی الساقین کہ اونکی اضلاع اور ارتفاع اور اجزاء قاعدہ کی اعداد صحیح ہون واضح ہو کہ یہہ بات بسہولت عمل مین اسکتی ہی بذریعہ قاعدہ مثلثون قایم الزاویہ کی کہ اوسکا پہلی بیان ہوچکا کیونکہ ہم خیال کرسکتی ہین کہ ہر مثلث مساوی الساقین مرکب ہی دو مثلثون قائمہ الزاویہ سی کہ ارتفاع مشترک ان دونو کا ارتفاع اوس مثلث مساوی الساقین کا ہی مثلاً فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث مساوی الساقین ہی



اور ا ح اوسکا ارتفاع ہی اور ا ح ب اور ا ح س دو مثلث قائمہ الزاویہ اوسمین واقع ہین اور ان مثلثون قایم الزاویہ کے قاعدے اور ارتفاع مساوی ہین پس اب موافق قاعدہ مثلثون قائمہ الزاویہ کی فرض کرو کہ ب ح یا ح س کو مساوی ۲ ر سے

اور ا ح کو مساوی ر۲ − ۱ کے اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یہہ قیمتیں خطوں ا ب اور ا س کی ر۲ + ۱ اور ر۲ + ۱ اور یہانسے یہہ معلوم ہوا کہ تین ضلعی مثلث مساوی الساقین کے لیے ہین ر۲ + ۱ اور ر۲ + ۱ اور ۴ ر اور ارتفاع اس مثلث کی ر۲ − ۱ ہی اور جسوقت فرض کیجائی کوئی خاص قیمت واسطی ر کے اعداد صحیح ہین تو حاصل ہونگی ایسی مثلثہ مساوی الساقین کہ اونکی اضلاع اور ارتفاع اور مساحت اعداد صحیح ہونگی مثلاً فرض کرو کہ ر = ۲ تو ر۲ + ۱ = ۴ + ۱ = ۵ اور ۴ ر = ۴ × ۲ = ۸ اور ر۲ − ۱ = ۴ − ۱ = ۳ پس معلوم ہوا کہ دو ساقین مثلث مطلوب کی ۵ اور ۵ ہین اور قاعدہ اوسکا ۸ ہے اور ارتفاع اوسکا ۳ ہی اور مساحت اوسکی = $\frac{۸ \times ۳}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$ اور یہے سب اعداد صحیح ہین اب ہم دریافت کرینگی ایسی مثلثین مختلف الاضلاع کہ جنکی اضلاع اور ارتفاع اور اجزاء قاعدہ اور مساحت اعداد صحیح اور مقدارین غیر نزدیلی ہون فرض کرو کہ ارتفاع مثلث ا ب س کی یعنے خط ا ح ۲ ط ہی اور یہہ بھی فرض کرو کہ ایک جزء قاعدہ اس مثلث کا مثلاً خط ب ح = لا اب ظاہر ہی کہ لا۲ + ۴ ط۲ = ا ب۲



پس اب ضرور ہی کہ لا۲ + ۴ ط۲ ایک کامل مجذور ہو اور اسیواسطے فرض کرو کہ جذر لا۲ + ۴ ط۲ کا لا + ۲ ف ہی اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات √(لا۲ + ۴ ط۲) = لا + ۲ ف اور جسوقت مجذور کرتے ہین ہم دونو طرفون اس مساوات کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات لا۲ + ۴ ط۲ = لا۲ + ۴ ف لا + ۴ ف۲ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ ط۲ = ۴ ف لا + ۴ ف۲ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی

$$\text{لا} = \frac{۴ ط^۲ - ۴ ف^۲}{۴ ف} = \frac{ط^۲ - ف^۲}{ف} = \frac{ط^۲}{ف} - ف$$ اب فرض کرو کہ

ط = ن ف اور اسیواسطے ط۲ = ن۲ ف۲ اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات جسسے قیمت لا کی معلوم ہوجائیگی لا = $\frac{ط^۲}{ف} - ف = \frac{ن^۲ ف^۲}{ف} - ف = ن^۲ ف - ف = (ن^۲ - ۱) ف$

اب جس جای قیمت لا کی بین ف پایا جاتا ہی لکھو اوس جای حرف ن کا اور جس جای ن پایا جاتا ہی لکھو اوس جا حرف ف کا اور اس تبدیل اور تغیر سی جو قیمت حاصل ہوگی وہ ایک دوسری قیمت لا کی ہوگی پس ایک قیمت لا کی تغیر کرسکتی ہی جز ب ح کو اور دوسری قیمت لا کی جزء قاعدہ ح س کو اور اسیواسطی دو قیمتین لا کی یہے ہونگی لا = (ن۲ − ۱) ف = ب ح اور لا = (ف۲ − ۱) ن = ح س اور یہہ بھی مرقومہ بالا سی ظاہر ہی کہ ارتفاع اس مثلث کا یعنے خط ا ح = ۲ ن ف اور اسیواسطی حاصل ہونگی یہے مساواتین

$ا ب^2 = ب ح^2 + ا ح^2 = (ن^2 - ۱) ف^2 + (۲ ن ف)^2 = ن^4 ف^2 - ۲ ن^2 ف^2 + ف^2 + ۴ ن^2 ف^2 =$
$ن^4 ف^2 + ۲ ن^2 ف^2 + ف^2 = (ن^2 ف + ف)^2$ اور یہاں سے یہہ معلوم ہوتا ہی $ا ب = ن^2 ف + ف =$
$(ن^2 + ۱) ف$ اور اسیطور سی $ا س = ح س + ا ح = (ف^2 - ۱) ن^2 + ۲ ن ف = ف^2 ن^2 - ن^2 + ۲ ن ف$
$۴ ن^2 ف^2 = ف^2 ن^2 + ۲ ن^2 ف^2 + ن^2 = (ف^2 ن + ن)^2$ اور یہاں سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ
$ا س = ف^2 ن + ن = (ف^2 + ۱) ن$ اور چونکہ $ب ح = (ن^2 - ۱) ف$ اور $ح س =$
$(ف^2 - ۱) ن$ تو معلوم ہوا کہ $ب س$ جو مساوی ہی حاصل جمع $ب ح$ اور $ح س$ کے مساوی ہوگا اس
حاصل جمع کی $(ن^2 - ۱) ف + (ف^2 - ۱) ن$ اب اگر ہم ان مساواتوں کو توبن جائگی فہرست امندہ

(۱) $ا ب = (ن^2 + ۱) ف$	(۴) $ب ح = (ن^2 - ۱) ف$
(۲) $ا س = (ف^2 + ۱) ن$	(۵) $ح س = (ف^2 - ۱) ن$
(۳) $ا ح = ۲ ن ف$	(۶) $ب س = (ن^2 - ۱) ف + (ف^2 - ۱) ن$

اب فرض کرو کہ $ن = ۲$ اور $ف = ۳$ اور اسیواسطی حاصل ہونگی یہ مساواتیں

(۱) $ا ب = (ن^2 + ۱) ف = (۲^2 + ۱) ۳ = (۴ + ۱) ۳ = ۲ × ۳ = ۱۵$

(۲) $ا س = (ف^2 + ۱) ن = (۳^2 + ۱) ۲ = (۹ + ۱) ۲ = ۱۰ × ۲ = ۲۰$

(۳) $ا ح = ۲ ن ف = ۲ × ۲ × ۳ = ۴ × ۳ = ۱۲$

(۴) $ب ح = (ن^2 - ۱) ف = (۲^2 - ۱) ۳ = (۴ - ۱) ۳ = ۳ × ۳ = ۹$

(۵) $ح س = (ف^2 - ۱) ن = (۳^2 - ۱) ۲ = (۹ - ۱) ۲ = ۸ × ۲ = ۱۶$

(۶) $ب س = (ن^2 - ۱) ف + (ف^2 - ۱) ن = ۹ + ۱۶ = ۲۵$

اور مساحت مثلث کی $= \frac{ب س × ا ح}{۲} = \frac{۲۵ × ۱۲}{۲} = ۲۵ × ۶ = ۱۵۰$

اب فرض کرو کہ $ن = ۳$ اور $ف = ۴$ اور موافق اس فرض کی حاصل ہونگی یہ مساواتیں

(۱) $ا ب = (ن^2 + ۱) ف = (۳^2 + ۱) ۴ = (۹ + ۱) ۴ = ۱۰ × ۴ = ۴۰$

(۲) $ا س = (ف^2 + ۱) ن = (۴^2 + ۱) ۳ = (۱۶ + ۱) ۳ = ۱۷ × ۳ = ۵۱$

(۳) $ا ح = ۲ ن ف = ۲ × ۳ × ۴ = ۶ × ۴ = ۲۴$

(۴) $ب ح = (ن^2 - ۱) ف = (۳^2 - ۱) ۴ = (۹ - ۱) ۴ = ۸ × ۴ = ۳۲$

(۵) $ح س = (ف^2 - ۱) ن = (۴^2 - ۱) ۳ = (۱۶ - ۱) ۳ = ۱۵ × ۳ = ۴۵$

(۶) ب س = (ن۲ − ۱) ن + (ف۲ − ۱) ن = ۳۲ × ۴۵ = ۷۷ اور مساحت مثلث کی $\frac{۶ \times \text{ب س}}{۶} = \frac{۷۷ \times ۲۴}{۲} = ۷۷ \times ۱۲ = ۹۲۴$

اس مثال مین تین ضلعی مثلث مفروض کے لیے اعداد صحیح نکلتی ہین ۴۰ ۵۱ ۷۷ اور اگر دریافت کیا چاہین ہم مساحت اس مثلث کی بذریعہ اون ضلعون کے موافق اوس قاعدہ کی تعبیر ہوتا ہی مساوات (۱) سے کہ واقع ہی بیان انکال ہندسی مین تو بھی یہہ بات دریافت ہوجائیگی کہ مساحت مثلث کی ایک صحیح عدد اور مقدار غیر نزولی ہوگی مثلاً فرض کرو کہ ج = ۴۰ اور س = ۵۱ اور

$ط = ۷۷$ اور $ص = \frac{ج + س + ص}{۲} = \frac{۴۰ + ۵۱ + ۷۷}{۲} = \frac{۱۶۸}{۲} = ۸۴$

اور اسیواسطے حاصل ہونگی یے مساواتین ص − ج = ۸۴ − ۴۰ = ۴۴ اور

ص − س = ۸۴ − ۵۱ = ۳۳ اور ص − ط = ۸۴ − ۷۷ = ۷

اور اسیواسطی مساحت مثلث کی $\sqrt{ص (ص - ج) (ص - س) (ص - ط)}$

$= \sqrt{۸۴ \times ۴۴ \times ۳۳ \times ۷} = \sqrt{۲۳۱ \times ۲۶۹۶} =$

$\sqrt{۷۷۶۵۳۷۷} = ۸۸۰۴$ اور یہہ وہی مساحت ہی جو پہلی ثابت ہوئی تہی پس قاعدہ کلیہ کہ جسکی ذریعہ سے ہم بیشمار مثلث مختلف الاضلاع دریافت کرسکتے ہین کہ اونکی ضلعے اور ارتفاع اور اجزای یعنی بازو اونکی قاعدون کے اور مساحت اونکی اعداد صحیح اور مقدارین غیر نزولی ہون الفاظ مین اسطرح سی بیان ہوسکتا ہی قاعدہ فرض کرو کوئی دو ایسی عدد کہ ہر واحد اونمین کا زیادہ ہو عدد ایک کی سے اور دو چند حاصل ضرب اونکا ارتفاع مثلث مطلوب کی ہوگی اور اگر ایک کو عددون مفروض مین سے مجذور کرکے اوسمین سے عدد ایک نکالین اور حاصل تفریق کو دوسرے عدد مفروضین ضرب کرین تو حاصل ضرب ایک جزو قاعدہ مثلث مفروض کا ہوگا اگر اسی مجذور پر زیادہ کرین ہم عدد ایک کا اور حاصل جمع کو دوسرے عدد مذکور مین ضرب کرین تو حاصل ضرب وہ ضلع ہوگا جو ملا ہوا ہی اوسی بازو قاعدہ مثلث سی جو ابہی دریافت ہوا ہی اب اگر مجذور کرین ہم دوسرے عدد کو اور اوسمین سے عدد ایک کا تفریق کرین اور حاصل تفریق کو عدد اولین ضرب کرین تو حاصل ضرب ہوگا دوسرا جزو بازو قاعدہ مثلث مفروض کا اور اگر مجذور عدد دوسرے پر زیادہ کرین عدد ایک کا اور حاصل جمع کو ضرب کرین عدد اولین تو حاصل ضرب ہوگا وہ ضلع جو ملا ہوا ہی بازو دوسرے سی اور ظاہر ہی کہ حاصل جمع دو نو بازو نکا ہوگا قاعدہ مثلث کا یہہ قاعدہ کلیہ کسی جبر و مقابلہ یا کسی حساب کی کتاب مین مبنی اتک نہین پایا ہی بلکہ یہہ بجا دہی مخدومی مستر رمجذر کا

فصل سیزدہم بیان سوالات مختلفہ کے

اب چونکہ ہم اس کتاب کو تمام کیا چاہتے ہین تو لازم ہی کہ چند سوالات مطالب مختلفہ کی اسمین بیان کرین

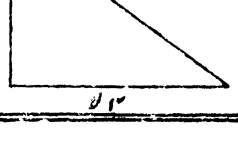
سوال ۱ ای دوست کہ تو ذہانت مین لاثانی ہی بتا دی مجھی چار اعداد غیر مساوی ایسی کہ اگر ادنکو جمع کرین تو حاصل جمع مساوی ہو حاصل جمع اونکی مجذور دونکی یہہ سوال کتاب بیج گنت مین سے کہ مصنف اوسکا بہاسکر جارج تہا لیا گیا ہی اور طریقہ اوسکی حل کرنیکا یہہ ہی فرض کرکہ چار اعداد مطلوبہ لا اور ۲ لا اور ۳ لا اور ۴ لا ہین پس حاصل جمع انکا ۱۰ لا ہوگا اور موافق شرط سوال کی یہہ مساوی ہونا چاہیے لا۲ + ۴ لا۲ + ۹ لا۲ + ۱۶ لا۲ یعنے ۳۰ لا۲ کی کہ حاصل جمع مجذور دون چار اعداد مذکور کا ہی پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات ۱۰ لا = ۳۰ لا۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا = $\frac{۱۰}{۳۰}$ = $\frac{۱}{۳}$ اور اسیواسطے چار اعداد مطلوبہ یہ ہین $\frac{۱}{۳}$ اور $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۳}{۳}$ اور $\frac{۴}{۳}$ اور امتحان اس مثال کا اسطرح سی ہوسکتا ہی

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۳} + \frac{۴}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$ اور حاصل جمع انکی مجذور دونکا یہہ ہی

$$\frac{۱}{۹} + \frac{۴}{۹} + \frac{۹}{۹} + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۳۰}{۹} = \frac{۱۰}{۳}$$

سوال ۲ چاہتے ہین دریافت کرنا چار ایسے اعداد کہ حاصل جمع اونکے مخذوف بکیا مساوی ہی حاصل جمع اونکے مکعبون کے یہہ بہی سوال بیج گنت مین سے لیا گیا ہی اور یہہ یون حل ہوتا ہی فرض کرو کہ چار اعداد مطلوبہ لا اور ۲ لا اور ۳ لا اور ۴ لا ہین اور ظاہر ہی کہ حاصل جمع انکی مجذور دونکا ۳۰ لا۲ ہی اور موافق شرط سوال کے یہہ حاصل جمع مساوی ہونا چاہیئی حاصل جمع ان اعداد کے مکعبون کی جو یہہ لا۳ + ۸ لا۳ + ۲۷ لا۳ + ۶۴ لا۳ یعنی یہہ ۱۰۰ لا۳ ہی پس اب حاصل ہوگی یہہ مساوات ۳۰ لا۲ = ۱۰۰ لا۳ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ قیمت لا کی لا = $\frac{۳۰}{۱۰۰}$ = $\frac{۳}{۱۰}$ اور یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ چار اعداد مطلوبہ یہ ہین $\frac{۳}{۱۰}$ اور $\frac{۶}{۱۰}$ اور $\frac{۹}{۱۰}$ اور $\frac{۱۲}{۱۰}$ اور امتحان اس مثال کا بطور مرقومہ بالا کی ہوسکتا ہی

سوال ۳ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایک ایسے مثلث قائمہ الزاویہ کہ سطح اوسکی مساوی ہو اوس عدد کے جو تعبیر کرتا ہی اوسی مثلث کی وتر قایمہ کو مثلاً فرض کرو کہ وتر قایمہ اس مثلث کا ۵ لا ہی اور دو باقی ضلعی اوسکی ۳ لا اور ۴ لا ہین جیسے شکل مین لکھا ہوا ہی اوسسے ظاہر ہی کہ مساحت اس مثلث کی



یہہ ہی $\frac{۴\text{ لا} \times ۳\text{ لا}}{۲} = \frac{۱۲\text{ لا}^۲}{۴} = ۶\text{ لا}^۲$ اور موافق شرط سوال کے ضرور ہی کہ ہووے مساحت اس مثلث کی یعنے ۶ لا۲ مساوی وترقایہ یعنی ۵ لا۲ کے پس حاصل ہوگی یہہ مساوات ۵ لا = ۶ لا۲ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات لا = $\frac{۵}{۶}$ پس اس سے سب ضلعی مثلث کی معلوم ہوجائینگی

سوال ۴ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا اضلاع ایک ایسی مثلث قایمہ الزاویہ کی کہ مساحت اوسکی مساوی ہو حاصل ضرب اوسکی تینون ضلعون کے مثلاً فرض کرو کہ وترقایمہ الزاویہ مثلث کا ۵ لا اور دوباقی اوسکی ضلعی ۴ لا اور ۳ لا ہین پس موافق شرط سوال کے ضرور ہی کہ ہووی یہہ مساوات ۶ لا۲ = ۶۰ لا۳ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی لا = $\frac{۱}{۱۰}$ اور اسیواسطی ضلعی مثلث مطلوب کے ہیے ہین $\frac{۳}{۱۰}$ اور $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۳}{۱۰}$ ہیے ۔ وسوال اخیر بیج گنت مین سے لی گئے ہین

سوال ۵ اگر تجھکو کچھہ حساب آتا ہو تو بتادی مجھکو جلد دو اعداد ایسی کہ حاصل جمع اور حاصل تفریق اونکا علیحدہ علیحدہ اعداد مجذور ہووین اور اگر اونکو اسیمین ضرب کرین تو حاصل ضرب مکعب ہووے فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ ۴ لا۲ اور ۵ لا۲ ہین اور اسیواسطی ۵ لا۲ + ۴ لا۲ = ۹ لا۲ = ایک عدد مجذور کی اور ۵ لا۲ − ۴ لا۲ = لا۲ = ایک عدد مجذور کے پس پوری ہوئین دو شرطین اور باقی رہی تیسری شرط جو یہہ ہی کہ حاصل ضرب دو نو اعداد مطلوب کا ایک عدد مکعب ہووے یعنے ۲۰ لا۴ ایک عدد مکعب ہووی فرض کرو کہ جذر کبھی یعنے تیسری مرتبہ کا نزدل ۲۰ لا۴ کا ۱۰ لا ہی اور موافق اسس فرض کی حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲۰ لا۴ = (۱۰ لا)۳ = ۱۰۰۰ لا۳ اور اسیواسطی لا = ۵۰ اور یہان سے معلوم ہوا کہ دو عدد مطلوبہ ہیے ہین ۱۰۰۰۰ اور ۱۲۵۰۰ (سوال بیج گنت)

سوال ۶ ای دوست اگر تو بتادیگا مجھکو ایسی دو عدد کہ حاصل جمع اونکی مکعبون کا ایک مجذور ہو اور حاصل جمع اونکی مجذورون ایک عدد مکعب ہووے تو مین تجھکو بڑا ریاضی دان جانونگا فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ لا۲ اور ۲ لا۲ ہین ظاہر ہی کہ حاصل جمع اونکی مکعبونکا ۹ لا۶ ہی اور یہہ ایک عدد مجذور ہی جیسیکہ منظور ہی اور اور اسکا جذر ۳ لا۳ ہی اب حاصل جمع مجذورون اعداد مفروض کا ۵ لا۲ ہی اور موافق دوسری شرط سوال کی ضرور ہی کہ ۵ لا۲ ایک مکعب ہووے پس اسیواسطی فرض کرو کہ کعب ۵ لا۲ کا ۵ لا ہیے اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۵ لا۲ = ۱۲۵ لا۳ اور اسس مساوات سی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی لا = ۲۵ اور یہان سی معلوم ہوا کہ اعداد مطلوبہ ہیے ہین ۶۲۵ اور ۱۲۵۰ (سوال بیج گنت)

سوال ۷ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا دو ایسی اعداد کہ حاصل جمع اونکا مساوی ہو اونکی حاصل تفریق کے مجذور کی اب چونکہ حاصل جمع دو اعداد مطلوب کا موافق شرط سوال کے مجذور ہونا چاہیے

تو فرض کرو کہ لا + ی = ط² اور چونکہ لا + ی = (لا − ی)² تو معلوم ہوا کہ لا − ی = ط اور اسیواسطے اگر جمع کرین ہم ان دونو مساواتون کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۲ لا = ط² + ط اور اس سے لا = $\frac{ط^2+ط}{2}$ = $\frac{ط(ط+1)}{2}$ اور اگر تفریق کرین اونہین دو مساواتو کو ایک دوسری مین سے تو حاصل ہوگا یہہ ۲ ی = ط² − ط اور اس سے یہہ ی = $\frac{ط(ط-1)}{2}$ اب فرض کرو کہ ط = ۲ ص اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہ مساواتین لا = ص (۲ ص + ۱) اور ی = ص (۲ ص − ۱) مثلاً فرض کرو کہ ص = ۱ پس اب حاصل ہوگی یہ قیمتین لا اور ی کی لا = ۳ اور ی = ۱ اور اور امتحان اسکا یون ہوتا ہی کہ لا + ی = ۳ + ۱ = ۴ اور (لا − ی)² = ۲² = ۴ اور اگر ہو ص = ۲ تو لا = ۲ × (۲ × ۲ + ۱) = ۲ × ۵ = ۱۰ اور ی = ۲ × (۲ × ۲ − ۱) = ۲ × ۳ = ۶ اور امتحان اسطرحسی ہوتا ہی لا + ی = ۱۰ + ۶ = ۱۶ اور (لا − ی)² = ۴² = ۱۶ اور یہہ طریقہ حل کرنے سوال گذشتہ کا بہت خوب ہی

سوال ۸ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا ایسی دو اعداد کہ اگر ایک کو اونہین سی مکعب کرین اور زیادہ کرین اسی مجذور دوسرے کی پر تو حاصل جمع ایک عدد مجذور ہووے فرض کرو کہ اعداد مطلوبہ م اور ی ہین اور موافق شرط سوال کے ضرور ہی کہ حاصل جمع م³ + ی² ایک مجذور ہونا چاہئی پس فرض کرو کہ م³ + ی² = لا² اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات م³ = لا² − ی² = (لا + ی) (لا − ی) اور چونکہ موافق سوال گذشتہ کی ہم فرض کرسکتے ہین کہ لا + ی = (لا − ی)² تو حاصل ہوگی یہہ مساوات م³ = (لا − ی) (لا − ی)² اب موافق سوال گذشتہ کی ضرور ہی کہ ہووین یہہ مساواتین ی = $\frac{ط^2-ط}{2}$ اور لا = $\frac{ط^2+ط}{2}$ اور چونکہ م³ = (لا − ی)² تو معلوم ہوا کہ م = لا − ی اور اسیواسطے

م = $\frac{ط^2+ط}{2} - \frac{ط^2-ط}{2}$ = $\frac{ط2}{2}$ = ط پس معلوم ہوا کہ دو اعداد مطلوبہ یہ ہین ط و $\frac{ط^2-ط}{2}$ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا² = $ط^3 + \frac{(ط^2-ط)^2}{4}$ = $\frac{ط^4-2ط^3+ط^2}{4}$ = $\frac{ط^4+2ط^3+ط^2}{4}$ = $\frac{(ط^2+ط)^2}{4}$ اور اسیواسطی لا = $\frac{ط^2+ط}{2}$

مثلاً فرض کرو ط = ۲ تو اعداد مطلوبہ یہ ہونگی ۲ اور ۳ اور امتحان اس مثال کا یون ہوتا ہی ۲³ + ۳² = ۸ + ۹ = ۱۷ = ۴² اور اگر ط = ۳ تو دو عدد یہ ہونگی ۳ اور ۶ اور اسیواسطے ۳³ + ۶² = ۲۷ + ۳۶ = ۶۳ = ۷² اور اگر ط = ۴ تو عدد مطلوبہ یہ ہونگی ۴ اور ۱۰ اور

اسیواسطی ۴ + ۶ = ۴۶ + ۶۴ = ۱۰۰ = ۱۰۲ اور اسیطور سے اور مثالین بھی حل ہوسکتی ہین اور اوسکا امتحان ہوسکتا ہی

سوال ۹ ایک گہرین سے چار چور دانے سو موتی اور پانچ الماس اور دس یاقوت اور ۸ لعل چورائے اور بلحاظ اسکے کہ ہر چور کو برابر مال حاصل ہو اونہون نی اس جواہرات کو اسیین اسطرح تقسیم کیا کہ ایک چور کو تو پانچ لعل اور آیاقوت اور آالماس اور آموتی ہاتہہ لگی اور دوسرے کو آلعل اور ۲ یاقوت اور آالماس اور آموتی اور تیسری چور کو آلعل اور آیاقوت اور ۲ الماس اور آموتی ہات لگے اور چوتہی چور کو آلعل اور آیاقوت اور آالماس اور ۷ موتی ہات لگی فرض کرو کہ لا ہی قیمت ایک لعل کی اور ی ایک یاقوت کی اور ع ایک الماس کی اور ف ایک موتی کی پس موافق شرائط سوال کے حاصل ہونگی سے مساواتین کہ ہر واحد مین اونمین سے چار چار مقدارین مجہول پائی جاتی ہین

۵ لا + ی + ع + ف = لا + ۷ ی + ع + ف = لا + ی + ۲ ع + ف = لا + ی + ع + ۷ ف

اب ظاہر ہی کہ اول اور دوسری مساواتون سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ لا = ۶ ی اور دوسری اور تیسری مساوات سی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی ۶ ی = ع اور تیسری اور چوتہی مساواتون سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی ع = ۹۶ ف اب تاکہ قیمتین جواہرات مذکور کی اعداد صحیح ہون ضروری کہ ع کم سی کم ۹۶ ہو پس جسوقت ع = ۹۶ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ۶ ی = ۹۶ اور اسیواسطی ہوگی یہہ مساوات ی = $\frac{۹۶}{۶}$ = ۱۶ اور اسیواسطے ۴ لا = ۶ ی = ۹۶ اور لا = ۲۴ پس یہانتک معلوم ہوا کہ قیمت ہر موتی کی آروپیہ ہی اور ہر یاقوت کی ۱۶ روپئے اور ہر الماس کی ۹۶ اور ہر لعل کی ۲۴ روپئے اور امتحان اس مثال کا اسطرح سی ہوسکتا ہی ۵ لا + ی + ع + ف = ۱۲۰ + ۱۶ + ۹۶ + ۱ = ۲۳۳

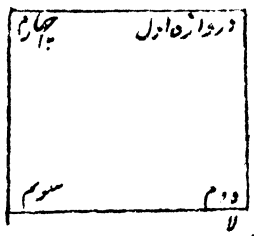
لا + ۷ ی + ع + ف = ۲۴ + ۱۱۲ + ۹۶ + ۱ = ۲۳۳

لا + ی + ۲ ع + ف = ۲۴ + ۱۹۲ + ۱۶ + ۱ = ۲۳۳

لا + ی + ع + ۷ ف = ۲۴ + ۹۶ + ۱۶ + ۹۷ = ۲۳۳

سوال ۱۰ ایک شہر کی ۴ چار دروازے ہین اور چارون دروازون پر کچہہ کچہہ فوج واسطے مقابلہ غنیم کے موجود ہی جسوقت غنیم دروازہ اول پر آیا تو اوس دروازہ کی فوج کے حاکم نی یہہ بات دریافت کرکے کہ میری فوج واسطی مقابلہ دشمن کے کفایت نہین کریگی اتنی اتنی فوج ہر دروازہ سے واسطی اپنی مدد کے منگوائی جتنی فوج اوسکی پاس موجود تہی پس اس ترکیب سے دشمن نے دروازہ اول پر شکست کہائی اور اوسنی حملہ دوسرے دروازہ پر کیا اور اوس دروازہ کی حاکم نے بہی یہہ بات دریافت

کرکی کہ اوسکی فوج ہر سطی مقابلہ کی کفایت نہین کرسکی اتنے اتنے آدمی ہر دروازہ سے بلوای جتنی آدمی اوسکے پاس رہے پس بہانسی بہی دشمن سے شکست کہائی اور یہی حال دو نو باقی دروازون پر ہوا اور اسطور سے چارون دروازون پر دشمن سے شکست کہاکر اپنی ملک کی طرف مراجعت کی اور بعد اسکی جو شمار فوج کی چارون دروازون پر کی گئی تو معلوم ہوا کہ ہر دروازہ پر فوج مساوی ہی اب بتاؤ کہ اول مین ہر دروازہ پر کتنی کتنی فوج تہی حل کرنی اس سوال کے کئی ترکیبین ہین اول ترکیب یہہ ہی فرض کرو کہ بعد مراجعت دشمن کے ہر واحد پر چار دروازون مین سے



لا آدمی تہے اب اگر دروازہ اول کا حاکم جتنے جتنے آدمیونکو اسنے تین باقی دروازون سے بلوایا تہا اونہین پہر واپس اپنے اپنی مقام پر کرسے تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین دروازہ اول پر یہہ فوج $\frac{لا}{۴}$ ہوگی اور دروازہ دوم پر اور سوم پر اور چہارم پر سے فوجین ہونگی لا + $\frac{لا}{۴}$ اور لا + $\frac{لا}{۴}$ اور لا + $\frac{لا}{۴}$ یعنی اب چارون دروازون پر اتنے اتنے آدمی ہونگی $\frac{لا}{۴}$ اور $\frac{لا}{۴}$ اور $\frac{لا}{۴}$ اور $\frac{لا}{۴}$ اب دروازہ دوم کی حاکم نی بہی باقی تین دروازون کے آدمیونکو اپنی اپنی مقام پر واپس کیا اسصورت مین ظاہر ہی کہ چار دروازون مذکور پر اتنی اتنی آدمی باقی رہینگی

دروازہ اول $\frac{لا}{۴} + \frac{لا۵}{۱۶}$ اور دروازہ دوم $\frac{لا۵}{۱۶}$ دروازہ سوم $\frac{لا۵}{۴} + \frac{لا۵}{۱۶}$

اور دروازہ چہارم $\frac{لا۵}{۴} + \frac{لا۵}{۱۶}$ یعنی اتنی اتنی آدمی دروازون مذکور پر رہین گے $\frac{لا۹}{۱۶}$ اور $\frac{لا۵}{۱۶}$

اور $\frac{لا۲۵}{۱۶}$ اور $\frac{لا۲۵}{۱۶}$ اب فرض کرو کہ تیسری دروازہ کی حاکم نے بہی باقی تین دروازونکی سپاہیونکو واپس اپنے اپنی مقامون کو کیا پس بعد اسکے چار دروازون پر اتنی اتنی آدمی رہین گے

$\frac{لا۹}{۱۶} + \frac{لا۲۵}{۶۴}$ اور $\frac{لا۵}{۱۶} + \frac{لا۲۵}{۶۴}$ اور $\frac{لا۲۵}{۶۴}$ اور $\frac{لا۲۵}{۱۶} + \frac{لا۲۵}{۶۴}$

یعنی اتنی اتنی $\frac{لا۶۱}{۶۴}$ اور $\frac{لا۴۵}{۶۴}$ اور $\frac{لا۲۵}{۶۴}$ اور $\frac{لا۱۲۵}{۶۴}$ اب فرض کرو کہ چوتہی دروازہ کی حاکم نے بہی باقی تین دروازون کے آدمیون کو اپنی اپنی مقامون پر واپس کیا پس اس صورت مین چار دروازون مذکور پر اتنی آدمی رہینگی $\frac{لا۶۱}{۶۴}$ $\frac{لا۱۲۵}{۲۵۶} + \frac{لا۴۵}{۶۴}$ اور $\frac{لا۱۲۵}{۲۵۶} + \frac{لا۲۵}{۶۴}$

اور $\frac{لا۱۲۵}{۲۵۶}$ یعنی اتنی اتنی $\frac{لا۳۶۹}{۲۵۶}$ اور $\frac{لا۳۰۵}{۲۵۶}$ اور $\frac{لا۲۲۵}{۲۵۶}$ اور $\frac{لا۱۲۵}{۲۵۶}$

پس معلوم ہوا کہ یہ چار اعداد کہ بشکل کسور کے لکھی ہوئی ہین بین تعداد ین اون آدمیون کی جو چار دروازون مذکور پر شروع من موجود تھی اور چونکہ آدمیون کا نصف اور چوتھائی یا کوئی اور کسر نہین ہوسکتی ہی تو لازم ہی کہ مقرر کرین ہم کوئی ایسا عدد واسطے لاکی کہ چارون کسرین مذکورہ بالا اعداد صحیح ہوجائین ایسی اعداد واسطے لاکی شمار ہوسکتی ہین لیکن چھوٹا ایسا عدد اس مثالمین ۲۵۶ ہی پس سطرحسی معلوم ہوا کہ شروع مین چار دروازون پر اتنی اتنی آدمی موجود تھی

دروازہ اول	دروازہ دوم	دروازہ سوم	دروازہ چہارم	اور امتحان اس
۱۲۵	۲۲۵	۳۰۵	۳۶۹	

سوال کا اسطرحسی ہوسکتا ہی اگر عدد ۱۲۵ کو کہ اول دروازہ پر ہین باقی تینون دروازہ کی آدمیون سے نکالین اور اول دروازہ پر جمع کرین تو ہونگی یہ چار اعداد ۵۰۰ اور ۱۰۰ اور ۱۸۰ اور ۲۴۴ اور اگر دوسرے دروازہ پر یہی عمل کرین تو چار اعداد ہونگی ۴۰۰ اور ۴۰۰ اور ۸۰ اور ۱۴۴ اب تیسری دروازہ پر اتنی اتنی آدمی باقی دروازون سے بلوای جائین جتنی اوسی دروازہ پر موجود تھی تو چار اعداد یہ ہونگی ۳۲۰ اور ۳۲۰ اور ۳۲۰ اور ۶۴ اور اگر یہی عمل چوتھی دروازہ پر تو حاصل ہونگی یہ اعداد مساوی ۲۵۶ اور ۲۵۶ اور ۲۵۶ اور ۲۵۶ اور یہی ثابت کرنا تھا واضح ہو کہ جو چار اعداد اوپر نکالی گئے ہین وے چھوٹی سی چھوٹی ہین اور اگر زیادہ بڑی اعداد دریافت کیا چاہین تو فقط یہہ بات لازم ہی کہ فرض کرین ہم واسطے لاکی کوئی نصف ۲۵۶ کا اب ہم لکھتے ہین دوسری ترکیب حل کرنی سوال گذشتہ کی جو برعکس ہی پہلی ترکیب کے یعنی ادمیں شروع کرتی ہین اس بات کو فرض کرکے کہ ہر دروازہ پر آدمی مساوی رہگئی ہین اور اس نئے ترکیب مین یہہ بات فرض کیجائیگی کہ ہر دروازہ پر مختلف تعداد آدمیون کی ہی اب فرض کرو کہ اول دروازہ پر لا آدمی ہین اور دوسرے پر و اور تیسری پر ع اور چوتھی پر ف پس اب موافق شرایط سوال کی بعد اول شکست دشمن کے چار دروازون مذکور پر اتنی باقی رہین گے ۴ لا اور ۴ و اور ۴ ع اور ۴ ف بعد دوسری شکست کی اتنی اتنی آدمی رہینگی ۵ لا — و اور ۴ و — ۴ لا اور ۴ ع — و اور ۴ ف — و اور بعد تیسری شکست کی اتنی اتنی ۵ لا — ع اور ۵ و — ۴ لا — ع اور ۴ و — ۴ و اور ۴ ع — ع اور ۴ ف — ع اور بعد چوتھی شکست کی ہر دروازہ پر اتنی اتنی فوج باقی رہیگی ۵ لا — ف اور ۵ و — ۴ لا — ف اور ۵ ع — ۴ و — ف اور ۴ ف — ۴ ع یہ چارون صورتین جبر یہ موافق شرط سوال کی مساوی ہونی چاہئین پس اول اور دوسری صورت سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۵ لا — ف = ۵ و — ۴ لا — ف اور اس سی مساوات ۵ لا = ۵ و اور دوسری اور تیسری صورتون سے حاصل یہہ ۵ و — ۴ لا — ف = ۵ ع — ۴ و — ف اور اس سی حاصل ہوتی یہہ مساوات

$ع = ۵ع + ۴۵$ اور چونکہ $لا = \frac{۲۵}{۹}$ تو حاصل ہوگی مساوات $ع = ۵ع + \frac{۱۲۵}{۹}$ یا $۱۸ع = ۴۵ع + ۱۲۵$

اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات $۱۶ع = ۴۵ع$ اور تیسری اور چوتھی صورتوں سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$۵ع - ۴ع = ف - ۴ف = ۴ع$ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات $۹ع = ۴۵ف$

لیکن $ع = \frac{۴۵ع}{۶۱}$ تو $۹ع = \frac{۱۸۰ع}{۶۱} = ۵ف$ اور اس سے حاصل ہوتی ہے یہہ مساوات

$۴۹ع = ۸۰ع = ۳۰۵ف$ یا $۳۶۹ع = ۳۰۵ف$ اب ضرور ہے کہ ہووے کم سے کم عدد واسطی

ف کی یہہ $\overline{۳۶۹}$ اور اسیواسطے $ع = ۳۰۵$ اور چونکہ $ع = \frac{۴۵ع}{۶۱}$ تو معلوم ہوا کہ

$ع = \frac{۳۰۵ \times ۴۵}{۶۱} = ۵ \times ۴۵ = ۲۲۵$ اور $لا = \frac{۲۲۵ \times ۵}{۹} = \frac{۱۵}{۹}$

$۵ \times ۲۵ = ۱۲۵$ پس معلوم ہوا کہ چار اعداد مطلوبہ یہے ہین $\overline{۱۲۵}$ اور $\overline{۲۲۵}$ اور $\overline{۳۰۵}$ اور $\overline{۳۶۹}$

اور یہے وہے ہین جو پہلی ثابت ہوئی تھے

سوال ۱۱ چاہتے ہین ہم دریافت کرنا چار ایسی اعداد صحیح مجذور دونگا کہ اگر کوئی سے کو ادنین سے

عدد مجذور ۱۴۴ پر زیادہ کرین تو ہر صورت مین حاصل جمع ایک مجذور رہتا ہی پس فرض کرو کہ $لا$ تعبیر کرتا ہی متواتر

چارون اعداد مجذور دون کی جذرون کو اور اسیواسطے لازم ہی کہ ہووی $۴۴ + لا$ ایک کامل مجذور ہر صورت

مین فرض کرو کہ جذر اس صورت کا $لا + ۲ف$ ہی پس حاصل ہوگی یہہ مساوات

$لا + ۱۴۴ = (لا + ۲ف)^۲ = لا^۲ + ۴ف لا + ۴ف^۲$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات

$لا = \frac{۳۶}{ف} - ف$ پس اب تا کہ چار قیمتین واسطی لا کی مقرر ہون فرض کرو چار مختلف قیمتین واسطی ف کے

ایسی کہ $\overline{۳۶}$ اون سب پر علیحدہ علیحدہ تقسیم ہو سکی اور ظاہر ہی یہے اعداد ۱ اور ۲ اور ۳ اور ۴ ہین

پس اب حاصل ہونگی متواتر یہے قیمتین واسطی لا کی $لا = \frac{۳۶}{۱} - ۱ = ۳۵$ اور

$لا = \frac{۳۶}{۲} - ۲ = ۱۶$ اور $لا = \frac{۳۶}{۳} - ۳ = ۹$ اور $لا = \frac{۳۶}{۴} - ۴ = ۵$

پس معلوم ہوا کہ تین اعداد صحیح مجذور مطلوبہ یہے ہین $۳۵^۲$ اور $۱۶^۲$ اور $۹^۲$ اور $۵^۲$ اور امتحان اس

اس سوال کا اس طرح سی ہو سکتا ہی

$۳۵^۲ + ۱۴۴ = ۱۲۲۵ + ۱۴۴ = ۱۳۶۹ = ۳۷^۲$ اور

$۱۶^۲ + ۱۴۴ = ۲۵۶ + ۱۴۴ = ۴۰۰ = ۲۰^۲$ اور

$۹^۲ + ۱۴۴ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵ = ۱۵^۲$ اور

$۵^۲ + ۱۴۴ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ = ۱۳^۲$

سوال ۱۲ دریافت کیا چاہتے ہین ہم دو ایسی اعداد کہ اگر ضرب کرین ہم انہین علیحدہ علیحدہ عددون ۴ اور ۳ مین اور ان حاصل ضربون کو جمع کرکے زیادہ کرین ہم حاصل جمع پر عدد ۲ کا تو یہہ حاصل جمع مساوی ہووے حاصل ضرب دو اعداد مذکور کے فرض کرو کہ دو اعداد مطلوبہ لا اور ے ہین پس موافق شرایط سوال کے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴ لا ے + ۳ ے + ۲ = لا ے اور اس سی حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

لا (ے − ۴) = ۳ ے + ۲ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات لا = $\frac{۳ ے + ۲}{ے - ۴}$

اب فرض کرو کہ ے = ۶ تو لا = $\frac{۲ + ۱۸}{۲}$ = ۱۰ اور ظاہر ہی کہ ۴ لا ے + ۳ ے + ۲ =

۴۰ + ۱۸ + ۲ = ۶۰ = لا ے = ۱۰ × ۶ یہہ سوال بیج گنت مین نکالی ہی اور بہا سکرا چارج اوسی درطرح حل کرتا ہی وہ یہہ کہتا ہی کہ جسوقت دو مقدارین مجہول کسی ایک مساوات مین پائی جاوین تو مقرر کرلو کسی مقدار واسطی ایک مجہول کے اور دوسری مقدار مجہول کی قیمت بعد ازان معلوم ہو جائیگی مثلاً مساوات گذشتہ مین یعنے اسمین ۴ لا ے + ۲ = لا ے اوسنی فرض کیا ہی ے کو برابر ۵ کے اور موافق اس فرض کے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ لا + ۱۵ + ۲ = ۵ لا مین یعنی لا = ۷ واضح ہو کہ اس ترکیب اور ترکیب گذشتہ مین چندان فرق نہین کیونکہ ترکیب اول بعد جدا کرنی مقدارون مجہول کے واسطی ے کے کوئی قیمت مقرر کی اور ترکیب دوسری مین پہلی ہی سے ے کی واسطی کوئی عدد مقرر کرلیا ہی

سوال ۱۳ ای دوست میری بتادی مجہی چار ایسی اعداد کہ حاصل ضرب اونکا مساوی اوس حاصل ضرب کے ہو جو پیدا ہوتا ہی ضرب دینی سے انہین اعداد کی حاصل جمع کو عدد ۴۰ مین فرض کرو کہ اول اعداد مطلوبہ مین سے لا ہی اور واسطی باقی تین اعداد مطلوبہ کی کوئی سی اعداد متصل ۵ ۴ ۳ کے مقرر کرو پس اس صورت مین ظاہر ہی کہ حاصل ضرب ان چار اعداد کا ۴۰ لا ہوگا اور حاصل جمع انکا لا + ۱۱ پس موافق شرایط سوال کے حاصل ہوگی یہہ مساوات ۴۰ لا = ۴۰ (لا + ۱۱) =

۴۰ لا + ۴۴۰ اور یہان سی یہہ معلوم ہوا کہ ۴۰ لا = ۴۴۰ اور اسیواسطے لا = ۱۱ اور یہان سے معلوم ہوا کہ چار اعداد مطلوبہ

