UNIVERSAL
LIBRARY
OU_224621
UNIVERSAL
LIBRARY

نحمدہ تعالیٰ ونستعینہ ونصلی علیٰ رسولہ الکریم

کہ این رسالہ عجیب و نسخہ غریب از علوم ریاضی و عمل

قطاع

از تالیفات جناب مستغنی الالقاب محمد فاضل النبی صاحب سلمہ الرحمن است

زیور طبع پوشیدہ مطبوع طابع خاص و عام شد

نحمدہ تعالیٰ ونستعینہ ونصلی علیٰ رسولہ الکریم

کہ این رسالہ عجیب و نسخہ غریب از علوم ریاضی و عمل

قطاع

از تالیفات جناب مستغنی الالقاب محمد فاضل النجفی نصاحت سمہ آرمن است

زیور طبع پوشیدہ مطبوع طبائع خاص و عام شد

TRIGONOMETRY

FOR BEGINNERS

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDÚ,

BY

MUNSHI' MAHAMMAD ZAKA'-UL-LA'H,

HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DELHI,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

رساله علم مثلث

مبتديوں کے لیئے معہ بہت سي مثالوں کے

مولفه

ٹاڈهنٹر صاحب ایم. اي. ایف. آر. ایس.

جسکو

منشي محمد ذکاءالله صاحب هیڈ ماسٹر نارمل اسکول دهلي نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسیٹي علیگڈه و سین ٹیفک سوسیٹي صوبه بهار

اردو میں ترجمه کیا

آدر

بمقام دهلي مطبع مرتضوي میں باهتمام حاجي

محمد عزیزالدین کے مطبوع هوا

سنه ۱۸۷۱ ع

TRIGONOMETRY

FOR BEGINNERS

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDÚ,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DELHI,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

رسالہ علم مثلث

مبتدیوں کے لیئے معہ بہت سي مثالوں کے

مولفہ

ٹاڈہنٹر صاحب ایم. اِي. ایف. آر. ایس.

جسکو

منشي محمد ذکاءالله صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اِسکول دھلي نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسیٹي علیگڈہ و سین ٹیفک سوسیٹي صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

آرڈر

بمقام دھلي مطبع مرتضوي میں باہتمام حاجي

محمد عزیزالدین کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ

جناب ٹوڈہنٹر صاحب نے جسطرح جبر مقابلہ مبتدیون کے واسطے لکھا تہا اور وہ بڑے جبر مقابلہ کا دیباچہ تہا اسیطرح یہہ علم مثلث مبتدیون کے واسطے لکھا ہے اور وہ بڑے علم مثلث کا دیباچہ ہے ۔ مضامین کو چھوٹے چھوٹے بابون مین تقسیم کیا ہے ۔ ہر باب کے اخر مین ایک مجموعہ مثالون کا تحریر کیا ہے ۔ ان مثالون مین ایسی خوبی ہے کہ وہ ساری دقتین اور دشواریان مبتدیون کو رفع کرتی ہین اور اون سے مضامین اس علم کے دلنشین ہوجاتے ہین ۔ اکثر مثالین تو صاحب ممدوح کی فکر دقیق کا نتیجہ ہین مگر بعض مثالین سوالات امتحان مین سے بہی منتخب ہین ۔ اس علم کی تحصیل مین طالب علمون کی مختلف نیت ہوتی ہی کسیکا ارادہ فقط اتنا ہی ہوتا ہے کہ اسقدر اس علم کو سیکہے کہ عملیات مین کہین نہ رکے ۔ کوئی اس غرض پر پڑہتا ہی کہ ساری نظریات ریاضی مین جو کام اس علم سے پڑتا ہے اوسکو سمجہے غرض ہم نے اول قسم کے طالب علمون کے واسطے مثلثون کی حل اعداد مین بکثرت لکہین ہین اور اوپر بڑی توجہ کی ہے یہہ مضمون ایسا ہی کہ دونو نظریات اور عملیات مین کام آتا ہے

مضامین اس ترتیب سے مرتب ہین کہ کہین اونکے سمجھنے مین مبتدی کو
الجھاؤ نہین پڑتا صاف صاف بے رکاوٹ پڑہتا چلا جاتا ہے مگر
اوسکو اقلیدس اور اصول علم جبر بمقابلہ ابتدای سے ضرور واقف ہونا چاہئے
بغیر اس تحصیل کے علم مثلث کی تحصیل ناممکن ہے اول چودہ باب علم ہندسہ
ہی پر موقوف ہین آگے جبر بمقابلہ سے بہی کام لیا گیا ہے جن مثالون مین
فقط علم ہندسے سے کام لیا گیا ہے وہ عملیات کے لئے کافی ہین
مگر نظریات مین قاصر ہین وہان علم مثلث بالجبر بغیر کام نہین چلتا —
معلم اپنی استعداد اور لیاقت کے موافق ترتیب مضامین کی تعلیم کے اندر بدل بہی سکتا ہے
ارباب علم کی خدمت مین عرض ہے کہ جو عیب اس ترجمہ مین ہون اونکو بتلا کر بندہ
کو مرہون منت فرمائین

محمد ذکاء اللہ ہیڈ ماسٹر نورمل سکول دہلی
۷ ستمبر سنہ ۱۸۷۶ع

فہرست مضامین

پہلا باب زاویون کی پیمایش انگریزی درجون اور فرانسیسی درجون مین ۱

دوسرا باب علم مثلثی نسبتین ۶

تیسرا باب زاویہ ۴۵° اور ۶۰° اور ۳۰° کے علم مثلثی نسبتون کی قیمتین ۱۳

چوتھا باب علم مثلث کا کام مین آنا ۱۹

پانچوان باب لوکارثم ۲۹

چھٹا باب استعمال جدولون کا ۳۷

ساتوان باب قائم الزاویہ مثلثون کا حل ۴۶

آٹھوان باب مثلث غیر قائم الزاویہ کا حل ۵۶

نوان باب استعمال علامات جبریہ کا ۶۱

دسوان باب خواص مثلثون کا ۷۱

گیارہوان باب مثلثون کا حل ۷۹

بارہوان باب بلندیان اور فاصلے ۹۰

تیرہوان باب حل موافق علم ہندسہ کے ۱۰۲

چودہوان باب خواص مثلث ۱۰۹

پندرہوان باب	دو قائمون سے بڑے زاوے	۱۱۷
سولہوان باب	زاویہ کے تبدل سے نسبتون مین تبدل	۱۲۲
سترہوان باب	تحویل زاویون کی	۱۲۸
اٹھارہوان باب	زاویے جنکی علم مثلثی نسبتین معلوم ہین	۱۳۳
اونیسوان باب	علم مثلثی نسبتین دو زاویون کی	۱۳۶
بیسوان باب	تبدل صور علم مثلثی	۱۴۴
اکیسوان باب	زاویونکی تقسیم	۱۵۴
بائیسوان باب	مقیاس قوسی	۱۵۹
تیئیسوان باب	رقبہ دائرہ کا	۱۶۵
چوبیسوان باب	کتابت معکوس	۱۷۰
متفرقات مثالین		۱۷۳
جواب		۱۸۳

علم مثلث مبتدیون کے واسطے

باب اول زاویون کی پیمایش انگریزی درجون اور فرانسیسی درجون مین

(۱) لفظ ٹرگنومٹری کا جسکا ترجمہ ہم علم مثلث کرتے ہین دو یونانی لفظون سے مرکب ہے ایک لفظ کے معنی مثلث کے ہین اور دوسرے لفظ کے معنی ہین پیمایش بیان کرتا ہون اسلئے ترجمہ لفظی یہہ ہوا کہ مین مثلث پیمایش کرتا ہون اصل مین یہہ نام اوس علم کا تہا کہ جسمین مثلث مستوی کے اضلاع اور زاویون کے باہمی ارتباطات اور تعلقات کی تحقیقات ہوتی تہی اور یہہ تحقیقات بالکل علم ہندسہ پر مبنی ہوتی تہی مگر اب علم مثلث مستوی کے معنی نہایت وسیع اور بہت فراخ ہوگئے ہین اور اوسمین وہ ساری تحقیقات داخل ہے جو زوایا مستوی کے باب مین کیجائے خواہ اون سے مثلث سے یا نہ سے اور یہہ تحقیقات بہی الجبرا کی علامتون اور قوانین جبریہ کی صورتون سے ہوا اسواسطے طالب علم کو چاہیئے کہ اس کتاب کے شروع ہونے سے پیشتر الجبرا مین مساوات درجہ اول تک کا حل کرنا تو ضرور آتا ہو اور تحریر اقلیدس جسقدر درس و تدریس مین جاری ہے جانتا ہو

(۲) اول ہم یہہ بیان کرتے ہین کہ زاویے کسطرح پیمایش ہوتے ہین۔ بعض زاویہ کو پیمانہ واحد کے لئے انتخاب کیا ہے اور اندازہ زاویون کا اسی پیمانہ واحد کی تعداد سے کیا ہے ہر یک زاویہ پیمانہ واحد ہو سکتا ہے مثلاً زاویہ قائمہ مگر زاویہ قائمہ سے چہوٹا زاویہ پیمانہ واحد مقرر کیا جاے تو اور بہی آسانی ہو سکتی ہے اسواسطے زاویہ قائمہ کو بہی ۹۰ برابر حصون مین تقسیم کیا ہے اور ہر حصہ کا نام درجہ رکہا ہے اسجسقدر یہہ درجے کسی زاویہ مین ہون اونکی تعداد سے اندازہ زاویہ کا ہو سکتا ہے اگر زاویہ مین اور

درجے نہون بلکہ کسر درجہ کی ہو تو اوسکی بیان کرنے کے واسطے درجہ کو بہی ساٹہہ برابر حصون تقسیم کیا ہی اور ایک حصہ کا نام دقیقہ رکہا ہی اور پہر دقیقہ کو ۶۰ برابر حصون مین تقسیم کیا ہے اور اوسکا نام ثانیہ رکہا ہے اسلئے اگر ہم چاہین تو درجہ کی کسر کو دقیقی اور ثانیون مین بیان کر سکتے ہین

(۳) مثلاً نصف قائمہ ہو تو ۴۵ درجہ اوسمین ہونگے اور اگر ربعہ قائمہ ہو تو ۲۲ ½ درجہ ہونگے جسکو کسور اعشاریہ مین اسطرح کتابت کرتے ہین کہ ۲۲٫۵ درجے یا اسطرح کہ ۲۲ درجے اور ۳۰ دقیقے قائمہ کے ایک سولہوین حصہ مین ۵/۸ درجے ہین یعنی ۲۲٫۵۶۲۵ درجے یا ۲۲ درجے ۳۷ دقیقے ۳۰ ثانیے

(۴) الفاظ درجہ اور دقیقہ اور ثانیہ کا اختصار ان علامتون سے کیا گیا ہے کہ ° ' " جیسے کہ ۲۲° ۳۷' ۳۰" سے ۲۲ درجے ۳۷ دقیقے ۳۰ ثانیے تعبیر ہونگے

(۵) زاویون کے درجے اور دقیقے اور ثانیون سے پیمایش کرنیکا قاعدہ عموماً اختیار کیا گیا ہے اور عملیات مین اونہین سے حساب کیا گیا ہے مگر فرانس مین ایک اور طریقہ آخر صدی کے آخر مین اختیار کیا گیا ہے وہان جس وقت پیمانون اور اوزان اور سکون مین نظم عشری کا رواج ہوا اوسوقت وہان زاویون کے پیمانون مین بہی یہی طور پسند کیا گیا کہ زاویہ قائمہ کو ۱۰۰ برابر حصون مین تقسیم کیا اور ہر حصہ کا نام گریڈ جسکا ہم ترجمہ فرانسیسی درجہ کرتے ہین رکہا گیا اور پہر اس درجہ کی ۱۰۰ برابر حصے کئے گئے اور ایک حصہ کا نام دقیقہ ہوا اور دقیقہ کے ۱۰۰ برابر حصے کئے گئے اور ہر ایک حصہ کا نام ثانیہ رکہا گیا اب اس تقسیم کو اس سبب سے کہ ہر مرتبہ ۱۰۰ برابر حصون مین تقسیم ہوتی ہے تقسیم سو سو کی کہتے ہین اور ترکیب مروج کو اس سبب سے کہ ہر دفعہ ۶۰ برابر حصون مین تقسیم ہوتی ہے تقسیم ساٹہہ ساٹہہ کی کہتے ہین اور اس سو سو کی تقسیم کو کبہی فرانسیسی ترکیب بہی کہتے ہین اور ساٹہہ ساٹہہ کی تقسیم کو انگریزی ترکیب بہی کہتے ہین

(۶) اب فرانسیسی درجون اور دقیقون اور ثانیون کے واسطے علامتین اختصار ا یہہ مقرر کی گئین ہین کہ ف د ۱ د ۱۱ جیسے کہ ۵ف ۳۷ ۱۱ ۳۰ سے مراد ہ فرانسیسی درجے اور ۳۷ دقیقے اور ۳۰ ثانیے سو سو کی تقسیم مین ہین اس تقسیم مین دقیقے ثانیے اور ساٹھہ ساٹھ کی تقسیم مین دقیقے اور ثانیے ایک نہین ہوتے اور زبرین جو اوپر لکھتے ہین اونمین تمیز کے واسطے فرانسیسی دقیقون اور ثانیون پر کھڑی زبرین اول ہندسون پر رقم کرتے ہین

(۷) سو سو کی تقسیم مین دقیقون اور ثانیون کی صحیح تعداد فوراً فرانسیسی درجہ کی کسور اعشاریہ مین لکھی جاتی ہے مثلاً ۳۷ فرانسیسی دقیقے $\frac{۳۷}{۱۰۰}$ ایک فرانسیسی درجہ کے ہین یعنی ۳۷ء ایک فرانسیسی درجہ کا اور ۳۰ فرانسیسی ثانیے $\frac{۳۰}{(۱۰۰)^۲}$ فرانسیسی درجہ کے ہین یعنی ۰۰۳ء ایک فرانسیسی درجہ کے اسسے معلوم ہوا کہ ۵ف ۳۷ ۳۰ اسطرح لکھے جاتے ہین ۵ف ۳۷ء۳ اور چونکہ فرانسیسی درجہ $\frac{۱}{۱۰۰}$ وان حصہ قائمہ کا ہوتا ہے اسلئے ۵ف ۳۷ء۳ کو ۵ف ۰۳۷۳ء قائمہ کا لکھہ سکتے ہین باوجودیکہ اس تقسیم فرانسیسی مین یہہ بڑا فائدہ ہے مگر عملیات مین ساٹھہ ہی کی تقسیم کام مین آتی ہے اور تمام حساب علمون کے اونہین سے ہوتے ہین اسواسطے کہ یہہ تقسیم ایک زمانہ دراز سے مروج تھی ہزارون حساب کتب ریاضیہ اور جدولون کی کتابین اس تقسیم کے موافق پہلے اس تقسیم جدید سے مرتب ہو چکی تھین اگر اس تقسیم جدید کا رواج ہوتا تو وہ ساری کتابین ردی ہو جاتی اور اون حسابون کی تغیر تبدل مین بڑا جھگڑا کرنا پڑتا زاویونکو تقسیم جدید کے موافق تحویل کرنمین مشقت شاقہ اٹھانی پڑتی عملیات مین تو اس تقسیم کو اہل فرانس بھی استعمال نہین کرتے

(۸) اگرچہ یہہ تقسیم سو سو کی عملیات مین مستعمل نہین مگر یہہ دستور پڑ گیا ہے کہ علم مثلث کی کتابون مین فرانسیسی اور انگریزی تقسیم کے موافق ہر ایک زاویہ کی مقدار کا اندازہ کرتے ہین اور یہہ اونکی مقدار کی اعداد کا آپسمین مقابلہ کرتے ہین اب آگے تین دفعات مین ہم اسی بات کا ذکر کرتے ہین

(۹) ایک زاویہ کی انگریزی درجونکی تعداد کا مقابلہ اوسی زاویہ کی فرانسیسی درجون کی تعداد فرض کرو کہ د انگریزی درجون اور ف فرانسیسی درجونکی تعداد کو زاویہ معلوم کی تعبیر کرتا ہی اب چونکہ زاویہ قائمہ مین ۹۰ درجہ ہوتے ہین $\frac{د}{۹۰}$ اوس نسبت کو تعبیر کرتا ہے جو زاویہ معلوم زاویہ قائمہ سے نسبت رکہتا ہے اور چونکہ فرانسیسی درجے ۱۰۰ قائمہ مین ہوتے ہین اسواسطے $\frac{ف}{۱۰۰}$ اوس نسبت کو تعبیر کرتا ہے جو زاویہ معلوم زاویہ قائمہ سے نسبت رکہتا ہے

اسسے ثابت ہوا کہ $\frac{د}{۹۰} = \frac{ف}{۱۰۰}$

اسواسطے $د = \frac{۹۰}{۱۰۰} ف = \frac{۹}{۱۰} ف = ف - \frac{۱}{۱۰} ف$

اور $ف = \frac{۱۰۰}{۹۰} د = \frac{۱۰}{۹} د = د + \frac{۱}{۹} د$

اب صورت قانون $د = ف - \frac{۱}{۱۰} ف$ سے یہہ قاعدہ استخراج ہوا کہ کسی زاویہ کے فرانسیسی درجونکی تعداد مین سے اوس تعداد کا دسوان حصہ تفریق کرو تو ماحصل انگریزی درجہ کی تعداد ہوگی

اور صورت قانون $ف = د + \frac{۱}{۹} د$ سے یہہ قاعدہ مستنبط ہوا کہ

کسی زاویہ معلوم کی انگریزی درجون کی تعداد پر اوس تعداد کا نوان حصہ زیادہ کرو تو ماحصل فرانسیسی درجونکی تعداد زاویہ معلوم مین ہوگی

(۱۰) ایک ہی زاویہ مین انگریزی اور فرانسیسی دقیقون کی تعداد کا آپسمین مقابلہ کرو فرض کرو کہ م تعداد انگریزی دقیقون کی کسی زاویہ مین اور فر تعداد فرانسیسی دقیقونکی اوسی زاویہ مین ہے اب چونکہ ۹۰ × ۶۰ انگریزی دقیقونکی تعداد زاویہ قائمہ مین ہوتی ہے اسلئے نسبت زاویہ معلوم اور زاویہ قائمہ کو $\frac{م}{۹۰ \times ۶۰}$ تعبیر کرتا ہے اور چونکہ ۱۰۰ × ۱۰۰ فرانسیسی دقیقے ایک قائمہ مین ہوتے ہین اسواسطے نسبت زاویہ معلوم اور زاویہ قائمہ کو $\frac{فر}{۱۰۰ \times ۱۰۰}$ تعبیر کرتا ہے

اسسے ثابت ہوا کہ $\frac{م}{۹۰ \times ۶۰} = \frac{فر}{۱۰۰ \times ۱۰۰}$

اسواسطے $م = \frac{6 \times 9}{10 \times 10} فر = \frac{27}{50} فر$

اور $فر = \frac{50}{27} م$

(۱۱) اورعلی ہذا القیاس اگرص تعداد انگریزی ثانیون کی ایک زاویہ مین ہواور جر فرانسیسی ثانیون کی تعداد اوسی زاویہ مین ہو تو

$$\frac{ص}{60 \times 60 \times 90} = \frac{جر}{100 \times 100 \times 100}$$

اسیواسطے $ص = \frac{6 \times 6 \times 9}{10 \times 10 \times 10} جر = \frac{81}{250} جر$

$$جر = \frac{250}{81} ص$$

امثلہ مشق

ان چھہ زاویون کو فرانسیسی طریقہ سے تعبیر کرو

(۱) 54° (۲) $1^{\circ}\ 21'$

(۳) $6^{\circ}\ 18'$ (۴) $9^{\circ}\ 49'\ 57''$

(۵) $27^{\circ}\ 41'\ 51''$ (۶) $6^{\circ}\ 7\ 4\ 3\ 2\ 5$

ان چھہ زاویون کو انگریزی طریقہ سے تعبیر کرو

(۷) $30^{ف}$ (۸) $3^{ف}\ 50^{ث}$

(۹) $10^{ف}\ 44^{ث}\ 50^{ثث}$ (۱۰) $2^{ف}\ 7^{ث}\ 50^{ثث}$

(۱۱) $31^{ف}\ 7^{ث}\ 50^{ثث}$ (۱۲) $2\ 5\ 4\ 3\ 6\ 7^{ف}$

ان چھہ زاویون کو دونو طریقے سے تعبیر کرو

(۱۳) $\frac{1}{5}$ زاویہ قائمہ کا (۱۴) $\frac{5}{8}$ زاویہ قائمہ کی

(۱۵) $\frac{11}{16}$ زاویہ قائمہ کی (۱۶) $\frac{45}{64}$ زاویہ قائمہ کی

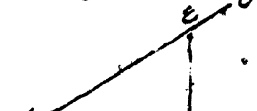
(۱۷) شلث متساوی الاضلاع کے زاویون کو

(۱۸) موافق (۱۰ش ۴م) کے شلث متساوی الساقین بناکر زاویہ راس کو

(۱۹) مجموعہ دو زاویون کا ۱۰۰ فرانسیسی درجے ہے اور اونکا حاصل تفریق ۱۹ انگریزی درجے ہے ہر ایک زاویہ کو
(۲۰) ایک مثلث قائم الزاویہ کے دو حادی زاویون کا تفاوت ۱۰ فرانسیسی درجے ہے زاویونکی
مقدار انگریزی درجون مین دریافت کرو
(۲۱) ایک فرانسیسی درجے مین انگریزی دقیقے دریافت کرو
(۲۲) فرانسیسی دقیقے مین انگریزی ثانیئے دریافت کرو
(۲۳) انگریزی درجہ مین فرانسیسی دقیقے دریافت کرو
(۲۴) فرانسیسی ثانیئے ایک انگریزی دقیقے مین دریافت کرو
(۲۵) زاویہ ۲۵° اور زاویہ ۲۵ گ کی نسبت آپسمین دریافت کرو

باب دوم علم مثلثی نسبتین

(۱۲) بعض خاص مقادیر زاویہ سے تعلق ایسی ہوتی ہین کہ اونکو علم مثلثی نسبتین اوس زاویہ
کی کہتے ہین اس باب مین زاویہ کی علم مثلثی نسبتون ہی کا ذکر کرینگے اور زاویہ کو قائمہ سے
کم مانکر ان نسبتون کے بڑے بڑے خواص ثابت کرینگے یہہ نسبتین ہی تمام علم مثلث کی
جان ہین یہہ بات جسقدر تم آگے پڑہتے جاؤگے جانتے جاؤگے کہ سارا مدار علم مثلث
کا اون تعریفات اور اثبات خواص پر موقوف ہے جو اس باب مین بیان ہوتی ہین
(۱۳) فرض کرو کہ ب اس مثلث حادہ الزوایا ہی اضلاع زاویہ مین سے کسی ضلع پر ایک
نقطہ معین کرو اور اوسے عمود دوسرے ضلع پر نکالو مثلاً یہہ نقطہ معین ع ہو اور اوسے
ع م عمود اب پر نکالین اور اس زاویہ ب اس کو حرف ا سے تعبیر کرین



تو زاویہ ا کی علم مثلثی نسبتون کی تعریفات یہہ ہونگین کہ
ع م / ا ع یعنی وتر / عمود کو جیب ا کی کہتے ہین

$\frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}}$ یعنی $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$ کو جیب التمام ا کی کہتے ہین

$\frac{\text{ع م}}{\text{ا م}}$ یعنی $\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$ کو مماس ا کا کہتے ہین

$\frac{\text{ا م}}{\text{ع م}}$ یعنی $\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$ کو مماس التمام ا کا کہتے ہین

$\frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}}$ یعنی $\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$ کو قاطع الزاویہ ا کا کہتے ہین

$\frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}}$ یعنی $\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$ کو قاطع التمام ا کا کہتے ہین

اور جب جیب التمام زاویہ ا کی اسے تفریق کرین تو حاصل تفریق کو جیب معکوس ا کی کہتے ہین اور جیب ا کو اسے تفریق کرین تو باقی کو جیب معکوس التمام کہتے ہین اصطلاح جیب معکوس کی کثیر الاستعمال ہے مگر جیب معکوس التمام کی اصطلاح شاذ اور نادر کام مین آتی ہے

(۱۴) الفاظ جیب اور جیب التمام وغیرہما کا اکثر اختصار لکھنے اور چھاپنے مین کر لیتے ہین اور اوپر کے حدود کو اکثر اسطرح لکھتے ہین

جب ا = $\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$ جم ا = $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}}$

مس ا = $\frac{\text{ع م}}{\text{ا م}}$ مم ا = $\frac{\text{ا م}}{\text{ع م}}$

قط ا = $\frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}}$ قم ا = $\frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}}$

جع = ۱ − جم ا جعم ا = ۱ − جب ا

(۱۵) جیب اور جیب التمام اور مماس اور مماس التمام اور قاطع الزاویہ اور قاطع التمام اور جیب معکوس اور جیب معکوس التمام کو زاویہ کی علم مثلثی نسبتین کہتے ہین حدود کے دیکھنے سے یہہ بات معلوم ہوتی ہے کہ اونکی ساتھہ لفظ نسبت کا ہونا لوازمات سے ہے اسلئے کہ جن مقدارون کی تعریف کی گئی ہے وہ نسبت ایک طول کی دوسرے طول کے ساتھہ ہے پس یے نسبتین عدد یا کسر ہین کبھی کبھی ان نسبتون کو علم مثلثی جملے بھی کہتے ہین

(۱۶) زاویہ قائمہ جسقدر کسی زاویہ سے زیادہ ہو اوس زیادتی کو تمامی یا متمم زاویہ کی

کہتے ہین پس اگر ا تعداد درجون کی کسی زاویہ مین ہو تو ۹۰ - ا کو تمامی یا متمم ا کا کہتے ہین
اسے ایک اور ترکیب بعض علم مثلثی نسبتون کی تعریف کرنیکی اخذ ہوتی ہے دفعہ ۱۴ کے موافق
تعریف ایک زاویہ کی جیب اور مماس اور قاطع الزاویہ کی کرکے ہم یہہ کہینگے کہ
جیب التمام ایک زاویہ کی جیب اوس زاویہ کی تمامی کی ہوتی ہے
اور مماس التمام زاویہ کا مماس اوس زاویہ کی تمامی کا ہے
قاطع التمام زاویہ کا قاطع الزاویہ اوس زاویہ کی تمامی کا ہوتا ہے
اسواسطے کہ مثلث ع ا م مین زاویہ ا ع م تمامی زاویہ ا کی ہے

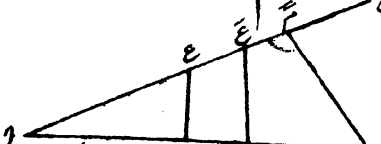
جب ا ع م = عمود / وتر = ا م / ا ع = جم ا

مس ا ع م = عمود / قاعدہ = ا م / ا ع = مم ا

قط ا ع م = وتر / قاعدہ = ا ع / ا م = قم ا

ان نتائج کو ہم اس طرح بہی بیان کرسکتی ہین کہ
جیب زاویہ کی جیب التمام تمامی زاویہ کی ہوتی ہے
مماس زاویہ کا مماس التمام تمامی زاویہ کا ہوتا ہے
قاطع الزاویہ زاویہ کا قاطع التمام تمامی زاویہ کا ہوتا ہے

(۱۷) جب تک زاویہ نہ بدلی اوسکی علم مثلثی نسبتین نہین بدلتین



فرض کرو کہ ب ا س کوئی زاویہ ہے اس مین کوئی نقطہ ع معین کرو اور ع م عمود ا ب نکالو
اور ایک اور نقطہ ع معین کرو اور ع م عمود ا ب پر نکالو تو مثلثون کے متشابہ ہونیکے
سبب سے بحکم (۴ ش ا م) کے

ع م / ا ع = ع م / ا ع

یعنی جب زاویہ ا کی وہی رہتی ہے خواہ وہ مثلث ا ع م سے لیے خواہ مثلث ا ع م سے اور یہی نتیجہ اور علم مثلثی نسبتون پر بھی حاوی ہے

باہم اب مین ایک نقطہ ع معین کرین اور ع م عمود اس پر نکالین تو مثلثون ا ع م اور ا ع م کے متشابہ ہونے سے

$$\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$$

(۱۸) ہمنے ابتک علم مثلثی نسبتونکی تعریف کی اور یہہ ثابت کیا کہ جب تک زاویہ نہ بدلے علم مثلثی نسبتون مین تغیر و تبدل نہین واقع ہوتا اب ہم بعض ارتباط جو ان نسبتون مین باہم ہوتے ہین ثابت کرتے ہین

(۱۹) حدود سے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ

$$\text{مس ا} \times \text{مم ا} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا م}} \times \frac{\text{ا م}}{\text{ع م}} = ۱$$

$$\text{اسیوا سطے مس ا} = \frac{\text{ا م}}{\text{ع م}} \text{ اور مم ا} = \frac{۱}{\text{مس ا}}$$

$$\text{قط ا} \times \text{جم ا} = \frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}} \times \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = ۱$$

$$\text{اسیوا سطے قط ا} = \frac{۱}{\text{جم ا}} \text{ اور جم ا} = \frac{۱}{\text{قط ا}}$$

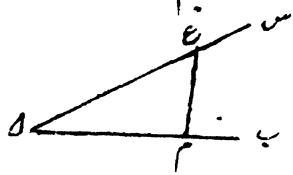
$$\text{قم ا} \times \text{جب ا} = \frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}} \times \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} = ۱$$

$$\text{اسیوا سطے قم ا} = \frac{۱}{\text{جب ا}} \text{ اور جب ا} = \frac{۱}{\text{قم ا}}$$

$$\text{اور نیز مس ا} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا م}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} \div \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$$

$$\text{مم ا} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا م}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} \div \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$$

(۲۰) ثابت کرو کہ (جب ا)^۲ + (جم ا)^۲ = ۱



مثلث قائم الزاویہ ا ع م مین

ع م^۲ + ا م^۲ = ا ع^۲

اسیواسطے $\frac{ع م^2 + ا ع^2}{ا ع^2} = ۱$

اسیواسطے $\frac{ع م^2}{ا ع^2} + \frac{ا م^2}{ا ع^2} = ۱$

اسیواسطے $(\text{جب ا})^2 + (\text{جم ا})^2 = ۱$

(۲۱) اس اثبات کی نسبت ہمکو یہہ ضرور لکھنا چاہئے کہ ۴۷ شکل اقلیدس مین ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث قائم الزاویہ کے وتر پر جو مربع بنایا جاتا ہے برابر ہوتا ہے مجموعہ مربعات کے جو اوسکے اضلاع پر بنائی جائین اور یہہ معلوم ہے کہ علم ہندسہ مین جو مربع ایک خط مستقیم پر بنایا جاتا ہے وہ اوس عدد کے حسابی مربع سے تعبیر ہوتا ہے جو اوس خط مستقیم کے طول کا اندازہ کرتا ہے اب ان دونون نتیجون کو آپسمین ملاؤ تو یہہ مساوات حسابیہ پیدا ہوگی کہ $ع م^2 + ا م^2 = ا ع^2$ اور اسی بنا پر اثبات مذکور مبنی ہے

(۲۲) اکثر اختصار کے واسطے $(\text{جب ا})^2$ کو $\text{جب}^2 ا$ کی صورت مین لکھتے ہین اور ایسی ہی $(\text{جب ا})^3$ کو $\text{جب}^3 ا$ اور یہی طریقہ اختصار کا اور علم مثلثی نسبتون کی قوار کے واسطے ہی پس نتیجہ جو دفعہ (۲۰) مین حاصل ہوا ہے اوسکو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

$$\text{جب}^2 ا + \text{جم}^2 ا = ۱$$

(۲۳) ثابت کرو کہ $(\text{قط ا})^2 = ۱ + (\text{مس ا})^2$ اور $(\text{قم ا})^2 = ۱ + (\text{م ا})^2$

دفعہ ۲۰ کی شکل مین مثلث قائم الزاویہ ا ع م مین ہمکو معلوم ہے کہ

$$ا ع^2 = ا م^2 + ع م^2$$

اسیواسطے $\left(\frac{ا ع}{ا م}\right)^2 = ۱ + \left(\frac{ع م}{ا م}\right)^2$

یعنے $(\text{قط ا})^2 = ۱ + (\text{مس ا})^2$

اور پھر $ا ع^2 = ع م^2 + ا م^2$

اسیواسطے $\left(\frac{ا ع}{ع م}\right)^2 = ۱ + \left(\frac{ا ع}{ع م}\right)^2$

یعنے $(\text{قم ا})^2 = ۱ + (\text{م ا})^2$

نتائج جو اوپر حاصل ہوئی ہین اونکو اکثر اسطرح لکھتے ہین

قط^2 ۱ = ۱ + مس^2 ۱ اور قم^2 ۱ = ۱ + مم^2 ۱

(۲۴) دفعات ۱۹ - ۲۳ مین جو ارتباطات ہمنے قائم کئے ہین اونکی استعانت سے ہم ایک علم مثلثی نسبت کو کسی ایک دوسری مثلثی نسبت کی رقمون مین تعبیر کرسکتے ہین

مثلاً جب کی رقمون مین باقی اور نسبتونکو تعبیر کرو

جم ۱ = $\sqrt{۱ - \text{جب}^2 ۱}$ (بموجب دفعہ ۲۰)

مس ۱ = $\frac{\text{حب ۱}}{\text{جم ۱}}$ = $\frac{\text{حب ۱}}{\sqrt{(۱ - \text{حب}^2 ۱)}}$ (دفعات ۱۹ و ۲۰)

مم = $\frac{\text{جم ۱}}{\text{جب ۱}}$ = $\frac{\sqrt{۱ - \text{حب}^2 ۱}}{\text{جب ۱}}$ (دفعات ۱۹ و ۲۰)

قط ۱ = $\frac{۱}{\text{جم ۱}}$ = $\frac{۱}{\sqrt{(۱ - \text{جب}^2 ۱)}}$ (دفعات ۱۹ و ۲۰)

قم ۱ = $\frac{۱}{\text{جب ۱}}$ (دفعہ ۱۹)

جع ۱ = ۱ - جم ۱ = ۱ - $\sqrt{۱ - \text{جب}^2 ۱}$ دفعہ ۲۰

اب مس ۱ کی رقمون مین باقی نسبتون کو تعبیر کرتے ہین

جب ۱ = $\frac{۱}{\text{قم ۱}}$ = $\frac{۱}{\sqrt{(۱ + \text{مم}^2 ۱)}}$ = $\frac{۱}{\sqrt{(۱ + \frac{۱}{\text{مس}^2 ۱})}}$

= $\frac{\text{مس ۱}}{\sqrt{(۱ + \text{مس}^2 ۱)}}$ (دفعات ۱۹ و ۲۳)

جم ۱ = $\frac{۱}{\text{قط ۱}}$ = $\frac{۱}{\sqrt{۱ + \text{مس}^2 ۱}}$ (دفعات ۱۹ و ۲۳)

مم ۱ = $\frac{۱}{\text{مس ۱}}$ و دفعہ ۱۹

قط ۱ = $\sqrt{(۱ + \text{مس}^2 ۱)}$ دفعہ ۲۳

قم ۱ = $\frac{۱}{\text{حب ۱}}$ = $\frac{\sqrt{۱ + \text{مس}^2 ۱}}{\text{مس ۱}}$

جع ۱ = ۱ - جم ۱ = ۱ - $\frac{۱}{\sqrt{۱ + \text{مس}^2 ۱}}$

(۲۵) اگر قیمت ایک علم مثلثی نسبت کی معلوم ہو تو ہم باقی نسبتون کی قیمت دریافت کرسکتے ہین

مثلاً فرض کرو کہ جب ۱ = $\frac{۳}{۵}$ تو ہمکو معلوم ہے کہ

جم ۱ = $\sqrt{(۱ - \text{جب}^2 ۱)}$ = $\sqrt{(۱ - \frac{۹}{۲۵})}$ = $\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}$ = $\frac{۴}{۵}$

مس ا = $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} = \frac{۳}{۵} \div \frac{۴}{۵} = \frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۴} = \frac{۳}{۴}$ اور مم ا = $\frac{۱}{\text{مس ا}} = \frac{۴}{۳}$

قط ا = $\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \frac{۴}{۳}$ اور قم ا = $\frac{۱}{\text{جب ا}} = \frac{۵}{۳}$

ج = ۱ ـ جم ا = ۱ ـ $\frac{۴}{۵} = \frac{۱}{۵}$

امثلہ مشق (۲)

ان آٹھ مثالوں میں اور علم مثلثی نسبتوں کی قیمت دریافت کرو اور ہمکو معلوم ہے کہ

(۱) جب ا = $\frac{۱۲}{۱۳}$ (۲) جب ا = $\frac{۴۰}{۴۱}$ (۳) جم ا = ۰٫۸ ؛

(۴) جم ا = $\frac{۶۰}{۶۱}$ (۵) مس ا = $\frac{۴}{۳}$ (۶) جب ا = $\frac{۱}{۳}$

(۷) جب ا = $\frac{۲ م ن}{م^۲ + ن^۲}$ (۸) جم ا = $\frac{م^۲ ـ ن^۲}{م^۲ + ن^۲}$

ان متطابقوں کو ثابت کرو

(۹) (جب ا + جم ا)^۲ + (جب ا ـ جم ا)^۲ = ۲

(۱۰) جب^۲ ا ـ جم^۲ ب = جب^۲ ب ـ جم^۲ ا

(۱۱) قط^۲ ا قم^۲ ا = قط^۲ ا + قم^۲ ا

(۱۲) جب^۴ ا + جم^۴ ا = ۱ ـ ۲ جب^۲ ا جم^۲ ا

(۱۳) مس ا + مم ا = قط ا قم ا

(۱۴) جب^۴ ا ـ جم^۴ ا = جب^۲ ا ـ جم^۲ ا

(۱۵) جب^۲ ا مس ا + جم^۲ ا مم ا = $\frac{۱ ـ ۲ \text{ جب}^۲ \text{ ا جم}^۲ \text{ ا}}{\text{جب ا جم ا}}$

(۱۶) جب^۲ ا + جج ا = ۲ (۱ ـ جم ا)

(۱۷) جب^۳ ا + جم^۳ ا = (جب ا + جم ا) (۱ ـ جب ا جم ا)

(۱۸) جب^۶ ا + جم^۶ ا = جب^۴ ا + جم^۴ ا ـ [illegible] جب^۲ ا جم^۲ ا

(۱۹) جب^۲ ا مس^۲ ا + جم^۲ ا مم^۲ ا = مس^۲ ا + مم^۲ ا ـ ۱

(۲۰) جب ا مس^۲ ا + قم ا قط^۲ ا ـ ۲ مس ا قط ا = قم ا ـ جب ا

(۲۱) $(\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب})^2 + (\text{جم ا جب ب} - \text{جب ا جب ب})^2 = ۱$

(۲۲) $(۱ + \text{جب ا} + \text{جم ا})^2 = (۱ + \text{جب ا})(۱ + \text{جم ا})$

(۲۳) $(۱ - \text{جب ا} - \text{جم ا})^2 (۱ + \text{جب ا} + \text{جم ا})^2 = ۴\,\text{جب}^2\,\text{ا جم}^2\,\text{ا}$

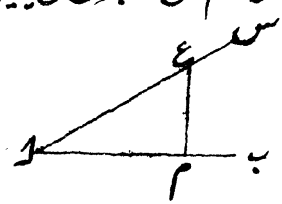
(۲۴) $(۱ + \text{جب ا} - \text{جم ا})^2 + (۱ + \text{جم ا} - \text{جب ا})^2 = ۴ (۱ - \text{جب ا جم ا})$

باب سوم خاص زاویونکی نسبتین

زاویہ ۴۵° اور ۶۰° اور ۳۰° کے علم مثلثی نسبتون کی قیمتین

(۲۶) اس باب مین ہم خاص زاویون کی علم مثلثی نسبتون کی قیمتین دریافت کرینگے

(۲۷) ۴۵° کے زاویہ کی علم مثلثی نسبتون کی قیمتین دریافت کرو



فرض کرو کہ ب اس زاویہ ۴۵° کا ہے کوئی نقطہ اس مین معین کرکے ع م عمود ا ب پر نکالو
چونکہ زاویہ ع ا م نصف قائمہ ہے اسلئے زاویہ ا ع م بھی نصف قائمہ ہے اور اسواسطے

ع م = ا م

اب ع م^2 + ا م^2 = ا ع^2

تو ۲ ع م^2 = ا ع^2

اسواسطے $\left(\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}\right)^2 = \frac{۱}{۲}$ اسواسطے $\frac{\text{ع م}}{\text{ا م}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

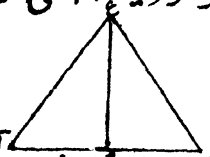
پس جب ۴۵° $= \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ اور جم ۴۵° $= \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

مس ۴۵° $= \frac{\text{ع م}}{\text{ا م}} = ۱$ اور مم ۴۵° $= \frac{\text{ا م}}{\text{ع م}} = ۱$

قسط ۴۵° $= \frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}} = \sqrt{۲}$ قم ۴۵° $= \frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}} = \sqrt{۲}$

جح ۴۵° $= ۱ - \text{جم ۴۵°} = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

(۲۸) زاویہ ۶۰° اور زاویہ ۳۰° کی علم مثلثی نسبتوں کی قیمتیں دریافت کرو



فرض کرو کہ اع ب ایک مثلث متساوی الاضلاع ہے یعنی زاویہ ع ا ب ساٹھ درجہ کا ہے

ع م عمود ا ب پر نکالو تو ا م = م ب

اسیواسطے ا م = ½ ا ب = ½ ا ع

پس جم ۶۰° = $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}}$ = ½

جب ۶۰° = $\sqrt{۱ - \text{جم}^۲ ۶۰}$ = $\sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}}$ = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

مس ۶۰° = $\frac{\text{جب ۶۰°}}{\text{جم ۶۰°}}$ = $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \div \frac{۱}{۲}$ = $\sqrt{۳}$ اور

مم ۶۰° = $\frac{۱}{\text{مس ۶۰°}}$ = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور قط ۶۰° = $\frac{۱}{\text{جم ۶۰°}}$ = ۲

قم ۶۰° = $\frac{۱}{\text{جب ۶۰°}}$ = $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ اور جع ۶۰° = ۱ − جم ۶۰° = ۱ − ½ = ½

اور ۳۰° کے علم مثلثی نسبتوں کی قیمت دفعہ ۱۶ کے موافق مستنبط ہوتی ہے کہ

جب ۳۰° = جم ۶۰° = ½ اور جم ۳۰° = جب ۶۰° = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

مس ۳۰° = مم ۶۰° = $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور مم ۳۰° = مس ۶۰° = $\sqrt{۳}$

قط ۳۰° = قم ۶۰° = $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ اور قم ۳۰° = قط ۶۰° = ۲

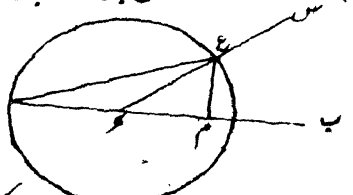
جع ۳۰° = ۱ − جم ۳۰° = ۱ − $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(۲۹) یہہ شاذ و نادر بات ہی کہ کسی زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کی قیمت تحقیقی دریافت ہو لیکن اکثر تقریبی اور تخمینی قیمتیں ہوا کرتی ہیں تحقیقی قیمتیں خاص صورتوں میں ہوا کرتی ہیں جنکا ہم نے اوپر بیان کیا مگر اس تقریبی اور تخمینی قیمتوں کی حساب کو اتنا طول دی سکتی ہیں کہ جہاں تک چاہیں تحقیقی قیمتوں کے قریب اون تخمینی قیمتونکو لے آتے ہیں ایسی حسابوں کا بیان اس رسالہ میں نہیں کرینگے مگر کسی اور مکمل رسالہ میں اوسکا ذکر کرینگے یہاں فقط

اس بات کا بیان کر دینا کافی ہے سکتا ہے
کہ جدولین ایسے یہان موجود ہین کہ اونمین ہر ایک زاویہ کی جو درجون اور دقیقون مین بیان ہو
جیب سات مرتبہ کی اعشاریہ تک معلوم ہو سکتی ہے اور جب جیب معلوم ہو گی تو اور علم مثلثی
جملون کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے

(۳۰) جس ترکیب سے جدولین مرتب ہوتے ہین اگرچہ ہم اوسکا بیان نہین کرینگے مگر بہت سی
صور قوانین مثلثی کی ایسی بیان کرینگے کہ وہ علم مثلثی نسبتون کے حساب لگانی مین نہایت
بکار آمد اور سود مند ہین خصوصاً وہ جو آگے ہم نے علم مثلثی نسبتین اوس زاویہ کی لکھی ہین
جو حاصل جمع یا حاصل تفریق اون دو زاویون کا ہے جنکے علم مثلثی نسبتین معلوم ہین
دفعہ آیندہ مین ہم ایک صورت قانون مثلثی کی لکھینگے جسکے ذریعہ سے ایک زاویہ کی
علم مثلثی نسبتون کے معلوم ہونے سے ہر نصف زاویہ کی علم مثلثی نسبتون کو دریافت کر سکینگے

(۳۱) نصف زاویہ کی مماس کو زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی رقمون مین بیان کرو



فرض کرو کہ زاویہ ب د س کل ا سے تعبیر ہوتا ہے د س مین کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور د کے مرکز
اور د ع کے نصف قطر پر دائرہ بناؤ اور ب د کو بڑہا کر محیط سے نقطہ د پر ملاؤ
اور ع م عمود د ب پر نکالو اور ع د ملاؤ

بحکم (۲۰ شکل ۳ م) کے زاویہ ع د م = ½ ا

اب مماس ع د م = $\frac{\text{ع م}}{\text{د م}}$ = $\frac{\text{ع م}}{\text{د ب + ب م}}$ = $\frac{\text{ع م}}{\text{د ع + ع م}}$

فرض کرو کہ د ع = ط تو

$\frac{\text{ع م}}{\text{د ع}}$ = جب ا اسیواسطے ع م = ط جب ا

$\frac{\text{ضلع}}{\text{وتر}}$ = جم ۱ اسی طرح دم = ط جم ۱

پس مس ع دم = $\frac{\text{ط جب ۱}}{\text{ط + ا جم ۱}}$ = $\frac{\text{جب ۱}}{\text{۱ + جم ۱}}$

یعنی مس $\frac{۱}{۲}$ ۱ = $\frac{\text{جب ۱}}{\text{۱ + جم ۱}}$

(۳۲) دفعہ گذشتہ کے موافق جس وقت جب ۱ اور جم ۱ معلوم ہوں مس $\frac{۱}{۲}$ ۱ دریافت ہوگا اور جب مس $\frac{۱}{۲}$ ۱ معلوم ہوگیا تو موافق دفعہ ۲۴ کے اونسی اور علم مثلثی نسبتیں $\frac{۱}{۲}$ ۱ کی دریافت کرسکتے ہیں

مثلاً فرض کرو کہ ۱ = ۳۰° تو $\frac{۱}{۲}$ ۱ = ۱۵°

مس ۱۵° = $\frac{\text{جب ۳۰°}}{\text{۱ + جم ۳۰°}}$ = $\frac{\frac{۱}{۲}}{\text{۱ + }\sqrt{۳}/۲}$ = $\frac{۱}{۲ + \sqrt{۳}}$

اگر ہم آخر کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ کو ۲ − $\sqrt{۳}$ میں ضرب دیں

تو مس ۱۵° = ۲ − $\sqrt{۳}$

اور چونکہ دفعہ ۲۳ کے قسط ۲ ۱۵° = ۱ + مس ۲ ۱۵° = ۱ + (۲ − $\sqrt{۳}$)² = ۸ − ۴ $\sqrt{۳}$

اسے معلوم ہوا کہ قسط ۱۵° کا ۸ − ۴ $\sqrt{۳}$ کے جذر لینے سے دریافت ہوسکتا ہے اور یہ جبر مقابلہ میں ثابت کیا گیا ہے کہ اس جذر کے نکالنے سے یہ بات آسان ہے کہ دونو ترکیبوں کو مجذور کرکے یہ ثابت کریں کہ

$\sqrt{۲}\left(۱ - \sqrt{۳}\right) = \sqrt{۸ - ۴\sqrt{۳}}$

اسے معلوم ہوا کہ قسط ۱۵° = $\sqrt{۲}$ (۱ − $\sqrt{۳}$)

جم ۱۵° = $\frac{۱}{\sqrt{۲}\left(۱ - \sqrt{۳}\right)}$ = $\frac{۱ + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲}(۱ - \sqrt{۳})(۱ + \sqrt{۳})}$ = $\frac{۱ + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲}\,۲}$

مم ۱۵° = $\frac{۱}{\text{مس ۱۵°}}$ = ۲ + $\sqrt{۳}$

قم ۲ ۱۵° = ۱ + مم ۲ ۱۵° = ۸ + ۴ $\sqrt{۳}$

قم ۱۵° = $\sqrt{۲}$ (۱ + $\sqrt{۳}$)

جب ۱۵° = $\frac{۱}{\sqrt{۲}(۱ + \sqrt{۳})}$ = $\frac{۱ - \sqrt{۳}}{\sqrt{۲}\,۲}$

چونکہ علم مثلثی نسبتیں زاویہ ۱۵° کی معلوم ہیں تو اون سے ۵ و ۷ کے زاویہ کی علم مثلثی نسبتیں

دفعہ ۱۶ کے موافق دریافت ہوسکتی ہین

(۳۳) طالب علم کو چاہیئے کہ وہ ۳۰° اور ۴۵° اور ۶۰° کے زاویون کی علم مثلثی نسبتونکی قیمتونکو خوب غور سے خیال کرے اور یاد رکھے کیونکہ اونکا ہمیشہ کام پڑتا ہے خصوصاً زاویہ ۶۰° کا آوے وہان ضرور ہے کہ اوسکی جیب التمام $\frac{1}{2}$ جو اوپر دریافت ہوئی لیجاوے اور جہان یہہ معلوم ہو کہ جیب التمام ایک زاویہ کم از قائمہ کی $\frac{1}{2}$ ہے تو وہان یہہ نتیجہ نکالنا چاہیئے کہ زاویہ ۶۰° کا ہے اگر وقت پر یہہ اس نتیجہ کے نکالنے مین واقع ہو تو وہ ایک اور ہماری بیان آیندہ سے رفع ہو جائیگی اور طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ یہہ قید کم از قائمہ ہونیکی کیون لگائی گئی ہے

(۳۴) اگر زاویہ کم ۴۵° سے ہو تو جیب التمام زاویہ کی بڑی جیب زاویہ سے ہوگی اور اگر زاویہ ۴۵° سے ہو اور کم ۹۰° سے ہو تو جیب التمام زاویہ کی چھوٹی جیب سے ہوگی یہہ نتیجہ بھی دفعہ ۱۳ کی شکل سے صاف ظاہر ہے اسلئے کہ مثلث مین بڑے زاویہ کے سامنے بڑا ضلع ہوتا ہے

(۳۵) دفعہ ۳۱ مین جو نتائج بیان ہوئی ہین اون سے بعض اور نتائج مستنبط کرتے ہین اون سے آیندہ کام نکلیگا اور بعض صورتوانین مثلثی جو قائم ہوئے ہین اونکے استعمال کا طریقہ بھی معلوم ہوگا

ہمکو معلوم ہے کہ $(\text{مس} \frac{1}{2} ا)^2 = \frac{\text{جب}^2 ا}{(1+\text{جم} ا)^2}$

اسکے موجب دفعہ ۲۰ کے ثابت ہوا کہ

$$(\text{مس} \frac{1}{2} ا)^2 = \frac{1-\text{جم}^2 ا}{(1+\text{جم} ا)^2} = \frac{(1-\text{جم} ا)(1+\text{جم} ا)}{(1+\text{جم} ا)^2}$$

$$\text{مس}(\text{مس} \frac{1}{2} ا) = \frac{1-\text{جم} ا}{1+\text{جم} ا} \quad \ldots\ldots (1)$$

پس موجب دفعہ ۳۴ کے

$$(\text{قسط} \frac{1}{2} ا)^2 = 1 + (\text{مس} \frac{1}{2} ا)^2$$

$$= 1 + \frac{1-\text{جم} ا}{1+\text{جم} ا} = \frac{2}{1+\text{جم} ا}$$

اسیواسطے بموجب دفعہ ۱۹ کے $(\text{جم} \frac{1}{2} ا)^2 = \frac{1+\text{جم} ا}{2}$ ..... (۲)

اور $(\text{جب } \frac{1}{2}\text{ا})^2 = 1 - (\text{جم } \frac{1}{2}\text{ا})^2 = 1 - \frac{1+\text{جم ا}}{2}$

$= \frac{1-\text{جم ا}}{2}$ . . . (۳)

اور جب ا = (۱+جم ا) مس $\frac{1}{2}$ ا

$= 2\,\text{جم}\frac{1}{2}\text{ا}\,\frac{\text{جب}\frac{1}{2}\text{ا}}{\text{جم}\frac{1}{2}\text{ا}} = 2\,\text{جم}\frac{1}{2}\text{ا}\,\text{جب}\frac{1}{2}\text{ا}$ . . (۴)

ان دفعات مین ہم صورت (مس $\frac{1}{2}$ ا)^2 کو کام مین لائے ہین کہ وہ مبتدی کے ذہن نشین آسانی سے ہوسکتی ہے مگر اکثر اختصاراً اوسکو اس صورت مین لکھہ سکتے ہین کہ مس^2 $\frac{1}{2}$ ا اور ایسی ہی (جب $\frac{1}{2}$ ا)^2 کو جب^2 $\frac{1}{2}$ ا کی صورت مین لکھہ سکتے ہین (۲) اور (۳) جو نتایج لکھے ہین وہ اسطرح بہی تعبیر ہوسکتے ہین کہ

جم ا = ۲ (جم $\frac{1}{2}$ ا)^2 − ۱ = ۱ − ۲ (جب $\frac{1}{2}$ ا)^2 = (جم $\frac{1}{2}$ ا)^2 − (جب $\frac{1}{2}$ ا)^2

فرض کرو کہ ہم (۴) مین ا کی جگہہ ۲ ب لکہین تو

جب ۲ ب = ۲ جب ب جم ب (۵)

طالب علم کو ایسی تغیر اور تبدل کی مشق کرنی چاہیئے ہم نے فقط ایک مثال اس تغیر اور تبدل کی اوپر لکہدی ہے اوسے سمجہہ کر طالب علم خود اوسکی مشق کرے وہ (۴) اور (۵) کی نسبت اس بات کو خیال کرے کہ ہم نے ایک ہی نتیجہ کو ایسی صورتو نمین لکہا ہے جنمین تہوڑا ہی سا فرق ہے اور ایک صورت سے باقی اور صورتین مستنبط ہوسکتی ہین لکہینگے اس دفعہ اور دفعہ ۱۳۱ کے نتایج کا اثبات دفعہ ۱۸۴ مین ایک اور طرح سے بہی

امثلہ مشق (۴)

ا کو ان مساواتون مین دریافت کرو

(۱) ۳ حت ا = ۲ جم^2 ا

(۲) قط ا مس ا = ۲ $\sqrt{3}$

(۳) قط^2 ا − $\frac{5}{2}$ قسط ا + ۱ = ۰

(۴) ۴ جم^{۲} ا − ۴ جم^{۲} ا = ۱

(۵) ۳ قم^{۲} ا + ۸ جب^{۲} ا = ۱۰

(۶) مس^{۲} ا − ۴ مس ا + ۱ = ۰

ا اور ب کو ان مساواتون سے دریافت کرو

(۷) $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ب}} = \frac{۳}{۴}$ اور $\frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}} = \frac{۳}{۴}$

(۸) $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ب}} = \frac{۳}{۲}$ اور $\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ب}} = \frac{۱}{۲}$

(۹) جم (ا − ب) = $\frac{۳}{۴}$ اور جب (ا − ب) = جم (ا + ب)

(۱۰) جم (۲ ا + ب) = $\frac{۱}{۲}$ اور جب (۳ ا − ب) = $\frac{۱}{۲}$

(۱۱) مس (۱۴ ا + ۷ ب) = ۲ + ۳ اور مس (۵ ا − ۷ ب) = ۲ − ۳

(۱۲) جب ا + جب ب = ۳ اور جب^{۲} ا + جب^{۲} ب = ۱

(۱۳) ان مساواتون سے ا اور ب اور س کو دریافت کرو

جم (ا + ب + س) = $\frac{۱}{۲}$ اور جب (ا + ب + س) = $\frac{۱}{۲}$ اور مس (ب + س) = ۱

(۱۴) مس ۲۲ $\frac{۱}{۲}$ درجہ کی زاویہ کی علم مثلثی نسبتین دریافت کرو

(۱۵) مس ۷ $\frac{۱}{۲}$° کو دریافت کرو (۱۶) مس ۳۷ $\frac{۱}{۲}$° کو دریافت کرو

باب چہارم

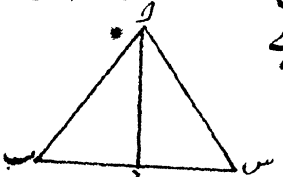
علم مثلث کا کام مین آنا

(۳۶) علم مثلثی نسبتین جس کام مین آتی ہین اوسکی مثالین ہم نے اس باب مین لکھی ہین اب تک ہمنے نہایت سیدھی سادی چند اصول بیان کئے ہین اسلئے ہم توضیح علم مثلث کی ایسی بسط سا نہین کر سکتے کہ وہ کس کس کام مین آتا ہے مگر جسقدر ہمنے اوسکے سودمند ہونیکا حال بیان کیا ہے اوسے طالب علم کی دلمین ضرور شوق اس علم کا پیدا ہوگا اور وہ یہہ دیکھیگا کہ جسکی ابتدا سے اتنے کام نکلتے ہون اوسکی انتہا سے کیا کچھہ کام نکلتے ہونگے اور وہ

عملیات کمپیلکام آتا ہوگا

اب ہم ایک شکل عظیم ثابت کرتے ہین جسسے معلوم ہوتا ہے کہ اضلاع مثلث کے اور اوسکے زاویون کے علم مثلثی نسبتین آپسمین کسطرح مربوط ہوتی ہین

(۳۷) مثلث مین اضلاع کے اندروہ نسبت ہوتی ہے جو اونکی مقابل کے زاویون کی جیب مین نسبت ہوتی ہے



فرض کرو کہ اب س مثلث ہے اور ا سے اد عمود مقابل کے ضلع پر اوسے دیر ملتا ہوا نکالو

پس $\frac{\text{اد}}{\text{اب}}$ = جب ب اسیواسطے اد = اب جب ب

اور $\frac{\text{اد}}{\text{اس}}$ = جب س اسیواسطے اد = اس جب س

اسیواسطے اب جب ب = اس جب س

اسیواسطے $\frac{\text{اب}}{\text{اس}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$

اسسے ثابت ہوتا ہے کہ دعوی پر زوج اضلاع کے واسطے ثابت ہے

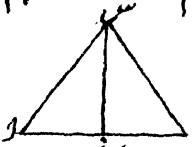
ہمنے یہہ فرض کرلیا ہے کہ دو زاویے جنکا ذکر اوپر آیا ہے حادی ہین اور بالفعل اس امر کا فرض کرلینا اون استعمالات کے بیان کرنیکے لئے کافی ہے جو ہم اس باب مین لکھینگے اور مثلث منفرج الزاویہ کی صورت کا بیان آگے کرینگے

اکثر مثلث کے زوایا ا اور ب اور س کے مقابل اضلاع کو طا و طب و طس سے تعبیر کرتے ہین

(۳۸) ارتفاعون اور فاصلون کی مثالون کو بیان کرکے ہم علم مثلث کے کام اور فائدے بتلائینگے اور اوسمین حساب کرنے کے لئے یہہ فرض کرلینگے کہ خطوط مستقیم کے طول زمین پر بنا سکتے ہین اور زاویہ اون دو خطوط مستقیم کے درمیان جو مشاہدہ کرنیوالی کی آنکھہ سر ملتے ہین پیمایش ہوسکتا ہی طول کو اکثر حرف سے نمایش کرتے ہین زاویونکو اکثر

