UNIVERSAL LIBRARY
OU_224666
UNIVERSAL LIBRARY

سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

صغاری احصاء

جلد اوّل

تصنیف

ہوریس لیمب ایم۔ اے، ایل ایل ڈی، ایس سی۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔ اے و کشن چند ایم۔ اے

پروفیسران کلیۂ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۷ھ م سنہ ۱۳۳۸ف م سنہ ۱۹۲۹ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کرکے
طبع و شایع کی گئی ہے

۷۸۶

دیباچہ (از مصنّف)

اِس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصا کے ان حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اُس وقت اس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اِس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کیگئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فرحا}}{\text{فرلا}} = \text{حا}$$

کا معیاری حل ہے۔ اِس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جا سکتا لیکن یہ کہنا بیجا نہوگا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصا کے تعلق سے مد نظر

کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لاتناہی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور تکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ پہلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر یکساں استمراق کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی، احصا کی کتاب میں اسوقت اس نظریہ کا داخل کر لینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اسکو ترک کر دیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قسم کی دیگر چیزوں میں اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط

جون ۱۹۱۹ء

ہوریس لیمب

فہرست مضامین

دفعہ	مضمون	صفحہ
	پہلا باب **تسلسل**	
۱	مسلسل تغیر	۱
۲	تواتر کی علوی یا سفلی انتہا	۳
۳	لامتناہی سلسلوں پر استعمال۔ مثبت رقموں والے سلسلے	۷
۴	تواتر میں انتہائی قیمت۔	۱۰
۵	لامتناہی سلسلوں پر استعمال	۱۵
۶	تفاعل کی عام تعریف	۲۰
۷	تفاعلوں کی ہندسی تعبیر	۲۲
۸	مسلسل تفاعل کی تعریف	۲۴
۹	مسلسل تفاعل کی خاصیت	۲۵
۱۰	مسلسل تفاعل کی ترسیم	۲۷
۱۱	عدم تسلسل	۲۹
۱۲	مسلسل تفاعل سے متعلق مسائل	۳۱
۱۳	جبری تفاعل۔ منطق صحیح تفاعل	۳۴
۱۴	منطق کسری	۳۶

۵۱	اعظم اور اقل قیمتیں	۱۴۳
۵۲	جبریہ طریقے	۱۴۹
۵۳	متعدد متغیروں والے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں	۱۵۱
۵۴	تفرقوں کی ترقیم	۱۵۳
۵۵	چھوٹی تصحیحات کا محسوب کرنا	۱۵۴
۵۶	اوسط قیمت کا مسئلہ۔ نتائج	۱۵۶
۵۷	متعدد متغیروں والے تفاعل کا پورا تغیر	۱۶۰
۵۸	چھوٹی تصحیحات میں استعمال	۱۶۳
۵۹	تفاعلوں کے تفاعل کا تفرق اور تضمینی تفاعلوں کا تفرق	۱۶۵
۶۰	مشتق تفاعل کے ہندسی استعمال۔ کارٹیزی محدد	۱۶۶
۶۱	ایک متبدل کی رقوم میں محدد۔	۱۶۹
۶۲	منحنی کے کسی نقطہ پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں	۱۷۰
۶۳	قطبی محدد	۱۷۳
	امثلہ نمبری ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰	۱۷۷

پانچواں باب
اعلیٰ رتبہ کے مشتقات

۶۴	تعریف۔ ترقیم	۱۹۵
۶۵	حاصل ضرب کے متواتر مشتقات۔ لیب نیز کا مسئلہ	۱۹۸
۶۶	حرکیات کی مثالیں	۲۰۰
۶۷	تقعر اور تحدب۔ نقاط انعطاف	۲۰۲
۶۸	اقل اور اعظم قیمتوں میں مشتق کا استعمال	۲۰۵
۶۹	مساواتوں کے نظریہ میں متواتر مشتقات	۲۰۶
۷۰	دوسرے مشتق کی ہندسی تعبیر	۲۰۷
۷۱	اجزائے متناسب کا نظریہ	۲۱۲
	امثلہ نمبری ۲۱، ۲۲	۲۱۴

۷۸۶

پہلا باب

تسلسل

۱۔ مسلسل تغیر

صغاری احصا کے ہر مسئلہ میں ہمیں مقداروں کی ایک نہ ایک تعداد سے واسطہ پڑتا ہے، ان میں سے بعض مستقل ہو سکتی ہیں اور باقی متغیر سمجھی جاتی ہیں اور (مزید برآں) مسلسل تغیر کو قبول کرتی ہیں۔

مثلاً ہندسہ کے مسئلوں میں زیر بحث مقداریں طول، زاویے، رقبے، حجم وغیرہ ہو سکتی ہیں۔ حرکیات میں یہ مقداریں کمیتیں، اوقات، رفتاریں، قوتیں، وغیرہ ہو سکتی ہیں۔

جبر و مقابلہ کے ذریعہ اس قسم کی کسی مقدار کو ایک حرف سے تعبیر کرتے ہیں مثلاً x یا y جس سے وہ نسبت مفہوم ہوتی ہے جو اس مقدار کو اسی قسم کی ایک معیاری یا اکائی مقدار سے ہے۔ یہ نسبت ایک صحیح عدد ہو سکتی ہے یا ایک کسر یا ایک عدد متبائن جس سے مراد یہ ہے کہ ایسے عدد کو کسی ایسی کسر سے تعبیر نہیں کر سکتے جس کا شمار کنندہ و نسب نما دونوں محدود صحیح اعداد ہوں۔ تاہم ایسی متبائن مقدار کے لئے جو حرف استعمال کیا جائے اس پر جبر و مقابلہ کے تمام معمولی قوانین جاری ہو سکتے ہیں۔

مستقل مقدار کسی دئے ہوئے عمل میں وہ مقدار ہوتی ہے جو اپنی قیمت

نہیں بدلتی۔ ایسی مقدار جو کسی دئے ہوئے عمل کے دوران میں مختلف قیمتیں اختیار کرتی ہے "متغیر" کہلاتی ہے۔ حروف تہجی کے ابتدائی حروف ا، ب، ج .... کو ہم عام طور پر مستقل مقادیر کے تعبیر کرنے میں اور آخری حروف ع، و، ھ، لا، ما، ی کو متغیر مقداروں کے تعبیر کرنے میں استعمال کرینگے۔

بعض مقداریں اس قسم کی ہیں کہ وہ علامت کے تغیر کو قبول نہیں کرتیں مثلاً طول، حجمیت، کثافت وغیرہ۔ اور بعض مثبت یا منفی دونوں ہو سکتی ہیں مثلاً ارتفاع، گردش، رفتار وغیرہ۔ جب ہمیں دوسری جماعت کی کسی مقدار کی مطلق قیمت سے بلالحاظ علامت سروکار ہوتا ہے تو تعبیر کرنے والے حرف کو ہم دو چھوٹے انتصابی خطوط کے درمیان بند کر دیتے ہیں مثلاً

|لا|، |جب لا|، لوک |لا|

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر ا اور ب ہم علامت ہوں تو

|ا + ب| = |ا| + |ب|

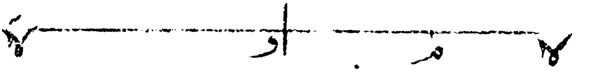
لیکن جب وہ مختلف العلامت ہوں تو

|ا + ب| < |ا| + |ب|

۲ صفاری احصا کی ابتدا ہندسہ کے مسئلوں سے ہوئی مثلاً منحنیوں کے مماس کھینچنا، منحنیوں کے طول اور رقبے معلوم کرنا، ٹھوس اجسام کے حجم وغیرہ دریافت کرنا۔ اس لئے یہ قدرتی بات ہے اور احصا کے اکثر استعمالوں کو پیش نظر رکھکر ضروری بھی ہے کہ مقدار کے ہندسی تخیل کو بنیاد کے طور پر اختیار کر لیا جائے اور ساتھ ہی ساتھ اُن جملہ عام مفروضات کو بھی مان لیا جائے جو اس تخیل میں واضح یا مضمن طور پر شریک ہوتے ہیں۔

مقادیر کے کسی گروہ کی ہندسی تعبیر اس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔ ایک لامتناہی خط مستقیم لا'لا لو۔ اس میں ایک ثابت مبدأ و مقرر کر دو اور زیر بحث

مختلف مقداروں کے متناسب کسی مناسب پیمانہ پر طول و م ناپے بے علامت مقادیر (مثلاً کمیتوں) کی صورت میں ان طولوں کو و کے صرف ایک ہی جانب لینا چاہیئے لیکن ایسی صورتوں میں جہاں مقادیر کی علامتیں مختلف ہوں و م کو و کے سیدھے یا بائیں جانب کھینچنا چاہیئے بموجب اس کے کہ تعبیر کیجانے والی مقدار مثبت یا منفی ہو۔ اس طرح ہر قسم کی مقدار زیر بحث کے جواب میں ک ک میں ایک خاص نقطہ م ملیگا۔



شکل (۱)

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک مقدار مسلسل تغیر قبول کرتی ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ نقطہ م خط ک ک میں ایک خاص وسعت (جو دیجا سکتی ہے) کے اندر کوئی محل اختیار کر سکتا ہے۔

یہ معلوم رہے کہ زیر بحث خاص قسم کی مقداروں کے لحاظ سے ہم نے دو باتوں کو اصول موضوعہ کے طور پر مان لیا ہے یعنے اس قسم کی ہر ممکن مقدار خط ک ک کے کسی نہ کسی نقطہ سے تعبیر ہوتی ہے اور (برعکس اس کے) ایک خاص وسعت کے اندر خط پر کا ہر نقطہ کسی نہ کسی مقدار کا جواب ہوتا ہے۔ یہ شرطیں مقداروں کی ان تمام قسموں سے پوری ہوتی ہیں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے خواہ وہ ہندسہ سے متعلق ہوں یا ریاضی طبیعیات سے۔ امتحان کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ تمام مقداریں بلحاظ اپنی تخصیص کے بالراست یا بالواسطہ خطی مقدار سے تعلق رکھتی ہیں۔ مثلاً رقبہ ایک متماثل مستطیل کے ارتفاع سے تعبیر ہو سکتا ہے جو ایک دیئے ہوئے (اکائی) قاعدے پر بنایا گیا ہے۔ رفتار اس طول سے تعبیر ہو سکتی ہے جو اکائی وقت میں طے ہوا اور علیٰ ہذا القیاس۔

۲ ــ تواتر کی علوی یا سفلی انتہا۔ انتہا یا 'انتہائی قیمت' کا تخیل مختلف صورتوں میں احصا کے تمام حصوں میں رونما ہوتا ہے اور یہ بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔ اس کی ابتدائی صورت سے جس پر اب غور کیا جائیگا طالب علم

نہیں بدلتی ۔ ایسی مقدار جو کسی دیے ہوئے عمل کے دوران میں مختلف قیمتیں اختیار کرتی ہے "متغیر" کہلاتی ہے۔ حروف تہجی کے ابتدائی حروف ا، ب، ج .... کو ہم عام طور پر مستقل مقادیر کے تعبیر کرنے میں اور آخری حروف ع، و، ھ، لا، ے، ی کو متغیر مقداروں کے تعبیر کرنے میں استعمال کرینگے ۔

بعض مقداریں اس قسم کی ہیں کہ وہ علامت کے تغیر کو قبول نہیں کرتیں مثلاً طول، کمیت، کثافت وغیرہ ۔ اور بعض مثبت یا منفی دونوں ہوسکتی ہیں مثلاً ارتفاع، گردش، رفتار وغیرہ ۔ جب ہمیں دوسری جماعت کی کسی مقدار کی مطلق قیمت سے بلالحاظ علامت سروکار ہوتا ہے تو تعبیر کرنے والے حرف کو ہم دو چھوٹے انتصابی خطوط کے درمیان بند کر دیتے ہیں مثلاً

|لا|، |جب لا|، لوک |لا|

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر ا اور ب ہم علامت ہوں تو

|ا + ب| = |ا| + |ب|

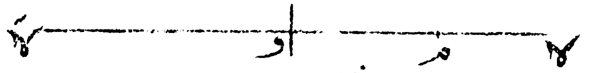
لیکن جب وہ مختلف العلامت ہوں تو

|ا + ب| < |ا| + |ب|

۲ صفاری احصا کی ابتدا ہندسہ کے مسئلوں سے ہوئی مثلاً منحنیوں کے مماس کھینچنا، منحنیوں کے طول اور رقبے معلوم کرنا، ٹھوس اجسام کے حجم وغیرہ دریافت کرنا۔ اس لئے یہ قدرتی بات ہے اور احصا کے اکثر استعمالوں کو پیش نظر رکھکر ضروری بھی ہے کہ مقدار کے ہندسی تخیل کو بنیاد کے طور پر اختیار کرلیا جائے اور ساتھ ہی ساتھ اُن جملہ عام مفروضات کو بھی مان لیا جائے جو اس تخیل میں واضح یا مضمن طور پر شریک ہوتے ہیں۔

مقادیر کے کسی گروہ کی ہندسی تعبیر اس طرح حاصل ہوسکتی ہے ۔ ایک لامتناہی خط مستقیم لا'لا لو ۔ اس میں ایک ثابت مبدأ و مقرر کرو اور زیر بحث

مختلف مقداروں کے متناسب کسی مناسب پیمانہ پر طول و م ناپے بے علامت مقادیر (مثلاً کمیتوں) کی صورت میں ان طولوں کو و کے صرف ایک ہی جانب لینا چاہئے لیکن ایسی صورتوں میں جہاں مقادیر کی علامتیں مختلف ہوں و م کو و کے سیدھے یا بائیں جانب کھینچنا چاہئے بموجب اس کے کہ تعبیر کیجانے والی مقدار مثبت یا منفی ہو۔ اس طرح ہر قسم کی مقدار زیر بحث کے جواب میں ل لَ میں ایک خاص نقطہ م ملیگا۔



شکل (۱)

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک مقدار مسلسل تغیر قبول کرتی ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ نقطہ م خط لَ ل میں ایک خاص وسعت (جو دیجا سکتی ہے) کے اندر کوئی محل اختیار کر سکتا ہے۔

یہ معلوم رہے کہ زیر بحث خاص قسم کی مقداروں کے لحاظ سے ہم نے دو باتوں کو اصول موضوعہ کے طور پر بیان کیا ہے یعنے اس قسم کی ہر ممکن مقدار خط لَ ل کے کسی نہ کسی نقطہ سے تعبیر ہوتی ہے اور (برعکس اس کے) ایک خاص وسعت کے اندر خط پر کا ہر نقطہ کسی نہ کسی مقدار کا جواب ہوتا ہے۔ یہ شرطیں مقداروں کی ان تمام قسموں سے پوری ہوتی ہیں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے خواہ وہ ہندسہ سے متعلق ہوں یا ریاضی طبیعیات سے۔ امتحان کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ تمام مقداریں بلحاظ اپنی تخصیص کے بالراست یا بالواسطہ خطی مقدار سے تعلق رکھتی ہیں۔ مثلاً رقبہ ایک متماثل مستطیل کے ارتفاع سے تعبیر ہو سکتا ہے جو ایک دئے ہوئے (اکائی) قاعدے پر بنایا گیا ہے۔ رفتار اس طول سے تعبیر ہو سکتی ہے جو اکائی وقت میں طے ہوا اور علیٰ ہذا القیاس۔

۲۔ تواتر کی علوی یا سفلی انتہا۔ انتہا یا انتہائی قیمت کا تخیل مختلف صورتوں میں احصا کے تمام حصوں میں رونما ہوتا ہے اور یہ بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔ اس کی ابتدائی صورت سے جس پر اب غور کیا جائیگا طالب علم

کچھ نہ کچھ واقف ہوگا۔

۳ فرض کرو کہ ایک ہی قسم کی مقداروں کا ایک لامتناہی صعودی تواتر

لا۱ ، لا۲ ، لا۳ .... لان .... (۱)

ہے۔ یعنے ہر رقم پہلے کی رقم سے بڑی ہے اس طرح کہ فرق

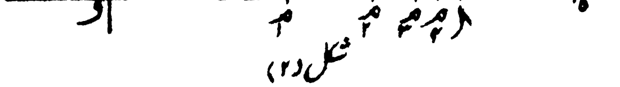
لا۲ - لا۱ ، لا۳ - لا۲ ، .... لان - لان-۱ ، ....

تمام کے تمام مثبت ہیں۔ نیز فرض کرو کہ مقادیر (۱) سب کی سب کسی ثابت محدود مقدار ا سے کم ہیں۔ اس صورت میں سلسلہ کی اوپر کی یا علوی انتہا ہوگی یعنی ایک خاص مقدار م موجود ہوگی جو مقادیر (۱) میں سے ہر مقدار سے بڑی ہوگی لیکن اس طور پر کہ اگر ہم سلسلہ میں کافی دور تک بڑھ جائیں تو اس کے رکن آخر کار کسی ایسی مقررہ مقدار سے جو م سے کم ہے تجاوز ہونگے۔ بالفاظ دیگر سلسلہ کے ارکین اور مقدار م کے درمیان روک قائم کرنا ممکن ہے

ہندسی تعبیر میں مقادیر (۱) نقاط کے ایک تواتر

م۱ ، م۲ ، م۳ .... (۲)

سے تعبیر ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک اپنے ماقبل سے دائیں طرف ہے لیکن تمام



شکل (۲)

ایک ثابت نقطہ ا کے بائیں طرف ہیں۔ اس خط لالا پر کا ہر نقطہ بغیر استثنا کے دو جماعتوں میں سے کسی ایک سے متعلق ہوگا اور یہ جماعتیں ایک دوسرے سے بالکل الگ ہیں۔ یا تو تواتر (۲) کے نقطے اس کے دائیں جانب واقع ہوتے ہیں یا نہیں ہوتے۔ مزید برآں اول الذکر جماعت کا ہر نقطہ موخرالذکر جماعت

کے ہر نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔ پس کوئی نقطہ م ضرور ہونا چاہئے
ایسا کہ م کے بائیں جانب کے تمام نقطے اول الذکر جماعت سے متعلق ہوں اور
اس کے دائیں طرف کے نقطے موخر الذکر جماعت سے۔ پس اگر ہم مہ = و م
رکھیں تو مہ متذکرہ بالا 'علوی انتہا' کی تعریف کو پورا کرتا ہے۔

اسی طرح اگر مقداروں کا ایک لاتناہی نزولی تواتر

$$\text{لا}_1 ،\ \text{لا}_2 ،\ \text{لا}_3 ، \ldots\ldots \quad (۳)$$

ہو یعنے ہر مقدار اپنی پہلی مقدار سے کم ہو اس طور پر کہ فرق

$$\text{لا}_1 - \text{لا}_2 ،\ \text{لا}_2 - \text{لا}_3 ، \ldots\ldots ،\ \text{لا}_{\text{ن}-1} - \text{لا}_{\text{ن}}$$

تمام مثبت ہوں اور تمام مقداریں کسی محدود مقدار ب سے متجاوز ہوں تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک سفلی انتہا نہ کا وجود ہوگا اس طرح پر کہ تواتر کی ہر مقدار نہ سے بڑی ہوگی حالانکہ تواتر کے ارکان کسی مقررہ مقدار سے جو نہ سے بڑی ہے آخر الامر کم ہو جائینگے۔

استدلال بالا صریحاً اسوقت بھی درست رہتا ہے جبکہ تواتر کی دو یا دو سے زیادہ ۴
متتالی مقداریں مساوی ہوں۔ اس صورت میں بھی تواتروں کو علی الترتیب صعودی یا نزولی کہا جا سکتا ہے اگرچہ 'نہ گھٹنے والا' یا 'نہ بڑھنے والا' کہنا زیادہ صحیح ہوگا۔

نوٹ: حال میں انگریزی اصطلاح (Monotonic) وضع ہوئی ہے جسمیں دونوں طرح کے تواتر شامل ہوتے ہیں ان تواتروں کو 'یک رنگ' کہا جا سکتا ہے۔

مثال ۱ - تواتر

$$\frac{1}{2} ،\ \frac{2}{3} ،\ \frac{3}{4} ، \ldots\ldots ،\ \frac{\text{ن}}{\text{ن}+1} ، \ldots\ldots \quad (۴)$$

صعودی ہے اور اس کی علوی انتہا ۱ ہے۔ کیونکہ

$$\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1} = 1 - \frac{1}{\text{ن}+1}$$

ن کو کافی بڑا لینے سے اس کو ۱ کے اتنا قریب لایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ ۴

مثال ۲۔ اگر لا ایک مثبت مقدار ایک سے کم ہو تو مقادیر

$$\text{۱، لا، لا}^{۲}\text{، ......، لا}^{\text{ن}}\text{، ....} \quad (۵)$$

ایک نزولی تواتر بناتی ہیں جس کی سفلی انتہا صفر ہے۔ کیونکہ $\frac{۱}{\text{لا}}$ ایک سے بڑا ہے اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{۱}{\text{لا}} = ۱ + \text{ما}$$

جہاں ما مثبت ہے۔ تب مسئلہ ثنائی سے

$$\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} = (۱ + \text{ما})^{\text{ن}} = ۱ + \text{ن ما} + \ldots + \text{ما}^{\text{ن}}$$

پس

$$\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}} > ۱ + \text{ن ما}$$

اور اس لئے ن کو کافی بڑا لینے سے اسے اتنا بڑا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

مثال ۳۔ ایسے تواتر پر غور کرو جس میں

$$\text{لا}_{۱} = ۱،\ \text{لا}_{\text{ن}+۱} = \sqrt{(۱ + \text{لا}_{\text{ن}})} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۶)$$

چونکہ $$\text{لا}^{۲}_{\text{ن}+۱} - \text{لا}^{۲}_{\text{ن}} = \text{لا}_{\text{ن}} - \text{لا}_{\text{ن}-۱} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۷)$$

اس لئے

$\text{لا}_{\text{ن}+۱}$، $\text{لا}_{\text{ن}}$ سے بڑا ہوگا اگر $\text{لا}_{\text{ن}}$، $\text{لا}_{\text{ن}-۱}$ سے بڑا ہے۔ لیکن $\text{لا}_{۲}$ صریحاً $\text{لا}_{۱}$ سے بڑا ہے۔ اس لئے تواتر صعودی ہے۔ پھر

$$لا_{ن+۱} = \frac{لا_ن + ۱}{لا_{ن+۱}} < \frac{لا_{ن+۱} + ۱}{لا_{ن+۱}} < ۱ + \frac{۱}{لا_{ن+۱}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اور چونکہ $لا_{ن+۱} > ۱$ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن کی تمام قیمتوں کے لئے $لا_{ن+۱} < ۲$

اس لئے تواتر کی ایک علوی انتہا ہے۔ اس کو ھ سے تعبیر کریں تو (۶) سے یہ

معلوم ہوتا ہے کہ ھ مساوات

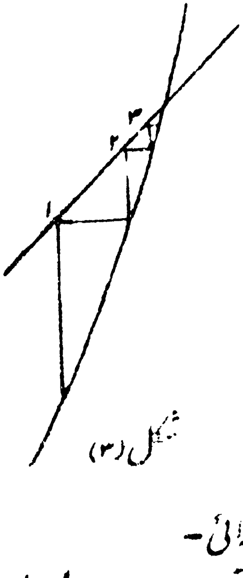
$$لا^۲ = لا + ۱ \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

کی مثبت اصل ہے۔

(۶) سے عملی طور پر محسوب کرنے سے سلسلہ کے پہلے چند ارکان چار ہندسوں تک

۱، ۱٫۴۱۴، ۱٫۵۵۴، ۱٫۵۹۸، ۱٫۶۱۲، ۱٫۶۱۸

حاصل ہوتے ہیں۔ آخر میں لکھا ہوا عدد مطلوبہ تقرب کے درجہ تک ھ کی صحیح قیمت ہے۔



شکل (۳)

$$ما = لا + ۱، \quad ما = لا^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

کی ترسیمات سے اس سوال کو ترسیمی طور پر تعبیر کیا جا سکتا ہے شکل سے ظاہر ہے کہ (۶) سے حاصل شدہ $لا_ن$ کی متواتر قیمتیں کس طرح نقطہ تقاطع پر لا کی قیمت کی طرف مندفع ہوتی ہیں۔ ترسیم کا صرف ایک حصہ دکھایا گیا ہے۔ صریحاً ہم اسی نتیجہ پر پہنچینگے اگر ۱ کے بجائے لا کی کسی مثبت قیمت سے ہم ابتدا کریں۔ اگر $لا_۱$ (۹) کی مثبت اصل سے بڑا ہو تو صرف اس صورت میں تواتر نزولی ہوگا طریقہ بالا کا استعمال مساواتوں کے عددی حل دریافت کرنے میں بہت وسیع ہے خواہ مساواتیں جبری ہوں یا ماورائی۔

۳۔ لامتناہی سلسلوں پر استعمال مثبت رقموں والے سلسلے

متذکرہ بالا مسئلہ احصا کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے۔ لامتناہی سلسلوں کے نظریہ سے جنکی تمام رقمیں ہم علامت ہوں اسکی اچھی توضیح ہوتی ہے۔ درحقیقت لامتناہی سلسلے کی ارقام کا مجموعہ بے معنی چیز ہے کیونکہ جن اعمال پر یہ مشتمل ہے وہ کبھی پورے نہیں ہو سکتے۔ لیکن ایک خاص شرط کے تحت ایک مخصوص مقدار کی تعریف ایک سلسلے سے ہو سکتی ہے۔

سلسلہ

$$\text{ع}_{۱} + \text{ع}_{۲} + \text{ع}_{۳} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}} + \cdots \qquad (۱)$$

پر غور کرو جس کی تمام ارقام مثبت ہیں اور فرض کرو کہ

$$\text{س}_{۱} = \text{ع}_{۱}،\ \text{س}_{۲} = \text{ع}_{۱} + \text{ع}_{۲}،\ \cdots\cdots،\ \text{س}_{\text{ن}} = \text{ع}_{۱} + \text{ع}_{۲} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}} \cdots \qquad (۲)$$

ان مقداروں کو ہم "جزوی مجموعے" کہینگے۔ اگر تواتر

$$\text{س}_{۱}،\ \text{س}_{۲}،\ \cdots\cdots،\ \text{س}_{\text{ن}}،\ \cdots\cdots \qquad (۳)$$

کی علوی انتہا س ہو تو سلسلہ (۱) کو "مستدق" کہتے ہیں۔ اور مقدار س کو عام طور پر اس سلسلہ کا مجموعہ کہا جاتا ہے۔

۶ پھر اگر (۱) مثبت ارقام کا ایک ایسا سلسلہ ہو جس کا مستدق ہونا معلوم ہے اور اگر

$$\text{ع}'_{۱} + \text{ع}'_{۲} + \text{ع}'_{۳} + \cdots\cdots + \text{ع}'_{\text{ن}} + \cdots\cdots \qquad (۴)$$

مثبت ارقام کا ایک دوسرا سلسلہ ہو جس کی ارقام سلسلہ (۱) کی متناظر ارقام سے چھوٹی ہیں یعنی $\text{ع}'_{\text{ن}} < \text{ع}_{\text{ن}}$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے تو (۴) بھی مستدق ہوگا۔ کیونکہ اگر $\text{س}'_{\text{ن}}$، (۴) کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ ہو تو $\text{س}'_{\text{ن}} < \text{س}_{\text{ن}}$ اور بموجب فرض چونکہ مقادیر $\text{س}_{\text{ن}}$ کی علوی انتہا ہے اس لئے مقادیر $\text{س}'_{\text{ن}}$ کی بھی ایک علوی انتہا ہوگی۔

مثال ا۔ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\dots\dots\dots$$

مجموعہ ۲ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر شکل ۲ (صفحہ ۴) میں ہم $\text{و}\text{م}_1 = 1$، $\text{و}\text{ا} = 2$ لیں اور $\text{م}_1\text{ا}$ کو م_2 پر، $\text{م}_2\text{ا}$ کو م_3 پر اور علیٰ ہذا القیاس تنصیف کریں تو نقاط م_1، م_2، م_3،..... مقادیر س_1، س_2، س_3، ... کو تعبیر کرینگے۔ اور چونکہ یہ تمام نقطے ا کے بائیں جانب واقع ہوتے ہیں کیونکہ $\text{م}_{\text{ن}}\text{ا} = 1/2^{\text{ن}-1}$ اور اس لئے اسقدر چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ کی علوی انتہا $\text{و}\text{ا} = 2$ ہے۔
کسی ہندسی سلسلہ کی صورت کو جس کی نسبت مشترک مثبت اور ایک سے کم ہو اسی طرح تعبیر کر سکتے ہیں۔

مثال ۲۔ سلسلہ

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots\dots + \frac{1}{\text{ن}(\text{ن}+1)} + \dots\dots$$

پر غور کرو۔ اگر اس کو شکل

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots\dots + \left(\frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{\text{ن}+1}\right) + \dots\dots$$

میں لکھا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{س}_{\text{ن}} = 1 - \frac{1}{\text{ن}+1}$$

جس کی علوی انتہا ۱ ہے۔
مثال ۳۔ مزید مثالیں ہر ایسے حسابی عمل سے حاصل ہو سکتی ہیں جس میں نہ ختم ہونے والے اعشاریہ کے ہندسے متواتر حاصل ہوتے جاتے ہیں۔ مثلاً ۲ کا جذر المربع نکالنے کے معمولی عمل سے سلسلہ

$$1.414213\dots\dots$$

$$\text{یا}\quad 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \dots\dots\dots$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ $\text{ب}_{\text{ن}}$ ہمیشہ ۱،۵ سے چھوٹا رہتا ہے اس لئے اس صورت میں علوی انتہا کا وجود ہے۔

مثال ۴۔ سلسلہ

$$1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|\text{ن}}}+\cdots\cdots\cdots$$

کی ارقام (پہلی تین رقموں کے بعد) علی الترتیب سلسلہ ۷

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^{\text{ن}-1}}+\cdots\cdots\cdots$$

کی ارقام سے چھوٹی ہیں۔ موخر الذکر سلسلہ مستدق ہے اور اس کا مجموعہ ۳ ہے۔ اس لئے اول الذکر سلسلہ بھی مستدق ہے اور اس کا مجموعہ ۳ سے کم ہے۔

۴۔ تواتر میں انتہائی قیمت

فرض کرو کہ مقادیر

$$\text{ل}_1،\ \text{ل}_2،\ \text{ل}_3،\ \cdots\cdots،\ \text{ل}_{\text{ن}}،\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

کا ایک لامتناہی تواتر خاص ترتیب میں لکھا گیا ہے۔ نیز فرض کرو کہ خواہ ہم کوئی بھی مقدار ص کتنی ہی چھوٹی منتخب کریں سلسلہ میں ہمیشہ ایک ایسا نقطہ مل سکتا ہے جس کے بعد سلسلہ کا ہر رکن کسی معین مقدار م سے اسقدر فرق رکھتا ہے جو مطلق قیمت میں ص سے کم ہے۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ 'مستدق' ہے اور اس کی 'انتہائی قیمت' م ہے۔ مضمون زیر بحث میں اس قسم کے بیانات اسقدر کثرت سے واقع ہوتے ہیں کہ ان کے لئے ایک مختصر جملہ لکھ لینا بہت آسانی پیدا کر دیتا ہے۔ ہم لکھتے ہیں

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ل}_{\text{ن}}=\text{م} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

ربط بالا کی خاص صورتیں دفعہ (۲) میں علوی اور سفلی انتہاؤں کی بحث میں ہماری نظر سے گذری ہیں لیکن موجودہ وسیع تعریف میں یہ مفہوم داخل نہیں ہے کہ

سلسلہ کے ارکان مقدار کے لحاظ سے ترتیب دئے گئے ہیں یا یہ کہ وہ تمام انتہائی قیمت ما سے بڑے یا چھوٹے ہیں۔
مفروضہ یہ ہے کہ ن کی ایک قیمت معلوم کیجا سکتی ہے اس طرح پر کہ لا~ن~ کے بعد آنے والے سلسلہ کے ارکان یعنی

لا~ن+۱~ ، لا~ن+۲~ ، لا~ن+۳~ ، ....

سب کے سب قیمتوں ما − صہ اور ما + صہ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ ن کی یہ قیمت جس کی بنا پر شرط مذکورہ بالا کا پورا ہونا ضروری ہے بڑی ہوگی جتنا صہ چھوٹا ہوگا لیکن یہ مفہوم اس مفروض کے اندر شامل ہے کہ خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا لیا جائے اس طرح کی قیمت کا وجود ہوگا۔

مثال ۱ ۔ تواتر

۱/۲ ، ۳/۲ ، ۲/۳ ، ۴/۳ ، ..... ، ۱ − ۱/ن ، ۱ + ۱/ن ، ..... (۳)

میں انتہائی قیمت صریحاً ۱ ہے۔

مثال ۲ ۔ تواتر

جب لا~۱~ ، جب ۲ لا~۲~ / ۲ ، جب ۳ لا~۳~ / ۳ ، ..... ، جب ن لا~ن~ / ن ، ..... (۴)

میں شمار کنندہ ہمیشہ ±۱ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور نسب نما لاانتہا بڑھتا ہے اسلئے سلسلہ میں انتہائی قیمت صفر ہے۔

بعض صورتوں میں یہ دیکھنا ممکن ہے جیسا اوپر کی مثالوں میں کہ ایک دئے ہوئے تواتر کی ایک معلومہ مقدار انتہا ہے اور اس لئے تواتر متقارب ہے۔ لیکن حل طلب سوال عام طور پر اسقدر آسان نہیں ہوتا اور اس لئے ایک ایسی جانچ یا پرکھ کی ضرورت پڑتی ہے جس سے ہم یہ معلوم کر سکیں کہ دئے ہوئے تواتر کی انتہائی قیمت ہے یا نہیں۔ درحقیقت بہت سی مقادیر ریاضی ایسی ہیں جن کا تعین محض انتہا کی صورت میں ہو سکتا ہے اسلئے ہم کو ایسی صورت میں اس امر کا اطمینان ضروری ہے کہ انتہا موجود ہے۔

سب سے پہلے یہ واضح ہے کہ اگر تواتر (۱) کی انتہا ہے تو ن کی ایک قیمت ہمیشہ معلوم کی جا سکتی ہے اس طرح پر کہ سلسلہ کے ارکان جو لا$_{ن}$ کے بعد آتے ہیں یعنے

لا$_{ن+۱}$، لا$_{ن+۲}$، لا$_{ن+۳}$، ..... لا$_{ن+ب}$، .... لا$_{ن}$ سے اسقدر فرق

رکھتے ہیں جو صہ سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں صہ کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ برعکس اس کے اگر یہ شرط پوری ہو تو سلسلہ کی ایک معین انتہا ہوتی ہے۔

اس کو ثابت کرنیکے لئے پہلے ہم ایک ایسا نزولی تواتر بناتے ہیں جو مثبت مقادیر صہ$_{۱}$، صہ$_{۲}$، صہ$_{۳}$، .... پر مشتمل ہے اور جس کی انتہا صفر ہے۔ اس قسم کا تواتر بنایا جا سکتا ہے مثلاً ہر رکن کو اپنے پہلے رکن کا نصف لینے سے۔ بموجب فرض ایک عدد ن$_{۱}$ معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ کے تمام ارکان جو لا$_{ن_۱}$ کے بعد آتے ہیں قیمتوں

ع$_{۱}$ = لا$_{ن_۱}$ − صہ$_{۱}$ اور ب$_{۱}$ = لا$_{ن_۱}$ + صہ$_{۱}$

کے درمیان واقع ہوتے ہیں اسی طرح ایک عدد ن$_{۲}$ (> ن$_{۱}$) معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ تمام ارکان جو لا$_{ن_۲}$ کے بعد آتے ہیں ع$_{۲}$ = لا$_{ن_۲}$ − صہ$_{۲}$ اور ب$_{۲}$ = لا$_{ن_۲}$ + صہ$_{۲}$ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ پس لا$_{ن_۲}$ کے بعد آنیوالے تمام ارکان ایک خاص وقفہ میں واقع ہوتے ہیں جس کی وسعت (فرض کرو) ع$_{۲}$ سے ب$_{۲}$ تک ہے اور یہ ع$_{۱}$ سے ب$_{۱}$ والے وقفہ کے اندر شامل ہے اور اس طرح کا ہے کہ

ب$_{۲}$ − ع$_{۲}$ < ۲ صہ$_{۲}$

اور علیٰ ہذالقیاس۔ مقادیر ع$_{۱}$، ع$_{۲}$، ع$_{۳}$ .... ایک صعودی تواتر بناتی ہیں اور چونکہ وہ تمام ب$_{۱}$ سے کم ہیں اس لئے ان کی ایک علوی انتہا (فرض کرو)

مہ ہے۔ اسی طرح مقادیر $\text{ب}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$، $\text{ب}_{۳}$، ایک نزولی تواتر بناتی ہیں جنکی سفلی انتہا نہ ہے۔ نیز چونکہ

$$\text{نہ} - \text{مہ} < \text{ب}_{\text{پ}} - \text{ع}_{\text{پ}} < ۲\text{ص}_{\text{پ}}$$

جو اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس لئے انتہائیں مہ اور نہ مختلف نہیں ہو سکتیں۔ متذکرہ بالا شرط کے ماتحت مہ اور نہ کی مشترک قیمت تواتر (۱) کی انتہا ہے۔

مثال ۳۔ کسی حسابی عمل سے ایسی مثال ملسکتی ہے جس میں ایک نتیجہ متواتر تقربات کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے جبکہ تقربات حسب معمول طریقہ سے مرتب کئے جائیں یعنی آخری نمایاں ہندسہ میں اکائی کا اضافہ کر دیا جائے جب کبھی اس کے بعد آنیوالا ہندسہ ۵ یا ۵ سے زیادہ ہو۔ مثلاً ۶ کا جذر المربع معلوم کرنے کے عمل سے

۲٫۶۴۵۷۵۱۳.....

حاصل ہوتا ہے۔ متواتر تقرب جو طریقہ متذکرہ بالا کے موافق مرتب کئے گئے ہیں

۲، ۲٫۶، ۲٫۶۵، ۲٫۶۴۶، ۲٫۶۴۵۸، ۲٫۶۴۵۷۵،

۲٫۶۴۵۷۵۱....

ہیں جن سے زیر بحث قسم کا ایک تواتر حاصل ہوتا ہے۔ جو عدد پہلے عدد کے بعد آتے ہیں اس جذر سے ۵٫ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ دوسرے عدد کے بعد آنے والے اعداد اس سے ۰۵٫ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ تیسرے عدد کے بعد آنے والے اس سے ۰۰۵٫ سے کم فرق رکھتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے تواتر کی ایک خاص انتہا ہے۔

مثال ۴۔ ایسے سلسلہ پر غور کرو جس میں

$$\text{لا}_{۱} = ۱،\quad \text{لا}_{ن+۱} = \frac{۱}{۱ + \text{لا}_{ن}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (۵)$$

تمام ارکان مثبت ہیں اور (پہلے رکن کے بعد) اکائی سے کم ہیں نیز یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام ارکان دوسرے رکن کے بعد $\frac{۱}{۲}$ سے بڑے ہیں۔ پھر

$$\text{لا}_{\text{ن}+۲} - \text{لا}_{\text{ن}+۱} = \frac{۱}{۱+\text{لا}_{\text{ن}+۱}} - \frac{۱}{۱+\text{لا}_{\text{ن}}}$$

یا

$$\frac{\text{لا}_{\text{ن}+۲} - \text{لا}_{\text{ن}+۱}}{\text{لا}_{\text{ن}} - \text{لا}_{\text{ن}+۱}} = \frac{۱}{(۱+\text{لا}_{\text{ن}})(۱+\text{لا}_{\text{ن}+۱})} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس لئے تواتر کا ہر رکن اپنے پہلے رکن سے باری باری سے بڑا اور چھوٹا ہے۔

مزید براں چونکہ نسبت بالا $\frac{۴}{۹}$ سے کم ہے جبکہ ن > ۱ اس لئے متواتر ارکان کے درمیانی وقفے لاانتہا گھٹتے ہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ بہ آسانی حاصل ہوتا ہے کہ تواتر ایک خاص انتہائی طرف مستدق ہونا چاہیے جو صریحاً

$$\text{لا}^۲ + \text{لا} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

کی مثبت اصل ہے

(۵) سے فی الحقیقت محسوب کرنے سے ہم

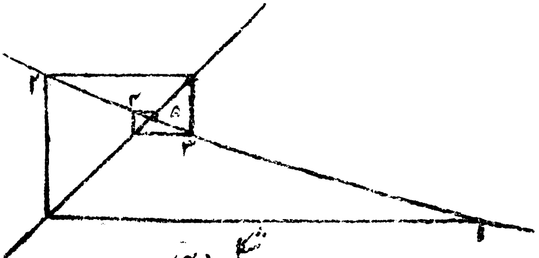
۱، ۵ء، ۶۶۶ء، ۶ء، ۶۲۵ء، ۶۱۵۴ء، ۶۱۹۰ء، ۶۱۷۶ء، ۶۱۸۲ء

حاصل کرتے ہیں۔ آخری عدد زیر بحث اصل کی چار ہندسوں تک صحیح قیمت ہے۔

تواتر کی نوعیت ترسیمی طور پر

$$\text{ما} = \text{لا} \text{ ، } \text{ما} = \frac{۱}{۱+\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

کی ترسیموں سے اس طرح واضح کیجا سکتی ہے۔



شکل (۴)

شکل میں ترسیم کا ضروری حصہ دکھایا گیا ہے۔

اس مثال میں اور دفعہ (۲) کی مثال (۳) میں تقرب کے ایسے طریقہ کی ہم نے سادہ مثالیں دی ہیں جو دو منحنیوں کے تقاطع سے متعلق ہیں۔ یہ طریقہ اکثر مفید ثابت ہوتا ہے۔ استدقاق بطی ہوگا اگر منحنیوں کے میلان محور لا کے ساتھ (ایک ہی یا مخالف سمتوں میں) تقریباً وہی ہوں۔

۵۔ لامتناہی سلسلوں میں استعمال۔

اگر لامتناہی سلسلہ

$ع_1 + ع_2 + \dots + ع_ن + \dots \dots$ (۱)

میں جسکی ارقام کا ہم علامت ہونا مشروط نہیں ہے ہم

$س_1 = ع_1$، $س_2 = ع_1 + ع_2$، ....، $س_ن = ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots ع_ن$، .... (۲)

لکھیں اور اگر تواتر

$س_1$، $س_2$، $س_3$، .... $س_ن$، .... (۳)

کی انتہائی قیمت س ہو تو سلسلہ کو 'مستدق' کہا جاتا ہے اور س کو اس کا مجموعہ کہتے ہیں۔

دفعہ (۴) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۱) کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ایک عدد ن کا معلوم کرنا ممکن ہو اس طرح کہ جزدی مجموعے $س_{ن+1}$، $س_{ن+2}$، .... $س_{ن+پ}$ ....تمام $س_ن$ سے اسقدر فرق رکھیں جو ص سے کم ہو جہاں ص کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔

موجودہ بحث سے متعلق ایک اہم مسئلہ یہ ہے کہ اگر سلسلہ

$|ع_1| + |ع_2| + \ldots\ldots + |ع_ن| + \ldots\ldots\ldots\ldots$ (۴)

جو سلسلہ (۱) کی مختلف ارقام کی مطلق قیمتیں لینے سے بنایا گیا ہے مستدق ہو تو سلسلہ (۱) بھی مستدق ہوگا۔

کیونکہ اگر (۴) مستدق ہو تو سلسلہ (۱) کی مثبت ارقام بدرجہ اولیٰ ایک مستدق سلسلہ بناتی ہیں اور اسی طرح منفی ارقام بھی۔ فرض کرو کہ مثبت ارقام کا مجموعہ پ اور منفی ارقام کا - ق ہے۔ نیز فرض کرو کہ (۱) کی پہلی م + ن ارقام کا مجموعہ $س_{م+ن}$ ہے جس میں م مثبت ارقام ہیں جنکا مجموعہ $پ_م$ اور ن منفی ارقام ہیں جن کا مجموعہ - $ق_ن$ ہے۔ تب

$$(پ - ق) - س_{م+ن} = (پ - ق) - (پ_م - ق_ن)$$

$$= (پ - پ_م) - (ق - ق_ن) \quad \ldots\ldots (۵)$$

اگر م + ن خاطر خواہ بڑا ہو تو $پ - پ_م$ اور $ق - ق_ن$ دونو ص سے کم ہوں گے۔ جہاں ص کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو، اس لئے ان مثبت مقداروں کا فرق بدرجہ اولیٰ مطلق قیمت میں ص سے کم ہوگا۔

پس $س_{م+ن}$ کی انتہائی قیمت پ - ق ہے۔

جب سلسلہ (۴) جو سلسلہ (۱) کی مختلف ارقام کی مطلق قیمتوں پر مشتمل ہے مستدق ہو تو سلسلہ (۱) 'مطلقاً' یا 'لازماً' یا 'غیر مشروطاً' مستدق کہلاتا ہے۔

لیکن یہ ممکن ہے کہ ایک سلسلہ مستدق ہو جبکہ اس کی ارقام کی مطلق قیمتوں سے بنے ہوئے سلسلہ کی علوی انتہا نہ ہو۔ اس صورت میں دئے ہوئے سلسلہ کے استدقاق کو ہم اتفاقی یا مشروط استدقاق کہینگے۔

11 حسب ذیل مفید مسئلہ صادق آتا ہے خواہ زیر بحث سلسلہ لازماً یا صرف محض اتفاقاً مستدق ہو۔

اگر ایک سلسلہ کی ارقام باری باری سے مثبت اور منفی ہوں اور بلحاظ مطلق قیمت کے مسلسل گھٹتی جائیں اور بعدہٗ آخر کار صفر انتہائی کی طرف مائل ہوں تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ ارقام کی کسی محدود طاق تعداد کے مجموعے اور کسی محدود جفت تعداد کے مجموعے کے درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ہر صورت میں ارقام کی تعداد ابتدا سے شمار کیجائے۔

طالب علم اس کے ثبوت سے واقف ہوگا لیکن چونکہ یہ تحلیل دقیقہ کے استدلال کی ایک عمدہ مثال ہے اسکو یہاں دہرایا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ سلسلہ

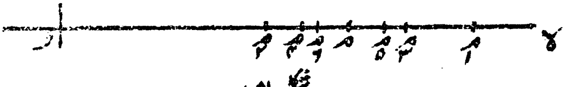
$$ع_۱ - ع_۲ + ع_۳ - ع_۴ + \ldots \ldots \quad (۶)$$

ہے جس میں بموجب فرض

$$ع_۱ > ع_۲ > ع_۳ > \ldots \ldots$$

شکل میں فرض کرو کہ

$$و\,م_۱ = ع_۱،\ م_۱ م_۲ = ع_۲،\ م_۲ م_۳ = ع_۳،\ م_۳ م_۴ = ع_۴ \ldots$$



شکل (۵)

یہ ظاہر ہے کہ نقاط $م_۱$، $م_۳$، $م_۵$ ..... ایک نزولی تواتر بناتے ہیں اور نقاط $م_۲$، $م_۴$، ..... ایک صعودی تواتر۔ نیز پہلے سلسلہ کا ہر نقطہ دوسرے سلسلہ کے ہر نقطہ کے دائیں جانب ہے پس ہر تواتر کا ایک انتہائی نقطہ موجود ہوتا ہے اور چونکہ

$$م_{۲ن}\, م_{۲ن+۱} = ع_{۲ن+۱}$$

اور اس لئے آخر کار کسی اختیاری مقدار سے کم ہے، یہ دونو انتہائی نقطے آخر کار ایک نقطہ م (فرض کرو) پر منطبق ہونے چاہئیں تب و م دئے ہوئے سلسلہ (۶) کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔

مثال - سلسلہ

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \ldots\ldots$$

۱ اور ۱ - $\frac{۱}{۲}$ کے درمیان ایک انتہا کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

یہ سلسلہ اتفاقاً مستدق جماعت سے متعلق ہے۔ آئندہ یہ تبلایا جائیگا (دفعہ ۱۰۵) کہ سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \ldots\ldots$$

ن کو کافی بڑا لینے سے اسقدر بڑا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں۔

یہ اچھی طرح ذہن نشین رہے کہ لاتناہی سلسلوں سے متعلق جو لفظ مجموعہ ہم نے استعمال کیا ہے وہ بالکل وضعی حیثیت رکھتا ہے اور یہ کہ ہم اس معاملہ میں آزاد نہیں ہیں کہ بغیر جانچ کے اس طرح کے سلسلہ کو اس طور پر استعمال کریں
جیسے ایک جملہ کو استعمال کیا جاتا ہے جو ارقام کی محدود تعداد پر مشتمل ہو۔ ۱۲
مثلاً ہمیں یہ نہیں مان لینا چاہئے کہ رقموں کی ترتیب کو بدل دینے سے مجموعہ نہیں بدلتا۔ مطلقاً مستدق سلسلہ کی صورت میں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ مفروض جائز ہے لیکن اتفاقاً مستدق سلسلہ میں ارقام کی ترتیب کو بدل کر ان کو کسی دوسری مناسب ترتیب میں رکھنے سے سلسلہ کو ہم جس انتہا کی طرف مستدق کرنا چاہیں کر سکتے ہیں ان مسئلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کتابوں میں مل سکتے ہیں۔ اس کتاب میں لکھنے کی چنداں ضرورت نہیں۔

بہرکیف حسب ذیل سادہ مسائل کا اکثر حوالہ دیا جائیگا۔

۱ - اگر $ع_{۱} + ع_{۲} + ع_{۳} + \ldots\ldots + ع_{ن} + \ldots\ldots$ (۷)

ایک مستدق سلسلہ ہو جس کا مجموعہ س ہے تو سلسلہ

$ا ع_{۱} + ا ع_{۲} + ا ع_{۳} + \ldots\ldots + ا ع_{ن} + \ldots\ldots$ (۸)

جو (۷) کی ارقام کو جزو ضربی ا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

مجموعہ س کی طرف مستدق ہوگا۔ اس کا ثبوت ظاہر ہے۔

۲۔ اگر $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \cdots + \text{ع}_\text{ن} + \cdots$ (۹)

اور $\text{ع}'_1 + \text{ع}'_2 + \cdots + \text{ع}'_\text{ن} + \cdots$ (۱۰)

مستدق سلسلے ہوں جن کے مجموعے علی الترتیب س اور $\text{س}'$ ہیں تو سلسلہ

$$(\text{ع}_1 \pm \text{ع}'_1) + (\text{ع}_2 \pm \text{ع}'_2) + \cdots + (\text{ع}_\text{ن} \pm \text{ع}'_\text{ن}) + \cdots \quad (۱۱)$$

جو (۹) اور (۱۰) کی متناظر ارقام کے مجموعوں یا فرقوں پر مشتمل ہے مجموعہ $\text{س} \pm \text{س}'$ کی طرف مستدق ہوگا کیونکہ اگر $\text{س}_\text{ن}$، $\text{س}'_\text{ن}$، علی الترتیب (۹) اور (۱۰) کی پہلی ن رقموں کے مجموعے ہوں تو (۱۱) کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ $\text{س}_\text{ن} \pm \text{س}'_\text{ن}$ ہوگا۔ اب

$$(\text{س} \pm \text{س}') - (\text{س}_\text{ن} \pm \text{س}'_\text{ن}) = (\text{س} - \text{س}_\text{ن}) \pm (\text{س}' - \text{س}'_\text{ن}) \quad (۱۲)$$

بموجب فرض اگر ص کوئی اختیاری مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو ہم ن کی ایک قیمت معلوم کر سکتے ہیں ایسی کہ اس قیمت اور اس سے اعلیٰ قیمتوں کیلئے

$$|\text{س} - \text{س}_\text{ن}| < \tfrac{1}{2}\,\text{ص} \quad \text{اور} \quad |\text{س}' - \text{س}'_\text{ن}| < \tfrac{1}{2}\,\text{ص} \quad (۱۳)$$

اور اسلئے $|(\text{س} \pm \text{س}') - (\text{س}_\text{ن} \pm \text{س}'_\text{ن})| < \text{ص}$ (۱۴)

جو اس بات کی شرط ہے کہ $\text{س}_\text{ن} \pm \text{س}'_\text{ن}$ کی انتہائی قیمت $\text{س} \pm \text{س}'$ ہو جائے۔

۳۔ اسی مفروضہ سے سلسلہ

$$(\text{ا}\,\text{ع}_1 + \text{ب}\,\text{ع}'_1) + (\text{ا}\,\text{ع}_2 + \text{ب}\,\text{ع}'_2) + \cdots + (\text{ا}\,\text{ع}_\text{ن} + \text{ب}\,\text{ع}'_\text{ن}) + \cdots \quad (۱۵)$$

مجموعہ ا نس + ب نس کی طرف مستدق ہوگا۔ پچھلے دو مسئلوں سے یہ فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔

۶۔ تفاعل کی عام تعریف۔ ۱۳

ایک متغیر مقدار کو دوسری متغیر مقدار کا 'تفاعل' کہتے ہیں جبکہ دوسری چیزیں وہی برقرار رہیں اور موخرالذکر متغیر کی قیمت مقرر کر دیجائے تو اول الذکر متغیر کی قیمت متعین ہو جائے۔

اس قسم کا ربط رکھنے والی دو مقداروں میں اس طرح تمیز کیجاتی ہے کہ ان کو علی الترتیب 'تابع متغیر' اور 'متغیر متبوع' کہتے ہیں۔

ایک متغیر مقدار کے تفاعل کا تصور ریاضیات کی مختلف شاخوں میں رونما ہوتا ہے۔ مثلاً علم الحساب میں ن اشیاء کی ترتیبوں کی تعداد ن کا ایک تفاعل ہے گولیوں کے ایک مثلثی یا ایک مربع انبار میں گولیوں کی تعداد گولیوں کی اس تعداد کا تفاعل ہے جو قاعدے کے ہر ضلع میں ہوتی ہیں۔ کسی دئے ہوئے سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ (س ن) عدد ن کا تفاعل ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔ اس قسم کی بعض صورتوں میں زیر بحث تفاعلوں کے لئے ریاضی کے خاص خاص ضابطے ہوتے ہیں لیکن یہ ذہن نشین رہے کہ تفاعل کے منشاء میں انکا وجود ضروری نہیں ہے۔ مثلاً سلسلہ

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\cdots$$

کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ ن کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس مجموعہ کو ظاہر کرنیکے لئے ریاضی میں کوئی ٹھیک جملہ موجود نہیں ہے۔ اسی طرح اعداد مفرد کی تعداد جو ایک دئے ہوئے صحیح عدد ن سے متجاوز نہیں کرتے ن کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس کو ایک ضابطہ سے تعبیر نہیں کیا جا سکتا۔

ان مثالوں میں متغیر متبوع بلحاظ اپنی نوعیت کے صرف محدود طور پر تبدیل ہو سکتی ہے صغاری احصا میں خصوصاً ایسی صورتوں پر بحث ہوتی ہے جنہیں متغیر متبوع دفعتاً

معنوں میں مسلسل ہو۔ مثلاً ہندسہ میں ایک دائرہ کا رقبہ یا ایک کرہ کا حجم نصف قطر کا ایک تفاعل ہوتا ہے نظری طبیعیات میں ایک گرنے والے ذرہ کا ارتفاع یا رفتار وقت کا ایک تفاعل سمجھی جاتی ہے۔ ایک دئے ہوئے تناسب کے اہتزاز کا دوسعت کا ایک تفاعل دئے ہوئے تپش پر ایک دی ہوئی گیس کا دباؤ کثافت کا ایک تفاعل سیر شدہ بھاپ کا دباؤ تپش کا ایک تفاعل وغیرہ متصور ہوتے ہیں۔ یہاں پر بھی تفاعل کے لئے ریاضی کے ایک جملہ کا وجود یا غیر وجود کوئی اہمیت نہیں رکھتا۔ دو متغیروں کے درمیان تفاعلی ربط قائم کرنیکے لئے صرف یہ ضروری ہے کہ ایک کی قیمت سے دوسرے کی قیمت کا تعین ہو جائے بشرطیکہ دوسری چیزیں غیر متغیر رہیں۔

عام طور پر ہم متغیر متبوع کو لا (x) سے اور تابع متغیر کو ما (y) سے تعبیر کرینگے۔ ان دونوں کے درمیان جو ربط ہوتا ہے اسکو اکثر

ما = ف (لا)، یا ما = فہ (لا)، وغیرہ

سے ظاہر کیا جائیگا۔ رمز ف (لا) [f (x)] سے مراد 'لا کا کوئی خاص تفاعل' ہے۔

جب ایک مقدار ایک قیمت سے دوسری قیمت اختیار کرتی ہے تو یہ نئی قیمت پہلی قیمت سے جسقدر بڑی ہوتی ہے اسکو اس مقدار کا "اضافہ" کہتے ۱۴
ہیں خواہ یہ مثبت ہو یا منفی۔ اس اضافہ کو ہم اس طرح ظاہر کرینگے کہ متغیر مقدار کے پہلے مف جو "محدود فرق" کا اختصار خیال کیا جا سکتا ہے لکھدیا جائیگا۔ انگریزی میں اس علامت کے لئے Δ یا δ ہے [مف ≡ Δ]۔

مثلاً ہم کہتے ہیں کہ متغیر متبوع لا سے بدلکر لا + مف لا ہو جاتا ہے اور اس وجہ سے تابع متغیر ما سے بدلکر ما + مف ما ہو جاتا ہے۔

پس اگر ما = ف (لا) . . . . (۱)

تو ما + مف ما = ف (لا + مف لا) . . . . . (۲)

اس لئے مف ما = ف (لا + مف لا) - ف (لا) . . . . (۳)

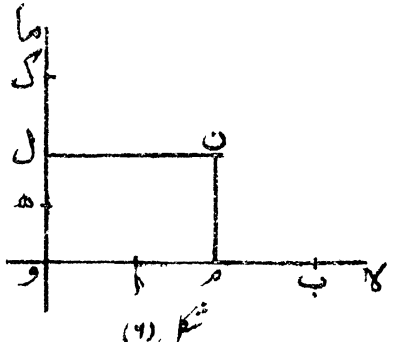
فی الحال اس ترقیم میں یہ مفہوم داخل نہیں ہے کہ مف لا یا مف ما چھوٹا ہے۔ ربط (۲) پورا ہونے پر اضافوں کی کوئی قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

مثال (۱)۔ اگر ما = لا^{۳} تو جب لا = ۱۰۰، مف لا = ۱ تو
مف ما = (۱۰۱)^{۳} − (۱۰۰)^{۳} = ۳۰۳۰۱

مثال (۲)۔ اگر ما = جب لا$^{\circ}$ تو اگر لا = ۶۰، مف لا = ۱ تو
مف ما = ۰٫۸۷۴۶۲ − ۰٫۸۶۶۰۳ = ۰٫۰۰۸۵۹
ایک خاص درجہ صحت تک۔

۷۔ تفاعلوں کی ہندسی تعبیر۔

متغیروں لا، ما کے درمیان جو ربط ہے اب ہم اسکی ہندسی تعبیر علی القوائم محاور ولا، وما لیکر معلوم کرتے ہیں۔ ولا میں طول ومد لو اس طرح کہ وہ متغیر متبوع لا کی کسی خاص قیمت کو تعبیر کرے اور وما میں ول لو جو تفاعل ما کی متناظر قیمت کو تعبیر کرے اور مستطیل ومنل کی تکمیل کرو تو نقطہ ن کا مقام



شکل (۶)

دونو مربوط متغیروں کی قیمتوں کو ظاہر کریگا۔

اب چونکہ نقطہ م بموجب فرض ولا پر کوئی مقام اختیار کرسکتا ہے جو (ممکن ہے کہ) دو ثابت سروں کے درمیان ہو ہمیں اس طرح نقاط ن کا ایک لاتناہی گروہ حاصل ہوتا ہے۔

اس گروہ کی نوعیت سے متعلق اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے۔ کیا اس ۱۵

گروہ کے نقاط ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں؟۔ اکثر صورتوں میں اسکا جواب ظاہر ہے۔ مثلاً ایک دائرہ کے رقبہ اور اس کے نصف قطر کے درمیاں جو ربط ہوتا ہے اسکی اگر ہندسی تعبیر معلوم کرنا ہو تو ہم و م کو نصف قطر کے متناسب اور ن م کو رقبہ کے متناسب لیتے ہیں۔ اس طرح ن م ∝ و م² اور نقاط ن ایک مکافی پر واقع ہوتے ہیں یہی منحنی اس ربط کو بھی تعبیر کریگا جو ایک گرنے والے جسم کے طے شدہ فاصلہ (ف) اور وقت (ت) کے درمیان ہے کیونکہ ف ایسے بدلتا ہے جیسے ت²۔

لیکن عام صورت میں ہمارا جواب نفی میں ہونا چاہئے۔ دفعہ (۶) کی ابتدا میں تفاعل کی جو تعریف کی گئی ہے اس کا ضروری مفہوم یہ ہے کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ما کی جو قیمتیں ہیں ان میں کسی ربط کا موجود ہونا ضروری نہیں ہے خواہ لا کی یہ مختلف قیمتیں ایک دوسرے سے کتنے ہی قریب واقع ہوں۔

تفاعل کی جس تعریف کا حوالہ دیا گیا ہے وہ درحقیقت ہمارے موجودہ مقاصد کا لحاظ کرتے ہوئے بہت زیادہ وسیع ہے۔ عام طور پر احصا میں ایسے تفاعلوں سے سابقہ پڑے گا جو چند خاص اہم قیود کی پابندی کرتے ہیں۔

ان میں سے پہلی قید وہ ہے جو "مسلسل" کے نام سے موسوم ہے۔ اس کا مقصد یہ ہے کہ جس طرح نقطہ م خط و لا کے کسی محدود حصہ ا ب پر چلتا ہے، ل بھی خط و ما کے ایک محدود حصہ ھ ک پر چلتا ہے یعنی ل کم سے کم ایک مرتبہ ھ اور ک کے درمیان ہر مقام کو اختیار کرتا ہے مزید برآں اگر وسعت ا ب کو مسلسل گھٹا دیا جائے تو وسعت ھ ک بھی گھٹتی ہے اور ا ب کو کافی چھوٹا لینے سے اس قدر چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جسقدر ہم چاہیں۔

ابھی ہم یہ دیکھینگے (دفعہ ۸) کہ اس دوسری خاصیت میں پہلی خاصیت شامل ہے۔ اب ہم مسلسل تفاعل کی باضابطہ تعریف دینگے جو اگرچہ

کسی قدر مختلف ہے لیکن مندرجہ بالا کے مماثل ہے۔

۸۔ مسلسل تفاعل کی تعریف۔

فرض کرو کہ متغیر متبوع اور تفاعل کی کوئی دو متناظر قیمتیں لا، ما ہیں۔ اگر متغیر متبوع کی قابل قبول قیمتوں کا کوئی اختیاری تواتر لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$ .... لا$_n$ لیا جائے جس کی انتہا لا ہے اور ان قیمتوں کے جواب میں تفاعل کی قیمتوں کا تواتر ما$_1$، ما$_2$، ما$_3$ ..... ما$_n$، ..... حاصل ہو جو انتہا ما کی طرف ہمیشہ مندرق ہوتا ہے تو متغیر متبوع کی اس خاص قیمت لا کے لئے تفاعل کو مسلسل کہتے ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مف لا، لا کے اضافہ کو تعبیر کرے اور مف ما، ما کے متناظر اضافہ کو ظاہر کرے تو ہم ہمیشہ ایک مثبت مقدار صہ* (جو صفر نہیں ہے) معلوم کر سکتے ہیں ایسی کہ مف لا کی تمام قابل قبول قیمتوں کے لئے جو مطلق قیمت میں صہ سے کم ہوں، مف ما کی قیمت مطلق قیمت میں ثہ سے کم ہو گی جہاں ثہ کوئی مقررہ مقدار ہے
16 خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اسے باضابطہ تعریف خیال کیا جا سکتا ہے اس تعریف میں جو شرط شامل ہے اگر وہ پوری نہ ہو تو قبل الذکر تعریف کی شرط بھی پوری نہیں ہو سکتی۔ اس طرح یہ دونوں تعریفیں ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔

اس دوسری تعریف کو اجمالاً لیکن غیر مکمل صورت میں کبھی اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ متغیر متبوع میں ایک لامتناہی چھوٹی تبدیلی تفاعل میں ایک لامتناہی چھوٹی تبدیلی پیدا کر دیتی ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ اگر ف (لا) کوئی

---

* مف لا کی قابل قبول قیمتوں کی قید کے یہ معنی ہیں کہ لا + مف لا متغیر متبوع کی قیمتوں کی اس وسعت کے اندر واقع ہونا چاہئے جس کی تفاعل اجازت دیتا ہے۔

تفاعل ہو تو ایک مقدار صہ کا معلوم کرنا ممکن ہونا چاہئے اس طرح کہ

| ف (لا + ھ) - ف (لا) | < ثہ

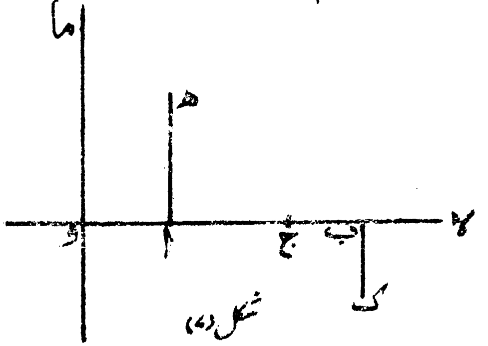
ھ کی تمام جائز قیمتوں کے لئے اس طرح کہ | ھ | < صہ، صہ کی قیمت عام طور پر ثہ کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے لیکن اس تعریف میں یہ مفہوم مضمر ہے کہ صہ کی کسی خاص قیمت سے شرط بالا ہمیشہ پوری ہو سکتی ہے خواہ ثہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔

۹- مسلسل تفاعل کی خاصیت۔

اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے اور اگر ف (ا)، ف (ب) مختلف العلامت ہوں تو ا اور ب کے درمیان لا کی کم سے کم ایک قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے ف (لا) = ۰۔

شکل ذیل میں صراحت کی خاطر یہ مان لیا گیا ہے کہ ف (ا) مثبت اور ف (ب) منفی ہے۔ خط لا لا کے وہ نقطے جہاں لا = ا، لا = ب علی الترتیب ا، ب سے تعبیر کئے گئے ہیں اور تفاعل کی متناظر قیمتیں ا ھ، ب ک سے تعبیر ہوئی ہیں۔ ثبوت اس بات پر مشتمل ہے کہ طول میں گھٹنے والے وقفوں کا سلسلہ

اب، $\frac{1}{۲}$ اب، $\frac{1}{۴}$ اب، ......، $\frac{1}{۲^{ن}}$ اب، ......