۱۱ ۵ ۴ ۳ ہین اور اگر اعداد واسطی تین اعداد مطلوب کی فرض کئی جاتے تو چار اعداد مطلوبہ نکلتے اور ہونی واضح ہو کہ ان سوالونمین موافق بعض فرضون کے اعداد صحیح حاصل ہونگے بلکہ کسور مثلاً اگر واسطی تین اعداد مطلوبہ کے سوای اول کے کہ اوسکی واسطی ایک مقدار مجہول یعنی ایک حرف فرض کیا گیا تہا بجای ان اعداد

۵ ۴ ۳ کے اعداد ۳ اور ۵ اور ے فرض کئے جاتی تو حاصل ہوتی یہہ مساوات

۱۰۵ لا = ۳ (۳ + ۵ + ۷) = ۳۰۰ اور اسیواسطی

لا = $\frac{۳۰۰}{۱۰۵}$ = $\frac{۶۰}{۲۱}$ = $\frac{۲۰}{۷}$ جو ایک کسر ہی

سوال ۱۴ چار مسافر چند روٹیان باندہ کر سفر کو چلے اور ایک خاص جا پہونچکر مقام کیا اور وہان سو رہی لیکن تھوڑی دیر کی ایک کی آنکھ کھل گئی اور اوسنی روٹیون مذکور کی چار مساوی حصہ کئی اور ایک روٹی بچی اوس روٹی کو کئی کو دیا اور اپنا حصہ روٹیونکا کہا گیا اور سو رہا دوسرا مسافر اوٹھا اور اسیطرح سے جتنی روٹیان تہین اونکی چار مساوی حصہ کئے اور ایک روٹی جو باقی رہی اوسنی کئی کو دیکر اپنا ایک حصہ کہا گیا اور اسیطور سی تیسرا اور چوتھا مسافر بہی اوٹھا اور روٹیون کو اسیطور سی تقسیم کیا اور ایک ایک روٹی کئی کو دی پس اتنی مین صبح ہوگئی اور چارون مسافر جاگی اور باقی روٹیون کو چار مساوی حصونمین تقسیم کیا کوئی روٹی نہین ٹوٹی نہ کوئی روٹی زاید نکلی کہ اوسکی ٹکڑی کرنی پرین یا وہ کئی کو دیجای پس بتاؤ کتنی روٹیان مسافران مذکور اپنی گہرون سے لیکر چلے تہے فرض کرو کہ لا ہی تعداد روٹیون کی پس موافق شرائط سوال کے ظاہر ہی کہ جسوقت ایک روٹی کئی کو دیگئی تو باقی روٹیونکا $\frac{لا-۱}{۴}$ چوتہائی ہوئے $\frac{لا-۱}{۴}$ وہ حصہ ہوگا جو اول مسافر نے اوٹہکر کہا پس اب باقی رہینگی اتنی روٹیان $لا - \frac{لا-۱}{۴} - ۱ = \frac{۴لا-لا+۱-۴}{۴} = \frac{۳لا-۳}{۴}$ اب ظاہر ہی کہ دوسرے مسافر نے اوٹہکر اتنی روٹیان کہائین ہونگی

$$\frac{\frac{۳لا-۳}{۴} - ۱}{۴} = \frac{۳لا-۷}{۱۶}$$ اور چونکہ ایک روٹی کئی کو اب بہی دیگئی تہی تو باقی رہینگی اتنی روٹیان $\frac{۳لا-۳}{۴} - \frac{۳لا-۷}{۱۶} - ۱ = \frac{۱۲لا-۱۲}{۱۶} - \frac{۳لا-۷}{۱۶} - \frac{۱۶}{۱۶} =$

$\frac{۹لا-۲۱}{۱۶}$ اب ظاہر ہی کہ تیسرے مسافر نے اتنی روٹیان کہائین ہونگے $\frac{\frac{۹لا-۲۱}{۱۶} - ۱}{۴} = \frac{۹لا-۳۷}{۶۴}$

اور چونکہ کئی کو اس صورت مین بہی ایک روٹی ملی ہی تو باقی رہین گی اتنی روٹیان $\frac{۹لا-۲۱}{۱۶} - \frac{۹لا-۳۷}{۶۴} = \frac{۳۶لا-۸۴}{۶۴} - \frac{۹لا-۳۷}{۶۴} = \frac{۲۷لا-۱۱۱}{۶۴}$ اب ظاہر ہی کہ چوتہی مسافر نے اتنی روٹیان کہائی ہونگی $\frac{\frac{۲۷لا-۱۱۱}{۶۴} - ۱}{۴} = \frac{۲۷لا-۱۷۵}{۲۵۶}$ اور بعد ازان باقی رہینگی اتنی روٹیان

$\frac{۲۷لا-۱۱۱}{۶۴} - \frac{۲۷لا-۱۷۵}{۲۵۶} - ۱ = \frac{۱۰۸لا-۴۴۴}{۵۲۶} - \frac{۲۷لا-۱۷۵}{۲۵۶} - \frac{۲۵۶}{۲۵۶} =$

$\frac{۸۱لا-۵۲۵}{۲۵۶}$ اور چونکہ سوال سی یہہ بات ظاہر ہی کہ ان باقی روٹیون کو چارون مسافرون نے برابر بانٹ کر کہالیا اور کوئی روٹی ٹوٹی نہین اور نہ کوئی کسی کو دیگئی تو ضرور ہی کہ چوتہائی اس باقیات کی ایک عدد صحیح ہو پس صورت $\frac{۸۱لا-۵۲۵}{۱۰۲۴}$ ایک عدد صحیح ہو واسطی دریافت کرنی کے کوئی ایسی قیمت لا کی کہ صورت

مذکور ایک عدد صحیح ہو جائی ضرور ہی کہ فرض کرو اس صورت کو مساوی ہے اور موافق اس فرض کی حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$\text{مساوات } ۸۱ل - ۵۲۵ = ۱۰۲۴ء \text{ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات}$$

$$ل = \frac{۱۰۲۴ء + ۵۲۵}{۸۱} = ۱۲ء + ۶ + \frac{۳۹ + ۵۲ء}{۸۱} \text{ اب فرض کرو کہ } \frac{۳۹ + ۵۲ء}{۸۱} = ع$$

$$\text{اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات } ۵۲ء = ۸۱ع - ۳۹ \quad ع = \frac{۳۹ - ۲۹ع}{۵۲} \text{ اب فرض کرو کہ}$$

$$\frac{۲۹ع - ۳۹}{۵۲} = ف \text{ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات } ع = \frac{۵۲ف + ۳۹}{۲۹} = ف + ۱ + \frac{۲۳ف + ۱۰}{۲۹}$$

$$\text{اب فرض کرو کہ } \frac{۲۳ف + ۱۰}{۲۹} = ل \therefore ف = \frac{۲۹ل - ۱۰}{۲۳} = ل + \frac{۶ل - ۱۰}{۲۳}$$

$$\text{اب فرض کرو کہ } \frac{۶ل - ۱۰}{۲۳} = م \text{ اور } \therefore ل = \frac{۲۳م + ۱۰}{۶} = ۳م + ۱ + \frac{۵م + ۴}{۶}$$

$$\text{اب فرض کرو کہ } \frac{۵م + ۴}{۶} = ن \text{ اور اسیواسطے } م = \frac{۶ن - ۴}{۵} = ن + \frac{ن - ۴}{۵} \text{ اب فرض کرو کہ}$$

$$\frac{ن - ۴}{۵} = د \text{ اور } ن = ۵د + ۴ \text{ اب چونکہ مطلوب ہی ہمیں کم سی کم تعداد روپیون کی جنسی شرایط}$$

سوال کی پوری ہو جائین تو فرض کرو کہ $د = ۰$ اور موافق اس فرض کے حاصل ہونگی یہہ مساواتین

$$ن = ۴ \text{ اور } م = ۴ \text{ اور } ل = \frac{۲۳م + ۱۰}{۶} = \frac{۱۰ + ۹۲}{۶} = \frac{۱۰۲}{۶} = ۱۷$$

$$\text{اور } ف = \frac{۲۹ل - ۱۰}{۲۳} = ۲۱ \text{ اور } ع = \frac{۵۲ف + ۳۹}{۲۹} = ۳۹ \text{ اور } ء = \frac{۸۱ع - ۳۹}{۵۲} = ۶۰$$

$$\text{اور } لا = \frac{۱۰۲۴ء + ۵۲۵}{۸۱} = \frac{۶۱۴۴۰ + ۵۲۵}{۸۱} = \frac{۶۱۹۶۵}{۸۱} = ۷۶۵ \text{ اور اسیطرح ن}$$

اس مثال کا اسطرح ہوتا ہی $\frac{۷۶۵ - ۱}{۴} = \frac{۷۶۴}{۴} = ۱۹۱$ اور اسیواسطے باقیات اول یہہ ہی $۷۶۵ - ۱۹۱ - ۱ = ۵۷۳$ اور $\frac{۵۷۳ - ۱}{۴} = \frac{۵۷۲}{۴} = ۱۴۳$ اور

$۵۷۳ - ۱۴۳ - ۱ = ۴۲۹ =$ باقیات دوم اور $\frac{۴۲۹ - ۱}{۴} = \frac{۴۲۸}{۴} = ۱۰۷$

اور $۴۲۹ - ۱۰۷ - ۱ = ۳۲۱ =$ باقیات سوم اور $\frac{۳۲۱ - ۱}{۴} = \frac{۳۲۰}{۴} = ۸۰$

اور $۳۲۱ - ۸۰ - ۱ = ۲۴۰ =$ باقیات چہارم اور $\frac{۲۴۰}{۴} = ۶۰ =$ ایک عدد صحیح کے

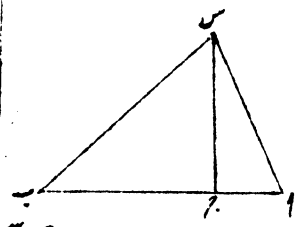
سوال ۱۵ جاتے ہیں ہم ثابت کرنا شکل عروسی بوسیلہ جبر و مقابلہ کے بطریق مہندس بہاسکر اچاریہ کے

فرض کرو کہ اب س ایک مثلث قایم الزاویہ ہی اور س قایمہ ہی اور اب وتر قایمہ اور س ج عمود وتر قایمہ پر

اور یہہ بہی فرض کرو کہ ا س = ط اور ب س = ص اور ا ب = س

اور ا ج = لا اور ج ب = س - لا اور چونکہ دو چہوٹی مثلث

ا ج س اور ب ج س اور بڑا مثلث ب س ا متشابہ یعنی شکل



مین یکسان ہین لہذا انکی مساحت اور اضلاع مین فرق ہوگا پس ضرور ہی کہ انکی

اضلاع متناسب ہون اور اسیواسطی حاصل ہوگا یہہ تناسب س : ص :: ص : س - لا اور اس سے

حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ص^{۲} = س (س - لا) = س^{۲} - س لا . . . . . (۱)

اور اسیطور سی حاصل ہوتا ہی یہہ تناسب س : ط :: ط : لا اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

ط^{۲} = س لا . . . . . (۲)

اور اگر جمع کرین ہم مساواتون (۱) اور (۲) کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ط^{۲} + ص^{۲} =

س^{۲} - س لا + س لا = س^{۲} یعنے ط^{۲} + ص^{۲} = س^{۲} اور یہی ثابت کرنا تہا اسجای پر ہی والا اقلیدس

کا یہہ اعتراض کرسکتا ہی کہ متشابہ ہونا مثلثون کا سبب مساوی ہونی اونکی زوایا کی چہٹی مقالہ اقلیدس کی سے

ثابت ہوتا ہی پس یہہ طریقہ ثابت کرنی شکل عروسی کا بدریعہ حسر و مقابلہ کی کچہہ کام کا نہین کیونکہ وہ موقوف

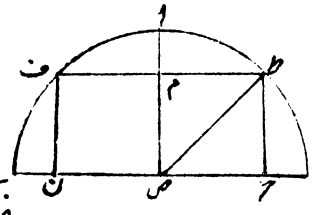
ہی اوپر چہٹی مقالہ اقلیدس کے لیکن وجواب اسکی یہہ کہا جاسکتا ہی کہ متشابہ ہونا مثلثہ کا اس صورت

مین قریب بدیہی ہی اور چندان محتاج دلیل کا نہین ہی لیکن مساوی ہونا حاصل جمع مجذورون دو ضلعون مثلث

قایمہ الزاویہ کا مجذور وتر قایمہ کے بالکل خیال مین نہین آتا ہی

سوال ۱۲ جاسیے ہین ہم مانا ایک بڑیسی بڑا مستطیل درمیان ایک نصف

دائرہ مفروض کے مثلاً فرض کرو کہ نصف دائرہ مفروض ب ا د



ہی اور اوسمین ف ج مستطیل مطلوب ہی اور یہہ بہی فرض کرو

کہ ص مرکز نصف دائرہ کا ہی اب تصور کرو نصف قطر ط ص کو ط

سے اور ج ص کو لا سی اور ساحت مستطیل ف ج کو ء

سے پس ہوگی یہے مساوات ط ج = $\sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}$ اور ج ن = ۲ لا اور اسیواسطی حاصل ہوگی

ط ج × ج ن یعنے ساحت مستطیل مطلوبہ مساوی ہوگی ۲ لا $\sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}$ کے یعنی حاصل ہوگی یہہ

مساوات ء = ۲ لا $\sqrt{ط^{۲} - لا^{۲}}$ اور اسیواسطی جسوقت مجذور کرسیے ہین ہم دونون طرفون

اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات ۴ لا^{۴} - ۴ ط^{۲} لا^{۲} = - ء^{۲}

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $لا^۲ - ط^۲ \times لا^۲ = -\frac{ک^۲}{۴}$

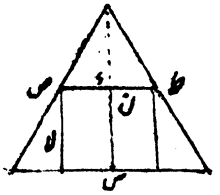
اور جسوقت جاری کرتی ہین اس مساوات پر قاعدہ مساوات درجہ دوم کا تو اسوقت حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات

$$لا^۴ - ط^۲ لا^۲ + \frac{ط^۴}{۴} = \frac{ط^۴}{۴} - \frac{ک^۲}{۴} = \frac{ط^۴ - ک^۲}{۴}$$

اور اسیواسطی $لا^۲ = \frac{ط^۲}{۲} + \sqrt{\frac{ط^۴ - ک^۲}{۴}}$ اب ظاہر ہی کہ $لا^۲$ کو بڑی سے بڑا فرض کرین تو وہ مساوی $ط^۲$ کے ہونا چاہئیے اور اسیواسطی حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا^۲ = ط^۲$ اور اسیواسطی

$لا = ط$ اور $ر = ط$

سوال ۱۷ ایک مثلث مفروض مین ایک مستطیل بنا ہوا ہی اور مساحت اس مستطیل کی معلوم ہی پس چاہتی ہین ہم دریافت کرنا ضلعون اس مستطیل کو علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ مثلث مفروض کے تین ضلعے $ط$ اور $ض$ اور $س$ ہین اور $ک$ مساحت مستطیل کی ہی اور یہہ موافق شرط سوال کی معلوم ہی اب فرض کرو کہ دو ضلعی مستطیل کے کہ مقدار ین مجہول ہین $لا$ اور $ر$ ہین اب چونکہ تینون ضلعی اس مثلث کے معلوم ہین تو موافق سوال چہارم انشکال ہندسی کے کے ہم دریافت کرسکتے ہین اس مثلث کا ارتفاع پس فرض کرو کہ یہہ ارتفاع معلوم تم ہی پس اب متشابہ ہونی مثلثون کی سی حاصل ہوگا



یہہ تناسب $س : ر :: م : م - لا$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $ر م = س م - س لا$ اور موافق شرط سوال کے یہہ بات ظاہر ہی کہ $ر لا = ن$ پس اس سے حاصل ہوگی یہہ مساوات $ر = \frac{ن}{لا}$ اور جسوقت لکھین ہم اس قیمت $ر$ کو مساوات $ر م = س م - س لا$ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات

$\frac{م ن}{لا} = س م - س لا$ اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $م ن = س م لا - س لا^۲$

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $س لا^۲ - س م لا = - م ن$ اور اس سے یہہ $لا^۲ - م لا = - \frac{م ن}{س}$

اور جسوقت موافق قاعدہ مساوات درجہ دوم کی زیادہ کرین ہم دونو طرفون اس مساوات پر مجذور $\frac{م^۲}{۴}$ کا تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا^۲ - م لا + \frac{م^۲}{۴} = \frac{م^۲}{۴} - \frac{م ن}{س} = \frac{س م - ۴ م ن}{۴ س}$ اور اس سے

یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی $لا - \frac{م}{۲} = \pm \sqrt{\frac{س م^۲ - ۴ م ن}{۴ س}}$ اور $لا = \frac{م}{۲} \pm \sqrt{\frac{س م^۲ - ۴ م ن}{۴ س}}$

اور $ر = \frac{ن}{\frac{م}{۲} \pm \sqrt{\frac{س م^۲ - ۴ م ن}{۴ س}}}$ مثلاً فرض کرو کہ تین ضلعے مثلث مفروض کی سے ہین

۳ = ۲۱ اور ط = ۱۰ اور ص = ۱۷ پس ظاہر ہی کہ ارتفاع اس مثلث کی ۸ ہوگی اور

$$\text{لا} = ۴ \pm \sqrt{\frac{۲۱ \times ۸^۲ - ۴ \times ۸ \times ۲۰}{۲۱ \times ۴}} = ۴ \pm \sqrt{\frac{۷۰۴}{۸۴}}$$

سوال ۱۸ معلوم ہین ہمین ارتفاع اور قاعدہ ایک مثلث کا اور نسبت اوسکی دو باقی کی ضلعون کی اور چاہتی ہین ہم دریافت کرنا ہر ضلع اس مثلث کو علیحدہ علیحدہ فرض کرو کہ قاعدہ مثلث مذکور کا = ق اور ارتفاع اوسکی = ا اور دو باقی اوسکی ضلعے اسیمین وہی نسبت رکھتی ہین جو عدد آ کا رکھتا ہی ن سے پس اسصورت مین ضرور ہی کہ اگر فرض کیا جاے ایک ضلع بقدر لا کے تو دوسرا ضلع ن لا ہوگا اب فرض کرو کہ ایک بازو مثلث مذکور کا و ہی اور اسیواسطی دوسرا بازو اوسکا ق − و ہوگا پس موافق شکل عروسی کے حاصل ہوگی یہ مساوات لا^۲ = و^۲ + ا^۲ اور ن^۲ لا^۲ = (ق − و)^۲ + ا^۲ اور اس مساوات سے حاصل ہوتی ہی یہ مساوات لا^۲ = $\frac{(ق - و)^۲ + ا^۲}{ن^۲}$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہ مساوات و^۲ + ا^۲ = $\frac{(ق-و)^۲ + ا^۲}{ن^۲}$

اور اس سے حاصل ہوتی ہی یہ مساوات ن^۲ و^۲ + ا^۲ ن^۲ = ق^۲ − ۲ ق و + و^۲ + ا^۲ اور اس سے یہ

(ن^۲ − ۱) و^۲ + ۲ ق و = ق^۲ − (ن^۲ − ۱) ا^۲ اور اس سے یہ و^۲ + $\frac{۲ق}{ن^۲-۱}$ و = $\frac{ق^۲ - (ن^۲-۱)ا^۲}{ن^۲-۱}$ اور اگر حل کرین ہم اس مساوات درجہ دم کو موافق قاعدہ کے تو حاصل ہوگی ہم قیمت و کے

$$و = -\frac{ق}{ن^۲-۱} \pm \sqrt{\frac{ق^۲}{(ن^۲-۱)^۲} + \frac{ق^۲ - (ن^۲-۱)ا^۲}{ن^۲-۱}}$$

اور جسوقت معلوم ہوئے قیمت و کی اوسوقت معلوم ہوجائیگی ہمین قیمت لا کی مساوات لا^۲ = و^۲ + ا^۲ سی اور جسوقت معلوم ہوئے قیمت لا کی یعنی ایک ضلع کی تو معلوم ہوجائیگی ہمین قیمت لان کی کہ دوسرا ضلع ہی مثلا فرض کرو کہ قاعدہ مثلث مذکور کا = ۲۱ اور ارتفاع اوسکی = ۸ اور نسبت درمیان دو ضلعون مطلوبہ کی وہ ہی جو آ رکھتا ہی طرف $\frac{۱۷}{۱۰}$ کی یعنی ن = $\frac{۱۷}{۱۰}$ پس اب حاصل ہوگی قیمت و کی اس مساوات سی و = $-\frac{ق}{ن^۲-۱} \pm \sqrt{\frac{ق^۲}{(ن^۲-۱)^۲} + \frac{ق^۲-(ن^۲-۱)ا^۲}{ن^۲-۱}}$

$$= -\frac{۲۱۰۰}{۱۸۹} + \frac{۳۲۳۴}{۱۸۹} = \frac{۱۱۳۴}{۱۸۹} = ۶$$ پس معلوم ہوا کہ و = ۶

اور اسیواسطے لا^۲ = و^۲ + ا^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ اور اسیواسطی حاصل ہوتی ہی یہہ قیمت لا کی

لا = ۱۰ جو ایک ضلع مثلث کا ہی اور ظاہر ہی کہ دوسرا ضلع =

$\sqrt{(۲۱-۶)^۲+۲^۲} = \sqrt{۱۵^۲+۸^۲} = \sqrt{۲۲۵+۶۴} = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$

سوال ۱۹ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا دو ایسے اعداد کہ اگر انکی مجذور دونکو ایک دفعہ تو ایک دوسرے میں سے تفریق کریں اور دوسری بار ان دونکو جمع کریں اور حاصل تفریق اور حاصل جمع ہر عدد کا علیحدہ علیحدہ زیادہ کریں تو سے دونوں مجموعی اعداد مجذور ہوویں فرض کرو کہ ۴ لا عدد اول ہی اور ۵ لا - ۱ دوسرا عدد ہی اس صورت میں ظاہر ہی کہ

$۴^۲ لا^۲ + ۵ لا - ۱ + ۱ = ۹ لا^۲ = (۳ لا)^۲$ = ایک عدد مجذور ہے اور $۵ لا - ۱ - ۴ لا^۲ + ۱ = لا^۲ + ۱ =$ ایک مجذور ہے پس پورے ہوئیں دونو شرطین سوال کے مثلاً فرض کرو کہ لا = ۲ تو اعداد مطلوبہ سے ہونگی ۱۶ اور ۱۹ امتحان اس مثال کا اسطرح ہو سکتا ہی $۱۶ + ۱۹ + ۱ = ۳۶ = ۶^۲$ = ایک عدد مجذور ہے اور $۱۹ - ۱۶ + ۱ = ۴ = ۲^۲$ = ایک مجذور ہے اگر فرض کریں ہم لا = ۳ تو اعداد مطلوبہ سے ہونگی ۲۶ اور ۴۴ اور امتحان اسکا اسطرح ہو سکتا ہی $۴۴ + ۲۶ + ۱ = ۸۱ = ۹^۲$ = ایک عدد مجذور ہے اور $۴۴ - ۲۶ + ۱ = ۹ = ۳^۲$ = ایک عدد مجذور ہے

سوال ۲۰ بتاؤ وہ کونسا عدد ہی کہ اگر اسکی مجذور میں سے عدد ۴ کا تفریق کریں اور حاصل تفریق کو عدد ۷ پر قسمت کریں تو خارج قسمت ایک عدد صحیح ہوتا ہی فرض کرو کہ لا ہی عدد مطلوب پس موافق شرائط سوال کے ضرور ہی کہ ہووے $\frac{لا^۲ - ۴}{۷}$ ایک عدد صحیح فرض کرو کہ $= ز$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $لا^۲ = ۷ ز + ۴$ اور $لا = \sqrt{۷ ز + ۴}$ اب فرض کرو کہ $\sqrt{۴ + ۷ ز} = ۲ + ع$ اور جسوقت مجذور کرتے ہیں ہم دونو طرف اس مساوات کو تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات $۴ + ۷ ز = ۴ + ۴ ع + ع^۲$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ $ز = \frac{(۴ + ع) ع}{۷}$ اب فرض کرو کہ $ع = ۷ ف$ اور اسیواسطے حاصل ہوگی یہہ مساوات $ز = (۴ + ۷ ف) ف$ مثلاً فرض کرو کہ ف = ۱ تو $ز = ۱۱$ اور $لا = \sqrt{۴ + ۷ ز} = \sqrt{۴ + ۷۷} = \sqrt{۸۱} = ۹$ = عدد مطلوبہ کی اب فرض کرو کہ ف = ۲ اور موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ز = (۴ + ۱۴) ۲ = ۳۶$ اور

$لا = \sqrt{۴ + ۷ \times ۳۶} = \sqrt{۲۵۲ + ۴} = \sqrt{۲۵۶} = ۱۶$ اور امتحان ان دونو مثالوں کا یوں ہوتا ہی کہ $\frac{۹^۲ - ۴}{۷} = \frac{۷۷}{۷} = ۱۱ =$ ایک عدد صحیح کے اور

$\frac{۱۶^۲ - ۴}{۷} = \frac{۲۵۲}{۷} = ۳۶ =$ ایک عدد صحیح کی فقط

ضمیمہ مساواتون کا اسمین نہایت

متشکل مساواتین حل کی گئی ہین

۱ $\frac{۱۷-۷ل}{۹} - \frac{۳}{۳ل} = \frac{۷ل-۲}{۳ل} - \frac{۶}{ل}$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ل - \frac{۱}{ل} = ۷ - \frac{۶}{ل}$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ل - \frac{۱}{ل} = ۷ - \frac{۶}{ل}$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ل = ۷ - \frac{۶}{ل} + \frac{۱}{ل}$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ل = ۷ - \frac{۵}{ل}$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ = ۷ل - \frac{۵}{ل}$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ = ل\left(۷ - \frac{۵}{ل}\right)$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ = ل\left(\frac{۷ل-۵}{ل}\right)$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ = ۷ل - ۵$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - ۷ + ۵ = ۷ل$

$\therefore \frac{۱۷}{۹} - \frac{۱۸}{۹} = ۷ل$

$\therefore \frac{-۱}{۹} = ۷ل$

$\therefore ل = -\frac{۱}{۶۳}$

۲ $\frac{۷ل-۱۷}{۷ل-۳} + \frac{۷ل-۱۳}{۷ل-۳} = \frac{۷ل-۸}{۷ل-۲} + \frac{۷ل-۷}{۷ل-۱}$

$\therefore \frac{۷ل-۱۷}{۷ل-۳} + \frac{۷ل-۱۳}{۷ل-۳} + ۲ = \frac{۷ل-۸}{۷ل-۲} + \frac{۷ل-۷}{۷ل-۱} + ۲$

$\therefore \frac{۷ل-۱۷+۷ل-۱۳}{۷ل-۳} = \frac{۷ل-۸+۷ل-۷}{۷ل-۲

$$\therefore \frac{۳۶۱}{۴} \times \frac{ل+۴}{ل+۱۷} = ۱۰+۲۲\times(۱۷-۱۹)=۹۵$$

$$\therefore \frac{ل+۲۲}{ل+۱۰} = \frac{۴}{۳۶۱} \times ۹۵ = \frac{۳۰}{۱۹}$$

طرفین مساوات پر ۱ زیادہ کیا اور پھر ۱ کم کیا اور ان دونوں مساواتوں میں سے اول کو دوسری پر تقسیم کیا اور اس عمل کو آئندہ کی مساواتوں میں ہم اسطرح (بحکم ۴) تعبیر کرینگی

$$\therefore \frac{۲ل+۳۹}{۵} = \frac{۳۹}{۱}$$

$$\therefore ۲ل = ۴\times ۳۹$$

$$\therefore ل = ۷۸$$

۵

$$\frac{ط+ل+\sqrt{۲طل+ل^۲}}{ط+ل-\sqrt{۲طل+ل^۲}} = ص^۲$$

$$\therefore \frac{ط+ل}{\sqrt{۲طل+ل^۲}} = \frac{ص^۲+۱}{ص^۲-۱}$$ بحکم (۴) مساوات

$$\therefore \frac{ط^۲+۲طل+ل^۲}{۲طل+ل^۲} = \left(\frac{ص^۲+۱}{ص^۲-۱}\right)^۲$$

$$\therefore \frac{ط^۲}{۲طل+ل^۲}+۱ = \left(\frac{ص^۲+۱}{ص^۲-۱}\right)^۲$$

$$\therefore \frac{ط^۲}{۲طل+ل^۲} = ۱-\left(\frac{ص^۲+۱}{ص^۲-۱}\right)^۲ = \frac{-۴ص^۲}{(ص^۲-۱)^۲}$$

$$\therefore \frac{۲طل+ل^۲}{ط^۲} = \frac{(ص^۲-۱)^۲}{۴ص^۲}$$

$$\therefore ۱+\frac{۲طل+ل^۲}{ط^۲} = \frac{(ص^۲+۱)^۲}{۴ص^۲}$$

$$\therefore \frac{ط+ل}{ط} = \frac{ص^۲+۱}{۲ص}$$

$$\therefore \frac{ل}{ط} = ۱-\frac{ص^۲+۱}{۲ص} = \frac{ص^۲-۲ص+۱}{۲ص} = \frac{(ص-۱)^۲}{۲ص}$$

$$\therefore ل = \frac{ط}{۲ص}(ص-۱)^۲$$

۶

$$ط-ل+\sqrt{۲طل-ل^۲} = ص$$

$$\therefore ۱+\frac{\sqrt{۲طل-ل^۲}}{ط-ل} = ص$$

$$\therefore \frac{\sqrt{۲طل-ل^۲}}{ط-ل} = ص-۱ \therefore \frac{۲طل-ل^۲}{(ط-ل)^۲} = (ص-۱)^۲$$

$$\therefore \frac{۲طل-ل^۲}{ط^۲-۲طل+ل^۲} = (ص-۱)^۲$$

$$\therefore \left(\frac{ط}{ط-ل}\right)^۲-۱ = (ص-۱)^۲ \therefore \left(\frac{ط}{ط-ل}\right)^۲ = (ص-۱)^۲+۱$$

$$\therefore \frac{ط}{ط-ل} = \sqrt{(ص-۱)^۲+۱} \therefore \frac{ط-ل}{ط} = \frac{۱}{\sqrt{(ص-۱)^۲+۱}}$$

$$\therefore \frac{ل}{ط} = ۱-\frac{۱}{\sqrt{(ص-۱)^۲+۱}}$$

$$\therefore ل = ط-\frac{ط}{\sqrt{(ص-۱)^۲+۱}}$$

۷

$$\frac{۲۴۳+۲۴\sqrt{۳ل}}{۱۶ل-۳} = \frac{(۴\sqrt{ل}-\sqrt{۳})^۲}{۳}$$

$$\therefore \frac{۱۸\sqrt{۳}\left(\sqrt{۳}+۴\sqrt{ل}\right)}{(۴\sqrt{ل}+\sqrt{۳})(۴\sqrt{ل}-\sqrt{۳})} = \left(۴\sqrt{ل}-\sqrt{۳}\right)^۲$$

$\therefore \frac{\sqrt[3]{۸۱}}{\sqrt[3]{۴}\sqrt[3]{لا}-\sqrt[3]{۳}} = (\sqrt[3]{۴}\sqrt[3]{لا}-\sqrt[3]{۳})^{۲}$

$\therefore ۸۱ = ۳(\sqrt[3]{۴}\sqrt[3]{لا}-\sqrt[3]{۳})^{۳}$

$\therefore \sqrt[3]{۳} = \sqrt[3]{۴}\sqrt[3]{لا}-\sqrt[3]{۳}$

$\therefore \sqrt[3]{۴}\sqrt[3]{لا} = \sqrt[3]{۴}\sqrt[3]{۳}$

$\therefore لا = ۳ \quad \therefore \quad \therefore لا = ۳$

۸ $\sqrt[3]{ط+لا+\sqrt{ط-لا}}^{۳} = ص$

یہہ بات ظاہر ہے کہ

$(\sqrt[3]{ط+لا+\sqrt{ط-لا}})^{۳} = ۲ط+۳\sqrt[3]{ط^{۲}-لا^{۲}}(\sqrt[3]{ط+لا}-\sqrt[3]{ط-لا})$

اور $\sqrt[3]{ط+لا+\sqrt{ط-لا}} = ص$ اسلئے مکعب مساوات مفروضہ کا یہ ہے

$۲ط+۳\sqrt[3]{ط^{۲}-لا^{۲}} \times ص = ص^{۳}$

$\therefore ۳ص\sqrt[3]{ط^{۲}-لا^{۲}} = ص^{۳}-۲ط$

$\therefore \sqrt[3]{ط^{۲}-لا^{۲}} = \frac{ص^{۳}}{۳ص}-\frac{۲ط}{۳ص}$

$\therefore ط^{۲}-لا^{۲} = (\frac{ص^{۲}}{۳}-\frac{۲ط}{۳ص})^{۳}$

$\therefore لا^{۲} = ط^{۲}-(\frac{ص^{۲}}{۳}-\frac{۲ط}{۳ص})^{۳}$

$\therefore لا = \sqrt[3]{ط^{۲}-(\frac{ص^{۲}}{۳}-\frac{۲ط}{۳ص})^{۳}}$

۹ $لا^{۳}-۳لا = ۲$

$\therefore لا^{۳}-لا = ۲+۲لا$

$\therefore لا(لا^{۲}-۱) = ۲(لا+۱)$

$\therefore لا(لا-۱)(لا+۱) = ۲(لا+۱)$

چونکہ یہہ مساوات $(لا+۱)$ پر تقسیم ہوسکتی ہے تو موافق خواص مساوات کی $لا+۱=۰ \therefore لا=-۱$ اور تقسیم کرنیکی

$لا(لا-۱) = ۲$

$\therefore لا^{۲}-لا = ۲ \therefore لا^{۲}-لا+\frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$

$\therefore لا-\frac{۱}{۲} = \pm\frac{۳}{۲} \therefore لا = ۲ \text{ یا } -۱$

۱۰ $لا^{۲}-\frac{۲}{۳لا} = ۱\frac{۷}{۹}$

$\therefore لا^{۲}-\frac{۲}{۳لا} = ۱+\frac{۲}{۹} = \frac{۱}{لا}(لا+\frac{۲}{۳})$

$\therefore (لا-\frac{۲}{۳لا})(لا+\frac{۲}{۳لا}) = \frac{۱}{لا}(لا+\frac{۲}{۳لا})$

$\therefore لا+\frac{۲}{۳لا} = ۰ \therefore لا = -\frac{۲}{۳}$

اور $لا-\frac{۲}{۳لا} = \frac{۱}{لا}$

$\therefore لا^{۲}-\frac{۲لا}{۳} = ۱$

$\therefore لا^{۲}-\frac{۲لا}{۳}+\frac{۱}{۹} = \frac{۱۰}{۹}$

$\therefore لا-\frac{۱}{۳} = \pm\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$

$\therefore لا = \frac{۱\pm\sqrt{۱۰}}{۳}$

۱۱

$$(1+\theta+\sqrt{1^2+2\theta1+\phi^2})^3+(1+\theta-\sqrt{1^2+2\theta1+\phi^2})^3$$

$$=14(1+\theta)^3$$

چونکہ $(1+\beta)^3+(1-\beta)^3=2+6\beta^2$ سطے اسوا مساوات مفروضہ سے حاصل ہوتا ہے

$$2(1+\theta)^3+6(1+\theta)(1^2+2\theta1+\phi^2)=14(1+\theta)^3$$

$$\therefore 1+\theta=0 \quad \therefore 1=-\theta$$

اور $6(1^2+2\theta1+\phi^2)=14(1+\theta)^2$

$$\therefore 1^2+2\theta1+\phi^2=2+2\theta1+\theta^2$$

$$\therefore 1^2+2\theta1+\theta^2=\phi^2-\theta^2$$

$$\therefore 1+\theta=\pm\sqrt{\phi^2-\theta^2}$$

$$\therefore 1=\pm\sqrt{\phi^2-1^2}-\theta$$

۱۲

$$(1+1+1^2)^2=\frac{\theta+1}{\theta-1}(1+1^2+1^4)$$

$$\therefore 1+1+1^2=\frac{\theta+1}{\theta-1}\cdot\frac{1+1^2+1^4}{1+1+1^2}$$

$$=\frac{\theta+1}{\theta-1}\cdot\frac{1+1^2+1^2-1(1-1^2)}{1+1+1^2}$$

$$=\frac{\theta+1}{\theta-1}(1-1(1-1))$$

$$\therefore \frac{1+1+1^2}{1-1+1^2}=\frac{\theta+1}{\theta-1}$$

$$\therefore \frac{1}{1}=\frac{\theta}{1}$$ بحکم (۴) مساوات

$$\therefore 1+1^2=\theta 1$$

$$\therefore 1^2-\theta 1=-1$$

$$\therefore 1^2-\theta 1+\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{4}-1$$

$$\therefore 1-\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{\theta^2}{4}-1}$$

$$1=\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{\frac{\theta^2}{4}-1}$$

۱۳

$$\phi\left(\frac{\theta-\phi}{1}+1\right)\left(\frac{\theta-2\phi}{1}+1\right)=\frac{\theta^2}{1}-\theta$$

$$\therefore \phi(\theta-\phi+1)(\theta-2\phi+1)=\theta^2 1-\theta 1^2$$

$$\therefore (\theta+\phi)1^2-(\theta^2-2\theta\phi+3\phi^2)1+\phi(\theta-\phi)(\theta-2\phi)=0$$

$$\therefore (\theta+\phi)1^2-\{(\theta-\phi)(\theta-2\phi)+\phi(\theta+\phi)\}1+\phi(\theta-\phi)(\theta-2\phi)=0$$

$$\therefore (\theta+\phi)1^2-\{(\theta-\phi)(\theta-2\phi)+\phi(\theta+\phi)\}1+\phi(\theta-\phi)(\theta-2\phi)=0$$

$$\therefore \text{جزو مشترک } (\theta+\phi)1-(\theta-\phi)(\theta-2\phi)=0$$

$$\therefore 1=\frac{\theta-\phi}{\theta+\phi}(\theta-2\phi)$$

اور یہی $1=\phi$ سبب تقسیم کرنی کی جزو مشترک پر

۱۴

$$\left(\frac{1+\theta}{1+\phi}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\theta-\phi}{2(1+\sigma)}=1$$

$$\therefore \frac{1+\theta}{1+\phi}=1+\frac{\theta-\phi}{1+\sigma}+\frac{(\theta-\phi)^2}{4(1+\sigma)^2}$$

$$\therefore \frac{1+\theta}{1+\phi}-1=\frac{\theta-\phi}{1+\sigma}+\frac{(\theta-\phi)^2}{4(1+\sigma)^2}$$

$$\therefore \frac{ط-ص}{لا+ص} = \frac{ط-ص}{لا+س} + \frac{(ط-ص)^{۲}}{۴(لا+س)^{۲}}$$

$$\therefore \frac{۱}{لا+ص} = \frac{۱}{لا+س} + \frac{ط-ص}{۴(لا+س)^{۲}}$$

$$\therefore \frac{س-ص}{(لا+ص)(لا+س)} = \frac{ط-ص}{۴(لا+س)^{۲}}$$

$$\therefore \frac{س-ص}{لا+ص} = \frac{ط-ص}{۴(لا+س)}$$

$$\therefore \left\{ط-ص-۴(س-ص)\right\} لا = ۴س(س-ص) - ص(ط-ص)$$

$$\therefore لا = \frac{۴س(س-ص) - ص(ط-ص)}{ط+۳ص-۴س}$$

۱۵ $$\frac{لا+ط}{لا+ص} = \left(\frac{۲لا+ط+س}{۲لا+ص+س}\right)^{۲}$$

$$\therefore ۱+\frac{ط-ص}{لا+ص} = \left(۱+\frac{ط-ص}{۲لا+ص+س}\right)^{۲}$$

$$= ۱+\frac{۲(ط-ص)}{۲لا+ص+س} + \frac{(ط-ص)^{۲}}{(۲لا+ص+س)^{۲}}$$

$$\therefore \frac{۱}{لا+ص} - \frac{۲}{۲لا+ص+س} = \frac{ط-ص}{(۲لا+ص+س)^{۲}}$$

$$\therefore \frac{س-ص}{لا+ص} = \frac{ط-ص}{۲لا+ص+س}$$

$$\therefore ۲س لا - ۲ص لا - ص^{۲} + س^{۲} = (ط-ص)لا + ص(ط-ص)$$

$$\therefore (ط+ص-۲س)لا = س^{۲} - ط ص$$

$$\therefore لا = \frac{س^{۲} - ط ص}{ط+ص-۲س}$$

۱۶ $$\sqrt[م]{(۱+لا)^{۲}} - \sqrt[م]{(۱-لا)^{۲}} = \sqrt[م]{۱-لا^{۲}}$$

اس مساوات کو اسطرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$(۱+لا)^{\frac{۲}{م}} - (۱-لا)^{\frac{۲}{م}} = (۱-لا^{۲})^{\frac{۱}{م}}$$

$$= (۱-لا)^{\frac{۱}{م}}(۱+لا)^{\frac{۱}{م}}$$

طرفین کو $(۱-لا)^{\frac{۲}{م}}$ پر تقسیم کیا

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۲}{م}} - ۱ = \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}}$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۲}{م}} - \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} = ۱$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۲}{م}} + \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} = ۱+\frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} = -\frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\therefore \left(\frac{۱+لا}{۱-لا}\right)^{\frac{۱}{م}} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

$$\therefore \frac{۱+لا}{۱-لا} = \frac{(-۱ \pm \sqrt{۵})^{م}}{۲^{م}}$$

$$\therefore لا = \frac{(-۱ \pm \sqrt{۵})^{م} - ۲^{م}}{(-۱ \pm \sqrt{۵})^{م} + ۲^{م}}$$ بحکم (۴) مسئلہ

۱۷ $$\frac{۱+لا^{۴}}{(۱+لا)^{۴}} = ط$$

$$\therefore ۱+لا^{۴} = ط(۱+لا)^{۴} = ط(۱+۴لا+۶لا^{۲}+۴لا^{۳}+لا^{۴})$$

$$\therefore (۱-ط)(۱+لا^{۴}) = ۴ط(لا+لا^{۳}) + ۶ط لا^{۲}$$

طرفین کو $لا^{۲}$ پر تقسیم کیا جائے

$(1-ط)\left(لا^2+\frac{1}{لا^2}\right)=ط(لا+\frac{1}{لا})^2+ط4$

$\therefore \left(لا^2+\frac{1}{لا^2}\right)-\frac{ط4}{1-ط}\left(لا+\frac{1}{لا}\right)=\frac{ط4}{1-ط}$

$\therefore \left(لا^2+\frac{1}{لا^2}\right)-\frac{ط4}{1-ط}\left(لا+\frac{1}{لا}\right)=2+\frac{ط4}{1-ط}$

یا $\left(لا+\frac{1}{لا}\right)^2-\frac{ط4}{1-ط}\left(لا+\frac{1}{لا}\right)=\frac{2+2ط}{1-ط}$

$\therefore \left(لا+\frac{1}{لا}\right)^2-\frac{ط4}{1-ط}\left(لا+\frac{1}{لا}\right)+\left(\frac{ط2}{1-ط}\right)^2=\frac{2(1+ط)}{(1-ط)^2}$

$\therefore لا+\frac{1}{لا}-\frac{ط2}{1-ط}=\frac{\pm\sqrt{2(1+ط)}}{1-ط}$

$\therefore لا+\frac{1}{لا}=\frac{ط2\pm\sqrt{2(1+ط)}}{1-ط}=2ق$ فرض

$\therefore لا^2-2قلا=-1$

$\therefore لا^2-2قلا+ق^2=ق^2-1$

$\therefore لا-ق=\pm\sqrt{ق^2-1}$

$\therefore لا=ق\pm\sqrt{ق^2-1}$

۱۸

$لا+ط+\sqrt[3]{ط ص لا}=ص$

فرض کرو کہ $\sqrt[3]{لا}+\sqrt[3]{ط}=\sqrt[3]{ک}$ اور اسکا مکعب کرو تو

$لا+ط+3\sqrt[3]{ط لا}(\sqrt[3]{لا}+\sqrt[3]{ک})=ک$

$\therefore لا+ط+3\sqrt[3]{ط لا}\,ک=ک$

اب اگر اس مساوات کو مساوات مفروض سی مقابلہ کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ

$ک=ص \therefore \sqrt[3]{لا}+\sqrt[3]{ط}=\sqrt[3]{ص}$

$\therefore \sqrt[3]{لا}=\sqrt[3]{ص}-\sqrt[3]{ط}$

$\therefore لا=(\sqrt[3]{ص}-\sqrt[3]{ط})^3$

۱۹ $لا^3-1=0$

چونکہ $لا^3-1=(لا-1)(لا^2+لا+1)=0$

$\therefore لا-1=0$ اور $\therefore لا=1$

اور $لا^2+لا+1=0$

$\therefore لا^2+لا=-1$

$\therefore لا^2+لا+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

$\therefore لا+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$

$لا=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

۲۰ $لا^4+1=0$ طرفین کو $لا^2$ پر تقسیم کیا

$\therefore لا^2+\frac{1}{لا^2}=0$ طرفین پر 2 زیادہ کیے

$\therefore لا^2+2+\frac{1}{لا^2}=2$

$\therefore لا+\frac{1}{لا}=\pm\sqrt{2}$

$\therefore لا^2\mp\sqrt{2}\,لا=-1$

$\therefore لا^2\mp\sqrt{2}\,لا+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$\therefore لا\mp\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

$\therefore لا=\frac{\pm1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

واضح ہو کہ جیسطرح 19 اور 20 مثالیں حل کی گئی ہیں اسیطرح $لا^5-1=0$ اور $لا^6+1=0$ اور علی ہذا القیاس

اور مثالیں بآسانی حل ہو سکتی ہیں

۲۱

$$(ا-ط)\sqrt{ا} - (ا+ط)\sqrt{ص} = ص(\sqrt{ا}-\sqrt{ص})$$

$$\therefore \sqrt{ا}\sqrt{ا} - ط\sqrt{ا} - ا\sqrt{ص} - ط\sqrt{ص} = ص\sqrt{ا} - ص\sqrt{ص}$$

$$\therefore ط(\sqrt{ا}+\sqrt{ص}) = (ا-ص)(\sqrt{ا}-\sqrt{ص})$$

۲۳

اور سبب مشترک ہونے کی $= (\sqrt{ا}+\sqrt{ص})(\sqrt{ا}-\sqrt{ص})^{۲}$

$$\sqrt{ا}+\sqrt{ص} = \therefore \sqrt{ا} = -\sqrt{ص} \therefore ا = ص$$

اور بعد تقسیم کرنیکی جز مشترک پر

$$\sqrt{ا}-\sqrt{ص} = \sqrt{ط} \therefore ا = (\sqrt{ط}+\sqrt{ص})^{۲}$$

۲۲

$$ط+ا+۲\sqrt{ط ا}+ا = ط ا - ا^{۲} = \sqrt{۲ط^{۲}-ط ا-ا^{۲}}\sqrt{۲ط ا+ا^{۲}}$$

$$ط+ا-\sqrt{ط ا}-ا^{۲} = \sqrt{۲ط^{۲}-ط ا-ا^{۲}}\sqrt{۲ط ا+ا^{۲}}$$

$$= \sqrt{۲ط+ا}(\sqrt{ط}-\sqrt{ا}) \therefore ط+ا+\sqrt{۲ط ا+ا^{۲}} = ۲ص^{۲}ط^{۲}$$

$$= ۲ص^{۲}ط^{۲}$$

$$\therefore ۲ط^{۲}+۳ط ا-۲(ط+ا)\sqrt{ط ا-ا^{۲}} = (۲ط+ا)(ط-۲\sqrt{ط ا-ا^{۲}})$$

$$\therefore ۲ط\sqrt{ط ا-ا^{۲}} = ط^{۲}-۲ط ا$$

$$\therefore ۲\sqrt{ط ا-ا^{۲}} = ط-۲ا$$

$$\therefore ۴ط ا-۴ا^{۲} = ط^{۲}-۴ط ا+۴ا^{۲}$$

$$\therefore ۸ا^{۲}-۸ط ا = -ط^{۲}$$

$$\therefore ا^{۲}-ط ا = -\frac{ط^{۲}}{۸} \quad \text{اور} \quad \therefore ا^{۲}-ط ا+\frac{ط^{۲}}{۱۶} = \frac{ط^{۲}}{۸}-\frac{ط^{۲}}{۱۶} = \frac{ط^{۲}}{۱۶}$$

$$\therefore ا-\frac{ط}{۲} = \pm\frac{ط}{۴}\sqrt{۲}$$

$$\therefore ا = \frac{ط}{۲}(۱\pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۲})$$

$$ط+ا+\sqrt{۲ط ا+ا^{۲}} = ص^{۲}(ط+ا+\sqrt{۲ط ا+ا^{۲}})^{۲} = ص^{۲}(۲ط^{۲}+۲ط ا+ا^{۲}-۲\sqrt{۲ط ا+ا^{۲}})$$

$$= ۲ص^{۲}(ط+ا-\sqrt{۲ط ا+ا^{۲}})$$

$$\therefore ۲ط^{۲}+۲ط ا+ا^{۲} = ص^{۲}(۲ط+ا)^{۲}-(۲ط ا+ا^{۲})$$

$$\therefore ۲ط^{۲}+۲ط ا+ا^{۲} = ص^{۲}(ط+ا)^{۲}+ص^{۲}ط^{۲}-(۲ط ا+ا^{۲})$$

$$\therefore ۲ط^{۲}+۲ط ا = ص^{۲}(ط+ا)^{۲}+ص^{۲}ط^{۲}$$

$$\therefore ۲ط ا+ا^{۲} = ص^{۲}(ط+ا)^{۲}+ص^{۲}ط^{۲}$$

$$\therefore ۲ط ا+ا^{۲} = ط ص\sqrt{۲ص^{۲}+۲ص^{۲}ط+ص^{۲}ط^{۲}}$$

$$\therefore ط+ا = \sqrt{\frac{ط^{۲}}{۲ص^{۲}}+\frac{ط ص}{۲}+\sqrt{\frac{ط ص}{۲}}}$$

$$\therefore ا = \sqrt{\frac{ط}{۲}+\frac{ط ص}{۲}+\sqrt{\frac{ط ص}{۲}}}-ط$$

۲۴

$$\frac{\sqrt{۲ط+۱+ل^۲}}{۱-ل+\sqrt{۱+ل^۲}} = ط+ص$$

$$\therefore \sqrt{۲ط+۱+ل^۲} = (ط+ص)(۱-ل)+(ط+ص)\sqrt{۱+ل^۲}$$

$$\therefore (ط-ص)\sqrt{۱+ل^۲} = (ط+ص)(۱-ل)$$

$$\therefore \frac{\sqrt{۱+ل^۲}}{۱-ل} = \frac{ط+ص}{ط-ص}$$

$$\therefore \frac{۱+ل^۲-۲ل}{۱+ل^۲} = \left(\frac{ط-ص}{ط+ص}\right)^۲$$

$$\therefore ۱-\frac{۲ل}{۱+ل^۲} = \frac{(ط-ص)^۲}{(ط+ص)^۲} = \frac{۴ط ص}{(ط+ص)^۲}$$

اب اگر طرفین پر عدد ۱ کا زیادہ کریں تو یہ کم بھی کریں طرفین کو ضرب کریں

$$\frac{(۱+ل)^۲}{(۱-ل)^۲} = \frac{(ط+ص)^۲+۴ط ص}{(ط+ص)^۲-۴ط ص} = \frac{(ط-ص)^۲+۸ط ص}{(ط-ص)^۲}$$

$$\therefore \frac{۱+ل}{۱-ل} = \sqrt{۱+\frac{۸ط ص}{(ط-ص)^۲}}$$

$$\therefore \frac{۱+ل}{۱-ل} = \sqrt{\frac{(ط-ص)^۲+۸ط ص}{(ط-ص)^۲}} = \frac{\sqrt{(ط+ص)^۲}}{\sqrt{(ط-ص)^۲}}$$

۲۵

$$\frac{\sqrt{۱-ل^۲}}{۱+\sqrt{۱-ط^۲}} = \frac{\sqrt{۱-ل^۲}\left\{۱-\sqrt{۱-ط^۲}\right\}}{ط^۲} = \frac{\sqrt{۱-ل^۲}\left\{۱-\sqrt{۱-ط^۲}\right\}^۲}{ط^۲ ل^۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۱-ل^۲}\left\{۲-۲\sqrt{۱-ط^۲}\right\}}{ط^۲ ل^۲} = \frac{\sqrt{۱-ل^۲}\left\{۲-۲\sqrt{۱-ط^۲}\right\}}{ط^۲ ل^۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۱-ل^۲}\left\{۲-۲\sqrt{۱-ط^۲}\right\}}{ط^۲ ل^۲} = \frac{\sqrt{۱-ل^۲}\left\{۲-۲\sqrt{۱-ط^۲}\right\}}{ط^۲ ل^۲}$$

۲۶

$$\sqrt{۱-۲ل+۲} = \sqrt{۱+ل+۲} = \sqrt[۴]{ل^۴-۳ل^۲+۲}$$

$$\therefore \sqrt{۱-ل}-\sqrt{۲} = \sqrt{(ل^۲-۲ل+۱)(ل+۲)^۲}^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= \sqrt{۱-ل}\,(ل+۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\therefore \sqrt{۱-ل^۲}\left\{\sqrt{ل^۲+۲ل}-\sqrt{ل^۲-۲ل}\right\} = \sqrt{ل^۲-ط^۲}$$

$$\frac{\sqrt{۱-ل^۲}\left\{\sqrt{ل^۲+۲ل}-\sqrt{ل^۲-۲ل}\right\}}{\sqrt{۱+ل}\sqrt{ل^۲-ط^۲}} = \frac{\sqrt{ل^۲-ط^۲}}{\sqrt{۱+ل}\sqrt{ل^۲-ط^۲}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{۱-ل}\left\{\sqrt{ل^۲+۲ل}-\sqrt{ل^۲-۲ل}\right\}}{\sqrt{۱+ل}} = \frac{\sqrt{ل^۲-ط^۲}}{\sqrt{۱+ل}\sqrt{ل^۲-ط^۲}}$$

$$\therefore \sqrt{۱-ل^۲}\left\{\sqrt{ل^۲+۲ل}-\sqrt{ل^۲-۲ل}\right\} = \sqrt{ل^۲-ط^۲}$$

$$\therefore \sqrt{۱-ل^۲}\left\{\sqrt{ل^۲+۲ل}-\sqrt{ل^۲-۲ل}\right\}^۲ = \sqrt{(ل^۲-ط^۲)^۲}$$

$$\therefore \sqrt{۱-ل^۲}\left\{۲ل^۲-۲\sqrt{ل^۴-۴ل^۲}\right\} = ۲ل^۲-ط^۲$$

$$\therefore ۲ل^۲-ط^۲-۲ل^۲\sqrt{۱-ل^۲} = ۲ل^۲\sqrt{ل^۲-ط^۲}$$

$$\therefore ۲ل^۲-ط^۲ = ۲ل^۲\left(\sqrt{۱-ل^۲}+\sqrt{ل^۲-ط^۲}\right)$$

اب اگر طرفین کا مجذور کریں تو یہ حاصل ہوتا ہے

$$۴ل^۴-۴ط^۲ل^۲+ط^۴ =$$

$$۴ل^۴+۴ط^۴ل^۴+۴ل^۴-۴ط^۲ل^۲-۸ط^۲ل^۴-۴ط^۲ل^۲$$

$$\therefore ۴ط^۴ل^۴+۸ط^۲ل^۴-۴ط^۲ل^۲-۸ط^۲ل^۲ = ۴ل^۴$$

اب اگر طرفین پر عدد ۴ کا زیادہ کریں تو یہ کم بھی کریں طرفین کو ضرب کریں

$$\therefore ۴ل^۲-۴ط^۲ل^۲ = ۴(ط^۲+۲)ل^۲-۴ط^۲(ط^۲+۲)$$

$$\therefore ۴ل^۲-۴ط^۲ل^۲+۴ط^۲ = ۴(ط^۲+۲)$$

$$\therefore ۴ل^۲-۴ط^۲ل^۲+ط^۴ = ط^۴+۴ط^۲+۴$$

$$\therefore (۲ل-ط^۲)^۲ = (ط^۲+۲)^۲$$

$$\therefore ۲ل-ط^۲ = \pm(ط^۲+۲)$$

$$\therefore ۲ل = ط^۲ \pm (ط^۲+۲)$$

$$\therefore ل = \frac{ط^۲}{۲} \pm \sqrt{ط^۲+۱}$$

$\therefore \sqrt{لا-1}\sqrt{لا+2}=\sqrt[4]{لا+2}\left(\sqrt{لا-1}+\sqrt[4]{لا+2}\right)$

اب چونکہ طرفین مساوات $\left(\sqrt{لا-1}+\sqrt[4]{لا+2}\right)$ پر تقسیم ہو سکتی ہیں

اسواسطے موافق خواص تناسب آگے یہہ دو مساواتین حاصل ہوتی ہیں

$$\sqrt{لا-1}+\sqrt{لا+2}=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\sqrt{لا-1}-\sqrt[4]{لا+2}=\sqrt[4]{لا+2} \quad \ldots (2)$$

اب ہم مساوات (۱) سی لا کی قیمت دریافت کرتی ہین

ظاہر ہی کہ $\sqrt{لا-1}=-\sqrt{لا+2}$

$\therefore (لا-1)^2=لا+2$

$\therefore لا^2-2لا+1=لا+2$

$\therefore لا^2-3لا+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$

$\therefore لا-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\therefore لا=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

اب مساوات (۲) کو حل کرین تو ظاہر ہی کہ

$\sqrt{لا-1}=\sqrt[4]{لا+2}$

$\therefore لا^2-2لا+1=16لا+32$

$\therefore لا^2-18لا+81=112$

$\therefore لا-9=\pm4\sqrt{7}$

$\therefore لا=9\pm4\sqrt{7}$

۲۷ $\frac{2لا^2+1+لا\sqrt{4لا^2+3}}{2لا^2+3+لا\sqrt{4لا^2+3}}=ط$

طرفین کو عدد آسی کم کیا

$$\therefore -1=\frac{2لا^2+1+لا\sqrt{4لا^2+3}}{2لا^2+3+لا\sqrt{4لا^2+3}}=ط-1$$

$$\therefore لا\sqrt{4لا^2+3}=\frac{2}{ط-1}-2لا^2-3$$

$$\therefore لا^2(4لا^2+3)=\left(\frac{2}{ط-1}-2لا^2-3\right)^2$$

$$\therefore 4لا^4+4لا^2=\left(\frac{1-ط3}{ط-1}\right)^2-4\times\frac{1-ط3}{ط-1}لا^2+4لا^4$$

$$\therefore \left(\frac{1-ط3}{ط-1}\right)^2=\left(\frac{ط12-4}{ط-1}+3\right)لا^2$$

$$\therefore \frac{(1-ط3)^2}{ط-1}=(ط9-1)لا^2$$

$$\therefore لا=\pm\frac{1-ط3}{\sqrt{(1-ط)(ط9-1)}}$$

۲۸ $\frac{(ط^2-1)ط+ط^2لا-لا\sqrt{ط^2-1}}{(ط^2-1)ط+ط^2لا+لا\sqrt{ط^2-1}}=\frac{(1-ط)^2}{(ط+9)^2}$

شمارکنندہ اور نسب نما کو نسب نما مین ضرب کیا اور اسیواسطے بعد ضرب کرنیکی شمارکنندہ یہہ ہوجاتا ہی

$$\left((ط^2-1)ط+ط^2لا\right)^2-لا^2(ط^2-1)$$

یا $(ط^2-1)^2ط^2+2ط^3لا(ط^2-1)+ط^4لا^2-ط^2لا^2+لا^2$

یا $(ط^2-1)^2ط^2+2ط^3لا(ط^2-1)+لا^2(ط^2-1)^2$

$$\text{یا } (q^2-1)\left\{q^2(q^2-1)+4q^2\Omega+\Omega^2(q^2-1)\right\}$$

$$\text{یا } (q^2-1)\left\{q^4+2q^2\Omega+\Omega^2-q^2-\Omega^2\right\}$$

$$\text{یا } (q^2-1)\left(q^2(q+\Omega)^2-(q^2+\Omega^2)\right)$$

اور سادی یہ مساوات کا دوسری شکل میں تبدیل ہو گئی یعنی

$$(1-q)(q+\Omega)^2-4q\Omega=(2+\Omega)^2-4q\Omega-q(2+\Omega)^2$$

$$=q^2+\Omega^2-q^2(q+\Omega)^2$$

$$=-\left(q^2(q+\Omega)^2-(q^2+\Omega^2)\right)$$

پس معلوم ہوا کہ $\frac{q^2-1}{(\text{نسبہ})^2}=-1$

$$\therefore \text{نسبہ}=\pm\sqrt{1-q^2}$$

یعنی $(q^2-1)q+q^2\Omega+\Omega\sqrt{2q^2-1}=\pm\sqrt{1-q^2}$

$$\therefore \left(q^2+\sqrt{2q^2-1}\right)\Omega=\pm\sqrt{1-q^2}\left(1\pm q\sqrt{1-q^2}\right)$$

$$\therefore \Omega=\pm\sqrt{1-q^2}\times\frac{1\pm q\sqrt{1-q^2}}{q^2+\sqrt{2q^2-1}}$$

$$=\frac{1-q\Omega+\sqrt{1+\Omega^2}\sqrt{1+q^2}}{1-q\Omega+\sqrt{1+\Omega^2}-\Omega\sqrt{1+q^2}}=q$$

$$\text{یا } q\left(1-q\Omega\right)+q\sqrt{1+\Omega^2}-q\Omega\sqrt{1+q^2}=\text{اسی سطر}$$

$$\text{یا } (q\Omega-1)(q-1)+(q\Omega+1)\sqrt{1+q^2}=2q\sqrt{1+\Omega^2}$$

اب مجذور کر

$$\left(q^2\Omega^2-2q\Omega+1\right)(q-1)^2+2(q-1)\sqrt{1+q^2}\left(q\Omega-1\right)$$

$$+\left(q^2\Omega^2+2q\Omega+1\right)(1+q^2)=4q^2(1+\Omega^2)$$

$$\therefore 2\left(q^2\Omega^2+1\right)(1+q^2)-4q(q\Omega-1)^2+$$

$$2(q-1)\sqrt{1+q^2}\left(q^2\Omega-1\right)=4q^2+4q^2\Omega^2$$

$$\therefore \left(q^1\Omega^2+1\right)(1+q^2)-q\left(q\Omega-1\right)^2+$$

$$(q-1)\sqrt{1+q^2}\left(q^2\Omega-1\right)=2q^2+2q^2\Omega^2$$

$$\therefore q^2\Omega^2+1+q^2\Omega^2+q^2-q\left(q\Omega-1\right)^2+$$

$$(q-1)\sqrt{1+q^2}\left(q^2\Omega-1\right)=2q^2+2q^2\Omega^2$$

$$\therefore q^2\Omega^2-(q^2-1)-q(q\Omega-1)^2+$$

$$(q-1)\sqrt{1+q^2}\left(q^2\Omega-1\right)=0$$

$$\therefore \left(q^2-1\right)\left(q^2\Omega^2-1\right)-q(q\Omega-1)^2+$$

$$(q-1)\sqrt{1+q^2}\left(q^2\Omega-1\right)=0$$

چونکہ $q\Omega-1=0$ مشترک ہے

$\therefore q\Omega-1=0$ اور تقسیم کرنے پر $\therefore \Omega=\frac{1}{q}$

$$(q^2-1)(q\Omega+1)-q(q\Omega-1)+\sqrt{1+q^2}(q\Omega-1)=$$

$$\text{یا } \left\{q^2-1+(q-1)\sqrt{1+q^2}-q\right\}q\Omega=$$

$$\text{اور اسی طرح } \left\{q^2-1+(q-1)\sqrt{1+q^2}\right\}$$

$$-q\Omega=\frac{q^2-q-1+(q-1)\sqrt{1+q^2}}{q^2+q-1+(q-1)\sqrt{1+q^2}}$$

$$=1+\frac{2q}{q^2+q-1+(q-1)\sqrt{1+q^2}}$$

$$=1+\frac{2q\left(q^2-q-1-(q-1)\sqrt{1+q^2}\right)}{\left(q^2-q-1\right)^2-(q-1)^2(1+q^2)}$$

$$=1+\frac{2q\left(q^2-q-1-(q-1)\sqrt{1+q^2}\right)}{q(2-2q)}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{b} \pm \sqrt{\frac{2}{b(b^2-4)}\left\{b \pm \sqrt{b^2(b^2-4)+4(b^2-1)}\right\}}$$

$\therefore 3\lambda^2\sqrt{1-\lambda^2} = b(1+\lambda^2)$ مجذور کیا

$\therefore 4\lambda^2 - 4\lambda^6 = b^2 + 2b^2\lambda^2 + b^2\lambda^4$

طرفین کو $b^2\lambda^4$ پر تقسیم کیا

$$\therefore \frac{4}{b^2\lambda^2} - \frac{4\lambda^2}{b^2} = \frac{1}{\lambda^4} + 2 + \lambda^4$$

یعنی $-\frac{4}{b^2}\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^2$ کیے

$$\therefore \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{4}{b^2}\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = \text{طرفین سی}$$

$$\therefore \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{4}{b^2}\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = -4$$

$$\therefore \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)^2 + \frac{4}{b^2}\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{4}{b^2} = \frac{4}{b^2}$$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{b^2} = \pm\frac{2}{b^2}\sqrt{1-b^2}$$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{b^2}\left(\pm\sqrt{1-b^2} - 1\right) = 2\text{ص}$$ فرضی تسہیل

$$\therefore \lambda^4 - 2\text{ص}\lambda^2 = 1$$

$$\therefore \lambda^4 - 2\text{ص}\lambda^2 + \text{ص}^2 = 1 + \text{ص}^2$$

$$\therefore \lambda^2 = \text{ص} \pm \sqrt{1+\text{ص}^2}$$

$$\therefore \lambda = \pm\sqrt{\text{ص} \pm \sqrt{1+\text{ص}^2}}$$

لیکن $\text{ص} = -\frac{1}{b^2}\left(1 \pm \sqrt{1-b^2}\right)$ اسیواسطے

$$1 + \text{ص} = \frac{1}{b^2}\left(2 - b^2 \pm 2\sqrt{1-b^2}\right) = \frac{2}{b^2}\left(1 \pm \sqrt{1-b^2}\right)$$

$$\therefore \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{b^2}\left(1 \pm \sqrt{1-b^2}\right)}$$

$$\therefore \lambda = \pm\frac{1}{b}\sqrt{2\left(1 \pm \sqrt{1-b^2}\right)}$$

۱۳۲

$$\frac{\frac{4}{9}\lambda^2 + 3\lambda^2}{2\left(\lambda - \frac{1}{3}\lambda\right)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)} = \frac{25}{9}\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)$$

اس مساوات کی دوسری طرف کو (یعنی شمار کنندہ اور نسب نما کو) نسب نما میں ضرب کیا علامت یہ لی کہ جو علامت پہلے جذر سے پہلے تھی

$$\frac{\left(3\lambda^2 + \frac{4}{9}\right)\left(2\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{\lambda\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)}\right)}{4\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9}\right) - \lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda} = \frac{24}{9}\lambda - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{\text{شمار کنندہ}}{\frac{4}{9} + 3\lambda^2} = 2\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) + \sqrt{\lambda\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)}$$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda} = 2$$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \sqrt{\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda} + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} = 1 \text{ یا } -2$$

$$\therefore \sqrt{\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda} = 1 \text{ یا } -2$$

اسیواسطی دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$$\sqrt{\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda} = 1 \quad \ldots (1)$$ اور $$\sqrt{\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda} = -2 \quad \ldots (2)$$

اول مساوات سی قیمت لا کی اسطرح معلوم ہوتی ہی

$$\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda = 1 \quad \therefore \lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\therefore \lambda - \frac{4}{3} = \pm\frac{5}{3} \quad \therefore \lambda = 3 \text{ یا } -\frac{1}{3}$$

اور دوسری مساوات سی اسطرح $\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda = 4$

$$\therefore \lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + \frac{16}{9} = 4 + \frac{16}{9} = \frac{52}{9}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{۴}{۳} \pm \frac{\sqrt{۵۲}}{۳} = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۳ \times ۴}}{۳}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۱۳}}{۳}$$

۳۴

$$\frac{(\text{ن}-۱)(\text{ط}^۴ + \text{ط}^۲\text{لا}^۲ + \text{لا}^۴)}{(\text{ن}+۱)(\text{ط}^۴ - \text{ط}^۲\text{لا}^۲ + \text{لا}^۴)} = (۲ - \frac{۱}{\text{ن}})\left(\frac{\text{ط لا}}{\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲}\right)^۲$$

$$\frac{\text{ط}^۴ + \text{ط}^۲\text{لا}^۲ + \text{لا}^۴}{\text{ط}^۴ - \text{ط}^۲\text{لا}^۲ + \text{لا}^۴} \left(\frac{\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲}{\text{ط لا}}\right)^۲ = \frac{۲\text{ن}-۱}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}-۱}$$

$$\frac{\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}^۲} + ۱ + \frac{\text{لا}^۲}{\text{ط}^۲}}{\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}^۲} - ۱ + \frac{\text{لا}^۲}{\text{ط}^۲}} \left(\frac{\text{ط}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ط}}\right)^۲ = \frac{۲\text{ن}-۱}{\text{ن}} \times \frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}-۱} = \text{ص}$$

$$\therefore \frac{\left(\frac{\text{ط}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ط}}\right)^۲ + ۳}{\left(\frac{\text{ط}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ط}}\right)^۲ + ۱} \left(\frac{\text{ط}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ط}}\right)^۲ = \text{ص}$$

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{ط}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ط}} =$ کا اسیوا حاصل ہوتی ہے مساوات

$$\frac{\text{ک}^۲ + ۳}{\text{ک}^۲ + ۱} \times \text{ک}^۲ = \text{ص}$$

$$\therefore \text{ک}^۴ + ۳\text{ک}^۲ = \text{ص ک}^۲ + \text{ص}$$

$$\therefore \text{ک}^۴ + (۳ - \text{ص})\text{ک}^۲ = \text{ص}$$ اور یہ مساوات درجہ دوم کی ہے اس سے ک کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اب فرض کرو کہ ک کی قیمت ک کی جو معلوم ہوئی س ہے اسیوا سطی

$$\frac{\text{ط}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{\text{ط}} = \text{س} \quad \therefore \text{ط}^۲ - \text{لا}^۲ = \text{ط س لا}$$ اور اب

قیمت لا کی دریافت ہو سکتی ہے

۳۳

$$\left(\frac{۲\text{لا} + ۳}{۳ - ۲\text{لا}}\right)^{\frac{۱}{۳}} + \left(\frac{۳ - ۲\text{لا}}{۳ + ۲\text{لا}}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۸}{۱۳} \times \frac{۴\text{لا}^۲ + ۹}{۹ - ۴\text{لا}^۲}$$

طرفین مساوات کا مکعب کیا اسیوا سطی یہ حاصل ہوا

$$\left(\frac{۸}{۱۳}\right)^۳ \left(\frac{۴\text{لا}^۲ + ۹}{۹ - ۴\text{لا}^۲}\right)^۳ = \frac{۲\text{لا} + ۳}{۳ - ۲\text{لا}} + \frac{۳ - ۲\text{لا}}{۳ + ۲\text{لا}} + ۳ \times \frac{۸}{۱۳} \times \frac{۴\text{لا}^۲ + ۹}{۹ - ۴\text{لا}^۲}$$

$$= \frac{۲(۴\text{لا}^۲ + ۹) + \frac{۲۴}{۱۳}(۴\text{لا}^۲ + ۹)}{۹ - ۴\text{لا}^۲}$$

$$\frac{۹ + ۴\text{لا}^۲}{۹ - ۴\text{لا}^۲} \frac{۵۰}{۱۳} =$$

$$\therefore \left(\frac{۹ + ۴\text{لا}^۲}{۹ - ۴\text{لا}^۲}\right)^۲ = \frac{۵۰(۱۳)^۲}{۳(۸)^۳} = \frac{۲۵(۱۳)^۲}{۸^۲}$$

$$\therefore \frac{۹ + ۴\text{لا}^۲}{۹ - ۴\text{لا}^۲} = \frac{(۱۳)۵}{۴^۲} = \frac{۶۵}{۱۶}$$

$$\therefore \frac{۴\text{لا}^۲}{۹} = \frac{۸۱}{۴۹} \therefore \frac{۲\text{لا}}{۳} = \pm \frac{۹}{۷}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm \frac{۲۷}{۱۴} = \pm \frac{۱۳}{۱۴} ۱$$

۳۴

$$\text{ط}^۲\text{لا}^۲ - \text{ص}^۲ - ۲\text{لا}(\text{ط} - \text{س لا}) \sqrt{\frac{\text{ط}^۲ - \text{ص}^۲}{۱۰ - ۱۰\text{لا}^۲} + \left(\frac{\text{ط} - \text{س لا}}{۱۰ - ۱۰\text{لا}^۲}\right)^۲}$$

$$+ \frac{۱ + \text{لا}^۲}{۱ - \text{لا}^۲}(\text{ط} - \text{س لا})^۲ = ۱۰$$ اس مساوات کو اسطرح لکھ سکتے ہیں

$$\text{ط}^۲\text{لا}^۲(۱ - \text{لا}^۲) - \text{ص}^۲(۱ - \text{لا}^۲) + (\text{ط} - \text{س لا})^۲(۱ + \text{لا}^۲) -$$

$$۲\text{لا}(\text{ط} - \text{س لا}) \sqrt{(\text{ط}^۲ - \text{ص})(۱ - \text{لا}^۲) + (\text{ط} - \text{س لا})^۲} =$$

اسیوا سطی $(\text{ط}^۲ - \text{ص})(۱ - \text{لا}^۲) - (\text{ط}^۲ - \text{ط}^۲\text{لا}^۲)(۱ - \text{لا}^۲)$

$$+ (\text{ط} - \text{س لا})^۲ + (\text{ط} - \text{س لا})^۲\text{لا}^۲ -$$

۳۵

$\lambda^2(\beta-\sigma\lambda)^2=(\beta^2-\sigma^2)(1-\lambda^2)+(\beta-\sigma\lambda)^2=0$

$\therefore(\beta^2-\sigma^2)(1-\lambda^2)+(\beta-\sigma\lambda)^2=$

$2\lambda(\beta-\sigma\lambda)\sqrt{(\beta^2-\sigma^2)(1-\lambda^2)+(\beta-\sigma\lambda)^2}+$

$\lambda^2(\beta-\sigma\lambda)^2=\beta^2(1-\lambda^2)$ طرفین کا جذر لیا $\therefore$

$\sqrt{(\beta^2-\sigma^2)(1-\lambda^2)+(\beta-\sigma\lambda)^2}-$

$\lambda(\beta-\sigma\lambda)=\pm\beta(1-\lambda^2)$ جذر کو ایک طرف

رکھ کر طرفین کا مجذور کیا اسیواسطے

$(\beta^2-\sigma^2)(1-\lambda^2)+(\beta-\sigma\lambda)^2=$

$\lambda^2(\beta-\sigma\lambda)^2+\beta^2(1-\lambda^2)^2$

$\pm2\beta\lambda(\beta-\sigma\lambda)(1-\lambda^2)$ اور اسیواسطے

$(\beta^2-\sigma^2)(1-\lambda^2)+(\beta-\sigma\lambda)^2(1-\lambda^2)=$

$\beta^2(1-\lambda^2)^2\pm2\beta\lambda(\beta-\sigma\lambda)(1-\lambda^2)$

طرفین کو $(1-\lambda^2)$ پر تقسیم کیا اسیواسطے

$(\beta^2-\sigma^2)+(\beta-\sigma\lambda)^2=\beta^2(1-\lambda^2)\pm2\beta\lambda(\beta-\sigma\lambda)$

$\therefore(\beta-\sigma\lambda)^2\mp2\beta\lambda(\beta-\sigma\lambda)+\beta^2\lambda^2=\sigma^2$ جذر لیا

$\therefore\beta-\sigma\lambda\mp\beta\lambda=\pm\sigma$

$\therefore(\sigma\pm\beta)\lambda=\beta\mp\sigma$

$\therefore\lambda=\dfrac{\beta\mp\sigma}{\sigma\pm\beta}$

$(1-\lambda)\sqrt{\beta(1+\frac{1}{\lambda})-2}=\sqrt{\lambda+1}\sqrt{3\lambda-1}$

$(1-\lambda)\sqrt{\beta(1+\frac{1}{\lambda})-2}-\sqrt{\lambda+1}=\sqrt{3\lambda-1}$

طرفین کا مجذور کیا اسیواسطی

$(1-\lambda)^2(\beta(1+\frac{1}{\lambda})-2)-$

$2(1-\lambda)\sqrt{1+\lambda}\sqrt{\beta(1+\frac{1}{\lambda})}-2+$

$1+\lambda=3\lambda-1$ اور اس سی بینہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$(1-\lambda)^2(\beta(1+\frac{1}{\lambda})-2)-$

$2(1-\lambda)\sqrt{1+\lambda}\sqrt{\beta(1+\frac{1}{\lambda})}-2+2(1-\lambda)=$

طرفین مساوات کو $(1-\lambda)$ پر تقسیم کیا اسواسطی

$(1-\lambda)(\beta(\frac{1+\lambda}{\lambda})-2)-$

$2\sqrt{1+\lambda}\sqrt{\beta(1+\frac{1}{\lambda})}-2+2=0$

$\beta\times\frac{1-\lambda^2}{\lambda}+2\lambda-2\sqrt{1+\lambda}\sqrt{\beta(1+\frac{1}{\lambda})}-2=0$

$\therefore\beta-(\beta-2)\lambda-2\sqrt{1+\lambda}\sqrt{\beta\lambda+(\beta-2)\lambda^2}=0$

طرفین پر $\beta\lambda+(\beta-2)\lambda^2$ زیادہ کیا

اسیواسطی $\beta\lambda+(\beta-2)\lambda^2+2\sqrt{1+\lambda}\sqrt{\beta\lambda+(\beta-2)\lambda^2}$

$=\beta+\beta\lambda=\beta(1+\lambda)$ اسیواسطے مجذور کیا $1+\lambda$ کے

$\beta\lambda+(\beta-2)\lambda^2+2\sqrt{1+\lambda}\sqrt{\beta\lambda+(\beta-2)\lambda^2}$

$+1+\lambda=(\beta+1)(1+\lambda)$ طرفین کا جذر لیا اسیواسطے

$\sqrt{\beta\lambda+(\beta-2)\lambda^2}+\sqrt{1+\lambda}=\sqrt{\beta+1}\sqrt{1+\lambda}$

$\sqrt{ط لا^2+(ط-۲)لا^2}=(\pm\sqrt{ط+۱-۱})\sqrt{۱+لا}$ ∴

$ط لا^2+(ط-۲)لا^2=(\pm\sqrt{ط+۱-۱})^2(۱+لا)$

$ط لا^2+(ط-۲)لا^2=(\pm\sqrt{ط+۱-۱})^2+ط لا^2+۲(\pm\sqrt{ط+۱-۱})لا$ اسیواسطے

$(ط-۲)لا^2+۲(\pm\sqrt{ط+۱-۱})لا=(\pm\sqrt{ط+۱-۱})^2$ ∴

$لا^2+۲\pm\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{ط-۲}لا+\left(\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{ط-۲}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{ط-۲}\right)^2$

اسیواسطے

$\left(\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{ط-۲}\right)^2(۱+ط-۲)$ طرفین کا خذ دیا

$لا+\left(\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{ط-۲}\right)=\left(\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{ط-۲}\right)(\pm\sqrt{ط-۱})$ ∴

$لا=\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{ط-۲}\times(\pm\sqrt{ط-۱-۱})$

$=\frac{\sqrt{ط+۱-۱}}{(ط-۱)-۱}(\pm\sqrt{ط-۱-۱})$

$=\frac{(\pm\sqrt{ط+۱-۱})(\pm\sqrt{ط-۱-۱})}{(\sqrt{ط-۱-۱})(\sqrt{ط-۱+۱})}$

$=\frac{\pm\sqrt{ط+۱-۱}}{\sqrt{ط-۱}+۱}$

۳۶

$لا-ک=۸$

$لا^4-ک^4=۱۴۰۶۰$

فرض کرو کہ $لا=د+ر$

$ک=د-ر$

اسیواسطے $لا-ک=۲ر=۸$ ∴ $ر=۴$

اور $لا^2+ک^2=(د+۴)^2+(د-۴)^2=۲د^2+۳۲$

اور $لا^2-ک^2=(د+۴)^2-(د-۴)^2=۱۶د$

∴ $(لا^2+ک^2)(لا^2-ک^2)=لا^4-ک^4$

$=(۲د^2+۳۲)\times۱۶د$

$=۱۴۰۶۰$

∴ $د^3+۱۶د=۴۵۵$ طرفین کو ۴ین ضرب کیا ∴

$د^4+۱۶د^2=۴۵۵۰=۶۵\times۷۲$

طرفین پر $۴۹د^2$ زیادہ کیے اسیواسطے

$د^4+۶۵د^2+\left(\frac{۶۵}{۲}\right)^2=۴۹د^2+۶۵\times۷د+\left(\frac{۶۵}{۲}\right)^2$

∴ $د^2+\frac{۶۵}{۲}=۷د+\frac{۶۵}{۲}$

∴ $د^2=۷د$ ∴ $د=۷$

∴ $لا=د+۴=۱۱$

$ک=د-۴=۳$

۳۷

$لا(ص س-لا ک)=ک(لا ک-ط س)$ ... (۱)

$لا ک(ط ک+ص لا-لا ک)=ط ص س(لا+ک-س)$ ... (۲)

مساوات (۱) سی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے کہ

$س(ص لا+ط ک)=لا ک(لا+ک)$ طرفین سی لا و کیا

$\therefore$ س (ص لا + ط ی − لا ی) = لا ی (لا + ی − س) (۳)

مساوات (۲) کو مساوات (۳) پر تقسیم کیا:۔

$\frac{\text{لا ی}}{\text{ص}} = \frac{\text{ط ص س}}{\text{لا ی}}$ $\therefore$ لا^۲ ی^۲ = ط ص س^۲

$\therefore$ لا ی = س $\sqrt{\text{ط ص}}$ اور مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ

$\frac{\text{لا}}{\text{ی}} = \frac{\text{لا ی} - \text{ط س}}{\text{ص س} - \text{لا ی}} = \frac{\text{س} \sqrt{\text{ط ص}} - \text{ط س}}{\text{ص س} - \text{س} \sqrt{\text{ط ص}}}$

$= \frac{\sqrt{\text{ط ص}} - \text{ط}}{\text{ص} - \sqrt{\text{ط ص}}}$

$= \frac{\sqrt{\text{ط}} \left(\sqrt{\text{ص}} - \sqrt{\text{ط}} \right)}{\sqrt{\text{ص}} \left(\sqrt{\text{ص}} - \sqrt{\text{ط}} \right)}$

$= \frac{\sqrt{\text{ط}}}{\sqrt{\text{ص}}}$

$\therefore$ لا ی $\times \frac{\text{لا}}{\text{ی}} = \text{س} \sqrt{\text{ط ص}} \frac{\sqrt{\text{ط}}}{\sqrt{\text{ص}}}$

یعنی لا^۲ = س ط

$\therefore$ لا = $\pm \sqrt{\text{س ط}}$ اور ی = $\pm \sqrt{\text{ص س}}$

۳۸

لا^۳ + ی (لا ی − ۱) = ۰ ..... (۱)

ی^۳ − لا (لا ی + ۱) = ۰ ..... (۲)

مساوات (۱) سے لا^۴ + لا^۲ ی^۲ − لا ی = ۰

مساوات (۲) سے ی^۴ − لا^۲ ی^۲ − لا ی = ۰

اسیوا سطے لا^۴ − ی^۴ + ۲ لا^۲ ی^۲ = ۰

اسیوا سطی لا^۴ + ۲ لا^۲ ی^۲ + ی^۴ = ۴ ی^۴

اسیوا سطے لا^۲ + ی^۲ = $\sqrt{۲}$ ی^۲

اسیوا سطی لا^۲ = ($\sqrt{۲}$ − ۱) ی^۲

اسیوا سطی $\frac{\text{لا}^۲}{\text{ی}^۲} = \sqrt{۲} - ۱$ ..... (۴)

اسیوا سطی $\frac{\text{لا}}{\text{ی}} = \sqrt{\sqrt{۲} - ۱}$

اور پھر مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کرنے سے

$\frac{\text{لا}^۳}{\text{ی}^۳} = \frac{\text{ی}}{\text{لا}} \frac{۱ - \text{لا ی}}{۱ + \text{لا ی}}$

$\therefore$ $\frac{\text{لا}^۴}{\text{ی}^۴} = \frac{۱ - \text{لا ی}}{۱ + \text{لا ی}}$ بوسیلہ (۱) کے $= \sqrt{۲} - ۳ = ۲ \sqrt{۲} - ۲$

$\therefore$ لا ی = $\frac{۲ - ۲ \sqrt{۲}}{۴ - ۲ \sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲ \sqrt{۲}}$

$\therefore$ لا ی $\times \frac{\text{لا}}{\text{ی}} = \frac{۱}{۲ \sqrt{۲}} \sqrt{۲ \sqrt{۲} - ۱}$

یعنی لا^۲ = $\frac{\sqrt{۲ \sqrt{۲} - ۱}}{۲ \sqrt{۲}}$

$\therefore$ لا = $\sqrt[۴]{\frac{۲ \sqrt{۲} - ۱}{۲}}$ اور ی = $\frac{\text{لا}}{\text{لا ی}} = \frac{۱}{\sqrt{۲ \sqrt{۲} - ۱}}$

۳۹

لا ی = ط (لا + ی) ..... (۱)

لا د = ص (لا + د) ..... (۲)

ی د = س (ی + د) ..... (۳)

مساوات (۱) سے $\frac{\text{لا ی}}{\text{لا}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}}$

یعنی $\frac{\text{ی}}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ط}} = \frac{۱}{\text{ط}}$

مساوات (۲) سی $\frac{1}{ج}+\frac{1}{ل}=\frac{1}{ص}$

$\therefore \frac{1}{ج}-\frac{1}{ص}=\frac{1}{د}-\frac{1}{ب}$

مساوات (۳) سے $\frac{1}{ج}+\frac{1}{د}=\frac{1}{س}$

$\therefore \frac{2}{ج}=\frac{1}{ب}+\frac{1}{س}-\frac{1}{ص}$

اور اسیطرح $\frac{2}{د}=\frac{1}{ص}+\frac{1}{س}-\frac{1}{ب}$

اور $\frac{2}{ل}=\frac{1}{ب}+\frac{1}{ص}-\frac{1}{س}$

$\therefore ل=\frac{2بصس}{بس+صس-بص}$

$ج=\frac{2بصس}{بص+صس-بس}$

$د=\frac{2بصس}{بص+بس-صس}$

۴۰

$ل(ل+ج+د)=ب^2$ ..... (۱)

$ج(ل+ج+د)=ص^2$ ..... (۲)

$د(ل+ج+د)=س^2$ ..... (۳)

سب مساواتوں کو جمع کیا اسیواسطے

$(ل+ج+د)(ل+ج+د)=ب^2+ص^2+س^2$

$\therefore ل+ج+د=\pm\sqrt{ب^2+ص^2+س^2}$

مساوات (۱) سے $ل=\frac{ب^2}{\pm\sqrt{ب^2+ص^2+س^2}}$

مساوات (۲) سے $ج=\frac{ص^2}{\pm\sqrt{ب^2+ص^2+س^2}}$

مساوات (۳) سے $د=\frac{س^2}{\pm\sqrt{ب^2+ص^2+س^2}}$

۴۱

$ل(ج+د)^2=ب^3+1$ ..... (۱)

$ل+ج=\frac{3}{2}+د$ ..... (۲)

$ج د=\frac{3}{16}$ ..... (۳)

مساوات (۱) سے $(ج+د)^2=\frac{ب^3+1}{ل}$

$\therefore (ج-د)^2=\frac{ب^3+1}{ل}-4ج د=\frac{ب^3+1}{ل}-\frac{3}{4}$

اور مساوات (۲) سے $(ج-د)^2=(\frac{3}{2}-ل)^2$

$\therefore \frac{ب^3+1}{ل}-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}-3ل+ل^2$