سکسٹنٹ اور بہی اوڈی للایٹ سے سکسٹنٹ سے تودہ زاوئے پیمایش ہونگے جو شاہدہ کرنیوالی کی آنکہہ سے دو خطوط مستقیم کہنچنے سے بنتے ہین اور تہیودی للایٹ سے وہ زاوئے پیمایش ہونگے جو اون دو خطوط مستقیم کے درمیان واقع ہین کہ جنمین سے ایک خط مستقیم تو مشاہدہ کرنیوالی کی آنکہہ سے کہنچا گیا ہے اور دوسرا خط مستقیم افقی جو اوسے سطح راسی مین کہنچا گیا ہے جسمین پہلا خط مستقیم کہنچا ہے اور اس آنکہہ سے وہ زاوئے بہی پیمایش ہونگے جو اون دو خطوط مستقیم افقی کے درمیان واقع ہونگے کہ مشاہدہ کرنوالے کی آنکہہ سے ایک ایک سطح راسی معین مین اور دوسرا دوسری سطح راسی معین مین واقع ہوان آلات کے استعمال کی کیفیت رڑکی کالیج کے پیمایش کے رسالون مین دیکہو

(۳۹) سطح افقی پر ایک مقام ہے جہانتک ہم پہونچ نہین سکتے اوسکا فاصلہ دریافت کرو



فرض کرو کہ اس ایسا مقام ہے کہ وہان تک ہماری رسائی نہین ہوسکتی کسی خط اب کو سطح افقی مین جسمین اس بہی ہو پیمایش کرلو اور ا پر زاویہ ب اس کا اور ب پر زاویہ س ب ا کا مشاہدہ کرلو تو زاویہ ا س ب بموجب ۳۲ ش ام کے دریافت ہوجائیگا

$$\frac{\text{اب}}{\text{جب ا س ب}} = \frac{\text{اس}}{\text{جب ا ب س}}$$

اسیواسطے

$$\text{اس} = \frac{\text{اب جب ا ب س}}{\text{جب ا س ب}}$$

پس اس معلوم ہوگیا

اب فرض کرو کہ ہمکو فاصلہ عمودی س کا س د خط ا ب سے دریافت کرنا تہا تو

$$\frac{\text{س د}}{\text{اس}} = \text{جب س ا ب}$$

اسیواسطے

$$\text{س د} = \text{اس جب س ا ب}$$

$$= \frac{\text{ا ب جب ا ب س جب س ا ب}}{\text{جب ا س ب}}$$

پس س د معلوم ہوگیا

(۴۰) ایک چیز ہمکو دکھائی دیتی ہے اور اوس تک ہم جا بھی سکتی ہین اوسکا ارتفاع دریافت

فرض کرو کہ کسی چیز کی چوٹی ع ہو اور ارتفاع ع س کا دریافت کرنا منظور ہو س ب فاصلہ کو خط مستقیم افقی پر اوس شی کی جڑ سے ناپ لو اور ب پر زاویہ س ب ع کو مشاہدہ کرو تو

$$\frac{\text{ع س}}{\text{ب س}} = \text{مس ع ب س}$$

اسیواسطے ع س = ب س مس ع ب س

پس ع س معلوم ہوگیا

(۴۱) دفعہ مذکور مین درست بات یہہ ہے کہ خط مستقیم ب س جو ناپا گیا ہی وہ زمین پر نہین ہے بلکہ مشاہدہ کرنیوالی کی آنکھ مقام ب پر جسقدر اونچی ہے اوسقدر یہہ خط زمین سے اونچا متوازی زمینی خط کا ناپا گیا ہے اسسے معلوم ہوا کہ ع س ارتفاع اوس شی کا مشاہدہ کرنیوالی کی آنکھ سے ہی اگر ارتفاع زمین سے دریافت کرنا چاہین ع س پر ارتفاع چشم کو جو مقام ب پر ہو زیادہ کرین اور اس کتاب مین بعض اور دفعات بھی ہین جسمین اس بات کا خیال رکھنا چاہئے ہم اس بات کو اور جگہہ بیان نہین کرینگے اور نہ مکرر بیان کرنیکی حاجت ہی نہ طالب علم کو ضرور ہے کہ وہ ہمیشہ اسطرح حساب کو درست کیا کری مگر وہان جہانکہ کسی خاص مثال مین اس طرح درست کرنیکی فرمایش کیجائے

(۴۲) سطح افقی پر ارتفاع اور فاصلہ ایک چیز کا دریافت کرو اور ہم اوس چیز تک جا نہین سکتے

فرض کرو کہ ع چوٹی کسی چیز کی ہو اور ارتفاع ع س کا دریافت کرنا منظور ہو اور نقطہ ا اوس سطح افقی پر ہے جو س سے کھینچی جائے اوسسے فاصلہ اوس شے کا معلوم کرنا منظور ہے اب زاویہ ع ا س کا ناپو اور طول ا ب کو اوس شے کی طرف پیمائش کرو اور ب پر زاویہ ع ب س کا پیمائش کرو پس مثلث ا ع ب مین ضلع ا ب معلوم ہے اور زاویہ ع ا ب اور زاویہ ع ب س اور زاویہ ع ا س بموجب (۳۲ ش ا م) کے دریافت ہو سکتا ہے اب بموجب دفعہ ۳۷ کے

$$\frac{\text{ب ع}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب ع ا ب}}{\text{جب ا ع ب}}$$

$$\text{اسیواسطے ب ع} = \frac{\text{ا ب جب ع ا ب}}{\text{جب ا ع ب}}$$

پس ب ع معلوم ہوگیا

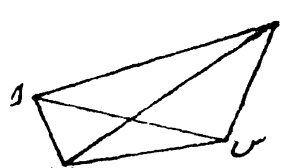
$$\text{تو } \frac{\text{ع س}}{\text{ب ع}} = \text{جب ع ب س}$$

$$\text{اسیواسطے ع س} = \text{ب ع جب ع ب س}$$

$$= \frac{\text{ا ب جب ع ا ب جب ع ب س}}{\text{جب ا ع ب}}$$

پس ع س معلوم ہوگیا

(۴۳) اگر طول ا ب کا پیمائش کرنا اوس شے کی جانب مین آسان نہو اور کوئی دقت واقع ہو تو اسطرح عمل کرین کہ اوسے کسی سمت مین ا ب کو پیمائش کرلین اور زاویہ ع ا ب کو ا پر اور زاویہ ع ب ا اور ب پر زاویہ ع ب س کو پیمائش کرلین



پس مثلث ا ب ع مین ضلع ا ب معلوم ہے اور زاویے ع ا ب اور ع ب ا جسسے زاویہ ا ع ب بحکم (۳۲ ش ا م) کے دریافت ہو جائیگا

$$\frac{\text{اب}}{\text{ب ع}} = \frac{\text{جب ع اب}}{\text{جب ا ع ب}}$$

اسیواسطے $\text{ب ع} = \frac{\text{اب جب ع اب}}{\text{جب ا ع ب}}$

پس ب ع معلوم ہوگیا

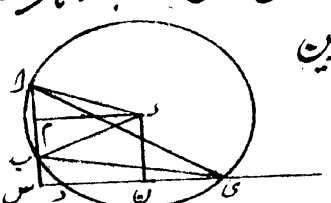
$$\frac{\text{ع س}}{\text{ب ع}} = \text{جب ع ب س}$$

اسیواسطے $\text{ع س} = \text{ع ب جب ع ب س}$

$$= \frac{\text{اب جب ع اب جب ع ب س}}{\text{جب ا ع ب}}$$

پس ع س معلوم ہوگیا

(۴۴) ایک شے کا ارتفاع معلوم ہے اور وہ سطح افق سے کچھ اونچان پر قائم ہے اور اس سطح افقی مین نقطہ معلوم پر زاویہ محاذی اوس شے کا ناپا گیا ہی اب مطلوب یہہ ہے کہ سطح افقی سے بلندی اوسکی دریافت کرین



فرض کرو کہ اب ایک شے ہو اور اوسکا ارتفاع معلوم ہو اور ب س بلندی پر سطح افقی سے واقع ہو اب پر ایک قطعہ دائرہ بناؤ جسکا زاویہ برابر اوس زاویہ معلوم کے ہو جو محاذی اب کے واقع ہو اور فرض کرو کہ یہہ دائرہ سطح افقی کو د اور ی پر قطع کرتا ہے، د مرکز دائرہ کا دریافت کرو اور د م عمود اب پر اور ان عمودی پر لگالو زاویہ ا د م نصف زاویہ ا د ب کا ہے اسے معلوم ہوا کہ بحکم (پرش ۳۳ م) کے زاویہ ا د م برابر ہے زاویہ ا ی ب کے اور اسلیئے زاویہ ا د م معلوم ہے

اور $\frac{\text{ا م}}{\text{م د}} = \text{مس ا د م}$

اسیواسطے $\text{م د} = \text{ا م مس ا د م}$

اور چونکہ ا م نصف اب کا ہے اسسے م د دریافت ہوجائیگا اور

س ن = م د

اب دو فاصلون س د اور س ی مین سے ایک کو معلوم فرض کرسکتے ہین یعنی اگر فاصلہ معلوم م د سے چھوٹا ہو تو س د کو معلوم فرض کرسکتے ہین اور اگر فاصلہ معلوم م د سے بڑا ہو تو س ی کو معلوم فرض کرسکتے ہین اور دوسری کو دریافت کرسکتے ہین اسواسطے کہ س ن معلوم ہے اور ن نقطہ وسط دی کا ہے

پس بحکم نتیجہ ۶ ۳ شکل ۳ م کے

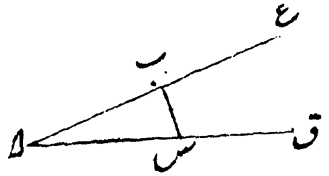
ص د . س ی = س ا . س ب = (س م + م ا)(س م − م ا)

= س م ۲ − م ا ۲

اسیواسطے س م ۲ = س د . س ی + م ا ۲

اسسے س م دریافت ہوتا ہے پھر اوسسے س ب معلوم ہوتا ہے

(۴۵) زاویہ کے پیمایش کی ضرورت بعض اوقات طولون کے ناپنے اور حساب کرنے سے نہین رہتی



فرض کرو کہ ہمکو زاویہ ع ا ق جو نقطہ ا پر محاذی اون خطوط مستقیم کے کہ ع اور ق سے کھنچے جائین دریافت کرنا منظور ہے

ا ع مین کوئی نقطہ ب اور ا ق مین کوئی نقطہ س ایسا مقرر کرو کہ ا س = ا ب اور ب س کو ناپ لو تو نقطہ ا سے ب س پر جو عمود کھنچا جائے گا وہ دونو خط مستقیم ب س اور زاویہ ب ا س کی تنصیف کریگا

اسیواسطے جب ½ ب ا س = ½ ب س / ا ب

چونکہ بائین طرف اس مساوات کی معلوم ہے اس سبب سے ہم زاویہ ۱/۲ ب اس کو جیبون کی جدول سے دریافت کر سکتے ہین دفعہ ۲۹ کو دیکھو پس زاویہ ب اس دریافت ہوگیا

(۴۶) اب ہم ایک مثال علم مساحت کی دیتے ہین جسے فائدہ علم مثلث کا معلوم ہوگا ہمنے مان لیا ہے کہ طالب علم اس بات کو جانتا ہوگا کہ سطح قائم الزاویہ کے دو اضلاع متصلہ کو جو اعداد تعبیر کرتے ہین اونکا حاصلضرب اوس قائم الزاویہ کو تعبیر کرتا ہے اقلیدس کے دوسرے مقالہ کی شرح دیکھو اسواسطے رقبہ مثلث کا بحکم (۴۱ شرام) کے نصف حاصلضرب قاعدہ اور ارتفاع سے تعبیر ہوگا اسکی استعانت سے ہم دفعہ ذیل کی شکل کو ثابت کرتے ہین

(۴۷) مثلث کا رقبہ برابر ہوتا ہے نصف حاصلضرب دو ضلعون اور اونکی درمیانی زاویہ کے جیب کے

فرض کرو کہ اب س مثلث ہو اور س د عمود نقطہ س سے قاعدہ ا ب پر نکالا جاے

تو رقبہ = ۱/۲ ا ب . س د

اور س د / ا س = جیب ب اس

اسواسطے س د = ا س جیب ب اس

پس رقبہ = ۱/۲ ا ب . ا س جیب ب اس

(۴۸) ایک ضلع اور زاویے معلوم ہون تو رقبہ مثلث کا دریافت کرو

دفعہ گذشتہ کی شکل مین مثل دفعہ ۳۹ کے

$$\text{اس} = \frac{\text{اب جب ب اس}}{\text{جب ا س ب}}$$

$$\text{اسیواسطے رقبہ مثلث کا} = \frac{\text{ا}^2 \text{ جب ا ب س جب ب ا س}}{\text{۲ جب ا س ب}}$$

(۴۹) جس متوازی الاضلاع اور مثلث کا ارتفاع اور قاعدہ ایک ہی ہو اونمین متوازی الاضلاع دوچند مثلث سے ہوتی ہے اسسے ثابت ہوا کہ بموجب دفعہ ۴۷ کے رقبہ متوازی الاضلاع کا برابر ہوتا ہے حاصلضرب دو اضلاع متصل اور اونکے درمیانی زاویہ کے جیب کے متوازی الاضلاع کے رقبہ دریافت کرنیکے لئے ہم دفعہ ۴۸ کو مثلث کی طرح استعمال مین لاسکتے ہین

امثلہ ۴

(۱) معلوم ہے ا = ۵۰ ۱ اور علم مثلثی نسبتین دریافت کرو

(۲) معلوم ہے جب ا = $\frac{\text{ن}^2 + \text{۲ م ن}}{\text{ن}^2 + \text{۲ م ن} + \text{م}^2}$ اور علم مثلثی نسبتین دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ مس ا = $\frac{\text{ع م} + \text{ق ن}}{\text{ع ن} - \text{ق م}}$ اور علم مثلثی نسبتین دریافت کرو

(۴) ا کو جب ا + جم ا = $\sqrt{\frac{\text{۳}}{\text{۴}}}$ سے ا کو دریافت کرو

(۵) مس ا مس ب = ۱ اور مس ا + مس ب = $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱۰}}}$ سے ا اور ب کو دریافت کرو

(۶) مس ا + مس ب = ۴ اور مس ا + مس ب = ۱۴ سے ا اور ب کو دریافت کرو

(۷) جب ا + جب ب = $\sqrt{\frac{\text{۳}}{\text{۴}}}$ اور جب ا جب ب = $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ سے ا اور ب کو دریافت کرو

(۸) ۶۰° اور ۴۵° اور ۱۵° کی مماسون کو ثابت کرو کہ وہ سلسلہ حسابیہ مین ہین

(۹) ایک برج کے جڑ سے ۱۰۰ فیٹ کے فاصلہ پر ۳۰° کا زاویہ محاذی اوس برج کی جڑ کے بنا ہے ارتفاع برج کا دریافت کرو

(۱۰) ایک دریا کے کنارہ پر قاعدہ اب ۱۰۰ گز ناپا گیا اور دوسرے کنارہ پر درخت س کا ا اور ب سے مشاہدہ کیا گیا تو زاویہ س ا ب کا ۶۰° اور زاویہ س ب ا کا ۴۵° پیمایش ہوا دریا کا عرض دریافت کرو

(۱۱) ایک شخص دریا کے کنارہ سے سامنے کے کنارہ پر دیکھتا ہے کہ ایک درخت کے محاذی زاویہ ۷۵° کا ہے اور جب وہ کنارہ سے ۲۰ فیٹ پرے ہٹتا ہے تو زاویہ ۶۰° کا پیمایش ہوتا ہے تو درخت کی بلندی اور دریا کا عرض دریافت کرو

(۱۲) مثلث متساوی الاضلاع کا ہر یک ضلع ۱۰ ہی اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۱۳) مثلث متساوی الساقین کی ہر یک ساق ۱۰ ہی اور زاویہ درمیانی اونکا ۳۰° ہے رقبہ اوس مثلث کا دریافت کرو

(۱۴) ایک شخص ۶ فیٹ لنبا مستول کی چوٹی پر کھڑا ہوا اور جہاز کے تختہ کے اندر مستول کی جڑ سے ۳۳ فیٹ کے فاصلہ پر اوسکے محاذی ایک زاویہ بناتا ہے جسکا مماس $\frac{1}{2}$ ہے ارتفاع مستول کا دریافت کرو

(۱۵) ایک چٹری کھڑی ہوئی تہی اوسکے نصف حصہ بالا کے محاذی ایک نقطہ پر ایسا زاویہ بناتا تہا کہ جسکا مماس $\frac{1}{3}$ ہی اور یہہ نقطہ اور جڑ چٹری کے ایک ہی سطح ہموار پر واقع ہین تو بتاؤ اوس نقطہ پر جو کل چٹری کے محاذی زاویہ بنے گا اوسکا مماس کیا ہوگا

(۱۶) ایک برج کی چوٹی پر جو علم لگا یا تو اوسکے محاذی زاویہ ۱۵° کا جڑ سے ۱۰۰ فیٹ کے فاصلہ پر ایک مشاہدہ کرنوالے کو دکہائی دیا اور یہی زاویہ جب اوسکو نظر آیا کہ ا سے ب فیٹ فاصلہ پر تہا تو علم کا ارتفاع دریافت کرو

(۱۷) ایک فصیل ۲۵ فیٹ ۶ انچ اونچی تہی اوسپر ایک ستون اوس سطح افقی پر جو فصیل سے پہلتی ہے کہڑا ہوا تہا تو اوس ستون کے محاذی زاویہ نظری ۴۵° کا بنا

اور جب یہہ شخص ۲۰ فیٹ قریب اس ستون کے گیا تو یہہ بھی زاویہ نظری ۴۵° کا ستون کے مماذی بنا ارتفاع ستون کا دریافت کرو اور فرض کرو کہ مشاہدہ کرنیوالے کی آنکھہ سطح افقی سے ۵ فیٹ ۶ انچ اونچی تھی

(۱۸) ایک شخص دیوار کی جڑ کے پاس نہین جا سکتا تہا اور اوسکا ارتفاع دریافت کرنا منظور تہا اوسنے ۵ فیٹ اونچی چڑہی اپنی آنکھہ کی ارتفاع کی برابر اوس جگہہ کہڑی کی جہان اوسکی آنکھہ کی سطح ہموار پر زاویہ ارتفاعی ۴۵° تہا اب پہر اولٹا اتنا ہٹا کہ چڑہی اور دیوار کی چوٹیون کے درمیان زاویہ ۱۸° ۲۶′ کا بنا جسکا مماس $\frac{1}{3}$ ہی اور پہر اوسنے پیمایش کرکے دریافت کیا کہ اوسکا فاصلہ ۷۰ فیٹ اوس چڑہی سے تہا ارتفاع دیوار کا دریافت کرو

باب پنجم لوکارثم

(۵۰) مثلثون کے حل کرنیمین جو اعدادی حساب آنکر پڑتے ہین اونکے اختصار کے واسطے لوکارثم کی اعانت کی ضرورت ہوتی ہے اسواسطے ضرور ہے کہ لوکارثم کی ذات اور صفات کا بیان کرین

(۵۱) فرض کرو کہ $ا^{ل} = ن$ تو ل کو لوکارثم ن کی موافق اساس ا کی کہینگے یعنی لوکارثم کسی عدد کی موافق اساس معلوم کی وہ قوت نما قوت اساس کا ہوتا ہے جسکے موافق اساس اوس قوت مین اٹہایا گیا برابر اوس عدد کے ہو جاتا ہے

لوکارثم ن کی موافق اساس ا کے اسطرح لکہی جاتی ہے کہ لوک $_{ا}$ ن پس اگر

$ا^{ل} = ن$ تو ل = لوک $_{ا}$ ن

(۵۲) مثلاً $۴^{۳} = ۶۴$ پس ۳ لوکارثم ۶۴ کے موافق اساس ۴ کے ہے یعنی

لوک $_{۴}$ ۶۴ = ۳

اب اگر لوکارثم ۲۷ کی موافق اساس ۹ کے دریافت کرنی ہو تو فرض کرو کہ ل لوکارثم مطلوب کو تعبیر کرتا ہے تو $۹^{ل} = ۲۷$ پس $(۳^{۲})^{ل} = ۳^{۳}$ یعنی $۳^{۲ل} = ۳^{۳}$

اسیواسطے ۲ لا = ۳ اور لا = ۱½

اب تین آگے کی دفعات مین وہ خواص لوکارثمی ثابت کرتے ہین جنپر سارا مدار لوکارثم کے سودمند اور بکار آمد ہونیکا ہے

(۵۳) حاصلضرب کا لوکارثم برابر اجزاء ضربی کے لوکارثمون کے مجموعہ کے ہوتا ہے

اسواسطے کہ فرض کرو لا = لوک و م اور ک = لوک و ن

اسیواسطے م = و^لا اور ن = و^ک

اسیواسطے م ن = و^(لا+ک)

اسیواسطے لوک م ن = لا + ک = لوک م + لوک ن

(۵۴) خارج قسمت کا لوکارثم برابر ہوتا ہے مقسوم اور مقسوم علیہ کی لوکارثمون کی تفاوت کے

اسواسطے کہ فرضکرو لا = لوک و م اور ک = لوک و ن

اسیواسطے م = و^لا اور ن = و^ک

اسیواسطے م/ن = و^لا / و^ک = و^(لا−ک)

اسیواسطے لوک م/ن = لا − ک = لوک م − لوک ن

(۵۵) کسی عدد کی قوت خواہ صحیح خواہ کسر ہو اوسکی لوکارثم برابر ہوتی ہے اوس عدد اور اوسکی قوت نما کی لوکارثمون کے حاصلضرب کی

اسواسطے کہ فرض کرو م = و^لا اسیواسطے م^ر = (و^لا)^ر = و^لار

اسیواسطے لوک و (م^ر) = لار = لوک و م

(۵۶) ایک ہی عدد کی لوکارثمون مین جنکے اساس مختلف ہون باہمی ربط دریافت کرو

فرضکرو کہ لا = لوک و م اور ک = لوک ب م

اسیواسطے م = و^لا اور = ب^ک

اسیواسطے و^لا = ب^ک

اسیواسطے $\frac{1}{\text{لوگ}_{ا}ب}$ = ب اور $\frac{1}{\text{لوگ}_{ب}ا}$ = ا

اسیواسطے $\frac{1}{\text{لوگ}_{ا}ب}$ = لوگ ب ا اور $\frac{1}{\text{لوگ}_{ب}ا}$ = لوگ ب ا

اسسے معلوم ہوا کہ لوگ ب ا اور = $\frac{1}{\text{لوگ}_{ب}ا}$

اسسے معلوم ہوا کہ لوکارثم ایک عدد کی موافق اساس ب کی اسطرح دریافت ہوتی ہے کہ اوس عدد کی لوکارثم کو جو موافق اساس ا کے ہو لوگ ب ا مین یا لوگ و ب مین جو دو

چونکہ لوگ ب ا = $\frac{1}{\text{لوگ}_{ب}ا}$ تو

لوگ ب ا × لوگ ب ب = ا

(۵۷) ریاضات مین دو قسم کے نظم لوکارثم کام مین آتے ہین ایک نظم مین اساس ایک خاص عدد ہوتا ہی جو ٹھیک ٹھیک نہین بیان ہو سکتا اور ۹ مرتبہ کے اعشاریہ تک اوسکی یہہ صورت ہوتی ہے ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸ اس عدد کو اکثر حرف ی سے تعبیر کرتے ہین اور اس اساس کے موافق جو لوکارثم ہوتی ہے اوسکو لوکارثم نیپری کہتے ہین اور وجہ تسمیہ اسکی یہہ ہے کہ اوسکو نیپر صاحب نے ایجاد کیا تہا یہہ نظم لوکارثم کا زیادہ تر ریاضی مین نظریات مین کام آتا ہے مگر عملیات مین حساب کے اندر نہین کام آتا اسلئے ہم اوسکا ذکر اس کتاب مین نہین کرینگے

دوسرے نظم مین اساس ۱۰ ہی تمام عملیات کے حسابون مین اوسیکا رواج ہے اسلئے اوسکو نظم مروج کہتے ہین

(۵۸) ہم اس چہوٹے سے رسالہ یہہ نہین بیان کرینگے کہ لوکارثمونکی جدولکی کیونکر حساب ہوتی ہین طالب علم اوسکو کسی بڑی کتاب مین دیکھین لوکارثمین بالکل ٹھیک ٹھیک شاذ و نادر صورتون مین نکلا کرتی ہین اکثر تقریبی اور تخمینی قیمتین اونکی جدولون مین مندرج ہوتی ہین اور یہہ قیمتین تقریبی جہانتک

جاہین وہان تک نکالین مثلاً ایک جدول لوکارتمونکی سات مرتبہ کے اعشاریہ تک مرتب کرین

آگے تین دفعات مین نظم مروج کے فوائد عظیمہ تبلائینگے

(۵۹) نظم مروج مین اگر کسی عدد کی لوکارثم معلوم ہو تو اوسے فوراً اوس عدد اور دس کی کسی قوت کے حاصل ضرب کی لوکارثم معلوم ہو جائیگی اور اوس خارج قسمت کی بہی لوکارثم دریافت ہو جائیگی جو اوس عدد کو دس کی قوت پر تقسیم کرنے سے پیدا ہوتی ہین

دلیل یہہ ہے کہ لوک ۱ ع × ۱۰ ن = لوک ۱ ع + لوک ۱ ۱۰ ن = لوک ۱ ع + ن

لوک ۱ $\frac{ع}{۱۰ ن}$ = لوک ۱ ع − لوک ۱ ۱۰ ن = لوک ۱ ع − ن

اسسے معلوم ہوا کہ اگر ہمکو کسی عدد کی لوکارثم معلوم ہو تو اوسے لوکارثم اوس عدد کے حساب ہندسے وہی ہون جو پہلے عدد مین تہے مگر علامت اعشاریہ مین فرق ہو دریافت ہو جائیگی آیندہ اختصار کے لئے لوک ۱ کی جگہہ لوک لکہینگے یعنی یہہ تخصیص اساس اکی چہوڑ دینگے

(۶۰) علم حساب مین ہمکو معلوم ہے کہ

۱۰ = ۱ اور ۱۰ = ۱۰ اور ۱۰ = ۱۰۰ اور ۱۰ = ۱۰۰۰

اب اسسے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ جو عدد مابین ۱ اور ۱۰ کے واقع ہو اوسکے لوکارثم اور ۱ کے درمیان واقع ہوگی اور اگر ایک عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے مابین واقع ہو تو اوسکا لوکارثم ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگی اور اگر ایک عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو تو اوسکی لوکارثم ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگی

لوکارثم کے صحیح حصہ کو عدد بیانی کہتے ہین اور اعشاریہ حصہ کو اعشاریہ لوکارثمی کہتے ہین

پس لوکارثم کسی عدد کی جو ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان ہو ۲ سے بڑی اور ۳ سے چہوٹی ہوگی اور وہ برابر ہوگی ۲ + بعض اعشاریہ کی اس صورتمین ۲ عدد بیانی

اب ہم ایک مقدمہ عظیم عدد بیانی کی باب مین تحریر کرتے ہین

(۶۱) اس نظم مروج مین کسی عدد کی لوکارثم کا عدد بیانی بادی النظر مین معلوم ہوجاتا ہے دلیل اسکی یہہ ہے کہ اول فرض کرو عدد بڑا ایک سے ہے اور ۱۰ ان اور ۱۰ ان+۱ کے بامین واقع ہے تو اوسکی لوکارثم ن سے بڑی اور ن+۱ سے چھوٹی ہوگی پس عدد بیانی لوکارثم کا ن ہوگا

اب دوم یہہ فرض کرو کہ عدد چھوٹا ایک سے ہے اور ۱۰ آ ن اور ۱۰ آ ن-۱ کے درمیان واقع ہے تو لوکارثم کوئی منفی مقدار -ن اور -ن-۱ کے درمیان ہوگی اسسے معلوم ہوا کہ اگر ہم سب اس بات کو اتفاق کرکے ٹہرالین کہ اعشاریہ حصہ ہمیشہ مثبت ہی ہوا کرے تو عدد بیانی لوکارثم کا -(ن+۱) ہوگا

پس اسسے یہہ قاعدہ استخراج ہوا کہ ایک عدد کی لوکارثم مین عدد بیانی برابر اوس عدد کے صحیح حصہ کے ہندسون کے تعداد سے ایک کم ہوتا ہے اور اگر اوس عدد مین کوئی صحیح ہندسہ نہین تو لوکارثم کا عدد بیانی منفی ہوگا اور بقدر ایک کے زیادہ اون صفرون کی تعداد سے ہوگا جو علامت اعشاریہ کے ماقبل اوس عدد مین دائین طرف ہون

(۶۲) تین دفعات بالا مین جتنی خواص لوکارثم کی تصریح کی گئی ہے اوسسے معلوم ہوتا ہے کہ لوکارثم مروج کی جدول مین اعداد بیانی اور علامت اعشاریہ رقم کرنیکی ضرورت نہین ہے

مثلاً ہم جدول مین ان ہندسونکو دیکھین کہ

عدد	لوکارثم
۱۵۶۲۷	۱۹۳۸۷۵۶

تو اسسے یہہ مراد ہوگی کہ اعشاریہ حصہ ۱۹۳۸۷۵۶ ہے اور عدد بیانی ۴ ہے اور اسیواسطے

لوک ۱۵۶۲۷ = ۴٫۱۹۳۸۷۵۶

اور اسیطرح لوک ۱۵۶۲۷ = ۲٫۱۹۳۸۷۵۶ اور

لوک ۱۵۶۲۷۰۰ ر = ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر $\overline{۳}$ اخر لوکارثم مین $\overline{۳}$ برابر -۳ کے ہے اور اس بات کو ہم اسطرح بھی تعبیر کرسکتے ہین کہ

لوک ۱۵۶۲۷۰۰ ر = -۳ + ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر

(۶۳) منفی اعداد بیانیہ کے باب مین ایک بات کا لکھنا اعمال حسابیہ کے لئے ضرور ہے فرض کرو کہ ہمکو لوکارثم ۱۵۶۲۷۰۰ ر کی جزء اللعب کی دریافت کرنی ہے بموجب دفعہ ۵۵ کے ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر $\overline{۳}$ کی $\frac{۱}{۳}$ لوکارثم ہوگی اب یہان تقسیم فوراً ہو جائیگی اسواسطے -۳ کی $\frac{۱}{۳}$ برابر -۱ کے ہی اور ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر کی $\frac{۱}{۳}$ برابر ہے ۶۴۶۲۵۲۰۶۴ ر کے پس لوکارثم مطلوب ۶۴۶۲۵۲۰۶۴ ر آ ہے

اب فرض کرو کہ ہم کو جو لوکارثم ۱۵۶۲۷۰۰ ر کی جذر کی دریافت کرنی ہے بموجب دفعہ ۵۵ کے لوکارثم ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر $\overline{۳}$ کا $\frac{۱}{۲}$ ہے اب آسانی عمل کے واسطے ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر $\overline{۳}$ کو -۴ + ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر کی صورت مین لکھلین اور ۲ پر تقسیم کرکے -۲ + ۸۷۳۹۶۹۳۵۰ ر حاصل کرین پس لوکارثم مطلوب ۸۷۳۹۶۹۳۵۰ ر آ ہے اور علی ہذا القیاس اگر ہمکو ۱۵۶۲۷۰۰ ر کا چھٹے مرتبہ کا نزول دریافت کرنا ہو تو ہم ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر $\overline{۳}$ کو -۶ + ۷۵۶۸۳۸۱۹۳ ر $\overline{۳}$ کی صورت لکھین اور ۶ پر تقسیم کرکے یہہ حاصل کرین کہ -۱ + ۱۲۶۲۳۲۳۵۰ ر پس لوکارثم مطلوب ۱۲۶۲۳۲۳۵۰ ر آ ہے

(۶۴) ان مثالون سے اس بات کے مضامین کی خوب توضیح اور تشریح ہوگی لوک ۳ = ۱۲۱۳۷۷۴۴ ر کی معلوم ہے لوک $\frac{(۲۷)^{۳} \times (۸۱)^{۵}}{(۹۰)^{۴}}$ کو دریافت کرو

فرض کرو کہ اس جملہ کو ع تعبیر کرتا ہے تو

لوگ ع = لوگ $(۷۶۲)^{۳}$ + لوگ $(۸۱۶)^{\frac{۵}{۴}}$ − لوگ $(۹۰)^{\frac{۵}{۴}}$

$= ۳$ لوگ ۷۶۲ + $\frac{۵}{۴}$ لوگ ۸۱۶ − $\frac{۵}{۴}$ لوگ ۹۰

اب لوگ ۷۶۲ = لوگ $\frac{۷۶۲}{۱۰۰}$ = لوگ $\frac{۳۸۱}{۵۰}$ = ۳ لوگ ۳ − ۱

لوگ ۸۱۶ = لوگ $\frac{۸۱۶}{۱۰۰}$ = لوگ $\frac{۴۰۳}{۱۰}$ = ۴ لوگ ۳ − ۲

لوگ ۹۰ = لوگ ۳۲ × ۱۰ = ۲ لوگ ۳ + ۱

اسے معلوم ہوا کہ لوگ ع = ۳ (۳ لوگ ۳ − ۱) + $\frac{۵}{۴}$ (۴ لوگ ۳ − ۲) − $\frac{۵}{۴}$ (۲ لوگ ۳ + ۱)

$= (۹ + \frac{۱۶}{۵} - \frac{۵}{۲})$ لوگ ۳ − ۳ − $\frac{۸}{۵}$ − $\frac{۵}{۴}$

$= \frac{۹۷}{۱۰}$ لوگ ۳ − $\frac{۱۱۷}{۲۰}$ = ۶۶۷۸۰۷۷۲ تقریباً

مثالیں ۵

موافق اساس معین کے لوگارثم چھ اعداد مفصلہ ذیل کے دریافت کرو

(۱) ۲۶۵ کی موافق اساس ۲ کے (۲) ۳۲ کی موافق اساس ۴ کے

(۳) ۲۴۳ کی موافق اساس ۹ کے (۴) ۱۶ کی موافق اساس ۸ کے

(۵) ۶۴ کی موافق اساس ۱۶ کے (۶) ۱۲۸ کی موافق اساس ۳۲ کے

معلوم ہے کہ لوگ ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ و لوگ ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ ان بارہ عددوں کی لوگارثم دریافت کرو

(۷) ۱۸ (۸) ۶۰ (۹) ۲۱۶ (۱۰) ۶۴۸۰

(۱۱) ۵۴۰۰ (۱۲) $\frac{۴}{۹}$ (۱۳) ۳۲۷۴ (۱۴) ۷۲

(۱۵) ۵۷۳۷ (۱۶) ۳۰۷ (۱۷) $\frac{۱}{۶}$ (۱۸) $(\frac{۱}{۳۵})^{-\frac{۱}{۲}}$

معلوم ہے لوگ ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ لوگ ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰

ان تین عددون کے لوگارثم دریافت کرو

(۱۹) ۶۳ (۲۰) $\frac{9}{49}$ (۲۱) $\frac{1}{441}$

معلوم ہے لوگ ۸ = ۹۰۰۳۰۹۰۰ لوگ ۹ = ۹۵۴۲۴۲۵

ان تین عددون کی لوگارثم دریافت کرو

(۲۲) ۱ $\frac{1}{5}$ (۲۳) ۱ $\frac{1}{2}$ (۲۴) ۱ $\frac{3}{5}$

(۲۵) لوگ ۸ = ۹۰۳۰۹۰۰ لوگ ۲۷ = ۴۳۱۳۶۳۸ معلوم ہین

۲ $\frac{1}{4}$ کی لوگارثم دریافت کرو

(۲۶) ان لوگارثمون کے اعداد بیانی لکھو ۱۲۴۵۳ اور ۱۲۳۴۵ اور

۱۲۴۵۰۳ اور ۱۲۳۴۵۰۰۰۰ اور یہہ بہی معلوم ہے کہ

لوگ ۱۲۴۵۳ = ۱۰۷۹۷۳۵۳T چارون اعداد مذکور کا

حاصل ضرب دریافت کرو

(۲۷) لوگ ۳۶۵۴۱ کا اعشاریہ حصہ ۰۵۶۲۷۸۰۴ ہے

لوگ $\sqrt[10]{(۳۶۵۴۱۰۰۰۰)}$ کا دریافت کرو

(۲۸) موافق اساس ۸ کے لوگارثم ۶۰۲۵ کی دریافت کرو

(۲۹) لوگ ۱۴ = ۰۲۸۶۱۴۱ اور لوگ ۱۵ = ۱۷۶۰۹۱۳ معلوم ہے

لوگ ۳۱۵۰۰۰ دریافت کرو

(۳۰) لوگ ۲ کی معلوم ہے لوگ ۵۰ کے موافق اساس ۲۵ کے دریافت کرو

(۳۱) لوگ ۲ کی معلوم ہے ۱۰۰۰ کی موافق اساس ۲۵ کے دریافت کرو

(۳۲) لوگ ۲ اور لوگ ۳ معلوم ہین لاگو مساوات $(۱۰۸)^{لا} = ۱۰۰۰$ سے

دریافت کرو

باب ششم

استعمال جدولون کا

(۶۵) انگریزی زبان مین بہت سی کتابین ان جدولون کی منطبع ہوئی ہین اور وہ بہت ارزان ہین اکثر اردو زبان کے جاننے والے انگریزی ہندسون کو پہچانتے ہین اوران جدولونکو فقط ہندسون کے پہچاننے سے جان سکتے ہین اردو زبان مین ابتک کوئی کتاب سوا ایک کے منطبع نہین ہوئی اور یہہ کتاب بہی ناتمام ہے چیمبرس کی جدولونکی کتاب نہایت فائدہ مند ہے اور ارزان بہی ہے اوسکو کام مین لائین جرمنی مین ایک کتاب لکہی گئی ہے اور پروفیسر ڈی مورگن نے اوسکے اول ایک دیباچہ لکہکر انگلستان مین بہی اوسکو مروج کیا ہے اوسکو اگر استعمال مین لائین تو سب سے بہتر ہی شاید مین اس جدول کا ترجمہ بہی کرون

(۶۶) ان جدولون کے مجموعون مین طریقہ اونکے بنانے کا اور استعمال مین لانیکا بیان ہوتا ہے اور ساری ہدایتین لکہی ہوئی ہوتی ہین کہ کس طرح ان جدولونکو کام مین لائین مگر ہم یہان چند مثالین لکہتے ہین جسسے طالب علم کو علم اس بات کا ہو جائیگا کہ ان جدولونکو کس طریقہ سے حساب کے موقعون پر استعمال مین لاتے ہین اور اور مثالون مین جس طور اور طریقون کو عمل مین لائینگے اونکی صحت کی تحقیقات نہین کرینگے اس تحقیقات کے واسطے بڑے رسالہ کو دیکہو

(۶۷) جداول ریاضیہ کے استعمال مین بڑی بات قابل خیال کے یہہ ہے کہ جس چیز کی تلاش ہمکو ہوتی ہے وہ شاذ و نادر جدول مین ٹہیک ٹہیک دستیاب ہوتی ہے مگر جدول مین ہمیشہ دو چیزین ایسی ملتے ہین کہ اونکے درمیان ہمارا مطلوب بیٹہا ہوتا ہی اور اونہین کی استعانت سے وہ ہماری ہاتہہ لگ جاتا ہے

ہم ایسی ہی صورتین بیان کرینگے

(۶۸) عدد معلوم کی لوکارثم دریافت کرو

اگر عدد معلوم جدول مین مل گیا ہو تو لوکارثم کا اعشاریہ حصہ جدول سے نقل کرو اور عدد ثانی موافق دفعہ ۶۱ کے مقرر کرلو

اب فرض کرو کہ جدول مین عدد معلوم بعینہ نہین لکھا ہوا ہی اور جدول مین اعداد اسے ۱۰۰۰۰۰ تک لکھی ہین اور ہمکو ۵۶۳۲۱۴۷ کی لوکارثم دریافت کرنی ہین

اب ہم جدول کو دیکھکر یہہ لکھینگے

عدد	لوکارثم
۵۶۳۲۱	۷۵۰۶۷۰۴
۵۶۳۲۲	۷۵۰۶۷۸۱

اسسے معلوم ہوا کہ بموجب ۶۱ کے

لوگ ۱۰۰ ۵۶۳۲۱ = ۶ ۷۵۰۶۷۰۴

لوگ ۲۰۰ ۵۶۳۲۱ = ۶ ۷۵۰۶۷۸۱

دونو عددون کا حاصل تفرق ۱۰۰ ہے اور دونو لوکارثمون کا حاصلتفرق ۷۷..... ہے

اب فرض کرو کہ لد ایسی مقدار ہے کہ جسکو ۱۰۰ ۵۶۳۲۱ کی لوکارثم پر زیادہ کرین تو لوکارثم ۵۶۳۲۱۴۷ کی حاصل ہوجاتی ہے ہم یہہ فرض کرتے ہین کہ

۱۰۰ : ۴۷ :: ۷۷..... : لد

یعنی ہم یہہ فرض کرتے ہین کہ جو چھوٹا سا تغیر عدد مین ہوتا ہے اوسی نسبت سے چھوٹا سا تبدل لوکارثم مین ہوتا ہے

اسسے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لد = ۴۷ × ۷۷..... یعنی ۳۶۱۹..... ہے

اور سات مرتبہ کی اعشاریہ ۳۶..... ہے

اور ۷۵۰۶۷۰۴ + ۳۶..... = ۷۵۰۶۷۴۰ ہے

اسیواسطے لوک ۴۷ ۲۱ ۳۲ ۵۶ = ۴۰ ۶۷ ۵۰ ۶ ؍

اب بموجب دفعہ ۶۱ کے ہم فوراً لوکارثم کسی اور عدد کی جو ۴۷ ۲۱ ۳۲ ۵۶ سے بنے اور علامت اعشاریہ مین فرق ہو یہی دریافت کر سکتے ہین

لوک ۴۷ ؍ ۲۱ ۳۲ ۵۶ = ۴۰ ۶۷ ۵۰ ؍ ۴

(۶۹) لوکارثم معلوم ہے اوسکی موافق عدد دریافت کرو

اگر لوکارثم معلوم کا اعشاریہ حصہ جدول مین بعینہ مطابق ملجاے تو اوسکی مطابق عدد لے لین اور عدد بیانی معلوم کی موافق علامت اعشاریہ کی اوس عدد کے اندر لکھہ دین

اب فرض کرو کہ لوکارثم معلوم کا اعشاریہ حصہ بالکل مطابق جدول مین نہین ملتا تو ہم عمل مثل دفعہ گذشتہ کے کرتے ہین مثلاً فرض کرو کہ لوکارثم ۴۰ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶ ۲۲ ہے موافق سابق کے ہمکو معلوم ہے کہ

لوک ۱۰۰ ۳۲ ۵۶ = ۰۴ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶

لوک ۲۲۰۰ ۳۲ ۵ ۶ = ۸۱ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶

اب فرض کرو کہ لا اوس مقدار کو تعبیر کرتا ہی کہ جسکو ۵۶۳۲۱۰۰ پر زیادہ کرین تو وہ عدد پیدا کرے جسکی لوکارثم ۴۰ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶ ہو

چونکہ ۸۱ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶ — ۰۴ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶ = ۷۷ ؍ ۰

۴۰ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶ — ۰۴ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶ = ۳۶ ؍ ۰

اب بہ تناسب نتیجہ ہی کہ

۷۷ ؍ . . . . . ۰ : ۳۶ ؍ . . . . . ۰ : : ۱۰۰ : لا

اسسے معلوم ہوا کہ لا = $\frac{۳۶۰۰}{۷۷}$ = ۴۷ کے تقریباً

اسیواسطے لوک ۴۷ ۲۱ ۳۲ ۵۶ = ۴۰ ۶۷ ۵۰ ؍ ۶

اور اسیواسطے لوگ ۵۶۳۲۱۴۷ = ۵۰۶۷۴۰ ۲ ۷

پس عدد مطلوب ۵۶۳۲۱۴۷ ہے

(۷۰) علم مثلثی جدولون کی استعمال مین بہی ہم اونہین اعمال کا استعمال کرنے ہین جو اوپر لوگارثمون کے باب مین مذکور ہوئی مثلاً ہماری پاس جدول اون زاویون کی جیبون کی ہے جنمین پورے درجے اور دقیقے ہون اور ہمکو جیب اوس زاویہ کی دریافت کرنی ہے جسمین ۴۰ ۲۰° ہون اس صورت مین ہم عمل دفعہ ۶۸ کی طرح عمل کرینگے

اب جدول مین سے لکھینگے کہ

جب ۲۰° ۱۴′ = ۳۴۵۸۴۴۱ ۷

جب ۲۰° ۱۵′ = ۳۴۶۱۱۷۱ ۷

فرض کرو کہ لا اوس مقدار کو تعبیر کرتا ہے جو ۳۴۵۸۴۴۱ ۷ پر زیادہ کیا جاے تو جیب ۲۰° ۱۴′ ۲۰″ کے پیدا کرے

چونکہ ۳۴۶۱۱۷۱ ۷ − ۳۴۵۸۴۴۱ ۷ = ۲۷۳۰ ۷ = ۰۰۰ ۷

تو ہم یہہ تناسب بنائینگے کہ

۶۰″ : ۲۰″ : : ۲۷۳۰ : ۰۰۰ ۷ : لا

اسسے معلوم ہوا کہ لا = $\frac{۲۰}{۶۰}$ × ۲۷۳۰ ۷ = ۹۱۰ ۷

اسیواسطے جیب ۲۰° ۱۲′ ۲۰″ = ۳۴۵۸۴۴۱ ۷ + ۹۱۰ ۷ = ۳۴۵۹۳۵۱ ۷

(۷۱) دفعہ گذشتہ مین جدول مرجوع کو جدول اصلی جیبون جیب التمامون اور مماسون وغیرہ کی کہتے ہین اور یہہ اصلی کا لفظ اسلئے لگایا جاتا ہے کہ اونکی جداول لوگارثمی جیبون اور جیب التمامون اور مماسون وغیرہما سے تمیز ہوجاے

اب ہم اس دوسری قسم کی لوگارثمون کا بیان کرتے ہین

(۷۲) علم مثلثی نسبتین زاویہ کی عددی مقادیر ہوتی ہین اسلئے یہہ امر سہل ہے کہ ان عددی مقادیر کی لوکارثمون سے جدا جدولون کو پر کرلین اسلئے جدول لوکارثمی کی اعانت سے اونکی حساب کرنیمین جو مصیبت شاقہ اٹھانی پڑتی تہی اوسکی تخفیف ہوجائیگی اختصار کی واسطے جیب ا کی لوکارثم کی جگہہ لوک جب ا لکہتے ہین اور علی ہذا القیاس لوک جم ا اور لوک مس وغیرہا لکہا کرتے ہین

(۷۳) چونکہ جیب کسی زاویہ کی ایک سے کم ہوتی ہے اسلئے اوسکی لوکارثم کبہی ثبت نہین ہوسکتی اور یہی کیفیت جیب التمام کی ہے اسلئے مقادیر منفیہ سے بچنے کے لئے کہ بارہا جدولون مین نہ واقع ہون ہر یک علم مثلثی نسبت کی لوکارثم پر ۱۰ زیادہ کرلیتے ہین جب اونکو جدولون مین مندرج کرتے ہین لوکارثم جو اس طرح کے ازدیاد سے پیدا ہوتا ہے اوسکو لوکارثم جدولیہ کہتے ہین اور اوسکو ل سے فقط تعبیر کرتے ہین

ل جب ا = لوک جب ا + ۱۰

ل مس ا = لوک مس ا + ۱۰

اور علی ہذا القیاس حساب مین ہمیشہ ہم اس بات کو خیال مین رکہتے ہین کہ علم مثلثی نسبتونکی اصلی لوکارثمون پر ۱۰ زیادہ کئے ہین

(۷۴) علم مثلثی نسبتون کی اصلی جدولون اور لوکارثمی جدولون کی استعمال مین ایک بات بڑی لحاظ کے قابل یہہ ہے کہ جب زاویہ بڑہتا ہی تو جیب اور مماس اور قاطع بڑہتے ہین اور جیب التمام اور مماس التمام اور قاطع التمام گہٹتے ہین دوسری دفعہ مین اسکا بیان کیا جائیگا

(۷۵) اب ہم چند شالین علم مثلثی نسبتون کی لوکارثمی جدولون کی لکہینگے

معلوم ہے کہ ل جب ۱۴° ۲۰′ = ۹٫۵۳۸۸۸۰۴

ل جب ۱۵° ۲۰′ = ۹٫۵۳۹۲۲۳۰

ل جب ۲۰° ۱۴′ ۲۰″ کی دریافت کرنی منظور ہے
تفاوت لوکارثم جداولیہ کا ۳۴۲۶ ۰۰۰ ۵ ہے اور یہہ مطابق زاویون کی
تفاوت ۶۰″ کی ہے پس اب یہہ تناسب پیدا ہوگا کہ

۶۰ : ۲۰ : : ۳۴۲۶ ۰۰۰ ۵ : لا

اسسے معلوم ہوا کہ لا = $\frac{۲۰}{۶۰}$ × ۳۴۲۶ ۰۰۰ ۵ = ۱۱۴۲ ۰۰۰ ۵
اسسوا سطے ل جب ۲۰° ۱۴′ ۲۰″ = ۹۵۰۳۸۸۸۰۴ + ۱۱۴۲ ۰۰۰ ۵

= ۹۵۰۳۸۹۹۴۶

انہین معلومات سے جیب التمام کی لوکارثم کا حساب ہوسکتا ہے
معلوم ہے کہ ل جم ۶۹° ۴۵′ = ۹۵۰۳۹۲۲۳۰
ل جم ۶۹° ۴۶′ = ۹۵۰۳۸۸۸۰۴
ل جم ۶۹° ۴۵′ ۲۰″ کی دریافت کرنی منظور ہے
یہان تناسب یہہ ہے

۶۰ : ۴۰ : : ۳۴۲۶ ۰۰۰ ۵ : لا

اسسے معلوم ہوا کہ لا = $\frac{۴۰}{۶۰}$ × ۳۴۲۶ ۰۰۰ ۵ = ۲۲۸۴ ۰۰۰ ۵
اسسوا سطے ل جم ۶۹° ۴۵′ ۲۰″ = ۹۵۰۳۹۲۲۳۰ − ۲۲۸۴ ۰۰۰ ۵

= ۹۵۰۳۸۹۹۴۶

یہان لاکو ل جم ۶۹° ۴۵′ سے تفریق کیا ہے کیونکہ جتنا زاویہ بڑہتا ہے ویسا ہی جیب التمام گہٹتی ہے اور اسلیئے ل جم بہی کم ہوتی ہے
یہہ دونو مثالین تماثل دفعہ ۸۶ کی مثالون کی ہین اب ہم ایک مثال مشابہ دفعہ ۶۹ کی مثال کی لکہتے ہین

معلوم ہے کہ ل جب ۲۰° ۱۲′ = ۹ ل ۵۳۸۸۸۰۴
ل جب ۲۰° ۱۵′ = ۹ ل ۵۳۹۲۲۳۰

تو وہ زاویہ دریافت کرو جسکی ل جب ۴۶ ۸۹۹ ۵۳ ل ۹ ہو
فرض کرو کہ لا تعداد ثانیون کی ہو

چونکہ ۹ ل ۵۳۹۲۲۳۰ − ۹ ل ۵۳۸۸۸۰۴ = ل ۳۴۲۶ ۰۰۰
اور ۹ ل ۵۳۸۹۹۴۶ − ۹ ل ۵۳۸۸۸۰۴ = ل ۱۱۴۲ ۰۰۰

اب یہہ تناسب بناتی ہین کہ

ل ۳۴۲۶ ۰۰۰ : ل ۱۱۴۲ ۰۰۰ :: ۶۰ : لا

اسسے معلوم ہوا کہ لا = ۶۰ × $\frac{\text{ل } ۱۱۴۲ ۰۰۰}{\text{ل } ۳۴۲۶ ۰۰۰}$ = ۲۰

پس معلوم ہوا کہ زاویہ ۲۰° ۱۴′ ۲۰″ ہے

امثلہ ۶

(۱) معلوم ہے لوک ۸۶ ۳۴۵ = ۳ ۰۰۳۸۹ ل ۹ اور لوک ۷۴۵۸ = ۵۳۸۹۱۲۹ ل
لوک ۷۳۶۸۶ ل ۳۴۵ دریافت کرو

(۲) لوک ۱۰۱۵۴۱ = ۴ ۵۸۶۱۸۰ ل ۴ اور لوک ۲۵۱۰۴ = ۴ ۶۹۰۸۱۶۰ ل ۴ معلوم ہین
لوک ۱۴۵۱۵۰۴ دریافت کرو

(۳) لوک ۱۰۳۵۱ ل ۷ = ۴۶۴۳۸۶۴ ل لوک ۱۱۳۵۱ ل ۷ = ۳۲۳۵۲۶۶۸ ل
معلوم ہین لوگ ۹۲۰۱ ل ۳۵۷ دریافت کرو

(۴) لوک ۲۵۷۱۲ = ۱۴۳۵۳۴۲ ل ۳ لوک ۱۱۳۵۱ ل ۷ = ۳۲۳۵۲۶۶۸ ل معلوم ہین
لوک ۸۷ ۰۲۵ ل ۱۷ دریافت کرو

(۵) لوک ۵۷۸۱۶ = ۲۵۱۰۱۹ ل لوک ۶۲۶۱۰۱ ل ۶ = ۹۴۱۵۵۸ ل
معلوم ہین لوک ۷۵۲ ل ۶۱۰ دریافت کرو

(۶) لوک ۶۱۸۷۵ = ۷۹۱۵۱۵۲ ک ۴ لوک ۶۱۸۷۶ = ۷۹۱۵۲۲۲ ک ۴
معلوم ہین لوک ۶۱۸۷۵۳۹ دریافت کرو

(۷) لوک ۶۱۶۰۱ = ۷۸۹۵۸۷۸ ک ۴ لوک ۶۱۶۰۲ = ۷۸۹۵۹۴۸ ک ۴
معلوم ہین لوکارثم ۵۹۱۲ ک ۷۸۹۲ کا عدد دریافت کرو

(۸) لوک ۵۰۱۴ ک ۷ = ۸۷۵۱۴۲۳ ک ۸ لوک ۵۰۱۵ ک ۷ = ۸۷۵۱۴۸۱ ک ۸
لوکارثم ۶۲ ۱۴ ۷۵ ۸ ک ۲۳ کا دریافت کرو

(۹) لوک ۱۳۱۰۷ ک ۱ = ۱۱۷۵۰۳۳ ک ۲ لوک ۱۳۱۰۸ ک ۱ = ۱۱۷۵۳۶۴ ک ۲
لوک ۵ = ۶۹۸۹۷۰۰ ستر ہوین مرتبہ کا جذر ۱۳۱۰۷۲ کا دریافت کرو

(۱۰) $(۱۰۵ ک ۱)^{۲۰}$ دریافت کرو اور
لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ک لوک ۲ ک ۶۵۳ = ۲۳۷۳۷۲ ک ۴
لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ ک لوک ۲ ک ۶۵۴ = ۴۲۳۹۰۰۹ ک ۶
لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ ک معلوم ہین

(۱۱) ل جب ۳۸° ۲۴′ ۲۷″ کی دریافت کرو اور
ل جب ۳۸° ۲۴′ = ۹ ک ۷۹۳۱۹۴۹
ل جب ۳۸° ۲۵′ = ۹ ک ۷۹۳۳۵۴۳ معلوم ہین

(۱۲) ل جب ۳۲° ۲۸′ ۳۶″ کو دریافت کرو اور
ل جب ۳۲° ۲۸′ = ۹ ک ۷۲۹۸۱۹۷
ل جب ۳۲° ۲۹′ = ۹ ک ۷۳۰۰۱۸۲

(۱۳) ل جب ۴۱° ۵۰′ ۵ ک ۳۴″ دریافت کرو
ل جب ۴۱° ۵۰′ ۳۰″ = ۹ ک ۸۲۴۱۷۴۳
ل جب ۴۱° ۵۰′ ۴۰″ = ۹ ک ۸۲۴۱۹۷۸

(۱۴) ل جم ۱۷° ۳۱′ ۲″ کو ۵ دقیقہ دریافت کرو اور

ل جم ۱۷° ۳۱′ = ۹۹۶۹۳۷۹۷ ک ۹

ل جم ۱۷° ۳۲′ = ۹۹۶۹۹۳۳۹۸ ک ۹

(۱۵) ل جم ۲۱° ۱۷′ ۱۲″ دریافت کرو اور

ل مس ۲۱° ۱۷′ = ۹۵۰۵۶۱۷ ک ۹

ل مس ۲۱° ۱۸′ = ۹۵۰۹۳۵۱ ک ۹

(۱۶) ل مس ۷۰° ۲۶′ ۴۲″ دریافت کرو اور

ل مس ۷۰° ۲۶′ = ۹۷۱۵۲۴۱۹ ک ۹

ل مس ۷۰° ۲۷′ = ۹۷۱۵۵۵۰۸ ک ۹

(۱۷) ل مس ۵۵° ۳۷′ ۴۲″ دریافت کرو اور

ل مس ۵۵° ۳۷′ = ۱۰۷۱۶۴۷۶۱۶ ک ۱۰

فرق ۱″ = ۰۰۰۲۷۱۱ ک

(۱۸) ل جم ۳۳° ۱۰′ ۲۰″ کا دریافت کرو

ل جم جب ۳۳° ۱۰′ = ۹۷۳۸۰۴۷۰۹ ک ۹

ل جب ۳۳° ۱۱′ = ۹۷۳۸۲۴۱۲ ک ۹

(۱۹) معلوم ہے کہ ل جب ۱۶° = ۹۴۴۰۳۳۶۱ ک ۹ تفاوت ۱″ کے واسطے = ۴۴۰۳۰۰۰ ک

ل جم ۱۶° = ۹۸۲۸۴۱۶ ک ۹ تفاوت ۱″ کے واسطے ۳۶۲۰۰۰ ک

ل قط ۱۶° ۰′ ۲۷″ اور ل مس ۱۶° ۰′ ۲۷″ دریافت کرو

(۲۰) معلوم ہے کہ ل جب ۱° = ۹۴۴۸۸۱۰۵ ک ۹

ل جب ۱۹° ۱۹′ = ۹۴۴۸۶۲۲۷ ک ۹

ل جب ۱۶° ۲۰′ = ۹۴۴۹۰۵۴۰ ک ۹

لا کو دریافت کرو

(۲۱) معلوم ہے کہ ل جب ۹ = ۳ ۴ ۷ ۷ ۸ ۰ ۷ ۹ ر

ل جب ۹° ۵۳ = ۱۰ ۶ ۳ ۸ ۷ ۰ ۹ ر

ل جب ۹° ۵۳ ۱۰ = ۵۴ ۰ ۵ ۸ ۸ ۷ ۰ ۹ ر

لا کو دریافت کرو

(۲۲) ل جم ۱ = ۵۶ ۰ ۷ ۵ ۶ ۹ ۹ ر

ل جب ۲۲° ۲۸ ۴۰ = ۲۵ ۰ ۷ ۵ ۶ ۹ ۹ ر

ل جم ۲۲° ۲۸ ۴۰ = ۱۲ ۱ ۷ ۵ ۶ ۹ ۹ ر

لا کو دریافت کرو

(۲۳) ل جم ۱ = ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۲ ۰ ۹ ر

ل جم ۸۰° ۵۳ = ۳ ۹ ۷ ۸ ۹ ۹ ۱ ۹ ر

ل جم ۸۰° ۵۲ ۵۰ = ۵ ۰ ۱ ۰ ۰ ۲ ۰ ۹ ر

لا کو دریافت کرو

(۲۴) اگر لوک لد = ۳۱۰۳ تو لا کو دریافت کرو اور

لوک ۴ ۱۵۴۴۲۱۵ = ۴ ر ۹ ۹ ۳ ۳ ۳ ۳ ۶ ۲ ۳ لوک ۴ ۱۴۲۷۰ = ۴ ۱۵۴۴۲۴۰ ر ۹ ۸ ف

لوک ۴ ۱۵۴۴۵۲۱ = ۴ ر ۹ ۳ ۳ ۳ ۳ ۴ ۶ ۵ لوک ۴ ۱۴۲۷۱ = ۴ ۱۵۴۴۵۴۴ ر ۹

ساتوان باب

قائم الزاویہ مثلثون کا حل

(۷۶) ہر یک مثلث کے چھہ جزو ترکیبی ہوتے ہین یعنی تین ضلعے اور تین زاویے اور جب ان اجزاء ترکیبی مین سے کافی اجزاء معلوم ہوتے ہین تو اونسے باقی اجزاء معلوم ہو جاتی ہین اور ان باقی اجزاء کے دریافت کرنے کے عمل کو مثلث کا حل کرنا کہتے ہین یہہ بات اب ظاہر ہو جائیگی کہ ان چھہ اجزاء ترکیبی مین سے جب تین جزو معلوم