شکل (۷)

۱۷ معلوم ہو سکتا ہے اس طور پر کہ ہر وقفہ اپنے سے پہلے وقفہ کا ایک حصہ ہو اور ہر ایک ایسے نقاط پر مشتمل ہو جن پر ف (لا) مثبت اور نیز ایسے نقاط پر جن پر ف (لا) منفی ہوتا ہو۔

فرض کرو کہ اب کی تنصیف م پر ہوتی ہے۔ اگر م پر ف (لا) = ۰ تو اس خاص صورت کے لئے مسئلہ بالا درست ہو جاتا ہے۔ اس لئے ہم اس کو اور اسکی مماثل صورتوں کو اپنے ثبوت سے خارج کر دیتے ہیں۔ اگر ف (لا) نقطہ م پر صفر نہیں ہوتا تو ا م، م ب وقفوں میں سے کم سے کم ایک وقفہ میں تفاعل کی قیمتیں مثبت اور منفی دونوں ہونگیں۔ اگر صرف ایک وقفہ میں یہ بات پائی جائے تو ہم اس کو منتخب کر لیتے ہیں اور اگر دونوں میں تو انتخاب اختیاری ہے۔ منتخب شدہ وقفہ کو پھر م_1 پر تنصیف کیا جاتا ہے۔ اس صورت کو خارج کر کے جہاں م_1 پر ف (لا) صفر ہو جاتا ہے ان دو نصف حصوں میں کم سے کم ایک حصہ ایسا ضرور ہوگا جس میں تفاعل کی قیمتیں مثبت اور منفی دونوں ہونگیں اس عمل کو لا متناہی طور پر جاری رکھا جا سکتا ہے اور چونکہ

$$\text{م}_{\text{ن}}\,\text{م}_{\text{ن}+1} = \frac{1}{2^{\text{ن}}}\,\text{اب}$$

دفعہ (۴) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تقسیم کرنے والے نقاط کے تواتر

$$\text{م}_1,\ \text{م}_2,\ \ldots\ldots\ \text{م}_{\text{ن}},\ \ldots\ldots$$

میں جو اس طرح کے عمل سے حاصل ہوتا ہے ایک خاص انتہائی مقام ج (فرض کرو) ہونا چاہئے۔

مزید برآں ج پر ف (لا) کی قیمت صفر ہونی چاہئے۔ کیونکہ اگر یہ قیمت مثبت ہو تو ج کے دونوں طرف ایک محدود وسعت ایسی ہونی چاہیے جس میں ف (لا) مثبت ہوگا اور یہ اس وجہ سے کہ ف (لا) کو مسلسل تسلیم کر لیا گیا ہے۔ یہ اس نتیجہ کے منافی ہے جو ابھی ہم نے ثابت کیا۔ اسی طرح ج پر ف (لا) کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی۔

مسئلہ بالا کو ہم اجمالاً اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک مسلسل تفاعل اپنی

علامت تبدیل نہیں کر سکتا جب تک کہ وہ صفر قیمت میں سے نہ گذرے۔

اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے اور اگر ف (ا)، ف (ب) غیر مساوی ہوں تو ا اور ب کے درمیان لا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہئے ایسی کہ ف (لا) = بہ جہاں بہ، ف (ا) اور ف (ب) کے درمیان کوئی مقدار ہو سکتی ہے۔ کیونکہ فرض کرو

فہ (لا) = ف (لا) - بہ

چونکہ بہ مستقل ہے فہ (لا) بھی ایک مسلسل تفاعل ہوگا۔ بموجب فرض

ف (ا) - بہ اور ف (ب) - بہ

مختلف العلامت ہیں اور اس لئے فہ (ا) اور فہ (ب) مختلف العلامت۔ پس مسئلہ بالا سے ا اور ب کے درمیان لا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہئے جس کے لئے فہ (لا) = ۰ یعنی ف (لا) = بہ

بالفاظ دیگر ایک مسلسل تفاعل ایک قیمت سے دوسری قیمت تک جا نہیں سکتا جب تک کہ ہر درمیانی قیمت کو (کم سے کم) ایک مرتبہ اختیار نہ کرے۔

۱۰۔ مسلسل تفاعل کی ترسیم۔ ۱۸

جو کچھ کہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقاط کا گروہ جو ایک تفاعل کو دفعہ (۷) کے معنوں میں تعبیر کرتا ہے ایک مسلکہ گروہ پیدا کرتا ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ اس گروہ میں سے کوئی ایسا خط نہیں کھینچا جا سکتا جو اس کے کسی نہ کسی ایک نقطہ میں سے نہ گذرے۔ کیونکہ اگر تفاعل کو فہ (لا) سے اور کسی خط کے معین کو ف (لا) سے تعبیر کریں اور اگر ف (لا) اور فہ (لا) دونوں مسلسل ہوں تو فرق

فہ (لا) - ف (لا)

بھی مسلسل ہوگا (دفعہ ۱۲) اور اس لئے یہ علامت بدل نہیں سکتا جب تک کہ صفر قیمت میں سے نہ گزرے۔

اب یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم نقاط کے ایک مسلکہ گروہ کا ایک منحنی پر

واقع ہونا فرض کر سکتے ہیں۔ اسکا جواب زیادہ تر اس پر منحصر ہے کہ اصطلاح "مخنی" کے ساتھ کیا خاصیتیں ملزوم قرار دیجاتی ہیں۔ بہر کیف یہ تو ظاہر ہے کہ گروہ سے متعلق کافی نقاط معلوم کر کے ان کو عملی طور پر ایک کاغذ پر مرتسم کرتے اور ان میں سے گذرتا ہوا ایک مسلسل خط کھینچنے سے ہم ایک مسلسل تفاعل کے عام طریق یا چال کو اچھی طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔ جو شکل اس طرح بنائی جاتی ہے اس کو تفاعل کی "ترسیم" کہتے ہیں۔

ذیل کے تفاعلوں کی ترسیمات سے طالب علم بخوبی واقف ہوگا' یہ سادہ اور دو درجی مساواتوں کے نظریہ کی توضیح کے لئے استعمال ہوتی ہیں۔

ما = ا لا + ب ' ما = ا لا^{2} + ب لا + ج

اس کتاب میں ترسیمی طریقہ توضیح کی خاطر اکثر استعمال کیا جائیگا (جیسا دوسری ابتدائی کتابوں میں استعمال کیا جاتا ہے) لیکن یہ بتادینا ضروری ہے کہ تفاعیل ریاضی پر اس کو استعمال کرنے میں خاص خاص قیود کا خیال رکھنا پڑتا ہے۔ سب سے پہلے یہ ظاہر ہے کہ جدا جدا قیمتوں کی ایک محدود تعداد تفاعل کو پوری طرح تعبیر نہیں کر سکتی۔ اور درحقیقت جب تک کہ لا کی قیمتوں کے انتخاب میں جن کے لئے تفاعل محسوب کیا جارہا ہے احتیاط سے کام نہ لیا جائیگا نتیجہ سے بہت زیادہ غلط فہمی پیدا ہوسکتی ہے۔ مزید بریں سیاہی یا پنسل کی لکیر کا جس سے ہم تفاعل کا طریق تعبیر کرتے ہیں (بہ خلاف خیالی ریاضی خط کے) کچھ نہ کچھ عرض ضرور ہوگا اور یہی حال اس لکیر کا ہے جو محور لا کو تعبیر کرتی ہے۔ اس طرح ان دونوں کے درمیان جو فاصلہ ہے اسکو صحیح طور پر معلوم کرنے میں ابہام کا امکان ہے۔ نیز اسی سبب سے ایک حد سے زیادہ فنی تفصیلات کا بیان کرنا ناممکن ہے۔ اس لئے یہ طریقہ ایسے تفاعلوں کی صورت میں (جنکا وجود ثابت کیا جاسکتا ہے) بذاتہ ناقص سمجھا جاتا ہے جن میں پیمانہ کو بڑا کرنے سے نئی نئی پیچید تفصیلات کا انکشاف رونما ہوتا ہے*۔ موخرالذکر

* مثلاً تفاعل لا جب (1/لا) کی تفصیلات مبدا کے پاس۔

قبیل کے تفاعیل احصا میں بہت کم استعمال ہوتے ہیں۔

ترسیمی تعبیر کا طریقہ اکثر اسوقت استعمال کیا جاتا ہے جبکہ تفاعل کے لیے ریاضی شکل کا کوئی جملہ معلوم نہ ہوسکے اور مشاہدہ سے متغیر متبوع اور تابع متغیر کی چند متناظر قیمتیں معلوم کی جائیں۔ اس صورت میں خطوط کی موٹائی کی وجہ سے جس ابہام کا امکان ہے وہ بمقابلہ اُس کے قابل قدر نہیں ہے جو حواس کے نقائص اور مشاہدے کی اغلاط سے پیدا ہوتی ہیں۔ ۱۹

طالب علم نے ایسے موسمی جدولوں کا مشاہدہ کیا ہوگا جن میں بارپیما یا تپش پیما کے ارتفاع کو وقت کے ایک تفاعل کی صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے طریقہ بالا کو مدنظر رکھکر جو ترسیم حاصل کیجاتی ہے اس سے درحقیقت انہی باتوں کا انکشاف ہوتا ہے جو اس عددی جدول سے اخذ ہوسکتی ہیں جس میں متغیر کی متناظر قیمتوں کے جوڑوں کا ایک سلسلہ مندرج ہوتا ہے لیکن ترسیمی شکل زیادہ قوی طریقہ سے دل پر اثر کرتی ہے اور تفاعل کی درمیانی قیمتوں کا تصور پیدا کرنے میں مدد دیتی ہے۔

۱۱۔ عدم تسلسل۔

اگرچہ کہ ریاضیات میں جن تفاعلوں سے سابقہ پڑتا ہے وہ عام طور پر زیر بحث متغیر متبوع کی وسعت میں معین اور مسلسل ہوتے ہیں لیکن بعض صور تو میں چند تنہا نقطوں پر یہ باتیں نہیں پائی جاتی۔

مثلاً یہ ہوسکتا ہے کہ متغیر متبوع کی چند خاص قیمتوں کے لئے تفاعل کی ابتدائی تعریف بے معنی ثابت ہو۔ مثال کے طور پر تفاعل

جیب لا
———
لا

پر غور کرو۔ صفر کے علاوہ لا کی کسی قیمت کے لئے شمار کنندے اور نسب نما کی خاص قیمتیں ہوتی ہیں اور خارج قسمت کا وجود ہوتا ہے۔ لیکن جب لا = ۰ تو کسر غیر معین شکل صفر / صفر اختیار کرتی ہے۔ یہ صحیح ہے کہ عام طور پر اسکی قیمت

ا فرض کرلی جاتی ہے لیکن ابتدائی تعریف کا یہ مفہوم نہیں ہے۔ اسی طرح کی بہت سی اور مثالیں پیش آئیں گی۔

مزید براں تفاعل ف (لا) لا کی کسی خاص قیمت لا_1 کے لئے لامتناہی ہوسکتا ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ لا کو کافی طور پر لا_1 کے تقریباً مساوی لینے سے تفاعل کی قیمت کسی مقدار سے جو ہم منتخب کریں تجاوز ہوسکتی ہے خواہ یہ مقدار کتنی ہی بڑی ہو۔ اسکو عام طور پر ہم ضابطہ

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{لا}_1}\ \text{ف}(\text{لا}) = \infty$$

سے تعبیر کرینگے۔ ریاضیات میں لفظ "لامتناہی" کے صرف وہی معنی ہیں جو اوپر بیان ہوئے اور رمز ∞ کا جائز استعمال صرف اس قسم کے مجمل ضابطوں کے ذریعہ ہوسکتا ہے جو اوپر بیان ہوئے۔

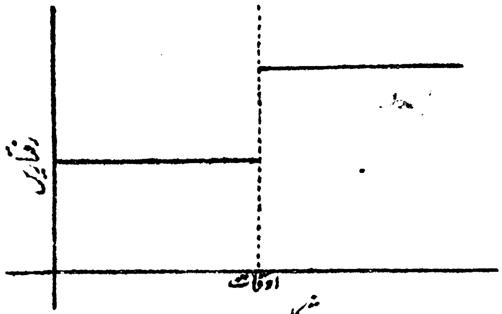
۲۰ تفاعل $\frac{1}{\text{لا}}$ سے جو $\text{لا} \to 0$ کے لئے لامتناہی ہوجاتا ہے اور تفاعل مس لا سے جو $\text{لا} \to \frac{\pi}{2}$ کے لئے لامتناہی ہوتا ہے متذکرہ بالا بیان کی مثالیں حاصل ہوتی ہیں۔ دیکھو شکل ۱۵ صفحہ ۲۴۔

نیز علم حیل میں رقاص کے اہتزاز کا دور جو سعت (عہ) کا تفاعل ہوتا ہے $\text{عہ} \to \pi$ کے لئے لامتناہی ہوجاتا ہے۔

مزید براں ایک تفاعل گو محدود ہو لیکن لا کی کسی خاص قیمت لا_1 کے لئے غیر مسلسل ہوسکتا ہے یعنی $\text{لا} = \text{لا}_1 - \text{صہ}$ اور $\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{صہ}$ کے لئے اس کی قیمتیں غیر مساوی ہوسکتی ہیں خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ ایسی صورت میں تفاعل کی ابتدائی تعریف سے $\text{لا} = \text{لا}_1$ کے لئے تفاعل کی ایک معین قیمت حاصل ہوسکتی ہے یا حاصل نہیں ہوسکتی۔

اس کی مثال علم حیل سے مل سکتی ہے۔ ایک ذرہ حرکت کررہا ہے اور حرکت کی سمت میں اس کو ایک دئے ہوئے لمحہ پر اچانک دھکہ دیا جاتا ہے۔ اس صورت میں ٹھیک اس لمحہ پر ذرہ کی رفتار غیر متعین ہوتی ہے اگرچیکہ دھکہ کے عین

پیشتر اور عین بعد کی رفتاروں کی تعیین ہو سکتی ہے۔



شکل (۸)

عدم تسلسل کی اور مثالیں ہو سکتی ہیں لیکن اس مضمون کے عام استعمال میں نہیں پائی جاتیں۔

۱۲۔ مسلسل تفاعلوں سے متعلق مسائل۔

اب ہم مختلف تفاعلوں کے تسلسل یا عدم تسلسل کی تحقیق کرینگے اور انکی ترسیمی تعبیر کی نوعیت معلوم کرینگے جبکہ ان تفاعلوں کی صریحی طور پر ریاضی تعیین ہو سکے۔

اس مقصد کے لئے حسب ذیل ابتدائی مسائل کا جان لینا ضروری ہے۔

۱۔ مسلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کا مجموعہ خود ایک مسلسل تفاعل ہوتا ہے

پہلے فرض کرو کہ متغیر متبوع لا کے دو تفاعل ع اور و ہیں۔ تب

مف (ع + و) = (ع + مف ع + و + مف و) - (ع + و)

= مف ع + مف و

تسلسل کی تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ثہ کی خواہ کوئی قیمت ہو ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح کہ

|مف لا| < صہ کیلئے |مف ع| < $\frac{1}{2}$ ثہ اور |مف و| < $\frac{1}{2}$ ثہ اور اس لئے

|مف ع + مف و| < ش

پس تفاعل ع + و مسلسل ہے۔

اب اگر تین مسلسل تفاعل ع، و، ھ ہوں تو ع + و مسلسل ہے جس طرح کہ ثبوت بالا سے ظاہر ہے اور اس لئے (ع + و) + ھ مسلسل ہے۔ اسی طرح اس مسئلہ کو قدم بہ قدم تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کی صورت میں وسعت دیجا سکتی ہے۔

۲۔ مسلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کا حاصل ضرب خود ایک مسلسل تفاعل ہوتا ہے۔

پہلے دو تفاعلوں ع، و کی صورت پر غور کرو۔

مف (ع و) = (ع + مف ع) (و + مف و) − ع و

= و مف ع + ع مف و + مف ع مف و

بموجب فرض ہم |مف لا| کو کافی چھوٹا لیکر |مف ع| اور |مف و| کو کسی مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ پس چونکہ ع اور و محدود ہیں |و مف ع| اور |ع مف و| کسی مقررہ مقدار سے چھوٹے بنائے جا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ یہی حال |مف ع مف و| کا ہے۔ اس لئے

|و مف ع + ع مف و + مف ع مف و|

کی قیمت بھی کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنائی جا سکتی ہے خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ یعنے ع و ایک مسلسل تفاعل ہے۔

اب فرض کرو کہ تین مسلسل تفاعل ع، و، ھ ہیں ہم نے دیکھ لیا کہ ع و مسلسل ہے اس لئے (ع و) ھ بھی مسلسل ہے۔ اور اسی طرح مسلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کے حاصل ضرب کی صورت میں بھی یہ درست ہے۔

۳۔ دو مسلسل تفاعلوں کا خارج قسمت مسلسل تفاعل ہوتا ہے سوائے متغیر متبوع کی ان قیمتوں کے لئے (اگر کوئی ہوں) جن کے لئے مقسوم علیہ صفر ہوتا ہو۔

فرض کرو کہ تفاعل ع اور و ہیں تو

مف(ع/و) = (ع + مف ع)/(و + مف و) − ع/و

= (و مف ع − ع مف و)/(و(و + مف و))

بموجب فرض و ≠ ۰۔ اس لئے مقدار و(و + مف و) کی مطلق قیمت کی ایک سفلی انتہا م ہونی چاہئے جو صفر نہیں ہو سکتی۔ پس

|مف(ع/و)| < |و/م مف ع − ع/م مف و|

اب چونکہ و/م اور ع/م محدود ہیں ہم مف لا کو کافی چھوٹا لینے سے |و/م مف ع| اور |ع/م مف و| کو کسی مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اس لئے |مف(ع/و)| پر بھی یہ درست ہوگا۔ یعنی خارج قسمت ع/و مسلسل ہے۔

۲۲ ۴۔ اگر ما، ع کا ایک مسلسل تفاعل ہو جہاں ع، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے تو ما، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا۔

کیونکہ فرض کرو کہ لا کا کوئی اضافہ مف لا، ع کا متناظر اضافہ مف ع اور ما کا متناظر اضافہ مف ما ہے۔ چونکہ ما، ع کا ایک مسلسل تفاعل ہے ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر کہ اگر

|مف ع| < صہ تو |مف ما| < ثہ

جہاں ثہ کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اور چونکہ ع، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر کہ اگر

|مف لا| < صہ تو |مف ع| < صہ

پس اگر $|مف لا| < ص$ ہو تو $|مف ما| < ثہ$
جو ما کے مسلسل ہونیکی شرط ہے جبکہ ما، لا کا ایک تفاعل ہو۔

۱۳۔ جبری تفاعل۔ منطق صحیح تفاعل۔

"جبری" تفاعل اسکو کہتے ہیں جو متغیر اور معلوم مستقلوں پر جمع تفریق، ضرب تقسیم اور جذر کے اعمال سے حاصل ہوتا ہے جبکہ ان اعمال کی تعداد محدود ہو۔
باقی تمام تفاعلوں کو "ماورائی" کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ ان تفاعلوں میں "انتہائی نہیت" کا مفہوم کسی نہ کسی شکل میں مضمر ہوتا ہے (دفعات ۴، ۱۹)۔
"منطق" جبری تفاعل اس کو کہتے ہیں جو صرف جمع تفریق ضرب اور تقسیم کے اعمال سے حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح کا کوئی تفاعل

$$\frac{فا(لا)}{ف(لا)}$$

کی شکل میں تحویل ہو سکتا ہے جہاں شمار کنندہ اور نسب نما منطق صحیح تفاعل ہیں یعنی ان میں سے ہر ایک

$$ا_ن لا^ن + ا_{ن-1} لا^{ن-1} + ا_{ن-2} لا^{ن-2} + \ldots\ldots + ا_1 لا + ا_0 \ldots\ldots (1)$$

کی شکل کا ہے جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے اور تمام ا مستقل ہیں۔ اس قسم کے جملہ کو جب وہ ایک سے زیادہ ارقام پر مشتمل ہو ہم اختصاراً "کثیر الارقام" کہینگے۔ اس کا جبری ہونا مان لیا جاتا ہے۔
منطق صحیح تفاعل متغیر کی تمام محدود قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہوتا ہے۔ کیونکہ $لا^م$ مسلسل تفاعلوں (جن میں سے ہر ایک لا کے مساوی ہے) کی ایک محدود تعداد (م) کا حاصل ضرب ہے اور اس لئے محدود اور مسلسل ہے۔ پس $ا_م لا^م$ بھی محدود اور مسلسل ہے۔ اور اس قسم کی ارقام کی کسی محدود تعداد کا مجموعہ بھی محدود اور مسلسل ہے (دفعہ ۱۲)۔
منطق صحیح تفاعل $لا \to \pm\infty$ کے لئے لامتناہی ہو جاتا ہے۔ تفاعل (۱) کو ۲۳

شکل

$$\text{لا}^{\text{ن}}\left(\text{ا}_{\text{ن}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-۱}}{\text{لا}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-۲}}{\text{لا}^{۲}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ا}_{۱}}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right)$$

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا کو کافی بڑا (مطلق قیمت میں) لینے سے ہم پہلے جزو ضربی (لا$^{\text{ن}}$) کو جس قدر بڑا بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ دوسرے جزو ضربی کی قیمت ا$_{\text{ن}}$ کے اسقدر قریب لائی جا سکتی ہے جسقدر ہم چاہیں۔ یعنی انکا حاصل ضرب اسقدر بڑا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں۔ مزید براں اگر لا مثبت ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو ا$_{\text{ن}}$ کی ہے لیکن جب لا منفی ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو ا$_{\text{ن}}$ کی ہے یا اس کے برعکس بموجب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہو۔

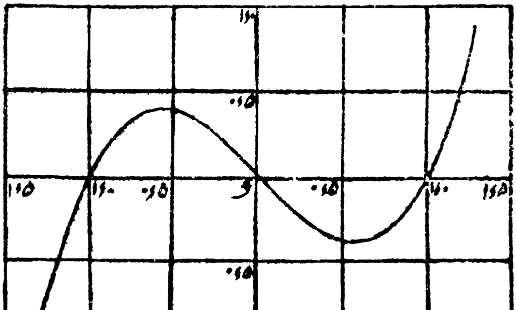
امور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ منطق صحیح تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیمی تعبیر میں منحنی ہر جگہ محور لا سے محدود فاصلے پر واقع ہوتا ہے لیکن اس سے ہٹتا جاتا ہے بغیر کسی حد کے جس طرح لا مسلسل طور پر بغیر حد کے بڑھتا ہے خواہ یہ مثبت سمت میں بڑھے یا منفی سمت میں۔ منحنی کو عملی طور پر بنانے میں مساوات ف (لا) = ۰ کو حل کر لینا مفید ہوتا ہے (اگر اس کا حل معلوم کرنا ممکن ہو) کیونکہ اس سے یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ منحنی محور لا کو کتنے نقاط پر قطع کرتا ہے۔

مثال۔ منحنی ما = لا (لا^{۲} - ۱) کی ترسیم۔ یہ منحنی محور لا کو نقاط لا = ۰، ±۱ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ جب لا ← ۰، لا^{۲} بمقابلہ لا کے لاانتہا چھوٹا ہوتا ہے اس لئے منحنی مبدأ کے قریب خط مستقیم ما = -لا کی شکل تقریباً اختیار کرتا ہے جو دراصل مبدأ پر منحنی کا مماس ہے۔ چونکہ ما، لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے ہم صرف لا کی مثبت قیمتوں کے لئے معینوں کو محسوب کرتے ہیں۔ ہم بہ آسانی

حسب ذیل جدول مرتب کر سکتے ہیں جہاں صرف دو ملحوظ ہندسوں کو عمل میں قائم رکھا گیا ہے۔

لا	ما	لا	ما
ء۱	-ء۱۰	ء۸	-ء۲۹
ء۲	-ء۱۹	ء۹	-ء۱۷
ء۳	-ء۲۷	۱ء۰	۰
ء۴	-ء۳۴	۱ء۱	+ء۲۳
ء۵	-ء۳۸	۱ء۲	+ء۵۱
ء۶	-ء۳۸	۱ء۳	+ء۸۸
ء۷	-ء۳۶	∞	∞

شکل ذیل اس منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ ۲۴



شکل (۹)

۱۴- منطق کسیریں۔

تفاعل

$$\text{ما} = \frac{\text{فا (لا)}}{\text{ف (لا)}} \quad \text{.......... (۱)}$$

جو منطق ہے لیکن صحیح تفاعل نہیں ہے، لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے سوائے اُن قیمتوں کے جن کے لئے ف (لا) = ٠ *، محدود اور مسلسل ہے۔ کیونکہ یہ ثابت کر دیا گیا ہے کہ منطق صحیح تفاعل فا (لا) اور ف (لا) محدود اور مسلسل ہوتے ہیں جس سے بموجب دفعہ (۲) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خارج قسمت بھی محدود اور مسلسل ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ نسب نما صفر ہو جائے۔

(۱) سے تعبیر ہونے والا منحنی محور لا کو اِن نقاط پر قطع کریگا (اگر کوئی ہوں) جنکے لئے فا (لا) = ٠، ما کے متوازی منحنی کے متقارب ہوں گے جہاں کہیں ف (لا) = ٠ اور لا کی باقی تمام محدود قیمتوں کے لئے ما محدود اور مسلسل ہوگا۔

لا ← ± ∞ کے جواب میں ما کی قیمتیں فا (لا) اور ف (لا) کے اضافی درجوں پر منحصر ہوتی ہیں۔ اگر فا (لا)، ف (لا) سے بڑے درجہ کا ہو تو معین لامتناہی ہو جاتے ہیں لیکن اگر کم درجہ کا ہو تو معین لاانتہا چھوٹے ہوتے ہیں۔ اس صورت میں محور لا متقارب ہوتا ہے۔ اگر دونوں کا درجہ وہی ہو تو محور لا کے متوازی ایک متقارب ہوتا ہے۔

ایسی صورتوں میں جہاں شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے کم نہ ہو یہ بہتر ہوگا کہ شمار کنندہ کو نسب نما سے اتنا تقسیم کیا جائے کہ باقی، مقسوم علیہ کے درجہ سے کم درجہ کا ہو اور پھر ما کو ایک صحیح تفاعل اور ایک صحیح کسر کے مجموعہ سے ظاہر کیا جائے۔

چند ضروری امور کی وضاحت حسب ذیل مثالوں سے ہوگی۔

۲۵ مثال ۱-

$$\text{ما} = \frac{\text{۱ - لا}}{\text{۲ لا}} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\text{۲ لا}}$$

اس میں اگر لا = ۱ تو ما = ٠ اور لا ← ٠ تو ما ← ± ∞ - نیز ۱ > لا > ٠ کے لئے

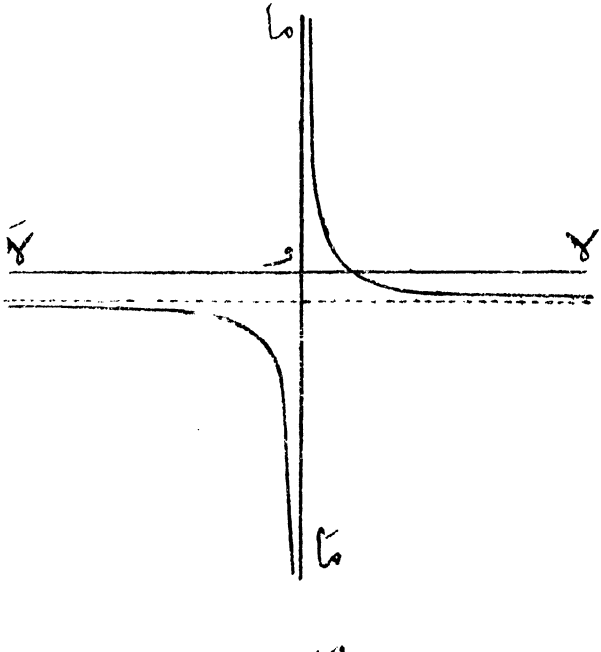
* یہ مان لیا گیا ہے کہ کسر مفرد ترین شکل میں ہے۔

ما مثبت ہے اور اس وقفہ کے باہر منفی ۔ ما کی دوسری صورت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا ← ± ∞ تو ما = − $\frac{۱}{۲}$، مزید برآں لا اور ما کی حسب ذیل متناظر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ۔

لا = −∞، −۳، −۲، −۱، −۰٫۵، ۰، ۰٫۵، ۱، ۲، ۳، +∞

ما = −۰٫۵، −۰٫۶۷، −۰٫۷۵، −۱، −۱٫۵، ±∞، ۰٫۵، ۰، −۰٫۲۵، −۰٫۳۳، −۰٫۵

شکل ذیل منحنی کو ظاہر کرتی ہے ۔



شکل (۱۰)

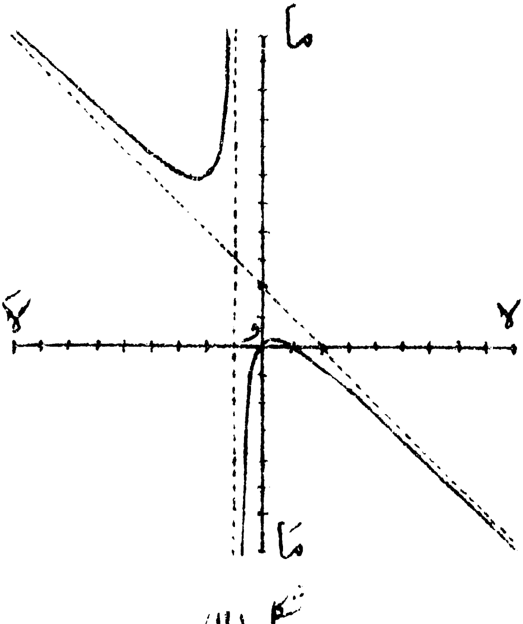
مثال ۲ ـ　ما = $\frac{لا(۱-لا)}{۱+لا}$ = − لا + ۲ − $\frac{۲}{۱+لا}$

یہاں لا = ۰ تو ما = ۰ اور لا = ۱ تو بھی ما = ۰، اور لا ← ۱ تو ما ← ± ∞، نیز ما علامت بدلتا ہے جبکہ لا انہیں سے ہر ایک قیمت میں سے گزرتا ہے۔ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے خواہ منفی ہوں یا مثبت منحنی کی تقریبی شکل

$$\text{ما} = -\text{لا} + ۲$$

ہو جاتی ہے جو ایک خط مستقیم ہے۔ لا ← + ∞ کے لئے یہ منحنی اس خط کے نیچے واقع ہوتا ہے اور لا ← - ∞ کے لئے اس خط کے اوپر۔ شکل (۱۱) میں اس منحنی کو دکھایا گیا ہے۔

۲۶



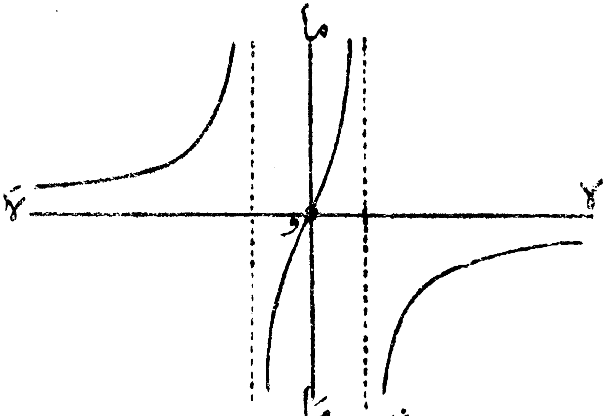
شکل (۱۱)

مثال ۳۔

$$\text{ما} = \frac{۲\,\text{لا}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$$

یہاں لا = ۰ اور لا ← ± ∞ کے لئے ما معدوم ہو جاتا ہے اور لا ← ± ۱ کے لئے لاتناہی۔ نیز ۱ > لا > ۰ کے لئے ما مثبت ہوتا ہے اور لا > ۱ کیلئے

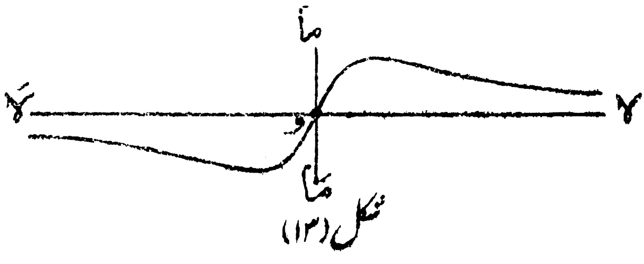
منفی۔ مزید براں لا کے ساتھ ما علامت بدلتا ہے۔



شکل (۱۲)

مثال ۴۔ $\text{ما} = \frac{۲\,\text{لا}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$ ۲۷

پچھلی مثال کی طرح یہاں بھی لا = ۰ اور لا ← ± ∞ کے لئے ما معدوم ہوتا ہے اور لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔ لیکن نسب نما لا کی کسی حقیقی قیمت کے لئے معدوم نہیں ہوتا اس طرح ما ہمیشہ محدود ہوتا ہے۔



شکل (۱۳)

۱۵۔ دائری تفاعل۔

جب لا، جم لا، مس لا، وغیرہ

کی عام تعریفات علم مثلث کی کسی کتاب سے معلوم ہونگی۔

تفاعل جب لا، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے۔ کیونکہ

مف (جب لا) = جب (لا + مف لا) - جب لا

= ۲ جب $\frac{1}{2}$ مف لا جم (لا + $\frac{1}{2}$ مف لا)

آخری جزو ضربی ہمیشہ محدود ہوتا ہے اور مف لا کو کافی چھوٹا لینے سے حاصل ضرب اس قدر چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ جم لا مسلسل ہے۔ نتیجہ بہر کیف قبل الذکر میں مشتمل ہے۔ کیونکہ

جم لا = جب (لا + $\frac{1}{2}$ π)

پھر چونکہ

مس لا = $\frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$

اور جب لا اور جم لا کا مسلسل ہونا ثابت ہو چکا ہے اس لئے مس لا بھی مسلسل ہے سوائے لا کی ان قیمتوں کے جن کے لئے جم لا = ۰۔ یہ قیمتیں لا = (ن + $\frac{1}{2}$) π سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔

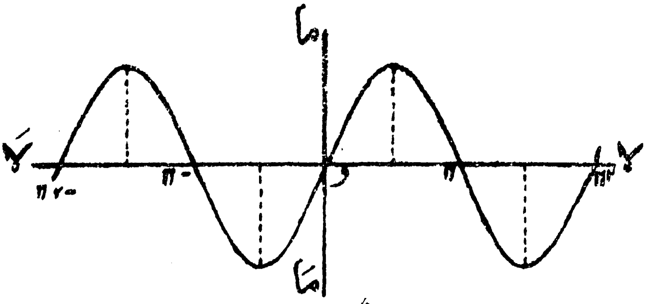
اسی طرح قط لا، قم لا، ظم لا کی صورتوں پر بحث ہو سکتی ہے۔

۲۸ صفحہ آیندہ پر جب لا اور مس لا کی ترسیمات بتلائی گئی ہیں۔ طالب علم کو یہ دیکھنا چاہئے کہ کس آسانی سے روابط

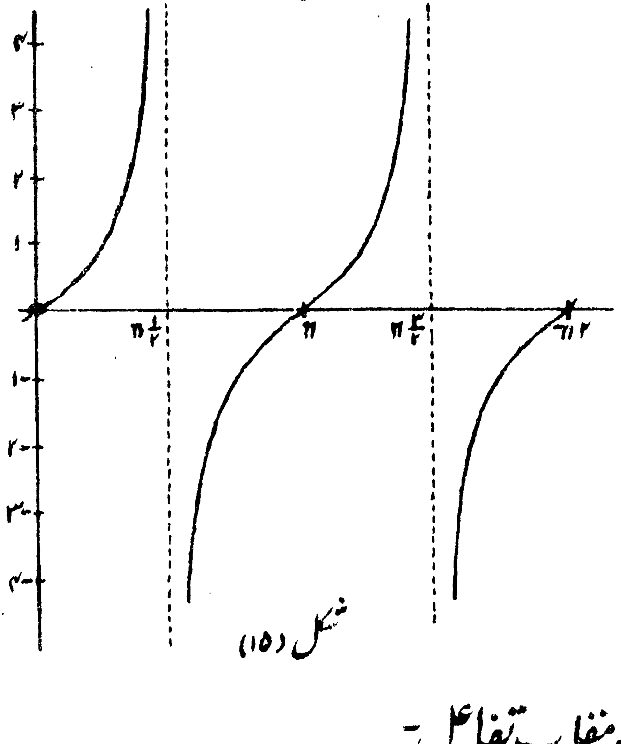
جب (- لا) = - جب لا، جب (π - لا) = جب لا

جب (لا + π) = - جب لا، مس (لا + π) = مس لا

منحنیوں کے تشاکل کو پیش نظر رکھ کر حاصل ہو جاتے ہیں۔



شکل (۱۴)

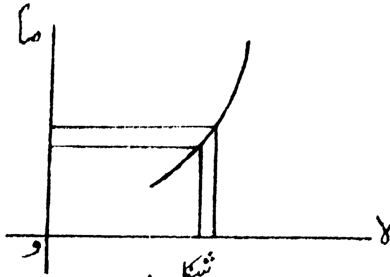


شکل (۱۵)

۱۶- مقلوب تفاعل- ۹۶

اگر ما، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہو تو بعض شرائط کے ماتحت لا، ما کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا۔ یہ بات اُس وقت ہوگی جبکہ لا کی وسعت ایسے حصوں میں (جو لامتناہی چھوٹے نہ ہوں) تقسیم ہو سکتی ہو کہ ہر ایک حصہ میں تفاعل ما

استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہو جیسے لا بڑھے ۔
فرض کرو کہ جس طرح لا ا سے ب تک بڑھتا ہے ما، عہ ا سے بہ ا تک استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے تب عہ ا اور بہ ا کے درمیان ما کی کسی قیمت کے متناظر ا اور ب کے درمیان لا کی ایک اور صرف ایک قیمت ہوگی۔ پس اگر ہم اس وقفہ کے اندر ہی لا کی قیمتوں سے سروکار رکھیں تو لا



شکل (۱۶)

ما کا وحید القیمت تفاعل ہوگا۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ لا، ما کا ایک مسلسل تفاعل ہے کیونکہ اگر ہم وقفہ مندرجہ بالا کے اندر لا میں کسی مثبت مقدار صہ کا اضافہ کریں تو ما میں بھی ایک محدود مقدار شہ کا اضافہ ہوگا۔ اور شہ سے کم مف ما کی تمام قیمتوں کے لئے مف لا $<$ صہ۔ یہی استدلال اسوقت بھی درست ہے جبکہ لا کا اضافہ منفی ہو۔ پس ہم ایک مثبت مقدار شہ معلوم کرسکتے ہیں اس طرح پر کہ جب صہ کوئی مقررہ مثبت مقدار ہو خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو تو |مف لا| $<$ صہ مف ما کی ان تمام قیمتوں کے لئے جن کے لئے |مف ما| $<$ شہ۔ لیکن یہ لا کے مسلسل ہونے کی شرط ہے جبکہ لا، ما کا ایک تفاعل ہو۔ (دفعہ ۸)

صریحاً ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں جب ما، لا = ا سے لا = ب تک کے وقفہ میں استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔

اگر ہم اس وقفہ کے پابند نہ رہیں جس میں تفاعل استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہے تو ما کی کسی دی ہوئی قیمت کے متناظر لا کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہوسکتی ہیں۔ ایسی صورت میں مقلوب تفاعل کو ہم کثیر القیمت کہینگے۔ نیز یہ بھی ہوسکتا ہے (اور عام طور پر

ہوگا) کہ ما کی خاص وسعتوں میں ما کی قیمتوں کے متناظر لا کی کوئی قیمتیں حاصل نہ ہوں یعنے مقلوب تفاعل کا وجود نہ ہو۔

اگر ما = ف (لا) .... (۱)

تو مقلوب تفاعلی ربط کو بعض اوقات ہم اس طرح بیان کرینگے۔

لا = ف$^{-1}$ (ما) .... (۲)

پس ف [ف$^{-1}$ (ما)] = ف (لا) = ما .... (۳)

یعنی تفاعلی رموز ف اور ف$^{-1}$ ایک دوسرے کو خارج کر دیتے ہیں۔ ترقیم (۲) کی یہی وجہ ہے۔

مقلوب تفاعل کی ترسیم اصلی تفاعل کی ترسیم سے صرف لا اور ما کے محوروں کا تبادلہ کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ ما = لا^{2} ' یہ لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے اور اگر لا مثبت ہو تو لا کے ساتھ مسلسل بڑھتا ہے۔ پس لا = $\sqrt{\text{ما}}$ ' ما کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر لا علامت کی پابندی نہ کرے تو ما کی ہر قیمت کے متناظر لا کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ان کو عام طور پر ± $\sqrt{\text{ما}}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر ما منفی ہو تو مقلوب تفاعل $\sqrt{\text{ما}}$ کا وجود نہیں ہوتا۔

مثال ۲۔ مقلوب دائری تفاعل

جب$^{-1}$ لا ' جتم$^{-1}$ لا ' مس$^{-1}$ لا ' وغیرہ

کثیر القیمت تفاعل ہیں۔

تفاعل جب$^{-1}$ لا ' جتم$^{-1}$ لا ' کا وجود لا کی صرف ان قیمتوں کے لئے ہے جو ۱- سے ۱+ کے درمیان واقع ہوں لیکن ان حدود کے باہر جو قیمتیں ہوں ان کے لئے ان تفاعلوں کا وجود نہیں۔

تفاعل مس$^{-1}$ لا ' لا کی تمام قیمتوں کے لئے وجود رکھتا ہے یہ کثیر القیمت تفاعل ہے۔ لا کی قیمتیں ایک حسابی سلسلہ بناتی ہیں جنکا فرق مشترک π ہے۔

جب$^{-1}$ لا اور مس$^{-1}$ لا کی ترسیمات اشکال ۲۱ ' ۲۲ میں بتلائی گئی ہیں۔

۱۷۔ گروہ کی علوی یا سفلی انتہا۔

قبل اس کے کہ ہم مسلسل تفاعلوں کے نظریہ پر مزید بحث کریں 'علوی' اور 'سفلی انتہا' اور 'انتہائی قیمت' کی تعریفات کی جن کا تذکرہ دفعات (۲) اور (۴) میں ہو چکا ہے توسیع کرنا مناسب سمجھتے ہیں۔

سب سے پہلے مقداروں کے ایسے گروہ پر غور کرو جو تعداد میں لا انتہا ہیں لیکن تمام کسی محدود مقدار ب۱ سے کم ہیں۔ گروہ کی تعریف کسی طور پر ہو سکتی ہے لیکن ضرورت اس میں زیادہ تر صرف ایسی کسوٹی کی ہے جس سے ہم یہ معلوم کر سکیں کہ کوئی دی ہوئی مقدار اس گروہ سے متعلق ہے یا نہیں۔ مثلاً ایک گروہ ان قیمتوں پر مشتمل ہو سکتا ہے جو ایک دیا ہوا تفاعل (مسلسل ہو یا نہ ہو) اختیار کرتا ہے جبکہ متغیر متبوع کسی محدود یا غیر محدود وسعت میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

اس قسم کے گروہ میں ممکن ہے کہ "بڑی سے بڑی" مقدار موجود ہو یا نہ ہو یعنی ایسی مقدار جس سے باقی مقداریں تجاوز نہیں کر سکتیں۔ لیکن ہر صورت میں گروہ کی مقداروں کی ایک 'علوی انتہا' ضرور ہوگی یعنی ایک خاص مقدار م۱ ایسی موجود ہوگی کہ گروہ کی کوئی مقدار اس سے تجاوز نہ کرتی ہو اور (کم سے کم) ایک مقدار معلوم ہو سکے گی جو گروہ کی کسی ایک ایسی مقدار سے بڑی ہو جو م۱ سے کم ہو۔ اگر م۱ خود گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو ان مقداروں کی ایک لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک ایسی مقدار سے بڑی ہوں جو م۱ سے کم ہے۔

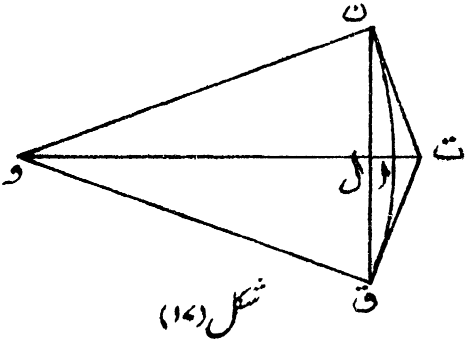
۳۱ ان بیانات کا ثبوت دفعہ (۲) کی طرح ہندسی تعبیر کی مدد سے مستنبط ہو سکتا ہے۔

اسی طرح اگر مقداروں کا ایک لا متناہی گروہ ہو جن میں سے ہر ایک ایک محدود مقدار ع۱ سے بڑی ہے تو گروہ میں ممکن ہے کہ "کم سے کم" مقدار ہو یا نہ ہو لیکن ہر صورت میں ایک 'سفلی انتہا' ن۱ ہوگی اس طور پر کہ گروہ کی کوئی مقدار ن۱ سے کم نہیں ہوتی حالانکہ اگر کوئی مقدار بھی لی جائے جو ن۱ سے بڑی ہو تو (کم از کم) ایک مقدار گروہ کی معلوم ہو سکے گی جو اس سے نیچی ہو۔ اور اگر ن۱ خود گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو ان مقداروں کی لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک مقدار سے کم ہوں

جو نما سے بڑی ہے ۔

ایک عمدہ مثال دائرہ کے محیط یا گھیرے کی تعریف میں پیش آتی ہے ۔ دائرہ کے محیط پر نقطوں کی کوئی تعداد لیکر ان کو ترتیب وار ملایا جائے تو ایک اندرونی کثیر الاضلاع حاصل ہوتا ہے ۔ اور اگر ان نقاط پر مماس کھینچے جائیں تو بیرونی یا حائط کثیر الاضلاع ملتا ہے ۔ اب یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتا ہے کہ کسی اندرونی کثیر الاضلاع کا گھیرا بیرونی کثیر الاضلاع کے گھیرے سے کم ہے ۔ اگر تمام ممکن اندرونی کثیر الاضلاعوں کے کل گروہ پر غور کیا جائے تو گھیروں کی ایک خاص علوی انتہا ہوگی ۔ اسی طرح تمام ممکن بیرونی کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کی ایک سفلی انتہا ہوگی ۔

بہنداان دونوں انتہاوں کو ایک ہی ہونا چاہیئے ۔ کیونکہ فرض کرو کہ ت ق اندرونی کثیر الاضلاع کے گروہ میں سے ایک کا ایک ضلع ہے ۔ ن ت اور ق ت نقاط ن اور ق پر مماس ہیں ۔



شکل (۱۷)

فرض کرو کہ و مرکز ہے اور ن ق، و ت کو ل پر ملتا ہے ۔ تب ن ت اور ق ت بیرونی کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے حصے ہوں گے اور اگر ج حاصل جمع کی علامت ہو تو دونوں کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کی نسبت ہوگی

$$\frac{\text{ج(ن ق)}}{\text{ج(ت ن + ت ق)}} = \frac{\text{ج(ن ل)}}{\text{ج(ن ت)}}$$

پس ایک معلومہ مسئلہ کی رو سے اوپر کی نسبت قیمت میں اس نمونہ

$$\frac{\text{ن ل}}{\text{ن ت}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{و ل}}{\text{و ن}}$$ ۳۲

کی نسبتوں کی اعظم اور اقل قیمتوں کے درمیان ہوگی جو کمل شکل میں واقع ہوتی ہیں لیکن جب زاوئے ن و ق کافی چھوٹے لئے جائیں تو کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد میں متناظر اضافہ ہوگا جس کی وجہ سے نسبت و ل / و ن ایک کے اتنا قریب لائی جا سکتی ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس لئے متذکرۂ بالا علوی اور سفلی انتہائیں وہی ہونی چاہئیں۔

اس معین انتہا کو جس کی طرف ایک اندرونی کثیر الاضلاع (یا بیرونی کثیر الاضلاع) کا گھیرا مائل ہوتا ہے جبکہ وہ زاوئے جو مرکز پر اضلاع کے محاذی بنتے ہیں لا انتہا گھٹائے جائیں دائرہ کے محیط یا "گھیرے" کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔ اس امر کا ثبوت کہ اس انتہا کی نسبت دائرہ کے قطر کے ساتھ جسکو (π) سے تعبیر کرتے ہیں تمام دائروں کے لئے وہی ہے علم مثلث کی اکثر کتابوں میں ملے گا۔ دائرہ کی کسی قوس کے طول کے متعلق بھی جو کل گھیرے سے کم ہو اسی طرح کی تعریف دی جا سکتی ہے۔ اور یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ یہ یگانہ قیمت رکھتا ہے۔

۱۸۔ مسلسل تفاعل کی ایک بڑی سے بڑی اور ایک چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوتی ہے

مسلسل تفاعل کی ایک اہم خاصیت یہ ہے کہ متغیر متنوع کی کسی محدود وسعت میں تفاعل کی ایک بڑی سے بڑی اور ایک چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوتی ہے۔ زیادہ صحت کے ساتھ اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اگر ما ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے (بشمول طرفین) اور اس وسعت میں ما جو قیمتیں اختیار کرتا ہے انکی علوی انتہا مہ ہو تو اس وسعت میں

لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے ما = مہ ۔ یہی حال سفلی انتہا کا ہے ۔

ایسے تفاعل کی صورت میں جو زیر بحث وسعت میں استقلال کے ساتھ بڑھتا یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے یہ مسئلہ خود واضح ہے۔ اس صورت میں بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں صریحاً وسعت کے سروں پر واقع ہوتی ہیں۔ اس لئے یہ مسئلہ توسیعاً اس وقت بھی درست ہے جبکہ تفاعل اس طرح کا ہو کہ وسعت وقفوں کی ایک محدود تعداد میں تقسیم ہوسکے جن میں سے ہر ایک وقفہ میں تفاعل یا تو مسلسل بڑھتا ہے یا مسلسل گھٹتا ہے ۔

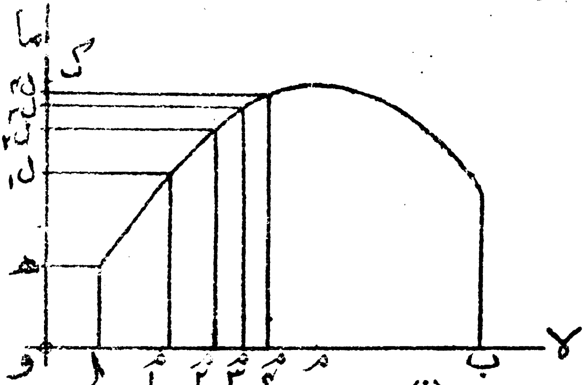
اس مضمون کے استعمالات میں درحقیقت جن تفاعلوں سے ہمیں سابقہ پڑتا ہے ان میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے، لیکن وہ اصول جن کی مدد سے کسی دی ہوئی صورت میں ہم اس کی تحقیق کرتے ہیں ایسے استدلال سے قائم کئے جاتے ہیں جس میں دفعہ ہذا کے مسئلہ کی صداقت مان لیجاتی ہے۔ دیکھو دفعہ (۴۸) ۔ اس لئے منطق کے نقطۂ نظر سے ایسے ثبوت کا فراہم کرنا بہتر ہوگا جس میں زیر بحث تفاعل سے متعلق کسی چیز کو نہ مان لیا گیا ہو سوائے اس کے کہ وہ بموجب تعریف دفعہ (۸) مسلسل ہے ۔

حسب ذیل اس طرح کے ثبوت کا خاکہ ہے۔ ہندسی تعبیر میں فرض کرو کہ و ا = ا، ۳۳
و ب = ب۔ اگر ا پر ما کی قیمت علوی انتہا مہ کے مساوی نہیں ہے تو مہ سے کم ہوگی۔ اس کو ما سے تعبیر کرو۔
لا متناہی طریقوں سے ہم مقادیر

ما، ما، ما، ....

کا ایک صعودی تواتر معلوم کرسکتے ہیں جس کی علوی انتہا مہ ہو۔ مثلاً ہم ما کو ما اور مہ کے اوسط حسابی کے مساوی لے سکتے ہیں، ما کو ما اور مہ کے اوسط حسابی کے مساوی اور علیٰ ہذا القیاس۔ چونکہ وسعت ا ب میں ما کی قیمت ما سے بدلکر کوئی مقدار ہوسکتی ہے جو مہ سے کم ہو، لا کی کم سے کم ایک قیمت ضرور ہوگی (دفعہ ۹) جس کے لئے ما درمیانی قیمت ما اختیار کرتا ہے۔ فرض کرو

لا۱ اس قیمت کو تعبیر کرتا ہے یا (اگر ایک سے زیادہ ہوں تو) اس طرح کی قیمتوں میں سے سب سے چھوٹی قیمت کو۔



(شکل ۱۸)

اسی طرح فرض کرو کہ لا کی سب سے چھوٹی قیمت لا۲ ہے جس کے لئے فا = فا۲ اور علیٰ ہذا۔ یہ ظاہر ہے کہ مقادیر

لا۱، لا۲، لا۳، ....

(جو شکل میں نقاط م۱، م۲، م۳، ...... سے تعبیر ہوتے ہیں [۱]) ایک صعودی تواتر میں ہونے چاہئیں۔ فرض کرو کہ اس تواتر کی علوی انتہا م ہے۔ اب چونکہ م کے بائیں جانب کسی وسعت میں خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو ایسے نقاط ہوتے ہیں جن پر فا، مہ سے اسقدر فرق رکھتا ہے جو کسی مقررہ مقدار سے کم ہے تفاعل کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خود نقطہ م پر فا کی قیمت مہ کے سوا کوئی اور نہیں ہو سکتی۔

[[۱] شکل صرف وضاحت کی خاطر کھینچی گئی ہے اور ثبوت کے لئے ضروری نہیں۔ درحقیقت یہ ظاہر ہے کہ جس تفاعل کو ٹھیک طور پر ترسیمی طور پر تعبیر کیا جا سکتا ہے اس میں اس خاصیت کا ہونا ضروری ہے اور اوپر کا ثبوت اس کی صورت میں غیر ضروری ہوگا۔

شکل میں وک = مہ، وھ = با، ول۱ = فا۱، ول۲ = فا۲، ..... اور تواتر

با، فا۱، فا۲، ....