$\therefore \frac{ب^3+1}{ل}=ل^2-3ل+3$

$\therefore ب^3+1=ل^3-3ل^2+3ل$

$\therefore ب^3=ل^3-3ل^2+3ل-1$

$\therefore ب=ل-1$

$\therefore ل=ب+1$ جب یہ قیمت مساوات (۱) مین لکھیں

تو مساوات (۱) سی $(ب+1)(ج+د)^2=1+ب^3$

$\therefore (ج+د)^2=ب^2-ب+1$

$\therefore ج+د=\pm\sqrt{ب^2-ب+1}=\pm\sqrt{(ب-1)^2+ب}$

اور $ز - د = \frac{1}{2} - ط$ بوسیلہ مساوات (۲) کے

$\therefore 2ز = \frac{1}{2} - ط \pm \sqrt{(ط-1)^2 + ط}$

$\therefore ز = \frac{1}{4} - \frac{ط}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(ط-1)^2 + ط}$

اور $د = \frac{ط}{2} - \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(ط-1)^2 + ط}$

۴۲

$ل(ز + د) = ط$ ..... (۱)

$ز(ل + د) = ص$ ..... (۲)

$د(ل + ز) = س$ ..... (۳)

ان تینوں مساواتوں سے یہ تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$ل ز + ل د = ط$

$ل ز + ز د = ص$

$ل د + ز د = س$

جمع کیا

$\therefore 2ل ز + ل د + ز د = ط + ص$ اور یہ دونوں مساواتوں کو

$\therefore 2ل ز = ط + ص - س$

اسیطرح $2ز د = ص + س - ط$

اور $2ل د = ط + س - ص$

$\therefore \frac{2ل ز \times 2ل د}{2ز د} = 2ل^2 = \frac{(ط+ص-س)(ط+س-ص)}{ص+س-ط}$

اور $\frac{2ل ز \times 2ز د}{2ل د} = 2ز^2 = \frac{(ص+س-ط)(ط+ص-س)}{ط+س-ص}$

اور $\frac{2ز د \times 2ل د}{2ل ز} = 2د^2 = \frac{(ص+س-ط)(ط+س-ص)}{ط+ص-س}$

$\therefore ل = \pm\sqrt{\frac{(ط+ص-س)(ط+س-ص)}{2(ص+س-ط)}}$

$ز = \pm\sqrt{\frac{(ط+ص-س)(ص+س-ط)}{2(ط+س-ص)}}$

$د = \pm\sqrt{\frac{(ص+س-ط)(ط+س-ص)}{2(ط+ص-س)}}$

۴۳

$ل ز + ن(ل + ز) = ط$ ..... (۱)

$ل د + ن(ل + د) = ص$ ..... (۲)

$ز د + ن(ز + د) = س$ ..... (۳)

(۱) سے $(ل + ن)(ز + ن) = ط + ن^2$

(۲) سے $(ل + ن)(د + ن) = ص + ن^2$

(۳) سے $(ز + ن)(د + ن) = س + ن^2$

مساوات (۱) اور (۲) کو باہم ضرب کرکے (۳) پر تقسیم کیا

$\frac{(ل+ن)^2(ز+ن)(د+ن)}{(ز+ن)(د+ن)} = \frac{(ط+ن^2)(ص+ن^2)}{(س+ن^2)}$

$\therefore (ل + ن)^2 = \frac{(ط+ن^2)(ص+ن^2)}{(س+ن^2)}$

$\therefore ل + ن = \pm\sqrt{\frac{(ط+ن^2)(ص+ن^2)}{(س+ن^2)}}$

$\therefore ل \equiv ن \pm \sqrt{\frac{(ط+ن^2)(ص+ن^2)}{س+ن^2}}$ اسیطرح

اب اگر مساوات (۱) اور (۳) کو باہم ضرب کرکے (۲) پر تقسیم کریں

تو

$$ک = -ن \pm \sqrt{\frac{(ط+ن^۲)(س+ن^۲)}{ص+ن^۲}}$$

اور اگر مساوات (۲) اور (۳) کو باہم ضرب کر کے (۱) پر تقسیم کریں تو

$$ک = -ن \pm \sqrt{\frac{(ص+ن^۲)(س+ن^۲)}{ط+ن^۲}}$$

۴۴

$$\frac{ط}{لا} + \frac{ص}{ک} = ف \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\frac{س}{لا} + \frac{ع}{ک} = ق \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) کا ع مرتبہ کا صعود دیا اور (۲) کا ص مرتبہ کا صعود دیا ∴

$$\frac{طع}{لا} + \frac{صع}{ک} - \frac{ع}{ف} = ک$$

$$\frac{سص}{لا} + \frac{صع}{ک} - \frac{ص}{ق} = ک$$

$$\therefore \frac{طع}{لا} - \frac{سص}{لا} = \frac{ع}{ف} - \frac{ص}{ق}$$

$$\therefore لا = \left(\frac{ع}{ف} - \frac{ص}{ق}\right) \frac{1}{\frac{طع}{لا} - \frac{سص}{لا}}$$ اور اسیطرح $ک = \left(\frac{ق}{ص} - \frac{ط}{ع}\right) \frac{1}{\frac{طع}{ک} - \frac{سص}{ک}}$

۴۵

$$لا = ک + ۴ط \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$ک = لا + ط \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے $لا = \frac{ک + ۴ط}{۴}$

مساوات (۲) سے $لا + ط = ک$

$$\therefore لا + ک = ۴ط$$

$$\therefore \frac{ط}{لا + ک} = \frac{لا}{۴ط}$$

$$\therefore \frac{ط}{لا + ک} = \frac{(لا + ک)^۲}{۴ط} \therefore (لا + ک)^۲ = ۴ط^۲$$

$$\therefore لا + ک = ۲ط \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\therefore$$ بوسیلہ مساوات (۱) $لا^۲ = ۴ط^۲ ک$

$$\therefore لا = ک^۲$$ اور اسیواسطے بوسیلہ مساوات (۳) کے

$ک^۲ + ۱ = ۲ط$ اور اس مساوات سی قیمت ک کی یہہ نکلتی ہے

$$ک = \frac{۱}{۲}\left(-۱ \pm \sqrt{۸ط+۱}\right)$$ اور اسیواسطے

$$لا = \frac{۱}{۲}\left(۴ط + ۱ \mp \sqrt{۸ط+۱}\right)$$

۴۶

$$\frac{\sqrt{ک^۲+۱}+۱}{ک} = \frac{\sqrt{لا+۹}+۳}{لا} \quad \ldots (۱)$$

$$لا(ک+۱)^۲ = ۲۶\left(ک^۳ + \frac{۱۶}{۹}\right) \quad \ldots (۲)$$

مساوات (۱) مین اول طرف کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{ک^۲+۱}-۱$ مین ضرب کیا اور دوسری طرف کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{لا+۹}-۳$ مین ضرب کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

$$\frac{ک}{\sqrt{ک^۲+۱}-۱} = \frac{لا}{\sqrt{لا+۹}-۳}$$ اور اس مساوات کو

$\therefore$ س $(ص\ لا + ط\ د - لا\ د) = لا\ د (لا + د - س)$ (۱)

مساوات (۲) کو مساوات (۳) پر تقسیم کیا:۔

$\frac{لا\ د}{ص} = \frac{ط ص س}{لا\ د} \therefore لا^۲ د^۲ = ط ص س^۲$

$\therefore$ لا د = س $\sqrt{ط ص}$ اور مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ

$\frac{لا}{د} = \frac{لا\ د - ط س}{ص س - لا\ د} = \frac{س\sqrt{ط ص} - ط س}{ص س - س\sqrt{ط ص}}$

$= \frac{\sqrt{ط ص} - ط}{ص - \sqrt{ط ص}}$

$= \frac{\sqrt{ط}(\sqrt{ص} - \sqrt{ط})}{\sqrt{ص}(\sqrt{ص} - \sqrt{ط})}$

$= \frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ص}}$

$\therefore لا\ د \times \frac{لا}{د} = س\sqrt{ط ص}\ \frac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ص}}$

یعنی $لا^۲ = س ط$

$\therefore لا = \pm \sqrt{س ط}$ اور $د = \pm \sqrt{ص س}$

۳۸

$لا^۳ + د (لا\ د - ۱) = ۰$ ..... (۱)

$د^۳ - لا (لا\ د + ۱) = ۰$ ..... (۲)

مساوات (۱) سے $لا^۴ + لا^۲ د^۲ - لا\ د = ۰$

مساوات (۲) سے $د^۴ - لا^۲ د^۲ - لا\ د = ۰$

اسیوا سطے $لا^۴ - د^۴ + ۲ لا^۲ د^۲ = ۰$

اسیوا سطی $لا^۴ + ۲ لا^۲ د^۲ + د^۴ = ۲ د^۴$

اسیوا سطے $لا^۲ + د^۲ = \sqrt{۲}\ د^۲$

اسیوا سطی $لا^۲ = (\sqrt{۲} - ۱) د^۲$

اسیوا سطی $\frac{لا^۲}{د^۲} = \sqrt{۲} - ۱$ ..... (۹)

اسیوا سطی $\frac{لا}{د} = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$

اور پھر مساوات (۱) کو مساوات (۲) پر تقسیم کرنے سے

$\frac{لا^۳}{د^۳} = \frac{د}{لا} \frac{۱ - لا\ د}{۱ + لا\ د}$

(۱) کے

$\therefore \frac{۱ - لا\ د}{۱ + لا\ د} = \frac{لا^۴}{د^۴} = ۳ - ۲\sqrt{۲}$ بوسیلہ

$\therefore لا\ د = \frac{۲ - ۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲} - ۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$\therefore لا \times \frac{لا}{د} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$

یعنی $لا^۲ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}}$

$\therefore لا = \sqrt[۴]{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲}}$ اور $د = \frac{لا}{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{۲\sqrt{۲} - ۲}}$

۳۹

$لا\ د = ط (لا + د)$ ..... (۱)

$لا\ د = ص (لا + د)$ ..... (۲)

$د^۲ = س (د + د)$ ..... (۳)

مساوات (۱) سے $\frac{لا + د}{لا\ د} = \frac{۱}{ط}$

یعنی $\frac{۱}{د} + \frac{۱}{لا} = \frac{۱}{ط}$

مساوات (۲) سے $\frac{1}{ک}+\frac{1}{ل}=\frac{1}{ص}$

$\therefore \frac{1}{ک}-\frac{1}{ص}=\frac{1}{ل}-\frac{1}{ط}$

مساوات (۳) سے $\frac{1}{ک}+\frac{1}{د}=\frac{1}{س}$

$\therefore \frac{1}{د}-\frac{1}{س}+\frac{1}{ط}-\frac{1}{ص}=\frac{2}{ک}$

اور اسیطرح $\frac{2}{ک}=\frac{1}{ص}+\frac{1}{س}-\frac{1}{ط}$

اور $\frac{2}{ل}=\frac{1}{ط}+\frac{1}{ص}-\frac{1}{س}$

$\therefore ل=\frac{2ط ص س}{ط س+ص س-ط ص}$

$ک=\frac{2ط ص س}{ط ص+ص س-ط س}$

$د=\frac{2ط ص س}{ط ص+ط س-ص س}$

۴۰

$ل(ل+ک+د)=ط^2 \ldots\ldots (۱)$

$ک(ل+ک+د)=ص^2 \ldots\ldots (۲)$

$د(ل+ک+د)=س^2 \ldots\ldots (۳)$

سب مساواتون کو جمع کیا اسیواسطے

$(ل+ک+د)(ل+ک+د)=ط^2+ص^2+س^2$

$\therefore ل+ک+د=\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}$

مساوات (۱) سے $ل=\frac{ط^2}{\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}}$

مساوات (۲) سے $ک=\frac{ص^2}{\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}}$

مساوات (۳) سے $د=\frac{س^2}{\pm\sqrt{ط^2+ص^2+س^2}}$

۴۱

$ل(ک+د)^2=ط^3+1 \ldots\ldots (۱)$

$ل+ک=\frac{3}{2}+د \ldots\ldots (۲)$

$ک د=\frac{3}{16} \ldots\ldots (۳)$

مساوات (۱) سے $(ک+د)^2=\frac{ط^3+1}{ل}$

$\therefore (ک-د)^2=\frac{ط^3+1}{ل}-4ک د=\frac{ط^3+1}{ل}-\frac{3}{4}$

اور مساوات (۲) سے $(ک-د)^2=(\frac{3}{2}-ل)^2$

$\therefore \frac{ط^3+1}{ل}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}-3ل+ل^2$

$\therefore \frac{ط^3+1}{ل}=ل^2-3ل+3$

$\therefore ط^3+1=ل^3-3ل^2+3ل$

$\therefore ط^3=ل^3-3ل^2+3ل-1$

$\therefore ط=ل-1$

$\therefore ل=ط+1$ جب یہ قیمت مساوات (۱) مین لکھیں

تو مساوات (۱) سی $(ط+1)(ک+د)^2=1+ط^3$

$\therefore (ک+د)^2=ط^2-ط+1$

$\therefore ک+د=\pm\sqrt{ط^2-ط+1}=\pm\sqrt{(ط-1)^2+ط}$

اور $ز - د = \frac{1}{2} - b$ بوسیلہ مساوات (۲) کے

$\therefore 2ز = \frac{1}{2} - b \pm \sqrt{(b-1)^2 + b}$

$\therefore ز = \frac{1}{4} - \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b-1)^2 + b}$

اور $د = \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b-1)^2 + b}$

۴۲

$لا(ز + د) = b \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$

$ز(لا + د) = ص \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$

$د(لا + ز) = س \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$

ان تینوں مساواتوں سے یہ تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

$لا ز + لا د = b$

$لا ز + ز د = ص$

$لا د + ز د = س$

جمع کرکے

$\therefore 2لا ز + لا د + ز د = b + ص$ اور پہلی دونوں مساواتوں کو

$\therefore 2لا ز = b + ص - س$

اسیطرح $2ز د = ص + س - b$

اور $2لا د = b + س - ص$

$\therefore \frac{2لا ز \times 2لا د}{2ز د} = 2لا^2 = \frac{(b+ص-س)(b+س-ص)}{ص+س-b}$

اور $\frac{2ز د \times 2لا د}{2لا ز} = 2د^2 = \frac{(ص+س-b)(b+س-ص)}{b+ص-س}$

اور $\frac{2ز د \times 2لا ز}{2لا د} = 2ز^2 = \frac{(ص+س-b)(b+ص-س)}{b+س-ص}$

$\therefore لا = \pm \sqrt{\frac{(b+ص-س)(b+س-ص)}{2(ص+س-b)}}$

$ز = \pm \sqrt{\frac{(b+ص-س)(ص+س-b)}{2(b+س-ص)}}$

$د = \pm \sqrt{\frac{(ص+س-b)(b+س-ص)}{2(b+ص-س)}}$

۴۳

$لا ز + ن(لا + ز) = b \quad \ldots\ldots (۱)$

$لا د + ن(لا + د) = ص \quad \ldots\ldots (۲)$

$ز د + ن(ز + د) = س \quad \ldots\ldots (۳)$

(۱) سے $(لا + ن)(ز + ن) = b + ن^2$

(۲) سے $(لا + ن)(د + ن) = ص + ن^2$

(۳) سے $(ز + ن)(د + ن) = س + ن^2$

مساوات (۱) اور (۲) کو باہم ضرب کرکے (۳) پر تقسیم کیا

$\frac{(لا+ن)^2(ز+ن)(د+ن)}{(ز+ن)(د+ن)} = \frac{(b+ن^2)(ص+ن^2)}{(س+ن^2)}$

$\therefore (لا + ن)^2 = \frac{(b+ن^2)(ص+ن^2)}{(س+ن^2)}$

$\therefore لا + ن = \pm \sqrt{\frac{(b+ن^2)(ص+ن^2)}{(س+ن^2)}}$

$\therefore لا = ن \pm \sqrt{\frac{(b+ن^2)(ص+ن^2)}{س+ن^2}}$ اسیطرح

اب اگر مساوات (۱) اور (۳) کو باہم ضرب کرکے

(۲) پر تقسیم کریں

تو

$$د = -ن \pm \sqrt{\frac{(ط+ن^2)(ص+ن^2)}{ص+ن^2}}$$

اور اگر مساوات (۲) اور (۳) کو باہم ضرب کرکے (۱) پر تقسیم کریں تو

$$د = -ن \pm \sqrt{\frac{(ص+ن^2)(س+ن^2)}{ط+ن^2}}$$

۴۴

$$\frac{ط}{لا} \; د^{ص} = ت \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\frac{س}{لا} \; د^{ع} = ق \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) کا ع مرتبہ کا صعود لیا اور (۲) کا ص مرتبہ کا صعود لیا ۔۔

$$\frac{طع}{لا} \; د^{صع} = ت^{ع}$$

$$\frac{سص}{لا} \; د^{عص} = ق^{ص}$$

$$\therefore \frac{\frac{طع}{لا}}{\frac{سص}{لا}} = \frac{طع - سص}{لا} = \frac{ت^{ع}}{ق^{ص}}$$

$$\therefore لا = \left(\frac{ت^{ع}}{ق^{ص}}\right)^{\frac{1}{طع - سص}}$$ اور اسیطرح $د = \left(\frac{ق}{ت}\right)^{\frac{ط}{طع - سص}}$

۴۵

$$لا = د^{لا+د} \; ط^{ط} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$د^{لا+د} = لا^{ط} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے $\frac{لا+د}{لا^{ط}} = د$

مساوات (۲) سے $\frac{لا+د}{لا^{ط}} = د$

$$\therefore \frac{لا+د}{لا^{ط}} = \frac{ط}{لا+د}$$

$$\therefore \frac{ط}{لا+د} = \frac{لا+د}{ط^{ط}} \quad \therefore (لا+د)^{۲} = ط^{۲} ط^{ط}$$

$$\therefore لا+د = ۲ط \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\therefore$$ بوسیلہ مساوات (۱) $لا^{ط} = د^{ط^{ط}}$

$$\therefore لا = د^{۲}$$ اور اسیواسطے بوسیلہ مساوات (۳) کے

$د^{۲} + ۱ = ۲د$ اور اس مساوات سی قیمت د کی یہہ معلوم ہوتی ہے

$$د = \frac{۱}{۲}\left(-۱ \pm \sqrt{۸ط+۱}\right)$$ اور اسیواسطے

$$لا = \frac{۱}{۲}\left(ط^{۲} + ۱ \mp \sqrt{۸ط+۱}\right)$$

۴۶

$$\frac{\sqrt{د^{۲}+۱}+۱}{د} = \frac{\sqrt{لا+۹}+۳}{\sqrt{لا}} \quad \ldots (۱)$$

$$لا\,(د+۱)^{۲} = ۳۶\,(د^{۳} + \tfrac{۱۶}{۹}) \quad \ldots (۲)$$

مساوات (۱) مین اول طرف کی شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{د^{۲}+۱} - ۱$ مین ضرب کیا اور دوسری طرف کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $\sqrt{لا+۹} - ۳$ مین ضرب کیا تو یہہ مساوات حاصل ہوئی

$$\frac{د}{\sqrt{د^{۲}+۱} - ۱} = \frac{\sqrt{لا}}{\sqrt{لا+۹} - ۳}$$ اور اس مساوا ت کو

مساوات (۱) میں ضرب کیا تو یہ مساوات حاصل ہوئے

$$\frac{\sqrt{ح^۲+۱+۱}}{\sqrt{ح^۲+۱-۱}} = \frac{\sqrt{لا+۹}+۳}{\sqrt{لا+۹}-۳}$$

اس سے مواقسمت کے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{ح^۲+۱} = \frac{\sqrt{لا+۹}}{۳}$$

$$\therefore ح^۲+۱ = \frac{لا+۹}{۹}$$

$$\therefore ۹ح^۲ = لا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

∴ بوسیلہ مساوات (۲) کی یہ حاصل ہوتا ہے

$$۹ح^۲(ح^۲+۲ح+۱) = ۶۴ح^۳+۶۴$$

اور $۶۴ح^۳ = ۶۴ح^۳$

بعد تفریق کے $۹ح^۲(ح^۲-۲ح+۱) = ۶۴$

$$\therefore ۳ح(ح-۱) = \pm ۸$$

$$\therefore ح^۲-ح = \pm\frac{۸}{۳}$$

$$\therefore ح^۲-ح+\frac{۱}{۴} = \frac{۸}{۳}+\frac{۱}{۴} = \frac{۳۵}{۱۲} \text{ یا } -\frac{۲۹}{۱۲}$$

$$\therefore ح-\frac{۱}{۲} = \pm\frac{۱}{۶}\sqrt{۱۰۵}$$

$$\therefore ح = \frac{۱}{۶}(۳\pm\sqrt{۱۰۵})$$ اور بوجہ مساوات (۳) کے

$$لا = ۹ح^۲ = \frac{۳}{۲}(۱۹\pm\sqrt{۱۰۵})$$

۴۷

$$\sqrt{لا^۲-ح^۲} = \frac{۱۴}{ح}\sqrt{\left(\frac{لا+ح}{۲}\right)\left(\frac{لا-ح}{۲}\right)}$$

اور $\left(\frac{لا+ح}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}+\left(\frac{لا-ح}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}} = ۹$

فرض کرو کہ $\frac{لا+ح}{۲} = ر$ اور $\frac{لا-ح}{۲} = د$

$$\therefore لا = ۲(ر+د)$$

اور $ح = ر-د$ اور بوسیلہ ضرب کرنی ان مساواتوں میں مفروضہ کے

$لا^۲-ح^۲ = ۴رد$ اگر یہ تینوں قیمتیں مساوات (۱) میں لکھیں تو

$$۲(ر+د)+۲\sqrt{رد} = \frac{۱۴}{ر-د}\left(ر^{\frac{۱}{۲}}+د^{\frac{۱}{۲}}\right)$$ اور اسیواسطے

$$ر+د+۲\sqrt{رد} = \frac{۷}{ر^{\frac{۱}{۲}}-د^{\frac{۱}{۲}}} \quad \therefore$$

$ر^{\frac{۳}{۲}}-د^{\frac{۳}{۲}} = ۷$ اور بوسیلہ مساوات (۲) کے

$ر^{\frac{۳}{۲}}+د^{\frac{۳}{۲}} = ۹$

$\therefore ۲ر^{\frac{۳}{۲}} = ۱۶ \therefore ر = ۴$

اور $۲د^{\frac{۳}{۲}} = ۲ \therefore د = ۱$

اور $\therefore لا = ۵$ اور $ح = ۳$

۴۸

$$\frac{ح}{لا^۳}+\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۱+لا}{لا}} = \frac{ح\sqrt{۱-لا}}{ح^۲-۲\sqrt{۱-لا}} \quad (۱)$$

$$\frac{۱}{۴}ح^۲ = ح^۲لا-۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۲) سے $ح^۴-۴لا ح^۲ = ۴$

طرفین پر $۴لا^۲$ زیادہ کرکے اسیواسطے

$ح^۴-۴لا ح^۲+۴لا^۲ = ۴لا^۲-۴$

$\therefore \zeta^2 - 2\lambda = \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 1}$

$\therefore \zeta^2 = 2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 1}$

$= \lambda + 1 \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda - 1$

$\therefore \zeta = \pm (\sqrt{\lambda + 1} \pm \sqrt{\lambda - 1}) \ldots\ldots (۳)$

جسوقت مثبت قیمت تو کی مساوات (۱) مین لکھی تو

$\frac{\sqrt{\lambda+1}}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda^2} + \frac{2\sqrt{\lambda+1}}{2\lambda^2} = \frac{\sqrt{\lambda+1}}{\lambda}$

$\therefore 3\sqrt{\lambda - 1} = \sqrt{\lambda + 1}$ مجذور کیا

$\therefore 9\lambda - 9 = \lambda + 1$

$\therefore 8\lambda = 10$ اور $\lambda = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$

اور $\zeta = \sqrt{\lambda+1} + \sqrt{\lambda-1} = 4$

اگر مساوات (۳) سی منفی قیمت تو کی لکھی جاوے تو اور قیمتین لا اور تو کی دریافت ہوسکتی ہین

۴۹

$\lambda^2 \zeta - 4 = 4\zeta + \lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots (۱)$

$\lambda^{\frac{3}{2}} - 3 = \lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} (\lambda^{\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}) \ldots\ldots (۲)$

مساوات (۱) سے $\zeta (\lambda^2 + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{3}{2}}}{4}) = 4\zeta + \lambda^{\frac{1}{2}} + 4$

اسمساوات کی طرفین پر لا $\frac{1}{2}$ زیادہ کیا اسیواسطے

$\zeta (\lambda^2 + \lambda^{\frac{1}{2}} \zeta + \frac{\lambda \zeta^2}{4}) = \lambda^{\frac{1}{2}} \zeta + 4\zeta + \lambda^{\frac{1}{2}} + 4$

$\therefore \zeta^{\frac{1}{2}} (\lambda^{\frac{1}{2}} + \frac{\zeta^{\frac{1}{2}}}{2}) = \pm (\lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} + 2)$

اگر اسمساوات مین علامت + کا استعمال کرین تو

$\lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}} \zeta = 2 - \frac{\zeta^{\frac{3}{2}}}{2}$ اور اسیواسطے

$\lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} (\lambda^{\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{\zeta^{\frac{3}{2}}}{2}$ اور پہلی مساوات (۲) کے

$\lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} (\lambda^{\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}) = \lambda^{\frac{3}{2}} - 3$

$\therefore \lambda^{\frac{3}{2}} - 3 = 2 - \frac{\zeta^{\frac{3}{2}}}{2}$

$\therefore 2\lambda^{\frac{3}{2}} + \zeta^{\frac{3}{2}} = 10 \ldots\ldots\ldots (۳)$

اگر مساوات (۲) کو ۳ مین ضرب کرین تو

$3\lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} (\lambda^{\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}) = 3\lambda^{\frac{3}{2}} - 9$

$= \lambda^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}} + 1$ اوپر سے (۳) کے

$\therefore \lambda^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}} - 3\lambda^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} (\lambda^{\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}}) = -1$

طرفین کا کعب لیا اسیواسطے

$\lambda^{\frac{1}{2}} - \zeta^{\frac{1}{2}} = -1 \therefore \zeta^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} + 1 \ldots\ldots (۴)$

یہہ قیمت $\zeta^{\frac{1}{2}}$ کے مساوات (۳) مین لکھی اسیواسطے

$2\lambda^{\frac{3}{2}} + \lambda^{\frac{3}{2}} + 1 + 3\lambda^{\frac{1}{2}} (\lambda^{\frac{1}{2}} + 1) = 10$

$\therefore 3\lambda^{\frac{3}{2}} + 3\lambda + 3\lambda^{\frac{1}{2}} = 9$

$\therefore \lambda^{\frac{3}{2}} + \lambda + \lambda^{\frac{1}{2}} = 3$

$\therefore (\lambda^{\frac{1}{2}} - 1)(\lambda + 1) + (\lambda^{\frac{1}{2}} - 1) = 0$

$\therefore (\lambda^{\frac{1}{2}} - 1)\{(\lambda + \lambda^{\frac{1}{2}} + 1) + (\lambda^{\frac{1}{2}} + 1)\} = 0$

یعنی $(\lambda^{\frac{1}{2}}-1)(\lambda+2\lambda^{\frac{1}{2}}+3)=0$

$\therefore \lambda^{\frac{1}{2}}-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

اور $\lambda+2\lambda^{\frac{1}{2}}+3=0 \ldots\ldots (6)$

مساوات (5) سے $\lambda=1$ اور بوسیلہ (4) $\varsigma=4$

اور مساوات (6) سے $\lambda+2\lambda^{\frac{1}{2}}=-3$

$\therefore \lambda+2\lambda^{\frac{1}{2}}+1=-2$

$\therefore \lambda^{\frac{1}{2}}+1=\pm\sqrt{-2}$

$\therefore \lambda=-1\pm\sqrt{-2}$

اور $\varsigma=(\lambda^{\frac{1}{2}}+1)^2=-2$

۵۰

$b(1-\lambda\varsigma)=\lambda\sqrt{1-\varsigma^2} \ldots\ldots (1)$

$\sqrt{\lambda}(1-\lambda\varsigma)=\varsigma-\lambda \ldots (2)$

مساوات (2) سے $\lambda^{\frac{1}{2}}-\lambda^{\frac{3}{2}}\varsigma=\varsigma-\lambda$

$\therefore \varsigma=\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}+\lambda}{1+\lambda^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore 1-\lambda\varsigma=1-\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}+\lambda^2}{1+\lambda^{\frac{3}{2}}}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^{\frac{3}{2}}}$

اور $1-\varsigma^2=1-\frac{\lambda+2\lambda^{\frac{3}{2}}+\lambda^2}{1+2\lambda^{\frac{3}{2}}+\lambda^3}$

$=\frac{1-\lambda-\lambda^2+\lambda^3}{(1+\lambda^{\frac{3}{2}})^2}=\frac{(1-\lambda)^2(1+\lambda)}{(1+\lambda^{\frac{3}{2}})^2}$

مساوات (1) میں یہ قیمتیں لکھنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$b\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^{\frac{3}{2}}}=\lambda\frac{1-\lambda}{1+\lambda^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\lambda}$

چونکہ یہ مساوات $1-\lambda$ پر اور $\frac{1-\lambda}{1+\lambda^{\frac{3}{2}}}$ پر تقسیم ہو سکتی ہے

$\therefore 1-\lambda=0$ اور $\therefore \lambda=1$

اور $b(1+\lambda)=\lambda\sqrt{1+\lambda}$ اور اس سے مساوا تین حاصل ہوتے ہیں

$\sqrt{1+\lambda}=0 \ldots\ldots$ اول

$\therefore 1+\lambda=0 \therefore \lambda=-1$

اور $\lambda=b\sqrt{1+\lambda} \ldots$ دوسری

$\therefore \lambda^2=b^2+b^2\lambda$

$\therefore \lambda^2-b^2\lambda=b^2$

$\therefore \lambda^2-b^2\lambda+\frac{b^4}{4}=\frac{b^4}{4}+b^2$

$\therefore \lambda=\frac{b^2\pm b\sqrt{b^2+4}}{2}$

اور اسیطرح ς کی قیمتیں سے حاصل ہوتی ہیں

$\varsigma=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\pm\frac{b^2-1}{b^2+1}$

یا

$\frac{2b}{\sqrt{(b^2+1+b\sqrt{b^2+4})^2-1-2b}}$

۵۱

$\varsigma^4=\lambda^2(b\varsigma-s\lambda) \ldots\ldots (1)$

$$\text{لا}^2 = \text{ط لا} - \text{ص ک} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

مساوات (۱) سے $\frac{\text{ک}^4}{\text{لا}^2} = \text{ط ک} - \text{ص لا}$

مساوات (۲) سے $\text{لا}^2 = \text{ط لا} - \text{ص ک}$

$$\therefore \text{تقسیم کے بعد} \frac{\text{ک}^4}{\text{لا}^4} = \frac{\text{ط ک} - \text{ص لا}}{\text{ط لا} - \text{ص ک}} = \frac{\text{ط} - \text{ص}\frac{\text{لا}}{\text{ک}}}{\text{ط} - \text{ص}\frac{\text{ک}}{\text{لا}}}$$

فرض کرو کہ $\frac{\text{لا}}{\text{ک}} = \text{د}$ اور $\frac{\text{ک}^4}{\text{لا}^4} = \text{د}^4$

$$\therefore \text{د}^4 = \frac{\text{ط} - \text{ص د}}{\text{ط} - \frac{\text{ص}}{\text{د}}}$$ اور کسر دور کرنے سے

$$\text{ط د}^4 - \text{ص د}^3 = \text{ط د} - \text{ص}$$ اور اسیواسطے

$$\text{ط د}(\text{د}^3 - 1) - \text{ص}(\text{د}^3 - 1) = 0$$

طرفین کو $\text{د} - 1$ پر تقسیم کیا اسیواسطے

$$\text{ط د}(\text{د}^2 + \text{د} + 1) - \text{ص}(\text{د}^4 + \text{د}^3 + \text{د}^2 + \text{د} + 1) = 0 \quad (۳)$$

چونکہ $\text{د} - 1$ پر تقسیم کیا ہے $\therefore \text{د} - 1 = 0 \therefore \text{د} = 1$ اور مساوات (۳) سے

یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{ص د}^4 + (\text{ص} - \text{ط})\text{د}^3 + (\text{ص} - \text{ط})\text{د}^2 + (\text{ص} - \text{ط})\text{د} + \text{ص} = 0$$

طرفین کو د^2 پر تقسیم کیا اسیواسطے

$$\text{ص}\left(\text{د}^2 + \frac{1}{\text{د}^2}\right) - (\text{ط} - \text{ص})\left(\text{د} + \frac{1}{\text{د}}\right) - (\text{ط} - \text{ص}) = 0$$

اول طرف پر ۲ ص زیادہ بھی گئے اور کم بھی گئے اسیواسطے

$$\text{ص}\left(\text{د} + \frac{1}{\text{د}}\right)^2 - (\text{ط} - \text{ص})\left(\text{د} + \frac{1}{\text{د}}\right) - (\text{ط} - \text{ص}) = 0$$

$$\therefore \left(\text{د} + \frac{1}{\text{د}}\right)^2 - \frac{\text{ط} - \text{ص}}{\text{ص}}\left(\text{د} + \frac{1}{\text{د}}\right) = \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص}}$$

$$\therefore \text{د} + \frac{1}{\text{د}} = \frac{\text{ط} - \text{ص}}{۲\text{ص}} \pm \sqrt{\frac{(\text{ط} - \text{ص})^2}{۴\text{ص}^2} + \frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص}}}$$

$$= \frac{\text{ط} - \text{ص} \pm \sqrt{\text{ط}^2 + ۲\text{ط ص} + ۹\text{ص}^2}}{۲\text{ص}}$$ تسہیلاً $= \text{م}$ ،

$$\therefore \text{د}^2 - \text{م د} = -1$$ اور اس کے حل کرنی سی ظاہر ہے کہ

$$\text{د} = \frac{\text{م}}{۲} \pm \sqrt{\frac{\text{م}^2}{۴} - 1}$$ اور اب بوسیلہ $\frac{\text{لا}}{\text{ک}} = \text{د}$ کی

قیمتیں ک اور لا کے باسانی معلوم ہوسکتی ہیں

۵۲

$$\text{لا}^3 + \text{ک}^3 = \text{ل}(\text{لا} + \text{ک})^3 \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\sqrt[3]{\text{لا}^2} = (\text{لا} + \text{ک})^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) کو $\text{لا} + \text{ک}$ پر تقسیم کیا اسیواسطے

$$\text{لا}^2 - \text{لا ک} + \text{ک}^2 = \text{ل}(\text{لا}^2 + ۲\text{لا ک} + \text{ک}^2)$$

$$= \text{لا}^2 + ۲\text{ل لا ک} + \text{ل ک}^2$$

$$\therefore \text{لا}^2 - ۲\text{ل لا ک} - \text{لا ک} - ۲\text{ل ک}^2 + \text{ک}^2 = 0$$

طرفین کو لا^2 پر تقسیم کیا اسیواسطے

$$\frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2} - ۲\text{ل}\frac{\text{ک}}{\text{لا}} - 1 - ۲\text{ل}\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ک}^2}{\text{لا}^2} - ۲(۱ + ۲\text{ل})\left(\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}}\right) = 1$$

طرفین پر $\left(\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}}\right)$ کا زیادہ کیا

$$\therefore \left(\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}}\right)^2 - ۲(۱ + ۲\text{ل})\left(\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}}\right) = 3$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}}\right)^2 - ۲(۱ + ۲\text{ل})\left(\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}}\right) + 1 = 4$$

$\therefore \frac{لا}{ک} + \frac{ک}{لا} = ۱ \pm ۲ = ۳$ یا -۱

اب اگر اول قیمت لیکر مساوات بالا کو $\frac{لا}{ک}$ میں ضرب کریں تو

$\frac{لا^۲}{ک^۲} + ۱ = ۳ \frac{لا}{ک}$

$\therefore \frac{لا^۲}{ک^۲} - ۳ \frac{لا}{ک} + \frac{۹}{۴} = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴}$

$\therefore \frac{لا}{ک} - \frac{۳}{۲} = \pm \frac{\sqrt{۵}}{۲}$

$\therefore \frac{لا}{ک} = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

اور مساوات (۲) کے مجذور سی $لا^۳ = (لا + ک)^۳$

$\therefore \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲} \times ک^۳ = (\frac{لا}{ک} + ۱) ک^۳$

$= \left(\frac{۵ \pm \sqrt{۵}}{۲}\right)^۳ ک^۳$

$\therefore ک^۳ = \frac{(۵ \pm \sqrt{۵})^۳}{(۳ \pm \sqrt{۵})(۴)} = \frac{۵۰ \pm ۲۰ \sqrt{۵}}{۳ \pm \sqrt{۵}}$

$= \frac{۵۰ \pm ۱۰ \sqrt{۵}}{۴}$

$\therefore ک = \frac{۵}{۲} \sqrt[۳]{۲ + \frac{۲}{۵} \sqrt{۵}}$ اور

$لا = \frac{۵۰ \pm ۲۰ \sqrt{۵}}{۳ \pm \sqrt{۵}} \frac{۵}{۲} = \frac{۵}{۲} \sqrt[۳]{۱۰ \pm \frac{۲۲}{۵} \sqrt{۵}}$

۵۳

$(لا + ۱) ک = (ک^۲ + ۱) لا^۳$ ..... (۱)

$(ک^۲ + ۱) لا = ۹ (لا^۲ + ۱) ک^۳$ ..... (۲)

مساوات (۱) سی $(لا^۲ + \frac{۱}{لا^۲}) ک = ک^۲ + ۱$

$\therefore لا^۳ + \frac{۱}{لا^۳} = ک + \frac{۱}{ک}$ ..... (۳)

مساوات (۲) سی $ک^۳ + \frac{۱}{ک^۳} = ۹ (لا + \frac{۱}{لا})$

یعنی $\frac{۱}{۳} (ک^۳ + \frac{۱}{ک^۳}) = ۳ (لا + \frac{۱}{لا})$

اس مساوات پر مساوات (۳) کو جمع کیا اسیواسطے

$\frac{۱}{۳} (لا^۳ + \frac{۱}{لا^۳}) + ک + \frac{۱}{ک} = لا^۳ + ۳ (لا + \frac{۱}{لا}) + \frac{۱}{لا^۳}$

$= (لا + \frac{۱}{لا})^۳$

$\therefore ک^۳ + \frac{۱}{ک^۳} + ۳ (ک + \frac{۱}{ک}) = ۳ (لا + \frac{۱}{لا})^۳$

یعنے $ک + \frac{۱}{ک} = (لا + \frac{۱}{لا}) \sqrt[۳]{۳}$

اور $لا^۳ + \frac{۱}{لا^۳} = (لا + \frac{۱}{لا}) \sqrt[۳]{۳}$ بوسیلہ مساوات (۳) کے

اور یہہ مساوات $(لا + \frac{۱}{لا})$ پر تقسیم ہوسکتی ہے اسیواسطے

$لا + \frac{۱}{لا} = ۰ \therefore لا^۲ = -۱$ اور یہہ قیمت غیر ممکن ہے

اور بعد تقسیم کرنے کے $(لا + \frac{۱}{لا})$ پر یہہ حاصل ہوتا ہے

$لا^۲ - ۱ + \frac{۱}{لا^۲} = \sqrt[۳]{۳}$ عدد ۳ کا طرفین پر زیادہ کرنے سے

$\therefore لا^۲ + ۲ + \frac{۱}{لا^۲} = ۳ + \sqrt[۳]{۳}$

$\therefore لا + \frac{۱}{لا} = \sqrt{۳ + \sqrt[۳]{۳}}$

اور $لا - \frac{۱}{لا} = \sqrt{\sqrt[۳]{۳} - ۱}$ عدد ۱ کا کم کرنے سے

$\therefore لا = \frac{۱}{۲} (\sqrt{\sqrt[۳]{۳} + ۳ + \sqrt{۳ + \sqrt[۳]{۳}}} - ۱)$

اور $ک + \frac{۱}{ک} = (لا + \frac{۱}{لا}) \sqrt[۳]{۳}$

$= \sqrt{۳ + \sqrt[۳]{۳ \sqrt{۳ + \sqrt[۳]{۳}}}}$

$\therefore ک = \frac{۱}{۲} (\sqrt{۳ + \sqrt[۳]{۳ \sqrt{۳ + \sqrt[۳]{۳}}}} \pm \sqrt{\sqrt[۳]{۳} - ۱})$

۵۴

$ک + ۲ \sqrt[۳]{ک (\sqrt[۳]{د + ص لا} - \sqrt[۳]{ک})} = د + ص لا$

$$\sqrt[3]{ح-۳ه\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ط^۲-ص^۲ل^۲}}=\sqrt[ن]{ه\sqrt[3]{ط-ص ل}}$$
$$\sqrt[3]{ه}-\sqrt[3]{ط+ص ل}$$

مساوات (۱) سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے جسکا کعب نکالنا ہے

$$ح-۳ه^{\frac{۲}{۳}}(ط+ص ل)^{\frac{۱}{۳}}+۳ه^{\frac{۱}{۳}}(ط+ص ل)^{\frac{۲}{۳}}-(ط+ص ل)$$

$$=ط-ص ل$$ طرفین کا کعب لیا اسیواسطے

$$\sqrt[3]{ح-ه\sqrt[3]{(ط+ص ل)}}=\sqrt[3]{ط-ص ل}\quad\ldots(۳)$$

$$\therefore \sqrt[3]{ح}=\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ط+ص ل}+\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ط-ص ل}$$

$$ح=ط+ص ل+ط-ص ل+۳\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ط^۲-ص^۲ل^۲}\left(\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ط+ص ل}+\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ط-ص ل}\right)$$ جذر لیا

$$=۲ط+۳\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ح}\sqrt[3]{ط^۲-ص^۲ل^۲}$$

$$\therefore ح-۳\sqrt[3]{ه}\sqrt[3]{ح}\sqrt[3]{ط^۲-ص^۲ل^۲}=۲ط\quad\ldots(۴)$$

جسوقت مساوات (۳) اور (۴) کو مساوات (۲) مین لکھا تو

$$\frac{۲ط}{\sqrt[3]{ط-ص ل}}=۲\sqrt[ن]{ه}\sqrt[3]{ط-ص ل}$$

$$\therefore (ط-ص ل)^{\frac{۱}{ن}+\frac{۱}{۳}}=۱$$

$$\therefore ط-ص ل=۱\ \therefore ل=\frac{ط-۱}{ص}$$

$$\text{اور } ح=\left(\sqrt[3]{۲ط-۱}+۱\right)^{۳}$$

$$۵۵$$

$$(۲+۴لاح-۲لا^۲ح)^{\frac{۵}{۲}}=۲-۴لا^۲ح+۳لا^۴ح\quad\ldots(۱)$$

$$۵ح+\frac{۲۷لا^۲ح}{۳۲}=\frac{۹لاح}{۲}+\frac{۲لاح+۱}{لا^۲}\quad\ldots(۲)$$

مساوات (۱) سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$۴+۱۶لاح+۱۶لا^۲ح-۱۲لا^۳ح-۴۲لا^۴ح$$
$$+۹لا^۴=۲-۴لا^۲ح+۳لا^۴ح$$ اور اسیواسطے

$$۲+۱۶لاح+۲۰لا^۲ح-۱۲لا^۳ح-۴۲لا^۴ح+۶لا^۴=۰$$

$$\therefore ۱+۸لاح+۱۰لا^۲ح-۶لا^۳ح-۱۲لا^۴ح+۳لا^۵=۰$$

اسیواسطے $لا^۴-۴لا^۳ح+۴لا^۲ح^۲=\frac{۲لا^۲ح^۲}{۳}$

$$+۲لا^۲-۲لاح-\frac{۲لاح}{۳}-\frac{۱}{۳}\quad\ldots(۳)$$ اور اسیواسطے

$$\text{اسیواسطے}*(لا^۲-۲لاح)^۲-۲(لا^۲-۲لاح)+۱$$

$$=\frac{۲لا^۲ح^۲}{۳}+\frac{۴لاح}{۳}+\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}(لا^۲ح^۲+۲لاح+۱)$$

$$\therefore لا^۲-۲لاح-۱=\sqrt[3]{\frac{۲}{۳}}(لاح+۱)\quad\ldots(۳)$$

اور مساوات (۱) سے $\frac{۲۷لا^۲}{۱۶}+۱۰لاح=۹لاح+\frac{۹لا^۴ح+۲}{لا^۲}$

اور اس مساوات کو $\frac{لا^۲}{۳}$ مین ضرب کیا اسیواسطے

$$\frac{۹لا^۴}{۱۶}-۳لا^۳ح=-\frac{۱۰لا^۲ح}{۳}+\frac{۴لاح}{۳}+\frac{۲}{۳}$$

طرفین مساوات پر $۴لا^۲ح^۲$ زیادہ کیے $\therefore$

$$\left(\frac{۳لا^۲}{۴}\right)^۲-۳لاح\times\frac{۳لا^۲}{۴}+۴لا^۲ح^۲=$$

$$\frac{۲لا^۲ح^۲}{۳}+\frac{۴لاح}{۳}+\frac{۲}{۳}$$ طرفین کا جذر لیا

$$\frac{۳لا^۲}{۴}-۲لاح=\sqrt[3]{\frac{۲}{۳}}(لاح+۱)\quad\ldots(۴)$$

مساوات (۳) کے

$$\therefore \frac{۳لا^۲}{۴}-۲لاح=لا^۲-۲لاح-۱$$ اور سلیہ

$$\therefore ۳لا^۲=۴لا^۲-۴\ \therefore لا=۲$$

اور جب یہہ قیمت لا کی مساوات (۴) مین لکھی تو

$$۳ - ۴ د = (۲ د + ۱) \sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$$

$$\therefore ۲ د = \frac{\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}} - ۳}{\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}} + ۲} = ۲ - \frac{۳}{۲} \sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$$

$$\therefore د = ۱ - \frac{۱}{۴} \sqrt[۳]{۶}$$

۵۶

$$\sqrt[۳]{\frac{۲۷ د^{۳} - ۱}{لا^{۳} + ۳ د^{۲} - ۲ لا د}} = ۳ \sqrt[۳]{\frac{لا}{د}} \quad \ldots (۱)$$

$$۳ لا^{۲} + ۴۲ لا د + ۱۶ د^{۲} = ۴ \sqrt[۳]{لا د} (۵ لا + ۱۱ د) \quad \ldots (۲)$$