ہوتے ہین تو باقی اجزاء سب صورتون مین معلوم ہوجاتے ہین الا اوس صورت مین کہ تین زاویے معلوم ہون اس صورت مین فقط نسبت اضلاع معلوم ہوتی ہے خود اضلاع نہین دریافت ہوسکتی

ہم نے بعض مثالین مثلثون کے حل کرنے کی جو تہی باب مین بیان کین ہین اور اب اس باب مین اور آگے کے باب مین جتنی صورتین کہ مثلث کے حل کرنیکی ہین اون سبکی کیفیت تحریر کرینگے چونکہ قائم الزاویہ مثلث کا حل بہ نسبت اور مثلثون کے حل کے آسان ہے اسلئے اس باب مین فقط قائم الزاویہ مثلث ہی کا حل لکھتے ہین

(۷۷) ہم دفعہ ۷۳ کے طریقہ کے موافق اضلاع کو تعبیر کرینگے اور زاویہ س کو ہمیشہ قائم الزاویہ مین قائمہ فرض کرینگے اور لوکارثم کی جگہہ اختصاراً لوک لکھینگے اور ل کے معنی وہی لینگے جو دفعہ ۷۳ مین بیان ہوئی

(۷۸) وتر اور ایک زاویہ حادہ مثلث قائم الزاویہ کا معلوم ہے مثلث کو حل کرو

فرض کرو کہ وتر اور زاویہ ا معلوم ہین تو

$$ب = ۹۰° - ا$$

$$\frac{طا}{طس} = جب ا \quad \text{اسیواسطے} \quad طا = طس جب ا$$

$$\text{اسیواسطے} \quad \text{لوک طا} = \text{لوک طس جب ا} = \text{لوک طس} + \text{ل جب ا} \quad -۱۰$$

$$\frac{طب}{طس} = جب ب \quad \text{اسیواسطے} \quad طب = طس جب ب$$

$$\text{اسیواسطے} \quad \text{لوک طب} = \text{لوک طس} + \text{لوک جب ب} = \text{لوک طس} + \text{ل جب ب} \quad -۱۰$$

ب اور طا اور طب دریافت ہوگی

(۷۹) وتر اور ایک ضلع معلوم ہے مثلث کو حل کرو

فرض کرو کہ طب اور طا معلوم ہو تو

$$\text{جب ا} = \frac{\text{طا}}{\text{طس}} \quad \text{لوک جب ا} = \text{لوک طا} - \text{لوک طس}$$

اسیواسطے ل جب ا = ۱۰ + لوک طا - لوک طس

اسسے ا دریافت ہوتا ہے اور جب ا دریافت ہو گیا تو ب = ۹۰° - ا

اور طس² = طا² + طب² اسیواسطے طب² = طس² - طب² = (طس - طب) (طس + طب)

$$\text{اسواسطے طب} = \sqrt{(\text{طس} - \text{طب})\ (\text{طس} + \text{طب})}$$

$$\text{لوک طب} = \frac{1}{2} \text{ لوک (طس - طب)} + \frac{1}{2} \text{ لوک (طس + طب)}$$

یا طب اسطرح دریافت ہو سکتا ہے کہ

طب = طس جم ا

(۸۰) ایک ضلع اور ایک زاویہ حادہ معلوم ہے مثلث کو حل کرو

فرض کرو کہ طا اور ا معلوم ہیں تو

ب = ۹۰° - ا

$$\frac{\text{طا}}{\text{طس}} = \text{جب ا} \quad \text{اسیواسطے طس} = \frac{\text{طا}}{\text{جب ا}}$$

اسیواسطے لوک طس = لوک طا - لوک جب ا = لوک طا - ل جب ا + ۱۰

$$\frac{\text{طا}}{\text{طب}} = \text{مس ا} \quad \text{اسیواسطے طب} = \frac{\text{طا}}{\text{مس ا}}$$

اسواسطے لوک طب = لوک طا - لوک مس ا = لوک طا - ل مس ا + ۱۰

پس ب اور طس اور طب دریافت ہو گی

فرض کرو کہ طا اور ب معلوم ہیں تو ا = ۹۰° - ب اور طس اور طب پہلی طرح سے دریافت ہو سکتی ہیں

(۸۱) دو ضلعے معلوم ہیں مثلث کو حل کرو

یہان طا اور طب معلوم ہین تو

مس ا = $\frac{\text{طا}}{\text{طب}}$ اسواسطے لوگ مس ا = لوگ طا − لوگ طب

اسیواسطے ل مس ا = ۱۰ + لوگ طا − لوگ طب

ب = ۹۰° − ا

$\frac{\text{طا}}{\text{طس}}$ = جب ا اسواسطے طس = $\frac{\text{طا}}{\text{جب ا}}$

اسواسطے لوگ طس = لوگ طا − جب ا = لوگ طا − ل جب ا + ۱۰

یا اسطرح حل کرسکتے ہین کہ طس = $\sqrt{\text{طا}^2 + \text{طب}^2}$ مگر اس صورتمین لوگارثم کے موافق حساب نہین ہوسکتا

(۸۲) دفعات ۷۸ سے ۸۱ تک ہم نے مثلث کی چار صورتون کی تحقیقات لکھی ہے اور اوسمین یہہ فرض کیا ہے کہ اجزاء ترکیبی مثلث کے دو سوا زاویہ قائمہ کے معلوم ہین اور باقی سب اجزاء دریافت کئے ہین اور یہہ بھی ظاہر ہے کہ سب مختلف ہمنے صورتین ان دو اجزاء کی معلوم ہونے سے باقی اجزاء کے دریافت کرنیکی بیان کردین ہین مگر ایک صورت جسمین کہ دو زاویے معلوم ہون اوسکا بیان نہین کیا اس صورت مین ہر یک ضلع کی نسبت وتر سے دریافت ہوسکتی ہے اسواسطے کہ

$\frac{\text{طا}}{\text{طس}}$ = جب ا اور $\frac{\text{طب}}{\text{طس}}$ = جب ب

گرچہ دو اضلاع طا اور طب اور طس کو نہین دریافت کرسکتے اور چونکہ ا + ب = ۹۰ اسواسطے ہم فقط ایک ہی زاویہ کے معلوم ہونے سے دوسرا زاویہ معلوم کرسکتے ہین اسلئے ا اور ب دونو زاویون کی قیمت کا معلوم ہونا فضول ہے ایک کی قیمت معلوم ہونی کافی ہے کیونکہ جب ایک معلوم ہو تو اوسی سے دوسری فوراً دریافت ہوسکتی ہے

(۸۳) اب ہم بعض مثالین مثلث قائم الزاویہ مثلثون کے حل کرنیکی لکھتے ہین

مثال ۱ فرضکرو کہ طس = ۱۲۵ اور ا = ۵۴° ۲۸′

طا = طس جب ا

اصلی جیبون کے جدول کے استعمال سے

جب ۵۴° ۲۸′ = ۰٫۸۱۳۷۷۵۷

اسواسطے طا = ۱۰۱٫۷۲۲۱۸۷۵

یا لوکارثم کے استعمال سے

لوگ ۱۲۵ = ۲٫۰۹۶۹۱۰۰

ل جب ۵۴° ۲۸′ = $\frac{9٫9۱۰۵۰۵۷}{12٫۰۷۴۱۵۷}$

اسواسطے لوگ طا = ۲٫۰۰۷۴۱۵۷

اب جدول لوکارثمی کے دیکھنے سے ہم دریافت کرسکتے ہین کہ

لوگ ۱۰۱٫۷۳ = ۲٫۰۰۷۴۴۹۰

لوگ ۱۰۱٫۷۲ = ۲٫۰۰۷۴۰۶۴

چونکہ طا ان معلوم لوکارثمون کے مابین واقع ہے تو اوسے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہین کہ کہ طا درمیان ۱۰۱٫۷۲ اور ۱۰۱٫۷۳ کے درمیان واقع ہے

اب طا کے زیادہ صحیح دریافت ہونیکے لئے ہم باب چہارم کے اصول تناسب اجزا کو استعمال مین لاتے ہین یہان اس صورت مین تو ہم عمل کو بہی لکہدیتے ہین

۲٫۰۰۷۴۴۹۰	۲٫۰۰۷۴۱۵۷
۲٫۰۰۷۴۰۶۴	۲٫۰۰۷۴۰۶۴
تفاوت ۰٫۰۰۰۰۰۹۳	تفاوت ۰٫۰۰۰۰۰۴۳۶

فرض کرو کہ ۱۰۱٫۷۲ سے جسقدر طا زیادہ ہے اوسس زیادتی کو لد تعبیر کرتا ہے تو

۰٫۰۰۰۰۰۹۳ : ۰٫۰۰۰۰۰۴۳۶ :: ۰٫۰۱ : لد

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ لد = ۱۸ ۲ ۰۰ ۵ کے تقریباً

پس طا = ۲ ۷ ۵ ۱۰۱ + ۱۸ ۲۱ ۰۰ ۵ = ۱۸ ۲۲ ۷ ۵ ۱۰۱

اب دو طریقوں سے طا کا ہم نے حساب کیا ہے اون سے جو قیمتیں معلوم ہوتی ہیں اونمیں بہت ہی کم تفاوت ہے

ب = ۹۰° − ۱ = ۵ ۳° ۲ ۳۲'

طب = طس جب ب

اصلی جیبوں کی جدول کے استعمال سے ہمکو دریافت ہوتا ہے کہ

جب ۵ ۳° ۲ ۳۲' = ۷ ۶۵ ۱۱ ۸ ۵ ۵

طب = ۲۵ ۶ ۷۰ ۴ ۶ ۵ ۷ ۲

لوکارثمون کے استعمال سے

لوک ۱۲۵ = ۲ ۵۰ ۹۶ ۹۱۰۰

ل جب ۵ ۳° ۲ ۳۲' = ۹ ۵ ۷ ۶ ۴ ۳۰ ۸۰
۱۱ ۵ ۸ ۶ ۱ ۲۱ ۸۰

اسواسطے لوک طب = ۱ ۵ ۸ ۶ ۱ ۲۱ ۸۰

اب جداول لوکارثمی کے موافق حساب کرنے سے یہہ ہمکو دریافت ہوتا ہے کہ

لوک ۸ ۴ ۶ ۵ ۲ ۷ = ۱ ۵ ۸ ۶ ۱ ۲۲ ۳۷

لوک ۷ ۴ ۶ ۵ ۲ ۷ = ۱ ۵ ۸ ۶ ۱ ۲۱ ۷۷

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ طب تقریباً برابر ۷ ۴ ۶ ۵ ۲ ۷ کے ہے

مثال ۲ فرض کرو کہ طا = ۱۴۷ اور طس = ۱۸۴

ل جب ا = ۱۰ + لوک طا − لوک طس

لوک ۱۴۷ = ۳ ۱۷۳ ۱۶ ۲

لوک ۱۸۴ = ۸ ۱۷۸ ۲۶۴ ۲

لوک ۴۲۱٫۶۴ = ۲٫۶۲۴۹۴۱۸

لوک ۴۲۱٫۶۳ = ۲٫۶۲۴۹۳۱۵

اسے معلوم ہوا کہ طس درمیان ۴۲۱٫۶۳ اور ۴۲۱٫۶۴ کے واقع ہے فرض کرو کہ ۴۲۱٫۶۳ سے جس قدر طس بڑا ہو اوس زیادتی کو لا سے تعبیر کرو اور عمل موافق سابق کے کرو

	۲٫۶۲۴۹۴۱۸	۲٫۶۲۴۹۳۲۴
	۲٫۶۲۴۹۳۱۵	۲٫۶۲۴۹۳۱۵
تفاوت	۰٫۰۰۰۰۰۱۰۳	تفاوت ۰٫۰۰۰۰۰۰۹

۰٫۰۰۰۰۰۱۰۳ : ۰٫۰۰۰۰۰۰۹ :: ۰٫۰۰۰۰۱ : لا

پس لا = ۰٫۰۰۰۹ تقریباً

اور طس = ۴۲۱٫۶۳۰۹ کے تقریباً

لوک طب = لوک طا − ل مس ا + ۱۰

لوک ۲٫۳۷۵۸۴۶۴ = ۲٫۳۷۶

ل مس ۱۸° ۳۴′ = ۹٫۸۳۳۸۸۲۳

لوک طب = ۲٫۵۴۱۹۶۴۱

اب جداول لوکارثمی کے دیکھنے سے ہمکو دریافت ہوتا ہے کہ

لوک ۳۴۸٫۳۱ = ۲٫۵۴۱۹۶۵۹

لوک ۳۴۸٫۳۰ = ۲٫۵۴۱۹۵۳۵

اسے معلوم ہوتا ہے کہ طب درمیان ۳۴۸٫۳۰ اور ۳۴۸٫۳۱ کے واقع ہے اب موافق سابق کے عمل کرنے سے

۲ ک ۵۴۱۹۶۵۹	۲ ک ۵۴۱۹۶۴۱
۲ ک ۵۴۱۹۵۳۵	۲ ک ۵۴۱۹۵۳۵
ک ۰۰۰۱۲۴	ک ۰۰۰۱۰۶

ک ۰۰۰۱۲۴ : ک ۰۰۰۱۰۶ :: ک ۱ : ک ۰۰۰۱ : لا

پس لا = ۰۰۰۸۵۵ ک کے تقریباً

اور طب = ۳۴۸ ک ۳۰۰۸۵۵ تقریباً

(۸۴) اصول اجزاء تناسب استعمال جداول کی استعانت سے عملیات مین نہایت سہل ہوجاتا ہے اور حقیقت مین ان جدولون کی مدد سے بہت سا حساب خود بخود ہوجاتا ہے جو طالب علم جدولونکو دیکھتے ہین اور استعمال مین لاتے ہین اور اونکے تفاصل کو جو اونکے ساتھہ لکھے ہوئے ہوتے ہین مطالعہ کرتے ہین اونکو اس بات کا سمجھنا مشکل نہین ہے

مثالین

مقادیر معلوم سے ان آٹھہ مثلثون کو حل کرو

(۱) طس = ۱۵۰ ا = ۳۰° س = ۹۰°

(۲) طس = ۲۰۰ طا = ۱۰۰ س = ۹۰°

(۳) طا = ۸۰ ب = ۱۵° س = ۹۰°

(۴) طا = ۷۵ طب = ۷۵ س = ۹۰°

(۵) طس = ۱۲۰ ب = ۳۶° س = ۹۰°

جب ۳۶° = ۵۸۷۷۸۵۳ ک اور جب ۵۴° = ۸۰۹۰۱۷۰ ک

(۶) طس = ۲۹۰ اور طا = ۲۰۰ اور س = ۹۰°

جب ۳۶° ۴۳′ = ۶۸۹۶۱۹۵ ک اور جب ۳۷° ۴۳′ = ۶۸۹۸۳۰۲ ک

(۷) طا = ۱۲۵ اور ب = ۲۲ ½ س = ۹۰°

لوک ۲ = ۰۰ ۳۰ ۱۰ ۳ ؛ جب ۳ ° ۵۳ ′ ۷ ″ = ۳۶ ۰۱ ۳۰ ۹۰ ؛ ۹

(۸) طا = ۳ وطب = ۴ وس = ۹۰° جب ۳ ° ۵۳ ′ ۸ ″ = ۸۴ ۳۱ ۰ ۹۰ ؛ ۹

ان شلشون کے حل کرنیمین جدولون کی ضرورت پڑیگی

(۹) طس = ۱۹۶ ا = ۲۳ ° ۳۰ ′ س = ۹۰°

(۱۰) طس = ۱۶۴ طا = ۹۶ س = ۹۰°

(۱۱) طا = ۶ ؛ ۱۲۴ ا = ۲۰ ° ۹۴ ′ س = ۹۰°

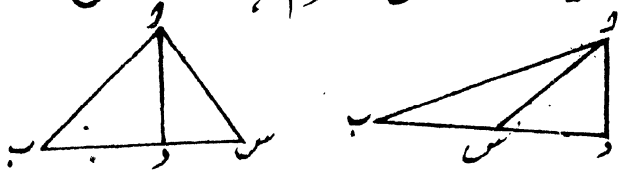
(۱۲) طا = ۱۴۱ طب = ۱۹۳ س = ۹۰°

باب ہشتم

غیر قائم الزاویہ شلشون کا حل قائم الزاویہ شلشون کی استعانت سے

(۸۵) جتنے باب پہلے لکھہ چکے ہین اون سب مین حادی زاویون کی علم مثلثی نسبتون کا بیان لکھا ہی اور اسی طرح سے ہمنے سارا ڈھنگ علم مثلث کا یہان تک بیان کردیا کہ جسے مثلث قائم الزاویہ کا حل ہوگیا لیکن یہہ ظاہر بات ہی کہ مثلث منفرج الزاویہ بھی ہوتی ہین اسلئے ضرور ہے کہ علم مثلثی نسبتون کی تعریف کو ایسی وسعت دین کہ اونمین زاویۂ قائمہ سے بڑے بھی داخل ہوجائین اسلئے ہم آیندہ باب مین اسی مضمونکو تحریر کرینگے اور اوسے آگے مثلثون کے بعض خواص لکھینگے اور پھر مثلثون کا عام حل مرقوم کرینگے مگر بعض طالب علمون کے واسطے یہہ آسان ہوگا کہ وہ ہر مثلث کو حل کرسکین اور قائمہ سے بڑے زاویون کے علم مثلثی نسبتون سے باخبر ہون اس باب مین ایسی ہی قواعد اور توضیحات بیان مین آئینگے مگر جو باب یازدہم کے طریقہ کو مثلثون کے حل کرنیکے لئے پسند کرتے ہین وہ اس باب کو اس طرح سمجھین کہ اوسمین اصول قوانین مثلثون کے حل کے بیان کئے گئے ہین

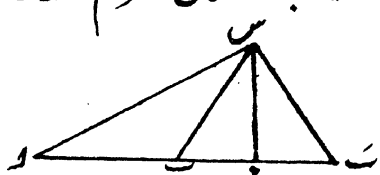
(۸۶) دو زاویے اور ایک ضلع معلوم ہے مثلث کو حل کرو



فرض کرو کہ طس ضلع معلوم ہے اور دو زاویے معلوم ہین اسلئے تینون زاویے معلوم ہین
اب ا د عمود ب س پر یا ب س قاعدہ محدود پر کھینچو
مثلث قائم الزاویہ ا ب د مین ہمکو وتر ا ب اور زاویہ ا ب د معلوم ہے اسے
ہم ا د اور ب د کو بموجب دفعہ ۸۷ کے دریافت کر سکتے ہین
اب قائم الزاویہ مثلث ا د س مین ا د اور زاویہ ا س د معلوم ہے اسے ہم ا س
اور س د کو بموجب دفعہ ۸۰ کے دریافت کر سکتے ہین
اور ب د اور س د معلوم ہوگی تو اونسے فوراً ب س معلوم ہو جائیگا

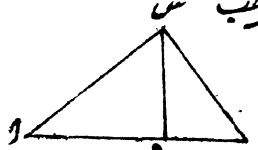
(۸۷) دو ضلعے اور اونکا زاویہ درمیانی معلوم ہین مثلث کو حل کرو
دفعات ۱۰۵ اور ۱۱۰ مین حل لکھا ہوا ہی اور اوسمین کوئی ایسا اصول کام مین نہین آتا
جسکا بیان بہ تصریح نہ ہوا ہو طالب علم اس حل کو بالفعل سمجھ سکتا ہے

(۸۸) دو ضلعے اور ایک ضلع کے مقابل کا زاویہ معلوم ہین مثلث کو حل کرو
فرض کرو کہ طا اور طب اضلاع معلوم اور ا زاویہ معلوم ہے



اول فرض کرو کہ طا چھوٹا طب سے ہے
تو زاویہ ا کم بہ نسبت ب کے ہوگا اسواسطے زاویہ ا حادہ ہوگا

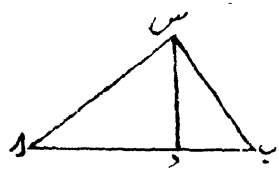
فرض کرو کہ ضلع اس طب کو تعبیر کرتا ہے اور س سے عمود س د مقابل کے ضلع پر
مثلث کے نکالو اور بشرط ضرورت س د کو خارج کرلو
قائم الزاویہ مثلث اس د مین اس اور زاویہ ا معلوم ہین اسلئے بموجب دفعہ ۸۷ کے
س د اور زاویہ اس د معلوم ہین اب قائم الزاویہ مثلث س ب د مین س د
اور س ب معلوم ہین اسے ہم ب د اور زاویہ ب س د کو بموجب دفعہ ۷۹ کے دریافت
کرسکتے ہین
اور پھر اب اور زاویہ اس ب کو فوراً دریافت کرسکتے ہین
اب یہہ بات یہان دکھائی دیتی ہی کہ دو مثلث ہن جنمین سے ایک مین زاویہ اب س
منفرجہ ہے اور دوسرے مین زاویہ اب س حادہ ہی اسی وجہ سے اس صورت کو صورت
مشتبہ کہتے ہین اوسمین اجزاء معلومہ سے اکثر دو مثلث دریافت ہوتی ہین اور یہہ شک
رہتا ہے کہ کونسا مثلث اصل مین تہا
ہمنے یہہ لکہا ہے کہ اکثر دو مثلث دریافت ہوتے ہین مگر ہمیشہ دو مثلث نہین ہوتے
اور وجہ اسکی یہہ ہے کہ س د برابر مقدار معلوم طا کے ہوسکتا ہے اور اس صورتمین
دو نقطے جنپر ب کا نشان ہے دیر منطبق ہوجائینگے تو صرف ایک مثلث اجزاء
معلوم سے مرتب ہوگا یعنی قائم الزاویہ مثلث اس د اور یہہ بہی ہوسکتا ہی کہ س د
بہ نسبت مقدار معلوم طا کے بڑا ہو تو کوئی مثلث بہی اجزاء معلوم سے مرتب نہین ہوسکتا
دوم فرض کرو طا برابر ہی طب کے



اس صورت مین مثلث متساوی الساقین ہوگا اور ا = ب کے ہوگا
تو مثلث قائم الزاویہ اس د مین اس اور زاویہ ا معلوم ہے اسے اد معلوم ہوگا

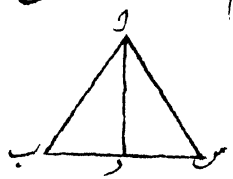
اب دو حیثیتیں ہوگا

سوم فرض کرو کہ طا بڑا طب سے ہو



تو بموجب صورت اول کے مثلث قائم الزاویہ اس د کو اور پھر مثلث ب س د کو حل کرین زاویہ معلوم ا حادہ یا منفرجہ ہوسکتا ہے مگر یہاں حرف اجزاء معلوم سے ایک ہی مثلث بن سکتا ہے اسواسطے کہ ہم ب بائین طرف د کے ب ا خارج شدہ پر مقرر کرین ایسا کہ دب = دب تو س ب = س ب = طا لیکن زاویہ س ا ب مثلث س ا ب کا برابر زاویہ معلوم ا کے نہین ہوسکتا دائین طرف کی شکل مین زاویہ ا حادہ ہے اور زاویہ س ا ب منفرجہ ہے اور بائین طرف کی شکل مین ا منفرجہ ہے اور زاویہ س ا ب حادہ ہے

(۸۹) تین ضلعے معلوم ہین مثلث کو حل کرو



فرض کرو کہ طا باقی اور ضلعون مین سے ہر یک سے کم ہے اور زاویئے ب اور س حادی ہین ا د عمود ب س پر نکالو

فرض کرو کہ ب د = لد تو د س = طا - لد

اب ا د^2 = ا ب^2 - ب د^2 = ا س^2 - د س^2

پس طس^2 - لد^2 = طب^2 - (طا-لد)^2 = طب^2 - طا^2 + ۲ طا لد - لد^2

اسواسطے لد = $\frac{\text{طس}^2 + \text{طا}^2 - \text{طب}^2}{۲\text{طا}}$

پس لد دریافت ہوگیا

پس مثلث قائم الزاویہ اب دمین اب اور ب دہکو معلوم ہین اسلئے زاویہ ب کو ہم دریافت کرسکتے ہین اور مثلث قائم الزاویہ اس دمین اس اور س معلوم ہین اسلئے زاویہ س ہم دریافت کرسکتے ہین

امثلہ ۸

مقادیر معلوم سے ان چھہ مثلثون کو حل کرو

(۱) طس = ۸۴ ب = ۴۵° س = ۳۰°

(۲) طا = ۹۶ طب = ۴۸ س = ۹۰°

(۳) طا = ۱ طب = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ + ۱ ا = ۱۵°

(۴) طا = $\sqrt{3}$ طب = ۲($\sqrt{3}$ − ۱) ا = ۷۵°

(۵) طا = $\sqrt{3}$ طب = ۱ ا = ۶۰°

(۶) طا = ۱۰ طب = ۵$\sqrt{3}$ طس = ۵

جدولون کے ذریعہ سے ان چھہ مثلثون کو حل کرو

(۷) طس = ۱۲۴۵۰ ا = ۵۶° ۱۵′ ب = ۳۳° ۴۸°

(۸) طا = ۲۷۵۶ س = ۴۰° ۲۷′

(۹) طا = ۱۵۶ اور طب = ۲۱۸ اور ا = ۳۶°

(۱۰) طا = ۷۵۰ اور طب = ۶۲۵ اور ا = ۸۰°

(۱۱) طا = ۳۶۰ اور طب = ۲۸۸ اور ا = ۲۵°

(۱۲) طا = ۱۲۵ اور طب = ۱۷۰ اور طس = ۲۰۰

(۱۳) صورت مشتبہ مین جب طا اور طب اور ا معلوم ہین تو ثابت کرو

طس = طب جم ا ± $\sqrt{(\text{طا}^2 - \text{طب}^2 \text{ جب}^2 \text{ ا})}$

(۸۸) اگر مثلث کی راس سے عمود قاعدہ پر نکالین اور وہ مثلث کے اندر واقع ہو تو ثابت کرو کہ قاعدہ کے حصون کا تفاوت ضلاع کے تفاوت سے وہ نسبت رکھتا ہے جو مجموعہ ضلاع قاعدہ سے نسبت رکھتا ہے

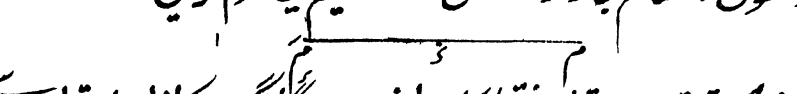
مثلث کی راس سے قاعدہ پر عمود نکالا گیا ہے اور قاعدہ کے ان دو نو حصون کا تفاوت اور دو ضلعے معلوم ہین تو بتلاؤ کہ مثلث کو کس طرح حل کرین

نوان باب

استعمال علامات جبریہ کا

(۹۰) باب ہاے گذشتہ مین ہم نے علم مثلثی کے اصولون کی تعریف لکھی ہے اور اونمین بعض ارتباط قائم کئے ہین اونکے قاعدون کو توضیح اور بسط کے ساتھہ بیان کیا ہے لیکن ابتک ہمنے صرف اونہین زاویون کا بیان کیا ہے جنمین زاویہ قائمہ سے بڑا نہ ہو مگر یہہ ظاہر ہے کہ علمی اور عملی تحقیقات ریاضیہ مین قائمہ سے بڑے زاویون سے کام پڑتا ہے اسلئے یہہ بیان کرنا بھی ضرور ہوا کہ ایسے زاویونکی ساتھہ علم مثلثی نسبتین کیا لگاؤ رکھتی ہین

(۹۱) فرض کرو کہ خط مستقیم قائم مین ایک نقطہ ء قائم ہے اور ہمکو منظور ہی کہ اور نقطون کا مقام لحاظ ء کے اس خط مستقیم مین معلوم کرین

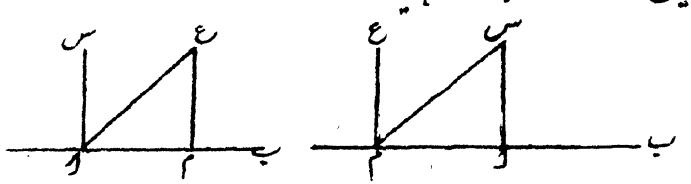


اس خط مستقیم مین مقام ہر نقطہ کا دریافت ہو جائیگا اگر اوسکا فاصلہ مقام ء سے اور سمت بھی اوسکی لحاظ ء کے معلوم ہو اب آسانی کے لئے سب نے اتفاق کرکے اس بات کو ٹھہرالیا ہے کہ فاصلے جو ء سے ایک سمت مین اس قائم خط مستقیم پر اندازہ کئے جائین وہ مثبت اعداد سے تعبیر کئے جائین اور جو فاصلے ء سے پہلی سمت سے مخالف سمت مین ناپے جائین وہ اعداد منفیہ سے تعبیر کئے جائین

شلاً فرضکرو کہ ء سے دائین سمت مین جو فاصلے بنا ئے جائین وہ مثبت اعداد سے تعبیر ہون اور ایک نقطہ م ہو جسکا فاصلہ ء سے ۲ یا + ۲ سے تعبیر ہو پس اگر مَ اوسی فاصلہ پر ء سے واقع ہو جس فاصلہ پر م واقع تہا مگر ء سے دوسری سمت مین ہو تو فاصلہ م کا ء سے - ۲ سے تعبیر ہوگا

(۹۲) مقامات کو جو بوسیلہ اعداد کے معین کرتے ہین اور ان اعداد پر علامات جبریہ لگاتے ہین اور ان علامتون کا اثر اون اعداد پر جنکا ہے یہہ سب باتین باتفاق جمہور مقرر کی گئین یعنی ان سب باتون کو جملہ مہندسین نے مقرر کر لیا ہے اور اصول جبر مقابلہ کے ابتدا ہی مین لکہا ہے کہ علامات + اور - سے اعمال جمع اور تفریق تعبیر ہوتے ہین ابتدا مین طالب علم ان علامات + اور - سے ان عملون ہی کو سمجہتا ہے مگر جب وہ آگے بڑہتا ہے تو اوسے معلوم ہوتا ہے کہ ان علامات سے خواص مقادیر کے بہی معلوم ہوتے ہین اور اس بات سے جبر مقابلہ مین نہ کوئی نقیض نہ کوئی بے ترتیبی پیدا ہوتی ہے بلکہ اس علم کو اور تقویت حاصل ہوتی ہے (جبر مقابلہ کا باب ۵ اور ۱۴ دیکہو)

(۹۳) اب ہم زاویون کے علم مثلثی نسبتون کے معنی ایسے بیان کرینگے جنمین وہ زاوئے بہی داخل ہو جائین کہ قائمہ سے بڑے ہین



فرض کرو کہ ا ب اور ا س دو خطوط مستقیم ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتے ہین اور ایک خط مستقیم نقطہ ا پر ا ب سے اس کی طرف حرکت کرتا ہے اور مقام ا ع پر پہونچتا ہے اور ع م عمود ا ب پر یا ا ب کو ا کی طرف سے خارج کر کے نکالا گیا ہو

اور ا ع کو ہمیشہ مثبت سمجھو اور ا م کو مثبت خیال کرو جب م اوس طرف اس کے واقع ہو جس طرف ب ہی اور ا م کو منفی خیال کرو جب کہ م پہلی سمت سے مخالف سمت مین واقع ہو اور ع م ہمیشہ سب صورتون مین ا ب کے اوسی سمت مین واقع ہوگا جسمین س ہے اسلئے ۰ مثبت خیال کیا جائیگا فرض کرو کہ زاویہ ع ا ب بتعیر ا سے کیا جاوے تو ا کے علم مثلثی نسبتون کی تعریف یہہ ہوگی

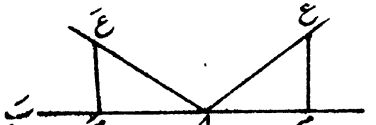
جب ا = ع م / ا ع مس ا = ع م / ا م قط ا = ا ع / ا م

جم ا = ا م / ا ع م ا = ا م / ع م قم ا = ا ع / ع م

جع ا = ۱ − جم ا اور جم ا = ۱ − جب ا

(۹۴) دو قائمی جسقدر کسی زاویہ سے زیادہ ہوتے ہین اوس زیادتی کو تکملہ یا مکمل اوس زاویہ کا کہتے ہین اگر ا کسی زاویہ مین تعداد درجون کی ہو تو ۱۸۰ − ا مکمل یا تکملہ زاویہ ا کے درجونکی ہوگی

(۹۵) کسی زاویہ اور اوسکی تکملہ کی علم مثلثی نسبتون کا باہم مقابلہ کرو



فرض کرو کہ ع ا ب کوئی زاویہ ہو اور ب ا کو ب تک خارج کرو اور زاویہ ع ا ب = ع ا ب اور ا ع = ا ع کے بناؤ اور ع م اور ع م عمود ب ب پر نکالو

زاویہ ع ا ب = ۱۸۰° − ع ا ب = ۱۸۰° − ع ا ب پس ع ا ب تکملہ ع ا ب کا ہے مثلث ع ا م اور ع ا م سب طرح سے علم ہندسہ مین آپسمین برابر ہین اب بموجب حدود کے

جب ا = $\frac{ع م}{ا ع}$ اور جب (۱۸۰° − ا) = $\frac{ع م'}{ا ع}$

اور چونکہ ع م اور ع م' مقدار میں برابر ہیں اور دونو مثبت ہیں اسلئے

جب ا = جب (۱۸۰ − ا)

اور نیز حدود سے

جم ا = $\frac{ا م}{ا ع}$ جم (۱۸۰° − ا) = $\frac{ا م'}{ا ع}$

اب ا م اور ا م' مقدار میں برابر ہیں اور نقطہ ا سے مخالف سمت میں واقع ہیں اسواسطے وہ مختلف العلامت ہیں پس

جم ا = − جم (۱۸۰° − ا)

اب زاویہ ا کی اور علم مثلثی نسبتوں کا مقابلہ باہم اسیطرح کریں جس طرح جیب اور جم کا شکل کے اندر کیا ہے یا جو دو نتیجے ابھی نکالے ہیں اونکی استعانت سے اونکا مقابلہ کریں اب ہم اسی ترکیب کو اختیار کرتے ہیں

مس (۱۸۰° − ا) = $\frac{جب (۱۸۰° − ا)}{جم (۱۸۰° − ا)}$ = $\frac{جب ا}{− جم ا}$ = − مس ا

جم (۱۸۰° − ا) = $\frac{م (۱۸۰° − ا)}{ب (۱۸۰° − ا)}$ = $\frac{− جم ا}{جب ا}$ = − م ا

قط (۱۸۰° − ا) = $\frac{ا}{جم (۱۸۰° − ا)}$ = $\frac{ا}{− جم ا}$ = − قط ا

قم (۱۸۰° − ا) = $\frac{ا}{جب (۱۸۰° − ا)}$ = $\frac{ا}{جب ا}$ = قم ا

ج (۱۸۰° − ا) = ۱ − جم (۱۸۰° − ا) = ۱ + جم ا

پس جیب اور قاطع التمام تو زاویہ اور اوسکے تکملہ کے ایک ہی ہیں اور جیب التمام اور مماس اور مماس التمام اور قاطع الزاویہ تعداد میں تو زاویہ کے اور تکملہ کے ایک ہی ہیں مگر علامت میں مختلف ہیں

(۹۶) دفعہ گذشتہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر زاویہ کی جیب معلوم ہو اور زاویہ

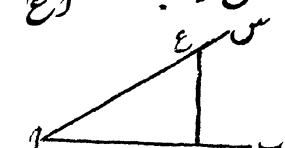
دو قائموں سے بڑا ہو تو دو زاویہ ہونگے جو ایک قیمت کے واسطے مقرر ہو سکتے ہین مثلاً
اگر جیب زاویہ کی $\frac{1}{2}$ ہو تو بموجب دفعہ ۲۸ کے ۳۰° ایک قیمت ہو گی اور بموجب دفعہ
۹۵ کے ۹۵۰ — ۳۰° یعنی ۱۵۰° دوسری قیمت ہو گی اور اسی قبیل کی
کیفیت قاطع التمام کی ہے مگر اور علم مثلثی نسبتون کی یہہ حالت نہین ہے

(۹۷) جب زاویہ نہایت چھوٹا ہو جاے تو علم مثلثی نسبتون کی قیمت جس حد کی طرف
میلان رکھین اونکا تصور ذہن مین صاف صاف بٹھانا بھی ایک اصلی مطلب
اس علم کا ہے

خط ا ع جو گرد ا کے حرکت کرتا ہے ہمیشہ ایک ہی طول کا رہتا ہے

اول ہم جیب کا بیان کرتے ہین

جب ع ا ب = $\frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$



اب شکل سے معلوم ہوتا ہے کہ جیسا زاویہ ع ا م چھوٹا ہوگا ایسی ہی ع م یعنی جیب چھوٹی
ہو گی اور ع ا ب کو کافی چھوٹا فرض کرکے جیب کو جسقدر چاہین چھوٹا کر سکتے ہین
اور ان نتائج کو مختصر طور پر بیان اسطرح کرتے ہین

جیب ۰ کی ۰ ہی

اب جیب التمام کا بیان سنو

جب ع ا ب = $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}}$

اب شکل کے دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ زاویہ ع ا ب کو جتنا چھوٹا کرو اتنا ہی ا م مقدار مین
قریب قریب ا ع کے ہوتا ہے یعنی جیب التمام قریب ا کے ہوتی جاتی ہے ع ا ب کو
کافی چھوٹا فرض کرکے جیب التمام کو ا کے قریب اتنا لا سکتے ہین جتنا ہم چاہین اور ان

نتایج کا اختصار اس طرح کرتے ہین کہ
اب مماس کا بیان کرتے ہین جب التمام ۰ کی ہے

مس ع اب = $\frac{\text{ع م}}{\text{ا م}}$

اب شکل کے دیکھنے سے معلوم ہوتا ہی کہ ع اب جسقدر چھوٹا ہوگا ع م چھوٹا ہوگا اور ا م قریب ا ع کے ہوگا یعنی اوتنا ہی مماس چھوٹا ہوگا اور زاویہ ع اب کو کافی چھوٹا فرض کرکے ہم مماس کو جتنا چاہین چھوٹا کر سکتے ہین ان نتایج کا اختصار یہہ ہے کہ

مماس ۰ کا ۰ ہے

اب مماس التمام کا بیان سنو

مم ع اب = $\frac{\text{ا م}}{\text{ع م}}$

اب یہان بھی جیسا کہ اوپر بیان ہوا زاویہ ع اب جسقدر چھوٹا ہوگا ع م چھوٹا ہوگا اور ا م قریب قریب ا ع کے ہوتا جائیگا یعنی اوتنا ہی بڑا مماس التمام ہوگا زاویہ ع اب کافی چھوٹا فرض کرکے مماس التمام کو جتنا چاہین بڑا کر سکتے ہین ان نتایج کا اختصار یہہ ہے کہ

مماس التمام ۰ کا ∞ ہی

اب قاطع التمام کی کیفیت یہہ ہے

قم ع اب = $\frac{\text{ا ع}}{\text{ع م}}$

یہان بھی نتایج کی وہی کیفیت ہے جو مماس التمام کی صورت مین تھی اسلیے اوسکا مختصر بیان یہہ ہے کہ

قاطع التمام ۰ کا ∞ ہی

قاطع الزاویہ کی کیفیت

قط ع اب = $\frac{\text{ا ع}}{\text{ا م}}$

یہان کیفیت استدلال کی وہی ہے جو جیب التمام کی صورت مین بیان ہوئی ہے اور ان نتایج کا اختصار اسطرح ہوتا ہے کہ

قاطع الزاویہ ۰ کا ۱ ہے

چونکہ جم ع اب = ۱ - جم ع اب تو یہہ نتایج حاصل ہونگے جنکا اختصار یہہ ہے کہ

جیب معکوس ۰ کی ۰ ہے

(۹۸) ہم نے نتایج کے بیان کرنیمین شکل کو مرجع بنایا ہے مگر بغیر اس مرجع بنانے کے صرف دو نتیجون سے باقی نتیجے اسطرح حاصل ہوتے ہین مثلاً

اس سبب سے کہ مس ع اب = $\frac{\text{جب ع اب}}{\text{جم ع اب}}$

تو مماس ۰ کا برابر ÷ یعنی ۰ کے ہوگا

اور مم ع اب = $\frac{\text{جم ع اب}}{\text{جب ع اب}}$

پس مماس التمام ۰ کا برابر ÷ کے یعنی لانہایت کے ہی

(۹۹) جب زاویہ قائمہ سے قریب تر ہوجاے تو اوسکی علم مثلثی نسبتون کی قیمتین کس حدود کی طرف مائل ہوتی ہین اونکا خیال بھی ذہن مین صاف صاف ہونا پر ضرور ہے اسلئے اوسکا بیان کیا جاتا ہے یہہ نتایج دفعہ ۹۷ کی طرح شکل سے مستنبط ہوسکتے ہین یا اون نتایج سے استخراج ہوسکتے ہین جو دفعہ ۹۷ مین بیان ہوئی ہین اب ہم دفعہ ۹۷ کے نتایج ہی سے استخراج کرتے ہین

بموجب دفعہ ۱۶ کے

جب ۰° = جم ۰ = ۱

جم ۹۰° = جب ۰ = ۰

مس ۹۰° = مم ۰ = ∞

مم ۹۰° = مس ۰ = ۰

قط ۹۰° = مم ۰ = ∞

مم ۹۰° = قط ۰ = ۱

جم ۹۰° = ۱ - جم ۹۰° = ۱

(۱۰۰) جب زاویہ دو قائموں کے قریب قریب ہو جائی تو اوسکی علم مثلثی نسبتون کی قیمتین کن حدود کی طرف مایل ہوتی ہین اونکا خیال ذہن مین صاف صاف ہونا ضرور ہے اسلئے اسکا بیان کرتے ہین

یہہ نتایج بہی ذ فعہ ۷۹ کی طرح مشکل سے مستنبط ہو سکتی ہین یا ذ فعہ ۷۹ کے نتایج مندرجہ سے استخراج ہو سکتے ہین اب ہم اونکو استخراج ہی کرکے لکھتے ہین

بموجب ذ فعہ ۹۵ کے

جب ۱۸۰° = جم ۰° = ۰

جم ۱۸۰° = −جم ۰° = −۱

مس ۱۸۰° = −مس ۰° = ۰

مم ۱۸۰° = −مم ۰° = ∞

قسط ۱۸۰° = −قسط ۰ = −۱

قم ۱۸۰° = قم ۰° = ∞

جج ۱۸۰° = ۱ − جم ۱۸۰° = ۲

(۱۰۱) نتایج گذشتہ مین بعض اوقات طالب علم کچھہ غلطیون مین پڑجاتی ہین اس امر کی انسداد کے واسطے ہم ایک بات لکھتے ہین کہ مس ۹۰° کی قیمت ∞ لکھنے مین طالب علم یہہ نہ سمجھے کہ ∞ سے ضرور + ∞ ہی مراد ہے اسلئے کہ اگر ایک زاویہ بہت ہی کم ۹۰° سے ہو تو مماس بڑا ہوگا اور مثبت ہوگا اور اگر زاویہ ذرا سی بہی ۹۰° سے بڑا ہو تو مماس بڑا ہوگا اور منفی ہوگا اسے معلوم ہوا کہ مس ۹۰° کو ∞ بیان کرنے مین یہہ کچھہ ضرور نہین ہے کہ ہم ہمیشہ ∞ کو یہہ سمجھین کہ + کی نشانی اوسے پہلے ہے اور یہی کیفیت اور صورتون مین ہے ۔ ہم نے مم ۱۸۰° کی قیمت ∞ لکھہ ہے اور طالب علم یہہ سمجھا سٹھا تہا کہ ∞ قیمت ہوگی یہہ سمجھنا اوسکا صحیح ہے

کیونکہ زاویہ جو در اکم دو قائموں سے ہو اوسکا مماس التمام مسمی ہوگا مگر آیندہ باب مین ہم زاویہ کو دو قائمون سے بڑا بہی خیال کرینگے اسلئے جو زاویہ ذرا سا بڑا ۱۸۰° سے ہو تو مماس التمام مثبت ہوگا

(۱۰۲) اس جدول مین بہت سے نتائج لکہہ دئے ہین جو اس باب اور باب سوم مین بیان ہوئے ہین

	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
جب	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰
جم	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱-
مس	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	۱-	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰
م	∞	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱-	$-\sqrt{3}$	∞
قط	۱	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	۲	∞	۲-	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	۱-
قم	∞	۲	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	۱	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	۲	∞

مثالین ۹

(۱) مخمس منتظم کے ہر زاویہ مین انگریزی اور فرانسیسی درجے دریافت کرو

(۲) ایک زاویہ مین فرانسیسی درجے اوسکی تمامی زاویہ کی انگریزی درجون کی دو تہائی ہین زاویہ کو دریافت کرو

(۳) زاویہ A کی تمامی اور $\frac{1}{4}A$ کی تکملہ مین درجے تعداد مین یکسان ہین A کو دریافت کرو

(۴) جب ا = $\frac{۵}{۱۳}$ علم مثلثی نسبتین $\frac{۱}{۲}$ ا کی دریافت کرو

(۵) معلوم ہے کہ مم ا = ۲ − ۳ مم ا ثابت کرو کہ قط ا = ۶ مم ا + ۴ مم ا اور قم ا = ۶ مم ا − ۲ مم ا

(۶) اگر مس ا = ۱ + ۲ مم ا تو جم ا و جب ا اور جم ۲ ا دریافت کرو

(۷) اگر مس ا مس ب = ۱ تو ثابت کرو کہ قط ا = قم ب

(۸) اگر مس ۲ ا = − $\frac{۳}{۴}$ قیمت جم ۲ ا اور جب ا اور جم ا اور جب ا کی دریافت کرو

(۹) ثابت کرو کہ مس ۸۲ $\frac{۱}{۲}$° = (۲ مم ا + ۳ مم ا) (۲ مم ا − ۱)

(۱۰) معلوم ہے کہ جب ا = م جب ب اور جم ا = ن جم ب تو جب ۲ ا اور جب ۲ ب کی قیمت دریافت کرو

(۱۱) معلوم ہے کہ جب ا = م جب ب اور مس ا = ن مس ب قیمت جب ۲ ا اور جم ۲ ب کی دریافت کرو

(۱۲) اگر مس ا + قط ا = $\frac{۳}{۴}$ تو ثابت کرو کہ جب ا = $\frac{۵}{۱۳}$

(۱۳) اگر مس ا + قط ا = ا تو ثابت کرو کہ جب ا = $\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}$

(۱۴) معلوم ہے کہ جب ا + قم ا = ۲ جب $\frac{۱}{۱۶}$ جب ا کو دریافت کرو

(۱۵) اگر جب ا + قم ا = ا تو ثابت کرو کہ

جب ا = $\frac{۱ - \sqrt{۱ - ۴}}{۲}$

(۱۶) اگر ا جم ۲ لا + ب جب ۲ لا = م جم ۲ ی

ا جب ۲ لا + ب جم ۲ لا = ن جب ۲ ی

جب ۲ لا اور جب ۲ ی کی قیمت دریافت کرو

(۱۷) ثابت کرو $\frac{\text{مس ا}}{\text{مس ا} - \text{مس ب}} + \frac{\text{مم ا}}{\text{مم ا} - \text{مم ب}} = ۱$

(۱۸) ثابت کرو

(۴ جم^۲ ا − ۱)^۲ مس^۲ ا + (۳ − ۴ جم^۲ ا)^۲ = قسط^۲ ا

(۱۹) علم ہندسہ مین ثابت کرو کہ جب ۲ا چھوٹی ۲ جب ا سے ہے

(۲۰) ثابت کرو کہ

قم ا (قط ا − ۱) + جب ا = مم ا (۱ − جم ا) + مس ا

(۲۱) معلوم ہے کہ طا = ۵ اور طب = ۲۰ اور س = ۹۰ ا اور ب کو دریافت کرو

لوک ۵ = ۰۰ ۷۰۵ ۶۹۸ ۰ ل مس ۷۵° ۰ = ۰۰ ۶۰۱۶۱ ۷۰ ۰ ل ۲۰ = ۰۰ ۶۰۲۱۵۳۷ ۱۰

(۲۲) معلوم ہے کہ طا = ۹ ۶۵ اور طب = ۱۲ ۲۴ اور س = ۹۰ ا اور ب کو دریافت کرو

لوک ۲ = ۰۰ ۳۰۱۰ ۰ لوک ۱۵۳ = ۲ ۱۸۴۹۱۴ لوک ۱۹۳ = ۲ ۲۸۵۵۵۷۳

ل مس ۳۸° ۵ آ = ۹ ۸۹۶۷۱۱۶ ل مس ۳۸° ۱۶ آ = ۹ ۸۹۶۹۷۱۴

(۲۳) اگر جب ا + جم ا = طا + ن (۱ − طا) تو ثابت کرو کہ جب ا یا جم ا برابر طا کے ہوگی

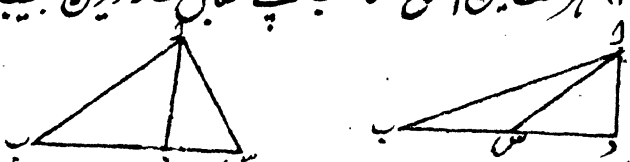
(۲۴) اگر جب ا = طا + ن (½ − طا) جم ا کو دریافت کرو

باب دسوان خواص مثلث

(۱۰۳) اس باب مین مثلثون کی بعض خواص ثابت کرینگے وہ مثلثون کے حل کرنیمین نہایت بکار آمد ہین اب ہم آغاز اوس شکل سے کرتے ہین جو دفعہ ۳۷ مین لکھی ہے اور اوسکو کہ اوس وجہ سے لکھتے ہین کہ جیسے یہہ ثابت ہوجاے کہ وہ جیسے جادہ الزوایا مثلثون پر صادق آتی تہی منفرج الزاویہ مثلثون پر بہی صادق آتی ہے

طریقہ کتابت ضلاع دفعہ ۳۷ کو قائم رکھو

(۱۰۴) ہر مثلث مین اضلاع متناسب اپنے مقابل کے زاویون کے جیب کے ہوتے ہین



فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہی اور ا سے ا د عمود مقابل کے ضلع پر نکالا ہے جو اوس ضلع سے یا ضلع ممدودہ سے نقطہ د پر ملتا ہے

اگر ب اور س حادی زاویے ہوں تو بائین طرف کی شکل مین

ا د = ا ب جب اور ا د = ا س جب س

اسیواسطے ا ب جب ب = ا س جب س

اسیواسطے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$

یعنے $\frac{\text{ط س}}{\text{ط ب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$

اگر زاویہ س منفرجہ ہو تو دائین طرف کی شکل مین

ا د = ا ب جب ب اور ا د = ا س جب (۱۸۰° - س)

= ا س جب س (دفعہ ۹۵)

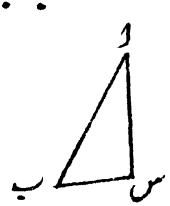
اسیواسطے ا ب جب ب = ا س جب س

$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$

یعنی $\frac{\text{ط س}}{\text{ط ب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$

اگر زاویہ س قائمہ ہو تو

ا س = ا ب جب ب



اسیواسطے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جب ۹۰°}}{\text{جب ب}}$ (دفعہ ۹۹)

یعنے $\frac{\text{ط س}}{\text{ط ب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$

پس ثابت ہوا کہ ہر صورت مین

$$\frac{\text{طس}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$$

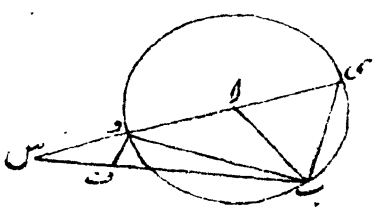
اور علی ہذا القیاس $\frac{\text{طا}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ اور $\frac{\text{طا}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب س}}$

اب ان نتایج کو قرینہ سے اس طرح لکھتے ہین کہ

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{طا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{طس}}$$

اور پھر ہم ثابت کرینگے کہ انہین سے ہر ایک برابر ہے $\frac{۱}{۲}$ ق جسمین ق نصف قطر دائرہ کا ہے جو مثلث کے اوپر بنایا جاے

(۱۰۵) ہر مثلث ا ب س مین مماس نصف تفاوت ب اور س کا اونکے نصف مجموعہ سے وہ نسبت رکھتا ہے جو دو اضلاع ا ب اور ا س کا تفاوت اونکے مجموعہ سے نسبت رکھتا ہے



فرض کرو کہ اضلاع ا ب اور ا س مین ا ب چھوٹا ہو مرکز ا اور نصف قطر ا ب پر دائرہ ا س کو د پر قطع کرتا ہوا کھینچو اور س ا کو بڑہا کر محیط سے ی پر ملاؤ اور د ف زاویے قائمہ بناتا ہوا ب د پر کھینچو جو ب س سے نقطہ ف پر ملے

بحکم (۳۲ ش ام) کے زاویہ ب ا ی برابر ہے مجموعہ زاویون ا ب س اور ا س ب کے

اور بحکم (۲۰ ش ۳ م) کے زاویہ ب د ی برابر ہے نصف زاویہ ب ا ی کے

پس ب د ی $= \frac{۱}{۲}$ (ب + س)

بحکم (۳۲ ش ام) کے زاویہ ا د ب برابر ہے مجموعہ زاویون د ب س اور د س ب کے

پس د ب س = ا د ب − د س ب

$= \frac{۱}{۲}$ (ب + س) اور س $= \frac{۱}{۲}$ (ب − س)

بحکم (۱۳ش۳م) کے زاویہ دب ی قائمہ ہے

پس $\frac{\text{ب ی}}{\text{ب د}}$ = مس ب دی

اور $\frac{\text{دف}}{\text{دب}}$ = مس دب س

اسیواسطے $\frac{\text{مس}\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{س})}{\text{مس}\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{س})} = \frac{\text{دف}}{\text{دب}} \div \frac{\text{ب ی}}{\text{دب}} = \frac{\text{دف}}{\text{ب ی}}$

لیکن بحکم (۲۹ش۱م) کے دف متوازی ب ی کا ہے اسیواسطے بحکم (۴ش۶م) کے

$$\frac{\text{دف}}{\text{دس}} = \frac{\text{ب ی}}{\text{س ی}}$$

اسیواسطے $\frac{\text{دف}}{\text{ب ی}} = \frac{\text{س د}}{\text{س ی}} = \frac{\text{س ا}-\text{ا د}}{\text{س ا}+\text{ا ی}} = \frac{\text{س ا}-\text{ا ب}}{\text{س ا}+\text{ا ب}}$

پس $\frac{\text{مس}\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{س})}{\text{مس}\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{س})} = \frac{\text{طب}-\text{طس}}{\text{طب}+\text{طس}}$

اصول علم مثلث کی کتابون مین اکثر اس شکل کو لکھتے ہین لیکن ایک اور ترکیب بھی ہے جسمین دو بڑے قانون علم مثلثی ثابت ہوتے ہین اور اون سے یہہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے ہمنے ثابت کیا ہے کہ زاویہ ا دب = $\frac{1}{2}$ (ب + س) اور زاویہ دب س = $\frac{1}{2}$ (ب - س)

پس س ب ی = ۹۰° + $\frac{1}{2}$ (ب - س) اور بحکم (۲۰ش۳م) کے زاویہ س ی ب = $\frac{1}{2}$ اب مثلث ی س ب مین

$$\frac{\text{س ی}}{\text{س ب}} = \frac{\text{جب س ب ی}}{\text{جب س ی ب}} = \frac{\text{جب}(۱۸۰° - \text{س ب ی})}{\text{جب}\frac{1}{2}\text{ا}} = \frac{\text{جب}(۹۰° - \frac{1}{2}(\text{ب}-\text{س}))}{\text{جب}\frac{1}{2}\text{ا}}$$

یعنی $\frac{\text{طب}+\text{طس}}{\text{طا}} = \frac{\text{جم}\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{س})}{\text{جب}\frac{1}{2}\text{ا}}$

اسیواسطے (طب + طس) جب $\frac{1}{2}$ ا = طا جم $\frac{1}{2}$ (ب - س) (۱)

اب مثلث د س ب مین

$$\frac{\text{س د}}{\text{س ب}} = \frac{\text{جب س ب د}}{\text{جب س د ب}} = \frac{\text{جب}\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{س})}{\text{جب}\frac{1}{2}(\text{ب}+\text{س})}$$

یعنی $\frac{\text{طب}-\text{طس}}{\text{طا}} = \frac{\text{جب}\frac{1}{2}(\text{ب}-\text{س})}{\text{جم}\frac{1}{2}\text{ا}}$ (دفعہ ۱۶)

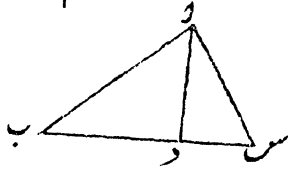
اسیواسطے (طب ـ طس) جم ½ ا = طا جب ½ (ب ـ س) (۲)

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرو تو

مس ½ (ب ـ س) = $\frac{\text{طب ـ طس}}{\text{طب + طس}}$ مم ½ ا = $\frac{\text{طب ـ طس}}{\text{طب + طس}}$ جس ½ (ب + س) دفعہ ۱۶

یہہ وہی نتیجہ ہے جو ابھی ثابت کیا ہے

(۱۰۱) مثلث کے کسی زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کے ارقام مین بیان کرو



فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہے اور زاویہ س حادہ ہے ا د عمود ب س پر نکالو

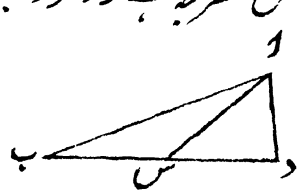
تو بحکم (۱۳ ش ۲ م) کے

ا ب² = ب س² + ا س² − ۲ ب س × س د

اور س د = ا س جم س

اسیواسطے طس² = طا² + طب² − ۲ طا طب جم س

دوم فرض کرو کہ زاویہ س منفرجہ ہے ا د عمود ب س ممدودہ پر نکالو



تو بحکم (۱۲ ش ۲ م) کے

ا ب² = ب س² + ا س² + ۲ ب س × س د

اور س د = ا س جم ا ی د = ا س جم (۱۸۰° ـ س) = − ا س جم س

بموجب دفعہ ۹۵ کے

اسیواسطے طس² = طا² + طب² − ۲ طا طب جم س

غرض دونو صورتون مین

$$\text{جم س} = \frac{\text{طا}^2 + \text{طب}^2 - \text{طس}^2}{2\,\text{طا طب}}$$

کے

علاوہ برین اگر س زاویہ قائمہ ہو تو طا^2 + طب^2 = طس^2 اور جم س = ۰ بموجب دفعہ 99 اسے معلوم ہوا کہ صورت قانون کی جو جم س کے واسطے دریافت ہوئی ہے وہ ہر صورت مین زاویہ س کے درجست ہے