کو مندرجہ بالا طریقہ سے حاصل کرنے میں ل۱، ھ ک کی تنصیف کرتا ہے، ل۲، ل۱ ک کی

تنصیف کرتا ہے، ل، ل کی تنصیف کرتا ہے اور علیٰ ہذا۔]

۳۴ اب یہ دیکھنے کے لئے کہ غیر مسلسل تفاعلوں کی صورت میں مسئلہ بالا عام
طور پر صادق نہیں آتا ایسے تفاعل پر غور کرو جو اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ صفر کے
سوا لا کی اور قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمت $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ ہے اور لا = ۰ کے لئے
تفاعل کی قیمت فرض کرو صفر ہوتی ہے۔ اس تفاعل کی علوی انتہا ۱ ہے جسکی
طرف |لا| کو کافی چھوٹا لینے سے اسے اس قدر قریب لایا جا سکتا ہے جسقدر ہم
چاہیں لیکن یہ کبھی اس انتہا کو نہیں پہنچتا۔

۱۹۔ تفاعل کی انتہائی قیمت۔ ان قیمتوں کے کل گروہ پر غور کرو جو ایک تفاعل ما (مسلسل یا غیر مسلسل) اختیار کرتا ہے جبکہ متغیر متبوع لا ایک ثابت قیمت $لا_1$ کے ایک جانب کے کسی وقفہ میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ فرض کرو کہ جسطرح لا، $لا_1$ کے قریب آتا ہے ما کسی ثابت مقدار لہ کے قریب اس طرح آتا ہے کہ $|لا - لا_1|$ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس بات کا یقین ہو سکتا ہے کہ $|لا - لا_1|$ کی اس قیمت یا اس سے چھوٹی قیمتوں کے لئے |ما - لہ| کی قیمت ثہ سے کم ہوتی ہے جہاں ثہ کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ ان شرائط کے تحت ہم کہتے ہیں کہ لہ، ما کی انتہائی قیمت ہے جبکہ لا زیر بحث جانب سے $لا_1$ کے قریب آئے۔

اس ربط کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\underset{لا \to لا_1}{\text{نہا}}\ \text{ما} = \text{لہ}$$

لیکن ٹھیک صحت تو اس میں ہے کہ اس کی تخصیص بھی کر دی جائے کہ لا، $لا_1$ کے کس جانب سے قریب آ رہا ہے۔

متذکرۂ بالا ربط کے ساتھ دفعہ (۸) کی تعریف پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ ایک مسلسل تفاعل کی صورت میں

$$\underset{لا \to لا_1}{\text{نہا}}\ \text{ف}(لا) = \text{ف}(لا_1) \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یعنے تفاعل کی انتہائی قیمت خود تفاعل کی قیمت پر منطبق ہوتی ہے اور یہ کہ اگر لا۱ متغیر متبوع کی وسعت کے اندر واقع ہو تو لا خواہ کسی جانب سے لا۱ کے قریب آئے یہ خاصیت درست ہے۔ لیکن اگر لا۱ وسعت کے کسی سرے پر منطبق ہو تو لا کا وسعت کے اندر سے لا۱ کے قریب آنا ضروری ہے۔

برعکس اس کے جب تک شرط (۱) پوری نہ ہو تفاعل مسلسل نہیں ہو سکتا۔

اب ایسے تفاعل پر غور کرو جس کے متغیر متبوع کی وسعت مثبت لا کی سمت میں غیر محدود ہے۔ اگر لا کو مسلسل بڑھانے سے ما ایک ثابت قیمت لہا کی طرف مائل ہو اس طرح کہ لا کو کافی بڑا لینے سے ہم یہ یقین کر سکیں کہ لا کی اس قیمت اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے | ما - لہا | ثہ سے چھوٹا ہو گا جہاں ثہ کوئی مقررہ مثبت مقدار ہے خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو، تب لا ← ∞ کے لئے لہا کو ما کی انتہائی قیمت کہتے ہیں اور ہم لکھتے ہیں

$$\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}}\ \text{ما} = \text{لہا}$$

اسی طرح کی تعریف

$$\underset{\text{لا} \to -\infty}{\text{نہا}}\ \text{ما}$$

کی ہے جب یہ موجود ہو اور تفاعل کے متغیر متبوع کی وسعت منفی لا کی سمت ۳۵
میں غیر محدود ہو۔

۲۰۔ انتہائی قیمتوں سے متعلق عام مسائل۔

۱۔ تفاعلوں کے کسی محدود تعداد کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام انتہائی قیمتیں محدود ہوں۔

۲۔ تفاعلوں کے کسی محدود تعداد کے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام

انتہائی قیمتیں محدود ہوں۔

۳۔ دو تفاعلوں کے خارج قسمت کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ انتہائی قیمتیں محدود ہوں اور مقسوم علیہ صفر نہ ہو۔

ان مسائل کے ثبوت کا طریقہ وہی ہے جو دفعہ (۱۲) میں دیا گیا ہے۔ اس دفعہ کے مسائل مسائل بالا کی خاص صورتیں ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ ﻻ کے دو تفاعل ع، و ہیں اور جس طرح ﻻ، ﻻ۱ کے قریب آتا ہے ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب ع۱، و۱ حاصل ہوتی ہیں۔ تب اگر ہم

ع = ع۱ + ھ، و = و۱ + ب

لکھیں تو ھ اور ب، ﻻ کے تفاعل ہوں گے جنکی انتہائی قیمتیں صفر ہیں۔ اب

(ع + و) − (ع۱ + و۱) = ھ + ب،

ع و − ع۱ و۱ = ھ و۱ + ب ع۱ + ھ ب،

ع/و − ع۱/و۱ = (ھ و۱ − ب ع۱) / (و۱ (و۱ + ب))،

اور دفعہ (۱۲) کی طرح ﻻ کو کافی طور پر ﻻ۱ کے قریب لاکر ہم مذکورہ بالا شرائط کے تحت بائیں طرف کو مطلق قیمت میں کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔

۲۱۔ مثالیں۔

ہم نے دفعہ (۱۹) میں یہ دیکھا ہے کہ ایک مسلسل تفاعل کی انتہائی قیمت متغیر متبوع ﻻ کی کسی قیمت ﻻ۱ کے لئے خود تفاعل کی قیمت ہوتی ہے بشرطیکہ ﻻ۱ کی اس قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت موجود ہو۔ لیکن متغیر متبوع کی چند تنہا یا سروں پر کی قیمتوں کے لئے یہ ممکن ہے کہ تفاعل کا وجود نہ ہو یا تفاعل غیر معین ہو جائے حالانکہ ﻻ کی ان قیمتوں کے لئے جو ان قیمتوں سے لا انتہا قلیل

فرق رکھتی ہیں تفاعل موجود ہو۔ یہی وہ صورتیں ہیں جنمیں "انتہائی قیمت" کا تخیل زیادہ اہم ہو جاتا ہے۔

مثال ۱۔ تفاعل

$$\frac{۱ - \sqrt{۱ - لا^۲}}{لا^۲}$$

یہاں ± ۱ کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے تمام جبری اعمال جاری ہو سکتے ۳۶
ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ لا کی قیمت صفر ہوجائے۔ اس صورت میں کسر کی شکل $\frac{صفر}{صفر}$ ہو جاتی ہے۔ اب خارج قسمت $\frac{ا}{ب}$ کی یہ تعریف ہے کہ اگر اس کو ب سے ضرب دیا جائے تو ا حاصل ہو اور چونکہ کسی محدود مقدار کو صفر سے ضرب دینے سے صفر حاصل ہوتا ہے اس لئے یہ ظاہر ہے کہ $\frac{صفر}{صفر}$ کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے یہی وجہ ہے کہ اس کو "غیر معین" کہتے ہیں۔

بہرکیف دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $۱ + \sqrt{۱ - لا^۲}$ سے ضرب دیکر ہم اس کو اس شکل

$$\frac{لا^۲}{لا^۲ \{۱ + \sqrt{۱ - لا^۲}\}}$$

میں رکھ سکتے ہیں اور یہ کسر ± ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سوائے صفر قیمت کے

$$\frac{۱}{۱ + \sqrt{۱ - لا^۲}}$$

کے مساوی ہے۔ اب چونکہ یہ تفاعل مسلسل ہے اور لا = ۰ کے لئے اس کا وجود ہے اس لئے لا ← ۰ کے لئے اس کی انتہائی قیمت $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

مثال ۲۔ تفاعل

$$\sqrt{۱ + لا} - \sqrt{۱ - لا}$$

پر غور کرو۔ یہاں جس طرح لا مسلسل بڑھتا ہے یہ تفاعل غیر معین شکل ∞-∞ اختیار کرنے پر مائل ہوتا ہے۔ لیکن تفاعل کو

$$\frac{1}{\sqrt{لا^2+لا+1}+\sqrt{لا^2+لا}}$$

کی متماثل شکل میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا ← ∞ کے لئے اس کی انتہائی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔

مثال ۳۔ دئے ہوئے رقاص کے اہتزاز کے دور کو سعت عہ کا تفاعل قرار دیں تو صفر اور π کے درمیان عہ کی تمام قیمتوں کے لئے دور کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن عہ کی انتہائی قیمتیں صفر اور π لینے پر اس کا وجود نہیں ہوتا۔ بہر کیف جس طرح عہ صفر کے قریب آتا ہے دور ایک خاص انتہائی قیمت کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس انتہائی قیمت کو علم حرکت میں اس طور پر موسوم کیا جاتا ہے "کہ یہ لا انتہا چھوٹی قوس میں اہتزاز کا وقت ہے"

۲۲۔ چند خاص انتہائی قیمتیں۔

حسب ذیل مثالیں تفرقی احصا میں خاص اہمیت رکھتی ہیں۔

۱۔ م کی تمام منطق قیمتوں کے لئے

$$\text{نہا}_{لا \to ا} \frac{لا^م - ا^م}{لا - ا} = م\, ا^{م-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اگر م مثبت صحیح عدد ہو تو ۳۷

$$\text{نہا}_{لا \to ا} \frac{لا^م - ا^م}{لا - ا} = \text{نہا}_{لا \to ا} \left(لا^{م-1} + ا\, لا^{م-2} + \ldots + ا^{م-2}\, لا + ا^{م-1}\right)$$

$$= م\, ا^{م-1}$$

کیونکہ ارقام کی تعداد (م) محدود ہے اس لئے مجموعہ کی انتہائی قیمت مختلف ارقام کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دفعہ ۲۰)۔

اگر م منطق کسر ہو تو فرض کرو کہ یہ کسر $\frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ ہے۔ نیز فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{ما}^{\text{ق}} \ ، \quad \text{ا} = \text{ب}^{\text{ق}}$$

تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{ما}^{\text{مق}} - \text{ب}^{\text{مق}}}{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}} = \frac{\text{ما}^{\text{پ}} - \text{ب}^{\text{پ}}}{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}$$

یہ کسر

$$\frac{\dfrac{\text{ما}^{\text{پ}} - \text{ب}^{\text{پ}}}{\text{ما} - \text{ب}}}{\dfrac{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}{\text{ما} - \text{ب}}}$$

کے مساوی ہے۔ پچھلی صورت سے اس کسر کے شمار کنندہ کی انتہائی قیمت $\text{پ ب}^{\text{پ}-1}$ اور نسب نما کی انتہائی قیمت $\text{ق ب}^{\text{ق}-1}$ ہے۔ اسلئے مطلوبہ انتہا

$$\frac{\text{پ}}{\text{ق}} \text{ب}^{\text{پ}-\text{ق}} = \frac{\text{پ}}{\text{ق}} \text{ا}^{\frac{\text{پ}}{\text{ق}}-1} = \text{م ا}^{\text{م}-1}$$

ہے جو وہی ہے۔

اگر م منفی ہو تو فرض کرو کہ $\text{م} = -\text{ن}$ جس سے

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{لا}^{-\text{ن}} - \text{ا}^{-\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = -\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{ا}^{\text{ن}}} \times \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}}$$

اگر ن منطق ہو تو اس کی انتہائی قیمت پچھلی صورتوں کی مدد سے

$$-\frac{1}{\text{ا}^{2\text{ن}}} \times \text{ن ا}^{\text{ن}-1} = -\text{ن ا}^{-\text{ن}-1} = \text{م ا}^{\text{م}-1}$$

ہے۔

۲- یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ

$$\underset{\text{ط}\to\text{۰}}{\text{نہا}}\ \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \text{۱} \text{ ، } \underset{\text{ط}\to\text{۰}}{\text{نہا}}\ \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = \text{۱} \quad \text{........ (۲)}$$

اگر ہم دائرہ کی قوس کے "طول" کی تعریف (دفعہ ۱۷) کی طرف رجوع کریں تو ان بیانات کی صداقت خود بخود واضح ہو جاتی ہے۔ شکل (۱۷) میں اگر زاویہ ن و ق
۳۸ چار قائموں کا $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ ہو تو ن × ن ق ، ن ضلعوں والے اندرونی منتظم کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا اور ن (ت ن + ت ق) متناظر حائط کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا۔ اب اگر

$$\text{ط} = \angle\, \text{ن و ا} = \frac{\pi}{\text{ن}}$$

تو

$$\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{ن ل}}{\text{قوس ن ا}} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$$

اور

$$\frac{\text{ت ن + ت ق}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{ن ت}}{\text{قوس ن ا}} = \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$$

پس کسور

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$$

سے وہ نسبتیں تعبیر ہوتی ہیں جو متذکرہ بالا کثیر الاضلاع کے گھیروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے سے ہیں۔ پس ن جب مسلسل بڑھتا ہے تو ہر کسر انتہائی قیمت میں اکائی کی طرف مائل ہوتی ہے (دفعہ ۱۷)۔

استدلال بالا میں یہ مان لیا گیا ہے کہ ط ، π کا زیر اضعاف ہے۔ لیکن شکل میں زاویہ ن و ق کی قیمت کچھ ہی ہو ہر صورت میں

$$\text{وتر ن ق} < \text{قوس ن ق} \quad \text{اور} \quad \text{ت ن + ت ق} > \text{قوس ن ق}$$

یعنی $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} < \text{۱}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} > \text{۱}$۔ پس ان کسروں کی علی الترتیب اوپر کی اور نیچے کی انتہا ہونی چاہئے اور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ انتہائیں اکائی کے سوا کچھ اور نہیں ہو سکتیں۔

ذیل کی عددی جدول سے یہ معلوم ہوگا کہ کس طرح متذکرہ بالا تفاعل ط کو مسلسل گھٹانے سے اپنی مشترک انتہا کے قریب آتے ہیں۔

ن	ط / π	جب ط / ط	مس ط / ط
۴	٫۲۵	٫۹۰۰۳۲	۱٫۲۷۳۲۴
۵	٫۲۰	٫۹۳۵۴۹	۱٫۱۵۶۳۲
۱۰	٫۱۰	٫۹۸۳۶۳	۱٫۰۳۴۲۵
۲۰	٫۰۵	٫۹۹۵۸۹	۱٫۰۰۸۳۱
۴۰	٫۰۲۵	٫۹۹۸۹۷	۱٫۰۰۲۰۶
∞	٫۰	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰

تیسرے اور چوتھے خانوں میں وہ نسبتیں درج ہیں جو ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی یا حائط منتظم کثیر الاضلاع کے گھیروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے سے ہیں۔

۲۳۔ صغاریات۔ جب کوئی متغیر مقدار کسی عمل میں انتہائی قیمت صفر ۳۶
کی طرف مائل ہوتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ مقدار آخر کار معدوم ہو جاتی ہے یا 'لا انتہا چھوٹی' ہے۔

دو لا انتہا چھوٹی مقداریں مساوی کہلاتی ہیں جب ایک کو دوسری سے جو نسبت ہے اسکی انتہائی قیمت ایک ہو۔ مثلاً ط، جب صفر انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے تو جب ط اور ط آخر کار مساوی ہو جاتے ہیں (دفعہ ۲۲ مثال ۲)۔

لا انتہا چھوٹی مقداروں کے رتبوں میں تمیز کرنا بعض اوقات ضروری ہو جاتا ہے پس اگر ع، و دو مقداریں ہوں جو صفر کی طرف مائل ہوتی ہیں اور اگر نسبت و/ع محدود ہو اور صفر نہ ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ و لا انتہا چھوٹی مقدار ہے جسکا

رتبہ وہی ہے جو ع کا ہے۔ لیکن اگر نسبت $\frac{\text{و}}{\text{ع}}$ صفر کے مساوی ہو جائے تو ہم کہتے ہیں کہ و، لا انتہا چھوٹی مقدار ہے مگر اس کا رتبہ ع کے رتبہ سے بڑا ہے اگر $\frac{\text{و}}{\text{ع}^{\text{م}}}$ کی انتہا محدود ہو اور صفر نہ ہو تو و کو م ویں رتبہ کا صغاری کہتے ہیں جبکہ ع کو معیار قرار دیا جائے۔

مثال ۱۔ شکل ۱ میں جب زاویہ ن و ق کو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو ل ا اور ا ت آخر کار مساوی ہو جاتے ہیں۔ کیونکہ متشابہ مثلثوں کی مدد سے

$$\frac{\text{و ن}}{\text{و ل}} = \frac{\text{و ت}}{\text{و ن}}$$

اور اس لئے

$$\frac{\text{و ن} - \text{و ل}}{\text{و ل}} = \frac{\text{و ت} - \text{و ن}}{\text{و ن}}$$

یا

$$\frac{\text{ل ا}}{\text{ا ت}} = \frac{\text{و ل}}{\text{و ن}}$$

اور نسبت $\frac{\text{و ل}}{\text{و ن}}$ کی انتہائی قیمت ایک ہے۔

پھر ل ت دوسرے رتبہ کا صغاری ہے اگر ن ل معیار قرار دیا جائے کیونکہ

$$\text{ن ل}^2 = \text{و ل} \times \text{ل ت}$$

جس سے

$$\frac{\text{ل ت}}{\text{ن ل}^2} = \frac{1}{\text{و ل}} = \frac{1}{\text{و ا}} \quad (\text{انتہا میں})$$

مثال ۲۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$1 - \text{جم طہ} = 2\,\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{طہ} = \left(\frac{\text{جب} \tfrac{1}{2}\text{طہ}}{\tfrac{1}{2}\text{طہ}}\right)^2 \times \tfrac{1}{2}\text{طہ}^2 \; \ldots\ldots (1)$$

جب طہ ← ۰ پہلے جزو ضربی کی انتہا ایک ہے۔ اس لئے ۱ - جم طہ دوسرے رتبہ کا صغاری ہے جبکہ معیار طہ ہو۔

پھر

$$\text{سس طہ} - \text{جب طہ} = \left(\frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}}{\tfrac{1}{2}\ \text{طہ}}\right)^{3} \times \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}}{\text{جم طہ}} \times \frac{1}{2}\ \text{طہ}^{3} \quad \ldots (2)$$

جب طہ ← ۰ تو پہلے دو اجزائے ضربی میں سے ہر ایک انتہا ا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ پس سس طہ - جب طہ تیسرے رتبہ کا صغاری ہے۔ شکل میں اس کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ ن ت - ن ل آخرکار تیسرے رتبہ کا ہے جبکہ ن ل معیار ہو۔

اصول ذیل کو پیش نظر رکھنے کی وجہ سے ہم مختلف دلیلوں کو اختصار کے ساتھ بیان کر سکتے ہیں خصوصاً ایسی صورتوں میں جبکہ احصا کو ہندسہ اور علم حیل میں استعمال کیا جائے۔

اگر عہ اور بہ ایک ہی رتبہ کے دو صغاریات ہوں اور اگر عہ´ اور بہ´ دو دوسرے صغاریات ہوں جو آخرکار بالترتیب عہ اور بہ کے مساوی ہو جائیں تو

$$\text{نہا}\left(\frac{\text{عہ}'}{\text{بہ}'}\right) = \text{نہا}\left(\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

کیونکہ

$$\frac{\text{عہ}'}{\text{بہ}'} = \frac{\text{عہ}'}{\text{عہ}} \times \frac{\text{بہ}}{\text{بہ}'} \times \frac{\text{عہ}}{\text{بہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اور بائیں طرف کے پہلے دو اجزائے ضربی کی انتہائیں بموجب فرض ایک کے مساوی ہیں۔ دفعہ ۲۰ سے نتیجہ زیر بحث حاصل ہو جاتا ہے*۔

جب کوئی متغیر مقدار دوران عمل میں بالآخر کسی قابل تعین مقدار سے بھی بڑھ جاتی ہو تو اس کو 'لاانتہا بڑی' مقدار کہا جاتا ہے۔ اور اگر اس قسم کی کسی مقدار ھ کو معیار قرار دیا جائے تو کسی دوسری مقدار و کو 'م ویں رتبہ کی لاانتہا بڑی مقدار' کہا جاتا ہے جبکہ $\frac{\text{و}}{\text{ھ}^{\text{م}}}$ کی انتہا محدود ہو اور صفر نہ ہو۔

امثلہ نمبری ۱

(جبری تفاعل)

۱- ایک ہی شکل میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کی ترسیمات حسب ذیل صورتوں میں معلوم کرو:-

* اس اصول کے استعمال کی اچھی مثال دفعہ ۶۲ میں ملے گی۔

$$ن = ۱، ۲، ۳، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}$$

جبکہ لا کی وسعت ۰ سے ۲ تک ہو*

۲- (۱) $(لا - ۱)(لا - ۲)$، $لا^{۲} - لا + ۱$

(۲) $لا(۱ - لا)^{۲}$ ، $لا^{۲}(۱ - لا)^{۲}$

(۳) $لا + \frac{۱}{لا}$ ، $لا - \frac{۱}{لا}$

(۴) $\sqrt{۱ - لا^{۲}}$ ، $\frac{۱}{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}$ ۴۱

(۵) $\frac{(لا - ۱)(لا - ۲)}{لا}$ ، $\frac{(لا - ۱)(لا - ۳)}{لا - ۲}$

(۶) $\frac{لا^{۲}}{۱ - لا^{۲}}$ ، $\frac{لا^{۲}}{۱ + لا^{۲}}$

(۷) $\frac{۱ - لا + لا^{۲}}{۱ + لا + لا^{۲}}$

(۸) $\frac{لا}{۱ - لا}$ ، $\frac{لا}{(۱ - لا)^{۲}}$

کی ترسیمات کھینچو۔

۳- ثابت کرو کہ مساوات

$$۲لا^{۳} + ۵لا^{۲} - ۵لا - ۳ = ۰$$

کی ایک اصل $-\infty$ اور -۱ کے درمیان، دوسری اصل -۱ اور صفر کے درمیان اور تیسری اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

---

* پیمانہ کے مناسب منحنیوں کو بہت احتیاط سے کھینچنا چاہیئے۔ اس مقصد کے لئے چھوٹے مربعوں والے مربع دار کاغذ کا استعمال مفید ثابت ہوگا۔ ضمیمہ میں (ا، ب، ج جدولوں میں) اعداد کے مربع، جذر المربع، اور ان کے مقلوب دیے گئے ہیں جن سے حسابی عمل میں بعض اوقات آسانی پیدا ہو جائے گی۔

۴ − ثابت کرو کہ مساوات

$$۲\,لا^{۳} + ۷\,لا^{۲} + ۳\,لا - ۵ = ۰$$

کی تین حقیقی اصلیں ہیں۔ تقریبی طور پر ان کے مقامات معلوم کرو۔

۵ − مساوات $۲\,لا^{۳} - ۳\,لا^{۲} - ۳۶\,لا + ۱۰ = ۰$

کی اصلوں کے مقامات کی تعین تقریبی طور پر کرو۔

۶ − ثابت کرو کہ طاق درجے کی ہر جبری مساوات کی کم سے کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے اور جفت درجے کی ہر مساوات میں جس کی پہلی اور آخری رقموں کے سر مختلف العلامت ہوں کم سے کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں جن میں سے ایک مثبت اور دوسری منفی ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲

(دائری تفاعل)

۱ − تفاعیل ذیل کی ترسیمیں کھینچو:-

(۱) قم لا، مم لا، مم لا + سس لا،

(۲) $جب^{۲}\,لا$، $جم^{۲}\,لا$، $سس^{۲}\,لا$،

(۳) جب لا + جب ۲ لا، جب لا + جم ۲ لا،

(۴) $جب\,لا^{۲}$، $جب\,\sqrt{لا}$، $جب\,\frac{۱}{لا}$،

۲ − ثابت کرو کہ مساوات

$$جب\,لا - لا\,جم\,لا = ۰$$

کی ایک اصل π اور $\frac{۳}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۴۲ ## امثلہ نمبری ۳

(تواتر)

۱ − مقادیر

$$\frac{۲\,ن}{ن^{۲} + ۱}$$

کی علوی اور سفلی انتہائیں معلوم کرو جبکہ ن = ۱، ۲، ۳، ....

۲- اگر تواتر

$$ا_۱،\ ا_۲،\ ا_۳،\ ....\ ا_ن،\ ....$$

میں

$$ا_{ن+۱} = م\ ا_ن + ج$$

جہاں م اور ج مثبت ہیں اور م < ۱ تو تواتر کی انتہا $\frac{ج}{۱-م}$ ہوگی خواہ $ا_۱$ کی کچھ ہی قیمت ہو۔

۳- مقادیر

$$\sqrt{۲}،\ \sqrt{۲+\sqrt{۲}}،\ \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}،\ ....$$

جہاں

$$ا_{ن+۱} = \sqrt{۲+ا_ن}$$

ایک صعودی تواتر بناتی ہیں جس کی انتہا ۲ ہے۔

۴- اگر

$$ا_{ن+۱} = \sqrt{ک+ا_ن}$$

جہاں $ا_۱$ اور ک مثبت ہیں تو تواتر صعودی یا نزولی ہوگا بموجب اس کے کہ $ا_۱$ مساوات $لا^۲ = لا + ک$ کی مثبت اصل سے چھوٹا یا بڑا ہو اور ہر صورت میں اس کی انتہا یہ اصل ہو

۵- تواتر کی نوعیت کی جانچ کرو جس میں

$$ا_{ن+۱} = \frac{ک}{۱+ا_ن}$$

جہاں ک مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $ا_۱$ مثبت ہو تو تواتر کی انتہا، مساوات $لا^۲ + لا = ک$ کی مثبت اصل ہے۔

۶- ایسی مقداروں کا تواتر معلوم کرو جو مساوات

$$لا^۳ = لا + ۱$$

کی مثبت اصل کے قریب آئیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ قانون

$$\text{لا}_{\text{ن}+۱} = \text{سس}^{-۱}\, \text{لا}_{\text{ن}}$$

کے بموجب بننے والے تواتر کی انتہا مساوات سس لا = لا کی اقل مثبت اصل ہے جہاں $\text{لا}_۱$ ا اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۸۔ اگر $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}$ کے درمیان حسابی اور موسیقی اوساط بالترتیب $\text{ا}_{\text{ن}+۱}$، $\text{ب}_{\text{ن}+۱}$ ہیں اور $\text{ا}_۱$ اور $\text{ب}_۱$ مثبت ہوں تو ایسے تواتروں کی مشترک انتہا $\sqrt{\text{ا}_۱ \text{ب}_۱}$ ہوتی ہے جنکی ن ویں ارقام بالترتیب $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}$ ہیں۔

۴۳ ۹۔ اگر $\text{ا}_{\text{ن}+۱} = \frac{۱}{۲}(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}})$، $\text{ب}_{\text{ن}+۱} = \sqrt{\text{ا}_{\text{ن}+۱}\, \text{ب}_{\text{ن}}}$

اور $\text{ا}_۱$، $\text{ب}_۱$ مثبت ہوں تو تواتر جن کی ن ویں ارقام $\text{ا}_{\text{ن}}$، $\text{ب}_{\text{ن}}$ ہیں ایک مشترک انتہا کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔

(اس انتہا کو $\text{ا}_۱$ اور $\text{ب}_۱$ کے درمیان حسابی ہندسی اوسط کہتے ہیں)

امثلہ نمبری ۴
(تفاعلوں کی انتہائی قیمتیں)

۱۔ لا ← ۰ کے لئے

$$\frac{\text{جب ا لا}}{\text{لا}} ، \frac{\text{سس ا لا}}{\text{لا}}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۔ لا ← ۰ کے لئے

$$\frac{\text{جب}^{-۱}\, \text{لا}}{\text{لا}} ، \frac{\text{سس}^{-۱}\, \text{لا}}{\text{لا}}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

۳۔ $\text{ما} = \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ ، $\text{ما} = \frac{\text{۱} - \text{جم لا}}{\text{لا}^{۲}}$

کی ترسیمیں بناؤ۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \frac{۱}{۲}\pi} \left(\text{قط لا} - \text{مس لا}\right) = ۰$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to ۰} \frac{\sqrt{۱ + \text{لا}} - \sqrt{۱ - \text{لا}}}{\text{لا}} = ۱$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \infty} \left\{ \sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{لا} + ۱} - \text{لا} \right\} = \frac{۱}{۲}$$

۷۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کے اندرونی اور بیرونی منتظم کثیرالاضلاع کھینچے گئے۔ ثابت کرو کہ جب ن بڑا ہو تو ۲ ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیرالاضلاعوں کے رقبوں میں فرق ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیرالاضلاعوں کے رقبوں کے فرق کا $\frac{۱}{۴}$ ہوتا ہے۔

۸۔ ایک خط مستقیم ا ب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم و لا ، و ما پر اس کے مقطوعوں و ا ، و ب کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ اگر ا ب کے دو متصل محلوں کا نقطہ تقاطع ن ہو اور ق وہ نقطہ ہو جس پر زاویہ لا و ما کا ناصف ا ب کو قطع کرتا ہے تو ا ن = ق ب

۹۔ دائرہ کے نقطہ ا میں سے وتر ا ن کھینچا گیا اور ا پر کے مماس پر ایک نقطہ ت اس طرح لیا گیا کہ ا ت = ا ن ، اگر ت ن ممدودہ ا میں سے گذرنے والے قطر کو ق پر ملے تو ا ق کی انتہائی قیمت جب ن ، ا کی طرف حرکت کرے دائرہ کے قطر کا دو چند ہوتی ہے۔

۱۰۔ ایک خط مستقیم ا ب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم و لا، و ما پر اسکے مقطوعوں اور ا ب سے بننے والے مثلث ا و ب کا رقبہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا ب کے دو متصل محلوں کے تقاطع کا انتہائی نقطہ ا ب کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔ ۴۷

۱۱۔ مستقل طول کا ایک خط مستقیم ا ب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے دو ثابت علی القوائم خطوط مستقیم و لا، و ما پر رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ا ب کے دو متصل محلوں کا انتہائی نقطہ تقاطع ن ہو اور و سے ا ب پر جو عمود کھینچا جائے اس کا پائین ل ہو تو ا ن = ل ب۔

۱۲۔ ایک دائری قوس کے سروں پر اور اس کے وسطی نقطہ پر مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مماسوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ آخرکار اس مثلث کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جس کے راس نقاط تماس ہوں۔

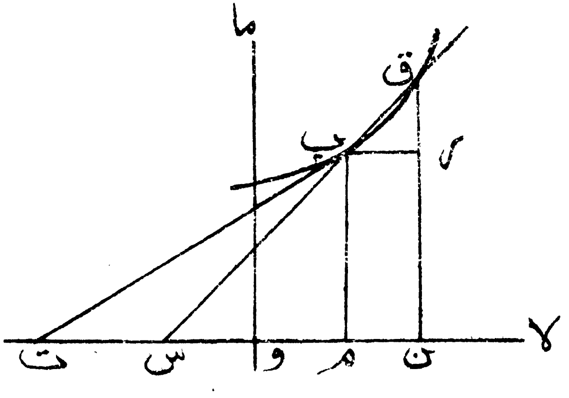
۱۳۔ اگر ن ج نَ ایک ناقص کا کوئی ثابت قطر ہو اور ق ھ اسی قطر کا کوئی معین اور اگر ق پر کا مماس ج ن ممدودہ کو ت پر ملے تو ثابت کرو کہ نسبت ت ن : ن ھ کی انتہائی قیمت جبکہ ن ھ لا انتہا چھوٹا ہو ایک ہے۔

دوسرا باب ۴۵

مشتق تفاعل

۲۴۔ تمہید۔ ہندسی توضیحات۔ کسی منحنی کے دئے ہوئے نقطہ پر مماسی خط کی سمت دریافت کرنے کے سوال سے تفرقی احصا کی ابتدا ہوئی۔

فرض کرو کہ پ اور ق دو متصل نقطے ایک مسلسل منحنی ما = فہ(لا) ...(۱) پہ ہیں۔ نیز پ م اور ق ن ان کے معین ہیں۔ پ ر خط و لا کے متوازی ہے اور وتر پ ق محور لا سے س پر ملتا ہے۔



شکل ۱۹

اگر نقطہ پ کو ثابت رکھا جائے اور ق نقطہ پ کے قریب لایا جائے تو یہ وتر عام ہندسی منحنی کی صورت میں ایک خاص انتہائی مقام پ ت اختیار کرے گا اور ہم اسے نقطہ پ پر مماسی خط کی تعریف قرار دینگے۔ ایسا ممکن ہے کہ منحنی کے ایک یا زیادہ اکیلے نقطوں پر وتر کا کوئی انتہائی مقام نہ ہو۔ مماسی خط کی سمت اُس زاویے سے حاصل ہوتی ہے جو ت پ خط و لا سے بناتا ہے یعنی شکل میں زاویہ پ س لا کی انتہائی قیمت ہے۔

فرض کرو کہ

و م = لا، پ م = ما، و ن = لا + مف لا، ق ن = ما + مف ما ۴۶

تو مس پ س لا = پ م / س م = ق ر / پ ر = مف ما / مف لا ...... (۲)

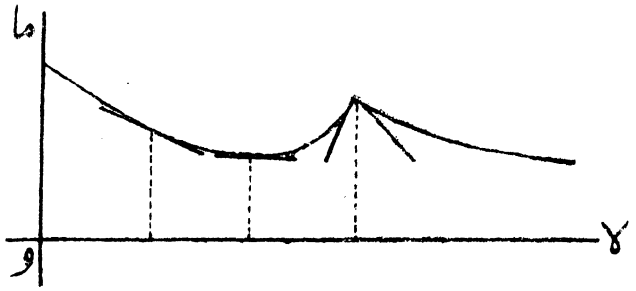
اب سوال صرف اتنا ہے کہ کسر مف ما / مف لا کی انتہائی قیمت دریافت کیجائے جبکہ مف لا کی انتہا صفر ہو۔ اس کی انتہائی قیمت کو

فر ما / فر لا ...... (۳)، ترقیم [فر ما / فر لا = $\frac{dx}{dy}$]

سے تعبیر کیا جاتا ہے، اسے ایک ہی علامت تصور کرنا چاہئے۔ کسری شکل انتہا حاصل کرنے کے طریقے کی یاددہانی کے لئے برقرار رکھی گئی ہے۔ تحلیلاً اسی چیز کو فہ (لا) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے فہ (لا) کا مشتق تفاعل کہتے ہیں۔

علامت (۳) سے جو منحنی کی خاصیت تعبیر ہوتی ہے اس کے لئے ہندسی نام تجویز کرنے میں بہت سہولت ہوگی۔ اس معنی میں ہم اصطلاح "ڈھال" کام میں لائینگے۔ اگر ہم منحنی کے کسی نقطہ پر دائیں جانب مماسی خط کھینچیں تو ڈھال اس زاویہ کا مثلثی مماس ہے جو مماسی خط محور لا کی مثبت سمت سے بناتا ہے۔ اگر یہ زاویہ منفی ہے تو ڈھال منفی ہوگا اور اگر مماسی خط و لا کے متوازی ہے تو ڈھال صفر ہوگا۔ دیکھو شکل ۲۰

اکثر صورتوں میں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے ڈھال بھی خود لا کا مسلسل تفاعل ہوتا ہے اگرچہ ایسا ممکن ہے کہ ایک یا زیادہ اکیلے نقطوں پر جہاں مماسی خط محور لا پر عمود وار ہو ڈھال لا انتہا ہو جائے۔ شکل میں ایسی صورت بھی دکھائی گئی ہے جبکہ ڈھال میں محدود مقدار کا توڑ یا عدم تسلسل ہے۔



شکل ۲۰

۲۵ - مشتق تفاعل کی عام تعریف -

چونکہ مشتق تفاعل کا تخیل ریاضی کی تمام شاخوں میں نہایت اہم ہے اس لئے ہم اس کی تعریف زیادہ باقاعدہ طور پر بغیر ہندسی مثالوں کی مدد کے درج کرتے ہیں۔

۲۷ فرض کرو کہ ما، متبوع متغیر لا کا خاص وسعت میں ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اب اگر لا میں مف لا کا اضافہ کیا جائے جہاں لا + مف لا مذکورۂ بالا وسعت میں واقع ہے اور اس کی وجہ سے ما میں مف ما کا اضافہ ہو تو لا کو ثابت مانکر نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ .... (۱) اضافہ مف لا کا تفاعل ہوگی۔

اب اگر مف لا اور اس کی وجہ سے مف ما سلسلہ وار کچھ قیمتیں اختیار کریں جنکی انتہا صفر ہو تو اس نسبت کی قیمت ایک معین اور واحد انتہائی

مقدار کی طرف مائل ہوگی۔ اس طرح حاصل شدہ قیمت کو ہم ہا کا بلحاظ لا کے "مشتق تفاعل" یا "مشتق" یا "تفرقی سر" کہینگے۔ اور اس کو علامت

فر ہا / فر لا .... (۲) سے ظاہر کرینگے۔

مختصراً مشتق تفاعل (جب یہ وجود رکھتا ہو) اس نسبت کی انتہائی قیمت ہے جو تفاعل کے اضافہ کو متبوع متغیر کے اضافہ کے ساتھ ہے جبکہ دونوں اضافے لا انتہا چھوٹے ہوجائیں۔

اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا چاہئے کہ تعریف بالا میں ہم ایک خاص نسبت کی انتہائی قیمت کا ذکر کرتے ہیں نہ کہ مف ہا اور مف لا کی انتہائی قیمتوں کی نسبت کا۔ موخرالذکر نسبت کی قیمت دریافت نہیں کی جاسکتی کیونکہ اس کی شکل غیر معین صفر / صفر ہے۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ نسبت مف ہا / مف لا کی واحد انتہائی قیمت ہے تو یہ سمجھنا چاہئے کہ متبوع متغیر کی وسعت کے اندر لا کی کسی درمیانی قیمت کے لئے اس نسبت کی انتہا صرف ایک ہی ہے خواہ مف لا مثبت جانب سے صفر کی طرف مائل ہو خواہ منفی جانب سے۔ بعض صورتوں میں ایسا ہوتا ہے کہ مف لا کے مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف آنے سے نسبت کی انتہا مختلف ہوتی ہے۔ ایسے حالات میں مذکورۂ بالا تعریف کے مطابق اصل مشتق وجود نہیں رکھتا، لیکن ان انتہائی قیمتوں کو ہم بالترتیب "دائیں" اور "بائیں" مشتق کہہ سکتے ہیں۔ دیکھو شکل ۲۰۔

اس سوال کا جواب کہ نسبت مف ہا / مف لا کی کوئی معین انتہائی قیمت ہے یا نہیں، تفاعل ہا کی نوعیت پر منحصر ہے۔ جن تفاعلوں کے لئے یہ انتہا معین اور یگانہ ہو (سوائے لا کی چند اکیلی قیمتوں کے لئے) انہیں ہم "قابل تفرق تفاعل"

کہینگے۔ باقی تمام تفاعل جو قابلِ تفرق نہیں ہیں ابتدا ہی سے علم احصا کی حدود سے باہر کر دیے گئے ہیں۔

قابلِ تفرق تفاعل لازماً مسلسل ہوگا لیکن اس دعوے کا عکس صحیح نہیں ہے۔ مگر ایسے تفاعل جو مسلسل ہیں لیکن تفرق پذیر نہیں ہو سکتے وہ علم ریاضی میں بہت کم ملتے ہیں۔ ۴۸

مشتق تفاعل کے لئے علاوہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے اور بھی بہت سی علامتیں ہم استعمال کرینگے۔ عموماً اس کو ظاہر کرنیکے لئے تفاعل کی علامت پر زبر لگا دی جائیگی۔

پس اگر ما = فما(لا) ... (۳) تو مشتق تفاعل کو مَا یا جیسے کہ اوپر بیان ہو چکا ہے فمَا(لا) سے تعبیر کیا جائیگا۔

اب چونکہ $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{فما(لا + مف لا) - فما(لا)}}{\text{مف لا}}$

اس لئے مف لا کی بجائے ھ لکھنے سے

$$\text{فمَا(لا)} = \text{نہا}_{\text{ھ} \to 0} \frac{\text{فما(لا + ھ) - فما(لا)}}{\text{ھ}} \quad ....(۴)$$

آئندہ یہ ضابطہ اکثر استعمال کیا جائیگا۔

کسی دیے ہوئے تفاعل کے تفرقی سر دریافت کرنے کے عمل کو ہم "تفرق کرنا" کہینگے۔ اگر لا مستقل متغیر ہو تو "$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$" اس عمل کی علامت تصور کی جا سکتی ہے اور اسے واحد علامت "عف" سے ظاہر کرنے میں زیادہ سہولت ہوگی۔

پس لحاظ لا کے ما کے تفرقی سر کے لئے

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ، $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ ما اور عف ما میں سے کوئی سی بھی علامت کام میں لائی جا سکتی ہے۔ نوٹ [عامل تفرق کا اختصار عف = D]

مترجم

۲۶ - طبیعی مثالیں - مختلف مضامین میں مشتق تفاعل کے استعمال کی اہمیت اس بات پر مبنی ہے کہ اس سے اصل تفاعل کے اضافہ کی شرح کا ناپ حاصل ہوتا ہے جبکہ متبوع متغیر میں اکائی کا اضافہ ہو۔

مثلاً ہم پہلے ایک نقطہ کی خطی حرکت پر غور کرینگے۔ خط حرکت پر کسی مقررہ مبدا سے متحرک نقطہ کا فاصلہ س وقت ت کا (جو کسی مقررہ آن سے ناپا گیا ہو) تفاعل ہوگا۔ ان متغیروں میں رشتہ اکثر ترسیماً "مقامات کے منحنی" سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں فصلہ ت کے متناسب ہوتا ہے اور معین س کے۔ اگر وقت مف ت میں فاصلہ مف س طے ہو تو کسر $\frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}}$ وقفہ مف ت میں 'اوسط رفتار' کہلاتی ہے یعنی بہ الفاظ دیگر اگر کوئی نقطہ اس مستقل رفتار سے حرکت کرے تو وہ اسی وقفہ مف ت میں وہی فاصلہ مف س طے کریگا۔ انتہا میں جبکہ مف ت اور اس کی وجہ سے مف س لاانتہا چھوٹے ہو جاتے ہیں تو اس اوسط رفتار کی انتہائی قیمت کو ہم از روئے تعریف آن ت پر کی رفتار کہینگے۔ علم احصائی ترقیم میں رفتار و ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

$$\text{و} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

مذکور بالا ترسیمی تعبیر میں و مقامات کے منحنی کا ڈھال ہے۔ ۴۹

اب رفتار و خود ت کا تفاعل ہے۔ اس رشتہ کو ظاہر کرنے والا منحنی رفتاری منحنی کہلاتا ہے۔ اگر وقفہ مف ت میں رفتار میں مف و کا اضافہ ہو تو کسر $\frac{\text{مف و}}{\text{مف ت}}$ کو اس وقفہ میں رفتار کے اضافہ کی اوسط شرح یا 'اوسط اسراع' کہتے ہیں۔ اوسط اسراع کی انتہائی قیمت کو جبکہ مف ت لاانتہا چھوٹا ہو جاتا ہے، آن ت پر کا اسراع کہتے ہیں۔

اگر عا اس اسراع کو ظاہر کرے تو $\text{عا} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

ترسیمی تعبیر میں عه رفتاری منحنی کا ڈھال ہے۔
ایک استوار جسم کی صورت میں جو ایک ثابت محور کے گرد گھوم رہا ہے اگر جسم کسی معیاری مقام سے شروع ہو کر زاویہ طه میں سے گھوم جائے تو اوسط زاوی رفتار، وقفہ مف ت میں $\frac{\text{مف طه}}{\text{مف ت}}$ ہوگی اور آن ت پر کی زاوی رفتار، $\frac{\text{فر طه}}{\text{فر ت}}$ ...... (۳) ہوگی۔
نیز اگر سه اس زاوی رفتار کے لئے استعمال کریں تو وقفہ مف ت میں "اوسط زاوی اسراع" $\frac{\text{مف سه}}{\text{مف ت}}$ سے ظاہر ہوگا اور "آن ت پر کا زاوی اسراع" $\frac{\text{فر سه}}{\text{فر ت}}$ ...... (۴) ہے۔
نیز کسی شئے کی سلاخ کا طول تپش (طه) کا تفاعل ہوتا ہے۔ اگر تپش طه پر ایک ایسی سلاخ کا طول لا ہو جس کا طول کسی معیاری تپش (فرض کرو صفر) پر اکائی ہے تو $\frac{\text{مف لا}}{\text{مف طه}}$ تپش کے طه سے طه + مف طه تک جانے میں سلاخ کے خطی پھیلاؤ کی اوسط قدر ہے اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طه}}$ تپش طه پر پھیلاؤ کی قدر پیما ہے۔
بطور دوسری مثال کے فرض کرو کہ ایک مائع ہے جو آزادانہ سلسلہ وار چند ایسی شکلیں اختیار کر سکتا ہے کہ دباؤ (د)، اکائی کمیت کے حجم (ح) کا ایک معین تفاعل ہے۔
اگر حجم ح سے ح + مف ح ہو جائے تو کسر $-\frac{\text{مف ح}}{\text{ح}}$ اُس نسبت کا ناپ ہے جو حجم کی کمی کو اصل حجم کے ساتھ ہے اور اسی لئے اسے ہم "پچکاؤ" کہتے ہیں

یہ پچکاؤ پیدا کرنے کے لئے دباؤ کے اضافہ مف د کو پچکاؤ کے ساتھ نسبت $\frac{\text{ح مف د}}{\text{مف ح}}$ ہوگی اس نسبت کی انتہائی قیمت کو جبکہ مف ح لا انتہا چھوٹا کردیا جاتا ہے یعنی $\frac{\text{ح فر د}}{\text{فر ح}}$ کو دئے ہوئے حالات کے ماتحت سیال کی حجمی لچک کہتے ہیں۔

۲۷۔ تفرقات ۔ ابتدائی اصولوں سے۔

دئے ہوئے تحلیلی تفاعلوں کے مشتق نکالنے کے عام قاعدے دریافت کرنے سے پہلے ہم چند مثالوں پر ابتدائی اصولوں کی بنا پر غور کریں گے۔

مثال ۱:- اگر ما = لا تو مف ما = مف لا اور اس لئے ۵۰

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = ۱ \quad \text{پس} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۱$$

مثال ۲- $\text{ما} = \text{لا}^{۲}$ .... (۱)

مف لا کی بجائے ھ لکھنے سے $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{۲} - \text{لا}^{۲}}{\text{ھ}} = ۲\text{لا} + \text{ھ}$

انتہا لینے سے جبکہ ھ ← ۰ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۲\text{لا} \quad .... (۲)$$

مثال ۳- فرض کرو کہ $\text{ما} = \frac{۱}{\text{لا}}$ .... (۳)

$$\text{پس} \quad \text{مف ما} = \frac{۱}{\text{لا}+\text{ھ}} - \frac{۱}{\text{لا}} = \frac{-\text{ھ}}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = -\frac{۱}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$$

اور
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{-۱}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})} = -\frac{۱}{\text{لا}^۲} \quad \ldots\ldots(۴)$$

منفی علامت کی وجہ یہ ہے کہ جب لا بڑھتا ہے تو ما گھٹتا ہے۔

مثال ۳:- اگر $\text{ما} = \sqrt{\text{لا}}$ ....(۵)

$$\text{تو مف ما} = \sqrt{\text{لا}+\text{ھ}} - \sqrt{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}}{\sqrt{\text{لا}+\text{ھ}}+\sqrt{\text{لا}}}$$

$$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{۱}{\sqrt{\text{لا}+\text{ھ}}+\sqrt{\text{لا}}}$$

اس لئے انتہا میں جب ھ ← ۰ تو

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۲\sqrt{\text{لا}}} \quad \ldots\ldots(۶)$$

۲۸ — معیاری تفاعلوں کا تفرق۔

(آ) اگر $\text{ما} = \text{لا}^{\text{م}}$ ....(۱)

$$\text{تو} \quad \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{(\text{لا}+\text{مف لا})^{\text{م}} - \text{لا}^{\text{م}}}{(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{لا}}$$

دفعہ ۲۲ (آ) میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ م کی تمام منطق قیمتوں کے لئے مف لا ← ۰ کی صورت میں اس کسر کی انتہا $\text{م لا}^{\text{م}-۱}$ ہے۔

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م لا}^{\text{م}-۱} \quad \ldots\ldots(۲)$$

مثال:- اگر م = ۲ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\text{لا}$ ۵۱

اور اگر م = $\frac{۱}{۲}$ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۲}\text{لا}^{-\frac{۱}{۲}}$ دیکھو دفعہ ۲۷

(ب) اگر ما = جب لا ....(۳)

تو مف لا کی بجائے ھ لکھنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جب}(\text{لا}+\text{ھ}) - \text{جب لا}}{\text{ھ}} = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{ھ}}{\frac{1}{2}\text{ھ}} \times \text{جم}(\text{لا}+\tfrac{1}{2}\text{ھ})$$

اگر زاویے قوسی پیمانہ میں ناپے گئے ہوں تو دفعہ ۲۲ (۲) سے

$$\text{نہا}_{\text{ھ}\to 0}\left[\frac{\text{جب}(\frac{1}{2}\text{ھ})}{\frac{1}{2}\text{ھ}}\right] = 1$$

اور دوسرے جزو ضربی کی انتہائی قیمت جم لا ہے۔

اس لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جم لا}$ .... (۴)

طالب علم شکل (۱۴) صفحہ (۴۲) میں جیب لا کی ترسیم پر غور کرنا چاہئے اور اس امر کی تصدیق کرنی چاہئے کہ منحنی کا ڈھال اس ضابطہ کے مطابق بدلتا ہے۔

(۳) اگر $\text{ما} = \text{جم لا}$ .... (۵)

تو
$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جم}(\text{لا}+\text{ھ}) - \text{جم لا}}{\text{ھ}}$$

$$= -\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{ھ}}{\frac{1}{2}\text{ھ}} \times \text{جب}(\text{لا}+\tfrac{1}{2}\text{ھ})$$

مذکورہ بالا اسی وجہ بنا پر اس کی انتہائی قیمت ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\,\text{جب لا} \quad \text{............ (۶)}$$

(۴) اگر $\text{ما} = \text{سس لا}$ .... (۷)

تو
$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{سس}(\text{لا}+\text{ھ}) - \text{سس لا}}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{\text{جب}(\text{لا}+\text{ھ})\,\text{جم لا} - \text{جب لا}\,\text{جم}(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{ھ}\,\text{جم لا}\,\text{جم}(\text{لا}+\text{ھ})}$$

$$= \frac{\text{جب ھ}}{\text{ھ}} \times \frac{۱}{\text{جم لا جم (لا + ھ)}}$$

اور انتہا میں

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{جم}^{۲}\ \text{لا}} = \text{قط}^{۲}\ \text{لا} \quad \text{..........(۸)}$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ ما = سں لا کے منحنی کا ڈھال نقاط عدم تسلسل کے درمیان ہمیشہ مثبت ہے۔ دیکھو شکل (۱۵) صفحہ (۴۲)۔

۲۹۔ سادہ قسم کے جملوں کو تفرق کرنیکے ضابطے۔ حاصل جمع کا تفرق۔ ۵۲

(آ) فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{ع} + \text{ج}$ ....(۱)

جہاں ع متغیر لا کا معلومہ تفاعل ہے اور ج مستقل ہے۔

پس $\text{ما} + \text{مف ما} = \text{ع} + \text{مف ع} + \text{ج}$

$\therefore \text{مف ما} = \text{مف ع}$

یعنی $$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}}$$

اور اس لئے انتہا میں $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \quad \text{..........(۲)}$$

اگرچہ یہ بالکل ظاہر ہے کہ تفرق کرنے میں جمع کیا ہوا مستقل غائب ہو جاتا ہے تاہم یہ امر نہایت ضروری ہے۔ اس کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ کسی منحنی کو کلیتاً ما محور کے متوازی ہٹا دینے سے ڈھال میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

(۲) اگر $\text{ما} = \text{ع} + \text{و}$ ....(۳)

جہاں ع اور و متغیر لا کے دئے ہوئے تفاعل ہیں تو دفعہ ۱۲ کے مطابق

$$\text{مف ما} = \text{مف ع} + \text{مف و}$$

اسلئے $$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

چونکہ ایک مجموعہ کی انتہائی قیمت علیحدہ علیحدہ رقموں کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے

اس لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$ .... (۴)

نیز اگر $\text{ما} = \text{ع} + \text{و} + \text{طہ}$ .... (۵)

تو اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ع} + \text{و}) + \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر لا}}$$

$$= \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر لا}} \quad \text{.....(۶)}$$

اس طریقہ پر یکے بعد دیگرے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ تفاعلوں کی کسی محدود تعداد کے مجموعہ کا مشتق ان تفاعلوں کے جداگانہ مشتقات کا مجموعہ ہے۔

مثال:- جملہ $\text{ا}_{\circ}\,\text{لا}^{\text{م}} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{م}-۱} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{م}-۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{م}}$

کا مشتق تفاعل $\text{م}\,\text{ا}_{\circ}\,\text{لا}^{\text{م}-۱} + (\text{م}-۱)\,\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{م}-۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{م}-۱}$ ہے۔

۵۳ **۳۰- حاصل ضرب کا تفرق۔**

(آ) اگر $\text{ما} = \text{ج}\,\text{ع}$ .... (۱)

جہاں ج مستقل ہے اور ع متغیر لا کا تفاعل ہے،

تو $\text{ما} + \text{مف ما} = \text{ج}\,(\text{ع} + \text{مف ع})$

اس لئے $\text{مف ما} = \text{ج} \times \text{مف ع}$

اور $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ج}\,\frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}}$

اس لئے انتہا میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ج}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$ .... (۲)

پس مستقل جزو ضربی تفرق کرنے کے بعد بھی قائم رہتا ہے۔

اس امر کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ اگر کسی منحنی کے معین ایک خاص نسبت میں تبدیل کئے جائیں تو ڈھال بھی اسی نسبت سے بدل جاتا ہے۔ دیکھو شکل ۲۶ صفحہ (۱۱۹)

(۲) اگر $\text{ما} = \text{ع}\,\text{و}$ .... (۳)

جہاں ع اور و دونوں لا کے تفاعل ہیں تو دفعہ ۱۲ کے مطابق

$$\text{مف ما} = (\text{ع} + \text{مف ع})(\text{و} + \text{مف و}) - \text{ع}\,\text{و}$$

$$= \text{و}\ \text{مف ع} + \text{ع}\ \text{مف و} + \text{مف ع}\ \text{مف و}$$

اور اس لئے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{و}\,\frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} + (\text{ع} + \text{مف ع})\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

اور اس کی انتہا لینے سے اس اصول کے مدنظر کہ حاصل ضرب کی انتہا علیحدہ علیحدہ انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ہمیں ذیل کا ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ع}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \quad ......(۴)$$

اگر مساوات کے دونوں جانب $\text{ما} = \text{ع}\,\text{و}$ سے تقسیم کئے جائیں

تو

$$\frac{1}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{ع}}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{و}}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

اس نتیجہ کی آسانی سے توسیع کیجا سکتی ہے۔ پس اگر $\text{ما} = \text{ع}\,\text{و}\,\text{ط}$ تو $\text{ی} = \text{ع}\,\text{و}$ لکھنے سے $\text{ما} = \text{ی}\,\text{ط}$

اس لئے اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{ی}}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ط}}\frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{ع}}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{و}}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ط}}\frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}} \quad ......(۵)$$

۵۴ اور اسی طرح اجزاء کی کسی محدود تعداد کے لئے اگر ہم آخر الذکر ضابطہ کی عام

شکل کے دونوں جانب $\text{ما} = \text{ع و ط} \ldots\ldots$ سے ضرب دیں تو ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و ط}\ldots \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ع ط}\ldots \times \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{ع و}\ldots \times \frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}} \ldots\ldots (۶)$$

الفاظ میں اسے اس طرح بیان کر سکتے ہیں:- مختلف اجزاء میں سے ہر ایک کو باری باری متغیر مانکر اور باقی اجزاء کو مستقل مانکر لا کے لحاظ سے مشتق نکالو تو حاصل ضرب کا مشتق تفاعل ان جداگانہ دریافت کئے ہوئے مشتقوں کا مجموعہ ہوگا۔

مثال ۱:- اگر $\text{ما} = \text{ع} \times \text{ع} \times \ldots$ م اجزاء تک $= \text{ع}^{\text{م}} \ldots\ldots (۷)$

$$\text{تو}\quad \frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \ldots\ldots \text{م اجزاء تک}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ع}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{پس}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{م ع}^{\text{م}-1}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \ldots\ldots\ldots (۸)$$

اس نتیجہ کا عام ثبوت جس میں م کے مثبت صحیح عدد ہونے کی قید نہیں ہے دفعہ ۳۲ میں دیا جائیگا۔

مثال ۲:- اگر $\text{ما} = \text{جب لا جم لا} \ldots\ldots\ldots (۹)$

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جم لا}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جب لا}) + \text{جب لا}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جم لا})$$

$$= \text{جم لا} \times \text{جم لا} - \text{جب لا} \times \text{جب لا}$$

$$= \text{جم}^2\,\text{لا} - \text{جب}^2\,\text{لا} = \text{جم ۲ لا} \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

مثال ۳:- اگر $\text{ما} = \text{لا}^2\,\text{جب لا} \ldots\ldots\ldots (۱۱)$

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا}^2\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جب لا}) + \text{جب لا}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{لا}^2)$$

$$= \text{لا}^2\,\text{جم لا} + ۲\,\text{لا جب لا} \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

۳۱ - خارج قسمت کا تفرق -

فرض کرو کہ $\text{ما} = \frac{\text{ع}}{\text{و}}$ .... (۱)

یہاں ع اور و متغیر لا کے معلوم تفاعل ہیں۔ دفعہ ۱۲ کے مطابق

$$\text{مف ما} = \frac{\text{ع} + \text{مف ع}}{\text{و} + \text{مف و}} - \frac{\text{ع}}{\text{و}} = \frac{\text{و مف ع} - \text{ع مف و}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

اس لئے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{و}\frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} - \text{ع}\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

اور انتہا میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{و}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} - \text{ع}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{۲}}$ .... (۲) ۵۵

اسے الفاظ میں اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ اگر کسی خارج قسمت کا مشتق نکالنا ہو تو نسب نما اور شمار کنندہ کے مشتق کے حاصل ضرب میں سے شمار کنندہ اور نسب نما کے مشتق کا حاصل ضرب تفریق کرو اور اس حاصل تفریق کو نسب نما کے مربع سے تقسیم کرو۔

خاص شکل $\text{ما} = \frac{۱}{\text{و}}$ .... (۳)

خاص غور کے قابل ہے۔

اس صورت میں $\text{مف ما} = \frac{۱}{\text{و} + \text{مف و}} - \frac{۱}{\text{و}} = \frac{-\text{مف و}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = - \frac{\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \frac{۱}{\text{و}^{۲}} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$ .... (۴)

ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ عام مسئلہ (۲) میں $\text{ع} = ۱$ اور $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = ۰$ رکھنے سے حاصل ہو سکتا تھا۔

مثال ۱:- $\text{ما} = \dfrac{\text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}}}$ .... (۵)

یہاں $\dfrac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{۱} + \text{۲لا}$ اور $\dfrac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = -\text{۱} + \text{۲لا}$

پس $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \dfrac{(\text{۱}+\text{۲لا})(\text{۱}-\text{لا}+\text{لا}^{\text{۲}}) + (\text{۱}-\text{۲لا})(\text{۱}+\text{لا}+\text{لا}^{\text{۲}})}{(\text{۱} - \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$

$= \dfrac{\text{۲}(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})}{(\text{۱} - \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$ .... (۶)

مثال ۲:- اگر $\text{ما} = \dfrac{\text{۱}}{\text{ع}^{\text{م}}}$ .... (۷)

جہاں م مثبت صحیح عدد ہے تو

$\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\dfrac{\text{۱}}{\text{ع}^{\text{۲م}}} \times \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-\text{۱}} \dfrac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = -\text{م}\,\text{ع}^{-\text{م}-\text{۱}} \dfrac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ ..... (۸)

دیکھو دفعہ ۳۲

۵۶ اس دفعہ کا ضابطہ دفعہ ۳۰ (۴) سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اگر $\text{ما} = \dfrac{\text{ع}}{\text{و}}$ تو $\text{ع} = \text{ما}\,\text{و}$

اس لئے $\dfrac{\text{۱}}{\text{ع}} \dfrac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \dfrac{\text{۱}}{\text{و}} \dfrac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \dfrac{\text{۱}}{\text{ما}} \dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ .... (۹)

پس $\dfrac{\text{۱}}{\text{ما}} \dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \dfrac{\text{۱}}{\text{ع}} \dfrac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} - \dfrac{\text{۱}}{\text{و}} \dfrac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ .... (۱۰)

یہ مذکورہ بالا ضابطہ (۲) کے معادل ہے۔

ذیل کی مثالیں ضروری ہیں۔

(آ) اگر $\text{ما} = \text{مس لا} = \dfrac{\text{جب لا}}{\text{جتم لا}}$ .... (۱۱)

تو $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جم لا}\ \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جب لا}) - \text{جب لا}\ \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جم لا})}{\text{جم}^2\ \text{لا}}$$

$$= \frac{\text{جم}^2\ \text{لا} + \text{جب}^2\ \text{لا}}{\text{جم}^2\ \text{لا}} = \text{قط}^2\ \text{لا} \quad \text{..........} \quad (۱۲)$$

یہ نتیجہ دفعہ ۲۸ (۳) کے مطابق ہے۔

اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{مم لا}$ .... (۱۳)

تو ہم حاصل کر سکتے ہیں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \text{قم}^2\ \text{لا}$ .... (۱۴)

(۲) اگر $\text{ما} = \text{قط لا} = \frac{۱}{\text{جم لا}}$ .... (۱۵)

تو $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \frac{۱}{\text{جم}^2\ \text{لا}}\ \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جم لا}) = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^2\ \text{لا}} \quad \text{..........} \quad (۱۶)$$

اور اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{قم لا}$ .... (۱۷)

تو $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \frac{\text{جم لا}}{\text{جب}^2\ \text{لا}} \quad \text{..........} \quad (۱۸)$$

جیسا کہ دفعہ ۲۵ میں بتایا گیا ہے اگر ہم لا کے لحاظ سے تفرق کرنے کے عمل کو علامت عف سے ظاہر کریں تو دفعات ۲۹ تا ۳۱ کے نتائج مختصراً ذیل کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں۔

$\text{عف}(\text{ع} + \text{و}) = \text{عف ع} + \text{عف و}$ .... (۱۹)

$\text{عف}(\text{ع و}) = \text{و عف ع} + \text{ع عف و}$ .... (۲۰)

$$\text{عف}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right) = \frac{\text{و عف ع} - \text{ع عف و}}{\text{و}^2} \quad \text{..........} \quad (۲۱)$$

۳۲۔ تفاعل کے تفاعل کا تفرق۔ ۵۷

اگر $\text{ما} = \text{فا}(\text{ع})$ .... (۱)

جہاں $\text{ع} = \text{ف}(\text{لا})$ .... (۲)

اور علامتیں فا اور ف معلومہ تفاعلوں کو ظاہر کرتی ہیں تو ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ع}} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{فا}(\text{ع}) \times \text{ف}(\text{لا}) \quad \dots(۳)$$

اگر مف لا، مف ما، مف ع ایک ساتھ کے اضافے ہوں تو تماثلاً

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ع}} \times \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}}$$

اور چونکہ حاصل ضرب کی انتہا اجزاء کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

اس لئے $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ع}} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$

ضابطہ (۳) کا مفید استعمال خطی حرکت کے نظریہ میں ہوتا ہے۔
اگر ہم دفعہ ۲۶ کے مطابق کسی متحرک نقطہ کی رفتار اور اسراع کو بالترتیب و اور عا سے تعبیر کریں تو

$$\text{و} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} \quad \text{اور} \quad \text{عا} = \frac{\text{فر و}}{\text{فر ت}} \quad \dots\dots(۴)$$

اب اگر و کو طے شدہ فاصلہ س کا تفاعل سمجھا جائے تو

$$\text{عا} = \frac{\text{فر و}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \text{و}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر س}} \quad \dots\dots(۵)$$

اسی طرح ایک محور کے گرد گھومنے والے استوار جسم کی صورت میں زاوی اسراع ذیل کے جملہ سے ملیگا جبکہ زاوی رفتار کو طہ کا تفاعل مان لیا جائے

$$\frac{\text{فر سہ}}{\text{فر طہ}} \times \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}} \quad \text{یعنی} \quad \text{سہ}\,\frac{\text{فر سہ}}{\text{فر طہ}} \quad \dots\dots(۶)$$

ضابطہ (۳) سے ذیل کے اہم نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(آ) اگر $\text{ما} = \text{فا}(\text{لا} + \text{ا})$ ......(۷)

تو مسئلہ (۳) میں $\text{ع} = \text{لا} + \text{ا}$ اور $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = ۱$ رکھنے سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{فاَ}\,(\text{لا} + \text{ل}) \quad \ldots\ldots\ldots (٨)$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ منحنی کو کلیتاً لا محور کے متوازی ہٹا دینے سے ڈھال میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

(٢) اگر $\text{ما} = \text{فا}\,(\text{ک لا})$ .... (٩) ٥٨

تو رکھو $\text{ع} = \text{ک لا}$ پس $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{ک}$ اور

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ک فاَ}\,(\text{ک لا}) \quad \ldots\ldots\ldots (١٠)$$

حاصل ہوتا ہے۔

(٣) اگر $\text{ما} = \text{ع}^{\text{م}}$ .... (١١) جہاں م کوئی منطق مقدار ہے

تو $\text{فا}\,(\text{ع}) = \text{ع}^{\text{م}}$ اور $\text{فاَ}\,(\text{ع}) = \text{م ع}^{\text{م}-١}$

اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{م ع}^{\text{م}-١} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$ .... (١٢)