مساوات (۲) کے مخدور کرنی سی اور اجزا ایک طرف لانی سے یہہ حاصل ہوتا ہے

$$۳ لا^{۲} - ۲۰ لا^{\frac{۵}{۳}} د^{\frac{۱}{۳}} + ۴۲ لا^{\frac{۴}{۳}} د^{\frac{۲}{۳}} - ۴۴ لا^{\frac{۳}{۳}} د + ۱۶ لا^{\frac{۲}{۳}} د^{\frac{۴}{۳}} = ۰$$

طرفین مساوات کو لا پر تقسیم کیا

$$۳ \sqrt[۳]{\frac{لا}{د}^{۵}} - ۲۰ \sqrt[۳]{\frac{لا}{د}^{۴}} + ۴۲ \sqrt[۳]{\frac{لا}{د}^{۳}} - ۴۴ \sqrt[۳]{\frac{لا}{د}^{۲}} + ۱۶ \sqrt[۳]{\frac{لا}{د}} = ۰$$

فرض کرو کہ $\sqrt[۳]{\frac{لا}{د}} = ۲$ اور اسیواسطے مساوات بالا اس صورت کی ہو جائیگی

$$۳ ۲^{۵} - ۲۰ ۲^{۴} + ۴۲ ۲^{۳} - ۴۴ ۲^{۲} + ۱۶ ۲ = ۰$$

$$\therefore ۳ ۲^{۴} - ۲۰ ۲^{۳} + ۴۲ ۲^{۲} - ۴۴ ۲ + ۱۶ = ۰$$

$$\therefore (۳ ۲ - ۲)(۲^{۳} - (۳ ۲ - ۲) ۲^{۲} + (۳ ۲ - ۲) ۲ - (۳ ۲ - ۲) ۸ = ۰$$

اور اسیواسطی

$$(۳ ۲ - ۲)(۲^{۳} - ۶ ۲^{۲} + ۱۰ ۲ - ۸) = ۰$$

اور اس مساوات کی دو اجزا ضربی سے دو مساوات حاصل ہوتی ہین

$$۳ ۲ - ۲ = ۰ \quad \therefore ۲ = \frac{۲}{۳}$$

اور $۲^{۳} - ۶ ۲^{۲} + ۱۰ ۲ - ۸ = ۰$

یعنے $(۲ - ۴)(۲^{۲} - ۲ ۲ + ۲) = ۰$ اور اسیواسطے

$۲ - ۴ = ۰ \quad \therefore ۲ = ۴$ قیمت

اور $۲^{۲} - ۲ ۲ + ۲ = ۰ \quad \therefore (۲ - ۱)^{۲} = -۱$ اور یہہ

غیر ممکن ہی

پس اگر اول قیمت ۲ کی یعنے $\frac{۲}{۳}$ مساوات (۱) مین لکھین تو

$$\frac{\frac{۷۲۹}{۸} لا^{۳} - ۱}{لا^{۳} + \frac{۲۴۳}{۱۶} لا^{۲} - \frac{۲۷}{۴} لا^{۲}} = ۸ \text{ کسر دور کے}$$

$$۸ لا^{۳} - ۵۴ لا^{۲} + \frac{۵}{۲} \frac{۲۴۳}{۲} لا^{۲} - \frac{۷۲۹}{۸} لا^{۲} = -۱$$

طرفین کا کعب لیا اسیواسطی

$$۲ لا - \frac{۹}{۲} لا^{\frac{۱}{۲}} = -۱$$

$$\therefore لا - \frac{۹}{۴} لا^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۸۱}{۶۴} = \frac{۴۹}{۶۴}$$

$$\therefore لا^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۹ \pm ۷}{۸} = ۲ \text{ یا } \frac{۱}{۴}$$

$$\therefore لا = ۴ \text{ یا } \frac{۱}{۱۶}$$

۵۷

$$\frac{۳ + ۲ لا^{۲} - ۴ لا}{لا^{۲} - ۱} = ۲^{۲} (۱ - ۲ ۲^{۲}) \quad \ldots (۱)$$

$$(۲ لا^{۲} - ۱)(۲ ۲^{۲} - ۱) = ۳ \quad \ldots (۲)$$

اگر لا کی جگہہ د لکھین اور ۲ کی جگہہ ر لکھین تو مساوات (۲) سے

$$۴ د ر - ۲ (د + ر) = ۲ \quad \ldots \ldots (ط)$$

اور مساوات (۱) سے $۴د^۲ - ۲د - ۳ = ر(۲ر - ۱)(د - ۱)$

بوسیلہ (ط) کے ... $= ر(۲د ر - د - ۲ر + ۱)$

$= ر(۲-ر)$

$= ۲ر - ر^۲$

$\therefore ۴د^۲ - ۳ = ۲(د + ر) - ر^۲$

$= ۴ د ر - ۲ - ر^۲$ بوسیلہ (ط) کے

$\therefore ۴د^۲ - ۴ د ر + ر^۲ = ۱$

$\therefore ۲د - ر = \pm ۱$

$\therefore ر = ۲د \mp ۱$ اس قیمت کو فوقانی علامت کی موافق مساوات (ط) مین لکھا تو

$۴د^۲ - ۲د - ۲د + ۲ = ۱$

$\therefore ۴د^۲ = ۵ د \therefore د = \frac{۵}{۴}$ یا ۰ قیمت اول

اب اگر ر کے قیمت تحتانی علامت کی موافق (ط) مین لکھین تو

$۴د^۲ + ۲د - د - ۲د - ۱ = ۱$

$\therefore ۴د^۲ - د = ۲$

$\therefore ۴د^۲ - د + (\frac{۱}{۸})^۲ = ۲ + \frac{۱}{۶۴} = \frac{۳۳}{۱۶}$

$\therefore ۲د - \frac{۱}{۸} = \pm \frac{\sqrt{۳۳}}{۴}$

$\therefore د = \frac{۱ \pm \sqrt{۳۳}}{۸}$ قیمت ثانی

اول قیمت دسی قیمت لا اور ک کے یہہ ہوتی ہے

$لا = \pm \frac{۱}{۲} \sqrt{۵}$ یا ۱۰

اور $ر = \pm \frac{۱}{۲} \sqrt{۶}$ یا $\pm \sqrt{-۱}$

اور د کی دوسری قیمت سے لا اور ک کی یہہ قیمت ہوتی ہے

$لا = \pm \frac{۱}{۲} \sqrt{\frac{۱ + \sqrt{۳۳}}{۲}}$

$ک = \pm \frac{۱}{۲} \sqrt{۵ \pm \sqrt{۳۳}}$

ضمیمہ تمام ہوا

مثالین جمع کی

(۱) جمع کرو $۳لا^۲ - ۵لا + ۱$ اور $۷لا^۲ + ۲لا - ۴$ اور $-لا^۲ - ۴لا + ۱۳$ جواب $۹لا^۲ - ۷لا + ۱۰$

(۲) جمع کرو $ص - ۳ط + ۳س - ف$ اور $ص + ۳ط + ۳س + ف$ جواب $۲ص + ۶س$ اور $ص + س + ف - ط$

(۳) جمع کرو $ط + ص - س - ف$ اور $ط - ص + ف + س$ اور $ص + س + ف - ط$ جواب $۲(ط + ص + س + ف)$

(۴) جمع کرو $لا^۳ - ۲ط لا^۲ + ط^۲ لا$ اور $لا^۳ + ۳ط لا^۲$ اور $۲ط^۳ - ط لا^۲ - ط^۲ لا$ جواب $۲لا^۳ + ۲ط^۳$

(۵) جمع کرو $ط^۲ - ن + ۳لا ف$ اور $۲ط^۲ - ۳ص ن - لا ف$ اور $ط^۲ + ۴ص ن - لا ق$ جواب $۴ط^۲ + ۲لا ف - لا ق$

(۶) جمع کرو $ط^۳ - ۳ط ص - \frac{۱۴}{۲۱} ص^۲$ اور $۲ص^۲ - \frac{۲}{۳} ص^۳ + س^۳$ اور $ط ص - \frac{۱}{۳} ص^۲ + ص^۳$ اور $۲ط ص - \frac{۱}{۳} ص^۲$ جواب $ط^۳ + ص^۲ + س^۳$

(۷) جمع کرو $۲(ط + ص) + س$ اور $۲(ط + ص + س) + ف$ اور $۲(ط + ص + س + ف) + ی$ جواب $۶(ط + ص) + ۵س + ۳ف + ی$

(۸) جمع کرو $(ط + ۷)لا^۲ - ص ی^۲$ اور $(ص - ۷)لا^۲ - ۷ ی^۲$ جواب $(ط + ص)لا^۲ + (ص + ۷) ی^۲$

(۹) جمع کرو $ط لا - ص ی$ اور $لا + ی$ اور $(ط - ۱)لا - (ص + ۱) ی$ جواب $۲ط لا - ۲ص ی$

(۱۰) جمع کرو $۲(ط + ص)لا^۲$ اور $۳(ط - ۲ص)لا^۲$ اور $۴(۲ط - ص)لا^۲$ جواب $(۱۳ط - ۸ص)لا^۲$

(۱۱) جمع کرو $ط لا^ن + ۳ص لا^ن - ۹ط لا^{ن-۲} + ۶ص لا^{ن-۲}$ جواب $(۱۰ص - ۸ط)لا^ن$

(۱۲) جمع کرو $۱ - (۱ - لا)$ اور $۲لا - (۳ - ۵لا)$ اور $۲ - (-۴ + ۵لا)$ جواب $لا + ۴$

(۱۳) تفریق کرو $۶ط - ص - س$ سے $ط - ص + ۲س$ کو جواب $۵ط - ۳س$

(۱۴) تفریق کرو $۸ط + لا - ۵ص - ۵س$ میں سے $لا + ۲ص - ۵سی$ کو جواب $۸ط - ۶ص$

(۱۵) تفریق کرو $ط + ص$ میں سے $\frac{ط}{۲} - \frac{ص}{۲}$ کو جواب $\frac{ط}{۲} + \frac{۳ص}{۲}$

(۱۶) تفریق کرو $\frac{ط}{۲} + \frac{ص}{۲}$ میں سے $\frac{ط}{۲} + \frac{ص}{۲}$ جواب ص اور $\frac{ط}{۲} + \frac{ص}{۲}$ میں سے $ط - ص$ کو جواب $\frac{ط}{۲} + \frac{۳ص}{۲}$

(۱۷) تفریق کرو $۲(ط + ص) - ۳(س - ف)$ میں سے $ط + ص - ۴(س - ف)$ کو جواب $ط + ص + س + ف$

(۱۸) تفریق کرو $(ط + ص)لا + (ص + س)$ ی میں سی $(ط - ص)لا - (ص - س)$ ی جواب $۲ص(لا + ۱)$

(۱۹) تفریق کرو $(ط^۲ + ص س)لا^۲ - (ط^۲ - ص^۲)ص$ لا میں سے $ص س لا^۲ - (ط^۲ - ص^۲)ص$ لا جواب

$ط^۲ لا^۲ + (ص^۲ - س^۲)ص$ لا

(۲۰) $لا^۲ - ط لا^۲ + ص$ لا $- س$ میں سے $لا^۲ - ک لا^۲ + ف$ لا $- ر$ جواب $(ک - ط)لا^۲ + (ص - ف)$ لا $+ (ر - س)$

(۲۱) نکالو ط − لا − (لا − ۲ط) + ۲ط − لا مین سے ط − ۲لا − (۲ط − لا) + (لا − ۲ط) جواب ۸ط − ۳لا

اختصار کرو آئندہ مقدار دو نکا

(۱) ط − {ص − (۲ص + لا)} + {ص − (لا − ۲ص)} جواب ط + ۴ص

(۲) ط + (ص + س) − (ط − س) + س − (ط + ص) جواب ۳س − ط

(۳) ط − {ط + ص − {ط + ص + س − (ط + ص + س + ن)}} جواب − ص − ن

(۴) ط + ص (۲۰ط − ۳ص) − (۵ط + ۷ص) − (− ۱۳ط + ۲ص) جواب ۷ط − ۵ص

مثالین ضرب کے

(۱) ضرب کرو ۴ط² − ۳ط س + ۲ کو ۵ط لا مین جواب ۲۰ط³ لا − ۱۵ط² س لا + ۱۰ط لا

(۲) ضرب کرو ۵ط − ۲ط ص + ۱۰ کو − ۹ط ص مین جواب − ۴۵ط² ص + ۱۸ط² ص² − ۹۰ط ص

(۳) ضرب کرو ۲ لا + ۳ کو ۲ لا − ۳ مین جواب ۴ لا² − ۹

(۴) ضرب کرو ۴ط² − ۶ط + ۹ کو ۲ط + ۳ مین جواب ۸ط³ + ۲۷

(۵) ط³ + ط² ص + ط ص² + ص³ کو ط − ص جواب ط⁴ − ص⁴

(۶) ضرب کرو ۲ط + ص س − ۲ ص² کو ۲ط − ص س + ۲ ص² مین جواب ۴ط² − ص² س² + ۴ص⁴

(۷) ضرب کرو ط³ + ۳ط² ص + ۳ط ص² + ص³ کو ط² − ۳ط ص + ص² مین جواب ط⁵ − ۳ط⁴ ص + ۳ط³ ص² − ص⁵

(۸) ضرب کرو ۴ط ص − ۲ط س کو ۶ط ص + ۳ط س مین جواب ۶ط² (۴ص² − س²)

(۹) دریافت کرو حاصل ضرب ط − ص + س − ن اور ط + ص − س − ن کا جواب ط² − ص² − س² + ن² − ۲ط ن + ۲ص س

(۱۰) ضرب کرو ط + ص لا کو ط + س لا مین جواب ط² + (ط س + ص ط) لا + ص س لا²

(۱۱) ضرب کرو لا³ − ط لا² + ص لا − س کو لا² − ن لا + ک مین جواب لا⁵ − (ط + ن) لا⁴ + (ص + ط ن + ک) لا³ − (س + ن ص + ط ک) لا² + (ص ک + س ن) لا − ک س

(۱۲) دریافت کرو حاصل ضرب (لا − ط) (لا − ص) (لا − ن) کا جواب لا³ − (ط + ص + ن) لا² + (ط ن + ط ص + ص ن) لا − ط ن ص

(۱۳) دریافت کرو حاصل ضرب (لا − ۱۰) (لا + ۱) (لا + ۴) جواب لا³ − ۵ لا² − ۶۴ لا − ۴۰

(۱۴) دریافت کرو حاصل ضرب (لا − ۵) (لا + ۶) (لا − ۷) (لا + ۸) = لا⁴ + ۲ لا³ − ۸۵ لا² − ۸۶ لا + ۱۶۸۰

(۱۵) دریافت کرو حاصل ضرب لا + ۱ اور لا + ۲ اور لا + ۳ اور لا + ۴ کا جواب لا⁴ + ۱۰ لا³ + ۳۵ لا² + ۵۰ لا + ۲۴

(۱۶) ضرب دو $ط^{۲}+ط لا+لا^{۲}$ کو $ط^{۲}-ط لا+لا^{۲}$ مین جواب $ط^{۴}+ط^{۲} لا^{۲}+لا^{۴}$

(۱۷) دریافت کرو حاصل ضرب $لا-ط$ اور $لا+ط$ اور $لا^{۲}-ط لا+ط^{۲}$ اور $لا^{۲}+ط لا+ط^{۲}$ کا جواب $لا^{۶}-ط^{۶}$

(۱۸) ضرب کرو $لا^{۲}-\frac{۱}{۲} لا+\frac{۲}{۳}$ کو $\frac{۱}{۳} لا+۲$ مینجواب $\frac{۱}{۳} لا^{۳}+\frac{۱۱}{۶} لا^{۲}-\frac{۷}{۹} لا+\frac{۴}{۳}$

(۱۹) ضرب کرو $لا^{۳}-لا^{-۳}$ کو $لا-لا^{-۱}$ مین جواب $لا^{۴}+لا^{-۴}-لا^{۲}-لا^{-۲}$

(۲۰) ضرب کرو $(ا+ط) ظ^{۲}+ظ^{۲}+ط ظ^{۲}$ کو $ط-ظ$ مینجواب $(ا+ط)(ط^{۲}-ظ^{۲})$

(۲۱) $ط^{\frac{۴}{۳}}+ط^{\frac{۳}{۴}} لا^{\frac{۱}{۴}}+ط^{\frac{۲}{۳}} لا^{\frac{۲}{۳}}+ط^{\frac{۱}{۴}} لا^{\frac{۳}{۴}}+لا^{\frac{۴}{۳}}$ کو $ط^{\frac{۱}{۴}}-لا^{\frac{۱}{۴}}$ مین ضرب کرو تو حاصل ضرب کا یہہ کلیہ $ط-لا$

(۲۲) ضرب کرو $لا+۲ ظ^{\frac{۱}{۲}}+۳ ط^{\frac{۱}{۳}}$ کو $لا-۲ ظ^{\frac{۱}{۲}}+۳ ط^{\frac{۱}{۳}}$ مینجواب $لا^{۲}-۴ ظ+۶ لا ط^{\frac{۱}{۳}}+۹ ط^{\frac{۲}{۳}}$

(۲۳) ضرب کرو $ط^{\frac{۵}{۲}}-۲ ط^{\frac{۳}{۲}} ص^{\frac{۱}{۲}}+۴ ط^{\frac{۱}{۲}} ص^{\frac{۲}{۳}}-۸ ط ص+۱۶ ط^{\frac{۱}{۲}} ص^{\frac{۴}{۳}}-۳۲ ص^{\frac{۵}{۳}}$ کو $ط^{\frac{۱}{۲}}+۲ ص^{\frac{۱}{۳}}$ جواب $ط^{۳}-۶۴ ص^{۲}$

(۲۴) ضرب کرو $۳ ط^{\frac{۱}{۲}} ص^{\frac{۲}{۳}}+۵ ط^{\frac{۱}{۳}} ص^{\frac{۵}{۳}}$ کو $۳ ط^{\frac{۱}{۲}} ص^{\frac{۲}{۳}}-۵ ط^{\frac{۱}{۳}} ص^{\frac{۵}{۳}}$ جواب $۹ ط ص^{\frac{۴}{۳}}-۲۵ ط^{\frac{۲}{۳}} ص^{\frac{۵}{۳}}$

(۲۵) ضرب کرو $ط^{۲ن-۲} ص^{۲ف+۱} س^{۳}$ کو $ط^{۵ن-۲ص^{۲}} س^{-۱}$ مین جواب $ط^{۲ن} ص^{۲ف-۱} س^{۲}$

(۲۶) ضرب کرو $ط^{۲}-۲ س^{ن}$ کو $ط^{۲}-س^{ن}$ جواب $ط^{۴}-۳ ط^{۲} س^{ن}+۲ س^{۲ن}$

(۲۷) $لا^{۳ف}+ط لا^{۲ف}-ط^{۲} لا^{ف}$ کو $ط^{۲} لا^{ف}$ مین ضرب دو $ط^{۲} لا^{۲ف}+ط^{۳} لا^{۲ف-۱}-ط^{۴}+۲$

(۲۸) دریافت مسدلا کا ان مقداروں کی حاصل ضرب مین $لا^{۲}-ط لا^{۲}+ص لا^{۲}-س لا+ف$ ضرب کرنے سے اور $لا^{۲}+ف لا+ک$ مین جواب $ص-ط ف+ک$

(۲۹) ضرب کرو $(۲ص-س) ط^{۲}-(۴ ص^{۲}-۲ ص س+س^{۲}) ط+۸ ص^{۳}-۴ ص^{۲} س$ کو $(۲ص+س)$ مینجواب $(۴ ص^{۲}-س^{۲}) ط^{۲}-(۸ ص^{۳}+س^{۳}) ط^{۲}+(۱۶ ص^{۴}-۴ ص^{۲} س^{۲}) ط$

(۳۰) ضرب کرو $ط^{ن(ف-۱)}-ص^{ن(ف-۱)}$ کو $ط^{ن}-ص^{ن}$ مین جواب $ط^{نف}-ط^{ن} ص^{(ف-۱)ن}-ص^{ن} ط^{(ف-۱)ن}+ص^{نف}$

(۳۱) ضرب کرو $ا+\frac{۱}{۲} لا+\frac{۱}{۳} لا^{۲}+\frac{۱}{۴} لا^{۳}$ .... کو $ا-\frac{۱}{۳} لا+\frac{۱}{۵} لا^{۲}-\frac{۱}{۷} لا^{۳}$ ... مین جواب $ا+\frac{۱}{۶} لا+\frac{۱۱}{۳۰} لا^{۲}+\frac{۱۲۱}{۱۲۶۰} لا^{۳}$ وغیرہ

اختصار کروائیکے مقدار ونکی

(۳۲) $\frac{۱}{۶}\{لا(لا+۱)(لا+۲)+لا(لا-۱)(لا-۲)\}+\frac{۲}{۳}(لا-۱) لا(لا+۱)$ جواب $لا^{۳}$

(۳۳) دریافت کرو حاصل تفریق مابین $ط(ص+س)^{۲}+ص(ط+س)^{۲}+س(ط+ص)^{۲}$ اور $(ط+ص)(ط-س)(ص-س)+(ط-ص)(ط-س)(ص+س)-(ط-ص)(ص-س)(ط+س)$ جواب $۲ ط ص س$

مثالین تقسیم کے

(۱) تقسیم کرو ۵ لا۴ + ۲۰ لا۳ − ۵۴ ط لا۲ کو ۵ لا۲ پر جواب ۱ + ۴ لا − ۹ ط

(۲) تقسیم کرو − ۹ ط۲ ص س − ۱۲ ط ص۲ س۲ + ۱۵ ط ص س۳ کو − ۳ ط ص س پر جواب ۳ ط + ۴ ص − ۵ س

(۳) تقسیم کرو ط۲ − ط − ۶ کو ط − ۳ پر جواب ط + ۲

(۴) تقسیم کرو ط۵ + ص۵ کو ط + ص پر جواب ط۴ − ط۳ ص + ط۲ ص۲ − ط ص۳ + ص۴

(۵) تقسیم کرو لا۶ − ۲ ط لا۵ + ط۲ لا۴ کو لا۴ − ۲ ط لا + ط۲ پر جواب لا۲ + ۲ ط لا۳ + ۳ ط۲ لا۲ + ۴ ط۳ لا + ط۴

(۶) تقسیم کرو − لا۶ − ط۲ کو لا۳ + ۲ ط لا۲ + ۲ ط۲ لا + ط۳ پر جواب لا۳ − ۲ ط لا۲ + ۲ ط۲ لا − ط۳

(۷) تقسیم کرو ط۳ + ص۳ + س۳ − ۳ ط ص س کو ط + ص + س پر جواب ط۲ + ص۲ + س۲ − ط ص − ط س − ص س

(۸) تقسیم کرو م۳ + ۳ م۲ ف − ن۳ − ۳ ن کر + ف۳ − کر۳ کو م − ن + ف − کر جواب م + ن + ف + کر

(۹) تقسیم کرو ۱ + ۲ لا کو ۱ − ۳ لا پر جواب ۱ + ۵ لا + ۱۵ لا۲ + ۴۵ لا۳ + وغیرہ

(۱۰) تقسیم کرو ط۴ − ۸۱ کو ط − ۳ جواب ط۳ + ۳ ط۲ + ۹ ط + ۲۷

(۱۱) تقسیم کرو ۵۲ ط۲ ص۲ لا۴ ع۲ کو ۴ ط۲ ص۲ لا۲ ع پر جواب ۳ ط۲ لا۲ ع

(۱۲) تقسیم کرو ۱۵ ط۴ ص۲ ن۳ ق + ف ع ۲ ر − ۱ کو − ۹ ط۲ ص ن س ف + ق ع جواب $-\frac{۵}{۳}$ ط۲ ن س − ۲

(۱۳) تقسیم کرو (ط + ص) کو ط$\frac{۱}{۳}$ + ص$\frac{۱}{۳}$ جواب ط$\frac{۲}{۳}$ − ط$\frac{۱}{۳}$ ص$\frac{۱}{۳}$ + ص$\frac{۲}{۳}$

(۱۴) تقسیم کرو لا۴ + ن۴ + لا۳ ن + لا ن۳ کو لا۲ + ن۲ + لا ن پر جواب لا۲ + ن۲

(۱۵) تقسیم کرو ط لا۳ − (ط۲ + ص) لا۲ + ص۲ کو ط لا − ص پر جواب لا۲ − ط لا − ص

(۱۶) تقسیم کرو لا۳ − ط ف لا۲ + ط۲ ف۲ لا − ط۳ کو لا − ط جواب لا۲ − ط ف لا + ط لا + ط۲

(۱۷) تقسیم کرو لا۵ − ف لا۴ + ق لا۳ − ق لا۲ + ف لا − ۱ کو لا − ۱ پر جواب لا۴ − (ف − ۱) لا۳ + (ق − ف + ۱) لا۲ − (ف − ۱) لا + ۱

(۱۸) تقسیم کرو م ف لا۳ + (م ق − ن ف) لا۲ − (م ر + ن ق) لا + ن ر کو م لا − ن پر جواب ف لا۲ + ق لا − ر

(۱۹) تقسیم کرو (لا۳ − ۱) ط۳ − (لا۳ + لا۲ − ۲) ط۲ + (۳ لا۳ + ۳ لا + ۲) ط − ۳ (لا + ۱) کو (لا − ۱) ط۲ − (لا − ۱) ط + ۳ جواب (لا۲ + لا + ۱) ط − (لا + ۱)

(۲۰) تقسیم کرو لا (لا − ۱) ط۳ + (لا۳ + ۲ لا − ۲) ط۲ + (۳ لا۲ − لا۳) ط − لا۲ کو ط۲ لا + ۲ ط − لا پر جواب (لا − ۱) ط + لا۲

(۲۱) تقسیم کرو $-۲ط^۸ لا^۵ + ۱۷ ط^۷ لا^۶ - ۵ لا^۸ - ۲۴ ط^۶ لا^۴$ کو $۲ط^۳ - ۳ط لا^۲$ پر جواب ..
$- ط^۵ لا^۳ + ۷ ط^۴ لا^۴ + ۸ ط^۳ لا^۵$

(۲۲) تقسیم کرو $(۲لا - د)^۳ ط^۳ - (لا + د)^۲ ط^۲ لا^۲ + (لا + د) ۲ ط لا^۳ - لا^۴$ کو $(۲لا - د) ط^۲ -$
$(لا + د) ط لا + لا^۲$ پر جواب $(۲لا - د) ط^۲ + (لا + د) ط لا - لا^۲$

(۲۳) تقسیم کرو $(۳س - ۶ص) ط^۲ - (س^۲ - ۲ص^۲) ط + س^۲ - ۶ ص س^۲ + ۱۲ ص^۲ س - ۸ص^۳$ کو
$س - ۲ص$ پر جواب $۳ط^۲ - (س + ۲ص) ط + س^۲ - ۴ ص س + ۴ ص^۲$

(۲۴) $\frac{۳ لا^۵}{۴} - ۴ لا^۴ + \frac{۷۷ لا^۳}{۸} - \frac{۴۳ لا^۲}{۴} - \frac{۳۲ لا}{۴} + ۲۷$ کو $\frac{لا^۲}{۲} - لا + ۳$ پر جواب
$\frac{۳ لا^۳}{۲} - ۵ لا^۲ + \frac{لا}{۴} + ۹$

(۲۵) تقسیم کرو $\frac{لا^۴}{۳} - \frac{۱۱ لا^۳}{۱۲} + \frac{۱۴۱ لا^۲}{۸} - \frac{۳۲ لا}{۴} + ۶$ کو $\frac{۲ لا^۲}{۳} - \frac{۵ لا}{۶} +$ اُجواب
$\frac{لا^۲}{۲} - \frac{۱۳ لا}{۴} + ۶$

(۲۶) تقسیم کرو $\frac{۲}{۵} ط^۴ لا - \frac{۱۳۶}{۲۵} ط^۳ لا^۲ + \frac{۸}{۵} ط^۲ لا^۳ + \frac{۳}{۱۰} ط لا^۴ - لا^۵$ کو $\frac{۲}{۳} ط^۳ - \frac{۴}{۵} ط^۲ لا + \frac{۱}{۲} لا^۲$ پر
جواب $\frac{۳}{۵} ط لا - ۲ لا^۲$

(۲۷) تقسیم کرو $\frac{۱}{۳} ط^۴ - \frac{۳}{۱۰} ط^۳ + \frac{۷}{۳۰} ط^۲ + \frac{۱}{۳} ط + \frac{۸}{۱۵}$ کو $\frac{۱}{۴} ط^۲ - \frac{۳}{۲۰} ط + \frac{۹}{۲۰}$ پر جواب $\frac{۱}{۵} ط - \frac{۲}{۵}$

$\frac{۱}{۲} \sqrt{ط - \frac{۱}{۳} ط^۲ + \frac{۱}{۴}}$ (۲۸) $\frac{۱}{۴} ط^۳ - \frac{۳}{۴} ط^۲ + \frac{۳}{۴} ط - \frac{۱}{۴}$ کو $\frac{۱}{۲} ط - \frac{۱}{۴}$ پر جواب $لا + ۱ + د$.

(۲۹) $ط - ص$ کو $ط^{\frac{۱}{۲}} - ص^{\frac{۱}{۲}}$ پر جواب $ط^{\frac{۳}{۲}} + ط^{\frac{۱}{۲}} ص^{\frac{۱}{۲}} + ط^{\frac{۱}{۲}} ص + ص^{\frac{۳}{۲}}$

(۳۰) تقسیم کرو $ط^{۲م} - ن ص^{ن} ف^{ت} + ۲ س^{ن} - ط^{۲م + ن - ۱} ف^{ت} س^{ن} + ط^{ن} ص^{ن - ۱} س^{ن} +$
$ط^{۲م - ن} ص^{ن} ف^{ت} + ۲ س^{ن} - ط^{۲م + ۲ن - ۱} ص^{ن} س^{۲ن - ۱} + ص^{۲ن} ف^{۲م + ن - ۱}$ کو
$ط^{ن} ص^{ن} ف^{ت - ۱} + ص^{ن} س^{ن - ۱}$ پر جواب $ط^{۲م - ن} ص^{ن} ف^{ت - ۱} + ص^{ن} س^{ن - ۱} - ط^{۲م + ۲ن - ۱} ص^{ن} س^{ن} + ص^{۲ن} ف^{م} س^{م}$

(۳۱) تقسیم کرو $لا^{ن} - ۱$ کو $لا - ۱$ پر اور بتلاو کہ اسکے خارج قسمت کیا ہونگی اور یہ ہمیشہ پوری تقسیم ہوگی
جواب $لا^{ن - ۱} + لا^{ن - ۲} + ... لا^۲ + لا + ۱$ فقط

مثالین مقسوم علیہ اعظم کی

دریافت کرو مقسوم علیہ اعظم ائندہ مقداروں کا

(۱) $۳ ط^۴ لا^۵ + ۱$ اور $۶ ط^۳ ص لا$ کا جواب $۳ ط^۲ لا$

(۲) $ط لا + لا^۲$ اور $ط ص س + ص س لا$ کا جواب $ط + لا$

(۳) $ط^۲ + ط ص - ۱۲ ص^۲$ اور $ط^۲ - ۵ ط ص + ۶ ص^۲$ کا جواب $ط - ۳ ص$

(۴) $۶ط^۲ + ۷ط لا - ۳لا^۲$ اور $۶ط^۲ + ۱۱ط لا + ۳لا^۲$ کا جواب $۲ط + ۳لا$

(۵) $لا^۳ + ط لا^۲ + ط^۳$ اور $لا^۳ + ط لا^۲ - ط^۳ لا - ط^۴$ کا جواب $لا^۲ + ط لا + ط^۲$

(۶) $۳۰لا^۴ + لا^۲ - ۱$ اور $۵۲لا^۴ + ۵لا^۳ - لا - ۱$ کا جواب $۵لا^۲ - ۱$

(۷) $۶ط^۳ - ۶ط^۲ ر + ۲ط ر^۲ - ۲ر^۳$ اور $۱۲ط^۲ - ۱۵ط ر + ۳ر^۲$ کا جواب $ط - ر$

(۸) $۸۴لا^۲ + ۱۶لا - ۱۵$ اور $۳۶لا^۲ - ۲۲لا^۲ + ۱۷لا - ۵$ کا جواب $۱۲لا - ۵$

(۹) $۶لا^۴ - ۴۷لا^۳ - ۱۱لا^۲ - ۳لا - ۳لا - ۱$ اور $۳۶لا^۴ + ۲۷لا^۳ - ۱۸لا^۲ + ۳لا - ۵$ کا جواب $۲لا^۲ - ۳لا + ۱$

(۱۰) $لا^۴ + ط لا^۳ - ۹ط^۲ لا^۲ + ۱۱ط^۳ لا - ۳ط^۴$ اور $لا^۳ - ط لا^۲ - ۳ط^۲ لا + ۵ط^۳$ کا جواب $(لا - ط)^۳$

(۱۱) $لا^۳ - ن لا^۲ + (ق - ۱) لا^۲ + ن لا - ق$ اور $لا^۲ - ق لا + (ف - ۱) لا^۲ + ق لا - ن$ جواب $(لا^۲ - ۱)$

(۱۲) $۳لا^۳ - (۳ط + ۲ص) لا + ۲ط ص + ط^۲$ اور $لا^۳ - (۲ط + ص) لا^۲ + (۲ط ص + ط^۲) لا - ط^۲ ص$ جواب $(لا - ط)$

(۱۳) $۲لا^۳ + (۲ط + ۳ص) لا^۲ + (۲ص + ۳ط ص) لا + ۳ص^۲$ اور $۲لا^۲ + (۲س + ۳ص) لا + ۳ص س$ جواب $۲لا + ۳ص$

(۱۴) $لا^۲ + ۵لا + ۴$ اور $لا^۲ + ۲لا - ۸$ اور $لا^۲ + ۷لا + ۱۲$ جواب $لا + ۴$

(۱۵) $۱۵ط^۴ + ۱۰ط^۳ ص + ۴ط^۲ ص^۲ + ۶ط ص^۳ - ۳ص^۴$ اور $۶ط^۴ + ۱۹ط^۳ ص + ۸ط^۲ ص^۲ - ۵ط ص^۳ - ۳ص^۴$ کا جواب $۳ط^۲ + ۲ط ص - ص^۲$

(۱۶) $ط ص + ۲ط^۲ - ۳ص^۲ - ۴ص س - ط س - س^۲$ اور $۹ط س + ۲ط^۲ - ۵ط ص + ۴س^۲ + ۸ص س - ۱۲ص^۲$ جواب $۲ط + ۳ص + س$

(۱۷) $ع ن ف^۳ + ۳ن ف^۲ ع - ۲ن ف ع^۲ - ن ع^۳$ اور $۲م ف^۲ ع - ۴م ف ع^۲ + ۳م ع^۳$ جواب $ف - ع$

(۱۸) $لا^۶ + ۴لا^۵ - ۳لا^۴ - ۶لا^۳ + ۱۱لا^۲ + ۱۲لا - ۹$ اور $۶لا^۵ + ۲۰لا^۴ - ۱۲لا^۳ - ۴۸لا^۲ + ۲۲لا + ۱۲$ جواب $لا^۳ + ۲لا^۲ - ۵لا + ۳$

(۱۹) $ط^۲ + ۲ص + \sqrt{ط ص}\,(ط + ۲ص)$ اور $ط^۲ - ص^۲ + (ط - ص)\sqrt{ط ص}$ جواب $\sqrt{ط} + \sqrt{ص}$

(۲۰) $\frac{۱}{۳}لا^۲ + \frac{۱۱}{۶}\sqrt{لا^۲ + ۱} - لا - ۱$ اور $لا^۲ - \frac{۱}{۴}لا - \frac{۱}{۴}$ جواب $لا - \frac{۱}{۲}\sqrt{لا^۲ + ۱}$

(۲۱) $ط^۲ لا^۲ + ط^۵ - ۲ط ص لا^۲ + ص^۲ لا^۲ + ط^۳ ص^۲ - ۲ط^۴ ص$ اور $ط^۲ لا^۲ - ۵ط^۳ لا^۲ + ۳ط^۴$

$-۲ص لا^۲ + ۵ ص ط لا^۲ - ۳ ط^۲ ص^۲$ جواب $(ط - ص)(لا + ط)$

(۲۲) $۲ (ز^۳ - ۲ ز^۲ - ز + ۲) لا^۳ + ۳ (ز^۲ - ۱) لا^۲ - (۲ ز^۳ - ز^۲ - ۲ ز + ۱)$ اور

$۳ (ز^۳ - ۴ ز^۲ + ۵ ز - ۲) لا^۲ + ۷ (ز^۲ - ۲ ز + ۱) لا - (۳ ز^۳ - ۵ ز^۲ + ز + ۱)$ جواب $لا ز - لا - ز + ۱$

(۲۳) $(ص - س) لا^۲ + (۲ ط ص - ۲ ط س) لا + ط^۲ ص - ط^۲ س$ اور $(ط ص - ط س + ص^۲ - ص س) لا$

$+ ط^۲ س + ط ص^۲ - ط^۲ ص - ط ص س$ جواب $ص - س$

(۲۴) دریافت کرو قیمت ز کی جبکہ فرض کریں $۲ (ز^۲ + ز) لا^۲ + (۱۱ ز - ۲) لا + ۴$ اور

$۲ (ز^۳ + ز) لا^۲ + (۱۱ ز^۲ - ۲ ز) لا^۲ + (ز^۲ + ۵ ز) لا + ۵ ز - ۱$ کہتی ہوں ایک مقسوم علیہ اعظم جواب $ز = ۵$

(۲۵) $۶ ط لا^۲ - ۶ ط ص^۲ - ۴ ط^۵ - ۲۱ لا^۲ + ۲۱ ص^۲ + ۱۸۹$ اور $۶ ط لا^۵ + ۶۰ ط - ۲۱ لا^۵ - ۱۰۲۱$ اور

$۶ ط ص^۳ - ۱۲ ط - ۲۱ ص^۳ + ۴۲$ کا مقسوم علیہ اعظم دریافت کرو جواب $۶ ط - ۲۱$

(۲۶) $۶ ط^۳ لا^۲ + ۴ ط لا^۲ - ۱۰ ط لا ز - ۳ ط^۲ لا ز - ۲ لا^۲ ز^۲ + ۵ ز^۲$ اور $۱۰ ط لا^۲ -$

$۲ ط لا^۲ ز - ۶ ط لا ز^۲ - ۵ ط لا ز^۲ - ۵ ط لا ز + لا^۲ ز^۲ + ۳ ز^۲$ اور $- ۴ ط لا^۲ - ۶ ط^۲ ص لا ز +$

$۲ ط ص لا^۲ ز - ۲ ط ص لا + ۲ ز لا + ۳ ط ص ز^۲ - ص^۲ لا ز^۲ + ص ز$ کا جواب $ز - ۲ ط لا$

مثالین صنعف مشترک کی

دریافت کرو صنعف مشترک ان مقداروں کا

(۱) $۸ ط^۲$ اور $۲ ط^۳$ اور $۲۰ ط^۴$ کا جواب $۱۲۰ ط^۴$

(۲) $۱ - ط$ اور $۱ + ط$ اور $۱ - ط^۲$ کا جواب $۱ - ط^۲$

(۳) $ط^۲ - لا^۲$ اور $ط^۲ - لا^۲$ کا جواب $ط^۴ + ط^۳ لا - ط لا^۳ - لا^۴$

(۴) $۲ لا - ۱$ اور $۴ لا^۲ - ۱$ اور $۴ لا^۲ + ۱$ کا جواب $۱۶ لا^۴ - ۱$

(۵) $لا^۲ + ۵ لا + ۴$ اور $لا^۲ + ۲ لا - ۸$ اور $لا^۲ + ۷ لا + ۱۲$ جواب $لا^۴ + ۶ لا^۳ + ۳ لا^۲ - ۲۶ لا - ۲۴$

(۶) $ط^۲ - ص^۲$ اور $ط^۲ + ص^۲$ اور $(ط - ص)^۲$ اور $(ط + ص)^۲$ اور $ط^۳ - ص^۳$ اور $ط^۳ + ص^۳$ کا

جواب $ط^۱ - ط^۶ ص^۲ - ط^۴ ص^۴ + ص^۱$

(۷) $لا - ۱$ اور $لا^۲ - ۱$ اور $لا - ۲$ اور $لا^۲ - ۴$ کا جواب $لا^۴ - ۵ لا^۲ + ۴$

(۸) $۴ (۱ - لا^۲)$ اور $۸ (۱ - لا)^۲$ اور $۸ (۱ + لا)$ اور $۴ (۱ + لا^۲)$ جواب $۸ (۱ - لا) (۱ - لا^۴)$

(۹) $۳ لا^۲ - ۱۱ لا + ۶$ اور $۲ لا^۲ - ۷ لا + ۳$ اور $۶ لا^۲ - ۷ لا + ۲$ جواب $۶ لا^۴ - ۲۵ لا^۳ + ۲۳ لا^۲ - ۹$

(۱۰) $لا^۳ - ۳ لا^۲ + ۳ لا - ۱$ اور $لا^۲ - لا + ۱$ اور $لا^۴ - ۲ لا^۳ + ۲ لا^۲ - ۲ لا + ۱$ اور

$لا^۴ - ۲لا^۳ + ۲لا^۲ - ۲لا + ۱$ جواب $لا^۲ - ۲لا^۵ + لا^۳ - لا^۲ + ۲لا - ۱$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر $لا + س$ مقسوم علیہ اعظم $لا^۲ + طلا + ص$ اور $لا^۲ + طلا + ص$ کا ہو تو اونکا مختصر ضعف مشترک یہہ ہوگا $لا^۲ + (ط + ط' - س) لا^۲ + (طط' - س^۲) لا + (ط - س)(ط' - س)$ س فقط

تمالین سرکی

(۱) $\frac{۳لا - ۱}{۲۴} - \frac{۲لا - ۵}{۲۴} + \frac{۵}{۶}$ جواب ۱

(۲) $\frac{۴م - ۳ن}{۳(۱ - ن)} - \frac{م - ۳ن}{۳(۱ - ن)}$ جواب $\frac{م}{۱ - ن}$

(۳) $\frac{ط - ص}{طص} - \frac{ط - س}{طس} + \frac{ص - س}{صس}$ جواب ۰

(۴) $\frac{۷لا - ۱۰}{۵} - \frac{۳لا - ۷}{۶} - \frac{۲۷لا - ۳۰}{۳۰}$ جواب $\frac{۱}{۶}$

(۵) $\frac{۳لا - ۴ء}{۷} - \frac{۲لا - ۶ء - ۱}{۳} + \frac{۱۵لا - ۴}{۱۲}$ جواب $\frac{۸۵لا - ۲۰ء}{۸۴}$

(۶) $\frac{ط}{س} - \frac{(ط ف - ص س) لا}{س(س + ف لا)} - \frac{ط}{س + ف لا}$ جواب $\frac{ص لا}{س + ف لا}$