اور علی ہذا القیاس

$$\text{جم ا} = \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب طس}} \qquad \text{جم ب} = \frac{\text{طس}^2 + \text{طا}^2 - \text{طب}^2}{2\,\text{طا طس}}$$

(۱۰۷) مثلث کے ایک زاویہ کی نصف کی جیب اور جیب التمام اور مماس کو اضلاع کے رقمون مین بیان کرو

بموجب دفعہ گذشتہ کے

$$\text{جم ا} = \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب طس}}$$

اسیواسطے $1 - \text{جم ا} = 1 - \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب طس}} = \frac{\text{طا}^2 - (\text{طب} - \text{طس})^2}{2\,\text{طب طس}}$

اسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۳۵ کے

$$(\text{جب} \tfrac{1}{2}\text{ا})^2 = \frac{\text{طا}^2 - (\text{طب} - \text{طس})^2}{4\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس})(\text{طا} + \text{طس} - \text{طب})}{4\,\text{طب طس}}$$

فرض کرو کہ طا + طب + طس کو ۲ ص تبعہ کرتا ہے یعنی ص مثلث کا نصف مجموعہ اضلاع

طا + طب − طس = طا + طب + طس − ۲طس = ۲ص − ۲طس = ۲ (ص − طس)

طا + طس − طب = طا + طب + طس − ۲ طب = ۲ ص − ۲طب = ۲ (ص − طب)

اسیواسطے $(\text{جب} \tfrac{1}{2}\text{ا})^2 = \frac{(\text{ص} - \text{طب})(\text{ص} - \text{طس})}{\text{طب طس}}$

اور $\text{جب} \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{(\text{ص} - \text{طب})(\text{ص} - \text{طس})}{\text{طب طس}}}$

اور نیز $1 + \text{جم}\, ا = 1 + \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب طس}} = \frac{(\text{طب} + \text{طس})^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب طس}}$

اسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۳۵ کے

$$(\text{جم}\tfrac{1}{2}\,ا)^2 = \frac{(\text{طب} + \text{طس})^2 - \text{طا}^2}{4\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا})}{4\,\text{طب طس}} = \frac{\text{ص}(\text{ص} - \text{طا})}{\text{طب طس}}$$

اور $\text{جم}\tfrac{1}{2}\,ا = \sqrt{\frac{\text{ص}(\text{ص} - \text{طا})}{\text{طب طس}}}$

اور جب $\tfrac{1}{2}\,ا$ اور $\text{جم}\tfrac{1}{2}\,ا$ کی قیمتوں سے بھی ہم مستنبط کرتے ہیں

$$\text{س}\tfrac{1}{2}\,ا = \sqrt{\frac{(\text{ص} - \text{طب})(\text{ص} - \text{طس})}{\text{ص}(\text{ص} - \text{طا})}}$$

۱۰۸ مثلث کے ایک زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقموں میں دریافت کرو

بموجب دفعہ ۳۵ کے جب $ا = 2\,\text{جیب}\tfrac{1}{2}\,ا\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\,ا$

اسواسطے جب $ا = 2\sqrt{\frac{(\text{ص} - \text{طب})(\text{ص} - \text{طس})}{\text{طب طس}}} \times \sqrt{\frac{\text{ص}(\text{ص} - \text{طا})}{\text{طب طس}}}$

$$= \frac{2}{\text{طب طس}}\sqrt{\text{ص}(\text{ص} - \text{طا})(\text{ص} - \text{طب})(\text{ص} - \text{طس})}$$

یا اس طرح عمل کریں کہ

$$(\text{جب}\,ا)^2 = 1 - (\text{جم}\,ا)^2 = 1 - \left(\frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب طس}}\right)^2$$

$$= \frac{4\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2 - (\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2)^2}{4\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2}$$

$$\text{اسواسطے جب}\,ا = \frac{\sqrt{2\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\,\text{طا}^2 + 2\,\text{طا}^2\,\text{طب}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}}{2\,\text{طب طس}}$$

اب جب $ا$ کے واسطے جو دو قیمتیں دریافت ہوئی ہیں مقابلہ کرکے یہہ نتیجے نکالتے ہیں کہ

$$\text{ص}(\text{ص} - \text{طا})(\text{ص} - \text{طب})(\text{ص} - \text{طس}) = \tfrac{1}{16}(2\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\,\text{طا}^2 + 2\,\text{طا}^2\,\text{طب}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4)$$

یہہ بات اجزا ضربی ص اور ص - طا اور ص - طب اور ص - طس کے باہم ضرب دینے سے ثابت ہو سکتی ہے

مثالین ۱۰

(۱) اگر جب ب = $\frac{4}{5}$ و طا = ۳ طب = $\frac{3}{2}$ ا کو دریافت کرو

(۲) اگر ا = ۷۵° اور ب = ۴۵° طب = ۲ ثابت کرو کہ طا = $\sqrt{۳}$ + ۱

(۳) اگر طب = طس ($\sqrt{۳}$ − ۱) اور ا = ۳۰° ب اور س کو دریافت کرو

(۴) اگر طب = ۲ طا اور س = ۶۰° ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

(۵) جب کہ طا = ۷ طب = ۵ طس = ۳ ا کو دریافت کرو

(۶) اگر طا و طب اور طس ۱½ فیٹ اور ۱¾ فیٹ اور ۲ فیٹ ہوں س کو دریافت کرو

(۷) اضلاع مثلث کے ۷ و ۸ و ۱۳ ہیں سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو

(۸) اضلاع مثلث کے ۱۳ اور ۱۵ فیٹ ہیں اور زاویہ درمیانی اونکا $\frac{۳۳}{۶۵}$ ہے تیسرا ضلع دریافت کرو اور وہ عمود بھی دریافت کرو کہ زاویہ معلوم سے اوسپر نکالیں

(۹) جب ب اور جب $\frac{س}{۲}$ کے واسطے جو صورتیں لکھی ہیں اونسے ثابت کرو کہ

ب = $\frac{س}{۲}$ اگر طس۲ = طب (طب + طا)

(۱۰) اگر طا = ۵ اور طب = ۴ اور س = ۶۰° طس کو دریافت کرو اور معلوم ہے کہ

لوگ ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ ۶ لوگ ۷ = ۵۰۹۸۰۸۴ ۶

لوک ۴۵۸۲۵ = ۴۷۶۶۱۱۰۲۵ لوک ۴۵۸۲۶ = ۴۷۶۶۱۱۱۲۰

(۱۱) اگر مثلث کے زاویہ ا سے عمود ضلع ب س پر نکلے اور اوسی نقطہ پر ملے اور ایک عمود ب سے ضلع س ا پر نکلے اور ضلع س ا سے نقطہ ہی پر ملے تو ثابت کرو کہ دی ہوئی طس جم ہیں

(۱۲) دفعہ ۱۰۶ کی شکل سے ثابت کرو کہ

طا = طب جم س + طس جم ب

(۱۳) مثال گذشتہ کے نتیجہ سے اور دو اور متماثل نتیجوں سے جم س کی قیمت دفعہ ۱۰۶ کی دریافت کرو

(۱۴) اگر جب ا = ع $\sqrt{۱ - ق۲}$ + ق $\sqrt{۱ - ع۲}$ قیمت جم ا کی دریافت کرو

(۱۵) ثابت کرو کہ مس ا = $\frac{\text{جب ا} + \text{جب ۲ ا}}{۱ + \text{جم ا} + \text{جم ۲ ا}}$

(۱۶) اگر مس ا + جم ا = ۲ تو جب ا + جم ا = $\sqrt{۲}$

(۱۷) ا کو اس مساوات سے دریافت کرو

ق ظ^{۲} ا + ق م^{۲} ا = ۳ ق ظ^{۲} ا

(۱۸) مثلث قائم الزاویہ کا وتر اب نقطہ د پر ایسا تقسیم کیا گیا ہے کہ اد کو دب سے وہ نسبت ہے جو س ب کو ہے س ا سے ثابت کرو کہ

مس ا س د = $\frac{\text{طا}^{۲}}{\text{طب}^{۲}}$ اور س د = $\frac{\text{ما طا}^{۲} + \text{طب}^{۲}}{\text{طا} + \text{طب}}$

(۱۹) سمندر میں جہاز پر سے دو قلعوں ا اور ب کے درمیان زاویہ سہ دکھائی دیا ا کی طرف م میل جہاز گیا تو زاویہ قلعوں کے درمیان صہ دکھائی دیا تو بتاؤ اس دوسرے مقام سے قلعہ کا فاصلہ کیا ہے

(۲۰) اگر طا جم^{۲} لا + طب جب^{۲} لا = م جم^{۲} ے

طا جب^{۲} لا + طب جم^{۲} لا = ن جب^{۲} ے

م مس^{۲} لا = ن مس^{۲} ے

تو ثابت کرو کہ (طا + طب) (م + ن) = ۲ م ن

مس^{۲} لا = ا

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

(۱۰۹) دو زاویے اور ایک ضلع معلوم ہے مثلث کو حل کرو

فرض کرو کہ ا اور س زاویے اور طب ضلع معلوم ہے تو

ب = ۱۸۰° − ا − س

$\frac{\text{طا}}{\text{طب}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ موجب دفعہ (۱۰۴) کے

اسیواسطے طا = $\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ طب

اسیواسطے لوک طا = لوک طب + لوک جب ا − لوک جب ب

= لوک طب + ل جب ا − ۱۰ − ل حب ب + ۱۰

= لوک طب + ل جب ا − ل جب ب

اور ایسے ہی لوک طس = لوک طب + ل سب مس − ل جب ب

(۱۱۰) دو ضلعے اور اونکا زاویہ درمیانی معلوم ہین مثلث حل کرو

فرض کرو کہ طب اور طس اور اونکا زاویہ درمیانی ا معلوم ہین

بموجب دفعہ ۱۰۵ کے

$$\frac{\text{مس } \frac{1}{2}(\text{ب} - \text{س})}{\text{مس } \frac{1}{2}(\text{ب} + \text{س})} = \frac{\text{طب} - \text{طس}}{\text{طب} + \text{طس}}$$

اب ا + ب + س = ۱۸۰°

اسیواسطے ب + س = ۱۸۰° − ا

اسیواسطے $\frac{1}{2}$(ب + س) = ۹۰° − $\frac{1}{2}$ا

اسیواسطے مس $\frac{1}{2}$(ب + س) = مم $\frac{1}{2}$ا بموجب دفعہ ۱۶ کے

اسے معلوم ہوا کہ $\frac{\text{مس } \frac{1}{2}(\text{ب} - \text{س})}{\text{مم } \frac{1}{2}\text{ا}} = \frac{\text{طب} - \text{طس}}{\text{طب} + \text{طس}}$

اسیواسطے مس $\frac{1}{2}$(ب − س) = $\frac{\text{طب} - \text{طس}}{\text{طب} + \text{طس}}$ مم $\frac{1}{2}$ا

اسیواسطے لوک مس $\frac{1}{2}$(ب − س) = لوک (طب − طس) + ل مم $\frac{1}{2}$ا − لوک (طب

اس صورت سے $\frac{1}{2}$(ب − س) معلوم ہوگا اور $\frac{1}{2}$(ب + س) پہلے سے معلوم ہے

کیونکہ وہ برابر ۹۰° − $\frac{1}{2}$ا کے ہے تو ب اور س فوراً معلوم ہو جائینگے

اور نیز $\frac{\text{طا}}{\text{طس}} = \frac{\text{حب ا}}{\text{حب س}}$

اسیواسطے لوک طا = لوک طس + ل جب ا − ل جب س

اسے طا دریافت ہو جائیگا

یعنی طا اون صورتون سے دریافت ہو سکتا ہے جو دفعہ ۱۰۵ کے آخر مین تحقیقات کرکے لکھی گئی ہین

طا جم $\frac{1}{2}$(ب − س) = (طب + طس) جب $\frac{1}{2}$ا

اسیواسطے لوک طا = لوک (طب + طس) + ل جب ½ ا - ل جم ½ (ب + س)
اس طرح طا کے معلوم کرنے مین ہمکو دو اور زاویونکو لوکارثمین دریافت کرنے پڑینگے لوک (طب + طس)
ہمکو معلوم ہین اور پہلی طرح سے دریافت کرنے مین اور زاید لوکارثمین ہمکو دریافت کرنی پڑتی ہین
اور علاوہ برین ل جب ½ ا اور ل جم ½ ا ایک ہی صفحہ مین جدولون کے ہم کو ملجاتی ہین
اور اس سبب سے محنت کم پڑتی ہے

ان عملون مین طب اور طس کو غیر مساوی فرض کیا ہے اگر طب اور طس آپسمین برابر ہون تو
مثلث متساوی الساقین ہوگا اور زاویہ ا سے عمود قاعدہ مثلث پر نکالنے سے مثلث
دو قائم الزاویہ مثلثون مین تقسیم ہو جائیگا اور دفعہ ۸۷ کے موافق حل کامل ہوجائیگا

(۱۱۱) ایک مثلث کے دو ضلعے اور زاویہ انمین سے ایک ضلع کے مقابل کا معلوم ہن مثلث کا حل کرو
فرض کرو کہ اضلاع طا اور طب اور زاویہ ا معلوم ہین

$$\frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{طب}}{\text{طا}}$$

$$\text{اسیواسطے جب ب} = \frac{\text{طب}}{\text{طا}} \text{ جب ا}$$

اسیواسطے لوک جب ب = لوک طب + لوک جب ا - لوک طا

اسیواسطے ل جب ب = لوک طب + ل جب ا - لوک طا

اگر $\frac{\text{طب جب ا}}{\text{طا}}$ کم واحد سے ہو تو دو مختلف زاویے ۱۸۰° سے چھوٹے دریافت ہونگے
جنکی جیب $\frac{\text{طب جب ا}}{\text{طا}}$ ہوگی ایک زاویہ انمین سے قائمہ سے چھوٹا ہوگا دوسرا قائمہ سے
بڑا ہوگا اگر طا چھوٹا طب سے نہ ہو تو ا ہی چھوٹا ب سے نہ ہوگا اسیواسطے ب حادہ ہوگا
اسیواسطے ب کی چھوٹی قیمت حل کے اندر دخل رکھتی ہے اگر طا چھوٹا طب سے ہو تو ب کی
ہر یک قیمت دو قیمتون مین سے لیجا سکتی اور جب ب معلوم ہو جائیگا تو س بھی معلوم ہو جائیگا
کیونکہ وہ ۱۸۰° - ا - ب ہے اور طس سے معلوم ہوگا کہ

$$\frac{\text{طس}}{\text{طا}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ا}}$$

پس اگر ب کی دو قیمتین داخل ہو سکتی ہین تو اونہین کے مطابق دو قیمتین ہین اور حس کی معلوم ہونگین پس دو مثلث ان اجزا کے معلوم ہونے سے دریافت ہونگے

اگر $\frac{\text{طب جب ا}}{\text{طا}}$ = ا تو ب زاویہ قائمہ ہے اور اجزاء معلوم سے ایک ہی مثلث دریافت ہوگا

اگر $\frac{\text{طب حب ا}}{\text{طا}}$ بڑا واحد سے ہو تو مثلث ان اجزاء معلوم کا معدوم ہوگا

غرض جب دو ضلعے اور انمین سے ایک ضلع کا مقابل زاویہ معلوم ہوتا ہے تو اکثر دو مثلث اجزاء معلوم سے دریافت ہوتی ہین اور اسیواسطے اس صورت حل کا نام صورت مشتبہ ہے ہمنے قید اوپر اکثر کی لگائی ہے کہ دو مثلث اجزاء معلوم سے دریافت ہوتے ہین کیونکہ مثلث قائم الزاویہ بھی ہو سکتا ہے اس صورتمین فقط ایک ہی مثلث دریافت ہوگا اور بعض صورتون مین مثلث ناممکن ہوگا

مثلثون کے حل کرنے کی توضیح اور تشریح کرنے کے واسطے بعض شکلین دفعہ ۱۸ مین لکھی ہوئی ہین

(۱۱۲) تین ضلعے معلوم ہین مثلث کو حل کرو

بموجب دفعہ ۱۰۷ کے ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{جب } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{(ص - طب) (ص - طس)}}{\text{طب طس}}}$$

$$\text{جم } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{ص (ص - طا)}}{\text{طب طس}}}$$

$$\text{مس } \frac{\text{ا}}{\text{۲}} = \sqrt{\frac{\text{(ص - طب) (ص - طس)}}{\text{ص (ص - طا)}}}$$

اور اسیکے مشابہ اور صورتین نصف زاویون کے واسطے ہین ان تینون صورتون مین سے ہر ایک سے زاویہ $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ دریافت ہو سکتا ہے ان سب مین مس $\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$ کی صورت بہتر ہے کیونکہ اوسمین صرف لوکارثم ص اور ص - طا اور ص - طب اور ص - طس کی سب زاویونکی معلوم کرنیکے لئے دریافت کرنی پڑیگی برخلاف اسکے اگر ہم جیب کی صورت کو کام مین لائین تو اضلاع کی بھی لوکارثم دریافت کرنی پڑیگی

(۱۱۳) اب ہم مثلثون کے حل کرنیکی بعض مثالین لکھتے ہین اور اونمین اصول اجزاء متناسب کو کام مین

نہین لائنگے کیونکہ اوسکی مثالین تو کافی باب ششم اور ہفتم مین ملگئی ہین یہان فقط نتائج کو ہم بیان کرینگے

مثال (۱) معلوم ہے کہ طب = ۷ ر ۲۳۴۲ اور طس = ۵۴ ر ۱۸۵ اور ا = ۸۴° ۳۶′

ل مس ½ (ب ـ س) = لوک (طب ـ طس) + ل جم ½ ا ـ لوک (طب + طس)

طب ـ طس = ۴۹ ر ۳ اور طب + طس = ۴۲ ر ۱۰۱ ½ ا = ۸۴° ۳۶′

لوک ۴۹ ر ۳ = ۱ ر ۶۹۲۸۴۶۹

ل ۸۴° ۱۸′ = ۱۰ ر ۰۴۰۹۹۳۰

۱۱ ر ۷۳۳۸۳۸۹

لوک ۴۲ ر ۱۰۱ = ۲ ر ۶۲۳۳۵۲۷

۹ ر ۱۱۰۴۸۶۲ = ل مس ½ (ب ـ س)

اب یہان جدول مین دیکھنے سے

½ (ب ـ س) = ۲۰° ۰۷′ ۶″ کے قریب

½ (ب + س) = ۴۲° ۴۷′

پس ب = ۵۵° ۲۶″ اور س = ۴۰° ۲۱′ ۴″

پس لوک طا = لوک طس + ل جب ا ـ ل جب س

لوک ۱۸۵ ر ۴ = ۲ ر ۲۶۸۱۰۹۷

ل جب ۳۶′ ۸۴° = ۹ ر ۹۹۸۰۶۸۳

۱۲ ر ۲۶۶۱۷۸۰

ل جب ۲۱′ ۴۰° = ۹ ر ۸۱۱۲۱۹۶

لوک طا = ۲ ر ۴۵۴۹۰۸۴

اسے معلوم ہوا کہ طا = ۲۸۵ ر ۰۷۴۵

اب ہم طا کو اوس ترکیب سے دریافت کرتے ہین جسکا ذکر دفعہ ۱۱۰ مین کیا گیا ہے

لوک طا = لوک (طب + طس) + ل جب ½ ا ـ ل جم ½ (ب ـ س)

لوک ا ۰ ۴۲ = ۲ ۶۲۳۳۵ ۲۷
ل جب ۲ ۲۰ ۱۸ = ۹ ۸۲۸۰۲۳۱
۱۲ ۴۵۱۳۷۵۸
ل جم ۲ ۲۰ ۵۶ = ۹ ۹۹۶۴۱۷۸
لوک طا = ۲ ۴۵۴۹۵۸۰

اسے معلوم ہوا کہ ہم طا کو پہلی طرح سے دریافت کر سکتے ہین
لوک طا کے حساب کرنیکے جو دو طریقے ہین اونمین جو نتیجے نکلتے ہین اونمین ذرا سا فرق ہوتا ہے
لیکن ½ (ب ـ س) نفس الامر مین کچھہ کم ۲۰ ۵۶ سے ہے وہ قریب
۲۰ ۸ ۵۵ کے ہے اگر یہہ زیادہ صحیح قیمت دریافت کیجاے تو دونو طریقون سے
جو نتیجے پیدا ہونگے وہ مطابق ہونگے اور اون سے وہی نتیجہ نکلیگا جو ابھی ٹھیک دریافت ہوا

مثال ۲ (۲) معلوم ہے کہ طا = ۲۸۳۴ طب = ۳۴۸۵۵ ا = ۲ ۹۳۲ ۱۵
ل جب ب = لوک طب + ل جب ا ـ لوک طا

لوک ۵ ۳۴۸۵ = ۲ ۵۴۲۲۰۲۸
ل جب ۲ ۳۰ ۱۵ = ۹ ۷ ۲۷۲۲۷۶
۱۲ ۲۶۹۴۳۰۴
لوک ۴ ۲۸۳ = ۲ ۴۵۲۳۹۹۸
لوک جب ب = ۹ ۸۱۷۰۳۰۶

ب = ۱۴۱ ۰ ۳۶ یا ۱۳۸ ۵۹ ۲۴

یہہ صورت صورت مشتبہ ہے اسلئے دو مثلث ہونگے جنکے یہی اجزاء معلوم ہونگے
اگر ہم ب = ۱۴۱ ۰ ۳۶ کے لین تو
س = ۱۰۶ ۴۴ ۲۴
یعنی لوک طس = لوک طا + ل جب س ـ ل جب ا

لوک ۲۸۳۵۴ = ۲ ۴۵۲۳۹۹۸

ل جب ۱۰° ۴۴′ ۲۴″ = ل جب ۲۳° ۱۵′ ۳۶″ = ۹٫۹۸۱۱۹۴۰
۱۲٫۴۳۳۵۹۳۸

ل جب ۳۲° ۱۵′ = ۹٫۷۲۷۲۷۶

لوک طس = ۲٫۷۰۶۳۶۶۲

اسے ہکوطس = ۵۰۸٫۵۸۸ کے دریافت ہوگا

اگر ہم ب = ۳۸° ۱۹′ ۵۶″ ۲۴ کے لیں تو

س = ۸° ۴۵′ ۳۶″

لوک ۲۸۳۵۴ = ۲٫۴۵۲۳۹۹۸

ل جب ۸° ۴۵′ ۳۶″ = ۹٫۱۸۲۶۸۸۲
۱۲٫۶۳۵۰۸۸۰

ل جب ۳۲° ۱۵′ = ۹٫۷۲۷۲۷۶

لوک طس = ۲٫۹۰۷۸۶۰۴

اسے معلوم ہوا کہ طس = ۸۰٫۸۳۳۶

مثال (۳) طا = ۱۵ طب = ۱۶ طس = ۱۷

یہاں ص = ½ (۱۵ + ۱۶ + ۱۷) = ۲۴

ص − طا = ۹ ص − طب = ۸ ص − طس = ۷

لوک ۸ = ۹۰۳۰۹۰۰ ۹٫۹۰۳۰۹۰۰ لوک ۲۴ = ۱٫۳۸۰۲۱۱۲

لوک ۷ = ۸٫۸۴۵۰۹۸۰ لوک ۹ = ۹٫۹۵۴۲۴۲۵

۱٫۷۴۸۱۸۸۰ ۲٫۳۳۴۴۵۳۷

۱٫۷۴۸۱۸۸۰

۲)۵۸۶۲۹۵۷

۲٫۹۳۱۳۲۸

ل س/۲ = ۱۰ + ۱٫۷۴۸۱۸۸۰/۲ + ۲٫۳۳۴۴۵۳۷/۲

= ۱۰ − ۰٫۹۳۱۳۲۸ = ۹٫۰۶۸۶۷۲

اسسے ہمکو $\frac{ا}{۲}$ = ۲۶° ۵۹′ ۳″ کے دریافت ہوگا

اور ایسیہی $\frac{ب}{۲}$ = ۳۹° ۴۸′ ۱۸″ کے

اسسے معلوم ہوا کہ $\frac{س}{۲}$ = ۹۰ − $\frac{ا}{۲}$ − $\frac{ب}{۲}$ = ۳۳° ۱۲′ ۳۹″

امثلہ

(۱) معلوم ہین کہ طا = ۲۵۴ اور ب = ۱۶° اور س = ۹۴° طب کو دریافت کرو

لوک ۲۵۴ = ۲٫۴۰۴۸۳۳۷ ل جب ۸۰° = ۹٫۹۹۳۳۵۱۰

لوک ۱۰۹ = ۷٫۰۳۸۵۱۸۰۸۵ ل جب ۱۶° = ۹٫۴۰۳۳۸۱

لوک ۱۱ = ۷٫۰۴۱۴۶۹۶ ل

(۲) معلوم ہین کہ طا = ۲۷۴ اور ا = ۸۲° ب = ۴۵° طب کو دریافت کرو

لوک ۲۷۴ = ۲٫۴۳۷۵۰۶ ل جب ۸۲° = ۹٫۹۹۰۴۰۴۴

لوک ۲۶۲ = ۲٫۴۱۶۲۳۵۲۸ ل جب ۴۵° = ۹٫۹۰۷۹۵۷۶

لوک ۱۲ = ۲٫۴۳۵۳۱۷۴ ل

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۰۰۰ اور ب = ۱۰۴° س = ۴۴° ۲۹′ ۴۰″ طب کو دریافت کرو

لوک ۱۲۳۹۶ = ۴٫۰۹۳۲۸۱۶ ل جب ۷۶° = ۹٫۹۸۶۹۰۴۱

لوک ۱۲۳۹۷ = ۴٫۰۹۳۳۱۶۶ ل جب ۱۰۴° ۳۰′ = ۹٫۹۸۹۳۵۴۴۴

ل جب ۱۰۴° ۳۱′ = ۹٫۹۸۹۳۶۴۴۸

(۴) طب = ۵۵ طس = ۴۵° ا = ۶۰° ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۸۲ = ۱٫۹۱۳۸۰۶۰۴۲ ل مس ۶۰° ۲۰′ = ۱٫۰۲۵۰۴۴۵۱

ل مس ۶۰° ۲۱′ = ۱٫۰۲۵۰۷۵۲۴

(۵) معلوم ہے کہ طب = ۲۱ اور طس = ۱۰٫۵ اور ا = ۳۶° ۵۲′ ۱۲″ ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۳ = ۰۰ ۳ ۰ ۱ ۰ ۳ ۰ ک ل عم ۸° ۲۶′ ۴″ = ۱۰ ک ۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۱۹ = ۱۳ ۹ ۰ ۶ ۷ ۱ ک ۱

(۶) معلوم ہے کہ طب = ۴۲۶ اور طس = ۳۵۴ اور ل = ۴۹° ۲۶′ ب اور س دریافت کرو

لوک ۷۸ = ۴۶ ۹ ۰ ۸ ۹ ۲ ۱ ک ۱ ل جم ۴۴° ۳۸′ = ۱۰ ک ۳۳۸۹۲۳۱

لوک ۷۲ = ۲۵ ۳ ۳ ۷ ۵ ۸ ۱ ک ۱ ل س ۱۱° ۲۲′ = ۹ ک ۳۰۳۲۶۰۹

ل س ۱۱° ۲۳′ = ۹ ک ۳۰۳۹۱۴۳

(۷) معلوم ہے کہ طب = ۱۰۰ اور طس = ۶۰ اور ل = ۳۰° ۲′ ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۲ = ۰ ۳۰ ۱۰ ۳۰ ۰ ک ل س ۳۲° ۴۴′ = ۹ ک ۸۰۸۰۸۲۹

ل جم ۱۲° ۵′ = ۸ ۱۸۵۸ ۱۰۴۱۰ ک ۱۰ ل س ۳۲° ۴۵′ = ۹ ک ۸۰۸۳۶۰۶

(۸) معلوم ہے کہ طب = ۱۷۱ ۸۲۴۷ طس = ۹۲۵۳۶۲۹ ل = ۴۳° ۱۰′ ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۴۲ ۹ ۸ ۱ = ۸ ۵۲ ۴۲۷۷ ک ۴ ل س ۶۸° ۲۵′ = ۱۰ ک ۴۰۲۷۵۳۰

لوک ۱۴۶ = ۲۹ ۵۳۴۱۶ ک ۲ ل س ۱۸° ۹′ ۴۰″ = ۹ ک ۵۱۰۷۷۳۱

ل س ۱۸° ۹′ ۴۰″ = ۹ ک ۵۱۰۸۴۴۲

(۹) معلوم ہے کہ طب = ۱۰۰ ۴۵۷۳ طس = ۹۱۲۷۷۶۲۲ ل = ۷° ۳۵′ ۶۰″ ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۳۱۶۳ = ۱۰ ۷۴۴۹۷۲۵ ک ۱۰ ل س $\frac{۹}{۲}$° = ۸۴۷۰۵۶۱

لوک ۲ ک ۳۷۶۳۴۷ = ۹ ۸۸۱۳۹۸۰ ک ۹ ل س ۹° ۵۶′ ۴۲″ = ۴ ک ۶۷۷۹۴۶۲

(۱۰) معلوم ہے کہ طب = ۵۷ ک ۵ اور طس = ۴۵ ک ۲ اور ل = ۴۸° ۴۰′ ب اور س اور طا کو دریافت کرو

لوک ۲۵ ک ۱ = ۱۰ ۳۴۸۰۲۵۸ ک ل س ۵۰° ۹′ = ۹ ۹۶۹۱۰۰

لوک ۴۸۵ ک ۳ = ۹ ۴۳۴۲۱۱۹ ک ل س ۵۰° ۱۲′ ۱۶″ = ۹ ک ۴۳۸۳۳۸۲

لوک ۵ ک ۴ = ۹ ک ۸۷۳۳۳۵۲ ل جب ۴۸° ۴۰′ = ۹ ک ۶۵۳۲۱۲۵

لوک ۵۲۵ر۱۰ = ۹۲۳۹ر۱۰۷۰۱ر۱ ل جب ۵۰° ۳۷′ ۴۴″ = ۹۵۸۸۸۲۰۹۵

(۱۱) معلوم ہے کہ طا = ۵۲۸ اور طب = ۲۵۲ اور ا = ۱۲۴° ۳۴′ ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۲۵۲ = ۵۰۰ر۴۰۱۴۰۰ر۲ ل جب ۵۵° ۲۶′ = ۹ر۹۱۰۶۴۶۰

لوک ۵۲۸ = ۳۹ر۲۲۶۳۳۹ر۲ ل جب ۲۳° ۸′ = ۹ر۵۹۴۲۵۱۳

ل جب ۲۳° ۹′ = ۹ر۵۹۴۵۴۶۹

(۱۲) معلوم ہے کہ طا = ۱۲۰ طب = ۸۰ر۱ = ۶۰° ب اور س اور طس کو دریافت کرو

لوک ۲ = ۰۰ر۳۰۱۰۳۰ر۰ ل جب ۳۵° ۱۰′ = ۹ر۷۶۱۲۸۵۱

لوک ۳ = ۱۲۱۳ر۴ ل جب ۳۵° ۱۶′ = ۹ر۷۶۱۴۶۳۸

لوک ۱۲۷ر۱ = ۸۴۷ر۱۳۹۷۸۴۷ر۱ ل جب ۸۴° ۴۸′ ۴۶″ = ۹ر۹۹۸۱۶۲۶

لوک ۱۲۷۹۸ر۱ = ۱۶۱ر۱۳۹۸۱۶۱ر۱ ل جب ۸۴° ۵۸′ ۴۰″ = ۹ر۹۹۸۱۷۴۳

(۱۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۷ر۲۱ طب = ۴۳ر۵۴۳ر۱۲ = ۹۲° ۱۵′ ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۱۷ر۲۱۲ = ۴۰ر۴۶۲۶۸۴۰ر۴ ل جب ۶۷° ۴۰″ = ۹ر۴۶۸۶۸۰۶۰

لوک ۱۲۵۴۳ = ۱۴ر۴۰۸۹۰ر۴ ل جب ۶۷° ۵۰″ = ۹ر۴۶۸۷۴۹۰

ل جب ۶۷° ۵۱′ = ۹ر۶۹۶۹۹۴۷

(۱۴) معلوم ہے کہ لوک طا = ۷۳ر۹۷۱۷۹۳ر۵ لوک طب = ۴۵ر۹۳۹۲۸۵ر۵

ا = ۷۰° ۱۲′ ۰″ ب اور س اور لوک طس دریافت کرو

ل جب ۷۰° ۱۲′ ۰″ = ۲۲ر۴۵۷۳۵۷۹ر۹ ل جب ۵۸° ۳۰″ = ۹ر۹۲۸۹۳۲۵

ل جب ۵۱° ۴۱′ ۰″ = ۹۴ر۶۷۹۴ر۹

(۱۵) معلوم ہے کہ طا = ۳۶ طب = ۴۴ر۴ = ۴۲° ۳۲′ ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۳ = ۱۳ر۱۲۷۷۴ر۵ ل جب ۴۲° ۳۲′ = ۹ر۷۳۲۵۸۷۰

لوک ۱۱ = ۲۷ر۴۱۳۹۰۴۱ر۱ ل جب ۴۱° ۱۹′ = ۹ر۸۱۹۶۸۸۸

ل جب ۴۱° ۲۰′ = ۹ر۸۱۹۸۳۲۵

(۱۶) معلوم ہے کہ طا = ۱۱۰ اور طب = ۱۵ ل جب ۵ = ۹٫۵۲۲۸۷۸۷ ۹

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫ ب کو دریافت کرو

(۱۷) معلوم ہے کہ طا = ۲۲۲ طب = ۳۱۸ طس = ۴۰۶ ۵ کو دریافت کرو

لوک ۳۷۳ = ۲٫۶۷۴۸۶۱۱ لوک ۲۵۱ = ۲٫۳۹۹۶۷۳۷

لوک ۴۰۶ = ۲٫۶۰۸۵۲۶۰ ل جب ۱۴° ۲۸′ = ۹٫۹۸۱۸۱۱۷ ۹

لوک ۳۱۸ = ۲٫۵۰۲۴۲۷۱ ل جم ۱۶° ۲۹′ = ۹٫۹۸۱۷۷۴۴ ۹

(۱۸) معلوم ہے کہ طا = ۱۱ طب = ۱۳ طس = ۱۶ زاویے دریافت کرو

لوک ۲ = ۱۰٫۰۳۰۱۰۳۰۰ ل مم ۱° ۳۱′ = ۱۰٫۰۴۰۴۲۳

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫ ل مم ۱° ۳۲′ = ۱۰٫۰۴۰۳۸۶۲۰

لوک ۷ = ۸٫۸۴۵۰۹۸۰ ل مم ۱° ۳۵′ = ۱۰٫۰۵۱۹۱۹۰

ل مم ۱° ۳۶′ = ۱۰٫۰۵۱۶۶۴۵

(۱۹) طا = ۲۵ طب = ۲۶ طس = ۲۷ زاویے دریافت کرو

لوک ۳۵ = ۱٫۵۴۴۰۶۸۰ ل مس ۲۸° ۷′ ۳۰″ = ۱۰٫۷۲۷۹۵۶۸

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫ ل مس ۲۸° ۷′ ۴۰″ = ۹٫۷۲۸۰۰۷۴

ل مس ۳۱° ۵۶′ ۵۰″ = ۹٫۷۹۴۸۹۸۶

ل مس ۳۱° ۵۷′ = ۹٫۷۹۴۹۴۵۵

(۲۰) اگر زاویے ایک مثلث کے سلسلہ جمع تفریق میں ہوں اور سب سے بڑے ضلع کی سب سے چھوٹے ضلع کے ساتھ وہ نسبت ہو جو ۵ کو ہی ۴ سے تو تمام زاویے دریافت کرو

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫ ل مس ۵۳° ۰′ ۳۰″ = ۹٫۷۲۸۴۲۴

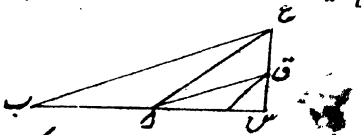
ل مس ۵۳° ۰′ ۴۰″ = ۹٫۷۲۸۴۳۶۱۰

بارہوان باب

بلندیان اور فاصلے

(۱۱۴) دفعات ۳۸ سے ۴۵ تک ہم نے بعض صورتین لکھی ہین وہ فی الحقیقت اس باب سے متعلق ہین طالب علم کو چاہئے کہ وہ پہلے اون دفعات کو پڑہ لے اور پہر اوس تحقیقات کے درپے ہو جسکا بیان ہم کرتے ہین

(۱۱۵) ایک چیز پہاڑ پر واقع ہے اور وہان تک ہم جا نہین سکتے اوسکی بلندی دریافت کرو



فرض کرو کہ ع سر اوس چیز کا ہی اور ع ق اوس چیز کی بلندی ہی اور ا اور ب سطح افق پر دو ایسے نقطے ہین کہ ع اور ق اور ا اور ب ایک ہی سطح راسی مین ہین اور فرض کرو کہ ع ق اور ب ا خارج ہو کر نقطہ س پر ملتے ہین اور زاویے ع ا س اور ق ا س اور ب پر زاویہ ع ب س اور خط ا ب ناپو

زاویہ ا ع ب = ع ا س ~ ع ب س کے ہے اسلئے وہ معلوم ہے

اب $\frac{\text{ا ع}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب ع ب ا}}{\text{جب ا ع ب}}$

اسیواسطے $\text{ا ع} = \frac{\text{ا ب جب ع ب ا}}{\text{جب ا ع ب}}$

زاویہ ع ا ق = ع ا س ~ ق ا س اور اسیواسطے زاویہ ع ا ق بہی معلوم ہے

زاویہ ع ق ا = ق س ا + ق ا س = ۹۰° + ق ا س اور اسیواسطے زاویہ ع ق ا معلوم ہوگیا

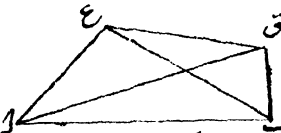
پس $\frac{\text{ع ق}}{\text{ع ا}} = \frac{\text{جب ع ا ق}}{\text{جب ع ق ا}}$

اسیواسطے $\text{ع ق} = \frac{\text{ع ا جب ع ا ق}}{\text{جب ع ق ا}}$

پس ع ق معلوم ہوگیا

اگر س ن کا دریافت کرنا منظور ہو تو وہ بھی دریافت ہو سکتا ہے اسواسطے کہ اس مثلث ع اس سے اور س ق مثلث ا س ق سے دریافت ہو سکتا ہے یا ہم ع س کو مثلث ع ا س سے دریافت کرین اور ع ق کو تفریق کرلین تو ق س دریافت ہو جائیگا

(۱۱۶) دو مقامون مین ہم جا سکتے ہین اور وہان سے دو مقام دکھائی دیتے ہین جہان ہم پہونچ نہین سکتے اونمین فاصلہ دریافت کرو



فرض کرو کہ ع اور ق وہ مقام ہین جہان ہم جا نہین سکتے اور ا اور ب وہ مقام ہین جہان ہم جا سکتے ہین اور وہان سے ع اور ق دکھائی دیتے ہین

اول ہم یہہ فرض کرتے ہین کہ ا اور ب اور ع اور ق چارون ایک سطح مین ہین

ا پر زاویہ ع ا ق اور ق ا ب مشاہدہ کے یعنی پیمایش کی اور ب پر سے زاویے ع ب ا اور ق ب ا مشاہدہ کئے اور ا ب کو ناپا

پس مثلث ا ع ب مین ضلع ا ب اور زاوئے ع ا ب اور ع ب ا معلوم ہین تو ع ا معلوم ہو جائیگا اور یہہ مثلث ا ب ق مین ضلع ا ب اور زاوئے ق ا ب اور ا ب ق معلوم ہین تو ا ق معلوم ہو جائیگا اور مثلث ع ا ق سے ضلع ا ع اور ا ق اور زاویہ ع ا ق کے معلوم ہونے سے ع ق معلوم ہوگا

اگر چارون نقطے ایک سطح مین نہون تو اتنا فرق پڑ جائیگا کہ زاویہ ع ا ب کو زاولون ع ا ق اور ق ا ب کی طرح مشاہدہ کرنا چاہئے کیونکہ اس صورت مین زاویہ ع ا ب برابر مجموعہ زاولون ع ا ق اور ق ا ب کے نہوگا

(۱۱۷) فرض کرو کہ دفعہ گذشتہ کی شکل مین ع ق کو ہم جانتے ہین اور اب کو بغیر ناپنے ہم دریافت کرنا چاہتے ہین اور ہم نے وہی زاویے مشاہدہ کئے ہین جو پہلے کئے تھے

اب ہم اس ترکیب کو عمل مین لاتے ہین

$$\text{ا ع} = \frac{\text{ا ب جب ع ب ا}}{\text{جب ا ع ب}}$$

$$\text{ا ق} = \frac{\text{ا ب جب ق ب ا}}{\text{جب ا ق ب}}$$

اور بموجب دفعہ ۱۰۶ کے

$$\text{ع ق}^2 = \text{ا ع}^2 + \text{ا ق}^2 - 2\,\text{ا ع} \cdot \text{ا ق جم ع ا ق}$$

اسیواسطے

$$\text{ع ق}^2 = \text{ا ب}^2 \left[\frac{\text{جب}^2 \text{ع ا ب}}{\text{جب}^2 \text{ا ع ب}} + \frac{\text{جب}^2 \text{ق ب ا}}{\text{جب}^2 \text{ا ق ب}} - \frac{2\,\text{جب ع ب ا جب ق ب ا جم ع ا ق}}{\text{جب ا ع ب جب ا ق ب}} \right]$$

اس صورت سے ہم اب کو دریافت کرسکتے ہین کیونکہ ع ق اور تمام زاویے جو واقع ہوتے ہین معلوم ہین مگر یہہ صورت قابلیت لوکارثم کی نہین رکھتی اسلئے عملاً ترکیب ذیل عمدہ ہے

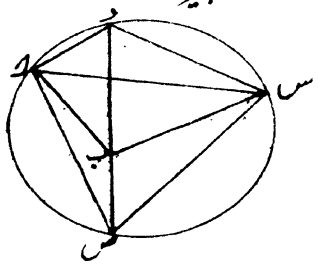
فرض کرو کہ دوسری شکل متشابہ اب ق ع کی اَ بَ قَ عَ سے تعبیر ہوتی ہے تو

$$\frac{\text{اب}}{\text{ع ق}} = \frac{\text{اَ بَ}}{\text{عَ قَ}}$$

پس کوئی سی قیمت اَ بَ کے واسطے فرض کرو اور دفعہ ۱۱۶ کی ترکیب سے سب شاہدے کئے ہوئے زاویون سے ع ق کو دریافت کرو اور پھر اب اس ربط معلوم سے جو ابھی اوپر لکھا ہے دریافت کرو

(۱۱۸) دفعہ آیندہ کا مضمون عملاً نہایت بکار آمد ہے معاملات جنگ اور اور کامون مین اوسے بہت کام نکلتا ہے اسمین یہہ بھی ضرور ہے کہ ہمکو فاصلہ کسی مقام کا بعض ایسی چیزون سے معلوم ہو کہ جہان ہم جا نہین سکتے اجھی نقشہ کی امداد سے فاصلے تین بلند چیزون کے ایک دوسرے سے تحقیق ہوسکتے ہین اور پھر زاویے مشاہدہ کرکے حساب لگائین تو اوسے فاصلہ ایک مقام کا ان چیزون سے دریافت ہوسکتا ہے اب ہم اس بات کو مثال

(۱۱۹) تین چیزون کے درمیان فاصلہ ایک دوسرے سے معلوم ہے ان چیزون کا فاصلہ اوس ایک مقام سے دریافت کرو جو اونکی چیزون کے ساتھہ ایک سطح مین واقع ہو



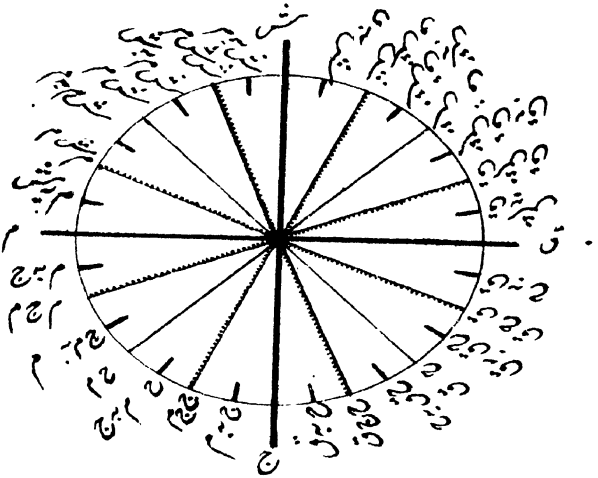
فرض کرو کہ ا اور ب اور س تین مقام ہین اور ا ب اور ب س اور س ا سب معلوم ہین اور فرض کرو کہ زاویے جو ا ب اور ب س کے محاذی اوس مقام پر واقع ہین مشاہدہ کئے اور ا پر زاویہ س ا د برابر اوس مشاہدہ کئے ہوئے زاویہ کے بناؤ جو اوس مقام پر محاذی ب س کے ہے اور نقطہ س پر زاویہ ا س د برابر اوس مشاہدہ کئے ہوئے زاویہ کے بناؤ جو اوس مقام پر محاذی ا ب کے واقع ہو شلث ا س د کے گرد دائرہ بناؤ اور د ب کو بڑہاؤ کہ محیط سے پھر ص پر ملے تو ص مقام کو تعبیر کریگا

اسواسطے کہ بحکم (۲۱ ش ۳ م) کے زاویہ ب ص س = زاویہ س ا د اور زاویہ ب ص ا = زاویہ ا س د کے اسسے معلوم ہوا کہ زاویے جو ص پر محاذی ب ا اور ب س کے واقع ہوئے ہین برابر اون زاویونکے ہین جو اوس مقام پر مشاہدہ کئے جائین اسواسطے ص سے وہ مقام تعبیر ہوتا ہے پس ص ا اور ص ب اور ص س مطلوب تین فاصلون کو تعبیر کرتے ہین اب ہم تبلاتے ہین کہ اونکا حساب کس طرح سے ہوتا ہے

شلث ا د س مین ضلع ا س اور زاویے س ا د اور ا س د معلوم ہین تو ا د معلوم ہوجائیگا اور شلث ا ب س مین تمام ضلعے معلوم ہین تو زاویہ ب ا س معلوم ہوجائیگا اسے زاویہ ب ا د معلوم ہوا شلث ب ا د مین اضلاع ا ب اور ا د اور زاویہ ب ا د معلوم ہین اور زاویے دریافت ہوسکتے ہین شلث ا ب ص مین ضلع ا ب اور زاویے ا ص ب

اور لاب ص معلوم ہین پس اضلاع ص لا اور ص ب بھی معلوم ہوگئی تو مثلث اص س مین تین ضلا
اس اور اص اور زاویہ اص س معلوم ہین ضلع ص س دریافت ہوسکتا ہے

(۱۲۰) بعض بعض سوالات مین خطوط مستقیم کی سمتین کنیاس بحری کی اصطلاحات
مین بیان کی جاتی ہین اب ہم اوسکی تفصیل بیان کرتے ہین



محیط اس دائرہ کا ۳۲ برابر حصون مین تقسیم کیا گیا ہے پس ۳۲ نقطے اور اونکے نام شکل مین
لکھے ہوئے ہین اور ہمنے مغرب کی جگہ م اور مشرق کی جگہ ش اور جنوب کی ج اور
شمال کی ش لکھدیے ہین

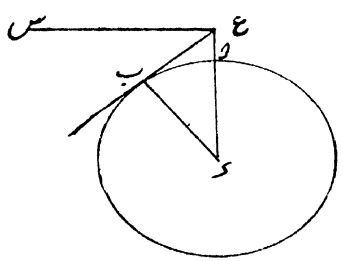
زاویہ کسی دو متصل کے نقطون مین $\frac{360°}{32}$ یعنی $11\frac{1}{4}°$ ہے

پس جب ان ناموں سے سمتین خطوط کی معلوم ہوتی ہین تو اونکے درمیانی زاویون کو
بہت آسانی سے معلوم کرسکتے ہین مثلاً اگر ایک چیز ش مج مین مشاہدہ کرنوالی کی

اور دوسری ق ج ۔ ق مین دکھائی دے تو زاویہ درمیان خطوط مستقیم کے جو شاہد کرنیوالے کے مقام سے ان چیزون کی طرف کھینچی جائین ۶ × ۱۱ ½ یعنی ۶۷ ½ ہوگا

(۱۲۱) **پستی افق** زمین کی شکل کرہ کی سی تحقیق ہوئی ہے

فرض کرو کہ سطح زمین سے کچھ اوپر ایک نقطہ لین اور اوسی خطوط مستقیم زمین کو مس کرتے ہوئے کھینچین اور سطح زمین کی ناہمواری کو ملحوظ خاطر نہ رکھین تو یہہ خطوط مستقیم زمین کو اون نقطون پر مس کرینگے جو ایک دائرہ کی محیط مین واقع ہین اس دائرہ سے وہ قطعہ زمین محدود ہوتا ہے جو دیکھنے والے کو اوس نقطہ سے کہ خطوط مستقیم مماس نکالے ہین دکھائی دیتا ہے اور اسکو مشاہدہ کرنے والا افق ارضی کہتے ہین



فرض کرو کہ ک مرکز زمین ہے اور ع نقطہ سطح زمین سے اوپر ہے اور نقطہ ع سے ع ب خط مستقیم سطح کو ب پر مس کرتا ہوا کھینچا گیا ہے تو ب افق پر ایک نقطہ ہوگا ع ک پر ع س زاویہ قائمہ بناتا ہوا اوس سطح مین کھینچو جسمین ع اور ک واقع ہین تو زاویہ س ع ب کو پستی افق نقطہ ع پر کہینگے فرض کرو کہ ع ک سطح کو نقطہ د پر قطع کرتا ہے اور زاویہ ب ع س کا حر سے تعبیر ہوتا ہے تو یہہ ارتباطات قائم ہونگے

زاویہ ب ک ع = ب ع س = حر

ق ع = ک ب قط حر

$$\text{ا ع} = \text{ز ع} - \text{ز ا} = \text{ز ا (قطا حر} - 1) = \frac{\text{ز ا (ا حم حر)}}{\text{حم حر}}$$

$$\text{ع ب} = \text{ز ب مس حر} = \frac{\text{ا ع حم حر}}{\text{ا} - \text{حم حر}} \text{ مس حر} = \frac{\text{ا ع حس حر}}{\text{ا} - \text{حم حر}}$$

$$= \text{ا ع مم کھ} \quad \text{بموجب دفعہ ۳۵}$$

فاصلہ افقی اور پستی افق سے جو سوالات متعلق ہوتے ہیں اونکے حل کرنیمیں یہہ ارتباطات بڑے بکار آمد ہیں ایک قانون علم ہندسہ پر موقوف ہے وہ بآسانی یہاں بیان ہو سکتا ہے بحکم (۳۶ ش ۳ م) کے ہمکو معلوم ہے کہ

$$\text{ع ب}^2 = \text{ع ا} (\text{ع ا} + 2 \text{ ز ا})$$

اب تمام صورتوں میں عمل کی ع ا بمقابلہ ۲ ز ا کے نہایت چھوٹا ہوتا ہے اسواسطے تقریباً

$$\text{ع ب}^2 = 2 \text{ ع ا ز ا}$$

ز ا میں تعداد میلوں کی تقریباً ۳۹۶۰ میل ہیں اور فرض کرو کہ ع ب میں ن تعداد میلوں کی ہے تو ع ا میں تعداد فٹوں کی

$$= \frac{(\text{ن} \times ۵۲۸۰)^2}{۵۲۸۰ \times ۳۹۶۰ \times ۲} = \frac{۵۲۸ \text{ ن}^2}{۳۹۶ \times ۲} = \frac{۲}{۳} \text{ ن}^2$$

پس اگر ن = ا تو ھہ = $\frac{۲}{۳}$ ایک فٹ = ۸ ایچ کے نہایت قریب اگر ن = ۲ تو

ھہ = ۴ فٹ کی $\frac{۲}{۳}$ = ۳۲ ایچ کے نہایت قریب

سطح آب گو مستوی معلوم ہو مگر وہ فی الحقیقت منحنی ہوتی ہے اور اوپر کے حساب سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر کوئی چیز ۸ ایچ سے کچھہ کم ٹہری ہوئی پانی کی سطح کے اوپر قائم ہو تو سطح زمین پر ایک میل کے فاصلہ سے آنکھہ کو نہیں دکھائی دیگی

(۲۲) اصطلاح زاویہ پستی کی بلندی اور فاصلوں کی سوالات میں بعض اوقات مستعمل ہوتی ہے ایسی صورتوں میں مشاہدہ کرنے والا سطح زمین سے اونچا نقطہ ع پر خیال کیا جاتا ہے اور زاویہ پستی کسی نقطہ کا وہ زاویہ ہے جو درمیان خط مستقیم ع س اور اوس خط مستقیم کے واقع ہو جو نقطہ ع سے ع س سے نیچے کسی نقطہ تک کھینچا جائے اور علی ہذا القیاس زاویہ

بلندی کسی نقطہ کا وہ زاویہ ہے جو درمیان ع س اور اوس خط مستقیم کے واقع ہے جو نقطوع سے ع س کے اوپر کسی نقطہ تک کھینچا جاے

مثالین ۱۲

(۱) ۱۰۸ فیٹ بلند برج سے جو ایک ستون دیکھا تو اوسکے سر اور جڑ کے زاویے پستی ۳۰° اور ۶۰° کے مشاہدہ مین آئے اوس ستون کا ارتفاع دریافت کرو

(۲) ایک پہاڑ کی جڑ سے زاویہ بلندی اوسکی چوٹی کا ۴۵° مشاہدہ ہوا اور جب ۵۰ فٹ کے ڈھلان پر پہاڑ کی ایک میل چڑھی تو اوسکی بلندی کا زاویہ ۶۰° مشاہدہ مین آیا پہاڑ کی بلندی دریافت کرو

(۳) ایک پہاڑ کی طرف ا اور ب دو مقام ہین اور زاویہ میلان پہاڑ کا افق کے ساتھ ۳۰° ہے اور ا اور ب مین فاصلہ ۵۰۰ گز کا ہے اور اس ایک اور پہاڑ کی چوٹی اوسی سطح عمودی مین واقع ہے جسمین ا اور ب ہین اور ا کے ساتھ وہ ہموار ہی اور ب پر اوسکا زاویہ بلندی افق پر ۴۵° ہے ا اور اس کے درمیان فاصلہ دریافت کرو

(۴) ایک جہاز ٹھیک مشرق کی طرف ۱۲ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتا تھا وہ دوپہر کو ۱۵° مشرق کی طرف جنوب کی دکھائی دیا ایک گھنٹہ ۳۰ منٹ بعد دوپہر کے جہاز جنوب مشرق کو دکھائی دیا تو جہان سے جہاز اول دکھائی دیا تھا وہان سے فاصلہ دریافت کرو

(۵) ایک شخص کو فاصلہ مقام س کا دریافت کرنا تھا اوسنے ا ب کو ناپا وہ ۱۰۰ گز لنبا تھا اور زاویے ب ا س اور ا ب س مشاہدہ کئے تو وہ ۵۳° ۲۰′ اور ۵۹° ۳۰′ کے نکلے فاصلہ س کا ا سے دریافت کرو

ل جب ۵۹° ۳۰′ = ۹٫۹۳۵۳۲۰۴ لوگ ۹۳۴۸۹ = ۹٫۹۷۰۷۶۰۵

ل جب ۶۷° ۲۰′ = ۹٫۹۶۴۵۶۰۲

(۶) ایک شخص دریا کے کنارہ پر کھڑے ہوکر دیکھتا ہے کہ درخت کی چوٹی کا زاویہ بلندی ۱۵° ہے اور جب وہ دریا کے کنارہ سے ۳۰ فیٹ پرے ہٹتا ہے تو زاویہ بلندی ۴۵° کا ہوتا

تو عرض دریا کا دریافت کرو

ل جب ۴۶° = ۹٫۸۵۶۹۳۴۱ لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ ٫۰

ل جب ۳۹° = ۹٫۷۹۸۸۷۱۸ لوک ۱۵۵۸۲۳ = ۱۹۲۶۳۱۶ ٫۱

ل جب ۸° = ۹٫۹۴۰۲۹۶۰ ٫۸

(۷) ایک پہاڑ کی چوٹی پر سے میں نے ہموار زمین پر ایک خط مستقیم میں دو میل کے تہرد یکھے اور اونکے زوایا پستی ۸° اور ۱° تھی تو پہاڑ کی بلندی دریافت کرو

ل جب ۸° = ۹٫۹۴۰۲۹۶۰ ٫۸ لوک ۱۲۹۹۰ = ۱۱۳۶۰۹۲ ٫۴

ل جب ۱° = ۹٫۲۳۹۶۷۰۲ ٫۹ لوک ۱۲۹۹۱ = ۱۱۳۶۴۲۶ ٫۴

ل جب ۱° = ۹٫۴۱۳۹۹۶۲ ٫۹

(۸) پہاڑ کا زاویہ میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے اور اوسکی چوٹی پر ایک قلعہ ہے اور پہاڑ کی جڑ پر اس قلعہ کے محاذی زاویہ ۱° کا مشاہدہ مین آیا اور جب ۴۸۵ فیٹ پہاڑ پر چڑھے تو قلعہ کے محاذی زاویہ ۳۰° کا ہوا تو قلعہ کی بلندی بتاؤ اور پہاڑ کی جڑ سے اوسکا فاصلہ

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ ٫۰ لوک ۱° = ۲۸۰۰۱۵ = ۲٫۴۴۷۱۸۱۳

لوک ۴۸۵ = ۲٫۶۸۵۷۴۱۷

(۹) اب س د ایک مستطیل قطعہ آب ہے اوسکا طول عرض دریافت کرتے ہین مگر زمین ایسی ہموار واقع ہوئی ہے کہ ہم صرف زاویہ ب س کے محاذی نقطہ ا اور نقطہ ع پر کہ ۲۲۰ فیٹ کے فاصلہ پر ا سے ب ا خارج شدہ مین واقع ہے مشاہدہ کر سکتے ہین پہلا زاویہ ۱۲° اور دوسرا زاویہ ۵۵° تو اس مستطیل کا طول اور عرض دریافت کرو

لوک جب ۱۶° = ۹٫۴۴۰۳۳۸۱ لوک ۲٫۲۲ = ۳۴۴۲۲۷ ٫

لوک جب ۵۵° = ۹٫۹۱۳۳۶۴۵ لوک ۲٫۱۲۸۵۸ = ۳۲۸۰۹۰۰ ٫

ل جب ۱۷° = ۹٫۹۷۵۶۷۰۱ لوک ۱٫۱۸۱۸۶ = ۹۱۱۱۹۳ ٫

ل جم ۱۷° = ۹٫۵۱۲۶۴۱۹

(۱۰) ایک پیمایش مین ایسی ضرورت آن پڑی کہ خط مستقیم اب کو جاری رکھین مگر ایک روک ایسی آگئی کہ اوسکے ارتفاع کے سبب سے او سے پری کے حصے دکھائی نہین دیتے تھے اسلئے ایک خط اب پر زاویۂ قائمے بناتا ہوا خط مستقیم ب د پر نایا اور نقطہ د سے خطوط مستقیم دع اور دق کھینچے گئے جو اوس روک کو مٹاتے ہین اور زاویۂ ب دع اور ب دق ۴۱° اور ۴۸° کے پیمایش مین آئی اور ب د کا فاصلہ ۱۰۸ گز کا ہی تو دع اور دق کا کیا طول رکھین کہ یہہ تحقیق ہوجاے کہ دع ق اب کے بڑہانے سے پیدا ہوا ہے