خاص صورتوں میں جبکہ $\text{م} = \frac{١}{٢}$ اور $\text{م} = -\frac{١}{٢}$ تو بالترتیب حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \sqrt{\text{ع}} &= \frac{١}{٢\sqrt{\text{ع}}} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \\ \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \frac{١}{\sqrt{\text{ع}}} &= -\frac{١}{٢\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (١٣)$$

اب اوپر کے ضابطوں پر چند مثالیں دی جائینگی۔

مثال (١)۔ اگر $\text{ما} = \text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}$ .... (١٤)

یعنی $\text{ما} = \text{ع}^{\text{م}}$ جہاں $\text{ع} = \text{جب لا}$

تو $\text{عف ما} = \text{م ع}^{\text{م}-١} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{م جب}^{\text{م}-١}\,\text{لا} \times \text{جم لا}$ .... (١٥)

مثال (۲)۔ اگر $\text{ما} = \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}$ .... (۱۶)

تو $\text{عف ما} = \text{عف}\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}} = \frac{1}{2}(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})^{-\frac{1}{2}} \times \text{عف}(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})$

$$= -\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}} \quad \text{.......... (۱۷)}$$

مثال (۳)۔ اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}}$ .... (۱۸)

اس میں $\text{ع} = \text{لا}$ اور $\text{و} = \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}$ رکھیں تو اس سے پہلی مثال کی بنا پر

$\text{عف ع} = 1$ اور $\text{عف و} = \frac{-\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}}$ حاصل ہوتے ہیں۔

اب کسر کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے

$$\text{عف ما} = \frac{\text{و عف ع} - \text{ع عف و}}{\text{و}^{2}} = \frac{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}} + \frac{\text{لا}^{2}}{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}}}{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}$$

$$= \frac{\text{ا}^{2}}{(\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2})^{\frac{3}{2}}} \quad \text{.......... (۱۹)}$$

۵۹ ۳۳۔ مقلوب تفاعلوں کا تفرق۔

اگر ما متغیر لا کا مسلسل تفاعل ہو تو چند شرائط کے ماتحت (دیکھو دفعہ ۱۶) جو عموماً علم ریاضی کے عام تفاعلوں کی صورت میں پوری ہوتی ہیں لا متغیر ما کا مسلسل تفاعل ہوگا۔

اگر لا اور ما کے متناظر اضافے مف لا، مف ما ہوں تو متماثلاً

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} \times \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}} = 1$$

پس چونکہ حاصل ضرب کی انتہا ان اجزا کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

اس لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \times \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = ۱$ .... (۱)

پس اگر یہ پہلے فرض کر لیا جائے کہ ما بلحاظ لا کے قابل تفرق تفاعل ہے تو نتیجہ نکلتا ہے کہ عموماً لا متغیر ما کا قابل تفرق تفاعل ہوگا۔ اور یہ دونوں مشتق تفاعل ایک دوسرے کے متکافی ہونگے۔ اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ منحنی کا مماس لا اور ما محوروں سے متمم زاوئے بناتا ہے۔

ذیل کی صورتیں ضروری ہیں۔

(آ) اگر $\text{ما} = \text{جب}^{-۱}\,\text{لا}$ .... (۲)

تو $\text{لا} = \text{جب ما}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{جم ما}$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{جم ما}} = \pm \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$ .... (۳)

(ب) اگر $\text{ما} = \text{جم}^{-۱}\,\text{لا}$ .... (۴)

تو $\text{لا} = \text{جم ما}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = -\text{جب ما}$

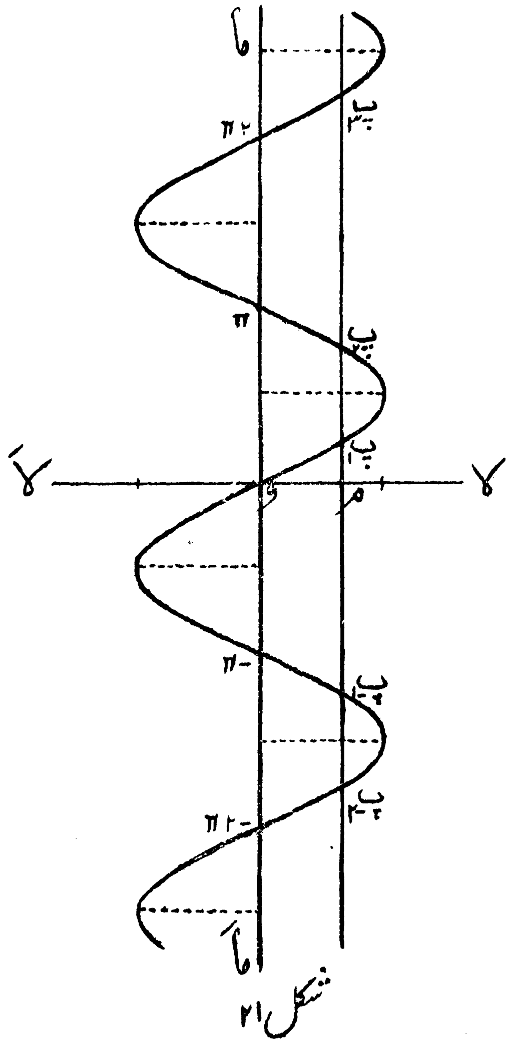
اور اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{۱}{\text{جب ما}} = \mp \frac{۱}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$ .... (۵)

ان نتیجوں میں مبہم علامت کے لئے ذیل کی وجہ دی جا سکتی ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ اگر $\text{ما} = \text{جب}^{-۱}\,\text{لا}$ تو ما متغیر لا کا کثیر القیمت تفاعل ہے یعنی ± ۱ کے درمیان لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی قیمتوں کا ایک سلسلہ ہوتا ہے۔ ان میں سے بعض قیمتوں کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ مثبت ہے اور بعض کے لئے منفی ہے۔ دیکھو شکل ۲۱ صفحہ (۸۷) اور اسی طرح $\text{جم}^{-۱}\,\text{لا}$ کے لئے۔

مروجہ قرارداد کے مطابق اگر ہم $\text{جب}^{-۱}\,\text{لا}$ سے وہ زاویہ سمجھیں جو

$-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہے اور جبکا جیب لا کے مساوی ہے تو

$$\frac{ف}{ف\,لا}\left(جب^{-۱}\,لا\right) = +\frac{۱}{\sqrt{۱-لا^{۲}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۶)$$



شکل ۲۱

٦١ اسی طرح اگر جم$^{-1}$ لا کو صفر اور π کے درمیان محدود کردیا جائے

تو $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جم}^{-1}\text{لا}) = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$ .... (۷)

(۳) اگر ما = مس$^{-1}$ لا .... (۸)

تو لا = مس ما اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{قط}^2\,\text{ما}$

اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{قط}^2\,\text{ما}} = \frac{1}{1+\text{لا}^2}$ .... (۹)

اس صورت میں کوئی مبہم علامت نہیں ہے۔ لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی لاانتہا قیمتوں کا سلسلہ ہے لیکن ہر ایک کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت وہی ہے کیونکہ منحنی ما = مس$^{-1}$ لا کے متناظر نقطوں پر مماسی خطوط متوازی ہیں۔ دیکھو شکل ۲۲ صفحہ (۸۹)۔

مثال ۱۔ اگر ما = جب$^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}\right)$

تو ما = جب$^{-1}$ ع جہاں ع = $\frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$

اب $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ع}} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ع}^2}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$

یہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

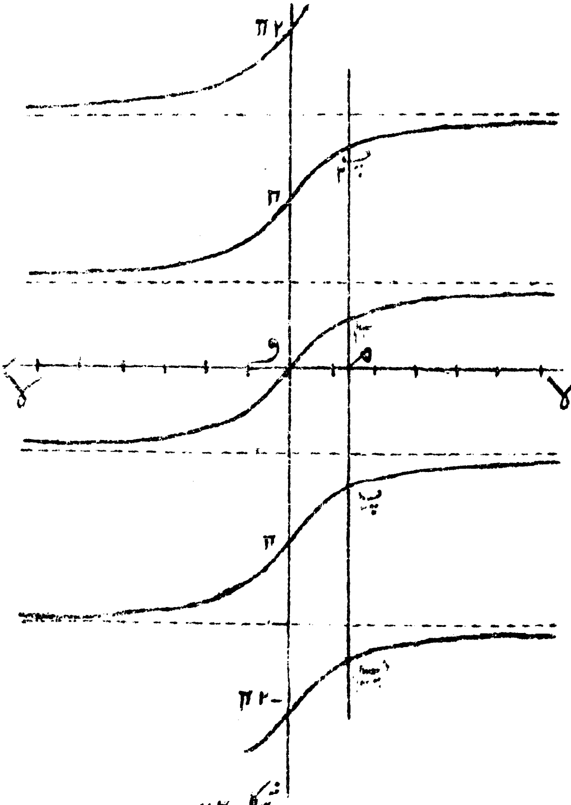
$\sqrt{1-\text{ع}^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$ اور $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{(1+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{1+\text{لا}^2}$ .... (۱۱)

لا = مس طہ رکھنے سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$\text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\sqrt{۱ + \text{لا}^۲}} = \text{مس}^{-1}\,\text{لا}$ اس سے ظاہر ہے کہ اوپر کا نتیجہ ضابطہ (۹) کے مطابق ہے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{مس}^{-1} \frac{۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^۲}$ ....(۱۲)



شکل ۲۲

اگر $\frac{۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^۲}$ کی بجائے ع لکھیں تو

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{1+\text{ع}^{2}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

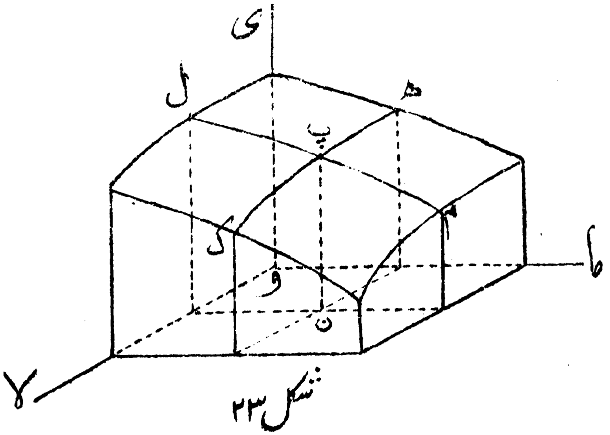
$$\text{نیز } 1+\text{ع}^{2} = \frac{2(1+3\text{لا}^{2}+\text{لا}^{4})}{(1-\text{لا}+\text{لا}^{2})^{2}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{2(1-\text{لا}^{2})}{(1-\text{لا}+\text{لا}^{2})^{2}}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1-\text{لا}^{2}}{1+3\text{لا}^{2}+\text{لا}^{4}} \quad \text{.............. (۱۳)}$$

۳۴ - دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل - جزوی مشتق

اگرچہ اس کتاب کا اصل مقصد صرف ایک متبوع متغیر کے تفاعلوں پر غور کرنا ہے لیکن ابتدا ہی سے زیادہ عام نظریہ کے خیالات اور ترقیم سے واقف ہونا بعض اوقات مفید ثابت ہوگا۔

کوئی مقدار ع دو یا زیادہ متبوع متغیروں لا، ما، ... کا تفاعل اس وقت کہلاتی ہے (۶۴) جبکہ موخرالذکر کی قیمتوں کے جواب میں جو اختیاری اور ایک دوسرے سے بے تعلق ہوسکتی ہیں تابع متغیر ع کا وجود ہو۔ یہ ضروری ہے کہ ہر صورت میں متبوع متغیروں کی قیمتیں انکی جداگانہ حدود کے اندر لی جائیں پس اگر ایک دی ہوئی سطح پر کوئی نقطہ پ ہو اور پ ن کسی ثابت افقی مستوی پر عمود ہو تو بلندی پ ن نقطہ ن کے محددِ (لا، ما) کا تفاعل ہے۔



شکل ۲۳

اسی طرح طبیعیات میں گیس کا دباؤ دو متبوع متغیروں حجم (فی اکائی کمیت) اور تپش کا تفاعل ہے۔ تفاعلی رشتہ شکل ذیل کی مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ع = فہ (لا، ما ، ....) .... (۱)

مذکورہ بالا سطح کی خاص صورت میں اگر ہم بلندی پ ن کو ی سے ظاہر کریں تو

ی = فہ (لا، ط) .... (۲)

تسلسل کی تعریف کو (جو دفعہ ۸ میں دی گئی ہے) موجودہ صورت میں اس طرح توسیع دیجا سکتی ہے۔ تفاعل فہ (لا، ما ، ....) متبوع متغیروں لا، ما ، ..... کی قیمتوں کے خاص جٹ کے لئے مسلسل کہلائیگا اگر کسی دی ہوئی مقدار ثہ (جو کتنی ہی چھوٹی ہو) کے جواب میں (صفر سے مختلف) ایک مقدار صہ ایسی دریافت ہو سکے کہ اضافوں مف لا، مف ما ، ..... کی صہ سے کم تمام مطلق قیمتوں کے لئے فہ (لا + مف لا، ما + مف ما ، .....) اور فہ (لا، ما ، ....) کے فرق کی مطلق قیمت ثہ سے کم ہو۔

پس دو متبوع متغیروں کی خاص صورت میں (جس کو شکل میں دکھایا گیا ہے) شرط تسلسل کا مفہوم یہ ہے کہ مستوی لاما میں ن کے گرد ایک مستطیل ایسا کھینچا جا سکتا ہے کہ اس مستطیل کے اندر کے تمام نقطوں کے معینوں کا فرق پ ن سے ثہ کی نسبت کم ہو جہاں ثہ کتنی ہی چھوٹی مقدار ہو سکتی ہے

اب فرض کرو کہ تفاعل ع = فہ (لا، ما ، ......) .... (۳)

مسلسل ہے اور تمام متبوع متغیر سوائے (لا) کے مستقل رکھے جاتے ہیں تب یہ فرض کر کے کہ ع متغیر لا کا قابل تفرق تفاعل ہے اسکا مشتق تفاعل بلحاظ لا کے ع کا جزوی تفرقی سر یا جزوی مشتق کہلاتا ہے اور ہم اسے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

سے تعبیر کرینگے۔

نوٹ۔ علامت "جف" "جزوی تفرق" کا اختصار ہے $\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} = \frac{\partial y}{\partial x}$ (مترجم)

پس $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{فہ(لا + مف لا، ما، …)} - \text{فہ(لا، ما، …)}}{\text{مف لا}}$ ......(۴)

اسی طرح $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{نہا}_{\text{مف ما} \to 0} \frac{\text{فہ(لا، ما + مف ما، …)} - \text{فہ(لا، ما، …)}}{\text{مف ما}}$ ......(۵)

سطح (۲) کی صورت میں ظاہر ہے کہ اگر سطح کو حپ میں سے مستوی ے = ولا اور ے = وما کے متوازی مستویوں سے کاٹا جائے تو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ بالترتیب ان تراشوں کے ڈھال ہیں۔ شکل میں یہ تراشیں ھک اور ل م ہیں

مثال ۱۔ اگر $\text{ی} = \text{لا}^{\text{م}}\ \text{ما}^{\text{ن}}$ ......(۶)

تو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{م}\ \text{لا}^{\text{م}-1}\ \text{ما}^{\text{ن}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ن}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{ما}^{\text{ن}-1}$ ......(۷)

مثال ۲۔ اگر یہ فرض کریں کہ گیس کے دباؤ (د)، حجم (ح)، اور تپش (ط) میں ذیل کا رشتہ ہے

$$\text{د} = \frac{\text{ک ط}}{\text{ح}}$$ ......(۸)

تو $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}} = -\frac{\text{ک ط}}{\text{ح}^2}$ اور $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{ح}}$ ......(۹)

۳۵۔ تضمینی تفاعل۔

$\text{فہ(لا، ما)} = 0$ ......(۱)

کے نمونہ کی مساوات عموماً ما کو لا کے تفاعل کی شکل میں بیان کرتی ہے۔
کیونکہ اگر ہم لا کو کوئی قیمت دیں تو ما میں حاصل شدہ مساوات کی ایک
یا زیادہ معین اصلیں ہونگی۔ یہ اصلیں حقیقی یا خیالی ہوسکتی ہیں لیکن ہم صرف ۶۵
اُن صورتوں پر غور کرینگے جنہیں خاص حدود کے اندر لا کی تمام قیمتوں
کے لئے ما کی (کم از کم) ایک حقیقی اصل وجود رکھتی ہو۔ اصطلاح تضمینی تفاعل

اس طور پر معلوم کئے ہوئے تفاعلوں کے لئے استعمال کی جاتی ہے بمقابلہ ایسے تفاعلوں کے جیسے

$$\text{ما} = \text{ف}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں ما تصریحی طور پر لا کی رقوم میں دیا گیا ہے۔

اگر

$$\text{ی} = \text{فہ}(\text{لا}،\ \text{ما}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

ایک سطح کی مساوات تصور کی جائے تو مساوات (۱) مستوی ی = ۰ سے قطع کی ہوئی سطح کی تراش کی مساوات ہے۔ اگر مستوی لا ما کو افقی مانا جائے تو ی = ج کی تراشیں (جہاں ج کی مختلف مستقل قیمتیں ہیں) سطح کے "نقشی خطوط" (Contour-lines.) کہلاتے ہیں۔

اگر تضمینی تفاعل کو تفرق کرنا مقصود ہو تو ممکن ہے کہ پہلے مساوات (۱) کو ما کے لئے حل کر لیا جائے تاکہ وہ شکل (۲) میں تبدیل ہو جائے تاہم ایسی صورتوں کے لئے جن میں یہ طریقہ تکلیف دہ یا غیر ممکن ہو کوئی قاعدہ دریافت کرنا مفید ثابت ہوگا۔ فی الحال ہم صرف لا، ما کے منطق صحیح تفاعل فہ (لا، ما) پر غور کرینگے۔ منطق صحیح تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جو اس نمونہ $\text{ا}_{\text{م،ن}}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{ما}^{\text{ن}}$ کی ارقام کے محدود سلسلہ کا حاصل جمع ہو جہاں م اور ن صحیح اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ وغیرہ میں سے کوئی قیمت اختیار کر سکتے ہیں۔ چونکہ مفروضہ کی رو سے فہ (لا، ما) ہمیشہ صفر ہے اس لئے لا کے لحاظ سے اس کا مشتق تفاعل بھی صفر ہوگا۔

اب دفعات ۲۸، ۳۰، اور ۳۲ کی رو سے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}}\left(\text{لا}^{\text{م}}\ \text{ما}^{\text{ن}}\right) = \text{م}\ \text{لا}^{\text{م}-۱}\ \text{ما}^{\text{ن}} + \text{ن}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{ما}^{\text{ن}-۱}\ \frac{\text{فما}}{\text{فلا}}$$

اس لئے اگر

$$\text{فہ}(\text{لا}،\ \text{ما}) = \Sigma\ \text{ا}_{\text{م،ن}}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{ما}^{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

تو

$$\Sigma\ \text{ا}_{\text{م،ن}}\ \text{م}\ \text{لا}^{\text{م}-۱}\ \text{ما}^{\text{ن}} + \Sigma\ \text{ا}_{\text{م،ن}}\ \text{ن}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{ما}^{\text{ن}-۱}\ \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} = ۰ \quad \ldots (۵)$$

دفعہ ۳۴ کی ترقیم کے مطابق یہ بشکل ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$

یا

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\dfrac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}}}{\dfrac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

چوتھے باب میں ثابت کیا جائیگا کہ نتائج (۶) اور (۷) تفاعل فہا (لا، ما) کی اس خاص صورت تک ہی محدود نہیں ہیں۔ تاہم یہ خاص صورت اکثر ہندسی اطلاقات کے لیئے کافی ہے۔

امثلہ ۵ ۹۶

(تفرق ابتدائی اصولوں سے)

ابتدائی اصولوں سے سوالات ۱ تا ۵ کے تفاعلوں کے مشتق دریافت کرو۔

۱ - لا^3، لا^2، $\frac{1}{\text{لا}^2}$، $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}}}$،

۲ - $\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}$، $\frac{\text{لا}+\text{ا}}{\text{لا}-\text{ا}}$، $\frac{1}{\text{لا}^2-\text{ا}^2}$

۳ - $\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}$، $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}$

۴ - ظم لا، قط لا، قم لا

۵ - جب^2 لا، جم^2 لا، جم ۲ لا، جب ۲ لا

۶ - اگر کسی نقطہ کی خطی حرکت کا ضابطہ

$\text{س} = \text{ع ت} + \frac{1}{2}\,\text{عا}\,\text{ت}^2$ ہو جہاں ع اور عا مستقل ہیں تو ثابت کرو کہ وقت ت پر رفتار ع + عا ت ہے اور اسراع مستقل ہے۔

۷۔ مستقل تپش والی ایک گیس کے دباؤ اور حجم میں رشتہ د ح = مستقل ہے ثابت کرو کہ بھی لچک د کے مساوی ہے۔

۸۔ اگر کسی دائرہ کا نصف قطر ایک فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہا ہو تو رقبہ کی شرح اضافہ مربع فٹ فی ثانیہ اس آن میں دریافت کرو جبکہ نصف قطر ۱ فٹ ہے۔

۹۔ اگر کسی دائرہ کا رقبہ مستقل شرح سے بڑھ رہا ہو تو ثابت کرو کہ محیط کے اضافہ کی شرح نصف قطر کی معکوس نسبت سے بدلتی ہے۔

۱۰۔ مرکز م اور نصف قطر ایک فٹ والے دائرے کے محیط پر ایک ثابت نقطہ ا ہے ایک نقطہ پ نقطہ ا سے شروع ہو کر یکساں رفتار سے ایک ثانیہ میں محیط کا چکر لگاتا ہے، ذیل کی صورتوں میں اضافہ کی شرح دریافت کرو (۱) قوس ا پ، (۲) وتر ا پ، (۳) قطاعی رقبہ ا م پ (۴) مثلثی رقبہ ا م پ اس آن میں جبکہ زاویہ ا م پ ۶۰° ہے۔

۱۱۔ اگر ایک گرام پانی کا حجم ایسے بدلتا ہو جیسے $۱ + \frac{(ط - ۴)^2}{۱۴۴۰۰۰}$ جہاں ط سی تپش ہے تو حجمی پھیلاؤ کی شرح دریافت کرو جبکہ ط = ۰ اور ط = ۲۰°

۹۷ . ## امثلہ ۶

(حاصل ضرب اور خارج قسمت)

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

۱۔ $ما = لا(۱-لا)$ ، $عف\,ما = ۱ - ۲لا$

۲۔ $ما = لا(۱-لا)^2$ ، $عف\,ما = (۱-لا)(۱-۳لا)$

۳۔ $ما = لا^م(۱-لا)^ن$ ، $عف\,ما = لا^{م-۱}(۱-لا)^{ن-۱}\{م-(م+ن)لا\}$

۴۔ $ما = (لا-۱)(لا-۲)(لا-۳)$ ، $عف\,ما = ۳لا^2 - ۱۲لا + ۱۱$

۵۔ $ما = لا(۱-لا)^2(۱+لا)^3$ ، $عف\,ما = (۱-لا)(۱+لا)^2(۱+۳لا)(۱-۲لا)$

۶۔ $ما = (۱+لا^2)(۱-۲لا^2)$ ، $عف\,ما = -۲لا(۱+۴لا^2)$

۷- $\text{ما} = \left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)^{۲}$ — $\text{عف ما} = ۲\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right)$

۸- $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{۱ - \text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{۱}{(۱ - \text{لا})^{۲}}$

۹- $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$ — $\text{عف ما} = \frac{۱ - \text{لا}^{۲}}{(۱ + \text{لا}^{۲})^{۲}}$

۱۰- $\text{ما} = \frac{۱ + \text{لا}^{۲}}{۱ - \text{لا}^{۲}}$ — $\text{عف ما} = \frac{۴\,\text{لا}}{(۱ - \text{لا}^{۲})^{۲}}$

۱۱- $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{\text{م}}}{(۱ - \text{لا})^{\text{ن}}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{(۱ - \text{لا})^{\text{ن}+۱}}\left\{\text{م} - (\text{م} - \text{ن})\,\text{لا}\right\}$

۱۲- $\text{ما} = \text{لا}\ \text{جب}\ \text{لا}$ — $\text{عف ما} = \text{جب}\ \text{لا} + \text{لا}\ \text{جم}\ \text{لا}$

۱۳- $\text{ما} = \text{لا}^{۲}\ \text{جم}\ \text{لا}$ — $\text{عف ما} = ۲\,\text{لا}\ \text{جم}\ \text{لا} - \text{لا}^{۲}\ \text{جب}\ \text{لا}$

۱۴- $\text{ما} = \text{جب}^{۲}\ \text{لا}\ \text{جم}\ \text{لا}$ — $\text{عف ما} = ۲\,\text{جب}\ \text{لا} - ۳\,\text{جب}^{۳}\ \text{لا}$

۱۵- $\text{ما} = \frac{\text{جب}\ \text{لا}}{\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{لا}\ \text{جم}\ \text{لا} - \text{جب}\ \text{لا}}{\text{لا}^{۲}}$

۱۶- $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{جب}\ \text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{جب}\ \text{لا} - \text{لا}\ \text{جم}\ \text{لا}}{\text{جب}^{۲}\ \text{لا}}$

۱۷- $\text{ما} = \frac{\text{مس}\ \text{لا}}{\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{لا} - \text{جب}\ \text{لا}\ \text{جم}\ \text{لا}}{\text{لا}^{۲}\ \text{جم}^{۲}\ \text{لا}}$

۱۸- $\text{ما} = \text{مس}^{۲}\ \text{لا}$ — $\text{عف ما} = ۲\,\text{مس}\ \text{لا}\ \text{قط}^{۲}\ \text{لا}$

۱۹ $\text{ما} = \text{قط}^{۲}\ \text{لا}$ — $\text{عف ما} = ۲\,\text{مس}\ \text{لا}\ \text{قط}^{۲}\ \text{لا}$

۲۰- $\text{ما} = \frac{\text{جب}\ \text{لا}}{۱ + \text{مس}\ \text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{جم}^{۳}\ \text{لا} - \text{جب}^{۳}\ \text{لا}}{(\text{جب}\ \text{لا} + \text{جم}\ \text{لا})^{۲}}$

۲۱- $\text{ما} = \frac{۱ + \text{جب}\ \text{لا}}{۱ - \text{جب}\ \text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{۲\,\text{جم}\ \text{لا}}{(۱ - \text{جب}\ \text{لا})^{۲}}$

۲۲ - $\text{ما} = \frac{\text{۱} - \text{جم لا}}{\text{۱} + \text{جم لا}}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{۲ جب لا}}{(\text{۱} + \text{جم لا})^{\text{۲}}}$

۶۸

امثلہ

(تفاعلوں کے تفاعل)

۱ - $\text{ما} = (\text{لا} + \text{ا})^{\text{م}} (\text{لا} + \text{ب})^{\text{ن}}$ تو $\text{عف ما} = (\text{لا} + \text{ا})^{\text{م-۱}} (\text{لا} + \text{ب})^{\text{ن-۱}} \{(\text{م} + \text{ن})\text{لا} + \text{م ب} + \text{ن ا}\}$

۲ - $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{ن لا}^{\text{ن-۱}}}{(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن+۱}}}$

۳ - $\text{ما} = \sqrt{\text{۱} + \text{لا}}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۱} + \text{لا}}}$

۴ - $\text{ما} = \sqrt{(\text{لا} + \text{۱})(\text{لا} + \text{۲})}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{۲لا} + \text{۳}}{\text{۲}\sqrt{(\text{لا} + \text{۱})(\text{لا} + \text{۲})}}$

۵ - $\text{ما} = (\text{۱} + \text{لا})\sqrt{\text{۱} - \text{لا}}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{۱} - \text{۳لا}}{\text{۲}\sqrt{\text{۱} - \text{لا}}}$

۶ - $\text{ما} = (\text{۱} - \text{لا})\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$　　$\text{عف ما} = -\frac{\text{۱} - \text{لا} + \text{۲لا}^{\text{۲}}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۷ - $\text{ما} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{لا}}{(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}$

۸ - $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{۱}}{(\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}$

۹ - $\text{ما} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{لا}}$　　$\text{عف ما} = -\frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۱۰ - $\text{ما} = \frac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}}}$　　$\text{عف ما} = \frac{\text{۱}}{(\text{۱} - \text{لا})\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۱۱- $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا} + \sqrt{1+\text{لا}^2}}$ $\text{عف ما} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2+1}} - 1$

۱۲- $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{لا} + \sqrt{1+\text{لا}^2}}$ $\text{عف ما} = \frac{1+2\,\text{لا}^2}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} - 2\,\text{لا}$

۱۳- $\text{ما} = \sqrt{\frac{1+\text{لا}+\text{لا}^2}{1-\text{لا}+\text{لا}^2}}$ $\text{عف ما} = \frac{1-\text{لا}^2}{\sqrt{1+\text{لا}+\text{لا}^2}\,(1-\text{لا}+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$

۱۴- $\text{ما} = \text{جب}\,2(\text{لا} - \text{عہ})$ $\text{عف ما} = 2\,\text{جم}\,2(\text{لا} - \text{عہ})$

۱۵- $\text{ما} = \text{جب}^2\,2\,\text{لا}$ $\text{عف ما} = 2\,\text{جب}\,4\,\text{لا}$

۱۶- $\text{ما} = \sqrt{1+\text{جب}\,\text{لا}}$ $\text{عف ما} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\text{جب}\,\text{لا}}$

۱۷- $\text{ما} = \text{مس}^2\,\text{لا}$ $\text{عف ما} = \frac{2\,\text{جب}\,\text{لا}}{\text{جم}^3\,\text{لا}}$

۱۸- $\text{ما} = \text{قط}^2\,\text{لا}$ $\text{عف ما} = \frac{2\,\text{جب}\,\text{لا}}{\text{جم}^3\,\text{لا}}$

۱۹- $\text{ما} = \text{مس}^3\,\text{لا}$ $\text{عف ما} = \frac{3\,\text{جب}^2\,\text{لا}}{\text{جم}^4\,\text{لا}}$ ۷۹

۲۰- $\text{ما} = \text{جب}^3\,\text{لا} + \text{جم}^3\,\text{لا}$ $\text{عف ما} = 3\,\text{جب}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا}\,(\text{جب}\,\text{لا} - \text{جم}\,\text{لا})$

۲۱- $\text{ما} = \text{جب}\,\text{لا} - \frac{1}{3}\text{جب}^3\,\text{لا}$ ، $\text{عف ما} = \text{جم}^3\,\text{لا}$

۲۲- $\text{ما} = \text{مس}\,\text{لا} + \frac{1}{3}\text{مس}^3\,\text{لا}$ ، $\text{عف ما} = \text{قط}^4\,\text{لا}$

۲۳- $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}^2}\,\text{جب}^2\,\text{لا}$ ، $\text{عف ما} = \frac{2\,\text{جب}\,\text{لا}}{\text{لا}^3}(\text{لا}\,\text{جم}\,\text{لا} - \text{جب}\,\text{لا})$

۲۴- $\text{ما} = \text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{لا}$ ، $\text{عف ما} = \text{ن}\,\text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{جم}\,\text{م}\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{لا}$

۲۵- $\text{ما} = \sqrt{\text{عہ}\,\text{جب}^2\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{جم}^2\,\text{لا}}$ ، $\text{عف ما} = \frac{1}{2}(\text{عہ} - \text{بہ})\frac{\text{جب}\,2\,\text{لا}}{\sqrt{\text{عہ}\,\text{جب}^2\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{جم}^2\,\text{لا}}}$

امثلہ ۸

مقلوب تفاعل

۱۔ $\text{ما} = \text{جب}^{-1}(\text{۱} - \text{لا})$ $\qquad \text{عف ما} = -\frac{1}{\sqrt{2\text{لا} - \text{لا}^2}}$

۲۔ $\text{ما} = \text{لا}\,\text{جب}^{-1}\text{لا}$ $\qquad \text{عف ما} = \text{جب}^{-1}\text{لا} + \frac{\text{لا}}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$

۳۔ $\text{ما} = \text{مم}^{-1}\text{لا}$ $\qquad \text{عف ما} = -\frac{1}{1 + \text{لا}^2}$

۴۔ $\text{ما} = \text{قط}^{-1}\text{لا}$ $\qquad \text{عف ما} = \frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - 1}}$

۵۔ $\text{ما} = \text{قم}^{-1}\text{لا}$ $\qquad \text{عف ما} = -\frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - 1}}$

۶۔ $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\text{لا} + \text{جب}^{-1}\sqrt{1 - \text{لا}^2}$ $\qquad \text{عف ما} = 0$

۷۔ $\text{ما} = \text{مس}^{-1}\text{لا} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{\text{لا}}$ $\qquad \text{عف ما} = 0$

۸۔ $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\left\{2\text{لا}\sqrt{1 - \text{لا}^2}\right\}$ $\qquad \text{عف ما} = \frac{2}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$

۹۔ $\text{ما} = \text{مس}^{-1}\frac{2\text{لا}}{1 - \text{لا}^2}$ $\qquad \text{عف ما} = \frac{2}{1 + \text{لا}^2}$

۱۰۔ $\text{ما} = \text{جم}^{-1}\frac{1 - \text{لا}^2}{1 + \text{لا}^2}$ $\qquad \text{عف ما} = \frac{2}{1 + \text{لا}^2}$

۱۱۔ $\text{ما} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{مس عـ جب لا}}{1 + \text{قط عـ جم لا}}$ $\qquad \text{عف ما} = \frac{\text{مس عـ}}{\text{قط عـ} + \text{جم لا}}$

(۶۰) ۱۲- ما = مس⁻¹ { √(لا² + ۱) − لا } عف ما = − ۱ / ۲(لا² + ۱)

۱۳- ما = جب⁻¹ (جم لا) عف ما = − ۱

اشغلہ ۹

(۱)- مسئلہ ف/فرلا { فا رک (لا) } = ک فا رک (لا)

کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۲)- اگر ما = مس⁻¹ ع/و تو ثابت کرو کہ عف ما = (و عف ع − ع عف و) / (ع² + و²)

(۳) یہ مانکر کہ (۱ − لاⁿ⁺¹) / (۱ − لا) = ۱ + لا + لا² + ... + لاⁿ ، تفرق کرنے سے

سلسلہ ۱ + ۲ لا + ۳ لا² + ... + ن لاⁿ⁻¹ کا حاصل جمع دریافت کرو۔ اور لا = ۱ رکھکر نتیجہ کی تصدیق کرو۔ پس ثابت کرو کہ اگر لا > ۱ تو ۱ + ۲ لا + ۳ لا² + ۴ لا³ + ... ∞ تک = (۱ − لا)⁻²

(۴)- اگر ایک نقطہ کی خطی حرکت میں و² فاصلہ س کا خطی تفاعل ہو تو اسراع مستقل ہوگا۔

(۵)- نیز اگر و² فاصلہ س کا دو درجی تفاعل ہو تو اسراع خط حرکت میں کسی ثابت نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہے۔

(۶)- اگر وقت کے طے شدہ فاصلہ کا دو درجی تفاعل ہو تو اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے رفتار کی تیسری قوت۔

(۷)- اگر و² = ا + ب/س

تو اسراع خطِ حرکت میں کے کسی ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے معکوس کے طور پر بدلتا ہے۔

(۸)- اگر س² وقت ت کا دو درجی تفاعل ہو تو اسراع ۱/س³ کے متناسب ہے۔

۹۔ اگر گیس کے حجم اور دباؤ میں رشتہ د ح = مستقل ہو تو کعبی لچک گہ د کے مساوی ہے۔

امثلہ ۱۰

(۱۷)

(جزوی تفرق)

۱۔ سطح ا ی = لا^{2} + ما^{2} کے نقشی خطوط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو۔

۲۔ نیز سطح ا ی = لا ما کے نقشی (Contour) خط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو۔

۳۔ اگر ی = ف (لا + ما)

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ اور اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

۴۔ اگر ر = $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

تو ثابت کرو کہ ر $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}}$ = لا اور ر $\frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}}$ = ما

۵۔ اگر ی = اِسس$^{-1}$ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{ا ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{ا لا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

۶۔ اگر ی = ف (لا^{2} + ما^{2})

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} : \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ = لا : ما

۷۔ اگر ی = ف $\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$

تو ثابت کرو کہ لا $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ + ما $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ = ۰

۸۔ اگر ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فما}}{\text{فلا}} = - \frac{\text{ا لا + ھ ما + گ}}{\text{ھ لا + ب ما + ف}}$$

تیسرا باب

قوت نما تفاعل اور لوگارتھمی تفاعل

۳۶ - قوت نما تفاعل :- تفاعل زیر بحث کی تعریف کئی طرح کیجا سکتی ہے لیکن علم احصا اور اس کے اکثر اطلاقات کے مد نظر ذیل کی تعریف زیادہ موزوں ہوگی - اس تفاعل کی اساسی خاصیت ہے کہ یہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ک ما} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

کے نمونہ کی مساوات کو پورا کرتا ہے جہاں کہ ک مثبت یا منفی مستقل ہے - اسے الفاظ میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ کسی آن میں تفاعل کے اضافہ کی شرح کو تفاعل کی اسی آن کی قیمت کے ساتھ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے مذکورۂ بالا تعریف والے عام قوت نما تفاعل[1] کا مقابلہ خطی تفاعل

$$\text{ما} = \text{ا} + \text{ب لا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

کے ساتھ کیا جا سکتا ہے - اس کو خطی تفاعل کہنے کی وجہ یہ ہے کہ اس کی ترسیم ایک سیدھا خط ہے - درحقیقت ان دونوں میں وہی رشتہ ہے جو سود مرکب کو سود مفرد کے ساتھ ہے بشرطیکہ سود مرکب مستقل وقفوں کے بعد جمع ہونے کی بجائے مسلسل جمع ہوتا ہے -

---

[1] بعد میں معلوم ہوگا کہ اگر لا ناطق مقدار ہے تو یہ لازماً $\text{ج}^{\text{لا}}$ کی شکل کا ہوگا اور اصطلاح "قوت نما" تفاعل کی وجہ بھی یہ ہے کہ اس میں متغیر لا بطور قوت نما کے شریک ہوتا ہے -

تمام خطی تفاعل میں دو مستقل ہیں یعنی ڈھال ب اور ابتدائی قیمت ا۔ اگر یہ بیان پہلے ہی سے کافی طور پر واضح نہ ہوتا تو ہم غالباً معیاری خطی تفاعل اسے لیتے جسکا ڈھال اور ابتدائی قیمت دونوں ایک کے مساوی ہوں یعنی

$$\text{ما} = ۱ + \text{لا} \quad .... (۳)$$

اب اس میں لا اور ما کے پیمانوں کو مناسب طور پر بدلنے سے عام خطی تفاعل حاصل ہو سکتا ہے۔

اسی طرح عام قوت نما تفاعل میں بھی دو مستقل شریک ہیں یعنی مساوات (۱) کا مستقل ک اور ابتدائی قیمت جو فرض کرو کہ ج ہے۔

ابھی ثابت کیا جائیگا کہ یہ دو مستقل تفاعل کو پورے طور پر متعین کردیتے ہیں۔

ہم اس تفاعل کو معیاری تفاعل کہینگے جس میں ک = ۱ اور جس کی ابتدائی قیمت بھی ایک ہے۔

دوسرے لفظوں میں ہم قوت نما تفاعل کی تعریف مساوات ۷۲

$$\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \text{ما} \quad .... (۴)$$

کے اس حل سے کرینگے جس کی قیمت ایک ہے جبکہ لا = ۰

۷۳ = سلسلہ قوت نما۔ سب سے پہلے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ایسے تفاعل کا وجود ہے اور پھر اگر ممکن ہو تو کوئی ایسا ضابطہ دریافت کرنا ہے جس سے لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت کسی مطلوبہ تقریبی مقام تک نکالی جا سکے۔

بطور آزمائش کے فرض کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \text{ما} \quad .... (۱)$$

کا حل ذیل کے قوتی سلسلہ کا حاصل جمع ہے

$$\text{ما} = ۱ + \text{ا}_۱ \text{لا} + \text{ا}_۲ \text{لا}^۲ + ... + \text{ا}_\text{ن} \text{لا}^\text{ن} + ... (۲)$$

اِس کی پہلی رقم اس شرط کے ماتحت متعین ہوتی ہے کہ ما = ۱ جبکہ لا = ۰۔ اس مفروضہ کی بنا پر کہ ما کا یہ لاتناہی سلسلہ اُسی ضابطہ کے لگانے سے تفرق کیا جا سکتا ہے جو دفعہ ۲۹ میں محدود سلسلوں کے لئے دیا گیا ہے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} = \text{ا}_1 + 2\,\text{ا}_2\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_3\,\text{لا}^2 + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \ldots \quad (3)$$

اور مساوات (۱) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\text{ا}_1 = 1,\ 2\,\text{ا}_2 = \text{ا}_1,\ 3\,\text{ا}_3 = \text{ا}_2,\ \ldots,\ \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن} = \text{ا}_{\text{ن}-1},\ \ldots \quad (4)$$

یعنی $\text{ا}_1 = 1,\ \text{ا}_2 = \frac{1}{2}\text{ا}_1 = \frac{1}{\lfloor 2},\ \text{ا}_3 = \frac{1}{3}\text{ا}_2 = \frac{1}{\lfloor 3},\ \ldots$

اور اسی طرح بالعموم $\text{ا}_\text{ن} = \frac{1}{\lfloor \text{ن}}$ .... (۵)

پس ہم سلسلہ $1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{\text{لا}^\text{ن}}{\lfloor \text{ن}} + \ldots$ .... (۶)

کے مطالعہ پر مجبور ہیں۔ یہ سلسلہ مستدق ہے اور لا کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے اس کا حاصل جمع معین ہے۔ اس کے مستدق ہونے کی وجہ یہ ہے (ن + ۱) ویں اور ن ویں رقموں کی نسبت یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ کی مطلق قیمت ن کو کافی بڑا لینے سے خاطر خواہ چھوٹی کی جا سکتی ہے۔ پس اس سلسلہ میں ہمیشہ ایک مقام ایسا دریافت کیا جا سکتا ہے کہ اس کے بعد کی رقمیں کسی بھی ہندسی سلسلے کی رقموں کی بہ نسبت زیادہ سرعت سے گھٹتی ہیں۔ اس لئے دفعہ (۵) کے مطابق یہ سلسلہ مستدق ہے اور صرف مستدق ہی نہیں بلکہ مطلق طور پر مستدق ہے۔ اس کے حاصل جمع کو ہم ق (لا) سے ظاہر کرینگے۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ تفاعل ق (لا) جسکی تعین حسب بالا ہوتی ہے مسلسل اور قابل تفرق ہے اور یہ دراصل مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے۔

اب فرض کرو کہ

$$م(لا) = \frac{1}{2}[ق(لا) + ق(-لا)] = 1 + \frac{لا^2}{|\underline{2}} + \frac{لا^4}{|\underline{4}} + \dots + \frac{لا^{2ن}}{|\underline{2ن}} + \dots \quad (۷)$$

$$\text{اور}\quad ج(لا) = \frac{1}{2}[ق(لا) - ق(-لا)] = لا + \frac{لا^3}{|\underline{3}} + \frac{لا^5}{|\underline{5}} + \dots + \frac{لا^{2ن+1}}{|\underline{2ن+1}} + \dots \quad (۸)$$

پس $ق(لا) = م(لا) + ج(لا)$، اور $ق(-لا) = م(لا) - ج(لا)$ ... (۹)

یہ صاف ظاہر ہے کہ $م(لا)$ کی تمام رقمیں مثبت ہیں اور $ج(لا)$ کی تمام رقموں کی وہی علامت ہے جو لا کی۔ آیندہ کی بحث میں اس خاصیت کی رو سے سہولت پیدا ہوگی۔

اگر $لا_1$ اور لا متغیر کی دو قیمتیں ہوں جنھیں ہم ایک ہی علامت کا فرض کر لیتے ہیں تو دفعہ ۵ کے ضابطہ (آ) اور (۲) کی رو سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$م(لا_1) - م(لا) = \frac{لا_1^2 - لا^2}{|\underline{2}} + \frac{لا_1^4 - لا^4}{|\underline{4}} + \dots + \frac{لا_1^{2ن} - لا^{2ن}}{|\underline{2ن}} + \dots$$

$$= (لا_1 - لا)\left\{\frac{لا_1 + لا}{|\underline{2}} + \frac{لا_1^3 + لا_1^2 لا + لا_1 لا^2 + لا^3}{|\underline{4}} + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{لا_1^{2ن-1} + لا_1^{2ن-2} لا + \dots + لا^{2ن-1}}{|\underline{2ن}} + \dots\right\} \quad (۱۰)$$

فرض کرو کہ ظ ایسی مثبت مقدار ہے کہ وہ $لا_1$ اور لا میں سے بڑی مقدار کی مطلق قیمت کے مساوی ہے۔

$$\text{تو}\quad \left|لا_1^{2ن-1} + لا_1^{2ن-2} لا + \dots + لا^{2ن-1}\right| < 2ن\, ظ^{2ن-1} \quad \dots\dots (۱۱)$$

اور نتیجہ (۱۰) میں خطوط وحدانی { } کے درمیان کا سلسلہ مطلق قیمت کے لحاظ سے

$$ظ + \frac{ظ^3}{|\underline{3}} + \dots + \frac{ظ^{2ن-1}}{|\underline{2ن-1}} + \dots$$ سے کم ہے یعنی $ج(ظ)$ سے

کم ہے جو خود محدود ہے ۔ اس لئے

$$\underset{\text{لا}_1 \to \text{لا}}{\text{نہا}} \left\{ \text{م}(\text{لا}_1) - \text{م}(\text{لا}) \right\} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱۲)$$

اس لئے تفاعل م (لا) متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے ۔ اسیطرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ج (لا) بھی مسلسل ہے ۔ اب نتیجہ (۹) سے ق (لا) کا تسلسل ثابت ہوتا ہے، نیز (۱۰) سے ۵،

$$\frac{\text{م}(\text{لا}_1) - \text{م}(\text{لا})}{\text{لا}_1 - \text{لا}} = \frac{\text{لا}_1 + \text{لا}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}_1^3 + \text{لا}_1^2\text{لا} + \text{لا}_1\text{لا}^2 + \text{لا}^3}{\lfloor ۴} + \ldots$$

$$+ \frac{\text{لا}_1^{۲ن-۱} + \text{لا}_1^{۲ن-۲}\,\text{لا} + \ldots + \text{لا}^{۲ن-۱}}{\lfloor ۲ن} + \ldots \quad (۱۳)$$

بائیں جانب کی رقمیں ایک علامت کی ہیں خواہ لا اور لا$_1$ مثبت ہوں یا منفی ۔ اس لئے مساوات (۱۳) میں آخری رقم کے شمار کنندہ کی قیمت ۲ ن لا$^{۲ن-۱}$ اور ۲ ن لا$_1^{۲ن-۱}$ کے درمیان ہوگی اور اس لئے سلسلہ کا حاصل جمع ج (لا) اور ج (لا$_1$) کے درمیان ہوگا ۔ چونکہ ج (لا) مسلسل تفاعل ہے اسلئے

$$\underset{\text{لا}_1 \to \text{لا}}{\text{نہا}} \frac{\text{م}(\text{لا}_1) - \text{م}(\text{لا})}{\text{لا}_1 - \text{لا}} = \text{ج}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱۴)$$

یعنی

$$\text{م}'(\text{لا}) = \text{ج}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱۵)$$

اور اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\text{ج}'(\text{لا}) = \text{م}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱۶)$$

$$\text{پس}\quad \text{ق}'(\text{لا}) = \frac{\text{ف}}{\text{ف لا}} \left\{ \text{م}(\text{لا}) + \text{ج}(\text{لا}) \right\}$$

$$= \text{م}'(\text{لا}) + \text{ج}'(\text{لا})$$

$$= \text{ج}(\text{لا}) + \text{م}(\text{لا}) = \text{ق}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots \quad (۱۷)$$

اس لئے رشتہ ما = ق (لا)، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے ۔

نیز ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مساوات (۱) کا حل جو شرط ما = ۱ ، لا = ۰ کے تابع حاصل ہوتا ہے یگانہ حل ہے۔ کیونکہ اگر ع اور و دو ایسے حل ہوں

تو $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{ع}$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{و}$ .... (۱۸)

یعنی $\text{و}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} - \text{ع}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = ۰$ .... (۱۹)

یا $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right) = ۰$ .... (۲۰)

اس لئے ثابت ہوا کہ $\frac{\text{و}}{\text{ع}}$ کی نسبت مستقل* ہے۔ اور اگر ع = ۱ ، و = ۱ جبکہ لا = ۰ ۔ تو اس مستقل کا ایک ہونا ضروری ہے پس ع = و

۳۸ ۔ مسئلہ جمع اور ق (لا) کی ترسیم۔ ۴۶

عام تر مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ک ما}$ .... (۱)

ذیل کی صورت میں لکھی جا سکتی ہے

$\frac{\text{فرما}}{\text{فر(ک لا)}} = \text{ما}$ .... (۲)

اور اسلئے اسکا حل شرط ما = ۱ ، لا = ۰ کے ماتحت ما = ق (ک لا) .... (۳) ہوگا۔

اب فرض کرو کہ

ع = ق (ا لا) × ق (ب لا) .... (۴)

تو $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ = ا قَ (ا لا) × ق (ب لا) + ب قَ (ب لا) × ق (ا لا)

---

* اس میں ہم نے ایک بالکل ظاہر مسئلہ کو مان لیا ہے جس کا باضابطہ ثبوت دفعہ ۵۶ میں دیا جائیگا۔

= (ا + ب) ق (ا لا) × ق (ب لا) = (ا + ب) × ع . . . (۵)

نیز ع کی ابتدائی قیمت ایک ہے۔ پس

ع = ق {(ا + ب) لا} . . . . (۶)

یعنی ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

ق (ا) × ق (ب) = ق (ا + ب) . . . . . . (۷)

یہ قوت نما تفاعلوں کا 'مسئلہ جمع' کہلاتا ہے۔

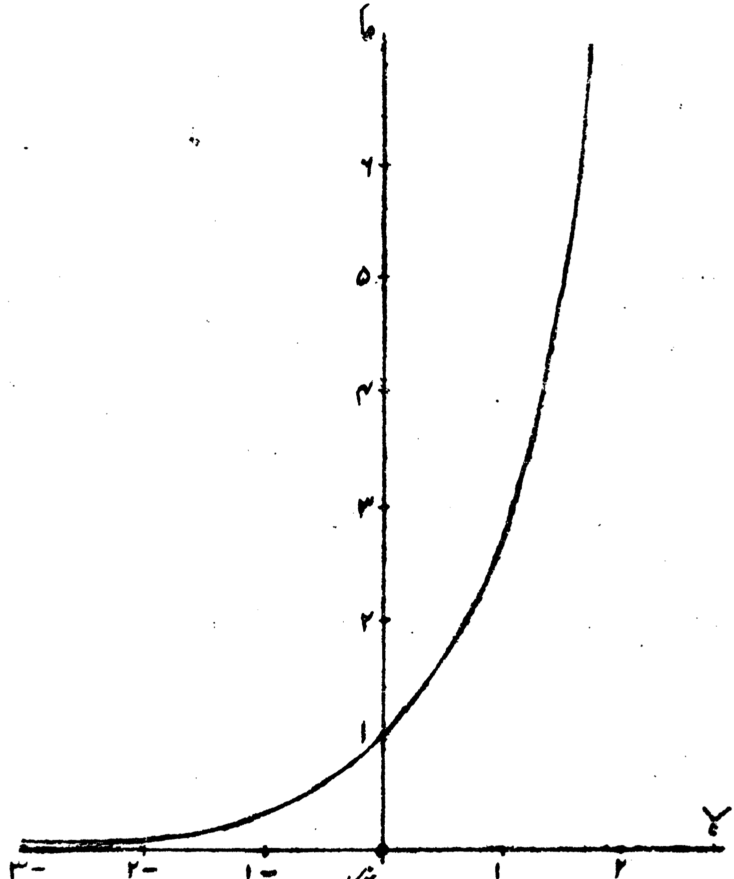
خصوصاً ق (لا) × ق (- لا) = ق (۰) = ۱ . . . . (۸)

یعنی ق (- لا) = ۱ / ق (لا) . . . . (۹)

ہم نے پہلے ثابت کیا ہے کہ تفاعل ق (لا) مسلسل ہے۔ نیز لا کی مثبت قیمتوں کے لئے ق (لا) کے سلسلہ کی ہر ایک رقم لا کے ساتھ بڑھتی ہے اور لا ← + ∞ کے لئے لاانتہا بڑی ہو جاتی ہے۔ اس لئے حاصل جمع کے لئے بھی یہ بات ضروری طور پر صحیح ہے۔

علاوہ اس کے (۹) سے ظاہر ہے کہ اگر لا مثبت ہو تو ق (- لا) بھی مثبت ہوتا ہے اور مطلق قیمت میں کم ہوتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اور لا ← ∞ کے لئے صفر ہو جاتا ہے۔ اس لئے جیسے لا کی قیمت - ∞ سے + ∞ تک بڑھتی ہے 'تفاعل ق (لا) مسلسل طور پر صفر سے + ∞ تک بڑھتا ہے اور ہر ایک درمیانی قیمت صرف ایک ہی مرتبہ اختیار کرتا ہے۔

صفحہ ۱۱۰ کی شکل منحنی ما = ق (لا) کی ترسیم ہے۔ اور تفاعل ق (لا) کی عددی قیمتوں کا تختہ کتاب کے ختم پر جدول (ع) میں دیا گیا ہے۔



شکل ۲۴

۳۹- عدد قو-

دفعہ ۳۸ کے نتیجہ (۷) کی توسیع حسب ذیل کیجا سکتی ہے:-

ق(ا)×ق(ب)×ق(ج) = ق(ا+ب)×ق(ج) = ق(ا+ب+ج) .... (۱)

اور اسی طرح اجزاء ضربی کی کسی تعداد کے لئے۔

اگر ہم ن اجزاء کو جنمیں سے ہر ایک ق(ا) کے مساوی ہے آپسمیں ضرب

ویں تو

$\{$ق$(1)\}^{ن}$ = ق$(1+1+\ldots$ ن رقموں تک$)$ = ق$(ن)$ ..... (۲)

مقدار ق(۱) یعنی سلسلہ

$1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots\ldots\ldots$ (۳)

کو ہم علامت "قو" سے تعبیر کرینگے، اعشاریہ کے سات مقام تک اسکی قیمت ہے

قو = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸

اس ترقیم میں اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

ق(ن) = $قو^{ن}$ .... (۴)

نیز اگر $\frac{م}{ن}$ مفرد ترین رقوم میں کوئی حسابی منطق کسر ہو تو

$\{$ق$(\frac{م}{ن})\}^{ن}$ = ق$(\frac{م}{ن}+\frac{م}{ن}+\ldots$ ن رقموں تک$)$ = ق(م) = $قو^{م}$

اور اس لئے ق$(\frac{م}{ن})$ = $قو^{\frac{م}{ن}}$ .... (۵)

پس اگر لا کوئی مثبت منطق مقدار ہو صحیح عدد یا کسر تو

ق(لا) = $قو^{لا}$ .... (۶)

اب دفعہ ۳۸ (۹) سے حاصل ہوتا ہے کہ

ق(-لا) = $\frac{1}{ق(لا)}$ = $\frac{1}{قو^{لا}}$ = $قو^{-لا}$

یعنی نتیجہ (۶) لا کی تمام منطق قیمتوں کے لئے صحیح ہے خواہ یہ مثبت ہوں یا منفی۔ یہ قابل توجہ ہے کہ لا کے غیر منطق ہونے کی صورت میں علامت $قو^{لا}$ کی (ہنوز) تعریف نہیں کی گئی۔ اب ہم اس کی تعریف یوں کرسکتے ہیں کہ

یہ ق(لا) کے سلسلے کے حاصل جمع کو تعبیر کرنیکے لئے ایک اور علامت ہے۔ اس تعریف کا فائدہ یہ ہے کہ اس طریق کتابت سے ان جبریہ قوانین کی یاددہانی ہوتی ہے جنکو یہ تفاعل پورا کرتا ہے۔ پس

قو^لا × قو^ما = ق(لا) × ق(ما) = ق(لا + ما) = قو^(لا+ما)

جہاں لا اور ما منطق یا غیر منطق ہو سکتے ہیں۔

قو کی قیمت نکالنے کا عمل بالکل آسان ہے سلسلہ (۳) کی پہلی (۱۳) رقمیں یہ ہیں۔

۱ + ۱ = ۲ ؛ ۱/[۷ = ۰٫۰۰۰۱۹۸۴۱۳

۱/[۲ = ۰٫۵ ؛ ۱/[۸ = ۰٫۰۰۰۰۲۴۸۰۲

۱/[۳ = ۰٫۱۶۶۶۶۶۶۶۷ ؛ ۱/[۹ = ۰٫۰۰۰۰۰۲۷۵۶

۱/[۴ = ۰٫۰۴۱۶۶۶۶۶۷ ؛ ۱/[۱۰ = ۰٫۰۰۰۰۰۰۲۷۶

۱/[۵ = ۰٫۰۰۸۳۳۳۳۳۳ ؛ ۱/[۱۱ = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۲۵ ۷۹

۱/[۶ = ۰٫۰۰۱۳۸۸۸۸۹ ؛ ۱/[۱۲ = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۲

ان ہندسوں کا حاصل جمع ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۳۰ ہے، باقی رقموں کو نظر انداز کر دینے سے جو غلطی یا خطا پیدا ہوتی ہے وہ سلسلہ ۱/[۱۳ + ۱/[۱۴ + ... کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

یہ سلسلہ کم ہے ۱/[۱۳ [۱ + ۱/۱۳ + ۱/۱۳^۲ + ...] سے یعنی ۱/(۱۲ [۱۲) سے اور اس لئے اسکا اعشاریہ کے نویں مقام پر کوئی اثر نہیں پڑیگا۔ پس اوپر کی جدول میں آخری ہندسوں کی خطاؤں کے لئے گنجائش چھوڑتے ہوئے ہم اطمینان سے کہ سکتے ہیں کہ اوپر کے نتیجے سے اعشاریہ کے سات مقام تک قو کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے

۴۰۔ زائدی تفاعل:۔ قوت نما تفاعل سے چند ایسے مرکب ہیں کہ

جن کے خواص علم مثلث کے عام تفاعلوں کے خواص کے ساتھ باقاعدہ مشابہت رکھتے ہیں، ان تفاعلوں کو ہم زائدی جیب، جیب التمام، مماس وغیرہ کہینگے[*] - انکی تعریفیں ذیل میں دی جاتی ہیں -

$$\left.\begin{aligned} \text{جبز}\ لا &= \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{لا} - \text{قو}^{-لا}\right) = لا + \frac{لا^{3}}{\lfloor 3} + \frac{لا^{5}}{\lfloor 5} + \cdots \\ \text{جمز}\ لا &= \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{لا} + \text{قو}^{-لا}\right) = 1 + \frac{لا^{2}}{\lfloor 2} + \frac{لا^{4}}{\lfloor 4} + \cdots \end{aligned}\right\} \cdots (1)^{\dagger}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{مسز}\ لا &= \frac{\text{جبز}\ لا}{\text{جمز}\ لا}\ ,\quad \text{قطمز}\ لا = \frac{1}{\text{جمز}\ لا} \\ \text{ممز}\ لا &= \frac{\text{جمز}\ لا}{\text{جبز}\ لا}\ ,\quad \text{قمز}\ لا = \frac{1}{\text{جبز}\ لا} \end{aligned}\right\} \cdots (2)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جمز لا تفاعل جم لا کی طرح جفت تفاعل ہے یعنی لا کی بجائے - لا لکھنے سے اسکی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا اور برخلاف اس کے جبز لا تفاعل جب لا کی طرح طاق تفاعل ہے یعنی لا کی بجائے - لا لکھنے سے تفاعل کی مطلق قیمت وہی رہتی ہے لیکن علامت بدل جاتی ہے -

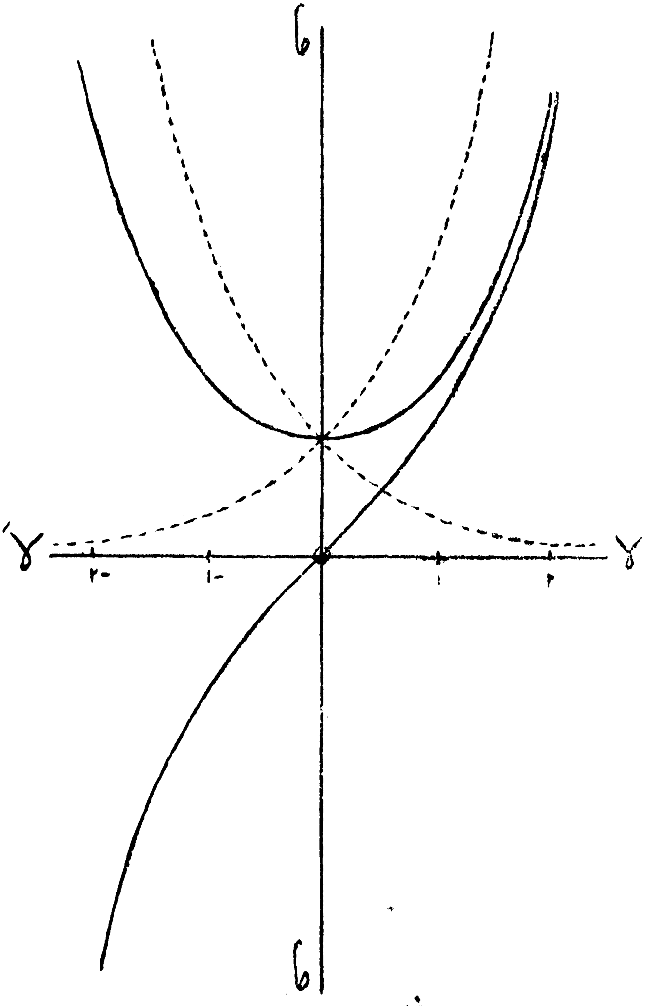
۸۰ شکل (۵۹) میں منحنی ما = قو^لا اور ما = قو^-لا نقطوں والے خطوط سے دکھائے گئے ہیں اور منحنی ما = جمز لا اور ما = جبز لا جو اوپر کے منحنیوں کے بالترتیب نصف مجموعہ اور نصف فرق لینے سے حاصل ہوتے ہیں مسلسل خط میں دکھائے گئے ہیں[*] -

---

[*] چند باتوں میں ان تفاعلوں کو قائم زاویہ کے ساتھ وہی رشتہ ہے جو مستدیر تفاعلوں کو دائرہ کے ساتھ ہے - دیکھو دفعہ ۱۰۰ مثال ۲ -