(۷) $\frac{ط + ص - ط}{۱ + ص ط} \div \frac{۱ - ط}{۱ + ص ط}$ (۲) $\frac{۲(لا^۲ - \frac{۱}{۴})}{۲لا + ۱} + \frac{۱}{۲}$ جواب (۱) ص (۲) لا

(۸) $\frac{\frac{۱}{ط} + \frac{۱}{ط ص}}{ص - ۱ + \frac{۱}{ص}}$ اور $\frac{ط + ص + \frac{ص^۲}{ط}}{ط + ص + \frac{ط^۲}{ص}}$ جواب $\frac{ص + ۱}{ط ص^۲}$ (۲) $\frac{ص}{ط}$

(۹) $\frac{۱}{ن - ۱ - (ن - ۱) لا} - \frac{۱}{ن + ۱ + (ن + ۱) لا}$ جواب $\frac{۲}{ن^۲ - ۱} \cdot \frac{۱ + ن لا}{۱ - لا^۲}$

(۱۰) $\frac{ط}{ص} - \frac{(ط^۲ - ص^۲)}{ص^۲} لا + \frac{ط(ط^۲ - ص^۲) لا^۲}{ص^۲(ص + ط لا)}$ جواب $\frac{ط + ص لا}{ص + ط لا}$

(۱۱) $\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۳م + ۲ن}{۳م - ۲ن} - \frac{۱}{۲} \frac{۳م - ۲ن}{۳م + ۲ن}$ جواب $\frac{۱۲ م ن}{۹م^۲ - ۴ن^۲}$

(۱۲) $\frac{لا + ء}{ء} - \frac{۲لا}{لا + ء} + \frac{لا^۳ - لا^۲ ء}{ء^۳ - لا^۲ ء}$ جواب $\frac{ء}{لا + ء}$

(۱۳) $\frac{لا^۴ - ء^۴}{لا^۲ - ۲لاء + ء^۲} \div \frac{لا^۲ + لاء}{لا - ء}$ جواب $لا + \frac{ء^۲}{لا}$

(۱۴) $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳} - \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۳ \cdot ۲ \cdot ۱}$ جواب $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$

(۱۵) $\frac{۱}{ن-۱} - \frac{۱}{۲(ن+۱)} - \frac{ن+۳}{۲(ن^۲+۱)}$ جواب $\frac{ن+۳}{ن^۴-۱}$

(۱۶) $\frac{۳}{۴(۱-ن)^۲} + \frac{۳}{۸(۱-ن)} + \frac{۱}{۸(۱+ن)} - \frac{۱-ن}{۴(۱+ن^۲)}$ جواب $\frac{۱+ن+ن^۲}{۱-ن-ن^۴+ن^۵}$

(۱۷) $\frac{۳ط}{(ط-۲ن)^۲} + \frac{۲ط+ن}{(ط+ن)(ط-۲ن)} - \frac{۵}{ط+ن}$ جواب $\frac{۲۰ط ن - ۲۲ن^۲}{(ط+ن)(ط-۲ن)^۲}$

(۱۸) $\frac{۱}{۴ط^۳(ط+ن)} + \frac{۱}{۴ط^۳(ط-ن)} + \frac{۱}{۲ط(ط^۲+ن^۲)}$ جواب $\frac{۱}{ط^۴-ن^۴}$

(۱۹) $\frac{ن^{۳ن}}{ن^{ن}-۱} - \frac{ن^{۲ن}}{ن^{ن}+۱} - \frac{۱}{ن^{ن}-۱} + \frac{۱}{ن^{ن}+۱}$ جواب $ن^{۲ن}+۲$

(۲۰) $\frac{ط^۲+ص^۲+ط ص}{(ط^۲-ص^۲)(ن^{\frac{۱}{۲}}-ط^{\frac{۱}{۲}})} - \frac{ن^{\frac{۱}{۲}}}{(ط-ص)(ن-ط)}$ جواب $\frac{ط^{\frac{۱}{۲}}}{(ط-ص)(ن-ط)}$

(۲۱) $\frac{۸}{۵(ن-۲)} - \frac{۱۳}{۸۰(ن+۳)} - \frac{۵}{۴(ن-۱)^۲} - \frac{۲۳}{۱۶(ن-۱)}$ جواب $\frac{ن^۲+۴}{(ن-۱)^۲(ن-۲)(ن+۳)}$

(۲۲) $\frac{۱}{(ط-ص)(ط-س)(ن+ط)} + \frac{۱}{(ط-ص)(ص-س)(ن+ص)} + \frac{۱}{(ط-س)(ص-س)(ن+س)}$

جواب $\frac{۱}{(ن+ط)(ن+ص)(ن+س)}$

(۲۳) $\frac{ط+ص}{ط ص}(ط^۲+ص^۲-س^۲) + \frac{ص+س}{ص س}(ص^۲+س^۲-ط^۲) + \frac{ط+س}{ط س}(ط^۲+س^۲-ص^۲)$

جواب $۲(ط+ص+س)$

(۲۴) $\frac{ط^۲-(ص-س)^۲}{(ط+س)^۲-ص^۲} + \frac{ص^۲-(س-ط)^۲}{(ط+ص)^۲-س^۲} + \frac{س^۲-(ط-ص)^۲}{(ص+س)^۲-ط^۲}$ جواب ۱

(۲۵) $\frac{۱}{ط+\frac{۱}{ص+\frac{۱}{س}}}$ اور (۲) $\frac{۱}{ن-۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{ن-۲}}}$ جواب اول $\frac{ط ص س+۱}{ط ص+ط+س}$ جواب دوم $\frac{۳ن-۴}{ن}$

اختصار کرو آئندہ کی کسر و نکا

(۲۶) اختصار کرو $\frac{ط لا}{ط^{۳} لا}$ اور $\frac{م^{۲} - ن^{۲}}{م^{۳} - م^{۲} ن}$ جواب $\frac{۱}{ط^{۲}}$ اور $\frac{م + ن}{م^{۲}}$

(۲۷) $\frac{۳ ط^{۳} - ۲ ط ص}{۵ ط^{۲} - ۵ ط ص}$ اور $\frac{ط لا + لا^{۲}}{۳ ص لا - ص لا}$ اور $\frac{۱۴ ط^{۲} - ۷ ط ص}{۱۰ ط ص - ۵ ص س}$ اور $\frac{۱۲ ط^{۳} لا^{۳} + ۲ ط^{۲} لا^{۵}}{۱۸ ط ص لا + ۳ ص لا^{۵}}$

اور $\frac{۵ ط^{۲} + ۵ ط لا}{ط^{۲} - لا^{۲}}$ جواب $\frac{۲}{۳ ص - س}$ اور $\frac{ط + لا}{۵ س}$ اور $\frac{۷ ط}{۲ ط^{۲} لا^{۳}}$ اور $\frac{۵ ط}{۳ ص^{۲} ط - لا}$

(۲۸) $\frac{لا^{۲} + (ط + س) لا + ط س}{لا^{۲} + (ص + س) لا + ص س}$ جواب $\frac{لا + ط}{لا + ص}$

(۲۹) $\frac{ط س + ص ع + ط ع + ص س}{ط ع + ۲ ص لا + ۲ ط لا + ص ع}$ جواب $\frac{س + ع}{ع + ۲ لا}$

(۳۰) $\frac{۶ ط س + ۱۰ ص س + ۹ ط لا + ۱۵ ص لا}{۶ س^{۲} + ۹ س لا - ۲ س - ۳ لا}$ جواب $\frac{۳ ط + ۵ ص}{۳ س - ۱}$

(۳۱) $\frac{ط^{۲} + ص^{۲} + ۲ ط ص + ۲ ط س + ۲ ص س}{ط^{۲} - ص^{۲} - س^{۲} - ۲ ص س}$ جواب $\frac{ط + ص + س}{ط - ص - س}$

(۳۲) $\frac{لا^{۸} + لا^{۶} ع^{۲} + لا^{۲} ع^{۶} + ع^{۸}}{لا^{۴} - ع^{۴}}$ جواب $\frac{لا^{۶} + ع^{۶}}{لا^{۲} - ع^{۲}}$

(۳۳) $\frac{ط^{۳} + ط ص^{۲} - ط^{۲} ص - ص^{۳}}{۴ ط^{۴} - ۲ ط^{۲} ص^{۲} - ۴ ط^{۳} ص + ۲ ط ص^{۳}}$ جواب $\frac{ط^{۲} + ص^{۲}}{۲ ط (۲ ط^{۲} - ص^{۲})}$

(۳۴) $\frac{۲ ط^{۲} + ط ص - ص^{۲}}{ط^{۳} + ط^{۲} ص - ط - ص}$ جواب $\frac{۲ ط - ص}{ط^{۲} - ۱}$

(۳۵) $\frac{۶ لا^{۵} ع + ۱۵ لا^{۴} ع - ۴ لا^{۳} ط^{۲} ع - ۱۰ لا^{۲} ط^{۲} ع}{۹ لا^{۳} ع - ۲۷ لا^{۲} ع ط - ۶ لا ع ط^{۲} + ۱۸ ع ط^{۳}}$ جواب $\frac{لا^{۲}}{۳ ع} \cdot \frac{۲ لا + ۵ ع}{لا - ۳ ط}$

(۳۶) $\frac{ط س لا^{۲} + (ط ف + ص س) لا + ص ف}{لا^{۲} ط^{۳} - ص^{۲}}$ جواب $\frac{س لا + ف}{ط لا - ص}$

(۳۷) $\frac{ط^{۳} + (ط + ص) ط لا + ص لا^{۲}}{ط^{۴} - ص^{۲} لا^{۲}}$ جواب $\frac{ط + لا}{ط^{۲} - ص لا}$

(۳۸) $\frac{۴ لا^{۲} - ۱۲ ط لا + ۹ ط^{۲}}{۸ لا^{۳} - ۲۷ ط^{۳}}$ جواب $\frac{۲ لا - ۳ ط}{۴ لا^{۲} + ۶ ط لا + ۹ ط^{۲}}$

(۳۹) $\frac{ط لا^{۲} - ص لا^{۲} + ۱}{ط^{۲} ص لا - ص^{۳} لا^{۲}}$ جواب $\frac{لا^{۲} - ۱}{ص (ط + ص لا)}$ (۴۰) $\frac{۳۰ ط^{۳} ن - ۱۰ ص ع^{۲} س + ۲۰ ط^{۲} ن - ۶ ص^{۳} ع^{۳} س - ۴ ص ع^{۳} - ۱}{۲۰ ط^{۲} ن ص ع - ۱۰ س^{۲} ف^{۲} - ۴ ط - ۳ ص^{۲} ع^{۲} + ۱}$

جواب $\frac{۳ ط^{۲} ن - ۱ - ص ع س}{۲ ف^{۲}}$

(۴۱) $\frac{ط^{۲}(ص^{۲}-س^{۲})-ط ص(۲ص^{۲}+ص س-س^{۲})+ص^{۳}(ص+س)}{ط^{۳}(ص^{۲}+۲ص س+س^{۲})-ط^{۲}ص(۲ص^{۲}+۳ص س+س^{۲})+ط ص^{۳}(ص+س)}$

جواب $\frac{ط(ص-س)-ص^{۲}}{ط^{۲}(ص+س)-ط ص^{۲}}$ (۴۲) $\frac{(س-ف)ط^{۲}+۶(ص س-ص ف)ط+۹(ص^{۲}س-ص^{۲}ف)}{(ص س-ص ف+س^{۲}-س ف)ط+۳(ص^{۲}س+ص س^{۲}-ص^{۲}ف-ص س ف)}$

جواب $\frac{ط+۲ص}{ص+س}$ (۴۳) $\frac{۱+لا^{\frac{۱}{۲}}+لا+لا^{\frac{۳}{۲}}}{۲لا+۲لا^{\frac{۱}{۲}}+۳لا^{\frac{۳}{۲}}+۳لا^{۲}}$ جواب $\frac{۱+لا}{۲لا+۳لا^{۲}}$

(۴۴) $\frac{۳ص س ع+۳۰م ف+۱۸ص س+۵م ف ع}{۴ط ع ف-۴۲ق ح+۲۴ط ف-۷ق ح ع}$ جواب $\frac{۲ص س+۵ف}{۴ط ف-۷ق ح}$

(۴۵) $\frac{لا-۴-۳لا^{\frac{۱}{۲}}+۴لا^{-\frac{۱}{۲}}-لا^{-۱}}{لا-۸-۲لا^{\frac{۱}{۲}}+۱۲لا^{-\frac{۱}{۲}}-۳لا^{-۱}}$ جواب $\frac{لا^{\frac{۱}{۲}}-۱+لا^{-\frac{۱}{۲}}}{لا^{\frac{۱}{۲}}-۳+۲لا^{-\frac{۱}{۲}}}$

مثالیں ضرب کی

(۱) ضرب کرو $ط-\frac{لا^{۲}}{ط}$ کو $لا+\frac{لا}{ط}$ یعنی جواب $\frac{ط^{۲}}{لا}-\frac{لا^{۳}}{ط^{۲}}$

(۲) ضرب کرو $ط+\frac{۱}{ط}$ کو $ط+\frac{۱}{ط}$ یعنی جواب $ط^{۲}+\frac{۱}{ط^{۲}}+۲$

(۳) ضرب کرو $\frac{ص}{ط}+ص$ کو $\frac{ط}{ص}+\frac{۱}{ص}$ جواب $ط+\frac{۱}{ط}+۲$

(۴) ضرب کرو $\frac{۲ط-ص}{۴ط}$ کو $\frac{۴ط-۲ص}{ص-۲ط ص}$ جواب $\frac{ص-۲ط}{۲ط ص}$

(۵) ضرب کرو $لا^{۲}-لا+۱$ کو $\frac{۱}{لا^{۲}}+\frac{۱}{لا}+۱$ جواب $لا^{۲}+۱+\frac{۱}{لا^{۲}}$

(۶) ضرب کرو $لا+۱+\frac{۱}{لا}$ کو $لا-۱+\frac{۱}{لا}$ جواب $لا^{۲}+۱+\frac{۱}{لا^{۲}}$

(۷) $\frac{ط}{ط+ص}+\frac{ص}{ط-ص}$ کو $\frac{ط}{ط+س}-\frac{ص}{ص+س}$ جواب $\frac{س(ط^{۲}+ص^{۲})}{(ط+ص)(ط+س)(ص+س)}$

(۸) $۳لا^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۵لا^{\frac{۱}{۳}}}{لا^{\frac{۱}{۳}}}$ کو $لا^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۷}{لا^{\frac{۱}{۳}}}$ جواب $۳لا^{۲}-۲۶لا+۳۵$

(۹) ضرب کرو $\frac{ط^{۲}}{لا^{۲}}-\frac{ط ص}{۲لا}+\frac{ص^{۲}}{۴}$ کو $\frac{۳ط^{۲}}{لا^{۲}}-\frac{۳ط ص}{۵لا}+\frac{ص^{۲}}{۲}$ جواب $\frac{۳ط^{۴}}{لا^{۴}}-\frac{۱۹ط^{۳}ص}{۱۰لا^{۳}}+\frac{۲۱ط^{۲}ص^{۲}}{۲۰لا^{۲}}-\frac{۹ط ص^{۳}}{۱۰لا}+\frac{ص^{۴}}{۴}$

(۱۰) ضرب کرو $\frac{ط^{۲}}{ص^{۳}}+\frac{۲س^{۳}ف^{۲}}{ص^{۵}}-\frac{۷س^{۲}}{۲ط^{۲}ص^{۳}}$ کو $\frac{ط^{۲}}{ص^{۳}}-\frac{۲س^{۳}ف^{۲}}{ص^{۵}}+\frac{۲ط^{۲}ص^{۳}}{۷س^{۳}}$ جواب

$$\frac{ط^{۴}}{ص^{۴}} - \frac{۴ س^{۳} ف^{۵}}{ص^{۱۰}} + \frac{۱۴ س^{۵} ف^{۴}}{ط^{۴} ص^{۸}} - \frac{۹۴ س^{۳}}{۴ ط^{۵} ص^{۶}}$$

مثالیں تقسیم کی

(۱۱) تقسیم کرو $\frac{۳ لا}{۲ لا - ۲}$ کو $\frac{۲ لا}{لا - ۱}$ پر جواب $\frac{۳}{۴}$ (۱۲) تقسیم کرو $لا + \frac{۲ لا}{لا - ۳}$ کو $لا - \frac{۲ لا}{لا - ۳}$ جواب $\frac{لا - ۱}{لا - ۵}$

(۱۳) تقسیم کرو $\frac{۴ ط (ط^{۲} - لا^{۲})}{۳ ص (س^{۲} - لا^{۲})}$ کو $\frac{ط ۲ - ط لا}{ص س + ص لا}$ جواب $\frac{۴ (ط + لا)}{۳ (س - لا)}$

(۱۴) تقسیم کرو $لا^{۴} - \frac{۱}{لا^{۴}}$ کو $لا - \frac{۱}{لا}$ پر جواب $لا^{۳} + \frac{۱}{لا^{۳}} + لا + \frac{۱}{لا}$

(۱۵) تقسیم کرو $ط^{۶} + \frac{۱}{ط^{۶}} + ط^{۴} + \frac{۱}{ط^{۴}} + ط^{۲} + \frac{۱}{ط^{۲}} + ۲$ کو $ط^{۳} + \frac{۱}{ط^{۳}} + ط + \frac{۱}{ط}$ پر جواب $ط^{۳} + \frac{۱}{ط^{۳}}$

(۱۶) تقسیم کرو $\frac{ط^{۲}}{ص س} - \frac{ط ۲}{ف} + \frac{ط س}{ص ی} + \frac{ص س}{ف^{۲}} - \frac{س^{۲}}{ف ی}$ کو $\frac{ط}{ص} - \frac{س}{ف}$ جواب $\frac{ط}{س} - \frac{ص}{ف} + \frac{ی}{ک}$

(۱۷) تقسیم کرو $ط^{ک} + لا^{ک}$ کو $ط + لا$ پر چار رقموں تک جواب $\frac{ط^{ک}}{ط} + \frac{ط^{ک}}{ط^{۲}} لا + \frac{ط^{ک}}{ط^{۳}} لا^{۲} + \frac{ط^{ک}}{ط^{۴}} لا^{۳}$

(۱۸) تقسیم کرو $\frac{ط^{۲} لا^{۳}}{ص ف} + \frac{ط ص لا^{۲}}{س^{۲} ف} - \frac{ط س لا^{۲}}{ف^{۲}} - \frac{ص^{۲} لا}{س ف^{۲}} + \frac{ط^{۲} لا}{ص س} - \frac{ط^{۲}}{ف}$
کو $\frac{ط لا}{س} - \frac{ص}{ف}$ اس سوال کا یہ جواب ہی جواب $\frac{ط^{۲} لا^{۲}}{ص ف} + \frac{ص لا}{ف}$

(۱۹) تقسیم کرو $ط^{۲}$ کو $ط^{۲} + ۲ ط لا + لا^{۲}$ پر جواب $۱ - \frac{۲ لا}{ط} + \frac{۳ لا^{۲}}{ط^{۲}} - \frac{۴ لا^{۳}}{ط^{۳}} \ldots\ldots$ وغیرہ

(۲۰) تقسیم کرو $ط - ص$ لا کو $ط + س$ لا چار رقموں تک جواب $۱ - (ص + س) \frac{لا}{ط} + (ص + س) \frac{ص لا^{۲}}{ط^{۲}}$
$- (ص + س) \frac{س^{۲} لا^{۳}}{ط^{۳}} \ldots\ldots$ وغیرہ

(۱) دریافت کرو قیمت $(لا + \frac{۲ لا}{لا - ۳}) \div (لا^{۲} - \frac{۲ لا}{۳})$ جبکہ $لا = ۵ \frac{۱}{۲}$ جواب ۹

(۲) دریافت کرو قیمت $\frac{لا}{۲} = \left\{ \frac{۲ لا - ۳}{۳} - \frac{۳ لا - ۱}{۴} \right\} \div \frac{لا - ۱}{۲}$ جبکہ $لا = ۴ \frac{۱}{۳}$ جواب $۲ \frac{۵}{۶}$

(۳) دریافت کرو قیمت $ط لا + ص$ کی جبکہ $لا = \frac{س ع - ص ن}{ط ع - ص ف}$ اور $ی = \frac{ط ن - س ف}{ط ع - ص ف}$ جواب $س$

(۴) دریافت کرو قیمت $\frac{لا + ۲ ط}{لا - ۲ ط}$ کی جبکہ $لا = \frac{۴ ط ص}{ط + ص}$ اور (۲) $لا = \frac{۲ ط ص}{ط + ص + \sqrt{(ط + ص)^{۲} + ۲ ط ص}}$

جواب (۱) ۲ جواب (۲) ۱

(۵) دریافت کرو قیمت $\frac{\text{ط ن}}{\text{۲ ن ط ن} - \text{۲ ن لا}} + \frac{\text{ص ن}}{\text{ن ن ص ن} - \text{۲ ن ن لا}}$ کی جبکہ لا = $\frac{\text{ط ن} + \text{ص ن}}{۲}$ جواب $\frac{۱}{\text{ن}}$

(۶) اگر دو کسر دنکا مجموعہ ایک ہو تو ثابت کرو کہ اونکا حاصل تفریق برابر اونکی مربعوں کے حاصل تفریق کے

(۷) اگر حاصل تفریق دو دو کسرونکا ف ف دفعہ تو ثابت کرو کہ ف دفعہ اونکا مجموعہ ع ع دفعہ اونکی حاصل تفریق کے

(۸) دو کسرونکا مجموعہ برابر ہے $\frac{\text{ط}}{\text{ص}}$ (۹) تقسیم کرو $\frac{۸۳}{۸۹}$ ایسی دو حصوں میں کہ اونکا حاصل تفریق = $\frac{۱۴}{۱۹}$

جواب $\frac{۲۸۲۳}{۳۳۸۲}$ اور $\frac{۳۳۱}{۳۳۸۲}$

صعود

(۱) دریافت کرو کہ مربع اور مکعب ۳ ط^{۲} ص س^{۳} کا جواب ۹ ط^{۴} ص^{۲} س^{۶} اور ۲۷ ط^{۶} ص^{۳} س^{۹}

(۲) دریافت کرو مربع اور مکعب $\frac{۲}{۵}$ ط^{۳} لا$^{۲ ن - ۱}$ کا جواب (۱) $\frac{۴}{۲۵}$ ط^{۶} لا$^{۴ ن - ۲}$

(۲) $\frac{۸}{۱۲۵}$ ط^{۹} لا$^{۶ ن - ۳}$ (۳) دریافت کرو مکعب $\frac{۱}{۲}$ ط^{۲} − $\frac{۲}{۳}$ ص

جواب $\frac{۱}{۸}$ ط^{۳} − $\frac{۸}{۲۷}$ ص^{۳} − $\frac{۱}{۲}$ ط^{۲} ص + $\frac{۲}{۳}$ ط ص^{۲} (۴) دریافت کرو مکعب

۱ + ۲ لا + ۳ لا^{۲} + ۴ لا^{۳} کا جواب ۱ + ۶ لا + ۱۲ لا^{۲} + ۵۶ لا^{۳} + ۱۱۱ لا^{۴} + ۱۷۴ لا^{۵}

+ ۲۱۲ لا^{۶} + ۲۰۴ لا^{۷} + ۱۴۴ لا^{۸} + ۶۴ لا^{۹}

مثالین صعود و نزول کی

(۵) دریافت کرو مکعب $\sqrt{\text{ط}} - \sqrt{\text{ص}}$ کا جواب $(\text{ط} + ۳\text{ص})\sqrt{\text{ط}} - (\text{ص} + ۳\text{ط})\sqrt{\text{ص}}$

(۶) دریافت کرو مکعب لا$^{\frac{۱}{۲}}$ − ی$^{\frac{۱}{۳}}$ کا جواب لا$^{\frac{۱}{۲}}$ ی$^{\frac{۱}{۳}}$ − ۳ لا$^{\frac{۱}{۲}}$ ی$^{\frac{۲}{۳}}$ (لا$^{\frac{۱}{۲}}$ − ی$^{\frac{۱}{۳}}$)

(۷) دریافت کرو مکعب لا − $\frac{۱}{\text{لا}}$ کا جواب لا^{۳} − $\frac{۱}{\text{لا}^{۳}}$ − ۳ (لا − $\frac{۱}{\text{لا}}$)

(۸) دریافت کرو مکعب لا − $\frac{۱}{\text{لا}}$ − ۱ کا جواب لا^{۳} − $\frac{۱}{\text{لا}^{۳}}$ − ۳ لا^{۲} − $\frac{۳}{\text{لا}^{۲}}$ + ۵

(۹) دریافت کرو مربع ط$^{\frac{۲}{۳}}$ − ط$^{\frac{۱}{۳}}$ + ۱ کا جواب ط$^{\frac{۴}{۳}}$ − ۲ ط + ۳ ط$^{\frac{۲}{۳}}$ − ۲ ط$^{\frac{۱}{۳}}$ + ۱

(۱۰) دریافت کرو مکعب $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ط}^{۲}}$ − $\frac{\text{ط}^{۲}}{\text{لا}}$ جواب $\frac{\text{لا}^{۳}}{\text{ط}^{۳}}$ − $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ط}^{۲}}$ + $\frac{\text{ط}^{۲}}{\text{لا}}$ − $\frac{\text{ط}^{۶}}{\text{لا}^{۳}}$

(۱۱) دریافت کرو مکعب ع$^{\text{لا}}$ − ع$^{-\text{لا}}$ کا جواب ع$^{۳\text{لا}}$ − ع$^{-۳\text{لا}}$ − ۳ (ع$^{\text{لا}}$ − ع$^{-\text{لا}}$)

(۱۲) دریافت کرو مکعب لا^{ن} م − ۱ کا جواب لا^{۳ن} م^{۳} − ۳ لا^{۲ن} م^{۲} + ۳ لا^{ن} م − ۱

(۱۳) اگر لا + $\frac{۱}{\text{لا}}$ = ف ثابت کرو لا^{۳} + $\frac{۱}{\text{لا}^{۳}}$ = ف^{۳} − ۳ ف

(۱۴) دریافت کرو مربع ۱ − $\frac{۱}{۲}$ لا + $\frac{۳}{۴}$ لا^{۲} − $\frac{۵}{۸}$ لا^{۳} + $\frac{۴}{۵}$ لا^{۴} − ۔ سے

جواب ۱ − لا + $\frac{۱۹}{۱۲}$ لا^{۲} − $\frac{۱۳}{۶}$ لا^{۳} + وغیرہ

(۱۵) ثابت کرو $۱ - \frac{۱^۲}{۳} + \frac{۱^۳}{۵} - \dots = ۲^۲ + (۱ - \frac{۱^۲}{۳} + \frac{۱^۴}{۴} \dots)^۲$ برابر ایک کے ہے

(۱۶) دریافت کرو جذر $۹ ط^۴ ص^۲ س^{-۱۲}$ اور $۱۶ لا^{(۲۲+۲)} ط^{-۲۰}$ جواب $۳ ط^۲ ص س^{-۶}$ اور $۴ لا^{م+۱} ط^{-ن}$

(۱۷) دریافت کرو جذر $۴ لا^۴ - ۱۲ لا^۳ + ۲۵ لا^۲ - ۲۴ لا + ۱۶$ کا جواب $۲ لا^۲ - ۳ لا + ۴$

(۱۸) دریافت کرو جذر $۹ ط^۴ - ۱۲ ط^۳ ص + ۴ ۳ ط^۲ ص^۲ - ۲۰ ط ص^۳ + ۲۵ ص^۴$ جواب $۳ ط^۲ - ۲ ط ص + ص^۲$

(۱۹) دریافت کرو جذر $لا^۶ + ۴ لا^۵ + ۱۰ لا^۴ + ۲۰ لا^۳ + ۲۵ لا^۲ + ۲۴ لا + ۱۶$ جواب $لا^۳ + ۲ لا^۲ + ۳ لا + ۴$

دریافت کرو جذر اٹکندہ کی مقدار رکھنا

(۲۰) $لا^۴ - ۲ لا^۳ + ۳ لا^۲ - \frac{۱}{۳} لا + \frac{۱}{۱۶}$ جواب $لا^۲ - لا + \frac{۱}{۴}$ (۲۱) $\frac{۲۵ ط^۲ ص^۲}{۴} + \frac{س^۴}{۹} - \frac{۵ ط ص س^۳}{۳}$ جواب $\frac{۵ ط ص}{۲} - \frac{س^۲}{۳}$ (۲۲) $لا^۲ + \frac{ط^۲}{۹} + \frac{ص^۲}{۴} + \frac{۲}{۳} ط لا +$

$\frac{۱}{س^۴} - ط ص +$ ص لا جواب $لا + \frac{ط}{۳} + \frac{ص}{۲}$ (۲۳) $\frac{۱۰۵۱ لا^۲}{۲۵} - \frac{۱۷۶ لا}{۵} + \frac{۱۴ لا^۳}{۵} + ۹ +$

$۹ ۴ لا^۴$ جواب $۷ لا^۲ - \frac{لا}{۵} + ۳$ (۲۴) $ط^۲ - \frac{۳ ط^۳ ص}{۲} - \frac{۳ ط^۲ ص}{۲} + \frac{۴۱ ط^۲ ص^۲}{۱۶} + ۱$

جواب $ط - \frac{۳ ط ص}{۴} + ۱$ (۲۵) $\frac{ط^۲}{ص^۲} + \frac{ص^۲}{ط^۲} - ۲$ جواب $\frac{ص}{ط} - \frac{ط}{ص}$

(۲۶) $\frac{ط^۲}{ص^۲} + \frac{ص^۲}{ط^۲} + \frac{۲ ط}{ص} + \frac{۲ ص}{ط} + ۳$ جواب $\frac{ط}{ص} + \frac{ص}{ط} + ۱$

(۲۷) دریافت کرو جذر $ط^۲ - ۴ ط^{م+ن} + ۴ ط^{۲ن}$ جواب $ط^م - ۲ ط^ن$

(۲۸) $\frac{لا^۲}{ی^۲} (\frac{لا^۲}{ی^۲} + ۱) + \frac{۴ ی^۲}{لا^۲} (\frac{لا^۲}{ی^۲} + ۱) + ۳$ جواب $\frac{لا^۲}{ی^۲} + \frac{۲ ی^۲}{لا^۲} + ۱$

(۲۹) دریافت کرو جذر $\frac{لا^۲}{ی^۲} + \frac{ی^۲}{لا^۲} - (\frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا}) \sqrt{۲} + \frac{۵}{۲}$ جواب $\frac{لا}{ی} + \frac{ی}{لا} - \sqrt{۲} + \frac{۱}{۲}$

(۳۰) دریافت کو وکعب $ط^۶ - ۶ ط^۵ + ۱۵ ط^۴ - ۲۰ ط^۳ + ۱۵ ط^۲ - ۶ ط +$ ا جو $(ط^۲ + ۲ ط + ۱)^۳$

دریافت کرو کعب اٹکندہ کی مقدار رکھنا

(۳۱) $\frac{ط^۶}{ص^۲} - ۶ ط^۴ + ۱۲ ط^۲ ص^۲ - ۸ ص^۴$ جواب $\frac{ط^۲}{ص^۲} - ۲ ص^۲$ (۳۲) $\frac{ط^۳ س^۳}{ص^۳} لا^۶ -$

$\frac{۳ ط^۲ س}{ص} لا^۵ + \frac{۳ ط ص}{س} لا^۴ - \frac{ص^۳}{س^۳} لا^۳$ جواب $\frac{ط س}{ص} لا^۲ - \frac{ص}{س} لا$

(۳۳) $(لا + لا^{-۱})^۲ - ۴ (لا - لا^{-۱})^۲$ جواب $لا - لا^{-۱} - ۲$ (۳۴) دریافت کرو جذر $۹ ط^{۴۲} +$

$۶ ط^{۳ م+۱} + ۲۵ س^{۲ م} - ۳۰ ط^م س^{م-۲} + ط^{۴ م+۲} - ۱۰ ط^{۲ م+۱} س^{م-۲}$ جواب $۳ ط^م -$

$۵ س^{م-۲} + ط^{۲ م+۱}$ (۳۵) دریافت کرو کعب $(ط+۱)^{۲۶} لا^۳ + ۶ س ط^۴ (ط+۱)^{۲۴} لا^۲ +$

$۱۲ س^۲ ط^۷ (ط+۱)^{۲۲} لا + ۸ س^۳ ط^{۱۰}$ جواب $(ط+۱)^{۲۲} لا + ۲ س ط^۴$

(۳۶) دریافت کرو جبکہ نزول $ط^{6}+\frac{1}{ط^{6}}-٦\left(ط^{4}+\frac{1}{ط^{4}}\right)+١٥\left(ط^{2}+\frac{1}{ط^{2}}\right)-٢٠$ جواب $ط-\frac{1}{ط}$

(۳۷) دریافت کرو جبکہ نزول $ط^{5}-\frac{٢٤}{ن}ط^{4}+\frac{٢٤٣}{ن^{2}}ط^{3}-\frac{٢٤٣}{ن^{3}}ط^{2}+\frac{٨١}{ن^{4}}ط$ جواب $ط^{5}-\frac{٢٤}{ن}ط^{4}+\frac{٢٤٣}{ن^{2}}ط^{3}-\frac{٢٤٣}{ن^{3}}ط^{2}+\frac{٨١}{ن^{4}}ط-\frac{٢٤٣}{ن^{5}}$

(۳۸) دریافت کرو جبکہ اس آئندہ مقدار کا تغیر عمل مین لانی قاعدہ جبر کے

$٢\left\{٤\left\{(ط^{2}-ص^{2})س ف+(س^{2}-ف^{2})ط ص\right\}+\left\{(ط^{2}-ص^{2})(س^{2}-ف^{2})-٤ط ص س ف\right\}\right.$

جواب $(ط^{2}+ص^{2})\times(س^{2}+ف^{2})$ (۳۹) دریافت کرو سر لا کا اس آئندہ مقدار کی مربع اور مکعب مین $١-٢لا+٣لا^{2}+٤لا^{3}-لا^{4}$ جواب (۱) ۲۰ اور جواب (۲) ۸ ۱۶

(۴۰) دریافت کرو سر لا کا اس مقدار کی مربع مین کہ $(لا+ط)(لا+ص)(لا+س)$

جواب $ط^{2}ص^{2}+ط^{2}س^{2}+ص^{2}س^{2}+٤ط ص س(ط+ص+س)$

مثالین مقادیر نزولی کے

(۱) مقادیر آئندہ کو نہایت سہل صورتون مین تبدیل کرو $\sqrt[3]{١٥٠}$ اور $\sqrt[4]{١٨٠٥}$ اور $\sqrt[3]{٣٢٠}$ اور $\sqrt[4]{٢٨٠٨}$ اور $\sqrt[4]{١٤٤}$ جواب $٥\sqrt[3]{٦}$ اور $١٩\sqrt[4]{٥}$ اور $٤\sqrt[3]{٥}$ اور $٦\sqrt[3]{١٢}$ اور $٢\sqrt[4]{٩}$

(۲) $\sqrt[4]{٧٤٨}$ اور $\sqrt[3]{٦٠٨}$ اور $\sqrt[3]{٤٠٠}$ اور $ط^{ن}ص^{ن}$ جواب $٤\sqrt[3]{٣}$ اور $٢\sqrt[4]{١٩}$ اور $٢\sqrt[3]{٥}$ اور $ط ص\sqrt[3]{ط^{3}}$

(۳) $\frac{١١}{٧}\sqrt[3]{\frac{١٧}{٩}}$ جواب $\frac{١}{٦٣}\sqrt[6]{٥٠}$

(۴) $٨ط ص^{2}+ص\sqrt[3]{٥٧ط^{2}}+٣ط(ط-٩ص)$ جواب $ط\sqrt[3]{ط^{3}}$

(۵) $٤ط^{2}+٢ط^{2}+٨ط^{2}$ جواب $٩ط^{2}$

(۶) $٢\sqrt[3]{٨-٧\sqrt[3]{٥٠}}$ جواب $٢\sqrt[3]{٨}$

(۷) $٢\sqrt[3]{\frac{٥}{٣}+\sqrt[3]{١٥-٦٠}}$ جواب $\frac{٢٨}{١٥}\sqrt[3]{\frac{٣}{٥}}$

(۸) $\sqrt[3]{٥٤+٣\sqrt[3]{١٦+٢-٥\sqrt[3]{١٢٨}}}$ جواب ۲

(۹) $\frac{١}{٢}\sqrt[4]{١٢+٤\sqrt[4]{٢٧-٢\sqrt[4]{\frac{٢٧}{١٦}}}}$ جواب $\frac{٢٥}{٢}$

(۱۰) $\sqrt[4]{١٦+\sqrt[4]{٨١-\sqrt[4]{٥١٢+\sqrt[4]{١٩٢-٧\sqrt[4]{٩}}}}}$ جواب ۱۰

(۱۱) $٤\sqrt[3]{٧\times٦\times\frac{١}{٢}\sqrt[3]{٥}}$ جواب $١-\sqrt[5]{٥}$

(۱۲) $(٣+\sqrt[5]{٥})(٢-\sqrt[5]{٥})$ جواب $\sqrt[5]{١٥٧}$

(۱۳) $(\sqrt{۴}+\sqrt{۹}+\sqrt{۴۸})(\sqrt{۴}+\sqrt{۹}-\sqrt{۴۸})$ جواب $۵+۳\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۱۲}$

(۱۴) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}$ اور $\frac{۸-۵\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}$ جواب $۵+۳\sqrt{۳}$ اور $۴+\sqrt{۳}$

(۱۵) $\frac{\frac{۱}{۴}(۱۶\sqrt{۵}+۱)}{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\sqrt{۵}\pm۵\sqrt{۵}}$ جواب $\sqrt{۵}\pm\frac{۲}{۵}\sqrt{۵}$ (۱۶) $\sqrt[۳]{۱۶}\times\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۱۲}$ جواب $\sqrt[۳]{۱۲}$

(۱۷) ضرب کرو $\frac{ل}{۲}\sqrt{ط}+\sqrt{\frac{س}{ع}}$ کو اس $\frac{ل}{۲}\sqrt{ط}-\sqrt{\frac{س}{ع}}$ مین جواب $\frac{ط ل^۲}{۴}-\frac{س}{ع}$

(۱۸) ضرب کرو $\sqrt{ل^۳}-۱+\frac{۱}{\sqrt{ل^۳}}$ کو اس $\sqrt{ل^۳}+۱+\frac{۱}{\sqrt{ل^۳}}$ مین جواب $ل^۳+\frac{۱}{ل^۳}+۱$

(۱۹) تقسیم کرو $۲ل^۳+۲ل^۲-۳ل-۳$ کو اسپر $۲\sqrt{ل}-\sqrt{۳}$ جواب $\sqrt{ل}+\sqrt{۳}$

$(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})ل+\sqrt{۳}$ (۲۰) تقسیم کرو $۴ط^۲+۸\sqrt{ط}ل-۹ص+۱۲\sqrt{ص}$ لا کو اسپر

$۲\sqrt{ط}-۳\sqrt{ص}+۴\sqrt{ل}$ جواب $۲\sqrt{ط}+۳\sqrt{ص}$ (۲۱) مخذور کرو $\frac{س}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{ط^۲-س^۲}$

جواب $\frac{ط^۲}{۴}+\frac{س}{۲}\sqrt{ط^۲-س^۲}$ (۲۲) کیا ہی نون ترتبہ کا مرتبہ کا نزول اس مقدار

$۲^۶\cdot۳^۴\cdot۵^۲\,ط^۲ص^۹\frac{(ط+ص)^{۲۷}}{ط^۹}$ جواب $۱۶ط^۴ص(ط+ص)^۳$ (۲۳) نکالو جذر اس

$۱۸+۲\sqrt{۷۷}$ کا جواب $\sqrt{۱۱}+\sqrt{۷}$ (۲۴) نکالو جذر اس $۴۹-۴\sqrt{۵}$

جواب $۷-۳\sqrt{۵}$ (۲۵) نکالو جذر اس $۲۸+۱۰\sqrt{۳}$ کا جواب $۵+\sqrt{۳}$

(۲۶) نکالو جذر اس $۱۳+۲\sqrt{۳۰}$ جواب $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۳}$

(۲۷) نکالو جذر اس $۱۰\frac{۱}{۲}+۲\sqrt{۵}$ جواب $\sqrt{۱۰}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$

بے مساواتین وڈھاحب کے جبر و مقابلہ کی ہین اور انمین بعضی مساوات کی تکریر بھی ہوگئی ہی مگر ترتیب کے لحاظ سے اونکو رہنے دیا ہی

(۱) $۲۰-۴ل+۸=۵ل+۱۰$ جواب $ل=۲$

(۲) $۲ل^۲-۲۴+۳ل^۰-۳-۶ل+۶۶=۰$ جواب $ل=۱۲$

(۳) $۷ل^۳+۲۰-۳ل=۶۰+۴ل^۲-۵۰+۸ل$ جواب $ل=۱\frac{۱}{۴}$

(۴) $س - ۳\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} + ۲س + ۱۵$ جواب $س = -\frac{۱}{۲}$

(۵) $۱۳\frac{۳}{۴} - \frac{س}{۲} = ۲س - ۸\frac{۳}{۴}$ جواب $س = ۹$

(۶) $\frac{۳س}{۴} + \frac{۷س}{۱۵} + \frac{۱۱س}{۶} = ۳۶۶$ جواب $س = ۱۲۰$

(۷) $\frac{س}{۲} + \frac{س}{۳} - \frac{س}{۴} + \frac{س}{۵} = ۷\frac{۵}{۶}$ جواب $س = ۱۰$

(۸) $\frac{۹}{۲س} - ۴ = \frac{۲}{۳}$ جواب $س = \frac{۲۷}{۲۸}$

(۹) $\frac{۱}{س} + \frac{۱}{۲س} + \frac{۱}{۳س} = \frac{۷}{۳}$ جواب $س = \frac{۱۱}{۱۴}$

(۱۰) $\frac{۳س+۱}{۲} - \frac{۲س}{۳} = ۱۰ + \frac{س-۱}{۶}$ جواب $س = ۱۴$

(۱۱) $س + \frac{س-۲}{۳} = \frac{س-۱}{۲} + ۴$ جواب $س = ۵$

(۱۲) $\frac{۲س}{۷} + \frac{س-۱}{۶} = س - ۴$ جواب $س = ۷$

(۱۳) $\frac{۳س-۲}{۴} + \frac{۷س-۲}{۳} = ۲س + \frac{۴-س}{۲}$ جواب $س = ۳$

(۱۴) $\frac{س}{۲} + \frac{س-۲}{۳} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} + \frac{س+۳}{۴}$ جواب $س = ۷$

(۱۵) $\frac{س-۷\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۲۷-۵س}{۳} + \frac{۹-۳س}{۴}$ جواب $س = ۷\frac{۷}{۱۲}$

(۱۶) $س + \frac{س+۱۰}{۵} - ۵\frac{۳}{۴} = \frac{س-۲}{۳} + \frac{س}{۴}$ جواب $س = ۵$

(۱۷) $س - \frac{۲-۳س}{۵} = ۳ - \frac{۵-۲س}{۳}$ جواب $س = ۴$

(۱۸) $\frac{۲-۱۱س}{۶} - \frac{۱۸-۳۶س}{۳} = س + ۲$ جواب $س = ۳\frac{۷}{۴}$

(۱۹) $۵س - \frac{۲س-۱}{۳} + ۱ = ۳س + \frac{س+۲}{۲} + ۷$ جواب $س = ۸$

(۲۰) $\frac{س+۴}{۴} - \frac{۱۴-۳س}{۱۲} = \frac{۲۵}{۶}$ جواب $س = ۸$

(۲۱) $\frac{۷س+۵}{۳} - \frac{۱۶+۳۶+۴س}{۵} = \frac{۹+۳س}{۲}$ جواب $س = ۱$

(۲۲) $\frac{س+۷}{۳} - ۵\frac{۳}{۴} = \frac{۲س+۵}{۷} + \frac{۱۰-۵س}{۸}$ جواب $س = ۸$

(۲۳) $\frac{۲س+۷}{۷} - \frac{۹-۸س}{۱۱} = \frac{س-۱۱}{۱}$ جواب $س = ۷$

(۲۴) $\frac{۳-۱۱س}{۷} + ۰ - \frac{س-۶}{۴} = ۳ - \frac{۲-۱۲س}{۱۲}$ جواب $س = \frac{۲۰۵}{۲۸}$