ل جم ۴۱° = ۹٫۸۷۷۷۷۹۹ لوک ۱٫۵۸ = ۲۵۵۲۷۲۵ ٫

ل جب ۴۲° = ۹٫۸۵۰۷۳۵۷۵۴ لوک ۲٫۳۸۵۰۲ = ۳۷۷۴۹۲۰ ٫

لوک ۴٫۸۰۵۰۴ = ۶۸۱۶۹۷۰ ٫

(۱۱) ایک جہاز محاصرہ کئے ہوئے ایک بندرگاہ سے جنوب کو ۴ میل کے فاصلہ پر پڑا ہوا تہا اوسنے دیکہا کہ بندرگاہ سے ایک جہاز سمت ق ب ج سے چلا اگر یہہ جہاز محاصرہ کرنے والا ۱۲ میل فی گہنٹہ کی رفتار سے چلے تو بتاؤ کس سمت مین حرکت کرے کہ پون گہنٹہ مین اوس جہاز کی راہ کو کاٹے

لوک جب ۳۸° = ۹٫۸۵۸۵۲۷۱۶ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ٫

ل جب ۳۹° = ۹٫۸۵۸۵۵۷۴۵ لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ ٫

(۱۲) ایک جہاز شمال کو اور دوسرا شرق کو جاتا ہے اور اونکی رفتارین یکسان ہین اور مقام پہلے جہاز کا بلحاظ دوسرے جہاز کے ق و ش رق ہے اور جب چار میل ہر یک جہاز چلا تو مقام

لحاظ ایک دوسرے کے ش ش م تہا تو بتاؤ اول مشاہدہ کے وقت جہازوں میں فاصلہ کیا تہا

(۱۳) میں ج و م کے سمت میں جاتا تہا تو میں نے دو جہاز لنگر ڈالے ہوئے دیکھے ایک ش ش و م میں تہا اور دوسرا م و ش م میں ۵ میل چلکر ان جہازوں کو دیکھا تو یہ جہاز ش ش اور ش و م میں دکہائی دیئے تو او نکا مقام اور فاصلہ ایک دوسرے سے دریافت کرو

(۱۵) جہاز سمندر کی سطح ہموار سے ۲۰ فیٹ اونچا تہا اوسکی پتوار پر سے ایک شخص نے روشنی گہر کی چوٹی کو دیکہا اور جب وہ مستول پر سے کہ ۶۰ فیٹ بلند پتوار سے تہا چڑہا تو اوسکو روشنی گہر کی کہڑکی دکہائی دی اور کہڑکی سمندر کی سطح ہموار سے روشنی گہر کی بلندی سے چوتہائی بلند تہی تو اوس شخص کا فاصلہ روشنی گہر سے بتاؤ اور اوسکا ارتفاع اور فرض کرو کہ زمین کرہ ہی اور ۴۰۰۰ میل نصف قطر ہے

(۱۶) دو مشاہدہ کرنے والے ایک سطح افقی پر ۲۰۰ گز کے فاصلہ سے ارتفاع اور مقام ایک قلعہ کی چوٹی کا دیکہتے ہیں اونمیں ایک کا ارتفاع ۶۰° کا اور مقام ج و م تہا اور دوسرے کا ارتفاع ۵۴° اور مقام م تہا قلعہ کا ارتفاع دریافت کرو

(۱۷) ایک علم ط فیٹ بلند برج کے اوپر کہڑا ہوا ہے جس سطح افقی پر برج قائم ہے اوسے مقام س پر اوس علم کے محاذی زاویہ ا برابر برج کے محاذی زاویہ کے بنتا ہے تو ثابت کرو کہ بلندی برج کی = ط جم ۲ ا

(۱۸) مثلث ا س ب کے ضلع ا ب کے اوپر ا سے ی کی طرف ایک شخص ط گر گیا اور زاویہ ا ی س = حر کے مشاہدہ کیا اور پہر ضلع ب ا پر ب سے ف کی طرف ص گر گیا اور زاویہ س ف ب = حر کے مشاہدہ کیا اور کل فاصلہ ا ب برابر س کے ہے مثلث ا ب س کو حل کرو

(۱۹) ایک برج کی چوٹی کے زاویے بلندی سہ و صہ و حر مقامات ا و ب و س پر ہیں اور یہہ مقامات افقی خط مستقیم میں ہیں جو برج کی سیدہ میں نہیں ہے اور فاصلہ ا کا ب سے ع اور ب کا س سے ق ہے اور ب درمیان ا اور س کے ہے تو ثابت کرو کہ

ع مم جب + ق مم سہ بڑا بہ نسبت (ع + ق) مم صہ کے ہے

(۲۰) ایک بادل کا زاویہ ارتفاع سہ تہا اور آفتاب کا زاویہ ارتفاع اوسی سمت مین صہ تہا اور فاصلہ سایہ کا مشاہدہ کرنیوالے کے مقام سے تین فیٹ تہا ثابت کرو کہ بلندی بادل کی

$$\frac{\text{س جب سہ جب صہ}}{\text{جب (سہ − صہ)}}$$ فیٹ ہے

نیچے کی مثالون کے حل کرنیمین جدول کی ضرورت ہوگی

(۲۱) ایک کہر کی مین بیٹہے بیٹہے یہہ بات دیکہنے مین آئی کہ زاویہ بلندی ایک مکان کی چوٹی کا گلی کے متقابل سمت مین ۹° ہے اور زاویہ پستی اوسکی جڑ کا ۶° ہے اور عرض گلی کا ۸۰ فیٹ ہے تو ارتفاع مکان کا دریافت کرو

(۲۲) دو پہاڑ ایک خط مستقیم مین ہین اور اونکے زاویے بلندی ایک مشاہدہ کرنیوالے شخص کو ۹° ۳۰′ اور ۱۸° ۲۰′ دکہائی دیئے اور جب چار میل اونکے قریب یہہ شخص گیا تو دونو کے زاویے بلندی کے ۳۷° دکہائی دینے لگے پہاڑون کی بلندی گزون مین دریافت کرو

(۲۳) ع اور ق دو چیزین ہین جہان ہم جانہین سکتے اور ایک خط مستقیم اب اوسی سطح مین ہے جسمین ع اور ق ہین ناپا تو ۲۸۰ گز نکلا اور زاویہ ع اب کا ۹۵° ہے اور زاویہ ق اب کا ۴۷° ۳۰′ ہے زاویہ ق ب ا کا ۱۰° ۱′ ہے اور زاویہ ع ب ا کا ۵۲° ۲۰′ ہے طول ع ق کا دریافت کرو

(۲۴) ا اور ب اور س تین چیزین ہین اور اونکے درمیان فاصلے معلوم ہین ا ب = ۱۰۵۶ گز اور ا س = ۹۲۴ گز اور س ب = ۱۶۷۰ گز اگر ایک مشاہدہ کرنیوالا مقام ص پر بیٹہا جہان سے س ٹہیک سامنے ا کے دکہائی دیا اور زاویہ س ص ب ۴۴° ۱۲′ کا مشاہدہ مین آیا فاصلہ س ص کا دریافت کرو

(۲۵) ا اور ب اور س تین چیزین ہین جنکے درمیان فاصلے بتفصیل ذیل معلوم ہین کہ ا ب = ۳۲۰ گز ا س = ۶۰۰ گز ب س = ۵۳۴ گز مقام ص پر یہہ مشاہدہ مین آیا کہ

ا ص ب = ۵۰° اور ب ص س = ۳۰° فاصلے ص کے ا اور ب اور س سے دریافت کرو اور نقطہ ب نقطہ ص کے قریب تر ہے اور زاویہ ا ص س مجموعہ زاویوں ا ص ب اور ب ص س کا ہے

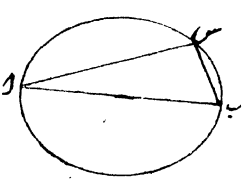
تیرھوان باب

حل موافق ہندسہ

(۱۲۳) اس باب مین سوالات علم مثلث کا حل موافق علم ہندسہ کے لکھا جاتا ہے

(۱۲۴) ایک زاویہ بناؤ جسکی جیب یا جیب التمام معلوم ہے

فرض کرو کہ وہ زاویہ بنانا منظور ہے جسکی جیب ایک مقدار معلوم ط ہے



ایک دائرہ کھینچو جسکا قطر واحد ہو اور کوئی قطر اس دائرہ کا ا ب کھینچو اور ب کے مرکز اور ط کے برابر نصف قطر لیکر ایک دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ س وہ نقطہ ان دو نقطون مین سے ہے جنپر دائرے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہین ملاؤ ا س اور ب س

پس بحکم (اصل ۳۱ ش ۳ م) کے زاویہ ا س ب قائمہ ہے اور اسواسطے جیب ب ا س کی ا ب یعنی ط ہے اسواسطے زاویہ مطلوب ب ا س ہے

اگر ہمکو یہہ مطلوب ہو کہ ایک زاویہ ایسا بنائین جسکی جیب التمام ایک مقدار معلوم ط ہو تو شکل اسیطرح بنالو جسطرح پہلے بنائی تھی تو زاویہ ا ب س زاویہ مطلوب ہوگا

(۱۲۵) اگر زاویہ ایسا بنانا منظور ہو کہ جسکا قاطع الزاویہ معلوم ہو تو اس سبب سے کہ قاطع التمام

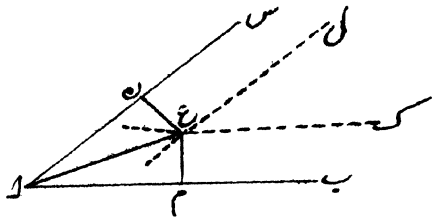
تمکافی جیب زاویہ کا ہوتا ہے اسواسطے وہ بموجب دفعہ گذشتہ کے دریافت ہوسکتا ہے
اور علی ہذا القیاس اگر ایک زاویہ بنانا ایسا منظور ہو کہ جسکا قاطع الزاویہ معلوم ہو یا جیب
معکوس معلوم ہو تو ضرور ہے کہ اوسکی جیب التمام معلوم ہو اسلئے وہ موافق دفعہ گذشتہ کے
دریافت ہو جائیگا

(۱۲۶) ایک زاویہ بناؤ جسکا مماس یا مماس التمام معلوم ہو

فرض کرو کہ زاویہ ایسا بنانا مطلوب ہے جسکا مماس ایک مقدار معلوم ط ہو

اگر کسی زاویہ کا مماس ط ہو تو جیب التمام اوسکی $\frac{1}{\sqrt{ط^2+1}}$ اور جیب $\frac{ط}{\sqrt{ط^2+1}}$
اسلئے ان مقداروں کے معلوم ہونے کے سبب سے زاویہ بموجب دفعہ ۱۲۴ کے بن سکتا ہے
یا ہم اسکو اور جداہی طور سے حل کر سکتے ہیں

ایک خط مستقیم ا ب جسکا طول واحد ہو مقرر کرو اور ب س عمود زاویۂ قائمہ بناتا ہوا
ا ب پر برابر ط کے بناؤ اور ملاؤ س ا
پس مماس ب ا س کا $\frac{س ب}{ا ب}$ یعنی ط ہوا اسواسطے ب ا س زاویہ مطلوب ہے
اگر سکو زاویہ ایسا بنانا منظور ہو کہ جسکا مماس التمام ایک مقدار معلوم ط ہو تو شکل
اسیطرح بناؤ جس طرح پہلے بنائی تھی تو زاویہ ا س ب کا زاویہ مطلوب ہوگا
(۱۲۷) زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ اونکی جیبوں میں ایک نسبت معلوم ہو
فرض کرو کہ ا ب س زاویہ معلوم ہو اور مطلوب یہہ ہے کہ اوسکو ایسے دو حصوں میں تقسیم کریں
کہ ایک حصہ کی جیب کو دوسرے حصہ کی جیب سے وہ نسبت ہو جو م کو ہی ن سے
ایک خط مستقیم ک ع متوازی ا ب کا اوسی م فاصلہ پر کھنچو اور ایک خط مستقیم ک ع متوازی



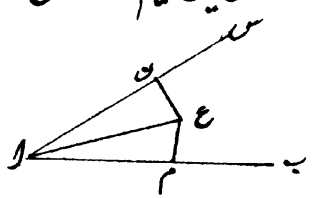
اس کا اوسے ن فاصلہ پر کھینچو اور فرض کرو کہ ع ان خطوط مستقیم کا نقطہ تقاطع ہو ملاؤ
اع تو اع زاویہ ب اس کو حسب مراد تقسیم کریگا
اسواسطے کہ ع م عمود اب پر اور ع ن عمود اس پر نکالو تو

$$\text{جب ع اب} = \frac{\text{ع م}}{\text{اع}} = \frac{\text{م}}{\text{اع}}$$

$$\text{اور جب ع اس} = \frac{\text{ع ن}}{\text{اع}} = \frac{\text{ن}}{\text{اع}}$$

$$\text{اسواسطے} \frac{\text{جب ع اب}}{\text{جب ع اس}} = \frac{\text{م}}{\text{اع}} \div \frac{\text{ن}}{\text{اع}} = \frac{\text{م}}{\text{اع}} \times \frac{\text{اع}}{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

(۱۲۸) زاویہ معلوم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ اونکی جیب التمامون میں ایک نسبت معلوم ہو



فرض کرو کہ ب اس زاویہ معلوم ہے اور مطلوب یہہ ہے کہ اوسکو ایسے دو حصون میں تقسیم کریں کہ
ایک حصہ کی جیب التمام کو دوسرے حصہ کی جیب التمام سے وہ نسبت ہو جو م کو ہی ن سے
اب پر ام = م اور اس پر ان = ن کے بناؤ اور م ع زاویہ قائمہ بناتا ہوا
اب پر اور ن ع زاویے قائمے بناتا ہوا اس پر کھینچو اور فرض کرو کہ یہہ خطوط مستقیم
نقطہ ع پر ملیں ملاؤ اع تو اع زاویہ ب اس کو حصص مطلوب میں تقسیم کریگا

اسواسطے کہ جم ع اب = $\frac{\text{م}}{\text{ا ع}}$ = $\frac{\text{م}}{\text{ا ع}}$

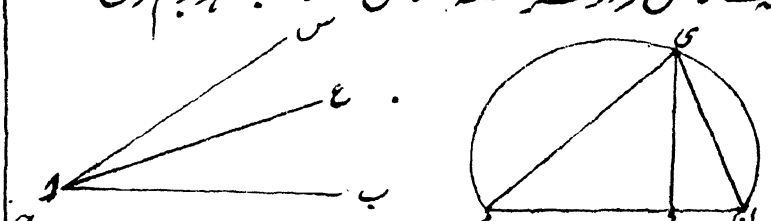
جم ع اس = $\frac{\text{ان}}{\text{ا ع}}$ = $\frac{\text{ن}}{\text{ا ع}}$

اسیواسطے $\frac{\text{جم ع ا ب}}{\text{جم ع ا س}}$ = $\frac{\text{م}}{\text{ا ع}} \div \frac{\text{ن}}{\text{ا ع}}$ = $\frac{\text{م}}{\text{ا ع}} \times \frac{\text{ا ع}}{\text{ن}}$ = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

اگر نقطہ ع زاویہ ب اس کے درمیان نہ واقع ہو تو ہم اوسسے یہہ نتیجہ نکالینگے کہ زاویہ دو حصون مین موافق دعوی کے نہین تقسیم ہوسکتا

(۱۲۹) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصونمین تقسیم کرو کہ اونکے مماسون مین ایک نسبت معلوم ہو

فرض کرو کہ ب اس زاویہ معلوم ہوا ور منظور یہہ ہو کہ اوسکو ایسے دو حصونمین تقسیم کرین کہ ایک حصہ کے مماس کو دوسرے حصہ کے مماس سے وہ نسبت ہو جو م کو ن سے



کوئی خط مستقیم م ن مقرر کرو اور اوسکو د پر تقسیم کرو ایسا کہ دم کو دن سے وہ نسبت ہو جو م کو ن سے م ن پر قطعہ دائرہ بناؤ جسکا زاویہ برابر زاویہ ب اس کے ہو اور دی زاویے قائمے بناتا ہوا م ن پر محیط سے نقطہ ی پر ملتا ہوا کھینچو ملاؤ ی م اور ی ن پس ی زاویہ م ی ن کو حسب مراد تقسیم کریگا

اسواسطے کہ مس دی م = $\frac{\text{دم}}{\text{دی}}$ مس دی ن = $\frac{\text{دن}}{\text{دی}}$

اسیواسطے $\frac{\text{مس دی م}}{\text{مس دی ن}}$ = $\frac{\text{دم}}{\text{دی}} \div \frac{\text{دن}}{\text{دی}}$ = $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

نقطہ ا پر خط مستقیم اب کے زاویہ ع اب برابر زاویہ دی ن کے بناؤ تو ع اس برابر دی م کے ہوگا اور ا ع زاویہ ب اس کو حسب مراد تقسیم کریگا

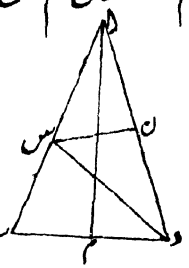
(۱۳۰) زاویہ معلوم کو ایسی دو حصون مین تقسیم کرو کہ اونکے مماس التمامون مین ایک نسبت معلوم ہو

یہہ سوال اوپر کے سوال کی طرح حل ہوسکتا ہے اسواسطے کہ جو باتین اوپر مقرر کی ہین اوسکی موافق

جم دی م = $\frac{\text{دی}}{\text{دم}}$ جم دی ن = $\frac{\text{دی}}{\text{دن}}$

اسواسطے جم دی ن / جم دی م = $\frac{\text{دی}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دی}}{\text{دم}} = \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$

(۱۳۱) اقلیدس کے ایک شکل علمی کی استعانت سے ۱۸° کے زاویہ کی علم مثلثی نسبتوں کی قیمت دریافت کرسکتے ہیں



(۱۰ش ۴م) اقلیدس سے ہم کو نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ

ا ب د مثلث میں ا ب = ا د کے ہو اور س ایسا نقطہ ہو کہ ا ب × ب س = ا س۲ اور ا س = ب د کے تو ہر یک زاویہ ب اور د میں سے دو چند زاویہ ا سے ہوگا

اسے معلوم ہوا کہ زاویہ ا پانچوان حصہ ذو قائمتین کا ہے اور اسواسطے اوسمیں ۳۶° ہیں اور ہر یک زاویہ ب اور د پر ۷۲° کا ہے

ا م عمود ب د پر نکالو تو زاویہ ب ا م میں ۱۸° ہونگے

چونکہ ا ب . ب س = ا س۲ تو

ا ب (ا ب − ا س) = ا س۲

پس $\frac{\text{ا س}^2}{\text{ا ب}^2} + \frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} - ۱ = ۰$

اس مساوات کے حل کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

ہمکو اوپر کی علامت لینی چاہئے اسواسطے کہ $\frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}}$ مثبت مقدار ہے پس

$\frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$

ا ب جب ۱۸° = $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ب}} = \frac{۱}{۲}$ $\frac{\text{ب ا}}{\text{ا ب}} = \frac{۱}{۲}$ $\frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$

پس اسے معلوم ہوا کہ اور علم مثلثی نسبتوں کی قیمتیں زاویہ ۱۸° کی ہم اوپر کی قیمتوں سے دریافت کر سکتے ہیں

اسواسطے کہ جم ۹۸° = ۱ − جب² ۱۸° = ۱ − $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$= 1 - \frac{\sqrt{5}-6}{16} = \frac{\sqrt{5}+10}{16}$

اسیواسطے جم ۱۸° = $\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+10)}{16}}$

اور علی ہذا القیاس ۱۸° کی اور علم مثلثی نسبتوں کی کیفیت ہے

اب پھر س ن عمود ا د پر نکالو

تو جم ۳۶° = $\frac{\text{ا ن}}{\text{ا س}}$

اور ا ن = ن د اسواسطے کہ مثلث ا س ن اور د س ن سب طرح سے آپسمیں برابر ہیں

اور دلیل اسکی وہی ہے جو (۱۰ ش ۴ م) میں بیان ہوئی

جم ۳۶° = $\frac{1}{2}$ $\frac{\text{ا د}}{\text{ا س}} = \frac{1}{1-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}$

$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

اب اس نتیجہ کو بغیر شکل کے طرف رجوع کرنے کے بھی ثابت کر سکتے ہیں اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۳۵ کے جم ۳۶° = ۱ − ۲ جب² ۱۸° = ۱ − $\frac{2(\sqrt{5}-1)^2}{16}$ = ۱ − $\frac{\sqrt{5}-3}{4}$

$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

پس جب ۳۶° = $\sqrt{\frac{(1-\text{جم}^2 36)}{}}$ = $\sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})}{16}}$

اور علی ہذا القیاس اور ۳۶° کے علم مثلثی نسبتوں کی کیفیت ہے

مشالین ۱۳

(۱) ایک زاویہ اپنی تمامی سے چوچند ہے اوس زاویہ کو دریافت کرو

(۲) ایک زاویہ کی جیب برابر دوسرے زاویہ کی جیب التمام کے ہے اور ایک زاویہ میں تعداد درجون کی دوسرے زاویہ کے فرانسیسی درجون سے تین پانچوین حصہ کے برابر ہے زاویونکو دریافت کرو

(۳) وہ زاویہ بناؤ جسکا مماس چوچند اوسکی جیب سے ہو

(۴) ایک زاویہ معلوم کو ایسے دو حصون مین تقسیم کرو کہ ایک حصہ کی جیب کو دوسرے حصہ کے جیب التمام سے ایک نسبت معلوم ہو

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{\text{مس ا + مس ب}}{\text{مم ا + مم ب}}$ = مس ا مس ب

(۶) ثابت کرو کہ کسی ذوار بعۃ الاضلاع کا رقبہ برابر ہوتا ہے دو قطرون کے حاصلضرب اور اونکے درمیانی زاویہ کے جیب کے

(۷) صورت شبہ مین جب طا و طب اور ا معلوم ہو تو ثابت کرو کہ تیسرے ضلع کے دونو قیمتونکے مجذورون کا تفاوت ۴ طب جم ا $\sqrt{(\text{طا}^2 - \text{طب}^2 \text{جب}^2 \text{ا})}$ کے برابر ہے

(۸) اگر $\frac{\text{جب صہ}}{\text{جب سہ}} = \sqrt{2}$ اور $\frac{\text{مس صہ}}{\text{مس سہ}} = \sqrt{3}$ تو سہ اور صہ کو دریافت کرو

(۹) اگر جب ا جب ب = جب سہ جب صہ اور جم ا جم ب = جم سہ جم صہ

اور جم^2 ا + جم^2 ب − جم^2 فر = ۱

تو جب^2 سہ + جب^2 صہ = جب^2 فر

(۱۰) اگر جم لہ = ن جب سہ اور مم لہ = جب سہ جم صہ تو

$$\text{جم}^2 \text{صہ} = \frac{\text{ن}^2}{1 + \text{ن}^2 \text{جم}^2 \text{سہ}}$$

(۱۱) اگر قم^2 = جم م مس جر اور قط^2 جر = ن م جر

تو $(\text{م ن})^3 = (\text{مم} + \text{مان})^4$

(۱۲) ایک پہاڑ جہاز کی پتوار سے شش وشش وم مین دکھائی دیا اور جب جہاز ۱۰۰ میل سمت ق وشش مین چلا تو یہہ جہاز مغرب مین معلوم ہونے لگا تو بتاؤ پہاڑ کا فاصلہ مشاہدہ کی جگہہ سے کیا تہا

(۱۳) اس افق ہے اور اب اور س د دو عمودی بیچ ہین زاویہ بلندی د کا مقام ا سے ہے اور ب پر صہ ہے اور اب = ھہ تو اس اور س د کو دریافت کرو

(۱۴) اگر طا = ۱۰ اور طب = ۸ اور طس = ۱۲ تو زاویئے دریافت کرو

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ۹ لوک جم ۴۱° ۲۴′ = ۹ ۸۷۵۱۲۵۶

لوک ۳ = ۱۳۱۲۷۷۴۲ ۹ ل جم ۴۱° ۲۵′ = ۹ ۸۷۵۰۱۴۲

(۱۵) اگر طا = ۱ و طب = ۷ اور طس = $\overline{۵۹۱}$ زاویئے دریافت کرو

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ۹ ل جب ۳۲° ۱۸′ ۴۰″ = ۹ ۷۲۷۹۶۰۹

ل جب ۳۲° ۱۸′ ۵۰″ = ۹ ۷۲۷۹۹۴۲

(۱۶) نقطہ ا پر اور نقطہ ب پر بہی خط مستقیم س د کے محاذی زاویہ سہ ہے اور س ا زاویئے قائمے ب د پر بناتا ہے تو ثابت کرو کہ ا ب = س د م سہ

(۱۷) اگر جم جر = مس جر م سہ جم مر = مس جر م صہ

قط جر قط مر = قط مر مس جر مس مر ÷ مس سہ مس صہ

تو جم² ر = جم² سہ جم² صہ

(۱۸) ان مساواتون سے جب ا اور جب ب دریافت کرو

طا جب² ا + طب جب² ب = طس اور طا جب² ا = طب جب ا ب

چودہوان باب

مثلثون کے خواص

(۱۳۲) اس باب مین بعض مختلف مسائل بیان کیے جائینگے جو مثلثون کے خواص سے متعلق ہین

(۱۳۳) مثلث کے رقبہ کے واسطے کوئی جملہ اضلاع کی رقمون مین دریافت کرو

اگر طب اور طس مثلث کے دو ضلعون کو تعبیر کرین اور اونکا درمیانی زاویہ ا ہو تو رقبہ = ½ طب طس جب ا بموجب دفعہ ۱۰۷ کے ہوگا اب بموجب دفعہ ۱۰۸ کے

جب ا = $\frac{۲}{\text{طب طس}}$ [ص (ص − طا) (ص − طب) (ص − طس)]

اسیواسطے رقبہ مثلث کا = ص (ص − طا) (ص − طب) (ص − طس)

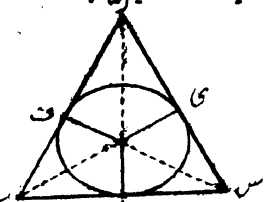
اور بموجب اسی دفعہ کے رقبہ مثلث کا یہ بھی ہے کہ

$\frac{1}{4}$ (۲ طب۲ طس۲ + ۲ طس۲ طا۲ + ۲ طا۲ طب۲ − طا۴ − طب۴ − طس۴)

اکثر جملہ ص (ص − طا) (ص − طب) (ص − طس) یا کرتے ہیں

$\frac{1}{4}$ (۲ طب۲ طس۲ + ۲ طس۲ طا۲ + ۲ طا۲ طب۲ − طا۴ − طب۴ − طس۴) کو ص سے تعبیر کیا

(۱۳۴) مثلث کے اندر جو دائرہ بنایا جائے اوسکا نصف قطر دریافت کرو



فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہے اور د مرکز دائرہ کا ہے جو مثلث کے اندر بنایا جائے اور اضلاع کو نقاط ذ ی و ق پر مس کرے ملاؤ د ذ و د ی و د ق

فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ کا ن ق ہے تو

رقبہ مثلث ب د س کا = $\frac{1}{2}$ ب س . د ذ = $\frac{\text{طا ن}}{2}$

رقبہ مثلث س د ا کا = $\frac{1}{2}$ س ا . د ی = $\frac{\text{طب ن}}{2}$

رقبہ مثلث ا د ب کا = $\frac{1}{2}$ ا ب . د ق = $\frac{\text{طس ن}}{2}$

اسواسطے جمع کرنے سے

$\frac{\text{طا + طس + طس}}{2}$ ن = رقبہ مثلث ا ب س کے

= ص بموجب دفعہ ۱۳۳ کے

یعنی ص ن ق = ص

اسیواسطے ن ق = $\frac{\text{ص}}{\text{ص}}$

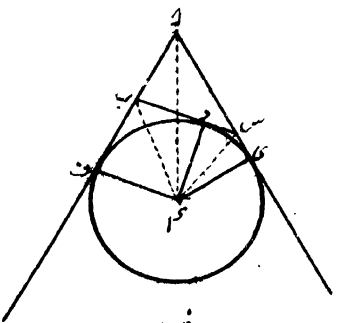
پس رقبہ مثلث کو جو اوسکے نصف مجموعہ اضلاع پر تقسیم کریں تو حاصل نصف قطر دائرہ

اندرونی مثلث کا ہوتا ہے اور جیسے مثلث کے رقبوں کے واسطے مختلف جملے ہیں گے
ایسے ہی اونکے استعمال میں لانے سے مختلف جملے اس نصف قطر کے واسطے بھی حاصل ہونگے
مثلاً نق = $\frac{\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{ص}}$ = $\frac{(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{ص}}$

نق = $\frac{\text{طا طب حس س}}{\text{ص}^2}$ = $\frac{\text{طا طب حس س}}{\text{طا}+\text{طب}+\text{طس}}$

(۱۳۵) نصف قطر اوس دائرہ کا دریافت کرو جو مثلث کے ایک ضلع کو اور باقی دو اضلاع
ممدودہ کو مس کرتا ہے

فرض کرو کہ اب س مثلث ہے اور ک مرکز اوس دائرہ کا ہے جو ب س کو اور اضلاع ممدودہ
کو مس کرتا ہے اور د اور ی اور ف نقاط تماس ہیں ملاؤ ک د اور ک ی اور
ک ف اور نق نصف قطر دائرہ کا ہے



ذوار بعۃ الاضلاع ک ب ا میں دو مثلثوں ک ا ب اور ک ا ب میں تقسیم ہو سکتا ہے
اسیواسطے رقبہ اس ذوار بعۃ الاضلاع کا $\frac{\text{طس}}{2}$ نق + $\frac{\text{طب}}{2}$ نق ہے اور یہی
ذوار بعۃ الاضلاع مثلثوں ک ب س اور ک ب س میں تقسیم ہو سکتا ہے اسیواسطے
رقبہ اس ذوار بعۃ الاضلاع کا $\frac{\text{طا}}{2}$ نق + ص ہے پس

$\frac{\text{طس}}{2}$ نق + $\frac{\text{طب}}{2}$ نق = $\frac{\text{طا}}{2}$ نق + ص

اسیواسطے طس + طب − طا نق = ص

یعنی (ص − طا) نق = ص

اسیواسطے نق = $\frac{\text{ص}}{\text{ص}-\text{طا}}$

اور سیطرح فرض کرو کہ نصف قطر اوس دائرہ کا جو س ا کو اور باقی اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہے نق ۲ ہے اور نصف قطر اوس دائرہ کا جو ا ب کو اور باقی اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہے نق ۳ ہے تو ہمکو یہہ دریافت ہوگا کہ

نق ۲ = $\frac{ص - ا ب}{ص - ا ب}$ اور نق ۳ = $\frac{ص}{ص - ا ب}$

دائرہ جو ایک ضلع اور باقی اضلاع ممدودہ کو مس کرتا ہی اوسکو دائرہ خارجی مثلث کہتے ہین

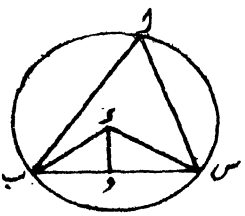
(۱۳۶) اکثر شالین اور سوالات مثلث کے دوائر اندرونی اور خارجی کی باب مین علم ہندسہ کے ان باتون پر موقوف ہوتے ہین

دفعہ ۱۳۴ کی شکل مین خطوط مستقیم ا د ، ب د ، س د زاویون ا د ب ، د ب س ، ب س د کو بحکم (۴ ش ۴ م) کے تنصیف کرتے ہین اور دفعہ ۱۳۵ کی شکل مین د ا زاویہ ا ک کی تنصیف کرتا ہے اور خط مستقیم د ب زاویہ ف ب د کی تنصیف کرتا ہی اور د ا ، د س زاویہ ی س د کی تنصیف کرتا ہے شرح مقالہ چہارم کو دیکھو پس ا لورد د ا ایک خط مستقیم مین ہین یعنی اوس خط مین جو زاویہ ا کی تنصیف کرتا ہے

فرض کرو کہ د م مرکز دائرہ خارجی کا ہو جو س ا کو مس کرتا ہے تو د ا ، د س ، د م ایک خط مستقیم مین ہونگے یعنی جو خط زاویہ ب س ی کی تنصیف کرتا ہے اور وہ تکملہ زاویہ اس ب کا ہے

زاویہ د ب م قائمہ ہے

(۱۳۷) مثلث کے اوپر جو دائرہ بنایا جاے اوسکا نصف قطر دریافت کرو



فرض کرو کہ اب س مثلث ہو اور ء مرکز دائرہ کا ہو جو مثلث کے گرد بنایا جاے اور ء د عمود ب س پر نکالو تو بحکم (ہ ش ۴ م) کے ب س نقطہ د پر تنصیف ہوگا ملاؤ ء ب اور ء س اور ق نصف قطر دائرہ کا ہے

زاویہ ب ء س دو چند زاویہ ب ا س سے بحکم (۲۰ ش ۳ م) کے ہے اسواسطے ب ء د = ا

اور ب د = ق جب ا = $\frac{\text{ط ا}}{۲}$

اسیواسطے ق = $\frac{\text{ط ا}}{۲ \text{ جب } ا}$

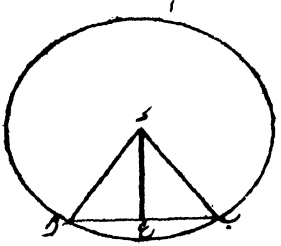
بموجب دفعہ ۱۰۸ کے جب ا = $\frac{۲ \text{ ضلع}}{\text{ط ط س}}$

اسواسطے ق = $\frac{\text{ط ا ط ط س}}{۴ \text{ ص}}$

اور ہم کو معلوم ہے کہ $\frac{\text{جب ا}}{\text{ط ا}}$ = $\frac{۱}{۲ \text{ ق}}$ ہم نے دفعہ ۱۰۴ میں بیان کیا ہے

$\frac{\text{جب ا}}{\text{ط ا}}$ = $\frac{\text{جب ب}}{\text{ط ب}}$ = $\frac{\text{جب س}}{\text{ط س}}$ = $\frac{۱}{۲ \text{ ق}}$

(۱۳۸) دائرہ میں جو کثیر الاضلاع منتظم بنائی جاے اوسکا مجموعہ اضلاع اور رقبہ دریافت کرو



فرض کرو کہ ء مرکز دائرہ کا ہے اور ایک کثیر الاضلاع منتظم ن اضلاع کے دائرہ کی اندر بنائی گئی ہے اور اب ایک ضلع اضلاع میں سے ہے ء ع عمود اب پر کھینچو اور ء ا اور ء ب ملاؤ

فرض کرو کہ ق نصف قطر دائرہ کا ہے

تو زاویہ ا ء ب = $\frac{۳۶۰°}{\text{ن}}$

اب = ۲ ا ع = ۲ ا ء جب ا ء ع = ۲ ق جب $\frac{۱۸۰°}{\text{ن}}$

اور رقبہ مثلث ا ء ب = $\frac{۱}{۲}$ اب . ء ع = ا ع . ء ع

$= ا د$ جب $ا د ع$. $ا د$ جم $ا د ع = ع ا$ جب $\frac{۱۸۰°}{ن}$ جم $\frac{۱۸۰°}{ن}$

یا بموجب دفعہ ۴۷ کے رقبہ مثلث کا

$= \frac{۱}{۲}$ $ا د$. $د ب$ جب $ا د ب = \frac{ع ا^۲}{۲}$ جب $\frac{۳۶۰°}{ن}$

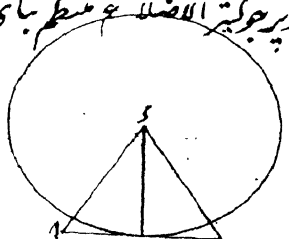
اور کثیر الاضلاع منتظم کا مجموعہ اضلاع $= ن$. $ا ب$

$= ۲ ن$ نق جب $\frac{۱۸۰°}{ن}$

اور رقبہ کثیر الاضلاع منتظم کا $= ن$. مثلث $ا د ب$

$= ن ع ا^۲$ جب $\frac{۱۸۰°}{ن}$ جم $\frac{۱۸۰°}{ن} = \frac{ن ع ا^۲}{۲}$ جب $\frac{۳۶۰°}{ن}$

(۱۳۹) دائرہ کے اوپر جو کثیر الاضلاع منتظم بنائی جاوے اوسکا مجموعۂ اضلاع اور رقبہ دریافت کرو



فرض کرو کہ مرکز دائرہ کا $د$ ہے اور کثیر الاضلاع منتظم ضلعون کی دائرہ کے گرد بنائی گئی ہے اور $ا ب$ اضلاع میں سے ایک ضلع ہے $ع$ نقطہ تماس تک کھینچو تو $د ع$ عمود $ا ب$ پر بحکم (۱۸ ش ۳ م) کے ہوگا $د ا$ اور $د ب$ ملاؤ

فرض کرو کہ نق نصف قطر دائرہ کا ہے

تو زاویہ $ا د ب = \frac{۳۶۰°}{ن}$

$ا ب = ۲ ا ع = ۲ د ع$ مس $ا د ع = ۲$ نق مس $\frac{۱۸۰°}{ن}$

رقبہ مثلث $ا د ب = \frac{۱}{۲} ا ب$. $د ع = ا ع$. $د ع$

$= نق^۲$ مس $\frac{۱۸۰°}{ن}$

اور مجموعہ اضلاع کثیر الاضلاع منتظم کا $= ن$. $ا ب$

$= ۲ ن ب$ مس $\frac{۱۸۰°}{ن}$

اور رقبہ کثیر الاضلاع منتظم کا $= ن . مثلث ا ۰ ب$

$= ن$ نق^۲ مس $\frac{۱۸۰°}{ن}$

(۱۴۰) دو دفعات گذشتہ مین جو جملے حاصل کئے ہین وہ مختلف طریقے سے استعمال مین آسکتے ہین

بموجب دفعہ ۱۳۸ کے

$ا ب = ۲$ نق جب $\frac{۱۸۰°}{ن}$

سے معلوم ہوا کہ نق $= \frac{ا ب}{۲}$ قم $\frac{۱۸۰°}{ن}$

اسلئے ا ب کے معلوم ہونے سے نق دریافت ہوتا ہے

اور ایسی ہی دفعہ ۱۳۹ کے موافق

نقَ $= \frac{ا ب}{۲}$ م $\frac{۱۸۰°}{ن}$

اسے ا ب کے معلوم ہونے سے نقَ دریافت ہوتا ہے

فرض کرو کہ ایک ہی دائرہ کے اندر اور باہر ایک ایک کثیر الاضلاع ن اضلاع کی بنائی گئی ہے

تو $\frac{\text{ضلع کثیر الاضلاع اندرونی}}{\text{ضلع کثیر الاضلاع بیرونی}} = \frac{\text{حب } \frac{۱۸۰°}{ن}}{\text{مس } \frac{۱۸۰°}{ن}} =$ جم $\frac{۱۸۰°}{ن}$

$\frac{\text{رقبہ کثیر الاضلاع اندرونی}}{\text{رقبہ کثیر الاضلاع بیرونی}} = \frac{\text{حب } \frac{۱۸۰°}{ن} \text{ جم } \frac{۱۸۰°}{ن}}{\text{مس } \frac{۱۸۰°}{ن}}$

$=$ جمَ $\frac{۱۸۰°}{ن}$

ان دو نسبتون مین سے اخر نسبت بحکم (۱۲ شکل ۴ م) کے بھی مستنبط ہو سکتی تھی

مثالین ۱۴

(۱) دفعہ ۱۳۴ مین ثابت کرو کہ

نق $(م \frac{۱}{۲} ب + م \frac{۱}{۲} س) =$ طا

(۲) دفعہ ۱۳۵ کی شکل مین ثابت کرو کہ

نقد $(س \frac{۱}{۲} ب + س \frac{۱}{۲} س) =$ طا

(۳) مثلث متساوی الاضلاع مین جو دائرہ بنایا جاے اوسکا نصف قطر دریافت کرو

(۴) مثلث متساوی الاضلاع کے اوپر جو دائرہ بنایا جاے اوسکا نصف قطر دریافت کرو

(۵) اضلاع ایک مثلث کے ۶۸ و ۷۵ و ۷۷ ہین رقبہ اوسکا اور نصف قطر دائرہ اندرونی اور نصف قطر دائرہ بیرونی کا دریافت کرو

(۶) مثلث مین طا = ۴۴۳ گز اور طب = ۳۲۴ گز اور طس = ۴۰۵ گز رقبہ دریافت کرو

(۷) ایک مثلث مین طا = ۹۴۲ اور طب = طس = ۲۷۹۶ کے رقبہ اوسکا دریافت کرو

لوک ۲ = ۰۳۰۱۰۳۰۰ ک لوک ۲۴۵۶۸ = ۲۰۳۹۰۳۶۹۸ ۲

لوک ۹۳۲ = ۲ک ۹۶۹۴۱۵۹ لوک ۲۴۵۶۹ = ۴ک ۳۹۰۳۸۷۵

(۸) رقبہ اوس مثلث کا دریافت کرو جسمین طا = ۹۴۲ اور طب = ۸۱۲ اور طس = ۱۲۷۰

لوک ۷ = ۹۸۰ ۸۴۵ ک لوک ۱۵۱۲ = ۳ک ۱۷۹۵۵۱۸

لوک ۵۷ = ۱ک ۷۵۵۸۷۴۹ لوک ۱۳۸۲۰۹۴ = ۵۸۲۱۷۰۰ ک

لوک ۲۴۲ = ۲ک ۳۸۳۸۱۵۴

(۹) دفعہ ۱۳۴ کی شکل مین ثابت کرو کہ

$$\text{ک ا} = \frac{\text{طس حب} \frac{1}{2} \text{ب}}{\text{حم} \frac{1}{2} \text{س}}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ دفعہ ۱۳۵ مین

$$\text{ک ا} = \frac{\text{طس حم} \frac{1}{2} \text{ب}}{\text{حب} \frac{1}{2} \text{س}} \quad \text{ک ب} = \frac{\text{طا حم} \frac{1}{2} \text{س}}{\text{حم} \frac{1}{2} \text{ا}}$$

(۱۱) دفعہ ۱۳۴ کی شکل مین ثابت کرو کہ اف = $\frac{1}{2}$ ص − طا اور

$$\text{ن} = (\text{ص} - \text{طا}) \text{مس} \frac{\text{ا}}{2}$$

(۱۲) نتیجہ مذکورسے قیمت نق کی دفعہ ۱۳۴ مین مستنبط کرو

(۱۳) دفعہ ۱۳۵ کی شکل مین ثابت کرو کہ اف = ص اور

$$\text{ن}_1 = \text{ص مس} \frac{\text{ا}}{2}$$

(۱۴) نتیجہ مذکور سے دفعہ ۱۳۵ مین قیمت نق کی دریافت کرو

(۱۵) صورت مشتبہ مین طا اور طب اور ا معلوم ہین تو ثابت کرو کہ دائرے جو دونو مثلثون پر کھینچے جاوے مقدار مین برابر ہوتی ہین اور اونکے مرکزون کے درمیان فاصلہ (طا م² ا - طب²) ہوتا ہے

(۱۶) ایک برج ایک سطح پر عمود ہے اور سطح مین تین نقطے ایسے ہین کہ جنپر برج ایک ہی زاویہ کا محاذی ہے یہہ نقطے ایک دوسرے سے ۱۲۳ اور ۱۳۰ اور ۷۷ گز فاصلون پر ہین اور ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر خطوط مستقیم پر جاتے مین زاویہ سب سے بڑا برج کے محاذی انکہ پر ۶۰° کا بنتا ہے تو ثابت کرو کہ برج کی ۱۴ ۵/۸ گز ہے

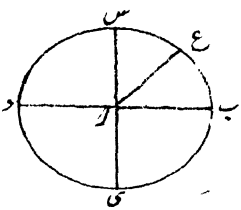
پندرہوان باب

زاویے بڑے دو قائمون سے

(۱۴۱) علم مثلث کو جب عملیات مین استعمال مین لاتے ہین تو کبھی ایسے زاویہ سے کام نہین پڑتا جو دو قائمون سے بڑا ہو اسلئے ابتک ہم نے ایسے ہی زاویون کا ذکر کیا ہے جو دو قائمون سے بڑے نہین ہین اور مین نے سب اصول عامہ اس علم کے جو عملیات سے متعلق ہین بیان کئے ہین اور وہ اون لوگون کے لئے کہ صرف عملیات ہی تک علم حاصل کرنا چاہتے ہین کافی ہین لیکن جو علم مثلث کو فرع نظریات ریاضی کی سمجھہ کر تحصیل کرنا چاہتے ہین اونکے واسطے ضرور ہے کہ زاویہ کے مفہوم کو وسعت دین اسمین آسانی ہے اب ہم اس زاویہ کی وسعت کا بیان کرتے ہین

(۱۴۲) زاویہ ہر یک مقدار کا ہو سکتا ہے

فرض کرو کہ ب ا ایک خط مستقیم ہے اور س ای اوسپر زاویے قائم بناتا ہے اور ایک خط مستقیم ا ع انجام ا پر مقام ا ب سے چکر لگاتا ہی تو جب حرکت کرتے کرتے وہ سمت مین منطبق اس کے ساتھہ ہوتا ہے



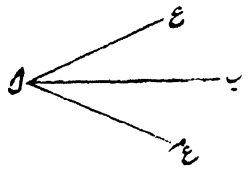
تو وہ قائمہ پیدا کرتا ہے اور جب وہ آگے حرکت کر کے ا د پر منطبق ہوتا ہے تو دو قائمے پیدا کرتا ہے، اور پھر آگے حرکت کر کے جب وہ ا ی پر منطبق ہوتا ہے تو تین قائمے پیدا کرتا ہے اور پھر جب ا ب پر منطبق ہوتا ہے تو چار قائمے پیدا کرتا ہے اور پھر جب ر ع دوسرا چکر شروع کرتا ہے تو زاویہ چار قائموں سے بڑا پیدا ہوتا ہے پس اگر ر ع عین وسط مین ا ب اور اس کے اول چکر مین واقع ہو تو زاویہ درمیان ا ب اور ر ع کے نصف قائمہ ہوگا اور اگر دوسرے چکر کے اندر اس مقام پر واقع ہوگا تو زاویہ ساڑھے چار قائمہ کا خیال کیا جائیگا اور اگر تیسرے چکر مین واقع ہوگا تو زاویہ ساڑھے آٹھ قائمہ کا تصور کیا جائیگا اور علی ہذا القیاس

(۱۴۳) خطوط مستقیم متقاطع س ی اور ب د چار قائمے پیدا کرتے ہین انکو ربعات کہتے ہین ب س کو اول ربعہ اور س د کو دوسرا ربعہ اور ی د کو تیسرا ربعہ اور ب ی کو چوتھا ربعہ اب کوئی زاویہ ا ب ساکن خط مستقیم پر ر ع خط مستقیم متحرک بناتا ہوا فرض کرو پس اگر ر ع اول ربعہ مین واقع ہو تو زاویہ ب ر ع کو اول ربعہ مین کہینگے اور اگر ر ع دوسرے ربعہ مین واقع ہے تو زاویہ ب ا ع دوسرے ربع مین کہینگے اور علی ہذا القیاس

(۱۴۴) زاویہ منفی بھی ہوتا ہے

دفعہ ۹۱ مین جو اتفاق جمہور کی کیفیت بیان ہوئی ہے وہی یہان کیفیت ہے کہ مخالف سمتون مین جو زاویے پیدا ہوتے ہین اونکے اندر تمیز پیدا کرنیکے واسطے باتفاق جمہور یہہ امر قرار پا گیا ہے جسکا نیچے بیان ہوتا ہے فرض کرو کہ خط مستقیم ر ع مقام ا ب سے

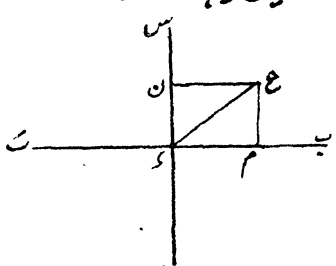
گردا کے ایک سمت مین حرکت کرنے سے زاویہ ع ا ب پیدا کرے اور اس زاویہ کو مثبت



اعداد سے تعبیر کرین تو اگر خط مستقیم ا ع مقام ا ب سے گردا کے مخالف سمت مین حرکت کرکے زاویہ ع ا ب مرتسم کرے تو اوسکو منفی اعداد سے تعبیر کرینگے مثلاً اگر ہر یک زاویہ ب ا ع اور ب ا ع مین سے ایک تہائی قائمہ کی ہو تو پہلے زاویہ کو ۱۲۰° سے تعبیر کرینگے اور دوسرے زاویہ کو ۔ ۲۴۰° سے تعبیر کرینگے

(۱۴۵) دفعہ ۹۱ مین ہمنے یہہ بیان کیا ہی کہ مثبت اور منفی اعداد کی استعانت سی ہم تمیز اون فاصلون مین کرتے ہین جو دو سمتون مین ایک خط مستقیم معین پر ایک نقطہ معین سے نا ہے جاتے ہین اسیطرح سے ہم تمیز اون فاصلون مین کر سکتے ہین جو دو اور سمتون مین دو سرے خط مستقیم معین پر کہ پہلے خط معین پر زاویہ قائمے بناتا ہی پیمایش ہون

فرض کرو کہ ب ب اور س س دو خط مستقیم متقاطع اعلی القوائم ہین اور ع ایک نقطہ اوسی سطح مین ہے جسمین یہہ دونون خطوط مستقیم ہین

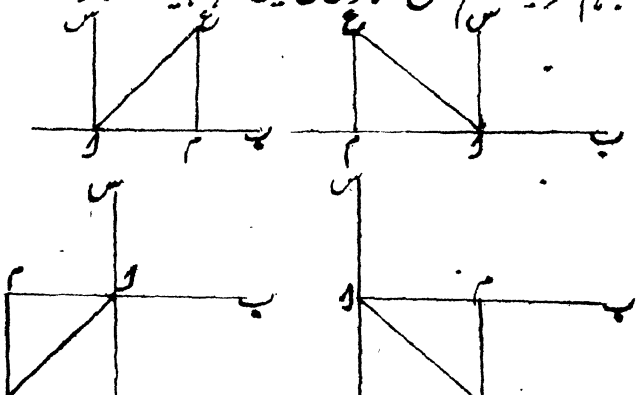


اب اگر ع کا فاصلہ ہر یک خط مستقیم ب ب اور س س سے معلوم ہو اور یہہ بھی جانتے ہون کہ ان خطوط مستقیم مین سے ہر یک کس جانب مین ع کے واقع ہے تو مقام ع کا معلوم ہو جائیگا یہہ ع م اور ع ن عمود خطوط مستقیم ب ب اور س س پر نکالو اب اتفاق جمہور کا اس بات پر ہے

کہ فاصلہ ان کا یا ع م کو مثبت اعداد سے اوس صورت مین تعبیر کرین کہ ع اوپر ب ب کے واقع ہو اور منفی اعداد سے اوس صورت مین تعبیر کرین کہ ع نیچے ب ب کے واقع ہو اور فاصلہ م ع یا ع ن کو اوس صورت مین کہ ع دائین طرف س س کے واقع ہو مثبت اعداد سے تعبیر کرین اور اوس صورت مین کہ ع بائین طرف س س کے واقع ہو منفی اعداد سے تعبیر کرین

(۱۴۶) علم مثلثی نسبتون کی تعریفات عامہ

اب ہم تعریفات علم مثلثی نسبتون کی ایسی لکھتے ہین کہ وہ ہر ایک مقدار کے زاویہ پر صادق آوین



فرض کرو کہ اب اور اس دو خطوط مستقیم زاویہ قائمہ پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہین اور خط مستقیم نقطہ ا کے گرد اب سے اس کی سمت مین حرکت کرے اور مقام ع پر پہونچے ع م عمود اب پر یا اب ممدودہ پر اسے نکالو اب ا ع کو ہمیشہ مثبت خیال کرو اگر م اوسی سمت مین اس کے واقع ہو جس سمت مین اس کی ب واقع ہے تو ا م کو مثبت خیال کرو اور اگر م اسکے مخالف سمت مین واقع ہو تو ا م کو منفی خیال کرو اور اگر ع اوس جانب مین اب کے واقع ہو جس جانب میں س واقع ہے تو ع م کو مثبت خیال کرو اور اگر ع اس جانب سے مخالف جانب مین واقع ہو تو ع م کو منفی خیال کرو

فرض کرو کہ زاویہ ع اب کو ا تعبیر کرے تو ا کی علم مثلثی نسبتون کی یہہ تعریف کیجائیگی

جب ا = $\frac{ع م}{ا ع}$ مس ا = $\frac{ع م}{ا م}$ قط ا = $\frac{ا ع}{ا م}$

جم ا = $\frac{ا م}{ا ع}$ م ا = $\frac{ا ع}{ع م}$ قم ا = $\frac{ا ع}{ع م}$

جع ا = ۱ − جم ا جم ا = ۱ − جب ا

(۱۴۷) پس اسے معلوم ہوا کہ مثبت زاویہ کی خواہ کچھ ہی مقدار ہو اوسکی علم مثلثی نسبتین ہوتی ہین اور ایسی ہی منفی زاویہ کی خواہ کچھ ہی مقدار ہو اوسکی علم مثلثی نسبتین بھی باتفاق جبہو وہی ہوتی ہین جو اوسکے مطابق مثبت زاویہ کی ہوتی ہین اور ہم مطابق مثبت زاویہ کے اوس زاویہ کو کہتے ہین جو مثبت زاویہ مقدار مین برابر اوس منفی زاویہ کے ہو مثلاً آخر شکل مین زاویہ ب ا ع کو منفی زاویہ خیال کرو اور اوسکی مقدار − ۶۰° کی مقرر کرو تو علم مثلثی نسبتین اس زاویہ کی وہی ہونگین جو اوس زاویہ کی ہونگین کہ خط متحرک ا ع مثبت سمت مین اوس مقام پر پہونچکر بناتا ہے جو شکل مین بنا ہوا ہے پس علم مثلثی نسبتین زاویہ − ۶۰° کی وہی ہونگین جو ۳۶۰° − ۶۰° کی ہین

(۱۴۸) اسسے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جن دو زاویون مین بقدر ۳۶۰° یا اضعاف ۳۶۰° کے تفاوت ہو تو اون دونو زاویون کے علم مثلثی نسبتین ایک ہی ہونگین

(۱۴۹) دفعات ۱۹ — ۲۳ تک مین ہم نے قائمہ سے چھوٹے زاویہ کے علم مثلثی نسبتون کے باہمی ارتباطات کا ذکر کیا اب ہم آگے علم مثلثی نسبتون کے وہ ارتباطات عامہ بیان کرینگے کہ اونمین زاویہ کی مقدار کچھ ہی ہو

طالب علم کے لئے فقط اتنی بات کافی ہی کہ وہ اپنا اطمینان اس بات پر کرلے کہ فی الحقیقت ارتباط مفصلہ ذیل عامہ ہین اور پھر آگے اور ارتباطات وہ خود استخراج انہین ارتباطات سے کرلے

مس ا = $\frac{جب ا}{جم ا}$ م ا = $\frac{جم ا}{جب ا}$

قط ا = $\frac{جم ا}{جب ا}$ قم ا = $\frac{۱}{جب ا}$

جب ا + جم ا = ۱

متالین ۱۵

وہ زاویے ۰ اور ۳۶۰° کے درمیان دریافت کرو جو کہ ان بارہ مساواتوں کی شرائط کو پورا کرین

(۱) $\text{جب}^2 ا = \frac{1}{4}$ (۲) $\text{جم}^2 ا = \frac{1}{2}$

(۳) $\text{مس}^2 ا = ۳$ (۴) $\text{جب}^2 ۲ا = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(۵) $\text{جم}^2 ۲ا = -\frac{1}{2}$ (۶) $\text{مس}^2 ۲ا = ۱$

(۷) $۲\text{جم}^2 ا + \text{جب} ا = ۱$ (۸) $۲\text{جب}^2 ا = ۳(۱ + \text{جم} ا)$

(۹) $\text{مس}^2 ا - ۴\text{مس} ا + ۱ = ۰$ (۱۰) $\text{مس} ا - \text{م} ا = ۲$

(۱۱) $\text{جب} ا = ۱ - \text{جم} ۲ا$ (۱۲) $\text{جم} ا = ۱ + \text{جم} ۲ا$

(۱۳) کسی مثلث مین ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جع} ا}{\text{جع} ب} = \frac{\text{ط} ا (\text{ط} ا + \text{ط س} - \text{ط} ب)}{\text{ط} ب (\text{ط} ب + \text{ط س} - \text{ط} ا)}$$

(۱۴) کسی مثلث مین ثابت کرو

$$\text{م}\frac{ا}{۲} + \text{م}\frac{ب}{۲} = \frac{\text{ط س}}{\text{ط} ب + \text{ط س} - \text{ط} ا}$$

(۱۵) اگر مثلث کے اندر کوئی نقطہ فرض کرین ایسا کہ اضلاع کے محاذی اوس نقطہ پر زاویے مساوی ہون اور سہ وصد و فرا اوس نقطے کے فاصلے مثلث کے زاویون سے ہون تو ثابت کرو کہ

$$\text{طا}^2 + \text{طب}^2 + \text{طس}^2 = ۲(\text{سہ}^2 + \text{صد}^2 + \text{فرا}^2) + \frac{۴ \times \text{رقبہ مثلث}}{\sqrt{۳}}$$

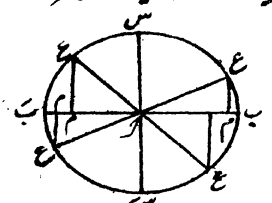
(۱۶) اگر مثلث کے کسی زاویہ سے ایک خط کھینچکر مثلث کے کوئی سے دو حصے کرین تو ثابت کرو کہ ان مثلثون کے اوپر جو دائرے کھینچے جائینگے اونکے نصف قطرون مین ایک نسبت معین مستقل ہوگی خواہ اس تقسیم کرنے والے خط کا کچھ ہی مقام ہو

سولہوان باب

زاویہ کے تبدل سے نسبتون مین تبدل

(۱۵۰) زاویہ جب صفر سے ۳۶۰° تک بدلی تو جو جو اوسکی علم مثلثی نسبتون مین تغیر و تبدل بلحاظ علامت یا مقدار کے واقع ہوگا اوسکا ذکر اس باب مین کرتے ہین

(۱۵۱) جب زاویہ بدلتا ہی تو اوسکی جیب کے تغیرات کو دریافت کرو



فرض کرو کہ اب اور اس دو خطوط مستقیم متقاطع علی القوائم ہین اور اک خط مستقیم اع طول معین رکھتا ہی اور انجام اکے گرد مقام مقرری اب سے متحرک ہوتا ہے اور اع دائرہ ب س ب س مرتسم کرتا ہے ع کے مقام سے ع م عمود ب اب پر کھینچو تو

$$\text{جب ع اب} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$$

جب اع منطبق اب پر ہوتا ہے تو عمود ع م معدوم ہوجاتا ہے اسے معلوم ہوا کہ جب زاویہ صفر ہوتا ہی تو اوسکی جیب بہی صفر ہوتی ہے اور جب اع اول ربعہ مین متحرک ہوتا ہے تو ع م مثبت ہوتا ہے اور متواتر بڑہتا جاتا ہے جب تک کہ اس پر منطبق ہوجاتا ہے اور اس انطباق سے ع م برابر اس کے ہوجاتا ہی پس جب زاویہ صفر سے ۹۰° تک بڑہتا ہے تو جیب صفر سے ایک تک بڑہتی ہے اب پہر جب اع ربعہ دوم مین متحرک ہوتا ہے تو ع م مثبت ہوتا ہی اور متواتر گھٹتا جاتا ہے یہانتک کہ اع منطبق اب پر ہوجاتا ہے اور اس انطباق سے ع م معدوم ہوجاتا ہے

پس جب زاویہ ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑہتا ہی تو جیب آسے صفر تک گھٹتی ہی پہر جب اع ربعہ سوم مین متحرک ہوتا ہے تو ع م منفی ہوتا ہے اور تعداداً متواتر بڑہتا جاتا ہے جب تک کہ اع منطبق اس پر ہوتا ہے پس جب زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑہتا ہے تو جیب منفی ہوتی اور تعداداً سے ۱ تک بڑہتی ہے پہر جب اع ربعہ چہارم مین متحرک ہوتا