[†] یہ تفاعل ذرا مختلف طریق کتابت میں دفعہ ۳۰ میں نمودار ہو چکے ہیں -

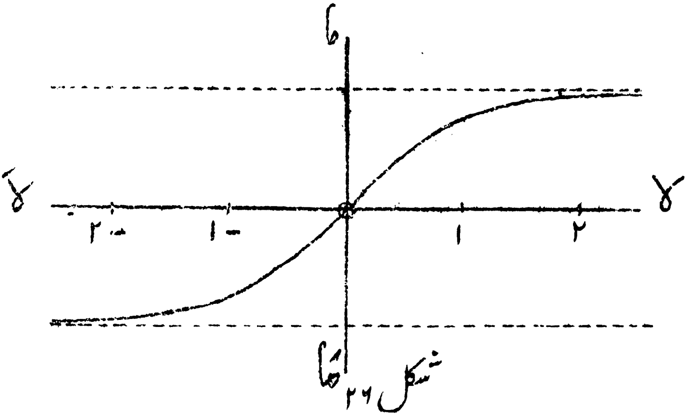
[*] منحنی ما = جمز لا کو علم سکونیات میں زنجیرہ سے موسوم کیا جاتا ہے کیونکہ یکساں کثافت والی زنجیر جو قوت جاذبہ کے زیر عمل آزادانہ لٹک رہی ہو یہ شکل اختیار کرتی ہے -



شکل ۲۵

۸۱ چونکہ تفاعل جبز لا اور جمز لا مسلسل ہیں اور جمز لا کبھی صفر نہیں ہوتا
اس لئے ثابت ہوا کہ مسز لا متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے
شکل ۲۶ میں منحنی ما = مسز لا کی ترسیم دکھائی گئی ہے خطوط ما = ±۱ اِسکے

متقارب ہیں۔*



شکل ۲۶

چونکہ $\text{جمز لا} + \text{جبز لا} = \text{قو}^{\text{لا}}$ اور $\text{جمز لا} - \text{جبز لا} = \text{قو}^{-\text{لا}}$ ...... (۳)

اس لئے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{جمز}^{2}\text{ لا} - \text{جبز}^{2}\text{ لا} = 1$ ...... (۴)

نیز اسکو بالترتیب $\text{جمز}^{2}\text{ لا}$ اور $\text{جبز}^{2}\text{ لا}$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\left.\begin{aligned} \text{قطز}^{2}\text{ لا} &= 1 - \text{مسز}^{2}\text{ لا} \\ \text{قمز}^{2}\text{ لا} &= \text{ممز}^{2}\text{ لا} - 1 \end{aligned}\right\} \quad ...... (۵)$$

نیز $\text{جمز (لا + ما)} = \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{لا}} \times \text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{لا}} \times \text{قو}^{-\text{ما}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\text{جمز لا} + \text{جبز لا})(\text{جمز ما} + \text{جبز ما}) + (\text{جمز لا} - \text{جبز لا})(\text{جمز ما} - \text{جبز ما})\right\}$$

$= \text{جمز لا جمز ما} + \text{جبز لا جبز ما}$ ...... (۶)

* تفاعیل جمز لا، جبز لا اور مسز لا کی قیمتیں اعشاریہ کے تین مقام تک لا کی قیمتوں صفر سے ۵ و ۲ تک کے لئے وقفوں ۰۱ . پر ضمیمہ کے جدول ع میں دی ہوئی ہیں۔

اور اسی طرح ۴۰

جبز (لا + ما) = جبز لا جمز ما + جمز لا جبز ما .... (۷)

اور بالخصوص جمز ۲ لا = جمز^۲ لا + جبز^۲ لا ، جبز ۲ لا = ۲ جبز لا جمز لا ..... (۸)

نتیجہ (۴) اور (۵) ذیل کے مثلثی نتائج کے مقابلہ میں ہیں

جب^۲ لا + جم^۲ لا = ۱ .... (۹)

قط^۲ لا = ۱ + مس^۲ لا
قم^۲ لا = ۱ + مم^۲ لا .... (۱۰)

اور اسی طرح نتیجہ (۸) ذیل کے نتیجوں کے مشابہ ہے

جم ۲ لا = جم^۲ لا - جب^۲ لا ، جب ۲ لا = ۲ جب لا جم لا .... (۱۱)

۴۱ - زائدی تفاعلوں کا تفرق -

(۱) اگر ما = جبز لا .... (۱)

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{عف}\left(\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\text{عف و}^{\text{لا}} - \text{عف و}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right) = \text{جمز لا} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اسی طرح اگر ما = جمز لا .... (۳)

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جبز لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

(۲) اگر ما = مسز لا .... (۵)

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{عف}\left(\frac{\text{جبز لا}}{\text{جمز لا}}\right) = \frac{\text{جمز لا} \times \text{عف جبز لا} - \text{جبز لا} \times \text{عف جمز لا}}{\text{جمز}^۲\text{ لا}}$$

$$= \frac{\text{جمز}^۲\text{ لا} - \text{جبز}^۲\text{ لا}}{\text{جمز}^۲\text{ لا}} = \text{قطز}^۲\text{ لا} \quad \ldots\ldots (۶)$$

دفعہ ۴۰ (۴) کی مدد سے -

اسی طرح اگر ما = ممز لا .... (۷)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\,\text{قمز}^{2}\,\text{لا}$ .... (۸)

(۳) اگر ما = قطمز لا .... (۹)

تو دفعہ ۳۱ (۴) کی مدد سے

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{عف}\left(\frac{1}{\text{جمز لا}}\right) = -\frac{\text{عف جمز لا}}{\text{جمز}^{2}\,\text{لا}} = -\frac{\text{جمز لا}}{\text{جمز}^{2}\,\text{لا}}$ .... (۱۰)

۸۳ اسی طرح اگر ما = قمز لا .... (۱۱)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{جمز لا}}{\text{جمز}^{2}\,\text{لا}}$ .... (۱۲)

۴۳ - لوکارثمی تفاعل -

قوت نما تفاعل کے مقلوب تفاعل کو لوکارثمی تفاعل کہتے ہیں -

اب اگر لا = قوما

تو ما = لوک لا .... (۱)

دفعہ ۳۸ میں ہم نے دیکھا تھا کہ جیسے ما ' $-\infty$ سے صفر میں سے ہوتا ہوا $+\infty$ تک بڑھتا ہے تو قوما بھی مسلسل طور پر صفر سے ایک میں سے ہوتا ہوا $+\infty$ تک بڑھتا ہے - پس لا کی ہر ایک مثبت قیمت کے لئے لوک لا کی صرف ایک ہی قیمت ہے ' نیز یہ قیمت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اسکے کہ لا $>$ یا $<$ ۱ - نیز جبکہ لا = ۰ تو ما = $-\infty$ اور لا = $+\infty$ کے لئے ما = $+\infty$ ' لا کی منفی قیمتوں کے لئے لوکارثمی تفاعل وجود نہیں رکھتا -

لوکارثمی تفاعل کے عام خواص اس تعریف سے حسب معمول طریقوں سے حاصل ہوسکتے ہیں - شکل ۲۷ میں مسلسل خط سے لوک لا کی ترسیم دکھائی گئی ہے ظاہر ہے کہ یہ ترسیم شکل میں وہی ہے جو قولا کی ہے [دیکھو شکل ۲۴ صفحہ ۱۱۰] صرف لا اور ما آپس میں بدل دیئے گئے ہیں *

* تفاعل لوک لا کی قیمتیں ضمیمہ کی جدول ف میں دی گئی ہیں -

اب ہم $ا^{لا}$ کی تعریف کر سکتے ہیں جبکہ ا مثبت مقدار ہے اور لا غیر منطق ہے۔

چونکہ $\quad ا = و^{\text{لوک}\, ا}$

اس لئے اگر لا ناطق ہو تو $\quad ا^{لا} = و^{لا\, \text{لوک}\, ا}$ .... (۲)

اور ہم غیر ناطق لا کے لئے اس نتیجہ کو $ا^{لا}$ کی تعریف قرار دینگے✱۔

پس اگر $\quad ما = ا^{لا}$ .... (۳)

تو $\quad \frac{ف\, ما}{ف\, لا} = ا^{لا}\, \text{لوک}\, ا$ .... (۴)

مذکورۂ بالا تعریف والے لا کے لوکارثم کو $\text{لوک}_{و}\, لا$ سے ظاہر کرینگے تاکہ اسکو عام یا برگی کے لوکارثم $\text{لوک}_{۱۰}\, لا$ سے تمیز کیا جا سکے۔ آخر الذکر لوکارثم کی تعریف ذیل کے بیان سے کی جاتی ہے۔

$ما = \text{لوک}_{۱۰}\, لا$ اگر $۱۰^{ما} = لا$ یا $و^{ما\, \text{لوک}_{و}\, ۱۰} = لا$ .... (۵)

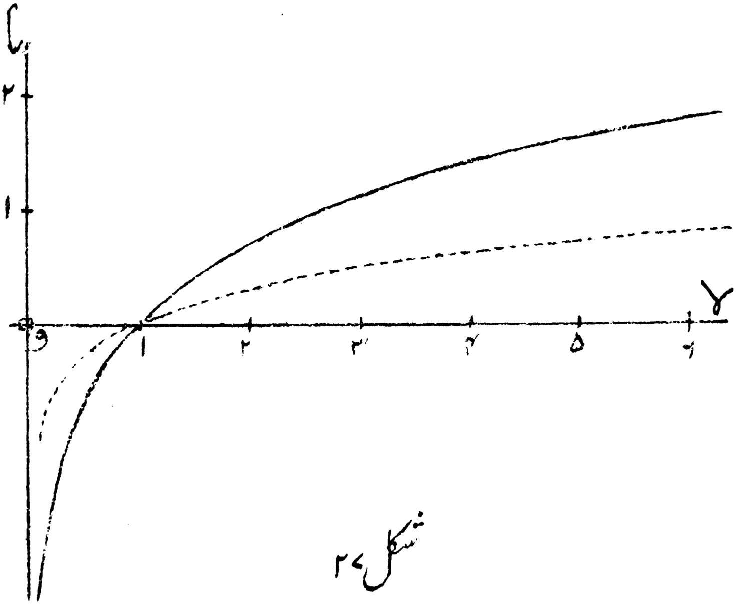
پس $ما\, \text{لوک}_{و}\, ۱۰ = \text{لوک}_{و}\, لا$ یعنی $\text{لوک}_{۱۰}\, لا = مہ\, \text{لوک}_{و}\, لا$ .... (۶) ۸۴

جہاں $\quad مہ = \frac{۱}{\text{لوک}_{و}\, ۱۰} = ۰٫۴۳۴۲۹$ .... (۷)

مہ کی قیمت نکالنے کا طریقہ چودھویں باب میں بتایا جائیگا۔

پس تفاعل $\text{لوک}_{۱۰}\, لا$ کی ترسیم $\text{لوک}_{و}\, لا$ کی ترسیم کے سینوں کو مستقل نسبت مہ میں کم کرنے سے حاصل ہوتی ہے شکل میں نقطہ دار خط دیکھو۔

✱ اس کی زیادہ عام جبری تعریف یہ ہے کہ اگر $لا_{۱}$، $لا_{۲}$، $لا_{۳}$ .... ناطق مقداروں کا ایک سلسلہ ہو جس کی انتہا غیر منطق مقدار لا ہو تو $ا^{لا}$ سلسلہ $ا^{لا_{۱}}$، $ا^{لا_{۲}}$، $ا^{لا_{۳}}$.... کی انتہا ہے۔ اب یہ ثابت کرنا ہوگا کہ انتہا محدود ہے اور لا کا مسلسل تفاعل ہے۔



شکل ۲۷

اس کتاب میں علامت لوک لا ہمیشہ لوک ہ لا کو تعبیر کرے گی۔

۴۳ ۔ چند انتہائی قیمتیں ۔

قوت نما اور لوکارتمی تفاعلوں سے متعلق چند انتہائی قیمتیں خاص اہمیت رکھتی ہیں ۔

(آ) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{لا}\ \text{قو}^{-\text{لا}}$ . . . . (۱)

کو محسوب کرو ۔

یہ تفاعل غیر معین شکل $\infty \times 0$ اختیار کرتا ہے ۔ اب چونکہ

۸۵ $$\frac{\text{لا}}{\text{قو}^{\text{لا}}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{لا}} + 1 + \frac{\text{لا}}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 3} + \cdots}$$

اس لئے ظاہر ہے کہ دریافت طلب انتہا صفر ہے۔
اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ م کی تمام ناطق قیمتوں کے لئے

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\ \text{لا}^{\text{م}}\ \text{قو}^{-\text{لا}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{۲})$$

اس سے حاصل ہوا کہ جیسے لا، لا انتہا بڑھتا ہے $\text{قو}^{\text{لا}}$ بمقابلہ لا کی بڑی سے بڑی قوت کے، لا انتہا ہو جاتا ہے۔ نیز اگر ا ایک سے کم مثبت مقدار ہو تو

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\ \text{ن}\ \text{ا}^{\text{ن}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{۳})$$

اس کے ثبوت کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{ک} = \text{لوک}\left(\frac{\text{۱}}{\text{ا}}\right)$$

اب چونکہ ک مثبت ہے

$$\text{ن}\ \text{ا}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{قو}^{-\text{ک ن}}$$

(۲) اب اگر نتیجہ (۱) میں ہم رکھیں $\text{ی} = \text{قو}^{\text{لا}}$ یعنی $\text{لا} = \text{لوک ی}$ تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{ی}\to\infty}\ \frac{\text{لوک ی}}{\text{ی}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{۴})$$

پس جیسے لا بے انتہا بڑا ہوتا ہے ویسے لوک لا بھی لا انتہا بڑھتا ہے لیکن لا کے مقابلہ میں لا انتہا چھوٹا رہتا ہے۔
(۳) نیز اگر نتیجہ (۱) میں $\text{ی} = \text{قو}^{-\text{لا}}$ یعنی $\text{لا} = -\text{لوک ی}$ رکھیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{ی}\to\text{۰}}\ \text{ی}\ \text{لوک ی} = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{۵})$$

(۴) اب

$$\frac{\text{قو}^{\text{لا}} - \text{۱}}{\text{لا}} = \text{۱} + \frac{\text{لا}}{\lfloor\text{۲}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۳}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{لا}\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{۳}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۳}\times\text{۴}} + \ldots\ldots\right)$$

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستدق ہے اور اسلئے اس کا حاصل جمع محدود ہے۔

$$\text{پس}\quad \underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{قو}^{\text{لا}}-1}{\text{لا}} = 1 \text{،} \qquad \ldots\ldots (6)$$

اور اگر لا کی بجائے ک لا لکھیں تو

$$\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{قو}^{\text{ک لا}}-1}{\text{لا}} = \text{ک،} \qquad \ldots\ldots (7)$$

اور اس میں ک = لوک ا درج کرنے سے جہاں ا مثبت مقدار ہے حاصل ہوتا ہے

$$\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{ا}^{\text{لا}}-1}{\text{لا}} = \text{لوک ا،} \qquad \ldots\ldots (8)$$

نیز $\text{لا} = \frac{1}{\text{ن}}$ درج کرنے سے اس نتیجہ کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے

$$\underset{\text{ن}\to \infty}{\text{نہا}}\ \text{ن} \left(\text{ا}^{\frac{1}{\text{ن}}}-1\right) = \text{لوک ا،} \qquad \ldots\ldots (9)$$

۸۶ (۵) اگر (۶) میں لا = لوک (۱ + ی) یعنی $\text{قو}^{\text{لا}} = 1 + \text{ی}$ لکھیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\underset{\text{ی}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک}(1+\text{ی})}{\text{ی}} = 1 \text{،} \qquad \ldots\ldots (10)$$

(۶) اگر

$$\text{ع} = \left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} \text{،} \qquad \ldots\ldots (11)$$

$$\text{تو}\quad \text{لوک ع} = \text{ن لوک} \left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$$

اور اس میں لا = ن ی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\underset{\text{ن}\to \infty}{\text{نہا}}\ \text{لوک ع} = \text{لا} \times \underset{\text{ی}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک}(1+\text{ی})}{\text{ی}} \text{،} \quad [\text{نتیجہ (۱۰) کی مدد سے}]$$

$$= \text{لا} \qquad \ldots\ldots (12)$$

$$\text{پس}\quad \underset{\text{ن}\to \infty}{\text{نہا}} \left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{قو}^{\text{لا}} \text{،} \qquad \ldots\ldots (13)$$

بعض اوقات جبر و مقابلہ میں دائیں جانب کی انتہا سے قوت نما تفاعل کی تعریف کرتے ہیں۔

۴۴ - لوکارثم کا تفرق

(۱) اگر $\text{ما} = \text{لوک لا}$ ....(۱)

تو $\text{لا} = \text{ہ}^{\text{ما}}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{ہ}^{\text{ما}} = \text{لا}$

اور اس لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}}$ ....(۲)

اور چونکہ یہ گھٹتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اس لئے اس کے منحنی کے ماس کا میلان محور لا سے کم ہوتا جاتا ہے شکل ۲۷ صفحہ (۱۱۹) دیکھو۔

(۲) اگر $\text{ما} = \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{لا}$ ....(۳)

تو $\text{لا} = \text{ا}^{\text{ما}}$ ، $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{ا}^{\text{ما}} \times \text{لوک}_{\text{ہ}}\,\text{ا} = \text{لا}\,\text{لوک}_{\text{ہ}}\,\text{ا}$

اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لوک}_{\text{ہ}}\,\text{ا}} \times \frac{1}{\text{لا}}$ ....(۴)

مثلاً اگر $\text{ما} = \text{لوک}_{10}\,\text{لا}$ ....(۵)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{مما}}{\text{لا}}$ ....(۶)

جہاں دفعہ ۴۲ کے مطابق مما = ۰.۴۳۴۲۹ ؛

(۳) اگر $\text{ما} = \text{لوک ع}$ ....(۷)

جہاں ع متغیر لا کا معلومہ تفاعل ہے تو دفعہ ۳۲ کے مطابق

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ع}} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$ ....(۸)

مثال ۱ - اگر $\text{ما} = \text{لوک}\,(\text{جب لا})$ ....(۹)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{جب لا}} \times \text{عف(جب لا)} = \text{مم لا}$ ....(۱۰)

اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{لوک قط لا} = -\text{لوک جم لا}$ ....(۱۱)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{سس لا}$ ....(۱۲)

مثال ۲ — اگر $\text{ما} = \text{لوک}\left(\text{سس}\ \tfrac{1}{2}\text{لا}\right)$ ....(۱۳)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{سس}\frac{\text{لا}}{2}}\ \text{عف}\left(\text{سس}\frac{\text{لا}}{2}\right) = \frac{1}{\text{سس}\frac{\text{لا}}{2}} \times \text{قط}^2\frac{\text{لا}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{\text{جب لا}}$ ....(۱۴)

اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{لوک سس}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\text{لا}}{2}\right)$ ....(۱۵)

تو ہمیں حاصل ہوگا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{جم لا}}$ ....(۱۶)

مثال ۳ — اگر $\text{ما} = \frac{1}{2}\ \text{لوک}\left(\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}\right)$

$= \frac{1}{2}\ \text{لوک}(1+\text{لا}) - \frac{1}{2}\ \text{لوک}(1-\text{لا})$ ....(۱۷)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\text{لا}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\text{لا}} = \frac{1}{1-\text{لا}^2}$ ....(۱۸)

مثال ۴ — فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}\right\}$ ....(۱۹)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}} \times \text{عف}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}\right\}$

$= \frac{1}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}} \times \left\{1 + \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}}\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 \pm 1}}$ ....(۲۰)

۴۵ - لوکارثمی تفرق

زیادہ اجزاء ضربی والے تفاعل کو تفرق کرنے سے پہلے تفاعل کا لوکارثم لے لینے سے اکثر دفعہ سہولت ہو جاتی ہے -

پس اگر $$\text{ما} = \frac{\text{ع}_1 \text{ع}_2 \text{ع}_3 \ldots}{\text{و}_1 \text{و}_2 \text{و}_3 \ldots} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{تو لوک ما} = \text{لوک ع}_1 + \text{لوک ع}_2 + \text{لوک ع}_3 \ldots - \text{لوک و}_1 - \text{لوک و}_2 - \text{لوک و}_3 \ldots (۲)$$

اور اس لئے بموجب دفعہ ۴۴ (۳)

$$\frac{1}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{ع}_1}\frac{\text{فر ع}_1}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ع}_2}\frac{\text{فر ع}_2}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ع}_3}\frac{\text{فر ع}_3}{\text{فر لا}} + \ldots\ldots$$

$$- \frac{1}{\text{و}_1}\frac{\text{فر و}_1}{\text{فر لا}} - \frac{1}{\text{و}_2}\frac{\text{فر و}_2}{\text{فر لا}} - \frac{1}{\text{و}_3}\frac{\text{فر و}_3}{\text{فر لا}} \ldots\ldots (۳)$$

دفعہ ۳۰ اور ۳۱ کے نتیجوں کی یہ عام شکل ہے

یہی طریقہ $\text{ما} = \text{ع}^{\text{و}}$ ......(۴)

کے تفرق کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے -

$$\text{اب} \quad \text{لوک ما} = \text{و لوک ع} \quad \ldots\ldots (۵)$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{1}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \times \text{لوک ع} + \frac{\text{و}}{\text{ع}}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ع}^{\text{و}}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}\,\text{لوک ع} + \text{و ع}^{\text{و}-1}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

یعنی تفاعل ع اور و کو باری باری مستقل مانکر تفرق کریں اور نتیجوں کو جمع کرلیں -

مثال ۱ - اگر $$\text{ما} = \sqrt{\frac{(\text{ا}+\text{لا})(\text{ب}+\text{لا})}{(\text{ا}-\text{لا})(\text{ب}-\text{لا})}}$$

$$\text{تو لوک ما} = \tfrac{1}{2}\,\text{لوک}(\text{ا}+\text{لا}) + \tfrac{1}{2}\,\text{لوک}(\text{ب}+\text{لا}) - \tfrac{1}{2}\,\text{لوک}(\text{ا}-\text{لا}) - \tfrac{1}{2}\,\text{لوک}(\text{ب}-\text{لا})$$

پس $\frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\text{ا}+\text{لا}}+\frac{1}{\text{ب}+\text{لا}}+\frac{1}{\text{ا}-\text{لا}}+\frac{1}{\text{ب}-\text{لا}}\right\}$

$$= \frac{\text{ا}}{\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}}+\frac{\text{ب}}{\text{ب}^{2}-\text{لا}^{2}} = \frac{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اب}-\text{لا}^{2})}{(\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2})(\text{ب}^{2}-\text{لا}^{2})}$$

اسلئے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اب}-\text{لا}^{2})}{(\text{ا}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}(\text{ب}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}(\text{ب}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}}$

مثال ۲ـ اگر $\text{ما} = \text{لا}^{\text{لا}}$ ✓

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^{\text{لا}}\,(1+\text{لوک لا})$

۴۶ ـ مقلوب زائدی تفاعل ـ منقلوب زائدی تفاعل

$\text{جبز}^{-1}\text{لا}$، $\text{جتز}^{-1}\text{لا}$، $\text{مسز}^{-1}\text{لا}$ وغیرہ وغیرہ کی تعریف اسی اصول پر کیجائیگی ۸۹
جو دفعہ ۱۶ میں بتایا گیا ہے
یعنی $\text{ما} = \text{جبز}^{-1}\text{لا}$ کے معنی یہ ہیں کہ $\text{لا} = \text{جبز ما}$ .... (۱)
اور اسی طرح باقی مقلوب تفاعلوں کے لئے۔
یہ تمام تفاعل لوکارثمی تفاعلوں کے رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

پس اگر $\text{لا} = \text{جبز ما} = \frac{1}{2}(\text{ق}^{\text{ما}} - \text{ق}^{-\text{ما}})$ .... (۲)

تو $\text{ق}^{2\text{ما}} - 2\,\text{لا}\,\text{ق}^{\text{ما}} - 1 = 0$ .... (۳)

$\text{ق}^{\text{ما}}$ میں دوسرے درجے کی مساوات کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$\text{ق}^{\text{ما}} = \text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^{2}+1}$ .... (۴)

اگر ما حقیقی ہے تو $\text{ق}^{\text{ما}}$ کو مثبت ہونا چاہیئے اور اسلئے اوپر کی علامت لینی لازم ہے

پس $\text{جبز}^{-1}\text{لا} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{2}+1}\right\}$ .... (۵)

اسی طرح اگر لا > ۱ تو ہم حاصل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جمز}^{-1}\text{لا} = \text{لوک}\left\{\text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^{2} - 1}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

اس میں دونوں علامتیں ممکن ہیں۔ مقداریں $\text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^{2}-1}$ ایک دوسرے کی شکافی ہیں اور ان کا لوکارتم صرف علامت میں مختلف ہے۔ $\text{جمز}^{-1}\text{لا}$ کی ترسیم کھینچنے پر ظاہر ہوگا کہ ایک سے بڑی لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی ہیں اور علامت میں مختلف ہیں۔

$$\text{اب اگر}\quad \text{لا} = \text{مسز ما} = \frac{\text{ق}^{\text{ما}} - \text{ق}^{-\text{ما}}}{\text{ق}^{\text{ما}} + \text{ق}^{-\text{ما}}} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\text{تو}\quad \text{ق}^{2\text{ما}} = \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$\text{پس}\quad \text{مسز}^{-1}\text{لا} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} \quad \ldots\ldots (9)$$

حقیقی ہے صرف جبکہ $|\text{لا}| < 1$ ہے۔

$$\text{اسی طرح}\quad \text{ممز}^{-1}\text{لا} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}$$

اور یہ حقیقی ہے صرف جبکہ $|\text{لا}| > 1$ ہے۔

۴۷۔ مقلوب زائدی تفاعلوں کا تفرق۔

$$\text{(آ) اگر}\quad \text{ما} = \text{جنز}^{-1}\text{لا} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{تو}\quad \text{لا} = \text{جنز ما} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{جمز ما} = \sqrt{\text{لا}^{2}+1}$$

$$\text{اس لئے}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2}+1}} \quad \ldots\ldots (2)$$ ۹۰

اس میں کوئی مشتبہ علامت نہیں ہے کیونکہ جمز ما خاصیت سے مثبت ہے۔

(۲) اگر ما = جمز$^{-۱}$ لا .... (۳)

تو لا = جمز ما اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ = جنز ما = $\pm\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}$

پس $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \pm \frac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}}$ .... (۴)

ایک سے بڑی لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے لئے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی علامتیں مختلف ہیں (لا اور ما کو بدل کر صفحہ (۱۱۴) پر شکل ۲۵ دیکھو)

(۳) اگر ما = مسز$^{-۱}$ لا .... (۵)

تو لا = مسز ما اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ = قطنز^{۲} ما = ۱ − لا^{۲}

اور اس لئے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۱ - \text{لا}^{۲}}$ .... (۶)

یہ نتیجہ دفعہ ۴ مثال ۳ کے موافق ہے۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ما صرف اسی وقت حقیقی ہے جبکہ لا^{۲} < ۱ (شکل ۲۶ صفحہ (۱۱۵) پر دیکھو)

اسی طرح اگر ما = ممز$^{-۱}$ لا .... (۷)

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{۱}{\text{لا}^{۲} - ۱}$ .... (۸)

اگر ما حقیقی ہو تو یہ ضروری ہے کہ لا^{۲} ایک سے بڑا ہو۔

امثلہ ۱۱

۱۔ و$^{\text{لا}}$ کے سلسلے کو جمع کر کے ثابت کرو کہ

$\frac{۱}{\text{و}}$ = ٫۳۶۷۸۷۹، جمز ۱ = ۱٫۵۴۳۰۸۰۶، جنز ۱ = ۱٫۱۷۵۲۰۱۲

۲۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{\text{قو}}$ = ۱٫۶۴۸۷۲۱۳، $\frac{1}{\sqrt{\text{قو}}}$ = ۰٫۶۰۶۵۳۰۷، جمز $\frac{1}{2}$ = ۱٫۱۲۷۶۲۶۰،

جبز $\frac{1}{2}$ = ۰٫۵۲۱۰۹۵۳۔

۳۔ اگر |ا| < |ب| تو ثابت کرو کہ مساوات ا جمز لا + ب جبز لا = ۰ کی صرف ایک ہی اصل حقیقی ہے۔

(۹۱) ۴۔ جبز لا، جمز لا، مسز لا کی ترسیمیں کھینچو۔

۵۔ ثابت کرو کہ تفاعل مسز $\left(\frac{1}{\text{لا}}\right)$ نقطہ لا = ۰ پر غیر مسلسل ہے۔ نیز اس تفاعل کی ترسیم کھینچو۔

۶۔ اگر ا اور ب مثبت ہوں اور ا > ب تو ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{\text{ا قو}^{\text{لا}} + \text{ب قو}^{-\text{لا}}}{\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{-\text{لا}}}$ کی اوپر کی حد ا ہے اور نیچے کی حد ب ہے۔

ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو۔

۷۔ جمز ۲لا = ۲ جمز^{2}لا − ۱ = ۱ + ۲ جبز^{2}لا

۸۔ جبز ۲لا = $\frac{\text{۲ مسز لا}}{\text{۱ − مسز}^{2}\text{لا}}$، جمز ۲لا = $\frac{\text{۱ + مسز}^{2}\text{لا}}{\text{۱ − مسز}^{2}\text{لا}}$، مسز ۲لا = $\frac{\text{۲ مسز لا}}{\text{۱ + مسز}^{2}\text{لا}}$

۹۔ جمز^{2}لا جم^{2}لا + جبز^{2}لا جب^{2}لا = $\frac{1}{2}$ (جمز ۲لا + جم ۲لا)

اور جمز^{2}لا جب^{2}لا + جبز^{2}لا جم^{2}لا = $\frac{1}{2}$ (جمز ۲لا − جم ۲لا)

۱۰۔ جمز^{2}لا × جم^{2}لا − جبز^{2}لا جب^{2}لا = $\frac{1}{2}$ (۱ + جمز ۲لا جم ۲لا)

جمز^{2}لا جب^{2}لا − جبز^{2}لا جم^{2}لا = $\frac{1}{2}$ (۱ − جمز ۲لا جم ۲لا)

۱۱۔ جمز^{2}ع + جبز^{2}و = جبز^{2}ع + جمز^{2}و = جمز (ع + و) جمز (ع − و)

جمز^{2}ع − جمز^{2}و = جبز^{2}ع − جبز^{2}و = جبز (ع + و) جبز (ع − و)

۱۲۔ جبز ع + جبز و = ۲ جبز $\frac{1}{2}$ (ع + و) جمز $\frac{1}{2}$ (ع − و)

جبز ع − جبز و = ۲ جمز $\frac{1}{2}$ (ع + و) جبز $\frac{1}{2}$ (ع − و)

جمز ع + جمز و = ۲ جمز $\frac{1}{2}$ (ع + و) جمز $\frac{1}{2}$ (ع − و)

جمز ع − جمز و = ۲ جبز $\frac{1}{2}$ (ع + و) جبز $\frac{1}{2}$ (ع − و)

۱۳- $\text{مسز}\ \tfrac{1}{2}\,\text{ع} = \dfrac{\text{جبز ع}}{\text{جمز ع} + 1} = \dfrac{\text{جمز ع} - 1}{\text{جبز ع}} = \sqrt{\dfrac{\text{جمز ع} - 1}{\text{جمز ع} + 1}}$

۱۴- $\text{جبز ۳ ع} = 4\,\text{جبز}^3\,\text{ع} + 3\,\text{جبز ع}$

$\text{جمز ۳ ع} = 4\,\text{جمز}^3\,\text{ع} - 3\,\text{جمز ع}$

۱۵- $1 + 2\,\text{جمز ع} + 2\,\text{جمز ۲ع} + 2\,\text{جمز ۳ع} + \ldots + 2\,\text{جمز ن ع} = \dfrac{\text{جبز}(\text{ن} + \frac{1}{2})\text{ع}}{\text{جبز}\ \frac{1}{2}\ \text{ع}}$

۹۲

امثلہ ۱۲

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

(۱) $\text{ما} = \text{فو}^{\text{لا}^2}$ ‏ $\text{عف ما} = 2\,\text{لا}\ \text{فو}^{\text{لا}^2}$

(۲) $\text{ما} = \dfrac{\text{فو}^{\text{لا}^2}}{\text{لا}}$ ‏ $\text{عف ما} = \text{فو}^{\text{لا}^2}\left(2 - \dfrac{1}{\text{لا}^2}\right)$

(۳) $\text{ما} = \text{فو}^{\text{جب لا}}$ ‏ $\text{عف ما} = \text{جم لا}\ \text{فو}^{\text{جب لا}}$

(۴) $\text{ما} = \text{فو}^{\text{جب}^2\text{لا}}$ ‏ $\text{عف ما} = \text{جب ۲لا}\ \text{فو}^{\text{جب}^2\text{لا}}$

(۵) $\text{ما} = \text{فو}^{\text{عا لا}}\ \text{جب ب لا}$ ‏ $\text{عف ما} = \text{فو}^{\text{عا لا}}(\text{عا جب ب لا} + \text{ب جم ب لا})$

(۶) $\text{ما} = \text{فو}^{\text{عا لا}}\ \text{جم ب لا}$ ‏ $\text{عف ما} = \text{فو}^{\text{عا لا}}(\text{عا جم ب لا} - \text{ب جب ب لا})$

(۷) $\text{ما} = \text{لا}\ \text{فو}^{\text{لا}}$ ‏ $\text{عف ما} = (\text{لا} + 1)\ \text{فو}^{\text{لا}}$

(۸) $\text{ما} = \text{لا}\ \text{فو}^{-\text{لا}}$ ‏ $\text{عف ما} = (1 - \text{لا})\ \text{فو}^{-\text{لا}}$

(۹) $\text{ما} = \text{لا}^{\text{م}}\ \text{فو}^{\text{لا}}$ ‏ $\text{عف ما} = (\text{لا} + \text{م})\ \text{لا}^{\text{م}-1}\ \text{فو}^{\text{لا}}$

(۱۰) $\text{ما} = \text{فو}^{\text{لا}}\ \text{جب لا}$ ‏ $\text{عف ما} = \text{فو}^{\text{لا}}(\text{جب لا} + \text{جم لا})$

(۱۱)	ما = قو^{لا} جم لا	عف ما = قو^{لا} (جم لا − جب لا)
(۱۲)	ما = (قو^{لا} − ۱) / (قو^{لا} + ۱)	عف ما = ۲ قو^{لا} / (قو^{لا} + ۱)^{۲}
(۱۳)	ما = جبز^{۲} لا	عف ما = جبز ۲ لا
(۱۴)	ما = جمز^{۲} لا	عف ما = جبز ۲ لا
(۱۵)	ما = مسز^{۲} لا	عف ما = ۲ جبز لا / جمز^{۳} لا
(۱۶)	ما = جبز لا + ۱/۳ جبز^{۳} لا	عف ما = جمز^{۳} لا
(۱۷)	ما = مسز لا − ۱/۳ مسز^{۳} لا	عف ما = قطز^{۴} لا
(۱۸)	ما = جمز لا جم لا + جبز لا جب لا ،	عف ما = ۲ جبز لا جم لا
(۱۹)	ما = جمز لا جب لا + جبز لا جم لا ،	عف ما = ۲ جمز لا جم لا
(۲۰)	ما = (جمز لا − جم لا) / (جبز لا + جب لا) ،	عف ما = ۲ جب لا جبز لا / (جبز لا + جب لا)^{۲}
(۲۱)	ما = مسز$^{-۱}$ (جبز عـ جب لا / (۱ + جمز عـ جم لا)) ،	عف ما = جبز عـ / (۱ + جمز عـ جم لا)

امثلہ ۱۳ ۹۳

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

(۱)	ما = لا لوک لا	عف ما = ۱ + لوک لا
(۲)	ما = لا^{م} لوک لا	عف ما = لا$^{م-۱}$ (۱ + م لوک لا)
(۳)	ما = لوک جب لا	عف ما = مم لا
(۴)	ما = لوک جم لا	عف ما = − مس لا
(۵)	ما = لوک مس لا	عف ما = ۲ قم ۲ لا
(۶)	ما = لوک جبز لا	عف ما = ممز لا
(۷)	ما = لوک جمز لا	عف ما = مسز لا

(۸) $\text{تا} = \text{لوک مستر لا}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \text{۲ قمز ۲لا}$

(۹) $\text{تا} = \text{لوک}\ \dfrac{\text{لا}}{\text{۱} + \text{لا}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{۱}}{\text{لا}(\text{۱}+\text{لا})}$

(۱۰) $\text{تا} = \text{لوک}\ \dfrac{\text{۱} - \text{لا}}{\text{۱} + \text{لا}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = -\dfrac{\text{۲}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$

(۱۱) $\text{تا} = \text{لوک}\ \dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{۱}}{\text{لا}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱})}$

(۱۲) $\text{تا} = \text{لوک}\ \dfrac{\text{۱} + \sqrt{\text{لا}}}{\text{۱} - \sqrt{\text{لا}}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}}\,(\text{۱} - \text{لا})}$

(۱۳) $\text{تا} = \text{لوک}\left\{\sqrt{\text{لا} + \text{۱}} + \sqrt{\text{لا} - \text{۱}}\right\}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}}}$

(۱۴) $\text{تا} = \text{لوک}\ \dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}} - \text{لا}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{۱}}{\text{لا}} + \dfrac{\text{۱}}{\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}}}$

(۱۵) $\text{تا} = \text{لوک}(\text{لا} - \text{۱}) - \dfrac{\text{۲لا} - \text{۱}}{(\text{لا} - \text{۱})^{\text{۲}}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}}{(\text{لا} - \text{۱})^{\text{۳}}}$

(۱۶) $\text{تا} = \text{لوک}\ \dfrac{\text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{۲}(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۴}}}$

(۱۷) $\text{تا} = \sqrt{\dfrac{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{\text{۲لا}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}\,(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}$

(۱۸) $\text{تا} = \dfrac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}} - \text{لا}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}} + \text{لا}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = \dfrac{-\text{۲}}{\left\{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}} + \text{لا}\right\}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}}$

(۱۹) $\text{تا} = \dfrac{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}} + \sqrt{\text{۱} - \text{لا}}}{\sqrt{\text{۱} + \text{لا}} - \sqrt{\text{۱} - \text{لا}}}$ $\qquad$ $\text{عف تا} = -\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}} - \dfrac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}}}$

(۲۰) $\text{ما} = \frac{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{۲}}+\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{۲}}}{\sqrt{\text{۱}+\text{لا}^{۲}}-\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{۲}}}$ عف ما $= -\frac{۲}{\text{لا}^{۳}\sqrt{\text{۱}-\text{لا}^{۴}}}-\frac{۲}{\text{لا}^{۳}}$

(۲۱) $\text{ما} = \text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}-۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}+۱}$ عف ما $= \frac{۱}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}}$

امثلہ ۱۴ ۹۴

۱۔ لوک جب لا اور لوک جس لا کی ترسیم لا = ۰ سے لا = π تک کھینچو۔

۲۔ ثابت کرو کہ اگر ف(لا) متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہو تو

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty}\ \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{قو}^{\text{لا}}} = ۰$$

۳۔ ثابت کرو کہ اگر ا مثبت ہو تو $\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ا}} = ۱$

۴۔ ثابت کرو کہ $\text{نہا}_{\text{لا}\to۰}\ \frac{\text{لوک}(۱+\text{لا})-\text{لا}}{\text{لا}^{۲}} = \frac{۱}{۲}$

۵۔ ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو۔

$$\text{جبز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{جمز}^{-۱}\sqrt{\text{لا}^{۲}+۱}\ ،\ \text{جمز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{جبز}^{-۱}\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}$$

$$\text{قطز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لوک}\,\frac{۱+\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}{\text{لا}}\ ،\ \text{قمز}^{-۱}\,\text{لا} = \text{لوک}\,\frac{۱+\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}{\text{لا}}$$

۶۔ ثابت کرو کہ $\text{مسز}^{-۱}\,\frac{\text{لا}^{۲}-۱}{\text{لا}^{۲}+۱} = \text{لوک}\,\text{لا}$

۷۔ ثابت کرو کہ مساوات $\text{جمز}^{-۱}\,\text{لا} + \text{جمز}^{-۱}\,\text{ما} = \text{م}$ زاویہ کو ظاہر کرتی ہے اور اسکے متقارب دریافت کرو۔ [$\text{ما} = \text{لا}\,\text{قو}^{-\text{م}}$ ، $\text{ما} = \text{لا}\,\text{قو}^{\text{م}}$]

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

۸۔ $\text{ما} = \text{قطز}^{-1}\,\text{لا}$ $\qquad \text{عف ما} = -\dfrac{۱}{\text{لا}\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$

۹۔ $\text{ما} = \text{قمز}^{-1}\,\text{لا}$ $\qquad \text{عف ما} = -\dfrac{۱}{\text{لا}\sqrt{۱ + \text{لا}^{۲}}}$

۱۰۔ $\text{ما} = \text{جب}^{-1}(\text{مسز لا})$ $\qquad \text{عف ما} = \text{قطز لا}$

۱۱۔ $\text{ما} = \text{مس}^{-1}(\text{جبز لا})$ $\qquad \text{عف ما} = \text{قطز لا}$

۱۲۔ $\text{ما} = \text{مس}^{-1}(\text{مسز}\tfrac{۱}{۲}\text{لا})$ $\qquad \text{عف ما} = \tfrac{۱}{۲}\,\text{قطز لا}$

۱۳۔ $\text{ما} = \text{مسز}^{-1}(\text{مس}\tfrac{۱}{۲}\text{لا})$ $\qquad \text{عف ما} = \tfrac{۱}{۲}\,\text{قط لا}$

۱۴۔ $\text{ما} = \text{مسز}^{-1}\dfrac{\text{ا} + \text{لا}}{۱ + \text{الا}}$ $\qquad \text{عف ما} = \dfrac{۱}{۱ - \text{لا}^{۲}}$

۹۵

چوتھا باب

مشتق تفاعل کا استعمال

۴۸ - مشتق تفاعل کی علامت سے نتائج -

اگر ما = فہ (لا) اور اگر مف لا (δx)، مف ما (δy) متغیروں لا، ما کے ہمزاد یا ایک ساتھ کے اضافے ہوں تو $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا جبکہ مف لا کو لا انتہا کم کر دیا جائے تعریف کی رو سے فہ' (لا) ہے، اس لئے انتہا سے قبل ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فہ}'(\text{لا}) + \text{ثہ} \quad \cdots\cdots (1)$$

جہاں ثہ بالآخر معدوم ہونے والی مقدار ہے -

جس طریق سے نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ اپنی انتہائی قیمت کے قریب آتی ہے اسکی توضیح کے لئے ایک عددی مثال دلچسپی سے خالی نہیں ہوگی لا = ۱ کے قرب میں ما = لوگ لا کی صورت کو لو۔ یہاں انتہائی قیمت ہے

$$\frac{\text{ڈ ما}}{\text{ڈ لا}} = \frac{\text{مہ}}{\text{لا}} = \cdots\cdots ۴۳۴۲۹،$$

دوسرے کالم کے عدد مطبوعہ جدولوں سے لئے گئے ہیں

مف لا	مف ما	مف ما / مف لا
۱۰۰۰ء	۰۴۱۳۹۳ء	۴۱۳۹۴ء
۰۵۰۰ء	۰۲۱۱۸۹ء	۴۲۳۷۹ء
۰۱۰۰ء	۰۰۴۳۲۱۴ء	۴۳۲۱۴ء
۰۰۵۰ء	۰۰۲۱۶۶۱ء	۴۳۳۲۱ء
۰۰۱۰ء	۰۰۰۴۳۴۰۸ء	۴۳۴۰۸ء
۰۰۰۵ء	۰۰۰۲۱۷۰۹ء	۴۳۴۱۹ء
۰۰۰۱ء	۰۰۰۰۴۳۴۲۷ء	۴۳۴۲۷ء

پہلے فرض کرو کہ فہ (لا) > ۰

چونکہ ثہ ما کی انتہائی قیمت صفر ہے اس لئے مف لا کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس امر کا یقین کر لیا جا سکتا ہے کہ

فہ (لا) + ثہ > ۰

یعنی (۱) کی رو سے مف ما کی وہی علامت ہوگی جو مف لا کی ہے ۹۶
مف لا کی تمام جائز قیمتوں کے لئے جو مطلق قیمت میں ایک خاص مقدار صہ سے کم ہیں۔

اسی طور پر اگر فہ (لا) < ۰ تو مف ما کی علامت مف لا سے مختلف ہوگی مف لا کی ان تمام جائز قیمتوں کے لئے جو مطلق مقدار میں ایک خاص مقدار صہ سے کم ہیں۔

اگر متغیر متبوع کو ہندسی طور پر تعبیر کیا جائے جیسے شکل ۱ دفعہ ۱ میں، اور اگر لا = و م جہاں م ایک نقطہ ہے بعت زیر بحث میں تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ فہ (لا) کے مثبت ہونے کی صورت میں م کے دائیں جانب ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر تفاعل فہ (لا) کی قیمت م پر کی قیمت سے

بڑی ہے اور م کے بائیں جانب ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر تفاعل کی قیمت م پر کی قیمت سے چھوٹی ہے۔ اگر فہَ (لا) منفی ہو تو اس بیان میں الفاظ "چھوٹے" اور "بڑے" کو باہم بدل دینا چاہیئے۔ جب م، لا کے وقفہ کے شروع یا آخیر میں ہو تو یہ وقفے بالترتیب م کے دائیں اور بائیں جانب واقع ہونگے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر فہَ (لا) کسی محدود وسعت میں مثبت ہو تو فہ (لا) کی قیمت لا کے ساتھ اس وقفہ میں استقلال کے ساتھ بڑھے گی یعنی اگر لا$_1$، لا$_2$ اس وقفہ میں لا کی کوئی ایسی قیمتیں ہوں کہ لا$_2$ > لا$_1$ تو

فہ (لا$_2$) > فہ (لا$_1$)

کیونکہ فہ (لا) مفروضات کے مطابق قابل تفرق ہے اور اس لئے مسلسل ہے پس وقفہ لا$_1$ سے لا$_2$ تک (بشمول طرفین) اس کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت ضرور ہونی چاہیئے۔ گذشتہ استدلال سے واضح ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت نہ تو وقفہ کی ابتدا میں ہو سکتی ہے اور نہ درمیان میں، اس کو لازماً وقفہ کے آخیر پر واقع ہونا چاہیئے۔ اسی طرح فہ (لا) کی کم سے کم قیمت کو وقفہ کے شروع میں واقع ہونا چاہیئے۔

اسی طرح یہ ظاہر ہے کہ اگر فہَ (لا) کسی محدود وسعت میں منفی ہو تو فہ (لا) اس تمام وسعت میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے یعنی اگر اس وسعت میں لا کی کوئی دو قیمتیں لا$_1$، لا$_2$ ایسی ہوں کہ لا$_2$ > لا$_1$ تو

فہ (لا$_2$) < فہ (لا$_1$)

ان نتائج کا ہندسی مفہوم ظاہر ہے۔ جب ایک منحنی کا ڈھال مثبت ہو تو معین لا کے ساتھ بڑھتے ہیں، جب ڈھال منفی ہو تو معین لا کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں مختلف تفاعلوں کی ترسیموں سے جو باب اول میں دی گئی ہیں مذکورہ بالا امور کی توضیح ہوگی۔

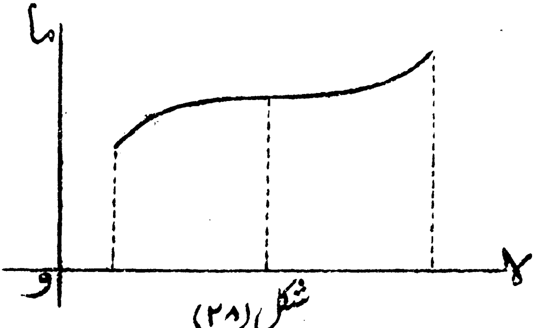
اس کے برعکس بیانات کہ اگر فہ (لا) کسی وسعت میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ بڑھتا ہو تو اس وسعت میں لا کی کسی قیمت کے لئے

فہ (لا) منفی نہیں ہوسکتا اور اگر فہ (لا) لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہو تو فہ (لا) مثبت نہیں ہوسکتا۔ یہ سب بیانات فہ (لا) کی تعریف سے فوراً مترشح ہوتے ہیں۔ ۹۷

نیز اگر فہ (لا) چند ایک علیحدہ نقطوں کی محدود تعداد پر صفر بھی ہو بشرطیکہ باقی ہر جگہ مثبت ہو تو فہ (لا) استقلال کے ساتھ بڑھے گا۔ مثلاً فرض کرو کہ فہ (لا۲) = ۰ اور سوائے اس صورت کے باقی وقفہ میں لا = لا۱ سے لا = لا۲ تک جہاں لا۲ > لا۱ فہ (لا) مثبت ہے۔ فہ (لا) کی کم سے کم قیمت اس وقفہ کے اندر واقع نہیں ہوسکتی اور نہ ہی اوپر کے سرے لا = لا۲ پر۔ بلکہ اسے لازماً نچلے سرے (لا = لا۱) پر واقع ہونا چاہئے۔ اسلئے

فہ (لا۲) > فہ (لا۱)

یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر فہ (لا) مثبت ہو لا = لا۱ سے لا = لا۲ تک اور موخر الذکر قیمت کی صورت میں صفر ہوتا ہو



شکل (۲۸)

اسی طرح اگر فہ (لا) ایک علیحدہ نقطوں کی محدود تعداد پر صفر ہوتا ہو لیکن باقی ہر جگہ منفی ہو تو فہ (لا) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔

مثال ۱ ۔ ما = جم لا − (۱ − ½ لا²)

اس سے فر ما / فر لا = لا − جب لا

اور یہ لا کی مثبت قیمتوں کے لئے مثبت ہے۔ چونکہ ما ایک جفت تفاعل ہے اور لا = ۰ کے لئے معدوم ہوتا ہے اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{۱} > \text{جم لا} > \text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}}$$

نیز اگر

$$\text{ما} = \text{جب لا} - \left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}}\,\text{لا}^{\text{۳}}\right)$$

تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جم لا} - \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}}\right)$$

جس کا مثبت ہونا ثابت ہو چکا ہے۔ اس لئے چونکہ ما = ۰ جبکہ لا = ۰، پس

$$\text{لا} > \text{جب لا} > \text{لا} - \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۶}}$$ لا کی مثبت قیمتوں کے لئے۔

اگر لا منفی ہو تو ترتیب الٹ جانا چاہئے۔

مثال ۲۔ اگر ما = مس لا - لا ۹۸

تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{قط}^{\text{۲}}\,\text{لا} - \text{۱} = \text{مس}^{\text{۲}}\,\text{لا}$$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ مثبت ہے سوائے لا = ۰، π، ۲π، ... کے لئے۔ اسلئے لا کے بڑھنے سے ما استقلال کے ساتھ ہر ایسی وسعت بھر میں بڑھتا ہے جسکے اندر نقاط عدم تسلسل (لا = $\frac{\pi}{\text{۲}}$، $\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}$، ....) میں سے کوئی ایک بھی شامل نہیں ہوتا۔

پس باآسانی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ۰ اور $\frac{\pi}{\text{۲}}$ کے درمیان

$$\text{مس لا} - \text{لا} = \text{۰}$$

کی کوئی اصل نہیں اور اسکی ایک اور صرف ایک اصل ہے $\frac{\pi}{\text{۲}}$ اور $\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}$ کے درمیان اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس نتیجہ کی ترسیمی عمل سے تصدیق ہو سکتی ہے۔ اگر خطوط

$$\text{ما} = \text{مس لا}،\quad \text{ما} = \text{لا}$$

کی ترسیمیں بنائی جائیں تو انکے نقاط تقاطع سے لا کی وہ قیمتیں معلوم ہونگی جنکے لئے

سس لا = لا

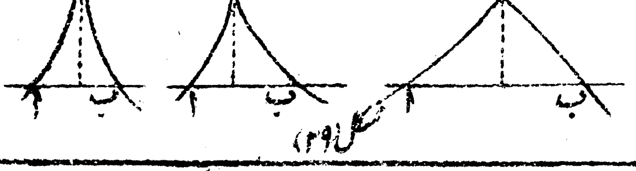
۴۹۔ تفاعل کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کے وقفہ میں مشتق صفر ہوتا ہے۔

اگر فہ(لا) صفر ہوتا ہو لا = ا اور لا = ب کے لئے اور ا، ب کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے فہَ(لا) محدود ہو تو ا اور ب کے درمیان لا کی ایک نہ ایک قیمت کے لئے فہَ(لا) صفر ہوگا۔

کیونکہ یا تو فہ(لا) سراسر وقفہ ا تا ب میں مستقل طور پر صفر ہوگا یا (دفعہ ۱۸ کی رو سے) اس وقفہ کے اندر لا کی کسی قیمت لا کے لئے اسکی بڑی سے بڑی یا چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوگی۔ پہلی صورت میں فہَ(لا) = تمام وقفہ میں اور دوسری صورت میں فہَ(لا) نہ مثبت ہوسکتا ہے اور نہ منفی (دفعہ ۴۸)، اس لئے اسے لازماً صفر ہونا چاہئے کیونکہ مفروضہ کے مطابق یہ محدود ہے۔

اس مسئلہ کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ اگر کوئی منحنی محور لا سے دو نقطوں پر ملے اور منحنی کا ڈھال ہر جگہ محدود ہو تو ان کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور ہوگا جس پر کا مماس محور لا کے متوازی ہو۔ مثال کے طور پر دیکھو جب لا کی ترسیم صفحہ ۴۲ پر نیز شکل ۹ صفحہ ۳۶۔

یہ احتیاط سے یاد رہے کہ اوپر کے استدلال میں یہ شرائط ضروری ہیں کہ فہ(لا) اور فہَ(لا) میں سے ہر ایک کی تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب میں ایک معین (اور اس لئے محدود) قیمت ہونی چاہئے۔ ذیل کی اشکال میں مختلف صورتیں ہیں جنکے لئے ایک یا زیادہ شرائط کے ٹوٹ جانیکے باعث نتیجہ قائم نہیں رہتا۔



شکل (۴۹)

۴۹ اس دفعہ کے مسئلہ کی ذرا زیادہ وسیع شکل یہ ہے کہ اگر فہ (لا) کی وہی قیمت (بہ) ہو لا = ا اور لا = ب دونوں کے لئے اور اگر فہ (لا) فہ' (لا) مسلسل اور محدود ہونے کے متعلق وہی اوپر کے شرائط پورا کریں تو مشتق تفاعل فہ' (لا)، ا اور ب کے درمیان لا کی ایک نہ ایک قیمت کے لئے معدوم ہوگا۔ اوپر کے استدلال کو فہ (لا) - بہ پر لگانے سے یہ واضح ہے۔

مثال ۱۔ اگر فہ (لا) = (لا - ا) (لا - ب)

تو فہ' (لا) = ۲ لا - (ا + ب)

اس لئے فہ' (لا) صفر ہوتا ہے لا = ½ (ا + ب) کے لئے جو ا اور ب کے درمیان ہے۔

مثال ۲۔ اگر فہ (لا) = جب لا / لا تو فہ' (لا) = (لا جم لا - جب لا) / لا²

یہاں فہ (لا) = ۰ جبکہ لا = π اور لا = ۲π، اسلئے فہ' (لا) کو لا کی کسی درمیانی قیمت کے لئے صفر ہونا چاہئے۔ یہ دفعہ ۴۴ مثال ۲ کے نتیجہ کے مطابق ہے جہاں ثابت کیا گیا تھا کہ مساوات لا = مس لا کی ایک اصل π اور ۳π/۲ کے درمیان ہے۔

۵۰۔ مساواتوں کے نظریہ میں استعمال۔

اگر فہ (لا)، لا کا منطق صحیح تفاعل ہو تو فہ (لا) اور اس کا مشتق فہ' (لا) دونوں لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے مسلسل (اور محدود) ہوتے ہیں اس لئے مساوات

فہ' (لا) = ۰ . . . . (۱)

کی کم از کم ایک حقیقی اصل مساوات

فہ (لا) = ۰ . . . . (۲)

کی ہر دو حقیقی اصلوں کے درمیان واقع ہوگی۔ اس نتیجہ کو رول کے مسئلہ کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور مساواتوں کے نظریہ میں یہ بڑی اہمیت رکھتا ہے۔

اس سے یہ سیدھا نتیجہ نکلتا ہے کہ (۲) کی زیادہ سے زیادہ ایک حقیقی اصل (۱) کی دو متصل اصلوں کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ یعنی (۱) کی اصلیں (۲) کی اصلوں کو جدا کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ اگر فا (لا) = ۴ لا^{۳} − ۲۱ لا^{۲} + ۱۸ لا + ۲۰

تو فا′ (لا) = ۱۲ لا^{۲} − ۴۲ لا + ۱۸ = ۶ (۲ لا − ۱) (لا − ۳)

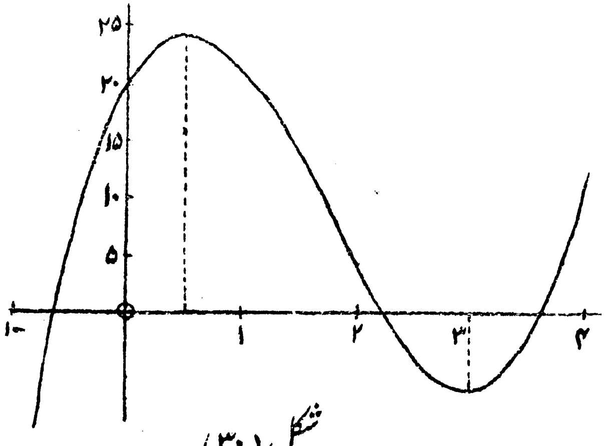
پس فا (لا) = ۰ کی حقیقی اصلیں اگر ہیں تو وقفوں −∞ اور $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$ اور ۳، ۳ اور +∞ کے درمیان بالترتیب واقع ہونگی۔ اب اگر

لا = −∞، $\frac{۱}{۲}$، ۳، +∞ تو

فا (لا) کی علامات ہیں −، +، −، +

پس فا (لا) کو اوپر کے وقفوں میں سے ہر ایک میں (دفعہ ۹) ایک دفعہ لازماً صفر ہونا چاہئے۔ اس لئے تین حقیقی اصلیں ہیں۔ ذیل کی شکل میں فا (لا) کی ترسیم درج ہے۔

۱۰۰



شکل (۳۰)

اگر فا (لا) کی شکل کی مسلسل ترمیم سے مثلاً ایک مستقل کے جمع یا تفریق کرنے سے

اس کی دو اصلیں باہم منطبق کردیجائیں تو فہَ (لا) = ۰ کی اصل بھی جو ان کے درمیان واقع ہے ان کے ساتھ منطبق ہو جائیگی۔

پس فہ (لا) = ۰ کی دوہری اصل فہَ (لا) = ۰ کی بھی اصل ہوتی ہے

زیادہ عام طور پر فہ (لا) = ۰ کی ر ویں رتبہ کی ضعفی اصل کو اگر ایسا خیال کیا جائے کہ یہ الگ الگ ر اصلوں کے منطبق ہونے سے پیدا ہوتی ہے تو فہَ (لا) = ۰ کی (ر - ۱) درمیانی اصلیں ہونگی جو منطبق ہونگی۔

اس سے کسی دی ہوئی جبریہ مساوات کی ضعفی اصلیں اگر کوئی ہوں تو ان کے معلوم کرنے کا طریقہ اصل ہوتا ہے۔ اگر فہ (لا) کی ر ضعفی اصل عہ ہو تو

فہ (لا) = (لا - عہ)^{ر} خہ (لا) ....(۳)

جہاں خہ (لا) منطق صحیح تفاعل ہے۔ اس لئے

فہَ (لا) = (لا - عہ)$^{ر-۱}$ {ر خہ (لا) + (لا - عہ) خہَ (لا)} ....(۴)

یعنی (لا - عہ)$^{ر-۱}$ تفاعلوں فہ (لا) اور فہَ (لا) کا مشترک جزو ضربی ہوگا۔ اور یہ ظاہر ہے کہ (لا - عہ)$^{ر-۱}$ مشترک جزو ضربی نہیں ہوگا جب تک کہ فہ (لا)، (لا - عہ)^{ر} پر تقسیم نہ ہو سکے۔

پس اگر فہ (لا) کی کوئی ضعفی اصلیں ہوں تو انہیں معمولی جبریہ طریقوں کی مدد سے فہ (لا) اور فہَ (لا) کے مشترک اجزائے ضربی دریافت کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال ۲۔ فہ (لا) = لا^{۴} - ۹ لا^{۲} + ۴ لا + ۱۲

فہَ (لا) = ۴ لا^{۳} - ۱۸ لا + ۴

معمولی جانچ سے حاصل ہوتا ہے کہ لا - ۲، فہ (لا) اور فہَ (لا) کا مشترک جزو ضربی ہے، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (لا - ۲)^{۲} فہ (لا) کا جزو ضربی ہے۔ باقی کے اجزا آسانی سے معلوم ہو جاتے ہیں، پس

فہ (لا) = (لا - ۲)^{۲} (لا + ۱) (لا + ۳)

مثال ۳ - شرط مطلوب ہے کہ کعبی مساوات لا^{3} + ق لا + ر = ۰ ...... (۵) ۱۰۱
کی دوہری اصل ہو۔

دوہری اصل اگر ہو تو اسے اس مساوات کو پورا کرنا چاہیے

۳ لا^{2} + ق = ۰ یا لا = ± $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ق .... (۶)

(۵) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ر = ± $\frac{2}{3}$ $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ق^{2} یا ر^{2} = - $\frac{4}{27}$ ق^{3} ..... (۷)

جو مطلوبہ شرط ہے۔

۵۱ - اعظم اور اقل قیمتیں۔

مسلسل تفاعل کی "اعظم" قیمت وہ ہے جو بڑی ہو اور "اقل" قیمت وہ ہے جو چھوٹی ہو دونوں طرف کی بالکل پاس کی قیمتوں سے۔

زیادہ صحت کے ساتھ اسے یوں بیان کر سکتے ہیں۔ فہ (لا$_{1}$) اعظم ہوگا لا = لا$_{1}$ کے لئے اگر دو مثبت مقداریں صہ، صہ' ایسی معلوم ہو سکیں کہ فہ (لا$_{1}$) بڑا ہو ہر ایسی قیمت سے جو وقفہ لا = لا$_{1}$ - صہ سے لا = لا$_{1}$ + صہ' کے درمیان لا کی کسی اور قیمت کے جواب میں فہ (لا) اختیار کرتا ہے۔ ایسے ہی اقل قیمت کے لئے۔