(۲۵) $\frac{۷س+۹}{۸} - \frac{۳س+۱}{۷} = \frac{۱۳-۷س}{۴} - \frac{۲۴۹-۷س}{۱۴}$ جواب $س = ۹$

(۲۶) $\frac{۳+۳س}{۱۶} + \frac{۴-۷س}{۱۵} - \frac{۱+۷س}{۲۰} = ۲$ جواب $س = ۷$

(۲۷) $\frac{س}{۴} - ۴ - \frac{۱}{۲} + \frac{س-۱۲}{۲۵} = \frac{س}{۲} + \frac{۴۸}{۱۱}$ جواب $س = ۸$

(۲۸) $\frac{۵+۷س}{۲۳} + \frac{۹-س}{۵} - \frac{۱-۷س}{۱۰} + \frac{۳-۳س}{۱۵} = ۲۳\frac{۱}{۳}$ جواب $س = ۱۹$

(۲۹) $\frac{۱+۳س}{۲۹} - \frac{۳س-۴۰۲}{۱۲} = ۹ - \frac{۶س-۴۷۱}{۲}$ جواب $س = ۷۲$

(۳۰) $۲۷ = (۱-۲س)۵-۵۲$ جواب $س = ۳$

(۳۱) $۴(س-۱) - ۷(۳-س) = ۴-س$ جواب $س = ۵$

(۳۲) $۵۰۰-۲۰س = (۴-۳س)۵۰ - (۵-۴س)۴۰ - ۲۰۰$ جواب $س = ۳$

(۳۳) $۴(۵-۳س) - ۴۶(۳-س) - ۳(۴-۱۲س) = ۹۶$ جواب $س = ۶$

(۳۴) $۱۰(\frac{۱}{۲}+س) - ۶س(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}) = ۲۳$ جواب $س = ۲$

(۳۵) $\frac{۴}{۵}س - \frac{۵}{۴}س + ۱۸ = \frac{۱}{۹}(۱+۴س)$ جواب $س = ۲۰$

(۳۶) $\frac{۱}{۳}(۲۰-۳س) - \frac{۱}{۱۱}(۴۰-۲س) = ۱۰ - \frac{۱}{۵}(۵۰-س)$ جواب $س = ۱۷$

(۳۷) $\frac{۱}{۱۲}س - \frac{۱}{۸}(۸-س) - \frac{۱}{۴}(۵+س) + \frac{۱۱}{۴} = ۰$ جواب $س = ۱۲$

(۳۸) $\frac{۱}{۷}(\frac{۱}{۲}-س) - \frac{۱}{۵}(س-\frac{۲}{۳}) = ۱\frac{۱۳}{۳۰}$ جواب $س = ۴\frac{۷}{۹}$

(۳۹) $\frac{۱}{۴}(۴+۲\frac{۳}{۴}س) - \frac{۱}{۷}(۲س-\frac{۱}{۳}) = \frac{۳۱}{۲۸}$ جواب $س = \frac{۲}{۳}$

(۴۰) $\frac{۱}{۱۴}(۲س+\frac{۲}{۳}) - \frac{۱}{۷}(۴س-۶-\frac{۲}{۳}) = \frac{۱}{۲}(۵-۲س)$ جواب $س = ۱\frac{۲}{۵}$

(۴۱) $۲س - ۴ - \frac{۴}{۵}س = \frac{۹-۷س}{۳} \times \frac{۴}{۳}(۶+\frac{۱-س}{۲})$ جواب $س = ۷\frac{۱}{۱۲}$

(۴۲) $\frac{۱}{۳}(۴+۲\frac{۱}{۳}س) - \frac{۱}{۲}(۲\frac{۱}{۳}-س) = \frac{س}{۲}(۱-\frac{۶}{۵})$ جواب $س = ۳$

(۴۳) $۲\frac{۱}{۳}\{۲۸ - (۲۴+\frac{س}{۸})\} = ۲\frac{۱}{۲}(\frac{س}{۴}+\frac{۱}{۳}۲)$ جواب $س = ۴$

یہاں سی کچھ خاص ترکیب کا استعمال کرنا پڑتا ہی

تاکہ مخرج مین سی حرف مجہول زائل ہوجاوی

(۴۴) $\frac{۱۰لا+۱۷}{۱۸} - \frac{۱۲لا+۲}{۱۱لا-۸} = \frac{۵لا-۴}{۹}$ جواب لا = ۲۰

(۴۵) $\frac{۶لا+۱۳}{۱۵} - \frac{۳لا+۵}{۵لا-۲۵} = \frac{۲لا}{۵}$ جواب لا = ۲۰

(۴۶) $\frac{۴لا}{لا-۵} - \frac{۲۰-۴لا}{لا} = \frac{۱۵}{لا}$ جواب لا = ۳$\frac{۲}{۱۱}$

(۴۷) $\frac{۵لا+۳}{لا-۱} + \frac{۲لا-۳}{۴لا-۴} = ۹$ جواب لا = ۳$\frac{۱}{۲}$

(۴۸) $\frac{۳۰+۶لا}{لا+۱} + \frac{۶۰+۸لا}{لا+۳} = ۱۴ + \frac{۴۸}{لا+۱}$ جواب لا = ۳

(۴۹) $\frac{۱}{لا-۱} - \frac{۲}{لا+۲} = \frac{۱}{۷(لا-۱)}$ جواب لا = ۷

(۵۰) $\frac{لا}{لا+۱} - \frac{۳لا}{لا+۲} = -۲$ جواب لا = $-\frac{۴}{۵}$

(۵۱) $\frac{۶لا+۸}{۲لا+۱} - \frac{۲لا+۳۸}{لا+۱۲} = ۱$ جواب لا = ۲

(۵۲) $\frac{۵لا^۲+لا-۳}{۵لا-۴} = \frac{۷لا^۲-۳لا-۹}{۱۷لا-۱۰}$ جواب لا = ۳

(۵۳) $\frac{۴لا-۱۷}{۹} - \frac{۳\frac{۲}{۳}لا-۲۲}{۳۳} = لا - \frac{۶}{لا}(۱-\frac{لا^۲}{۵۴})$ ضمیمہ دیکھو استخراج سے جواب لا = ۳

(۵۴) $\frac{۴لا-۱۷}{لا-۴} + \frac{۱۰لا-۱۳}{۳لا-۳} = \frac{۸لا-۳۰}{۷لا-۷} + \frac{۵لا-۴}{لا-۱}$ ضمیمہ دیکھو اسکا حل بھی جواب لا = ۲$\frac{۱}{۲}$

(۵۵) $\frac{لا}{لا-۲} + \frac{لا+۱}{لا-۱} = \frac{لا-۷}{لا-۹} + \frac{لا-۸}{لا-۶}$ جواب لا = ۴

(۵۶) $\frac{۱}{۳} \times \frac{۸}{۴} = \frac{۷لا-۱}{۳لا-۶\frac{۱}{۲}} \times \frac{\frac{۱}{۲}لا-۱}{لا-۲}$ جواب لا = ۱$\frac{۱}{۱۳}$

(۵۷) $\frac{لا}{۲} - \frac{\frac{۱}{۲}(۲لا-۳)-\frac{۱}{۴}(۳لا-۱)}{\frac{۱}{۲}(لا-۱)} = \frac{۳}{۲} \times \frac{لا^۲+۲}{۳لا-۱}$ جواب لا = ۴$\frac{۱}{۳}$

(۵۸) $\frac{۳لا}{۲} - \frac{۸۱لا^۲-۹}{(۳لا-۱)(لا+۳)} = ۳لا - \frac{۳}{۲} \times \frac{۲لا^۲-۱}{لا+۳} - \frac{۵۷-۱۳لا}{۲}$ ضمیمہ دیکھو جواب لا = ۱۰

(۵۹) $\frac{لا}{ط} + \frac{لا}{ص} = س$ جواب لا = $\frac{ط ص س}{ط+ص}$

(۶۰) $\frac{ط لا}{ص} + \frac{ر س لا}{ک} + ج = ف لا + \frac{س لا}{ک} + ن$ جواب لا = $\frac{ص(ج-ن)}{ط-ص ف}$

(۶۱) $\frac{ص لا}{ط} + \frac{ط لا}{ص} = ط^۲ + ص^۲$ جواب لا = $\frac{۱}{ط ص}$

(۶۲) $\frac{۱}{ط ص - ط لا} + \frac{۱}{ص س - ص لا} = \frac{۱}{ط س - ط لا}$ جواب لا = $\frac{ص}{ط}(ط-ص+س)$

(۶۳) $ط + لا + \sqrt{۲ط لا + لا^۲} = ص$ جواب لا = $\frac{(ط-ص)^۲}{۲ص}$

(۴۴) $b+\text{ا}+\sqrt{b^2+\text{ا}^2}=$ ص

(۴۵) $\sqrt{\text{ا}+\sqrt{b-\sqrt{b\,\text{ا}+\text{ا}^2}}}=\sqrt{b}$

(۴۶) $b+\text{ا}+\sqrt{b^2+$ ص $\text{ا}+\text{ا}^2}=$ ص

(۴۷) $\sqrt{b-\text{ا}}+2\sqrt{b+\text{ا}}=\sqrt{b-\text{ا}^2+b\,\text{ا}+\text{ا}^2}$

(۴۸) $\sqrt{4b+\text{ا}}=2\sqrt{$ ص $+\text{ا}}-\sqrt{\text{ا}}$

(۴۹) $\sqrt{1+\text{ا}+\text{ا}^2}=b-\sqrt{1-\text{ا}+\text{ا}^2}$

(۵۰) $\sqrt{b+\text{ا}}+\sqrt{b-\text{ا}}=$ ص $(b^2-\text{ا}^2)^{\frac{1}{4}}$

(۵۱) $\frac{$ ص $^2}{b+\text{ا}}+\frac{b}{$ ص $-\text{ا}}=$ س

(۵۲) $\frac{1}{b}\sqrt{b+\text{ا}+\frac{\text{ا}}{b+\text{ا}}}=\frac{1}{$ ص $}\sqrt{\text{ا}}$

(۵۳) $\sqrt{b^2+\text{ا}^2}+\sqrt{b^2-\text{ا}^2}=$ ص

(۵۴) $\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ا}-\sqrt{1-\text{ا}^2}}=1$

(۵۵) $1+\sqrt{1+\text{ا}}-\sqrt{1+\text{ا}+\sqrt{1-\text{ا}}}=0$

(۵۶) $\text{ا}+\sqrt{b^2+\text{ا}^2}=\frac{4b^2}{\sqrt{b^2+\text{ا}^2}}$

(۵۷) $\sqrt{4b+\text{ا}}+\sqrt{b+\text{ا}}=2\sqrt{\text{ا}-2b}$

(۵۸) $\sqrt{1+\text{ا}}+\sqrt{1+\text{ا}+\sqrt{1-\text{ا}}}=\sqrt{1-\text{ا}}$

(۵۹) $\sqrt{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}}}-\sqrt{\text{ا}-\sqrt{\text{ا}}}=b\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}}}}$

(۶۰) $b\,\text{ا}+\sqrt{b^2\,\text{ا}^2+$ ص $^2}=\sqrt{$ ص $^2+b\,\text{ا}\sqrt{4$ ص $^2+\text{ا}^2}}$

(۶۱) $\frac{b^2-\text{ا}^2}{b+\sqrt{b^2+\text{ا}^2}}=$ ص $-\sqrt{b^2+\text{ا}^2}$

(۶۲) $\frac{b\,\text{ا}-$ ص $^2}{\sqrt{b\,\text{ا}+$ ص $}}=\frac{\sqrt{b\,\text{ا}-$ ص $}}{4}-$ س

(۶۳) $\sqrt{1+\text{ا}+\text{ا}^2}+\sqrt{1-\text{ا}+\text{ا}^2}=2\,\text{ا}$

جواب $\text{ا}=\frac{$ ص $}{2}\left(1-\frac{$ ص $-b}{b}\right)$

جواب $\text{ا}=\frac{9b}{16}$

جواب $\text{ا}=$ ص $\times\frac{$ ص $-2b}{3$ ص $-2b}$

جواب $\text{ا}=\frac{64\,b}{1025}$

جواب $\text{ا}=\frac{(b-$ ص $)^2}{2b-$ ص $}$

جواب $\text{ا}=\frac{b}{2}\sqrt{1-\frac{3}{b^2-1}}$

جواب $\text{ا}=\frac{b$ ص $}{$ ص $^2-2}\times\sqrt{$ ص $^2-4}$

جواب $\text{ا}=$ ص $\sqrt{1-\frac{$ ص $\,$س $}{2b}}$

جواب $\text{ا}=b$ ص $^{\frac{2}{3}}$

جواب $\text{ا}=$ ص $^2\sqrt{b^2-$ ص $^{\frac{2}{3}}}-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

جواب $\text{ا}=\frac{16}{25}$

جواب $\text{ا}=-\frac{24}{25}$

جواب $\text{ا}=b\times\frac{4-1}{\sqrt{4\,4^2-1}}$

جواب $\text{ا}=\frac{17b}{8}$

جواب $\text{ا}=\frac{24}{25}$

جواب $\text{ا}=\frac{1}{4}\left(1-b+\frac{1}{1-b}\right)^2$

جواب $\text{ا}=\frac{8b$ ص $}{\sqrt{1-14b^2}}$

جواب $\text{ا}=\frac{b^2}{b-$ ص $}\sqrt{3-\frac{2$ ص $}{b}}$

جواب $\text{ا}=\frac{1}{4b}\left($ ص $-\frac{4\,3^2}{4-1}\right)^2$

جواب $\text{ا}=\frac{2}{4}\sqrt{\frac{4^2-1}{4^2-4}}$

(۸۴) $\sqrt{ب^۲-ل^۲}+ل=\sqrt{ب^۲+ل^۲}$ جواب $ل=\sqrt{\frac{ب^۲-۱}{ب^۲+۳}}$

(۸۵) $(ب+ل)^{\frac{۱}{۲}}=(ص^۲+۸ب ل+ل^۲)^{\frac{۱}{۴}}$ جواب $ل=\frac{ب^۲-ص^۲}{۶ب}$

(۸۶) $\sqrt{ل^۲+۲ب ل}+\sqrt{ل^۲-۲ب ل}=\frac{۳ب ل}{\sqrt{ل^۲+۲ب ل}}$ جواب $ل=ب\left(\frac{ج^۲-۲}{۲}+ج^۲-۲\right)$

(۸۷) $\frac{\sqrt{۹ل+۱}}{۹ل-۱}=۴+\frac{\sqrt{۹ل-۱}}{۲}$ جواب $ل=\frac{۹}{۱۸}$

(۸۸) $\sqrt{(۲ب+ل)^۲+ص^۲}+\sqrt{(۲ب-ل)^۲+ص^۲}=۲ب$ جواب $ل=\sqrt{ب^۲+\frac{ص^۲}{۳}}$

(۸۹) $\sqrt{ب+\sqrt{ب^۲-ل^۲}}+\sqrt{ب-\sqrt{ب^۲-ل^۲}}=ا\sqrt{\frac{ب+ل}{ب-ل}}$ جواب $ل=ا\sqrt{ب-\frac{ا^۴}{۴ب}}$

(۹۰) $\frac{۱+ب ل}{۱-ب ل}\times\sqrt{\frac{۱+ص ل}{۱-ص ل}}=۱$ جواب $ل=\frac{۱}{ب}\sqrt{\frac{۲ب}{ص^۲}-۱}$

(۹۱) $\frac{۱-ل+ل^۲}{۱+ل+ل^۲}=\frac{۴۳}{۶۳}\times\frac{۱+ل}{۱-ل}$ جواب $ل=\frac{۱}{۵}$

(۹۲) $\left(\frac{ب+ل}{ب-ل}\right)^۲=۱+\frac{س ل}{ص}$ جواب $ل=ب\left(ا\pm۲\sqrt{\frac{ص}{س}}\right)$

(۹۳) $\frac{۱+ل^۳}{(۱+ل)^۲}+\frac{۱-ل^۳}{(۱-ل)^۲}=ب$ جواب $ل=\sqrt{\frac{ب+۴}{ب-۲}}$

(۹۴) $\sqrt{(۱+ل)^۲-ب ل}+\sqrt{(۱-ل)^۲+ب ل}=ا$ جواب $ل=۲\sqrt[۳]{\frac{(ب-۱)(ب-۳)}{ب}}$

(۹۵) $\frac{۱}{\sqrt{۱-ل+ل^۲}}+\frac{۱}{۱+ل+\sqrt{۱+ل^۲}}=\frac{۱}{ل}$ جواب $ل=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$

(۹۶) $ب+ص=\frac{۲ب\sqrt{۱+ل^۲}}{ل+\sqrt{۱+ل^۲}}$ جواب $ل=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{ص}{ب}}-\sqrt{\frac{ب}{ص}}\right)$

(۹۷) $ب(۱-ل)+\sqrt{۱+ب^۲}=ب\sqrt{۱+ل^۲}$ جواب $ل=\sqrt{\frac{۱+ب^۲}{ب^۲}}\times\sqrt{۱-ب^۲+ب\sqrt{۱+ب^۲}}$

(۹۸) $\frac{۱+۲ب\sqrt{ل^۲-۱}}{۱+۲ب\sqrt{ل^۲-۱}}=\frac{\sqrt{۱۰ل^۲-۱}-۱}{ل^۲-۲}$ جواب $ل=\sqrt{۱+۴(ب-۱)^۲}$

(۹۹) $\sqrt{\frac{ل}{۴}+۳}-\sqrt{\frac{ل}{۴}-۳}=\sqrt{\frac{۳ل}{۲}}$ جواب $ل=۹\sqrt{۲}$

(۱۰۰) $\sqrt{\frac{3ط}{4}-ل}+\sqrt{3ط ل-ل}=\frac{3ط}{2}\sqrt{1-4ل}$ جواب $ل=\frac{1}{12}\times\frac{3ط-1}{ط+1}$

(۱۰۱) $\sqrt[3]{1+ل}+\sqrt[3]{1-ل}=\sqrt[3]{2}$ ضمیمہ دیکھو جواب $ل=1$

(۱۰۲) $\frac{1+ط+\sqrt{1+ل}}{1+ط-\sqrt{1+ل}}+\frac{1-ل}{1-ل+\sqrt{1+ل^2}}=ط$ جواب $ل=\sqrt{(ط-2)^2-1}$

(۱۰۳) $\sqrt{ل^2+9}+\sqrt{ل^2-9}=4+\sqrt{34}$ جواب $ل=5$.

(۱۰۴) $\sqrt{ط^2ل^2+ص}\sqrt{ط ص ل+4ط^2ل^2+ص}+2ط ص ل+5ط^2ل^2=ط ل+ص$ جواب $ل=-\frac{ص}{2ط}$

(۱۰۵) $\frac{1+ل+\sqrt{2ل+ل^2}}{1-ل+\sqrt{2ل+ل^2}}=1-ط ل$ جواب $ل=\frac{4ط(ط+1)}{(ط+2)^2}$

(۱۰۶) $\sqrt{1+ط}\left(\frac{1-ل}{1+ل}\right)^{\frac{1}{4}}+\sqrt{1-ط}\left(\frac{1+ل}{1-ل}\right)^{\frac{1}{4}}=2(1-ط^2)^{\frac{1}{4}}$ جواب $ل=-ط$

(۱۰۷) $\sqrt{(1+ط)^2+(1-ط)ل}+\sqrt{(1-ط)^2+(1+ط)ل}=2ط$ جواب $ل=8$

(۱۰۸) $\frac{1+ل-\sqrt{2ل+ل^2}}{1+ل+\sqrt{2ل+ل^2}}=ط.\frac{\sqrt{2+ل}+\sqrt{ل}}{\sqrt{2+ل}-\sqrt{ل}}$ جواب $ل=\frac{1}{4}\left(ط^2+\frac{1}{ط^2}\right)-1$

(۱۰۹) $\frac{ط+ل+\sqrt{2ط ل+ل^2}}{ط+ل-\sqrt{2ط ل+ل^2}}=ص^2$ دیکھو ضمیمہ جواب $ل=\frac{ط}{2ص}(ص-1)^2$

(۱۱۰) $\frac{ط-ل+\sqrt{2ط ل-ل^2}}{ط-ل}=ص$ دیکھو ضمیمہ جواب $ل=ط-\frac{ط}{\sqrt{1+(ص-1)^2}}$

(۱۱۱) $\frac{ط-\sqrt{2ط ل-ل^2}}{ط+\sqrt{2ط ل-ل^2}}=ص$ جواب $ل=ط\frac{(1-\sqrt{ص})^2}{1+ص}$

(۱۱۲) $\frac{\sqrt{ط}-\sqrt{ط-ط ل}}{\sqrt{ط}+\sqrt{ط-ط ل}}=ص$ جواب $ل=ط\left(1-\left\{\frac{2\sqrt{ص}}{ص+1}\right\}^2\right)$

(۱۱۳) $\frac{\sqrt{ط^2+ل^2}-ط}{\sqrt{ط^2-ل^2}+ط}=ص$ جواب $ل=\frac{2ط\sqrt{ص}}{1+ص}\sqrt{1-ص}$

(۱۱۴) $\sqrt{ط+ل}+\sqrt{ط-ل}=\sqrt[4]{ط^2+ل^2}+\sqrt[4]{ط^2-ل^2}$ جواب $ل=\frac{2ط}{3}\sqrt[4]{5}$

(۱۱۵) $\frac{ط+لا}{\sqrt{ط}+\sqrt{ط+لا}} + \frac{ط-لا}{\sqrt{ط}+\sqrt{ط-لا}} = \sqrt{ط}$ جواب $لا = \frac{ط}{۲}\sqrt{۲}$ یا ۰

(۱۱۶) $\frac{\sqrt{۱+لا}-۱}{\sqrt{۱+لا}+۱} + \frac{\sqrt{۱-لا}+۱}{\sqrt{۱-لا}-۱} = ط$ جواب $لا = \frac{۴}{ط}\sqrt{۱-(\frac{۲}{ط})^۲}$

(۱۱۷) $\frac{لا\sqrt{لا^۲-لا}\sqrt{۱-لا}}{لا-\sqrt{لا^۲-لا}\sqrt{۱-لا}} = \frac{۱}{\sqrt{۱-لا}}$ جواب $لا = \frac{۱۶}{۲۵}$

(۱۱۸) $(۱+لا)\sqrt{۱+ط}+(۱-لا)\sqrt{۱-ط} = ۲\sqrt{۱+لا^۲}$ جواب $لا = \frac{۱}{ط}\sqrt{۱-(\frac{۱}{ط})^۲}$

(۱۱۹) $\sqrt[۴]{لا^۴-۱}+لا\sqrt{لا^۲-۱} = لا^۳$ جواب $لا = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}$

(۱۲۰) $\sqrt{لا+۲\sqrt{۲ط-لا}} = \sqrt{لا+\sqrt{۲ط^۲-۳ط لا+لا^۲}}$ جواب $لا = ۲ط$ یا $ط$ یا $\frac{۶۱ ط}{۱۰۲۵}$

(۱۲۱) $\frac{۳}{۱۹}\sqrt{لا^۲+۹۳لا+۴۳۷}-\sqrt{لا^۲+۲۰لا+۵۰} = \sqrt{\frac{لا+۲۲}{لا+۱۰}}$ ضمیمہ دیکھو جواب $لا = ۷۸$

(۱۲۲) $\frac{۲۴۳+۲۴\sqrt{۳لا}}{۱۶لا-۳} = (۴\sqrt{لا}-۳)^۲$ دیکھو ضمیمہ $لا = ۳$

(۱۲۳) $\left(لا+ط+\sqrt{لا^۲+۲ط لا+ص^۲}\right)^۳ + لا+ط-\sqrt{لا^۲+۲ط لا+ص^۲} = ۱۴(لا+ط)^۲$

جواب $لا = -ط$ یا $لا = \pm\sqrt{ص^۲-ط^۲} - ط$ اسکو بھی ضمیمہ مین دیکھو

(۱۲۴) $ص\left(\frac{ط-ص}{لا}+۱\right)\left(\frac{ط-۲ص}{لا}+۱\right) = \frac{ط^۲}{لا} - ط$ جواب $لا = ص$ یا $\frac{ط-ص}{ط+ص}(ط-۲ص)$ ضمیمہ مین دیکھو

(۱۲۵) $\left(\frac{لا+ط}{لا+ص}\right)^۲ - \frac{ط-ص}{۲(لا+ص)} = ۱$ دیکھو ضمیمہ کو جواب $لا = \frac{۴س(س-ص)-ص(ط-ص)}{ط+۳ص-۴س}$

(۱۲۶) $\frac{لا+ط}{لا+ص} = \left(\frac{۲لا+ط+س}{۲لا+ص+س}\right)^۲$ دیکھو ضمیمہ کو جواب $لا = \frac{س^۲-ط ص}{ط+ص-۲س}$

(۱۲۷) $\frac{ط+س(ط+لا)}{ط+س(ط-لا)} + \frac{ط+لا}{لا} = \frac{ط}{ط-۳س لا}$ جواب $لا = \frac{ط}{س} \times \frac{۱+س}{۳+۲س}$

(۱۲۸) $\left(\frac{لا-ط}{لا-ص}\right)^۳ = \frac{لا-۲ط+ص}{لا-۲ص+ط}$ جواب $لا = \frac{ط+ص}{۲}$

(۱۲۹) $لا+ط+۳\sqrt{ط ص لا} = ص$ دیکھو ضمیمہ جواب $لا = \left(\sqrt{ص}-\sqrt{ط}\right)^۳$

(۱۳۰) $(لا-ط)\sqrt{لا}-(لا+ط)\sqrt{ص}=ص\left(\sqrt{لا}-\sqrt{ص}\right)$ دیکھو ضمیمہ جواب $لا=ص$ یا $(\sqrt{ط}+\sqrt{ص})^{۲}$

(۱۳۱) $ط+(ص+\sqrt{لا})\sqrt{لا}=(ص-\sqrt{لا})\sqrt{۲ط+لا}$ جواب $لا=\frac{ط}{۳}\sqrt[۳]{ط ص^{۲}}$ دیکھو ضمیمہ $\frac{ط ص}{۲}-ط^{۲}$

(۱۳۲) $\frac{۲ط\sqrt{۱+لا}}{۱-لا+\sqrt{۱+لا}}=ط+ص$ جواب $لا=\frac{(ط-ص)^{۲}}{۸ط ص}\left\{\sqrt{۱+\frac{۸ط ص}{(ط-ص)^{۲}}}-۱\right\}^{۲}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۳) $\frac{۲لا^{۲}+۱+لا\sqrt{۴لا^{۲}+۳}}{۲لا^{۲}+۳+لا\sqrt{۴لا^{۲}+۳}}=ط$ جواب $لا=\frac{۳ط-۱}{(۱-ط)(۹ط-۱)}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۴) $\frac{(ط^{۲}-۱)ط+ط^{۲}لا+لا\sqrt{۲ط^{۲}-۱}}{(ط^{۲}-۱)ط+ط^{۲}لا-لا\sqrt{۲ط^{۲}-۱}}=\frac{(ط^{۲}-۱)(ط+لا)^{۲}}{(۱-ط^{۲})^{۲}}-۲ط$ جواب $لا=\sqrt{۱-ط^{۲}}\times\frac{ط^{۲}+۲ط^{۲}-۱}{\pm\sqrt{ط^{۲}-۱}}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۵) $\frac{۱-ط لا+\sqrt{۱+ط^{۲}-ط^{۲}لا^{۲}}}{۱-ط لا-\sqrt{۱+ط^{۲}-ط^{۲}لا^{۲}}}=ط$ جواب $لا=\frac{۱}{ط}$ یا $\frac{۲ط(ط^{۲}-۳)}{(ط^{۲}-۱)^{۲}}$ دیکھو ضمیمہ $\frac{۱}{۲}-(ط^{۲}-ط-۱)\sqrt{ط-۱}\sqrt{۱+ط^{۲}}$

(۱۳۶) $\left(\frac{۲لا+۳}{۲لا-۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}+\left(\frac{۲لا-۳}{۲لا+۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۸}{۱۳}$ جواب $لا=\frac{۱۳}{۱۴}$ یا $\frac{۴لا^{۲}+۹}{۴لا^{۲}-۹}$ دیکھو ضمیمہ

(۱۳۷) $\frac{ط ص}{۲}\left\{(ص-س)^{۲}+(ص_{۲}+س_{۲})س لا\right\}\sqrt{\frac{ط}{۴}(ص-س)^{۴}+(ص_{۲}+س_{۲})^{۲}لا^{۲}}$

$=\left\{\frac{ط ص}{۲}(ص-س)^{۲}-(ص_{۲}+س_{۲})س لا\right\}\sqrt{\frac{ط}{۴}(ص+س)^{۴}+(ص_{۲}+س_{۲})^{۲}لا^{۲}}$ جواب $لا=\frac{ط}{۲}\frac{س^{۲}-ص^{۲}}{س^{۲}+ص^{۲}}$

---

(۱) $۳لا+۵ز=۸$
$۴لا+۳ز=۷$
جواب $(لا=۱ \quad ز=۱)$

(۲) $۴لا-۳ز=۲$
$۵لا-۲ز=۹\frac{۱}{۲}$
جواب $(لا=۳\frac{۱}{۲} \quad ز=۴)$

(۳) $۹لا-۴ز=۸$
$۱۳لا+۷ز=۱۰۱$
جواب $لا=۴$
$ز=۷$

(۴) $۳۵۴لا+۸ز=۳۵۰$
$۱۲۱ز-۱۳لا=۱۳۲$
جواب $لا=۶$
$ز=۱۰$

(۵) $\frac{۱}{۸}لا+\frac{۱}{۹}ز=۴۲$
$\frac{۱}{۹}لا+\frac{۱}{۸}ز=۴۳$
جواب $لا=۱۴۴$
$ز=۲۱۶$

(٦) $2\frac{1}{2}u + 3\frac{1}{3}v = 28$

$4\frac{1}{3}u + 10v = 126$

جواب $u = 8$

$v = 9$

(٧) $2u - \frac{v-3}{5} = \frac{5u-2}{2}$

$2v - \frac{u-5}{3} = \frac{7v-7}{2}$

جواب $u = 2$

$v = 3$

(٨) $\frac{u+11}{10} + \frac{v-4}{6} = u - 7$

$\frac{u+5}{7} - \frac{v-7}{3} = 4v - u$

جواب $u = 9$

$v = 4$

(٩) $\frac{u+2}{7} + \frac{v-u}{4} = 2u - 8$

$\frac{3v-3u}{3} + 2v = 3u + 4$

جواب $u = 5$

$v = 9$

(١٠) $(u+5)(v+7) = (u+1)(v-9) + 112$

$2u + 10 = 3v + 1$

جواب $u = 3$

$v = 5$

(١١) $\frac{2u+v}{9} + \frac{7v+6u+11}{18} = \frac{5u-17}{6} - \frac{19}{2}$

$\frac{7}{3}(5u + 3v + 2) = \frac{1}{4}(6v + 4)$

جواب $u = 7$

$v = 4$

(١٢) $\frac{3u-5v}{3} - \frac{2u-8v-9}{12} = \frac{v}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

(١٣) $3\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4} + 1\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}\left(4u - \frac{v}{8} - 24\right)$

جواب $u = 7$

$v = 4$

(١٤) $u + 6 = 31\frac{1}{5} - \frac{4u+12v}{10}$

$\frac{1}{121} + \frac{1}{484} = \frac{4+5+6}{5445}$

جواب $u = 10$

$v = 11$

(١٥) $16u + 6v - 1 = \frac{128u^2 - 18v^2 + 216}{8u - 3v + 2}$

$\frac{4u + 8v - 5}{3u + 2v - 1} = 5 - \frac{54}{10u + 10v - 35}$

جواب $u = 6$

$v = 5$

(۱۵) $\frac{۲}{۳}(لا-\frac{۳}{۵}ک)+\frac{لا+\frac{۱}{۲}ک}{۶}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}$ $\left(\frac{۴}{۵}ک-۲-(لا-ک)\right)$ جواب $لا=۳$

$لا-۲ک-\frac{۳لا-۱۵ک}{۲}=\frac{۱۱}{۲}(لا+ک)+۳(لا-ک)$ $لا=-۲\frac{۱}{۳}$

(۱۶) $\frac{۴۲لا}{۱۰}+\frac{۳۲}{۱۰۰}ک-\frac{\frac{۳۶}{۱۰۰}لا-\frac{۵}{۱۰۰}}{\frac{۵}{۱۰۰}}=\frac{۸}{۱۰}لا+۲\frac{۶}{۱۰}ک+\frac{۵}{۱۰۰۰}$ ×

$\frac{\frac{۱}{۱۰}لا-\frac{۷}{۱۰۰}}{\frac{۶}{۱۰}}=\frac{\frac{۱}{۱۰}ک+\frac{۴}{۱۰۰}}{\frac{۳}{۱۰}}$ جواب $لا=۱۰$ اور $ک=۵$

(۱۷) $ط لا=ص ک$ $لا+ب=س$ جواب $لا=\frac{ص س}{ط ص}ک=\frac{ط س}{ط+ص}$

(۱۸) $ط لا+ص ک=م$ $ط' لا+ص' ک=م'$ جواب $لا=\frac{ص م-ص' م}{ط ص'-ط' ص}$ $ک=\frac{ط م'-ط' م}{ط ص'-ط' ص}$

(۱۹) $ط لا-ص ک=ط^۲$ $ص لا-ط ک=ص^۲$ جواب $لا=ط+\frac{ص^۲}{ط+ص}ک=\frac{ط ص}{ط+ص}$

(۲۰) $\frac{م}{لا}+\frac{ن}{ک}=ط$ $\frac{ن}{لا}+\frac{م}{ک}=ص$ جواب $لا=\frac{م^۲-ن^۲}{م ط-ن ص}ک=\frac{م ص-ن ط}{م^۲-ن^۲}$

(۲۱) $ط(لا+ک)+ص(لا-ک)=س(لا+ک)+کہ(لا-ک)=۱$ جواب $لا=\frac{ط-ص-(س-کہ)}{۲(ط کہ-ص س)}$ $ک=\frac{ط+ص-(س+کہ)}{۲(س ص-ط کہ)}$

(۲۲) $\sqrt{۳}ط لا+\sqrt{۳}ص ک=\frac{۱}{۲}(لا+ک)=ط+ص$ جواب $لا(\sqrt{۳}ط\pm\sqrt{۳}ص)^۲ ک=(\sqrt{۳}ط\mp\sqrt{۳}ص)^۲$

(۲۳) $ط لا ک=س(ص لا+ط ک)$ $ص لا^۲=س(ط لا-ص ک)$ جواب $لا=\frac{ط^۲+ص^۲}{ط^۲-ص^۲}\times س$ $ک=\frac{ط^۲+ص^۲}{۲ط ص}\times س$

(۲۴) $ط(لا^۲+ک^۲)-ص(لا^۲-ک^۲)=۲ط$ $(ط^۲-ص^۲)(لا^۲-ک^۲)=۴ط ص$ جواب $لا=\sqrt{\frac{ط+ص}{ط-ص}}$ $ک=\sqrt{\frac{ط-ص}{ط+ص}}$

(۲۵) $\sqrt{ک-لا}-\sqrt{ط-لا}=\sqrt{ک-لا}$ $۲\sqrt{ک-لا}+۲\sqrt{ط-لا}=۵\sqrt{ط-لا}$ جواب $لا=\frac{۴}{۵}ط$ $ک=\frac{۵}{۴}ط$

(۲۶) $\frac{لا}{ط}+\frac{ک}{ص}=1-\frac{لا}{س}$

$\frac{ک}{ط}+\frac{لا}{ص}=1+\frac{ک}{س}$

جواب $لا=\frac{(طص+طس-سص)طصس}{ط^2ص^2+ط^2س^2-ص^2س^2}$

$ک=\frac{(طس-طص-صس)طصس}{ط^2ص^2+ط^2س^2-ص^2س^2}$

(۲۷) $(ط^2-ص^2)(۳لا+۲ک)=(۴ط-ص)۲طص$

جواب $لا=\frac{صط}{ط-ص}$

$ط^2لا-\frac{طص^2س}{ط+ص}+(ط+ص+س)صک=ص^2لا+(ط+۲ص)طص$ $ک=\frac{صط}{ط+ص}$

(۲۸) $لا(صس-لاک)=ک(لاک-طس)$

$لاک(طک+صلا-لاک)=طصس(لا+ک-س)$

جواب $لا=\pm\sqrt{طس}$ دیکھو ضمیمہ مین

$ک=\pm\sqrt{صس}$

(۲۹) $لا^3+ک(لاک-1)=0$

$ک^3-لا(لاک+1)=0$

جواب $لا=\left(\frac{1}{۲}(\sqrt{۲}-1)\right)^{\frac{1}{۴}}$ دیکھو ضمیمہ

$ک=\frac{1}{\sqrt[۴]{۲}(\sqrt{۲}-1)}$

(۳۰) $\sqrt{لا+ک}-\sqrt{لا-ک}=ط$

$\sqrt[۴]{لا+ک}+\sqrt[۴]{لا-ک}=ص$

جواب $لا=\left\{\frac{ط^2}{۴}+\left\{\frac{1}{۴}(ص^2+\frac{ط^2}{ص^2})\right\}^2\right\}^2$

$ک=\frac{ط}{۴}(ص^2+\frac{ط^2}{ص^2})$

(۳۱) $(لا^2-لاک+ک^2)(لا^2+لاک+ک^2)=91$

$(لا^2-لاک+ک^2)(لا^2+لاک+ک^2)=۱۳×۷$

جواب $لا=۲$ یا -۳

$ک=۳$ یا -۲

(۳۲) $ک+۳\sqrt[۳]{ک}\left\{۲\sqrt[۳]{ط+صلا}-\sqrt[۳]{ک}\right\}=۲ط$

جواب $لا=\frac{ط-۱}{ص}$

$ک=\left\{\sqrt[۳]{۲ط-۱}+۱\right\}^3$

$\sqrt[۳]{ک}-\sqrt[۳]{ط+صلا}=\frac{ک-۳\sqrt[۳]{ک}\sqrt[۳]{ط^2-ص^2لا^2}}{\sqrt[۳]{ک}-\sqrt[۳]{ط+صلا}}=۲ط-ط-صلا$

(۱) $۲لا-ک+ع=۱۷$

$۵لا+۳ک-۲ع=۱۰$

$۷لا+۴ک-۵ع=۳$

جواب $لا=۴$

$ک=۰$

$ع=۵$

(۲) $۳لا+۴ع=۵۷$

$۵لا+۳ک=۶۵$

$۲ک-ع=۱۱$

جواب $لا=۷$

$ک=۱۰$

$ع=۹$

(۳) $ک + \frac{۱}{۴} ا = ۱۴$

$ا + \frac{۱}{۴} ع = ۲۰\frac{۱}{۲}$

$ک + \frac{۱}{۵} ع = ۲۴$

جواب $ا = ۱۸$

$ک = ۳۲$

$ع = ۱۰$

(۴) $ا + \frac{۱}{۴} (ک + ع) = ۱۰۲$

$ک + \frac{۱}{۴} (ع + ا) = ۷۷$

$ع + \frac{۱}{۴} (ا + ک) = ۱۹$

جواب $ا = ۲۶$

$ک = ۲۴$

$ع = ۳۴$

(۵) $\frac{ع}{ا + ک} = \frac{۱۲}{۲۴}$

$\frac{ع}{ا - ک} = \frac{۱۲}{۲۰}$

جواب $ا = ۱۲۸$

$ک = ۴۸$

$ع = ۷۶$

(۶) $\frac{ع}{ا^۲ - ک^۲} = \frac{۱۲}{۲۵۲۰}$

(۷) $۴ا - ۵ک + ۶ع = ۲۷ - ۱۱ک + ۱۰ع = ا + ک + ع = ۲$ جواب $ا = ۲$

$ک = ۱$

$ع = ۰$

(۷) $\frac{۴ع - ۷}{۶ک - ۴ا} = \frac{۲ک - ۳ع}{۵ع - ا} = \frac{۳ک - ۲ا}{ک - ۲ع} = ۱$ جواب $ا = ۱۰$

$ک = ۷$

$ع = ۳$

(۸) $ا + \frac{۱}{۲} (ک + ع) = ک + \frac{۳}{۲} (ا + ع) = \frac{۳}{۴} (ا + ک) = ا + ک + ع - ۴$ جواب $ا = ۱۰$

$ک = ۶$

$ع = ۲$

(۹) $\frac{ا}{۲} + \frac{ک}{۱} = \frac{۳}{۲}$

$\frac{ع}{۳} - \frac{ک}{۲} = ۲$

$\frac{ا}{۱} + \frac{ع}{۳} = \frac{۴}{۳}$

جواب $ا = ۱$

$ک = -۳$

$ع = ۳$

(۱۰) $\frac{ا}{۳} - \frac{۳ک}{۵} + \frac{ع}{۱} = ۳\frac{۲۴}{۴}$

$\frac{۱}{۸ا} + \frac{۱}{ک} + \frac{۱}{ع} = ۶\frac{۲۷}{۱۱}$

$\frac{۶۸}{۵} - \frac{ک}{۱} \cdot \frac{ع}{۴} = ۱۲\frac{۱}{۳۴}$

جواب $ا = ۶$

$ک = ۹$

$ع = \frac{۱}{۳}$

(۱۱) $\frac{۱۱ع + ۲ک}{۱۵ک + ۶۷} = \frac{۸ا - ک}{۵}$

$\frac{ا + ۳ع}{۱۲ع - ۳\frac{۱}{۲}ک} = \frac{ا - ک}{۲}$

$\frac{۲ک + ۳\frac{۱}{۲}ع}{۶ع + ۳\frac{۱}{۲}ک} = \frac{۷}{۲ + ۳ع}$

جواب $ا = ۶$

$ک = ۱$

$ع = ۳$

(۱۲) $\frac{۳}{ل} - \frac{۴}{۵ک} + \frac{۱}{ع} = \frac{۳}{۵}۷$

$\frac{۱}{۱۵ل} + \frac{۱}{۲ک} + \frac{۲}{ع} = \frac{۱}{۶}۱۰$

$\frac{۴}{۵ل} - \frac{۱}{۲ک} + \frac{۴}{ع} = \frac{۱}{۱۰}۱۶$

جواب $ل = \frac{۱}{۲}$

$ک = \frac{۱}{۴}$

$ع = \frac{۱}{۴}$

(۱۳) $\frac{ل+ع-۳}{۱۴} + \frac{۴ک-ع+۵}{۹} = \frac{ل-۴}{۳}$

$\frac{۵ل-۶ک+ع}{۷} + \frac{۳ل-ک+ع+۱}{۱۱} = \frac{۲ک+ع-۵}{۳}$

$\frac{۵ک-۸ع+۴}{۱۲} - \frac{ل-۳ع+۵}{۶} = ۲ک+۳ع-۱۲$

جواب $ل = ۲۵$

$ک = ۱۶$

$ع = ۶$

(۱۴) $ل + ک + ع = ۰$

$(ط+ص)ل + (ط+س)ک + (ص+س)ع = ۰$

$ط ص ل + ط س ک + ص س ع = ۱$

جواب $ل = \frac{۱}{(ط-س)(ص-س)}$

$ک = \frac{-۱}{(ط-ص)(ص-س)}$

$ع = \frac{۱}{(ط-ص)(ط-س)}$

(۱۵) $ل - ط ک + ط^۲ ع - ط^۳ = ۰$

$ل - ص ک + ص^۲ ع - ص^۳ = ۰$

$ل - س ک + س^۲ ع - س^۳ = ۰$

جواب $ل = ط ص س$

$ک = ط ص + ط س + ص س$

$ع = ط + ص + س$

(۱۶) $۵ل - ۱۱\sqrt{ک} + ۱۳\sqrt{ع} = ۲۲$

$۴ل + ۶\sqrt{ک} + ۵\sqrt{ع} = ۳۱$

$ل - ۳\sqrt{ک} + ۲\sqrt{ع} = ۲$

جواب $ل = ۱$

$ک = ۴$

$ع = ۲۷$

(۱۷) $ل ک = ط (ل + ک)$

$ک ع = ص (ک + ع)$

$ع ل = س (ع + ل)$

جواب $ل = \frac{۲ ط ص س}{ط س + ص س - ط ص}$

$ک = \frac{۲ ط ص س}{ط ص + ص س - ط س}$

$ع = \frac{۲ ط ص س}{ط ص + ط س - ص س}$

(۱۸) $ل (ل + ک + ع) = ط^۲$

$ک (ل + ک + ع) = ص^۲$

$ع (ل + ک + ع) = س^۲$

جواب $ل = \sqrt{\frac{ط^۲}{ط^۲ + ص^۲ + س^۲}}$

$ک = \sqrt{\frac{ص^۲}{ط^۲ + ص^۲ + س^۲}}$

$ع = \sqrt{\frac{س^۲}{ط^۲ + ص^۲ + س^۲}}$

(۱۹) $ل (ک + ع) = ط$

$ک (ل + ع) = ص$

$ع (ل + ک) = س$

جواب $ل = \sqrt{\frac{(ط+ص-س)(ط+س-ص)}{۲(ص+س-ط)}}$

$ک = \sqrt{\frac{(ط+ص-س)(ص+س-ط)}{۲(ط+س-ص)}}$

$ع = \sqrt{\frac{(ص+س-ط)(ط+س-ص)}{۲(ط+ص-س)}}$

(۲۰) $\sqrt{ل+\frac{1}{2}ک+۲ع}+۳\sqrt{ل+۵ک-ع}-۴\sqrt{ل+ک+ع}=۱۰$ جواب ل = ۷

$\sqrt{ل+ک+۲ع}+۲\sqrt{ل+۵ک-ع}-۳\sqrt{ل+ک+ع}=۲$

$\frac{1}{2}\sqrt{۴ل+۲ک+۱۲ع}-\sqrt{۲ل+۱۰ک-۲ع}+\sqrt{۲ل+۲ک+۲ع}=۳$

ع = ۵

ک = ۶

(۲۱) $ل^{-۲}ک^{-۱}ع=\frac{1}{12}$ جواب ل = ۱ (۲۲) $ل^{-۱}ک^{-۱}ع^{-۱}=(۵۰)^{-۱}$ جواب ل = ۳