تو ع م منفی ہوتا ہے اور تعداد اکم ہوتی ہے جب تک کہ ع منطبق ا ب پر ہوتا ہی پس جب زاویہ ۰ ۲۷ سے ۰ ۳۶ تک بڑہتا ہے تو جیب اوسکی منفی ہوتی ہے اور تعداد ۱- سے ۰ تک گہٹتی ہے

(۱۵۲) جب زاویہ بدلے تو اوسکے جیب التمام کی تغیرات کو دریافت کرو

دفعہ ۱۵۱ کی شکل جم ع ا ب = ا م / ا ع

اول ہی اول ع منطبق ا ب پر ہوتا ہی اسواسطے ا م = ا ع پس جب زاویہ صفر ہو تو اوسکی جیب التمام ۱ ہے اور جب ع ربعہ اول مین حرکت کرتا ہے تو ا م مثبت ہوتا ہے اور متواتر کم ہوتا جاتا ہی جب تک کہ ا م منطبق اس پر ہوتا ہے اسطرح ا م فنا ہو جاتا ہے پس جب زاویہ ۰ سے ۹۰ تک بڑہتا ہے تو جیب التمام ۱ سے ۰ تک گہٹتی ہے جب یہ ع ربعہ دوم مین حرکت کرتا ہے تو ا م منفی ہوتا ہے اور تعداد اکم متواتر بڑہتا جاتا ہے جب تک کہ ع منطبق ا ب پر ہوتا ہے پس جب زاویہ ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑہتا ہی تو جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداد اگ ۰ سے ۱- تک بڑہتی ہی اور ع ربعہ سوم مین متحرک ہوتا ہے تو ا م منفی ہوتا ہے اور تعداد اکم متواتر گہٹتا جاتا ہے جب تک کہ ع منطبق اس پر ہوتا ہے پس جب زاویہ ۱۸۰ سے ۲۷۰ تک بڑہتا ہے جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداد اگ ۱- سے ۰ تک گہٹتی ہی جب پہر ع ربعہ چہارم مین متحرک ہوتا ہے تو ا م مثبت ہوتا ہے اور متواتر بڑہتا جاتا ہی جب تک کہ ع منطبق ا ب پر ہوتا ہے پس زاویہ ۲۷۰ سے ۳۶۰ تک بڑہتا ہے تو جیب التمام مثبت ہوتی اور ۰ سے ایک تک بڑہتی ہی

(۱۵۳) جب زاویہ بدلتا ہے تو اوسکے مماس کی تغیرات کو دریافت کرو

دفعہ ۱۵۱ کی شکل مین مس ع ا ب = ع م / ا م

اول مین ع منطق ا ب پر ہوتا ہے تو ا م = ا ب پس جب زاویہ صفر ہوتا ہی تو اوسکا مماس بہی صفر ہوتا ہے پہر جب ع ربعہ اول مین متحرک ہوتا ہے تو ع م اور ا م مثبت ہوتا ہے

اور ع م متواتر بڑہتا، اور ا م متواتر گھٹتا ہی جب تک کہ ا ع منطبق اس پر ہوتا ہے پس جب زاویہ ۰ سے ۹۰° تک بڑہتا تو مماس ۰ سے لانہایت بڑہتا ہے پس زاویہ کو ۹۰° کے قریب فرض کرکے مماس کو جتنا چاہین بڑہا سکتے ہین اور اس بات کو اختصاراً اسطرح بیان کیا کرتے ہین کہ مماس ۹۰° کا لانہایت ہی پس جب ا ع دوسرے ربعہ مین متحرک ہوتا ہی تو ع م مثبت اور ا م منفی ہوتا ہے اور ع م متواتر کم ہوتا جاتا ہے اور ا م تعداداً متواتر بڑہتا جاتا ہے جب تک کہ ا ع منطبق ا ب پر ہوتا ہی پس زاویہ جب ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑہتا ہی تو مماس منفی ہوتا ہے اور تعداداً لانہایت سے صفر تک گھٹتا ہی پھر جب ا ع دوسرے ربعہ مین متحرک ہوتا ہی ع م اور ا م منفی ہوتے ہین اور ع م تعداداً زیادہ ہوتا جاتا ہے، اور ا م تعداداً کم ہوتا جاتا ہی جب تک کہ ا ع منطبق اس پر ہوتا ہی پس جب زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑہتا ہی تو مماس مثبت ہوتا ہی اور ۰ سے - لانہایت تک ایسا زیادہ ہوتا ہی کہ اگر ہم ۲۷۰° کے بہت قریب زاویہ مقرر کرین تو ہم مماس کو لانہایت زیادہ کر سکتے ہین اور اوسکو اختصاراً اسطرح بیان کیا کرتے ہین کہ مماس ۲۷۰° کا لانہایت ہے اور جب ا ع چوتھے ربعہ مین حرکت کرتا ہی ع م منفی ہوتا ہی اور ا م مثبت اور ع م متواتر کم ہوتا جاتا ہی اور ا م زیادہ ہوتا جاتا ہی جب تک کہ ا ع منطبق ا ب پر ہوتا ہی پس جب زاویہ ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑہتا ہی تو مماس منفی ہوتا ہی اور تعداداً کم لانہایت سے صفر تک کم ہوتا ہے اسیطرح سے کسی زاویہ کے مماس کے تمام تغیرات دریافت ہو سکتے ہین

(۱۵۴) جب زاویہ بدلے اوسکے قاطع الزاویہ کی تغیرات دریافت کرو اوسطرح قاطع الزاویہ کے تغیرات بہی دو طرح سے دریافت ہو سکتے ہین ایک تو دفعہ ۱۵۱ کی شکل جس طرح جیب اور جیب التمام اور مماس کے تغیرات دریافت ہوی تہی دوم یہہ کہ اس صورت قانونی کو کام مین لائین کہ قطع ا ب = $\frac{\text{جم ع ا ب}}{\text{جیب ع ا ب}}$ اور اسسے ہم تغیرات قاطع الزاویہ کے جیب التمام کے تغیرات کے معلوم ہونے سے مستنبط کر سکتے ہین جب زاویہ ۰ سے

۰° تک بڑہتا ہی تو جیب التمام ۱ سے ۰ تک گہٹتی ہی اسلئے قاطع الزاویہ ۱ سے لا انتہا تک بڑہے گا اور اسیواسطے قاطع الزاویہ ۹۰° کو لا انتہا کہتے ہین اور جب زاویہ ۰° تک بڑہتا ہے تو جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۰ سے ۱ تک بڑہتی ہے اسلئے قاطع التمام منفی ہوا اور تعداداً لا انتہا سے ۱ تک گہٹتا ہی اور جب زاویہ ۸۰° سے ۲۷۰° بڑہتا ہے تو جیب التمام منفی ہوتی ہے اور تعداداً ۱ سے ۰ تک گہٹتی ہے اسلئے قاطع الزاویہ منفی ہوا اور تعداداً ۱ سے لا انتہا تک بڑہتا ہی اور جب زاویہ ۲۷۰° سے ۳۶۰° بڑہتا ہے تو جیب التمام مثبت ہوتی ہے اور متواتر ۰ سے ایک تک بڑہتی ہے پس قاطع الزاویہ مثبت ہوتا ہے اور لا انتہا سے ایک تک گہٹتا ہے

اسیطرح سے قاطع التمام کے تغیرات دریافت ہوسکتے ہین

(۱۵۵) جب زاویہ بدلتا ہی تو اوسکی جیب معکوس کے تغیرات دریافت کرو

چونکہ جع ا = ا - جم ا پس جب زاویہ ۰ سے ۱۸۰° تک بڑہا ہوتا ہی تو جیب معکوس ۰ سے ۲ تک زیادہ ہوتی ہے اور جب زاویہ ۱۸۰° سے ۳۶۰° تک زیادہ ہوتا ہے تو جیب معکوس ۲ سے ۰ تک کم ہوتی ہے

(۱۵۶) پس ان بیانات سے یہہ معلوم ہوا کہ جیب اور جیب التمام کی قیمتین - ۱ اور + ۱ کے درمیان ہوسکتی ہین اور مماس اور مماس التمام کی قیمتین - ∞ اور + ∞ کے مابین ہوسکتی ہین اور قاطع اور قاطع التمام کی قیمتین - ∞ اور - ۱ کے اور + ۱ اور + ∞ کے درمیان واقع ہوسکتی ہین ور امتحان کرنے سے یہہ بات معلوم ہوگی کہ کسی علم مثلثی نسبت کی علامت نہین بدلتی جب تک اوسکی قیمت کی نوبت صفر یا لا انتہا پر نہین پہونچتی ہے جیب معکوس ہمیشہ مثبت ہوتی ہے اور قیمت اوسکی ۱ اور ۲ کے درمیان ہوتی ہے

(۱۵۷) چاردن ربعات مین علامت علم مثلثی نسبتون کی طالب علم کو خوب یاد رکہنی چاہئے اور اس جدول مین وہ سب لکہتے ہین

	اول	دوم	سوم	چہارم
جیب	+	+	−	−
جیب التمام	+	−	−	+
مماس	+	−	+	−

مثالین ۱۶

جب زاویہ ۰ سے ۳۶۰° تک بدلے تو ان چھ جملوں کی قیمت اور علامت کے تغیرات دریافت کرو

(۱) جب ا + جم ا (۲) جب ا − جم ا

(۳) جب^{۲} ا (۴) جم^{۲} ا − جب^{۲} ا

(۵) جب ا + قم ا (۶) مس ا + قط ا

(۷) جب کہ ا بدلے تو مس^{۲} ا + جم^{۲} ا کی نہایت کم قیمت دریافت کرو

(۸) جب کہ ا بدلے تو ۴ جم^{۲} ا + قط^{۲} ا کی نہایت کم قیمت دریافت کرو

(۹) اب س د ایک ذوالربعۃ الاضلاع دائرہ کی اندر بنی ہوئی ہیں تو ثابت کرو کہ

اس جب ا = ب د جب ب

(۱۰) مسدس منتظم اور مثمن منتظم ایک دائرہ میں بنی ہوئی ہیں تو ثابت کرو کہ رقبہ مسدس کا مثمن کے رقبہ سے وہ نسبت رکھیگا جو $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ نسبت ۳ سے رکھتا ہے

(۱۱) اضلاع ذوالربعۃ الاضلاع کے بالترتیب ۱۳۵ و ۱۸۰ و ۱۵۰ و ۲۵ فیٹ ہیں اول دو ضلعوں کے درمیان زاویہ قائمہ ہے تو رقبہ اس شکل کا دریافت کرو

(۱۲) اب س ایک مثلث ہے اور د نقطہ وسط ب س کا ہے تو ثابت کرو کہ

$$اد^{۲} = \frac{۱}{۲}(طب^{۲} + طس^{۲}) - \frac{طا^{۲}}{۴}$$

(۱۳) کسی مثلث میں طول عمود کا ا سے مقابل کے ضلع پر

$$\frac{طب^{۲} جب س + طس^{۲} جب ب}{طب + طس}$$

(۱۴) ثابت کرو کہ کسی مثلث مین

طا جب ۲ ا + طا جب ۲ ب = ۲ طب طس جب ا

(۱۵) مثلث کے کسی زاویہ سے مقابل کے ضلع پر عمود نکالین تو دو متصل کے دوائر خارجی کے نصف قطرون کے درمیان یہہ عمود اوسط نسبت موسیقیہ مین ہوگا

(۱۶) اگر ا + ب + س = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جع ا جع (ب + س) = جب ا جب (ب + س)

دفعات ۱۳۴ و ۱۳۵ و ۱۳۶ کے طریقہ کتابت کو اختیار کر کے ان نتائج کو ثابت کرو

(۱۷) ک ک ۱ = (نق ۱ − نق) حم ½ ا = $\frac{\text{ص طا}}{\text{ص (ص − طا)}} \sqrt{\frac{\text{(ص − طب) (ص − طس)}}{\text{(طب طس)}}}$

(۱۸) ک ک ۲ = (نق ۱ + نق ۲) قط ½ س = $\frac{\text{ص طس}}{\text{(ص − طا) (ص − طب)}} \sqrt{\frac{\text{(طا طب)}}{\text{ص (ص − طس)}}}$

(۱۹) نق = ص ظا ½ ا ظا ½ ب ظا ½ س

(۲۰) نق = $\frac{\text{طا} - \text{ظا}}{\text{ظم ½ ب} - \text{ظم ½ ا}}$

(۲۱) ک ک ۱ ۲ + ک ک ۲ ۲ = $\frac{\text{طا}^2 \text{ طب}^2 \text{ طس}^2}{\text{ص}^2}$

(۲۲) نق ک ک = ک ب ک س

(۲۳) ک ا ک ک ۱ = ۴ نق نق

(۲۴) مثلث کے زاویون سے مقابل کے ضلعون پر عمود نکالین اور وہ نقطہ ک پر ملین تو ثابت کرو کہ

ا ک = ۲ نق جم ا

سترہوان باب

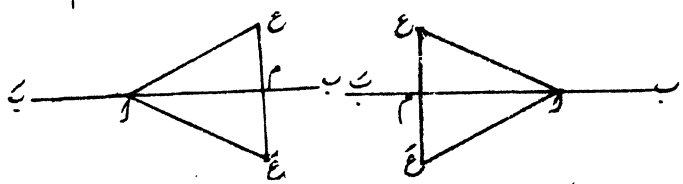
تحویل زاویہ کی

(۱۵۸) اس باب مین فقط ہم اس بات کا ذکر کرتے ہین کہ کسی مثبت اور منفی زاویہ کی علم مثلثی نسبتین اسی زاویہ کے علم مثلثی نسبتون مین تحویل ہو سکتی ہین جو قائمہ سے کم ہون

اول ہم چند مقدمات لکھتے ہین

(۱۵۹) ثابت کرو کہ

جب (−ا) = − جب ا اور جم (−ا) = جم ا



فرض کرو کہ ع اب کوئی زاویہ ہو ع م عمود خط مستقیم ب اب پر نکالو اور او سکو ع تک خارج کرو تو م ع طول مین برابر م ع کے ہوگا ملاؤ ا ع

زاویے ع اب اور ع اب تعداد مین برابر ہین لیکن مخالف سمتون مین اب کے اندازہ کیے جاتے ہین اسلئے اگر ع اب کو ا سے تعبیر کرین تو زاویہ ع اب کا − ا سے تعبیر ہوگا اور

$$\text{جب ا} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}} \quad \text{اور جب (−ا)} = \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$$

اب ع م اور ع م متحد المقدار اور مختلف العلامت ہین

$$\text{جب (−ا)} = -\text{جب ا}$$

$$\text{اور نیز جم (−ا)} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}} = \text{جم ا}$$

(۱۶۰) اسے معلوم ہوا کہ

$$\text{مس (−ا)} = \frac{\text{جب (−ا)}}{\text{جم (−ا)}} = \frac{-\text{جب ا}}{\text{جم ا}} = -\text{مس ا}$$

$$\text{مم (−ا)} = \frac{\text{جم (−ا)}}{\text{جب (−ا)}} = \frac{\text{جم ا}}{-\text{جب ا}} = -\text{مم ا}$$

$$\text{قط (−ا)} = \frac{۱}{\text{جم (−ا)}} = \frac{۱}{\text{جم ا}} = \text{قط ا}$$

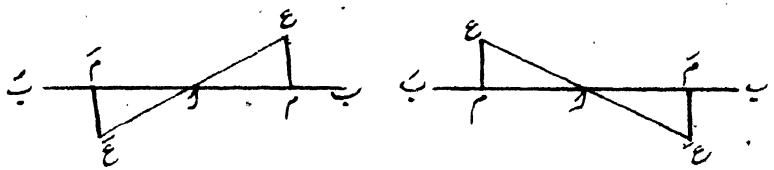
$$\text{جم (−ا)} = \frac{۱}{\text{جب (−ا)}} = \frac{۱}{-\text{جب ا}} = -\text{قم ا}$$

$$\text{جج (−ا)} = ۱ - \text{جم (−ا)} = ۱ - \text{جم ا} = \text{جج ا}$$

یہہ نتایج دفعہ ۱۵۹ کی طرح بالذات بلاواسطہ بھی دریافت ہوسکتی ہین

(۱۶۱) ثابت کرو کہ

جب $(۱۸۰° + ا) = -$ جب ا اور جم $(۱۸۰° + ا) = -$ جم ا



فرض کرو کہ ع اب کوئی زاویہ ہو اور ع ا کو عَ تک خارج کرو ایسا کہ ا عَ طول میں برابر ا ع کے ہو اور ع م اور عَ مَ عمود خط مستقیم ب اَب پر نکالو

فرضکرو کہ زاویہ ع اب کو ا تعبیر کرتا ہے تو زاویہ عَ اب کو جو اوسی سمت میں اسے لیا جاے $۱۸۰° + ا$ تعبیر کریگا اور

جب ا $= \frac{\text{ع م}}{\text{ا ع}}$ جب $(۱۸۰° + ا) = \frac{\text{عَ مَ}}{\text{ا عَ}}$

جم ا $= \frac{\text{ا م}}{\text{ا ع}}$ جم $(۱۸۰° + ا) = \frac{\text{ا مَ}}{\text{ا عَ}}$

علم ہندسہ میں مثلث ع ا م اور عَ ا مَ سب طرح سے آپسمیں برابر ہیں پس ع م اور عَ مَ تعداداً آپسمیں برابر ہیں لیکن مختلف العلامت ہیں اور نیز ا م اور ا مَ تعداداً آپسمیں برابر ہیں مگر مختلف العلامت ہیں پس

جب $(۱۸۰° + ا) = -$ جب ا اور جم $(۱۸۰° + ا) = -$ جم ا

(۱۶۲) اسے یہہ نتایج نکلتے ہیں

مس $(۱۸۰° + ا) = \frac{\text{جب}}{\text{جم}} (۱۸۰° + ا) = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} =$ مس ا

مم $(۱۸۰° + ا) = \frac{\text{جم}}{\text{جب}} (۱۸۰° + ا) = \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} =$ مم ا

قط $(۱۸۰° + ا) = \frac{۱}{\text{جم}} (۱۸۰° + ا) = \frac{۱}{\text{جم ا}} =$ قط ا

قم $(۱۸۰° + ا) = \frac{۱}{\text{جب}} (۱۸۰° + ا) = \frac{۱}{\text{جب ا}} =$ قم ا

جج $(۱۸۰° + ا) = ۱ -$ جم $(۱۸۰° + ا) = ۱ +$ جم ا $= ۲ -$ جج ا

دفعہ ۱۶۱ کی شکل سے یہہ نتایج بالذات بلاواسطہ بہی نکل سکتے ہین

(۱۶۳) اب ہم اوس بیان کو ثابت کرتے ہین جسکو دفعہ ۱۵۸ مین لکہا ہے

دفعہ ۱۵۹ اور ۱۶۰ کے صور شکلی سے ہم منفی زاویہ کی علم شکلی نسبتونکو مثبت زاویہ کے علم شکلی نسبتون کی رقمون مین بیان کر سکتے ہین اسلئے صرف ہمکو مثبت زاویون پر خیال کرنا چاہئے بموجب دفعہ ۱۴۸ کے چار قائمون کے اضعاف کو ہم ساقط کر سکتے ہین اسلئے فقط چار قائمون سے کم زاویون پر خیال کرنا چاہئے

موافق دفعات ۱۶۱ اور ۱۶۲ کے دو اور چار قائمون کے درمیان کے جو زاوئے ہین اونکی علم شکلی نسبتون کو دو قائمون سے کم زاویہ کے علم شکلی نسبتون کی رقمون مین بیان کر سکتے ہین بموجب دفعہ ۹۵ کے ایک اور دو قائمون کے درمیان جو زاوئے ہین اونکی علم شکلی نسبتون کو ایک قائمہ سے کم زاویہ کے علم شکلی نسبتون کی رقمون مین بیان کر سکتے ہین پس اسسے مدعا ہمارا ثابت ہوا

(۱۶۴) یہہ بات بہی خیال مین رکہو کہ جب ہم زاویہ کی تحویل اختصار کے ساتہہ اسطرح کرتے ہین تو ہم ہر ایک زاویہ کے کسی علم شکلی نسبت کو مختصر زاویہ کی اوسی علم شکلی نسبت مین بیان کر سکتے ہین یعنی اگر جیب ہو تو جیب مین اور جم ہو تو جم مین علی ہذا القیاس

(۱۶۵) مثالین اختصار زاویہ کی

جب ۲۰۰° = جب (۳۶۰° + ۳۴۰°) = جب ۳۴۰° = جب (۱۸۰° + ۱۶۰°)

= − جب ۱۶۰° = − جب ۲۰°

جم (−۸۰۰°) = جم ۸۰۰° = جم (۲۲۰° + ۸۰°) = جم ۸۰°

مس ۵۰۰° = مس (۳۶۰° + ۱۴۰°) = مس ۱۴۰° = − مس ۴۰°

مم ۴۶۰° = مم (۳۶۰° + ۱۰۰°) = مم ۱۰۰° = − مم ۸۰°

قط ۹۳۰° = قط (۲۷۰° + ۲۱۰°) = قط ۲۱۰° = قط (۱۸۰° + ۳۰°)

= − قط ۳۰°

قم (− ۶۰۰°) = − قم ۶۰۰° = − مم (۳۶۰° + ۲۴۰°)
= − قم ۲۴۰° = − قم (۱۸۰° + ۶۰°) = قم ۶۰°

مثالین ۱۷

ان بارہ علم مثلثی جملون کی قیمت دریافت کرو

(۱) جب ۲۲۵° (۲) جب ۸۱۰° (۳) جب (− ۲۴۰°)
(۴) جم ۱۰۲° (۵) جم ۵۴۰° (۶) جم (− ۳۰۰°)
(۷) مس ۱۹۵° (۸) مس ۳۴۵° (۹) مس (− ۱۲۰°)
(۱۰) مم ۲۴۰° (۱۱) جم ۱۰۵° (۱۲) جم (− ۳۱۵°)

(۱۳) بابت چہار دہم کے طریقہ کتابت ارقام کو اختیار کرکے ثابت کرو کہ رقبہ مثلث کا برابر ہے

ق ق (جب ا + جب ب + جب س)

(۱۴) ثابت کرو کہ رقبہ برابر ہے

½ ق² (جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ س)

(۱۵) سطح افقی مین ایک مقام کی جڑ ہے اوسے زاویہ ارتفاع ایک پہاڑ کا سہ ہے اور اوس سے ف فیٹ اوس مقام سے پرے ہٹا تو اوس مقام کا سر اور پہاڑ کی چوٹی ایک خط مستقیم مین دکھائی دینے لگی تو ثابت کرو کہ اگر ھ ارتفاع اوس مقام کا ہو تو بلندی پہاڑ کی $\frac{\text{ف جب سہ}}{\text{جب (سہ − ھ)}}$ فیٹ ہوگی

(۱۶) ا اور ب دو مقام ہین اونمین فاصلہ ھ ہے اور ان مقامات مین سے ہر ایک پر س د کے محاذی زاویہ سہ ہے اور مجموعہ دو زاویون ا ب د اور ب ا س کا مر ہے تو ثابت کرو کہ س اور د کے درمیان فاصلہ کیا تو

$\frac{\text{ھ جب سہ}}{\text{جب (مر − سہ)}}$ یا $\frac{\text{ھ جب سہ}}{\text{جب (مر + سہ)}}$ ہے

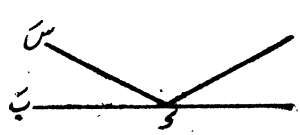
اٹھارہوان باب

زاویہ جنکے علم مثلثی نسبتین معلوم ہین

(۱۶۶) دفعہ ۱۷ مین ہم نے ثابت کیا ہے کہ زاویہ معلوم کی مطابق قوا ایک نسبت علم مثلثی مفروضہ کی ایک ہی قیمت ہوتی ہے مگر کسی علم مثلثی نسبت مفروضہ کی قیمت معلوم کے مطابق ان گنت زاوئے ہوتے ہین یہہ بات ۱۵ باب سے مترشح ہوتی ہے

اب یہہ تحقیقات کرینگے کہ کوئی جملہ کسی مفروضہ نسبت علم مثلثی کے قیمت معلوم کے واسطے ایسا دریافت کرین کہ جسمین وہ سب زاوئے شامل ہون جنکی مفروضہ علم مثلثی نسبت کی قیمت معلوم ہے

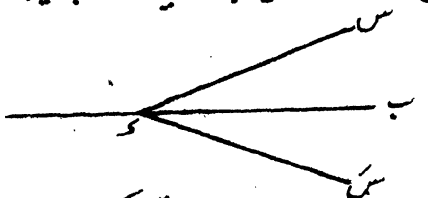
(۱۶۷) اون سب زاویون کے واسطے ایک جملہ دریافت کرو جو جیب معلوم رکھتے ہون



فرض کرو کہ ب وس کم از کم مثبت زاویہ ہو جو جیب معلوم ر رکھتا ہو اس زاویہ کو ا سے تعبیر کرو ب و کو کسی نقطہ ب تک خارج کرو اور زاویہ ب وس = ب وس کے بنا ؤ تو ب وس = ۱۸۰° − ا اب شکل سے یہہ بات ظاہر ہے کہ صرف مثبت زاوئے جنکی وہی جیب ہو جو ا کی ہے یہہ ہین ۱۸۰° − ا اور وہ زاوئے جو ا پر یا ۱۸۰° − ا پر چار قائمون کے کسی اضعاف کے زیادہ کرنے سے بنتے ہین یعنی وہ زاویہ جو جملہ ن × ۳۶۰° + ا اور ن × ۳۶۰° + ۱۸۰° − ا مین داخل ہین اور اسمین ن صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور نیز منفی زاوئے جنکی جیب وہی ہو جو ا کی ہے یہہ ہین − (۱۸۰° + ا) اور − (۳۶۰° + ا) اور وہ زاوئے جو ان پر چار قائمون کے اضعاف زیادہ کرنے سے بنتے ہین یعنی وہ زاویہ جو اس جملہ ن × ۳۶۰° − (۱۸۰° + ا) اور ن × ۳۶۰° − (۳۶۰° − ا) مین شامل ہین ن صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے امتحان سے معلوم ہوگا کہ تمام زاوئے جو اوپر بیان ہوئے ہین اس جملہ

ن × ۱۸۰° + (−۱)^ن اہمین داخل ہین اور اسمین ن صفر ہے یا کوئی صحیح عدد مثبت یا منفی ہے
اور تمام زاویے جو اس جملہ مین داخل ہین وہ اون زاویون مین ضرور پائی جائینگے جنکا بیان ہم
کر چکے ہین بس اس جملہ مین وہ سب زاویے داخل ہین جنکی جیب وہی ہے جو ا کی جیب ہے
اور تمام زاویے جو اس جملہ مین داخل ہین اونکی جیب وہی ہے جو ا کی جیب ہی یہی جملہ
قاطع التمام کے واسطے بھی ہے

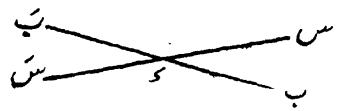
(۱۶۸) اون سب زاویون کے واسطے ایک جملہ دریافت کرو جو جیب التمام معلوم رکھتے ہون



فرض کرو کہ ب ک س کم از کم مثبت زاویہ ہی جو معلوم جیب التمام رکھتا ہی اس زاویہ کو ا سے تعبیر کرو
اور زاویہ ب ک سَ = اب ک س کے بناؤ
اب یہہ بات شکل سے ظاہر ہے کہ صرف مثبت زاویے جنکے جیب التمام وہی ہو جو ا کی جیب التمام
ہے یہہ ہین ا اور ۳۶۰° − ا اور وہ زاویے جو ا اور ۳۶۰° − ا پر چار قائمون کے کسی
اضعاف کے زیادہ کرنے سے بنین یعنے وہ زاویے جو ان جملون
ن × ۳۶۰° + ا اور ن × ۳۶۰° + ۳۶۰° − ا مین داخل ہین اور اسمین ن صفر
یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور نیز وہ منفی زاویے جنکے جیب التمام وہی ہو جو ا کی جیب التمام ہے
یہہ ہین − ا اور − (۳۶۰° − ا) اور وہ زاویے جو ان پر چار قائمون کے کسی اضعاف
کے زیادہ کرنے سے بنین یعنی وہ زاویے جو ان جملون ن × ۳۶۰° − ا اور
ن × ۳۶۰° − (۳۶۰° − ا) سے تعبیر ہوتے ہین اسمین ن صفر یا کوئی منفی
صحیح عدد ہے
امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ تمام زاویے جو اوپر سان ہوئے ہین وہ اس جملہ ن × ۳۶۰° ± ا سے

تعبیر ہوتے ہین اور اسمین ن صفر ہے یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہے اور تمام زاویے جو اس جملہ مین داخل ہین وہ اون زاویون مین جنکو ہم نے اوپر بتلایا ہے ضرور پائی جائینگی پس اس جملہ مین وہ سب زاویے داخل ہین جنکی وہی جیب التمام ہے جو ا کی جیب التمام ہے اور تمام زاویے جو اس جملہ مین داخل ہین اونکی جیب التمام وہی ہے جو ا کی جیب التمام ہے یہی جملہ قاطع الزاویہ کے واسطے بھی ہے

(۱۶۹) اون سب زاویون کے واسطے ایک جملہ دریافت کرو جو مماس معلوم ہی رکھتی ہون



فرض کرو کہ ب ک س کم از کم زاویہ ہو جو مماس معلوم رکھتا ہو اس زاویہ کو ا سے تعبیر کرو ب ک کو کسی نقطہ ب تک اور س ک کو س تک بڑھاؤ

اب اس شکل سے یہہ ظاہر ہے کہ مثبت زاویے جنکا مماس وہی ہو جو ا کا مماس ہے وہ یہہ زاویے ہین ا اور ۱۸۰° + ا اور وہ زاویے جو ا اور ۱۸۰° + ا پر چار قائمون کے اضعاف زیادہ کرنے سے پیدا ہوتے ہین یعنی زاویے جو جملہ ن × ۶۰ س + ا

اور ن × ۶۰ س + ۱۸۰° + ا مین داخل ہین اسمین ن صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے

اور نیز وہ منفی زاویے جنکا مماس وہی ہے جو ا کا مماس ہے یہہ زاویے ہین

— (۱۸۰° — ا) اور — (۶۰ س — ا) اور وہ زاویے جو ان پر چار قائمون کے کسی اضعاف کے زیادہ کرنے سے پیدا ہون یعنی زاویے جو ان جملون ن × ۶۰ س — (۱۸۰° — ا) اور ن × ۶۰ س — (۶۰ س — ا) مین داخل ہین

اور اسمین ن صفر یا کوئی منفی صحیح ہے

امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ تمام زاویے جنکو اوپر لکھا ہے وہ اس جملہ ن × ۱۸۰° + ا مین داخل ہین اسمین ن صفر یا کوئی مثبت منفی صحیح عدد ہے اور نیز تمام زاویے جو اس جملہ

داخل ہین وہ اون زاویون مین جنکا اوپر بیان کیا ہے پائی جائینگے
پس اس جملہ مین وہ تمام زاوئے جنکا مماس وہی ہے جو ا کا مماس ہے داخل ہین اور جو زاوئے
اس جملہ مین داخل ہین اونکا مماس وہی ہے جو ا کا مماس ہے یہی جملہ اون سب زاویون کے واسطے
بھی جنکا مماس التمام وہی ہے جو ا کا مماس التمام ہے

مثالین ۱۸

ان آٹھ مساواتون کا حل عامہ لکھو

(۱) جب ا = $\frac{۱}{۲}$ (۲) جم ا = $\frac{۱}{۲}$ (۳) مس ا = $۳\frac{۱}{۳}$

(۴) قم ا = ۱ (۵) قط ا = −۱ (۶) م ا = $۲-۳\frac{۱}{۳}$

(۷) جب ا + قم ا = ۲ (۸) جب ا = جم ۳ا

(۹) مثلث کے زاویہ ا کو جو خط تنصیف کرے اور مقابل کے ضلع پر ختم ہو اوسکا طول
$\frac{۲ \text{ طب طس جم } \frac{۱}{۲} \text{ ا}}{\text{طب + طس}}$ ہوگا

(۱۰) ایک مثلث کا زاویہ س قائمہ ہے تو ثابت کرو کہ نصف قطر دائرہ اندرونی کا برابر
$\frac{۱}{۲}\left[(\text{طا} + \text{طب} - \sqrt{(\text{طا}^۲ + \text{طب}^۲)}\right]$ ہوگا

(۱۱) ایک مثلث کے راس ا پر ایک دائرہ گذرتا ہے اور ضلع ب س کو اوسکے نقطہ وسط پر
مس کرتا ہے تو اوسکا نصف قطر $\frac{۲(\text{طب}^۲ + \text{طس}^۲) - \text{طا}^۲}{۸ \text{ طب جب س}}$ ہوگا

(۱۲) مثلث کے اضلاع ب س اور س ا اور ا ب مین تقاطع اور ق اور ر اسیطرح کہ
$\frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}} = \frac{\text{س ق}}{\text{س ا}} = \frac{\text{ا ر}}{\text{ا ب}} = \text{لد}$
تو ثابت کرو کہ ع ق^۲ + ق ر^۲ + ر ع^۲ = (طا^۲ + طب^۲ + طس^۲)(۱ − ۳ لد^۲ + ۲ لد^۳)

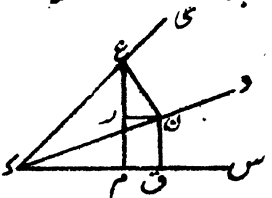
اونیسوان باب

علم مثلثی نسبتین دو زاویون کی

(۱۷۰) اس باب مین یہہ مضمون لکھا جائیگا کہ دو زاویون کے مجموعہ اور تفاوت کے

ہم مثلثی نسبتون کواون زاویون کی علم مثلثی نسبتون کی رقمون مین کس طرح بیان کرتے ہین

(۱۷۱) دوزاویون کے مجموعہ کی جیب کو اون زاویون کی جیب اور جیب التمام مین بیان کرو



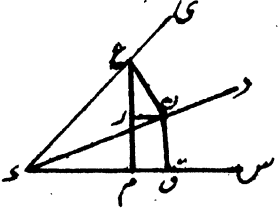
فرض کرو کہ زاویہ س ک د کا ا سے اور زاویہ د ک ی کا ب سے تعبیر کیا جاے تو زاویہ س ک ی کا ا+ب سے تعبیر ہوگا

ک ی مین کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور ع م عمود ک س پر اور ع ن عمود ک د پر اور ن ر عمود ع م پر اور ن ق عمود ک س پر نکالو

تو زاویہ ن ع ر تمامی زاویہ ع ن ر کی ہوگی اور اسواسطے ر ن ک کی برابر ہوگی اور ن ک برابر ہے ن ک ق یعنی ا کے

$$\text{اب جب } (ا+ب) = \frac{ع م}{ک ع} = \frac{ر م + ع ر}{ک ع} = \frac{ن ق}{ک ع} + \frac{ع ر}{ک ع}$$
$$= \frac{ن ق}{ک ن} \cdot \frac{ک ن}{ک ع} + \frac{ع ر}{ع ن} \cdot \frac{ع ن}{ک ع}$$
$$= \text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}$$

(۱۷۲) دوزاویون کی مجموعہ کی جیب التمام کو زاویون کی جیب اور جیب التمام مین بیان کرو

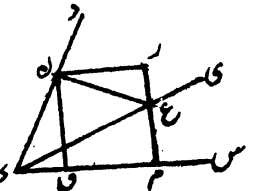


شکل موافق دفعہ سابق کے بناؤ

$$\text{جم } (ا+ب) = \frac{ک م}{ک ع} = \frac{ک ق - ق م}{ک ع} = \frac{ک ق}{ک ع} - \frac{ن ر}{ک ع}$$

$= \frac{د ق}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د ع} - \frac{ن ر}{ن ع} \cdot \frac{ن ع}{د ع} =$ جب ا جم ب - جب ب جب ا

(۱۷۳) دوزاویون کے تفاوت کے جیب کو زاویون کی جیب اور جیب التمام مین بیان کرو



فرض کرو کہ زاویہ س د ک کو ا اور زاویہ د ی کو ب تعبیر کرتا ہی تو زاویہ س د ی کو ا - ب تعبیر کریگا

د ی مین کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور ع م عمود د س پر اور ع ن عمود د ر پر نکالو اور ن ر عمود م ع ممدود پر اور ن ق عمود د س پر نکالو

پس زاویہ ن ع ر تمامی زاویہ ع ن ر کی ہوگی اور اسیواسطے برابر د ن ر کی ہوگی اور د ن ر برابر ن د ق یعنی ا کے ہے

اب جب (ا - ب) $= \frac{ع م}{د ع} = \frac{ر م - ر ع}{د ع} = \frac{ن ق}{د ع} - \frac{ر ع}{د ع}$

$= \frac{ن ق}{ن د} \cdot \frac{د ن}{د ع} - \frac{ر ع}{ع ن} \cdot \frac{ع ن}{د ع}$

$=$ جب ا جم ب - جم ا جب ب

(۱۷۴) دوزاویون کے تفاوت کے جیب التمام کو زاویون کی جیب اور جیب التمام مین بیان کرو

شکل موافق دفعہ سابق کے بناؤ

جم (ا - ب) $= \frac{ر م}{د ع} = \frac{د ق + ق م}{د ع} = \frac{د ق}{د ع} + \frac{ن ر}{د ع}$

$= \frac{د ق}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د ع} + \frac{ن ر}{ع ن} \cdot \frac{ع ن}{د ع}$

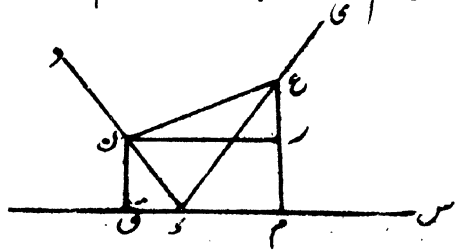
$=$ جم ا جم ب + جب ا جب ب

(۱۷۵) ان اثباتون کے یاد رکہنے کے واسطے طالب علم اس بات کو ہمیشہ ذہن مین رکہے کہ

نقطہ ع کا اوس خط مستقیم مین مقرر کیا گیا ہے جو زاویون کے مجموعہ کا محیط ہے
پس جب (ا+ب) اور جم (ا+ب) کے صورتونکی ثابت کرنمین نقطہ ع اوس خط
مستقیم مین مقرر کرنا چاہئے جو زاویہ ا+ب کا محیط ہی اور جب (ا-ب) اور جم (ا-ب)
کی صورتون کے ثابت کرنیکے واسطے نقطہ ع اوس خط مین مقرر کرنا چاہئے
جو زاویہ ا-ب کا محیط ہے

(۱۷۶) دفعات ۱۷۱ سے ۱۷۴ تک مین جو صور قانونی ثابت ہوئے ہین وہ حاوی سب
صورتون پر ہین خواہ زوایا ا اور ب کی کچھہ ہی مقدار ہو طالب علم کو چاہئے کہ وہ خود
مختلف مقدار کے زاویے بنا بناکر شکلین بنائے اور اوس سے مختلف صورتین ثابت کرے ان
اختلافات مین فقط اس بات کا فرق ہوگا کہ عمود جو نکالی جائینگی وہ بعض صورتون مین
خود خطوط مستقیم پر واقع ہونگی اور بعض صورتون مین اُن خطوط مستقیم ممدودہ پر واقع ہونگے

(۱۷۷) تمثیلاً ہم دفعات ۱۷۳ اور ۱۷۴ کی قانون کو اوس صورتمین ثابت کرتے ہین کہ زاویہ
ا بڑا قائمہ سے اور ب کم قائمہ سے ہو اور ا-ب کم قائمہ سے ہو



فرض کرو کہ س د کو ا اور زاویہ د ی کو ب تعبیر کرتا ہے تو زاویہ س د ی کو ا-ب تعبیر کریگا
د ی مین کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور ع م عمود د س پر اور ع ن عمود د ی پر نکالو
اور ن ر عمود م ع پر اور ن ق عمود س د خارج شدہ پر نکالو
پس زاویہ ن ع ر تمامی زاویہ ع ن ر کی ہے اور اسیواسطے برابر ن د ی کی ہی اور

یہہ برابر ۱۸۰° − ا کی ہے

پس جب (ا − ب) = $\frac{ع م}{ک ع}$ = $\frac{ر م + ع ر}{ک ع}$ = $\frac{ن ق}{ک ع}$ + $\frac{ع ر}{ک ع}$

= $\frac{ن ق}{ک ن}$. $\frac{ک ن}{ک ع}$ + $\frac{ع ر}{ع ن}$. $\frac{ع ن}{ک ع}$

= جب (۱۸۰° − ا) جم ب + جم (۱۸۰° − ا) جب ب

= جب ا جم ب − جم ا جب ب بموجب دفعہ ۹۵ کے

اور جم (ا − ب) = $\frac{ک م}{ک ع}$ = $\frac{م ن − ک ق}{ک ع}$ = $\frac{ن ر}{ک ع}$ − $\frac{ک ق}{ک ع}$

= $\frac{ن ر}{ع ن}$. $\frac{ع ن}{ک ع}$ − $\frac{ک ق}{ک ن}$. $\frac{ک ن}{ک ع}$

= جب (۱۸۰° − ا) جب ب − جم (۱۸۰° − ا) جم ب

= جب ا جب ب + جم ا جم ب بموجب دفعہ ۹۵ کے

(۱۷۸) مختلف صورتونکو اس طرح امتحان کرنے سے طالب علم کے دل مین یقین ہوجائیگا کہ دفعات ۱۷۱ سے ۱۷۴ تک مین جو قانون بیان ہوئے وہ عام ہین اور ایک اور ثبوت اسکا بڑے علم مثلث کی دفعہ ۸۰ مین لکھا جائیگا

اب ہم مرکب زاویون کے مماس اور مماس التمام کو مفرد زاویون کے مماس اور مماس التمام کی رقمون مین بیان کرتے ہین

(۱۷۹) مس (ا + ب) = $\frac{جب (ا + ب)}{جم (ا + ب)}$

= $\frac{جب ا جم ب + جم ا جب ب}{جم ا جم ب − جب ا جب ب}$

اس آخر جملہ کے نسب نما اور شمار کنندہ دونونکو جم ا جم ب پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{\frac{جب ا}{جم ا} + \frac{جب ب}{جم ب}}{۱ − \frac{جب ا}{جم ا} . \frac{جب ب}{جم ب}}$

اسیواسطے مس (ا + ب) = $\frac{مس ا + مس ب}{۱ − مس ا مس ب}$

(۱۸۰) $\text{مس}(ا-ب) = \frac{\text{حب}(ا-ب)}{\text{جم}(ا-ب)} = \frac{\text{حب ا جم ب} - \text{جم ا حب ب}}{\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب}}$

$$= \frac{\frac{\text{حب ا}}{\text{جم ا}} - \frac{\text{حب ب}}{\text{جم ب}}}{1 + \frac{\text{حب ا}}{\text{جم ا}} \cdot \frac{\text{حب ب}}{\text{جم ب}}} = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}}$$

(۱۸۱) $\text{مم}(ا+ب)$

$$= \frac{\text{جم}(ا+ب)}{\text{جب}(ا+ب)} = \frac{\text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}}{\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}}$$

$$= \frac{1 - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} \cdot \frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}}}{\frac{\text{جم ا}}{\text{حب ا}} + \frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}}} = \frac{1 - \text{مم ا مم ب}}{\text{مم ا} + \text{مم ب}}$$

(۱۸۲) $\text{مم}(ا-ب)$

$$= \frac{\text{جم}(ا-ب)}{\text{جب}(ا-ب)} = \frac{\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب}}{\text{جب ا جم ب} - \text{جم ا جب ب}}$$

$$= \frac{1 + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} \cdot \frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}}}{\frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}} - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}} = \frac{1 + \text{مم ا مم ب}}{\text{مم ب} - \text{مم ا}}$$

(۱۸۳) ان جملونکو اور صورتون مین بھی بدلکر لکھہ سکتے ہین

$$\text{مم}(ا+ب) = \frac{1}{\text{مس}(ا+ب)} = \frac{1 - \text{مس ا مس ب}}{\text{مس ا} + \text{مس ب}}$$

$$\text{مم}(ا-ب) = \frac{1}{\text{مس}(ا-ب)} = \frac{1 + \text{مس ا مس ب}}{\text{مس ا} - \text{مس ب}}$$

(۱۸۴) ب = ا کے فرض کرنے سے بعض قانون اعظم مستنبط ہوتے ہین

ب = ا کے دفعہ ۱۷۱ مین لکھو تو جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا

اور دفعہ ۱۷۲ مین ا = ب کی رکھو جم ۲ ا = جم² ا − جب² ا

$$= 1 - 2\text{جب}^2 ا$$

$$2\text{جم}^2 ا = 1$$

پس $۱ + \text{جم}^{۲} ۱ = ۲\text{جم}^{۲} ۱$

$۱ - \text{جم}^{۲} ۱ = ۲\text{جب}^{۲} ۱$

اور $\frac{۱ - \text{جم}^{۲} ۱}{۱ + \text{جم}^{۲} ۱} = \text{مس}^{۲} ۱$ اور نیز $\frac{\text{جب}^{۲} ۱}{۱ + \text{جم}^{۲} ۱} = \text{مس} ۱$

اور چونکہ $\text{جب}^{۲} ۱ + \text{جم}^{۲} ۱ = ۱$ تو

$\text{جب}^{۲} ۱ = \frac{۲\text{جب} ۱ \text{جم} ۱}{\text{جم}^{۲} ۱ + \text{جب}^{۲} ۱}$

اب اس آخر جملہ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $\text{جم}^{۲} ۱$ پر تقسیم کرو

تو $\text{جب} ۱ = \frac{۲\text{مس} ۱}{۱ + \text{مس}^{۲} ۱}$

اور ایسی ہی $\text{جم} ۲۱ = \frac{\text{جم}^{۲} ۱ - \text{جب}^{۲} ۱}{\text{جم}^{۲} ۱ + \text{جب}^{۲} ۱} = \frac{۱ - \text{مس}^{۲} ۱}{۱ + \text{مس}^{۲} ۱}$

دفعہ ۱۷۹ مین ب = ۱ کے رکھو تو

$\text{مس}^{۲} ۱ = \frac{۲\text{مس} ۱}{۱ - \text{مس}^{۲} ۱}$

اور یہہ نتیجہ اون نتائج سے بھی مستنبط ہو سکتا تہا کہ جب ۲۱ اور جم ۲۱ کے واسطے ابھی لکھی ہین

دفعہ ۱۸۱ مین ب = ۱ کی رکھو تو

$\text{مم}^{۲} ۱ = \frac{\text{مم}^{۲} ۱ - ۱}{\text{مم}^{۲} ۱}$

مثالین ۱۹

(۱) اگر $\text{مس} ۱ = \frac{۴}{۳}$ اور $\text{مس} ب = ۷$ تو مس (۱ + ب) کو دریافت کرو

(۲) اگر $\text{مس} ۱ = \frac{۱}{۳۱۵}$ اور مس ب = $\frac{۱}{۱۵۱}$ تو جب (۱ + ب) کو دریافت کرو

(۳) اگر $\text{مس} ب = \frac{۲\text{جب} ۱ \text{جب} س}{\text{جب}(۱ + س)}$ تو ثابت کرو کہ مس ۱ اور مس ب اور مس س سلسلہ موسیقیہ مین ہین

(۴) اگر مس ۱ = ط اور مس ب = ص تو جم ۲ (۱ + ب) اور جب^{۲} (۱ + ب) کو دریافت کرو

(۵) اگر جم (ا - ب) = ن جب (ا + ب) تو ثابت کرو
مس (۴۵° + ا) = $\frac{ن+۱}{ن-۱}$ مس (۴۵° - ب)

(۶) اگر جب ا = $\frac{۱}{۳۱۶}$ اور نسب ب = $\frac{۱}{۲۱۶}$ + $\frac{۱}{۳۱۶}$ تو جم (ا + ب) کو دریافت کرو

(۷) معلوم ہے کہ مس ۲ا = $\frac{۲۴}{۲۵}$ تو جب ا کو دریافت کرو

(۸) اگر مس ۲ا = ۲ مس ب اور مس س = مس ۳ا تو ثابت کرو کہ مس (ب - س) = مس ا

(۹) اگر جم ا = $\frac{ع + ق ح}{ق + ع ح}$ اور جم ب = $\frac{ع - ق ح}{ق - ع ح}$ تو جم (ا + ب) کو دریافت کرو

(۱۰) اگر مس ا = مس ب تو ۲ مس ۲ا = جب ۲ب مس ۲ب

(۱۱) جب ا - جم ا = $\frac{۱}{۲۱۶}$ جم ۹ - $\frac{۳۱۶}{۲۱۶}$ جب ۹ تو ا کی
حتے الامکان چھوٹی قیمت کے درجوں کی تعداد دریافت کرو

(۱۲) اگر مس ب + جم ب = ۲ قط ۲ا کو ثابت کرو کہ ایک قیمت ا + ب کی ۴۵° ہے

(۱۳) ثابت کرو کہ قط ۲ا - مس ۲ا = مس (۴۵° - ا)

(۱۴) اگر ۲ جم ب - ۲ جم ۲ب = قط ۲ا - مس ۲ا تو ثابت کرو کہ ایک قیمت ا + ب کی ۴۵° ہے

(۱۵) اگر ع جب ا = ق جب ب اور ر جم ا = ص جم ب تو
جب (ا ± ب) = $\sqrt{(ع^۲ - ق^۲)(ص^۲ - ر^۲)}$ اور جم (ا ± ب) = $\frac{ق ص \mp ع ر}{ق ر \mp ع ص}$
ان دس تطابقوں کو ثابت کرو

(۱۶) $\frac{جب ۲ا}{۱ + جم ۲ا}$. $\frac{جم ا}{۱ + جم ا}$ = مس $\frac{ا}{۲}$

(۱۷) جب ۸ ا = ۸ جب ا جم ا جم ۲ا جم ۴ا

(۱۸) (جب ا - جب ب)^۲ + (جم ا - جم ب)^۲ = ۲ جع (ا - ب)

(۱۹) ۲ قم ۴ا + ۲ مم ۴ا = مم ا - مس ا

(۲۰) ۲ جب ۲ا - جب ۴ا = ۴ جب ۲ا جب ا

(۲۱) مم ۲ا - مس ا = ۴ مم ۲ا قم ۲ا

(۲۲) ۲ - ۲ مس ۱ مم ۲ ۱ = قط ۲ ۱

(۲۳) قط ۲ (۱ + ۴۵°) - قط ۲ (۱ - ۴۵°) = ۴ مس ۲ ۱ قط ۲ ۱

(۲۴) مس ۱ + مم ۲ ۱ = جم ۲ ۱

(۲۵) مس (۴۵° + ۱) مس (۴۵° - ۱) = ۲ مس ۲ ۱

بیسوان باب

تبدل صور علم مثلثی

(۱۸۵) باب گذشتہ مین صور قانونیہ لکھے ہین اونکی استعانت سے علم مثلثی جملون کو بہت سی صورتون مین تبدل کر سکتے ہین طالب علم جسقدر علم ریاضی کی تحصیل مین قدم آگے بڑہائیگا اوسیقدر اوسپر تبدیل صور کی کیفیت کھلتی جائیگی اور بالفعل بہی اونمین مشق کرنی بڑی بکار آمد ہے

(۱۸۶) حاصلضرب جب (۱ + ب) اور جب (۱ - ب) کی ایک عجیب صورت ہی

جب (۱ + ب) جب (۱ - ب)

= (جب ۱ جم ۱ + جم ۱ جب ب) (جب ۱ جم ب - جم ۱ جب ب)

= جب ۲ ۱ جم ۲ ب - جم ۲ ۱ جب ۲ ب

= جب ۲ ۱ (۱ - جب ۲ ب) - (۱ - جب ۲ ۱) جب ۲ ب

= جب ۲ ۱ - جب ۲ ب

اور اسکو جم ۲ ب - جم ۲ ۱ کی صورت مین بہی لکھ سکتے ہین

(۱۸۷) اور نیز جم (۱ + ب) جم (۱ - ب)

= (جم ۱ جم ب - جب ۱ جب ب) (جم ۱ جم ب + جب ۱ جب ب)

= جم ۲ ۱ جم ۲ ب - جب ۲ ۱ جب ۲ ب

= جم ۲ ۱ (۱ - جب ۲ ب) - (۱ - جم ۲ ۱) جب ۲ ب

$= جم^۲ ا - جب^۲ ب$

$= جم^۲ ب - جب^۲ ب$

(۱۸۸) ۱۹ باب کے چار اصولی قوانین سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$جب (ا + ب) + جب (ا - ب) = ۲ جب ا جم ب$

$جب (ا + ب) - جب (ا - ب) = ۲ جم ا جب ب$

$جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب$

$جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب$

فرض کرو کہ $ا + ب = س$ اور $ا - ب = د$

$ا = \frac{س+د}{۲}$ اور $ب = \frac{س-د}{۲}$

پس $جب س + جب د = ۲ جب \frac{س+د}{۲} جم \frac{س-د}{۲}$

$جب س - جب د = ۲ جم \frac{س+د}{۲} جب \frac{س-د}{۲}$

$جم س + جم د = ۲ جم \frac{س+د}{۲} جم \frac{س-د}{۲}$

$جم د - جم س = ۲ جب \frac{س+د}{۲} جب \frac{س-د}{۲}$

نی مجموعہ یا تفاوت کو اجزاء ضربی کے حاصلضرب مین تحویل کرنے کے اندر یہہ آخر چار صور قانو بڑے بکار آمد ہین مثلاً ان چار صور قانونی مین سے آخر صورت سے مجموعہ دو جیبون کا جیب اور جیب التمام کی حاصلضرب کی صورت مین تحویل ہوگیا

نی حاصلضرب کو مجموعہ یا تفاوت کی صورت مین تحویل کرنے کے اندر اول چار صور قانو بڑے بکار آمد ہین مثلاً چار صور قانونی کی آخر صورت مین جب دو نو زاویون کے تفاوت کے جیب التمام مین سے اونکے مجموعہ کے جیب التمام گھٹائین تو حاصلضرب کا نصف برابر حاصلضرب دو جیبون کے ہوتا ہے

(۱۸۹) $\frac{\text{حب ا + حب ب}}{\text{حب ا − جب ب}} = \frac{۲\text{ حب } \frac{\text{ا+ب}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{ا−ب}}{۲}}{۲\text{ جم } \frac{\text{ا+ب}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ا−ب}}{۲}}$ بموجب فقرہ ۱۸۸ کے

$= \frac{\text{مس } \frac{\text{ا+ب}}{۲}}{\text{مم } \frac{\text{ا−ب}}{۲}}$

$= \frac{\text{مس } \frac{\text{ا+ب}}{۲}}{\text{مس } \frac{\text{ا−ب}}{۲}}$

(۱۹۰) $\frac{\text{جم ا + جم ب}}{\text{جم ب − جم ا}} = \frac{۲\text{ جم } \frac{\text{ا+ب}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{ا−ب}}{۲}}{۲\text{ جب } \frac{\text{ا+ب}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ا−ب}}{۲}}$ بموجب فقرہ ۱۸۸ کے

$= \text{مم } \frac{\text{ا+ب}}{۲} \text{ مم } \frac{\text{ا−ب}}{۲}$

(۱۹۱) $\text{مس ا + مس ب} = \frac{\text{حب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{حب ب}}{\text{جم ب}}$

$= \frac{\text{حب ا جم ب + جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}$

$= \frac{\text{حب (ا + ب)}}{\text{جم ا جم ب}}$

اور علی ہذا القیاس $\text{مس ا − مس ب} = \frac{\text{حب (ا − ب)}}{\text{جم ا جم ب}}$

(۱۹۲) $\text{مس ا + مم ا} = \frac{\text{حب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{حب}^۲\text{ ا + جم}^۲\text{ ا}}{\text{جب ا جم ا}}$

$= \frac{۱}{\text{جب ا جم ا}} = \frac{۲}{۲\text{ جب ا جم ا}} = \frac{۲}{\text{جب ۲ ا}}$

(۱۹۳) $\text{مم ا − مس ا} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} - \frac{\text{حب ا}}{\text{جم ا}}$

$= \frac{\text{جم}^۲\text{ ا − حب}^۲\text{ ا}}{\text{جب ا جم ا}} = \frac{\text{جم ۲ ا}}{\text{جب ا جم ا}}$

$= \frac{۲\text{ جم ۲ ا}}{۲\text{ جب ا جم ا}} = \frac{۲\text{ جم ۲ ا}}{\text{جب ۲ ا}} = ۲\text{ مم ۲ ا}$

(۱۹۴) خواہ کتنے ایک مفرد زاویئے علامت + اور − کے ساتھ شامل ہو کر ایک

مرکب زاویہ بنائین اوسکی علم مثلثی نسبتون کے جملے اومیسوین باب کی صورانون کو بار بار استعمال مین لانے سے دریافت ہو سکتے ہین

مثلاً جب (ا + ب + س) = جب (ا + ب) جم س + جم (ا + ب) جب س

= جب ا جم ب جم س + جب ب جم س جم ا

+ جب س جم ا جم ب − جب ا جب ب جب س

جم (ا + ب + س) = جم (ا + ب) جم س − جب (ا + ب) جب س

= جم ا جم ب جم س − جم س جب ا جب ب

− جم ب جب ا جب س − جم ا جب ب جب س

مس (ا + ب + س) = $\frac{\text{جب (ا + ب + س)}}{\text{جم (ا + ب + س)}}$

اسمین جب (ا + ب + س) اور جم (ا + ب + س) کے واسطے جو جملے دریافت ہوئے ہین اونکو رکھو اور دونو شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب جم س پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مس (ا + ب + س) = $\frac{\text{مس ا + مس ب + مس س − مس ا مس ب مس س}}{\text{ا − مس ب مس س − مس س مس ا − مس ا مس ب}}$

(۱۹۵) ایک خاص صورت دفعہ گذشتہ کی جسمین س = ب = ا کی ہو لکھنے کے قابل ہے اوسسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جب ۳ ا = ۳ جب ا جم ا − جب ۳ ا

= ۳ جب ا (۱ − جب ا) − جب ۳ ا

= ۳ جب ا − ۴ جب ۳ ا

اور جم ۳ ا = جم ۳ ا − ۳ جم ا جب ا

= جم ۳ ا − ۳ جم ا (۱ − جم ا)

= ۴ جم ۳ ا − ۳ جم ا

$$\text{مس } ۳ا = \frac{۳\text{مس } ا - \text{مس}^۳ ا}{۱ - ۳\text{مس}^۲ ا}$$

(۱۹۶) جب زاویون مین ربط ہوتا ہی تو اونکے علم مثلثی نسبتون کا ایک آسان ربط دریافت ہوجاتا ہے ہم تمثیلاً وہ صورت بیان کرتے ہین کہ جسمین تین زاویون کا مجموعہ ۱۸۰° ہو اور یہہ ربط مثلث کے زاویون مین ہوتا ہے

اگر $ا + ب + س = ۱۸۰°$ تو

$$\text{جب } ا + \text{جب } ب + \text{جب } س = ۴\text{جم}\frac{ا}{۲}\text{جم}\frac{ب}{۲}\text{جم}\frac{س}{۲}$$