چونکہ تفاعل کی ایسی قیمتوں کا باہم مقابلہ کیا جاتا ہے جو لا$_{1}$ کے بالکل پاس ہوں اس لئے اعظم قیمت ضروری نہیں کہ تفاعل کی بڑی سے بڑی قیمت ہو اور اقل چھوٹی سے چھوٹی۔ دیکھو شکل (۲۰)

فی الحال ہم بحث کو اس صورت تک محدود رکھیں گے (اور اس کے اندر تمام ضروری اطلاقات شامل ہیں) جہاں وسعت زیر بحث کے تمام نقطوں پر مشتق قابل تعین اور محدود ہو۔ دفعہ ۴۸ کے استدلال سے ظاہر ہے کہ اگر فہ (لا$_{1}$) اعظم یا اقل ہو تو فہ' (لا$_{1}$) صفر سے مختلف نہیں ہو سکتا۔

کیونکہ اگر یہ مثبت یا منفی ہو تو لا کی عین پڑوس میں ایسے نقطے ہونگے جنکے لئے فہ(لا) بڑا ہوگا اور دوسروں کے لئے چھوٹا ہوگا تفاعل کی قیمت فہ(لا۱) سے۔ پس صورت مجوزہ میں فہ(لا۱) کی اعظم یا اقل قیمت کے لئے پہلی شرط یہ ہوگی کہ فہ(لا۱) معدوم ہو۔

یہ شرط ضروری ہے کافی نہیں۔ مزید تحقیق کی خاطر فرض کرو کہ نقطہ لا۱ کے دونوں طرف ایک خاص وقفہ ہے جس کے اندر سراسر فہ(لا) یا تو بالکل مثبت ہے یا بالکل منفی*۔ اب اگر فہ(لا)، لا کی ان تمام قیمتوں کے لئے جو لا۱ - صہ اور لا۱ کے درمیان واقع ہوں مثبت ہو تو فہ(لا)
۱۰۲ [دفعہ ۴۸] اس وقفہ کے اندر استقامت کے ساتھ بڑھے گا اور اگر فہ(لا) وقفہ لا۱ اور لا۱ + صہ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے منفی ہو تو فہ(لا) استقامت کے ساتھ اس وقفہ میں گھٹیگا۔ پس اگر یہ دونوں شرائط پورے ہوں تو فہ(لا۱) اعظم ہوگا۔

یہ ظاہر ہے کہ اگر علامات اس طور پر نہ ہوں تو فہ(لا۱) تفاعل کی بڑی سے بڑی قیمت وقفہ لا۱ - صہ اور لا۱ + صہ کے درمیان نہیں ہو سکتی۔

اسے مختصراً یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ فہ(لا۱)، فہ(لا) کی اعظم قیمت ہو یہ ہے کہ فہ(لا) علامت بدلے + سے - جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت لا۱ میں سے گذرے۔

اسی طرح حاصل ہوتا ہے کہ ضروری اور کافی شرط اس امر کے لئے کہ فہ(لا۱)، فہ(لا) کی اقل قیمت ہو یہ ہے کہ فہ(لا) علامت بدلے - سے + جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت لا۱ میں سے گذرے۔

---

* یعنی ایسی صورتوں کو ہم خارج کر دیتے ہیں جہاں فہ(لا) کسی وقفہ کے اندر جس میں لا۱ شامل ہوتا ہے لاانتہا بار علامت بدلتا ہے۔ نقطہ لا = ۰ تفاعل لا۲ جب (۱/لا) میں ایک ایسی مثال ہے۔

ہندسی زبان میں اسے یوں بیان کرتے ہیں۔ جب ایک منحنی کا معین اعظم ہو تو ڈھال کو مثبت سے بدلکر منفی ہونا چاہئے اور جب معین اقل ہو تو ڈھال کو منفی سے بدلکر مثبت ہو جانا چاہیے۔ اوپر کی اشکال سے اسکی کافی توضیح ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر دیکھو شکلیں ۹، ۱۲، ۱۴، ۲۰۔

جب کبھی مشتق تفاعل فہ' (لا) معدوم ہو تو اصلی تفاعل فہ (لا) کے بڑھنے کی شرح (دفعہ ۲۶) تھوڑی دیر کے لئے صفر ہو جاتی ہے اور اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ فہ (لا) کی قیمت "ساکن" ہے۔ جیسا پہلے بیان کیا گیا ہے یہ ضروری نہیں کہ ساکن قیمت اعظم یا اقل قیمت ہو کیونکہ ایسی صورتیں پیدا ہوتی ہیں جہاں فہ' (لا) صفر ہوتا ہے مگر علامت نہیں بدلتا۔

اکثر دیکھے صورتوں میں مشتق تفاعل فہ' (لا) مسلسل ہوتا ہے نیز قابل دریافت (اور محدود) تب یہ صرف قیمت صفر میں سے گذرتے ہی علامت بدل سکتا ہے نیز دفعہ ۹ سے ظاہر ہے کہ اگر تبدیلیاں + سے - اور - سے + ایک سے زیادہ ہوں تو یہ باری باری واقع ہونگی۔ اس لئے اعظم اور اقل قیمتیں بھی باری باری یا متبادلاً واقع ہوں گی۔ دیکھو شکل ۱۴ صفحہ (۲۴)

مثال ۱ - خط مستقیم پر ایک ذرہ حرکت کر رہا ہے، اس کا فاصلہ س جو ایک اختیاری مبدأ سے ناپا شروع کیا گیا ہے اعظم ہوگا جبکہ رفتار $\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)$ علامت بدلتی ہے مثبت سے منفی اور اقل ہوگا جبکہ رفتار منفی سے مثبت ہوتی ہے۔

مثلاً ایک ذرہ جو جاذبہ ارض کے ماتحت اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس کے لئے

$$\text{س} = \text{ع ت} - \frac{1}{2}\text{ج ت}^2 \text{ ، } \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ع} - \text{ج ت}$$

پس $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ مثبت سے منفی ہوتا ہے جیسے ت بڑھتے بڑھتے قیمت $\frac{\text{ع}}{\text{ج}}$

میں سے گذرتا ہے۔ اونچائی ہ اسوقت زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل معلوم کرو جس کا گھیرا دیا گیا ہو۔ ۱۰۳

گھیرے کو ۲ ا فرض کرو۔ دو متصل اضلاع کے طول لا اور ا - لا لئے جا سکتے ہیں۔

پس ہمیں تفاعل لا (ا - لا) ....(۱) کی اعظم قیمت دریافت کرنا ہے۔

اس کا مشتق ا - ۲ لا ہے جو علامت بدلتا ہے + سے - جیسے لا کی قیمت ½ا میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

مثال ۳۔ ذیل کے تفاعل کی اعظم و اقل قیمتیں دریافت کرو۔

فہ (لا) = ۴ لا³ - ۲۱ لا² + ۱۸ لا + ۲۰ .... (۲)

فہ' (لا) = ۱۲ (لا - ½) (لا - ۳) .... (۳)

یہ تفاعل صرف اس وقت علامت بدل سکتا ہے جبکہ لا تینوں ½ اور ۳ میں سے گذرے۔ جب 'لا' ½ سے ذرا کم ہو تو دوسرے اور تیسرے اجزائے ضربی کی علامات -، - ہوتی ہیں، لیکن جب 'لا' ½ سے ذرا بڑا ہو تو یہ علامتیں +، - ہوتی ہیں۔ اس لئے جب 'لا' قیمت ½ میں سے گذرتا ہے تو فہ' (لا) علامت بدلتا ہے + سے -؛ اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت ۳ میں سے گذرتا ہے تو فہ' (لا) علامت بدلتا ہے - سے +، اسلئے فہ (لا) اعظم ہے جبکہ لا = ½ اور اقل ہے جبکہ لا = ۳، (۲) میں لا کی یہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے اعظم قیمت ¼ ۲۴ اور اقل -۷؛ دیکھو شکل ۳۰۔

مثال ۴۔ فہ (لا) = ۲ لا / (۱ + لا²) .... (۴)

فہ' (لا) = ۲ (۱ - لا²) / (۱ + لا²)² .... (۵)

یہ علامت بدل سکتا ہے صرف لا = ± ۱ کے لئے۔ جیسے لا بڑھتے بڑھتے (جبری طور پر) قیمت -۱ میں سے گذرتا ہے، ۱ - لا² علامت بدلتا ہے - سے +؛ اور جیسے لا +۱ میں سے بڑھتا ہے ۱ - لا² علامت بدلتا ہے + سے -، اسلئے

لا = -۱ کے لئے فہ(لا) کی اقل قیمت ہے اور یہ -۱ ہے اور لا = ۱ کے لئے اعظم قیمت = ۱، دیکھو شکل ۱۳ صفحہ (۴۰)

مثال ۵- فہ(لا) = $\frac{\text{۲لا}}{\text{۱ - لا}^۲}$ .... (۶)

فہَ(لا) = $\frac{\text{۲(۱ + لا}^۲\text{)}}{\text{(۱ - لا}^۲\text{)}^۲}$ .... (۷)

یہاں فہَ(لا) ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور تفاعل فہ(لا) کی کوئی محدود اعظم و اقل قیمتیں نہیں ہوتیں۔ دیکھو شکل ۱۱ صفحہ (۳۹)

مثال ۶- قائم مستدیر اسطوانہ معلوم کرو جس کا حجم دیا ہوا ہو اور جس کی سطح کا رقبہ کم سے کم ہو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کا نیم قطر لا اور ارتفاع ما ہے۔ سطح ہوگی

۲ π لا^۲ + ۲ π لا ما

۱۰۴ اگر دیا ہوا حجم ۲ π ر^۳ ہو تو لا^۲ ما = ۲ ر^۳

ما کو ساقط کرنے سے جس جملہ کو اقل بنانا ہے وہ ہے لا^۲ + $\frac{\text{۲ر}^۳}{\text{لا}}$ اس کا مشتق تفاعل ہے ۲ (لا - $\frac{\text{ر}^۳}{\text{لا}^۲}$) اور یہ علامت بدلتا ہے جیسے لا قیمت ر میں سے بڑھتا ہے اور یہ تبدیلی ہے - سے + ، اس لئے لا = ر سے سطح کم سے کم ہوتی ہے اور تب ما = ۲ر، پس اسطوانہ کا ارتفاع قطر کے مساوی ہے۔

طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ایسے اسطوانہ کی سطح مساوی حجم کے کرہ کی سطح کا ...... ۱۴۴ء۱ گنا ہے۔

مثال ۷- تفاعل ع = $\frac{\text{ا لا}^۲\text{ + ۲ ھ لا + ب}}{\text{ا' لا}^۲\text{ + ۲ ھ' لا + ب'}}$ .... (۸)

کی "کھڑی" یا اصل قیمتیں دریافت کرو۔

(ا' لا^۲ + ۲ ھ' لا + ب') ع = ا لا^۲ + ۲ ھ لا + ب .... (۹)

تفرق کرنے اور $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

(ا لا + ھ) ع = ا لا + ھ .... (۱۰)

لا سے ضرب دیکر (۹) سے منفی کرو تو

(ھ لا + ب) ع = ھ لا + ب .... (۱۱)

(۱۰) اور (۱۱) کے درمیان ع ساقط کرنے سے لا کی مطلوبہ قیمتیں ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلوں کے طور پر حاصل ہونگی

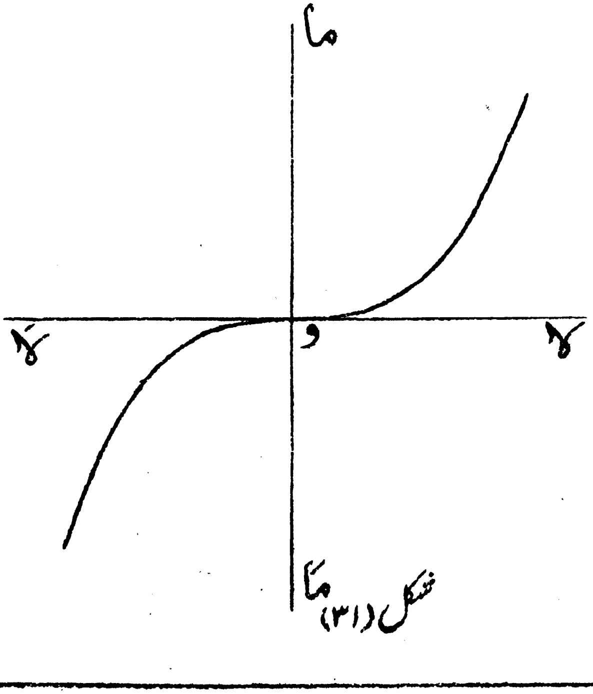
(ا ھ - ا ھ) لا² + (ا ب - ا ب) لا + (ھ ب - ھ ب) = ۰ (۱۲)

بخلاف اس کے اگر لا کو ساقط کیا جائے تو ع کی اپل قیمتیں ذیل کی مساوات درجہ دوم سے حاصل ہوتی ہیں

(ا ب - ھ²) ع² - (ا ب + ب ا - ۲ ھ ھ) ع + ا ب - ھ² = ۰ (۱۳)

مثال ۸ - اپل قیمت کی سادہ سے سادہ مثال جو اعظم یا اقل نہیں ہے ذیل کے تفاعل سے حاصل ہوتی ہے

فہ (لا) = لا³ .... (۱۴)



شکل (۳۱)

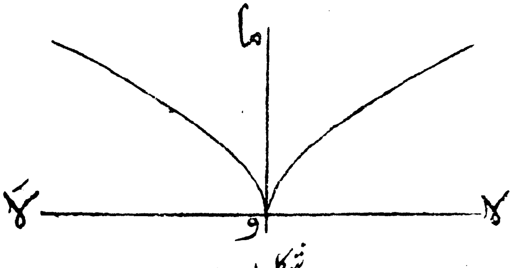
$\text{فَہ}(\text{لا}) = ۲\,\text{لا}^{۲}$، جو لا = ۰ کے لئے صفر ہوتا ہے مگر قیمت صفر میں سے بڑھنے سے علامت نہیں بدلتا۔ اس لئے فہ (لا) اگرچہ "اجل" ہے مگر لا = ۰ کے لئے اعظم یا اقل نہیں ہے۔ شکل ۳۱ میں $\text{لا}^{۳}$ کی ترسیم دی گئی ہے۔

105 بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ فَہ (لا) جو عام طور پر مسلسل ہو لا کی کسی اکیلی قیمت کے لئے غیر مسلسل ہو جاتا ہے، اگر عدم تسلسل کے ساتھ علامت کی تبدیلی بھی وقوع پذیر ہو جبکہ لا بڑھتے بڑھتے قیمت زیر بحث میں سے ہو کر گذرے تو پہلے کے استدلال کی بنا پر اعظم یا اقل قیمت پیدا ہوگی۔

مثال ۹۔ اگر $\text{فہ}(\text{لا}) = ۱ + \text{لا}^{\frac{۲}{۳}}$ ....(۱۵)

تو $\text{فَہ}(\text{لا}) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{\text{لا}}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ ....(۱۶)

جیسے لا قیمت صفر میں سے بڑھتا ہے فَہ (لا) $-\infty$ سے $+\infty$ تک بدلتا ہے، اس لئے فہ (لا) اقل ہے لا = ۰ کے لئے۔ دیکھو شکل ۳۲۔



شکل (۳۲)

نیز شکل ۲۹ میں ایک نقطہ واقع ہوتا ہے جہاں فَہ (لا) غیر مسلسل ہے اور ایک لخت ایک محدود مثبت قیمت سے محدود منفی قیمت کی طرف گذرتا ہے معین وہاں اعظم ہے۔

106 ## ۵۲۔ جبریہ طریقے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ اعظم اقل قیمتوں کے بعض مشہور سوالات محض جبریہ طریقوں سے بغیر احصا کی مدد کے بآسانی حل ہو سکتے ہیں، یہ خاص طور پر دو درجی جملوں کی صورت میں ہے "تکمیل مربع" کا طریقہ ان سب پر آسانی سے

لگ سکتا ہے۔

سوالات کا حل اکثر اوقات ذیل کی متماثلات پر لا کے منحصر کیا جا سکتا ہے

$$\text{لا}\,\text{ما} = \frac{1}{4}\left\{(\text{لا}+\text{ما})^2 - (\text{لا}-\text{ما})^2\right\} \quad (1)$$

$$(\text{لا}+\text{ما})^2 = (\text{لا}-\text{ما})^2 + 4\,\text{لا}\,\text{ما} \quad (2)$$

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2 = \frac{1}{2}\left\{(\text{لا}+\text{ما})^2 + (\text{لا}-\text{ما})^2\right\} \quad (3)$$

پس اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل جمع (لا + ما) دیا گیا ہو تو ان کا حاصل ضرب (لا ما) بڑے سے بڑا ہو گا جبکہ وہ باہم مساوی ہوں۔

اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل ضرب دیا گیا ہو تو ان کا حاصل جمع چھوٹے سے چھوٹا ہو گا جبکہ یہ باہم مساوی ہوں۔

اگر دو مقداروں کا مجموعہ دیا گیا ہو تو ان کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہو گا جبکہ یہ باہم مساوی ہوں۔

مثال ۱۔ دفعہ ۱۵ مثال ۲ میں

$$\text{لا}(\text{ا}-\text{لا}) = \frac{1}{4}\text{ا}^2 - \left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{2}\right)^2$$

چونکہ آخری رقم صفر سے نیچے نہیں جا سکتی اس لئے اس جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{4}\text{ا}^2$ ہے جبکہ $\text{لا} = \frac{\text{ا}}{2}$

مثال ۲۔ جملہ $2\,\text{لا}^2 - 3\,\text{لا} + 2$ اس شکل میں رکھا جا سکتا ہے

$$2\left(\text{لا}^2 - \frac{3}{2}\text{لا} + 1\right) = 2\left(\text{لا} - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$$

اس جملہ کی کم سے کم قیمت $\frac{7}{8}$ ہے جبکہ $\text{لا} = \frac{3}{4}$

مثال ۳۔ دئے ہوئے دائرہ میں جو بڑے سے بڑا مستطیل بن سکتا ہے اسے معلوم کرو۔

اگر اضلاع ۲ لا، ۲ ما ہوں تو لا ما کو اعظم بنانا مقصود ہے اس شرط کے ماتحت کہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$$2\,\text{لا}\,\text{ما} = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 - (\text{لا}-\text{ما})^2 = \text{ا}^2 - (\text{لا}-\text{ما})^2$$

جو بڑے سے بڑا ہو گا جبکہ لا = ما، اس لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا اندرونی مستطیل

مربع ہے۔

مثال ۴۔ ا مم طہ + ب سس طہ کی کم سے کم قیمت معلوم کرو طہ کی اُن قیمتوں کے لئے جو صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہوں۔

ا مم طہ، ب سس طہ کا حاصل ضرب مستقل ہے، اس لئے ان کا مجموعہ ۱۰۷
کم سے کم ہے جب وہ مساوی ہوں یعنے جب

سس طہ = (ا/ب)$^{\frac{1}{2}}$ اسلئے مجموعہ کی کم سے کم قیمت ہے ۲ ا$^{\frac{1}{2}}$ ب$^{\frac{1}{2}}$۔

مثال ۵۔ گردشی مکافی نما کو اس کے محور پر عمود دار مستوی سے کاٹنے سے قطعہ بنایا گیا ہے، اس کے اندر جو بڑے سے بڑا اسطوانہ بن سکتا ہے اسے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مکافی نما، ما^2 = ۴ ا لا ....(۴)

کو محور لا کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتا ہے، محور کا طول ل ہے اور مبدا سے اسطوانہ کے قریب ترین سرے کا فصلہ لا ہے۔ اسطوانہ کا حجم ہے

π ما^2 (ل − لا) = π ما^2 (ل − ما^2/۴ا) ......(۵)

اب مقادیر ما^2 اور ۴ا ل − ما^2 کا مجموعہ مستقل ہے، ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جب یہ مساوی ہوں یعنی جب

ما^2 = ۲ ا ل یا لا = $\frac{1}{2}$ ل ....(۶)

اس لئے اسطوانہ کی اونچائی مقطوعہ کی اونچائی کا نصف ہے۔

۵۳۔ متعدد متغیروں والے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں۔

یہاں سرسری طور پر ذکر کر دیا جائیگا کہ دو یا زیادہ متبوع متغیروں کی صورت میں اوپر کے نتائج کی توسیع کیونکر ہو سکتی ہے۔

سب سے پہلے ہم تفاعل

ع = فہ (لا، ما) ....(۱)

کی اعظم اور اقل قیمتوں کے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

پہلی شرط یہ ہے کہ لازماً ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = ۰ \text{ ، } \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں تفرقی سر جزوی ہیں دیکھو دفعہ ۴۳ - کیونکہ اگر ع تفاعل کی کسی اور ایسی قیمت سے جو لا ، ما کو خاص حدود کے اندر بدلنے سے حاصل ہو، بڑا (یا چھوٹا) ہو تو ع یوجوہ مستحکم اعظم (یا اقل ہوگا) جبکہ ما کو مستقل رکھا جائے اور صرف لا بدلے - اس سے بالعموم لازم آتا ہے کہ (دفعہ ۱۵) $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = ۰$ ، اسی طرح ع کو اعظم (یا اقل) ہونا چاہئے جبکہ لا کو مستقل رکھا جائے اور صرف ما بدلے -

اس سے لازم آتا ہے کہ $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = ۰$

پہلے کی طرح یہ شرائط ضروری ہیں کافی نہیں - عام صورت میں اس سوال
۱۰۸ کی مزید تحقیق آئندہ سولھویں باب میں ہوگی لیکن اکثر ایسا ممکن ہوتا ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں غیر متعلق ذرائع سے مل جاتی ہیں اور ان میں تشخیص ہو سکتی ہے - شرائط (۲) سے ایسی صورتوں میں سب کچھ مل جاتا ہے جو تحلیلی نقطہ نظر سے ضروری ہے -

مثال - دئے ہوئے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح معلوم کرو جس کی سطح کم سے کم ہو
فرض کرو کہ لا ، ما ، ی کنارے ہیں اور $ر^۳$ دیا ہوا حجم ہے -

چونکہ $\text{لا ما ی} = ر^۳ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$ تفاعل جو کم سے کم ہوگا وہ ہے

$$ع = \text{لا ما} + \text{ما ی} + \text{ی لا} = \text{لا ما} + \frac{ر^۳}{\text{لا}} + \frac{ر^۳}{\text{ما}} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

شرائط $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = ۰ \text{ ، } \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = ۰$ سے ملتا ہے

$\text{لا}^۲ \text{ما} = ر^۳$ ، $\text{لا ما}^۲ = ر^۳$ اور ان مساواتوں کا حقیقی حل صرف یہی ہے کہ

$\text{لا} = \text{ما} = ر$ ، نیز $\text{ی} = ر$ -

لا، ما چونکہ اس سوال میں لازماً مثبت ہیں اس لئے (۴) سے ظاہر ہے کہ متوازی السطوح کی سطح کی نچلی انتہا ہے - اوپر کی تحقیق سے ظاہر ہے کہ یہ انتہا نہیں پہنچتی جب تک کہ شکل مکعب نہ ہو -

دفعہ ۵۲ کے مطابق کئی سوالوں کا حل معلومہ جبری متماثلات سے حاصل ہو سکتا ہے مثلاً

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2=\frac{1}{3}\left\{(\text{لا}+\text{ما}+\text{ی})^2+(\text{ما}-\text{ی})^2+(\text{ی}-\text{لا})^2+(\text{لا}-\text{ما})^2\right\}\cdots(5)$$

$$\text{ما ی}+\text{ی لا}+\text{لا ما}=\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2-\frac{1}{2}\left\{(\text{ما}-\text{ی})^2+(\text{ی}-\text{لا})^2+(\text{لا}-\text{ما})^2\right\}\cdots(6)$$

یعنی اگر ایک خط مستقیم کو تین حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ان حصوں کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ یہ حصے مساوی ہوں -

متوازی السطوح جو ایک دائرہ کے اندر ($\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2=\text{ل}^2$) بن سکے اس کی سطح زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے جبکہ یہ مکعب ہو -

۵۴ - تفرقوں کی ترقیم

دفعہ ۴۸ کی مساوات

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}=\text{فہَ}(\text{لا})+\text{ثہ}\cdots\cdots\cdots(1)$$

کی طرف پھر ہم رجوع کرتے ہیں - اسے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\text{مف ما}=\text{فہَ}(\text{لا})\,\text{مف لا}+\text{ثہ مف لا}\cdots(2)$$

جیسے مف لا، صفر کے قریب آتا جاتا ہے بائیں جانب کی دوسری رقم پہلی رقم کے مقابلہ میں خفیف اور کم ہو جاتی ہے کیونکہ ثہ کی انتہائی قیمت صفر ہے - اس لئے یہ تقریباً زیادہ صحیح ہوتا جاتا ہے کہ

$$\text{مف ما}=\text{فہَ}(\text{لا})\,\text{مف لا}\cdots\cdots\cdots(3)$$

۱۰۹ یہ مساوات ان معنوں میں پیدا نہیں ہوتی کہ طرفین تقریباً صفر ہیں بلکہ اس لحاظ سے کہ طرفین کی نسبت ایک کے قریب آتی جاتی ہے - ان معنوں میں اس مساوات کو التزاوات اس طرح

لکھتے ہیں

فرما = فہ (لا) فرلا ۔۔۔۔۔ (۴)

صفر ہونے والی مقداروں مف لا، مف ما کو تفرقے کہا جاتا ہے۔

نوٹ: ضابطہ (۴) میں فہ (لا) کا جو مقام ہے اس کے لحاظ سے اس کو "تفرقی سر" کہا جاتا ہے۔

طالب علم اوپر کے طرز بیان کو ناروا خیال نہ کرے، یہ محض دستور پر مبنی ہے۔ اس کے استعمال کی غرض صرف یہ ہے کہ جہاں کہیں حسابات میں مقداریں مف لا، مف ما شامل ہوتی ہوں جنہیں بعد میں انتہائی طور پر صفر ہو جانا ہے ان میں کسی منزل پر مف ما کی بجائے فہ (لا) مف لا رکھدیا جا سکتا ہے جبکہ یہ واضح ہو کہ دوسرے رتبہ کی مقداروں کے نظر انداز کر دینے سے آخری جواب کی صحت پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

۵۵ - چھوٹی تصحیحات کا محسوب کرنا

علاوہ اسکے مساوات مف ما = فہ (لا) مف لا کو ایک تقریبی ضابطہ خیال کر کے ایسی صورت میں استعمال کیا جا سکتا ہے جہاں متبوع متغیر کی چھوٹی تبدیلی سے جواب میں تفاعل کی قیمت پر اثر محسوب کرنا مطلوب ہو لیکن جیسا ہم نے اوپر دیکھا ہے باقی ماندہ غلطی یا خطا فہ (لا) فرلا کی محض ایک چھوٹی کسر ہوگی جبکہ مف لا نہایت چھوٹا ہو۔ اس کا مشہور عملی استعمال یہ ہے کہ کسی عددی نتیجہ میں جو کسی خاص معطیات کی بنا پر حاصل کیا گیا ہو غلطی یا خطا کی مقدار معلوم کی جائے جبکہ معطیات کے اندر کی خطاؤں اور نادرستیوں کی مقدار معلوم ہو۔

اوپر کا طریقہ ایک لحاظ سے مکمل نہیں۔ اس کے تقرب میں خطا کی مقدار کی کوئی نشان دہی نہیں۔ یہ کمی دفعہ ۵۹ کے مسئلے سے پوری کی جا سکتی۔ وہاں ثابت کیا جائیگا کہ

مف ما = فہ (لا) + ط) مف لا) مف لا ۔۔۔ (۲)

جہاں ط کوئی مقدار ہے صفر اور ا کے درمیان ۔ اس لئے اگر وقفہ لا تا لا + مف لا میں مشتق تفاعل کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں ا اور ب ہوں تو تقریب (۱) میں خطا کی مقدار ا (ا - ب) مف لا سے بڑی نہیں ہوسکتی ۔

مثال ۱ - لوک جیبوں کی جدول میں ایک منٹ کے لئے فرق محسوب کرو۔

اگر ما = لوک جب لا تو فرما / فرلا = مہ مم لا

اور مف ما = مہ مم لا مف لا تقریباً بشرطیکہ مف لا کو قوسی پیمانہ میں بیان کیا جائے۔ رکھو ۱۱۰

مف لا = آ کا قوسی ناپ = ۳۱ / ۱۰۸۰۰ = ۰۰۰۲۹۰۹ء

تو حاصل ہوگا مف ما = ۰۰۰۱۲۶۳ء × مم لا

یہ عددی جزو ضربی اس فرق کے مطابق ہے جو آ کے لئے ۵ ہ° کے قرب میں، جدولوں میں مندرج ہے ۔

مثال ۲ - ایک مثلث کے اضلاع ا، ب اور درمیانی زاویہ ج ناپا گیا ہے، اگر زاویہ کی پیمائش میں ذراسی خطا رہ جائے تو تیسرے ضلع کے محسوبہ طول ج میں خطا معلوم کرو ۔

ج² = ا² + ب² - ۲ ا ب جم ج .... (۳)

اس مفروضہ پر کہ صرف ج اور ج بدلیں

ج مف ج = ا ب جب ج مف ج

جس سے مف ج = (ا ب / ج) جب ج مف ج = ا جب ب مف ج

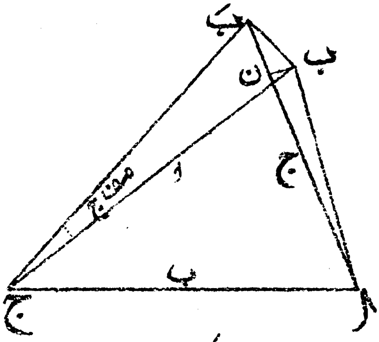
.... (۴)

یہ نتیجہ ہندسی طور پر بھی حاصل ہو سکتا ہے، مثلاً اگر شکل میں ∠ب ج ب = مف ج اور ب ن، ا ب پر عمود وار کھینچا جائے تو بالآخر

مف ج = بَ ان = بَ اب جم بَ ابَ ن

= اِ مف ج جب ج بَ ا = ا مف اج حب بَ

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے اگر قطع نظر کی جائے پھر ا کے ناپنے میں اگر



شکل (۳۳)

ذرا سی غلطی ہو تو اس کے جواب یعنی ج کے محسوب کرنے میں غلطی ہوگی اسے ہم اس مفروض کی بنا پر معلوم کرسکتے ہیں کہ ا ج صرف بدلتے ہیں چنانچہ

ج مف ج = (ا۔ ب جم ج) مف ا = ج مف ا بَ مف ا

یا مف ج = جم بَ مف ا . . . . (۵)

اوپر کے نتیجہ کی طرح اس کا بھی ہندسی ثبوت آسانی سے دیا جا سکتا ہے۔

۵۶ ۔ اوسط قیمت کا مسئلہ۔ نتائج

ذیل کا مسئلہ نہایت ضروری ہے اور یہ دفعہ ۴۹ کے مسئلہ کی توسیع ہے۔ اگر تفاعل فہ (لا) مسلسل ہو اور اس کا مشتق معین یا قابل دریافت قیمت رکھتا ہو تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب تک تو

$$\frac{\text{فہ (ب)} - \text{فہ (ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} = \text{فہَ (لا}_1\text{)} \quad . . . . (۱)$$

جہاں لا۱، لا کی ایک قیمت ہے ا اور ب کے درمیان۔

ذیل کے تفاعل پر غور کرو

فا(لا) - فا(ا) - [فا(ب) - فا(ا)] / [ب - ا] (لا - ا) ....(۲)

یہ تفاعل شرائط مذکورہ کے تحت لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے اور لا کی ان ہر دو قیمتوں لا = ا اور لا = ب کے لئے یہ صفر ہوتا ہے، پس اس کا مشتق تفاعل

فاَ(لا) - [فا(ب) - فا(ا)] / [ب - ا] ....(۳)

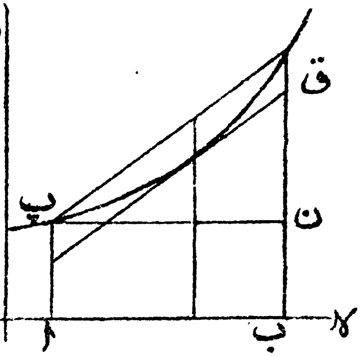
ا، ب کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت (لا۱) کے لیے لازماً صفر ہوگا۔ اس سے بیان (۱) ثابت ہوتا ہے۔

اس نتیجہ کا مفہوم اور اسکے ثبوت کی نوعیت قابل لحاظ ہے۔ ہندسی تعبیر اس کی حسب ذیل ہے۔ ذیل کی شکل میں

و ا = ا، و ب = ب

پ ا = فا(ا)، ق ب = فا(ب)

اور میل ق پ ن = ق ن / پ ن = [فا(ب) - فا(ا)] / [ب - ا] ......(۴)



شکل (۳۴)

پس مسئلہ کا مفہوم یہ ہے کہ (قیود مذکورہ کے ماتحت) پ اور ق کے درمیان کوئی ایک نقطہ ایسا ہے کہ جس پر منحنی ما = فہ (لا) کا مماس وتر پ ق کے متوازی ہے۔

وتر پ ق کی مساوات یہ ہے ۱۱۲

$$\text{ما} = \text{فہ}(\text{ا}) + \frac{\text{فہ}(\text{ب}) - \text{فہ}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}}(\text{لا} - \text{ا}) \quad \ldots\ldots(۵)$$

جس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے اور ظاہر ہے کہ جملہ (۲) منحنی کے معین اور وتر کے متناظر معین کا فرق ہے۔ یہ فرق پ اور ق پر صفر ہوتا ہے پس پ اور ق کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور ہونا چاہیے جہاں یہ فرق اعظم یا اقل ہو۔

مثال اگر فہ (لا) = لا^2 تو $\dfrac{\text{فہ}(\text{ب}) - \text{فہ}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} = \text{ب} + \text{ا}$

جو فہَ (لا) کی قیمت ہے جبکہ $\text{لا} = \frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})$

اس بیان کا ہندسی مرادف یہ ہے۔ مکافی کا کوئی وتر اس مماس کے متوازی ہوتا ہے جو وتر کی تنصیف کرنے والے قطر کے سرے پر کھینچا جائے۔

کسر $\dfrac{\text{فہ}(\text{ب}) - \text{فہ}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}}$ ......(۶) یعنی تفاعل کے اضافہ کی نسبت متغیر متبوع کے اضافہ کے ساتھ اس شرح کا ناپ ہے جسے ہم کہینگے تفاعل کے "اضافہ کی اوسط شرح" وقفہ (ب − ا) کے اندر۔ پس اس مسئلہ کا مفہوم یوں بیان ہو سکتا ہے کہ مذکورہ شرائط کے ماتحت کسی وقفہ میں اضافہ کی اوسط شرح، اسی وقفہ کے اندر کسی ایک نقطہ پر اضافہ کی اصلی شرح کے مساوی ہوگی۔

مثلاً وقت کے کسی وقفہ میں ایک متحرک نقطہ کی اوسط رفتار، اس وقفہ میں کسی ایک آن کی اصلی رفتار کے مساوی ہوگی۔

نتیجہ (۱) کو بیان کرنے کے اور بھی طریقے قابل توجہ ہیں۔ اس امر کو کہ لا، ا اور ب کے درمیان واقع ہے اس طور پر بیان کیا جا سکتا ہے

لا = ا + طہ (ب - ا) .... (۷)

جہاں طہ ایسی مقدار ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔ طہ کی ٹھیک قیمت بالعموم ا اور ب کی قیمتوں پر منحصر ہوگی۔ ب کی بجائے ا + ھ لکھنے سے مسئلہ اوسط قیمت کی بڑی مفید صورت حاصل ہوتی ہے

فہَ (ا + طہ ھ) = (فہ (ا + ھ) - فہ (ا)) / ھ .... (۸)

یا فہ (ا + ھ) = فہ (ا) + ھ فہَ (ا + طہ ھ) ...... (۹)

اب اگر ا کی بجائے لا اور ھ کی بجائے مف لا لکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے

مف فہ (لا) = فہَ (لا + طہ مف لا) مف لا ..... (۱۰)

مسئلہ ماقبل سے ایک ضروری استنباط یہ ہے کہ اگر

فہَ (لا) = ۰ .... (۱۱)

لا کی تمام قیمتوں کے لئے جو ایک خاص وقفہ کے اندر ہیں تو فہ (لا) اس ۱۱۳
تمام وقفہ میں مستقل ہوگا۔ کیونکہ اگر فہ (لا) بدلتا ہو تو فرض کرو کہ لا کی دو قیمتوں ا، ب کے لئے اس کی نامساوی قیمتیں ہیں۔ کسر

(فہ (ب) - فہ (ا)) / (ب - ا) .... (۱۲)

کی قیمت اس صورت میں صفر سے مختلف ہوگی اور اس لئے ان کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت ہوگی جس کے لئے فہَ (لا) صفر سے مختلف ہوگا، مگر یہ مفروض کے خلاف ہے۔

علاوہ اس کے اگر دو تفاعلوں فہ (لا) اور پہ (لا) کے مشتق ایک سعت کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مساوی ہوں تو وہ صرف بلحاظ ایک مستقل کے ایک دوسرے سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ کیونکہ مفروضہ کی رو سے

فہَ (لا) - پہَ (لا) = ۰ .... (۱۳)

یا ف / ف لا { فہ (لا) - پہ (لا) } = ۰ .... (۱۴)

اس لئے $\text{فہ}(\text{لا}) - \text{پہ}(\text{لا}) = \text{مستقل}$ ...... (۱۵) پہلی صورت کی رو سے

اگر (۲) کی بجائے زیادہ عام تفاعل لیا جائے یعنی

$$\text{فہ}(\text{لا}) - \text{فہ}(\text{ا}) - \frac{\text{فہ}(\text{ب}) - \text{فہ}(\text{ا})}{\text{پہ}(\text{ب}) - \text{پہ}(\text{ا})}\left[\text{پہ}(\text{لا}) - \text{پہ}(\text{ا})\right] \quad \text{...(۱۶)}$$

تو اسی طرح کے شرائط کے ماتحت یہ حاصل ہوتا ہے کہ اس کا مشتق تفاعل

$$\text{فہ}'(\text{لا}) - \frac{\text{فہ}(\text{ب}) - \text{فہ}(\text{ا})}{\text{پہ}(\text{ب}) - \text{پہ}(\text{ا})}\,\text{پہ}'(\text{لا}) \quad \text{.........(۱۷)}$$

لا کی کسی ایک قیمت کے لئے صفر ہوگا جو ا، ب کے درمیان ہو۔

یہ نتیجہ یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فہ}(\text{ا}+\text{ھ}) - \text{فہ}(\text{ا})}{\text{پہ}(\text{ا}+\text{ھ}) - \text{پہ}(\text{ا})} = \frac{\text{فہ}'(\text{ا}+\text{طہ}\,\text{ھ})}{\text{پہ}'(\text{ا}+\text{طہ}\,\text{ھ})} \quad \text{.........(۱۸)}$$

اس لئے اگر $\text{فہ}(\text{ا}) = ۰ = \text{پہ}(\text{ا})$ ....(۱۹)

$$\text{تو}\ \underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{فہ}(\text{ا}+\text{ھ})}{\text{پہ}(\text{ا}+\text{ھ})} = \underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{فہ}'(\text{ا}+\text{ھ})}{\text{پہ}'(\text{ا}+\text{ھ})} \quad \text{.........(۲۰)}$$

یہ ضابطہ "غیر معین شکل" $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کے محسوب کرنے میں بعض اوقات استعمال ہوتا ہے۔

۵۷۔ ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل کا پورا تغیر۔

فرض کرو کہ $\text{ع} = \text{فہ}(\text{لا}،\ \text{ما})$ ....(۱)

لا، ما کا مسلسل تفاعل ہے، نیز فرض کرو کہ جزوی مشتقات

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ ،\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \quad \text{.........(۲)}$$

بھی لا، ما کے مسلسل تفاعل ہیں۔

مان لو کہ ع کا اضافہ متبوع متغیروں کے اضافوں مف لا، مف ما کے ۱۱۴

جواب میں مف ع ہے یعنی

مف ع = فہ (لا + مف لا، ما + مف ما) - فہ (لا، ما) ...(۳)

دفعہ ۴۳ کی ہندسی تعبیر کے موافق افقی مستوی لا ما کے نقاط (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) کے جواب میں سطح پر جو دو نقطے ہیں مف ع ان کے ارتفاعوں کا فرق ہے۔

اگر صرف لا کو بدلا جائے تو ع کا متناظر اضافہ دفعہ ۵۲ (۱۰) کی رو سے اس شکل کا ہوگا

پ مف لا .... (۴)

جہاں پ، لا، ما اور مف لا کا ایک خاص تفاعل ہے۔ اسی دفعہ سے اور جزوی مشتق کے معنی سے ظاہر ہے کہ پ کی انتہائی قیمت جبکہ مف لا کو لا انتہا کم کر دیا جائے پَ ہے جہاں

پَ = جف ع / جف لا .... (۵)

اگر صرف ما کو بدلا جائے تو ع کا اضافہ ہوگا

ق مف ما .... (۶)

جہاں ق کی انتہائی قیمت جبکہ مف ما کو لا انتہا کم کر دیا جائے یہ ہے

قَ = جف ع / جف ما

اب ہم فرض کرتے ہیں کہ حقیقی تغیر (لا، ما) سے (لا + مف لا، ما + مف ما) تک دو منزلوں میں عمل میں آتا ہے، پہلی منزل میں صرف لا اور دوسری میں صرف ما بدلتا ہے۔ تو ع کا کل اضافہ اس طرح ہوتا ہے

مف ع = پ مف لا + قَ مف ما .... (۸)

جہاں قَ، ق سے اس لحاظ سے مختلف ہے کہ دوسرے تغیر کا ابتدائی نقطہ (لا، ما) کی بجائے اب (لا + مف لا، ما) ہے۔

اس صورت میں (۸) کی شکل دریافت کرو جبکہ مف لا، مف ما یکساں تھ

صفر کی طرف مائل ہوں جبکہ اِن کے درمیان کوئی معینہ نسبت قائم رہے۔
رکھو

$$\text{مف لا} = \text{عہ صہ}،\ \text{مف ما} = \text{بہ صہ} \quad ......(۹)$$

جہاں عہ، بہ مستقل ہیں اور صہ لا انتہا چھوٹی مقدار ہے۔
اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مف ع}}{\text{پ مف لا} + \text{ق مف ما}} = \frac{\text{پَ عہ} + \text{قَ بہ}}{\text{پ عہ} + \text{ق بہ}} \quad ....(۱۰)$$

چونکہ مشتقات (۲) کے تسلسل کو ہم نے مان لیا ہے اس لئے پ اور ق بالترتیب انتہاؤں پَ، قَ کی طرف مائل ہوتے ہیں جبکہ صہ ← ۰
پس مف لا، مف ما کو جتنا چھوٹا لیا جائے اتنا ہی زیادہ تقریبی طور پر اس کی درستی لازم آتی ہے کہ

$$\text{مف ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ \text{مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\ \text{مف ما} \quad ....(۱۱)$$

اور وہ اس لحاظ سے کہ اِس کے دونوں جانب کی نسبت انتہائی صورت ۱۱۵
میں اکائی کے مساوی ہوتی ہے۔
اس نتیجہ کو اکثر اِس شکل میں بیان کیا جاتا ہے

$$\text{فر ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ \text{فر لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\ \text{فر ما} \quad ....(۱۲)$$

علامات فر لا، فر ما، فر ع کو "تفرقے" کہتے ہیں اور فر ع، ع کا کل تفرقہ کہلاتا ہے۔

اوپر کا استدلال زیادہ کھول کر لکھا جا سکتا ہے اگر اُن مقداروں کی جگہ جو پَ اور قَ سے تعبیر ہوتی ہیں صریحی جملے لکھے جائیں۔ اگر لکھا جائے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{فہ}_1(\text{لا، ما})،\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{فہ}_2(\text{لا، ما}) \quad ....(۱۳)$$

تو دفعہ ۵۶ کی رُو سے

چپ = (فہ(لا + مف لا ، ما) - فہ(لا ، ما)) / مف لا = فہ۱(لا + طہ مف لا ، ما) .....(۱۴)

قَ = (فہ(لا + مف لا ، ما + مف ما) - فہ(لا + مف لا ، ما)) / مف ما = فہ۲(لا + مف لا ، ما + طہ مف ما)
..........(۱۵)

جہاں طہ ، طہ ایسی مقداریں ہیں جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔ اسلئے
مف ع = فہ۱(لا + طہ مف لا ، ما) مف لا + فہ۲(لا + مف لا ، ما + طہ مف ما) مف ما
..........(۱۶)

چونکہ دفعہ ۴۳ کی تعریف کے مطابق فہ۱ ، فہ۲ مسلسل فرض کئے گئے ہیں اس مساوات کی انتہائی شکل یہ ہے

مف ع = فہ۱ مف لا + فہ۲ مف ما ....(۱۷)

مساوات (۱۱) سے ظاہر ہے کہ اعظم یا اقل قیمت کے قرب میں ع کا تغیر دوسرے (یا اس سے اعلیٰ) رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے کیونکہ ایسی صورت میں دفعہ ۵۲ سے

جف ع / جف لا = ۰ = جف ع / جف ما ....(۱۸)

پس کسی سطح کے اعظم یا اقل ارتفاع کے نقطہ پر مماسی مستوی بالعموم افقی ہوگا۔ جیسا بتایا گیا ہے اس کا عکس لازماً درست نہیں۔ دیکھو دفعہ ۵۱۔

اوپر کے مسئلہ کی متبوع متغیروں لا ، ما ، ی ..... کی کسی تعداد کے لئے بآسانی توسیع کیجا سکتی ہے چنانچہ

مف ع = (جف ع / جف لا) مف لا + (جف ع / جف ما) مف ما + (جف ع / جف ی) مف ی ...(۱۹)

بالآخر۔

۵۸ - چھوٹی تصحیحات میں استعمال۔

دفعہ ۵۵ کی طرح دفعہ ماقبل کا مسئلہ چھوٹی خطاؤں کے محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے۔

مثال ۱ - دفعہ ۵۵ مثال ۲ کی صورت میں اگر دو اضلاع اور درمیانی زاویہ میں خطائیں بالترتیب مف ا، مف ب، مف ج ہوں تو ج میں کل خطا اس مساوات سے حاصل ہوگی

$$مف(ج^2) = \frac{جف(ج^2)}{جف ا} مف ا + \frac{جف(ج^2)}{جف ب} مف ب + \frac{جف(ج^2)}{جف ج} مف ج$$

.... (۱)

اس سے حاصل ہوتا ہے

ج مف ج = (ا - ب جم ج) مف ا + (ب - ا جم ج) مف ب + اب جب ج مف ج

یا مف ج = جم ب مف ا + جم ا مف ب + ا جب ب مف ج .... (۲)

مثال ۲ - مثلث کا رقبہ △ دو اضلاع ا، ب اور درمیانی زاویہ ج کی بناء پر دریافت کیا گیا -

$$△ = \frac{1}{2} ا ب جب ج$$ .... (۳)

لوک △ = لوک ½ + لوک ا + لوک ب + لوک جب ج ...... (۴)

تفریق کرنے سے $\frac{مف △}{△} = \frac{مف ا}{ا} + \frac{مف ب}{ب} +$ مم ج مف ج ...(۵)

اس سے "تناسبی خطا" معلوم ہوگی یعنے خطا مف △ کو جو نسبت کل مقدار △ سے ہے وہ معلوم ہوتی ہے - تمام پیمائشوں میں غلطی کی کل مقدار کا معلوم ہونا ایسا ضروری نہیں ہوتا جیسا کہ تناسبی غلطی کا -

دفعہ ۵۵ کی تحقیق سے ایک مشہور نکتہ پیدا ہوتا ہے اگر غیر تابع علتوں کے رو سے کسی مقدار میں چھوٹے تغیر پیدا ہوں تو انہیں ایک ساتھ لگا دیا یا جمع کر دیا جا سکتا ہے - یہ اس امر سے ظاہر ہے کہ مف ء کے لئے مف لا، مف ما، مف تی، ..... کی رقوم میں جو جملہ ہے وہ خطی یا درجہ اول کا ہے -

مثلاً جب ترازو سے کسی جسم کا وزن معلوم کرتے ہیں تو ہوا کے اچھال کی وجہ سے، نیز ترازو کے بازوؤں کے نامساوی ہونے کی وجہ سے جو خطائیں پیدا ہوتی ہیں انہیں الگ الگ محسوب کر کے جبریہ طور پر جمع کر لیا جا سکتا ہے - ایسے عمل میں دوسرے رتبہ کی خطا رہ جائے گی -

۵۹ — تفاعلوں کے تفاعل کا تفرق۔ تضمینی تفاعل کا تفرق۔

دفعہ ۷۵ ضابطہ (۱۱) کا ایک اور مشہور استعمال یہ ہے کہ اسکی رو سے تفاعلوں کے تفاعل اور تضمینی تفاعل کا تفرق عمل میں آسکتا ہے۔

(اَ) اگر $\text{ع} = \text{فہ}(\text{لا}، \text{ما})$ . . . . (۱)

جہاں لا، ما ایک متغیر ت کے معلومہ تفاعل ہیں تو آخرالامر

$$\frac{\text{مف ع}}{\text{مف ت}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}} \quad \text{. . . . . .(۲)}$$

یا

$$\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ت}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}} \quad \text{. . . . . .(۳)}$$

اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے باب دوم کے کئی نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں۔ پہلی ترقیم کے موافق ہم لکھ سکتے ہیں 117

$$\text{ما} = \text{فہ}(\text{ع}، \text{و})$$

جہاں ع اور و، لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔ ضابطہ (۳) اس طرح ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{ف ع}}{\text{ف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\,\frac{\text{ف و}}{\text{ف لا}} \quad \text{. . . . . .(۴)}$$

مثلاً اگر $\text{فہ}(\text{ع}، \text{و}) = \text{ع و}$ . . . . (۵)

تو $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} = \text{و}$ ، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} = \text{ع}$ اور $\frac{\text{ف(ع و)}}{\text{ف لا}} = \text{و}\,\frac{\text{ف ع}}{\text{ف لا}} + \text{ع}\,\frac{\text{ف و}}{\text{ف لا}}$ . . . (۶)

جو دفعہ ۳۰ کے مطابق ہے۔

اب اگر $\text{فہ}(\text{ع}، \text{و}) = \text{ع}^{\text{و}}$ . . . . (۷)

تو $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} = \text{و ع}^{\text{و}-1}$ ، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} = \text{ع}^{\text{و}}\,\text{لوک ع}$ ، دفعات ۲۸، ۴۲ کی رو سے

اس لئے $\frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}(\text{ع}^{\text{و}}) = \text{و ع}^{\text{و}-1}\,\frac{\text{ف ع}}{\text{ف لا}} + \text{ع}^{\text{و}}\,\text{لوک ع}\,\frac{\text{ف و}}{\text{ف لا}}$ . . . (۸)

جو دفعہ ۴۵ (۷) کے مطابق ہے۔

(۲) اگر ما، لا کا تضمینی تفاعل ہو جس کی تعیین اس مساوات سے ہوتی ہے

$$\text{فہ}\,(\text{لا}،\ \text{ما}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

تو اس مساوات کو بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$$

یا

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

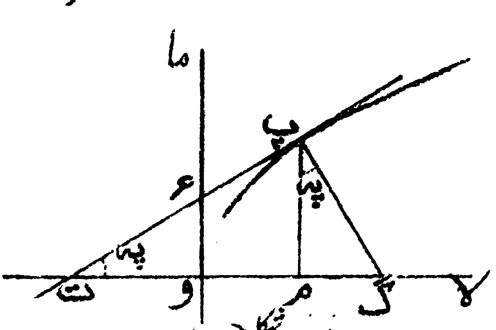
یہ دفعہ (۳۵) کے نتیجہ کی توسیع ہے۔

۶۰ ــ مشتق تفاعلوں کے ہندسی استعمال ۔ کارتیزی محدد۔

دفعہ ۲۴ میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر اُس زاویہ کو پہ سے تعبیر کریں جو منحنی ما = فہ(لا) ...... (۱) کے کسی نقطہ پر کا مماس (اسکی دائیں جانب کی سمت) محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{مس پہ} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

اس ضابطہ کی مدد سے منحنی کے متعلق کئی مقداریں لا، ما اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں ۱۱۸



شکل (۳۵)

اگر نقطہ پ پر کے مماس اور عماد محور لا سے بالترتیب ت اور گ پر ملیں اور معین کا پایہ م ہو تو ت م کو "زیر مماس" اور م گ کو "زیر عماد" کہینگے۔

$$\text{زیر مماس ت م} = \text{م پ مم پہ} = \text{ما} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots(۳)$$

$$\text{زیر عماد م گ} = \text{م پ سس پہ} = \text{ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots(۴)$$

$$\text{مماس} = \text{ت پ} = \text{م پ قم پہ} = \text{ما}\left\{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad \ldots(۵)$$

$$\text{عماد} = \text{پ گ} = \text{م پ قط پہ} = \text{ما}\left\{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}} \quad \ldots\ldots(۶)$$

نیز مماس کے مقطوعے محددوں کے محوروں پر ہیں

$$\left.\begin{aligned} \text{و ت} &= \text{و م} - \text{ت م} = \text{لا} - \frac{\text{ما}}{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}} \\ \text{و ع} &= \text{ت و سس پہ} = \text{ما} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(۷)$$

مثال ۱۔ مکافی $\text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا لا}$ ......(۸)

دونوں طرفین کو بلحاظ لا کے تفرق کرنے اور ۲ پر تقسیم کرنے سے

$$\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\,\text{ا} \quad \ldots\ldots(۹)$$

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ زیر عماد مستقل ہے اور طول میں ۲ ا کے مساوی ہے۔

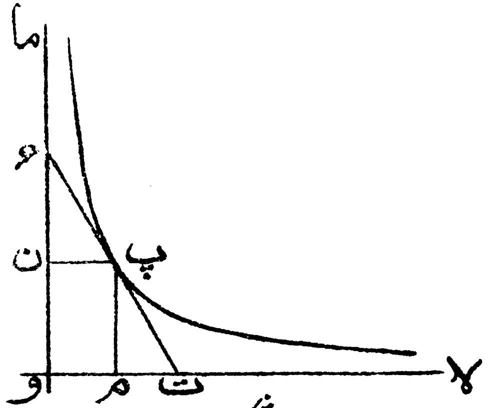
نیز زیر مماس ہے $\text{ما} \div \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}^{۲}}{۲\,\text{ا}} = ۲\,\text{لا}$ ......(۱۰) ۱۱۶

اور اس لئے یہ فصلہ کا دگنا ہے۔ دوسرے الفاظ میں مبدأ وت م کی تنصیف کرتا ہے۔

مثال ۲۔ زائد $\text{لا ما} = \text{ک}^{۲}$ ......(۱۱)

میں $لا \frac{فرما}{فرلا} + ما = ۰$ .... (۱۲)

پس ضابطہ (۷) سے مماس کے مقطوعے محددوں کے محوروں پر بالترتیب ۲لا، ۲ما حاصل ہوتے ہیں، اس لئے م، وت کی تنصیف کرتا ہے اور اس لئے پ کت ع کی تنصیف کرتا ہے۔ یعنی مماس کا جو حصہ محددوں کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے اسکی نقطہ تماس پر تنصیف ہوتی ہے۔



شکل (۳۶)

ان مقطوعوں کا حاصل ضرب ۴ لا ما یا ۴ک۲ ہے اس لئے مثلث وت ع کا رقبہ مستقل ہے اور ۲ک۲ کے مساوی ہے۔

مثال ۳۔ زیادہ عام طور پر $لا^{م} ما^{ن} =$ مستقل .... (۱۳)

میں دونوں طرف کے لوکارتم لینے اور تفرق کرنے سے

$\frac{م}{لا} + \frac{ن}{ما} \frac{فرما}{فرلا} = ۰$ .... (۱۴)

اس سے ملتا ہے $وت = لا - ما \Big/ \frac{فرما}{فرلا} = لا + \frac{ن}{م} لا = \frac{م+ن}{م} لا$

اسلئے $ع پ : پ ت = و م : م ت = لا : \frac{ن}{م} لا = م : ن$ ....(۱۵)

یعنی مماس ع ت کی نقطہ تماس پر مستقل نسبت سے تقسیم ہوتی ہے۔

اوپر کی دو صورتیں اس کے اندر شامل ہیں۔ مکافی میں (مثال ۱) م = -۱، ن = ۲، زائدمیں (مثال ۲) م = ۱، ن = ۱

اس کی ایک ضروری طبیعی مثال یہ ہے۔ گیس کے حجم اور دباؤ میں "حسرنا گزار" رشتہ ہے اس مساوات سے بیان ہوتا ہے $د\, ح^{جما} =$ مستقل ..... (۱۶)

اگر ح کو فصلہ اور د کو معین مان کر منحنی بنایا جائے تو مماس کی نقطہ تماس پر نسبت جما : ۱ سے تقسیم ہوتی ہے۔

مثال ۴۔ ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ ....(۱۷)

تفرق سے $\frac{لا}{ا^2} + \frac{ما}{ب^2} \frac{در ما}{در لا} = ۰$ جس سے $\frac{در ما}{در لا} = - \frac{ب^2}{ا^2} \frac{لا}{ما}$ ....(۱۸)

مماس کا مقطوعہ محور لا پر $و ت = لا - ما \Big/ \frac{در ما}{در لا} = لا + \frac{ا^2}{لا} \frac{ما^2}{ب^2}$

$= لا + \frac{ا^2}{لا} (۱ - \frac{لا^2}{ا^2}) = \frac{ا^2}{لا}$

جس سے $و م \times و ت = ا^2$ ....(۱۹)

عماد کا مقطوعہ $و گ = لا + ما \frac{در ما}{در لا} = (۱ - \frac{ب^2}{ا^2}) لا = ز^2 \times و م$ ...(۲۰)

جہاں ز خروج المرکز ہے۔

۶۱۔ ایک متبدل کی رقوم میں محدد۔

بعض اوقات ایک منحنی اس نمونہ کی دو مساواتوں

$لا = فہ(ت)،\ ما = خہ(ت)،$ ....(۱)

کے ذریعہ متعین ہو سکتا ہے جہاں محدد ایک ذیلی متغیرت کی رقوم میں بیان کئے گئے ہیں ۔

مثلاً حرکیات میں متحرک نقطہ کے محدد وقت کے تفاعلوں کے طور پر معلوم ہوتے ہیں ۔

اگر ت کی قیمتوں کا کوئی موزوں سلسلہ لیا جائے تو اس سے لا، ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں، اس طرح منحنی پر اتنے نقطے مرتسم ہو سکتے ہیں جتنے ہم چاہیں ۔

اگر لا، ما، ت کے ایک ساتھ کے اضافے مف لا، مف ما، مف ت ہوں تو

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}} \div \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}$$ اس لئے انتہا میں

$$\text{مس پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \div \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \quad \ldots\ldots (۲)$$ ۱۲۱

مثال ۱ ۔ ناقص میں $\text{لا} = \text{ا جم فہ}$، $\text{ما} = \text{ب جب فہ}$ ......(۳)

$$\text{مس پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر فہ}} \Big/ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر فہ}} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مم فہ} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مثال ۲ ۔ اگر جاذبہ ارض کے ماتحت کوئی شئے حرکت کر رہی ہو تو

$$\text{لا} = \text{ا} + \text{ع ت}،\quad \text{ما} = \text{ب} + \text{و ت} - \tfrac{1}{2}\,\text{ج ت}^2 \quad \ldots\ldots (۵)$$

جس سے $$\text{مس پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \Big/ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{و} - \text{ج ت}}{\text{ع}}$$

۶۲ ۔ منحنی کے کسی نقطہ پر مماس اور عماد کی مساواتیں ۔

(ا) منحنی $\text{ما} = \text{فہ}(\text{لا})$ ......(۱)

پر دو نقطے پ (لا، ما) اور ق (لا + مف لا، ما + مف ما) ہیں، خط پ ق پر کسی اور نقطے کے محدد (ظہ، یہ) ہیں جو ذیل کے رشتہ کو پورا کرتے ہیں

$$\frac{\text{ظہ - لا}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{یہ - ما}}{\text{مف ما}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\text{یہ - ما} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\,(\text{ظہ - لا}) \quad \ldots\ldots (۳)$$ شکل ۱۹ صفحہ ۶۶

انتہا میں جب ق، پ کے پاس آجائے تو اس مساوات کی یہ شکل ہو جاتی ہے

$$\text{یہ - ما} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\,(\text{ظہ - لا}) \quad \ldots\ldots (۴)$$

جو نقطہ پ پر کے مماسی خط کی مساوات ہے۔
چونکہ عماد کا ڈھال مماس کے ڈھال کا اولٹا اور علامت میں مختلف ہوتا ہے اس لئے عماد کی مساوات ہے

$$(\text{ظہ - لا}) + (\text{یہ - ما})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۵)$$

(۲) اگر محدد اس شکل میں ہوں

$$\text{لا} = \text{فہ}(\text{ت})،\ \text{ما} = \text{خہ}(\text{ت}) \quad \ldots\ldots (۶)$$

تو (۲) کی رو سے قاطع پ ق پر

$$\frac{\text{ظہ - لا}}{\text{مف لا / مف ت}} = \frac{\text{یہ - ما}}{\text{مف ما / مف ت}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

۱۲۲ اس لئے پ پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ظہ - لا}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}} = \frac{\text{یہ - ما}}{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

عماد کی مساوات بآسانی حاصل ہوتی ہے

$$(\text{ظہ - لا})\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + (\text{یہ - ما})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۹)$$

(۳) اگر منحنی کی مساوات اس شکل $\text{فہ}(\text{لا، ما}) = ۰ \quad \ldots\ldots (۱۰)$

میں معلوم ہو تو دفعات ۳۵، ۵۹ کی رو سے

فر ما / فر لا = (جف فما / جف لا) / (جف فما / جف ما) .... (۱۱)

اس لئے مماس کی مساوات ہے

(ظا - لا) جف فما / جف لا + (یا - ما) جف فما / جف ما = ۰ .... (۱۲)

یہ اس امر سے بھی ظاہر ہے کہ منحنی پر کے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے

مف فما = یا (جف فما / جف لا) مف لا + (جف فما / جف ما) مف ما = ۰ (۱۳)

(۲) کی رو سے مف لا : مف ما = ظا - لا : یا - ما .... (۱۴)