$ل^{۲}ک^{۳}ع=۱۰۸$ ک = ۲ $ل^{-۱}ک^{-۱}ع^{-۱}=۳(۵۰)^{-۱}$ ک = ۵

$ل^{۳}ک^{۲}ع=۱۰۸$ ع = ۳ $ل^{-۱}ک^{-۱}ع=۲\frac{1}{7}$ ع = ۷

(۲۳) $ل^{۲}ک^{۳}ع^{۴}=ط$ جواب ل = $\sqrt{\frac{ص ن^{۱۱}}{ط^{۸}}}$

$ل^{۳}ک^{۴}ع^{۲}=ص$ ک = $\sqrt{\frac{ط^{۸}}{ص ن^{۱۱}}}$

$ل^{۴}ک^{۲}ع^{۳}=س$ ع = $\sqrt{\frac{ص ن^{۱۱}}{ط^{۸}}}$

(۲۴) $لوغ ۲=۰.۳۰۱$ جواب ل = ۳

$لوغ ۳=۰.۴۷۷$ ک = ۷

$لوغ ۵=۰.۶۹۹$ ع = ۱۱

$لوغ م=۰.۶۶۰$ م = ۲۰

ن = ۱۰ط

(۲۵) $ل(ک+ع)^{۲}=۱+ط^{۲}$ اور $ل+ک=\frac{۳}{۴}+ک ع=\frac{۱۴}{۳}$ جواب $ک=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\sqrt{(ط-۱)^{۲}+ط^{۲}}$

$ع=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\sqrt{(ط-۱)^{۲}+ط^{۲}}$

(۲۶) $ل+۲ک+۳ع+۴د=۲۷$ جواب ل = ۱

$۳ل+۵ک+۷ع+۶د=۴۸$ ک = ۳

$۵ل+۷ک+۱۰ع+۸د=۶۵$ ع = ۲

$۷ل+۹ک+۵ع+۱۲د=۵۳$ د = ۴

(۲۷) $۷ل-۲ع+۳د=۱۷$ جواب ل = ۴

$۳ک+۲ع+ر=۱۱$ ر = ۱

$۵ک-۳ل-۲د=۷$ ک = ۴

$۵ک-۳ع+۲ر=۹$ ع = ۳

$۲ع+۷د=۳۳$ د = ۳

(ا) $۳ل-۲ک+۵ع=۱۴$ (۲) $۳ل-۲ک+۵ع=۱۴$ (۳) $۲ل-ک+۲ع=۷$

$۲ل+ک-۷ع=۱۰$ $۶ل-۴ک-۲ع=۱۰$ $۶ل-۳ک+۱+۲ع=۱۰$

$۷ل-۳ک+۲ع=۷۳$ $۶ل-۶ک+۲=۰$ $۶ل-۶ک+۲=۰$

یہ تینوں مساواتیں خط مستقیم ہیں

(ا) $۵ل^{۲}-۱۲ل+۲=۱۱$ جواب ل = ۴ یا $-\frac{۵}{۲}$ (۲) $ل^{۲}=۵ل+۶۰۰$ جواب ل = ۸۰ یا -۵۷

(۳) $۳ل^{۲}-۵۵ل+۳۴=۰$ جواب ل = ۱۷ یا $\frac{۲}{۳}$ (۴) $۵ل^{۲}-۲۵ل=۱۰۰۰$ جواب ل = $۵\frac{۱}{۲}$ یا $-۴\frac{۱}{۲}$

(۵) $۱۱۰ل^{۲}-۱۲ل+۱=۰$ جواب ل = $\frac{۱}{۱۰}$ یا $\frac{۱}{۱۱}$ (۶) $۱۰۷ل^{۲}-۳۷ل+۱=۰$ جواب ل = $\frac{۱}{۱۳}$ یا $\frac{۱}{۱۰}$

(۷) $۲۵ل^{۲}-۷ل=۷۱\frac{۱}{۴}$ جواب ل = $\frac{۶}{۵}$ یا $-\frac{۴۳}{۲۵}$ (۸) $\frac{ل+۱}{ل-۱}-\frac{ل-۱}{ل+۱}=۱$ جواب ل = $۲\pm\sqrt{۵}$

(۹) $\frac{ل-۱}{ل+۲}-\frac{۲ل}{۳-ل}=۲\frac{۱}{۴}$ جواب ل = ۳ یا $-\frac{۵}{۴}$ (۱۰) $\frac{۳-ل}{۲}+\frac{۲-ل}{۳}=۵$ جواب ل = $۲\pm\frac{۱}{۱۰}\sqrt{۵۱}$

(۱۱) $۴(ل-۱)-\frac{۲ل}{ل-۱}=۳\frac{۳}{۴}$ جواب ل = $۲\frac{۱}{۱۶}$ (۱۲) $\frac{ل+۲}{ل-۱}+\frac{ل}{ل+۱}=۲\frac{۱}{۴}$ جواب ل = ۲ یا -۳

(۱۳) $\frac{۱}{ل-۱}-\frac{۱}{ل+۳}=\frac{۱}{۲۵}$ جواب ل = ۱۱ یا -۱۳ (۱۴) $\frac{۲ل+۱}{۲ل-۱}+\frac{۱۱}{۱۳}=\frac{۳ل-۹}{۳ل+۵}$ جواب ل = ۵ یا $-\frac{۶}{۱۱}$

(۱۵) $\frac{ک-۵}{۱۲}+\frac{۴ک-۵}{۸}=\frac{ک+۲}{۳۲}$ جواب ک = $۳\frac{۱}{۲}$ (۱۶) $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{ک+۵}-\frac{۱}{ک+۲۸}=۰$ جواب ک = $۲(۱\pm۲\sqrt{۲})$

(۱۷) $\frac{ل^{۲}-ل-۴}{ل^{۲}+۳ل+۶}=\frac{ل^{۲}+۲ل+۱۵}{۲ل^{۲}+۳ل+۱۰}$ ل = $۲\frac{۱}{۱۳}$ یا -۲

(۱۸) $2\sqrt{3n+7} = 6+\sqrt{12n-3}$ جواب $n = 14$ یا $2\frac{12}{25}$

(۱۹) $\sqrt{(n^2+\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4n+1})} = n+1$ $n = 10\frac{1}{2} - 11\frac{1}{10}$

(۲۰) $\sqrt{(n-1)(n-2)} + \sqrt{(n-3)(n-4)} = \sqrt{2}$ $n = 3$ یا 2

(۲۱) $n^2+\sqrt{n^2-5} = 11$ جواب $n = \pm 3$ (۲۲) $n+2-\frac{n+2}{6} =$ اجواب $n = 1$ یا -4

(۲۳) $n^2+n+1 = \frac{n^2+n}{42}$ جواب $n = 2$ یا -3 (۲۴) $6n+24\sqrt{6n+24} = 10n^2-4$ جواب $n = 1\frac{1}{2}$ یا $-\frac{3}{4}$ وغیرہ

(۲۵) $n^2-n+3\sqrt{2n^2-3n+2} = \frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}$ $n = 2$ یا $-\frac{1}{2}$

(۲۶) $n(\sqrt{n+1})^2 = 20(n+\sqrt{n})-576$ $n = 64$ یا 64 وغیرہ

(۲۷) $(6+5\sqrt{3})n^2-(51+7\sqrt{2})n+40 =$ جواب $n = 3$ یا $2-\sqrt{2}$

(۲۸) $5\sqrt{2n^2+3n}-\frac{1}{2}\sqrt{56\frac{3}{4}n-5n} = 14$ جواب $n = 6\frac{1}{2}$

(۲۹) $\frac{n+2}{3\sqrt{n}-n^2} = \frac{1+2\sqrt{n-2n}}{12n+3\sqrt{n-2n}}$ $n = 4$ یا $\frac{1}{25}$

(۳۰) $\frac{1}{n^2+11n-7} + \frac{1}{n^2+2n-7} + \frac{1}{n^2-3n+7} = 0$ جواب $n = \pm 7$ یا 1

(۳۱) $\frac{q^2}{n^2}+\frac{p}{n} = 2$ $\frac{p}{q^2}$ جواب $n = \frac{p}{q^2}$ یا $-\frac{p}{2q^2}$

(۳۲) $\frac{3n(q-n)}{3q-2n} = \frac{q}{4}$ $n = \frac{q}{4}$ یا $\frac{3q}{2}$

(۳۳) $\frac{n+p}{\sqrt{n}} = \frac{nq+p}{\sqrt{q}}$ $n = q$ یا $\frac{p^2}{q^2}$

(۳۴) $\sqrt{q+n}+\sqrt{q-n} = \frac{5\sqrt{q+n}}{2\sqrt{q}}$ $n = \frac{5}{3}q$ یا $\frac{5}{3}q$

(۳۵) $\frac{\sqrt{q-n}}{q+n}+\frac{\sqrt{q+n}}{q-n} = 2\sqrt{q}$ $n = \pm q\sqrt{2-11}$

(۳۶) $qn+2\sqrt{n^2n+nq^2} = (2n-1)n$ $n = \frac{p-1}{n}$ یا $\frac{p^2-q}{n}$

(۳۷) $n+\sqrt{n^2-qn+p^2} = \frac{q}{n^2}+p$ $n = q$ یا $\frac{q}{2}(1\pm\sqrt{5-\frac{q}{2p}})$

(۳۸) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = n(n-1)$ $n = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ یا $\pm\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

(۳۹) $\frac{7q}{n^2}+\frac{3}{2n} = \sqrt{\frac{3q}{n^2}+\frac{3}{4}}-\frac{2}{q}$ $n = -6q$ یا $-\frac{3}{2q}$

(۴۰) $(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}} = 3n^{\frac{1}{2}}$ $n = (3\pm 2\sqrt{3})^2$

(۴۱) $q+n+\sqrt{2qn+n^2} = \frac{3\sqrt{5qn+n^2}}{3n^2-6qn}$ جواب $n = \frac{5}{4}q$ یا $(\frac{3}{2}\sqrt{3}-1)2q$

(۴۲) $(1-\frac{2ص}{1})^2 = \frac{ط}{2}(ط+ص)(1+\frac{1^2}{ط^2})$ $\quad 1 = \sqrt{2ط ص + ط^2}\,\frac{1}{2}(ص-ط)$

(۴۳) $2ق 1^2 - 2ن 1 + ت 1 - ن ت = 0$ $\quad 1 = \frac{ن}{ق}$ یا $-\frac{ت}{2}$

(۴۴) $\sqrt{1+\sqrt{21-1}} - \sqrt{1-\sqrt{21-1}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{10 1^2}{1+\sqrt{21-1}}}$ $\quad 1 = 2\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{8}$

(۴۵) $(1-ط)^2 + 2\sqrt{1}(1-ط) = ط^2 + \sqrt{1}$ $\quad 1 = 2ط + \frac{1}{2} \pm \sqrt{2ط - 11 \cdot \frac{1}{4}}$

(۴۶) $1^2(ط+1) + ص 1(ط+1) = ص - (1+2ص)$ $\quad 1 = -ص$ یا $\pm\sqrt{ص^2 - 1} - \frac{1}{2}$

(۴۷) $\sqrt{ط+1} + \sqrt{ط-1} = ص$ $\quad 1 = \pm\sqrt{ط^2 - (ص \pm \sqrt{ط + \frac{1}{4}})^2}$

(۴۸) $\sqrt{21^2-1} + \sqrt{1-ط^2}\sqrt{1-1^2} = ط 1$ $\quad 1 = \left(\frac{5ط^2 - 6 \pm 2ط\sqrt{2(ط^2-1)}}{4-8ط^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(۴۹) $2\sqrt{1^2} - 1 - 2\sqrt{1} \times \sqrt{1-1^2} = 1\frac{1}{2}$ سفحہ ۱۲۵ میں اس کا حل ہی $\quad 1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(۵۰) $\frac{(1+1)^2}{1+1^2} + \frac{(1-1)^2}{1-1^2} = ط$ $\quad 1 = \left(\frac{ط}{2} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{ط^2}{4} - \frac{ط}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

(۵۱) $\frac{1+1^3}{(1+1)^2} + \frac{1-1^3}{(1-1)^2} = ط$ $\quad 1 = \left(\frac{ط+4 \pm 2\sqrt{3(ط+1)}}{ط-2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(۵۲) $16(1^2+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{\sqrt{1^2+2}} = 23 1^2 + 48$ $\quad 1 = \pm\frac{1}{2}$

(۵۳) $(1+3)^2 - 2(1^2+3) = 21(1+1)$ $\quad 1 = 1$ یا -2 یا $-\frac{1}{2}$

(۵۴) $\sqrt{1+ط}\sqrt{1-1} - \sqrt{1-ط}\sqrt{1+1} = 2ط$ $\quad 1 = ط(3 - 2ط^2)$ یا $-ط$

(۵۵) $(1-1)\sqrt{1^2+1^2} - (1+1)\sqrt{1-1^2} = \sqrt{2+2\sqrt{1-1^2}}$ جواب $1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{ط}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{ط}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

(۵۶) $\frac{\sqrt{1+ط^2-ط}\sqrt{1+1^2}}{\sqrt{1+ط^2-1}\sqrt{1+ط^2}} = ط$ جواب $1 = \frac{ط}{2}$ یا $\frac{1}{ط}$ (57) $(ط+1)\sqrt{ط^2+1^2} = 7$ جواب $1 = (ط \pm \sqrt{ط^2-1})^{\frac{1}{2}}$

(۵۸) $\frac{ط-1}{ط+\sqrt{21-1^2}} = \frac{1}{ط}$ جواب $1 = ط$ یا $\frac{ط}{2}$ (59) $\sqrt{1^2+1} - \sqrt{1^2-1} = \frac{1}{\sqrt{1^2-1}}$ جواب $1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}}$

(۶۰) $(ن \pm \sqrt{ن^2-1})^{ن}$ $\sqrt{1^2+ط^2} + (ن-1)\sqrt{1^2-2}(ن-1)ط^2 = 2ن-1$ $\quad 1 = \sqrt{(ن \pm \sqrt{ن^2-1})^{\frac{2}{ن}}}$

(۶۱) $\frac{ن ط + ن\frac{ن-1}{2} ط}{1+ن} = ن$ جواب $ن = (\frac{1}{2}-\frac{1}{ط})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{ط}) - \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{ط})^2 + (\frac{1}{2}+\frac{1}{ط})}^{\frac{1}{2}}$

(۶۲) $(1+1+1^2)^2 = \frac{ط+1}{ط-1}(1+1^2+1^4)$ ضمیمہ میں اسکا حل ہی $\quad 1 = \frac{ط}{2} \pm \sqrt{\frac{ط^2}{4}-1}$

(۶۳) $ط+1+\sqrt{2ط 1+1^2} = \sqrt{ط 1 - 1^2} + \sqrt{2ط^2 - ط 1 - 1^2}$ اسکا حل ضمیمہ میں $\quad 1 = (1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})\frac{ط}{2}$

(۶۴) $\frac{\sqrt{1^2-ط^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-ط^2}}} = \sqrt{\frac{1^2-ط^2}{1+\sqrt{1^2-ط^2}}}$ جواب $1 = \pm\sqrt{\frac{ط}{2}\left(ط \pm \frac{\sqrt{ط^2+1}}{2}\right)}$

(۶۵) $\frac{2\sqrt{1}+\sqrt{2(1+1)}}{1-1} = ط + \frac{1}{ط}$ $\quad 1 = \frac{(\sqrt{ط}+\frac{1}{\sqrt{ط}})^2}{ط^2+\frac{1}{ط^2}}$

ضمیمہ ساوات میں حل کی گئی ہی

(۶۶) $(ط+ص)\sqrt{ط^2+ص^2+لا^2}-(ط-ص)\sqrt{ط^2+ص^2-لا^2}=ط^2+ص^2$ جواب $لا=\sqrt{\frac{1}{2}(ص^2\pm ط^2)}-ص$

(۶۷) $\frac{1}{ط لا}\left(\frac{ط^5}{ط^2+لا^2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{ط لا}{5}\right)^2=\frac{(ط^2+لا^2)^2}{6}$ $لا=(2\pm\sqrt{3})ط$

(۶۸) $\sqrt{(ص+س)(ط^2+لا^2)}=ن(ط س+ص لا)$ $لا=\frac{ص\pm\sqrt{ن^2-1}\times س}{س\pm\sqrt{ن^2-1}\times ص}$

(۶۹) $لا^{\frac{1}{2}}-1=ط+\frac{لا^{\frac{1}{2}}}{ط}$ $لا=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{ط+\frac{1}{4}}}$

(۷۰) $\sqrt[5]{(ط+لا)^2}+\sqrt[5]{(ط-لا)^2}=3\sqrt[5]{ط^2-لا^2}$ $لا=\frac{(3\pm\sqrt{5})^5-2^5}{(3\pm\sqrt{5})^5+2^5}\times ط$

(۷۱) $\frac{15\,لا^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{7ط+8لا}}+\frac{8\,لا^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{7ط+8لا}}=\frac{8}{\sqrt{5}\,لا}$ $لا=\frac{32}{33}(3\pm\sqrt{12})$

(۷۲) $ط^2ص\,لا^{\frac{1}{ف}}-4(ط ص)^{\frac{2}{ف+ق}}\,لا^{\frac{1}{ف+ق}}=(ط-ص)^2\,لا^{\frac{1}{ف}}$ $لا=\left(\sqrt{ص}+\sqrt{\frac{1}{ط}}\right)^{\frac{4ف ق}{ف-ق}}$

(۷۳) $\sqrt{لا^{ف+ق}}-\frac{1}{2}\frac{ط^2+ص^2}{ط^2-ص^2}\left(\sqrt{لا^{ف}}+\sqrt{لا^{ق}}\right)=0$ $لا=\left(\frac{ط\pm ص}{ط\mp ص}\right)^{\frac{2ف ق}{ق-ف}}$

(۷۴) $(ط^{\frac{1}{2}}+1)(لا^{\frac{1}{2}}-1)^2=2(لا+1)$ $لا=\left(\frac{ط^{\frac{1}{2}}\pm 1}{ط^{\frac{1}{2}}\mp 1}\right)^2$

(۷۵) $\sqrt{(1+لا)^2}-\sqrt{(1-لا)^2}=\sqrt{1-لا^2}$ یہ مساوات ضمیمہ میں حل کی گئی ہے صفحہ ۱۴۴ مساوات (۱۱) $لا=\frac{(1\pm\sqrt{5})^2-2^2}{(1\pm\sqrt{5})^2+2^2}$

(۷۶) $لا-1=2+\sqrt{\frac{2}{لا}}$ مساوات تین میں اسکا حل ہے صفحہ ۱۴۱ (۱۱) $لا=4$ یا -1

(۷۷) $لا^2-3لا=2$ ضمیمہ میں اسکا حل ہی صفحہ ۱۴۴ مساوات (۹) $لا=2$ یا -1

(۷۸) $لا^2-\frac{2}{3}لا=1+\frac{4}{9}$ ایضاً صفحہ ۱۴۴ مساوات (۱۰) $لا=-\frac{2}{3}\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

(۷۹) $لا-3=\frac{3+4\sqrt{لا}}{لا}$ مساوات تین میں اسکا حل ہی صفحہ ۱۴۳ (۴۳) $لا=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

(۸۰) $لا^2+\frac{1}{لا^2}+لا+\frac{1}{لا}=4$ مساوات تین میں اسکا حل ہی صفحہ ۱۴۳ (۴۴) $لا=\frac{11\pm\sqrt{5}}{20}$

(۸۱) $لا^2-لا(لا+1)\sqrt{لا}+لا+1=0$ $لا=\frac{7\pm 4\sqrt{3}}{3}$

(۸۲) $\frac{1}{3}لا\left(لا^2+3\right)=20+\frac{1}{3}\times 5لا$ $لا=3\pm\sqrt{2}$

(۸۳) $لا+7\sqrt{لا}=22$ مساوات تین میں اسکا حل ہی صفحہ ۱۴۳ کی (۴۳) مساوات $لا=8$ یا $(-1\pm\sqrt{-10})^3$

(۸۴) $(لا+3)^2-2(لا^2+3)=2لا(لا+1)^2$ $لا=1$ یا -3 یا $-\frac{1}{2}$

(۸۵) $\sqrt{لا}-\frac{لا}{8}=\frac{7}{\sqrt{لا}-2}$ $لا=1$ یا 16

(۸۶) $لا\left(لا^2-23\right)-10(لا^2-24)=649$ $لا=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{29})$

(۸۷) $2\sqrt[3]{لا^2}\left(لا^{\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{5}\right)^2=2لا(لا+24)+ط^2(لا-ط)$ $لا=\frac{ط}{2}$ یا $-ط$

(۸۸) $لا^2-7=\sqrt{لا^2-24لا+69}$ $لا=2$ یا -5

(۸۹) $(لا^2-5)^2=(لا-3)^2+(لا+1)^2$ $لا=3$ یا $-1\pm\sqrt{6}-1$

(۹۰) $\frac{\lambda}{\lambda^2}+\frac{\lambda^3}{\lambda^3}=\frac{\frac{2}{\lambda}\cdot 2\lambda^2}{\lambda^3}+49\lambda-1119$ $\lambda=10$ یا $\frac{1}{14}(-7\pm\sqrt{2\cdot 4})$

(۹۱) $\frac{1+\lambda^3}{(1+\lambda)^3}=b$ $\lambda=\frac{1+2b\pm\sqrt{12b-3}}{2(1-b)}$

(۹۲) $\frac{1+\lambda^4}{(1+\lambda)^4}=b$ ضمیمہ میں حل کی گئی ہے اور اسمیں $\lambda=n\pm\sqrt{n^2-1}$ $\frac{2b+\sqrt{2(1+b)}}{2(1-b)}=\frac{3}{2}$

(۹۳) $\frac{1+\lambda^5}{(1+\lambda)^5}=b\lambda$ $\lambda=\frac{1}{4}$ یا $\frac{13\pm 5\sqrt{7}}{18}$ $\frac{\sqrt{4b+1}\,(\sqrt{5}+\sqrt{4b+1})+10(4b-1)+2\sqrt{5}(4b+1)}{4(1-b)}$

(۹۴) $\sqrt{\lambda^2+\sqrt{\lambda}}=\lambda-1+\sqrt{3\lambda}$

(۹۵) $\lambda-2\sqrt{\lambda}+2=1+\sqrt{\lambda^2-3\lambda+2}$ یہ ضمیمہ میں حل ہوئی ہے $\lambda=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{13})$ یا $9\pm 4\sqrt{5}$

(۹۶) $2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}=b(1+\lambda^2)$ ضمیمہ میں حل کی گئی ہے $\lambda=\pm\frac{1}{b}\left(\sqrt{-1\pm\sqrt{1-b^2}}\pm\sqrt{2(1\pm\sqrt{1-b^2})}\right)$

(۹۷) $(\lambda-\frac{1}{3})^2-\frac{5}{4}=\frac{3\lambda^2+\frac{3}{4}}{2(\lambda-\frac{1}{3})+\sqrt{\lambda(\lambda-\frac{1}{3})}}$ ضمیمہ میں اسکا حل ہے $\lambda=3$ یا $-\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2}(2\pm\sqrt{13})$

(۹۸) $\frac{(n-1)(b^4+b^2\lambda^2+\lambda^4)}{(n+1)(b^4-b^2\lambda^2+\lambda^4)}=\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{b^4+\lambda^4}{b^4-\lambda^4}\right)$ ضمیمہ کو دیکھو اور میں حل ہے

(۹۹) $b\lambda^2-s\lambda-2\lambda(b-s\lambda)\sqrt{\frac{b-s}{1-\lambda^2}+\left(\frac{b-s\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2}+\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}(b-s\lambda)^2=0$

یہ مساوات ضمیمہ میں حل کی گئی ہے اور قیمت اسکی یعنی $\lambda=\frac{s\pm b}{b\mp s}$

(۱۰۰) $(1-\lambda)\sqrt{b\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)-2}=\sqrt{\lambda+1}+\sqrt{3\lambda-1}$ ضمیمہ کو دیکھو اور میں حل کیا ہے $\lambda=\frac{\pm\sqrt{b+1}+1}{\pm\sqrt{b+1}-1}$

مساوات دو مجہولوں کی

(۱) $\lambda^2-5s=10$ $\lambda=\pm 5$ (۲) $\lambda^2+s^2=13$ $\lambda=\pm 2$ یا ± 3 (۳) $\lambda^2-s^2=9$ $\lambda=\pm 5$

$(\lambda-s)^2=4$ $s=\pm 3$ $\lambda+s=0$ $s=\mp 3$ یا ± 2 $\lambda s-s^2=4$ $s=\pm 4$

(۴) $2\lambda^2+3\lambda s=26$ $\lambda=\pm 2$ (۵) $\lambda s+\lambda s^2=12$ $\lambda=\pm 2$ یا $\frac{1}{14}$ (۶) $\lambda^2-\lambda s=7.5$ $\lambda=12\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$

$3s^2+2\lambda s=39$ $s=\pm 3$ $\lambda+\lambda s^2=18$ $s=2$ یا $\frac{1}{2}$ $\lambda s-s^2=3\lambda$ $s=4\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$

(۷) $2s-3\lambda=3\lambda^2+2(s-11)^2=14$ $\lambda=2$ یا $\frac{1}{5}$ اور $s=10$ یا $8\frac{4}{5}$

(۸) $2s^2+3\lambda s=8$ $\lambda=2$ یا $11\frac{25}{29}$ (۹) $\lambda^2+\lambda s+4s^2=6$ $\lambda=\pm 2$ یا $\pm\frac{1}{5}\sqrt{10}$

$3s^2+2\lambda^2=11$ $s=1$ یا $1\frac{3}{5}$ $3\lambda^2+8s^2=14$ $s=\pm\frac{1}{2}$ یا $\pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$

(۱۰) $2\lambda^2+3\lambda s+s^2=20$ جواب $\lambda=\pm 1$ (۱۱) $\lambda-s=1$ جواب $s=-\lambda$ یا $1-\lambda$

$5\lambda^2+7s^2=124$ $s=\pm 3$ $s^2+\lambda s+b\lambda=0$ $\lambda=1-b$

(۱۲) $\lambda^{\frac{1}{2}}+s^{\frac{1}{2}}=3$ جواب $\lambda=8$ (۱۳) $\lambda+s=5$ جواب $\lambda=3$

$\lambda+s=9$ $s=1$ $(\lambda^2+s^2)(\lambda^3+s^3)=455$ $s=2$

(۱۴) $\sqrt{\frac{\lambda}{s}}+\sqrt{\frac{s}{\lambda}}=\frac{\lambda+s}{\lambda s}+1$ جواب $\lambda=18$ (۱۵) $\lambda^4+s^4=641$ جواب $\lambda=5$

$\sqrt{\lambda^2 s+\sqrt{\lambda s^2}}=78$ $s=16$ $\lambda^3 s+s^3\lambda=2940$ $s=2$

(۱۶) $u-s=۷$ ضرب دیکھو $u=11$ جواب $s=۴$ $u_۲-s_۲=۶۰۵۱۴$

(۱۷) $u+s=۹$ جواب $u=\frac{۹}{۲}(۱\pm\sqrt{۳۲})$ $u_۲+s_۲=۱۴۱۴$ $s=\frac{۹}{۲}(۱\pm\sqrt{۳۲})$

(۱۸) $\frac{۵\sqrt{u+s}}{u}+\frac{۵\sqrt{u+s}}{s}=۱\frac{۱}{۳}$ $\frac{۳\sqrt{u-s}}{u}-\frac{۳\sqrt{u-s}}{s}=\frac{۴}{۵}$ جواب $u=۲\frac{۱}{۲}$ $s=۱\frac{۱}{۲}$

(۱۹) $uع=s_۲$ اور $(u+ع)(ع-u-s)=۳$ $(u+s+ع)(ع-u-s)=۷$ جواب $u=۱۹۰$ $s=۲۰\pm۶$ $ع=۴$

(۲۰) $u+s+ع=۲۱۴$ اور $u_{\frac{۱}{۲}}+s_{\frac{۱}{۲}}+ع_{\frac{۱}{۲}}=۱۲$ $s_{\frac{۳}{۲}}+ع_{\frac{۳}{۲}}=u_{\frac{۳}{۲}}+s_{\frac{۳}{۲}}ع_{\frac{۱}{۲}}-۱۲$ جواب $u=۱۲۵$ $s=۴۶$ $ع=۷۲$

(۲۱) $(u-۲)_۲+(s-۳)_۲+(ع-۱)_۲=۲۴$ $us+uع+sع=۳۶$ اور $۲u+۳s+ع=۳۰$ جواب $u=۶$ $s=۵$ $ع=۳$

(۲۲) $u_۲+us+s_۲=۳۷$ اور $u_۲+ع_۲=۲۸$ $s_۲+sع+ع_۲=۱۹$ جواب $u=۴$ $s=۳$ $ع=۲$

(۲۳) $u_۳+s_۳+us(u+s)=۱۳$ جواب $u=۳\pm۲$ $s=۲\mp۳$

(۲۴) $\frac{u}{s}-\frac{u+s}{u}=\frac{u-s}{s}$ جواب $u=-\frac{۱}{۹}$ $s=-\frac{۱}{۱۸}$

$\frac{s}{u}-\frac{u}{u+s}=\frac{u}{s}$

(۲۵) $\frac{s}{u}-\frac{u}{s}=\frac{u+s}{u+s}$ جواب $u=\frac{۱}{۴}\left\{۱\pm\sqrt{۲}\right\}_۲$ $s=\frac{۱}{۴}$

$\frac{s_۲}{u_۲}-\frac{u_۲}{s_۲}=\frac{s_۲}{u-s}$

(۲۶) $\frac{u-\sqrt{u_۲-s_۲}}{u+\sqrt{u_۲-s_۲}}=u$ لور $\frac{s}{u}=\sqrt{\frac{۱-s}{۱+u}}$ جواب $u=\frac{۱}{۴}$ $s=\frac{۱}{۵}$

(۲۷) $u_۲-۶\sqrt{us}=۷s$ جواب $u=۹$ $s=۱$

$u-۲\sqrt{us}=۳$

(۲۸) $(u+s)_۲=u_۳+u_۲s+s_۳$ جواب $u=\frac{۱۳}{۱۲\pm۲\sqrt{۳}}$ $s=\frac{۱۱\pm۶\sqrt{۳}}{۱۳}$

$(u_۲+s_۲)=۴۹(s_۲-u_۲)$

(۲۹) $u+\sqrt{u_۲-s_۲}=\frac{s}{\sqrt{u-s}}(\sqrt{u+s}+\sqrt{u-s})$ جواب $u=۵$ $s=۴$

$(u+s)_۳-(u-s)_۳=۲۶$

(۳۰) $u+\sqrt{u^2-x^2}=\frac{a}{x}\left(\sqrt{u+x}+\sqrt{u-x}\right)$

$\sqrt{u+x}+\sqrt{u-x}=x$

جواب $u=\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)$

$x=\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}\left\{1+\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2\right\}$

(۳۱) $u^2-x^2=7ax+3x^2+2\sqrt{2ax-x^2}$ جواب $u=7a$

$x=a$

$u^2+x^2=24ax+7\sqrt{x}\cdot(u\sqrt{a}-3\sqrt{x})$

(۳۲) $u-\sqrt{u^2-x^2}=\frac{x}{a}\left(\sqrt{u+x}+\sqrt{u-x}\right)$

جواب $u=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}$

$x=\sqrt{a^2\frac{p-a}{p}}$

(۳۳) $\frac{u+x+\sqrt{u^2+x^2}}{u+x-\sqrt{u^2+x^2}}=\frac{p}{2u}$ اور $(u+x)^3-(u-x)^3=p$

$\frac{x}{u}=\sqrt{\frac{p-x}{p+u}}$

جواب $u=\frac{-13\pm\sqrt{153}}{16}p$

$x=\frac{13\pm\sqrt{153}}{8}p$

(۳۴) $u+\sqrt{ux}+x+\sqrt{u-\sqrt{ux}+x}=210$

$u-\sqrt{ux}+x+\sqrt{u+\sqrt{ux}+x}=126$

جواب $u=144$ یا 9

$x=9$ یا 144

(۳۵) $\sqrt{u-x}=\sqrt{x+2}$

جواب $u=8$

$x=4$

$u+2=\sqrt{4x+2}$

(۳۶) $u^3+x^3=1+2ux+3u^2x^2$

$u^3+x^3=2x(u+2ux+u+1)$

جواب $u=2$

$x=1$

(۳۷) $u^2+x^2=3ux$ جواب

$u^2+x^2=16$ جواب $u=8$

$x=8$

(۳۸) $u-ux=\sqrt{10}\left(\sqrt{5}-1\right)$

$x=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+1}$

(۳۹) $u^{u+x}=x^{4x}$

$x^{u+x}=u^{4u}$

(۴۰) $\left(\sqrt{u}\right)^{\sqrt{u}+\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{4}{3}}$

$\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{u}+\sqrt{x}}=\left(\sqrt{u}\right)^{\frac{4}{3}}$

(۴۱) $5au+12x(a-u)=0$

$u^2-x^2+a^2=0$

(۴۲) $u^2x^2-a^2=ux-a^2$ دیکھو ضمیمہ

$u^2-a^2=ux(u-x)$

جواب $u=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{17+1}\right)$

$x=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{17+1}\right)$

جواب $u=\left\{-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\sqrt{25}\right\}^2$

$x=\left\{\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\sqrt{25}\right)^2\right\}$

جواب $u=\frac{3a}{5}$ اور $x=\frac{2a}{5}$

جواب $u=1$

$x=2$

(۴۳) $\sqrt{ل^2+\sqrt{ل^2ع^2}}+\sqrt{ع^2+\sqrt{ل^2ع^2}}=ط$ جواب $ل=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{ص^2+\sqrt{4ط^2-ص^2}\right\}}$

$ع=\frac{1}{2}\sqrt{\left(ص^2-\sqrt{4ط^2-ص^2}\right)}$

$ل+ع+\sqrt{ص ل ع}=ص$

(۴۴) $(ل^2+ع^2)\frac{ل}{ع}=\frac{13}{2}$ جواب $ل=3$

$(ل^2-ع^2)\frac{ع}{ل}=\frac{7}{12}$ $ع=2$

(۴۵) $(ل^2+ع^2)(ل+ع)=1810$ جواب $ل=2$ یا 4

$(ل^2+ع^2)(ل^2+ع^2)=1058ل^2ع^2$ $ع=4$ یا 2

(۴۶) $(ل-2)ع-\sqrt{ل ع}(ع-1)=2ع-ل$ جواب $ل=18-8\sqrt{4}$

$\frac{\sqrt{ل ع}}{ل ع}=\frac{\sqrt{ل ع}-12}{18ع-8ل}$ $ع=4$ یا 2

(۴۷) $5-2\sqrt{ع+2}=\frac{36ل^2}{49}-\left(\sqrt{ل}-2\sqrt{ع}\right)^2$ جواب $ل=4$

$ع=\frac{1}{4}$

$\frac{ل}{7}-10\sqrt{\frac{ل}{ع}}=ل-16$

(۴۸) $\sqrt{ل+ع}+\sqrt{ع-ل}=\frac{ل ع-ع\sqrt{ل^2-ع^2}}{ط}$ جواب $ل=\frac{1}{4}\sqrt{\left\{\frac{ص^2}{2}+\frac{ص}{2}\sqrt{4ط^2+ص^2}\right\}}$

$(ل+ع)\frac{1}{4}+(ل-ع)\frac{1}{4}=ص$ $+2\sqrt{4ط^2+ص^2}=\frac{ص^2}{2}+\sqrt{\frac{ص^4}{4}+ص^2ط^2}$

(۴۹) $(ص+ل)ل+ط ع=(ل+ع)^2-2\sqrt{ل ع}\sqrt{ط-ل}\sqrt{ص-ع}$

$\sqrt{ع}+\sqrt{ط-ل}=\sqrt{\frac{ع ل}{ل}}$ جواب $ل=ط+\frac{ص^2}{ن-ص}\left\{ن-ص\pm\sqrt{ط ص(ص-1)+(ن-ص)^2}\right\}$

$ع=ص-ن$

(۵۰) $ل^2+ع^2=ل+\frac{ط}{ل}$ جواب $ل=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4ط+2\pm2\sqrt{8ط^2-4ط-8ص+1}}$

$ع=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4ط+2+2\sqrt{8ط^2-4ط-8ص+1}}$

$ل^2(ل-2)+6ع^2ل(ل-1)+ع^3=ص^3-ل$

(۵۱) $(ل-ص)\sqrt{(ط-ل)(ل-ص)}+ل\sqrt{(ط-ع)(ص-ع)}=$

$\left\{ط^2-(ط-ل)(ط-ع)\right\}+4ط\sqrt{(ل-ص)(ص-ع)}$ اور $4ط ص=ل^2$

(۵۲) $ل^2+ع^2+ص^2=2(ل ع+ع ص+ص ل)$

$ل=ط ص$

(۵۳) $\frac{\sqrt{ل^2+ع^2+1}}{\sqrt{ل}}=\frac{\sqrt{ل+ع+2}}{\sqrt{ل}}$

$ل\left[ع+1\right]^2=6ل^2\left(ع^2+\frac{ع}{4}\right)$

جواب $ل=\frac{1}{2}\left\{ص^2\pm ص\sqrt{4ط^2+ص^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$ $ع=\frac{1}{2}\left\{\left(ط^2-ص^2\right)\pm ط\sqrt{4ط^2+ص^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$

جواب $ل=\frac{ص^2+ن^2}{2ن}$ $ع=\frac{ص^2-ن^2}{2ن}$

جواب $ل=\frac{1}{2}(19\pm\sqrt{105})$ دیکھو ضمیمہ

$ع=\frac{1}{6}(3\pm\sqrt{105})$

(۵۴) $\frac{ک}{۲ل} + \frac{۲}{۳} \times \frac{ک - ۲\sqrt{ل-۱}}{ک - ۲\sqrt{ل-۱}} = \frac{\sqrt{ل+۱}}{ل}$ جواب $ل = ۱\frac{۱}{۴}$ دیکھو ضمیمہ $ک = ۲$

(۵۵) $ط(۱-ل ک) = ل\sqrt{۱-ک^۲}$ جواب $ل = \frac{۱}{۲}(ط_۲ \pm ط\sqrt{ط_۲^۲ + ۴})$ دیکھو ضمیمہ

$\sqrt{ل}(۱-ل ک) = ک - ل$ $ک = \pm ۱$ یا $\frac{ط_۲ - ۱}{ط_۲ + ۱}$ یا $\frac{۲ط}{ط_۲ + ۱ + ط\sqrt{ط_۲^۲ + ۴}}$

(۵۶) $ل + ک + \frac{۶۱}{۲}\frac{۱}{ل^۲} - \frac{۲}{ک^۳} - ۱۴۱۰\left(\frac{ک}{ل}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱۳۰۰}{ل}$ جواب $ل = ۷$ $ک = ۲$

$۲ل^{\frac{۲}{۳}} + ۱۶\frac{ک^{\frac{۲}{۳}}}{ل^{\frac{۲}{۳}}} + ۲۴(ل ک)^{\frac{۲}{۳}} = ۴(ل ک)^{\frac{۲}{۳}}\left\{\frac{۵}{۲}ل^{\frac{۲}{۳}} + ۱۱ک^{\frac{۲}{۳}}\right\}^{\frac{۱}{۳}}$

(۵۷) $\frac{ل^{\frac{۱}{۳}}}{ک^{\frac{۱}{۳}}}\left(ل^{\frac{۲}{۳}} - ۱\right) + \left(ک^{\frac{۱}{۳}} + ل^{\frac{۱}{۳}}\right) + ۴ک^{\frac{۲}{۳}} = \left(۲ل^{\frac{۲}{۳}} - ۱\right)\frac{ک^{\frac{۲}{۳}}}{ل^{\frac{۲}{۳}}}$

$\frac{ک^{\frac{۲}{۳}}}{ل^{\frac{۲}{۳}}} - \frac{ل^{\frac{۲}{۳}}}{ک} - \frac{۱}{ک^{\frac{۲}{۳}}} \cdot \frac{۳۳ک}{۳۶} = \frac{۲ل^{\frac{۲}{۳}}}{ک^{\frac{۲}{۳}}} - \frac{۲}{ل^{\frac{۲}{۳}}}$ جواب $ل = ۷۲$ یا $۱-۸$ $ک = ۸$ یا $۱-۷۲$

(۵۸) $ک^۲ = ل(ط ک - ص ل)$ جواب $ل = ک = ط - ص$ یا $ل = ط - \frac{ص}{۲}(م \pm \sqrt{م^۲ - ۴})$

$ل = \frac{۱}{۲}(ط - \frac{ص}{۲}(م \pm \sqrt{م^۲ - ۴}))$ $ک = \frac{۱}{۲}(ط - \frac{ص}{۲}(م \pm \sqrt{م^۲ - ۴}))$

جبکہ $م = \frac{۱}{ص}(ط - ص \pm \sqrt{ط^۲ + ۲ط ص + ۵ص^۲})$

(۵۹) $ک^۲ = ۲ل + ن ک$ جواب $ل = ک = ۲ + ن$

$ک^۲ = ۲ک + ن ل$

(۶۰) $ل^۵ + ک^۵ = ل ک(ل + ک)^۲$ دیکھو ضمیمہ جواب $ل = \frac{۵}{۲}\sqrt{\frac{۲۲}{۵} \pm ۱۰\sqrt{۵}}$

$ک\sqrt{ل} = (ل + ک)^{\frac{۳}{۲}}$ $ک = \frac{۵}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۵} + ۲\sqrt{۵}}$

(۶۱) $(ک^۲ + ۱)ل = ۹(ل^۲ + ۱)ک^۲$ دیکھو ضمیمہ جواب $ل = \frac{۱}{۲}$

$(ل^۲ + ۱)ک = (ل + ۱)(ک^۲ + ۱)ل$ $ک = \frac{۱}{۲}$

(۶۲) $(۲ + ۴ل ک - ۳ک^۲)^۲ = ۲ - ۴ک^۲ + ۳ل^۲ک^۲$

$۵ک^۲ + \frac{۲۷ک^۲}{ل^۲} = \frac{۹ک}{ل} + \frac{۲ل ک + ۱}{ل^۲}$ جواب $ل = ۲$ $ک = ۱ - \frac{۱}{۴}\sqrt{۶}$ دیکھو ضمیمہ

(۶۳) $\frac{۲ + ۲ل^۲ - ۴ل^۴}{ل - ۱} = ک^۲(۱ - ۲ک)$ جواب $ل = \pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۵ \pm ۱\sqrt{۳}}$

$(۲ل^۲ - ۱)(۲ک^۲ - ۱) = ۳$ ضمیمہ میں اسکا حل ہے $ک = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶}$ یا $\frac{۱}{۲}\sqrt{۵ \pm ۲\sqrt{۳}}$

تمت الکتاب بعون الملک الوہاب