اسواسطے کہ $\text{جب } ا + \text{جب } ب = ۲\text{جب}\frac{ا+ب}{۲}\text{جم}\frac{ا-ب}{۲}$ (دفعہ ۱۸۸)

$$= ۲\text{جب}(۹۰ - \frac{س}{۲})\text{جم}\frac{ا-ب}{۲}$$

$$= ۲\text{جم}\frac{س}{۲}\text{جم}\frac{ا-ب}{۲}$$

جب س $= ۲\text{جب}\frac{س}{۲}\text{جم}\frac{س}{۲}$

$$= ۲\text{جم}\frac{س}{۲}\text{جم}(۹۰ - \frac{س}{۲})$$

$$= ۲\text{جم}\frac{س}{۲}\text{جم}\frac{ا+ب}{۲}$$

اسیواسطے $\text{جب } ا + \text{جب } ب + \text{جب } س = ۲\text{جم}\frac{س}{۲}\left[\text{جم}\frac{ا-ب}{۲} + \text{جم}\frac{ا+ب}{۲}\right]$

$$= ۲\text{جم}\frac{س}{۲}\text{جم}\frac{ا}{۲}\text{جم}\frac{ب}{۲}$$ (دفعہ ۱۸۸)

$$= ۴\text{جم}\frac{ا}{۲}\text{جم}\frac{ب}{۲}\text{جم}\frac{س}{۲}$$

پہر اگر $ا + ب + س = ۱۸۰°$ تو

$$\text{جم}\frac{ب}{۲} + \text{مم}\frac{س}{۲} = \frac{\text{جم}\frac{ا}{۲}}{\text{جب}\frac{ب}{۲}\text{جب}\frac{س}{۲}}$$

اسواسطے کہ $\text{مم}\frac{ب}{۲} + \text{مم}\frac{س}{۲} = \frac{\text{جم}\frac{ب}{۲}}{\text{جب}\frac{ب}{۲}} + \frac{\text{جم}\frac{س}{۲}}{\text{جب}\frac{س}{۲}}$

$$= \frac{\text{جم}\frac{ب}{۲}\text{جب}\frac{س}{۲} + \text{جب}\frac{ب}{۲}\text{جم}\frac{س}{۲}}{\text{جب}\frac{ب}{۲}\text{جب}\frac{س}{۲}}$$

$$= \frac{\text{حب} \frac{1}{2}(\text{ا}+\text{س})}{\text{جب} \frac{1}{2}\text{ا} \text{ جب} \frac{1}{2}\text{س}} \quad \text{دفعہ ۱۷۱}$$

$$= \frac{\text{حب}(۹۰° - \frac{1}{2}\text{ا})}{\text{جب} \frac{1}{2}\text{ا} \text{ جب} \frac{1}{2}\text{س}} = \frac{\text{حم} \frac{1}{2}\text{ا}}{\text{جب} \frac{1}{2}\text{ا} \text{ جب} \frac{1}{2}\text{س}}$$

اور ایسی ہی ا + ب + س = ۱۸۰° تو

$$\text{مس} \frac{1}{2}\text{ب} + \text{مس} \frac{1}{2}\text{س} = \frac{\text{حم} \frac{1}{2}\text{ا}}{\text{حم} \frac{1}{2}\text{ب} \text{ حم} \frac{1}{2}\text{س}}$$

(۱۹۷) اس باب مین جسطرح تبدل صور کا حال لکھا ہی وہ اون مساواتون کے حل کرنیمین بڑا کار آمد ہے جسمین علم مثلثی نسبتین ہوتی ہین مثلاً زاویہ ا کی قیمت اس مساوات مین دریافت کرنی ہو

جب ۷ ا - جب ا = جب ۳ ا

بموجب دفعہ ۱۸۸ کے

جب ۷ ا - جب ا = ۲ جب ۳ ا جم ۴ ا

پس یہہ مساوات حاصل ہوئی کہ

۲ جب ۳ ا جم ۴ ا = جب ۳ ا

اسیواسطے جب ۳ ا = ۰

یا جم ۴ ا = $\frac{1}{2}$

اول سے ایک سادہ حل ۳ ا = ۰ کے حاصل ہوتا ہی اور اور حل عام ۳ ا = ن × ۱۸۰° کے اور دوسرے سے ایک سادہ حل ۴ ا = ۶۰° کے اور حل عام ۴ ا = ن × ۳۶۰° ± ۶۰° کے حاصل ہوتا ہے - اٹھارہوین باب کو دیکھو

مثالین ۲۰

ان تیس مطابقون کو ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{حب ۳ ا} + \text{حب ا}}{\text{حم ۳ ا} + \text{حم ا}} = \text{مس ۲ ا}$

(۲) $\frac{\text{جم}\,\theta - \text{جم}\,3\theta}{\text{جب}\,\theta + \text{جب}\,3\theta} = \text{مس}\,\theta$

(۳) $\frac{\text{جب}\,5\theta - \text{جب}\,3\theta}{\text{جم}\,3\theta - \text{جم}\,5\theta} = \text{مم}\,4\theta$

(۴) $\frac{\text{جب}^2\theta - \text{جب}^2\beta}{\text{جب}\,\theta\,\text{جم}\,\theta - \text{جب}\,\beta\,\text{جم}\,\beta} = \text{مس}(\theta+\beta)$

(۵) $\text{جم}^2\theta - \text{جم}^2 3\theta = \text{جب}\,\theta\,\text{جب}\,5\theta$

(۶) $\text{جب}\,\theta\,\text{جب}(\theta+2\beta) - \text{جب}\,\beta\,\text{جب}(2\theta+\beta) = \text{جب}^2\theta - \text{جب}^2\beta$

(۷) $\frac{\text{جب}\,\theta + \text{جب}(\theta+\beta) + \text{جب}(\theta+2\beta)}{\text{جم}\,\theta + \text{جم}(\theta+\beta) + \text{جم}(\theta+2\beta)} = \text{مس}(\theta+\beta)$

(۸) $2\,\text{جم}(ن-1)\theta\,\text{جم}\theta - \text{جم}(ن-2)\theta = \text{جم}\,ن\theta$

(۹) $2\,\text{جب}\left(\frac{\theta+\beta}{2} - 45^\circ\right)\text{جم}\left(\frac{\theta-\beta}{2} + 45^\circ\right) =$
$\text{جب}\,\theta - \text{جم}\,\beta$

(۱۰) $(1 + \text{مم}\,\theta + \text{قم}\,\theta)(1 + \text{مم}\,\theta - \text{قم}\,\theta) = \text{جم}\frac{\theta}{2} - \text{مس}^2\frac{\theta}{2}$

(۱۱) $\frac{\text{مس}\,3\theta}{\text{مس}\,\theta} = \frac{2\,\text{جم}\,2\theta + 1}{2\,\text{جم}\,2\theta - 1}$

(۱۲) $\text{جب}\,3\theta - \text{جم}\,3\theta = (\text{جب}\,\theta + \text{جم}\,\theta)(4\,\text{جب}\,\theta\,\text{جم}\,\theta - 1)$

(۱۳) $\text{جب}\,\beta + \frac{\text{جب}(\theta-\beta)}{1+\text{جم}\,\theta} = \text{مس}\frac{\theta}{2}\,\text{جم}\,\beta$

(۱۴) $2\,\text{قط}(\theta+\beta)(\text{جم}^2\theta - \text{جب}^2\beta) =$
$(\text{جب}^2\theta + \text{جب}^2\beta)\,\text{مم}(\theta+\beta)$

(۱۵) $2\,\text{جب}\frac{3\theta}{2}\,\text{جم}\frac{\theta}{2} - 2\,\text{جب}\,\theta\,\text{جم}\,\theta\,\text{جم}\,3\theta = \text{جب}\,\theta$

(۱۶) $2(\text{جم}^4\theta - \text{جب}^4\theta) = \text{جم}\,2\theta\,(1 + \text{جم}^2 2\theta)$

(۱۷) $\text{جب}(3\theta+\beta)\,\text{جب}(3\theta-\beta) - \text{جب}(\theta+\beta)\,\text{جب}(\theta-\beta) = \text{جب}\,4\theta\,\text{جب}\,2\theta$

(۱۸) $[\text{جم}(\theta+\beta) + \text{جب}(\theta-\beta)]\,[\text{جب}(\theta+\beta) + \text{جم}(\theta-\beta)]$
$= \text{جم}\,2\beta\,(1 + \text{جب}\,2\theta)$

(۱۹) $\frac{۳\text{جب}\frac{۱}{۲}-\text{جب}\frac{۳۱}{۲}}{۳\text{جم}\frac{۱}{۲}+\text{جم}\frac{۳۱}{۲}}=\left(\frac{\text{قط}\frac{۱}{۲}-۱}{\text{قط}\frac{۱}{۲}+۱}\right)^{۲}$

(۲۰) (جم ا − جب ا)(جم ۲ا − جب ۲ا) + جب ۳ا = جم ا

(۲۱) (۳ جب ا − ۴ جب ۳ا)² + (۴ جم³ ا − ۳ جم ا)² = ۱

(۲۲) ۱ − جم ۳ا = (۱ − جم ا)(۱ + ۲ جم ا)²

(۲۳) مس² $\frac{ا}{۲}$ + ۲ حت² $\frac{ا}{۲}$ = م ا = جب ا

(۲۴) جم ا − جب ا مس $\frac{ا}{۲}$ = جم ۲ا + جب ۲ا مس $\frac{ا}{۲}$

(۲۵) $\frac{۲\text{جم}۲ا}{\text{جم ا + جب ا}}+\frac{۲\text{حب}۲ا}{\text{جم ا − جب ا}}=\frac{۲\text{م}۵}{\text{جم}(ا+۴۵°)}$

(۲۶) جم (ا + ب + س) + جم (ا − ب + س) + جم (ب + س − ا)
+ جم (ا + ب + س) = ۴ جم ا جم ب جم س

(۲۷) جم لا + جم د + جم ی + جم (لا + د + ی) = ۴ جم $\frac{لا+د}{۲}$ جم $\frac{د+ی}{۲}$ جم $\frac{ی+لا}{۲}$

(۲۸) جب (ا + ب − س) + جب (ا + س − ب) + جب (ب + س − ا)
− جب (ا + ب + س) = ۴ جب ا جب ب جب س

(۲۹) جب لا + جب د + جب ی − جب (لا + د + ی)
= ۴ جب $\frac{لا+د}{۲}$ جب $\frac{د+ی}{۲}$ جب $\frac{ی+لا}{۲}$

(۳۰) جب (ا + ب + س) + جب (ب + س − ا) + جب (ا + س − ب)
− جب (ا + ب − س) = ۴ جب س جم ا جم ب

اگر ا + ب + س = ۱۸۰° تو ان پانچ ارتباط کو ثابت کرو

(۳۱) جب ۲ا + جب ۲ب − جب ۲س = ۴ جب س جم ا جم ب

(۳۲) جب $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ب-س}{۲}$ + جب $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{س-ا}{۲}$ + جب $\frac{س}{۲}$ جم $\frac{ا-ب}{۲}$
= جم ا + جم ب + جم س

(۳۳) $جب^2 ا + جب^2 ب + جب^2 س = ۲ جب ب جب س جم ا + ۲ جب ا جب س جم ب$
$+ ۲ جب ا جب ب جم س$

(۳۴) $\frac{۱ - جم ا + جم ب + جم س}{۱ - جم س + جم ا + جم ب} = مس \frac{ا}{۲} حم \frac{س}{۲}$

(۳۵) $جب ۲ ب (۱ + ۲ جم ۲ س) + جب ۲ س (۱ + ۲ جم ۲ ا)$
$+ جب ۲ ا (۱ + ۲ جم ۲ ب)$
$= ۴ جب (س - ب) جب (ا - س) جب (ب - ا)$

ان پانچ مساواتوں کو حل کرو

(۳۶) $جب لد + جم ۲ لد = ۱$

(۳۷) $مس لد = مس ۴ لد$

(۳۸) $جب ۹ لد + جب ۵ لد + ۲ جب^2 لد = ۱$

(۳۹) $جب ۵ لد جم ۳ لد = جب ۹ لد جم ۷ لد$

(۴۰) $جم ط لد جم ص لد = جم (ط + س) لد جم (ب + س) لد$

(۴۱) اگر $مس ا = ۲$ اور $مس ب = ۳$ اور $مس س = ۲ + ۳ \sqrt{۳}$ تو
$مس (ا + ب + س)$ کو دریافت کرو

(۴۲) اگر $مس ا = \frac{۱}{۴}$ اور $مس ب = \frac{۱}{۵}$ اور $مس س = \frac{۱}{۶}$ اور $مس د = \frac{۱}{۸}$
اور $مس ی = \frac{۳}{۵۶}$ تو ثابت کرو کہ $مس (ا + ب + س + د + ی) = ۱$

(۴۳) اگر $۲ ص = ا + ب + س$ تو ثابت کرو کہ

$جم \frac{ص}{۲} جم \frac{ص - ا}{۲} جم \frac{ص - ب}{۲} جم \frac{ص - س}{۲}$
$+ جب \frac{ص}{۲} جب \frac{ص - ا}{۲} جب \frac{ص - ب}{۲} جب \frac{ص - س}{۲}$
$= جم \frac{ا}{۲} جم \frac{ب}{۲} جم \frac{س}{۲}$

(۴۴) اگر $۲ ص = ا + ب + س$ تو ثابت کرو کہ

جم^{۲} ص + جم^{۲} (ص − ا) + جم^{۲} (ص − ب) + جم^{۲} (ص − س)

= ۲ + ۲ جم ا جم ب جم س

(۴۵) اگر جع ا = لا جع ب = ص لا اور جع س = ا − ص اور

ا + ب = س پس لا کو دریافت کرو

ان دس متطابقوں کو ثابت کرو

(۴۶) جم ا + جم ب + جم (ا + س) + جم (ب + س)

$= ۴ \text{ جم } \frac{ا + ب + س}{۲} \text{ جم } \frac{س}{۲} \text{ جم } \frac{ب - ا}{۲}$

(۴۷) مس $\frac{ا}{۲}$ − مس $\frac{ا}{۳}$ − مس $\frac{ا}{۶}$ = مس $\frac{ا}{۲}$ مس $\frac{ا}{۳}$ مس $\frac{ا}{۶}$

(۴۸) جیا^{۲} (ب − ا) + جیا^{۲} (ب − ا + س)

− ۲ جب (ب − ا) جب (ب − ا + س) جم س = جیا^{۲} س

(۴۹) ۴ جم ۳ ا جیا^{۳} (۹۰° − ا) − ۴ جیا ۳ ا جم^{۳} (۹۰° − ا)

= ۳ جب (۹۰° − ۴ ا)

(۵۰) جم ا + جم (۲ ۷۲° − ا) + جم (۲ ۷۲° + ا) + جم (۴ ۱۴۴° − ا)

+ جم (۴ ۱۴۴° + ا) = ۰

(۵۱) ۱ + جم (ا − ب) + جم (ب − س) + جم (س − ا)

$= ۴ \text{ جم } \frac{ا - ب}{۲} \text{ جم } \frac{ب - س}{۲} \text{ جم } \frac{س - ا}{۲}$

(۵۲) جب (ا − ب) + جب (ب − س) + جب (س − ا)

$= ۴ \text{ جب } \frac{ب - ا}{۲} \text{ جب } \frac{س - ب}{۲} \text{ جب } \frac{ا - س}{۲}$

(۵۳) جب ۳ (ا − ۱۵°) = ۴ جم (ا − ۴۵°) جم (ا + ۱۵°) جب (ا − ۱۵°)

(۵۴) $\frac{\text{جب } (۲ا - ب - س)}{\text{جب } (ا - ب) \text{ جب } (ا - س)} + \frac{\text{جب } (۲ب - ا - س)}{\text{جب } (ب - ا) \text{ جب } (ب - س)}$

$$+\frac{\text{جب}(۲س-ا-ب)}{\text{جب}(س-ا)\text{جب}(س-ب)}=۰$$

$$(۵۵)\ \frac{\text{جم}(۲ا-ب-س)}{\text{جب}(ا-ب)\text{جب}(ا-س)}+\frac{\text{جم}(۲ب-ا-س)}{\text{جب}(ب-ا)\text{جب}(ب-س)}$$
$$+\frac{\text{جم}(۲س-ا-ب)}{\text{جب}(س-ا)\text{جب}(س-ب)}=-۴$$

اکیسوان باب
زاویون کی تقسیم

(۱۹۸) دفعہ ۱۸۴ مین ہم نے ثابت کیا ہے کہ

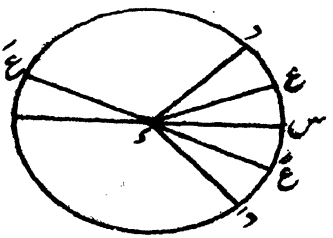
$$\text{جم}ا=۲\text{جم}^۲\frac{ا}{۲}-۱=۱-۲\text{جب}^۲\frac{ا}{۲}$$

اسسے معلوم ہوا کہ $\text{جب}\frac{ا}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-\text{جم}ا}{۲}}$ اور $\text{جم}\frac{ا}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱+\text{جم}ا}{۲}}$

ان صورتون سے زاویہ کی جیب التمام معلوم ہونے سے نصف زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور یہہ بھی ہم دیکھتے ہین کہ دوہری علامت کے ہونے کے سبب سے جب $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتین اور جم $\frac{ا}{۲}$ کی دو قیمتین دریافت ہوتی ہین

(۱۹۹) دلیل اس باب کی کہ کیون جم ا کی ایک قیمت معلوم کے موافق دو دو قیمتین جب $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ا}{۲}$ کی دریافت ہوتی ہین یہہ ہے کہ جیب التمام کی قیمت معلوم کے موافق ایک سے زیادہ قیمتین زاویہ کی ہوتی ہین

اسطرح کہ فرض کرو س ء د کی جیب التمام برابر جم ا کے ہو تو اوس زاویہ کی بھی جیب التمام جو چار قائمون مین سے س ء د کے گھٹانے سے بنتا ہی برابر جم ا کے ہوگی



یہہ زاویہ شکل مین اوس زاویہ سے تعبیر ہوتا ہے جو اضلاع دس اور دد سے احاطہ ہوا ہے اگر
س د د کو ا سے تعبیر کرین تو ½ ا زاویہ س د ع ہوگا اسمین د ع ایسا ہی کہ
س د ع = ع د د اور اگر ا سے بڑے زاویہ کو جو د س اور د د سے احاطہ ہوا ہے
تعبیر کرین تو ½ ا زاویہ س د ع کو تعبیر کریگا اور اسمین د ع ایسا ہی کہ س د ع = ع د د
اور نیز زاویہ جو منفی سمت مین درمیان د س اور د د یعنی زاویہ س د د پیمایش
کیا جاوے تو اوسکی جیب التمام بھی ہی ہوگی جو حاصل ہی اگر س د د کو ا سے تعبیر کرین تو ½ ا زاویہ
س د ع کو تعبیر کریگا اسمین د ع ایسا ہی کہ س د ع = ع د د
اب شکل پر امتحان کرنے سے اس بات کا سمجھ لینا آسان ہے کہ س د ع تکملہ س د ع کا ہی اور
د ع اور د ع ایک خط مستقیم مین ہین اسے مستنبط ہوا کہ اصلی جیبین س د ع اور س د ع اور
س د ع متحد المقدار اور مختلف العلامت ہین اور یہی حال ان زاویونکی جیب التمام کا ہے
اگر کوئی زاویہ زاویون مین سے جنکو ا سے تعبیر کیا ہی بقدر کسی اضعاف چار قائمون کے زیادہ ہو جاوے
تو بھی ایک زاویہ ایسا حاصل ہوگا کہ جسکی جیب التمام برابر جم ا کے ہوگی اب شکل پر امتحان
کرنے سے یہہ بات معلوم ہوگی کہ ایسے زاویہ کے نصف کی بھی جیب اور جیب التمام بالکل
منطبق اون زاویون مین سے کسی ایک زاویہ کے جیب اور جیب التمام کے ساتھہ ہوگی
جو ½ ا سے تعبیر ہوئی ہین
پس اب ہم نے دلیل اس بات کی بیان کردی کہ جب ½ ا اور جم ½ ا جس وقت جم ا کی قرار
مین بیان ہونگین تو ہر یک کی دو قیمتین ہونگین جو مساوی المقدار اور مختلف العلامت ہونگین
(۲۰۰) دفعہ ۱۶۸ کے نتیجہ کو فرض کرکے ہم توضیح مذکور مختصر کرکے بیان کرتے ہین
جملہ ن ۳۶۰° ± ا مین جسمین ن مثبت یا منفی صحیح ہے جتنے زاوئے داخل ہین
اونکی وہی جیب التمام ہے جو ا کی جیب التمام ہے اسسے معلوم ہوا کہ جس صورت قانونی مین

جب $\frac{1}{2}$ کی جم ۱ کی رقمون مین تعبیر ہوگی اوسمین جیب ہر ایک زاویہ کی جو اس جملہ
$\frac{1}{2}(ن \times ۶۰^\circ ۳ \pm ۱)$ مین یعنی $ن \times ۱۸۰^\circ \pm \frac{1}{2}$ اینمین داخل ہے شامل ہوگی

اب جب $(ن \times ۱۸۰^\circ \pm ۱) =$ جب $(\pm \frac{1}{2} ۱)$ اگر ن جفت ہو

اور $= -$ جب $(\pm \frac{1}{2} ۱)$ اگر ن طاق ہو

پس بموجب دفعہ ۵۹ اسکے ہمکو دو قیمتین $\pm$ جب $\frac{1}{2} ۱$ کی حاصل ہونگین اور اسسے زیادہ نہین
اسیطرح ہم ثابت کرسکتے ہین کہ کوئی صورت قانونی جسمین جم $\frac{1}{2}$ کی جم ۱ کی رقمون مین بیان
ہوگی اوسمین وہ سب زاویے شامل ہونگے جو اس جملہ $ن \times ۱۸۰^\circ \pm \frac{1}{2} ۱$ مین داخل ہین

اب جم $(ن \times ۱۸۰^\circ \pm \frac{1}{2}) =$ جم $(\pm \frac{1}{2} ۱)$ اگر ن جفت ہو

اور $= -$ جم $(\pm \frac{1}{2} ۱)$ اگر ن طاق ہو

پس بموجب دفعہ ۵۹ اسکے $\pm$ جم $\frac{1}{2} ۱$ کی دو قیمتین دریافت ہونگین اور دو سے زیادہ نہین

(۲۰۱) اگر کسی صورت مین ہمکو قیمت ۱ کی ٹھیک ٹھیک معلوم ہو تو قیمت $\frac{1}{2} ۱$ کی بھی معلوم ہوگی
اسلئے اس بات کا فیصلہ آسانی سے ہوجائیگا کہ صورت قانونی جب $\frac{1}{2} ۱$ مین کون سی علامت
لین اور کونسی صورت قانونی جم $\frac{1}{2} ۱$ مین کونسی علامت لین اور اگر قیمت ٹھیک ٹھیک
نہ بھی معلوم ہو تو بھی ہم اتنا جان سکتے ہین کہ کونسی علامت کا انتخاب کرین مثلاً اگر ہمکو یہہ معلوم ہو
کہ ۱ درمیان ۹۰° اور ۱۸۰° کے واقع ہے تو $\frac{1}{2} ۱$ درمیان ۴۵° اور ۹۰° کے واقع ہوگا اسلئے
دفعہ ۱۹ کی دونو صورت قانونی مین علامت مثبت لینی چاہیے

(۲۰۲) ساری علم مثلث مین جہان جہان دوہری علامت نتایج مین واقع ہو وہان اوسکی کیفیت
موافق اخیر تین دفعات کے سمجھی جائیگی جو باتین ہم نے ان تین دفعات مین بیان کین ہین وہ اون
نتایج پر بھی حاوی ہونگین مثلاً ہم اس باب کی باقی نتایج کو اور اس نتیجہ جب ۱ = $\pm$ جم ۱
اور اسی قبیل کے نتایج کو اوسیطرح بیان کرسکتے ہین اب اس باب مین کچھہ اور زیادہ نہین
لکھینگے ہم نے ایک اصول عام بیان کردیا اور زیادہ تر اس اصول کے استعمال کی توضیح پر

رسالہ کے باب ہفتم مین دیکھو

(۲۰۳) بموجب دفعہ ۱۸۴ کے

$$\text{جب } ا = ۲ \text{ جب } \frac{ا}{۲} \text{ جم } \frac{ا}{۲}$$

$$\text{اور } ۱ = \text{جب}^۲ \frac{ا}{۲} + \text{جم}^۲ \frac{ا}{۲}$$

$$\text{پس } (\text{جب } \frac{ا}{۲} + \text{جم } \frac{ا}{۲})^۲ = ۱ + \text{جب } ا$$

$$\text{اور جب } \frac{ا}{۲} + \text{جم } \frac{ا}{۲} = \pm \sqrt{(۱ + \text{جب } ا)} \qquad (۱)$$

$$\text{اور جب } \frac{ا}{۲} - \text{جم } \frac{ا}{۲} = \pm \sqrt{(۱ - \text{جب } ا)} \qquad (۲)$$

جب مساوات (۱) اور (۲) مین علامات مناسب مقرر ہوجائین تو پھر جمع اور تفریق کرنے سے جملے جب $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ا}{۲}$ کے واسطے علامتین دریافت ہوجائینگی جسوقت کہ وہ جب ا کی تعین کرسکین اب وہ صورت فرض کرو جسمین ا زاویہ حادہ ہو تو $\frac{ا}{۲}$ درمیان ۰ اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوگا پس جب $\frac{ا}{۲}$ اور جم $\frac{ا}{۲}$ دونو مثبت ہین اور جم $\frac{ا}{۲}$ بڑی جب $\frac{ا}{۲}$ سے، اسواسطے (۱) مین اوپر کی علامت مقرر کرو اور (۲) مین نیچی کی پس

$$\text{جب } \frac{ا}{۲} + \text{جم } \frac{ا}{۲} = \sqrt{(۱ + \text{جب } ا)}$$

$$\text{جب } \frac{ا}{۲} - \text{جم } \frac{ا}{۲} = \sqrt{(۱ - \text{جب } ا)}$$

$$\text{اسیواسطے } ۲ \text{ جب } \frac{ا}{۲} = \sqrt{(۱ + \text{جب } ا)} - \sqrt{(۱ - \text{جب } ا)}$$

$$۲ \text{ جم } \frac{ا}{۲} = \sqrt{(۱ + \text{جب } ا)} + \sqrt{(۱ - \text{جب } ا)}$$

(۲۰۴) دفعہ گذشتہ مین صورت قانونی کی ایک مثال ہم لکھتے ہین اور اوسمین زاویہ ۹° کی جیب اور جیب التمام دریافت کرین

$$۲ \text{ جب } ۹° = \sqrt{(۱ + \text{جب } ۱۸°)} - \sqrt{(۱ - \text{جب } ۱۸°)}$$

$$۲ \text{ جم } ۹° = \sqrt{(۱ + \text{جب } ۱۸°)} + \sqrt{(۱ - \text{جب } ۱۸°)}$$

$$۱ + \text{جب } ۱۸° = ۱ + \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴} = \frac{\sqrt{۵} + ۳}{۴}$$

$$\text{۱-جب}^2 ۸^\circ = ۱ - \frac{\sqrt{۵}_۱ - ۱}{۴} = \frac{۵ - \sqrt{۵}_۱}{۴}$$

$$\text{پس جب } ۹^\circ = \left[\frac{(\sqrt{۵}_۱ - ۵)}{۴} - \frac{(\sqrt{۵}_۱ + ۳)}{۴}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\text{جم } ۹^\circ = \left[\frac{(\sqrt{۵}_۱ - ۵)}{۴} + \frac{(\sqrt{۵}_۱ + ۳)}{۴}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

(۲۰۵) بموجب دفعہ ۱۹۵ کے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ۱} = ۴\,\text{جم}^{\frac{۳}{۳}} ۱ - ۳\,\text{جم}^{\frac{۱}{۳}} ۱$$

$$\text{جب ۱} = ۳\,\text{جب}^{\frac{۱}{۳}} ۱ - ۴\,\text{جب}^{\frac{۳}{۳}} ۱$$

پس اگر جم ۱ معلوم ہو تو جم $\frac{۱}{۳}$ ۱ کے دریافت کرنیکے واسطے ایک مکعبی مساوات حل کرنی پڑیگی اور ایسی ہی اگر جب معلوم ہو اور جب $\frac{۱}{۳}$ ۱ دریافت کرنی ہو تو بہی مکعبی مساوات یعنی سوم درجہ کے حل کرنی ہوگی

مثالین ۲۱

(۱) جیب التمام $۱۱\frac{۱}{۲}^\circ$ کی دریافت کرو

(۲) اگر ۱ درمیان ۹۰° اور ۱۸۰° کے واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{۲ جب } \frac{۱}{۲} ۱ = \sqrt{(۱ + \text{جب } ۱)} + \sqrt{(۱ - \text{جب } ۱)}$$

(۳) اگر جب $۲۴^\circ ۲۴' = ۰٫۶۹$ تو قیمت جب $۱۱^\circ ۲'$ کی دریافت کرو

(۴) ثابت کرو کہ مس $\frac{۱}{۲} ۱ = \pm \sqrt{\frac{۱ - \text{جم } ۱}{۱ + \text{جم } ۱}}$ دوہری علامت کی کیفیت لکھو

(۵) ثابت کرو کہ جب ۱ جسوقت جب $\frac{۱}{۲}$ کے رقموں میں بیان کیجاے تو دو برابر قیمتیں ہونگی مگر اونکی علامتیں مختلف ہونگیں اور جسوقت کہ جم ۱ کو جم $\frac{۱}{۲}$ کی رقموں میں بیان کرین تو ایک ہی قیمت ہوگی اور شکل ہندسی بناکر اوسکی تشریح کرو

(۶) ثابت کرو کہ

(۷) ثابت کرو کہ

جب ۵ ا قم ۱ قط ۱ - جم ۵ ا قط ۱ قم ۱ = ۸ م ۲ ۱

(۸) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}}{1-\text{جم}\,\theta} - \frac{1+\text{جم}\,\frac{1}{2}}{\text{جم}\,\theta} = ۲\,\text{م}\,۲\,\text{ا}\,\text{ظم}\,\frac{1}{2}$$

(۹) اگر ط جب بر + ص جم بر = س = ط قم بر + ص قط بر

تو ثابت کرو کہ $(ط^{\frac{2}{3}} - ص^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + ص^{\frac{2}{3}} = س$

(۱۰) اگر جب بر + جب مر = م اور جم بر + جم مر = ن اور جم (بر + مر) = ع

تو ثابت کرو کہ $\frac{م^2}{ن^2} = \frac{1-ع}{1+ع}$

بائیسوان باب

مقیاس قوسی

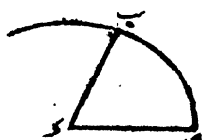
(۲۰۶) عملیات ریاضیہ مین زاویون کا اندازہ درجون دقیقون اور ثانیون مین ہوتا ہے لیکن نظریات ریاضیہ مین ایک اور طریقہ زاویون کے اندازہ کرنیکا ہی اور وہ بڑا کارآمد اور عظیم الشان ہے اس باب کا مطلب اعظم یہہ ہے کہ اس مطلب کو لکھین کہ اگر دو خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کو مرکز مقرر کرکے کسی نصف قطر پر دائرہ کھینچین تو ان خطوط مستقیم کے زاویہ درمیانی کا اندازہ ان خطوط مستقیم کے درمیانی قوس کے طول اور نصف قطر کی نسبت سے ہوسکتا ہے

(۲۰۷) محیط دائرون کے ایسے متغیر ہوتے ہین جیسے اونکے نصف قطر متغیر ہوتے ہین اگر ایک منتظم الاضلاع خواہ اوسکے کتنی ہی ضلع ہون ایک دائرہ مین بنائی جاوے اور اوسکی متشابہ منتظم الاضلاع دوسرے دائرہ مین بنائی جاوی تو ان منتظم الاضلاع کے مجموعہ اضلاع مین نسبت دائرون کے نصف قطرون کی نسبت ہوگی دفعہ ۱۳۸ کو دیکھو اور یہہ مسئلہ سب صورتون پر حاوی ہے خواہ کتنی اضلاع منتظم الاضلاع کے تعداد کو بڑہاتے جاؤ اور منتظم الاضلاع کے اضلاع کے تعداد کو اسقدر بڑہا سکتے ہین کہ اوسکے

مجموعہ اضلاع اور محیط دائرہ مین تفاوت محسوس نہو اس اثبات کو اگر کوئی بہت توضیح اور تشریح کے ساتھہ لکھنا چاہے تو بڑے علم مثلث کے باب دوم کو دیکھے (۲۰۸) خواہ دائرہ کی کچھہ ہی مقدار ہو اوسکی محیط اور نصف قطر مین نسبت معین اور مستقل ہوتی ہے اسواسطے کہ محیط اور قطر کی نسبت معین و مستقل ہوگی محیط اور قطر مین جو نسبت ہی وہ اعداد مین بالکل صحیح صحیح نہین بیان ہوسکتی مگر بڑے علم مثلث مین اس نسبت کا حساب تقریبی توضیح لکھا ہے اس نسبت کی قیمت تقریبی $\frac{۲۲}{۷}$ اور زیادہ تر تقریبی $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ ہی اور آٹھہ مرتبہ کی اعتبار سے تک صحیح قیمت ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵ ہی محیط اور قطر کی نسبت کو ہمیشہ علامت کہ سے تعبیر کیا کرتے ہین پس اگر ن نصف قطر کسی دائرہ کا ہو تو اوسکا محیط ۲ کہ ن ہوگا جسمین

کہ = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵

(۲۰۹) دائرہ کے مرکز پر زاویہ جسکے محاذی قوس طول مین برابر دائرہ کے نصف قطر کے ہمیشہ ایک مقدار معین رکھتا ہی یعنی جو قیمت اوسکی تعیین ہوجاتی ہے اوسمین تغیر نہین ہوتی



ء کی مرکز اور ء ا کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو اور اس دائرہ کی قوس ا ب کو برابر طول مین نصف قطر کے بناؤ اب چونکہ زاویے مرکزی دائرون مین متناسب اون قوسون کے ہوتے ہین جو محاذی اونکی واقع ہون

$$\frac{\text{زاویہ ا ء ب}}{\text{۴ قائمون}} = \frac{\text{قوس ا ب}}{\text{محیط دائرہ}}$$

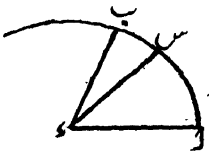
$$= \frac{\text{ن}}{\text{۲ کہ ن}} = \frac{۱}{\text{۲ کہ}}$$

اسواسطے زاویہ ا ء ب $= \frac{\text{۴ قائمہ}}{\text{۲ کہ}}$

پس زاویہ ا ب ایک خاص سرحد قائمون کی ہی اور وہ ہمیشہ معین اور مستقل ہی یعنی اوسمین کچھہ تغیر نہین ہوتا خواہ نصف قطر دائرہ کا کچھہ ہی ہو

(۲۱۰) چونکہ زاویہ مرکزی دائرہ کا جو محاذی اوس قوس کے واقع جسکا طول برابر نصف قطر کے ہونا متغیر ہوتا ہی اور اوسکی ہمیشہ ایک ہی مقدار ہوتی ہی اسلیے وہ زاویونکے اندازہ بتلانے کے واسطے پیمانہ واحد مقرر ہوسکتا ہی اور پھر ہر ایک زاویہ اس پیمانہ واحد کے نسبت سے اندازہ ہوسکتا ہے

فرض کرو کہ ا س کوئی زاویہ ہے ا کے مرکز اور ا کے نصف قطر پر دائرہ کھچو اور اس دائرہ کی قوس ا ب کو طول مین برابر نصف قطر کے بناؤ



اور نصف قطر کو ل سے اور طول قوس ا س کو ط سے تعبیر کرو

اب چونکہ دائرہ کے مرکزی زاویے متناسب اون قوسون کے ہوتے ہین جنپر وہ زاویے قائم ہوتے ہین

$$\frac{\text{زاویہ ا س}}{\text{زاویہ ا ب}} = \frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ط}}{\text{ل}}$$

اسیواسطے زاویہ ا س $= \frac{\text{ط}}{\text{ل}} \times$ زاویہ ا ب یہ نتیجہ صحیح ہی خواہ پیمانہ واحد زاویون کے اندازہ کرنیکا کچھہ ہی ہو مگر وہ دونو زاویون کے واسطے ایک ہی ہو اب اگر زاویہ ا ب کو خود پیمانہ واحد مقرر کرلین تو وہ واحد سے تعبیر ہوگا

پس زاویہ ا س $= \frac{\text{ط}}{\text{ل}}$

(۲۱۱) دیکھو ہم نے بتلادیا کہ زاویہ کا تخمینہ ایک کسر سے ہوتا ہے اور اس کسر کا شمار کنندہ قوس ہوتی ہے جو محاذی کسی زاویہ کی اوس دائرہ مین ہوتی ہے جسکا مرکز زاویہ کا

راس ہوتا ہے اور سب نما اوس کسر کا نصف قطر اوس دائرہ کا ہوتا ہی اور اس طریقہ سے زاویون کے تخمینہ کرنمین پیمانہ واحد یعنی وہ زاویہ جو واحد سے تعبیر ہوتا ہی وہ زاویہ ہی جسکے محاذی قوس برابر نصف قطر کے ہوتی ہے اور ہمنے ثابت کیا ہی کہ وہ زاویہ $\frac{۴ قائمہ}{\pi}$ ہی اسے معلوم ہوا کہ تعداد درجون کی زاویہ مین $\frac{۳۶۰}{۲\pi}$ یعنی $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ہی اور اگر ہم قیمت تقریبی جو دفعہ ۲۰۸ مین بیان ہوئی ہے کام مین لائین تو $\frac{۱۸۰}{\pi}$ = ۵۷٫۲۹۵۷۷۹۵۱ پس یہہ تعداد درجون کی اوس زاویہ مین ہے جو مرکز دائرہ پر محاذی اوس قوس کے کہ طول مین برابر نصف قطر کے ہی واقع ہو

(۲۱۲) قوس تقسیم کی گئی نصف قطر سے جو ایک کسر ہے اوسے دو طریقہ سے زاویون کے مقدار کا تصور ذہن مین پیدا ہوتا ہے مثلاً فرض کرو کہ ہم کہین کہ زاویہ $\frac{۳}{۴}$ ہی اب ایک طریقہ تو یہہ ہے کہ زاویہ کے پیمانہ واحد کی طرف جسمین ۵۷ درجے کے قریب ہوتے ہین رجوع کرین اور اس پیمانہ کی تین چوتہائی لے لین اور دوسرا طریقہ یہہ ہے کہ بغیر پیمانہ واحد کے خیال کرنیکے ہم یہہ فرض کرین کہ زاویہ ایسا لیا جائے کہ اوسکے محاذی قوس تین چوتہائی نصف قطر کے ہو قوس تقسیم کی گئی نصف قطر پر جو ایک کسر ہے اوسکو مقیاس قوسی زاویہ کا کہتے ہین ابھی ہم نے بیان کیا ہی کہ یہہ طریقہ زاویون کے اندازہ کرنیکا نظریات ریاضی مین کثرت سے مستعمل ہے اس مناسبت سے اس طریقہ کو بعض اوقات ترکیب نظری کہتے ہین

(۲۱۳) اگر ق نصف قطر دائرہ کو تعبیر کرے تو ۲ کہ ق محیط دائرہ کو تعبیر کریگا اسلئے مقیاس قوسی چار قائمون کا $\frac{۲ کہ ق}{ق}$ ہے یعنی ۲ کہ اور مقیاس قوسی دو قائمون کا کہ ہے اور مقیاس قوسی ایک قائمہ کا $\frac{کہ}{۲}$ ہے اور مقیاس قوسی ن قائمون کا $\frac{ن کہ}{۲}$ ہے اسمین خواہ ن کسر ہو یا صحیح ہو

(۲۱۴) اب ہم یہہ بتلائینگے کہ کسی زاویہ کی مقیاس قوسی کو اوسی زاویہ کے درجون کے ساتھہ کس طرح مربوط کر سکتے ہین

فرض کرو کہ کسی زاویہ کے درجونکی تعداد کو لا اور اوسکے مقیاس قوسی کو بر تعبیر کرتا ہی چونکہ دو قائمون مین ۱۸۰ درجے ہوتے ہین تو اس زاویہ اور دو قائمون کی نسبت کو $\frac{\text{لا}}{۱۸۰}$ تعبیر کریگا اور چونکہ مقیاس قوسی دو قائمون کا ہی تو اس زاویہ اور دو قائمونکی نسبت کو $\frac{\text{بر}}{\text{کہ}}$ تعبیر کریگا

اسے معلوم ہوا کہ $\frac{\text{لا}}{۱۸۰} = \frac{\text{بر}}{\text{کہ}}$

پس $\text{لا} = \frac{۱۸۰ \text{ بر}}{\text{کہ}}$

اور $\text{بر} = \frac{\text{کہ لا}}{۱۸۰}$

(۲۱۵) **مثال** مقیاس قوسی ایک درجہ کا $\frac{\text{کہ}}{۱۸۰}$ ہے اور مقیاس تین درجہ کے زاویہ کا $\frac{۳ \text{ کہ}}{۱۸۰}$ یعنی $\frac{\text{کہ}}{۶۰}$ ہی اور مقیاس قوسی ایک دقیقہ کے زاویہ کا $\frac{\text{کہ}}{۱۸۰ \times ۶۰}$ ہی اور مقیاس قوسی ایک ثانیہ کے زاویہ کا $\frac{\text{کہ}}{۱۸۰ \times ۶۰ \times ۶۰}$ ہی اور علی ہذا القیاس

اب اگر مقیاس قوسی ایک زاویہ کا $\frac{۲}{۳}$ ہو تو $\frac{۱۸۰ \text{ کہ}}{\text{کہ}} \cdot ۲ \cdot ۳$ تعداد درجون کی اوس زاویہ کے ہوگی یعنی ۱۱۴۵۹۱۵۵۷۷۹۵۱ کی دو تہائی اور اگر مقیاس قوسی کسی زاویہ کا ۵ ہو تو $\frac{۱۸۰ \text{ کہ}}{\text{کہ}} \cdot ۵$ تعداد درجون کی یعنی ۵۷۲۹۵۷۷۹۵۱ ہوگی اور علی ہذا القیاس

جن طالب علمون کا ارادہ درجہ اعلی کے ریاضات کے پڑہنے کا ہو وہ خاص ان مثالون پر خوب توجہ کرین اور جو باتین اونمین بتلائی ہین اونکو ذہن نشین کرین اور ایسی عادت اور مشق پیدا کرین کہ جو زاویہ درجون مین بیان کیا گیا ہو اوسکو فوراً مقیاس قوسی مین تعبیر کرلین

(۲۱۶) اسیطرح سے زاویہ کے فرانسیسی درجون کے پیمانہ کو اور مقیاس قوسی کو مربوط کرسکتے ہین

فرضکرو کہ ایک زاویہ کے درجونکو ء اور اوسکی مقیاس قوسی کو بر تعبیر کرتا ہی اب چونکہ دو قائمون مین ۲۰۰ فرانسیسی درجے ہوتے ہین تو اس زاویہ اور دو قائمونکی نسبت کو $\frac{\text{ء}}{۲۰۰}$ تعبیر کریگا اور چونکہ دو قائمون کا کہ مقیاس قوسی ہے اسواسطے اس زاویہ اور دو قائمون کی نسبت کو $\frac{\text{بر}}{\text{کہ}}$ تعبیر کریگا

اسے معلوم ہوا کہ $\frac{\text{ء}}{۲۰۰} = \frac{\text{بر}}{\text{کہ}}$

پس ک = $\frac{۲۰۰ \text{ بر}}{\text{کہ}}$

اور بر = $\frac{\text{کہ} \times \text{ک}}{۲۰۰}$

جو مقیاس قوسی کا پیمانہ واحد ہے اوسمین فرانسیسی درجے $\frac{۲}{۱۰۰}$ یعنی ۶۶۱۹۷۷ ۱۳

مثالین ۲۲

ان تین زاویونکو مقیاس قوسی مین تعبیر کرو

(۱) $\frac{۵}{۸}$ ف ایک قائمہ کے (۲) ۴۴° ۳۰′ (۳) ۵۰ ف

ذیل کے تین زاویے مقیاس قوسی مین بیان کی گئی ہین اونکے درجون کی تعداد بتلاؤ

(۴) ۲ ± (۵) ۶ ک (۶) ۳۷۵ ک فتک

(۷) ایک دائرہ مین زاویہ مرکزی ۳° کے محاذی قوس ۶ فٹ لمبی ہی نصف قطر دریافت کرو

اور اوس قوس کا طول بھی دریافت کرو جو ۳ فرانسیسی درجے کے زاویہ کے محاذی ہو

(۸) نصف قطر دائرہ کا ۱۰ فیٹ ہی تو سات فیٹ کے قوس کے محاذی جو زاویہ اس دائرہ

کے مرکز پر ہو اوسکی درجون کی تعداد دریافت کرو

(۹) نصف قطر دائرہ کا ۲۰ فیٹ ہی تو ۳۵° کے زاویہ مرکزی کے سامنے جو قوس ہو اوسکا طول دریافت کرو فتک

(۱۰) ایک مثلث قائمہ کے دو حادی زاویون کے تفاوت کا مقیاس قوسی $\frac{\text{کہ}}{۱۸}$ ہی دونو زاویون

کو درجون مین بیان کرو

(۱۱) ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ مین ہین اور فرق عام کا مقیاس قوسی $\frac{\text{کہ}}{۹}$ ہے

زاویونکو دریافت کرو

(۱۲) م درجون اور ن فرانسیسی درجون کے تفاوت کے برابر جو زاویہ ہو اوسکا مقیاس قوسی

دریافت کرو

(۱۳) زاویہ اُ بَ کا زاویہ اَ ب سے مقابلہ کرو

(۱۴) اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ن} \times ۱۸۰}{\text{کہ}}$ قائمہ مین انگریزی درجے اور فرانسیسی

دقیق صحیح اعداد ہونگے

(۱۵) اگر انگریزی درجہ اور فرانسیسی درجہ کے پیمانوں کا مجموعہ ۱ ہو تو زاویہ کا پیمانہ واحد دریافت کرو

(۱۶) ایک زاویہ دو زاویوں سے بنا ہے ایک زاویہ میں ط درجے ہیں اور دوسرے میں ص فرانسیسی درجے ہیں تو اس زاویہ کا مقابلہ قائمہ سے کرو

(۱۷) اگر ا + ب + س = ۱۸۰° تو ثابت کرو

مس ا + مس ب + مس س = مس ا مس ب مس س

(۱۸) اگر ایک مثلث کے زاویوں کے مماسوں میں نسبت ۱ و ۲ و ۳ کی ہو تو ثابت کرو کہ مماس برابر ۱ و ۲ و ۳ کے ہونگے

(۱۹) معلوم ہے کہ مس (سہ + بر) مس (سہ - بر) = ک جب بر کو دریافت کرو

(۲۰) اگر جم ا جم ۳ ا = $\frac{۵}{۱۸}$ تو جب^۲ ا = $\frac{۱}{۹}$

(۲۱) اگر جم (ص - ۲ سہ) + جم (ص - ۲ صہ) = جم (ص - ۲ مر) + جم (ص - ۲ فر)

اسمین ص = سہ + صہ + مر + فر

تو مس سہ مس صہ = مس مر مس فر

(۲۲) ثابت کرو کہ ۲ جم $۵°\ ۳۷'\ ۳۰''$ = $\sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}}$

(۲۳) اگر مثلث ۳ مس $\frac{ا}{۲}$ = مم $\frac{ا}{۲}$ تو ثابت کرو کہ اضلاع مثلث سلسلہ حسابیہ میں ہیں

(۲۴) مثلث من

$$\frac{۵ - ۴ \text{ جم } ا}{۵ - ۴ \text{ جم } س} = \frac{\text{جب}^۲ ا}{\text{جب}^۲ س}$$

تو کیا مثلث متساوی الساقین ہوگا یا اضلاع مثلث کے سلسلہ حسابیہ میں ہونگے

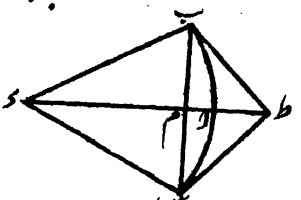
سترھواں باب

رقبہ دائرہ کا

(۲۱۷) مطلب اعظم اس باب کا یہ ہے کہ دائرہ کے رقبہ کے واسطے کوئی جملہ دریافت کریں جس

اول بعض مقدمات عظیم لکھتے ہین

(۲۱۸) اگر قائمہ سے کم مثبت زاویہ کا مقیاس قوسی ہر ہو تو ہر بڑا جب ہر سے اور چھوٹا جس ہر سے ہوگا



فرضکرو کہ ا د ب زاویہ کم قائمہ سے ہو اور د ب = د ا اور ب سے ب م عمود د ا پر نکالو اور اوسکو س تک ایسا خارج کرو کہ م س = م ب اور ب ط زاویئے قائمے بناتا ہوا د ب پر اور د ا خارج شدہ سے نقطہ ط پر ملتا ہوا کھینچو اور س ط ملاؤ

پس مثلث م د س اور م د ب سب طرح سے آپسمین برابر ہین اور زاویہ ط د س = زاویہ ط د ب اسیواسطے مثلث ط د س اور ط د ب سب طرح آپسمین برابر ہین اور زاویہ ط س د قائمہ ہے اور ط س = ط ب

د کے مرکز اور د ب کے نصف قطر پر ایک قوس دائرہ ب ا س کی کھینچو تو یہہ ب ط کو نقطہ ب اور س ط کو نقطہ س پر ملس کریگی

اب یہہ علوم متعارفہ کے طور پر مان لو کہ خط مستقیم ب س کم قوس ب ا س سے ہے پس ب م نصف ب س کا ب ا نصف قوس ب ا س سے کم ہوگا اسیواسطے $\frac{ب م}{د ب}$ کم بہ نسبت $\frac{ب ا}{د ب}$ کی ہوگا یعنی جیب ا د ب کی کم قوس ا د ب کی مقیاس قوسی سے ہوگی

اب پھر اس بات کو علوم متعارفہ کے طور پر مانتے ہین کہ قوس ب ا س مجموعہ خطوط مستقیم خارجہ ب ط اور ط س سے کم ہے پس ب ا کم ب ط سے ہوا اسیواسطے $\frac{ب ا}{د ب}$ کم بہ نسبت $\frac{ب ط}{د ب}$ کے ہوا یعنی مقیاس قوسی ا د ب کا کم بہ نسبت مماس ا د ب کے ہوا

اگر ہر کم کچھ سے ہو تو جب ہر اور ہر اور مس ہر مین ترتیب تصاعیدی ہوگی

(۲۱۹) اگر بر بے نہایت چھوٹا ہو تو $\frac{\text{حب بر}}{\text{بر}}$ کی حد واحد ہوگی

اسواسطے کہ جب براور براور مس بر من ترتیب تصاعدی ہیں اگر انکو جب بر پر تقسیم کریں تو او $\frac{\text{جب بر}}{\text{بر}}$ اور $\frac{\text{۱}}{\text{جم بر}}$ من ترتیب تصاعدی ہوگی پس $\frac{\text{جب بر}}{\text{بر}}$ کی قیمت مابین ۱ اور $\frac{\text{۱}}{\text{جم بر}}$ کے واقع ہے لیکن جب بر صفر ہو تو جم بر ایک ہوگی

اسے معلوم ہوا کہ جس وقت کہ بر لانہایت چھوٹا ہوتا ہے تو $\frac{\text{جب بر}}{\text{بر}}$ کی حد واحد پر پہنچتی ہے

اور چونکہ $\frac{\text{مس بر}}{\text{بر}} = \frac{\text{حب بر}}{\text{بر}} \times \frac{\text{۱}}{\text{جم بر}}$ اسلئے $\frac{\text{مس بر}}{\text{بر}}$ کی حد بھی جب بر لانہایت چھوٹا ہو واحد ہے

(۲۲) رقبہ دائرہ کا دریافت کرو

فرض کرو کہ نق نصف قطر دائرہ کا ہے ن اضلاع کی منتظم الاضلاع دائرہ کے اوپر بنائی تو مقیاس قوسی زاویہ کا جو ہر ضلع کے محاذی مرکز دائرہ پر واقع ہے $\frac{\text{۲ کے}}{\text{ن}}$ ہوگا

اسواسطے بموجب دفعہ ۱۳۹ کے رقبہ منتظم الاضلاع کا ن لو ۲ مس $\frac{\text{کے}}{\text{ن}}$ ہوگا

اب ن نق ۲ مس $\frac{\text{کے}}{\text{ن}} = \frac{\text{کہ نق ۲}}{\text{جم } \frac{\text{کے}}{\text{ن}}} \times \frac{\text{حب } \frac{\text{کے}}{\text{ن}}}{\frac{\text{کے}}{\text{ن}}}$ ہوگا

اب فرض کرو کہ ن بے حد زیادہ ہو تو رقبہ کثیر الاضلاع کا دائرہ کے رقبہ کے برابر ہوتا جائیگا اور رقبہ دائرہ کا کثیر الاضلاع کے رقبہ کی حد ہوگا اسلئے رقبہ دائرہ برابر جملہ مذکور کی حد ہوگا

لیکن جب ن بے حد بڑا ہو $\frac{\text{حب } \frac{\text{کے}}{\text{ن}}}{\frac{\text{کے}}{\text{ن}}} = ۱$ بموجب دفعہ (۲۱۹) کے

جم $\frac{\text{کے}}{\text{ن}} = ۱$

اسواسطے رقبہ دائرہ کا جسکا نصف قطر نق ہو = کہ نق ۲

(۲۲) ایک قطاع دائرہ کا رقبہ دریافت کرو

اگر بر مقیاس قوسی قطاع کے زاویہ کا ہو تو بحکم ۳۳ ش ۶ م کے

$$\frac{\text{رقبہ قطاع}}{\text{رقبہ دائرہ}} = \frac{\text{بر}}{\text{۲ کہ}}$$

اسیواسطے رقبہ قطاع = کہ نق۲ × $\frac{\text{کہ}}{\text{نق}^2}$ = $\frac{\text{نق کہ}}{2}$

پس رقبہ قطاع کا برابر نصف حاصلضرب نصف قطر کے مجذور اور مقیاس قوسی زاویہ کے ہوگا چونکہ برمقیاس قوسی زاویہ کا ہے تو طول قطاع کی قوس کا نق برہے اسسے معلوم ہوا کہ رقبہ قطاع کا برابر نصف حاصلضرب طول قوس اور نصف قطر کے ہوتا ہے

مثالین ۲۲

(۱) مثلث متساوی الاضلاع کے کونون کے نقطون کو مرکز اور نصف ضلع کو نصف قطر مقرر کرکے قوسین کھینچو جو آپسمین ایک دوسرے کو مس کرین تو رقبہ اوس شکل کا دریافت کرو جو ان قوسون کے درمیان واقع ہو

(۲) ایک دائرہ کا نصف قطر نق ہی اس نق کی برابر وتر کہنے سے دائرہ کے جو دو قطعات بنین اونکا رقبہ دریافت کرو

(۳) ایک مثلث کے زاویے ۴۵° و ۶۰° و ۷۵° ہین اوسپر دائرہ بنایا گیا ہی تو جو اضلاع سے قطعات دائرہ جدا ہون اونکا رقبہ دریافت کرو

(۴) دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہین اور اونکا ایک مماس مشترک کھینچا گیا ہی اور اونکے نصف قطر نق اور ۳ نق ہین ثابت کرو کہ رقبہ مثلث منحنی الاضلاع کا جو دو دائرون اور مماس مشترک کے درمیان واقع ہی

(۴ $\sqrt{۳}$ − $\frac{۱۱}{۶}$ کے) نق ہے

(۵) اس صورت قانونی جم بر = ا − ۲ جب $\frac{\text{بر}^2}{2}$ سے ثابت کرو کہ جم بر بڑا بہ نسبت ا − $\frac{\text{بر}^2}{2}$ کے ہی

(۶) اگر جم بر + $\frac{\text{جم بر}^2}{2}$ کی حتی الامکان چھوٹی قیمت علم حساب مین ہو تو ثابت کرو کہ بر بڑا $\sqrt{۳}$ − ا سے ہے

(۷) دفعات ۱۰۴ اور ۱۸۸ مین ہر مثلث کے اندر ثابت کرو کہ

ظس = (طا − طب) جب ½(ک + ب) ÷ جب ½(ک − ب) = (طا + طب) جم ½(ک + ب) ÷ جم ½(ک − ب)

(۸) ایک مثلث کا زاویہ راس ۱۲° ہے اور تفاوت اضلاع کا قاعدہ کی ¼ حصہ کی برابر ہے اور زاویے دریافت کرو

ل جب ۱۲° ۵۰′ = ۹٫۳۴۶۵۷۹۴ ل ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰

ل جب ۱۲° ۱۵′ = ۹٫۳۴۷۱۳۳۶ ل ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳

(۹) ایک مثلث مستوی مین ایک زاویہ ۶۰° کا ہے اور اس زاویہ کے مقابل کے ضلع کو دو اضلاع کے تفاوت سے وہ نسبت ہے جو ۹ کو نسبت ہے ۲ سے اور زاویے دریافت کرو

ل جم ۸° ۵۴′ ۱۰″ = ۹٫۲۸۴۳۷۳۰ لوگ ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳

ل جم ۸° ۵۴′ ۲۰″ = ۹٫۲۸۴۲۶۵۶

(۱۰) مثلث مین طا = ۱۹ اور طب = ۱ اور ا − ب = ۹۰° س کو دریافت کرو

ل مس ۸۱° ۵۹′ = ۹٫۹۵۴۱۸۳۴ لوگ ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳

ل مس ۸۱° ۵۹′ = ۹٫۹۵۴۴۳۷۴

(۱۱) دو عمودی چٹانیں کھڑی ہوئی ہین اور یہہ دونو چٹانیں اور ایک آدمی ایک سطح مین ہین اور ان دونو چٹانون کے درمیان فاصلہ ط ہے اور یہہ آدمی قریب کی چٹانی سے ط فاصلہ پر کھڑا ہے اور چٹانون کے پہلنگین ایک سیدہ مین دیکھتا ہے اور جب وہ قریب کی چٹانی کی طرف سطح افقی پر ص فیٹ گیا تو ایک کی پہلنگ دوسرے کی پہلنگ سے دو چند اونچی نظر آنے لگی تو دونو پہلنگون کی بلندیان دریافت کرو

(۱۲) ایک جہاز شمال کو جاتا تہا اوسکی تیار سے مشرق کو ایک روشنی گھر دکہائی دیا اور اوسکی چوٹی کا زاویہ بلندی ۱۲° ۲۶′ دکہائی دیا اور جب جہاز دس میل چلا تو یہہ روشنی گھر دکہائی دیا اور اوسکا زاویہ بلندی ۲° ۶′ تہا تو بتاؤ اول مشاہدہ کے وقت جہاز کتنی دور روشنی گھر سے تہا

ل جب ۹° ۹ = ۹۹۰۹۵۳۰۸ ل جب ۱۷° ۲ = ۳۰۳۰۷۳ ۱ ۹
ل جب ۴۳° ۱۹ = ۳۰۵۲۸۱۰۵۳ ل جب ۴۴° ۲۷ = ۳۲۹۶۹۸۹۳ ۹
لوک ۴۲ ۱۱ ۷۷ = ۱۶۱۲۵۲ ۸ لوک ۴۳ ۱۱ ۷۷ = ۲۲۵۲۱۳۵۲ ۸

چوبیسوان باب

کتابت معکوس

(۲۲۲) مساوات جب لد = ط سے یہہ سمجھا جاتا ہی کہ لد وہ زاویہ ہی جسکی جیب ط ہی اس ربط کو ایک اور طریقہ سے بھی لکھتے ہین اور اوسمین صرف لام ہی قائم رہتا ہی اور اوسمین بڑی آسانی ہوتی ہے اور وہ طریقہ کتابت یہہ ہے کہ لد = جب⁻¹ ط اور ایسی ہی لد = جم⁻¹ ط سے یہہ سمجھا جاتا ہی کہ لد وہ زاویہ ہے جسکی جیب التمام ط ہی اور لد = مس⁻¹ ط سے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ لد وہ زاویہ ہے جسکا مماس ط ہی اور علی ہذا القیاس

(۲۲۳) جو کوئی ربط علم مثلثی نسبتون مین لکھا گیا ہو وہ اس کتابت معکوس کے طریقہ سے بیان ہوسکتا ہے مثلاً ہمکو معلوم ہے کہ