اس لئے نتیجہ (۱۲) حاصل ہو جاتا ہے۔

عماد کی مساوات ہے (ظا - لا) / (جف فما / جف لا) = (یا - ما) / (جف فما / جف ما) .... (۱۵)

مثال ۱ - مکافی ما² = ۴ ا لا .... (۱۶) میں فر ما / فر لا = ۲ ا / ما .... (۱۷)

مماس کی مساوات ہے یا - ما = (۲ ا / ما) (ظا - لا) .... (۱۸)

جو (۱۶) کی رو سے معمولی شکل میں آتی ہے ما یا = ۲ ا (ظا + لا) .... (۱۹)

مثال ۲ - اگر محدد اس شکل میں دئے گئے ہوں لا = ا ت²، ما = ۲ ا ت .... (۲۰) ۱۲۳

تو ضابطہ (۸) سے مماس ملتا ہے (ظا - لا) / ت = یا - ما .... (۲۱)

اور اس کی مزید تحویل اس شکل میں ہوتی ہے

یا = ظا / ت + ا ت .... (۲۲)

عماد کی مساوات ہے (ظ - لا) ت + (یہ - ما) = ۰ .... (۲۳)

یا ت ظ + یہ = ل ت^{۲} + ۲ ل ت .... (۲۴)

چونکہ ت میں یہ تیسرے درجہ کی مساوات ہے اسلئے کسی اختیاری نقطہ (ظ، یہ) سے تین حقیقی یا خیالی عماد کھینچ سکتے ہیں۔

مثال ۳۔ مرکزدار مخروطی ال لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} = ۱ .... (۲۵)

کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات (۱۲) کی رو سے یہ ہے

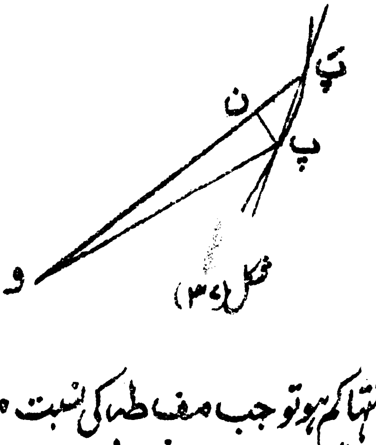
(ظ - لا) (ال لا + ھ ما) + (یہ - ما) (ھ لا + ب ما) = ۰ (۲۶)

یا (ال لا + ھ ما) ظ + (ھ لا + ب ما) یہ = ۱ .... (۲۷)

۶۳۔ قطبی محدد۔ فرض کرو کہ منحنی پر دو پاس کے نقطے پ، پَ ہیں اور پ کے قطبی محدد (ر، ط) اور پَ کے (ر + مف ر، ط + مف ط) ہیں، پ پَ کو ملاؤ اور و پَ پر عمود پ ن نکالو تو

پ ن = و پ جب پ و ن = ر جب مف ط

پَ ن = و پَ - و ن = ر + مف ر - ر جم مف ط = مف ر + ر (۱ - جم مف ط)



شکل (۴۷)

جب مف ط لاانتہا کم ہو تو جب مف ط کی نسبت مف ط کے ساتھ ۱۲۴

انتہا میں ایک ہو جاتی ہے اور ۱ - جم مف ط = ۲ جب^{۲} (مف ط / ۲)

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس پ پَ و} = \frac{\text{پ ن}}{\text{پَ ن}} = \frac{\text{رمفاطہ}}{\text{مفار}} + \text{ثہ} \;\ldots\ldots (۱)$$

جہاں ثہ ایک مقدار ہے جس کی انتہائی قیمت صفر ہے۔ پس جب پَ پ پر منطبق ہو اور فہ وہ زاویہ ہو جو منحنی کے نقطہ پ پر کا مماس (جسے طہ کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے) سمتی نیم قطر کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{رفرطہ}}{\text{فرر}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)^{*}$$

یہاں طہ کو ر کا تفاعل خیال کیا گیا ہے۔ اگر ر کو طہ کا تفاعل خیال کیا جائے تو ضابطہ ہوگا

$$\text{مم فہ} = \frac{۱}{\text{ر}} \cdot \frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

مثال ۱۔ دائرہ میں ر = ۲ ا جب طہ .... (۴)

$$\text{لوک ر} = \text{لوک ۲ ا} + \text{لوک جب طہ}$$

---

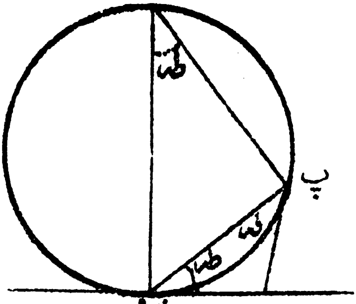
* ذیل کا استدلال جو دفعہ ۲۳ کے اصول کا اطلاق ہے اس طور پر بڑھایا جا سکتا ہے

ٹھیک طور پر
$$\text{مس پ پَ و} = \frac{\text{رجب مفاطہ}}{\text{مفار} + ۲\,\text{رجب}^۲ \frac{\text{مفاطہ}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{مفاطہ}}{\text{مفار}} \times \frac{\text{جب مفاطہ}}{\text{مفاطہ}} \times \frac{۱}{۱ + \frac{\text{رمفاطہ}}{\text{مفار}} \times \frac{\text{جب}\frac{\text{مفاطہ}}{۲}}{\frac{۱}{۲}\text{مفاطہ}} \times \text{جب}\frac{\text{مفاطہ}}{۲}}$$

اور اس جملہ کی انتہائی قیمت $\frac{\text{رفرطہ}}{\text{فرر}}$ ہے۔

اور اس لئے $\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{فر}}{\text{فرطھ}}$ = ہم طھ، جس سے ہم فھ = ہم طھ یا فھ = طھ ......(۵)



شکل نمبر (۳۸)

مثال ۲ — جب ایک منحنی کا سمتی نیم قطر اعظم یا اقل ہو تو یہ منحنی کا عماد ہوتا ہے کیونکہ اگر ۱۲۵

$\frac{\text{فر}}{\text{فرطھ}}$ = ۰ تو ہم فھ = ۰ یا فھ = $\frac{\pi}{2}$

مثال ۳ — اگر ایک منحنی کے عماد سب ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں تو منحنی کو لازماً دائرہ ہونا چاہئے۔

اگر ثابت نقطہ کو قطب لیا جائے تو مفروض کی رو سے فھ = $\frac{\pi}{2}$ اور اس لئے $\frac{\text{فر}}{\text{فرطھ}}$ = ۰، طھ کی تمام قیمتوں کے لئے۔ اس لئے ر = مستقل۔

امثلہ ۱۵

۱ — دفعہ ۹۴ کے مسئلہ کی ذیل کی صورتوں میں تصدیق کرو۔

(۱) فھ(لا) = $(\text{لا} - \text{ا})^{\text{م}}(\text{لا} - \text{ب})^{\text{ن}}$

(۲) فھ(لا) = لوک $\frac{\text{لا}^2 + \text{اب}}{(\text{ا} + \text{ب})\text{لا}}$

(۳) فھ(لا) = $\frac{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})}{\text{لا}^2}$

۲ ـ ثابت کرو کہ منحنی ما = لا^{۴} - ۶ لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۴ لا - ۱۲ اور

ما = لا^{۴} - لا^{۳} - ۳ لا^{۲} + ۵ لا - ۲

محور لا کو مس کرتے ہیں اور معلوم کرو (۱۵۹) اس کو کہاں کاٹتے ہیں منحنیات کو مرتسم کرو۔

۳ ـ جب لا بڑھتے بڑھتے فا (لا) = ۰ کی کسی ایک اصل میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ گذرنے سے عین پہلے فا (لا) اور فا' (لا) کی مختلف علامتیں ہونگی اور گذرنے کے عین بعد ایک ہی علامت۔ کیا دوہری اصل کی صورت میں بھی یہ درست ہے

۴ ـ اگر ا > لا کیلئے فا (لا) = $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}}$ - ا

اور لا > ا کیلئے فا (لا) = ا - $\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}$

لیکن لا = ا کیلئے فا (لا) = ۰

تو ثابت کرو کہ فا (لا)، فا' (لا) دونوں مسلسل ہیں لا = ۰ سے لا = ∞ تک۔ منحنی ما = فا (لا) کو مرتسم کرو۔

۵ ـ مساوات لا^{۳} - ۱۲ لا + ۱۶ = ۰ کا دوہری اصلوں کے لئے معائنہ کرو۔ بائیں طرف کی ترسیم کا حصہ کھینچو۔

۶ ـ ثابت کرو کہ منحنی ما = ۸ لا^{۳} - ۴۴ لا^{۲} + ۸۰ لا - ۴۵ محور لا کو مس کرتا ہے
اور دیکھو کہ یہ اسکو کہاں کاٹتا ہے۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر منحنی کا مماس خط ۲ لا + ما = ۰ ۱۲۶
کے متوازی ہے۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۷ ـ سروں ا، ب، ج، د کو معلوم کرو کہ منحنی

ما = ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د

نقطہ (-۲، ۸) میں سے گذرے، محور لا کو نقطہ (۲، ۰) پر مس کرے اور اس نقطہ پر جہاں لا = -۱ اس کا مماس محور لا کے متوازی ہو۔

۸ ـ ثابت کرو کہ جملہ (لا - ۱) ق$^{\text{لا}}$ + ۱، لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے مثبت ہے۔

۹ ـ ثابت کرو کہ جب لا، $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}$ اور $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور جم لا، $۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ اور $۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴}$ کے درمیان ـ

۱۰ ـ ثابت کرو کہ اگر $\text{لا}^{۲} < ۱$ تو لوک $(۱ + \text{لا})$، $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ اور $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے ـ

۱۱ ـ ثابت کرو کہ اگر $\text{لا}^{۲} < ۱$ تو $\text{مس}^{-۱}\,\text{لا}$، $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$ اور $\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۵}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے ـ

امثلہ ۱۶
(اعظم اور اقل قیمتیں)

۱ ـ ثابت کرو کہ نقطہ کی مستقیم حرکت میں رفتار زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم ہوگی جبکہ اسراع علامت بدلے ـ
سادہ موسیقی حرکت $\text{س} = \text{ر}\ \text{جم}\ \text{ن}\,\text{ت}$ سے اسکی توضیح کرو ـ

۲ ـ تفاعل $\text{لا}^{۴} - ۸\,\text{لا}^{۳} + ۲۲\,\text{لا}^{۲} - ۲۴\,\text{لا} + ۱۲$ کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو ـ

۳ ـ ثابت کرو کہ تفاعل $۲\,\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} - ۳۶\,\text{لا} + ۱۰$ اعظم ہے جبکہ $\text{لا} = -۲$ اور اقل ہے جبکہ $\text{لا} = ۳$ ـ

۴ ـ تفاعل $۴\,\text{لا}^{۳} - ۱۸\,\text{لا}^{۲} + ۲۷\,\text{لا} - ۷$ کی کوئی اعظم اقل قیمتیں نہیں ـ

۵ ـ تفاعل $\text{لا}^{۵} - ۵\,\text{لا}^{۴} + ۵\,\text{لا}^{۳} + ۱$ کے اہل نقطے دریافت کرو اور اس کا معائنہ کرو کہ تفاعل کن کے لئے اعظم یا اقل ہے ـ

۱۲۷

۶۔ ثابت کرو کہ تفاعل $10\,\text{لا}^6 - 12\,\text{لا}^5 + 15\,\text{لا}^4 - 20\,\text{لا}^3 + 20$ اقل ہے جبکہ لا = ۱ اور اس کے کوئی اور اعظم اور اقل نہیں ہیں۔

۷۔ اس کا معائنہ کرو کہ مساوات $\text{لا}^5 - \text{لا}^3 - 4\,\text{لا}^2 - 3\,\text{لا} - 2$ کی کوئی منفی اصل ہے۔ بائیں جانب کے حصہ پر تفاعل کے اجل نقطے معلوم کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

۸۔ ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لا}^4 - 2\,\text{لا}^3 - 3\,\text{لا}^2 + 4\,\text{لا} + 4$، لا کے محور کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے اور اس کا اعظم معین دریافت کرو۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۹۔ ثابت کرو کہ تفاعل $\text{لا}\sqrt{\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^2}$ اعظم ہے جبکہ $\text{لا} = \frac{3}{4}\text{ا}$۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{(\text{لا} - 1)^2}{(\text{لا} + 1)^3}$ کی اعظم قیمت ہے $\frac{2}{27}$ اور اقل قیمت ہے صفر۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ جملہ $\frac{1 + \text{لا} + \text{لا}^2}{1 - \text{لا} + \text{لا}^2}$ کی اعظم قیمت ہے ۳ اور اقل قیمت ہے $\frac{1}{3}$۔

۱۲۔ تفاعل $\frac{\text{لا}(\text{لا}^2 + 1)}{\text{لا}^4 - \text{لا}^2 + 1}$ کی اعظم قیمت ہے ۲ اور اقل قیمت ہے −۲۔

۱۳۔ تفاعل $\frac{\text{لا}(\text{لا}^2 - 1)}{\text{لا}^4 - \text{لا}^2 + 1}$ کی دو اعظم قیمتیں ہیں ہر ایک $= \frac{1}{2}$ اور دو اقل قیمتیں ہیں ہر ایک $= -\frac{1}{2}$۔

۱۴۔ تفاعل $\frac{\text{لا}^4 + 22\,\text{لا}^2 + 9}{\text{لا}(\text{لا}^2 + 3)}$ کے اجل نقطے دریافت کرو اور اسکی ترسیم کھینچو۔

[اجل نقطے حاصل ہوتے ہیں مساواتوں $\text{لا}^2 = 1، 3، 9$ سے]

۱۵۔ $\frac{5\,\text{لا}^2 - 18\,\text{لا} + 45}{\text{لا}^2 - 9}$ کے اجل نقطے دریافت کرو اور ترسیم کا خاکہ کھینچو۔ ۱۲۸

۱۶۔ تفاعل $\frac{\text{لا}}{(\text{ا} + \text{لا})(\text{ب} + \text{لا})}$ اعظم ہے جبکہ $\text{لا} = \sqrt{\text{ا}\,\text{ب}}$ اور اقل ہے

جبکہ $لا = \sqrt{ا\, ب}$

۱۷ — ثابت کرو کہ تفاضل $م_۱ (لا - لا_۱)^۲ + م_۲ (لا - لا_۲)^۲ + \dots\dots + م_ن (لا - لا_ن)^۲$

اقل ہے جبکہ $لا = \dfrac{م_۱ لا_۱ + م_۲ لا_۲ + \dots\dots + م_ن لا_ن}{م_۱ + م_۲ + \dots\dots + م_ن}$

۱۸ — طول لہ کی لہروں کی رفتار گہرے پانی پر $\sqrt{\dfrac{لہ}{ا} + \dfrac{ا}{لہ}}$ کے متناسب ہے جہاں ا ایک خاص خطی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ رفتار کم سے کم ہوگی جبکہ لہ = ا۔

۱۹ — دخانی جہاز کو پانی کے اندر دھکیلنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے وہ رفتار کے کعب کے موافق بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ رو کے خلاف نہایت کفایت کے ساتھ جہاز چلانے کی شرح وہ رفتار ہوگی جو رو کی رفتار کا $1\frac{1}{2}$ گنا ہو۔

۲۰ — دی ہوئی برقی رو کو ایک برقی اسٹیشن سے دوسرے تک تانبے کے تار کے ذریعہ لیجاتا ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم لاگت والا تار کا قطر وہ ہوگا جس سے کہ کل لاگت کا سود اس توانائی کی مقدار کے مساوی ہو جو تار کے گرم کرنے میں ضائع ہوتی ہے۔
[توانائی کے ضائع ہونے کی شرح عمودی تراش کے بالعکس متناسب ہے]

۲۱ — دخانی جہاز کے روزانہ اخراجات مزدوری کی اجرت، اصل کے سود اور کوئلہ پر مشتمل ہیں۔ کوئلہ کے خرچ کی شرح ایسے بدلتی ہے جیسے رفتار کا کعب۔ ثابت کرو کہ اگر سفر کو کم سے کم لاگت والی رفتار کے ساتھ طے کیا جائے تو کوئلہ کی لاگت، مزدوری کی مقدار اور سود کے نصف کے مساوی ہوگی۔

۲۲ — دو دخانی جہازوں میں سے ایک سیدھا ایک بندرگاہ کی طرف جا رہا ہے دوسرا ٹھیک اس بندرگاہ سے باہر کو جا رہا ہے، ان کے راستے ایک دوسرے سے زاویہ ۹۰° بناتے ہیں اور ان کی رفتاروں کی نسبت ۱:۲ ہے۔ ثابت کرو کہ ٹھیک اس آن میں جبکہ وہ ایک دوسرے کے قریب سے قریب ہوں بندرگاہ سے ان کے فاصلے نسبت ۵:۴ میں ہیں۔

۲۳ — نصف قطر ا کے دائرہ میں برقی رو ہے، اس کی وجہ سے جو قوت ایک

چھوٹے مقناطیس پر جس کا محور دائرہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اثر انداز ہوتی ہے وہ ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{\text{لا}}{(\text{ا}^2+\text{لا}^2)^{\frac{5}{2}}}$ جہاں لا مقناطیس کا فاصلہ ہے دائرہ کی مستوی سطح سے۔ ثابت کرو کہ قوت زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ لا = $\frac{\text{ا}}{2}$ ۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ جملہ ا جم طہ + ب جب طہ کی انتہائی قیمتیں $\pm\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}$ ہیں۔ ۱۲۹

۲۵۔ ثابت کرو کہ جب(طہ - عہ) جم(طہ - بہ) اعظم ہے یا اقل جبکہ

$$\text{طہ} = \tfrac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\text{ن}\pi$$

اور ن بالترتیب جفت ہو یا طاق۔

۲۶۔ رقاص کا میلان انتصابی خط کے ساتھ جبکہ ہوا کی مزاحمت کو ملحوظ رکھا جائے اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے $\text{طہ} = \text{ا قو}^{-\text{ک ت}}\ \text{جم}(\text{ن ت}+\text{ص})$، ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے اہتزاز وقت کے مساوی وقفوں $\frac{\pi}{\text{ن}}$ کے بعد پیدا ہوتے ہیں اور ایک گھٹنے والا ہندسی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۷۔ منحنی ما = لا $\text{قو}^{\text{لا}}$ کا اعظم معین دریافت کرو۔ منحنی کو مرتسم کرو۔

۲۸۔ منحنی ما = لا لوک لا کا اقل معین ‎-۰.۳۶۷۸....‎ ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو

۲۹۔ ثابت کرو کہ ایک عدد لا کے لوگارتم کی نسبت اس عدد کے ساتھ بڑی سے بڑی ہوتی ہے جبکہ لا = قو۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ اگر ا > ب تو جملہ ا جمز لا + ب جبز لا کی اقل قیمت $\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}$ ہے لیکن اگر ا < ب تو اس کی قیمت نہ اعظم ہوگی نہ اقل۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ تفاعل جمز لا + جم لا کی اقل قیمت ہوگی جبکہ لا = ۰ لیکن اور کوئی اقل یا اعظم قیمت نہیں ہوگی۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ تفاعل جمز لا جم لا کی اعظم قیمت ہوگی جبکہ لا = ۰، اقل

قیمت ہوگی جبکہ لا = $\frac{۵}{۴}$ π تقریباً، اور باری باری سے اعظم اور اقل قیمتوں کا ایک سلسلہ ہوگا جبکہ لا = ن π + $\frac{۱}{۴}$ π تقریباً جہاں ن = ۱، ۲، ۳، ....

۳۳ ۔ تفاعل $\frac{\text{جمن لا + جم لا}}{\text{۱ + جمن لا جم لا}}$ کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو۔

۱۳۰ # امثلہ ۱۷

ہندسی سوالات

۱ ۔ دئے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم محیط والا مستطیل مربع ہے۔

۲ ۔ دئے ہوئے محیط والا مستطیل جس کا قطر چھوٹے سے چھوٹا ہو مربع ہے۔

۳ ۔ بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک دئے ہوئے مثلث میں بن سکتا ہے رقبہ میں مثلث کا آدھا ہوتا ہے۔

۴ ۔ مثلث قائم الزاویہ کے اندر ایک مستطیل بنایا گیا ہے، اس کا ایک زاویہ، زاویہ قائمہ پر منطبق ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ مقابل کا کونہ وتر کی تنصیف کرے۔ ثابت کرو کہ مذکورہ حالات کے ماتحت مستطیل کا محیط نہ تو اعظم ہوگا نہ اقل۔

۵ ۔ بڑے سے بڑا یا کم سے کم محیط والا مستطیل معلوم کرو جو ایک دئے ہوئے دائرے کے اندر بنایا جاسکتا ہے۔

۶ ۔ دائرہ کے اندر ایک دئے ہوئے نقطہ ا میں سے ایک وتر پ ا ف کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ حصوں پ ا اور ا ف کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ وتر، ا میں سے گذرنے والے قطر پر عمود وار ہو اور زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے جبکہ وتر قطر پر منطبق ہو۔

۷ ۔ ایک ثابت خط مستقیم اور دو ثابت نقطے ا، ب خط کے باہر معلوم ہیں، خط کے اندر ایک ایسا نقطہ پ دریافت کرنا مطلوب ہے کہ ا پ^{۲} + پ ب^{۲} اقل ہو۔

۸ — کم سے کم رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے اندر بنایا جا سکتا ہے، اور بڑے سے بڑے رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے گرد بن سکتا ہے۔

۹ — ایک چار ضلعی اپ ق ب قطعہ دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے، اب قطعہ کا قاعدہ ہے۔ جب رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{اپ} = \text{پق} = \text{قب}$$

۱۰ — ایک خط مستقیم نقطہ (ا، ب) میں سے کھینچا گیا ہے اور محددوں کے (علی القوائم) محوروں کو بالترتیب پ اور ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ و پ + و ق کی اقل قیمت $\text{ا} + 2\sqrt{\text{اب}} + \text{ب}$ ہے۔

۱۱ — ایک خط مستقیم ثابت نقطہ (ا، ب) میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ کم سے کم طول جو محددوں کے محوروں کے درمیان قطع ہوتا ہے وہ $(\text{ا}^{2/3} + \text{ب}^{2/3})^{3/2}$ ہے۔

[محور علی القوائم]۔

۱۳۱ ۱۲ — دھات کی مستطیلی چادر کے کونوں سے چار مساوی مربعے نکال دئے گئے ہیں اور اضلاع کو اوپر موڑنے سے ایک کھلا مستطیلی صندوق بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ جب صندوق کے اندر کا حجم زیادہ سے زیادہ ہو تو اس کی گہرائی ہوگی

$$\frac{1}{6}\left\{\text{ا} + \text{ب} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{اب} + \text{ب}^2}\right\}$$ جہاں ا، ب اصلی مستطیل کے اضلاع ہیں

۱۳ — ایک مکان کی دیوار پر ایک ۵ فٹ اونچی کھڑکی ہے اور اس کی دہلیز زمین سے ۲۰ فٹ کی اونچائی پر ہے بتاؤ کہ ایک شخص جس کی آنکھ زمین سے ۵ فٹ اونچی ہے دیوار سے کتنے فاصلے پر کھڑا ہو کر کھڑکی کے سامنے اس کی آنکھ پر بڑے سے بڑا انتصابی زاویہ بنے۔

۱۴ — درخت کے اسطوانی تنے سے مستطیلی تراش کا ایک شہتیر کاٹنا مقصود ہے جس کے جھکاؤ کی استواری زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کرو کہ تراش کا عرض قطر کا نصف ہونا چاہئے اور اس کی گہرائی قطر کی ۸۶۶ء گنا ہونی چاہئے۔

(یہ مان لیا جائے کہ جھکاؤ کی استواری ایسے بدلتی ہے جیسے عرض اور گہرائی کا مکعب)

۱۵— ایک چراگاہ کے کنارے کے ساتھ ساتھ ایک سیدھی سڑک ہے اور چراگاہ کے ایسے مقام پر ایک شخص ہے جو سڑک کے قریب ترین نقطہ سے ایک میل کے فاصلہ پر ہے۔ وہ کم سے کم وقت میں سڑک کے ایک دور کے مقام تک جانا چاہتا ہے اگر چراگاہ اور سڑک پر اس کے چلنے کی رفتاریں بالترتیب ۴ اور ۵ میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ اُسے سڑک سے ایک ایسے مقام پر جا ملنا چاہئے جس کا فاصلہ ا سے $۱\frac{۱}{۳}$ میل ہے۔

۱۶— ایک کمرہ کی دیوار پر روشنی کا مبدأ زمین سے کتنی اونچائی پر لگایا جائے کہ فرش کے ایسے نقطہ پر جس کا فاصلہ دیوار سے ا ہے روشنی کی چمک زیادہ سے زیادہ ہو۔ (یہ مان لیا جائے کہ کسی سطح پر روشنی کی چمک ایسے بدلتی ہے جیسے مبدأ سے فاصلہ کے مربع کا عکس، نیز ایسے بدلتی ہے جیسے اس زاویہ کی جیب التمام جو شعاعیں سطح کے عماد کے ساتھ بناتی ہیں)۔

۱۷— دو ذرے پ اور ق مستقل رفتاروں ع، و کے ساتھ دو ثابت سیدھے خطوں پر حرکت کرتے ہیں، یہ خط باہم و پر قطع کرتے ہیں اگر ایک ہی وقت میں ذروں کے مقامات ا اور ب ہوں اور اگر و ا = ا، و ب = ب، اور > ا و ب = سہ تو فاصلہ پ ق کم سے کم ہوگا وقت

$$\frac{\text{ا ع + ب و − (ا و + ب ع) جم سہ}}{\text{ع}^{۲}\text{ − ۲ ع و جم سہ + و}^{۲}}$$

کے بعد اور کم سے کم فاصلہ ہوگا

$$\frac{\text{(ا و − ب ع) جب سہ}}{\left(\text{ع}^{۲}\text{ − ۲ ع و جم سہ + و}^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}}$$

۱۸— ایک قطعہ مکافی ایک ایسے وتر سے گھرا ہوا ہے جو محور پر عمود وار ہے اس کے اندر بڑے سے بڑا مستطیل بنانا مقصود ہے ثابت کرو کہ اس کا طول قطعہ کے طول کا $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

۱۹— بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک قطع ناقص کے اندر بن سکتا ہے اسکے قطر مساوی مزدوج قطروں پر منطبق ہوتے ہیں۔

۲۰ — اگر ناقص کے مماسں کا طول جو محوروں کے درمیان کٹتا ہے کم سے کم ہو تو مماس کی نقطہ تماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتی ہے جو بالترتیب ناقص کے نیم محوروں کے مساوی ہوتے ہیں۔

۲۱ — قطع ناقص کا مماس، مخروجہ صدری محوروں کے ساتھ تقاطع سے کم سے کم رقبہ والا مثلث پیدا کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ مماس ناقص کے مساوی مزدوج قطروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہے۔

۲۲ — دائری قطاع کا محیط دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا جبکہ قطاع کا زاویہ ۲ نیم قطری ہو اور اس صورت میں رقبہ نیم قطر کے مربع کے مساوی ہو گا۔

۲۳ — ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہے، اگر باقی دو اضلاع کا مجموعہ معلوم ہو تو رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا جبکہ اضلاع مساوی ہوں۔

۲۴ — ایک چہار ضلعی کے چاروں اضلاع، ایک خاص ترتیب میں دئے گئے ہیں ثابت کرو کہ اسکا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا اگر یہ دائرہ کے اندر بن سکے۔

امثلہ ۱۸

[ذیل کے نتائج مان لئے جائیں۔

(۱) قائم دائری اسطوانہ کا نصف قطر ا اور ارتفاع ع ہے، اسکی منحنی سطح ۲ π ا ع ہو گی (۲) اس کا حجم π ا^2 ع ہو گا۔

(۳) قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع ع اور قاعدہ کا نصف قطر ا اور مائل ضلع ل ہے۔ اس کی منحنی سطح π ا ل ہو گی (۴) اس کا حجم $\frac{1}{3}$ π ا^2 ع ہو گا۔

(۵) کرہ نیم قطر ا، اسکی سطح ۴ π ا^2 ہو گی (۶) اس کرہ کا حجم $\frac{4}{3}$ π ا^3 ہو گا۔]

۱ — بڑے سے بڑے حجم کا اسطوانہ جو ایک دئے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے، کرہ کے حجم کا ۵۷۷۳ء گنا حجم رکھتا ہے۔

۲ — بڑے سے بڑے سطحی رقبہ والا اسطوانہ جو ایک دئے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے اس کی سطح کرہ کی سطح کی ۹۰۹۰ء گنا ہوتی ہے۔

۳ — بڑے سے بڑے حجم والا اسطوانہ جس کا سطحی رقبہ دیا ہوا ہے وہ ہے جسکا

ارتفاع قاعدہ کے قطر کے مساوی ہو اور اس کا حجم اُس کرہ کے حجم کا ۰٫۸۱۶۵ گنا ہوتا ہے جس کا سطحی رقبہ وہی ہو۔

۴۔ دئے ہوئے حجم کے لئے کم سے کم سطح والا اسطوانہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اسکی سطح کی نسبت مساوی حجم کے کرہ کی سطح کے ساتھ ۱٫۱۴۵ ہے۔

۵۔ کھلے اسطوانی ظرف کے ابعاد کی نسبت معلوم کرو کہ دئے ہوئے حجم کے لئے اسکی بناوٹ میں مسالہ کی مقدار کم سے کم صرف ہو۔ [اس کا ارتفاع قاعدہ کے نصف قطر کے مساوی ہونا چاہئے۔]

۶۔ قائم مستدیر مخروط کے اندر ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے اس کا حجم اعظم ہوگا جبکہ ۱۳۳
اس کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا $\frac{1}{3}$ ہو اور اس کا حجم اُسوقت مخروط کے حجم کا $\frac{4}{9}$ ہوگا

۷۔ ایک اسطوانہ ایک قائم مستدیر مخروط کے اندر بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ اس کی منحنی سطح اعظم ہوگی جبکہ اسطوانہ کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا $\frac{1}{2}$ ہو۔
نیز ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کل سطح کی اعظم قیمت نہیں ہو سکتی اگر مخروط کا نیم زاویہ ۲۶° ۳۴' [= مس$^{-1}\frac{1}{2}$] سے بڑا ہو۔

۸۔ دئے ہوئے کرہ کے اندر جو بڑے سے بڑے حجم والا مخروط بنایا جا سکتا ہے اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا $\frac{2}{3}$ ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروط کی منحنی سطح ارتفاع کی اسی قیمت کے لئے اعظم ہوگی۔

۹۔ اگر ایک دئے ہوئے کرہ کے گرد قائم مستدیر مخروط بنایا جائے تو اس کا حجم کم سے کم ہوگا جبکہ اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا دگنا ہو۔ نیز ثابت کرو کہ نیم راسی زاویہ ۱۹° ۲۸' [= جب$^{-1}\frac{1}{3}$] ہوگا۔

۱۰۔ اگر قائم مستدیر مخروط کا حجم مستقل رکھا جائے تو سطح زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ ارتفاع قاعدہ کے قطر کا $\sqrt{2}$ گنا ہو۔

۱۱۔ دھات کی گول چادر سے ایک قطاع دائرہ کاٹنا مقصود ہے کہ باقی حصے سے ایک مخروطی ظرف بن سکے جس کی گنجائش زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کرو کہ قطاع کا زاویہ ۶۶° ہونا چاہئے۔

۱۲۔ کھلے مستطیلی تالاب میں پانی کا دیا ہوا حجم آسکنا چاہئے، بتاؤ کہ اسکے ابعاد کے

تناسب کیا ہوں کہ سیسہ سے اس کو منڈھوانے کے اخراجات کم سے کم ہوں۔
[طول اور عرض دونوں گہرائی کے دوچند ہونے چاہئیں]

۱۳۔ مستطیلی متوازی السطوح کے تین متقاطع کناروں کا مجموعہ معلوم ہے۔ اس کی شکل دریافت کرو کہ سطح زیادہ سے زیادہ ہو۔

۱۴۔ بڑے سے بڑے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح جو ایک کرہ کے اندر بن سکتا ہے مکعب ہے۔

۱۵۔ بڑے سے بڑے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح جس کی بیرونی سطح معلوم ہو مکعب ہے۔

۱۶۔ بند بیضوی منحنی میں بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ راسوں پر کے مماس مقابل کے اضلاع کے متوازی ہیں۔

۱۷۔ بند بیضوی منحنی کے گرد کم سے کم رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کی نقاط تماس پر تنصیف ہوتی ہے۔

۱۸۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ والا مثلث جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے وہ متساوی الاضلاع مثلث ہے، اور کم سے کم رقبہ والا مثلث جو دائرہ کے گرد بن سکتا ہے وہ بھی متساوی ضلعوں والا مثلث ہے۔

۱۹۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا کثیر الاضلاع جس کی تعداد اضلاع ن دی ہوئی ہو اور جو ایک دائرہ کے اندر بن سکے منتظم کثیر الاضلاع ہوگا، نیز ن اضلاع کا کم سے کم رقبہ والا کثیر الاضلاع جو ایک دائرہ کے گرد بن سکتا ہے وہ بھی منتظم کثیر الاضلاع ہے۔ ۱۳۴

۲۰۔ یہ مانکر کہ معلومہ گھیرے کے لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے، بتاؤ کہ اس سے فوراً یہ کس طور پر مستنبط ہوتا ہے کہ دیے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم گھیرے والا مستطیل مربع ہے۔

اسی طور پر اوپر کے سوالات ۱۳ اور ۱۵ سے کیا نتائج اخذ ہو سکتے ہیں۔

۲۱۔ ن اضلاع کا کثیر الاضلاع معلومہ گھیرے کے لئے جس کا رقبہ اعظم ہو یا معلومہ رقبہ کے لئے جس کا گھیرا اقل ہو منتظم کثیر الاضلاع ہوگا۔
[امثلہ ۱۷، اسوال ۲۴ کا نتیجہ مان لو]۔

اس سے ثابت کرو کہ معلوم گھیرے کے لئے اعظم رقبہ کی شکل یا معلومہ رقبہ کے لئے اقل گھیرے کی شکل، دائرہ ہوگی۔

۲۲ — ڈاک خانہ (پوسٹ آفس) کے قواعد کی رو سے پارسل کے طول اور گھیرے کا مجموعہ ۶ فٹ سے زیادہ نہیں ہونا چاہئے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے حجم والا پارسل جو بھیجا جاسکتا ہے وہ ایک اسطوانہ ہے جو طول میں ۲ فٹ اور گھیرے میں ۴ فٹ ہو۔ اس کا حجم ۲٫۵۴۶ مکعب فٹ ہوگا۔

امثلہ ۱۹

چھوٹے تغیرات

۱ — ثابت کرو کہ لوکارتمی مماسوں کی جدول میں جو اساس ۱۰ پر محسوب کئے گئے ہوں ۶۰° کی پڑوس میں ایک منٹ کے لئے فرق تقریباً ۰٫۰۰۰۲۹ ہے۔

۲ — ایک برج کی بلندی ب اس کے پایہ سے فاصلہ ا پر زاویہ ارتفاع (عہ) مشاہدہ کرنے سے معلوم کی گئی ہے، ثابت کرو کہ مشاہدہ شدہ ارتفاع میں خطا مف عہ کے جواب میں خطا ہے

مف ب = ا قط^2 عہ مف عہ

اگر ا = ۱۰۰ فٹ، عہ = ۳۰° اور زاویہ میں خطا ۱′ ہو تو ثابت کرو کہ

مف ب = ۰٫۴۷ انچ۔

۳ — ۱۰۱ کا جذرالکعب دریافت کرو، یہ معلوم ہے کہ ۱۰۰ کا جذرالکعب ۴٫۶۴۱۶ ہے۔ (۴٫۶۵۷۰)

۴ — لوک$_ہ$ ۱۰ = ۲٫۳۰۲۶ معلوم ہے، لوک$_ہ$ ۱۰۱ کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

جواب :— (۴٫۶۱۵۱)

۵ — ضد لوکارتموں (ہا = ۱۰^{ل}) کی جدول میں ۳۲۱ کے محاذی اندراج ۲٫۵۱۱۸۸۶ ہے، ۳٫۴۰۰۵ کے ضد لوکارتم دریافت کرو۔ (لو ہ = ۴۳۴۲۹۴ء)

جواب :— (۲٫۵۱۲۱۷۹)

۶ — لوک مماس سے ایک زاویہ دریافت کیا جائیگا۔ اگر لوک مماس کے

محسوب کرنے میں غلطی ۰۰۰۱ء رہ گئی ہو تو توسی سکنڈوں میں زاویہ کی خطا دریافت کرو، زاویہ ۳۰° کی پیروس میں ہے۔ [۲۰۶۶ً]

۷ ۔ لوگ قاطعوں کی جدول میں جو اساس ۱۰ پر محسوب کئے گئے ہیں، ایک منٹ کے لئے فرق ۳۰° کی پیروس میں تقریباً ۰۰۰۰ء۷ ہوگا۔ ۱۳۵

۸ ۔ معلوم ہے جم۵ = ۲۰۹۹ء۷۴، جم ۵ء۰۱ کی قیمت محسوب کرو۔ [۷۴۲۲۸۴۱]

۹ ۔ مستر ۵ء = ۴۶۲۱۲ء، مستر ۵ء۰۱ کی قیمت معلوم کرو۔ [۴۴۶۲۹۱]

۱۰ ۔ اگر فما (لا) مسلسل اور قابل تفرق ہو سوائے قیمت لا = لا₁ پر جہاں یہ لامتناہی ہو جاتا ہے تو ثابت کرو کہ فمَا (لا₁) بھی لامتناہی ہوگا۔

۱۱ ۔ مماسی برق پیما میں سوئی کے انحراف کا مماس برقی رو کے متناسب ہوتا ہے، ثابت کرو کہ قرأت کی معلومہ خطا کے جواب میں جو رو کی محصلہ قیمت میں متناسب خطا ہوگی وہ کم سے کم ہوگی جبکہ انصراف ۴۵° ہو۔

۱۲ ۔ ایک عدسہ کے محور پر ایک نقطہ اور اس کی تصویر یا خیال کے فاصلے عدسے سے (لا، لاَ) ذیل کے رشتہ سے مربوط ہیں $\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لاَ}} = \frac{1}{\text{ف}}$،

ثابت کرو کہ کسی چھوٹی شئے کی طولی تضعیف $\left(\frac{\text{لاَ}}{\text{لا}}\right)^2$ ہے۔

۱۳ ۔ ایک کرینک وپ، و کے گرد زاوی رفتار سہ کے ساتھ گھومتا ہے، ایک واصل سلاخ پ ق، پ پر وصل کردی گئی ہے اور ق ایک ثابت نالی ولا میں حرکت کرنے کے لئے مجبور ہے، ثابت کرو کہ ق کی رفتار سہ × وہ ہے جہاں ہ ایسا نقطہ ہے جس پر خط ق پ (ممدودہ بشرط ضرورت) و میں سے گذرنے والے ولا پر عمودی خط سے ملتا ہے۔

۱۴ ۔ ایک جسم کی کثافت (س) ہوا اور پانی میں اسکے اوزان بالترتیب (و، وَ) سے حاصل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ تولنے کی خطاؤں مف و، مف وَ کے جواب میں کثافت کی متناسب خطا ہوگی۔

$$\frac{\text{مف س}}{\text{س}} = -\frac{\text{وَ}}{\text{و} - \text{وَ}} \times \frac{\text{مف و}}{\text{و}} + \frac{\text{مف وَ}}{\text{و} - \text{وَ}}$$

۱۵۔ ایک کرہ کا نیم قطر ر ہوا اور پانی میں تولنے سے نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ تولنے کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے متناسب خطا ہوگی

$$\frac{\text{مف ر}}{\text{ر}} = \frac{\text{مف و}_1 - \text{مف و}_2}{3(\text{و}_1 - \text{و}_2)}$$

جہاں و_1، و_2 بالترتیب ہوا اور پانی کے اندر وزن ہیں۔

۱۶۔ ناقص کے رقبہ (س) کی خطا جبکہ نیم محوروں ر، ب کے ناپنے میں چھوٹی خطائیں ہوں یہ ہوگی

$$\frac{\text{مف س}}{\text{س}} = \frac{\text{مف ر}}{\text{ر}} + \frac{\text{مف ب}}{\text{ب}}$$

۱۷۔ اگر مثلث کے تینوں اضلاع ر، ب، ج ناپے جائیں تو اضلاع کی پیمائش میں چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے زاویہ ا کی خطا ہوگی

$$\text{مف ا} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب جب ج}}\left[\frac{\text{مف ر}}{\text{ر}} - \text{مم ج}\,\frac{\text{مف ب}}{\text{ب}} - \text{مم ب}\,\frac{\text{مف ج}}{\text{ج}}\right]$$

٢٦ ۱۸۔ ایک مثلث کا رقبہ ق اس کے ایک ضلع ر اور متصل زاویوں (ب، ج) کے ناپنے سے حاصل کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ پیمائش کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے رقبہ میں متناسب غلطی ہے

$$\frac{\text{مف ق}}{\text{ق}} = 2\,\frac{\text{مف ر}}{\text{ر}} + \frac{\text{ج}}{\text{ر}}\,\frac{\text{مف ب}}{\text{جب ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{ر}}\,\frac{\text{مف ج}}{\text{جب ج}}$$

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر تصدیق کرو۔

۱۹۔ ایک مثلث کا رقبہ ق اس کے اضلاع کے طولوں ر، ب، ج سے محسوب کیا گیا ہے، اگر ایک ہی مقدار عما سے ر کو گھٹایا اور ب کو بڑھایا جائے تو ثابت کرو کہ اسکی وجہ سے رقبہ میں تبدیلی ہوگی

$$\frac{\text{مف ق}}{\text{ق}} = \frac{2(\text{ر} - \text{ب})\,\text{عما}}{\text{ج}^2 - (\text{ر} - \text{ب})^2}$$

۲۰ — ایک مثلث کا ارتفاع قاعدہ ا اور قاعدہ پر کے زاویوں ب، ج کو ناپنے سے محسوب کیا گیا ہے، اگر ناپنے میں خطائیں مف ب، مف ج ہوں تو ارتفاع میں متناسب خطا ہوگی

$$\frac{\text{جب ج}}{\text{جب ا جب ب}}\,\text{مف ب} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا جب ج}}\,\text{مف ج}$$

۲۱ — مثلث ا ب ج کو ذرا سا بدلا گیا ہے لیکن اس طور پر کہ یہ اسی پہلے دائرہ کے اندر بن سکتا ہے، ثابت کرو

$$\frac{\text{مف ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{مف ب}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{مف ج}}{\text{جم ج}} = ۰$$

۲۲ — چار ڈنڈوں کے جوڑنے سے ا ب ج د ایک مستوی چار ضلعی شکل بنائی گئی ہے جسکی شکل بگڑ سکتی ہے۔ اگر قطروں ا ج، ب د کے طول لا، ما ہوں تو ان کے طولوں کے لا انتہا چھوٹے تغیرات ذیل کے ذریعہ مربوط ہونگے

$$\text{جب ا جب ج} \times \text{لا مف لا} + \text{جب ب جب د} \times \text{ما مف ما} = ۰$$

امثلہ ۲۰

ہندسی استعمال

۱ — اسکے لئے شرط کہ منحنی کا مماس مبدا میں سے گزرے یہ ہے $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

۲ — ثابت کرو کہ خط مستقیم $\text{ما} = ۲\,\text{لا} - ۱$ منحنی $\text{ما} = \text{لا}^{۳} - \text{لا} + ۱$ کا مماس ہے

۳ — ثابت کرو کہ خط $\text{ما} = ۲\,\text{لا} - ۱$ منحنی $\text{ما} = \text{لا}^{۴} + ۲\,\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} + ۳$ کو دو الگ الگ نقطوں پر مس کرتا ہے۔

۴ — ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لا}^{۴} - ۶\,\text{لا}^{۳} + ۱۳\,\text{لا}^{۲} - ۱۱\,\text{لا} + ۴$ خط مستقیم ۱۲۷
$\text{ما} = \text{لا}$ کو دوبارہ مس کرتا ہے۔ مبدا سے اور جو مماس کھینچ سکتے ہیں ان کے نقاط تماس کے فصلے دریافت کرو۔

۵ — منحنی $\text{ما} = \text{لا}^{۴} - ۶\,\text{لا}^{۳} + ۱۳\,\text{لا}^{۲} - ۱۰\,\text{لا} + ۵$ پر نقطے معلوم کرو جہاں پر مماس

$\text{ما} = 2\,\text{لا}$ کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ اِن میں سے دو نقطوں پر ایک ہی مماس ہے۔

۶۔ مبدأ سے منحنی $\text{ما} = 4\,\text{لا}^3 - 12\,\text{لا}^2 + 9\,\text{لا} - 2\,\text{لا}$ کے جو مماس کھینچ سکتے ہیں اُنکی مساواتیں دریافت کرو۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر مماس محور لا کے متوازی ہے۔ شکل بناؤ

۷۔ ایک منحنی کے کسی نقطہ کا مماس اور معین دونوں کھینچے گئے ہیں، معین کے پایہ سے مماس پر عمود نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ عمود ہے $\text{ما} \div \left\{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ اس لئے

ثابت کرو کہ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ج جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ میں یہ عمود مستقل ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ مبدأ سے مماس پر عمود $\left(\text{ما} - \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) \div \left\{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ ہے

دائرہ $\text{ما} = \pm\sqrt{\text{ر}^2 - \text{لا}^2}$ کی صورت میں اسکی تصدیق کرو کہ یہ عمود مستقل ہے اور

قائم قطع زائد $\text{لا ما} = \text{ک}^2$ کی صورت میں یہ $\frac{2\,\text{ک}^2}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}}$ کے مساوی ہے۔

۹۔ قوت نمائی منحنی (شکل ۲۴ صفحہ ۱۱۰) $\text{ما} = \text{ب}\,\text{ﮦ}^{\frac{\text{لا}}{\text{ر}}}$ میں ثابت کرو کہ زیر مماس مستقل ہے اور زیر عماد $\frac{\text{ما}^2}{\text{ر}}$ ہے۔

۱۰۔ زنجیرہ $\text{ما} = \text{ج جمز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ میں زیر مماس $\text{ج ممز} \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ ہے، زیر عماد

$\frac{1}{2}\,\text{ج جبز} \frac{2\,\text{لا}}{\text{ج}}$ اور عماد $\frac{\text{ما}^2}{\text{ج}}$ ہے۔

۱۱۔ منحنی $\text{ما}^{\text{ن}} = \text{ر}^{\text{ن}-1}\,\text{لا}$ کا زیر مماس ن لا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ منحنی $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ر}}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = 2$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے ۱۴۸

خط مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{ر}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 2$ کو نقطہ (ر، ب) پر مس کرتا ہے۔

۱۳۔ جیبوں کے منحنی $\text{ما} = \text{ب}\ \text{جب}\ \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ میں زیر مماس $\text{ا}\ \text{مس}\ \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ ہے، زیر عماد $\frac{1}{2}\ \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}\ \text{جب}\ \frac{2\,\text{لا}}{\text{ا}}$ اور عماد $\text{ب}\ \text{جب}\ \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \sqrt{1 + \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\ \text{جم}^2\ \frac{\text{لا}}{\text{ا}}}$ ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{قو}^{-\text{عہ}\,\text{لا}}\ \text{جب}\ \text{بہ}\,\text{لا}$، $\text{ما} = \text{قو}^{-\text{عہ}\,\text{لا}}$ اُن نقطوں پر مس کرتے ہیں جہاں پر $\text{بہ}\,\text{لا} = 2\,\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{2}$ جبکہ ن صحیح عدد ہے۔ منحنیوں کو کھینچو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مبدأ میں سے خطوں کا ایک جوڑا ایسا کھینچ سکتا ہے کہ ہر ایک خط اُن تمام منحنیوں کو مس کرے جو مساوات $\text{ما} = \text{ج}\ \text{جم}\ \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ میں ج کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک متحرک نقطہ کی رفتار (ع) کو معین اور رقبہ مرتسمہ کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسراع زیر عماد سے تعبیر ہوگا۔

۱۷۔ ایک ذرہ کی توانائی بالفعل $(\frac{1}{2}\ \text{م}\ \text{ع}^2)$ کو معین اور فضا س کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ قوت منحنی کے ڈھال سے تعبیر ہوتی ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ منحنیات $\text{ما}^{\text{ن}} = 2^{\text{ن}}\ \text{ا}^{\text{ن}-1}\ \text{لا}$ ، $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ا}^{\text{ن}}} + \frac{\text{ما}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}} = 1$
کے مماسوں کی مساواتیں بالترتیب ذیل کی شکلوں میں رکھی جا سکتی ہیں

$$\text{ما}\,\text{ما}_1 = 2\,\text{ا}^{\text{ن}-1}\left\{\text{لا} + (\text{ن}-1)\,\text{لا}_1\right\} ، \quad \frac{\text{لا}\ \text{لا}_1^{\text{ن}-1}}{\text{ا}^{\text{ن}}} + \frac{\text{ما}\ \text{ما}_1^{\text{ن}-1}}{\text{ب}^{\text{ن}}} = 1$$

۱۹۔ خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ کے متوازی، مخروطی تراش $\text{فہ}\,(\text{لا}، \text{ما}) = 0$ کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تماس کے ملانے والے خط کی مساوات ہے

$$\frac{\text{جف}\ \text{فہ}}{\text{جف}\ \text{لا}} + \text{م}\ \frac{\text{جف}\ \text{فہ}}{\text{جف}\ \text{ما}} = 0$$

۱۳۹ ۲۰— محدود انحنا والے بند بیضوی منحنی کے وتر ایک ثابت سمت کے متوازی کھینچے گئے ہیں، ثابت کروکہ اس نظام میں کم از کم ایک وتر ایسا ضرور ہے جسکے سروں پر کے مماس متوازی ہیں۔

۲۱— ثابت کروکہ ناقص لا = ا جم (طہ + عہ)، ما = ب جم (طہ + بہ) میں نقطہ طہ۱ پر کا مماس نقطہ طہ۲ میں سے گذرنے والے نیم قطر کے متوازی ہوگا اگر

$$\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2 = \pm \frac{\pi}{2} \text{ -}$$

۲۲— ناقص لا = ا جم طہ + اَ جب طہ، ما = ب جم طہ + بَ جب طہ کے صدری محوروں کے جواب میں طہ کی قیمتیں دریافت کرو

$$\left[\text{مس ۲ طہ} = \frac{\text{۲ (ا اَ + ب بَ)}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2}\right]$$

۲۳— اس کے لئے شرط کہ منحنی فہ (لا، ما) = ۰ کا عماد مبدأ میں سے گذرے یہ ہے

$$\text{لا} \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} - \text{ما} \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = 0$$

مخروطی تراش ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۱ کے صدری محوروں کی مساوات دریافت کرو۔

۲۴— اگر ب > ۲ ا تو مبدأ سے مکافی لا^2 = ۴ ا (ما + ب) کے تین حقیقی مماس کھینچ سکتے ہیں۔

۲۵— قائم زائد $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ کے کسی نقطہ پر کا عماد محددوں کے محوروں پر جو مقطوعے بناتا ہے انہیں معلوم کرو اور ثابت کروکہ ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

۲۶— ثابت کروکہ زائد لا = ک ت، ما = $\frac{\text{ک}}{\text{ت}}$ کے مماس کی مساوات

لا + ت^2 ما = ۲ ک ت ہے۔

۲۷— اگر $\text{لا}^4 + \text{ما}^4 = \text{ا}^4$ تو ثابت کروکہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2$ اعظم ہوگا جبکہ لا = ± ما ہو۔ منحنی کو مرتسم کرو اور ثابت کروکہ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ سے اس کا زیادہ سے زیادہ نیم قطری ہٹاؤ

۱۸۹ ارا ہے -

۲۸ – ثابت کرو کہ مکافی $ر = \frac{ا}{جب^{2}\frac{طہ}{2}}$ میں جہاں ماسکہ قطب ہے، $فہ = ۱۱ - \frac{طہ}{2}$
اس لئے ثابت کرو کہ مماس ماسکی فاصلہ اور محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے -

۲۹ – ایک منحنی پر دو متصل نقطے پ، پَ لئے گئے ہیں، خطوط مستقیم پ ر، پَ رَ ۱۴۰
نیم قطروں پر علی القوائم کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پ ر کی انتہائی قیمت جبکہ
پَ، پ پر منطبق ہو $\frac{فر}{فطہ}$ ہے -

۳۰ – فہ وہ زاویہ ہے جو منحنی کا مماس مبدأ میں سے گذرنیوالے سمتی نیم قطر کے ساتھ بناتا ہے ثابت کرو کہ

$$مس\ فہ = \frac{لا\frac{فما}{فلا} - ما}{لا + ما\frac{فما}{فلا}}$$

۳۱ – قائم قطع زائد $ر^{2}\ جم\ ۲طہ = ا^{2}$ میں ثابت کرو وہ خطوط جو نیم قطر اور مماس کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے اس سمت میں مستقل ہیں -

۳۲ – ثابت کرو کہ منحنی $\frac{1}{ر} = ف(طہ)$ کے مماس کی مساوات نقطہ
$طہ = عہ$ پر ہے

$$\frac{1}{ر} = ف(عہ)\ جم(طہ - عہ) + فَ(عہ)\ جب(طہ - عہ)$$

اسلئے ثابت کرو کہ مخروطی تراش $\frac{ل}{ر} = 1 + ز\ جم\ طہ$ کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{ل}{ر} = ز\ جم\ طہ + جم(طہ - عہ)$$

۱۴۱

پانچواں باب

اعلیٰ رتبہ کے مشتقات

۶۴ — **تعریف اور ترقیم** — اگر ما متغیر لا کا تفاعل ہو تو مشتق تفاعل $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بھی عموماً لا کا قابل تفرق تفاعل ہوگا۔ $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کو تفرق کرنے کا نتیجہ دوسرا تفرقی سر یا دوسرا مشتق کہلاتا ہے اور اگر یہ پھر تفرق کے قابل ہے تو نتیجہ کو تیسرا تفرقی سر یا تیسرا مشتق کہتے ہیں اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ والے مشتقوں کے لئے۔ اگر $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کو اس عمل کی علامت تصور کیا جائے تو پہلے دوسرے تیسرے .... ن ویں مشتقوں کو بالترتیب حسب ذیل علامات سے ظاہر کیا جائیگا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\text{ما} \text{، } \left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{2}\text{ما} \text{، } \left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{3}\text{ما} \text{، } \ldots\ldots \left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}}\text{ما}$$

انکی زیادہ عام شکل ہے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$، $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$، ..... $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$ انہیں اوپر کی علامات کا اختصار سمجھنا چاہیے۔

نیز دفعہ ۲۵ کے مطابق $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کے بجائے عف لکھنے سے ہمیں

عف ما، $\text{عف}^{2}\text{ما}$، $\text{عف}^{3}\text{ما}$، ..... $\text{عف}^{\text{ن}}\text{ما}$ حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ما = فا (لا) تو متواتر مشتقات فا$'$ (لا)، فا$''$ (لا)، فا$'''$ (لا) ... فا$^{(ن)}$ (لا) سے بھی ظاہر کئے جا سکتے ہیں۔ بعض موقعوں پر زیادہ مختصر ترقیم ما$'$، ما$''$، ما$'''$ ... ما$^{(ن)}$ اختیار کرنے سے سہولت ہوگی۔

چند صورتیں ایسی ہیں کہ اِن میں تفاعل کے ن ویں مشتق کے لئے عام جملہ دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اِن میں سے زیادہ اہم صورتیں ذیل کی مثالوں میں دی گئی ہیں۔

مثال ۱۔ اگر ما = ا$_{\cdot}$ + ا$_{1}$ لا + ا$_{2}$ لا^{2} + ... + ا$_{م}$ لا^{م} ......(۱) ۱۴۲

تو عف ما = ا$_{1}$ + ۲ا$_{2}$ لا + ۳ا$_{3}$ لا^{2} + ... + م ا$_{م}$ لا$^{م-1}$

عف^{2} ما = ۲×۱ا$_{2}$ + ۳×۲ا$_{3}$ لا + ... + م×(م-۱) ا$_{م}$ لا$^{م-2}$ ......(۲)

....

عف^{م} ما = م(م-۱)(م-۲)......۲×۱ ا$_{م}$

اور اسلئے عف$^{م+1}$ ما = ۰، عف$^{م+2}$ ما = ۰ وغیرہ وغیرہ ....(۳)

پس م ویں درجہ کے منطق صحیح تفاعل کا م واں مشتق مستقل ہے اور اس سے اعلیٰ رتبہ کے مشتقات صفر ہیں۔

مثال ۲۔ اگر ما = ﻫو$^{ک لا}$ (ک مستقل) ....(۴)

تو عف ما = ک ﻫو$^{ک لا}$، عف^{2} ما = ک^{2} ﻫو$^{ک لا}$ ....

اور عموماً عف^{ن} ما = ک^{ن} ﻫو$^{ک لا}$ ....(۵)

پس ک = لوک ا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

عف^{ن} ا^{لا} = (لوک ا)^{ن} ا^{لا} ....(۶)

مثال ۳۔ اگر ما = جب ب لا ....(۷)

تو عف ما = ب جم ب لا، عف^{2} ما = -ب^{2} جب ب لا

عف^{3} ما = -ب^{3} جم ب لا، عف^{4} ما = ب^{4} جب ب لا ......(۸)

اور علیٰ ہذا القیاس۔

یا بطرز دیگر عف ما = بہ جب (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$)

اور اس لئے عف^{۲} ما = بہ^{۲} جب (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$ + $\frac{\pi}{۲}$)

اور شکل عامہ عف^{ن} ما = بہ^{ن} جب (بہ لا + $\frac{ن\pi}{۲}$) ...... (۹)

مثال ۴۔ اگر ما = جم بہ لا .... (۱۰)

تو عف ما = - بہ جب بہ لا ، عف^{۲} ما = - بہ^{۲} جم بہ لا
عف^{۳} ما = + بہ^{۳} جب بہ لا ، عف^{۴} ما = بہ^{۴} جم بہ لا ... (۱۱)

اور علیٰ ہذا القیاس۔

یا عف ما = بہ جم (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$)

اس لئے عف^{۲} ما = بہ^{۲} جم (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$ + $\frac{\pi}{۲}$)

اور شکل عامہ عف^{ن} ما = بہ^{ن} جم (بہ لا + $\frac{ن\pi}{۲}$) .... (۱۲)

مثال ۵۔ اگر ما = و$^{عہ لا}$ جم بہ لا .... (۱۳)

تو عف ما = و$^{عہ لا}$ (عہ جم بہ لا - بہ جب بہ لا)
عف^{۲} ما = و$^{عہ لا}$ {(عہ^{۲} - بہ^{۲}) جم بہ لا - ۲ عہ بہ جب بہ لا} ... (۱۴)

۱۴۳ اسی طرح اگر ما = و$^{عہ لا}$ جب بہ لا .... (۱۵)

تو عف ما = و$^{عہ لا}$ {عہ جب بہ لا + بہ جم بہ لا}
عف^{۲} ما = و$^{عہ لا}$ {(عہ^{۲} - بہ^{۲}) جب بہ لا + ۲ عہ بہ جم بہ لا} ... (۱۶)

ان صورتوں میں عہ = ر جم طہ ، بہ = ر جب طہ .... (۱۷)

رکھنے سے عام ضابطہ دریافت ہوسکتا ہے۔ کیونکہ اسکی مدد سے

عف (فو^{عہ لا} جم بہ لا) = فو^{عہ لا} (عہ جم بہ لا - بہ جب بہ لا)

= ر فو^{عہ لا} جم (بہ لا + طہ)

اور اس نتیجہ کو بار بار استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

عف^ن (فو^{عہ لا} جم بہ لا) = ر^ن فو^{عہ لا} جم (بہ لا + ن طہ) ....(۱۸)

اسی طرح عف^ن (فو^{عہ لا} جب بہ لا) = ر^ن فو^{عہ لا} جب (بہ لا + ن طہ) ...(۱۹)

مثال ۶۔ اگر ما = لوک لا .... (۲۰)

تو عف ما = لا^{-۱}، عف^۲ ما = - لا^{-۲}، عف^۳ ما = (-۱)(-۲) لا^{-۳} ....