جم ۲ بر = ۲ جم² بر − ۱

اسکو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ ۲ بر = جم⁻¹ (۲ جم² بر − ۱)

فرض کرو کہ جم بر = ط تو بر = جم⁻¹ ط

تو ۲ جم⁻¹ ط = جم⁻¹ (۲ ط² − ۱)

اور ہم جانتے ہین کہ جب ۲ بر = ۲ جب بر جم بر

اسکو اسطرح لکھہ سکتے ہین

۲ بر = جب⁻¹ (۲ جب بر جم بر)

فرضکرو کہ جب بر = ط تو بر = جب⁻¹ ط اور جم بر = $\sqrt{۱ - ط^۲}$

پس ۲ جب⁻¹ ا بر = جب⁻¹ [۲ ط $\sqrt{(۱ - ط^۲)}$]

(۲۲۴) اور نیز جو ربط کہ اس کتابت معکوس کے طریقہ مین لکھا جائے اوس ربط کو معمولی طریقہ کتابت سے لکھہ سکتے ہین مثلاً فرضکرو کہ ہمکو یہہ معلوم ہو کہ

$$۲ \text{مس}^{-۱} ط = \text{مس}^{-۱} \frac{۲ب ط}{۱ - ب^۲}$$

مماس دونو طرف کا لو تو

$$\text{مس} (۲ \text{مس}^{-۱} ط) = \frac{۲ب ط}{۱ - ب^۲}$$

فرض کرو کہ $\text{مس}^{-۱} ط = ر$ تو $\text{مس} ر = ط$

تو $\text{مس} ۲ر = \frac{۲ \text{مس} ر}{۱ - \text{مس}^۲ ر}$

(۲۲۵) کتابت کے طریقہ معکوس کی یہہ ایک مثال ہے کہ ہم جب $(\text{جب}^{-۱} ط + \text{جم}^{-۱} ص)$ کی قیمت دریافت کرین

فرض کرو کہ $\text{جب}^{-۱} ط = ا$ اور $\text{جم}^{-۱} ص = ب$ تو جملہ مفروض کی یہہ صورت بنجائیگی کہ

$$\text{جب} (ا + ب) \text{ یعنی } \text{جب} ا \text{ جم} ب + \text{جم} ا \text{ جب} ب$$

اب $\text{جب} ا = ط$ اور $\text{جم} ا = \sqrt{۱ - ط^۲}$

$\text{جم} ب = ص$ اور $\text{جب} ب = \sqrt{۱ - ص^۲}$

اسیواسطے $\text{جب} (\text{جب}^{-۱} ط + \text{جم}^{-۱} ص) = ط ص + \sqrt{(۱ - ط^۲)(۱ - ص^۲)}$

اعداد مین اس مثال کی توضیح کے واسطے فرض کرو کہ $ط = \frac{۱}{۲}$ اور $ص = \frac{۱}{۲}$

اسیواسطے $\text{جب} (\text{جب}^{-۱} \frac{۱}{۲} + \text{جم}^{-۱} \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} = ۱$

اور ہم اس ربط کو اس طرح بھی بیان کرسکتے ہین کہ

$$\text{جب}^{-۱} \frac{۱}{۲} + \text{جم}^{-۱} \frac{۱}{۲} = \text{جب}^{-۱} ۱$$

چونکہ $\text{جب} \frac{کے}{۲} = ۱$ تو ایک ممکن نتیجہ یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جب}^{-۱} \frac{۱}{۲} + \text{جم}^{-۱} \frac{۱}{۲} = \frac{کے}{۲}$$

ایسی اکثر مثالین حل کرنے کے واسطے طالب علمونکو دیجاتی ہین لیکن یہہ ہمیشہ یاد رکھنا چاہیے

کہ دونو جب⁻¹ ½ اور جم⁻¹ ½ کی قیمتین بیشمار ہین اور کے صرف ایک قیمت بر شمار
ممکن قیمتون مین سی ہر اظہار ہوان باب دیکھو

مشالین ۴۴

(۱) اگر جب بر = ط تو جملہ ذیل کو کتابت معکوس مین لکھو

جب ۳بر = ۳ جب بر − ۴ جب³ بر

(۲) اگر مس بر = ط تو کتابت معکوس من

مس ۳ بر = (۳ مس بر − مس³ بر) / (۱ − ۳ مس² بر) کو لکھو

(۳) ثابت کرو کہ جم (۲ مس⁻¹ ط) = (۱ − ط²)/(۱ + ط²)

(۴) بغیر کتابت معکوس کے

جب⁻¹ مس ۴/۵ اور مس جب⁻¹ ۱/√۲ کو بیان کرو

(۵) ثابت کرو کہ مس⁻¹ ½ + قم⁻¹ √۱۰ = ۴/۴

(۶) ثابت کرو کہ ۲ مس⁻¹ ۲/۳ − قم⁻¹ ۵/۱۲ = جب⁻¹ ۳۳/۶۵

(۷) مثلث قائم الزاویہ مین جسکا زاویہ س قائمہ ہو

م¹ √((طس + طا)/(طس − طا)) + م¹ √((طس + طب)/(طس − طب)) = ۴/۴

(۸) ثابت کرو کہ ۲ مس⁻¹ ½ + جم⁻¹ ۴/۵ = ۴/۴

(۹) ثابت کرو کہ جب⁻¹ (جم لا) + جم⁻¹ (جب ء) + لا + ء = ۴ کہ

(۱۰) اگر مس⁻¹ لا + مس⁻¹ ۳ لا = مس⁻¹ ½ لا کو دریافت کرو

(۱۱) اگر مس⁻¹ ط/لا + مس⁻¹ (ط − لا)/ط = ۴/۴ تو ثابت کرو کہ

لا² = ۲ ط² √۳

(۱۲) اگر ۴/۴ = حت⁻¹ لا + مس⁻¹ لا تو ثابت کرو

لا² = (√۵ − ۱)/۲

متفرقات مثالین

(۱) ایک مثلث متساوی الساقین کے دو زاویون کا تفاوت ۳۰ فرانسیسی درجے ہے مثلث کے سب زاویون کے درجے تبلاؤ

(۲) سب سے زیادہ مساوی قیمت لد کی مساوات جب ۴ لد = جم ۵ لد مین دریافت کرو

(۳) جب لد کی قیمت مساوات

۴ جب لد + ۳ جم لد = ۵ مین دریافت کرو

(۴) اگر جب لد + جم لد = جب ا + جم ا تو ثابت کرو کہ جب لد برابر جب ا یا جم ا کی ہوگا

(۵) سب سے بڑی قیمت جب لد جم لد کی دریافت کرو

(۶) کم سے کم قیمت مس لد + حم لد کی دریافت کرو

(۷) مثلث مین جب ۲ س = جب ۲ ا + جب ۲ ب تو ثابت کرو کہ مثلث قائم الزاویہ ہے

(۸) مثلث کا ایک زاویہ باقی دو زاویون کے تفاوت سے بقدر ۶۰° زیادہ ہے اور باقی دو زاویون مین سے چھوٹے زاویہ سے بقدر ۵ فرانسیسی درجے کے زیادہ ہے زاویون کو دریافت کرو

(۹) مثلث مستوی کا ایک زاویہ ۱۲۰° ہے اور اوسکے اضلاع مین نسبت ۴ اور ۱ کی ہے تو ثابت کرو کہ مماس التمام اور زاویون کے ۳ ط ۳ ط اور $\frac{۳ط}{۲}$ ہین

(۱۰) ثابت کرو کہ $\frac{۱ + جب ۲ا}{۱ + جم ۲ا} = \frac{۱}{۲} (۱ + مس ا)^۲$

(۱۱) ثابت کرو کہ

$$\frac{جب ۳ا + جم ۳ا}{جب ۳ا - جم ۳ا} = \frac{۲ جب ۲ا + ۱}{۲ جب ۲ا - ۱} \times مس (۴۵° - ا)$$

(۱۲) معلوم ہے کہ

لوگ ۵۶ ث ۷ = ۱ ث ۸۷۸۵۲۱۸ تو لوگ ۵۶ ث ۷ اور لوگ $(۵۶ ث ۷)^{\frac{۱}{۲}}$ دریافت کرو

(۱۳) مس بر = $\frac{ص}{ط}$ تو

ط جم ۲ بر + ص جب ۲ بر کی قیمت دریافت کرو

(۱۴) مثلث کے اضلاع طا و طب و طس ہیں ۴ و ۵ و ۶ کی نسبت ہے زاویہ ب دریافت کرو

لوک ۲ = ۰۰ ۰۳۰۱۰۳ ۹ ل جم ۲۷° ۵۳′ = ۹٫۹۴۶۴۰۴۰

ل جم ۲۷° ۵۴′ = ۹٫۹۴۶۳۳۷۱

(۱۵) ثابت کرو کہ جب ا جم (ب ـ س) ـ جب ب جم (ا ـ س) = جب (ا ـ ب) جم س

(۱۶) اگر جم (سہ ـ صہ) جب (مر ـ جر) = جم (سہ + صہ) جب (بر + جر) تو

مم جر = مم سہ مم صہ مم مر

(۱۷) اگر ا + ب + س = ۹۰° تو

$$\frac{\text{جم ا + جب س ـ جب ب}}{\text{جم ب + جب س ـ جب ا}} = \frac{\text{۱ + مس ½ ا}}{\text{۱ + مس ½ ب}}$$

(۱۸) مثلث میں ا = ۹° ۳۷′ ۴۴″ اور ۳ طس = ۷ طب

لوک ۲ = ۰۰ ۰۳۰۱۰۳ ۹ اور ل مس ۸° ۱۳′ ۵۰″ = ۰۰ ۰۸۳۰۱۶ ۹

مثلث کے اور زاویے دریافت کرو

(۱۹) اگر ا + ب = ۹۰° تو جب (ا ـ ب) = ـ جم ۲ ا اور

جب ۲ ا + جب ۲ ب = ۲ جم (ا ـ ب)

(۲۰) مثلث قائم الزاویہ اب س کا وتر نقاط د اور ی پر تثلیث ہوا ہے تو ثابت کرو کہ اگر س د اور س ی ملائے جائیں تو مثلث س دی کے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ = $\frac{\text{طہ}^۲}{۳}$

(۲۱) ایک مثلث کے زاویوں کو جو خط تنصیف کرتے ہوں اور مقابل کے اضلاع طا و طب و طس پر ختم ہوتے ہوں اگر اونکے طول لد اور د اور ی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{طب} + \text{طس})^۲ \frac{\text{طب طس}}{\text{لد}^۲} + (\text{طس} + \text{طا})^۲ \frac{\text{طا طس}}{\text{د}^۲} + (\text{طا} + \text{طب})^۲ \frac{\text{طا طب}}{\text{ی}^۲} = (\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})^۲$$

(۲۲) ایک دائرہ کے اندر ذو اربعہ الاضلاع بنائی گئی ہے اوسکی اضلاع اب و ب س و س د و د ا اوس سلسلہ ہندسیہ میں ہیں جسکی نسبت مشترک ق ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}(\text{ا}-\text{ب})\,\text{مس}\,\text{ب}}{\text{مس}(\text{ب}-\text{س})\,\text{مس}\,\text{د}} = \frac{\text{ظا}^2\text{ا}-1}{\text{ظا}^2\text{ا}+1}$$

(۲۳) ایک خاص مثلث کے زاویوں کے مماس ا و ۲ و ۳ ہیں اگر زاویوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ع۱ و ع۲ و ع۳ ہوں تو ثابت کرو

$$\text{ع}_1^5\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 = 3 \text{ طا}^2\text{ب طس}$$

(۲۴) ثابت کرو کہ $\text{مس}(\text{ا}+30^\circ)\,\text{مس}(\text{ا}-30^\circ) = \frac{1-2\,\text{جم}^2\text{ا}}{1+2\,\text{جم}^2\text{ا}}$

(۲۵) اگر ا + ب + س = ۱۸۰°

$$\frac{\text{مم}^2\frac{\text{ا}}{2}+\text{مم}^2\frac{\text{س}}{2}}{\text{مم}^2\frac{\text{ب}}{2}+\text{مم}^2\frac{\text{س}}{2}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}}$$

(۲۶) ایک ستون سمت ق۔ کج۔ ق میں تنہا اوسکا سایہ زمین پر پڑتا تنہا اوسکا انجام سمت ش۔ ق میں تنہا اور زاویہ بلندی ستون کا سہ اور فاصلہ انجام سایہ کا ستون سے س تنہا تو بلندی ستون کی دریافت کرو

(۲۷) ان مساوانوں سے بر کو دور کرو

طمس بر + ص مس بر = س

طمس بر + ص مس بر = س

(۲۸) ثابت کرو

۱ + جم (۲ا − ۲ب) جم ۲ب = جم² ا + جم² (ا − ۲ب)

(۲۹) ثابت کرو کہ جم (۳۶° + ا) جم (۳۶° − ا) + جم (۸۴° + ا) جم (۸۴° − ا) = جم ۲ا

(۳۰) قائم الزاویہ تسات میں س د اور س ی زاویہ قائمہ سے وتر تک کھینچے گئے ہیں اور وتر کے ساتھ زاویئے سہ اور صہ بناتے ہیں اسمیں صہ بڑا ہے تو ثابت کرو کہ رقبہ مثلث س د ی کا

$$\frac{\text{طا}^2\text{ب طب}^2}{2\,\text{طس}^2}\,(\text{مم سہ} - \text{مم صہ})$$

حل کرو $\frac{\text{لہ}}{\text{۸}} \times ۱۲۵^{-\text{لہ}} = ۴^{\text{لہ}+۳}$ اور معلوم ہے

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰

(۳۲) حل کرو اس مساوات کو

مس (لہ + ۴۵°) + مس (لہ − ۴۵°) = ۲ مس ۶۰°

(۳۳) اس مساوات کو حل کرو کہ

۲ + مم² لہ = ۳ قط² لہ − مس² لہ

(۳۴) اگر جب لہ = جب سہ جب (لہ + ی) تو

مس لہ = $\frac{\text{جب سہ جب ی}}{\text{۱ − جب سہ جم ی}}$

(۳۵) ان مساواتوں میں بر کو دور کرو

ط جب بر + ص جم بر = ھہ

ط جم بر − ص جب بر = کہ

(۳۶) اگر ط جب لہ + ص جم لہ = $\sqrt{(\text{ط}^۲ + \text{ص}^۲)}$ تو جب لہ اور جم لہ کو دریافت کرو

(۳۷) لوک ۵ = ۰٫۶۹۸۹۷۰۰ لوک ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰

لوک ۴ و ۵ ی ۳ و ۱۴ ی ۰۰ اور $\frac{\text{۲۸}}{\text{۱۲۵}}$ کی دریافت کرو

(۳۸) لوک ۲ اور لوک ۳ کی معلوم ہیں ۲۷ اور ۳۶ و ۵۴ اور ۲۵ ی ۰۰

اور $\frac{\text{۱۰}}{\text{۸۱}}$ کی لوک دریافت کرو

(۳۹) مثلث کے اضلاع ۳۱ و ۴۴ اور ۱۱ فیٹ ہیں سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو

(۴۰) اگر مس لہ = جم ۱ مس ی تو

مس (ی − لہ) = $\frac{\text{مس}^۲ \frac{۱}{۲} \text{جب ۲ ی}}{\text{۱ + مس}^۲ \frac{۱}{۲} \text{جم ۲ ی}}$

(۴۱) ثابت کرو کہ جب² (ا + ب) + جم² (ا − ب) = ۱ + جب ۲ ا جب ۲ ب

(۴۲) ثابت کرو کہ جم² ۱۵ ± جم ۴ ا جم ۱۶ + جب² ا

(۴۳) ثابت کرو

$$\text{مس}^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \text{حب} A - \text{حب} 2A}{2 \text{جب} A + \text{جب} 2A}$$

(۴۴) ثابت کرو کہ لوک ب ا کی ہمیشہ وہی علامت ہوتی ہے جو (ا - ۱) (ب - ۱) کی ہے

(۴۵) اگر جم ا = $\frac{1}{3}$ اور جم ب = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3^2 \cdot 2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب} (A - B) = \frac{1}{2}$$

(۴۶) ثابت کرو کہ جم ۹ ا + ۳ جم ۷ ا + ۳ جم ۵ ا + جم ۳ ا = ۸ جم^3 ا جم ۶ ا

(۴۷) ایک تکون کہیت کی بجا ۵۰ اور ۶۰ اور ۷۰ گز طول مین ہین اوسکا چہترمیل دریافت کرو اور یہکو معلوم ہے کہ

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰ ۵ لوک ۱۶۷۰۲۱۸ = ۱ ۵ ۴۶۹

لوک ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳ لوک ۱۶۷۳۱۷۳ = ۱ ۵ ۴۷۰

(۴۸) اگر ا اور ب اور س مثلث کے زاویے ہون تو

جم $\frac{A}{2}$ + جم $\frac{B}{2}$ بڑا جم $\frac{S}{2}$ سے ہوگا

(۴۹) اگر مثلث کے زاویے ا اور ب اور س ہون تو جب $\frac{A}{2}$ + جب $\frac{B}{2}$ بڑی بہ نسبت جم $\frac{S}{2}$ کے ہونگے

(۵۰) اگر مثلث حادۃ الزوایا کے ا اور ب اور س زاوے ہون تو جب $\frac{A}{2}$ + جب $\frac{B}{2}$ بڑی بہ نسبت جب $\frac{S}{2}$ کے ہونگی

(۵۱) ۲۲° ۴۲′ ۹″ اور ۶۵° ۲۷′ ۹″ کو فرانسیسی پیمانون مین بیان کرو

(۵۲) لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰ ۵ اور لوک ۳ = ۱۳ ۱۲ ۷۷ ۴ ۵

لوک ۳۴ ۳ اور لوک ۰٫۱۵ ۵ کی دریافت کرو

(۵۳) دو سیدہی سڑکین ایک مقام پر ایک دوسرے کو کاٹتی ہین اور یہ سڑکین نہر کے ساتھ ۳۰° اور ۶۰° کے زاویے بناتے ہین اگر مقام تقاطع سے بڑی سڑک

نہر تک ۳ میل کا فاصلہ ہو تو چھوٹے سڑک پر کتنے میل کا فاصلہ ہوگا اور اگر سب سے پاس کا راستہ ایک ٹبیا پر ہو تو اس ٹبیا کا طول دریافت کرو

(۵۴) معلوم ہے کہ طا = ۲۰۰ اور ب = ۸۵° س = ۱۰° طب کو دریافت کرو

لوک ۲ = ۳۰۰۱۰۳۰۰ ی لوک ۶۴ ی ۲ ی ۱۷ = ۱۴ ۱۴ ۳۷ ۲ ی ۲

ل جب ۵۵° = ۹ ی ۹۱۳۳۶۴۵ لوک ۶۵ ی ۲ ی ۱۷ = ۱۶۶ ۳۷ ۲ ی ۲

(۵۵) ایک پہاڑ پر سے میں نے دو جھونپڑے ایک خط مستقیم افقی میں نے مشاہدہ کئے اونکے زوایا پستے ۸۵° اور ۳۰° تھے اور یہہ بھی مجھے معلوم ہے کہ اون جھونپڑون میں فاصلہ ۱۶ گز ہے پہاڑ کی بلندی دریافت کرو

(۵۶) ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\frac{\text{طا} - \text{طب}}{\text{طا طب}^{2}} \text{جم}^{2}\frac{\text{س}}{2} + \frac{\text{طب} - \text{طس}}{\text{طب طس}^{2}} \text{جم}^{2}\frac{\text{ا}}{2} + \frac{\text{طس} - \text{طا}}{\text{طس طا}^{2}} \text{جم}^{2}\frac{\text{ب}}{2} = \frac{\text{طا}^{2} + \text{طب}^{2} + \text{طس}^{2}}{2\,\text{طا}^{2}\,\text{طب}^{2}\,\text{طس}^{2}}$$

(طا جب ا + طب جب ب + طس جب س)²

(طا² + طب² + طس²) (جب² ا + جب² ب + جب² س)

(۵۷) اگر مثلث کے اضلاع طا و طب و طس سلسلہ حسابیہ میں ہون تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب}\,(\text{س} - \text{ب})}{\text{جب}\,(\text{س} + \text{ا})} = \frac{(3\,\text{طس} + \text{طا})\,(\text{طس} - \text{طا})}{2\,\text{طا}\,(\text{طس} + \text{طا})}$$

(۵۸) ایک پہیہ کا قطر ۱۲ فیٹ ہے اور ہر منٹ میں ۱۲۰ چکر لگاتا ہے تو بتاؤ جو نقطہ محیط میں ہوگا وہ ہر گھنٹہ میں کتنے میل کی مسافت طے کرتا ہوگا

(۵۹) اس مساوات کو حل کرو کہ

جب ۳ لا = ۲ جب ۲ لا - جب لا

(۶۰) ثابت کرو کہ مس ۱° $\frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}$ مس ۱° $\frac{1}{3}$ = ۸۵°

(۶۱) اگر مس ۲ ا = $\frac{2\,\text{ن}\,(1 - \text{ن}^{2})}{1 - 2\,\text{ن}^{2}}$ تو جب ا کو دریافت کرو

(۶۲) معلوم ہے کہ طب = ۶۵° طس = ۳۵° ۱ = ۸۵° تو ب اور س ۱ دریافت کرو

لوگ ۳ = ۱۲۱۳ ۷۷۴۷° ل مس ۸۱° ۷ = ۶۶۷۷۴۷° ۹

ل مم ۲ ۴۰° ۳۰ = ۱۰۰۳۷۹۴۷۵° ل مس ۸۱° ۸ = ۳۹۰۲۰۵۱۵° ۹

(۶۳) طس = ۶۰۱۱ اور طب = ۱۲۰۱۱ اور ب = ۱۳۵° ۱ اور طا کو دریافت کرو

(۶۴) اگر مثلث مین

جب ا : جب س :: جب (ا-ب) : جب (ب-س)

تو اضلاع کے مربعے سلسلہ حسابیہ مین ہونگے

(۶۵) چودھوین باب کا طریقہ کتابت اختیار کرکے ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}{\text{طا}_1 - \text{طب ل}_2} = \frac{\text{ل}_2 - \text{ل}_3}{\text{طب ل}_2 - \text{طس ل}_3} = \frac{\text{ل}_3 - \text{ل}_1}{\text{طس ل}_3 - \text{طا}_1} = \frac{1}{\text{ص}}$$

(۶۶) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{حب ا} + \text{حب ۵ ا}}{\text{جب ۲ ا} + \text{حب ۴ ا}} = \text{جم ۲ ا قط ا}$$

جب ۳ ا + جم ۳ ا = (جم ا - جب ا) (۱ + ۴ جب ا جم ا)

(۶۷) اگر ۲ قط ر = قط (۲ + ۲ س) + قط (ر - ۲ س) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^2 \text{ر} = 2 \text{ جم}^2 \text{س}$$

(۶۸) اس مساوات کو حل کرو کہ جب لد + جم لد = ۱

(۶۹) قطر زمین کا ۸۰۰۰ میل ہے، تو بتاؤ خط استوا کی ۵۰ میل کی قوس کے محاذی زاویہ مرکزیہ کتنے درجے کا ہوگا

(۷۰) ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} \text{ جب}^{-1} \frac{4}{5} + \text{مس}^{-1} \frac{1}{3} = 45°$$

(۷۱) ایک انگریزی درجہ اور ایک فرانسیسی درجہ کے تفاوت کو انگریزی فرانسیسی درجون اور مقیاس قوسی مین بیان کرو

(۷۲) اضلاع مثلث کے م + ن اور م − ن اور ۴ مہ (م² + ن²) ہین اور جب ایک زاویہ کی $\frac{۵۶}{۶۵} - ۱$ ہے اور زاویے دریافت کرو

(۷۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۵ اور طب = ۳۵ اور ب = ۱۲۰° ا کو دریافت کرو

لوک ۳ = ۱۳ ۱۲ ۷۷ ۴ ۷ ل جب ۲۱° ۴۷' = ۹ ۷ ۵ ۶۹ ۴۸۸۳

لوک ۱۴ = ۰ ۱۴۶۱۲۸ ۱ ۷ ل جب ۲۱° ۴۸' = ۹ ۷ ۵ ۶۹ ۸۰۴۳

(۷۴) طا = ۶۵ طب = ۱۶ س = ۶۰ ا اور ب کو دریافت کرو

لوک ۳ = ۱۳ ۱۲ ۷۷ ۴ ۷ ل مس ۴۶° ۲۰' = ۱۰ ۷ ۰۲ ۰۲۲۰۳

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ ۷ ل مس ۴۶° ۲۱' = ۱۰ ۷ ۰۲ ۰۴۷۳۲

(۷۵) ایک شخص سیدہی سڑک پر چلتا تہا اوسکو ایک جگہہ سے دو مینار ایک خط مستقیم مین دکہائی دیئے اور یہہ خط مستقیم زاویہ حادہ سڑک کے ساتہہ بناتا ہی اور جہان یہہ اوسکو دکہائی دیا وہان سے س گز کے فاصلہ چلا تو اوسکو پاس کا مینار اوس سمت مین دکہائی دینے لگا کہ زاویہ قائمہ سڑک کے ساتہہ بناتی تہی اور اس مقام پر زاویہ محاذی دونون مینارون کے سہ ہی تو ثابت کرو کہ مینارون کے درمیان گزون مین فاصلہ

$$\frac{\text{طس جم سہ}}{\text{جم (سہ + حاصہ)}} - \frac{\text{طس}}{\text{جم حاصہ}}$$ ہے

(۷۶) ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ ہندسیہ مین ہین اور اوسکا مجموعہ اضلاع ایک مثلث متساوی الاضلاع کے مجموعہ کی برابر ہے اور اوسکا رقبہ اس مثلث متساوی الاضلاع رقبہ کا چار پانچوان حصہ ہے تو ثابت کرو کہ اضلاع مین نسبت ۷ و ۱۰ و ۱۳ کی ہے

(۷۷) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}(۴۵° + ا)}{\text{مس}(۴۵° - ا)} = \frac{۲\text{جم}^۲ ا + \text{جب}\ ا + \text{حب}\ ۳ا}{۲\text{جم}^۲ ا - \text{جب}\ ا - \text{جب}\ ۳ا}$$

(۷۸) اس مساوات کو حل کرو کہ جب² لا + جب لا = جم² لا + جم لا

(۷۹) مثلث مستوی مین طول دو ضلعون کے ۱۶۹ اور ۲۵ اگر ہن اور زاویہ درمیانی اونکا

= ۲ جب ۱ $\frac{۳۳}{۶۵}$ تیسرا ضلع اور رقبہ دریافت کرو

(۸۰) ثابت کرو کہ جب (مس ۱ $\frac{۳}{۴}$ + مم ۱ $\frac{۵}{۱۲}$) = $\frac{۶۳}{۶۵}$

(۸۱) ایک مثلث کے زاویون مین او ۲ و ۳ کی نسبت ہے زاویونکو انگریزی اور فرانسیسی دریافت کرو

(۸۲) ان مساواتون کو حل کرو

۳ $\sqrt{۱۰}$ مس۲ بر − (۱ + $\sqrt{۳۰}$) مس بر + ۱ = ۰

(۸۳) طا = ۸ طب = ۷ ا = ۱۲۰° ب اور س دریافت کرو

لوک ۷ = ۰.۸۴۵۰۹۸ ل جب ۹۰° = ۹.۹۳۷۵۳۰۶

لوک ۸ = ۰.۹۰۳۰۹۰۰ ل جب ۱۶۴۹° = ۹.۸۷۹۵۲۸۷

ل جب ۱۷۴۹° = ۹.۸۷۹۶۳۷۵

(۸۴) طب = ۵۰ طس = ۳۰ ا = ۳۰° ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۲ = ۰.۳۰۱۰۳۰۰ ل مس ۴۳° = ۹.۹۶۹۹۶۵۵۹

ل مم ۱۵° = ۱۰.۵۷۱۹۴۷۵ ل مس ۱۴۳° = ۹.۹۶۹۹۰۹۱

(۸۵) لوک ۲ = ۰.۳۰۱۰۳۰۰ لوک ۳ = ۰.۴۷۷۱۲۱۳

لوک $\sqrt{۱۰}$ اور لوک $\sqrt[۳]{۶۴}$ اور لوک ۵ و ۱۸۷۰ اور لوک ۲۸۸ و ۰۰ دریافت کرو

(۸۶) ثابت کرو کہ جم ۱۸° جم ۳۶° − جب ۱۸° جب ۳۶° = $\frac{۵}{۸}$

(۸۷) ثابت کرو کہ $\frac{\text{جم ۲ ا} - \text{جم ۵ ا}}{\text{جم ۳ ا} - \text{جم ۴ ا}}$ = ۳ جم $\frac{ا}{۲}$ − جب $\frac{ا}{۲}$

(۸۸) ثابت کرو کہ مس (ا + ب) + مس (ا − ب) =

مس۲ ا [۱ − مس (ا − ب) مس (ا + ب)]

(۸۹) اس مساوات جب ۲ لد = ۳ مس لد جم ۲ لد کو حل کرو

(۹۰) ثابت کرو کہ جب ۵ ا − ۵ جب ۳ ا + ۱۰ جب ا = ۱۶ جب۵ ا

(۹۱) اگر $\frac{\text{جب}\,ا}{\text{جب}\,ب} = \frac{\text{جم}\,ب}{\text{جم}\,ا}$ اور $\frac{\text{جم}\,ب}{\text{جم}\,ا} + \frac{\text{جب}\,ب}{\text{جب}\,ا} = ۳$ تو مس ب دریافت کرو

(۹۲) ا اور ب اور س کو ان مساواتوں مین دریافت کرو

جم (ا + ب − س) = $\frac{۱}{۲}$ اور جم (ا − ب + س) = $\frac{۳}{۲}$

جم (ا + ب) = جب س

(۹۳) ثابت کرو کہ

جم ۷ ا + جم ۵ ا + جم ۳ ا + جم ا = ۴ جم ۴ ا جم ۲ ا جم ا

(۹۴) جب ۳ ب = جب ۳۰° مین ب کی قیمتین ۱۸۰° سے کم دریافت کرو

(۹۵) ثابت کرو کہ

جب (ا − ب) جم (ا + ب) + جب (ب − س) جم (ب + س)

+ جب (س − ا) جم (س + ا) = ۰

(۹۶) مس لا = جم لا کو حل کرو

(۹۷) ثابت کرو کہ قم ۲ ا + مم ۴ ا + قم ۴ ا = مم ا

(۹۸) معلوم ہے کہ طب = ۷ اطس = ۷ ا = ۶۰° ب اور س کو دریافت کرو

لوک ۲ = ۰۰ ۰۳۰۱ ۰ ۵ س ل س ۳۰° ۴۹' = ۹ ۵۸۵۱۳۳۵۷ ۹

لوک ۳ = ۴۷۷ ۱۲۱۳ ۹ ۵ س ل س ۳۰° ۴۹' ۱۰" = ۰۰ ۳۸۰۵۵۸ ۹

(۹۹) ایک مینار پر ۲۵۰ فٹ بلند علم رکھا گیا ایک مقام کا فاصلہ مینار کی جڑ سے

س فیٹ ہے و ناپن زاویہ مخاذی اس علم کے سہ ہی ارتفاع مینار کا دریافت کرو

(۱۰۰) اضلاع مثلث کے طا اور طب اور طس سلسلہ حسابیہ مین ہین ثابت کرو

رقبہ = $\frac{\text{طب}}{۴}$ $\sqrt{۳ (۳\text{طب} - ۲\text{طا}) (۲\text{طا} - \text{طب})}$

جوابات

باب اول (۱) ۶۰° (۲) ۶۵° (۳) ۷° (۴) ۱۰°۵۹′۲۵″ (۵) ۳۰°۷′۷۵″ (۶) ۷°۵۹′۲۵″ (۷) ۲۷° (۸) ۳° ۹′ (۹) ۹° ۲۲′ ۵۷″ (۱۰) ۱۸° ۱۴′ ۵۱″ (۱۱) ۷° ۵۸′ ۳″ (۱۲) ۶۸°۵۸′۶۸″ (۱۳) ۸° ۹′ (۱۴) ۵۶° ۱۵′ ۵۶°۲۵′ (۱۵) ۵۷°۱۹′۱۵″ (۱۶) ۷°۵۶′۸۹″ (۱۷) ۶۶° ۹۰′ ۴۳°۲۵′۲۸″۱۵‴ (۱۸) ۳۶° ۳۰′ (۱۹) ۸° ۹′ (۲۰) ۵۴° ۵° ۳۶′ (۲۱) ۵۴′ (۲۲) ۳۱۴′۳۵ (۲۳) ۱۱۱ $\frac{1}{9}$ (۲۴) ۱۸۵ $\frac{5}{27}$ (۲۵) ۳۴′ کو ۲۷ سے

باب دوم (۱) جم ا $= \frac{5}{13}$ (۲) جم ا $= \frac{4}{41}$ (۳) جب ا $= \frac{24}{25}$ (۴) جب ا $= \frac{11}{61}$ (۵) جب ا $= \frac{4}{5}$ (۶) جم ا $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۷) جم ا $= \frac{م^2-1}{م^2+1}$ (۸) جب ا $= \frac{م ن}{م^2+ن^2}$

باب سوم (۱) ۳۰° (۲) ۶۰° (۳) ۶۰° (۴) ۶۰° (۵) ۴۵° یا ۶۰° (۶) ۱۵° یا ۷۵° (۷) ا $= 45°$ ب $= 30°$

(۸) ا $= 60°$ ب $= 45°$ (۹) ا $= 45°$ ب $= 15°$

(۱۰) ا $= 18°$ ب $= 42°$ (۱۱) ا $= 10°$ ب $= 5°$

(۱۲) ا $= 45°$ ب $= 45°$ (۱۳) ا $= 15°$ ب $= 30°$ س $= 15°$

(۱۴) جب ۲۲ $\frac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$ جم ۲۲ $\frac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$

مس ۲۲ $\frac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$ اور اسکا اختصار $\sqrt{2}-1$ ہو سکتا ہے

(۱۵) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ اور اسکی تحویل $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ کی طرف ہو سکتی ہے

(۱۶) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ اور اسکی تحویل اختصار کے ساتھ $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$ ہے

باب چہارم (۱) جب ا $= \frac{21}{29}$ جم ا $= \frac{20}{29}$

(۲) جم ا $= \frac{۲(ن+۲)}{ن۲+۲ن م+م۲}$ (۳) جب ا $= \frac{ع م + ق ن}{\sqrt{(ع۲+ق۲)}\sqrt{(م۲+ن۲)}}$

جم ا $= \frac{ع ن - ق م}{\sqrt{(ع۲+ق۲)}\sqrt{(م۲+ن۲)}}$ (۴) ا $= ۱۵°$ یا $۷۵°$

(۵) ا $= ۳۰°$ یا $۶۰°$ ب $= ۶۰°$ یا $۳۰°$

(۶) ا $= ۱۵°$ یا $۷۵°$ ب $= ۷۵°$ یا $۱۵°$ (۷) ا $= ۱۵°$ یا $۷۵°$

ب $= ۷۵°$ یا $۱۵°$ (۸) $\frac{۱۰۰}{۳\sqrt{۳}}$ فیٹ (۹) ۵۰ $(۳ - \sqrt{۳})$ گز

(۱۰) ۱۰ $(۳ + ۲\sqrt{۳})$ فیٹ (۱۱) $۳\sqrt{۳}$ فیٹ (۱۲) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$

(۱۳) $\frac{۹}{۴}$ (۱۴) ۲۷ فیٹ (۱۵) ا یا ۲ کے ارتفاع کو ۲ ھہ فرض کریں

تو فاصلہ مشاہدہ کے مقام سے ھہ یا ۲ ھہ دریافت ہوگا

(۱۶) $(ا + ب)(۲ - \sqrt{۳})$ (۱۷) ۱۰۰ فیٹ

(۱۸) $\frac{\text{ھہ}}{\text{ھہ} + ۷۰} = \frac{۱}{۳}$ ارتفاع ھہ $= ۳۵ + ۵ = ۴۰$

باب پنجم

(۱) ۸ (۲) $\frac{۵}{۴}$ (۳) $\frac{۵}{۲}$ (۴) $\frac{۴}{۳}$ (۵) $\frac{۳}{۲}$ (۶) $\frac{۷}{۵}$

(۷) ۲۶۲۵۵۲۱۶ (۸) ۱۵۱۳۸۷۷۱۶ (۹) ۳۹۵۳۴۴۵۳۶۲

(۱۰) ۵۷۵۲۸۱۱۶۳ (۱۱) ۲۳۹۳۹۲۳۶۷۳ (۱۲) ۴۷۸۱۷۴۶۴۷۶۳

(۱۳) ۳۹۴۸۳۵۶۵۰۶۳ (۱۴) ۳۳۲۶۷۵۸۶۳۶۳ (۱۵) ۳۱۳۴۰۷۵۸۶۳

(۱۶) ۱۳۱۲۷۷۴۶۳۶۳ (۱۷) ۶۱۶۲۴۰۷۶۳۶۳ (۱۸) ۶۰۰۶۵۰۳۶۳۶

(۱۹) ۶۰۴۰۳۹۹۷۱۶۳ (۲۰) ۶۶۴۰۴۶۲۶۳۶۳ (۲۱) ۱۴۵۵۵۶۴۳۶۳

(۲۲) ۵۲۵۱۱۵۰۶۳ (۲۳) ۵۶۴۰۸۸۰۴۶۰ (۲۴) ۳۸۶۳۹۲۶۰۶۳

(۲۵) ۵۲۵۱۸۲۵۳۶۳ (۲۶) ۰ و ۳ و ۵ و ۴۰۸۸۰۴۱۵۱۶۳

(۲۷) ۴۵۸۵۱۴۰۷۶۳ (۲۸) $-\frac{۴}{۳}$ (۲۹) ۶۰۱۳۸۹۴۶۳ مشاہدہ

(۳۰) $\frac{۱۴ \times ۱۵ \times ۱۵}{۱۰} = ۳۱۵$ $\frac{۲ - \text{لوگ}۲}{۲ - ۲\text{ لوگ}۲} = ۱۶۱۵۳۳۸۳$

(۳۱) $\frac{۲-۲\cot^۳ ۲}{۳} = ۸۷۱۴۶۰۱۴۸$

(۳۲) $\frac{۳\cot ۳+۲\cot ۲-۲}{۳} = ۱۳۶۷۵۶۹۸$

باب ششم (۱) ۰۰۵۹۰۸۵۲۵ (۲) ۳۴۳۰۸۶۴۱۶۵ (۳) ۱۸۱۳۵۶۶۸۲۵

(۴) ۷۵۵۳۴۵۲۱۵ (۵) ۲۱۸۵۵۷۵۲ (۶) ۹۷۱۵۱۹۷۵۶

(۷) ۸۴۱۶۵۰۱۴۸ (۸) ۶۷۴۱۴۵۰۷۵ (۹) ۲

(۱۰) ۳۳۵۶۵۲ (۱۱) ۶۶۴۲۶۴۷۵۹ (۱۲) ۸۸۳۹۹۲۷۵۹

(۱۳) ۴۹۸۴۱۸۲۵۹ (۱۴) ۲۶۴۳۶۹۷۵۹ (۱۵) ۹۰۶۴۳۶۴۵۹

(۱۶) ۱۸۴۵۱۷۵۹ (۱۷) ۱۱۰۰۵۱۶۵۰۱ (۱۸) ۷۷۸۱۶۸۲۵۰۱

(۱۹) ۴۷۱۷۱۷۵۰۱۰۹ (۲۰) ۹۵۴۵۷۰۷۱۶° ۱۹′ ۲۶″

(۲۱) ۶° ۵۳′ ۸″ (۲۲) ۲۲° ۲۸′ ۱۶″

(۲۳) ۸۰° ۵۲′ ۱۵″ (۲۴) ۵۰۳۷۵۲۱۴۳

باب ہفتم (۱) طا = ۵۷ طب = ۵۷ $\sqrt{۳}$ (۲) ا = ۳۰ طب = ۰۰۱ $\sqrt{۲}$

(۳) طب = ۸۰ ($\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$) طس = ۸۰ ($\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$)

(۴) ا = ۴۵° طس = ۵۷ $\sqrt{۲}$ (۵) طا = ۴۰۸۲۵۰۷۹ طب = ۴۲۳۶۷۰۵۳

(۶) ا = ۳۴° ۳۶′ ۱۰″ طب = ۲۱۰

(۷) طب = ۱۲۵ ($\sqrt{۲}-۱$) طس = ۱۲۵ $\sqrt{(۴-۲\sqrt{۲})}$

(۸) طس = ۵ ب = ۵۳° ۷′ ۴۸″ (۹) طا = ۴۸۱۵۷۸ طب = ۷۴۴۷۶۹۱

(۱۰) ا = ۵۳° ۴۹′ ۴۴″ طب = ۶۶۹۶۲۱۳

(۱۱) طب = ۶۶۷۸۶۹ طس = ۴۲۶۸۱۳ (۱۲) ا = ۳۶° ۴۹′ ۳۶″ طس = ۵۰۲۶۳۹

باب ہشتم (۱) طب = ۸۴ $\sqrt{۲}$ طا = ۴۲ ($\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$)

(۲) ب = ۳۰° طس = ۴۸ $\sqrt{۳}$

(۳) ب = ۴۵° یا ۱۳۵° طس = $\frac{۲}{۳}$ ($\sqrt{۶}+۳\sqrt{۲}$) $\sqrt{۲}$ ($\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$)

(۴) ب = ۹۰° = ۹۰° (۵) ب = ۳۰° (۶) ا = ۹۰° ب = ۶۰°

(۷) طا = ۸۷ ۰ ۷ ۱۰ طب = ۸۳۶ ۵ ۹۶ ۷ طس = ۷۶ ۵ ۷ ۳۲۶

(۹) ب = ۵۵° ۳۸ ۲۳″ یا ۱۲۴° ۲۱ ۴۶″ طس = ۳۴۲ ۶۵ ۳ یا ۹۳۸ ۷ ۸

(۱۰) ب = ۵۵° ۹ ۸″ طس = ۹ ۰ ۷ ۵۳۷

(۱۱) ب = ۴۰° ۶۶ ۳۹″ طس = ۳۵ ۷ ۱۰۶

(۱۲) ا = ۳۸° ۲۵ ۲۰″ ب = ۷° ۱۴۱ ۲۴″

باب نہم (۱) ۱۰۸ و ۱۲۰ (۲) ۷۵ فرانسیسی درجے (۳) ۳۰°

(۴) مس ½ ا = ⅕ (۶) جم ا = ½ (۲ − √۳) جم ۲ ا = − ۱/√۳

(۸) جم ۲ ا = − ۴/۵ جم ا = ۱/√۱۰

(۱۰) جب² ا = ۴ (۱ − ن²) / (۴ − ن²) جب² ب = (۱ − ن²) / (۴ − ن²)

(۱۱) جب² ا = (۴ − ن²) / (۱ − ن²) جب² ب = ۴ (۱ − ن²) / (۴ − ن²) اور نیز

جب ا = ۰ اور جب ب = ۰ (۱۴) جب ا = ۴/۱۴۱

(۱۶) جب² لا = (م ن − م ب − ن ا) / ((م − ن)(ا − ب)) جب² ء = (م − ا − ب) / (م − ن)

(۲۱) ب = ۵۰° ۷۶ ۵۰″ (۲۲) ا = ۳۸° ۵۱ ۸″

(۲۴) ± [طا − √(½ − طا²)]

باب دہم (۱) ۳۰° یا ۱۸۰° (۳) ب = ۴۵ (۴) ب = ۹۰ طس = طا ۳

(۵) ۱۲۰° (۶) ۹۰ (۷) ۱۲۰° (۸) ۱۴ و ۱۲ (۱۰) ۷ ۵۸۲ ۵ ۷ ۴

(۱۴) ± [ع ق − √((۱ − ع²)(۱ − ق²))] (۱۷) ۳۰° یا ۱۵۰°

(۱۹) جب ا = م جب (صد − سہ) / (صد − سہ جب²) (۲۰) مس لا اور مس ء کی قیمتوں کو تیسری مساوات میں اول دو مساواتوں سے نکال کر مندرج کرو مثال باب نہم ۱۶ دیکھو اور حاصل کا اختصار کرو

باب یازدہم (۱) ۱۹ل ۵۰ر۱۷ (۲) ۲۲۶۳۶ ۲۳ (۳) ۱۲۳۹۵۶۳۲

(۴) ب = ۱۴۹° ۲۰′ ۳۱″ س = ۳۹° ۲۴′ ۲۹″

(۵) ب = ۱۱۶° ۳۳′ ۵۴″ س = ۳۶° ۳۳′ ۵۴″

(۶) ب = ۶۷° ۴۴′ ۵۵″ س = ۵۳° ۵۹′ ۵″

(۷) ب = ۱۰۱° ۲۹′ ۹″ س = ۳۶° ۰′ ۵۱″

(۸) ب = ۸۶° ۳۴′ ۲۷″ س = ۵۰° ۱۵′ ۳۳″

(۹) ب = ۸۶° ۲′ ۲۴″ س = ۴° ۵۴′ ۱۹٫۵۲″

(۱۰) ب = ۱۸° ۲′ ۱۶″ س = ۵۰° ۳۷′ ۴۴″ طا = ۴۷۳۴۸۵

(۱۱) ب = ۳۳° ۸′ ۳۳″ س = ۳۲° ۱۷′ ۲۷″

(۱۲) ب = ۳۵° ۱۵′ ۵۲″ س = ۸۴° ۴۴′ ۸″ طس = ۱۳۷۵۹۷۹۶

(۱۳) ب = ۱۷° ۶′ ۴۵″ س = ۱۳۳° ۲′ ۱۵″

(۱۴) ب = ۱۵° ۱۴′ ۲۰″ س = ۸۵° ۶′ ۳۴″ لوگ طس = ۹۷۰۲۷۱۸۷۶

(۱۵) ب = ۱۴° ۱۹′ ۲۰″ یا ۱۳۸° ۴۰′ ۴۰″

س = ۵۰° ۸۰′ ۴۰″ یا ۸° ۳۷′ ۳۴″

(۱۶) ب = ۳۰° یا ۱۵۰° (۱۷) ا = ۳۲° ۷′ ۵۸″

(۱۸) ۳۴° ۲′ ۵۶″ ۵۳° ۴۶′ ۴۴″ ۳۸° ۱۰′ ۲۰″

(۱۹) ۵۶° ۱۵′ ۴″ ۵۹° ۵۱′ ۱۰″ ۳۶° ۵۳′ ۴۶″

(۲۰) ۲۰° ۵۳′ ۳۶۰″ ۶۰° ۹۴′ ۶″

باب دوازدہم (۱) ۲۷ فیٹ (۲) $\frac{۱+۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}$ میل

(۳) ۵۰۰ $(\sqrt{۳}+۱)$ گز (۴) ۱۸ $\sqrt{۳}$ میل

(۵) ۹۰۸۴۳ گز (۶) ۱۵۵ فیٹ

(۷) ۷۰۶۳۰ کز ۲۲۸ (۸) ۱۵۰۰ کز ۲۸۰ و ۱۵۰۰ کز ۶۵۷ فیٹ

(۹) ۸۵۸ کز ۲۱۲ و ۱۸۶ کز ۶۱۸ فیٹ (۱۰) ۵۰۲ کز ۲۳۸ و ۵۰۴ کز ۸۰۴ گز

(۱۱) ق ۲۱° ۴۵′ ح (۱۲) ۴ جب ۶۷½° — ۴ جب ۲۲½°

(۱۳) فاصلہ $\frac{\text{۵ جب ۴۵°}}{\text{جب ۲۲½°}}$ اور اول جہاز کا مقام اضافی ق دوسرے جہاز سے

(۱۴) ۴۰ $\sqrt{۳۳}$ فیٹ فی منٹ

(۱۵) ارتفاع ۸۰ فیٹ اور فاصلہ ۴۸۰۰ $\sqrt{۳۳}$ فیٹ

(۱۶) اگر ھ ارتفاع ہو تو ۳ (۲۰۰)² = ھ² (۴ — $\sqrt{۶}$)

(۱۸) ی ف اور زاویوں کے معلوم ہونے سے س ی ف کو حل کرو اور

پھر ای س اور ب ف س کو حل کرو

(۲۱) ۱۶۲ کز ۹۵ (۲۲) ۳۹۶ کز ۱۵۱۴ و ۴۶۷ کز ۴۱۶۳

(۲۳) ۷ کز ۵۰۹ (۲۴) ۵۸ کز ۲۱۰۹

باب سیزدہم (۱) ۲۷° (۲) ۴۲° ۳۶′ (۸) سہ = ۴۵° صہ = ۳۰°

(۱۲) ۱۰ (۱ — $\sqrt{۳}$) ۱۰ $\sqrt{(۴ - \sqrt{۳})}$

(۱۳) اس = $\frac{\text{ھہ جم صہ جم سہ}}{\text{جب (سہ — صہ)}}$ س د = $\frac{\text{ھہ جم صہ جب سہ}}{\text{جب (سہ — صہ)}}$

(۱۴) $\frac{\text{س}}{۲}$ = ۴۱° ۴۴′ ۳۵″ ب = $\frac{\text{س}}{۲}$ ۹ شال ۱۰ ب کی دیکھو

(۱۵) $\frac{\text{س}}{۲}$ = ۷° ۱۸′ ۴۱″ ب = $\frac{\text{س}}{۲}$ (۱۶) فرض کرو کہ اس اور ب د

نقطہ ز پر ملتے ہیں تو مثلث ا ب اور س ز د متشابہ ہیں

(۱۸) جب ا = $\frac{\text{طس (طب — طس)}}{\text{طا (طا + طب — ۲ طس)}}$ جب ب = $\frac{\text{طس (طا — طس)}}{\text{طب (طا + طب — ۲ طس)}}$

باب چہاردہم (۳) $\frac{\text{طا}}{۲\sqrt{۳}}$ (۴) $\frac{\text{طا}}{۳\sqrt{۳}}$ (۵) ص = ۲۳۱۰ اور

اور ق = ۴۲½°

(۶) ۶×(۸۱)² (۷) ۲۴۵۶۸۴۰ (۸) ۳۸۲۰۹۴

(۱۰) تینوں نقطوں پر جو دائرہ گذرتا ہے اوسکا نصف قطر $\frac{۴۱}{۸}\times ۱۳$ ہے اور مینار اس دائرہ کے مرکز پر ہے

باب پانزدہم

(۱) ۶۰° و ۱۲۰° و ۳۶۰° و ۳۰۰°

(۳) ۲۲ $\frac{۱}{۲}$° و ۱۱۲ $\frac{۱}{۲}$° و ۲۰۲ $\frac{۱}{۲}$° و ۲۹۲ $\frac{۱}{۲}$°

(۷) ۹۰° و ۲۱۰° و ۳۳۰° (۸) ۱۲۰° و ۱۸۰° و ۲۴۰°

(۹) ۱۵° و ۷۵° و ۱۹۵° و ۲۵۵° (۱۰) ۶۷ $\frac{۱}{۲}$° و ۱۵۷ $\frac{۱}{۲}$° و ۲۴۷ $\frac{۱}{۲}$° و ۳۳۷ $\frac{۱}{۲}$°

(۱۱) ۳۰° و ۱۵۰° و ۹۸۰° (۱۲) ۶۰° و ۹۰° و ۲۷۰° و ۳۰۰°

باب شانزدہم

(۷) مس۲ ا + مم۲ ا = (مس ا − مم ا)² + ۲ (۸) ۴

(۱) ۱۲۱۵۰ + ۴۲۵۰ √۳

باب ہفتدہم

(۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(۵) −۱ (۶) $\frac{۱}{۲}$ (۷) ۲ − √۳ (۸) − (۲ − √۳)

(۹) √۳ (۱۰) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ (۱۱) − √۳ (۱۲) ۱

باب ہیزدہم

(۷) ۱ = (۴ن + ۱) ۹۰° (۸) ۱۲ − ۹۰° = ن × ۳۶۰° ± ۳۴° ۱

باب نوزدہم

(۱) −۱ (۲) $\frac{۳\sqrt{۵} + ۱۵\sqrt{۳}}{۱۲۵}$

(۴) $\frac{(۱-ط ص)(ط+ص)^۲}{(۱+ص)^۲}$ ، $\frac{۲(ط+\hat{ص})}{(۱+ط)(۱+ص)^۲}$ (۶) $\frac{۱}{۲}$ −

(۷) $\frac{۳}{۵}$ (۹) $\frac{ع^۲(۲-ح^۲)}{ق^۲-ع^۲-ح^۲}$ باع ح ق $\frac{(۱-۲ح)}{ق^۲-ع^۲-ح^۲}$ (۱۱) ۴۵°

باب بستم

۲۷ کو ۳۶ اور ۲۸ کو ۲۶ سے زاویون کو اوکی تمامی مین تبدیل کرنے سے ستنبط کرسکتے ہین اور ۲۹ کو ۲۸ سے اور ۳۰ کو ۲۶ سے س کو ۹۰° − س سے تبدیل کرکے نکال سکتے ہین

(۳۶) لد = ن × ۱۸۰° یا لد = ن × ۱۸۰° + (−۱)^ن ۳۰°

(۳۷) ۲لد = لد + ن × ۱۸۰°

(۳۸) ۲لد = (۲ن+۱) ۹۰ یا ۷لد = ن × ۱۸۰° + (−۱)^ن ۳۰°

(۳۹) ۸لد = ن × ۱۸۰° یا ۸لد = ن × ۳۶۰° ± ۶۰°

(۴۰) (ط+ص+۲س) لد = ن × ۳۶۰° ± (ط+ص) لد (۴۱) $\frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۰}$

(۴۵) ۱ ± $\sqrt{\frac{۲ص}{۱+ص}}$

باب بست و یکم (۱) $\sqrt{(۲+\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}})}$ (۳) $\frac{۱۳+۳\sqrt{۱۱}}{۲۰}$

باب بست و دوم (۷) $\frac{۳۶۰}{۴}$ فیٹ $\frac{۵۴}{۱۰}$ فیٹ (۸) $\frac{۱۲۶}{۴}$ گز

(۹) $\frac{۱۰}{۳}$ فیٹ (۱۰) ۵۰° و ۴۰° (۱۱) ۴۰° و ۶۰° و ۸۰°

(۱۲) (م − $\frac{۹۰}{۱۸۰}$ ن) گز (۱۳) $\frac{۵۰}{۲۴}$. $\frac{۱۶۰ ا + ب}{۱۰۰ ا + ب}$

(۱۵) ۱ $\frac{۹۰}{۱۰}$ (۱۶) $\frac{۱۰ط + ۹ص}{۹۰۰}$ (۱۹) جب ۲ بر = جب سہ − کہ سہ

باب بست و سوم (۱) $\frac{ط^۲}{۴}$ (۳√۳ − $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$) اسمیں ط ایک ضلع مثلث کا ہے

(۲) چھوٹا قطعہ = $\frac{کہ ن^۲}{۶}$ − $\frac{ن^۲ ۳\sqrt{۳}}{۴}$ (ن

(۶) بر = جم بر اسیواسطے ۱ − $\frac{۳}{۴}$ کم بر سے ہے

(۸) ۴۲° ۵۰′ ۲۲″ ۱۷′ ۹″ ۳۸‴

(۹) ۱۲° ۵′ ۴۵″ اور ۸۴° ۵۴′ ۱۵″ (۱۰) ۳۸° ۵۸′ ۲۸″

(۱۱) فرض کرو بلند ارتفاع چھوٹے کا ہی تو دوسرا ۲لد ہوگا اور ۴لد^۲ = (۳ص − ۲ط)(۲ط − ص)

(۱۲) ۲۳ ۱۴ ۱۷ میل

باب بست و چہارم (۴) ن × ۱۸۰° + (−۱)^ن ۹۰° مس [ن × ۱۸۰° + (−۱)^ن ۴۵°]

سوالات متفرقات کے جواب

(۱) ۵۴° و ۵۴° و ۲۷° یا ۹۶° و ۹۶° و ۴۸° (۲) ۱۰°

(۳) جب لہ = $\frac{۴}{۵}$ وجم لہ = $\frac{۳}{۵}$ (۵) $\frac{۱}{۲}$ (۶) ۲ (۸) ۳۷° $\frac{۱}{۲}$ و ۹۰° و ۸۲° $\frac{۱}{۲}$

(۱۳) ط (۱۴) ۵۵° ۴۶′ ۱۶″

(۱۸) ب = ۴۵° ۵۵′ ۱۰۵۶″ س = ۱۶۸° ۲۷′ ۲۵۶۴″

(۲۶) (۲ − $۲\sqrt{h}$) س س سہ

(۲۷) (س سَ − ط طَ)^۲ = (ط صَ + سَ ص)^۲ + (طَ ص + س صَ)^۲

(۳۱) ۱۰۶ر۱ (۳۲) لہ = (۳ ن + ۱) ۳۰°

(۳۳) لہ = ن × ۱۸۰° ± ۳۰°

(۳۵) ط^۲ + ص^۲ = ھ^۲ + ک^۲ (۳۹) ۱۲۰° (۴۷) ۳ ۱۴۶۹۵۳

(۵۰) ۲۵ ۲۶ ۴۹″ و ۲۵ ۲۶ ۲۷″ (۵۲) ۵۴ ۰۵ ۱۰۵۶ و ۱۳ ۰۹ ۰۶ ۱۷ ۱۲

(۵۳) $۳\sqrt{h}$ و ۱۵۰ (۵۴) ۱۷۲۵۶۴۳۶ (۵۵) ۸ (۱ + $۳\sqrt{h}$) (۵۸) ۱۲۵۸۵

(۵۹) لہ = ن × ۹۰° (۶۰) ± ن (۶۲) ۹۵° ۳۷′ ۱۴″ ۹° ۲۲′ ۱۹″

(۶۳) ا = ۱۵° ط = $۳\sqrt{h}$ (۱ − $۳\sqrt{h}$) (۶۸) لہ − ۴۵° = ن × ۳۶۰° ± ۴۵°

(۶۹) ۱۶ر۷° (۷۱) $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{ف}{۹}$ و $\frac{ک}{۱۸۰۰}$ (۷۲) ۹۰° و ۲° (۷۳) ۱° و ۴۷′ و ۲۶″ (۷۴) ا = ۶۰° ۲۰′ ۱۲″ ب = ۱۳° ۳۹′ ۴۸″

(۷۸) لہ = ن × ۱۸۰° + ۴۵° یا لہ − ۴۵° = ن × ۳۶۰° ± ۱۳۵°

(۷۹) ۱۵۴ و ۴۰ ۹۲ (۸۱) ۳۰° و ۹۰° و ۹۰° و ۳۳ $\frac{۱}{۳}$ ف و ۳۶ $\frac{۲}{۳}$ ف و ۱۰۰ ف

(۸۲) ر = ن × ۱۸۰° + ۴۵° یا ن × ۱۸۰° + ۳۰°

(۸۳) ب = ۴۹° ۱۶′ ۵۶″ س = ۱۰° ۳۴′ ۵۵″

(۸۴) ب = ۱۱۸° ۰′ ۵۵″ س = ۳۱° ۵۹′ ۵″

(۸۵) ۰٫۵۰۸۱۹۴۳۶۸۷۵۰۵۱۰۵۱۳۰۷۲۶۲۹۳۹۲۶۵۴۳

(۸۹) جب لہ = ۰ یا جم لہ = $\frac{1}{2}$ (۹۱) مسح بر = ۳ یا $\frac{1}{3}$

(۹۲) ا = ۴۵° ب = ۳۰° س = ۱۵° (۹۴) ۱۰°، ۵۰° و ۱۳۰° و ۱۷۰°

(۹۶) جب لہ = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۹۸) ب = ۹۵° ۴۹′ ۳″ س = ۲۴° ۱۰′ ۵۷″

(۹۹) $\sqrt{(۲س هـ م - س^۲ + نصف)}$ — هـ

تمام شد

۷ ستمبر ۱۹۴۶ء