اور شکل عامہ ہے عف^ن ما = (-۱)(-۲)(-۳) .... × - (ن - ۱) لا^{-ن}

= (-۱)^{ن-۱} (ن - ۱)! / لا^ن .... (۲۱)

۶۵۔ حاصل ضرب کے متواتر مشتقات۔ لیبنیز کا مسئلہ

اگر ع اور و متغیر لا کے تفاعل ہوں تو دفعہ ۳۱ (۲۰) کی رو سے

عف (ع و) = و × عف ع + ع × عف و .... (۱)

اگر اسے ہم دوبارہ تفرق کریں تو

عف^۲ (ع و) = عف (و عف ع) + عف (ع عف و)

اب مذکور بالا ضابطہ کے مطابق

عف (و عف ع) = و عف^۲ ع + عف ع × عف و

اور عف (ع عف و) = عف ع × عف و + ع عف^۲ و

پس عف^۲ (ع و) = و عف^۲ ع + ۲ عف ع × عف و + ع عف^۲ و ... (۲)

حاصل ضرب کے ن ویں مشتق کے لئے عام ضابطہ ہے

$$عف^{ن}(ع و) = و\,عف^{ن} ع + ن\,عف^{ن-۱} ع \times عف\,و + \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} عف^{ن-۲} ع \times عف^{۲} و +$$

$$\dots\dots + ن\,عف\,ع \times عف^{ن-۱} و + ع\,عف^{ن} و \dots\dots\dots (۳)$$

اس میں رقموں کے سر وہی ہیں جو مسئلہ ثنائی میں ہوتے ہیں۔ اس مسئلہ کو لیبنٹز
نے دریافت کیا۔ نتیجہ (۳) کی صداقت ثابت کرنیکے لئے ع و کے چند ابتدائی مشتقوں ۱۴۴
کے حاصل کرنے کے طریقے پر غور کرو۔

ہم مشتقوں کے لئے زبر کی ترقیم استعمال کرینگے

پس

$$عف(ع و) = ع' و + ع و' \dots\dots\dots\dots (۴)$$

اس کو دوبارہ تفرق کرنے سے

$$عف^{۲}(ع و) = ع'' و + ۲ ع' و' + ع و'' \dots\dots\dots\dots\dots (۵)$$

اگلے تفرق سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$عف^{۳}(ع و) = ع''' و + ۲ ع'' و' + ع' و''$$

$$+ ع'' و' + ۲ ع' و'' + ع و''' \dots\dots\dots (۶)$$

اس آخری ضابطہ کی پہلی سطر ضابطہ (۵) کی ہر رقم کے پہلے متغیر کو تفرق کرنے سے حاصل ہوئی ہے اور دوسری سطر دوسرے متغیر کو تفرق کرنے سے۔

پس حاصل ہوا کہ

$$عف^{۳}(ع و) = ع''' و + ۳ ع'' و' + ۳ ع' و'' + ع و''' \dots\dots (۷)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ضابطہ (۷) کی ر ویں رقم کا عددی سر ضابطہ (۵) کی ر ویں اور (ر-۱) ویں رقموں کے عددی سروں کا مجموعہ ہے۔ اور متواتر قدموں کے طرز سے ظاہر ہے کہ یہ قاعدہ اگلے مشتقوں کے لئے بھی صحیح ہوگا۔ اب عین یہی قاعدہ (ا + ب) کی متواتر قوتوں کے پھیلاؤ میں سروں کے مرتب کرنے کا ہے اور چونکہ عف (ع و) کے سر وہی ہیں جو (ا + ب) کی پہلی قوت کے سر ہیں تو ثابت ہوا کہ $عف^{ن}$ (ع و) کے پھیلاؤ میں سر وہی ہونگے جو $(ا + ب)^{ن}$ کے پھیلاؤ میں ہوتے ہیں۔

مثال ۱ — اگر $\text{ما} = \text{لا}\ \text{ع}$ ....(۸)

تو $\text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ما} = \text{لا}\ \text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ع} + \text{ن} \times \text{عف}\ \text{لا} \times \text{عف}^{\text{ن}-۱}\ \text{ع}$، چونکہ $\text{عف}^{۲}\ \text{لا} = ۰$

$$= \text{لا}\ \text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ع} + \text{ن}\ \text{عف}^{\text{ن}-۱}\ \text{ع} \qquad (۹)$$

پس اگر $\text{ما} = \text{لا}\ \text{جب}\ \text{به}\ \text{لا}$ ....(۱۰)

تو $\text{عف}^{۲}\ \text{ما} = \text{لا}\ \text{عف}^{۲} (\text{جب}\ \text{به}\ \text{لا}) + ۲\ \text{عف} (\text{جب}\ \text{به}\ \text{لا})$

$$= -\text{به}^{۲}\ \text{لا}\ \text{جب}\ \text{به}\ \text{لا} + ۲\ \text{به}\ \text{جم}\ \text{به}\ \text{لا} \qquad (۱۱)$$

نیز اگر $\text{ما} = \text{لا}\ \text{لوک}\ \text{لا}$ ....(۱۲)

تو $\text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ما} = \text{لا}\ \text{عف}^{\text{ن}} (\text{لوک}\ \text{لا}) + \text{ن}\ \text{عف}^{\text{ن}-۱} (\text{لوک}\ \text{لا})$

$$= (-۱)^{\text{ن}-۱} \frac{|\text{ن}-۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}} + (-۱)^{\text{ن}-۲} \frac{\text{ن}\,|\text{ن}-۲}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}$$ ، دفعہ ۶۴ (۲۱) کے مطابق

پس $\text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ما} = (-۱)^{\text{ن}} \frac{|\text{ن}-۲}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}$ ....(۱۳)

مثال ۲ — اگر $\text{ما} = \text{فو}^{\text{ا لا}} \times \text{ع}$ ....(۱۴) ۱۴۵

تو $\text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ما} = \text{فو}^{\text{ا لا}} \times \text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ع} + \text{ن}\ \text{عف}\ \text{فو}^{\text{ا لا}} \times \text{عف}^{\text{ن}-۱}\ \text{ع} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\ \text{عف}^{۲}\ \text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{عف}^{\text{ن}-۲}\ \text{ع} + \ldots$

$$= \text{فو}^{\text{ا لا}} \left[\text{عف}^{\text{ن}}\ \text{ع} + \text{ن}\ \text{ا}\ \text{عف}^{\text{ن}-۱}\ \text{ع} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۱\times۲}\ \text{ا}^{۲}\ \text{عف}^{\text{ن}-۲}\ \text{ع} + \ldots\right] \qquad (۱۵)$$

پس اگر $\text{ما} = \text{فو}^{\text{ا لا}}\ \text{جب}\ \text{ب}\ \text{لا}$ ....(۱۶)

تو $\text{عف}^{۲}\ \text{ما} = \text{فو}^{\text{ا لا}} (\text{عف}^{۲}\ \text{جب}\ \text{ب}\ \text{لا} + ۲\ \text{ا}\ \text{عف}\ \text{جب}\ \text{ب}\ \text{لا} + \text{ا}^{۲}\ \text{جب}\ \text{ب}\ \text{لا})$

$$= \text{فو}^{\text{ا لا}} \left\{(\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲})\ \text{جب}\ \text{ب}\ \text{لا} + ۲\ \text{ا}\ \text{ب}\ \text{جب}\ \text{ب}\ \text{لا}\right\} \qquad (۱۷)$$

اور یہ ضابطہ دفعہ ۶۴ (۱۶) کے مطابق ہے۔

۶۶ — حرکیات کی مثالیں:— تفرقی احصا کے حرکیاتی اطلاقات میں

دوسرا مشتق خاص حصہ لیتا ہے۔ چنانچہ خطی حرکت کی صورت میں اگر ثابت مبدأ سے فاصلہ س ہو تو دفعہ ۲۶ میں ہم نے دیکھا ہے کہ رفتار ر اور اسراع ع ذیل کے ضابطوں سے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{ر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\ \text{،}\quad \text{ع} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(۱)}$$

پس موجودہ ترقیم کے مطابق $\text{ع} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right) = \frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}} \quad \cdots\cdots \text{(۲)}$

یعنی بلحاظ وقت کے س کا دوسرا مشتق اسراع کی پیمائش کرتا ہے۔

نیز دفعہ ۲۶ کی ترقیم میں ثابت محور کے گرد ایک جسم کا زاوی اسراع ہے

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}^{2}\text{طہ}}{\text{فرت}^{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(۳)}$$

مثال ۱۔ اگر س وقت ت کا دو درجی تفاعل ہو یعنی فرض کرو کہ

$$\text{س} = \text{ا ت}^{2} + \text{ب ت} + \text{ج} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(۴)}$$

تو $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{۲ ا ت} + \text{ب}$

اور $\frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}} = \text{۲ ا} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(۵)}$

یعنی اسراع مستقل ہے۔

۱۴۶ **مثال ۲۔** سادہ موسیقی حرکت میں

$$\text{س} = \text{ا جم (ن ت} + \text{صہ)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(۶)}$$

پس $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = -\text{ن ا جب (ن ت} + \text{صہ)}$

اور $\frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرت}^{2}} = -\text{ن}^{2}\text{ا جم (ن ت} + \text{صہ)} = -\text{ن}^{2}\text{س} \quad \cdots\cdots \text{(۷)}$

یعنی اسراع ہمیشہ ایک ثابت نقطے (س کے مبدا کی سمت میں) کی طرف اور اس نقطہ سے

فاصلہ کے متناسب ہے۔

مثال ۳۔ اگر س = اجمز ن ت + ب جمز ن ت ... (۸)

تو فر س / فر ت = ن اجبز ن ت + ن ب جمز ن ت

اور فر^۲ س / فر ت^۲ = ن^۲ اجمز ن ت + ن^۲ ب جمز ن ت = ن^۲ س ... (۹)

یعنی اسراع ثابت نقطہ سے مخالف سمت میں ہے اور فاصلہ کے متناسب ہے۔

۶۷۔ تقعر اور تحدب۔ نقاط انعطاف۔

جیسے فہَ (لا) دفعہ ۲۶ کے مطابق فہ (لا) کے اضافہ کی شرح کو ناپتا ہے ویسے ہی فہً (لا) بھی فہَ (لا) کے اضافہ کی شرح کو ناپتا ہے۔ پس اگر فہً (لا) مثبت ہے تو منحنی

ڈھا = فہَ (لا) .... (۱)

کا ڈھال لا کے ساتھ بڑھ رہا ہے اور اگر فہً (لا) منفی ہے تو ڈھال لا کے ساتھ گھٹ رہا ہے۔

اگر فہً (لا) = ۰ تو ڈھال کے بدلنے کی شرح ایک لمحہ کے لئے صفر ہے اور یہاں مماس ساکن ہے اس کی سادہ مثال نقطہ انعطاف ہے یعنی وہ نقطہ جس پر منحنی اپنے مماس کو عبور کرے (دیکھو شکل ۴۰)۔

منحنی کو کسی نقطہ پ پر اوپر کی طرف مقعر اس وقت کہتے ہیں جبکہ منحنی کا وہ حصہ جو نقطہ پ کی عین قربت میں ہے کلیتاً پ کے مماس کے اوپر واقع ہو۔ لیکن اسے اوپر کی طرف محدب کہتے ہیں جبکہ وہ کلیتاً مماس کے نیچے واقع ہو۔

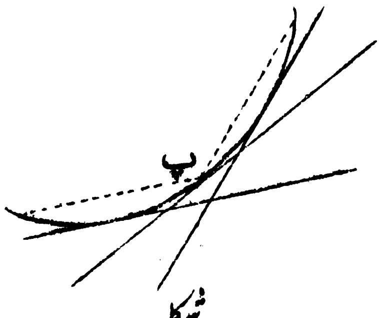
اگر منحنی کا وہ حصہ جو پ کی دائیں جانب ہے نقطہ پ کے مماس کے اوپر واقع ہو (جیسے کہ شکل ۳۹ میں) تو دفعہ ۵۲ سے صاف ظاہر ہے کہ پ کے دائیں جانب کی سمت میں (خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہو) ہمیشہ ایسے نقطے مل سکینگے جن پر فہَ (لا) کی قیمت نقطہ پ پر کی قیمت سے زیادہ ہو۔ پس

دفعہ ۴۸ کے مطابق نقطہ پ پر فہؔ (لا) کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی۔ اگر منحنی کا وہ حصہ جو پ کے بائیں جانب ہے پ پر کے مماس کے اوپر واقع ہو تو بھی یہی نتیجہ قائم رہے گا۔

اسی طرح اگر منحنی کے نقطہ پ کے دائیں یا بائیں جانب کا حصہ پ کے مماس کے نیچے واقع ہو تو فہؔ (لا) کی قیمت نقطہ پ پر مثبت نہیں ہو سکتی۔

پس اس بحث سے حاصل ہوا کہ منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو گا اگر فہؔ (لا) مثبت ہو اور اوپر کی طرف محدب ہو گا اگر فہؔ (لا) منفی ہو۔

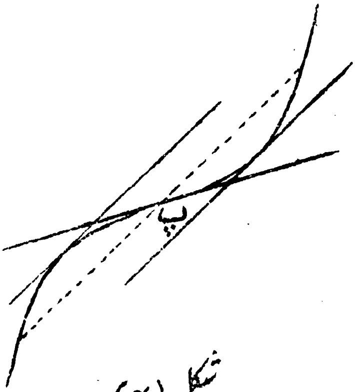
۱۴۷ نیز یہ ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر (جہاں منحنی اپنے مماس کو عبور کرتا ہے) فہؔ (لا) نہ مثبت ہو سکتا ہے اور نہ منفی۔ اور چونکہ اس کو محدود فرض کر لیا گیا ہے اس لئے اس کا صفر ہونا لازمی ہے۔ یہ شرط اگرچہ ضروری ہے لیکن کافی نہیں۔



شکل (۳۹)

اس کے علاوہ یہ ضروری ہے کہ جب لا کی قیمت بڑھتے بڑھتے زیر بحث قیمت میں سے گزرے تو فہؔ (لا) کی علامت بدلے۔ مثلاً فرض کرو کہ پ کے بائیں جانب منحنی مماس کے نیچے ہے اور دائیں جانب اوپر ہے۔ دفعہ ۵۶ سے ظاہر ہے کہ منحنی کے دائیں اور بائیں جانب پ کے قریب میں ایسے نقطے ہونگے جن پر ڈھال پ پر کے ڈھال سے بڑا ہے یعنی ڈھال کی پ پر اقل قیمت ہے اور اس لئے دفعہ ۵ کے مطابق فہؔ (لا) کی علامت

منفی سے مثبت ہونی چاہئے۔



شکل (۴۰)

اگر منحنی مماس کو مذکورہ بالا سمت سے مخالف سمت میں عبور کرتا ہے تو پ پر ڈھال کی اعظم قیمت ہوگی اور فَ″ (لا) کی علامت مثبت سے منفی ہوگی۔

۱۴۸ **مثال ۱۔** اگر $ع = لا^{۳}$ .... (۲)

تو $ع'' = ۶\,لا$

جیسے لا کی قیمت صفر میں سے گزرتے ہوئے بڑھتی ہے ویسے ع″ کی قیمت منفی سے مثبت ہوتی ہے اور اس لئے یہ نقطہ انعطاف ہے۔ شکل ۱۳ (صفحہ ۱۴۸) دیکھو۔

مثال ۲۔ اگر $ع = \frac{۲لا}{۱ + لا^{۲}}$ .... (۳)

تو $ع'' = \frac{۴لا\,(لا^{۲} - ۳)}{(۱ + لا^{۲})^{۳}}$

پس اسمیں تین نقاط انعطاف ہیں یعنی جبکہ $لا = ۰$ اور $لا = \pm\sqrt{۳}$ شکل ۱۴ (صفحہ ۴۰) دیکھو۔

مثال ۳۔ جیب کے منحنی $ع = ب\ جب\ \frac{لا}{ا}$ .... (۴)

کی صورت میں صاً = − ب/لا^۲ جب لا/لا = − صا/لا^۲

پس صاً علامت بدلتا ہے اس لئے وہ تمام نقاط جن پر منحنی لا محور کو کاٹتا ہے نقاط انعطاف ہیں دیکھو شکل ۱۴ (صفحہ ۴۲)۔

مثال ۴ — منحنی صا = لا^۴ ....(۵) میں صاً = ۱۲ لا^۲
نقطہ لا = ۰ پر صاً صفر ہو جاتا ہے لیکن اسکی علامت نہیں بدلتی۔ پس ساکن مماس تو ہے لیکن صحیح معنوں میں نقطہ انعطاف نہیں ہے۔ یہ امر اس بات سے بھی ظاہر ہے کہ لا^۴ لازماً مثبت ہے اور پورا منحنی مبدأ کے مماس کے ایک ہی جانب واقع ہوتا ہے۔

۶۸ — اقل اور اعظم قیمتوں میں مشتق کا استعمال —

تفاعل فہ (لا) کی اقل اور اعظم قیمتوں میں امتیاز کرنے کی جانچ جو دفعہ ۵۱ میں بیان کی گئی ہے وہ دوسرے مشتق فہً (لا) کے رقوم میں بھی بالعموم بیان ہو سکتی ہے۔

چونکہ فہً (لا) خود فہ (لا) کا مشتق ہے، اس لئے ظاہر ہے کہ اگر فہً (لا) مثبت ہے جبکہ لا کی قیمت بڑھتے بڑھتے فہ (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گزرتی ہے تو فہ (لا) لازماً بڑھ رہا ہے اور اس لئے اسکی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے۔ پس فہ (لا) اس مقام پر اقل ہے۔
اسی طرح اگر فہً (لا) منفی ہے جبکہ فہ (لا) = ۰ تو لازماً فہ (لا) گھٹ رہا ہے اور اس لئے اس کی علامت مثبت سے منفی ہوتی ہے۔
پس اس مقام پر فہ (لا) کی اعظم قیمت ہے۔

ان نتیجوں کا تقعر اور تحدب کے ساتھ ربط بالکل ظاہر ہے۔

مثال ا — ثابت کرو کہ خطی حرکت میں مبدأ سے فاصلہ س کی قیمت اقل یا اعظم ہو گی جبکہ رفتار فرس/فرت صفر ہو اور اسراع فر^۲س/فرت^۲ بالترتیب مثبت یا منفی ہو۔

۱۴۹ **مثال ۲ —** فرض کرو کہ فہ(لا) = ۲لا / (۱ + لا^{2})

تو دفعہ ۵۱ کی مثال میں دکھایا گیا ہے کہ فہ′(لا)، لا = ۱ اور لا = -۱ کے لئے صفر ہوتا ہے۔ نیز دفعہ ۶۷ کی مثال (۲) میں فہ″(لا) کی معلومہ قیمت سے حاصل ہوتا ہے کہ

فہ″(۱) = -۱ اور فہ″(-۱) = ۱

پس لا = ۱ سے تفاعل فہ(لا) کی اعظم قیمت حاصل ہوتی ہے اور لا = -۱ سے اقل قیمت۔ دیکھو شکل ۱۳ (صفحہ ۴۰)۔

ایسا ممکن ہے کہ لا کی کوئی خاص قیمت جو فہ′(لا) کو صفر بناتی ہے فہ″(لا) کو بھی صفر بنا دے۔ ایسی صورت میں آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہاں پر بالعموم فہ(لا) کی اقل اور اعظم قیمت نہیں ہوتی۔ دیکھو شکل ۳۱ (صفحہ ۱۴۸) لیکن یہاں اس پر بحث جاری رکھنا مفید نہ ہوگا۔ عام قاعدہ پندرھویں باب میں ٹیلر کے مسئلہ سے حاصل کیا جائیگا۔

۶۹ — مساواتوں کے نظریہ میں متواتر مشتقات۔

متواتر مشتق تفاعل مساواتوں کے نظریہ میں بڑا اہم حصہ رکھتے ہیں۔ دفعہ ۵۰ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ اگر فہ(لا) منطق صحیح تفاعل ہو تو فہ′(لا) = ۰ کی کم از کم ایک اصل فہ(لا) = ۰ کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ضرور ہوگی۔ اسی طرح فہ″(لا) = ۰ کی کم از کم ایک اصل فہ′(لا) = ۰ کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ہوگی۔ اور اسی طرح باقی مشتقوں کے لئے۔

نیز چونکہ فہ(لا) = ۰ کی ر، رتبہ کی اصل فہ′(لا) = ۰ کی (ر - ۱)، رتبہ کی اصل ہوگی اسلئے یہ فہ″(لا) = ۰ کی (ر - ۲)، رتبہ کی اصل ہوگی۔ اور اسی طرح وہ بالآخر فہ$^{(ر-۱)}$(لا) = ۰ کی ایک رتبہ کی سادہ اصل ہوگی۔ پس فہ(لا) = ۰ کی ر، رتبہ کی اصل ہونیکے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ تفاعل

$فہ(لا)$، $فہَ(لا)$، $فہً(لا)$، ..... $فہ^{(ر-۱)}(لا)$ ......(۱)

سب ایک ساتھ صفر ہوں -

مثال - اگر $فہ(لا) = ۲لا^{۵} + ۵لا^{۴} + ۴لا^{۳} + ۲لا^{۲} + ۲لا + ۱$

تو $فہَ(لا) = ۱۰لا^{۴} + ۲۰لا^{۳} + ۱۲لا^{۲} + ۴لا + ۲$

اور $فہً(لا) = ۴۰لا^{۳} + ۶۰لا^{۲} + ۲۴لا + ۴$

یہ تینوں تفاعل $لا = -۱$ کے لئے صفر ہوتے ہیں، اس لئے یہ $فہ(لا) = ۰$ کی تیسرے رتبہ کی یا تہری اصل ہے حقیقت میں

$$فہ(لا) = (لا + ۱)^{۳} (۲لا^{۲} - لا + ۱)$$

۷۰ - دوسرے مشتق کی ہندسی تعبیر -

دفعہ ۵۶ میں پہلے مشتق تفاعل کی ایک مشہور خاصیت منحنی $ما = فہ(لا)$ .....(۱) کو دراصل ایک سیدھے خط $ما = ا + ب لا$ .....(۲) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے حاصل کی گئی تھی - اور مستقل ا اور ب اس شرط سے دریافت
۱۵۰ کئے گئے تھے کہ (۱) اور (۲) ایکدوسرے کو لا کی دو معلومہ قیمتوں کیلئے قطع کریں -

اسی طور پر ہم منحنی (۱) کا مکافی $ما = ا لا^{۲} + ب لا + ج$ ....(۳) کے ساتھ مقابلہ کرتے ہیں اور مستقلات ا، ب، ج کو اس شرط کے تابع معلوم کرتے ہیں کہ (۱) اور (۳) لا کی تین معلومہ قیمتوں کے لئے ایکدوسرے کو قطع کریں -

(آ) پہلے ہم فرض کرتے ہیں کہ لا کی تین قیمتیں مساوی الفصل ہیں یعنی

ا - ھ، ا، ا + ھ،

اب مستقل دریافت کرنے کی مساواتیں ہیں

ا + ب (ا − ھ) + ج (ا − ھ)² = فہ (ا − ھ)
ا + ب ا + ج ا² = فہ (ا) ....(۴)
ا + ب (ا + ھ) + ج (ا + ھ)² = فہ (ا + ھ)

ایک نیا تفاعل فا(لا) ایسا فرض کرو کہ

فا(لا) = فہ(لا) − (ا + ب لا + ج لا²) ....(۵)

یعنی فا(لا) منحنی (۱) اور (۳) کے معینوں کا فرق ہے۔ مفروض سے فا(لا) صفر ہے جبکہ لا = ا − ھ اور لا = ا۔ پس دفعہ ۹۴ سے مشتق تفاعل فاَ(لا) متغیر لا کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔

یعنی　فاَ(ا − طہ۱ ھ) = ۰ ....(۶)

جہاں ۰ < طہ۱ < ۱۔ نیز چونکہ فا(لا) صفر ہے لا = ا اور لا = ا + ھ کے لئے اس لئے

فاَ(ا + طہ۲ ھ) = ۰ ....(۷)

جہاں ۰ < طہ۲ < ۱

اس دلیل کو دوبارہ استعمال کرنے سے چونکہ فاَ(لا) صفر ہے جبکہ لا = ا − طہ۱ ھ اور لا = ا + طہ۲ ھ اس لئے اس کا مشتق تفاعل فاً(لا) بھی لا کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔ یعنی

فہً(ا + طہ ھ) = ۰ ....(۸)

جہاں طہ ایسی مقدار ہے جو کسور − طہ۱ اور طہ۲ کے درمیان واقع ہے اور اس لئے ضروری طور پر ± ۱ کے درمیان ہے۔

چونکہ ضابطہ (۵) سے　فاً(لا) = فہً(لا) − ۲ ج ....(۹)

اس سے ثابت ہوا کہ طہ کی ± ۱ کے درمیان کسی خاص قیمت کے لئے

فہً(ا + طہ ھ) = ۲ ج ....(۱۰)

اب (۴) کے ضابطوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

۱۵۱ فا(ا + ھ) ـ ۲ فا(ا) + فا(ا ـ ھ) = ۲ ج ھ^2 ..... (۱۱)

اور اسلئے $\frac{\text{فا(ا + ھ) ـ ۲ فا(ا) + فا(ا ـ ھ)}}{\text{ھ}^2}$ = فاً(ا + طا ھ) .... (۱۲)

پس نہا~ھ←۰~ $\frac{\text{فا(ا + ھ) ـ ۲ فا(ا) + فا(ا ـ ھ)}}{\text{ھ}^2}$ = فاً(ا) ..... (۱۳)

اسی طریقہ پر ثابت کرسکتے ہیں

نہا~ھ←۰~ $\frac{\text{فا(ا + ۲ھ) ـ ۲ فا(ا + ھ) + فا(ا)}}{\text{ھ}^2}$ = فاً(ا) .... (۱۴)

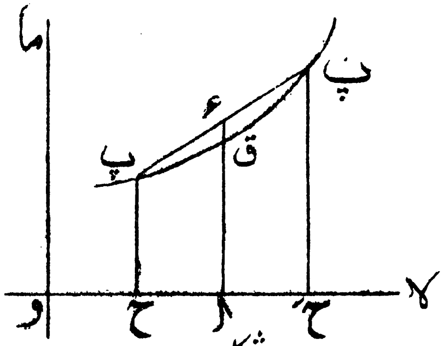
اگر فرق فا(ا + ھ) ـ فا(ا) کو مف ما سے ظاہر کیا جائے تو
{ فا(ا + ۲ھ) ـ فا(ا + ھ) } ـ { فا(ا + ھ) ـ فا(ا) }
متبوع متغیر کے مساوی اضافوں ھ کے لئے فرقوں کا فرق یعنی دوسرا فرق مف (مف ما) یا مف^2 ما سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
پس ضابطہ (۱۴) ضابطہ ذیل کے معادل ہے

نہا~مف ا←۰~ $\frac{\text{مف}^2\text{ ما}}{(\text{مف ا})^2}$ = $\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر ا}^2}$ .... (۱۵)

ترقیم $\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر ا}^2}$ کی یہی وجہ تھی کیونکہ یہ دوسرے فرق کی انتہائی شکل ہے۔
مسئلہ (۱۳) کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ شکل (۴۱) میں

و ا = ا، و ح = ا ـ ھ، و حَ = ا + ھ

اور ا ق، ح پ اور حَ پَ منحنی (ا) کے ان نقاط پر بالترتیب معین ہیں
پ پَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ا ق خط پ پَ سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔
تو ع ا = ½ (پَ حَ + پ ح)
= ½ { فا(ا + ھ) + فا(ا ـ ھ) }



شکل (۴۱)

اور اس لئے ع ق = ع ا - ق ا ۱۵۲

$$= \frac{1}{2}\{ فا(ا + ھ) - ۲فا(ا) + فا(ا - ھ) \}$$

اب ضابطہ (۱۳) اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ انتہا میں

$$ع ق = \frac{1}{2}(ح ا)^2 \times فاً(ا) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

اس سے ظاہر ہے کہ وتر کا قوس کے اوپر یا نیچے ہونا فاً (ا) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہے۔

(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ منحنی (۱) اور (۳) کے تین نقاط تقاطع میں سے دو ایکدوسرے پر منطبق ہوتے ہیں، یعنی ہم فرض کرتے ہیں کہ نقطہ لا = ا کے لئے دو منحنی ایک دوسرے کو نہ صرف کاٹتے ہیں بلکہ مس کرتے ہیں اور نقطہ لا = ا + ھ پر وہ ایک دوسرے کو پھر کاٹتے ہیں۔

نقطہ لا = ا پر دونوں منحنیوں کے لئے ما اور $\frac{در ما}{در لا}$ کی ایک ہی قیمت ہونے کے لئے یہ شرطیں ہیں کہ

$$\left.\begin{array}{l} ا + ب ا + ج ا^2 = فا(ا) \\ ب + ۲ ج ا = فاً(ا) \end{array}\right\} \ldots\ldots (۱۷)$$

اورتیسری شرط سے حاصل ہوتا ہے کہ

ا + ب (ا + ھ) + ج (ا + ھ)^۲ = فا (ا + ھ) ....(۱۸)

اگر فا (لا) سے وہی تفاعل تعبیر ہو جس کا اوپر بیان ہوا تو

فا (ا) = ۰ اور فا (ا + ھ) = ۰ ....(۱۹)

اوراس لئے فاَ (ا + طہ۱ ھ) = ۰ ....(۲۰)

جہاں ۰ < طہ۱ < ۱

نیز چونکہ فاَ (لا) صفر ہے لا = ا اور لا = (ا + طہ۱ ھ) کے لئے اسلئے

فاً (ا + طہ ھ) = ۰ ....(۲۱)

جہاں طہ۱ > طہ > ۰

اب ضابطے (۱۷) اور (۱۸) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

فہ (ا + ھ) - فہ (ا) - ھ فہَ (ا) = ج ھ^۲ ......(۲۲)

پس (۹) اور (۲۱) سے

فہ (ا + ھ) = فہ (ا) + ھ فہَ (ا) + ۱/۲ ھ^۲ فہً (ا + طہ ھ).....(۲۳)

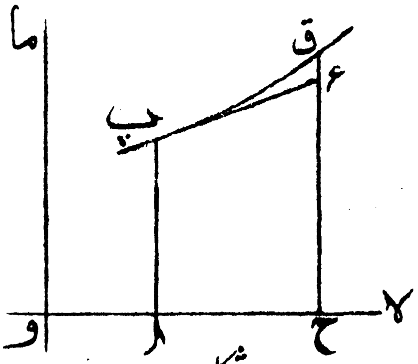
یہ نتیجہ نہایت اہم ہے اور بعدازاں معلوم ہوگا کہ یہ ٹیلر کے مسئلہ کی لاگرانجی شکل کی خاص صورت ہے (دیکھو پندرھواں باب)۔ اس شکل میں مسئلہ کا صرف اتنا حصہ شریک ہے جسکی بالعموم حرکیاتی اور طبیعیاتی سوالات میں اکثر ضرورت پڑتی ہے۔

نتیجہ (۲۳) سے اخذ ہوتا ہے

نہا ھ←۰ [فہ (ا + ھ) - فہ (ا) - ھ فہَ (ا)] / ھ^۲ = ۱/۲ فہً (ا)...(۲۴)

۱۵۳ شکل ۴۲ میں فرض کرو کہ و ا = ا اور ا ح = ھ اور پ، ح، ق بالترتیب ان نقاط کے معین ہیں۔ اگر ق ح نقطہ پ پر کے مماس کو ع پر ملے تو

ق ح = فہ (ا + ھ)، ع ح = فہ (ا) + ھ فہَ (ا)



شکل (۴۲)

پس ضابطہ (۲۴) اس بات کی صداقت کا اظہار کرتا ہے کہ انتہا میں

ق ع = ½ (ا ح)² × فہً (ا) ....(۲۵)

پس نقطہ تماس کے قریب میں مماس سے منحنی کا ہٹاؤ عموماً دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتا ہے۔ اگر فہً (ا) ≠ ۰ تو ق ع کی علامت ھ کے ساتھ نہیں بدلتی اور ب کے عین قریب میں منحنی کا کلیتاً مماس کے اوپر یا نیچے واقع ہونا فہً (ا) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہوگا۔ دیکھو دفعہ ۶۷

انحنا کے نظریہ میں ضابطوں (۱۶) اور (۲۵) کا دلچسپ استعمال ہے۔ دیکھو دسواں باب۔

۱۷۔ اجزائے تتناسب کا نظریہ۔

فرض کرو کہ منحنی ما = فہ (لا) ....(۱)

اور مکافی ما = ا + ب لا + ج لا² ....(۲)

نقاط لا = ا، لا = ا + ی ھ، لا = ا + ھ پر قطع کرتے ہیں جہاں ۱ > ی > ۰،

ہم معلوم کرتے ہیں

(۱ - ی) فہ (ا) + ی فہ (ا + ھ) - فہ (ا + ھ ی) = ی (۱ - ی) ھ² ج ....(۳)

اور اس لئے دفعہ سابق کے طریقہ کے مطابق ۱۵۴

(۱-ی) فا(ا) + ی فا(ا + ھ) - فا(ا + ی ھ) = ½ ی (۱-ی) ھ² فاً(ا + طا ھ)
(۴)..........

جہاں ۱ > طا > ۰

دفعہ ۰، کے مسائل اس ضابطہ کی خاص صورتیں ہیں اور اسے یہاں اس لئے بیان کیا گیا ہے کہ اس کا متناسب اجزاء کے نظریہ سے خاص تعلق ہے۔ فرض کرو کہ تفاعل فا(لا) کی قیمتیں لا کی متعدد قیمتوں کے لئے (جو ایک دوسرے سے مساوی فرق ھ پر ہیں) جدول کی شکل میں درج کی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ لا کی ان قیمتوں میں سے ایک قیمت ا ہے اور فا(لا) کی قیمت مطلوب ہے جبکہ لا، ا اور متصل جدولی قیمت ا + ھ کے درمیان کہیں واقع ہو مثلاً لا = ا + ی ھ جہاں ۱ > ی > ۰۔ اب متناسب اجزاء کے طریقے میں اور اج یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ تفاعل لا = ا سے لا = ا + ھ تک یکساں طور پر بڑھتا ہے یعنی

فا(ا + ی ھ) - فا(ا) / فا(ا + ھ) - فا(ا) = ی / ۱ ....(۵)

یا فا(ا + ی ھ) = (۱-ی) فا(ا) + ی فا(ا + ھ) ...(۶)

اس عمل میں یہ فرض کر لیا جائے کہ لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان منحنی (۱) کی قوس کی بجائے وتر لے لینے سے قابل قدر خطا واقع نہیں ہوتی۔ ضابطہ (۴) سے اس مفروض کی خطا حاصل ہوتی ہے۔

دفعہ ۱۵ مثال ۲ سے ظاہر ہے کہ ی (۱-ی) کی اعظم قیمت ¼ ہے۔ پس اگر حدود لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان فاً(لا) کی بڑی سے بڑی قیمت کو م سے ظاہر کریں تو ضابطہ (۴) سے ثابت ہوتا ہے کہ خطا ≯ ⅛ ھ² م ...(۷)

مثال ۱۔ سات اعشاریہ لوکارثمی جدول میں ۱۰۰۰ سے ۱۰۰۰۰ تک ایک ایک کے وقفہ پر تمام صحیح عددوں کے لوکارثم درج ہیں۔ اب اگر

فا(لا) = لوگ لا ....(۸)

تو فاً(لا) = - میا / لا² ....(۹)

پس (۷) میں ھ = ۱ رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لوک$_۱$ ن اور لوک$_۱$ (ن+۱) کے درمیان متناسب اجزاء کے طریقہ سے ادراج کرنے میں جو خطا سرزد ہوتی ہے وہ $\frac{۰۵۴۱۹ ء}{ن^۲}$ .... (۱۰)

سے بڑی نہیں ہے اس لئے اگر ن = ۱۰۰۰ تو بڑی سے بڑی خطا ۳ ۴ ۵ .... ء سے زیادہ نہیں ہے اور سات اعشاریہ تک کے جدول کے لئے یہ بالکل نظرانداز کی جاسکتی ہے نیز (۴) سے ظاہر ہے کہ جب کبھی فہ'' (لا) کی قیمت بڑی ہو تو اس طریقہ سے صحیح نتیجہ حاصل ہونگے نہیں اس وقت کہا جاتا ہے کہ فرق بے قاعدہ ہیں۔

مثال ۲۔ اگر فہ (لا) = لوک$_۱$ جب لا .... (۱۱) 155

تو فہ'' (لا) = - مہ قم^۲ لا .... (۱۲)

پس ھ = $\frac{\pi}{۱۰۸۰۰}$ = ۲۹۱ ...۰۰ ء رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

$\frac{۱}{۸}$ ھ^۲ فہ'' (لا) = -۴۶ .... ء × قم^۲ لا .... (۱۳)

چونکہ قم^۲ ۱۸° = ۱۰٫۴۷ اس لئے ظاہر ہے کہ آ کے وقفہ والے لوکارثمی جیب کے جدول میں ادراج کی خطا جبکہ زاویہ ۱۸° سے کم ہے اعشاریہ کے ساتویں مقام میں زیادہ سے زیادہ نصف اکائی کی ہوسکتی ہے۔

امثلہ ۲۱

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

(۱) ما = لا^۲ (۱ - لا)^۲ عف^۲ ما = ۲ - ۱۲ لا + ۱۲ لا^۲

(۲) ما = $\frac{۱}{۲}$ مہ لا^۲ (ل - $\frac{۱}{۳}$ لا) عف^۲ ما = مہ (ل - لا)

(۳) ما = $\frac{۱}{۲۴}$ مہ لا^۲ (ل - لا) (ل + ل لا - لا^۲) عف^۲ ما = $\frac{۱}{۲}$ مہ لا (لا - ل)

(۴) ما = $\frac{۱}{۴۸}$ مہ لا^۲ (۳ ل^۲ - ۴ ل لا + ۲ لا^۲) عف^۲ ما = $\frac{۱}{۲}$ مہ (لا - $\frac{۱}{۲}$ ل)^۲

(۵) ما = $\frac{۱}{لا^۲ - لا - ۲}$ عف^۲ ما = $\frac{۲}{۳}$ $\left\{ \frac{۱}{(لا - ۲)^۳} - \frac{۱}{(لا + ۱)^۳} \right\}$

(۶) $تا = \frac{۱}{۱+لا^{۲}}$ ، $عف^{۴}تا = \frac{۲۴(۱-۱۰لا^{۲}+۵لا^{۴})}{(۱+لا^{۲})^{۵}}$

(۷) $تا = \frac{۲لا}{۱-لا^{۲}}$ ، $عف^{۲}تا = \frac{۴لا(لا^{۲}+۳)}{(۱-لا^{۲})^{۳}}$

(۸) $تا = (۱-لا)^{-م}$ ، $عف^{ن}تا = م(م+۱)\ldots(م+ن-۱)(۱-لا)^{-م-ن}$

(۹) $تا = \frac{۱+لا}{۱-لا}$ ، $عف^{ن}تا = \frac{۲\lfloor\underline{ن}}{(۱-لا)^{ن+۱}}$

(۱۰) $تا = جب^{۲}لا$ ، $عف^{۲}تا = ۲\,جم\,۲لا$

(۱۱) $تا = جم^{۲}لا$ ، $عف^{ن}تا = ۲^{ن-۱}\,جم\left(۲لا+\frac{ن\pi}{۲}\right)$

(۱۲) $تا = قط\,لا$ ، $عف^{۲}تا = ۲\,قط^{۳}لا - قط\,لا$

(۱۳) $تا = لا^{۲}جب\,لا$ ، $عف^{۲}تا = ۴لا\,جم\,لا - (لا^{۲}-۲)\,جب\,لا$

(۱۴) $تا = جب^{۳}لا\,جم\,لا$ ، $عف^{۳}تا = ۶ - ۶۰\,جب^{۲}لا + ۶۴\,جب^{۴}لا$

(۱۵) $تا = جب\,لا\,جبز\,لا$ ، $عف^{۲}تا = ۲\,جم\,لا\,جمز\,لا$

(۱۶) $تا = جم\,لا\,جمز\,لا$ ، $عف^{۲}تا = -۲\,جب\,لا\,جبز\,لا$

(۱۷) $تا = جب\,لا\,جمز\,لا$ ، $عف^{۲}تا = ۲\,جم\,لا\,جبز\,لا$

(۱۸) $تا = جم\,لا\,جبز\,لا$ ، $عف^{۲}تا = -۲\,جب\,لا\,جمز\,لا$

(۱۹) $تا = جب^{-۱}لا$ ، $عف^{۲}تا = \frac{لا}{(۱-لا^{۲})^{۳/۲}}$

۱۵۶ (۲۰) مس لا کے پہلے پانچ مشتقات ہیں

$۱+م^{۲}$ ، $۲م(۱+م^{۲})$ ، $۲(۱+۳م^{۲})(۱+م^{۲})$ ، $۸م(۲+۳م^{۲})(۱+م^{۲})$ ، $۸(۲+۱۵م^{۲}+۱۵م^{۴})(۱+م^{۲})$ جہاں مس لا کو م سے ظاہر کیا گیا ہے۔

(۲۱) $تا = لا^{۳}\,لوک\,لا$ ، $عف^{۴}تا = \frac{۶}{لا}$

(۲۲) $تا = لا^{۲}\,لوک\,لا$ ، $عف^{ن}تا = (-۱)^{ن-۱}\frac{۲\lfloor\underline{ن-۳}}{لا^{ن-۲}}$

(۲۳) $ما = لا\ فو^{لا}$ $\quad$ $عف^{ن}\ ما = (لا + ن)\ فو^{لا}$

(۲۴) $ما = لا^{۲}\ فو^{لا}$ $\quad$ $عف^{ن}\ ما = \{لا^{۲} + ۲ن\ لا + ن(ن-۱)\}\ فو^{لا}$

(۲۵) متماثلہ $لا^{م} \times لا^{ن} = لا^{م+ن}$ کو لیب نیز کے مسئلہ سے تفرق کرکے ثابت کرو کہ

$$م_{ر} + \frac{ر}{۱} م_{ر-۱} ن_{۱} + \frac{ر(ر-۱)}{۱\times۲} م_{ر-۲} ن_{۲} + \frac{ر(ر-۱)(ر-۲)}{۱\times۲\times۳} م_{ر-۳} ن_{۳} + \dots + ن_{ر} = (م+ن)_{ر}$$

جبکہ $م_{ر} = م(م-۱)(م-۲)\dots\dots(م-ر+۱)$

(۲۶) $لا^{۲ن}$ کے ن ویں مشتق کو دو مختلف طریقوں سے حاصل کرکے ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{ن^{۲}}{۱^{۲}} + \frac{ن^{۲}(ن-۱)^{۲}}{۱^{۲}\times۲^{۲}} + \frac{ن^{۲}(ن-۱)^{۲}(ن-۲)^{۲}}{۱^{۲}\times۲^{۲}\times۳^{۲}} + \dots\dots = \frac{\underline{|۲ن}}{(\underline{|ن})^{۲}}$$

(۲۷) ثابت کرو کہ $عف^{ن}\ لا^{ن}(۱-لا)^{ن} = \underline{|ن}\ (۱-لا)^{ن}\left\{۱ - \frac{ن^{۲}}{۱^{۲}}\ \frac{لا}{۱-لا}\right.$

$$\left. + \frac{ن^{۲}(ن-۱)^{۲}}{۱^{۲}\times۲^{۲}}\ \frac{لا^{۲}}{(۱-لا)^{۲}} + \dots\dots\right\}$$

(۲۸) اگر $ما = \frac{۱+لا}{۱-لا}$

تو ثابت کرو کہ $عف^{ن}\ ما = \frac{\underline{|ن}}{(۱-لا)^{ن}}\left\{۱ + \frac{ن^{۲}}{۱^{۲}} ما + \frac{ن^{۲}(ن-۱)^{۲}}{۱^{۲}\times۲^{۲}} ما^{۲} + \dots\dots\right\}$

(۲۹) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{فر^{۲}س}{فرت^{۲}} + ک\ \frac{فرس}{فرت} + ن^{۲}س = ۰$ کو رشتہ

$س = ا\ فو^{-\frac{۱}{۲}ک\ ت}\ جم(ثہ\ ت + صہ)$ مستقلات ا اور صہ کی تمام قیمتوں کے لئے پورا کرتا ہے بشرطیکہ $ثہ^{۲} = ن^{۲} - \frac{۱}{۴}ک^{۲}$

(۳۰) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{فر^{۲}س}{فرت^{۲}} + ۲ن\ \frac{فرس}{فرت} + ن^{۲}س = ۰$ کو رشتہ

$س = (ا + ب\ ت)\ فو^{ن\ ت}$ پورا کرتا ہے۔

۱۵۴ (۳۱) اگر $\text{ما} = \left\{ \text{لا} + \sqrt{۱ + \text{لا}^۲} \right\}^{\text{م}}$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱ + \text{لا}^۲)\,\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} + \text{لا}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} - \text{م}^۲\,\text{ما} = ۰$$

(۳۲) اگر $\text{لا} = \text{فہ}(\text{ت})$، $\text{ما} = \text{خہ}(\text{ت})$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} = \frac{\dfrac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}\,\dfrac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}^۲} - \dfrac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}}\,\dfrac{\text{فر}^۲\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}^۲}}{\left(\dfrac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}\right)^۳}$$

امثلہ ۲۲

(۱) ثابت کرو کہ طبیعی جیوب کی جدول میں جو آ کے وقفوں پر مرتب کی گئی ہو متناسب اجزا کی خطا ۰۰۰۰۰۰۱۰۶. سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی۔

(۲) ثابت کرو کہ طبیعی مماس کی جدول میں °۹۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے متناسب اجزا کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ نیز دکھاؤ کہ °۴۵ کے قریب کے زاویوں کے لئے اگر مماس آ کے وقفوں پر دئے ہوئے ہوں تو خطا کی حد ۰۰۰۰۰۰۴۲۳. ہے۔

(۳) دکھاؤ کہ لوکارثمی مماسوں کی جدول میں متناسب اجزا کا قاعدہ °۰ اور °۹۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے ناکام رہتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس تفاعل کے لئے متناسب اجزا کے قاعدہ میں بڑی سے بڑی خطا °۴۵ کے قریب کے زاویوں کے لئے کم سے کم ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لوک}\,\text{لا}$ ہر جگہ اوپر کی طرف محدب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لا}\,\text{لوک}\,\text{لا}$ ہر جگہ اوپر کی طرف مقعر ہے نیز اسکی ترسیم کھینچو۔

(۶) منحنی $\text{ما} = \text{لا}\,\text{ھو}^{-\text{لا}}$ کا اعظم معین اور نقطہ انعطاف دریافت کرو۔ نیز اسکی ترسیم بھی کھینچو۔ [اعظم معین فصلہ $\text{لا} = ۱$ کے جواب میں اور نقطہ انعطاف $\text{لا} = ۲$ کے جواب میں ہے]

(۷) دکھاؤ کہ منحنی $\text{ما} = \text{ھو}^{-\text{لا}^۲}$ میں ایسے نقطوں پر انعطاف ہے جنکے لئے $\text{لا} = \pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

اس کی ترسیم کھینچو۔

(۸) منحنی ما = لا قو^(−لا^۲) کے اعظم اور اقل معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور اسکی ترسیم کھینچو۔ ۱۵۸

[لا = ± ۱/√۲ سے اعظم اور اقل معین حاصل ہوتے ہیں اور لا = ۰، ± √(۳/۲) سے نقاط انعطاف]

(۹) تفاعل فا(لا) مستقل ہے اور = ۱/۲ (ب^۲ − ا^۲) جبکہ ۰ < لا < ا

نیز = ۱/۲ ب^۲ − ۱/۶ لا^۲ − ۱/۳ · ا^۳/لا جبکہ ا < لا < ب

اور = ۱/۳ · (ب^۳ − ا^۳)/لا جبکہ لا > ب

ثابت کرو کہ فا(لا)، فا′(لا) مسلسل ہیں لیکن فا″(لا) غیر مسلسل ہے۔ منحنی ما = فا(لا) کی ترسیم کھینچو۔

(۱۰) ثابت کرو کہ ما = لا^۲(۳ − لا) میں نقطہ (۱، ۲) پر نقطہ انعطاف ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ منحنی ما = لا^۲(۱ − لا^۲) کے نقاط (± ۱/√۶، ۵/۳۶) پر انعطاف ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو۔

(۱۲)۔ منحنی ما = ب^۳/(ا^۲ + لا^۲) کے نقاط انعطاف دریافت کرو [لا = ± ا/√۳]

(۱۳)۔ ثابت کرو کہ منحنی ما = ا^۲لا/(لا − ا)^۲ پر (−۲ا، − ۲/۹ ا) نقطہ انعطاف ہے۔ منحنی کی ترسیم کھینچو۔

(۱۴)۔ منحنی ما = لا^۳/(ا^۲ + لا^۲) کی ترسیم کھینچو اور اس کے نقاط انعطاف

دریافت کرو۔ [لا = ۰، ± ۱، ± √۳]

(۱۵) ثابت کرو کہ منحنی ما = $\frac{۱ - لا}{لا^{۲} + ۱}$ پر تین نقاط انعطاف ہیں اور وہ ایک خط میں واقع ہیں، منحنی کی ترسیم کھینچو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۵} − ۱۰ لا^{۲} + ۱۵ لا − ۶ = ۰ کی ایک تہری اصل ہے۔

۱۵۹ (۱۷) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۶} − ۵ لا^{۵} + ۵ لا^{۴} + ۹ لا^{۳} − ۱۴ لا^{۲} − ۴ لا + ۸ = ۰ کی ایک تہری اصل ہے نیز تمام اصلیں دریافت کرو۔

(۱۸) منحنی ما = ۱ − ۳ لا^{۲} + ۲ لا^{۳} کو مرتسم کرو اور اسکے اقل اور اعظم معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو۔

(۱۹) منحنی ما = ۲ لا^{۴} − ۳ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} + ۷ لا کو مرتسم کرو اور اسکے نقاط انعطاف دریافت کرو۔

(۲۰) منحنی ما = ۴ لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۶ لا + ۱ کے اقل اور اعظم معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

(۲۱) ثابت کرو کہ منحنی ما = لا^{۳} + لا^{۲} − لا − ۱
اور ما = ۲ (لا^{۳} − لا^{۲} + لا − ۱) ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور نقطہ تماس پر عبور کرتے ہیں۔ منحنیوں کو مرتسم کرو۔

(۲۲) دریافت کرو کہ مستقلات ا، ب، ج کی کیا قیمت ہونی چاہئے کہ منحنی ما = ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا پر لا = $\frac{۱}{۲}$ نقطہ انعطاف ہو، لا = ۰ پر منحنی کا مماس لا محور کے متوازی ہو اور منحنی نقطہ (۱، ۱۳) میں سے گزرے۔

(۲۳) ثابت کرو کہ منحنی ما = $\frac{لا^{۲} - لا + ۱}{لا^{۲} + لا + ۱}$ پر تین حقیقی نقاط انعطاف ہیں۔

(۲۴) منحنی ما = ۴ جب لا − جب ۲ لا پر موڑ کے نقطے اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

(۲۵) اگر منحنی ما = فہ(لا) کے دو متصل معین پ ن، پَ نَ ہوں اور اگر

ق ح کوئی درمیانی معین ہو جو وتر پ پَ سے و پر ملے تو ثابت کرو کہ انتہا میں

$$ق و = \frac{1}{2}\ ن ح \times ح نَ \times فہ''(ج)$$

جہاں ن اور نَ کے کسی درمیانی نقطہ کا فصلہ ج ہے۔

(۲۶) ثابت کرو کہ دفعہ ۵۶ کے ضابطہ فہ(ا + ھ) = فہ(ا) + ھ فہ′(ا + طہ ھ) ۱۴۰
میں طہ کی انتہائی قیمت (جبکہ ھ لا انتہا چھوٹا ہو) عموماً $\frac{1}{2}$ ہوتی ہے۔ اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

(۲۷) ثابت کرو کہ اقل اور اعظم نقاط کی قربت میں تفاعل کی قیمت میں تغیر اکثر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔

(۲۸) بتاؤ کہ کیوں کسی خاص تپش پر تلافی کردہ کرونومیٹر کی چال ٹھیک تلافی پیدا کرنے والی معیاری تپش پر کی چال سے بقدر ایک ایسی مقدار کے مختلف ہوتی ہے جو تپش کے فرق کے مربع کے متناسب ہے۔

(۲۹) ثابت کرو کہ متغیر کے مساوی فصلوں کے لئے محسوب کردہ ریاضی کی جدول کے کسی حصے میں متناسب اجزا کے اصول پر اندراج کرنے میں بڑی سے بڑی خطا دوسرے فرق کے آٹھویں حصہ کے مساوی ہے۔ (دوسرے فرق سے مراد مسلسل داخلوں کے فرقوں کا فرق ہے)۔

(۳۰) ایک منحنی پر تین نقطوں پ، ق، ر کے محدد بالترتیب (۰٫۳۲۵۰، ۰٫۸۵۲۶)، (۰٫۳۵۰۰، ۰٫۸۹۱۰) اور (۰٫۳۷۵۰، ۰٫۹۲۳۹) ہیں۔ نقطہ ق پر $\frac{د ما}{د لا}$ اور $\frac{د^2 ما}{د لا^2}$ کی قیمتیں تقریباً دریافت کرو۔

(۳۱) دفعہ ۷۰ کے ضابطہ ۲۳ کی مدد سے لوکب جم ۱° کی قیمت اعشاریہ کے چھ مقام تک دریافت کرو۔ [$\bar{1}.999934$]

فہرست اصطلاحات

صغاری احصاء

(حصۂ اوّل)

Abscissa	فصلیہ
Absolute value	مطلق قیمت
Acceleration	اسراع
Adiabatic relation	حرناگذار رشتہ
Amplitude	سعت
Anti-logarithm	ضد لوگارتم
Approximation	تقریب
Arc	قوس
Asymptotes	متقارب
Calculus	احصا
Catenary	زنجیرہ
Cartesian co-ordinates	کارٹیزی محدد
Chord	وتر
Circular Functions	دائری تفاعل
Circumscribed circle	بیرونی یا حائط دائرہ
Compression	پچکاؤ
Cone	مخروط

Consecutive point	متصل نقطے
Continuity	تسلسل
Convergency	استدقاق
Convergent (Series)	مستدق (سلسلے)
Crank	کرینک
Cross-section	عمودی تراش
Curvature	انحنا
Curve	منحنی
Cylinder	اسطوانہ
Deflexion	انحراف
Density	کثافت
Dependent variable	تابع متغیر
Derived function	مشتق تفاعل
Differentiable	قابل تفرق
Differentials	تفرقے
Differentiation	تفرق
Discontinuity	عدم تسلسل
Double root	دوہری اصل
Dynamics	حرکیات
Elasticity	لچک
Elimination	اسقاط
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Exponential function	قوت نما تفاعل
Frustum	ناکمل یا ناقص حصہ مقطوع

Function	تفاعل
Galvanometer	مقناطیسی برق پیما، برقی رو پیما
Geometrical progression	سلسلہ ہندسیہ
Graph	ترسیم
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic function	زائدی تفاعل
Hyperboloid	زائد نما
Image	خیال
Implicit function	تضمینی تفاعل
Inclination	میلان
Independent variable	متغیر متبوع
Infinite series	لا متناہی سلسلہ
Infinitesimal	صغاری، صغاریہ
Intercept	مقطوعہ یا مابینی حصہ
Interval	وقفہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse	مقلوب
Inversion	تقلیب
Isolated points	تنہا یا اکیلے نقطے
Kinetic energy	توانائی بالحرکت
Lens	عدسہ
Limit	انتہا
Limiting values	انتہائی قیمتیں
Logarithm	لوگارتم
Logarithmic function	لوگارتمی تفاعل

Longitudinal magnification	طولی تضعیف
Lower limit	سفلی انتہا، نیچے کی حد
Magnification	تضعیف
Maximum	اعظم
Mean-value Theorem	اوسط قیمت کا مسئلہ
Mechanics	علم حیل
Multiple roots	ضعفی اصلیں
Node	عقدہ
Normal	عماد
Order	رتبہ
Ordinate	معیّن
Oscillation	اہتزاز
Parabola	قطع مکافی
Paraboloid	مکافی نما
Parallelopiped	متوازی السطوح
Parameter	مبدل
Partial	جزوی
Perimeter	گھیرا، محیط
Pendulum	رقاص
Period	دور
Permutation	ترتیب
Polar Co-ordinates	قطبی محدد
Pole	قطب
Pressure	دباؤ
Principal axes	صدری محور

Radius Victor	سمتی نیم قطر
Range	وسعت، ٹپہ
Rational	منطق
Rectilinear motion	مستقیم حرکت
Representation	تعبیر
Rigid body	استوار جسم
Rigidity	استواریت
Roots	اصلیں
Sequence	تواتر
Sphere	کرہ
Spheroid	کرہ نما
Theory	نظریہ
Trascendental	ماورائی
Trignometry	علم مثلث
Unique	یگانہ
Upper limit	علوی انتہا، اوپر کی حد
Variable	متغیر
Variation	تغیر
Vector	سمتی
Vertical	انتصابی
Zone.	منطقہ

ترقیم

(NOTATION)

Sin x	جب لا
Cos x	جم لا
tan x	مس لا
cot x	مم لا
Sec x	قط لا
Cosec x	قم لا
$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$,	جب$^{-1}$ لا، جم$^{-1}$ لا، مس$^{-1}$ لا
$\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\mathrm{cosec}^{-1}x$,	مم$^{-1}$ لا، قط$^{-1}$ لا، قم$^{-1}$ لا
Sine hyperbolic (Sinh x)	زائدی جیب (جبز لا)
Sinh x, Cosh x, Tanh x,	جبز لا، جمز لا، مسز لا
Coth x, Sech x, Cosech x,	ممز لا، قطز لا، قمز لا
$\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$,	جبز$^{-1}$ لا، جمز$^{-1}$ لا، مسز$^{-1}$ لا
$\coth^{-1}x$, $\mathrm{sech}^{-1}x$, $\mathrm{cosech}^{-1}x$,	ممز$^{-1}$ لا، قطز$^{-1}$ لا، قمز$^{-1}$ لا
π	π
Exponent (e)	قوت نما (قو) یا صرف (و)
e^{x}	قو^{لا}
a^{x}	ا^{لا}
$\log_e x$	لوک$_{قو}$ لا [یا صرف لوک لا]
$\log_{10} x$	لوک$_{10}$ لا
ϵ	سہ یا صہ

∞	∞
Limit, Lt	انتہا، نہا
$\underset{x\to x_1}{\text{Lt.}} f(x)=A$	نہا ف(لا) = ا (لا←لا۱)
differential (d)	فرقی (فر)
differential coefficient $\left(\frac{dy}{dx}\right)$	تفرقی سر $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)$
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}$	فرما/فرلا، فر۲ما/فرلا۲ .... فرⁿما/فرلاⁿ
$\delta x, \delta y, \delta z$	مف لا، مف ما، مف ی
dx , dy , dz	فرلا، فرما، فری
$f'(x), f''(x)$	فَ(لا)، فً(لا)....
Operator (D)	عامل تفرقی (عف)
$Dy, D^2y, \ldots$	عف ما، عف۲ ما.....
y', y'', y'''	ماَ، ماً، ماۤ
Partial differential Coefficient $\frac{\partial}{\partial x}$	جزوی تفرقی سر جف/جف لا
$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	جف ما/جف لا، جف۲ ما/جف لا۲، جف۲ ی/جف لا جف ما
$f(x)$	ف(لا)،
$F(x)$	فا(لا)،
$\phi(x)$	فما(لا)،

اشاریہ (INDEX.)

اعداد صفحات سے متعلق ہیں

اتفاقی یا مشروط استدقاق ' ۱۶
اجزائے متناسب ' ۲۱۲
اجزائے متناسب کے ذریعہ ادراج ' ۲۱۳
استدقاق ' لامتناہی سلسلوں کا ' ۸ ' ۹
اصلیں ' جبریہ مساواتوں کی ' ۱۴
اعظم اور اقل قیمتیں ' ۱۴۳
انتہائی قیمتیں ' ۱۰ ' ۵۰ ' ۵۴
انعطاف کے نقاط ' ۸
اوسط قیمت کا مسئلہ ' ۱۵۶
تصیحات کا محسوب کرنا ' ۱۵۴
تضمینی تفاعل ' ۹۲ تا ۹۴ ' ۱۶۵
تغیر ' ۱ ' ۲
تفاعل ' تعریف ' ۲۰
ہندسی تعریف ' ۲۲
جبری اور ماورائی ۳۴
تضمینی ' ۹۲
مقلوب ' ۴۲ ' ۸۵

تفاعل کا پورا تغیر، ۱۵۹
تفرق، ۷، ۳۷، ۷۶، ۷۷، ۸۰، ۸۲
۸۵، ۹۲
تفرقے، ۱۵۲، ۱۶۲
تقعر اور تحدب، ۲۰۲
ٹیلر کا مسئلہ، ۲۱۱
جبری تفاعل کا تسلسل، ۳۴، ۳۷
جزوی مشتقات، ۹۱
جفت اور طاق تفاعل، ۱۱۳
دائرہ کا محیط، ۴۶
دائری تفاعل، ۴۰، ۴۱، ۴۷، ۸۱
دوسرا مشتق، ۱۹۵
اسکی ہندسی تعبیر ۲۰۷
رول کا مسئلہ، ۱۴۰
زائدی تفاعل، ۱۱۲ تا ۱۱۷
زیر عماد، ۱۶۷
زیر مماس، ۱۶۷
ساکن قیمتیں، تفاعلوں کی، ۱۴۵
ساکن مماس، ۲۰۲
صغاریات، ۵۷
ضعفی اصلیں، مساواتوں کی، ۲۰۶
عدم تسلسل، ۲۹
علوی یا سفلی انتہا، گروہ کی، ۳
عماد کی مساوات، ۱۷۱
قوت نما تفاعل، ۱۰۳، ۱۱۰

قیمت ، دو کی ، ۱۱۲
لا متناہی سلسلے ، ۷ ، ۱۵
لوگارتھم کا تفرق ، ۱۲۲
لوگارتمی تفاعل ، ۱۱۷
لیب نیز کا مسئلہ ، ۱۹۸
ماورائی تفاعل ، ۳۴
متغیر ، متبوع اور تابع ، ۲۰
مساواتوں کا نظریہ ، ۱۴۰ ، ۲۰۶
مسلسل تفاعل ، تعریف ، ۲۴
خاصیت ، ۲۵ ، ۴۷
مسلسل تغیر ، ۱
مشتق تفاعل ، تعریف ، ۶۸
ہندسی توضیحات ۶۶
مقلوب تفاعل ، ۴۲ ، ۸۵
مقلوب دائری تفاعل ، ۴۴ ، ۸۶ تا ۸۹ ،
مماس ، منحنی کا ، ۶۷ ، ۱۷۰
منحنی کا ڈھال ، ۶۷
منطق صحیح تفاعل ، ۳۴
منطق کسر ، ترسیمیں ، ۳۶
نظریہ ، مساواتوں کا ، ۱۴۰
نقشی یا باہم ارتفاع خطوط ۹۳
ہندسی تعبیر ، مقداروں کی ، ۲
تفاعل کی ، ۲۲

آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
صورت میں ایک آنہ یومیہ دیرانہ لیا جائے گا۔

کتب خانہ
جامعۂ عثمانیہ

۱- اراکین مجلس اعلیٰ، مجلس رفقا، مجلس انتظامی
ناظم تعلیمات و نصاب پانچ کتابیں ایک ماہ کیلئے اپنے پاس رکھ سکینگے۔
۲- اساتذہ جامعۂ عثمانیہ و کلیہ جات متعلقہ، ریڈر، عہدہ داران جامعہ
اور اراکین دارالترجمہ دس کتابیں ایک ایک ماہ کیلئے اپنے پاس رکھ سکینگے۔
۳- طلبا ایم اے جن کا رجسٹر شدہ وہ دو کتابیں، بی اے اور انٹرمیڈیٹ
کے طلبہ تین کتابیں اور ایل ایل بی و تحقیقاتی کام کرنے والے
طلبہ پانچ کتابیں دو ہفتہ تک اپنے پاس رکھ سکینگے۔
۴- مدت مقررہ پر کتابیں واپس نہ ہوں تو طلبہ سے بحساب
ایک آنہ یومیہ فی کتاب جرمانہ لیا جائیگا۔
۵- بشرط موقع کتابیں مکرر جاری کی جا سکینگی مگر اس غرض کے
لئے کتب خانہ میں کتاب کا لانا لازم ہے۔
۶- کتابیں گم یا خراب ہو جائیں تو تشخیص پر ذمہ داری
عائد ہوگی۔
۷- کتابوں پر کسی قسم کا نشان یا حاشیہ نہیں
لگایا جائے۔
۸- قلمی نسخے اور حوالے کی کتابیں
جاری نہیں کی جا سکینگی۔ فقط